ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διερεύνηση λογικομαθηματικών δεξιοτήτων (Επαγωγικός συλλογισμός, Αναλογική σκέψη) μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου μέσα από βιωματικές δραστηριότητες

Διπλωματική Εργασία
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Ευγενία Χερουβείμ
Α.Μ. 200618

Επιβλέπων Καθηγητής: Παναγιώτης Σπύρου

Αθήνα, 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Σπύρου Παναγιώτης (επιβλέπων καθηγητής)	Επίκουρος Καθηγητής	…… ….
2)Παπασταυρίδης Σταύρος	Καθηγητής	…….. …
3)Πόταρη Δέσποινα	Αναπληρώτρια καθηγήτρια	……... …

Στον άντρα μου, Βαγγέλη

Στο γιό μου, Ορφέα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή μου, κ. Σπύρου Παναγιώτη κατ' αρχήν για την καθοδήγησή του και την αστείρευτη αρωγή και συμπαράσταση που μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας. Πάνω απ' όλα όμως θέλω να τον ευχαριστήσω για το ενδιαφέρον που έδειξε για τη διττή μου ιδιότητα ως καθηγήτρια των μαθηματικών και ως ηθοποιού. Το πάντρεμα αυτών των δύο ιδιοτήτων ήταν ένα θέμα που με απασχολούσε πάντα, ο κ. Σπύρου όμως, χάρις στην ευρεία σκέψη του και στην αμέριστη εμπιστοσύνη που μου έδειξε, με βοήθησε να συνειδητοποιήσω ότι αυτή η σύζευξη όχι μόνο δεν είναι μία ρομαντική σκέψη, αλλά παρουσιάζει και μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Θεωρώ τον εαυτό μου τυχερό που συνάντησα και συνεργάστηκα με τον κ. Σπύρου και πραγματικά πιστεύω ότι θα αποτελέσει σημείο αναφοράς στην παραπέρα πορεία μου.

Ευχαριστώ τον κ. Παπασταυρίδη Σταύρο που με τίμησε με την παρουσία του στην τριμελή εξεταστική επιτροπή και την κα. Πόταρη Δέσποινα για τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε δίνοντάς μου πολύ χρήσιμες οδηγίες για την περάτωση του ερευνητικού μέρους της εργασίας μου. Οι εύστοχες παρατηρήσεις της έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διευθέτηση και εκκαθάριση των αποτελεσμάτων μου όπως επίσης και στην παρουσίαση των συμπερασμάτων μου.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω το Γυμνασιάρχη κ. Τζίφα Νικόλαο, τόσο γιατί μου έδωσε την άδεια να πραγματοποιήσω τις δραστηριότητες στο σχολείο του προσπαθώντας να ξεπεράσει τα τυπικά εμπόδια που παρουσιάστηκαν, όσο και για τις πολύτιμες συμβουλές του. Τέλος, θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τους καθηγητές των μαθηματικών του Γυμνασίου κ. Κωνσταντινίδη Αριστείδη και κ. Δούκα Μανώλη για τις πολύτιμες διδακτικές ώρες που μου παραχώρησαν .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή **9**

Α΄ ΜΕΡΟΣ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΕΝΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ **15**

1.1 Η ανθρώπινη σκέψη **15**

1.1.1 Σχέση μεταξύ Λογικής και Ψυχολογίας της σκέψης **16**

1.2. Μέθοδοι μελέτης της ανθρώπινης σκέψης **17**

1.2.1 Μοντελοποίηση με Η/Υ **17**

1.2.2 Πειραματική έρευνα **17**

1.3. Είδη Σκέψης **19**

1.3.1. Παραγωγικός Συλλογισμός (Deductive Reasoning) **19**

1.3.2. Επαγωγικός Συλλογισμός (Inductive Reasoning) **20**

1.3.2.1. Ειδικές Επαγωγές (Απαγωγικός Συλλογισμός) **20**

1.3.2.2. Γενικές επαγωγές **21**

1.3.3 Η προσθετική και η αναλογική σκέψη **22**

1.4. Γλώσσα και Σκέψη **23**

1.4.1. Θεωρία της εξάρτησης της σκέψης από τη γλώσσα **24**

1.4.2. Θεωρία της εξάρτησης της γλώσσας από τη σκέψη **25**

1.4.3. Θεωρία Vygotsky **27**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ **29**

2.1. Μαθηματική σκέψη και κατανόηση **29**

2.2. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μαθηματική σκέψη **30**

2.2.1. Πεποιθήσεις **30**

2.2.2. Προσεγγίσεις Επίλυσης προβλήματος **30**

2.2.3. Αποδεικτικά Σχήματα **31**

2.3. Η έννοια της Αναπαράστασης **34**

2.3.1. Σχέση μεταξύ Εξωτερικών και Εσωτερικών Αναπαραστάσεων **35**

2.3.2. Αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης 36

2.4. Τύποι Γενίκευσης κατά Radford 38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 40

3.1. Η συμβολή των Μαθηματικών Προβλημάτων στη μάθηση 41

3.2. Επίλυση προβλημάτων με μαθηματική επαγωγή 43

3.3. Μεταγνωστικές δεξιότητες 45

3.3.1. Μεταγνώση και μάθηση 48

3.3.2. Μεταγνώση και αναστοχασμός 50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 52

4.1. Διευκρίνιση βασικών όρων και εννοιών 52

4.2. Γενικές αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης 53

4.2.1. Η Θεωρία επιπέδων του P. M. Van – Hiele 54

4.2.2. Διδακτική Φαινομενολογία του Freudenthal 54

4.2.3. Η προοδευτική μαθηματικοποίηση της ομάδας Wiskobas 55

4.3. Μοντελοποίηση 56

4.4. Ο Σχεδιασμός Ρεαλιστικών Μαθηματικών Δραστηριοτήτων 58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 61

5.1. Ορισμός των Διακριτών Μαθηματικών 61

5.2. Εφαρμογές των Διακριτών Μαθηματικών 63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ 66

6.1. Παιδαγωγικές αρχές για την κατασκευή εναλλακτικών διδασκαλιών 66

6.1.1. Η αρχή της δυαδικότητας 67

6.1.2. Η αρχή της αναγκαιότητας 67

6.1.3. Η αρχή της επαναλαμβανόμενης επιχειρηματολογίας 68

6.2. Βιωματική μάθηση **69**

6.2.1. Αρχές βιωματικής μάθησης **72**

6.2.2. Βιωματικές δραστηριότητες **73**

6.2.3. Το παιχνίδι των ρόλων **73**

6.2.3.1 Κατηγοριοποίηση των διδασκαλιών με την τεχνική Παιχνίδι των Ρόλων **75**

6.2.3.2 Πλεονεκτήματα της τεχνικής διδασκαλίας Παιχνίδι των Ρόλων **76**

6.2.3.3 Παιχνίδι Ρόλων και Μαθηματικά **77**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΔΥΟ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ: ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ **79**

7.1. Κατασκευαστική θεωρία της μάθησης **79**

7.1.1. Η προσέγγιση της Sfard στη διαδικασία της μάθησης **82**

7.2. Κοινωνικοπολιτισμική θεωρία της μάθησης **83**

7.3. Σύγκριση Κονστρουκτιβιστικής και Κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης της μάθησης **85**

Β΄ ΜΕΡΟΣ: Η ΕΡΕΥΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: Η ΕΡΕΥΝΑ **88**

8.1. Εισαγωγή **88**

8.2. Μεθοδολογία της έρευνας **89**

8.2.1. Τα Ερευνητικά Ερωτήματα της Έρευνάς μας **89**

8.2.2. Το Δείγμα της Έρευνάς μας **90**

8.2.3. Η Διαδικασία της Έρευνάς μας **90**

8.2.4. Οι Δραστηριότητες της έρευνάς μας **95**

8.2.4.1. Το Πρόβλημα του Fibonacci **98**

8.2.4.1.1. Υλοποίηση **100**

8.2.4.2. Βρείτε Έναν Κανόνα **106**

8.2.4.2.1. Υλοποίηση **107**

8.2.4.3. Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια **109**

8.2.4.3.1. Υλοποίηση του πρώτου προβλήματος **111**

8.2.4.3.2. Υλοποίηση του δεύτερου προβλήματος **114**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **117**

9.1. Το πρόβλημα του Fibonacci **117**

9.2. Βρείτε έναν Κανόνα **123**

9.3. Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια **129**

9.3.1. Πρώτο Πρόβλημα **129**

9.3.2 Δεύτερο Πρόβλημα: Το πρόβλημα με τα χρωματιστά Χαρτόνια **133**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ **139**

10.1. Το πρόβλημα του Fibonacci **139**

10.2. Βρείτε έναν Κανόνα **140**

10.3. Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια **142**

10.4. Γενικά συμπεράσματα – Συζήτηση **144**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **146**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ **157**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων ή ασκήσεων απαιτεί κατά κύριο λόγο την επιστράτευση της λογικής μας. Ειδικά για τα μαθηματικά του Γυμνασίου, η λογική αυτή κινείται στο στοιχειώδες πρώτο επίπεδο αυτής. Είναι σύνηθες το φαινόμενο, από τη μία μεριά οι καθηγητές να προσπαθούν να πείσουν τους μαθητές τους ότι τα Μαθηματικά που τους διδάσκουν δεν είναι δύσκολα και ότι δεν πρέπει να τα φοβούνται, αφού το μόνο που τους χρειάζεται είναι κοινός νους και κοινή λογική που την έχουν άλλωστε ήδη ανεπτυγμένη στην καθημερινή τους ζωή, και από την άλλη μεριά, τρομοκρατημένοι οι μαθητές να προσπαθούν να συλλάβουν την κοινή αυτή λογική που τους ζητείται να ενεργοποιήσουν και την πραγματική σχέση της με τα μαθηματικά. Προγενέστερες έρευνες έχουν κατά κόρον εστιάσει στη γενικευμένη αρνητική στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη στέρεα πεποίθησή τους ότι παραμένουν στείρα, ξεκομμένα από την πραγματικότητα, χωρίς ουσιαστικό μαθησιακό νόημα ή υπόβαθρο.

Στην παρούσα εργασία, προσπαθούμε να διερευνήσουμε τις λογικομαθηματικές δεξιότητες των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και να δημιουργήσουμε το περιβάλλον εκείνο που θα τους επιτρέψει να δομήσουν την προσωπική τους σκέψη αλληλεπιδρώντας με τους συμμαθητές τους. Η διερεύνηση αυτή, γίνεται με τη χρήση τριών βιωματικών μαθηματικών δραστηριοτήτων που ανήκουν στον τομέα των *Διακριτών Μαθηματικών*. Η τεχνική διδασκαλίας που χρησιμοποιήσαμε είναι το *Παιχνίδι των Ρόλων*, μία τεχνική που συνδυάζει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών με τη συνεργατική και βιωματική μάθηση στα πλαίσια μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας που αποτελεί απεικόνιση μιας πραγματικής κατάστασης (Taylor, 1987).

Οι δραστηριότητες που σχεδιάσαμε, κινούνται στο πλαίσιο της *Βιωματικής Προσέγγισης* οδηγώντας τους μαθητές σε αφαιρετικές σκέψεις μέσα από δράση και παιχνίδι. Οι μαθητές εκφράζονται ελεύθερα, και ασυναίσθητα ακολουθούν μαθηματικές διεργασίες παίζοντας κατ' ουσίαν παιχνίδια λογικής. Το ενδιαφέρον τους εντείνεται, ξεδιπλώνουν τη σκέψη τους, αναπτύσσουν στρατηγικές, επιχειρηματολογούν και συζητούν κάτω από την ομπρέλα ενός παιχνιδιού.

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η εργασία αυτή αποτελείται από δέκα κεφάλαια και χωρίζεται σε δύο διακριτά μέρη. Το πρώτο μέρος (Κεφ.1 – Κεφ.7) αποτελεί το θεωρητικό μέρος της εργασίας ενώ στο δεύτερο μέρος (Κεφ.8 – Κεφ.10) γίνεται ανάλυση της έρευνας που εκπονήσαμε. Παρακάτω, παραθέτουμε περιληπτικά το περιεχόμενο του κάθε κεφαλαίου, προκειμένου να διευκολύνουμε τον αναγνώστη να έχει εποπτική εικόνα της εργασίας.

Η εργασία μας, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ενδιαφέρεται να εξετάσει τη μαθηματική σκέψη των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου. Αναζητώντας λοιπόν μεθόδους μελέτης της ανθρώπινης σκέψης, στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε κάποιες γενικές θεωρίες για τη σκέψη και την αιτιολόγηση. Αναλύουμε τα είδη σκέψης – παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό- και στη συνέχεια παραθέτουμε τρεις βασικές θεωρίες για τη σχέση της σκέψης με τη γλώσσα. Αυτό το κεφάλαιο, αν και γενικό, είναι αρκετά διαφωτιστικό όσον αφορά τον τρόπο που θα προσεγγίσουμε τη μελέτη μας. Αναφέρεται στα πρωτόκολλα ανάλυσης που αποτελούν και τη δική μας μέθοδο συλλογής δεδομένων, δίνει ένα θεωρητικό υπόβαθρο για το κατά πόσο τα λεγόμενα των μαθητών μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε τι έχουν κατανοήσει και χαράζει τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ της παραγωγικής και επαγωγικής σκέψης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εστιάζουμε στη μαθηματική σκέψη και κατανόηση, δύο καταστάσεις οι οποίες συνδέονται με μια αμφίδρομη σκέψη. Στην προσπάθειά μας να δημιουργήσουμε δημιουργικά μαθησιακά περιβάλλοντα που προάγουν την προχωρημένη μαθηματική σκέψη καταγράφουμε τους παράγοντες (πεποιθήσεις, προσεγγίσεις επίλυσης προβλήματος, αποδεικτικά σχήματα) που την επηρεάζουν. Δίνουμε μεγάλη έμφαση στα αποδεικτικά σχήματα, έτσι όπως ορίστηκαν από τον Harel, για το λόγο ότι θα αποτελέσουν σημείο αναφοράς στην ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας. Στη συνέχεια, αναφερόμαστε στην έννοια της αναπαράστασης καταγράφοντας τη διάκριση μεταξύ εξωτερικής (σημαίνον) και εσωτερικής (σημαινόμενον) αναπαράστασης. Γίνεται ιδιαίτερη μνεία στους προσυμβολικούς τύπους γενίκευσης και στο συμβολικό τύπο γενίκευσης όπως τους

έχει ορίσει ο Radford καθώς αυτοί θα αποτελέσουν κεντρικό θεωρητικό υπόβαθρο στην ανάλυση των δεδομένων μας.

Η επίλυση προβλημάτων που προάγουν την προχωρημένη μαθηματική σκέψη, τα κριτήρια κατασκευής ενός τέτοιου προβλήματος, καθώς και η επιρροή τους στη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, όσον αφορά τη χρησιμότητά τους έξω από το σχολείο και το Πανεπιστήμιο, ήταν ένα άλλο θέμα που μας απασχόλησε για την κατασκευή των δραστηριοτήτων. Η ανάπτυξη των παραπάνω γίνεται σε θεωρητικό επίπεδο στο τρίτο κεφάλαιο. Δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στην επίλυση προβλημάτων με μαθηματική επαγωγή, καθώς τόσο η πρώτη, όσο και η τρίτη δραστηριότητα είναι επαγωγική. Οι μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών, αποτελεί σημαντικό μέρος αυτού του κεφαλαίου για το λόγο ότι, αυτές συντελούν καθοριστικά στην επίλυση προβλημάτων.

Στο κεφάλαιο τέσσερα, αναλύουμε τα ρεαλιστικά μαθηματικά. Θεωρούμε ότι αυτά τα μαθηματικά ενδιαφέρουν πολύ περισσότερο τους μαθητές, τόσο γιατί μπορούν να τα εντάξουν στην καθημερινότητά τους, όσο γιατί έχουν άμεση χρηστικότητα. Στη συνέχεια, αναφερόμαστε στην προοδευτική μαθηματικοποίηση και μοντελοποίηση των ρεαλιστικών μαθηματικών καταστάσεων, που αποτελούν τις διαδικασίες εκείνες που επανατοποθετούν τα πραγματικά – ρεαλιστικά προβλήματα στον αφηρημένο κόσμο των Μαθηματικών.

Στο κεφάλαιο πέντε ασχολούμαστε με τα Διακριτά Μαθηματικά, που σύμφωνα με τον Rosenstein, G.J. (1991), αποτελούν τον κλάδο των μαθηματικών που διαπραγματεύεται διακανονισμούς διακριτών αντικειμένων. Οι δραστηριότητες που σχεδιάσαμε, ανήκουν στον Τομέα των Διακριτών Μαθηματικών. Τα Διακριτά Μαθηματικά, περιλαμβάνουν μεγάλο εύρος θεμάτων και τεχνικών που εμφανίζονται στην καθημερινή ζωή, δηλαδή περιέχουν κατά ένα μεγάλο μέρος ρεαλιστικά προβλήματα. Παρόλο που τα Διακριτά Μαθηματικά είναι εφαρμόσιμα, προσβάσιμα, ελκυστικά και κατάλληλα, απουσιάζουν από το Αναλυτικό Πρόγραμμα της χώρας μας. Θα μπορούσαν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών γιατί, εκτός του ότι προάγουν την ολιστική προσέγγιση δίδοντας έμφαση τόσο στο όλο όσο και στην ανεξαρτησία των μερών, μπορούν να βρουν και άμεση χρήση στη ζωή.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, προσανατολιστήκαμε στο σχεδιασμό εναλλακτικών διδασκαλιών καθώς θεωρούμε ότι αποτελούν πηγή έμπνευσης για τη δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης που προάγει τη μαθηματική σκέψη και επικοινωνία. Η εκτενής ανάλυσή τους θεωρήθηκε απαραίτητο μέρος του θεωρητικού μέρους της εργασίας μας, κάτι που γίνεται στο κεφάλαιο έξι. Αναζητήσαμε τις αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται ο σχεδιασμός εναλλακτικών διδασκαλιών και καταλήξαμε στις παιδαγωγικές αρχές του Harel (2001) που είναι: η *αρχή της δυαδικότητας,* η *αρχή της αναγκαιότητας* και η *αρχή του επαναλαμβανόμενου συλλογισμού* (Duality, Necessity, Repeated Reasoning : DNR). Η βιωματική μάθηση δε θα μπορούσε να μην ήταν μέρος αυτού του κεφαλαίου και ειδικά η τεχνική διδασκαλίας *Παιχνίδι των Ρόλων*, αφού πάνω εκεί στηρίζουμε το στήσιμο των δικών μας δραστηριοτήτων. Η βιωματική μάθηση εισάγει ευχάριστα και απλά τα παιδιά στον κόσμο των μαθηματικών, και συγκεκριμένα των Διακριτών Μαθηματικών. Κερδίζει τη θετική τους στάση, αναδεικνύοντας τη δύναμη των μαθηματικών για επικοινωνία και εξήγηση.

Η Κονστρουκτιβιστική και η Κοινωνικοπολιτισμική θεωρία μάθησης, αποτελούν δύο σχετικά σύγχρονες γνωστικές θεωρίες οι οποίες στηρίζονται στην παραδοχή ότι ο άνθρωπος οικοδομεί τις γνώσεις του και δεν τις δέχεται παθητικά. Αυτές οι θεωρίες, οι οποίες αναλύονται στο κεφάλαιο εφτά, έχουν αρκετές ομοιότητες και πολλές διαφορές και έχουν αποτελέσει αντικείμενο «διαμάχης» πολλών ερευνητών θέλοντας κάποιοι τη Κονστρουκτιβιστική καλύτερη και κάποιοι άλλοι την Κοινωνικοπολιτισμική. Ο Cobb (1994), προτείνει ότι μια διδασκαλία δε χρειάζεται απαραίτητα να συμμερίζεται μία από τις δύο θεωρίες καθώς μπορεί να συνδυάζει και τις δύο, κάτι που έχουμε κάνει και εμείς στη δική μας προσέγγιση.

Το κεφάλαιο οχτώ είναι το πρώτο κεφάλαιο του Β΄ μέρους της εργασίας μας και αναφέρεται στην έρευνά μας. Συνοπτικά αναφέρουμε ότι:

Α. Τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης μας ήταν τα εξής δύο:
- Η βιωματική μάθηση μπορεί να συμβάλλει θετικά στην ανάπτυξη προχωρημένης (advanced) μαθηματικής σκέψης;
- Ποιους τύπους γενίκευσης χρησιμοποιεί ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου;

Β. Το δείγμα της έρευνάς μας ήταν μαθητές της Γ΄ γυμνασίου από δύο τμήματα ενός τυπικού δημόσιου Γυμνασίου των Αθηνών.

Γ. Χρησιμοποιήσαμε τρεις βιωματικές μαθηματικές δραστηριότητες εκ των από τα Διακριτά μαθηματικά, οι οποίες ονομαστικά είναι: Το πρόβλημα του Fibonacci (1 διδακτική ώρα), Βρείτε έναν κανόνα (1 διδακτική ώρα), Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια (4 διδακτικές ώρες).

Δ. Τα ερευνητικά μας εργαλεία ήταν:

- Η βιντεοσκόπηση – αποβιντεοσκόπηση των δραστηριοτήτων
- Τα φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές

Ε. Η ανάλυση των δεδομένων μας πλαισιώθηκε από τις θεωρίες των Harel (2001), Harel & Sowder (1998, 2005) και του Radford (2005).

Τα κεφάλαια 9 και 10, αναφέρονται αντίστοιχα, στα αποτελέσματα και στα συμπεράσματα της έρευνάς μας. Διαπιστώσαμε ότι εντός του πλαισίου των βιωματικών δραστηριοτήτων, οι πεποιθήσεις και οι τρόποι προσέγγισης για την επίλυση προβλήματος των μαθητών, προήγαγαν τη μαθηματική σκέψη ενώ τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών εξακολουθούσαν να είναι εμπειρικά, όπως υποδεικνύει άλλωστε και η έρευνα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η βιωματική μέθοδο; μπορεί ως ένα βαθμό να προάγει τη μαθηματική σκέψη. Οι τύποι γενίκευσης των μαθητών βρίσκονταν στο προσυμβολικό στάδιο αφού ήταν κατά κύριο λόγο γεγονικοί και πλαισιακοί . Επίσης, οι μαθητές φάνηκε να γενικεύουν βάσει της κανονικότητας των αποτελεσμάτων και όχι βάσει της κανονικότητας της διαδικασίας, κάτι που συνάδει με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών (π.χ. Harel 2001 κ.λπ.)

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΕΝΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

1.1 Η Ανθρώπινη Σκέψη

Η ανθρώπινη σκέψη αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης από τα Αρχαία ακόμα χρόνια, με τον Αριστοτέλη πρώτο στην εκκίνηση. Έκτοτε, η μελέτη της ανθρώπινης σκέψης αποτελεί πρωτεύον ζήτημα πολλών επιστημονικών κλάδων, γιατί εκτός του ότι μπορούν να μας πληροφορήσουν για το πώς μαθαίνει, πώς ενεργεί και πώς αντιδρά ο άνθρωπος κάτω από δεδομένες συνθήκες, παρέχει πολύτιμη πρακτική εφαρμογή στην παρέμβαση και βελτίωση της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου.

Στην εργασία του Αριστοτέλη, γνωστή ως *Όργανον* και ειδικά στο *Περί Ιερεμία* και στα *Αναλυτικά Πρότερα*, αναφέρεται η προσπάθεια πολλών Αρχαίων φιλοσόφων να ορίσουν τι μπορεί να καταστήσει μια επιχειρηματολογία ορθή. Αυτή η προσπάθεια είχε ως κύριο μέλημά της το πώς σκέφτονται οι άνθρωποι ή τουλάχιστον το πώς θα έπρεπε να σκέφτονται. Τη θεωρία του Αριστοτέλη και άλλων Ελλήνων φιλοσόφων, σύμφωνα με την οποία μελετώντας τον τρόπο που επιχειρηματολογούν οι άνθρωποι μελετάμε και τον τρόπο που σκέφτονται, συμμερίστηκε και ο George Boole το 1854 όταν έγραψε το βιβλίο *Οι Νόμοι της Σκέψης*.

Η παραπάνω προσέγγιση ονομάζεται *ψυχολογική προσέγγιση* της λογικής και απορρίφθηκε αργότερα από τον εισηγητή της *λογικής*, Frege. Ο Frege θέλησε να αποκοπεί από τις ιδιοτροπίες της παροντικής σκέψης και να μιλήσει για την ιδανική *λογική σκέψη*, ασπάστηκε τον Πλατωνισμό που θεωρεί ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν στο χώρο του ιδεατού και παρόλο που είναι ανεξάρτητες από την ανθρώπινη σκέψη, είναι προσβάσιμες. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε συνοπτικά τη σχέση μεταξύ Λογικής και Ψυχολογικής Σκέψης.

1.1.1 Σχέση μεταξύ Λογικής και Ψυχολογίας της σκέψης

Ενώ η Λογική και η Ψυχολογία της Σκέψης, φαίνεται να έχουν το ίδιο αντικείμενο μελέτης, τη σκέψη, οι επιμέρους διαφορές που τις διακρίνουν τις διαφοροποιούν σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Η Λογική είναι μέρος της φιλοσοφίας που διατυπώνει τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων από ένα σύνολο υποθέσεων και διακρίνει τον παραγωγικό από τον επαγωγικό συλλογισμό. Το ενδιαφέρον της εστιάζεται στο θέμα της λογικής συνέπειας και όχι της αλήθειας. Δεν ενδιαφέρεται δηλαδή αν ένα συμπέρασμα είναι εμπειρικά αληθές ή όχι, αλλά αν συνεπάγεται από τις προϋποθέσεις που έχουν δοθεί.

Από την άλλη μεριά, η Ψυχολογία της σκέψης είναι μέρος της ψυχολογίας που προσπαθεί να περιγράψει και να εξηγήσει πώς οι άνθρωποι σκέφτονται, πώς εξάγουν συμπεράσματα σε μια διαλογική κατάσταση. Η διάκριση ανάμεσα στον παραγωγικό και στον επαγωγικό συλλογισμό δεν είναι τόσο χρήσιμη στη ψυχολογία για το λόγο ότι στην καθημερινή ζωή αλλάζουμε συνέχεια από παραγωγικό σε επαγωγικό συλλογισμό. Σύμφωνα με τη ψυχολογία της σκέψης, οι πεποιθήσεις καθοδηγούν τις παρατηρήσεις και οι παρατηρήσεις αλλάζουν τις πεποιθήσεις. Η τάση των ανθρώπων να κρίνουν την ορθότητα ενός συλλογισμού όχι με βάση τη λογική συνέπεια, αλλά με βάση τις πεποιθήσεις τους σχετικά με την αλήθεια ή όχι του συμπεράσματος, είναι γνωστή ως *προκατάληψη των πεποιθήσεων*. Στην πραγματική ζωή σπανίως δεχόμαστε συμπεράσματα χωρίς να ενδιαφερθούμε για την εμπειρική αλήθεια τους.

Η θεωρία του Frege παρουσιάζει ενδιαφέρον στο χώρο των Μαθηματικών, δεν είναι όμως ικανή να περιγράψει την ανθρώπινη σκέψη όπως η ψυχολογική προσέγγιση του Αριστοτέλη. Οι ψυχολόγοι ενδιαφέρονται για την πραγματική διαδικασία σκέψης που λαβαίνει χώρα σε μια συνηθισμένη επιχειρηματολογία. Δεδομένου ότι η παρούσα εργασία έχει ως στόχο της να αναδείξει τους τρόπους που σκέφτονται οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών, τα αποτελέσματα της μελέτης της ανθρώπινης σκέψης και ειδικά του συλλογισμού, από τη σκοπιά της επιστήμης της ψυχολογίας, φαίνονται να είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα.

1.2. Μέθοδοι μελέτης της ανθρώπινης σκέψης

Η επιστήμη της Ψυχολογίας έχει αναπτύξει διάφορες μεθόδους μελέτης της ανθρώπινης σκέψης, με επικρατέστερες α) τη μοντελοποίηση με χρήση Η/Υ και β) την πειραματική έρευνα (Garnham A. & Oakhill J., 1994). Ειδικά στον κλάδο της Διδακτικής μία τέτοια μελέτη είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική καθώς μπορεί να αποτελέσει οδηγό νέων διδακτικών μεθόδων. Παρόλο που η μέθοδος της μοντελοποίησης της ανθρώπινης σκέψης με Η/Υ δεν είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στον κλάδο της Διδακτικής, αξίζει να αναφερθούμε, έστω και περιληπτικά σε αυτήν για να ασχοληθούμε στη συνέχεια εκτενέστερα με την Πειραματική Έρευνα που αποτελεί και κύριο εργαλείο της Διδακτικής.

1.2.1. Μοντελοποίηση με Η/Υ

Κατά τη μοντελοποίηση με Η/Υ, δημιουργήθηκαν υπολογιστικά προγράμματα που επιχειρούν τη δόμηση της λεγόμενης *Τεχνητής Νοημοσύνης* που αναπαράγει κατά το δυνατό, την ανθρώπινη σκέψη και λογική. Απαραίτητα εφόδια η σωστή μοντελοποίηση της ανθρώπινης σκέψης, όχι μέσω της φαινομενικά αδύνατης ολικής μίμησης αυτής, αλλά μέσω της γενικής κατανόησης της διανοητικής διαδικασίας που τη διέπει, της φύσης της και των περιορισμών της. Η έρευνα πάνω στην «Απομίμηση της ανθρώπινης σκέψης από τους υπολογιστές», αν και δεν μπορεί σήμερα να μας δώσει μηχανές πλήρη ομοιώματα Ανθρώπινης λογικής, μπορεί σίγουρα να παρουσιάσει μηχανές που προσομοιάζουν επαρκώς μέρος των μη μετρήσιμων διεργασιών ενός Ανθρώπινου εγκεφάλου.

1.2.2. Πειραματική έρευνα

Η πειραματική έρευνα, είναι η έρευνα που σαν κύριο εργαλείο της χρησιμοποιεί το πείραμα. Ανέπτυξε διάφορες τεχνικές μελέτης του τρόπου σκέψης του υποκειμένου βασιζομένη πρωτίστως στα *Πρωτόκολλα Ανάλυσης*. Τα πρωτόκολλα, ως επί το πλείστον αποτελούν μέρος της συλλογής δεδομένων μιας πειραματικής μελέτης και

ζητούν ουσιαστικά από το υποκείμενο να «σκεφτεί δυνατά» καθώς εμπλέκεται, για παράδειγμα, με την επίλυση ενός προβλήματος.

Εκπαιδευτικοί και Ψυχολόγοι έχουν προσπαθήσει στο παρελθόν να αποκωδικοποιήσουν την επιχειρηματολογία των μαθητών, αναλύοντας τις συζητήσεις και τις επιχειρηματολογίες που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος. Ο Schoenfeld (1985) ισχυρίστηκε ότι λόγω της πολυπλοκότητας της κατανόησης του τρόπου με τον οποίο επιχειρηματολογούν οι μαθητές, είναι πρώτιστη ανάγκη να μελετήσουμε και να αναλύσουμε με λεπτομέρεια τα λεκτικά πρωτόκολλα που διατηρούν οι μαθητές όταν εμπλέκονται με την επίλυση ενός προβλήματος.

Παρόλο που δεν υπάρχει ομόφωνη άποψη για το πώς σχετίζεται αυτό που λέει κάποιος με αυτό που πραγματικά συμβαίνει στο μυαλό του, η παράλληλη μελέτη των πρωτοκόλλων ανάλυσης με τη διαδικασία σκέψης, μπορεί σίγουρα να δώσει πλούσια πειραματικά δεδομένα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η απόπειρα των Ericsson & Simon (1980, 1984) να συνδυάσουν τα πρωτόκολλα ανάλυσης με τα *Παραγωγικά Συστήματα*. Μοντελοποίησαν τη σκέψη με τη χρήση παραγωγικών κανόνων του τύπου «αν… τότε», στηριζόμενοι στην προγενέστερη θεωρία των Newell & Simon (1972), σύμφωνα με την οποία η σκέψη και η λογική βασίζονται στα *Παραγωγικά* Συστήματα. Θεώρησαν δηλαδή ότι *αν* ικανοποιούνται κάποιοι συγκεκριμένοι κανόνες, *τότε* θα προκύψουν συγκεκριμένες νοητικές δράσεις. Θεωρώντας ότι αυτό που δηλώνει το υποκείμενο σχετίζεται άμεσα με τη βραχυπρόθεσμη μνήμη εργασίας του την ώρα που αποπειράται μιας δήλωσης, κατέληξαν να υποστηρίζουν ότι με την εκκίνηση της παραγωγικής διαδικασίας σκέψης, η σκέψη μεταφέρεται στη μνήμη εργασίας και άρα στο συνειδητό.

Ο συνδυασμός των πρωτοκόλλων ανάλυσης με τα παραγωγικά συστήματα, που αποτελούν αλληλουχίες αίτιου και αιτιατού, παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τους κανόνες επίλυσης προβλήματος που το άτομο χρησιμοποιεί εκείνη την ώρα (Garnham A. & Oakhill J., 1994).

1.3. Είδη Σκέψης

Συλλογισμός είναι η διαδικασία κατά την οποία χρησιμοποιούμε την υπάρχουσα γνώση για να εξάγουμε συμπεράσματα ή να συνάγουμε κάτι που γνωρίζουμε στο πεδίο του ενδιαφέροντός μας. Τα είδη του συλλογισμού είναι ο *παραγωγικός συλλογισμός* (deductive reasoning) , που σχετίζεται με την απόφαση για το τι είναι αληθές βάσει των κανόνων λογικής και κάποιων δεδομένων καταστάσεων και γεγονότων, και ο *επαγωγικός* (inductive) ή ο *απαγωγικός* (abductive) *συλλογισμός* που σχετίζεται με την απόφαση για το τι ενδέχεται να είναι αληθές δεδομένων κάποιων πεποιθήσεων και παρατηρήσεων.

1.3.1. Παραγωγικός Συλλογισμός (Deductive Reasoning)

Ο παραγωγικός συλλογισμός είναι η διαδικασία συναγωγής συμπερασμάτων που είναι λογικά αναγκαία. Εξ' ορισμού, μία έγκυρη παραγωγική επιχειρηματολογία *ποτέ* δεν μπορεί να οδηγήσει από σωστές προτάσεις σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Κατά μία έννοια, ο παραγωγικός συλλογισμός αναδιοργανώνει τις δοθείσες πληροφορίες χωρίς όμως, σύμφωνα με τους Johnson – Laird & Byrne (1991), να μπορεί να αυξήσει τη *Σημασιολογική Πληροφορία*.

Η ικανότητα συναγωγής λογικών συμπερασμάτων είναι ένα χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης που είναι απαραίτητο για την επιβίωση. Οι άνθρωποι όμως δε σκέφτονται όπως μια λογική μηχανή, επηρεάζονται από την αλήθεια των προϋποθέσεων σε σχέση με τα εμπειρικά δεδομένα και την προϋπάρχουσα γνώση τους. Η προκατάληψη των πεποιθήσεων συμβαίνει όταν οι προϋπάρχουσες γνώσεις ή πεποιθήσεις αναγκάζουν τους ανθρώπους να συνάγουν κάποιο συμπέρασμα το οποίο ενώ δεν αποτελεί λογική συνέπεια των προκείμενων, είναι συνεπές με τα όσα γνωρίζουν κάνοντας τους να πιστεύει ότι είναι αληθές (Βοσνιάδου, 2001) .

1.3.2. Επαγωγικός Συλλογισμός (Inductive Reasoning)

Δεδομένου λοιπόν ότι η παραγωγική επιχειρηματολογία μπορεί να εξασφαλίσει την αλήθεια του συμπεράσματος χωρίς να επεκταθεί σημασιολογικά πέρα από τις δοθείσες πληροφορίες, είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι επιχειρηματολογίες να είναι πλήρως παραγωγικές γιατί τότε οι άνθρωποι θα περιοριζόντουσαν μόνο σε συμπεράσματα που θα νομιμοποιούνταν να βγάλουν. Χρειαζόμαστε ένα είδος συλλογισμού που να επεκτείνεται και σε πληροφορίες πέρα από τις δοθείσες προκειμένου να καταστούμε ικανοί να εξάγουμε συμπεράσματα πέρα από τα προφανή. Η επαγωγική σκέψη φαίνεται να πηγαίνει ένα βήμα μπροστά αυξάνοντας τη σημασιολογική πληροφορία, με τίμημα όμως να χαθεί η εγγύηση της εγκυρότητας των συμπερασμάτων.

Στην *επαγωγική σκέψη*, ακόμα και αν το άτομο γνωρίζει ότι τα δεδομένα είναι αληθή και γνωρίζει ότι επιχειρηματολόγησε όπως έπρεπε, δεν μπορεί να είναι βέβαιο για την εγκυρότητα του συμπεράσματος. Για αυτό το λόγο το συμπέρασμα της επαγωγής θεωρείται υποθετικό, απαιτεί δηλαδή την εξέταση της αλήθειας του. Η επαγωγική επιχειρηματολογία είναι σημαντική τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στην ακαδημαϊκή και αποτελεί κύριο τρόπο σκέψης κάθε επιστημονικής έρευνας. Στις επιστήμες βέβαια, όταν μια υπόθεση προκύπτει από την επαγωγή ή από κάποια άλλη μέθοδο, πρέπει οπωσδήποτε να υπόκειται σε πρότερα επίσημα πειραματικά τεστ.

Ο Johnson-Laird (1993), διέκρινε τις επαγωγές σε τρία βασικά είδη: α) τις ειδικές επαγωγές ή απαγωγές (specific inductions), β) τις γενικές περιγραφικές επαγωγές (general descriptive inductions) και γ) γενικές ερμηνευτικές επαγωγές (general explanatory inductions).

1.3.2.1. Ειδικές Επαγωγές :Απαγωγικός Συλλογισμός (Abductive Reasoning)

Η απαγωγή ξεκινά από ένα γεγονός και προσπαθεί να βρει την αιτία που το προκάλεσε. Αυτή τη μέθοδο τη χρησιμοποιούμε για να εξηγήσουμε τα γεγονότα που παρατηρούμε. Η απαγωγική διαδικασία μπορεί να γίνει δημιουργική και διορατική.

Αυτός ο τρόπος συλλογισμού, παρά τη χρησιμότητά του, μπορεί να οδηγήσει σε αναξιόπιστα αποτελέσματα, καθώς μια δράση που προηγείται ενός γεγονότος, μπορεί λαθεμένα να θεωρηθεί η αιτία αυτού του γεγονότος.

1.3.2.2. Γενικές επαγωγές

Οι γενικές επαγωγές προκύπτουν κατά την παρατήρηση μεμονωμένων περιστατικών που έχουν μια κοινή ιδιότητα και τη μετέπειτα γενίκευση και υπόθεση ότι όλα τα αντικείμενα ή γεγονότα της ίδιας κατηγορίας έχουν αυτή την ιδιότητα. Για παράδειγμα, αν όλα τα πρόβατα που έχει δει κάποιος είναι άσπρα, τότε μπορεί να συνάγει ότι όλα τα πρόβατα είναι άσπρα. Ένα τέτοιο συμπέρασμα μπορεί να αποδειχθεί λανθασμένο αν δει, για παράδειγμα, μαύρο πρόβατο.

Κάποιες γενικές επαγωγές είναι αμιγώς *περιγραφικές*, ενώ κάποιες άλλες αμιγώς *ερμηνευτικές*. Ένα εύστοχο παράδειγμα περιγραφικής επαγωγής δίνει ο Johnson-Laird (1993) όταν κάποιος που έχει κάνει πολλά αεροπορικά ταξίδια εντός των ορίων των Ηνωμένων Πολιτειών θεωρεί ότι μπορεί με ασφάλεια να συμπεράνει ότι οι εσωτερικές πτήσεις έχουν συχνά καθυστέρηση. Μια περιγραφική γενίκευση πρέπει όμως να ακολουθηθεί με προσοχή, καθώς για παράδειγμα, ένα άλλο άτομο που γνωρίζει την αιτία που οι εσωτερικές πτήσεις των Ηνωμένων Πολιτειών καθυστερούν, είναι σε πλεονεκτικότερη θέση να κρίνει αν πρέπει να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι όλες οι πτήσεις καθυστερούν.

Δεδομένου επομένως ότι η περιγραφική επαγωγή, εάν γενικευτεί αόριστα, μπορεί να οδηγήσει σε λαθεμένα συμπεράσματα, οι επιστήμονες εισήγαγαν και την ερμηνεία ουσιαστικά της περιγραφής, συντάσσοντας πλέον επιστημονικές υποθέσεις ή ακόμα και επιστημονικές θεωρίες που παίρνουν τελικά τη μορφή γενικών δηλώσεων. Σαν αποτέλεσμα, οι δηλώσεις μετατρέπονται σε επιστημονικούς νόμους, καταρρίπτοντας το περιγραφικό status των αρχικών ιδεών και δομώντας νέες βασικές ιδέες. Η ερμηνεία των νέων αυτών βασικών ιδεών υποσκελίζει ηχηρά την απλή περιγραφική αξιοποίηση του κάθε δεδομένου.

1.3.3. Η προσθετική και η αναλογική λογική

Οι τρόποι επιχειρηματολογίας αποτελούν πολύ σημαντικό πεδίο μελέτης για τη Διδακτική των Μαθηματικών για το λόγο ότι οι μαθητές καλούνται συχνά να αιτιολογήσουν και να αποδείξουν την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης. Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές εμπιστεύονται τις γενικές περιγραφικές επαγωγές και επικυρώνουν τις προτάσεις ακολουθώντας την *προσθετική λογική*.

Η προσθετική λογική, είναι ένας απλός τρόπος σκέψης που θυμίζει αρκετά το μηχανισμό της γενικής επαγωγής καθώς η αλήθεια μερικών μεμονωμένων περιπτώσεων είναι ικανή να εξασφαλίσει την αλήθεια όλων των περιπτώσεων που φαίνεται να ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Προφανώς, τόσο στη ζωή όσο και στην ακαδημαϊκή έρευνα, δε δημιουργούνται όλες οι γενικές πεποιθήσεις ή υποθέσεις με αυτόν τον τρόπο. Μερικές γενικεύσεις προκύπτουν με τη βοήθεια της φαντασίας και άλλες με χρήση της *αναλογικής λογικής*.

Η προσθετική λογική προηγείται της αναλογικής και παράγει αποτελέσματα που είναι έγκυρα σε κάποιες περιπτώσεις, αλλά άκυρα σε άλλες. Για να μπορέσει κάποιος να περάσει από την προσθετική στην αναλογική λογική πρέπει να οικοδομήσει διαφορετικούς τρόπους κατανόησης σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Σε μαθησιακό επίπεδο, η έρευνα έχει δείξει ότι η προσθετική επιχειρηματολογία υπερισχύει των περιστασιακών αντιφάσεων που μπορεί να προκαλέσει και οι μαθητές εξακολουθούν να τη χρησιμοποιούν ακόμα και αν διαπιστώσουν την ανικανότητά της σε κάποιες περιπτώσεις. Η εγκατάσταση της αναλογικής επιχειρηματολογίας επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές εκτεθούν στην έννοια της *αναλογίας* (Harel & Sowder, 2005).

Αναλογία είναι η παραδοχή ότι εάν ένα στοιχείο Α (ένα φαινόμενο, ένα πρόβλημα, κ.λπ.) μοιάζει με ένα άλλο στοιχείο Β, τότε οι συνέπειες (τα συμπεράσματα, οι επεξηγήσεις, οι λύσεις, κλπ.) που αφορούν την περίπτωση Α μπορούν να αφορούν εξίσου και την περίπτωση Β. Η αναλογία είναι μια διαδικασία αιτιολόγησης που επικρατεί στην ανθρώπινη ζωή τόσο έντονα, ώστε να μπορούμε να πούμε ότι η αναλογία είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της ανθρώπινης σκέψης.

> Στο λεξικό της Φιλοσοφίας του Νου, η αναλογία αναγνωρίζεται ως «ένα σημαντικό είδος σκέψης που συντελεί σε γνωστικές εργασίες όπως επεξήγηση, σχεδιασμό και λήψη αποφάσεων (Paul Thagard)»[1]. Δεν προκαλεί επομένως έκπληξη το γεγονός ότι η έννοια της αναλογίας έχει γίνει αντικείμενο μελέτης από τα αρχαία χρόνια (Massimiliano, 2006, σελ.1).

Παρά τη δυσκολία χρήσης της αναλογίας σε καθαρά εργαστηριακό – πειραματικό επίπεδο, η αναλογική λογική παραμένει κύριος διαμορφωτής τόσο των καθαρά επιστημονικών θεωριών όσο και των ευρύτερων ψυχολογικών ερευνών. Για την επιστήμη η αναλογία φαίνεται να είναι μία μέθοδος που δημιουργεί την υπόθεση που οι προβλέψεις της ακολούθως παράγονται και ελέγχονται.

1.4. Γλώσσα και Σκέψη

Σε προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι πολλοί αμφισβητούν τη σχέση των πρωτοκόλλων ανάλυσης με τη σκέψη. Μία παράμετρος που δημιουργεί αυτή τη διάσταση απόψεων είναι και το γεγονός ότι δεν υπάρχει μία ομόφωνη άποψη για τη σχέση της γλώσσας με τη σκέψη. Ερωτήματα όπως: «η σκέψη προηγείται της γλώσσας ή η γλώσσα της σκέψης;» είναι θεμελιώδη και αποτελούν κίνητρο για τη δημιουργία ποικίλων θεωριών. Σήμερα επικρατούν τρεις ερμηνευτικές προσεγγίσεις:

α) Η *θεωρία του μπιχεβιορισμού* και η *θεωρία της γλωσσικής σχετικότητας* που υποστηρίζει ότι η σχέση γλώσσας και σκέψης είναι αιτιώδης και μονόδρομη με τη γλώσσα να είναι αναγκαία προϋπόθεση για την ύπαρξη και διαμόρφωση της σκέψης.

β) Η *παραδοσιακή άποψη* του Αριστοτέλη που αργότερα εμπλουτίστηκε και από τους Piaget, Schank, Mcnamara, Chomsky που θεωρεί ότι η σχέση γλώσσας και σκέψης είναι μεν αιτιώδης και μονόδρομη αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση από την προηγούμενη θέση, με την ανάπτυξη της σκέψης να αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ανάπτυξη της γλώσσας.

---

[1] http://philosophy.uwaterloo.ca/MindDict/analogy.html#reference

γ) Η *άποψη του Vygotsky* η οποία εστιάζει στη θέση ότι η γλώσσα εξυπηρετεί δύο λειτουργίες, την εξωτερική επικοινωνία και την εσωτερική σκέψη.

1.4.1. Θεωρία της εξάρτησης της σκέψης από τη γλώσσα

Θεωρία του Μπιχεβιορισμού

Κυριότερος εκπρόσωπος αυτής της άποψης υπήρξε ο Watson που υποστήριξε ότι ο άνθρωπος δε διαθέτει εσωτερικές νοητικές διεργασίες, αλλά μόνο αντιδράσεις που προξενούνται από εξωτερικά ερεθίσματα. Για το λόγο αυτό πρότεινε πως η σκέψη είναι μια μη φωνούμενη γλώσσα και επομένως όταν οι άνθρωποι σκέφτονται δεν κάνουν τίποτε άλλο από το να μιλούν εσωτερικά στον εαυτό τους. Κατά συνέπεια η μη φωνούμενη γλώσσα θεωρήθηκε σαν ένα βασικό στοιχείο (αν όχι ταυτόσημο) της σκέψης, άρα η σκέψη υπάγεται στη γλώσσα και αποτελεί μια πτυχή της. Η παραπάνω άποψη φαίνεται να είναι πολύ κοντά με την άποψη του Πλάτωνα που είπε ότι: «η σκέψη αποτελεί τη συνομιλία της ψυχής με τον εαυτό της – άρα ταυτίζεται με τη γλώσσα».

Σοβαρή αμφισβήτηση της θέσης αυτής δόθηκε από τους Smith, Brown, Goodman & Tomas και απέδειξαν πως η σκέψη είναι μια εσωτερική λειτουργία ανεξάρτητη από άλλες κινητικές λειτουργίες (π.χ. κινήσεις χεριών, λάρυγγα, φωνητικές πραγματώσεις) και υφίσταται ανεξάρτητα από αυτές.

