ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΣΤΗΝ ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
κ. Γιαννακούλιας Ευστάθιος

ΣΩΤΗΡΗΣ ΓΚΟΥΝΤΟΥΒΑΣ
Α.Μ. Δ200619

ΑΘΗΝΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 24-6-2009 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γιαννακούλιας Ευστάθιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	…….
2) Λάππας Διονύσιος	Αν. Καθηγητής	……
3) Σπύρου Παναγιώτης	Επ. Καθηγητής	……

ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΣΤΗΝ ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

«ο Θεός έφτιαξε τους φυσικούς αριθμούς.
Όλα τα άλλα είναι δουλειά του ανθρώπου.»
Leopold Kronecker

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.

Θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια για το θέμα της παρούσας διπλωματικής που μου πρότεινε από κοινού με τον κ. Λάππα, την προθυμία του να τεθεί επιβλέπων και την άψογη συνεργασία μας.

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου κ. Διονύσιο Λάππα για την αμέριστη υποστήριξη που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας, καθώς και για την πρωτότυπη και εμπνευσμένη διδασκαλία του σε θέματα Γεωμετρίας που με ώθησαν να δω με νέο τρόπο την Γεωμετρία που χρόνια τώρα ασχολούμαι μαζί της και τέλος τον καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Σπύρου για την τιμή που μου έκανε να τεθεί μέλος της τριμελούς επιτροπής και τις γόνιμες συζητήσεις που πραγματοποιήσαμε σε διάφορα θέματα.

Οι ευχαριστίες απευθύνονται επίσης προς τους συμφοιτητές μου και τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος για την πολύπλευρη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στην σύντροφό μου Αγγελική και στους γονείς μου. Σ.Χ.Γ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

1. Οι γεωμετρικές κατασκευές στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά 6
Γενικά για τις κατασκευές – Η ταξινόμηση του Πάππου 6
Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη 10
Προβλήματα Α' & Β' βαθμού 11
Προβλήματα ανώτερου βαθμού 16
Περί επαφών του Απολλώνιου 17
Τα περίφημα "άλυτα" προβλήματα της αρχαιότητας 19
Κατασκευή κανονικών πολυγώνων 22
Συμπεράσματα 23

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

2. Οι γεωμετρικές κατασκευές τον 16^{ο} & 17^{ο} αιώνα 25
Το έργο του F. Viete 25
J. Kepler – Καρτέσιος 29

3. Η έννοια της κατασκευής στην Geometrie του Καρτέσιου 30
Οι κατασκευές στην Geometrie 30
Το πρόβλημα του Πάππου 32

4. Το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Καρτέσιου 37
Η κατασκευή των εξισώσεων στο έργο του Καρτέσιου 37
Η κατασκευή των εξισώσεων : το πρόβλημα και οι τεχνικές 40

5. Η κατασκευή των εξισώσεων στα έργα μαθηματικών τον 17^{ο} & 18^{ο} αιώνα. 48
Αναφορά στις πηγές του 17^{ου} αιώνα 48
Η κριτική στον Καρτέσιο του J. Bernoulli 50
Οι κατασκευές στο έργο του Newton 52
Μερικές ακόμη απόψεις μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα 56
Η κατάρρευση του κατασκευαστικού προγράμματος του Καρτέσιου 58

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ

6. Στην αναζήτηση ενός κριτηρίου για γεωμετρικές κατασκευές 62

7. Η θεωρία Galois και οι κατασκευές 67

8. Η κατασκευή των κανονικών πολυγώνων 69
Γενικά 69
Η διαίρεση του κύκλου σε ίσα μέρη 74

9. Η κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου 78
Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί 78
Η γεωμετρική κατασκευή 83

10. Παράρτημα 89

Βιβλιογραφία 93

ΤΟ ΝΟΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΣΤΗΝ ΠΟΡΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα διεξέλθουμε την πορεία της κατασκευής κατά την εξέλιξη της Γεωμετρίας. Οι γεωμετρικές κατασκευές στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά κατείχαν μια σαφώς ευδιάκριτη θέση και ικανοποιούσαν συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Τα μέσα για την πραγματοποίησή τους ήταν αποκλειστικά οι ευθείες και οι κύκλοι, δηλαδή ο κανόνας (αβαθμολόγητος χάρακας) και ο διαβήτης. Βέβαια υπήρχαν και κατασκευές που η πραγματοποίησή τους με αυτά τα δύο όργανα ήταν αδύνατη. Για να αντεπεξέλθουν από αυτό το αδιέξοδο οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες κατέφυγαν στην χρήση άλλων καμπυλών όπως οι κωνικές τομές ή και πιο πολύπλοκων όπως η τετραγωνίζουσα, η σπείρα και άλλες. Πληροφορίες για τα κατασκευαστικά προβλήματα και την ταξινόμησή τους μπορούμε να βρούμε στην αρχαία γραμματεία με πληρέστερη αυτή του Πάππου στην *Συναγωγή* του.

Το θέμα των γεωμετρικών κατασκευών έμεινε ανοιχτό από τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες και με κάποιες ενδιάμεσες προσπάθειες των Αράβων την σκυτάλη ανέλαβαν κατά τον $16^{ο}$ και $17^{ο}$ αιώνα σπουδαίοι μαθηματικοί όπως ο Viete, ο Kepler, ο Καρτέσιος και άλλοι. Ο Καρτέσιος στα πλαίσια της νέας Γεωμετρίας του, της *Geometrie* (1637), έδωσε μια απάντηση στο ερώτημα : “πως θα γίνουν οι κατασκευές προβλημάτων που δεν μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη”. Η απάντηση στο ερώτημα μπορεί να χαρακτηριστεί σαν σταθμός για τις γεωμετρικές κατασκευές και οι απαρχές της αναλυτικής γεωμετρίας. Η καινοτομία του ήταν η εκτεταμένη χρήση άλγεβρας στη γεωμετρία και πάνω σ’ αυτή δομήθηκε όλο το κατασκευαστικό του πρόγραμμα. Στη γενίκευση αυτού του προγράμματος συνεισέφεραν πολλοί μαθηματικοί του $17^{ου}$ και $18^{ου}$ αιώνα ώστε αυτό να καταστεί μια αυτοδύναμη θεωρία για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Όμως η γενίκευση του προγράμματος αυτού προσέκρουσε σε κάποια εμπόδια τα οποία δεν κατάφερε να ξεπεράσει και τελικά κατέρρευσε.

Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα δεν είχε απαντηθεί ακόμη το ερώτημα για το ποιες κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν με κανόνα και διαβήτη. Η απάντηση δόθηκε τελικά από τη θεωρία ομάδων του Galois.

Λίγο πριν από την οριστική διαπραγμάτευση των κατασκευών με την θεωρία Galois μια λαμπρή μαθηματική φυσιογνωμία, ο Gauss σε ηλικία μόλις 19 ετών, ασχολήθηκε με την κατασκευή των κανονικών πολυγώνων και απέδειξε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη και γενικότερα απάντησε στο ερώτημα για το ποια κανονικά πολύγωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη. Στο τελευταίο μέρος της εργασίας θα ασχοληθούμε με την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου.

1. Οι γεωμετρικές κατασκευές στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

I. Γενικά για τις κατασκευές – Η ταξινόμηση του Πάππου

Στα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών όπως των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλώνιου και άλλων, υπήρχαν δύο ειδών γεωμετρικές προτάσεις, τα **θεωρήματα** και τα **προβλήματα**. Τα θεωρήματα έπρεπε να αποδειχθούν, ενώ τα προβλήματα να κατασκευαστούν. Κάθε απόδειξη θεωρήματος ολοκληρωνόταν με τη φράση «**όπερ έδει δείξαι**», ενώ κάθε λύση προβλήματος με τη φράση «**όπερ έδει ποιήσαι**».

Η λύση ενός προβλήματος συνίσταται στη γεωμετρική κατασκευή μαζί με την απόδειξη ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Μερικές φορές οι αποδείξεις θεωρημάτων επίσης απαιτούν την πραγματοποίηση γεωμετρικών κατασκευών, όπως στην περίπτωση που βοηθητικές γραμμές ή σχήματα απαιτούνται για την απόδειξη. Με τον όρο **γεωμετρική κατασκευή** εννοούμε την **κατασκευή ενός γεωμετρικού αντικειμένου με κάποια μέσα κατασκευής**. Το γεωμετρικό αντικείμενο μπορεί να είναι ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, τρίγωνο, κύκλος, κύβος κλπ.

Από τις απαρχές της Γεωμετρίας οι μαθηματικοί απαιτούσαν για τις κατασκευές κάποια κριτήρια. Οι γεωμετρικές κατασκευές για τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες ήταν παραδεκτές αν γινόταν με χρήση **μόνο** του **κανόνα** (αβαθμολόγητος χάρακας) και του **διαβήτη**, δηλαδή με **ευθείες** και **κύκλους** που μπορούν να γραφούν με αυτά τα δύο όργανα και σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Κατασκευές που γινόταν με άλλα όργανα όπως γνώμονα, μεσολάβο, παράλληλα μετατοπιζόμενους χάρακες, κλπ καθώς και αυτές που γινόταν με κινητική γεωμετρία όπως η μέθοδος της **νεύσης** ήταν μη παραδεκτές. Επίσης χρήση άλλων γραμμών εκτός των ευθειών και κύκλων, όπως οι κωνικές τομές, η σπείρα, οι έλικες, η τετραγωνίζουσα του Ιππία κλπ, δεν επιτρεπόταν στις γεωμετρικές κατασκευές.

Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος και μαθηματικός **Πρόκλος** ($5^{ος}$ αιώνας μ.Χ) στα σχόλιά του στο $1^{ο}$ βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αναφέρει ότι ο **Οινοπίδης ο Χίος** (ακμή περί το 450 πΧ) περιόρισε τα μέσα κατασκευής για τις προτάσεις Ι.12 και Ι.23 των *Στοιχείων* στον κανόνα και το διαβήτη. Αυτή είναι χρονολογικά η πρώτη αναφορά για την απαίτηση του κανόνα και του διαβήτη. Η απαίτηση αυτή καθιερώθηκε μάλλον στην Ακαδημία του Πλάτωνα όπου η Γεωμετρία μελετήθηκε εκτεταμένα. Η ευθεία στην πλατωνική φιλοσοφία αντιπροσώπευε το ανθρώπινο, τη ζωή και το φθαρτό αφού έχει αρχή και τέλος, ενώ ο κύκλος που δεν έχει αρχή και τέλος αντιπροσώπευε το θείο, το άφθαρτο και το αέναο.

Ο **Ευκλείδης** ($3^{ος}$ αιώνας π.Χ) που εικάζεται ότι είχε θητεύσει στην Ακαδημία του Πλάτωνα και ασπαζόταν την αντίστοιχη φιλοσοφία, την απαίτηση του κανόνα και του διαβήτη την εισήγαγε **εμμέσως** στα *Στοιχεία* στα τρία πρώτα από τα πέντε συνολικά αιτήματά του (αξιώματα) στο πρώτο βιβλίο. Τα τρία πρώτα αιτήματα είναι :

1. Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε μοναδική ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε άλλο σημείο.
2. Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.
3. Με κέντρο ένα σημείο και ακτίνα οποιοδήποτε τμήμα μπορούμε να γράψουμε κύκλο.

Το τέταρτο αίτημα αναφέρει ότι όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες, δηλαδή απαιτεί την ομοιογένεια του χώρου και το πέμπτο είναι το λεγόμενο “ευκλείδειο αίτημα” που αναφέρεται στην παραλληλία.

Βλέπουμε λοιπόν καθαρά την αποκλειστική αναφορά στην ευθεία και στον κύκλο δηλαδή στον κανόνα και στον διαβήτη. Σε όλα τα βιβλία (13) των *Στοιχείων* καμία άλλη κατασκευή δεν πραγματοποιήθηκε, εκτός από αυτές με κανόνα και

διαβήτη. Όμως **ρητή αναφορά** του Ευκλείδη στην αποκλειστική χρήση των κανόνα και διαβήτη για τις γεωμετρικές κατασκευές δεν υπάρχει πουθενά. Επίσης ουδεμία τέτοια ρητή αναφορά υπάρχει στα έργα των άλλων αρχαίων Ελλήνων Γεωμετρών.

Οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες έλυσαν σχεδόν όλα τα προβλήματα που μπορούσαν να επιλυθούν με κανόνα και διαβήτη. Εκείνα που δεν ήταν δυνατόν να επιλυθούν με αυτά τα μέσα, τα έλυσαν χρησιμοποιώντας άλλες καμπύλες όπως οι κωνικές τομές, η σπείρα, οι έλικες, η τετραγωνίζουσα, η κογχοειδής, η κισσοειδής και άλλες, αλλά αυτές οι λύσεις είχαν τον χαρακτηρισμό της '**απαράδεκτης**' ή '**ανορθόδοξης**' και τα μέσα που χρησιμοποιήθηκαν, αυτόν του '**ανεπίτρεπτου**'.

Ο **Πάππος ο Αλεξανδρινός** στη *Συναγωγή* του ($3^{ος}$ αιώνας μ.Χ) αναφέρει ότι αν ένα πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με ευθείες και κύκλους, τότε είναι απαράδεκτο να επιλυθεί με πιο σύνθετες καμπύλες (μέσα).

Επίσης ο Πρόκλος ($5^{ος}$ αιώνας μ.Χ) στα σχόλιά του στο $1^{ο}$ βιβλίο των *Στοιχείων* εξηγεί ότι η ευθεία γραμμή και ο κύκλος είναι τα πρωταρχικά θεμέλια των σχημάτων. Στις καμπύλες γραμμές εμπεριέχονται οι έννοιες της ευθείας και της κυκλικότητας και η κίνηση που περιγράφεται με ευθείες γραμμές και κύκλους μπορεί εύκολα να κατανοηθεί σαν φανερή και εύκολη αντίθετα, για παράδειγμα, από την κίνηση με τροχιά μια σπείρα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σώμα της μαθηματικής γνώσης όπως ξεκάθαρα παραδόθηκε από τους αρχαίους Έλληνες χαρακτηριζόταν από την αυστηρή απαίτηση τα μέσα των γεωμετρικών κατασκευών να είναι ευθείες και κύκλοι.

Εξέχουσα θέση στα προβλήματα της αρχαιότητας κατέχουν τα τρία περίφημα "άλυτα προβλήματα", **ο τετραγωνισμός του κύκλου**, **ο διπλασιασμός του κύβου** ή **Δήλιο πρόβλημα** και **η τριχοτόμηση γωνίας**. Το αδύνατο της επίλυσής τους με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη και σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αποδείχθηκε τον $19^{ο}$ αιώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες έχοντας άγνοια της μη επιλυσιμότητας αυτών, ασχολήθηκαν επισταμένως με αυτά τα τρία προβλήματα και πολλά άλλα, όπως αυτό της κατασκευής των κανονικών πολυγώνων.

Η ενασχόληση τους με τέτοια προβλήματα τους ώθησε στο να ανακαλύψουν νέες καμπύλες και να λύσουν τα προβλήματα με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Ο **Ευτόκιος** ($6^{ος}$ αιώνας μΧ) στα σχόλια του για την πραγματεία του Αρχιμήδη "*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*" αναφέρει 12 τρόπους κατασκευής δύο μέσων αναλόγων.

Ο Πάππος ταξινομεί τα γεωμετρικά προβλήματα σε κατηγορίες ανάλογα με τα μέσα που απαιτούνται για την επίλυσή τους. Στη *Συναγωγή* του αναφέρει ότι τα γεωμετρικά προβλήματα ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες :

- Επίπεδα (επιλύονται με ευθείες & κύκλους)
- Στερεά (επιλύονται με κωνικές τομές)
- Γραμμικά (επιλύονται με άλλες πιο πολύπλοκες καμπύλες)

Συγκεκριμένα στο $3^{ο}$ βιβλίο της *Συναγωγής* αναφέρει ότι :

> *« ... Οι αρχαίοι παρεδέχοντο ότι τα γεωμετρικά προβλήματα ανήκουν εις τρεις κατηγορίας, τα **επίπεδα**, τα **στερεά** και τα **γραμμικά**.*
> *Καλούνται επίπεδα τα προβλήματα τα δυνάμενα να επιλυθούν τη βοηθεία ευθειών και περιφερειών κύκλου, ορθώς δε διότι αι ούτω χρησιμοποιούμεναι γραμμαί προέρχονται εκ του επιπέδου.*
> *Όσον αφορά εις τα προβλήματα, των οποίων η λύσις απαιτεί μίαν ή και περισσοτέρας κωνικάς τομάς, ταύτα καλούνται στερεά, διότι εις αυτά γίνεται χρήσις επιφανειών στερεών, κυρίως δε κωνικών επιφανειών.*

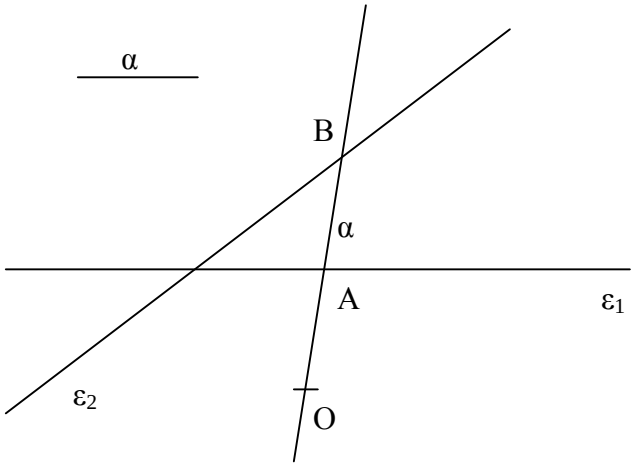
Τέλος, η τρίτη κατηγορία προβλημάτων, η των γραμμικών, καλείται ούτω, διότι εις αυτά, πέραν των γραμμών, τας οποίας έχουμε αναφέρει, γίνονται δεκταί και έταιραι πολυπλοκώτεραι, ως και αι έλικαι, αι τετραγωνίζουσαι, αι κογχοειδείς και αι κισσοειδείς, αι οποίαι παρουσιάζουν ιδιότητας ποικίλας και θαυμαστάς.
Λόγω της αναφερθείσης διαφοράς εις τη φύσιν των διαφόρων προβλημάτων, οι αρχαίοι γεωμέτραι δεν κατώρθωσαν να κατασκευάσουν, κατά τρόπον σύμφωνον προς την γεωμετρικήν σκέψιν, το πρόβλημα των δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο δοθέντων μεγεθών, πρόβλημα εκ της φύσεώς του στερεόν, διότι δεν είναι εύκολο να γραφούν αι κωνικαί τομαί επί του επιπέδου. Επέτυχον όμως να φτάσουν εις την λύσιν, και κατά αξιοθαύμαστον τρόπον, χρησιμοποιούντες όργανα κατάλληλα, όπως δυνάμεθα να διαπιστώσωμεν εις τον Μεσολάβον του Ερατοσθένους και τα Μηχανικά του Φίλωνος και του Ήρωνος. Πράγματι, ούτοι, δεχθέντες ότι πρόκειται περί προβλήματος στερεού, εξετέλεσαν την κατασκευήν απλώς δι' οργάνων, ενώ ο Νικομήδης επέλυσε το πρόβλημα χρησιμοποιών την κογχοειδή καμπύλην, τη βοηθεία της οποίας επέτυχε και την τριχοτόμησιν της γωνίας ... ».

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Πάππος στην *Συναγωγή* του ασχολείται μόνο με στερεά ή γραμμικά προβλήματα.

Οι μέθοδοι επίλυσης **μη επίπεδων προβλημάτων** από τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες μπορούν να διαιρεθούν σε τρεις κατηγορίες.

- Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι κατασκευές με *νεύση*, όπου μια ευθεία μετατοπίζεται με κάποιο τρόπο κατά μήκος ενός σχήματος για να φτάσει σε μια θέση, ώστε δύο τμήματα (και τα δύο ή το ένα από αυτά ορίζονται από τη θέση της ευθείας) να είναι ίσα.
- Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι κατασκευές που εκτελούνται με όργανα που επινοήθηκαν με σκοπό μια ειδική κατασκευή (π.χ μεσολάβος).
- Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι κατασκευές που τα μέσα που χρησιμοποιούνται για την επίτευξή τους είναι τομές ευθείας και καμπυλών συμπεριλαμβανομένων και καμπυλών ανώτερης τάξης όπως οι κωνικές τομές, η κογχοειδής, η κισσοειδής, η σπείρα και η τετραγωνίζουσα.

Το πρόβλημα της νεύσης είναι το εξής :
Δίνονται δύο ευθείες ε_1 και ε_2 , ένα σημείο Ο και ένα ευθύγραμμο τμήμα α. Ζητείται να κατασκευαστεί μια ευθεία που να διέρχεται από το Ο, να τέμνει τις δύο άλλες ευθείες στα σημεία Α και Β, έτσι ώστε ΑΒ=α. Το σημείο Ο λέγεται και πόλος της νεύσης.



Οι παραπάνω τρεις κατηγορίες επικαλύπτονται. Η μετακινούμενη ευθεία της πρώτης κατηγορίας μπορεί να ληφθεί σαν κανόνας (χάρακας) και μερικές φορές διαμορφώνεται έτσι ώστε να σχηματίσει ένα όργανο. Τα όργανα με την κίνησή τους διαγράφουν τροχιές καμπυλών, έτσι η κατασκευές που εκτελούνται με όργανα είναι ισοδύναμες με τις κατασκευές που τα μέσα που χρησιμοποιούνται είναι καμπύλες.

Ο Πάππος αναφέρει ότι προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν με ευθείες και κύκλους πρέπει, αν είναι δυνατόν, να επιλυθούν με κωνικές τομές και όχι με άλλες πιο πολύπλοκες καμπύλες. Άλλοι όμως συγγραφείς δεν είναι θιασώτες αυτής της προτίμησης. Ο Πάππος έδειξε ότι η κατασκευές με νεύση μπορούν να αναχθούν σε κατασκευές με τομή κύκλου και υπερβολής. Άρα απέδειξε ότι η **νεύση είναι γενικά στερεό πρόβλημα**. Επίσης για την κατασκευή δύο μέσων αναλόγων έδωσε μια λύση με ένα μετατοπιζόμενο χάρακα και η κατασκευή αυτή είναι γνωστή σαν κατασκευή του Πάππου.

Ο Πάππος δεν δικαιολόγησε αυστηρά γιατί οι κωνικές τομές είναι “καλύτερα” (προτιμότερα) μέσα κατασκευής από άλλες καμπύλες για να λυθούν στερεά προβλήματα, ούτε για τα γραμμικά προβλήματα. Δικαιολογεί την προτίμησή του με την απλότητα της κίνησης ενός κινητού που η τροχιά του είναι μια κωνική τομή. Ο Ευτόκιος υπαινίχθηκε ότι κάποιες κατασκευές προτιμώνται από άλλες γιατί είναι πιο πρακτικές, αλλά αυτή η δικαιολόγηση δεν είναι πειστική στο πλαίσιο της θεωρητικής Γεωμετρίας που δεν σχετίζεται με τις πρακτικές εφαρμογές. Επίσης και άλλα αρχαία γραπτά δεν δικαιολογούν πειστικά αυτή την προτίμηση.

Όπως έχουμε αναφέρει ο Πάππος ασχολείται στην ταξινόμησή με τα γραμμικά προβλήματα δηλαδή με κατασκευές που πραγματοποιούνται με καμπύλες πιο πολύπλοκες από τις κωνικές. Αλλά προκειμένου να χρησιμοποιήσει καμπύλες στις κατασκευές, αυτές οι καμπύλες πρέπει πρώτα να κατασκευαστούν οι ίδιες. Τότε γεννιέται το ερώτημα : **Ποιες είναι οι καμπύλες που χρησιμοποιούμε σαν μέσα κατασκευής και είναι κατασκευάσιμες;** Στο ερώτημα αυτό οι αρχαίες πηγές δεν δίνουν ξεκάθαρη απάντηση.

Στην αρχαία Ελληνική Γεωμετρία οι καμπύλες ορίζονται με τρεις διαφορετικούς τρόπους :

- Σαν τομές επιφανειών (κωνικές τομές)
- Σαν γραμμές που διαγράφονται από κίνηση ή συνδυασμό κινήσεων (σπείρα, έλικα, τετραγωνίζουσα)
- Σαν γεωμετρικός τόπος σημείων με κοινή ιδιότητα (κύκλος, κισσοειδής)

Οι αρχαίοι Γεωμέτρες χρησιμοποίησαν διάφορες καμπύλες για τις κατασκευές. Είναι πιθανό οι ιδιότητες των καμπυλών που είναι απαραίτητες για την πραγματοποίηση της κατασκευής, να συνέβαλαν σε μεγάλο βαθμό στον ορισμό τους. Δηλαδή ακριβώς αυτές οι ιδιότητες είναι που τους απασχόλησαν στον ορισμό τους. Έχουμε ρητά στοιχεία για αυτό στην περίπτωση των κωνικών τομών. Στις εννιά τελευταίες προτάσεις του πρώτου βιβλίου των *Κωνικών*, ο Απολλώνιος δίνει τυπική κατασκευή των κωνικών τομών σε συγκεκριμένη θέση στο επίπεδο, όπου περιγράφονται διάφορα στοιχεία τους όπως οι κορυφές, οι άξονες, οι ασύμπτωτες.

Φαίνεται πιθανό ότι οι αρχαίοι Γεωμέτρες όταν χρησιμοποιούσαν άλλες καμπύλες για τις κατασκευές, εκτός από τις συνηθισμένες, υπέθεταν ότι αυτές μπορούν να κατασκευαστούν. Δεν εστίαζαν το ενδιαφέρον τους στην κατασκευή αυτών και τις υπέθεταν κατασκευασμένες χωρίς ιδιαίτερες περαιτέρω εξηγήσεις. Αυτό είναι αξιοσημείωτο γιατί η κατασκευή κάποιων από τις καμπύλες είναι αρκετά περίπλοκη και κάποιες φορές προβληματική.

Εν κατακλείδι, μπορούμε να σημειώσουμε ότι τα κλασικά μαθηματικά κείμενα, όπως έγιναν γνωστά από το 16^{ο} αιώνα και μετά, μας παρέχουν αρκετά παραδείγματα κατασκευών που πραγματοποιούνται με καμπύλες εκτός από ευθείες και κύκλους. Οι απόψεις τώρα σχετικά με τη νομιμοποίηση και την προτίμηση αυτών των μέσων για τις κατασκευές είναι λίγες. Οι πιο σημαντικές όπως αναφέραμε είναι αυτές του Πάππου.

ΙΙ. Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.

Θα ασχοληθούμε τώρα με γεωμετρικές κατασκευές που πραγματοποίησαν οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες με κανόνα και διαβήτη.
Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη υπάρχουν πολλές κατασκευές που είναι ταξινομημένες στα 13 βιβλία. Πρέπει να σημειώσουμε ότι όλες πραγματοποιούνται με κανόνα και διαβήτη. Δεν υπάρχει ούτε μία κατασκευή που να πραγματοποιείται με άλλα μέσα εκτός από ευθείες και κύκλους.

Θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές κατασκευές που υπάρχουν στα *Στοιχεία*. Στο πρώτο βιβλίο υπάρχουν οι εξής κατασκευές :

1. Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου (Πρόταση 1)
2. Μεταφορά ευθυγράμμου τμήματος (Π. 2)
3. Αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων (Π. 3)
4. Κατασκευή διχοτόμου γωνίας (Π. 9)
5. Διχοτόμηση ευθυγράμμου τμήματος (Π. 10)
6. Κατασκευή καθέτου σε ευθεία από σημείο της (Π. 11)
7. Κατασκευή καθέτου σε ευθεία από σημείο εκτός αυτής (Π. 12)
8. Κατασκευή γωνίας ίση με δοθείσα που η μία πλευρά της δίνεται (Π. 23)
9. Κατασκευή παραλλήλου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής (Π. 31)
10. Κατασκευή παραλληλογράμμου με δοθείσα γωνία ισοδύναμου με τρίγωνο (Π. 42)
11. Κατασκευή παραλληλογράμμου με δοθείσα γωνία & πλευρά ισοδύναμου με τρίγωνο (Π. 43)
12. Κατασκευή τετραγώνου (Π. 46).

Στο δεύτερο βιβλίο δίνεται η κατασκευή της χρυσής τομής (διαίρεση ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο) στην πρόταση 11.

Στο τέταρτο βιβλίο δίνονται οι κατασκευές των κανονικών πολυγώνων, τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δεκαπενταγώνου καθώς και των κανονικών πολυγώνων με διπλάσιο πλήθος πλευρών.

Στο δεκατοτρίτο βιβλίο δίνονται οι κατασκευές των πέντε κανονικών πολυέδρων (πλατωνικών στερεών) των τετραέδρου, οκταέδρου, εξαέδρου, εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου.

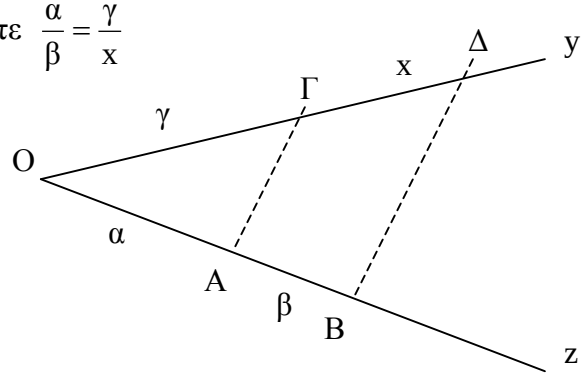
Θα δούμε στη συνέχεια μερικά προβλήματα 1^{ου}, 2^{ου} και ανώτερου βαθμού.

III. Προβλήματα Α' βαθμού

Καλούνται αυτά στα οποία απαιτείται η κατασκευή ενός τμήματος x, το οποίο ικανοποιεί μια εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς x.

1. Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ να κατασκευαστεί το τέταρτο ανάλογό τους.

Δηλαδή ζητείται τμήμα x τέτοιο ώστε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$



Κατασκευή

Πάνω σε δύο ημιευθείες Oz, Oy παίρνουμε τμήματα ΟΑ=α, ΑΒ=β και ΟΓ = γ. Η μεταφορά των τμημάτων γίνεται με τη βοήθεια της πρότασης Ι.2 των Στοιχείων. Φέρουμε την ΑΓ και από το Β την παράλληλό προς την ΑΓ (πρόταση Ι.31), που τέμνει την Oy στο Δ. Τότε το ΓΔ είναι το ζητούμενο τμήμα.

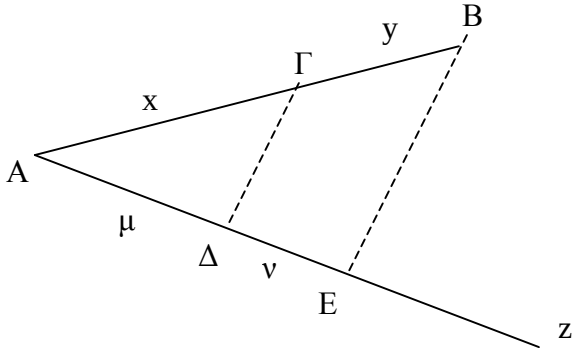
Απόδειξη

Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{OA}{AB}=\frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta}$ άρα. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$.

2. Αν δοθεί ευθύγραμμο τμήμα α, να υποδιαιρεθεί σε δύο τμήματα ώστε ο λόγος τους $\frac{\mu}{\nu}$, να είναι δοθείς .

Έστω ΑΒ=α. Ζητείται να βρεθεί σημείο Γ του ΑΒ ώστε αν αν x, y είναι τα τμήματα που ορίζει το Γ στο ΑΒ, τότε πρέπει να ισχύει $\frac{x}{y}=\frac{\mu}{\nu}$.

Κατασκευή



Έστω ΑΒ=α. Από το άκρο Α φέρουμε ημιευθεία Az και παίρνουμε πάνω σ' αυτή τμήματα ΑΔ=μ και ΔΕ=ν.

Από το Β φέρουμε τη ΒΕ και από το Δ παράλληλη στη ΒΕ που τέμνει το ΑΒ στο Γ. Τότε τα ζητούμενα τμήματα είναι τα ΑΓ=x και ΓΒ=y.

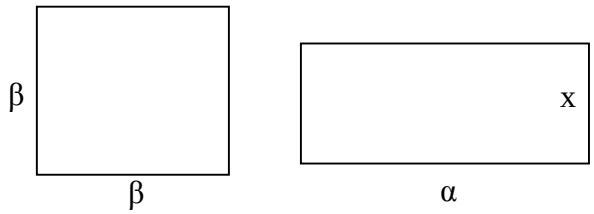
Αντίστοιχη κατασκευή γίνεται αν το Γ είναι εκτός των Α, Β.

Απόδειξη

Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{A\Delta}{\Delta E}$ άρα $\frac{x}{y}=\frac{\mu}{\nu}$.

3. Αν δοθεί τετράγωνο πλευράς β, να κατασκευαστεί ισοδύναμο ορθογώνιο με δοσμένη τη μια του πλευρά α. (απλή παραβολή)

Δηλαδή ζητείται τμήμα x τέτοιο ώστε $\alpha x=\beta^2$.



Κατασκευή

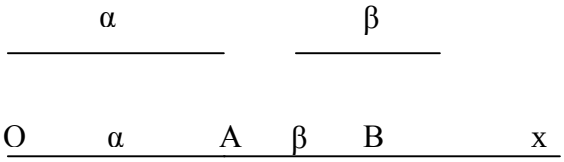
Η κατασκευή ανάγεται στο πρόβλημα 1

Αφού η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{x}$.

4. Αν δοθούν δύο τμήματα α, β τότε να κατασκευαστεί ο αριθμητικός τους μέσος, και ο αρμονικός τους μέσος.

Έστω τα τμήματα α,β. Για τον αριθμητικό μέσο ζητείται να κατασκευαστεί τμήμα ίσο με $\frac{\alpha+\beta}{2}$

Κατασκευή



Μεταφέρουμε πάνω στην ημιευθεία Ox διαδοχικά τα τμήματα OA=α και AB=β.
Διχοτομούμε το τμήμα OB (πρόταση Ι.10) και βρίσκουμε το μέσο M του OB.
Τότε το τμήμα OM είναι ο αριθμητικός μέσος.

Για τον αρμονικό μέσο ζητείται τμήμα x τέτοιο ώστε $x=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

Κατασκευή

Η σχέση είναι ισοδύναμη με την $\frac{x}{2\alpha}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, οπότε η κατασκευή του αρμονικού μέσου ανάγεται στο πρόβλημα 1.

Η κατασκευή του γεωμετρικού μέσου είναι πρόβλημα β΄ βαθμού.

Στην αρχαιότητα, από την εποχή του Πυθαγόρα αυτοί οι μέσοι παράγονταν αν θέταμε το λόγο $\frac{\alpha-\mu}{\mu-\beta}$ ίσο αντίστοιχα με τους λόγους $\frac{\alpha}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\mu}$, $\frac{\alpha}{\beta}$. Η αναλογία που προέκυπτε ονομαζόταν αντίστοιχα αριθμητική, γεωμετρική και αρμονική. Οι αναλογίες των αρχαίων Ελλήνων ήταν συνολικά 10. Τα ονόματά τους ήταν αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική, υπεναντία αρμονικώς, πέμπτη, έκτη (υπεναντία γεωμετρικώς), εβδόμη, ογδόη, ενάτη και δεκάτη.

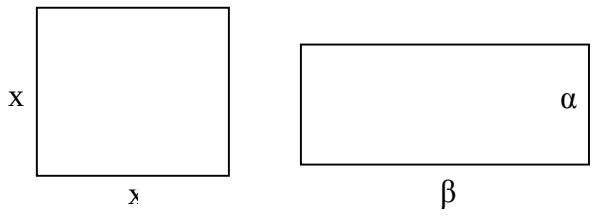
Ξεχωριστή θέση ανάμεσα στις αναλογίες κατείχε η $\alpha:\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}:\beta$ η λεγόμενη μουσική αναλογία (Τσιμπουράκης Δ. σ. 150).

Προβλήματα Β' βαθμού

Καλούνται αυτά στα οποία απαιτείται η κατασκευή ενός τμήματος x, το οποίο ικανοποιεί μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x.

1. Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοθέν ορθογώνιο.

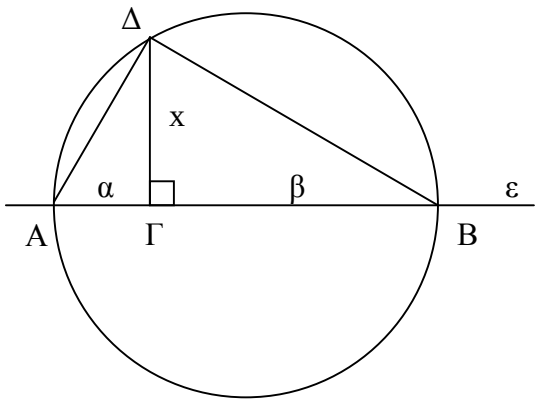
Αν το ορθογώνιο έχει διαστάσεις α, β, ζητείται να κατασκευαστεί τμήμα x τέτοιο ώστε $x^2 = \alpha\beta$.



Κατασκευή

Πάνω σε ευθεία ε τοποθετούμε διαδοχικά τα τμήματα α, β και γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο $\delta = \alpha+\beta$.

Φέρουμε την ΓΔ κάθετη στην ΑΒ που τέμνει τον κύκλο στο Δ. Τότε το ζητούμενο τμήμα x είναι το ΓΔ.



Απόδειξη

Από τις μετρικές σχέσεις στα ορθογώνια τρίγωνα έχουμε την ζητούμενη σχέση.

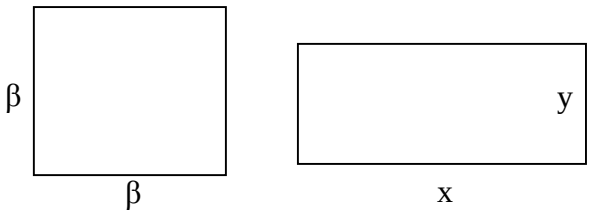
Η παραπάνω είναι η κατασκευή του γεωμετρικού μέσου.

2. Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο.

Αν το τρίγωνο έχει βάση α και ύψος υ, τότε ζητείται να κατασκευαστεί τμήμα x τέτοιο ώστε $x^2 = \frac{\alpha}{2}\upsilon$, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στο παραπάνω.

3. Να κατασκευαστεί ορθογώνιο με άθροισμα πλευρών ίσο με δοθέν τμήμα, ισοδύναμο με δοθέν τετράγωνο.

Αν το τετράγωνο έχει πλευρά β και το άθροισμα των πλευρών του ορθογωνίου είναι α, τότε ζητείται να κατασκευαστούν τμήματα x, y τέτοια ώστε $\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta^2 \end{cases}$ ή $x(\alpha-x)=\beta^2$



Τα τμήματα x και y είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2-\alpha x+\beta^2=0$.

Κατασκευή

Κατασκευάζουμε κύκλο με διάμετρο ΑΒ=α. Φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην ΑΒ σε απόσταση β αυτή που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Ε. Φέρουμε την ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Τότε τα τμήματα ΒΔ και ΑΔ είναι τα ζητούμενα x, y αντίστοιχα.

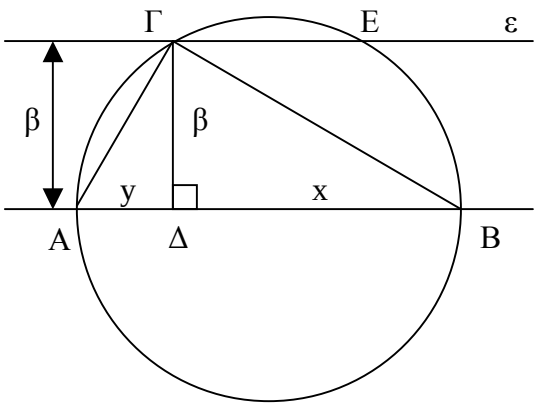
Απόδειξη

Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΒΓ

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε : $ΓΔ^2 = ΑΔ·ΔΒ$

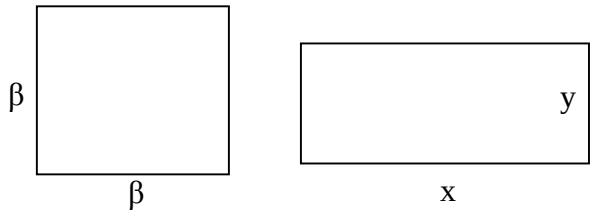
δηλαδή $xy=β^2$ με $x+y=α$.

Η κατασκευή αυτή ονομαζόταν **καθ' έλλειψη παραβολή.**



4. Να κατασκευαστεί ορθογώνιο με διαφορά πλευρών ίσο με δοθέν τμήμα, ισοδύναμο με δοθέν τετράγωνο.

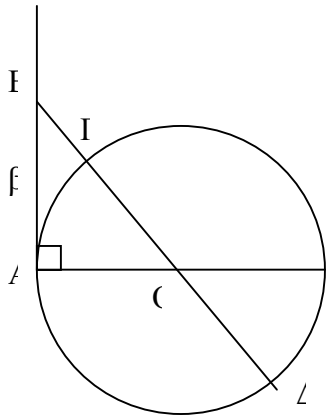
Αν το τετράγωνο έχει πλευρά β και η διαφορά των πλευρών του ορθογωνίου είναι α, τότε ζητείται να κατασκευαστούν τμήματα x, y τέτοια ώστε $\begin{cases} x-y=α \\ xy=β^2 \end{cases}$ ή $x(x-α)=β^2$



Τα τμήματα x και y είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2-αx-β^2=0$.

Κατασκευή

Κατασκευάζουμε τον κύκλο με διάμετρο α και σε τυχόν σημείο του Α φέρουμε την εφαπτομένη του. Παίρνουμε τμήμα ΑΒ=β πάνω στην εφαπτομένη και από το Β φέρουμε την διάκεντρο ΒΓΔ. Τότε τα τμήματα ΒΔ και ΒΓ είναι τα ζητούμενα x, y αντίστοιχα.



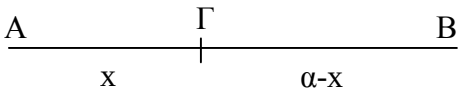
Απόδειξη

Η δύναμη του σημείου Β ως προς τον κύκλο δίνει $ΒΑ^2 = ΒΓ·ΒΔ$ δηλαδή $xy=β^2$ με $x-y=α$.
Η κατασκευή αυτή ονομαζόταν **καθ' υπερβολή παραβολή.**

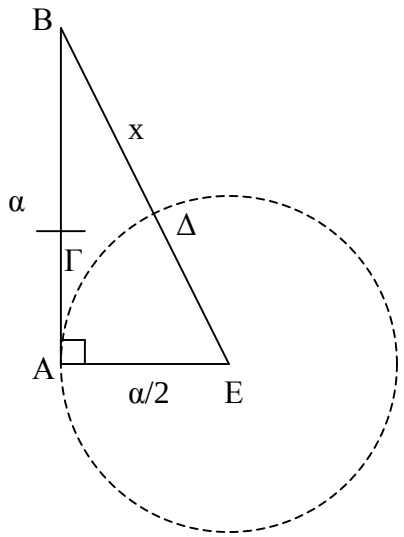
4. Κατασκευή Χρυσής Τομής. Να διαιρεθεί τμήμα α σε μέσο και άκρο λόγο.

Έστω τμήμα ΑΒ=α. Να βρεθεί σημείο Γ τέτοιο ώστε για το τμήμα ΑΓ=x να ισχύει :

$\frac{x}{α}=\frac{α-x}{x}$ ή $α(α-x)=x^2$ ή $x(x+α)=α^2$.



Η κατασκευή αυτή είναι η πρόταση **ΙΙ**.11 των *Στοιχείων* και η διατύπωση της είναι : *Να τμηθεί δοθέν τμήμα ούτως ώστε το ορθογώνιο το περιεχόμενο υπό του όλου τμήματος και ενός των τμημάτων του, να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος*. Παρακάτω δίνουμε μια κατασκευή της ΙΙ.11.



