ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Έννοια της Συνάρτησης.
Από την ιστορική της εξέλιξη στα ορθογώνια πολυώνυμα και τις εφαρμογές.

Αγγελική Χόρτη

Επιβλέπων Καθηγητής
Ευστάθιος Γιαννακούλιας

Αθήνα

Μάρτιος 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ευστάθιος Γιαννακούλιας (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	……
2) Διονύσιος Λάππας	Αναπλ. Καθηγητής	……
3) Χριστόδουλος Αθανασιάδης	Καθηγητής	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».

***Ευχαριστώ θερμά*:**

- Τον Επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. *Ευστάθιο Γιαννακούλια*, για την πολύτιμη βοήθεια του στην επιλογή και διαμόρφωση του θέματος, για το χρόνο που διέθεσε, καθώς και για την διακριτική επίβλεψη του.

- Τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. *Διονύσιο Λάππα*, καθώς και τον Καθηγητή κ. *Χριστόδουλο Αθανασιάδη*, για τις χρήσιμες υποδείξεις τους σχετικά με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, και για την ευγενή διάθεση τους να συμμετέχουν στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή.

- Τον φίλο και συνάδελφο κ. *Αθανάσιο Τζιώτζιο* για τις υποδείξεις και τη βοήθεια του στην κατασκευή των σχημάτων αυτής της εργασίας.

Μάρτιος 2010

Αγγελική Χόρτη

«Αφιερωμένη

Στον πατέρα μου»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος σχημάτων 7

Πρόλογος 8

Ι. Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Εισαγωγή 10
- Αρχαιότητα
  - Πινακοποιημένες Συναρτήσεις – «Συμπτώματα» κωνικών τομών 14
  - Η γενική έννοια της συνάρτησης στην Αρχαιότητα 16
- Μεσαίωνας
  - Κινηματική και γεωμετρική αναπαράσταση συναρτησιακών σχέσεων 20
- Νεότερη Περίοδος
  - Το πρόβλημα της μελέτης της κίνησης και της μέτρησης του χρόνου 26
  - Η μεταβλητή ποσότητα του Descartes: Αλγεβρικές συναρτήσεις 30
  - Η έννοια της συνάρτησης κατά Newton και Leibniz 35
  - Η συνάρτηση ως αυθαίρετη αναλυτική έκφραση 39
  - Αναλυτικές συναρτήσεις 46
  - Συνεχείς και ασυνεχείς συναρτήσεις κατά τον Euler 49
  - Ο γενικός ορισμός του Euler για τη συνάρτηση 56
  - Κριτική της έννοιας των μικτών συναρτήσεων και της αναλυτικής αναπαράστασης των συναρτήσεων 60
  - Η αναγνώριση του γενικού ορισμού του Euler 65
  - Ο ιστορικός ρόλος του γενικού ορισμού του Euler 70

ΙΙ. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

- Εσωτερικά γινόμενα 73
- Μήκος, μέτρο γωνίας, απόσταση 76
- Ορθογωνιότητα 80
- Ορθογωνιοποίηση 87
- Κάθετες προβολές και απόσταση σε υπόχωρο 95
  - Εφαρμογές 99

ΙΙΙ. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ

- Εισαγωγικά στοιχεία 111
- Χώρος με εσωτερικό γινόμενο – Χώρος Hilbert 113
- Ορθογώνιο συμπλήρωμα και ευθύ άθροισμα 124
- Ορθοκανονικά σύνολα και ακολουθίες 130
- Σειρές με ορθοκανονικές ακολουθίες και σύνολα 140
- Ολικά ορθοκανονικά σύνολα και ακολουθίες 149
- Πολυώνυμα Legendre, Hermite και Laguerre

  Ιστορικά στοιχεία 158

  Πολυώνυμα Legendre 160

  Πολυώνυμα Hermite 168

  Πολυώνυμα Laguerre 174

IV. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Γραμμική ανεξαρτησία λύσεων ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. 176
- Προβλήματα συνοριακών τιμών για συνήθεις Δ.Ε. δεύτερης τάξης

  Εισαγωγικές έννοιες 184

  Προβλήματα Sturm – Liouville 185

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Ξενόγλωσσες 196
- Ελληνόγλωσσες 200

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Ο διαφορικός λογισμός του Leibniz 38
2. Μήκος διανύσματος στον $\mathbb{R}^2$ 76
3. Απόσταση δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^2$ 79
4. Ορθογωνιότητα δύο διανυσμάτων σε ένα Ευκλείδειο χώρο 81
5. Μέθοδος ορθογωνιοποίησης των Gram – Schmidt στον $\mathbb{R}^2$ 88
6. Μέθοδος ορθογωνιοποίησης των Gram – Schmidt στον $\mathbb{R}^3$ 89
7. Παράδειγμα ορθογωνιοποίησης μιας βάσης του $\mathbb{R}^3$ 90
8. Συντεταγμένες διανύσματος ως προς μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ 94
9. Απόσταση διανύσματος από ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ 95
10. Κάθετη προβολή και απόσταση διανύσματος από τον υπόχωρο W ενός Ευκλείδειου χώρου V 97
11. Απόσταση διανύσματος από τον μονοδιάστατο υπόχωρο L ενός Ευκλείδειου χώρου V 99
12. Παράδειγμα υπολογισμού της απόστασης ενός διανύσματος από μια γραμμή του $\mathbb{R}^2$ 101
13. Νόμος του παραλληλογράμμου στον $\mathbb{R}^2$ 115
14. Βέλτιστη προσέγγιση του $x \in \mathbb{R}^2$ από το $M \subset \mathbb{R}^2$ 124
15. Αναπαράσταση ενός χώρου Hilbert ως ευθύ άθροισμα ενός κλειστού υπόχωρου και του ορθογώνιου συμπληρώματος του (Θεώρημα προβολής) 130
16. Αναπαράσταση του $x \in \mathbb{R}^3$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου 131
17. Πυθαγόρειο Θεώρημα στον $\mathbb{R}^2$ 132
18. Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram – Schmidt σε ένα Ευκλείδειο χώρο ($2^{\text{ο}}$ βήμα) 138
19. Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram – Schmidt σε ένα Ευκλείδειο χώρο (Γενίκευση) 139
20. Γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης x με περίοδο 2π, όπου $x(t)=t$ αν $t \in [-\pi/2, \pi/2)$ και $x(t)=\pi-t$ αν $t \in [\pi/2, 3\pi/2)$ 141
21. Γραφικές παραστάσεις των έξι πρώτων πολυωνύμων Legendre 162
22. Γραφικές παραστάσεις των έξι πρώτων πολυωνύμων Hermite 169
23. Γραφικές παραστάσεις των έξι πρώτων πολυωνύμων Laguerre 175

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η έννοια της συνάρτησης εμπλέκεται άμεσα ή έμμεσα σε πολλά πεδία των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους. Για παράδειγμα, στη Μαθηματική Ανάλυση εξετάζονται οι ιδιότητες συναρτήσεων μιας ή πολλών μεταβλητών, καθώς και οι ιδιότητες των παραγώγων τους. Οι θεωρίες των διαφορικών και των ολοκληρωτικών εξισώσεων εφαρμόζονται στην επίλυση εξισώσεων, όπου οι άγνωστοι είναι συναρτήσεις, και στη Συναρτησιακή Ανάλυση μελετώνται χώροι συναρτήσεων (**Ponte**, 1992). Επιπλέον, τα Αναλυτικά Προγράμματα Διδασκαλίας των Μαθηματικών και άλλων μαθημάτων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αναδεικνύουν πολλές μορφές αυτής της θεμελιώδους έννοιας.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιαστούν η πορεία και η ιστορική εμπειρία που διαμόρφωσαν την σύγχρονη έννοια της συνάρτησης, να αναδειχθούν μερικές εφαρμογές της θεωρίας των Ευκλείδειων χώρων στην Ανάλυση, καθώς και να μελετηθούν οι ιδιότητες κάποιων ειδικών συναρτήσεων, των ορθογώνιων πολυωνύμων, μέσα από τη γενίκευση των εννοιών του εσωτερικού γινομένου και της καθετότητας που περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Β Λυκείου.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας παρατίθενται οι απόψεις πολλών συγγραφέων σχετικά με το πότε εμφανίστηκε για πρώτη φορά η έννοια της συνάρτησης, η οποία αναπτύχθηκε ουσιαστικά μέσα από την προσπάθεια μαθηματικής ερμηνείας διάφορων φυσικών προβλημάτων. Επιπλέον, πραγματοποιείται μια λεπτομερής μελέτη της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης, από τις πινακοποιημένες συναρτήσεις των Ελλήνων μαθηματικών της Αρχαιότητας μέχρι το γενικό ορισμό του Euler, που οδήγησε σταδιακά στην έννοια της συνάρτησης που διατυπώθηκε από τους Fourier, Lobatchevsky, και Dirichlet στα μέσα του 19^{ου} αιώνα.

Στο δεύτερο μέρος, με αφετηρία την έννοια του εσωτερικού γινομένου, εκτίθεται η επέκταση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε Ευκλείδειους πραγματικούς χώρους συνεχών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους τύπους της Αναλυτικής Γεωμετρίας και την ορολογία του εσωτερικού γινομένου στο δισδιάστατο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$, το μήκος διανύσματος, η απόσταση και η καθετότητα δύο διανυσμάτων, η κάθετη προβολή διανύσματος σε επίπεδο και η απόσταση διανύσματος από επίπεδο, γενικεύονται για αυθαίρετους

πραγματικούς διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο. Η διαδικασία ορθογωνιοποίησης μιας βάσης του $\mathbb{R}^2$ γενικεύεται για ένα τυχαίο σύνολο, πεπερασμένο ή άπειρο, γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός Ευκλείδειου χώρου (μέθοδος ορθογωνιοποίησης των Gram – Schmidt). Ως εφαρμογή της θεωρίας των Ευκλείδειων χώρων παρουσιάζεται το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης πραγματικών συναρτήσεων.

Στο τρίτο μέρος πραγματοποιείται η περαιτέρω επέκταση των προηγούμενων εννοιών και διαδικασιών σε πλήρεις πραγματικούς ή μιγαδικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή σε χώρους Hilbert. Παρουσιάζονται μερικά από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτών των χώρων, όπως, για παράδειγμα, οι αναπαραστάσεις ενός χώρου Hilbert ως ευθύ άθροισμα ενός κλειστού υπόχωρου και του ορθογώνιου συμπληρώματος του, τα ολικά ορθοκανονικά σύνολα και ακολουθίες, και οι αντίστοιχες μοναδικές αναπαραστάσεις των στοιχείων του χώρου από τις συντεταγμένες τους ως προς μια ορθοκανονική ακολουθία. Ως εφαρμογές της θεωρίας των χώρων Hilbert, οι γενικές σειρές Fourier εκφράζονται με την ορολογία και το φορμαλισμό των ορθοκανονικών ακολουθιών και συνόλων, και μελετώνται μερικές ολικές ορθογώνιες και ορθοκανονικές ακολουθίες, που κατασκευάζονται με τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram – Schmidt, και χρησιμοποιούνται συχνά σε πρακτικά προβλήματα των Μαθηματικών και της Φυσικής. Αυτές οι ακολουθίες εμπλέκουν τις γνωστές ακολουθίες των ορθογώνιων πολυωνύμων Legendre, Hermite και Laguerre, που είναι λύσεις των ομώνυμων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

Στο τέταρτο μέρος της εργασίας παρουσιάζονται εφαρμογές της θεωρίας των Ευκλείδειων χώρων στις διαφορικές εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας την έννοια του εσωτερικού γινομένου, αποδεικνύεται η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης νιοστής τάξης με σταθερούς συντελεστές, στο χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων σε τυχαίο πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα. Τέλος, επιλύονται προβλήματα συνοριακών τιμών τύπου Sturm – Liouville, δηλαδή π.σ.τ. τέτοια ώστε οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές να είναι ορθογώνιες συναρτήσεις.

Ι. Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στην επιστήμη των Μαθηματικών και προέρχεται από τη γενικότερη τάση του ανθρώπου να συσχετίζει ποσότητες. Αυτή η τάση είναι τόσο αρχαία όσο και τα ίδια τα Μαθηματικά. Η ιδέα της αλληλεξάρτησης δύο ποσοτήτων ξεπήδησε, όπως ήταν φυσικό, στην ελληνική επιστήμη των κλασικών χρόνων, όπου και χρησιμοποιήθηκε στη Γεωμετρία. Ωστόσο, η πορεία που οδήγησε από τους απλούς συσχετισμούς ποσοτήτων στη σύγχρονη έννοια της συνάρτησης είναι μακρόχρονη και περίπλοκη (**Σπύρου & Γαγάτσης**). Επιπλέον, οι απόψεις πολλών συγγραφέων είναι συχνά διαφορετικές μεταξύ τους, και συγκεκριμένα δε συμφωνούν για το πότε εμφανίστηκε για πρώτη φορά η έννοια της συνάρτησης. Κατά τον **Youschkevitch** (1976), η επικρατέστερη άποψη είναι αυτή που διατυπώνει ο **Smith** (1958) στο βιβλίο του «*Η Ιστορία των Μαθηματικών*»: «*…Η πραγματική ιδέα του συναρτησιακού συσχετισμού(functionality), όπως φαίνεται μέσα από τη χρήση των συντεταγμένων, εκφράστηκε για πρώτη φορά καθαρά και δημόσια από τον Καρτέσιο…*». Ωστόσο, η άποψη του **Boyer** (1959), που διατυπώνεται σχετικά με τις εργασίες του Fermat, σύγχρονου του Καρτέσιου, είναι ότι: «*…Η έννοια της συνάρτησης και τα σύμβολα που παριστάνουν μεταβλητές δε φαίνεται να υπάρχουν στο έργο κάποιου μαθηματικού της εποχής αυτής…*».