Θεωρία γλωσσικής σχετικότητας

Τη θεωρία αυτή εισηγήθηκαν οι Whorf και Sapir και υποστηρίζεται και από τους Γερμανούς Herder και Hymbolt. Προτείνεται η υπόθεση πως οι άνθρωποι δεν έχουν μια κοινή λογική δομή και δεν σκέφτονται με όμοιο τρόπο. Θεωρούν πως η γλώσσα προηγείται της σκέψης και ότι οι άνθρωποι δεν αντιλαμβάνονται την πραγματικότητα του κόσμου κατά τον ίδιο τρόπο. Το είδος των σκέψεων που μπορεί να κάνει ένα άτομο εξαρτάται από τη γλώσσα που μιλάει. Έτσι τα άτομα που μιλούν διαφορετική γλώσσα αναπτύσσουν διαφορετικούς τρόπους αντίληψης, ερμηνείας και σκέψης του κόσμου που τους περιβάλλει. Για παράδειγμα η απουσία μιας λέξης από τη γλώσσα σημαίνει και παντελή απουσία της έννοιας αυτής (*γλωσσικός ντετερμινισμός*).

1.4.2. Θεωρία της εξάρτησης της γλώσσας από τη σκέψη.

Οι απαρχές της θεωρίας αυτής ανάγονται στον Αριστοτέλη που θεώρησε ότι *η σκέψη προϋπάρχει της γλώσσας* και ότι η γλώσσα έχει τέτοιες ιδιότητες, ώστε να μπορεί να εκφράσει τις πτυχές της ανθρώπινης σκέψης. Ένθερμοι υποστηρικτές αποτέλεσαν οι Piaget, Schank, Mcnamara. Τα επιχειρήματα της άποψης αυτής είναι τα εξής:

- Η σκέψη προηγείται χρονικά και η γλώσσα εμφανίστηκε αργότερα κατά την εξελικτική πορεία του ανθρώπινου είδους.
- Κατά την αναπτυξιακή πορεία του παιδιού αναπτύσσονται οι νοητικές ικανότητες και οι σύνθετες γνωστικές λειτουργίες πριν κατακτηθεί η γλώσσα.

- Σε μερικά είδη ζώων αναπτύσσονται κάποιες μορφές σκέψης χωρίς αυτές να μπορούν να αποδοθούν γλωσσικά.
- Οι διάφορες γλώσσες εμφανίζουν μεταξύ τους περισσότερες ομοιότητες παρά διαφορές, επειδή η αντίληψη και η γνώση της πραγματικότητας επηρεάζεται κύρια από το επίπεδο γνωστικής τους ικανότητας και σε μικρότερο βαθμό από τη γλώσσα που χρησιμοποιούν.

Κατά τους Piaget και Mcnamara η γλώσσα αποτελεί ένα είδος συμβολικής λειτουργίας ανάμεσα σε πολλές άλλες γνωστικές και νοητικές λειτουργίες. Βασικό χαρακτηριστικό των μελετών του Piaget είναι πως τα παιδιά μπορούν να σκέφτονται πριν την απόκτηση της ομιλίας. Ακόμη μπορούν να επιλύουν προβληματικές καταστάσεις χωρίς να είναι σε θέση να μπορούν να εξηγήσουν με τη χρήση της γλώσσας πως το κάνουν. Ονόμασε την εσωτερική σκέψη *Εγωκεντρική Ομιλία* και την εξωτερίκευση αυτής, *Κοινωνική Ομιλία*. Η διαφορά ανάμεσα στην εγωκεντρική ομιλία και την κοινωνική ομιλία περιγράφεται έντονα στο ακόλουθο απόσπασμα του Piaget (1959) :

> Θα συνειδητοποιήσουμε γρήγορα τη μεγάλη σημασία της εγωκεντρικής ομιλίας αν λάβουμε υπ' όψιν μας μια γνωστή εμπειρία της καθημερινής ζωής. Υποθέστε ότι ψάχνουμε τη λύση κάποιου προβλήματος, όταν ξαφνικά όλα φαίνονται ξεκάθαρα στο μυαλό μας. Καταλαβαίνουμε και βιώνουμε αυτό το ιδιαίτερο προσωπικό συναίσθημα πνευματικής ικανοποίησης, αλλά καθώς προσπαθούμε να εξηγήσουμε στους άλλους

τι είναι αυτό που καταλάβαμε, παρουσιάζονται γρήγορα οι πρώτες δυσκολίες. Αυτές οι δυσκολίες δεν εμφανίζονται απλά λόγω της έλλειψης της απαιτούμενης προσπάθειας συγκράτησης, της δικιάς μας ή των ακροατών μας, της σύνδεσης στην αλυσίδα των επιχειρημάτων μας, αλλά αποδίδονται επίσης και στην ίδια την ικανότητά μας να κρίνουμε. Συμπεράσματα τα οποία αρχικά θεωρούσαμε θετικά, αρχίζουν να αναιρούνται. Μεταξύ στέρεων προτάσεων, φαίνεται τώρα να λείπουν ολόκληρες σειρές ενδιάμεσων δεσμών προκειμένου να συμπληρωθούν τα κενά τα οποία δεν είχαμε συνειδητοποιήσει προηγουμένως. Επιχειρήματα που φαίνεται να έπειθαν επειδή συνδέονταν με κάποια σχηματική οπτική αναπαράσταση ή βασίζονταν σε κάποιο είδος αναλογίας, χάνουν όλη τους την ισχύ από τη στιγμή που νιώθουμε την ανάγκη να προσφύγουμε σ' αυτά τα σχήματα-αναπαραστάσεις, και να καταλήξουμε ότι είναι μη ανακοινώσιμα. Αμφισβητούνται προτάσεις που σχετίζονται με κρίσεις εγκυρότητας, μόλις συνειδητοποιούμε την προσωπική φύση αυτών των κρίσεων (Sierpinska, 1998).

Ο Mcnamara υποστήριξε πως για την απόκτηση της γλώσσας απαραίτητη είναι η ύπαρξη των αναγκαίων γνωστικών δομών. Το μικρό παιδί δεν μπορεί να μάθει το όνομα ενός αντικειμένου πριν αποκτήσει την έννοια της ταυτότητάς του και της σταθερότητάς του. Ο Schank θεώρησε πως οι ιδιότητες των ανθρώπινων γλωσσών εξαρτώνται από τις ιδιότητες της ανθρώπινης σκέψης. Οι γλώσσες μπορούν να εκφράσουν τις ιδέες που εμείς αναπαριστούμε στους εαυτού μας. Ο Chomsky υποστήριξε πως όλες οι γλώσσες έχουν κοινές ιδιότητες που αντανακλούν τη δομή ενός τμήματος του εγκεφάλου το οποίο μας δίνει την ικανότητα να σκεφτόμαστε. Η διαμόρφωση των γλωσσών όπως είναι, οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι άνθρωποι. Θεωρεί ως δεδομένο πως η σκέψη είναι ένα πεδίο εντελώς διαφορετικό από τη γλώσσα αλλά η γλώσσα χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη σκέψη και για μεγάλο μέρος των συλλογισμών χρειαζόμαστε τη γλώσσα.

Η υπόθεση πως η γλώσσα εξαρτάται και επηρεάζεται από τη σκέψη, ενισχύεται από το γεγονός πως η γλώσσα χρησιμοποιείται για τη μετάδοση των εννοιών και όχι της ακουστικής παράστασης. Επίσης η απόκτηση πολλών διαφοροποιημένων ή συνώνυμων λέξεων για ένα πράγμα παρατηρείται όταν το άτομο έχει αυξημένο επίπεδο εμπειρίας για το αντικείμενο αυτό.

1.4.3. Η Θεωρία του Vygotsky

Η θεωρία του Vygotsky είναι συμβατή τόσο με την παραδοσιακή άποψη όσο και την αντίθετη που δέχεται πως η γλώσσα προηγείται της σκέψης. Ο Vygotsky θεώρησε πως η γλώσσα εξυπηρετεί δυο βασικούς σκοπούς: α) στη διεκπεραίωση της επικοινωνίας με τους άλλους (εξωτερική λειτουργία) και β) στην εσωτερική τακτοποίηση των σκέψεων (εσωτερική λειτουργία). Σύμφωνα με τη θεωρία του, γλώσσα και σκέψη αρχικά αναπτύσσονται ανεξάρτητα και καταλήγουν σε αμοιβαία αλληλεπίδραση. Θεώρησε ότι η σχέση μεταξύ σκέψης και γλώσσας σχετίζεται με την ηλικία του υποκειμένου και διέκρινε τρία στάδια τα οποία διαφοροποιούνται ως προς την ανάπτυξη αυτής της σχέσης.

Στο πρώτο στάδιο (0 – 2 ετών), η σκέψη και η γλώσσα δε σχετίζονται. Οι μορφές σκέψης των μικρών παιδιών είναι όμοιες με εκείνες των πιο ανεπτυγμένων θηλαστικών και η ικανότητα χρήσης της γλώσσας για την έκφραση των σκέψεών τους δεν είναι αναγκαία. Αυτού του είδους η σκέψη αποκαλείται *προγλωσσική σκέψη*. Κατά το στάδιο αυτό η όποια μορφή ομιλίας δε σχετίζεται με την έκφραση των σκέψεων. Το μόνο που κάνει το παιδί είναι να μαθαίνει ιδιόρρυθμα φωνολογικά σύνολα για να ικανοποιεί τις ανάγκες του.

Στο δεύτερο στάδιο (2 - 7 ετών), περίοδος εμφάνισης του εγωκεντρικού λόγου κατά τον Piaget, η σκέψη και γλώσσα σχετίζονται. Στην αρχή του σταδίου αυτού τα λεκτικά σχόλια του παιδιού τείνουν να συνοδεύουν τις πράξεις στις οποίες αναφέρονται. Το παιδί στην ηλικία των δύο έως επτά ετών συνηθίζει να μιλάει στον εαυτό του (εγωκεντρική ομιλία), η γλώσσα του εξυπηρετεί τόσο την εξωτερική όσο και την εσωτερική γλωσσική λειτουργία. Το παιδί έως και την ηλικία των επτά ετών δεν μπορεί να κάνει διάκριση ανάμεσα στις δύο αυτές λειτουργίες (εσωτερική και εξωτερική).

Στο τρίτο στάδιο (7 -…), ο εγωκεντρικός λόγος μετασχηματίζεται σε εσωτερικό λόγο κάτι το οποίο αποτελεί ουσιαστικά δομικό στοιχείο της σύνθετης σκέψης. Κατά το τρίτο στάδιο δηλαδή, αναπτύσσεται η σχέση μεταξύ σκέψης και γλώσσας, ο εγωκεντρικός λόγος γίνεται εσωτερικός και οι σύνθετες σκέψεις γίνονται πια εφικτές, καθώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα γλωσσικό μέσο. Ο Vygotsky κινείται

προσεκτικά και ποτέ δεν ταυτίζει τον εσωτερικό λόγο με τη σκέψη, αφήνοντας πάντα δυνατό το ενδεχόμενο κάποιου είδους σκέψης να μην εξαρτάται από τον εσωτερικό λόγο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

2.1. Μαθηματική σκέψη και κατανόηση

Η σκέψη και η κατανόηση είναι άρρηκτα συνδεδεμένες δεδομένου ότι, αυτό που σκεφτόμαστε επηρεάζεται και επηρεάζει αυτό που κατανοούμε. Αυτή η αρχή, γνωστή και ως *«Η Αρχή της Δυαδικότητας»* (The Duality Principle), αναλύεται εκτενώς από τον Harel (2001) και έπειτα από τους Harel & Sowder (2005), όταν αναφέρουν ότι «οι ανθρώπινες διανοητικές πράξεις παρακινούνται και κυβερνιούνται από τη γενική θέαση των δρώντων για τον κόσμο και αντίστροφα, η γενική θέαση του κόσμου σχηματοποιείται από αυτές τις δράσεις» (Harel & Sowder, 2005, σελ.29). Παρατήρησαν ότι, είναι σύνηθες το φαινόμενο οι καθηγητές των μαθηματικών να δίνουν έμφαση κυρίως στον τρόπο με τον οποίο θα χτίσουν οι μαθητές τρόπους σκέψης, παρά στον τρόπο με τον οποίο θα χτίσουν τρόπους κατανόησης και, αντίστροφα πολλές φορές ασχολούνται με την κατανόηση του προβλήματος παραβλέποντας το στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να κατασκευάσουν λειτουργικούς τρόπους σκέψης από αυτούς τους τρόπους κατανόησης. Βάσει των νεότερων όμως εκπαιδευτικών δεδομένων, ο ρητός διαχωρισμός της σκέψης από την κατανόηση και η διαφορετική αντιμετώπιση των καθηγητών για την επίτευξη καθενός από τα παραπάνω, κρίνεται αναγκαίος. Θεωρούν ότι κάθε εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπ' όψιν του μια τέτοια αρχή αν θέλει να σχεδιάσει εναλλακτικές διδασκαλίες.

Τι χαρακτηρίζουμε όμως ως *Μαθηματική Σκέψη* και τι εννοούμε με τον όρο *Κατανόηση*; Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (2005), το συγκεκριμένο νόημα που δίνει ένας μαθητής σε έναν όρο, πρόταση ή κείμενο, η λύση που παρέχει σε ένα πρόβλημα, η αιτιολόγηση που χρησιμοποιεί για να επικυρώσει ή να αρνηθεί μία υπόθεση – είναι ο τρόπος που αυτός κατανοεί, είναι η κατανόηση. Οι γενικές θεωρίες – έκδηλες ή άδηλες που υπογραμμίζουν τις παραπάνω δράσεις, είναι ο τρόπος που σκέφτεται, δηλαδή η Μαθηματική σκέψη. Ο όρος *Τρόπος Κατανόησης*, υποδηλώνει την αιτιολόγηση που κάποιος παρέχει σε μια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση,

ενώ ο όρος *Τρόπος Σκέψης* αναφέρεται στο τι κυβερνά τον τρόπο κατανόησης κάποιου και αυτό εκφράζει επιχειρηματολογία που δεν αντιστοιχεί μόνο στη συγκεκριμένη κατάσταση αλλά σε πολλές καταστάσεις.

2.2. Παράγοντες που επηρεάζουν τη μαθηματική σκέψη

Η μαθηματική σκέψη ενός ατόμου, προφανώς και δεν είναι ανεξάρτητη από το ίδιο το άτομο. Απεναντίας, η φύση, η παιδεία, η στάση του απέναντι στα μαθηματικά, οι προηγούμενες του εμπειρίες επηρεάζουν και δομούν τη μαθηματική του σκέψη. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Harel & Sowder (2005), τρόπο σκέψης μπορεί να αποτελούν είτε οι *πεποιθήσεις*, είτε οι *προσεγγίσεις επίλυσης προβλήματος* ή τα *αποδεικτικά σχήματα.*

2.2.1 Πεποιθήσεις

Οι *πεποιθήσεις* που έχει κάθε μαθητής για τα μαθηματικά, καθορίζουν το πόσο θα «επιτρέψει» στον εαυτό του να σκεφτεί πάνω σε αυτά. Πεποιθήσεις όπως: «τα τυπικά μαθηματικά έχουν πολύ μικρή έως και καμία σχέση με τη σκέψη που απαιτείται στην καθημερινή ζωή ή στην επίλυση προβλήματος», και ότι «η λύση ενός προβλήματος δεν πρέπει να πάρει πάνω από πέντε λεπτά», είναι τετριμμένες και κοινές (Schoenfeld, 1985, σελ. 43). Αντίθετα, πεποιθήσεις όπως: «μια έννοια μπορεί να έχει πολλαπλές ερμηνείες» και «είναι προτέρημα η επιδίωξη πολλαπλών ερμηνειών μιας έννοιας» είναι πολύ βασικές για τα μαθηματικά και καλό είναι να καλλιεργηθούν από την αρχή. Παρόλα αυτά φαίνεται να απουσιάζουν συχνά από το ρεπερτόριο επιχειρηματολογίας των περισσότερων μαθητών.

2.2.2. Προσεγγίσεις επίλυσης προβλήματος

Οι *προσεγγίσεις επίλυσης προβλήματος* αναφέρονται σε προσεγγίσεις της μορφής: «ψάξε για ένα απλούστερο πρόβλημα», «λάβε υπ' όψιν σου εναλλακτικές περιπτώσεις όταν αποπειράσαι να λύσεις ένα πρόβλημα», «ψάξε για μια λέξη κλειδί

στη διατύπωση του προβλήματος». Αποτελούν δηλαδή εξιδανικεύσεις απλοποίησης ενός σύνθετου προβλήματος.

2.2.3. Αποδεικτικά σχήματα

Τα *αποδεικτικά σχήματα* είναι υποκειμενικά, διαφέρουν από άτομο σε άτομο, από πολιτισμό σε πολιτισμό και από γενιά σε γενιά του ίδιου πολιτισμού. Αναλύθηκαν εκτενώς από τους Harel & Sowder (1998) και καθώς αντανακλούν τις μεθόδους αιτιολόγησης που ο καθένας μας χρησιμοποιεί, χρήζουν ιδιαίτερης μεταχείρισης. Για το λόγο αυτό, αναλύονται ξεχωριστά στο επόμενο κεφάλαιο.

Τα αποδεικτικά σχήματα ορίστηκαν από τους Harel & Sowder (1998) και χρησιμοποιήθηκαν για να κτίσουν ένα πολύ βοηθητικό θεωρητικό πλαίσιο για τον τρόπο που επιχειρηματολογούν, αιτιολογούν και αποδεικνύουν οι μαθητές. Για τους Harel & Sowder (1998) απόδειξη «είναι η διαδικασία που χρησιμοποιεί ένα άτομο για να απομακρύνει ή να δημιουργήσει αμφιβολίες για την εγκυρότητα μια παρατήρησης» (Harel & Sowder, 1998, σελ.241). Η απόδειξη συντελείται με την ενεργοποίηση δύο διαδικασιών: της *εξακρίβωσης* (ascertainment) και της *πειθούς* (persuading).

Εξακρίβωση είναι η διαδικασία που χρησιμοποιεί κάποιος προκειμένου να αφαιρέσει οποιαδήποτε αμφιβολία του για την εγκυρότητα της παρατήρησης, ενώ διαδικασία της *πειθούς* είναι αυτή που χρησιμοποιεί ένα άτομο για να απομακρύνει την αμφιβολία των άλλων για την εγκυρότητα της παρατήρησης. Επομένως, «το αποδεικτικό ενός ατόμου, συνίσταται απ’ ό,τι θεωρεί αυτό το άτομο εξακρίβωση και πειθώ» (Harel & Sowder, 1998, σελ.244).

Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1998) υπάρχουν τρία είδη αποδεικτικών σχημάτων: (1) τα *εξωτερικά αποδεικτικά σχήματα* (external proof scheme) , (2) τα *εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα* (empirical proof scheme) και (3) τα *αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα* (analytical proof scheme).

1. Τα *εξωτερικά αποδεικτικά σχήματα* είναι εκείνα στα οποία οι μαθητές πείθουν τον εαυτό τους και τους άλλους αναφερόμενοι σε εξωτερικές πηγές. Το χτίσιμο της επιχειρηματολογίας τους ή αποδοχή της εγκυρότητας μιας επιχειρηματολογίας βασίζεται :

α) στη ρουτίνα ή στη φόρμα της παρουσίασης της επιχειρηματολογίας και όχι στο περιεχόμενο αυτής - *το αποδεικτικό σχήμα ρουτίνας* (ritual proof scheme),

β) στο λόγο κάποιου εξουσιοδοτημένου, όπως του δασκάλου ή στο αδιαμφισβήτητο ενός εγχειριδίου – *το εξουσιοδοτημένο αποδεικτικό σχήμα* (authoritarian proof scheme), και

γ) σε κάποιους συμβολικούς «μηχανιστικούς» χειρισμούς χωρίς να γίνεται αναφορά στο νόημα αυτών των συμβολισμών – *το συμβολικό αποδεικτικό σχήμα* (symbolic proof scheme). Το κύριο χαρακτηριστικό τέτοιων χειρισμών είναι η απόπειρα προσέγγισης ενός προβλήματος χωρίς να έχει προηγηθεί η κατανόησή του. Είναι χαρακτηριστικό πολλοί μαθητές να διαβάζουν μόλις μετά βίας μια φορά την εκφώνηση του προβλήματος και στη συνέχεια να ξεκινούν να γράφουν σύμβολα χωρίς να γνωρίζουν την αιτία που έχουν καταφύγει σε αυτά, δίνοντας την εντύπωση ότι προσπαθούν να κρυφτούν στη σκιά της υποτιθέμενης εγκυρότητάς των συμβόλων.

2. Στα *εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα* (empirical proof scheme) «οι μαθητές βασίζονται σε ενδείξεις που απορρέουν από αυτό που αντιλαμβάνονται ή από παραδείγματα προερχόμενα από άμεσες μετρήσεις ποσοτήτων, από αντικαταστάσεις συγκεκριμένων αριθμών πάνω σε αλγεβρικές σχέσεις, και ούτω καθεξής» (Harel, 2001, σελ.192). Εν ολίγης, τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα, αντλούν από την εμπειρία και μπορεί να είναι είτε *επαγωγικά* (inductive), είτε *στηριζόμενα στις αισθήσεις* (perceptual).

Το *επαγωγικό εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα*, αποτελεί το απανταχού παρόν αποδεικτικό σχήμα των μαθητών. Σε αυτό οι μαθητές επαληθεύουν για τον εαυτό τους και πείθουν άλλους για την αλήθεια μιας πρότασης με άμεσες μετρήσεις, με αντικαταστάσεις συγκεκριμένων τιμών στους αλγεβρικούς τύπους που πρέπει να αποδείξουν κ.λπ. Δηλαδή, προσπαθούν να αφαιρέσουν την αμφιβολία της αλήθειας

μιας πρότασης μέσω ποσοτικών εκτιμήσεων (χρησιμοποιώντας παραδείγματα ή ειδικές περιπτώσεις).

Στο *εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα το στηριζόμενο στις αισθήσεις*, η παρατήρηση περιορίζεται μόνο σε αυτό που αντιλαμβάνεται κάποιος με τις αισθήσεις του χωρίς να υπάρχει η διάθεση σκέψης και μετασχηματισμού σε άλλες καταστάσεις. Για παράδειγμα, αν του δοθεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ, ενώ είναι ικανός να παρατηρήσει ότι έχει δύο πλευρές και δύο γωνίες ίσες, δε θα ενδιαφερθεί ούτε να εξηγήσει το λόγο που αυτό που αντιλαμβάνεται είναι αληθές, ούτε γιατί η ισότητα των δύο πλευρών συνεπάγεται την ισότητα των δύο γωνιών. Δηλαδή, το άτομο που χρησιμοποιεί ένα τέτοιο αποδεικτικό σχήμα δε θεωρεί αναγκαίο να αποδείξει μια πρόταση που επαληθεύεται από τις αισθήσεις του και δεν ασχολείται με παραπέρα μετασχηματισμούς των ιδιοτήτων που του δίνονται ή που αντιλαμβάνεται.

3. *Αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα* (analytical proof schemes), έχουμε όταν η επικύρωση μιας πρότασης επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης λογικών συνεπαγωγών. Με αυτό εννοούμε κάτι περισσότερο από τη «μέθοδο μαθηματικής απόδειξης» που είναι μια διαδικασία κατά την οποία ξεκινώντας από κάποιες προτάσεις που δε χρειάζονται απόδειξη (π.χ αξιώματα) παράγονται προοδευτικά προτάσεις με τη χρήση συγκεκριμένων λογικών κανόνων μέχρις ότου καταλήξουμε στην πρόταση που θέλουμε να επικυρώσουμε. Τα αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα περιγράφονται καλύτερα από τις υποκατηγορίες τους που είναι το *μετασχηματιστικό αποδεικτικό σχήμα* (transformational proof scheme) και το *αξιωματικό αποδεικτικό σχήμα* (axiomatic proof scheme).

Οι *μετασχηματιστικές* παρατηρήσεις είναι στοχευμένες δράσεις που σχετίζονται με διεργασίες πάνω σε κάποια αντικείμενα και στη συνέχεια με την προσμονή των αποτελεσμάτων των διεργασιών αυτών, είτε πάνω στα ίδια αντικείμενα, είτε σε άλλα με ανάλογες ιδιότητες.

Στο *αξιωματικό αποδεικτικό σχήμα* οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι τα μαθηματικά συστήματα αποτελούνται και από προτάσεις που είναι αποδεκτές χωρίς απόδειξη, προτάσεις που κατέχουν τη θέση ενός αξιώματος.

2.3. Η έννοια της Αναπαράστασης

Σε προηγούμενη παράγραφο κάναμε διάκριση μεταξύ αυτού που σκεφτόμαστε και αυτού που λέμε, υιοθετώντας την άποψη του Weil-Barais (1996) ότι πολλές διδακτικές παρανοήσεις γίνονται εξαιτίας της πεποίθησης μερικών εκπαιδευτικών ότι αυτό που εκφράζει ένας μαθητής, είναι και αυτό που σκέφτεται. Αν και ο Ludwig Wittgenstein, στο έργο του «Tractatus Logico-Philosophicus» , διατύπωσε τη άποψη ότι «τα όρια της γλώσσας μου σημαίνουν τα όρια του κόσμου μου», δηλαδή τα όρια αυτού που μπορώ να εκφράσω γλωσσικά συμπίπτουν με τα όρια αυτού που μπορώ να κατανοήσω λογικά για τον κόσμο που με περιβάλλει, είναι γεγονός ότι, καμιά φορά η ικανότητα έκφρασης του μαθητή αποτελεί τροχοπέδη στην απόδοση του νοήματος που έχει αντιληφθεί.

Ανάλογη είναι και η διάσταση της αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας που αφορά στο υλικό σημείο – σύμβολο της αναπαράστασης (σημαίνον – signifier) και στην έννοια η οποία αναπαρίσταται με το σύμβολο (σημαινόμενον – signified). Η διάκριση αυτή εκφράζεται με την ορολογία *Εξωτερική Αναπαράσταση* και *Εσωτερική Αναπαράσταση* αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα,

> οι Εξωτερικές Αναπαραστάσεις εκτείνονται από τα συμβατικά συμβολικά συστήματα των μαθηματικών (όπως το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, οι φορμαλιστικοί αλγεβρικοί συμβολισμοί, οι μιγαδικοί αριθμοί, κ.τ.λ.) μέχρι τα δομημένα μαθησιακά περιβάλλοντα (για παράδειγμα, αυτά που εμπλέκουν υλικά αντικείμενα ή μικρόκοσμους του υπολογιστή) (Λεμονίδης, 2003, σελ.3).

Από την άλλη μεριά, οι *Εσωτερικές Αναπαραστάσεις* εμπεριέχουν, σύμφωνα με τους Goldin & Shteingold (2001) «τις προσωπικές συμβολικές κατασκευές των μαθητών και τη σημασία των μαθηματικών συμβόλων, καθώς επίσης τη φυσική γλώσσα, τη νοερή εικονική αναπαράσταση και την αναπαράσταση του χώρου, τις στρατηγικές στη λύση προβλημάτων και την ευρετική» (Λεμονίδης, 2003, σελ.3-4).

2.3.1. Σχέση μεταξύ Εξωτερικών και Εσωτερικών Αναπαραστάσεων

Οι αναπαραστάσεις διακρίνονται σε εικονικές και συμβολικές. Τα αρχιτεκτονικά σχέδια, οι χάρτες, οι γραφικές παραστάσεις, τα σύμβολα που περιγράφουν κάποιο χαρακτηριστικό της έννοιας π.χ. το ΙΙ αντί για 2 κ.λπ., είναι οι εικονικές αναπαραστάσεις. Αντίθετα, στις συμβολικές αναπαραστάσεις τα σύμβολα επιλέγονται συνήθως με αυθαίρετο τρόπο, κάνοντας τη διαδικασία της ερμηνείας των συμβόλων να μην υποβοηθείται από κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.

Οι Εξωτερικές Αναπαραστάσεις, κατασκευάζονται βάσει κάποιων κανόνων που αποτελούν α)το «συντακτικό» (syntax) και β)το «σημασιολογικό ή εννοιολογικό» (semantics) επίπεδο αυτής. Το «σημασιολογικό» μάλιστα, αποτελεί και το συνδετικό κρίκο της Εξωτερικής Αναπαράστασης με την Εσωτερική Αναπαράσταση.

Οι Εξωτερικές και οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις, σύμφωνα με τους Janvier, Girardon and Morand (1993), συνδέονται με τους ακόλουθους δύο τρόπους:

α) *Ομωνυμία* (Homonymy): Όπου η ίδια Εξωτερική Αναπαράσταση αντιστοιχεί σε δύο ή και περισσότερες Εσωτερικές Αναπαραστάσεις,

β) *Συνωνυμία* (Synonymy): Όπου η ίδια Εσωτερική Αναπαράσταση (η ίδια έννοια), αντιστοιχεί σε διαφορετικές Εξωτερικές Αναπαραστάσεις.

Σύμφωνα με τις Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992), κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να περιγράψει εξ ολοκλήρου μια έννοια γιατί δίνει πληροφορίες για ορισμένες μόνο πτυχές της. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις που αναφέρονται στην ίδια έννοια αλληλοσυμπληρώνονται. Γι’ αυτό το λόγο, για τη σωστή και αποτελεσματική αξιοποίηση των αναπαραστάσεων από τους μαθητές, απαραίτητες προϋποθέσεις αποτελούν η σε βάθος κατανόηση της φύσης, των χαρακτηριστικών, των δυνατοτήτων και των περιορισμών τους, η αναγνώριση των σχέσεων δομής ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και της αναλογίας ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην έννοια προς μάθηση.

Η ικανότητα μετάβασης από τον έναν τύπο αναπαράστασης στον άλλον, π.χ. από μία ισότητα σε μια γραφική παράσταση, είναι μία ψυχολογική διαδικασία και ονομάζεται ικανότητα μετάφρασης (Janvier, 1987). Οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι η

ικανότητα μετάφρασης είναι πολύ σημαντική στη μάθηση των μαθηματικών και στην επίλυση προβλημάτων (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Gagatsis, A. & Shiakalli, M., 2004; Even, 1998; Hitt, 1998; Janvier, 1987; Lesh, Behr, & Post, 1987a, 1987b;).

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Lesh, Post & Behr (1987b) απαραίτητες προϋποθέσεις για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν α) η ικανότητα για αναγνώριση της έννοιας σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και β) η ικανότητα της εύκαμπτης μεταχείρισης της έννοιας μέσα σε συγκεκριμένα αναπαραστασιακά συστήματα, γ) η ικανότητα της «μετάφρασης» της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο. Η τελευταία προϋπόθεση, δηλαδή η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών αλλά και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Janvier, 1987).

Ο Duval (2001) διαπίστωσε ότι η μάθηση και η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι δυνατό να επιτευχθεί μόνο όταν υπάρχει ταυτόχρονη εμπλοκή, συνδυασμός ή συνύπαρξη (coordination) δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης της έννοιας από τους μαθητές. Με άλλα λόγια, όταν οι μαθητές είναι ικανοί να επιτύχουν σε ένα έργο που αφορά τη συνάρτηση σε ένα πεδίο αναπαράστασης και δεν είναι σε θέση να το επιτύχουν σε ένα άλλο, τότε αυτό αποτελεί ένδειξη της ταύτισης της μαθηματικής έννοιας με τη συγκεκριμένη αναπαράσταση την οποία χειρίζονται, και κατά συνέπεια δεν οδηγούνται στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα (Gagatsis & Shiakalli, 2004).

2.3.2. Αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης

Η συνάρτηση είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσής τους (Eisenberg, 1992; Kalchman & Case, 1998). Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με γραφική παράσταση, με πίνακα τιμών, με αλγεβρική

(συμβολική) και λεκτική έκφραση. Όπως έχει προαναφερθεί, κάθε είδος αναπαράστασης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας χωρίς να την περιγράφει ολοκληρωτικά. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση της συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Janvier (1987), οι πληροφορίες που παρέχει ένα σύστημα αναπαράστασης αναλύονται, με αποτέλεσμα να προκύπτει μια νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε άλλο σύστημα αναπαράστασης.

Παρακάτω, παρατίθεται ο πίνακας του Janvier (1987), ο οποίος αναφέρεται σε διαδικασίες μετάφρασης της έννοιας της συνάρτησης:

προς / από	Περιγραφή	Πίνακες αριθμών	Γραφικές παραστάσεις	Αλγεβρικούς τύπους
Περιγραφή		μετρήσεις (measuring)	σχεδίαση (sketching)	μοντελοποίηση (modelling)
Πίνακες αριθμών	ανάγνωση (reading)		Γραφική αποτύπωση (plotting)	Προσαρμογή (fitting)
Γραφικές παραστά-σεις	ερμηνεία (interpretation)	ανάγνωση τμημάτων (reading-off)		προσαρμογή καμπύλης (curve fitting)
Αλγεβρικούς τύπους	αναγνώριση των μεταβλητών (parameter recognition)	υπολογισμός (computing)	σχεδίαση (sketching)	

Έρευνες που έγιναν τα τελευταία χρόνια σχετικά με την έννοια της συνάρτησης έχουν καταλήξει στην ιεράρχηση διαφορετικών επιπέδων αντίληψης της συγκεκριμένης έννοιας. Σύμφωνα με τον Hitt (1998), τα επίπεδα είναι τα παρακάτω:

<u>1ο επίπεδο:</u> Ανακριβείς ιδέες που αφορούν ένα θέμα (ανάμειξη διαφορετικών αναπαραστάσεων για το ίδιο θέμα)
<u>2ο επίπεδο:</u> Αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων ή συστημάτων αναπαράστασης ενός θέματος
<u>3ο επίπεδο:</u> Μετάφραση, διατηρώντας το νόημα, από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο
<u>4ο επίπεδο:</u> Συναφής άρθρωση μεταξύ δύο συστημάτων αναπαράστασης

5ο επίπεδο: Συναφής άρθρωση διαφορετικών συστημάτων αναπαραστάσεων στην επίλυση ενός προβλήματος .

2.4. Τύποι Γενίκευσης κατά Radford

Πολλοί ερευνητές ασχολούνται με τη δυνατότητα των μαθητών να γενικεύσουν, καθώς αποτελεί έναν παράγοντας που συντελεί καθοριστικά στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Ο Radford (2003), διερεύνησε τους *προσυμβολικούς τύπους γενίκευσης* και τον *συμβολικό τύπο γενίκευσης*, ώστε να μπορέσει να συμπεράνει για ποιο λόγο οι μαθητές δυσκολεύονται να εκφράσουν γενικεύσεις χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό.

Δεδομένου ότι από ψυχολογική σκοπιά, η γενίκευση υπονοεί ότι κάτι νέο έχει γίνει εμφανές (δηλ. ότι μια σχέση ανάμεσα σε συγκεκριμένα αντικείμενα εφαρμόζεται σε άλλα συγκεκριμένα ή και νέα αντικείμενα), ο Radford διερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές έφερναν στο φως νέες σχέσεις και αντικείμενα που χρειάζονταν να μπουν μπροστά, στη δραστηριότητα γενίκευσης τον οποίο τον ονόμασε εξαντικειμενίκευση (objectification). Καθοδηγούμενος από τη φαινομενολογία του Husserl (1958, 1978) και υιοθετώντας μια σημειωτική πολιτισμική προοπτική, εισήγαγε την έννοια των σημειωτικών μέσων εξαντικειμενίκευσης και προσδιόρισε δύο τύπους προσυμβολικών γενικεύσεων.

Ο πρώτος τύπος ονομάστηκε *γεγονική γενίκευση* (factual generalization) και αποτελείται από μια γενίκευση αριθμητικών ενεργειών στη μορφή ενός αριθμητικού σχήματος. Η σημειωτική ανάλυση της αλληλεπίδρασης των μαθητών υπέδειξε ότι στην εξαντικειμενίκευση του αριθμητικού σχήματος κεντρική θέση κατέχει μια έκφραση του σώματος, μια χειρονομία (ένας τύπος πρωτόγονης υπόδειξης), που παρόλη την αισθητήρια φύση της, επιτρέπει στους μαθητές να φέρουν στο φως ένα μοτίβο (pattern) που τους βοηθά να κάνουν γενικεύσεις σε συγκεκριμένα αντικείμενα.

Το δεύτερο τύπο γενίκευσης τον ονόμασε *γενίκευση εντός πλαισίου* (contextual generalization). Σε αντίθεση με τη γεγονική, η γενίκευση εντός πλαισίου δε γενικεύει μόνο τις αριθμητικές ενέργειες αλλά και τα αντικείμενα των ενεργειών. Οι

γενικεύσεις αυτές, προχωρούν λοιπόν πέρα από το χώρο των συγκεκριμένων σχημάτων και δουλεύουν με γενικά, καθολικά αντικείμενα που δεν είναι αντιληπτά από τις αισθήσεις μας.

Στη *συμβολική γενίκευση* (symbolic generalization), ο Radford έδωσε προσοχή στον τρόπο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν τη διαδικασία κατά την οποία αποπροσωποποιείται η σχέση μεταξύ των αντικείμενων της γνώσης και του συμμετέχοντος σε αυτήν. Τη διαδικασία αυτήν, την επιβάλλει η αλγεβρική γλώσσα και την ονόμασε αποϋποκειμενικοποίηση (desubjectification). Ενώ στις προσυμβολικές γενικεύσεις, η φυσική γλώσσα λογοδοτεί για τις διαλεκτικές μορφές της σχέσης συμμετέχοντος – αντικειμένου, στην αλγεβρική γλώσσα η σχέση αυτή δεν μπορεί να διατηρηθεί. Μπαίνοντας στη συμβολική άλγεβρα, οι μαθητές στερούνται των καταδεικτικών χωροχρονικών όρων και πρέπει να αναφέρονται στα αντικείμενα με διαφορετικό τρόπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βασιζόμενοι στα λεγόμενα του ψυχολόγου Dunker (1945): «Ένα πρόβλημα προκύπτει όταν ο ζωντανός οργανισμός έχει ένα στόχο, αλλά δε γνωρίζει πώς να προσεγγίσει αυτό το στόχο», οι Garnham & Oakhill (1994) επιδίωξαν έναν ορισμό του όρου «πρόβλημα», διακρίνοντας αρχικά τρία βασικά συστατικά του:

- Μία κατάσταση εκκίνησης
- Μία κατάσταση στόχου και
- Ένα σύνολο διαδικασιών (συχνά καλούνται ***τελεστές***) που επιτρέπουν τη μετακίνηση μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων.

Από την πλευρά της Ψυχολογίας, τα προβλήματα που είναι εύκολα να μελετηθούν και να θεωρητικοποιηθούν φαίνεται να είναι εκείνα στα οποία, η κατάσταση εκκίνησης, η κατάσταση στόχου και οι διαδικασίες μετακίνησης μεταξύ αυτών, είναι ξεκάθαρα προσδιορισμένες. Πολλά προβλήματα γρίφων, προβλήματα μαθηματικών και φυσικής, έχουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, αλλά και πολλά άλλα, συνήθως καθημερινά προβλήματα, φαίνεται να αποκλίνουν.

Πράγματι, κάποιος μπορεί να αισθάνεται δυστυχισμένος, αλλά να μην είναι σίγουρος για το τι προκαλεί τη δυστυχία του. Μπορεί να ξέρει ότι έχει πρόβλημα, αλλά δεν είναι ξεκάθαρη μέσα του η λύση και δεν ξέρει τι ακριβώς πρέπει να κάνει για να μεταφερθεί από την υπάρχουσα κατάσταση στην επιθυμητή. Ένα όμως «πρόβλημα» στο οποίο όλα τα συστατικά δεν είναι ξεκάθαρα προσδιορισμένα, κινδυνεύει να μετασχηματιστεί σε ακαθόριστα δύσκολο (Garnham & Oakhill, 1994).

Σύμφωνα με τον Bennet (2006), η επίλυση σύνθετων προβλημάτων δεν απαιτεί απαραίτητα μεγάλη ποσότητα δεδομένων. Κρίνεται ωστόσο καθοριστική η κατάλληλη γνώση που μπορεί να εκμαιευτεί για την περίσταση. Όταν έχουμε να διαπραγματευτούμε καταστάσεις που πιθανόν να μην έχουν μία απλή λύση, οι ερωτήσεις που θέτουμε είναι πολύ πιο κρίσιμες από τις απαντήσεις που δίνουμε. Οι ερωτήσεις γεννάνε ιδέες και προοπτικές που οδηγούν σε νέες ιδέες και χτίζεται

τελικά το τοπίο της ενσυναίσθησης (empathy) και της κατανόησης που καθοδηγεί τη σκέψη και τη δράση. Σε πολύπλοκες καταστάσεις, εκεί που η εμπειρική μέθοδος της *δοκιμής και της πλάνης* δεν οδηγεί στη λύση του προβλήματος, μια προσέγγιση πολλαπλών δράσεων μπορεί να δώσει την απάντηση. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί πολύ καλύτερα από μια ομάδα λυτών παρά από έναν λύτη.

3.1. Η συμβολή των Μαθηματικών Προβλημάτων στη μάθηση

Σύμφωνα με τους Garnham & Oakhill (1994) η αναγνώριση της κατάστασης εκκίνησης και στόχου και η δυνατότητα μετακίνησης από τη μια κατάσταση στην άλλη αποτελούν απαραίτητα εφόδια για την επίλυση προβλημάτων. Η επίλυση «καλών» μαθηματικών προβλημάτων ενεργοποιεί τη σκέψη και επομένως μπορεί να συμβάλλει καθοριστικά στη μάθηση. Με τον προσδιορισμό καλό πρόβλημα, εννοούμε το πρόβλημα το ικανό σε πρώτο επίπεδο να κεντρίσει το ενδιαφέρον του μαθητή, εκείνο που βρίσκει εφαρμογή στην πραγματικότητα, που δίνει την ευκαιρία για παρατήρηση, για πειραματισμό. Η *αρχή της αναγκαιότητας* (necessity principle) που εισήγαγε ο Harel (αναπτύσσεται σε επόμενο κεφάλαιο) ικανοποιείται μόνο όταν ο μαθητής αναγνωρίζει και αποδέχεται την ανάγκη επίλυσης του προβλήματος.

Ο David Bennet (2006), αναγνωρίζοντας ότι ο κόσμος μας γίνεται ολοένα πιο πολύπλοκος και ενώ έχουμε πρόσβαση σε οποιαδήποτε πληροφορία, διαθέτουμε λιγότερο χρόνο για να μάθουμε, να σκεφτούμε, να κατανοήσουμε και να διαπραγματευτούμε με την πολυπλοκότητα που μας περιβάλλει, προσπάθησε να διερευνήσει τους τρόπους που θα μας επιτρέψουν να μαθαίνουμε, να σκεφτόμαστε και να ενεργούμε. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε είναι ότι οφείλουμε να αντικαταστήσουμε το μηχανικό τρόπο μάθησης με μία ενεργητική προσέγγιση της γνώσης, εννοώντας ότι θα πρέπει εμείς προσωπικά να αναλάβουμε την ευθύνη για το πώς και τι μαθαίνουμε και να συνειδητοποιήσουμε τη διαφορά μεταξύ πληροφορίας και γνώσης. Πρέπει να μάθουμε να κάνουμε περισσότερες ερωτήσεις, να κατανοήσουμε πως προσεγγίζουμε τα πράγματα και να είμαστε ανοιχτοί ανά πάσα στιγμή να αλλάξουμε την οπτική γωνία που αντιλαμβανόμαστε τα πράγματα.

Η σύγχρονη εποχή, απαιτεί τη διεύρυνση του τρόπου που σκεφτόμαστε. Αλλαγή στον τρόπο που μαθαίνουμε και σκεφτόμαστε οδηγεί και σε αλλαγή του τρόπου που ενεργούμε. Σύμφωνα με την Boaler (2000), η γνώση δε θεωρείται πια στατική, ούτε χαρακτηριστικό ενός ατόμου, αλλά κάτι που μοιράζεται μεταξύ των ατόμων μαζί με τις δράσεις και τα συστήματα του περιβάλλοντός τους (Lave, 1988; 1996; Brandsford, Zech, Schwartz, Barron, Vye, in press). Η αντίληψη των πραγμάτων με γνώμονα τη μέθοδο του *αίτιου* και του *αιτιατού* δεν μπορεί πάντα να μας λύσει το πρόβλημα. Υπάρχουν πολλά προβλήματα που η αντιμετώπιση τους με τη χρήση μιας στρατηγικής που εξελίσσεται βήμα προς βήμα δεν αρκεί. Σε αυτά τα προβλήματα απαιτείται μια *ολιστική προσέγγιση*, μια προσέγγιση που δίνει έμφαση στη σημαντικότητα του όλου και στην ανεξαρτησία των μερών. Η λύση μπορεί να προκύψει με χρήση της εμπειρία μας, της διαίσθησή μας και της ευρείας γνώσης που έχουμε αναπτύξει και αποθηκεύσει στο υποσυνείδητό μας (Boaler, 2000).

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στερείται της δυνατότητας να επιτευχθεί μέχρι το τέλος, ακολουθώντας πάντα την ίδια ορθογωνισμένη κοινή μεθοδολογία. Πολλές φορές, απαιτείται ολιστική προσέγγιση του προβλήματος κάτι που αποτελεί δυστυχώς και τον κυριότερο λόγο που πολλοί μαθητές απεχθάνονται την επίλυση τους. Πολλοί από αυτούς αισθάνονται αμήχανοι και ανίκανοι να πάρουν την κατάσταση στα χέρια τους προκειμένου να οδηγηθούν στην πολυπόθητη λύση. Θεωρούν μάταιο να προσπαθήσουν να αποσαφηνίσουν την κατάσταση εκκίνησης και στόχου, αφού κατά τη γνώμη τους, οι διαδικασίες που θα πρέπει να ακολουθήσουν για την επίλυση του προβλήματος θα παραμείνουν στο σκοτάδι. Ωστόσο, λόγω του μεγάλου πλούτου, χρήσιμων στη σύγχρονη εποχή μας, εφοδίων που μπορεί να αποκομίσει κάποιος με τη διαπραγμάτευση τους με αυτά, αξίζει εμμονή και επιμονή για την ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι τους. Θεωρούμε ότι η εισαγωγή μη παραδοσιακών προσεγγίσεων στα μαθηματικά προβλήματα από τα Ρεαλιστικά και Διακριτά Μαθηματικά με τη βοήθεια εναλλακτικών διδασκαλιών που δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές για μεταγνωστικές αναζητήσεις, θα μπορούσαν να αποτελέσουν εφαλτήριο για μια πιο ελπιδοφόρα, όσον αφορά τη θετική στάση των μαθητών, προσέγγιση των Μαθηματικών.

3.2. Επίλυση προβλημάτων με Μαθηματική Επαγωγή

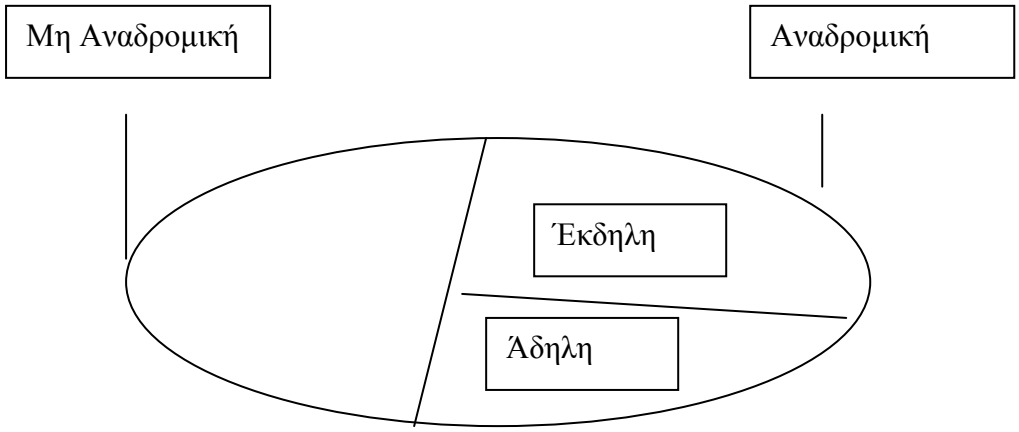
Η Μαθηματική Επαγωγή, είναι μια πολύ σπουδαία αποδεικτική μέθοδος που χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά προκειμένου να επαληθεύσει την ορθότητα μιας πρότασης. Η δυσκολία των μαθητών να την κατανοήσουν πλήρως έχει γίνει αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών (Ernest, 1984; Harel & Sowder, 1998; Harel, 2001; Palla, Potari & Spyrou, (preprint)) κάποια από τα συμπεράσματα των οποίων θα φανούν χρήσιμα και στη δική μας μελέτη.

