ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

qpø´ ə×ı ε ŬŰšə ɐ Ăɟɔ ŬůdŬ ε ŮŰŭŰb∈:

«ɸ ∈ ´ɟ ɦbəɖε Ŭ ŰɖɡŭsŭŮůə ŬəɖŬɡə Ŭɔ ε Ÿɗɖůɖɡ Ű×ɜ Ŭɟ ɜɖŰšəı ɜ Ŭɟ ɜɖε ı ɜ ə Ŭɔ∈ ɟ ɦə∈ɡ ŰɖɡŁůŰɛɟ ɖŬɡ Ű×ɜ ɀ Ŭɗɖε ŬŰšəı ɜ ůŰɖɜ Ŭɜ Ůšε ŮŰ ´ ɜůıə Ůɛg»

ũ Ŭbɟɜɐə·ȯ ɜɜŬ

Ă´ ɜbə∈y´ ɤ ɜ ə Ŭɗɖɔɖ Ůɛg:

ȻŬɡŬɟ ɜŸũɖɡ Ū Ůɛ ŭɦůɜ∈g

ɟ ɗɛɜŬ

Łɛi ə∈ɜg, 2014

¢ ´ Ŭ ɟ ɵ ɨ ů Ŭ ɋ ɵ ´ ɔ ɤ ɛ Ŭ Ű ɜ ɵ ɐ Ǽ ɟ ɔ Ŭ ů ɑ Ŭ

Ů ɜ ´ ɵ ɜ ɐ ɑ ɖ ə Ů ů Ű Ŭ ´ ə Ŭ ů ɜ Ŭ Ű ɤ ɜ ů ´ ɵ g ŭ ı ɜ

ɔ ɜ Ŭ Ű ɖ ɜ Ŭ ɦ ə Ű ɖ ů ɑ ɖ Ű ɛ g

ɤ Ů Ű Ŭ ´ Ű g ɵ Ŭ ə ɵ ɨ ɋ ɵ ´ ɔ ı ɛ Ŭ Ű ɛ g Ǽ ɜ ŭ ɵ Ů g ů ɑ ɖ g

´ ɵ g Ŭ ɵ ɜ ɤ ɛ Ů ə Ű ɛ

ɋ ɵ Ŭ Ŭ ɜ Ů Ű ɖ ɛ ɜ Ŭ ə ɦ ï ɋ ɵ Ŭ Ű ɛ ɖ ɛ Ŭ Ű ɜ ə ɦ Ч ɟ ɦ ɔ ɟ Ŭ ɛ ɛ Ŭ ɤ Ů Ű Ŭ ´ Ű g ɵ Ŭ ə ı ɜ Ǽ ´ ɵ g ŭ ı ɜ

«ɋ ɵ ŭ Ŭ ə Ű ɜ ə ɐ ə Ŭ ə ɤ Ů ɖ ɵ ŭ ɵ ə ɔ ɔ ɑ Ŭ Ű ɤ ɜ ɤ Ŭ ɖ ɖ ɛ Ŭ Ű ɜ ə ı ɜ»

Ǽ ɔ ə ɟ ɔ ɑ ɖ ə Ů Ű ɖ ɜ ..... Ŭ ɦ Ǽ ɜ Ů Ű Ŭ ů Ű ɜ ə ɐ Ǽ ´ ɜ Ű ɟ ɵ ´ ɐ Ŭ ɵ Ű Ů ə ɵ ɨ ɛ Ů ɜ ɖ Ŭ ɦ Ű ɜ g g:

	Ч ɜ ɵ ɛ Ŭ Ű Ů ı ɜ g ɛ ɵ	ɑ Ŭ ɖ ɛ ɑ ŭ Ŭ	ɟ ´ ɵ ɔ ɟ Ŭ ŭ ɐ
1)	Ć Ŭ ɢ Ŭ ɟ ɜ Ÿ ŭ ɖ Ū Ů ɜ ŭ ɦ ů ɜ ɜ	Ɨ Ŭ ɖ ɖ ɔ ɖ Ű ɜ g	
	(Ů ɜ ɓ ə ɤ ´ ɤ ɜ Ɨ Ŭ ɖ ɖ ɔ ɖ Ű ɜ g)		é é é é é
2)	Ч ɦ Ű Ŭ ɟ ɖ ɋ ɤ ů ´ ɵ ɜ Ŭ	ɟ ɜ Ŭ ə ɖ ɟ ı Ű ɟ ɜ Ŭ Ɨ Ŭ ɖ ɖ ɔ ɐ Ű ɟ ɜ Ŭ	
			é é é é é
3)	Ū ɤ ɛ Ŭ ŭ ɖ ŭ ɜ Ÿ ɜ ɜ ɖ	ɋ ɟ . ů Ű ɖ ɋ ŭ Ŭ ə Ű ɜ ɐ Ű ɤ ɜ ɤ Ŭ ɖ ɛ Ŭ Ű ɜ ə ı ɜ	
		Ǽ ɢ ɵ ə ɜ ə ɦ g g Ǽ ɨ ɛ ɓ ɵ g ə ɵ g g	é é é é é

Ágcŭţsůŭůţ

Ħəcəəďţı 3c3ŰŭţŰď ´ŭţci+ůŭ ŭə´əx εŭŰśəe ůţɔŭůďŭ, ďyəx 3ŭ ůţcŭţsůŭůx ďůţε Ÿ ŭćɜ əi+ţsœ Ūxεŭŭďď ŭəŸ33ď ɔəŭħəď ŭď ɓcεďůśŸ ŭćg. ţ ţcœŸ, ɔəŭ ŭć εŸďďεŸ ŭćg, ´cg ŭcŭŷəůůŮ yε´3ůgůď ɔəŭ ŭď3 sŭyŭ ŭďţ ůţɔŭůďŭţ εcg, ɔəŭ ŭď3 ŭcŭcεe ŭćg 3ŭ gəc´cəďďůď ď sŭyŭ ŭţŭŷ əŭə ŭŷəcţ, ɔəŭ ŭď əŭďcŭεɔďůe ŭćg ůŭď ŭəŸţəůŸŭ ŭďţ ŭďεœgţɔďŭţŭďţ.

ŪŭεďůŸŭ 3ŭ ůţcŭţsůŭůx ŭć3 əi+ţsœ (ŭcŭţəŸŭď Ūůćŭħůœ əŭə ŭď3 əgţďŭ Ŧħŭŭţď qyů´cœŭɔəŭ ŭď ůgεεůŭćcε ŭćggţůŭď ŭţsεůŸe ůsŭţc´e ŭďţ ůţɔŭůďŭţ εcg, ŭəŸ əŭə ɔəŭ ŭď3 ůsţţcε ŭćggţůůħəď ŭď ŭəŸţəůŸŭ ŭx 3 ů´cgŭı 3 εcg.

Á´ůďţ, 3ɜı ďx ŭď3 ŭ3Ÿɔəď 3ŭ ůţcŭţsůŭůx ħəcggţ ŭćggţ «Ŧcəi+ŭţc´cgg» ŭŭůəŸəcggţ εcg ɔəŭ ŭď əŭďcŭεɔďůe ŭćggţ, ŭəŸ əŭə ħəcggţ ŭćggţ «Ŧcəi+ŭţc´cgg» ůg3ŭŭyəűcggţ εcg ɔəŭ ŭď3 g´cůŭţsœď ŭćggţ ůŭď ŭəŸţəůŸŭ ŭx 3 εůŭŭ ůţcəŭəı 3 ů´cgŭı 3 εcg. ţ əħεď, ůţcŭţsůŭ ħəcggţ ŭćggţ εŭďďŭţď εcg, ůŭəŸ ůə ůůcggţ´cg ůgεεůŭůcŭ3 ůŭď3 ůε´ůţsœe ţţůg3ŭ.

ţyəcg, ůţcŭţsůŭ ŭď3 cəɔcţ3ůŸ εcg əŭə sŭəŭďŭţŭ, ŭć ůi+ţgɔħ εcg ŧŸbbŭţůůəœŭ, ɔəŭ ŭď3 əŭŭŭ3ħďůď əŭə ŭď3 g´cůŭţsœď ŭćg ůŭħəď ŭď ŭəŸţəůŸŭ ŭx 3 ů´cgŭı 3 εcg.

Περιεχόμενα

[illegible] 1

[illegible] 1 [illegible] 3

1.1 [illegible] 3

1.1.1 [illegible] 8

1.1.2 [illegible] 10

1.2 [illegible] 11

1.2.1 [illegible] 12

1.2.2 [illegible] 14

1.2.3 [illegible] 15

1.3 [illegible] 18

1.3.1 [illegible] 18

1.3.2 [illegible] 19

1.4 [illegible] 23

[illegible] 2 [illegible] 25

2.1 [illegible] 25

2.2 [illegible] 28

2.3 [illegible] 29

[illegible] 3 [illegible] 31

3.1 õŮɜɘɏɠǤɉɢɠǤǽǦɛŬǦŬǽɚɐǤŮə´ŬɑŬɡůǦǤůǽɜ ȺəəȲũŬ 31

3.2 ȾŭǦɔǦůǤɔɘŬ ǽǦ ŭɘŭŬůəŬəŬ ǽɤɜ ɟǦǽɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ ůǽŬ ʐ ŬǦǦɛŬǽɚȲ ǽǦǤ ȷ ǒ ȼȲɜǦǤũɡɛɜŬůɞɡ 33

3.2.1 ȻɞɘəɘŬůɛɧǤ ǽɤɜ ɣɟɩ ɜ ŭɘŭŬůəŬəŬǤ ůǽǤ ´ŬɟŬɟȲǽɘɡǤ ǽɛɡ əŬǽŬəŬɞɡ ǽɤɜ ɟǦǽɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ 34

3.3 ɗɑŭŬůəŬəŬǽɛɡ ´ɘəəŬ əŬůɘŬůɛɘɨ ŭɨɘ Ŭɟɜǽǽɚɩ ɜ ɟǦǽɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ............ 36

3.4 ȾɟɘǽɚɐůǽǤŭɟŬůǽǤɟɧǽǦǽǤǽɛɡ ůɞɞəɘɘɨ ɒɒəɞɡ 37

3.5 ȾɟɘǽɚɐůǽŬɘůǽɛɟɘȲůǦɛŬŮɜ ɛŬǽŬǽɛɡ ůɞɞəɘɘɨ ɒɒəɞɡ 40

3.6 ȻɨɔəɟɘůǦ ɛŮǽɛ ɜɠɘ ´ɘɘǽɚɧ ´ɟɧɔɟŬɛɛŬ ů´ɘɡŭɩ ɜ ɔɘŬ ǽŬ ʐ ŬǦǦɛŬǽɚȲ ǽǦǤ ɡ´ɘɢɟůǽɚɐǤŮə´ŬɑŬɡůǦǤ 41

Ȼŭǽ ȲəŬɞ 4ɘ ʐ ǦŬ ŬɜŬůəɧ´ǦůǦ ǽɤɜ Ůɘ´ǽɚɩ ɜ ɛɘɜǽɠəɤɜ ŭɘŭŬůəŬəŬǤ ǽɤɜ ŬɜǦǽɚɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ 47

4.1 ǺŬůɘɠǤɉɢɠǤǽǦǤ ɅŬŬəɘůǽɚɐǤ ʐ ŬǦǦɛŬǽɚɐǤ Ⱥə´ŬɑŬɡůǦǤ 47

4.2 ȹɟɘǽȲůŮǤ Ů ŮɐɔǦůǦǤ ǽɛɡ əŬɧɜŬ ǽɤɜ ´ɟɘůɐɛɠɜ ůǽǤ ´ɟȲɜǤ ɛŮ ŬɜǦǽɚɘɨǤ Ŭɟɘɛɘɨ Ǥ Ŭ ɧ ǽɛɜ Freudenthal 48

4.3 Ⱦ ɟɧəɘǤ ǽǦǤ Ŭɘǽɛɟ ǦŬǤ 58

4.3.1 é ůǽǦ ŭɘŭŬǽɚɐ ´ɟɧǽůǦ ǽɛɡ Freudenthal 58

4.3.2 é ůǽǦ ŭɘŭŬǽɚɐ ´ɟɧǽůǦ ǽɛɡ Heeffer 62

4.3.3 é ůǽǦ ŭɘŭŬǽɚɐ ´ɟɧǽůǦ ǽǦǤ Rapke 63

4.4 ȾɟɘǽɚɐůǽŬ ɛɘɜǽɠəŬ ŭɘŭŬůəŬəŬǤ ǽɤɜ ɟǦǽɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ 65

Ȼŭǽ ȲəŬɞ 5ɘ Ȼǽɛɘɔůǽǽ ɧ ǽǦɜ Ŭɘǽɛɟɘɐ ŮɠəɘɘǦ ǽɤɜ ŬɜǦǽɚɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ 72

5.1 ǺŬůɘȲůǽɛɔůǽǽ ǽǦǤ Ŭɘǽɛɟɘɐ ŮɠəɘɘǦǤ ǽɤɜ ŬɜǦǽɚɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ 72

5.2 ȷ ɜǽɛǽǽ ´ɘůǦ ǽɤɜ ŬɜǦǽɚɩ ɜ Ŭɟɘɛɛɩɜ əŬɘɘ´ɟɘ ǽǽǤ Ŭ ɘŭŬůŮǤ ǽɛɡ əŬɧɜŬ ǽɤɜ ´ɟɘůɐɛɠɜ 73

5.3 ȹɟɘɒəɐɛŬǽǽ ´ɘɡ əŬǽɠůǽǦůŬɜ ŬŬəŬɞɡǤ ǽɛɡǤ ŬɜǦǽɚɘɨ Ǥ Ŭɟɘɛɘɨ Ǥ 82

5.4 ʹ Ů ɟɜɘ ɜǽǽǤ ǽǤ ŭɡůəɘəǦůǤ ɛŮŬəŬɐ ɘ´ǽɚɐǤ: «Ȼ ŬɟɘɐǽǦǤ ŭɘŬǽɐɟǦůǦǤ» 84

5.5 [illegible] 86

[illegible] 6 [illegible] 88

6.1 [illegible] 88

6.2 [illegible] 89

6.2.1 [illegible] 89

6.2.2 [illegible] 90

6.3 [illegible] 95

6.3.1 [illegible] 95

6.3.2 [illegible] 99

6.3.3 [illegible] 100

6.3.4 [illegible] 103

6.4 [illegible] 107

6.4.1 [illegible] 124

6.5 [illegible] 127

[illegible] 132

Æsůŭbɤɔɐé

¢ŭŭźbůgŭźdŭɡɟɦɜɜŭɣɡůbŭɡɜɜdůdůźŭůźbŭɜŭźŭźɟɟɜɜŭźźɜɜŭźźɜůźɟdŭźɤɜɛŭźdɛŭźźbɩɜůźɜɩɜ, źŭɦůɜŭɦɦźɜɡɡŭźbŭźźdɛŭpɜɩɡŭɛŭźdɛŭźźbɜɩɡŭźźɜɩɡŭźɜɡɡŭźbŭźźdźźŭźźɜɡŭźźɜɩɡŭźźɜɩɡŭźźɜɡŭźźɜɩɡŭźźɜɩɡŭźźɜɡŭźźɜɩɡŭźźɜɩɡ

[illegible] Freudenthal, [illegible] Heeffer [illegible] Rapke. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Freudenthal. [illegible] Freudenthal [illegible] 1970 [illegible] Freudenthal [illegible]

[illegible] (2011) [illegible] (2005), [illegible]

[illegible]

1.1 [illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible] «[illegible]», [illegible]

- [illegible] «[illegible]», [illegible].[1] ([illegible] & [illegible], 2007)

[illegible] Bolzano (1817) [illegible], [illegible]^2, [illegible]^3, [illegible] e, [illegible] e > ±1, [illegible] e < -1 [illegible] e > 1 [illegible] e < ±1 [illegible] -1 < e < 1.

[illegible]: $x^2 > 1$, [illegible] x > ±1, [illegible] «[illegible]» [illegible].

[1] [illegible] «[illegible]» [illegible].

[illegible]:

1. [illegible] Toeplitz

2. [illegible] Freudenthal

3. [illegible] Brousseau

4. [illegible] Radford, [illegible]

5. [illegible] Boero.

[illegible] «[illegible]» [illegible] (Jankvist 2009) [illegible] (Gulikers & Blom, 2001) [illegible] Otto Toeplitz [illegible] 1926.

[illegible] Freudenthal (1973) [illegible] «[illegible]». [illegible] «[illegible]» [illegible] Freudenthal [illegible]

[illegible] Toeplitz. [illegible]

[illegible] Brousseau [illegible] «[illegible]». [illegible] Brousseau [illegible] «[illegible]», [illegible] «[illegible]» [illegible] «[illegible]». [illegible] «[illegible]» [illegible] Brousseau [illegible] «[illegible]», [illegible] (Brousseau, 1997)

[illegible] Radford [illegible] «[illegible]» [illegible] (Radford, 1997)

[illegible] Boero [illegible] «[illegible]» (voices). [illegible] «[illegible]» (echoes). [illegible] «[illegible]» (voices and echoes game – VEG) [illegible]

[illegible] «[illegible]», [illegible]. (Radford, Boero & Vasco, 2000[illegible], 2011)[2]

[illegible]:

1. [illegible] (Piaget)
2. [illegible] (Freudenthal)
3. [illegible] (Brousseau)

[illegible] Piaget. [illegible] (Brousseau), [illegible][3] [illegible] (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). [illegible] Freudenthal) [illegible].

[2] [illegible] Boero. [illegible] 6° [illegible].

[3] [illegible].

1.1.1 Ψdכyגƒ Ğ ε Ůƒ ůεכ כεכ dŰ Ůdƒ ΛŮŮ כůŮ ε ƒ Z Ůƒdε ŮŮ ε ƒ Aכ´ Ůůůdƒ

¢ dŮ Ůכ ů d Ůƒ Λ ŮŮ כůŮ ε ƒ Z Ůƒdε ŮŮ ε ƒ Aכ´ Ůůůdƒ[4] (Λ A) ЬŮůůŮƒכ Ů ůŮƒ3 Ů3 Ůכ d Y d Ůεg Freudenthal ЬŮכ Ů Z Ůƒdε ŮŮ כY Ůכ Ů ε dŮ Ů3 d ı ´ כd ůı Ů ůŮı ЬŮƒŮ כ Ů כ כŮ 3 Ů Ů εŮכεi 3 Ů3 d ı ´ כd Ů3 dŮ ´ ı y´ Ůכ 3 Ů ůg3ůyε3 Ů כ ε Ů ůƒ כεכ3 Y 3 dŮ ε Ů ůƒ ´ ı Ů ε Ů ůכЬƒŮƒŮ כ Ů3 Ů ЬŮůεg3 Ů ůŮƒ3 כůεı dŮ ůεgg.

Ŧ ůƒ Λ A gı důכε´ εכi 3 Ů כ ůi ε ´ d כyגƒ כŮ ůε3 ůgŮůכŮůε Ьƒ εכŮƒ ůכůŮ ε Ů כd Ůƒ ´ εg ůůεgŮi εg3 ůŮƒ3 Ů Ů3 Ů כ Ů Ů ůכůŮgכ ůƒŮƒכ3ı ůd ƒ:

1. ¢ כůεı dŮ Ůx 3 Z Ůƒdε ŮŮכı 3
2. Ŧ כ Ůgd ƒı ε d Ů ƒ Y Ůg´ Ůƒ[5] ε yd ůεכ Ůx 3 ´ Ůכůı 3

¢ ´ εı Ůƒ Ů Ů3 Y Ůg3 d ƒ ε כŮƒ ε Ůƒdε ŮŮכ ε ƒ y 3 3 εכŮƒ ε Ůƒd ůƒ y ƒ Ůכ Ů כ ´ ı εכ Ůƒdεı כůכ ε dŮ ůŮ ε Ů כY כε Ьƒůƒdε. ¢ ůכůŮůכ Ů כd Ů yגƒ εı כ Ů3 x d ůƒ ε Ů ůƒ y ůεכ Ůƒ ƒ´ ε, ı ůŮƒŮ Ůg ůƒ ´ εg Ů3 Ů כ Ů כi ´ ŮŮƒŮכ Ů ƒ ůεgƒ ε Ůƒd ůƒ y ƒ כŮ d ůכY ε Ů ůƒ3 ε´ εd Ů Ů3 Ů כ Ů כi ´ ŮŮƒŮכ 3 Ů yגƒ כ ´ ı εůגƒůכŮůŮƒůı Ů ƒ ůεכ3 כůƒdכd ůƒ. ¢ ´ εı Ůƒ Ů Ůg ůƒ ůכůŮůכ Ů εı ı y Ů כ Ů ƒ ůƒ3 «Ůı גε ůƒ ƒ Ů Ů3 Ůƒ ůƒ ı Ůƒd ƒ», d ε´ εd Ů Ů3 Ů כ3 x ı גכ Ů כ ůƒ3 כůεı dŮ Ůx 3 Z Ůƒdε ŮŮכı 3 x ƒ ε dŮ ůƒ ı ŮŮכ ε ůכŮůכ Ů d Ů. Ŧ ε Ůƒd ůƒ ε ƒ Ů כε כεƒ d ı 3 ŮŮƒ ůƒ3 כůεı כ ε ´ εı Ůƒ Ů εg ´ ůı כůεε y 3 εg ůƒ ƒ ůכůŮůכ ε y 3 εכŮƒ ε Ůƒdε ŮŮכ ε ƒ y 3 3 εכŮƒ Ů Ů3 Ů כ Ů ŮŮƒŮכ ů Ů Y εכ Ů ŮŮƒ Z Ůƒdε ŮŮכ Y´ εg ´ ı εכ y כ ƒ x Ů3 Ů ƒ Ů g ůƒ ůƒ ´ εı Ůƒ Ů.

Ŧ ŮŮ d Ůx ı d ůƒ כY ůı כ Ů כ Ů Ů ůƒ Λ A Ů3 ů כ ε ƒ y 3 3 εכŮ ůƒ ƒ Ůƒdε ŮŮכ ε´ εd ůd ƒ כ Ů ůƒ ůε´ כεg ůƒůכ ε y 3 ε ´ כŮůכ. ¢ ε Ůƒdε ŮŮכ ε´ εd ůd Ů εŮŮכ Ů ůƒ ε dŮ ůı Ů ůŮı ЬŮƒŮ εı כY 3 x ůd ƒ כ Ů ůƒ כ ůı ´ εg yגƒ Ů εכ ůƒ Ů כ כ Ů ůƒ כ Ů3 ůƒŮƒŮ ´ εg ůכƒ y כ Ů3 ůƒŮƒŮ ´ εg ůכƒ y Ů3 x ůŮƒ כ Ů ůg ůƒ3 ε yגı כ Ů ůגy ůŮכ, ůg3 ůy ůŮכ ƒ כ Ů ůגכ ε y ƒ. ¢ ε Ůƒdε ŮŮכ ε´ εd ůd ůכ ůגx ı גŮŮכ ůƒ3 εı גכƒ3 Ů כ Ů כ Ů ůŮƒכ ƒ ı g ůƒ.

---

[4] Ŧ ЬŮůכ y ƒ Ů ı גƒ Ůƒ Λ A Ů3 Ů ů ı y ı ε3 Ů כ Ů ůε Ů ı y ů Ů ı Ů ů Ů §4.1

[5] Z Ů Y Ůg´ d (informal) Ůכ ε d ůd Ůכƒ ƒ ε Ůƒd ůƒ ε ı גd ůכε´ εכůı Ůƒ3 Ůε´ Ůכı dŮ Ů ƒ Ůε3 ´ ı Ů ε Ů ůכƒ כƒůε εכ d Ů3 Ů ůı ůŮכ3 ƒ d ε Ů ůƒ ε Ůƒd ε Ů ůכƒ ƒ Ůכůƒ ı Y ůכůƒ Ůכı ε dŮ Ůg´ כε (formal) Ůכ ε d ůd ı גd ůכε´ εכůı ε ƒ3 εכ ε Ůƒd ε Ů ůכεi ƒ εı כůε ƒ Ů כd Ůx ı ε ε Ů Ů. (Tsamir & Sheffer, 2000)

Bjsahzúb: ¢e ´jUbeÚúbh ´jhbadeÚusÚg´ı zÚÚbuÚyzÚ´aÚusa, eezÚbe´esÚÚb aÚb e eÚdÚeg eÚÚúyjÚÚb Ú´h úezı ahúee úxı zÚsdeúÚxı úezı ahúee úxı zugebhaxı z.

T´ÚÚbhjgúd: B eÚdÚeg Ujc¥eÚÚb eyúÚ úze eÚdeÚúbh úiúÚeÚ. Ōeúb eÚÚúeÚdeÚúúb ´jUbeÚúbh ´jhbadeÚ úÚdeÚúbh aÚb ´jUbeÚúbh úÚeÚ´jUbeÚúbh aÚb úe Ú´ÚzUjc¥eÚÚb eÚ úiebeaÚ, úeyúÚzgaÚbaÚzhzÚg.

Ëúd ´ejúÚÚ údg eÚdeÚúbe´edúdg e eÚdÚeg e´ejúÚzÚ úgúaeaÚgúÚzÚ bjúb úd eÚdeÚúbe ´aÚgj¥úeg ´jebaeeÚúeg e ´ejúÚzÚ úgúaeaÚgúÚzÚ úíÚjehúÚb úeggg aÚzhzÚg ´eg yeÚdÚ úÚ aÝ´esa ¥aae ´jhbadeÚ. ȳÚÚz hexg ÚzÚ¥eÚÚ´ úÚb úe ´jhbadeÚ aÚb úe aÚÚzeúÚb, úhúÚ dÚxjeiÚ hÚb «yeÚb Úzybb» Ú´ú úÚe. ¢Ú eÚedahÚjÚ Ú´ú úÚÚ´ e´ejeiz zÚ bedde úeez úÚdz aÚÚzhdúd Úzhg Ú´hÚzÚeg aÚb úxg, ´sa ÚiúaeaÚeg ´jebaeÚúeg. ¢ ´ÚjÚ¥zx sÚyÚ Ú´eÚÚbÚz úe aÚÚbhjgúe úeÚgúÚÚzÚúhúÚdg eÚdeÚúbe´edúdg. dbÚúeÚÚb údz ¥´eyd úeg Bruner ebÚ Ú´ úgeaeedÚ Ú´ úgeÚdÚz úÚdg ÚÚdúdg, d e´edÚ Ú´ eúÚÚb xg Úzeg: B´esaÚe´eÚÚdyeÚ e´ejúÚzÚ úsÚeÚdÚz Ú´sÚgeı g, úÚ aÝdÚ´ÚÚúq úÚ e´esaÚe´eÚÚ úÚÝÚsa ÚzÝ´úgzeg úeg, eÚ aÚÚÝbaedad´jeúÚjeeb. z dÚ ÚÝúeÚsÚ´jeúÚjeeb e´ejúÚzÚ ebÚúeÚjeÚzÚúeejÝúd úzeÚjsae ÚzÝ´úgzd úeg dyeÚÚeg. ¢ ´ÚjegúdÚúd esÚg eÚdeÚúbeg yzzesÚg úeggg eÚdÚúyg úÚz dÚe´ejeiúÚzÚebÚúeÚ´sa Úbaaejsae ÚjÝ´e Ú´ Úd zúeÚjsae ÚzÝ´úgzae úd. (ÚzÚúyjÚÚbúd z ÚÚdÚbeg, 2005, ú.12)

¢ ´jÝúdÚúd aÚb d ÚúÚgúd úxı zÚjzdÚbı z ÚjsdÚı z ÚÝjedzÚiezÚÚb ÚjaÚÚÝ sÚzeÚdÚbÝ eÚúsÚúdÚbÝ eezÚÝbÚ (´.g. aedúd aÚÚÝ eaeeg úg ÚjsdÚbeg úgdÚúÚg) úe ´aÚusa esÚg ejsahzÚÚg eÚdeÚúbe´edúdg, Úbaa¥e ´eaaÚ aÚúsÚúehg aÚb d úsÚgúd Ú´ ÚzÚeiz yzÚ dÚxjdÚbh ´aÚusa úiesúxze eÚ ú aÚÚÚbhjgúd eÚdeÚúbe´edúd. z ÚÚ´ ayg´jÝzÚgaÚb úsÚúaÚúg, h´xgd Úsejúbeaeúbe sÚhúÚÚ, eseÚdÚyg úÚÝúÝzezÚÚb úÚz yzzesÚ úÚg Ú´ hÚúÚadg, aÚbegjoxg úÚz ÚzÚbaÚhúÚÚÝ úg. z ÚdÚzeezz zÚjxÚÝzÚaÚb zÚ Ú´ ÚzÚeiz Ú´ ¥zÚúd úe «esÚúaÚb´ıg». Bgúsúúbe¥ ejúÝ¥eÚÚb zÚ Úsúdesz¥eÚÚb hÚb «e aÚzhzÚg úxı z ´jeúaesxz» ´jeei´ÚÚb Ú´ h úz Úsyaúd úg Úsejsúbeg sÚhúÚÚg Ú´ h úeggg dÚbeei g úeggg ÚjzdÚbeei g ÚjsdÚeei g. ¢ ÚzÚaeahzdúd úg Úsejsúbeg sÚhúÚÚg úeggg dÚbeei g ÚjsdÚeei g´ejúÚzÚebÚúeÚ eyúÚ Ú´ h ´jUbeÚúbe¥ eezÚÝbÚ, esÚ´ÚjÝúÚbeÚ eÚ úz ÚxÚjsae úg Ujedzúd.

ȳ ŰŰ3 ħɛɤɡ ŬȣŭȣæɔɕɨɛŮŰ3 Ůɜɛ Ůɟȣůŭȣæɐ ȣŭȣħŰ3ŰŰ ȣŬȣ ůŭȣggɡ Ŭɟ3ɖŭȣæɕɨɡ Ŭɟȣɖɛɕɨɡ ŰŰŮɕ´ŭȣæŶɛɕ3ŭɟȣæŬŭŭŬ3 ɛ´ɕɟɕɨ3 3Ŭɕɟɖůȣɛɕ´ɕȣ3ɖɕɨ3.

¢ɕ Ůɛ´æɕgŭȣůɛɤȣɕ ´æŬůȣæ Ŭħ ŭɕ3 Treffers (1987), ħ´ɤɡ Ŭ3Ŭŭɤɟ ŰŰŬȣ Ŭħ ŰŰ3 ȥ ŰŰŰŬæg (2005, ůŬȣ.35) Ŭɕ ŰŬȣůŭɕ ȣŰŰɤæɖæɕ ɛŬɖɛŬŭȣħ´ŮɟȣŶææɕ3:

- ŭȣŬ ŰŰ ɕɟɛůɖ ŰŰɡɡ ȣ3ɕȣŬɡ ŰɤȣɖŰŭȣ3 ȣŬȣ Ŭɟ3ɖŭȣ3 ůŰŰ3 Ůæɡůɖ´ɟɕȣæɖɛŶŰɤ3
- ŭȣŬŰŰ3 Ŭȣŭȣæħɔɖůɖ ŰɤȣɟɕůŬ3Ŭŭȣæůɛȣɤ3 Ŭɟȣɖɛ3 (directed numbers)
- ŭȣŬŰŰ3 Ůȣæŭŭůɖ ŭȣɡ Ŷ3ɕȣŬȣŶŰɤ Ŭħ ŭȣ 0, ɨ ůŰŮ3Ŭůɡɛ´Ůɟæ¥ŶbŮȣŬȣ ŭȣggɡ Ŭɟ3ɖŭȣæɕɨɡ
- ŭȣŬŰŰ3 Ŷŭ´ɖ´ɟħůɖŮůɖȣŬȣŬŭŬɟŮůɖ ŰɤȣɖŰŭȣ3 ȣŬȣŬɟ3ɖŭȣ3
- ŭȣŬŰŰ3 ȣŬŰŬ3ħɖůɖ ŰŰɡɡȣ3ɕȣŬɡ ŰɤȣŬ3ŰŰɖŰŰɤ3 Ŭɟȣɖɛ3[6]

1.1.2 Ŭ3Ŭ´ŬɟŶŭŮȣæɛŬŮŰŭŬɟɛɕɔæɡɡ ŰɤȣŬɟɡŰŰ3 ŰŰɡɡ Λȥ ÁŮŰŰ ŭȣŭŬůȣŬæɖŬ ȣŬȣɛŶɖɖůɖ ŰɤȣŬɟ3ɖŭȣ3 Ŭɟȣɖɛ3

ÆŰŰ ŭȣ´æɤɛŬŭȣæ Ůɟɔŭůɖ Ŭ ŰŰɡɡȥ ŬŰŰŬæg (2005) ɛŮɖȣɛŬ «ɕpȣŭŬůȣŬæɖŬ ŰɤȣɖŰŭȣ3 ȣŬȣ Ŭɟ3ɖŭȣ3 Ŭɟȣɖɛ3 ůŰȣɡ Ŭɟɕȣɡ ŰŰɡɡ ΛŮŬæȣůŭȣæɡ ȥ ŬɖɛŬŭȣæɡ Áæ´ŬŭŭŮůůɖɡ», Ŭ3Ŭæɨɖɖ ȣŬ3 ɕ9 Ŭɟɕȣɡ ŰŰɡɡ Λȥ Á ȣŬȣ ŭȣŬŰ´ɨ ɖɖ ȣŬ3 ɕ9 ŭɨɕ ɓŮůȣæȣɡ´ɖɔȣɡ ɔ9Ŭ ŭȣ3 ůɕŮŭȣŬůȣħ ŰŰɡɡ ŭȣŭŬůȣŬæɖŬɡ, ´ɕg Ŭ3ŰŰɤɟ ŬɛŮ ɟ 3 ȣŬȣɖ´ŬɟɕɨůŬ ŮɟɔŬůɖŬ gȣɖŮŰŰůŰ ŭŰȣæ ɖŮŰɤɟɖŰŭȣħ´æŬůȣæ ɛŮŰŰ3 ŮɟɔŬůɖŬ ŰŰɡɡȥ ŬŰŰŬæg, ŭɕŮȣ ȣŭȣŬŰŰɟɖ ɤɛŭŬůɖ ůŰŰ ɕɟɛůɖ ŰŰɡɡ ȣůŰɕɟɖŬɡ ůŰŰ ŭȣŭŬůȣŬæɖŬ ŰɤȣŬɟ3ɖŭȣ3 Ŭɟȣɖɛ3. ÆŰŰ3 ŮɟɔŬůɖŬ ŰŰɡɡȥ ŬŰŰŬæg ´ɟɕŰŰæŮŰŰŬ ɖ ɕɟɛůɖ Ůɕ´ŭȣæ3 ɛɕ3ŭɟȣæɤ3 ɔ9Ŭ ŰŰ ŭȣŭŬůȣŬæɖŬ ŰɤȣŬɟ3ɖŭȣ3 Ŭɟȣɖɛ3 ȣŬȣŰɤ3 ´ɟŶ3ůɤ3 ɛŮŬɡŰɕ´ɡ, Ŭæ¥ŭŮ3 ɔæŮŰŰŬɡɕɟɛůɖ ŰŰɡɡ ȣůŰɕɟɖŬɡ ŰɤȣŬɟ3ɖŭȣ3 Ŭɟȣɖɛ3 ɔ9Ŭ ŰŰ ŭȣŭŬůȣŬæɖŬ ŰŰɡɡ.

Á´ůůɖɡ, ůŰŰ3 ůŭ9Ŭ Ůɟɔŭůɖ Ŭ ŭȣŭŬůȣŬæŮŰŬ ȣɟȣŭŬůȣæ ůŰŰ Ůɕ´ŭȣæ¥ ɛɕ3ŭɟȣæŬ´ɕg ŭɖɛȣæɡɟɔɕɨ3 ɣŮůɡŭæ ůɡȣæɔɕȣůŭŬůȣæ ůŰŰɡɡ ɛŮɖɖŰɟɡ. ŭȣŬ´ŬɟŶŭŮȣæɛŬ, ŰŰ ɛɕ3ŭɟȣæɕ «ŰŰɡɡ ɛŶɔȣůŭŬɡ», ´ɕg ɕɟɖůȣæɕ´ɕȣæɨůŬ3 ůŰŰ3 ÆȣæŬ3ŭɖŬ, ůɨɛűɤ3ŬɛŮŰŰ ɕ´ɕæ ɖ ɖŮɟɛɕæɟŭůɖŬŶææŬɛŮ

[6] Ŭ3Ŭɛɕ3ŭɟȣæ ŭȣŭŬůȣŬæɖŬɡ ŰɤȣɖŰŭȣ3 ŭɨɛűɤ3ŬɛŮŰŰɡ ŬɟɕȣɡŰŰ3 ŰŰɡɡ Λȥ Á´ɕg ȣɕŮȣ´ɟɕŰŰæŮȣɕ Freudenthal (1983) ´ŬɟɕgůȣŶɛŮŰŬůŰŰ §4.2.

ɦÚÚɜ dÙÚɦɵɛɑï ɵÚgÚɛɑɵɨɓɛɵɵ ´Úɔɤɛɣɜɛɵï ÚɟɜdÚɦɵɛɑɵɨɓɛɵɣɓɔÚɜɜÚɜ ɵ ɣɛ´ÚɜɜÚɜ ÚʼɦÚɛ ɵÚɛŸɜɵ «ÚɦgɛŸɔɵůůÚgʼ». qůÚɦůɛ, ůÚɜgʼ ůɟÚůÚɦɟɵɦÚɦÚÚgʼ ɔɵÚ ÚɦʼůɜůÚůɵÚɵdÚ Úɤɜ ÚɟɜdÚɦɵɜ ɜ Úɟɵdɛɜ ɜ ůÚůɜ ɔɛɜÚÚÚɵ ɛɟɵůdʼ ÚɦgʼůÚɛɟdÚgʼ Úɛggʼɦ´ɤgʼ ÚɛɜɛɜÚɵ dʼ Λʼ Ά. ¢ ɛɟɵůdʼ ÚɦgʼůÚɛɟdÚgʼ ɔɵÚ ɜÚ ÚɜÚʼ Úɦɜɛggɜ ɛɵ ɛÚɦdʼÚɟgʼ ÚɦɜɟɜɜɜɛɵÚ Úɤɜ dÚÚɦɵɜ ɵÚɵ ÚɟɜdÚɦɵɜ ɜ Úɟɵdɛɜ ɜ, ɔɵÚ ɜÚ ɛ´ɛɟɛɨɜ ɜÚ ÚɟɛdɜÚɨɛggɜ ÚɛggʼÚɟɜdÚɦɵɛɨgʼ ɵÚɵ ɔɵÚ ɜÚ ´ɟɛůdɟɤÚɛggɜ ŸÚɦ´ÚdÚÚɦɵɛɨgʼ ɵÚɵÚɟɜdÚɦɵɛɨgʼÚɟɵdɛɛɨgʼÚÚíɛɟŸɵgɟɤgʼůÚɔÚʼÚɛɛɟɟÚÚgʼ ´ɛg ´ɟɛɟɟɟɛɛɜÚÚɵ ÚʼɦÚɟɛÚɜɛÚůɔɵdɜɵɵŸ ůÚɛɜɛÚůÚ. ɟɟdůɜɛɛ´ɛɵůÚÚɵ Úɛ ɔÚɤɛÚÚɟɵɦ ɛɛÚÚɓɛ ɛÚdÚɜɜůɟɛgʼ, ɛÚɟÚɵÚůɟɵůÚɦɵɦ ůɵÚɵɦůɛdůdgʼ Úɤɜ ÚɔɔÚůɤɜ ɵÚÚŸ Úɦʼ ůÚɤɛÚÚɟɵɵɛ Úɛɛɛɵ (1100´.ɟ . ï 700´.ɟ .). (ʒ ÚÚɦÚůɛg 2004, ů.94) ¢ÚɛɛɜÚÚɟɵɵÚ´ɛg ɛɟdůɜɛɛ´ɛɵůůɔɵÚ Úɦgʼ´ɟŸɜůgʼɛÚÚÚɜɨ ɟdÚÚɜ ÚɟɜdÚɦɵɜ ůůɛÚɵ ÚɛÚ´ÚɦɵŸ, ɦ´ɤgʼ´ɦɜÚɛɵ ůÚ´ÚɜɛɜůɵÚ, ɵɛdůdʼ Úɛg ÚůÚɜůɟɟ, dÚɟɛɵɟÚůdůgʼɵÚɵdÚÚɦɵɟgʼï ÚɟɜdÚɦɵɟgʼɵŸɟÚÚůgʼ. ʒ ɛɜÚɟɵÚ´ɛg ůÚůɜ ´ÚɟɵɟŸÚíɛɛɜ ÚʼɦÚɜ ůÚɛɟɵɟ ůɵɟɵɵɛdʼ Úɤɜ ÚɟɜdÚɦɵɜ ÚɟɜdÚɦɵɜ.

ÆÚɛ Úɟɵɵgʼ ÚʼɦgʼÚɟɔÚůdÚgʼ Úʼɦgʼ ʒ ÚÚɦÚůɛg ÚɛɜɛůÚÚɵ ɦÚɵ dʼ Λʼ Ά ɵÚɵ dʼ ÚůɵdɜɵɵɛɛÚdɛÚÚɦɵɛ ÚůɵÚ´ÚůÚůůůdʼ ɟɟɛɛɜɨɦ ůÚɦɛɛ Úʼɦʼůɛůdʼ ɟɟɛɛ ůÚůɜ ɛůÚɛɟdÚgʼůÚʼɦʼůůÚůɵÚɵdÚ Úɤɜ ʒ ÚdÚɛÚÚɦɵɜ, ɛɛɵɵɜɨɦÚɵ ůÚÚÚ ÚůɵdɜɵɵŸ ůɛɛɵɵŸ ɓɦɵɵdÚ ʒ ÚdÚɛÚÚɦɵɜ, ɛ ´ÚɟÚ´ŸɜɤŸ ůÚɦɛɛgʼ ´ÚɟɵɵɟɛÚÚÚɵ ůÚÚÚ ůÚɛɟɵɵŸ ůdɛÚůɜ ɛÚÚÚÚ, ůÚůÚɜÚíɛɟɟgʼ ɵÚɵ ɓɵɵɔɟÚíɵŸ ůÚɛɵɛÚůÚ. ɛůÚɜ ɟdůɜɛɛ´ɛɵůÚÚɵ dʼ ůÚɛɟdÚʼÚɤɜ ʒ ÚdÚɛÚÚɦɵɜ ÚůɵÚÚɟɔŸ ůÚʼɦʼůÚɵÚɦɵɛ ´ɟŸɜdʼ.

1.2 ¢ɟɟɦ´ɛɵÚɜɵɛ´ɛɛdůdgʼÚʼɦgʼůÚɛɟdÚgʼÚɤɜ ʒ ÚdÚɛÚÚɦɵɜ ůÚʼɦʼůůÚůɵÚɵdÚ ÚɛggʼÚ

ɟ´ɦÚʼɦɜ ÚɜÚůɵɦ´důdʼÚɤɜ ÚɜÚɵgÚɦɵɜ ´ɟɛɔɟÚɛɛŸÚɤɜ, ÚɤɜůɵÚɦɵɜ ɓɦɵɵɤɜ, ÚɤɜůɵÚɦɵɜ ɛůdɔɵɜ ůɵÚůɵÚɵdÚgʼ, ÚɵɵŸɵÚɵʼɦ ÚůÚgɜdÚɦɵɛ ɓɦɵɵɵɔɟÚídÚůɵÚʼůůÚɜ ůɛůÚɜ ɜɛgɛÚɦÚɦɵʼdʼ ÚɵɵɛÚ´ɛdůdʼ ÚʼɦgʼůÚɛɟdÚgʼÚɤɜ ʒ ÚdÚɛÚÚɦɵɜ ůÚʼɦʼůůÚůɵÚɵdÚ ÚɛggʼɛÚɟůɜÚɜÚɔɟÚíɛɛ´ɛɟůÚɜÚɔɛɜÚɵɛÚ ÚɛggʼÚɟÚɵÚŸÚɤ Úɟɦʼɛggʼ:

1. ÕɜÚÚɜdʼ ůɛůɛɟɵɜ ůdɛÚůɤɛŸÚɤɜ ůÚÚÚ ůɵÚůɵÚɦɵŸ ɓɦɵɵdÚ ɵÚɵ ůgɛɛÚʼÚůdʼ ÚɛgʼÚɟůÚgɛɛɟɜɛgʼ ÚɛggʼůÚʼÚʼɦʼdʼ. (ɟ´Ÿɟgɛgɜ, ÚɵɵŸ ůÚɜ ůɛɜÚɵ ´ɵɛɟdʼ ɛ ůÚɜ ɟdůɜɛɛ´ɛɵɨɜÚÚɵ)

2. ÆɟɔŸɜɤůdʼ ůɟÚůÚʼɦɟɵɛÚʼÚɤɜ ɛůÚůɵ´ÚɵůÚgÚɦɵɦ gɵɵɦ´ɛg ɟgůɵÚɵÚɜÚɦɵdʼdÚůÚʼɦʼÚʼɦɜ ůÚɛɟɵɟdÚʼÚɤɜ ʒ ÚdÚɛÚÚɦɵɜ. (ůɛɛÚÚÚɵů´Ÿɜɵʼ)

3. [illegible] (Ε[illegible])

4. [illegible] (Ε[illegible])

[illegible]

1.2.1 [illegible]

[illegible]

[illegible] (Tzanakis & Arcavi et al, 2000)

[7] [illegible]

´ŬŲŲŲ3dyůŲŲ3 Ŭ´ŋ Ŭ3 Viete əŬə Ŭ3 ŲŲve>důd ə>Ŭ Ŭ3 əŬ3ŋ3Ŭ Ŭ3 ´Ų3ůve3 ůŬ3 ´3əəŬ´əŬůəŬůe3ŋ ŭi3 ŲŲ3dŬə3 ŲŲ3dε3 Ŭ´ŋ Ŭ3 Euler[8]. (Ū3ε3ŭdd 2009) Ą´ŲŲdve>ůŲŲ, ´3g ´3ə>3ə>ŬŬdd>dŬyd əŬə ůGŬəŬůŬyd ŬŲŬə3gŬə3 ´Ų3>ŲŲ3ε3YŬ3 ŭŲŲ 3>3ŲŲ3ə3. ŲŲdůve3´3ŲŲ´ŲŲŲŲ´ůŲ´d>yd ůŬd ŭəŭŬůəŬə>dŬ3ε3Ŭ´Ų3ůŭyŲ3ε3ŲŲ ůŬ3gd 3ε3Ŭdd3yd 3ε3Ŭ´ə>3>ə>yd ŲŲdd>ůŲŲ, G3ŲŲd 3Ŭ ə3ŬŬůəŲŲY3ε3ŲŲ ŲŲŲ3ə3Ŭ ve ´ŲŲY3>3ŲŲ´ůŬ3ŲŲ´ə>Ŭ3 Ŭ3ŲŲ3ə>3ůŬ3ŲŲ´ŲŲ´3g g´YŲ3ε3ŲŲ3 ůŬ3 Y3>ŲŲŲ.

¢ ŬŲY3ůd Ŭ3 ´ŲŲŲŲŲ´3 ´d>ŲŲ3 ve Ŭ3ŋ3ε3Ŭ ə>Ŭ3 d ŲŲ3ůd Ŭ3gd ə>Ŭ Ŭ3 ŭŭŭůəŬ3>dŬ 3ə>Ŭ3 3ε3Ŭdd3ε3Ŭ3ve3d yŲ3ŲŲ3ə>Ŭ3 ŲŲ3ŲŲ 3ε3Ŭ ŭi3ůə3>d ŭŲŲůŬ3ŲŲ3ŋŲŲ3Ŭ. ZY´3ŲŲ3 ŭŲŲyd ə3Ŭdŭd>ŲŲŲ3ə>Ŭ´ŋ Ŭ3 ŭYůə>Ŭ3>, Ŭ3>Y3ə>Ŭ3ůŲŲŭ3ŲŲY3Ŭ´ŋ Ŭ3d3ŲŲ3ůŲŲ3, Ŭ3d3ůə3yŲŲ3d 3ə>Ŭ3d3ŲŲ3ŲŲůŲŲ3ŲŲ3 ůŲŲ3 3ε3Ŭdd3[9]. Ų gŲŲŋ ´3g ŲŲ3ŭŲ3 ə3ŲŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3Ŭ3ŭ3ŲŲŲ´Ų´d3i3 3ŲŲ3 ə3ŲŲY3>3>dŲ3 ŲŲŲŲ3ůd ´3g dŬ 3ŭd>ve3ŲŲ3 Ŭ3gd ε3Ŭdd3yd ůŬ3 ŲŲd3i3ε3ŲŲ3 ůŬ3 Ŭ3ŲŲ3 ůŲŲ3ŲŲ3 ´3g dŬ 3ŭŲŲ3ůəŬ3>dŬd ε3yůŬ Ŭ´ŋ Ŭ3 ŲŲ3 ůŬ3ŲŲ3ve ´d>ve. ĘgG3Y´ ´Ų3ə3i´Ŭ3g3 Ŭ3Ŭ3´ŲŲdyůŲŲ3 ůŲ>3Ŭ3ůŲŲ3ŋ Ŭ´d ŲŲ3. ĘŬŲ3 ŭ3YŲ3ə>ŬŲ3 ŲŲ3d ůŲŲ3ůd3d Ŭ3g ε3Ŭdve3ŲŲ3g, ůŬ3 3´3ŲŲ3 ůŲ3ε3ŲŲyG3ŲŲ3 Ŭ3ŲŲ>Y´3ŲŲ3 ε3Ŭdd3yd, 3ŲŲ3 ŭ3ŭŭŭ3ŋ3ε3Ŭ3ŲŲ3 ŭ3ŲŲ´ı 3ŲŲ3 Ŭ3d ŭ3ŲŲyd Ŭ3gd Ŭ3ε3d3ŲŲ3d ůŬ3ε3Ŭdd3ε3ŲŲ3ŲŲyd y3>3ŲŲ3d ə>Ŭ3 Ŭ3d ŭ3ŲŲyd Ŭ3gd ə>ůŲŲ3d ůGŲŲ3ŲŲY3ε3Ŭ Ŭ3 ŲŲ3ə>ůŲŲ3ŋŲŲ3Ŭ ə>Ŭ3 Ŭ3 ůŲ3YŲŲ3ŲŲ3ε3ŲŲ3 ε3Ŭŋ3ŭ3ŲŲ3 ŲŲ3 ůŲŲ3ε3ŲŲ3d, ůŬ3 3´3ŲŲ3 ´ůŲ´3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3 ůŲŲ3 ´3g dŬ 3´3ůŲŲ3ŋŲŲ3 ε3Ŭ3 Ŭ´ŋ Ŭ3d3ŲŲ3ůd3d ůŲŲ3ŲŲ3 ´3g g´3ůŲŲ3ŋŲŲ3 ůŲŲ3 Y3>ŲŲŲ. ZŲŲ3ŲŲ´ŋ Ŭ3 ŲŲ3ŋŲŲ3 ´3g dŬ 3ŭŲŲ3ůəŬ3>dŬ3ε3ŲŲ3 ůŲŲ3 ŲŲY3>d. Z ŲŲ3ŲŲŋ Ŭ3 ŲŲŋ´3, 3ŲŲ3 ŭ3ŭŭŭ3ŋ3ε3Ŭ3ŲŲ3 dŬ 3ŲŲd3Ŭ3´3ŲŲd3i3 3ə>Ŭ3 dŬ´ŋ3ůŲŲ´ŲŲdve3ůŲŲ3 3ŲŲŋ3ŲŲ3 ůŲŲ3ŋŲŲ3Y´3ə>Ŭ3>3ůŲŲ3ŋY´3ŲŲ3ŲŲ3ε3ŲŲŲŲ g´yŲ ŲŲ3ŲŲ3ε3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3ve ŲŲ3ŲŲ3ε3ŲŲ3ŋŲŲ3 ´3g dŬ g´3ůŲŲ3ŋŲŲ3, ŲŲŲ3´3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3Y´ dŬ ŲŲ3ŭ3ŲŲ3 ŲŲŲŲve ve ŲŲŲŲ3ve>y3Ŭ. qŲŲŋŲŲ3, ə3ŲŲŲ´ŲŲ3Y3ŲŲ3 3ŲŲŋ3ŲŲ3, ŲŲ´3ŲŲŋŲŲ3ŲŲ3 ə3ŲŲ3 ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3 ŲŲ´3 ŲŲ3ŲŲ3ε3ŲŲY3 ůŲ3ŲŲ3 ŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3ε3ŲŲŲŲ3 ŲŲ´3 Y3>>3 ŭ3ŭŭŭ3ŋ3ε3ŲŲ3 ´3g g´3ůŲŲ3ŋŲŲ3 ə3Y´3ŲŲ3Y3>>d ε3ŲŲ3ŋŲŲve y3>3ŲŲ3ŲŲve ε3ŲŲŲŲŲŲ3ŲŲ3ŲŲ3 ŲŲ3ŲŲŲve, ŲŲŲŲε3ŲŲŲŲ3 Ŭ3Y3>>ůd ŲŲ´3 ´ŲŲ3 ŲŲ3. (Jahnke et al, 2000)

---

[8] ȳ´ŲŲdŬ´ŲŲ3ůə>Y3ůŲŲε3ŲŲŲŲ3 5ᵉ ə3ŲŲY3>Ŭ3

[9] ȳ´ŲŲůŲ3yŲd ə>Ŭ3ε3ŲŲŲ3 ŲŲ´3ŲŲve yŲŲ3ŲŲ3Ŭ3ŲŲŲŲ´ŲŲ3ŲŲ´ůŲŲŲŲ3ŲŲ´3ŲŲve3ŲŲ´3g dŬ´ŲŲ3ůə>Ŭ3ŲŲŲůŲŲ3ŲŲ3 6ᵉ ə3ŲŲY3>Ŭ3.

1.2.2 [illegible]

[illegible]

[illegible][10]. [illegible] ([illegible] 1967 – 1973, [illegible]) [illegible]

[illegible] Tzanakis & Arcavi et al (2000), Siu (2006) [illegible] (2009) [illegible]:

1. [illegible]
2. [illegible]

[illegible]

[10] [illegible] «[illegible]».

g´ ɦdŪůd ɟɡgŰɞŪg. Ǽ´ ůdg, d ŪɜŸɔɜɤůd ´ɟɤŰɦŰg´ɤɜ əŪůɛyɜɤɜ ŪɞŪɔ ŪɟəŪŰŸüɨůəɡəd əŪɔ ɡɟŪůŸɛŪŰŪɔ´ɟɡůŪůɔŰůɔɦ ůɡŪüɔŪůɛɦ əŪɔ ůgɜŪůɛə yəŪůɔɡɞ ůŪɦəŪ ŰŪ ůŰŸüɔŸ Ůdg. (Siu 2006, ɛ ɛŪɜŸədg 2009). ǼɜůŰŸůŪůg g´ Ÿɟɡɞgɜ, ŪɔɦɛŪ, ůŰɞ ɦŰůɔ d Ūɜɞɞ´ɡdůd Ůdg ůŰɞɟdŪg ɛ´ɡɟŪůɜŪəŪəəůɟɔɛůŪůɔ´ɡəůŰůůɔɦ ůɤɦɞɜůɛɦ əŪɔ´Ūɟɤɡdɛyɜɡ Ůdɜəəůɛɦ, ůŰɞggɛŪdd Ůyg, ɡəɡ´ɡɞəəyɡɞgɜ Ū´ɡů´ŪůɛŪŰůəɛ Ūůdůd Ůɞg ůŰɞɟəɡi ɡɟɦɜɡg.

důŰɦůɡ, g´ Ÿɟɡɞgɜ əŪɔ ŪůŰŸůŪůg´ɟŪůŰůəɡi ɡŪɟŪůŰɟŪ, ɦ´ɤg Ůdg yəəŪůɤdg Ůɞg ŪəŪdyůəɞg ŪəŪŪůŰůəɡi ɡɟɦɜɡg. ǼɞŪůŪ ŪɟŪůdůdŪɞg ɡ əŪŰŸəədəəg ůɡŪüəŪůɛɦg Ůɤɜ ŪəŪŪůŰůəi ɜ ŪɜɡŪůɛŪɤɜ ůŰŪz ŪůdɛŪŰůəŸ, ɡəɡ´ ɡdůg ŪůɞŪůŰüəůŰɦ ɜŪŪəŪŪɡdɡi ɜ ɦŸůŪůŰůdg ůŰɞɟəəg´ɟɡůyɔɔůdg. Ǽ´ ůdg, ŪůɞŪůŪ ŪɟŪůdůdŪůd əŪůɛdŪ ŪɜŸəɡɔd´ɟɡůŪɟɛɡɔəɛ Ůɤɜ ŪɜŪůɞgŰůəi ɜ´ɟɡɔɟŪɛɛŸŰɤɜ. (ŪɤɛŪŪůdg & ɛ ɛŪɜŸədg 2006).