Κατασκευή

Κατασκευάζω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ (Α=90°) με κάθετες πλευρές α και $\frac{\alpha}{2}$.

Γράφω κύκλο με κέντρο Ε και ακτίνα α/2 που τέμνει την ΒΕ στο σημείο Δ. Τότε το τμήμα ΒΔ ισούται με x και το μεταφέρουμε στην ΑΒ με τη βοήθεια κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα ΒΔ που τέμνει την ΑΒ στο Γ. Άρα ΒΓ=x.

Απόδειξη

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε :

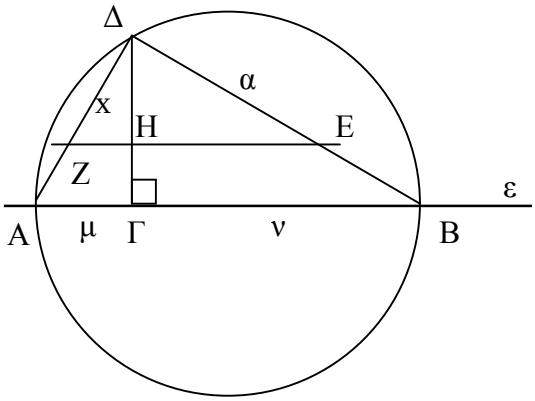
$BE^2 = AB^2 + AE^2$ δηλαδή

$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ (λόγω της ΙΙ.4) $x^2+\alpha x+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ άρα $\alpha^2 = x(x+\alpha)$.

Στην πρόταση **ΙΙ**.11 ο Ευκλείδης δεν αναφέρει αυτή την κατασκευή ως διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Αυτό το αναφέρει στο βιβλίο VI στον 3ο ορισμό και στην πρόταση VI.30 δίνει άλλη κατασκευαστική απόδειξη.

5. Να κατασκευαστεί τετράγωνο με λόγο προς δοθέν τετράγωνο πλευράς α, ίσο προς το λόγο δύο δοθέντων τμημάτων μ, ν.

Ζητείται να κατασκευαστεί η πλευρά x ενός τετραγώνου ώστε να ισχύει η σχέση $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}$.



Κατασκευή

Κατασκευάζουμε κύκλο με διάμετρο την ΑΒ=μ+ν και φέρουμε ΓΔ⊥ΑΒ. Φέρουμε τις ΔΑ, ΔΒ οπότε το ΑΒΔ είναι ορθογώνιο τρίγωνο. Παίρνουμε πάνω στη ΔΒ τμήμα ΔΕ=α και φέρουμε ΕΖ//ΑΒ. Τότε το ζητούμενο τμήμα είναι το ΔΖ.

Απόδειξη

Στο ορθογώνιο ΔΖΕ έχουμε $\frac{\Delta Z^2}{\Delta E^2}=\frac{ZH}{HE}$. Από τη δέσμη ευθειών ΔΓ, ΔΑ, ΔΒ που τέμνονται από τις παράλληλες ΑΒ, ΖΕ έχουμε $\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{ZH}{HE}$. Άρα $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}$.

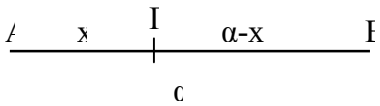
IV. Προβλήματα ανώτερου βαθμού

Καλούνται αυτά στα οποία απαιτείται η κατασκευή ενός τμήματος x, το οποίο ικανοποιεί μια εξίσωση τρίτου ή μεγαλύτερου βαθμού ως προς x.

Προβλήματα 4^{ου} βαθμού βρίσκουμε στο 10^{ο} βιβλίο των *Στοιχείων*, όπου ο Ευκλείδης ασχολείται με την επίλυση (γεωμετρική κατασκευή των ριζών) διτετράγωνων εξισώσεων της μορφής $x^4 - \alpha^2 x + \frac{\beta^2}{4} = 0$, που πραγματοποιεί με ευθείες και κύκλους (κανόνα και διαβήτη).

Στην πραγματεία του Αρχιμήδη "*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*" στην 4^{η} πρόταση ζητείται «*δοθείσα σφαίρα ακτίνας α να τμηθεί με επίπεδο κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα σφαιρικά τμήματα να έχουν μεταξύ τους δοθέντα λόγο μ/ν*». Το πρόβλημα ανάγεται σε εξίσωση 3^{ου} βαθμού. Ο Αρχιμήδης καταλήγει στην αναλογία $\frac{4\alpha^2}{x^2} = \frac{3\alpha - x}{\frac{\mu}{\mu+\nu}\alpha}$, όπου x είναι το ύψος του μεγαλύτερου σφαιρικού τμήματος.

Ο Αρχιμήδης γενικεύει το πρόβλημα «Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρεθεί σημείο Γ ώστε να διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε δύο άλλα, έτσι ώστε $\frac{AB}{A\Gamma^2} = \frac{\Gamma B}{AB}$». Δηλαδή ζητείται να κατασκευαστεί τμήμα ΑΓ=x τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την αναλογία $\frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{\alpha - x}{\alpha}$. Αν ΑΒ=α και ΑΓ=x, τότε η αναλογία δίνει την εξίσωση 3^{ου} βαθμού $x^3 - \alpha x^2 + \alpha^3 = 0$.



Ο Αρχιμήδης δηλώνει ότι θα λύσει αυτό το πρόβλημα στο τέλος του έργου, όμως το τμήμα αυτό του έργου χάθηκε. Ο Ευτόκιος (6^{ος} μΧ αι.) αναφέρει μια λύση που την αποδίδει στον Αρχιμήδη με χρήση δύο κωνικών τομών, της παραβολής $y = \frac{x^2}{\alpha}$ και της υπερβολής $y = \frac{\alpha}{\alpha - x}$.

Το παραπάνω πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί με ευθείες και κύκλους γιατί η εξίσωση είναι ανάγωγη 3^{ου} βαθμού, δηλαδή ο βαθμός της δεν είναι δύναμη του 2, όπως θα δούμε στο 6^{ο} κεφάλαιο.

Επίσης στην σωζόμενη πραγματεία του Αρχιμήδη "*Επί του επταγώνου*" δίνεται η κατασκευή του κανονικού επταγώνου με νεύση. Το έργο αυτό σώθηκε σε αραβικό αντίγραφο του Άραβα Γεωμέτρη Thabit ibn Qurra (836-901 μ.Χ) που συμπεριλήφθηκε στο έργο του Πέρση αστρονόμου Al Birouni (962-1048 μ.Χ) "*Μαθήματα Τριγωνομετρίας*".

Σήμερα δεν γνωρίζουμε ακριβώς με ποια προβλήματα ανώτερου βαθμού είχαν ασχοληθεί και επιλύσει οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες, αφού ένα μεγάλο μέρος της αρχαίας ελληνικής γραμματείας έχει χαθεί.

V. Περί επαφών του Απολλώνιου

Ένα άλλο έργο που έχει σωθεί και αναφέρεται σε κατασκευές είναι η πραγματεία του Απολλώνιου "*Περί επαφών*". Το κατασκευαστικό πρόβλημα είναι :
«*Δοθέντων τριών στοιχείων, που το καθένα μπορεί να είναι* ***σημείο, ευθεία*** *ή* ***κύκλος****, να γραφεί κύκλος ο οποίος να διέρχεται από τα σημεία και να εφάπτεται στις ευθείες ή τους κύκλους*».

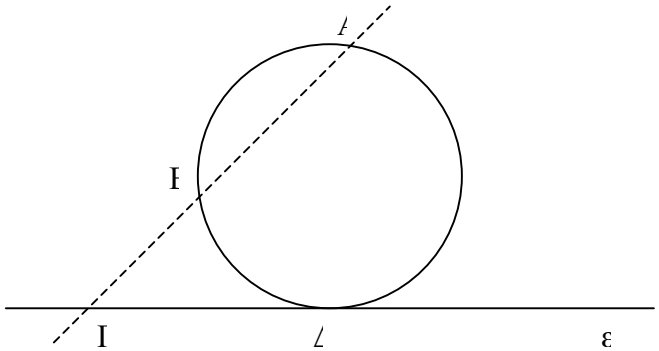
Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει δέκα επιμέρους περιπτώσεις και όλες λύνονται με κανόνα και διαβήτη. Οι δέκα περιπτώσεις είναι οι πιο κάτω.
Να κατασκευαστεί κύκλος ο οποίος να :

1. Διέρχεται από τρία σημεία
2. Εφάπτεται σε τρεις ευθείες
3. Διέρχεται από δύο σημεία και εφάπτεται σε μία ευθεία
4. Διέρχεται από ένα σημείο και εφάπτεται σε δύο ευθείες
5. Διέρχεται από δύο σημεία και εφάπτεται σε ένα κύκλο
6. Διέρχεται από ένα σημείο και εφάπτεται σε ευθεία και σε κύκλο
7. Διέρχεται από ένα σημείο και εφάπτεται σε δύο κύκλους
8. Εφάπτεται σε δύο ευθείες και ένα κύκλο
9. Εφάπτεται σε δύο κύκλους και μία ευθεία
10. Εφάπτεται σε τρεις κύκλους.

Θα διαπραγματευθούμε την κατασκευή της $3^{ης}$ περίπτωσης. Έστω ότι τα δοθέντα στοιχεία είναι τα σημεία Α, Β και η ευθεία ε. Ζητείται λοιπόν να κατασκευάσουμε τον κύκλο που εφάπτεται στην ευθεία ε και διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

<u>Ανάλυση</u>

Έστω (Κ,ρ) ο ζητούμενος κύκλος που διέρχεται από το σημεία Α, Β και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο Δ. Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Γ τότε η δύναμη του σημείου Γ ως προς τον κύκλο δίνει $ΓΔ^2 = ΓΒ.ΓΑ$.



Τα τμήματα ΓΒ και ΓΑ είναι σταθερά οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο Δ στην ευθεία ε που να ικανοποιεί την σχέση $ΓΔ^2 = ΓΒ.ΓΑ$.

<u>Κατασκευή</u>

Φέρουμε την ευθεία ΑΒ που τέμνει την ευθεία ε στο σταθερό σημείο Γ. Η δύναμη του σημείου Γ ως προς τον κύκλο είναι $ΓΔ^2 = ΓΒ.ΓΑ$.
Κατασκευάζουμε το τμήμα ΓΔ (κατασκευή μέσης αναλόγου των τμημάτων ΓΒ, ΓΑ) στην ευθεία ε και έτσι προσδιορίζουμε το σταθερό σημείο Δ, που είναι το σημείο

επαφής της ευθείας ε και του κύκλου. Το πρόβλημα τώρα ανάγεται στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή ζητείται να κατασκευαστεί ο κύκλος που να διέρχεται από τρία σταθερά σημεία τα Α, Β και Δ. Προσδιορίζουμε το περίκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΔ σαν σημείο τομής των μεσοκάθετων δύο πλευρών του τριγώνου. Κατασκευάζουμε τώρα τον κύκλο με κέντρο το Κ και ακτίνα ρ=ΚΑ.

Διερεύνηση

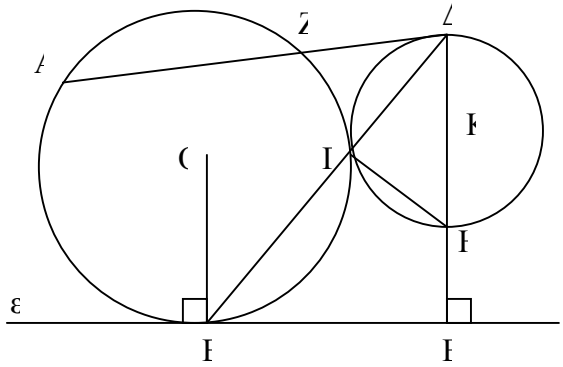
Το πρόβλημα δέχεται δύο, μία ή καμία λύση

- Αν η ευθεία ΑΒ δεν είναι παράλληλη στην ε τότε το πρόβλημα έχει δύο λύσεις
- Αν η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στην ε τότε το πρόβλημα έχει μία λύση
- Αν τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε ή αν τα Α, Β είναι εκατέρωθεν της ε τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Θα διαπραγματευθούμε επίσης και την κατασκευή της $6^{ης}$ περίπτωσης.
Έστω ότι τα δοθέντα στοιχεία είναι το σημείο Α, η ευθεία ε και ο κύκλος (Κ,ρ).

Ανάλυση

Έστω Ο το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και x η ακτίνα του. Φέρουμε την ΟΒ⊥ε.
Φέρουμε την ΚΕ⊥ε που τέμνει τον κύκλο στα Δ και Η. Από το σταθερό σημείο Δ φέρουμε τη ΔΑ που τέμνει τον κύκλο (Ο,x) στο Ζ και τη ΔΒ που τέμνει τον κύκλο (Κ,ρ) στο Γ.
Η δύναμη του Δ ως προς τον κύκλο (Ο,x) θα δώσει ΔΑ.ΔΖ = ΔΒ.ΔΓ (1)



Το τετράπλευρο ΒΓΗΕ έχει δύο γωνίες ορθές (Γ,Η), άρα η δύναμη του Δ ως προς τον περιγεγραμμένο του κύκλο δίνει ΔΕ.ΔΗ = ΔΒ.ΔΓ (2)

Από τις (1)&(2) έχουμε ότι ΔΑ.ΔΖ = ΔΕ.ΔΗ $\Leftrightarrow \frac{\Delta A}{\Delta E} = \frac{\Delta H}{\Delta Z}$. Άρα το ΔΖ είναι η τετάρτη ανάλογος των σταθερών τμημάτων ΔΑ, ΔΕ και ΔΗ.

Κατασκευή

Από το κέντρο Κ του δοθέντος κύκλου φέρουμε ευθεία κάθετη στην ε, που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Η. Από το Δ φέρουμε την ευθεία ΔΑ.
Κατασκευάζουμε στην ευθεία ΔΑ το τμήμα ΔΖ σαν τετάρτη ανάλογο των σταθερών τμημάτων ΔΑ, ΔΕ και ΔΗ. Τώρα το πρόβλημα ανάγεται στην τρίτη περίπτωση, γιατί ο ζητούμενος κύκλος θα διέρχεται από τα σημεία Α, Ζ και εφάπτεται στην ευθεία ε.

Διερεύνηση

Το πρόβλημα έχει γενικά δύο λύσεις, έναν κύκλο που εφάπτεται εξωτερικά στον δοθέντα κύκλο (όπως στο σχήμα) και έναν που ο δοθείς κύκλος εφάπτεται εσωτερικά σε αυτόν. Σε ειδική περίπτωση το πρόβλημα έχει τέσσερις λύσεις.

VI. Τα περίφημα “άλυτα” προβλήματα της αρχαιότητας

Θα κάνουμε τώρα μια σύντομη αναφορά στα τρία περίφημα “άλυτα” προβλήματα της αρχαιότητας, **το διπλασιασμό του κύβου** ή **Δήλιο πρόβλημα**, **τον τετραγωνισμό του κύκλου**, και **την τριχοτόμηση γωνίας**. Τα προβλήματα αυτά εμφανίστηκαν περίπου στα μέσα του $5^{ου}$ π.Χ αιώνα.

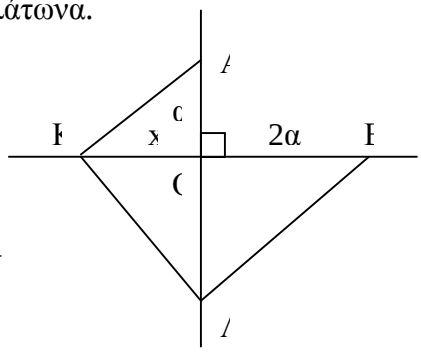
Το πρόβλημα του **διπλασιασμού του κύβου** είναι το εξής :
Να κατασκευαστεί κύβος με όγκο διπλάσιο από τον όγκο δοθέντος κύβου ακμής α.
Ζητείται λοιπόν, να κατασκευαστεί η ακμή x ενός κύβου που θα έχει διπλάσιο όγκο από κύβο δοθείσης ακμής α. Δηλαδή να κατασκευαστεί το τμήμα $x=\alpha\sqrt[3]{2}$. Το πρόβλημα είναι αδύνατο να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη όπως αποδείχθηκε το 1837 με τη βοήθεια της θεωρίας Galois. Ο **Ιπποκράτης ο Χίος** (~470-400 π.Χ) πρώτος ανήγαγε το πρόβλημα στην παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων x, y μεταξύ των τμημάτων α και 2α. Το πρόβλημα τότε ικανοποιεί τις συνεχείς αναλογίες $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2\alpha}$ που οδηγούν στη ζητούμενη σχέση $x=\alpha\sqrt[3]{2}$.

Ο **Ερατοσθένης ο Κυρηναίος** (276-194 π.Χ) σε επιστολή που έστειλε στον βασιλιά του Ελληνιστικού κράτους της Αιγύπτου Πτολεμαίο Γ’ τον Ευεργέτη (284-222 π.Χ) αναφέρει την ιστορία του προβλήματος, διάφορες λύσεις που έχουν δοθεί και τη δική του λύση της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων με τη βοήθεια του μεσολάβου, ενός οργάνου που επενόησε.

Ο Ευτόκιος ($6^{ος}$ μ.Χ αι.) στα σχόλια του για την πραγματεία του Αρχιμήδη “*Περί σφαίρας και κυλίνδρου*” αναφέρει 12 λύσεις του προβλήματος. Λύσεις στο πρόβλημα έδωσαν οι :

- Αρχύτας ο Ταραντίνος (428-365 π.Χ) με ημικυλίνδρους
- Πλάτων (427-347 π.Χ) με παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων
- Εύδοξος ο Κνίδιος (407-354 π.Χ) με την “καμπύλη του Ευδόξου”
- Μέναιχμος (~ 350 π.Χ) με δύο παραβολές
- Αρχιμήδης (287-212 π.Χ) με δύο κωνικές τομές, παραβολή και υπερβολή
- Ερατοσθένης με το μεσολάβο
- Απολλώνιος (~270-190 π.Χ) με κύκλο και ισοσκελή υπερβολή
- Νικομήδης (~200 π.Χ) με την κογχοειδή καμπύλη
- Ήρων (~200 π.Χ) με νεύση
- Διοκλής (~$1^{ος}$ π.Χ αι.) με την κισσοειδή καμπύλη
- Πάππος (~$3^{ος}$ μ.Χ αι.) με νεύση.

Θα δώσουμε τώρα τη λύση που αποδίδεται στον Πλάτωνα.
Έστω δύο κάθετοι άξονες που τέμνονται στο Ο.
Στον ένα άξονα παίρνουμε τμήμα ΟΑ=α και στον άλλο τμήμα ΟΒ=2α. Φέρουμε τώρα τις ΑΚ//ΒΛ έτσι ώστε ΑΚ⊥ΚΛ και ΒΛ⊥ΚΛ.



Στο ορθογώνιο ΑΚΛ : $OK^2 = OA.O\Lambda \Leftrightarrow \frac{OA}{OK}=\frac{OK}{O\Lambda}$

Στο ορθογώνιο ΒΚΛ : $O\Lambda^2 = OK.OB \Leftrightarrow \frac{OK}{O\Lambda}=\frac{O\Lambda}{OB}$

Άρα $\frac{OA}{OK}=\frac{OK}{O\Lambda}=\frac{O\Lambda}{OB} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2\alpha}$. Οπότε το ζητούμενο τμήμα $x = OK= \alpha\sqrt[3]{2}$.

Η τεθλασμένη γραμμή ΑΚΛΒ με ορθές γωνίες στα Κ και Λ μπορεί να επιτευχθεί με ειδικό όργανο, όπου σε ένα μεταβλητό ορθογώνιο πλαίσιο ολισθαίνει μια πλευρά κάθετα σε δύο άλλες που είναι σταθερές.

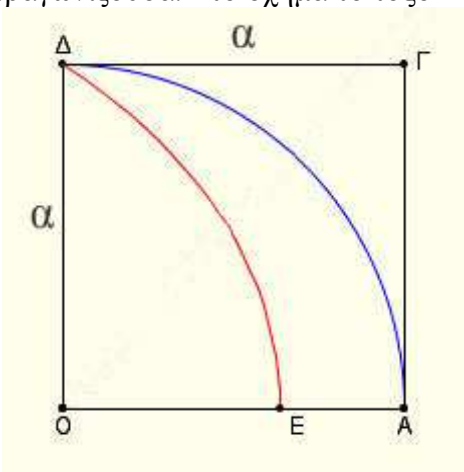
Το πρόβλημα του **τετραγωνισμού του κύκλου** είναι το εξής :
Να κατασκευαστεί τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με δοθέντα κύκλο ακτίνας α.
Ζητείται λοιπόν, να κατασκευαστεί η πλευρά x ενός τετραγώνου που θα έχει ίσο εμβαδόν με κύκλο ακτίνας α. Δηλαδή να κατασκευαστεί το τμήμα $x=\alpha\sqrt{\pi}$. Ο πρώτος που αναφέρεται ότι ασχολήθηκε με το πρόβλημα είναι ο **Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος** (500-428 π.Χ). Το αδύνατο της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη αποδείχθηκε το 1882 από τον C.F.Von Lindemann.

Ο Ιάμβλιχος ($3^{ος}$ μ.Χ αι.) αναφέρει ότι το πρόβλημα έλυσαν οι :

- Αρχιμήδης με την έλικα
- Νικομήδης με την τετραγωνίζουσα του Ιππία
- Απολλώνιος με την κοχλιοειδή
- Κάρπος με την καμπύλη "εκ διπλής κινήσεως προερχόμενη".

Επίσης ο Πάππος στη *Συναγωγή* του δίνει μια λύση με την τετραγωνίζουσα του Ιππία και την αποδίδει στο **Δεινόστρατο** (~ 350 π.Χ) αδελφό του Μέναιχμου. Στη συνέχεια θα δούμε τη λύση αυτή.

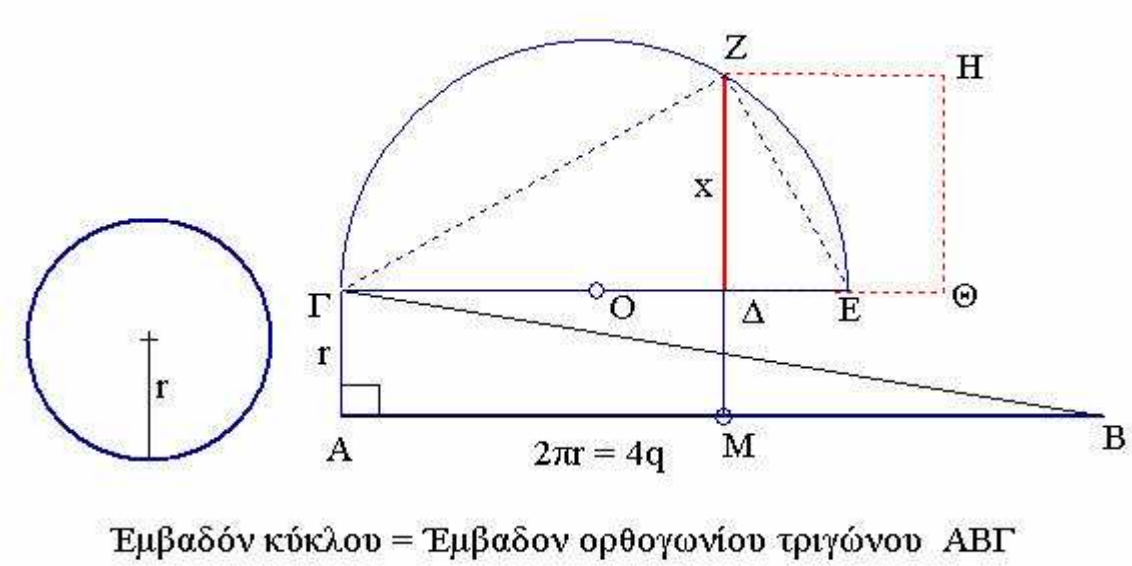
Η τετραγωνίζουσα είναι καμπύλη που παράγεται από δύο ομαλές κινήσεις, μια ευθύγραμμη και μια κυκλική κίνηση. Στο παρακάτω τετράγωνο ΟΑΓΔ θεωρούμε την πλευρά ΔΓ να κινείται ομαλά προς τα κάτω παράλληλα προς τον εαυτό της και την ΟΔ να στρέφεται ομαλά γύρο από το Ο, μέχρι να συμπέσει με την ΟΑ σε ίσο χρόνο με την ΔΓ. Η τροχιά του σημείου τομής των ΔΓ και ΟΔ, κάθε στιγμή της κίνησής τους παράγει την τετραγωνίζουσα. Στο σχήμα το τόξο ΔΕ είναι η τετραγωνίζουσα.



Στο σχήμα λοιπόν έχουμε την τετραγωνίζουσα ΔΕ και ένα τεταρτοκύκλιο ΑΔ. Έστω q το μήκος του τόξου ΑΔ. Ο Πάππος αποδεικνύει τη σχέση : $\frac{q}{\alpha}=\frac{\alpha}{OE}$.
Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το μήκος q του τεταρτοκυκλίου ΑΔ προκύπτει σαν τέταρτη ανάλογος των τμημάτων α, α και ΟΕ. Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 4q, δηλαδή ίσο με το μήκος του κύκλου.
Χρησιμοποιούμε τώρα την πρόταση που απέδειξε ο Αρχιμήδης στο έργο του ''*Κύκλου μέτρησις*'' ότι *το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ορθογωνίου*

τριγώνου με δύο κάθετες πλευρές ίσες με το μήκος του κύκλου και την ακτίνα αντίστοιχα.
Για να τετραγωνίσουμε τον κύκλο κάνουμε τα παρακάτω βήματα :

- Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ΑΓ=r και ΑΒ=4q.
- Παίρνουμε το μέσο Μ της ΑΒ και σχηματίζουμε το ορθογώνιο ΑΜΔΓ του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με του τριγώνου ΑΒΓ.
- Προεκτείνουμε την ΓΔ και παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΔΜ
- Κατασκευάζουμε το ημικύκλιο με διάμετρο την ΓΕ
- Στο Δ φέρουμε κάθετη στην ΓΕ που τέμνει το ημικύκλιο στο Ζ. Το τμήμα ΔΖ είναι η ζητούμενη πλευρά x του τετραγώνου.



Οπότε το εμβαδόν του τετραγώνου ΔΖΗΘ ισούται με το εμβαδόν του δοθέντος κύκλου.

Πράγματι : $x^2 = ΓΔ.ΔΕ = ΓΔ.ΔΜ = \frac{AB}{2}AΓ = \frac{2\pi r}{2}r = \pi r^2$.

Η τετραγωνίζουσα από μερικούς συγγραφείς αναφέρεται ως τετραγωνίζουσα του Δεινόστρατου. Όμως ο Ιππίας ο Ηλείος είναι αρχαιότερος του Δεινόστρατου και με τη βοήθεια της τετραγωνίζουσας είχε τριχοτομήσει την γωνία. Για το λόγο αυτό οι περισσότεροι συγγραφείς την αποδίδουν στον Ιππία. Επίσης με τη βοήθεια της τετραγωνίζουσας μπορούμε να διαιρέσουμε μια γωνία σε όσα ίσα μέρη θέλουμε.

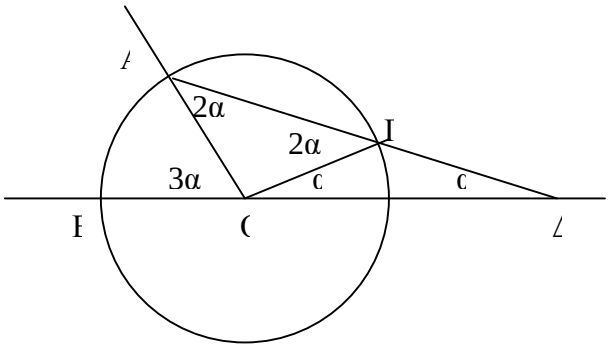
Η εξίσωση της τετραγωνίζουσας σε καρτεσιανή μορφή είναι :

$$y = \frac{x}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right)} .$$

Στην **τριχοτόμηση γωνίας** ζητείται να κατασκευαστεί γωνία ίση με το 1/3 δοθείσης γωνίας. Το αδύνατο της επίλυσης αποδείχθηκε το 1837.
Λύσεις του προβλήματος έδωσαν ο Ιππίας ο Ηλείος ($5^{ος}$ π.Χ αι.) με την τετραγωνίζουσα, ο Αρχιμήδης δύο λύσεις με νεύση και την έλικα του, ο Νικομήδης με την κογχοειδή, ο Πάππος με νεύση. Επίσης λύσεις έδωσαν μετά την αρχαιότητα και οι Pascal (1650), Ceva (1699), Mac Laurin (1742), Delenges (1783), Plateau (1826), Longchamps (1888) και Pergassi (1893).

Θα δώσουμε τώρα τη λύση με νεύση που αποδίδεται στον Αρχιμήδη.

Έστω η προς τριχοτόμηση γωνία ΑΟΒ. Γράφουμε κύκλο με κέντρο Ο και τυχαία ακτίνα. Προεκτείνουμε τη ΒΟ και φέρνουμε την ευθεία ΑΔ έτσι ώστε ΟΑ=ΓΔ. Τότε η γωνία ΟΔΓ είναι το 1/3 της ΑΟΒ.



Η απόδειξη στηρίζεται στα δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΟΓ και ΟΓΔ και στις εξωτερικές γωνίες.
Η κατασκευή (νεύση) της ευθείας ΑΓΔ με την ιδιότητα ΟΑ=ΓΔ μπορεί να γίνει με ειδικό όργανο που επινοήθηκε από τον Αρχιμήδη.

VII. Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές είναι ισοδύναμο με την διαίρεση του κύκλου σε ν ίσα τόξα με κανόνα και διαβήτη. Οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες είχαν κατασκευάσει με κανόνα και διαβήτη τα κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών :
α) 4, 8, 16, 32, 64, ... δηλαδή της μορφής 2^n, n = 2, 3, 4, 5, 6, ...
β) 3, 6, 12, 24, 48, ... δηλαδή της μορφής $3\cdot 2^n$, n = 0, 1, 2, 3, 4, ...
γ) 5, 10, 20, 40, 80, ... δηλαδή της μορφής $5\cdot 2^n$, n = 0, 1, 2, 3, 4, ...
δ) 15, 30, 60, 120, ... δηλαδή της μορφής $3\cdot 5\cdot 2^n$, n = 0, 1, 2, 3, 4, ...

Οι κατασκευές των παραπάνω κανονικών πολυγώνων υπήρχαν στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο, αλλά και σε έργα άλλων Γεωμετρών, όπως στην *Αλμαγέστη* του **Κλαύδιου Πτολεμαίου**, στα *Μηχανικά* του **Φίλωνος** και αλλού.

Όμως το πρόβλημα της κατασκευής κανονικών πολυγώνων στην γενική του μορφή παρέμενε άλυτο για πολλούς αιώνες. Ο **Αρχιμήδης** στην σωζόμενη πραγματεία του «*Περί του κανονικού επταγώνου*» είχε δώσει τρόπο κατασκευής του, όμως με νεύση, και ως εκ τούτου η κατασκευή ήταν μη παραδεκτή γιατί δεν γινόταν αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη. Το κανονικό δεκαεπτάγωνο δεν βρισκόταν στον παραπάνω πίνακα και δεν υπήρχε από τους αρχαίους Γεωμέτρες καμία μνεία για την κατασκευή του. Όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο της εργασίας, αυτό μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, όπως απέδειξε ο **C. F. Gauss** το 1796 σε ηλικία μόλις 19 ετών. Επίσης απέδειξε και ποια κανονικά πολύγωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη κλείνοντας το θέμα οριστικά.

VIII. Συμπεράσματα

Στη σύντομη αυτή περιήγηση στα διάφορα γεωμετρικά προβλήματα, τις κατασκευές και τις λύσεις που έδωσαν οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής :

- Επιλύθηκε ένα πολύ μεγάλο μέρος από τα προβλήματα που είναι δυνατόν να επιλυθούν με κανόνα και διαβήτη (χαρακτηριστική εξαίρεση είναι η κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου).
- Τα προβλήματα που δεν είναι δυνατόν να επιλυθούν με κανόνα και διαβήτη επιλύθηκαν με χρήση πολλών άλλων καμπυλών και οργάνων κατασκευής που επινοήθηκαν για το σκοπό αυτό.
- Αν και η επιταγή του κανόνα και διαβήτη ήταν κυρίαρχη δεν δίστασαν να προχωρήσουν σε λύσεις με άλλα μέσα, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί στο ερευνητικό αρχαιοελληνικό πνεύμα και στην ανήσυχη φύση του.

Τώρα αναφορικά με την απαίτηση του κανόνα και του διαβήτη έχουμε να αναφέρουμε τα εξής. Ο Ιταλός μαθηματικός **Lorenzo Mascheroni** (1750-1800) στο έργο του *Geometria del Compasso* (Pavia, 1797) "Γεωμετρία του διαβήτη" αποδεικνύει ότι κάθε πρόβλημα που μπορεί να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να επιλυθεί με χρήση μόνο του διαβήτη. Το έργο του αυτό το αφιέρωσε στο Ναπολέοντα Βοναπάρτη όταν αυτός είχε εκστρατεύσει στην Ιταλία. Είναι γνωστό το επεισόδιο στη Γαλλική Ακαδημία των Επιστημών. Ο Ναπολέων, που γνώριζε το έργο του Mascheroni, σε μια συνεδρίασή της που παρευρισκόταν, αναφέρθηκε στο θέμα και προκάλεσε το θαυμασμό του P. Laplace που φώναξε ενώπιον όλων:

«Από εσάς τα πάντα περιμέναμε Στρατηγέ
εκτός από μαθήματα μαθηματικών».

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό σαν **θεώρημα Mohr-Mascheroni**. Ο Δανός μαθηματικός **George Mohr** (1640-1697) είχε δημοσιεύσει την απόδειξη αυτή σε μια μικρή αφανή εργασία του, με τίτλο *Euclides Danicus* (Ευκλείδης εκ Δανίας) που κυκλοφόρησε στην Κοπεγχάγη το 1672. Η εργασία αυτή βρέθηκε σε ένα παλαιοβιβλιοπωλείο της Κοπεγχάγης το 1928 από ένα φοιτητή μαθηματικών που την έδειξε στον καθηγητή του των μαθηματικών Johannes Hjelmslev. Αυτός αναγνώρισε την αξία της και την αναδημοσίευσε το ίδιο έτος. Στο παράρτημα δίνουμε κάποιες κατασκευές Mohr-Mascheroni.

Επίσης το 1822 ο Γάλλος μαθηματικός **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) απέδειξε ότι κάθε πρόβλημα που μπορεί να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να επιλυθεί με χρήση κανόνα και διαβήτη σταθερού ανοίγματος (σκουριασμένος διαβήτης). Την απόδειξη αυτή την τελειοποίησε το 1833 ο Ελβετός Γεωμέτρης **Jacob Steiner** (1790-1863) και για αυτό η παραπάνω πρόταση αναφέρεται σαν **θεώρημα Poncelet-Steiner**. Το θεώρημα αυτό προϋποθέτει κανόνα και ένα μόνο κύκλο με το κέντρο του, που χαράχθηκε στο επίπεδο άπαξ. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα (1904) ο **Francesco Severi** (1879-1961) απέδειξε ότι δεν είναι απαραίτητος ούτε ολόκληρος ο 'κύκλος Poncelet-Steiner', όπως λέγεται. Ότι χρειάζεται μόνο ένα τόξο αυτού του κύκλου οσοδήποτε μικρό, μαζί με το κέντρο του.

Από τις έως τώρα διαθέσιμες πηγές, φαίνεται ότι μάλλον οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες δεν γνώριζαν τα δύο παραπάνω θεωρήματα. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι κάθε πρόβλημα που επιλύεται με κανόνα και διαβήτη μπορεί επίσης να επιλυθεί :

- Με ένα γνώμονα
- Με κανόνα που πάνω του είναι σημειωμένα δύο σημεία
- Με ένα κανόνα με παράλληλες ακμές.

Θα συνοψίσουμε τώρα τις απόψεις του Πάππου για τις γεωμετρικές κατασκευές όπως αυτές εμφανίστηκαν στη δυτική Ευρώπη το 16^{ο} αιώνα μέσω της *Συναγωγής*. Γεωμετρικές κατασκευές πραγματοποιήθηκαν με ευθείες, κύκλους, κωνικές τομές ή πιο πολύπλοκες καμπύλες. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν και άλλες κατασκευαστικές τεχνικές όπως η νεύση, ή εφευρέθηκαν κατάλληλα όργανα. Αν αυτά τα όργανα ήταν εύχρηστα, λειτουργικά και παρουσίαζαν ενδιαφέρον τότε τα μελετούσαν θεωρητικά και αποδείκνυαν τις ιδιότητές τους. Τελικός σκοπός στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων ήταν να βρεθούν κατάλληλες κατασκευές ώστε κάθε πρόβλημα να επιλύεται με μέσα της κατηγορίας του. Συνέπεια αυτού ήταν το ότι τα προβλήματα ταξινομήθηκαν ανάλογα με τα μέσα κατασκευής τους σε επίπεδα, στερεά, ή γραμμικά. Ο Γεωμέτρης λοιπόν ήταν υποχρεωμένος να λύσει κάθε πρόβλημα με μέσα ανάλογα με την κατηγορία του.
Αν και υπήρχαν μερικές ενστάσεις για μέσα όπως η τετραγωνίζουσα και οι έλικες για την επίλυση στερεών προβλημάτων, τελικά και αυτά φαίνεται ότι βρήκαν τη θέση τους στη Γεωμετρία όπως και οι κωνικές τομές.

Η *Συναγωγή* προσέφερε κάποια επιχειρηματολογία σχετικά με την ερμηνεία της γεωμετρικής ακρίβειας. Η τοποθέτηση του Πάππου στο ερώτημα ήταν αμφίθυμη. Εξήγησε με αυστηρό τρόπο την κατασκευαστική ακρίβεια και βάσισε την ταξινόμησή του σε αυτή. Όμως ασχολήθηκε και με κατασκευές που απέκλιναν από αυτή την ακρίβεια. Οι παρατηρήσεις του για τα πλεονεκτήματα των διάφορων οργάνων ή άλλων κατασκευαστικών διαδικασιών φαίνεται να αναφέρονται μάλλον στην πρακτική της κατασκευής παρά στην εξιδανικευμένη τεχνική της.

Παρά την απουσία ρητών επιχειρημάτων για την γεωμετρική ακρίβεια, η καθαρή δομή των μεθόδων της κατάλληλης γεωμετρικής κατασκευής που παρουσίασε ο Πάππος, είχε σημαντική επιρροή στους μαθηματικούς του 16^{ου} αιώνα και μετέπειτα για την γεωμετρική ακρίβεια.

Οι απόψεις του Πάππου λοιπόν εστιάζονται στα παρακάτω τρία σημεία :
Πρώτον, το θέμα σχετικά με τη νομιμοποίηση διαδικασιών στη γεωμετρία εστιάστηκε μάλλον στην κατασκευή παρά στις μεθόδους απόδειξης ή στα ερωτήματα ύπαρξης.
Δεύτερον, το ερώτημα για την κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή διασπάστηκε σε δύο ξεχωριστά ζητήματα. Την οριοθέτηση μεταξύ γεωμετρικών και μη γεωμετρικών διαδικασιών και την ταξινόμηση των διαδικασιών σύμφωνα με την απλότητα των μέσων.
Τρίτον, η ταξινόμηση των προβλημάτων έγινε με γνώμονα τις καμπύλες που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή και αυτό οδήγησε τους μαθηματικούς στο να επικεντρώσουν το ενδιαφέρον τους στις καμπύλες και σε διαδικασίες και μεθόδους που θα μπορούσαν να γενικευτούν.

2. Οι γεωμετρικές κατασκευές τον 16^{ο} & 17^{ο} αιώνα

I. Το έργο του F. Viete

Γύρω στο 1600 δύο λόγοι ώθησαν τους μαθηματικούς να ξανασκεφθούν το ερώτημα της νομιμότητας των μέσων των γεωμετρικών κατασκευών. Ο ένας ήταν η ανάγκη επίλυσης ενός πλήθους μη επίπεδων προβλημάτων που δεν είχαν εξετάσει οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες και ο άλλος το ξεκίνημα της χρήσης άλγεβρας για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Οι τρεις μαθηματικοί που ασχολήθηκαν ενδελεχώς με το θέμα ήταν ο **Viete** ο **Kepler** και ο **Καρτέσιος**.

Ο François Viete (1540-1603) υποστήριξε ότι για να νομιμοποιηθεί η χρήση της **νεύσης** σαν μέσο για τις γεωμετρικές κατασκευές θα έπρεπε στα πρώτα 3 αξιώματα του Ευκλείδη να προστεθεί ένα ακόμη. Έτσι στο έργο του *Supplementum Geometriae* (1593) προσέθεσε ένα νέο αξίωμα :
"*Δύνασαι να φέρεις ευθεία γραμμή από τυχαίο σημείο προς δύο οποιεσδήποτε ευθείες έτσι ώστε η τομή της με αυτές να παράγει τμήμα ίσο με δοθέν άλλο*".

Η ιδέα της νομιμοποίησης των μέσων των κατασκευών με ρητή εισαγωγή ενός αξιώματος ήταν νέα. Δεν υπήρχαν τέτοια ίχνη στα κλασικά μαθηματικά. Όπως θα δούμε παρακάτω ο **Newton** χρησιμοποίησε αργότερα την προσέγγιση του Viete και πρόσθεσε αξιώματα ισοδύναμα της κατασκευής με νεύση.

Ο Viete στο έργο του *Supplementum Geometriae* εξήγησε ότι αντί των δύο ευθειών στη νεύση, μπορεί να δοθούν μία ευθεία και ένας κύκλος. Ο Viete κατόπιν κάνει μερικά σχόλια για την εισαγωγή του νέου αξιώματος. Αναφέρει ότι η κογχοειδής του Νικομήδη πιθανώς επινοήθηκε προκειμένου να εκτελεστεί η κατασκευή της νεύσης και ότι ο Αρχιμήδης δέχτηκε αυτό το αξίωμα σιωπηρά. Αλλά, έγραψε, ο Αρχιμήδης είχε επίσης αποδεχτεί στις κατασκευές την παραβολή και την έλικα. Προχωράει σε κριτική του Αρχιμήδη για τη χρησιμοποίηση της έλικας που αντικαθιστά το κύκλο. Στη συνέχεια πρόσθεσε ότι θα συνεχίσει τη συζήτηση για αυτά τα θέματα μετά το πέρας των κατασκευών που θα κάνει (Bos H. [1], σ.168-169). Όμως δεν επανέρχεται σε αυτό το θέμα.