Σύμφωνα με τους Avital και Hansen (1976), Ernest (1984), Harel & Sowder (1998), ένας παράγοντας που συμβάλλει στη δυσκολία των μαθητών για την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής, είναι ότι αυτή συχνά συγχέεται με την επαγωγική μέθοδο που χρησιμοποιείται στις επιστήμες. Η διαφορά όμως παραμένει ευκρινής δεδομένου ότι, η Μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται στα μαθηματικά προκειμένου να επικυρωθεί η αλήθεια μιας πρότασης σε ένα μαθηματικό σύστημα, ενώ η επαγωγή είναι ένας τρόπος σκέψης που αφετηρία της έχει την υπόθεση της αλήθειας μιας κατάστασης βάσει μιας περιγραφικής ή ερμηνευτικής γενίκευσης. Ο Frege (1980) μάλιστα τόνισε ότι η επαγωγή πρέπει να τοποθετηθεί στη θεωρία των πιθανοτήτων, καθώς μία πρόταση μπορεί να αποδοθεί μόνο στο πεδίο του πιθανού. Η παραπάνω σύγχυση, επικρατεί ακόμα και στους φοιτητές, λόγω του ότι, σύμφωνα με τους Movshovitz – Hadar (1993) ο όρος «επαγωγή» είναι παραπλανητικός. «Η Μαθηματική επαγωγή είναι ένας πολύ φτωχός όρος για αυτή την παραγωγική μέθοδο απόδειξης» (Movshovitz – Hadar , 1993 σελ. 259).

Η επαγωγική μέθοδος είτε στο σχήμα των μαθηματικών ερωτήσεων είτε ως διαδικασία υποθέσεων, εμφανίζεται πολύ συχνά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Polya (1973): «Τα μαθηματικά είναι μια συστηματική παραγωγική επιστήμη αλλά η δημιουργία των μαθηματικών αποτελεί μια πειραματική επαγωγική επιστήμη» (Polya, 1973 σελ. 117). Στην περίπτωση της επίλυσης προβλημάτων με χρήση της Μαθηματικής επαγωγής, η δημιουργία υποθέσεων αποτελεί κοινή πρακτική (Palla, Potari & Spyrou, (preprint)).

Σύμφωνα με τον Harel (2001), μπορούμε να διακρίνουμε δύο κατηγορίες προβλημάτων στη μαθηματική επαγωγή, τα *αναδρομικά* (recursion problems) και τα

μη αναδρομικά προβλήματα (nonrecursion problems). Η λύση των αναδρομικών προβλημάτων απαιτεί το σχηματισμό μιας αναδρομικής συνάρτησης που σε κάποιες περιπτώσεις η αναδρομική παρουσίαση της φαίνεται ξεκάθαρα (έκδηλα αναδρομικά προβλήματα (explicit recursive problems)) και σε κάποιες άλλες υπονοείται (άδηλα αναδρομικά προβλήματα (implicit recursive problems)). Ο λύτης ενός αναδρομικού προβλήματος μπορεί να μη γνωρίζει ποια είναι η αναδρομική παρουσίαση της συνάρτησης ή ακόμα ούτε καν να γνωρίζει ότι χρειάζεται μια τέτοιου είδους αναπαράσταση για να λύσει το πρόβλημα. Αντίθετα, στα μη αναδρομικά προβλήματα η λύση δε δύναται να περιγραφεί παρουσία μιας συνάρτησης (Harel, 2001).



Σχηματική απεικόνιση της μαθηματικής επαγωγής, Harel, 2001

Σύμφωνα με τον Dubinsky (1991), η μέθοδος της επαγωγής δομείται δουλεύοντας με δύο βασικά σχήματα, της συνάρτησης και της λογικής. Μπορεί δηλαδή κάποιος να χρησιμοποιήσει τη μαθηματική επαγωγή για την απόδειξη μιας πρότασης, είτε έχοντας στο νου του μια συνάρτηση που επαληθεύεται σε διάφορες περιπτώσεις, είτε χρησιμοποιώντας την παραγωγική λογική «αν…τότε» (π.χ modus ponens) όπου τα αποτελέσματα προκύπτουν από τη λογική αναγκαιότητα των προτάσεων που αρθρώνει. Η επιτυχής έκβαση αυτού του τρόπου, επιβάλλει στο υποκείμενο να εσωτερικεύσει τις καταστάσεις (συζεύξεις, διαζεύξεις, αρνήσεις, συνεπαγωγές) προβαίνοντας σε αναστοχαστικές αφαιρέσεις.

Ο Harel (2001) όρισε δύο διακριτούς τρόπους γενίκευσης στη μαθηματική επαγωγή: α) τη *γενίκευση της διαδικασίας* (process pattern generalization) και β) τη *γενίκευση*

του αποτελέσματος (result pattern generalization) προκύπτουν όμως και οι δυο από την επαλήθευση πεπερασμένου πλήθους περιπτώσεων (Harel, 2001).

Πιο συγκεκριμένα, η *γενίκευση της διαδικασίας* είναι ένας τρόπος σκέψης, όπου η βεβαιότητα κάποιου στηρίζεται στην κανονικότητα της διαδικασίας, παρόλο που μπορεί να ξεκινήσει από την κανονικότητα του αποτελέσματος. Η γενίκευση της διαδικασίας δεν είναι ένδειξη ενός εμπειρικού αποδεικτικού σχήματος, αλλά έκφραση ενός αποδεικτικού σχήματος μετασχηματισμού. Ενός σχήματος που:

α) λαβαίνει υπ' όψιν του τη γενική εκδοχή της υπόθεσης,

β) εφαρμόζει νοητικές λειτουργίες που είναι στοχευμένες και που αποπειρώνται να προβλέψουν τα συμπεράσματα στη βάση των γενικών αρχών και

γ) μετασχηματίζει εικόνες που ηγούνται του συμπεράσματος στην αποδεικτική διαδικασία (Harel & Sowder, 1998).

Αντίθετα, κατά τη *γενίκευση του αποτελέσματος* η σκέψη βασίζεται μόνο στην κανονικότητα του αποτελέσματος, που μπορεί να έχει προέλθει για παράδειγμα από την αντικατάσταση αριθμών στην προς απόδειξη σχέση. Η βεβαιότητα δηλαδή της αλήθειας μιας παρατήρησής στηρίζεται στο γεγονός ότι φαίνεται να επαληθεύεται σε κάποιες τυχαίες περιπτώσεις. Πρόκειται για ένα εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα, ένα σχήμα στο οποίο ως απόδειξη θεωρείται το παράδειγμα, ή το ευλογοφανές (Harel, 2001).

3.3. Μεταγνωστικές δεξιότητες

Οι απαιτήσεις των καιρών καθιστούν απαραίτητη τη δημιουργία σκεπτόμενων ανθρώπων, ικανών να συνδυάσουν τα δεδομένα που τους παρέχονται και να επιλέξουν τις κατάλληλες στρατηγικές ώστε να βγουν από μια προβληματική κατάσταση με επιτυχία. Οι γνώσεις που παρέχει το εκπαιδευτικό σύστημα στους μαθητές φαίνεται να μην καλύπτουν τέτοιες ανάγκες. Οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν νέες δεξιότητες που θα προάγουν τις δυνατότητές και τη δημιουργικότητά τους. Τέτοιου είδους δεξιότητες είναι οι μεταγνωστικές που

καθιστούν το άτομο ικανό να επεξεργάζεται αυτό που έχει σκεφτεί, αναλύοντας και αποκωδικοποιώντας το.

Η αποσαφήνιση του ορισμού της μεταγνώσης και ο διαχωρισμός από τον ορισμό των γνωστικών στρατηγικών αποτελεί ένα αρκετά περίπλοκο έργο. Οι περισσότεροι από τους ερευνητές συμφωνούν ότι η γνώση διαφέρει από τη μεταγνώση κυρίως στο ότι οι γνωστικές δεξιότητες είναι απαραίτητες για την περάτωση ενός έργου, ενώ η μεταγνώση είναι απαραίτητη για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο περατώθηκε το έργο (Garner, 1987).

Η μεταγνώση αφορά την αναδίπλωση της γνώσης προς τον εαυτό της. Αναφέρεται στις διαδικασίες που λαμβάνουν χώρο στην ενεργό μνήμη και περιλαμβάνουν την επίγνωση του ατόμου για τις γνωστικές του διαδικασίες. Είναι οι σκέψεις που αναφέρονται σε άλλες σκέψεις. Ο όρος «μεταγνώση» υιοθετήθηκε από τον Flavell κατά τη δεκαετία του 1970, για να ερμηνεύσει εξελικτικά φαινόμενα στους τρόπους μάθησης και οργάνωσης της γνώσης στη μνήμη. Οι μεταγνωστικές διαδικασίες λαμβάνουν χώρα όταν αναλογιζόμαστε εάν ξέρουμε κάτι (*μεταγνωστική γνώση*), σε ποιες ενέργειες θα προβούμε (*μεταγνωστικές δραστηριότητες*), και ποια είναι η τρέχουσα γνωστική κατάσταση (*μεταγνωστική εμπειρία*) (Flavell, 1976).

Ο Flavell (1979), διαμόρφωσε ένα μεταγνωστικό μοντέλο με τέσσερις τάξεις φαινομένων οι οποίες αποτελούν τέσσερις μορφές που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Πρόκειται για τη *μεταγνωστική γνώση*, τη *γνώση των στόχων ή έργων*, τη *γνώση των ενεργειών* και τις *μεταγνωστικές εμπειρίες*.

Η *μεταγνωστική γνώση* αναφέρεται σε όλα τα στοιχεία, παράγοντες και μεταβλητές που εμπλέκονται σε κάθε γνωστικό εγχείρημα και είναι δυνατόν να την επηρεάσουν. Τέτοιοι παράγοντες είναι τα πρόσωπα, δηλαδή οι λύτες, τα έργα, δηλαδή τα προβλήματα υπό επίλυση και οι στρατηγικές ή ενέργειες. Αναφέρεται δηλαδή στην αποθηκευμένη γνώση ενός ατόμου, στις πεποιθήσεις του σχετικά με τη φύση του εαυτού του αλλά και των άλλων ατόμων. Αναφέρεται επίσης, στις ενέργειες του και στην πορεία που θα ακολουθήσει κάτω από διάφορες συνθήκες, δηλαδή στις γνωστικές στρατηγικές που θα επιλέξει για να πετύχει τους στόχους και στις

μεταγνωστικές στρατηγικές που θα χρησιμοποιήσει για τον έλεγχο της προόδου των γνωστικών λειτουργιών.

Η *γνώση των έργων ή στόχων* αναφέρεται τόσο στην ενημερότητα που διαθέτει το άτομο για το πρόβλημα σε σχέση με τις γνωστικές λειτουργίες, όσο στις μεταγνωστικές του δεξιότητες, δηλαδή στο σύνολο των γνώσεων και των εμπειριών που διαθέτει το άτομο για τη γνωστική του συμπεριφορά.

Η *γνώση των ενεργειών* είναι η επίγνωση του ατόμου για τις μεθόδους που θα ενεργοποιήσει και τις πράξεις που θα εκτελέσει στο εγχείρημα της επίλυσης του προβλήματος.

Οι *μεταγνωστικές εμπειρίες* αφορούν ένα σύνολο στοιχείων, αισθημάτων και συναισθημάτων, που μπορεί να είναι σύντομης ή μακράς διάρκειας οι οποίες λαβαίνουν χώρα οποιαδήποτε στιγμή πριν ή μετά ή κατά τη διάρκεια του εγχειρήματος. Τέτοια είναι αισθήματα οικειότητας, κατανόησης, χρονικών απαιτήσεων, δυσκολίας, ευκολίας, ικανοποίησης, χαράς, λύπης, θυμού για τυχόν απροσδόκητους παράγοντες

Ένα άλλο μοντέλο είναι εκείνο της Brown (1987), όπου με βάση τα λεγόμενα του Schraw (1998), είναι και το πιο διαδεδομένο. Η σημαντικότητα αυτού του μοντέλου, έγκειται στο διαχωρισμό της μεταγνώσης σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στη *γνώση του ατόμου για τις γνωστικές του λειτουργίες* (knowledge of cognition) και στη *ρύθμιση της γνώσης* (regulation of cognition). Η διάκριση αυτή περιλαμβάνει δύο σύνολα ικανοτήτων αντίστοιχα:

1. Την ικανότητα να αντιλαμβανόμαστε πόσα και τι μπορούμε να μάθουμε.
2. Την ικανότητα να ρυθμίζουμε, να ελέγχουμε και να συντονίζουμε τη γνωστική μας συμπεριφορά, επιβραδύνοντας για παράδειγμα το διάβασμά μας στα δύσκολα, επιταχύνοντας στα εύκολα.

Οι δραστηριότητες οι υπεύθυνες για τη ρύθμιση της γνώσης, συνοψίζονται στις εξής τρεις: *Σχεδιασμός* (planning), *Έλεγχος - ταξινόμηση* (monitoring), *Αποτίμηση* (evaluation).

Ο σχεδιασμός περιλαμβάνει τη συλλογή των κατάλληλων στρατηγικών και τον εντοπισμό των κατάλληλων πηγών. Ο Έλεγχος – ταξινόμηση, αναφέρεται στην ικανότητα κάποιου για περιοδικό αυτοέλεγχο κατά τη διάρκεια της μάθησης, ενώ η αποτίμηση αναφέρεται στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων με το πέρας της εργασίας, όσον αφορά την ίδια τη μάθηση (Schraw, G., 1998).

3.3.1. Μεταγνώση και μάθηση

Έχει αποδειχθεί ερευνητικά πως η διδασκαλία των μεταγνωστικών στρατηγικών, συμβάλλει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μάθησης και επίλυσης προβλημάτων (De Corte, 1995; Schoenfeld 1992; Wang, Haertel & Walberg, 1993). Κατά τους McCombs (1986), Pressley, Borkowski & Schneider (1987), η μεταγνώση, ο έλεγχος (motivation) και η χρήση στρατηγικών, συνεργάζονται για να προάγουν τη μάθηση. Μελέτες για την εφαρμογή των στρατηγικών στην εκπαιδευτική διαδικασία αποδεικνύουν τη σπουδαιότητα της μεταγνώσης για την πρόοδο των μαθητών και την ανάπτυξη της λογικής σκέψης.

Η μεταγνωστική γνώση σε σχέση με το διάβασμα και τη μνήμη, βελτιώνει τη χρήση στρατηγικών προμηθεύοντας τα παιδιά με γνώση για το πότε, που και γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές, πληροφορίες για τις δυνατότητες και τους περιορισμούς τους καθώς και γνώση για τις εργασίες (Schneider & Pressley, 1989). Επιπλέον, τα παιδιά μπορούν να διδαχθούν να χρησιμοποιούν μεταγνωστική γνώση σε σχέση με το περιεχόμενο διαφορετικών στρατηγικών, να εξετάζουν την αποτελεσματικότητα τους καταλήγοντας είτε σε μια βελτιωμένη εκδοχή της ίδιας της στρατηγικής είτε σε συνδυασμό στρατηγικών(Ghatala, Levin, Pressley, and Lodico, 1985; Paris & Jacobs, 1984). Σύμφωνα μάλιστα με τον Schraw (1998), οι μεταγνωστικές δεξιότητες στην αρχή βελτιώνουν την επιδεξιότητα ενός μαθητή στο συγκεκριμένο τομέα που εκπαιδεύεται και στη συνέχεια, καθώς ο μαθητής εξοικειώνεται και με άλλες μεταγνωστικές δεξιότητες σε άλλους τομείς, δύναται να

τις συνδυάσει και να μπορέσει να αναπτύξει γενικές μεταγνωστικές δεξιότητες που ανταπεξέρχονται και σε άλλες περιοχές.

Η μεταγνώση επιτρέπει τους μαθητές να επωφεληθούν από τη διδασκαλία και επηρεάζει τη χρήση και διατήρηση των γνωστικών στρατηγικών. Έχει τη δυνατότητα να ενθαρρύνει τους μαθητές στο να γίνουν υπεύθυνοι και ανεξάρτητοι μαθησιακά, έτσι ώστε να επηρεασθούν θετικά οι μεταβλητές στάσης και αποτελεσματικότητας (Ganz & Ganz, 1990).

Η μεταγνώση χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο χαρακτηριστικών συμπεριφορών οι οποίες δε σχετίζονται με την έννοια της ευστροφίας. Έχει βρεθεί ότι μπορεί κάποιος να έχει διδαχθεί μεταγνωστικές δεξιότητες και να λύνει προβλήματα με πιο επιδέξιο τρόπο από κάποιον που έχει υψηλότερο IQ και δεν είναι εξοικειωμένος με μεταγνωστικές δεξιότητες (Schraw, G., 1998). Η μεταγνωστική συμπεριφορά είναι εφικτό να αποκτηθεί και να ενισχύσει την ακαδημαϊκή και διανοητική απόδοση. Πειραματική έρευνα του Jausovec (1994) αποδεικνύει ότι η επίδοση του μέσου όρου των μαθητών μπορεί να βελτιωθεί αν αυτοί εκπαιδευτούν στο να χρησιμοποιούν μεταγνωστικές στρατηγικές. Άλλες πειραματικές μελέτες παρουσιάζουν εντυπωσιακά αποτελέσματα όσον αφορά τους βαθμούς επίδοσης σε διαγωνίσματα αξιολόγησης καθώς και τα συναισθήματα ικανοποίησης από τους κατάλληλα εκπαιδευμένους μαθητές (Marine & Escribe, 1994; Montagne & Bos, 1990).

Η μεταγνώση βοηθά τους μαθητές να λύσουν σωστά μαθηματικά προβλήματα (Peterson, Swing, Braverman, and Bus, 1982; Garoflo and Lester, 1985; Schoenfeld, 1987). Όταν διδαχθεί η επανεκτίμηση και η ρύθμιση δεξιοτήτων, τα παιδιά δείχνουν βελτιωμένες μεταγνωστικές δεξιότητες στην επίλυση προβλήματος (Charles and Lester, 1985). Η μεταγνωστική γνώση που σχετίζεται με τα μαθηματικά είναι χρήσιμη όταν τα παιδιά διαπραγματεύονται με σύνθετα προβλήματα και όταν χρησιμοποιούν γνωστικές στρατηγικές.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μεταγνώση είναι καθοριστικό εργαλείο σε σύνθετες εργασίες που απαιτούν δεξιότητες μέσα στα πλαίσια των δυνατοτήτων των μαθητών (Carr, 1994).

3.3.2. Μεταγνώση και αναστοχασμός

Η μεταγνώση και ο αναστοχασμός, είναι δύο αλληλοσχετιζόμενες διαδικασίες, αφού και οι δύο προϋποθέτουν τη νοητή επεξεργασία της πορείας που ακολουθήθηκε για την επίλυση ενός προβλήματος. Δεδομένου ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τον αναστοχασμό επί της διαδικασίας της μάθησης και ασκούν έλεγχο πάνω στη δική τους μάθηση, συμπεραίνουμε ότι η διαδικασία του αναστοχασμού ως στοιχείο ορισμού της μεταγνωστικής δραστηριότητας αξίζει ιδιαίτερη ανάπτυξη σε αυτό το κεφάλαιο.

Ο αναστοχασμός χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα συγκεκριμένο είδος υψηλού επιπέδου διαδικασίας γνωστικής σκέψης. Ο Dubinsky (1991), δίνει έμφαση στη χρησιμότητα του αναστοχασμού λέγοντας ότι: «Όταν συλλογιζόμαστε πάνω στα πεπραγμένα μας, μετακινούμαστε με έναν τρόπο σε άλλη διάσταση».

Ο αναστοχασμός σχετίζεται με την ικανότητα αφαίρεσης του υποκειμένου. Ο Piaget διέκρινε τρία βασικά είδη αφαίρεσης, την *Εμπειρική αφαίρεση* (empirical abstraction), την *Ψευδοεμπειρική αφαίρεση* (pseudo-empirical abstraction) και την *Αναστοχαστική αφαίρεση* (reflective abstraction).

Στην εμπειρική αφαίρεση το υποκείμενο παρατηρεί έναν αριθμό αντικειμένων και τους αποδίδει μια κοινή ιδιότητα (Beth & Piaget, 1966). Στη ψευδοεμπειρική αφαίρεση το υποκείμενο ακολουθεί την ίδια διαδικασία αφού όμως πρώτα έχουν δοκιμαστεί κάποιες δράσεις πάνω στο αντικείμενο (Piaget, 1985). Η αναστοχαστική αφαίρεση είναι πολύ πιο πολύπλοκη αφού γίνεται μια εσωτερική αναδιοργάνωση των δράσεων (Piaget, 1985). Μπορούμε επομένως να πούμε ότι στην εμπειρική και στην ψευδοεμπειρική αφαίρεση ανασύρεται η γνώση από τα αντικείμενα, δοκιμάζοντας ή φαντάζοντας δράσεις πάνω σε αυτά. Η αναστοχαστική αφαίρεση εσωτερικεύει και αναδιοργανώνει αυτές τις δράσεις για να σχηματιστούν νέες δράσεις και τελικά νέα αντικείμενα. Η εμπειρική τότε αφαίρεση ανασύρει δεδομένα από αυτά τα νέα αντικείμενα μέσω νοητικών δράσεων σε αυτά και ούτω καθεξής.

Η αναστοχαστική αφαίρεση είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, η πραγματοποίηση της οποίας συντελείται με την ολοκλήρωση των τριών σταδίων της τετραμερούς θεωρίας που έχει το ακρώνυμο APOS: Action, Process, Object, Schema (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996; Dubinsky,1986; 1991). Οι Cottrill et al. (1996) και ο Dubinsky (1986, 1991), διατυπώνουν σχετικά με την εκπραγμάτωση (encapsulation) μιας διαδικασίας σε ένα αντικείμενο ότι μία βήμα προς βήμα *δράση* εννοιολογείται (conceptualized) σαν μια ολική *διαδικασία*, εκπραγματώνεται σαν ένα νοητό *αντικείμενο*, το οποίο αργότερα γίνεται μέρος ενός νοητού *σχήματος*. Οι Tall, Thomas, Davis & Gray (2000),στηρίζονται σε αυτή τη θεωρία και γράφουν:

> Η *δράση* γίνεται *διαδικασία* όταν το άτομο μπορεί «να περιγράψει ή να συλλογιστεί πάνω σε όλα τα βήματα του μετασχηματισμού (transformation) χωρίς να είναι απαραίτητη η εκτέλεσή τους». Μία *διαδικασία* γίνεται *αντικείμενο* όταν «το άτομο γίνεται ενήμερο για την ολότητα της διαδικασίας, συνειδητοποιεί ότι οι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν σε αυτήν και είναι ικανό να κατασκευάσει τέτοιους μετασχηματισμούς» (Tall et al., 2000, σελ. 225)

Το τελικό στάδιο της θεωρίας APOS συμβαίνει όταν οι δράσεις, οι διαδικασίες και τα αντικείμενα οργανώνονται σε δομές που είναι γνωστές ως σχήματα. Τότε:

> …ένα άτομο μπορεί να συλλογιστεί πάνω σε ένα σχήμα και να ενεργήσει πάνω σε αυτό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σχήμα να γίνει ένα νέο αντικείμενο (Cottrill et al., 1996, σελ.172)

Σύμφωνα με την άποψη του Piaget, η αναστοχαστική αφαίρεση είναι υπαίτια για νέες μαθηματικές κατασκευές: «από μόνη της υποστηρίζει και ενθαρρύνει το απέραντο οικοδόμημα λογικομαθηματικών κατασκευών» (Piaget, 1980 σελ. 92). Οι Inhelder & Piaget (1958) υποστήριξαν ότι η δυνατότητα για αναστοχασμό πάνω στην ίδια τη σκέψη, παρατηρείται γενικώς στην εφηβεία και όχι σε νεότερους μαθητές, σημείωσαν όμως ότι η ηλικία δεν είναι ο μοναδικός παράγοντας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, στην προσπάθειά της να γίνει πιο προσιτή στους μαθητές, προκρίνει την ανάπτυξη μιας βήμα προς βήμα εξελισσόμενης στρατηγικής δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο την εντύπωση σε πολλούς μαθητές ότι είναι ανιαρά και χωρίς νόημα (Greeno, Smith & Moore, 1993; Lave, 1988; Boaler, 2000). Δεδομένου ότι οι μαθητές προτιμούν μαθήματα που μπορούν να τα εντάξουν στην καθημερινότητα τους (Boaler, 2000), και ότι τα μαθηματικά προάγουν την ανθρώπινη σκέψη, υπάρχει επιτακτική ανάγκη οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με μαθηματικά που συναντούν και εφαρμόζουν στη ζωή τους, δηλαδή με τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά.

Τα θεμέλια της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education: **RME**) τέθηκαν από τον Ολλανδό Η. Freudenthal και τους συνεργάτες του IOWO, το Ινστιτούτο δηλαδή για την Ανάπτυξη της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Το IOWO περιλάμβανε δύο τμήματα που βρίσκονταν σε συνεχή συνεργασία, το Wiskobas το οποίο ήταν υπεύθυνο για τη μαθηματική εκπαίδευση στις ηλικίες 2- 12 ετών και το Wiskivon που ήταν υπεύθυνο για τη Μαθηματική εκπαίδευση στις ηλικίες 12 – 16 ετών. Το IOWO είναι ο πρόγονος του σημερινού «Ινστιτούτου Freudenthal». Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση ήταν η αντίδραση στο στρουκτουραλιστικό ρεύμα που ήθελε τα μαθηματικά να είναι ένα οργανωμένο, κλειστό επαγωγικό σύστημα, ένα ολοκληρωμένο οικοδόμημα.

4.1. Διευκρίνιση βασικών όρων και εννοιών

Τα ρεαλιστικά μαθηματικά, που αποτελούν και αντικείμενο μελέτης της παρούσας έρευνας, σχετίζονται κατ’ ουσίαν με τα ρεαλιστικά προβλήματα. Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε τι σημαίνει ρεαλιστικό πρόβλημα, θεωρούμε απαραίτητη τη διευκρίνιση κάποιων σχετικών όρων και εννοιών. Παρακάτω αναλύουμε τι είναι πρόβλημα, τι είναι πραγματικό πρόβλημα και τι ρεαλιστικό πρόβλημα.

α. *Πρόβλημα* είναι μια κατάσταση με ανοικτές ερωτήσεις οι οποίες αποτελούν «πρόκληση» για το λύτη, χωρίς να είναι διαθέσιμες μέθοδοι, διαδικασίες, αλγόριθμοι κ.λπ. που να οδηγούν άμεσα στην απάντηση.

β. *Πραγματικό πρόβλημα* (real problem ή applied problem) – *Ρεαλιστικό πρόβλημα* (realistic problem), ονομάζουμε το πρόβλημα που αναφέρεται σε ένα έξω – Μαθηματικό «Σύμπαν», στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιες μαθηματικές έννοιες, μεθόδους και αποτελέσματα. Τα *Ρεαλιστικά προβλήματα* διαφέρουν από τα *πραγματικά προβλήματα* μόνο στο ότι τα πρώτα δε συμβαίνουν στην πραγματικότητα, αλλά σε μια εν δυνάμει πραγματικότητα. Αντίθετα, τα *πραγματικά προβλήματα* είναι αληθινά προβλήματα που επικαλούμαστε να επιλύσουμε στην καθημερινή ζωή μας. Ωστόσο στη μελέτη μας, όταν θα αναφερόμαστε σε *πραγματικά προβλήματα* θα συμπεριλαμβάνουμε και τα *ρεαλιστικά*, και αντίστροφα.

4.2. Γενικές αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης

Η έκφραση «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» (RME), υποδηλώνει αφ' ενός μεν τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα, αφ' ετέρου το γεγονός ότι οι στόχοι που θέτει δεν υπερβαίνουν τις δυνατότητες πραγματοποίησής τους από δασκάλους και μαθητές. Για τα ρεαλιστικά μαθηματικά η «πραγματικότητα» δεν περιορίζεται στο φυσικό ή κοινωνικό κόσμο. Η «εσωτερική» πραγματικότητα των Μαθηματικών ή η πραγματικότητα της φαντασίας των παιδιών μπορούν επίσης να αποτελέσουν το πλαίσιο (contex) μέσα στο οποίο μπορεί να διατυπωθεί ένα ρεαλιστικό πρόβλημα (Κολέζα, 2000).

Η θεωρία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης διαμορφώθηκε στη βάση κυρίως τριών θεωρητικών αξόνων :

- Της Θεωρίας Επιπέδων του P. M. Van – Hiele
- Της διδακτικής φαινομενολογίας του H. Freudenthal, και
- Της προοδευτικής μαθηματικοποίησης της ομάδας Wiskobas.

4.2.1. Η Θεωρία επιπέδων του P. M. Van – Hiele

Σύμφωνα με τη Θεωρία Επιπέδων του P. M. Van – Hiele, μπορούμε να διακρίνουμε τρία επίπεδα στη διαδικασία της μάθησης. Χαρακτηριστικό είναι ότι σε κάθε επίπεδο, τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τη φύση και ως προς την οργάνωση.

Στο *πρώτο επίπεδο,* τα αντικείμενα της μαθησιακής διαδικασίας (αριθμοί ή σχήματα) εμπεριέχονται στο συγκεκριμένο υλικό (συγκεκριμένα αντικείμενα, οπτικά μοντέλα, σχήματα κλπ.) με το οποίο έρχεται σε επαφή ο μαθητής μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων.

Στο *δεύτερο επίπεδο,* αντικείμενο της έρευνας είναι οι σχέσεις μεταξύ αριθμών ή σχημάτων. Ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι οι αριθμοί και τα σχήματα είναι φορείς κάποιων ιδιοτήτων και επιχειρεί την οργάνωση των μεταξύ τους σχέσεων.

Στο *τρίτο επίπεδο,* αντικείμενο της έρευνας γίνονται οι ίδιες οι σχέσεις, γεγονός που επιτρέπει τη σύνδεσή τους στα πλαίσια ενός επαγωγικού συλλογισμού. Τα σύνορα μεταξύ των επιπέδων αλληλοδιαπλέκονται και για να επιτευχθεί μάθηση σε ένα επίπεδο θα πρέπει να έχει συμπληρωθεί η μαθησιακή διαδικασία στο προηγούμενο επίπεδο.

4.2.2 Η Διδακτική Φαινομενολογία του Freudenthal

Ο Freudenthal αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες ως «εργαλεία» οργάνωσης των πραγματικών φαινομένων. Αντί να παρουσιαστούν στο μαθητή οργανωμένα φαινόμενα, με στόχο την ανακάλυψη κοινών δομών, προτείνεται ο μαθητής να ξεκινήσει από τα ίδια τα φαινόμενα που ζητούν οργάνωση και με αφετηρία αυτά, να διδαχθεί πώς να χειρίζεται τις μαθησιακές έννοιες και δομές. Με άλλα λόγια για
τον Freudenthal, σκοπός μας πρέπει να είναι, να φέρουμε το μαθητή σε επαφή με εκείνα τα φαινόμενα, για τα οποία οι μαθηματικές έννοιες και δομές αποτελούν οργανωτικά εργαλεία, με στόχο να τα διαμορφώσουν μόνοι τους, να μάθουν να τα

χειρίζονται και να τα χρησιμοποιούν στα πλαίσια ευρύτερων διδακτικών στόχων (Κολέζα, 2000).

4.2.3. Η προοδευτική μαθηματικοποίηση της ομάδας Wiskobas

Τα ρεαλιστικά προβλήματα προκαλούν τη διαίσθηση των μαθητών, εισάγοντας τους κατά μία έννοια στους κόλπους των άτυπων μαθηματικών. Μιλάμε λοιπόν για χρήση μη τυπικών μαθηματικών, για χρήση ορισμών, θεωρημάτων και μεθοδολογιών που βρίσκουν άμεση εφαρμογή στην πραγματικότητα. Οι εμπειρίες, καλούνται στη συνέχεια να μετατραπούν σταδιακά σε μαθηματικούς όρους, να ακολουθήσουν δηλαδή τη διαδικασία της *μαθηματικοποίησης*. Οι Treffers & Goffree (1985) ορίζουν την μαθηματικοποίηση ως μια δραστηριότητα οργάνωσης και δόμησης κατά την οποία οι γνώσεις και ικανότητες που έχουν αποκτηθεί χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη άγνωστων σχέσεων και δομών.

Κατά τον Freudenthal (1971), η μαθηματικοποίηση δύναται να αφορά είτε καθημερινά, είτε αμιγώς μαθηματικά θέματα, χωρίς να υπάρχει κάποια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, η εκπαίδευση μπορεί να ξεκινήσει με τη μαθηματικοποίηση προβλημάτων που συναντάμε στην καθημερινότητά μας, αφού τα μαθηματικά πρέπει να σχετίζονται με την καθημερινότητα και με την ανθρώπινη δραστηριότητα, και να επεκτείνεται σταδιακά προς απτά Μαθηματικά προβλήματα.

Ο Tall (1991) προτείνει να αναζητήσουμε αρχικά καταστάσεις που μπορούν να λειτουργήσουν ως άτυπο σημείο εκκίνησης, ως σημείο γνωστικής ανάπτυξης. Σε πρώτη φάση δίδεται μεγαλύτερη έμφαση στις εμπειρίες μέσω δραστηριοτήτων, στην προσέγγιση, τελώντας μία ποιοτική, σφαιρική γνωριμία, που ωθεί όμως στη συνέχεια, ασυνείδητα, την ανάγκη για μια πιο τυπική περιγραφή των εμπλεκόμενων εννοιών (Gravemeijer, Doorman, 1999). Αρχικά δηλαδή δίδεται η ευκαιρία στους μαθητές να επανεφεύρουν τα μαθηματικά οργανώνοντας και μαθηματικοποιώντας καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, για να οδηγηθούν αργότερα και στις ουσιώδεις πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις.

Η διαδικασία της μαθηματικοποίησης αναλύεται σε δύο συνιστώσες: την *οριζόντια* και την *κατακόρυφη μαθηματικοποίηση*.

Μέσω της οριζόντιας μαθηματικοποίησης πραγματοποιείται μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων. Είναι εκείνη η φάση που γίνεται η «μετάφραση» του προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα, προσπαθώντας, μέσω συγκεκριμένων λειτουργιών, να ανακαλύψουμε ομοιότητες σε φαινομενικά διαφορετικές καταστάσεις και να εντοπίσουμε τις μαθηματικές έννοιες και δομές που βρίσκονται διάχυτες σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Η πραγματοποίηση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης θα λέγαμε ότι γίνεται με τη βοήθεια της μοντελοποίησης. Όταν λέμε μοντελοποίηση, εννοούμε «ένα σύνολο σταδίων και διαδικασιών που ακολουθούμε προκειμένου να διαπραγματευτούμε ένα πραγματικό πρόβλημα» (Κλαουδάτος, 1989).

Κατά την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση, η διεργασία συντελείται εσωτερικά μέσα στον κόσμο των συμβόλων. Δηλαδή, κατά την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση το πραγματικό πρόβλημα που έχει «μεταφραστεί» σε μαθηματικό πρόβλημα αντιμετωπίζεται και επεξεργάζεται με μαθηματικά σύμβολα (Κολέζα, 2000).

Η σύνθεση της κατακόρυφης και της οριζόντιας μαθηματικοποίησης συντελείται κατά τη διαδικασία της *προοδευτικής μαθηματικοποίησης*, όταν οι μαθητές δομούν πλέον «νέα μαθηματικά», νέα λογική, νέα μαθηματική ανακάλυψη.

Σύμφωνα με τον Freudenthal (1971), η μαθηματικοποίηση αποτελεί καταλυτική διαδικασία της μαθηματικής εκπαίδευσης για τρεις κυρίους λόγους:

- Παραμένει η κυρίαρχη διαδικασία για τους μαθηματικούς.
- Ευνοεί τη χρηστικότητα των μαθηματικών, εξοικειώνοντας τους μαθητές σε μαθηματικές προσεγγίσεις των καθημερινών τους δραστηριοτήτων.
- Σχετίζεται άμεσα με την ιδέα της ανακατασκευής της μαθηματικής σκέψης, που τυποποιεί τις άτυπες κατανοήσεις και διαισθήσεις τους.

4.3. Μοντελοποίηση

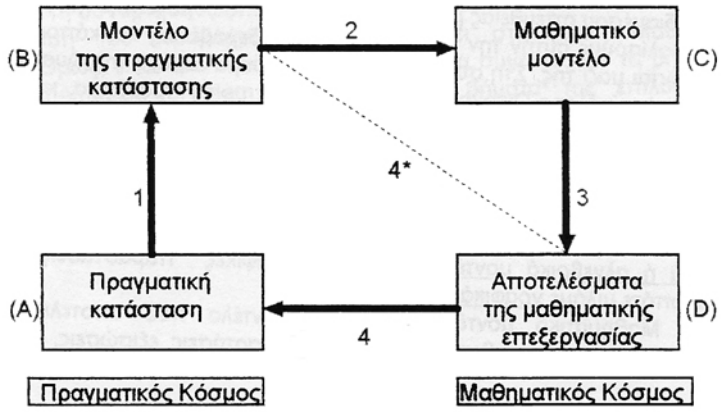
«Η Μοντελοποίηση συνίσταται στη «μετάφραση» ενός πραγματικού προβλήματος σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, στη λύση του μαθηματικού προβλήματος και στη

συνέχεια πάλι πίσω στο πραγματικό πρόβλημα για να ερμηνεύσουμε τα μαθηματικά αποτελέσματα» (Κλαουδάτος, 1996, σελ.51).

Πιο αναλυτικά, κατά τη διαπραγμάτευση με ένα πραγματικό (ρεαλιστικό) πρόβλημα, το υποκείμενο βρίσκεται αντιμέτωπο με μια πραγματική (ρεαλιστική) κατάσταση η περιγραφή της οποίας επιτυγχάνεται με την εκκίνηση μιας διαδικασίας ανάπτυξης ενός κατάλληλου μοντέλου της πραγματικής κατάστασης. Στη συνέχεια ξεκινά η μαθηματικοποίηση του προβλήματος με την κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου. Τη σκυτάλη παίρνει η επεξεργασία του μαθηματικού μοντέλου, τα αποτελέσματα της οποίας ερμηνεύονται και επανατοποθετούνται στην πραγματική κατάσταση.

Η διαδικασία της μοντελοποίησης κατά τη διαπραγμάτευση με ένα πραγματικό πρόβλημα, μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω διάγραμμα, γνωστό ως ο «κύκλος» της μοντελοποίησης (Κλαουδάτος, 1989):

Ο «Κύκλος» της Μοντελοποίησης:



Όπου:

1. Η διαδικασία της ανάπτυξης του μοντέλου της πραγματικής κατάστασης.
2. Μαθηματικοποίηση.
3. Επεξεργασία του μαθηματικού μοντέλου.
4. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Πολλές φορές συναντάμε μαθηματικά βιβλία που στην προσπάθειά τους να παρουσιάσουν πραγματικά προβλήματα και εφαρμογές, αντί της πραγματικής

κατάστασης παρουσιάζουν απευθείας το μοντέλο (Β) αυτής. Με αυτόν τον τρόπο, το μόνο που απομένει στο μαθητή είναι η μαθηματικοποίηση και η μαθηματική επεξεργασία του μαθηματικού κόσμου. Κάτι τέτοιο φαντάζει παράταιρο, καθώς ο μαθητής τοποθετείται σε ένα πλαίσιο του πραγματικού κόσμου, που δεν εργάζεται καθόλου σε αυτό αλλά αντίθετα παραμένει στο Μαθηματικό κόσμο. Σύμφωνα με τον Κλαουδάτο (1996), τα στάδια (Β) και (C), μαζί με τις διαδικασίες 2 και 3, αποτελούν τις κυρίαρχες δραστηριότητες της μαθηματικής μας εκπαίδευσης, εντελώς αποκομμένες από τον υπόλοιπο κύκλο, τουλάχιστον όσο αφορά στη διδασκαλία των πραγματικών προβλημάτων.

4.4. Ο Σχεδιασμός Ρεαλιστικών Μαθηματικών Δραστηριοτήτων

Η αναζήτηση μαθηματικών προβλημάτων, προσιτών στους μαθητές, ευπρόσληπτων, με ξεκάθαρη κατάσταση εκκίνησης και στόχου και διακριτές διαδικασίες επίλυσης, ικανών να τοποθετηθούν σε ένα πραγματικό πλαίσιο προκαλώντας τους μαθητές να έρθουν σε επαφή με αυτά, κρίνεται πια αναγκαία. Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME) υπεραμύνεται της αντιλήψεως ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλά ένα περιορισμένο σύνολο επινοημάτων. Αντιθέτως, είναι ένα επιτηδευμένο σύνολο πρακτικών που αναπτύχθηκαν από μια κοινότητα σχεδιαστών και ερευνητών σε βάθος χρόνου (Cobb, Zhao, Visnovska, 2008).

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, όσον αφορά τη διαδικασία μάθησης, βασίζεται σε τρεις διδακτικές και πέντε μαθηματικές αρχές. Οι διδακτικές αρχές υποστηρίζουν ότι α) μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει κάνω μαθηματικά, β) ο τρόπος μάθησης είναι προσωπικός και ότι γ) η μάθηση γίνεται με συγκεκριμένη σειρά. Από την άλλη μεριά, οι μαθηματικές αρχές αναφέρονται α) στη δόμηση του περιεχομένου των μαθηματικών, β) στη μαθηματική γλώσσα, γ) στη χρησιμότητα, δ) στην ισχύ τους, και ε) στην προσέγγισή τους.

Το μοντέλο διδασκαλίας των ρεαλιστικών μαθηματικών που έθεσε τις βάσεις για ριζική αναθεώρηση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος, των βιβλίων, των διδακτικών μεθόδων, της θέσης και του ρόλου των μαθητών και του εκπαιδευτικού, βασίστηκε:

- στην οικοδόμηση της γνώσης πάνω στα άτυπα μοντέλα των μαθητών.

- στην καθοδηγούμενη προσωπική ανακάλυψη από τους μαθητές των μαθηματικών εννοιών και δομών.
- στην ομαδική διδασκαλία με αλληλεπίδραση στην τάξη.
- στον καθοδηγητή εκπαιδευτικό που διαθέτει ποικίλες εναλλακτικές στρατηγικές στο ρεπερτόριό του.

Οι Cobb et al., (2008) παραθέτουν τα τρία βασικά δόγματα της RME για το σχεδιασμό ρεαλιστικών μαθηματικών δραστηριοτήτων:

- Η δραστηριότητα που θα δοθεί στους μαθητές πρέπει να είναι *εμπειρικά πραγματική* κατά την έναρξή της, με την έννοια ότι θα είναι τέτοια ώστε να μπορούν απ' ευθείας οι μαθητές να δεσμευτούν σε μια μαθηματική διεργασία που έχει νόημα γι' αυτούς (Gravemeijer, 1990; Streefland, 1991) που θα οδηγεί άμεσα σε ερμηνείες και λύσεις αναπτύσσοντας ένα μαθηματικά άτυπο τρόπο ομιλίας, συμβολισμού και επιχειρηματολογίας (οριζόντια μαθηματικοποίηση, κατά Treffer). Όπως πολύ σωστά επισημαίνει και ο Thompson (1992), η αναγκαιότητα του πρώτου δόγματος έγκειται στο γεγονός ότι αν οι μαθητές δεν εμπλακούν προσωπικά με τη φαντασία τους στη μαθηματική δραστηριότητα, πολύ δύσκολα θα πιστέψουν αργότερα ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά στον πραγματικό κόσμο.

- Πρέπει να υπάρχει *συνέχεια* μεταξύ της εμπειρικά πραγματικής δραστηριότητας και των συμπερασμάτων που θέλουμε να βγάλουμε. Δηλαδή ο μαθηματικά άτυπος τρόπος ομιλίας, ο συμβολισμός και η επιχειρηματολογία να συνιστούν τη βάση για την προοδευτική μετάβαση στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση.

- Το τρίτο δόγμα αφορά τα *μέσα* που θα υποστηρίξουν τη διαδικασία της κατακόρυφης μαθηματικοποίησης, κάτι που κατά κύριο λόγο αφορά τις δραστηριότητες που οι μαθητές θα δημιουργήσουν καθώς και τα συμβολικά μοντέλα της άτυπης μαθηματικής δραστηριότητας που θα εισαγάγουν. Αυτό στηρίζεται στην υπόθεση ότι με οδηγό τον καθηγητή, τα μοντέλα των «άτυπων» μαθηματικών των μαθητών μπορούν να εξελιχθούν σε μοντέλα για πιο γενική μαθηματική επιχειρηματολογία (Gravemeijer, 1999; Gravemeijer,

Cobb, Bowers, & Whitenack, 2000). Τα μέσα συμβολισμού δεν περιορίζονται στα συμβατικά μαθηματικά σύμβολα. Τόσο ο Lakatos όσο και ο Freudenthal υπογραμμίζουν ότι ο μαθητής έχει το δικαίωμα να ακολουθήσει τη μαθησιακή πορεία που ακολούθησε το ανθρώπινο είδος. Αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι κατά τη διδασκαλία θα αναπαραχθεί κατά βήμα η ιστορική εξέλιξη μιας έννοιας, αλλά ότι τα φαινόμενα μέσω των οποίων αποκτούν περιεχόμενο οι μαθηματικές έννοιες, πρέπει να αποκτήσουν τη βάση στήριξης μιας μαθησιακής/διδακτικής διαδικασίας που στοχεύει στην κατάκτηση αυτών των εννοιών (Κολέζα, 2000). Ο σχεδιαστής μιας ρεαλιστικής μαθηματικής δραστηριότητας, οδηγείται από την ιστορική ανάλυση και την ανάλυση των άτυπων μαθητικών επιχειρημάτων και εφευρίσκει μέσα συμβολισμού στα οποία οι μαθητές στην παρούσα φάση ανάπτυξής τους θα τα θεωρήσουν λογικά και χρήσιμα για να επιτύχουν μαθηματικούς στόχους (Gravemeijer, 1994).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

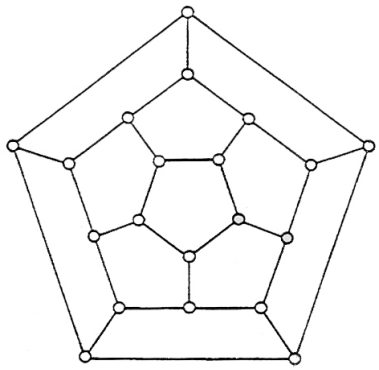
Ως *Διακριτά Μαθηματικά* (Δ.Μ) ονομάζουμε μια ενότητα προγραμμάτων των Τμημάτων των Μαθηματικών και της Πληροφορικής που περιέχει στοιχεία από τη Θεωρία Αριθμών, τη Θεωρία Γραφημάτων, των Αναδρομικών Ακολουθιών, Συνδυαστικής, της πεπερασμένης Θεωρίας ομάδων, της Προτασιακής Λογικής, τα γοητευτικά Fractals, και άλλων αντικειμένων των Μαθηματικών που χαρακτηρίζονται από το πεπερασμένο, δηλαδή τα προβλήματα που χειρίζονται και δουλεύουν σε πεπερασμένα σύνολα. Τα Δ.Μ αντιδιαστέλλονται των μαθηματικών που εργάζονται σε σύνολα με πυκνότητα, όπως των ρητών που με τους οποίους διαπραγματεύεται για παράδειγμα η Ανάλυση. Το συνθετικό αυτό πρόγραμμα των Δ.Μ, θεωρήθηκε αναγκαίο τις τελευταίες δεκαετίες σε ορισμένα πανεπιστημιακά τμήματα, λόγω της ευρείας εφαρμογής του σε κλάδους όπως της πληροφορικής, της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και άλλων τεχνικών κλάδων, όπως της αρχιτεκτονικής. Πολλοί κλάδοι εφαρμογής αξιοποιούν τα διακριτά μαθηματικά προσφέροντας αποδοτικά και ευκόλως υπολογίσιμα μοντέλα.