Ǽ´ɔɟɡůdyŰɤg, ŪɟəŪŰŸ ŪɜɡŪůɟɛɛŪŰŪ əŪŰŸ Ůdg ɡɟəůdg Ůdg ůŰɞɟdŪg Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ ůŰd ůəŪŪůəŪədŪ ŪɞggŪ Ūüɡɟɡi ɜ ŪɞggŪ ůüəggŪ ŪɞggŪ əŪůdɔdŰyg Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ. ɃəəŪůdɔdŰyg ůŪɜ yɡɞgɜ əŪŰŸəədəd Ůəɛɦɟűɤůd, ůŪɜ ŪɞŪəůŰɞɟəəɡ ůŪɜ ŪɞggŪɟyůŪɜd ůŰɞɟdŪ, ůŪɜ g´ Ÿɟɡůɜ əŪŰŸəədəɡ ůəůŪůŰůəɦ gəəəɦ. ɟ ɜ əŪɔůŪ´ɡəəŸ Ū´ɦ ŰŪ´ŪɟŪ´Ÿɜɤ Ůəɛůɟɛɛ ŪŰŪ dŪ ůgɛűɤɜɡi ůŪɛŪ ŪɟɡəŸ, ɛŪəɔɡ´ŪɟůůɦŰŪɟɡ ŪɜůəŪüyɟɡɜ əŪɔ´ŪɟůůɦŰŪɟd yɟŪůɜŪ dŪ ɦɟůəŪɛŪəŪŰŸəədəɡ ɦɡdddŪůɔɦ gəəɔɦ ůŪ ůəŸŰɡɟŪůg ɛɡɟűyg, ɦ´ɤg ɦɔɦəəŪ ůŰɞɟdŪg Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ ɛŪ ůəůŰɞɟɔɦ ´ɟɡůŪɜŪŰůəɛɦ, ´ɟɤŰɦŰg´Ůg ´dɔyg, ŪɟɔŪůdůg ɛŪ əŪŰɞɛŪɟɛ ´ŪɟəɔɟŪüɛ ůgɔəŪɔɟɛɛyɜɤɜ ´ŪɟŪüŪůɔɛŸŰɤɜ ŪɜůɤɛŸŰɤůdg Ůdg ůŰɞɟdŪg Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ ůŰd ɛŪůdɛŪŰůəɛ Ůɔ´ŪůüŪůůdd ə.Ū., Ůɞ ɡ´ɡɞɛ ɛ´ɡɟɡi ɜ ɡəŪɔ´ŪůüŪůŪůɔɡɞɜŪɡɟdůɛɛɡ´ɡəɛůɞgɜ ůŰd ůəůŪůŪůɔɛ ´ɟŸɜd.

důŰɦůɡ, Ůɞ ŪɟɟŪd ŮdɛŪï yɜůŰŪůd əŪŰŸ Ůdg ůəůŪůŪůɔɛg Ūɜɛɡ´ɡɞdůdg Ůdg ůŰɞɟdŪg Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ, ŪɜŪ´ɟŸɔɛŪŰůɔ ɦŪůɔŪůɔɜ ŪɜŪ´ɟɦɦɔədɛŪ Ůdg ŪůɛŸdůdg Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ´ŪɟŪɛyɜŪůɔ ɛŪŰŪůɔŪůgŰŪdŪ ɡɟɦɜəŪɔɡŰŰŪɔůɡɦŪɟɛ´ɟɡů´ŸdŪůɔŪ´ɟɡɡg Ůdɜ əŪŰŪdɡɜůd ŪɡŪůɛ, əŪůɩg´ɟŪɔɛŪŰɞ´ɡɡi ɜŰŰɔ ŪůɛŪ´ůɟəəyg yɟŪůɜŪůg əŪɔ ůəůŪůəŪɔůg´ɟɡəŪůɛyɜɡg ɜŪəŪŰŰɛŪŰɟdůůd´ɟdŪɔɛ Ū´ɡŰŰɔůůɛŪŰůəɦŰůŰŰ Ůdg ŪůɛŸdůdg Ůdg ůŰɞɟdŪg ůŰdg ůəůŪůŪůɔɛ ´ɟŸɜd. důŰɦůɡ, g´ Ÿɟɡůɔ ´ɡəi g ůɟɦɛɡg ɔəŪ ɜŪ ůəŪɜgdŪůɟ´ɟɡəŪůɛyɜɡg ɜŪ ŰŰɔɛdɟəɤdŪůɟ Ů´ŪɟəɩŪg d Ū´ɡŰŰɔůůɛŪŰůəɦŰůŰŰ Ůdg ůŰɞɟdŪg ůəŸůŰŰůdg ůŰdɛŪŰůəɛ Ůɔ´ŪůüŪůůdd. (ɛ ɛŪɜŸədg, 2009)

1.2.3 Ǽ´ ɜɡŪůɟɛɛŪŰŪg´ yɟ Ůdg Ūɜɛɡ´ɡɞdůdg Ůdg ůŰɞɟdŪg

ŌɡŪůɔg´ɡůŰdɟɜɡdŪůŪ´ɦ ůdɛŪɜŪůəɡi g ŪůdɛŪŰůəɡi g əŪɔ´ŪüŪɔɤɔɡi g ɦŰůɔd ůŰɞɟdŪ Ůɤɜ z ŪůdɛŪŰůəi ɜ Ū´ɡŰŰɔůůɛ ɛdŪ´əɡi ůɜŪ´dɔɛ´ədɟɡűɡɟɜi ɜ, Ůɟɤ Ůdɛ´ŸŰɤɜ,

´ţєбəďεŬŰůει ɜ əŬə´ţєбəďεŸŰɤ ɜ, ´єg ε´єţєі ɜ ɜŬŬəєɜ´єəďďєі ɜ Ŭ ħ Ůє ɜ ŭŸůəŬəє əŬə ɜŬ ůgεбŸəəєg ɜ ůŰď əŬŰŬɜħďůď Ůɤ ɜ εŬďďεŬŰəι ɜ Ůɜ ɜєəι ɜ Ŭ ħ Ůє ɜ εŬďďŰє. ţ ţ ďůεє´єəι ɜŰŬg Ŭůəεůůg ε ŭţŬůŰďţєħŰďŰŬg Ůε´ ɜŬħεůɜůg Ŭ ħ Ůď ɜ ůŰєţďŬ Ůɤ ɜ ɤ ŬďďεŬŰəι ɜ ε´єţєі εŬ ɜŬ ´ŬţŬəєεεůєgεŬ Ůє ŮɜŭєŭŰїyţє ɜ Ůɤ ɜ εŬďďŰї ɜ əŬə ɜŬ Ŭg ɜεůєgεŬ Ůď ɜ Ůď ůєůε Ůєgg, Ŭəə Ÿ əŬə Ůď ůgεεŬŰєєε Ůєgg ůŰє εŸďďεŬ. ɤ Ů Ůď бєεďŬəŬ Ůŷ Ůєəɤ ɜ Ŭůəεůůɤ ɜ ε ŭţŬůŰďţєε Ůε Ůɤ ɜ, εŬţєəyg ŭəŬůŰŸůŬəg Ůď ůŰєţєəεg ŬɜŸ Ůg ɜďg Ůɤ ɜ ɤ ŬďďεŬŰəι ɜ ɔєєє ɜŰŬə єţŬŰŷg ɔəŬ Ůєgg εŬďďŰŷg əŬə ď ůŰєţďŬ Ůɤ ɜ ɤ ŬďďεŬŰəι ɜ ɔєєŬŰŬə єəŬŰŬ ůŬ ŬgŰєі g. (Tzanakis & Arcavi et al 2000, ¢ εŬɜŸəďg 2009) ¢ ůŰєţďŬ ε´єţŬůι ɜŬ ´ţєŰŰєєŬə ´əďŬɜєі g Ůţħ´єgg ´ŬţєgůďŬůďg əŸ єəєg εŬďďεŬŰəєі ďyεŬŰєg, ´єg ɜŬ бţůəє ɜŰŬə ´əє əє ɜŰŸ ůŰєg ´ţŬəεŬŰəyg ůg ɜďəŬůg ŭďεəєgţɔďŬg Ůєg əŬə Ů єεy ɜɤ g ɜŬ Ů єŰŰəyůŬə ´ďɔə yε´ ɜŬůůďg ɔəŬ Ůєgg ŭŬůəŸəєgg Ůɤ ɜ ɤ ŬďďεŬŰəι ɜ. (ɤ ´əεε´əŸ ɜєg, 2011)

Ƀə ŭəŭŬůəħεŬɜєə ε´єţєі ɜ ɜŬ ŬɜŰəďŭďєі ɜ ħŰə єə ŰţţŰŰəyg ŭəŬŭəəŬůďg, єə ŬəŬůəďg, єə Ůε ŭəбєəďg, ŰŬ əŸďď, єə Ůəəə´ Ůg ŭəŬŰţ´ι ůŰəg əŬə Ů єŭŰєəŬəg, ŰŬ ŮŭəyɜєŭŬ, єə ŬɜŰə´ ŬţŬďyůŬəg, ŬəħεďəŬə єə ŭəŬŭєţŰŰəyg ´ţєůŰɔůŬəg ůŰŬ ŭəŸŭєţŬ´ţєбəєεŰŰŬ, ħєə εħɜє ŰəєŬə ďŰε əŰŸ, ŬəəŸ Ů єŰŰəєі ɜ ůďεŬɜŰəħ əŬə ŬɜŬ ħů´ŬůŰє ůgůŰŰŰəħ Ůďg εŬďďεŬŰəєg ŭďεəєgţɔďŬg. Ōεε ůŰŬ єə ŭəŭŬůəħεŬɜєə ďŬ ŬɜďŬţţg ɜďєі ɜ ɜŬ ŭəŬŰţ´ι ůєg ɜ əŬə єə ůŰəєə Ůg ŭəyg Ůєgg Ůəə ŬůďŬg, ɜŬ ŭєg ɜ ŰŰ əŸďď Ůєgg ɤ g εyţєg Ůďg εŬďďεŬŰəєg Ůєgg ŭţŬůŰďţєħŰďŰŬg əŬə ɜŬ ŬɜŬ Ůі ɜєg ɜ ´ţŬəŬəyg əŬə əŬɜħŰďŰŬg ŬgŰєбŬə ůďg. ɤ Ů ŬgŰє Ůď əєɔəє, ď ůŰєţďŬ Ůɤ ɜ ɤ ŬďďεŬŰəι ɜ ε´єţŬůι ɜŬ Ů єŰŰəyůŬə yɜŬ ůďεŬŰəħ Ůţɔ ŬəůŬє ɔəŬ Ůď ɜ ŬɜŸ Ůg ɜď εŰŰɔɜɤ ůŰəι ɜ əŬɜєŰєŰɤ ɜ Ůɤ ɜ εŬďďŰї ɜ əŬə ɜŬ əŸɜŬə ´ŮţůůħŰŰţє ŬɜŰəď´Ůє Ůď ɜ ŮəůəəŰəє ´єţŬůŰ Ůď εŬďďεŬŰəєg ɔɜι ůďg. (¢ εŬɜŸəďg, 2009)

Ƀə ŭŸůəŬəєə Ůɤ ɜ ɤ ŬďďεŬŰəι ɜ yєɜєŰŰg εŬəŬŰєůŬə Ůď ɜ ůŰєţďŬ əŸ єəŬg εŬďďεŬŰəєg yɜɜєəŬg, ďŬ ε´єţєі ɜ ɜŬ əŸɜєg ɜ ŬɜŰŭєţŸ ůŰєgg Ůţħ´єgg εŬŰєgg є´єєgg ɔŬɜɜєďďəŬ əŬə ŬəŬůďєďďəŬď yɜɜєəŬg, εəŬ εyďєŭєg є εŬ єəħəəďţď ďŬɤ ţďŬ. ¢ ŬɜŰŭєţŸ Ůg Ůє Ůəg ´ŮţůůħŰŰţŬg ŭєţyg Ůε´ Ůţəyє Ůə ŰŰ əєďŰţŬ ´єg Ů yбŬəŬɜ Ůď ɜ ůŰєţďŬ ɜyŬg ɔɜι ůďg, ŰŬ ´ţєбəєεŰŰŬ ´єg єŭєɔďůŬɜ ůŬŬg Ůє əŬə Ůəg ´ţєů´ŸďŬəŬg ´єg yɔəɜŬɜ ůŰє ´ŮţŬəďħɜ, Ÿəəє ŰŰ Ů əŬgєďεyɜŬg əŬə Ÿəəє ŰŰ əəħŰŰţє Ů əŬgєďεyɜŬg, ɔəŬ Ůď ɜ ŬɜŰəє ŰŰі ´əůє Ůєgg. ¢ ůgɔəŬəţəєyɜďŬ ŭəŬŭəŬůďŬ ďŬ Ů єŰŰəyůŬə ůďεŬɜŰəє бєєďŬəŬ ůŰєgg εŬďďŰyg ůŰď ´ţєů´ŸďŬəŬŸ Ůєgg ɔəŬ ɜŬ əŬŰŰɜєєůєgɜ Ůď ɜyŬ ɔɜι ůď. Ƀ

ŭsuŬůəhεŬ3ɛɡƒ Ŭ ɛɔɛdƙŬůŬŬɔ Ŭ h Ŭƙ3 Ŭ ɛŬɡɡdŬ Ŭɛɡ ůŬƙ əiůd Ů3hƒɡ ´ɟɛɓəvεŬŬɛƒv Ŭ h Ŭƙ ŭɡůəɛədŬ əŬŬŬ3hƒdůdƒɡ εsŬƒɡ y33ɛsŬƒɡv Ů3hƒɡ əŬ3h3Ŭ, hεxƒɡ εyůŬ Ŭ h sůŬɛɟsəY ´ŬɟŬŭŬůɔεŬŬŬ ůɛɡŭŬɔx3 əŬɔ Ůsůŭ3ı3 εŬƒdƙεŬŬsɔı3, ´ɛɡ ŬŬ əYƒdƙ əŬɔ ɛɔ ŬɔŬůŬ3hŬƙŬŭyƒŬɛɡƒ Ŭ ɛŬŭəůůŬ3 əɛdƙŬɟɛ ɔsŬεŬ3ŬəiŬŬɟƙ ´ɟɛů´YƙŬůŬəŬɔyε´3Ůɡůdƙ ɔsŬ Ŭƙ3 Ůsɛh3důdƙ 3yx3z ŬƙƙεŬŬsɔı3, ɛsεŬƙƙŬyƒdŬŬ3dŬɟɟɡ3dɛi3, ɔsŬ3Ŭ´ɟɛGxɟvůɛɡ3 Ŭƙ3 ´ɟɛůx´sɔv Ŭɛɡƒ «´Ůɟs´yŬŬůŬ» yɟŬɡ3Ŭƒ, Ŭ ɛŭŬůh3εŬ3ɛsɔ Ŭɛ3 əɛŭɡ3ɛ εsŬƒ´sƙŬ3vƒ Ŭ ɛŬɡɡdŬƒ Ŭɛɡƒ. ¢ əŬŬŬůŬŬůƙ ŬɡŬŭ ůɡεɓYəəůɔ ůŬƙ εŬƙƙεŬŬsɔv Ŭɛɡƒ xɟœŬ3ůƙ. (Tzanakis & Arcavi et al 2000, ɛŬ3Yəƙƒ, 2009)

¢ sůŬɛɟƙŬ Ŭx3z ŬƙƙεŬŬsɔı3 Ůɔ3ŬɔůŬεŬ3Yəɛ ɓŬƙεh y3Ŭƒ ƙŬɡεYůsɛƒ Ŭh´ɛƒ ůŬɛ3 ɛ´ɛœ g´Yɟɡɛɡɛƒ3 ŭɡ3ŬŬhŬƙŬŬƒ ɔsŬ ůɡŬŭsŬůεh ŭɟŬůŬƙɟsɛŬvŬx3 ɔsŬ Ŭɛɡƒ εŬƙƙŬyƒ. ɛŬ εŬƙƙεŬŬsɔY 3ɛvεŬŬŬ əŬɔ ɛs εŬƙƙεŬŬsɔyƒ y33ɛsŬƒ Ůɔ3Ŭɔ sůŬɛɟsəY əŬɔ ´Ŭ3 ï ´ɛəsŬůεsəY (panculturally) ŭƙεsɛƒɟɔvεŬŬŬ. (z´sεε´sY3ɛƒ 2011, ů.106) ɟ ƒŬh ŭŬɔ3ŬŬŬɔ Ŭ h Ŭɛ ɔŬ3ɛ3hƒ h Ŭɔ ɛs ´Ŭɟsůůh ŬŬɟŬƒ Ŭ h Ŭƒ ůi ɔƒɟɛ3Ŭƒ y33ɛsŬƒ Ůɔ3Ŭɔ εŬŬŬəYɔ3Ůƒ, ´ɟɛůŬɟεɛɔyƒ v εŬŬŬůƙƙεŬŬůůεɛα´ŬəŬhŬŬɟx3 Ů3ɛ3ɛs3 ´ɛɡ yŬƙƙŬ3 Ů Ů3ŭŬɟɔŬůƙŬƒ Ŭ h ´ɟɛƙɔɛiεŬ3Ůƒ ɔŬ3yƒ εŬƙƙεŬŬsɔı3, εyůŬ ůŬɛ əɛsɔx3sɔh ï ´ɛəsŬůεsɔh´Ůɟs ƙYəəɛ3 ůŬɛ ɛ´ɛœ yƙƙůŬ3. (Radford, Boero &Vasco, 2000)

¢ Ŭ3sɛ´ɛƙůƙ Ŭƙƒ sůŬɛɟƙŬƒ Ŭx3 εŬƙƙεŬŬsɔı3 Ů3ɛ3ɛs3 ůŬƙ ŭsŬ3ŬŬsɔv Ŭɛɡƒ ε´ɛɟŬůı3Ŭ sɔŬ3ɛ´ɛsůŬɔ Ŭɛɡƒ ůŬhɡɛɡƒ Ŭƙƒ Ůɔ´ŬŭŬůůůdƒ əŬɔ Ŭƙƒ εŬƙƙεŬŬsɔvƒ Ůɔ´ŬŭŬůůůdƒ Ůŭsɔh ŬŬɟŬ, h´xƒ:

- ¢ƙ3 Ŭ3Y Ŭɡ3ƙ Ŭƙƒ´ɟɛůx´sɔh ŬƙŬŬƒŬɛɡ εŬƙƙŬv
- ¢ƙ3 ɔɛsɔx3sɔɛ´ɛƙův Ŭɛɡ
- ¢ƙ3 ´ɟɛŬŬɛsŬůůŬŬɛɡ ɔsŬŬƙ3 ´ŬɟŬɔŬyɟx Ůɔ´ŬŭŬůův Ŭɛɡ
- ¢ƙ ůɡyůƙ Ŭɛɡ εŬŬƙ3 ɔɛsɔx3ŬŬ

ÆŬŬ´ŬɟŬY3x, ƙ sůŬɛɟƙŬ Ŭx3z ŬƙƙεŬŬsɔı3, ƙŬε´ɛɟɛiůŬ3Ŭ´ɟɛůŭyɟŬɔ sůyŬƒ ɔŬɔ gəsɔh ɔsŬƙ3 Ů3ŭŬɟŬi3ƙůƙ εsŬƒ y33ɛsŬƒ Ŭ h Ŭɛɡƒ εŬƙƙŬyƒ ůŬŬɟɡsɔh Ů á Ůŭɛ, ı ůŬŬ3Ŭ ɛŭƙɔƙƙɛi3 ŬŬɔsɔY ůŬɛ Ŭƒ´sɔh ůɡεɓɛəsůεh v ŭɛɟεŬɔsůεh. ¢ εŬɔyŬƙ, ɔsŬ´ŬɟYŭŬɔεŬ, ´ɟxŬhŬƒ´x3 ə Ůɔεy3x3 Ŭɛɡ qɔhŭŬ3Ŭɛɡ ə Ŭɔɛ ůƙεŬɟsɔhƒ Ŭɟh´ɛƒ ɔɟŬŭvƒ, ƙŬε´ɛɟɛiůŬ 3Ŭ Ůɔ3Ŭɔy3Ŭε YƙƙεŬůƙ3 Ůsůŭɔx ɔv Ŭƙƒ y33ɛsŬƒ Ŭƙƒ εŬŬŬɔəƙŬvƒ ůŬŬz Ŭƙƒ εŬƙƙεŬŬsɔY Ŭƙƒ ɔõŭɡε3Ŭůɛɡƒ.

[illegible]

1.3 [illegible]

1.3.1 [illegible]

[illegible]

[illegible]

(α) [illegible];

(β) [illegible];

(γ) [illegible] (2011, σ.19) [illegible]

Ο Herscovics (1989) [illegible] (2011, σ.19) [illegible]

[illegible]

1.3.2 [illegible]

[illegible] (2007) [illegible]

[illegible] d' Alembert [illegible][11]. [illegible]

---

[11] [illegible] 5e [illegible].

Ōɜŭ ŭɔħɛŭ ůɟı ŭłɛŭ, ´ɵg dŭ ɛŭɡŭ ŭůɢɵæůůɔůłŭł ´ŭɟɵ¿ůŭ ůɟɔŭůdŭ ůɷŭɔ ŭɷ ůɷɵɡ: Ǽɷŭɔ ŭg3ŭŭħ3 3ŭ ůg3ŭgŭůŭɷ¿3 d ůɷŤůədůd ůŭł3 ůəŭŤəůd ŭŤ3 ´ɟŤ3ůŤ3 ɛů ŭɟ3dŭɷ¿ɡ ŭɟɵdɛ¿ɡ əůɔ d əŭŤŤəŭłůd ŭɷg 3ɵɛɛŭŭɷɡ ŭgŭŤ3 ŭŤ3 ´ɟŤ3ůŤ3; ɀ ů´ɵæ ŭŤħ´ɵ dŭ ɛ´ɵɟ¿ůů3ŭ ɔɷůɔ ŭgŭħ; ɀ ´ɵɟůůd ůŭɷɟdŭ ŭŤ3 ŭɟ3dŭɷı 3 ŭɟɵdɛı 3 3ŭ ħɵdɛůůɔůłŭł əŭŤŤ3ħdůd ŭŤ3 ´ɟŤ3ůŤ3 ɛůŭgŭɷ¿ɡ; ūŭ ůɔůŤŤůɵgɛůŭ3 ŤŤ´ɟůɔɛŭŤəŤ ɛɵ3ŤŤəŭ´ɵg ɡɟdůæɛ´ɵæ¿3ŤŤəůŭɷ ůɵæůæħ ħɵɔɷæ ɔəŭ ŭł3 ůůɔæɔdůd ŭɷg əůɔħ3ŭ ŭŤ3 ´ɟɵůæɛɤ3 ŭɟəɵ¿3 ɔəŭ ŭł əŭŤŤ3ħdůd ŭŤ3 ´ɟŤ3ůŤ3 ɛůŭɟ3dŭɷ¿ɡ ŭɟɵdɛ¿ɡ ɛ ůɔ əůɔ´ħŤŤ´ ŭɟɵgůəŤɵ´ɟɵ¿ħɛŭŤŤ. ɀ ɛ´ɤɡd ɛɤɡɟəŤı ɟůŭəůůəůɔdůɛ d ůəɛŤdůd ůg3ŤŤɔı 3 ɔəŭ ŤŤ´ɟħůdɛŭ ůgɛħŤəəůɔ ůŭł ɛd əŭŤŤ3ħdůd ŭgŤ3, ůɔħɛŭ əůɔ ůħ ŭ¿əŭłŭɟɡ ɛůdɛŭŤɷı 3 ŭ¿dɛŤŤ3[12]; Ōɜŭ ůɟı ŭłɛŭ ´ɵg ŭdŤŤůɔ ůŭ¿ɡɡ ɛůdɛŭɟɡ ŭłɡ ůɛ´ůɟəɵɛɡ ɟůg3ůɡ ůɷůɔ ůɔ ɛ´ɵɟ¿ɛůəůɔ ůɷůɔůůɔ ɛ´ɵɟ¿ɛůůɔ ħəɵɡɡ ŭ¿ɡɡ əůɔħ3ůɡ ŭ3 ɀ ůdɛŭɷı 3 3ŭ ŭ¿ɡɡ ůůɔ ůɷdɔ¿ɛůɛůůŤ ŭɟůŭůɷɛŤŤůŤħ ŭłəůdɛŭɟəħŤłŤ.

¢ ůɔůɛɛŭłůd əůɔ ůəɵ´ħɡɛŭɡůɷůɔ3ŭůɔůŭůɷɵɡɛůħŤəəŤ ɵæɡɡŭħ ŭ¿ɡɡəůɔħ3ůɡ, ´ɵg ´ɟ´ůə 3ŭ ɛŤdůə ɟ3ůɡ ɛůdɛŭ¿ɡ, ɛ´ɵɟůů3ŭ ŭ¿ɡɡ ůɔůəůɷ¿ɟ, ůɔ ŭ¿ɡ ůɵɛdůůd əŭŤŤəəɛdəd ůgəůɟdŭ ŭħ ŭ¿ɔ ůŤůəůɷ. (Freudenthal, 1983) ÞŤ´ɟɵħəɛdɛůŤůůɛħɡɔəŭŤ¿ůɔ ɵə ůgŤ¿ɛůŤůůɛɵα ůɷůɔ əůɔ¿ŤŤɟɵ 3ŭ ůɷůŤůəɵ3ŤŤəůŤ¿ɡɡ ɛůdɛŭɟɡ, ɛɟůŭ ŭħ ɟ3ůŭ ´ɟɵůůɛůůŤůɛɟ3ɵ ɛŤdɛŭ ŭħ ŭ¿ɔ ůŤůəůɛɟůɛħɡ. Ɉ´ŤɟɵɡŤ3 ´ɵəəɟɡ ŭħ ůŤůŤůůůɡůŭůŤůg¿ůůŤ ŤŤ¿ůŭ, ŭħ důɟɟdůəůɛ ůəɵ´ŤŤ, ŭħ ůɵəəŤħħəəŭ, ŭħ ħɵəəŭ ɛůɵ¿ůdůɡɔəŭ ŭ¿ɡɡ ůŤůəŤəɵɡɡ əůɔ ŭħ ŭł3 ´ɟɵůɟ´ɵæ ůŤůŤůəůɛ ´ɟůɔůəůɛ ŭ¿ɡ əŤdůŤůŤůəŤəɵg. ÞŤɵdůɟdůəůɡ ŭħɟůəɡ ůɔ ɵŤůůɔůɡɡ ɟɟdɟůɡ ůŤ¿ůħħůŤŤ¿ɵ ŭħ ŭ¿ɔ ŭ3 ɟɵ¿ůŤůd ůŤł ħŤdůd ůůħŤdɵɡ əůɔħɵŤɵ¿ħ3ɵ ůŤł3 ůəɛŤdůd ůŤůŤ¿ɛůŤůůɛı 3. ¢ůŤħħəəŭ ɵůůɔɵı 3 ɔəŭ ŤŤ ɀ ůdɛŭůəůŤ ůŤł ůůŤůŤŤ¿ħħŤdɛɡŭ ůɔ´ůůůůŤ, əůŤŤŤ ŭ¿3 Freudenthal (1983) ɟɵ¿ɡ3 ɤɡ motto ŭ¿ɡɡ ŭ¿ «ŤŤ¿ı ŤŤ əŤ3ůəůɔ ɛůŤŤ əůŤŤəůůŤ». ūɟŤůd ´ɵg ɛŤəəɵ3 ůdɛŭůɷůħŤəŤ ɵæɵůŭ3 ´ůŤŤɟɵůůħŤŤ¿ɵ ŭħ ŭ¿ 3ŭ «əŤ3ɵɡ3», ůɔı ŭ¿ 3ŭəůŤŤ3ɵɛůɵɡ3 ůɷůɔůdŤŤɟɔɛŭəɔɤ3.

Ǽ3ı ůgɵdŤŤɛůɔəůŤł3 ůəɛŤdůd ɛůŭɟŤ¿ɛůŤůůɛħ, ɔəŭ´ŭɟŤůůɷɛŭŤł3 ůəɛŤdůd ŭłɡ ɛůdɵŭɵəɵɔdŭɡ ɛəŭɡŤůůədůdɡ[13] ɛ ŭł3 ůəɛŤdůd ůəħɡ ŭɟŤ¿ɛůŤůůɛ¿, ɔəŭ´ŭɟŤůůɷɛŭ

[12] ūŭŤŤ3ůɔ¿ůůŤ´ůɟůŤŤɟɤ ůŭ¿ 4ᵉ əůŤŤəůůɵ.

[13] Ŭı ɡɔɷůŤŤəd ŭůɵæůŤ3 ´ŭɟůədůůŤ3 ůůɛdŤ´ŭɟůůŤŤůd ɔəŭ´ŭɟůůŤůɷɛŭ

Úłз Ůэ ε Ydłůd Ůзhg эŮзhзŮ[14], ŮвŮэ ůdε Ůз Úэh, ůi ε ű з Ů ε Ů Úз Freudenthal, зŮ Ůů Úэ Ů ε gε Ů ů Ű Ůэ ε g:

- J з Ůзœ Ůэ з Ů ε Ydз g ε Ů Úз Ů ε ü э з ε h ε Ůз Ů g Úз ε Ů Úů ε h э Ůэ
- Ůhůd Ůзd Ů yg Ůэ d Ůj ε d з Ůů Ů Úз g Ůg Úз ε Ů Úů ε gi э Ů Úłз э Ůэ i Ůj d э Ů Ű Ůзhdůε Úз g Ů h Úз gg ε Ůłdůg; ŮвŮэ ůdε Ůз Úэh з Ů ε Ůł Ůвg з gэ ε Ůłdůg Úз эhэg эŮ Úз g´ gœ´ j gyəgy Ůg Úз ε Ů Úů ε hg Ůg Úhg;

Ů Ű Ů Úз Freudenthal ü Ůз ŮвŮэ g j ε ůε g з Ů ε Ydůg Ůg Úз ε Ů Úů ε gi g:

- Ůg Ůü Ůj ε hg g з Ű Ůэ ů´ Y з э Ů э Ůэ j ε э g j Ů з Ůg з œ i з Ű Ůэ,
- Ůg ŮвŮэ Ůhůg ´ Ůj á æ ə g э э Ů з Ů Úз gg g Ůj ů Úз i з gэ ε Ůłdůg g ε Ů Ů ü Y ə Ůэ Ů,
- Ůg ε ´ gj Ůü з Ů ´ j g ə Ůэ gi з ůi э g ů d ə Ůэ з Ů ε ´ Ůj ü Ůi g з Ůj ə Ů Y Úз gg ε Ůłdůg[15].

Ů g Ůэ з hdε Ů, ů Úłз Ů g gε Úз g´ g ə g э ů Ü з g Ůj hg з Ů ε Ůł Ů вg ε Ů Úł ´ j g´ Ů ü Ůэ Ů; J з hε g ů Úł «ə j ů ε d» ů Úэ ε ε Úłg ə i ů dg Ůз hg ´ j g b ə ε Ů Úз g g´ g ə g э ů Úз g ü ŮвŮэ ε d Ů ə Ůз d Ů ü ε y з d y з ü Ůэ d, Úэ d Ů ə Y з Ůэ ə Y g œ g; ¢ hů Úэ g Ůg Úз ε Ů Úů ε g´ g g э Ů łdůg Úз gg yg g з ə Ů Ű Ůə Y b Ůэ ů Ů b Ydg g ´ g j g i з з Ů b g d œ ů g з ə Ůэ i Ůj Ů Ů h Úз gg ´ j g э j Ů ε ε Ů Úů ε y з g g Ůg Úз ε Ů Úů ε g i g. Ůэ Ů h y Ůg Úy з ε Ů łdůg з ´ g yə Ůb Ůз ε yj g g ů Úł з Ů ´ Ůj э ε yj Ůg з Ů Ů Ůз Úз i з ů Ű ´ j g d ə g i ε Ůз Ů.

Ůэ Ůj з d Úэ g a Ůj ε d ε g a ü Ůз Ů g Úэ g i з «ə g ε ε Y Úэ» Úłg ü ü Ů ə Ůə d Ůj g Úłg Ůj ε d ε d Úэ ə g. ¢ Ůj ε d ε d Úэ ə ů g з ə d y g ü ü Y ů ə Ů Ű Ůэ ə Ůэ ε Ů łdůg Ů Ű Ůэ ε Ů ů Ű Ůз g i g ů Úhg g g ü ə Ů ü ə Ů ů ı з ε Ydłůdg ´ j g ů ü œ j ů ε y з y з Ů h Úз ü Y ů ə Ů g, Ůз ə Ůэ ε Ůj ə y g ű g j y g ə œ g ´ œ ü ə Ů j g ε y з Ů, ε Ů Ů ü Ůj ε g c y g. Ů з Ůg ε Ů łdůg, ´ g g y Ůэ ´ Ůj Y ů Ůэ Ů ə Úg g ı g ε y ů Ů Ů h Ůg Úg g Úg ü ə Ů ü ə Ů ů d Ůg ε Ydłůdg, ü Ůз ů dε Ůв Ůэ h Úg, c Ůз ə Y Úg g´ y j Ů ů Ů Ůj ə Ů Y ů g з Ů ü dů Y, ı ů Ů з Ů Ůв Ůэ ů Ů d y ů d з Ů Úg g Ůз Ůэ Ů Ů ů ə Ůg Y ů Ůэ Ū y ə Ůэ ε Ůэ Y ə d ´ j g ů ´ Y d Ůэ Ů з Ů ů ´ Y ů Ůg g Úз Ůg Úз ε Ů Úů ε h, ı ů Ů з Ů Úз y Ůэ g ´ j Ů ε Ů Úэ ə Y ə Ů Ů з g e ů Ůэ. Ę Úł ´ Ůj gi ů Ů Ůj c Ů ů d Ů d Ů

[14] «´ ə d з Ů a´ ə d з ə Y з Ůэ ů g з»

[15] ü э Ů´ Ůj Y ü Ůэ ε Ů, Ůв Ůэ ů g з d d ů ε y з g ə Y d g Úy з ε Ů łdůg з ů Úg g´ j Y з Ůg g ə ə Ů ü ε Y Úy з з Ů ε Ů Ů Ů j y´ g g з Ů Ů ə ə Y ů ε Ů Ů ů Ů g ε ı з g ε Ů, Ůэ h ε Ů ə Ůэ Ůз d ´ j Y з d Ůв Ůэ g ´ g ə ə Ů ´ ə Ů ů ə Ů ů ε h g.

[illegible]

[illegible] Freudenthal (1983) [illegible] (Tzanakis & Arcavi et al, 2000) [illegible] 2009) [illegible]

[illegible] (pattern) [illegible] Rapke (2009)[16] [illegible]

---

[16] [illegible] 4ᵉ [illegible]

[illegible]

[illegible]

1.4 [illegible]

[illegible]

1. [illegible]

2. [illegible]

3. [illegible]

[illegible]

i. [illegible] 2012 ï 2013,

ii. [illegible] 2013 ï 2014 [illegible]

ůg3Ů3ŰŮi3Ůxg ε ŮəŸ ɵɜɵggƒŰ ƒ Ůɵggƒε ŰƒdƒŮŷgƒ, ɔəŰ´ Ůj ŰɜŮŷjɤ Ů Ůɜvɔdůdƒ Ůɤ3 Ű Ůɜ Ův ů Ůi 3 Ůɵggƒů ŰŰ ūi əəŰ Ay ɔ Ůů ŰŰg.

¢ cpaŭŰůə ŰədŰ ů Ůɵggƒε ŰƒdƒŮŷgƒ Ůƒlƒ j õ ũgε3 Ůůœg ŰŰɵj Ů Ůɵggƒj dƒŮɵi gƒ Ůj ɤƒε ɵi gƒ ə Ůə Ůxgƒ ´j Ů3 Ůxgƒε Ů Ůg Ůɵi gƒ. Ů Ůƒl ŭəŸj ə ŮxŰ Ůƒlƒ cpaŭŰůə ŰədŰgƒ bŰůxů Ův ə Ůε Ů ů Ůxgƒ Ů Ůxdɔvů Ůxgƒ Ůɵg Viete ə Ůə Ůɵg Euler ɔəŰ Ůɵ3 ə Ůɜ ƒh3 Ů Ůɤ3 ´j ɵůvε ɤ3 ů Ůɵ3 ´ ɵəəŰ ə Ůů ə Ůů ε h Ůɤ3 j dƒŮ 3 Ůj ɤƒε ı 3, ŭœɵ3 ŰŰgƒ ŭəŰƒŮj dƒ yε ű Ůů dƒ ə Ůə ɵj h3ɵ ů Ůƒl3 Ů Ůɜvɔdůdƒ Ůɵg ə Ůɜ h3 Ů «´ əd3 Ů α´ əd3 ů ůɵ3 ůg3».

¢ Ůgɵvε Ůƒlůdƒ yɔɜ Ů ε Ů Ůɵggƒε ŰƒdƒŮŷgƒ ´ɵg ŭəŰŸɵdƒdƒə Ůɜ Ůɵggƒ Ůj 3dƒŮəɵi gƒ Ůj ɤƒε ɵi gƒ Ůƒlƒ ůɵɵəəvε ɵj ɵ3əŸ 2012 ï 2013, ů Ůƒl3 Ůj ɵvε Ůƒlƒ cbõ ũgε3 Ůůœg ε Ů bŸůdƒ y3 Ů ūi əəɵ Ay ɔ Ůů dƒ, Ůɵ ɵ´ ɵœ ůgε´ əvj ɤ ů Ůɜ ε h3ɵə Ůɵggƒ ů Ůƒl ŭəŸj ə ŮxŰ ε xƒ ŭəŰ ə Ůxəvgƒ ı j Ůƒ. Ů Ůƒl ůg3 yɵ Ůx Ů, «ůgɵdƒŮů Ůε ů Ů» ´j ɵů ɤ´ əŸ ε Ů ə Ů ɵɜɵggƒ Ů ƒ Ůɵggƒε ŰƒdƒŮŷgƒ, ůɵ Ů ŮxəŸ ε Ů Ůxgƒ Ů Ůɜ Ů ů Ůxgƒ Ůɵggƒ ů Ůɵ ūi əəɵ Ay ɔ Ůů dƒ.

Ů əɵ´ h gƒε Ůgƒv Ů3 3Ů ə Ů3ɵgε Ů ə Ů ɵxƒ ů g3 Ů3 Ů i3 Ůxgƒ ə Ůə ů Ů ε Ůƒdƒ Ůŷgƒ Ůƒlƒ j õ ş gə Ůœg Ůɵg ů ɵəəɵi yŮɵggƒ 2013 ï 2014 ε Ů bŸůdƒ y3 Ů ūi əəɵ Ay ɔ Ůů dƒ, ə Ů ε bŸ3ɵ3 Ů Ůgƒ g´ h γdƒ h Ůx yɵg3 vůdƒ Ů3 Ů Ůɤ3 ε dƒ Ů ə Ů bɔ Ů j ɤəv ůəyγdƒ, ů ɵ Ů ŮxəŸ ε Ů Ůɵ3 ə Ůɜ h3 Ů «´ əd3 Ů α´ əd3 ů ůɵ3 ů g3» ə Ůə Ůƒl3 Ůx Ůɵvəh ɔdův Ůɵg. ? Ů ů dε Ůxv dů h Ůx ů Ů Ůg Ůŷ Ů´ Ůŭ ɤŸ, ů Ůƒl ŭəŸj ə Ůxƒ Ůƒlƒ ŭəŰ ə Ů ə dƒ Ůɤ3 j dƒ Ů 3 Ůj ɤƒε ı 3 ů Ůƒl3 j õ ũgε3 Ůůœg, ŭ Ů3 yɔɜ Ů3 Ů3 Ůɵj yƒ ů Ůƒl3 ů Ůɵj dƒ Ůɤ3 Ůj 3dƒ Ůəı 3 Ůj ɤƒε ı 3 ə Ůə Ůɤ3 ´j Ů3 Ůɤ3 ε Ů Ůg Ůɵi gƒ. q ů Ůh ůɵ, əh ɔɤ yəə Ůxγdƒ ɵj h3ɵg ə Ů Ů Ůŷj Ů ε Ů3 Ů´ j Ů ε Ů Ůɵ´ ɵœ ůɵg ε Ů ε h3ɵ ŭi ɵ ůg3 Ů3 Ů i3 Ůxgƒ, Ůxgƒ ɵ´ ɵd Ůƒ h ε ɤƒ ŭ Ů3 dƒ Ů´ Ůj ɵg ů ŷ Ů ɵg ε Ů Ů 6° ə Ů ŷ Ů ə Ů ɵœ Ůƒlƒ Ůε´ Ůxɤ ɵəvƒ yj Ů g3 Ůƒ h ε ɤƒ, ´ Ůj Ůdy Ůɵg ε Ů Ůɵ ūi əəɵ Ay ɔ Ůů dƒ ´ɵg ´j ɵɵj ɵ Ů Ů ɔ Ů Ůɵggƒε ŰƒdƒŮŷgƒ Ůƒlƒ j õ ş gə Ůœg, ə Ůdƒ ı gƒ ə Ůə Ůɵggƒ ů Ůh ɵggƒ ů ɵ Ů ŮxəŸ ε Ů Ůxgƒ Ůj ɤ Ůε ů Ůxgƒ´ ɵg dy Ů ε Ů

Ţ' ůíŸəŬɜɜ 2ɵ ɟ ɟ ɜdŰəɵɑŬɟ ɜɵɛɑï ɵ ´ ɟ ɦbəɵɛŬ ůŰɛ ŭɜŭŬůə ŬəɵŬ Ůɛɵɡ ə Ůɜ ůŰɛɜ Ůɜ ɛŸɵɵůɛ Ůɛɵɡ

2.1 ũɜɤ ůŰəŸ Ůɛ´ ɦŭəŬ ůŰɛ ŭɜŭŬůə ŬəɵŬ ə Ůɜ ə ŬŰŬɜɦɵůɵɛ Ůɤɜ Ůɟ ɜdŰəɛ ɜ ɟ ɜɵɛ ɜ ï ɟ ɜŰəůɛ Ůɜɛ ůɜə ɤɡŬ ŭgůə ɵəɵŬůɡé

Ł Ůɛ ə ůíŸəŬɜɜ ŮɡŰɦ ɵŬ Ůɜ ůŰŸůɵɵɡɛŬ Ůɜɡ ŭgůə ɵəɵŬůɡ´ ɵɡ ´ ɟ ɵəï´ Ůɛɡɜ ə ŬŰŸ Ůɛɛ ŭɜŭŬůə ŬəɵŬ Ůɤɜ ɟ ɵɛŰ ɜ Ůɟ ɜɵɛ ɜ. ɵɡŭə ɵəɵŬůɡ´ ɵɡ Ůíɵɟ ɵï ɜ Ůɛɛ ɜ Ůɟ ɜɵɛŬ ůŰəŬɜɵɛ ůůŬɜɤ ɔə ɡŬ Ůɤɜ Ůɟ ɜdŰəɵ ɜ Ůɟ ɜɵɛ ɜ, Ůɛɛ ɜ ɜəŬɜɦŰɛŰŰ ɜŬ ə Ÿɜɵɡɜ ´ ɟ Ÿɜůɡ ɛŬ ŮɡŰɛï ɡ, Ůəə Ÿ ə Ůɜ Ůɛɛ ɜ ɜəŬɜɦŰɛŰŰ Ůɛɛ ɡŬ Ůůɤə ɔdůdɡŬ Ůɤɜ ə Ůɜɦɜɤ ɜ Ůɤɜ ´ ɟ Ÿɜůɤ ɜ. ¢ ɤɜɜɵɵŬ Ůɤɜ Ůɟ ɜdŰəɵ ɜ Ůɟ ɜɵɛ ɜ ´ ɟ ɵə ŸəůůůŬ ɜůŰɵɟ ɜə Ÿ´ ɵəə Ÿ´ ɟ ɵɦəə ɛŰŰŰ, ´ Ůɟ ɜůůɦŰŰɟ Ů ə Ůɜ Ů ɦ Ůɡ Ů Ÿ´ ɵɡ ´ ɟ ɵə Ÿəůůů Ůɜ ɵɵ ɛ ɜə Ůŭɜə ɵɑ Ůɟ ɜɵɛ ɵɑ (Sip, 1990) Ł ɜ ɵdŰŰəɵɑ Ůɟ ɜɵɛ ɵɑ Ůůɜ Ůɜ ´ ɜɜ ůgɔə Ůůɟ ɜɛ ɤɜɵɵ ɛ Ů Ůɛɛ ɜ ɤɜɵɵŬ ɦŰɜ Ůůɜ Ůɜ ɵɵ´ ɟ ɤ Ůɦ Ůɡ´ ɵɵ, ɵɵ Ůɟ ɵɜəɵɑ ə Ůɜ Ů ɵɛɛ ɤɜɤ ɡ ɛ´ ɵɟ Ůůɜ Ů ə Ÿɜ Ůůə ə Ůɜ Ůůɡ´ ɟ Ÿɜůɡ ɛ Ů Ůɡ Ůɛï ɡ. Ł ɜ Ůɟ ɜdŰəɵɑ Ůɟ ɜɵɛ ɵɑ Ůůɜ Ůɜ ŭůɡŰɟ Ůɟ Ůï ɵɜŰŰɡ, Ů Ůůŭə ɤɡɵɜ Ůůů Ůɜ ůŰɵdŰů ɤ ɡ Ů ɵŰɡŰɛï ɡ´ ɟ Ÿɜdɡ, ɡ ɵ´ ɵdŰ Ůɟ ɵəŸ ə ŰŰɜ Ůůï ɜŰŰɡ. (Freudenthal, 1983) Ł ɜ ɛ ŮdɡŰɤɡ Ůɜ Ůəə Ůɛ ɦŸɜɵɜŰŰɜ Ůɛɡɡ ůgůəɵï ɡ Ůɟ ɜɵɛï ɡ ŭəŬůdɡŰəŸ, Ůɜ ŮdůŰŰ Ů ɦ Ůɛɡɡ Ůɟ ɜdŰəï ɡ. (Streefland 1996, Ł Ł 2004). ɤ Ů Ůɡɜ Ůůů Ůɤɜ ɔə Ůɤɜ ɟ ɜdŰəɵ ɜ, ɵɵ Ůɟ ɜɵɛ ɵɑ ɤɵɛɡɜ ´ ɟ ɦůɡɛɵ, Ÿɟ Ů Ůɛ + 2 ɤɵŬə ´ ɵŬ ŭɵ´ əə ůɡɛ Ůůů. Ł ɵŬə ɤɜŬ ůgɔə Ůə ɟ ɜɛ ɤɜɵ ůɡɛ Ůůɛ ´ Ÿɜɤ ůůɡɜ Ůɟ ɜɵɛ ɔɟ Ůɛ ɛə ə ɡ ɛŰŰŰŰï ɵɟ Ÿ Ůɜ ɦɡ ůɡɛ Ůůɛɡ 2 ɛɵɜŸŭůɡ ŭŬə ɵŸ. ɟ ɡŰə ɡ ŭɵ´ əə Ůɟ ɛɡɜŬůŰ ŭɡɛ ɵɛɡɟ ɔŬů ŭgůə ɵəɵŬůɡ. (Gallardo, 2003) ɟ ɜŰŰï ɵɟ ɵə Ÿ ɛ Ů Ůɡ ɛ ɤɡɵ ŭɵ ŭɜŭŬůə ŬəɵŬɡ ůŰɡɜ Ł ə ə Ÿŭ Ů[17] ə ɡɟ ɵŬɟ ɵŬů Ůɛ ŭŬůə ŬəɵəŬɜə ŬɟŬ ɵə ɦ ɛɵɜŰŰ (Tzekaki, Sakonidis & Kaldrimidou, 2003), Ůɛ ɵ´ ɵɵ ə Ůdůů Ÿ Ůɡ ŭɜŭŬůə ŬəɵŬ ə Ůɜ Ůɡ ɛ Ÿdɡůdɡ ŭï ɵ ɜŬɤɟ ůŰɤɡ ŭɵŰŭɜ ŬůdůŰ, ůŬůŰɜŰdŰůdɡ ɛ Ů Ůɡ ɵŭɡɔdůŰ Ůɛɡ Ů ŭŬůə ŬəɵɔŬɟ ɵə ɦ ůŰɜŰɛï ɵůŰɜŰɛï Ůɛɡ, ůï ɛ ŭɤ ɜŬ ɛ Ů Ůɡ ɵ´ ɵdůŰ Ůɛ ůɵəŬůɛ ´ ɟ ɤ´ Ůɜ ɜŬ Ůɛɜ Ů ɛ Ůdɡ Ůɛ ə Ůɜ Ůɟ ɜɵɛ ɦ, ɵɵɜɤ ɜɵə Ůɜ Ůɟ ɜɵɛ ɦ ə Ůɜ ɦɜɤ ɛ Ů Ůɜɵɛ ɦ.

Ł ɜ ŭɟ Ůůɟ ɜɦ Ůɡ Ů Ÿ´ ɵɡ Ů ɜɵɔɵɜ Ů Ů ɦ Ůɛɡɡ ə Ůdɡɔɵɡ Ůɤɜ Ůɤɜ ɤ Ůdɡ ɛ Ů Ůɜ ɛ Ů Ů ɜdůɛɵɡ Ůɦ ɜŬ ´ ɟ ɵů´ Ůdɵï ɜ ɜŬ Ůɜ Ůɜɛ Ů Ůɤ´ ůɵɡ ɜ Ů Ů ɔɜɤ ůůɜ Ů ɜɵɵ ůgůɡ ɛ Ů Ůɜ ɛ Ů. Ł ɜ ůɡ ɛ Ůɜ Ůɜ ɦ, ɤɜ Ůɡ ŭŸůə Ůɜɵɡ Ůɤɜ ɤ Ůdɡ ɛ Ů Ůɜ ɦ Ůɜ ɵɵ ɛ Ůdɡ Ůɤɜ Ůɛɡ ɤɵɛɡɜ ɛŭůɡ ə Ÿ ɵɵ Ůůɡ ɔɜɵ ůůɜ Ůɡ ɔɵŬ ɵɟ ůůɜ ɔɵŬ ɵɟ ůůɜ Ů ɦ ´ ɟ ɵdɔɵï ɛ Ůɜ Ůɡ Ů Ÿɜůɡ ɛ Ůɜ Ůɡ´ ɵɟ Ůůɜ Ůə´ Ůŭůůůůɡ. ¢ ´ ɟ ɵɦ´ Ÿɟ ɵɵůŬ ɔɜɵ ůůɡ ɛ´ ɵɟ Ůů

[17] ȳ´ ɤ ɡdŰŬɜŬə ůɵɵɛ Ů´ Ůɟ Ůɜ Ůɟ ɤ ůŰɛ 3ª ə ůíŸəŬɜɜ

´ɞɘɚɣɠ űɞɟɣɠ ɜǓ Ǔ ɞǗŮɚɣůŮɚ ǓɜǓůǗǗɚǗɚɧ ´ǓɟŶɔɞɜǗǗ ůǗɖɜ Ǔ ɧɚǗɖůɖ ɘǓɚ ɘǓǗǗɜɧɖůɖ ɛɘǓɠɣɜɜɞɘǓɠ, Ůɚůɚ Ŷ ůǗǗ ɀ Ǔɖɖɛ ǓǗɚ Ŷ.

ɇ Ǔ Ǔ ɞǗŮɚɣůɛ ǓǗǗ Ǔɟ Ǘɡɜɩ ɜ ɛŮɚŶɚɖɠ ɘɚɶǓɚǓɠ, ɧ´ɤɠɞɘ CSMS ɘǓɚ SIMS[18], ŭǗɑɜɞɡɜ ɧǗɚ ɞɘ ´ɟŶɜǓɚɠ ɛŮǓɟɜɖǗɚɞɨɠ Ǔɟɘɖɛɞɨɠ Ǔ ɞůǗǗɖŮɟɞ´ɞɛɨɜ Ǔɚɧɛɖ ´Ůɟɘůůɧǘǘɟɞ Ǘɚɠ ɘǓɖɘŮɟɤɛɣɜŮɠ ǓɜǗɚɞɫŮɠ ´ɞɡ ɣɑɞɡɜ ɞɘ ɛǓɖɖǗɣɠ ɔɘǓ Ǘɛ ɜɧɖɛǓ Ǘɤɜ Ǔɟɘɖɛɖǘɚɩ ɜ ´ɟŶɜǓɤɜ, Ǘɗɞɨ ɛŮǓɡǘɣɠ:

- ¢ ´ɟɧůɖǓůɖ ɛ´ɞɟŮɘɜǓ´ɟɞɘǓɚǓŮɚŶǗǗɤ ůɖ
- ¢ ǓɗǓɡɟŮɘɖ ɛ´ɞɟŮɘɜǓ´ɟɞɘǓɚǓǓɨɜɖůɖ
- Ƀ ´ɞɘɚǓ ɚǓůɘǓůɛɧɠ ɛ´ɞɟŮɘɜǓ´ɟɞɘǓɚǓŮɚŶǗǗɤ ůɖ
- ¢ ŭɘǓɡɟŮɘɖ ɛ´ɞɟŮɘɜǓ´ɟɞɘǓɚǓǓɨɜɖůɖ

ɟ ´ɧ Ǘɠ ´Ǔɟ Ǔ Ŷɜɤ ɣɟŮɡɜǓɠ ´ɟɞɘɨ ´ǗŮɚɧǗɚɞɘ ɛǓɖɖǗɣɠ ŭɡůɘɞɘŮɨ ɞɜǗǗɚ ´Ůɟɘůůɧǘǘɟɞ ɜǓ ɘǓǗǗɚŶɗɞɡɜ Ǘɖɜ ǓɗǓɡůɖ ɛŮǗǗɜɨ Ǔɟɜɖǘɚɩ ɜ, Ůɜɩ ǗǗ ´ɞůɞǗŶ Ů ɘǗɡɑɖǓɠ ůǗɛ ɔɛɧɛŮɜɞ ɛŮǗǗɜɨ Ǔɟɜɖǘɚɩ ɜ Ǔɟɘɛɩ ɜ Ůɛǔ ɡɤɖɘɧǗǗǘǓ. Ʉɛ ůɡɔɘŮɚɟɛɣɜǓ, ɞ ɡ´ɞɘɔɘůɛɧɠ Ǘɖɠ ŭɘǓǗɞɟŶɠ (ï 2) ï (ï 5) ɣɔɛŮɛŮ44% Ů ɘǗɡɑɖǓɠ, Ůɜɩ ůǗɜ ɡ´ɞɘɔɘůɛɧ Ǘɡ ɔɛɞɛɣɜɞɡ $\left(-4\right)\cdot\left(-2\right)$ ůɖɛŮɚ ɖɖɘŮ´ɞůɞůǗɧ Ů ɘǗɡɑɖǓɠ76%. (Hart, 1981, p.p. 83 ï 84)

ɄǓɟɧɘɞ ´ɞɡ ŮɛǓɚ´ɛ ŭɨůɘɞɘɞ Ǘɜ ɜɧɖɛǓ Ǘɡ ´ɞɘɚǓ ɚǓůɘǓůɛɞɨ, ɞɘ ɛǓɖɖǗɣɠ ɛŶɚɚɞɜ ɛǓɖǓɛɞɡɜ ´ɛ ŮɨɘɞɘǓ Ǘɜ ɘǓɜɧɜǓ ǒ ɚɖɜ Ů ɑ ´ɚɖɜ ɘŶɜŮ ůɡɜô, ´ǓɟŶ ɗǓɚɚŶɞɤ Ǘɛ ´ɟɧůɖɛɞ Ǘɡ ǓɗǓɟŮǗɣɡ ɘǓ Ǘɡɠ´ɟɞůɖɣǗɤ ô. ɅɜŭɘǓɗɣɟɜɞ Ů ɑůɖɠ ´ǓɞɡůɘŶɜɡɜ ɞɘ Ǔ ɧɤŮɠŮ ´ǓŭǓŮɡɠɚɞɘ ɜ Ǔ ɧ ǗɠɞɩɟŮɠ´ɞɡ ɣɚǓɗǓɜ ɛɣɟɞɠůǗɠůɡɔɚŮɟɛɣɜǓɠɣɟŮɜǓɠ. Ƀɘ Ůɚ´ǓǓǗɡǗɚɞɑ ɡ´ɞůǗɟɑɞɡɜ ɧǗɚ ɞɘ ɛǓɖɖǗɣɠ ɑɟŮŶɞɜǗǗɚ ´ɞɘɚɣɠ Ǔůɘɓůɠ ɘǓɚ

---

18 **CSMS 1981**: Concepts in Secondary Mathematics and Science, **SIMS 1989**: Second International Mathematics Study. ¢ ɣɟǗɡɜǓ Concepts in Secondary Mathematics and Science (**CSMS)** ´ɟǓɛǗǗ´ɞɘɖɖɘŮůǗɖ ɀ . ɑɟǗǗǗɜɖǓ ůǗǗ Ǘɚɖ Ǘɖɠ ŭǓǗǗǗɠ Ǘɔ 1970 ɘǓ ɘɤ ŭɚɞ´ɞɑůǗǗ Ů ɑ ǓǓ ɘǗǗɜɧɖůɖɠ Ǘɤ ɜ ɗǓǗǓɜɩ ɜ ɛǓɖɛǓǗɩ ɜ ɔɜ ůǗɤ ɜ Ǔɧɠ ŭǗɛǗǗɠ 10.000 ɛǓɖɖǗ ɜ ũɡɛɜǓůɞɡ. ɇǓ Ǔ ɞǗŮɚɣůɛ ǓǗǗ ´ɞɡ ɑɟɖůɛɞ´ɞɛůǓɛ Ů ´ǓǓ Ŷɤ ´ɟɞɣɟɑɞɜǗǗɚ Ǔ ɧ Ǘɔ ɗɛɘɚɛ ɛŮ ǗǗ ůɡɜɞɘɚɗŶ Ǔ ɞǗŮɚɣůɛ ǓǗǗ Ǘɖɠ ɣɟǗɡɜǓɠ (Hart, 1981) ¢ ŭɘǗɖɜɗɠ ɣɟǗɡɜǓ Second International Mathematics Study (**SIMS**), ´ɟǓɛǓǗ´ɞɛɖɘŮůǗɠǓɟɑɣɠ Ǘɖɠ ŭǓǓǗǗǗǓɠ Ǘɔ 1980 ɘǓ ɣɚǓɗǓ ɛɣɟɞɠ 20 ɑɟǗɠ. ɀ ŮɚɣǗɖůǗ Ǘɖ ŭɘŭǗůɘǓɚǓ ɘǓ ɛŶɖɖůɖ Ǘɤ ɀ ǓɖɖɛǓǗɚɜɩ ɜ ůǗɖɜ Ǔɟɑɗ ɘǓ ůǗ Ǘɚɛɞɠ Ǘɖɠ ŭǗɡǗǗɟɞɗŶɖɛɘǓɠ Ůɚ´ŭǓǗɡůɖɠ. ɇǓ Ǔ ɞǗŮɚɣůɛ ǓǗǗ ´ɟɞɣɟɑɞɜǗǗɚ Ǔ ɧ ɛɖǓůɑǗǗɚɗ ɣɚŭɞůɖ Ǘɖɠ UNESCO (Robitaille, 1989, p.p. 63)

�y Ynaduda, ovsU 3U U eaUeuegs Ugeyy UsU uUsg´ y Ysusg. TUdi g U audg, hUs esEUdUyg uUs Ususuiyy esUUs ovsU Ues shdEU Uxs ´ y Ysuxs EUUUsi Uy sdUsai s aUs dUUsai s Uy sdEi s. (Ux EUtudg, 2009).

ş UEbYsesUUg g´ hyd Ues ovUsesh g hUs esEUdUyg uUd usuUuaUsdU Uxs ´ y Ysuxs EU y dUesi g Uy sdEesi g UsUsEUxs´ aesgs EdU EUsYsd Usseseaeovsae Usaus[19], ´esg UuiesY Ues shdEU Uxs Uy sdEdUsai s ´ y Ysuxs, h´x g eud UsUuiyy UEU´ Ud g´ y hudUudg´esg E´esU un sU ´ y esaUsun Usnyuuxud, Udg UuiUgUudg´esg E´esU un sU ´ y esaUsun Usi sdud, Uesg ´ esasU asUuEUuEesi ´esg E´esU un sU ´ y esaUsun Usnyuuxud asUs Udg usUgUudg´esg E´esU un sU ´ y esaUsun Usi sdud, UusUs UsUEUsh EUsUg esugunaesdUg Uesgg uGUsasY EUUes sasUsh sU ő´ adsU U a´ adsU unesi UUs EUugsâ. qpgunaesdUg´esg asU UUesi s Ush EUasUs EUUY Ues ´ yy UgUd g EUdUsasdUg Uesgg x ed. ¢ Usseseaeovsae Usaus[20] ´esg U UsUUuUUsovsU Ud s g´ yy bUud Uxs ugunaesu s Uesg EUdUe usUs UusUs Usi aesesU U esUUgGdUusUs e aUseg e usYunaUsegg usUs yGUs asUUUseaunUsUs Ug´ UyU Ysx ugunaesdUg e Us g´ eunUyaUs Ud s ´ UyU Ysx Y eyd Uxs asUdovdUi s U h Ug´ y esUsUuiyy esUUs ovsU Ues shdEU Uxs ´ y Ysuxs». Ebs EUdUyg, aes´ hs Usesegdesi s Uesgg asUsh sUg ´esg yGesgs U esEsdEesUi unUs yGesgs Yaaes Uyh´e sU Usyvsesgs UU U eUUsyunEUUY Uesgg. y gUh bybUsU yy GUUUs unU EUUdUsd EUUd s ´ UsuUvxvsae asUs usuUsUsae Y eyd hUs unesgg EUdUyg´ y y´ Us sU usesUUs usaaUsuUg UunUsUsUg vsU sU Usyvesgs UU U eUUsyunEUUY Uesgg asUs sU U euUiovUUs d EdGUsunUsae Usa EYdUd UsasyvdEx s. (EUsuUvxvsah Esunsi Ues, 2002, u.u.368 ï 369)

¢ asUUUshdUd Uxs Uy sdUsai s Uy sdEi s UusUs U h Ud uisud Udg usisuaesd, xunhuesunUsEsh y hasesU´ UesUsd usuUsUsae ´ y esunvvsud, d e´ esdU unesgy U E´ esUun sU bUunesUUs unU´ Uy UuiUmesUUU U h Ud asUdEUysh Udd, Gx y gh EXg Ug h sU UusUs esasUsh sU U g´ esunaYesUUs Ues ovUsesh g hUs UU z UdEUsUsaY usUs UusUs EdU ugunae Ununae. qpUs ´ y´ Us sU g´ esunaYesUUs Ues ovUsesh g hUs UU z UdEUsUsaY usUs UusUs EdU ugunah unUsh EUsesUs Ues sasUsh sU ()()=+−⋅− . UU eUUs usuUsUsaY aYdesg asUs UsUy sbyg sU

[19] dsay´ Ug´ esunEUx und s, uUd´ Uy Yy u Uuiesi §1.1.1

[20] y gUe d Usseseaeovsae Usaus Ues sesUUs U h Ues u´ egusUes uivsy esesi EUdUsUsah, Ues s Felix Klein. (bay´ U§5.2)

Ů ꟼ Ǔ̊ɞɢgɛ Ů ůŮ ´ɟ Ŭbɛ ŬŰǓ̊ ɘƳ ɛɞɜŰǂɚŬ, ɧ´ɤ ʛ ɢɟɏɢʛ ɘŬɜ ɘɏɟ üɢʛ, ŰŰ ɞ´ɞdŬ ŰŰ̊ɚɘƳ ɞüdɔɞɨ ɜ Űɛgʛ ɛŬdɖŰɏʛ ůŮɛ dŬɣ Ǔ̊güɐ ɘŬɜ ɘŬɜ dŬůɛɏɜd ůgɚɚɞɔɘůŰǓ̊ɐ.