Από την άλλη, οι **Hartner** & **Schramm** (1963) υποθέτουν ότι: «*…Το ερώτημα της γέννησης και της ανάπτυξης της έννοιας της συνάρτησης σχετίζεται, συνήθως και σχεδόν αποκλειστικά, με την Καρτεσιανή ανάλυση … Οι πράξεις με συναρτήσεις είχαν ήδη φτάσει σε μεγάλο βαθμό τελειότητας, όταν έγιναν οι πρώτες απόπειρες για να διαμορφωθεί η γενική έννοια των συναρτήσεων…*». Οι ίδιοι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι πράξεις με συναρτήσεις υπάρχουν σε αστρονομικούς υπολογισμούς μαθηματικών της αρχαιότητας, όπως του Πτολεμαίου, αλλά και σε έργα Αράβων, όπως σε εργασίες του Al – Biruni.

Στο βιβλίο του «*Η Ιστορία της Αναλυτικής Γεωμετρίας*» (1956) ο **Boyer** δίνει έμφαση σε άλλα πρότυπα συναρτήσεων στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και ισχυρίζεται ότι: «*…Η χρήση των αναλογιών ήταν κατά κάποιο τρόπο ισοδύναμη, αν και πιο περιορισμένα, με τη σύγχρονη χρήση των εξισώσεων ως εκφράσεων συναρτησιακών σχέσεων…*». Στο ίδιο μήκος κύματος με τον Boyer βρίσκονται και οι

συγγραφείς **Hofmann** (1963) και **Crombie** (1959 – 1961), οι οποίοι συσχετίζουν τις γεωμετρικές εκφράσεις των συναρτήσεων και τον υπολογισμό των τιμών τους με τη *θεωρία των υπολογισμών* και με τη *θεωρία του πλάτους των μορφών* του 14^{ου} αιώνα. Εντούτοις, ο **Wieleitner** (1912 – 1913) υπέθεσε ότι η ιδέα της συνάρτησης στην τελευταία θεωρία δεν περιείχε, ούτε στο ελάχιστο, την έννοια της εξάρτησης ενός μεγέθους από ένα άλλο. Αντιθέτως, ο **Bell** (1945) διατύπωσε τη γνώμη ότι ακόμα και οι Βαβυλώνιοι Μαθηματικοί είχαν το ***ένστικτο του συναρτησιακού συσχετισμού*** (*instinct for functionality*), και ο **Pedersen** (1974) εξέφρασε την άποψη ότι η ιδέα της συνάρτησης υπήρχε στα Μαθηματικά από την αρχαιότητα.

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία ίδιων ή διαφορετικών απόψεων. Κάποιες από αυτές τις απόψεις είναι σωστές, ενώ κάποιες άλλες είναι λανθασμένες ή τουλάχιστον ατελείς. Πάντως τον 19^{ο} αιώνα, ο κλασικός ορισμός της συνάρτησης που υπήρχε σχεδόν σε κάθε πραγματεία επί της μαθηματικής ανάλυσης συνήθως αποδιδόταν είτε στον Dirichlet (1837) είτε στον Lobatchevsky (1834). Εντούτοις, μιλώντας ιστορικά , αυτή η γενική άποψη είναι ανακριβής γιατί η γενική έννοια της συνάρτησης ως μιας αυθαίρετης σχέσης ανάμεσα σε ζεύγη στοιχείων, το καθένα από τα οποία παίρνει τιμές από το δικό του σύνολο, πήρε τη μορφή της πολύ νωρίτερα, στα μέσα του 18^{ου} αιώνα.

Κατά τον Youschkevitch (1976), τα κύρια στάδια της εξέλιξης της ιδέας της συνάρτησης μέχρι τα μέσα του 19^{ου} αιώνα είναι:

ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ: Σ’ αυτό το στάδιο η μελέτη συγκεκριμένων σχέσεων εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτήτων δεν οδήγησε στη γενική έννοια της μεταβλητής και της συνάρτησης.

ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ: Αυτό είναι το στάδιο κατά το οποίο, στην ευρωπαϊκή επιστήμη του 14^{ου} αιώνα, η γενική έννοια διατυπώθηκε και με γεωμετρικές και με μηχανικές εκφράσεις. Αλλά σ’ αυτό το στάδιο, όπως και στην αρχαιότητα, κάθε σχέση εξάρτησης ανάμεσα σε δύο ποσότητες ορίστηκε μέσω λεκτικής περιγραφής ή μέσω γραφήματος και όχι από ένα τύπο.

ΝΕΟΤΕΡΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: Είναι η περίοδος που ξεκινάει στα τέλη του 16^{ου} αιώνα, και κυρίως, κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα. Στο τέλος του 16^{ου} αιώνα η ανάπτυξη της Αστρονομίας και της ναυσιπλοΐας δημιούργησε μεγάλες ανάγκες για ακριβείς και σύντομους αριθμητικούς υπολογισμούς με τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οδήγησε στην ανάπτυξη των λογαριθμικών πινάκων, ενώ στις αρχές του 17^{ου} αιώνα, ο Γαλιλαίος, ο Kepler και άλλοι επιστήμονες άρχισαν ν’ αναπτύσσουν την Κινηματική,

και ο Descartes, επηρεασμένος από τις εργασίες τους, εισήγαγε στα Μαθηματικά τη γενική έννοια του μεταβλητού μεγέθους.

Σύμφωνα με τον **Kline** (1972), κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα παρουσιάστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν η έννοια της συνάρτησης και οι πιο απλές αλγεβρικές και υπερβατικές συναρτήσεις. Καθώς οι Leibniz, James και Johann Bernoulli, L' Hôpital, Huygens, και Varignon άρχισαν να ασχολούνται με προβλήματα όπως η κίνηση ενός εκκρεμούς, το σχήμα μιας χορδής που είναι στερεωμένη από δύο σταθερά σημεία, η κίνηση κατά μήκος καμπύλων τροχιών, και οι καμπύλες που παρουσιάζονται στην ανάκλαση και στη διάθλαση του φωτός, όχι μόνο χρησιμοποίησαν τις ήδη γνωστές συναρτήσεις αλλά κατέληξαν σε πιο σύνθετες μορφές των θεμελιωδών συναρτήσεων. Ως συνέπεια αυτών των ερευνών και της γενικής εργασίας στο λογισμό, οι στοιχειώδεις συναρτήσεις αναγνωρίστηκαν πλήρως και επεκτάθηκαν κατά κάποιο τρόπο στη σύγχρονη μορφή τους.

Ωστόσο, *πριν η έννοια της συνάρτησης καθιερωθεί πλήρως, οι περισσότερες από τις συναρτήσεις που παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα,* για παράδειγμα, οι στοιχειώδεις υπερβατικές συναρτήσεις $\log x$, $\sin x$, και a^x, *μελετήθηκαν πρώτα ως καμπύλες που προσεγγίστηκαν ως γεωμετρικοί τόποι* (Kline, 1972). Εντούτοις, οι όροι και ο συμβολισμός για τους διάφορους τύπους των συναρτήσεων που παριστάνονται απ' αυτές τις καμπύλες εμφανίστηκαν σταδιακά.

Επιπλέον, κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα άρχισαν να επικρατούν οι αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Η κλάση των αναλυτικών συναρτήσεων εκφραζόταν με αθροίσματα απείρων δυναμοσειρών και σύντομα έγινε η κύρια κλάση που χρησιμοποιείτο. Η αναλυτική μέθοδος παρουσίασης των συναρτήσεων έφερε επανάσταση στα Μαθηματικά και εξασφάλισε για την έννοια της συνάρτησης μια κεντρική θέση σε όλες τις συναφείς επιστήμες.

Ωστόσο, παρά την αποδοτικότητά της, κατά τα μέσα του 18^{ου} αιώνα η αναπαράσταση των συναρτήσεων ως αναλυτικών εκφράσεων αποδείχθηκε από μόνη της ανεπαρκής και έτσι ένας νέος γενικός ορισμός της συνάρτησης εμφανίστηκε κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου και αργότερα έγινε παγκόσμια αποδεκτός στη μαθηματική ανάλυση. Στο δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα αυτός ο γενικός ορισμός διεύρυνε τις δυνατότητες για την ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων, αλλά παρουσιάστηκαν δυσκολίες στη λογική ενότητα της μαθηματικής σκέψης, οι οποίες τον 20^{ο} αιώνα δημιούργησαν την ανάγκη να αναθεωρηθεί η έννοια της συνάρτησης,

όπως είχαν αναθεωρηθεί και οι άλλες κύριες έννοιες της μαθηματικής ανάλυσης. Αυτές οι δύο περίοδοι συνδέονται με τη θεωρία των συναρτήσεων και με τη μαθηματική λογική αντίστοιχα και χαρακτηρίζονται από τη συνεχιζόμενη διαμάχη μεταξύ των διαφορετικών απόψεων (Youschkevitch, 1976).

Με τη γενικότερη έννοια η συνάρτηση y της μεταβλητής x, $y = f(x)$, είναι μια σχέση ανάμεσα σε ζεύγη στοιχείων από δύο αριθμητικά σύνολα, X και Y, έτσι ώστε σε κάθε στοιχείο x από το πρώτο σύνολο X αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο y από το δεύτερο σύνολο Y σύμφωνα με κάποιο συγκεκριμένο κανόνα. Από τη φύση του παραπάνω ορισμού προκύπτουν αρκετές λογικές δυσκολίες, όμως αυτός ο κανόνας μπορεί να δοθεί με ποικίλους τρόπους: λεκτικά , με πίνακα τιμών των x και y, με μια αναλυτική έκφραση (τύπο), με γράφημα, κλπ., έτσι ώστε να είναι ορισμένη και σαφής η κατάσταση που υποδηλώνεται απ' αυτό τον κανόνα και να μπορεί να βρεθεί το y όταν δίνεται η τιμή του x.

Η ιδέα της συνάρτησης, όπως κατανοείται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο, περιλαμβάνει κανόνες για τη μέτρηση των επιφανειών των πιο απλών και γνωστών από παλιά σχημάτων όπως είναι τα ορθογώνια, οι κύκλοι κλπ. Η ιδέα αυτή υπάρχει και στους πρώτους πίνακες (μερικοί από τους οποίους είναι πίνακες συναρτήσεων δύο μεταβλητών) πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, κλπ., οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για να διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Οι σχέσεις μεταξύ αριθμών ή γενικότερα οι σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων εμφανίζονται συνεχώς στα στοιχειώδη Μαθηματικά. Παρόλα αυτά, αυτό το γεγονός δεν αρκεί για να αντιληφθούμε το σχηματισμό της ιδέας της συνάρτησης, τη γενίκευση της και τη σταδιακή κατανόηση της, καθώς και το σταθερό νόημα που απέκτησε με την πρόοδο της επιστημονικής και της φιλοσοφικής σκέψης και, τέλος για να αντιληφθούμε το ρόλο που διαδραμάτισε στα διάφορα στάδια αυτής της εξέλιξης.

ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

ΠΙΝΑΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – «ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ» ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το πρώτο στάδιο στη γέννηση της έννοιας της συνάρτησης ήταν αυτό της Αρχαιότητας. Από το 2000 Π.Χ. οι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν ευρέως για τους υπολογισμούς τους πολλούς πίνακες, όπως, για παράδειγμα, εξηκονταδικούς πίνακες αντίστροφων φυσικών αριθμών, τετραγώνων και τετραγωνικών ριζών, κύβων και κυβικών ριζών. Πίνακες συναρτήσεων δύο διαφορετικών τύπων, των κλιμακωτών συναρτήσεων και των γραμμικών συναρτήσεων (**Neugebauer**, 1957), χρησιμοποιήθηκαν στην Αστρονομία των Βαβυλωνίων κατά τη διάρκεια της βασιλείας των Σελευκιδών για τη σύνταξη των ημεροδεικτών του ήλιου, της σελήνης, και των πλανητών. Αυτές οι εμπειρικές και σε μορφή πίνακα συναρτήσεις αποτέλεσαν το μαθηματικό υπόβαθρο για την μετέπειτα ανάπτυξη της Αστρονομίας.