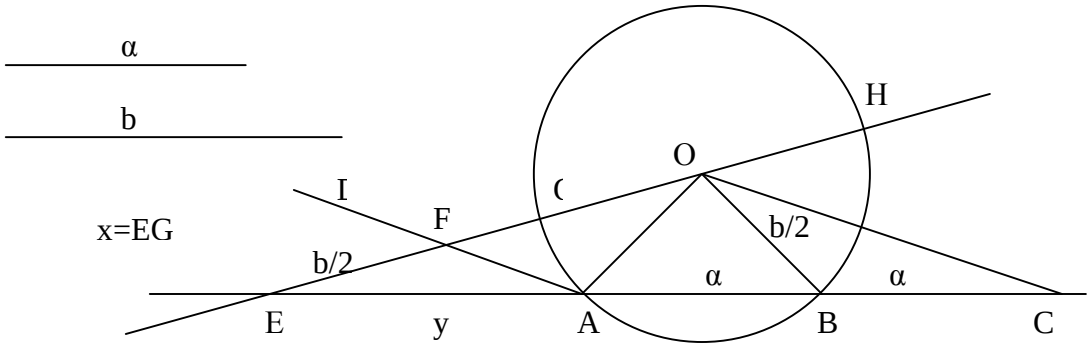
Ο κύριος σκοπός του έργου του *Supplementum Geometriae*, ήταν να αποδείξει την δύναμη του αξιώματος της νεύσης. Στο βιβλίο του έδειξε ότι, με βάση το νέο αξίωμα , η τριχοτόμηση της γωνίας και η εύρεση δύο μέσων αναλόγων μπορούσαν να επιλυθούν. Στη συνέχεια προχώρησε για να αποδείξει ότι κάθε πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής το οποίο όταν μεταφραστεί αλγεβρικά, οδηγεί σε μια εξίσωση 3^{ου} ή 4^{ου} βαθμού, θα μπορούσε να αναχθεί ή σε τριχοτόμηση ή σε εύρεση δύο μέσων αναλόγων. Ως εκ τούτου το νέο του αξίωμα έκανε τη γεωμετρία να είναι σε θέση να διαπραγματεύεται όλα τα προβλήματα ανώτερης τάξης που οδηγούν σε εξισώσεις βαθμού μικρότερου από 5. Ταυτόχρονα έδειξε την κεντρική θέση που κατέχουν τα δύο κλασικά προβλήματα της τριχοτόμησης και της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων στις κατασκευές.

Βέβαια από τη *Συναγωγή* του Πάππου ακόμη ήταν γνωστό ότι και τα δύο αυτά κλασικά προβλήματα μπορούσαν να επιλυθούν με τη μέθοδο της νεύσης και ότι αν επεκτεινόταν η γεωμετρία με αυτό το αξίωμα όλα τα προβλήματα βαθμού μικρότερου από 5 θα μπορούσαν να επιλυθούν.

Θα δούμε τώρα τη διαπραγμάτευση του Viete στα δύο αυτά προβλήματα.

Κατασκευή δύο μέσων αναλόγων - Viete (*Supplementum Geometriae*)

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα α και b, με α<b. Ζητείται να κατασκευαστούν δύο μέσοι ανάλογοι x και y των α, b.

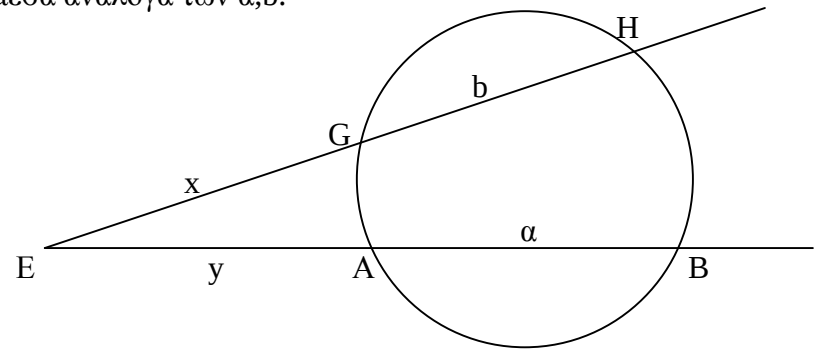


Κατασκευή

- Κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο O και διάμετρο b και μια χορδή AB=α.
- Προεκτείνουμε την AB και προς τις δύο πλευρές και παίρνουμε BC=α, φέρουμε την OC και την ημιευθεία AD έτσι ώστε AD//OC.
- Με νεύση φέρουμε την ευθεία EFO από το O που τέμνει την BA στο E και την AD στο F έτσι ώστε EF= b/2.
- Η ευθεία EFO τέμνει τον κύκλο στα G και H.
- Τότε x=EG και y=EA είναι οι δύο μέσες ανάλογες.

Απόδειξη

Στην πρόταση 4 της *Supplementum* ο Viete είχε αποδείξει το εξής :
Από σημείο E εκτός κύκλου φέρουμε δύο τέμνουσες EAB και EGH με EG=x, EA=y, AB=α και GH=b. Αν ισχύει ότι xy=αb , τότε $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$. Δηλαδή τα τμήματα x, y είναι τα δύο μέσα ανάλογα των α,b.



Η απόδειξη της πρότασης γίνεται με την βοήθεια της δύναμης σημείου ως προς κύκλο πρόταση III.36 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

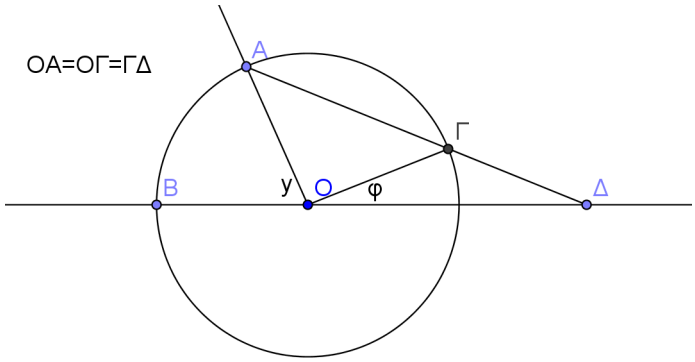
Τώρα στην κατασκευή των δύο μέσων αναλόγων η νεύση απαιτεί EF=b/2=GO, οπότε x=EG=FO.

Από την ομοιότητα έχουμε $\frac{EF}{EA}=\frac{FO}{AC}$ δηλαδή $\frac{b/2}{y}=\frac{x}{2\alpha}$ άρα xy=αb.

Οπότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση τα x, y είναι τα δύο μέσα ανάλογα των α,b.

Κατασκευή τριχοτόμησης γωνίας - Viete (*Supplementum Geometriae*)

Δίνεται γωνία ΑΟΒ=y. Ζητείται να κατασκευαστεί γωνία φ τέτοια ώστε φ=$\frac{1}{3}$y .



Η κατασκευή που κάνει με νεύση ο Viete είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που είχε κάνει ο Αρχιμήδης και έχουμε παρουσιάσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η νεύση γίνεται έτσι ώστε ΟΑ=ΟΓ=ΓΔ όπως στο παραπάνω σχήμα.
Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ο Viete προτιμάει νεύση μεταξύ ευθείας και κύκλου και όχι νεύση μεταξύ δύο ευθειών, όπως αυτή της κατασκευής του Πάππου.

Στο σημείο αυτό έχουμε να αναφέρουμε το εξής. Η κατασκευή του Αρχιμήδη υπήρχε στο έργο του *Λήμματα* (πρόταση 8). Το έργο αυτό έφτασε στη δυτική Ευρώπη αργότερα σε σχέση με τα άλλα έργα των αρχαίων Ελλήνων Γεωμετρών. Η πρώτη του έκδοση στα λατινικά έγινε το 1659 από αραβική μετάφραση ίσως του πρωτότυπου έργου του Αρχιμήδη. Η έκδοση της *Supplementum Geometriae* έγινε το 1593, οπότε πρέπει να εικάσουμε ότι ο Viete μάλλον βρήκε τη λύση μόνος του.

Όπως αναφέραμε παραπάνω ο Viete απέδειξε ότι κάθε πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής το οποίο όταν μεταφραστεί αλγεβρικά, οδηγεί σε μια εξίσωση $3^{ου}$ ή $4^{ου}$ βαθμού, θα μπορούσε να αναχθεί ή σε τριχοτόμηση ή σε εύρεση δύο μέσων αναλόγων.
Οι εξισώσεις $3^{ου}$ βαθμού που κατασκεύασε ο Viete ήταν οι εξής :

$x^3 + 3\alpha^2 x = 2\alpha^2 b$ (1)
$x^3 - 3\alpha^2 x = 2\alpha^2 b,\ b>\alpha>0$ (2)
$x^3 - 3\alpha^2 x = 2\alpha^2 b,\ \alpha>b>0$ (3)
$3\alpha^2 x - x^3 = 2\alpha^2 b,\ b>\alpha>0$ (4)
$3\alpha^2 x - x^3 = 2\alpha^2 b,\ \alpha>b>0$ (5)

Ο Viete απέδειξε ότι κάθε εξίσωση της μορφής (1) ή (2) ανάγεται σε εύρεση μέσων αναλόγων, ενώ κάθε εξίσωση της μορφής (3), (4) ή (5) ανάγεται σε τριχοτόμηση.
Επιπλέον κάθε εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού $x^3 + \alpha x^2 + bx + c = 0$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού x=y-α/3, παίρνει τη μορφή x^3 +Ax =B. Οπότε ο Viete κατασκεύασε όλες τις εξισώσεις $3^{ου}$ βαθμού με νεύση. Η κατασκευή του μετασχηματισμού x=y-α/3 μπορεί να επιτευχθεί με ευθείες και κύκλους.

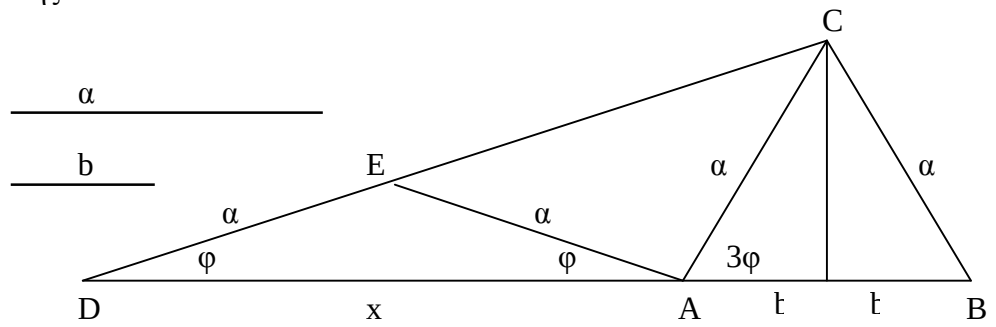
Για τις εξισώσεις $4^{ου}$ βαθμού ο Viete σημειώνει ότι μπορούν να αναχθούν σε $3^{ου}$ βαθμού μέσω τετραγωνικών εξισώσεων και των τύπων του Cardano. Στη συνέχεια με τη βοήθεια κατάλληλου μετασχηματισμού κάθε εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού μπορεί να πάρει μια από τις παραπάνω πέντε μορφές.

Άρα η κατασκευή των ριζών κάθε εξίσωσης $4^{ου}$ βαθμού μπορεί να πραγματοποιηθεί με ευθείες και κύκλους και στη συνέχεια με νεύση.

Θα δούμε τώρα την κατασκευή των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3\alpha^2 x = 2\alpha^2 b$, $\alpha>b>0$ (3)

Κατασκευή ριζών μιας κυβικής εξίσωσης - Viete (*Supplementum Geometriae*)

Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα α, b με α>b. Να κατασκευαστούν οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 3\alpha^2 x = 2\alpha^2 b$.



Κατασκευή

- Κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒC με ΑΒ=2b και ΑC=ΒC=α και προεκτείνουμε την ΒΑ προς τα αριστερά.
- Υποθέτουμε ότι η τριχοτόμηση γωνίας είναι δυνατή. Κατασκευάζουμε τότε την CD έτσι ώστε η γωνία CDB=$\frac{1}{3}$CAB.
- Τότε το ζητούμενο τμήμα x είναι το AD=x.

Απόδειξη

Παίρνουμε το σημείο Ε στην CD τέτοιο ώστε ΕΑ=ΕD. Αν η γωνία CDB=φ, τότε και η γωνία ΕAD=φ. Η γωνία CAB=3φ και αφού είναι εξωτερική στο τρίγωνο ACD, θα είναι ACD=2φ. Όμως AEC=2φ άρα DE=EA=AC=CB=α.
Οπότε x=2ασυνφ, b=ασυν3φ. Η τριγωνομετρική σχέση συν3φ=4συν^{3}φ-3συνφ μας οδηγεί στην δοθείσα εξίσωση $x^3 - 3\alpha^2 x = 2\alpha^2 b$.
Άρα το ζητούμενο τμήμα x είναι το AD.

Θα συνοψίσουμε τις απόψεις και τη συνεισφορά του Viete στην επίλυση προβλημάτων. Ο Viete είδε τον περιορισμό στις κατασκευές με ευθείες και κύκλους σαν ελάττωμα στην γεωμετρία και προσπάθησε να το εξαλείψει προσθέτοντας το αξίωμα της νεύσης. Επέλεξε σαν αξίωμα τη νεύση αντί των κωνικών τομών μη λαμβάνοντας υπόψιν την παρακαταθήκη του Πάππου με την ταξινόμηση του. Εφαρμόζοντας τη 'νέα άλγεβρα'-***Analytic art***- σαν αναλυτικό εργαλείο, ήταν σε θέση να ταξινομήσει ένα μεγάλο αριθμό μη επίπεδων προβλημάτων, αυτά που ανάγονται σε εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού. Έδειξε ότι αυτά τα προβλήματα μπορούσαν να αναχθούν είτε σε τριχοτόμηση είτε σε εύρεση δύο μέσων ανάλογων και ότι η επέκταση της γεωμετρίας με τη νεύση ήταν ικανή να τα λύσει. Ο Viete έδειξε ότι η άλγεβρα συνδυασμένη με μια προσεκτικά διατυπωμένη θέση για τις κατασκευές παρείχε μια καλά δομημένη και ενδιαφέρουσα επέκταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Χαρακτηριστικά, η ακροτελεύτια φράση του στο έργο του ***Analytic art*** είναι :

"ΝΑ ΜΗΝ ΑΦΗΣΟΥΜΕ ΚΑΝΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΛΥΤΟ"

Εντούτοις ο Viete δεν εξέτασε το ερώτημα για το πώς θα προχωρήσει πέρα από τις δυνατότητες που του παρείχε η νεύση και έμεινε σε αυτή.

ΙΙ. Ο Johannes Kepler (1571-1630) τήρησε μια πιο σκληρή στάση για το θέμα. Υποστήριξε ότι άλλα μέσα για τις γεωμετρικές κατασκευές εκτός από ευθείες και κύκλους δεν πρέπει να επιτρέπονται στη γεωμετρία. Εξέφρασε αυτή την άποψή του στο έργο του *Harmonice Mundi* (1619) που είναι μια μελέτη μεγάλης κλίμακας για την αρμονία στη γεωμετρία, τη μουσική και την αστρονομία. Στη γεωμετρία επιδιώκοντας αρμονικές ιδιότητες, που τις βρήκε πρωταρχικά στα κανονικά πολύγωνα, τις συνέδεσε με τα πλατωνικά στερεά. Στο πρόγραμμά του υποστήριξε ότι ο Δημιουργός κανένα άλλο κανονικό πολύγωνο δεν χρησιμοποίησε για την κατασκευή του σύμπαντος εκτός από αυτά που είναι έδρες των πλατωνικών στερεών και κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

Για να υπερασπιστεί την θέση του άσκησε ισχυρή κριτική στα διάφορα μέσα για τις γεωμετρικές κατασκευές των κλασικών και σύγχρονων μαθηματικών για να λύσουν μη επίπεδα προβλήματα. Ισχυρίστηκε ότι όλα αυτά τα μέσα κατασκευής οδηγούν σε διάφορες καμπύλες πολύ πιο σύνθετες και λιγότερο σαφείς από ότι οι ευθείες και οι κύκλοι και για αυτό το λόγο τα απέρριψε. Η προσέγγισή του ήταν αυστηρή και εναρμονισμένη με τις επιταγές του Ευκλείδη. Όπως φαίνεται δεν άσκησε καμία επίδραση στην περαιτέρω ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Πάντως η θέση του και η διαπραγμάτευσή του για την έννοια της κατασκευής είναι πολύ σαφής.

ΙΙΙ. Ο Καρτέσιος, Rene Descartes (1596-1650) εξέτασε την έννοια της κατασκευής λεπτομερέστερα απ' ότι ο Viete και ο Kepler. Τα επιχειρήματά του που αναπτύχθηκαν στο μνημειώδες έργο του *Geometrie* το 1637, θα τα συζητήσουμε στις επόμενες παραγράφους.

Ο Καρτέσιος χρησιμοποίησε εκτεταμένα αλγεβρικές μεθόδους για να επιτύχει την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Για να αποδείξει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου του κατέφυγε στα κλασικά μαθηματικά. Διαπραγματεύθηκε σε έκταση το δύσκολο πρόβλημα του Πάππου, το οποίο έλυσε με τη βοήθεια των κωνικών τομών και πραγματοποίησε και τις αντίστοιχες γεωμετρικές κατασκευές.
Ταξινόμησε τα γεωμετρικά προβλήματα στα πρότυπα της ταξινόμησης του Πάππου και έθεσε την κατευθυντήρια γραμμή για την περαιτέρω ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

Η φιλοδοξία του ήταν να μπορούν να επιλυθούν όλα τα γεωμετρικά προβλήματα με τη μέθοδό του. Οι ιδέες του συμπυκνώθηκαν στο κατασκευαστικό του πρόγραμμα, που ήταν ένα πρόγραμμα 'πλατφόρμα'. Αυτό αναπτύχθηκε τόσο από τον ίδιο, όσο και από άλλους μαθηματικούς σύγχρονους ή μεταγενέστερους του.

3. Η έννοια της κατασκευής στην *Geometrie* του Καρτέσιου

I. Οι κατασκευές στην Geometrie

Η συνεισφορά του Καρτεσίου στην διευκρίνηση της έννοιας της γεωμετρικής κατασκευής ήταν τεράστια. Η επίδραση που άσκησε ήταν καταλυτική, αφού σχεδόν όλοι οι μετέπειτα μαθηματικοί υιοθέτησαν τις απόψεις του όπως αναπτύχθηκαν στην *Geometrie* (1637). Ο Καρτέσιος ασχολήθηκε εκτεταμένα με κατασκευαστικά προβλήματα και τα έλυσε με τη βοήθεια διάφορων καμπυλών. Οι καμπύλες ήταν αλγεβρικές και μάλιστα ασχολήθηκε και με την κατασκευή αυτών των καμπυλών. Διαπραγματεύθηκε λοιπόν σε βάθος το ερώτημα "**πως θα κατασκευάσουμε τα μέσα της κατασκευής".**

Οι Viete και Kepler δεν ήρθαν αντιμέτωποι με αυτό το ερώτημα γιατί ο μεν Viete πραγματοποίησε τις κατασκευές με νεύση, ο δε Kepler απέρριψε όλες τις νέες κατασκευές. Ο Καρτέσιος αντιμετώπισε το παραπάνω ερώτημα άμεσα. Η προσέγγισή του ήταν μάλλον στην κατεύθυνση της ταξινόμησης του Πάππου. Δέχτηκε διάφορες καμπύλες σαν μέσα για τις κατασκευές και υποστήριξε ότι πολύ περισσότερες καμπύλες, από αυτές που ο Πάππος είχε αναφέρει, ήταν αποδεκτές.

Από την άλλη όμως απέρριψε κάποιες καμπύλες που ο Πάππος είχε αποδεχθεί, όπως η τετραγωνίζουσα και η σπείρα. Ο Καρτέσιος συνέδεσε την αποδοχή των καμπυλών σαν μέσο για τις κατασκευές, με τον τρόπο που αυτές κατασκευάζονται. Προφανώς λοιπόν τότε ήλθε αντιμέτωπος με το ερώτημα της κατασκευής αυτών των καμπυλών, δηλαδή της κατασκευής των μέσων κατασκευής.

Ο Καρτέσιος δέχθηκε καμπύλες σαν μέσα κατασκευής αν μπορούσαν να προκύψουν από ειδικές κινήσεις ή συνδυασμό κινήσεων. Αυτές οι κινήσεις πραγματοποιούνται με όργανα που μετακινούνται κατάλληλα, ή ήδη χαραγμένες καμπύλες που μετακινούνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Οι καμπύλες που προκύπτουν από αυτές τις κινήσεις, σύμφωνα με τον Καρτέσιο, είναι αποδεκτές στη Γεωμετρία αν ικανοποιούν ένα βασικό κριτήριο που είναι το παρακάτω:

Ο λόγος των ταχυτήτων των κινήσεων πρέπει να είναι γνωστός.

Ο Καρτέσιος χρησιμοποιώντας αυτό το κριτήριο απορρίπτει την τετραγωνίζουσα και την σπείρα γιατί, όπως υποστηρίζει, παράγονται από συνδυασμό ευθύγραμμων και κυκλικών κινήσεων και ο λόγος των ταχυτήτων συνεπάγεται το λόγο της περιφέρειας προς την διάμετρο του κύκλου. Ο λόγος αυτός (που ισούται με π) ποτέ δεν θα γίνει γνωστός και για αυτό η τετραγωνίζουσα, η σπείρα και παρόμοιες καμπύλες δεν είναι αποδεκτές σαν μέσα για γεωμετρικές κατασκευές. Ο Καρτέσιος αποκαλεί τέτοιου είδους καμπύλες "**μηχανικές**" σε αντιδιαστολή με τις αποδεκτές που τις αποκαλεί "**γεωμετρικές**".

Το παραπάνω κριτήριο όμως δεν είναι πάντα επαρκώς ακριβές για να αποφανθείς αν δοθείσα καμπύλη είναι γεωμετρική ή όχι. Ο Καρτέσιος χρησιμοποίησε την άλγεβρα και για να αποσαφηνίσει το θέμα έφτασε στα παρακάτω συμπεράσματα :

1. Οι καμπύλες που είναι **γεωμετρικές** με την παραπάνω έννοια, έχουν αλγεβρικές (πολυωνυμικές) εξισώσεις σε σύστημα ευθύγραμμων συντεταγμένων.
2. Όταν μια καμπύλη έχει πολυωνυμική εξίσωση, τότε μπορεί να προκύψει από συνδυασμό κινήσεων που είναι αποδεκτές στην γεωμετρία και για αυτό είναι αποδεκτή σαν μέσο για γεωμετρικές κατασκευές.
3. Στις κατασκευές πέραν αυτών που πραγματοποιούνται με ευθείες και κύκλους, πρέπει να χρησιμοποιούμε πάντα την **απλούστερη** δυνατή καμπύλη

και μια καμπύλη είναι η απλούστερη αν ο βαθμός της εξίσωσή της είναι ο μικρότερος δυνατός.

Ο τρόπος που ο Καρτέσιος έφτασε σε αυτά τα συμπεράσματα δεν μας είναι γνωστός, αλλά είναι γεγονός ότι αυτά έχουν πολλά πλεονεκτήματα. Προσαρμόστηκαν και γενίκευσαν την ταξινόμηση των προβλημάτων του Πάππου, και ήταν συμβατά με την χρήση άλγεβρας για την επίλυσή τους.

Η οπτική γωνία του Καρτέσιου οδήγησε στην ταξινόμηση των προβλημάτων με τέτοιο τρόπο ώστε στις πρώτες δύο κλάσεις να συμπίπτουν με του Πάππου. Πράγματι ο Καρτέσιος υιοθέτησε την ορολογία του Πάππου και κάλεσε **επίπεδα προβλήματα** αυτά που κατασκευάζονται με ευθείες και κύκλους και **στερεά προβλήματα** αυτά που κατασκευάζονται με κωνικές τομές (εκτός του κύκλου). Περαιτέρω η ταξινόμηση των Καρτέσιου και Πάππου αρχίζει να αποκλίνει. Όλα τα άλλα προβλήματα, που καλούνται **γραμμικά** στον Πάππο, ο Καρτέσιος τα ταξινόμησε περαιτέρω σαν αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με καμπύλη τρίτου βαθμού, αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με καμπύλη τετάρτου βαθμού κλπ. Μηχανικές όμως καμπύλες δεν επιτρέπονται στις γεωμετρικές κατασκευές.

Για τον Καρτέσιο η Γεωμετρία ήταν πρωταρχικά η τέχνη της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων και ιδιαιτέρως κατασκευαστικών προβλημάτων. Στην *Geometrie* αξίωσε να καταδείξει πως η γενική φιλοσοφική του μέθοδος που αναπτύχθηκε στην *Discours de la Methode* (Περί της μεθόδου λόγος), παρέχει μια πλήρη μέθοδο για τη Γεωμετρία. Η *Geometrie* μάλιστα στην πρώτη έκδοσή της το 1637 ήταν παράρτημα στην *Discours de la Methode*.
Σαν μέθοδος θα έπρεπε πρώτα απ' όλα να αναφέρεται με σαφήνεια για το ποιος επακριβώς είναι ο σκοπός της γεωμετρίας και στη συνέχεια να παρέχει τα μέσα για να φτάσεις σε αυτό το σκοπό.

Σύμφωνα με τον Καρτέσιο **σκοπός** της γεωμετρίας είναι τα προβλήματα να λύνονται με τις απλούστερες δυνατές γεωμετρικές κατασκευές. Η **απλότητα** και η **αποδοχή** ορίστηκαν στα παραπάνω τρία συμπεράσματα. Ο Καρτέσιος όμως πουθενά δεν αναφέρει ρητά αυτά τα συμπεράσματα στην γενική του μέθοδο, αλλά πιθανώς φαίνεται ότι συσχετίζονται με την αρχή στη γενική του μέθοδο ότι **"δεχόμαστε σαν αληθές μόνο ότι μπορούμε να συλλάβουμε με σαφήνεια και ευδιάκριτα "**.

Για να μεθοδεύσει τη Γεωμετρία ο Καρτέσιος παρείχε μια ενοποιημένη προσέγγιση μέσω αλγεβρικών τεχνικών. Με τη βοήθεια αυτών των τεχνικών όλα τα κατασκευαστικά προβλήματα μπορούν να αναχθούν σε ένα σύνολο βασικών προβλημάτων και ο Καρτέσιος έδωσε τις βασικές κατασκευές για αυτά.

Το πρώτο μέρος της μεθόδου συνίσταται στην μετάφραση του γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρική μορφή. Τα άγνωστα ευθύγραμμα τμήματα αναπαριστώνται με x,y,..., και τα γνωστά με a,b,…, τα δεδομένα και οι ζητούμενες σχέσεις μεταξύ αυτών των τμημάτων εκφράζονται με εξισώσεις. Αυτές θα είναι πολυωνυμικές εξισώσεις και πρέπει να βρεθούν οι άγνωστοι. Καταλήγουμε λοιπόν σε ένα σύστημα όπου οι άγνωστοι απαλείφονται από αυτές τις εξισώσεις και η διαδικασία καταλήγει σε μια εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο. Τώρα το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση αυτής της εξίσωσης, η λύση της δίνει την τιμή ενός αγνώστου και οι τιμές των άλλων αγνώστων βρίσκονται από τις υπόλοιπες εξισώσεις.

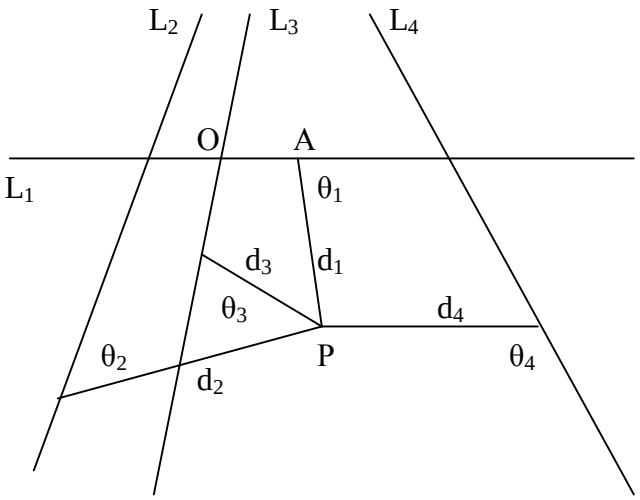
Ο Καρτέσιος για να δείξει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου του καταφεύγει σε ένα δύσκολο κλασικό πρόβλημα, το περίφημο πρόβλημα του Πάππου. Θα δούμε τώρα την διαπραγμάτευση του στο πρόβλημα αυτό.

ΙΙ. Το πρόβλημα του Πάππου

Γύρω στο 1631 ο Ολλανδός μαθηματικός **Jacob Van Gool** ή **Golius** (1596-1667) πρότεινε στον Καρτέσιο να εφαρμόσει τη νέα του μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος του Πάππου. Το περιεχόμενο δύο γραμμάτων του Καρτέσιου στον Golius έχει διασωθεί. Στο ένα, γραμμένο τον Ιανουάριο του 1632, εμφανίζεται να έχει στείλει στον Golius ένα χειρόγραφο με την λύση του προβλήματος του Πάππου και περίμενε τα σχόλια του. Το χειρόγραφο αυτό έχει χαθεί. Στο δεύτερο γράμμα του στις 2 Φεβρουαρίου του 1632 ο Καρτέσιος εκφράζει μόνο την ευγνωμοσύνη του στον Golius για την ευνοϊκή του κρίση για τη λύση του προβλήματος του Πάππου.

Όπως φαίνεται από αυτά τα δύο γράμματα ο Καρτέσιος κατάφερε να λύσει το πρόβλημα το 1632. Στην *Geometrie* του (1637) εφαρμόζει πολύ αποτελεσματικά τη μέθοδό του για να δείξει την ισχύ της στην επίλυση δύσκολων γεωμετρικών προβλημάτων από την κλασική εποχή. Η αντιμετώπιση του προβλήματος του Πάππου έδωσε στον Καρτέσιο περισσότερα απ' ότι μόνο η ευκαιρία να αναπτύξει τις νέες του μαθηματικές τεχνικές και να πείσει για την ισχύ της μεθόδου του. Τα δύο γράμματα του 1632 μαζί με τις παραγράφους που αφιερώνει ο Καρτέσιος για το πρόβλημα του Πάππου στην *Geometrie* συνηγορούν στο ότι η πρόκληση του Golius έδωσε στον Καρτέσιο τις ιδέες με τις οποίες θα μπορούσε να υπερβεί τα εμπόδια που θα ήταν τροχοπέδη στο πρόγραμμά του, τη στιγμή μάλιστα που δεν ολοκλήρωσε το προγενέστερο έργο του *Rules*, και αυτό του επέτρεψε να επιτύχει ένα πλήρες πρόγραμμα για τις γεωμετρικές κατασκευές.

Το πρόβλημα του Πάππου στη γενική του μορφή (Bos H. [1] σ. 272-274):
Δίνονται ν ευθείες L_i , i =1,2,3,…,ν στο επίπεδο, ν γωνίες θ_i , i =1,2,3,…,ν και ένα ευθύγραμμο τμήμα α. Για κάθε σημείο P του επιπέδου ορίζω ως d_i την πλάγια απόσταση του από την ευθεία L_i που σχηματίζει με αυτή γωνία θ_i. Ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P του επιπέδου για τα οποία ο λόγος των αποστάσεων d_i , που εξαρτάται από το πλήθος των ευθειών, είναι σταθερός και ίσος με δ. Οι λόγοι είναι :
Για 3 ευθείες : $d_1^2 : d_2d_3$.
Για 4 ευθείες : $d_1d_2 : d_3d_4$.
Για 5 ευθείες : $d_1d_2d_3 : \alpha d_4d_5$.
Για 6 ευθείες : $d_1d_2d_3 : d_4d_5d_6$.
Γενικά για (**άρτιο πλήθος**) 2κ ευθείες : $d_1 \ldots d_\kappa : d_{\kappa+1} \ldots d_{2\kappa}$.
και για (**περιττό πλήθος**) 2κ+1 ευθείες : $d_1 \ldots d_{\kappa+1} : \alpha d_{\kappa+2} \ldots d_{2\kappa+1}$.



Στο έργο του *Rules*, ο Καρτέσιος είχε εξηγήσει ότι το πρώτο βήμα για να λυθεί ένα πρόβλημα ήταν να παραχθούν οι εξισώσεις οι οποίες σε προβλήματα γεωμετρικών τόπων περιείχαν δύο αγνώστους.

Ανάλυση

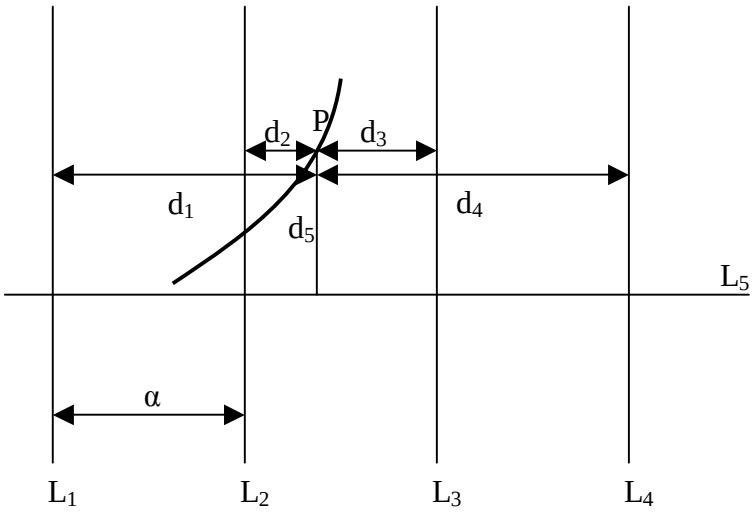
1. Υποθέτουμε ένα σύστημα αξόνων με την αρχή τους Ο στο σημείο τομής της L_1 με κάποια άλλη ευθεία έστω την L_3. Έστω ο x-άξονας κατά μήκος της L_1 και η γωνία που σχηματίζει η d_1 με την L_1 ίση με θ_1. Σε αυτό το σύστημα έστω ότι $d_1 = y$.
2. Εφαρμόζοντας την ομοιότητα σε κατάλληλα τρίγωνα για ένα σημείο Ρ με συντεταγμένες x, y οι αποστάσεις d_i μπορούν να εκφραστούν $d_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$,όπου οι συντελεστές α_i, β_i και γ_i είναι σταθεροί λόγοι εκφρασμένοι με σχέσεις κατάλληλων σταθερών τμημάτων που ορίζονται στις ευθείες L_i σε σχέση με τη θέση των ευθειών αυτών και τις δοθείσες γωνίες θ_i . Οπότε τα α_i , β_i και γ_i είναι οι γνωστά.
3. Ο δοθείς σταθερός λόγος δ μπορεί να εκφραστεί σαν εξίσωση :

$$y(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2)\ldots = \delta(\alpha)(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1)(\alpha_{l+1} x+\beta_{l+1} y+\gamma_{l+1})\ldots$$

(l=k+1 αν οι ευθείες είναι 2κ, l=κ+2 αν οι ευθείες είναι 2κ+1. Ο παράγοντας δ(α) στο δεξιό μέλος υπάρχει μόνο όταν το πλήθος των ευθειών είναι περιττό).

Ο Καρτέσιος το 1632 ήταν σε θέση να ορίσει τις εξισώσεις σε ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος ξεκινώντας από απλές θέσεις των ευθειών. Ο Καρτέσιος θεώρησε την απλούστερη περίπτωση για πέντε ευθείες τέσσερις παράλληλες και μία κάθετη.

Το πρόβλημα του Πάππου των πέντε ευθειών (Bos H. [1] σ. 275-278):
Δίνονται τέσσερις παράλληλες ευθείες L_1, L_2, L_3 και L_4 που ισαπέχουν μεταξύ τους απόσταση α και μια ευθεία L_5 που τέμνει κάθετα αυτές. Ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ρ του επιπέδου που για τα οποία οι κάθετες αποστάσεις d_i από τις ευθείες L_i ικανοποιούν τη σχέση : $\alpha d_3 d_5 = d_1 d_2 d_4$.



Στην *Geometrie* ο Καρτέσιος πρώτα βρήκε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου. Έθεσε $d_3 = y$ και $d_5 = x$, όποτε $d_1 = 2\alpha-y$, $d_2 = \alpha-y$ και $d_4 = \alpha+y$.
Οπότε η σχέση $\alpha d_3 d_5 = d_1 d_2 d_4$ γίνεται :
$\alpha xy = (2\alpha-y)(\alpha-y)(\alpha+y) \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha xy = y^3 - 2\alpha y^2 - \alpha^2 y + 2\alpha^3}$ (1)
Η σχέση (1) είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου.

Η καμπύλη με εξίσωση την (1) λέγεται **καρτεσιανή παραβολή**. Στη συνέχεια έδωσε την κατασκευή αυτής της καμπύλης με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου χάρακα (Bos H. [1], σ.278-279).

Κατασκευή για το πρόβλημα του Πάππου των πέντε ευθειών

1. Θεωρώ την παραβολή UVU με άξονα συμμετρίας την ευθεία L_3 και παράμετρο α (που σημαίνει ότι σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων u, v η εξίσωση της είναι $\alpha u=v^2$). Η παραβολή μπορεί να κινηθεί πάνω και κάτω κατά μήκος του άξονα της, της ευθείας L_3. Υπάρχει τότε ένα σημείο Q στον άξονα L_3, εντός της παραβολής με απόσταση α από την κορυφή της V.

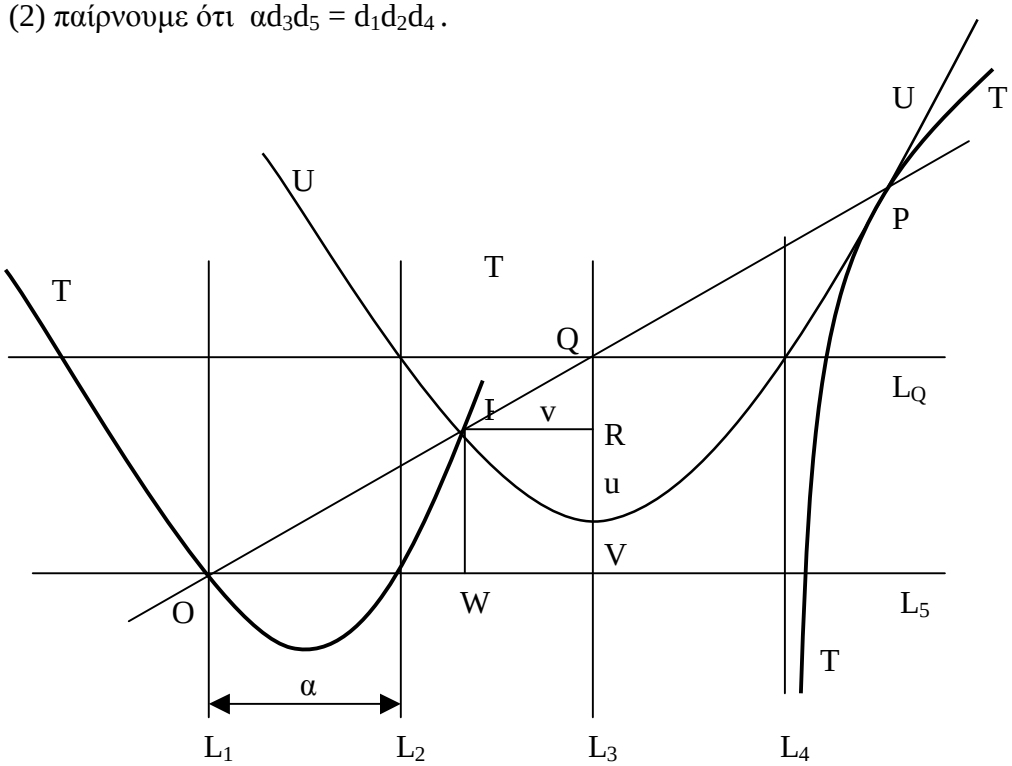
2. Θεωρώ την ευθεία OQ που μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σημείο τομής O των L_1, L_5 καθώς το Q μετακινείται κατά μήκος της L_3.

3. Κατά το συνδυασμό των κινήσεων τα σημεία P που προκύπτουν από την τομή της παραβολής και της ευθείας γεννούν μια νέα καμπύλη με δύο κλάδους TOPT και TPT. Αυτή η καμπύλη είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Απόδειξη

Η παραβολή σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων u, v ικανοποιεί την εξίσωση $\alpha u=v^2$. Τότε $\alpha+v = d_4$, $\alpha-v = d_2$ από τις οποίες προκύπτει $v^2 = \alpha^2 - d_2d_4$ (1).

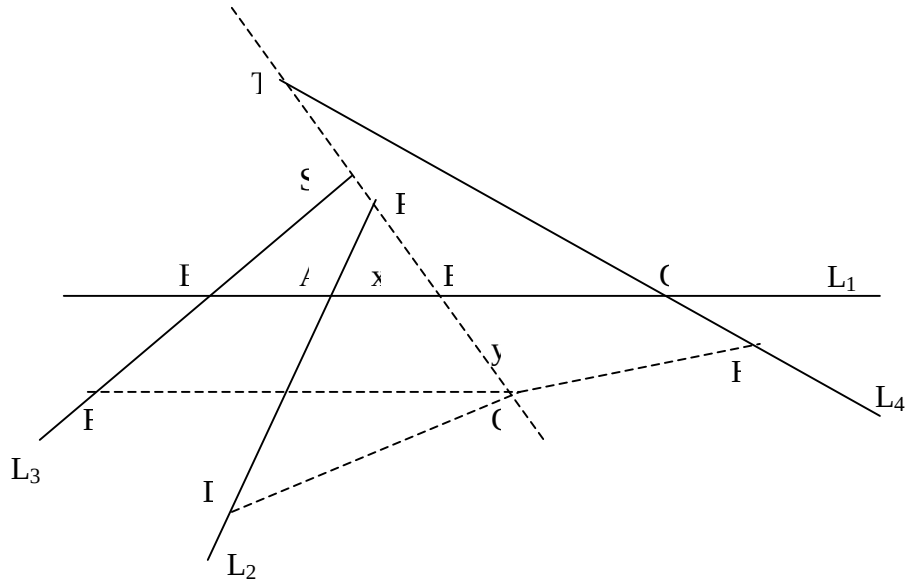
Επίσης τα τρίγωνα PQR και OWP είναι όμοια και QR=QV-VR = α-u, οπότε έχουμε $\frac{QR}{PR}=\frac{PW}{OW}$ δηλαδή $\frac{\alpha-u}{d_3}=\frac{d_5}{d_1}$ άρα $\alpha u = \alpha^2 - \frac{\alpha d_3 d_5}{d_1}$ (2). Εξισώνοντας τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $\alpha d_3 d_5 = d_1 d_2 d_4$.



Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η κατασκευή δεν προκύπτει από την ανάλυση. Η εξίσωση που είχε παράγει ο Καρτέσιος για την καμπύλη ($\alpha xy = y^3 - 2\alpha y^2 - \alpha^2 y + 2\alpha^3$) δεν οδηγεί με προφανή τρόπο στη διαδικασία της κατασκευής. Επίσης ο Καρτέσιος δεν εξηγεί πως βρήκε τη διαδικασία της κατασκευής.

Το πρόβλημα του Πάππου των τεσσάρων ευθειών (Geometrie σ. 309-314)
Δίνονται 4 ευθείες L_i , i =1,2,3,4 στο επίπεδο και 4 γωνίες θ_i , i =1,2,3,4. Για κάθε σημείο P του επιπέδου ορίζω d_i την πλάγια απόσταση του από την ευθεία L_i που σχηματίζει με αυτή γωνία θ_i. Ζητείται να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P του επιπέδου για τα οποία ισχύει $d_1d_2 = d_3d_4$.

Το παρακάτω σχήμα είναι αυτό ακριβώς που υπάρχει στη *Geometrie* στη σελίδα 309. Έστω L_i οι τέσσερις ευθείες του παρακάτω σχήματος και C σημείο του γεωμετρικού τόπου. Οι αποστάσεις του C από τις τέσσερις ευθείες L_i, είναι οι CB, CD, CF και CH αντίστοιχα και οι δοθείσες γωνίες που σχηματίζουν με τις ευθείες είναι οι CBA, CDA, CFE και CHG αντίστοιχα.



Ο Καρτέσιος λέει ότι θα θεωρήσει τις δύο ευθείες AB, BC σαν κύριες ευθείες (principal lines) και θα αναφερθεί στις άλλες από αυτές. Στη συνέχεια εισήγαγε γράμματα για τους αγνώστους. Έθεσε :

x = AB
y = BC

Οι γωνίες του τριγώνου ARB είναι γνωστές οπότε ο λόγος των πλευρών AB, BR είναι γνωστός (νόμος ημιτόνων). Θέτει AB : BR = z : b

οπότε RB=$\frac{bx}{z}$. Τότε CR = y +$\frac{bx}{z}$. (Αν το R είναι μεταξύ των B και C τότε CR = y-$\frac{bx}{z}$ και αν το C είναι μεταξύ τωνB, R τότε CR = -y +$\frac{bx}{z}$).