5.1. Ορισμός των Διακριτών Μαθηματικών

Είναι πολύ δύσκολο να δοθεί ένας ορισμός που να προσδιορίζει με σαφήνεια τα Δ.Μ. Μία προσέγγιση που θα μπορούσε να μας διαφωτίσει, είναι αυτή μέσω παραδειγμάτων. Τα παρακάτω ερωτήματα αποτελούν παραδείγματα επίλυσης στοιχειωδών καθημερινών προβλημάτων μέσω των Διακριτών Μαθηματικών.

- Ποιος είναι ο πιο σύντομος τρόπος για να ταξινομήσεις κατά αλφαβητική σειρά έναν κατάλογο με ονόματα;
- Πώς ένα CD player διαβάζει σωστά τους κώδικες ενός χαραγμένου CD;
- Πώς μπορεί να μοιραστεί μια περιουσία με δίκαιο τρόπο;

- Πώς πρέπει να τοποθετηθούν τα καρτοτηλέφωνα σε διάφορες γωνίες μίας πόλης, έτσι ώστε σε κάθε γωνία να αντιστοιχεί ένα καρτοτηλέφωνο που να απέχει το πολύ ένα τετράγωνο από αυτή;
- Πως μπορούμε να ζωγραφίσουμε έναν χάρτη μόνο με τέσσερα χρώματα αν θεωρήσουμε ότι οι περιοχές που έχουν κοινή ακμή δεν μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα (πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων);
- Αν μία ομάδα από ν παίκτες φοράει άσπρα και μαύρα καπέλα και ο κάθε παίκτης μπορεί να δει μόνο το καπέλο των άλλων και αν κάθε ώρα που περνάει έρχεται κάποιος και ρωτάει ποιος γνωρίζει το χρώμα του καπέλου του, μετά από πόσες επισκέψεις θα είναι ικανοί οι παίκτες να γνωρίζουν το χρώμα ;
- Πόσα ζευγάρια λαγουδάκια θα έχουν γεννηθεί μέχρι το τέλος ενός έτους, αν γνωρίζουμε ότι κάθε νέο ζευγάρι που γεννιέται, μπορεί να αναπαραγάγει μετά από δύο μήνες και έκτοτε να γεννάει κάθε μήνα; Θεωρούμε ότι το πρώτο ζευγάρι που έχουμε, θα γεννήσει μετά από έναν μήνα (πρόβλημα Fibonacci).
- Ποια είναι η ερώτηση που πρέπει να κάνει κάποιος αν έχει μπροστά του δύο ανθρώπους που ο ένας λέει μόνο ψέματα και ο άλλος μόνο αλήθεια, αν θέλει να μάθει προς τα πού να κατευθυνθεί;
- Υποθέτουμε ότι το διπλανό γράφημα απεικονίζει το χάρτη μιας πόλης, με τις κορυφές αυτού να παριστάνουν τα σπίτια των κατοίκων της και οι ακμές τους δρόμους της πόλης. Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει ο ταχυδρόμος, ώστε να περάσει από όλα τα σπίτια ακριβώς μία φορά και έπειτα να φύγει (πρόβλημα του Hamilton)



Τα παραπάνω προβλήματα έχουν πολλά και σημαντικά κοινά χαρακτηριστικά. Είναι εύληπτα και ενδιαφέροντα, διαπραγματεύονται καταστάσεις του πραγματικού κόσμου και μπορούν να αντιμετωπισθούν χωρίς χρήση των μαθηματικών που διδάσκονται στο σχολείο. Τα Δ.Μ. είναι το ίδιο αποκαλυπτικά και ενδιαφέροντα και για τους εκπαιδευτικούς που αναζητούν νέους τρόπους διδασκαλίας. Οι αναζητήσεις τους αυτές στο πεδίο των Δ.Μ. θα τους φανούν μελλοντικά χρήσιμες και ευεργετικές για τη γενικότερη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ο Joseph G. Rosenstein έδωσε τον παρακάτω ορισμό:
«Διακριτά μαθηματικά είναι ο κλάδος των μαθηματικών που διαπραγματεύεται διακανονισμούς διακριτών αντικειμένων. Περιλαμβάνει μεγάλο εύρος θεμάτων και τεχνικών που εμφανίζονται στην καθημερινή ζωή, όπως για παράδειγμα η εύρεση της καλύτερης διαδρομής για να φτάσεις από τη μία πόλη στην άλλη. Τα διακριτά αντικείμενα είναι στην περίπτωση αυτή, οι πόλεις τοποθετημένες σε ένα χάρτη. Είναι ο κλάδος για να βρεις τον καλύτερο τρόπο σχεδιασμού μιας λίστας εργασιών, τον τρόπο που οι υπολογιστές αποθηκεύουν και επανακτούν πληροφορίες. Είναι τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται από εκείνους που λαμβάνουν αποφάσεις στην κοινωνία μας, από εκείνους που εργάζονται για την Κυβέρνηση και που ασχολούνται με το Υγειονομικό σύστημα, τις Μεταφορές και την Τηλεπικοινωνία. Οι πολλαπλές λειτουργίες τους, βοηθούν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τη σχέση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο».

5.2. Εφαρμογές των Διακριτών Μαθηματικών

Τα Δ.Μ προσφέρουν εύκολη εφαρμογή και εποπτεία, άμεση μαθηματικοποίηση ρεαλιστικών καταστάσεων, ενεργοποίηση πρωτογενούς συνδυαστικής σκέψης μερικώς απεξαρτημένης του επιπέδου θεωρητικής κατάρτισης. Όλα τα προηγούμενα, δίνουν την ευκαιρία στο διδάσκοντα να δημιουργήσει ένα περιβάλλον διαφορετικό από τα κοινά μαθηματικά, να χρησιμοποιήσει το παιχνίδι, να προκαλέσει το ενδιαφέρον ακόμη και των μη καλών μαθητών. Τα παραπάνω πλεονεκτήματα επιβεβαιώθηκαν και στο συνέδριο που έγινε στο Rutgers University, τον Οκτώβριο του 1992, όταν θεωρήθηκαν η ελπίδα ανανέωσης του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα μαθηματικά. Άρθρα με εισηγήσεις έμπειρων εκπαιδευτικών στο συνέδριο αυτό, έχει εκδώσει η Αμερικάνικη Μαθηματική Εταιρεία (DIMACS: Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol.36, Discrete Mathematics in the school).

Διεθνώς, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την ένταξη των Διακριτών Μαθηματικών στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών της Μέσης

Εκπαίδευσης. Στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, κάθε πρόσφατη εθνική αναφορά στη μαθηματική εκπαίδευση, περιλαμβάνει και μια εισήγηση για τη διδασκαλία των Δ.Μ. . Συγκεκριμένα, το Εθνικό Συμβούλιο των Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών

(N.C.T.M.,1989) συνιστά ότι, η εκπαίδευση όλων των μαθητών πρέπει να περιλαμβάνει και τη σπουδή των Δ.Μ. Σήμερα, σε πολλές πολιτείες των ΗΠΑ, τα Δ.Μ. έχουν ενταχθεί στο Αναλυτικό Πρόγραμμα. Η Γαλλική εκπαιδευτική κοινότητα συγκλίνει υπέρ της εισαγωγής τους στη Μέση Εκπαίδευση σύμφωνα με το άρθρο των Grenier & Payan (1998), στο οποίο αναφέρουν, εκτός των άλλων, ότι στην Ουγγαρία έχουν ήδη ενταχθεί στο Αναλυτικό Πρόγραμμα της Μέσης Εκπαίδευσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η Ουγγαρία έχει υψηλό επίπεδο έρευνας στα Δ.Μ. και από τις καλύτερες σχολές στον κλάδο αυτό παγκοσμίως.

Στο New Jersey γίνεται μεγάλη συζήτηση για τη χρησιμότητα και την αναγκαιότητα των Διακριτών Μαθηματικών στο αναλυτικό πρόγραμμα. Τα κυριότερα επιχειρήματα που προβάλλουν είναι ότι τα Διακριτά Μαθηματικά είναι:

α) **Εφαρμόσιμα:** Τα τελευταία χρόνια, θέματα των Διακριτών Μαθηματικών αποτέλεσαν χρήσιμα εργαλεία παροχής δυναμικών μοντέλων επίλυσης δύσκολων προβλημάτων.

β) **Προσβάσιμα:** Η αριθμητική και η χρήση βασικής άλγεβρας είναι συνήθως αρκετή για την κατανόηση των εφαρμογών τους.

γ) **Ελκυστικά:** Ενώ είναι εύκολα κατανοητά, εντούτοις απαιτούν βαθύτερη σκέψη επίλυσης και διερεύνησης, προκαλώντας έτσι το ενδιαφέρον των μαθητών αφού τους οδηγούν στην εξερεύνηση και στην ανακάλυψη.

δ) **Κατάλληλα:** Τόσο δηλαδή για τους μαθητές που είναι ικανοί στα μαθηματικά και που προσβλέπουν σε επιστημονική καριέρα, όσο και για μαθητές που είναι αδύναμοι σε αυτά και που πιθανών χρειάζονται μία νέα αρχή.

Οξύμωρο πραγματικά, το γεγονός ότι τα Διακριτά Μαθηματικά, που ικανοποιούν όλες τις παραπάνω προϋποθέσεις, απουσιάζουν από το Αναλυτικό Πρόγραμμα της χώρας μας. Θα μπορούσαν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών γιατί, εκτός του ότι προάγουν την ολιστική προσέγγιση δίδοντας έμφαση τόσο στο όλο όσο και

στην ανεξαρτησία των μερών, μπορούν να βρουν και άμεση χρήση στη ζωή. Παρά το γεγονός ότι στο παρελθόν σημειώθηκε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο μία προσπάθεια ένταξης κάποιων στοιχείων των Δ.Μ. στο Αναλυτικό Πρόγραμμα (Αριθμοθεωρία και ακολουθία Fibonacci), σήμερα φαίνεται αυτή η προσπάθεια να είναι σε ύφεση. Ενώ η γνώση τους στο διεθνές προσκήνιο θεωρείται αναγκαία και ικανή να εφοδιάσει τους μαθητές με δεξιότητες που θα τους φανούν χρήσιμες στην καθημερινή ζωή και θα τους καταστήσει ικανούς να ανταπεξέλθουν στην κοινωνία της ραγδαίας αυξανόμενης τεχνολογίας που ζούμε, στη χώρα μας η ανάλογη πείρα διδασκαλίας τους στη Μέση Εκπαίδευση διάγει την παιδική της ηλικία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ

Η συναισθηματική διάσταση της μάθησης των Μαθηματικών είναι ένας από τους τομείς που οι ερευνητές μελετούν συστηματικά, με απώτερο στόχο να κατανοήσουν καλύτερα την προέλευση, τη δομή και τις πολλαπλές επιπτώσεις του τομέα αυτού στη μάθηση των Μαθηματικών. Η ανάγκη για την εύρεση τρόπων που θα αλλάξουν τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά κρίνεται επιτακτική.

Ο Cockcroft (1982), επεσήμανε ότι

> Οι εμπειρίες των παιδιών δεν προέρχονται από ξεχωριστές αποσκευές με «ετικέτες μαθημάτων». Όταν τα παιδιά εξερευνούν τον κόσμο γύρω τους, μεταξύ άλλων, κερδίζουν και σε μαθηματικές εμπειρίες. Γι' αυτό ο καθηγητής οφείλει να βρει τρόπους να προκαλέσει μαθηματικές εμπειρίες με τη βοήθεια ενός ευρέος φάσματος δραστηριοτήτων για τα παιδιά.

Η παραδοσιακή διδασκαλία δεν ενδείκνυται για την ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και για τη συσχέτισή τους με τον πραγματικό κόσμο. Οι εναλλακτικές διδασκαλίες φαίνεται να αποτελούν πηγή έμπνευσης για τη δημιουργία ενός νέου περιβάλλοντος μάθησης που θα προάγει τη μαθηματική σκέψη και επικοινωνία.

6.1. Παιδαγωγικές Αρχές για το σχεδιασμό εναλλακτικών διδασκαλιών

Ο Harel (2001), προτείνει τρεις βασικές παιδαγωγικές αρχές, που αναλύονται παρακάτω, για το σχεδιασμό εναλλακτικών διδασκαλιών: την *αρχή της δυαδικότητας*,

την *αρχή της αναγκαιότητας* και την *αρχή του επαναλαμβανόμενου συλλογισμού* (Duality, Necessity, Repeated Reasoning : DNR).

6.1.1. Η αρχή της δυαδικότητας

Βασικός παράγοντας της αρχής της δυαδικότητας είναι ο διαχωρισμός του τρόπου που σκεφτόμαστε από τον τρόπο που κατανοούμε (Harel, 1998). Η ιδιαιτερότητα αυτού του διαχωρισμού έγκειται κυρίως στην αμοιβαία γνωστική επίπτωση των τρόπων που σκεφτόμαστε και των τρόπων που κατανοούμε, το ουσιαστικό τελικά περιεχόμενο της αρχής της δυαδικότητας:

> Ο τρόπος που σκέφτονται οι μαθητές επηρεάζει τον τρόπο που κατανοούν μαθηματικές έννοιες. Αντίστροφα, το πώς οι μαθητές φτάνουν στο να κατανοήσουν μια μαθηματική έννοια επηρεάζει τον τρόπο που σκέφτονται (Harel, 1998, σελ. 497).

6.1.2. Η αρχή της αναγκαιότητας

Η αρχή της αναγκαιότητας αναφέρει:

> Οι μαθητές είναι πιθανό να μάθουνε, αν καταλάβουν την ανάγκη για αυτό που πρόκειται να μάθουν, εννοώντας με τον όρο ανάγκη, τη *διανοητική ανάγκη* σε αντίθεση με την κοινωνική ή οικονομική ανάγκη (Harel, 1985, 1990, 1998).

Ο όρος *διανοητική ανάγκη* αναφέρεται στη συμπεριφορά που εκδηλώνεται εσωτερικά στους μαθητευόμενους όταν αντιμετωπίζουν μία ασύμβατη κατάσταση ή ένα άλυτο πρόβλημα, βάσει πάντα της προϋπάρχουσας γνώσης. Μία τέτοια αναμέτρηση προκαλεί τους μαθητευόμενους, διεγείρει την επιθυμία τους να ψάξουν έναν τρόπο για να οδηγηθούν στη λύση και βοηθά στην οικοδόμηση νέας γνώση. Δεν υπάρχει κάποια εγγύηση ότι οι μαθητευόμενοι θα οικοδομήσουν τη γνώση που αναζητάμε ή κάποια άλλη γνώση, αλλά οποιαδήποτε κι αν είναι αυτή, θα έχει σίγουρα νόημα γι' αυτούς με την έννοια ότι ενσωματώνεται στο προϋπάρχον γνωστικό τους σχήμα,

αποτελεί προϊόν δική τους προσπάθεια και οδηγείται από την προσωπική τους διανοητική ανάγκη (Harel, 2001).

Η πραγματοποίηση της αρχής της αναγκαιότητας εμπεριέχει:
α) αναγνώριση για το τι συνιστά διανοητική ανάγκη για έναν συγκεκριμένο πληθυσμό μαθητών,
β) ανάπτυξη ενός συστήματος καταστάσεων - προβλημάτων που αντιστοιχούν στη διανοητική τους ανάγκη, την επίλυση των οποίων αναζητεί η προϋπάρχουσα γνώση,
γ) δημιουργία ενός διδακτικού περιβάλλοντος όπου οι μαθητές μπορούν να εκμαιεύσουν τη γνώση δεσμευόμενοι με το σύστημα (Harel, 1998).

Τα παραπάνω δεν αποτελούν τα τρία βήματα ενός κανόνα που πρέπει ιεραρχικά να ακολουθηθεί, αλλά αποτελούν την ουσία τριών αδιαχώριστων απόψεων έρευνας στη μάθηση, στην ανάπτυξη του αναλυτικού προγράμματος και στη διδασκαλία.

6.1.3. Η αρχή του επαναλαμβανόμενου συλλογισμού

Καθώς η αρχή της αναγκαιότητας συμβάλλει στην αρχική τυποποίηση μιας έννοιας, η αρχή του επαναλαμβανόμενου συλλογισμού εκπροσωπεί την εσωτερικοποίηση και την ενσωμάτωσή της. Η αρχή υποστηρίζει:

> *Οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στο συγκεκριμένο συλλογισμό προκειμένου να εσωτερικεύσουν και να ενσωματώσουν συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και κατανόησης* (Harel, 2001, σελ. 209).

Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (2005), η ενσωμάτωση και η εσωτερίκευση συγκεκριμένων τρόπων σκέψης, γίνεται έπειτα από ιδίου τύπου επαναλαμβανόμενους συλλογισμούς, ενώ η παραβίαση αυτού του σταδίου μπορεί να οδηγήσει σε «επιφανειακή» μάθηση.

6.2. Βιωματική μάθηση

Η βιωματική μάθηση είναι μία εναλλακτική προσέγγιση μάθησης, η οποία μπορεί να διευκολύνει σε υψηλό βαθμό τον τρόπο που αυτή τελικά θα αποκτηθεί. Αποτέλεσε πεδίο μελέτης από την πρώτη στιγμή που εκδηλώθηκε ενδιαφέρον για τις διαδικασίες μάθησης και διδακτικής, δεδομένου ότι τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν ένα πολύ δυνατό εργαλείο στα χέρια ενός μαθητή, όταν βρίσκονται σε πλήρη συνάρτηση με τον πραγματικό του κόσμο. Για να εκτιμηθεί δηλαδή η διδακτική τους αξία, θα πρέπει ουσιαστικά να βιώνεται η άμεση εμπειρία της χρήση τους μέσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα.

Η βιωματική μάθηση εισάγει ευχάριστα και απλά τα παιδιά στον κόσμο των μαθηματικών, και συγκεκριμένα των Διακριτών Μαθηματικών. Κερδίζει τη θετική τους στάση, αναδεικνύοντας τη δύναμη των μαθηματικών για επικοινωνία και εξήγηση. Η Boaler (2000), ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την επιρροή των μαθησιακών περιβάλλοντων στη μάθηση. Η άποψη της είναι ότι οι μαθητές δε μαθαίνουν απλά μεθόδους και διαδικασίες στην τάξη τους, αλλά μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν μαθηματικά. Ένα ευχάριστο μαθησιακό περιβάλλον μπορεί να δράσει καταλυτικά στη μάθηση.

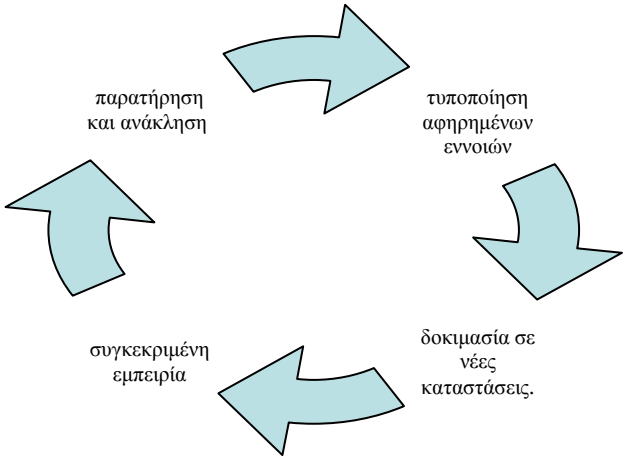
Οι τρεις μεγάλες παραδόσεις της βιωματικής μάθησης, όπως καταγράφονται από τον Kolb (1984, σελ. 12), προέρχονται από τους Dewey, Lewin και Piaget (Δεδούλη, σελ. 146).

Ο Dewey από τη φιλοσοφική σκοπιά του πραγματισμού**,** επεσήμανε το 1938 τη σχέση ανάμεσα στην εκπαίδευση και την εμπειρία και διακήρυξε την πεποίθησή του ότι κάθε γνήσια μορφή εκπαίδευσης γεννιέται μέσα από την εμπειρία. Ανέφερε χαρακτηριστικά ότι «υπάρχει μια εσωτερική και αναγκαία σχέση ανάμεσα στις διαδικασίες τρέχουσας εμπειρίας και εκπαίδευσης» (Dewey, 1938, σελ.12) και μελέτησε ποιες εμπειρίες είναι κατάλληλες να προάγουν τη μάθηση.

Ο Lewin έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη *σύνδεση θεωρίας και πράξης*. Η εργασία του στη δυναμική των ομάδων, καθώς και η μεθοδολογία της έρευνας – δράσης ανέδειξαν την αξία της υποκειμενικής προσωπικής εμπειρίας στη μάθηση.

Η συνεισφορά, τέλος, του Piaget στη βιωματική μάθηση, έγκειται κυρίως στην περιγραφή της μάθησης, ως μιας διαδικασίας αλληλεπίδρασης μεταξύ του προσώπου και του περιβάλλοντος.

Οι Kolb & Fry (1975), δημιούργησαν ένα διάσημο μοντέλο αποτελούμενο από 4 στοιχεία: *συγκεκριμένη εμπειρία, παρατήρηση* και *ανάκληση, τυποποίηση αφηρημένων εννοιών* και *δοκιμασία σε νέες καταστάσεις*.



Τοποθέτησε αυτά τα στοιχεία σ' ένα διάσημο κύκλο βιωματικής μάθησης που περιλαμβάνει:

(1) τη δοκιμασία σε νέες καταστάσεις,

(2) την ακολουθούμενη εμπειρία,

(3) την παρατήρηση και την εμπλουτισμένη εμπειρία που δομείται και

(4) την τυποποίηση των αφηρημένων εννοιών που προκύπτουν.

Οι Kolb & Fry (1975) λένε ότι ο κύκλος μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε σημείο από τα τέσσερα και ότι στην πραγματικότητα πρέπει να προσεγγιστεί ως ένα συνεχές σπιράλ. Παρόλα αυτά προτείνεται ότι η διαδικασία μάθησης συχνά ξεκινά με το άτομο πρώτα να πραγματοποιεί μια συγκεκριμένη δράση και ύστερα να βλέπει τα αποτελέσματα που συμβαίνουν στη συγκεκριμένη περίπτωση, έτσι ώστε αν η συγκεκριμένη δράση επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες είναι πιθανό να προσδοκά τα αναμενόμενα αποτελέσματα.

Η διαδικασία μάθησης ξεκινά με το άτομο πρώτα να πραγματοποιεί μια συγκεκριμένη δράση και ύστερα να στοχάζεται πάνω στα αποτελέσματα. Εάν η συγκεκριμένη δράση επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες, προσδοκούνται το πιθανότερο ανάλογα αποτελέσματα.

Ο μαθητής περνά πλέον από τη δράση και το αποτέλεσμα, στην κατανόηση της γενικής αρχής της συγκεκριμένης περίπτωσης. Το σύνολο των δράσεων σε μια ποικιλία ανάλογων περιστάσεων οδηγεί στη γενίκευση, στην απόκτηση εμπειρίας και πέραν της συγκεκριμένης περίστασης. Η κατανόηση βέβαια της γενικής αρχής, δεν καθιστά κάποιον σίγουρα ικανό να εκφράσει την αρχή με ένα συμβολικό μέσο, όπως με τις λέξεις. Η μεταφορά της μάθησης σε άλλα σύνολα και περιστάσεις παρουσιάζει συχνά δυσκολίες, αλλά φαίνεται να αποτελεί έναν ασφαλή κώδικα προσέγγισης. Το τελευταίο βήμα, σύμφωνα με τον David Kolb είναι η, στη βάση της γενίκευσης, πρακτική εφαρμογή σε άλλες περιστάσεις.

Στο πέρασμα του χρόνου το ενδιαφέρον των ερευνητών για τη βιωματική μάθηση εντείνεται. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της βιωματικής μάθησης, κατά τους Lee Andresen, Boud & Cohen (2000) είναι ότι πρωταγωνιστικό ρόλο στη διδασκαλία και τη μάθηση έχει η εμπειρία του μαθητευομένου. Αυτή η εμπειρία δομείται είτε από γεγονότα που συνέβησαν στο μακρινό ή κοντινό παρελθόν του, είτε ακόμα από τη συμμετοχή του σε δραστηριότητες που σχεδιάζονται από δασκάλους ή άλλους διαμεσολαβητές. Κλειδί της βιωματικής μάθησης αποτελεί το γεγονός ότι στη συνέχεια, οι μαθητευόμενοι αναλύουν την εμπειρία τους, συλλογίζονται πάνω σε αυτήν και την αξιολογούν και την ανακατασκευάζουν δίδοντας της ένα απτό νόημα. Η ποιότητα του συλλογισμού του μαθητευομένου πάνω στην εμπειρία του, προσδιορίζει τελικά και το τι θα συγκρατήσει στο μυαλό του. Ο στοχασμός αυτός, υποσκελίζει ακόμα και τη φύση της ίδιας της ανασυρθείσας εμπειρίας. Η κριτική της εμπειρίας του οδηγεί σε μια νέα εμπλουτισμένη εμπειρία.

6.2.1. Αρχές βιωματικής μάθησης

Η Δεδούλη στην έρευνά της πάνω στη Βιωματική μάθηση, πέραν των ανωτέρω, δομεί συνοπτικά και τις κυριότερες αρχές αυτής:

- Η βιωματική μάθηση αξιοποιεί τα βιώματα των μαθητών ή προκαλεί νέα βιώματα.
- Ενθαρρύνει το μαθητή να συμμετέχει ενεργητικά στη διαδικασία της μάθησης και να οικειοποιείται το θέμα που προσεγγίζει μέσω της επένδυσης προσωπικού ενδιαφέροντος σ' αυτό.
- Τον προτρέπει να ερευνά, να ανακαλύπτει, να ενεργοποιεί τη φαντασία του και τη δημιουργικότητα του.
- Προτείνει την αναζήτηση ή τη δημιουργία νοήματος αντί της απομνημόνευσης πληροφοριών.
- Στοχεύει στην αρτίωση της νοητικής και συγκινησιακής διαδικασίας, κινητοποιώντας το μαθητή διανοητικά και συναισθηματικά, αφού είναι παραδεκτό ότι η μάθηση βασίζεται στη σχέση και την αλληλεπίδραση γνώσης και συναισθηματικών διεργασιών.
- Βοηθά το μαθητή να αντιληφθεί το ρόλο των κοινωνικών, οικονομικών, ιστορικών και πολιτισμικών παραγόντων στη διαμόρφωση του κοινωνικού γίγνεσθαι και να συνειδητοποιήσει τον τρόπο με τον οποίο οι κοινωνικές συνιστώσες συναντώνται με την προσωπική του ιστορία (Postle, 1993, 36).
- Προωθεί την αυτογνωσία του μαθητή.

Κατά τους Boud, Cohen και Walker (1993) οι αρχές της βιωματικής μάθησης που αφορούν την εμπειρική μάθηση είναι:

- Η εμπειρία αποτελεί το θεμέλιο και το ερέθισμα της μάθησης.
- Οι μαθητευόμενοι κατασκευάζουν ενεργητικά την εμπειρία τους.
- Η μάθηση είναι μια ολιστική διαδικασία.
- Η μάθηση είναι κοινωνικά και πολιτισμικά κατασκευασμένη.
- Η μάθηση επηρεάζεται από το κοινωνικό-συναισθηματικό περιβάλλον μέσα στο οποίο δομείται.

6.2.2. Βιωματικές δραστηριότητες

Η βιωματική μάθηση δεν καθορίζεται μόνο από τη μορφή των δραστηριοτήτων – εμπειριών που θα την εισαγάγουν στη σχολική τάξη, αλλά και από το πνεύμα που διακατέχει την υλοποίηση αυτών. Όπως άλλωστε επεσήμανε και ο Dewey (1938), το πρόβλημα δεν είναι η απουσία των εμπειριών, αλλά η ελλιπής και λανθασμένη μορφή τους – ελλιπής και ελαττωματική από την άποψη της σχέσης τους με την παραπέρα εμπειρία. Ο Dewey αναφέρθηκε εκτενώς στα κριτήρια επιλογής εποικοδομητικών εμπειριών, που πρέπει να έχει ένας εκπαιδευτικός για τους μαθητές του. Συγκεκριμένα, έγραψε:

> Δουλειά του (εκπαιδευτή) είναι να εξασφαλίζει εμπειρίες, που δεν απωθούν τον σπουδαστή αλλά ενεργοποιούν τη δραστηριότητά του, γεννούν μια ευχαρίστηση κάτι περισσότερο από πρόσκαιρη και δημιουργούν την προϋπόθεση για άλλες, μελλοντικές, περισσότερο ευχάριστες εμπειρίες (Dewey, 1938, σελ. 17).

Η βιωματική μάθηση απαιτεί τη συνδρομή όλων των μερών ενός μαθητικού εγκεφάλου, της νόησης, των συναισθημάτων, των αισθήσεων. Για παράδειγμα, η μάθηση μέσω του παιξίματος ρόλων και παιχνιδιών, τυπικά αναμειγνύει τη νόηση, κάποιες από τις αισθήσεις και μια ποικιλία συναισθημάτων. Η επίτευξη ουσιαστικά της μάθησης κατακτάται μέσω όλων των παραπάνω (Andresen et al., 2000). Η βιωματική μάθηση προάγει την κοινωνική υπόσταση του μαθητή που επιστρατεύει και τη ψυχή του και το σώμα του. Σύμφωνα με τον Lave (1993), η μάθηση είναι ένα κοινωνικό φαινόμενο που στηρίζεται στην εμπειρία του μαθητή, τον καθιστά ενεργό μέλος μιας κοινωνίας, που δρα, που αναπτύσσει σχέσεις, που αναπνέει (Boaler, 2000).

6.2.3. Το Παιχνίδι των Ρόλων

Το παιχνίδι των ρόλων αποτελεί μέθοδο διδασκαλίας της βιωματικής μάθησης και είναι το προϊόν του *παίζω (θέατρο)*, του *παιχνιδιού* και της *προσομοίωσης*. Οι McSharry & Jones (2000) αναφέρουν: «Στην εκπαίδευση επιστημονικών μαθημάτων το παιχνίδι των ρόλων μπορεί να θεαθεί σαν την αλληλεπίδραση ή τον συνδυασμό

αυτών των τριών στοιχείων - οδηγώντας τον μαθητή που παριστάνει αυτή τη δραστηριότητα, στη μάθηση » .

Σύμφωνα με τον Κανίδη (2005), στην τεχνική διδασκαλίας *παιχνίδι ρόλων* όλες οι βασικές συνιστώσες προέρχονται από το *παίζω*. Το κύριο δηλαδή συστατικό της επιτυχίας αυτής της τεχνικής, στη δόμηση εννοιών και στη μάθηση, είναι ότι βασίζεται στο «παιχνίδι». Οι εκπαιδευόμενοι είναι ήδη έμπειροι στο να παίζουν και το παιχνίδι αποτελεί ένα μέσο για την ανάπτυξη γνώσης και λογικής (Piaget, 1951). Η επιθυμία για παιχνίδι και η μάθηση που συνεπάγεται, είναι το βασικό συστατικό της ανθρώπινης ψυχολογίας και αποτελεί το δυναμικό εσωτερικό παράγοντα κάθε παιδιού (Taylor 1987). Το παιχνίδι στο πλαίσιο της τεχνικής αυτής, αποκτά μια εκπαιδευτική λειτουργία όταν η σχεδίαση και η εκτέλεση της δραστηριότητας καθοδηγούνται από τον εκπαιδευτικό και ο εκπαιδευόμενος εκτελεί τη δραστηριότητα με στόχο συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (McSharry & Jones, 2000).

Το παίξιμο ρόλων εισήχθη στις Ηνωμένες Πολιτείες ως θεραπευτική διαδικασία από τον Βιεννέζο ψυχίατρο Moreno το 1930. Ο Moreno ήταν ο πρώτος που πλαισίωσε με επιστημονικό τρόπο το *παιχνίδι ρόλων* για τη μελέτη της συμπεριφοράς, την απελευθέρωση συναισθημάτων και τη θεραπεία των ασθενών του (Corsini, Shaw & Blake, 1961). Η εκπαιδευτική χρήση της τεχνικής αυτής εντοπίζεται και στη Γερμανία τη δεκαετία του 1920 για την εκπαίδευση των αξιωματικών του στρατού με εντυπωσιακά αποτελέσματα (Corsini, et al., 1961, Wohlking & Gill, 1980). Οι πρώτες δημοσιεύσεις που αφορούν στη χρήση της τεχνικής για την επίτευξη εκπαιδευτικών στόχων και στόχων κατάρτισης εμφανίζονται στην Ολλανδία την δεκαετία του 1950 (Wieringa, 1957). Στη συνέχεια η εκπαιδευτική της αξία διαδίδεται όλο και περισσότερο και σήμερα συναντάται τόσο σε Πανεπιστημιακά Προγράμματα Σπουδών, όσο και σε επιμορφωτικά προγράμματα στις επιχειρήσεις και τη βιομηχανία. Νεότερες δημοσιεύσεις περιγράφουν τη χρήση της σε ένα ευρύ πεδίο επιστημονικών θεμάτων όπως:

- στην Αναλυτική Χημεία για τη διδασκαλία της δομής των ατόμων (Walters ,1991, Laszlo, 2000).
- στη Βιολογία για τη διδασκαλία της σύνθεσης πρωτεϊνών (Stencil 1993).

- στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και ιδιαίτερα της ακολουθίας Fibonacci (Owens, 1997).
- στη διδασκαλία Αστρονομίας και Φυσικής στο Εθνικό Πανεπιστήμιο της Αυστραλίας (Francis & Byrne, 1999).
- στη Πληροφορική για τη διδασκαλία του Αλγορίθμου Ταξινόμησης των Στοιχείων (Κανίδης, 2005).

6.2.3.1 Κατηγοριοποίηση των διδασκαλιών με την τεχνική Παιχνίδι των Ρόλων

Οι McSharry & Jones (2000) αναφέρουν εφτά ευρείες κατηγορίες για το Παιχνίδι των Ρόλων. Παρακάτω παραθέτουμε αυτές τις κατηγορίες, αναφέροντας κάποια στοιχειώδη παραδείγματα.

1. **Πείραμα/Εξερεύνηση:** Μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε έμπρακτα πραγματοποιήσιμο πείραμα.
2. **Παιχνίδια:** Παιχνίδια με κάρτες, ζάρια, παιχνίδια μνήμης.
3. **Παρουσιάσεις:** Ο μαθητής παίζει έναν ρόλο κάνοντας για παράδειγμα ένα σχόλιο στην τηλεόραση
4. **Παιχνίδι Ρόλων Μεταφοράς:** Τα παιδιά μιμούνται κάποιους ήρωες, ανθρώπινα αγάλματα κ.α.
5. **Αναλογικά Παιχνίδια Ρόλων:** Χρησιμοποιούμε τους μαθητές σαν αντικείμενα ή συστατικά μιας επιστημονικής θεωρίας. Οι μαθητές καλούνται να φανταστούν ότι είναι οι ίδιοι το αντικείμενο μελέτης και ακολουθούν την πορεία του αντικειμένου.
6. **Προσομοίωση:** Είναι μια δραστηριότητα που προσπαθεί να μιμηθεί μια κατάσταση της πραγματικής ζωής. Οργάνωση συζητήσεων που ανταλλάσσουν επιχειρήματα κ.α.
7. **Θέατρο στην εκπαίδευση:** Διαδραστικές ομάδες θεάτρου που καλούν το κοινό συμμετέχει.

6.2.3.2 Πλεονεκτήματα της τεχνικής διδασκαλίας Παιχνίδι των Ρόλων

Η τεχνική διδασκαλίας Παιχνίδι των Ρόλων, είναι μια τεχνική που προκαλεί αμηχανία στους περισσότερους καθηγητές. Είναι γεγονός ότι πολλοί δάσκαλοι έχουν την τάση να προτιμούν την ασφαλή μέθοδο διδασκαλίας, όπου εκείνοι μιλούν και οι μαθητές ακούν παρά να συμμετέχουν σε μια σωματική – διανοητική δραστηριότητα που προκαλείται στην τεχνική διδασκαλία Παιχνίδι των Ρόλων (Lawrence, 1997). Θεωρούν ότι μια τέτοια είδους διδασκαλία, δεν έχει να προσφέρει και πολλά στους μαθητές, ότι οι μαθητές θα νιώσουν αμηχανία και ότι θα προκληθεί μεγάλη αναστάτωση στην τάξη. Στην πραγματικότητα όμως, το πρόβλημα είναι των καθηγητών και όχι των μαθητών καθώς οι τελευταίοι είναι σίγουρα εξοικειωμένοι με το παιχνίδι, ενώ οι πρώτοι ενδεχομένως να μην είναι.

Το παιχνίδι ρόλων σαν τεχνική διδασκαλίας συνδυάζει την ενεργητική συμμετοχή των συμμετεχόντων με τη συνεργατική και βιωματική μάθηση στα πλαίσια μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας απεικόνισης μιας πραγματικής κατάστασης. Οι συμμετέχοντες ενθαρρύνονται να εμπλακούν φυσικά και νοητικά στη διαδικασία μάθησης, να εκφράσουν τις αντιλήψεις τους μέσα σε ένα ασφαλές επιστημονικό πλαίσιο, να οικοδομήσουν τη γνώση τους σε δύσκολες, αφηρημένες και σύνθετες έννοιες της επιστήμης (Taylor, 1987).

Η θεωρία πίσω από τη χρήση του όρου «Παιχνίδι των Ρόλων» στη διδασκαλία και τη μάθηση – όπως και στους όρους «ενεργητική», «εμπειρική», «παιδοκεντρική» μάθηση - είναι ότι το παιδί ενθαρρύνεται να αναμιχθεί σωματικά και διανοητικά με το αντικείμενο της μάθησης και του επιτρέπεται τόσο να εκφραστεί σε ένα επιστημονικό πλαίσιο όσο και να κατανοήσει δύσκολες έννοιες (Taylor, 1987). Οι McSharry & Jones (2000), ασχολήθηκαν με το Παιχνίδι των Ρόλων στα επιστημονικά μαθήματα και κατέγραψαν τους λόγους που κάνουν αυτή τη μέθοδο πολύτιμο εκπαιδευτικό εργαλείο, κάποιοι από τους οποίους είναι:

- Δίνει στη διδασκαλία μία πιο συναισθηματική, δημιουργική διάσταση δίνοντας τη δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν με καταστάσεις, έμπρακτα (Watson, 1985).

- Δίνει στους μαθητές την αίσθηση ότι είναι «κάτοχοι» της εκπαίδευσής τους (Danby & Upitis, 1988), με την έννοια ότι ο μαθητής ελέγχει τη μάθηση του.
- Πολλά παιχνίδια ρόλων βασίζονται σε αναλογικά παιχνίδια, κάτι που βοηθά τα παιδιά να συλλάβουν τις έννοιες (conceptualise) και να αυξήσουν τη μάθηση τους (Lawson, 1993)

6.2.3.3. Παιχνίδι Ρόλων και Μαθηματικά

Με την εναλλακτική τεχνική διδασκαλίας *Παιχνίδι Ρόλων* δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να προσεγγίσουν τις μαθηματικές δραστηριότητες με έναν τρόπο διαφορετικό από αυτό που έχουν συνηθίσει να χρησιμοποιούν. Στην προσπάθειά τους να παίξουν το ρόλο της εμπλεκόμενης οντότητας του μαθηματικού προβλήματος, αποκτούν ενσυναίσθηση για αυτό και το αντιμετωπίζουν ευχάριστα και αποτελεσματικά. Προσομοιώνοντας μια κατάσταση, δίδεται η δυνατότητα μάθησης και σε αυτούς που συμμετέχουν και σε αυτούς που παρακολουθούν. Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές, προχωρούν σε αφαιρετικές διαδικασίες με ομαλό τρόπο.

Καθώς ο μαθητής γίνεται ο ίδιος ο ήρωας του προβλήματος, το θέατρο φαίνεται να επιζητεί μερίδιο συνεισφοράς στη λύση του. Το θέατρο άλλωστε, αποτελούσε ήδη στην Αρχαία Ελλάδα, βασικό στοιχείο της παιδείας των πολιτών, η διάδοσή του υποχρέωση της πολιτείας, η εκπαιδευτική του αξία, από τότε ακόμα αποδεκτή.

Η θεατρική φόρμα απαιτεί το χειρισμό μιας συμβολικής γλώσσας, ενός κώδικα επικοινωνίας με τον πραγματικό κόσμο. Όταν εμπλεκόμαστε σε μια θεατρική πράξη διαπραγματευόμαστε με τη φόρμα και το νόημα των συμβόλων σε πραγματικό επίπεδο όπου μέσω αναστοχαστικών συζητήσεων, εξηγήσεων και αναπαραστάσεων, κατακτούμε δεξιότητες απαραίτητες στα μαθηματικά.

Η συνεργασία Μαθηματικών και Θεάτρου, οδηγεί στην κατάκτηση νέων δεξιοτήτων. Η μαθηματική γνώση χρησιμοποιείται, δομείται, εξελίσσεται και διευρύνεται. Για τους O' Neill & Lambert (Drama Guidelines, 1977), το θέατρο μπορεί να συνεισφέρει με δυναμικό τρόπο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα κάθε Εκπαιδευτικής προσπάθειας. Είναι μια δραστηριότητα που ευνοεί τη διερεύνηση, την κριτική, την εποικοδομητική σκέψη, τη διορατικότητα, που αναδεικνύει δεξιότητες σύγκρισης, ερμηνείας, κρίσης,

παράγοντες που συνθέτουν επιμελώς όλα τα κομμάτια επίλυσης ενός προβλήματος (cited Somers J.,1994).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΔΥΟ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ: ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η φύση της γνώσης είναι ένα βασικό ερώτημα που ζητά απάντηση από τον 5^{ο} π.Χ. αιώνα. Σύμφωνα με τον Glasersfeld (1987) μέχρι τον 16^{ο} μ.Χ. αιώνα, η γνώση θεωρούνταν ότι υπήρχε ανεξάρτητα από τον γνώστη και ότι ήταν κάτι που μπορούσε να μεταφερθεί από εκείνον που γνωρίζει σε αυτόν που θέλει να μάθει. Ένα σημείο τομής που κλόνισε αυτή την αντίληψη ήταν όταν ο Κοπέρνικος διαπίστωσε ότι η γη μπορεί και να μην είναι το κέντρο του Σύμπαντος. Μία τέτοια διαπίστωση κλόνισε την ιερή και αναμφισβήτητη εικόνα του κόσμου, όπως την είχε παρουσιάσει η θρησκεία. Έκτοτε, αναπτύχθηκαν διάφορες θεωρίες που εισήγαγαν στο προσκήνιο ένα δεύτερο είδος γνώσης που προσαρμόζεται από τις παρατηρήσεις και είναι ανεξάρτητο από την πίστη και το δόγμα. Είναι η γνώση που προκύπτει από την ανθρώπινη εμπειρία και δεν παρουσιάζει μια εικόνα του «πραγματικού» κόσμου αλλά παρέχει τη δομή και την οργάνωση της εμπειρίας.

7.1. Κατασκευαστική θεωρία της μάθησης

Ο Κονστρουκτιβισμός είναι μια θεωρία μάθησης που βασίζεται στη Θεωρία της Γενετικής Εξέλιξης του Piaget. Σύμφωνα με τους Steffe & Kieren (1994), μέχρι τα μέσα περίπου της δεκαετίας του 70, οι γενετικές δομές του Piaget χρησιμοποιούνταν ως μοντέλα περιγραφής των μαθηματικών γνώσεων του παιδιού. Έπειτα, έγινε αντιληπτό ότι οι γενετικές δομές του Piaget αποτελούσαν μοντέλα ερμηνείας της συμπεριφοράς του παιδιού και ότι οι ερευνητές έπρεπε να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα προκειμένου να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς τους. Έτσι, οι ερευνητές άρχισαν να παρατηρούν και να περιγράφουν τους μηχανισμούς με τους οποίους το παιδί οικοδομεί τις μαθηματικές του γνώσεις, μέσα σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον αναπτύσσοντας με αυτόν τον τρόπο τη Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης (Κονστρουκτιβισμός).

Τυπικά, η αρχή του Κονστρουκτιβισμού τοποθετείται το 1975, όταν ο Von Glasersfeld παρουσίασε τις ιδέες του στην Εταιρεία J. Piaget της Philadelphia των Η.Π.Α., οι οποίες ήταν στηριγμένες στη Γενετική Επιστημολογία του Piaget και οδήγησαν στο Ριζοσπαστικό Κονστρουκτιβισμό (Radical Constructivism). Ωστόσο, ο Kant ήταν ο πρώτος που απέρριψε την πλατωνική θεώρηση των Μαθηματικών και προετοίμασε τις κατασκευαστικές αντιλήψεις στη φιλοσοφία και τη Διδακτική των Μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα. Ο Von Glasersfeld μάλιστα, κάνει μια σαφή αναφορά στο Kant από τη μία, και μια σαφή αναγωγή των αρχών του Κονστρουκτιβισμού από την άλλη, στη σχολή των πραγματιστών οι οποίοι στο ερώτημα-αν μπορούμε να αναγνωρίσουμε την αντικειμενική πραγματικότητα-απάντησαν πως οι γνώσεις μας είναι αληθινές μόνο στο βαθμό που ικανοποιούν τους πραγματικούς μας στόχους.

Γενικά, ο Ριζοσπαστικός Κονστρουκτιβισμός προσδιορίζεται από τις ακόλουθες δύο υποθέσεις:

- Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν συλλαμβάνεται παθητικά από το περιβάλλον.
- Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών, και όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τον γνώστη.

Η κινητήρια δύναμη για την κατασκευή της νέας γνώσης είναι πάντα μια προβληματική κατάσταση, την οποία οι υπάρχουσες γνώσεις του ατόμου δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν. Αυτή η ασυμφωνία και αστάθεια οδηγεί τον άνθρωπο σε ενεργοποίηση των ήδη υπαρχουσών γνωστικών δομών, σε τροποποίησή τους και σε κατασκευή νέων γνώσεων, προκειμένου να ερμηνευτεί και να επιλυθεί το πρόβλημα.

Η θεωρία του Κονστρουκτιβισμού περιλαμβάνει, εκτός των παραπάνω, τρεις βασικές ιδέες:

α) Οι μαθητές επινοούν προσωπικές μεθόδους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

β) Η μάθηση των Μαθηματικών συντελείται μέσα από την επίλυση προβλημάτων.

γ) Ο ρόλος της κοινωνικής ομάδας για τη μάθηση είναι καθοριστικός.

Όσον αφορά στην πρώτη ιδέα της Κατασκευαστικής Θεωρίας, έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές προτιμούν να επινοούν και να κατασκευάζουν δικούς τους τρόπους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, παρά να ακολουθούν τις υποδείξεις των καθηγητών. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν βασίζονται στις προηγούμενες τους μαθηματικές τους γνώσεις. Επομένως, κάθε μαθητής δομεί με μοναδικό τρόπο τη γνώση του και η διαφορετικότητα των μεθόδων που χρησιμοποιεί, έγκειται κυρίως στη διαφορετικότητα των προηγούμενων του γνώσεων.

Σχετικά με τη δεύτερη ιδέα του Κονστρουκτιβισμού, είναι γεγονός πως οι καταστάσεις που οι μαθητές βρίσκουν προβληματικές, προσελκύουν κατά πολύ το ενδιαφέρον τους. Τα παιδιά, ανάλογα με τη μαθηματική τους ωριμότητα και με το στάδιο νοητικής τους ανάπτυξης, προσπαθούν να επιλύσουν εκείνα τα προβλήματα που τους κάνουν αίσθηση. Με αυτόν τον τρόπο ενεργοποιείται η μάθηση και οι μαθητές αποκτούν τις διάφορες γνώσεις.

Η θεωρία του Κονστρουκτιβισμού δίνει, τέλος, μεγάλη έμφαση στο ρόλο και τη συμβολή της κοινωνικής ομάδας στην κατασκευή της γνώσης. Η διαφορά των ιδεών και των απόψεων των μελών της ομάδας προκαλεί αστάθεια, με αποτέλεσμα να γίνεται αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης και κατάκτηση της νέας μέσα σε κλίμα επικοινωνίας και συνεργασίας.

