ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ, ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Γκαμπρανά Ευαγγελία
Α.Μ.: 201027

Επιβλέπων καθηγητής
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

ΑΘΗΝΑ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	…….
2) Πόταρη Δέσποινα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	……..…
3) Ψυχάρης Γεώργιος	Λέκτορας	……...…

Στην οικογένεια μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, οφείλω τις θερμές μου ευχαριστίες, για την καθοδήγηση και τις εύστοχες παρατηρήσεις του, σε όλα τα στάδια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τον ευχαριστώ, επίσης, για τις πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές που μου παρείχε, καθώς και για τη συνεχή υποστήριξή του.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στον κ. Γεώργιο Ψυχάρη για τη συνεργασία και τις ιδέες του, τις υποδείξεις και το αμείωτο ενδιαφέρον του, τη συμβολή του στην εργασία μου με άρθρα και μεταφράσεις όρων, όπως επίσης, για τα σχόλια του κατά την επεξεργασία των κειμένων της.

Ευχαριστώ την κ. Δέσποινα Πόταρη, η οποία με τίμησε με τη συμμετοχή της στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Θα ήθελα, ακόμη, να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον κ. Ηλία Ανδριανό για τη συνεργασία του, όπως και στους μαθητές τους συμμετέχοντες στην παρούσα διερευνητική διαδικασία.

Θα ήταν παράλειψη μου να μην ευχαριστήσω την κ. Ηλιόχαρη Μαντουβάλου για τις φιλολογικές της παρατηρήσεις.

Ευχαριστώ τους φίλους μου Νίκο, Νάνσυ, Βασιλική, Μαρία για τις ιδέες και τους προβληματισμούς που μοιραστήκαμε κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που στηρίζει τις προσπάθειές μου, καθ όλη τη διάρκεια των μαθητικών, αλλά και ακαδημαϊκών μου σπουδών.

Γκαμπρανά Ε. Ευαγγελία
Αθήνα, 2013

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη - Abstract **8**

Εισαγωγή **10**

Κεφάλαιο 1ο: Μετασχηματισμοί Συναρτήσεων **13**

1.1 Η έννοια στο τρέχον πρόγραμμα σπουδών 13

1.2 Η έννοια στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών 17

1.2.1 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί 17

1.2.2 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων 18

1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση 19

1.3.1 Μελέτες που σχετίζονται με μετασχηματισμούς συναρτήσεων 19

1.4 Γνωστικά – Διδακτικά προβλήματα 22

1.4.1 Εισαγωγή 22

1.4.2 Γνωστικά – Διδακτικά προβλήματα στη βιβλιογραφία 25

Κεφάλαιο 2ο: Θεωρητικό πλαίσιο **30**

2.1 Θεωρίες κατασκευής της γνώσης 30

2.2 Μάθηση σε αλληλοσυνδεόμενα μαθησιακά περιβάλλοντα 30

2.3 Θεωρητικό υπόβαθρο 32

2.3.1 Εισαγωγή 32

2.3.2 Κατηγοριοποίηση κατά SOLO 32

2.3.2.1 Διάκριση πλαισίων εννοιολογικής ανάπτυξης 32

2.3.2.2 Η κατηγοριοποίηση κατά SOLO 33

2.3.2.3 Σύνδεση ταξινόμησης με την έννοια των μετασχηματισμών 37

2.3.2.4 Σύνδεση της κατηγοριοποίησης με σχετικές θεωρίες 39

2.3.3 Αφαίρεση: τρόποι που την αντιμετωπίζουν οι μαθητές 42

2.3.3.1 Εισαγωγή 42

2.3.3.2 Η αφαίρεση ως επίπεδο αντίληψης της έννοιας από το άτομο 43

2.3.3.3 Η αφαίρεση ως συνέπεια της διττής φύσης των μαθηματικών εννοιών 45

2.3.3.4 Η αφαίρεση ως βαθμός πολυπλοκότητας της έννοιας 46

Κεφάλαιο 3ο: Μεθοδολογία 48
3.1 Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα 48
3.2 Επιλογή της ερευνητικής μεθόδου 49
3.3 Πορεία παρέμβασης 49
3.4 Το πλαίσιο της έρευνας 50
3.4.1 Σχολείο – χώρος και χρόνος 50
3.4.2 Συμμετέχοντες 51
3.4.2.1 Διαδικασία επιλογής 51
3.4.2.2 Ομοιογένεια 52
3.4.2.3 Μαθήματα μαθηματικών που είχαν παρακολουθήσει η παρακολουθούν 52
3.4.2.4 Προϋπάρχουσα γνώση 53
3.4.3 Η ερευνήτρια 56
3.5 Το υπολογιστικό περιβάλλον 57
3.5.1 Το περιβάλλον του *Geogebra* 57
3.6 Η πιλοτική έρευνα 58
3.7 Οι δραστηριότητες 59
3.7.1 Συνάντηση 1η: Εξοικείωση με το υπολογιστικό περιβάλλον 59
3.7.2 Συνάντηση 2η: Προϋπάρχουσα γνώση μέσα από ένα νέο πρίσμα ... 61
3.7.3 Συνάντηση 3η: Εκτίμηση βαθμού κατανόησης της έννοιας 67
3.8 Συλλογή δεδομένων 70
3.8.1 Μέσα συλλογής δεδομένων 70
3.8.2 Ανάλυση δεδομένων 72
Κεφάλαιο 4ο: Αποτελέσματα 75
4.1 Εισαγωγή 75
4.2 Συνάντηση 1η: Εξοικείωση με το υπολογιστικό περιβάλλον 76
4.2.1 Εισαγωγή 76
4.2.2 Η μεταλλαγή του μέσου σε υποδομή 76
4.2.3 Αξιοποίηση της υποδομής στην υπάρχουσα γνώση 78
4.2.4 Γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα 82
4.3 Συνάντηση 2η: Προϋπάρχουσα γνώση μέσα από ένα νέο πρίσμα 83
4.3.1 Εισαγωγή 83
4.3.2 Εισαγωγή επίσημης σημειογραφίας 84

4.3.3 Προϋπάρχουσα γνώση υπό νέο πρίσμα 85
4.3.4 Γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα 91
4.4 Συνάντηση 3η: Εκτίμηση βαθμού κατανόησης της έννοιας 92
4.4.1 Εισαγωγή 92
4.4.2 Προσδιορισμός μετασχηματισμών 93
4.4.3 Κατασκευή γραφήματος μετασχηματισμένης συνάρτησης 96
4.4.4 Χρήση μετασχηματισμένων συναρτήσεων σε άλλες ενέργειες και διαδικασίες 99
4.4.5 Γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα 106
Κεφάλαιο 5ο: Συμπεράσματα 108
5.1 Στάδια εννοιολογικής ανάπτυξης 108
5.2 Θέματα προβληματισμού και κατανόησης 110
Βιβλιογραφία 114
Παράρτημα Α 120
Παράρτημα Β 121
Παράρτημα Γ 123
Παράρτημα Δ 127

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτή η μελέτη στοχεύει να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση των νοημάτων που κατασκευάζουν και των στρατηγικών που υιοθετούν οι μαθητές, όταν εργάζονται σε αλληλοσυνδεόμενα αναπαραστασιακά περιβάλλοντα. Επιδιώκεται η ανάδειξη των διαδικασιών κατανόησης των μετασχηματισμών συναρτήσεων από μαθητές που εργάζονται σε υπολογιστικά περιβάλλοντα που προσφέρουν πολλαπλές και διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και των μετασχηματισμών τους. Τα αποτελέσματα αναλύθηκαν με βάση την κατηγοριοποίηση σύμφωνα με τη ″Δομή των παρατηρούμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων″ (SOLO Taxonomy, Biggs & Collis, 1991) και του θεωρητικού πλαισίου που προτάθηκε από την Hazzan (1999), σύμφωνα με το οποίο οι απαντήσεις των μαθητών είναι δυνατόν να ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα μείωσης του επιπέδου αφαίρεσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν να υποστηρίζουν την υπόθεση ότι, οι μαθητές είναι ικανοί να αλληλεπιδράσουν επιτυχώς με τους μετασχηματισμούς και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις τους, μόνο στα σημεία που φαίνεται ότι έχουν εσωτερικεύσει τη ′διαδικασία εφαρμογής ενός μετασχηματισμού σε μία συνάρτηση′. Διαφορετικά, σε πολλές περιπτώσεις, ο νοητικός μηχανισμός μείωσης της αφαίρεσης, βοηθά τους μαθητές να αντεπεξέλθουν στα ζητήματα που παρουσιάζονται.

Λέξεις κλειδιά: συνάρτηση, μετασχηματισμός, μετατοπίσεις, κατηγοριοποίηση κατά SOLO, μείωση αφαίρεσης, πολλαπλές αναπαραστάσεις

ABSTRACT

This study intends to contribute to a better understanding of meanings constructed and strategies adopted by students, while working on interrelated multi-representational environments. It seeks to identify students′ understanding of functions′ transformations, while using digital tools offering interconnected representations of functions and their transformations. Results were analyzed using SOLO Taxonomy (″Structure of the Observed Learning Outcomes″, Biggs & Collis, 1991) and the theoretical framework, proposed by Hazzan, 1999, according to which, students′ responses can be interpreted as a result of reducing the level of abstraction. Results appear to support the assumption that students are able to interact confidently with transformations and theirs multiple representations, only when they seem to have interiorized the processes involved in transformations. Otherwise, as it turns out, in many cases, the mental mechanism of reduction abstraction helps students to cope with problems presented to them.

Keywords: function, transformation, translation, SOLO model, reducing abstraction, multiple representations

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μαθηματικές έννοιες και γενικότερα οι μαθηματικές διαδικασίες είναι αφηρημένες και, αρκετές φορές, ιδιαίτερα πολύπλοκες. Αυτό έχει ως επακόλουθο την υποβάθμιση της διδασκαλίας σε μία διδασκαλία διαδικασιών με καθαρά τυπικό τρόπο. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών μαθαίνει να εκτελεί έναν αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών, ώστε να μπορεί να δώσει απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων. Μία διδασκαλία, όμως, που περιέχει ως βασικό συστατικό στοιχείο τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να συντελέσει στην καλύτερη εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών από τους μαθητές. Με στόχο τη βαθύτερη κατανόηση των ιδεών που υπάρχουν πίσω από την τυπική περιγραφή και κατ΄ επέκταση, την ουσιαστική ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, πρέπει η διδασκαλία να συνδυάζει τον ενσαρκωμένο και το διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης (Tall, 2004).

Συνεπώς, τα αναπαραστασιακά συστήματα είναι το κλειδί για εννοιολογική μάθηση και καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τι είναι αυτό που μαθαίνεται. Η ικανότητα προσδιορισμού και αναπαράστασης της ίδιας έννοιας σε διαφορετικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα επιτρέπει στα παιδιά να δουν πλούσιες σχέσεις και να αναπτύξουν πιο ουσιώδη κατανόηση (Even, 1998). Με άλλα λόγια, στοιχείο αναγκαίο ώστε η μάθηση να είναι εννοιολογική, είναι η ανάπτυξη της ικανότητας αλληλεπίδρασης με πολλαπλά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα.

Η ψηφιακή τεχνολογία υποστηρίζει τις πολλαπλές και δυναμικά συνδεόμενες αναπαραστάσεις μιας αλγεβρικής έννοιας. Ένα υπολογιστικό περιβάλλον, δηλαδή δεν παραθέτει απλά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, αλλά επιτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών. Οποιαδήποτε αλλαγή μέσα στα πλαίσια αυτού του περιβάλλοντος, που συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη αναπαράσταση συνεπάγεται άμεση μεταβολή στις υπόλοιπες.

Επομένως, ο υπολογιστής δεν αποτελεί απλά μία ισχυρή πηγή για να ολοκληρώσει ο χρήστης έναν στόχο, είναι μάλλον το μέσο που μπορεί να μετασχηματίσει τον ίδιο τον στόχο, και συγχρόνως να μετασχηματίσει τη σχέση του χρήστη με την προϋπάρχουσα γνώση. Είναι ένα εργαλείο που συνεισφέρει σημαντικά στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων (Kaput και Schaffer, 1999). Κάτι τέτοιο σημαίνει, δηλαδή, ότι αν αξιοποιηθεί η τεχνολογία μπορεί να υποστηρίξει την καλλιέργεια δεξιοτήτων (πειραματισμός, διερεύνηση, αναζήτηση, αμφισβήτηση, διαπραγμάτευση, κοκ) που ενισχύουν τη μαθησιακή διαδικασία (Κυνηγός, 2007).

Τα ψηφιακά μέσα στη διδακτική των μαθηματικών παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να μετασχηματίσουν παραγωγικά έννοιες (Ferrara et al, 2006) που μέχρι τώρα προσεγγίζονταν με τη βοήθεια προ – τεχνολογικών στατικών και αδρανών μέσων αναπαράστασης και αποτύπωσης εννοιών (Κυνηγός, 2007) και να μετασχηματίσουν, τελικά, τη φύση της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς η διάδραση, δηλαδή, η άμεση ανταπόκριση της μηχανής, όπως, και ο δυναμικός χαρακτήρας της τεχνολογίας αποτελούν στοιχεία που μπορούν να μετασχηματίσουν τη μαθησιακή διαδικασία δίνοντάς της ένα διερευνητικό χαρακτήρα (Lagrange et al, 2001).

Όμως, παρά την ερευνητική προσπάθεια για την αξιοποίηση των δυνατοτήτων της τεχνολογίας να παρέχει αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις, ο αριθμός των ερευνών για τη μελέτη της διαχείρισης αυτών των συνδέσεων που επιβάλλεται να πραγματοποιήσουν οι μαθητές, είναι περιορισμένος (Ferrara et al, 2006). Κατά τους Eisenberg και Dreyfus (1994), οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων είναι ένα πεδίο που ενδείκνυται για τη μελέτη των συνδέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Σκοπός, λοιπόν, της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει τις διαδικασίες κατανόησης των μετασχηματισμών συναρτήσεων από μαθητές που εργάζονται σε υπολογιστικά περιβάλλοντα τα οποία προσφέρουν πολλαπλές και διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και των μετασχηματισμών τους.

Στο 1^{ο} κεφάλαιο, η έννοια των μετασχηματισμών συναρτήσεων εντοπίζεται στο τρέχον πρόγραμμα σπουδών, με αναφορές στο βιβλίο του μαθητή και του εκπαιδευτικού. Στη συνέχεια, εντοπίζεται η έννοια των μετασχηματισμών στο νέο πρόγραμμα σπουδών (ΝΠΣ), από το δημοτικό μέχρι και το γυμνάσιο. Γίνεται αναφορά και στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, προκειμένου να υπογραμμιστεί η συνέχεια που χαρακτηρίζει τα ΝΠΣ στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Ακολουθεί ανασκόπηση των ερευνών με αντικείμενο διαπραγμάτευσης τους

μετασχηματισμούς συναρτήσεων. Μέσα από τη μελέτη αυτής, παρουσιάζονται τα γνωστικά και διδακτικά εμπόδια, με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές όταν αλληλεπιδρούν με το συγκεκριμένο ζήτημα, αφού έχει προηγηθεί η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του εμποδίου. Το 2^{ο} κεφάλαιο αφορά στο θεωρητικό πλαίσιο, όπου στηρίχθηκαν ο σχεδιασμός των φύλλων εργασίας, τα οποία βασίζονται σε αρχεία του εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra, και η ανάλυση των επεισοδίων. Ακολουθεί το κεφάλαιο της μεθοδολογίας (3^{ο} κεφάλαιο), όπου προσδιορίζονται τα ερευνητικά ερωτήματα, η ερευνητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε, καθώς και η πορεία της παρέμβασης, ενώ επίσης, δίνεται το πλαίσιο της διεξαγωγής της έρευνας. Επίσης, γίνεται αναφορά στο ρόλο και στα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού περιβάλλοντος που χρησιμοποιήθηκε στη δεδομένη διερευνητική διαδικασία και στο περιεχόμενο των δραστηριοτήτων, με τις οποίες αλληλεπίδρασαν οι συμμετέχοντες. Τέλος, προσδιορίζονται τα μέσα συλλογής δεδομένων και περιγράφεται ο τρόπος ανάλυσης αυτών. Στο 4^{ο} κεφάλαιο, πραγματοποιείται η ανάλυση επεισοδίων, τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν αντιπροσωπευτικά ως προς το σύνολο του έργου που παράγουν οι μαθητές, με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο που αναπτύχθηκε στο 2^{ο} κεφάλαιο της παρούσας ερευνητικής μελέτης. Ακολουθεί η παράγραφος των συμπερασμάτων.

Κεφάλαιο 1^{ο}

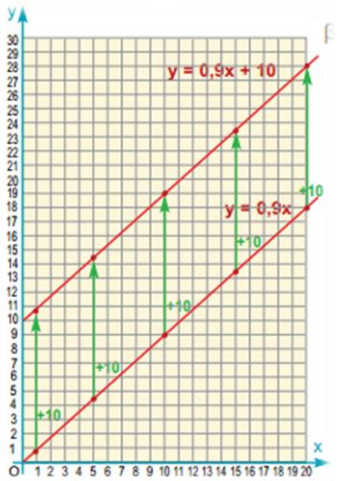
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.1 Η έννοια στο τρέχον πρόγραμμα σπουδών

Η πρώτη αναφορά σε μετασχηματισμούς συναρτήσεων γίνεται στη Β΄ Γυμνασίου. Στο βιβλίο εκπαιδευτικού (Μαθηματικά, Βιβλίο εκπαιδευτικού, Βλάμος κ.α., σελ. 33) προβλέπεται να διατεθεί μία διδακτική ώρα για την εξάσκηση των μαθητών στη σχεδίαση γραφικής παράστασης ευθείας της μορφής $y=\alpha x$ και τη διευκρίνιση του ρόλου της κλίσης α. Στα σχόλια – διδακτικές προσεγγίσεις, τονίζεται ότι *οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στη σχεδίαση αρκετών γραφικών παραστάσεων (όπως $y=3x$, $y=x$, $y=-0,7x$) και να οδηγηθούν, μεταξύ των άλλων και στο εξής συμπέρασμα:*

> *αν $\alpha>0$, η γραφική παράσταση βρίσκεται στο $1^{ο}$-$3^{ο}$ τεταρτημόριο, ενώ αν $\alpha<0$, η γραφική παράσταση βρίσκεται στο $2^{ο}$-$4^{ο}$ τεταρτημόριο*

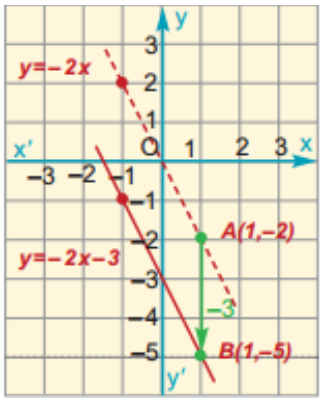
Ακόμη, αναφέρεται ότι *η διερεύνηση του ρόλου του α μπορεί να επιτευχθεί με σαφήνεια και με διαδραστικές δραστηριότητες διερευνητικής μορφής στο εργαστήριο των υπολογιστών με τη βοήθεια ειδικών προγραμμάτων (Geometer's Sketchpad – Graphmatica – Function Probe)*. Στα σχόλια για τη *διαχείριση της διδακτέας ύλης,* για το σχολικό έτος 2012-2013, υπογραμμίζεται ότι κατά τη διδασκαλία αυτής της παραγράφου πρέπει να γίνει αναφορά στο σχόλιο 1 της §2.1 του Β΄ Μέρους (σχολικό εγχειρίδιο, σελ. 137), ήτοι: *"Η κλίση α της ευθείας $y=\alpha x$ είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x".*



Εικόνα 1. Γραφική επίλυση της εισαγωγικής δραστηριότητας

Στην §3.4 ανάμεσα στους διδακτικούς στόχους ορίζεται πως πρέπει να διευκρινιστεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+\beta$ είναι μία παράλληλη μετατόπιση της $y=ax$. Στο σχολικό εγχειρίδιο (σελ. 73), στην εισαγωγική δραστηριότητα αναφέρεται ότι η γραφική παράσταση της $y=0.9x+10$, είναι ημιευθεία παράλληλη προς την ημιευθεία $y=0.9x$, μετατοπισμένη κατά 10 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα $y'y$ (η επίλυση συνοδεύεται από γραφική λύση). Στη συνέχεια, δίνεται η γενική παρατήρηση (σχολικό εγχειρίδιο, σελ.73): "*Η γραφική παράσταση της $y=ax+\beta$, $\beta\neq 0$ είναι μία ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y=ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0,\beta)$ του άξονα $y'y$*", ενώ στην εφαρμογή 1 (σχολικό εγχειρίδιο, σελ. 74-75), όπου και ζητείται ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=-2x$, $y=-2x+3$, $y=-2x-3$, η επίλυση που προτείνεται χρησιμοποιεί την έννοια της μεταφοράς. Για παράδειγμα, για την $y=-2x-3$, δίνεται η εξής λύση:

"η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x-3$ είναι ευθεία παράλληλη στην $y=-2x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0,-3). Μεταφέρουμε το σημείο (0,0) στο σημείο (0,-3) και το σημείο (1,-2) στο (1,-5). Ενώνουμε αυτά τα νέα σημεία και προεκτείνουμε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα "

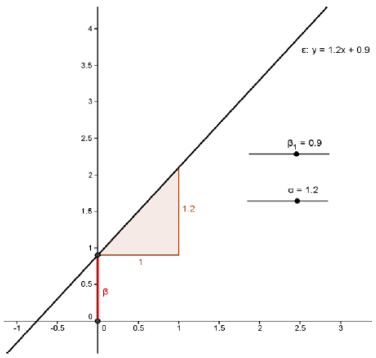


Εικόνα 2. Γραφική επίλυση της εφαρμογής

Στη Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές, στην §4.1, σύμφωνα με το βιβλίο του καθηγητή (Μαθηματικά, Βιβλίο εκπαιδευτικού, Βλάμος κ.α., σελ. 61), καλούνται να κατανοήσουν τη σχέση του συντελεστή α με το σχήμα (άνοιγμα της παραβολής), πώς μεταβάλλεται η καμπυλότητα, και τη θέση της παραβολής $y=ax^2$ ως προς τους άξονες. Στο σχολικό εγχειρίδιο (σελ. 146), υπογραμμίζεται ότι: "*Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής ως προς τον x΄x, αλλά καθορίζει και το "άνοιγμά" της. Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται τότε η παραβολή "κλείνει"*". Για την επόμενη ενότητα, στο σχολικό εγχειρίδιο, η παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$ δίνεται ως η παραβολή $y=ax^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες, που έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ωστόσο, στα σχόλια για τη *διαχείριση της διδακτέας*

ύλης, για το σχολικό έτος 2012-2013, *"προτείνεται η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της $y=ax^2+\beta x+\gamma$ να στηριχθεί στην εισαγωγική δραστηριότητα αυτής της παραγράφου (δηλαδή σε πίνακα τιμών και στη σύγκριση με την $y=ax^2$) και να παραληφθεί τόσο η χρήση των μετατοπίσεων (που είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο Λύκειο), όσο και η διδασκαλία των τύπων της σελίδας 151 για την κορυφή και το ακρότατο, που ευνοεί την απομνημόνευση τύπων χωρίς κατανόηση".*

Στην άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, στην §6.3, δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της $f(x)=ax+\beta$, συγκριτικά με το Γυμνάσιο. Είναι χαρακτηριστικό ότι προκειμένου να εισαχθεί η έννοια του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας χρησιμοποιείται η έννοια της στροφής, ενώ επιλέγεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, στη Δραστηριότητα Δ.27, την προτεινόμενη από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ), όπου οι μαθητές καλούνται να μεταβάλλουν τις τιμές στα α και β, να διερευνήσουν τις μεταβολές της ευθείας $y=ax+\beta$, καθώς και να ερμηνεύουν το ρόλο των παραμέτρων α και β.



Εικόνα 3. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δ.27

Στην παράγραφο 7.1, οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν, εκτός των άλλων, τις αλλαγές που επιφέρει στην καμπυλότητα της $y=ax^2$ η μεταβολή της παραμέτρου α. Η διδασκαλία της συνάρτησης $y=ax^2+\beta x+\gamma$, στην επόμενη παράγραφο, βασίζεται στις μετατοπίσεις της βασικής δευτεροβάθμιας συνάρτησης $y=ax^2$. Συγκεκριμένα, η ιδέα που αφορά τη χάραξη της γραφικής παράστασης και τη μελέτη των συναρτησιακών ιδιοτήτων της $y=ax^2+\beta x+\gamma$ περιγράφεται τόσο στο σχολικό εγχειρίδιο, αλλά με περισσότερη λεπτομέρεια στη δραστηριότητα Δ.30, του ΑΠΣ. *Οι μαθητές, με τη βοήθεια, ίσως, λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, χαράσσουν τη γραφική παράσταση της $g(x)=ax^2$ για διάφορες τιμές του α. Τη μετατοπίζουν κ μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του κ και παρατηρούν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια τη μετατοπίζουν λ μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του λ και κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα*

προκύψει είναι της μορφής $f(x)=a(x-\kappa)^2+\lambda$. Συμπερασματικά, αν και οι έννοιες της κατακόρυφης και της οριζόντιας μετατόπισης δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, μελετώνται ωστόσο, στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής $f(x)=ax+\beta$ και $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$.

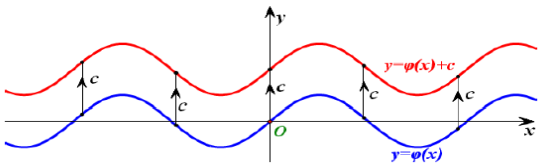
Στην Α΄ Λυκείου, οι μαθητές ουσιαστικά, εξετάζουν τις ιδιότητες και μελετούν την $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, μέσω των μετατοπίσεων της $g(x)=ax^2$. Στη Β΄ Λυκείου, στην §2.2, διατυπώνονται οι παραπάνω έννοιες της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών τους παραστάσεων.

Στο σχολικό εγχειρίδιο, η εισαγωγή στην έννοια της κατακόρυφης μετατόπισης μίας καμπύλης γίνεται με δύο παραδείγματα, που το ένα αναφέρεται στην κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω και το άλλο στην αντίστοιχη προς τα κάτω. Με μία προσεκτική παρατήρηση, εστιάζοντας στην προς τα πάνω κατακόρυφη μετατόπιση, γίνεται αντιληπτό ότι γίνεται εκτενής περιγραφή της γραφικής παράστασης της *f(x)*=|*x*|+1, ενώ η μόνη αναφορά στη νέα έννοια, πριν δοθεί το γενικό συμπέρασμα:

Γενικά:

> Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:
>
> $$f(x)=\varphi(x)+c, \text{ όπου } c>0,$$
>
> προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (Σχήμα α΄)

συνοδευόμενο από το εξής σχήμα:



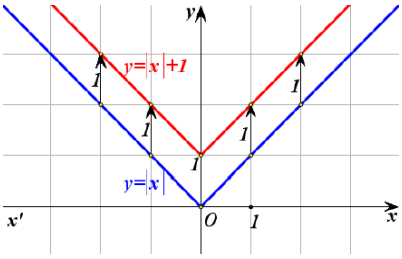
Εικόνα 4. Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο, σελ. 41

είναι το ακόλουθο απόσπασμα:

"…*Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της φ(x)=|x| κατακόρυφα και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f(x)=|x|+1. Αυτό άλλωστε ήταν αναμενόμενο αφού ισχύει:*

$$f(x)=\varphi(x)+1, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

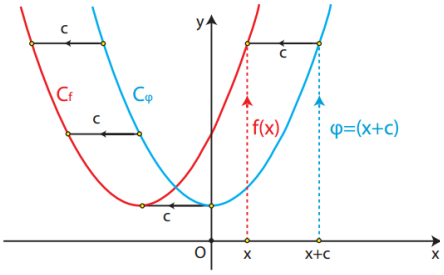
που σημαίνει ότι για κάθε x, που ανήκει στο σύνολο των πραγματικών το f(x) είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του φ(x).”



Εικόνα 5. Στιγμιότυπο από το σχολικό εγχειρίδιο, σελ. 40

Ανάλογη πορεία ακολουθείται και για τις άλλες περιπτώσεις, με μία μικρή διαφοροποίηση στις υποπεριπτώσεις της οριζόντιας μετατόπισης, όπου αφού δίνεται το γενικό συμπέρασμα, ακολουθεί επεξήγηση αυτού. Στην περίπτωση της προς τα αριστερά οριζόντιας μετατόπισης:

“.. *επειδή f(x)=φ(x+c), η τιμή της f στη θέση x είναι η ίδια με την τιμή της φ στη θέση x+c, που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ* ” .



Εικόνα 6. Στιγμιότυπο από το σχολικό

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, η οριζόντια μετατόπιση είναι ασυνεπής ως προς τη διαίσθηση. Η αντιφατικότητα οξύνεται από το γεγονός ότι η κατακόρυφη μετατόπιση *λειτουργεί όπως αναμένεται*, καθώς, για παράδειγμα, το γράφημα της συνάρτησης $y = x^2 + 3$ είναι μία κατακόρυφη προς τα πάνω μετατόπιση κατά τρεις μονάδες του γραφήματος της $y = x^2$. Έτσι, οι μαθητές δεν έρχονται μόνο αντιμέτωποι με μία αντιφατική συμπεριφορά των συναρτήσεων, αλλά και με μία ασυνέπεια που έγκειται στο γεγονός ότι κάποιες από τις μετατοπίσεις λειτουργούν σύμφωνα με τις προσδοκίες ενώ άλλες όχι. Συνεπώς, με την παρατήρηση αυτή, στο σχολικό εγχειρίδιο, επιχειρείται άρση της διαμάχης ανάμεσα στις προσδοκίες των μαθητών και στο μαθηματικά ορθό αποτέλεσμα.

1.2 Η έννοια στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών

1.2.1 Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Σχετικά με την έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι μαθητές στο δημοτικό διδάσκονται να παρατηρούν και να αναπαριστούν μετατοπίσεις και στροφές

σχημάτων, καθώς, επίσης, να προβλέπουν τα αποτελέσματα της εφαρμογής τους (νέα προγράμματα σπουδών για το δημοτικό (ΝΠΣ_Δ), σελ.41; ΝΠΣ_Δ, σελ.58). Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν σχήματα με άξονες συμμετρίας, όπως και σχήματα με κέντρο συμμετρίας για διάφορες περιστροφές (ΝΠΣ_Δ, σελ.81; ΝΠΣ_Δ, σελ.137). Περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις δισδιάστατων σχημάτων (ΝΠΣ_Δ, σελ.121). Ακόμη, αναγνωρίζουν την ισότητα επίπεδων σχημάτων ή/και αντικειμένων μέσα από ακολουθία μετασχηματισμών, όπως περιστροφή, μεταφορά, ανάκλαση (ΝΠΣ_Δ, σελ.81), ενώ περιγράφουν έναν μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας σημεία αναφοράς ή διευθύνσεις (ΝΠΣ_Δ, σελ.104).

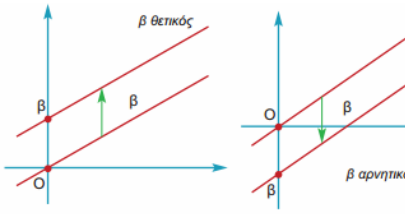
Στο γυμνάσιο η έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών εντοπίζεται στη Β΄ Γυμνασίου (βασικά θέματα: μεταφορά και στροφή, αξονική συμμετρία (ανάκλαση), κεντρική συμμετρία) και στη Γ΄ Γυμνασίου (βασικά θέματα: η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας, ομοιότητα και ομοιοθεσία, διαδοχικοί μετασχηματισμοί). Στη Β΄ Γυμνασίου στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, αναφέρεται ότι οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν τη σημασία της μεταφοράς και της στροφής στις γεωμετρικές κατασκευές και στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων, να κατασκευάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ή τη στροφή ενός σχήματος και να αναγνωρίζουν τη σχέση με το αρχικό. Επίσης, πρέπει να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας και να κατασκευάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες ή κέντρα σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον όπως και να εντοπίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας. Αντίστοιχα στο Γ΄ Γυμνασίου, σύμφωνα με τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ) οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων για την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων, να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν ομοιόθετα σχήματα, να συνδέουν την ομοιοθεσία με την αναλογία (νέα προγράμματα σπουδών για το γυμνάσιο (ΝΠΣ_Γ), σελ.57; ΝΠΣ_Γ, σελ.72).

1.2.2 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

Η έννοια των μετασχηματισμών συναρτήσεων δεν αποτελεί βασικό αντικείμενο διαπραγμάτευσης για το Δημοτικό ούτε για το Γυμνάσιο, στα νέα προγράμματα

σπουδών. Τα μόνα σημεία στα οποία γίνεται μία έμμεση αναφορά σε αυτή την έννοια είναι όταν καλούνται:

- οι μαθητές της Β΄, να διερευνήσουν το ρόλο του α στην $y=ax$, και να εξετάσουν το ρόλο του α (σταθερή μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x) και του β (*"σημείο" τομής με τον άξονα των y*) στην $y=ax+\beta$. Πρέπει να αναφερθεί ότι η $y=ax+\beta$, δεν περιγράφεται ως μετατόπιση της $y=ax$, στο ΝΠΣ, αλλά αφήνεται στην κρίση του εκπαιδευτικού αν θα αναφερθεί στην παρατήρηση του σχολικού εγχειριδίου σελ. 73



Εικόνα 7. Σχολικό εγχειρίδιο σελ. 73

οι μαθητές της Γ΄, να διερευνήσουν μέσω της γραφικής παράστασης της $y=ax^2$ το ρόλο της παραμέτρου α, ενώ προτείνεται και η χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού. Στα ΝΠΣ παραλείπεται η διδασκαλία της §4.2.

Στην Α΄ Λυκείου, οι μαθητές, εξετάζουν τις ιδιότητες και μελετούν την $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, μέσω των μετατοπίσεων της $g(x)=ax^2$. Στη Β΄ Λυκείου, στην §2.2, διατυπώνονται οι παραπάνω έννοιες της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών τους παραστάσεων.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

1.3.1 Μελέτες που σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων

Οι Eisenberg και Dreyfus (1994) διεξήγαγαν μία εκτενή έρευνα που αφορούσε την κατανόηση των μετασχηματισμών των συναρτήσεων από μαθητές. Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν οι συμμετέχοντες να αρχίσουν να χρησιμοποιούν την οπτική αναπαράσταση ως μέσο αιτιολόγησης, αλλά και να αναπτύξουν συνδέσεις μεταξύ αυτής και της αλγεβρικής έκφρασης. Σύμφωνα με τους ερευνητές, *"[οι μαθητές] απορρίπτουν την οπτική αντιμετώπιση της εισερχόμενης πληροφορίας, και επιλέγουν την αλγεβρική επίλυση, ακόμη και όταν η τελευταία είναι πιο δύσκολη* (Eisenberg et al, p47)*"*. Σκοπός της έρευνας ήταν να κατανοηθούν ποια είναι τα κωλύματα που πρέπει οι μαθητές να ξεπεράσουν προκειμένου να λειτουργήσουν στα

πλαίσια του ενσαρκωμένου τρόπου σκέψης. Για τους δύο μελετητές: *"η ικανότητα να αναπτύσσεις συνδέσεις μεταξύ οπτικής και συμβολικής αναπαράστασης είναι ιδιαίτερα σημαντική για τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων, γι αυτό και επιλέγουν αυτό το θέμα για την έρευνά μας* (Eisenberg et al, p47)*"*.

Οι Borba και Confrey (1996) παρουσιάζουν λεπτομερώς τη μελέτη περίπτωσης ενός δεκαεξάχρονου μαθητή, με αντικείμενο τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων ενταγμένους σε ένα περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στη μελέτη υιοθετείται μία προσέγγιση που αντιστρέφει την κλασσική σειρά διδασκαλίας των μετασχηματισμών, ξεκινώντας από την αναπαράσταση σε άξονες, ακολουθείται από τη δημιουργία του πίνακα τιμών, στοχεύοντας στην ανάπτυξη του αλγεβρικού τύπου, ως κώδικα περιγραφής της κανονικότητας που εντοπίζεται στους δύο τρόπους αναπαράστασης. Διερευνάται λοιπόν η αποτελεσματικότητα αυτής της προσέγγισης στην αλληλεπίδραση του συμμετέχοντα με την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση, με τις ανακλάσεις ως προς κάθετες και οριζόντιες ευθείες, καθώς και με την αλλαγή της καμπυλότητας συναρτήσεων. Οι ερευνητές αναφέρουν ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν αποτελεσματικές στρατηγικές, όταν το ζητούμενο πλαισιώνεται από ένα περιβάλλον πολλαπλών αναπαραστάσεων (ύψιστης σημασίας είναι ο προσεκτικός σχεδιασμός των δραστηριοτήτων).Ακόμη και στην περίπτωση της οριζόντιας μετατόπισης, ο τρόπος αντιμετώπισης της οποίας χαρακτηρίστηκε από τους ερευνητές ως προβληματικός, εν τέλει, ο συμμετέχων κατάφερε να συντονίσει τις οπτικές μεταβολές με αλλαγές σε άλλες αναπαραστάσεις.

Στις δύο αυτές μελέτες τονίζεται η σημασία της σύνδεσης της αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης με το γράφημά της, ενώ για να επιτευχθεί αυτό επιλέγεται η χρήση ψηφιακής τεχνολογίας. Αυτό συμβαίνει γιατί η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι αντίστοιχοι συμμετέχοντες σε κάθε περίπτωση, όταν το ζητούμενο εμπλέκει την οριζόντια μετατόπιση, εντοπίζεται στις ελλιπείς εικονικές αναπαραστάσεις.

Οι Zazkis, Liljedahl και Gadowsky (2003) εστιάζουν αποκλειστικά στην οριζόντια μετατόπιση μίας συνάρτησης[1]. Εξετάζουν τις επεξηγήσεις που δίνονται τόσο από μαθητές, όσο και από καθηγητές για το μετασχηματισμό αυτό, χρησιμοποιώντας στα ερωτήματά τους την παραβολή. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι *"τουλάχιστον αρχικά, η οριζόντια μετατόπιση της παραβολής αντιβαίνει στις προσδοκίες και είναι αντιφατική*

[1] Οι ερευνητές μελετούν το συγκεκριμένο ζήτημα σε δύο άρθρα τους, του 2003

*για τους περισσότερους συμμετέχοντες (*Zazkis et al., 2003b, p437*)"*, σε ότι αφορά τους μαθητές. Η πιο συνηθισμένη στρατηγική για την εξομάλυνση αυτής της αντίφασης ήταν οι μνημονικοί κανόνες, ενώ το ενδιαφέρον ήταν μειωμένο για να καταλάβουν το φαινόμενο. Οι διδάσκοντες, από την άλλη, οι οποίοι διέθεταν ένα εύρος επεξηγήσεων για αυτή την ασυνέπεια σε αντίθεση με τους μαθητές, επί το πλείστον *"δεν έμεναν ικανοποιημένοι, από αυτές (*Zazkis et al., 2003a, p463*)"*. Οι ερευνητές, παρουσιάζουν πιθανά αίτια αυτής της δυσκολίας και προτείνουν μία παιδαγωγική προσέγγιση, που στόχος της είναι να άρει την αντίληψη για *"κίνηση προς απροσδόκητες διευθύνσεις (*Zazkis et al., 2003b, p439*)"*.

Αντλώντας πληροφορίες από τα άρθρο των Zazkis et al., 2003 για την έρευνα των Baker, Hemenway και Trigueros (2000), επισημαίνεται ότι οι τελευταίοι διερεύνησαν την κατανόηση των μετασχηματισμών σε διάφορες συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας, ελαφρώς διαφοροποιημένη τη θεωρία APOS (*Action – Process – Object – Schema*), που ανέπτυξαν οι Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews και Thomas, 1996. Με βάση το μοντέλο αυτό, προτείνουν ότι η κατακόρυφη μετατόπιση είναι πιο εύκολη για τους μαθητές, από ότι η οριζόντια, καθώς στην κατακόρυφη οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται απ ευθείας στο αποτέλεσμα, δηλαδή στην εξαρτημένη μεταβλητή, σε αντίθεση με την οριζόντια όπου η τροποποίηση πραγματοποιείται στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Επίσης, κατά τους μελετητές η δυσκολία στο χειρισμό των μετασχηματισμών οφείλεται στην ελλιπή εικόνα έννοιας της συνάρτησης.

Οι Lage και Trigueros (2006) με τη σειρά τους, στην έρευνα που πραγματοποίησαν, θέλουν να συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση των δυσκολιών με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές, όταν το αντικείμενο μελέτης είναι οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων. Για την ανάλυση των δεδομένων επίσης χρησιμοποιήθηκε η θεωρία APOS, όπως τη διαμόρφωσαν οι Baker et al (2000). Η έρευνα σε αυτό τον τομέα προσφέρεται σύμφωνα με τους μελετητές, για την μελέτη της ικανότητας αλληλεπίδρασης των μαθητών με πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας και της αναγκαιότητας πραγμάτωσης της έννοιας της συνάρτησης, ώστε να επέλθει η κατανόηση των μετασχηματισμών.

Οι Sever και Yerushalmy (2007), παρατηρούν τις πρώτες προσπάθειες δύο μαθητών να κατανοήσουν την έννοια της μεταβολής της καμπυλότητας των συναρτήσεων (*dilation of functions*), χρησιμοποιώντας μέσα που υποστηρίζουν τον άμεσο χειρισμό

των γραφικών παραστάσεων. Υποστηρίζουν ότι για να κατασκευάσουν την ερμηνεία της προς συζήτηση έννοιας οι μαθητές τη συσχετίζουν με μία έννοια της καθημερινής ζωής. Βασιζόμενοι σε θεωρίες της ενσαρκωμένης νόησης, μελετούν τη σημασία της έννοιας από την καθημερινή ζωή στην αφομοίωση της μαθηματικής έννοιας και το ρόλο που διαδραματίζει η ψηφιακή τεχνολογία στην δημιουργία της εικόνας αυτής της έννοιας.

1.4 Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα

1.4.1 Εισαγωγή

Ο όρος *"γνωστικό εμπόδιο"* προέρχεται από την έννοια του *"επιστημολογικού εμποδίου",* που εισήχθη για πρώτη φορά στα πλαίσια της διαδικασίας ανάπτυξης της επιστημονικής γνώσης από το Γάλλο φιλόσοφο και επιστήμονα Gaston Bachelard (1884-1962). Κατά τον Bachelard (1938) η διαδικασία αυτή παρεμποδίζεται από εγγενείς, και σε πολλές περιπτώσεις άγνωστους, παράγοντες που σχετίζονται με τη διαδικασία της κατανόησης και όχι τόσο με την πολυπλοκότητα των προς μελέτη φαινομένων. Όπως μεταφράζεται και αναφέρεται από τον Herscovics (1989, p61), σύμφωνα με τον Bachelard (1938):

"Όταν αντικείμενο διαπραγμάτευσης είναι οι συνθήκες υπό τις οποίες επέρχεται η επιστημονική πρόοδος, η προσέγγιση του ζητήματος πρέπει να τίθεται με όρους εμποδίων. Το ζήτημα δεν είναι η μελέτη των εξωτερικών εμποδίων, όπως είναι η πολυπλοκότητα και η παροδικότητα των φαινομένων ή όπως είναι οι αδυναμίες της αντίληψης και του ανθρώπινου πνεύματος. Είναι η κατανόηση ότι η αδυναμία αντίληψης και η σύγχυση είναι αποτελέσματα μίας λειτουργικής ανάγκης. Είναι αυτό το σημείο όπου εντοπίζονται οι αιτίες της στασιμότητας, ακόμη και της οπισθοδρόμησης, και όπου αποκαλύπτονται τα αίτια της αδράνειας που θα ονομάσουμε επιστημολογικά εμπόδια."