Οι νέες ρίζες της έννοιας της συνάρτησης έκαναν την εμφάνιση τους στα Ελληνικά Μαθηματικά και στις Φυσικές Επιστήμες. Οι προσπάθειες που αποδίδονται στους πρώτους Πυθαγόρειους να προσδιορίσουν τους απλούστερους νόμους της ακουστικής είναι χαρακτηριστικές της αναζήτησης ποσοτικών αλληλεξαρτήσεων πολλών φυσικών ποσοτήτων, όπως, για παράδειγμα, η διάρκεια και το ύψος του τόνου για τις νότες που εκπέμπονται από ορχήστρα εγχόρδων του ιδίου είδους, υπό ίσες εντάσεις. Αργότερα, κατά τη διάρκεια της Αλεξανδρινής περιόδου, οι αστρονόμοι ανέπτυξαν την τριγωνομετρία των χορδών της περιφέρειας ενός κύκλου και, χρησιμοποιώντας θεωρήματα της Γεωμετρίας και κανόνες παρεμβολής υπολόγισαν πίνακες χορδών ισοδύναμους στην πραγματικότητα με πίνακες ημιτόνων που χρησιμοποιήθηκαν μερικούς αιώνες αργότερα. Ο πρώτος πίνακας χορδών βρέθηκε στην «Αλμαγέστη» του Πτολεμαίου, όπου παρεμβάλλονται αριθμητικοί αστρονομικοί πίνακες άλλων ποσοτήτων, που ισοδυναμούσαν με ρητές συναρτήσεις και, επίσης, οι πιο απλές άρρητες συναρτήσεις του ημίτονου.

Εντούτοις, οι Έλληνες δεν περιορίστηκαν στη χρήση των πινακοποιημένων συναρτήσεων. Βασικό ρόλο στη θεωρία των κωνικών τομών έπαιξαν τα *συμπτώματα* τους, δηλαδή οι βασικές εμβαδομετρικές ιδιότητες των αντίστοιχων καμπυλών που προκύπτουν από τον αρχικό ορισμό της Στερεομετρίας για τις κωνικές τομές ως τομές ενός κώνου από ένα επίπεδο. Ο Αρχιμήδης και οι περισσότεροι αρχαίοι συγγραφείς

εκφράζουν τις κωνικές τομές μέσω των συμπτωμάτων, δηλαδή μέσω εξισώσεων, που αναφέρονται είτε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είτε σε πλαγιογώνιο (**Van Der Waerden**, 2003). Ένας σύγχρονος μαθηματικός θα έλεγε ότι ένα σύμπτωμα μιας κωνικής τομής παριστάνει, για κάθε σημείο της δοθείσης καμπύλης μια και μοναδική συναρτησιακή εξάρτηση μεταξύ του μισού της χορδής της καμπύλης y και του τμήματος x της διαμέτρου που τέμνει τη χορδή, όπου τα άκρα αυτού του τμήματος είναι το σημείο τομής της διαμέτρου με τη χορδή και η αντίστοιχη κορυφή της καμπύλης. Οι αρχαίοι γεωμέτρες περιέγραψαν τα συμπτώματα λεκτικά και, μάλιστα, με όρους της Γεωμετρικής Άλγεβρας (ο όρος αποδίδεται στον **Zeuthen** (1966)) στην οποία ταυτότητες και εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού παριστάνονται με ισότητες εμβαδών συγκεκριμένων ορθογωνίων. Το νόημα αυτών των συμπτωμάτων, των οποίων αυτή η λεκτική περιγραφή από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας δεν είναι οικεία σε μας, θα μπορούσε να μεταφερθεί με μεγάλη ακρίβεια στη γλώσσα της Αναλυτικής Γεωμετρίας με εξισώσεις καμπυλών δεύτερης τάξης ,

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2, y^2 = 2px.$$

Εντούτοις, οι δυνατότητες που προσέφερε η Γεωμετρική Άλγεβρα δεν ήταν επαρκείς για να μεταφερθούν με παρόμοιο τρόπο οι ιδιότητες καμπυλών 3^{ης} και 4^{ης} τάξης, όπως, για παράδειγμα, η κισσοειδής του Διοκλή και η κογχοειδής του Νικομήδη, καθώς και οι ιδιότητες κάποιων άλλων αλγεβρικών καμπυλών που ήταν γνωστές στους Έλληνες μαθηματικούς, οι οποίοι έπρεπε να ορίσουν όλες αυτές τις καμπύλες καθώς και συγκεκριμένες υπερβατικές (μη αλγεβρικές) καμπύλες, με όρους ειδικών γεωμετρικών ή μηχανικών (κινηματικών) δομών.

Οι αρχαίοι μαθηματικοί εισήγαγαν μια ιδιόμορφη ταξινόμηση των καμπυλών και των προβλημάτων που επιλύονται με τη βοήθεια αυτών των καμπυλών. Πριν από τον Ευκλείδη ξεχώρισαν 3 είδη γεωμετρικών τόπων: <u>επίπεδοι γεωμετρικοί τόποι</u> – ευθείες γραμμές και κύκλοι, <u>στερεοί γεωμετρικοί τόποι</u> – κωνικές τομές, και <u>γραμμικοί τόποι</u> – όλες οι άλλες καμπύλες.

Στην Αρχαία Ελλάδα και στις Ελληνιστικές χώρες οι οποίες αργότερα έγιναν Ρωμαϊκές επαρχίες, συναρτήσεις που παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά μέσω μαθηματικών και αστρονομικών προβλημάτων μελετήθηκαν με τρόπο παρόμοιο με τον τρόπο με τον οποίο μελετήθηκαν συναρτήσεις που εμφανίστηκαν στη μαθηματική ανάλυση των νεότερων χρόνων. Οι συναρτήσεις ταξινομήθηκαν μέσω γραμμικής παρεμβολής, και, στις απλούστερες περιπτώσεις, υπολογίστηκαν τα όρια

των λόγων δύο απείρως μικρών ποσοτήτων όπως, για παράδειγμα, το όριο του $\frac{\sin x}{x}$ καθώς $x \to 0$.

Προβλήματα στις ακρότατες τιμές και στις εφαπτόμενες επιλύθηκαν με μεθόδους ισοδύναμες με τη μέθοδο της διαφόρισης. Εμβαδά, όγκοι, μήκη, και κέντρα βάρους υπολογίστηκαν με μεθόδους ολοκλήρωσης που ισοδυναμούσαν με τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, όπως τα $\int_0^a xdx$ και $\int_o^a x^2 dx$.

Τέλος, προβλήματα στα οποία έπρεπε να υπολογιστούν ρίζες τριτοβάθμιων πολυωνύμων επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας τις κωνικές τομές (καμπύλες δεύτερης τάξης). Με τη σύγχρονη ορολογία και με συμβολισμό που δεν υπήρχαν στα Μαθηματικά της αρχαιότητας μπορούμε να πούμε ότι για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος, οι ρίζες των αντίστοιχων πολυωνυμικών εξισώσεων θεωρήθηκαν ως συντεταγμένες των σημείων τομής, ή επαφής, δύο τέτοιων κατάλληλων καμπυλών.

Μέχρι τον 3^0 Μ.Χ. αιώνα περίπου, οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τα ψηφία και συμβόλιζαν πολλές ποσότητες με διαφορετικά γράμματα του αλφαβήτου. Ωστόσο, ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκαν αλγεβρικοί τύποι, ή κάποιο είδος αλγόριθμου, ή αναλυτικές εκφράσεις. Μόνο ο Διόφαντος, ο τελευταίος μαθηματικός της Αλεξανδρινής εποχής, χρησιμοποίησε στα έργα του κάποια αλγεβρικά σύμβολα, όμως, με την παρακμή των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, αυτός ο συμβολισμός δεν εξελίχθηκε. Εκτός από την έλλειψη συμβολισμού, η οποία εμπόδισε συνολικά την πρόοδο των Μαθηματικών, τα επιτεύγματα των Ελλήνων τόσο στην αύξηση του αριθμού των χρησιμοποιούμενων συναρτησιακών εξαρτήσεων όσο και στην ανακάλυψη νέων τρόπων μελέτης τους ήταν πραγματικά αξιόλογα και έπαιξαν προεξέχοντα ρόλο στη μετέπειτα εξέλιξη των Μαθηματικών μέχρι τη δημιουργία της νέας Άλγεβρας, της Αναλυτικής Γεωμετρίας και του λογισμού των απειροστών του $16^{ου}$ και του $17^{ου}$ αιώνα.

Η ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), στους αρχαίους χρόνους δεν υπήρχε η γενική ιδέα της έννοιας της συνάρτησης. Το θέμα του κατά πόσο οι αρχαίοι μαθηματικοί κατείχαν μια γενική έννοια της συνάρτησης μελετήθηκε με λεπτομέρεια από τον Pedersen (1974) στην εργασία του που είναι αφιερωμένη στην «Αλμαγέστη»

του Πτολεμαίου. Ο Pedersen παρατηρεί ότι, σύμφωνα με το – κατά τον Πτολεμαίο – σύστημα του κόσμου, οι θέσεις του ήλιου, της σελήνης και των πλανητών αλλάζουν συνεχώς και περιοδικά με την πάροδο του χρόνου. Ο προσδιορισμός αυτών των θέσεων ολοκληρώνεται από τον Πτολεμαίο με τη βοήθεια κοινώς αποδεκτών μεθόδων, που μερικές φορές επεξηγούνται από αριθμητικά παραδείγματα ή, εναλλακτικά, μορφοποιούνται λεκτικά μ' ένα εντελώς γενικό τρόπο. Αυτές οι κλασικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται για να συνταχθούν πολλοί αστρονομικοί πίνακες, για παράδειγμα, για να κατασκευαστούν πίνακες με τις αντίστοιχες συναρτήσεις που είναι συναρτήσεις μιας, ή ακόμα και δύο, και, σε πολλές περιπτώσεις, τριών μεταβλητών.

Παρατηρώντας ότι ο όρος ***συνάρτηση*** δεν εμφανίστηκε για πρώτη φορά στα έργα των αρχαίων μαθηματικών αλλά πολύ αργότερα, ο Pedersen αναρωτιέται εάν νομιμοποιούμαστε γι' αυτό το λόγο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι αρχαίοι μαθηματικοί αγνοούσαν τις συναρτησιακές σχέσεις. Κατά τον Pedersen, η απάντηση στο ερώτημα αυτό εξαρτάται από το τι πράγματι εννοούμε με τον όρο συνάρτηση. Αν, όπως και πολλοί παλαιότεροι μαθηματικοί, ερμηνεύσουμε τον όρο συνάρτηση ως μια αναλυτική έκφραση, τότε το συμπέρασμα είναι ότι οι αρχαίοι δε γνώριζαν τις συναρτήσεις. «…*Αλλά αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση, όχι ως ένα τύπο, αλλά ως μια πιο γενική σχέση που συνδέει τα στοιχεία ενός συνόλου αριθμών (όπως, οι χρονικές στιγμές* $t_1, t_2, t_3, \ldots$*) με τα στοιχεία ενός άλλου συνόλου (για παράδειγμα κάποια γωνιακή μεταβλητή σε ένα πλανητικό σύστημα), είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις μ' αυτή την έννοια υπάρχουν σε αφθονία σε όλη την «Αλμαγέστη». Αυτό που λείπει είναι μόνο ο όρος συνάρτηση: αυτή η οντότητα υπάρχει σ' αυτό το έργο και αναπαρίσταται καθαρά από τους πολλούς πίνακες των αντίστοιχων στοιχείων τέτοιων συνόλων*…» (Pedersen, 1974).

Με τον Pedersen συμφωνεί και ο Youschkevitch. Ο Πτολεμαίος, όπως και άλλοι αστρονόμοι εκείνων των χρόνων αλλά και προηγούμενων, γνώριζαν ότι οι συντεταγμένες των κινούμενων ουράνιων σωμάτων αλλάζουν περιοδικά με το χρόνο, ή ότι, σε δοθέντα κύκλο, χορδές με άνισα μήκη συσχετίζονται με τόξα άνισων μηκών. Επίσης, 2000 χρόνια πριν από τον Πτολεμαίο, οι υπό μορφή πίνακα σχέσεις ήταν καλά γνωστές στους Βαβυλώνιους. Και όλα αυτά αν και, στην αρχαία μαθηματική γλώσσα απουσιάζουν όχι μόνο λέξεις ισοδύναμες με τον όρο ***συνάρτηση*** αλλά έστω και μια νύξη σε αυτή την περισσότερο αφηρημένη και περισσότερο γενική ιδέα η

οποία ενοποιεί ξεχωριστές και συγκεκριμένες σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ποσοτήτων ή αριθμών σε οποιαδήποτε μορφή (λεκτική περιγραφή, γραφική παράσταση, πίνακας) και αν εξετάστηκαν αυτές οι εξαρτήσεις. Υπάρχει μια σημαντική απόσταση ανάμεσα στο *ένστικτο του συναρτησιακού συσχετισμού* (Bell) και στην αντίληψη που έχουμε γι' αυτόν, και το ίδιο ισχύει όσον αφορά και ειδικές μορφές συναρτήσεων και την εμφάνιση της έννοιας της συνάρτησης στον ένα ή στον άλλο βαθμό γενικότητας. Η χρήση του ενικού (δηλαδή, *αυτή η οντότητα,* η συναρτησιακή σχέση που αναπαρίσταται από διάφορους πίνακες) από τον Pedersen σε συνδυασμό με την *«Αλμαγέστη»* δε συμφωνεί με το ότι οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε αυτούς τους πίνακες εξετάζονταν ως ειδικές περιπτώσεις μιας γενικής συναρτησιακής σχέσης.