Ο Κονστρουκτιβισμός αποτελεί την πιο αποδεκτή θεωρία για τη μάθηση και τη διδασκαλία. Παρόλο που δεν έχει αναπτύξει διδακτικές τεχνικές και μεθόδους, προσεγγίζει τη διδασκαλία, περιγράφοντας τους σκοπούς και τις επιδιώξεις της. Βασική, λοιπόν, επιδίωξη της διδασκαλίας, σύμφωνα με την κατασκευαστική θεωρία, είναι η παροχή ευκαιριών και η ενθάρρυνση του μαθητή να κατασκευάζει μόνος του τις μαθηματικές γνώσεις, μέσα από την εξερεύνηση τον πειραματισμό, το σχηματισμό υποθέσεων, τη γενίκευση, την αιτιολόγηση, κ.λπ.. Μόνο έτσι μπορεί να εδραιωθεί η κατανόηση και να επέλθει η ουσιαστική μάθηση.

Μία από τις πιο σοβαρές συνέπειες του Κονστρουκτιβισμού στη διδασκαλία, είναι η αναγκαιότητα της αποδοχής ενεργητικών μεθόδων μάθησης. Για το λόγο αυτό, γίνεται απαραίτητος ο σχεδιασμός κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων. Η επαφή των μαθητών με μια νέα έννοια με τη βοήθεια της επίλυσης ενός κατάλληλου

μαθηματικού προβλήματος, τους δίνουν τη δυνατότητα να ξεφύγουν από το στενό πλαίσιο της μάθησης των μαθηματικών και τους επιτρέπουν να «κάνουν μαθηματικά» συνθέτοντας με αυτόν τον τρόπο οι ίδιοι τη γνώση τους (Yackel, Cobb και Wood, 1991; κ.λπ.).

7.1.1. Η προσέγγιση της Sfard στη διαδικασία μάθησης στα μαθηματικά

Η Sfard στηρίχτηκε στη θεωρία του Piaget και ασχολήθηκε εκτενώς με τη διαδικασία μάθησης και επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά. Γενική θεώρηση της είναι ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να προσεγγιστούν είτε δομικά είτε λειτουργικά και ότι κάποιος έχει κατανοήσει μία έννοια όταν είναι ικανός να την προσεγγίσει και με τους δύο τρόπους. Η δομική προσέγγιση έγκειται σε μια σφαιρική αντίληψη της έννοιας σε αντίθεση με τη λειτουργική που συνεπάγεται την ερμηνεία της έννοιας ως διαδικασία, ως «μια δυναμική μάλλον, παρά ως μια ενεργή οντότητα η οποία αρχίζει να υπάρχει όταν οι συνθήκες το επιβάλλουν σε μια ακολουθία δράσεων» (Sfard, 1991).

Η Sfard (1992) περιγράφει τη μετάβαση από τη «λειτουργική» («operational») στη «δομική» («structural») αντίληψη ως μια δομή τριών βημάτων:
«Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση αυτής της διαδικασίας σαν ένα συμπαγές και ανεξάρτητο όλο, και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα αντίληψης αυτής της νέας οντότητας σαν ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο».

Η Sfard αναφέρεται σε αυτά τα βήματα με τους όρους *Εσωτερίκευση* (Interiorization), *Συμπύκνωση* (Condensation) και *Εκπραγμάτωση* (Reification) αντίστοιχα. Αυτά είναι και τα βήματα που ακολουθεί κάποιος μαθητευόμενος προκειμένου να κατακτήσει μια μαθηματική έννοια ή να επιλύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Εσωτερίκευση

Σύμφωνα με τη Sfard, κάποιος έχει εσωτερικεύσει μια διαδικασία όταν μπορεί να φέρει εις πέρας νοητικές αναπαραστάσεις χωρίς να χρειάζεται να τις παρασταίνει έμπρακτα για να τις αναλύσει και να τις συγκρίνει. Ο μαθητευόμενος εξοικειώνεται

με αυτόν τον τρόπο με τη διαδικασία που δίνει υπόσταση σε ένα μαθηματικό αντικείμενο. Για να συμβεί κάτι τέτοιο, απαιτείται μεταφορά από τις έννοιες που γίνονται αντιληπτές με τις αισθήσεις, στις νοητικές έννοιες.

Συμπύκνωση

Σε αυτό το βήμα το άτομο γίνεται ολοένα και πιο ικανό να σκέφτεται τη δοσμένη διαδικασία στην ολότητά της, χωρίς να νιώθει την ανάγκη να εισέλθει σε λεπτομέρειες. Η Sfard γράφει σχετικά για την επιρροή που έχει η συμπύκνωση στην αφαίρεση: «Χάριν της συμπύκνωσης ο συνδυασμός διαδικασιών με άλλες διαδικασίες, οι συγκρίσεις και οι γενικεύσεις, γίνονται πολύ πιο εύκολες».

Εκπραγμάτωση

Σύμφωνα με τη Sfard (1992), «η φάση της συμπύκνωσης κρατάει μέχρι μία νέα οντότητα να συνδεθεί στενά σε μια συγκεκριμένη διαδικασία». Για την εκπραγμάτωση αναφέρει: « η νέα οντότητα σύντομα αποκολλάται από τη διαδικασία που την παρήγαγε και ξεκινά να αντλεί το νόημά της από το γεγονός ότι αποτελεί μέλος μιας κατηγορίας».

7.2. Κοινωνικοπολιτισμική θεωρία της μάθησης

Η Κοινωνικοπολιτιστική (sociocultural) προσέγγιση της μάθησης εκπροσωπείται από τον Vygotsky και βασίζεται στη θεωρία της διαμεσολάβησης του ανθρώπινου Νου. Συγκεκριμένα, ο Vygotsky στο βιβλίο του *Νους στην Κοινωνία* υποστηρίζει ότι οι ανθρώπινες ενέργειες διαμεσολαβούνται από τη χρήση εργαλείων και σημείων (signs). Με τον όρο σημεία, εννοεί ένα εκτεταμένο σύνολο από διαμεσολαβητικά μέσα, ένα σύνολο που περιλαμβάνει τα διάφορα συστήματα αρίθμησης, τεχνικές απομνημόνευσης συστήματα, έργα τέχνης, τη γραφή, τα σχήματα, τα διαγράμματα, τους χάρτες και τα τεχνικά σχέδια, όλα τα είδη συμβατικών σημάτων κ.α.

Ο Vygotsky, δίνει μεγάλη έμφαση στην κοινωνική και πολιτιστική θέαση της μαθηματικής δραστηριότητας, στην κοινωνική αλληλεπίδραση των μαθητών μέσα στην τάξη και θεωρεί ότι η γνώση δεν μπορεί να αναπτυχθεί μακριά από ένα κοινωνικό περιβάλλον. Πρέπει επομένως, πρώτα να μελετούνται οι κοινωνικές και οι

πολιτιστικές διαδικασίες του περιβάλλοντος ενός παιδιού, προκειμένου να κατανοηθούν οι γνωστικές τους λειτουργίες. Επίσης, η γνώση του παιδιού, οι σκέψεις, οι στάσεις, οι αξίες και οι πεποιθήσεις του προκύπτουν μέσα από τις διαδράσεις με τους άλλους, όχι με παθητική αποδοχή, αλλά με ενεργητική εσωτερίκευση.

Η κοινωνικοπολιτισμική θεωρία στηρίζεται σε τέσσερις βασικές αρχές:

α) Η γλώσσα παίζει κεντρικό ρόλο στη διανοητική ανάπτυξη.
β) Η ανάπτυξη δεν μπορεί να διαχωριστεί από το κοινωνικό της πλαίσιο.
γ) Η μάθηση μπορεί να οδηγήσει την ανάπτυξη.
δ) Τα παιδιά δομούν τα ίδια τη γνώση τους.

Ο Vygotsky κάνει διάκριση μεταξύ της συντελεσθείσας και της επικείμενης ανάπτυξης λέγοντας ότι η συντελεσθείσα ανάπτυξη αναφέρεται σε αυτά που μπορεί να κάνει το παιδί, χωρίς τη βοήθεια άλλων, ενώ η επικείμενη ανάπτυξη αναφέρεται σε εκείνα που δύναται να κάνει το παιδί υπό την καθοδήγηση ενός ενήλικα ή ενός άλλου παιδιού το οποίο προηγείται στη μάθηση και στη γνώση. Η περιοχή της δυνητική ανάπτυξης, ονομάστηκε από τον Vygotsky *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης* (ZPD: Zone of Proximal Development).

Αυτό που καθορίζει η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης, σύμφωνα με τον Vygotsky, είναι εκείνες οι λειτουργίες που δεν έχουν ωριμάσει ακόμα αλλά βρίσκονται στη διαδικασία ωρίμανσης: «πρόκειται για λειτουργίες που θα ωριμάσουν κι αύριο ακόμη, αλλά που προς το παρόν βρίσκονται σε εμβρυική κατάσταση. Αυτές οι λειτουργίες θα μπορούσαν να ορισθούν ως τα «μπουμπούκια» της ανάπτυξης μάλλον, κι όχι ως «καρποί» της ανάπτυξης. Ενώ το πραγματικό αναπτυξιακό επίπεδο χαρακτηρίζει αναδρομικά τη νοητική ανάπτυξη, η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης χαρακτηρίζει προοπτικά τη νοητική ανάπτυξη».

7.3. Σύγκριση Κονστρουκτιβιστικής και Κοινωνικοπολιτιστικής προσέγγισης

Οι διαφορές της Κονστρουκτιβιστικής από την Κοινωνικοπολιτιστική προσέγγιση είναι πολλές και σημαντικές. Στόχος της παρούσας μελέτης δεν είναι να καταγράψει έναν πλήρη κατάλογο αυτών, αλλά να καταθέσει κάποιες ενδεικτικές διαφορές που συντελούν στην καλύτερη κατανόηση των θεωριών. Μερικές από αυτές είναι οι εξής:

Η Κοινωνικοπολιτιστική προσέγγιση θεωρεί ότι η δράση παίζει καθοριστικό ρόλο στη μάθηση των μαθηματικών και οργανώνει τις μαθησιακές δραστηριότητες δίνοντας προτεραιότητα στην ομάδα. Δίνει δηλαδή έμφαση στην κοινωνική και πολιτιστική θέαση της μαθηματικής δραστηριότητας. Δράση σημαίνει συμμετοχή σε πολιτισμικά οργανωμένες πρακτικές. Αντίθετα, οι Κονστρουκτιβιστές θεωρούν ότι οι μαθητές δομούν ενεργητικά τη μαθηματική τους γνώση αναπροσαρμόζοντας την προσωπική τους εμπειρία και οργανώνουν τις μαθησιακές δραστηριότητες δίνοντας προτεραιότητα στο άτομο (Cobb, 1994).

Η Κοινωνικοπολιτιστική προσέγγιση τείνει να βγάζει τα συμπεράσματά της για τη σκέψη ενός ατόμου μελετώντας τις αντιδράσεις του σε Κοινωνικοπολιτισμικές δραστηριότητες, ενώ οι Κονστρουκτιβιστές αναλύουν τη σκέψη με όρους γνωστικών διαδικασιών που αφορούν αποκλειστικά το άτομο. Επομένως, θα μπορούσαμε να λέγαμε ότι η σκέψη για τους Κοινωνικοπολιτισμικούς θεωρητικούς τοποθετείται στην κοινωνική δράση του ατόμου, ενώ για τους Κονστρουκτιβιστές η σκέψη αναλύεται με όρους εννοιολογικής πρακτικής που επικεντρώνεται στο άτομο (Cobb, 1994).

Οι Κονστρουκτιβιστές θεωρούν ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι κυρίως μια διαδικασία ενεργητικής γνωστικής αναδιοργάνωσης. Από την άλλη μεριά, οι κοινωνικοπολιτισμικοί θεωρούν ότι η μάθηση είναι μια διαδικασία επιμόρφωσης σε μια κοινότητα πρακτικής: «Η μάθηση χαρακτηρίζεται από την υποκειμενική αναδιοργάνωση κοινωνικών μέσων και μοντέλων μέσω της διαπραγμάτευσης της έννοιας στην κοινωνική διάδραση» (Bauersfeld, 1988, σελ.39).

Λόγω των διακριτών διαφορών αυτών των προσεγγίσεων, έχουν γίνει πολλές έρευνες που είτε υποστηρίζουν τη μία προσέγγιση, είτε την άλλη. Ο Cobb (1994) αντιτίθεται στο διαχωρισμό αυτών των δύο προσεγγίσεων, θεωρεί ότι είναι συμπληρωματικές και

αναζητεί τρόπους για να συνδυάσει τη κονστρουκτιβιστική και την κοινωνικοπολιτιστική θέαση, στη μαθηματική εκπαίδευση. Πράγματι, ένας καθηγητής κατά τη διδακτική πρακτική δεν είναι υποχρεωμένος να ασπαστεί κάποια από τις δύο προσεγγίσεις. Μπορεί κάλλιστα να τις συνδυάσει και τις δύο προκειμένου να διαμεσολαβήσει ώστε οι μαθητές να δομήσουν τη γνώση τους. Η παρούσα μελέτη προτείνει διδακτικές δραστηριότητες που συνδυάζουν και τις δύο προσεγγίσεις.

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Η ΕΡΕΥΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Η ΕΡΕΥΝΑ

8.1. Εισαγωγή

Η αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων ή ασκήσεων, απαιτεί κατά κύριο λόγο την επιστράτευση της λογικής μας. Ειδικά για τα μαθηματικά του Γυμνασίου, η λογική αυτή κινείται στο στοιχειώδες πρώτο επίπεδο αυτής. Είναι σύνηθες το φαινόμενο, από τη μία μεριά οι καθηγητές να προσπαθούν να πείσουν τους μαθητές τους ότι τα Μαθηματικά που τους διδάσκουν δεν είναι δύσκολα και ότι δεν πρέπει να τα φοβούνται, αφού το μόνο που τους χρειάζεται είναι κοινός νους και κοινή λογική που την έχουν άλλωστε ήδη ανεπτυγμένη στην καθημερινή τους ζωή, και από την άλλη μεριά, τρομοκρατημένοι οι μαθητές να προσπαθούν να συλλάβουν την κοινή αυτή λογική που τους ζητείται να ενεργοποιήσουν και την πραγματική σχέση της με τα μαθηματικά.

Την ίδια στιγμή που η χρήση των γνώσεων που αποκτήθηκαν στο σχολείο κερδίζει συνεχώς έδαφος, τα Μαθηματικά αγωνιούν καθυστερημένα να αποδείξουν τη σύνδεσή τους με την πραγματικότητα. Πολλές μελέτες έχουν αποδείξει ότι βασικές αιτίες αυτής της δαιμονοποίησης των Μαθηματικών αποτελούν, τόσο ο τρόπος που διδάσκονται όσο και το είδος της προσέγγισης που συνήθως ακολουθείται (Bennet, 2006; Boaler, 2000; Boaler, 1999).

Η δόμηση του εκπαιδευτικού μας συστήματος, έχει ευνοήσει τη διδασκαλία γεγονότων που δεν επιφέρουν αμφισβήτηση, κάνοντας την απομνημόνευση και το ευλογοφανές να αρκούν για να δοθεί η σωστή απάντηση (Bennet, 2006). Σύμφωνα με τους Greeno, Smith & Moore (1993) καθώς και τον Lave (1988), οι πρακτικές της παραδοσιακής διδασκαλίας των μαθηματικών στηρίζονται σε υποθέσεις που θέλουν τη γνώση στατική και ανεξάρτητη, με την προσδοκία μιας απροβλημάτιστης μεταφοράς γνώσης (Boaler, 2000). Η επικρατούσα διδασκαλία των μαθηματικών, περιορίζεται στην απομνημόνευση στρατηγικών και μεθοδολογιών, στη μονότονη εξάσκηση αυτών μέσω ασκήσεων και αποκαλύπτει τη φανερά ισχυρή πεποίθηση των διδασκόντων ότι αυτή είναι η ικανή και σωστή μορφή βαθύτερης κατανόησης των

μαθηματικών, και αξιοποίησής τους αργότερα (χώρος εργασίας, εξετάσεις) (Boaler, 2000). Κάτι τέτοιο όμως σπάνια μπορεί να επιτευχθεί, και αυτό γιατί όσο και αν οι μαθητές εξασκούνται, εάν αυτή τους η εξάσκηση δε συνοδευτεί με αλληλεπίδραση, προσαρμογή και στοχασμό, δε θα μπορέσουν να ανασύρουν τη γνώση τους σε περιστάσεις εκτός ενός κλειστού σχολικού πλαισίου (Boaler 2000; Boaler, 1997; Greeno & MMAP, 1998). Ο Brownell (1956) τόνισε ότι η ποιότητα της εξάσκησης είναι πιο σημαντική από την ίδια την εξάσκηση. Προσεκτικά σχεδιασμένη εξάσκηση μπορεί να οδηγήσει τη σκέψη των μαθητών σε ανώτερο επίπεδο. Προωθώντας τη στείρα επανάληψη και απομνημόνευση είναι σαν να αγνοούμε το γεγονός ότι κάθε άτομο δομεί με μοναδικό τρόπο την πραγματική του γνώση, εκείνη που θέλει και μπορεί να χρησιμοποιήσει μακροπρόθεσμα.

8.2. Μεθοδολογία της έρευνας

8.2.1. Τα Ερευνητικά Ερωτήματα της Έρευνάς μας

Στην παρούσα έρευνα, προσπαθούμε να διερευνήσουμε τις λογικομαθηματικές δεξιότητες των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και να δημιουργήσουμε το περιβάλλον εκείνο που θα τους επιτρέψει να δομήσουν την προσωπική τους σκέψη αλληλεπιδρώντας με τους συμμαθητές τους. Η διερεύνηση αυτή, γίνεται με τη χρήση τριών βιωματικών μαθηματικών δραστηριοτήτων που ανήκουν στον τομέα των *Διακριτών Μαθηματικών*. Η τεχνική διδασκαλίας που χρησιμοποιήσαμε είναι το *Παιχνίδι των Ρόλων*, μία τεχνική που συνδυάζει την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών με τη συνεργατική και βιωματική μάθηση στα πλαίσια μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας που αποτελεί απεικόνιση μιας πραγματικής κατάστασης (Taylor, 1987).

Βάσει όλων των παραπάνω, πραγματοποιήθηκε Ποιοτική Έρευνα – Πείραμα Διδασκαλίας, με σκοπό τη διερεύνηση, τόσο της κατ’ ουσίαν Μαθηματικής Σκέψης των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου, όσο και της δυνατότητας δημιουργίας εκείνων των συνθηκών που θα υποκινήσουν την πρόσφορη ανάπτυξη και αφύπνιση αυτής.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν:

- Ποιους τύπους γενίκευσης χρησιμοποιεί ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου;
- Η βιωματική μάθηση μπορεί να συμβάλλει θετικά στην ανάπτυξη προχωρημένης (advanced) μαθηματικής σκέψης;

8.2.2. Το Δείγμα της Έρευνάς μας

Η έρευνα εκπονήθηκε σε ένα τυπικό δημόσιο Γυμνάσιο των Αθηνών με τη συμμετοχή 40 μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου, ηλικίας 15 χρονών. Συνολικά διήρκησε 8 διδακτικές ώρες, 40λεπτης πραγματικής διάρκειας η κάθε μία, σε δύο σχολικά τμήματα αποτελούμενα από 21 μαθητές το πρώτο και 19 το δεύτερο. Επί της διαδικασίας, ο καθηγητής των μαθηματικών, ο έχων το βάρος της καθημερινής διδασκαλίας των μαθητών, παραμένει συνήθως παρόν μέσα στην τάξη, αλλά διακριτικός και σε ελάχιστες περιπτώσεις παρεμβατικός. Ο Γυμνασιάρχης, εφόσον παρίσταται, προσπαθεί να μην επηρεάσει τη συμμετοχή των μαθητών. Η ερευνήτρια, ουσιαστικά αναλαμβάνει το ρόλο του καθηγητή μέσα στην τάξη, σ' αυτήν εκφέρουν τις απόψεις τους οι μαθητές και αυτή τους καθοδηγεί.

8.2.3. Η Διαδικασία της Έρευνάς μας

Πραγματοποιήθηκαν 3 δραστηριότητες σε δύο τμήματα της Γ΄ γυμνασίου. Σχεδιάσαμε *Βιωματικές Δραστηριότητες* καθώς δίνουν τη δυνατότητα, τόσο στους μαθητές να συνδέσουν τα μαθηματικά με την πραγματικότητα, όσο και στους ερευνητές να καταγράψουν τις τεχνικές που αυθόρμητα θέλησαν οι προηγούμενοι να επιστρατεύσουν. Η πρώτη και η δεύτερη έγινε στο τμήμα των 19 μαθητών και η τρίτη στο τμήμα των 21 μαθητών. Η πρώτη δραστηριότητα ήταν «Το πρόβλημα του Fibonacci» , η δεύτερη η «Βρες τον κανόνα» και η τρίτη «Το πρόβλημα με τα χαρτόνια». Η διάρκεια της πρώτης και της δεύτερης ήταν από 1 διδακτική ώρα (40 λεπτά). Η τρίτη χωρίστηκε σε δύο ενότητες, διάρκειας 2 διδακτικών ωρών έκαστη.

Σε όλες τις δραστηριότητες, οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο ή τριών. Τα μέλη της ομάδας, χωρίς να στερούνται της δυνατότητας συγκέντρωσης στον εαυτό τους, αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αφήνοντας τη μία ιδέα να προστίθεται στην άλλη. Μια τέτοιου είδους προσθετική αλληλεπίδραση οδηγεί σε αξιοσημείωτα αποτελέσματα που ο καθένας σαν μονάδα δε θα μπορούσε τόσο εύκολα να προσεγγίσει.

Η προσέγγιση της έρευνάς μας, συμμερίζεται τη θέση του Cobb (1994) και δίνει βήμα στη συνεργασία της Κονστρουκτιβιστικής και Κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης, δίνοντας άλλοτε την ευκαιρία στο μαθητή να οικοδομήσει μόνος του τη γνώση και άλλοτε τη δυνατότητα να οδηγηθεί σε συμπεράσματα αλληλεπιδρώντας με τους συμμαθητές του.

Οι μαθητές δρώντας άλλοτε ως μονάδες και άλλοτε ομαδικά, συζητούν με την ερευνήτρια τις απόψεις τους, τις επαναπροσδιορίζουν και τις οργανώνουν, γράφοντας τις σε φύλλο εργασίας που τους έχει δοθεί. Όλη η τάξη, συμμετέχει σε έναν ανοικτό διάλογο πάνω στα θέματα που μόλις διαπραγματεύτηκε. Οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών, αποτελούν δυνητικά μέσα για να υποστηριχτεί η προοδευτική αναδιοργάνωση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας τους. Διεργασίες δηλαδή συμβατές και με την άποψη των Lave (1988, 1996) και Brandsford et al. (in press) που υποστηρίζουν ότι η γνώση δεν αποτελεί πλέον ένα απλό στατικό και μοναδικό χαρακτηριστικό κάθε ατόμου, αλλά κάτι που μοιράζεται μεταξύ των ατόμων σύμφωνα με τις δράσεις και τα συστήματα του περιβάλλοντός τους (Boaler, 2000). Όπως άλλωστε υποστήριξε και ο Cobb (2008), οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών κατά τις διενέξεις τους για τις ερμηνείες των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν, δίνει ώθηση σε ευκαιρίες μάθησης και αναδιοργάνωσης της επιχειρηματολογίας για την επίλυση διαπροσωπικών διαφωνιών.

Μελετάμε τον τρόπο που επιχειρηματολογούν οι μαθητές του δείγματος μας, αναζητώντας τις λογικές δομές στα λεγόμενά τους. Θεωρούμε ότι οι μαθητές πολλές φορές εγκλωβίζονται στα τυπικά βήματα μιας απόδειξης και δεν μπορούν να εκφραστούν ελεύθερα, φοβούμενοι ότι ξεφεύγουν από την επισημότητα της απόδειξης. Μία απόδειξη όμως δεν μπορεί να στηθεί αν από πίσω δεν υπάρχει το υπόβαθρο της ορθής επιχειρηματολογίας. Πολλές φορές ζητάμε από τους μαθητές

μας να κάνουν μία απόδειξη χωρίς να τους έχουμε δώσει την ευκαιρία να επιχειρηματολογήσουν χρησιμοποιώντας τα δικά τους εκφραστικά μέσα, που δεν θα είναι μόνο τα μαθηματικά σύμβολα αλλά και η ίδια τους η γλώσσα. Η πειραματική έρευνα (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti,. 1996) έχει δείξει ότι η απόδειξη γίνεται περισσότερο «προσβάσιμη» από τους μαθητές όταν έχει προηγηθεί εκτενής συζήτηση πάνω στο πρόβλημα και ανάπτυξη επιχειρηματολογίας για τη διατύπωση της εικασίας. Δεν υποτιμούμε σε καμία περίπτωση την αξία της τυπική μαθηματικής απόδειξης, θεωρούμε όμως ότι είναι υψίστης σημασίας να μπορούν οι μαθητές να επιχειρηματολογούν σε πρώτη φάση. Δε ζητάμε από τους μαθητές να ακολουθήσουν τα τυπικά βήματα μιας απόδειξης. Ζητάμε να πάνε ένα βήμα πριν και να επιχειρηματολογήσουν χρησιμοποιώντας τη λογική τους. Αναρωτιόμαστε σε ποιο βαθμό είναι αναπτυγμένη μια τέτοια δεξιότητα όταν είναι απαλλαγμένη από τον τυπικό μαθηματικό συμβολισμό. Δεν ενδιαφερόμαστε για τη μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη. Ικανοποιούμαστε από μια ορθή επιχειρηματολογία και τη θεωρούμε ισάξια με την απόδειξη. Συμφωνούμε με την άποψη της Pedemonde που θεωρεί ότι η απόδειξη είναι μια ειδικού τύπου επιχειρηματολογία. Επιλέγουμε ανοικτά προβλήματα που απαιτούν προσεκτική επιχειρηματολογία, ώστε να δικαιούται ο ομιλητής να θεωρεί ότι μιλάει με βεβαιότητα και ότι δεν εικάζει. Τα επιχειρήματά τους είναι και η ίδια η απόδειξη. Δημιουργούμε ένα ευνοϊκό διδακτικό περιβάλλον, δίνοντας τους βιωματικές δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες εν' είδει παιχνιδιού δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές, αρχικά να εκφράσουν κάποιες ιδέες – εικασίες και στη συνέχεια να επιχειρηματολογήσουν για να αποδείξουν τη θέση τους.

Μεγάλο λοιπόν μέρος της έρευνάς μας, ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν δυνατά και να επιχειρηματολογήσουν βασιζόμενοι σε πράγματα που προκύπτουν από τα λεγόμενά τους και όχι σε μη τεκμηριωμένες εικασίες. Ήταν αρκετές οι φορές που τα λεγόμενα τους δε στηρίζονταν σε λογικές αιτιολογήσεις και μόνο όταν η ερευνήτρια τους ζητούσε να σκεφτούν αν αυτό που δηλώνουν είναι εικασία ή βεβαιότητα κάποιοι από αυτούς αναθεωρούσαν.

Προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε τα λεγόμενα των μαθητών και να γίνουν αυτά, τα εργαλεία ενός ασφαλούς συμπεράσματος για τον τρόπο που σκέφτεται ο καθένας. Ο Von Glasersfeld (1995) χαρακτηριστικά επεσήμανε ότι:

> Ο δάσκαλος πρέπει να ακούει το μαθητή, να εξηγεί τι κάνει και τι λέει, και να προσπαθεί να κατασκευάσει το μοντέλο των αντιληπτικών δομών του. Είναι ένα τόλμημα το οποίο ενδέχεται να αποδειχθεί λαθεμένο. Αλλά χωρίς αυτό, η όποια προσπάθεια να αλλάξουν οι γνωσιακές δομές του μαθητή, μπορεί να μην είναι τίποτα περισσότερο από μια τυχαία κίνηση. Στην προσπάθεια να φτάσει σ' ένα βιώσιμο μοντέλο της σκέψης του μαθητή, είναι σημαντικό να θεωρήσει πως οτιδήποτε κάνει ή λέει ο μαθητής στα πλαίσια της λύσης ενός προβλήματος, είναι όλα όσα, προς στιγμήν, έχουν νόημα για αυτόν. Μπορεί να μην κάνουν αίσθηση στο δάσκαλο, αλλά αν δεν μπορεί ο τελευταίος να δώσει μιαν εξήγηση ή να εικάσει τον τρόπο που έφτασε ο μαθητής στην απάντηση, οι ευκαιρίες να προσδιορίσει τις γνωσιακές μαθητικές δομές γίνονται ελάχιστες (Von Glasersfeld 1995, σελ.15).

Επομένως, τα λεγόμενα του μαθητή μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για το τι συμβαίνει στο μυαλό του εκείνη τη στιγμή, δηλαδή για το τι «επεξεργάζεται» στη βραχυπρόθεσμη μνήμη του, και κατά συνέπεια τη δυνατότητα να διεξάγουμε συμπεράσματα για τις αντιληπτικές του δομές. Ερωτήματα που επιζητούν απαντήσεις μέσω Μαθηματικών Δραστηριοτήτων στον τομέα των Διακριτών Μαθηματικών (Δ.Μ.).

Ερευνητικά Εργαλεία

Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

- Οι *βιντεοσκοπημένες δοκιμασίες* που έγιναν στα δύο τμήματα της Γ΄ Γυμνασίου. Στη συνέχεια αυτές αποβιντεοσκοπήθηκαν και επιλέχθηκαν κάποιοι χαρακτηριστικοί διάλογοι για ανάλυση. Σεβόμενοι τα προσωπικά δεδομένα του κάθε μαθητή, τα ονόματα που χρησιμοποιούμε κατά την ανάλυση είναι πλασματικά. Στους διαλόγους, όταν γράφουμε «…», εννοούμε ότι έγινε παύση πάνω από 3 δευτερόλεπτα. Ονομάζουμε επεισόδια όλα τα αναλυόμενα γεγονότα.
- Τα *φύλλα εργασίας* που μοιράστηκαν στους μαθητές.

Ανάλυση Δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων μας, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι ποιοτική – ερμηνευτική. Οι βασικές θεωρίες που χρησιμοποιούμε, πλαισιώνονται από τη θεωρία των Harel (2001), των Harel & Sowder (1998, 2005) και τη θεωρία του Radford (2003).

Ειδικότερα, το πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα:

«Ποιους τύπους γενίκευσης χρησιμοποιεί ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου;»

Προσεγγίζεται με τη θεωρία του Harel (2001) και τη θεωρία του Radford (2003) για τα είδη γενίκευσης. Κάποιες φορές, αναλύουμε τα δεδομένα μας, συνδυάζοντας αυτές τις δύο θεωρίες. Όπως προαναφέραμε, ο Harel όρισε δύο τύπους γενίκευσης στα αναδρομικά προβλήματα:

α) Τη *γενίκευση της διαδικασίας* (process pattern generalization), όπου το υποκείμενο γενικεύει παρατηρώντας, κατανοώντας και ερμηνεύοντας την επανάληψη της διαδικασίας.

β) Τη *γενίκευση του αποτελέσματος* (result pattern generalization), όπου το άτομο γενικεύει παρατηρώντας μια κανονικότητα στα αποτελέσματα όπου την επαληθεύει εμπειρικά κάνοντας άμεσες μετρήσεις και αντικαταστάσεις.

Από την άλλη μεριά, ο Radford (2003) διακρίνει τρία είδη γενίκευσης:

α) Την *αναφερόμενη σε γεγονότα γενίκευση* (factual generalization), όπου το υποκείμενο παρατηρεί και γενικεύει την αριθμητική ενέργεια.

β) Τη *γενίκευση εντός πλαισίου* (contextual generalization), όπου το υποκείμενο γενικεύει τα αντικείμενα των αριθμητικών ενεργειών.

γ) Τη *συμβολική γενίκευση* (symbolic generalization), που περιλαμβάνει την κατανόηση και χρησιμοποίηση της αλγεβρικής γλώσσας.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα:

«Η βιωματική μάθηση μπορεί να συμβάλλει θετικά στην ανάπτυξη προχωρημένης (advanced) μαθηματικής σκέψης;»

Προσεγγίζεται με τη βοήθεια της θεωρίας των Harel & Sowder (2005) που πρότειναν ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν τη μαθηματική σκέψη είναι οι *πεποιθήσεις* τους για τα μαθηματικά, ο *τρόπος προσέγγισης των προβλημάτων* και τα *αποδεικτικά* τους *σχήματα*.

Θεωρούμε ότι μελέτη αυτών των τριών παραγόντων σε κάθε δραστηριότητα, θα μας διαφωτίσει κατά πόσο η βιωματική μάθηση συμβάλλει θετικά στην ανάπτυξη προχωρημένης μαθηματικής σκέψης. Ειδικά για τα αποδεικτικά σχήματα, η προσεγγίζεται με βάση τη θεωρία των Harel & Sowder (1998). Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1998) υπάρχουν τρία είδη αποδεικτικών σχημάτων:

α) Τα *εξωτερικά αποδεικτικά σχήματα*, όπου οι μαθητές πείθουν τον εαυτό τους και τους άλλους αναφερόμενοι σε εξωτερικές πηγές.

β) Τα *εμπειρικά αποδεικτικά* σχήματα, που οι μαθητές βασίζονται σε ενδείξεις που απορρέουν είτε από αυτό που αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τους είτε από παραδείγματα προερχόμενα από άμεσες μετρήσεις.

γ) Τα αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα όταν η επικύρωση μιας πρότασης επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης λογικών συνεπαγωγών που είτε είναι μετασχηματιστικές είτε είναι αξιωματικές.

8.2.4. Οι Δραστηριότητες της Έρευνάς μας

Οι δραστηριότητες προτάθηκαν, σχεδιάστηκαν και πραγματοποιήθηκαν με πρωτοβουλία της ερευνήτριας και συγγραφέα της εργασίας, με την ουσιαστική συμβολή και καθοδήγηση του επιβλέποντος καθηγητή της Σπύρου Παναγιώτη. Πιο συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες της παρούσας εργασίας αποτελούν το αποκύημα του ερευνητικού ενδιαφέροντος του καθηγητή κύριου Σπύρου και της ερευνήτριας για τη δημιουργία εναλλακτικών μαθησιακών περιβαλλόντων που εισάγουν τις τέχνες

στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην εκπόνηση της πρακτικής πλευράς της έρευνας όσο και του θεωρητικού μέρους αυτής συνέβαλλε με εποικοδομητικό τρόπο η διττή ιδιότητα της ερευνήτριας, ως καθηγήτριας των μαθηματικών και ως ηθοποιού.

Σχεδιάστηκαν διδασκαλίες εναλλακτικές, βασιζόμενες στις τρεις παιδαγωγικές αρχές του Harel (2001): την *αρχή της δυαδικότητας*, την *αρχή της αναγκαιότητας* και την *αρχή της επαναλαμβανόμενης επιχειρηματολογίας* (DNR). Οι μαθητές οδηγούνται στη Βιωματική Μάθηση, στη διανοητική και συναισθηματική κινητοποίησή τους, στην αρτίωση της νοητικής και συγκινησιακής διεργασίας. Οι βιωματικές μαθησιακές διαδικασίες προάγουν την ενεργό συμμετοχή τους, την απελευθέρωση της δημιουργικότητάς τους, την ανάληψη ευθύνης για την πορεία της μάθησής τους, την ενίσχυση της κριτικής τους σκέψης και της συνειδητότητάς τους (Δεδούλη, σελ.146).
Το ενδιαφέρον τους εντείνεται, ξεδιπλώνουν τη σκέψη τους, αναπτύσσουν στρατηγικές, επιχειρηματολογούν και συζητούν κάτω από την ομπρέλα ενός παιχνιδιού. Οικοδομούν τη *Μαθηματική Γνώση* καθώς προσπαθούν να αποκτήσουν αίσθηση του εκάστοτε προβλήματος. Δύσκολα μαθηματικά προβλήματα, μέσω μιας τέτοιας μορφής προσέγγισης, καθίστανται πλέον προσβάσιμα στα παιδιά.

Παρόλο που οι προτεινόμενες δοκιμασίες της έρευνάς μας, δεν μπορούν να μεταφερθούν απτές στην πραγματικότητα, δίνουν σίγουρα τον πρωταγωνιστικό ρόλο στους μαθητές, κάνοντας τους μέρος αυτών, ωθώντας τους ταυτόχρονα στη λύση της όποιας προβληματικής κατάστασης. Η δοκιμασία εξελίσσεται ρεαλιστικά στη φαντασία του μαθητή, βάζοντάς τον βαθιά στο *μυθοπλαστικό* επίπεδο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών.

Επιδίωξη, η εξεύρεση νέων τρόπων αύξησης του ενδιαφέροντος των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου για τα Μαθηματικά με παράλληλη ανάπτυξη πρόσθετων δεξιοτήτων όπως:

- παρατηρητικότητα
- συντήρηση προσοχής
- δύναμη αυτοσυγκέντρωσης
- επιμονή
- πρωτοβουλία

- δημιουργική φαντασία και
- πνευματική καλλιέργεια.

Απώτερος στόχος, να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές τη στενή σχέση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα, να αναπτύξουν μεθοδολογικές δεξιότητες για την αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων και να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά έχουν τη δύναμη της επικοινωνίας και της εξήγησης.

Τα προβλήματα που δόθηκαν, δεν ανήκουν στην κατηγορία των τυπικών μαθηματικών προβλημάτων που συναντούμε στο σχολικό εγχειρίδιο. Κανένα δηλαδή ουσιαστικά μέρος της ύλης του αναλυτικού προγράμματος, δεν αντιστοιχίζεται εμφανώς και έκδηλα με τις εμπειρίες εκτέλεσης μιας δοθείσας δραστηριότητας. Μία τέτοια ιδέα συνάδει και με την άποψη των Cobb, Zhao & Visnovska (2008) που συνιστούν την καλλιέργεια μιας προοδευτικής ανάπτυξης της μαθηματικής επιχειρηματολογίας των μαθητών, που θα τείνει σταδιακά στις ήδη εγκαθιδρυμένες και παρούσες μαθηματικές πρακτικές ανά τους αιώνες, προτείνοντας ουσιαστικά
μια προσέγγιση πιο κοντά στο συνεχές χτίσιμο προς την ουσιαστική συμμετοχή στις εγκαθιδρυμένες μαθηματικές πρακτικές, παρά στην απόπειρα να γεφυρωθούν οι παροντικές κατανοήσεις των μαθητών με τις εγκαθιδρυμένες μαθηματικές ιδέες και παραδόσεις (Cobb et al. ; 2008)

Οι μαθητές της έρευνάς μας αναπτύσσουν Μαθηματική Σκέψη όταν καλούνται να παρατηρήσουν, να κατανοήσουν την κανονικότητα της διαδικασίας στην οποία υποβάλλονται και να οδηγηθούν σε μία σχέση που είτε αποδίδεται φραστικά (Το πρόβλημα του Fibonacci), είτε με την εύρεση ενός Μαθηματικού τύπου (Βρες τον Κανόνα). Καλούνται να διακρίνουν όλες τις πιθανές περιπτώσεις ενός προβλήματος και να αναλύσουν τι θα συνέβαινε σε κάθε μία από αυτές (Το πρόβλημα με τα Χρωματιστά Χαρτόνια). Καλούνται σε τελική ανάλυση να συνειδητοποιήσουν και να εκφράσουν γλωσσικά τη σκέψη τους.

Σε ένα τυχαίο παιχνίδι μπορεί να έδρατταν με σκέψη, δε θα εξηγούσαν όμως και δε θα αποκάλυπταν τα μονοπάτια που τους οδήγησαν στην πράξη. Αν πάλι διαπραγματευόντουσαν μόνο μαθηματικές έννοιες, η δράση τους θα περιοριζόταν σε

κάποια αποτελέσματα που θα αποτύπωναν στο χαρτί. Τώρα όμως χρειάζεται να κινηθούν στο χώρο, τα μαθηματικά να γίνουν εργαλείο για να παίξουν και όχι νοητικό κατασκεύασμα για να εξασκηθούν. Αυτό τους προσφέρει μεγαλύτερη χαρά, τους κάνει να νιώσουν ότι τα μαθηματικά μπορούν να τους βοηθήσουν, ότι η λογική, που είναι μαθηματικά, τους είναι απαραίτητη.

Παρακάτω γίνεται αναλυτική παρουσίαση των τριών δραστηριοτήτων.

8.2.4.1. Το Πρόβλημα του Fibonacci

Η δραστηριότητα αφορά στην επίλυση ενός προβλήματος που ο Ιταλός μαθηματικός *Fibonacci* (1202) έθεσε:

«Ένα ζευγάρι λαγουδάκια τοποθετείται σε έναν κλειστό χώρο στην αρχή ενός έτους. Κάθε μήνα το θηλυκό ενός ζευγαριού γεννάει ένα καινούργιο ζευγάρι λαγουδάκια διαφορετικού φύλου. Πόσα ζευγάρια λαγουδάκια θα έχουμε μετά από ένα χρόνο, αν υποθέσουμε ότι το πρώτο ζευγάρι γεννάει τον επόμενο μήνα και κάθε μήνα κάθε ζευγάρι παράγει ένα νέο ζευγάρι, το οποίο ξεκινά να γεννά δύο μήνες μετά τη δική του γέννηση;»

Πρόκειται για ένα αναδρομικό επαγωγικό πρόβλημα (Harel, 2001) του οποίου το ενδιαφέρον έγκειται στην τελική παρατήρηση ότι, *κάθε μήνα τα ζεύγη, είναι ουσιαστικά το άθροισμα των ζευγών των δύο προηγούμενων μηνών*. Τα αποτελέσματα κάθε μήνα αποτελούν μια ακολουθία αριθμών, γνωστή ως ακολουθία του Fibonacci.

Η ακολουθία Fibonacci είναι η ακολουθία αριθμών στην οποία ο κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Παράγεται από τη σχέση $f(\nu) = f(\nu-1) + f(\nu-2)$, για $\nu = 3,4,5,\ldots$ με $f(1) = 1$ και $f(2) = 1$. Η παραπάνω ακολουθία σχετίζεται άμεσα με το χρυσό αριθμό «φ». Πράγματι, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει προς τον αριθμό $\varphi = 1.618033989$, που έχει ως αντίστροφο τον $1/\varphi = 0.618033989$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $1/\varphi = \varphi-1$. Ο χρυσός αριθμός «φ» ανιχνεύθηκε για πρώτη φορά από τους αρχαίους Έλληνες οι οποίοι παρατήρησαν ότι όλα πάνω στη γη, από τα φυτά μέχρι το ίδιο το ανθρώπινο σώμα, αναπτύσσονται βάσει μίας αναλογίας του αριθμού

αυτού. Ένα ορθογώνιο τετράπλευρο του οποίου ο λόγος των πλευρών είναι ίσος με 1/φ ονομάζεται Χρυσό Ορθογώνιο και η αναλογία αυτή "Χρυσή Αναλογία".

Το πρόβλημα του Fibonacci έχει απασχολήσει πολλούς μαθηματικούς όσον αφορά την εκπαιδευτική εκμετάλλευση αυτού. Η διδακτική μας πρόταση διαφέρει από αυτές που συναντήσαμε σε δύο κυρίως σημεία: α) η προσέγγισή μας είναι βιωματική, καθώς οι ίδιοι οι μαθητές παριστάνουν τα λαγουδάκια, β) οι εκπαιδευτικές προτάσεις που συναντήσαμε, χώριζαν τα λαγουδάκια σε δύο κατηγορίες. Σε αυτά που μόλις γεννιούνται και στα υπόλοιπα. Ο Kowalczyk (1997) στο συνέδριο που πραγματοποιήθηκε για τα διακριτά μαθηματικά (DIMACS) παρουσίασε μια πρόταση που η οργάνωση των ζευγαριών πραγματοποιούνταν με τη βοήθεια ενός διαγράμματος. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα καταχωρούνταν σε έναν πίνακα που περιλάμβανε δύο κατηγορίες από λαγουδάκια, τα λαγουδάκια ενήλικες και τα λαγουδάκια μωρά. Αυτές οι ονομασίες αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης και για τη δική μας εργασία, με τη διαφορά όμως ότι εμείς προσθέσαμε άλλη μία κατηγορία που την ονομάσαμε τα λαγουδάκια έφηβοι. Αυτό έγινε γιατί παρατηρήσαμε ότι η κατηγορία ενήλικες περιλάμβανε δύο υποκατηγορίες, τα λαγουδάκια ενήλικες που γεννούν και τα λαγουδάκια ενήλικες που δε γεννούν. Εύλογο θα ήταν επομένως, οι μαθητές να μπερδευτούν σε αυτή την κατηγορία και για να αποφευχθεί κάτι τέτοιο, προσθέσαμε την κατηγορία λαγουδάκια έφηβοι, που περιλαμβάνει τα λαγουδάκια που γεννήθηκαν τον προηγούμενο μήνα και δεν είναι σε θέση να γεννήσουν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα, παρόλο που στην αρχή φαίνεται απλό, στην πορεία γίνεται πολύπλοκο χρήζοντας απαραίτητη την ταξινόμηση των νέων δεδομένων που προκύπτουν κατά την επίλυσή του. Από την αρχή κιόλας της δραστηριότητας διευκρινίστηκε στους μαθητές ότι δεν κρίνονται για αυτά που θα πουν και ότι είναι ζητούμενο για την έρευνά μας να εκφέρουν ελεύθερα τη γνώμη τους ώστε να γίνει εφικτή η μελέτη του τρόπου που σκέφτονται. Κατά την εξέλιξη αυτής της δραστηριότητας διατυπώθηκαν διάφορες απόψεις για τα μαθηματικά θέματα που εμφανίστηκαν, κάτι που μας έδωσε την ευκαιρία να μελετήσουμε τον τρόπο που συλλογίζονται καθώς και τον τρόπο που γενικεύουν. Επιπλέον, οι προσπάθειες των μαθητών κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος μας οδήγησαν στο να αναλογιστούμε ποιοι είναι οι παράγοντες που συντελούν στην επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος.

Ερευνητικό εργαλείο της μελέτης, αποτέλεσε η βιντεοσκόπηση και στη συνέχεια η αποβιντεοσκόπηση της δραστηριότητας. Βασιζόμενοι στην πεποίθηση ότι, βιώνοντας οι μαθητές τις συνθήκες του προβλήματος θα μπορέσουν να βάλουν σε μια τάξη τα δεδομένα τους και θα οδηγηθούν σχεδόν αβίαστα στη λύση του προβλήματος, η *βιωματική μάθηση* θεωρήθηκε ως η πιο κατάλληλη μέθοδος.

8.2.4.1.1. Υλοποίηση

Η υλοποίηση γίνεται σε μία διδακτική ώρα, σε μία αίθουσα του σχολείου με τα θρανία τοποθετημένα στο πίσω μέρος αυτής, σε σχήμα «Π». Στο δάπεδο της αίθουσας σημειώνονται, με χρήση χαρτοταινίας, τρεις θέσεις Α, Β και Γ.

Α. Στην πρώτη θέση βρίσκονται τα λαγουδάκια – ενήλικες (που γεννάνε),
Β. Στη δεύτερη, τα λαγουδάκια – έφηβοι,
Γ. Στην τρίτη, τα λαγουδάκια – μωρά.

Η δραστηριότητα, χωρίζεται σε τέσσερις διακριτές φάσεις:
α) Σκέψη πάνω στο πρόβλημα και συζήτηση.
β) Οργάνωση των δεδομένων του προβλήματος σε πίνακα τιμών.
γ) Βιωματική προσέγγιση του προβλήματος.
δ) Παρατήρηση και ανάλυση του πίνακα τιμών.