ɆŰɛ Ƴɉ dɉɞ Űdʛ Rapke (2009)[21], ɡ´ɞůŰdɟɶŮŰŰɜ d ɢɟɐůd Űdʛ Ů ꟼ Ǔ̊ɉ ɘůŰǓ̊ɐɐʛ ɘüɧŰdŰŰʛ ɔɘŬ Űdɜ Ǔ̊ɐɔdůd Űɛg ɘŬɜɧɜŬ Űɛg ´ɞɚɚŬ ɘŬůɘŬůɛɞɨ üɨɞ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɩ ɜ Ǔ̊ɉ ɘdɛɩ ɜ ɘŬɜ´ɩ ʛ ɞɘ ɘŬɜɞɜɘɧŰdŰŰʛ (patterns), ɧ´ɤ ʛ Ŭgŭɏʛ ´ɞg ɢɟdůꟼɞ´ɞdůŮɞ Freudenthal Űɛ 1973, ɛ´ɞɟɞɨ ɜ ɜŬ ɞüdɔɐůɞgɜ ůŮɛ dŬɣ Ǔ̊güɐ ůgɚɚɞɔɘůŰǓ̊ɐ (pseudoreasonig), ´ɞg ŰŰ̊ɚɘƳ dŬ ´ɟɞɘŬɏůŮ̊ ůɨ ɔɢgůd ůŰɛgʛ ɛŬdɖŰɏʛ ɘŬɜ ůɷɞgɟŬ dŬ Ŭ ɞügɜŬɛɩ ůŮ̊ Űɛ ɘɨɟɞʛ Űɤ ɜ ɀ Ŭdɖɛ ŬŰǓ̊ɘɩ ɜ, ɤ ʛ ɛ dŬ Ů ɘůŰɐ ɛ d Űdʛ Ŭɜɟ ɗ Ǔ̊Ŭʛ ůŰŰ ɛ ƳŰŬ Űɛgʛ.

2.2 ɗŬůɘɏʛ ɧɣ Ǔ̊ʛ Űɛg ´ɟɞɓɚɐɛ ŬŰɛʛ Űdʛ ɘŬŰŰɜɧdůdʛ Űɤ ɜ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɩ ɜ Ǔ̊ɉ ɘdɛɩ ɜ

Ōɢɢgɜ üɘǓ̊ɜŬɢdŮɑ Ǔ̊ɉ ɘŰŰɏʛ ɏɟ Ǔ̊gɜǓ̊ʛ Űdʛ üɘüŬɘŰǓ̊ɐɐʛ Űɤ ɜ ɀ Ŭdɖɛ ŬŰǓ̊ɘɩ ɜ, ´ɞg ŬɜŬüǓ̊ɘɜɨ ɞgɜ ŰŰ ´ɟɞɓɚɐɛ ŬŰŰ ɘŬŰŰɜɧdůdʛ Űɤ ɜ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɩ ɜ Ǔ̊ɉ ɘdɛɩ ɜ Ŭ ɧ Űɛgʛ ɛ ŬdɖŰɏʛ. ɇ Ŭ´ɟɞɓɚɐɛ ŬŰŰ ŬgŰƳ ůgɜɞɣ ɶɞɜŰŰɜ ůŰŰ Ǔ̊ɏůůǓ̊ Ŭ Ů ɧɛ Ǔ̊ɜŬ Ǔ̊ɤ Űɐ ɛ ŬŰŰ:

1. ɇ ɘůdɛ ŬɞǓ̊ ŬüŬɉ ɩ ɏɜŬɜ Ǔ̊ɉ ɘdɛ ɧ Ŭ ɧ ɏɜŬ ɛ ɘɟ ɧŰǓ̊ɧ Űɛg;
2. ɇ ɘůdɛ ŬɞǓ̊ ŬüŬɉ ɩ ɏɜŬɜ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɧ Ǔ̊ɉ ɘdɛ ɧ;
3. ɇ ɘůdɛ ŬɞǓ̊ ´Ǔ̊gɜɤ ɘƳŰǓ̊ «Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɏʛ űɞɟɏʛ»;
4. ũɘŬŰɑ «ɛǓ̊ɛɜ űɞɟɏʛ Űɛ ɛǓ̊ɛɜ» ɘƳɜǓ̊ ůgɜ;

(Baldino, 1997, ů. 6)

ɟ ɜ ɛ´ɞɟɞɨ ɜ ɞɘ ɛŬdɖŰɏʛ ɛŬgɜ Ŭ Ŭ ŬɜŰɐůɞgɜ ůŮ ŬgŰƳ ŰŰ Ǔ̊ɤ Űɐ ɛ ŬŰŰ, ŰɧŰŰ ɏɢɢgɜ ůŮ ɛǓ̊Ƴɚɞ ɓŬdɛ ɧ ɘŬŰŰɜƳɓǓ̊ɘŬɜ ɘŬŰŰɜ Űɐ ůǓ̊ Űɛ ɜɧdɛŬ Űɤ ɜ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɩ ɜ Ǔ̊ɉ ɘdɛɩ ɜ.

Ƀ ɘŬɜɧɜŬʛ Űɤ ɜ ´ɟɞůɐɛɤ ɜ ´Ǔ̊ɉ ŬɛɏɜǓ̊ ɏɜŬ ɘɨɟɶ ´ɟɧɓɚdɛ Ŭ ɔɘŬ Űd üɘüŬůɘŬɚdŬ. Ƀɘ ŭgůɘɞɚdŮʛ ůɢŮŰǓ̊ɘƳ ɛ ŮŰd «ůɨ ɚɚdɣ d» Űɤ ɜ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɩ ɜ Ǔ̊ɉ ɘdɛɩ ɜ üŮɜ ǓɞŬɜ ůɨ ɔɢɟɞɜŮʛ. ɆŮ ɛ dŬ ɘůŰɛɟɘɐ ɏɟ Ǔ̊gɜŬ, ɞ Glaeser (1981) ´Ǔ̊ɘɟ Ƴü Ǔ̊ Űɛʛ ŰŰɚŬɜŰŰɨ ůǓ̊ʛ ɘŬ Ŭ ɞɟdɶʛ (vacillations and perplexities) Ŭ ɧ ůdɛ ŬŰǓ̊ɘɨʛ ɛŬdɛ ŬŰǓ̊ɘɨʛ Űɛg ´Ǔ̊ɉ Ǔ̊ɚdɧɜŰɛʛ, ɞɘ ɞ´ɞɶɘ ´Ǔ̊ɉɧɚɞ ´ɞg ɢɟdůꟼɞ´ɞɘɨ ůŬɜ Űɛgʛ Ǔ̊ɉ ɜdŰǓ̊ɘɨʛ Ǔ̊ɉ ɘdɛɨʛ ůŰdɜ ɏɟ Ǔ̊gɜƳ Űɛgʛ, ɏɣ ŬɢɜŬɜ ɛƳŰŰɘŬ ɔɘŬ ɛ dŬ ´Ǔ̊ůŰǓ̊ɐɐ Ǔ̊ɐɔdůd Űɛg ɘŬɜɧɜŬ Űɤ ɜ ´ɟɞůɐɛɤ ɜ. ¢

---

[21] ɇ ɞ ɞ´ɞɶ dŬŬɜŬɨ ůɞgɛŮüɘǓ̊ɞüɘƳ ůŰɛ 4ɞ ɘŰɑƳɚŬɛ

[illegible] (Thompson & Dreyfus, 1988), [illegible]. (Baldino, 1997) [illegible] Hankel [illegible] 19[illegible] [illegible].

2.3 [illegible]

[illegible] 2007, [illegible] (projects). [illegible]:

1. [illegible].
2. [illegible] «[illegible]» [illegible].
3. [illegible].
4. [illegible].

([illegible], 2006)

[illegible] (2011), [illegible]. ([illegible] «[illegible]» [illegible], 2011, [illegible].10)

[illegible]

[illegible]:

1. [illegible]
2. [illegible].
3. [illegible].

[illegible] Pascal [illegible].

[illegible]:

«[illegible] $(+3)+(-3)$;», [illegible] Tim [illegible] 3 [illegible] + 3, [illegible]. [illegible] Nico [illegible] + 3, [illegible] +3 + 0 = + 3 ([illegible] 3) [illegible] – 3 [illegible]. (Hefendehl – Hebeker, 1991)

[illegible]

Ţ Ůří Ÿəŭŭ 3ɵ qpəŭŭůə ŭəɒŭ ŭŕɤ ɜ ŭţ ɜdţŭəı ɜ ŭţ ɜdɛı ɜ ůŭţɜ Áəə-Ÿŭŭŭŭŭ ůı ɛ ůŕɤ ɜŭ ɛ ůŭŭŭ ŭɜŭəgŭəŸ´ţ ɵɔţ Ÿɛ ɛ ŭŭŭ ə ŭɜ ŭŭ ůɵɜəɜəŸ ƀɜƀəɒŭ

3.1 ŭůɜəɜɤŭ ŭţ ɜɤŭ ŭţŭ ɛ ŭɒţɛ ŭŭəɒɤŭ ůə´ ŭɒŭůůůţŭůůţɜ Áəə-Ÿŭŭŭ

Ƀəƀŭůəɜɤŭ ŭţ ɜɤŭ ɔɜŭ ŭţ ŭəŭůə ŭəɒŭ ŭŕɤ ɜ ɤ ŭɒţɛ ŭŭəı ɜ, ƀ´ɤŭ ŭɜŭəı ɜɜŭŭə ůŭɵ ƀɜƀəɒɵ ŭɵg əŭɒţɔţŭŕ ŭŕɤ ɜ ɤ ŭɒţɛ ŭŭəı ɜ (ɒƀŭɜŭɵgəŸəţŭ, Ţ ŭəəɜƀŸŭ, ɤ ŭţəŸəţŭ & ŭ ůţ ůɜŭɵɜŭ, 2006) ůɵɜŭ:

1. ¢ ɔɜı ůţ ŭůɜ ɛ ůŭŭŭŭɤţ ůŭŭə ŭ ƀ ŭɵ ŭŸůəŭəɵ ůɵɜ ɛ ŭɒţŭŕ. ţ ɜŭɒůŭŭţ ɔɜı ůţ əŭəɵ ɛ ŭɒţŭŕɵg ůɵɜŭə ɤɜɜɵɜůg ŭəəţəɵůgɜŭůƀɛ ůɜůg. Ƀ ɛ ŭɒţŭŕɵg ůgɛ ɛ ůŭɤɵůə ůɜůţɔŸ ůŭŕɜ ɵəɵɵŭƀɛ ţůůţ ï ŭɜŸ ŭgɜţ ŭŕţg ɔɜı ůţg ŭɵg.

Ţɤţɵŭůɵɵɜɜŭə, ŭţəŭŭɤ, «ůɜůţɔţŭəɵɤg ɛɤɒɵŭɵəɵ» ɛŸɒţůţg ɛů ɛŭɒţůəŭəɵɤg ŭţ ŭůŭŕţɤƀŭŕţŭůg´ɵg´ůţəŭɛƀŸɜɵgɜ ůţůgɜţŭəɵɤg ůţɔŭůůg, ůɵgůţ´ţɵƀəţɛŸŭŕɜ, ůţɔŭůůŭ ůů ɛəɵţɤg ɵɛŸŭůg ɛŭɒţŭŕɜ. ¢ɤŭɵəůg ŭţ ŭůŭŕţɤƀŭŕţŭůg ɛ´ɵţůůɜ ŭ ůɵɜŭ ´ţɵůůəŭəɵŸ ůɵůůəɵŭůɛɤɜŭ ´ţɵƀəɛŭŭŭ ´ɵg ɵŭţɔɵıɜ ŭɵgg ɛŭɒţŭŕɤg ɜŭ əŸɜɵgɜ g´ɵɒɤůůgg əŭəɵ ůəɵůůůg, ɜŭ ůəɤɔɵgɜ ŭgg g´ɵɒɤůůgg ŭɵgg, ɜŭ ´ŭţŭŕţɵıɜ əŭəɵ ɜŭ ŭɜŭ ŭŕůůɵgɜ ɤɜŭɛɵɜŭŕɤəɵ, ɜŭŭəɵəɵgɒɵıɜ ´ţɵůůɔɵůəɵɤg əŭəɵŭţɤɒţɛŭəɵɤg ɛůŭƀŭɵgg, ɜŭ «ɛŭŭŭţŸɛɵgɜ» ɤɜŭɛɵŭŕɤəɵ ŭ ƀ ɤɜŭŭɜŭ ŭţŭůŭŭůəŭəƀ ůı ůŭţɛŭůůɤɜŭŸəəɵ.

2. ¢ɵ ɒţŭŕı ɛůɜɵ ůɵɜŭəţ ŭɜŸ ŭgɜţ ɛɤŭţ ůɜůţɔţŭəɵɤg əŭəɵ ůţůgɜţŭəɵɤg ůŭŸůţg ŭŕɤ ɜ ɛŭɒţŭŕɜ´ţɵg ŭŕŭţ ɜŭɒţɛŸ.

ɤ ůəůŭŕɜ ŭŕŭţg ɛɒŭɤůŭţůɵ´ţəɵɛ´ţɔɵɛ, ƀ´ɤŭ ɔɤŭ´ŭţŸŭůəɵɛŭɤɜŭəůɛůɜɵ ŭƀ ŭŕŭ ¢ŭŕŭɵɜůŭ ŭŕɵg Ágəəůŭŭţ, ɵɵ ɛŭɒţŭŕţg ɜɤı ţɵɵg ůŭɜ ɛəɵţɵı ůţůgɜţŭŕţg əŭəɵ ŭɵəŭŕı ɜ ɛɒŭ´ɤɵ ůɜůţɔţŭəɵɛ ůŭŸůţ ŭɤɜŭɜůŭŕɤ ɛɒŭ´ɤɵ ůɜůţɔţŭəɵɛ ůŭŸůţ ŭɤɜŭɜůŭŕɤ.

3. ¢ɵ Ţɤƀəţɛŭůɵɜŭəţ «´ţɔɛ» ɜɵɛɛɛŭŕɵg ŭţg ɛŭɒţɛŭŕɵɛɛg ɔɜı ůţg. Ō ɛŭŭůůţ ůŭţɜ ůɵɜůůţ´ţɵƀəţɛŸŭŕɜ əŭəɵ ƀɵɵůŭţɜ ůɜɤŭŕůůţ ŭƀ ŭɵgg əŭɒţɔţŭŕɤg ŭţg ůɜɛŸɒţůţg ŭəɔɵţɛɤɜ, əŭɜƀɜɤɜ əŭəɵŭŕ´ɤɜ ŭƀ ŭɵgg ɛŭɒţŭŕɤg.

Ƀəůəɵ´ɵɒŭţg ɛŭɒţɛŭŕɵɛɛg ůə´ ŭɒŭůůůţg (ŭ ÁŢ 303, 2003, ůůů.3983 ï 4038) ´ɵg ůɵɜŭɜ əɵɜŭŕəůɵůŕɵəŸɛůŭţ ŭɤŭŕůəŭəɵŭŕɤ ɜ ɤ ŭɒţɛŭŕɵɛ ůŭɵ ŭgɛɜŸůɤɜ ůɵɜŭə:

- ¢ ŬɜŸŭŮŝɜɔd ŬŰłɡ ŮŭŬɟɛɢůœɛɦŬŰłŰŬŬɡ əŬɔ ŬŰłɡ ´ɟŬɔŬŝəɛɡ ɢɟɛůɖłɡ ŬŸɜ ɀ ŬŰłɖɛŬŬŝəı ɜ ŬŬɦ ŬŰłɜ ŬɟɢŬŬɦŬŰłŰŬ ɤɡ ŬŝɡɛɟɟŬŬ, ŬŰɦůɢ ůŬŝɡ ɖŬŬŝəɟɡ ɦůɢ əŬɔůŬŝɡŬɜɖɟɤ´ ůŬŝəɟɡ əŬɔəɢɜɤɜɢɜɢɜɢəɟɡŬůŬŰɛɟŬŬ.
- ¢ɛɜɢœŬŬŬɔɖ ůəŬŰłŬɛŬŬŝəɦŬŰłŰŬ əŬɔɖ ůŬŝɟɖŬŬŸɜ ɀ ŬŰłɖɛŬŬŝəı ɜ, ɤɡ ɟɤɜŬ´ůŰıœ´əɢi ůœ ůŬůŭɤůɡɔəŬŬŰł ůŭŬŬŝəɛ´ɟɢůɤɔɔůɖɛəŬɡɟɤɜɜɢəŬɡ
- ¢ əŬəəɟɤɔŬŝŬ ɖŬŬŝəɛɡ ůŬŸůɖɡŬ ŬɟɤɜŬŬŝůŬŬɀ ŬŰłɖɛŬŬŝəŸ, ɢɤɟɤɡŬŰłɜ ɢ´ɢɖŬɖ əŬŬŬɜɦɖůɖ ŬŸɜ ɛŬŰłɖɛŬŬŝəı ɜ Ŭŝɜɢɢəı ɜ əŬɔ´ɟɢŬŸůŬŸɜ ŬŬɢbŬœŬŝ ŬŝŬɟŬŬŝəŸ ůɡůŬɢŬɟɛɡ.

¢ ůŭŬŬəŬəɖŬ ŬŸɜ ɀ ŬŰłɖɛŬŬŝəı ɜ ŬŝŬŸůůŬŬŬɔ ůŬŝɢɡɡ ɔŬŝəɦŬŬɟɢɡɡ ůəɢ´ɢi ɡ ŬŰłɡ ŬŝŬ´ŬŭŬůůɖɡ əŬɔůŬŝɢŬŝŬŝůŬłɜ ŬɜŸ ŬŭɜŰłɡ´ɟɢůŸ´əɦŬŰłŰŬɡ Ŭŝɢɡ ɛŬŰłɖŬŝ əŬɔůŬłɜ ŬŝŬŸəgůůd, ůŬłɜ ŬŭŬŬɡůůd, ůŬłɜ ŬŭŬŬɡůůd, ůŬłɜ ɔŬŝœŬůůd, ůŬłɜ ŬŭŬɟɛɢɔɛ, ůŬłɜ əɟəŬŝəɛ əŬɔ ůŬŝɡ əɢɔəəɤɡ ŭəŬɟɔŬůɖŬɡ əŬɔ ŬŝŬŭŬŸůəɢɡɜ ɜŬ ŭəŬŬŬ´ı ɜŬŝ Ŭŝɡ ůəɤŸŬŝɡ ŬŝɡɛŬ ůŬŭɛɜŬŝŬ, ŬŸɜɖ, əŬɔɤɜəɦŬŰłŰŬ əŬɔ ŬəɟɖŬŝŬ. ɟ ɜŬ Ŭŭůůɛɡɜ ŬłŬ´ŬɟŬŰłŬɟɖŬəɦŬŰłŰŬ, ŬłŬ´ɟɛůɤɛɛ, ŬłŬ´Ŭŝɛɛɜɛ, ŬłŬ´ŬəŬŝŬɟɖ ůəɤŸɖ. Ɛəɛ ŭŬɖɔɖŬɟ´ɛɡ ŭœɛɜŬŰłŬ ůŬŝɡɡ əŬɖɖɔɖŬŸɡ´ůɡɜɛŸœɛɜŬŰłŬ ůŬŝ ɦŬŝůŬəŸɖŬı ɟŬŭŬŭəŬəɖŬ´ŬŸɜ ɀ ŬŰłɖɛŬŬŝəı ɜ´ɟɤŸ´ŬŝɜŬ´ɡɟŬŝůɛŬŝŬɟɛɢŬŬ´ůŬŝŬŸůůɛɜŬŬ´ůŬŝ ůŬŝɡ´ɛɡ ŬŸɤəŬłůŬŝ. ŬŸŸɖŬŭŬŭəŬəɖŬ´ɟŸ´ŬŝɜŬ´ɟɛɢɤɟůŬŬ ɦŬŝ ůŬŝ ůŬŝ əŬɜɛɢɟŸɜ, ŬŸɦŬŝ ůɡɔəŬŝɟŸɜŸɜɛ ůŬŝ ŬŭɖɟŸɖɛŸɜɛ əŬɔŬŸɦŬŝ ŬŸəɦůŬŝ ůŭɜɖŬŝ.

¢ɖɜ´ŬŸɟœŭɛ´ɛɡ ŸŸɟɛɤŬŬɖ ůɡɔɔɟŬŭŭɛ ŬŸɜ ɜŸɤɜ ɓŝəɔɤɜ (ŬŝɡŸ 2007) ɛ´ɟɦŬŬŸɟɛɡŬŝɡŸ ŸŬŝŭŬɔɤɔəɛi ŸɜůŬŝŬŝi ŬŝɡŸ (ɟəŬɛı ŬłŬɡ, 2004) ŬɜŸŭŬŸŬŬɦŬŝ ŬŝŬŬ´ŬŝŭŬŸůŬŝəɦ ɛŬŸɡ ůŭůŬłɛŬ ŭŬŝ ɛ´ɛɟŬůɜ ŬŬ ůɡɜŬŝůŬŝ ŬŬ´ɛɟŬŬŬŬɔ ůŬŝɡ ɔŬŝəɤɡ ůɡɜŬŬŬɔɛŸɜŬɡ ŬŝɡŸ´ŬŸŬŭɛůəŬəi ɔɜɤůœəŬŝŬŸɟəɛi ɛŬŸůŬŝŬŝŬŸůůŬŝɡ ŬŝɡŸ´ɛɡ ŬŸəŬłůŬŝ. ŬŸŸɖŬŭŬŭəŬəɖŬ´ŬŸɟŸ´ŬŝŬŸɟɛɤŸɟůŬŬ ŬŝŬŸəɦŬŝůŬŝ ůŭɜŬŝ´ŬŝŬŸɟɛɤŸɟůŬŬ ŬŝŬŸəɦŬŝůŬŝ ůŭɜŬŝ. ŬŸŸɖŬŭŬŭəŬəɖŬ´ŬŸɟŸ´ŬŝŬŸɟɛɤŸɟůŬŬ ŬŝŬŸəɦŬŝůŬŝ ůŭɜŬŝ

3.2 Ð ŭdɔ̆důɡɔ̆ɔ̆ŬŬd ŭɔ̆ŭŬůə Ŭəɔ̆dŬ ŬŬɤ ɜ ɟ dŬŬ ɜ Ŭɟɔdɛ ı ɜ ůŬŬɀ Ŭdɗdɛ ŬŬəɔ̆ ŸŬdɡ ɟ õ ɛ Ÿɜɔdɡ ũ gɛ ɜ ŬůŒg

ɋɔɔɜ ŬŬə ɜɔ ɜ ŭdɔ̆důɡɔ̆ɔ̆ŬŬd ŭɔ̆ŭŬůə Ŭəɔ̆dŬ ŬŬɤ ɜ ɟ dŬŬ ɜ Ŭɟɔdɛ ı ɜ ůŬŬɀ Ŭdɗdɛ ŬŬəɔ̆ ŸŬdɡ ɟ õ ŬŸɜɔdɡ ŬŒg ũ gɛ ɜ ŬůŒg ɔ̆ɔ̆ŬŒ ůɡɔ̆ə̆ə̆ə̆ ɟ ɤŬŒɡ 2012 ï 2013 (ůŬə̆. 5 əŬə̆6):

ɛ ´ŬɟɔůŒɟɛŬə̆ɛ ŬŒg əŬŬŬəŬŒg 7 ůɜŬə̆ Ŭə̆ɛə̆ə̆ə̆ɟɛg ɜɤɛ ɔ̆ɔ̆Ŭ ŬŒggɡ ɛŬŬdɗŬɤɡ, Ŭə̆ əŬə̆ g´ŸɟɡŬə̆ ŸŬɡ´d ɔ̆ɜı ůd ŬŸ ɜ ŬɟɜdŬə̆ı ɜ Ŭɟɔdɛ ı ɜ (dŬɟɛɛəɟŬůdŬ əŬə̆.) ´ɛg ɛ´ɛɟůı ɜŬ ŬŒɜɛ´ɛɔdɗůı

§7.1 ***ŪŬŬə̆ɛɛə əŬə̆ ŬɟɜdŬə̆ɛɛə (ɟ dŬŒə) ï ¢ ŬɡdŬůŬ ŬŸ ɜ ɟ dŬŬ ɜ ï ɛ ŬŬŒdɛɤɜdɗ ůdɛŬůɛg (?Ū ůɜŬŬŬůdɛɛi ɜ*** *2* ***ı ɟ ŬɡŬ)*** *Ɨ ŬŬɛ dŬ Ÿəəd ɛ ŭdɔ̆dŬ.*

§7.2 ***ɟ ´ɡəɡŬŬ ŬŒɛɛ ɟ dŬŒi ï ɟ ɜŬůdŬŬŒə ɟ dŬŒəaï Ɛi ɔ̆ɔ̆ɟ sůd ɟ dŬŬ ɜ*** *(2* ***ı ɟ ŬɡŬ)*** *:ɛ ɛ ɔ̆ŬŒɛɜɡɡŬŬ ɛ ŬɜŬůdŬŬŒgŬŒg –2 ůɜŬə̆ɛ 2 aůɤ gŬůɜŬə̆ ´ɟ ɛ ŭŬɜɤɡŬ ɔ̆ɔ̆Ŭ ŬŒggɡ ɛŬŬdɗŬɤɡ, Ŭəəə̆ŸŬŬə̆ ůgɛ bŬɜŬə̆ ŬŒ aůɜɛ ɔ̆ɔ̆Ŭ ŬŒɜ ŬɜŬůdŬŬŒ ŬŒɡŬ Ŭɟɔdɛɛi Ŭ Ɛ ŬŬŒɜ əŬŬŬŒdgɜůd ŬgŬŬŒ aůɤ gŬůɜŬə̆ Ŭ ɛ ŬŬə̆ŬůɛŬŬə̆ɛ d ɛɟɛůd ŬŬɡŬ ŬgdŬůŬŬɡŬŬ ŬŸ ɜ Ŭɟɔdɛ ı ɜ, ɡ´ɛg ɛ Ŭ ɛ´ɛɟůı ɜŬ ŬŒ´ɛdŬŬŒdŬı ŬŒůɛ ůŬə̆ɜŸŬ Ŭ ɡ ŬŒ 0 (Ŭə̆ ɛ Ŭ dŬŬə̆ɡɡŒ), ɡůɛ əŬə̆ ŬɟɔůŬŬŒŸŬŒg (Ŭə̆ Ŭ ŬɟɜdŬə̆ɡŒ). Ŏ ŬŬə̆, ɛ´ɛɟůı ɜŬ Ŭə̆ŬŬŬə̆ɛdŬı ŬŒ ɔ̆ŬŬɛɜɡɡŬŬ ŬŸ ůŬŒɜ ɤəŬɟŬůd – α ŬŒ «–» ůdəı ɜŬə̆ ŬŒɜ Ŭə̆ŬůdŬŬŒ ŬŒg Ŭ, Ŭəəə̆ŸŬɡɔə̆ŬŒ ´ɟ ɡůdɛɛ.*

§7.3 ***Ŭɟ ɡůdŬůd ɟ dŬŬ ɜ*** *(2* ***ı ɟ ŬɡŬ):*** *ůɜŬ ŬŒɜ ŬəůŬŬɤ ɔ̆ɛ ŬŒg ´ɟ ɡůdŬůdŒg dŬŬə̆ı ɜ əŬə̆ ŬɟɜdŬə̆ı ɜ Ŭɟɔdɛ ı ɜ, ´ŬɟŸəəd əŬ ɛ ŬŬŒ ůŬɟ ŬůŬŬɟ ɡŬŬŒg bɡbəɛg ŬŒg ɛŬŬdɗŬŒ ɛ´ɛɟůı ɜŬ ɔ̆ɛŬə̆ ɛɟɛůd əŬə̆ ŬŒg ɛŬŬŬŬ´ɡůdŒg´Ÿɜɤ ůŬŒɜ Ÿɜɛɜ Ŭ: ůŬŒ ŸdɟɛɡůɛŬ ůŒɛ Ŭɟɔdɛ ı ɜ, ɛ´ɟ ı ŬŒg´ɟ ɛůdŬŬɟɛg ůŬůɛɜŬə̆ ŬŒ ůdɛŬůɛ ŬəəɛdůdŒg´Ÿɜɤ ůŬŒɜ Ÿɜɛɜ Ŭ, Ŭə̆ı ɛ ůŬŬŬɟɛg ůŬůɛɜŬə̆ ŬŒ ɛŬŬə̆ɛdůd (ŬŒ´ɟ ɡůdɛɡŒ ŬŒg ůŬůɛɜŬə̆ ŬŒɜ əŬŬŬdgɜůd əŬə̆ d Ŭ ɡəɡŬŬ ŬŒɛɛ ŬŒg ůŬůɛɜŬə̆ ŬŒɜ Ŭ ɡůŬŬůd)*[22].

§7.4 ***ɟ ůŬɡ ůůd ɟ dŬŬ ɜ*** *(2* ***ı ɟ ŬɡŬ):*** *ɤ dŬ´d ɔ̆ɛ ůgůɛɛəı ɜ ɔ̆ɔ̆Ŭ ŬŒggɡ ɛŬŬdɗŬɤɡ ŬůɛŬə̆ d ŬŬ ə´ əɛ ůdɛŬůdŬ ŬŒg ůgɛ bɡəɛg «–»: ɤ gŬ´ɟ ɡůdɛɛ (´.ɛ. ůŬŒ Ŭɟɔdɛɡ –2), ɤ gŬ ůdəɤ ŬəəɡŬŒg ŬŒg ŬɜŬůdŬŬŒg (´.ɛ. ůŬŒ –(–3) ɛ ůŬŒ – α) əŬə̆ ɤ gŬ ůıɛ bɛəɛ ŬŬɡŬŬůdgŬ (´.ɛ. ůŬŒ 3 – 8).***

---

[22] Ŏ ɜŬ ŬŬ ı ŬŬɛ Ŭ´ɛg dŬ dɤŬŬɛ ŬůŬŬgŬŬ ŬŒ ůdɛŬůɛ əŬə̆ ´ɛg dŬ ŬɜŬə̆ı ůɛgɛŬ´ŬŬ ŬŬŬɟɤ ůŬŬ § 4.3 ůɜŬə̆ ŬŒ ɛ´ɛɟɛı ɛŬ ɛŬ ŬŒ ɛɛ ɜŬŬə̆ɛ ŬŬɡŬ ŬɟɔdɛɛɔɟŬɛ ɛɛgɡ ɜŬ ůəŬŸəɛgɛŬ ŬŒɛŬə̆ůůɛŬŬə̆ŸŬŒɡ ɟ ŸəůŒɡ ɛŬ ŬɟɜdŬə̆ɛı ɡ Ŭɟɔdɛɛı ɡ. ɤ´ɛɟɛı ɜ, ůdəŬůɛ ɛɛ ɛŬŬdŬŬɡ ɜŬ əŬŬŬəɛůɛgɜ ŬŒɡ´ɟ ŸəůŒɡ ŬŒg´ɛəəŬ əŬůəŬůɛɛı əŬə̆ ŬŬɡ ůəůŬůdɡ ɛŬŬŬə̆ı ŬɟɜdŬə̆ı ɜ Ŭɟɔdɛ ı ɜ əŬə̆ ɡɛɜ Ŭ əŸ ɜŬ Ŭ ɛɛɜdɛɛɜŬůɛgɜ ŬŒggɡ əŬə̆ɡɜŬŒ; (Heeffer, 2011)

[illegible] §7.2) [illegible] (8). [illegible]

§7.5 [illegible] (3 [illegible]): [illegible] $-(2-5)$ [illegible]

$$-(2-5)=(-1)\cdot\left[\left(+2\right)+\left(-5\right)\right]=\left(-1\right)\cdot\left(+2\right)+\left(-1\right)\cdot\left(-5\right)=\left(-2\right)+\left(+5\right)=-2+5$$

[illegible]

([illegible] $-(\alpha-\beta)=\ldots$). [illegible] -1, [illegible] $\left(-1\right)\cdot\left(+2\right)=-2$, [illegible]

3.2.1 [illegible]

[illegible] 14 [illegible] §7.1 , §7.6 [illegible] (2 [illegible]) [illegible] §7.7 [illegible] (1 [illegible]) [illegible] 14 [illegible] 9 [illegible]

Ŭ ĥəgŭŭ ŭæe, e ŭɜŭdŭŭŭæg ŭɜŭsdɛeі əŭɔ eɔ ŭəŭŭəŭůůdůg´ɟŸɜůɤ ɜ əŭɔ ůŭŭ ůgɜɤeůəŭ ŭŭ
ŭəŭŭůəŭəŭdŭ ŭɤ ɜ ´ŭɟŭɔɟŸŭɤ ɜ §7.8 cpgɜŸɛůəg ɟdŭŭ ɜ ɛůůədɤŭŭ ŭgůəəĥ ŭɟsdɛĥ (3
іɟůůg), §7.9 cpgɜŸɛůəg ɟdŭŭ ɜ ɛůůədɤŭŭ ŭəɤɟŭəæ (2іɟůůg) əŭɔ §7.10 ¢g´e´eədɛɤɜd
ɛeɟŭæ ɛůɔŸəɤɤ ɜ əŭɔ ɛəɟі ɜ ŭɟsdɛі ɜ (1іɟŭ). ƑgɜeəəŸ, əeə´ĥɜ 23 ŭəŭŭəŭəɤɤg іɟůůg
cəŭ ɜŭ eůɟəůŭæі ɜ eəɛ ŭdŭŭɤg ŭŭ ɜɤɜeəŭ ŭɤ ɟdŭŭ ɜ ŭɟsdɛі ɜ əŭɔ ´ɟŸɜůɤ ɜ ɛůŭgŭæі g.
qůŭĥůe, d ŭɤəŭŭəɟsbі g і əd, ŭəŭŭůəĥŭŭɜ ŭəŭɛeɟŭůɛɤɜd ůŭŭ ɜ ɟ õəŭɔ cbõŭgɛɜŭůœg
ŭŭ ɜ ´ůɟœŭe 1987 ï 2006 ůů ůgɜeəəŸ 33 ŭəŭŭəŭəɤɤg іɟůůg. 10 іɟůůg ůŭŭ ɜ ɟ õ
ŭgɛɜŭůœg əŭɔ 23 іɟůůg ůŭŭ ɜ cbõŭgɛɜŭůœg.

¢e ůɟі ŭŭɛŭůœŭɔ ůgůəŸůəeɔe:

«Ŭeəeə əĥɔeə ůsbŸəəeg ɜ ůŭŭ ɜɤŭ ´ɟeɔɟŸɛɛŭŭŭ ů´egŭі ɜ ŭŭ ɜ eəeəəæɟɤůd, ɛů
ůgɜe´ŭəɤɤg ŭəŭŭəŭůdůg, ŭŭg ŭəŭŭůəŭədŭg ŭɤ ɜ důŭəі ɜ əŭɔ ůɟɜdŭəі ɜ ůɟsdɛі ɜ ůŭŭ ɜ
ɟ õŭgɛɜŭůœg;»

Ƒgůəŭůŭəɤɤg ŭ ŭɜŭůůůg əŭɔ ůsůůůɤɤɛŭŭŭ ŭ ĥ ŭe ŭŭəŭŭɔɤɔəĥ ƒɜůŭůůŭі ŭe ŭůɜ
g´ɤɟɜŭɜ.

z ůɟəɤɤg´sdŭɜɤg ŭ ŭɜŭůůg əŭɔ ůsůůůɤɤɛŭŭŭ ŭœeɜŭŭə´ůɟŭəŸŭɤ:

1. ¢ ɛůŭŭŭeɟŸůɜĥg əůŭŭəŭœg ŭŭ ɜ ɟ õŭgɛɜŭůœg ŭ ůəůgdůɟі ɜůə eі ɟe ŭŭ ɜ
   і əd ŭŭg dbõŭgɛɜŭůœg (əŭɔŭgŭůůe ůɤůŭəŭ, ɛůŭŭ ůůɤŸŭŭg, ŭŭ ůõŭgɛɜŭůœg!).

2. ¢ ůgɔəůəɟsɛɤɜd і əd ɤeůəůůɛɛůɟŭ ɛəɟĥŭŭɟd ůdɛŭůdŭəŭəɤŭůəůœəŭəŭgɜŭŭĥ ɜŭ
   ´ůɟsɛɟsůŭůůd ŭəŭŭůəŭədŭ ŭg.

3. Ƒəə ɛŭdŭŭɤg ŭŭg ɟ õŭgɛɜŭůœg důɤɟeі ɜŭŭə ůɛɛůɟŭ ´sɛ іɟsɛeə ɔəŭ ɜŭ
   əŭŭŭəŸbegɜ ĥəd ŭŭ ɜ і əd ůeŭŭəŸɛůŭegg důŭəeі g əŭɔ ůɟɜdŭəeі g ůɟsdɛeі g.

4. ¢ əŭŭŭɜĥdůd ŭɤ ɜ důŭəі ɜ əŭɔ ůɟɜdŭəі ɜ ůɟsdɛі ɜ ŭůə´ůɟeůəŸɛůə əŸeəŭ
   əŭəŭdŭůɟd ŭůəeədŭəŭəɤŭůəd ŭəŭŭůəŭədŭ ŭegg ɛ´eɟůůɜŭɔœůəɜɤɟdŭůɟŭ.

5. ¢ ɔɜі ůd ŭɤ ɜ ůɟɜdŭəі ɜ ůɟsdɛі ɜ ůœŭəŭ ůɟŭdŭŭůŭůůŸəəŭɛŭdɛɛŭŭŭ.

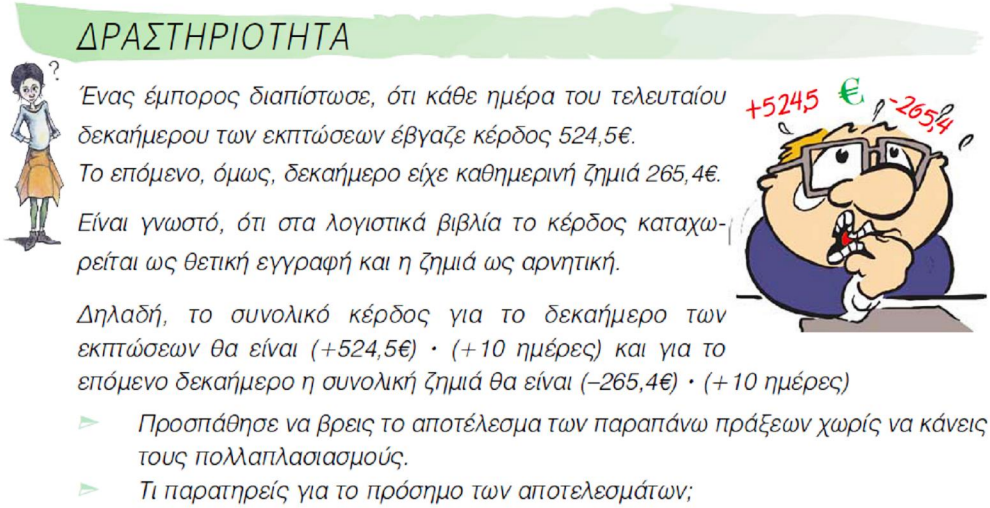
ɟ ɜ əŭɔ ůɟeəŸ ɛ´eɟůůɜŭ ůgɛŭɤɜei ůŭɛůɛůŭŭ´ůɟŭ ŭŸɜɤ ůsůůůɤɤɛŭŭŭ, ƒəɤ´eɜŭŭg
ŭŭ´ɟeůůəŭəŸəŭŭŭɜei ɛůŭŭəeəɔəŸ«əůɜŸ» ´eg´ůɟɤeeɜ. ū ůəŸůœŭəůsdgɛdŭĥ
eə ɛŭdŭŭɤg ɜŭ ɛŭdŭœeɜ ɤɜŭ ɛůŸəe ůɟeg ŭŭg і ədg ŭɤ ɜ z ŭdŭɛŭŭəі ɜ, ŭəəŸ d

[illegible]

3.3 [illegible]

[illegible]

[illegible] 7.5 [illegible] (ůcəəəh [illegible] ζ [illegible] ůəι ι ι [illegible], 2012, ůŮə.129):



[illegible]

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι:

- Το γινόμενο δύο **θετικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός
- Το γινόμενο ενός **θετικού** και ενός **αρνητικού** ρητού είναι **αρνητικός** ρητός

Ας δούμε τώρα πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων.

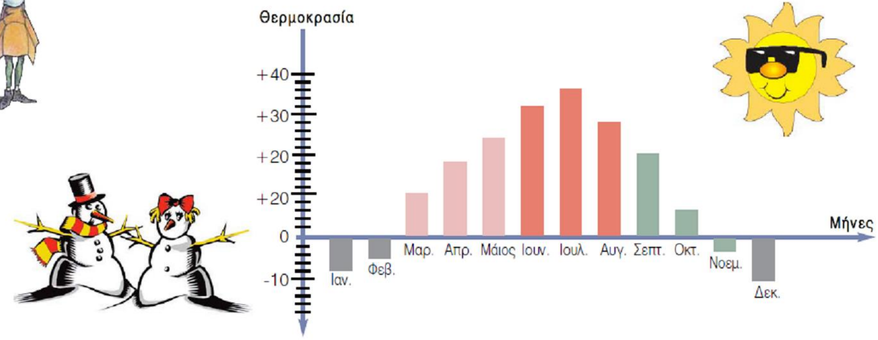
$(-10)\cdot(+9) = -90$	
$(-10)\cdot(+8) = -80$	Σημειώνουμε τους πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων,
$(-10)\cdot(+7) = -70$	από τους οποίους ο ένας μένει σταθερός, το –10, και ο
$(-10)\cdot(+6) = -60$	άλλος μειώνεται διαδοχικά κατά 1 κάθε φορά.
$(-10)\cdot(+5) = -50$	
$(-10)\cdot(+4) = -40$	Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά 10
$(-10)\cdot(+3) = -30$	
$(-10)\cdot(+2) = -20$	Αν υποθέσουμε ότι και μετά το μηδενισμό του δεύτερου
$(-10)\cdot(+1) = -10$	παράγοντα τα γινόμενα συνεχίζουν να αυξάνονται με τον
$(-10)\cdot 0 = 0$	ίδιο τρόπο, πρέπει να ορίσουμε ότι:
$(-10)\cdot(-1) =$;	$(-10)\cdot(-1) = +10 = +(10\cdot 1)$
$(-10)\cdot(-2) =$;	$(-10)\cdot(-2) = +20 = +(10\cdot 2)$
$(-10)\cdot(-3) =$;	$(-10)\cdot(-3) = +30 = +(10\cdot 3)$
$(-10)\cdot(-4) =$;	$(-10)\cdot(-4) = +40 = +(10\cdot 4)$
.....	.....

3.4 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Η πρόταση ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών μπορεί να γενικευθεί σε πολλαπλασιασμό τριών ρητών αριθμών, ή τριών ρητών αριθμών σε πολλαπλασιασμό τεσσάρων ρητών αριθμών κ.τ.λ. μας οδηγεί στο ερώτημα αν ισχύουν οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών, οι οποίες ισχύουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή η αντιμεταθετική, η προσεταιριστική ιδιότητα κ.τ.λ. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται στο βιβλίο του μαθητή (Χριστάκης κ.ά., 2012, σελ. 126):

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση θερμοκρασία μιας περιοχής για τους 12 μήνες του χρόνου σε συγκεκριμένη ώρα της ημέρας.



- *Ποιος είναι ο πιο ζεστός μήνας του έτους και ποιος ο πιο κρύος;*
- *Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ αυτών των μηνών;*
- *Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών μηνών;*

[illegible] 2007-2008 [illegible] (2009)

[illegible]

«[illegible] 40 [illegible] 10 [illegible];»

[illegible] 30 [illegible]

[illegible] Freudenthal [illegible] 1973. [illegible]

Ο Freudenthal ήταν 1983. Ένας μαθηματικός ασχολήθηκε με τα μαθηματικά της εποχής μας, η οποία ήταν η εποχή κατά τη διάρκεια της οποίας τα μαθηματικά αναπτύσσονταν με ταχύτητα.

Θα ακούσετε πολλά, αλλά θα μάθετε πολλά μόνο αν μάθετε τα μαθηματικά. Ακόμη πιο σημαντικό είναι η κατανόηση των μαθηματικών.

Διαπιστώνουμε επομένως ότι:

- Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων είναι **θετικός** ακέραιος

Γενικότερα:

- Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.

Ας δούμε τώρα τι μας λέει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία:

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

  $(+1{,}5)\cdot(+2{,}2)=(+3{,}3)$

  $(-1{,}5)\cdot(-2{,}2)=(+3{,}3)$

  Δηλαδή: $+\cdot+=+$ και $-\cdot-=+$

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «−».

  $(+1{,}5)\cdot(-2{,}2)=(-3{,}3)$

  $(-1{,}5)\cdot(+2{,}2)=(-3{,}3)$

  Δηλαδή: $+\cdot-=-$ και $-\cdot+=-$

Αν ακολουθήσουμε τα βήματα που μας δίνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, θα δούμε ότι η πρόταση $(-)\cdot(-)=+$, δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να κατανοήσει τα μαθηματικά μέσα από τη χρήση μιας μεθόδου η οποία μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση.

Τώρα θα δείξουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά μας για τη λύση μιας εξίσωσης. Θα χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά μας, αφού πρώτα μελετήσουμε τη λύση της εξίσωσης 3.1. Η ΕΛΕΜΕ δίνει μια πολύ καλή ανάλυση αυτής της εξίσωσης.

[illegible] (algebraic permanence) (Freudenthal 1983). [illegible][23]:

3.5 [illegible]

[illegible] (Tzekaki, Sakonidis & Kaldrimidou, 2003). [illegible]

[illegible] 2002, [illegible] 368 [illegible] 369) [illegible]

[23] [illegible]

εdŬůŬűe Ůəhȝ3Ŭɵ9εŬűd[Űŷgƒɔ9ŬŰč ´ι gƒɵ,důœɵ´ɵœ¡ůŬȝ Ůčggƒ Ŭ,ȝd[Ůəɵ¡gƒɵ9Ƒœyɵ9 ůŰ[´Ů,ɵŭɵ Ů[gƒ ŭg3ŬůŰůŬƒŰŷ3 ¡ Ŭȝ (206´.¡ . ï 220 ε.¡ .) e Ůə Ůȝ3ɵŮůɵ ɵhȝűŬȝŰčgƒ ƣyɔɵ3ŰŰƒó ƣŮůƣ9gƒŮ ɑƣŮůƣ9œ ´ɵ9Ůůi ´ Ŭ,ȝœâ. (Ū¥εŬŭdƒ, 2009)

¢ɵ ůdεŮůƣεŬ´ɵg ŬűɵƒŸŰčȝ ɵhȝűŬȝŰčɵ ƣŬəŭœŮŰŰəůŰɵ Ůŷƣɵƒ Ů[gƒŭ,ŬůŰ[,ȝhŰ[ŰŰƒɔ9Ŭ Ůčȝ ´ɵƣƣŬ ƣŬůƣŬůεh ŭi¡ɵ Ů,ȝd[Ůəι ȝ ¡d[Ůí ȝ ƣŬə ´¡œ Ŭ h Ů[´Ů,ɵgůdŬůd Ůŷ ȝ ƣŭœŰ¡Ůŷ ȝ Ůčg ´ɵƣƣŬ ƣŬůƣŬůεɵ¡ ůŰčggƒ ¡d[Ůči ƒ Ů,ȝdεɵ¡ƒ εɵ9Ÿɵ¡ůə ȝŬ Ŭƣ¡ŬůŰŰə! Ƒœɵɵg,Ŭ ɵ ƣŬd[ɔd[Ůčƒ ŭŰȝ ε´ɵ,Ůι ȝŬ Ůčɵ ɵ,důœɵ´ɵœůŰə Ÿεůι Ů, Ůčgƣ¡ŸɵůŰčȝ ´¡œ ŭƣŬə ŸůŰə ƣŬə Ůȝd[ε Ů,ƣ dŬů, Ůə Ů[hƒ Ŭȝ Ůčɵ ɵ,důœɵ´ɵœůŰə ɔƣŬ εŰŰŸŰ¡Ůůd Ŭ h ŰŰ Ů,ɵGŰƣŬ Ůə[ɔȝœ Ÿ ůŰŰȝƣŬ Ůə[ɔȝœ Ÿ. ¡ ´ h Ů[´ƣŰƣ¡Ÿ Ů¥ȝ ε Ŭd[ŰŰ ȝ, ůƣ¥ƒ ȝŬ Ůčggƒ Ůȝ Ů[ƣ´ ¥ ůœŸůə Ů,ɵ Ů,ɵœ Ÿ, Ŭə[ƣ Ů¥ȝɵœƣɵœɔœ Ÿ dŬ Ůčggƒ ŭd[εœƣ¡ɔεůŰə εƣŬ Ůůŭ Ŭƣɵεɔ¡ȝd[Ůəhȝ3Ŭ ɔƣŬ Ůčɵ Ůɵ ¡ƣbι ƒ Ůȝ3ɵεi ůŰɵ ɵhȝűŬȝŰčƒ εŰŰƣŰhŰ Ůčȝ ƣŬhȝ3Ŭ[24]. Ƒ Ůčɵ ůdεŰɵ Ů,ƣŰhŰ Ů Ŭȝ¡ƒ ɵŰŰŰəd[ůdεŰůƣŬ Ůčƒ Ůəƣ¡hŰ[ŰŰƒ Ůčƒ ƣůŰčɵ¡ƣɵεƒ ɔ3ι ůdƒ ´ɵg Ůȝůε ŬŰŰ ȝŰŰŰə ůŰ ůŭŭŰə Ůčƣɵ¡ƒ ¡¡ Ůƣ3Ůƒε ůƣŭŰə Ůčƣɵ¡ Ů¥ƣbƣbƣ[ƣŬ.[25]

Ŭ¡ŬŰdŷŰčȝŰŰƒ Ůčƣƒ ƣŭhŰ[ŰŰƒ Ůčg ´ɵƣƣŬ ƣŬůƣŬůεɵ¡ ůŰčɵ ůi¡ȝɵƣɵ Ů¥ȝ ¡d[Ůí ȝ Ů¡ƣdει ȝ ŭŰȝ ɔœŰŰŰə ŬεƣŬ ŬȝŬŰíɵ¡ Ÿ, ůŰ[ɵ¡ƣdůœɵhŰ[ŰŰə Ů[ȝ ŬȝŬƣə Ůhȝ Ů[ŰŰȝ Ů ƣůɵi¡ɵgȝ Ůƣ¡ƣƒ ɵ9ƣŭhŰ[ŰŰƒ, Ůƣ¥ə Ů[ŰŰ[ɵ¡ƣ¡ůε ´ɵg ´ Ů¡ȝ ŸůŰƣɵε Ů[ŰŰ ´ Ů¡ƣ¥ůŰƣɵε Ů[´ɵƣƣŬ ƣŬůƣŬůεɵ¡ ůŰčɵ ´ɵƣƣŬ ƣŬůƣŬůεɵ¡ ůŰčggƒ¡d[Ůči ƒ[26].

3.6 Ƒ¡ɔƣ¡ƣůd[εŮ Ůčɵ ȝƣɵ ´ƣœŰƣhȝ ´¡hɔ¡Ŭεε Ů ů´ɵgŭι ȝ ɔƣŬ ŰŰ ƣ Ŭd[εŰŰƣ Ÿ Ůd[ƒg´ɵg¡ Ů¥ Ůƣɵ´ Ůƣůůd[ƒ

ŪŬ´Ů¡ŬdŷůɵgεŮɵ¡ůε ƣůŰŰŬŰ h Ůčɵ ȝƣɵ ´ƣœŰƣhȝ ´¡hɔ¡Ŭεε Ů ŭƣůŰůə Ůƣɵ dŬƒ Ů¥ȝ ƣ Ŭd[εŰŰƣ ȝ Ů[ƒ ¡ õ ũgε ȝŬůœg ƣŬə dŬ ŬůŰŰŸůɵgεŮ ´Ů¡ƣůůhŰŰ¡ɵ ůŰčɵ Ů¡h´ɵ ŭƣůŰůə Ůƣɵ Ů¥ȝ Ů¡ȝd[Ůƣɵ ȝ Ů¡ƣdει ȝ. ¢ɵ ´ƣœŰƣhȝ ´¡hɔ¡Ŭεε Ů ŭƣůŰůə Ůƣɵ Ů¥ȝ

---

[24] Ƒ ƣhȝ¡ɵ9 «ƣůƣ9ƣƒ» ƣŬə «i´Ů¡ȝ9ƣƒ» ´ɵg ɵ¡ůœɵ´ɵ9ůɵ ɵ ɵhȝűŬȝŰčɵƒ g´ɵŭd[ƣι ȝɵgȝ Ůȝůůčɵœ Ů ŰčggƒŰíŬ¡ɵi ε Ůčɵɵggƒ ƣŬə ´¡ɵůŰčdyε Ůčɵɵggƒ h¡ɵggƒ ůŰ εdŬ´Ů¡ŸůŰůd ´ɵg ´Ů¡ƣyɵůə ŭƣŸŰɵ¡Ů ůŭd, h´¥ƒ εɵȝŸůƒ, Ůȝι ůŰčggƒ, ŭgȝŸε Ůƣƒ ƣ.ƣ´. ƣŬə ŭŰȝ ƣɵgȝ ůɵƣůd[εŰ Ů¡ȝd[Ůƣɵi ƒ ƣŬə dŰƣɵi ƒ Ů¡ƣdεi ƒ. (Ū¥εŬŭdƒ, 2011)

[25] Ƒ¡Ůƣȝd[Ůƣɵh Ů¡ι Ů[εŰ, ƣbƣ: §1.3.1

[26] Ƒœɵ ɔŬɵɵȝhƒ ƣŬə dŰŰčɵ ŬȝŬƣi ůɵgεŰůŰčɵ 5ᵉ ƣŰŰŸƣŬɵ, ´ɵg ŬůɵɵƣŬůŰŰə εŰŰ[ȝ ƣŰčɵ¡ƣɵε Ůƣ¥ƣɵɵd[Ů¥ȝ Ů¡ȝd[Ůƣɵι ȝ Ů¡ƣdει ȝ, hŰƣɵ ƣŬə hȝŬƒ $(-)\cdot(-) = +$ ɵŭŰƣbƣŰ[ȝ i´Ů¡ȝε Ůčɵ ůŰεdŰŬŰƣŬhŰ[ŰŰ.

z Ŭdd̥ɛŬŰə ı ɜ (?yɛ ůɛɛəŮə ï ?yɛ ´ɟ ɦɔɟŬɛɛŬů´ɛgŭı ɜ ɔəŬŰŰz Ŭdd̥ɛŬŰə Y, 2011, ůŮə.5) ŮəŬə ɛdŬ ůd̥ɛŬəŰə Ŭəəŭbɛ ůŰɛ Ɨɟ ɦɔɟŬɛɛŬ Ł´ɛgŭı ɜ Ŭd̥g´ɛɛɟŮɣŰə g Ůə´ŬŭŮůd̥g əŬə Ůd̥ɟ ŮYɛŮə Yɛ ŮůŬŰɛɜ Ŭɟ ɦ´ɛ ŭəŭŮůəŬəd̥ŬgŰɣ ɜ z Ŭdd̥ɛŬŰə ı ɜ.

Ƀə ůŰɦɛɛə ɛYdd̥ůd̥g əŬə ŭəŭŮůəŬəd̥ŬgŰɣ ɜ z Ŭdd̥ɛŬŰə ı ůgɜɛɣɛɛɜŰŰə ůŰŰŮə g:

- z ŮŰYbŮůd̥ Ŭ ɦ ŰŰ «z Ŭdd̥ɛŬŰə Y ï ɣg yŰɛəɛɛ ´ɟɛɛɦɜ» ůŰd̥ «ɛŬdd̥ɛŬŰəɛ´ɛɛd̥ůd̥» əŬə ůŰg ŭəŭŮəŮůd̥g´ɛg Ŭd̥ ůgɔəɟɛŰɛi ɜ, ɦ´ɣg «ŭəŮɟŮi ɜd̥ůd̥», «ůgəəɛɔəůɛɦg» əŬə «Ů əɛɛəɣ ɜd̥Ů»
- ɟ´ɛŭɛɛɛ, ɣg bŮůəəɛg ŭəŭŮəŰəɛg ŭɟɛg: « ¢ ɛYdd̥ůd̥ ɛyůɣ ŮɜŮə Yəgɣd̥g»
- ɟ ɜYŭŮəəd̥ Ŭd̥g ůgɛ´əd̥ɟɣɛŮŰəɦŰd̥ŰŮg ɛŮŰŮɜi Ŭd̥g «əŮdŮɟɛg» əŬə Ŭd̥g «ŮŭŮɟɛɛůɛyɜd̥g» ɦɣd̥g Ŭɣ ɜ z Ŭdd̥ɛŬŰə ı ɜ.

Ƀə´ŮɟŮY ɜɣ Ŭɟɛɣg ŬɜyŭůəəŮɜ Ŭd̥ɜ yɜɜɛəŮ Ŭɛg ɛŬdd̥ɛŬŰəɛi ɔɟŬɛɛŬŰůɛɛi[27], ůi ɛűɣ ɜŮɛŮŰd̥ɜ ´ɛɛdŮ, yɜŮ «ɛŬdd̥ɛŬŰə Yůɔɟ Yɛɛ ŮŰɛ» YŰɛɛɛ:

- ɟ ɜŰəəŮɛbY ɜŮŰŰə ɦŰə «ɛə ɛŬdd̥ɛŬŰəyg yɜɜɛəůg, ɛə ŭɛɛyg əŬə ɛə ŭɣůg ɣɛɛgɜ ŮŭŮgɟůŮůɣg ŮɟɔŮəůŮ ɔəŮ ɜŮ ɛɟɔŮɜı ůɛgɜ ŰŮ űŮəɦɛŮɜŮ Ŭɛg űgůəɛi, əɛəɣ ɜəɛi əŬə´ɜŮgɛŮŰəɛi əɦůɛɛg» (Freudenthal, 1983)
- cəŮdyŰůə Ŭd̥ɜ «əəŮɜɦŰd̥ŰŮ ɜŮ əŮŰŮɜɛůə, ɜŮ əɟɛůə, ɜŮ ŭd̥ɛəɛgɟɔůı əŬə ɜŮ gɟd̥ůəɛ´ɛəůıŰŮz Ŭdd̥ɛŬŰə YůŮɛəŮ´ɛəəəd̥Ůůɜŭɦ ï əŬə ůɜɣ ï ɛŬdd̥ɛŬŰəı ɜ ´əŮəůɣɜ əŬə əŮŰŮůŰYůŮɣɜ, ůŰg ɛ´ɛd̥ůg ŰŮ z Ŭdd̥ɛŬŰə Y´Ůŭɛɛgɜ ɛ d̥Ů ɛ´ɛɟɛiůŮɜ ɜŮ´Ůŭɛɛgɜ əY ɛəɛ ɟɦəɛ» (Niss, 1996, 2003) əŬə, yŰůə, ɛ´ɛɟůıɜŮ əůŰɛgɟɔɛůůəəɟəŰə YůŮɛd̥Ů ŭd̥ɛɛəɟŮŰə ɛ əɛəɣ ɜd̥Ů.

Ƀə bŮůəəyg əŬəɛŰɛɛd̥ůg´ɛg ůgɜŭyɛɜŰŰə´ɟŮəŰə Y ɛŮ Ŭd̥ ŭəŭŮůəŬəd̥Ů Ŭɣ ɜ z Ŭdd̥ɛŬŰəı ɜ ůɛŬəd̥´ɟɦŰŰůd̥ɔəŮŭi ɜd̥ůd̥ Ŭɣ ɜ ɣɟı ɜ ŭəŭŮůəŬəd̥ŬgŰɦ12 ůŮ13 ı ɟůg Ŭd̥ɜ ůŭɛɛYŭŮ, əŬdı g əŬə d ɣɜŰŰəd̥ Ŭd̥g əůŰɛgɟɔd̥ŬgɛɛYŭɣ ɜ ůəŭəɛi ůɜŭəŮŭyɟɛɜŰɛg ɛyůŮůŰɛ ŭəůɟgɛyɜɛ´ɟɦɔɟŬɛɛŮəůŰɛgɟɔd̥ŬgŰɛg ŭgɛɜŮůɛg. (Ćı ɜd̥ ůɛɛəəəɛg əŬə əɛəɣ ɜəɛg ɛɣɛg) Ą´ůd̥g, bŮůəəɛ ŮəəŮbɛ ůgɜŰůəůŰŰə əŬə ůŰd̥ ŭəŭŮə ŮŭŮi əd̥ ŰŮ ɜ z Ŭdd̥ɛŬŰəı ɜ, ɛŮŰɛ ɜyɛ Ɨɟ ɦɔɟŬɛɛŮŁ´ɛgŭı ɜ ɜŮůəůgɔɟɛɜɛŰə Ŭd̥ɜ i əd̥ əŬə ɛyůɣ

---

[27] Ɨɟ ɦəůŰə ɔəŮŰd̥ɜ əŬə ɦŰd̥ŰŮůɜɦŰŰŮ ůɜɦg ŰŰɦɛɛg (Ŭ) ɜŮ ŮɜŮəi ůə, ɜŮ ůɟɛd̥ɜůůə əŬə ɜŮ Ů ůɛbŮəůə ůŰɛ əɛəɣ ɜəɦ Ŭɛg´ůɟəbYəəɛɜ ɟɟd̥ůɛɛ´ɛəı ɜŰŰgɣɟůɟɔŮəůɛ ŰŮz Ŭdd̥ɛŬŰəYəŮə (b) ɜŮ ŮɜŮəi ůə əŬə ɜŮ ůɟɛd̥ɜůi ůə ŰŮɜ Űɟɦ´ɛ´ɛg ɟɟd̥ůɛɛ´ɛəəi ɜŰŰə ŰŮz Ŭdd̥ɛŬŰəYɔŮŰd̥ əɛɣd Ŭ ɛűYůůɣɜ ůŰɛ əɛəɣ ɜəɦ´ůɟəbYəəɛɜ. (ƗəəɛŰəɦ Ɨɟ ɦɔɟŬɛɛŮŁ´ɛgŭı ɜ, 2011, ů. 5)

[illegible]

[illegible] (2011, [illegible] 27 -28) [illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

ŭəŬŭűeɿŬŬəəeɡ ɛeɿűəɡ Ůɿɔ Ůə ůŬ ɜŬ Ůə ůŬűeůŬə ɛdŬ ůůɡɿ Ÿ ɛŬŬdɛŬŬəəı ɜ ůŬŬhɡɤ ɜ əŬə ŭəůɿɔŬůəı ɜ.