Αναπτύσσοντας την έννοια του *επιστημολογικού εμποδίου* ο Bachelard (1938) προτείνει την προσέγγιση της επιστήμης περισσότερο με όρους *ρήξης* παρά με όρους *συνέχειας*. Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ένα σύνολο τέτοιων *ρήξεων*, παρά το ότι με μια επιφανειακή θεώρηση θα μπορούσε κάποιος να πιστέψει το αντίθετο. Πίσω από αυτή τη φαινομενική συνέχεια κρύβονται πολυάριθμες *στιγμές* σύγκρουσης μεταξύ παλαιών πεποιθήσεων και νέων ιδεών, δηλαδή, κρύβονται πολυάριθμες *ρίξεις*.

Τα επιστημολογικά εμπόδια αναλύονται στα πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών από τον Brousseau (1907-1988). Ο Brousseau (1983) ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά σε κάποιο πλαίσιο μιας ορισμένης γνωστικής περιοχής και επομένως εδραιώνεται, αλλά αποτυγχάνοντας να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ' ένα άλλο πλαίσιο, οδηγεί σε αντιφάσεις. Επομένως, καθίσταται αναγκαία η απόρριψη της αρχικής ανεπαρκούς και λανθασμένα σχηματισμένης γνώσης και η αντικατάστασή της με μια πιο λειτουργική γνώση στο νέο πλαίσιο. Η απόρριψη και η διευκρίνιση ενός τέτοιου εμποδίου αποτελεί ουσιαστικό μέρος της ίδιας της γνώσης. Η άρση αυτού του εμποδίου δεν μπορεί να γίνει χωρίς την αναθεώρηση των αρχικών ιδεών, με την τοποθέτηση τους σ' ένα νέο πλαίσιο όπου φαίνεται καθαρά ότι αποτυγχάνουν. Αυτό επομένως απαιτεί μια μεγάλη προσπάθεια γνωστικής ανακατασκευής. Μόνο με την απόρριψη της παλαιότερης γνώσης, που συνιστούσε εμπόδιο, δημιουργείται η νέα γνώση ή όπως γράφει ο Bachelard, 1938: *"Μαθαίνουμε ενάντια μίας παλαιότερης γνώσης"*.

Μεταξύ των κωλυμάτων που προσδιορίστηκαν από τον Bachelard, ως πιθανά επιστημολογικά εμπόδια είναι οι επιρροές από την καθομιλουμένη, η τάση γενίκευσης καταστάσεων με αποτέλεσμα την υπονόμευση μίας ειδικής περίπτωσης, οι επιρροές από προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις, οι πιθανές παραπλανητικές διαισθήσεις.

Τα *γνωστικά εμπόδια* είναι το αντίστοιχο των *επιστημολογικών εμποδίων* στο ατομικό επίπεδο. Σύμφωνα με τη *Γενετική Επιστημολογία*, υπάρχει μία παράλληλη πορεία ανάμεσα στην εξέλιξη των επιστημών και στην ανάπτυξη της σκέψης στο επίπεδο του κάθε ανθρώπου. Είναι πιθανό όταν μία γνώση έχει αναγνωρισθεί ως *επιστημολογικό εμπόδιο* να υπάρχει και το αντίστοιχο *γνωστικό εμπόδιο* στο επίπεδο του μαθητευόμενου. Ωστόσο, τα *επιστημολογικά εμπόδια* δεν είναι απαραίτητο να αποτελούν *γνωστικά εμπόδια* για τη διδασκαλία, καθώς ναι μεν αναγνωρίστηκαν ως τέτοια στο παρελθόν, αλλά το μαθησιακό περιβάλλον σήμερα είναι τελείως διαφορετικό από αυτό στο οποίο δημιουργήθηκαν. Για παράδειγμα, τα *επιστημολογικά εμπόδια* που συνδέθηκαν με την εισαγωγή κατάλληλου συμβολισμού στο *καρτεσιανό επίπεδο*, είναι εκ διαμέτρου διαφορετικά από τα *γνωστικά εμπόδια* που συναντά ο μαθητευόμενος σήμερα: θα πρέπει να κατασκευάσει τη γνώση και όχι να την ανακαλύψει (Κλαουδάτος, 1996, σελ. 23-24).

Τα γνωστικά εμπόδια, είναι ουσιαστικά εσωτερικές δομές που εμποδίζουν την ατομική εννοιολογική ανάπτυξη. Ανάλογη είναι η έννοια του *"εννοιολογικού εμποδίου"* που προτάθηκε από τη Zaslavsky (1997). Συγκεκριμένα, αναφέρεται σε *"εμπόδια που έχουν γνωστική φύση και μπορούν να επεξηγηθούν από τις μαθηματικές δομές και έννοιες που αποτελούν τη βάση προηγούμενων εμπειριών μάθησης και εσωτερικής επεξεργασίας αυτών των εμπειριών"*. Ο Herscovics (1989) αναπτύσσει την έννοια *του γνωστικού εμποδίου* στα πλαίσια της θεωρίας μάθησης του Piaget. Ειδικότερα, ο όρος σχετίζεται με τις διαδικασίες της *αφομοίωσης* (*assimilation*) και της *προσαρμογής* (*accommodation*)[2]. *Αφομοίωση* είναι η ενσωμάτωση της νέας γνώσης στα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα, ενώ η *προσαρμογή* είναι η διαδικασία κατά την οποία επέρχονται αναγκαίες αλλαγές στις γνωστικές δομές. Ορισμένες ιδέες δεν μπορούν να αφομοιωθούν από την υπάρχουσα γνώση και νέες γνωστικές δομές είναι απαραίτητες. Κατά τη διαδικασία της προσαρμογής, ο μαθητευόμενος έρχεται αντιμέτωπος με σημαντικά γνωστικά εμπόδια. Αναλυτικά, αν η ήδη υπάρχουσα γνώση δεν επαρκεί για τη διαπραγμάτευση της νέας κατάστασης τότε προκύπτει μία *αντιπαράθεση* ανάμεσα στην υπάρχουσα γνώση και τη νέα κατάσταση. Η *αντιπαράθεση* προκαλείται από τα γνωστικά εμπόδια. Όπως αναφέρεται από τον Κλαουδάτο, 1996, σελ.23, ένα εμπόδιο είναι μία αντίληψη, πιθανώς μία γνώση, η οποία, ενώ ήταν αποτελεσματική στην αντιμετώπιση ενός τύπου προβλημάτων, αποτυγχάνει στην επίλυση ενός άλλου τύπου. Λόγω της προηγούμενης επιτυχίας *αντιστέκεται* σε προσπάθειες τροποποίησης ή απόρριψης με αποτέλεσμα να γίνεται εμπόδιο στην ανάπτυξη νέας γνώσης.

Η Sierpinska (1990; 1994) υιοθέτησε μία ευρύτερη ερμηνεία των *επιστημολογικών εμποδίων* και τα περιέγραψε ως εμπόδια σε σημαντικές ποιοτικές αλλαγές του τρόπου σκέψης του ανθρώπινου μυαλού. Σε αυτό το πλαίσιο η κατανόηση ταυτίζεται με την υπέρβαση εμποδίων. Αντιμετωπίζει την κατανόηση ως μία σειρά ενεργειών και γνωστικών δραστηριοτήτων που άρει τα εμπόδια, υποστηρίζοντας ότι, *η άρση ενός εμποδίου και η κατανόηση είναι ουσιαστικά δύο διαφορετικοί τρόποι αναφοράς στην ίδια κατάσταση (*Sierpinska, 1990, p28*).* Η παρουσία των επιστημολογικών εμποδίων εντοπίζει τα σημεία όπου ο τρόπος προσέγγισης μίας νέας έννοιας ήταν εσφαλμένος και ανεπαρκής, ενώ η κατανόηση εξετάζει τους νέους τρόπους μάθησης. Η κατασκευή νοήματος όμως, σύμφωνα πάντα με την Sierpinska, καθορίζεται επίσης

[2] Οι δύο αυτές έννοιες παρουσιάζονται αναλυτικά στην §2.3.3.2

από προηγούμενες πεποιθήσεις, *"πιστεύω"*, προκαταλήψεις, ασυνείδητα σχήματα σκέψης, γνώσεις που κατακτήθηκαν από τη μίμηση και την πρακτική κατά τη διάρκεια της κοινωνικοποίησης και της εκπαίδευσης (Κλαουδάτος, 1996, σελ. 23; Zazkis et al., 2003b, p444). Κάποιες πράξεις της κατανόησης, ως μακρόχρονη και συνεχή πορεία αναδιοργάνωσης γνωστικών σχημάτων, μπορούν να συμβάλλουν στην άρση εμποδίων, ενώ κάποιες άλλες να αποδειχθούν νέα εμπόδια.

Τέλος, τα *διδακτικά εμπόδια*, προκύπτουν από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις (Κλαουδάτος, 1996, σελ. 24):

1. Από τη φορμαλιστική διδασκαλία. Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής δεν μπορεί να συνδέσει τις έννοιες με την υπάρχουσα γνώση και αυτή η ασυνέχεια αποτελεί πηγή πολλών εμποδίων. Η ύπαρξη αυτής της ασυνέχειας δεν είναι πάντα φανερή γιατί οι μαθητές μαθαίνουν να επαναλαμβάνουν ορισμούς και να χειρίζονται τα σύμβολα έστω κι αν δεν καταλαβαίνουν το νόημά τους.
2. Από τη διδακτική μεταφορά. Αυτό σημαίνει, ότι προκειμένου να παρουσιαστεί ένα σύνθετο θέμα, συνήθως εκλογικεύεται με βάση αρχές όπως από το απλό στο σύνθετο, από το μερικό στο γενικό, με αποτέλεσμα να προκαλούνται πρόσθετα εμπόδια διδακτικού τύπου.
3. Από την αντίληψη, ότι "*ο καλός ο δάσκαλος ξεπερνά τα γνωστικά εμπόδια*".

"Αν αγνοήσουμε τα εμπόδια διατρέχουμε τους κινδύνους: είτε να διδάξουμε τα παιδιά τις τελικές διαμορφωμένες γνώσεις με τρόπο φορμαλιστικό, χωρίς ιδιαίτερο νόημα για τα ίδια τα παιδιά, σαν μία τυπική (formal) γλώσσα αναντίστοιχη με το βαθμό ανάπτυξής τους, είτε να παρεμβάλουμε κάποιες βοηθητικές γνώσεις που τις κατανοούν μεν τα παιδιά και τις θεμελιώνουν πάνω σε προηγούμενες, αλλά ο περιορισμός και ατελής χαρακτήρας τους συντελεί στη δημιουργία μεγάλων δυσκολιών για την περαιτέρω πορεία (Σπύρου, 2005)"

1.4.2 Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα στη βιβλιογραφία

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, ένα από τα βασικά ζητήματα που αφορά τις έννοιες της κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης και σε πολλές από τις έρευνες αποτελεί το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα, είναι οι αιτίες που καθιστούν την οριζόντια μετατόπιση, αντικείμενο διαπραγμάτευσης πιο δυσνόητο για τους μαθητές. Οι

μαθητές κάνουν συστηματικά λάθη κατά την εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης που διδάχθηκαν. Στην έρευνα της Zazkis et al. (2003a, p460), στις κλινικές συνεντεύξεις ένας συμμετέχων[3], που είχε διδαχθεί για τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων και τα αντίστοιχα γραφήματα δύο μήνες πριν τη διεξαγωγή της μελέτης, υποστήριξε ότι με την εφαρμογή του μετασχηματισμού της οριζόντιας μετατόπισης στο γράφημα μίας συνάρτησης, το νέο γράφημα εμφανίζεται στη *λανθασμένη πλευρά.* Σύμφωνα με τους ερευνητές, ο ισχυρισμός αυτός παρουσιάζει τη διαμάχη ανάμεσα στα αποτελέσματα και τις προσδοκίες των μαθητών, προσδοκίες που βασίζονται στην εμπειρία.

Ο Brousseau (1983) γράφει ότι *"ένα εμπόδιο εκδηλώνεται από τα λάθη, αλλά αυτά τα λάθη δεν είναι τυχαία. Παροδικά και άτακτα, αναπαράγονται επίμονα"*. Οι Borba και Confrey (1996), χαρακτήρισαν ως *"προβληματικές"* τις προσπάθειες ενός 16χρόνου να αλληλεπιδράσει με την οριζόντια μετατόπιση μίας παραβολής. Οι Zazkis et al, (2003a; 2003b) αναζήτησαν αίτια που να επεξηγούν τη *λανθασμένη διαίσθηση* των μαθητών για τα οπτικά αποτελέσματα του μετασχηματισμού της οριζόντιας μετατόπισης · η ανάλυση των απαντήσεων έδειξε *τάσεις συστηματικής ασυνέπειας*, ενώ στην έρευνά τους οι Lage et al, 2006, κατέληξαν στο ότι *οι μαθητές φαίνεται να έχουν περισσότερες δυσκολίες στο να αναγνωρίζουν μία οριζόντια, παρά μία κάθετη μετατόπιση* (Lage, 2006, p26), αποδίδοντας το γεγονός αυτό στο ότι οι μαθητές απομνημονεύουν τους κανόνες των μετασχηματισμών, όπως και τις επιπτώσεις αυτών πάνω στις συναρτήσεις. Τα συστηματικά αυτά λάθη των μαθητών αποτελούν μία έκφραση ή μάλλον μία σαφή εκδήλωση ενός συνόλου αντιλήψεων, ενταγμένων σε ένα λογικά συνεπές δίκτυο γνωστικών δομών, που ορθώνονται ως εμπόδια στην απόκτηση και στην κατοχή νέων γνώσεων.

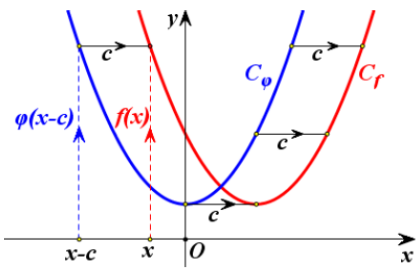
Σε αναλογία με κάποια σημεία που ειπώθηκαν παραπάνω, η Βοσνιάδου (2001), υιοθετώντας την άποψη του Bransford (1979), αναφέρει: *"Οι νέες γνώσεις δομούνται πάνω στη βάση των όσων ήδη καταλαβαίνουμε και πιστεύουμε. Η έρευνα έχει δείξει ότι η προϋπάρχουσα γνώση είναι αναγκαία για την κατανόηση και αφομοίωση της νέας γνώσης. Εν αντιθέσει, ορισμένες φορές αποτελεί κώλυμα στην εκμάθηση κάτι νέου"*. Οι εμπειρίες των μαθητών με τους αριθμούς, οδηγούν στην ακόλουθη διαδικασία σκέψης, όσον αφορά την οριζόντια μετατόπιση συναρτήσεων: "*...προσθέτοντας μία*

[3] Η παράθεση των απαντήσεων αυτού του μαθητή έγινε γιατί, σύμφωνα με τους ερευνητές, αποτελεί αντιπροσωπευτικό δείγμα των επεξηγήσεων των υπόλοιπων συμμετεχόντων

θετική ποσότητα c, έχει ως αποτέλεσμα την μετακίνηση της συνάρτησης στη θετική κατεύθυνση (δεξιά), ενώ αφαιρώντας c>0 ή προσθέτοντας το -c, έχει ως αποτέλεσμα την μετακίνηση της στην αρνητική κατεύθυνση (αριστερά)". Από μία οπτική, μία τέτοια αντιμετώπιση αποτελεί μία βεβιασμένη γενίκευση της προϋπάρχουσας εμπειρίας της πρόσθεσης και αφαίρεσης αριθμών στην αριθμογραμμή.

Εξετάζοντας το ζήτημα με μεγαλύτερη προσοχή, εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι δημιουργείται σύγχυση μεταξύ της αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης και του *κανόνα* που ορίζει τον μετασχηματισμό. Παραδοσιακά, οι μετασχηματισμοί στις συναρτήσεις διδάσκονται με έμφαση στον αλγεβρικό συμβολισμό και με σχετική απομόνωση από οπτικές αναπαραστάσεις (Borba & Confrey, 1996, p319). Κατά συνέπεια, οι μαθητές εστιάζουν στην αλγεβρική αναπαράσταση των συναρτήσεων και συγκρίνοντας, για παράδειγμα, τις δύο εκφράσεις $\phi(x)=x^2$ και $f(x)=(x-c)^2$, όπου c θετικό, παρατηρούν σωστά ότι η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη με αντικατάσταση του x από την ποσότητα $(x-c)$. Στο σχολικό εγχειρίδιο σε μία προσπάθεια άρσης των *αντιφατικών*[4] με τη διαίσθηση αποτελεσμάτων δίδεται η ακόλουθη παρατήρηση[5]:

".. επειδή f(x)=φ(x-c), η τιμή της f στη θέση x είναι η ίδια με την τιμή της φ στη θέση x-c, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ " .



Εικόνα 8. Γραφική επεξήγηση της παρατήρησης του σχολικού εγχειριδίου

Η επεξήγηση αυτή ήταν ανάμεσα στις επεξηγήσεις που προτάθηκαν από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα των Zazkis et al (2003a, p443), όταν τους ζητήθηκε να προβλέψουν και να επεξηγήσουν τη σχέση ανάμεσα στα γραφήματα των $y=x^2$ και $y=(x-3)^2$: *"Προκειμένου να έχεις μία δεδομένη τιμή για το y, η νέα τιμή του x πρέπει να είναι* 3 *μονάδες μεγαλύτερη από την αρχική, το οποίο*

[4] Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε από τους Zazkis et al, 2003a

[5] Η παρατήρηση τροποποιήθηκε και αναφέρεται στην περίπτωση της προς τα δεξιά οριζόντιας μετατόπισης

συνάδει με μετατόπιση δεξιά συγκριτικά με το αρχικό γράφημα, καθώς η ποσότητα c=3 *αφαιρείται"*.

Όπως όμως αναφέρθηκε και προηγουμένως, διαισθητικά τουλάχιστον, υπάρχει σύνδεση με την έννοια της αριθμογραμμής: για οποιοδήποτε αριθμό x το $(x-c)$, βρίσκεται c μονάδες αριστερά του *x*. Η κύρια πηγή δυσκολίας εντοπίζεται στην θεώρηση αυτής της αλγεβρικής αντικατάστασης ως μετασχηματισμό και στην προσπάθεια συσχέτισης της γεωμετρικής μετατόπισης – της μετατόπισης του γραφήματος, με την αλγεβρική αντικατάσταση. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές επιτυγχάνουν απλοποίηση του μετασχηματισμού της οριζόντιας μετατόπισης. Τα παραπάνω είναι σύμφωνα με την έννοια της *μείωσης της αφαίρεσης*, την οποία περιέγραψε η Hazzan (1996), και αποτελεί στρατηγική που χρησιμοποιείται από τους μαθητευόμενους προκειμένου να αντιμετωπίσουν την πολυπλοκότητα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η προσοχή των μαθητών στρέφεται σε ένα πρωτογενές αντικείμενο, εδώ στη μεταβλητή, και όχι στο πιο αφηρημένο – στη συνάρτηση.

Οι Eisenberg και Dreyfus (1994), συμφωνούν ότι υπάρχει ιδιαίτερη δυσκολία στην κατανόηση της οριζόντιας μετατόπισης, αλλά την αποδίδουν στην αδυναμία των μαθητών για οπτική επεξεργασία της πληροφορίας, ενώ οι Baker, Hemenway, και Trigueros (2000), επισημαίνουν ότι η δυσκολία έγκειται στην πολυπλοκότητα της έννοιας, αφού σε αντίθεση με την κατακόρυφη μετατόπιση, οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Ακόμη, εν μέρει τουλάχιστον, αναφέρουν ως αίτια αυτής της αδυναμίας *προσαρμογής (accommodation)*[6], την ελλιπή εικόνα έννοιας που έχουν οι μαθητές για τη συνάρτηση, αλλά και την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο. Οι τρεις διαφορετικές αιτίες που δίνουν οι ερευνητές αντιστοιχίζονται με τους τρεις διαφορετικούς τρόπους *μείωσης της αφαίρεσης*, που διακρίνει η Hazzan (1996), και που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές ως στρατηγικές καθιέρωσης των αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών, σε έννοιες νοητικά προσβάσιμες από τους ίδιους. Υπάρχει μία ακόμη πιθανή πηγή της δυσκολίας και σχετίζεται, σύμφωνα με τους Borba και Confrey (1996), άμεσα με την αυστηρά καθορισμένη ακολουθία ενεργειών (χρήση αλγεβρικού τύπου – κατασκευή πίνακα

[6] Η έννοια χρησιμοποιείται με την ερμηνεία που της αποδίδει ο Piaget στη Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης (Consructivism)

τιμών – αναπαράσταση σε άξονες), που υιοθετείται για την παρουσίαση της έννοιας των μετασχηματισμών των συναρτήσεων στη σχολική πρακτική και που προτείνεται συνήθως από τα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών. Η προσέγγιση αυτή εντάσσει τη μελέτη των μετασχηματισμών των συναρτήσεων μέσα στα πλαίσια της έννοιας της συνάρτησης και η σύνδεση με τη θεωρία των μετασχηματισμών είναι μηδαμινή, αν όχι ανύπαρκτη. Σύμφωνα με τους Zazkis et al (2003a; 2003b), αυτή η προσέγγιση είναι πιθανό να ενισχύει το εμπόδιο, παρά να βοηθά στην άρση του.

Ένα άλλο σημείο που συμβάλλει στην επίταση του εμποδίου είναι ότι η κατακόρυφη μετατόπιση δίνει το προσδοκώμενο διαισθητικό αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα που αναμένουν οι μαθητές να δουν. Συνεπώς, οι μαθητές δεν έρχονται αντιμέτωποι με μία ασυνέπεια που είναι καθολική: οι μετατοπίσεις να παράγουν οπτικό αποτέλεσμα που αντιβαίνει στη διαίσθησή τους. Η αντιφατική συμπεριφορά έχει τοπικό χαρακτήρα · κάποιες από τις μετατοπίσεις είναι σύμφωνες με τις προσδοκίες τους και κάποιες άλλες όχι.

Κεφάλαιο 2ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Θεωρίες κατασκευής της γνώσης

Οι θεωρίες κατασκευής της γνώσης ως απάντηση στις συμπεριφοριστικές θεωρίες, δεν εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στην τροποποίηση της συμπεριφοράς του ατόμου, αλλά στην ανάπτυξη και την εξέλιξη της δομής των γνωστικών σχημάτων που διαθέτει. Σε αυτή τη διαδικασία το άτομο έχει το ρόλο του ενεργού δημιουργού των δικών του γνωστικών δομών. Έτσι, η μάθηση βασίζεται στην ενεργό διερεύνηση και στην προσωπική δημιουργία και όχι στην απλή μετάδοση της πληροφορίας, ενώ σε ότι αφορά την αξιοποίηση της τεχνολογίας, η προσοχή στρέφεται στις γνωστικές διαδικασίες που υπεισέρχονται κατά την αλληλεπίδραση του ατόμου με τον υπολογιστή (Bottino, 2001).

2.2 Μάθηση σε αλληλεπιδρασιακά μαθησιακά περιβάλλοντα

Τα μαθηματικά στο εκπαιδευτικό σύστημα εκλαμβάνονται ως μία θεωρητική γνώση που διδάσκεται κυρίως μετωπικά με άξονα την απομνημόνευση αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων και την εξάσκηση στη λύση ασκήσεων με στόχο αποκλειστικά την αντιμετώπιση των εξετάσεων. Ο τρόπος διδασκαλίας που συνήθως ακολουθείται, έγκειται σε διαλέξεις και φορμαλιστικές παρουσιάσεις των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών με στατικά μέσα έκφρασης. Είναι σύνηθες το φαινόμενο οι μαθητές να περιορίζονται σε αποστήθιση κανόνων και μεθόδων αντιμετώπισης των προβλημάτων χωρίς να επιζητούν εννοιολογική κατανόηση.

Η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να συμβάλλει καταλυτικά στη δημιουργία και την ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές, διευκολύνοντας τους στο να κάνουν υποθέσεις, εικασίες, παρατηρήσεις. Τα αλληλεπιδρασιακά μαθησιακά

περιβάλλοντα τους επιτρέπουν να αποκτήσουν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογική μαθηματική σκέψη, τις οποίες είναι αδύνατο να έχουν χωρίς τα δυναμικά αυτά μέσα (Κυνηγός, 2007). Η χρήση άλλωστε των παραδοσιακών μέσων, του τετραδίου και του πίνακα, στην αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών απαιτεί ιδιαίτερες νοητικές και αφαιρετικές δεξιότητες, καθώς τα συγκεκριμένα στατικά μέσα δεν διαθέτουν διαδραστικά χαρακτηριστικά, δεν ανταποκρίνονται δηλαδή στις ενέργειες του μαθητή και προσφέρουν απλά στατικές περιγραφές των μαθηματικών εννοιών.

Ένα άλλο σημείο που υπερτερούν τα υπολογιστικά περιβάλλοντα είναι ότι παρέχουν τη δυνατότητα διασύνδεσης μεταξύ μαθηματικών περιοχών που δεν συνδέονται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Επιτρέπουν, επίσης, πολλαπλές και δυναμικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις μίας αλγεβρικής έννοιας. Η σημασία των πολλαπλών αναπαραστάσεων φάνηκε στα τέλη της δεκαετίας του ′80, όταν άρχισαν μέσω της έρευνας να προσδιορίζονται οι λόγοι για τους οποίους η Άλγεβρα αποτελεί ένα τόσο δύσκολο γνωστικό αντικείμενο (Ferrara et al., 2006, p241). Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μίας μαθηματικής έννοιας αποτελούν μία δυνατότητα των ψηφιακών μέσων, η οποία συμβάλλει ώστε η μάθηση να είναι εννοιολογική. Η σύνδεση μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων, που εξασφαλίζεται κυρίως μέσω του δυναμικού χειρισμού και της ανατροφοδότησης από την οθόνη του υπολογιστή, προσδιορίζεται από τον Kaput, 1992, μεταξύ των κωλυμάτων που αίρονται από τα ειδικά σχεδιασμένα υπολογιστικά περιβάλλοντα, που προσφέρουν πολύ-αναπαραστασιακά εργαλεία.

Η ψηφιακή τεχνολογία επίσης, μπορεί να συμβάλλει στην απενοχοποίηση του λάθους. Μέσω της χρήσης των ψηφιακών μέσων, δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να πειραματίζεται και να ελέγχει τις εικασίες που αναπτύσσει, χωρίς να φοβάται για μία αρνητική αξιολόγηση. Το λάθος πλέον αναδεικνύεται σε *γνωστικό εμπόδιο*, δηλαδή, σε εσωτερική δομή, που πρέπει να τροποποιηθεί ή να απορριφθεί, ώστε να επέλθει ατομική εννοιολογική ανάπτυξη (Herscovics, 1989; Κλαουδάτος, 1996). Δεν αποτελεί μέτρο αξιολόγησης, αλλά περισσότερο, αποκαλύπτει μέρος του τρόπου σκέψης του μαθητή (Baroody & Ginsburd, 1990).

Το δυναμικό λογισμικό διευκολύνει την επεξήγηση, παρέχοντας στους μαθητές διαισθητικά στοιχεία, ώστε εύκολα να θέτουν και να εξετάζουν εικασίες (Mariotti, 2002). Όμως, αποκλειστικά το ψηφιακό περιβάλλον, χωρίς κατάλληλα σχεδιασμένες

δραστηριότητες δεν ευνοούν την ανάπτυξη και κατασκευή της μαθηματικής γνώσης (Brousseau, 1997; Laborde, 2000).

2.3 Θεωρητικό υπόβαθρο

2.3.1 Εισαγωγή

Το θεωρητικό πλαίσιο που υιοθετείται για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης και πάνω στο οποίο βασίστηκε η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν, είναι η ταξινόμηση κατά *SOLO* (*"**S**tructure of the **O**bserved **L**earning **O**utcomes"*) – κατηγοριοποίηση σύμφωνα με τη *Δομή των Παρατηρούμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων* (Biggs & Collis, 1991) και το μοντέλο που προτάθηκε από την Hazzan, 1999, σύμφωνα με το οποίο οι απαντήσεις των μαθητών μπορούν να ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα μείωσης του επιπέδου αφαίρεσης.

2.3.2 Κατηγοριοποίηση κατά *SOLO*

2.3.2.1 Διάκριση πλαισίων εννοιολογικής ανάπτυξης

Σύμφωνα με τους Pegg & Tall (2009), στη βιβλιογραφία εντοπίζονται δύο κατηγορίες εννοιολογικής ανάπτυξης. Η πρώτη αποτελείται από τα καθολικά πλαίσια μακρόχρονης ανάπτυξης του ατόμου, όπως είναι η θεωρία των σταδίων του *Piaget*, τα επίπεδα κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων των Van Hiele, οι τρεις τρόποι νοητικής αναπαράστασης του Bruner (διαδραστικός, εικονικός, συμβολικός), όπως και το συνολικό μοντέλο *Δομής Παρατηρούμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων* (*Μοντέλο SOLO*). Οι καθολικές θεωρίες ανάπτυξης του ατόμου, συνηθέστερα ξεκινούν με τις φυσικές αρχικές αλληλεπιδράσεις του μικρού παιδιού με τον κόσμο, και εξελίσσονται με την περιγραφή της ανάπτυξης νέων τρόπων λειτουργίας και τρόπου σκέψης καθώς το υποκείμενο ωριμάζει. Γενικά υπάρχει ενδιαφέρον για το πώς οι διαδοχικές καταστάσεις εισάγουν νέους τρόπους λειτουργίας που αντικαθιστούν πλήρως τους προηγούμενους. Αντίθετα, το μοντέλο *SOLO*, εντάσσει ρητά κάθε λειτουργία στην επόμενη, ώστε μία μεγαλύτερη ποικιλία λειτουργιών να είναι διαθέσιμες για τον μαθητευόμενο. Συγκεκριμένα, ακόμη και αν κάποιο άτομο έχει μεταβεί στο επόμενο στάδιο στο μοντέλο *SOLO*, όπως είναι *ο τυπικός* και *ο συμβολικός-διακριτός τρόπος* σκέψης, ο μαθητής έχει διαθέσιμο τον *κιναισθητικό* –

εικονικό τρόπο σκέψης, που προσφέρει μία εναλλακτική πτυχή. Όμοια και στον Bruner, οι τρεις τρόποι νοητικής αναπαράστασης (διαδραστικός, εικονικός, συμβολικός) φαίνονται να αναπτύσσονται διαδοχικά, αλλά παράλληλα, όλοι οι μέθοδοι που αποκτήθηκαν είναι διαθέσιμοι για να χρησιμοποιηθούν όταν αυτό καταστεί αναγκαίο. Στον παρακάτω πίνακα (*Tall et al, 2009, p468*), φαίνονται τέσσερα καθολικά πλαίσια μακρόχρονης ανάπτυξης:

Piaget Stages	*Van Hiele Levels*	*SOLO modes*	*Bruner Modes*
Sensori Motor	***Recognition***	***Sensori Motor***	***Enactive***
Pre-operational	***Analysis***	***Iconic***	***Iconic***
Concrete Operational	***Ordering***	***Concrete Symbolic***	***Symbolic***
Formal Operational	***Deduction***	***Formal***	
	Rigour	***Post-formal***	

Πίνακας 1. Καθολικά πλαίσια μακρόχρονης ανάπτυξης

Τη δεύτερη κατηγορία αποτελούν τα τοπικά πλαίσια εννοιολογικής ανάπτυξης όπως είναι η θεωρία APOS του *Dubinsky* ή η κατηγοριοποίηση κατά *SOLO*[7]. Σχετίζονται με μία συγκεκριμένη εννοιολογική περιοχή στην οποία το άτομο προσπαθεί να κατανοήσει τη νέα γνώση και να αναπτύξει συνδέσεις ανάμεσα σε αυτή και στις γνωστικές δομές που έχει στη διάθεσή του τη δεδομένη χρονική στιγμή.

Τα τοπικά πλαίσια εννοιολογικής ανάπτυξης (που οι Pegg και Tall (2009), καλούν *κύκλους κατασκευής γνώσης*) επαναλαμβάνονται σε κάθε στάδιο ενός καθολικού πλαισίου μακρόχρονης ανάπτυξης ενός ατόμου. Σε πολλές περιπτώσεις το τελευταίο επίπεδο ενός κύκλου μπορεί να αποτελεί ταυτόχρονα το αρχικό στάδιο ενός επόμενου κύκλου μέσα στο ίδιο στάδιο ενός καθολικού πλαισίου.

2.3.2.2 Η κατηγοριοποίηση κατά *SOLO*

Όπως αναλυτικά αναφέρεται παραπάνω (§ 2.3.2.1), η κατηγοριοποίηση αυτή αποτελεί *τοπικό κύκλο εννοιολογικής ανάπτυξης*. Σύμφωνα με τους Biggs και Collis

[7] Σύμφωνα με τους Biggs και Collis (1991, p64), το μοντέλο της SOLO είναι καθολικό πλαίσιο μακρόχρονης ανάπτυξης, και το αντίστοιχο τοπικό πλαίσιο αποτελεί η κατηγοριοποίηση κατά SOLO (Tall, 2009, p469)

(1991), στο μοντέλο της *SOLO* (καθολικό πλαίσιο μακρόχρονης ανάπτυξης) περιγράφονται πέντε διαφορετικοί τρόποι λειτουργίας ενός ατόμου (πίνακας 1), που ναι μεν αποκτώνται σταδιακά, αλλά όλοι είναι διαθέσιμοι να χρησιμοποιηθούν όταν αυτό καταστεί αναγκαίο. Η κατηγοριοποίηση κατά *SOLO* (*κύκλος κατασκευής της γνώσης*), παρουσιάζει μία συνεπή ακολουθία που αναφέρεται στα επίπεδα της αυξανόμενης πολυπλοκότητας στη διαδικασία σκέψης ενός μαθητή για την κατανόηση ενός αντικειμένου. Η ακολουθία αυτή *"μπορεί να αξιολογήσει το έργο που παράγει ένας μαθητής, σε οποιοδήποτε επίπεδο [του καθολικού μοντέλου] και αν λειτουργεί ο μαθητής"* (Biggs και Collis, 1991, p64).

Η ταξινόμηση κατά *SOLO*, συνεπώς, περιγράφει τα επίπεδα της αυξανόμενης πολυπλοκότητας στη διαδικασία σκέψης ενός μαθητή για την κατανόηση ενός αντικειμένου. Αποτελεί έναν συστηματικό τρόπο περιγραφής επιπέδων απόδοσης. Δίδεται από πέντε στάδια (*προ-δομικό, μονοδιάστατης δομής, πολυδιάστατης δομής, σχεσιακό, εκτεταμένης αφαίρεσης στάδιο*), ενώ προορίζεται να παρέχει ένα πρότυπο για αξιολόγηση. Με στόχο τον προσδιορισμό του βαθμού κατανόησης μίας έννοιας από τους μαθητές, είναι αναγκαίος ο έλεγχος του έργου που παράγουν, όταν προσπαθούν να λύσουν τα προβλήματα ή να εξηγήσουν περίπλοκες έννοιες που σχετίζονται με αυτή.

Τα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας είναι τα εξής (στις παρενθέσεις δίνεται η ονοματολογία που χρησιμοποίησε ο McNaught (2011) [8]):

- ***Προ-δομικό στάδιο – Pre-structural level*** *(Απουσία νοήματος)*: Οι μαθητές χαρακτηρίζονται από έλλειψη γνώσης για την προς συζήτηση έννοια. Έχουν βασικές αδυναμίες, που αντικατοπτρίζονται στη δουλειά τους, στοιχεία της οποίας είναι η κακή δομή, η χρήση άνευ σημασίας λεπτομέρειας, η παρερμηνεία του θέματος, η εσφαλμένη χρήση παραδειγμάτων
- ***Στάδιο μονοδιάστατης δομής – Uni-structural level*** *(Μεμονωμένη διάσταση)*: Στο στάδιο αυτό έχουμε μονόπλευρη προσέγγιση του θέματος. Υπάρχει μία στοιχειώδης επεξεργασία, αλλά το αντικείμενο δεν προσεγγίζεται

[8]Στο παράρτημα Α υπάρχει πίνακας, όπου στην 1η στήλη δίνονται οι όροι που χρησιμοποιήθηκαν από τους Biggs και Collis (1982), κατά τη σύσταση της θεωρίας. Ακολουθεί η ονοματολογία που προτάθηκε από τον McNaught (2011), καθώς και τα σχήματα που κατασκεύασε με στόχο την οπτικοποίηση των διαφορών που υπάρχουν μεταξύ των επιπέδων.

κατάλληλα, αφού ουσιαστικά δεν υπάρχει το απαραίτητο υπόβαθρο για την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας. Το αντικείμενο κατανοείται με μονοδιάστατο τρόπο. Αναπτύσσονται απλές και προφανείς συνδέσεις, που όμως η σημασία τους δεν έχει αφομοιωθεί. Ο μαθητής εστιάζει σε αυτή τη διάσταση, ενώ χαρακτηριστικό στοιχείο είναι ότι βασίζεται σε μνημονικούς κανόνες και σε "εξωτερικά" χαρακτηριστικά της προς μελέτης έννοιας. Ο Confrey (1994), καλεί αυτή την προσέγγιση, *προσέγγιση προτύπου,* λαμβάνοντας υπόψη την τάση των μαθητών να απομνημονεύουν κανόνες, χωρίς να κατανοούν το λόγο ύπαρξής τους, και να αποτυγχάνουν να διακρίνουν τις λεπτές διαφορές μεταξύ των διαφορετικών συμβολικών δομών. Η δομή των εργασιών των μαθητών είναι ελλιπής και χαρακτηρίζονται από δογματική υιοθέτηση μίας μοναδικής λύσης στο σύνολο των δραστηριοτήτων. Σε δύο διαφορετικά ζητήματα προτείνεται η ίδια λύση αναδιατυπωμένη.

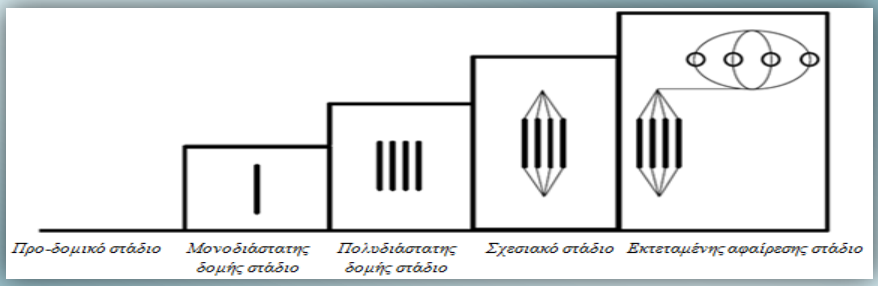
- ***Στάδιο πολυδιάστατης δομής - Multi-structural level*** *(Πολλαπλές διακριτές διαστάσεις)*: Στο στάδιο αυτό έχουμε ταυτόχρονη προσέγγιση διαφορετικών διαστάσεων του προς μελέτη αντικειμένου. Για κάθε μία από αυτές τις διαστάσεις έχουν αναπτυχθεί οι απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των συνιστωσών τους, αλλά υπάρχει αδυναμία δημιουργίας δεσμών ανάμεσά τους. Με απλά λόγια, ο μαθητής εστιάζει παράλληλα σε πολλές – διακριτές όμως μεταξύ τους όψεις του ίδιου αντικειμένου, χωρίς να επιζητά εννοιολογική σύνδεση και επεξήγηση. Γνωρίζει ότι αναφέρονται στο συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά δεν μπορεί να διακρίνει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους και τη σημασία της καθεμίας στη σύσταση μίας ολοκληρωμένης εικόνας έννοιας. Η έννοια, δηλαδή, ερμηνεύεται ως διαδικασία. Η ερμηνεία της έννοιας ως διαδικασία, σύμφωνα με τη Sfard, 1991, p4, *'συνεπάγεται ότι γίνεται αντιληπτή ως πιθανότητα και όχι ως πραγματική οντότητα, που η επιβεβαίωση της ύπαρξής της έρχεται μέσω των απαντήσεων των ερωτημάτων μιας σειράς ενεργειών'*. Και στο στάδιο αυτό, η εργασία των μαθητών χαρακτηρίζεται δομικά ελλιπής. Το μεγαλύτερο μέρος του υλικού (προϋπάρχουσα-νέα γνώση, μεθοδολογίες, στρατηγικές, κοκ) που συγκεντρώνεται για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι κατάλληλο. Ωστόσο, η ποιότητα της δουλειάς των μαθητών αποκαλύπτει μηδαμινή προσπάθεια ανάπτυξης οργανωμένης δομής

- ***Σχεσιακό στάδιο-relational level*** *(λογικά διατυπωμένη απάντηση)*: Στο επίπεδο αυτό αναπτύσσονται συνδέσεις μεταξύ των διακριτών διαστάσεων της έννοιας. Ο μαθητής εστιάζει σε όλα τα διαθέσιμα δεδομένα, καθένα από τα οποία είναι τμήμα ενός συνόλου σχέσεων. Είναι, δηλαδή, ικανός να εκτιμήσει τη σημασία των επιμέρους αναπαραστάσεων της έννοιας, σε σχέση με το όλο. Τα συστατικά ενσωματώνονται σε ένα συνεκτικό σύνολο, με κάθε τμήμα να συμβάλλει στην ολική ερμηνεία της έννοιας (Zachariades et al, 2001). Στο στάδιο αυτό, συνεπώς, η μαθηματική οντότητα γίνεται αντιληπτή ως αντικείμενο, δηλαδή, όπως αναφέρει η Sfard, 1991, p4: *'το άτομο αποκτά την ικανότητα να αναφέρεται στην έννοια σαν να είναι στατική δομή'*. Ομοίως, σύμφωνα με τον Tall et al (2009, p469), *'στο στάδιο αυτό, ο μαθητής δίνει στην οντότητα μία συμπαγή δομή'*. Αναπτύσσεται η ικανότητα αναγνώρισης της ιδέας και διαχείρισής της ως ολότητα. Η αντίληψη μίας έννοιας ως αντικείμενο είναι αυτό που, σύμφωνα με τον Skemp (1976), διέπει τη "*σχεσιακή κατανόηση*" : "*Το να γνωρίζεις ταυτόχρονα τι να κάνεις και γιατί το κάνεις*". Η εργασία των μαθητών χαρακτηρίζεται από μία πολύ καλή δομή, ενταγμένη σε ένα καλά αναπτυγμένο πλαίσιο, ενώ γίνεται χρήση κατάλληλου υλικού και οι ιδέες περιγράφονται με σαφήνεια. Το περιεχόμενο χαρακτηρίζεται από λογική ροή και τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται συνδυάζουν στοιχεία από διαφορετικές πτυχές του εν λόγω αντικείμενου.
- ***Στάδιο εκτεταμένης αφαίρεσης*** *(Απρόβλεπτη επέκταση)*: Στο στάδιο αυτό έχει αναπτυχθεί μία συνολική εικόνα για την έννοια. Ο μαθητής δημιουργεί συνδέσεις όχι μόνο μέσα στα πλαίσια της δεδομένης ενότητας, αλλά εντάσσει την έννοια σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, χρησιμοποιώντας σε διαφορετικούς θεματικούς κύκλους την ίδια, όπως και αρχές και ιδέες που σχετίζονται με αυτή. Η ολοκληρωμένη ολότητα στο σχεσιακό στάδιο, γίνεται αντιληπτή σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, που επιτρέπει τη γενίκευση σε ένα θέμα ή περιοχή. Ουσιαστικά, η έννοια γίνεται κομμάτι ενός *σχήματος*, ενός συνόλου δράσεων, διαδικασιών, αντικειμένων και άλλων σχημάτων, μεταξύ των οποίων αναπτύσσονται συνδέσεις και εφαρμόζονται με διάφορους τρόπους σε καταστάσεις προβλημάτων (Dubinsky, 1991). Σύμφωνα με τον Dubinsky (1991), η γνώση μιας έννοιας είναι η τάση του ατόμου να φέρνει στο νου ένα σχήμα ώστε να είναι σε θέση να χειριστεί, να οργανώσει ή να χειριστεί μια προβληματική κατάσταση. Η συνεκτική πλέον ολότητα γενικεύεται σε ένα

υψηλό επίπεδο αφαίρεσης. Η εργασία των μαθητών χαρακτηρίζεται από μία πολύ καλή δομή, τα ζητήματα καθορίζονται με σαφήνεια, μέσα σε ένα καλά οργανωμένο πλαίσιο που δίνει την αφορμή για συζητήσεις. Το υλικό που συλλέγεται είναι το κατάλληλο, ενώ η επιχειρηματολογία βασίζεται σε μία εκτεταμένη έρευνα πάνω σε πηγές, ενώ υπάρχουν στοιχεία πολύπλοκης ανάλυσης και καινοτόμου σκέψης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, τα δύο ακραία στάδια σε αυτή την κατηγοριοποίηση περιγράφουν την μετάβαση από έναν τρόπο λειτουργίας, του καθολικού μοντέλου, στον άλλο (Biggs & Collis, 1991, p64). Δηλαδή, για παράδειγμα, το εκτεταμένης αφαίρεσης στάδιο στον *κιναισθητικό τρόπο λειτουργίας*, αποτελεί προ-δομικό στάδιο στον *εικονικό* (Pegg & Tall, 1999).