Μια παρόμοια κατάσταση βρίσκουμε συνολικά στα Ελληνικά Μαθηματικά όπου οι μέθοδοι υπολογισμού ή προσδιορισμού μεμονωμένων συγκεκριμένων ορίων δεν οδήγησαν ποτέ σε μια ρητή διατύπωση των γενικών εννοιών της ακολουθίας, της μεταβλητής, του ορίου, της απείρως μικρής ποσότητας, του ολοκληρώματος, ή στη διατύπωση γενικών θεωρημάτων που έχουν σχέση με αυτές τις έννοιες. Κατάλληλα παραδείγματα είναι οι τετραγωνισμοί και οι κυβισμοί του Αρχιμήδη. Επιλύοντας αρκετά προβλήματα, όπως προσδιορίζοντας το εμβαδόν της στροφής μιας σπείρας, τον όγκο ενός σφαιροειδούς, και το εμβαδόν ενός τμήματος ενός υπερβολοειδούς εκ περιστροφής, στην πραγματικότητα ο Αρχιμήδης υπολόγισε ένα και το αυτό ολοκλήρωμα, το $\int_0^a x^2 dx$ ή, αλλιώς, το όριο του αθροίσματος «Riemann – Darboux», εκτελώντας στην πραγματικότητα τις διαδικασίες που απαιτούνται από τη μέθοδο της εξάντλησης εκ νέου κάθε φορά. Ο **Bourbaki,** παρατηρώντας ότι κάποια άλλα προβλήματα που επιλύθηκαν από τον Αρχιμήδη, όπως ο τετραγωνισμός της παραβολής και ο προσδιορισμός του κέντρου βάρους ενός τριγώνου, θα μπορούσαν να είχαν αναχθεί στον υπολογισμό του ίδιου ολοκληρώματος, στο έργο του *«Στοιχεία της Ιστορίας των Μαθηματικών»* (1969) αναφέρει ότι «…αγνοούμε μέχρι ποιο σημείο ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τις σχέσεις που συνδέουν τα διάφορα προβλήματα που χειρίζεται – σχέσεις που θα εκφράζαμε λέγοντας ότι το ίδιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται από διαφορετικές γεωμετρικές όψεις – καθώς και τη σημασία που μπορούμε να τους αποδώσουμε…». Ο Αρχιμήδης παρατήρησε ότι οι μέθοδοι υπολογισμού στα τρία πρώτα προβλήματα ήταν οι ίδιες, χρησιμοποίησε τη

συνάρτηση $y = x^2$, αλλά δεν εισήγαγε τη γενική έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος.

Μελετώντας τα Μαθηματικά αυτής της περιόδου, αφενός αντιλαμβανόμαστε τη σημασία τους για την περαιτέρω εξέλιξη αυτής της επιστήμης και αφετέρου, συχνά με μη επιτρεπτό τρόπο, διευρύνουμε την ερμηνεία αυτών των ιδεών, συνδέοντας αυτές με νεότερες, πολύ πιο γενικές, έννοιες και αντιλήψεις. Στην πραγματικότητα, «…ο ιστορικός ταυτίζει το πνεύμα των καιρών με την αντανάκλαση του στο δικό του μυαλό…» (Youschkevitch, 1976).

Εντούτοις, οι ιδέες της αλλαγής και της μεταβλητής ποσότητας δεν ήταν ξένες προς τη σκέψη των Ελλήνων. Προβλήματα κίνησης, συνέχειας, απείρου, εξετάστηκαν από τα χρόνια του Ηράκλειτου και του Ζήνωνα του Ελεάτη, και στη μελέτη αυτών των εννοιών αφιερώθηκε το μεγαλύτερο μέρος από *τα Φυσικά* του Αριστοτέλη ή της φυσικής φιλοσοφίας. Χρησιμοποιώντας τον όρο *κίνηση* της ύλης με την ευρεία έννοια της *αλλαγής*, ο Αριστοτέλης διέκρινε τρεις βασικές μορφές διαδικασιών: εναλλαγή ή αλλαγή της ποιότητας, αλλαγή του μεγέθους ή της ποσότητας, όπως αύξηση ή μείωση, και τοπική κίνηση που είναι η πιο απλή μορφή της κίνησης και συνοδεύει απαραιτήτως τις δύο άλλες ανώτερες μορφές των αλλαγών της ύλης. Η τοπική κίνηση υποδιαιρείται στην ομοιόμορφη (ομαλή) κίνηση, κατά την οποία ίσα διαστήματα (τμήματα ή τόξα της περιφέρειας ενός κύκλου) διανύονται σε ίσους χρόνους, και στη μη ομαλή κίνηση. Εντούτοις, ούτε η μέση ταχύτητα, δηλαδή ο λόγος s/t, ούτε η στιγμιαία ταχύτητα, εισήχθησαν ως όροι στην αρχαιότητα. Ως εκ τούτου, ούτε η ποσοτική αλλαγή ούτε η τοπική κίνηση, οι οποίες και οι δύο βρήκαν την αναπαράσταση τους στην πιο αφηρημένη έννοια της μεταβλητής ποσότητας, έγιναν αντικείμενο μαθηματικής μελέτης για τους Έλληνες. Αυτό το γεγονός θα μπορούσε εν μέρει να πούμε ότι οφείλεται στην επιρροή των διενέξεων που προέκυψαν από τα παράδοξα του Ζήνωνα. Το γεγονός αυτό συνδέεται με τη γενική κατεύθυνση της εξέλιξης της Μηχανικής και της Αστρονομίας των Ελλήνων. Καμία από αυτές τις επιστήμες δεν ξεπέρασε τα όρια της ομοιόμορφης κίνησης, γιατί οι μη ομαλές κινήσεις των ουράνιων σωμάτων είχαν αναχθεί σε συνδυασμούς ομοιόμορφων κυκλικών κινήσεων. Όπου ήταν δυνατό, οι κινηματικές ιδέες εκτοπίστηκαν από τη σφαίρα των καθαρών Μαθηματικών. Μεμονωμένες προτάσεις που υπάρχουν στον Ευκλείδη στις οποίες χρησιμοποιούνται η κίνηση και η υπέρθεση, όπως και μεμονωμένες περιπτώσεις κινηματικών ορισμών των καμπυλών, όπως, για

παράδειγμα, της τετραγωνικής ή της ισογώνιας έλικας δεν αλλάζουν τη γενική εικόνα.

Όποιες και αν είναι πάντως οι ιδεολογικές ή οι κοινωνικές αιτίες και συνθήκες οι οποίες διαμόρφωσαν τα χαρακτηριστικά της επιστήμης στην αρχαιότητα όπως αυτά περιγράφονται παραπάνω, *η μαθηματική σκέψη αυτής της περιόδου δεν οδήγησε στη γενική έννοια είτε της μεταβλητής ποσότητας είτε της συνάρτησης*. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν είχαν την έννοια της γενικής συνάρτησης ή ισοδύναμα των γενικών γεωμετρικών σχημάτων. Ασχολήθηκαν με συγκεκριμένα σχήματα, όπως είναι το τρίγωνο, η σφαίρα, ο κύλινδρος και οι κωνικές τομές, και όχι με την απόδειξη ιδιοτήτων για γενικότερα σχήματα που θα οδηγούσε στην ανάγκη εισαγωγής μιας πιο γενικής μορφής συνάρτησης. Εξαίρεση στον κανόνα αυτό αποτέλεσε ο Αρχιμήδης ο οποίος στο έργο του *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου Α΄* ορίζει τα αξιώματα κυρτότητας για μια καμπύλη και έτσι βρίσκεται πολύ κοντά στο γενικό ορισμό της κυρτής συνάρτησης (**Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας**, 1999). Στο πεδίο των εφαρμογών, κυρίως στην Αστρονομία, όπου οι ποσοτικές μέθοδοι της έρευνας υφίσταντο τη μεγαλύτερη εξέλιξη, ο κύριος στόχος ήταν η υπό μορφή πίνακα αναπαράσταση των συναρτήσεων οι οποίες θεωρούνταν ως σχέσεις μεταξύ διακεκριμένων συνόλων δεδομένων σταθερών ποσοτήτων και όχι ως σχέσεις μεταξύ αριθμητικών τιμών ποσοτήτων που συνδέονται συναρτησιακά η μία με την άλλη.

Από τα παραπάνω, διαφαίνεται μια ομοιότητα με τη στατική αντίληψη της θεωρίας συνόλων του Cantor, όπου η διαισθητική ιδέα της μεταβλητής ποσότητας είχε αναχθεί στην απλοποιημένη ιδέα ενός συνόλου σταθερών ποσοτήτων. Σε κάθε περίπτωση, οι σκέψεις των Ελλήνων μαθηματικών γενικά απείχαν πολύ από την κινηματική αντίληψη μιας ρέουσας ποσότητας, η οποία ήταν το χαρακτηριστικό του απειροστικού λογισμού του 17^{ου}, του 18^{ου} και του 19^{ου} αιώνα (Youschkevitch, 1976).

ΜΕΣΑΙΩΝΑΣ

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

Αρκετά χρόνια μετά την παρακμή των αρχαίων Μαθηματικών, αυτή η επιστήμη άνθησε και πάλι στις Αραβικές χώρες, χωρίς να προκαλέσει ουσιώδεις νέες εξελίξεις στην έννοια της συνάρτησης. Εν τούτοις, ο αριθμός των υπό εξέταση συναρτήσεων

αυξήθηκε και οι μέθοδοι μελέτης τους βελτιώθηκαν. Έτσι γίνεται αναφορά σε όλες τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οι μέθοδοι ταξινόμησης τους σε κατηγορίες τελειοποιούνται, και συγκεκριμένα, η τετραγωνική παρεμβολή άρχισε να χρησιμοποιείται παράλληλα με τη γραμμική παρεμβολή, και η μελέτη των θετικών ριζών των τριτοβάθμιων πολυωνύμων με τη βοήθεια των κωνικών τομών προόδευσε ουσιαστικά. Στην Οπτική και στην Αστρονομία έγινε περαιτέρω πρόοδος.

Η έννοια της συνάρτησης εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε μια πιο γενική μορφή τρεις αιώνες αργότερα στις σχολές της φυσικής φιλοσοφίας στην Οξφόρδη και στο Παρίσι. Ακολουθώντας στοχαστές όπως είναι οι Grosseteste και Bacon, αυτές οι δύο σχολές, οι οποίες άνθησαν τον 14^{ο} αιώνα, ανακήρυξαν τα Μαθηματικά ως το κύριο εργαλείο για τη μελέτη των φυσικών φαινομένων. Απομακρύνθηκαν από το Αριστοτελικό δόγμα της έντασης και της μείωσης των ποιοτήτων και των μορφών, και έτσι οδηγήθηκαν στη μαθηματική μελέτη της μη ομοιόμορφης ποσοτικής και τοπικής κίνησης. Ο Αριστοτέλης άρχισε να αμφισβητείται για πρώτη φορά από αρκετούς ερευνητές του κολεγίου Merton της Οξφόρδης και η κίνηση γίνεται για πρώτη φορά αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας (**Edwards**, 1979).

Οι ποιότητες ή μορφές είναι φαινόμενα όπως η θερμότητα, το φως, το χρώμα, η πυκνότητα, η απόσταση, η ταχύτητα κλπ., οι οποίες μπορούν να έχουν διάφορους βαθμούς εντάσεων και οι οποίες, γενικά, συνεχώς μεταβάλλονται εντός ορισμένων ορίων. Οι εντάσεις των μορφών ερευνώνται σε σχέση με τις εκτάσεις τους, δηλαδή σε σχέση με μια αμετάβλητη μορφή που λεγόταν έκταση, όπως είναι, για παράδειγμα, η ποσότητα της ύλης, ο χρόνος, η απόσταση κλπ. Κατά τη διάρκεια αυτών των ερευνών εμφανίστηκε μια ολόκληρη σειρά από τις πιο βασικές έννοιες, όπως είναι η στιγμιαία ταχύτητα, η επιτάχυνση, και η μεταβλητή ποσότητα, που θεωρήθηκαν ως βαθμός ή ροή της ποιότητας. Μέσα σ' όλα αυτά, η σύνθεση της κινηματικής και της μαθηματικής σκέψης έπαιξε κυρίαρχο ρόλο. Ο Bourbaki στα «*Στοιχεία της Ιστορίας των Μαθηματικών*» (1969) παρατηρεί ότι: «*…Όλη η κινηματική στηρίζεται σε μια διαισθητική, και σε κάποιο βαθμό πειραματική, ιδέα, των μεταβλητών ποσοτήτων με το χρόνο, δηλαδή των συναρτήσεων του χρόνου…*». Ταυτόχρονα, η ιδέα ότι οι ποσοτικοί φυσικοί νόμοι ήταν νόμοι συναρτησιακού τύπου ωρίμασε σταδιακά στη φυσική φιλοσοφία.