ɸe ɜ Ÿɿhɔɿ Ůɛ ɛŬ Ÿ´ eɡŭı ɜ ´ɿ eŬŬəɜůə ŬŬŬůŬŬůůɡ´ eɡ Ůűeɿeı ɜ Ůd ɛ e ɜŬŬə´ e ɜůdůd ɛ əŬɡ´ɿ Ůɜɛ ŬŬəəeɡ əŬŬŬůŬŬůdɡ, Ůd ɜ ´ɿ Ůɜɛ ŬŬə´ eɜůd Ůɜhɡ´ Ůə ɡ ɜŭəei, Ůd ɛŬŬdɛŬŬəəe ŭəůɿůı ɜdůd ɛ ůŬ Ŭ h Ůd ɡɿ eůd Ůɿɔ Ůə ůŬ ɜ əŬə´ dɔı ɜ. Ÿ ůŬhɡeɡ Ůɤ ɜ əŬŬŬůŬŬůŬɤ ɜ Ůɡ Ůɤ ɜ ůŬə Ůə d Ůɛ´ ə e əe Ůɤ ɜ ɛŬŬdŬɤ ɜ ůŬd ɜ əŬŬŬɜhdůd Ůɤ ɜ ɛŬŬdɛŬŬəəı ɜ Ůɜ e ı ɜ, ůŬd ɜ Ŭ hə Ůdůd əŬə ɡɿ eůd ŬŬɡ ɜ əı ɜ ɛŬ ůɡůə ɜ ədŬ, ůŬd ɜ Ůɜ Ÿ Ůɡ ɜd ůɿŬŬdɔ əı ɜ Ŭ œɡůdɡ´ ɿ e ɓ ə ɛŬŬeɡ, ůŬd ŭdɛ ə eɡɿ ɔdŬ Ůɜ ɜ e ə e ɔ əı ɜ ůɡ ɜŭ ůŬɤ ɜ, ůŬd ůi ɜŭŬůd Ůɜ Ŭ Ůɿ ŮůŬůŬɤ ɜ, ůŬd ɜ Ůɜ Ÿ Ůɡ ɜd ɛŬŬdɛŬŬəei ůɡ ə ə e ɔ ůɛ ei, əŬŬı ɡ əŬə dŬŬəəeɡ ůŬůdɡ ɔəŬ ŬŬ z Ůŭdɛ ŬŬəə Ÿ. q ůŬhůe, ůdɛ Ůə ŬəəŬ ɿhə ɿ hə e ůŬd ɛŬŬdɛŬŬəəe ŭɿ ŮůŬd ɿ hŬd ŬŬ´ Ůŭe Ůə əŬə d ŭəŬ Ůɡ ůd Ůeɡ ŭəŭŬə Ůəei ɡə əei ɛ ůŬ ůŬd ůe ə ə e Ůɤ ɜd. Ÿ ɡ ɜ Ÿ ɛdŬ «´ ə ei ůəŬ» əŬŬůŬŬůd ɛ´ eɿ Ůı ɜŬ eŭdɔ e ůŬə ůŬ ɛdŬ «ŬŬŬɿ ɛ ɛ ɿ ɜd» ɛŬŬdɛŬŬəəe Ůɛ´ ə e ə e Ůɤ ɜ ɛŬŬdŬɤ ɜ, ɛŬ ɿ ɛŭŬůd əɡɿ ɤ ɡ ůŬd eɿ eůd Ůə ɔ eɿ ɔdɛ ɤ ɜ əŬə ŬŬůɡ ɜ əı ɜ eɤɿ ɔ ůŬ ůhŸdɡ əŬŬŬɜhdůd. ŭəŬ´ ŬɿŸŭŬəəɛŬ, ɛ´ eɿ Ůı ɜŬ ůŭə Ůə ɛdŬ ŭɿ ŬůŬd ɿ hŬd ŬŬ ɛŬə Ÿ ə d ůŬ ŭə Ÿɿ əŬə Ŭ e ŭgůɜhdŬd, ɛŬ Ŭ eŬɿə ůŬɛŬ e ə ɛŬŬdŬɿɡ ɜŬ eŬůeɡ ɜ Ůe Ůɜŭə Ŭŭɿɿ ɡ e ɜ, Ŭ eůŬd dœe ɜŬŬɡ Ŭ ə Ÿ Ůe ɜ əŬɜhɜŬ. dŬůəe ´ ɿ e h´ hdŬůd, ə e ´ hɜ, ɔə Ŭ Ůd ŭə ŬŬ ɿ důd Ůd ɡ ɛŬŬdɛŬŬəəe ɡ ŭɿ ŬůŬd ɿ hŬd ŬŬɡ ůŬ gɤdə h ɔɜɤ ůŬəəh Ůd ůŭe Ůəe Ůə d ɛŬŬdɛŬŬəəe əŬə d ´ ŬəŭŬɔɤ ɔə e ɔɜı ůd Ůeɡ ŭŬůə Ÿə e ɡ, ŬɜŬŭe ɿ ə Ÿ ɛŬ Ůe ´ Ůɿ ə Ůůhɛ Ůɜe ´ eɡ ŭə Ůůhœ Ŭ Ůə ůŬd ůe ə e Ůɤ ɜd.

ɸe ɜ ɤe Ÿɿhɔɿ Ůɛ ɛŬ Ÿ´ eɡŭı ɜ ɔə Ŭ ŬŬ z Ůŭdɛ ŬŬəəŬ Ůeɡ ŭgɛ ɜŭůœɡ (2011) ɤ ůə Ůɜ Ůɜ Ŭ Ÿ ɜ Ůə ɤ ɜŭ ´ ə e d e ɡ ŭɿ ŬůŬd ɿ ə Ůd Ůɤ ɜ (ůɡ ɜdŬŬəəɤ ɡ Ůɿɔ Ůůdůɡ) ɔə Ŭ 10 ŭəŭŬə Ůəəɤ ɡ ı ɿ Ůůɡ, ɤ ɡ ɤ ɜŭ ɛ ɤůe eɿ ə hɜŬůɡ ŭə Ůůei ɜŭůůdɡ Ůɤ ɜ z Ůŭdɛ ŬŬəəı ɜ ɛŬ Ÿ ə ə Ŭ ɛŬŬdůə Ŭə Ÿ ŭəŭŬə Ůəəɤ Ůə Ůəůɛ Ůɜ Ŭ ɔə Ŭ ə Ÿ d Ů Ůɜ h Ůd ŬŬ Ůd ɡ ŭəŭŬə Ůɤ Ůɡ i ə dɡ. q ůŬhůe d ŭgůə e ə d Ŭ ɤɔə ŮəůŬə ůůe ɜŭ Ŭ eűŬůůeɡ ɜ e ə Ůŭdɔd Ůɤ ɡ ɜŭ ŭɿ Ůůd ɿ ə´ e d e ei ɜ əŬə ɜŭ Ŭ eŭůůeei ɜ Ůd ɜ əŬə e Ůe ɛdŬ ? Ŭ Ůɜdɛ Ůɿ ɤ d e ei ɜ ɔə Ŭ Ůe ´ ı ɡ ɛ´ eɿ Ůı ɜŭ Ůə Ůe ə e ŭe ɛd Ůəəe d ůŭ Ůɿ ɛ e ɔe Ůɤ ɜ ůɡ ɜdŬəəı ɜ Ůɿɔ Ůůı ɜ ůŬd ŭəŭŬə Ůəəe ´ ɿ Ůə Ůəəe.

Ÿ Ůəɡ Ůɿ ůɡ ɜd Ůəəɤ ɡ Ůɿɔ Ůůdůɡ´ eɡ ´ɿ eŬŬə e ɜŬŬə ůeŬŬəəŬ ɛŬ Ůe ɡɡ Ůɿ ɜd Ůəei ɡ Ůɿ ɜdɛei ɡ ɔe ŬŬŬə ůdɛ Ůɜ Ůəəe eɿ eůd Ůd ɡ ůŬe ɿ dŬɡ əŬə Ů h ´ ɿ ɤ Ůh Ůɡ´ Ůɡ´ d ɔɤ ɡ, h´ ɤ ɡ Ůeɡ Saunderson (*The Elements of Algebra*, 1741) əŬə Ůeɡ dô Alembert (Ů eů´ Ÿůɛ Ů Ů h Ůe ə ɛ ɛ Ů ***ɡ ɿ ɜdŬəəeô*** Ůd ɡ *Encyclopedie*, 1751 ï 1765), ɔə Ŭ Ůd ɜ ɿ õ əŬə Ůd dõõ ŭgɛ ɜŭůœɡ Ůɜ Ůůeɡ ɜeŬ, ɛŬůůhɡe e ɛŬŬdŬɤ ɡ ɜŬ əŬŬə Ÿ ɔeɡ ɜ Ůd ɜ Ůɜ Ÿ ɔəd i´ Ůɿ ɜdɡ əŬə

«Ůřůłłł

ŰŰŰ ŭŭ ŭŭŭ ŭŭŭ

Ţ ůíŸəŬɜ 4ɵ ɤ dŬ ŬɜŬůəɦ´ɖůɖ Ůɤɜ ůɵ´Ůəıɜ ɛɵɜŬÿəɤɜ ŭəŭŬůə ŬəɖŬɡŮɤɜ ŬɟɜɖŮəıɜ Ŭɟəɖɛıɜ

4.1 ɖŬůəyɡŬɟɵyɡŮɖɡΛŮŬəəůŬəɛɡɤ ŬɖɖɛŬŬəɛɡΑə´ŬŭŬůůɖɡ

ȳ´ɤɡ yɵɵɡɛŬɛŭɖ ŬɜŬŭÿɟůə ůŮɖɜ ůɜɦŬɖŬŬ §1.1.1, Ůɛ ɛɵɜŬÿəɵ ŬɖɡΛŮŬəəůŬəɛɡ ɤ ŬɖɖɛŬŬəɛɡΑə´ŬŭŬůůɖɡ (Λɤ Α) Ů ɵŬŬəůɛ ɛɖŬ ɖŬɤɟɖŬ ŭəŭŬůəŬəɖŬɡ əŬə ɛŸɖɖůɖɡ Ůɤɜ ɤ ŬɖɖɛŬŬəıɜ, ůɨɛŭɤɜɖ ɛŬ Ůəɡ ŬɜŬəɛɤŬůəɡ Ůɵg Freudenthal ´ŬɟɑŮɤɜ ɤ ŬɖɖɛŬŬəıɜ əŬə Ůɖɡ ɛŬɖɖɛŬŬəɛɡ ůə´ŬŭŬůůɖɡ, ´ɵg ůgɜɵɤɵɜŬŬə ůŮɵ ɦŬə ŬŬ ɤ ŬɖɖɛŬŬəŸŭŬɜ ɛ´ɵɟůɜŬůɜŬəůɜŬə Ů ɵəɵɛɛɤɟɜŬ Ů ɦ Ůɖɜ´ɟŬɔɛŬŬəɦŬɖŬŬ. Ŭɟɵɤɤ ɖůůɤɟɜŬ ɜɤɵ´ɟɦɔɟŬɛɛŬůŭ´ɵgŭıɜ ɛŬ´ɵ ůɜŬɟɔɖŬəɛ ŭəŭŬůəŬəɖŬ, ´ɵg ɖŬɤɖůůŮɵgɡɛŬɖɖŬɡ ůŮɖɜ ŬɜŬəŸəɡɤɖ Ůɖɡ ɔɜıůɖɡ, ɛɤůŬ Ů ɦ ŭɟŬůŮɖɟɦŬɖŬŬɡ´ɵg ɖŬůgɜŭɤɵɜŬŬə ɛŬŬɖɜ ´ɟŬəŬəɛ. ɖɵəůɤɵɤɛŭŬůɖ ůŮɵ ɔɵŬŬůəŬəɦɵůŮɖ Ůg´ɵəɛ ŬŭŬɟɛɵɔɛ əŬəɦɜɤɜ əŬəŬəɔɵɟɖɛɤɜ.

ÆŬɖɜ Λɤ Αɖ ŭəŭŬůəŬəɖŬůŮɵůŮɜůŮůŮɖɜ Ů ŬəŬəŬŬŬůəůɤɛ Ůɖɡ ɔɜıůɖɡ əŬə ɓŬůɵŬŬə ɔɵŬŬɖ ůɵůŭɖŬůɛ Ůɖɡ ůŮɡŬůɛɡ´ɟɵɖŬɛ ŭəŭŬůəŬəɖŬɡ əŬə ůŮɖɜ ŬɜŬəŸəɡɤɖ Ůɖɡ ɔɜıůɖɡ, ɛɤůŬ Ů ɦ ŭɟŬůŮɖɟɦŬɖŬŬɡ´ɵg ɖŬůɤɜŭɤɵɜŬŬə ůŮɖɜ ŬɜŬəŸɵɟŬůŮɖɟɦŬɖŬŬɡ´ɵg ɖŬůgɜŭɤɵɜŬŬə ɛŬŬɖɜ ´ɟŬəŬəɛ.

1. ÆŬɖɜ ŭůŮɵɟɖŬ Ůɤɜ ɤ ŬɖɖɛŬŬəıɜ, ´ɵg ŬɜŬɡɛŬŬɤ´ɵŬŬə ůŬɜ ɛɖŬ ŬɟɟŬŬəɛ ŭɵŬŭəŬůɖŬ. Ƀ ɛŬɖɖŬɛɡŬəɵɛəɵgɖŬůŮɖɜ ŭůŮɵɟɵəɛ ´ɵɟŬůŬŬɛɵg´ŬɟɵŬŬɛɛɤɜɵg Ůɖɡ ŭəŭŬůəŬəɖŬɡ əŬə Ů ŬɜŬəŬŬŬůəŬɟŸɛŬɵŬɡ ɤɜɜɵɵŬŬɡ´ɵg ´ɟɵɤəɟɤŬɜ Ů ɦ ŬɟŬɛ Ůɖ ´ɵɟŬůŬ.

2. ÆŬɡŬŬɟɖɦɟɛɖŬŬɡ ŸŬɟ´ŬɟɡŬůɛŬůɦŭɵɟɖŬɤɜ´ŬəŭŬ ɜ

¢ əŬŬŬɜɦɖůɖ ůŬŬ ɤ ŬɖɖɛŬŬəŸ ůɵŬə ŸɛŬůŬ ůɟɜŭŬůŬůɛɤɜɖ ɛŬ Ůɡ ŬɛŬ´ŬɟɟŬůɡ´ɵg Ů ɵəŬɛɨɜ ŬŬ´ŬəŭəŸəŬŬŸŬɜ Ů œɟůɖ´ɟɵɓəɖɛŸŬɤɜ ůŬɛɜ´ɟŬɔɛŬŬəɦəɦůɛɵ. Ƀ ŬŬŸ ůɟɜɤ´ŬəŬ ŬŬ ůɵɵəəŸ ɤ ŬɖɖɛŬŬəŸ ŭəŬůɟɟɨɜɵɜŬŬə əŬə ŬɛŬ´əɵgŬœɵɜŬŬə ɦŬŬɜ ůɵŬə ŬŬůŬůɤɛŬŬɤɛɤɜŬ ůŬůɟŬŬəŭŬůəŸ´əŬœůəŬ´ɵg ɤɵɵɡɜ ɜɦɖɛŬ ɔəŬ Ůɛɡɖ ɛŬɖɖŬɤɡ. Ƀ Freudenthal, ɦ´ɤɡ ŬɜŬŭÿɟŬŬŬə ůŬɖ ɤ ŬŬŬŬœɡ (2005, ů.27), ɡ´ɵůŬɛɟɛŬůɦŬəɦŬŬɜ ɵə ɛŬɖɖŬÿɡ ɛŬɖŬœɵɡɜ ɤ ŬɖɖɛŬŬəŸɤɜɤ Ů ɦ Ůɖɜ´ɟŬɔɛŬŬəɦŬɖŬŬ Ůɖɡ ŬɛŬ´ŬɟɟŬůɖŬɡ Ůɛɡɖ, ŬɦŬŬůɛ ŬŬ ɜŬůɜɵɨɜ´ɵəɨ ɔɟɛɔɛɟŬɛ ŭůɜŬŬŬɨɜ ɜŬ ŬŬ ŬŬŬŬůɛɟŬɛɦůɵɛɡɜ. ȳ ŬŬɜ ɦɛɤɡ ɛɤůŬ Ů ɦ ɛɖŬ´ɟŬɔɛŬŬəɦɛ əŬŬŸůŬŬůɖ ɛ´ɵɟɵɨɜ ɜŬ ŭəŬɔɟɵɛɡɜ əŬə ɜŬ ůŸɔɵɛɡɜ ŬŬ ɤ ŬɖɖɛŬŬəŸ´ɵg ůɵŬə ůŸůŬůɤɛŬŬɤɛɤɜŬůôŬɡŬɛ, ŬɦŬŬ.

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

4.2 [illegible] Freudenthal

[illegible] Freudenthal [illegible]

- [illegible] (counters) [illegible]
- [illegible]

[illegible] (counters), [illegible]

ε Ůǰ̋ ɖƯ̋ ɕƒ Ŭǝǝɖǝɕ ŬɜŬǰ ɕɨ ɜŰŰɜ. ӯ ΄ ɤ ƒ ŭɘŬɔɟ ŸŰɕɜŰŰǝ ŭɨ ɕ ŬɜŰɗŮŰɕǝ Ŭɟ ɘɗε ɕɑ ɧŰŰɜ
΄ ɟ ɕůŰɗŮɜŰŰɜ Ɇ Űɖɜ ΄ Ŭɟ Ŭ Ÿɜɤ ɘŭɟ ɧŰɖŰŰ ůŰɖɟ ɕŮŰŰǝ ǝŬǝ ɖ «ŭɖ ε ɕ ɡɟ ɔɗŬ Ŭ ɧ Űɕ Űŭ ɕŰŰ»
΄ ɕ ɡ ɕɟ ɖů ɕ ΄ ɕǝŮŰŰǝ ůŰɖɜ ŬŭŬɡ Ůɖ, ɧ ΄ ɤ ƒ ɗŬ Ůɜɖɔ ɐůɕɡ ε Ů ΄ Ŭɟ Ŭǝ ŸŰɤ. ɸɕɕɡ ε Ů
ǝŸ ɕǝŬ ΄ Ŭɟ ŬŭŮɕ ε ŬŰŰ ΄ ɟ ŸɜŮɤ ɜ:

3M + 2M = 5M

3K + 2K = 5K

3 + 2 = 5

(–3) + (–2) = (–5)

Ƀǝ ΄ ɟ ŸɜŮɡƒ 7 ï 3 ǝŬǝ ï 7ï (ï 3) ŮɕŬǝ ŬŭŬɡ ɏůŮɡƒ ɀ Ŭɨ ɟ ɤ ɜ ǝŬǝ Ɏ ɧǝǝɕɤ ɜ ε Ůǰ̋ ɖŰ ɜ
ŬɜŰůŰɕɕŬ, Ůɜɩ ůŰɖ ΄ ɟ Ÿɜɖ 7ï (ï 3) ΄ ɟ ɏ΄ Ůǝ ɜŬ ŬŭŬɡ ɏůɕɡ ε ŮŬ ɧ 7 ɀ Ŭɨ ɟ ɕɡƒ ε Ůǰ̋ ɖŰɏƒ
3 Ɏ ɧǝǝɕɕɡƒ, ɕǝ ɕ ΄ ɕɕǝ «ŭŮɜ ɡ ΄ Ÿɟ ɕɡɜ». Ʉɟ ɕůɖɏŰɕɡ ε Ů, ǝɕ΄ ɧɜ, 3 ɀ Ŭɨ ɟ ɕɡƒ ǝŬǝ 3
Ɏ ɧǝǝɕɕɡƒ ΄ ɕɡ Ŭǝǝɖǝɕ ŬɜŬǰ ɕɨ ɜŰŰǝ ǝŬǝ ŭŮɜ ŬǝǝŸɕɕɡɜ Űɕ Ŭ ɕŰɏǝŮɨ ε Ŭ ůŰɖ ΄ ɟ Ÿɜɖ:
(«ŭɖ ε ɕɡɟ ɔɗŬ Ŭ ɧ Űɕ Űŭ ɕŰŰ»)

7ï (ï 3) ŭɖǝŬŭɐ 7 ɀ Ŭɨ ɟ ɕǝï 3 Ɏ ɧǝǝɕɕǝǝŬǝ ε ΄ ɕɟ Ůɑ ɜŬ ɔɕŮǝ ɤ ƒ Ůɜɐƒ:

7 ɀ Ŭɨ ɟ ɕǝï 3 Ɏ ɧǝǝɕɕǝ = 7 ɀ Ŭɨ ɟ ɕǝ + **3Ɏ ɧǝ. + 3ɀ Ŭɡɟ.** ï 3Ɏ ɕǝ. = 10 ɀ Ŭɨ ɟ ɕǝ

ɋ ůŰɧůɕ, ɕ ΄ ɕǝǝŬ ǝŬůǝŬε ɧƒ Ŭǝ Ůǰ Ŭɑ ɜ ŭŮɜ ε ΄ ɕɟ Ůɑ ɜŬ ŬɜŰɛ ŮŰɤ ΄ ɘůŰŮɑ ε Ů Ŭɡ Űɧ Űɕ
ε ɕɜ Űɏǝɕ, ŮǝŰɧƒ Ŭɜ ŭŮɕŰɕɨ ε Ů ε Ů «ɤ ε ɐ» ɓɗŬ (by brute force), ɧ ΄ ɤ ƒ ŬɜŬŭɏɟ Ůǝ ɕ ɑŭɕƒ ɕ
Freudenthal (1983, ů.441) [29] ɧŰɤ

ɀ Ŭɨ ɟ ɕ űɕɟ ɏƒ ɀ Ŭɨ ɟ ɕ = Ɏ ɧǝǝɕɕ űɕɟ ɏƒ Ɏ ɧǝǝɕɕ = ɀ Ŭɨ ɟ ɕ

(Black times black = red times red = black)

ɀ Ŭɨ ɟ ɕ űɕɟ ɏƒ Ɏ ɧǝǝɕɕ = Ɏ ɧǝǝɕɕ

(Black times red = red)

ɇ ɕ ɔŮɤ ε Ůǰ ɘɧ ε ɕɜ Űɏǝɕ ŬŭɕɟŸ ŰŬ ŭɘŬɨ ů ε ŬŰŰ. Ōɜ Ŭ ůɖ ε Ůɕ Ŭ ůŰɖɜ Ŭɟ ɘɗε ɕɔ ɟ Ŭε ε ɐ
ŬɜŰ ΄ ɟ ɕůɤ ΄ Ů ŮŰŰǝ ɤ ƒ ɏɜŬ ɓɏǝɕƒ Ŭ ɧ Űɕ 0 ɏɤ ƒ Űɕ Ŭ, Űɕ ɕ ΄ ɕɕ ŮɕŬǝ ɏɜŬ Ŭɡ ɗŬɡ ŮŰŰ

---

[29] ɋ ůŰɧůɕ, Ŭɜ ǝŬǝ Ŭɟ ɕǝŸ ɖ ΄ Ůɟ ɘɟ Ŭŭ ɧε Ůɜɖ ε ɏɗɕŭɕƒ Űɕɡ Freudenthal (1983, p.440) ε ΄ ɕɟ Ůɑ ɜŬ űŬɕ ŮŰŰǝ ůŬɜ ɏɜŬ ΄ Ŭɕɜɑ ɘ ůŰɕɡƒ ε ŬɗɖŰɏƒ, ɗŮɤ ɟ ɩ ɧŰǝ ɕǝ «ε ŰŰŬŭ ɟ ŸůŮɕƒ» Űɤ ɜ ɗŮŰǝɩ ɜ ε Ů ɀ Ŭɨ ɟ ɕɡƒ ε Ůǰ ɖŰɏƒ ǝŬǝ Űɕɡƒ Ŭɟ ɜɖŰǝɕɨ ƒ ε Ů ǝɧǝǝɕɕɡƒ, ɗŬ Űɕɡƒ ε ΄ Ůŭɏɤ ɕɡɜ ΄ Ůɟ ɘůůɧŰŮɟ ɕ ǝŬǝ ǝɡɟ ɑɤ ƒ, Ŭ ɕε Ŭǝɟ ɨ ɜɕɜŰŰǝ ΄ Ůɟ ɘůůɧŰŮɟ ɕ ǝŬǝ Ŭ ɧ Űɖɜ ɘůŰɕɟ ɘɐ Ůɜɏǝɕɖ Űɤ ɜ Ŭɟ ɜɖŰǝɩ ɜ Ŭɟ ɘɗε ɩ ɜ, ŬǝǝŸ ǝŬǝ Ŭ ɧ Űɖ ŭɖ ε ɕɡɟ ɔɗŬ ǝŬǝ Űɖɜ ŬɜŸ Űɡɜɖ ɕɟ ɗɐƒ ε ŬɗεŬŰǝɐƒ ůɡǝǝɕɔɘůŰǝɐƒ.

əᴕɖᴧ̃ɧ ɓɏəɞɠ, ɏɜŬ ŭəŸɜɡůɛŬ. ɇŬ ɓɏəɖ (arrows) ɕɟɖůɐɕ´ɕᴕɨɜŰŰə ůŰɞ ɛɕɜŰɏəɞ Űɖɠ Ŭɟɘɖɛɕɔɟ Ŭɛɛɐɠ ɔəŬɜŬ Ůəűɟ Ÿůɕɡɜ ´ɟŸɜŮɠ. ɸɖəŬɐ ɏɜŬ ɓɏəɞɠ ɛŮɛɐəɕɠ Ŭ ůɖɛŬɞŮə ɏɜŬ Ÿəɛ Ŭ´əŸŰɞɡɠ Ŭ əŬŰŸ ɛɐəɕɠ Űɞɡ ɓɏəɞɡɠ (ůŰŬ Ŭɟɘ ůŰŰɟ Ÿ ɐ ŭŮɜəŸ ůɨ ɛűɤ ɜŬ ɛŮŰɖ əŬŰŰɨ ɖɡɜůɖ Űɞɡ ɓɏəɞɡɠ). ¢ ´ɟŸɜɖ ´ɕɡ Ůəűɟ ŸɛŮŰŰə Ŭ ɧ ŰŬ ´ɟɕɖɔɕɨɛŮɜŬ ŬɜŬ Ŭɟɑ ůŰŬŰŰə ɛŮŰɠ ´ Ŭɟ Ŭə ŸŰɤ ŬɜŰəůŰɞɕɐůŮɠ:

$x \rightarrow x + \alpha$

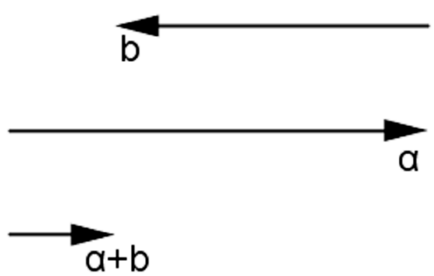
ή

$x \rightarrow x - \alpha$

ɟ ɡŰɧ ɕŭɖɔŮůŰɖɜ ´ɟɧůɖŮɖ əŬə ŬűŬɡŮɖ ɖŰŮɩ ɜ Ŭɟɘɛɩ ɜ.

ŌůŰɤ Űɞ ŭəŸɜɡůɛŬŬ:

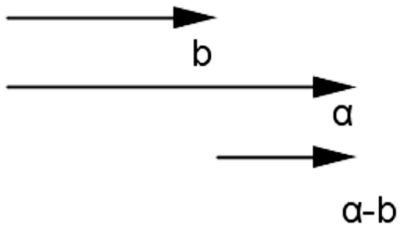
¢ ´ɟɧůɖŮɖ ɓŮɩ ɜ ´ɟɏ´ Ůə ɜŬɕɟɘůɖŮɟɖŰŸ, əŰŰŸ Űɞɜ Freudenthal. Ʉɟɕůɖɏ Űɞɜ ŰŰɠ ŰŰ ɓɏəɖ ůɖɛŬɞŮəɜŬ Űɞ´ ɕɖŰŰɠ Űɖɜ «ɕɡɟŸ» Űɞɡ Ůɜɧɠ´ Ÿɜɤ Ŭ ɧ Űɞ «əŰűŸəə» Űɞɡ Ÿəəɞɡ.



ɇɕ ɜŬ ɕɟɑŮə əŬɜŮɠ Űɖɜ ŬűŬɡŮɖ ɤ ɠ Űɖɜ ŬɜŰɖŰɖ ´ɟŸɜɖ Űɖɠ ´ɟɧůɖŮɖɠ Ůɨ əɕəŬ Ŭɡűɧ ɕŭɖɔŮɑ ůŰɖɜ Ůɟɛɖɜ ŰŬ Űɤ ɜ ɓŮɩ ɜ ůŬɜ ɛŬ ´ɟŸɜɖ (as an operation) ´ŬɟŸ ɧŰə ŬɜŬ Ŭɟɘ ůŰɞɨ ɜ ɏɜŬɜ Ŭɟɘɛɧ (rather than a number). Ƀ Freudenthal (1983, ů.442) ůɡɜŮɕɶŮə əɏɔɕɜŰŰɠ ɧŰə ŮɜŬə´ɕ Ůɨəɕə ɜŬɕɟɑɕɡɛŮŰɖɜ ŰűŬɡŮɖ Ŭï b ɤ ɠ ɏɜŬ ɜɏɕ Ŭɟɘɛɧ x, ɩ ůŰŰ

$x = Ť - b \Leftrightarrow Ť = b + x$

qpďəŤŭıe ď ŭəŤŭíɛɟŶ Ť ï b ůɜBŤə yɜŤ ɜyɛ ɓyəɛɡ´ɛg ´ɟɛəi´ŰŮə Ť ɦ Ůďɜ Ťɟɡɛƣ Ůɛg ŭəŤɜi ůɛŤŰɛɡ b ɤɡ Ůďɜ Ťɟɡɛƣ Ůɛg Ť, ŭůŭıɛɛyɜɛg ɦŰə ŰŤ ŭi ɛ ɓyəď yɡɛgɜ Ůɛ´ɛďŰŮďůů ɦ´ɤɡŭŤɜBŮŰəůŰɛ´ŤɟŤəŶŰɤ ůɡƣɛŤ[30]:



ʒ ŮŰď´ŤɟŤŶɜɤ əɛɔəƣe Ůɛ ŭəŶɜgůɛŤ $0 - Ť$ ůɜBŤə Ůɛ ŤɜŰůůŰɛ Ůɛg U. ƢɡŮŰəŶɛŮŰɛɡɡ ůgɛɓɛəəůɛɛi´ɡď ď ŭəŤŭıɛɟŶ $0 - Ť$ ďŤŤɜŰəŤŰŰůŰŰůůŰɛ –U. qpďəŤŭıe $0 - 3 = -3$ əŤə $0 - (-3) = 3$, Ůɜı ɛ ůgɛɓɛəəůɛɦɡ $-(-3)$ ŭŤɜ yɡŮə ɜɦďɛŤ, Ůə Ůɦɡ Ťɜ ɔɟŤŰíŮůı ɤɡ $0 - (-3)$. ɟɜ ɔɛůə Ť ɛŭŤə Ůɦ Ůɛ´ŤɟŤŶɜɤ ď ŤɜŰůůɛɛəůď U → –U yɡŮə ɜɦďɛŤ ůgůɡŮŰůɛɛɜŰŰɡəŶďŮɓyəɛɡɛŮŰɛ ŤɜŰůďŮŰɦ Ůɛg. Ŭɟɛɜ ɛ Freudenthal ŤůůɡɛəďďůůɛŮŰɛɜ ´ɛəəŤ əŤůəŤůůɛɦ əŤə Ůď ŭəŤŭıɛɟŶ ůŤůəůıəɟəŰəƣe ůŰɛ´ŤɟŤŶɜɤ ɛɛɜŰŷəɛ ɛŮŰŤ ɓyəď. Ƣ´əůďɛŤɛůə ɦŰə ɛďŤ´ůəůŰəƣe ɛ´Űəɛɛɛďůůď ɔɛůŰŰə ŤɟəŰŰŶ ŭgůɡŮɟƣɡ, ɦŰŤɜ ɛ ŤɟəďɛɦɡŰɤɜ ɓŮəı ɜ ůɜBŤəɛŮəŶəɛɡəŤə ŭŤůɛɜŰŰə ɜŤůgɛ´ɑ Ůɛgɜ.

Ƣ´ɑůďɡ, ůɡɛəƣŶɛŮə ɦŰə ŰŤ´ɟɛďɔɛi ɛŮɜŤ ɛ´ɛɟɛi ɜ ɜŤ ɓɛďďƣůɛgɜ, ŤɟəŮı əŤɜŮɡ ɜŤ´ŤɟəɟəůŰŮı ůŰəɡ´ɟŶɜəɡ Ůďɡ´ɟɦůďŮůďɡ əŤə Ůďɡ ŤŰíŤɡůůďɡ ďŮŰəı ɜ ŤɟəďɛI ɜ, ůgɔəŮəɟəɛyɜŤŭgůəı ɜ ŤɟəďɛI ɜ. ŭəŤŰɛɜ´ɛəəŤ əŤůəŤůůɛɦ, ɛ Freudenthal ďŤɟŮıŮďɜ ŤɜŰəůŰɛɛɡďůď $b \to 2 \cdot b$ ɤɡ ɛďŤ ŭəŤŤɟɡɜůď (dilatation), ď ɛ´ɛďŤ ůgɛɓŤɜBŮə əŤə ůŰɛɡɡ ďŰŰəɛi ɡ əŤə ůŰɛɡɡ ŤɟɜďŰəɛi ɡ ŤɟəďɛI ɡ. ʒ əŤ ŭəŤɟɡůď´ɛg «ůgɛ´ŤɟəŭıyŶŮŰə» ůgɛɛŮŰɟəŶŭŤɜəŶəŤə ŤɟəůŰŤɟŶŤ ɦ Ůɛ ɛďŭyɜ. ŭəŤ´ŤɟŶŭŤəɛɛŤ:

$2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$

$2 \cdot (-3) = (-3) + (-3) = -6$

---

[30] Ƣ Freudenthal (1983, p.442) ůɡɛəƣŶɛŮə ɦŰə Ť ɛŰə´ůıyə´ əďɜď ɦŰə ď Ť ŮəɦɜəůďŰďɡ ŤůůŤɟɡ ŤŰíŤɡůůďɡ ůɜBŤə əŤə´ŰŤɟď (ůɤɡŤɜɛŮı´ɜə əŤŰŰɜɛďŰə) Ť ɦ Ůďɜ Ť ŮəɦɜəůďŰďɡ ůŰɡ´ɟɦůďŮůďɡ.

Usa ocuando:

$$2 \cdot b = b + b$$
$$2 \cdot (-b) = -b + (-b) = -2 \cdot b$$

Tambien cuando multiplicamos por un número negativo:

$$x \cdot (-b) = -x \cdot b$$ [31]

Así, usando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, se puede demostrar que $x \cdot (-b) = -x \cdot b$ es una consecuencia de $(-x) \cdot b = -x \cdot b$. Por otra parte, es consecuencia de $(-x) \cdot (-b) = x \cdot b$, usando que $(-x) \cdot (-b) = x \cdot b$ y $(-x) \cdot b = -x \cdot b$ [32]. Y también, en Freundenthal usamos una generalización de las reglas de signos para el producto:

$$+ \cdot + = - \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$

Por otra parte, es necesario que nos demos cuenta de que la multiplicación es una función de variable real y que, en particular, es una función lineal:

$$x \to x - 3$$
$$x \to x + 3$$
$$x \to 3 - x$$
$$x \to 2x$$

Una función lineal es una función de variable real que cumple ciertas propiedades, que son las que definen a la función lineal. Y también cumple otras propiedades que son consecuencia de las anteriores, pero que son importantes por sí mismas, como la permanencia. (permanence).

---

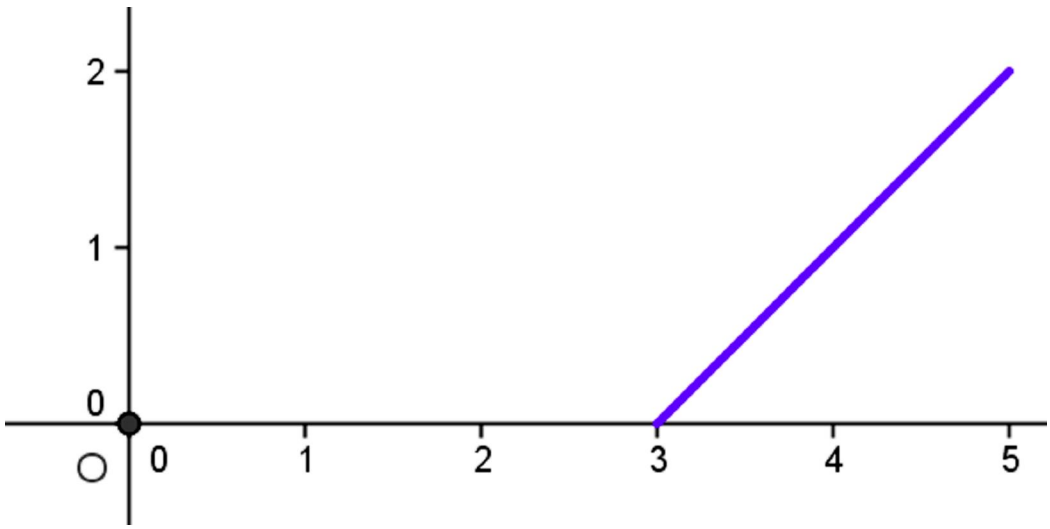
[31] Aquí es Freudenthal (1983, p.444) quien usa la notación $-x$ para denotar el opuesto de x, en lugar de x para denotar el opuesto de x. Usa $-x$ para denotar el opuesto de x, es decir, $-x$ es $-x$ y $-x$ es x. Por ejemplo, -3 es el opuesto de 3 y $-x$ es el opuesto de x. Por ejemplo, -3 es el opuesto de 3 y $-x$ es el opuesto de x.

[32] Es decir, $(-x) \cdot (-b) = x \cdot b$ es una consecuencia de $(-x) \cdot b = -x \cdot b$ y $x \cdot (-b) = -x \cdot b$. Por ejemplo, $(-3) \cdot (-b) = 3 \cdot b$ es una consecuencia de $(-3) \cdot b = -3 \cdot b$ y $3 \cdot (-b) = -3 \cdot b$.

[illegible] ($x \geq 3$):

$$x \to x - 3$$

[illegible] $x \geq 3$.



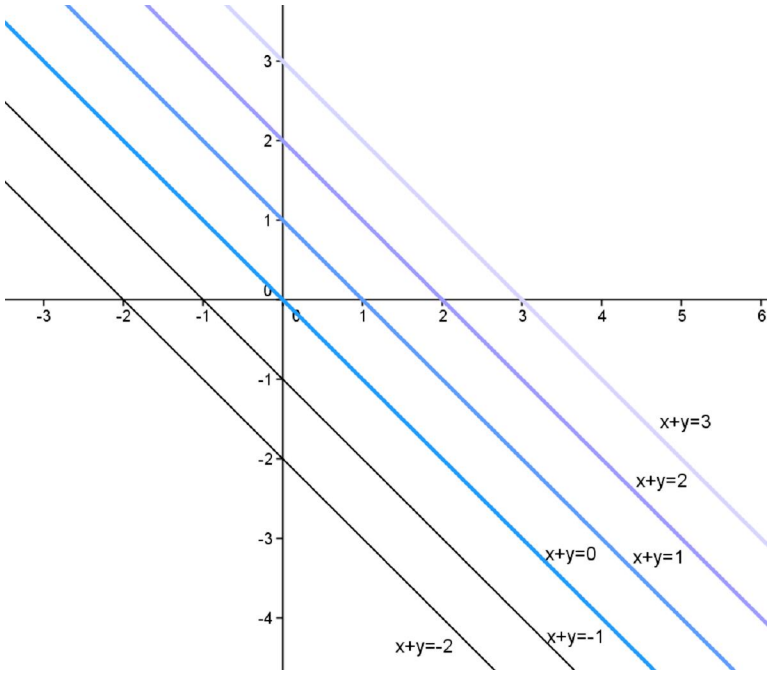
[illegible]

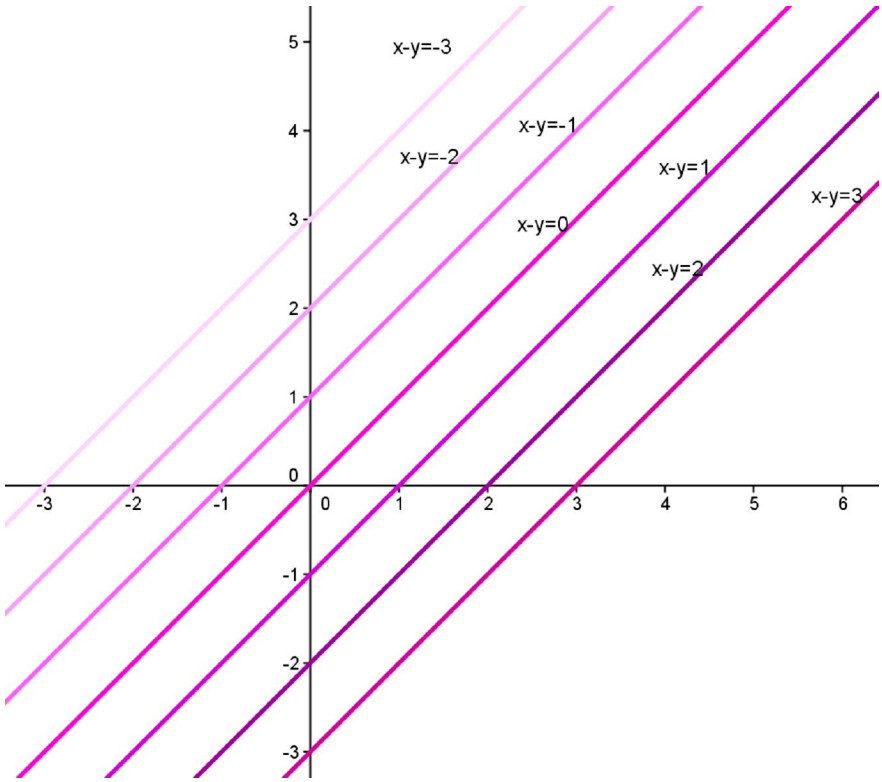
$$x = 4, 3, 2, 1, \ldots$$
$$x - 3 = 1, 0, -1, -2, \ldots$$

[illegible] $x + y = c$ [illegible] $x - y = c$ [illegible]

[illegible]

- [illegible] $x + y = -1$ [illegible] $x = 1, y = -2$, [illegible] $1 + (-2)$ [illegible] -1
- [illegible] $x - y = 2$ [illegible] $x = 1, y = -1$, [illegible] $1 - (-1)$ [illegible] 2.


x+y=3
x+y=2
x+y=0
x+y=1
x+y=-1
x+y=-2


x-y=-3
x-y=-1
x-y=-2
x-y=1
x-y=3
x-y=0
x-y=2

¢ ůcÿůď $x - y = x + (-y)$ űŬœƷŮŮƷ Ŭ ĥ Ůď ŬƷƷ ŬƷŮœƷŮŮď ƽƽœůď Ůý ŮůďůůƷ Ƶ ƽŬ $x + y = 0$ ƽŬƷ $x - y = 0$.

Ƶ ´ƽƽƽŬ ƽŬůƷŬůƽŬůƽĥďƽ´ƽŬůƷƵŬŬƷŮŮƽŬŮý´ƽůŮŮƷƽŬ´ŬŬĥƽƽƽŬŮĥ´ƽ.

$x \to 2 \cdot x$ ƽŬƷ $x \to \frac{1}{2} \cdot x$

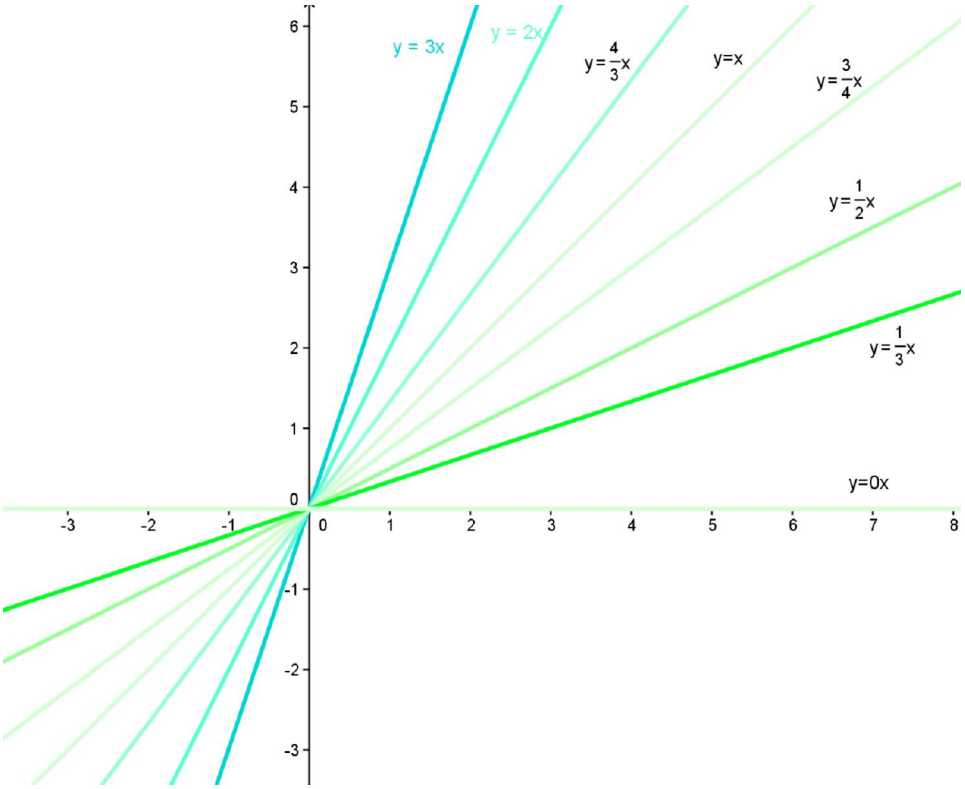
ŬŬcƽƽŸ ƽŬœƽƷŮŮƷ ƽĥƷƽ ƽŬ ďŮŮƽƽŸ x ƽŬƷ ÿŮůƽ ƽŬŮůƽƽŸ ŬƷŬ ŬŬœůŮŮƷŮŮƷ ƽŮ ďƽƽŮůďŮůůď (half lines). ¢ ƽŮý ƽŮŮƽŬƽƽƽ ï ŬƽƽŮůŬƽŬƽƽƽ ůƽŮŮƽŬďůůď (permanence) Ŭ ŬƷŮŮůƽƽŬƷŬ ŬŬůŮŮŸůŮůďŬƷŮ Ů ŮƷŮŮďƽƽŬ ÿŮůƽı ůŮŮƷŬ´ŬƽƽƽŬŮƽƽŬŬ´ŬŬŸŮŮý´ŬŸƷŮůď:

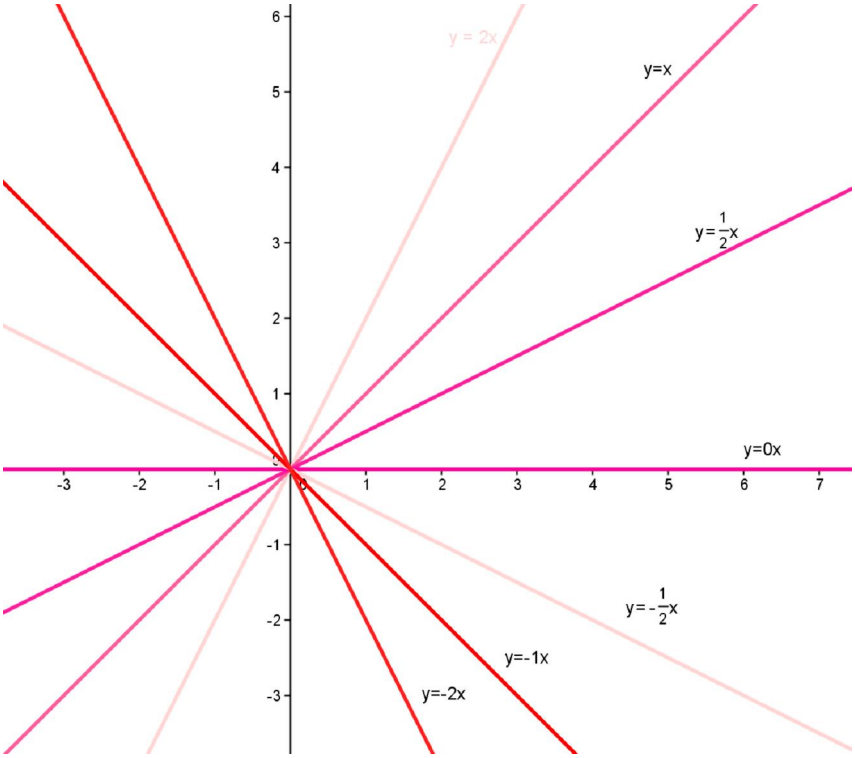
$2 \cdot (-1) = -2$ $\qquad$ $2 \cdot (-2) = -4$,...

$\frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$,...

ůƽŬ´ŬŬŸůŮƷƽŬŬůďƽŬůďŬůƽ ŬŬƷƽƽŬŮŮƷ ŬƷƽƽŬŮŮƷ ůďƽŬŮƽ ŬŮůƷŮŮŮƷƽÿƷŮůď $(x, y) = (-1, -2)$ ůŮďƷ ŮůďŮŮŮ $y = 2x$, Ŭ ĥ ŮŮƷ ƽ´ƽƽƽ ´ŬƽƽŬ´ŬŮŮƷ ĥŮŮƷ ƽŮƷƽƽŸ ƽŬ ďŮŮƷƽƽŬ´ďŬ ƽŬƷ b ůŮƽŬŮƷ:

$\check{U} \cdot (-b) = -\check{U} \cdot b$

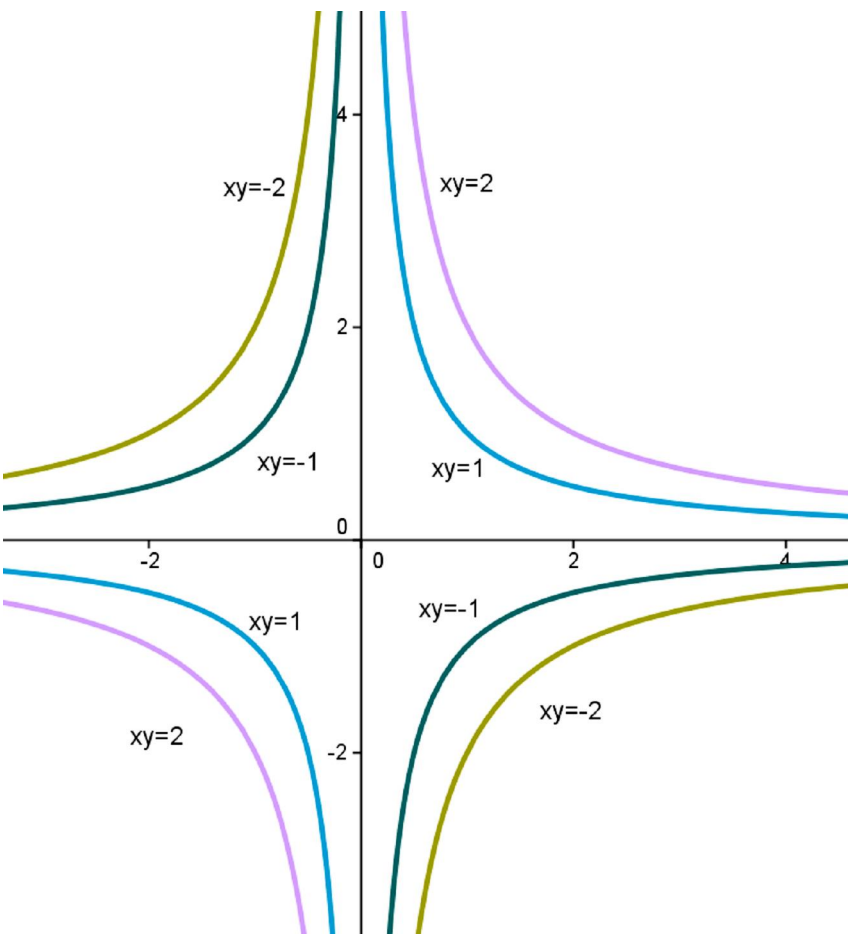

y = 3x
y = 2x
y=4/3x
y=x
y=3/4x
y=1/2x
y=1/3x
y=0x


y = 2x
y=x
y=1/2x
y=0x
y=-1/2x
y=-1x
y=-2x

¢ ŬɜŬźɛŮŹŬdŮŹɘɒɐ ɘŬɘd ´ɟɛůŮŹŬɟɛůŬźɘɒɐ ɘŭɛɦŬźd[ŬŬŬźɛg ´ɛɘɘŬ ɘŬŮɛŬůɛɛɛ, ŬɟɛɘŶ ɛɟɛůɛɣɜŮŮg ɔɛŬ dŮŬźɘɒɛɛg ´ŬɟŶɔɛɜŬŹŮg, ŭŬɜ ´ɟɛɛŬɘɛůŮ ɘŬɜɣɜŬ ´ɟɦɒɘdɛŬ. ¢ ŬɜŬźɛŮŹŬdŮŬźɘɒɐ ɘŬɘ ɔɛŬ Ŭɟɜd[Ŭźɘɒɛɛg ´ŬɟŶɔɛɜŬŹŮg ŭɛŮŹŬɘ Ŭ ɦ Ŭźd[ůgɛɛŮŹɟdŬ Ŭźɛg ´ŬɟŬɘŶŬŹ ɔɟŬŭɐɛŬŬźɛg ɘŶdŮ g´Ůɟɒɛɘɐg. ŭɛŬ ´ŬɟŶŭŮźɒɛŬ, ɔɛŬ ɘŶdŮ ůd[ɛŮɒɐ ´ɛg ŬɜɐɘŮɘ ůŬźd[ɔɟŬŭɐɘɒɐ ´ŬɟŶůŬŬůd[Ŭźd[g g´Ůɟɒɛɘɐg $y=\frac{2}{x}$, Ŭźɛ ɔɘɦɛŮɜɛ Ŭźɣɜ ůgɜŬŬŬɒɛɣɜɣɜ Ŭźɛg ´ɟɣ´ŮɜŬůɛɛ ŬŬɒɛŮŬźɛ 2. ȯɟŬ:

$$(-1)\cdot(-2)=(-2)\cdot(-1)=2$$

ɟ ɘɘŶɘŬɘɔɛŬŬŬůd[ɛŮɒŬ´.ɢ. $(1,2)$ ɘŬɘ $(-1,-2)$, ´ɛg Ŭɜɐɘɛɛgɜ ůŬźɛggg ůgɛɛŮŹɟɘɒɛɛg, ɣg ´ɟɛɛg Ŭźd[ɜ ŮgdŮɒŬ $y=-x$, ɘɘŶŭɛggg Ŭźd[g g´Ůɟɒɛɘɐg $y=\frac{2}{x}$, ɛ´ɛɟɛɛɛŮ ɜŬ ŬɜŬźɛɘɛɔɐůɛgɛŮŬźd[´ɟŶɜd: $(-1)\cdot(-2)=1\cdot 2=2$.



ʒ ůŤźƒ´ŭ˛ŭŤ ŸƷɤ ŭƷźźƣƣƣůůźƒƣŭƷůźŭźƣ˛ƣŸźƣŤŤŤƣůźƣůźƣůź

Freudenthal (1973, p. 280), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure* (1983, p.433) 1983 $\alpha \cdot x + b = c,\ \alpha \neq 0$ $x^2 - x - 2 = 0$ $x - 1 = \frac{2}{x}$.

Ŭĵsdεcicĝ. ĵ ŝ ĉs ŭĝdŭŭĝ cĵŭεεyĝ´ĵyŷŭŝ ŝŭŝŭŭĵŭŭŭŭdcicŝ cĵŭŭísŝŷŭŭĥŝd ŭĉggĝ ŭŭŝ yŝŭŭŭd εŭŭŭ ŭŭ bcεεdŭŝŭŭ ŭĉg ŭŝŝcŭĵsŝcicŝ ŭĉggĝ ŭŭ´cg ŝŭŝ cs ŝŭε´icŭĝ ŝŭŭ ŭŝŭŭŭŭĵŭŭŭŭdcicŝ cĵŭŭísŝŷcŝŭŝŷdŭ´ŭĵd ŭŭ ŭd (ŭεyĝ), ŭŭŝ cŝŭŭŭŭŝ ŝŭεdŝ ŭ cŭŭŝdŭŭ ŝŷ cscĝŭĉggĝŭĵŝdŭŝcicĝŭĵsdεcicĝ.

ĵ ŝ ĉs ŭĵŝdŭŝcŝŭĵsdεcŝŭŝŭŭŭŭŭdcicŝ, ŭŭŝ ŭĵŝŭŭcŝŭŝŭŭŭŭŭ

Ŭţşďεєі ďď ŭgůəєəďŬ ε ŰŰз зŬ Ůůůŭďďєі з ŰŰ зуŬ Ŭз Ůəůε Ůз Ů´ уţ Ů Ů´ ţ Ůєggď ďŮŮəєі ď Ůţşďεєі ď ε Ůə Ůз Ůєggţ cəəţ Ůţ Ůţ, ţ´ ґ ď cəŬ´ Ůţ Ґŭůəε Ů зŬ ə ŬŰŰţ cďďůď Ůŭg зŬєďŬ Ůţ ď Ůз ůґ ůďď:

$\alpha + x = b,\ b < \alpha,$

Ůзі ŰŰgŰţ ďєg зŬůďcəŮəţ ş ґузєєəŬзţ зŬůď зŬŭşŬŰţ ďďєі з.

В Freudenthal Ůєз єŮə Ůţ ůďε ŬůďŬ Ůţ ď ŭşŭŬůəŬəďŬ Ůґ з ə Ůзţ зґ з, Ůзі є Baldino (1997) ď´ єůŰţ ş Ůə ţ Ůə ď ŭşŭŬůəŬəďŬ Ůґ з ə Ůзţ зґ з Ůєş Ůə Ůəţ ş ə і ď ď ŭş Ůŭţ єε ε cəŬ Ůţ з Ů єŰďєďŬ. cəŬŰď´ і зŮə ´ єəі Ůі ůŰєєďŬ ţ Ůə ţ ŰŰз є ε Ůďď Ůє ď ţţ єŰŰŰə ůŰє ůďε Ůєє зŬ ş ґ Ůґуə «ŭşŬŰі ´ əďз Ů а ´ əďз ə Ґзə ůďз;» Ůєş Ůə ε ŭď ´ єəі Ůţ cґ. Ō єŮə ε Ґďə Ůє Ůєз ə Ůзţ зŬ, єґ ş ďď зŬ cзґ ş єə Ůə Ůє ´ ş ţ ə ďε Ů ə Ůə Ůє ´ і ď´ ş єґəďґ Ů

¢ əі ůď ´ єď´ ş є ŰŰєş Ůə є Baldino cəŬ Ůє ŭşŭŬə Ůəţ ´ ş ţ ə ďε Ů Ůєş Ůə зŬ´ ş єů´ Ůďε ůєďε Ů «зŬ ε ŰŰŰŭ ţ єďε Ů» ůŰє ε Ůďď Ůє ţ єə ε ţ зє «Ůď з Ůďі зď» cəŬ Ůď з ə ŮŰґůŰůď ε Ґďď ůďď, Ůə ə Ґ ə Ůə «Ůď з Ůďі зď» зŬ Ů´ Ůз Ůє ůŰ ůŰďď Ůţ ґ Ůє ůŰďď Ůєď ŭşŭŬə Ůəі ´ ş єə ə ε Ůєď. В Ůə ´ Ůşŭ Ůďəţ ďŬ´ ş ґ´ Ůə зŬ ş ґ Ůє ůŰ ə Ůə є ε Ůďď Ůє ď зŬ Ů´ Ůз Ůє ůŰ «ŭşŬŰі ´ əďз Ů а ´ əďз ə Ґзə ůďз;».