Ουσιαστικά, τα τρία ενδιάμεσα στάδια περιγράφουν πλήρως το επίπεδο απόδοσης στο οποίο εντάσσεται ένας μαθητής, για το έργο που παράγει κατά την ενασχόλησή του με μία δραστηριότητα. Τα τρία αυτά στάδια καλούνται *κύκλος μάθησης ΜΠΣ* (Biggs & Collis,1991, p65; Pegg & Tall, 2009, p469). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το τελευταίο επίπεδο του κύκλου μάθησης μπορεί να αποτελεί ταυτόχρονα το αρχικό



Σχήμα 1. Οι εικόνες αυτές σχεδιάστηκαν από τον *Biggs, J.* με στόχο την οπτικοποίηση των διαφορών μεταξύ των επιπέδων

στάδιο του επόμενου κύκλου μέσα στο ίδιο επίπεδο ενός καθολικού πλαισίου.

2.3.2.3 Σύνδεση της ταξινόμησης με την έννοια των μετασχηματισμών

Παρακάτω δίνεται μια περιγραφή του έργου που παράγουν οι μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη ότι το γνωστικό αντικείμενο εδώ είναι οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων:

- Προ-δομικό στάδιο:

κακή δομή, χρήση άνευ σημασίας λεπτομέρειας, παρερμηνεία του θέματος, εσφαλμένη χρήση παραδειγμάτων

- Στάδιο μονοδιάστατης δομής:

  οι μαθητές μπορούν να επεξεργάζονται τις συναρτήσεις και τις μεταβλητές βήμα-βήμα και αυτές οι ενέργειες εφαρμόζονται είτε στον αναλυτικό είτε στο γραφικό τρόπο αναπαράστασης – βασίζονται σε μνημονικούς κανόνες (όπως για παράδειγμα: "*αφού στον τύπο* $f(x)=x^2+1$, *παρουσιάζεται το σημείο +, η* $g(x)=x^2$, πρέπει να μετατοπιστεί κατακόρυφα και προς τα επάνω κατά μία μονάδα για να συμπέσει με την *f"*), και σε "εξωτερικά" χαρακτηριστικά. Αναγνωρίζουν, για παράδειγμα, διαφορές ανάμεσα σε μία συνάρτηση και τους μετασχηματισμούς της μόνο εξετάζοντας το συντακτικό τύπο που ορίζει τη συνάρτηση, και εντοπίζουν ομοιότητες μόνο ως ολικές ιδιότητες του γραφήματος. Το στάδιο αυτό παρουσιάζει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με το "action level" της θεωρίας APOS (action, process, object, schema). Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η Confrey (1994), καλεί αυτή την προσέγγιση, *προσέγγιση προτύπου*. Οι θεωρίες αυτές, γενικότερα, βασίζονται στην υπόθεση ότι κάθε ερέθισμα αποτελεί μέρος μίας τάξης ή κατηγορίας, είναι μέρος ενός μεγαλύτερου συνόλου. Πιο συγκεκριμένα, εδώ, η προσέγγιση βασίζεται στην υπόθεση ότι η διαδικασία αναγνώρισης του προς μελέτη αντικειμένου, επιτυγχάνεται μέσου της αντιπαραβολής του με κάποιο πρότυπο, π.χ. μνημονικοί κανόνες, με αποτέλεσμα την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου αντιμετώπισης του προβλήματος, χωρίς να καθίσταται αναγκαία η εις βάθος αφομοίωση τόσο της έννοιας, όσο και της διαδικασίας στην οποία η τελευταία υποβάλλεται.

- Στάδιο πολυδιάστατης δομής:

  Οι μαθητές είναι ικανοί λαμβάνοντας υπόψη τους το γράφημα της μετασχηματισμένης συνάρτησης να περιγράψουν τις αλλαγές που έχει υποστεί. Μπορούν να περιγράψουν αλλαγές στις βασικές συναρτήσεις ως αποτέλεσμα εφαρμογής μετασχηματισμών χωρίς να καθίσταται αναγκαία η βήμα προς βήμα αναγνώρισή τους. Παρουσιάζουν δυσκολίες στο να συνδυάσουν πληροφορίες που προκύπτουν από διαφορετικά περιβάλλοντα αναπαράστασης, ενώ υστερούν στη μετάβαση από το ένα στο άλλο.

- Σχεσιακό στάδιο:

  Στο στάδιο αυτό έχουμε ένα ποιοτικό άλμα. Για να γίνει αυτό πρέπει ο μαθητής να είναι σε θέση να διαχειρίζεται τα παραγόμενα μίας διαδικασίας, χωρίς να τον απασχολεί η ίδια η διαδικασία. Σύμφωνα με τη Sfard (1991, pp.10), όταν συμβαίνει αυτό "*...είμαστε σε θέση να μιλάμε για μαθηματικά αντικείμενα*". Όταν οι μαθητές εξοικειώνονται στις διαδικασίες αυτές και είναι ικανοί να τις αντιμετωπίζουν ως ολότητες, σε κάθε αναπαραστασιακό περιβάλλον, καθώς και να μεταβαίνουν εύκολα από το ένα στο άλλο θεωρείται ότι *πραγμάτωσαν (reified)* τη 'διαδικασία εφαρμογής οποιουδήποτε μετασχηματισμού σε μία συνάρτηση'. Θεωρείται ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς ως αντικείμενα, αν μπορούν να επεξεργαστούν τις μετασχηματισμένες συναρτήσεις, μένοντας αποστασιοποιημένοι από τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή τους και αν είναι ικανοί να συσχετίσουν τα χαρακτηριστικά τους με τις πιθανές αλλαγές που έχει υποστεί η αρχική συνάρτηση. Ακόμη, μαθητές που βρίσκονται σε αυτό το στάδιο έχουν τη δυνατότητα να συγκρίνουν και να αντιπαραβάλλουν μετασχηματισμένες συναρτήσεις ως προς τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές τους σε οποιοδήποτε αναπαραστασιακό πλαίσιο, χωρίς να είναι απαραίτητη η αναγωγή τους στη βασική συνάρτηση.
- Στάδιο εκτεταμένης αφαίρεσης: Στο προηγούμενο στάδιο αναπτύσσεται η ικανότητα αντίληψης μίας έννοιας ως αντικείμενο, ως στατική δομή. Στο στάδιο αυτό έχουμε την ένταξη αυτού του αντικειμένου σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, που στη θεωρία *APOS* αυτό ισοδυναμεί με τη δημιουργία και την αναδιοργάνωση γνωστικών σχημάτων (*"schema level"*). Τα γνωστικά σχήματα σχηματίζονται από την αλληλεπίδραση της έννοιας με άλλα αντικείμενα, διαδικασίες, ενέργειες καθώς και γνωστικά σχήματα, η κατασκευή των οποίων έχει προηγηθεί.

2.3.2.4 Σύνδεση της κατηγοριοποίησης κατά *SOLO* με σχετικές θεωρίες

Η Sfard (1991), προτείνει ένα μοντέλο σχηματισμού εννοιών. Με μία σύντομη αναδρομή παρουσιάζει τη διαδικασία ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού. Αποτελεί κυκλική διαδικασία, που κάθε επαναλαμβανόμενο τμήμα του σχήματος αναπαριστά

μία μακρόχρονη διαδικασία, που αποτελείται από τρεις φάσεις. Στο ίδιο άρθρο (Sfard, 1991, p16), αναφέρει ότι το μοντέλο αυτό έχει ισχύ ακόμα και όταν γίνεται αναφορά στην ατομική μάθηση. Υπάρχει μία διαδικασία που διενεργείται στα οικεία αντικείμενα, η οποία ακολουθείται από την ιδέα μετατροπής αυτής της διαδικασίας σε αυτόνομη οντότητα. Τελικά, αποκτάται η ικανότητα αναγνώρισης αυτής της οντότητας ως μία ακέραια ολότητα. Αυτά τα τρία στάδια στην ανάπτυξη της έννοιας καλούνται εσωτερίκευση (*interiorization*), συμπύκνωση (*condensation*) και πραγμάτωση (*reification*), αντίστοιχα.

Στο στάδιο της *εσωτερίκευσης* (*interiorization*), ο μαθητευόμενος εξοικειώνεται με τη διαδικασία που τελικά θα βοηθήσει στην ανάπτυξη μίας νέας έννοιας (όπως το μέτρημα που οδηγεί στους φυσικούς αριθμού, όπως οι αλγεβρικοί χειρισμοί που οδηγούν στις συναρτήσεις). Αυτές οι διαδικασίες είναι λειτουργίες που πραγματοποιούνται σε κατώτερου επιπέδου μαθηματικά αντικείμενα. Σταδιακά, ο μαθητευόμενος, εξοικειώνεται με αυτή τη διαδικασία και γίνεται ολοένα και πιο ικανός να σκέφτεται μία δοθείσα διαδικασία ως ολότητα, χωρίς να νιώθει την ανάγκη να καταφεύγει σε λεπτομέρειες, περνώντας έτσι στη φάση της *συμπύκνωσης* (*condensation*). Αυτή διαρκεί όσο μία νέα οντότητα παραμένει στενά συνδεδεμένη με κάποια διαδικασία. Μόνο όταν το άτομο αποκτά την ικανότητα να αντιλαμβάνεται την έννοια ως ένα ολοκληρωμένο αντικείμενο, μπορούμε να πούμε ότι η έννοια έχει πραγματωθεί. Η *πραγμάτωση* (*reification*), επομένως, ορίζεται ως ένα ποιοτικό άλμα σε μία σταθερή δομή, η ξαφνική ικανότητα αντίληψης μίας έννοιας ως κάτι οικείο. Η νέα οντότητα σύντομα αποκολλάται από τη διαδικασία που παράγεται και πλέον αποκτά νόημα ως μέλος μίας κατηγορίας.

Ανάλογα και ο Dubinsky (1991) περιγράφει το μετασχηματισμό *της δράσης* σε *γενικευμένο αντικείμενο* ως μέρος της θεωρίας APOS (Δράση- Διαδικασία- Αντικείμενο- Σχήμα) *στην οποία οι ενέργειες εσωτερικεύονται σε διαδικασίες*, και τότε θεωρούνται ως αντικείμενα μέσα σε ένα ευρύτερο σχήμα (Dubinsky, 1991). Μία λεπτομερής εξέταση των δύο θεωριών αποκαλύπτει τις ομοιότητες αυτών. Αρχίζουν με ενέργειες πάνω σε γνωστά αντικείμενα (τα οποία μπορεί να είναι υλικά ή νοητικά) που επαναλαμβάνονται με στόχο τη *μετατροπή τους σε οικείες διαδικασίες* (βήμα-βήμα διαδικασίες ρουτίνας), θεωρούνται στο σύνολό τους ως διεργασίες, και στη συνέχεια γίνονται αντιληπτές ως οντότητες αυτοτελείς που μπορούν να

χρησιμοποιηθούν σε υψηλότερο επίπεδο για να δοθεί ένας περαιτέρω κύκλος κατασκευής.

Στην κατά *SOLO* κατηγοριοποίηση, η αρχική ενέργεια ή διαδικασία είναι στο *στάδιο μονοδιάστατης δομής*, στην οποία μία μοναδική διαδικασία χρησιμοποιείται για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Το *στάδιο πολυδιάστατης δομής* θα πρότεινε τη δυνατότητα εναλλακτικών διαδικασιών χωρίς αυτές να θεωρούνται αλληλοσυνδεόμενες, και ως εκ τούτου παραμένει σε *επίπεδο δράσης (action level)* στη *θεωρία APOS*. Το σχεσιακό επίπεδο θα πρότεινε ότι διαφορετικές διαδικασίες με το ίδιο αποτέλεσμα τώρα, ουσιαστικά, θεωρούνται ίδια διεργασία. Αυτό οδηγεί στην εσωτερίκευση της μεθόδου ως αντικείμενο (σε ένα νέο unistructural επίπεδο) και η χρήση του ως μια οντότητα σε ένα ευρύτερο γνωστικό σχήμα (Pegg & Tall, 2009, p472).

Σύμφωνα με τους Gray και Tall (2001), η εννοιολογική ανάπτυξη έχει ως σημείο αναφοράς την παρατήρηση μίας σχετικά πολύπλοκης κατάστασης, την ανάπτυξη συνδέσεων και τη δημιουργία σχέσεων με στόχο την παραγωγή πιο περίπλοκων νοητικών δομών, πρόταση που είναι συνεπής και με το μοντέλο της *Sfard* και με τη θεωρία APOS. Αυτή η ακολουθιακή ανάπτυξη οδηγεί σε έναν κύκλο κατασκευής της γνώσης. Κατά τους Tall και Pegg (2009, p469), αυτή είναι η πορεία που περιγράφεται και στην κατηγοριοποίηση κατά *SOLO* (*κύκλος μάθησης ΜΠΣ*), περιλαμβάνοντας, επιπλέον, και τη δομή των παρατηρούμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σε ερωτήσεις που αφορούν ποικίλα θέματα.

Οι Tall και Pegg (2009, p472), παρουσιάζουν σε πίνακα τα δύο τοπικά πλαίσια (Dubinsky, 1991) & Sfard, 1991)) σε αντιπαραβολή με την κατηγοριοποίηση κατά *SOLO*, δίνοντας την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των σταδίων (πίνακας 2).

Ταξινόμηση κατά SOLO	***Θεωρία APOS (Dubinsky)***	***Μοντέλο της Sfard***
Προ-δομικό στάδιο		
Μονοδιάστατης & Πολυδιάστατης δομής στάδιο	***Action***	***Εσωτερίκευση***
Σχεσιακό στάδιο	***Process***	***Συμπύκνωση***
Μονοδιάστατης σε έναν νέο κύκλο	***Object***	***Πραγμάτωση***
	Schema	

Πίνακας 2. Τοπικά πλαίσια εννοιολογικής ανάπτυξης

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι το προτεινόμενο από τη Sfard (1991) μοντέλο περιγράφει τα βήματα που απαιτούνται στη διαδικασία σχηματισμού μίας έννοιας. Από την άλλη πλευρά, η ταξινόμηση κατά *SOLO* και η θεωρία APOS, είναι δύο μοντέλα που παρέχουν πρότυπο για αξιολόγηση. Στοχεύουν, επίσης, στον προσδιορισμό του βαθμού αφομοίωσης μίας έννοιας από τους μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη το παραγόμενο από αυτούς έργο κατά τη διαδικασία μάθησης.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί η παρατήρηση του Atherton (2011). Το τέταρτο επίπεδο της κατηγοριοποίησης κατά *SOLO*, υιοθετεί στοιχεία από τη *μορφολογική ψυχολογία (gestalt)*. Σύμφωνα με τους κύριους εκφραστές αυτής της θεωρητικής σχολής, τους *Wertheimer, Kofka και Köhler: 'η συνειδητή εμπειρία μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή ως ένα σύνολο και όχι ως κάτι που συγκροτείται από διάφορα επιμέρους στοιχεία'* (Βοσνιάδου, 2004, p28). Στις αρχές του αιώνα, υποστήριξαν ότι η νοητικές διεργασίες αποτελούνται κυρίως από σχηματοποιήσεις σε σύνολα. Τα αντικείμενα γίνονται αντιληπτά σαν καλά οργανωμένοι σχηματισμοί των ερεθισμάτων σε σύνολα παρά σαν άθροισμα των μεμονωμένων μερών τους. Ένα τρίγωνο, για παράδειγμα, είναι κάτι περισσότερο από τρεις γραμμές που είναι τοποθετημένες μαζί · δεν αντιλαμβανόμαστε απλά τρεις γραμμές, αλλά μάλλον τη σχέση που υπάρχει μεταξύ τους (Βοσνιάδου, 2004, pp157-158). Αυτό είναι που περιγράφει το *σχεσιακό επίπεδο*. Ανάμεσα στις συνιστώσες που συμβάλλουν στο σχηματισμό της αφηρημένης μαθηματικής έννοιας (στο απλό αυτό παράδειγμα, οι ευθείες), αφού πρώτα αυτές γίνουν αντιληπτές ως αντικείμενα, αναπτύσσονται οι κατάλληλες σχέσεις και πλέον, η πιο αφηρημένη έννοια, το τρίγωνο, πραγματώνεται.

2.3.3 Αφαίρεση και τρόποι με τους οποίους οι μαθητές την αντιμετωπίζουν

2.3.3.1 Εισαγωγή

Η περιγραφή και η κατηγοριοποίηση των επιπέδων της αυξανόμενης πολυπλοκότητας στη διαδικασία σκέψης ενός μαθητή για την κατανόηση μίας έννοιας είναι ιδιαίτερα σημαντική. Εξίσου μεγάλης σημασίας είναι και η μελέτη των νοητικών στρατηγικών που υιοθετούν οι μαθητές, με στόχο τη τροποποίηση των αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών, σε έννοιες νοητικά προσβάσιμες από τους ίδιους. Η μελέτη του τρόπου σκέψης των μαθητών αποκαλύπτει σημαντικές λεπτομέρειες σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών. Στη βιβλιογραφία, οι δυσκολίες αυτές ονομάζονται συστηματικά λάθη,

σφάλματα, κενά, μαθησιακές δυσκολίες (Lehn, 1983; Baroody & Ginsburd, 1990). Παρόμοια με τους Baroody και Ginsburd (1990), που περιέγραψαν ως κενό το στοιχείο που εμποδίζει την εξισορρόπηση μεταξύ της επίσημης εισαγωγής μίας έννοιας και της προϋπάρχουσας γνώσεις του εκπαιδευόμενου, ο Herscovics (1989), όπως αναλυτικά αναφέρθηκε παραπάνω, περιέγραψε μία εσωτερική διαμάχη που είναι πιθανό να εμφανιστεί ανάμεσα στην προϋπάρχουσα γνώση του μαθητευόμενου και στα νέα γνωστικά σχήματα που καλείται να αφομοιώσει και ονομάζει αυτή την εσωτερική διαμάχη *γνωστικό εμπόδιο*. Η έρευνα πάνω στη μαθηματική σκέψη που πραγματοποιήθηκε από τους Ginsburd (1977) και Baroody & Ginsburd (1990), έδειξε ότι τα περισσότερα μαθηματικά λάθη, δεν είναι απλά τυχαία. Εν αντιθέσει, τα λάθη των μαθητών είναι *βάσιμες ενδείξεις γνωστικών εμποδίων* (Herscovics, 1989, p80) και *αποκαλύπτουν ένα μέρος του τρόπου σκέψης του μαθητευόμενου (*Baroody & Ginsburd, 1990, p56*)*. Τα λάθη των μαθητών, συνεπώς, βοηθούν στην αξιολόγηση και στον προσδιορισμό των *γνωστικών εμποδίων* των μαθητών.

Κατά την Hazzan (1999), η μορφή της απάντησης ενός ατόμου σε ένα γνωστικό ζήτημα, μπορεί να αποδοθεί στην τάση του να δουλεύει σε ένα χαμηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, από το πλαίσιο που παρουσιάζονται οι προς μελέτη έννοιες, χωρίς αυτό να συνεπάγεται απαραίτητα παρανοήσεις και μαθηματικά λάθη (Hazzan, 1999, p75). Η Hazzan (1999) προτείνει ότι η *αφαίρεση*, σχετίζεται:

- με τον βαθμό της αντίληψης της έννοιας από το άτομο
- με τη διττή φύση των μαθηματικών εννοιών (διαδικαστική & εννοιολογική)
- με το βαθμό πολυπλοκότητας της προς συζήτηση έννοιας

2.3.3.2 Η αφαίρεση ως επίπεδο της αντίληψης της έννοιας από το άτομο

Ο πυρήνας της θεωρίας του Piaget για τη μάθηση είναι η διαδικασία που καλείται *assimilation* (*αφομοίωση*), που περιγράφεται ως η ικανότητα της νόησης να αντιμετωπίζει νέες καταστάσεις και να λύνει προβλήματα με βάση τα γνωστικά σχήματα που έχει στη διάθεσή της. Αυτό γίνεται με την ένταξη των νέων ερεθισμάτων στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα, έτσι ώστε αυτά να διευρύνονται χωρίς να αλλάζουν διάρθρωση. Μόνο όμως μέσα από την αλληλεπίδραση του ατόμου με τις νέες καταστάσεις επέρχεται η *προσαρμογή* (*accommodation*), η λειτουργία της νόησης με την οποία το άτομο αντιμετωπίζει αποτελεσματικά καταστάσεις και

προβλήματα, που δεν είναι σε θέση με την *αφομοίωση* να τα υπάγει σε γνωστικά σχήματα. Στην περίπτωση αυτή είτε το άτομο θα τροποποιήσει ένα υπάρχον γνωστικό σχήμα μέσα στο οποίο εντάσσεται η νέα γνώση, είτε δημιουργεί ένα νέο (Papert, 2005, p.366; Κλαουδάτος,1996, pp.22-23).

Η μείωση της αφαίρεσης, με βάση αυτήν την ερμηνεία (ως επίπεδο αντίληψης της έννοιας από το υποκείμενο), προέρχεται από την τάση των μαθητών να βασίζουν τα επιχειρήματά τους, στην υπάρχουσα γνώση, δηλαδή, σε μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία είναι εξοικειωμένοι και έχουν εμπειρία στη διαχείριση τους (δεν επέρχεται *προσαρμογή*, ακόμη και σε περιπτώσεις που καθίσταται αναγκαία). Σύμφωνα με τον Wilensky (1991), το να είναι μία έννοια αφηρημένη ή συγκεκριμένη, δεν είναι εγγενής ιδιότητα της έννοιας, αλλά αποτέλεσμα του συνόλου των εντυπώσεων και των εμπειριών που διαθέτει ένα άτομο για αυτή. Όσο πλουσιότερο είναι, λοιπόν, το σύνολο των γνωστικών δομών που έχει αναπτύξει και όσες περισσότερες συνδέσεις έχει σχηματίσει ένα άτομο για μία έννοια, με προηγούμενα βιώματα και έννοιες, τόσο πιο οικεία και *συγκεκριμένη* είναι γι αυτό. Δεν είναι δύσκολο να προχωρήσουμε λίγο παραπέρα, και να γίνει κατανοητό ότι κάθε αντικείμενο/ έννοια μπορεί να γίνει συγκεκριμένο για κάποιον. Το κεντρικό σημείο για τον ορισμό της έννοιας του *"συγκεκριμένου"*, σύμφωνα πάντα με τον Wilensky (1991), εντοπίζεται στον προσδιορισμό των αλληλεπιδράσεων της προϋπάρχουσας γνώσης του ατόμου με το αντικείμενο και στο σύνολο των αναπαραστάσεων που έχει στη διάθεσή του για αυτή. Αυτή η οπτική επιτρέπει να χαρακτηρίζονται ως συγκεκριμένα αντικείμενα που συνήθως θεωρούνται αφηρημένα, όπως τα μαθηματικά αντικείμενα, δεδομένου ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι αλληλεπίδρασης με αυτά και υπάρχει ένα επαρκές σύνολο τρόπων αναπαράστασης αυτών. Συνεπώς, για την ίδια έννοια το επίπεδο αφαίρεσης διαφέρει για κάθε άτομο. *"Κατά τη διάρκεια των νοητικών διεργασιών της ανάκλησης και χειρισμού μίας έννοιας, πολλές διεργασίες που σχετίζονται έρχονται στο προσκήνιο, συνειδητά και ασυνείδητα επηρεάζοντας τη σημασία και τη χρήση"* (Tall & Vinner, 1981, pp 151-152). Πιο συγκεκριμένα, αν ένα πρόβλημα απαιτεί το χειρισμό αντικειμένων (όπως οι συναρτήσεις) για τα οποία η *εικόνα έννοιας* που έχουν σχηματίσει οι μαθητές, είναι ελλιπής, τείνουν να σκέφτονται με οικεία αντικείμενα και να λύνουν τα προβλήματα χρησιμοποιώντας αυτές τις οικείες οντότητες – χρησιμοποιώντας ιδιότητες από το σύνολο με το οποίο είναι εξοικειωμένοι. Παράδειγμα: *Οι κανόνες που γνωρίζουν για τους πραγματικούς αριθμούς θεωρούν ότι*

έχουν καθολική ισχύ. Όμως, η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν έχει ισχύ στη σύνθεση συναρτήσεων. Σε αυτό το σημείο γίνεται κατανοητό ότι η ύπαρξη της προϋπάρχουσας γνώσης, δεν είναι ικανή συνθήκη που συνεπάγεται αβίαστα τη μάθηση. Εν αντιθέσει, *ορισμένες φορές αποτελεί κώλυμα στην εκμάθηση κάτι νέου* (Schnotz, Vosniadou & Carretero (1999); Βοσνιάδου (2001)).

Η λύση σε αυτό το πρόβλημα, που θα κάνει τη γνώση που καλείται να κατανοήσει ο μαθητής συγκεκριμένη και ουσιώδη, κατά τον Wilensky (1991), είναι η ενίσχυση της εικόνας της προς μελέτη έννοιας, παρέχοντας ευκαιρίες στους μαθητές να αλληλεπιδρούν με αυτή.

2.3.3.3 Η αφαίρεση ως συνέπεια της διττής φύσης των μαθηματικών εννοιών

Η μείωση της αφαίρεσης, με βάση αυτήν την ερμηνεία, είναι αποτέλεσμα της διττής φύσης των μαθηματικών εννοιών. *'Οι αφηρημένες έννοιες, αντιμετωπίζονται με δύο θεμελιωδώς διαφορετικούς τρόπους, εννοιολογικά, ως αντικείμενα και διαδικαστικά, ως διαδικασίες, που αν και φαινομενικά ασυμβίβαστοι, στην ουσία, αλληλοσυμπληρώνονται (*Sfard, 1991, p1*)'*. Κατά τη διάρκεια διαμόρφωσης νοήματος για μία μαθηματική έννοια, η αντίληψή της ως διαδικασία προηγείται και είναι λιγότερο αφηρημένη από την αντίληψή της ως αντικείμενο (Sfard, 1991, p10). Η μετάβαση από τη μία στην άλλη περιγράφεται ως ένα ποιοτικό άλμα από μία δυναμική διαδικασία σε μία σταθερή δομή (Sfard, 1991, p10). Η νέα οντότητα σύντομα αποκολλάται από τη διαδικασία που παράγεται και πλέον αποκτά νόημα ως αυτόνομη ολότητα (Sfard, 1991, p20). Έτσι, η διαδικαστική προσέγγιση μίας μαθηματικής έννοιας μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα χαμηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, από την εννοιολογική.

Η Hazzan (1999), προτείνει ότι η μείωση της αφαίρεσης, δεδομένου ότι η τελευταία είναι αποτέλεσμα της διττής φύσης των εννοιών, εντοπίζεται στο έργο των μαθητών με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Πρώτον, ως η οικειοποίηση τυπικών εκφράσεων και λογικών επιχειρημάτων, χρησιμοποιώντας πρώτο ενικό ή πληθυντικό πρόσωπο. Η μείωση της αφαίρεσης στην περίπτωση αυτή εντοπίζεται στην επιδίωξη των μαθητών να κάνουν πιο προσιτή για αυτούς τη μη οικεία μαθηματική γλώσσα. Χρησιμοποιείται το πρώτο ενικό πρόσωπο, γεγονός που υπογραμμίζει την τάση του υποκειμένου να *κάνει δικιά του τη*

μαθηματική σκέψη, 'εγώ να κάνω κάτι'. Η χρήση του πρώτου ενικού προσώπου είναι ιδιαίτερα έντονη σε ποσοτικές εκφράσεις: *"μπορώ να βρω"*, αντί του *"υπάρχει"*. Ο τρόπος διατύπωσης των απαντήσεων, δηλαδή, αντανακλά τη στροφή προς τη διαδικαστική προσέγγιση (Hazzan, 1999, p81). Πολλές φορές, η χρήση του πρώτου ενικού προσώπου συνοδεύεται και από λεπτομερή περιγραφή των ενεργειών του μαθητή. Ο μαθητής περιγράφει βήμα προς βήμα τη διαδικασία που ακολουθεί. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνει να λειτουργεί με τη διαδικαστική προσέγγιση, σε ένα επίπεδο χαμηλότερης αφαίρεσης, χωρίς να αναγκάζεται να στραφεί στην πιο αφηρημένη εννοιολογική.

Δεύτερον, η μείωση της αφαίρεσης φαίνεται στα παραγόμενα από τους μαθητές ως η τάση χρήσης *κανονικών διαδικασιών* σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος.

Ο όρος *κανονική διαδικασία* αναφέρεται σε μία αλγοριθμική ή όχι διαδικασία που ενεργοποιείται, περισσότερο ή λιγότερο αυτόματα, από ένα δεδομένο πρόβλημα. Αυτό μπορεί να γίνει είτε επειδή η διαδικασία προτείνεται από τη φύση του προβλήματος, είτε επειδή η "προϋπάρχουσα" εκπαίδευση, έχει συνδέσει σταθερά ένα συγκεκριμένο είδος προβλήματος με μία συγκεκριμένη διαδικασία. Η διαθεσιμότητα μίας *κανονικής διαδικασίας* επιτρέπει στους μαθητές να επιλύσουν προβλήματα χωρίς να αναλύσουν ιδιότητες μαθηματικών εννοιών και αυτόματα να ακολουθήσουν βήμα-βήμα τον τρόπο επίλυσης που η *κανονική διαδικασία* εξασφαλίζει (Hazzan, 1999, p81).

Με άλλα λόγια, σε πολλές περιπτώσεις, το υποκείμενο, ακόμη και αν διαθέτει μία πιο προηγμένη αντίληψη μίας έννοιας, τείνει να χρησιμοποιεί μία λιγότερο αφηρημένη διαδικασία, οικεία για αυτό. Δεν χρησιμοποιεί τη θεωρητική γνώση που διαθέτει για το θέμα ως κατευθυντήρια γραμμή, αλλά περιορίζεται στη διαδικασία που γνωρίζει ότι θα του παρέχει τη σωστή απάντηση στο δεδομένο ζήτημα, χωρίς να επιζητά την εννοιολογική κατανόηση.

2.3.3.4 Η αφαίρεση ως βαθμός πολυπλοκότητας της έννοιας

Αυτή η ερμηνεία για αυτόν τον τύπο αφαίρεσης προέρχεται από την υπόθεση ότι όσο πιο σύνθετη είναι μία οντότητα τόσο πιο αφηρημένη είναι. Η μείωση της αφαίρεσης εδώ είναι αποτέλεσμα της τάσης των μαθητών να αντικαθιστούν την πιο πολύπλοκη έννοια, με μία απλούστερη, όπου και επικεντρώνουν την προσοχή τους. Από τη μία μπορεί να είναι μία θετική και χρήσιμη στρατηγική, όπως προτείνεται από τον Polya

(1957). "*Η ανθρώπινη υπεροχή έγκειται στην ικανότητα να αντιμετωπίζεται ένα πρόβλημα έμμεσα, όταν η άμεση προσέγγιση δεν είναι εφικτή*" (Polya, 1957, p114). Ανάμεσα στις στρατηγικές που προτείνει για την έμμεση αντιμετώπιση ενός ζητήματος, είναι η *θεώρηση ειδικών περιπτώσεων*. Η τελευταία περιγράφεται ως *το πέρασμα από τη θεώρηση ενός δοθέντος συνόλου, σε ένα υποσύνολό του ή σε ένα μόνο αντικείμενο αυτού του συνόλου,* (Polya, p190). Συνέχεια αυτής της στρατηγικής είναι, αφού δοθεί λύση για την υποπερίπτωση, η γενίκευση, διαδικασία ιδιαίτερη δύσκολη για τους μαθητές. Αυτός ο μηχανισμός μείωσης της αφαίρεσης βοηθά τους μαθητές να ανταπεξέλθουν σε προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι, έστω και εν μέρει, σε περίπτωση που δεν γενικεύσουν και περιοριστούν σε μία απάντηση που βασίζεται στην ανάλυση μίας συγκεκριμένης περίπτωσης. Ωστόσο, υπάρχει πιθανότητα αυτό το είδος μείωσης του επιπέδου της αφαίρεσης να χρησιμοποιηθεί εσφαλμένα, με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρανοήσεων. Οι μαθητές, με στόχο να αποκτήσουν την ικανότητα επεξεργασίας και διαχείρισης αφηρημένων εννοιών, χρησιμοποιούν λανθασμένα την παραπάνω *ευρετική*. Στην έρευνα των Zazkis et al (2003b), συνήθης πρακτική των μαθητών ήταν να εστιάζουν στην έννοια της μεταβλητής, και όχι στο πιο αφηρημένο αντικείμενο, τη συνάρτηση. Στη μελέτη της Hazzan (1999), οι μαθητές μείωναν το επίπεδο αφαίρεσης αντικαθιστώντας το σύνολο ομάδων, που ήταν το αντικείμενο μελέτης, με ένα από τα στοιχεία του, δουλεύοντας έτσι με ένα λιγότερο σύνθετο αντικείμενο.

Οι τρεις προσεγγίσεις της έννοιας της αφαίρεσης παρουσιάζουν μεταξύ τους πολύ λεπτές διαφορές και σε κάθε περίπτωση, η μείωση του επιπέδου της αφαίρεσης είναι ένας τρόπος περιγραφής του φαινομένου, που κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων, δίνει στις έννοιες που εμπλέκονται κάποιο νόημα.

Κεφάλαιο 3^{ο}

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα

Αυτή η μελέτη στοχεύει στην διερεύνηση του βαθμού κατανόησης από τους μαθητές των μετασχηματισμών συναρτήσεων, όταν οι έννοιες αυτές εισάγονται υπό ένα νέο πρίσμα, που τοποθετεί τη διδασκαλία των μετασχηματισμών, όχι στο πλαίσιο της θεωρίας συναρτήσεων, αλλά σε αυτό των μετασχηματισμών.

Επιπλέον, στα πλαίσια της δεδομένης μελέτης, η παρέμβαση τοποθετείται σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον, εξασφαλίζοντας την ενοποίηση όλων των αναπαραστάσεων. Οι Borba και Confrey (1996) τονίζουν ότι η αυξανόμενη διαθεσιμότητα μέσων, όπως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, υπαγορεύει την αμφισβήτηση της κυριαρχίας της συμβολικής άλγεβρας έναντι των άλλων αναπαραστάσεων, αφού η οπτικοποίηση επιτρέπει στους μαθητές να διαχειρίζονται εύκολα το προς επεξεργασία ζήτημα. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται η δυνατότητα μελέτης της δεξιότητας των μαθητών να αλληλεπιδρούν με τα διαφορετικά είδη αναπαράστασης των μετασχηματισμών. Άλλωστε κατά τους Lage και Trigueros (2006), η έρευνα που αφορά στην κατανόηση των μετασχηματισμών των συναρτήσεων προσφέρεται γι αυτό καθώς και για την ανάλυση των ιδεών που αφορούν την έννοια της μεταβλητής και της συνάρτησης.

Η παρούσα μελέτη, αξιοποιώντας τα πορίσματα των προηγούμενων ερευνών και με βάση το θεωρητικό πλαίσιο, εστιάζει στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Με ποιους τρόπους οι μαθητές κατανοούν τους μετασχηματισμούς συναρτήσεων όταν χρησιμοποιούν ψηφιακά εργαλεία που διαθέτουν πολλαπλές και διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και των μετασχηματισμών τους.

- Ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων στις διαδικασίες κατανόησης των μετασχηματισμών συναρτήσεων από τους μαθητές

3.2 Επιλογή της ερευνητικής μεθόδου

Σύμφωνα με τον Ιωσηφίδη (2003), η ποιοτική έρευνα αποτελεί ένα από τα μεγάλα ερευνητικά εργαλεία στις κοινωνικές επιστήμες. Στον τομέα της εκπαίδευσης, οι ποιοτικές μέθοδοι είναι πλέον διαδεδομένες, καθώς προωθούν την κατανόηση των φαινομένων που συμβαίνουν γύρω από το εκπαιδευτικό πλαίσιο.

Σε έρευνες που βασικός στόχος είναι η σε βάθος κατανόηση της οπτικής του συμμετέχοντα, η ποιοτική έρευνα αποτελεί την καταλληλότερη μέθοδο για την επίτευξή του. Ο ερευνητής, κάνοντας μία ποιοτική έρευνα, επιχειρεί να κατασκευάσει την πραγματικότητα των ερευνώμενων, όπως οι ίδιοι την κατασκευάζουν (Κυριαζή, 1999). Η μελέτη βάθους που συνεπάγεται η ποιοτική έρευνα, οδηγεί στη συγκέντρωση λεπτομερών στοιχείων για πολλαπλές πτυχές των υπό έρευνα περιπτώσεων, διευκολύνοντας έτσι την περιγραφή, ανάλυση, ερμηνεία και κατανόηση τους (Κυριαζή, 1999). Αυτή η διερεύνηση που χαρακτηρίζεται από λεπτομέρεια και βάθος, όπως έχει υπογραμμιστεί και από τον Ιωσηφίδη (2003), αποτελεί και το βασικό πλεονέκτημα της ποιοτικής έρευνας. Για τα παραπάνω χαρακτηριστικά, η ποιοτική μέθοδος θεωρήθηκε η καταλληλότερη για τη διεξαγωγή της συγκεκριμένης έρευνας.

3.3 Πορεία παρέμβασης

Η παρέμβαση ολοκληρώνεται σε τρία στάδια. Στην πρώτη συνάντηση (πρώτο στάδιο), κεντρικός στόχος είναι οι συμμετέχοντες να γνωρίσουν τις λειτουργικότητες που διαθέτει το εκπαιδευτικό λογισμικό, χωρίς να επέλθει η εξοικείωση μέσα από μία διαδικασία, όπου ο ερευνητής τους παρουσιάζει μία σειρά οδηγιών. Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι ο σχεδιασμός του φύλλου εργασίας, που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της συνάντησης, βασίστηκε σε μία ενότητα που οι συμμετέχοντες είχαν ήδη διδαχθεί. Επιδιώχθηκε, έτσι, η προσοχή των μαθητών να επικεντρωθεί στον τρόπο λειτουργίας του εκπαιδευτικού λογισμικού, αλλά ταυτόχρονα οι υπάρχουσες γνώσεις τους για την έννοια των μετασχηματισμών να διερευνηθούν με τη βοήθεια

της ψηφιακής τεχνολογίας. Στο δεύτερο στάδιο, επιχειρείται η επίσημη εισαγωγή της έννοιας της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης υπό ένα νέο πρίσμα, που εντάσσει τη διδασκαλία των μετασχηματισμών, όχι στο πλαίσιο της θεωρίας συναρτήσεων, αλλά σε αυτό των μετασχηματισμών. Τέλος, στο τρίτο στάδιο, στόχος είναι, έχοντας ήδη γνωρίσει, στα πλαίσια των προηγούμενων συναντήσεων, τους τρόπους λειτουργίας τους και τις στρατηγικές που υιοθετούν οι συμμετέχοντες, να αναδειχθούν τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές, όταν εργάζονται σε αλληλοσυνδεόμενα αναπαραστασιακά περιβάλλοντα, με αντικείμενο μελέτης τους μετασχηματισμούς.

3.4 Το πλαίσιο της έρευνας

3.4.1 Σχολείο – Χώρος και Χρόνος

Η ακολουθία των συναντήσεων πραγματοποιήθηκε με μαθητές της Β΄ τάξης ενός Λυκείου των Αθηνών, το πρώτο δεκαήμερο του Οκτωβρίου (4-10, 5-10, 10-10). Οι συναντήσεις πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών που διαθέτει το σχολείο.

Συνολικά πραγματοποιήθηκαν έξι συναντήσεις, η χρονική διάρκεια των οποίων ήταν δέκα περίπου διδακτικές ώρες. Για τις ανάγκες της έρευνας σχηματίστηκαν 2 ομάδες των δύο ατόμων η καθεμία. Κάθε ομάδα για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων της πρώτης συνάντησης χρειάστηκε μία περίπου διδακτική ώρα. Για τις επόμενες δύο συναντήσεις διατέθηκαν αντίστοιχα για κάθε ομάδα, από τέσσερις ώρες (δύο για τη δεύτερη συνάντηση και δύο για την τρίτη). Πρέπει να σημειωθεί ότι για τη διεξαγωγή της έρευνας αξιοποιήθηκαν διδακτικές ώρες από μαθήματα εκτός των μαθηματικών, πάντα έπειτα από συνεννόηση με τη διεύθυνση του σχολείου και τον διδάσκοντα του εκάστοτε μαθήματος. Σε κάθε περίπτωση, έγινε προσπάθεια να διασφαλιστεί η ομαλή παρακολούθηση της ύλης από τους συμμετέχοντες.