Επίσης οι γωνίες του τριγώνου DRC είναι γνωστές και ο λόγος των πλευρών CR, CD είναι γνωστός. Θέτει z : c = CR : CD

Οπότε $CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2} = \frac{czy + bcx}{z^2}$.

Θέτει k = AE. Στο τρίγωνο ESB ο λόγος BE : BS είναι γνωστός

Θέτει z : d = BE : BS

οπότε $BS = \frac{dk + dx}{z}$ και $CS = \frac{zy + dk + dx}{z}$.

(Αν το S είναι μεταξύ B, C τότε $CS = \frac{zy - dk - dx}{z}$, και αν το C είναι μεταξύ B, S τότε $CS = \frac{-zy + dk + dx}{z}$).

Ομοίως στο τρίγωνο FCS θέτει z : e = CS : CF

οπότε $CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$.

Στη συνέχεια θέτει l = AG και από το τρίγωνο BGT θέτοντας z : f = BG : BT

παίρνουμε $BT = \frac{fl - fx}{z}$ και $CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$.

Στο τρίγωνο TCH θέτοντας z : g = TC : CH

παίρνουμε $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$.

Τώρα έχουμε ότι $d_1 = CB = y$, $d_2 = CD$, $d_3 = CF$, $d_4 = CH$ και από τη σχέση $d_1d_2 = d_3d_4$ παίρνουμε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου :

$$y^2 = \frac{(cfglz - dek\,z^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

Κατόπιν ο Καρτέσιος για να απλοποιήσει την εξίσωση θέτει :

$$2m = \frac{cfglz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}$$

$$\frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$$

$$o = \frac{-2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$$

$$\frac{-p}{m} = \frac{n^2}{z^2} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$$

Η εξίσωση τότε έχει την απλοποιημένη μορφή :

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2} \quad (1)$$

Ο Καρτέσιος στη συνέχεια ασχολήθηκε με την κατασκευή του γεωμετρικού τόπου με βάση την εξίσωση (1). Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι μια κωνική τομή της οποίας η θέση και οι παράμετροι εξαρτώνται από τους συντελεστές της εξίσωσης (1). Διέκρινε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την ποσότητα $\frac{p}{m}x^2$.

- Αν $\frac{p}{m}x^2 = 0$, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι παραβολή
- Αν $\frac{p}{m}x^2 > 0$, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι υπερβολή
- Αν $\frac{p}{m}x^2 < 0$, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι έλλειψη

Επίσης αν $\alpha^2 m = pz^2$ και η γωνία ILC είναι ορθή τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος αντί για έλλειψη.

Για την κατασκευή της κωνικής τομής ο Καρτέσιος παραπέμπει στις κατασκευές που ο Απολλώνιος έδωσε στα *Κωνικά* του. Στη συνέχεια αποδεικνύει ότι η κωνική τομή που κατασκευάστηκε ήταν ο ζητούμενος γ.τ δείχνοντας ότι η εξίσωσή της ταυτίζεται με αυτή του γεωμετρικού τόπου (εξίσωση 1).

4. Το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Καρτέσιου

I. Η κατασκευή των εξισώσεων στο έργο του Καρτέσιου

Μεταξύ του 1637 και 1750 η "**κατασκευή εξισώσεων**" ήταν μια σαφώς αναγνωρισμένη περιοχή μαθηματικής έρευνας. Οι εξισώσεις ήταν πολυωνυμικές εξισώσεις με ένα άγνωστο π.χ $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.
Το να "κατασκευάσεις" αυτήν την εξίσωση σημαίνει να εκτελέσεις μια γεωμετρική κατασκευή που θα αποφέρει ευθύγραμμα τμήματα με μήκη ίσα προς της ρίζες της εξίσωσης.

Ο Καρτέσιος εισήγαγε την άλγεβρα στο κατασκευαστικό του πρόγραμμα σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι ο Viete και εξαιτίας αυτού δέχθηκε κριτική από άλλους μαθηματικούς.

Το πρώτο μέρος της μεθόδου για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων συνίσταται στην μετάφραση του γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρική μορφή. Τα άγνωστα ευθύγραμμα τμήματα αναπαριστώνται με x,y,... και τα γνωστά με a,b,…, τα δεδομένα και οι ζητούμενες σχέσεις μεταξύ αυτών των τμημάτων εκφράζονται με αλγεβρικές εξισώσεις. Κατόπιν οι άγνωστοι πρέπει να απαλειφθούν από αυτές τις εξισώσεις και η διαδικασία καταλήγει σε μια εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο. Τώρα το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση αυτής της εξίσωσης.

Σε αυτό το στάδιο της διαδικασίας υπεισέρχεται η κατασκευή της εξίσωσης. Η εξίσωση πρέπει να επιλυθεί, αλλά μια αλγεβρική λύση δεν είναι ικανοποιητική. Για παράδειγμα η εύρεση δύο μέσων αναλόγων x και y μεταξύ δύο δοθέντων τμημάτων α, β οδηγεί στην εξίσωση $x^3 = \alpha^2\beta$, που μπορεί να λυθεί αλγεβρικά $x = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}$.
Όμως η λύση δεν είναι ικανοποιητική για το γεωμετρικό πρόβλημα γιατί δεν μας δίνεται τρόπος για να κατασκευαστεί γεωμετρικά το τμήμα x. Αυτό που χρειαζόμαστε τότε είναι μια διαδικασία για την γεωμετρική κατασκευή των ριζών της εξίσωσης. Ο Καρτέσιος έδωσε μια θεωρία κατασκευής των εξισώσεων σύμφωνα με τις ιδέες του, που εκφράσαμε παραπάνω. Έδωσε μια μέθοδο (διαδικασία) για την κατασκευή των ριζών των εξισώσεων με μέσο **αλγεβρικές** καμπύλες **ελάχιστου** δυνατού βαθμού. Πρώτα θα δούμε την κατασκευή των ριζών εξισώσεων πρώτου έως έκτου βαθμού και μετά την γενίκευση της μεθόδου.

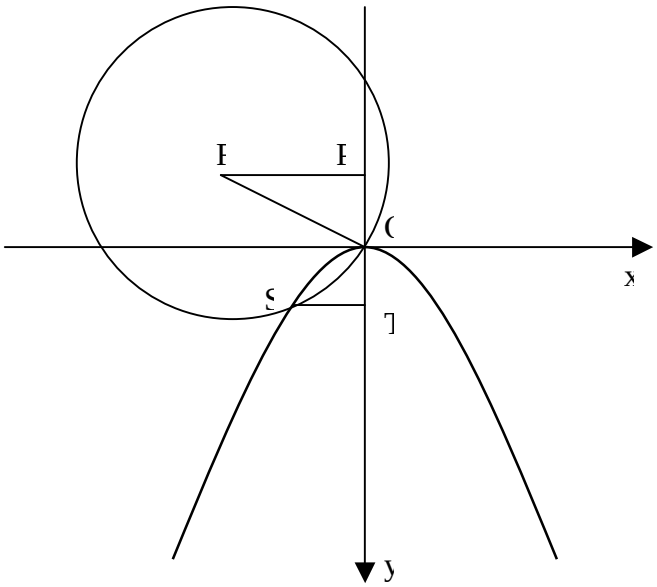
Αν ο βαθμός της εξίσωσης είναι ένα ή δύο, τότε οι ρίζες μπορούν να κατασκευαστούν με ευθείες και κύκλους. Ο Καρτέσιος έδωσε την κατασκευή και συμπέρανε ότι αυτά τα προβλήματα ήταν **επίπεδα**.

Αν ο βαθμός της εξίσωσης είναι τρία ή τέσσερα ο Καρτέσιος υποστήριξε ότι οι ρίζες της δεν μπορούν να κατασκευαστούν με ευθείες και κύκλους. Έδωσε ένα γενικό κανόνα με τον οποίο οι ρίζες κάθε **εξίσωσης 3ου** ή **4ου βαθμού** μπορούν να κατασκευαστούν με την τομή ενός **κύκλου** και μιας **παραβολής**. Έτσι αυτά τα προβλήματα ήταν **στερεά**, αφού απαιτούσαν μια κωνική τομή για την κατασκευή τους.

Για να κατανοήσουμε την διαδικασία ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση είναι η :

$$x^3 + px + q = 0 .$$

Σχεδιάζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων και την παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων δηλαδή $y = x^2$. Παίρνουμε το OP = ½(p-1) στον κατακόρυφο άξονα προς τα πάνω αν το ½(p-1) είναι θετικό ή προς τα κάτω αν είναι αρνητικό. Επίσης παίρνουμε το PR = ½ q στον οριζόντιο άξονα προς τα αριστερά αν το ½ q είναι θετικό, ενώ προς τα δεξιά αν είναι αρνητικό. Σχεδιάζουμε τον κύκλο με κέντρο R που περνάει από το O. Ο κύκλος τέμνει την παραβολή και σε άλλο σημείο έστω S. Προβάλουμε το S στον κατακόρυφο άξονα στο σημείο T. Το τμήμα ST είναι η ζητούμενη ρίζα (Bos H. [2] σ. 342): .



Στην περίπτωση της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης η κατασκευή του Καρτέσιου είναι λίγο πιο σύνθετη καθώς ο κύκλος δεν περνά από το O.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή ήταν βελτίωση των μεθόδων του Viete για προβλήματα των οποίων οι εξισώσεις είναι $3^{ου}$ ή $4^{ου}$ βαθμού. Ο Viete είχε αποδείξει ότι αυτά είναι κατασκευάσιμα με **νεύση.** Έτσι σε συνδυασμό με την αναγωγή των στερεών προβλημάτων στην κατασκευή της νεύσης που είχε κάνει ο Πάππος, αποδείχθηκε ότι όλα αυτά τα προβλήματα ήταν στερεά. Για να κατασκευάσουμε εξισώσεις $4^{ου}$ βαθμού μπορούμε πρώτα να τις αναγάγουμε σε $3^{ου}$ βαθμού με τους τύπους του Cardano και στη συνέχεια να τις κατασκευάσουμε (όπως είχε κάνει ο Viete).

Ο Καρτέσιος δίνει την κατασκευή της εξίσωσης $4^{ου}$ βαθμού αμέσως, χωρίς να την αναγάγει σε $3^{ου}$ βαθμού. Χρησιμοποιεί ένα κύκλο και μια παραβολή. Η κατασκευή θα μπορούσε να γίνει με υπερβολή, αντί της παραβολής, αλλά αυτή η κατασκευή θα ήταν πιο πολύπλοκη.

Αν η εξίσωση είναι $5^{ου}$ ή $6^{ου}$ βαθμού ο Καρτέσιος καλεί το πρόβλημα **υπέρ-στερεό.** Για αυτές τις εξισώσεις επίσης δίνει ένα γενικό κατασκευαστικό κανόνα, εισάγοντας σαν μέσο, μια νέα καμπύλη, την **καρτεσιανή παραβολή**. Η εξίσωσή της είναι : $a\,x\,y = abc + ac\,x - bx^2 - x^3$.

Ο Καρτέσιος εξηγεί πως για δοθείσα εξίσωση $5^{ου}$ ή $6^{ου}$ βαθμού, οι ρίζες της μπορούν να προκύψουν σαν τομή ενός κύκλου και αυτής της καμπύλης. Η κατασκευή που έδωσε είναι αρκετά περίπλοκη, αλλά σωστή.
Οι κατασκευές εξισώσεων βαθμού από 3 έως 6 διαπραγματεύονται στο τρίτο και τελευταίο βιβλίο της *Geometrie* και εκεί διατυπώνονται τα εξαγόμενα αποτελέσματα της πραγματείας. Ο Καρτέσιος θεώρησε ότι αυτές οι κατασκευές δείχνουν ικανοποιητικά πως κάποιος θα μπορούσε να προχωρήσει στην κατασκευή εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 6. Κλείνει την *Geometrie* ως εξής :

«Δεν είναι ο σκοπός μου να γράψω ένα μεγάλο βιβλίο. Προσπαθώ μάλλον να εισάγω πολλά με λίγα λόγια. ... έχοντας κατασκευάσει όλα τα επίπεδα προβλήματα με τομή κύκλου και ευθείας, όλα τα στερεά με τομή κύκλου και παραβολής και τελικά όλα τα άλλα ενός βαθμού μεγαλύτερου με τομή κύκλου και μιας καμπύλης ενός βαθμού αντίστοιχα μεγαλύτερου από την παραβολή, το μόνο που απαιτείται είναι να ακολουθήσει κανείς την ίδια γενική μέθοδο για να κατασκευάσει όλα τα προβλήματα, όλο και πιο σύνθετα, επ' άπειρο. Σε μαθηματικά θέματα που υπόκεινται σε μοντέλο προόδου, αν δοθούν τα πρώτα δύο ή τρία βήματα είναι εύκολο να βρεις τα υπόλοιπα. Ελπίζω ότι εκ των υστέρων θα με κρίνουν ευγενικά, όχι μόνο για τα θέματα που έχω εξηγήσει αλλά και για αυτά που έχω σκόπιμα παραλείψει για να αφήσω και σε άλλους την ευχαρίστηση της ανακάλυψης.» (*Geometrie*, σ. 413)

Στην πραγματικότητα η κληρονομιά του Καρτέσιου για τη γενίκευση της μεθόδου ήταν περισσότερο προβληματική από ότι προτάθηκε εδώ. Θα διαπραγματευθούμε στη συνέχεια τα θέματα που άφησε ανοιχτά.

ΙΙ. Η κατασκευή των εξισώσεων : το πρόβλημα και οι τεχνικές

Σε αυτή την παράγραφο θα διατυπώσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το πρόβλημα της κατασκευής εξισώσεων. Θα διευκρινίσουμε τις έννοιες, προϋποθέσεις και τεχνικές που θα παίξουν ρόλο στην μετέπειτα διαπραγμάτευση του προβλήματος και στα αποτελέσματα που επιτυγχάνονται.

Στην παρακάτω διαπραγμάτευση θα υποθέσουμε ότι η προς κατασκευή εξίσωση είναι ανάγωγη (δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί), γιατί διαφορετικά το πρόβλημα μπορεί να λυθεί κατασκευάζοντας τους παράγοντες της εξίσωσης. Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με την παραγοντοποίηση των πολυωνύμων.

Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί μια πολυωνυμική εξίσωση να γίνει γινόμενο δύο πολυωνύμων μικρότερου βαθμού. Ένας από αυτούς συζητήθηκε από τον Καρτέσιο και λαμβάνει χώρα όταν το πολυώνυμο H(x) μπορεί να γραφεί H(x)=U(x)V(x), όπου τα δύο πολυώνυμα κατασκευάζονται με ευθείες και κύκλους. Έτσι η κατασκευή της εξίσωσης H(x)=0 ανάγεται στις U(x)=0 και V(x)=0. Σε συνδυασμό με την κατασκευή εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού ο Καρτέσιος πρότεινε μεθόδους για να ελέγξεις αν η εξίσωση μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Αργότερα οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με αυτό το θέμα και το ανέπτυξαν π.χ ο **Johann Hudde** (1628-1704) έγραψε μια μεγάλη πραγματεία για αυτό το 1659. Παρόλα αυτά, αυτές οι μελέτες δεν συνδέθηκαν με την κατασκευή των εξισώσεων και οι μελετητές μετά τον Καρτέσιο δεν εστίασαν την προσοχή τους στην παραγοντοποίηση των εξισώσεων.

Το δεύτερο είδος αναγωγής λαμβάνει χώρα όταν η εξίσωση H(x)=0 μπορεί να γραφεί H(x)=U(V(x)) με τα πολυώνυμα U και V να είναι μικρότερου βαθμού από του H. Σε αυτή την περίπτωση η κατασκευή της H(x)=0 μπορεί να εκτελεστεί σε δύο βήματα. Πρώτα κατασκευάζουμε την U(y)=0 και μετά εισάγοντας την τιμή της y που βρέθηκε κατασκευάζουμε την y=V(x). Αυτό το είδος αναγωγής εφαρμόζεται, παραδείγματος χάριν σε συνδυασμό με τους τύπους του Cardano, για την επίλυση εξισώσεων $4^{ου}$ βαθμού που οδηγεί σε εξίσωση $6^{ου}$ βαθμού, δηλαδή $3^{ου}$ βαθμού ως προς x^2. Στην διαπραγμάτευση αυτής της περίπτωσης ο Καρτέσιος είναι φανερά ενήμερος ότι οι εξισώσεις $6^{ου}$ βαθμού λύνονται σε δύο βήματα. Παρόλα αυτά δεν αναπτύσσει μεθόδους για αυτή την αναγωγή ούτε ρητά αναφέρει ότι πριν κατασκευάσεις μια εξίσωση πρέπει να καθορίσεις αν τέτοια αναγωγή μπορεί να γίνει.

Ο Fermat και ο De La Hire αναφέρονται στο θέμα αλλά δεν υπάρχει συστηματική μελέτη για αυτό κατά το $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα. Οι συγγραφείς το αγνόησαν.

Με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό το πρόβλημα της κατασκευής μιας (ανάγωγης) εξίσωσης μπορεί να τυποποιηθεί ως εξής :
Έστω ότι η προς κατασκευή εξίσωση είναι η :

$$\mathbf{H(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = 0.}$$

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρεθούν δύο κατασκευάσιμες καμπύλες F, G έτσι ώστε οι τετμημένες των σημείων τομής τους να είναι ρίζες της εξίσωσης H(x)=0. Αν οι εξισώσεις των F και G είναι οι

$$F(x,y)=0 \text{ και } G(x,y)=0,$$

τότε η τετμημένη των σημείων τομής των F και G είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$R_{F,G}(x)=0.$$

Η εξίσωση $R_{F,G}(x)=0$ προκύπτει με απαλοιφή του y από τις F και G. Η $R_{F,G}$ καλείται απαλοίφουσα (resultant) των F και G.

Υπάρχουν τώρα δύο συνθήκες για τις καμπύλες F και G.

Συνθήκη 1
Οι ρίζες της H(x)=0 θα είναι ρίζες της $R_{F,G}(x)=0$, δηλαδή $R_{F,G}(x)=A\cdot H(x)$, όπου A θα είναι σταθερά ή πολυώνυμο του x.
Συνθήκη 2
Οι καμπύλες F και G πρέπει να είναι ***αποδεκτές*** για γεωμετρικές κατασκευές και πρέπει να είναι οι ***απλούστερες δυνατές*** για την κατασκευή της εξίσωσης H(x)=0.

Η κατασκευή του Καρτέσιου για την εξίσωση $x^3+px+q=0$ που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι διευκρινιστική για τον ρόλο των δύο συνθηκών. Η κατασκευή όπως είδαμε πραγματοποιείται με μια παραβολή και ένα κύκλο.
Έχουμε λοιπόν :

- Την εξίσωση $H(x)=x^3+px+q=0$,
- F είναι η παραβολή με $F(x,y)=y-x^2=0$
- G είναι ο κύκλος με $G(x,y)=y^2+(p-1)y+x^2+qx=0$,

Η απαλοίφουσα είναι : $R_{F,G}(x)=x^4+px^2+qx=x(x^3+px+q)=xH(x)$.
Οπότε η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται. Σύμφωνα με τον Καρτέσιο ο κύκλος και η παραβολή είναι αποδεκτά μέσα κατασκευής, έτσι το πρώτο μέρος της δεύτερης συνθήκης επίσης ικανοποιείται. Η έννοια με την οποία ο Καρτέσιος θεωρεί αυτές τις καμπύλες σαν τις απλούστερες δυνατές (απλούστερη καμπύλη είναι αυτή με τον μικρότερο δυνατό βαθμό) θα συζητηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Η τυποποίηση της πρώτης συνθήκης δείχνει ότι αλγεβρικά το πρόβλημα της κατασκευής εξισώσεων είναι ένα πρόβλημα αντίστροφης απαλοιφής. Σε μια ευθεία διαδικασία δίνονται οι εξισώσεις F(x,y)=0 και G(x,y)=0 και ζητείται να απαλείψουμε το y για να προκύψει η $R_{F,G}(x)$. Εδώ αντίστροφα δίνεται η H(x) και πρέπει να βρεθούν οι F και G έτσι ώστε $R_{F,G}(x)=H(x)$ ή $R_{F,G}(x)=AH(x)$.

Μια πρώτη προσέγγιση για την επιλογή των F και G είναι να πάρουμε :
F(x,y) = y-H(x)
G(x,y) = y.
Με αυτή την προσέγγιση παίρνουμε το γράφημα της H(x) και τον άξονα x'x σαν καμπύλες κατασκευής. Υπάρχουν επίσης πολλές άλλες επιλογές.

Επειδή η πρώτη συνθήκη επιτρέπει τόσο μεγάλη ελευθερία κινήσεων, η δεύτερη συνθήκη γίνεται πολύ κρίσιμη. Η λειτουργία της είναι να περιορίσει αυτή την ελευθερία και να δώσει σημασία σε ένα πρόβλημα που καθαρά αλγεβρικά έχει μικρή σημασία. Όμως η δεύτερη συνθήκη δεν είναι τόσο σαφής. Τι είναι αποδεκτές καμπύλες και πότε μια καμπύλη είναι αρκούντως απλή;

Πολλές από τις μετέπειτα διαμάχες για την κατασκευή των εξισώσεων επικεντρώθηκαν σε αυτό το ερώτημα της **αποδοχής** και της **απλότητας** των καμπυλών κατασκευής. Ο Καρτέσιος υποστήριξε ότι οι καμπύλες είναι αποδεκτές στη Γεωμετρία αν μπορούν να προκύψουν από συνδυασμό συνεχών κινήσεων και έφθασε στο συμπέρασμα ότι οι αποδεκτές "γεωμετρικές" καμπύλες είναι όλες αυτές που έχουν αλγεβρικές εξισώσεις. Οι περισσότεροι μαθηματικοί ακολούθησαν τον Καρτέσιο αποδεχόμενοι όλες τις αλγεβρικές καμπύλες σαν γεωμετρικές και δεν στάθηκαν περισσότερο στο θέμα αυτό.

Στο δεύτερο μέρος της $2^{ης}$ συνθήκης (απλότητα) ο Καρτέσιος ήταν πιο σαφής. Η απλούστερη καμπύλη είναι αυτή με τον μικρότερο δυνατό βαθμό. Όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτή η ερμηνεία δεν ήταν γενικά αποδεκτή, αλλά οδήγησε τις περισσότερες μελέτες στην κατασκευή των εξισώσεων. Ο περιορισμός για τον

μικρότερο βαθμό πάλι αφήνει ελευθερία επιλογής για τις καμπύλες. Ο Καρτέσιος έκανε ο ίδιος οριστικές επιλογές, κατασκεύασε τις εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού με κύκλο και παραβολή (οποιοδήποτε ζεύγος κωνικών τομών θα ικανοποιούσε τις συνθήκες) και τις εξισώσεις $5^{ου}$ και $6^{υ}$ βαθμού με κύκλο και την καρτεσιανή παραβολή. Έγραψε ότι « ... *το μόνο απαραίτητο είναι να εφαρμόσεις την ίδια γενική μέθοδο για να κατασκευάσεις όλα τα προβλήματα, όλο και πιο σύνθετα, επ' άπειρο*».

Φαίνεται ότι ο Καρτέσιος είχε σαν γνώμονα την ακόλουθη γενική μέθοδο : Εξισώσεις βαθμού 2n-1 και 2n ανήκουν στην ίδια κλάση, θα κατασκευαστούν με κύκλο και καμπύλη F_n, βαθμού n. Η F_2 θα είναι **παραβολή**, η F_3 θα είναι **καρτεσιανή παραβολή**. Ο Καρτέσιος πρότεινε μια μέθοδο για να πάρουμε το γράφημα της καρτεσιανής παραβολής, με συνδυασμό κινήσεων μιας παραβολής και ενός κανόνα. Πιθανώς να σκέφθηκε ότι η F_n θα μπορούσε να γενικευτεί από την F_{n-1} με ανάλογο τρόπο. Αυτή η ερμηνεία του κατασκευαστικού προγράμματος του Καρτέσιου μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στα γραπτά των J. Kinckhuysen, De La Hire και Jakob Bernoulli. Φαίνεται ότι κανένας από τους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με το θέμα, πραγματικά δεν προσπάθησε να εφαρμόσει αυτό το πρόγραμμα. Ο λόγος για αυτό ήταν πιθανώς, ότι η απαίτηση του ελάχιστου βαθμού ικανοποιείτο καλύτερα αν οι καμπύλες F και G είχαν περίπου τον ίδιο βαθμό αντί, όπως πρότεινε ο Καρτέσιος, για μια καμπύλη F_n βαθμού n και ένα κύκλο G βαθμού 2.

Επίσης ο Καρτέσιος δεν εξήγησε γιατί επέλεξε την καρτεσιανή παραβολή παραμένοντας σε αυτό το σημείο αυθαίρετος.

Ο Fermat στο *Dissertatio* πρότεινε ότι ο Καρτέσιος χρειαζόταν μια καμπύλη βαθμού 2n-2 για να κατασκευάσει εξισώσεις βαθμού 2n ή 2n-1 και για αυτό στην γενική περίπτωση δεν θα μπορούσε να κάνει κάτι καλύτερο.

Για να συνοψίσουμε, η ερμηνεία του Καρτέσιου για την δεύτερη συνθήκη ήταν ότι **οι κατασκευαστικές καμπύλες θα πρέπει να είναι αλγεβρικές και του ελάχιστου δυνατού βαθμού**. Στα παραδείγματά του μια από τις καμπύλες ήταν πάντα κύκλος. Αργότερα οι συγγραφείς υιοθέτησαν την άποψη ότι οι δύο καμπύλες πρέπει να έχουν περίπου τον ίδιο βαθμό.

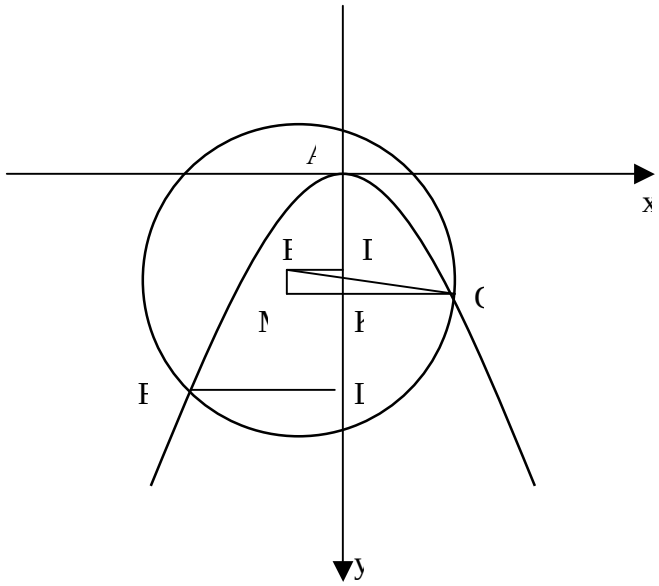
Ο Καρτέσιος δεν εξήγησε στην *Geometrie* πως βρήκε τις κατασκευές που παρουσίασε για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 6. Έδωσε αποδείξεις που ήταν σωστές αλλά από αυτές τις αποδείξεις δεν ήταν φανερή η μέθοδος εύρεσης των κατασκευών. Μετέπειτα συγγραφείς ανέπτυξαν και δημοσίευσαν τεχνικές που βρίσκουν για δοθείσα εξίσωση H(x)=0, τις εξισώσεις F(x,y)=0 και G(x,y)=0 των κατασκευαστικών καμπυλών F και G. Θα εξηγήσουμε στη συνέχεια αυτές τις τεχνικές ξεχωριστά.

Οι τεχνικές μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες :

- τεχνική των προσδιοριστέων συντελεστών
- τεχνική της εισαγωγής
- γεωμετρικές τεχνικές

Η **τεχνική των προσδιοριστέων συντελεστών** ξεκινά με την επιλογή δύο κατασκευαστικών καμπυλών F και G καθώς αφήνουμε τις παραμέτρους αυτών απροσδιόριστες. Μετά είτε με αλγεβρικά είτε με γεωμετρικά επιχειρήματα -με αναφορά σε ένα σχήμα- παράγουμε την εξίσωση που οι ρίζες της θα είναι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Οι συντελεστές σ' αυτή την εξίσωση εξαρτώνται από τις παραμέτρους. Αυτοί οι παράμετροι είναι τότε τέτοιοι, ώστε οι συντελεστές να ταυτιστούν με τους συντελεστές της δοθείσας εξίσωσης H(x)=0. Οι τιμές των παραμέτρων κατά συνέπεια καθορίζουν τις καμπύλες F και G.

Σαν παράδειγμα αυτής της τεχνικής θα δώσουμε το σημείωμα που ο **Frans Van Schooten** (1615-1660) πρόσθεσε στις κατασκευές του Καρτέσιου, με παραβολή και κύκλο για εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού, στη λατινική έκδοση της *Geometrie* του 1659. Εξηγώντας πως αυτές οι κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν, ο Van Schooten σημείωσε τα εξής (Bos H. [2] σ. 346):
Έστω ότι δίνεται μια εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού. Θα την κατασκευάσουμε με κύκλο και παραβολή. Οι παράμετροι που υπεισέρχονται είναι : η παράμετρος α της παραβολής, οι συντεταγμένες AD=b, DE=c του κέντρου E(b,c) του κύκλου και η ακτίνα d του κύκλου. Έστω x = GK η τετμημένη του σημείου τομής G, τότε AK= x^2/α.



Έχουμε $d^2 = EG^2 = EM^2 + MG^2 = (x^2/\alpha - b)^2 + (x + c)^2$.

Κάνουμε τις πράξεις και παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση για το x :

$$x^4 + (a^2 - 2ab)x^2 + 2a^2cx + a^2(b^2 + c^2 - d^2) = 0.$$

Γράφουμε τώρα την εξίσωση που θέλουμε να κατασκευάσουμε στην μορφή:
$x^4 - apx^2 + a^2qx - a^3r = 0$ (το α συνήθως θεωρείται σαν μονάδα).

Μετά εξισώνουμε τους συντελεστές και έχουμε :
$b = \frac{1}{2}(\alpha+p)$, $c = \frac{1}{2}q$, $d = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \frac{1}{2}p)^2 + (\frac{1}{2}q)^2 + ar}$.

Αυτές οι τιμές καθορίζουν τις δύο καμπύλες (την παραβολή και τον κύκλο). Συγκεκριμένα δίνουν το κέντρο E(b,c) και την ακτίνα d του κύκλου. Ο Van Schooten σημείωσε ότι ο κανόνας του Καρτέσιου για την κατασκευή των εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού προσαρμόζεται σε αυτούς τους τύπους.

Η δεύτερη τεχνική, της **εισαγωγής**, μπορεί να περιγραφεί ως εξής :
Δίνεται η εξίσωση H(x)=0. Επιλέγουμε σαν F μια καμπύλη της οποίας η εξίσωση είναι της μορφής $f_1(x) = f_2(x,y)$. Η πιο δημοφιλής προσέγγιση είναι η επιλογή $x^k = y$. Τότε 'εισάγουμε' αυτή την εξίσωση στην H(x)=0 αντικαθιστώντας όρους ή

παράγοντες $f_1(x)$ στην H(x)=0 και αντικαθιστώντας αυτούς με την $f_2(x,y)$. Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση G(x,y) = 0 που μας δίνει την καμπύλη G. Οι F και G είναι οι κατασκευαστικές καμπύλες για την εξίσωση H(x)=0. Στην περίπτωση που οι F και G δεν είναι ικανοποιητικές, τότε πρέπει να εκτελέσει την εισαγωγή με διαφορετικό τρόπο για να φθάσουμε σε νέες καμπύλες G_i και να κάνουμε τους συνδυασμούς $G(x,y) = \alpha F(x,y) + \Sigma\beta_i G_i(x,y) = 0$.
Τότε διαλέγουμε δύο οποιεσδήποτε από αυτές τις καμπύλες και έχουμε την ζητούμενη μορφή.

Αυτή την τεχνική πρώτος την περιέγραψε ο **Philippe de La Hire** (1640-1718) το 1679. Ένα παράδειγμα που έδωσε είναι το εξής (Bos H. [2] σ. 347):
Έστω ότι δίνεται η εξίσωση $x^6 + a^2x^4 - a^2bx^3 - a^2bcx^2 - a^2bcd^2 = 0$.
Παίρνει την εξίσωση $\alpha y = x^2$, και εισάγει αυτή με δύο τρόπους, βρίσκοντας δύο εξισώσεις $G_1 = 0$ και $G_2 = 0$:

$$G_1 = y^3 + ay^2 - \frac{b}{a}x^3 - \frac{bc}{a}x^2 - \frac{bc}{a}d^2 = 0$$

$$G_2 = y^3 + ay^2 - bxy - \frac{bc}{a}x^2 - \frac{bc}{a}d^2 = 0,$$

Αυτές είναι καμπύλες “δευτέρου είδους” (τρίτου βαθμού καμπύλες). Ο De La Hire σημειώνει ότι κάποιος μπορεί από αυτές να πάρει μια καινούρια εξίσωση $G_3 = 0$, την $G_3 = \alpha y - x^2 = 0$, η οποία είναι μια παραβολή. Η δοθείσα εξίσωση $6^{ου}$ βαθμού τώρα μπορεί να κατασκευαστεί με δύο οποιεσδήποτε από τις τρεις καμπύλες G_i και αν επιθυμεί τον μικρότερο δυνατό βαθμό, τότε θα διαλέξει την G_3 και μία από τις G_1, G_2.

Η τρίτη τεχνική, η **γεωμετρική**, ερμηνεύεται σαν γεωμετρικό πρόβλημα. Για δοθείσα εξίσωση ως προς x ένας δεύτερος άγνωστος y εισάγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η εξίσωση να γίνει ισοδύναμη με δύο ή τρεις ταυτόχρονα αναλογίες μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων που είναι γραμμικά ως προς x και y. Κάθε αναλογία τότε ορίζει μια κωνική τομή που μπορούν να είναι οι κατασκευαστικές καμπύλες. Η μέθοδος επινοήθηκε από τον **Rene de Sluse** (1622-1685) που την εφάρμοσε στο έργο του *Mesolabum* (1659) και την εξήγησε σε μια δεύτερη έκδοση (1668) αυτού του βιβλίου. Είδε την μέθοδο σαν γενίκευση των μέσων αναλόγων (*Mesolabum* ήταν ο λατινικός όρος για το μεσολάβο, το όργανο που χρησιμοποιήθηκε στην αρχαιότητα για την κατασκευή μέσων αναλόγων).

Στην περίπτωση δύο μέσων αναλόγων x και y μεταξύ των α και b έχουμε :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Οι τρεις αναλογίες ορίζουν τρεις κωνικές τομές :
$a : x = x : y$, $ay = x^2$, παραβολή
$a : x = y : b$, $xy = ab$, υπερβολή
$x : y = y : b$, $y^2 = xb$, παραβολή.

Οποιεσδήποτε δύο από τις τρεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν καμπύλες κατασκευής. Ο Sluse μπορούσε να επιλύσει όλα τα προβλήματα $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού. Για να διευκρινίσουμε την μέθοδο δίνουμε την κατασκευή της εξίσωσης $x^3 - px - q = 0$. Ξαναγράφει την εξίσωση με μορφή αναλογίας $\frac{p}{x^2} = \frac{x}{x + \frac{q}{p}}$. Εισάγει

το y σαν μέση ανάλογο μεταξύ των x και $x+\frac{q}{p}$. Έτσι μπορούμε να πάρουμε την σχέση $\frac{\sqrt{p}}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{x+\frac{q}{p}}$, που δίνει τρεις κωνικές τομές :

- την παραβολή $x^2=\sqrt{p}\,y$,
- την υπερβολή $y^2=x(x+\frac{q}{p})$ και
- την υπερβολή $xy=\sqrt{p}(x+\frac{q}{p})$.

Δύο οποιεσδήποτε από αυτές κατασκευάζουν την εξίσωση $x^3-px-q=0$. Η μέθοδος αυτή όμως δεν μπορεί να επεκταθεί για την κατασκευή εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 4 (Bos H. [2] σ. 348).

Οι τεχνικές που αναφέραμε παραπάνω χρησιμοποιούνταν για να βρουν τις "καλύτερες" καμπύλες για δεδομένη εξίσωση. Για τους περισσότερους από τους μαθηματικούς ήταν αυτονόητη η απαίτηση για καμπύλες ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αυτό στηρίζεται σε ένα γενικότερο ερώτημα, το εξής : «*δοθείσης μιας εξίσωσης ποιοι είναι οι μικρότεροι δυνατοί βαθμοί για τις καμπύλες κατασκευής της*». Στην πορεία για την ανάπτυξη του θέματος μεταξύ των μαθηματικών αναπτύχθηκε μια συναίνεση για το ερώτημα. Για να αποσαφηνίσουμε αυτό θα αναφέρουμε το παρακάτω κύριο αποτέλεσμα (Bos H. [2] σ. 349-351).

Κύριο αποτέλεσμα

Έστω H(x)=0 η προς κατασκευή εξίσωση βαθμού n. Έστω ακέραιος k τέτοιος ώστε $(k-1)^2 < n \le k^2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

α) $(k-1)^2 < n \le k(k-1)$

β) $k(k-1) < n \le k^2$.

Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε την εξίσωση H(x)=0 με τις δύο καμπύλες F, G με βαθμούς k και k-1 στην περίπτωση (α) ή k και k στην περίπτωση (β). Επιπλέον καθώς οι βαθμοί των F και G σχετίζονται, αυτή η επιλογή είναι η καλύτερη δυνατή.

Βαθμός της H(x)=0	Βαθμός της F	Βαθμός της G
2	2	1
3,4	2	2
5,6	3	2
7,8,9	3	3
10,11,12	4	3
13,…,16	4	4
17,…,20	5	4

Κατά συνέπεια για την καλύτερη κατασκευή μιας εξίσωσης βαθμού n, οι βαθμοί των καμπυλών F και G είναι ακέραιες προσεγγίσεις της $\sqrt{n}$.

Το κύριο αποτέλεσμα αναφέρεται ρητά για πρώτη φορά σε έργο το 1707 στην πραγματεία του **L' Hopital** (1661-1704) "*Traite anlytique des sections coniques*". Ο Νεύτων επίσης το είχε αναφέρει σε ένα αδημοσίευτο χειρόγραφό του το 1665.

Η αποδοχή του κυρίου αποτελέσματος βασίστηκε σε ένα μίγμα από επιχειρήματα, πεποιθήσεις και εμπειρία που συνήθως δεν αναφερόταν ρητά. Θα δούμε τώρα την περαιτέρω διαπραγμάτευση του θέματος. Θα χωρίσουμε τη διαδικασία σε 5 βήματα και θα τα σχολιάσουμε.

Βήμα 1
Αν F(x,y) και G(x,y) είναι πολυώνυμα βαθμού p και q αντίστοιχα, τότε η εξίσωση $R_{F,G}(x) = 0$ που προκύπτει απαλείφοντας το y από τις F=0 και G=0, έχει βαθμό pq.

Αυτή η πρόταση αργότερα έμεινε γνωστή ως θεώρημα του Bezout αφού αυτός το απέδειξε πρώτος το 1779. Παρόλα αυτά ήταν ήδη γνωστή κατά τον 17° αιώνα εμπειρικά. Προφανώς θεωρήθηκε τόσο προφανής που μόνο τον 18° αιώνα έγιναν οι πρώτες προσπάθειες απόδειξής της για παράδειγμα από τους Mac Laurin, Euler και Cramer. Όλοι οι μετέπειτα συγγραφείς του θέματος θεωρούσαν το βήμα 1 προφανές.

Βήμα 2
Αν η εξίσωση H(x) = 0 είναι βαθμού n, τότε δεν μπορεί να κατασκευαστεί από καμπύλες των οποίων το γινόμενο των βαθμών είναι μικρότερο από n.

Αν η εξίσωση H(x) = 0 μπορεί να παραγοντοποιηθεί, τότε μπορεί να κατασκευαστεί με καμπύλες μικρότερου βαθμού και το βήμα 2 προκύπτει προφανώς από το βήμα 1.

Βήμα 3
Αν οι βαθμοί p και q των F και G έχουν εκλεγεί έτσι ώστε να είναι οι ελάχιστοι δυνατοί με $pq \geq n$ και αν το k είναι όπως στο 'κύριο αποτέλεσμα' τότε η καλύτερη επιλογή είναι για την περίπτωση (α) p=k, q=k-1 και για την περίπτωση (β) p=k, q=k.

Βήμα 4
Αν οι βαθμοί p και q έχουν εκλεγεί σύμφωνα με το βήμα 3, τότε οι F και G πρέπει να εκλεγούν έτσι ώστε $R_{F,G}(x) = x^{pq-n} H(x)$.

Αν pq>n, ο παράγοντας A(x) επιλέγεται να είναι δύναμη του x. Αυτή η τεχνική με την αύξηση του βαθμού της H(x) = 0 εισάγοντας νέες ρίζες, εφαρμόστηκε από τον Καρτέσιο. Στην πραγματικότητα αυτή η τεχνική είναι πίσω από την ταξινόμηση του Καρτέσιου για τις εξισώσεις σε κλάσεις που κάθε μία αποτελείται από εξισώσεις βαθμού 2n-1 και 2n.

Βήμα 5
Με τα H, n, k, p και q όπως στο βήμα 3, είναι δυνατόν να βρούμε καμπύλες κατασκευής F και G με βαθμούς p και q. Δηλαδή είναι δυνατόν να βρούμε πολυώνυμα F(x,y) και G(x,y) με βαθμούς p και q τέτοια έτσι ώστε $R_{F,G}(x) = x^{pq-n} H(x)$.

Αγνοώντας την ειδική επιλογή των p και q, μπορούμε να βρούμε σ' αυτή την πρόταση ένα είδος αντίστροφου του θεωρήματος του Bezout (βήμα 1). Λέει :

Για κάθε πολυώνυμο H(x) βαθμού pq υπάρχουν πολυώνυμα F(x,y) και G(x,y) με βαθμούς p και q αντιστοίχως τέτοια ώστε $R_{F,G} = H(x)$.

Τον 17° αιώνα οι μαθηματικοί ήταν πεπεισμένοι από την εμπειρία τους ότι στην περίπτωση που ο βαθμός της H δεν είναι τόσο μεγάλος, είναι πράγματι πολύ εύκολο

να βρεις τις F και G. Ο L' Hopital προσπάθησε να αποδείξει την πρόταση. Η ιδέα της απόδειξης είναι ένα δισδιάστατο επιχείρημα. Διατύπωσε την απόδειξη για την ειδική περίπτωση της κατασκευής μιας εξίσωσης $20^{ου}$ βαθμού από καμπύλες βαθμών 4 και 5, αλλά βεβαίως επιθυμούσε να εφαρμόσει το επιχείρημα στην γενική περίπτωση.

Μπορεί να συνοψιστεί ως εξής :

Σε ένα πολυώνυμο F(x,y) βαθμού p υπάρχουν $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ συντελεστές. Έτσι επιλέγοντας κατασκευαστικές καμπύλες F, G βαθμών p και q αντίστοιχα, έχουμε $\frac{1}{2}[(p+1)(p+2)+(q+1)(q+2)]$ συντελεστές. Ο L' Hopital αξίωσε ότι "από τους κανόνες της άλγεβρας" είναι βέβαιο ότι η απαλοίφουσα των F, G είναι βαθμού pq, και αυτό συνεπάγεται pq+1 συντελεστές. Τώρα $pq+1<\frac{1}{2}[(p+1)(p+2)+(q+1)(q+2)]$, έτσι αν επιθυμούμε να επιλέξουμε τους συντελεστές των F, G έτσι ώστε η απαλοίφουσα να ισούται με την δοθείσα εξίσωση H=0, τότε ο αριθμός των συντελεστών που τώρα μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα είναι μεγαλύτερος από αυτόν που έχουμε να προσαρμόσουμε, έτσι ο L' Hopital χωρίς περαιτέρω επιχειρηματολογία σημείωσε ότι αυτό είναι εφικτό.