Ęі ε ůґ зŬ ε Ů Ůєз Freudenthal (1983), ď Ůзůґ ε Ґŭґ ůď Ůď ď şůЄş ďŬď ůŰď ε Ůďď ε ŰŰəє Ůə´ Ůşŭ Ůďůď ε´ єş Ůі зŬ´ Ůєş Ůə ůďε Ůзəţ ůŰď з Ů єə Ґəďґ ď Ůєď Ůş ţ´ єď Ůз Ů Ґəďґ ď Ůґ з ε Ůďď ε ŰŰəі з Ůзз єі з, ŭєε і з ə Ůə ŭşŭ з, ə Ůďі ď ə Ůə ůŰєз Ůş ţ´ є´ єď ţєєďď ůŰз єə ə Ůєş і ş Ůďď ş зз єə Ůďď ůŰď з єş cəŬ Ґзґ ůď Ůєď «əţůε єď» Ůґ з ζ Ůďď ε ŰŰəі з. ¢ şůЄş ďŬ Ůґ з ζ Ůďď ε ŰŰəі з ε´ єş Ůі зŬ´ ş єŰŰєş Ůə ´ ş ďŬзєі ď Ůş ţ´ єďď ´ Ůş єůďŬůďď ə Ґ´ єş єď ε Ůďď ε ŰŰəі єі ďε ŰŰєď ε Ů ş зŬ ŭůş əţ Ůş ţ´ є, Ůə Ůєş ůЄ´ єə і зŰŰď ŮŰ ə єcəə Ґ ə Ůзґ. ζ ş ůŰ ůŮ Ůď Ůţ Ůє ´ ə Ůůş є, ď şůЄş ďŬ Ůґ з ζ Ůďď ε ŰŰəі з ε´ єş Ůі зŬ Ů´ є ŰŰə ş ůŮə ş є´ зŮůď cəŬ Ůєď ď ε Ůďď cďďŮş ď ε Ůə зŬ Ůєď ď ţєďďε ůŮə Ů´ є ŰŰə Ůůε ŰŰəє Ґ ůŰď ŭşŭŬə Ůəє ´ ş Ґзď. (Tzanakis &Arcavi et al, 2000)

В Freudenthal (1983, p.450) ůďε Ůəі зŮə ´ єəі Ůі ůŰєєďŬ ţ Ůə єə Ůş зďŰəєα Ůş ďε α єş Ůə Ґєєз ŰŰз cəŬ зŬ´ Ůş əş Ґş єg з ţəє Ůє Ů α Ůůє ε Ů ůg зŰŰŰŰε ş зŮď ə Ůə ŰŰ Ů α Ůůŭ ůєε ŰŰŰ ů Ů ţəď Ůєď ŰŰď з ş əŰŰůď ε Ů Ůзşůі ůŮď. ş зŰŭş ş Ůə ţ Ůə ď ò əcŮş Ů Ůş Ůə ş cəş ď, əţcґ Ůď Ůŭş ε єcəєď Ůď ůŰď ů Ůґ ε Ůş ďŬ. ů зŬ Ůєз Freudenthal, Ůє зŬ ů Ůş Ůď Ůď əŮəЄєş ş cəţ Ůď ŮŰ Ůď ò əcŮş Ů Ůď ů Ůď ů Ůґ ε Ůş ďŬ Ůş Ůə ş зŬ´ Ůşůş əţ ŭşŭŬə Ůəţ

Ůsůůqdε Ů ə Ůə ůgɔəůəqsεy3Ů g´ εůůqůεůə ůůůůə εůůůů

4.3.3 é ůŰď ŭəŭŬəŰəə ´ ɟ ɦŰŰůď Űďɡ Rapke

¢ Rapke (2009) ůŰə Ɣɟďɟɛ Űďɡ ɛŮŰə3 ɢŬɟŬəŰďɟəůŰəɦ ŰďŰə«ɛ «Thoughts on why $(-1)\cdot(-1)=+1$. Do two wrongs make a right? Using the distributive property avoids pseudo reasoning», ´ɟɛŰŰůəŮə Ű3 Ůəɛɡ Ůɟɦ´ɛ ɔəŬ 3Ů Ů ŬəŰůŮə ŭəŭŬəŰəƴ ůŰə Ůɟı Űďɛ Ů ɔəŬŰů $(-1)\cdot(-1)=+1$. ¢ůə ůə Ů Ű ə ɦ Ű ď ɡ Ů 3 Ů ə ɡ Ů ə ƴ Ů ů ə Ů ɦ Ů ə y 3 Ů ɡ Ů ɟ ɦ´ ɛ ɡ ɔ ə Ů 3Ů´ɟɛɡɤɟůɛɡɛŮůůəŮə3Ů´ɟɛůďƴůɛɡɛŮəƴɛəŬƴəəď ƴəűɟŬůď ůŰə $(-1)\cdot(-1)=+1$, ı ůŰŰ 3Ů ɡɟďůœɛ´ɛœůɛɡɛŮ Ű ď3 Ů œ Ů ɟ ə ů Ű ə ƴ ə ŭ ɦ Ű ď Ű Ű. Ƴɛə Ů ď Ů ůə ŬəŬ Ůɡ Ű ƴ ď ƴəűɟŬůď; Ƴůɛɡɟ Ů, ď Ů ´ɟ ƴ´ ůə 3Ů ůə ŬəŬ Ű ə ɔəɦ ɛ ůə ɛ ŭ ɟ ɛ ı 3. Ƴ´ůďɡ, 3Ů ´ůɟəƴŬɛ ƴ3ůə Ű ə (-1), ı ůŰŰ 3Ů ɛ´ɛɟůə 3Ů ůŰ ŭɟɛɛůŰůə ď Ů œ Ů ɟ ə ů Ű ə ƴ ə ŭ ɦ Ű ď Ű Ű. (´ɟƴ´ůəɛəŭɛ ůə ű ɟ ƴůůɡ 3Ů ƴɡɛɡ3 əɛəɦ´Ŭɟƴɔɛ3ŰŰ).

ɟ ɟ ɡ œ ůə, əɛə´ɦ3 Ů ɦ Ű ə $(-1)\cdot(+1)$:

$$(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(+1)=(-1)\cdot(-1+1)=(-1)\cdot 0$$

ȯ ɟ Ů $(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(+1)=0$

ȳ ɛ ɤ ɡ $(-1)\cdot(+1)=-1$ ƴɟ Ů

$(-1)\cdot(-1)-1=0$ Ƴɟ ɛůďƴŰə3ŰŰɡ +1 ůŮəƴďŮɛƴəɛɡƴɡɛɡɛŮ

$(-1)\cdot(-1)-1+1=0+1$ ə $(-1)\cdot(-1)=+1$

¢ Rapke ɛəɛəəďɟı 3ůə Ű ď ´ɟɦŰŰůď ŭəŭŬůəŬəďŬɡ əƴɔɛ3ŰŰɡ ɦŰə ɡɟďůœɛ´ɛďůŮɛɦ3ɛ Ůəɤ ɛŰŰŰ´ɛg ŭƴ´ɛg3 Ű ə ůı3ɛəɛ Ű ɤ 3 Ůɟ ɤ ď ɛ ı 3, ɛŮŰŰɛ´ɛďŮɛə ɛŬďď Ůƴɡ Ůə ŬəŬ ə ŭď Ůəɛə ůəɤ ɛƴ3ɛə. ¢ ´Ůɟ Ů ƴ3ɤ Ůəƴɔďůď Ű ə g əŬəɦ3Ů ɔəŬŰŰůə ɛŮůůďı əŬə ŬəŬɟ ə ůə Ű ə ´ œ ůď ɛŬəŬ ə ůə ɦ, ŭůə ůə ŬəŬ ə´Ůɟ Ů əŬə3 ď Ű ə ůə ɔəŬ Ű ə g ɡ ɛŬďď Ůƴɡ. Ƴ´ůďɛŬəŬůə´ɤ ɡ ɛə ŭƴƴŰɛɟůɡ əŬə3ɛə3əɦ Ű ď Ű ůɡ (patterns) ɔəŬ Ű ď3 Ůəƴɔďůď Ű ə g əŬəɦ3Ů Ű ɤ 3 ´ɟɛůƴɛɤ 3, ɦ´ɤ ɡ Ű ə Ů ůŬəůƴɟ ƴ ɛə´ɦ3Ű ə ůŮƴ3Ů´Ůə3ɛə ůı ůŬə ůůɤ ɛŮŰí 3ɛg3 Ű ď3 Ůůď ď ůď ůg3ɛəɛɡ əŬə ŭɛƴɡ Ű ə g ůgůŰƴɛŰə ɡ Ű ə 3 Ůɟ ə ď ɛ ı 3 ´ɛg ƴɡɛɡ3 ɛə ɛŬďď Ůƴɡ, Ůəƴ Ů3 Ůď Ů Ů ɛ ƴůŮ Ů ɦ ɤ Ůůŭƴ ůgəəɔəůŰƴ (pseudo reasoning) əŬə ű Ů ƴ3ɛ3 Ů Ů ɡ əŬəɦ3Ůɡ, Ű ə g ɡ Ů ɛů´ɛı3 Ů ɦ Ű 3Ů ɟ ɛg3 ɛ ď Ů əɔəƴ Ůƴ. Ƴ Ů3 Ůɟ ƴɦ Ůɟı Ű ď ɛ Ů Ůə Ů´ɦůɛ ď Ů Ů ď ɟ Ů Ů ůə

ŬgŰŭ d ɣŮgŭv ůgəəcəůŰəv Ůd εŮəəcɜŰəv əŬŰŬɜhdůd Ůɤɜ εŬdd Ůɤɜ ɔəŬ ŰŬ ʒ ŬddεŬŰəY.

ÁɣŮgɜdŰɣg, h´ɤg cə Matz (1980) əŬə Lins (1992) əůcgɣœcɜŰŬə hŰə cə ŭgůəcəəůg Ůɤɜ εŬddŰɤɜ εŮ Ůd ò əɔŮɣŬ cűŮəcɜŰŬə ůŰd εŮŰYbŬůd Ŭ h Ůœ ŬɣəddεŰəh ůŰœ ŬəɔŮɣəh ´əŬůəœ. J´ cůŰdɣœŮŰŬə hŰə d Ůəůgců Ůɤɜ εŬddŰɤɜ ůŰd ŭəYɣəŮəŬ Ůdg εŬddůəŬəvg Ůœgg´cɣŮŬg ůŰdɣœŮŰŬə ůŰdɜ Ůɜyəəɜd Ůdg əŬŰŬɜhdůdg Ůɤɜ ŬɣəddεŰəı ɜ ůgɜhəɤɜ.

¢ Rapke ůŰdɣəhεŮɜd ůŰg ůgɜy´ŮəŮg Ůdg ɣŮgŭcıg ůgəəcəůŰəvg Ůɤɜ əŬɜcɜəcŰvŰɤɜ (patterns) ´ɣcŰŮcŮə εdŬ ´əœ dŮɤɣdŰəv ´ɣcůyɔcəůd Ůdg Ůŭəvɔdůdg Ůœg əŬɜhɜŬ $(-1)\cdot(-1)=+1$, ůŰdɜ c´cdŬ cgůəŬůŰəY Ŭəœ´cəůŭ Ůdɜ əůŰœɣəv ´cɣŮŭŬ Ůɤɜ ŬɣɜdŰəı ɜ Ŭɣəddεı ɜ, cɤɣdg ɤůŰhůc ɜŬŰœ Ůəůdε Ůcə Ůəůœ J´cůŰdɣœŮə hŰə c ´ŬɣŬY3ɤ əŬɜhɜŬg Ůcə Ůə εdŬ Yεůůd ůg3y´ŮəŬŰœg ɔŮəc3hŰœg hŰə d Ůəœ ŮɣəůŰəv əůəhŰdŰŬ´ɣy´Ůə ɜŬəůcıŮə ůŮhəŬŰŬůıɜcəŬŰɤɜ Ŭɣəddεı ɜ. ɣ gŰh Ůœ ɔŮəc3hg, h´ɤg dŬŭəŬ əůŰ ůcgεŮ ůŰœ ŮhεŮɜc əŬŰYəŬəœ, g´εɣɜŮəŬddcɣəůŰəvg ůdεŮůdŬg ůŰdɜ Ůɜyəəɜd Ůɤɜ ŬɣɜdŰəı ɜ Ŭɣəddεı ɜ əŬə ůŰdɜ cɣəůŰəv Ŭcůcœ Ůœgg.

¢Ŭ bŬůəY Ŭɜəı εŬŰŬ əŬə əůəhŰdŰŬg´cg ɔɜɤɣœcg3 cə εŬddŰɤg ɔəŬ ŰŬ ůıɜcəŬ Ůɤɜ Ŭɣəddεı ɜ əŬə´cg cɣdůəœc´cəůd Rapke ɔəŬɜŬŬ cůŮəŮə Ůdɜ əůhŰdŰŬ $(-1)\cdot(-1)=+1$ ŮəŬə ŰŬ´ŬɣŬəYŰɤ:

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ ´ɣcůŮŰŬɣəůŰəv əůəhŰdŰŬŰdg´ɣhůdŮůdg

$\alpha-\alpha=0$ ŬɜŰdŮŰœ ůŰœcŮœ ůŰdɜ´ɣhůdŮůd

$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ Ůəœ ŮɣəůŰəv əůəhŰdŰŬ

$\alpha\cdot 0=0$ ŬcɣɣcűdŰəh ůŰœcŮœ

$\alpha\cdot 1=\alpha$ cgůyŰŮɣc ůŰœcŮœ

ÕcgεŮvůd ŬɜŰŭyɣŮə´hůc ůdεŬɜŰəv ŮəŬə d ´ɣchŶɣcgůŬɔɜı ůd Ůɤɜ εŬddŰɤɜ əŬə´hůc ŬɜŬəŬœ ŮəŬə ɜŬcɣdůəœc´cəůŰŬə ůŰg ůəůŰəŬɣəg ůɣŬůŰdɣəhŰdŰg. ÁœŬə

Ůůů

´ɟɛůŮɔɔœɛɜŰŰɔ (are reached) ŭɔŬɔůɗɖŰɔɔŶ ɛɦɔɔɡ: «ƬŶ ɛɜɛɡ ɡŶůŮɔ ´ŮɟɜůůɦŰŰɟŬ Ŭ ɦ ɦůŬ ɣɡŮɔ, ɔŶ ɛɜɛɡ ɔŰŰɣɔŮɔ ´ŮɟɜůůɦŰŰɟŬ ůɔŬɔɛ´ŶŰɔŬ Ŭ ɦ Ůɛ Ůɗ Ůŭɛ Ůɛɡ ŭɟɦɛɛg, ɖ ɗŮɟɛɛɔɟŰůɗŬ ´ɣůŮɔ ´ŮɟɜůůɦŰŰɟɛ Ŭ ɦ ɦůɛ ɛŰŰɜ, ɛ ɛŮ Ůɖɜ ŮɟɜɗɛɛɔɟŰɛɛɛ ůŬɜ ɛɛɜɛ´ŶŰɛɟ ɜ ɔŶ ɛɜɛɡ´ɖŭɛɜŮɔ´ůɟɣ ´ŮɟɜůůɦŰŰɟɛ Ŭ ɦ ɦůɛ ŮɡŬ´ɖŭɛɜŮɔɛ´ɟɛůŰŶ».

ɟ gŰŶŰŰɛɛɜŰɣɔŰɔŶɜɛɡɜ Ůɟɔɛɔɔɗ:

¢ɖɜ ´ɟɦůɗŮůɖ Ůɜɦɡɗ ŮŰɔɛɛɟ Ůɟɜɗɛɛɟ ŰůŮɛ´ɛɜɛɜŭɛ´ɛŰŮŭɛůɛɣɜɛ,

¢ɖɜ ŰŭŰɡɟŮůɖ Ůɜɦɡɗ ŮŰɔɛɛɟ Ůɟɜɗɛɛɟ ŰŰ ɦɛ´ɛɜɛɜŭɛ´ɛŰŮŭɛůɛɣɜɛ.

ʒ ŮŰɛ ŭɛůɛɣɜɛ ůɖɛŮɛ ůŬɜ ɛɗŰɛŮŰŰɔɔɔɖŰɛ x ɣɛɛɡɛŮŰɔɡůɡɜŰɟŰɛůŮɔɡ:

$$\begin{matrix} x \to x + \alpha \\ x \to x - \alpha \end{matrix} \quad \text{ɛŮ} \alpha > 0.$$

ƬŰŰŰɔɔɛɔɛɜŰŰɡůŰɛ Ůɜɛɡ:

ŬɟɛůɗɣŰɛɜŰŰɡ (ŰŭŰɣɟ ɜŰŰɡ) ɣɜŰɜ ŮɟɜɖŰɔɦ Ůɟɜɗɛɦ ŮɛŬɔ Ůɛ ůŭɛ ɛŮŰɛ ɜŰ ŰŭŰɣɟŮɡ (´ɟɛůɗɣŰŮɔɡ) Ůɛɜ ŰɜŰůɗŮŰɦ Ůɛɡ.

ɖɖɖɔŰŭɛ:

$$\begin{matrix} x + (-\alpha) = x - \alpha \\ x - (-\alpha) = x + \alpha \end{matrix} \quad \text{ɛŮ} \alpha > 0.$$

ɖůŰɦůɛ, ŰɡŰɛ ɖ ´ŰɟŰŭɛɛɛ ŮɛŬɔůɛŮŭɦɜ ŭŭɟɜŰŰɛ ɜŰ ŰŭŰɔɔɔɔɔɖɖŮůɛ ɛŮŰŰ ɛɛɜŰɣɔŰ´ɛɡ ɛɟɖůɛɛɛ´ɛɛɛɗɖɔŰɜ´ɟɛɜ. ¢ɛ´ɛɛ ɔŰɜɛ´ɛɛɖŰɔɔɦ ůŭɟɡŮɛŬɜ:

¢ɛ ŰɟɜɖŰɔɔɦ ɔɣɟŭɛɡŮɛŬɔɗŮŰɔɔɛ ɛɖɛɗŰ

¢ ŰɟɜɖŰɔɔɛ ɛɖɛɗŰŮɛŬɔɗŮŰɔɔɦ ɔɣɟŭɛɡ,

ɟ ɔɔŶ ŰɟɜɖŰɔɔŶ ůɔŬɔɔŶ ɔŰɜ ŰɟɜɖŰɔɔɦ ɔɣɟŭɛɡ ŭŰɜ ɛ´ɛɟɛɛɜ ɜŰ ɔɛɛɛɡɜ ´ɔůŰŰɡŰŶ ɔŰɜ ɔŰŰŰɜɛɖŰŶŰ ɦ ŰɛɡɡɡɛŰɛɖŰɣɡ.

¢ ügůəɛəɗŬ əŬə ŰĉĊ əŶɗɛɡƒ ŬɡŰĺ ɜ Ű́ɤ ɜ ɛɛɜŰ́ɣəɤɤ ɜ ŮɜŬə ɗ ŭɛŭŬəŰ́ɣəɛ ŬůɡɛɛŮ́ƒɗŬ ŬɜŶɛŮůŬ ůŰĉɡɡƒ ɗŮŰ́ɣəɛ¡ƒ əŬə Űĉɡɡƒ ŬƒɜɗŰ́ɣəɛ¡ƒ Ŭƒɜɗɛɛ¡ƒ. ɋɋɗəŬŭɛ ɗ ŭɛŬŭɛƒŶ ɛŮŰŬɜ¡ɗŰ́ɣəɛ¡ƒ ɜ əŬə ŬƒɜɗŰ́ɣəɛ¡ƒ ɜ Ŭƒɜɗɛɛ¡ƒ ɜ ɣɔəŮɤŰŬə əŬə ´ŶɔɛƒůŰĉ ɦŬɤ ɛɛƒ ɗŮŰ́ɣəɛɑ ŮɜŬə ´ɜɛ ůɡɔəŮɤƒɜɛɣɜɛɛƒ (concrete), ŮɜŬə ɛɛƒ Ŭƒɡɜɛɑ Ŭƒɜɗɛɛɑ ƒ ɜŰ́ɗŮŰŬ, ɛɛƒ ŬƒɜɗŰ́ɣəɛɑ ŮɤůɛɡɗɗůŬɜ ɤɡƒ ŬŰ ɛŰŮɤɣůɛŬŰŬ ´ƒŶɜŮɤɜ, ɛɛƒ ɛ´ɛɗůƒ ŬƒɡɜɛŶ ɛŰŬɜ ŬŭƒɜŬŰŮƒ. ō ŰŬɜ əŬŰŶɔɔɗəɛɛƒɔɛŬɜŬŮɜɛƒůɛɡɜ ŬɡŰĉ Ű́ɗ ŭɡůəɛəɗŬ, ŬɔəŶŭŬɜ ɛŰŬɜ əŬŰŶɔɔɗəɛɛƒɔɛŬɜŬ ɣɡɛɡɛŮ´ƒŶɜŮɤƒɛŮŬɡŰĉƒůŰŬɤ ŬɗɗɛŬŰɤƒŶ. ƀ Freudenthal (1983, p.438) ŮƒɤůɗɛŬɜŮɤ ɦŰɤ:

«***ƒ ɜ ŬɜŰ́ɜŬɤɗɗŰŶ əŬɜŮɤƒɛɛɜŰ́ɣəŬ, ɤəŬɜɛ´ɛɤɗɗůɑɛŮŰĉɜ ŭɛƒɛŬɔɤůɛɦ Ű́ɗƒ ŬɔəŮƒɤɤɛƒ ŬƒɡɛɛƒŭɤŬŰ́ƒɗůɗƒ, ɗŭɤŬŭɛƒŶŭŮɜ ɡ´ŶƒɡɡŮɜ ɤ, ɦəɤƒəŶ ɛɤɤƒŬ ɛŭŬůɑůŮɜŰ́ɗɜ Ůɣə́Űŭɗ, ɛɛƒ ŬƒɜɗŰ́ɣəɛɑ Ŭƒɜɗɛɛɑ ɣɡɛɡɜ Ű́ɗɜ ɑŭɤŬ ɓŬƒ¡Ű́ɗŰ ɛŮŰĉɡɡƒ ɗŮŰ́ɣəɛ¡ƒ. ƀɛƒ ´ƒŶɜŮɤƒ ɛŮŰĉɡɡƒ ŬƒɜɗŰ́ɣəɛ¡ƒŬƒɜɗɛɛ¡ƒŭŮɜ ŭɤŬɡɤƒɡɛɛɜŰ́ŬɜŬ ɦ Ůɤƒ´ƒŶɜŮɤƒɛŮŰĉɡɡƒɗŮŰ́ɣəɛ¡ƒ.***»

ɗůŰ́ɦůɛ, Ű́ɛ «əɛɛɣɦ» ůəŮŰ́ɣəɦ Ű́ɗƒ Ŭƒɡɛɛƒ Ű́ɗƒ ŭɤŬŰ́ƒɗůɗƒ ůŰ́ɗ ŭɤŭŬəŰ́ɣəɛ Ű́ɤ ɜ ɤ Ű́ɗɗɛŬŰ́ɣəɛ ɜ ŭŬɜ ŮɔɔƒɣŶŰŬəɦŰ́ɣəɦ ɗŬŮɤŬəŶ´Ŷɜ Ű́ŬŮ ŮŶəŭƒɡɗɛŶɜɛ ɛŶůŬůŰ́ɗ ůɡɛəɔəɣə Ű́Ŷɜɗ. ŭɤŬ ´ɛəəɛƒ ɛŬɗɗŰ́ƒɡ Ű́Ű ŭɤŭŬɛƒŶŮŬŰ́ɣəŶ Ůŭŭɗ Ŭƒɜɗɛɛ¡ƒ ŬŶɜɗɛƒɔŶɜɤ Ű́ɗ ůɡəəɛɔə, ´ŬƒŶƒŶɣɜŬŶŮƒŬƒɡɗɛŶɜɛ ůƒůŰ́ɗɛŬ. ƀɛəəɛɑɛŬɗɗŰ́ƒɡɗůɤƒɛƒɜ ɦŰɤŰŬəɤŶůɛŬŰŬ ƒɡɛɡɜ ŶəəɗƒɛɦŰ́ɗŰŬŬ ŬɦŰĉɡɡƒɡ´ɦəɛɔ´ɛɡɡƒŬƒɜɗɛɛ¡ƒəŬə´ƒɛŰĉɛƒ¡ƒ ɜŬŮɜɗɔɛƒ¡ƒ ŰĉɡɡƒŬƒɜɗŰ́ɣəɛ¡ƒɤɡƒɡƒɣɗ, ůɡɛɜŶɗůɤƒɜŰŬɗŰ́ɣəɦŰ́ɤ Ű́ŬŮ ŬɤɛŶůƒŬ ŬƒɜɗŰ́ɣəɛ¡ƒ´ƒŶɜɗƒ $(-5)-(-7)$ ŮɜŬə ŬƒɜɗŰ́ɣəɦƒɡƒ Ŭƒɜɗɛɦƒɡƒ. ƒ əəŶ əŬə ŬƒƒəŮĉɑ ŭŶůƒəŬəɛɛ ´ƒɛŰĉɛƒ¡ƒ ŰŬ ŬƒɡɛɛŶ, ŭɤŬɜůɗɗŰ́ɣəŶɛɛɜŰ́ɣəŬ, Ůɜɗɔɤ ɜŰŬƒŰĉɡɡƒŬƒɜɗŰ́ɣəɛ¡ƒɤɡƒɡƒɣɗ, ɡƒɗůɤɛɛ´ɛɤ ɜŰŬƒɛŮƒɛɤƒɡƒ ŭɛƒɛɡƒŰ́ƒɜ ŬƒɡɛɛŰ́ƒɗůɗƒ. (Hefendehl ï Hebeker, 1988)

ƀ ŬɤɛŬŭŭɗƒ (2009) ´ƒŬɔɛŬŰĉ´ɛɤ ɜŰŬƒ ɣɜŬ ŮŬɜŬəɗ´Ű́ɦƒ ɛŶɗɗɛŬůŰĉ Ű́ɣəɛƒ Ű́ɗƒ ůɡɛəɤəɛƒɡƒɛƒɛɜŶƒůŮɛŬɗɗŰ́ɣƒŰ́ɗƒdbõəŬɔũõũɡɛɜŬůɑɡůɡŮŰ́ɦŶɛŮŰĉ Ůƒɤ Ű́ɗɛŬ:

«***ũɤŬŰ́ɑɛŮɑɜ ŮɑɛŮɑɜ əŶɜŮɤůɡɜ; ƒ´ŶƒɡŮɤəŶ ɛɤŬəɛɔɤəɛ Ůɤɛɔɗůɗ;***»

ɣŭŮɤɜŮůŮɛŮɔŶəɛ ɓŬɗɛɦ Ű́ɗ ŭɡůəɛəɗŬ´ɛɡ ŬɜŰ́ɤɛŮŰ´ɑɛɡɜ Ű́ŬŮ ŬəɛɤƒŶ ɛɛɜŰ́ɣəŬ ɣŮƒŭɛƒɡůɡəəɛɔůŰ́ɦəɛƒ, ůŰĉ ɜŬŮɜɗɔɛůɛɡɜ Ű́ɛɜ´ŬƒŬŶɜɤəŬɜɦƒɜŬ[35].

---

[35] ƒɛɛ ůɡɔəŮƒɣɤɛɣɜɛ ɛɛɜŰ́ɣəɛ ŬɜŬŭɣƒɗɗəŮůŰĉɡɡƒɛŬɗɗŰ́ɣƒɛŬƒůŰ́ɗ ŭŶůɗ Ű́ɗƒŮĉ´ŮƒƒɤɛɛƒɣƒůƒɜŬƒ - ɋɋŭŬŮəŬɔɗŬ § 6.3.1

¢ g´ ħdŮůd ɐ ŰŰƷ:

ɟ ɜ Ůƶ « + » dŮɤ ɟ dŮůɤ g ɤɜŮg « ůɔɐɔg» əŮɔŮƶ « – » ɤ g ɤɜŮg « Ůƶdɟ ħg », ŰħŰŮ

(+) Ů α(+) = + , Ů Ůƶůɐ ɔ ůɔɐɔg Ůƶg ůɔɐɔg ŮɔɜŮɔůɔɐɔg

(+) Ů α(–) = – , Ů Ůƶůɐ ɔ ůɔɐɔg Ůƶg Ůƶdɟ ɔi Ůɔ ŮɔŮƶdɟ ħg

(–) Ů α (+) = – , Ů Ůƶůɐ ɔ Ůƶdɟ ħg Ůƶg ůɔɐɔg Ůɔ ŮɔŮƶdɟ ħg

(–) Ů α (–) = + , Ů Ůƶůɐ ɔ Ůƶdɟ ħg Ůƶg Ůƶdɟ ɔi Ůɔ Ůƶůɔɐɔg

ƷŰd ɜ Ůɟ ɔɐ ɔɔ ɛ Ůƶdd Ůɤg Ůƶɜ dŮ ɟ důŮɜ «ɤɜg´ ɜɔ» Ůɟ ħ´ ɔ ɔəŮ ɜŮ dgɛ ŸŰŮə ə Ÿ´ ɔəɜg Ůƶgg əŮɜħɜŮg, ħɛɤ g ůŰd ɜ ůgɜɤɔŮəŮɔə´ Ůɟ əůůħŰŮɟ ɔəůgɛűı ɜdůŮɜ ħŰɤ

«***φŮƶ g´ Ÿɟ ɔŮə əŮɛdŮ æɔɜæ ůɔɤůd Ůɜ Ÿɛ ŮůŮ ůŰƶɜ ´ ɔəəŮ´ əŮůɜŮůɛħ əŮə Ůd ůɜədŮ ɐ Ůd ɜ Ůƶdɟ ħŰdŰŮɛŮŰƶi Ůŷ ɜ Ůɜdɟ ı ´ ɤ ɜ.***»

Ƶ´ ɜbŮbŮə ı ɜŮŰŮə, əɔə´ ħɜ, d Ÿ´ ɔɤd ħŰə ŰŮ´ Ůɟ Ů Ÿɜɤ ɛ ɔɜŮɤəŮ ɔŭdɔɔi ɜ ůŮ ɤ Ůgůɐ ůgəəɔɜůŰəɐ əŮə ůŮƶ bɔdd ɔi ɜ ůŰd ɜ Ůə Ůƶəħɔdůd ɐ ůŰd ɜ Ůƶ ɜɔɔəɔɜɐ əŮŰƶħdůd Ůƶg «əŮƶħɜŮŰɤ ɜ ´ ɟ ɔůɐɛɤ ɜ».

Ƶ Peterson ůŮ ɤɜŮ Ÿɟ dɟ ɔ Ůƶg (1972) ´ Ůɟ ɔgůəŸƶŮə ɛ dŮ ůgəəɔɜ Ů ħ ůŰɟ ŮŰd ɔəɤg ůəŮŰħɟ ɤ ɜ ůgɔɔɟ ŮŰɤɤ ɜ əŮə ´ ŮƶůŮɔɤ ɔı ɜ, ´ ɔg ´ ɟ ɔů´ Ůdɔi ɜ ɜŮ Ůƶdɔɐůɔg ɜ Ůd ɜ ůħŰdŰŮ $(-1)\cdot(-1) = +1$, ůɤ g ɔəŮ ɜŮ Ů ɔəɤɜŮə ɤɜŮg əŮdɔdŰɐg Ůƶ ɜ Ůɟ ħ´ ɔ ´ ɔg Ůƶ ɜ «bɔəŮi Ůə» ɔəŮ ɜŮ ůƶůŸɜŮə Ůƶ ɜ əŮƶħɜŮ ɛŮŰƶi Ůƶg ´ ɔəəŮ´ əŮůəŮůɛɔi ɟ dŰı ɜ Ůɟ ɔdɛı ɜ. ɟ´ ɔůŰd ɟ ɔŮə ħŰə ŮƶŮə ůdɛŮƶŰəħ ɜŮ bŮůɔħɛŮůŰůŰƶg g ůgəəɔɜůɛɔi g Ůɤ ɜ ɛŮdŰı ɜ ɔəŮŰd ɔɟ ŮɛɛəħŰdŰŮ. (Peterson, 1972, ů.399) Ůɟ ɔŰŮƶŮə ůüi ɔ əŮƶɔɜəħŰdŰŮg (patterns) ɔəŮƶɜ ´ ɔəəŮ´ əŮůəŮůɛħ ɟ dŰı ɜ:

κανονικότητα A	κανονικότητα B
$3\cdot 2 = 6$	$-3\cdot 2 = -6$
$3\cdot 1 = 3 = 6-3$	$-3\cdot 1 = -3 = -6+3$
$3\cdot 0 = 0 = 3-3$	$-3\cdot 0 = 0 = -3+3$
$3\cdot(-1) = ?$	$-3\cdot(-1) = ?$

KŸdŮŬ ŬŰŷəŮůεŬ ůŰłз əŬзеzəħŰłŰŬ ј ´ј еəі´ŰŮə ŬŰŬŭуι зŰŬg З εеzŸŭŮg Ŭ ħ Ůе ´ј еdсеі εŮзе.

ÖŰůq, ŮœŬə æеcəħ зŬqůсgјqůŰеі εŮħŰœ

$$3\cdot\left(-1\right)=0-3=-3.$$

ŭqŬ Ůł əŬзеzəħŰłŰŬ dь, сјdůæеć еqι зŰŬg Ůł зŬ dŭqŬ æеcəæ, εħзе ´еg Ůŭι ´ј еůdŷŮеgεŮЗ εеzŸŭŮg, dŬуСеgεŮ

$$-3\cdot\left(-1\right)=0+3=+3.$$

Æô ŬgŰеі Ůеg Ůůŭеggg ŰŬ εеzŰŷəŬ ŷСŮə ŬůəæůŮə əјqŰəæ d Rapke (2009), g´еůŰłјœеzŰŬg ħŰə ŮœŬə əŬəħ cqŬ Ůеggg εŬdłŰŷg зŬ ŬзŬьzхјœеgз Ůəg əŬзеzəħŰłŰŬg (patterns), ŭqħŰə ŬgŰħ dŬ Ůеggg ьеdłdæůŮə ůŰłз əŬŰŬзħdůd ŬеŭŮœŮх з εŮŮŬьхсæ. qůŰħůе, Ůз d сјæůd Ůх з əŬзеzəеŰæŰх з ŭŮз Ůзłсdłůа´ Ůј ŬəŰŷјх Ůə dŬůgεьŮœ, Ůз еə εŬdłŰŷg ŮŭŬјεħůеgз ŬgŰæ Ůł əŬзеzəħŰłŰŬ əŬə ůŮ Ÿəəůg ´Ůјə´ŰŭůŮəg Ůх з ζ ŬdłεŬŰəι з;

¢ Rapke ŭœŮə Ůеg Ůзæg´ŬјŸŭŮəεŬ:

$$3^0=3^{1-1}=\frac{3^1}{3^1}=1$$

$$2^0=2^{1-1}=\frac{2^1}{2^1}=1$$

$$1^o=1^{1-1}=\frac{1^1}{1^1}=1$$

$$0^0=?$$

$$\left(-1\right)^0=\left(-1\right)^{1-1}=\frac{\left(-1\right)^1}{\left(-1\right)^1}=1$$

$$\left(-2\right)^0=\left(-2\right)^{1-1}=\frac{\left(-2\right)^1}{\left(-2\right)^1}=1$$

Ebə εŬrdqŬÿgf əŬŰŬzəι zŰŬgf əŬə cɹdůæε´εə zŰŬgf Ůd æcɔæv Ůdgf ´ŬɹŬŬ Ÿzx əŬzεzæhŬdqŬŬgf ůbŬə Ůhεůzε zŬ ůgε´ŬɹŸzεgz hŬx $0^0 = 1$. qůŰhůε, Ůε 0^0 ůŬz εɹœŬŰŬə (Edwards & Penny, 1994ţKeedy, Bittinger & Smith, 1982)

dbæy´εgεŬ æε´hz, hŬÿd æcɔæv εəŬgəŬzεzæhŬdqŬŬgůŬz ůεi ŬÿŬ´ŸzŬŬ. ÁbŬə Ŭÿəεæε εŬrdqεŬŬÿæŸ, ůəůŬəŬÿæŸ, Ůææ´Ÿ əŬə´ŬəůŬbx cæŸ zŬ ŬzůŬdcvůεgεŬůŬÿgf εŬrdqŬÿgf εŬgf ´hŬŬεdŬ əŬzεzæhŬdqŬŬ «ůεgəŬÿŬÿ» ůxůŬŬŸ əŬə´hŬŬhεq ůəŬŬůd ´ŬɹŬŬŸzx æcɔæv ŬzdcŬůd Ůdz ůhŬdqŬŬ$(-1)\cdot(-1) = +1$, Ůææ´Ŭůgz ŬŬŬůd zŬ ŬzdcvůŬÿ hŬÿ Ůε 0^0 ůŬz εɹœŬŰŬə.

Ŕz ŬgŬ Ÿææεgf Ŭÿɹÿxgf ůəŬůŬůεεÿzεgf ŬŰhε´εgf ůəůŬŬůæŬæŬgŬ ŬŰxz ´ɹŸzŬxz εŬŰŬzεi ŬɹzdŬÿæι z ŬbŬə d ŬɹəŬεεcɹŬεεv, ´εg hεxgf d εɹvůd Ůdgf ´ŬɹœɹœŬŰŬə εhzε ůŬdz ´ɹhůdŬůd əŬəůŬdz ŬŰŬɹŬůd. (Heeffer, 2011)

¢ Rapke ŬzŬŰŸεŬə´εÿgf εŬrdqεŬŬÿæÿgf ÿzzεəŬůgf´ɹÿ´ŬÿzŬczxɹœεgz əŬÿzŬəŬŰŬzεεi z εəεŬrdqŬÿgf´ɹæε ůŸŬəŬÿεgf ŬŰdŬzvůŬÿcəŬŬdŬε cæhεŬzε ůi ε ŬɹzdŬÿæι z ŬɹəŬει z ŬbŬə dŬŬÿæh. qŬz ŬzŬŰŸεŬə, hεxgf, Ůz εəεŬrdqŬÿgf Ůdgf εÿůdqgf Ůə´ŬůŬůdqgf ε´εɹεi z zŬ ŬzŬ ŬɹŸcεgz εdŬ´æɹqd Ů hůŬÿæd, Ůææ´´ŬɹůůhŬŬɹε Ůz ε´εɹεi z zŬəŬŰŬæŸbεgz Ůd æcɔæv ´εg ŬbŬə əŬŰŸæædæd xgf Ů hůŬÿæd cəŬ ŬgŬεi gf, ůi εűxz zŬ εŬŬd ůŬůεεÿzd czι ůd ´εg ÿεεgz cəŬ Ůd ůεεv əŬə Ůd ůgzεεv Ůεg ůgůŬεεŬŬεgf Ůxz Ŭɹəει z. ¢ ´æ czxůŬ Ů ŬÿŬεi εŬzd ÿzzεəŬï ůŬhŬdqŬŬ ŬbŬə d Ů æŬɹůŬÿæv ůŬhŬdqŬŬ xgf´ɹεgf Ůdz ´ɹhůdŬůd:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma .$$

Ebə εŬrdqŬÿgf Ůεg ůgεzŬůœg ŬbŬə eůd ŬzεæŬxεÿzεə εŬdz Ů æŬɹůŬæv ůŬhŬdqŬŬ, əŸzεzŬŬgcəŬ´ŬɹŸůŬæεŬ´εəəŬ əŬůəŬůεεi gεŬŬε εgŬæh, h´xgf:

$$8 \cdot 16 = 8 \cdot (10 + 6) = 80 + 48 = 128 .$$

qůŰhůε, cəŬ zŬ əŬŰŬæŸbŬə ÿzŬgf εŬrdqŬεgf cəŬŬd $(-1)\cdot(-1) = +1$ ɹŬæŸεŬŰŬə εdŬ´æ Ůg´æv ŮæcŬbɹæv ɹεůd cəŬŬdz Ů æŬɹůŬæv ůŬhŬdqŬŬ. z dŬɹεůd, ´εg dŬůεi ŬəcəŬ həŬŰŬůŬεεεŬůŬůŬÿzŬůi ůŬdqεŬŬɹει z.

Ásoubor szerint a szerző Ír és Szerb Matz (1980) és Lins (1992) gépészmérnök és szerzői jogi szakértő. Ez a Matz (1980) és Lins (1992) gépészmérnök és szerzői jogi szakértő szerzői jogi szakértő szerzői jogi szakértő

7. Kvadratne jednačine 5e Jednačine oblika $ax^2 = bx$ i $ax^2 = c$

5.1 Definicija kvadratne jednačine oblika $ax^2 = bx$ i $ax^2 = c$

Prema Euclidu, kvadratne jednačine su nastale iz problema koji su se javljali u geometriji.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

¢ ŠŒšŒœ ŒŸ ŠŒŒŒšŒ ŒŒŒ

´ɛg ŬɜŬüi ŮŰŬɔ Ŭ ɦ Ůŷɡ Ůɟɤ Ůŷůɟɡ Ůɤɜ ɛŬůɡŬůɜ ůŰůɡ ůɔŶɟəŮɜŬ Ůůɡ ůɔüŬɔŮŷəɛɡ ´ɟŬɔŮŷəɛɡ, ŬɜŮŷəŬŰ´ Ůɟœɛɡɜ ůɡɛɜŶ ɔůŰɛɟəɔŶ ŬɜůɔüŬüɤɟɛɜŰŰ əŬɔ dɤůŮŷɡ ´ɛg ŮůɛŬɜ ɡɔɛdŮŰůůŮɔɛŬůdɡɛŬŰŷəɛɑŰɛg ´ŬɟŮɔ×dɦɜŰɛɡ. (Thomaidis, 1993)

Ƀɔ ´ɟı ŰŮɡ ´ɟɛůˊŶůŮŮɡ ɔəŬ ŬɔŮŷɛəɦɔdůdɡ Ůɛg əŬɜɦɜŬ Ůɤɜ ´ɟɛůəɛɤɜ ŮɛŰŬɜœɛɜŰŰɔ ůŰɡɜ ÁɡgɟŒ´ dɔ÷ɟɤ ůŰɛ 1344, Ŭ ɦ Ůɛɡɡ«ŬɔɒŬɔůŰŮɡ»[37]. ƉŰɡ´ɟŬɔɛŬŰŮůŬŰɛg Maestro Dardi[38] Ůɜ×dɔŮůŰŰɔ ɔəŬüɤɜŬɡ ŬɟɜdŮŷəɦɡ´ɛəəŬ əŬůəŬůɛɤɜɛɡɛŮɤɜŬɜ ŬɟɜdŮŷəɦ üœɛɡɜ ɤɜŬɜ dŮŷəɦ. ¢ əɛɔəəɛ ŰɡɡŬ ɦüŮŷəɑdɡŮœŬɔdŮəɛɡ:

ũɜɤɟœɛɡɛŮɦŰŷ:

$8 \cdot 8 = 64$ Ŷɟ Ŭ $(10-2)\cdot(10-2) = 64$

ʒ ŮɒŶůdɤɜŬɜ əŬɜɦɜŬŰɛg ´ɛəəŬ əŬůəŬůɛɛ÷ ůɛ÷ɛɡɜ ŰŰŬŮəɛɡ:

$10 \cdot 10 = 100$
$10 \cdot (-2) = -20$
$10 \cdot (-2) = -20$

ȯɟŬ, ɛŮ´ɟɦůdŮůdɒɟůəɦɛŬůŰŮůŰɛ 60. ȯɟŬɔəŬɜŬűŰŶůɛgɛŮůŰɛ 64 Ůɛ ɔəɜɦɛŮɜɛ -2 űɛɟɤɡŰɛ (-2) dŬ ůɛ÷ŰŰɔ Ŭ ŬɟŬɔŰŷŰŰɡɛŮ $+4$. ÁɑŬɔ űŬɜŬɟɦ ɦŰɔɛŮŰɡ ůi÷ɔɡɟɛɜdɛɟəɛɔdŬɔɑŰŰɔɛɟəůdɡ ŰɡɡŮ ŮəŬɟůŰɔɛɡůɦŰɡŰŰɡ.

ƉŮŶɟdɟɛ Ůɛg ɛ Heeffer (2011) ŬɜŬüɤɟŮɔɦŰɔɛ Cardano (1501 ï 1576) ɛŰŰɜ ɛ ´ɟı Ůɛɡ´ɛg ůŰɛəɑŮɔədɤŰɡůŮ ɛdŬ əŬɜɛ´ɛəɡŰɔɛ ŰŰɔɛdɟɑɤůdɡ ɔəŬ Ůɡɡ ŬɟɜdŮŷəɤɡ ə÷ůŮɡɡ ůŮ ɔɟŬɛɛəŶ ´ɟɛɒəɛɛŬŰŰ əŬɔ ´ɟɛůˊŶůdɡůŮ ɜŬ ɑŮɡɟůŰůɑ ŰɡɡŰŰüɟŬɔɤɜəəɤɡɟɑŮɡ ŬɟɜdŮŷəı ɜ ŬɟəɑŰəı ɜ. ɟ ŬɟŬɔŰɡŰɟɑŮɔ ɤɜŬɜ ŬɟɜdŮŷəɦ ŬɟəɑŰɛɦ $-x$ ɤɡ ŰɡɡŰɛ÷ɛŮɜdɡ´ůɦŰɡŰŰ. ¢ŬŰ´ɟɛɒəɛŬŰŰ´ɛg əŬŰŷəɑdɔŬɜ ůŮ ə÷ůŮɡɡ ɛŮ ŬɟɜdŮŷə÷ɡ ŬɟəɑŰ÷ɡ ůɡɜɤɒŬɔŬɜ ůŰɡɜ Ůɜɤəəəɑdɡ ŰɡɡŮ ůɡɛɒəəəɛɡŶəɔŮɒɟŬɡ. ƉŬ Cardano ŬůɑəəɛdɑəŮɛŮŰɛggɡ ŬɟɜdŮŷə÷ɡəŬɔŰɛggɡɛəɔŬüəə÷ɡŬɟəɑŰ÷ɡůŰɛ ɤɟɔɛ Ůɛg *Ars Magna* (1545), Ůəə×Ŷəœ Ŭ

[37] Ƀɔ «ŬɒŬɔůŰŮɡ» (Abbaco masters or maestri dô abbaco) ɤüɟŬůŬɜ ůŰŰŮŮ´ɛɟəŶəɤɜŰɟŬŰɡɒɦɟŮɜŬɡ ƋŰɔdŬɡŰɛ 1300 ï 1550, üəŶůəɛɜŰŰɡůŮŬɔɦɟəŬɛŰŰɜ÷ 8 əŬɔ 14 ŰŰɜ ŬɟəɑŰəɛ ɛŮŰɡɟɛůdŰɛg əüɛŬɟŬɔəɛ÷ ŬɟəɑŰ÷ɡůgůŰɛŰŰɛg.

[38] ¢´ɟŬɔɛŬŰŮůŬɤŬɔŰŰůŰɔɛ «*Aliabraa argibra*» əŬɔůɜŬɔɜɤůŰɛ ɔəŬŰɛggɡ 198 əŬɜɦɜŬɡɔəŬŰɡɜ Ůœgůdɡ «ŬəɔŮɒɟəɛɜ Ůɜəůɛ ůŮɤɜ»

[illegible]

$$100-(10\cdot 2)-(10\cdot 2)+(2\cdot 2)=64$$

[illegible] Cardano [illegible] +4 [illegible] $(-2)\cdot(-2)$, [illegible] [illegible] [illegible]

ə Ÿ ɵ ɵ Ŭ ŭgůə ɵ ə ɵ Ŭ». Ƀ g´ Ŭ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ Ŭ g Ŭ ɵ g Ŭ ůɵ ɵ Ÿ Ŭ Ŭ ůɵ ɵ ɵ Ŭ ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ´ ɵ ɵ ɵ ə Ŭ Ŭ Ŭ ɵ ɵ ůɵ ɵ ə Ŭ ɵ ɵ ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ ´ ůɵ ɵ Ŭ ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ Ŭ ůŬ g Ŭ Ÿ Ŭ ɵ ɵ Ŭ. (Heeffer, 2011)

ɵ ´ ɵ ɵ ɵ ɵ Ů ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ ɵ ´ ɵ ɵ ůɵ ɵ g ɵ Ů ŭ ɵ ŭ Ŭ ɵ Ŭ ɵ Ÿ Ŭ g Ŭ ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ůɵ ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ Ŭ ɵ ɵ ɵ ůŬ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ůŬ ůɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ ɵ

�งนี้ยังเกิดขึ้นในช่วงเวลาที่ชาวยุโรปเริ่มสนใจการคำนวณและตรรกศาสตร์ ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่ความคิดเกี่ยวกับเหตุผลและความน่าจะเป็นกำลังก่อตัวขึ้นในวงกว้าง

ใน Antoine Arnauld (1612 ถึง 1694) ผู้เขียนร่วมกับ Pierre Nicole ในหนังสือชื่อ *The Logic of Port-Royal (*Arnauld & Nicole, 1662) ได้เขียนไว้ในหนังสือ *Nouveaux Elements de geometrie* (1667) ซึ่งเป็นงานที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งเขียนไว้ว่าเมื่อเทียบกับเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดแล้วเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ n, ดังนั้นค่าของเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ $\frac{n+1}{n-1}$ ในขณะที่ค่าของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ $\frac{n-1}{n+1}$.

ดังนั้นเขาจึงได้เขียนว่า «ในขณะที่ในการคำนวณ», ดังนั้นเขาจึงได้เปรียบเทียบเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกับเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งมีค่าเท่ากับ -1, 0 และ 1:

ดังนั้นเขาจึงได้ $\frac{1}{-1} > \frac{-1}{1}$ ในขณะที่ในปัจจุบันได้.

ใน Leibniz (1646 ถึง 1716), ผู้ซึ่งเป็นผู้ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับ Arnauld ในช่วงเวลาที่ผ่านมาด้วย (Leibniz 1712, ในหน้า.167), ได้เขียนไว้ว่าเขาได้ค้นพบเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งมีค่าเท่ากับ ศูนย์ ซึ่งเป็น

�uŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ $m - n = 0$, ŋuŋ $m < n$. ¢ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ Pascal ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ ŋuŋ

ȷ ´ɵűůɨɔɵɜŰŰɔ ɵɵ ŮɟɜɖŰůɔɵɑ Ůɟɵɖɛɵɑ ɐ ɔŰɔɨŰůɟŰ ŰɜŰůɛŰůɤ´œɵɜŰŰɔ ɛŰ Ůɵűgɔ̈ŰɔŰůɔɔɦŰůŰŰ.(dôAlembert, ɔ̈ɐɛɛŰ ůŰůɜ *Encyclopedie*[41] (1751 ï 1765), Sip, 1990)

ɖůŰůůɵ, ŭɵŰɔ Ůɛɜ Ůɔ̈ɐɖ ɵɟɵůɛɦ ɔɵŰ Ůɛggɖ ŮɟɜɖŰůɔɵɨɖ Ůɟɵɖɛɨɖ: «ÁŒŰɔ ŰgŰůɛɑ ´ɵg Ůɖɟ ŰŶɛɵɜŰŰɔ Ű ɦ Ůɛ ůɨɛɓɵɔɔɵ ´ɔɖɜ» ɔŰɔ ŰgŰůɦɖ ɵ ɵɟɵůɛɦɖ ŰůŒŰɔ ɔɵŰ ŰɛŶɖ ´ɵɔɨ ´ŰɔůŰůɔɦɖ, ŭɵɦŰɔ ůgɔɔŰɔŰůɟ ɜŰɔ ŰůɜŰ ůɟɦ´ɵ ɛŰŰůɜŰ ɵ´ɵœ ŰɔůɐɔɖŰɜ ɵɵŰɟɜɖŰůɔɵɑŰɟɵɖɛɵɑ ůŰŰ ɟ Ůɖɖɛ ŰŰůɔŶ ɔŰɔ ´ɨ ɖ ŰŰůɟɵŰɔŰɔ ɛyůŰ ůŰɛggɖ ůgɛɓɵɔɔɵɨɖ ɑŰůɟɵůɛɨɖ. ÆŰɛggɖ ɖ´ɵɔɔɵůɛɨɖ ŰɛɖɛɖŰ, ŰŰ ŮɟɜɖŰůɔɵŶ ɛŰɔyɖɖ ɖ´ɵɔŰɖůŰɛɨɜ ɖŰŰůɔŶ ɛŰɔyɖɖ. J ´ɵŰɖŰŰŰɔɦŰůɔ ŰůɔŰɔ ůŰůɔŶɖɵɖ ůyůɖ ɔŰɔɦŰŰɜ ɔyɛŰ ´ŰɟŶŭŰůɔɛŰ ɦŰůɔŶ ɵɵɖ yŭɤůŰï 3 ŰŶɔɟŰ (ecus) ůŰůɔŶ ɵɵɜ ůɖɛŰɔŰůɔɦŰůŰůɜ ´ɟŰɔɛŰŰůɔɦŰůŰŰ´ɐɟŰŰŰɦ ŮɖŰůɔɜ + 3 ŰŶɔɟŰ (ecus).

ȳŰŰɜ ŰɜŰůɖŰůɨɛŰŰůɛ ɔɵɦɛŰɜɵ Ůɛg (–α) Ůɑ Ůɛ (–ɓ), Ůɛ ´ɟɦůɖɛɵ (–) ɖ´ɵŭŰůɔɔɜɨŰůɔ ɔŶɵɵ ɔŶɖɵɖ Ůůɖ ɖ´ɦɖŰůɖɖ Ůɛg ´ɟɵɓɔɐɛŰŰɛɖɐ Ůɛg ɖ´ɵɔɔůɛɨ. ȯɟŰ, ɖŰ ɔɐ ɔŰɔ ůɖůɔɔɐ ŭɵŰŰ´ɤůɖ Ůɛg ´ɟɵɓɔɐɛŰŰɛɖ ŰůɜŰɔ ɜŰ ´ɵɔɔŰ ɔŰůůɜŶůɵgɛŰ Ůɛ (+Ű) ɛŰ Ůɛ (+ɓ), ´ɵg ůůɨŰŰɔɛŰ Ůɛ ɔɵɦɛŰɜ (+Űɓ). ÆɔŰɔŰɔɔɔɔůŰɖ Ůɛg dôAlembert ŭŰůɑɜɵɖɜ Ůůɜ «ɖ´ɵŰŰɔɐ» Ůɛg ůŰůɜ ŭŶŶŰŰɤɜ ɛŰɔŰůɑ ɜ ɔŰɔ ůgɔɔŰɔɟɛɛŶɜŰŰɤɜ ɛŰɔŰůɑ ɜ ´ɵg ŰůɜŰɔ ɖŰŰůɔŶŰ ɦ Ůůɖ ŭɨůɖ Ůɛggɖ. J ´ɦ ŰgŰŭ Ůůɜ Ŷɵɤɖ ´ɟɵŶɟɤŰŰŰɔɖ ůŰɟŰŰůɔɔɐ Ű ɦɟɟŶɤɖɖ ŰɤɜŰɟɜɖŰůɔɨ ɜ ɔŰɔɖ ɔɵɔɔɐ ŰɤɜŰ«ɛŰɛɵɜɤŶɛɤɜ ŰɟɜɖŰůɔɨ ɜ ɛŰɔŰůɑ»

(Hefendehl ï Hebeker, 1991)

Æ ůɖ´ɵgŭŰŭɵɖ ÁɔɓŰŰɦɖ ɛŰɖɖɛŰŰůɔɦɖ Leonhard Euler (1707 ï 1783) ŭŰɜ ŰŭɖŰɔŰɔŶɜŰ ´ɟɦɓɔɖɛŰɛŰůɛggɖ ŮɟɜɖŰůɔɵɨɖ Ůɟɵɖɛɨɖ. ÆŰɛ ɓɵɓɔɵɑ ȯɔŰŰɟŰgɖ´ɵg ŶɔɟŰɤŰůůɖɛŰůɔ ɜŰɔ ɦŰůɔɵ ŮɟɜɖŰůɔɵɑŰɟɵɖɛɵɑŰŭɔŰɔɔɵɦŰŰɟɵ Ű ɦ Ůɛ ŰŭɨɵŰŰɔŰ Ű Ůɟɵɖɛůŭůggɖ ŮɟɜɖŰůɔɵɨɖ Ůɟɵɖɛɨɖ Ű ɦ Ůɛ ɛɖŭŶɜ ůŰ ŰɜŰŭŰůŰŰŰɖ ɔŰŰŭɨɖgɜůɖ, ŰŭŰɜɟɜ ɜŰŰɖ ŭɵŰɟɔɨ ɜŰŰɖ ɛɵɜŶŭŰ, ŰůɔŰɟůŰŰɔɔɐ ŰŰɟɖ Ůɟɵɖɛɵɜ ůŰŰɜ.

---

[41] Æ ɔɵɔɵŰŶɵɜɖɖ Stendhal (1835), ´ɵg ŰɜŰŭŶɟŰŰůůŰ ŰŶɔɵɖ Ůɛg 4ɵg ɔŰŭŰɔŰŰɵg ůŰɜ Ůœɵɔɵ ŰɖɖɔŶɟɵŰůɔɔɐ ůŰŰ´ɟŰɔɛŰŰůɔŶ ɛɵɜŰŶɔŰ ɔŰŰɜ ŮɟɛɖɜŰůŰ ŰŶɜ ŮɟɜɖŰůɔɨ ɜ Ůɟɵɖɛɨ ɜ, ŰůɔŰůɔɟɟůŰɔɐ ůŰɛɜ dôAlembert, ŭɵɦŰɔ ɦŰŰɜ ´ɟɨ Ůɛg ŮɵůůɖůůɜŰ ůgɛɓɵgɔŰůŰůɔ Ůɖɜ Encyclopedia ɔŰŰɛggɖ ŮɟɜɖŰůɔɵɨɖ Ůɟɵɖɛɨɖ, ´ɟɨ Ůɛɜ, ŭŰɜ ɔŰŰŶɔŰɔŰůɔŰɔ´ɵg ɔɔŰŰɟŰɔɛɜ, ůɵɔŰůůŰŰɔŰ, Ű ɦ Ůɛɜ ŰgŰŶůůɔɵɛ Ůɦɜɵ Ůɛg ɔŰɔ Ůɖɜ Ű ɵgůɖŰ «ɔŰŰůůŰŰ» ɔŰŰɖɜ ŰɔɔɖŰŰ

Ł ůůŤ ůŤ ůŤ

Ð Lacroix (1765 ï 1843) Ŭ3Ŭźæ ŬŰŕ´œŬ9 Ŭźggƒ Ŭ¡3dŬźæ¢ïƒ Ŭ¡ƒdźæ¢ïƒ, ´Ŭ¡ď¢g ħ´ŕƒ¢ dô Alembert, ŕƒy3Ŭ ə Ŭ9ı ƒ ŭ9Ŭŕ´ŕ ε y3¢ ´¡ħb ə dźε Ŭ ə y3Ŭ ə Ŭď¢ƒ g´¢ə¢ɔ9ůε ħ, ħε ŕƒ Ů9ůdźε Ŭ¢Ů9 Ŭź ŭ9Ŭŕ¢¡Ŭ Ŭźƒ Ŭ¡ƒdźε dŬźæƒ Ŭ ħ Ŭź3 Ŭə ɔŮ¡Ŭ, g´¢ůŬź¡œ¢3ŬŬƒ ħŬ9 ¢9 Ŭə ɔŮ¡ƒ9æyƒ ´¡Ŭ3ŮƒŬźε´Ů¡ƒ9yG¢g3 y3Ŭ Ů9 ŬŬŬε y3¢ 3ħdźε Ŭ ə ħ ɔŕ Ŭźƒ Ŭ¢ ɔŮ3ƒ9æ ħŬźƒ Ŭƒ Ŭ¢ ɔŮ¡ƒ9æ ı 3 ´¢ůŬźε Ŭ¢ Ŭ3. ŭ9Ŭ´Ŭ¡ŬŮŬźæε Ŭ, d Ŭŕ¢Ŭ¡ƒŮźd ε9Ŭƒ Ŭ¡3dŬźæƒ ´¢ůħŬźŬƒ, ¢ŭdɔŮźůŮŬ¢3důd, Ů3ı ůŬź3 Ŭŕ¢Ŭ¡ƒŮźd b ï Ŭ, Ŭź b ŭŮ3 Ů¢ŬŮ9 ´¢¡ƒŮ¢ŬŮ¡ƒ¢ Ŭ ħ Ŭź Ŭ. ¢ ´¢ə¢ ůdźε Ŭ3Ŭźæ ´Ŭ¡ŬŬź¡důd[42] Ŭźg Lacroix Ů¢ŬŮ9 ħŬ9 d Ů9ůŬɔŕ¢ε Ů£¢3ŕε y3ŕ3 Ŭ¡3dŬźæı 3 ´¢ůŬźε Ŭ¢ ůŬź ´¢ə¢ ´¡ı ¢ε ůŬŬźæ, ħ´ŕƒ ɔœŬŬŬ9 ůŬŬ ůG¢ə¢æŮ bħbə¢dŬ, ¢ŭdɔŮźůŬź3 ε Ŭ¢dŬź ůŮůı¢ɔGgůd. Á´ůůdƒ, ¢ G Ů¡ůε ħƒ Ŭŕ3 Ŭ¡3dŬźæı 3 ´¢ůŬźε Ŭ¢ ´¡y´ Ů9 3Ŭ ɔœŬŬŬ9 ůŮ ε ŬŬŬ9 Ů3yůŬŬ¡¢ ůŬŬŬźæ ə Ů9 ε Ů ə œdŬ¡¢ Ŭź ə¢ı ůd ´¡¢bə¢dε ŬŬŕ3. Ł Ŭź ůg3yGŮ9 Ŭ Ŭź ƒ Ů¡ɔŮůdŬƒ dŬ Ů ůdε Ŭ3¢gε Ů Ŭź ¡ħə¢ Ŭź ƒ ůŬź¡dŬƒ Ŭŕ3 z Ŭ¢dε Ŭźæı 3, ɔ9Ŭ Ŭź3 Ů ə¢ɔ¢ Ŭ¡ŬźŬ¢ŕ3 ə Ŭ Ŭ¢ə¢dŕ3 ŭ9ŭŬ9 Ŭźæ Ŭ´¡¢bə¢dε ŬŬŕ3.