Στην αρχή της κάθε φάσης, οι μαθητές ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις του προβλήματος ικανοποιητικά, με την πάροδο του χρόνου όμως τα δεδομένα γίνονταν ολοένα και πιο πολύπλοκα με αποτέλεσμα, η ανάγκη για έναν νέο τρόπο προσέγγισης του προβλήματος να γίνεται αναπόφευκτη. Παρεμβαίνουμε λοιπόν και μεταβαίνουμε στην επόμενη φάση, μόνο αφού ικανοποιήσουμε την αρχή της αναγκαιότητας που εισήγαγε ο Harel και που αναφέρει ότι:

> Η αρχή της αναγκαιότητας […] ισχυρίζεται ότι «*Οι μαθητές είναι πιθανό να μάθουνε, αν καταλάβουν την ανάγκη για αυτό που πρόκειται να μάθουν, εννοώντας με τον όρο*

ανάγκη τη διανοητική ανάγκη σε αντίθεση με την κοινωνική ή οικονομική ανάγκη» (Harel, 1985, 1990, 1998) (Harel, 2001, σελ. 207-208).

Α. Σκέψη πάνω στο πρόβλημα και συζήτηση

Σε κάθε μαθητή, μοιράζεται σε φύλλο Α4 το πρόβλημα του Fibonacci (βλ. Παράρτημα) ελαφρώς απλοποιημένο, έτσι ώστε να επιτευχθεί εύκολη κατανόηση του προβλήματος. Η ακριβής μορφή στην οποία δίδεται το πρόβλημα έχει ως εξής:

«*Στην αρχή ενός έτους, ένα ζευγάρι λαγουδάκια τοποθετείται σε ένα κλειστό χώρο. Κάθε μήνα το θηλυκό του ζευγαριού γεννάει ένα νέο ζευγάρι λαγουδάκια διαφορετικού φύλου.*

Θεωρούμε ότι:

- *Το πρώτο ζευγάρι θα γεννήσει τον επόμενο μήνα και έκτοτε θα γεννάει κάθε μήνα.*
- *Όλα τα υπόλοιπα ζευγάρια θα γεννούν δύο μήνες μετά τη δική τους γέννηση και έκτοτε κάθε μήνα.*

Πόσα ζευγάρια λαγουδάκια θα έχουμε μετά από ένα χρόνο; »

Οι μαθητές χωρίζονται σε ζευγάρια για να σκεφτούν το πρόβλημα και να ανταλλάξουν απόψεις. Στη συνέχεια, γίνεται συζήτηση πάνω στα δεδομένα και στο ζητούμενο του προβλήματος, προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν κατανοήσει το πρόβλημα.

Τα παιδιά παροτρύνονται να χωρίσουν τα λαγουδάκια σε 3 κατηγορίες: τα λαγουδάκια-μωρά, τα λαγουδάκια-έφηβους και τα λαγουδάκια-ενήλικες (που γεννούν). Αρχική προσπάθεια, να βρουν κάθε μήνα πόσα λαγουδάκια υπάρχουν στην κάθε κατηγορία. Τους δύο πρώτους μήνες οι μαθητές μπόρεσαν εύκολα να υπολογίσουν πόσα λαγουδάκια θα υπάρχουν, υπολογίζοντας πόσα ζευγάρια θα είχαν στην κάθε κατηγορία. Το μήνα Μάρτιο όμως, καθώς τα λαγουδάκια αυξάνονταν στην κάθε κατηγορία, τα πράγματα έγιναν πιο σύνθετα και οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να υπολογίσουν πόσα λαγουδάκια θα υπάρχουν στο σύνολό τους. Για το λόγο αυτό,

περάσαμε στην επόμενη φάση του προβλήματος που ήταν η οργάνωση των δεδομένων σε έναν πίνακα τιμών.

Β. Πρώτη Παρέμβαση: Οργάνωση των δεδομένων του προβλήματος σε πίνακα τιμών

Ένας μαθητής σηκώνεται στον πίνακα και αναλαμβάνει να σχεδιάσει έναν πίνακα τιμών με τα αποτελέσματα που προκύπτουν κάθε μήνα. Ταυτόχρονα, η ερευνήτρια μοιράζει ένα δεύτερο φύλλο εργασίας που περιλαμβάνει τον πίνακα τιμών ασυμπλήρωτο. Στη συνέχεια, ο μαθητής συμπληρώνει τον πίνακα καθ' υπόδειξη των συμμαθητών του.

Μήνας	**Ζεύγη Μωρών**	**Ζεύγη Εφήβων**	**Ζεύγη Ενηλίκων**	**Συνολικά Ζεύγη**
Ιανουάριος	0	1	0	1
Φεβρουάριος	1	0	1	2
Μάρτιος	1	1	1	3
Απρίλιος				
Μάιος				
Ιούνιος				

Παρόλο που ο πίνακας φαίνεται να βοηθάει αρκετά στην αρχή, οι μαθητές υπολόγισαν με σχετική δυσκολία τα λαγουδάκια του μήνα Μαρτίου. Η ανάγκη μιας νέας προσέγγισης, φαίνεται πια επιτακτική. Αυτή κρίνεται και η κατάλληλη στιγμή για τη δεύτερη παρέμβαση, που είναι η έναρξη της βιωματικής προσέγγισης του προβλήματος.

Γ. Δεύτερη παρέμβαση: Βιωματική προσέγγιση του προβλήματος

Οι μαθητές καλούνται πλέον να υποδυθούν οι ίδιοι τα λαγουδάκια με σκοπό η ερευνήτρια να συνεχίσει να συμπληρώνει τον πίνακα-μετά το μήνα Μάρτιο-καθ'

υπόδειξη των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, ένα ζευγάρι παιδιών υποδύεται τα πρώτα λαγουδάκια. Τίθεται το ερώτημα σε ποια θέση από τις τρεις που αναγράφονται στο δάπεδο της αίθουσας πρέπει να πάει το πρώτο ζευγάρι. Οι μαθητές δε δυσκολεύτηκαν και απάντησαν ότι η θέση Β ήταν η κατάλληλη. Με αυτόν τον τρόπο βρήκαν ότι τον Ιανουάριο θα έχουμε ένα ζευγάρι λαγουδάκια.

Α(ενήλικες)	**Β(έφηβοι)**	**Γ(μωρά)**
	1 ζευγ.	

Το δεύτερο μήνα, το πρώτο ζευγάρι αντιλήφθηκε ότι έπρεπε να πάει στη θέση Α και ότι πρέπει να έρθει ένα άλλο ζευγάρι που θα υποδυθεί τα λαγουδάκια που θα γεννήσουν. Οι δύο νέοι εθελοντές που υποδύονται το νέο ζευγάρι, κατέλαβαν σωστά τη θέση Γ και εύκολα συμπέραναν ότι το σύνολο των ζευγαριών του δεύτερο μήνα, ήταν δύο.

Α(ενήλικες)	**Β(έφηβοι)**	**Γ(μωρά)**
1 ζευγ.		1 ζευγ.

Τον τρίτο μήνα, που εμφανίστηκε και η μεγαλύτερη δυσκολία ακολουθώντας τις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις, οι μαθητές γνωρίζουν πλέον πολύ καλά ποιες θέσεις πρέπει να καταλάβουν και έτσι το ζευγάρι της θέσης Γ μετατίθεται στη θέση Β, το ζευγάρι της θέσης Α γεννάει ένα νέο ζευγάρι και δύο νέοι εθελοντές καλύπτουν τη θέση Γ. Έτσι, υπολογίζουν ότι τον τρίτο μήνα θα έχουμε συνολικά 3 ζευγάρια.

Α(ενήλικες)	**Β(έφηβοι)**	**Γ(μωρά)**
1 ζευγ.	1 ζευγ.	1 ζευγ.

Τον τέταρτο μήνα, το ζευγάρι της θέσης Γ, μπερδεύεται και λέει ότι θα γεννήσει, οι υπόλοιποι όμως αντιδρούν υποστηρίζοντας ότι κάτι τέτοιο δε θα μπορούσε να συμβεί. Στη συνέχεια, το ζευγάρι της θέσης Γ αντιλαμβάνεται επιτυχώς ότι πρέπει να μεταφερθεί στη θέση Β και το ζευγάρι της θέσης Β στη θέση Α. Αντιλαμβάνονται ότι τα δύο ζευγάρια της θέσης Α δίνουν δύο νέα ζευγάρια που καταλαμβάνουν τη θέση Γ. Υπολογίζουν έτσι, ότι τον τέταρτο μήνα έχουμε συνολικά 5 ζευγάρια.

Α(ενήλικες)	**Β(έφηβοι)**	**Γ(μωρά)**
2 ζευγ.	1	2 ζευγ.

Η διαδικασία φαίνεται ότι δε θα μπορούσε να συνεχιστεί με αυτόν τον τρόπο μέχρι το τέλος του ενός έτους που είναι και το ζητούμενο του προβλήματος, καθώς οι μαθητές που υπήρχαν στην τάξη δεν ήταν αρκετοί. Οι μαθητές βρίσκονται απέναντι σε μια νέα παράμετρο που επηρεάζει τη βιωματική επίλυση του προβλήματος και καλούνται να προσδιορίσουν με γνώμονα το πλήθος των μαθητών του τμήματος, μέχρι ποιο μήνα θα μπορούσαν να προχωρήσουν στην επίλυση του προβλήματος με τη βοήθεια της βιωματικής προσέγγισης. Όλοι επιστρέφουν στις θέσεις τους και διερευνούν μέχρι ποιο μήνα θα μπορούσε αυτό το παιχνίδι να συνεχιστεί. Η απάντηση προκύπτει αβίαστα από την πλειονότητα των μαθητών. Γνωρίζοντας ότι τα παιδιά είναι 21, διαίρεσαν δια του δύο και διαπίστωσαν ότι το παιχνίδι θα μπορούσε να συνεχιστεί μέχρι τον Μάιο.

Δ. Τρίτη Παρέμβαση: Παρατήρηση και ανάλυση των αποτελεσμάτων του πίνακα

Ένας μαθητής σηκώνεται στον πίνακα προκειμένου να συνεχιστεί η διαδικασία συμπλήρωσης του πίνακα τιμών καθ' υπόδειξη των συμμαθητών του. Οι μαθητές φαίνεται να έχουν βοηθηθεί από τη βιωματική προσέγγιση του προβλήματος και να

είναι σε θέση να βρίσκουν τα λαγουδάκια της κάθε κατηγορίας κάθε μήνα. Το μόνο πρόβλημα που παρουσιάζεται πια, είναι ότι ο πίνακας της τάξης φαίνεται να μη χωράει την καταγραφή από το μήνα Σεπτέμβριο και μετά, με αποτέλεσμα η παρατήρηση της τελευταίας στήλης του πίνακα κρίνεται πλέον απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση του προβλήματος.

Προχωράμε λοιπόν στην τρίτη παρέμβαση και ζητάμε από τους μαθητές να παρατηρήσουν με προσοχή τον πίνακα. Μια μαθήτρια παρατηρεί ότι αρκεί να προσθέσει κανείς τα λαγουδάκια των δύο προηγούμενων μηνών για να βρει τα συνολικά λαγουδάκια του εκάστοτε μήνα.

Με βάση την παρατήρηση της μαθήτριας – η οποία θα αναλυθεί παρακάτω – οι μαθητές μπορούν πλέον να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα την τελευταία στήλη του πίνακα για να υπολογίσουν τα λαγουδάκια στο τέλος του έτους που είναι 377. Καθώς η ικανότητα γενίκευσης των μαθητών μετά από αυτή τη βιωματική εμπειρία ήταν ένα άλλο θέμα που μας απασχόλησε, και δεδομένου ότι δεν περιμέναμε σε καμία περίπτωση να ήταν σε θέση να βρουν τον τύπο της αναδρομικής συνάρτησης, καθώς οι προϋπάρχουσες γνώσεις τους δε θα τους επέτρεπαν κάτι τέτοιο, ρωτήθηκαν ποια διαδικασία θα ακολουθούσαν για να βρουν τα λαγουδάκια, για παράδειγμα, του τριακοστού μήνα. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές ήταν ικανοί να συμπεράνουν ότι αν θέλουμε να βρούμε πόσα ζευγάρια θα έχουμε τον τριακοστό μήνα, αρκεί να προσθέσουμε το πλήθος των ζευγαριών του εικοστού όγδοου και εικοστού ένατου μήνα.

Στη συνέχεια, έγινε μια μικρή αναφορά για τις ιδιότητες των αριθμών που προέκυψαν στην τελευταία στήλη του πίνακα που σχετίζονται με τις ιδιότητες της Χρυσής Τομής. Διαπιστώθηκε ότι θα είχε μεγάλο ενδιαφέρον να αφιερώναμε άλλη μία διδακτική ώρα πάνω στους αριθμούς Fibonacci αναφέροντας εκτενώς τις ιδιότητές τους, τη σχέση τους με τη Χρυσή τομή και με τη συμμετρία στη φύση.

8.2.4.2. Βρείτε Έναν Κανόνα

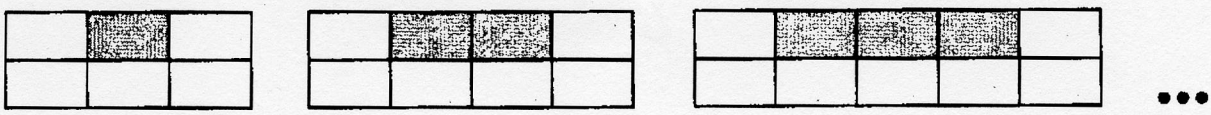
Το πρόβλημα του Fibonacci είναι ένα επαγωγικό αναδρομικό πρόβλημα, η λύση του οποίου βασίζεται στην παρατήρηση ότι τα λαγουδάκια του κάθε μήνα, προκύπτουν από το άθροισμα του πλήθους τους κατά τους δύο προηγούμενους μήνες, που περιγράφεται από την αναδρομική ακολουθία $f(\nu) = f(\nu-1) + f(\nu-2)$, για $\nu = 3,4,5,\ldots$ με $f(1) = 1$ και $f(2) = 1$, όπου $\nu \geq 3$. Παρόλο που ζητήθηκε από τους μαθητές να εξάγουν ένα γενικό κανόνα για το πώς να βρίσκουν τα λαγουδάκια του κάθε μήνα, δε ζητήθηκε να βρουν τον τύπο της συνάρτησης, καθώς οι προηγούμενες τους γνώσεις δεν ήταν κατάλληλες, ώστε να οδηγηθούν σε μια τέτοια συνάρτηση.

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα του Fibonacci μας έδινε τη δυνατότητα να εξετάσουμε, χρησιμοποιώντας τη θεωρία του ο Radford, μόνο τους δύο πρώτους τύπους γενίκευσης των μαθητών – τη *γεγονική γενίκευση* και τη *γενίκευση εντός πλαισίου*. Για το λόγο αυτό, σχεδιάσαμε μια ξεχωριστή δραστηριότητα που τη χωρίσαμε σε δύο επιμέρους και την ονομάσαμε «Βρείτε έναν κανόνα». Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν έναν πίνακα τιμών δύο μεταβλητών για να ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει τις μεταβλητές. Με αυτό τον τρόπο, μπορέσαμε να εισαγάγουμε στη μελέτη μας και τον τρίτο τύπο γενίκευσης του Radford, τη *συμβολική γενίκευση*.

Ο σχεδιασμός αυτής της δεύτερης επιμέρους δραστηριότητας, προέκυψε ύστερα από προσεκτική μελέτη της δραστηριότητας «Βρείτε έναν κανόνα» που είχε δημοσιεύσει ο Γυμνασιάρχης του σχολείου κ. Τζίφας Νικόλαος στο περιοδικό Ευκλείδης Α΄. Συγκεκριμένα, η δεύτερη επιμέρους δραστηριότητα της μελέτης μας, προέκυψε από τη βιωματική προσέγγιση της παρακάτω δραστηριότητας:

Προτεινόμενες Ασκήσεις

K_1. Στα παρακάτω σχήματα υπάρχουν ορθογώνια τα οποία εσωτερικά είναι χωρισμένα σε τετράγωνα γραμμοσκιασμένα ή μη γραμμοσκιασμένα.



Αν με α συμβολίσουμε τα γραμμοσκιασμένα και με β τα λευκά φτιάχνουμε τον πίνακα 5.

Ποιος είναι ο τύπος που συνδέει τα α και β;

(π.χ. γράψε β = …)

α	β
1	5
2	6
3	7
4	8
⋮	⋮

πιν. 5

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α΄ λ.β. τ.2/6

8.2.4.2.1. Υλοποίηση

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι 1 διδακτική ώρα. Τα θρανία της αίθουσας είναι τοποθετημένα σε σχήμα «Π» και τα παιδιά συνεργάζονται ανά δύο ή ανά τρεις. Τη βιντεοσκόπηση πραγματοποίησε ο Γυμνασιάρχης του σχολείου. Αρχικά, μοιράστηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (βλ. παράρτημα), που περιλάμβανε δύο επιμέρους δραστηριότητες, όπου σε όλες οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα τιμών μεταξύ δύο μεταβλητών και στη συνέχεια να γράψουν τη σχέση που συνδέει αυτές τις μεταβλητές. Στην πρώτη δραστηριότητα, δινόταν ένας πίνακας τιμών μεταξύ δύο μεταβλητών και οι μαθητές έπρεπε να βρουν τη σχέση που τις συνδέει. Η δεύτερη δραστηριότητα ήταν βιωματική. Οι μαθητές δηλαδή, έπαιζαν το ρόλο των μεταβλητών, συμπλήρωναν έναν πίνακα τιμών μεταξύ αυτών και στη συνέχεια προσπαθούσαν να βρουν τη σχέση που τα συνδέει.

Συγκεκριμένα, οι εκφωνήσεις των δραστηριοτήτων ήταν οι εξής:

Α. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το ρ αλλάζει με τη βοήθεια του άρτιου ν.

ν	**ρ**
2	11
4	13
6	15
8	17
…	….

α) Όταν το ν είναι 30, πόσο θα είναι το ρ;

β) Γράψτε μία σχέση (τύπο) που να συνδέει το ν με το ρ.

Β. Ο βασιλιάς κάθε χώρας συνοδεύεται από τους σωματοφύλακες του. Έτσι, σε μια μετακίνηση του βασιλιά, όλοι μαζί (βασιλιάς και σωματοφύλακες) κινούνται διατηρώντας πάντα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, περπατώντας οι σωματοφύλακες σε σχήμα ανάποδου Π και βάζοντας μπροστά και στη μέση τον βασιλιά. Κάτι αντίστοιχο γίνεται και όταν δύο ή και περισσότεροι βασιλιάδες μετακινούνται:

σ	**β**	σ
σ	σ	σ

σ	**β**	**β**	σ
σ	σ	σ	σ

κ.λ.π

Έτσι, ο ένας βασιλιάς συνοδεύεται από πέντε σωματοφύλακες, οι δύο βασιλιάδες από 6 σωματοφύλακες κ.λ.π.

α) Αφού κάποιοι από σας παίξουν το ρόλο των σωματοφυλάκων και κάποιοι άλλοι των βασιλιάδων, σχηματίζοντας στο χώρο το προτεινόμενο σχήμα, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

σ	β
5	1
6	2
….	….

β) Πόσοι σωματοφύλακες χρειάζονται για να συνοδεύσουν 10 βασιλιάδες;

γ) Γράψτε μία σχέση (τύπο) που να συνδέει το σ με το β.

Η κατασκευή των δραστηριοτήτων, έγινε με την εξής λογική: Αρχικά φτιάξαμε έναν απλό - κατά την κρίση μας- πίνακα τιμών μεταξύ των μεταβλητών ν και ρ, όπου τόσο το ν όσο και το ρ μεταβάλλονταν με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, όταν το ν αύξανε κατά μία μονάδα, τότε και το ρ αύξανε κατά μία μονάδα κ.ο.κ. Η δεύτερη δραστηριότητα, αν και περιλάμβανε μεταβλητές που και αυτές μεταβάλλονταν με τον ίδιο τρόπο, διέφερε από την πρώτη στο ότι ήταν βιωματική. Αυτό σημαίνει ότι υπήρχε μια δοσμένη συνθήκη με δύο μεταβλητές και οι μαθητές βίωναν το πρόβλημα παριστάνοντας τις μεταβλητές. Η διαφορά των δύο δραστηριοτήτων ως προς τη διδακτική τους προσέγγιση (παραδοσιακή και βιωματική αντίστοιχα) μας έδωσε επιπλέον τη δυνατότητα να εξετάσουμε αν η βιωματική μέθοδος βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν βαθύτερα τις μεταβλητές.

8.2.4.3. Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια

Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια είναι μια παραλλαγή που πραγματοποιήσαμε σε ένα πολύ έξυπνο και δημοφιλές στους μαθηματικούς κύκλους, λογικού παζλ, στο πρόβλημα με τα καπέλα. Αυτό συμβαίνει γιατί το πρόβλημα αυτό έχει βαθιά και αναπάντεχη σχέση με τη θεωρία κωδίκων, η οποία είναι μια ενεργή περιοχή στη μαθηματική έρευνα με ευρείες εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες και στην επιστήμη των υπολογιστών. Στην προσπάθειά των ερευνητών να βρουν λύση στο πρόβλημα με τα καπέλα, ανακαλύπτουν νέα θεωρήματα στη θεωρία των κωδίκων.

Το πρόβλημα με τα καπέλα έχει ως εξής:
Τρεις παίκτες εισέρχονται σε ένα δωμάτιο. Ο καθένας φοράει άσπρο ή μαύρο καπέλο. Το χρώμα καθορίζεται από τη ρίψη νομίσματος, κάτι που σημαίνει ότι το χρώμα που φοράει ο ένας, δεν επηρεάζει το χρώμα που φοράει ο άλλος. Ο καθένας μπορεί να δει το καπέλο των άλλων, όχι όμως το δικό του. Καμία επικοινωνία δεν επιτρέπεται, εκτός από μία ενιαία στρατηγική που πρέπει να αποφασισθεί πριν ξεκινήσει το παιχνίδι. Από τη στιγμή που ο κάθε παίκτης δει τα καπέλα των άλλων δύο, θα πρέπει απευθείας είτε να μαντέψει το χρώμα που φοράει, είτε να σωπάσει. Υποθέτουμε ότι το βραβείο της ομάδας θα είναι ένα υπέρογκο ποσό αν ένας τουλάχιστον παίκτης μαντέψει σωστά και κανένας δεν υποθέσει λανθασμένα.

Το ίδιο παιχνίδι μπορεί να παιχτεί από οποιονδήποτε αριθμό παικτών. Το γενικό πρόβλημα είναι να βρεθεί μια στρατηγική για την ομάδα, η οποία θα μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να κερδίσει το βραβείο. Μια προφανής στρατηγική θα μπορούσε να ήταν να συνεννοηθούν οι δύο να σωπάσουν και ο άλλος να πει στην τύχη ότι φοράει άσπρο καπέλο. Με αυτό τον τρόπο έχουν 50% ποσοστό επιτυχίας. Υπάρχει όμως άλλη στρατηγική που να αυξάνει το ποσοστό επιτυχίας ;

Παρόλο που πολλοί μπορεί να απαντήσουν αυτόματα πως δεν υπάρχει κάποια στρατηγική, καθώς:

- δεν μπορούν οι παίκτες να επικοινωνήσουν μεταξύ τους
- το χρώμα που φοράει ο κάθε παίκτης δεν εξαρτάται από το χρώμα του άλλου παίκτη

υπάρχει μια στρατηγική που εγγυάται 75% επιτυχία (6 στα 8).

Η στρατηγική είναι η εξής:
Έξι στις οκτώ φορές, δύο από τους παίκτες θα φοράνε καπέλο του ίδιου χρώματος, ενώ ο τρίτος παίκτης θα φοράει καπέλο διαφορετικού χρώματος. Η ομάδα μπορεί να κερδίσει αν ακολουθήσει την εξής τακτική: Μόλις ξεκινήσει το παιχνίδι ο κάθε παίκτης κοιτάει τα καπέλα των άλλων δύο. Ο παίκτης που θα δει ότι οι άλλοι δύο φοράνε καπέλο διαφορετικού χρώματος, θα σωπάσει. Ο παίκτης που θα δει ότι οι άλλοι δύο φοράνε το ίδιο χρώμα καπέλο, θα μαντέψει ότι φοράει το αντίθετο χρώμα.

Όπως προαναφέραμε, το πρόβλημα μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερους από τρεις παίκτες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί το πρόβλημα με 15 παίκτες όπου υπάρχει στρατηγική που εγγυάται 93,75% επιτυχία (15 στα 16).

Η παραπάνω στρατηγική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στους *κώδικες Hamming* που μεταξύ άλλων, προσφέρουν τη δυνατότητα

- να διορθώνουν λανθασμένους κώδικες, κάτι που χρησιμεύει στη διόρθωση καναλιών με παράσιτα
- να συμπιέζουν τα δεδομένα για να πιάνουν λιγότερο χώρο στη μνήμη του υπολογιστή.

Θεωρούμε ότι θα ήταν εξαιρετικά ενδιαφέρον οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου να καταπιαστούν με ένα τέτοιου είδους πρόβλημα. Γνωρίζοντας τη δυσκολία του προβλήματος, η πρόταση μας αποτελείται από δύο επιμέρους προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα είναι σχετικά απλό και αποτελεί τον προθάλαμο για την εισαγωγή στο δεύτερο, που είναι στην ουσία και το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια. Στόχος μας δεν είναι τόσο να λύσουν το πρόβλημα, όσο να διερευνήσουν τις διάφορες περιπτώσεις και να καταλήξουν ποιες είναι εκείνες που επαναλαμβάνονται πιο συχνά. Χρησιμοποιούμε την τεχνική διδασκαλίας «Παιχνίδι Ρόλων».

8.2.4.3.1. Υλοποίηση του πρώτου προβλήματος

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι δύο διδακτικές ώρες. Στην αίθουσα παρίσταται η γυμνάστρια του τμήματος και ο καθηγητής των μαθηματικών, ο οποίος και βιντεοσκοπεί. Τα θρανία της αίθουσας είναι παραταγμένα σε σχήμα «Π». Το τμήμα χωρίζεται σε ομάδες των τριών ατόμων που αποτελούν και τις ομάδες που παριστάνουν τους αιχμάλωτους. Η ερευνήτρια παίζει το ρόλο του φύλακα. Ο φύλακας που έχει άσπρα και μαύρα κομμένα χαρτόνια σε σχήμα τετραγώνου, έχει μπροστά του τρεις αιχμάλωτους, τους δένει τα μάτια και καρφιτσώνει στην πλάτη τους είτε ένα άσπρο, είτε ένα μαύρο χαρτόνι. Το χρώμα που φοράει ο κάθε παίκτης αποφασίζεται με τη ρίψη νομίσματος. Τα μάτια θα λυθούν, όταν τους φορεθούν τα χαρτόνια. Με αυτόν τον τρόπο, ο κάθε αιχμάλωτος βλέπει τα χαρτόνια των δύο άλλων, αλλά δεν μπορεί να δει το δικό του. Στην πορεία, η ερευνήτρια,

εξασφαλίζοντας πρώτα ότι οι μαθητές θα έχουν γυρισμένη την πλάτη τους και δε θα βλέπουν τι χρώμα χαρτόνι φοράνε, δε δένει τα μάτια των παικτών προκειμένου να εξοικονομήσει χρόνο.

Η ερευνήτρια εξηγεί στα παιδιά ότι ο φύλακας έχει μαθηματικές ανησυχίες και του αρέσει να βάζει σε δοκιμασίες τους αιχμαλώτους του και ανάλογα να τους επιβραβεύει ή να τους τιμωρεί. Εκείνη την ημέρα μάλιστα έχει τα κέφια του και θα τους βάλει μια σχετικά απλή δοκιμασία με αντάλλαγμα μία διπλή μερίδα φαγητού.

Ο φύλακας λέει:
« Όποιος βλέπει κάποιον με μαύρο χαρτόνι, να σηκώσει το χέρι του».
Στη συνέχεια λέει:
«Όποιος ξέρει τι χρώμα χαρτόνι έχει, να σηκώσει το χέρι του».

Όποιος θεωρεί ότι γνωρίζει το χρώμα του χαρτονιού που έχει καρφιτσωμένο στην πλάτη του σηκώνει το χέρι του και εξηγεί στους υπόλοιπους με ποια λογική το βρήκε. Κάτι τέτοιο συντελεί θετικά, τόσο γιατί δίνει την ευκαιρία να ξεκινήσει μια εποικοδομητική συζήτηση, όσο γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να καταγράψουμε *πρωτόκολλα ανάλυσης*. Αυτή η δραστηριότητα μας βοηθάει να μελετήσουμε τους τρόπους που επιχειρηματολογούν οι μαθητές, κατά πόσο αντιλαμβάνονται πότε μιλάνε με βεβαιότητα και πότε εικάζουν και τα αποδεικτικά σχήματα που έχουν για να πείσουν τον εαυτό τους και τους άλλους για έναν ισχυρισμό τους.

Όταν ολοκληρώθηκε το παιχνίδι, δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (βλ. παράρτημα) όπου τους ζητήθηκε να γράψουν ανά ομάδες των τριών όλες τις δυνατές περιπτώσεις, δίνοντας τους με αυτόν τον τρόπο την ευκαιρία να γενικεύσουν και να εκφράσουν φραστικά την εμπειρία τους. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να παρατηρήσουν ποια περίπτωση επαναλαμβανόταν πιο συχνά και να καταγράψουν σε κάθε περίπτωση τι θα γινόταν αν είχαν στην πλάτη τους καρφιτσωμένο ένα μαύρο χαρτόνι.

Παρατηρήθηκε ότι η καταγραφή όλων των δυνατών περιπτώσεων, δεν ήταν απλή υπόθεση για τους μαθητές. Κάποιοι παρέλειπαν περιπτώσεις, θεωρώντας ότι η σειρά των χρωμάτων δεν έχει σημασία, ενώ άλλοι επαναλάμβαναν περιπτώσεις. Ένας μαθητής προσφέρθηκε να σηκωθεί στον πίνακα και να γράψει όλες τις δυνατές

περιπτώσεις. Στη συνέχεια, ακολούθησε συζήτηση σχετικά με τους τρόπους οργάνωσης των περιπτώσεων. Οι δυνατές περιπτώσεις που τελικά προέκυψαν ήταν οι εξής 8:

M	**M**	**M**
M	**M**	**A**
M	**A**	**M**
A	**M**	**M**
A	**A**	**A**
A	**A**	**M**
A	**M**	**A**
M	**A**	**A**

Οι απόψεις των μαθητών για το ποια είναι η περίπτωση που επαναλαμβάνεται τις περισσότερες φορές δε συγκλίνανε. Άλλοι θεωρούσαν ότι είναι η περίπτωση ΑΑΑ, άλλοι η περίπτωση ΜΜΜ ενώ λίγοι βρήκαν ότι η περίπτωση που επαναλαμβάνεται πιο συχνά είναι εκείνη που οι δύο φοράνε το ίδιο χρώμα (6 στις 8 φορές).

Συνοπτικά, στο φύλλο εργασίας προέκυψαν οι παρακάτω απαντήσεις:

- Αν έβλεπα δύο Α, τότε οι άλλοι δύο θα σήκωναν το χέρι τους και έτσι εγώ ήμουν 100% βέβαιος ότι είμαι Μ.

- Αν έβλεπα έναν Α και έναν Μ, τότε οι άλλοι δύο θα σήκωναν το χέρι τους και εγώ, βλέποντας τον Μ να σηκώνει το χέρι του, θα ήμουν 100% βέβαιος ότι είμαι Μ.

- Αν έβλεπα δύο Μ, τότε οι άλλοι δύο θα σήκωναν το χέρι τους, αλλά εγώ δε θα ήμουν βέβαιος για το χρώμα μου. Κατά 50% είμαι Μ και κατά 50% θα είμαι Α. Αν όμως επιστρατεύσω τη λογική μου, μπορώ να είμαι και 100% βέβαιος για το χρώμα μου. Κάποιοι από τους μαθητές πρότειναν:

> Στην πρώτη ερώτηση του φύλακα, όλοι θα σηκώναμε το χέρι μας. Στη δεύτερη όμως ερώτηση, όλοι θα διστάζαμε, γιατί όλοι θα βλέπαμε δύο Μ. Λαμβάνοντας αυτό υπ' όψιν μου, μπορώ πια να είμαι 100% βέβαιος ότι είμαι Μ.

Η συνάντηση έκλεισε με διεξοδική ανάλυση και συζήτηση των μαθητών για κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές έδειξαν πολύ ενδιαφέρον για το παιχνίδι και όταν έπρεπε να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, ήταν ικανοί να αναπτύξουν πολύ εποικοδομητικές συζητήσεις. Η τάξη λειτούργησε σαν ομάδα και όλοι μαζί προσπάθησαν να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα. Ο κάθε ένας είχε το δικό του τρόπο να εκφραστεί και πολλές φορές ήθελε να το κάνει, ακόμα και αν έλεγε στην ουσία το ίδιο πράγμα με τον προλαλήσαντα.

8.2.4.3.2. Υλοποίηση του δεύτερου προβλήματος

Το δεύτερο πρόβλημα είναι μια παραλλαγή του προβλήματος 1, καθώς σε αυτό δε σηκώνονται μόνο τρεις μαθητές αλλά περισσότεροι εκ των οποίων τουλάχιστον ένας φοράει άσπρο χαρτόνι. Ο φύλακας λέει: «Έχω φορέσει άσπρα χαρτόνια *σε μερικούς* από εσάς και μαύρα χαρτόνια στους υπόλοιπους. Μπορείτε να κοιτάτε ο ένας του άλλου, αλλά όχι να μιλάτε μεταξύ σας. Θα φύγω τώρα και θα έρχομαι κάθε ένα λεπτό. Κάθε φορά που θα επιστρέφω, θέλω όσοι από εσάς έχουν αντιληφθεί ότι φοράνε άσπρο χαρτόνι να έρχονται και να μου το λένε αμέσως».

Πρόκειται για ένα επαγωγικό πρόβλημα με άδηλη αναδρομική λύση. Σε αυτή τη δραστηριότητα μελετάμε τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών σε τέτοιου είδους προβλήματα, κατά πόσο αντιλαμβάνονται πότε μιλάνε με βεβαιότητα και πότε εικάζουν καθώς και τις μεταγνωστικές τους δεξιότητες.

Η διάρκεια της δραστηριότητας είναι 2 διδακτικές ώρες. Αρχικά δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στις οδηγίες του δεσμοφύλακα, συζητώντας με τους μαθητές το νόημα αυτών. Οι μαθητές χρειάστηκαν χρόνο να κατανοήσουν τα λεγόμενα του δεσμοφύλακα. Πολλοί από αυτούς θεώρησαν ως δεδομένο ότι σίγουρα θα υπάρχουν και κάποιοι που θα φοράνε και μαύρο χαρτόνι. Δεν κατάλαβαν ότι υπάρχει περίπτωση να φοράνε και όλοι άσπρο. Ήταν όμως ξεκάθαρο ότι τουλάχιστον ένας θα φοράει άσπρο χαρτόνι.

Η λογική του παιχνιδιού έχει ως εξής:
Όταν ένας μόνο φοράει άσπρο χαρτόνι, από το πρώτο κιόλας λεπτό θα το καταλάβει, αφού όλοι οι υπόλοιποι θα φοράνε μαύρο. Όταν δύο παίκτες φοράνε άσπρο χαρτόνι, την πρώτη φορά αυτοί οι δύο, θα δουν έναν να φοράει άσπρο χαρτόνι. Περιμένουν έτσι, ο άλλος να μιλήσει. Βλέπουν όμως ότι ο άλλος δε λέει τίποτα οπότε καταλαβαίνουν ότι για να μη μιλάει, θα βλέπει και άλλον με άσπρο χαρτόνι. Δεδομένου ότι βλέπουν τους υπόλοιπους να φοράνε μαύρα χαρτόνια, καταλαβαίνουν, ο καθένας για τον εαυτό του, ότι αυτός είναι ο δεύτερος με το άσπρο χαρτόνι. Έτσι, το δεύτερο λεπτό που θα έρθει ο φύλακας πάνε και οι δύο και του λένε ότι αυτοί είναι με το άσπρο χαρτόνι. Το παιχνίδι συνεχίζεται με την ίδια λογική για να καταλήξουμε τελικά στο γενικό κανόνα ότι, αν ν άτομα φοράνε άσπρα χαρτόνια τότε αυτοί θα το γνωρίζουν το νιοστό λεπτό.

Στην πρώτη φάση σηκώθηκαν τέσσερις μαθητές, όπου μόνο ένας φορούσε άσπρο χαρτόνι. Η μαθήτρια με το άσπρο χαρτόνι, είδε ότι όλοι οι συμπαίκτες της φορούσαν μαύρο χαρτόνι, εκμεταλλεύτηκε την πληροφορία ότι τουλάχιστον ένας φοράει άσπρο και μπόρεσε από το πρώτο κιόλας λεπτό να καταλάβει ότι είναι εκείνη που φοράει άσπρο χαρτόνι.

Στη συνέχεια σηκώθηκαν έξι άτομα εκ των οποίων δύο φόραγαν άσπρο χαρτόνι. Κάποιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν σε αυτή την περίπτωση και κατάφυγαν σε συλλογιστικές που δεν ισχύουν. Παρόλα αυτά, ο ένας από τους δύο μαθητές που φορούσε άσπρο, το δεύτερο λεπτό ανέπτυξε ορθή επιχειρηματολογία προκειμένου να αιτιολογήσει για ποιο λόγο είναι βέβαιος ότι φοράει άσπρο.

Έπειτα το παιχνίδι έγινε ακόμα πιο πολύπλοκο και σηκώθηκαν έξι άτομα εκ των οποίων τέσσερα φόραγαν άσπρο χαρτόνι. Λίγοι μαθητές μπόρεσαν να οργανώσουν τα δεδομένα τους και να απαντήσουν το σωστό λεπτό ότι φοράνε άσπρο. Οι μαθητές εντοπίζουν ότι είναι πολύ σημαντικό να είναι σε εγρήγορση καθώς το παιχνίδι είναι ομαδικό και οι αντιδράσεις του καθενός παίζουν σπουδαίο ρόλο στην απόδοση της ορθής απάντησης.

Με αφορμή ένα σχόλιο ενός μαθητή η ερευνήτρια ξεκίνησε μια συζήτηση για το κατά πόσο επηρεάζει το πλήθος των ατόμων που συμμετέχουν στο παιχνίδι, με το πλήθος

των άσπρων χαρτονιών. Αρκετοί μαθητές, αγνόησαν τα δεδομένα του προβλήματος και ισχυρίστηκαν ότι όσο πιο πολλοί σηκωθούν τόσο πιο πολλά άσπρα θα έχουμε. Τέλος, σηκώθηκαν οκτώ άτομα, από τους οποίους οι έξι φορούσαν άσπρο.

Στο τέλος κάθε φάσης οι μαθητές συμπλήρωναν ένα φύλλο εργασίας που τους ζητούσε να αναλύσουν κάθε στάδιο του παιχνιδιού. Στο τέλος της δραστηριότητας ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν ένα γενικό κανόνα ικανό να βρίσκει τη χρονική στιγμή που μπορούν να απαντήσουν αυτοί που φοράνε άσπρο χαρτόνι, κάτι που επιτεύχθηκε με επιτυχία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

9.1. Το πρόβλημα του Fibonacci

Στην αρχή της διδακτικής ώρας, οι μαθητές παρουσίασαν αμηχανία και η συμμετοχή τους ήταν περιορισμένη. Μία τέτοια αντίδραση ήταν αναμενόμενη για το λόγο ότι δεν ήταν εξοικειωμένοι ούτε με εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, ούτε με την ερευνήτρια, πόσο μάλλον με διδασκαλίες που βιντεοσκοπούνται. Η προτροπή της ερευνήτριας να εκφέρουν ελεύθερα την άποψη τους και η διευκρίνιση ότι η βιντεοσκόπηση είναι ερευνητικό εργαλείο και ότι δεν πρόκειται να κριθούν και να επηρεάσουν τη γνώμη των καθηγητών τους από αυτά που θα πουν, βοήθησε τους μαθητές να χαλαρώσουν, να μπουν στη διαδικασία και να τολμήσουν να δώσουν κάποιες απαντήσεις σε αυτά που ρωτούσε.

Θεαματική αλλαγή παρουσιάστηκε κατά την τρίτη φάση της δραστηριότητας, τη βιωματική, που οι μαθητές ενσάρκωσαν τους «πρωταγωνιστές» του προβλήματος, τα λαγουδάκια. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές γρήγορα εξοικειώθηκαν με τη βιωματική προσέγγιση του προβλήματος, ενθουσιάστηκαν, έγιναν δημιουργικοί και με σύμμαχο τη φαντασία τους, αντιμετώπισαν το πρόβλημα σαν μέρος της δράσης που επιζήτεί απαντήσεις.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές κατά την πρώτη και δεύτερη φάση του προβλήματος, μπορούσαν να υπολογίσουν τα λαγουδάκια μέχρι το μήνα Φεβρουάριο. Το Μάρτιο, καθώς οι πληροφορίες αυξάνονταν, άρχιζαν οι πρώτες δυσκολίες. Κατά την Τρίτη φάση, που σήμαινε την έναρξη της Βιωματικής προσέγγισης, οι μαθητές ξεπέρασαν τη δυσκολία που είχαν και καταλαμβάνοντας τις ανάλογες θέσεις, έβρισκαν πόσα λαγουδάκια είχαμε κάθε μήνα. Μάλιστα, αν υπήρχαν αρκετοί μαθητές, φάνηκε να ήταν σε θέση να συνεχίσουν αυτή τη διαδικασία για πολύ ακόμα.

Επεισόδιο 1

Το επεισόδιο 1 είναι ένα επεισόδιο που η σημαντικότητά του δεν έγκειται στην ανάλυση ενός διαλόγου, αλλά στον τρόπο που αντέδρασε ένας μαθητής όταν ρωτήθηκε πόσα λαγουδάκια θα έχουμε το μήνα Μάιο. Ο μαθητής, αυθόρμητα σηκώθηκε από το θρανίο του και άρχισε να μετράει τα ζευγάρια της κάθε κατηγορίας. Αυτή η αντίδραση, εκτός του ότι δείχνει ότι προσαρμόστηκε στις βιωματικές συνθήκες του προβλήματος και καταργώντας τις τυπικότητες επέτρεψε στον εαυτό του να συμμετέχει εξ' ολοκλήρου στην επίλυση του προβλήματος, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι προτίμησε να *μετρήσει* τα παιδιά που υποδύονταν τα λαγουδάκια, από το να τα *υπολογίσει* σκεπτόμενος. Το αποδεικτικό επομένως σχήμα του μαθητή, σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1998), είναι εμπειρικό αφού τον βλέπουμε να εξάγει συμπεράσματα με τη βοήθεια μετρήσεων.

Ωστόσο, κάποιοι μαθητές έκαναν προσπάθειες να φύγουν από το εμπειρικό στάδιο, που στην προκειμένη περίπτωση σηματοδοτούνταν από το στάδιο της μέτρησης, παρατηρώντας τον πίνακα. Παρακάτω θα αναλύσουμε, με τη βοήθεια της θεωρίας του Harel (2001) και του Radford (2003), δύο περιπτώσεις μαθητριών που προσπάθησαν να γενικεύσουν.

Ο διάλογος που ακολουθεί, διαδραματίζεται μόλις αφού έχουν υπολογίσει τα λαγουδάκια του μήνα Μάιου. Παρακάτω ακολουθεί ο πίνακας συμπληρωμένος, όπως ακριβώς τον βλέπουν οι μαθητές εκείνη την ώρα. Η ερευνήτρια θέλοντας να παροτρύνει τους μαθητές να παρατηρήσουν τον πίνακα, εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι τα παιδιά που παριστάνουν τα λαγουδάκια αρχίζουν να συνωστίζονται, κάτι που δυσχεραίνει τη μέτρηση τους, και τους ρωτά αν υπάρχει άλλος τρόπος υπολογισμού αυτών.

Επεισόδιο 2

1.	**Ερευνήτρια:**	Έχετε καμιά ιδέα; Μπορούμε να το συνεχίσουμε με αυτόν τον τρόπο για όλο το χρόνο για να βρούμε το αποτέλεσμα;
2.	**Στελλίνα:**	Μετά πάει μόνο του.

3.	**Ερευνήτρια:**	Τι εννοείς;
4.	**Στελλίνα:**	Το ένα γίνεται δύο, το δύο γίνεται τρία στους εφήβους, το τρία τέσσερα στα μωρά…οι ενήλικες θα γίνουν τέσσερις…
5.	**Ερευνήτρια:**	(δείχνοντας τη στήλη των ενηλίκων) Λες τον Ιούνιο το τρία θα γίνει τέσσερα;
6.	**Στελλίνα:**	Ναι.
7.	**Ερευνήτρια:**	Για πρόσεξε. Ποιοι θα γίνουν ενήλικες;
8.	**Ελένη:**	Πέντε.
9.	**Ερευνήτρια:**	(Απευθύνεται σε δύο μαθήτριες που δεν έχουν σηκωθεί ακόμα) Ποιοι θα γίνουν κορίτσια ενήλικες;
10.	**Πηνελόπη:**	Θα υπάρχουν μετά πέντε ενήλικες.
11.	**Ερευνήτρια:**	Πέντε ενήλικες! Δεν πάει 1, 2, 3, 4. Οι έφηβοι όλοι, θα γίνουν ενήλικες.
12.	**Στελλίνα:**	Α, ναι.

Μήνας	**Ζεύγη Μωρών**	**Ζεύγη Εφήβων**	**Ζεύγη Ενηλίκων**	**Συνολικά Ζεύγη**
Ιανουάριος	0	1	0	1
Φεβρουάριος	1	0	1	2
Μάρτιος	1	1	1	3
Απρίλιος	2	1	2	5
Μάιος	3	2	3	8
Ιούνιος				

Σε αυτήν την περίπτωση, η Στελλίνα θεώρησε ότι η ακολουθία 1, 2 στους εφήβους και η ακολουθία 1, 2, 3 στους ενήλικες και στα μωρά, εντάσσεται σε ένα ευρύτερο σύνολο αριθμών, των φυσικών αριθμών, οπότε για εκείνην ήταν απόλυτα φυσιολογικό να θεωρήσει ότι το 2 θα γίνει 3 στους εφήβους και το 3 θα γίνει 4 στους ενήλικες και στα μωρά. Η προσπάθεια της να φύγει από το στάδιο της μέτρησης, παρατηρώντας και στη συνέχεια γενικεύοντας, είναι έκδηλη. Βρίσκεται στο εμπειρικό στάδιο αφαίρεσης καθώς παρατηρώντας έναν αριθμό αντικειμένων, τους αποδίδει μια κοινή ιδιότητα. Ο συλλογισμός της όμως, δεν την βοήθησε να οδηγηθεί σε σωστά αποτελέσματα γιατί γενίκευσε χωρίς να είναι σε θέση να επαληθεύσει. Η σκέψη της, σύμφωνα με τους Johnson και Laird (1993), εντάσσεται στην κατηγορία της

περιγραφικής επαγωγικής όπου το υποκείμενο γενικεύει αποδίδοντας στα αντικείμενα μια κοινή ιδιότητα που βασίζεται στα συμπεράσματα που έβγαλε από την παρατήρηση και όχι από την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Οι Harel και Sowder (1998), έχουν συμπεράνει ότι σε τέτοιες περιπτώσεις, το υποκείμενο έχει εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα.

Στον παραπάνω διάλογο, η ερευνήτρια στην προσπάθειά της να βοηθήσει τους μαθητές να ξεκινήσουν τη διαδικασία της *ερμηνευτικής επαγωγικής σκέψης*, αλλάζει την ερώτηση και τους ρωτάει <u>ποιοι</u> θα γίνουν ενήλικες (διάλογος 7 και 9). Παρόλα αυτά, οι μαθητές επιμένουν να απαντήσουν <u>πόσα</u> ενήλικα λαγουδάκια θα έχουμε το μήνα Ιούνιο (διάλογος 8 και 10), κάνοντας έκδηλη την τάση τους στην *περιγραφική επαγωγική σκέψη*. Μολονότι η απάντηση τους είναι σωστή, διαπιστώνουμε ότι δεν είναι ακόμα έτοιμοι να διακρίνουν το μηχανισμό της ακολουθίας των αριθμών της κάθε στήλης.