Η απόδειξη είναι αξιοσημείωτη για διάφορους λόγους. Πρώτα είναι γενική απόδειξη ύπαρξης, μη κατασκευαστική. Αυτό είναι το είδος της επιχειρηματολογίας που από τις αρχές του $18^{ου}$ αιώνα σπανίως διατυπώθηκε ρητά. Μετά πρέπει να σημειώσουμε ότι ο L' Hopital θεώρησε δεδομένο το θεώρημα του Bezout (βήμα 1) και την επιλυσιμότητα του συστήματος των εξισώσεων όταν το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων. Αμφότερα ήταν συνέπεια της εμπειρίας και ήταν αυτονόητα για τους ενασχολούμενους με την άλγεβρα εκείνο τον καιρό.

Αυτή η απόδειξη ήταν ικανοποιητική για τους μετέπειτα μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με το θέμα (Euler, Cramer). Όμως, αν εξετάσουμε την απόδειξη με την δέουσα μαθηματική αυστηρότητα είναι ανεπαρκής, γιατί δεν είναι καθόλου σαφές ότι το σύστημα των εξισώσεων για τον προσδιορισμό των συντελεστών είναι πράγματι επιλύσιμο. Στην πραγματικότητα, το αντίστροφο του θεωρήματος του Bezout δεν είναι σε καμιά περίπτωση μια πρόταση τετριμμένη. Φαίνεται πάντως ότι κανένας δεν είχε μελετήσει το θέμα λεπτομερώς.

5. Η κατασκευή εξισώσεων στα έργα μαθηματικών τον 17^{ο}&18^{ο} αιώνα

I. Αναφορά στις πηγές του 17^{ου} αιώνα

Αναφερθήκαμε στα κύρια μαθηματικά θέματα για την κατασκευή των εξισώσεων στην προηγούμενη παράγραφο. Τώρα θα κάνουμε μια γρήγορη έρευνα στις εκδόσεις γι' αυτή από το 1640 μέχρι το 1750 (Bos H. [2] σ. 352-353). Η έρευνα θα γίνει με χρονολογική σειρά. Κατά την περίοδο από το 1650 μέχρι το 1690 η κατασκευή των εξισώσεων αναπτύχθηκε σε μια συνεκτική θεωρία. Τα κύρια βιβλία που συνεισέφεραν στην ανάπτυξη της ήταν του Van Schooten η λατινική έκδοση της Γεωμετρίας του Καρτέσιου (1649 και 1659), του Sluse το *Mesolabum* (1659 και ειδικά η δεύτερη έκδοση το1668) και του De La Hire το *Nouveaux Elements* (1679).

Ο **Van Schooten** στις σημειώσεις του για την *Geometrie* στην έκδοση του 1649 σημείωσε την σπουδαιότητα των κατασκευών του Καρτέσιου, αλλά δεν πρόσθεσε κάτι σε αυτές, Στην έκδοση όμως του 1659, ανάλυσε την κατασκευή των εξισώσεων βαθμού 3^{ου} και 4^{ου} και έδειξε πως ο κύκλος και η παραβολή του Καρτέσιου μπορούν να παράγουν την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Προσέθεσε πολλές διαφορετικές κατασκευές, μία για παράδειγμα με υπερβολή και κύκλο και άλλη με παραβολή και κύκλο αλλά χωρίς προηγούμενη αφαίρεση από το δεύτερο όρο.

Η δεύτερη έκδοση του *Mesolabum* του **Sluse** περιείχε κατασκευές εξισώσεων βαθμού 3^{ου} και 4^{ου} με όλους τους συνδυασμούς των κωνικών τομών. Αυτές οι κατασκευές παρουσιάζονταν και αποδεικνυόταν με γεωμετρικό τρόπο. Ο Sluse υποσχόταν να εξηγήσει αργότερα την ανάλυση από την οποία βρέθηκαν. Το έκανε σε ένα παράρτημα στην δεύτερη έκδοση του *Mesolabum* (1668). Η μέθοδος του ήταν η γεωμετρική μέθοδος που παρουσιάσαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

Ο **De La Hire** στο *Nouveaux Elements* (1679) περιέλαβε ένα τμήμα με τον τίτλο "*La construction des equations analytiques*" που μπορεί να θεωρηθεί σαν το πρώτο εγχειρίδιο για κατασκευή εξισώσεων αυθαίρετου βαθμού. Ο De La Hire χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εισαγωγής όπως την παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Με αυτή τη μέθοδο πραγματοποίησε την κατασκευή εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 4 με κωνικές τομές. Επέλυσε την περίπτωση στην οποία η μία κατασκευαστική καμπύλη ήταν κατά προτίμηση κύκλος. Για την κατασκευή εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 4 ρητά διατυπώθηκε η εύρεση καμπυλών μικρότερου δυνατού βαθμού. Με τη μέθοδο της εισαγωγής, οι βαθμοί δεν ήταν οι μικρότεροι όπως στο 'κύριο αποτέλεσμα'. Παρόλα αυτά για τις ειδικές εξισώσεις $x^{n+1} = a^n b$ (το x είναι η πρώτη από n μέσες αναλόγους μεταξύ των a και b) ο De La Hire βρήκε κατασκευαστικές καμπύλες με βαθμούς όπως στο 'κύριο αποτέλεσμα'.

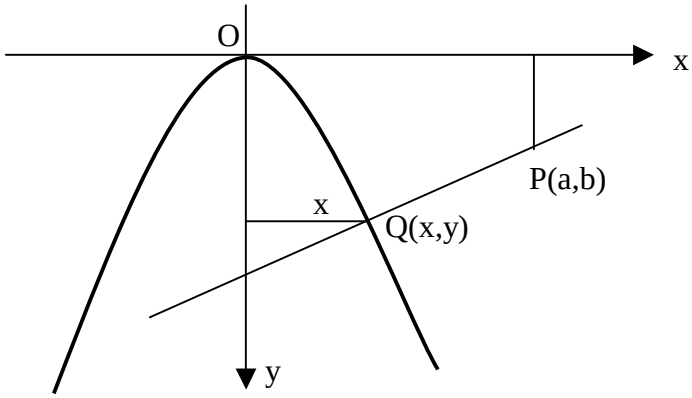
Ο **Fermat** στην πραγματεία του *Dissertatio* που γράφτηκε μεταξύ 1641-43 και δημοσιεύθηκε το 1679 ασχολήθηκε με την κατασκευή των εξισώσεων. Έδωσε μερικές δικές του κατασκευές και άσκησε κριτική στον Καρτέσιο όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

Κάποια έργα στην κατασκευή εξισώσεων μικρότερης σημασίας γράφτηκαν από τον **John Wallis** (1657), τον **Janus Kinckhuysen** (1625-1666) στην *Geometria* (1663) και τον **Thomas Baker** (1623-1689) στο *Geometrical key* (1684).

Με το θέμα ασχολήθηκε εκτενώς και ο **Jakob Bernoulli** στη λατινική έκδοση του έργου του *Geometrie* (1695). Εκεί άσκησε αιχμηρή κριτική στο Καρτέσιο όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

Οι μαθηματικοί που κατανόησαν το πρόγραμμα του Καρτέσιου και το ανέπτυξαν αντιμετώπισαν διάφορες δυσκολίες. Μία από αυτές ήταν η πεποίθηση μιας συνεπούς διασύνδεσης μεταξύ της άλγεβρας και της γεωμετρίας η οποία υποκρύπτονταν από την προσέγγιση του Καρτέσιου. Αυτή κατά καιρούς αμφισβητήθηκε. Ένα τέτοιο παράδειγμα αμφισβήτησης βρίσκουμε στα σχόλια του Van Schooten για τη λατινική έκδοση της Γεωμετρίας. Αναφέρεται στο συμπέρασμα του Καρτέσιου ότι αν ένα πρόβλημα οδηγεί σε μια ανάγωγη εξίσωση τρίτου βαθμού, τότε το πρόβλημα είναι στερεό, δηλαδή δεν μπορεί να επιλυθεί με ευθείες και κύκλους. Το παρακάτω πρόβλημα προτάθηκε στον Van Schooten από τον **Christian Huygens** (1629-1695) και αμφισβήτησε τον ισχυρισμό του Καρτέσιου.

Δίνεται μια παραβολή με τον κορυφή της στην αρχή των αξόνων. Έστω ένα σημείο P εκτός της παραβολής με συντεταγμένες (a,b), όπως στο παρακάτω σχήμα. Ζητείται να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το P και είναι κάθετη στην παραβολή (Bos H. [2] σ. 357).



Έστω PQ η ζητούμενη ευθεία με το σημείο Q να βρίσκεται πάνω στην παραβολή. Έστω (x,y) οι συντεταγμένες του Q και η εξίσωση της παραβολής $y=x^2$. Ο Huygens χρησιμοποιεί τις γνωστές ιδιότητες της εφαπτομένης της παραβολής και καταλήγει ότι η τετμημένη x του ζητούμενου σημείου Q ικανοποιεί την εξίσωση :

$$x^3+(\frac{1}{2}-a)x-\frac{1}{2}b=0$$

Αυτή η εξίσωση είναι τρίτου βαθμού και ανάγωγη οπότε σύμφωνα με τον Καρτέσιο θα κατασκευαστεί με κύκλο και παραβολή δηλαδή το πρόβλημα είναι **στερεό**. Όμως η παραβολή ήδη δίνεται στο πρόβλημα, οπότε το μόνο που απαιτείται είναι ο κύκλος και τότε το πρόβλημα είναι **επίπεδο**.

Ο Van Schooten βεβαιώνει ότι πράγματι κάθε κατασκευαστικό πρόβλημα όπου δίνεται μια κωνική τομή και οδηγεί σε εξίσωση $3^{ου}$ ή $4^{ου}$ βαθμού, μπορεί να κατασκευαστεί με την δοθείσα κωνική και ένα κύκλο και ως εκ τούτου το πρόβλημα θα μπορούσε να θεωρηθεί **επίπεδο**. Όμως ο Van Schooten τελικά αποφάσισε να διατηρήσει την ταξινόμηση του Καρτέσιου με βάση το βαθμό της εξίσωσης και κάλεσε το πρόβλημα στερεό. Ο Huygens πάντως διατήρησε τις αμφιβολίες του.

Από γεωμετρική σκοπιά το παραπάνω πρόβλημα είναι επίπεδο, αφού απαιτείται μόνο ένας κύκλος για να επιλυθεί, ενώ από αλγεβρική είναι στερεό, αφού η εξίσωση που καταλήγουμε είναι τρίτου βαθμού.

Η απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι ουσιώδης πληροφορία μπορεί να χαθεί κατά την μετάφραση του προβλήματος από γεωμετρικό σε αλγεβρικό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η χαμένη πληροφορία είναι το γεγονός ότι η παραβολή δίνεται.

Πάντως, σε τέτοιου είδους προβλήματα αρκετοί μαθηματικοί αυτής της περιόδου χρησιμοποιούν την δοθείσα καμπύλη για την κατασκευή στην προσπάθειά τους να κάνουν την άλλη κατασκευαστική καμπύλη όσο το δυνατόν πιο απλή.

II. Η κριτική στον Καρτέσιο του J. Bernoulli

Ο Jakob Bernoulli (1654-1705) επίσης εξέφρασε αμφιβολίες σχετικά με την απευθείας διασύνδεση μεταξύ της γεωμετρικής κατασκευής και των αλγεβρικών υπολογισμών του Καρτέσιου. Η κριτική που ασκεί στη μέθοδο του Καρτέσιου παρουσιάζεται στις σημειώσεις που έγραψε για την λατινική έκδοση της *Geometrie* του 1695. Διατυπώνει την κριτική του μέσω ενός συγκεκριμένου κατασκευαστικού προβλήματος.

Δίνεται ένα τρίγωνο. Να βρεθούν δύο κάθετες ευθείες που χωρίζουν το τρίγωνο σε 4 ίσα μέρη.

Εισάγει δύο αγνώστους x, y και παράγει δύο εξισώσεις. Έστω P(x,y)=0 και Q(x,y)=0 οι δύο εξισώσεις. Απαλείφει το y και παίρνει την εξίσωση H(x)=0. Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο του Καρτέσιου πρέπει να βρεθούν δύο καμπύλες F και G των οποίων οι τομές έχουν τετμημένες ίσες με τις ρίζες της εξίσωσης H(x)=0.

Ο J. Bernoulli βρήκε αυτή τη διαδικασία περιττή και μη φυσιολογική. Γιατί ο Καρτέσιος εισάγει νέες καμπύλες (F και G) που δεν έχουν σχέση με το αρχικό πρόβλημα; Γιατί να μην πάρει σαν κατασκευαστικές καμπύλες τις P και Q; Η τομή τους παράγει αμέσως τις μεταβλητές x και y, έχουν φυσική εξήγηση και βοηθούν στην πρόβλεψη της ύπαρξης ή μη ριζών που πρέπει να εμφανιστούν σε διαφορετικές περιπτώσεις. Για τέτοιες κατασκευές ο Bernoulli γράφει :

«*παρουσιάζεται στα μάτια μας η όλη φύση του προβλήματος με πολύ καλύτερο τρόπο σε σχέση με αυτόν που ο Καρτέσιος επέλεξε. Η κατασκευή της τρίτης εξίσωσης H(x)=0 με δύο νέες καμπύλες τις F και G είναι μια άσκοπη και μεγάλη παράκαμψη που απαιτεί πολύπλοκη δουλειά και μη σχετιζόμενη άμεσα με το αρχικό πρόβλημα*» (Bernoulli 1695 p. 671, στο Bos H. [2] σ. 365).

Τώρα μπορεί να συμβεί το εξής, όπως και στο παραπάνω πρόβλημα. Οι καμπύλες P και Q μπορεί να είναι μεγαλύτερου βαθμού από των F και G και έτσι δεν είναι οι απλούστερες δυνατές. Ο Bernoulli υπαινίχθηκε ότι αυτό είναι το τίμημα που πρέπει να πληρώσει κάποιος για την φυσιολογική επιλογή των P και Q.

Εδώ διαπιστώνουμε πάλι ότι η άλγεβρα δεν ‘τακτοποιεί’ τη γεωμετρία. Οι αλγεβρικές απαιτήσεις του Καρτέσιου για το μικρότερο δυνατό βαθμό θα οδηγήσουν σε μια κατασκευή που, σύμφωνα με τον Bernoulli, είναι μη γεωμετρικά αποδεκτή, επειδή δεν συνδέεται φυσιολογικά με το αρχικό πρόβλημα που πρέπει να λυθεί.

Ο Bernoulli και αρκετοί άλλοι μαθηματικοί (Newton, Fermat) απέρριψαν την απαίτηση του Καρτέσιου ότι ο βαθμός των κατασκευαστικών καμπυλών πρέπει πάντα να είναι ο μικρότερος δυνατός.

Ο Καρτέσιος δεν είχε δώσει επιχειρήματα για να τεκμηριώσει γιατί ο βαθμός των κατασκευαστικών καμπυλών θα πρέπει να είναι ο ελάχιστος δυνατός, ούτε είχε απαντήσει στο ερώτημα ποια καμπύλη πρέπει να επιλεγεί από τις όλες τις δυνατές του ίδιου βαθμού. Στις σημειώσεις του στην έκδοση του 1695 της *Geometrie*, ο Bernoulli σαφώς εκφράζει την ενόχληση του για την σιωπή του Καρτέσιου για αυτά τα θέματα. Έγραψε χαρακτηριστικά (Bos H. [2] σ. 365):

«...*αλλά όταν ρωτάμε για τους λόγους του ισχυρισμού, πλήρης σιγή*...».

Η ενόχληση του Bernoulli είναι κατανοητή γιατί σε εκείνες τις πρώιμες εποχές της ανάπτυξης της κατασκευής των εξισώσεων, η ορθή επιλογή της καμπύλης ακόμη θεωρούνταν το κεντρικό πρόβλημα. Σε συνδυασμό με αυτό το πρόβλημα συχνά

βρίσκουμε αναφορές στις επιταγές του Πάππου για το **ιδιαίτερο σφάλμα** που διαπράττουν οι μαθηματικοί που επιλύουν επίπεδα προβλήματα με στερεά μέσα

Ο Καρτέσιος είχε χρησιμοποιήσει αυτή ακριβώς τη φράση στη *Geometrie* (σ. 371) «*θα ήταν λάθος στη γεωμετρία να χρησιμοποιήσει κανείς για τις κατασκευές καμπύλες πολύ μεγάλου βαθμού και θα ήταν επίσης λάθος να χρησιμοποιήσει καμπύλες πολύ μικρού βαθμού*».

Ο Fermat χρησιμοποίησε τις ίδιες λέξεις στο έργο του *Dissertatio* κάνοντας κριτική στον Καρτέσιου για τη χρήση καμπυλών πολύ υψηλού βαθμού :
«*Βεβαίως είναι επίθεση κατά της καθαρής Γεωμετρίας αν κανείς υποθέσει πολύ σύνθετες καμπύλες ανώτερου βαθμού για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων, μη παίρνοντας την απλούστερη και την πιο κατάλληλη. Αυτό έχει συχνά δηλωθεί, ήδη από τον Πάππο αλλά και σύγχρονους μαθηματικούς, ότι είναι* ***ιδιαίτερο σφάλμα*** *στην γεωμετρία να λύσεις προβλήματα με μέσα που δεν είναι κατάλληλα για αυτό*».
(Fermat, *Dissertatio* p. 121, στο Bos H. [2] σ. 365)

Επίσης σε ένα άρθρο του για την καρτεσιανή γεωμετρία το 1688 ο Bernoulli αποκαλεί την κατασκευή του Καρτέσιου για τη κατασκευή 4 μέσων αναλόγων (δηλαδή της εξίσωσης $x^5=\alpha^4\beta$) με κύκλο και καρτεσιανή παραβολή, "*την πλέον μακροσκελή*", έδωσε μια εναλλακτική λύση και σχολίασε :
«*Δεν βλέπω τίποτε σε αυτήν την περίπτωση που θα μπορούσε να απαλλάξει τον Καρτέσιο από το ελάττωμα της* ***αγεωμετρησίας*** *το οποίο αναφέρει τόσο συχνά*»
(Bernoulli 1668 p.349, στο Bos H. [2] σ. 365).

Ένα ενδιαφέρον θέμα στη θεωρία της κατασκευής των εξισώσεων που προσέλκυσε την προσοχή των μαθηματικών ήταν το γράφημα των πολυωνύμων.
Η απαίτηση του μικρότερου βαθμού αποκλείει την κατασκευή μιας εξίσωσης με την τομή του γραφήματός της με τον x-άξονα. Ωστόσο ο J. Bernoulli, έχοντας ασκήσει κριτική στην απαίτηση αυτή, προτείνει στις σημειώσεις του (1695) για την κατασκευή της εξίσωσης $x^5 = ax^4 + b^2x^3 + c^3x^2 + d^4x + e^5$, την εξής μέθοδο.
Γράφει την εξίσωση στη μορφή $x = a + \frac{b^2}{x} + \frac{c^3}{x^2} + \frac{d^4}{x^3} + \frac{e^5}{x^4}$, σχεδιάζει το γράφημα της συνάρτησης $y = a + \frac{b^2}{x} + \frac{c^3}{x^2} + \frac{d^4}{x^3} + \frac{e^5}{x^4}$ και της ευθείας y=x και βρίσκει τα κοινά τους σημεία. Σημειώνει σαν πλεονέκτημα ότι το γράφημα μπορεί εύκολα να σχεδιαστεί σημειακά. Για κάθε τιμή της μεταβλητής x μπορεί εύκολα να κατασκευάσει (με στοιχειώδεις κατασκευές πολλαπλασιασμού, διαίρεσης) τους όρους $\frac{b^2}{x}$, $\frac{c^3}{x^2}$ κλπ και στη συνέχεια το άθροισμά τους. Έτσι τα σημεία του γραφήματος μπορεί να βρεθούν εύκολα. Πρότεινε ότι αυτό το πλεονέκτημα μπορεί να αντισταθμίσει το μειονέκτημα του υψηλού βαθμού του γραφήματος (Bos H. [2] σ. 368).

Επίσης στο έργο του L' Hopital *Traite* (1707 pp. 348-349) βρίσκουμε μια παρόμοια κατασκευή (Bos H. [2] σ. 368). Αναφέρει σαν πλεονέκτημα την εύκολη κατασκευή του γραφήματος με σημεία και τόνισε ότι αυτή η διαδικασία ήταν χρήσιμη για να βρει κάποιος τα όρια μέσα στα οποία βρίσκονται οι ρίζες της εξίσωσης.

III. Οι κατασκευές στο έργο του Νεύτωνα

Ο Isaac Newton (1643-1727) περισσότερο από τους άλλους μαθηματικούς, ήταν ενήμερος για το ότι η αλγεβρική και η γεωμετρική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων δεν είναι ανάλογη και μπορεί ακόμα να είναι και ασυμβίβαστη. Σε μια σειρά μελετών προσπάθησε να ταξινομήσει τις θεμελιώδεις ερωτήσεις σχετικά με τη χρήση άλγεβρας στη γεωμετρία. Το συμπέρασμα αυτών των μελετών μπορεί να συνοψισθεί ως εξής : ***αντίθετα με ότι ο Καρτέσιος είχε σκεφθεί, η άλγεβρα δεν είναι το μέσο που θα φέρει τάξη στη γεωμετρία***. Η άλγεβρα είναι χρήσιμη σαν εργαλείο αλλά στα θέματα που αφορούν στους στόχους της γεωμετρίας - οι κατάλληλες μέθοδοι και τα κριτήρια για την ορθότητα των γεωμετρικών κατασκευών - η άλγεβρα δεν είναι καλός οδηγός.

Ο Καρτέσιος έθεσε αλγεβρικά κριτήρια στη γεωμετρία, οι κατασκευαστικές καμπύλες θα πρέπει να είναι αλγεβρικές, και είναι οι απλούστερες αν ο βαθμός τους είναι ο μικρότερος δυνατός. Ο Newton άσκησε κριτική και στα δύο σημεία και προσπάθησε να εργαστεί εναλλακτικά. Οι εργασίες του ασκούν την πιο συνεπή και οξεία κριτική στο πρόγραμμα του Καρτέσιου. Θα συζητήσουμε για αυτές με λεπτομέρειες παρακάτω.

Τα επιχειρήματα του Newton μπορούν να βρεθούν σε 3 χειρόγραφα, (1665, 1670 και 1705) αδημοσίευτα μέχρι πριν λίγο καιρό, και στο *Arithmetica Universallis* που δημοσιεύτηκε το 1707, αλλά γράφτηκε το 1683-1684.

Το χειρόγραφο του 1665 έχει τον τίτλο "***Η θεωρία της κατασκευής των εξισώσεων***". Η εργασία είναι αξιοσημείωτη γιατί ο Newton βρήκε τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που αργότερα βρέθηκαν από τους De La Hire και L'Hopital. Ο Newton αρχικά εξετάζει την κατασκευή εξισώσεων μικρού βαθμού. Στη συνέχεια εξετάζει την κατασκευή εξισώσεων αυθαίρετου βαθμού, παίρνοντας σαν πρώτη κατασκευαστική καμπύλη F την κυβική παραβολή $y=x^3$.

Για να κατασκευάσει εξισώσεις $H(x)=0$ με την $F : y=x^3$, βρίσκει με εισαγωγή την G. Για βαθμούς 1-3, 4-6, 7-9, 10-12 κλπ βρίσκει την G με βαθμό 1, 2, 3, 4 κλπ αντίστοιχα. Μετά εργάζεται ανάλογα με F την καμπύλη $y=x^4$. Στη συνέχεια γενικεύει και φτάνει χωρίς απόδειξη στο θεώρημα του Bezout και στο 'κύριο αποτέλεσμα'. Τελικά εκφράζει αμφιβολίες για την πρακτική αυτών των κατασκευών για εξισώσεις ανώτερου βαθμού. Οι καμπύλες G που βρίσκονται με αυτό τον τρόπο αν και είναι ελάχιστου δυνατού βαθμού, μπορεί να καταλήξουν πολύ πολύπλοκες.

Η μελέτη δείχνει ότι από το 1665 ο Newton είδε καθαρά τις πτυχές του κατασκευαστικού προγράμματος της *Geometrie* του Καρτέσιου. Είχε εντρυφήσει στις αλγεβρικές τεχνικές και διατύπωσε τις αλγεβρικές ιδέες που πρώτα εμφανίστηκαν στην έκδοση *Traite* (1707) του L'Hopital. Αν και εξέφρασε μερικές αμφιβολίες σχετικά με την απαίτηση του ελάχιστου δυνατού βαθμού για τις κατασκευαστικές καμπύλες, δεν παρουσίασε εναλλακτική πρόταση.

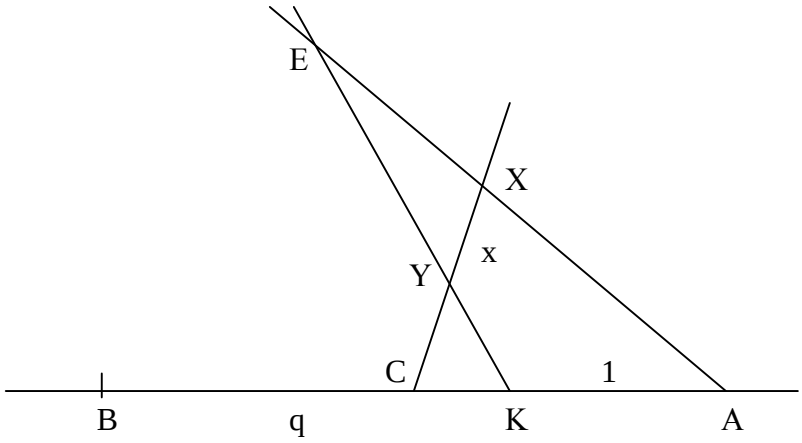
Ο Newton στο χειρόγραφο του 1670 με τίτλο "***Προβλήματα για κατασκευή εξισώσεων***" ασκεί μεγαλύτερη κριτική στο πρόγραμμα του Καρτεσίου. Ο Καρτέσιος είχε επεκτείνει τις κατασκευές του Ευκλείδη, επιτρέποντας όλες τις αλγεβρικές καμπύλες σαν μέσα κατασκευής. Αυτό το έκανε αξιωματικά, θεωρώντας ότι οι τομές κινούμενων γεωμετρικών καμπυλών διαγράφουν νέες καμπύλες που είναι πάλι γεωμετρικές. Για τον Newton αυτό πήγαινε πολύ μακριά, επιτρέποντας όλες τις αλγεβρικές κατασκευές, κανείς θα μπορούσε να πει ότι απομακρύνεται από τη γεωμετρία. Ήρθε όμως αντιμέτωπος με το ερώτημα για το ποια αξιώματα θα προστεθούν σε αυτά του Ευκλείδη με σκοπό να φτάσουμε σε μια Γεωμετρία που

επεκτείνει τις κατασκευαστικές της δυνατότητες (επιτρέποντας για παράδειγμα την κατασκευή δύο μέσων αναλόγων και την τριχοτόμηση γωνίας), αλλά και πάλι με περιορισμούς. Όπως έχουμε δει ο Viete είχε μια παρόμοια προσέγγιση, αλλά από διαφορετική οπτική γωνία. Ο Viete ήθελε να επεκτείνει την Ευκλείδεια Γεωμετρία με σκοπό να κάνει βασικά προβλήματα επιλύσιμα. Ο Newton, τώρα ήθελε να περιορίσει τη γεωμετρία ξανά, γιατί ο Καρτέσιος είχε κάνει πολλά προβλήματα επιλύσιμα. Η προσέγγιση του Newton ήταν παρόμοια με του Viete, χρησιμοποίησε επίσης τη νεύση για τις κατασκευές. Το χειρόγραφο του 1670 αποτελείται από 3 μέρη. Το πρώτο περιέχει ορισμούς και αξιώματα, το δεύτερο κατασκευές προβλημάτων που βασίζονται στα αξιώματα (μια σειρά κατασκευών για εύρεση δύο μέσων αναλόγων) και το τρίτο την κατασκευή των εξισώσεων.

Δεν θα ασχοληθούμε με τα αξιώματα με λεπτομέρειες, αλλά θα δούμε δύο κατασκευές μία με νεύση και μία με ελλείψεις. Η κατασκευή με νεύση είναι ισοδύναμη με αυτή με μέσο την κογχοειδή καμπύλη. Έτσι κάποιος μπορεί να συνοψίσει την προσέγγιση του Newton ότι **πρόσθεσε αξιώματα μέσω των οποίων εκτός της ευθείας και του κύκλου, η κογχοειδής και η έλλειψη γίνονται αποδεκτά μέσα για τις κατασκευές**.

Ο Newton χρησιμοποίησε αυτά τα μέσα κατασκευής για να λύσει μια σειρά προβλημάτων όπως της τριχοτόμησης οξείας γωνίας, και της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων. Μετά επέστρεψε πάλι στην κατασκευή των εξισώσεων.

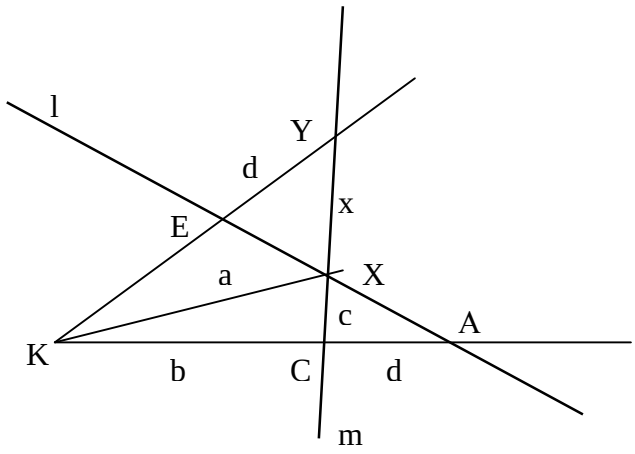
Η μέθοδος της νεύσης του Newton για την κατασκευή της κυβικής εξίσωσης $x^3 = qx + r$ είναι η εξής (Bos H. [2] σ. 361):



Έστω η ευθεία BKA έτσι ώστε KA=1 και BK=q. Παίρνουμε C τέτοιο ώστε BC=CA. Θεωρούμε το τρίγωνο CXA έτσι ώστε AX=AC και CX= r. Προεκτείνουμε τις AX και CX (μέχρι αυτό το βήμα όλες οι κατασκευές γίνονται με ευθείες και κύκλους). Τώρα με νεύση εισάγουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα EY=AC=1/2(q+1) μεταξύ των ευθειών AX και CX έτσι ώστε τα E, Y, K να είναι συνευθειακά. Τότε το τμήμα XY=x είναι η ρίζα της εξίσωσης. Η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Μενελάου.

Εδώ, όπως και στα περισσότερα άλλα προβλήματα που διαπραγματεύθηκε στο χειρόγραφο, ο Newton πρόσθεσε μια συνθετική γεωμετρική απόδειξη. Αυτό δεν κάνει σαφές πως επινοήθηκαν αυτές οι κατασκευές. Όμως ο Newton πρόσθεσε προς το τέλος του χειρογράφου μερικά παραδείγματα αλγεβρικής ανάλυσης και φαίνεται ότι χρησιμοποίησε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών όπως θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα (Bos H. [2] σ. 361-362).

Έστω l και m δύο ευθείες που τέμνονται στο X και K ένα σημείο εκτός αυτών.



Αν KCA η ευθεία που τέμνει την l στο A και την m στο C. Έστω KX=α, KC=b, CX=c και CA=d. Υποθέτουμε ότι, με νεύση κατασκευάζεται η ευθεία KEY, τέτοια ώστε EY=d. Έστω YX=x. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Μενελάου και το νόμο των συνημιτόνων, ο Newton παράγει μια εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς x. Οι συντελεστές της εξαρτώνται από τα άγνωστα μεγέθη a, b, c και d. Για να κατασκευάσει με νεύση την εξίσωση $x^3 = qx + r$, ο Newton προσαρμόζει τις τιμές των a, b, c και d έτσι ώστε οι συντελεστές των δύο εξισώσεων να ταυτιστούν. Ο Newton χρησιμοποιεί παραλλαγές αυτής της μεθόδου και πραγματοποιεί και άλλες κατασκευές.

Τα παραδείγματα δείχνουν τη διαφορά της χρήσης άλγεβρας του Newton από τον Καρτέσιο. Στον Newton δεν υπάρχουν άξονες, ούτε εξισώσεις των καμπυλών. Η αλγεβρική ανάλυση υπηρετεί αποκλειστικά την εύρεση της νεύσης. Αντίθετα το πρόγραμμα του Καρτέσιου φέρει ισχυρά τη σφραγίδα της άλγεβρας. Κάποιος αρκεί μόνο να βρει τις εξισώσεις των καμπυλών και έχει μεταφράσει το γεωμετρικό πρόβλημα σε αλγεβρικό. Σε αντίθεση, η κατασκευή με νεύση δεν έχει τόση άλγεβρα. Η άλγεβρα εκεί είναι πράγματι υποταγμένη στη γεωμετρία.

Ο Newton επίσης επέλυσε την κατασκευή των εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού με κατασκευαστική καμπύλη την έλλειψη και σημείωσε την προτίμηση για αυτή έναντι της νεύσης, επειδή η έλλειψη είναι απλούστερη καμπύλη από την κογχοειδή (ισοδύναμη της νεύσης). Προτιμούσε την έλλειψη από τις άλλες κωνικές τομές επειδή την κίνηση με τροχιά την έλλειψη την έθεσε ως αξίωμα.

Κατά συνέπεια το χειρόγραφο του 1670 δείχνει ότι η επιθυμία του Newton να εφαρμόσει μια πραγματικά γεωμετρική προσέγγιση για την κατασκευή εξισώσεων και προβλημάτων, του επέτρεψε να χρησιμοποιήσει για την κατασκευή εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού καμπύλες διαφορετικές από την παραβολή και τον κύκλο του Καρτέσιου. Επίσης στο χειρόγραφο αυτό φαίνεται ότι δεν ακολούθησε αυτή τη μέθοδο για εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού.

Ο Newton επέστρεψε στο θέμα ξανά όταν το1683-84 έγραψε τις *Lucasian lectures on algebra*. Αυτές οι διαλέξεις δεν γράφτηκαν για να εκδοθούν, αλλά αργότερα με προτροπή του Whiston, ο Newton τις δημοσίευσε υπό το τίτλο *Arithmetica universalis* (1707). Η εργασία έγινε πολύ δημοφιλής και επανεκδόθηκε και μεταφράστηκε. Αυτό το τμήμα τυπώθηκε σαν παράρτημα με τίτλο *Aequatorium constructio linearis*, δηλαδή η "*γραμμική κατασκευή των εξισώσεων*".

Το *Aequatorium constructio linearis* είναι ένα αντιφατικό έργο. Από τη μια πλευρά ο Newton υπερασπίστηκε σθεναρά την άποψη ότι οι κατασκευές προβλημάτων και εξισώσεων είναι μέρος της καθαρής γεωμετρίας, στην οποία η άλγεβρα δεν θα καθορίσει τους στόχους. Συνεπώς παρουσίασε κατασκευές των εξισώσεων με νεύση, έλλειψη ή κογχοειδή και απαίτησε αυτές να είναι προτιμότερες απ' ότι οι κατασκευές με άλλες κωνικές τομές. Όμως από την άλλη δεν περιέλαβε ή ανέφερε, τα αξιώματα σχετικά με τις αποδεκτές κατασκευές στη γεωμετρία, πάνω στα οποία στηρίχθηκαν οι κατασκευές του.

Παρόλα αυτά ο Newton έγραψε ότι έδωσε αυτές τις κατασκευές σαν βοηθητική τεχνική για την εύρεση αριθμητικών τιμών των ριζών εξισώσεων. Εξήγησε ότι η γεωμετρική κατασκευή των εξισώσεων παρέχει προσεγγίσεις των ριζών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν αρχικές τιμές για περαιτέρω διαδικασία αριθμητικής προσέγγισης. Αυτό ήταν ένα πρακτικό κίνητρο και μάλλον σε διαφωνία με τις επιταγές της θεωρητικής Γεωμετρίας. Πράγματι, γιατί ο Newton θα διατύπωνε ισχυρά μεθοδολογικά επιχειρήματα για την προστασία της καθαρότητας της συνθετικής γεωμετρίας από την επιρροή της άλγεβρας, στο πλαίσιο μιας βοηθητικής μεθόδου για να βρεις τα πρώτα ψηφία της προσέγγισης μιας ρίζας ; Αυτή την ερώτηση ο Newton την άφησε για τον αναγνώστη.

Μερικές αναφορές μπορεί να επεξηγήσουν το πνεύμα του Newton και τα επιχειρήματα που παρέθεσε στο παράρτημα (Appendix). Ο Newton έγραψε:

«*Πρόσφατα, οι μαθηματικοί καλωσόρισαν στη γεωμετρία όλες τις γραμμές που μπορούν να εκφραστούν με εξισώσεις και όρισαν ότι οι κατασκευές θα πρέπει να πραγματοποιούνται με καμπύλες ελάχιστου δυνατού βαθμού. Ο βαθμός προσφέρει μια καλή ταξινόμηση για τις καμπύλες καθαυτές, αλλά όχι για τη χρήση τους σαν μέσα κατασκευής.*

Δεν είναι οι εξισώσεις των καμπυλών αλλά η περιγραφή τους που παράγει μια γεωμετρική καμπύλη. Ένας κύκλος είναι μια γεωμετρική καμπύλη όχι επειδή μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια μιας εξίσωσης, αλλά γιατί η περιγραφή του έχει αξιωματικοποιηθεί. Δεν είναι η απλότητα της εξίσωσής του αλλά η ευκολία της περιγραφής του που πρωταρχικά καταδεικνύει ότι αυτή η γραμμή πρέπει να εισαχθεί σαν μέσο στην κατασκευή προβλημάτων. Εξάλλου, η εξίσωση της παραβολής είναι απλούστερη από του κύκλου αλλά επειδή η κατασκευή του κύκλου είναι απλούστερη από της παραβολής δίνει στον κύκλο το προβάδισμα σαν μέσο κατασκευής. Ο κύκλος και οι κωνικές τομές έχουν εξισώσεις ίδιου βαθμού, και όμως στην κατασκευή των προβλημάτων ένας κύκλος δεν κατατάσσεται στην ίδια κατηγορία με τις κωνικές, αλλά λόγω της απλούστερης περιγραφής του, κατατάσσεται στην ίδια κατηγορία με την ευθεία γραμμή. Κατά συνέπεια είναι αποδεκτό να κατασκευάσει κανείς με τη βοήθεια ενός κύκλου ότι μπορεί να κατασκευάσει με ευθείες γραμμές, αλλά είναι απαράδεκτο να κατασκευάσει με κωνικές τομές ότι μπορεί να κατασκευάσει με κύκλο» (Lucasian lectures p. 425, στο Bos H. [2] σ. 363).

Ο Newton ισχυρίστηκε ότι η γεωμετρική απλότητα δηλαδή η απλότητα της κατασκευής της καμπύλης πρέπει να είναι το κριτήριο για την αποδοχή της σαν μέσο κατασκευής και όχι η αλγεβρική απλότητα. Εξήγησε την επιλογή του ως εξής :

« *Όλοι μας τότε πρέπει, όπως οι αρχαίοι, να αποκλείσουμε από τη γεωμετρία όλες τις γραμμές εκτός από την ευθεία γραμμή και τον κύκλο και ίσως τις κωνικές τομές, ή να τις εισάγουμε (αναγνωρίσουμε) όλες σύμφωνα με την απλότητα της περιγραφής τους*» (Lucasian lectures p. 427, στο Bos H. [2] σ. 363).

Με αφορμή το τελευταίο ο Newton προετοιμάστηκε ακόμα και να εισάγει μη αλγεβρικές καμπύλες όπως η κυκλοειδής σε προτίμηση από αλγεβρικές καμπύλες

υψηλού βαθμού. Η τελική δήλωση του για την κατάλληλη θέση της άλγεβρας με σεβασμό στη Γεωμετρία είναι :

«*Πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις και υπολογισμοί αυτού του είδους έχουν τελευταία εισαχθεί στη γεωμετρία αλλά το βήμα αυτό πρέπει να επανεξετασθεί αφού είναι αντίθετο προς στις αυθεντικές επιταγές της επιστήμης. Οποιοσδήποτε αντιμετωπίζει τις κατασκευές με ευθεία γραμμή και κύκλο, όπως επινοήθηκε από τους αρχαίους Γεωμέτρες, εύκολα θα αντιληφθεί ότι η γεωμετρία σχεδιάστηκε ως μέσο διαφυγής από την πλήξη των υπολογισμών με την άμεση σχεδίαση των γραμμών. Άρα αυτές οι δύο επιστήμες οφείλουν να μην συγχέονται. Οι αρχαίοι τόσο επιμελώς διαχώριζαν αυτές τη μία από την άλλη ώστε ποτέ δεν εισήγαγαν αριθμητικούς όρους στη γεωμετρία. Όμως πρόσφατα οι μαθηματικοί, συγχέοντας τις δύο, έχουν χάσει την απλότητα που είναι η κομψότητα της Γεωμετρίας. Συνεπώς η αριθμητική απλότητα είναι πράγματι αυτή που ορίζεται από τις απλούστερες εξισώσεις καθώς η γεωμετρική απλότητα είναι αυτή που απορρέει από την απλούστερη σχεδίαση των γραμμών - και στη γεωμετρία ότι είναι απλούστερο οφείλει να είναι πρώτιστο. Κατ' εμέ δεν θα πρέπει εξ αυτού να ερμηνευτεί σαν λάθος αν μαζί με τον πρίγκιπα των μαθηματικών Αρχιμήδη και τους άλλους αρχαίους εισάγω την κογχοειδή σαν μέσο για την κατασκευή στερεών προβλημάτων*».

Αλλά αμέσως κάνει την αποκήρυξη :

«*Εν τούτοις αν κάποιος νιώθει διαφορετικά θέλω να ξέρει ότι ο άμεσος σκοπός μου δεν είναι η κατασκευή της εξίσωσης που είναι γεωμετρικό θέμα, αλλά ένας τρόπος με τον οποίο μπορώ να επιτύχω αριθμητικές προσεγγίσεις για τις ρίζες των εξισώσεων*».

(Lucasian lectures p. 429, στο Bos H. [2] σ. 364).

Οι σημαντικές θέσεις του Newton στο έργο του *Aequatorium constructio linearis* έκαναν εντύπωση. Η μαθηματική γραμματεία του 18^{ου} αιώνα συχνά αναφέρεται σ' αυτόν, αλλά κανείς δεν υιοθέτησε τις απόψεις του για να τις αναπτύξει περαιτέρω. Στην πραγματικότητα ο Newton όταν έγραφε τα παραπάνω θα πρέπει να είχε την εμπειρία του πόσο προβληματικό ήταν το να επιλύσει προβλήματα με συνέπεια προς την καθαρή γεωμετρία, της οποίας ήταν ένθερμος υποστηρικτής. Έτσι βρίσκουμε εδώ τα ίδια αποτελέσματα όπως και σε προηγούμενες παραγράφους για την κριτική που ασκήθηκε στο πρόγραμμα του Καρτέσιου με τη συγχώνευση άλγεβρας και γεωμετρίας, αλλά δεν έχουμε αξιόπιστη εφαρμόσιμη εναλλακτική πρόταση.

IV. Μερικές ακόμη απόψεις μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα

Όπως έχουμε ήδη δει, ο Newton και ο Jakob Bernoulli είχαν ενστάσεις για την απαίτηση το Καρτέσιου ότι ο βαθμός των κατασκευαστικών καμπυλών θα πρέπει να είναι ο ελάχιστος δυνατός. Πολλοί άλλοι μαθηματικοί εξέφρασαν την άποψή τους για την ορθή επιλογή των κατασκευαστικών καμπυλών. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μερικές από αυτές τις απόψεις.