Το δόγμα της έντασης των μορφών, ή, αλλιώς, *η θεωρία των «υπολογισμών»* και το πιο σημαντικό μέρος της, η κινηματική, αναπτύχθηκε στην Αγγλία από τους Heytesbury, Swineshead, και άλλους, κυρίως στην κινηματική – αριθμητική

κατεύθυνση. Στο κολέγιο Merton της Οξφόρδης, μελετήθηκαν οι μεταβολές της ταχύτητας ή της τοπικής κίνησης με τον ίδιο τρόπο, όπως και οι μεταβολές της έντασης μιας ιδιότητας, ενώ στη Γαλλία, όπου ο κύριος και πιο αντιπροσωπευτικός εκφραστής αυτής της τάσης ήταν ο Oresme (1320-1382), η θεωρία των «υπολογισμών» αναπτύχθηκε στη γεωμετρική όμως κατεύθυνση. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η θεωρία των σχηματισμών των ποιοτήτων, ή, αλλιώς, η θεωρία της ομοιομορφίας και της μη ομοιομορφίας των εντάσεων, δηλαδή *η θεωρία του πλάτους των μορφών*, που αναπτύχθηκε από τον Oresme στα μέσα του 14^{ου} αιώνα. Ο **Oresme** στην πραγματεία του γι' αυτή τη θεωρία έγραψε ότι: «… *Κάθε μετρήσιμο αντικείμενο, εκτός από τους αριθμούς* (τους οποίους ο Oresme, όπως και οι αρχαίοι Έλληνες, κατανοούσε ως ένα σύνολο μονάδων) *θεωρείται ως συνεχής ποσότητα…»* (**Clagett**, 1968). Επομένως, σημεία, γραμμές, και επιφάνειες χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν αυτά τα *αντικείμενα*.

Ο Oresme παριστάνει τους βαθμούς της έντασης με τμήματα μηκών που αντιστοιχούν σε αυτούς τους βαθμούς, «τα πλάτη» (*latitudo*) τοποθετούνται κάθετα πάνω στη γραμμή των «μηκών» (*longitudo*), τα τμήματα των οποίων αναπαριστούν εκτάσεις. Ο λόγος δύο εντάσεων κάποιας ποιότητας είναι ο ίδιος με το λόγο που έχουν τα αντίστοιχα πλάτη, έτσι ώστε το πλάτος και τα μήκος κάποιας ποιότητας να μπορούν να λαμβάνονται αντί της έντασης και της έκτασης της ποιότητας. Τα άνω άκρα των πλατών κάποιας ποιότητας δημιουργούν την «γραμμή της έντασης» (*linea intensionis*) ή, με άλλα λόγια, τη «γραμμή της κορυφής» (*linea summitatis*) που αναπαριστά τη δοθείσα ποιότητα και τους «βαθμούς» της. Ο Oresme παρατήρησε ότι οι εντάσεις θα μπορούσαν να λέγονται μήκη οπότε οι εκτάσεις θα ονομάζονται πλάτη. Σε αυτό το πλαίσιο ερευνώνται «γραμμικές» (*linearis*) ποιότητες, οι εντάσεις των οποίων κατανέμονται μεταξύ των σημείων μιας γραμμής, αλλά υπάρχουν επίσης «επιφανειακές» (*superficialis*) και «υλικές» (*corporalis*) ποιότητες. Οι επιφανειακές ποιότητες παριστάνονται από στερεά με επίπεδες βάσεις ενώ η γεωμετρική αναπαράσταση των υλικών ποιοτήτων δυσκόλεψε πολύ τον Oresme.

Αυτές οι θεωρίες, οι οποίες αναπτύχθηκαν τον 14^{ο} αιώνα, χρησιμοποιούν συνειδητά τις γενικές ιδέες σχετικά με τις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες μεταβλητές ποσότητες. Αυτές οι ποσότητες δεν ορίζονται άμεσα αλλά καθεμία προσδιορίζεται από ένα ειδικό όρο. Το *πλάτος μιας «ποιότητας»* ερμηνεύεται γενικά ως μια *μεταβλητή ποσότητα* που εξαρτάται από το μήκος της και, παρομοίως, η *«γραμμή της κορυφής»* γίνεται αντιληπτή ως η *γραφική αναπαράσταση* κάποιας

συνεχούς συναρτησιακής σχέσης (**Crombie**, 1959 – 1961 & **Clagett**, 1959). Κατά συνέπεια, σε αυτές τις θεωρίες, *η συνάρτηση ορίζεται είτε με λεκτική περιγραφή της συγκεκριμένης ιδιότητας, δηλαδή του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού, είτε άμεσα με μια γραφική παράσταση*.

Με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό, το πλάτος και το μήκος, όπως επίσης και τα αντίστοιχα μισά των χορδών και τα τμήματα των διαμέτρων της αρχαίας θεωρίας των κωνικών τομών, είναι η τεταγμένη και η τετμημένη αντιστοίχως, με την παρατήρηση ότι οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούνταν τον 14^{ο} αιώνα σχετίζονταν πάντα με σημεία κάποιας καμπύλης και όχι με τυχαία σημεία του επιπέδου που δεν έχουν καμία σχέση με κάποια καμπύλη.

Η θεωρία του πλάτους των μορφών διακρίνεται για την απολύτως αφηρημένη αρχική ερμηνεία της για τα προβλήματα, χωρίς να δίνει σημασία στη συγκεκριμένη μορφή ή ποιότητα. Σύμφωνα με τον Clagett, ο Oresme ταξινομεί τα κύρια είδη των γραμμικών ποιοτήτων ως εξής:

1. Ομοιόμορφη (ομαλή) ποιότητα (*qualitas uniformis*) με σταθερό πλάτος και με τη γραμμή της έντασης να είναι παράλληλη στη γραμμή των μηκών. Το αντίστοιχο σχήμα είναι ένα ορθογώνιο.
2. Ομοιόμορφα (ομαλά) μεταβαλλόμενη (*uniformiter difformis*) ποιότητα που: *«...είναι εκείνη στην οποία αν ληφθούν τρία οποιαδήποτε σημεία της γραμμής, ο λόγος της απόστασης μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου προς την απόσταση μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου ισούται με το λόγο του πλεονάσματος της έντασης του πρώτου σημείου από την ένταση του δεύτερου σημείου προς το πλεόνασμα της έντασης του δεύτερου σημείου από την ένταση του τρίτου σημείου. Το πρώτο από αυτά τα τρία σημεία ονομάζεται σημείο της μέγιστης έντασης…»* (Clagett, 1968).

Με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό, αυτή η λεκτική περιγραφή αντιστοιχεί στην εξίσωση μιας ευθείας γραμμής η οποία διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Η γραμμή της έντασης στην περίπτωση αυτή παριστάνεται από την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ή, εναλλακτικά, από την κεκλιμένη άνω πλευρά ενός τετραπλεύρου που έχει δύο ορθές γωνίες στη βάση του. Η διαφορά οφείλεται στο

κατά πόσο αυτή η γραμμή συναντά το δοθέν τμήμα της γραμμής των μηκών στο ένα από τα δύο άκρα του, οπότε, με την ορολογία του Oresme το πλάτος είναι μηδέν, ή όχι.

3. Μη ομαλά μεταβαλλόμενες (*difformiter difformis*) ποιότητες, στις οποίες ανήκουν όλες οι άλλες περιπτώσεις. Αυτή η πιο εκτενής κλάση ποιοτήτων δεν ανήκει ούτε στις ομαλές ούτε στις ομαλά μεταβαλλόμενες ποιότητες (Clagett, 1968).

Εδώ ο Oresme διακρίνει αρχικά τέσσερα απλά (*simplex*) είδη ποιοτήτων, αυτά που είναι κυρτά και κοίλα τόξα ενός κύκλου, όχι μεγαλύτερα από το ημικύκλιο, και, επίσης, παρόμοια τόξα μιας έλλειψης. Στη συνέχεια ο Oresme χρησιμοποιεί τον όρο *mixtio* (*mixture)* για 63 «σύνθετες» (*compositae*) μη ομαλές μεταβολές (ανομοιομορφίες), των οποίων οι γραμμές της έντασης αποτελούνται από δύο ή περισσότερα τόξα των καμπυλών που αναφέρθηκαν παραπάνω ή τμημάτων μιας ευθείας γραμμής.

Ένα σημαντικό στοιχείο της θεωρίας των υπολογισμών ή του πλάτους των μορφών ήταν η μελέτη των συναρτήσεων του χρόνου χωρίς να έχουν προηγηθεί μελέτες των απειροστών (Bourbaki, 1969). Ωστόσο, κατά τον Youschkevitch (1976), οι μελέτες των απειροστών όχι μόνο υπήρχαν σε λανθάνουσα μορφή στις έννοιες της στιγμιαίας ταχύτητας και της επιτάχυνσης αλλά επίσης χρησιμοποιήθηκαν ρητά στην επίλυση μιας ολόκληρης σειράς προβλημάτων, όπως είναι, για παράδειγμα, τα προβλήματα προσδιορισμού του εμβαδού κάποιων – απεριόριστης έκτασης – σχημάτων, ή τα προβλήματα προσδιορισμού της μέσης ταχύτητας σωμάτων των οποίων οι στιγμιαίες ταχύτητες αλλάζουν σταδιακά άπειρες φορές σύμφωνα με κάποιο καθορισμένο νόμο κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος που διαιρείται σε άπειρο αριθμό χρονικών στιγμών. Σε αυτά τα προβλήματα η κύρια μέθοδος υπολογισμού ήταν η άθροιση των άπειρων γεωμετρικών προόδων. Αργότερα, στα πλαίσια της ίδιας θεωρίας, οι μαθηματικοί υπολόγισαν περισσότερο περίπλοκες σειρές, των οποίων τα αθροίσματα παριστάνονταν από άγνωστες υπερβατικές ποσότητες τις οποίες έπρεπε να υπολογίσουν προσεγγιστικά και κατ’ έλλειψη και καθ’ υπεροχή.

Ένα επίτευγμα, πολύ σημαντικό για τη Μηχανική – αν όχι και για τα Μαθηματικά – ήταν ο προσδιορισμός της μέσης ταχύτητας της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, χωρίς σύνδεση αυτού του προβλήματος με το πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων. Αυτό το επίτευγμα, που ολοκληρώθηκε πρώτα στο κολέγιο Merton της Οξφόρδης, περιγράφεται σε εργασίες των Heytesbury, Swineshead, και Dumbleton,

οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση είναι ισοδύναμη με μια ομαλή κίνηση με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα της επιταχυνόμενης κίνησης στο μέσο του χρόνου της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως το *«θεώρημα του Merton»* (Clagett, 1959).

Ο Oresme απέδειξε αυτό το θεώρημα παριστάνοντας τη διανυόμενη απόσταση ή την ανάλογη ποσότητα, την ολική (μέση) ταχύτητα, με το εμβαδόν ενός τριγώνου ή ενός τραπεζίου (Clagett, 1968). Σύμφωνα με τον **Busard** (1961), ο **Oresme** κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, για μηδενική αρχική ταχύτητα, η απόσταση αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου και, ότι τα διαστήματα που διανύονται σε ίσα χρονικά διαστήματα αυξάνουν ανάλογα προς τους περιττούς αριθμούς (1:3:5:7:…). Σε αυτά τα συμπεράσματα κατέληξε και ο Γαλιλαίος στη μελέτη του για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων στο κενό, που δημοσιεύτηκε στα έργα του «Διάλογος μεταξύ δύο μεγίστων κοσμοθεωριών», το 1632, και «Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για δύο νέες επιστήμες συνδεδεμένες με τη μηχανική και τις τοπικές κινήσεις», το 1638. Εντούτοις, η απόδειξη του Γαλιλαίου για το «θεώρημα του Merton» στηρίζεται στη μέθοδο των αδιαιρέτων, ενώ στην απόδειξη του Oresme οι απειροστικές σκέψεις απλώς υπονοούνται (Youschkevitch, 1976).

Τον 15^{ο} αιώνα καθώς και στο πρώτο μισό του 16^{ου} αιώνα η θεωρία του πλάτους των μορφών και η θεωρία των υπολογισμών έγιναν ευρέως αποδεκτές, ιδιαίτερα στην Αγγλία, στη Γαλλία, στην Ιταλία και στην Ισπανία. Εντούτοις, οι μέθοδοι αυτών των θεωριών, τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, εφαρμόστηκαν μόνο σε μεμονωμένα προβλήματα της Φυσικής και της Μηχανικής. Όπως αναφέρει και ο Crombie (1959 – 1961): *«…Τον 14^{ο} αιώνα η ιδέα των συναρτησιακών σχέσεων αναπτύχθηκε χωρίς πραγματικές μετρήσεις και μόνο σε γενικές γραμμές…»*.