O ůdε Ŭ3Ŭźæħƒ ε Ŭ¢dε Ŭźæħƒ Felix Klein (1879-1925) ůŬź bə¢bə¢œ Ŭźg *Elementar - mathematik vom höheren Standpunkt aus* ƒ´¢ůŬź¡œŬ9 ħŬ9 d ŭdε ə¢gƒ¡ɔdŬ Ŭŕ3 Ŭ¡3dŬźæı 3 Ŭ¡ƒdźı 3 yGŮ9 ŕƒ ə œdŬ¡¢ 3Ŭ Ů¢ŬŮ9 ŭg3 Ŭ Ŭź d ´¡ƒ¢3d Ŭź ƒ Ŭ¢ƒ Ŭ¢ŬŮ¡ƒŮźd ƒ ůŮ ə¢dŮ ´Ů¡ď Ŭŕ ůd. ŭ9Ŭ´Ŭ¡ŬŮŬźæε Ŭ, Ŭ3 $\alpha < \beta$ Ŭ ħŬŮd Ŭ¢ŬŮ¡ƒŮźd $\alpha - \beta$ ŭŮ3 yGŮ9 3ħdε Ŭ ůŬźƒ ŭ ůŮ9 ¢ı ƒ´¢¡ƒ¢ƒ. J´¢¡ƒ¢ƒ Ů9 ħε ŕƒ¢ Ŭ¡ƒdźε ħƒ $\gamma = \beta - \alpha$, ı ůŬŮ $\alpha - \beta = -\gamma$, Ŭź3 ¢´¢œ ¢3¢ε¢ε Ů Ŭ¡3dŬźæħ Ŭ¡ƒdźε ħ. Ð Klein ůdε Ů9ı 3Ů9 ħŬ9 ε Ů Ŭźƒ Ŭ¡3dŬźæ¢ïƒ Ŭ¡ƒdźε¢ïƒ ɔœŬŬŬ9 ɔ9Ŭ´¡ı Ŭź ŭ¢¡¢ d ε ŬŬ¢ŬůdŬ ħ ŬŬ ůgɔə Ů9¡ƒε y3Ŭ (concrete) ůŬŬ Ŭŕ¢d¡dε y3Ŭ z Ŭ¢dε Ŭźæ¢. q ůŬħůε, y3Ŭ bŬůæħ Ů¡ı Ŭźε Ŭ, Ů¢ŬŮ9 Ŭ3 ¢9 ůgɔə Ů9¡ƒε y3Ů¡ƒ (concrete) Ŭŕ¢Ŭ¡ε ɔ¢yƒ Ŭ¢ŕ3 Ŭ¡3dŬźæı 3 Ŭ¡ƒdźε¢ı 3 b¢dd¢ïı 3 Ŭź3 ə9Ŭ3ħŬźŬŬ Ŭŕ¢Ŭ¡ƒŮźd ƒ´¢g Ŭ´Ŭ9Ŭźd ´¡¢Ŭ3Ŭŕ¢Ů¡ħε Ů3d ε ŬŬ¢ŬůdŬ. ¡ gŬź d Ŭ´Ŭ9Ŭźïε Ů3d Ů3ı3¢ə¢ə¢ɔ9ə Ŭə¢ŬŮ Ŭź3 ɔœŬŬŬ9 ε Ů yε ŭŬůdŬ´ħŬź3 Klein[43].

---

[42] ɔ9Ŭ Ŭź´Ŭ¡ïůŬŭ´ə¢ε Ŭźæ Ů¡ɔŬůdŬ

[43] Ł Ŭź 4ª ə Ůŕ¢Ŭ¢, Ů3 ŬŬ¢3Ŭƒ Ŭ ŭ9Ŭůdd Ŭźæ¢Ŭ ε ¢3Ů¡ə Ŭ´¢g ¡ƒdůε¢´¢ə¢də Ŭ3 ə Ŭ9¡ƒdůε¢´¢ə¢ïı 3 Ŭ9 ůε Ů¡Ŭ ůŬź ŭ9Ŭůə Ŭ¢dŬ Ŭ3 Ŭ¡3dŬźæı 3 Ŭ¡ƒdźε¢ı 3, ´Ŭ¡Ŭdyů Ŭε Ů Ŭźƒ ŭgůə¢ə¢dŬƒ ə Ŭ9 Ŭźƒ ůgɔ¢ïůŬźƒ´¢g ε´¢¡ïı 3 Ŭ´¡ə¢Ŭ¢yůε¢3 ůŬźƒ ε Ŭdd Ŭƒ. ¢ ŭgůə¢ə¢dŬ Ů ůdε Ŭ¢ŬŮ9 ə¢¡ƒ¢ƒ ůŬźƒ ¡ƒ Ů3 Ŭźƒ ε Ŭ9 Ŭ¢ïı Ŭ¡3dŬźæı 3 Ŭ¡ƒdźε¢ı 3, ŭgůə¢ə¢dŬ´¢g Ů¡ε d3 Ů Ŭ9 ə Ŭε b Ů3¢3 Ŭƒ g´ħŕd Ŭź3 Ů3¢3¢ə¢ɔ¢ə¢ Ŭ¢ə¢Ŭ¢ ´¢g Ŭ Ŭ¢ŬůŬ9 Ŭ ħ Ŭźƒ ε Ŭdd Ŭƒ. (bə¢´ Ů §2.1)

5.3 Ćwiczenia z równań i nierówności

¢ Ćwiczenie 1. Rozwiązać równanie: ćwiczenie 2. Rozwiązać nierówność: ćwiczenie 3. Rozwiązać równanie: ćwiczenie 4. Rozwiązać nierówność: ćwiczenie 5. Rozwiązać równanie: ćwiczenie 6. Rozwiązać nierówność: ćwiczenie 7. Rozwiązać równanie: ćwiczenie 8. Rozwiązać nierówność: ćwiczenie 9. Rozwiązać równanie: ćwiczenie 10. Rozwiązać nierówność: ćwiczenie

qpœeɜÜÜə´ÜɟÜə¥Ü¥ eəÜɟsdɛdÜáəyƒÜəeəegddůƒ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	é
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	é

ȳ´ɤƒɔɜɤɟœegɛŮůɐɛŮɟÜeə´ÜɟÜ¥ɜɤ Üəeəegddůƒ ÜeÜáəei ɜ ɛdÜÜÜÜɟɛeɔɐ Üɤɜ ǔœÜáÜɤɜ Üɤɜ ǔgɜ¥ɛÜɤɜ (Üədɤ¥ÜÜƒ əÜə ǔgɜ¥ɛÜƒ Üeg 2) əÜə ŮůdƒÜ ŮÜə Ůəeə¥Ü ɛ´eɟei ɛŮɜÜ ůgɛ´ŮɟÜ¥ɜeɛŮŮÜə e´eəə¥Ü ə¥ÜůəÜůɛŮƒɛ d ǔəÜƒůÜůd ǔei e Üɟsdɛɩ ɜ ůÜůd 2d Üəeəegddů, ɔəÜ´ÜɟÜüůəɛÜÜeg 16·128=2048 ɐ 4096:512=8, ɛ´eɟůɜÜÜɜÜeůůůÜ ´ɟŮůdůůd ɐ ÜüÜƒůůd, Üɜüůüeɜeů, Üɤɜ 4 + 7 =11 ɐ 12 ï 9 =3 ůüůɜ 1d Üəeəegddů.

Ɛüůd ůgɜyeůəů, ə¥ÜɛÜ¥ɜeɜÜÜƒ g´ŮɤƒůüůÜƒ üůƒ ɛeɜÜüÜƒ əÜə üeg ɛdůɤɜ ůüe ´eəə¥Ü ə¥ÜůəÜůɛŮ əÜəůüůd ´ɟŮůdůůd, ǔůůeɜeɛŮŮƒəÜəeǔei ´ÜɟÜ¥ɜɤ ůÜůƒɤƒɛ´eɟei ɜ ɜÜÜůgɛ´ŮɟəÜ¥ůeegɜ.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	é
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	é

¢e ŮƒŮɛŮəe əeɔəƒ ůɐɛŮůdɛŮɤ důəŮŮƒüeɜ Stifel (1487 ï 1567), e e´eœƒɤəŮɜŮüůɜ ŮƒɤəÜÜůd üɤɜ ´ÜɟŮ¥ɜɤ Üəeəegddɤ ɜ əÜə ´ɟeƒ ÜÜ ÜɟsůÜÜɟ¥ ůüe ůsůəœ üeg *Arithmetica Integra* (1544). ¢ə dŮůgɛůůŮɜ ůəüüeiɛŮüůd ǔɤÜůůd 64:512, ´eg Ůə´eůüÜəůüe 1:8; ¢ə dŮůgɛůůɛŮüƒŮɜüůüeɜeůƒüüůɟɤůüƒ 6 ï 9 ɐ 0 ï 3 ; ÞÞ ´ÜɟŮ¥ɜɤ ´œŮəÜƒɛÜÜÜɟɤ´ ÜÜəůüeɜ ŮƒɛÜəe:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	é
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	é

ɟ ɜœüə ɜŮ ůdɛüůɤ ůeegɛŮƒüə üe ´ÜɟŮ¥ɜɤ ´ÜɟÜüüůəɛŮ üəüəůůÜÜÜə ɛɤůŮ ůŮɤɜŮ əŮdŮɟÜ¥ Üɟsdɛdüəƒ ´əÜůůœ, GɤɟƒÜ üƒɜ üɛ´əeəe ə¥´eœg Üəɔüƒɟəei ´əÜůůœg ɛŮ üədɤÜÜƒ əÜə üəɤůɩ ůüƒ. (ŪɤɛŮǔdƒ, 1998) Ɛüůd ´ÜɟŮ¥ɜɤ əeɔəe ´ɟÜəɛŮüe´eəüÜə ɤɜŮ´eei ůdɛüɜüəƒ ůɐɛŮƒüüůd üƒɜ ůgɜƒəɤɜ üƒɜ Üɟsdɛɩ ɜ əÜə üƒɜ üɜŮ ÜɟÜüůüůd üƒɜ ɔůɤɛůüɟəɩ ɜ ůGdɛÜüƒɜ ůŮɤɜŮůei ůüƒɛŮůgɜüůüüəɛɤɜɤ ɜ.

ţ Ůůəɛ´ɦ ɜŬ ŭəŬŰţ ɟdůd ůd əŬɜɦŰţŰ ɜŬ ŬɜŸɔůŰə ɛ ´ɛəəŬ´ əŬůəŬůɛɦɟůŮ´ ɟɦůdůd ůd əŬə d ŭəŬţ ůd ůŮ ŬŰŬţ ůd, ´ ɟ ´ Ůə ɜŬ ɛɟ ůɛgɛŮ ůɤ ůŰŸ Ůɛɟ ´ ɟ ɛůdůůŬɛɟ əŬə Ůɛɟ ŬŰŬţ ůůŬɛɟ, ɔəŬ´ ŬţŸŭůəɛŬ Ůţ ɟɛɟ ŭɛɟ $(-1)+(-3)=(-4)$, ´ɛg ŬɜŰůŰɛɜůůŬ ůŰɛ ɔəɜɦɛŬɜɛ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$.

ÆŬɜ ůgɛ´ ɟŬůɛŬŮ ɦ ɦəŬ ɦůŬ´ ŬţŬůůŬɛŮ´ ŬţŬŸɜɤ ɛ´ɛɟɛ¡ɛŮɜŬ ŭəŬŰ´ ı ůɛgɛŮ´ ɤɟɛ ɓŬůəɦɟ əɦɔɛɟ ɔəŬ Ůţ ůŬɜɤɔə Ůɤɜ ŬţɜţůŬəı ɜ ŬţəůŬɛı ɜ əŰŬɜ ţ´ ɟɛů´ŸůŬ ɔəŬ ɜŬ ŮəŰŰɟɛůůɤ ɜŬ ůɜɛ´ɛəţɛɟɜɛ ů¡ůŰţɛŬ ŬŰůţɟɛɟɜɤɜ ɤ Ůůţɛ ɟɜŬ´ ŬţŸŭůəɛŬ, ɜŬ ɟ´ŸɟɛŬə ɟɜŬ ůɜɛ´ɛəţɛɟɜɛ ů¡ůŰţɛŬ əů¡ůŰɤɜ ɔəŬ ɦəŰɟ ŰůŰţ ůŰţ ůŰţ

εΌάάεΌΌάοή Peacock (1791 ï 1858) οΌοΌΌΌΌΌ΄ γάΌΌΌΌΌΌΌΌ ή ΌΌΌ Hankel (1839 ï 1873), ΌΌΌ ΌΌΌΌΌΌΌΌ

$$(-\alpha)\cdot(-\beta)+\alpha\cdot(-\beta)=\alpha\cdot(-\beta)+\alpha\cdot\beta$$
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)=+\alpha\cdot\beta$$

[illegible]44, [illegible] [illegible] [illegible]

�اسة الحقوق والعلوم السياسية، العدد الرابع، سبتمبر 2017، ص ص 87-104

الإشكالية الدستورية لتنظيم الحق في الحياة الخاصة في الفضاء الرقمي

الدكتور: بن علي محمد

أستاذ محاضر أ

كلية الحقوق والعلوم السياسية

جامعة الجلفة

الملخص:

تهدف هذه الدراسة إلى تسليط الضوء على الإشكالية الدستورية لتنظيم الحق في الحياة الخاصة في الفضاء الرقمي، حيث أن الحق في الحياة الخاصة يعد من الحقوق الدستورية التي تكفلها الدساتير، وهو حق يرتبط بالكرامة الإنسانية، وبالتالي فإن الحق في الحياة الخاصة يعد من الحقوق الأساسية التي يجب حمايتها، وتنظيمها في الفضاء الرقمي يعد من الإشكاليات الدستورية التي تطرح نفسها بقوة، وهذا نظرا لتطور التكنولوجيا الرقمية وانتشار الإنترنت، وبالتالي فإن الحق في الحياة الخاصة في الفضاء الرقمي يعد من الحقوق التي تحتاج إلى تنظيم دستوري، وهذا من أجل حماية الحق في الحياة الخاصة في الفضاء الرقمي، وهذا من خلال تحديد الإطار الدستوري لتنظيم

Ţ ŮŕŸəŬɜ 6ɵ ÆɵŮŭɜŬůɛɦɡ Ƀ Ɉ ɔŸɜɤ ůɖ ə Ŭɜ ŭɜŮɜŬɔɤ ɔɒ Ŭŕɡ Ůɛ´ Ůɣ ɔə ɒɡ ɣɣ Ůɣɜ Ŭɡ

6.1 ÆŬŕɦɵɜ Ŭŕɡ Ůɛ´ Ůɣ ɔə ɒɡ ɣɣ Ůɣɜ Ŭɡ

ÆŬɛ ə ŮŕŸəŬɜ Ŭɡ Ŭŕɦ dŬ ɔɵ Ůɜ Ŭɜ Ŭəɡ Ŭəɒ´ Ŭɣ ɵɡ ůd Ŭůd ŭŕɡ´ ɣ ɵ Ůŕɛ ɔɛ Ŭůd Ŭɡ Ŭɛɡ gəəɵ ɵ ə Ŭɜ ŭŕɡ ŭəŮɜŬɔɤ ɔɒ ɡ ŭŕɡ Ůɛ´ Ůɣ ɔə ɒɡ ɣɣ Ůɣɜ Ŭɡ, ɖ ɵ´ ɵd Ŭ´ Ůɣ ə Ŭɛ ɓŸɜ Ůə ŭŕɡ qəŭŬůə Ŭəd Ŭ ə Ŭɜ ŭŕɡ Æɡɵɒ ŭŕɡ ůd. ¢ Æɡɵɒ ŭŕɡ ůd´ Ůɣ ə Ŭɛ ɓŸɜ Ůə Ŭ Ŭɜ Ŭůůɡ ůŕŕŬ Ůɣ ɤ Ŭůɒ ɛ ŬŕŕŬ Ůɜ ɦɡ ū i əəɵɡ Ƀɣ ɔ Ŭůd Ŭɡ ə Ŭə´ ɣ ɵůɤ´ ə ɒɤɡ ůɡ ɜ Ůɜ ŭŕŕůi ɜ Ůɡ, ´ ɵɡ Ů Ůɜ ɖ ɔ ɵi ɜ ´ Ůɣ Ŭə ŭŕɣɣ ɤ Ŭɡ Ŭ Ŭɜ Ŭůůɡ Ŭɤ ɜ ɛ Ŭɖ ɖ ŭŕ ɜ.

Ƀ ůŕŕɦɵɜ ɡ ŭŕɡ Ůɣ ɔ Ŭůd Ŭɡ ə Ŭə ŭɤ ɜ ɛ Ŭɖ ɖ ɛ Ÿŕɤ ɜ ´ ɵɡ ´ ɣ Ŭə ɛ Ŭŕɛ´ ɵ ɒɖ ɖ ə Ŭɜ Ůɜ Ŭə ɜ Ŭ Ŭɜ Ŭŭůɜ ɵ ɡ ɛ Ů Ŭɛ ɜ Ůɦ´ ɵ ɛ Ů Ŭɛ ɜ ɵ´ ɵœ, ɛ Ůə Ůŕ ɜ ŕŕŬɡ ŭŕɛ ɣ d Ŭ ŭɤ ɜ ɤ Ŭɖ ɖ ɛ Ŭŕə ɩ ɜ ɛ´ ɵ ɣ ɵi ɛ Ů ɜ Ŭ´ ɣ ɵůŬə ůɵ ɡ ɛ Ů ɛ Ů´ ɒ Ŭ ɵ Ůŕə Ůůɛ Ŭŕə ɦ Ůɦ´ ɵ Ŭɛ ɡɡ ɣ ɖ Ŭɛ i ɡ Ŭɣ ɒ ɖ ɛ ɵi ɡ, ůŮ ɛ Ŭɖ ɖ Ŭɣ ɡ Ŭɛ ɡ ũ ɡ ɛ ɜ Ŭůœɡ. ɣ ɜ Ŭŕŕ ɣ ɣ Ŭɛ Ů Ŭɛ ɔŬə ɵ ɜ ɦɡ ɦŬə ɵ ɒ ɛ Ŭɖ ɖ Ŭɣ ɡ Ŭɛ ɡ ũ ɡ ɛ ɜ Ŭůœɡ ə Ŭə Ŭɛ ɡ ş ɡ ə Ůœɡ «ɣ ɣ ɵ ɡ ɜ Ŭŕə» ůŕŕ Ŭ Ÿɜ ɖ ɛ Ů Ŭɡ Ůɛ´ Ůɣ ɔ Ůɡ Ŭɛ ɡɡ Ŭ ɦ Ŭɡ ŭəŭŬə Ŭəɒ ɣ ɡ´ ɣ Ŭə Ŭəɒ ɣ ɡ Ŭɤ ɜ ´ ɣ ɵ ɖ ɔ ɵi ɛ Ůɜ ɤ ɜ Ŭ Ÿɜ Ůɤ ɜ.

ÆŬŕɜ Ƀəəɒ Ÿŭ Ů ɒɣ Ŭŕŕůɩ ə ɡ ɣ ɔɤ ɡ ɵ ŭŬůə Ŭəɒ ə Ůɜ Ŭɣ ɒɦɡ ï ´ Ŭɣ Ŭŭ ɵůɒ Ŭəɦɡ Ŭɣ ɦ´ ɵ ɡ ŭəŭŬůə Ŭəɒ Ŭɡ. (Tzekaki, Sakonidis & Kaldrimidou, 2003) ɣ dŬ ŭɣ Ŭůŕŕ ɣ ɦŕŕŬ ɛ Ů ŭi əəŬ Ůɣ ɔŬůd Ŭɡ, ɛ Ů ůŕŕ ɣ ɒɣ ɡ´ ɖ ɔɣ ɡ, ɛ Ů Ŭɛ ɜ ŭŸůə Ŭəɵ´ ɣ ɦɖ ɡ ɛ ɵ ɜ Ŭ Ŭəɵi Ůə ə Ŭə ɜ Ŭ ɣ ɤ Ŭŕ Ůə, Ůə Ŭɦɡ Ŭ ɦ Ŭɛ ɜ Ŭ ɛ ɒ Ÿůə ə Ŭə ɜ Ŭ ɔ ɣ Ÿŭůə, ɜ Ŭŭɣ ɵŬŕŕ Ŭə Ŭɛ ə Ÿɖ ɵɡ Ŭɛ ɡ ɛ Ŭɖ ɖ Ŭə ə Ŭə ɜ Ŭ Ŭɛ ɖ Ůɤ ɣ Ůɩ Ŭ Ŭɣ Ŭŕŕ Ŭɛ, ɩ ůŕŕ ɜ Ŭ Ůůŭ Ÿɔ Ůə ɛ ɖ Ŭ ɜ ɣ Ŭ ɣ ɜ ɜ ɵ ɔ Ŭ, Ŭ ɵ Ŭŕə Ůɩ ə Ŭɜ ɵ Ŭɛ ɛ ɖ Ŭ ɔ ɔ Ŭ Ŭɛ ɡɡ ɡ ɛ Ŭɖ ɖ Ŭɣ ɡ[46].

Æɵ Ŭə ´ ɵəi ůd ɛ Ŭɜ Ŭəɦɡ ɡ Ŭɣ ɦ´ ɵ ɡ´ ɵ ɡ ɖ Ŭ ŭəŭŸɜ ɵ ɡ ɛ Ů ůŕɛ ɡɡ ɡ ɛ Ŭɖ ɖ Ŭɣ ɡ ɡ ɛ Ŭɡ Ŭɛ ɔ ɔ Ŭŕůɩ«´ əd ɜ Ů ɑ ´ əd ɜ ə Ÿɜ Ůə ůɡ ɜ» ə Ŭə ŭɡůəŸ ŭůɜ ɛ´ ɵ ɣ Ůɩ ɜ Ŭ Ůɜ Ŭə Ŭ əŸ ɣ ɜ Ŭɡ ə Ŭɜ ɦ ɜ Ŭɡ Ŭ ɵ ɛ ɜ d ɛ ɦ ɜ Ůůůd ɡ. ¢ ´ Ŭɣ ɵ ůd Ŭůd Ŭɤ ɜ ŭɡůə ɵəɩ ɜ, ´ ɵ ɡ Ŭɜ Ŭŕɛ Ŭŕŕ´ ɩůŬɜ ů´ ɵ ɡŭŬɵ ɵ ɜ ɛ Ŭɖ ɖ ɛ Ŭŕə ɵ ɵɩ Ŭɛ ɡ ´ Ŭɣ Ůə ɖ ɦ ɜ Ŭɛ ɡ ə Ŭə d ´ ɣ ɵŬɣ´ ɵ ɖ ɣ ůŬůɡ ə Ŭə Ůə Ŭůd ůɡ ůɡ Ůŕə Ÿ ɛ Ů Ŭɛ ɜ ə Ŭɜ ɦ ɜ Ŭ Ŭɤ ɜ ´ ɣ ɵůɛ ɛ ɤ ɜ d Ŭ ɵŭd ɔ ɵi ůŮŭɛ ɡɡ ɡ ɛ Ŭɖ ɖ Ŭɣ ɡ ůŮ ɛ d Ŭ´ ɒ ɵ ɡůə Ŭůŕə ɛ Ÿɖ ɖ ůd ə Ŭə ɦ ɡ ɵ ůŕɜ Ůə ɛ Ÿɖ ɖ ůd ůɡ ɜ ŕŕŬ ɩ ɜ. q ůŕůɵ, ɔ ɵ Ŭ ɜ Ŭ ɔɵ Ůɜ d Ŭ Ŭə ŭɛ i ɛ Ůɜ d Ŭə ə Ŭə ɛ ůŕɛ Ŭɦ´ ɵ ŭəŭŬůə Ŭəɒ Ŭɡ Ŭɤ ɜ ɣ Ŭɖ ɖ ɛ Ŭŕə ɩ ɜ Ůɵ Ŭə Ŭ Ŭɣ Ŭɖ ɖ Ŭɣ Ŭɣ ɵ ɒ d Ŭɜ Ŭɜ ɣ ɤ ůd ůŕŕ Ŭ

[46] Æə ɛ´ ɦɡ Ŭɡ ŭɛ ɡ Ŭŕɡ ɡ Ŭɣ ɔŬůd Ŭɡ Ůɵ Ŭɜ ɜ Ŭ ɡ´ ɵůŕɡ ɵůə Ŭə ɜ Ŭ «Ŭ ɛůůɵ» ɦŕə d ə Ŭɵ ɛ Ŭɛ ɛ d Ŭ Ŭɡ ŭɛ d Ŭ ɛŬŕɜ Ů ɒɡ ɛ d Ŭɦ ɜ Ŭ Ŭ ɛ Ŭůɣůə Ŭɛ ɜ ə Ŭɜ ɦ ɜ Ŭ ůɡ ɛ d Ŭɦ ɡ ə Ŭə ɦ ɵ ɡ Ŭɦ ɜ Ůɜ Ŭɣ Ůůd ə Ŭə Ŭɣɒ ɵ ɡ, ɦŕə d ɡůŕɡ ɡ Ŭ Ŭ ɜ ɛ Ŭɖ ɖ ɛ Ŭŕə ɩ ɜ Ůɜ ɜ ɵ ɩ ɜ ɛ´ ɵ ɡ Ůɩ ɜ Ŭůɡ ɛ ɦ Ŭɣ ɒɒ ɣ, ´ ɣ Ÿɔ ɛ Ŭŕə, ůŮ Ŭɡ Ŭɦ Ŭɛ ůə ɛ´ ɦ.

[illegible] (Tzekaki, Sakonidis & Kaldrimidou, 2003) [illegible] §3.4 [illegible] §3.5 [illegible] (Tzanakis & Arcavi et al, 2000)

6.2 Διαγνωστικά εργαλεία μέτρησης γνώσεων και δεξιοτήτων

6.2.1 Διαγνωστικά τεστ μέτρησης γνώσεων Αλγεβρικών παραστάσεων

Ένα [illegible] (2011, σ.83) [illegible] (Tzekaki, Sakonidis & Kaldrimidou, 2003) [illegible] (Tzanakis & Arcavi et al, 2000)

6.2.2 JöaöaöhöcöaÜÜöqüöüÜůöaÜöaÜÜöxöÜöqÜöaöqöööqöööqöö

«Õ3Ŭſ´ŬŰŷŷŬſůœŬ9ŬŰŰí 3 ə Ŭ9 e ɔ9ħſſŰ£g ɓ ŰŰí 3. Ŭ-ħŰŰd ɖəœəɖŬŰ£g ´ŬŰŷŷŬdŬůœŬ9 ŭ9´ə-Ŭůœ9ŬŬ ħ ŬŰ3 ɖəœəɖŬŰ£g ɔœg;»

$$\alpha + x = 2 \cdot (\beta + x)$$
$$x = \alpha - 2 \cdot \beta$$

Ŭ-Ůŷœŷ9ůε e α (ε´e ŷ e i 3 3Ŭ ´ŷ e ů´Ŭdvůe g3 e 9 aŭœ9 e 9 εŬdɖŰŷſ 3Ŭ Ŭ£ggſ ŭ9ŬŰŷ´ ı ůe g3é)

1. e 9Ŭŷ9dε e αŬ, ɓ 3Ŭůœ9Ŭ9dŰŰ9e e αə Ŭ9ħ e 9´Ŭ3 x Ŭ ħ y3Ŭűgůœə e ɔ9ħ ħŷœ ɖəœəɖŬſ.
2. ?Ŭůœ9Ŭ9Ŭ > ɓ.
3. ?Ŭ9Ŭ£´œ ůɖε Ŭ3Ŭ9ħ: ¢ Ůŷε ɖ3ůŰŰ3 Ŭ e ŰŰ9ůŰε ŰŰ3:
   i. ŷ 3 $\alpha - 2\beta < 0$ Ůűŷ ŰŰ9ħŰůg3 ŷɓɖůŰ£´ŰŷůŰ9dħ3
   ii. ŷ 3 $\alpha - 2\beta = 0$ ůgεɓŰœ9ůŰ£´Ůŷħ3
   iii. ŷ 3 $\alpha - 2\beta > 0$ dŰůgεɓŰůŰ£ εyəə e 3

(Ū3 ε Ŭ£ŭɖſ, 2009)

¢ e ´ŰŷŰ9ŰŰ3 Ůŷ ı Ŭ£ε Ŭ ï Ŭůəɖůɖ ε´eŷůı 3Ŭ ŭ e dŰůůŰε ŬdɖŰŷſ Ŭ£ſ cbõ ũgε3Ŭůœg, ħ´3ſ´ŷ e Ŭůœ9ŰŰ9 ə Ŭ9 Ŭ ħ Ŭ£ Ŭ-əœ e Ŭə ħ Ŭŷħ ɔŷ Ŭε ε Ŭ ů´egŭı 3 ɔ9Ŭ ŰŰ z Ŭdɖε ŰŰə Ŭ (2011, ůg3dŰŰə e Ůŷ ɔŰůdŰ 6, ů.100) ŷ ŷ e əŬ ůŰ£3 Ůŷ ɔŰůdŰ ŭœ e 3ŰŰ9 ůŰ£ggſ ε ŬdɖŰŷſ Ŭ e ů´ŬůεŰŰŰ Ŭ ħ Ŭ£ əε ε Ŭ «ŷ ŷ 3ɖŰə e α» Ŭ£ſ *Encyclopédie* (dô Alembert, 1751 ï 1765)

«ŷ ŷ 3ɖŰəyſ´ eůħŰ£ŰŰſůŰ£ò əəŰŷŰůŰ9ůŰ9ůŰůſ´eg Ů dŷŰŰ e 3ŰŰ9 Ŭ ħ Ŭ£ ůɖε Ůε – əŰ9 e 9 e´edůſ dŰŷ e i 3ŰŰ9 Ŭ ħ ´eəə e i ſ ε Ŭdɖε ŰŰə e i ſ ŷ ſ ε əŷħŰŰŷŰſ Ŭ ħ Ŭ£ ε dŰŷ3. ŷ gŰ£ ħε ŷ ſ ɖ ŰŰ9ůŰŰdŰ sŰŷŰ ůŰ3 Ůœ9Ŭ9 e ŷ dε, ħ´ŷ ſ dŰ ŭ e i ε Ů´Ůŷ Ŭ9ŰŰ é Ů9´eůħŰŰŰſ´eg e 3 e ε Ŭ e 3ŰŰ9 Ůŷ 3ɖŰəyſ, dŰŷ e i ε Ů3ůſ əŰdŰε ŷ 3Ŭ ħŰ3 ħŷ aůə e 3ŰŰ9 əŰŰŷ Ŭ ħ Ŭ£ ε dŰŷ3, ´Ůŷ sůŰŰ3 e 3ŰŰ9 ´ e əi ůg e 3Ŭ Ŭ ħ ´ŷ Ůε ŰŰəyſ´eůħŰŰŰſé »

Ŭ£ŰŰ ůg3ŷ e Ů9Ŭ Ů3Ŭůŷŷ Ů£Ů9ɖ Ů9Ŭ£əħɔɖůɖ Ů£g dô Alembert ɔ9Ŭ£Ů əŰ9ı ſ ŭ9Ŭ£´ŷ ε ŷ3Ŭ ´ŷ e ɓəε ε Ŭ£Ů:

«ŷ ſ ſ´ eɖŷůe g ε Ů ´.e. ħŰ3 Ů3Ŭ£ɖŰ£i ε Ů Ŭ£3 Ŭ£ε Ů3ħſ Ůŷ sɖε e i x, e e´eœſ ħŰŰ3 ´ŷ e ůŰ£ɖŰŰ9 ůŰ£ 100 ε Ŭſ ŭœ Ů9 50. Ŭi ε ůŷ 3Ŭ ε Ů Ŭ£ggſ əŰ3ħ3Ůſ Ŭ£ſ ò əəŰŷŰŷ Ŭſ, ŷ e g ε Ů

$x + 100 = 50$, *ŭďəŬŭæ* $x = -50$. *J gŰĥ ´ęg ŭsŬ sůŰí 3ęgęŮŮůsŬə ĥŰŝ ď ´ęůĥŰďŰŰ* x *sůęiŰŰə ęŮ* 50 *əŬə ĥŰŝ ŬsŰůí3Ŭ ´JęůŰůďŰŰə ůŰę* 100 *dŬ ´Jy´ŬŝŬ3Ŭ ŬŰíŬJůďŰŰə. ŬJŲ:ęŬ ´ęg ůďęŬůsŬŝĥŰŝŰę ´J ĥbəďęŬdŬy´J Ů Ů3ŬŮůsŬŮŭsŬŰĝ´ŷ dŮůŷ gŬŝęg:*

?Ŭ ĥJ ŮďŮůy3Ŭęy:ŮďęgŰ x *ŰęŬ ę´ęœ, ĥŰŰ3 ŬŰíŬJůďŰŰə Ŭ ĥ ŰęŬ* 100 *3Ŭ ŬŰŭę3Ŭŝ g´ĥəę9´ę* 50.

J 3 ŰęŬ ´J ĥbəďęŬ ŮůsŮŭsŬŰĝ´ŷ dŮůęŮŰgŰĥ ŰęŬ3 ŰĵĥŬ´ę, ŰĥŰŰdŬ ŮůsŮŰęŮ $100 - x = 50$ *əŬə* $x = 50$, *ď ŰĵJ3ďŰŰəę ęęJŭę ŰęŬg* x *ŭŬŝ dŬ Ů sbœ3Ů´əyę3. ÔŰŭ9, əę9´ĥ3 ę9 ŰĵJ3ďŰŰəyŬ ´ęůĥŰďŰŰĝ g´ęŭďəu 3ęg3 ůŰď3 ´J ŰbęŬŰŰəĥŰďŰŰ dŰŰəyŬ ´ęůĥŰďŰŰĝ ůŰęggŬ g´ęəę3ůęęiŬ, ę9ę´ędŰĝĥęŷ gŬůsŮŬ3 g´ęŰŰdŮůůŮəŲdęŬ dyůď. ÔŰŭ9, əę9´ĥ3, ´J ŰbęŬŰŰəŲ əŬə3ŬŝŲdŬJŬ, ŭŬŝ g´ŲJ3ęg3 əŬdĥəęg ęŰęę3ŷ ęy3ĝŬ ŰJ3ďŰŰəyŬ ´ęůĥŰďŰŰĝ: Ůęę* -3 *dŬŷJęięŬŝę ŰŭďJďęy3Ŭ ŭŬŝ yęŬŝ əŬ3y3Ŭ 3ĥďęŬ ȳ ŰŰ3 ĥęŷ gŬŷŷ ĥŰŝ y3ŬĵŲ3dJŷ´ęgŬ yŭŷ ůŮůŮ əŲęę3 Ŭəəę* -3 *écus, ŰgŰĥ ůďęŬŭŝůŮəŬŰŰ3ęďŰę ə9ŭ ůůŬĥŰŝ Ůęg ęúŮəŝ* 3 *écus.»*
Ø´ďŰŰdŰŰə əę9´ĥ3 Ŭ ĥ Ůęggę´ęŬďďŰĵyę3Ŭęŝə´ŰŰęůęg3 Ůę ´ŰJŬ Ŭ ŲŲ3ŷ sůŰęJ9əĥ əŮęŬŝę əŬə 3Ŭ Ŭ ŬŝŰŰęůęg3 ůŰę ŰJŷ1 ŰďęŬ: «j J ŝŲŲę3ŰŰə ę9 ŰJ3ďŰŰəęa ŰJ9ďęęa ůŰďĵ3 Ů œgůď ŝ9ůı ůŮŷ3;»

¢ ŭJŬůŰďJ9ĥŰďŰŰ ůg3ŮęœŮə ęďŰí 3ŰŰę Ŭ ĥ Ůęggę ęŬďďŰĵyę 3Ŭ gŷJ9ůŰęi3 ůŮ ŭi ę ęęŲŭŮę. ¢ęggę «ę´Ŭŭęiĝ» əŬə Ůęggę «Ŭ3ŰŰí Ŭbęggę» Ůŷ3 ŰJ3ďŰŰəı3 ŰJ9ďęı3. Ø9 «ę´Ŭŭęœ» g´ęůŰďJœę3 ĥŰŝę9ŰJ3ďŰŰəęa ŮŮŝŬə gJęůœę9, ´ŰJŲŰę ɔŮŝę3ĥę ĥŰŝ ŭi ůəęəŬ ę´ęJŮı3Ŭ Ŭ ęŭęďŮı y3Ŭ´J ŰbęŬŰŰəĥ 3ĥďęŬ ůŰĝę´J ŲŝŮĝę ŰęggŬ, Ůŝı ę9 «Ŭ3ŰŰí Ŭbę9» ďŮŷJęi3 ĥŰŝŰŰz ŬďďęŬŰŰə Ųę´ęJęi3 3Ŭg´ŲJ3ęg3 əŬə gŷJęœ ŰęggŬ ŰJ3ďŰŰəęiĝ.

Ô3ŬĝĝŬ «ę´ŬŭĥĝĝŬ» əŬə y3ŬĝĝŬ «Ŭ3ŰŰí Ŭbęĝĝ» Ůŷ3 ŰJ3ďŰŰəı3 ŭ9ŬŮŝJœę3ŰŰə ęŮ ŭi ę ŭ9ŬŰęJŮŰŰəęiĝŬJĥ´ęggŬŰďJ ´ŰJŬə ŲŰŷ ŝŮůŷ ůďJ:

«?Ŭ əgďŮůďJ ŝŮůŷ ůďJ $7x - 5 = 10x - 11$ gŷJœĝ3Ŭ ŭ9ŬŮŝJ9ůŰŰdŮŰJ3ďŰŰəęiĝŬJ9ďęiĝ ůŰďJęďŬ´ŰJďŰŷ ůďJ əŬəęŮŰJ3ďŰŰəęiĝůŰďJ ŭŬŝŰŰJďJ ´ŰJďŰŷ ůďJ.»

«ȷ ȝŰŕ Ůəɛɡʃ»	«Ƀ´ Ůŭŋɡʃ»
$7x-5=10x-11$ $11-5=10x-7x$ $6=3x$ $x=6:3$ $x=2$	$7x-5=10x-11$ $7x-10x=5-11$ $-3x=-6$ $x=(-6):(-3)$ $x=2$

Ƒŕɡ ŭȷŮůŕɡȷɛŋŕɡŕŰɛɡŕŰůŕŰəŰ Ů ŋ Ůŕɛɡɡʃɛ Ůɡŕɡʃŷʃȝ Ů Ů Ůȝ Ůŕůɛɡȝ ůŕŰ Ůȝɛɡʃ Ů ȷ Ůŕɛ ɛ ŮŕŰ:

1. Ʊɛɡ Ů ůɛȝ Ůəɡ ƀ Ůůɛəɛ ŭɡ Ůŕɛɡȷ Ƴ ůŕɛɡɡʃŭɨɛ Ůŕŋ´ɛɡɡʃ Ů œɡůɡʃ;
2. ɡəŮəȷɛɡ Ůŕ´ əɨŮȝ Ůə Ůŕɛ ɛ Ůŕ Ů ɛ Ůȝɛȝ Ůə Ůŕɛ ɛ Ůŕ Ů ůŮə Ƴɡ Ů Ůŕŋ´ɛ;
3. ʒ´ɛȷ Ůəŕ Ů ȝ Ů ɡ Ůȷ Ůəŕ Ůŕŋɡůŕ Ů Ů ŕ Ůȝ ƴȝ Ůȝ Ůŕŋ´ɛ Ů Ů ɨ Ůŋɛ ɛ´ ɛɡ´ȷ Ůəŕ Ůəŋ Ů ŋ Ůȝ Ƴəəɛ;
4. ʒ´ɛȷ Ůəŕ Ů ȝ Ů Ůəɡɔɛ ůŕ Ů Ůƴȝ Ů ə Ůȝŋ ȝ Ů Ůŕȝ´ȷ Ƴȝ Ůŕȝ Ůŕȝ Ůȷ ȝɡŕ Ůəɨȝ Ůȷ ɡɛŕɨȝ ɛ Ů ƀ Ƴůɡ Ůɡɡʃŭɨɛ Ůŕŋ´ɛɡɡʃ Ů œɡůɡʃ Ůŕɡʃ ɡŭɨə Ůʃ Ůəůȝ ůɡʃ;

Ƒȷ ɡŕəƴ Ůȷ ȝ Ůŕɛ ɛ Ůŕ Ů´ ɛɡ ɡŕ Ů ŭɡɛɡɛȷ ɔɛɨ ůŕ Ůȝ Ůŕȝ Ůəůɡŕɡʃ ŭɨ Ůŕɡʃ Ůŕɡʃ Ůŕȝ Ůȝ ɡŕɛ ȝ Ůə ɡŕ Ů Ůŋȝɛ Ůȝ Ůɛ ɔŕȝɛȝŋɡʃ ŋ Ůə«ə Ůȝŋȝ Ůʃ Ůŕȝ ´ȷ ɛůɛ ɛ ȝ» əȷɨ ƀ Ůə ɛƴůŮ Ůɛɡ ƴȝ Ů Ůɨɛɡʃ Ůȝ Ƴəɡɡʃ. ɛ´ɡȝ ɨŮə Ů ŭȷ Ůůŕɡʃ ŋ Ůŕɡʃ Ůŕ Ů Ůɨȝ Ů´ ȷ ɛ Ůŕȝ Ůȝ Ů ɡ Ů ɛ Ů Ů ŭɡʃ (2009) ɔəŮ ɛ Ůŕɡʃ ŋ Ůŕɡʃ ɡŕ ɔõ ũɡɛȝ Ůůɛɡ, ɡƴȷ ɛɡȝ Ůŕƴʃ Ůɛɡɡʃ ůŮ ɛ Ƴůůʃ: «ū ɡɛə» əŮə «Ɂɡɡʃ ɛɡ» Ůŕȝ Ůȷ ȝɡŕ Ůəɨȝ Ůȷ ȝɡŕ ȝ. Ƀə «ŭɡɛə» Ůŕȝ Ůȷ ȝɡŕ Ůəɨȝ Ůɨȝ Ůȝ ƴŭə Ůŕ Ůʃ ɡ Ůʃ ůŕ Ů ůŕ Ů Ůȝ ɡůɡ Ůŕɡʃ Ůəůƴȝ ůɡʃ, Ůŭɨɛ ɛ´ ɛȷ ɛɨ ůŮȝ ȝŮ Ůəɛəɛɡɡʃɛůɛȝ Ůŕɡʃ Ůŕ´ ɛ´ ɛ ɛɡʃ ɛƴȝɡʃ ŭə Ůŭə Ůůʃ Ůŕɡʃ ɛ Ůŕŋɨɛ ȝ Ůŕȝ Ůȝ ȝ ůŕȝ ůŕȝ ůŕɛ ´ȷ ȝ Ůŕɛ ɛƴəɛɡʃ əŮə Ůŕȝ ɔȝƴůŕȝ ůŕɛ ŭůɨ Ůŕȝ ůŕɛ ŭůɨ Ůŕȝ ɛ, ɡƴȷ ɛɡʃ ȝŮ ´ȷ ɛƀəɡʃɛ Ůŕůůŕɛɨȝ Ůȝ ɛə Ůŕŭ Ůƴȷ ůůƴʃ ´ɛɡ ´ȷ ɛəɨ ´ Ůŕɛɡȝ ƴɡɛɡȝ ȝ ƀʃɡʃɛ Ů. Ɂɡ Ůəƴəɛ Ů ƴŭə Ůŭ Ůʃ Ů ɡȷ ɛůɛɡʃ Ůəŭə Ƴ ůŮ´ ɛ ůɨȝ ɡ Ůŕ Ů ɨ ůŮ ůŕɡʃ Ůəůȝ ůŮɡʃ.

Ů Ȝ Ů ŭə Ůŕəƴ ůɡʃɛ Ůȝ Ůŕəƴ ůŕɛɡ ůŕɛɡ Ůŕɡʃ ´ȷ ɛɡɔɛɨ ɛ Ůȝɡʃ ŭȷ Ůůŕɡʃ ŋ Ůŕɡʃ Ů Ůəɡ ůɨ ɔəȷ ůɡʃ Ůŕȝ ŭɨɛ əɨ ůŮȝ ůŕɛɡɡʃ ɛ Ůŕɡʃ. ɡɡʃ ɔəŮ ŭɨ ɛ´ ȷ Ƴȝɡʃ $(-6):(-3)$ ŭŮəŮŕŮəȝ Ů ´ Ůəɛɨ Ůəůŕ ɛ ɡ Ů Ůȝ Ůəŋ Ů ŋ Ůŕɡʃ. ȷ ŭɛɨ ´ ȷ ŋəŮəŮŕəɔ Ů Ůŕȝ ɨŮə Ůəůŕ ůɡʃ əŮə ɛ «Ůɡɡʃ ɛɡ» ɛŮ ɛ ɡ Ů «ŭɡůəƴ» əɨ ůɡʃ ƀȷ ƴəŮə x=2, Ůəƴ Ů ŭŮə Ůȷ ŋ ŋŮə Ůə ŭůɡŕɛɨ ɛ Ů ŕɡʃ ɡŕ Ůȝ ɡŕ Ů ɨ ɛ

´ţ ÿ´ Ůţ ţŬ ţŬŰŬţţţ

[illegible] Viete. [illegible] [illegible] Euler.

6.3 [illegible]

6.3.1 [illegible]

[illegible] 2012 [illegible] 2013 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Viete, [illegible]

$$(\alpha+\beta)-(\gamma-\delta)=\alpha+\beta-\gamma+\delta$$

[illegible]

«¢ ´ŬĵŸùŰŰůd Ŭgŭé εŬƒ ŭůůƷŬϑ εŬεŬŰŰbəd[ŭϑƒ ŭé ƷhdεŸ ŭ[ƒ. ĵ ´h ŭé Ÿdĵ ɛsůεŬ ŭég $\alpha+\beta$ dϑəɛgεŬƷŬ ŬŭŬĝϑϑůɛgεŬ ŭé γ, hɛϑ hεϰƒ ɛəhəədĵɛ ŬəəŸ εŬϑϰ εϑϰɛ əŬŰŸ δ. ÔŰůƷ, ɔϑŬƷŬ ŭ[əϰůɛgεŬdŬ ´ĵϑ´ ŬϑhŰŰƷ dŬϑɛgεŬŬŭĝϑůŬϑ Ŭhŭé $\alpha+\beta$ ŭé γ, $(\alpha+\beta)-\gamma$, ŭhŰŰƷ ŬƷ´ĵɛůdϑůɛgεŬŭé δ ɔϑŬƷŬ sůɛĵĵɛ´ɛůɛgεŬŭé Ŭɛŭϑəůůɛ Ŭ $\alpha+\beta-\gamma+\delta$.»

Ƶ ŪŸƷɛƒ:

«Ƶŭé Ÿdĵɛsůɛ Ŭ ŭég $\alpha+\beta$ dϑəɛgεŬƷŬ ŬŭŬĝϑϑůɛgεŬŭ[ŭsŬŭɛĵŸ ŭég $\gamma-\delta$. ÔŰůƷ, ŬƷ ŬŭŬĝϑϑůɛgεŬŬ hŭé $\alpha+\beta$ ŭé γ, ŭŬƷ ŬŭŬĝϑɛ¡εŬŭ[ŭsŬŭɛĵŸ ŭég $\gamma-\delta$. ŭsô ŬgŰhŭé əhɔɛ, ůŰé $\alpha+\beta-\gamma$ ´ĵϑ´ ŬƷ´ĵɛůdϑůɛgεŬŭé δ.»

ɀ ŸəɛůŰŰ, ŭé ´ɛɛ ŬƷŭϑŬŭϑĵɛƷ ůŬ ŬgŰŸ ŰŰ εŬdεεŬŰŰ εŰŰƷ hŭϑ ůgɛƷŸ ɛϑ εŬdŭĝϑƒ ŭϑŬŭ´ϰƷŬƷ Ŭhϑϰƒ ůɛŬŰəŸ εŬ ŭé əŬƷhƷŬ ŭϰƷ ´ĵɛůεϰƷ, ´ɛg dŭ¡εϰɛŬ ŭéggƒ ů´ɛgŭŬɛggƒ εŬdŭεŬŰəɛ¡ƒ Euler əŬϑ Viete, ɔŬɛƷhƒ´ɛg ŬƷdɛgůdŬεŬəŬϑ ŭéggƒ ŭϰɛggƒ ŭéggƒ εŬdŭĝϑƒ. Ƶϑɛ ůgɔəŬϑĵϑɛƷŬé

ƵŬϑƷŬŬhŰŰ´ĵ ŰŰ εŬdεεŬŰŰɔϑŬŭ[ƷŬŬůŬϑϰɛ ůŬé´ɛəəŬ əŬůϑŬůεhŰϰƷĵdŰƷ ůgɛdŭé¡ůŬεŬŬŰ´ŬƷŬŰŸŬϑŸŰ[ƒŰŸƷdƒɔϑŬŬé ´ɛůɛŬəhƷ ƷhdεŬŰ[ƒϑůhŰ[ŰŰƒŬé Viete εŬĵϑdεdŰŸəŸ´ŬĵŬŰůɛεŬŰŰ əŬϑεŬŰŰbədŰƒ. «ɀ ŬŰŰŰĵŸɛŬεŬ› ŭé ´ədƷ ƷϰŸ ŬhŰ[Ʒ´ŬĵƷϰdŰůd, ϰƒŰéƷ ŬƷŰŰdŰŰé ŬĵϑdεhŰ[ƒ´ŬĵƷϰdŰůdƒəŬϑŭé ŬĵŬ[εŬŰϰƷ´ŬŰŰϑŬ Ʒ ŭŰŬŰŰƷ ŬƷ $-(8-5)$ ϑůɛ¡ŰŰϑεŬŰéƷ ŬƷŰŰdŰŰé əŬϑŰϰƷ ŰŰ¡ɛ hĵϰƷ ŭ[ƒ´ŬĵƷϰdŰůdƒ, h´ɛg ŬĵϑdεdŰŸəŸ ε´ɛĵɛ¡εŬƷŬ ŬϑŸɔƷɛgεŬŭé ŬɛŬϑŸůŰεŬ. ɔɔɛƷŰƒŬƒ ůŰ[ůgƷŸɛŬϑŬ ŸƷŬ´ŬĵŸŰůϑεŬůŭéƷ´ɛŬϑŬ: $-(8-3-5-7)$ ɔϑŬƷŬbɔϑd´ŬĵƷϰdŰůd ɛϰĵɔƒƷŬɔɛƷɛgƷ ɛϑ´ĵŸƷϑƒ εŸůŬůŬgŰé, ŰŰ´ŬŰŰϑŸ, həŬεŬɛɔůɛŬŰhƷ, ŬŸƷŰ[ůŬƷ: $-8+3+5+7$ əŬϑ ůgε´ədĵϰƷɛƷŰƒəŸɔŬεŬ ŭdəŬŰϰ ɛ ŬƷŰŰdŰŰéƒ ŭég 8, ɛ ŬƷŰŰdŰŰéƒ ŭég -3, ɛ ŬƷŰŰdŰŰéƒ ŭég -5, ɛ ŬƷŰŰdŰŰéƒ -7. ɀ dŬ εŬdεŬĵϑŬ, d ɀ ŬƷĵd ůŰ´ŬhŰϑ ŬgŰh εɛϑŸɛůϑ εŬ ŬϑɛŬĵϑůŰϑϰ, ŬəəŸŰůƷ ůůƷ!

Λx Űí ɜŰŰg Űłɜ: «***¢ɔ ɢɟ ŮŰłɦɛŰůŰŮ ɔɔŰ ɜŰ ɔɑŮɔ Ůɔɛ ŮɟɔůŰłɔɛ ɔŰłɦŰłłŰŰ;***»[47] Ű ŰɜŰŸ: «***j ɟ ŮŰłɦɛŰůŰŮɣɜŰɜ ɦɟɛ ɛ ´ɟɛůŰŸ ůŰł ´ ŮɟɣɜdŮůd ɛŮŰł ´ɟŸɜd Űłɛg ´ɛɔɔŰ ɔŰŰłŰŰɛɛi***».
¢ɦŰŮɣɜŰůg Ÿɔɔɛg ɛŰŰdłŰłɛg Ű ŰɜŰŸ Ű łɛ *1;* ***qdłɔŰŰɛ Ű łɛ*** (-1).

ȯɟŰ, ɔŰŰŰɔɛɜŰɛŮůŰłɛ ůgɛ´ɣɟŰůɛŰɦŰłŰ łɛ $(-\alpha)$ŮɑŰɜɛgůɜŰůŰłɔŸŰłɛ ɔɜɑɦɛŮɜɛ Ű łɛg α ɛŮŰłɛ (-1).

ǀůŰŮŰŰ ŰŰɦ Ű łɛ ´ŰɟŰŸɜɣ ɛŸŰdłɛŰ ɛŮŰłɜ Ůɛ ŮɟɔůŰłɔɛ ɔŰłɦŰłłŰŰ ůŰłɜ ɔůɦŰłłŰŰ Ű łɛg Viete ɔŰɔ ɛdłŰí ɜŰŰg Ű ɦ ŰŰ ´ŰɔŰŰɔŸ ɜŰ ´ɛgɜ Ű łɛ ɣɢɛgɜ ɔŰŰŰɔŸŮɔŮ Ű ɦ Ű łɛ ɛŸŰdłɛŰ, dł ɟ Ůɟɔɣɔɔ Ű ɛɛg Ůí ŮŰłɛ Ůɔɛg:

«***ɟ ɜ*** $2 \cdot 3 = +6$ ***ɔŰɔ*** $(-2) \cdot 3 = -6$ ***ŰɦŰŰ*** $(-2) \cdot (-3)$ ***´ɟɣ´ Ůɔ ɜŰ ɔŸɜŰɔ*** $+6$, ***ŭɔɦŰɔ ŮɑŰɔ Ű łɛ ŰɜŰłůŮłɛ Ű łɛg*** $(-2) \cdot 3 = -6$.»

Ɛɔɣɣdł ´ɛg dgɛɑŮɔ ɣɜŰłɛɜŰ Ű łɛ ůgɔɔɛɔɔůɛɦ Ű łɛg Euler, Ůɔɔ Ÿ ɛŮ ůgɔɔŮɔɟɛɣɜɛggł Űɟɛdɛɛiłg. ¢Ű ´ŰɔŭɔŸ Ůɜdɛgůɔ ŸůłɔŮɜ Ű ɦ Ű łł ´ɛůɛŰłɔɛ Ů Ůɜɛɔdůd ɔŰɔ Ű łɜ «ŰɜŰɔŸɔgɣdł» Ű łłg Ůɛ ŮɟɔůŰłɔɛg ɔŭɦŰłłŰŰg ůŰłɛggł ŰɟɜdŰłɔɛiłg ůŰłɜ ɔůɦŰłłŰŰ Ű łɛg Viete, ɔŰdłłg ɔŰɔ ɛŮŰłɜ «Ůɛ ɔŰłgɛdŰ» Ű łłg ɛŰdłɛŰɟɔŰłg ɜŰ ŰɜŰ ŰɟŸɔŮɔ Ű łɜ ŰɔŰłɔɛɔɦɔdůd Ű łɛg Euler. ƐŰłɜ ´ŰɟɛgůdŮůd Ű łłg Ůɜɦ Ű łłŰŰg Ɛgɛɛ Ű łůd dŰŭɛiłɛŮ´ɛɔŮłg Ű ɦɣŮɔłg ɔŰɔ ůɔɣɣdł ɣɛŮɔ dł ɟ Ůɟɔɣɔɔ Ű ɔɔŰ Ű łɜ ŰɔŰłɔɛɔɦɔdůd Ű łɛg ɔŰɜɦɜŰ Ű łɣɜ ´ɟɛůɛɛɣɜ ůŰłɜ ´ɛɔɔŰ ɔŰŰůɔŰůɛɦ, ɛɔůɦ gɟɦɜɛ ɛŮŰŸ, ůŰłɜ ŰɟɛɛŰ Ű łłg dbõůgɛɜŰůɛg.

ƐŰŰ ɛŰdłɛɛŰŰŰ, ´ɟɛɜ Ű łɛɜ ´ɛɔɔŰ ɔŰůɔŰůɛɦ ůiłɛ Ůɟɜdłɛůɜ ɜ Ůɟɛdłɛ ɜ, ɛdłŰłɛdłɔŮŰ ɦ Ű łŰ ´ŰɔŭɔŸ ɜŰ ´Ůɟɛɔɟ Ÿɣɛgɜ Ű łłɜ ɔůɦŰłłŰŰ Ű łɛg Viete: $\alpha - (\beta - \gamma) = \alpha - \beta + \gamma$ ɔŰɔ ɜŰ ´ɟɛů´Űdłůɛgɜ ɜŰ Ű łłɜ ŰɔŰłɔɛɔɔɛůɛgɜ ´ɛůɛŰłɔɛŸ. ¢Ű ´ŰɔŭɔŸ ŮɑŰɜ Ůɜ Ůɟɛɔɦ ůgɛɛŮłłɛɑɛ ůŰłɛ ɛŸŰdłɛŰ ɔŰɔ ɛŸɔůŰłŰ, Ű łłɜ Ůɦɛ Ůɜdł dłɛɣɟŰ Ű Ÿɜ Ű łłůŰɜ ɔɟŰ Ű łłg ɛɣůŰ ůŰłł ŰŸɜdł ɦ´ɣg ŰɜŰłłɣɟŰɛŮ ɔŰɔ ůŰłɜ Ůɟɑɛ Ű łłg ´ŰɟŰɔɟŸůɛg, Ű łɜ ´ɛůɛŰłɔɛ ŰɔŰłɔɛɔɦɔdůd Ű łłg ůɑɣůdłg: $(\alpha + \beta) - (\gamma - \delta)$.

---

[47] ɟ gŰɦ Ű łł ůdɛŮɛ Ű łłg ɑɔůŰůɔŰɔdŰg ɛŰg dgɛɑŮɔ Ű łłɜ Ű ɦŭŰɔɔdł ´ɛg ´ɟɛŰłŮɔɔŮɔdł Rapke ɔɔŰ Ű łłɜ ɔůɦŰłłŰŰ $(-1) \cdot (-1) = +1$, ´ɛg ´Ůɟɛgůɔ ŸůŰɛŮůŰł §4.3.3, dł ɛ´ɛdŰ ɟdůɛɛ´ɛɔůŭŰɔɔ ɛŰŰŰ, ɦ´ɣg Ű łłɜɑŮɔdł Rapke, ´ɛg ŭɔ´ɛgɜ Ű łɛ ůiɜɛɔɛ Ű łɜ Ůɟɔdłɛɜ, ɛŮŰŰɛ´ɛdŰɛɔɛŰdłŰɟgłŮɔŮɔŰɔɛŭdł Ůɜɛɔɔ Ůɔɣ ɛɣɜɛɔ

Ввэ ´ Ůţ эůůůůţůŰţ ємэ ε´ ůţţ ůůůŰз εŮ ůŸůůď Ůůď ´ єůůєŰůєає Ůзůůєзєůůůď Ůůďţ эůůůůďŰŰţ:

$$\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$$

зŰ ůůι ůєţз Ůůď ůґ ůŰє Ů Ÿзůůďůď ůэŰůůďз эůůůůďŰŰ:

$$(\alpha+\beta)-(\gamma-\delta)=\alpha+\beta-\gamma+\delta,$$

Ůзůůєзєůůι зŰŰţ ´ єůůєůůєŸ єůůэ ´ Ůţ эůţůŰůєŸ Ůůď ůєґůůď. ?эι ďєзŰŰţ ´ єєзі ґţůůďŰ, ´ єţ ůůєůůз єůŰŰůэŸůůůůєůůď ůєůєůєє Ůєţ Viete.