3.4.2 Συμμετέχοντες

3.4.2.1 Διαδικασία επιλογής

Στην ερευνητική διαδικασία έλαβαν μέρος τέσσερα άτομα[9], ηλικίας περίπου 16 χρόνων, μαθητές της Β΄ Λυκείου. Η επιλογή των τεσσάρων συμμετεχόντων έγινε με την ακόλουθη διαδικασία:

Ο καθηγητής των Μαθηματικών, με τον οποίο και συνεργάστηκε η ερευνήτρια, μοίρασε στους μαθητές μίας τάξης της Β΄ Λυκείου που τυχαία είχε επιλεγεί, μία βεβαίωση, στην οποία δινόταν η απαραίτητη ενημέρωση σχετικά με την όλη διαδικασία. Όσοι μαθητές επιθυμούσαν να συμμετάσχουν σε αυτή την ερευνητική διαδικασία, κλήθηκαν να φέρουν υπογεγραμμένη τη βεβαίωση από τους κηδεμόνες τους. Γενικά, η εκδήλωση ενδιαφέροντος ήταν σχετικά μικρή, ενώ ειδικά μεταξύ των μαθητών που είχαν επιλέξει τη θεωρητική κατεύθυνση, μπορεί να χαρακτηριστεί ως μηδαμινή. Από το σύνολο των μαθητών που εξέφρασαν ενδιαφέρον για τη δεδομένη διαδικασία, επελέγησαν, από το διδάσκοντα του μαθήματος της Άλγεβρας, τα τέσσερα άτομα που τελικά έλαβαν μέρος στην έρευνα. Τα βασικά κριτήρια επιλογής, τα οποία και προσδιορίστηκαν από την ερευνήτρια, ήταν τα ακόλουθα:

- αποδοχή του συγκεκριμένου ρόλου από τους μαθητές (κριτήριο το οποίο στο πρώτο στάδιο της διαδικασίας της επιλογής είχε εκπληρωθεί)
- οι μαθητές να παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τα μαθήματα που αφορούν τα Μαθηματικά (Άλγεβρα – Γεωμετρία – Μαθηματικά Κατεύθυνσης)
- να μην βρίσκονται στα άκρα της σχολικής επίδοσης
- να εκφράζουν ανοιχτά τις ιδέες τους
- να συνεργάζονται, να συζητούν
- να διαπραγματεύονται τις υποθέσεις που προκύπτουν
- να είναι εξοικειωμένοι με την ψηφιακή τεχνολογία
- να έχουν σχετική άνεση με τα υπολογιστικά εργαλεία

[9] Οι τέσσερις μαθητές θα συμβολίζονται ως μαθ_Α, μαθ_Β, μαθ_Γ, μαθ_Δ. Για λόγους πληρότητας αναφέρεται το φύλο των συμμετεχόντων. Οι τρεις από τους τέσσερις ήταν αγόρια (μαθ_Β, μαθ_Γ, μαθ_Δ).

3.4.2.2 Ομοιογένεια

Ως καταλληλότερη κρίθηκε η σχετικά ομοιόμορφη κατανομή επίδοσης μεταξύ των μελών της κάθε ομάδας, προκειμένου η συνεργασία να είναι πιο αποτελεσματική και προσοδοφόρα. Σύμφωνα με τις Leikin και Zaslavsky (1997), οι μαθητές εκφράζουν απορίες και ζητούν εξηγήσεις από τους συμμαθητές τους, πιο εύκολα από ότι θα τις ζητούσαν από τον εκπαιδευτικό (στη δεδομένη περίπτωση, από την ερευνήτρια). Με αυτό τον τρόπο, επωφελούνται τόσο οι μαθητές που δέχονται τις εξηγήσεις, όσο και εκείνοι που δίνουν τις απαντήσεις. Όμως, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι πρώτη φορά ζητείται από τους μαθητές να εργαστούν ομαδοσυνεργατικά, τουλάχιστον όσο αφορά τα μαθήματα των μαθηματικών, επιλέχθηκε αυτή η ομοιογενής σύνθεση, προκειμένου να αποφευχθούν καταστάσεις, στις οποίες ο πιο αδύναμος μαθητής μετατρέπεται σε παθητικό ακροατή που δέχεται άκριτα τις απαντήσεις του άλλου μέλους της ομάδας, με στόχο, δηλαδή, τη διασφάλιση της σωστής εσωτερικής λειτουργίας των ομάδων.

3.4.2.3 Μαθήματα μαθηματικών που είχαν παρακολουθήσει ή παρακολουθούν

Καθώς οι συμμετέχοντες ήταν, όπως προαναφέρθηκε, μαθητές της Β΄ Λυκείου, σύμφωνα με το υπάρχον ελληνικό σύστημα, από την αρχή του σχολικού έτους είχαν επιλέξει την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουν. Οι τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες (μαθ_Α, μαθ_Β, μαθ_Δ), παρακολουθούσαν την τεχνολογική κατεύθυνση, ενώ ο τέταρτος τη θετική (μαθ_Γ).

Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην ερευνητική διαδικασία, στην προηγούμενη τάξη είχαν διδαχθεί εξίσου φιλολογικά και θετικά μαθήματα, όπως προβλέπεται άλλωστε από το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Ιδίως στα μαθηματικά, έχουν παρακολουθήσει ένα μάθημα Άλγεβρας και ένα μάθημα Γεωμετρίας. Στη δεύτερη τάξη του λυκείου, την οποία τώρα παρακολουθούν οι συμμετέχοντες, γίνεται μία διάκριση στη βαρύτητα που θα έχουν οι δύο κατηγορίες μαθημάτων (θετικά και θεωρητικά μαθήματα) και οι μαθητές έχουν την υποχρέωση να επιλέξουν σε ποιον από τους δύο τομείς θα εξειδικεύσουν τις γνώσεις τους. Όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, και οι τέσσερις συμμετέχοντες είχαν επιλέξει να δώσουν βαρύτητα στα θετικά μαθήματα. Συνεπώς, εστιάζοντας στο μάθημα των μαθηματικών, οι συμμετέχοντες παρακολουθούσαν το μάθημα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης, τα

οποία μπορούν να χαρακτηριστούν ενισχυμένα. Και για τις δύο κατευθύνσεις (Θετική - Τεχνολογική), η διδασκαλία τους στηρίζεται στο ίδιο εγχειρίδιο και η διδακτέα ύλη είναι ίδια. Επίσης, παρακολουθούσαν, ένα μάθημα Άλγεβρας και ένα Γεωμετρίας, μαθήματα *γενικής παιδείας*, κοινά για όλους τους μαθητές και των τριών κατευθύνσεων (Θετική – Τεχνολογική - Θεωρητική). Τέλος, και οι τέσσερις μαθητές ανέφεραν, μετά από ανάλογη ερώτηση που τους τέθηκε, ότι υποστηρίζονταν με ιδιωτικά ιδιαίτερα μαθήματα.

3.4.2.4 Προϋπάρχουσα γνώση

- **Προϋπάρχουσα γνώση για μετασχηματισμούς**

Οι μαθητές έχουν έρθει σε μία πρώτη επαφή με την έννοια της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης της καμπύλης κατά τη διδασκαλία της συνάρτησης $y = a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$ (*). Σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο, η διδασκαλία αυτή στηρίζεται σε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι εφαρμόζονται στο τριώνυμο ώστε να έρθει στη μορφή $a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$. Με βάση τη μορφή που έχει το μετασχηματισμένο πλέον τριώνυμο, δίνονται οι μεταφορές της βασικής δευτεροβάθμιας συνάρτησης $y = a \cdot x^2$. Μέσω αυτών υλοποιούνται η κατασκευή του γραφήματος της συνάρτησης (*) και η μελέτη των συναρτησιακών ιδιοτήτων της.

Στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις[10] περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2011-12, κλήθηκαν να απαντήσουν στο ακόλουθο ερώτημα:

ΘΕΜΑ Γ
Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = -x^2 + x + 6$
Γ.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

[10] Η ερευνήτρια πληροφορήθηκε για τις επιδόσεις των μαθητών, στο μάθημα της Άλγεβρας, όπως και για την ύπαρξη των σχετικών, με τα ερωτήματα των φύλλων εργασίας, ζητημάτων στα γραπτά των προαγωγικών εξετάσεων, μόνο μετά από την ολοκλήρωση των τριών συναντήσεων με τους μαθητές

Ακόμη, τα θέματα των γραπτών προαγωγικών εξετάσεων περιόδου Μαΐου – Ιουνίου, 2011-12, του συγκεκριμένου ΓΕΛ Αθηνών, για το μάθημα της Άλγεβρας, δίνονται στο σύνολό τους στο παράρτημα Ε της παρούσας μελέτης

Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου προσεγγίζουν το συγκεκριμένο ζήτημα κυρίως διαισθητικά και εμπειρικά. Πρέπει να προσδιορίσουν την κορυφή της παραβολής και εξετάζοντας το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου να δώσουν την απάντησή τους.

Για τον προσδιορισμό της κορυφής υπάρχουν δύο τρόποι:

- ✓ με τη βοήθεια του τύπου που δίνεται στο σχολικό εγχειρίδιο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{2\alpha}\right)$
- ✓ με συμπλήρωση τετραγώνου, μέθοδος που οδηγεί στο μετασχηματισμένο τριώνυμο, στην προκειμένη στο $h(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

Ο διδάσκων του τμήματος, μετά το πέρας των τριών συναντήσεων με τους τέσσερις μαθητές, ανέφερε σε συζητήσεις που πραγματοποιήθηκαν μεταξύ της ερευνήτριας και του ιδίου, ότι σε παρόμοια ερωτήματα που έθετε κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της συγκεκριμένης παραγράφου, παρότρυνε τους μαθητές να χρησιμοποιούν για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων της κορυφής τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, ώστε στη συνέχεια, να είναι σε θέση, οι μαθητές, να προσδιορίσουν τα διαστήματα μονοτονίας. Σύμφωνα με τον διδάσκοντα, βασική επιδίωξή του ήταν, όχι μόνο να επιτύχει οι μαθητές να απαντήσουν ορθά σε τέτοιου τύπου ερωτήματα, αλλά ταυτόχρονα να κατανοήσουν πώς οι συντεταγμένες της κορυφής σχετίζονται με τις μετατοπίσεις που υφίσταται το γράφημα της εκάστοτε προς μελέτη συνάρτησης. Με άλλα λόγια, μέσω των βασικών μεταφορών της δευτεροβάθμιας συνάρτησης $y=ax^2$, στην προκειμένη της $y=-x^2$, οι μαθητές να κατανοήσουν το ζήτημα σε βάθος και να μην βασίζονται στο μνημονικό κανόνα, που ουσιαστικά δεν προσφέρει κάποια εννοιολογική επεξήγηση. Ωστόσο, μόνο ένας από τους τέσσερις συμμετέχοντες (μαθ_Β) προσπάθησε, ανεπιτυχώς, να προσεγγίσει το ζήτημα με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου, αλλά εν τέλει, όπως και οι υπόλοιποι τρεις, χρησιμοποίησε για την επίλυση του υποερωτήματος τον τύπο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{2\alpha}\right)$.

Επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την ανάλυση παρακάτω παρουσιάζουν οι απαντήσεις των μαθητών στο υποερώτημα (γ), του θέματος Δ.2.

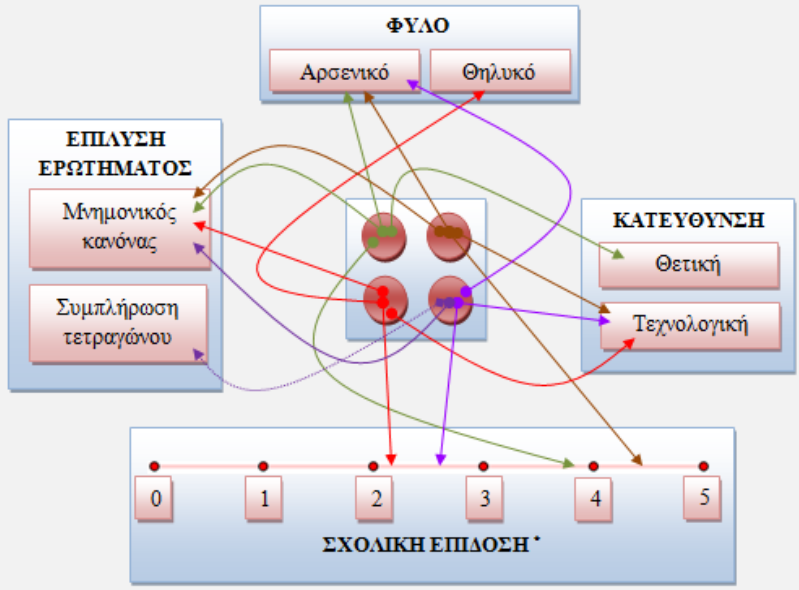
ΘΕΜΑ Δ

Δ.2. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ και $g(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g

Μόνο ο ένας από τους τέσσερις μαθητές ολοκλήρωσε επιτυχώς το ερώτημα (μαθ_Δ). Από τους υπόλοιπους τρεις, οι δύο (μαθ_Α, μαθ_Β) έδωσαν μία ικανοποιητική απάντηση, προσδιόρισαν μόνο την τετμημένη των ζητούμενων σημείων, ενώ η προσέγγιση του τέταρτου ήταν εντελώς λανθασμένη (μαθ_Γ).

Στο ακόλουθο σχήμα, δίνονται συστηματοποιημένα κάποια από τα χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων:



Σχήμα 2. Αυτό το απλό παράλληλο κατανεμημένο διαδικαστικό δίκτυο (ή αλλιώς συνδετιστικό μοντέλο) παριστάνει με βέλη κάποια από τα χαρακτηριστικά κάθε συμμετέχοντα

* Ως σχολική επίδοση εδώ λαμβάνεται υπόψη η βαθμολογία κάθε συμμετέχοντα στο γραπτό του, στις προαγωγικές εξετάσεις περιόδου Μαΐου – Ιουνίου, για το μάθημα της Άλγεβρας

μαθ_Α μαθ_Γ
μαθ_Β μαθ_Δ

- **Εξοικείωση με τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας**

Οι συμμετέχοντες στην ερευνητική διαδικασία ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας. Ωστόσο, πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οι συναντήσεις αυτές

αποτέλεσαν τη δεύτερη φορά που ήρθαν σε επαφή με ένα διδακτικού περιεχομένου υπολογιστικό περιβάλλον. Οι μαθητές γνώρισαν το συμβολικό αναπαραστασιακό σύστημα του δεδομένου εκπαιδευτικού λογισμικού (*Geogebra*), στο πλαίσιο ενός σεναρίου που υλοποιήθηκε από το διδάσκοντα της τάξης, στο παρελθόν. Συνεπώς, οι συμμετέχοντες αναμένεται να αντιμετωπίσουν θέματα εξοικείωσης με τη χρήση του ανωτέρω λογισμικού. Τα θέματα αυτά επίκειται να παρουσιαστούν σε περιορισμένη συχνότητα, αφού, κατά τις Ferrara et al (2006), η δεξιότητα με την οποία ένα άτομο χειρίζεται ένα λογισμικό διερευνητικού περιεχομένου ενισχύεται από την ήδη υπάρχουσα εξοικείωση με τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας. Σύμφωνα με τον Monaghan (2004), τα ζητήματα αυτά δεν είναι τόσο μαθηματικής φύσης, ωστόσο, είναι αναγκαίο να διευκρινιστούν.

3.4.3 Η ερευνήτρια

Η στάση που υιοθέτησε η ερευνήτρια διαφοροποιήθηκε ανάλογα με τις ανάγκες της εκάστοτε συνάντησης (πραγματοποιήθηκαν συνολικά τρεις συναντήσεις, χαρακτηριστικά των οποίων δίνονται αναλυτικά στην παράγραφο 5).

Στην πρώτη συνάντηση, βασικό στοιχείο που καθόρισε την πρακτική της ερευνήτριας ήταν η παρατήρηση του Monaghan (2004, pp344-345), ότι είναι αναγκαίο να διασφαλιστεί ότι οι δυσκολίες στο τεχνικό κομμάτι δεν θα αποτελέσουν κώλυμα για τη συμμετοχή των μαθητών στην μαθησιακή διαδικασία. Επιδιώχθηκε η μεταλλαγή του *μέσου* (παιδαγωγικό λογισμικό) σε *"υποδομή"*. Ο βαθμός στον οποίο ένα *μέσο* γίνεται *υποδομή*, σύμφωνα με τον Kaput (2002), σχετίζεται με το βαθμό που περνά *απαρατήρητο*. Για το σκοπό αυτό λειτούργησε ως *τεχνικός βοηθός* και *συνεργάτης* των συμμετεχόντων, επιδιώκοντας *τη διευκόλυνση της επιτέλεσης του έργου* τους[11], στοχεύοντας όμως παράλληλα και στην ανάπτυξη στρατηγικών αξιοποίησης των εργαλείων του λογισμικού.

Στη δεύτερη συνάντηση εισήχθη για πρώτη φορά, επίσημα, η έννοια της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης. Συνεπώς, η ερευνήτρια έπρεπε να φροντίσει για την απόκτηση κοινής ορολογίας, καθώς και να ελέγχει τα συμπεράσματα των συμμετεχόντων. Σε αυτή τη φάση είχε κυρίως ρόλο εκπαιδευτικού, καθώς κλήθηκε

[11] Υιοθετώντας τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει ο εκπαιδευτικός, σύμφωνα με τον Heid et al (1990, p150), όταν χρησιμοποιεί στα πλαίσια της διδασκαλίας του την ψηφιακή τεχνολογία διδασκαλία

να δημιουργήσει κατάλληλες ευκαιρίες και εμπειρίες στους μαθητές για να οικοδομήσουν τη γνώση, να καθοδηγήσει τους μαθητές με ερωτήσεις και υποδείξεις, να *'πιέσει'* για επεξήγηση και νόημα, να κάνει τις απαραίτητες εννοιολογικές συνδέσεις, ενθαρρύνοντας, παράλληλα, την αυτενέργεια των μαθητών και συστηματοποιώντας τις διαδικασίες σκέψης και τις στρατηγικές των μαθητών, έτσι ώστε να θέτουν οι ίδιοι οι μαθητές ερωτήσεις και να ελέγχουν τη διαδικασία επίλυσης.

Στην τελευταία συνάντηση, ο ρόλος της διαφοροποιήθηκε. Η ερευνήτρια ήταν περισσότερο αποστασιοποιημένη. Για τις παρεμβάσεις που πραγματοποίησε υιοθετήθηκε η στρατηγική των *"why questions"*. Σύμφωνα με τη Mariotti (2007), οι μαθητές, μέσω της συζήτησης που αναπτύσσεται με τη βοήθεια των ερωτήσεων, δεν χάνουν την επαφή με το πραγματικό νόημα και δεν αποκλίνουν από την αυστηρότητα που απαιτείται. Η επιλογή των ερωτήσεων πρέπει να είναι προσεκτική ώστε να προάγεται η συζήτηση, να εντείνεται η αλληλεπίδραση και ο προβληματισμός.

3.5 Το υπολογιστικό περιβάλλον

3.5.1 Το περιβάλλον του Geogebra

Στη δεδομένη διερευνητική διαδικασία, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής ήταν εργαλείο παρατήρησης, έκφρασης και διερεύνησης των μαθηματικών εννοιών. Το παιδαγωγικό λογισμικό Geogebra, στο οποίο βασίστηκαν οι δραστηριότητες, διαθέτει χαρακτηριστικά CAS. Οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά στη διαμόρφωση της έννοιας και έρχονται σε επαφή με όλα τα λεπτά και αδιόρατα ζητήματα που την περιβάλλουν. Το κατασκευαστικό και ερευνητικό περιβάλλον του λογισμικού, επιτρέπει την ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων, καθώς και την αναζήτηση απαντήσεων με βιωματικό τρόπο. Το λογισμικό έρχεται να δώσει στα παιδιά τη δυνατότητα να ενοποιήσουν τις αναπαραστάσεις της προς συζήτηση έννοιας. Το κεντρικό παράθυρο του περιβάλλοντος τους επιτρέπει να ενεργούν σε αντικείμενα που αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τους και όχι σε κάτι αφηρημένο, όχι αναγκαία απορρίπτοντας τις προϋπάρχουσες εικόνες, αλλά χτίζοντας πάνω σε αυτές. Οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα για μία νέα έννοια, με βάση τους γνωστικούς τους πόρους που σχετίζονται με την εργασία που τους έχει ανατεθεί (Hoyles & Healy, 1997). Παράλληλα, οποιαδήποτε αλλαγή συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη αναπαράσταση συνεπάγεται

άμεση μεταβολή στις υπόλοιπες. Το δυναμικό περιβάλλον επιτρέπει στους χρήστες να πειραματίζονται ελεύθερα με στόχο να παρατηρήσουν πώς οι αναπαραστάσεις ανταποκρίνονται δυναμικά σε αλλαγές, ενώ, παράλληλα, διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής, καθώς και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών. Δεν παραθέτει, συνεπώς, απλά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις, αλλά επιτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών, ενώ ο σχεδιασμός του στοχεύει:

- στη δημιουργία ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων
- στη διάθεση λειτουργικοτήτων που δεν απατώνται με τον ίδιο τρόπο και στα στατικά μέσα
- στην ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων για όσα συμβαίνουν στην οθόνη, ενισχύοντας παράλληλα τις προϋποθέσεις για αφαιρετική σκέψη και αναστοχασμό. Ο μαθητής, έχει, έτσι τη δυνατότητα να ελέγχει τις δράσεις του και να επαναπροσδιορίζει τις στρατηγικές του, να διερευνά, δηλαδή, τους τρόπους επίτευξης των ζητούμενων μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

3.6 Η πιλοτική έρευνα

Πριν την εκπόνηση της παρούσας έρευνας κρίθηκε απαραίτητη η πιλοτική εφαρμογή των διαδικασιών που είχαν σχεδιαστεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Ο στόχος της πιλοτικής έρευνας έγκειται στον εντοπισμό των *"αδυναμιών"* του σχεδιασμού και των σημείων εκείνων που πιθανόν να δημιουργούσαν κωλύματα κατά τη διεξαγωγή της κεντρικής έρευνας. Συνεπώς, δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στον έλεγχο των μέσων συλλογής δεδομένων, ενώ παράλληλα εξετάστηκε η επιρροή της βιντεοσκόπησης στη συμπεριφορά του υποκειμένου. Η διαδικασία αυτή παρείχε τη δυνατότητα να ληφθούν τα απαραίτητα διορθωτικά μέτρα.

Στην πιλοτική έρευνα έλαβε μέρος ένα άτομο, ηλικίας 16 περίπου χρόνων, μαθήτρια της Β΄ τάξης ενός ΓΕΛ της Αθήνας. Η συμμετέχουσα έλαβε την απαραίτητη ενημέρωση σχετικά με την όλη διαδικασία και είναι εξοικειωμένη με τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας. Ωστόσο, πρέπει να υπογραμμιστεί ότι για πρώτη φορά ήρθε σε επαφή με ένα διδακτικού περιεχομένου υπολογιστικό περιβάλλον, επομένως και

με το συμβολικό αναπαραστασιακό σύστημα αυτού, στοιχείο που δεν αποτέλεσε κώλυμα κατά τη διεξαγωγή.

Η πιλοτική έρευνα διεξήχθη σε εργαστήριο υπολογιστών. Σε αντίθεση με την πορεία που ακολούθησε η τελική έρευνα, ολοκληρώθηκε σε δύο 2ωρες συναντήσεις, καθώς η επιλογή αυτή δεν επηρέαζε τους σκοπούς της, ενώ παράλληλα εξυπηρετούσε διαδικαστικά θέματα (διαθεσιμότητα υποκειμένου).

Η ολοκλήρωση της υπέδειξε, σε ορισμένες περιπτώσεις την αναγκαιότητα για αλλαγή στην πορεία των δραστηριοτήτων, ενώ κρίθηκαν υποχρεωτικές κάποιες εσωτερικές μεταβολές στη διάρθρωση τους. Επίσης, στοχεύοντας πάντα στην καλύτερη εξυπηρέτηση των ερευνητικών ερωτημάτων, προστέθηκαν κάποια ζητήματα. Σχετικά με τα ψηφιακά μέσα συλλογής δεδομένων, με την ολοκλήρωση της 1ης συνάντησης και για λόγους πληρότητας, χρησιμοποιήθηκε στην επόμενη το CamStudio-Recorder. Το δεδομένο λογισμικό επιτρέπει την καταγραφή της επικοινωνίας και των ενεργειών των μαθητών κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους με το υπολογιστικό περιβάλλον. Χρήση του έγινε και κατά τη διεξαγωγή της κεντρικής έρευνας. Η επίδραση της κάμερας στη συμπεριφορά του υποκειμένου ήταν μηδαμινή, αφού είχε λάβει πλήρη ενημέρωση για τις συνθήκες διεξαγωγής.

3.7 Οι δραστηριότητες

3.7.1 Συνάντηση 1η: Εξοικείωση με το υπολογιστικό περιβάλλον

Η πρώτη συνάντηση[12] είχε κυρίως δύο στόχους. Σε ένα πρώτο στάδιο, να λειτουργήσει ως φάση εξοικείωσης των συμμετεχόντων με το υπολογιστικό περιβάλλον. Σκοπός ήταν να μην επέλθει η εξοικείωση μέσα από μία διαδικασία όπου ο ερευνητής παρουσιάζει μία σειρά οδηγιών στους συμμετέχοντες, σχετικά με τις λειτουργικότητες που διαθέτει το Geogebra. Με τον όρο *λειτουργικότητα* περιγράφονται οι δυνατότητες και ο τρόπος χρησιμοποίησης ενός εργαλείου από το χρήστη (*εγγενείς λειτουργικότητες*) καθώς και η συμπεριφορά του κατά τους χειρισμούς στην επιφάνεια εργασίας (*προσαρμοσμένες λειτουργικότητες*). Η επιλογή της πρώτης δραστηριότητας πραγματοποιήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε, τα υποκείμενα

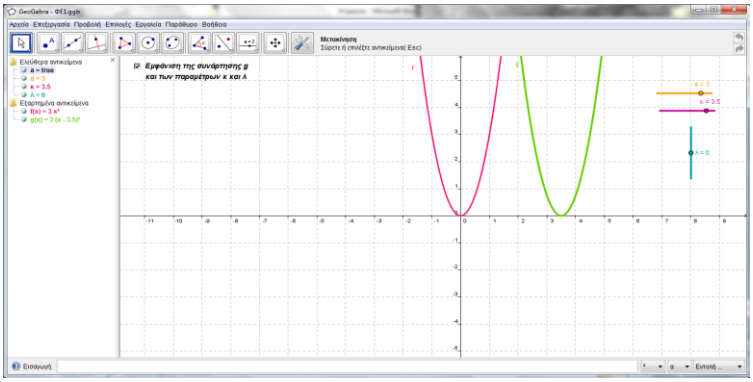
[12] Για τις ανάγκες της πρώτης συνάντησης σχεδιάστηκε ένα φύλλο εργασίας (παρατίθεται στο παράρτημα Β της παρούσας εργασίας), το οποίο βασίστηκε σε ένα αρχείο *Geogebra*.

να πειραματιστούν με οικείες έννοιες και, έτσι, να υπάρξει επικέντρωση της προσοχής στις εγγενείς και στις προσαρμοσμένες λειτουργικότητες του λογισμικού (*εισαγωγή, παράθυρο άλγεβρας, δρομείς, διαδραστική επιφάνεια, σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων*).

Συγκεκριμένα, τα συμπεράσματα στα οποία καλούνται να καταλήξουν, με χρήση του δρομέα και αφορούν την καμπυλότητα της παραβολής, τα έχουν ήδη συναντήσει στην παράγραφο 7.1 του σχολικού εγχειριδίου (Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων, Α΄ Λυκείου, Ανδρεαδάκης, 2011). Με την υποστήριξη της διαδικασίας με το διερευνητικό λογισμικό που έχει τα χαρακτηριστικά *CAS*, οι μετασχηματισμοί αυτοί οπτικοποιούνται και γίνονται δυναμικοί. Χρησιμοποιώντας οι συμμετέχοντες τη διερευνητική προσέγγιση του συρσίματος (*περιηγητικό σύρσιμο*), έχουν τη δυνατότητα να ενισχύσουν την εικόνα που έχουν διαμορφώσει μέσα από την παρατήρηση των περιορισμένων στατικών εικόνων του σχολικού εγχειριδίου και να διατυπώσουν ευκρινώς τα ήδη γνωστά συμπεράσματα. Ενώ στο σχολικό εγχειρίδιο τα συμπεράσματα αυτά δίνονται σε μορφή παρατήρησης, το δυναμικό λογισμικό διευκολύνει την αιτιολόγηση του γενομένου, καθώς παρέχει στους μαθητές διαισθητικά στοιχεία ώστε εύκολα να θέτουν και να εξετάζουν εικασίες (Mariotti, 2007).

Η διδασκαλία της συνάρτησης $y = a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$ (*), όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, με βάση το σχολικό εγχειρίδιο, στηρίζεται σε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Αυτοί εφαρμόζονται στο τριώνυμο ώστε να έρθει στη μορφή $a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$. Με βάση τη μορφή που έχει το μετασχηματισμένο πλέον τριώνυμο, δίνονται οι μεταφορές της βασικής δευτεροβάθμιας συνάρτησης $y = a \cdot x^2$. Μέσω αυτών των μεταφορών υλοποιούνται η κατασκευή του γραφήματος της συνάρτησης (*) και η μελέτη των συναρτησιακών ιδιοτήτων της. Συνεπώς, οι συμμετέχοντες είχαν έρθει σε μία πρώτη επαφή με την έννοια της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης καμπύλης · έτσι, οι υπάρχουσες γνώσεις από τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$ δύνανται να χρησιμοποιηθούν ως αφετηρία και ως μια πρώτη εφαρμογή για την εισαγωγή στις προς συζήτηση έννοιες, στοιχείο που αποτελεί το δεύτερο στόχο της συνάντησης.

Στη 2η δραστηριότητα, οι συμμετέχοντες, με τη χρήση ενός αντικειμένου το οποίο έχει ήδη μελετηθεί, καλούνται να αναπτύξουν τις πρώτες συνδέσεις και να κάνουν παρατηρήσεις, ώστε να μεταβούν ομαλά στις έννοιες της κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης. Άλλωστε τα τέσσερα πρώτα ερωτήματα του 1ου και 2ου ζητήματος οδηγούν τους μαθητές να διαπιστώσουν τους μετασχηματισμούς και να πειραματιστούν με αυτούς. Στο πνεύμα του πρώτου στόχου της συνάντησης, το *παράθυρο της άλγεβρας* φαίνεται στα δύο αυτά ζητήματα, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να παρατηρήσουν τις μεταβολές που υφίσταται η εξίσωση των συναρτήσεων και να κάνουν τις συνδέσεις με τις αλλαγές στις οποίες υπόκειται το αντίστοιχο γράφημα.



Εικόνα 9. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 2η

3.7.2 Συνάντηση 2η: Προϋπάρχουσα γνώση μέσα από ένα νέο πρίσμα

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα δεν έχουν διδαχθεί επίσημα τις δύο έννοιες της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης. Στη δεύτερη συνάντηση[13], υιοθετείται η παιδαγωγική προσέγγιση, η προτεινόμενη από τους Zazkis, Liljedahl και Gadowsky (2003), που τοποθετεί τη διδασκαλία των μετασχηματισμών, όχι στο πλαίσιο της θεωρίας συναρτήσεων αλλά σε αυτό των μετασχηματισμών. Για τις ανάγκες της δεύτερης συνάντησης σχεδιάστηκε ένα φύλλο εργασίας το οποίο αποτελείται από έξι δραστηριότητες. Αυτές, για πρακτικούς λόγους, αλλά και επειδή το επιτρέπει το

[13] Για τις ανάγκες της δεύτερης συνάντησης σχεδιάστηκε ένα φύλλο εργασίας (παρατίθεται στο παράρτημα Γ της παρούσας εργασίας), το οποίο βασίστηκε σε ένα αρχείο *Geogebra*..

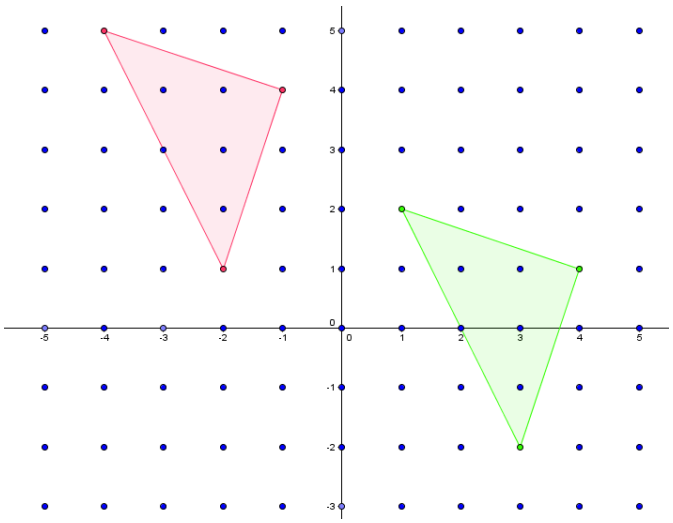
περιεχόμενό τους είναι δυνατόν να ομαδοποιηθούν σε δύο κατηγορίες. Οι δύο πρώτες αποτελούν τη μία και οι υπόλοιπες τέσσερις τη δεύτερη.

Στόχοι των δύο πρώτων δραστηριοτήτων ήταν να γίνει η εισαγωγή της επίσημης σημειογραφίας των μετατοπίσεων $(x, y) \Rightarrow (x+a, y+b)$ (*κανόνας*), να τεθούν οι βάσεις για κοινή ορολογία και να αναπτυχθούν οι πρώτες συνδέσεις ανάμεσα στην οπτική αναπαράσταση δύο συνόλων σημείων (*αρχικό - μετατοπισμένο*) και του κανόνα που περιγράφει με μαθηματικούς όρους αυτήν την αναπαράσταση.

Συγκεκριμένα, η μετατόπιση στο επίπεδο καθορίζεται από ένα διάνυσμα (προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα) που συγκεκριμενοποιεί τη διεύθυνση της κίνησης και την απόσταση. *Οι μαθητές τείνουν να προσδιορίζουν τις μετατοπίσεις διακρίνοντας αυτήν την κίνηση στις συνιστώσες της, την οριζόντια και την κατακόρυφη* (Zazkis R., Liljedahl, Gadowsky, 2003). Αυτή η οπτική οδηγεί στην εισαγωγή της επίσημης σημειογραφίας των μετατοπίσεων

$$(x, y) \Rightarrow (x+a, y+b) \text{ ή } T((x, y)) = (x+a, y+b)$$

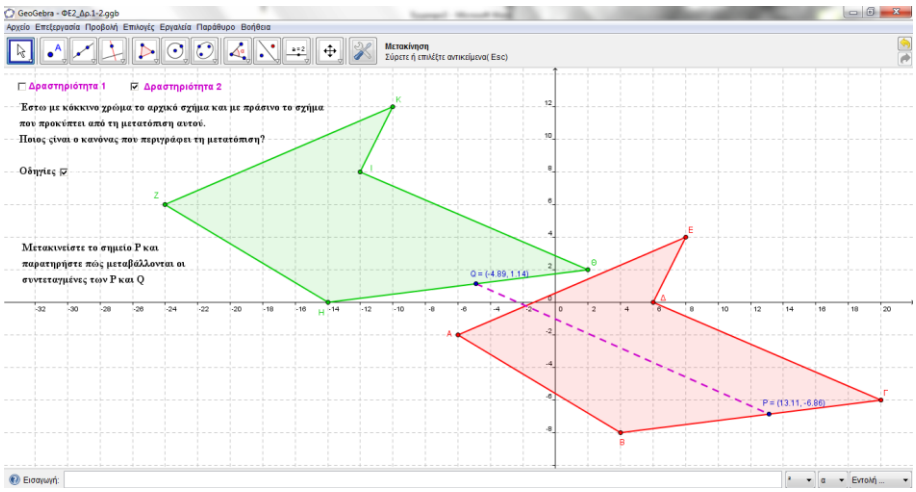
όπου τα a και b είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης, αντίστοιχα. Η σημειογραφία που χρησιμοποιείται καλείται *κανόνας*. Στο Σχήμα 3 φαίνεται η επίδραση του μετασχηματισμού $T((x, y)) = (x+5, y-3)$, σε ένα σύνολο σημείων, που σχηματίζουν ένα τρίγωνο – το κόκκινο.



Σχήμα 3. Εφαρμογή του κανόνα $T((x, y)) = (x+5, y-3)$ σε ένα σύνολο σημείων ενός τριγώνου

Αφού εισαχθεί η σημειογραφία, πρέπει να δοθεί στους συμμετέχοντες η ευκαιρία να αναπτύξουν συνδέσεις μεταξύ της οπτικής αναπαράστασης και του *κανόνα*. Αυτό είναι δυνατό να επιτευχθεί κάνοντας μετασχηματισμούς σύμφωνα με δοσμένους *κανόνες* και προσδιορίζοντας τους τελευταίους σύμφωνα με δοσμένες οπτικές αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα αποδώσουν θετικές και αρνητικές τιμές στο a με κίνηση δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα και θετικές και αρνητικές τιμές στο b με κίνηση πάνω και κάτω, αντίστοιχα. Επιπλέον πρέπει να συνδέσουν την οριζόντια κίνηση με το $b = 0$ και την κατακόρυφη με το $a = 0$.

Η 1η και η 2η δραστηριότητα του δεύτερου φύλλου εργασίας (ΦΕ_2) εξυπηρετούν τον παραπάνω σκοπό. Στην πρώτη δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται, ακολουθώντας έναν *κανόνα*, να μετατοπίσουν ένα σύνολο σημείων, ένα πολύγωνο. Προς διευκόλυνσή τους, δίνεται η οδηγία να εφαρμόσουν τον μετασχηματισμό σε συγκεκριμένα σημεία του γραφήματος και στη συνέχεια να περάσουν στη γενίκευση. Στην ίδια λογική, καλούνται να δώσουν τον *κανόνα* που περιγράφει το μετασχηματισμό, έχοντας την αρχική και την τελική γραφική αναπαράσταση ενός πολυγώνου.



Εικόνα 10. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 2η

Το αρχείο Geogebra είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπει το δυναμικό χειρισμό σημείου P στο αρχικό σχήμα. Το σημείο P είναι συνδεδεμένο με σημείο Q στο μετασχηματισμένο σχήμα, με τέτοιο τρόπο ώστε κατά τη μεταβολή του σημείου P, να πραγματοποιείται ταυτόχρονα η αντίστοιχη μεταβολή του σημείου Q. Ακόμη, τα δύο σημεία ενώνονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα, ώστε να

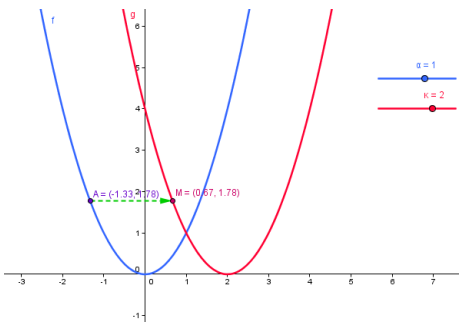
είναι φανερή η αντιστοιχία τους. Η χρήση του Geogebra, σε αντίθεση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, οδηγεί σε θεωρητικό έλεγχο και συσχέτιση (Mariotti, 2007). Η κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των κινήσεων, που παράγονται από το *"dragging tool"* οδηγεί σταδιακά στην παραγωγή εικασιών και, υπό την κατάλληλη καθοδήγηση, στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας.

Οι δύο πρώτες αυτές δραστηριότητες, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θα επιτρέψουν να τεθούν οι βάσεις για κοινή ορολογία, καθώς και να γίνει κατανοητή η σημειογραφία.

Οι επόμενες τέσσερις δραστηριότητες εξυπηρετούν τον κεντρικό σκοπό αυτής της συνάντησης: τοποθετούν την έννοια των μετασχηματισμών των συναρτήσεων στο πλαίσιο της θεωρίας μετασχηματισμών. Στοχεύουν μέσα από αυτό το πρίσμα, να αρθούν οι όποιες αντικρουόμενες αντιλήψεις υπάρχουν στην οπτικοποίηση της οριζόντιας μετατόπισης, ενώ ταυτόχρονα να γίνει κατανοητό πώς οι δύο μετατοπίσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, *"λειτουργούν παρόμοια"*. Στην 3^{η} και 4^{η} δραστηριότητα γίνεται μελέτη της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης, αντίστοιχα, ώστε σταδιακά να γίνει η μετάβαση με τις δύο δραστηριότητες που ακολουθούν στην ανάπτυξη του κλασσικού αλγεβρικού συμβολισμού $f(x)$, ως κώδικας για την ταυτόχρονη περιγραφεί των δύο προς μελέτη μετασχηματισμών.

Ειδικότερα, σύμφωνα με τους Zazkis, Liljedahl και Gadowsky (2003), με δεδομένες τις εμπειρίες που περιγράφηκαν παραπάνω, αναμένεται να γίνει κατανοητό από τους συμμετέχοντες ότι αφού ένα οποιοδήποτε σύνολο σημείων μπορεί να μετατοπιστεί σύμφωνα με έναν *κανόνα*, αυτό το σύνολο σημείων μπορεί να είναι μία παραβολή ή μία οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση.

Στην 3^{η} δραστηριότητα, γίνεται μελέτη της οριζόντιας μετατόπισης της παραβολής $y=x^2$. Το διερευνητικό περιβάλλον του *Geogebra* θα επιτρέψει στους μαθητές να



Εικόνα 11. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 3^{η}

εμπλακούν ενεργά στη διαμόρφωση της έννοιας. Το δυναμικό περιβάλλον επιτρέπει στους χρήστες να πειραματίζονται, κινώντας ελεύθερα το σημείο Α της συνάρτησης $f(x)=x^2$, με στόχο να παρατηρήσουν το σημείο Μ της συνάρτησης g και πώς αυτό ανταποκρίνονται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές. Καθώς η θέση των σημείων μεταβάλλεται το λογισμικό διατηρεί όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής, και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών. Το πρώτο ερώτημα: "*Ποιος είναι ο κανόνας που περιγράφει τη μετατόπιση*" υπογραμμίζει ότι η δραστηριότητα κινείται στο πνεύμα της προηγούμενης, με τη διαφορά ότι οι μαθητές επικεντρώνουν την προσοχή τους στις συναρτήσεις, σε μία υποομάδα, δηλαδή, του συνόλου των μαθηματικών αντικειμένων, όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί η θεωρία των μετασχηματισμών.