Στην εξέλιξη μερικών βασικών εννοιών των Μαθηματικών και της Μηχανικής, συμπεριλαμβανομένης και *της έννοιας της συνάρτησης, οι φυσικοί φιλόσοφοι του 14^{ου} αιώνα προχώρησαν πολύ πιο πέρα από όλους τους προκατόχους τους, και κατέληξαν σε ιδιαίτερα σημαντικά αποτελέσματα*. Για παράδειγμα, ο Oresme ανακάλυψε την ύπαρξη σχημάτων απεριόριστης έκτασης αλλά πεπερασμένου εμβαδού και την απόκλιση των αρμονικών σειρών. Ωστόσο, οι δυνατότητες που προσέφεραν οι νέες έννοιες δεν αξιοποιήθηκαν ευρέως ούτε στα Μαθηματικά ούτε στις εφαρμογές τους. Οι σχολές της φυσικής φιλοσοφίας της Οξφόρδης και του Παρισιού έπαιξαν ένα αξιοσημείωτο ρόλο στη δημιουργία των Μαθηματικών των νεότερων χρόνων και, ιδιαίτερα, στην εξέλιξη της γενικής έννοιας της συνάρτησης. Εντούτοις, αυτός ο ρόλος δεν ήταν

κυρίαρχος, καθώς μια νέα ερμηνεία των συναρτησιακών συσχετισμών ήρθε στο προσκήνιο τον 17^{ο} αιώνα (Youschkevitch, 1976).

ΝΕΟΤΕΡΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Σημαντικό ρόλο στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων διαδραμάτισαν, από τη μια, η απότομη αύξηση των υπολογιστικών Μαθηματικών και, από την άλλη, η δημιουργία της συμβολικής Άλγεβρας μαζί με την αντίστοιχη επέκταση της έννοιας του αριθμού, έτσι ώστε, με το τέλος του 16^{ου} αιώνα, η έννοια αυτή να περιλαμβάνει όχι μόνο όλο το πεδίο των πραγματικών αριθμών αλλά επίσης και τους φανταστικούς και τους μιγαδικούς αριθμούς. Αυτά ήταν τα προκαταρκτικά στάδια στα Μαθηματικά για την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης ως σχέσης ανάμεσα σε σύνολα αριθμών παρά ως σχέσης ανάμεσα σε «ποσότητες» και για την αναλυτική αναπαράσταση των συναρτήσεων με τύπους. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε την πρόοδο στην τριγωνομετρία και την ανακάλυψη των λογαρίθμων. Ωστόσο, αυτό στο οποίο πρέπει ειδικά να δοθεί έμφαση, είναι η εισαγωγή πολυάριθμων συμβόλων για μαθηματικές πράξεις και σχέσεις, όπως είναι τα σύμβολα της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, των δυνάμεων και της ισότητας και, κυρίως, η εισαγωγή συμβόλων για άγνωστες ποσότητες και παραμέτρους, τις οποίες ο Γάλλος μαθηματικός *Francois Viète* (1540 – 1603) συμβόλισε, το 1591, με τα φωνήεντα $A, E, I, ...$ και τα σύμφωνα $B, G, D, ...$ του Λατινικού αλφαβήτου αντιστοίχως. Η εισαγωγή αυτού του συμβολισμού οδήγησε στη γραπτή συμβολική μορφή αλγεβρικών εξισώσεων και εκφράσεων που περιέχουν άγνωστες ποσότητες και τυχαίους συντελεστές. Ο Viète διαχώρισε τις γνωστές παραμέτρους από τις άγνωστες μεταβλητές σε μια αλγεβρική εξίσωση, και συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στη μετατόπιση του ενδιαφέροντος, κατά τον 17^{ο} αιώνα, από τη μελέτη ειδικών προβλημάτων και καταστάσεων στη διερεύνηση των γενικών μεθόδων (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999). Ωστόσο, ο δημιουργός της νέας Άλγεβρας δεν χρησιμοποίησε την αξιοσημείωτη ανακάλυψη του περαιτέρω στην έννοια της συνάρτησης: *η «συναρτησιακή σκέψη» δεν ήταν χαρακτηριστική του μυαλού του Viète* (Youschkevitch, 1976).

Από τις αρχές του 17^{ου} αιώνα, η νέα έννοια των ποσοτικών νόμων της φύσης που καθιερώνει συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των αριθμητικών τιμών φυσικών ποσοτήτων αποκτούσε δύναμη σε συνεχώς αυξανόμενο βαθμό και γινόταν όλο και πιο πολύ το χαρακτηριστικό γνώρισμα επιστημών, όπως της Μηχανικής και της Αστρονομίας. Επίσης, η μελέτη της κίνησης ήταν ένα από τα βασικά προβλήματα που απασχόλησαν τους επιστήμονες και τους μαθηματικούς αυτού του αιώνα.

Αν και η Αστρονομία του Johannes Kepler (1571 – 1630) ήταν αποδεκτή στις αρχές του 17^{ου} αιώνα, ιδιαίτερα μετά από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου που έδωσαν πρόσθετες αποδείξεις για την ηλιοκεντρική θεωρία, ο νόμος του Kepler για την ελλειπτική κίνηση αμφισβητήθηκε με το επιχείρημα ότι οι διάφοροι πλανήτες παρεμποδίζουν την ελλειπτική κίνηση ενός οποιουδήποτε πλανήτη και ότι ο ήλιος παρεμποδίζει την ελλειπτική κίνηση της σελήνης γύρω από τη γη. Ο Kepler πρότεινε την έννοια της δύναμης της βαρύτητας που ασκείται μεταξύ δύο οποιονδήποτε σωμάτων, και έτσι προέκυψε το πρόβλημα της βελτίωσης του υπολογισμού των θέσεων των πλανητών. Επιπλέον, ο Kepler είχε καταλήξει στους νόμους του ουσιαστικά προσαρμόζοντας καμπύλες σε αστρονομικά δεδομένα, χωρίς να εξηγήσει (με την ορολογία των θεμελιωδών νόμων της κίνησης) γιατί οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές. Έτσι, το βασικό πρόβλημα της προέλευσης των νόμων του Kepler από τους νόμους της κίνησης ήταν καθαρή πρόκληση.

Η βελτίωση της αστρονομικής θεωρίας είχε επίσης ένα πρακτικό στόχο (Kline, 1972). Οι Ευρωπαίοι, για εμπορικούς λόγους, είχαν αναπτύξει τη ναυσιπλοΐα, και κατά συνέπεια οι ναυτικοί είχαν ανάγκη ακριβείς μεθόδους προσδιορισμού του γεωγραφικού πλάτους και του γεωγραφικού μήκους. Ο προσδιορισμός του γεωγραφικού πλάτους μπορούσε να γίνει με ευθεία παρατήρηση του ήλιου ή των άστρων, αλλά ο προσδιορισμός του γεωγραφικού μήκους ήταν πολύ πιο δύσκολος.

Οι επιστήμονες του 17^{ου} αιώνα αντιμετώπισαν επίσης το πρόβλημα της εξήγησης των κινήσεων της γης. Από την ηλιοκεντρική θεωρία, σύμφωνα με την οποία η γη περιστρεφόταν γύρω από τον ήλιο, προέκυψαν διάφορα ερωτήματα σχετικά με την ελεύθερη πτώση των αντικειμένων στη γη. Επιπλέον, όλες οι κινήσεις, η κίνηση του βλήματος για παράδειγμα, φαινόταν ότι πραγματοποιούνται σαν η γη να ήταν ακίνητη. Αυτές οι ερωτήσεις τράβηξαν την προσοχή πολλών επιστημόνων, συμπεριλαμβανομένων των Cardan, Tartaglia, Γαλιλαίου, και Newton. Οι τροχιές των βλημάτων, τα ύψη στα οποία θα μπορούσαν να φτάσουν, η επίδραση της ταχύτητας

στο ύψος ήταν βασικά ερωτήματα εκείνης της εποχής και νέοι νόμοι της κίνησης ήταν απαραίτητοι για να εξηγήσουν αυτά τα γήινα φαινόμενα.

Από τη μελέτη των διάφορων προβλημάτων της κίνησης προέκυψε το ειδικότερο πρόβλημα του σχεδιασμού ακριβέστερων μεθόδων μέτρησης του χρόνου, γιατί τα μηχανικά ρολόγια, που χρησιμοποιούνταν από το 1348, δεν ήταν πολύ ακριβή. Ο Φλαμανδός χαρτογράφος Gemma Frisius (1508 – 1555) είχε προτείνει τη χρήση ενός ρολογιού για τον προσδιορισμό του γεωγραφικού μήκους. Το ρολόι ενός πλοίου ρυθμιζόταν στην ώρα ενός τόπου γνωστού γεωγραφικού μήκους, και επειδή ο προσδιορισμός της τοπικής ώρας από τη θέση του ήλιου, για παράδειγμα, ήταν σχετικά απλός, οι ναυτικοί έπρεπε απλά να σημειώσουν τη διαφορά ώρας και να τη μεταφράσουν άμεσα σε διαφορά στο γεωγραφικό μήκος. Ωστόσο, κανένα ανθεκτικό και ακριβές ρολόι δεν ήταν διαθέσιμο εκείνα τα χρόνια (Kline, 1972).

Η κίνηση του εκκρεμούς φάνηκε ότι θα δώσει το βασικό μηχανισμό για τη μέτρηση του χρόνου. Ο Γαλιλαίος (Galileo – Galilei, 1564 – 1642) παρατήρησε ότι ο χρόνος για μια πλήρη αιώρηση ενός εκκρεμούς ήταν σταθερός και φαινομενικά ανεξάρτητος από το εύρος της ταλάντωσης. Χωρίς να έχει στη διάθεση του ρολόι ακριβείας, χρονομέτρησε την αιώρηση ενός πολυελαίου, που ταλαντωνόταν υπό την επίδραση του αέρα, με τη μέτρηση των σφυγμών του και *«…τη στιγμή που τα δύο ανομοιογενή μεγέθη χρόνου και μήκους μπήκαν σε αναλογία, τα Μαθηματικά βρήκαν τρόπο ν' αναπαραστήσουν την κίνηση του κόσμου…»* (**Σπύρου**, 2000). Ο Γαλιλαίος με τις παρατηρήσεις του προετοίμασε το έδαφος για το σχεδιασμό ενός εκκρεμούς ρολογιού, αλλά οι Robert Hooke και Cristiaan Huygens (1629 – 1695), υπήρξαν οι επιστήμονες που έκαναν τη βασική εργασία σ' αυτό το θέμα. Ειδικότερα, ο Ολλανδός φυσικός Huygens προσπαθώντας και αυτός να λύσει το πρόβλημα της εύρεσης του γεωγραφικού μήκους, κατασκεύασε το εκκρεμές ρολόι, που ήταν απαραίτητο για τη μέτρηση του χρόνου. Το εκκρεμές ρολόι αποδείχτηκε πολύτιμο όχι μόνο για τη μέτρηση του χρόνου στα σπίτια και στις επιχειρήσεις, αλλά και στις επιστημονικές εργασίες. Συγκεκριμένα, ο Huygens δημοσίευσε το *«Horologium Oscillatorium»* (*Εκκρεμές Ωρολόγιο*, 1673) που συνέβαλε σημαντικά στη διατύπωση της θεωρίας της βαρύτητας από τον Newton. Κατά τους ιστορικούς (**Struik**, 1982) το *«Horologium Oscillatorium»* και το *«Arithmetica Infinitorum»* του Wallis ήταν για εκείνη την εποχή η πιο προχωρημένη μορφή του απειροστικού λογισμού.

Από τη μελέτη της κίνησης τα Μαθηματικά άντλησαν μια θεμελιώδη έννοια που ήταν κεντρική πρακτικά σ' όλες τις εργασίες για τα επόμενα διακόσια χρόνια – την

έννοια της συνάρτησης ή μιας σχέσης μεταξύ μεταβλητών (Kline, 1972). Αυτή η έννοια βρίσκεται σχεδόν από την αρχή ως το τέλος στο βιβλίο του Γαλιλαίου «*Δύο νέες επιστήμες*» (*Two New Sciences*), στο οποίο θεμελίωσε τη σύγχρονη Μηχανική. Ο Γαλιλαίος εκφράζει τις συναρτησιακές σχέσεις λεκτικά και στη γλώσσα των αναλογιών. Έτσι στην εργασία του επί της αντοχής των υλικών ισχυρίζεται ότι: «…*Τα εμβαδά δύο κυλίνδρων ίσων όγκων, παραλείποντας τις βάσεις τους, έχουν μεταξύ τους λόγο που είναι η τετραγωνική ρίζα του λόγου των μηκών τους*…». Επίσης, «…*Οι όγκοι ορθών κυλίνδρων που έχουν ισεμβαδικές κυρτές επιφάνειες είναι αντιστρόφως ανάλογοι προς τα ύψη τους*…». Στην εργασία του για την κίνηση αναφέρει, για παράδειγμα, ότι: «…*Τα διαστήματα που διανύονται από ένα σώμα το οποίο ξεκινά από την ηρεμία και έχει ελεύθερη πτώση με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι όπως τα τετράγωνα των χρόνων στους οποίους διανύονται αυτές οι αποστάσεις*…», δηλαδή αν το σώμα διανύει μια απόσταση h_1 σε χρόνο t_1, και μια απόσταση h_2 σε χρόνο t_2, τότε $h_1 : h_2 = t_1^2 : t_2^2$. Επίσης ισχυρίστηκε ότι: «…*Οι χρόνοι της καθόδου κατά μήκος κεκλιμένων επιπέδων του ίδιου ύψους, αλλά διαφορετικών κλίσεων, είναι όπως τα μήκη αυτών των επιπέδων*…». Η γλώσσα του Γαλιλαίου δείχνει καθαρά ότι ασχολείται με μεταβλητές και συναρτήσεις, και δεν απείχε πολύ από το να γράψει αυτούς τους ισχυρισμούς με τη γλώσσα των συμβόλων, αλλά πάντοτε χρησιμοποιούσε την Ευκλείδεια έννοια της αναλογίας αντί της σύγχρονης έννοιας της συνάρτησης (**Katz**, 1998). Ωστόσο, επειδή ο συμβολισμός της Άλγεβρας επεκτεινόταν εκείνη την εποχή, ο ισχυρισμός του Γαλιλαίου για τα διαστήματα που διανύονται από ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση σύντομα διατυπώθηκε ως $h = \lambda t^2$ και ο ισχυρισμός του για τους χρόνους καθόδου ως $t = kl$.