Κατά τη διάρκεια του προηγούμενου διαλόγου, μία άλλη μαθήτρια, η Άννα, δείχνει να έχει ανακαλύψει κάτι και σηκώνει επίμονα το χέρι της. Η ερευνήτρια, που δεν έχει προσέξει ότι κάποιος θέλει να μιλήσει, ζητάει από τους μαθητές να καθίσουν στα θρανία τους για να υπολογίσουν μέχρι ποιο μήνα θα μπορούσαν να παίζουν το παιχνίδι οι μαθητές της τάξης. Η Άννα δείχνει να μην ενδιαφέρεται να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα και επιμένει να σηκώνει το χέρι της επίμονα και από το θρανίο. Η ερευνήτρια, νομίζει ότι θέλει να απαντήσει στην ερώτηση που έθεσε και της δίνει το λόγο:

<u>Επεισόδιο 3</u>

1.	**Άννα:**	Εγώ έχω βρει πώς θα βρούμε το σύνολο των ζευγαριών.
2.	**Ερευνήτρια:**	Έχεις λύσει το πρόβλημα;
3.	**Άννα:**	Με δυσκολεύει λίγο να βρω τα ζεύγη των ενηλίκων, των εφήβων και των μωρών. Αλλά το σύνολο μπορούμε να το βρούμε προσθέτοντας, στην αρχή το 1 και το 2 μας κάνει 3, το 3 και το 2 μας κάνει 5, 5 συν 3, 8 .
4.	**Ερευνήτρια:**	Ακούσατε τι είπε η Άννα; … Λοιπόν αυτό θα το εξετάσουμε σε λιγάκι, αλλά το πρόβλημα αυτή τη στιγμή είναι, μέχρι ποιον μήνα μπορούμε εδώ να παίξουμε, να σηκωθούμε όλοι.

Η Άννα παρατηρεί την τελευταία στήλη και κάνει τη διαπίστωση που λύνει το πρόβλημα: «κάθε αριθμός προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων του». Παρατηρούμε ότι ήταν σε θέση να περιγράψει τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει για να βρει πόσα λαγουδάκια θα έχουμε στο τέλος του χρόνου, άρα σύμφωνα με τον Radford, κάνει *γενίκευση εντός πλαισίου* (contextual generalization), δεν μπορεί όμως να ερμηνεύσει το μηχανισμό της διαδικασίας, κάτι που σύμφωνα με τον Harel, σημαίνει ότι κάνει *γενίκευση των αποτελεσμάτων* και όχι *γενίκευση της διαδικασίας*. Παρόλο που είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι παρατήρησε εύστοχα τους αριθμούς της τελευταίας στήλης, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η γενίκευση της οδηγείται από *ερμηνευτικό επαγωγικό συλλογισμό*, καθώς, όπως λέει και η ίδια, δεν έχει ανακαλύψει το μηχανισμό που υπολογίζει τα λαγουδάκια ενήλικες, έφηβους και μωρά (διάλογος 3).

Η παρατήρηση της Άννας είναι σωστή, ωστόσο η ίδια δεν μπορεί να είναι σίγουρη για την εγκυρότητα της παρατήρησης της χωρίς την επιβεβαίωση κάποιου που γνωρίζει τη λύση του προβλήματος. Ο μόνος τρόπος για να βεβαιωθεί η μαθήτρια, χωρίς εξωτερική βοήθεια, είναι να κάνει μια ποιοτική προσέγγιση των αποτελεσμάτων της και να μπει στη διαδικασία να τα ερμηνεύσει. Παρόλα αυτά, η ίδια δε στηρίζεται στην άποψη κάποιου εξουσιοδοτημένου για την επαλήθευση της παρατήρησης της άρα δεν έχει *εξωτερικό αποδεικτικό σχήμα*. Το συμπέρασμά της έχει προκύψει από την επαλήθευση μέσω κάποιων μεμονωμένων μετρήσεων, άρα έχει *εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα*.

Παρόλο που η Άννα είχε δώσει την απάντηση για τον τρόπο που λύνεται το πρόβλημα, το ερώτημα: «μέχρι ποιο μήνα θα μπορούσε να συνεχιστεί το παιχνίδι;», εξακολουθούσε να υφίσταται. Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές μπόρεσαν με χαρακτηριστική ευκολία να οδηγηθούν στην απάντηση του ερωτήματος, κάτι που το αποδίδουμε στη μέθοδο διδασκαλίας που επιλέξαμε. Θεωρούμε ότι το γεγονός ότι ανά δύο παρέστησαν τα λαγουδάκια, τους βοήθησε να συνειδητοποιήσουν ότι έπρεπε να διαιρέσουν το πλήθος των μαθητών της τάξης με το δύο και με τη βοήθεια του πίνακα να δουν ποιος είναι ο τελευταίος μήνας που στην τελευταία στήλη αντιστοιχίζεται ένας αριθμός που δε ξεπερνά αυτό το αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια η ερευνήτρια, ελπίζοντας ότι αρκετοί δεν είχαν ακούσει την παρατήρηση της Άννας, επανάφερε στους μαθητές την ερώτηση του προβλήματος που ζητά να βρουν «πόσα λαγουδάκια θα υπάρχουν στο τέλος του χρόνου». Αρκετοί μαθητές χρειάστηκαν να το σκεφτούν εκ νέου, καταλήγοντας μια μαθήτρια να επιβεβαιώνει τα λόγια της Άννα επαναλαμβάνοντας τα, κάνοντας σύμφωνα με τον Radford (2003), *γενίκευση εντός πλαισίου*.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, παρόλο που οι μαθητές κάνουν τη γενίκευση ότι τα λαγουδάκια του εκάστοτε μήνα προκύπτουν αν προσθέσουμε τα λαγουδάκια των δύο προηγούμενων μηνών, όταν ζητείται από κάποιον να υπολογίσει τα λαγουδάκια του επόμενου μήνα, παρατηρούμε ότι προτιμά την επανάληψη της διαδικασίας από την άθροιση των δύο προηγούμενων μηνών. Το παρακάτω επεισόδιο, ακολουθεί αμέσως μετά την αναφερόμενη γενίκευση.

Επεισόδιο 4

1.	**Ερευνήτρια:**	Σταύρο, μπορείς σε παρακαλώ να μου πεις, τον Οκτώβρη πόσα ζεύγη έχουμε συνολικά;
2.	**Σταύρος:**	**…**Συνολικά θα έχουμε 89, αφού θα γίνουνε 13 ζεύγη ενήλικες και θα γίνουνε και 54 ζεύγη μωρά.

Ο Σταύρος, βρίσκει το αποτέλεσμα επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία. Φαίνεται να μη θέλει να χρησιμοποιήσει τη *γενίκευση εντός πλαισίου* που συμφωνήθηκε στην τάξη και να προτιμά να οδηγηθεί στο αποτέλεσμα, επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό. Αυτή η παρατήρηση συνάδει με την *αρχή του επαναλαμβανόμενου συλλογισμού* (repeated reasoning principle) που σύμφωνα με τον Harel «οι μαθητές πρέπει να εξασκούν έναν συλλογισμό προκειμένου να ενσωματώσουν και να εσωτερικεύσουν συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και κατανόησης» (Harel, 2001, σελ. 209). Ο Harel, συνεχίζει επισημαίνοντας ότι η ενσωμάτωση και η εσωτερίκευση συγκεκριμένων τρόπων σκέψης, γίνεται έπειτα από ιδίου τύπου επαναλαμβανόμενους συλλογισμούς, ενώ η παραβίαση αυτού του σταδίου μπορεί να οδηγήσει σε «επιφανειακή» μάθηση.

9.2. Βρείτε έναν κανόνα

Α. Πρώτη δραστηριότητα.

Υπήρξε ποικιλότητα στον τρόπο που διαπραγματεύτηκαν οι μαθητές μας αυτή τη δραστηριότητα. Κάποιοι απάντησαν με επιτυχία στα ερωτήματα της δραστηριότητας, ενώ κάποιοι άλλοι συνάντησαν δυσκολίες κατά τη διάρκεια αυτής τους της προσπάθειας. Αναλυτικότερα, παρόλο που αρκετοί μαθητές ήταν ικανοί να παρατηρήσουν τον πίνακα τιμών και στη συνέχεια να τον συμπληρώσουν, ώστε να βρουν πόσο θα γίνει το ρ όταν το ν είναι 30, μερικοί μαθητές δεν μπορούσαν να καταλάβουν τι εννοούσε ο πίνακας. Αδυνατούσαν να καταλάβουν ότι το ν και το ρ ήταν συμμεταβαλόμενες ποσότητες, πόσο μάλλον να καταλάβουν τη σχέση που τα συνδέει.

Με άλλα λόγια δυσκολευόντουσαν να μεταφράσουν την αναπαράσταση «πίνακας αριθμών» στην αναπαράσταση «περιγραφή», η οποία αντιστοιχεί, σύμφωνα με τον Janvier (1987), στη διαδικασία μετάφρασης, *ανάγνωση*, μία αδυναμία καταλυτική αφού δεν επιτρέπει στους μαθητές να προχωρήσουν στις ζητούμενες διαδικασίες της δραστηριότητας. Αυτοί οι μαθητές, δεν μπορούσαν προφανώς, να κάνουν κανενός είδους γενίκευση, αφού δεν μπορούσαν να εντάξουν πουθενά τα αντικείμενα της γενίκευσης.

Σε αυτό το σημείο η παρέμβαση της ερευνήτριας θεωρήθηκε αναγκαία και εξήγησε στους μαθητές ότι το ν και το ρ συμμεταβάλλονται και τους διευκρίνισε τι ζητάει η δραστηριότητα. Όσοι από τους μαθητές ξεπέρασαν αυτή τη δυσκολία, προχώρησαν εύκολα στη συμπλήρωση του πίνακα και μπόρεσαν να απαντήσουν ότι όταν το ν = 30, τότε το ρ = 39. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι κάποιοι μαθητές για να βρουν ότι όταν το ν = 30 το ρ = 39, συμπλήρωσαν τον πίνακα μέχρι το ν = 30, ενώ κάποιοι άλλοι προχώρησαν στη *γεγονική γενίκευση* του Radford, κατάλαβαν τη σχέση μεταξύ του ν και του ρ και έγραψαν απ’ ευθείας το αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια, ζητήθηκε να γράψουν μία σχέση που να συνδέει το ν με το ρ . Το δεύτερο ερώτημα, ζητά στην ουσία από τους μαθητές, να πάνε ένα βήμα πέρα από τις υπονοούμενες κατανοήσεις που έχουν αναπτύξει μεταξύ τους και να εκφραστούν

χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα που θέλει την εισαγωγή μαθηματικών συμβόλων.

Οι απαντήσεις που ακούσαμε ήταν ποικίλες. Πολλοί μαθητές είχαν καταλάβει ότι ο αριθμός «9» έπαιζε κάποιο ρόλο χωρίς να μπορούν να διατυπώσουν ακριβώς ποιος ήταν αυτός. Υπήρχαν φύλλα εργασίας που η απάντηση τους για τη σχέση που συνδέει το ν με το ρ ήταν: «το 9». Αυτή η αντιμετώπιση, μας θύμισε μια συνήθη προσέγγιση που συναντάμε στη διδακτική μας πρακτική, όπου οι μαθητές έχουν μια ιδέα, αναφέρουν μια λέξη «κλειδί» και θεωρούν ότι έχουν απαντήσει. Δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουν ολοκληρωμένες προτάσεις για να μοιραστούν σε μαθηματικό επίπεδο την ιδέα τους με τους άλλους.

Επεισόδιο 1

1.	**Ερευνήτρια:**	Ποιος δεν έχει μπορέσει ακόμα να βγάλει μία σχέση; Για να το συζητήσουμε λίγο….Για πείτε μου. Εγώ δε βλέπω μία συγκεκριμένη σχέση, βλέπω όμως ότι σίγουρα έχετε παρατηρήσει κάτι. Το θέμα είναι αυτό που παρατηρούμε, να μπορούμε να το γράψουμε και με κάποια σχέση. Ή εάν βρήκαμε μια σχέση, π.χ. μια ισότητα, να μπορούμε να καταλαβαίνουμε με λόγια τι αυτή σημαίνει. Έτσι δεν είναι παιδιά; Αλλιώς θα είναι μια ψυχρή ισότητα. Ουσιαστικά ένα τίποτα. Αν όμως καταλαβαίνω τι λέει αυτή η ισότητα, έχει νόημα. Οπότε… τι παρατήρησες Περικλή;
2.	**Περικλής**:	Ότι η σχέση είναι το 9.
3.	**Ερευνήτρια:**	Τι είναι; Για πες; Δηλαδή το 9 τι ρόλο παίζει; Όντως το 9 παίζει ένα ρόλο. Τι ρόλο όμως;
4.	**Περικλής**:	Κάθε φορά που μεγαλώνει το ν ανά δύο, αντίστοιχα μεγαλώνει και το ρ ανά δύο. Αλλά έχουν διαφορά 9.
5.	**Ερευνήτρια:**	Έχουν διαφορά 9. Παιδιά είπε κάτι πολύ βασικό. Είπε ότι οι δυο μεταβλητές, το ν και το ρ έχουν διαφορά 9. Ποια πράξη είναι η διαφορά; Το συν, το πλην, το επί ή το διά;
6.	**Περικλής:**	Το πλην.
7.	**Ερευνήτρια:**	Το πλην! Ωραία. Μπορείτε σας παρακαλώ, να συνεργαστείτε τώρα και να μεταφράσετε τα νέα δεδομένα μας, ότι δηλαδή αυτοί οι δύο αριθμοί το ν και το ρ έχουν διαφορά 9. Μπορείτε να το γράψετε σε

		μια ισότητα αυτό; …Τι σημαίνει διαφορά 9; … Σας βοηθάει αυτό; Ή θέλετε και άλλη διευκρίνιση; (σηκώνει το χέρι της η Κατερίνα)
8.	**Κατερίνα:**	Εφόσον είναι 9 η διαφορά, δεν είναι το ν + 9 το ρ;
9.	**Ερευνήτρια:**	Για ακούστε τι είπε. Για πες το δυνατά.
10.	**Κατερίνα:**	Το ν + 9 μας κάνει το ρ.

Σε αυτό το διάλογο, η ερευνήτρια αναφέρει τη διπλή υπόσταση μιας ισότητας, δηλαδή την ιδιότητα ότι μια ισότητα μπορεί να εκφραστεί με λέξεις ή με σύμβολα και ότι είναι πολύ σημαντικό να μπορεί κάποιος να δει τις μαθηματικές ισότητες που κρύβονται πίσω από τις λέξεις καθώς και αντίστροφα να βρει το νόημα που κρύβεται πίσω από τις ισότητες (διάλογος 1). Βλέπουμε ότι ο Περικλής, παρόλο που έχει καταλάβει ακριβώς τη σχέση που συνδέει το ν και το ρ, δυσκολεύεται να βρει το ζητούμενο αλγεβρικό τύπο, μια αδυναμία που ο Radford την έχει ονομάσει, *το πρόβλημα της τοποθέτησης* (Radford, 1999, 2000). Η ερευνήτρια προσπαθεί να εκμαιεύσει τον τύπο, δίνοντας έμφαση στις λέξεις κλειδιά που χρησιμοποιεί ο Περικλής. Στο τέλος, η Κατερίνα καταφέρνει να δώσει τη σωστή σχέση. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι ενώ η σχέση ρ = ν + 9 που δίνει η Κατερίνα προκύπτει από την ισοδύναμη έκφραση: «το ρ είναι κατά 9 μονάδες μεγαλύτερο του ν», χρησιμοποιεί τα λόγια του Περικλή, που δίνουν στην ουσία τη σχέση ρ – ν = 9.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η απάντηση που έδωσαν δύο μαθητές, όταν η ερευνήτρια ανάφερε ότι αν γράψουν «το 9» δε δίνουν αρκετές πληροφορίες, και ότι πρέπει να γράψουν κάτι πιο γενικό, που να συμπεριλαμβάνει τις μεταβλητές ν και ρ. Έτσι, διόρθωσαν και έγραψαν: «ο αριθμός 9 γιατί 19 -10 = 9 άρα ρ – ν = x».

Επεισόδιο 2

1.	**Άρης & Βασίλης:**	Εμείς το γράψαμε διαφορετικά.
2.	**Ερευνήτρια:**	Υπάρχουν πολλοί τρόποι να γράψουμε το ίδιο πράμα, θα έρθω να το δω. (Πηγαίνει στο ζευγάρι και βλέπει ρ – ν = x)
3.	**Ερευνήτρια:**	ρ – ν… όπου x τι είναι; Οτιδήποτε;
4.	**Άρης:**	Το x στη συγκεκριμένη άσκηση ήταν 9.
5.	**Ερευνήτρια:**	Για τη συγκεκριμένη μιλάμε.
6.	**Άρης:**	Άρα ρ – ν = 9.

Οι παραπάνω μαθητές, προσπάθησαν να περάσουν στη συμβολική γενίκευση και έγραψαν ρ – ν = x . Η μετάφραση όλων των δεδομένων σε μεταβλητές, μαρτυρά την πεποίθηση τους ότι η συμβολική γενίκευση είναι μια διαδικασία που περιλαμβάνει αποκλειστικά και μόνο μεταβλητές. Έκαναν, θα λέγαμε, γενίκευση της γενίκευσης και έδωσαν μία γενική σχέση που αναφέρεται στη σχέση όλων των ζευγών μεταβλητών με σταθερή διαφορά. Κατά τη γνώμη μας, δεν υφίσταται προβληματισμός για το αν είναι ικανοί να προχωρήσουν στη συμβολική γενίκευση, γιατί μπόρεσαν να ελιχθούν όταν η ερευνήτρια τους είπε ότι ζητάει μία σχέση για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, και έγραψαν ρ – ν = 9. Παρόλα αυτά τίθεται το θέμα αν κατανοούν ότι η σχέση ρ – ν = 9 είναι γενική και ότι περιγράφει πλήρως τις μεταβλητές ρ και ν της δραστηριότητας.

Άλλοι μαθητές, «απέφυγαν» να γράψουν το ζητούμενο αλγεβρικό τύπο και προτίμησαν να τον περιγράψουν. Ένας μαθητής, για παράδειγμα, έγραψε: «το ν είναι πιο μικρό ανά 9 φορές». Όταν ρωτήθηκε τι εννοούσε, απάντησε ότι η διαφορά των δύο στηλών κάνει 9. Αν και η φραστική διατύπωση που έκανε στην αρχή δεν ήταν ικανοποιητική, φάνηκε ότι είχε κατανοήσει τη σχέση που τα συνδέει. Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώνει και την πρώτη αρχή του Wittgenstain για τη γλώσσα που υποστηρίζει ότι η σημασία μιας λέξης βρίσκεται στη χρήση της. Υπό το πρίσμα της Διδακτικής, η παραπάνω αρχή λέει ότι έχει νόημα να ρωτάμε τι εννοεί ο μαθητής, πριν απορρίψουμε μία πρόταση που μπορεί να μην είναι αποδεκτή στη μαθηματική κοινότητα.

Ένας άλλος μαθητής, έγραψε:

Η σχέση που συνδέει το ν με το ρ είναι ότι σε κάθε στήλη απέχει το ρ, 9 από το ν.

10 – 19		20 – 29		34 - 43	
ν	ρ	ν	ρ	ν	ρ

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφέρουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές που μπόρεσαν να γράψουν μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών, προτίμησαν να γράψουν ρ – ν = 9 και όχι ρ = ν + 9. Η εκδήλωση αυτής της τάσης δείχνει ότι οι μαθητές, καθώς δεν είναι εξοικειωμένοι με τις μεταβλητές, δεν μπορούν να δουν το ν

και το ρ ως συμμεταβαλόμενες ποσότητες. Παρόλα αυτά βλέπουν ότι ν και το ρ έχουν σταθερή διαφορά 9 και οδηγούνται στη σχέση $\rho - \nu = 9$.

.

Β. Δεύτερη δραστηριότητα. Βιωματική.

Η δεύτερη δραστηριότητα, είναι βιωματική. Αναφέρεται σε βασιλιάδες που προστατεύονται από σωματοφύλακες με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Όλοι κινούνται σε ένα ορθογώνιο σχήμα, ο βασιλιάς μπαίνει στη μέση και οι σωματοφύλακες τον περιστοιχίζουν σε ένα ανάποδο «Π». Το ίδιο συμβαίνει και όταν έχουμε δύο βασιλιάδες. Μεγαλώνει το ορθογώνιο, μπαίνουν οι δύο βασιλιάδες μπροστά και στη μέση, και οι σωματοφύλακες τους περιστοιχίζουν σε ανάποδο «Π». Αυτή η δραστηριότητα διαφέρει από την πρώτη σε δύο κυρίως πράγματα: α) είναι βιωματική και β) με δεδομένη την «περιγραφή» του προβλήματος, οι μαθητές καλούνται με κατάλληλες *μετρήσεις* να φτιάξουν τον αντίστοιχο «πίνακα τιμών» και στη συνέχεια με *μοντελοποίηση* να μεταβούν στον «αλγεβρικό τύπο» (πίνακας Janvier).

Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές, κατά ένα μέρος, λειτούργησαν πιο αποτελεσματικά σε αυτή τη δραστηριότητα απ' ό,τι στην προηγούμενη, καθώς όλοι ήταν ικανοί να συμπληρώσουν με επιτυχία τον πίνακα τιμών.

<u>Επεισόδιο 3</u>

1.	**Ερευνήτρια:**	Για δύο βασιλιάδες επομένως, οι σωματοφύλακες είναι;
2.	**Μαθητές:**	Έξι.
3.	**Ερευνήτρια:**	Έξι. Ωραία. Για να έρθει ο τρίτος βασιλιάς παρακαλώ. (Σηκώνεται ο βασιλιάς). Και ζητάμε ενισχύσεις. Μέχρι το προηγούμενο σχήμα, ήταν συμπληρωμένος ο πίνακας. Τα άλλα πρέπει να τα συμπληρώσετε εσείς. (έχει σηκωθεί και άλλος ένας σωματοφύλακας)
4.	**Ερευνήτρια:**	Τι γίνεται τώρα; Είναι σωστό το σχήμα μας τώρα;
5.	**Μαθητές:**	Ναι.
6.	**Ερευνήτρια:**	Μπράβο. Γιατί για να είναι ορθογώνιο πρέπει όσοι είναι μπροστά να είναι και πίσω. Για τρεις επομένως βασιλιάδες, πόσους σωματοφύλακες;

7.	**Μαθητές:**	Εφτά.
8.	**Άρης:**	Σύνολο δέκα.
9.	**Ερευνήτρια:**	Ναι. Σημειώστε παιδιά για τρεις βασιλιάδες χρειαζόμαστε εφτά. Άλλος βασιλιάς.
10.	**Δημήτρης:**	Ένας σωματοφύλακας! (ανεβαίνει ένας βασιλιάς και ένας σωματοφύλακας)
11.	**Ερευνήτρια:**	Είναι σωστό το σχήμα παιδιά;
12.	**Γιώργος:**	Ναι. Έξι, έξι.
13.	**Ερευνήτρια:**	Ωραία. Άρα; Για προχωρήστε. Για πείτε μου;
14.	**Παναγιώτα:**	Για τέσσερις βασιλιάδες θέλουμε οκτώ.
15.	**Ερευνήτρια:**	Ωραία. Επομένως είπαμε. Για έναν βασιλιά θέλουμε 5, για δύο θέλουμε έξι, για τρεις εφτά, για τέσσερις οκτώ σωματοφύλακες. (Πετάγεται ένας μαθητή και λέει για πέντε εννιά)
16.	**Ερευνήτρια:**	Για πέντε πόσο; Πόσο;
17.	**Μαθητές:**	Εννέα.
18.	**Ερευνήτρια:**	Ωραία! Κατεβείτε να συμπληρώσετε το πινακάκι για να προχωρήσουμε στο επόμενο. (Τα παιδιά κάθονται και γράφουν).

Θεωρούμε ότι το γεγονός ότι η δραστηριότητα ήταν βιωματική, δηλαδή ότι οι μεταβλητές σ και β ήταν «ζωντανές», συντέλεσε θετικά στο να βρουν σωστά οι μαθητές πόσο γίνεται η μεταβλητή σ για τις διάφορες τιμές του β. Οι ίδιοι οι μαθητές, βάζοντας ακόμα έναν βασιλιά στο παιχνίδι, έπρεπε να βρουν πόσοι σωματοφύλακες χρειαζόντουσαν. Ακόμα και αν γινόταν κάποιο λάθος ήταν σε θέση να το αντιληφθούν, αφού έπρεπε κάθε φορά να φτιάξουν ένα ορθογώνιο.

Επίσης φάνηκε ότι η μετάβαση από την αναπαράσταση «περιγραφή», στην αναπαράσταση «πίνακας αριθμών» είναι πιο εύκολη για τους μαθητές από ό,τι η μετάβαση από τον «πίνακα αριθμών» στην «περιγραφή». Αυτή η υπόθεση είναι βάσιμη, καθώς οι μαθητές στα ελληνικά σχολεία είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με προβλήματα που ζητούν την κατασκευή ενός πίνακα τιμών, απ' ό,τι με προβλήματα που δίνεται ο πίνακας τιμών και ζητείται η ερμηνεία αυτού.

Από τα φύλλα εργασίας των μαθητών, διαπιστώνουμε ότι η συμπλήρωση του πίνακα τιμών γινόταν με ποικίλους τρόπους. Ειδικότερα, κάποιοι σχεδίαζαν το ορθογώνιο, άλλοι έφερναν στη μνήμη τους το ορθογώνιο που έφτιαχναν όταν υποδύονταν τους σωματοφύλακες και τους βασιλιάδες, ενώ άλλοι παρατηρούσαν τον τρόπο που

μεταβάλλονταν οι μεταβλητές σ και β. Τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών που ανήκουν στις δύο πρώτες κατηγορίες είναι εμπειρικά ενώ των μαθητών της τρίτης κατηγορίας είναι αναλυτικά μετασχηματιστικά. Πράγματι, στις δύο πρώτες περιπτώσεις, οι μαθητές επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματά τους με εμπειρικές μετρήσεις (άμεσες ή νοερές), ενώ στην τρίτη περίπτωση, οι μαθητές φεύγουν από το στάδιο της μέτρησης, κατηγοριοποιούν τα δεδομένα τους και γενικεύουν.

Μετά τη συμπλήρωση του πίνακα, ζητήσαμε από τους μαθητές να γράψουν τη σχέση που συνδέει το σ με το β. Οι μαθητές, φάνηκε να επηρεάστηκαν θετικά από την εμπειρία της πρώτης δραστηριότητας και δεν έμειναν στην *περιγραφή* του τρόπου που μεταβάλλονται τα σ και β, αλλά αποπειράθηκαν να γράψουν τον αλγεβρικό τύπο που τα συνδέει. Λίγες ήταν οι περιπτώσεις μαθητών που επέμειναν να *περιγράψουν* τη σχέση μεταξύ σ και β. Κάποιος, για παράδειγμα έγραψε:

> Η σχέση που συνδέει το σ με το β είναι ότι σε κάθε στήλη το σ (σωματοφύλακες) θα είναι κατά 4 πιο πολλοί από το β (βασιλιάδες).

7	3	9	5	19	15
σ	β	σ	β	σ	β

Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι παρόλο που οι δύο δραστηριότητες ήταν στην ουσία ίδιες, κανένας μαθητής δε φάνηκε να αναγνωρίζει αυτή την ομοιότητα ώστε να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις που αποκόμισε από τη πρώτη δραστηριότητα, στη δεύτερη.

9.3. Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια

9.3.1. Πρώτο πρόβλημα

<u>Επεισόδιο 1</u>

1. **Ερευνήτρια:** Όποιος βλέπει μαύρο να σηκώσει το χέρι του.

(*Σηκώνουν το χέρι τους και οι τρεις*)

2. **Ερευνήτρια**: Όποιος ξέρει τι χρώμα φοράει, να το πει.

3. **Κώστας**: Μαύρο.

(*Ο Κώστας είναι ο μόνος που φοράει άσπρο*)

4. **Ερευνήτρια:** Εσύ;

5. **Μανώλης**: Μαύρο.

6. **Ερευνήτρια**: Ωραία. (*Απευθύνεται στον Κώστα*) Πως το σκέφτηκες;

7. **Κώστας**: Αφού σήκωσαν το χέρι τους και οι δύο… ε, κάποιος θα φοράει μαύρο…

8. **Ερευνήτρια**: Είσαι 100% σίγουρος;

9. **Κώστας**: (Μιλάει χειρονομώντας) Όχι, μπορεί να φοράω άσπρο, γιατί είδε αυτός αυτόν και να είπε ότι φοράει μαύρο, και αυτός αυτόν.

10. **Ερευνήτρια**: Το καταλάβατε; Δεν μπορεί να είναι 100% σίγουρος.

11. **Κώστας:** Άσπρο φοράω, άσπρο.

12. **Ερευνήτρια:** Πού το ξέρεις;

13. **Κώστας:** Όχι, όχι.

14. **Ερευνήτρια:** Εσύ;

15. **Μανώλης:** Μαύρο.

16. **Ερευνήτρια:** Είσαι 100% σίγουρος;

17. **Μανώλης:** Ναι.

18. **Ερευνήτρια:** Πού το ξέρεις;

19. **Μανώλης:** Γιατί είδα του Κώστα…Σήκωσαν και οι δύο χέρι… σήκωσα και ’γώ... οπότε φοράμε δύο μαύρα και ένα άσπρο… και επειδή ο Κώστας φοράει άσπρο, θα φοράω μαύρο.

20. **Ερευνήτρια:** Α ωραία, για πες το δυνατά αυτό που μου είπες. Για ακούστε λιγάκι τι λέει…

21. **Μανώλης:** Αφού σήκωσαν όλοι χέρι στην ερώτηση ότι κάποιοι φοράνε μαύρο, είδα ότι ο Δημήτρης φοράει μαύρο και ο Κώστας άσπρο …οπότε εγώ θα είμαι το δεύτερο άτομο που θα φοράει μαύρο.

Στον παραπάνω διάλογο, βλέπουμε την περίπτωση δύο μαθητών, του Μανώλη που απαντάει σωστά, και του Κώστα που δεν απαντάει σωστά. Παρατηρούμε ότι ο Μανώλης, χρησιμοποιώντας παραγωγική συλλογισμό, οδηγήθηκε στο σωστό συμπέρασμα ότι φοράει μαύρο χαρτόνι, ενώ ο Κώστας αλλάζει συνέχεια γνώμη για το τι χρώμα φοράει. Σύμφωνα με νεότερες μελέτες (Chi, 2005; Vosniadou & Brewer, 1992), οι μαθητές μπορεί να έχουν διαφορετικές και συχνά αντικρουόμενες αντιλήψεις για ισοδύναμες καταστάσεις. Βασιζόμενοι σε αυτό το φαινόμενο, οι Lee & Smith θεωρούν ότι ένας μαθητής μπορεί ταυτόχρονα να έχει και αντιλήψεις που

είναι αποδεκτές στη μαθηματική κοινότητα και προσωπικές θεωρήσεις για το τι συνιστά μαθηματική αλήθεια που δε συνάδουν με τη μαθηματική κοινότητα. Όμοια και ο Κώστας αναπτύσσει ταυτόχρονα ορθή και λανθασμένη επιχειρηματολογία για το ίδιο θέμα. Αντιλαμβάνεται εν τέλει, και είναι σε θέση να εξηγήσει και τον λόγο που δεν μπορεί να στηριχτεί στη λογική του τύπου: «άμα φοράνε οι δύο μαύρο, σημαίνει ότι υπάρχουν πολλά μαύρα, άρα φοράω και εγώ μαύρο» και να ισχυριστεί ότι φοράει μαύρο, αλλά ταυτόχρονα παρασύρεται από τις αντιδράσεις της ερευνήτριας και συμπεραίνει λανθασμένα ότι φοράει άσπρο.

Η περίπτωση του Κώστα παρουσιάζει ενδιαφέρον γιατί επιπλέον δείχνει πώς μπορεί να επηρεαστεί ένας μαθητής από τις αντιδράσεις του καθηγητή του. Αρχικά θεώρησε ότι επειδή σήκωσαν και οι δύο του συμμαθητές το χέρι, θα είναι «πολλοί» αυτοί που φοράνε μαύρο (διάλογος: 7). Επομένως, επειδή είναι πολύ πιθανό να φοράει και αυτός μαύρο, θα φοράει μαύρο. Ανέπτυξε προσθετική λογική η οποία δεν εξασφαλίζει πάντα ένα σωστό αποτέλεσμα. Όταν ρωτήθηκε αν είναι βέβαιος, το ξανασκέφτηκε και αναπτύσσοντας παραγωγικό συλλογισμό έδωσε μία ικανοποιητική απάντηση, εξηγώντας γιατί ενδέχεται να φοράει άσπρο χαρτόνι (διάλογος: 9). Ο τρόπος που εκφράστηκε ο μαθητής, ήταν ιδιαίτερα καταδεικτικός. Η επιχειρηματολογία του συνοδευόταν από έντονες χειρονομίες, έδειχνε συνέχεια τους μαθητές στου οποίους αναφερόταν δίνοντας την εντύπωση ότι χωρίς τις χειρονομίες θα μπερδεύονταν. Σύμφωνα με τον Radford αυτές οι κινήσεις, δείχνουν στην ουσία ότι ο μαθητής κάνει γεγονική γενίκευση.

Στη συνέχεια ο Κώστας παρερμήνευσε την επιβράβευση της ερευνήτριας (διάλογος: 10) για τον τρόπο που σκέφτηκε (διάλογος: 11) και αποφάσισε ότι σίγουρα φοράει άσπρο χαρτόνι. Είναι σύνηθες το φαινόμενο, κάτι που φάνηκε πολλές φορές και σε αυτή την έρευνα, αρκετοί μαθητές να αναπτύσσουν επιχειρηματολογία επηρεαζόμενοι από τις αντιδράσεις του καθηγητή τους. Αν δηλαδή αντιληφθούν ότι ο καθηγητής τους είναι δυσαρεστημένος, αυτόματα «ακυρώνουν» τη σκέψη τους και προσπαθούν να διορθώσουν. Αντίθετα, αν ο καθηγητής τους επιβραβεύει, θεωρούν ότι επιχειρηματολογούν ορθά και είτε εξελίσσουν την επιχειρηματολογία τους με γόνιμο τρόπο, είτε βιάζονται να «μαντέψουν» την απάντηση προσφέροντας την έτσι, έτοιμη χωρίς καμία διεργασία. Η παραπάνω παρατήρηση επιβεβαιώνεται και από την έρευνα των Harel & Sowder (1998), που αναφέρει ότι ένα από τα πιο συνηθισμένα

αποδεικτικά σχήματα των μαθητών είναι το *εξωτερικό αποδεικτικό σχήμα* που η εγκυρότητα μιας πρότασης επικυρώνεται, μεταξύ άλλων, από το λόγο του εξουσιοδοτημένου.

Επεισόδιο 2

(*Σηκώνονται άλλοι τρεις. Η ερευνήτρια φοράει σε όλους μαύρο χαρτόνι.*)

1.	**Ερευνήτρια:**	Λοιπόν… όποιος βλέπει μαύρο, να σηκώσει το χέρι (*Σηκώνουν και οι τρεις το χέρι*)
2.	**Ερευνήτρια:**	Όποιος ξέρει τι χρώμα φοράει… να το πει. …
3.	**Θάνος:**	Εγώ… αφού όλοι σήκωσαν το χέρι και όλοι φοράνε μαύρο, πάει να πει ότι φοράω μαύρο.
4.	**Ερευνήτρια:**	Ναι… ωραία… μπράβο.
5.	**Μαρία:**	Κυρία… δεν είναι έτσι…
6.	**Ερευνήτρια:**	Ναι, για πες.
7.	**Μαρία:**	Το άλλο παιδί που σηκώθηκε και σήκωσαν όλοι το χέρι δεν ήξερε.
8.	**Θάνος:**	Να της το πω λιγάκι εγώ;
9.	**Ερευνήτρια:**	Ναι, να της το πεις εσύ.
10.	**Θάνος:**	Γιατί όταν ρωτήσατε ποιος ξέρει σίγουρα τι χρώμα φοράει, δε σήκωσε κανένας το χέρι του…που σημαίνει ότι κανένας δε φόραγε άσπρο για να το καταλάβει.

Αυτή η περίπτωση είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα καθώς αναδεικνύει τις δυνατότητες της μεθοδολογίας *Παιχνίδι των Ρόλων*. Αν κάποιος σκεφτεί το πρόβλημα χωρίς να παίξει το παιχνίδι, θα πει ότι σε αυτή την περίπτωση κανείς δεν μπορεί να απαντήσει με βεβαιότητα για το χρώμα που φοράει. Ο Θάνος χρησιμοποιεί την εμπειρία που βιώνει μέσα στο παιχνίδι, δίνει σημασία στις παύσεις που προκύπτουν και κάνει μια αποκαλυπτική πρόταση. Η αβεβαιότητα των συμπαικτών του, δίνει τη λύση. Υποστηρίζει ότι για να μην είναι κανείς βέβαιος, πάει να πει ότι όλοι βλέπουν μαύρο. Επομένως, φοράει μαύρο χαρτόνι. Ένα τέτοιο συμπέρασμα δύσκολα θα προέκυπτε αν δε χρησιμοποιούσαμε το *Παιχνίδι των Ρόλων*.

9.3.2 Δεύτερο πρόβλημα: Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια

Το παρακάτω επεισόδιο πραγματοποιείται κατά τη δεύτερη φάση του προβλήματος, όπου συμμετέχουν έξι μαθητές εκ των οποίων οι δύο φορούν άσπρο χαρτόνι. Μία μαθήτρια με μαύρο χαρτόνι θεωρεί από το πρώτο κιόλας λεπτό ότι φοράει άσπρο. Η άποψη και η αιτιολόγηση της γίνεται μπροστά στην κάμερα, χωρίς να την ακούν οι συμπαίκτες της.

Επεισόδιο 3

1.	**Νένα:**	Είδα τρία μαύρα και υπέθεσα ότι υπάρχουν και τρία άσπρα.
2.	**Ερευνήτρια:**	Είπα όμως εγώ, ότι σε όσους βάλω άσπρο θα βάλω και μαύρο;
3.	**Νένα:**	Ε, υπέθεσα.

Η Νένα κάνει μια υπόθεση που σε καμία περίπτωση δε συνάδει με τα δεδομένα του προβλήματος. Θεωρεί ότι το πλήθος των μαύρων χαρτονιών είναι ίσο με αυτό των άσπρων χαρτονιών. Πολλές φορές, οι μαθητές, θέλοντας να καταλήξουν σε μια απάντηση, όταν τα δεδομένα δεν τους αρκούν, συμπληρώνουν δικά τους. Μία τέτοια αντίδραση, αποκαλύπτει την κοινή πεποίθηση των περισσοτέρων μαθητών, ότι η απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι γρήγορη και αβίαστη, κάτι που βέβαια αποτελεί τροχοπέδη για την ανάπτυξη προχωρημένης μαθηματικής σκέψης (Schoenfeld, 1985).

Η απάντηση της Νένας, γεννά την υποψία ότι θεωρεί ότι η λογική από μόνη της δεν είναι αρκετή για να καταλήξει κάποιος σε ένα έγκυρο αποτέλεσμα, αλλά είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί η διαίσθηση και η παρατήρηση πραγμάτων που δεν είναι προφανή. Πράγματι, πολλές φορές κάποια προβλήματα έχουν τέτοιου είδους απαιτήσεις από το λύτη τους, η ορθή απάντηση όμως πάντα στηρίζεται σε κάποια λογική και όχι σε κάποια τυχαία εικασία που δεν επαληθεύεται. Η Νένα αποπειράται να αφήσει τη φαντασία της ελεύθερη και φαίνεται να αναζητά τη λύση μέσα από μία υποτιθέμενη συμμετρία του πλήθους των άσπρων και των μαύρων χαρτονιών.

Το αποδεικτικό σχήμα της Νένας είναι εμπειρικό γιατί στηρίζεται σε κάποιες παρατηρήσεις που θεωρεί ότι κάνει, οι οποίες στην πραγματικότητα είναι εικασίες. Προσπαθεί να γενικεύσει στηριζόμενη σε αυτές τις υποθέσεις και δεν προσπαθεί να γενικεύσει καμία διαδικασία.

Παρόμοια αντιμετώπιση παρουσιάζεται από αρκετούς μαθητές όταν συσχετίζουν το πλήθος των ατόμων που συμμετέχουν στο παιχνίδι, με το πλήθος των άσπρων χαρτονιών. Κάποιοι κάνουν μια αποτυχημένη απόπειρα *γενίκευσης εντός πλαισίου* και ισχυρίζονται ότι όσο πιο πολλοί παίκτες υπάρχουν, τόσο πιο πολλά άσπρα χαρτόνια θα υπάρχουν. Μία τέτοια δήλωση, σε καμία περίπτωση δε συνάδει από το δεδομένο του προβλήματος που είναι ότι τουλάχιστον ένας θα φοράει άσπρο χαρτόνι. Βλέπουμε λοιπόν οι μαθητές να επηρεάζονται από παράγοντες άσχετους με το πλαίσιο του προβλήματος και αβίαστα γενικεύουν βγάζοντας συμπεράσματα τα οποία δε «δικαιούνται» να βγάλουν.

Ανάλογα αποπειράται να κάνει *γενίκευση εντός πλαισίου* ένας μαθητής που θεωρεί εσφαλμένα ότι αυτοί που φοράνε μαύρο θα μπορούσαν να γνωρίζουν το χρώμα τους. Αυτή η σκέψη τον ακολουθεί και όταν σηκώνεται στην επόμενη φάση, που έξι στους οκτώ φορούν άσπρο, θεωρεί από το πρώτο κιόλας λεπτό ότι γνωρίζει το χρώμα του:

<u>Επεισόδιο 4</u>

1.	**Παντελής:**	Βλέπω μόνο ένα μαύρο και αν είχα άσπρο ο μαύρος θα έλεγε ότι ξέρει τι χρώμα φοράει.
2.	**Ερευνήτρια:**	Κάτσε, κάτσε! Βλέπεις μόνο ένα μαύρο , άρα εσύ είσαι…
3.	**Παντελής:**	Μαύρος.
4.	**Ερευνήτρια:**	Γιατί;
5.	**Παντελής:**	Γιατί ο μαύρος θα έλεγε ότι ξέρει τι χρώμα φοράει.

Ο Παντελής προσπαθεί να κάνει *γενίκευση εντός πλαισίου*, μία προσπάθεια που όμως δεν ευδοκιμεί λόγω της παρερμηνείας των δεδομένων του προβλήματος. Θεωρεί ότι κάποιος μπορεί να γνωρίζει το χρώμα που φοράει, είτε αυτό είναι άσπρο, είτε είναι μαύρο. Αγνοεί, προφανώς, τη σημασία της προϋπόθεσης του προβλήματος, που είναι ότι τουλάχιστον ένας φοράει άσπρο θεωρώντας ότι είναι ισοδύναμη με την

προϋπόθεση ότι τουλάχιστον ένας φοράει μαύρο. Βάσει αυτού ισχυρίζεται ότι, αν ο μοναδικός μαύρος που βλέπει, δεν βλέπει άλλο μαύρο, μπορεί να αποφανθεί ότι είναι μαύρος. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν ισχύει, αφού θα μπορούσαν και όλοι να φοράνε άσπρο. Βλέπει λοιπόν μία ανυπόστατη συμμετρία στο πρόβλημα σχετικά με τη δυνατότητα ορθής εκτίμησης για το αν κάποιος φοράει άσπρο ή μαύρο χαρτόνι. Παρόλα αυτά, το αποδεικτικό σχήμα του μαθητή, την ώρα που αποπειράται να κάνει αυτή τη γενίκευση είναι αναλυτικό μετασχηματιστικό.

Ο Παντελής δεν είναι ο μοναδικός που έχει μπερδευτεί σε αυτή τη φάση του προβλήματος (έξι άσπρα και δύο μαύρα χαρτόνια). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της μαθήτριας που θεωρεί από το τρίτο κιόλας λεπτό ότι φοράει άσπρο χαρτόνι:

Επεισόδιο 5

1.	**Μαρία:**	*(Πλησιάζει στην κάμερα. Οι συμμαθητές της που συμμετέχουν στο παιχνίδι, δεν μπορούν να την ακούσουν).* Εγώ λέω αυτό που λέει ο Άγγελος. Ότι για να μην σηκώνει κανείς το χέρι του… και επειδή είναι περισσότερα τα άσπρα από τα μαύρα, αυτά που βλέπω εγώ…
2.	**Ερευνήτρια:**	Πόσοι είσαστε πάνω;
3.	**Μαρία**	Οκτώ. Από αυτούς που βλέπω τους εφτά, οι δύο είναι μαύροι και επειδή όσο μεγαλώνουν τα άσπρα τόσο μεγαλώνει η αβεβαιότητα και επειδή κανείς δε σηκώνει το χέρι να πει ότι φοράει άσπρο πιστεύω ότι βλέπουν και άλλα άσπρα, είμαι και εγώ άσπρη.
4.	**Ερευνήτρια:**	Ναι αλλά… από τώρα; Από το τρίτο λεπτό ξέρεις ότι φοράς άσπρο;
5.	**Μαρία:**	Ναι.
6.	**Ερευνήτρια:**	Γιατί;
7.	**Μαρία:**	Γιατί μπορεί και οι άλλοι να μην είναι συγκεντρωμένοι.
8.	**Ερευνήτρια:**	Ναι αλλά αυτό δεν είναι με βεβαιότητα. Στηρίζεσαι στο ότι ο άλλος δεν είναι συγκεντρωμένος.… Αυτή είναι η βεβαιότητά σου;
9.	**Μαρία:**	Εγώ στηρίζομαι στην αβεβαιότητα.
10.	**Ερευνήτρια:**	Ναι αλλά γιατί; Αν εγώ έχω βάλει πέντε άσπρους και εσύ είσαι μαύρη;
11.	**Μαρία:**	Εγώ έτσι νομίζω.

Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει παρεξήγηση μεταξύ του τι είναι βεβαιότητα και του τι είναι εικασία. Η Μαρία υποθέτει ότι φοράει άσπρο χαρτόνι χωρίς να

συνειδητοποιεί ότι δεν μπορεί να αποφανθεί κάτι τέτοιο στην παρούσα φάση. Ενώ παρατήρησε από τις προηγούμενες εκδοχές του προβλήματος ότι η απάντηση στηρίζεται στην αβεβαιότητα των άλλων, δεν κατάλαβε με ποιον τρόπο «μετράμε» αυτή την αβεβαιότητα προκειμένου να οδηγηθούμε σε ένα ασφαλές συμπέρασμα. Έκανε μια επιπόλαια γενίκευση, αγνοώντας ότι με αυτόν τον τρόπο παραβιάζει τους κανόνες της λογικής. Το αποδεικτικό σχήμα της Μαρίας είναι εμπειρικό και στηρίζεται σε εσφαλμένες παρατηρήσεις.