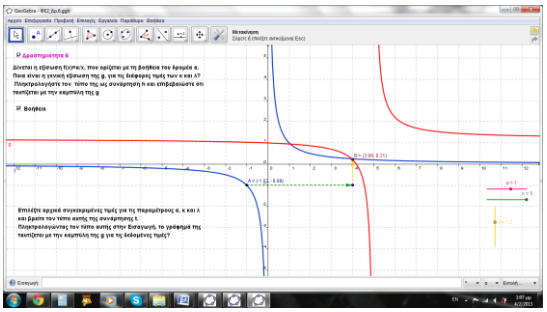
Επιδιώκεται η ανάπτυξη συνδέσεων ανάμεσα στην οπτική αναπαράσταση της μετατόπισης και στην αλγεβρική της αναπαράσταση. Ζητείται από τους μαθητές να εστιάσουν, στο σημείο (x_A, y_A), του αρχικού συνόλου που μετασχηματίστηκε στο σημείο (x_M, y_M) του συνόλου εικόνας, αφού πρώτα συμπληρώνοντας τον πίνακα έχουν εξετάσει αρκετές ειδικές περιπτώσεις της συμπεριφοράς συγκεκριμένων σημείων. Στη συνέχεια, καλούνται να προσδιορίσουν τη σχέση του x_A με το x_B ,και του y_A με το y_B . Με το ερώτημα: *"Ποια η σχέση που συνδέει τα x_A, y_A ? Μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει τα x_M, y_M ?"*, οι μαθητές καταλήγουν στον τύπο της μετασχηματισμένης συνάρτησης, αφού έχουν κάνει βήμα προς βήμα τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και το μόνο σημείο που υπολείπεται είναι η γενίκευση, που επιδιώκεται με τις ερωτήσεις που ακολουθούν. Η 4η δραστηριότητα ακολουθεί την πορεία της 3ης, αλλά αναφέρεται στην κατακόρυφη μετατόπιση.

Οι ερευνητές, Borba και Confrey (1996), χαρακτήρισαν ως "*προβληματικές*", τις προσπάθειες ενός 16χρονου να αλληλεπιδράσει με την οριζόντια μετατόπιση μίας παραβολής, οι Eisenberg και Dreyfus (1994), τονίζουν τη δυσκολία με την οποία έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές στην οπτικοποίηση αυτού του μετασχηματισμού, ενώ οι Zazkis, Liljedahl και Gadowsky (2003b) υιοθετούν τον όρο "*αντιφατικά*" για να περιγράψουν τα οπτικά αποτελέσματα αυτού. Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές δεν εγκαταλείπουν εύκολα τα πιστεύω τους που βασίζονται στη διαίσθηση και ίσως κατέχουν διαφορετικές, και μάλιστα αντικρουόμενες αντιλήψεις (Fischbein, 1987). Με τη χρήση της θεωρίας των μετασχηματισμών, επιχειρείται η εξισορρόπηση αυτής

της αντίφασης, που έγκειται στην ασυμφωνία που υπάρχει μεταξύ αρχικής διαίσθησης και γραφικής αναπαράστασης. Επιπλέον, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, ένα ακόμη θέμα είναι ότι κάποιες από τις μετατοπίσεις, κατακόρυφες, λειτουργούν σύμφωνα με τις προσδοκίες ενώ άλλες, οριζόντιες, όχι. Αυτή όμως η μέθοδος λειτουργεί εξίσου και στις δύο περιπτώσεις.

Στην επόμενη δραστηριότητα, οι συμμετέχοντες, δουλεύοντας αποκλειστικά πάνω στο γράφημα και χρησιμοποιώντας τους δρομείς, καλούνται να μεταβάλλουν κατάλληλα την $f(x) = x^2$ (α=1, κ=0, λ=0) ώστε να συμπέσει με την $\varphi(x)= 2x^2+4x+3$. Με το ερώτημα γενίκευσης που ακολουθεί, επιδιώκεται να εντοπίσουν τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο αλγεβρικές μορφές έκφρασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $f(x)=\alpha(x-\kappa)^2+\lambda$.

Σύμφωνα με τις Hoyles και Healy (1997), η μαθηματική αφηρημένη σκέψη δεν είναι εγγενής αλλά είναι μία διαδικασία που αναπτύσσεται μέσω των εφαρμογών και διαμορφώνεται από τα διαθέσιμα εργαλεία και αναπαραστάσεις (*αφαίρεση ως επίπεδο αντίληψης της έννοιας*). Οι μαθητές, στην τελευταία δραστηριότητα πρέπει να βασιστούν στη νεοαποκτηθείσα γνώση, να εφαρμόσουν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τα προηγούμενα ζητήματα και χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες που προσφέρει το λογισμικό, να καταλήξουν στην ολοκλήρωση της. Οι μαθητές καλούνται να παράγουν τον γενικό τύπο που περιγράφει ταυτόχρονα την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση μίας καμπύλης, ο οποίος στο σχολικό εγχειρίδιο απορρέει μέσα από μία εφαρμογή και δίνεται υπό τη μορφή σημείωσης. Είναι χαρακτηριστικό ότι δεν ζητείται ο *κανόνας* που περιγράφει τη μετατόπιση, ούτε ακολουθείται η αναλυτική πορεία, όπως παραπάνω, για την παραγωγή του τύπου. Επιδιώκεται η ανάπτυξη του κλασσικού αλγεβρικού συμβολισμού *f(x)*, ως κώδικα για την περιγραφή της κανονικότητας που εντοπίζεται στους δύο διαθέσιμους από την άσκηση, τρόπους αναπαράστασης. Οι μαθητές αναμένεται να προβληματιστούν στις επιτυχημένες στρατηγικές που ανέπτυξαν για την επίλυση των παραπάνω, όπου και μπορούν, λόγω των δυνατοτήτων του λογισμικού, να ανατρέξουν, ώστε να



Εικόνα 12. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 6η – Ζήτημα 2ο

καταλήξουν στην απάντηση της εφαρμογής αυτής. Επίσης, με τον τρόπο αυτό θα εκτιμηθεί ο βαθμός στον οποίο η βοήθεια που το λογισμικό παρείχε, χρησιμοποιήθηκε μόνο "*τοπικά*", ώστε να ολοκληρωθούν οι προηγούμενες δραστηριότητες ή προμήθευσε τα παιδιά με εμπειρίες, ώστε να κάνουν συνδέσεις με μια ποιο γενικευμένη αντίληψη του μετασχηματισμού.

3.7.3 Συνάντηση 3η: Εκτίμηση του βαθμού κατανόησης της έννοιας των μετασχηματισμών συναρτήσεων

Οι ερωτήσεις, στις οποίες καλούνται να εργαστούν οι συμμετέχοντες, στην τρίτη συνάντηση[14], με μετασχηματισμούς συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τόσο τη γραφική όσο και την αναλυτική αναπαράσταση, κατηγοριοποιούνται σε τρεις ομάδες

- ✓ προσδιορισμός μετασχηματισμών
- ✓ κατασκευή γραφήματος μετασχηματισμένης συνάρτησης
- ✓ χρήση μετασχηματισμένων συναρτήσεων σε άλλες ενέργειες και διαδικασίες

Η κατηγοριοποίηση είναι η ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Trigueros και Lage (2006).

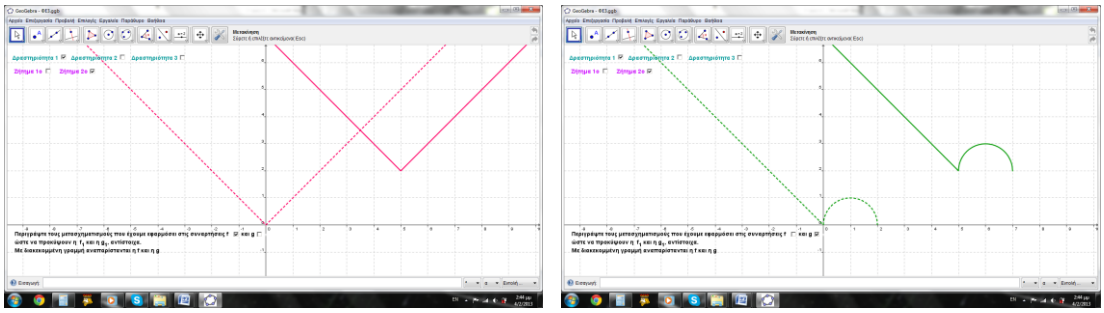
Η πρώτη δραστηριότητα περιλαμβάνει τις ερωτήσεις που αφορούν τον *προσδιορισμό μετασχηματισμών*. Η επιλογή του πρώτου ζητήματος, βασίστηκε στην παρατήρηση των *Trigueros, M. & Lage, A. (2006)*, ότι οι μαθητές προσδιορίζουν με μεγαλύτερη ευκολία τους μετασχηματισμούς που έχει υποστεί μία οικεία για αυτούς συνάρτηση. Στο ερώτημα γίνεται χρήση της συνάρτησης $f(x)=|x|$ (η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά από το σχολικό εγχειρίδιο ως ένα πρώτο παράδειγμα, τόσο στην οριζόντια όσο και στην κατακόρυφη μετατόπιση, στην εφαρμογή που ακολουθεί όπως και στις ασκήσεις) και της

$$g(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ \sqrt{1-(x-1)^2}, & 0<x\le 2\end{cases}$$

[14] Για τις ανάγκες της τρίτης συνάντησης σχεδιάστηκε ένα φύλλο εργασίας (παρατίθεται στο παράρτημα Δ της παρούσας εργασίας), το οποίο βασίστηκε σε ένα αρχείο Geogebra.

Εσκεμμένα, μέσα στο πνεύμα της προηγούμενης παρατήρησης, οι μετατοπίσεις που έχουν υποστεί οι δύο συναρτήσεις είναι οι ίδιες – πέντε μονάδες δεξιά και δύο μονάδες προς τα πάνω.

Στο δεύτερο ζήτημα αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές καλούνται εργαζόμενοι με οικείες για αυτούς συναρτήσεις, να προσδιορίσουν τους αγνώστους *a* και *b*, που αντιστοιχούν στην οριζόντια και στην κατακόρυφη μετατόπιση, ώστε να παράγουν την αναλυτική έκφραση των συναρτήσεων, των οποίων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις. Σύμφωνα με την έρευνα των Trigueros και Lage (2006), όταν ένα πρόβλημα περιλαμβάνει μία συνάρτηση η οποία είναι αποτέλεσμα εφαρμογής ενός



Εικόνα 13. Στιγμιότυπα από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 2η

συνόλου μετασχηματισμών σε μία βασική συνάρτηση (με τον όρο βασική περιγράφονται οι συναρτήσεις οι οικείες για τους μαθητές), οι μαθητές γενικά είναι ικανοί να αναγνωρίσουν ορισμένους από τους μετασχηματισμούς που εφαρμόστηκαν. Στα αποτελέσματα αυτής της έρευνας φάνηκε ότι οι μαθητές προσδιόριζαν με μεγαλύτερη ευκολία τον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης, εάν η τελευταία είχε υποστεί έναν και μόνο μετασχηματισμό, ενώ ένα μεγάλο ποσοστό αυτών έδειξε μία τάση χρήσης μνημονικών κανόνων, με στόχο την επιτυχή επίλυση παρόμοιων δραστηριοτήτων. Ουσιαστικά, στόχος της επιλογής αυτών των ερωτημάτων αποτελεί η εκτίμηση του βαθμού στον οποίο η βοήθεια που παρείχε το λογισμικό χρησιμοποιήθηκε μόνο *"τοπικά"* ώστε να ολοκληρωθούν τα προηγούμενα φύλλα εργασίας ή οδήγησε σε βαθύτερη κατανόηση και αφομοίωση των προς συζήτηση εννοιών. Το ερώτημα αυτό ακόμη αποτελεί μία πρώτη ένδειξη του εάν η παιδαγωγική προσέγγιση που υιοθετήθηκε για τη διδασκαλία των μετατοπίσεων και γενικότερα των μετασχηματισμών, οδήγησε στην εξομάλυνση της διάστασης ανάμεσα στις προσδοκίες των μαθητών για τη θέση μίας συνάρτησης που έχει υποστεί οριζόντια μετατόπιση και στο μαθηματικά ορθό αποτέλεσμα.

Οι ερωτήσεις που αφορούν στην *κατασκευή γραφήματος μετασχηματισμένης συνάρτησης* διακρίνονται στις εξής δύο κατηγορίες

- ✓ εφαρμογή μετασχηματισμών σε *βασική* συνάρτηση και προσδιορισμός της αναλυτικής της έκφρασης
- ✓ κατασκευή γραφήματος δοθέντος του αναλυτικού τύπου της συνάρτηση

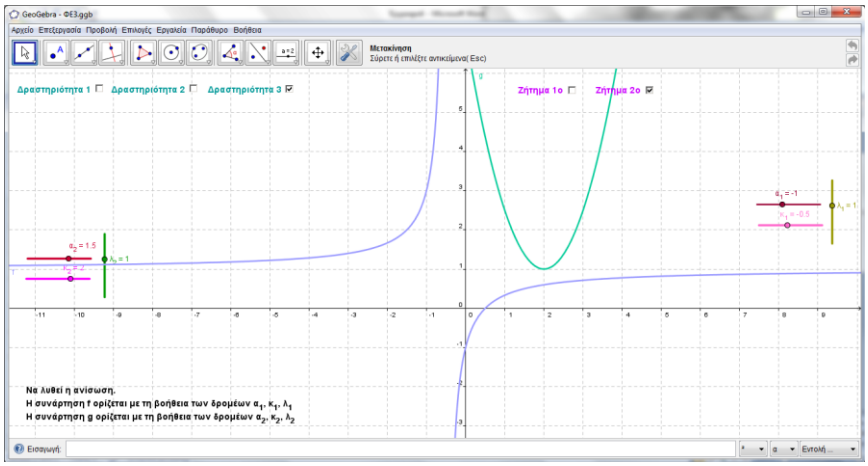
Στο 1^{ο} ζήτημα, δίνονται περιγραφικά οι μετασχηματισμοί που πρέπει να υποστεί μια βασική συνάρτηση. Αναμένεται ότι οι μαθητές εύκολα θα ανταπεξέλθουν στο ζητούμενο "*Μετακινείστε τη συνάρτηση* $f(x)=3x^2$*, δύο μονάδες δεξιά και τρεις μονάδες προς τα κάτω*", με τη βοήθεια των δρομέων ενώ ο προσδιορισμός της εξίσωσης της νέας συνάρτησης επιτρέπει, τη μελέτη της ανάπτυξης συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων.

Στο 2^{ο} ζήτημα οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, δοθείσης της αναλυτικής της έκφρασης. Έχουν εφαρμοστεί τρεις διαφορετικοί μετασχηματισμοί στη βασική συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{x}$, όμως προς διευκόλυνση των μαθητών, τους ζητείται, αρχικά, ο προσδιορισμός των τιμών των δρομέων. Ουσιαστικά, με την τελευταία αυτή ενέργεια σε συνδυασμό με το ζητούμενο "*Πληκτρολογήστε τον τύπο της ως συνάρτηση s και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη που έχει προκύψει, από τις μετατοπίσεις που εφαρμόσατε*", ελέγχεται αν ακόμη και μετά την παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, προκύπτουν αντιφατικά αποτελέσματα για τους μαθητές όσον αφορά την αναλυτική και τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης.

Ερωτήσεις που σχετίζονται με τη *χρήση μετασχηματισμένων συναρτήσεων σε άλλες ενέργειες και διαδικασίες* είναι αυτές που ανήκουν στην 3^{η} δραστηριότητα, στις οποίες οι μετασχηματισμοί είναι ένα βασικό εργαλείο για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Σε αυτήν την ομάδα ερωτήσεων, οι μαθητές καλούνται:

- ✓ να επεξηγήσουν τους μετασχηματισμούς που πρέπει να υποστεί μία μετασχηματισμένη συνάρτηση ώστε να προκύψει μία δεύτερη, δοθέντων των δύο γραφικών τους αναπαραστάσεων
- ✓ να επιλύσουν μία δύσκολη ανισότητα χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς

Στο 1^{ο} ζήτημα, θα κληθούν οι μαθητές να προσδιορίσουν την αναλυτική έκφραση των συναρτήσεων και να εκφράσουν τη μία συναρτήσει της άλλης. Παρόμοιο ερώτημα χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Trigueros και Lage (2006) και απαντήθηκε από μαθητές που, σύμφωνα με τους προαναφερθέντες, είναι ικανοί να "*δουν*" τις συναρτήσεις ως ολότητα, σε κάθε αναπαραστασιακό πλαίσιο και



Εικόνα 14. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 3^{η} – Ζήτημα 2^{ο}

αντιμετωπίζουν τη διαδικασία εφαρμογής μετασχηματισμού σε κάθε συνάρτηση ως *αντικείμενο*. Από άτομα δηλαδή, για τα οποία, σύμφωνα με τη Sfard (1991), οι διαδικασίες που υπόκεινται αποδεκτά αφηρημένα αντικείμενα, μετατράπηκαν σε *συμπαγείς – στατικές δομές, "πραγματώθηκαν"(reified, από τη λατινική λέξη res)* ή σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο, βρίσκονται στο *σχεσιακό στάδιο*. Στο ίδιο πνεύμα κινείται και το επόμενο ζήτημα. Αυτή η ερώτηση, μπορεί να λυθεί μόνο σε γεωμετρικό πλαίσιο, καθώς οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών τους επιτρέπουν την αλγεβρική επίλυση ανισώσεων μέχρι και 2^{ου} βαθμού – η διδασκαλία του σχήματος *Horner* ακολουθεί. Συνεπώς, αναμένεται οι συμμετέχοντες να χρησιμοποιήσουν τη νεοαποκτηθείσα γνώση τους για τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων προκειμένου να λύσουν την ανίσωση.

3.8 Συλλογή Δεδομένων

3.8.1 Μέσα συλλογής δεδομένων

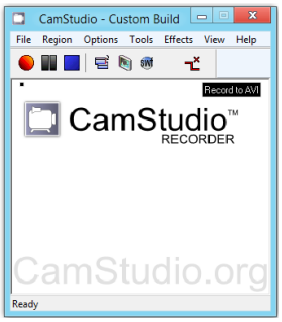
Τα μέσα συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα ήταν:

i. Η κάμερα *Coolpix S2600, Nikon*
ii. Η *HP MediaSmart Webcam*
iii. Το λογισμικό *CamStudio*
iv. Τα φύλλα εργασίας που συμπλήρωσαν οι μαθητές

Στη διεξαγωγή της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν δύο κάμερες. Μία φωτογραφική μηχανή (κάμερα *Coolpix S2600, Nikon*), ρυθμισμένη για βιντεοσκόπηση (τοποθετημένη σε σταθερό σημείο) και η ενσωματωμένη κάμερα του φορητού υπολογιστή (*HP MediaSmart Webcam*).

Οι Grimshaw (1982) και Bottorff (1994) σημειώνουν δύο βασικές δυνατότητες των βιντεοσκοπήσεων: την πυκνότητα και την μονιμότητα. Η πυκνότητα, περιγράφει το πλεονέκτημα των βιντεοσκοπήσεων σε σχέση με τις σημειώσεις του παρατηρητή, ο οποίος έχει δυσκολίες στην καταγραφή ταυτόχρονων λεπτομερειών σε εν εξελίξει συμπεριφορές. Η τεχνολογία απεικόνισης ξεπερνά τους περιορισμούς που θέτει η ανθρώπινη φύση στην παρατήρηση, καθώς είναι δυνατή η καταγραφή όχι μόνο του '*τμήματος του όλου*', κατά τον Martin (1999). Από την οπτική της μονιμότητας, οι βιντεοσκοπήσεις καταγράφουν δύο ροές δεδομένων: οπτική και ακουστική, σε πραγματικό χρόνο. Παρέχουν στον ερευνητή τη δυνατότητα κρίσης και επαναξιολόγησης των καταστάσεων και μειώνεται η εξάρτησή του από την αρχική ερμηνεία (πρώτη εντύπωση), αφού επιτρέπουν όχι μόνο τις πολλαπλές προβολές, αλλά και εναλλακτικούς τρόπους παρακολούθησης, όπως σε αργή κίνηση. (Powell, 2003, p407, 410)

Η Pirie (1996) παρατηρεί ότι οι βιντεοσκοπήσεις είναι από τους λιγότερο παρεμβατικούς και πιο περιεκτικούς τρόπους μελέτης φαινομένων (Powell, 2003, pp407, 410). Ωστόσο, μία βιντεοκάμερα μπορεί να επηρεάσει τη συμπεριφορά των συμμετεχόντων. Κατά τη Βοσνιάδου (2004) αυτό συμβαίνει διότι η γνώση ότι είμαστε αντικείμενα παρατήρησης μπορεί να αλλάξει τη συμπεριφορά μας (Βοσνιάδου, 2004, p43). Με τη χρήση απλά του *CamStudio*, αυτό είναι λιγότερο πιθανό. Το λογισμικό *CamStudio*, επιτρέπει στο χρήστη του να καταγράφει τα δρώμενα στην οθόνη του υπολογιστή, καθώς και ήχο και να τα αποθηκεύει σε μορφή αρχείου ήχου και εικόνας (αρχείο avi). Πλεονέκτημα του συγκεκριμένου λογισμικού, η άμεση καταγραφή της



Εικόνα 15. Το λογισμικό *CamStudio*

αλληλεπίδρασης των συμμετεχόντων με το υπολογιστικό περιβάλλον. Στη συγκεκριμένη μελέτη, χρησιμοποιήθηκαν και τα δύο μέσα συλλογής δεδομένων, αφού οι συμμετέχοντες και οι κηδεμόνες τους είχαν λάβει την απαραίτητη ενημέρωση.

Τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν από τον ερευνητή. Μετά την ολοκλήρωση της πιλοτικής έρευνας κρίθηκαν αναγκαίες κάποιες μεταβολές στην εσωτερική διάρθρωση και στην πορεία των δραστηριοτήτων, ενώ προστέθηκαν και κάποια ερωτήματα. Παρά τα πλεονεκτήματα που παρέχει η ψηφιακή τεχνολογία, χρησιμοποιήθηκε και αυτό το μέσο συλλογής δεδομένων, αφού, όπως προτείνει και η Pirie (1996): *'ο συνδυασμός των βιντεοσκοπήσεων και του γραπτού έργου των μαθητών εξασφαλίζει περιεκτική εξέταση της μαθηματικής δραστηριότητας και της συλλογιστικής των μαθητών'* (Powell, 2003, p408).

3.8.2 Ανάλυση δεδομένων

Σύμφωνα με τους Lesh και Lehrer (2000), μία παραγωγική ανάλυση περιλαμβάνει εκτός από τις θεωρητικές προσεγγίσεις, όπως οι μαθηματικές ιδέες, οι ψυχολογικές και διδακτικές πτυχές, και τις φυσικές, όπως οι σημειώσεις, οι απομαγνητοφωνήσεις, τα βίντεο από διαφορετικές βιντεοκάμερες (Powell, 2003, p410).

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής της παρούσας μελέτης έχουν ποιοτικό χαρακτήρα και διακρίνονται σε:

- δεδομένα ήχου και εικόνας προερχόμενα από τις δύο κάμερες
- δεδομένα ήχου και εικόνας προερχόμενα από το λογισμικό *CamStudio*
- απομαγνητοφωνήσεις[15] των τριών συναντήσεων
- απομαγνητοφωνήσεις από *τυχαίες συζητήσεις*

  Οι συμμετέχοντες, μερικές φορές, μετά την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων, εξέφραζαν απορίες ή και ζητούσαν διευκρινίσεις για κάποιο από τα θέματα που είχαν συζητηθεί. Οι ερωτήσεις υποδείκνυαν εννοιολογικές δυσκολίες του

[15] Στο άρθρο των Powell et al (2003, pp407, 410), τονίζεται και η αναγκαιότητα των απομαγνητοφωνήσεων ως εργαλείο συλλογής δεδομένων. Έτσι, και για τη δεδομένη μελέτη πραγματοποιήθηκαν απομαγνητοφωνήσεις, καθώς επιτρέπουν τη διεξοδική ανάλυση στοιχείων, όπως η ροή των ιδεών (Powell, 2003, p423).

μαθητή, και η εξωτερίκευσή τους αποτέλεσε, σε ορισμένες περιπτώσεις, εφαλτήριο για τη διεξαγωγή μίας σύντομης, αυτοσχέδιας συνέντευξης, με επίκεντρο αυτές τις δυσκολίες (τυχαίες συζητήσεις)

- απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας
- απαντήσεις των τεσσάρων συμμετεχόντων στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις περιόδου Μαΐου-Ιουνίου, 2011-12

Η ανάλυση βασίστηκε στα απομαγνητοφωνημένα δεδομένα, ενώ ήταν συνεχής η επανεξέταση των βίντεο και των δεδομένων από το λογισμικό *CamStudio*. Με τις απομαγνητοφωνήσεις εξασφαλίζεται η κάτι περισσότερο από στιγμιαία θεώρηση της ερμηνείας μίας ακολουθίας δηλώσεων, ενώ τα δεδομένα της ψηφιακής τεχνολογίας επιτρέπουν τον επανέλεγχο πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων όσο συχνά κρίνεται απαραίτητο. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τις απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας χρησιμοποιήθηκαν μόνο συμπληρωματικά.

Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το *επεισόδιο*. Το επεισόδιο ορίζεται ως ένα σύνολο δράσεων και αλληλεπιδράσεων των συμμετεχόντων στην έρευνα γύρω από ένα συγκεκριμένο θέμα. Η ανάλυση των επεισοδίων πραγματοποιήθηκε με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας ερευνητικής μελέτης. Συγκεκριμένα, με στόχο τον προσδιορισμό του βαθμού κατανόησης μίας μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι αναγκαίος ο έλεγχος του έργου που παράγουν, όταν προσπαθούν να λύσουν προβλήματα ή να επεξεργαστούν πολύπλοκες έννοιες και ζητήματα που σχετίζονται με αυτή. Εξίσου μεγάλης σημασίας είναι, όμως, και η μελέτη των νοητικών στρατηγικών που υιοθετούν οι μαθητές, με στόχο την τροποποίηση των αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών, σε έννοιες νοητικά προσβάσιμες από αυτούς.

Το έργο των μαθητών αναλύθηκε συγκρίνοντας το περιεχόμενο και τη δομή των απαντήσεων τους, με τα αντίστοιχα που περιγράφονται από την κατηγοριοποίηση κατά *SOLO*. Έχοντας μελετήσει τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των συναντήσεων, έγινε προσπάθεια κατάταξης του κάθε μαθητή σε ένα επίπεδο της ταξινόμησης, ανάλογα με το σύνολο του έργου που παρήγαγε, ενώ στοχεύοντας πάντα στην πληρότητα έγινε σαφής αναφορά σε περίπτωση που παρουσίαζε χαρακτηριστικά και κάποιου ακόμη επιπέδου. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, η κατηγοριοποίηση αυτή έγινε μέσα στα πλαίσια της ανάλυσης, καθώς είναι κατανοητό πώς ένας μαθητής μπορεί να καταταχθεί, ανάλογα με τις γνωστικές

δομές που διαθέτει για μία δεδομένη έννοια αλλά και ανάλογα με τις απαντήσεις του στα ζητούμενα διάφορων ερωτήσεων, κάθε φορά σε διαφορετικό στάδιο. Με βάση αυτή την παρατήρηση, στην τρίτη συνάντηση, κάθε μαθητής που συμμετείχε κατατάχθηκε στο αντίστοιχο στάδιο, όχι μόνο για το σύνολο του έργου του, αλλά και για κάθε μία από τις τρεις δραστηριότητες, ανάλογα με τις δυσκολίες που αντιμετώπισε και με την τάση στην επιλογή στρατηγικών επίλυσης.

Επίσης, εστιάζοντας σε κάποιες από τις νοητικές στρατηγικές που υιοθέτησαν οι συμμετέχοντες στην ερευνητική διαδικασία προσδιορίστηκε το είδος μείωσης της αφαίρεσης που χρησιμοποίησαν, σε περίπτωση που κάτι τέτοιο συνέβη, με στόχο την πιο ολοκληρωμένη εκτίμηση του βαθμού κατανόησης των προς συζήτηση εννοιών.

Κεφάλαιο 4^{ο}

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται το περιεχόμενο κάθε συνάντησης ξεχωριστά, καθώς, όπως έχει αναφερθεί, τόσο οι επιμέρους στόχοι που τίθενται, όσο και οι γνωστικές δομές και η θεωρητική γνώση των συμμετεχόντων διαφοροποιούνται. Διακρίνονται, συνεπώς, τρεις παράγραφοι που όμως έχουν την ίδια δομή. Η δομή είναι η εξής: Αρχικά, δίνονται περιληπτικά οι στόχοι κάθε συνάντησης και ακολουθούν παρατηρήσεις στις απαντήσεις των συμμετεχόντων για την ενασχόλησή τους με το εκάστοτε φύλλο εργασίας. Με τη βοήθεια αυτών των παρατηρήσεων, που αφορούν το σύνολο του έργου που παρήγαγαν και τις στρατηγικές που υιοθέτησαν οι μαθητές, γίνεται προσπάθεια κατάταξης κάθε μαθητή σε ένα γνωστικό αναπτυξιακό επίπεδο. Υπογραμμίζεται, όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, ότι η κατηγοριοποίηση κατά SOLO, εστιάζει στη δομή του έργου που παράγουν οι μαθητές και όχι στον ίδιο το μαθητή. Συνεπώς, το ίδιο άτομο είναι δυνατό να ενταχθεί σε δύο διαφορετικά επίπεδα για δύο διαφορετικές δραστηριότητες, ανάλογα με το έργο που παράγει προσπαθώντας να επιλύσει την κάθε μία (Pegg & Tall, 2009). Στη δεδομένη ερευνητική διαδικασία, έχοντας μελετήσει τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των συναντήσεων, θα γίνει προσπάθεια κατάταξης του κάθε μαθητή σε ένα επίπεδο της ταξινόμησης, ανάλογα με το σύνολο του έργου που παρήγαγε, ενώ στοχεύοντας πάντα στην πληρότητα θα γίνει σαφής αναφορά σε περίπτωση που παρουσιάζει χαρακτηριστικά και κάποιου ακόμη επιπέδου. Με βάση την παρατήρηση των Pegg & Tall (2009), που δόθηκε παραπάνω, η τρίτη συνάντηση θα ακολουθήσει τον αναλυτικό και λεπτομερειακό προσδιορισμό των γνωστικών αναπτυξιακών επιπέδων και ως προς τα ζητήματα. Αναλύονται επιλεγμένα επεισόδια,

τα οποία είναι αντιπροσωπευτικά ως προς το σύνολο του έργου που παράγουν οι μαθητές.

4.2 Συνάντηση 1η: Εξοικείωση με το υπολογιστικό περιβάλλον

4.2.1 Εισαγωγή

Η δεξιότητα με την οποία ένα άτομο χειρίζεται ένα μέσο (στην προκειμένη περίπτωση πώς οι μαθητές εκμεταλλεύονται τις λειτουργικότητες του εκπαιδευτικού λογισμικού), ενισχύεται από την αλληλεπίδραση με αυτό, αλλά σε μεγάλο βαθμό προς την κατεύθυνση αυτή οδηγεί η ήδη υπάρχουσα εξοικείωση με την ψηφιακή τεχνολογία.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην περιγραφή των χαρακτηριστικών των συμμετεχόντων, όλοι είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας, γεγονός που σίγουρα τους διευκόλυνε να ανταπεξέλθουν στη διεκπεραίωση των δραστηριοτήτων. Ωστόσο οι συναντήσεις που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της μελέτης αποτέλεσαν τη δεύτερη φορά που οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με ένα διδακτικού περιεχομένου υπολογιστικό περιβάλλον. Στόχος της πρώτης συνάντησης ήταν να διασφαλιστεί ότι στις μετέπειτα συναντήσεις οι συμμετέχοντες στη διαδικασία θα είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν τα όποια τεχνικά προβλήματα προκύψουν αλλά και πώς οι λειτουργικότητες του παιδαγωγικού λογισμικού δε θα παρουσιάζονταν σε αυτούς ως μία ακολουθία οδηγιών.

Πράγματι, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας βοήθησε προς αυτή την κατεύθυνση. Επιλέχθηκε μία ενότητα την οποία οι μαθητές είχαν διδαχθεί την προηγούμενη σχολική χρονιά ώστε η προσοχή τους να επικεντρωθεί, κατά κύριο λόγο στον τρόπο λειτουργίας του διαθέσιμου λογισμικού, αλλά ταυτόχρονα οι υπάρχουσες γνώσεις τους να χρησιμοποιηθούν ως αφετηρία και ως μία πρώτη εφαρμογή για τις προς συζήτηση έννοιες.

4.2.2 Η μεταλλαγή του μέσου σε υποδομή

Η επιλογή των δραστηριοτήτων επέτρεψε στους συμμετέχοντες να εξοικειωθούν με το συμβολικό αναπαραστασιακό σύστημα του δεδομένου εκπαιδευτικού λογισμικού (ερωτήσεις όπως "*πώς βάζουμε επί?* ", "*πώς εισάγουμε απόλυτη τιμή*", είναι συνήθεις), να

πειραματιστούν με τους δρομείς, να μάθουν πώς εισάγονται τιμές στις παραμέτρους και πώς εισάγονται οι συναρτήσεις χρησιμοποιώντας το παράθυρο "*Εισαγωγή*". Με κατάλληλα ερωτήματα και εστιάζοντας σε εξωτερικά χαρακτηριστικά του γραφήματος, όπως στη μορφή του, οι μαθητές κλήθηκαν επιτυχώς να κατανοήσουν την έννοια του εξαρτημένου και του ελεύθερου αντικειμένου, ενώ οδηγήθηκαν στη διαπίστωση ύπαρξης σχέσης μεταξύ του παραθύρου της *Άλγεβρας* και του αντίστοιχου *της Προβολής των Γραφικών*. Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι ενδεικτικό των παρατηρήσεων που πραγματοποιούσαν οι μαθητές κατά την αλληλεπίδρασή τους με το υπολογιστικό περιβάλλον.

" Ε: […] Τι μετασχηματισμό παρατηρείται στον τύπο του τριωνύμου?

Μαθ_Γ: Πού είναι ο τύπος?

Ε: Οι τύποι των τριωνύμων φαίνονται εδώ (δείχνει στο παράθυρο της Άλγεβρας). Αυτή είναι η συνάρτηση f …είναι και αντίστοιχα τα χρώματα…

Μαθ_Γ: Μισό λεπτό, αυτό έχει αλλάξει τώρα?

Ε: Τι εννοείς έχει αλλάξει?

Μαθ_Γ: Όταν βάλαμε το λ=0 και αυτά άλλαξαν… προφανώς άλλαξε και εδώ… ".

Απόσπασμα Νο1

Οι μαθητές απέκτησαν ιδιαίτερη οικειότητα με το λογισμικό, ενώ επιζητούσαν τρόπους χρήσης αυτού, διαφορετικούς από αυτούς που πρότεινε η ερευνήτρια, σε πολλές περιπτώσεις πιο πρακτικούς. Στο παρακάτω απόσπασμα, ενώ τα μέλη της ομάδας Ι, πειραματίζονταν στο πρώτο ζήτημα της δεύτερης δραστηριότητας, προσπαθώντας να καταλήξουν στο γενικό τύπο $f(x)=a(x-k)^2$, αποφάσισαν να εισάγουν την $f(x)=a(x-|k|)^2$. Εκ παραδρομής, ο τύπος που εισήχθη ήταν ο $f(x)=a(x-|k|)$.

"Ε: Γιατί μας βγήκε ευθεία? να τα βρίσκουμε ένα – ένα

Μαθ_Α: Γιατί δεν είναι στο τετράγωνο

Μαθ_Β: Α! αυτό… και τώρα θα το ξαναγράψουμε?

Ε: Πάτα πάνω δεξί κλικ και διέγραψε τη αυτή

Μαθ_Β: Βασικά… Δεν γίνεται να την επεξεργαστούμε, αυτή που έχουμε ήδη εισάγει?

Ε: Περίμενε… ιδιότητες θα πας… Ορίστε, επεξεργάσου τη από εδώ"

Απόσπασμα Νο2

Η ερευνήτρια πρότεινε να διαγράψουν τη συνάρτηση που είχαν εισάγει και να εισάγουν τη νέα. Ο ένας από τους δύο μαθητές ζήτησε από την ερευνήτρια να του

υποδείξει τον τρόπο να επεξεργαστεί την υπάρχουσα, γεγονός που υποδεικνύει την οικειότητα που είχε αποκτήσει. Είναι χαρακτηριστικό ότι σύντομα χρησιμοποιούσαν τα εικονίδια από τη γραμμή εργαλείων με ιδιαίτερη ευχέρεια, χωρίς να φοβούνται μήπως *"χαλάσει το σχήμα"* (*"Μετακίνηση της προβολής γραφικών", "Μεγέθυνση"*). Επίσης, σταδιακά άρχισαν να αναπτύσσουν εικασίες και να επιζητούν την επικύρωσή τους, στοιχείο που φαίνεται στο απόσπασμα που ακολουθεί:

"Μαθ_Γ: Αυτό είναι παραβολή και τέλος?

Μαθ_Δ: Μισό… Ότι όσο μεγαλύτερο είναι το α

Μαθ_Γ: Τόσο πιο κλειστό είναι

Μαθ_Δ: Ανοίγει… // Μαθ_Γ: Τόσο πιο πολύ ανοίγει… ναι, όχι τόσο πιο κλειστό είναι

Μαθ_Δ: Κάτσε θα το κοιτάξουμε… ναι, τόσο πιο κλειστό

Μαθ_Γ: Τόσο πιο κοντά στον άξονα y΄y ".

Απόσπασμα Νο3

Το πώς χρησιμοποιείται το παιδαγωγικό λογισμικό, εξαρτάται από το ποιόν των δραστηριοτήτων που καλούνται οι μαθητές να ολοκληρώσουν (Ferrara et al 2006, p238). Οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή τη συνάντηση, σχεδιάστηκαν με στόχο την εξοικείωση των μαθητών σε αυτό το υπολογιστικό περιβάλλον και στην ανάπτυξη στρατηγικών αξιοποίησης των εργαλείων του. Οι συμμετέχοντες για δεύτερη φορά, τουλάχιστον όσο αφορά μαθήματα μαθηματικών και πάντα στα πλαίσια του σχολικού περιβάλλοντος, χρησιμοποιώντας διερευνητικό λογισμικό επιχειρηματολόγησαν, αιτιολόγησαν, ανέπτυξαν εικασίες. Γενικά, παρατηρήθηκε ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνα αντιμετώπισαν κοινά θέματα εξοικείωσης στην πρώτη τους επαφή με το λογισμικό. Όμως, όπως αναλυτικά αναφέρεται παραπάνω, τα ζητήματα αυτά που δεν είναι μαθηματικής φύσης αλλά ωστόσο είναι αναγκαίο να διευκρινιστούν (*emergent goals*, ορολογία προτεινόμενη από τον Monaghan, 2004, p333) , αποτέλεσαν κεντρικό σημείο σε αυτό το φύλλο εργασίας, και διασφαλίστηκε σε μεγάλο βαθμό ότι μετέπειτα δεν αποτέλεσαν κώλυμα, όπως φαίνεται και από την πορεία των συναντήσεων που ακολούθησαν.

4.2.3 Παρατηρήσεις στις απαντήσεις των συμμετεχόντων για την ενασχόλησή τους με το 1^{ο} φύλλο - Αξιοποίηση της υποδομής στην υπάρχουσα γνώση

Σύμφωνα με σχολιασμούς των συμμετεχόντων συμπεραίνουμε ότι οι δύο ομάδες αντιμετώπισαν κοινά θέματα προβληματισμού και κατανόησης. Οι μαθητές

αντιμετωπίζουν προβλήματα κατανόησης της έννοιας των μετατοπίσεων, οριζόντιας και κατακόρυφης. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που αναδεικνύει αυτήν την παρατήρηση και που πραγματοποιείται μεταξύ των μελών της ομάδας Ι κατά την προσπάθεια επίλυσης του πρώτου ζητήματος της δεύτερης δραστηριότητας, είναι το ακόλουθο απόσπασμα:

"1. *Μαθ_Α: α*(κ+x), + όχι*

2. *Μαθ_Β: Όχι… α*x… είναι +, -*

3. *Μαθ_Α: Ναι είναι +, - κ*

4. *Ε: Γιατί +, -?*

5. *Μαθ_Α: Γιατί δεν ξέρουμε αν θα είναι… δεξιά ή αριστερά..*

6. *Μαθ_Β: Βασικά όχι*

7. *Ε: Πες μου..*

8. *Μαθ_Β: +κ*

9. *Ε: +κ?*

10. *Μαθ_Β: ναι οπότε αν είναι +, πάει συν το πλην κ*

11. *Ε:Ωραία δοκιμάστε το λιγάκι …*

12. *Μαθ_Β: Μισό λεπτό σκέφτομαι κάτι*

13. *Ε: Θες να μας πεις τι σκέφτεσαι?*

14. *Μαθ_Β: μήπως είναι πλην απόλυτη κ*

15. *Ε: Γιατί το λες αυτό*

16. *Μαθ_Β: Δεν ξέρω.. επειδή θα βγει λάθος με συν*

17. *Ε: Γιατί θα βγει λάθος με συν?*

18. *Μαθ_Β: Γιατί όταν έχουμε πλην, αν το κ είναι αρνητικό θα βγει συν*

19. *Μαθ_Α: Ναι!! Ενώ αν είναι θετικό θα βγει πλην… Θα το δοκιμάσω".*

Απόσπασμα Νο4

Ανακαλώντας την προϋπάρχουσα γνώση επιδιώκουν να εντοπίσουν τα χαρακτηριστικά εκείνα που θα εξασφαλίσουν την ανάδειξη ενός προτύπου, το οποίο σε κάθε περίπτωση, όποιος και να είναι ο μετασχηματισμός που θα εφαρμοστεί, θα δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα (1, 2, 3, 14 / *Απόσπασμα Νο4*). Για το σκοπό αυτό εστιάζουν στη θετικότητα ή αρνητικότητα των παραμέτρων κ και λ (3, 8, 10, 16, 18, 19 / *Απόσπασμα Νο4*), που σχετίζονται με την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση αντίστοιχα.