Στην πορεία έκφρασης των νόμων της φύσης ως συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ φυσικών ποσοτήτων, η εισαγωγή ποσοτικών μέτρων της θερμότητας και της πίεσης, καθώς και η εφεύρεση των διάφορων επιστημονικών οργάνων, που βελτίωσε γρήγορα την ακρίβεια των πειραμάτων και των παρατηρήσεων, έπαιξαν ένα σημαντικό ρόλο. Το κύριο πρόβλημα της επιστήμης έγινε η μελέτη της σχέσης μεταξύ της καμπυλόγραμμης κίνησης και των δυνάμεων που επηρεάζουν την κίνηση. Αυτό το πρόβλημα προκάλεσε στην απειροστική ανάλυση, μια σειρά προβλημάτων που έπρεπε να επιλυθούν αριθμητικά.

Η ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ DESCARTES: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σαν συνέπεια όλων όσων αναφέρθηκαν παραπάνω, ήρθε *μια νέα μέθοδος παρουσίασης των συναρτήσεων*, η οποία για πολύ καιρό ήταν η κύρια μέθοδος στα Μαθηματικά και, ειδικά, στις εφαρμογές τους. Όπως και πριν, οι συναρτήσεις συχνά εισάγονταν λεκτικά, ή με ένα γράφημα, ή κινηματικά. Οι πίνακες συναρτήσεων συνέχισαν να χρησιμοποιούνται, και μάλιστα πιο εκτεταμένα. Όμως, στη θεωρητική έρευνα, *η αναλυτική μέθοδος εισαγωγής των συναρτήσεων με τύπους και εξισώσεις ήρθε σε πρώτο πλάνο*.

Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), μπορούμε να πούμε σχεδόν με ακρίβεια πότε συνέβη αυτή η αντιστροφή των ιδεών. Ακόμα και στο τέλος του $16^{ου}$ αιώνα οι συναρτήσεις εισάγονταν μόνο με τις παλιές μεθόδους. Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά οι πολύ σημαντικές *τριγωνομετρικές συναρτήσεις* και η *λογαριθμική συνάρτηση*, η οποία ιστορικά υπήρξε η συνάρτηση – πρότυπο που βοήθησε στην ανάπτυξη της γενικής έννοιας της συνάρτησης. Ο Πολωνός αστρονόμος Nicolaus Copernicus (1473 – 1543) είχε διαπραγματευτεί την τριγωνομετρία, από το 1543, παρουσιάζοντας τη συνάρτηση τέμνουσα και πίνακα αυτής, ενώ ο μαθητής του G.Rhaeticus (1514 – 1577) είχε δημοσιεύσει για πρώτη φορά τριγωνομετρικούς πίνακες (1551), τους οποίους συμπλήρωσε ο Βαρθολομαίος Πιτίσκος (1561 – 1613) σε μια εργασία του, το 1613, χρησιμοποιώντας τους όρους εφαπτομένη και τέμνουσα για τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Το 1544 ο Michael Stiefel, στο έργο του *«Arithmetica Integra»*, αντιστοίχισε την αριθμητική σειρά $0,1,2,3,...$ με τη γεωμετρική σειρά $1,2,4,8,...$, παρατήρησε ότι η πρόσθεση στην αριθμητική σειρά αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στη γεωμετρική, και, λόγω έλλειψης του κατάλληλου συμβολισμού, ονόμασε «εκθέτες» των όρων της γεωμετρικής σειράς τους αντίστοιχους όρους της αριθμητικής. Γύρω στα τέλη του $16^{ου}$ με αρχές του $17^{ου}$ αιώνα, η ανάγκη ανάπτυξης μιας μεθόδου που θα συντόμευε τους πολύπλοκους υπολογισμούς οδήγησε στην ανάπτυξη των λογαριθμικών πινάκων (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999).

Ξεκινώντας από τη σχέση, στην οποία είχε δοθεί έμφαση, το 1544, από τον Stiefel, αλλά η οποία ήταν γνωστή ακόμα και στον Αρχιμήδη, ο Bürgi υπολόγισε τριγωνομετρικούς πίνακες, που δημοσιεύτηκαν το 1620. Ξεκίνησε από τη σχέση ανάμεσα στη γεωμετρική πρόοδο των δυνάμεων κάποιας ποσότητας (για παράδειγμα,

$q, q^2, q^3, \ldots)$ και στην αριθμητική πρόοδο των εκθετών των δυνάμεων της $(1, 2, 3, \ldots)$. Ο Bürgi κατάλαβε διαισθητικά και απέδειξε με τη μέθοδο της παρεμβολής ότι αυτή η σχέση ήταν συνεχής. Εντούτοις, ο Neper, του οποίου η εργασία δημοσιεύτηκε την περίοδο 1614 – 1619, συνέχισε συγκρίνοντας δύο συνεχείς ευθύγραμμες κινήσεις, από τις οποίες η μία είναι η κίνηση ενός σημείου (L) που κινείται ομαλά και η άλλη είναι η κίνηση ενός δεύτερου σημείου (N) η ταχύτητα του οποίου υποτίθεται ότι είναι ανάλογη προς την απόσταση του από κάποιο σταθερό σημείο. Σε αυτή την περίπτωση, η διανυόμενη απόσταση από το σημείο L είναι ο νεπέριος λογάριθμος της απόστασης που διανύεται από το σημείο N (Youschkevitch, 1976). Περίπου την ίδια εποχή (γύρω στα 1613), ο Kepler χρησιμοποίησε τους λογαριθμικούς πίνακες του Neper σε σχέση με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οδηγήθηκε στην ανακάλυψη του τρίτου νόμου της κίνησης των πλανητών (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999). Αλλά μετά από 15 – 20 χρόνια και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, οι Γάλλοι μαθηματικοί *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) και *René Descartes* (1596 – 1650), εφαρμόζοντας τη νέα Άλγεβρα στη Γεωμετρία *παρουσίασαν την αναλυτική μέθοδο για την εισαγωγή των συναρτήσεων, ανοίγοντας έτσι μια νέα εποχή στα Μαθηματικά*.

Η κεντρική ιδέα της Αναλυτικής Γεωμετρίας των Fermat και Descartes είναι η γραφική παράσταση μιας αλγεβρικής εξίσωσης, που επιτυγχάνεται με την αντιστοίχηση ανάμεσα σε μια αλγεβρική εξίσωση και στην καμπύλη που είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με συντεταγμένες, ως προς δύο σταθερούς ορθογώνιους άξονες, που ικανοποιούν την εξίσωση. Σκοπός των Fermat και Descartes ήταν να χρησιμοποιήσουν τη νέα Άλγεβρα για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999), φυσικών προβλημάτων, στα οποία υπεισέρχονταν διάφορες καμπύλες, και προβλημάτων που προέκυψαν από την επιστημονική μελέτη της κίνησης.

Ο *Fermat* ξεκινούσε από μια αλγεβρική εξίσωση και απεδείκνυε τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης που αντιστοιχούσε σ' αυτήν. Στο έργο του «*Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους*», που γράφτηκε πριν από το 1637 αλλά δημοσιεύτηκε μόλις το 1679, ο **Fermat** λέει ότι: «*…Όταν δύο άγνωστες ποσότητες εμφανίζονται σε μια τελική εξίσωση, υπάρχει ένας τόπος (γ. τ), και το τελευταίο σημείο της μιας από τις δύο ποσότητες περιγράφει μια ευθεία ή μια καμπύλη γραμμή…*» (**Tannery** & **Henry**, 1891). Εδώ και η μεταβλητή (argument) και η συνάρτηση καλούνται απλώς

άγνωστες ποσότητες, με τον όρο αυτό να σημαίνει στην πραγματικότητα ευθύγραμμα τμήματα συνεχώς μεταβαλλόμενου μήκους. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Viète και ένα ευθύγραμμο σύστημα συντεταγμένων, ο Fermat κατέγραψε τις εξισώσεις μιας ευθείας γραμμής και, φτάνοντας μέχρι τα *Κωνικά* του Απολλώνιου, τις εξισώσεις κάποιων καμπυλών δεύτερης τάξης (εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού). Για παράδειγμα, ξεκινώντας από τη γενική δευτεροβάθμια εξίσωση δύο μεταβλητών $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$, ταξινόμησε τις κωνικές τομές σε έλλειψη, υπερβολή, και παραβολή (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999).

Ο Descartes ξεκινούσε με ένα γεωμετρικό πρόβλημα, συχνά παρόμοιο με τα γεωμετρικά προβλήματα των αρχαίων Ελλήνων, και με τη μέθοδο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, μετέτρεπε το πρόβλημα σε αλγεβρική εξίσωση, που προσπαθούσε να λύσει. *Η ιδέα της εισαγωγής της συνάρτησης αναπτύχθηκε αναλυτικά από τον Descartes στην* περίφημη *«Γεωμετρία»* του (*La géométrie*, 1637). Ο κύριος σκοπός του ήταν να απλοποιήσει την επίλυση όλων των αλγεβρικών προβλημάτων και εξισώσεων σε κάποιες κοινώς αποδεκτές μεθόδους κατασκευής των πραγματικών ριζών τους. Ο **Descartes** συσχέτισε μια επίπεδη αλγεβρική καμπύλη με μια εξίσωση ανάμεσα στις συντεταγμένες των σημείων της, που γίνονται αντιληπτές ως ευθύγραμμα τμήματα: «*…Παίρνοντας διαδοχικά άπειρες διαφορετικές τιμές για τη γραμμή* y*, θα βρούμε επίσης άπειρες τιμές για τη γραμμή* x*, και έτσι θα έχουμε ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών σημείων με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να σχεδιάσουμε τη ζητούμενη καμπύλη…*» (**Adam** & **Tannery**, 1903). Εδώ ο Descartes, για πρώτη φορά και απολύτως καθαρά, ισχυρίζεται ότι μια εξίσωση με x και y είναι ένας τρόπος για να παρουσιαστεί η εξάρτηση μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων έτσι ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός των τιμών της μιας από αυτές που αντιστοιχούν στις δοθείσες τιμές της άλλης.

Ο Descartes ονόμασε τις *αλγεβρικές συναρτήσεις* ως *γεωμετρικές καμπύλες*, και παρατήρησε ότι εφόσον όλα τα σημεία αυτών των καμπυλών έχουν κάποια σχέση με όλα τα σημεία μιας ευθείας γραμμής, αυτή η σχέση μπορεί να αναπαρασταθεί από κάποια εξίσωση, που είναι η ίδια για κάθε σημείο της δοθείσης καμπύλης. Επειδή ο Descartes δεν μπορούσε να γράψει με σύμβολα οποιεσδήποτε εξισώσεις άλλων ειδών, συμπεραίνουμε ότι με αυτή την εξίσωση εννοούσε στην πραγματικότητα μια αλγεβρική εξίσωση. Αποκαλώντας τις μη γεωμετρικές καμπύλες ως μηχανικές καμπύλες, ο Descartes παρουσίασε μια ατελή κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών

καμπυλών σε είδη ως εξής: οι καμπύλες του πρώτου είδους είναι γραμμές που περιγράφονται με εξισώσεις δευτέρου βαθμού, οι καμπύλες του δεύτερου είδους είναι γραμμές που περιγράφονται με εξισώσεις τρίτου και τέταρτου βαθμού, οι καμπύλες του τρίτου είδους είναι γραμμές που περιγράφονται με εξισώσεις πέμπτου και έκτου βαθμού κλπ. (Youschkevitch, 1976). Η διάκριση του Descartes μεταξύ γεωμετρικών και μηχανικών καμπυλών προκάλεσε τη διάκριση μεταξύ αλγεβρικών και υπερβατικών συναρτήσεων. Μέσω των τετραγωνισμών, της άθροισης των σειρών, και άλλων διαδικασιών που εισήχθησαν με το λογισμό, πολλοί τύποι υπερβατικών συναρτήσεων ανακαλύφθηκαν και μελετήθηκαν. Ωστόσο, η πλήρης κατανόηση και χρήση των υπερβατικών συναρτήσεων έγινε βαθμιαία (Kline, 1972).