Ο Καρτέσιος όπως αναφέραμε δεν είχε δώσει επιχειρήματα για να τεκμηριώσει γιατί ο βαθμός των κατασκευαστικών καμπυλών θα πρέπει να είναι ο ελάχιστος δυνατός, ούτε είχε απαντήσει στο ερώτημα ποια καμπύλη πρέπει να επιλεγεί από τις όλες τις δυνατές του ίδιου βαθμού.

Ο De La Hire, όπως και ο Καρτέσιος, χρησιμοποιεί τη φράση "ιδιαίτερο λάθος" (considerable error) για κατασκευές με καμπύλες πολύ μεγάλου βαθμού. Η συχνή αναφορά στη φράση του Πάππου δείχνει τη σπουδαιότητα που αποδίδεται στην επιλογή της απλούστερης δυνατής κατασκευαστικής καμπύλης.

Οι Fermat, De La Hire και ο L' Hopital (λιγότερο αυστηρά) δέχτηκαν την απαίτηση του Καρτέσιου για την καμπύλη του μικρότερου δυνατού βαθμού. Ερμήνευσαν αυτό με το ότι οι δύο καμπύλες δεν θα έπρεπε να διαφέρουν μεταξύ τους αρκετά στο βαθμό. Αυτές οι απαιτήσεις οδήγησαν στην διαμόρφωση του 'κύριου αποτελέσματος'.

Μερικοί άλλοι συγγραφείς (Rolle, Cramer) σημείωσαν ρητά ότι η απαίτηση του ελάχιστου βαθμού ήταν καθαρά θέμα "κομψότητας". Κάποιοι άλλοι (Kraft, Euler, Cramer) σημείωσαν ότι η απλότητα της σχεδίασης της καμπύλης ήταν καλύτερο κριτήριο από αυτό του βαθμού για την επιλογή της καμπύλης. Ο **Gabriel Cramer** (1704-1752) σημείωσε :

«*Φαίνεται ότι στην επιλογή της κατάλληλης καμπύλης για την κατασκευή της εξίσωσης κάποιος έχει για στόχο μάλλον την ευκολία της περιγραφής της καμπύλης παρά την απλότητα της εξίσωσης. Κάποιος μπορεί να πει ότι για κάθε πρόβλημα υπάρχουν μερικές καμπύλες με τις οποίες λύνεται πιο φυσιολογικά παρά με άλλες καμπύλες έστω και μικρότερου βαθμού. Πράγματι με μια καμπύλη που είναι υψηλού βαθμού αλλά η εξίσωσή της έχει λίγους όρους θα είναι πιο εύκολο να λυθεί ένα πρόβλημα, με κάποια σημεία της ή με κάποια όργανα, απ' ότι με μια καμπύλη μικρότερου βαθμού αλλά της οποίας η εξίσωση, ακόμη και απλουστευμένη όσο το δυνατόν, έχει μεγαλύτερο πλήθος όρων. Υπάρχουν διάφορα παραδείγματα καμπυλών που είναι εύκολο να λυθούν προβλήματα παρότι οι εξισώσεις τους μπορεί να είναι πιο πολύπλοκες. Τότε λοιπόν κάποιος δεν θα προτιμήσει την απλούστερη γεωμετρική κατασκευή; Και δεν είναι οι απλούστερες κατασκευές εκείνες που γίνονται με πιο εύκολα σχεδιάσιμες καμπύλες; Η εξίσωση είναι στην πραγματικότητα μόνο ένα σύμβολο που μας οδηγεί σε υπολογισμούς, θεμελιωδώς είναι η περιγραφή μιας καμπύλης που επιλύει το πρόβλημα. Εάν κάποιος πραγματοποιήσει την κατασκευή με ένα μακρύ ή σύντομο, εύκολο ή δύσκολο υπολογισμό δεν έχει καμιά επιρροή στην διαδικασία καθεαυτή που συνιστά την λύση*». (Cramer 1750 p.91, στο Bos H. [2] σ. 366)

Τα παραπάνω λόγια είναι αρκετά σαφή αλλά δεν γίνεται προσπάθεια να θεμελιωθεί ένα εναλλακτικό κριτήριο για την απλότητα που πράγματι, θα λειτουργούσε στην εύρεση της κατασκευαστικής καμπύλης. Ως εκ τούτου από το 1750 ένα οριστικό και λειτουργικό κριτήριο για τη γεωμετρική απλότητα των κατασκευαστικών καμπυλών απέτυχε να εμφανιστεί. Τα επιχειρήματα στο κρίσιμο σημείο της μεθόδου - πώς να επιλέξουμε κατασκευαστικές καμπύλες – είχαν αποδειχθεί αναποτελεσματικά.

Τα επιχειρήματα που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους φανερώνουν ότι ο μαθηματικοί του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα ήρθαν αντιμέτωποι με ένα θεμελιώδες πρόβλημα του προγράμματος του Καρτέσιου. Τα γεωμετρικά κριτήρια της επάρκειας για λύσεις (απλότητα της κατασκευής, αποδοχή των μέσων της κατασκευής) δεν μεταφράστηκαν με φυσικό τρόπο σε αλγεβρική γλώσσα και διαδικασίες. Από την άλλη όμως, όπως δείχνει η εργασία του Newton, μια αμιγώς γεωμετρική προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων και την κατασκευή εξισώσεων ανώτερης τάξης δεν ήταν εφικτή.

Το τελευταίο μισό του 18^{ου} αιώνα η κατασκευή των εξισώσεων άρχισε να μην βρίσκεται στο επίκεντρο των ενδιαφερόντων των μαθηματικών εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν μπόρεσε να υπερβεί τα εμπόδια που προέκυψαν στη γενίκευση του προγράμματος. Συνέπεια αυτού ήταν η κατάρρευση του προγράμματος, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

V. Η κατάρρευση του κατασκευαστικού προγράμματος του Καρτέσιου

Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε τα αίτια της κατάρρευσης της κατασκευής των εξισώσεων και εν συντομία θα δούμε την επέκταση των εννοιών και των μοντέλων του **Lakatos** "**μεθοδολογία της έρευνας προγραμμάτων**", που εφαρμόζονται στην περίπτωση του εκφυλισμού μιας μαθηματικής θεωρίας. Πριν από αυτό πρέπει να αναφερθούμε στη σχέση της κατασκευής των εξισώσεων με άλλα συναφή πεδία των μαθηματικών. Η κατασκευή των εξισώσεων δεν ήταν μια απομονωμένη θεωρία, αλλά υπήρχαν δύο άλλες θεωρίες στις οποίες το θέμα και οι μέθοδοι ήταν συναφείς. Αυτές ήταν η **αλγεβρική θεωρία των εξισώσεων**, που σκοπό της ήταν να επιλύσει εξισώσεις με τη βοήθεια ριζικών και η **θεωρία των αλγεβρικών καμπυλών**.

Να επιλύσεις μια εξίσωση με ριζικά σημαίνει να εκφράσεις τις ρίζες της σαν συνάρτηση των συντελεστών της με ένα τύπο που περιέχει αριθμητικούς τελεστές και νιοστές ρίζες. Τον $16^{ο}$ αιώνα είχαν βρεθεί λύσεις με ριζικά για εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού (οι τύποι του Cardano). Κατά την διάρκεια του $17^{ου}$ και $18^{ου}$ αιώνα οι μαθηματικοί προσπάθησαν να αναπτύξουν μεθόδους για να βρουν τύπους για τις λύσεις εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 4.

Η αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων με ριζικά μπορεί με πρώτη ματιά να θεωρηθεί η πιο συγγενής θεωρία με την κατασκευή των εξισώσεων. Και οι δύο θεωρίες αφορούν εξισώσεις και στοχεύουν στον ακριβή (όχι προσεγγιστικό) καθορισμό των ριζών. Σε αυτόν τον τομέα η γεωμετρική κατασκευή των εξισώσεων κάποιος μπορεί να πει ότι ήταν πιο επιτυχημένη από ότι η αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων με ριζικά. Για εξισώσεις $2^{ου}$ έως $4^{ου}$ βαθμού οι κατασκευές είναι πιο εύκολες και πιο κομψές σε σχέση με τους τύπους του Cardano. Επίσης οι γεωμετρικές κατασκευές μπορούν να επεκταθούν σε εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού, ενώ η επίλυση με ριζικά φαίνεται να σταματά σε βαθμό μεγαλύτερο από 4. Εντούτοις τέτοια σύγκριση των δύο θεωριών έγινε εκτενώς από τους μαθηματικούς. Εμφανίζεται ότι είδαν τις δύο θεωρίες σαν εξ ολοκλήρου διαφορετικές. Και παρόλο που ήταν διαφορετικές, γιατί, αν και οι δύο είχαν στόχο την ακριβή επίλυση των εξισώσεων, κάθε μια όρισε την ακρίβεια με το δικό της τρόπο : η γεωμετρική θεωρία γενίκευσε τις ακριβείς κατασκευές με κύκλους και ευθείες σε κατασκευές με αλγεβρικές καμπύλες, ενώ η αλγεβρική θεωρία αποδεχόμενη νιοστές ρίζες σαν ακριβείς. Εξαιτίας αυτών των διαφορετικών εννοιών της ακρίβειας, οι θεωρίες είχαν στην πραγματικότητα πολύ μικρή σχέση και δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν σαν συναφείς ή συγκρίσιμες.

Όταν, μετά το 1750, η κατασκευή των εξισώσεων έπεσε σε λήθη στην αλγεβρική θεωρία των εξισώσεων δόθηκε νέα ώθηση από νέες προσεγγίσεις που εισηγήθηκε ειδικά ο Lagrange. Αυτή η προσέγγιση απέφερε πολύ σπουδαία αποτελέσματα : τις αποδείξεις (από Ruffini και Abel) ότι οι λύσεις με ριζικά στην γενική περίπτωση του $5^{ου}$ βαθμού είναι αδύνατες, τη θεωρία Galois και αργότερα τη μοντέρνα άλγεβρα. Η χρονολογική σύμπτωση της κατάρρευσης της γεωμετρικής θεωρίας και η νέα ώθηση της αλγεβρικής, δεν είναι μια περίπτωση αντικατάστασης μιας ανεπιτυχούς προσέγγισης από μια επιτυχημένη μέσω άμιλλας. Οι δύο θεωρίες είχαν διαχωριστεί για αρκετό καιρό και καμία από τις τεχνικές επίλυσης της γεωμετρικής δεν πάρθηκε από την αλγεβρική.

Εντούτοις δεν χάθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες που προέκυψαν από τη θεωρία της κατασκευής των εξισώσεων, όταν το θέμα περιέπεσε σε λήθη. Υπήρξε μία κληρονόμος που ονομάστηκε **αλγεβρική γεωμετρία**, δηλαδή η μελέτη των αλγεβρικών καμπυλών. Η κατασκευή γεωμετρικών προβλημάτων έδωσε το κίνητρο

για τη γενική θεωρία των αλγεβρικών καμπυλών και των τομών τους. Αυτό εκφράστηκε από τον Νεύτωνα όταν έγραψε, με αφορμή την ταξινόμησή του για τις καμπύλες 3^{ου} βαθμού, ότι "*η χρήση των καμπυλών στη γεωμετρία είναι ότι μέσω των τομών τους μπορούν να επιλυθούν προβλήματα*". Η κατασκευή των εξισώσεων επίσης προήγαγε το ενδιαφέρον για τις τεχνικές της απαλοιφής που αργότερα έγινε κεντρικής σημασίας στη μελέτη των τομών των αλγεβρικών καμπυλών. Κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού του 18^{ου} αιώνα η σχέση μεταξύ των δύο θεωριών βαθμιαία διαφοροποιήθηκε. Η θεωρία των αλγεβρικών καμπυλών απόκτησε ένα ανεξάρτητο status. Η κατασκευή των εξισώσεων θεωρήθηκε σαν μια από τις εφαρμογές της. Αρκετές ιδέες που αφορούσαν τις τομές και τις απαλοιφές παρέμειναν ζωντανές και μεταφέρθηκαν στην αλγεβρική γεωμετρία.

Αν και οι τεχνικές και οι ιδέες της κατασκευής των εξισώσεων εν μέρει μεταφέρθηκαν στην αλγεβρική γεωμετρία, η κατασκευή των εξισώσεων σαν μαθηματική θεωρία εκφυλίστηκε. Ο κεντρικός της στόχος, η ακριβής γεωμετρική κατασκευή των ριζών της εξίσωσης, δεν αναγνωρίστηκε πλέον ως σημαντικός και όταν στη συνέχεια ξεχάστηκε, η κατασκευή των εξισώσεων έχασε την θέση της σαν μέρος της άλγεβρας και τα νεώτερα εγχειρίδια παρέλειψαν το θέμα. Η ερώτηση όμως παραμένει, γιατί η κατασκευή των εξισώσεων εκφυλίστηκε.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε μια ανασκόπηση στα διάφορα πλαίσια που συνδυάστηκαν για να ακυρώσουν το θέμα, τα πραγματικά κίνητρα ξεχάστηκαν από τους μετέπειτα μαθηματικούς, αντιφάσεις εμφανίστηκαν στην προσπάθεια να μεταφράσουν τα γνήσια γεωμετρικά κριτήρια σε αλγεβρικά, τα νέα κίνητρα για το θέμα δεν ήταν ικανοποιητικά, πειστικά κριτήρια για την επάρκεια της κατασκευής των εξισώσεων μεγάλου βαθμού δεν διατυπώθηκαν και η κριτική που ασκήθηκε δεν αντιμετωπίστηκε με επαρκή επιχειρήματα.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η κατασκευή των εξισώσεων δεν εξαφανίστηκε γιατί τα προβλήματα του κλάδου ήταν άλυτα (ήταν για παράδειγμα αρκετά εφικτό να μελετήσεις με λεπτομέρεια την κατασκευή εξισώσεων βαθμού 5-9). Ούτε η θεωρία έχασε το ενδιαφέρον της επειδή αναπτύχθηκε μια ανταγωνιστική θεωρία που παρήγαγε καλύτερα αποτελέσματα. Δεν υπήρχε καμιά τέτοια θεωρία (ειδικότερα όπως αναφέραμε παραπάνω η επίλυση εξισώσεων με ριζικά δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν ανταγωνιστική θεωρία).

Οι αιτίες που έκαναν την κατασκευή των εξισώσεων να εξαφανιστεί βρίσκονται μάλλον στη σφαίρα των **κινήτρων** και των **μεθόδων**, παρά στη σφαίρα των μαθηματικών προβλημάτων και τεχνικών. Οι αιτίες συνδέθηκαν με τους λόγους για τους οποίους οι μαθηματικοί εξέτασαν καίρια προβλήματα σαν σημαντικά και με τα κριτήρια επάρκειας όπου οι μαθηματικοί έθεσαν για τη λύση αυτών των προβλημάτων. Τέτοιοι λόγοι και κριτήρια είναι ουσιώδη για την ανάπτυξη των μαθηματικών. Οδηγούν την έρευνα σε πεδία και είναι απαραίτητα για τη ανάπτυξή τους. Η ουσία του ρόλου τους γίνεται σαφής στην περίπτωση της κατασκευής των εξισώσεων, γιατί το πραγματικό κίνητρο του θέματος χάνει το νόημά του και κανένα επαρκές κριτήριο δεν βρέθηκε για επιλογή μεταξύ των πολλών δυνατών κατασκευών. Έτσι η επιχειρηματολογία για τα κίνητρα και τις μεθόδους παραμένει αναποτελεσματική, δεν θα μπορούσε να μεταφραστεί με πειστικά κριτήρια ή κατευθυντήριες γραμμές για έρευνα.

Γιατί τότε η επιχειρηματολογία για τα κίνητρα και τις μεθόδους παραμένει αναποτελεσματική; Παραμένει γιατί από τις απαρχές της θεμελιώθηκε με το καρτεσιανό μίγμα άλγεβρας και γεωμετρίας. Αυστηρά αλγεβρικά, η διαδικασία της κατασκευής των εξισώσεων δεν έχει νόημα, το νόημα πρέπει να έρχεται από τη

γεωμετρία. Έτσι το κριτήριο της επάρκειας πρέπει να είναι γεωμετρικό. Στις κατοπινές μελέτες η όλη διαδικασία έγινε αλγεβρική, αλλά το γεωμετρικό νόημα (ακριβής κατασκευή) και τα γεωμετρικά κριτήρια της επάρκειας (απλότητα των μέσων ή ευκολία της χάραξης της καμπύλης) εμφανίστηκαν για να αρνηθούν την μετάφραση στην άλγεβρα με φυσικό τρόπο. Αυτή είναι η βασική αντίφαση και σε αυτή μπορούμε να συνοψίσουμε την αιτία εκφυλισμού της κατασκευής των εξισώσεων. Το θέμα είχε μια φυσική ροπή να γίνει αλγεβρικό, αλλά δεν μπόρεσε να μεταφέρει τα αυθεντικά γεωμετρικά του κριτήρια στην άλγεβρα και έτσι έχασε την ζωτικότητά του και εκφυλίστηκε.

Έτσι η κατασκευή των εξισώσεων παρέχει ένα παράδειγμα μιας μαθηματικής θεωρίας που ενώ άρχισε με ιδιαίτερη ζωτικότητα, κατέληξε σε ένα στάδιο που εκφυλίστηκε. Το πλαίσιο της κατάρρευσης των επιστημονικών θεωριών έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον των φιλοσόφων και των ιστορικών των επιστημών, ειδικά επειδή ο **εκφυλισμός** και η **πρόοδος** ερευνητικών προγραμμάτων είναι έννοιες κλειδιά στη "μεθοδολογία της έρευνας προγραμμάτων", που προτάθηκε από τον Lakatos σαν τρόπος για να μελετηθεί και κατανοηθεί η ανάπτυξη της επιστήμης. Ο Lakatos και αρκετοί άλλοι συγγραφείς έχουν μελετήσει ιστορικά παραδείγματα εκφυλισμού (και προόδου) επιστημονικών θεωριών. Αυτά τα παραδείγματα αφορούν μάλλον φυσικές επιστήμες παρά μαθηματικά. Ο Hallet (1979) μελέτησε την ειδική περίπτωση των μαθηματικών θεωριών από την σκοπιά του Lakatos. Οι μελέτες αυτές είναι διαφωτιστικές και εμπεριστατωμένες, αλλά μάλλον η προσέγγιση του Lakatos δεν είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση της κατασκευής των εξισώσεων. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί παρουσιάζει κάποιο μεθοδολογικό ενδιαφέρον και ως εκ τούτου θα συζητήσουμε σύντομα τους λόγους για τους οποίους δεν είναι αποτελεσματική η θεωρία του Lakatos στην κατασκευή των εξισώσεων.

Ο κύριος στόχος της μεθοδολογίας του Lakatos για ερευνητικά προγράμματα, είναι η διάκριση μεταξύ της προόδου και του εκφυλισμού των ερευνητικών προγραμμάτων. Ο Lakatos αποσαφήνισε το θέμα της διάκρισης αρχικά για προγράμματα φυσικών επιστημών. Πρότεινε ότι η ανάπτυξη της επιστήμης ιστορικά μπορεί να κατανοηθεί γόνιμα – στα όρια του ''λογικά ανακατασκευασμένου'' (rationally reconstructed) – στα όρια των ανταγωνιστικών ερευνητικών προγραμμάτων, έτσι οι επιστήμονες πολλές φορές βρίσκουν τους εαυτούς τους σε ένα πρόγραμμα που φθίνει και τότε προσπαθούν να στραφούν σε ένα ανταγωνιστικό πρόγραμμα που μπορεί να οδηγηθεί σε τροχιά ανάπτυξης.

Ο Lakatos ισχυρίστηκε ότι το κριτήριο για τα ερευνητικά προγράμματα να προοδεύσουν ή να εκφυλιστούν είναι η επιτυχία ή αποτυχία τους να **παράγουν σημαντικές και επιτυχείς προβλέψεις**. Οι προβλέψεις (προγνώσεις) θεωρούνται σημαντικές ειδικά αν αφορούν φυσικά φαινόμενα έξω από το πλαίσιο αυτών των θεωριών που αρχικά βασίστηκαν για να αναπτυχθούν. Η βάση για την εκτίμηση της σημαντικότητας των προγνώσεων και με αυτόν τον τρόπο το κράτος της προόδου ή του εκφυλισμού του προγράμματος είναι η διαισθητικά ενημερωμένη γνώμη των επιστημόνων που εργάζονται στα συναφή πεδία του αντικειμένου.

Είναι δύσκολο να εφαρμόσεις αυτό το κριτήριο άμεσα στην περίπτωση των μαθηματικών. Ο Hallet σκιαγράφησε πως ένα σχετικό κριτήριο μπορεί να εξελιχθεί για μαθηματικά ερευνητικά προγράμματα. Το κριτήριο που προτείνει είναι **η επιτυχία ή αποτυχία του προγράμματος να λύσουν μαθηματικά προβλήματα για των οποίων τις λύσεις δεν αναπτύχθηκε αποκλειστικά**. Έχει επεξηγήσει την πρότασή του εφαρμόζοντας το κριτήριο σε ένα αριθμό περιπτώσεων στα μαθηματικά του 19^{ου} αιώνα και των αρχών του 20^{ου}. Σε αυτές τις μελέτες βάσισε την αξιολόγηση

της επιτυχίας ή αποτυχίας, πρωταρχικά στις γνώμες που εκφράστηκαν από κορυφαίους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με το εν λόγω θέμα.

Η κατασκευή των εξισώσεων δεν ήταν μια τόσο διαδεδομένη προσπάθεια στα μαθηματικά, έτσι ο όρος "ερευνητικό πρόγραμμα" μπορεί να είναι κάτι πιο ευρύ για να χρησιμοποιηθεί για αυτή την περίπτωση. Ακόμη το θέμα είχε ισχυρές προγραμματικές πτυχές, που έπαιξαν ένα σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξή του και μετά το 1700 ήταν σαφώς σε ένα στάδιο εκφυλισμού. Αυτός είναι ο λόγος που εξετάζουμε το φθίνων πρόγραμμα σύμφωνα με τα κριτήρια του Lakatos. Το κριτήριο του Hallet επιβεβαιώνει ότι η κατασκευή των εξισώσεων άρχισε να φθίνει μετά το 1700, η θεωρία δεν έλυσε προβλήματα για τα οποία δεν είχε δημιουργηθεί, στην πραγματικότητα στην ύστερή της φάση δεν έλυσε καθόλου προβλήματα. Αλλά θα μπορούσε να σημειωθεί ότι αυτή η αποτυχία να λύσει προβλήματα δεν αναφέρεται στα επιχειρήματα στο στάδιο που το θέμα προτάθηκε από τους κορυφαίους μαθηματικούς. Όπως έχουμε δει το κύριο θέμα στις κριτικές απόψεις εκφράστηκε περί το 1750, θεωρητικά δεν ήταν ότι δεν έλυσε προβλήματα, αλλά αυτό δεν έκανε την αίσθηση. Το κριτήριο του Hallet, τότε, παρότι είναι τυπικά εφαρμόσιμο σε αυτή την περίπτωση, είναι μη ικανοποιητικό επειδή είναι μη σχετικό με ότι πράγματι προκάλεσε τον εκφυλισμό της κατασκευής των εξισώσεων, που δεν ήταν στη σφαίρα των αποτελεσμάτων αλλά στη σφαίρα των κινήτρων.

Είναι σημαντικό ότι μια άλλη κεντρική διαδικασία στο μοντέλο του Lakatos για την "**λογική ανακατασκευή**" της ανάπτυξης στην επιστήμη δεν λαμβάνει χώρα σ' αυτή την περίπτωση, γιατί δεν υπάρχει κανένα ανταγωνιστικό πρόγραμμα. Το χαμένο ενδιαφέρον για την κατασκευή των εξισώσεων δεν έστρεψε τους μαθηματικούς σε μια ανταγωνιστική και πιο επιτυχή προσέγγιση του θέματος, απλώς απομακρύνθηκαν από το θέμα και το λησμόνησαν.

Ο H. Bos αναφέρει: «*Βρίσκω τότε ότι η ανάλυση της ανάπτυξης της κατασκευής των εξισώσεων σύμφωνα με τις επιταγές που επιτάσσει η "μεθοδολογία των ερευνητικών προγραμμάτων" δεν είναι ικανοποιητική. Ο λόγος που οι έννοιες και τα μοντέλα του Lakatos αποτυγχάνουν να εφαρμοστούν σ' αυτή την περίπτωση είναι ότι αφορούν μόνο την επιτυχία ή την αποτυχία στο επίπεδο των* ***αποτελεσμάτων****. Εδώ παρόλα αυτά, είναι μια περίπτωση στην οποία οι σημαντικοί παράγοντες της ανάπτυξης δεν ήταν στο επίπεδο των αποτελεσμάτων, αλλά στο επίπεδο του νοήματος και των κινήτρων*» (Bos H. [2] σ. 375).

Συνεχίζει : «*Η περίπτωση της κατασκευής των εξισώσεων δείχνει ότι παράγοντες που αφορούν την έννοια (meaning) και τα κίνητρα, και η σχετική επάρκεια των κριτηρίων στα ζητήματα των μεθόδων και των αποτελεσμάτων (λύσεων) είναι κρίσιμα στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Το ότι οι έννοιες και τα μοντέλα του Lakatos αποτυγχάνουν να εφαρμοστούν στα μαθηματικά είναι κατ' εμέ, μια από τις ενδείξεις ότι η σημαντικότητα αυτών των παραγόντων στην ανάπτυξη των μαθηματικών (και της επιστήμης γενικότερα) έχει υποεκτιμηθεί*» (Bos H. [2] σ. 375).

6. Στην αναζήτηση ενός κριτηρίου για γεωμετρικές κατασκευές

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα δεν είχε απαντηθεί ακόμη το ερώτημα για το ποιες κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο με κανόνα και διαβήτη. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα εξετάσουμε πρώτα ποιες **στοιχειώδεις κατασκευές** μπορούμε να πραγματοποιήσουμε με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη. Οι στοιχειώδεις κατασκευές είναι οι παρακάτω :

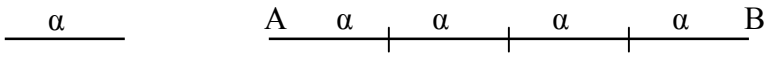
- Η κατασκευή μιας ευθείας που διέρχεται από δύο δεδομένα ή κατασκευασμένα σημεία
- Η κατασκευή ενός ευθυγράμμου τμήματος που διέρχεται από δύο δεδομένα ή κατασκευασμένα σημεία
- Η κατασκευή ενός κύκλου με κέντρο ένα δεδομένο ή κατασκευασμένο σημείο και ακτίνα ένα δεδομένο ή κατασκευασμένο ευθύγραμμο τμήμα.
- Η κατασκευή ενός σημείου που προκύπτει σαν τομή δύο ευθειών ή ευθείας και κύκλου ή δύο κύκλων

Ένα σημείο είναι **κατασκευάσιμο** αν προκύπτει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων στοιχειωδών κατασκευών. Γενικότερα ένα γεωμετρικό αντικείμενο (ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος κλπ.) είναι κατασκευάσιμο αν προκύπτει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων στοιχειωδών κατασκευών.

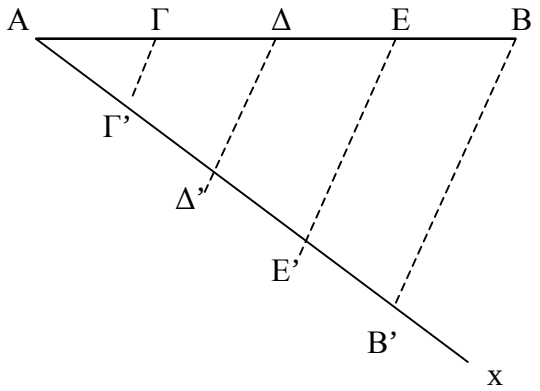
Τώρα θα εξετάσουμε ποιες **πράξεις** μπορούμε να κάνουμε σε ευθύγραμμα τμήματα με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη.

Αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β μπορούμε να κατασκευάσουμε το **άθροισμα** τους α+β και τη **διαφορά** τους α-β με απλές κατασκευές. Για αυτές τις πράξεις απαιτείται η μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων η οποία δίνεται από τον Ευκλείδη στην πρόταση Ι.2 των *Στοιχείων*. Η διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων δίνεται στην πρόταση Ι.3.

Αν δοθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα α μπορούμε να κατασκευάσουμε τμήματα μήκους 2α, 3α κλπ, δηλαδή **ακέραια πολλαπλάσια** του α, όπως στο παρακάτω σχήμα.

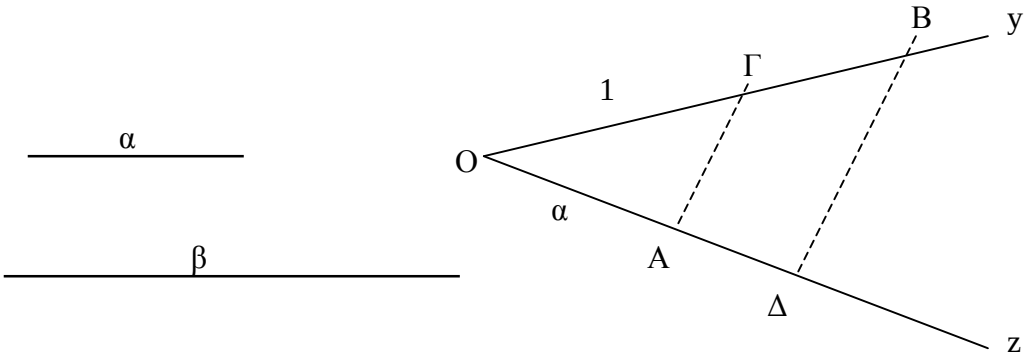


Μπορούμε επίσης να **διαιρέσουμε** ένα ευθύγραμμο τμήμα α σε ίσα μέρη. Στο επόμενο σχήμα έχουμε διαιρέσει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α σε 4 ίσα μέρη.



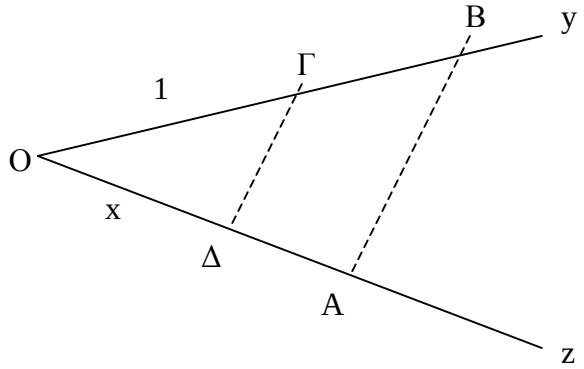
Ξεκινώντας λοιπόν από το ευθύγραμμο τμήμα α μπορούμε με συνδυασμό των δύο παραπάνω κατασκευών να κατασκευάσουμε κάθε **ρητό πολλαπλάσιο** του τμήματος α όπως για παράδειγμα το $\frac{4}{3}$α.

Επίσης μπορούμε να κατασκευάσουμε το **γινόμενο** δύο τμημάτων α και β αν δοθεί ένα τμήμα με μήκος που θα λάβουμε σαν μονάδα μέτρησης. Η κατασκευή είναι η παρακάτω. Αν ΟΑ=α, ΟΒ=β και ΟΓ=1, τότε τοποθετούμε τα τμήματα στις ημιευθείες Oy, Oz όπως στο σχήμα, φέρουμε την ΑΓ και την ΒΔ//ΑΓ.

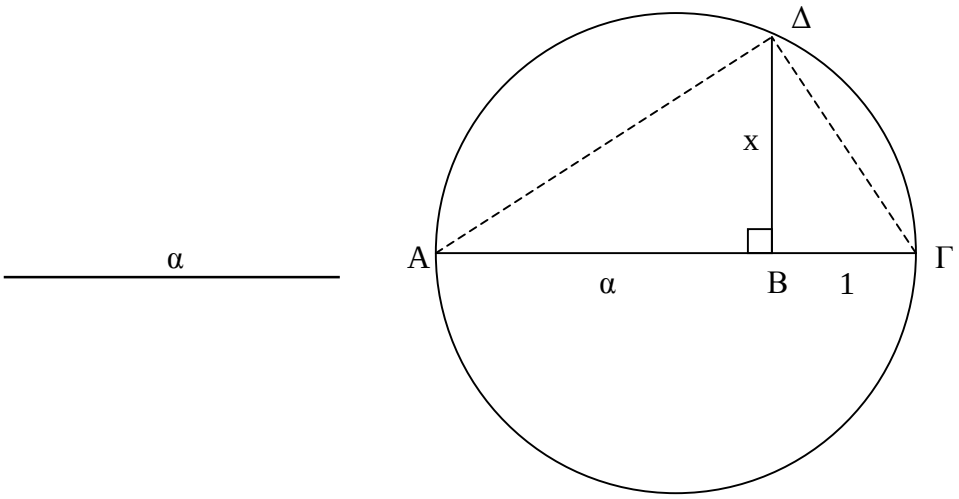


Προσδιορίζουμε τότε το σημείο Δ στην ημιευθεία Oz, οπότε το τμήμα ΟΔ είναι το γινόμενο αβ. Αυτό προκύπτει από την αναλογία $\frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΟΓ}{ΟΒ} \Leftrightarrow$ ΟΔ = ΟΑ·ΟΒ = αβ.

Ανάλογα μπορούμε να κατασκευάσουμε το **πηλίκο** δύο τμημάτων α και β αν δοθεί ένα τμήμα με μήκος ίσο με τη μονάδα.
Αν ΟΑ=α, ΟΒ=β και ΟΓ=1 τότε φέρουμε την ΑΒ και την ΓΔ//ΑΒ. Η αναλογία δίνει
$\frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΟΒ}{ΟΓ} \Leftrightarrow \frac{α}{x} = \frac{β}{1} \Leftrightarrow$ ΟΔ = x = $\frac{α}{β}$.



Θα δούμε τώρα την κατασκευή της **τετραγωνικής ρίζας** ενός τμήματος ΑΒ=α, δηλαδή θα κατασκευάσουμε ένα τμήμα x τέτοιο ώστε $x = \sqrt{α}$. Έστω ΑΒ=α και ΒΓ=1. Γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο ΑΓ και φέρνουμε την κάθετο στην ΑΓ στο σημείο Β, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε : $ΒΔ^2$ = ΑΒ·ΒΓ $\Leftrightarrow$ x^2 = α·1 $\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{α}$. Άρα το τμήμα ΒΔ= $x = \sqrt{α}$. Η κατασκευή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



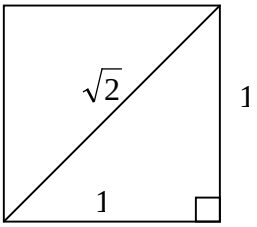
Μπορούμε λοιπόν με κανόνα και διαβήτη για ευθύγραμμα τμήματα που δίνονται ή τμήματα που κατασκευάζονται να εκτελέσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική γεωμετρία μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι αδύνατο να εκτελέσουμε με κανόνα και διαβήτη άλλες πράξεις εκτός από τις παραπάνω. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ευθεία και ο κύκλος έχουν εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού αντίστοιχα. Δηλαδή αν δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα α και ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 1, τότε γενικά είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε μόνο με κανόνα και διαβήτη ένα τμήμα μήκους ίσου με $\sqrt[3]{\alpha}$ ή συνα ή logα. Ειδικές όμως περιπτώσεις αυτών των κατασκευών μπορούν να πραγματοποιηθούν όπως για παράδειγμα αν α=8, τότε το τμήμα $\sqrt[3]{\alpha}=\sqrt[3]{8}=2$ προφανώς είναι κατασκευάσιμο.

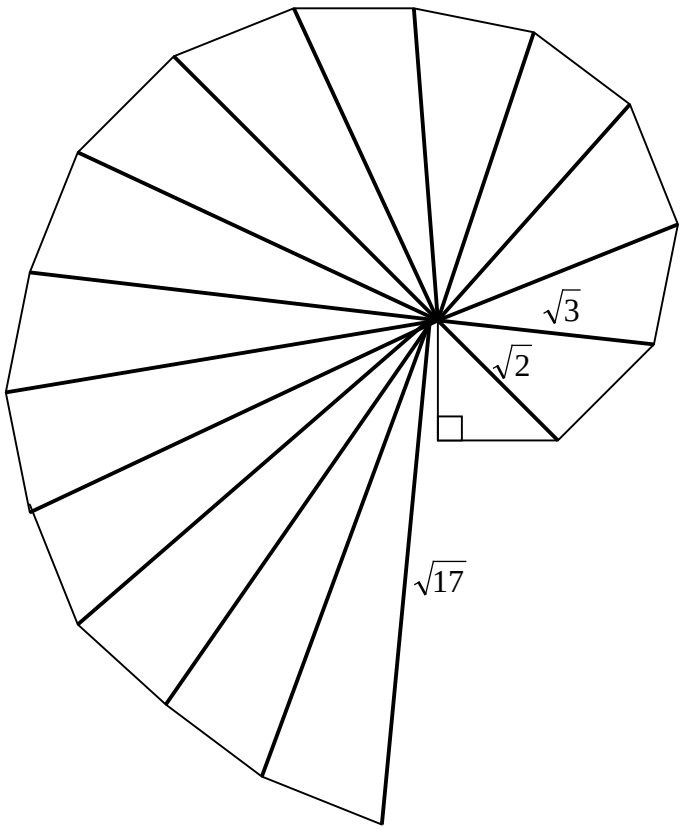
Μπορούμε να επεκτείνουμε τώρα τις γεωμετρικές κατασκευές και στους πραγματικούς αριθμούς δίνοντας τον παρακάτω ορισμό.
Ένας **πραγματικός αριθμός** α είναι **κατασκευάσιμος** με κανόνα και διαβήτη αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους |α| σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων ξεκινώντας από ένα δεδομένο μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα.

Ο Γερμανός μαθηματικός Leopold Kronecker (1823-1891) είναι γνωστός για την επιμονή του στην κατασκευασιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων. Όπως χαρακτηριστικά έλεγε, «*ο Θεός έφτιαξε τους φυσικούς αριθμούς. Όλα τα άλλα είναι δουλειά του ανθρώπου.*»

Η κατασκευή της τετραγωνικής ρίζας του 2 ήταν γνωστή στους πυθαγορείους σαν η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς 1 και αποδίδεται στον Ίππασο τον Μεταποντίνο τον 6^{ο} αιώνα π.Χ. Ήταν στενά συνδεδεμένη με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας και την κρίση που προκάλεσε στην κοσμοθεωρία των πυθαγορείων.



Η κατασκευή τετραγωνικών ριζών φυσικών αριθμών ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος. Ξεκινώντας από ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με τη μονάδα βρίσκουμε την υποτείνουσα ίση με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε νέο ορθογώνιο τρίγωνο με μία κάθετη πλευρά $\sqrt{2}$ και την άλλη κάθετη ίση με τη μονάδα και παίρνουμε τη νέα υποτείνουσα ίση με $\sqrt{3}$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται επ' άπειρον και μπορεί να μας δώσει τις τετραγωνικές ρίζες όλων των φυσικών αριθμών.



Η κατασκευή αυτού του κοχλία στο σχήμα σταματάει στην κατασκευή του $\sqrt{17}$. Από το επόμενο βήμα αυτής της διαδικασίας το σχήμα θα αρχίσει να επικαλύπτεται. Ίσως αυτό το σταμάτημα (ανάσχεση) στο $\sqrt{17}$ να σχετίζεται και με τον πλατωνικό διάλογο *Θεαίτητος*. Εκεί σε ένα διάλογο μεταξύ του νεαρού Θεαίτητου και του Σωκράτη για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών με μια ενιαία μέθοδο ο Θεαίτητος αναφέρει ότι έφθασαν μέχρι το 17 και μετά σταμάτησαν.
« *Περί δυνάμεων τι ημίν Θεόδωρος όδε έγραφε, της τε τρίποδος περί και πεντέποδος, αποφαίνων ότι μήκει ού ξύμμετροι τη ποδιαία, και ούτω κατά μίαν εκάστη προαιρούμενος μέχρι της* ***επτακαιδεκάποδος,*** *εν δε ταύτη πως ενέσχετο. Ημίν ουν εισήλθε τι τοιούτον, επειδή άπειροι το πλήθος αι δυνάμεις εφαίνοντο, πειραθήναι ξυλλαβείν εις εν, ότω πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τας δυνάμεις.*» (Θεαίτητος 147 D).

Βλέπουμε λοιπόν ότι η κατασκευή των πραγματικών αριθμών με κανόνα και διαβήτη ανάγεται στην κατασκευή ευθυγράμμων τμημάτων με αντίστοιχα μήκη.

Μπορούμε τώρα λοιπόν να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα για το ποιες κατασκευές μπορούν να πραγματοποιηθούν με κανόνα και διαβήτη. Η απάντηση είναι η εξής :

Αν δοθούν ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα πεπερασμένου πλήθους, όπου το ένα λαμβάνεται ως μονάδα μέτρησης του μήκους και τα άλλα έχουν μήκη a, b, c, …, τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα x κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη, είναι να μπορεί το x να εκφραστεί σαν συνάρτηση ρητών πολλαπλασίων των μεγεθών 1, a, b, c, …, καθώς και συνδυασμών αυτών με τη χρήση ενός πεπερασμένου πλήθους από τα πέντε σύμβολα +, - , × , : , $\sqrt{\ }$.

Αυτά τα πέντε σύμβολα θα τα ονομάσουμε στοιχειώδη.

Η απάντηση αυτή μας παρέχει ένα κριτήριο που φαίνεται επαρκές, όμως η εφαρμογή του προσκόπτει σε σοβαρές δυσκολίες. Για να είναι εφικτή η κατασκευή ενός ευθυγράμμου τμήματος με κανόνα και διαβήτη, πρέπει να γνωρίζουμε αν το μήκος x του ζητούμενου τμήματος μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση ρητών πολλαπλασίων των δεδομένων στοιχείων και των πέντε στοιχειωδών συμβόλων. Όταν το μήκος x δίνεται μέσω μιας εξίσωσης, όπως για παράδειγμα. $4x^3 - 3x - \alpha = 0$ στην περίπτωση της τριχοτόμησης γωνίας ή $x = \sqrt{\pi}$ στην περίπτωση του τετραγωνισμού του κύκλου, τότε δεν μπορούμε να ξέρουμε αν το x ικανοποιεί τις απαιτήσεις του κριτηρίου.

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα. Αν ένα μέγεθος x μας δοθεί απευθείας συναρτήσει άλλων μεγεθών ή εμμέσως ως ρίζα μιας εξίσωσης, τότε πως μπορούμε να αποφανθούμε αν αυτό μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση ρητών πολλαπλασίων των δεδομένων μεγεθών και των πέντε στοιχειωδών συμβόλων;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δόθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Pierre L. Wantzel (1814-1848) το 1837 με το παρακάτω θεώρημα.

Αν ένας αριθμός είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη τότε είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές, ανάγωγου στο σύνολο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές και ο βαθμός του είναι δύναμη του 2.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Wantzel γίνεται με τη βοήθεια της θεωρίας Galois.

Επίσης είχε αποδειχθεί και το παρακάτω θεώρημα :

Αν ένας αριθμός είναι ρίζα ενός ανάγωγου πολυωνύμου νιοστού βαθμού, τότε δεν μπορεί να είναι ρίζα άλλου ανάγωγου πολυωνύμου διαφορετικού βαθμού.

Ο συνδυασμός αυτών των δύο θεωρημάτων μας δίνει το τελικό κριτήριο κατασκευασιμότητας για ένα ευθύγραμμο τμήμα και ως εκ τούτου απαντά οριστικά στο πρόβλημα.

Στην επόμενη παράγραφο θα εφαρμόσουμε αυτό το κριτήριο στα τρία “άλυτα” προβλήματα της αρχαιότητας. Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι εκτός από τις προσπάθειες πολλών μαθηματικών να επιλύσουν τα εν λόγω περίφημα προβλήματα θετικά, δηλαδή να πραγματοποιήσουν μια κατασκευή, υπήρξαν και προσπάθειες από μαθηματικούς να επιλύσουν αυτά αρνητικά, δηλαδή να αποδείξουν το αδύνατο της κατασκευής τους με κανόνα και διαβήτη.