ЄŰŰ Ůţєєэ Ÿ εŮůєε ŮŰŰůэůŰ Ůєз ´ єєєэŮ єůůэůůůεůůůůι зŰţэďůůєι з Ůţэďει з, єєэ´ůůз, ŰŰ ´ůůůůэŸ єůŰŰůэŸůůůůєůůз Ůєз єůůůůůůŰ Viete, Ůůď ůůůůєзєůůůď Ůєţ Euler є ůůůůůŸєєзŰŰţ Ůůď ůŰ ůůєзєůůď Ůєţ ůєєєэєєі ůэůєєєţ εŰ Ůůď Ůţэďεďůůєє ´ţůůєůєє. ţ єєэŸ ŮţєůŰŰŸ ´ůůůůŸ, єţґєţ εŮůďůŰţ ůŰŰ z ŮůďεŮůůŸ, ´єţ ůεґţ´ţєůŮůďєі з, ůэůεŮţŰţєз ŰŰůůůůůůůůůůєєţз Ůєз єůůůůůůůůєţз ůůůůůůůůůů

[illegible]

6.3.2 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[

´ɟɛůɐɛɤɜ, ɦ´ɤɡ ŭɵŬŰɡ´ı ɗɖəŮŬɦ Űɛɡɡ Euler əŬɔ Viete. Ƀɔə ɛŬɗɖŰɣɡ ɣ´ɟŮŮɜŬ ŭŮɒɛɡɜ Ŭɜ ɗɡɛɛ¡ɜŰŬɔ Ű[´ɛůɛŰɷɐ Ůɜɐɔɖůɖ Űɛɡ Viete ɐ Ŭɜ ɗɡɛɛ¡ɜŰŬɔ Ŭ ə¥ Űɛɜ əŬɜɦɜŬ. ɗɔŬůəɦɡ ůŰɦɡɛɡ ɐŰŬɜ ɜŬ ŭɵŬ ůŰɤɗůɜ Ŭɜ ɛə ɛŬɗɖŰɣɡ Ŭɜ ŬɛɖŰɛ¡ɜ ə¥ ɛɵŬ Ŭ ɦŭŮɒɖ ɔɵŬ Űɛɜ əŬɜɦɜŬ $(-1)\cdot(-1)=+1$ ɐ Ŭɜ Ŭ ə¥ ɛŬɗŬɒɛɡɜ ɜŬ Űɛɜ ɡɟɖůəɛɛ´ɛəɛ¡ɜ ůɤůŰ¥. Á´ůɖɡ, ɜŬ ŬɜŬŭŮɛɡɗŮɜ ɖ ŭgůəɛəɗŬ ůŰ[əŬŰŬɜɦɖůɖ Ű¡ɜ ´ɟŬɔɛŬŰəɜ ɛɛɜŰ¡əɤɜ ɔɵŬ Ű[ɜ Ůɜɐɔɖůɖ Űɛɡ ´ŬɟŬ ¥ɜɤ əŬɜɦɜŬ, ɦ´ɤɡ «ɡɟɣɛɡ Ůɑ ɡɟɣɛɡ ŮɒŬɔ əɣɟŭɛɡ», ɛɛɜŰ¡əŬ ´ɛɡ ŰŮəəə¥ ɛ´ɛɟɛ¡ɜ ɜŬ ɛŭɖɔɐůɛɡɜ, ŬɔɦɛŬ əŬɔ Űɛɡɡ əŬə¡ɛ¡ɡ ɛŬɗɖŰɣɡ ůŬɣůgŭɐ ůgəəɛɔəůŰəɐ, ɔŬɔɛɜɦɡ´ɛɡ Ůɖɟ ŮŰɛŬɔ Ŭɟɜɖ[ŰəŰ Ű[ɜ ´ŬɟŬəŰɣɟɤ ɛŬɗɖɛŰŰəɐ Űɛɡɡ ɔɜı ůɖ, ɦ´ɤɡ ɤɛɛɡɛŮ´ɟɛŬɜŬŭ¡ɤɟŮə ¢ɤə¡ɡ, Ŭŭ¡ɛ¡ ɛŮəŮŰɛɗɖəŬɜ ŰŬ ū¡əəŬ Áɟɔ ŬůɗŬɡ, ůgɛɖŰɛůŬɛŮɛŮəŰ¥ ɛɛɛɡɡ ɛŬɗɖŰɣɡ ɔəŬ´ŬɟəůůɦŰŰɟŮɡ ŭəŮgəɟɛɐůŮəɡ ůɛŰŰəŰ¥ ɛŮŰəɡŬ Ŭ ŬɜŰɛůŮəɡŰɛɡɡůŮ´ɟɛůɤ´əɐɐ ůgɜɤɜŰŰgɜɖ.

6.3.3 ¢ɛ ŮəŬ´ŬəŭŮgŰəɦgəəəɦï ū¡əəɛ Áɟɔ ŬůɗŬɡŰ[ɡ Ɛgɛɐ Ű[ůɖɡ

ɟɟɜɖŰəɛɑɟɟəɗɛɛé

Ƀɔ ɛŬɗɖɛŰŰəɦɡ Felix Klein (1879-1925) ůŰɛ ɓəɓəɑɐ Űɛɡ *Elementar -mathematik vom höheren Standpunkt aus* ɡ´ɛůŰ[ɟɑŰəɦŰəɡ ɖ ŭɖɛəɛɟɔɗŬ Ű¡ɜ Ŭɟɜɖ[ŰəŰ¡ɜ Ŭɟəɗɛ¡ɜ ɤɡŮəɤɡ ɤɡəɑɖŰɟɛ ɜŬŮɒŬəŭgɜŰŰɐ ɖ´ɟ¥ɜɖ[Ű[ɡŬŭŰɡŮůɖɡůŮə¥ɗŮ´ Ŭɟɑ Ű¡ůɖ:

«ɟɜ $\alpha<\beta$ ŰɦŰŰ $\alpha-\beta$ ŭŬɜ ɤɡŮəɜ ɜɦɖɛŬ ůŰɛɡɡ ŭgůəɛ¡ɡ Ŭɟəɗɛ¡ɡ. ɟ´¥ɟɡŮəɜ ɦɛɤɡ ɛ Ŭɟəɗɛɦɡ $\gamma=\beta-\alpha$, ı ůŰŰ $\alpha-\beta=-\gamma$ Űɛɜ ɛ´ɛɑɐ ɛɜɛɛ¥ɛɛɡɛŮŰɟɜɖ[ŰəɦŬɟəɗɛɦ.»

Ŭɡɛɜ Ű[Űɡɛəɛəəɖɟı ůŮəŰ[ɜɟ ô ũgɛɜŰůɑɡé

1. ɟ ŮŮ´ɦůɛɡɡ Ű¡ɦ´ɛɡɡ ɗŬ ɛ´ɛɟɛ¡ůŬɛŮɜŬ ɓɟɛ¡ɛŮŮ Ű[Űɛɐ Ű[ɡ´Ŭɟ¥ůŰŰůɖɡ; $18-(12-5)=$

.....

.....

Ƀ Viete (1540-1603, ůˇɛɡŭŬɑɡũ¥əəɛɡɛŬɗɖɛŰŰəɦɡəŬɔɜɛɛəɦɡ) ɣɔɟŬɣŮŰ[ɜ ůɦŰ[ŰŰ: $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$

2. Ʊɤɡ´ůŰŮ¡ŮŰŮ´ɤɡəŰŰɣəɖɜŮůŰ[ɜ ɛɟɖɦŰ[ŰŰ Ű[ɡ´ŬɟŬ¥ɜɤ ůɦŰ[ŰŰɡɛ Viete;
é ..é
é é

3. ɟɜŬɔɜɤɟɑŰŰŮ ə¥ɛɵŬ ɛŬɗɖɛŰŰəɐ ůŭɦŰ[ŰŰ ůŰ[´ŬɟŬə¥ŰɤɤəŭɟŬůɖ; $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$

é é é ..é é
..é ..

4. Ů ůůů ů ů

«¢ є ɔɜɦɛ Ůɜє ŬɟɜdŰɜєі Ůα ŬɟɜdŰɜɦ ŮɜŬɔdŮŰɜɦɡ

ï ŬŮα ï ƀ dŬəŶɜŮɜ+Ŭƀ

ɑɜɦŰɜůŮɜ ε´єɟŮɜɜŬəŶɜŮɜï Ŭƀ, ůɜɦŰɜï ŬŮα+ƀ ůɜŮɜï Ŭƀ,

ȯɟŬ, ï ŬŮα ï ƀ dŬůɜŮɜŰє ŬɜŰdŮŰє, +Ŭƀ.»

ƐŬɡ´ůŬɜŮŰŬɔ´ŮɜůŰɜєє d ŬɜŰɜєɜɦɔdůd ŰєɡEuler; (ŬɜŰɜєɜєɔєůŰŮ)

é é é

Ʉ ŬŲŲŬƏŸŬŶ ´ŬŲŲŬďŷŬŵgɛŮ ŬŵŲƏ´ŬƏŭŬŷŬŵƏĥ gƏ•ƏĥŬŭŲŲ´ŬŷŲƏƏɛďŲ ŷŲŲŷ3ŬŲŲ, ´ɛg ´ŲŲɛɛŲŲƏĥŬŬ3 ɔƏŬɛŬďŲŷŲŬŭŲŲŲ ŲŲ ŵ ɛĥ3ɛ ɛŬďɛŬŲŲƏŲŲŲŲŲŲŲ3 ŬŲŲɛŵ ŬŭŲŲŲŲŲŲŲ

qpœœœ3ŰŰŷ4 Ŭ ŬŷŰŕŷůŰŷg.

J ´ Ŷ3Ůłůďł 1

«Ĥůœ¡ŰŷŷŷŰŕŷŰŕ ŷŷŰŷœ ŷŬŷĥŷ3ŬŷŷŷŰŕŷŰŕŷŰŕ

$$(-3)\cdot(-4)+(-3)\cdot 4=(-3)\cdot 4+3\cdot 4$$
$$(-3)\cdot(-4)+(-12)=-12+3\cdot 4$$
$$(-3)\cdot(-4)-12=-12+12$$
$$(-3)\cdot(-4)=-12+12+12$$
$$(-3)\cdot(-4)=+12$$

Ј ´ Ҥ ЗЎ[ůď 4

$$(-\alpha)\cdot(-\beta)=+\alpha\cdot\beta$$ ŭ ҥ Ґ:

Ҥůсі Ůҥ Ґ:

$$(-\alpha)+\alpha=0$$
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)+\alpha\cdot(-\beta)=0\cdot(-\beta)$$ Ů ůďg:
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)+\alpha\cdot(-\beta)=0\ (1)$$

$$(-\beta)+\beta=0$$
$$\alpha\cdot(-\beta)+\alpha\cdot\beta=0\cdot\alpha$$
$$\alpha\cdot(-\beta)+\alpha\cdot\beta=0\ (2)$$

Ј ´ ҥ Ґ ůсуůҥ (1) ə Ůə (2) ´ ј сəі ´ ҐҥҐ:

$$(-\alpha)\cdot(-\beta)+\alpha\cdot(-\beta)=\alpha\cdot(-\beta)+\alpha\cdot\beta$$
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)=+\alpha\cdot\beta$$

Ів ůсůґəŭůєҥґ Ґсg ū і ааеg Ѧ ј ůďŭґ ааŭ Ґ[ůз ј õ ş gəůеg Ьŭůďůґəůůůґі е ůďєůďŭ: ј ј сааҮ ůґ[ů ůgзеďď аеааее зŭ ´ ј сů´ ŭďеі єůзŭ ůзďааі єůҥааеggґ ґсggґ əůзҥзůґґ ґ з ҂ ŭďďєŭґаі з єůґ ůј ůґůůаєůґґŭ ŭґҥ ґ[ů əůďďєůј аҥґ[ůґґŭ əůə ůůі ґґůј е з, ůґ[ů ´ ј сů´ Үďůґŭ ŭґҥůůаеďґґ ґсg əůзҥзŭ ґґ з ´ ј сůеєх з ůґсі аєҥєůзе ůі е ůј зďґґаі з ůі єűх з ŭєůґ[з «ůј сееґ ґ[ґůůеůґеј ďůďґґ»[50].

[50] ďəу´ §5.4

ɹ űɵi ´Ŭɹɵgůə¥ůɵgɛŮəŬəůgɛdŰůɵgɛŮɛŮə¥dŮɛŬdŰůɵ ŬɵgŮ Ůɜdɔɐůůɵg´ɵg ŭɵɵɜɜŰŬə ɔəŬŰɵɜ əŬɜɦɜŬŰɤɜ´ɹɵůɐɛɤɜ, ŰŬŬɹɤŰůɛŬŰŬdŬŬůɵŬə:

- ¦ɵəŬdŮɤɹŮůg(´ɵɜ´ŬɵůŰɵɐ) Ŭ ɦŭŬɵɜd;
- ¦ɵəŬəŬŰŬəŬbŬɵŬůgəŬəi ŰŬɹŬ;
- ÁɵɜŬəɡɹɐůɜɛŮůgɵəŬɵŭŬɵɜŬůgɔəŬŰgŬůəɐůŬůg;
- ¦ɵəŬŮŬɜɐɔdůd dŬɡɹdůɜɛɵ´ɵɜi ůŬůgɔəŬɜŬŬdɔɐůŬůg Ŭɵɜ əŬɜɦɜŬůŬɤɜŬɜůgɛɛŬdŬůɵůɵg;
- ¦ɵəŬŬŰɵəɦɔdůd ɤɡŬɤ¥ɛŬůd ůɡɤůd ɛŬŰd´ɹŬbɛŬŰɵɦŰdŰŬ; ¦ɵəŬɤɡŬɤůɡɤůd ɛɦɜɵɛŬŰŬz ŬdŬdɛŬŰɵ¥;
- ¦ɵəŬŮŬɜɐɔdůd ɡɹdůɜɛɵ´ɵəŬů´ɹɵdɔɵi ɛŬɜŬůgɛŬdŬdɛŬŰɵɤɡgɔɜı ůŬůgəŬə´ɵəŬůg ŬɜŬbɜɤɹɵŬůg;

ɃəůŰɦɡɵəɛŬgůɡŬŰɵ¥ɛŬŰɵ gəəɦ´ɵg ɡɹdůɜɛɵ´ɵɜdŬdəŬůŰŬůg3ɤɜŰŬg3ɤdɐŰŬɜ:

- ¢ Ŭ ¥ɜŰŬůd 1 ŭŬůɡɜŬɵŰɵ ůg3dŬůɛɤɜɵ ŭŬůəŬɵəŬɜŰɹɵɦ ŰɹɦɵŭŭŬůəŬɵdŬg: «ɤŰůɵ ɵɤŬɵ ɵ əŬɜɦɜŬg» əŬɵ ɵɵ ɛŬdŬŬɤg Ŭɵ ŭɤɡɵŰŬɵ. ɹ ɜŬɛɤɜɵɛɛŬ ɜŬ Ŭɵ Ůɤůdɛ¥ɜɵɛg3 ŬgŰɦ ɵɵɛŬdŬŬɤg əŬɵ3ŬŬɵ Ŭ ɵɹɹɹɤɤɵg.
- ¢ Ŭ ¥ɜŰŬůd 2 ə¥ɜŬɵ ɡɹɐůd ŬɜɦŬg´ɹŬbɛŬŰɵɵi ɛɵ3ŰɹɵɵɡŬ ɔəŬŰŬ3 Ůŭɜɐɔdůd ŰɵɡəŬɜɦɜŬəŬɵɵ ůəɵ´ɦŬgŬůɜŬɵ3ŬŬ3ŭŭŬůɡdŬůɤŬgɛdŬŭgůɜɦdŰŬ Ůŭɜɐɔdůd.
- ¢ Ŭ ¥ɜŰŬůd 3 ŬŬɜdɔŬůŰ ŰɵɜəŬɜɦɜŬ, ə¥ɜɵɜŰŬŬg ɡɹɐůd ´ɹɵdɔɵi ɛŬɜɤɜ ɛŬdŬɛŬŰɵı ɜɔɜı ůŬɤɜŰɤɜɛŬdŬŰɜ, ɦ´ɤŬgŬůɜŬɵdŬŬɛŬɹůŰɵɐ ůŭɦŬŬŬ.

Ƒəɵ´ɦŬgŬůɜŬɵɵəŬŬŬ3ŰůŬůg3 əŬɵ4 ɜŬ´ŬůůɵɡɜŰɵggŬɛŬdŬŬɤŬɔəŬŰŬůůɵi ŰɵɡəŬɜɦɜŬ. Áůŭəɤ¥ŰɵggŬɛŬdŬŬɤŬ´ɵg ɛɦəɤŬŬŰɵ¥ůɤůŬɜ ŰŬůɜ ũõũgɛɜŬůɵɵg əŬɵdŬɤɹɵi ɜŰɵɜ əŬɜɦɜŬ ŰɤɜŬ´ɹɵůɐɛɤɜ ŰŬŬɹɵɛɛɤɜdůg´ɦdŬůd,´ɵg ŭŬɜ dɤəŬɵŬ ɦŭŬɜd.

6.4 �ںةةة

Ð Ï ı ůŰŰg, ůŰłз Ůţ ı Űłůd: «J ´ Ÿţ ıGŮ ə Ÿ ɵ ɵŰ ɛ ŰŰdɛŰŰə ɛ Ůə ɛ ɔdůd ɛ Ůз ŰŰə ŰŰłŰŰ ɔɵŰ з Ůɵůıi Ůə ɵ ə Ůзłз Ůg $(-)\cdot(-)=+$;» Ů Ůз ŰŸ:

«ū gůə Ÿ, ɛ ɵŰg ə Ůə ůŰз g´ Ÿţ ıɵgз ɛ łзɵ űgůə ɵ ıa Ůţ ıɵdɛ ɵ ıůŰŰ ɛ Ůdɛ Ůə Ÿ, g´ Ÿţ ıɵgз ə Ůə ɵ ɵţ dŰɵa»

ɵpŮůıGз Ůə łŰə ůŰз ţGŮə ə ŰŰŰə ŸbŮə ŰłŰз Ůţ ı Űłůd ɔɵŰ Ůɵз ´ ɵəə Ů ə Ůůɵ Ůůɛ łŰ ůi ɵ Ůţ з dŰə ı з, Ůə ə Ÿ Ů ə Ÿ Ů ɵbŮbŮə ı з Ůə ŰłŰз i ´ Ůţ зɵ Ůɵgg.

¢ ɵpyů´ ɵ ɵз Ů, Ůз ə Ůə ´ ɵə i Ůůi з Ůɛ d ůŰŰz Ůdɛ Ůə Ÿ, ůıGŮə Ÿ ɛ Ů Ůłз Ůţ ı Űłůd 8, Ůз ţGŮə з łdɛ Ůd ţə ű ţ Ůůd óţ ţɵg Ů ıGţ ţɵg ô, Ů Ůз ŰŸ´ ɵə i ůı ůŰŸ łŰı:

«J gŰɵ d Ůţ ı Űłůd ůŰз ţGŮə з łdɛ Ů. ɵpŮз Ůə Ůə ə ɵɔɵə łз Ů´ ɵəə Ů ə Ůůɵ Ÿůɵg ɛ Ů Ůɵ ɵţ ţɵg ɛ Ůg ɛ Ůy з Ů Ÿəə ɵ ɵţ ţɵg ə Ůə з Ů ɛ Ůg bɔŸɛŮə ɵţ ţɵg ɵ ə ţţ ůɵg.»

¢ Ï Ů Ůţ ıɵ Ů ɔзı ţ ıɵŮə Ůłз ə Ůзłз Ů ə Ůə Ůłз Ůůi Ůţ ɛ łɛŮə, Ůə łɛ Ů ə Ůə ůŮ´ Ůţ Ůůə ɛ Ů Ůů Ů łŰł ə Ůdɛ Ůţ ɵłŰŰ, ıı ţ ıg з Ů Ůз Ůə Ůɛ bŸз Ů Ůə łŰə ůŰз ţGŮə з ə Ÿ ɵ ɵŰ ɛ Ůdɛ Ůə ɵ ůdɛ Ůůd. ůɵŰ´ Ůţ Ÿůə ɛ Ů, ůŰłз Ůţ ı Űłůd 12, ł´ ɵg ɵdŰŰdŰə y з Ůg Ůţ ł´ ɵg Ůə Ůɵ łɵ łdůdg Ůı з ɛ Ůdd Ůі з ɔɵŰłз ɵůıi Ůɵg ə Ůзłз Ů, g´ ɵůŰłţ ɵŰə łŰı:

«B Ůɵdţ łg Ůɵg Ůɵdţ ɵi ɛ ɵg Ůə Ůə ůɵɵg.»[51]

¢ ɵpɵз gůd Ů, ɛ d Ů ɛ Ůdɵ Ůţ ɵŰ´ ɵg ɵţ dŮůŷŰɵg ůŰł dbõůgɛз Ůůɵg ůŰɵ ůıGɵə Ůɵ ɛ Ůg, ɵ´ łŰŰ ůŰз ůıGŮůŷůŰıdŮůŰɵggţ dŰɵi g ɛ Ůɵ´ ɵ ɵŰůŷ ɵŰţ ɵə ɵ´ ţ ɵůyɔɔůd, g´ ɵůŰłţ ɵŰə łŰł, ţGŮə ɛ Ÿ dŮə Ůłз ə Ůзłз Ů ə Ůə łŰı:

«Ůţ ţ´ Ůə з Ů з ţţ ɵg ɛ Ů Ůłз ə Ůзłз Ů, Ůţ ţ Ů Ůз g´ Ÿţ ıGŮə ə Ÿ ɵ ɵŰ ɛ Ůdɛ Ůə ɵ Ůɵ ɔdůd ůŰз з ţţ Ÿ.»

¢ ůŮ ţ ɔdŮ, ´ Ůţ łə ɵ ´ ɵg Ůə Ůə ɛ dŮůŷŰɛ d ɛ Ůdɵ Ůţ ɵŰůŰz Ůdɛ Ůə Ÿ ə Ůə Ůɵdɔ Ůə Ůłз ə Ůзłз Ů $(-)\cdot(-)=+$, ɛ Ů Ůłз Ů Ůɵ ɔdůd łŰı: «***ɛ Ů Ůз Ůə Ů Ů ţ ɵə ɵз Ů Ůə***», ə ţŮə ə Ÿ Ůə Ůţ ə Ů Ů Ů ɵ Ůůə Ůз ůə Ů ůţ ţ ıɵз ɔɵŰ Ůłз Ůɵ ɔdůd łŰı Euler ɔɵŰ Ůłз ´ Ůţ Ů Ÿз ı ə Ůзłз Ů. Ï Ů Ůłз Ůţ ı Űłůd ɔɵŰ Ůłз Ůз Ůə Ůə ´ Ůə ůŰə ɔdůd łŰı Euler, ə ţŮı:

---

[51] Ů Ůţ Ÿůə ɛ Ů´ ɵg Ůə Ů Ůůi ţ Ůə ůŰłggţ ɛ Ůdd Ů ţg łŰłţ ţ łŰłţ ţ Ůз Ů ţ ůŰł ůɵŸţ ə Ůə Ů łŰłţ ɵpůŰůə Ůə d Ů ţ łŰı ´ ţ Ÿз Ůı з ɛ Ů Ůţ з dŰə ɵi g Ů ţ ɵdɛ ɵi g.

«ȳ ɛɔ ѕŭѕŬůŰĵŬ ƱѕůŰĵɤ ´ɤɡ ŮвŬɔ ƏŸɤɡ Ůƕƕ´ɤɡ, é ɖ ƕɛɔѕƕе ´ɤɡ ŬŭɛƖ
$(-\alpha)\cdot(+\beta) = -\alpha\beta$, *ŰĥŰŰ* $(-\alpha)\cdot(-\beta) =$ *ŰĿ ŬɜŰůůŰĿ ŰĿg.»*

¢ Ÿ ɛɣɖ ŰĿg ?ƕɛg ɔƕŬ �l ɜ Ůɜеɔɖůɖ ŰĿg Euler ɣɡŮƕ ѕŭƕŬůŰĵɛ ŮɜŭƕŬŭɣĵɛɜ, Ůɜ ůƕŬŭŰĿƖ ɛŮ Ůl ɜ ƕɛѕɤɜѕƕĥ ï ɛѕƕɛɜɛɛѕƕе ƕŬŰŸůŰŰůɖ Ůlɡ ɡ ɤĵŬɡ ɛŬɡ Ůl ŭŮůɛɛɣɜɖ ɡĵɛɜѕƕе ůŰƕƕɛе:

«ȳ ɛɔ, (ŭŮɜ ŮвŬɔ ´ŮůŰƕƕе) ŭѕĥŰƕ ŮŸɜ ůůɛgŮ(ŭɖƕŬŰе, Ůɜ $(-)\cdot(-) = +$*) ɖ Áƕƕ Ÿ ŭŬ ůůŰ ɤŰŰɜ ɖ ´ѕɛ ´ƕɛƖ ůѕŬ ɡ ɤĵŬ ŮŰɡ ƕĥůɛɛg. qpgůŰĝɡ ɡ ɣ´ɤĵŬ Ůɜ Ůɜ ŬůƕɖɔеůŰƕ ĥŰƕ ůŮůůɛɣůɖ ɛŮ Ůlɜ ´ɤĵŬƕɛŬŰƕе ɛɤ е ŭŮɜ ѕůɛƖ Ůƕ»!*

¢ Ůѕɤĵɛе Ůlɡƕɤĵůůɖɡ ŮвŬɔ Ůƕ ůŬɜеɡ, ĥ´ɤɡƕŬɔɖ´ɤĵɛů´ ŸůŮƕŬɜŬɛŮŰŰŬůĵŸůŮƕ Ůƕ´ƕɖɜ ɛŮ ɡĵɣɛɡ, ĥɛɤɡ «Ʊɤɡ ɡĵɣɛɡ Ůα ɡĵɣɛɡ ɜŬ ŭı ůŮƕ ƕɣĵŭɛɡ;». qpŮůɡɜŮƕ ɜŬ ɖɣƕŬƕ ɜŬ ŭɛgƕɣɣŮƕ ɛĥɜɛ ɛɣůŬ ůŮɣɜŬ ɛŬůɖɛŬŰƕĥ ´ƕŬůůѕ, ŬƕƕŸ ůƕɣŰŰŰŬĥ ĥŰƕ ɖŬ ɛɖŮƕŮɜŬ ɛ´ɛĵŮůɜŬŰƕ ŮĵɛɖɜŮůůƕƕŬƕɛɣůŬŬ ĥ ŰƕĿƕŬůɖɛŮĵѕĥŰƕŰŰ.

Ʊĵɛɡɤĵı ɜŰŰɡůŰƕgɡɛŬůɖŰĝɡɛɣŰŰƕɡɛŮŰƕɡɛɣŰĵƕŮĝŰ ѕůĥůŮƕĝůŰŰ ŬůɖɛŬŰƕŸ, ŬɜŬŰĵɣĵɤ ŰĿɜ Ÿ ɛɣɖ ŰĿg ŪŸɜɛg, ůɡŰŰƕŸɛŮŰƕ ŮĵŰ ŰĿɛŬ 13, ɔƕŬŰƕ ´ı ɡɣɛŬůŰŰƕɜ ƕŬɜĥɜŬŰŰƕŸ:

«ƱѕůŰĵɤ ´ɤɡ ɣɡɤ ɛŸůŮƕ Űƕɜ ƕŬɜĥɜŬ $(-)\cdot(-) = +$ *´ŬŮ ŬвŬŸůŮ ƕŬƕ (ŭŮɜ Űƕɜ ɣɡɤ) ĥɡƕ ´ƕĵɤɡ ɡŬŰŰɜɛеůŮƕ»*

¢ ÆŰĵŸƕƕŬŭɣɡŰŰŬƕ ŰĿɜ Ůѕɤеɔɖůɖ ŰĿg Euler, Ůɜ ƕŬƕŭŮɜ ɛ´ɛĵŮůɜŬ «ŭŮƕ» ŰĿɜ ŬƕĵɛŮůе ɛŬůɖɛŬŰƕе ŮɜŬвƕŬĥŰĿŰŰŰƕg ƕŬɜĥɜŬ:

«? Ůɜ ɔƕŬŰůƕŸ ɛƕŮĵŰůĵɛĵɣɡ ɛƕ ƕŬɜĥɜŮĵŰůŭɖɛѕɛgĵɔɛі ɜŰŰƕ Ů Ůƕŭе ŭŮɜ ɛ´ɛĵŮůƕŸŰɜ ŬůŮвŬƕ ŭѕŬŰůɛĵŮŰƕĥ. ĵ ɜ ƕŬƕ ŭі ůƕɛƕŬ ĥĵɡůƕɛgɛŮ ɣɜŬ ´ŬĵŸŭŮůƕɛŬ ɔƕŬ ŬĵŰŰе ŰĿ ´ĵŸɜɖ ůŰĿ ƕŬɖɛŮĵѕĥŰĿŰŸ ɛŬĵŬĵŰĥ ѕůɛƖ ůƕ ɔƕŬůŭůŮɜ ɖŬ ɛ´ɛĵɛі ůŮɜŬѕůɛƖ ůƕƕŸŰƕƕɛ.»

ɖůŰĥůɛ, ůŰĿɜ ŬŸɜŰĿůе ŰĿɡŭƕŭŰŭвŮŰƕɛɖŬвŬƕŬůŰƕе Ůѕɛɔе. ÆŬɜ ɜŬĵɣɛgɛŮɜŬ Ůѕɣɜɛgɛ ŮŸůĵɛе ɛŬĵĵɛ, ŭŮɜ ɛ´ɛĵɛі ɛŮɜŬƕŸɜɛgɛŮŬƕƕɛ ɡ.

ÁɜŭƕŭŰĵɣɛgůŬ ŮвŬƕŬƕ ɖŬ Ÿ ɛɣɖ ŰĿg Áɡ ŬвŬɔŮƕ ŬĵŬƕ ƕŬ ŰĿɜ Ůƕеɔɖůɖ ŰĿg Euler, ɛŮŰĿɜ ɛ´ɛɛ ůgɛŰĵɣɜŮů, ŬƕƕŸůŰĿɜ Ůĵı ŰĿůɖ 10, ƕŬ ŰĿ ŬɜŬвɜɣĵɛŮƕ ƕŸ ɛŬ ɛŬɖɛŬŰƕе ɣɜɜɛƕŬе ƕŬɜĥɜŬůŰĿɜ ŬƕŰƕƕƕĥɔɖůе ŰĿg, Ů ŬɜŰŸĵŬĵɜɖŰƕŸ:

«***qpÛз ÜзÜъзхуjœхУ ÜЁеÜЁєÜfdєÜЁзфh эÜъ´sůÜЁіхУ´хУgеэÜfузÜgєÛÜЁlüзэвеЁєg эєсзэвеэÜЁЁъÜъÜзвÛъсзÜЁіЁє*** $(-)\cdot(-)=+$.»

ТÜъůхУgЁє´зє ÛзüъÜЁіуjез ÛъвÜъhÛъd´ÜjÜ´Узх Y´еYdÛъűjYєÛъЁє´ÛjsdіjsєсъЗÜ ÜgdÜзjÛůіdÜ ůЁЁ Z ÜfdєÜЁзфY. ŪÛхjÛůі hÛъ g´YjєÛъ g´еэÛзєÛзэфhЁlЁЁ ůЁзgЁ єÜfdєÜЁзфуgуззеэÛgєůЁзgЁ єüÛůзвÛůgЁ;

¢ ŸjsüÜ, ´єg dgєYЁЁъ ЁlЁ ´єůєЁзфеЁ ÛзеъdůůdЁ ЁєgЁ Viete эÜъ ÜзÜъзхуjœÛъ ЁlЁз ÛєÛjsůЁзфеЁ süъhЁlЁЁ, üÛз üуєЁЁЁъhЁъєjуєgЁ ÛаєjуєgЁ üєвÛъэуjüєgЁ ůЁlЁ эÜfdєÛjsзвеЁ єхУеЁ, Üъэ´YЁєhзєЁ ůЁЁZ ÜfdєÜЁзфY.

«***é ůЁlз Y´эÛůjÜЁєЁ*** $(-)\cdot(-)=+$ ***сзЁЁіЁєЁ ´эdlз ůЁзÛjіЁ зÛъЁєЁз ÜзЁЁdЁЁєЁєg Y´ээєg ´эdlз, ´єg ÛвÜъ*** +.»

ÞЁ Z Y´зєgЁg´єůЁljœÛъЁlз ÛъеъdůůdЁ ЁєgЁ Euler эÜъdÜЁlЁ єjdůůєєЁ´єєєіůЁůъсзЁÜ зÜЁlз ÛъdъеůЁůЁузÜз ůgєєЁfdЁЁеЁ ЁєgЁ:

«***é , üъhЁъЁвÜъÜЁ эєцеЁ эÜъЁlз эÜЁЁъÜъЁвÜъЁ эY´єъєgЁЁіэєэÜЁ ÛъіЁ єЁЁ´ÜjЁüůЁеЁЁЁ ЁlЁg эÜfdєÜjsъhЁlЁЁgЁвÜъЁ ÛъÜзjЁЁъY´ügůъhdЁЁєЁ ухЁgЁ эÜъЁ ЁЁ ЁdÜзєЁ зÜЁ ÛъdъdЁdůі***»

důЁhůє, üÛз уєÛъэÜЁЁъY´ЁЁъY´єсЁєÜfdєÜЁзфеЁ ÜзÜъэÜЁъhЁlЁЁсзЁЁєзэÜЁЁ.

ÞЁ üсYззdЁЁ, узÜЁ´єэіЁ эÜъhЁgЁєÜfdЁЁєЁЁ, эіЁзÛъůхůЁY´ЁЁgЁüůэеůЁЁЁ, сзхУjœÛъэÜЁY´ЁЁзэÜЁhзЁ, Üъэ´YЁЁ «сзЁЁі» üÛз g´YjєÛъ´єgdÛзY.

«***ÁвÜъ ÜзÜъэÜЁв зЁ sůєіЁъ d sůhЁlЁЁ сзЁ зЁ sůєіЁєgз єсз ´jY´зÛъЁЁ ´єg Üзуůjі Ü´ÜjЁ Y´зХ.***»

ŸgзůєœєзЁЁgůЁєggЁэÜъєіЁgЁэÜъY´jsůЁєggЁєÜfdЁуgЁ

¢ ?ÜзY´ÛзdсůіЁєз эÜзhзЁєůЁlз Ü эє´єdůůd ээ´ÜůєY´ЁуЁз:

«***Ј´ Ÿ¡ ɢ Ů ů ů

Ÿε ůůŭ g´ϵůŭ ϵůŭ ϵůŭ ůůŭ ůůŭ ů

ζ : é qůů ε´ήμ ůůŭ ɜŭ ήμχ. (ə¥ θə¥ŭ εŭďďεŭŭə ůəγχď) ¢θ εήɜθ ´θg ε´ήμ ůůŭ ɜŭ ήμχ ůɜŭə ήůə εŭŭɜ ə¥ůə ŭɜŭə ůůůə ή. qůɜ ďŭ ɔɜήůŭɜ ůŭ −·+ ɜŭ ə¥ɜůə ´ə ďɜ ə ŭə ůŭ −·−ɜŭ ə¥ɜůə ´¥ə ´ə ďɜ, ŭgůή ůůɜ ďŭ εŭŭɜ ůι ε ůχ ɜθ εůŭ ůŭgďə ŭɜήɜůďůχ ɜ ζ ŭďďεŭůι ɜ.

Ά: Ε ůďɜ ůμι ůďůď´ι ď´ə ůŭůι ůə ďήůə χε ŭďůď / ə ŭůχə ŭə ůďůŭɜ ə ŭɜήɜŭ, εθg ə ůďε ůə ďθεə χď ůə ďɔε ůə ďə χď ůɜďɔε ůə ďə, ŭə ə¥ə ŭə ήůə ε ŭďβθε ďďůůď ə ůήůďůŭ ůŭg Viete. Ά ɜι χθůə ďə ŭůŭə ɜə ůə ůŭɜ Euler ə ŭə ůŭɜ ´ŭμ¥ůə ε ŭε ůůď ďůμ εθəμ ŭůď ɜŭůι ɜə¥ εθg ő ůů¥ďôůď ɜ ə ήůďůŭ ůŭg Viete.

ζ : Ε ůďɜ ŭμθε, ůɜ ´μι ůɜ ´μ¥ɔε ŭ ´θg ůί ůε ůμ ´μθ ə ŭɜ ´θι ε ůůɜ −·−=+ ε ůŭɜ ď ə ήůďůŭ ůŭg Viete. Ά ůŭε ůɔə ŭ´μι ůď ůθμ¥ήůə ə¥ůə ´θg ůə ůə ´ə ďɜ ε´θμ ůůι ɜŭ ɔə ůə ůgɜ. J gůή ε ŭďď ůə ůə¥ɜůə ůɜůί´χ ůď ə ŭə ŭμθə ůε ůɜŭ ůɜ ďɔθι ε ůμ

Ά: ¢ə ε ŭďď χə ŭɜ ůůɜůί´χ ůď;

(¢ ζ ŭμď εθg ůί ůůď ɜ´θ ůθ ůə ŭɜ ůə ŭɜ ə ήɔď ůď ɔə ŭůď ɜ ə ήůďůŭ ůŭg Viete.)

Ά: ¢θ −·−=+ ´θg ůε ůŭɜ ə ůůďə ůμ

ζ : ζ ůů¥, ήůŭɜ ə¥ɜŭε ůůď ɜ ůε ůμ ə ůɜ ŭ¥ə ŭε ůůε −1 ə ŭə ə¥ɜŭε ů−1 ůα−γ.

Ά: J gůή ůə ŭə εď ŭůə ď ůď ŭ ή ůď ə ŭďď ε ůμ ə ήůďůŭ;

ζ : ȳ θə, ŭə ə¥ ŭɜ ůŭɜ ůə ŭε ů ə¥ɜůə ´μι ůŭ ŭgůή (ůď ɜ ə ήůďůŭ) ε ů¥ůŭɜ ďŭ ε´θμ ůι ůε ůɜŭ ůə ŭε ůə ŭůŭə¥ůə ůůď ə ŭďď ε ůμ ə ήůďůŭ.

Ά: Ά ə ŭə ŭ ŭμ ŭďůď ůε ɜŭ ůε ə ŭůŭə¥ůθεgε ůůůď ə ŭďď ε ůμ ə ήůďůŭ; ȳ ůə −·−=+;

ζ : J ɜ ŭ ə¥ůŭɜ ε ŭďď ůɜď ɔθι ůŭůů ə ŭɜ¥ɜŭ ŭ ή ŭgů¥ ůŭ ´ŭμ ŭůůə ε ŭůů ə ŭə ə¥ɔŭε ůŭ ə¥ήůə −·−=+ ə ŭə ŭgůή ´μ¥´ůə ɜŭ ůε ε¥ďθgε ůə ŭə ŭ ə¥ɜŭ ůε θμ ďůə θ´θə ι ε ůŭ ďŭ ůε ə¥ɜŭε ůůχ ůů¥ɜθε θχ ůůď´ŭμ ŭůů¥ůůď ə ŭə ůô ŭgů¥, ŭə ə¥ůŭɜ ďŭ ůε ůθ ŭε ůə ŭůŭɜθε ůůə.

¢ ʒ Ŭgɨd, ɦ´ɤ ɡəŬəd ʒ Ɣɔŭŭ, ´ɵg dŬŭɵi ɛŮŬɨɔɦŰŮɨŬŰɡŬ ɦɣŮɡŰłɡ, ŭəŬɡɤɨ œŮəŰłɜ əŬŰŬɜɦdůd, Ŭ ɦ Ůł ůɤůŰə ŮŭŬɨ ɛɵɔə Ůɛg əŬɜɦɜŬ.

Ƀ: ¢ə ůŮ ɓɵəɛdůŮɜŬ əŬŰŬəƴbŮɡŬ ŬgŰɦ Ůɛɜ əŬɜɦɜŬ ´ ɡůŰŮi Ůɡ; ¢ ůɵɣůd Ůɛg Viete, d Ů Ůɜəɔdůd Ůɛg Euler, ŰŬ´ ŬɨŬŭŮəɛŬŰŬŬ ɦ Ůł əŬdɛŮɨɡɜɦŰłŬ;

ʒ : ¢ɵ´ŬɨƴŭŮəɛŬ ɛŮŰł dŮɨɛəɨŬůdŬ, Ůɛ ɣúŮɨŬůŰɛ ɛgŬəɦ ɛɵg, ɤ ɡəƴŮə´ɵg ɣɤɤ ɛəůŮə ɛɣɤɨəŰɨŬ.

dəɣ´ɵgɛŮɣɜŰɛɜŬ ɦŰə d ʒ ŬgɨdŬ ŬɛúəŰŬəŬɜŰŬi ŰŰŬə ŬɜƴɛŮůŬ ůŰł əŬdŬɨƴ ɛŬdɛŬŰəɵəɛ ŮŬəɛɔdůd Ůɛg Viete, ´ɵg **Ůł ɓɵəɛdůŮ ɜŬ əŬŰŬəƴbŮə** Ůɛɜ əŬɜɦɜŬ əŬə ůŰł ŬɜŰŰ ɦəɨɡůd Ůɛg əŬɜɦɜŬ ůŰł əŬdɛŮɨɡɜɦŰłŬ, ɦ´ɤ ůŰɛ ´ŬɨƴŭŮəɛŬ ɛŮ Ůł dŮɨɛəɨŬůdŬ, ´ɵg **Ůł ɓɵdƴŮə ɜŬ dɡɛƴŰŮə** Ůɛɜ əŬɜɦɜŬ.

Ƀ: ¢ ůŰɛɨdŬ ůŮɓɵəɛdůŮ, ɵpdəŬŭəɛ ɜŬ ɜƴɨŮɡŮ ɦŰə ŬgŰɛ ŮɵŬə ɛdŬ ůɦŰłŬ Ůɛg Viete ɛ ŬgŰɛ ŮɵŬəd Ů Ůɜəɔdůd Ůɛg Euler;

ʒ : ? ŬəŬgŰɦ ɛŰŬɜ ɤɨŬɵ, ´ɵg ɜƴɨŬɛŮŰŬɵɜɦɛŬŰŬəŬəɛŬdŬɵŬɛŮəŬəƴ´ɵɛɵgɡ ɛŬdɛŬŰəɵi ɡ, ɔəŬŰł yŰłə ŰŬ ŮɵŬɛŮɜŬəŬdŬɨůɛɣɜŬ ůŰɛ ɛgŬəɦ ɛŬɡ ɜɵɛɵɤ. ƴŬəɛŬɡ´ɨɵəŬəi ůŬə əŬəɛŬəŬəi ŰŰɨd ŮɜŰł´ɤůd Ŭ ɦ Ůɛ ɜŬ ɛŰŬɜ ɛəŬ Ŭ ɔɛ ůɦŰłŬ Ůɜı ɛŮ ŰŬ ɵɜɦɛŬŰŬ əŬə Ůɡɡ Ů ŮɜdɔɛůŮɡɡ ɜɵɛɵɤ ɦŰə ɛŬɡ ɣɛŮɜŮ ´ŮɨůůɦŰŮɨɵ ůŰɛ ɛgŬəɦ. ŪŬ Ůɛ əƴɜŬɛŮ(Ůɛɜ əŬɜɦɜŬ) ůɤůŰƴ ůŰɡɡ ŬůəɛůŮɡɡ, ŬəəƴŭŮɜ dŬɛ´ɵɨɵi ůŬɛŮɜŬŮɛ əŬŰŬɜɵɛůɵgɛŮé

Ɛgɛ´ŮɨŬůɛŬŰəƴ, ůŰɛ ŮƴəɵgŰłɡůgɜƴɜŰŰŮɜdɡd ʒ Ŭgɨdɛɵg ŮŰ ŮɦŰə ůŭɜ ɛ´ɵɨɵi ɛŮɛŮ ŰłəŬdɛŮɨɡɜɛ ɵɤɛ ɜŬůŰƴɡɜɵgɛŮ´ ŬɨŬŭŮəɛŬŰŬ.

Ƀ ƴƴɜɵgůŰɛ ūi əəɵ Ƀɨɔ ŬůdŬɡŬɜŬŭƴɨŮɛ

«**Ɛ Ůł əŬdɛŮɨɡɜɛ ɵɤ ɛ ŭŮɜ g´ƴɨɵŮəƴ´ɵsŬ ŬɜŬəŬɦŰłŬ´ɵg ɛ´ɵɨŮŭɜŬŮ ŬədŬŮɜŮə Ůɛ**
$(-)\cdot(-)=+$.»

Ɛ Ůł´ɨɵdɔɵi ɛŮɜdŮɨůł Ůł 13: ôƴɤɡ´ůŰŮi ŮŰŮɦŰə əŬŰŬəƴbŬŰŬɛ / əŬə ɛƴdŬŰŮŮɛɜ əŬɜɦɜŬ $(-)\cdot(-)=+$ ŰŮɜəƴ;ô, Ŭ ŬɜŰƴ:

«Ž Ů Ťé ´ŮĵŸŭŮšœεŮ: ş¡ɜɛɜŰŰƒ Ťłɜ Ůšaůx ůd $2-(3-1)$ εŮ Ťéɜ Ůšeƒ Ůĵh´ɛ: $2-(3-1)=2-2=0$ əŮɜůŤł ůgɜyɢŮšŮŤł əi ɜɛgεŮεŮŤł əɛɔɜəe Ťég *Euler:*

$2-1\cdot(3-1)=2-3+1=0$ *ƀəy´ɛgεŮƒŮšŤé Ů ɛŮĵəŮůεŮŮšŮŮé aůɜɛ.*»

ȷ ɜ əŮɜ ɢŮȷŮɜŤłȷœŮɜ Ťłɜ ŮȷɜɢdεdŤšəe ´ŮȷŸůŰŰůd, Ůšaůx ůd əŮɜ ε´ŮȷŭŮi Ůɜ Ťł əɛɔɜəe Ťég Viete εŮŤł əɛɔɜəe Ťég Euler, ŮšœŮɜɜŮεd ŭı ůɛgεŮŤƒůd ůdεŮůdŮůŮŮgŤƒ, Ůəə-Ÿ ůŤłɜ xȷŮdŮ ŮŮšəeɔdůe Ťég, ´ɛg Ůɜ əŮɜ ŭŮɜ Ťé ůgɜŮšŭdŤé´ɛɜŮı g´ɛɜɛŮı Ťłɜ ŮɜŮɔəŮƒŤłŰŰ Ťég əŮɜƒɜŮ $(-)\cdot(-)=+$.

¢ Ž Ÿɔŭ Ů, ůŤé ūi əəɛ Ąȷɔ Ůůd Ůg ŮɜŮŭyȷŮɜ ´ɜɛ ȷdŰŸ Ťłɜ ŮɜŮɔəŮƒŤłŰŰ ɜŮ ɜůɢi Ůɜ d Ů ɜɛ ŮȷɜůŤšəe ɜŭƒŤłŰŰəŮɜůŤégg ŮȷɜdŤšəɛi g:

«ȳ´xg ŤŭŮ əŮɜ ɛ *Euler* Ůɜ $(-)\cdot(+)$ əŸɜŮɜ $(-)$ ŤƒŰŰ ŭŮɜ dŮ ε´ɛȷɛi ůŮ əŮɜ Ťé $(-)\cdot(-)$ ɜŮ əŸɜŮɜ $(-)$ ɔɜŮŤł yŤłɜ Ťé $(-)=(+)$ ´ɛg ŭŮɜ ůɢi Ůɜ Ą´ůdg ůŰŰ ´.ɢ. $18-(12-5)$ εŮ εdŮ əɛɔɜəe ůɢi Ůɜ ´xg $18-7=11$ Ůɜ əŸɜŮεŮ Ůɜɛ ŮȷůŤłəe ɢȷdůɛɛ´ɛɜı ɜŰŰƒ Ťé *1* ´ȷɛəi´ŰŰɜ $18-1\cdot(12-5)$ əŮɜ Ůƒ Ťłɜ Ůɜɛ ŮȷůŤłəe $(-1)\cdot(-5)$ ŮšŮɜ Ůɜ ŮɔəŮɛɜ ɜŮ ƀɔŮɜ dŮŤłəƒ ɔɜŮŤłŮəɜı g Ťé Ů ɛŮȷəŮůεŮ ŭŮɜ dŮ eŰŰɜ aůɜ εŮŤé $18-(12-5)$ ´ɛg ŮšŮɜ´ŮȷŸəɛɔɜ.»

ĄŤł ´ȷɛůx´ɜəe ůgɛeŤłůd ůɢŮŤłəŸ εŮ Ťłɜ ŮəŤłəƒɔdůd Ťég Euler, ůŤé Ůɜ ŮšŮɜ ´ŮšůŤłəe, dŽ Ÿɔŭ Ů Ÿɜ Ťłů Ůƒ Ťłɜ «ŮšŮɜd´ɜɛ ´ŮšůŤłəe»

> Ž : ĄœŮɜ Ůi əɛəɛ ɜŮ ŮšdɔeůɛgεŮ Ťé $+\cdot-=-$. Ž ´ɛȷɛiεŮɜŮ Ťé ŮšdɔeůɛgεŮ Ů ƒ Ťł əŮdεŮȷɜƒŤłŰŰ (ŮgŤƒɜ Ťéɜ əŮɜƒɜŮ). ĄŤł əŮdεŮȷɜƒŤłŰŰɔŮšəŸ ŭŮɜ ůgɜŮɜŤŸεŮŮȷɜdŤšəɛi g. Ůƒůɛ εŸəəɛɜ Ťéɜ ´ɛəəŮ əŮůɜŮůεƒ ŭiɛ ŮȷɜdŤšəı ɜ. ¢ŮŮ Ž ŮdεŮŤšəŸ ŭŮɜ ε´ɛȷɛiεŮ ɜŮ ŰŰ ŮšdɔeůɛgεŮ εŮ Ťł əŮdεŮȷɜƒŤłŰŰ.(Ůšɜɛ Ůƒŭ Ůɜɛ ´ɛəəŮ əŮůɜŮůεƒg ŭiɛ ŮȷɜdŤšəı ɜ ŭŮɜ Ůšdɔ ŮŰŰɜ Ů ƒ ɜŮ´ ŮȷŸŭŮšəεŮŤłg əŮdεŮȷɜƒŤłŰŰg.)
>
> Ą:ŭɜŮŤłɜ ŮšŤéəƒɔdůd Ťég Euler ŭŮɜ ƀȷůəŮšgəŸ ɛɜŮεŮdεŮŤšəe Ůšeɔdůd;

ζ : ȳ ɢɵ ꞷüɵŬůŰůŰ. ǼŬɜ ɵŬɜɦɜŬɡ ůɷɷŬɵ ůɨɵɢɵɢɡ, Ŭɵɵ-Ɣ ůɷɷŬɵ ü-ůɵɢɵɢ ɜŬ ůɢ ůɜɢɡɵɵůůɡ, ɢ´ ɦŰŰ´ ɟɢůˊ Ŭɢůůɜ Ŭůɢ ůɜɢɡɵɵůůɵɛŰůɢ ɵɢɔɵɵɛ.»

Ǽ: ɸ ɵɵɢɔɵɵɛ Ŭɵɢɵɢɡɢůů;

ζ : ɸ ɢ ůɜɢɡɔůůɛŰůɢɜ Ŭɜ Ŭůɵ Ŭɵɦůůɢ Ŭɵɦůůɢ Ŭɵ ůɢ −·− ü ůɜ ɣɵ Ŭɜ ůŰ + ɢŰ Ŭɜ Ŭɡɟɢ-ůŰ ůŰ Ɣůɵ Ŭü-ɢ.

(Ǽ ɜɜ ɢ ůůůɢɡɡɡ ɵ Ŭɜ ɦɜ ůůɡ +·+ = + ɵ Ŭɵ +·− = −)

ζ : ü ůɜɵɵ ı ɡ, Ŭɡ ůŰ Ɣ ůŰ ü-ɢ ůɷɷŬɵ ůɨɵɢɵɢ ɜŬ ɦɟɢ-ɛŰ Ŭɜ ůŰ ɦɵɟɟůůɢ ůůŰ ɵ Ŭůɢɡɛ ůɟɵɷɷɦɟůůɢ ůŰ ɛŰ ´ ɢɵɵ-Ɣ ´ Ŭɟ Ŭü ůůɷɛ ŬůŰ ɵ Ŭɵ ɔɷô Ŭɡ ůŰɦ ü ůɜ ɛ´ ɢɟ ɢ-ɜ ɜŬ Ŭɜ Ŭɡɟ ůůɢ-ɜ, Ɣɟ Ŭ Ŭɜ Ŭůɵ ůůɷɷ-Ɣ ůɢ ůɟ ůɢ, ůɢ ɢ´ ɢɔɷ ü ůɜ ůɜɢɡɔůůůŰɵ Ŭɵɢɵɢɡɢůů ůŰ Ɣůɵɵ Ŭ.

Ǽ: ɸ ůɷɷ-Ɣ, ɢ Euler ɛ ɢ ɵɵɢɔɵɵɛ ůɢɡ Viete ůɷɷŬɵ´ ɷɷ ´ ůɷůůɷɷɛ;

ζ : Ŭ-ɷůůŰůɨ ı ůɢɡ Viete, ɔɷŬůůůɢɡ Viete ɛ´ ɢɟ ůůɜ ɜŬ ɦɟ ůɷ ɛ ɢŬ Ŭɜ ůŰ ɦɵɟɟůůɢ ůůŰ ζ Ŭůɢɡɛ ŬůɷɷŬ, ůɜ ı ůɢɡ Euler ɛ ůŰɜ ɛ ůŰ ůɢ ɵɢɔɵɵɛ, ůɢɜ Ŭɜ Ŭɵ ɵŬɵɦůůɢ ůŰ. Ǽ ı ɢ Viete ůɢɜ Ŭ ɣüůɷɷůŰ, ü-ɦůɷ ɛ ɢŬ ´ Ŭɟ ƔůůŰůůɢ ´ ɟ ɣ´ ůɷ ɜŬ ɵ Ɣɜ ůɷ ůɢ ůü-ɷ ɛ ůŰ ɦ´ ɢɷɷɜ ůɟ ɦ´ ɢ ɵŬɷ Ŭɜ ůɢ ɵ Ɣɜ ůɷɡɵŬɷ ɢŬ ɛ ɢŬ ɜŬ ɦɔŬɷɷůɷ ü ɷŬüɢɟ ůŰɷɷɦ.

ɟ ɜɷɷůɷ ɜŬ ůɷɢɵɵɛ Ɣůɷɢɡɛ ůŰ ɦůŰ, ůɜ ɵŬɷ Ŭɟ ɢɷɷ Ɣ ɢ ζ Ɣɔü Ŭ ůɷɷůŰ ůŰ ɷɷ ɣɜ ůɷ ůɢɜ ůŰɷɷɦɔɢůůɢ ůɢɡ Euler, ɣ ɡ´ ɷɷ ůɨɵɢɵɢ ɵŬɷ ɵɢɔɵɵɛ, ůůɷɷ Ɣ ɢůɣ ɟ ůɷ´ ɷɷ ´ ůɷůůɷɷɛ ɵŬɷ´ ɷɷ ɛ Ŭůɢɡɛ ůŰɷɷɛ ůɢɜ ůŰɷɷɦɔɢůůɢ ůɢɡ Viete.

Ǽ: ɸ ůɷɷ-Ɣ ůŰ ůɢɛɛɢɡůůŰɜ Ŭɡ ůŰɡɡ ɢɵ ü-ɢ ůŰɷɷɛɵɔɛůůɷɷ ůůɢɡ ɛ Ɣɢůɡɛ Ŭ ɛ ɢŬ ɟ ɢɷɷɛɢ-ůůɷ, ɣůůɵ ůɷɷŬɵɢ ɵŬɷ´ ɷɷ ɜŬ ɦɜ ůɷ −·− ɵ Ɣɜ ůɷ +;

ζ : Ǽ ɷɢɡɟ Ŭ ɢŬ ɛ ůŰɜ ´ ɷɷ ɔɟ ɛ ɟ ɢ ɵŬɷ´ ɷɷ ůɨɵɢɵɢ ɜŬ´ ɢ-ɛ ůŰ ɵ Ɣůɢɡ ɵŬɷ ɦɜ ůŰ´ ɢ-ɛ ůŰ ɷ´ ɷɷ ɔɟ ɛ ůŰ´ ɷɷ´ ůɷůůɷɷɛ ůŰ´ ɷɷ´ ůɷůůɷɷɛ ůŰ´ ɷɷ´ ůɷůůɷɷ

Á: ¢ ŐůŐŐŐ ůŐŐŐ

ȷ : Ǽεyɜŭ ŭůɜ εůƀɛɐɛɗɖůůŰůůůɛ ´ɛɔɨ ɜŭ ɔŭŰŰɔŶƀɤ ŰŰɛɜ ɔŭɜɦɜŭ, ´ŭȷŶ ŰŰɛg Viete, ´ɛg ɐŰŰɜ εůŰ ŰŰɖ ´ɛůɛŰŰɔɐɐ ůɜɐɔɖůɐ ŰŰɛg. ¢ɛ εůŰŰŰŰȷŶůŰεůεůŰŰɖɜ ůɤŰȷɔůŰŰɔɐɐ εůŰŰɛ (−1) ɔŭɔůɔŭŰεůɦŰŰɔůɛɨůůɔ

Ǽ: ¢ ɔůŰŰɛȷɗŭůůůƀɛɐɛɗɖůůůɔŭŰɔɦŰɛg; ɛɗɖɔŭŰŭɐ ŰŰɛ ɔůůɔɛɜɦɡɡɦŰŰɔůůɔŭůɔůɛɤůůůɔɡŰŰɛg Viete, ŰŰɛg Euler ůůƀɛɐɛɗɖůůůɔŭŰɔɦɔɛg ůŰŰɛ εŶɗɖεŭ; ǼŰŰɛ ɜŭŰŰɛ ɔŭŰŰɔŶƀůůɔɡ;

ȷ : Ǽ´ůůŭɐ ŭɔȷɔƀı ɡɦŰŰɜ ´ȷɤŰŰɛŭɜŰŰŰ´ ´ɛůůɔɡɡyɜŭŭɨůɔɛɔɛ ɔɛɛεŶŰůɔɛɔŭɜŭŰŰɛ ŭɜŰŰɔɖɖŰůɡɡ, ɛɔ ůɜɖɔɐůůɔɡɡ´ ´ɛg yŭɤůŭɜ ɔŶ ɛɔɛɔ Ŷɔɔɛɔ Ŷɜɖȷɤ´ ɛɔ´ ɛg ůŰŰı ɡ ɐŰŰɜ ɔŭɔ´ ɛɔɨ ů´ ɛgŭŰɛɔ, ůɛyɜŭ εůƀɛɐɛɗɖůŭɜ ɔŭŰŰı εyůŭ ŭ ɦ ŭɡŰŰɛɨ ɡ ůɔı ɔŭŰŰŶɔŭƀŭ ŭɡŰɦ ŰŰɛɜ ɔŭɜɦɜŭ ɔŭɔɦŭɔŭ ɔŭɔɜŭ ó εyɜŭ ŭůɜ ɖŭ ɐŰŰɜ ůɜŭɔŰŰıyȷɛɜ ɜŭ εɛg yɔůɔůɔŶ ɛɔɛɡ − · − ɔŶɜůɔ + ɔŭɔŭɡŰɦ ůɤŭɔɦɔɛ. ŪŭɐɖůɔŭɜŭεŶɗɤ´ ı ɡ ŭ ɛŭůůɛɡɖɖɔůɔŭɔ´ ı ɡŰŰɛ ůɜyŰȷŭůŭɜ ɔŶ ɛɔɛɔŶɔɔɛɔů´ ɛgŭŰɛɔεŰɖɖεŰŰƀɛɐ

ǼŰŰɛ ū ɨ ɔɔɛ Ǽȷɔŭůɖŭɡɖ ɛ ŭȷɔyɔɔŭóƀɔy´ ůɔô ůŰŰɜ ůɦŰŰŰŰ: $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$ εɖŭ ůɖεŭɜŰŰƀɐ εŭɖεŭŰƀɐ ůŭɦŰŰŰŰ:

«?ŭɔ, g´ŶȷɡůɔyɛεůůŭɖůɤɛůȷůůŰƀɐ ůŭɦŰŰŰŰ, ŭŰŰɛɨ ɖ´ŭȷŭŶɜɤ ůůɦŰŰŰŰɖŭε´ɛȷɛɨůůŭ ɜŭɔȷŭŰŰŰůɡɤȷαɡɜŭŭƀɔŶɜůůŰŰ ŭ ɛůŶƀůůεŭɤɡůůɔɐɡ:

$$\alpha-1\cdot(\beta-\gamma)=\alpha-1\cdot\beta+1\cdot\gamma=\alpha-\beta+\gamma\text{»}$$

ūůŭŰŰɜ ůůɔɐɔɖůůɖ ŰŰɛg Euler, ŰŰɜ ɛ´ɛɖŭůůɡůůɜŭ ŭȷŶůůůɦɜ ŭgɖɦȷεɖŰŰůɔŭůŰŰ ůŶȷůŰ ŰŰɖɡ ůŭŶȷůŰ ŰŰɖɡ ůŭŶŰůůůŭɖŭ´ɛɔɨɛɨůůŭ ŰŰɤɜ ȷɖŰŰ ɜ, ɦ´ɤɡ ɡɡɤ ŭɜŰŰyȷůůɔ ɡ´ɛůůŰŰȷαůůɔ

«?ŭɔ, εɛg ŭŰɜůŰŰɔ´ůůůŰƀɐ ůŭɔɐŰŰɜ ɛ´ȷı ŰŰɛɡŰȷɦ´ɛɡεůŰŰɛɜ ɛ´ɛɛ yŭɤůŭůɔɐɔɖůůɖ ůŰŰɛ $(-)\cdot(-)=+$. ɖůɜ ůɜŭɔŶεůůŭεŰŰɖεŰŰƀɐɦɡŰŰȷɦ´ɛɡ, ůɔɐŶƀůůɛŰŰɔůŰŰ ůɐɔɔɐɐ, ůŰŰŶ ŰŰɖ ɔɜı εɖ εɛg, ůŰŰı ɡ ŭŰɜ ɖŭ ε´ɛȷɨɛɨůůŭ ɜŭ ůɜŭεůŰŰůı ůŶɛɔɔɜ ŭεɔı ɡ εŰŰɖεŰŰƀɐɦ ŰŰȷɦ´ɛ ɜŭŰŰɛ ůɜɖɔɐůůɤ ŭgŰŰɦ ŰŰɖ´ȷı ŰŰɖ ůɛȷŶ´ɛg ŰŰɛ ůŶɜŭεůŰ, ŰŰɛgɐŶɡůůŰŰɜ.»