Στην προσπάθεια προσδιορισμού του γενικού τύπου που περιγράφει την οριζόντια μετατόπιση, η μαθ_Α προτείνει τον $α(x+κ)^2$. Ο μαθ_Β αντιπροτείνει τον $α(x +, - κ)^2$, με τον οποίο συμφωνεί και το δεύτερο μέλος της ομάδας. Θεωρούν αυθαίρετα ότι η παράμετρος κ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς και όταν τους ζητείται περαιτέρω διευκρίνιση γι αυτό, αιτιολογούν την επιλογή τους ως εξής: *" Γιατί δεν ξέρουμε αν θα είναι… δεξιά ή αριστερά.."*. Στρέφουν την προσοχή τους μεταξύ της μεταβλητής x και της παραμέτρου κ. Το συν (+) αντιπροσωπεύει μετατόπιση προς τα αριστερά και το πλην (–) μετατόπιση προς τα δεξιά. Συνειδητοποιώντας ο μαθ_Β ότι η παράμετρος παίρνει

και αρνητικές τιμές συμφωνεί με την αρχική πρόταση της συμμαθήτριάς του, άποψη που αμέσως αναιρεί. Όμοια και στο απόσπασμα που ακολουθεί:

"1. *Μαθ_Γ: x συν 2, x συν 2*

2.*Μαθ_Δ: Εγώ για αυτό είπα να γράψω πρώτα τον γενικό τύπο*

3.*Μαθ_Γ: ότι είναι x συν 2 είναι… όχι x πλην 2… πλην 2 είναι, αφού είναι δεξιά…*

4.*Μαθ_Δ: Το κ είναι συν 2*

5.*Μαθ_Γ: Όχι είναι πλην 2*

6.*Μαθ_Δ: Εσύ δεν μου είπες..*

7.*Μαθ_Γ: Α! είναι… το κ είναι 2, ok, αλλά αφού είναι δεξιά, αφού είναι δεξιά πάει πλην κ"*,

Απόσπασμα Νο5

Το ζήτημα που προκύπτει, όπως και προηγουμένως, είναι ότι οι συμμετέχοντες προσπαθούν να συνδυάσουν το πρόσημο που παρουσιάζεται στην αλγεβρική έκφραση με την αντίστοιχη μεταφορά, ενώ φαίνεται έντονα η προσπάθεια ανάδειξης ενός κανόνα (7 / *Απόσπασμα Νο5*). Δεν μπορούν να διαχωρίσουν, για παράδειγμα, ότι η τιμή της παραμέτρου κ δίνει κατά πόσες μονάδες μετατοπίζεται το σύνολο των σημείων που αποτελούν τη συνάρτηση και προς ποια κατεύθυνση, ενώ το πρόσημο μεταξύ παραμέτρου και μεταβλητής προκύπτει, όπως αναλυτικά περιγράφεται στην παιδαγωγική προσέγγιση που προτείνουν οι Zazkis et al (2003), από αλγεβρικές πράξεις (2, 3, 4, 5, 7 / *Απόσπασμα Νο5*).

Σε προσπάθειες σύγκρισης οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης οι συμμετέχοντες επικεντρώνονται σε εξωτερικά χαρακτηριστικά των αλγεβρικών εκφράσεων:

"1. *Ε: Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου*

2. *Μαθ_Δ: Παρατηρούμε ότι μπήκε και ένα συν τρία, το λ, και έφυγε το κ*

3. Μαθ_*Γ: Παρατηρούμε ότι αφού μπαίνει συν τρία εδώ πέρα αυτό μετακινείται πάνω κάτω… είναι το ακριβώς αντίθετο…*

4. *Μαθ_Δ: Όχι…*

5. *Ε: Τι εννοείς?*

6. *Μαθ_Γ: Εννοώ … εδώ βάζαμε θετικές τιμές και παίρναμε x πλην το θετικό, ενώ τώρα βάζουμε θετικό, θετικό*

7. *Μαθ_Δ: Ναι, ναι! Ενώ τώρα βάζεις θετικό. Κατάλαβα! Πριν για να μπουν τα θετικά, έπρεπε να έχουμε αρνητικό πρόσημο*

8. *Μαθ_Γ: Αυτό!*

9. *Μαθ_Δ: Ενώ τώρα στα θετικά βάζουμε θετικό πρόσημο"*.

Απόσπασμα Νο6

Για τους συμμετέχοντες οι μετασχηματισμοί (κατακόρυφη και οριζόντια μεταφορά) λειτουργούν αντίθετα (3 / *Απόσπασμα Νο6*). Αυτό που τους διαφοροποιεί εντοπίζεται στην αναλυτική έκφραση των δύο μετατοπίσεων. Το πρόσημο της παραμέτρου είναι

αυτό που φαίνεται στους δρομείς. Το πρόσημο που παρουσιάζεται στον τελικό τύπο είναι "αυτό που πρέπει" (6, 7, 9 / *Απόσπασμα No6*).

Ένα ακόμη σύνηθες φαινόμενο που είναι ικανό σχολιασμού είναι αυτό που περιγράφεται στο ακόλουθο απόσπασμα. Οι μαθητές της ομάδας Ι, καλούνται για ακόμη μία φορά να εξηγήσουν το αρνητικό πρόσημο που προκύπτει στην οριζόντια μετατόπιση

" 1.Μαθ_Β: Γιατί? Ε προφανώς!

2.Ε: Ποιο είναι το προφανώς…

3.Μαθ_Β: Ότι… ας το λίγο να το εξηγήσω… Όταν είναι πλην κ, και έχουμε το κ θετικό… Τότε το κ θα γίνει αρνητικό, θα γίνει αρνητικό

4.Ε: και?

5.Μαθ_Α: θα κινηθεί ανάποδα.. θα κινηθεί δεξιά..

6.Μαθ_Β: Ναι!!

7.Ε: Τι εννοείς ανάποδα?

8.Μαθ_Α: έχουμε (x-2)^2… Αφού είναι πλην δύο, κανονικά θα πήγαινε αριστερά..

9.Μαθ_Β: αλλά πηγαίνει ανάποδα".

Απόσπασμα No7

Ο ισχυρισμός ότι κινείται προς τη *λανθασμένη πλευρά* (5, 9 / *Απόσπασμα No7*), εκφράζει τη διαμάχη ανάμεσα στο οπτικό αποτέλεσμα, που παρουσιάζεται από το λογισμικό και στο προσδοκώμενο. Το αποτέλεσμα αυτό αντιβαίνει στη διαίσθησή τους γι αυτό γίνεται και προσπάθεια να *"αιτιολογηθεί"* αυτή η αντιφατικότητα, περιγράφοντας αναλυτικά τις ενέργειες που πραγματοποιούν (3, 5 / *Απόσπασμα No7*), στρατηγική που σύμφωνα με τη Hazzan, 1999, επιτρέπει στο άτομο να λειτουργεί με τη διαδικαστική προσέγγιση (όπως χαρακτηριστικά φαίνεται και στο απόσπασμα *No6*).

Επιπροσθέτως, στη διάρκεια των απομαγνητοφωνήσεων ήρθαμε αντιμέτωποι με την παρανόηση και την μη ορθή αποτύπωση των μαθηματικών όρων της συμμετρίας και της αναλογίας. Και οι δύο ομάδες στην προσπάθειά τους να αναλύσουν όσο το δυνατόν καλύτερα τη σύγκριση και τον παράλληλο προσδιορισμό των δύο διαφορετικών μετατοπίσεων χρησιμοποίησαν ορολογία, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους, τους κανόνες και τις προϋποθέσεις που διέπουν τη χρήση της. Στην ομάδα Ι, συνέβη το ακόλουθο:

"Ε: Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις?

Μαθ_Β: Έχουν ίδια φορά… Εννοώ είναι συμμετρικές

Ε: Είναι συμμετρικές ως προς τι?

Μαθ_Β: Πόσο ανοίγουν

Ε: Εννοείς έχουν την ίδια μορφή

Μαθ_Β: Ναι "

Απόσπασμα Νο8

και στην ομάδα ΙΙ: *" Μαθ_Δ: Τι σχέση έχουν η f και η g? // Μαθ_Γ: Δεν είναι σαν ανάλογες?"*.

Φυσικά μία ορθή παρατήρηση που πρέπει να γίνει σε αυτό το σημείο είναι ότι τα μέλη τόσο της ομάδας Ι όσο και της ΙΙ, πέρα από το γνωστικό και βαθμολογικό τους επίπεδο, προτίμησαν το ομαδικό πνεύμα από την ατομική προσέγγιση · συνεργάστηκαν στην προσπάθεια επίλυσης των ζητημάτων του φύλλο εργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, η ενασχόληση με τις ομάδες Ι και ΙΙ μας οδήγησε σε μεμονωμένες παρατηρήσεις για την κάθε μία. Μία παρατήρηση ιδιαίτερης σημασίας για έναν εκπαιδευτικό μαθηματικό είναι η διάρκεια που χρειάστηκε η ομάδα Ι για να ολοκληρώσει τις δραστηριότητες του ερευνητικού φύλλου εργασίας, σε σύγκριση με την ομάδα ΙΙ. Μπορεί να φαίνεται μικρής σημασίας αυτή η αναφορά αλλά πέρα από την μαθηματική ανάλυση, σίγουρα ενδιαφέρον παρουσιάζει η οργάνωση αυτής της ανάλυσης. Επίσης, χαρακτηριστική είναι η μεγάλη σημασία που δόθηκε από τους μαθητές μαθ_Γ, μαθ_Δ για την διατύπωση των ζητημάτων που τους τέθηκαν, αλλά και για την ουσιαστική κατανόηση αυτής.

4.2.4 Γνωστικά Αναπτυξιακά Επίπεδα

Λαμβάνοντας υπόψη το παραγόμενο, από τους συμμετέχοντες στην έρευνα, έργο κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με τις δραστηριότητες της πρώτης συνάντησης, προκύπτει ότι σε αυτό το στάδιο υπάρχουν τουλάχιστον δύο γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα: τα στάδια *μονοδιάστατης και πολυδιάστατης δομής*. Άλλωστε, το ίδιο το περιεχόμενο του πρώτου φύλλου εργασίας, οι στόχοι που θέτει, όπως και το πλάνο ανάπτυξης των ιδεών που διαπραγματεύεται, δεν επιτρέπουν τη σαφή ανάδειξη χαρακτηριστικών του έργου των συμμετεχόντων που θα τους κατατάξει στο σχεσιακό και πλέον στάδιο.

Ο μαθ_Β, εξετάζοντας το σύνολο των απαντήσεών του, εντάσσεται στο στάδιο της μονοδιάστατης δομής της ταξινόμησης κατά *SOLO* και αυτό γιατί προσπάθησε μεν να αναπτύξει συνδέσεις μεταξύ γραφικής και αναλυτικής αναπαράστασης των μετασχηματισμών, αλλά σε πολλές περιπτώσεις αποσπάστηκε από άλλα άσχετα ως προς τη μελέτη θέματα. Για παράδειγμα, όταν αντικείμενο συζήτησης ήταν πώς

μεταβάλλεται η μορφή της γραφικής παράστασης της παραβολής καθώς μεταβάλλεται ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου x^2, ο μαθ_Β τόνιζε συνεχώς το πρόσημο της συνάρτησης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο μαθητής δεν ήταν ικανός να παρέχει μία συνεπή απάντηση. Όταν ζητήθηκε από την ομάδα του να μελετήσει τη μεταβολή της μετατόπισης κατακόρυφα, ενώ είχε προηγηθεί η μελέτη της οριζόντιας μετατόπισης, ο μαθ_Β δε φάνηκε να αναπτύσσει καθόλου συνδέσεις με το προηγούμενο ζήτημα, πιθανόν διότι αποσπάστηκε από τα σύμβολα που συμμετείχαν.

Γενικά, οι υπόλοιποι τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες εντάσσονται στο στάδιο της πολυδιάστατης δομής της *SOLO*, δίνοντας όμως μικρά δείγματα σχεσιακού επιπέδου, όπως προκύπτει από ορισμένες, μεμονωμένες, λογικά διατυπωμένες απαντήσεις που έχουν δώσει κατά τη συμπλήρωση του πρώτου φύλλου εργασίας. Οι τρεις μαθητές, αλληλεπιδρώντας με τα διαθέσιμα αναπαραστασιακά περιβάλλοντα, είχαν τη δυνατότητα να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν τις μεταβολές στο γράφημα της συνάρτησης με τρόπο συνεπή. Αναγνώρισαν περισσότερα από ένα κοινά χαρακτηριστικά των μετατοπίσεων (οριζόντιων και κατακόρυφων) με τέτοιο τρόπο ώστε να ενσωματώνουν την όποια γνωστική δομή που είχαν στη διάθεσή τους, με την προς μελέτη μαθηματική έννοια.

4.3 Συνάντηση 2η: Προϋπάρχουσα γνώση μέσα από ένα νέο πρίσμα

4.3.1 Εισαγωγή

Κεντρικός σκοπός της δεύτερης συνάντησης αποτέλεσε η επίσημη εισαγωγή των εννοιών της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης υπό ένα νέο πρίσμα, που τοποθετεί τη διδασκαλία των μετασχηματισμών, όχι στο πλαίσιο της θεωρίας συναρτήσεων αλλά σε αυτό των μετασχηματισμών. Η ενέργεια αυτή βασίστηκε όχι μόνο στη μελέτη της παραβολής, αλλά και άλλων συναρτήσεων, όπως η απόλυτη τιμή και η υπερβολή. Δεν επιδιώχθηκε η σύγκριση της παραδοσιακής εισαγωγής αυτών των εννοιών με τη δεδομένη παιδαγωγική προσέγγιση. Άλλωστε, σύμφωνα με τον Schoenfeld (2000, p642), μία τέτοια σύγκριση, που εξετάζει την αποτελεσματικότητα δύο διαφορετικών προσεγγίσεων του ίδιου αντικειμένου δεν είναι βάσιμη. Κάθε μία πιθανόν να επικεντρώνεται σε διαφορετικά σημεία. Πράγματι, στην προκειμένη, η παραδοσιακή προσέγγιση δίνει βαρύτητα στην

ανάπτυξη υπολογιστικών ικανοτήτων με στόχο την επιτυχή συμμετοχή των μαθητών στις τελικές εξετάσεις, ενώ η προτεινόμενη προσέγγιση, επιδιώκει την άμβλυνση της ασυμφωνίας ανάμεσα στο προσδοκώμενο αποτέλεσμα και στην εικόνα του γραφήματος.

4.3.2 Εισαγωγή επίσημης σημειογραφίας

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις των συμμετεχόντων, συμπεράναμε ότι μπόρεσαν να κατανοήσουν και να αποτυπώσουν με ευκολία τη μετατόπιση ενός συνόλου σημείων σύμφωνα με έναν δοσμένο κανόνα. Κατάφεραν, επίσης, να παράγουν τον κανόνα που περιγράφει την μετατόπιση ενός συνόλου σημείων, έχοντας την αρχική και την τελική γραφική αναπαράσταση ενός πολυγώνου.

Μάλιστα, οι μαθητές δεν αρκέστηκαν σε απλές παρατηρήσεις, αλλά η ανάγκη για επεξήγηση οδήγησε στο να αναπτυχθεί διάλογος μεταξύ των μελών κάθε ομάδας για την επίδραση που έχει η εφαρμογή του δεδομένου *κανόνα* - του δεδομένου μετασχηματισμού, σε ένα σύνολο σημείων, στα μεγέθη του μήκους και της γωνίας. Και οι δύο ομάδες προκειμένου να επιβεβαιώσουν ότι η μετατόπιση του αρχικού συνόλου σημείων που περιγράφεται από δοσμένο κανόνα πραγματοποιήθηκε σωστά, έλεγξαν *διαισθητικά* την ισότητα του τελικού και του αρχικού γραφήματος:

"1. Ε: Επαρκούν αυτά τα σημεία? Γιατί μου πήρατε μόνο αυτά [μόνο τις κορυφές]… Μεταφέρατε όλα τα άλλα σωστά?

2. Μαθ_Α: Ναι! Αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο… μπορούμε να το διαπιστώσουμε

3. Ε: Τι εννοείς?

4. Μαθ_Α: Εεεε, το (1,1)

5. Ε: Το (1,1)?

6. Μαθ_Α: Ε! Ναι! Κάπου εδώ θα είναι αυτό [εισάγει το σημείο από την "Εισαγωγή"]… και το άλλο θα πάει στο (5,…)… όχι στο (6, -1), δηλαδή κάπου εδώ [το μεταφέρει με τη βοήθεια του ποντικιού]"

Απόσπασμα Νο9

Η ομάδα Ι, επέλεξε ένα εσωτερικό σημείο του αρχικού γραφήματος (2, 4 / *Απόσπασμα Νο9*) και έλεγξε αν το αντίστοιχο μετατοπισμένο "πέφτει" μέσα στο νέο σύνολο σημείων με τη βοήθεια του λογισμικού (6 / *Απόσπασμα Νο9*).

Η ομάδα ΙΙ, αφού εφάρμοσε τον κανόνα στις κορυφές του δοθέντος πολυγώνου και αφού έφερε τις ακμές στο νέο, διαπίστωσε με την ολοκλήρωση της ένωσης, ότι το νέο

σχήμα που προέκυψε δεν είναι το ίδιο με το αρχικό και αμέσως αναζήτησαν το σημείο που δημιουργεί το σφάλμα.

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, εύκολα ανέπτυξαν συνδέσεις ανάμεσα στην οπτική αναπαράσταση δύο συνόλων σημείων και του κανόνα που περιγράφει με μαθηματικούς όρους αυτήν την αναπαράσταση. Προς την κατεύθυνση αυτή συνετέλεσε η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού σημείου P του αρχικού σχήματος, το οποίο είναι συνδεδεμένο με σημείο *Q* στο μετασχηματισμένο σχήμα, με τέτοιο τρόπο ώστε κατά την μετακίνηση του σημείου P, να πραγματοποιείται ταυτόχρονα η αντίστοιχη μεταβολή των συντεταγμένων του σημείου *Q*. Τα δύο σημεία ενώνονται με διάνυσμα, ώστε να είναι φανερή η αντιστοιχία τους. Η σκέψη είναι η εξής: Το αποτέλεσμα της μεταφοράς μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διάνυσμα με αρχή οποιοδήποτε σημείο του αντικειμένου και πέρας το αντίστοιχο σημείο στο μετατοπισμένο αντικείμενο: όλα αυτά τα διανύσματα έχουν το ίδιο μέγεθος και διεύθυνση (Tall, 2009, p473). Συνεπώς, το σύνολο αυτό των διανυσμάτων αντικαθίσταται, στο διερευνητικό περιβάλλον του *Geogebra*, από ένα μοναδικό, δεδομένου ότι έχει το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση. Το δυναμικό περιβάλλον επέτρεψε στους χρήστες να πειραματιστούν, κινώντας το στοιχείο που ορίστηκε ως ελεύθερο αντικείμενο στο αρχικό σχήμα με στόχο να παρατηρήσουν πώς ανταποκρίνεται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές τόσο το σημείο το αντίστοιχο στο μετατοπισμένο γράφημα, όσο και το διάνυσμα που τα συνδέει, ενώ παράλληλα, το λογισμικό διατήρησε όλες τις σχέσεις που ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής. Εξετάζοντας ζεύγη σημείων τα μέλη και των δύο ομάδων χρησιμοποίησαν την εξής προσέγγιση προκειμένου να παράγουν το ζητούμενο κανόνα: από την τετμημένη και την τεταγμένη του μετατοπισμένου σημείου αφαίρεσαν τις αντίστοιχες του αρχικού σημείου, διαδικασία που επανέλαβαν για ικανοποιητικό πλήθος σημείων. Παρατήρησαν πως τα αποτελέσματα αυτής της διεργασίας ήταν σταθερά και έτσι, εντόπισαν το *pattern* που διαμορφώνεται, καταλήγοντας εύκολα στη διαμόρφωση του ζητούμενου κανόνα.

4.3.3 Προϋπάρχουσα γνώση υπό νέο πρίσμα

Στο σημείο αυτό, με τη χρήση της θεωρίας μετασχηματισμών, επιχειρείται η εξισορρόπηση της αντίφασης που έγκειται στην ασυμφωνία που υπάρχει ανάμεσα

στην αρχική διαίσθηση, για το αποτέλεσμα εφαρμογής του μετασχηματισμού της οριζόντιας μετατόπισης σε μία συνάρτηση, και στη γραφική αναπαράσταση αυτής της μεταφοράς ενώ, επιδιώκεται να γίνει αντιληπτό πώς οι δύο μετατοπίσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, είναι συνεπείς υπό το νέο πρίσμα.

Σκοπός είναι, σε ένα πρώτο στάδιο, η ανάπτυξη των γενικών τύπων $f(x)=a(x-\kappa)^2$ και $g(x)=a|x|+\lambda$, με δεδομένες τις εμπειρίες που οι συμμετέχοντες στην έρευνα απέκτησαν με την ολοκλήρωση των δύο αρχικών δραστηριοτήτων, ώστε να μεταβούν ομαλά στην ανάπτυξη του γενικότερου τύπου $f(x)=g(x-\kappa)+\lambda$, αφού έχει προηγηθεί η μελέτη της παραβολής, αλλά και της υπερβολής, μίας μη οικείας συνάρτησης, που έχουν υποστεί ταυτόχρονα οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Επιδιώκεται η ανάπτυξη συνδέσεων ανάμεσα στην οπτική αναπαράσταση και στην αλγεβρική έκφραση, χωρίς να δημιουργούνται *αντιφατικές εικόνες*. Κεντρική ιδέα: αφού οποιοδήποτε σύνολο σημείων μπορεί να μετατοπιστεί σύμφωνα με έναν κανόνα, αυτό το σύνολο σημείων μπορεί να είναι μία συνάρτηση.

Ξεκινάμε με μία αναλυτική αναφορά στην τρίτη δραστηριότητα, όπου οι απαντήσεις των συμμετεχόντων είναι αντιπροσωπευτικές των απαντήσεων που δόθηκαν στο σύνολο των τεσσάρων δραστηριοτήτων. Οι μαθητές Α και Β, όσο και οι μαθητές Γ και Δ, βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των συζητήσεων που συμμετείχαν κατά τη διάρκεια της προηγούμενης συνάντησης, καθώς και στην προϋπάρχουσα γνώση τους, προσπάθησαν να παράγουν απ ευθείας το γενικό τύπο $f(x)=a(x-\kappa)^2$. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη τους σχολιασμούς τους επιβεβαιώνουμε ευρήματα που προέκυψαν από τη μελέτη των διαλόγων της πρώτης συνάντησης. Οι συμμετέχοντες προσπάθησαν να συνδέσουν το πρόσημο που παρουσιάζεται στην αλγεβρική έκφραση με την αντίστοιχη μεταφορά. Ο προβληματισμός, όμως, για την τελική επιλογή του προσήμου στον τύπο επιβεβαιώνει πώς, η ανάδειξη προτύπου[16] χρησιμοποιήθηκε μόνο *τοπικά*, ώστε να ολοκληρωθούν οι δραστηριότητες της προηγούμενης συνάντησης. Η αιτιολόγηση που δόθηκε για το πρόσημο που τελικά προτάθηκε για το γενικό τύπο βασίστηκε στην εικόνα του γραφήματος: *"αφού το γράφημα [με την εφαρμογή του μετασχηματισμού] εμφανίστηκε στα δεξιά,… το πρόσημο εδώ [δείχνει στον τύπο] θα είναι πλην"*. Το πλην (-) αντιπροσωπεύει την

[16] σύμφωνα με το οποίο η προσοχή των μαθητών στρέφεται μεταξύ της μεταβλητής x και της παραμέτρου κ

μετατόπιση δεξιά. Περισσότερο ενδιαφέρονται για το πώς θα το θυμούνται παρά για εννοιολογική κατανόηση.

Τα μέλη και των δύο ομάδων πέρασαν, αφού δεν μπόρεσαν να καταλήξουν με βεβαιότητα σε ένα γενικό τύπο, στα ερωτήματα της δραστηριότητας. Όπως αναλυτικά αναφέρθηκε παραπάνω ανταποκρίθηκαν επιτυχώς στις δύο πρώτες δραστηριότητες του δεδομένου φύλλου εργασίας και απέδωσαν με ευκολία τον κανόνα που περιγράφει την μετατόπιση ενός συνόλου σημείων, έχοντας την αρχική και την τελική γραφική του αναπαράσταση. Ωστόσο, μόνο μετά από την παρέμβαση της ερευνήτριας θεώρησαν τη δοθείσα συνάρτηση ως σύνολο σημείων, όπου είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η θεωρία των μετασχηματισμών. Τα μέλη της ομάδας Ι και της ΙΙ, πέρα από το γνωστικό και βαθμολογικό τους επίπεδο, κατέληξαν, με σχετική ευκολία στον τύπο της μετασχηματισμένης συνάρτησης για ένα τυχαίο σημείο (x_M, y_M), έχοντας κάνει βήμα προς βήμα τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί (*απόσπασμα Νο10*) η μαθ_Α φαίνεται πώς έχει αρχίσει να κατανοεί ότι η τιμή της παραμέτρου κ εκφράζει κατά πόσες μονάδες μετατοπίζεται το σύνολο των σημείων που αποτελούν τη συνάρτηση και προς τα ποια κατεύθυνση, ενώ το τελικό πρόσημο μεταξύ παραμέτρου και μεταβλητής προκύπτει από αλγεβρικές πράξεις.

"Μαθ_Α: Ωραία… $x_M = x_A + 1$, $y_M = y_A$, μισό λεπτό $y_A = x_A^2$ … Ε! και βγαίνει $y_M = (x_M - 1)^2$ … Να ρωτήσω κάτι? Αν είχαμε μετατόπιση αριστερά αυτό θα ήταν αρνητικό και αυτό θα ήταν +

Ε: Ναι!... Αλλά γιατί?

Μαθ_Α: Γιατί άμα λύσουμε… πλην… και μετά αν λύσουμε ως προς το x_A θα πάει συν…"

Απόσπασμα Νο10

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που αναδεικνύει αυτήν την παρατήρηση και που πραγματοποιείται μεταξύ των μελών της ομάδας ΙΙ, είναι το ακόλουθο:

"1. Ε: Εκφράστε την τετμημένη του σημείου Μ συναρτήσει της τετμημένης του σημείου Α

2. Μαθ_Δ: Το ίδιο πράγμα είναι… $x_M = 2 + x_A$ … Όχι, $x_M = 3 + x_A$

3.Ε: Άρα, ποια είναι η σχέση που συνδέει τώρα?

4.Μαθ_Γ: Προφανώς για τα x_A, y_A, έχουμε $y_A = x_A^2$. Το $y_A = y_M - 3$ … Όχι, όχι, όχι

5.Μαθ_Δ: Γιατί? Α! Ναι!! Είναι y_M *ίσον…*

6.Μαθ_Γ: Α! Ναι! … με $(x_M - 3)^2$ *και το άλλο είναι ακριβώς το ίδιο…* y_A *ισούται*

7.Μαθ_Δ: … με $x_A^{\ 2}$ *..*

8.Ε: Άρα, για πάμε να δούμε αυτό το ερώτημα

9.Μαθ_Δ: Τύπος

10.Ε: Γενικός τύπος της συνάρτησης g

11.Μαθ_Γ: Η g είναι η κόκκινη, ε?

12.Ε: Ναι

13.Μαθ_Δ: g(x) ίσον x συν κ, πλην κ… ή συν κ?

14.Μαθ_Γ: Όχι… περίμενε! Θα το κάνουμε έτσι! αφού έχουμε μετατόπιση, ας πούμε δεξιά… έχουμε κ θετικό και μας βγαίνει αρνητικό εκεί πέρα [δείχνει στον τύπο]… Άρα, συν κ… και τελικά εδώ [εννοεί μετά τις πράξεις] πλην κ

15.Μαθ_Δ: Γιατί?

16.Μαθ_Γ: Αφού έχουμε θετικό εδώ και μετά τις πράξεις μας βγαίνει αρνητικό, άρα πλην κ… Για τη συγκεκριμένη τιμή για το κ, που είναι το τρία στην προκειμένη, έχουμε μετατόπιση δεξιά και βγαίνει μετά τις πράξεις πλην τρία… Άμα πάρουμε πλην τρία θα βγει τρία

17.Μαθ_Δ: Συν τρία εδώ, δηλαδή γενικά συν κ, άρα… πλην κ, δηλαδή, $(x-\kappa)^2$ *"*

Απόσπασμα Νο11

Ωστόσο μελετώντας τους σχολιασμούς των δύο συμμετεχόντων παρατηρούμε πώς αρκετά ομαλά πέρασαν στη γενίκευση και τελικά παρήγαγαν το γενικό τύπο $\left(y = a(x-\kappa)^2\right)$ (8-17/ *Απόσπασμα Νο12*), ακολουθώντας το μοτίβο που επανέλαβαν αρκετές φορές πιο πάνω για δεδομένες τιμές της παραμέτρου κ (1-7/ *Απόσπασμα Νο12*).

Ένα ακόμη σύνηθες φαινόμενο που είναι άξιο σχολιασμού είναι αυτό που προκύπτει από τη μελέτη των αποσπασμάτων *Νο12* και *Νο13*, αντίστοιχα της ομάδας Ι και της ΙΙ. Είναι έντονο και στα προηγούμενα αποσπάσματα (*Νο10* και *Νο11*). Οι μαθητές καλούνται για ακόμη μία φορά να εξηγήσουν το αρνητικό πρόσημο που εμφανίζεται στο γενικό τύπο της οριζόντιας μετατόπισης, αφού έχουν ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του μετασχηματισμού υπό το νέο πρίσμα.

"1.Ε: Αυτή δεν είναι ίδια με αυτή που βρίσκαμε χθες?

2.Μαθ_Α: Ναι

3.Ε: Μπορείτε να μου εξηγήσετε τώρα γιατί εμφανίζεται αυτό το μείον?

4.Μαθ_Β: Γιατί χθες δεν το είπαμε? Αφού είναι δεξιά…

5.Μαθ_Α: Ναι γιατί είναι δεξιά… Δηλαδή αφού είναι δύο στα δεξιά

6.Ε: Σύμφωνα με αυτό που μου είπες πριν

7.Μαθ_Α: Εξαρτάται με τι θα λύσουμε.. Π.χ. αυτό τώρα είναι ένα δεξιά… Θα είναι αρνητικό το πρόσημο… γιατί, γιατί θα είναι το x_M *, θα είναι ίσο με* $x_A + 1$*,*

επομένως αν λύσουμε ως προς x_A *... θα πάει πλην"*

Απόσπασμα Νο12

"1.Ε: Μπορείτε να μου εξηγήσετε γιατί εμφανίζεται αυτό το μείον?

2.Μαθ_Γ: Το σύνολο των σημείων που έχουμε μετατοπίζεται σύμφωνα με τον κανόνα που δίνεται και από τις αλγεβρικές πράξεις…

3.Μαθ_Δ: ….προκύπτει το πρόσημο"

Απόσπασμα Νο13

Τα μέλη της ομάδας Ι αιτιολογούν το πρόσημο που τελικά προτάθηκε για το γενικό τύπο με αναφορά στη νέα θέση του γραφήματος, εξετάζοντας μόνο την οριζόντια μετατόπιση, όπως και πριν την παρέμβαση. Το σύστημα ερμηνείας που έχουν αναπτύξει, αφού τους εξασφαλίζει λύση στο δεδομένο πρόβλημα, δύσκολα θα το εγκαταλείψουν (Fischbein, 1986). Αν και πλέον διαθέτουν τη θεωρητική γνώση που θα τους παρέχει τη σωστή απάντηση και παράλληλα, εξασφαλίζει εννοιολογική επεξήγηση στρέφονται στη λιγότερο αφηρημένη, στην προκειμένη περίπτωση, τυποποιημένη διαδικασία (σύμφωνα με την προτεινόμενη από την Hazzan, ορολογία *"κανονική διαδικασία"*), που επιτρέπει την επίλυση του ζητήματος χωρίς εμβάθυνση (*μείωση της αφαίρεσης ως συνέπεια της διττής φύσης των μαθηματικών εννοιών*). Ακόμη και μετά την προτροπή της ερευνήτριας να χρησιμοποιήσουν τη νέα γνώση, τη θεωρία των μετασχηματισμών, για να αιτιολογήσουν το αρνητικό πρόσημο που εμφανίζεται στο γενικό τύπο της οριζόντιας μετατόπισης, ο τρόπος διατύπωσης της απάντησης της μαθ_Α (7 / *Απόσπασμα Νο12*), αντανακλά τη στροφή προς τη διαδικαστική προσέγγιση. Η χρήση του πρώτου πληθυντικού προσώπου, σε συνδυασμό με τη λεπτομερή περιγραφή της πορείας της διαδικασίας, χαρακτηριστικά του έργου των μαθητών που υιοθετούν στρατηγικές μείωσης της αφαίρεσης ως αποτέλεσμα της διττής φύσης των μαθηματικών εννοιών, υπογραμμίζει την ανάγκη της μαθήτριας για οικειοποίηση της μαθηματικής γλώσσας.

Η απάντηση των μελών της ομάδας ΙΙ μαρτυρά στιγμιαίο ποιοτικό άλμα και ικανότητα αντίληψης της προς μελέτη έννοιας ως οικείας (*Απόσπασμα Νο13*). Διαχειρίζονται τα παραγόμενα της διαδικασίας που ακολούθησαν παραπάνω για δεδομένες τιμές της παραμέτρου κ, χωρίς να τους απασχολεί η ίδια η διαδικασία (σχεσιακό στάδιο), σε αντίθεση με την απάντηση της μαθ_Α. Στο σημείο αυτό είναι φανερό πως η κατανόηση κερδίζει σταδιακά το χαμένο έδαφος της αποστήθισης. Ωστόσο, όπως παρατηρούμε στο απόσπασμα *Νο11* (2, 4, 6, 14, 16, 17), φαίνεται η

τάση και αυτών των μαθητών να λειτουργούν σε ένα επίπεδο χαμηλότερης αφαίρεσης, αποφεύγοντας, με τον τρόπο αυτό, τη στροφή στην αφηρημένη εννοιολογική προσέγγιση. Το συγκεκριμένο επεισόδιο είναι πιο αντιπροσωπευτικό του τρόπου λειτουργίας των μελών αυτής της ομάδας σε σύγκριση με αυτόν που περιγράφεται στο *No12*. Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονιστεί ότι, αν και στην προκειμένη περίπτωση το επεισόδιο που περιγράφεται στο απόσπασμα *No11*, όπου υιοθετείται η διαδικαστική προσέγγιση από τους συμμετέχοντες, χρονολογικά προηγείται αυτού στο *No12*, η προσέγγιση εδώ είναι περισσότερο εννοιολογική, δεν υπονοείται πώς οι δύο μαθητές στα ακόλουθα δεν στράφηκαν εκ νέου σε επίπεδα χαμηλότερης αφαίρεσης.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι αντιπροσωπευτικές για το σύνολο των τεσσάρων δραστηριοτήτων. Ωστόσο, οι απαντήσεις στις τρεις τελευταίες διαφοροποιούνται σε ορισμένα σημεία, τα οποία επισημαίνονται παρακάτω.

Στην τέταρτη δραστηριότητα, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν, χρησιμοποιώντας τη θεωρία μετασχηματισμών, να παράγουν το γενικό τύπο $g(x)=a|x|+\lambda$. Τα μέλη και των δύο ομάδων πρότειναν κατ ευθείαν το σωστό τύπο. Η ομάδα Ι, υπογραμμίζοντας ότι αυτός ο μετασχηματισμός *"λειτουργεί σωστά"*, δεν ασχολήθηκε με τα *βοηθητικά ερωτήματα*, που σκοπό είχαν την ένταξη και αυτής της μεταφοράς στα πλαίσια της θεωρίας μετασχηματισμών. Τα μέλη της άλλης, ολοκλήρωσαν ένα προς ένα τα ερωτήματα και πραγματοποίησαν σχόλια παρόμοια με αυτά που έδωσαν στην προηγούμενη δραστηριότητα.

Στις δύο τελευταίες δραστηριότητες, στόχος είναι η παραγωγή του τύπου $f(x)=g(x-\kappa)+\lambda$, και για το λόγο αυτό, οι συναρτήσεις που μελετώνται έχουν υποστεί ταυτόχρονα τους δύο μετασχηματισμούς. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν πιο έντονα κωλύματα στον προσδιορισμό του αλγεβρικού τύπου, όταν η συνάρτηση είχε υποστεί ταυτόχρονα τους δύο μετασχηματισμούς, ενώ προσδιόρισαν με μεγαλύτερη ευκολία την αλγεβρική έκφραση που αναπαριστά τη μετατόπιση της παραβολής (οριζόντια και κατακόρυφη), μίας οικείας γι αυτούς συνάρτησης, από ότι της παραβολής, επιβεβαιώνοντας πορίσματα της έρευνας των Trigueros και Lage (2006). Ωστόσο, η αντιπαραβολή των δύο στον ίδιο τύπο, μέσα από το νέο πρίσμα οδήγησε τους συμμετέχοντες στην παράθεση σχολίων που

αποκαλύπτουν ότι έχουν αρχίσει να κατανοούν πώς οι δύο μετατοπίσεις είναι συνεπείς.

4.3.4 Γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα

Λαμβάνοντας υπόψη το παραγόμενο, από τους συμμετέχοντες στην έρευνα, έργο στη δεύτερη συνάντηση, προκύπτει ότι, σε αυτό το στάδιο, υπάρχουν τουλάχιστον τρία γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα. Αυτά τα τρία επίπεδα, *μονοδιάστατης δομής, πολυδιάστατης δομής και σχεσιακό*, αναφέρονται από τον Tall et al (2009, p370), ως κύκλος μάθησης *ΜΠΣ*. Ουσιαστικά, τα χαρακτηριστικά του έργου των συμμετεχόντων τους εντάσσουν στα τρία μεσαία στάδια της κατηγοριοποίησης. Πρέπει να σημειωθεί ότι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, θα γίνει προσπάθεια ένταξης του μαθητή σε ένα επίπεδο της ταξινόμησης ανάλογα με το σύνολο του έργου που παρήγαγε, ενώ στοχεύοντας πάντα στην πληρότητα θα γίνει σαφής αναφορά σε περίπτωση που παρουσιάζει χαρακτηριστικά και κάποιου ακόμη επιπέδου.

Ο μαθ_Β, εξετάζοντας το σύνολο των απαντήσεών του, εντάσσεται στο στάδιο της *μονοδιάστατης δομής* της ταξινόμησης κατά *SOLO*. Υιοθετεί μία μοναδική λύση στο σύνολο των απαντήσεών του, που βασίζεται σε μνημονικούς κανόνες, χωρίς να προσπαθεί να εξετάσει τις προς συζήτηση έννοιες μέσα από το νέο προτεινόμενο πρίσμα. Αν και επιτυχώς συμμετέχει στην επίλυση αρκετά μεγάλου αριθμού υποερωτημάτων των δραστηριοτήτων, είναι χαρακτηριστικό ότι αντιμετωπίζει καθένα από αυτά μεμονωμένα, χωρίς να αναπτύσσει συνδέσεις ανάμεσα σε όσα ήδη γνωρίζει και σε αυτά που μαθαίνει τη δεδομένη χρονική στιγμή. Το σύστημα ερμηνείας που έχει αναπτύξει του εξασφαλίζει τη λύση. Λύνει τα προβλήματα με βάση τα γνωστικά σχήματα που έχει στη διάθεσή του, αν και δεν του εξασφαλίζουν εννοιολογική κατανόηση. Επίσης, σε πολλές περιπτώσεις, η προσοχή του αποσπάται, έστω στιγμιαία, από άσχετα θέματα, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην ακόλουθη απάντησή του: *"Όχι πλην... Εφόσον είναι στο τετράγωνο, γίνεται συν"*. Στην προσπάθεια ανάπτυξης του γενικού τύπου που περιγράφει την οριζόντια μετατόπιση της παραβολής, απορρίπτει τον $f(x)=\alpha(x-\kappa)^2$ και προτείνει τον $f(x)=\alpha(x+\kappa)^2$, επειδή η ποσότητα $(x-\kappa)$, σύμφωνα με τα λεγόμενά του, είναι υψωμένη στο τετράγωνο. Γενικεύει βεβιασμένα έναν κανόνα που γνωρίζει ότι ισχύει για τους

πραγματικούς. Ο μαθητής τείνει να σκέφτεται με οικεία αντικείμενα (*αφαίρεση ως επίπεδο της αντίληψης της έννοιας από το άτομο*).

Γενικά, οι υπόλοιποι τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες εντάσσονται στο στάδιο της πολυδιάστατης δομής της *SOLO*, δίνοντας, όμως, οι δύο από τους τρεις τουλάχιστον, δείγματα σχεσιακού επιπέδου. Οι τρεις μαθητές προσπαθούν να συνδυάσουν την προϋπάρχουσα γνώση με τη νέα θεωρητική γνώση που έχουν στη διάθεσή τους. Ωστόσο, στρέφονται σε *"κανονικές διαδικασίες"*, αντιμετωπίζοντας αλγοριθμικά τις προς μελέτη έννοιες. Ενδεχομένως, με βάση το έργο που παρήγαγαν οι μαθητές της ομάδας ΙΙ, θα μπορούσαν να ενταχθούν στο σχεσιακό στάδιο, αφού σε ορισμένα, μεμονωμένα σημεία, διαχειρίζονται τα παραγόμενα των διαδικασιών χωρίς να τους απασχολεί η ίδια η διαδικασία. Έχουν εξοικειωθεί με αυτές τις διαδικασίες και συνεπώς, δεν καθίσταται αναγκαία η βήμα προς βήμα περιγραφή των ενεργειών που ακολουθούν. Έχουν *πραγματώσει* τη *"διαδικασία εφαρμογής ενός μετασχηματισμού σε μία συνάρτηση"*.

4.4 Συνάντηση 3η: Εκτίμηση βαθμού κατανόησης της έννοιας

4.4.1 Εισαγωγή

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε στην τρίτη συνάντηση περιλαμβάνει 6 ζητήματα, όπου οι μαθητές πρέπει να εργαστούν με μετασχηματισμούς συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τόσο την αναλυτική όσο και τη γραφική αναπαράσταση. Αυτά τα ζητήματα κατηγοριοποιούνται σε τρεις ομάδες:

- προσδιορισμός μετασχηματισμών
- κατασκευή γραφήματος μετασχηματισμένης συνάρτησης
- χρήση μετασχηματισμένων συναρτήσεων σε άλλες ενέργειες και διαδικασίες

Στόχος αυτής της τρίτης συνάντησης, που αποτελεί ταυτόχρονα και μέτρο ελέγχου του μεγέθους της επιρροής των δύο προηγούμενων παρεμβάσεων στα γνωστικά σχήματα των συμμετεχόντων, είναι να αναδειχθούν οι τρόποι λειτουργίας και οι στρατηγικές που υιοθέτησαν οι συμμετέχοντες κατά την αλληλεπίδρασή τους με την εκάστοτε ομάδα ερωτήσεων, καθώς και ποια είναι τα νοήματα που κατασκευάζουν όταν εργάζονται σε αλληλοσυνδεόμενα αναπαραστασιακά περιβάλλοντα.

Συνεπώς, με στόχο την εκτίμηση του βαθμού κατανόησης των προς συζήτηση εννοιών καθώς και τον προσδιορισμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι συμμετέχοντες κατά την αλληλεπίδρασή τους με διαφορετικά ζητήματα που σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς, χρησιμοποιήθηκε και πάλι η κατηγοριοποίηση κατά *SOLO*. Στο στάδιο αυτό, κριτήριο για την ένταξη ενός μαθητή σε ένα δεδομένο επίπεδο θα είναι, και πάλι το σύνολο του έργου του στη συνάντηση. Με βάση την παρατήρηση των Pegg & Tall (2009), που δόθηκε παραπάνω, η τρίτη συνάντηση θα ακολουθήσει τον προσδιορισμό των γνωστικών αναπτυξιακών επιπέδων και ως προς τα ζητήματα, στις τρεις παραγράφους που ακολουθούν. Συνεπώς, το ίδιο άτομο μπορεί να ενταχθεί σε διαφορετικό επίπεδο για τις τρεις διαφορετικού περιεχομένου δραστηριότητες, ανάλογα με το έργο που παράγει και τις νοητικές στρατηγικές που υιοθετεί.