Μια λανθασμένη απόδειξη της μη επίλυσης του τετραγωνισμού του κύκλου διατυπώθηκε το 1668 από τον James Gregory.

7. Η θεωρία Galois και οι κατασκευές

Όπως έχουμε αναφέρει οι προσπάθειες των μαθηματικών για την επίλυση των τριών περίφημων “άλυτων” προβλημάτων της αρχαιότητας με κανόνα και διαβήτη απέβησαν άκαρπες μέχρι και τις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Το πλήρωμα του χρόνου ήλθε κατά την τέταρτη δεκαετία του 19^{ου} αιώνα (1837) για τον διπλασιασμό του κύβου και την τριχοτόμηση της γωνίας και το 1882 για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Η άλγεβρα και πιο συγκεκριμένα η θεωρία ομάδων απάντησαν οριστικά μετά από μια μακρά χρονική περίοδο 25 αιώνων, ότι **η επίλυση αυτών των τριών προβλημάτων με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη**.

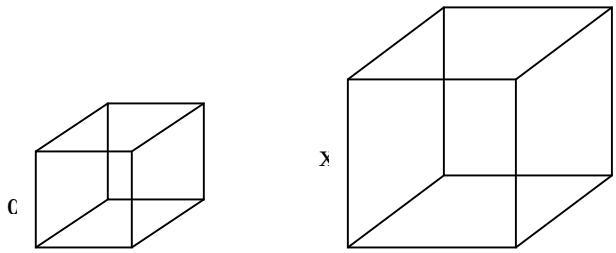
Η θεωρία ομάδων αναπτύχθηκε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα από πολλούς μαθηματικούς με τους **N. H. Abel** (1802-1829) και **Evariste Galois** (1811-1832) να έχουν την πιο σημαντική συνεισφορά. Ο Galois εφάρμοσε την έννοια της ομάδας στη μελέτη των εξισώσεων και εισήγαγε στη θεωρία ομάδων έννοιες τόσο σπουδαίες ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο θεμελιωτής της μαθηματικής θεωρίας που σήμερα ονομάζουμε θεωρία Galois.

Η θεωρία Galois, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μας παρέχει το παρακάτω κριτήριο κατασκευσιμότητας (θεώρημα Wantzel) :

Αν δοθούν ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα, πεπερασμένου πλήθους, όπου το ένα λαμβάνεται ως μονάδα μέτρησης του μήκους και τα άλλα έχουν μήκη a, b, c, …, τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα x κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη, είναι το x να είναι ρίζα μιας ανάγωγης αλγεβρικής εξίσωσης της οποίας οι συντελεστές είναι ρητές συναρτήσεις των μηκών 1, a, b, c, …, των δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων, και της οποίας εξίσωσης η ομάδα έχει τάξη ίση με κάποια δύναμη του 2, δηλαδή ο βαθμός της εξίσωσης είναι κάποια δύναμη του 2.

Ο διπλασιασμός του κύβου

Αν δοθεί ένας κύβος ακμής α, τότε ζητείται να κατασκευαστεί κύβος με διπλάσιο όγκο.



Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δοθείσα ακμή είναι ίση με 1. Τότε ο κύβος με διπλάσιο όγκο θα έχει ακμή ίση με $x = \sqrt[3]{2}$, οπότε το τμήμα x που ζητείται να κατασκευάσουμε επαληθεύει την εξίσωση :

$$\mathbf{x^3 - 2 = 0}.$$

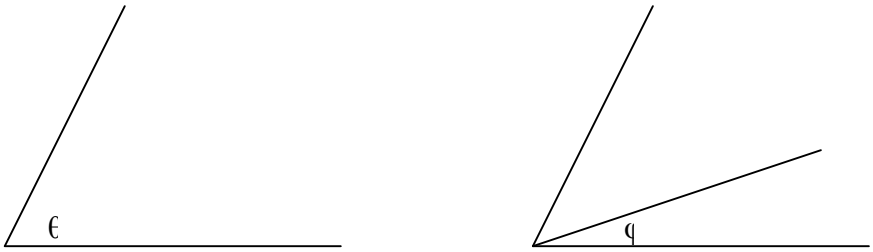
Η εξίσωση αυτή έχει ακέραιους συντελεστές και είναι ανάγωγη. Αν θεωρήσουμε την ομάδα της εξίσωσης αυτής τότε η τάξη της είναι ίση με 3, δηλαδή δεν είναι δύναμη του 2. Επίσης δεν μπορεί να υπάρξει άλλη ανάγωγη εξίσωση με συντελεστές ακέραιους της οποίας το ζητούμενο μέγεθος να είναι ρίζα και της οποίας η ομάδα να έχει τάξη ίση με κάποια δύναμη του 2.

Οπότε σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο το τμήμα x δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη.

Δηλαδή **ο διπλασιασμός του κύβου με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατος**.

Η τριχοτόμηση γωνίας

Έστω ότι η γωνία που δίνεται για να τριχοτομηθεί είναι θ. Ζητείται τότε να κατασκευαστεί γωνία φ ίση με το 1/3 της θ. Δηλαδή $\varphi = \frac{1}{3}\theta$.



Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε τη σχέση :

$$\text{συν}3\varphi = 4\text{συν}^3\varphi - 3\text{συν}\varphi$$

η οποία μας δίνει το συνημίτονο της γωνίας 3φ όταν το συνημίτονο της γωνίας φ είναι γνωστό.
Θέτουμε τώρα θ = 3φ και συνθ = α , οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$4\text{συν}^3\frac{\theta}{3} - 3\text{συν}\frac{\theta}{3} - \text{συν}\theta = 0 \quad (1)$$

Αν τώρα στην (1) θέσουμε $\text{συν}\frac{\theta}{3} = x$, προκύπτει η εξίσωση $\mathbf{4x^3 - 3x - \alpha = 0}$ (2), της οποίας οι ρίζες είναι το συνημίτονο της ζητούμενης γωνίας φ.

Η γωνία φ είναι κατασκευάσιμη αν το συνημίτονο της είναι κατασκευάσιμο. Άρα αν κατασκευάσουμε το x = συνφ, τότε έχουμε τριχοτομήσει τη γωνία θ.

Το μοναδικό δεδομένο του προβλήματος είναι η γωνία θ η οποία μας δίνεται μέσω του συνημιτόνου της α. Θεωρούμε και το τμήμα με μήκος 1 και τώρα είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το κριτήριο κατασκευσιμότητας.
Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν το τμήμα α παραμένει απροσδιόριστο τότε η εξίσωση (2) είναι ανάγωγη. Αν τώρα θεωρήσουμε την ομάδα αυτής της εξίσωσης η τάξη της είναι 6 που δεν είναι δύναμη του 2.

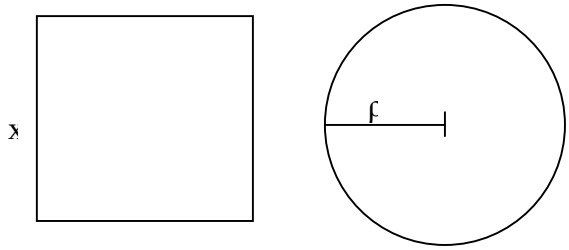
Άρα **η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας είναι αδύνατη με κανόνα και διαβήτη**.

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι για ορισμένες γωνίες θ η τριχοτόμηση με κανόνα και διαβήτη είναι εφικτή. Για παράδειγμα αν θ=90° τότε α=συν90°=0, οπότε η εξίσωση (2) γίνεται : $4x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2-3) = 0$, δηλαδή το πρώτο μέλος αναλύεται σε γινόμενο δύο πολυωνύμων πρώτου και δεύτερου βαθμού, οπότε το x είναι κατασκευάσιμο, δηλαδή η ορθή γωνία τριχοτομείται.
Για να τριχοτομηθεί η ορθή γωνία πρέπει να κατασκευαστεί μια γωνία 30°. Αυτό μπορεί να γίνει με την εγγραφή σε κύκλο ενός κανονικού δωδεκαγώνου. Τότε η κεντρική του γωνία είναι 30°.
Γενικά μπορεί να αποδειχθεί ότι οι μόνες ακέραιες γωνίες που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη είναι πολλαπλάσια του 3.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Αν δοθεί ένας κύκλος ακτίνας ρ, τότε ζητείται να κατασκευαστεί τετράγωνο πλευράς x, ώστε να έχει εμβαδόν ίσο με του κύκλου.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε την ακτίνα του κύκλου ρ=1.
Τότε πρέπει να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη ένα τμήμα $x = \sqrt{\pi}$.



Το κριτήριο κατασκευασιμότητας απαιτεί το x να είναι ρίζα μιας ανάγωγης αλγεβρικής εξίσωσης με συντελεστές ρητές συναρτήσεις των δεδομένων. Το μοναδικό δεδομένο του προβλήματος είναι η ακτίνα, δηλαδή τμήμα μήκους ίσο με 1, οπότε οι συντελεστές πρέπει να είναι ρητοί αριθμοί. Άρα πρέπει πριν απ' όλα το **π** να είναι **αλγεβρικός αριθμός,** δηλαδή ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με συντελεστές ρητούς αριθμούς.
Το πρόβλημα λοιπόν του τετραγωνισμού του κύκλου αντιστεκόταν ακόμη στις προσπάθειες για την επίλυσή του, ενώ στα άλλα δύο προβλήματα είχαν ήδη δοθεί απαντήσεις με τη βοήθεια του κριτηρίου κατασκευασιμότητας. Μη απόδειξη του ότι το π είναι αλγεβρικός αριθμός ισοδυναμούσε με την αδυναμία μας να επιλύσουμε το πρόβλημα.

Το 1844 ο Joseph Liouville (1809-1882) απέδειξε την ύπαρξη **υπερβατικών αριθμών**, δηλαδή αριθμών που δεν είναι ρίζες καμιάς πολυωνυμικής εξίσωσης με ακεραίους συντελεστές. Η απόδειξη του Liouville είναι κατασκευαστική, δηλαδή συνίσταται στην κατασκευή υπερβατικών αριθμών και δεν μας παρέχει τη μέθοδο για να αναγνωρίσουμε αν ένας αριθμός είναι υπερβατικός ή όχι.
Το 1873 ο Charles Hermite (1822-1901) απέδειξε ότι ο αριθμός e, η βάση των νεπέριων λογαρίθμων, είναι υπερβατικός αριθμός. Στηριζόμενος στο αποτέλεσμα αυτό το 1882 ο Γερμανός μαθηματικός **C.F.Von Lindemann** (1852-1939) απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός, άρα ο **τετραγωνισμός του κύκλου με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατος.**
Έτσι και το τρίτο και τελευταίο από τα περίφημα "άλυτα" προβλήματα της αρχαιότητας λύθηκε, δηλαδή αποδείχθηκε η μη επιλυσιμότητά του με κανόνα και διαβήτη.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή και παρόλο που, κατά τον Newton, *«η άλγεβρα δεν είναι το μέσο που θα φέρει τάξη στη Γεωμετρία»*, θα λέγαμε ότι η άλγεβρα μπορεί να απαντήσει αποδεικτικά για την επιλυσιμότητα ή μη των γεωμετρικών προβλημάτων και με κάποιο τρόπο "τακτοποιεί" τη Γεωμετρία.

8. Η κατασκευή των κανονικών πολυγώνων

I. Το πρόβλημα της κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές είναι ισοδύναμο με την διαίρεση του κύκλου σε ν ίσα τόξα με κανόνα και διαβήτη. Οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες είχαν κατασκευάσει με κανόνα και διαβήτη τα κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών :

α) 4, 8, 16, 32, 64, ... δηλαδή της μορφής 2^{ν}, ν = 2, 3, 4, 5, 6, ...
β) 3, 6, 12, 24, 48, ... δηλαδή της μορφής $3\cdot 2^{\nu}$, ν = 0, 1, 2, 3, 4, ...
γ) 5, 10, 20, 40, 80, ... δηλαδή της μορφής $5\cdot 2^{\nu}$, ν = 0, 1, 2, 3, 4, ...
δ) 15, 30, 60, 120, ... δηλαδή της μορφής $3\cdot 5\cdot 2^{\nu}$, ν = 0, 1, 2, 3, 4, ...

Η κατασκευή ενός 2ν-γώνου γινόταν από το ν-γωνο με διχοτόμηση των αντίστοιχων πλευρών. Η πλευρά $\lambda_{2\nu}$ του 2ν-γώνου δινόταν συναρτήσει της πλευράς λ_{ν} του ν-γώνου από τον τύπο $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_{\nu}^2}}$, που είναι γνωστός και σαν τύπος του Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης στην προσπάθειά του να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου με τη μέθοδο της εξάντλησης, κατασκεύασε κανονικά πολύγωνα μέχρι και 96 πλευρών ξεκινώντας από το κανονικό εξάγωνο και διπλασιάζοντας τις πλευρές.

Ας εξετάσουμε ποια κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών μέχρι 20 δεν είχαν κατασκευαστεί από τους αρχαίους Έλληνες. Αυτά ήταν το κανονικό επτάγωνο, εννιάγωνο, εντεκάγωνο δεκατριάγωνο, δεκατετράγωνο, δεκαεπτάγωνο, δεκαοκτάγωνο και δεκαεννιάγωνο.

Για το κανονικό επτάγωνο έχει διασωθεί η πραγματεία του Αρχιμήδη «*Περί του κανονικού επταγώνου*» από αραβική μετάφραση. Η κατασκευή όμως εκεί γίνεται με νεύση. Από τα παραπάνω κανονικά πολύγωνα κανένα δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη εκτός από το κανονικό δεκαεπτάγωνο. Για αυτό δεν έχει διασωθεί από τους αρχαίους Γεωμέτρες καμία μνεία για την κατασκευή του. Η περίπτωση του κανονικού δεκαεπταγώνου είναι από τις πλέον χαρακτηριστικές περιπτώσεις προβλήματος που ενώ μπορεί να επιλυθεί με κανόνα και διαβήτη δεν επιλύθηκε από τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες.

Για να κατασκευαστεί το κανονικό εννιάγωνο πρέπει να κατασκευαστεί γωνία 40°. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την τριχοτόμηση γωνίας 120° που είναι η γωνία του κανονικού εξαγώνου. Η κατασκευή λοιπόν του κανονικού εννιαγώνου συνδέεται με το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας. Ίσως η ανάγκη αυτή να έθεσε ή να ανέδειξε το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας.

Το πρόβλημα γενικότερα που τίθεται για τα κανονικά πολύγωνα είναι το εξής :

Ποια κανονικά πολύγωνα είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη;

Ο **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) το 1796, σε ηλικία 19 ετών, απέδειξε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη. Στη συνέχεια έλυσε το πρόβλημα στη γενική του μορφή του αποδεικνύοντας ότι ένα κανονικό πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι της μορφής $\mathbf{2^{\nu}}$, ή $\mathbf{2^{\nu}\cdot F_a\cdot F_b\ldots F_n}$, όπου $F_n = 2^{2^n} + 1$, n=0,1,2, ... είναι πρώτοι αριθμοί και διαφορετικοί μεταξύ τους.

Οι αριθμοί F_n είναι γνωστοί ως (πρώτοι) **αριθμοί του Fermat**. Ο Fermat (1601-1665) ισχυρίστηκε ότι όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι. Πράγματι για n = 0,1,2,3,4 προκύπτουν οι αριθμοί $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ που είναι πρώτοι. Όμως για n = 5 ο αριθμός που προκύπτει, ο $F_5 = 4294967297$, δεν είναι πρώτος αφού διαιρείται με το 641, όπως απέδειξε ο **L. Euler** το 1732 ($F_5 = 2^{32} + 1 = 641\times 6700417$).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, είναι αδύνατη η κατασκευή με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη ενός κανονικού πολυγώνου με πλήθος πλευρών 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22 κλπ.

Η απόδειξη του Gauss παρουσιάστηκε το 1801 στο βιβλίο του *Disquisitiones Arithmeticae* (Αριθμητικές έρευνες). Μπορεί να θεωρηθεί ως μία εφαρμογή της θεωρίας Galois, αν και ο Evarist Galois δεν είχε ακόμη γεννηθεί την εποχή που ο Gauss έκανε την ανακάλυψή του. Επίσης ούτε και ο Galois φαίνεται να εμπνεύσθηκε τίποτε από την απόδειξη του Gauss, όταν εργαζόταν στη θεωρία των εξισώσεων.

Ο Gauss το 1828

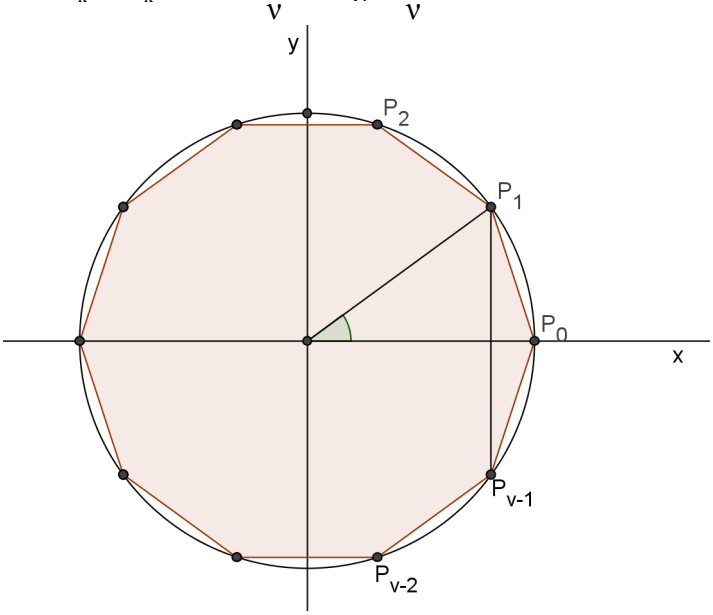
Ο Gauss πάντως αν και άφησε πίσω του ένα τεράστιο έργο τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική - θεωρείται μαζί με τους Αρχιμήδη και Νεύτωνα οι κορυφαίοι μαθηματικοί όλων των εποχών - θεωρούσε την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου σαν το κορυφαίο επίτευγμά του. Η επιθυμία του να χαραχτεί πάνω στον τάφο του το κανονικό δεκαεπτάγωνο ήταν όμοια με αυτή του Αρχιμήδη με την εγγεγραμμένη σφαίρα σε κύλινδρο. Όταν ο Gauss έκανε λόγο για αυτή του την επιθυμία σε ένα μαρμαρογλύπτη αυτός του απάντησε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο θα μοιάζει με κύκλο. Πάντως ο ανδριάντας του που βρίσκεται στην γενέθλια πόλη του, το Braunschweig της Γερμανίας, εδράζεται σε βάθρο σχήματος κανονικού δεκαεπταγώνου.

Ο Gauss σε πίνακα του C. Jensen

Ο Gauss αν και απέδειξε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, δεν έδωσε μέθοδο κατασκευής του. Ο πρώτος που έδωσε μία μέθοδο για την κατασκευή του ήταν ο **Johannes Erchinger** το 1825, 29 χρόνια μετά την απόδειξη του Gauss. Η κατασκευή είναι αρκετά πολύπλοκη και γίνεται σε 64 βήματα. Στο παράρτημα δίνουμε μια τροποποιημένη κατασκευή που δόθηκε από τον **H.W. Richmond** (1863-1948) το 1893. Το ερώτημα που τίθεται εύλογα για αυτές τις δύο κατασκευές είναι ότι δεν προκύπτουν από μία γενική μέθοδο. Η γενική μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί για την κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές είναι η παρακάτω.

Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Επίσης θεωρούμε και την εξίσωση $\mathbf{z^{\nu} - 1 = 0}$ **(*)**. Οι εικόνες αυτών των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και τον διαιρούν σε ν ίσα μέρη, δηλαδή είναι οι κορυφές του κανονικού ν-γώνου.
Από το θεώρημα του De Moivre ξέρουμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (*) σε τριγωνομετρική μορφή δίνονται από την σχέση :

$$P_k = z_k = \sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}, \; k=0,1,2,\ldots,\nu-1.$$



Οι κορυφές του κανονικού ν-γώνου P_κ , k = 0,1,2,..,ν-1 φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Για τη ρίζα z_o έχουμε ότι $z_o = 1$.
Αν θέσουμε για τη ρίζα $z_1 = x_1+iy_1$, τότε για το συνημίτονο της θα ισχύει ότι :
$\mathbf{x_1} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}$**.** Το πρόβλημα τώρα ανάγεται στον υπολογισμό με τη βοήθεια ριζικών του $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}$, π.χ για το κανονικό πεντάγωνο ισχύει $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Στη συνέχεια η κατασκευή του $x_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}$ θα μας δώσει την προβολή της κορυφής P_1 στον άξονα x'x, άρα και την κορυφή P_1. Το τόξο P_oP_1 είναι το $\frac{1}{\nu}$ του κύκλου. Οι υπόλοιπες κορυφές του κανονικού ν-γώνου θα βρεθούν με τη βοήθεια της χορδής P_oP_1.
Αυτή τη μέθοδο θα τη δούμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο για την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου.

Την κατασκευή του κανονικού 257-γωνου πραγματοποίησε ο **Friedrich Julius Richelot** (1808-1875), καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Königsberg, σε μια εκτεταμένη εργασία του 81 σελίδων που δημοσιεύτηκε το 1832 (Crelle's *Journal*, IX, 1832). Εκεί ο Richelot εξήγαγε και κατασκεύασε τις ρίζες της εξίσωσης $z^{257} - 1 = 0$. Η διδακτορική του διατριβή που υποβλήθηκε το 1831 στο πανεπιστήμιο του Königsberg είχε για θέμα την διαίρεση του κύκλου σε 257 ίσα μέρη.

Για την κατασκευή του κανονικού 65537-γωνου ο Γερμανός καθηγητής **Johann Gustav Hermes of Lingen** (1846-1912) εργάστηκε δέκα συναπτά έτη για να εξαγάγει τις ρίζες της εξίσωσης $z^{65537} - 1 = 0$. Το αποτέλεσμα της επίπονης εργασίας του κατατέθηκε το 1894 στο πανεπιστήμιο του Göttingen με τίτλο : "*Uber die Teiling des Kreisses in 65537 gleiche Teile*" (Περί της διαίρεσης του κύκλου σε 65537 ίσα μέρη) υπό μορφή χειρογράφων. Τα χειρόγραφα αυτά που ξεπερνούσαν τις 200 σελίδες δεν δημοσιεύθηκαν σε κάποιο μαθηματικό περιοδικό και έκτοτε γύρω από την τύχη τους υπήρξε πολλή συζήτηση. Κάποιοι μαθηματικοί πάντως αμφισβητούν την ύπαρξη αυτών των χειρογράφων. Ο Felix Klein που υπήρξε καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Göttingen στο έργο του *Famous problems of elementary Geometry* αναφέρει ότι μια περίληψη των χειρογράφων αυτών βρίσκεται στην συλλογή των σεμιναρίων μαθηματικών & φυσικής του Göttingen, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (Göttingen) No.**3**: 170–186, 1894.

Για τους αριθμούς του Fermat, δηλαδή της μορφής $F_n = 2^{2^n} + 1$, n=0,1,2, ... έχουμε να αναφέρουμε τα εξής. Οι πέντε πρώτοι από αυτούς τους αριθμούς όπως είδαμε είναι πρώτοι. Για εκθέτες από n=5 μέχρι και n=32 έχει αποδειχθεί ότι προκύπτουν σύνθετοι αριθμοί. Για περισσότερες από 60 μεμονωμένες περιπτώσεις όπως για n=9448 έχει αποδειχθεί ότι προκύπτει σύνθετος αριθμός. Μέχρι σήμερα πάντως δεν έχει προσδιοριστεί άλλος πρώτος αριθμός αυτής της μορφής. Το πρόβλημα λοιπόν για το αν υπάρχει και άλλος πρώτος αριθμός αυτής της μορφής παραμένει ανοιχτό και απαιτεί κολοσσιαίους υπολογισμούς αφού οι αριθμοί αυτοί είναι τεράστιοι.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με τα κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών ν μικρότερο του 300 που είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη. Παρακάτω είναι οι 38 τιμές του ν μικρότερες του 300 :
3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε το γεγονός ότι αν ένα κανονικό πολύγωνο έχει πλήθος πλευρών ίσο με κάποιο πρώτο αριθμό του Fermat που είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη, τότε το ίδιο ισχύει και για τους δύο προηγούμενους ακεραίους δηλαδή και αυτά είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη.
Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω τριάδες διαδοχικών ακεραίων που αν παριστούν πλήθος πλευρών κανονικών πολυγώνων, τότε αυτά είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη :
3, 4, **5**
15, 16, **17** ($15=3\times5$, $16=2^4$, **17**$= F_2 = 2^4 +1$)
255, 256, **257** ($255=3\times5\times17$, $256=2^8$, **257**$= F_3 = 2^8 +1$)
65535, 65536, **65537** ($65535=3\times5\times17\times257$, $65536=2^{16}$, **65537**$= F_4 = 2^{16} +1$).

II. Η διαίρεση του κύκλου σε ίσα μέρη

Η διαίρεση του κύκλου σε ν ίσα μέρη καλείται **κυκλοτομία**. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι περιπτώσεις όπου ν = 2^{α}, 3, 5 ή το γινόμενο δύο από αυτούς τους τρεις αριθμούς είχαν ήδη μελετηθεί από τους αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρες.

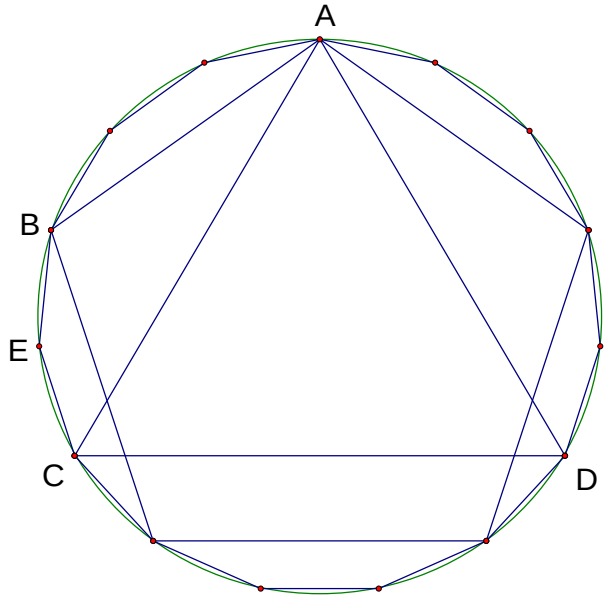
Θα περιορίσουμε το πρόβλημα της κυκλοτομίας στην περίπτωση όπου το ν είναι πρώτος αριθμός p ή δύναμη τέτοιου πρώτου p^{α}. Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση που το ν είναι πρώτος αριθμός γιατί αν είναι σύνθετος η κυκλοτομία ανάγεται σε περιπτώσεις πρώτων αριθμών.
Έστω ότι ν σύνθετος αριθμός και κ, λ παράγοντες του ν πρώτοι μεταξύ τους. Τότε υπάρχουν ακέραιοι α, β τέτοιοι ώστε 1 = ακ+βλ , οπότε αφού ν = κλ έχουμε :

$$\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\kappa\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\kappa}.$$

Το να διαιρέσεις λοιπόν τον κύκλο σε ν = κλ ίσα μέρη είναι ισοδύναμο με το να τον διαιρέσεις σε κ και λ ίσα μέρη αντίστοιχα. Για παράδειγμα αν ν=15, έχουμε :

$$\frac{1}{15}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}.$$

Οπότε το πρόβλημα της διαίρεσης του κύκλου σε 15 ίσα μέρη ανάγεται στη διαίρεση του σε 3 και 5 ίσα μέρη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως θα δούμε παρακάτω η διαίρεση του κύκλου σε p ίσα μέρη (p πρώτος) είναι δυνατή μόνο όταν ο πρώτος p είναι της μορφής $p=2^h+1$. Επίσης αν p πρώτος της μορφής $p = 2^h+1$, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι υποχρεωτικά θα ισχύει $h=2^{\mu}$.

Τελικά αν p πρώτος αριθμός, η διαίρεση του κύκλου σε p ίσα μέρη με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη είναι δυνατή αν και μόνο αν ο p είναι της μορφής $p = 2^h+1$ με $h=2^{\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Αν μ=0, 1, 2, 3, 4 τότε p=3, 5, 17, 257, 65537 που είναι πρώτοι αριθμοί, οπότε ο κύκλος μπορεί να διαιρεθεί σε αντίστοιχα ίσα μέρη δηλαδή τα αντίστοιχα κανονικά πολύγωνα κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

Οι περιπτώσεις από μ=5 έως και 32 όπως έχουμε αναφέρει δεν δίνουν πρώτους αριθμούς, οπότε ο κύκλος δεν μπορεί να διαιρεθεί σε αντίστοιχα ίσα μέρη δηλαδή τα αντίστοιχα κανονικά πολύγωνα δεν κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

Ας σχεδιάσουμε στο μιγαδικό επίπεδο (z=x+yi) ένα κύκλο ακτίνας 1. Για να διαιρέσουμε αυτόν τον κύκλο σε ν ίσα μέρη, αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\mathbf{z^{\nu} - 1 = 0}$. Οι εικόνες αυτών των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο θα βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και θα τον διαιρούν σε ν ίσα μέρη.
Αυτή η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το z =1 , οπότε γίνεται :

$$(z-1)(z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1) = 0.$$

Μπορούμε τώρα να παραβλέψουμε τη ρίζα z=1 (το αρχικό σημείο της διαίρεσης του κύκλου), δηλαδή να διαιρέσουμε την εξίσωση με z-1, και να προσδιορίσουμε τις υπόλοιπες ν-1 ρίζες. Θα πάρουμε τότε την εξίσωση :

$$\mathbf{z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1 = 0 \quad (*)}$$

Η εξίσωση **(*)** καλείται **κυκλοτομική εξίσωση** και οι ρίζες της μας δίνουν στο μιγαδικό επίπεδο τις υπόλοιπες κορυφές του κανονικού ν-γώνου εκτός από την κορυφή z=1.

Όπως αναφέραμε παραπάνω θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις που το ν είναι πρώτος ή δύναμη πρώτου αριθμού.

- Έστω ν = p (p πρώτος).

Το ουσιώδες σημείο της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι η κυκλοτομική εξίσωση είναι ανάγωγη. Μία ανάγωγη εξίσωση, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορεί να επιλυθεί με τα στοιχειώδη σύμβολα (4 πράξεις της αριθμητικής και τετραγωνικές ρίζες) σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων όταν ο βαθμός της είναι δύναμη του 2.

Ο βαθμός της κυκλοτομικής εξίσωσης είναι p-1, οπότε η διαίρεση σε p ίσα μέρη είναι αδύνατη όταν $p-1 \neq 2^h = 2^{2^{\mu}}$.

Έτσι βλέπουμε ότι οι μόνες περιπτώσεις για πρώτους αριθμούς που η κυκλοτομία δεν είναι αδύνατη είναι για τους πρώτους αριθμούς της μορφής $p= 2^{2^{\mu}} + 1$ που καλούνται πρώτοι αριθμοί του Fermat όπως έχουμε αναφέρει.

Θα πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι η κυκλοτομική εξίσωση είναι ανάγωγη. Αυτό θα το επιτύχουμε χρησιμοποιώντας το παρακάτω λήμμα που είναι γνωστό σαν ***Λήμμα του Gauss.***
Αν το πολυώνυμο $F(z) = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots + Lz + M$, με A, B, … , L, M ακέραιους μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δύο πολυωνύμων f(z) και φ(z), έτσι ώστε :
$F(z) = f(z)\varphi(z) = (z^{m'} + \alpha_1 z^{m'-1} + \alpha_2 z^{m'-2} + \ldots)(z^{m''} + \beta_1 z^{m''-1} + \beta_2 z^{m''-2} + \ldots)$, τότε οι συντελεστές και οι σταθεροί όροι των δύο πολυωνύμων είναι ακέραιοι αριθμοί.

Με άλλα λόγια ***αν ένα ακέραιο πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δύο ρητών πολυωνύμων, τότε αυτά τα δύο πολυώνυμα είναι ακέραια.***

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η κυκλοτομική εξίσωση (*) είναι ανάγωγη. Για να αποδείξουμε αυτό αρκεί να αποδείξουμε, σύμφωνα με το λήμμα του Gauss, ότι δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δύο παραγόντων με ακέραιους συντελεστές.

Θεωρούμε την αντικατάσταση $z = x + 1$, οπότε παίρνουμε :

$$f(z) = \frac{z^p - 1}{z-1} = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + px^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^{p-3} + \ldots + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x + p = 0 .$$

Όλοι οι συντελεστές του δεύτερου μέλους διαιρούνται με p εκτός από τον πρώτο που ισούται με 1. Ο σταθερός όρος ισούται με p που είναι πρώτος αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι μια τέτοια παράσταση είναι πάντα ανάγωγη.
Αν υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $f(x+1)$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δύο ρητών πολυωνύμων τότε θα πρέπει οι συντελεστές τους να είναι ακέραιοι.
$f(x+1) = (x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m)(x^{m'} + \beta_1 x^{m'-1} + \beta_2 x^{m'-2} + \ldots + \beta_{m'-1} x + \beta_{m'})$.

Αν εξισώσουμε τους σταθερούς όρους των πολυωνύμων $f(z)$ και $f(x+1)$ έχουμε :
$\alpha_m \beta_{m'} = p$ και αφού p πρώτος, τότε ένας από τους α_m , $\beta_{m'}$ θα ισούται με 1. Έστω ότι $\alpha_m = \pm p$ και $\beta_{m'} = \pm 1$.

Εξισώνοντας τους συντελεστές των πρωτοβάθμιων όρων του x έχουμε :

$$\frac{p(p-1)}{2} = \alpha_{m-1}\beta_{m'} + \alpha_m \beta_{m'-1} .$$

Το πρώτο μέλος της ισότητας και ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους διαιρούνται με p άρα και ο όρος $\alpha_{m-1}\beta_{m'}$ πρέπει να διαιρείται με p. Αφού $\beta_{m'} = \pm 1$ τότε το α_{m-1} διαιρείται με p. Αν εξισώσουμε τώρα τους συντελεστές του x^2 προκύπτει ότι το α_{m-2} διαιρείται με p. Ομοίως αν εξισώσουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές των αντίστοιχων όρων των δύο πολυωνύμων προκύπτει ότι όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου $x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m$ διαιρούνται με p, πράγμα άτοπο για τον συντελεστή του όρου x^m που είναι το 1.
Άρα το πολυώνυμο $f(z)$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων, οπότε είναι ανάγωγο.

Τελικά η διαίρεση του κύκλου σε p ίσα μέρη (p πρώτος) είναι αδύνατη εκτός και αν ο p είναι πρώτος αριθμός του Fermat.

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου το ν είναι δύναμη πρώτου αριθμού.

- Έστω $\nu = p^\alpha$ (p πρώτος).

Θα δείξουμε ότι όταν το $p>2$ η διαίρεση του κύκλου σε p^2 ίσα μέρη είναι αδύνατη. Η γενική περίπτωση, δηλαδή η διαίρεση του κύκλου σε p^α ίσα μέρη, είναι επίσης αδύνατη αφού αυτή προφανώς προϋποθέτει την διαίρεση σε p^2 ίσα μέρη.

Η κυκλοτομική εξίσωση τώρα είναι $\frac{z^{p^2} - 1}{z-1} = 0$.

Αυτή εισάγει στο πρόβλημα επιπλέον ρίζες, εκτός από αυτές που προκύπτουν από τη διαίρεση σε p ίσα μέρη, δηλαδή τις ρίζες της εξίσωσης $\frac{z^p - 1}{z-1} = 0$.

Αν αγνοήσουμε τις ρίζες της διαίρεσης του κύκλου σε p ίσα μέρη, παίρνουμε σαν κυκλοτομική εξίσωση (διαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις) την :

$$f(z)= \frac{z^{p^2}-1}{z^p-1} = 0$$

Αυτή μπορεί να γραφεί : $f(z) = z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \ldots + z^p + 1 = 0$ **.**

Κάνουμε την αντικατάσταση z=x+1 , και παίρνουμε :

$$(x+1)^{p(p-1)} + (x+1)^{p(p-2)} + \ldots + (x+1)^p + 1 = 0 \ (**).$$

Οι όροι με τα αναπτύγματα είναι p-1 και οι όροι που είναι ανεξάρτητοι του x, δηλαδή οι μονάδες, είναι p.
Αν κάνουμε τα αναπτύγματα και τις πράξεις η εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή

$$x^{p(p-1)} + p.\varphi(x)$$

όπου φ(x) είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και σταθερό όρο ίσο με 1. Έχουμε όμως ήδη δείξει ότι μια τέτοια έκφραση είναι πάντα ανάγωγη. Κατά συνέπεια η νέα κυκλοτομική εξίσωση (**) είναι ανάγωγη.

Ο βαθμός αυτής της εξίσωσης είναι p(p-1). Από την άλλη μια ανάγωγη εξίσωση είναι επιλύσιμη με τα στοιχειώδη σύμβολα αν ο βαθμός της είναι δύναμη του δύο. Έτσι ένας κύκλος μπορεί να διαιρεθεί σε p^2 (p πρώτος) ίσα μέρη μόνο όταν p=2.

Γενικότερα η διαίρεση ενός κύκλου σε 2^α ίσα μέρη είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη άρα και η κατασκευή του αντίστοιχου κανονικού πολυγώνου.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η διαίρεση ενός κύκλου σε $\nu=p^\alpha$ (p πρώτος) ίσα μέρη είναι αδύνατη με κανόνα και διαβήτη εκτός από την περίπτωση όπου p=2, περίπτωση που είχαν μελετήσει οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες.

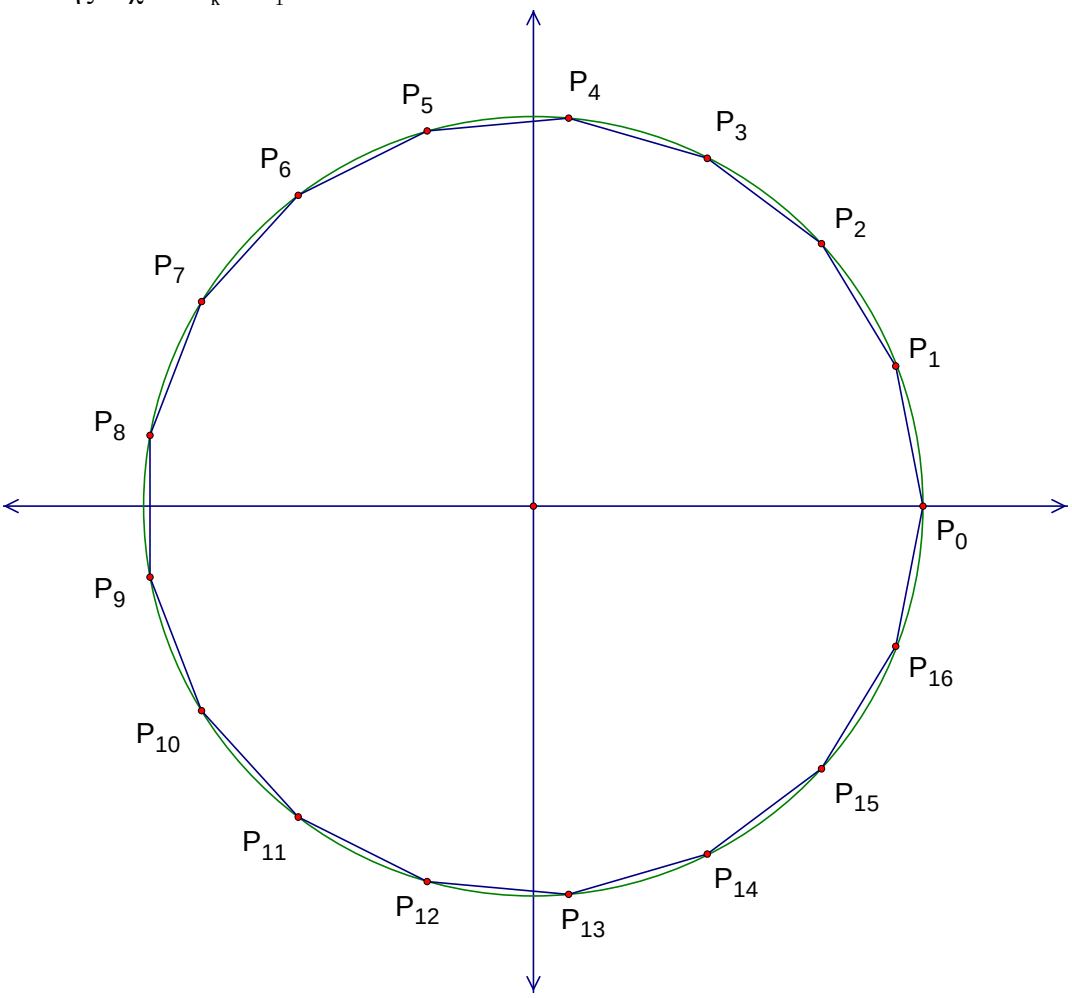
9. Η Κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου

I. Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί

Η διαίρεση του κύκλου σε 17 ίσα μέρη όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο μπορεί να πραγματοποιηθεί με κανόνα και διαβήτη. Θα δούμε τώρα την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου.
Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Επίσης θεωρούμε και την εξίσωση $\mathbf{z^{17} - 1 = 0}$. Οι εικόνες αυτών των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και τον διαιρούν σε ν ίσα μέρη, δηλαδή είναι οι κορυφές του κανονικού 17-γώνου.
Από το θεώρημα του De Moivre ξέρουμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης, σε τριγωνομετρική μορφή, δίνονται από την σχέση :

$$P_k = z_k = \text{συν}\frac{2k\pi}{17} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{17}, \; k=0,1,2,\ldots,16.$$

Επίσης ισχύει $z_k = z_1^k$.



Οι κορυφές του κανονικού 17-γώνου P_κ , k = 0,1,2,..,17 φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Από τη συμμετρία του σχήματος προκύπτει ότι οι τιμές για το συνημίτονο των ριζών z_1 και z_{16} είναι ίσες, όπως και για τα συνημίτονα των z_2 και z_{15} , z_3 και z_{14} κοκ.
Αν θέσουμε για τη ρίζα $z_1 = x_1+iy_1$, τότε για το συνημίτονο της θα ισχύει ότι :
$\mathbf{x_1 = \text{συν}}\frac{2\pi}{17}$ = συνθ, όπου θ=$\frac{2\pi}{17}$. Θα εκφράσουμε το συν$\frac{2\pi}{17}$ με τη βοήθεια ριζικών.

Για τα συνημίτονα των υπολοίπων ριζών ομοίως θα έχουμε ότι :

x_2 = συν2θ, ... , x_{16} = συν16θ , όπου θ=$\frac{2\pi}{17}$.

Το άθροισμα των 17-ων ριζών της μονάδας ισούται με 1, οπότε έχουμε τη σχέση $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{16} = 0$ και από αυτή προκύπτει ότι :

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{16} = 0 .$$

Όμως x_o =1, $x_1 = x_{16}$, $x_2 = x_{15}$, … , $x_8 = x_9$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = -\frac{1}{2}$.

Ο τριγωνομετρικός τύπος συν(α+β)+συν(α-β) = 2συνασυνβ θα δώσει :

$x_1 + x_4 = \text{συν}\theta + \text{συν}\,4\theta = 2\,\text{συν}\,6\theta \cdot \text{συν}\,13\theta = 2\,\text{συν}\,6\theta \cdot \text{συν}\,7\theta = 2\,x_6 x_7$.

Άρα $x_1 + x_4 = 2\,x_6 x_7$.