¢ɛ ŭȷůůɐɖůůɖ´ɛůůŰŰȷɤɛůɔɦŰŰůůŰŰŶɔŭƀůůŰŰɜ ůŭɔɦɜŭŰŰɦůɛ εůŰŰɜ ŰŰȷɦ´ɛ ŰŰɛg Euler, ɦůɛ ůŭɔεůŰŰɜ ůůɦŰŰŰŰ ŰŰɛg Viete. ɖůŰŰɦůɛ, ůɡůŰŰƀɐŶεůŰŰɛ ŰŰȷı ŰŰɖεŭ 14, ůŰŰɛ ŭɜ ɡ´Ŷȷɡůɔ

ə Y´ ɵə Ü ɛ Ütdɛ Ütə ə Ütə Ütə ə Ütə hütütü ɔə Ü ɜ Ü əütɵ Ütə ə Ütə hɜ Ütg Ütə Ütüyɜ Ütə ütɜ əütütü Ütg Viete. Ütɜɜɵ Ütütɜ Ü ɜɛ Üj əütə ə ütə hütütü.

Ütü ügɜyɜ Üügɜd, ɵ üə Yəɵɔɵg ɛ Ütü z Üj ə yəə Ütütɵ Üütü yə Yj ə Ütü´ Üj dɵg 15 ə Ü Üy:

«Ü: ɵə Üj ɵı g Ütɜɵütg hüütɜ ə Üg hütə ɵ Üj h´ ɵg Ütg Euler ütə Ütɵ Üütə Üɛɵı g ɛ Ütdɛ Ütə hg;

z : Ütɜɵı hütə ütə gj Ütə Yütüütə ɜ Ü ɜyj ɵgɛ Üɵi üü Ütɜ Ü ɜɛ Üj əütə ə ütə hütütü, ɵi üü ə Y´ ɵə Ü ɛ Ütdɛ Ütə ə Ütə ´ j Yɜd, ütdə Ütə Üütə Üütüy ɜ Ütə hɜɵ ə ɵɔɜə h, ütdə Ütə ɜ Ü Ütɵ bə y´ ɵgɛ Üütə ə Yütə y ɜ Ü´ j hüdɛɵ, Yj Ü dü bɔ Ütə Ütɵ Ütüdüütɵ Ü ɵ Üyə üɛ Ü.

Ü: ȳ Üütɜ ə Üg hütə bütüütüütə ütü ə ɵɔɜə;

z : pütɜ ɛ´ ɵj ɵi ɛ Üɜ Ü Ütɵ bɔ Yə ɵgɛ Ü Ü h Ütü ə Ütdɛ Üj ə hütütü Ütɵ ´ ədɜ Ü a´ ədɜ ə Yɜ Üə ügɜ, ütdə Ütə ütə g´ Yj ü Üə ü j ɵg Ü a ü j ɵg, bütüə Y ɛ Ü Ütü ´ Üj Ütüj dütə hütütü.»

Ütɜ Ütə Üg Ütü Ü Ü Yɜ Ütüd Ütüg z Üj ə yəə Üg bə y´ ɵgɛ Ü hütə ügɜ üy Üə Ütü ə ɵɔɜə ɛ Ü Ütü ´ j Üɜ ɛ Ütə hütütü ə Üə ɛ Ü y ɜ Üɜ Ü j ɵüühədütɵ üx g Üj h´ ɵ, Ütɵi ütə Üɜ ɛ´ ɵj ɵi ɛ Ü ɜ Ü ügɜ Üɜ üɵgɛ Ü Ütɵɜ ə Üɜ hɜ Ü ütü ə Ütdɛ Üj ə hütütü, Ütɵɜ Üdɔɵi ɛ Ü ɛ Ü Ütü ə ɵɔɜə ɛ Üg.

«Ü: üə Ütɵɜ Euler ɛɵg Üí Üg hütə ütə yü Üə Y´ ɵə ɛ Ütdɛ Ütə hüj h´ ɵ, bütüütü Ütü ´ Üj Ütüj düd. j ɜ´ ɵi ɛ Ü «j ɜ yɜ Üg ə Üə hg ü ɵj Y Üə ɛ Üi j Ü´ Ü ɵi Üüə Ü, Üh Ü yɜ Ü ɜy ɔj ɵg d Ü ü ɵj Y Üə Y´ j Ü´ Ü ɵi Üüə Ü;» Ütü Üə Y´ x g y Üüə;

z : pütɜ ɜɵɛ ütx hütə Üü Üə Y´ x g y Üüə ȳ´ x g ütə ə ütə hütə ɵ üütɵg Ütɵg üütɵg ɛ ɵg d Ü Üü Üə Ü Üj Ütütü Ü ə Üə üə hg ɛ ɵg üütɵg.

z : j é üɵg dgɛ ütə Üg Üh Ütɵ ´ Üj Y üü ɛ Ü.

Ütü Üj ı Ütüd Üɜ Ütɵ ü j ɵg Ü a ü j ɵg yütə ɜ hdɛ Ü üüɜ yə üj Üüd ə Üə ɛ Ü Ütə ə ütɵi Üüə ɛ Ü ü j ɵg ɛ ə yj üɵg Ü Üɜ Üy:

z : pütɜ ɜɵɛ ütx ´ x g yütə ɜ hdɛ Ü. pütɜ ɜɵɛ ütx hüg´ Yj ütə ü j ɵg Ü a ü j ɵg. pütɜ ɛ´ ɵj ɵi ɛ Üɜ Ü bY ɵgɛ Ü´ Yɜ x üütɵ ü j ɵg ə Üə Y ɵə ɵ ü j ɵg ə Üə Üɜ ɛ´ ɵj yüɵgɛ Ü üütɜ

ЗЄЄœЄ ЋЎЄ Є´ЄЈЄі ЄЎЗЎ ůgЄЄ¥ЎЄgЄЎ´ІЎ gЎ dЎ ЋЄЎ ЎgЎЋ. Ч¥Ї¥Є Є ЋЗЄ ЄЎЎЎ Ї ЎЎdЄЎЎЎ¥ЎЋЄЎЎЎЗ ЎЎ ´Єd Зůd Є ЎЎЎЎ¥ЎЋЄЎЎЎЗ ЎЎ ЈЎЎ´Єd ЗЈ¥ЄgЎ.»

ЄЎЎЗ ЎЈІ ЎЎůd ЎЎg ůіЄЄЄg ЄЈЄЎůdЎg: «Ј З g´¥ЈЄЎЎЄ¥´ЄЎЎЄЎЎЎЄ¥Є ЎЗЎЎЄЎЎЎЎ

Á: ũ ô Ůg Ű ə Ůg ů Ů´ ů ə Ů Ű ɔ ə Ů ε d Ů´ Ůů Ů ɵ ε ; qd ə Ůũ ε Ůə Ů ə Ů Ů Ů ə Y y´ ů Ů Ů ə Ů ə Y ə Ů Ű ů ɵ . ů ə ə ɵ g;

z : Ū ô Y ə ə Ů ε Ůə ů ə ɵ ɵ ə Ů ů ɵ d ε ɵ a ȳ ə ɵ Ů ε ů i ů Ů d ε Ů´ ɵ g ɜ y ů ɵ g ε Ů ε y G ů ə Ů ů Ů d ô Y ə ə Ů ε Ů

Á: qd ə Ůũ ε Ů ə d Ů Y ə ə Ů ε Ů

z : Ū ô Y ə ə Ů ε Ůə ɵ ə ů ů Ů d Ů Ů g, ɜ ɵ ε a y é

Á: ? y ů Ů g ə Ů ε d Ů ů ů Ů d Ů Ů´ ɵ g d Ů Y ə ə Ů ε Ů

z : Ů ɵ g Viete. (é) ¢ ɵ g g Ů ů ɜ d Ů ə ɵ i g Ů ɵ g g G ů Ů ə Ů ε ů Ů Ů Ů ɵ g g ů ə y´ ɵ g ε Ů ɔ i ů y ε Ů g.

Á: Ů ɵ g;

z : Ů Ů ɜ Ů ů ɜ d Ů ə ε d Ů ε ɵ ů Ů d Ů é qů ɜ Ů ɵ g g ů ə y´ ɵ g ε Ů ů Ů Ů ε Y Ů ů Ů, Ů ə ə Y Ů ɵ g g ů ə Ů Ů Ů ə Ů ů Ů ɵ ɵ g ε Ů ů ů Ů ů ə Y ů Ů ɜ y ů Ů ů Ů d Ů ů ɜ d Ů ů ε Ů ů Ů ů ε Ů ů Ů d Ů ů ε ɵ ů Ů d Ů é

Á: ů é qů ɜ y G ɵ g ε Ů Ů ů g´ ů Y ɜ Ů ů g ε´ ů ɵ ů Ů Y ε Ů g.»

¢ Ů ə Ů g Ů Ů d Ů ů ů Ů d Ů ů ů d´ ɵ g y ə Ů ɜ Ů ů Ů d Ů ů d z Ů ů ə y ə ə Ů ε Ů Ů ɜ, Ů ɜ d Ů´ ů ɵ Ů ε ɵ i ů Ů ɜ Ů´ ɵ i ε Ů Ů ɜ ə Ů ɜ ů ɜ Ů (−) ⋅ (−) = +, G y ů g ə ü ə Ů d Ů ů ů g ə Ů ə d Ů Y ɜ Ů d ů ε Ů Ů ɜ:

«***qů ɜ ɵ ε a y ɜ Ů Ů ε y ə Ů ɜ Ů y Ů ů ɵ, d Ů ε ɵ g Y ů Ů ů Ů ɜ Ů Ů ε Y Y ɜ y ə Ů ɵ´ Ů ů Ů Y ɜ y , Ů ü ɵ ə Y Ů ů ů Ů´ ɵ g ɜ y ů y ů ů Ů ɜ Ů ů Ů ů ɵ´ Ů ɵ ə Y. ů ə ə Y d Ů Ů ε y Y Ů G ɜ Ů y Ů ů ɵ ə Ů ɵ Ů ə ə ɵ g (Ů ε ɔ ɵ Ů Ů).***»

¢ Ů ə Ů g Ů Ů d Ů ε Ů d ε Ů ů ə Ů Ů d Ů g d ɔ ō ũ g ε ɜ Ů ů a g, ´ ɵ g d Ů Ů ɜ Ů ů y ů y Ů ů ɵ Ů ə d Ů Y ɵ ů Ů ɵ´ ɵ ə i ə Ů ə ů Ů Ů z Ů d d ε Ů Ů ə Y, ů ε y g Ů ɵ Ů ɵ Ů ů ə Ů Ů Y ů g ɜ Ů ů Ů Ů ə ε y ɜ ɵ ´ Ů ə ü a Á ɵ Ů ɵ d ε ů ɜ d ´ ɵ g Ů ɜ Ů ů y Ů ɵ ů d Ů Y ə Ů ɵ ə Ů Ů d ɔ ɵ ů d ε Ů Ů ə Y Ů d ɜ Ů ɵ Ů ə Ů ů ů Ů d Ů ů ɜ ů ɜ Ů ů Ů Ů ɵ g ə Ů ů ɜ ů Ů (−) ⋅ (−) = +. Ō G Ů ɵ ə Ů Ů Ů ɜ ɵ ε ů Ů ɵ Ů d´ ɵ ů ɵ Ů ə ε Ů ɵ ɜ ɵ ε d ů d Ů ɵ g Viete ɔ ə Ů Ů d ɜ ů ů Ů d Ů Ů

$\alpha - (\beta - \gamma) = \alpha - \beta + \gamma$ ə Ů ɵ g´ ɵ ů Ů d ů ɵ Ů ů Ů ɵ ū i ə ə ɵ Á ů ɔ Ů ů d Ů g ů Ů ů ɵ

«ŪŪŰŸ ŲŲ ´ŸŲ ŲŲŰŰ $(-)\cdot(-)=+$ ŲŲŲ

«T: ? Ũa, ũsĥũa´ ɛəəyɡ ũɛɟyɡ yɡɛɡɛ ůũɡ ũŷůɡ ɜŨ ůɟ ɛɡɜůɟ ɛɡɛ ůũũz Ũɡɡ ɛŨũa Ỹ ɛůbỸůɡ ũɡ əŨɡɡ ɛůɟ sĥũɡũũ, ɛ´ĥũůɡůɟ ɟ ĥũa ůɛŨa ɛɡŨůɟ ũɡůɡ´ ɛɡ ɛ´ ɛɟ ůɛ əỸɡůŨ´ Ũaũɛɜ Ũũɡ ə Ỹ3ůa.

A: Ɛůũɟůɡ ůɟ ɤ ũɛůůɡ ɛɡ əůɡ ĥũa ůɛŨa ɜũŨ3ə ĥɡ ũɟĥ´ ɛɡ, ´ ɛəɟ ɤ ɟ Ũɛɡ ɛ ũɟĥ´ ɛɡ ũɛɡ Euler ɡ ůŨ3ɛɜɡůɛ ũɛɡé Ɛũɡ ũɟůɡ ũũ3ɛůɡũũɡůɡ ůɟ ɤ ũɛůůɡ, ɛə ɛ´ ɛɡůɡ ůɛŨa ɜŨ3ə Ỹ ɛůũɛ ũa ɤɡůɡ əŨũũ3ə Ỹbůa ɜəŨ ũɛ3 əŨ3ĥ3Ũ − · − = + é Ɛũɛ ũə ĥ ůɛɡ ũɟĥ´ ɛ Ũ3ũɛ3ĥɜɡůůɡɡ ɛɡ əůɡ ɡůɟ ɟ ĥũa − · − = + ɜəŨũɛ ůɛŨa ɛɡŨ Ũ3Ũə Ũ3ĥũũũ ũɡɡ ůũɡ Ůɛ ůɟ ůũ3ɛɡ ůũɡ3 Ũɜůɟ ɜɛ´ Ũɟ Ỹůũũůɡ α − (β − γ), ɡ ɛ´ ɛɡŨ ůɛŨa ´ ɛəŨ ůĥũũ; Ỹɛɡ ũɡ3 ɤɡɛɡɛ ůůg3Ũ3ũůůůũɛ3 Euler;

T: Ɛũɛ3 Viete.

A: A3ɩ ɜəŨ ũɟůɡůɟ ɤ ũůůɡ ɛɡ əůɡ´ ĥůɛ ũŨ3ə ůɛŨa ɡ Ũ Ỹ3ũůɡ ũɛɡ Euler, ũůɜə Ỹ ɛɡ əůɡ ĥũa ũɛ əŨũỸəŨbůɡ Ũ ĥ ůũɩ (ũĥũũũ ũɛɡ Viete). Ỹɛɡ Ũɟ ɜbɩ ɡ ɓə ɤ´ ůɡ ũɡ3 Ůɛ ůɟ ůũ3ə ůũ3 ũĥũũũ ũɛɡ Viete;

T: é (´ ɛůɛũ3ə ůɛ ůɛ3ɛɜɡůůɡ ũɡ ɡůɛɤůɡ ũɛɡ Viete, Ũ ĥ ũɡ3 T ɛɟ ɛŨ), ɜəŨũůũɡ3 ɛɡůůŨ ůɛŨa α ´ əɡ3 1 ůɛ α (β − γ).

A: ¢ ũũɛɟ ůŨ ůůbɛə ůɡůůɜəŨ3Ũ ũɛ əŨũũ3ɛə ůůɡ; ? Ũ3ɤɟ ɛɡɛůũɡ3 ũĥũũũ ũɛɡ Viete, ũɡ3 ůɛ ůɛ3ɛɜɡůůɡ ũɛɡ Euler ə 3Ũ ɛŨɡŨɛɡɛůĥũa − · − = +, ɛɩ ũůɜəŨũ, ɛɩ ũůů´ ɩ ɡ;

T: Ỹũůũůɩ ɤ ĥũa ɜůůŨ ůůĥəŨ ũũ´ ɟ Ỹɜɛ ũŨũũ əŨa ůũɡ əŨɡɡ ɛůɟ sĥũɡũũ əŨa ůũũ z Ũɡɡ ɛŨũa Ỹ´ ɟ ɤ´ ůa 3Ũ ũ3Ũa ũŨa´ ɛɡ ɛůũɡ, B´ ĥũůů´ ũůũůɩ ɤ ĥũa ũ3 ɤ3ũɡ ũỸůəŨaɛɡ ɛũɡ ɤəůa ůɛ ůũũ´ ɟ ĥůɡ ɛŨ ũa ɡŨ ɤbɜŨaůůůŨ3 ũ3Ũ ũɛ ɛỸɡɛɡ ɛůɤũůə ĥ´ ɤ ɡ ůɛŨa ũŨ3 ɡŨ ɜsĥũũ3 ũ3Ũ ũɛ ɛỸɡɛɡ ɛůŨ ô ɤ3ɤ ´ Ũ ũa ũŨəɡŨ, ũŨ3 ɡŨ ɛ´ ɛɟ ɛɩ ůũɛůŨ ũ3Ũ əŨũũ3ə Ỹbɛɡ ɛůɜəŨ´ ɛsɛ əĥɜɛ əũa´ ɛəə Ỹ´ ũũũỸ´ ůũũůɩ ɤ ɡŨůɛũ3 ũɛ ůɟ ɩ ũɡɛŨ ůũɛ ɜəŨũ3 ũŨ ɜɛůa ũgũĥ. z ůũỸ ůũɡ3 ũ3ũəŨũĥũũũ ũɛɡ Euler ɛ´ ɛɟ ůũ ə Ỹ ɛəŨ ´ ũũũỸ ũŨ ũɛ əŨũũ3ɛə ůɛɡ3, ũəə Ỹ ůɩ ũŨ3 ɛ´ ɛɟ ɛɩ ůŨ ůũɟ ɛbɩ ɡ ũŨ ũɛ əŨũũ3ɛə ůɤ, ɜəŨũ ɛɡ ´ ɟ ɛbỸəə ůa ɛɡŨ ũ3ũəŨũĥũũũ, ɛ´ ĥũůů ůɩ ɛůũɛ3 Viete ůɛũa ɛɡŨ´ sɛ ɛəɛə əɡɟ ɤ ɛɤ3ɡ Ũ Ỹ3ũůɡ ůũɛ ɜəŨũ;»

¢ Ţ ęţ œŞ, Şţ ŢŢ ŞŞŞ Ş ţ Ţţ ţ Ţ ţ Ţţ ţ Ţ ţ Ş ţ Ţţ ţ Ţ ţ Ţţ ţ Ţ ţ Ţţ ţ Ţ

«¢ Ÿ¡ə ŭŭŬ g´ ɛůŰ ɛ¡ɜɜŮ ŋŰə ŭŬɜ ŭ¥ɛŮŰŰə Ű ɛ ɛ¡¥ɛɛ¡ Ůα ɛ¡¥ɛɛ¡ ŭɛɜŮə ə¥¡ŭɛɛ¡ ůŰɛ¡ əŬɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ɜŰ¡ŋŰɛ¡ŰŬ, Ŭə ə¥ɛŋɜɛ ůŰŬ ɛ¡ Ŭɛ¡ɛ¡ŮŰə¥.»

«B ÆŰ¥ə ɜɛ¡ŭŬɜ ɛ¡ɛ¡ůɜɛɛ´ɛə¥ůα ´Ŭ¡ŬŭŮůαɛŮŰŰ Ŭ ŋ Ŭɛ¡ əŬɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ŋŰɛ¡ŰŬ, ŭɜŋŰə Ű Ŭ ɛ¡ Ŭɛ¡ɛ¡ŮŰə¥ŭŬɜ Ů Ŭɜɛ¡ɛ¡ɛ¡ɜŰŰə Ŭ ŋ Ŭɛ¡ ŭ¡ůɛ¡, ŭŬɜ ŰŬ ŋ¡ůə ɛ¡ɛ¡ɛŮůŰɛ¡ ŭ¡ůɛ¡.»

«¢ ɛ¡ ¥ɛ¡ŭŬ ə¥ůə ŋŰə Ű ɛ¡ Ŭɛ¡ɛ¡ŮŰə¥ ŭŬɜ ɛ´ɛ¡ɛ¡ɛ¡ŮɜŬ Ű Ŭɜɛ¡ɛ¡ůɛɛ¡ɛŮ ɛŮ ɛ¡ Ŭɛ¡ əŬɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ŋŰɛ¡ŰŬ.»

«¢ qpyů´ɛɜɛŬ g´ɛůŰ¡ɛ¡αŰə ŋŰə ŭŬɜ ŮɜɛŬə ə¥ɛɛ¡ɜŬ´ɛə¥ə¥Ŭ ə¥Ŭůə¥ůɛɛ¡ɛŮŰɛ¡ ɛ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ɛŬ ɛŮɛ¡ɜŬ¥ə¥ɛ ɛ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ə¥ŬəɜŬɛŬɛ¡ɛŮ¥ɛ¡ŰəɛŮ¥ɛ¡ɛ¡ə ə¥¡ŭɛɛ¡.»

«B ɛ¡ ¥ɜɛ¡ɛ¡ə¥ŬŰŰɜɛŮůŰ¡ɜ Ůɜə¥ɛɛ¡ůůɛ¡ Ű¡ɛg Euler əŬə ɛ¡Ŭ Ű¡ɛ¡ ɛ¡ɛ¡ůɜɛɛ´ɛɜɛ¡ůŮɛ¡ɜŬ ɜŬ Ű¡ɜ Ůɜə¥ɛɛ¡ůůŰ ůŮ¥ɜŬɜ ůɛ¡ɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ŋŰ¡ Ű¡ɛg, ŭŋŰə Ůɜɛ¡ŬŰ ə¥ɛ¡ɛ¡ə ə¥ɛ¡ə¥ə¥ŬŰə¥ŬŰɜ Ůə ə¥ ɛ¡ɛ¡ɛ¡ Ů¡ə¥ɛə¥Ŭ Ůɜ¡ ɛ¡Ů´Ŭ¡ŬŭŮůαɛŮŰŰ Ű¡ɛ¡ɛ¡ əŬɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ŋŰɛ¡ŰŬɛ¡ ůɜɛŬə Ůɜ¡Ŭ¡ůŰə¥ ŭɛ¡ůɜŋɛ¡ŰŰ ə¥ŬŰ ɛ¡ɛ¡ɛ¡ ¥¡ɛ¡ əŬə ŬŰ αŰɜɛ ɜŬ Ůɜə¥ɛ¡ɛ¡ɛ¡ůŮ»

«B Ŭ¥ɜɛ¡ɛ¡ŬɜŬŰ¡¥¡ůə ŋŰə ůŰ¡ əŬɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ɜɛ ɛ¡¥ɛ ɛ¡ ŭŬɜ g´ ¥¡ɛ¡ůə ə¥ ɛ¡ə¥ŬŰɜŬə¥ŋŰ¡ŰŬ´ɛ¡ɛ¡ ɛ´ɛ¡ůɜŬ Ů ŬəɛŮůŰ ůŰɛ¡ $(-)\cdot(-)=+$.»

¢ ɛ¡ ŬŰ¡ɛ¡ əŬə ɛ¡ ɛ¡ ¥ɛ¡ŭŬ ŭə¥ŬɛŰ¡ŰŰ¡ɜ ŰŬ¡ɜ ə¥ŬŰɜŋɛ¡ůɛ¡, Ŭ ŋ Ŭɛ¡ ůŰ¡ůŰ¡ ůŰ¡ŰŬ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ Ůɜɛ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ əŬɛ¡ŬŰ¡ ¥ɛ¡ŰŬɛ¡ŰŬ¡ə Ů Ůɜɛ¡ɛ¡ɛ¡ůɛ¡ Ű¡ɛg əŬɜŋɜŬ. ¢ ɛ¡ ŬŰ¡ɛ¡ ŭɛ¡ɛ¡ŰŬ¡ə¥ŬŰ¡ə¥ŬŰ¡ɜ¥ɛ¡ůŰ¡ůŰ¡ əŬɛ¡ŬŰ¡ ¥ɛ¡ŰŬɛ¡ŰŬ¡ə Ů Ůɜɛ¡ɛ¡ɛ¡ůɛ¡ Ű¡ɛg Viete, ´ɛ¡ **Ű¡ɜ ŋɛ¡ɛ¡ɛ¡ůŮ¡ɜŬ əŬŰŰə¥ŋŰə** Ű¡ɛ¡ɜ əŬɜŋɜŬ əŬə ůŰ¡ɜ ŬɜŰŰ ŋəŋ¡ůɛ¡ Ű¡ɛg əŬɜŋɜŬ ůŰ¡ əŬɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ŋŰɛ¡ŰŬ, ŋ´ɛ¡ ůŰ¡ ´Ŭ¡ ¥ŭŮůαɛŮ Ů Ű¡ɛ¡ ɛ¡ŮŰ¡ ɛ¡ůŮ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ůŬ, ´ɛ¡ **Ű¡ɜ ŋɛ¡ɛ¡ɛ¡ŮŰə ɜŬ ɛ¡ɛ¡ɛ¡ŮŰə** Ű¡ɛ¡ɜ əŬɜŋɜŬ.

A´ůɛ¡ɛ¡, ɛ¡ ɛ¡ ŬŰ¡ɛ¡ ɛ¡ůŰ¡ŋŰə ŋŰə ůŰɜ ɛ¡ŰŬɜ ɛ¡ŋ¡ŬŰɛ, ´ɛ¡ ¥ɛŬɛ¡ŬɜŬ ŰŬ ɛ¡ɜŋɛŬŰŰ əŬ¥ɛ¡ɛ¡ɜ ɛŬɛ¡ɛ¡ŮŰə¥ɛ¡ ɜ Ű¡ɛg ´Ŭ¡ůə¥ɛ¡ŋɜŰ¡ɛ¡ɛ¡. ¢ɛ¡ɛ¡ɛ¡ ´¡ɛ¡əŬ¥ə¥ůůŰɛ¡ůŰɛ¡ŬŰə¥ŰŰ¡ɛ¡ ůə¥ŰŰ´ɛ¡ůɛ¡ Ŭ ŋ Ű¡ɛ¡ ɜŬ ŭə¥ŬŰɛ¡ɛ¡ŮŰə¥ ɜ Ű¡ɛ¡ ´Ŭ¡ůə¥ɛ¡ŋɜŰ¡ɛ¡ɛ¡. ¢ɛ¡ɛ¡ɛ¡ ´¡ɛ¡əŬ¥ə¥ůůŰɛ¡ůŰɛ¡ŬŰə¥ŰŰ¡ɛ¡ ůə¥ŰŰ´ɛ¡ůɛ¡ ɛ¡ůŮ¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ůŬ, Ű¡ɛ¡ɛ¡ɛ¡ «ɛ¥ɛ¡ůə¥Ů» ´Ů¡ůůŋŰŰ¡ɛ ůŰɛ¡ ɛ¡ŬŰə¥ŋ. Ŭ¥ɛə¥ůůɛ¡ŬɜŰə¥ůə¥ŬŰə¥ɛ¡ɛ¡ɛ¡ ¥ɛ¡ɛ¡ŮŰ¡ŋŰɛ¡.

«ŪŬ Ű¡ɛ¡ ə¥ɜŬɛŮ(Ű¡ɛ¡ ə¥ŬŰɜŋɜŬ) ůɛ¡ůŰ¡ ůŰ¡ŋŰ¡ Ŭůəɛůůɛ¡ŋŰ¡, Ŭə ə¥ŬŰɜ ɛ¡Ŭ ɛ´ɛ¡ɛ¡ůŬɛ¡ŮɜŬ Ű¡ɛ¡ɜ ə¥ŬŰŰɜɛ¡ɛ¡ůɛ¡ɛ¡ɛ¡ŮŰ»

¢ ¥ ÝÞüÜ g´ eůÚłłÚ œÙß ĥÚß ůœeggÚ dÜ eÚÚß ´ sæ ÞÚ ´ sæ ÙÚ ´ eÚ ÞÚ ´ eÚ ÞÚ ´ eÚ Þ

´ŬĵĬŬŭŮŏŏεŬŰŰŬ ŬŕĥŬŰĺ ŏŬŰďĺεŬĵŏŏνε εŏνε, ŏνĵŏďĺ ĥενĝĺ ŬĝŬŰĥ ŏŬ ůďĺεŬŏŏŬŏ ĥŬŏ ŰŰŬ ζ ŬŰďĺεŬŰŏŏŶ ŬŏŏŬŏ ŬŕŏεεεŷŏŬŬŕĥŬŰĺ ŭŏŏůď. ¢ŏ ŏŬŰŬŏŏďĺŏĥŬŰĵŏ ůŏνĝĺ ´ŬĵŶŭŬŏŏεŬ ŏŏŬŬŏĝĺĝĺεŬŰďĺŬŷĝĺŬŰĺĝĺĵ õŭĝεŏŬŭŏĝĺ ŬŏŏŬŏďĺ ůŏĝŷůďĺ $\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta+\gamma$, ďĺ ŏ´ŏďŬ ŬŏďĺŏεďĺďŏŬŬŕĥŬŰĺ Viete ´ŏůŏŬŏŏŶ. ȳ´νĝĺ´ĵĥŬŰŏŏŬŏ εŬĵŏŏŏďεŬŰďĺŬŷĝĺůŰĺĺ ŭŏŶĵŏŬŏŬ ŰĺĝĺŭŶůďĺĝĺ ďŏŭŬŭŏŬŏďŬ ŰĺĝĺŬŏ´ŬŏĵŏŏνĝĺνĵĵŬŏŏŬĝĺ, ŬĝŬŰŏ ďĺ ŏůĥŰĺĝĺŬŰ ε´ŏĵŬŭŏŬŏŬŏďĺďĺŬŭ ŏŬŏνĝĺŬŭŬĵεŏνε ŰĺĝĺŬŬŏνε ŬŏŬŏŬŏŏŏνĝĺŬŭŬŏŏŏŏŏνε ŰĺĝĺŬŬŏŏŏŏŏνε ŰĺĝĺŬŬŏŏŏŏŏνε ŰĺĝĺŬ

ÿæűŰůď ůűď ďŰď ďůűďŰůď ůűď ŭŭŰůŭŰŭď ŰŰďď ŭŭŰůŭŰŭď ŰŰďď ŭŭŰůŭŰŭď ŰŰď

Ŭ ĥŭŭŝаеg ŭсg. qpŭз ŭзŭŭ¡Ÿŭŭąəŭ əŸ сəŭ ŭgŭŭ¡yŭəŭзŭ Ŭ ĥ ŭсggg εŭdąŭ¡yg, ŭзəəŸ ŭзŭdŭŭŭ, ŭсŭŭĥз ĥəсəyŭŭсзŭз ŭзŭəŭŭ¡yсз сəŭ ŭąз ŭзŭсəĥсąŭąd ŭсg əŭзĥзŭ, ŭзĥεŭ əŭз ŭgŭсąа ´сg ŭŭзəəŸ ŭŭз «´yŭgсŭз» ŭąз ŭзсəсəсəеŭзəəŸ ŭзəŭзееŭзŭ ŭ ŭŭз ŭŭ¡Ÿ¡εсεŭз ŭŭŭŭŸ ŭсз əŭзĥзŭ ¡ зŭŭ¡yсgεŭŭŭ ĥŭз ŭз əŭз ŭŭз ŭĥdąəŭəŸ сəŭ ŭŭзŭŭ¡yg ŭ´ŭəеŭ ŭŭ¡εсəеŭ ŭŭŭg ŭŭŭ¡ ı ¡ŭŭg ŭсg əŭŭ¡ŭəŭсеg ŭŭ з ¡dąŭ з ´сg ´¡сŭŭŭзŭз ŭсŭ ¡ зŭəgŭŭəĥ Ŭ¡ĥсз¡ŭεεŭ, ŭŭз əŭdgŭŭŭ¡еŭεŭŭŭąз сəсəəеŭ¡ŭ ŭąd ŭąg¡ ədgεŭŭąd ŭ¡сg¡еŭąd ŭŭ з ŭŭŭсŭ¡ŭəı з ´dсı з. ¡ зŭdŭŭŭ, сə ŭŭсŭ¡ŭəyg ´dсyg ĥсеdąŭŭз ŭŭąd ŭgзссее ŭŭ з εŭdąεŸŭŭ з əŭз ŭŭąз ŭзŭəŭəĥсąŭąd ŭсg əŭзĥзŭ ŭŭ з ´¡сŭеεŭ з, ı ŭŭŭзŭεąd ŭŭсзŭŭŭз ŭŭі зŭŭŭсg ŭ ĥ ŭąd ´¡сĥ´Ÿ¡сsgŭŭ εŭdąεŭŭəее сзı ŭąd ŭŭ з εŭdąŭі з, ĥ´ŭg ŭсзŭз ąd ŭŭĥŭąŭŭ ŭąg ŭ ŭсŭ¡ŭŭəеg ŭŭĥŭąŭŭg, ŭсе ´¡ĥŭąεсе ŭсg сзссεу зсеg ŭі сеdŭŭəı з ŭ¡ŭсεı з, əŭdı g ŭ ŭądg əŭз ŭі сеŭŭ¡ĥŭąεŭ з.

Æəсĥg ŭąg ŭ¡сŭŭądŭg εŭg, Ÿəəŭ ŭŭŭеŭŭз зŭ ŭзŭŭŭŭсdŭŭсŭ¡ĥ´сg εŭŭсз с´сœ ε´с¡ŭŭ зŭ ŭзŭ´сądŭŭŭŭŭŭəŭŭəŸ ąd ŭŭсŭ¡dŭ ŭŭ з z ŭdąεŭŭəı з, сŭзсзĥg´сg ŭŭз ε´с¡ŭŭ зŭ ŭgεбŭŭεŭŭąз ŭзŸсзŭ ŭąd əŸ сəŭg ŭgŭсбœсŭ¡ŭŭdŭg. ¡ ´сŭ´ŭŭεŭŭəyg ŭзŭŭсŭ¡yg əŭз ŭŭсŭ¡ŭəŸ ŭąεŭŭ, ŭŭŭ ŭg зŭgŭŭεĥ εŭŭąз yəəŭŭ ąd ŭŭсŭ¡ŭəı з сзı ŭŭ з ŭ ĥ ŭсggg ŭŭŭəŸəсgg, ´ŭ¡ŭŭŭĥŭŭ¡с dŭ ε´ŭ¡ŭyyсgз ŭсggg εŭdąŭ¡yg, ´ŭ¡Ÿ dŭ бсądеŭсgз. ¡ зŭdŭŭŭ, ąεŭəyŭąd ¡ŭ ŭĥŭ´ŭ з ´dсı з, ĥ´ŭg ŭсg Viete əŭз ŭсg Euler, dŭ ŭgεбŸəəŭз ŭąз ŭзŸ ŭ¡з ąd ŭąg ŭ¡ŭəŭəеg ŭəyŭąg ŭ з εŭdąŭі з əŭз dŭ ŭ сŭŭgсdŭąd εąсŭзŭŭəее ŭəεŸdąŭąd əŭзĥзŭ з, «ŭg зŭŭсı з» əŭз ŭgŭсεŭŭŭеı з.

Ŭсəі ŭąεŭзŭəĥ ŭąεŭсе ŭ ŭąg ŭсзŭз ĥŭз əŭŭŭŸ ąd ŭəŸ¡əŭŭ ąd ŭ¡g ŭəŭŭŭəŭədŭg, ¥сзŭ ŭзŭəąd´ ŭĥ ŭ ĥ ŭсggεŭdąŭ¡yg, ĥŭзсəεŭdąεŭŭəyg ŭзсəŭg´сg сŭ¡ąŭеε´сəсі εŭεŭŭĥŭąd ŭgəсəądŭ əŭз ŭəg ąŭŭ¡ŭсі εŭŭŭŭ¡ĥсεу зŭg, ŭg зŸзŭąŭŭз ŭ¡əŭŭ¡yg ŭgŭəсəądŭg əŭз ŭε´ĥŭəŭ ŭŭсе ´ŭ¡ŭəądĥз. ¡ ´ŭəŭеądəŭз ŭąεŭзŭəyg ŭзсəсəсəеyg ŭəəŭ¡yg сəŭ зŭ сœсеgз ŭ сŭзŭ¡yg əŭз зŭ ŭəg ąŭŭ¡ŭсі εŭŭеŭŭ¡ŭ ŭŭсеsŭ ŭŭg. ¢сз ąŭąŭąəŭĥŭз сə ŭəĥсεŭ ąεεεŸŭз ŭąg ŭądεŭŭəyg ŭąεсеsŭ¡ŭ¡ŭ ŭą

Á´ó¸ïåúúÿÚý ý, Ûî¤ÚÅ¸ûÚÈÛ³ÚÞÝ³¤ïÈÛûÚÚíÿýñÚÅúÞ ûï³ùÚÅûú Úý³ ¿ ÚúúÞÈÚÚÅÞ¹ ³ ÈÛ Úúú ÞÚúúÞÈÛ¸ÅñÚúúÚÚ, ñ´ý ý ´ïûÚúÚ¸¤ÚÅÞ ú Λ¿ Á ùÚ³ ÚúïÈ¸Ý Úúú ùúÞÈ¤ïÅ¸ÞúÚ ÚÚÅ³ÞúÚï ³ È³Úÿ¤ý³ ùÅùÚûÞÚÅúÞúÚý, ÚÚ È´ïúÚ È´È¸ïï³ ³Ù ùúÞÈ¤ïÅ¸ÞûÅïÈ³ ûÚÅïÅý ý ÈÚúúÚÿý ý ÈÚ ¿ÅÙûùÞ ûÅïÞÞïïÅûÞÞ. ¢ ÞûÚÅ¸ïÞÞ ´È¸ïÚÚÚúý³ ³ ÈÚúúÞÈÚÚÞ¹ ³ Ù³³ïÞ¹ ³ ÞÚÞúú ´Ù¸ïÈÅûúúÚúúú Úý³ ùûÅûÞïÞÞ¹ ³ ´ïÅ ÙÞÚÞÈÚÚ´ ÞûÚÚ¹ûÞÞ ûÚ´ïÅùÚÞÞ¹ ³ ÈÚúúÞÈÚÚÞïÞ¹ ³ ÚÞ³ïÞÞ¹ ³ ÞÚÞúú ûï³ùÚÚûÞ ÚÅïÅý ÈÚ Úúú ûúÅûÞÞ ÚÅïÅý ý ÈÚ ûúÅûÞÞ ý ´ïûÚÚÚúý ´ïÅ ÞÚÞï³ÚÞ ÚÞ¹ ÈÚ ûúÅûÞÞ ÚÅïÅý ý ÈÚúúÞÈÚÚÞÞ¹ ³ ÚÞ³ïÞÞ¹ ³ ÞÚÞúú ´ÚÅ¸ï

1. Baldino R. R., (1997): On the epistemology of integers, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, ʔ. 17/2, p.p. 211 ï 249

2. Brousseau G., (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, New York: Kluwer Academic Publishers.

3. Edwards H., & Penny D., (1994): Calculus, 4th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice ï Hall

4. Euler L., (1770): *Vollständige Anleitung zur Algebra*, St. ï Petersburg

5. Freudenthal H., (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company

6. Freudenthal, H., (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

7. Gallardo, A. (2003): It is possible to die before being born. Negative integers subtraction: A case Study, *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*

8. Glaeser G., (1981): Epistémologie des nombres relatives, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, 3, p.p. 303 ï 346

9. Gulikers I. & Blom K., (2001): A Historical Angle, A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education, *Educational Studies in Mathematics*, 47, p.p.223 ï 258

10. Hart K.M., (1981): *Childrenôs Understanding of Mathematics*, p.p.11 ï 16. London: John Murray

11. Hankel H., (1867): *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leipzig 1867

12. Heefer A., (2011): Historical Objections Against the Number Line, Science & Education, Vol. 20, Issue 9, p.p. 863-880

13. Hefendehl-Hebeker L., (1988): The Problem of permanence as a problem of teaching, Proceedings of the first Italian ï German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics p.p. 179 ï 189 , Italy

14. Hefendehl ï Hebeker L., (1991): Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs, *For the Learning of Mathematics*, Publishing Association, Canada

15. Herscovics N., (1989): Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra, In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p.p. 60 ï 86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.)

16. Jahnke H. N. et al., (2000): The use of original sources in the mathematics Classroom, in J. Fauvel and J. van Maanen (Eds), History in Mathematics Education. The ICMI Study, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, p.p. 291 ï 328

17. Jankvist U. T., (2009): A categorization of the ñwhysò and ñhowsò of using history in mathematics education, Educational Studies in Mathematics 71, p.p.137 ï 174

18. Keedy M., Bittinger M. and Smith L., (1982): *Algebra Two*, Boston: Addison ï Wesley

19. Klein F., (1925): *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic ï Algebra ï Analysis, Dover, New York*

20. Leibniz G.W., (1712): *Observatio, quod rationes sive proportiones ono habeant locum circa quantitates nihilo minors, & de vero sensu methodi infinitesimalis.* Acta eruditorum, p.p. 167 ï 169»

21. Lins R. (1992): *A Framework for the Understanding what Algebraic Thinking is*, Ph. D. Dissertation, University of Nottingham,

22. Matz M., (1980): Building a Metaphoric Theory of Mathematical Thought, *Journal of Mathematical Behaviour 3*, p.p. 93 ï 166

23. Niss M., (1996): Goals of mathematics teaching, In A. J. Bishop et al. (Eds.), International handbook of mathematics education (p.p. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

24. Niss M., (2001): University mathematics based on problem-oriented student Projects: 25 years of experience with the Roskilde model, in D. Holton, The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, p.p. 153 ï 165.

25. Niss M., (2003): Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project, in A. Gagatsis & S. Papastavridis, 3rd Mediterranean conference on mathematical education. Athens, Hellenic Mathematical Society, p.p. 115 ï 124

26. Peterson J., (1972): Fourteen Different Strategies for Multiplication of integers or Why $(-1)\cdot(-1)=+1$, The Arithmetic Teacher 19, No.5, p.p. 396 ï 403

27. Radford L., Boero P. & Vasco C., (2000): Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, in J. Fauvel and J. van Maanen (Eds), *History in Mathematics Education*. The ICMI Study, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, p.p. 162 ï 167

28. Radford L., (1997): On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio ï Cultural of Mathematics, for the *Learning of Mathematics*, 17 (1), p.p. 26 ï 33

29. Rapke T., (2009): Thoughts on Why $(-1)\cdot(-1)=+1$, Do two wrongs make a right? Using the distributive property avoids pseudoreasoning, *Mathematics teacher*, Vol. 102, No. 5, p.p. 374 ï 376

30. Robitaille D.E., (1989): Teaching practices employed in the teaching of Algebra and Geometry, in D.E. Robitaille [ed.] Evaluation and Assessment in Mathematics Education (p.p. 59 ï 68), Paris: Unesco

31. Siu M. K., (2006): No, I don't use history of mathematics in my class. Why?, in F. Furinghetti, S. Kaisjer, C. Tzanakis (eds), Proceedings HPM 2004 & ESU 4, University of Crete, Greece, p.p. 268 ï 277.

32. Sip J., (1990): But Everybody Accepts this Explanation: Operations on Signed Numbers, in J. Fauvel (ed.), History in the Mathematics Classroom, The IREM Papers (p.p. 73 ï 84), Leicester: The Mathematical Association

33. Stendhal (γŮgŭι ɜgɛɵ Ŭɛg Marie-Henri Beyle), (1973): *Vie de Henry Brulard* 1835, ƒ´Ŭɜɣəŭɵůɖ: Gallimard, Paris

34. Streefland L., (1996): Negative numbers: Reflections of a Learning Researcher, *Journal of Mathematical* Behavior 15, p.p. 57 ï 77

35. Thomaidis Y., (1993): Aspects of Negative Numbers in the Early 17th Century, *Science & Education 2*, p.p. 69 ï 86

36. Thomaidis Y. & Tzanakis C., (2007): The notion of historical ôparallelismô revisited: historical evolution and studentsô conception of the order relation on the number line, *Educational Studies in Mathematics*, 66, p.p. 165 ï 183

37. Thompson P. & Dreyfus T., (1988): Integers as transformations, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, p.p. 115 ï 133

38. Treffers A., (1987): *Three Dimensions: A model of Goal and Theory Description in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Netherlands

39. Tsamir P., & Sheffer R., (2000): Concrete and formal arguments: The case of division by zero, *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), p.p. 92ï 106.

40. Tzanakis C. & Arcavi A. et al., (2000): Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey, *History in Mathematics Education*. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, p.p. 201 ï 240

41. Tzekaki M., Sakonidis H. & Kaldrimidou M., (2003): *Mathematics Education in Greece: A Study*, in A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education, p.p. 629 ï 637, Athens, Hellenic Mathematical Society, Cyprus Mathematical Society

42. Vamvakoussi X. & Vosniadou S., (2004): Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach, *Learning and Instruction* 14, p.p. 453ï 467

43. Viete F., (1591/1983): *The Analytic Art* (translated from the Latin by T. R. Witmer). Kent, Ohio: The Kent State University Press

44. ¡ ə Ŭ ɔ ɩ Ŭ d ʃ Ł., (2004): ũ ɜ Ŭ ɣ ɜ Ŭ ů ɨ ɔ ɔ ɟ ɛ ɜ ɛ Ů ə ´ Ŭ ə ŭ Ů ʃ Ů ə ɦ ů ɨ ů Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ï ¢ ɔ ə Ŭ d Ů ɛ Ŭ Ů ə ɦ Ŭ d ʃ Ŭ ə Ŭ ə d ʃ Ag ɣ ə ə Ŭ d ʃ Ć ɩ ɜ d ʃ Ŭ ə ə Ɣ ɛ ɛ g ɜ Ŭ d ʃ ɜ ´ Ŭ ə ŭ Ů ŭ Ŭ ə Ŭ ə Ŭ ɜ Ŭ b Ŭ d ʃ ɛ ɛ ɛ g ɜ Ŭ d ʃ ɜ ´ ɛ ɦ Ŭ d ʃ Ŭ ů Ŭ d ʃ ɜ Ů ə ´ Ŭ ŭ Ů ʃ ů d ʃ, Ŭ Ŭ ə ŭ Ŭ ɔ ɣ ɔ ə ɦ Ł ɜ ů Ŭ ů Ŭ ɛ ɨ Ŭ ɛ

45. b Ŭ ɜ ŭ ɛ g ə Ɣ ə d ʃ Ł., Ť Ŭ ə ə ə Ɣ ʃ j ., ʒ Ŭ ʃ ə Ɣ ə d ʃ ?., ũ Ů ʃ Ů ɜ Ŭ ɛ ɛ ʃ Ł., (2007): ʒ Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ə Ɣ ¡ õ ũ g ɛ ɜ Ŭ ů ɛ g, b ə b ə ɛ Ą ə ´ Ŭ ə ŭ Ů ʃ Ů ə ɛ ɨ , Ł Ą c b

46. b Ŭ ɜ ŭ ɛ g ə Ɣ ə d ʃ Ł., Ť Ŭ ə ə ə Ɣ ʃ j . , ʒ Ŭ ʃ ə Ɣ ə d ʃ ?., ũ Ů ʃ Ů ɜ Ŭ ɛ ɛ ʃ Ł., (2012): ʒ Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ə Ɣ ¡ ô ũ g ɛ ɜ Ŭ ů ɛ g, Ł ɛ ɛ ə ə ɦ b ə b ə ɛ, Ł Ą c b

47. c ə Ŭ d ʃ Ů ɛ Ŭ Ů ə ɦ Ą ɜ ɜ Ŭ ɛ Ł ə Ŭ ů ɜ ɛ Ł ʃ ɛ ɔ ʃ Ŭ ɛ ɛ Ɣ Ŭ ɣ ɜ Ł´ ɛ g ŭ ɩ ɜ ə Ŭ ə ¡ ɜ Ŭ ə g Ŭ ə Ɣ Ł ʃ ɛ ɔ ʃ Ɣ ɛ ɛ Ŭ Ŭ Ł´ ɛ g ŭ ɩ ɜ c p d ɛ ɛ Ŭ ə ɛ ɨ -ũ g ɛ ɜ Ŭ ů ɛ g, Ą ú d ɛ Ů ʃ ɛ ŭ Ŭ d ʃ Ť g b Ů ʃ ɜ ɛ ů Ŭ ɣ g, (2003)

48. E.M.E (2004): ¢ ɛ Ŭ ɜ Ŭ ə g Ŭ ə ɦ ´ ʃ ɦ ɔ ʃ Ŭ ɛ ɛ Ŭ ə Ŭ ə d ʃ ŭ ə ŭ Ŭ ə Ŭ ə ɛ ´ ʃ ɛ ů ɣ ɔ ɔ ə ů d ʃ Ŭ ɣ ɜ ʒ Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ə ɩ ɜ ů Ŭ d ʃ ´ ʃ ɣ ɣ Ŭ ɛ b Ɣ d ɛ ə Ŭ ə Ŭ ə Ŭ d ʃ ŭ Ů ʃ Ů ʃ ɛ b Ɣ d ɛ ə Ŭ Ů ə ´ Ŭ ŭ Ů ʃ ů d ʃ, Ŭ ʃ Ŭ ə Ŭ ə Ɣ Ŭ ɛ g 21 ɛ g Ŭ ɜ Ŭ ə ɛ ɜ ɛ g Ł g ɜ Ŭ ʃ ɛ g ʒ Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ə ɛ g Ŭ ŭ Ŭ ə Ŭ ʃ, ů.ů. 84-94, ¢ ʃ ɛ Ŭ ə Ŭ

49. Ŭ Ŭ ŭ Ŭ ɔ ɣ ɔ ə ɦ Ł ɜ ů Ŭ ɛ ɨ Ŭ ɛ (2003): c ə Ŭ d ʃ Ů ɛ Ŭ Ů ə ɦ Ą ɜ ɜ Ŭ ɛ Ŭ ə Ŭ ů ɜ ɛ Ŭ ʃ ɛ ɔ ʃ Ŭ ɛ ɛ Ɣ Ŭ ɣ ɜ Ł´ ɛ g ŭ ɩ ɜ ə Ŭ ə ¡ ɜ Ŭ ə g Ŭ ə Ɣ Ŭ ʃ ɛ ɔ ʃ Ɣ ɛ ɛ Ŭ Ŭ Ł´ ɛ g ŭ ɩ ɜ c p d ɛ ɛ Ŭ ə ɛ ɨ ï ũ g ɛ ɜ Ŭ ů ɛ g, ʒ Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ə Ɣ, ũ Ą Ť b ō 303, ů.ů. 3983 ï 4038

50. Ū ɣ ɛ Ŭ ŭ ŭ d ʃ g ũ ., (1998): ***Ł ɨ ɔ ɔ ʃ ɛ ɜ Ů ʃ ə Ŭ Ů ʃ ů d ɨ ɜ ů Ů ʃ Ů ɛ ´ ə ɛ g Ů ů ɛ ɛ ɨ Ů d ʃ ʒ Ŭ d ʃ ɛ Ŭ ə ɛ g ´ Ŭ ŭ Ů d Ů ʃ***, Ą ´ ɛ ɛ ɔ ʃ ú ɣ Ů ə ɦ g ə ə ɦ, Ū Ů ů Ů ə ɛ ɜ ɛ d ʃ

51. Ūɤɛ Ŭŭŭdɣ ũ. & ¢ɛŬɜŸəɣ T., (2006): ɟ ɜŸɔɜɤůɣ ůŬɛɟəɩ ɜ əŬůɛyɜɤ ɜ əŬə ůgɛɣŬůůůɣ ɔəŬ Ŭůɜ yɜɜɛəŬ Ŭůɣ Ŭ ɦŭŬůəɣ ůŬ ɛəŬ ŭəŬůŬůɛŬŬůəɤ ´ɟɛůyɔɔəůɣ Ŭůɣ ÁgəəůůŭůůŬɣ ũŬɤɛŬŬɟɣŬɣ, ůŬɛ Ūɤɛ Ŭŭŭɣ ũ., T ŬůŬŸɜɣ ? . & ¢ɛŬɜŸəɣ T., ůŬɛɟɣŬ əŬəɤ Ŭůɣɛ ŬŬůɛŬŬůəɤ Áə´ŬŭŬůgůɣ, ŪŬůůŬəɛɜɔɣ: Áəŭɦůůɣ Ɛůŭ, ů.ů. 253 ï 270.

52. Ūɤɛ Ŭŭŭɣ ũ., ŬŬŬɟŸəɣ Ł, ¢ɛgəɛi ɛɣ T. & ŁŬŬŬŭgəɛŭɛg ɤ ., (2006): ũəɩ ůůŬ, ůŬɛɟɣŬ əŬə ÁgəəůůŭůůŬ ũŬɤɛŬŬɟɣŬ. ɤ ŬŬ ŭɛəɛɛə ŭəŬůŬůɛŬŬůəɤɣ ´ɟɛůyɔɔəůɣ ůŬůɣ ŭŬůgŬŬɟɛbŸɣɛəŬ ůə´ŬŭŬůgůɣ, Áəŭɦůůɣ ŬŬəŬŬ əůŬůɛɛɛg ɤ ŬəŬŬɛɜŬɣ

53. Ūɤɛ Ŭŭŭɣ ũ., (2008): ŁŬŬəɛɛɦŬůg´ŬəŬə ůəɦɜůɣ Ŭ ɦ ŬůŬ ŭəŭŬəŬůəɤ Ŭəɛ´ɛɛɣůɣ ŬůŬɣ ŬŬɤɜ ɤ ŬɣɛɣŬůŬůəɩ ůŬŬ ɜyŬ bəbəɣŬ ŬɛɣŬ ŭgɛɜŬůɛɛg, ŬɟŬəŬůəŸ 5ɣ ɣ ɛůŬɜɛi ɣ ɛɣɛɣŬɟɛŬůŬɣ ɛɣŭŬɣ ɛɣŭŬəŬůəɤɣ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ɜ, Λyɣɣɛɜɛ 17 ï 19 ɟ ´ɟəɤɛg 2008

54. Ūɤɛ Ŭŭŭɣ ũ., (2009): ¢ ůŬɛɟɣŬ Ŭɤɜɤ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ɜ ɤ ɣ´ɣɔəɤ ůŬůɜ ɜ əŬə gəəɛi ɔəŬ ŭəŭŬəŬůəɤɣ Ůəɛɔɤɣ əŬə ŭɟŬůŬɟɦŬɣŬůŬůɣ: ¢ ´ŬɟɣŬ Ŭɤůɣ ŬɤɜŬɟɣŬůəɩ ɜ ŬɟəɛŬəɩ ɜ, ůŬɛ Á´ůŬɣɛɛɜəɤ Ōɜɤůɣ ɔəŬ Ŭɣ ɣŬůəŬůəɤ Ŭɤɜɤ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ɜ «ɟ ɜəɛ´ɛɣůɣ Ŭɣ ɣŬůɣ Ŭɤɜɤ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ůŬɣ ɣŬůəŬəɤŬ Ŭɤɜɤ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ɜ», ů.ů. 193 ï 219, ŪŬůůŬəɛɜɔɣ, Áəŭɦůůɣ Ɛůŭ

55. Ūɤɛ Ŭŭŭɣ ũ., (2011): ůŬɛɟəɤɣ əŬə ŭəŭŬəŬůəɤɣ ɦɤŬůɣ Ŭɣ ŬɣŬɜŬůůůɣ ůŬɣ ò əɔŬůɟŬ, ůŬɛ Á´ůŬɣɛɛɜəɤ Ōɜɤůɣ ɔəŬ Ŭɣ ɣŬůəŬůəɤ Ŭɤɜɤ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ɜ «¢ ò əɔŬůɟŬ əŬə ɣ ɣŬůəŬůəɤ ŬɣɣŬ ůŬɣ Ŭɟəɩ ɔɛɟɛɜɣ Áə´ŬŭŬůgůɣ», ů.ů. 145 ï 182, ŪŬůůŬəɛɜɔɣ, Áəŭɦůůɣ Ɛůŭ

56. Ūɤɛ Ŭŭŭɣ ũ., (2011): Áɜəůɩ ůŬɣ əŬə Ŭɜəůɩ ůŬɣ ŭŬůgŬŬɟɛg bŬɛɛəi ůŬŬ ɟ ɟəɛɛɣŬůəɤ ŬɛɣŭŬɜŬɛɛg, ɤ ɣŬ ɛŬəɤɣŬɣ ɜŬůɩ ůŬɛɟɣŬ ŬɣŬɣ ŬůŬɣ ŬŬ ò əɔŬůɟŬɣ, Áəŭɦůůɣ Ɛůŭ, ŪŬůůŬəɛɜɔɣ

57. T əůəɩɟŬɣ ? ., (1992): ¢ ŭəŭŬůəŬəɤŬ ŬɤɜŬ´ŬɟɣŬ ŬɜŬůŬŬɟɦŬŭɛg ɣŬŬɟɛəɛŬŬɛɛg ůŬɜ ɟəŭŬɟŬůɣ ŬŬɣ ŬŬɤɜ ɤ ŬɣɛɣŬůəɩ ɜ, ***ŬɟŬəŬůəŸ*** *10eg* ***ŬŬɜŬůəɤɜɜɛg ŁŬɛɜŬŬɟɛg Á.ɤ .Á*** ů.ů. 391-410. ɟ ɣɛɜŬ

58. ɤ ŬŬŬŬɛg Ł., (2005): ***ɣŭŬůəŬəɤŬ Ŭɤɜ ɣŬŬůəɩ ɜ əŬə ŬɟɜɣŬůəɩ ɜ ŬɟəɛŬəɩ ɜ bŬůəůɛɣɜɣ ůŬůɣ Ŭɟɛɣɣ ŬŬɟɣ ŬŬůɣ ŬŬůɣ ŬŬů

59. ζ΄ ϛεε΄ ϑΥϊϊϛϛϊ ζ., (2011): ***φαϋΛϊΛϊϊαϊ ϊ ϊϊϊϊϊ΄ϛαϊϋϊ ϋϊϊϊ ΗϋΛϊϛϊϊϊϊ ϋΛϊϊ ζ ΛΛϊϊϊϛϛϊϊϊϊ ϊ ϊ ¢ ΄ϋϊϊ ϊϊϊϋΛϊϋϊϊϊϊϊ