Στο έκτο λεπτό, ενώ δύο παιδιά ξέρουν ότι φοράνε άσπρο, ο Παντελής και η Μαρία βλέποντας ότι επαληθεύτηκε η υπόθεσή τους φαίνεται να μπερδεύονται ακόμη περισσότερο:

Επεισόδιο 6

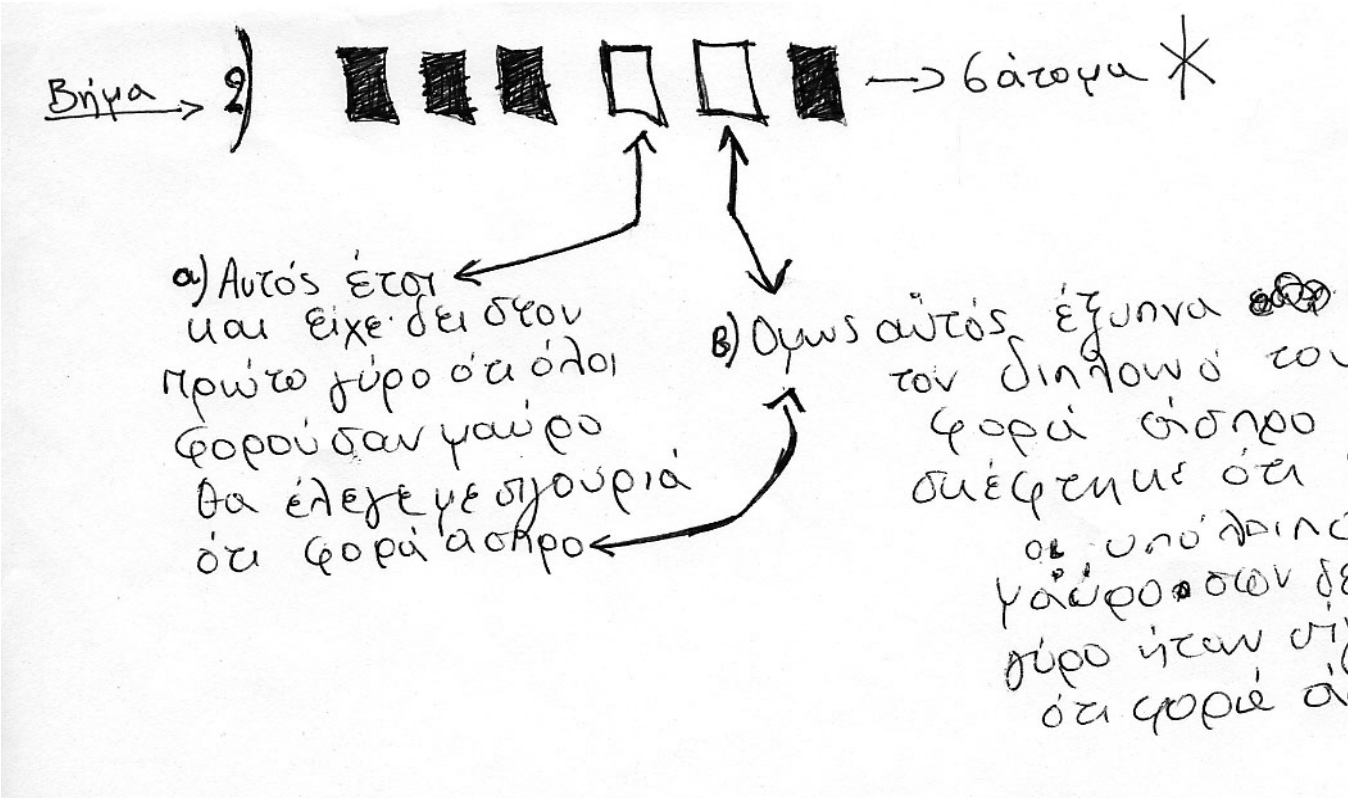
1.	**Ερευνήτρια:**	Έκτο λεπτό! Είναι κανείς τώρα που ξέρει με βεβαιότητα ότι φοράει άσπρο; (σηκώνουν τα χέρια ο Σταύρος και ο Άρης) Εσείς οι δύο. (Απευθύνεται Στο Σταύρο) Γιατί ξέρεις ότι φοράς άσπρο;
2.	**Σταύρος:**	Γιατί είχα δει πέντε άσπρους και πέντε γύρους δε σήκωσε κανείς το χέρι και κατάλαβα ότι πρέπει να υπάρχει και άλλος ένας, ο οποίος θα είμαι εγώ.
3.	**Ερευνήτρια:**	Ωραία. (Απευθύνεται στον Άρη) Εσύ για ποιον λόγο;
4.	**Σταύρος:**	Και εγώ βλέπω πέντε άσπρα. Άρα έχω και εγώ.
5.	**Παντελής:**	Άρα εγώ έχω μαύρο.
6.	**Ερευνήτρια:**	(Απευθύνεται στη Μαρία) Εσύ γιατί δεν ήξερες τώρα ότι φοράς άσπρο;
7.	**Μαρία:**	Τι φοράω άσπρο; Κυρία! Τι σχέση έχουν τα λεπτά με τα χρώματα;…. Κυρία έχω μια απορία!

Ο Παντελής φαίνεται να πιστεύει ότι η επαλήθευση των λεγόμενων του σημαίνει και αυτόματη επικύρωση των απόψεων του, χωρίς να συνειδητοποιεί ότι η περίπτωσή να φορά μαύρο χαρτόνι ήταν τυχαία και ότι θα μπορούσε κάλλιστα να φορούσε και άσπρο χαρτόνι. Η Μαρία αντιλαμβάνεται από τα λεγόμενα των συμμαθητών της ότι το λεπτό που μπορεί κάποιος να ξέρει ότι φοράει άσπρο χαρτόνι ταυτίζεται με το πλήθος των άσπρων χαρτονιών, χωρίς όμως να καταλαβαίνει γιο ποιο λόγο συμβαίνει αυτό. Όταν ζητήθηκε από τους συμμαθητές της να εξηγήσουν το λόγο, φάνηκε ότι δεν ήταν σε θέση να το κάνουν είτε γιατί δε γνώριζαν, είτε γιατί δυσκολευόντουσαν

να εκφράσουν αυτό που είχαν καταλάβει. Μία τέτοια αντίδραση δείχνει ότι οι μαθητές ικανοποιούνται από γενικεύσεις που επαληθεύονται από τα αποτελέσματα και όχι από τον εντοπισμό μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας.

Ενδεικτικές είναι και οι απαντήσεις των μαθητών στο φύλλο εργασίας. Συγκεκριμένα, στο Β ερώτημα που ήθελε να αναλυθεί τι συμβαίνει σε κάθε στάδιο του προβλήματος, παρατηρήθηκαν τα εξής:

- Ένας μαθητής (ο Κώστας που στο προηγούμενο πρόβλημα χειρονομούσε και έδειχνε τους συμμαθητές του για να επιχειρηματολογήσει), ανέλυσε τα στάδια αναπαριστάνοντας το πρόβλημα σχεδιάζοντας άσπρα και μαύρα χαρτόνια και σχολιάζοντας πάνω σε αυτά.



Βλέπουμε λοιπόν ότι ο Κώστας χρειάζεται να έχει τα αντικείμενα μπροστά του για να γενικεύσει. Τέτοια γενίκευση είναι γεγονική κατά Radford και βασισμένη στα αποτελέσματα κατά Harel. Το αποδεικτικό του σχήμα είναι εμπειρικό. Αξίζει να σημειώσουμε ότι παρόλα αυτά, η γενική εικόνα του Κώστα έδειχνε ότι ήταν σε θέση να κάνει αξιοσημείωτες γενικεύσεις και να οδηγηθεί σε σωστά αποτελέσματα.

- Αρκετοί μαθητές έκαναν *γεγονική γενίκευση* και ταυτίστηκαν με κάποιον παίκτη που φοράει ένα συγκεκριμένο χρώμα και απάντησαν αναφερόμενοι στον εαυτό τους. Για παράδειγμα, κάποιος έγραψε για το πρώτο στάδιο του παιχνιδιού:

  > Αφού πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα άσπρο και εφόσον βλέπω τρία μαύρα, έχω άσπρο.

- Οι περισσότεροι από τους μαθητές έκαναν επίσης *γεγονική γενίκευση* και αναφέρονταν στη λέξη *παιδί* για να εξηγήσουν τι θα συμβεί. Για παράδειγμα στο πρώτο στάδιο του παιχνιδιού έχουμε την εξής απάντηση:

  > (3 μαύρα, 1 άσπρο)
  > Εφόσον ο φύλακας είπε ότι έστω κι ένας πρέπει να φοράει άσπρο, το παιδί με το άσπρο χαρτόνι είναι σίγουρο από το πρώτο λεπτό ότι φοράει το άσπρο χαρτόνι.

- Λίγοι μαθητές δεν αναφέρθηκαν στον εαυτό ή σε κάποιο παιδί και μίλησαν γενικά, κάνοντας στην ουσία *γενίκευση εντός πλαισίου*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

10.1. Το πρόβλημα του Fibonacci

Οι μαθητές του δείγματος μας, παρόλο που δεν ήταν εξοικειωμένοι με το συγκεκριμένο βιωματικό περιβάλλον διδασκαλίας, μπόρεσαν με ευκολία να λειτουργήσουν αποτελεσματικά μέσα σε αυτό. Αν λάβουμε υπ' όψιν μας το βαθμό δυσκολίας του προβλήματος, ο χρόνος που χρειάστηκε για να λύσουν το πρόβλημα ήταν πολύ σύντομος. Αυτή η διαπίστωση ενίσχυσε την αρχική πεποίθηση της ερευνήτριας ότι ένα κατάλληλο διδακτικό περιβάλλον που προάγει τη διαδραστική εμπλοκή των μαθητών με το πρόβλημα και ενεργοποιεί το δίπολο εσωτερική σκέψη – εξωτερική αλληλεπίδραση δρα καταλυτικά στην επίλυση των προβλημάτων.

Μέσα στο πλαίσιο της συνεργασίας της Κονστρουκτιβιστικής και Κοινωνικοπολιτιστικής προσέγγισης, το δίπολο εσωτερική σκέψη – εξωτερική αλληλεπίδραση φαίνεται να παίζει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση ενός προβλήματος. Από την ανάγνωση κιόλας αυτού, είτε γίνει κατ' ιδίαν, είτε ομαδικά, απαιτείται η *εσωτερίκευση* του προβλήματος (Sfard, 1992). Εν συνεχεία, οι σκέψεις που δημιουργηθήκαν εξωτερικεύονται μέσα από την αλληλεπίδραση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Η μία ιδέα προστίθεται πάνω στην άλλη και τα δεδομένα πλέον αναπροσαρμόζονται. Η στιγμή όμως που θα επέλθει η λύση, απαιτεί επαναφορά της εσωτερίκευσης μέσα από την εξατομικευμένη αναδιοργάνωση και σκέψη.

Η Boaler (2000) είχε δώσει κεντρικό ρόλο στη συμβολή του μαθησιακού περιβάλλοντος που προάγει θετικές μαθησιακές εμπειρίες. Σύμφωνα με την άποψη της,

> οι μαθητές δε μαθαίνουν μόνο μεθόδους και διαδικασίες στο μάθημα των μαθηματικών, μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν μαθηματικά και η μάθηση ουσιαστικής γνώσης δεν μπορεί να διαχωριστεί από τη διαδραστική εμπλοκή τους στην τάξη,

καθώς και τα δύο αμοιβαία συγκροτούν το ένα το άλλο κατά τη διάρκεια της μάθησης (Boaler, 2000, σελ. 2).

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές ανέπτυξαν προηγμένους συλλογισμούς χρησιμοποιώντας την παρατήρηση και έχοντας κύριο εργαλείο τους τις εμπειρίες που αποκόμισαν από την ενσωμάτωση του προβλήματος. Ωστόσο, το αποδεικτικό σχήμα των μαθητών ήταν εμπειρικό, κάτι που συνάδει με το συμπέρασμα των Harel & Sowder (1998), ότι ένα από τα πιο συνηθισμένα αποδεικτικό σχήμα των μαθητών είναι το εμπειρικό. Η παραπάνω διαπίστωση, προδίδει ότι οι μαθητές του δείγματος μας δεν είναι έτοιμοι να προχωρήσουν σε γενικεύσεις που προάγουν την αφηρημένη σκέψη.

Παρατηρήθηκε ότι ο τρόπος σκέψης των μαθητών ήταν *περιγραφικά επαγωγικός* και ακολουθούσε κυρίως την *προσθετική λογική*. Οι μαθητές είχαν την τάση να *περιγράφουν* τις παρατηρήσεις τους και όχι να τις ερμηνεύουν κάτι που τους οδηγούσε σε *γενικεύσεις εκ του αποτελέσματος*. Επίσης, οι μαθητές έκαναν εύκολα *γεγονικές γενικεύσεις* και δυσκολότερα *γενικεύσεις εντός πλαισίου*. Χαρακτηριστικό είναι ότι ακόμα και όταν προέκυπταν οι *γενικεύσεις εντός πλαισίου*, οι μαθητές αδυνατούσαν να προβούν σε γενίκευση εκ της διαδικασίας.

Κάποιοι μαθητές είχαν την τάση να επαναλαμβάνουν το συλλογισμό από την αρχή, παρά να χρησιμοποιούν το γενικό συμπέρασμα ότι τα λαγουδάκια κάθε μήνα προκύπτουν από το άθροισμα του πλήθους τους κατά τους δύο προηγούμενους μήνες. Μία τέτοια προσέγγιση μπορεί εκ πρώτης όψεως να φαίνεται ότι δεν εξυπηρετεί την οικονομία της σκέψης, βοηθά όμως σύμφωνα με τον Harel (2001) στη βαθιά κατανόηση του συλλογισμού, καλλιεργώντας με αυτόν τον τρόπο το έδαφος για την ανάπτυξη προχωρημένης μαθηματικής σκέψης.

10.2. Βρείτε έναν κανόνα

Παρατηρήθηκε ότι τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών ήταν κυρίως εμπειρικά και ότι η τάση πολλών μαθητών του δείγματος μας, δεν ήταν εν γένει να εκφραστούν με μεταβλητές. Οι μαθητές αδυνατώντας να κατανοήσουν την έννοια της συμμεταβολής,

έβλεπαν ότι το ρ και το ν έχουν σταθερή διαφορά. Οι περισσότεροι βρίσκονταν στο *προσυμβολικό στάδιο*, όπως το έχει ορίσει ο Radford και προτιμούσαν να περιγράψουν τη σχέση με μερικά παραδείγματα, κάνοντας στην ουσία *γεγονική γενίκευση*.

Η αδυναμία των μαθητών δεν βρίσκονταν στην κατανόηση της σχέσης, αλλά στη μαθηματική έκφραση αυτού που αντιλήφθηκαν. Αυτό το πρόβλημα το έχει ονομάσει ο Radford (1999, 2000), *πρόβλημα της τοποθέτησης* , αποτελεί βασική αδυναμία των μαθητών, σηματοδοτώντας με αυτόν τον τρόπο την αδυναμία να περάσουν στη *συμβολική γενίκευση*. Οι μαθητές του δείγματός μας, καταλάβαιναν τι υπονοούσε η λιτή έκφραση: «το 9», κάτι που σύμφωνα με τον Radford σημαίνει ότι η οικοδόμηση του νοήματος είχε επιτευχθεί σε κοινωνικό επίπεδο. Κάτι τέτοιο όμως θα ήταν αδύνατο να συμβεί αν δεν υπήρχε αυτή η κατά πρόσωπο αλληλεπίδραση.

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στη πρώτη δραστηριότητα να προχωρήσουν στη *γενίκευση εντός πλαισίου,* κάτι που δε συνέβη στη βιωματική που έδειξαν ότι είχαν κατανοήσει σε βάθος τη σχέση που συνδέει το σ με το β και ότι μπορούσαν να την εκφράσουν χρησιμοποιώντας ολοκληρωμένες εκφράσεις. Παρατηρήθηκε επίσης, ότι οι μαθητές στη βιωματική δραστηριότητα, ήταν πιο ικανοί να περάσουν στη *συμβολική γενίκευση*, απ' ό,τι στην πρώτη δραστηριότητα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι παρόλο που οι δύο δραστηριότητες ήταν στην ουσία ίδιες, κανένας μαθητής δε φάνηκε να αναγνωρίζει αυτή την ομοιότητα ώστε να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις που αποκόμισε από τη πρώτη δραστηριότητα, στη δεύτερη.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η δυσκολία των μαθητών να *γενικεύσουν εντός πλαισίου* δεν οφείλεται μόνο σε κάποιες γνωστικές αδυναμίες που πιθανόν να έχουν, αλλά επηρεάζεται και από το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζεται το πρόβλημα. Η καθοριστική σημασία του πλαισίου του προβλήματος έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών, όπως της Boaler, του Cobb, του Gravemeijer κ.λπ.

10.3. Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια

Το πρόβλημα με τα χρωματιστά χαρτόνια, είναι ένα σύνθετο πρόβλημα που δίνει βήμα στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Οι μαθητές, έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον και ζήλο για τα δύο προβλήματα και η λύση επήλθε αβίαστα με την ενεργητική συμμετοχή τους. Θεωρούμε ότι κάτι τέτοιο δε θα μπορούσε να επιτευχτεί με παραδοσιακή προσέγγιση του προβλήματος, καθώς από την αρχή της δραστηριότητας θα υπήρχαν προβλήματα αφού δε θα καταλάβαιναν τις εκφωνήσεις αυτών, πόσο μάλλον να ξεδιαλύνουν τις περιπτώσεις. Μία τέτοια θεώρηση είναι βάσιμη, καθώς παρατηρήθηκε ότι και στα δύο προβλήματα οι μαθητές φάνηκε να μην καταλαβαίνουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος πριν την έναρξη της βιωματικής μεθόδου. Αντίθετα, με την αρωγή της βιωματικής μεθόδου, γρήγορα εξοικειώθηκαν με αυτό και αντιλήφθηκαν τη λογική τους. Το γεγονός ότι βίωσαν το πρόβλημα, τους βοήθησε να «μπουν» μέσα σε αυτό και να κατανοήσουν όλες τις πτυχές του.

Συναντήσαμε διάφορες ποιότητες γενίκευσης, από αβάσιμες μέχρι πολύ προχωρημένες. Μερικοί μαθητές επιχειρηματολόγησαν χρησιμοποιώντας προσθετική λογική, λέγοντας για παράδειγμα ότι «αν βλέπω πολλά μαύρα, σημαίνει ότι φοράω και εγώ μαύρο». Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν μπορούν να προβούν σε γενικεύσεις, καθώς σε άλλες περιπτώσεις η συλλογιστική που ανέπτυξαν ήταν αρκετά προχωρημένη.

Ενδεικτικό ήταν το γεγονός ότι, πολύ μαθητές διατύπωναν απόψεις που δεν προέκυπταν από τα δεδομένα του προβλήματος αλλά από προσωπικές τους πεποιθήσεις που μεταξύ άλλων μαρτυρούσαν ότι θεωρούσαν ότι τα προβλήματα κρύβουν μία άδηλη «συμμετρία». Ο τύπος συμμετρίας που θεωρούν ότι έχουν τα προβλήματα, είναι προσωπικός και αλλάζει από μαθητή σε μαθητή. Ένα κοινό φαινόμενο που εμφανίζεται κατά τη διαδικασία της μάθησης, είναι ότι οι μαθητές δημιουργούν τις δικές τους αντιλήψεις για τα αντικείμενα που μελετούν καθώς και για τις ιδιότητες που τα διέπουν. Αυτές οι αντιλήψεις είναι γνωστές ως πρότερες αντιλήψεις, εναλλακτικές αντιλήψεις ή αφελείς αντιλήψεις και έχουν πρόσφατα αποκαλεστεί και ως λανθάνουσες αντιλήψεις (Lee K., Smith J. P. III). Παρακάτω, θα

ασχοληθούμε με κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις μαθητών που προσέγγισαν με τέτοιον τρόπο το πρόβλημα.

Το πρόβλημα με τα χαρτόνια είναι ένα άδηλο αναδρομικό επαγωγικό πρόβλημα. Οι μαθητές αφού βίωσαν το πρόβλημα, κλήθηκαν να παρατηρήσουν τι συμβαίνει και στη συνέχεια να γενικεύσουν. Αυτό που παρατηρήθηκε ευρέως είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές είχαν εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα και έβγαζαν γενικά συμπεράσματα παρατηρώντας τι συνέβαινε στα μεμονωμένα στάδια του παιχνιδιού που διαδραματίστηκαν στην τάξη. Επίσης, οι γενικεύσεις τους βασίζονταν στην κανονικότητα των αποτελεσμάτων και όχι στην κανονικότητα της διαδικασίας.

Η τάση αυτή των μαθητών είχε μελετηθεί από τον Harel (2001). Είχε παρατηρήσει ότι πολλοί μαθητές γενικεύουν βάση των αποτελεσμάτων και όχι βάση της διαδικασίας, κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές έχουν πολύ έντονα ανεπτυγμένο το εμπειρικό αποδεικτικό σχήμα και λιγότερο το μετασχηματιστικό. Γενικεύουν δηλαδή, χρησιμοποιώντας κάποιες ειδικές περιπτώσεις και όχι αναζητώντας τη λογική με την οποία προκύπτει το συμπέρασμα.

Χαρακτηριστική είναι και η τάση πολλών μαθητών να βγάζουν αβίαστα συμπεράσματα στηριζόμενοι κατά κύριο λόγο στη διαίσθηση και στις πεποιθήσεις τους. Το ενδιαφέρον είναι ότι πολλοί από αυτούς δεν αντιλαμβάνονταν ότι η πρόταση που υποστήριζαν ήταν εικασία και όχι βεβαιότητα. Τα πράγματα γινόντουσαν ακόμα πιο πολύπλοκα όταν το χρώμα που φορούσαν ταυτίζονταν με αυτό που ισχυριζόντουσαν ότι φοράνε. Η έμπρακτη απόδειξη των λεγομένων τους ήταν δείκτης για την ποιότητα της επιχειρηματολογίας τους. Από τη στιγμή που επαληθεύονταν πειραματικά ο ισχυρισμός τους, τα λεγόμενα τους ήταν βεβαιότητα και όχι εικασία.

Η παρατήρηση ότι από τη στιγμή που οι μαθητές συνειδητοποίησαν τον τρόπο που λύνεται το πρόβλημα, δεν τους ενδιέφερε να συλλογιστούν πάνω σε αυτό, ώστε να είναι σε θέση να εξηγήσουν πώς η παρατήρηση τους προέκυπτε βάσει λογικής, αποδεικνύει για άλλη μια φορά ότι γενίκευαν βάσει των αποτελεσμάτων και όχι βάσει της διαδικασίας. Δεν τους ενδιέφερε ούτε να αναλύσουν αυτό που σκέφτηκαν, ούτε να σκεφτούν το δρόμο που τους οδήγησε στη λύση. Από τη στιγμή που είχε δοθεί η απάντηση, δεν υφίστατο ποια πρόβλημα για αυτούς. Μάλιστα, πολλοί από τους

μαθητές που είχαν ακούσει τη λύση, θεωρούσαν ότι αυτό αρκούσε και έπαυαν να ασχολούνται με την ουσία του προβλήματος. Όταν τους ζητούνταν όμως να εξηγήσουν την αιτία που η λύση αποδίδεται με αυτό τον τρόπο, τα πράγματα άρχισαν να δυσκολεύουν για πολλούς μαθητές. Δεδομένου ότι το πρόβλημα με τα χρωματιστά καπέλα είναι ένα επαγωγικό πρόβλημα, η ουσία αυτού του προβλήματος είναι η ενεργοποίηση αυτού του επαγωγικού μηχανισμού. Αν θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα βρίσκεται στην κορυφή μιας σκάλας, η λύση είναι το τελευταίο σκαλί. Όταν κάποιος έχει αντίληψη για το πώς είναι αυτό το σκαλί, είναι προφανές ότι δε σημαίνει ότι κατέβηκε και τη σκάλα. Για τους μαθητές μας σημασία δεν είχε ο δρόμος για την Ιθάκη, αλλά η Ιθάκη.

10.4. Γενικά συμπεράσματα – Συζήτηση

Η μαθηματική σκέψη των μαθητών είναι ένα θέμα που απασχολεί εκπαιδευτικούς και ερευνητές. Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (2005), η μαθηματική σκέψη επηρεάζεται από τις *πεποιθήσεις* του ατόμου για τα μαθηματικά, από τον *τρόπο που προσεγγίζει ένα πρόβλημα* και από τα *αποδεικτικά του σχήματα*. Στη μελέτη μας κάναμε ένα πείραμα διδασκαλίας και ζητήσαμε από τους μαθητές να διαπραγματευτούν με μαθηματικά προβλήματα, πολλές φορές σύνθετα, χρησιμοποιώντας τη Βιωματική Μέθοδο.

Διαπιστώσαμε ότι η Βιωματική Μέθοδος επηρεάζει θετικά τους δύο παράγοντες που συντελούν στη δόμηση της μαθηματικής σκέψης-πεποιθήσεις και τρόπο προσέγγισης προβλήματος, ενώ φάνηκε να μην επηρεάζει τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών.

Ειδικότερα, δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν ότι τα μαθηματικά έχουν σχέση με την πραγματικότητα, ότι καλλιεργούν μία λογική που ούτως ή άλλως έχουν σε πρώτο επίπεδο και ότι όλοι μπορούν να συμμετέχουν σε μαθηματικές διαδικασίες. Οι μαθητές ανταπεξήλθαν θετικά στην επίλυση προβλημάτων με τη βιωματική μέθοδο. Ασχολήθηκαν εκτενώς με τα μαθηματικά προβλήματα που τους δόθηκαν, δραστηριοποιήθηκαν και σε καμία περίπτωση δε φάνηκε να απογοητεύονται και να θεωρούν ότι δεν μπορούν να προσεγγίσουν τέτοιου είδους προβλήματα.

Οι προσεγγίσεις επίλυσης των προβλημάτων ήταν πολύ εποικοδομητικές, αφού στην πλειονότητα τους οι μαθητές απέκτησαν ενσυναίσθηση των προβλημάτων που τους δόθηκαν και έψαχναν να βρουν λέξεις κλειδιά που θα τους διαφωτίσουν. Επίσης, δεν έμεναν σε έναν τρόπο για την επίλυση των προβλημάτων, ήταν σε συνεχή εγρήγορση και με αρωγό την παρατήρηση έψαχναν για εναλλακτικές λύσεις.

Οι περισσότεροι μαθητές εξακρίβωναν και προσπαθούσαν να πείσουν για την εγκυρότητα μιας υπόθεσης, χρησιμοποιώντας είτε μετρήσεις είτε τη διαίσθησή τους. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών ήταν κυρίως εμπειρικά, κάτι που συνάδει και με τα συμπεράσματα άλλων ερευνών (π.χ. Harel, 2001 κ.α.)

Η βιωματική μέθοδος, είναι μια μέθοδος που μπορεί να συμβάλλει θετικά στη μάθηση των μαθηματικών και στην ανάπτυξη προχωρημένης μαθηματικής σκέψης. Ειδικότερα η τεχνική διδασκαλίας. *Το Παιχνίδι των Ρόλων,* συνδυάζει την ενεργητική συμμετοχή των συμμετεχόντων με τη συνεργατική και βιωματική μάθηση και οδηγεί τους μαθητές σε αφαιρετικές σκέψεις μέσα από δράση και παιχνίδι. Οι μαθητές εκφράζονται ελεύθερα, και ασυναίσθητα ακολουθούν μαθηματικές διεργασίες παίζοντας κατ’ ουσίαν παιχνίδια λογικής.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας, μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές του δείγματος μας στην πλειονότητά τους, είναι σε θέση να κάνουν γεγονικές και πλαισιακές γενικεύσεις, ενώ αρκετοί από αυτούς δυσκολεύονται να μεταβούν σε συμβολικές γενικεύσεις. Αποπειρώνται να παρατηρήσουν τα δεδομένα τους για να αντιληφθούν το pattern τους γενικεύοντας βάσει της κανονικότητας των αποτελεσμάτων και όχι της κανονικότητας της διαδικασίας. Μία τέτοια προσέγγιση τους ωθεί να κάνουν γενικεύσεις που δε δικαιούνται να κάνουν, με συνέπεια κάποιες φορές να βγάζουν εσφαλμένα συμπεράσματα και κάποιες, όχι.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Εισαγωγή στη Ψυχολογία,* Εκδόσεις Gutemberg.

Δεδούλη, Μ. Βιωματική Μάθηση-Δυνατότητες αξιοποίησής της στο πλαίσιο της Ευέλικτης Ζώνης. *Επιθεώρηση εκπαιδευτικών Θεμάτων.*

Κανίδης, (2005). Η Τεχνική Διδασκαλίας "Παιχνίδι Ρόλων" και η Εφαρμογή της στη Διδασκαλία του Αλγορίθμου Ταξινόμησης των Στοιχείων Πίνακα. *Πρακτικά Εργασιών 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Διδακτική της Πληροφορικής».* Α. Τζιμογιάννης (επιμ.). Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου.

Κλαουδάτος Ν. (1989). Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο. *Εισήγηση στο 6^{ο} Συνέδριο της Ε.Μ.Ε.*

Κολέζα, Ε., (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,* Leader Books.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Η αναπαράσταση των ποσοτήτων στις αριθμητικές έννοιες και η ικανότητα των υποψηφίων δασκάλων να τις χειριστούν.* Επιστημονική επετηρίδα της Ψυχολογικής Εταιρείας Βορείου Ελλάδος, τόμος 1, σελ. 291-308. Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Τζίφας Ν. (2006). Βρείτε ένα Κανόνα. *Ευκλείδης Α΄,* τ. 2

Ξένη Βιβλιογραφία

Andresen, L., Boud, D., & Cohen, R. (2000). Experience-based learning, in Understanding Adult Education & Training. Chapter published in Foley, G. (Ed.). *Understanding Adult Education and Training*. Second Edition. Sydney: Allen & Unwin, (pp. 225-239).

Avital, S., & Hansen R. (1976). Mathematical induction in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 7, (pp. 399-411).

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In T. Cooney & D. Grouws (Eds.), *Effective mathematics teaching*, (pp. 27 – 46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

Bennet, D., (2006), Expanding the Knowledge Paradigm. *The Journal of information and knowledge management systems*, 36, No 2, (pp. 175-181). United Kingdom: Emerald Publishing.

Boaler, J., (1999). Partisipation, Knowledge and Beliefs: A Community Perspective on Mathematics Learning. In *Educational Studies in Mathematics*,40, (pp. 259 – 281). Stanford University

Boaler, J., (2000). Mathematics from Another World: Traditional Commumities & The Alienation of Learners. *Journal of Mathematics Bahavior*, 18 (4), (pp. 1 – 19). Stanford University.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, A. M. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, (pp. 113-120). Valencia, Spain: PME.

Boud, D., Cohen, R., & Walker D. (Eds) (1993*). Using experience for learning*. Buckingham: SRHE and Open University Press

Brandsford, J., Zech, L., Schwartz, D., Barron, B.,, Vye, N., & The Cognition and Technology Group (CTGV). (in press). Design for Environments that Invite and Sustain Mathematical Thinking. *Symbolizing, Communicating and Mathematizing: Perspectives on Discourse, Tools and Instructional Design*. In Paul Cobb. (Ed) Symbolizing, Communicating and Mathematizing: Perspectives on Discourse, Tools and Instructional Design.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more Mysterious mechanisms. In F.Weinert & R. Kluwe, eds., *Metacognition, Motivation, and Understanding* (pp. 65–116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carr, M., Alexander, J., Folds, T., (1994). Metacognition and Mathematics Strategy

Use. *Cognitive psychology*, 8, 5 (pp. 583 – 595). University of Georgici.

Charles, R. I., and Lester, F. K. J. (1984). An evaluation of a process-oriented Instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, (pp. 15-34).

Chi, M. T. H. (2005). Commonsense Conception of Emergent Processes: Why Some Misconceptions Are Robust. *The Journal of the Learning Sciences*, 14(2), (pp. 161-199).

Cobb, P. (1994). Where is The Mind? Constructivism and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, 23, 7, (pp. 13 – 20).

Cobb, P., Zhao, Q., Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of Realistic Mathematics Education. *Éducation & Didactique*, 2(1), (pp. 105-124).

Cockcroft, W. report (1982). *Mathematics Counts.* HMSO, London.

Corsini R. J., Shaw M. E. & Blake R. R. (1961), *Role playing in business and Industry*. New York: The Free Press of Glencoe, Inc.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, (pp. 167-192).

Danby, M. & Upitis, R. (1988) school theatre: a question of ownership. *Speech and Drama*, 37(2), (pp. 5–8).

De Corte, E. (1995). Fostering Cognitive Growth: A Perspective from Research on Mathematics Learning and Instruction. Educational Psychologist, 30(1), (pp. 37-46).

Dewey J. (1038, 1980). *Εμπειρία και Εκπαίδευση*, μτφ. Λ. Πολενάκης. Αθήνα: Γλάρος.

Dubinsky, Ed. (1986). Reflective abstraction and computer experiences: A new approach to teaching theoretical mathematics. In Glenda Lappan, & Ruhama Even (Eds.), *Proceedings of the eighth annual meeting of PME-NA. E.* Lansing, MI: Michigan State University.

Dubinsky, Ed. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In David O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95 -123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishing.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations

concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109 - 122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2001). Pourquoi les représentations sémiotiques doivent-elles être placées au centre es apprentissages en mathématiques? In A. Gagatsis (Ed), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. (pp.67-90). Intercollege press: Cyprus.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 153-174). The Mathematical Association of America.

Ericsson, K.A. and Simon, H.A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review*, 87, pp. 215 – 251

Ericsson, K.A. and Simon, H.A. (1984). *Protocol Analysis.* Cambridge, MA: MIT Press.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: a pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, (pp. 173-189).

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal Of Mathematical Behavior*, 17, (pp. 105-121).

Francis J. P. & Byrne P. A. (1999), Use of role-playing exercises in teaching undergraduate astronomy and physics, *Publ. Astron. Soc.*, Aug., 16, 206-211

Frege G. (1980). Foundation of Arithmetic. Evanston – Illinois: Northestern University Press (2nd ed.).

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of psychological inquiry. *American Psychologist*, 34, (pp. 906-911).

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, (pp. 413–435).

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of

the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, 24: 5, (pp. 645 – 657).

Ganz, M. N., & Ganz, B. C. (1990). Linking metacognition to classroom success. *High School Journal*, 73, 180-185

Garnham, A. & Oakhill, J. (1994). Thinking and reasoning.

Garner, R. (1987). *Metacognition and Reading Comprehension*. Norwood, NJ: Ablex Publishing.

Garofalo, J. and Lester, F. K. J. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and Mathematical performance. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, (pp. 163-176).

Ghatala, E. S., Levin, J. R., Pressley, M., and Lodico, M. G. (1985). Training Cognitive strategy-monitoring in children. *American Educational Research Journal*, 22, (pp. 199-215).

Goldin, G., Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In (Ed. NCTM), *The roles of representation in school mathematics*. *Yearbook 2001*, Reston, Virginia, p. 2.

Gravemeijer, K. (1990). Context problems and realistic mathematics instruction. In K. Gravemeijer, M. van den Heuvel & L. Streefland (Eds.), *Contexts, free productions, tests and geometry in realistic mathematics education* (pp. 10-32). Utrecht, The Netherlands: OW & OC Research Group.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: CD-ß Press.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, (pp. 155-177).

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. S., & Whitenack, J. W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225 – 274). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gravemeijer, K., Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, No. 1/3, (pp. 111-129).

Greeno, James G. and the Middle School Mathematics through Applications Group.

(1998). The Situativity of Knowing, Learning and Research. *American* Psychologist, 53(1), (pp. 5-26).

Denise Grenier D., & Payan C. (1998). *Recherches en Didactiques*, 18 (1), (pp. 59-100).

Harel, G. (1985). *Teaching Linear Algebra in High School*, Unpublished doctoral dissertation, Ben-Gurion University, Israel.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school Students basic notions in linear algebra, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 21,(pp. 387-392).

Harel, G. (1998). Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (Or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly*, 105, (pp. 497-507).

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. In S. C. R. Zaskis (Ed.), *Learning and Teaching Number Theory* (pp. Ablex Publishing Corporation): Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J. Kaput (Eds.) *Research on Collegiate Mathematics Education*, 234-283. USA: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), (pp. 27-50).

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*, 123-134.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum.

Janvier, Claude, Girardon, Catherine, & Morand, Jean-Charles. (1993). Mathematical symbols and representations. In Patricia S. Wilson (Ed.) Research ldeas for the Classroom: High School Mathematics, pp. 79-102. New York: Macmillan.

Jausovec, N. (1994). *Metacognition in creative problem solving.* In Runco, M. A. (ed.), Problem Finding Problem Solving, and Creativity, Abler,, Norwood, NJ, pp. 77-95.

Johnson-Laird, P. N. (1993). *Human and Machine thinking.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N. and Byrne, R. (1991). *Deduction.* Hove, East Sussex: Lawrence Erlbaum Associates.

Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and Middle school: an approach based on neo-piagetian theory. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, 35, 7 - 54.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1992). High school graduates' ability in using Graphical representations. *Cahiers de Didactique des MatheÂmatiques,* 10 - 11, (pp. 21 – 43).

Kolb, D. (1984). *Experiential Learning*. New Jersey: Pentice Hall.

Kolb. D. A. and Fry, R. (1975) Toward an applied theory of experiential learning;, in C. Cooper (ed.) *Theories of Group Process*, London: John Wiley.

Kowalczyk J. (1991). Fibonacci Reflections – It's Elementary! .*Discrete Mathematics in the Schools (DIMACS)*, 36, (pp. 25- 34).

Lave, J., (1988). *Cognition in practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J., (1993). Situating Learning in Communities of Practice. In Lauren Resnick, John Levine, & Stephanie Teasley (Eds.), *Perspectives on Socially Shared Cognition* (pp. 63-85). Washington: American Psychological Association.

Lave, J., (1996). Teaching, as learning, in Practice. *Mind, Culture and Activity*, 3(3), (pp. 149-164.)

Laszlo P., (2000), Playing with modecular models, HYLE – *International Journal for Philosophy of Chemistry*, 6(1), (pp. 85-97).

Lawrence, M. V. M. (1997) Secondary school teachers and learning style preferences: action in the classroom? *Educational Psychology*, 17 (1&2) (pp. 157 – 170).

Lawson, A.E. (1993) The importance of analogy: a prelude to the special issue. *Journal of Research in Science Teaching*, 30 (10), (pp. 1213 – 1214).

Lee K., Smith III P. J. Exploring the Student's Conception of Mathematical Truth in Mathematical Reasoning. *Student's Conceptions of Mathematical Truth*, (pp. 1- 21).

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987a). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987b). *Representations and translations among*

representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marine, C. & Escribe, C. (1994). Metacognition and Competence on Statistical *Problems. Psychological Reports*, 75, (pp. 1403-1408).

McCombs, B. L. (1986). The role of self-system in self-regulated learning. Contemporary Educational Psychology, 11, (pp. 314-332).

McSharry G. & Jones S.(2000), Role-play in science teaching and learning, School Science Review, Sept., 82(298), (pp. 73-82).

Montague, M., & Bos, C. S. (1990). Cognitive and metacognitive characteristics of eighth grade students' mathematical problem solving. *Learning and Individual Differences*, 2, (pp. 371-388).

Moreno J. (1946). *Psychodrama*. New York: Beacon House.

Movshovitz – Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, (pp. 253-268).

National Council of Teachers of Mathematics. (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, Virginia, VA.

Newell, A. and Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice – Hall.

Owens J. P. (1997), Using role-playing to teach mathematics: A hare-brained idea?, http://www.austin.cc.tx.us/powens/Fibonacci/fibonacci.htm

Palla, M., Potari, D., Spyrou, P. (preprint). Studying high school students' understanding of Mathematical Induction. Department of Mathematics, University of Athens, Greece.

Paris, S. G. and Jacobs, J. E. (1984). The benefits of informed instruction for children's reading awareness and comprehension skills. *Child Development*, 55, (pp. 2083-2093).

Peterson, P. L., Swing, S. R., Braverman, M. T., & Buss, R. (1982). Students' Aptitudes and their Reports of Cognitive Processing during Interaction. *Journal of Educational Psychology*, 74, (pp. 535-547).

Piaget J. (1951). *Play, dreams and imitation in childhood*. London: Heinemann.

Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton University Press, New Jersey. Princeton, New Jersey.

Postle, D. (1993). Putting the heart back into learning. In D. Boud, R. Cohen, & D.

Pressley, M., Borkowski, J. G., and Schneider, W. (1987). Cognitive strategies: Good strategy users coordinate metacognition and knowledge. In R. Vasta (Eds.), Annals of child development (pp. 80-129). Greenwich, CT: JAI.

Radford, L. (1999). The rhetoric of generalization. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 89–96). Haifa: Technion-Israel Institute of Technology. Retrieved from http://www.laurentian.ca/educ/lradford/

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students'emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, (pp. 237–268).

Radford L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Sings: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5, (pp. 37-70).

Rosenstein J.G. (1991). A Comprehensive View of Discrete Mathematics: Chapter 14 of the New Jersey Mathematics Carriculum Framework. *Discrete Mathematics in the Schools (DIMACS)*, 36, (pp. 133- 184).

Schneider, W. & Pressley, M. (1989). Memory development between 2 and 20. New York: Springer-Verlag.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A, H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, N.J: Earlbaum

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving,

metacognition and sense making in mathematics. In D.A. Groues (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning 334-370. New York: Macmillan.

Schraw, G., (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science 26:* (pp. 113–125). Department of Educational Psychology. The University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, Nebraska.

Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, DIMACS, 36, *Discrete Mathematics in the school.*

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, (1 – 36).

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of Reification - the case of function. In Guershon Harel, & Ed Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59 - 84). Washington, DC: MAA (MAA Notes 25).

Sierpinska, A.: (1998), Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi and A. Sierpinska (eds.), *Language et Communication in the Mathematics Classroom*, The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, (pp. 30–62).

Somers, J., (1994). *Drama in the Curriculum.* Education Matters.

Steffe P. L., Kieren T.,(1994). Radical Constructivism and Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 6, (pp. 711-733).

Stencil J. (1993), Protein synthesis: Role playing in the classroom, *The American Biology Teacher*, 55(2), (pp. 575-582).

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., Simpson, A. (2000). What is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of mathematical behaviour,* 18 (2), (pp. 223 – 241).

Taylor C. A. (1987). *In science education and information transfer*, Oxford: Pergamon.

Thompson, P. W. (1992). Notations, principles, and constraints: Contributions to the Effective use of concrete manipulatives in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, (pp. 123-147).

Treffers, A. and Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program. in L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, OW&OC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, Vol. II, (pp. 97–121).

Von Glasersfeld, E., (1987). *Learning as a Constructive Activity.* In Janvier (ed), (pp. 3 – 17).

Von Glasersfeld, E., (1995). A constructivist approach to teaching In L. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 3-16). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Vosniadou, S., & Brewer, W. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology*, 24, (pp. 535 – 585).

Walker, (Eds) *Using experience for learning.*

Walters J. P. (1991), Role-playing analytical chemistry laboratories, Part 1-2-3: Structural and pedagogical ideas, *Anal. Chem*., 63(20, 22, 24), 977A-985A

Wang, M. C., Haertel, G.. D. & Walberg, H. J. (1993). Toward a Knowledge Base for School Learning. *Review of Educational Research*, 63(3), (pp. 249-294).

Watson, J. (1985) Drama and topic work: the school as a learning community. *Two D Drama/Dance*, 5(1), (pp. 66-81).

Weil – Barais, A. (1996). L' home cognitive. Editions PUF, Paris.

Wierenga C. F. (1957), Rollenspel: ein Methodiekmodel, in K. J.Nijkerk, & Ph. H. van Praag (Eds.), *Groepswerk, Begrippen-Velden, Methoden*, Alphen a/d Rijn: Samsom

Wittgenstein Ludwig, Tractatus Logico-Philosophicus, (Μετάφραση: Θανάσης Κιτσόπουλος, Παρουσίαση: Ζήσιμος Λορεντζάτος, Εισαγωγή: Bertrand Russel), Εκδόσεις «Παπαζήση», Αθήνα 1978.

Wohlking W. & Gill P. J. (1980), *Role playing, The Instructional Design Library*, 32, Englewood Cliffs: Educational Technology Publications.

Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991). Small- group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, (pp. 390 – 408).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ «ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ FIBONACCI»

ΠΙΝΑΚΑΣ

Μήνας	Ζεύγη Ενηλίκων Α	Ζεύγη Εφήβων Β	Ζεύγη Μωρών Γ	Συνολικά Ζεύγη
Ιανουάριος				
Φεβρουάριος				
Μάρτιος				
Απρίλιος				
Μάιος				
Ιούνιος				
Ιούλιος				
Αύγουστος				
Σεπτέμβριος				
Οκτώβριος				
Νοέμβριος				
Δεκέμβριος				
Ιανουάριος				

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

«ΒΡΕΙΤΕ ΕΝΑΝ ΚΑΝΟΝΑ»

Α. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το ρ αλλάζει με τη βοήθεια του άρτιου ν.

ν	**ρ**
2	11
4	13
6	15
8	17
…	….

α) Όταν το ν είναι 30, πόσο θα είναι το ρ;
β) Γράψτε μία σχέση (τύπο) που να συνδέει το ν με το ρ.

Β. Ο βασιλιάς κάθε χώρας συνοδεύεται από τους σωματοφύλακες του. Έτσι, σε μια μετακίνηση του βασιλιά, όλοι μαζί (βασιλιάς και σωματοφύλακες) κινούνται διατηρώντας πάντα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, περπατώντας οι σωματοφύλακες σε σχήμα ανάποδου Π και βάζοντας μπροστά και στη μέση τον βασιλιά. Κάτι αντίστοιχο γίνεται και όταν δύο ή και περισσότεροι βασιλιάδες μετακινούνται:

σ	**β**	σ
σ	σ	σ

σ	**β**	**β**	σ
σ	σ	σ	σ

κ.λπ
Έτσι, ο ένας βασιλιάς συνοδεύεται από πέντε σωματοφύλακες, οι δύο βασιλιάδες από 6 σωματοφύλακες κ.λ.π.
α) Αφού κάποιοι από σας παίξουν το ρόλο των σωματοφυλάκων και κάποιοι άλλοι των βασιλιάδων, σχηματίζοντας στο χώρο το προτεινόμενο σχήμα, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

σ	**β**
5	1
6	2
….	….

β) Πόσοι σωματοφύλακες χρειάζονται για να συνοδεύσουν 10 βασιλιάδες;
γ) Γράψτε μία σχέση (τύπο) που να συνδέει το σ με το β.

Α.

ν	**ρ**
2	11
4	13
6	15
8	17

Για ν = 30, το ρ = …..
Η σχέση που συνδέει το ν με το ρ είναι:

……

Β.

σ	**β**
5	1
6	2

Οι 10 βασιλιάδες χρειάζονται ……. σωματοφύλακες
Η σχέση που συνδέει το σ με το β είναι:

……

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

«ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΑ ΧΡΩΜΑΤΙΣΤΑ ΚΑΠΕΛΑ»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Α. Ο φύλακας έχει άσπρα και μαύρα κομμένα χαρτόνια σε σχήμα τετραγώνου. Δένει τα μάτια τριών αιχμαλώτων και καρφιτσώνει στην πλάτη τους είτε ένα άσπρο τετράγωνο χαρτόνι, είτε ένα μαύρο. Το χρώμα που θα έχει ο καθένας θα αποφασισθεί με τη ρίψη νομίσματος. Όταν φορέσει τα χαρτόνια και στους τρεις αιχμαλώτους, ο φύλακας λύνει τα μάτια τους. Τώρα, ο κάθε αιχμάλωτος βλέπει τα χαρτόνια των δύο άλλων, αλλά δεν μπορεί να δει το δικό του.
Ο φύλακας λέει:
« Όποιος βλέπει κάποιον με μαύρο χαρτόνι, να σηκώσει το χέρι του».
Στη συνέχεια λέει:
«Όποιος ξέρει τι χρώμα χαρτόνι έχει, να σηκώσει το χέρι του».

Β. Γράψτε ανά ομάδες των τριών όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Γ. Ποια περίπτωση επαναλαμβάνεται πιο συχνά;

Δ. Υποθέστε ότι ο φύλακας σας είχε φορέσει Μαύρο χαρτόνι (είστε ο Μ).
Περιγράψτε σε κάθε περίπτωση τι θα συνέβαινε:
α) Αν ήμουν Μ και έβλεπα δύο Α τότε:

β) Αν ήμουν Μ και έβλεπα δύο Μ τότε:

γ) Αν ήμουν Μ και έβλεπα ένα Α και ένα Μ τότε:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Α. Ο φύλακας λέει:
«Έχω φορέσει άσπρο χαρτόνι σε κάποιον ή κάποιους από εσάς και μαύρα χαρτόνια στους υπόλοιπους. Μπορείτε να κοιτάτε ο ένας τον άλλον, αλλά όχι να μιλάτε μεταξύ σας. Κάθε λεπτό θα ρωτάω: " Ποιος ξέρει **με βεβαιότητα** ότι φοράει άσπρο χαρτόνι;" Θέλω όσοι από εσάς έχουν αντιληφθεί ότι φοράνε άσπρο χαρτόνι να έρχονται και να μου το λένε αμέσως.»

Β. Αναλύστε τι συμβαίνει σε κάθε στάδιο του παιχνιδιού.