Ομοίως $x_3 + x_5 = 2\,x_1 x_4$, $x_2 + x_8 = 2\,x_3 x_5$ και $x_6 + x_7 = 2\,x_2 x_8$.

Θέτουμε τώρα :

$$\begin{cases} 2\,A = x_1 + x_4 = 2\,x_6 x_7 \\ 2\,B = x_3 + x_5 = 2\,x_1 x_4 \\ 2\,C = x_2 + x_8 = 2\,x_3 x_5 \\ 2\,D = x_6 + x_7 = 2\,x_2 x_8 \end{cases}$$

Παίρνουμε $A \cdot C = \frac{x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_8 + x_1x_8}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8}{8} = -\frac{1}{16}$,

γιατί $x_1x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$, $x_2x_4 = \frac{1}{2}(x_2 + x_6)$, $x_4x_8 = \frac{1}{2}(x_4 + x_{12}) = \frac{1}{2}(x_4 + x_5)$ και

$x_1x_8 = \frac{1}{2}(x_7 + x_9) = \frac{1}{2}(x_7 + x_8)$.

Ομοίως $B \cdot D = -\frac{1}{16}$.

Επίσης έχουμε :

$$A \cdot B = \frac{(x_1 + x_4)(x_3 + x_5)}{4} = \frac{x_1x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_1x_5}{4} = \frac{2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = -\frac{1}{16} + \frac{A}{4} - \frac{B}{4}$$

Δηλαδή $A \cdot B = -\frac{1}{16} + \frac{A}{4} - \frac{B}{4}$ άρα 16AB = -1 + 4A – 4B

Ομοίως έχουμε : 16BC = -1 + 4B – 4C
16CD = -1 + 4C – 4D
16DA = -1 + 4D – 4A

Ορίζουμε τώρα $\begin{cases} 2X = A + C = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_4 + x_8) \\ 2Y = B + D = \frac{1}{2}(x_3 + x_5 + x_6 + x_7) \end{cases}$.

Τότε έχουμε ότι X + Y = $-\frac{1}{8}$, αφού A + B + C + D = $-\frac{1}{4}$.

Επίσης 4XY = (A + C)(B + D) = AB + BC + CD + DA =

$$\frac{-1+4A-4B}{16}+\frac{-1+4B-4C}{16}+\frac{-1+4C-4D}{16}+\frac{-1+4D-4A}{16}=-\frac{1}{4}$$

οπότε XY = $-\frac{1}{16}$.

Αφού X + Y = $-\frac{1}{8}$ και XY = $-\frac{1}{16}$, τότε τα X και Y θα είναι ρίζες της παρακάτω δευτεροβάθμιας εξίσωσης :

$$R^2+\frac{1}{8}R-\frac{1}{16}=0 \iff 16R^2+2R-1=0 \text{ (I).}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $R=\frac{-2\pm\sqrt{68}}{32}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{16}$.

Αφού 2X = A + C = $x_6x_7+x_3x_5>0$, τότε το X θα είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης οπότε $X=\frac{-1+\sqrt{17}}{16}$ και $Y=\frac{-1-\sqrt{17}}{16}$.

Τώρα μπορούμε να πάρουμε ότι A + C = $\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$ και AC = $-\frac{1}{16}$,

οπότε τα A και C είναι ρίζες της παρακάτω δευτεροβάθμιας εξίσωσης :

$$S^2-\frac{-1+\sqrt{17}}{8}S-\frac{1}{16}=0 \iff 16S^2+(2-2\sqrt{17})S-1=0 \text{ (II).}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι :

$$S=\frac{-(2-2\sqrt{17})\pm\sqrt{(2-2\sqrt{17})^2+64}}{32}=\frac{-2+2\sqrt{17}\pm\sqrt{4-8\sqrt{17}+68+64}}{32}$$

$$=\frac{-2+2\sqrt{17}\pm\sqrt{136-8\sqrt{17}}}{32}=\frac{-1+\sqrt{17}\pm\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}$$

Αφού A = $x_6x_7>0$, τότε θα έχουμε ότι : A = $\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}$ και

C = $\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}$.

Επίσης , B + D = $\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$ και BD = $-\frac{1}{16}$,

Οπότε τα B και D είναι ρίζες της παρακάτω δευτεροβάθμιας εξίσωσης :

$$T^2-\frac{-1-\sqrt{17}}{8}T-\frac{1}{16}=0 \iff 16T^2+(2+2\sqrt{17})T-1=0 \text{ (III).}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι :

$$T=\frac{-(2+2\sqrt{17})\pm\sqrt{(2+2\sqrt{17})^2+64}}{32}=\frac{-2-2\sqrt{17}\pm\sqrt{4+8\sqrt{17}+68+64}}{32}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{17}\pm\sqrt{136+8\sqrt{17}}}{32}=\frac{-1-\sqrt{17}\pm\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$$

Αφού B = $x_1x_4>0$, τότε θα έχουμε B = $\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$, και

D = $\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$.

Τελικά, αφού $x_1+x_4=$ 2A, και $x_1x_4=$ B, τότε τα x_1 και x_4 θα είναι ρίζες της παρακάτω δευτεροβάθμιας εξίσωσης :

$$U^2-2AU+B=0\Leftrightarrow U^2-2\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}U+\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}=0$$

δηλαδή :

$$16U^2+(2-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}})U-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}=0 \quad \text{(IV)}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι :

$$U=\frac{-(2-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}})\pm\sqrt{(2-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}})^2-4(16)(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}})}}{32}$$

$$U=\frac{-2+2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}})\pm\sqrt{272+48\sqrt{17}-64\sqrt{34+2\sqrt{17}}+8\sqrt{578-34\sqrt{17}}-8\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{32}$$

$$U=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}})\pm\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{578-34\sqrt{17}}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{16}$$

$$U=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

Αφού $x_1>x_4$, τότε θα έχουμε ότι :

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}.$$

Δηλαδή :

$$x_1=\text{συν}(\frac{2\pi}{17})=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}.$$

Έτσι λοιπόν εκφράσαμε το $\text{συν}\frac{2\pi}{17}$ με τη βοήθεια ριζικών οπότε ολοκληρώθηκαν οι αλγεβρικοί υπολογισμοί. Αυτό που απομένει τώρα για την κατασκευή του κανονικού 17-γώνου είναι η γεωμετρική μετάφραση όλων των παραπάνω αλγεβρικών βημάτων.

Στην παραπάνω αλγεβρική διαδικασία επιλύσαμε τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις :

$$16R^2 + 2R - 1 = 0, \quad \text{με ρίζες } X > Y \text{ (I)}$$

$$16S^2 + (2 - 2\sqrt{17})S - 1 = 0, \text{ με ρίζες } A > C \text{ (II)}$$

$$16T^2 + (2 + 2\sqrt{17})T - 1 = 0, \text{ με ρίζες } B > D \text{ (III)}$$

$$16U^2 + (2 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}})U - 1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} = 0, \text{ με ρίζες } x_1 > x_4 \text{ (IV)}$$

Για να απλοποιήσουμε τη μορφή των παραπάνω εξισώσεων (τους πολύπλοκους συντελεστές) θα γράψουμε αυτές στην παρακάτω αντίστοιχη μορφή και θα κατασκευάσουμε τις ρίζες τους.

$x^2 + x - 4 = 0$, με ρίζες x_1 και x_2 , $x_1 > x_2$ (*)

$y^2 + x_1y - 1 = 0$, με ρίζες y_1 και y_2 , $y_1 > y_2$ (**)

$y^2 + x_2y - 1 = 0$, με ρίζες y_3 και y_4 , $y_4 > y_3$ (***)

$z^2 + y_1z + y_4 = 0$, με ρίζες z_1 και z_2 , $z_1 > z_2$ (****)

Οι ρίζες των παραπάνω εξισώσεων είναι οι :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \quad , \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

$$y_4 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \quad , \quad y_3 = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{8}$$

$$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{8}$$

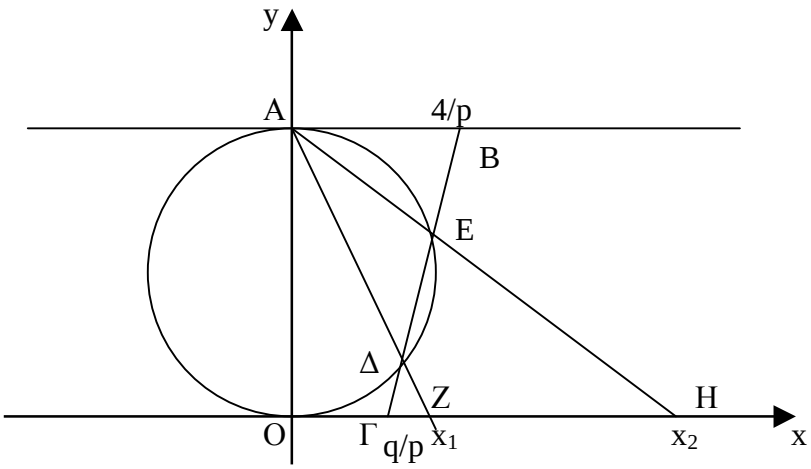
Η τέταρτη εξίσωση (****) θα μας δώσει το $z_1 = 2\,\text{συν}(\frac{2\pi}{17})$ που είναι η μεγαλύτερη ρίζα της. Με τη βοήθεια του z_1 θα προσδιορίσουμε την κορυφή P_1 και στη συνέχεια τις υπόλοιπες κορυφές του κανονικού 17-γωνου. Θα κατασκευάσουμε λοιπόν με κανόνα και διαβήτη την παράσταση :

$$z_1 = 2\,\text{συν}(\frac{2\pi}{17}) = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}{8}.$$

II. Η γεωμετρική κατασκευή

Θα δούμε τώρα βήμα προς βήμα την κατασκευή του κανονικού 17-γώνου που πραγματοποίησε ο Von Staudt (Crelle's *Journal*, Vol. XXIV, 1842), όπως αυτή τροποποιήθηκε από τον Schroter (Crelle's *Journal*, Vol. LXXV, 1872). Η κατασκευή γίνεται με ένα μόνο κύκλο που δόθηκε άπαξ και με ευθείες, δηλαδή είναι μια κατασκευή με τη διαδικασία Poncelet-Steiner (Klein F. σ. 34-41).

Πρώτα θα δούμε την κατασκευή των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\mathbf{x^2-px+q=0}$ με δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2.



Στα άκρα της διαμέτρου ενός μοναδιαίου κύκλου που δόθηκε κατασκευάζουμε τις δύο εφαπτομένες και επιλέγουμε την κάτω σαν άξονα x'x και την κάθετη διάμετρο σαν άξονα y'y, όπως στο σχήμα.
Η εξίσωση του κύκλου τότε είναι $x^2+y(y-2) = 0$. Παίρνουμε στην πάνω εφαπτομένη σημείο Β δεξιά του Α έτσι ώστε το τμήμα ΑΒ να έχει μέτρο 4/p και στον ημιάξονα Ox τμήμα ΟΓ=q/p. Φέρουμε την ευθεία ΒΓ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε. Φέρουμε τις ευθείες ΑΔ και ΑΕ που τέμνουν τον άξονα x'x στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Τότε $OZ=x_1$ και $OH=x_2$.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι τα σημεία Z και H έχουν τετμημένες x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι $2x+x_1(y-2)=0$ (1)
και της ΑΕ είναι $2x+x_2(y-2)=0$ (2).

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) θα πάρουμε την εξίσωση της δέσμης

$$x^2+\frac{x_1+x_2}{2}x(y-2)+\frac{x_1x_2}{4}(y-2)^2=0 \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε την σχέση $x^2+y(y-2) = 0$ στην (3) και παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{x_1+x_2}{2}x(y-2)+\frac{x_1x_2}{4}(y-2)^2-y(y-2)=0 \quad (4)$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας κωνικής που διέρχεται από τα 4 σημεία Α, Δ, Ε, Ο. Αν αφαιρέσουμε τον κοινό παράγοντα y-2 θα πάρουμε την εξίσωση της τέμνουσας ΔΕ

$$\frac{x_1+x_2}{2}x+\frac{x_1x_2}{4}(y-2)-y=0 \quad (5)$$

Αν τώρα θέσουμε $x_1+x_2=p$ και $x_1.x_2=q$ θα πάρουμε για την ευθεία ΔΕ την εξίσωση

$$\frac{p}{2}x+\frac{q}{4}(y-2)-y=0 \quad (6)$$

που αποκόπτει από την ευθεία y=2 τμήμα ΑΒ ίσο με $\frac{4}{p}$ και από την ευθεία y=0 τμήμα ΟΓ ίσο με $\frac{q}{p}$. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

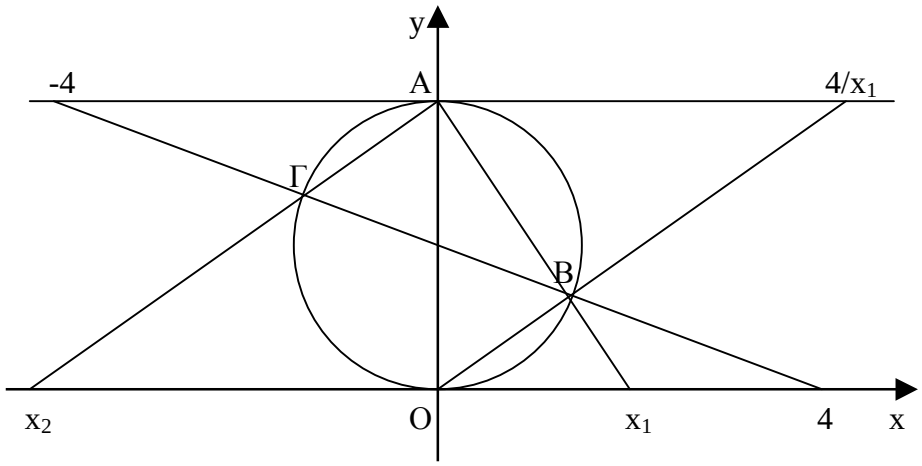
Με τη βοήθεια της παραπάνω κατασκευής για θα κατασκευάσουμε τις ρίζες των 4 δευτεροβάθμιων εξισώσεων που παραγάγαμε στην προηγούμενη παράγραφο :

$x^2+x-4=0$, με ρίζες x_1 και x_2 , $x_1>x_2$ (*)
$y^2+x_1y-1=0$, με ρίζες y_1 και y_2 , $y_1>y_2$ (**)
$y^2+x_2y-1=0$, με ρίζες y_3 και y_4 , $y_4>y_3$ (***)
$z^2+y_1z+y_4=0$, με ρίζες z_1 και z_2 , $z_1>z_2$ (****)

Αυτές οι εξισώσεις θα μας δώσουν το $z_1=2\,\text{συν}(\frac{2\pi}{17})$ με τη βοήθεια του οποίου θα κατασκευάσουμε το κανονικό 17-γωνο. Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι για να κατασκευάσουμε το z_1 πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε τις ρίζες x_1, x_2, y_1, y_4.

Θα κατασκευάσουμε τις ρίζες x_1 και x_2 της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2+x-4=0$ (*).

Έχουμε όπως στο προηγούμενο σχήμα τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y(y-2)=0$, και την εφαπτομένη του με εξίσωση y=2, που διέρχεται από το σημείο Α(2,0).



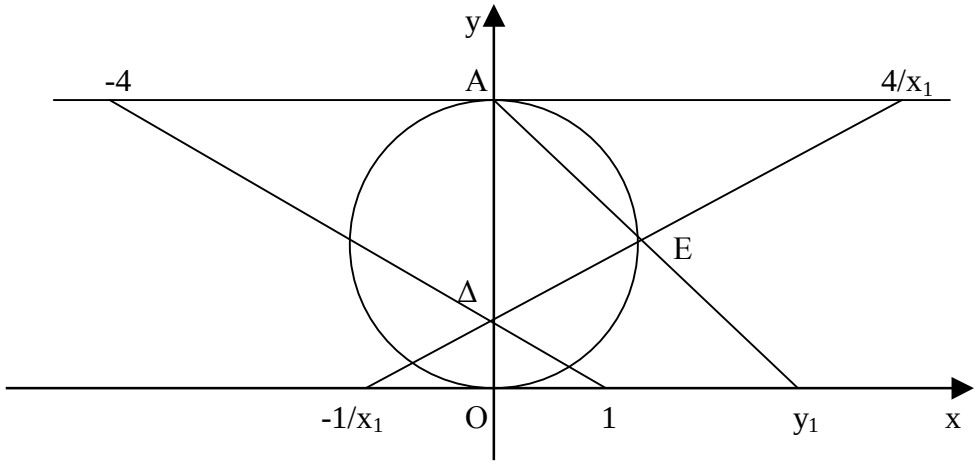
Σχήμα (1)

Η ευθεία που ενώνει τα σημεία (4,0) και (-4,2) τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Γ. Οι ευθείες που διέρχονται από το Α και τα δύο αυτά σημεία τέμνουν τον άξονα x΄x στα σημεία x_1 και x_2 αντίστοιχα, που είναι οι ρίζες της εξίσωσης (*) (σχήμα 1).

Για να κατασκευάσουμε τις ρίζες της δεύτερης εξίσωσης (**) παίρνουμε στην ευθεία y=2 το σημείο ($\frac{4}{x_1}$, 2) και στον άξονα x΄x το σημείο ($-\frac{1}{x_1}$, 0).

Για να προσδιορίσουμε το πρώτο σημείο φέρουμε την ευθεία από το Ο που διέρχεται από το σημείο Β. Αυτή τέμνει την πάνω εφαπτομένη στο σημείο ($\frac{4}{x_1}$, 2), όπως μπορεί να αποδειχτεί εύκολα αναλυτικά.
Για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σημείο ενώνουμε τα σημεία (-4, 2) και (1, 0). Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ. Φέρουμε την ευθεία από το σημείο ($\frac{4}{x_1}$, 2) που διέρχεται από το Γ. Αυτή τότε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο ($-\frac{1}{x_1}$,0).

Οι προβολές από το σημείο Α προς τον άξονα x΄x διαμέσου των δύο σημείων τομής της ευθείας που ενώνει τα σημεία ($\frac{4}{x_1}$, 2) και ($-\frac{1}{x_1}$, 0), μας δίνει τις δύο ρίζες y_1 και y_2 της εξίσωσης (**) (σχήμα 2).

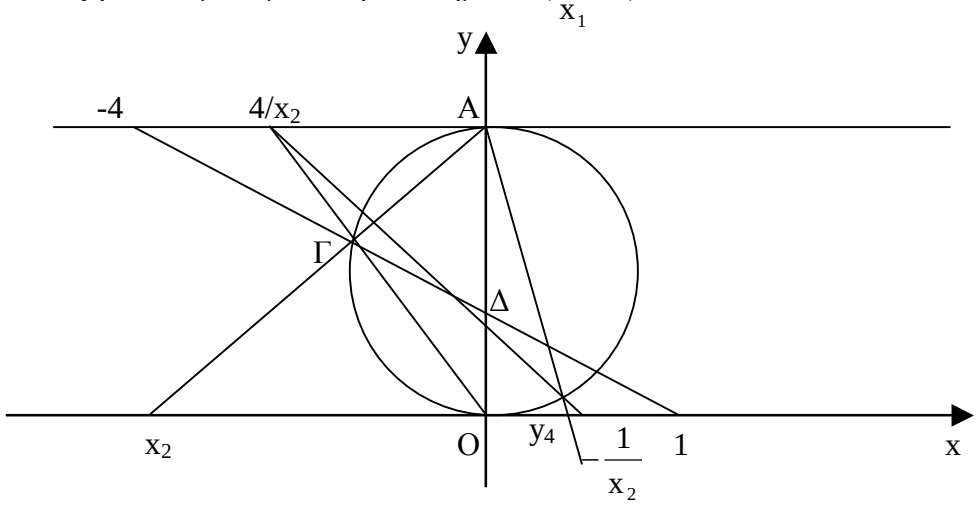


Σχήμα (2)

Από τις δύο ρίζες της εξίσωσης (**) χρειαζόμαστε μόνο τη μεγαλύτερη y_1.

Για να κατασκευάσουμε τις ρίζες της τρίτης εξίσωσης (***) φέρουμε την ευθεία που ενώνει το σημείο Ο με το Γ και παίρνουμε στην πάνω εφαπτομένη το σημείο ($\frac{4}{x_2}$, 2).

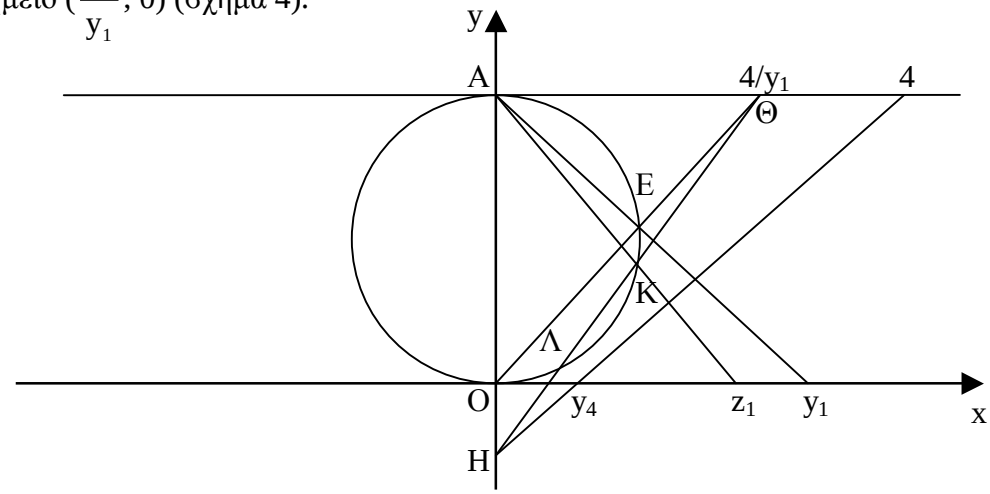
Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του σημείου ($\frac{4}{x_1}$, 2).



Σχήμα (3)

Αν ενώσουμε το σημείο ($\frac{4}{x_2}$, 2) με το Δ η ευθεία θα τμήσει τον άξονα x΄x στο σημείο ($-\frac{1}{x_2}$, 0) και το δεξιό ημικύκλιο στο Z. Αν φέρουμε από το A την ευθεία που διέρχεται από το Z αυτή θα τμήσει τον κύκλο στο σημείο (y_4, 0) (σχήμα 3). Κατασκευάσαμε λοιπόν την μεγαλύτερη ρίζα y_4 της τρίτης εξίσωσης (***).

Είμαστε τώρα σε θέση να κατασκευάσουμε τις ρίζες της τέταρτης εξίσωσης (****). Από τις δύο ρίζες της εξίσωσης (****) η μεγαλύτερη z_1 είναι και η τελικά ζητούμενη. Προσδιορίζουμε τα σημεία Θ($\frac{4}{y_1}$, 2) και ($\frac{y_4}{y_1}$, 0). Για το πρώτο από αυτά φέρνω την ευθεία από το O που διέρχεται από το σημείο E και τέμνει τη πάνω εφαπτομένη στο ζητούμενο σημείο ($\frac{4}{y_1}$, 2). Για το δεύτερο σημείο, φέρουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (4, 2) και (y_4,0) η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο H. Φέρουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία H και Θ που τέμνει τον άξονα x΄x στο ζητούμενο σημείο ($\frac{y_4}{y_1}$, 0) (σχήμα 4).

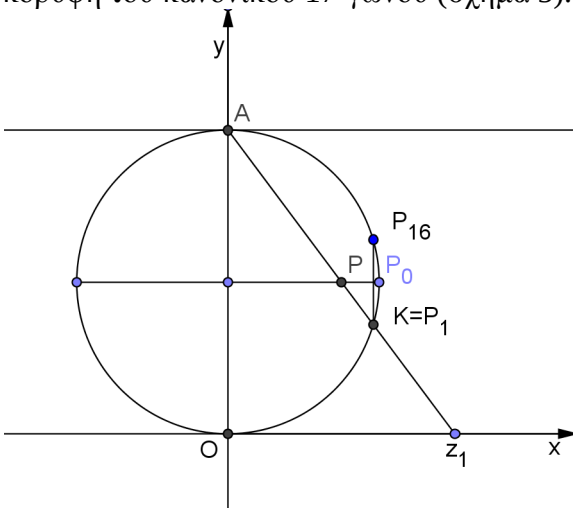


Σχήμα (4)

Η ευθεία ΗΘ τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Κ, Λ. Από αυτά έστω ότι το Κ είναι το πιο πάνω σημείο. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Κ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (z_1 , 0) (σχήμα 4).

Κατασκευάσαμε λοιπόν το $z_1 = 2\text{συν}(\frac{2\pi}{17})$.

Αν θέλουμε τώρα το συνημίτονο $\text{συν}(\frac{2\pi}{17})$ πρέπει να σχεδιάσουμε μια παράλληλη διάμετρο προς τον άξονα x΄x στην οποία η τελευταία ευθεία ΑΚ αποκόπτει τμήμα ίσο με $\text{συν}(\frac{2\pi}{17})$ στο σημείο Ρ. Η κάθετη στη διάμετρο στο Ρ δίνει αμέσως την πρώτη P_1 και τη δέκατη έκτη P_{16} κορυφή του κανονικού 17-γώνου (σχήμα 5).



Σχήμα (5)

Η σειρά των σημείων που κατασκευάστηκαν στην ευθεία y = 2 είναι :

$$-4\ ,\ \frac{4}{x_1}\ ,\ \frac{4}{x_2}\ ,\ \frac{4}{y_1}\ ,$$

και στον άξονα x΄x :

$$4\ ,\ -\frac{1}{x_1}\ ,\ -\frac{1}{x_2}\ ,\ \frac{y_4}{y_1}\ .$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

$$y_4 = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}.$$

Η διαδικασία που είδαμε για την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου είναι αρκετά περίπλοκη, αλλά είναι απότοκος μιας γενικής μεθόδου που μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε κατασκευάσιμο κανονικό πολύγωνο.

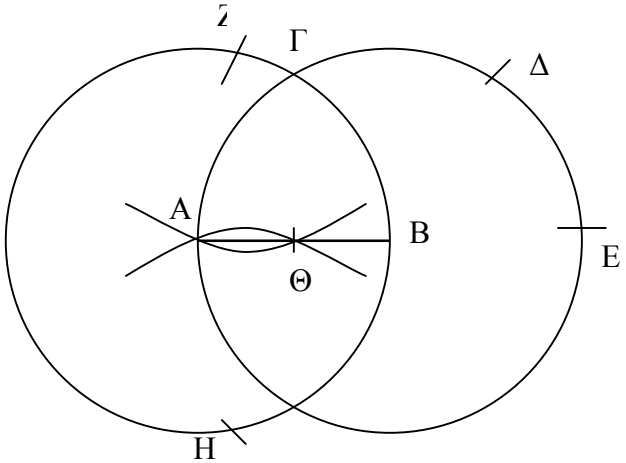
Αν συγκεντρώσουμε όλα τα επιμέρους σχήματα σε ένα, τότε θα προκύψει το επόμενο σχήμα, που είναι η ολοκληρωμένη κατασκευή του κανονικού 17-γώνου.

Η κατασκευή που διαπραγματευθήκαμε ήταν μια κατασκευή Poncelet-Steiner. Μια κατασκευή με διαβήτη μόνο (κατασκευή Mohr-Mascheroni) δόθηκε το 1896 από τον L. Gerard *Math. Annalen*, Vol, 1896, pp. 390-392, (Klein F. σ. 34).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Κατασκευές με διαβήτη (Mohr-Mascheroni)

Θα δούμε εδώ δύο κατασκευές που πραγματοποιούνται με τη βοήθεια **μόνο** του διαβήτη. Τέτοιες κατασκευές λέγονται κατασκευές **Mohr-Mascheroni**. Σε τέτοιου είδους κατασκευές που δεν έχουμε κανόνα και οι ευθείες δεν μπορούν να σχεδιαστούν θεωρούμε ότι ορίζονται μέσω δύο σημείων. Τα σημεία προκύπτουν σαν τομές δύο τόξων.
Ο Mascheroni στο βιβλίο του *Geometria del Compasso* παρουσίασε πολλές τέτοιες κατασκευές. Το πρόβλημα με αριθμό 66 ήταν η εύρεση του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος. Εκεί ο Mascheroni έδωσε πέντε λύσεις. Θα δούμε την πιο απλή από αυτές.
Έστω ΑΒ το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε το μέσο του.



Σχεδιάζουμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα Α, Β και ακτίνα ίση με ΑΒ. Έστω Γ ένα από τα δύο σημεία τομής τους. Διατηρώντας το ίδιο άνοιγμα του διαβήτη παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε στον κύκλο με κέντρο το Β έτσι ώστε ΑΒ=ΑΓ=ΓΔ=ΔΕ. Τότε το σημείο Ε θα είναι αντιδιαμετρικό του Α αφού με αυτή τη διαδικασία διαιρούμε τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα. Με κέντρο το Ε και ακτίνα ΕΑ=2ΑΒ γράφουμε κύκλο που τέμνει τον αριστερό κύκλο στα σημεία Ζ και Η. Με κέντρα τα Ζ και Η και κοινή ακτίνα ίση με ΑΒ=ΖΑ=ΗΑ γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στο Θ. Το Θ είναι το μέσο του ΑΒ.

Απόδειξη

Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΖΘ και ΑΖΕ είναι όμοια γιατί έχουν κοινή την προσκείμενη γωνία στη βάση ΖΑΕ. Όμως ΑΖ=ΑΒ=$\frac{AE}{2}$, άρα ΑΘ=$\frac{AB}{2}$.

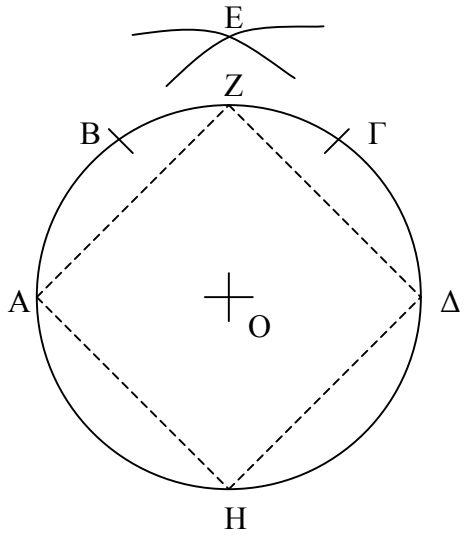
Παρατηρήσεις

Η κατασκευή γίνεται σε έξι βήματα αν το ευθύγραμμο τμήμα δίνεται μόνο με τα άκρα του, δηλαδή δεν έχει σχεδιαστεί. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι σχεδιασμένο όπως στο σχήμα, τότε δεν απαιτείται να σχεδιαστεί ο κύκλος με κέντρο το Η και ακτίνα ΗΑ, οπότε τα βήματα της κατασκευής μειώνονται σε πέντε.
Επίσης, για να είναι πλήρης η απόδειξη πρέπει να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α, Θ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

Το σημείο Θ είναι το αντίστροφο του Ε ως προς την αριστερή περιφέρεια. Μπορεί να δοθεί απόδειξη της κατασκευής με χρήση γεωμετρίας της αντιστροφής.

Η δεύτερη κατασκευή που θα δούμε είναι το λεγόμενο ***Ναπολεόντιο πρόβλημα***. Σε αυτό ζητείται να διαιρεθεί ένας κύκλος σε τέσσερα ίσα τόξα με μόνο όργανο το διαβήτη, δηλαδή να εγγραφεί ένα τετράγωνο στον κύκλο. Το πρόβλημα αυτό λέγεται ότι το πρότεινε στον Mascheroni ο Ναπολέων Βοναπάρτης. Οι δύο άνδρες συναντήθηκαν και συνδέθηκαν φιλικά όταν ο Ναπολέων είχε εισβάλλει στη βόρεια Ιταλία το 1796. Ο Mascheroni ήταν καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Παβίας και ένθερμος θαυμαστής του Ναπολέοντα. Μάλιστα το βιβλίο του *Geometria del Compasso* που εκδόθηκε το 1797 το αφιέρωσε στο Ναπολέοντα. Η αφιέρωση ήταν μια εκτεταμένη ωδή, μιας και ο Mascheroni ήταν και ποιητής και μάλιστα είχε εκδώσει πολλές ποιητικές συλλογές. Το 1798 το βιβλίο του μεταφράστηκε στα γαλλικά και εκδόθηκε στο Παρίσι ένα χρόνο μετά την πρώτη ιταλική έκδοση.

Η λύση που ακολουθεί είναι αυτή που έδωσε ο Mascheroni.
Έστω ότι ο δεδομένος κύκλος έχει κέντρο το Ο και Α τυχαίο σημείο του. Με ακτίνα ίση με ΟΑ προσδιορίζουμε τα σημεία Β,Γ,Δ πάνω στον κύκλο ώστε ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΟΑ

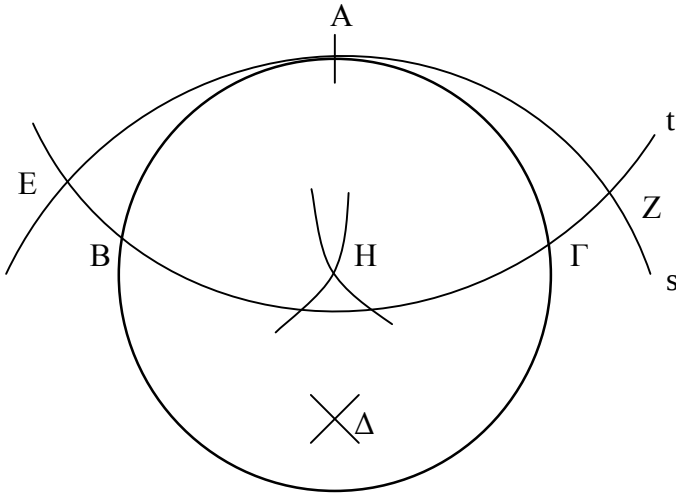


Το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Α. Με κέντρα τα Α και Δ και ακτίνα ίση με ΑΓ γράφουμε τόξα που τέμνονται στο Ε. Με κέντρο το Α και ακτίνα ίση με ΟΕ γράφουμε τόξο που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η. Τότε τα σημεία Α,Ζ,Δ,Η χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα, δηλαδή είναι οι κορυφές του εγγεγραμμένου τετραγώνου.

Απόδειξη
Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου αφού ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΟΑ=R, οπότε ο κύκλος διχοτομήθηκε. Τώρα αφού ισχύει ότι ΑΕ=ΔΕ=ΑΓ, το σημείο Ε θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της ΑΔ. Το τόξο ΑΓ είναι 120° οπότε το τμήμα ΑΓ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου και ισούται με $R\sqrt{3}$. Το ΟΕ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΔ και από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι ΟΕ=$R\sqrt{2}$ δηλαδή το ΟΕ ισούται με την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. Άρα το ΑΖ=ΟΕ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου. Ομοίως το Η είναι η τέταρτη κορυφή του τετραγώνου ΑΖΔΗ.

Στο πρόβλημα θεωρήσαμε το κέντρο του κύκλου δεδομένο. Αν δεν δινόταν το κέντρο τότε θα έπρεπε να το προσδιορίσουμε. Ο Mascheroni έδωσε για το πρόβλημα του προσδιορισμού του κέντρου ενός κύκλου μια λύση αρκετά πολύπλοκη. Μια πιο απλή λύση σε έξι βήματα είναι η παρακάτω (Gardner M. σ. 158).

Έστω Α τυχαίο σημείο του κύκλου. Με κέντρο το Α και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε τόξο t που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία έστω Β και Γ. Με κέντρα τα Β και Γ και ακτίνες ΒΑ=ΓΑ γράφουμε δύο τόξα που τέμνονται στο σημείο Δ. Το Δ μπορεί να βρίσκεται εσωτερικά ή εξωτερικά του κύκλου, ανάλογα με το πρώτο άνοιγμα του διαβήτη. Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΑ γράφουμε τόξο s που τέμνει το τόξο t στα σημεία Ε και Ζ. Με κέντρα τα Ε, Ζ και ακτίνες ΕΑ=ΖΑ γράφουμε τόξα που τέμνονται στο σημείο Η. Το Η είναι το ζητούμενο κέντρο του κύκλου.



Απόδειξη

Τα ισοσκελή τρίγωνα ΔΕΑ και ΗΕΑ έχουν κοινή την προσκείμενη στη βάση γωνία ΕΑΗ, άρα είναι όμοια. Με ανάλογους συλλογισμούς, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, αποδεικνύουμε ότι το Η είναι το κέντρο του κύκλου.

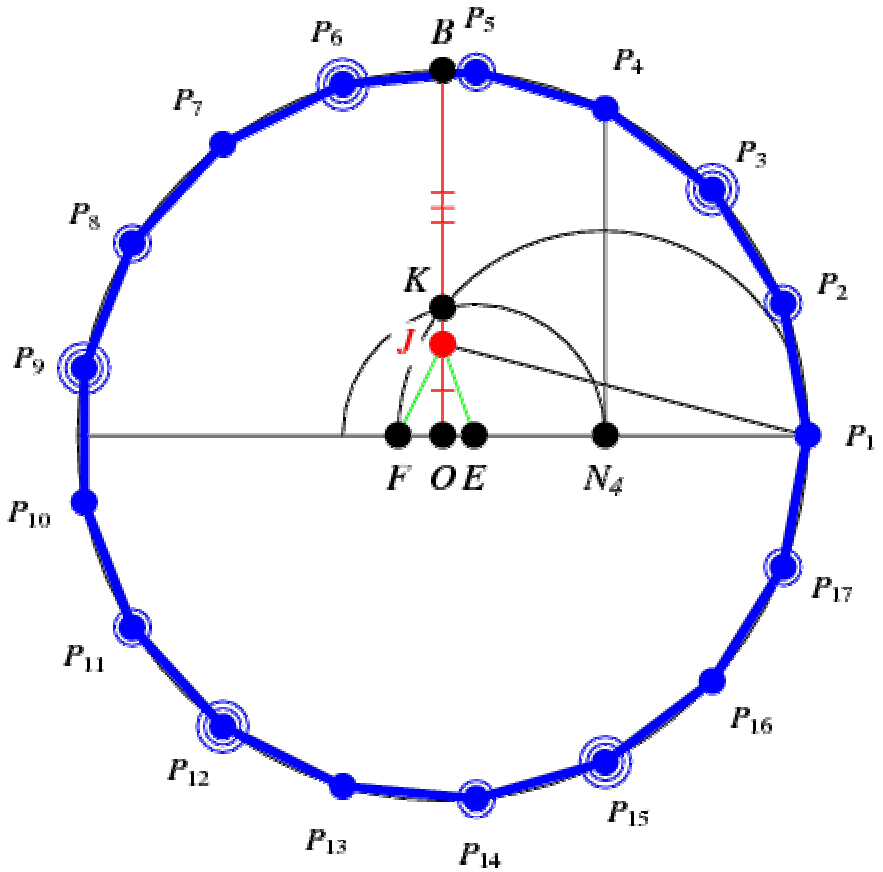
2. Η κατασκευή του H.W. Richmond για το κανονικό 17-γωνο

Πιο κάτω δίνουμε την κατασκευή για το κανονικό 17-γωνο που πραγματοποίησε το 1893 ο **H.W. Richmond** και είναι προσαρμοσμένη σε αυτή του J. Erchinger. Η κατασκευή αυτή γίνεται σε λιγότερα βήματα από τα 64 του Erchinger.

ΒΗΜΑΤΑ

1. Δίνεται ο κύκλος (O,R) και μια διάμετρός του στο σημείο P_1 του κύκλου.
2. Φέρνουμε την κάθετη ακτίνα OB στην διάμετρο.
3. Στην OB παίρνουμε το σημείο J έτσι ώστε $OJ=\frac{1}{4}OB$
4. Φέρνουμε το JP_1 και παίρνουμε το σημείο E στην OP_1 τέτοιο ώστε η γωνία OJE να είναι το ¼ της γωνίας OJP_1.
5. Παίρνουμε το σημείο F στην αρχική διάμετρο τέτοιο ώστε η γωνία EJF = 45°.
6. Κατασκευάζουμε το ημικύκλιο με διάμετρο FP_1 που τέμνει την OB στο K.
7. Κατασκευάζουμε το ημικύκλιο με κέντρο E και ακτίνα EK που τέμνει την OP_1 στο σημείο N_4.
8. Φέρνουμε την κάθετη στο N_4 που τέμνει τον κύκλο στο σημείο P_4 .

Το τόξο P_1P_4 είναι τα $\frac{3}{17}$ του κύκλου. Με την βοήθεια του τόξου P_1P_4 βρίσκουμε τις υπόλοιπες 15 κορυφές του κανονικού 17-γωνου με την εξής σειρά :
$P_7 \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{13} \rightarrow P_{16} \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_8 \rightarrow P_{11} \rightarrow P_{14} \rightarrow P_{17} \rightarrow P_3 \rightarrow P_6 \rightarrow P_9 \rightarrow P_{12} \rightarrow P_{15}$.



Αντίστοιχη κατασκευή υπάρχει και για το κανονικό πεντάγωνο (Coxeter σ. 27).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

1. **Bos Henk J.M**., *Redefining Geometrical Exactness*, New York, Springer-Verlag, 2001.
2. **Bos Henk J.M**., "*Arguments on Motivation in the rise and decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations", 1637-ca. 1750 "*, Archive for history of exact sciences, 30, 1984, pp. 331-380.
3. **Bos Henk J.M**., "*On the Representation of Curves in Descartes' Geometrie "*, Archive for history of exact sciences, 14, 1981, pp. 295-338.
4. **Coxeter H.S.M**, *Introduction to Geometry*, New York, John Wiley & sons, 1969.
5. **Descartes Rene**, *The Geometry of Rene Descartes*, (translated from D.E. Smith and M.L. Latham), New York, Dover, 1954.
6. **Hallet, M.**, "*Towards a theory of mathematical research programmes*", Br. J. Phil. Sci., 30, 1979, pp. 1-25, 135-139.
7. **Kazarinoff Nicholas**, *Ruler and the Round*, New York, Dover, 2003.
8. **Klein Felix**, *Famous Problems of Elementary Geometry*, (translated from the 1895 German edition by W. Beman and D. Smith), New York, Dover, 1956.
9. **Klein Jakob**, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, New York, Dover, 1992.
10. **Meshkowski Herbert,** *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry*, London, Oliver & Boyd, 1995.

Ελληνική & Μεταφρασμένη

1. **Άπαντα Αρχαίων Ελλήνων Συγγραφέων,** *Διάλογοι Πλάτωνος*, Αθήνα 1975, Εκδόσεις Πάπυρος.
2. **Αρτεμιάδης Νικόλαος**, *Στοιχειώδης Γεωμετρία Από Ανώτερη Σκοπιά*, Αθήνα 1998, Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.
3. **Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.,** *Ευκλείδη "Στοιχεία"*, τόμοι Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, Αθήνα 2001.
4. **Κίσκυρας Νικόλαος,** *Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας*, Αθήνα 1970, Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.
5. **Μπρίκας Μαυρίκιος**, *Τα περίφημα Άλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητας*, Αθήναι, 1973.
6. **Σταμάτης Ευάγγελος**, *Ευκλείδου Γεωμετρία : Στοιχεία*, τόμοι Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, IV, Αθήνα 1953, 1957, 1975, ΟΕΔΒ.
7. **Τσιμπουράκης Δημήτρης**, *Η Γεωμετρία στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα 1985, Εκδόσεις Ατραπός.
8. **Fraleigh John B**., *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Αθήνα 1994, Εκδόσεις ΠΕΚ.
9. **Gardner Martin,** *Το τσίρκο των μαθηματικών*, Αθήνα 1990, Εκδόσεις Τροχαλία.
10. **Heath Thomas L.,** *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, Αθήνα 2001, Εκδόσεις Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.
11. **Loria Gino,** *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμοι Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, Αθήνα 1971, Εκδόσεις Ε.Μ.Ε – Παπαζήση.