4.4.2 Προσδιορισμός μετασχηματισμών

Τα δεδομένα τα οποία συλλέχθηκαν για το σύνολο των ερωτήσεων που αφορούσαν την *αναγνώριση των μετασχηματισμών* έδειξαν ότι όταν ένα ζήτημα περιλαμβάνει μία συνάρτηση η οποία μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής ενός συνόλου μετασχηματισμών σε μία βασική συνάρτηση, οι μαθητές γενικά είναι ικανοί να προσδιορίσουν τους μετασχηματισμούς που έχουν εφαρμοστεί. Ωστόσο, και οι τέσσερις συμμετέχοντες αντιμετώπισαν δυσκολίες με αυτό τον τύπο δραστηριοτήτων, μεταξύ των άλλων, στο να συνδέουν τη γραφική αναπαράσταση μίας συνάρτησης με την αντίστοιχη αναλυτική της μορφή. Παρουσίασαν μία έντονη τάση να καταφεύγουν στη χρήση μνημονικών κανόνων, παρά το γεγονός ότι υιοθετήθηκε η προτεινόμενη από τους *Zazkis, et al. (2003)* παιδαγωγική προσέγγιση, στην προηγούμενη συνάντηση.

Στην ερώτηση που παρουσιάζονται τα γραφήματα δύο βασικών συναρτήσεων (της παραβολής και της απόλυτης τιμής), τα οποία έχουν υποστεί μετατόπιση, και όπου το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων α και b, ώστε $f(x)=(x-a)^2+b$ και $g(x)=|x-a|+b$, αντίστοιχα, το έργο που παρήγαγαν οι μαθητές της ομάδας Ι κατά την προσπάθεια επίλυσης αυτού του ερωτήματος θα μπορούσε να τους κατατάξει στο *μονοδιάστατης δομής στάδιο*.

"1. μαθ_Α: Ε! Το α είναι συν 3, πλην τρία βασικά... γιατί είναι πλην το πλην... και το β, που είναι εκτός της παρένθεσης, είναι πλην 2

2. μαθ_Β: Περίμενε! Πόσο είπες ότι είναι πλην 3?

3.μαθ_Α: Το α ναι! Γιατί είναι πλην το πλην τρία, θα πάει συν τρία... για να πάει αριστερά! Ενώ άμα είναι σκέτο 3 θα πάει πλην 3, επομένως θα πρέπει να πάει δεξιά..."

Απόσπασμα Νο14

Η μαθ_Α χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο των μετατοπίσεων αμέσως προτείνει τιμές για τις παραμέτρους α και b, εστιάζοντας σε *εξωτερικά χαρακτηριστικά* του συντακτικού τύπου, (*εντός της παρένθεσης – εκτός αυτής* (1 / *Απόσπασμα Νο14*)), ενώ ο μαθ_Β υπογραμμίζει ότι για την επίλυση απαιτείται απλά η αντικατάσταση δεδομένων σε έναν τύπο. Ωστόσο, η μαθ_Α ήταν ικανή να επεξεργάζεται τη συνάρτηση σε διαφορετικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα, χωρίς ωστόσο να επιζητά εννοιολογική επεξήγηση, γεγονός που θα μπορούσε να την κατατάξει στο *πολυδιάστατης δομής στάδιο*.

Στην ομάδα ΙΙ, σε αυτό το σύνολο των ερωτήσεων που αφορά τον *προσδιορισμό των μετασχηματισμών*, οι συμμετέχοντες δεν αναφέρονται τόσο σε μνημονικούς κανόνες – περισσότερο, προσπαθούν να τους κατασκευάσουν οι ίδιοι. Όμως, και εδώ η ικανότητα αλληλεπίδρασης και μετάβασης από τον ένα τρόπο αναπαράστασης στον άλλο, χωρίς όμως να διακρίνουν τη σημασία του καθενός, τους τοποθετεί και αυτούς στο τρίτο στάδιο της κλίμακας.

Οι μαθητές φαίνεται ότι είχαν περισσότερες δυσκολίες στο να προσδιορίσουν μία οριζόντια παρά μία κατακόρυφη μετατόπιση, γεγονός που επιβεβαιώνει τα αντίστοιχα πορίσματα της βιβλιογραφίας. Λαμβάνοντας υπόψη την αιτία που προτείνεται από τους Lage et al. (2006) για την αδυναμία αυτή, θεωρείται ότι σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στο ότι οι μαθητές απομνημονεύουν τους κανόνες των μετασχηματισμών, όπως και τις επιπτώσεις αυτών πάνω στις συναρτήσεις, χωρίς να κατανοούν την μαθηματική ιδέα που υπάρχει πίσω από την τυπική περιγραφή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το απόσπασμα *Νο14*, παραπάνω. Φράσεις της μορφής *"Το α είναι συν 3, πλην τρία βασικά..."*, είναι ιδιαίτερα συνηθισμένες ανάμεσα στις απαντήσεις των μαθητών και των δύο ομάδων. Είναι χαρακτηριστικό ότι η μαθ_Α, που προτείνει τη λύση, αιτιολογεί την απάντησή της μέσω μίας διαδικασίας *"γιατί είναι πλην το πλην"*, χωρίς να της έχει ζητηθεί, ενώ για την κατακόρυφη μετατόπιση, απλά αναφέρει τη λύση. Προσεγγίζει διαδικαστικά την οριζόντια μετατόπιση. Η λεπτομερής περιγραφή

του τρόπου σκέψης της, όταν ο μαθ_Β εκφράζει απορία για την επιλογή της, αποκαλύπτει χρήση στρατηγικής μείωσης αφαίρεσης ως συνέπεια της διττής φύσης μαθητών στο αντίστοιχο επίπεδο της κατηγοριοποίησης κατά *SOLO*:

"1.Ε: Πλην γιατί βάζουμε?

2.μαθ_Β: Επειδή είναι ήδη πλην ο τύπος… βασικά όχι

3.μαθ_Α: Αφού το είχαμε εξηγήσει την προηγούμενη φορά!

4.Ε: Για πες μας

5.μαθ_Α: Επειδή θα μετακινηθεί δεξιά… Αυτό ή το άλλο? Που το είχαμε λύσει ως προς…

6.Ε: Ποιο κατανοείς καλύτερα?

7.μαθ_Α: Αυτό! Μετακινείται δεξιά… Άρα είναι αρνητικό

8.Ε: Με τον άλλο τρόπο μπορείς να το εξηγήσεις, όμως? Που είχαμε πει την προηγούμενη φορά?

9.μαθ_Α: Άμα λύσουμε ως προς… Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο… και λύσουμε ως προς αυτό σε σχέση με το άλλο και αντικαταστήσουμε μετά στον τύπο, θα μας βγει αρνητικό το πρόσημο"

Απόσπασμα Νο15

Παρά την παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε στην προηγούμενη συνάντηση και παρά την επεξήγηση που έδωσε η μαθ_Α (9, *Απόσπασμα Νο15*), η οποία ναι μεν δεν αποτελεί σε βάθος κατανόηση του αντικειμένου, αλλά τουλάχιστον αποτελεί μία προσπάθεια συνδυασμού διαδικασιοεννοιολογικού και ενσαρκωμένου τρόπου σκέψης, ο μαθ_Β επιμένει να αναζητά ένα μέσο αντιπαραβολής, στην προκειμένη έναν μνημονικό κανόνα, που εξασφαλίζει την επιτυχία στην επίλυση του συγκεκριμένου τύπου προβλημάτων. Η μαθ_Α αναφέρεται στη θεωρία μετασχηματισμών η οποία χρησιμοποιήθηκε την προηγούμενη φορά για την επίσημη εισαγωγή της έννοιας των μετατοπίσεων, χρησιμοποιώντας τρίτο πρόσωπο και δίνοντας βήμα προς βήμα τη διαδικασία που ακολουθεί, στοιχεία που αποτελούν, σύμφωνα με τη Hazzan, 1999, στροφή σε ένα χαμηλότερο επίπεδο αφαίρεσης. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι τουλάχιστον τρεις από τους τέσσερες συμμετέχοντες έχουν συνδυάσει το πρόσημο που παρουσιάζεται στην αλγεβρική έκφραση με την αντίστοιχη μεταφορά. Το πρόσημο που τελικά επιλέγεται συνδέεται με την εικόνα του γραφήματος (5, 7 / *Απόσπασμα Νο15*). Τα δύο προηγούμενα αποσπάσματα και ιδίως οι απαντήσεις της μαθ_Α, είναι αντιπροσωπευτικά και των δύο μαθητών της άλλης ομάδας.

4.4.3 Κατασκευή γραφήματος μετασχηματισμένης συνάρτησης

Σχετικά με τις ερωτήσεις που αφορούν την *κατασκευή γραφήματος μετασχηματισμένης συνάρτησης*, οι μαθητές σε γενικές γραμμές ήταν ικανοί να εφαρμόσουν μετασχηματισμούς σε συναρτήσεις και να προβλέψουν τα αποτελέσματα αυτών. Όπως αναλυτικά αναφέρθηκε παραπάνω, δόθηκε η συνάρτηση της παραβολής και οι μαθητές κλήθηκαν να αλλάξουν το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου x^2, καθώς και να την μετατοπίσουν με τη βοήθεια των δρομέων. Πριν, όμως, τους ζητήθηκε να προβλέψουν τα αποτελέσματα αυτών των μετασχηματισμών στο γράφημα και να αναφέρουν ποιες θα είναι οι νέες τιμές των παραμέτρων. Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι ενδεικτικό των παρατηρήσεων που πραγματοποίησαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τη δεδομένη δραστηριότητα:

"*1.Μαθ_Γ: Τι λέει? Τι θέλει να κάνουμε?*

2.Μαθ_Δ: 2 μονάδες δεξιά…

3.Μαθ_Γ: Να το πάμε δύο μονάδες δεξιά… Άρα το κ

4.Μαθ_Δ: πλην 2? ή όχι?

5.Μαθ_Γ: συν 2// Μαθ_Δ: συν 2

6.Μαθ_Γ: Και το λ τι λέει?

7.Μαθ_Δ: Τρία κάτω… πλην 3."

Απόσπασμα Νο16

Γενικά, ανταποκρίθηκαν με ευχέρεια στα ζητούμενα της δραστηριότητας. Ωστόσο, γίνεται κατανοητό, παρά την περιορισμένη έκταση του αποσπάσματος, πώς οι συμμετέχοντες αντιμετώπιζαν περισσότερα προβλήματα όταν η συζήτηση επικεντρώνεται στην οριζόντια μετατόπιση. Από την άλλη, η απάντηση για το προς τα πού θα κινηθεί η συνάρτηση, αλλά και ποια θα είναι η τιμή της παραμέτρου λ, που αφορούν την κατακόρυφη μετατόπιση δόθηκε χωρίς ενδοιασμούς.

Στο απόσπασμα *Νο17* που ακολουθεί:

"*1.Μαθ_Γ: [δίνουν την αναλυτική έκφραση] η φ(x) είναι*

2.Μαθ_Δ: παραβολή είναι… x πλην δύο στο τετράγωνο, πλην τρία

3.Μαθ_Γ: Δεν έπρεπε να είναι πιο στενή? Ξεχάσαμε να βάλουμε το α

4.Μαθ_Δ: Σωστός..

5.Ε: Τι εννοείς στενή?

6.Μαθ_Δ: Επειδή το α μεγάλωσε… θα είναι πιο κοντά εδώ [με το δάχτυλο χαράσσει νοητά μία ευθεία που διέρχεται από την κορυφή]

7.Ε: Κάθε σημείο της συνάρτησης?

8.… και οι δύο γνέφουν καταφατικά…"

Απόσπασμα Νο17

Φαίνεται πώς όταν οι συμμετέχοντες μιλούσαν για το πώς μεταβάλλεται η μορφή της συνάρτησης, αναφέρονταν σε αυτή ως *"πιο στενή"*, *"πιο κλειστή"*, ανάλογα κάθε φορά με την τιμή της παραμέτρου που την επηρέαζε (3, 6 / *Απόσπασμα Νο17*). Στις μετατοπίσεις (οριζόντια και κατακόρυφη), ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε κάθε σημείο της συνάρτησης έχοντας την ίδια επίδραση σε καθένα από αυτά. Όμως, στο μετασχηματισμό που αλλάζει τη μορφή του γραφήματος, οι συμμετέχοντες έπρεπε να εξετάσουν το αποτέλεσμα αυτού σε κάθε ένα από τα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης (το σημείο που αντιστοιχεί στην κορυφή της παραβολής δεν επηρεάζεται από την εφαρμογή αυτού του μετασχηματισμού). Οι συμμετέχοντες γενικεύουν εδώ εσφαλμένα αυτή την καθολική ιδιότητα των μετατοπίσεων (6, 8 / *Απόσπασμα Νο17*).

Επίσης, οι συμμετέχοντες εύκολα μπόρεσαν να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση μίας υπερβολής, δοθείσης της αναλυτικής της έκφρασης $h(x)=\frac{2}{3-x}+4$, χρησιμοποιώντας τους δρομείς. Πριν, όμως, προσπάθησαν να φέρουν την h σε μία μορφή συνεπή με όσα είχαν διδαχθεί παραπάνω. Είναι χαρακτηριστικό ότι τα μέλη της ομάδας Ι, αν και το βαθμολογικό τους επίπεδο ήταν χαμηλότερο από αυτό της άλλης, ανταποκρίθηκαν με μεγαλύτερη ευχέρεια στο ζητούμενο της δραστηριότητας.

"1.Μαθ_Β: Το α θα γίνει 2

2.Μαθ_Α: Τι κάνουμε?

3.Ε: Θέλουμε χρησιμοποιώντας τους δρομείς α, κ, λ και ξεκινώντας από αυτή τη συνάρτηση, να φτάσουμε σε αυτή

4.Μαθ_Β: Το κ θα είναι 3

5.Μαθ_Α: Γιατί? Άμα το αντιστρέψουμε πάει πλην x συν 3

6.Μαθ_Β: x πλην 3 πάει… άμα βγάλεις το πλην από έξω!!!

7.Μαθ_Α: Επομένως πάει δεξιά, αφού είναι x πλην τρία.. Ε!! Πρόσεχε! Γιατί να πάει από εκεί?

8.Μαθ_Β: x πλην 3, το πλην 3 είναι το κ… Δεν είναι αρνητικό? Δεν θα πάει αριστερά?

9.Μαθ_Α: Δεν είναι το λ είναι το κ… x πλην 3, άρα το κ θετικό…

10.Μαθ_Β: Το λ είναι, αν είναι θετικό πάει πάνω, αν είναι αρνητικό πάει κάτω. Το κ, αν είναι αρνητικό, πάει δε..

11.Μαθ_Α: Πάει αριστερά

12.Μαθ_Β: Δεν ξέρω…

13.Μαθ_Α: Ξέρω εγώ όμως! Τέσσερα το λ…

14.Μαθ_Β: Μήπως το α είναι πλην 2? Η΄ όχι.. Γιατί άμα βγάλουμε αυτό το πλην από έξω

15.Μαθ_Α: Ναι γιατί άμα κάνουμε x πλην τρία, βγαίνει ένα πλην από έξω… Επομένως, πλην το ανεβάζουμε πάνω… πλην δύο.[…]

16.Μαθ_Α: Ωχ! Γιατί πήγε έτσι?

17.Μαθ_Β: Γιατί άλλαξε το α, προφανώς!"

Απόσπασμα Νο18

Ακόμη, οι συμμετέχοντες και σε αυτό το σύνολο ερωτήσεων, όπως και στο προηγούμενο που αφορούσε τον *προσδιορισμό μετασχηματισμών*, αντιμετώπιζαν περισσότερα προβλήματα όταν η συζήτηση επικεντρώνεται στην οριζόντια μετατόπιση. Στο απόσπασμα *No18* επιβεβαιώνεται πιο συστηματικά από ότι στο απόσπασμα *No16* η πρόταση αυτή. Οι μαθητές απομνημονεύουν τους κανόνες των μετασχηματισμών, όπως και τις επιπτώσεις αυτών πάνω στις συναρτήσεις, χωρίς να κατανοούν την μαθηματική ιδέα που υπάρχει πίσω από την τυπική περιγραφή. Στο παραπάνω απόσπασμα, η μαθ_Α, που οι απαντήσεις της είναι ενδεικτικές των απαντήσεων και των συμμετεχόντων της άλλης ομάδας, περιγράφει το σκεπτικό της στο μαθ_Β, για τον οποίο η εικόνα μεταξύ γραφικής αναπαράστασης και αλγεβρικής έκφρασης παραμένει αντιφατική (8, *Απόσπασμα No18*). Παρατηρούμε ότι το σκεπτικό της μαθ_Α βασίζεται στην ιδέα ότι η νέα θέση του γραφήματος συνδέεται με το πρόσημο της παραμέτρου, το οποίο είναι συνεπές με την πρόταση της προσέγγισης που διδάχθηκαν στην προηγούμενη συνάντηση. Ωστόσο, μνημονικά αιτιολογεί το πρόσημο που εμφανίζεται τελικά στην αλγεβρική έκφραση, χωρίς να επιζητά εννοιολογική επεξήγηση (6-11 / *Απόσπασμα No18*). Πρέπει, σε αυτό το σημείο, να τονιστεί ότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο σύνολο ζητημάτων που αφορούν τον *προσδιορισμό των μετασχηματισμών*, τουλάχιστον τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες (μαθ_Α, μαθ_Γ, μαθ_Δ) φαίνεται ότι έχουν υιοθετήσει στοιχεία από την παιδαγωγική προσέγγιση της προηγούμενης συνάντησης. Έχουν συνδυάσει το πρόσημο της παραμέτρου με την αντίστοιχη μεταφορά. Για το πρόσημο, όμως, που τελικά εμφανίζεται στην αλγεβρική έκφραση επικαλούνται μνημονικούς κανόνες, χωρίς να επιζητούν εννοιολογικές συνδέσεις (7 / *Απόσπασμα No18 &* 3-6 / *Απόσπασμα No16*). Οι απαντήσεις της μαθ_Α είναι αντιπροσωπευτικές των απαντήσεων των μαθητών της άλλης ομάδας.

Γενικά, μπορούν να περιγράψουν αλλαγές που υφίσταται μία συνάρτηση ως αποτέλεσμα εφαρμογής μετασχηματισμών, χωρίς να καθίσταται αναγκαίος ο βήμα προς βήμα προσδιορισμός τους. Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα αποσπάσματα, δεν χρειάζεται να προσδιορίσουν ποιος είναι ο γενικός τύπος, όπου στη συνέχεια θα αντικαταστήσουν τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, όπως συνέβαινε στις προηγούμενες συναντήσεις:

"Μαθ_Γ: Θέλω να το γράψω πρώτα [εννοεί τον γενικό τύπο] και μετά να κάνω την αντικατάσταση, για να δω αν είναι σωστό… δεν ξέρω αν ισχύει"

Απόσπασμα No19

"Μαθ_Α: Αυτό είναι μέσα σε παρένθεση?

Μαθ_Β: Έτσι νομίζω

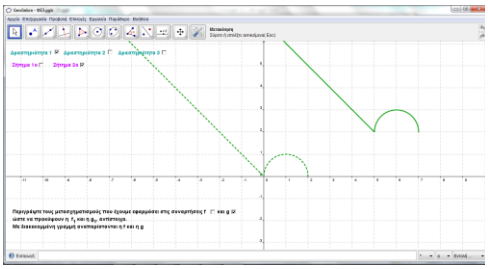
Μαθ_Α: x συν 2, x συν 2

Μαθ_Β: Εγώ γι αυτό είπα να γράψουμε πρώτα το γενικό τύπο και μετά να αντικαταστήσουμε…"

Απόσπασμα Νο20

4.4.4 Χρήση μετασχηματισμών συναρτήσεων σε άλλες ενέργειες και διαδικασίες

Για την επίλυση των δύο τελευταίων ζητημάτων, οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων αποτελούν το βασικό εργαλείο. Στο πρώτο, οι μαθητές κλήθηκαν να επεξηγήσουν τους μετασχηματισμούς που πρέπει να υποστεί μία ήδη μετασχηματισμένη συνάρτηση, ώστε να προκύψει μία δεύτερη, δοθέντων των δύο γραφικών τους αναπαραστάσεων και να εκφράσουν τη μία συναρτήσει της άλλης. Παρόμοια ερωτήματα είχαν τεθεί και στις προηγούμενες δραστηριότητες, με τη διαφορά ότι η μετατοπισμένη συνάρτηση έπρεπε να εκφραστεί με βάση συνάρτηση, η οποία δεν είχε υποστεί κάποιο μετασχηματισμό. Το πιο σχετικό ήταν το δεύτερο ζήτημα της πρώτης δραστηριότητας, αυτής της συνάντησης, όπου δε δινόταν ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης. Οι μαθητές προσπαθώντας να επιλύσουν το πρώτο ζήτημα της τρίτης δραστηριότητας πολλές φορές αναφέρθηκαν στο ζήτημα αυτό. Με στόχο την πιο ολοκληρωμένη μελέτη των στρατηγικών που υιοθέτησαν οι μαθητές προκειμένου να αντεπεξέλθουν στο πρώτο ζήτημα της τρίτης δραστηριότητας, που απαιτεί ένα επίπεδο ακόμη υψηλότερης αφαίρεσης, ακολουθεί μία αναλυτική αναφορά στο έργο που παρήγαγαν οι συμμετέχοντες κατά την ενασχόλησή τους με το δεδομένο ζήτημα ($2^{ο}$ ζήτημα $1^{ης}$ δραστηριότητας):



Εικόνα 16. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα $1^{η}$ – Ζήτημα $2^{ο}$

- Στο ζήτημα αυτό οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να εκφράσουν τη g, που είναι η μετατοπισμένη, συναρτήσει της f (Εικόνα 16). Προέκυψαν τρεις διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης του συγκεκριμένου ζητήματος. Τα μέλη της ομάδας ΙΙ διαχειρίζονται την έννοια της συνάρτησης ως μία ολότητα. Από το έργο που παράγουν στην προσπάθεια επίλυσης του ζητήματος και κυρίως, από την

άμεση και ορθή απάντησή τους, φαίνεται πώς έχουν ενσωματώσει αυτή την έννοια με τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασής της σε μία στατική δομή (*σχεσιακό στάδιο*), γεγονός που τους επιτρέπει να τη διαχειρίζονται ως αντικείμενο που έχει υποστεί γεωμετρική μετατόπιση. Από την άλλη η μελέτη του σκεπτικού της μαθ_Α, αποκαλύπτει ότι αντιλαμβάνεται την έννοια της συνάρτησης περισσότερο ως διαδικασία:

"Μαθ_Α: Στην ουσία είναι σαν να γράφουμε g(x) είναι ίσο με την g(x+κάτι).. Είναι σαν να είναι αυτό το x… απλά είναι σαν να έχουμε αλλάξει κάποια πράγματα αφού την έχουμε μετατοπίσει και δεν πρέπει να είναι ακριβώς το ίδιο… Εντάξει.. τώρα το κατάλαβα

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι εννοείς?

Μαθ_Α: Αυτή εδώ πέρα [δείχνει τη g] θα είναι αυτή [δείχνει την f], όταν τα κ και λ θα είναι μηδέν… Είναι στην αρχή τέλος πάντων. Ε! Οπότε αυτή θα ισούται με αυτή, όμως μαζί με όποιες μετατοπίσεις έχουμε εφαρμόσει"

Απόσπασμα Νο21

Το σκεπτικό της μαθ_Α βασίζεται στην αντικατάσταση της μεταβλητής x από την *"x συν κάτι"*. Προσπαθεί να περιγράψει την πορεία της διαδικασίας σκέψης που ακολουθεί (*πολυδιάστατης δομής στάδιο*). Ένα ακόμη σημείο, άξιο παρατήρησης, είναι ότι δεν αναφέρεται καθόλου στην κατακόρυφη μετατόπιση. Ακόμη, η απάντηση του μαθ_Β αποκαλύπτει πώς προκειμένου να αντιμετωπίσει την πολυπλοκότητα της έννοιας με την οποία αλληλεπιδρά, καταφεύγει σε μείωση της αφαίρεσης. Σε προηγούμενες έρευνες, η προσοχή των μαθητών στρέφεται στο πρωτογενές αντικείμενο μελέτης, στη μεταβλητή και όχι στη συνάρτηση. Ο μετασχηματισμός *f(x)|=>f(x-κ)*, απλοποιείται στην έκφραση *x|=>x-κ*. Ο μαθ_Β μειώνει την πολυπλοκότητα αντιμετωπίζοντας τη συνάρτηση ως μεταβλητή:

"1.Ε: Θέλουμε την g συναρτήσει της f

2.Μαθ_Α: x πλην 5, συν 2

3.Ε: Γιατί? μελετάς τη συνάρτηση x… είναι αυτή που θέλεις να μετατοπίσεις?

4.Μαθ_Β: η g ισούται με f πλην κ, δηλαδή εδώ, f-5… μάλλον (f-5)+2

5.Ε: Τι, τι εννοείς?

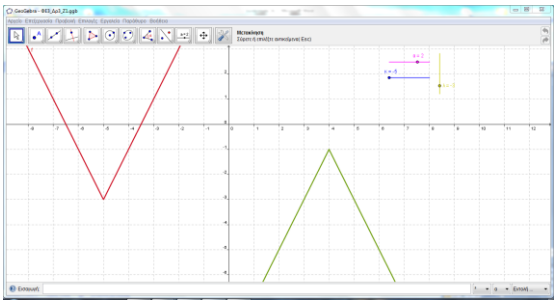
6.Μαθ_Β: αφού γενικά ισχύει f+(x-a)+b"

Απόσπασμα Νο22

Εδώ ο μαθητής δεν αντικαθιστά την πιο πολύπλοκη έννοια με μία απλούστερη, πιο πολύ *απλοποιεί* την σύνθετη έννοια (4, 6 / *Απόσπασμα Νο22*). Χρησιμοποιεί το συμβολισμό της συνάρτησης, ως μεταβλητή. Με κάποια

επιείκεια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, η *f* είναι μεταβλητή, ίσως και παράμετρος, στην έκφραση: *" f+(x-a)+b"*.

Αντίστοιχα, στο 1^{ο} ζήτημα της 3^{ης} δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να εκφράσουν την *g (πράσινη)* συναρτήσει της *f (κόκκινη)*. Ένα ακόμη σημείο που διαφοροποιείται αυτό το ζήτημα είναι ότι αλλάζει και η τιμή της παραμέτρου α ($f(x)=a|x-\kappa|+\lambda$). Οι συμμετέχοντες επικέντρωσαν την προσοχή τους στο σημείο αυτό. Στο ακόλουθο απόσπασμα, που πραγματοποιείται μεταξύ των μελών της ομάδας Ι, αναδεικνύεται το παραπάνω σχόλιο:



Εικόνα 17. Στιγμιότυπο από το αρχείο *Geogebra* – Δραστηριότητα 1^{η} – Ζήτημα 2^{ο}

"1.Ε: Θέλω να εκφράσετε την g συναρτήσει της f

2.Μαθ_Α: f μέσα σε παρένθεση απόλυτο..

3.Μαθ_Β: Το νέο α? α-4 δε γίνεται? […]

4.Ε: Τι είναι το α πλην 4?

5.Μαθ_Β: Γυρνώντας πίσω… βλέπουμε ότι έχουμε ξαναγράψει το ίδιο πράγμα και το πήραμε σωστό, άρα και τώρα προφανώς θα είναι σωστό

6.Ε:Μπορείς να μου εξηγήσεις τι εκφράζει το α-4?

7.Μαθ_Β: Το α-4 εκφράζει το μετατοπισμένο α […]

8.Μαθ_Α: Κατάλαβα τι λέει… Ότι το α είναι 2, 2 πλην 4, μας κάνει πλην 2, που είναι το α στη δική μας περίπτωση…

9.Μαθ_Β: Να το γράψουμε και αναλυτικά…f((a-4)|x-5+4|)

10.Ε: Τι κάνεις?[έκπληξη]

11.Μαθ_Β: …και μετά, να και για την κατακόρυφη μετατόπιση f((a-4)|x-5+4|+3) ή μάλλον f((a-4)|x-5+4|-3+2)"

Απόσπασμα Νο23

Είναι αξιοσημείωτο πώς, και οι τέσσερις συμμετέχοντες σε ένα πρώτο στάδιο, πρότειναν την ίδια προσέγγιση (3, 7, 8 / *Απόσπασμα Νο23*). Για το έργο που παράγουν οι μαθητές στην προκειμένη, εντάσσονται στο *στάδιο μονοδιάστατης δομής* καθώς, αναζητούν ένα μέσο αντιπαραβολής που θα εξασφαλίζει την επιτυχία. Για τους μαθητές ο μετασχηματισμός αυτός πρέπει να εκφραστεί αλγεβρικά, ανάλογα με τους μετασχηματισμούς που δίνουν τις μετατοπίσεις (οριζόντια και κατακόρυφη). Ανεπιτυχώς, προσπαθούν να αντιμετωπίσουν το ζητούμενο με βάση τα γνωστικά σχήματα που έχουν στη διάθεσή τους, *μείωση της αφαίρεσης ως επίπεδο αντίληψης*

της έννοιας από το άτομο (5 / *Απόσπασμα Νο23*). Όμως, οι τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες, εγκατέλειψαν την ιδέα αυτή σύντομα, σε αντίθεση με τον μαθ_Β:

"1.Ε: Να κάνω μία ερώτηση και στους δύο ποιος είναι ο τύπος της f? [της g τον έχουν]

2.Μαθ_Β: [Γράφει σωστά τον τύπο]

3.Μαθ_Α: Άρα το μόνο που αλλάζει είναι το α… ναι… επομένως, θα πάει πλην 2 απόλυτο x πλην κ […] Να ρωτήσω κάτι? Για αρχή… δεν είναι p(x)=-f(x)?Να το δω? [το ελέγχει με το λογισμικό]… Ναι αυτό είναι! Τώρα κάναμε το πρώτο βήμα… Τη γυρίσαμε ανάποδα

4.Ε: Τώρα τι πρέπει να κάνετε?

5.Μαθ_Β: Ωραία… ότι τη γυρίσαμε ανάποδα είναι αυτό… Το α πλην 4…

6. Μαθ_Α: Γιατί? Αφού δες λίγο… Δες αυτόν τον τύπο και αυτόν… η μόνη τους διαφορά είναι ότι εδώ είναι πλην α… Εντάξει και κάποια άλλη θα υπάρχει για να βγει εκεί… Άρα, για αρχή, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε

[…]

7.Μαθ_Β: Ωραία! Αν θέλαμε να το κάνουμε πλην 3 το α, τι θα γράφαμε?

8.Ε: Πες μου εσύ τι θα γράφαμε…

9.Μαθ_Β: Δεν έχω καταλάβει το συλλογισμό!

10.Ε: Μπορείς να τον βοηθήσεις σε αυτό?

11.Μαθ_Α: Άμα θέλουμε…

12.Μαθ_Β: …το νέο α να είναι 3… πλην 3 βασικά…

13.Μαθ_Α: Θα το πολλαπλασιάσουμε επί το πλην … μισό λεπτό… πλην έξι τέταρτα?

14.Ε: Ή πλην τρία δεύτερα…

15.Μαθ_Β: Εδώ πέρα [εννοεί στην προσέγγιση που προτείνει αυτός] γράφω τη διαφορά των δύο α… Εγώ περιέγραψα τη μετατόπιση εδώ! Εδώ [εννοεί στην προσέγγιση που προτείνει η συμμαθήτριά του] το γράψαμε το α? Όταν βάλαμε ένα –f(x)?

16.Μαθ_Α: Περίμενε λίγο! Σκέψου ότι το α είναι κοινό και στα δύο… Το μόνο που τα χωρίζει είναι το αρνητικό πρόσημο, το αρνητικό πρόσημο να το… Αφού είναι δύο και δύο, αν ήταν 3 αυτό και αυτό ήταν 2, θα κάναμε πλην τρία δεύτερα f… Αυτό μας δίνει το α

Απόσπασμα Νο24

Ο μαθ_Β έχει υιοθετήσει μία λύση, στην οποία και επιμένει δογματικά, μέχρι το τέλος της συνάντησης (3, 7 / *απόσπασμα Νο23* & 5, 15 *Απόσπασμα Νο24*). Στο παραπάνω απόσπασμα (*Απόσπασμα Νο24*), ενώ η μαθ_Α έχει προτείνει ως ένα πρώτο βήμα η *f* πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το πλην 1 (1 / *Απόσπασμα Νο24*), ο μαθ_Β εξακολουθεί να πιστεύει ότι ο δικός του συλλογισμός είναι αυτός που απαντά στο ερώτημα (5 / *Απόσπασμα Νο24*). Παραπάνω έχει υποστηρίξει ότι ο τρόπος αντιμετώπισης που προτείνει η συμμαθήτριά του λειτουργεί, επειδή *"τυχαίνει [στο δεδομένο πρόβλημα] το α να είναι ακριβώς το αντίθετο"* και προκειμένου να το επιβεβαιώσει αλλάζει το πλαίσιο

(7 / *Απόσπασμα No24*). Θεωρεί πώς το α εκφράζει μετατόπιση · δεν έχει καταλάβει τι είδους μετασχηματισμό προκαλεί στη συνάρτηση (15 / *Απόσπασμα No24*). Φαίνεται σαφώς ότι χρησιμοποιεί προσέγγιση *προτύπου*. Η μαθ_Α, όμως, είναι ικανή να αντιπαραβάλλει τις δύο μετασχηματισμένες συναρτήσεις και να προσδιορίσει τις αλλαγές που έχει υποστεί η μία προκειμένου να προκύψει η άλλη, χωρίς να καταφεύγει σε λεπτομερή ανάπτυξη του σκεπτικού της και χωρίς να προβληματίζεται από τις αλλαγές στις συνθήκες που επιβάλλει ο μαθ_Β, *σχεσιακό στάδιο* (13 / *Απόσπασμα No24*). Μόνο προκειμένου να γίνει κατανοητή από το συμμαθητή της στρέφεται σε ένα επίπεδο χαμηλότερης αφαίρεσης, περιγράφοντας βήμα προς βήμα τη διαδικασία που ακολουθεί. Ανάλογη ήταν και η αλληλεπίδραση των μαθητών της ομάδας ΙΙ με το δεδομένο ζήτημα.

Στο παρακάτω απόσπασμα αναδεικνύεται ένα άλλο κοινό σημείο στο έργο των τεσσάρων συμμετεχόντων:

"1.Ε: Θέλω να εκφράσετε την πράσινη συναρτήσει της κόκκινης

2.Μαθ_Γ: Η g(x) είναι η f , παρένθεση, απόλυτο…

3.Μαθ_Δ: Είναι η f και το α πρέπει να βάλουμε…

4.Μαθ_Γ: Είναι 4 το α νομίζω…

5.Μαθ_Δ: Πλην 4?

6.Μαθ_Γ: Πλην 4… πλην 4 όχι

7.Μαθ_Δ: f(-4|x-9|+2)?... Υπάρχει αυτό το πράμα?

8.Ε: Ποια είναι η τιμή της f σύμφωνα με αυτό που έγραψες?

έντονος προβληματισμός […]

9.Μαθ_Δ: Επομένως, f(x-9)… "

Απόσπασμα No25

Σύμφωνα με την Hazzan (1999, p82), όσο πιο σύνθετη είναι μία οντότητα, τόσο πιο αφηρημένη είναι. Τουλάχιστον στην αρχή, προκειμένου να αντιμετωπίσουν το δεδομένο πρόβλημα, εστίασαν στην έννοια της μεταβλητής, και όχι στο πιο αφηρημένο αντικείμενο, τη συνάρτηση (2, 7 / *Απόσπασμα No25* & 2, 9, 11 / *Απόσπασμα No23*). Οι μαθητές παρουσίασαν την τάση να επικεντρώνουν την προσοχή τους στην απλούστερη έννοια της μεταβλητής (*στάδιο μονοδιάστατης δομής*). Ωστόσο, οι τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες, εκτός του μαθ_Β, απέρριψαν αυτή την ιδέα, έστω και μετά από τη μικρή παρέμβαση της ερευνήτριας, η οποία παρέμβαση είχε στόχο οι μαθητές να επαναπροσδιορίσουν το αντικείμενο μελέτης (8 / *Απόσπασμα No25* & 1 / *Απόσπασμα No24*).

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα δεν αντιμετώπισαν κανένα πρόβλημα, σε αυτή την ομάδα ασκήσεων, όταν η συζήτηση επικεντρώνεται στην οριζόντια μετατόπιση. Αντίθετα, στην κατακόρυφη είχαν κάποιες δυσκολίες:

"1.Μαθ_Α: Με το πλην f(x) την αναποδογυρίζω… και πρέπει να το πάμε και δεξιά…

2. Μαθ_Β: […]Κατά 9… Άρα –f(x-9)

3. Μαθ_Α: Και δύο πάνω… [εισάγουν την –f(x-9)+2]…Και γιατί βγήκε εκεί?

4.Μαθ_Β: Γιατί το λ, με αυτό το μείον που έχεις βάλει από πλην 3 έγινε συν 3!

5.Μαθ_Α: Άρα πάει πλην 3?

[γίνεται μία συζήτηση για τις παρενθέσεις]

6.Ε: Γιατί επέλεξες συν 2?

7.Μαθ_Α: Γιατί φαίνεται από το σχήμα ότι πρέπει η κόκκινη να ανεβεί κατά δύο…

8.Μαθ_Β: Αυτό είναι σωστό στο δικό μου τρόπο… Εσύ είπαμε με το μείον.. αλλάζεις το πρόσημο αυτού του 3… Άρα, το λ είναι πλην 4… Θες να πας στο πλην 1, όμως πλέον από το 3… Άρα, πλην 4

9.Μαθ_Α: [Το δοκιμάζει] Ναι! Έχεις δίκιο…"

Απόσπασμα No26

"1.Μαθ_Δ: Γιατί βγαίνει ανάποδα?

2.Ε: όπως την ήθελες

3.Μαθ_Δ: Ναι!! Σωστά!! Άλλο είναι το πρόβλημα…

4.Μαθ_Γ: Ήταν προς τα πάνω 9 μονάδες, έξι μονάδες… Άρα, το 9 πρέπει να γίνει 4, πλην 4

5.Μαθ_Δ: Ποιο το 9 πρέπει να γίνει πλην 4? Το 9 δηλώνει πόσο δεξιά, αριστερά πρέπει να πάει..

6.Μαθ_Γ: Το άλλο, το λ πρέπει να γίνει

7.Ε: Τι πρέπει να γίνει το λ?

8.Μαθ_Γ:… 1,0, -1, -2, -3. Πλην 4…

9.Μαθ_Δ: Ναι! Είναι πλην 4…

10.Ε: Γιατί πριν μου είπατε συν δύο?

11.Μαθ_Γ: Γιατί πριν ήταν σε άλλη… Τώρα πρέπει να κατεβεί κατά τέσσερα όπως φαίνεται από εδώ [εννοεί από το σχήμα]

12.Μαθ_Δ: Ναι!! Από εδώ [δείχνει την –f(x-9)+2] πρέπει να πάμε εδώ [δείχνει την -f(x-9)-4]

Απόσπασμα No27

Από το απόσπασμα *No26*, σύμφωνα με τους σχολιασμούς των συμμετεχόντων, φαίνεται πώς η μαθ_Α είναι αυτή που προβληματίζεται. Έχει εφαρμόσει επιτυχώς τους δύο από τους τρεις μετασχηματισμούς στην ήδη μετασχηματισμένη συνάρτηση. Ωστόσο, δεν μπορεί να συνειδητοποιήσει πώς ο μετασχηματισμός που υπέστη η *f*, όταν πολλαπλασιάστηκε με το πλην ένα, επηρέασε και την κατακόρυφη μετατόπιση. Δεν έχει *πραγματώσει* τη *'διαδικασία εφαρμογής του συγκεκριμένου μετασχηματισμού*

σε μία συνάρτηση'. Δεν είναι ικανή να συσχετίσει τα νέα χαρακτηριστικά του γραφήματος με τις αλλαγές που υπέστη η αλγεβρική έκφραση (3 / *Απόσπασμα No26*). Βασίζεται αποκλειστικά στην εικόνα του γραφήματος, πριν υποστεί οποιοδήποτε μετασχηματισμό, για να δώσει την απάντησή της (7 / *Απόσπασμα No26*). Το συγκεκριμένο είδος προβλήματος (πώς μεταβάλλεται το γράφημα μίας συνάρτησης όταν υποστεί κατακόρυφη μετατόπιση) το έχει συνδέσει σταθερά με μία διαδικασία, που μέχρι στιγμής παρέχει τη σωστή απάντηση. Ακόμη και μετά την επεξήγηση που της δίνει ο μαθ_Β (4, 8 / *Απόσπασμα No26*), πείθεται για την ορθότητα της επιλογής μόνο αφού το επαληθεύσει με τη βοήθεια του λογισμικού. Παρουσιάζει δυσκολίες στο να συνδυάσει τις πληροφορίες που προκύπτουν από τα δύο διαφορετικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα που έχει στη διάθεσή της. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά την εντάσσουν στο *πολυδιάστατης δομής στάδιο* (3 / *Απόσπασμα No26*). Ο μαθ_Β εντάσσεται, για το έργο που παράγει σε αυτή τη δραστηριότητα, παρά την καλή δομή του, στο *μονοδιάστατης δομής στάδιο*. Υπάρχει μία στοιχειώδης επεξεργασία: απλώς εκτελεί επιτυχώς τις απαιτούμενες αλγεβρικές πράξεις, ενώ εξακολουθεί να ισχυρίζεται πώς ισχύει η λύση που έχει προτείνει (8 / *Απόσπασμα No26* & 11 / *Απόσπασμα No23*, η προτεινόμενη λύση από το μαθ_Β).

Από την άλλη, τα μέλη της ομάδας ΙΙ, εφάρμοσαν πρώτα τις μετατοπίσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, χωρίς να τους απασχολεί ότι το γράφημα της συνάρτησης, στο οποίο και ήθελαν να καταλήξουν, είναι *ανοιχτό* προς τα κάτω. Ουσιαστικά βλέπουμε οι δύο μαθητές να έρχονται αντιμέτωποι με το ίδιο γνωστικό εμπόδιο που έπρεπε να αίρει η μαθ_Α (5, 6 / *Απόσπασμα No27*). Το πώς μεταβάλλεται το γράφημα μίας συνάρτησης όταν υποστεί κατακόρυφη μετατόπιση αποτελεί για αυτούς γνώση που μέχρι τώρα ήταν αποτελεσματική. Στο σημείο αυτό προηγείται μετασχηματισμός (η *f* πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το πλην 1), που τροποποιεί ελαφρώς το πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές είχαν μάθει να λειτουργούν. Αποτέλεσμα αυτού ήταν, πώς ενώ αντιμετώπιζαν τη *'διαδικασία εφαρμογής ενός μετασχηματισμού σε μία συνάρτηση'* ως μία ολότητα - όπως φαίνεται και στο *απόσπασμα No23*, να στραφούν και πάλι σε διαδικαστική προσέγγιση, στηριζόμενοι στα *εξωτερικά χαρακτηριστικά του γραφήματος*, χωρίς να επιζητούν εννοιολογική κατανόηση (11, 12 / *Απόσπασμα No27*).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την επίλυση των δύο τελευταίων ζητημάτων, οι μετασχηματισμοί συναρτήσεων αποτελούν το βασικό εργαλείο. Στο δεύτερο, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να επιλύσουν μία ανισότητα. Και οι τέσσερις στράφηκαν

αμέσως στην αλγεβρική επίλυση. Οι μαθ_Β και μαθ_Δ, παρατήρησαν πώς τα δύο μέλη της ανισότητας αποτελούν συναρτήσεις που έχουν υποστεί μετασχηματισμούς. Η ιδέα αυτή δε συζητήθηκε μέχρι τη στιγμή που ολοκλήρωσαν τις αλγεβρικές πράξεις και έγινε εμφανές πώς οι προϋπάρχουσες γνώσεις τους, που τους επιτρέπουν την αλγεβρική επίλυση ανισώσεων μέχρι και 2^{ου} βαθμού, δεν επαρκούν:

"1.Μαθ_Γ: Προέκυψε x εις την τρίτη… εγώ δεν ξέρω να το λύσω με το x^3

2.Ε: Αυτό που είπες πριν?

3.Μαθ_Δ: Τι να το δούμε ως συναρτήσεις? Αυτό εδώ είναι το λ, όχι βασικά αυτό είναι το α, το κ και αυτό το λ, για αυτή τη συνάρτηση […]

4.Μαθ_Δ: Έλα να δώσουμε τις τιμές…

5.Μαθ_Γ: Τι?

6.Μαθ_Δ: Να δώσουμε τις τιμές

7.Μαθ_Γ: ½ είναι το α

8. Μαθ_Δ: 3, συν 5…

9.Μαθ_Γ: Και από εκεί φέρε να τις δώσω εγώ […]

10.Ε: Κοιτώντας τη γραφική παράσταση τώρα, μπορείτε να λύσετε την ανισότητα?

11. Μαθ_Δ: Θέλουμε τα x που επαληθεύουν την ανισότητα

[έντονος προβληματισμός]"

Απόσπασμα No28

Με ευκολία μπόρεσαν να προσδιορίσουν το είδος των μετασχηματισμών και να κατασκευάσουν το γράφημα των μετασχηματισμένων συναρτήσεων, με τη βοήθεια του λογισμικού (6-9 / *Απόσπασμα No28*). Ωστόσο, δεν μπόρεσαν να ερμηνεύουν το γραφικό αποτέλεσμα, ώστε να το αξιοποιήσουν στην επίλυση της ανισότητας.

4.4.5 Γνωστικά Αναπτυξιακά Επίπεδα

Σε αυτό το στάδιο, λαμβάνοντας υπόψη το παραγόμενο, από τους συμμετέχοντες στην έρευνα, έργο κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με τις δραστηριότητες της τρίτης συνάντησης, διακρίνονται τουλάχιστον τρία γνωστικά αναπτυξιακά επίπεδα: *στάδιο μονοδιάστατης και πολυδιάστατης δομής και σχεσιακό στάδιο*. Ήδη, στις τρεις προηγούμενες παραγράφους, έχουν δοθεί τα χαρακτηριστικά του παραγόμενου έργου, που επέτρεψε την ένταξη του κάθε μαθητή, για τις τρεις διαφορετικού περιεχομένου δραστηριότητες, στο ανάλογο επίπεδο της ταξινόμησης κατά *SOLO*.

Για το σύνολο του έργου του, ο μαθ_Β εντάχθηκε στο *στάδιο της μονοδιάστατης δομής*. Για τον προσδιορισμό των μετασχηματισμών που έχει υποστεί μία συνάρτηση

ή για την περιγραφή των μεταβολών που υφίσταται μία συνάρτηση, ως αποτέλεσμα εφαρμογής μετασχηματισμών, παρουσίαζε την τάση να υιοθετεί μία περιορισμένη οπτική, όχι απαραίτητα εσφαλμένη. Επίσης, κατέφευγε στη χρήση μνημονικών κανόνων, χωρίς να επιζητά εννοιολογικές συνδέσεις, επικεντρώνοντας την προσοχή του σε μία μοναδική διάσταση του προς μελέτη αντικειμένου. Οι απαντήσεις του δεν ήταν ούτε ολοκληρωμένες ούτε συνεπείς, ενώ παρουσίαζε την τάση να παραβλέπει δεδομένα.

Από την άλλη, οι υπόλοιποι μαθητές εντάχθηκαν στο τρίτο επίπεδο της κατηγοριοποίησης κατά *SOLO*, καθώς ήταν, σε γενικές γραμμές, ικανοί, λαμβάνοντας υπόψη το γράφημα μίας μετασχηματισμένης συνάρτησης, να προσδιορίσουν τους μετασχηματισμούς που έχει υποστεί. Επίσης, μπορούσαν να περιγράψουν αλλαγές σε συναρτήσεις ως αποτέλεσμα εφαρμογής μετασχηματισμών, ενώ πάντα παρουσίαζαν την τάση να παρέχουν συστηματική αιτιολόγηση του σκεπτικού τους. Δεν είχαν, όμως, πάντα τη δυνατότητα να συνδέουν με συνέπεια τη συμβολική και τη γραφική αναπαράσταση ενός μετασχηματισμού. Ενδεχομένως, με βάση το έργο που παρήγαγαν, σε ορισμένα σημεία, θα μπορούσαν να ενταχθούν στο σχεσιακό στάδιο. Σε αυτές τις μεμονωμένες περιπτώσεις, κατάφεραν να συνδυάζουν και να αξιοποιήσουν πληροφορίες που προκύπτουν από διαφορετικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα, όπως και να διαχειριστούν τα παραγόμενα των διαδικασιών, χωρίς να τους απασχολεί η ίδια η διαδικασία. Κατάφεραν να εκτιμήσουν τη σημασία των επιμέρους αναπαραστάσεων σε σχέση με το όλο.

Κεφάλαιο 5^{ο}

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Στάδια εννοιολογικής ανάπτυξης

Η έρευνα που περιγράφεται στην παρούσα εργασία είχε ως στόχο να διερευνήσει τις διαδικασίες κατανόησης των μετασχηματισμών συναρτήσεων από μαθητές που εργάζονται σε αλληλοσυνδεόμενα αναπαραστασιακά περιβάλλοντα. Αυτό πραγματοποιήθηκε με τον προσδιορισμό των επιπέδων της αυξανόμενης πολυπλοκότητας στη διαδικασία σκέψης των συμμετεχόντων, χρησιμοποιώντας, ως θεωρητικό υπόβαθρο, την κατηγοριοποίηση κατά SOLO (*"Δομή παρατηρούμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων"* - SOLO taxonomy, Biggs & Collis, 1991). Για την ανάδειξη αυτών των επιπέδων απόδοσης, είναι ιδιαίτερα μεγάλης σημασίας η κατανόηση των νοητικών στρατηγικών που υιοθετούν οι μαθητές, με στόχο την τροποποίηση των αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών, σε έννοιες νοητικά προσβάσιμες από αυτούς. Για το σκοπό αυτό υιοθετήθηκε το θεωρητικό πλαίσιο που προτάθηκε από τη Hazzan, 1999, σύμφωνα με το οποίο οι απαντήσεις των μαθητών είναι δυνατόν να ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα μείωσης της αφαίρεσης στη διαδικασία σκέψης του μαθητή. Σύμφωνα, άλλωστε με τη Hazzan (1999, p80), το πλαίσιο που προτείνει είναι συμπληρωματικό των τοπικών πλαισίων εννοιολογικής ανάπτυξης.

Η ανάλυση αποκαλύπτει ότι για το έργο που παρήγαγαν οι συμμετέχοντες στην έρευνα εντάσσονται στα τρία ενδιάμεσα στάδια της κατηγοριοποίησης κατά SOLO: στο *στάδιο μονοδιάστατης* και *πολυδιάστατης δομής* και στο *σχεσιακό στάδιο*, που ο Tall, 2009, αποκαλεί κύκλο μάθησης ΜΠΣ. Άλλωστε, όπως αναφέρουν οι Biggs και Collis (1991, p64), τα δύο ακραία στάδια σε αυτήν την κατηγοριοποίηση περιγράφουν τη μετάβαση από τον έναν *τρόπο λειτουργίας του καθολικού μοντέλου της SOLO*, στον άλλο, που δεν αποτελεί, όμως, το αντικείμενο διαπραγμάτευσης στη δεδομένη διερευνητική διαδικασία. Υπογραμμίζεται ότι η κατηγοριοποίηση κατά

SOLO, εστιάζει στη δομή του έργου που παράγουν οι μαθητές και όχι στον ίδιο το μαθητή. Συνεπώς, το ίδιο άτομο είναι δυνατό να ενταχθεί σε δύο διαφορετικά επίπεδα για δύο διαφορετικές δραστηριότητες, ανάλογα με το έργο που παράγει προσπαθώντας να επιλύσει την κάθε μία (Pegg & Tall, 2009). Στη δεδομένη ερευνητική διαδικασία, έχοντας μελετήσει τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των συναντήσεων, έγινε προσπάθεια κατάταξης του κάθε μαθητή σε ένα επίπεδο της ταξινόμησης, στο τέλος κάθε συνάντησης, ανάλογα με το σύνολο του έργου που παρήγαγε, ενώ στοχεύοντας πάντα στην πληρότητα έγινε σαφής αναφορά σε περίπτωση που παρουσίαζε χαρακτηριστικά και κάποιου ακόμη επιπέδου.

Σχετικά με τον μαθ_Β, μέλος της ομάδας Ι, δεν παρατηρήθηκε διαφοροποίηση στην απόδοσή του. Για το έργο που παρήγαγε, στο σύνολο των συναντήσεων, θα μπορούσε να ενταχθεί στο στάδιο μονοδιάστατης δομής. Αν και επιτυχώς συμμετείχε στην επίλυση ενός ικανοποιητικού αριθμού ζητημάτων, είναι χαρακτηριστικό ότι αντιμετώπιζε καθένα από αυτά μεμονωμένα, χωρίς να αναπτύσσει συνδέσεις. Ακόμη και μετά την υιοθέτηση, στη δεύτερη συνάντηση, παιδαγωγικής προσέγγισης που επιτρέπει την εξέταση των προς συζήτηση εννοιών υπό νέο πρίσμα, συνέχισε να διαπραγματεύεται τα προς μελέτη ερωτήματα, με βάση τα γνωστικά σχήματα που είχε ήδη στη διάθεσή του. Ήταν έκδηλη η αδυναμία του να αναπτύξει οποιαδήποτε σύνδεση ανάμεσα στη νέα θεωρητική γνώση και στα ερωτήματα. Η ένταξη του μαθ_Β σε αυτό το στάδιο της ταξινόμησης κατά SOLO επιβεβαιώνεται και από τα ευρήματα της τρίτης συνάντησης. Το έργο που παρήγαγε δεν διαφοροποιήθηκε από αυτό στις δύο προηγούμενες συναντήσεις. Συνέχισε να παραβλέπει δεδομένα και να υιοθετεί περιορισμένη οπτική. Ακόμη, κατέφευγε στη χρήση μνημονικών κανόνων, χωρίς να επιζητά εννοιολογική επεξήγηση, επικεντρώνοντας την προσοχή του σε μία και μόνο διάσταση του προς μελέτη αντικειμένου.

Σχετικά με τους υπόλοιπους τρεις συμμετέχοντες, πριν την εξέταση της υπάρχουσας γνώσης υπό το νέο πρίσμα, επιδίωξη και αυτών ήταν να εντοπίζουν τα χαρακτηριστικά εκείνα που εξασφαλίζουν την ανάδειξη ενός προτύπου, το οποίο σε κάθε περίπτωση δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Τέτοια μικρά δείγματα δράσης στο στάδιο μονοδιάστατης δομής, εντοπίζονται σε μεμονωμένα σημεία και στις τρεις συναντήσεις. Αυτά ήταν πιο έντονα σε περιπτώσεις που τροποποιούνταν το πλαίσιο στο οποίο λειτουργούσαν οι μαθητές. Ωστόσο, η τάση τους να παρέχουν μία

συστηματική αιτιολόγηση του σκεπτικού τους, ιδίως μετά την υιοθέτηση της παιδαγωγικής προσέγγισης στη δεύτερη συνάντηση, τους εντάσσει στο στάδιο πολυδιάστατης δομής, για το έργο τους στο σύνολο των τριών συναντήσεων. Η ένταξή τους αυτή επιβεβαιώνεται, επίσης, από την ικανότητά τους να προσδιορίζουν, βήμα προς βήμα, τους μετασχηματισμούς που είχε υποστεί μία συνάρτηση, εξετάζοντας το γράφημά της. Ακόμη, είχαν τη δυνατότητα να περιγράφουν, διαδοχικά, τις αλλαγές σε συναρτήσεις ως αποτέλεσμα εφαρμογής μετασχηματισμών. Γενικά, παρουσίαζαν την τάση να αντιμετωπίζουν αλγοριθμικά τις προς μελέτη έννοιες. Όμως, δεν ήταν λίγες οι περιπτώσεις που διαχειρίζονταν τα παραγόμενα των διαδικασιών χωρίς να τους απασχολεί η ίδια η διαδικασία. Κάποιες φορές, κατάφεραν να συνδέσουν με συνέπεια τη συμβολική και γραφική αναπαράσταση ενός μετασχηματισμού, καθώς και να συνδυάσουν και να αξιοποιήσουν πληροφορίες που προκύπτουν από διαφορετικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα. Ενδεχομένως, με βάση τα χαρακτηριστικά του έργου των τριών μαθητών, στα μεμονωμένα αυτά σημεία, θα μπορούσαν να ενταχθούν στο σχεσιακό στάδιο.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαφοροποίηση στην απόδοση της μαθ_Α. Αν και το βαθμολογικό της επίπεδο ήταν το χαμηλότερο, από τους συμμετέχοντες, ανταποκρίθηκε με ευχέρεια στα ζητούμενα των δραστηριοτήτων. Σε κάποιες περιπτώσεις, μάλιστα, κατάφερε να δημιουργήσει συνδέσεις, τις οποίες δεν μπόρεσαν να αναπτύξουν οι υπόλοιποι συμμετέχοντες. Σύμφωνα με τον Schoenfeld, 2000, η σύγκριση της παραδοσιακής εισαγωγής των προς μελέτη εννοιών, με τη δεδομένη παιδαγωγική παρέμβαση, που τοποθετείται σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον, δεν είναι βάσιμη. Κάθε μία πιθανόν να επικεντρώνεται σε διαφορετικά σημεία. Ωστόσο, η ενοποίηση όλων των αναπαραστάσεων της έννοιας που εξασφαλίζει η ψηφιακή τεχνολογία, όπως και η συμβολή της στην απενοχοποίηση του λάθους, συνετέλεσε στην εξέλιξη που σημείωσε η μαθ_Α.

5.2 Θέματα προβληματισμού και κατανόησης

Οι μαθητές φαίνεται ότι αντιμετώπισαν κοινά θέματα προβληματισμού και κατανόησης προκειμένου να συνδυάσουν αναλυτική με γραφική έκφραση, ανεξάρτητα από τις στρατηγικές που υιοθέτησαν. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται, ιδίως, από τους σχολιασμούς των μαθητών που αφορούν την

οριζόντια μετατόπιση. Ακόμη και άτομα, που στο σύνολο του έργου τους παρουσίασαν έντονα στοιχεία του σχεσιακού σταδίου, σε αρκετές περιπτώσεις, όταν η συζήτηση επικεντρώθηκε στην οριζόντια μετατόπιση, υιοθέτησαν διαδικαστική προσέγγιση, εξασφαλίζοντας τη δράση τους σε επίπεδο χαμηλότερης αφαίρεσης. Το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύει και τα πορίσματα της βιβλιογραφίας, που χαρακτηρίζουν την οπτικοποίηση αυτού του μετασχηματισμού από τους μαθητές, ιδιαίτερα απαιτητική: υπάρχει ασυνέπεια ανάμεσα στο προσδοκώμενο και το πραγματικό αποτέλεσμα.

Επιπλέον, οι συμμετέχοντες, όπως προκύπτει από τους σχολιασμούς τους, δεν έχουν *'εσωτερικεύσει τα αποτελέσματα εφαρμογής των μετασχηματισμών στις συναρτήσεις'*, ιδίως όταν καθίσταται αναγκαίο να σκεφτούν την επίδραση αυτών τόσο στην ανεξάρτητη, όσο και στην εξαρτημένη μεταβλητή της συνάρτησης. Οι προσπάθειες, δε εφαρμογής ταυτόχρονα δύο μετασχηματισμών σε μία συνάρτηση αποκαλύπτει, ότι η κατανόηση, ακόμη και της κατακόρυφης μετατόπισης, δεν είναι εννοιολογική. Και σε αυτές τις περιπτώσεις παρουσιάζουν αδυναμία να συσχετίσουν τα νέα χαρακτηριστικά του γραφήματος με τις αλλαγές που υπέστη η αλγεβρική έκφραση.

Οι συμμετέχοντες έδειξαν μεγαλύτερη ευχέρεια όταν η συζήτηση επικεντρωνόταν στην αναλυτική αναπαράσταση, παρά το γεγονός ότι η οπτικοποίηση των μετασχηματισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση αρκετών προβλημάτων. Προκύπτει ότι οι μαθητές απορρίπτουν την οπτική αντιμετώπιση του προβλήματος ή αποτυγχάνουν να ερμηνεύσουν το γραφικό αποτέλεσμα, ώστε να το αξιοποιήσουν στην επίλυση ενός ζητήματος και επιλέγουν την αλγεβρική προσέγγιση ακόμη και όταν η τελευταία είναι πολύ πιο δύσκολη.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειωθεί ότι, ιδίως μετά την παιδαγωγική προσέγγιση που υιοθετήθηκε στη δεύτερη συνάντηση, με στόχο μέσα από το νέο πρίσμα να αρθούν οι όποιες αντικρουόμενες αντιλήψεις υπάρχουν στην οπτικοποίηση της οριζόντιας μετατόπισης, ενώ ταυτόχρονα να γίνει κατανοητό πώς οι δύο μετατοπίσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, *λειτουργούν παρόμοια*, οι μαθητές έδειξαν να συνδυάζουν με μεγαλύτερη ευχέρεια πληροφορίες που προκύπτουν από διαφορετικά αναπαραστασιακά περιβάλλοντα, επιζητώντας εννοιολογική επεξήγηση. Όταν οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων, κατανοούν καλύτερα αυτές τις συνδέσεις και είναι πιθανότερο να τις χρησιμοποιούν ως εργαλείο, όταν προσπαθούν να κατανοήσουν μία

έννοια ή μία απόδειξη, ή ακόμη, να αποδείξουν έναν ισχυρισμό (Clement & Sowder, 2003).

Στη δεδομένη έρευνα, στο έργο που παρήγαγαν οι συμμετέχοντες, φάνηκε ότι υιοθέτησαν κάποια από τα χαρακτηριστικά της πρότασης της προσέγγισης που διδάχθηκαν. Η μάθηση, όμως, είναι μία πολύπλοκη γνωσιακή δραστηριότητα για την οποία απαιτείται σημαντικός χρόνος και εξάσκηση για να αρχίσει να συγκροτείται η επιδεξιότητα σε έναν τομέα (Vosniadou, 2001; Bransford, 1979; Chase & Simon, 1973). Κατά συνέπεια, δεδομένου ότι για πρώτη φορά οι συμμετέχοντες ήρθαν σε επαφή με τη δεδομένη παιδαγωγική προσέγγιση, ότι δε δαπάνησαν χρόνο για την εξοικείωσή τους με αυτή και ακόμη, ότι η τρίτη συνάντηση, σε αντίθεση με τον αρχικό σχεδιασμό που ήθελε την εκτέλεσή της την επομένη της δεύτερης, πραγματοποιήθηκε μετά από πέντε μέρες, ήταν φυσικό οι μαθητές να μην καταφεύγουν εύκολα σε αυτή τη θεωρητική γνώση. Ωστόσο, τουλάχιστον τρεις από τους τέσσερις συμμετέχοντες κατάφεραν, σε γενικές γραμμές, να συντονίσουν τις οπτικές μεταβολές με αλλαγές σε άλλες αναπαραστάσεις, χωρίς όμως να υπονοείται ότι δε στράφηκαν εκ νέου σε επίπεδα χαμηλότερης αφαίρεσης.

Θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι η απουσία της ψηφιακής τεχνολογίας δεν θα επηρέαζε, ιδιαίτερα, τα παραπάνω συμπεράσματα. Η ενσωμάτωσή της, όμως, στα πλαίσια της δεδομένης έρευνας, παρείχε, όπως αναφέρουν και οι Dunham και Dick (1994), περισσότερες ευκαιρίες για διερεύνηση και έκφραση ερωτήσεων της μορφής *'τι θα συμβεί εάν (what if questions)'*. Το ερευνητικό περιβάλλον του λογισμικού, επέτρεψε, δηλαδή, την ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων, καθώς και την αναζήτηση απαντήσεων με βιωματικό τρόπο. Παρά τις δυσκολίες που ενδεχομένως αναδύθηκαν κατά τη διαχείρισή της, επέτρεψε στους μαθητές, σε μεγάλο βαθμό, να χτίσουν στην προϋπάρχουσα γνώση, να αναθεωρήσουν ή και να διορθώσουν τα γνωστικά τους σχήματα. Μέσω του δυναμικού χειρισμού, είχαν τη δυνατότητα να αναπτύξουν συνδέσεις μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων της προς συζήτηση έννοιας, εκμεταλλευόμενοι λειτουργικότητες που δεν απατώνται με τον ίδιο τρόπο στα στατικά μέσα. Το λογισμικό έδωσε στους μαθητές την ευκαιρία να ενοποιήσουν τις αναπαραστάσεις της έννοιας. Αυτό επειδή επέτρεψε να παρατηρήσουν πως οποιαδήποτε αλλαγή που συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη αναπαράσταση συνεπάγεται άμεση μεταβολή στις υπόλοιπες, διατηρώντας, ωστόσο, όλες τις σχέσεις που

ορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί της αρχικής κατασκευής, καθώς και όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών.

Υπάρχει σημαντική βιβλιογραφία που αφορά στη σημασία των αναπαραστάσεων μίας έννοιας και στην αναγκαιότητα ανάπτυξης συνδέσεων μεταξύ αυτών. Ενδεικτικά αναφέρονται οι Tall και Vinner (1981), Tall (1991), Watson και Moritz (2001). Οι Clement και Sowder (2003) προτείνουν ότι με στόχο την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, οι μαθητές πρέπει να έχουν την ικανότητα να αναπτύσσουν συνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της. Τα αποτελέσματα της δεδομένης έρευνας δείχνουν ότι αυτό ισχύει και στην περίπτωση των μετασχηματισμών. Είναι σημαντικό να θέτεις τις βάσεις της κατανόησης των εννοιών μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων προτού η έμφαση δοθεί στους στατικούς ορισμούς (Confrey & Smith, 1992).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., and Thomas, K. (1996) *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*, Research in Collegiate Mathematics Education, II, 1 - 32.
2. Atherton, J.S. (2011). *Learning and Teaching; SOLO taxonomy* [On-line: UK] retrieved from http://www.learningandteaching.info/learning/solo.htm
3. Baker, B., Hemenway, C & Trigueros, M (2000). On transformations of basic functions. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra*, Vol. 1 (pp.41-47), University of Melbourne.
4. Biggs, J. (1999). What the student does: Teaching for enhanced learning. *Higher Education Research & Development*, *18*(1), 57–75.
5. Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of learning behavior. In H.A.H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp.57-76), Hillsdale, NJQ Erlbaum
6. Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome)*. New York: Academic Press.
7. Borba, M.C. & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multirepresentational environment. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 319-337
8. Bottino, M. (2001). Advanced Learning Environments: Changed Views and Future Perspectives. *Computers and Education. Towards an Interconnected Society*, pp11-27

9. Bransford, J.D., Brown, A.L. & Cocking, R.R. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience and School.* National Academy Press, Washington, DO

10. Bruner, J.S. (1966). *Towards a theory of Instruction.* Cambridge, Harvard

11. Clement, A. & Sowder, J. (2003). Making connections within, among and between unifying ideas in mathematics. In *Integrated Mathematics: Choices and Challenges,* pp59-72. Reston, VA: National council of teachers of mathematics

12. Confrey, J. (1994). Six approaches to transformation of functions using multi-representational software. *Proceedings of the 18th Psychology of Mathematics Education* Vol. 1 (pp.47-74), Lisbon, Lisbon University.

13. Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

14. Dunham, H.P. & Dick, T.P. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, Vol.87, pp.440-445

15. Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. In E. Dubinsky. A. Schoenfeld, and J. Kaput, (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education,* Vol. 1 (pp. 45-68). Providence, RI: American Mathematical Society.

16. Ferrara, F., Pratt, D., Robbuti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calculus. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (PME), Past, Present and Future.* UK: Sense Publishers. 237-273

17. Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht, Netherlands: Reidel

18. Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 40 (pp. 71-90), Kluwer Academic Publishers

19. Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of Algebra. In Kieran & S. Wagner (Eds.), *Research issues in learning and teaching of Algebra* (pp60-86)

20. Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* Vol. 2 (pp. 27-59), Kluwer Academic Publishers

21. Hoyles, C. & Healy, L. (1996). Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking. In Puig, L. & Gutirrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 3, 67-74.*

22. Lage, A.E. & Trigueros, M. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. Alatorre S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

23. Leikin, R. & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating students' interactions in mathematics in a cooperative learning setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, No. 3, pp. 331- 354, National Council of Teachers of Mathematics

24. Mariotti, M.A. (2007). Proof and proving in mathematics education. Guitierrez, A. & Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (PME),* Rotterdam: Sense Publishers. pp.173-204

25. McNaught, C. (2011). *A framework for assessment*, Clear, CUHK

26. Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology – based mathematics lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* Vol. 9 (pp. 327-357), Kluwer Academic Publishers

27. Moore-Russo D. & Golzy, B.J. (2005). Helping students connect functions and their representations. *Mathematics Teacher*, Vol.87, No.3, pp.156-160

28. Papert, S. (2005). You think about thinking without thinking about thinking about something. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 5*(3/4), 366-367.

29. Pegg, J. & Tall, D. (2009). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks

30. Pólya, G. (1957). *How to Solve It*. Garden City, NY: Doubleday.

31. Powell, B.A., Francisco, M.J., Maher, A.C. (2003). An analytical model for the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematics Behavior*, No.22, pp.405-435

32. Schoenfeld, H.A. (2000). Purposes and methods of research mathematics education. *Notices of the AMS*, Vol.47, No.6, pp. 641-649

33. Sever, G. & Yerushalmy, M. (2007). To sense and to visualize functions: The case of graph stretching. *Proceedings of the Fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 5), 1509-1518

34. Skemp, R.R., (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teacher*, Vol.77, pp. 20-26

35. Schnotz, W., Vosniadou, S., & Carretero, M. (1999). *New Perspectives on conceptual change.* Oxford: Elsevier Science.

36. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics* 22, p. 1-36

37. Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Palmer Press

38. Tall, D. (2002). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil

39. Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol.23, No.3, pp.29-33

40. Vinner, S. & Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in mathematics* 12, p. 151-169

41. Wilensky, U. (1991). ‘Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematical education’, in I. Harel and S. Papert (eds.), *Constructionism*, Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ, pp. 193–203.

42. Zachariades, T., Christou, C. & Papagergiou, E. (2001). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions

43. Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol.19, No.1, pp 20-45

44. Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003, a). Translation of a function: Coping with perceived inconsistency. *Proceedings of the XXVII Joint Meeting of PME and PME-NA*,4, 459- 468, Hawaii, USA.

45. Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003, b). Conceptions of function translation: obstacles, intuitions and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior 22, 437-450*

46. Βοσνιάδου, Σ. (2001). Πώς μαθαίνουν οι μαθητές, *Διεθνές γραφείο εκπαίδευσης της UNESCO*

47. Αδαμόμουλος, Λ., Ανδρεαδάκης, Σ., Δαμιανού, Χ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2011). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

48. Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. (2009). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

49. Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. (2009). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Βιβλίο του Εκπαιδευτικού*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

50. Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. (2008). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

51. Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. (2008). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βιβλίο εκπαιδευτικού*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα

52. Βοσνιάδου, Σ. (2004). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*, Τόμος Α, Αθήνα: *Gutenberg*

53. Ιωσηφίδης, Θ. (2003). *Ανάλυση ποιοτικών δεδομένων στις κοινωνικές επιστήμες*. Αθήνα: Κριτική

54. Κλαουδάτος, Ν. (1996). Σημειώσεις του μαθήματος *Διδακτική των Μαθηματικών*, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος "*Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών*", μαθηματικό τμήμα, εαρινό εξάμηνο

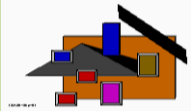
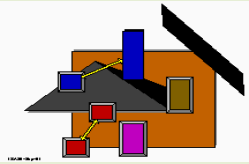
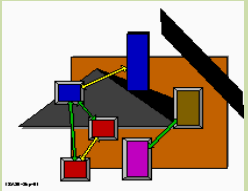
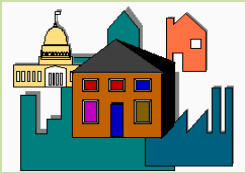
55. Κυνηγός, Χ. (2007). *Το Μάθημα της Διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη διδακτική των μαθηματικών*, Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

56. Κυριαζή, Ν. (1999). *Η κοινωνιολογική έρευνα. Κριτική επισκόπηση των μεθόδων και των τεχνικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

57. Σπύρου, Π. (2005). Επιστημολογία των Μαθηματικών

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Πίνακας κατηγοριοποίησης κατά SOLO

Στάδια της ταξινόμησης SOLO	**Ονοματολογία από τον** *McNaught, C., (2011)*	**Αναπαράσταση** *Atherton, J. S., (2011)*	**Τύπος αποτελέσματος**	**Λύση προβλήματος**
Προ-δομικό στάδιο *Pre-structural*	*Απουσία νοήματος* *(Missing the point)*		---------	Απόλυτα λανθασμένη λύση
Μονοδιάστατης δομής στάδιο *Uni-structural*	*Μεμονωμένη διάσταση* *(Single point)*		Δηλώνω Αναγνωρίζω Ανακαλώ Παραθέτω Σημειώνω Ονομάζω	Σωστή απάντηση σε απλά αλγοριθμικά προβλήματα, που απαιτούν την αντικατάσταση δεδομένων σε τύπο Σωστή λύση σε ένα υποερώτημα ενός πολύπλοκου ζητήματος
Πολυδιάστατης δομής στάδιο *Multi-structural*	*Πολλαπλές διακριτές διαστάσεις* *(Multiple unrelated point)*		Επιλύω Αλληλεπιδρώ Περιγράφω Επεξηγώ Ορίζω Ταξινομώ	Σωστή λύση σε επιμέρους ερωτήματα ενός προβλήματος, που απαιτούν την αντικατάσταση δεδομένων από το προηγούμενο στο επόμενο Δομικά ελλιπής, αλγοριθμική αντιμετώπιση ανοιχτών ερωτημάτων
Σχεσιακό στάδιο *Relational*	*Λογικά διατυπωμένη απάντηση* *(Logically related answer)*		Εφαρμόζω Υπογραμμίζω Αναλύω Κατατάσσω Αντιπαραβάλω Κατηγοριοποιώ Συνοψίζω	Κομψή λύση σε σύνθετο πρόβλημα που απαιτεί προσδιορισμό των μεταβλητών που πρέπει να αξιολογηθούν και έλεγχο υπόθεσης Καλά δομημένη
Εκτεταμένης αφαίρεσης στάδιο *Extended abstract*	*Απρόβλεπτη επέκταση* *(Unanticipated extension)*		Δημιουργώ Συνθέτω Αναπτύσσω εικασίες Επικυρώνω Υποθέτω Αντιπαραβάλλω	Επίλυση προβλήματος, πέραν της αναμενόμενης απάντησης

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Ανοίξτε το αρχείο εντολών με τίτλο *"ΦΕ1"*.

Δραστηριότητα 1η:
Η συνάρτηση *f* ορίζεται με τη βοήθεια του δρομέα α. Πώς μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* όταν μεταβάλλεται η τιμή του α?

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Τιμές του α	**α<0**	**α=0**	**α>0**
Μορφή της γραφικής παράστασης			

Να διατυπώσετε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε
_____
_____
_____
_____

Δραστηριότητα 2η:
Εμφανίστε τη συνάρτηση *g*.

Ζήτημα 1ο

Επιλέξτε α=1, λ=0 και δώστε στο κ την τιμή 2

- Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των *f* και *g*?
  _____
  _____
  _____
- Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου?
  _____
  _____
  _____
- Επαναλάβατε τη διαδικασία δίνοντας στο κ διάφορες τιμές
  _____
  _____
  _____
  _____
- Τι παρατηρείτε σε σχέση με το συντελεστή α, καθώς η συνάρτηση μετακινείται, με τη βοήθεια του δρομέα κ?
  _____
  _____

- Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφει αυτή τη μετατόπιση της συνάρτησης *f*, συναρτήσει των παραμέτρων α και κ? *(Πληκτρολογήστε τον τύπο ως συνάρτηση h και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη της g - για λ=0)*

  _____
  _____
  _____

Ζήτημα 2ο

Επιλέξτε α=3, κ=0 και δώστε στο λ την τιμή 3

- Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των *f* και *g*?

  _____
  _____
  _____
  _____

- Τι μετασχηματισμό παρατηρείτε στον τύπο του τριωνύμου?

  _____
  _____
  _____

- Επαναλάβατε τη διαδικασία δίνοντας στο λ διάφορες τιμές

  _____
  _____
  _____

- Τι παρατηρείτε σε σχέση με το συντελεστή α, καθώς η συνάρτηση μετακινείται, με τη βοήθεια του δρομέα λ?

  _____
  _____

- Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφει αυτή τη μετατόπιση της συνάρτησης *f*, συναρτήσει των παραμέτρων α και λ? *(Πληκτρολογήστε τον τύπο ως συνάρτηση t και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη της g – για κ=0)*

  _____
  _____
  _____

Ζήτημα 3ο

Παρατήρηση: Πίεσε *Ctrl+Shift+A*, για την απόκρυψη του *παραθύρου της Άλγεβρας*

Επιλέξτε $a = -2$.

- Αν οι δρομείς κ και λ έχουν τις τιμές 2 και – 3, αντίστοιχα, ποια είναι η εξίσωση της *g (για τις δεδομένες τιμές)*

  _____
  _____
  _____

- Βρείτε την εξίσωση της *g* για τις διάφορες τιμές των κ και λ *(Πληκτρολογήστε τον τύπο ως συνάρτηση s και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη της g)*
  - ✓ Τι συμβαίνει αν μεταβάλλεται πρώτα το λ και μετά το κ?

  _____
  _____
  _____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Ανοίξτε το αρχείο εντολών με τίτλο *"ΦΕ2_Δρ.1-2"*.

Δραστηριότητα 1η:
Επιλέξτε τη *Δραστηριότητα 1*.
Έστω (x,y) τυχαίο σημείο του δοθέντος γραφήματος. Να μετατοπίσετε το πολύγωνο, ακολουθώντας τον εξής κανόνα:

$$(x, y) \rightarrow (x+5, y-2)$$

Εφαρμόστε τον μετασχηματισμό σε συγκεκριμένα σημεία του αρχικού γραφήματος (συμπληρώστε τον πίνακα)

Αρχικό γράφημα (x,y)							
Μετασχηματισμένο γράφημα (x+5, y-2)							

Δραστηριότητα 2η:
Επιλέξτε τη *Δραστηριότητα 2*.
Έστω με κόκκινο χρώμα το αρχικό σχήμα και με πράσινο το σχήμα που προκύπτει από τη μετατόπιση αυτού. Ποιος είναι ο κανόνας που περιγράφει την μετατόπιση?

_____
_____
_____
_____

Οδηγίες: *Μετακινείστε το σημείο P παρατηρήστε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των P και Q (συμπληρώστε τον πίνακα)*

Συντεταγμένες σημείου P							
Συντεταγμένες σημείου Q							

Ανοίξτε το αρχείο εντολών με τίτλο *"ΦΕ2_Δρ.3-4"*.

Δραστηριότητα 3η:
Επιλέξτε τη *Δραστηριότητα 3*.
Η συνάρτηση f ορίζεται με τη βοήθεια του δρομέα α. *Η συνάρτηση g έχει προκύψει με οριζόντια μετατόπιση της f, με τη βοήθεια του δρομέα* κ
Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης g? _____
Πληκτρολογήστε τον τύπο της ως συνάρτηση h και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη της g

Επιλέξτε α=1 και δώστε στο κ την τιμή 2.
Μετακινείστε το σημείο Α και παρατηρείστε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των Α και Μ.

Συντεταγμένες σημείου Α							
Συντεταγμένες σημείου Μ							

- Ποιος είναι ο κανόνας που περιγράφει τη μετατόπιση
- _____
- Εκφράστε την τετμημένη του σημείου Μ (x_M), συναρτήσει της τετμημένης του σημείου Α (x_A)
- _____
- Εκφράστε την τεταγμένη του σημείου Μ (y_M), συναρτήσει της τεταγμένης του σημείου Α (y_A)
- _____
- Ποια η σχέση που συνδέει τα x_A, y_A? Μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει τα x_M, y_M?
- _____
- Επαναλάβετε τη διαδικασία δίνοντας στο κ και άλλες τιμές. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε

  _____

  Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης *g*?

  _____

Δραστηριότητα 4η:
Επιλέξτε τη *Δραστηριότητα 4*.
Η συνάρτηση f_1 ορίζεται με τη βοήθεια του δρομέα α. Η συνάρτηση g_1 έχει προκύψει με κατακόρυφη μετατόπιση της f_1, με τη βοήθεια του δρομέα λ
Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης g_1? _____
Πληκτρολογήστε τον τύπο της ως συνάρτηση h_1 και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη της g_1

Επιλέξτε α=1 και δώστε στο λ την τιμή 2.
Μετακινείστε το σημείο Α και παρατηρείστε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των Α και Μ.

Συντεταγμένες σημείου Α							
Συντεταγμένες σημείου Μ							

- Ποιος είναι ο κανόνας που περιγράφει τη μετατόπιση
  _____
  _____
  _____
  _____
- Εκφράστε την τετμημένη του σημείου Μ (x_M), συναρτήσει της τετμημένης του σημείου Α (x_A)
  _____
  _____
  _____
  _____
- Εκφράστε την τεταγμένη του σημείου Μ (y_M), συναρτήσει της τεταγμένης του σημείου Α (y_A)
  _____
  _____
  _____
  _____
- Ποια η σχέση που συνδέει τα x_A, y_A? Μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει τα x_M, y_M?
  _____
  _____
  _____
  _____
- Επαναλάβετε τη διαδικασία δίνοντας στο λ και άλλες τιμές. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξατε
  _____
  _____
  _____
  _____
- Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης g_1?
  _____
  _____

Ανοίξτε το αρχείο εντολών με τίτλο *"ΦΕ2_Δρ.5"*.

Δραστηριότητα 5η:
Επιλέξτε τη *Δραστηριότητα 5*.
Δουλεύοντας αποκλειστικά πάνω στο γράφημα και χρησιμοποιώντας τους δρομείς, μεταβάλλετε κατάλληλα την $f(x) = x^2$ (α=1, κ=0, λ=0) ώστε να συμπέσει με την $\varphi(x) = 2x^2+4x+3$.

- Ποιες είναι, δηλαδή , δηλαδή οι κατάλληλες μετατροπές που πρέπει να εφαρμόσουμε στην *f* ώστε να προκύψει η *φ* (α=?, κ=?, λ=?)

  _____
  _____
  _____
  _____

Θέλουμε να βρούμε μια γενικευμένη διαδικασία με την οποία θα μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης της μορφής $g(x)= \alpha x^2+\beta x+\gamma$, με κατάλληλες μεταφορές της $f(x) = \alpha x^2$.

- Ζητάμε τύπους οι οποίοι θα συνδέουν τις παραμέτρους κ, λ με τους συντελεστές α, β, γ του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

  _____
  _____
  _____
  _____

Ανοίξτε το αρχείο εντολών με τίτλο *"ΦΕ2_Δρ.6"*.

Δραστηριότητα 6η:
Επιλέξτε τη *Δραστηριότητα 6*.
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$, *που ορίζεται με τη βοήθεια του δρομέα* α. *Ποια είναι η εξίσωση της g, για τις διάφορες τιμές των* κ *και* λ?
Πληκτρολογήστε τον τύπο της ως συνάρτηση h *και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη της g*

Βοήθεια:
Επιλέξτε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους α, κ, λ και βρείτε τον τύπο αυτής της συνάρτησης *t*. Πληκτρολογώντας τον τύπο αυτής στην *"Εισαγωγή"*, το γράφημά της ταυτίζεται με την καμπύλη της *f* για τις δεδομένες τιμές?
Επαναλάβετε τη διαδικασία για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων

	α=… κ=… λ=…	**α=… κ=… λ=…**	**α=… κ=… λ=…**
Τι μεταβολές υφίσταται το γράφημα			
Τύπος της συνάρτησης *t*			

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Ανοίξτε το αρχείο εντολών με τίτλο *"ΦΕ3"*.

Δραστηριότητα 1η:

Ζήτημα 1ο

1. Εμφανίστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *g*. Ποιες είναι οι τιμές των *a* και *b*, ώστε $g(x)=|x-a|+b$?

   _____
   _____
   _____
   _____

2. Εμφανίστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *f*. Ποιες είναι οι τιμές των *a* και *b*, ώστε $f(x)=(x-a)^2+b$?

   _____
   _____
   _____
   _____

Ζήτημα 2ο

Περιγράψτε τους μετασχηματισμούς που έχουμε εφαρμόσει στις συναρτήσεις *f* και *g* ώστε να προκύψουν η f_1 και η g_1, αντίστοιχα.

_____
_____
_____
_____
_____

Δραστηριότητα 2η:

Ζήτημα 1ο

Μετακινείστε τη συνάρτηση $f(x)=3x^2$ (α=3, κ=0, λ=0), δύο μονάδες δεξιά και τρεις μονάδες προς τα κάτω, χρησιμοποιώντας τους δρομείς.

Μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της νέας συνάρτησης? *Πληκτρολογήστε τον τύπο της ως συνάρτηση φ και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη που έχει προκύψει, από τις μετατοπίσεις που εφαρμόσατε*

_____
_____
_____
_____

Ζήτημα 2^{ο}

Χρησιμοποιώντας τους δρομείς α, κ, λ και ξεκινώντας από τη συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{x}$ (α=1, κ=0, λ=0) κατασκευάστε την $h_1(x)=\frac{2}{3-x}+4$

Πληκτρολογήστε τον τύπο της ως συνάρτηση s και επιβεβαιώστε ότι ταυτίζεται με την καμπύλη που έχει προκύψει, από τις μετατοπίσεις που εφαρμόσατε

_____
_____
_____
_____

Δραστηριότητα 3^{η}:

Ζήτημα 1^{ο}

Δοθέντων αυτών των δύο γραφικών αναπαραστάσεων και χρησιμοποιώντας τους δρομείς, περιγράψτε τους μετασχηματισμούς που πρέπει να εφαρμόσουμε στην κόκκινη καμπύλη ώστε να προκύψει η πράσινη

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Ζήτημα 2^{ο}

Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{x-2}+4\le-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$

_____
_____
_____
_____
_____