Η Αναλυτική Γεωμετρία βοήθησε στην κατανόηση της μεταβλητής, που είναι βασικό συστατικό στοιχείο της έννοιας της συνάρτησης και *η παρουσίαση των συναρτήσεων με μορφή εξισώσεων επέφερε μια πραγματική επανάσταση στην ανάπτυξη των Μαθηματικών*. Η χρήση των αναλυτικών εκφράσεων και οι διαδικασίες με τις οποίες πραγματοποιούνται σύμφωνα με αυστηρά προσδιορισμένους κανόνες, μετέδωσαν το χαρακτηριστικό γνώρισμα ενός κανονικού λογισμού στη μελέτη των συναρτήσεων, ανοίγοντας με αυτό τον τρόπο εξ' ολοκλήρου νέους ορίζοντες. Αυτή η μέθοδος αναπαράστασης των συναρτήσεων εγκαινιάστηκε κατά την πορεία εφαρμογής της Άλγεβρας στη Γεωμετρία και επεκτάθηκε αμέσως και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών και, πρωτίστως, στον απειροστικό λογισμό.

Ο Engels στη «*Διαλεκτική της Φύσης*» υποστηρίζει ότι: «…*Η κρίσιμη καμπή στα Μαθηματικά ήταν η μεταβλητή του Descartes*. *Κατά συνέπεια δημιουργήθηκε η τάση και ως εκ τούτου ακολούθησε άμεσα διάλογος στην κοινότητα των Μαθηματικών, για την αναγκαιότητα του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού, που επίσης ξεκίνησαν αμέσως μετά…*» (**Engels**, 1958). Η άποψη του διακεκριμένου μαθηματικού Hankel, που εκφράστηκε περίπου την ίδια εποχή, είναι κατά πολύ ίδια με τον προηγούμενο ισχυρισμό του Engels: «…*Ενώ οι παλαιότεροι μαθηματικοί ποτέ δε χρησιμοποίησαν τον όρο της κίνησης, δηλαδή τη χωρική αποτύπωση της μεταβλητότητας, στα συστήματα τους, και επίσης χειρίζονταν τις καμπύλες μόνο πρόσκαιρα, τα νεότερα Μαθηματικά, ξεκινώντας από τον Descartes, που χειριζόταν τις εξισώσεις καθαρά αλγεβρικά, εξετάζουν τις τροποποιήσεις που υφίσταται μια αλγεβρική έκφραση, που γίνεται αντιληπτή ως μέγεθος που παίρνει άπειρες τιμές ως απόρροια των άπειρων τιμών που παίρνει το μέγεθος μιας σταθεράς…*» (**Hankel**, 1905).

Ο **Whiteside** στα *«Μοτίβα της Μαθηματικής Σκέψης στα τέλη του 17ου αιώνα»* (1961) αναφέρει ότι η Αναλυτική Γεωμετρία των Descartes και Fermat, αν και αρχικά ήταν πολύ λίγο κατανοητή, συγκρινόμενη με τα επιτεύγματα της θεωρίας των κωνικών τομών της αρχαιότητας, είναι, ενδεχομένως, ανώτερη από την Αναλυτική Γεωμετρία του Απολλώνιου, από την οποία διαφέρει τόσο όσο η νέα συμβολική Άλγεβρα διαφέρει από την αρχαία «Γεωμετρική Άλγεβρα» (Youschkevitch, 1976).

Έτσι, την εποχή των Descartes και Fermat η συναρτησιακή σκέψη κυριαρχούσε στις μαθηματικές εργασίες. Ωστόσο, η έννοια της συνάρτησης που δημιουργήθηκε από τους Viète, Descartes και Fermat ήταν η υπολογιστική μορφή της, που δίνεται με ένα συγκεκριμένο τύπο, ή με ένα αλγόριθμο υπολογισμού της (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999). Αρχικά, το εύρος των συναρτήσεων που εκφράζονταν αναλυτικά περιορίστηκε στις αλγεβρικές συναρτήσεις και ο Descartes απέκλεισε από τη γεωμετρία του όλες τις μηχανικές καμπύλες επειδή δε μπορούσαν να τροποποιηθούν με τη δική του μέθοδο ανάλυσης. Εν τούτοις, μια ανακάλυψη που έγινε στα μέσα του 17ου αιώνα από τους Pietro Mengoli (1625 – 1685), Nicholas Mercator (1620 – 1687), James Gregory (1638 – 1675) και Newton οδήγησε στην αναλυτική αναπαράσταση οποιασδήποτε συναρτησιακής σχέσης που ήταν αντικείμενο μελέτης εκείνη την περίοδο. Αυτή η ανακάλυψη αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι συναρτήσεις αναπτύσσονται σε άπειρες δυναμοσειρές. Αργότερα προστέθηκαν και άλλες άπειρες εκφράσεις των συναρτήσεων, όπως είναι τα άπειρα γινόμενα, τα συνεχή κλάσματα κλπ. Η ιδέα ότι μια άπειρη έκφραση ήταν μια «συνάρτηση» δεν ήταν νέα, η άπειρη φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος ήταν γνωστή πολύ νωρίτερα, αλλά μόλις στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα οι δυναμοσειρές έγιναν πράγματι το πιο αποδοτικό και, όπως θεωρείτο ακόμα και πολύ καιρό αργότερα, και διεθνές μέσο για την αναλυτική έκφραση και τη μελέτη οποιασδήποτε συνάρτησης. Ο **Boutroux** (1920) θεωρούσε τη θεωρία της ανάπτυξης των συναρτήσεων σε δυναμοσειρές το πιο αυθεντικό, αξιοσημείωτο, και αποδοτικό συστατικό στοιχείο των νέων Μαθηματικών που ανακαλύφθηκαν από τους Newton και Leibniz. *Σε κάθε περίπτωση, λόγω των δυναμοσειρών, η έννοια της συνάρτησης ως αναλυτική έκφραση κατείχε την κεντρική θέση στη μαθηματική ανάλυση*. Γι' αυτό το λόγο μια από τις κύριες εργασίες του Newton είχε τίτλο *«Η μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών» (Methodus fluxionum et serierum infinitarum).*

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ NEWTON ΚΑΙ LEIBNIZ

Οι πρώτες περιγραφές των νέων εννοιών της συνάρτησης δεν απείχαν πολύ από τη διατύπωση των αντίστοιχων ορισμών, που αρχικά είχαν μηχανικά ή γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχεία επειδή οι μέθοδοι του απειροστικού λογισμού δημιουργήθηκαν κυρίως μέσα στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων της Μηχανικής καθώς και συναφών γεωμετρικών προβλημάτων. Η λογαριθμική συνάρτηση ήταν ένα υπερβολικό εμβαδόν, η ελλειπτική συνάρτηση, ένα τόξο μιας κωνικής τομής, τα ολοκληρώματα παριστάνονταν από διαστήματα, εμβαδά, τόξα, όγκους, τα διαφορικά, από απείρως μικρά τμήματα – συντεταγμένες, οι παράγωγοι, από ταχύτητες ή από τους λόγους των πλευρών απείρως μικρών – χαρακτηριστικών – ορθογώνιων τριγώνων κλπ.

Μια καθαρά κινηματική – γεωμετρική ερμηνεία των βασικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης παρουσιάστηκε από τον Isaac Newton (1642 – 1727), ο οποίος ανέπτυξε τις ιδέες του δασκάλου του και πολύ σημαντικού Άγγλου μαθηματικού, Isaac **Barrow** (1630 – 1677), όπως αυτές παρουσιάστηκαν στις διαλέξεις του που δόθηκαν στο Cambridge τη διετία 1664 – 1665, αλλά δημοσιεύτηκαν, το **1670**, στις «*Γεωμετρικές Διαλέξεις*» (*Lectiones geometricae*), και, το **1683**, στις «*Μαθηματικές Διαλέξεις*» (*Lectiones mathematicae*). Σε αυτά τα συγγράμματα, που αποτέλεσαν σταθμό για την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, περιγράφονται οι έννοιες του χρόνου, της κίνησης και της γεωμετρικής τους παρουσίασης που είχαν επινοηθεί από τους Γαλιλαίο και Oresme (Bourbaki, 1969 & **Baron**, 1969).

Από την αρχή της εργασίας του επί του λογισμού, δηλαδή από το 1665, ο Newton χρησιμοποιεί τον όρο «ρέον» (*fluent*) για την αναπαράσταση κάθε σχέσης μεταξύ μεταβλητών (Kline, 1972). Όπως και ο Barrow επιλέγει τον χρόνο ως γενική μεταβλητή (a universal argument) και ερμηνεύει τις μεταβλητές ποσότητες ως συνεχώς ρέουσες ποσότητες που έχουν κάποια ταχύτητα μεταβολής (Youschkevitch, 1976). Στο έργο του «*De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*» (*Ανάλυση εξισώσεων με απειράριθμους όρους*, 1669) που δημοσιεύτηκε το 1711, αναπτύσσει τις δυναμοσειρές των αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημιτόνου και συνημίτονου, και με τη μέθοδο της αντιστροφής δυναμοσειρών δίνει αναπτύγματα σε σειρές για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου (Kline, 1972).

Σε δύο επιστολές του προς τον Wallis, στις 27 Αυγούστου και 17 Σεπτεμβρίου 1692, ο Newton εξήγησε συνοπτικά την δική του άποψη για τον απειροστικό λογισμό, του οποίου η ανάπτυξη είχε ξεκινήσει από τον ίδιο τη διετία 1664 – 1666. Οι μεταφράσεις αυτών των επιστολών στα Λατινικά, δημοσιεύτηκαν το 1693. Ο **Newton** ανήγαγε τη μέθοδο του στην επίλυση δύο προβλημάτων (Youschkevitch, 1976). Στην αγγλική μετάφραση, που έγινε στα τέλη του 17^{ου} ή στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, και δημοσιεύτηκε από τον **Turnbull**, το 1961, αναφέρεται ότι: «*… Ο επιφανής κύριος Newton απλοποίησε τη μέθοδο των ροών σε δύο προτάσεις: σε κάθε εξίσωση που δίνεται από τις ρέουσες ποσότητες βρίσκουμε τις ροές και αντιστρόφως. Ως ρέουσες ποσότητες ο Newton αντιλαμβάνεται τις ακαθόριστες ποσότητες, που, καθώς παράγουν μια καμπύλη με τοπική κίνηση, μονίμως αυξάνονται ή ελαττώνονται. Ως ροή ο Newton θεωρεί το ρυθμό της αύξησης ή της ελάττωσης τους…*». Ο **Newton** εξέθεσε αναλυτικότερα τις ίδιες ιδέες σε ένα πλήθος άλλων εργασιών του, όπως, για παράδειγμα, στη «*Μέθοδο των ροών και των απείρων σειρών*», που γράφτηκε το **1670**, αλλά δημοσιεύτηκε από τον **Colson**, σε αγγλική μετάφραση ενός λατινικού χειρόγραφου, το 1736.

Τα δύο βασικά προβλήματα του απειροστικού λογισμού εκφράστηκαν με μηχανικούς όρους, δηλαδή, με δεδομένο τον τύπο της απόστασης, ζητείται να προσδιοριστεί η ταχύτητα της κίνησης (διαφόριση), και με δεδομένη την ταχύτητα της κίνησης, ζητείται να προσδιοριστεί η διανυόμενη απόσταση (ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων και, ιδιαίτερα, ολοκλήρωση συναρτήσεων). Εντούτοις, οι ιδέες του Newton συγκλίνουν προς μια πιο θεωρητική κατανόηση των φιλοσοφικών και μηχανικών όρων. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τη γενική μεταβλητή, το χρόνο, ο **Newton** στην εργασία του «*Η Μέθοδος των ροών*» αναφέρει ότι : «*…Δε μπορούμε να έχουμε κάποια εκτίμηση του χρόνου εκτός από την περίπτωση όπου ο χρόνος αναφέρεται και υπολογίζεται σε μια ομαλή τοπική κίνηση, και επιπλέον, οι ποσότητες του ίδιου είδους μόνο, καθώς επίσης και οι ταχύτητες αύξησης και ελάττωσης τους, μπορούν να συγκριθούν η μια με την άλλη. Γι' αυτούς τους λόγους, σε ότι ακολουθεί δε θα δώσω καμιά σημασία στο χρόνο, που εξετάζεται τόσο τυπικά, αλλά από τις προτεινόμενες ποσότητες οι οποίες είναι του ίδιου είδους θα υποθέσω ότι κάποια αυξάνεται με ομαλή (σταθερή) ροή: σε αυτή την ποσότητα, όλες οι άλλες ποσότητες θα αναφέρονται σα να ήταν ο χρόνος, και έτσι αναλογικά το όνομα του «χρόνου» δεν θα μπορεί να δοθεί εσφαλμένα σε αυτή…*» (**Whiteside, Hoskin & Prag**, 1969).

Σύμφωνα με τον Clagett (1968), στο ίδιο μήκος κύματος ο Oresme έλεγε ότι: «…*Ο χρόνος, έτσι όπως θεωρείται, δεν είναι με κάποιο τρόπο «μη ομαλός» ή ακόμα πιο κατάλληλα «ομαλός», και επίσης δε μπορούμε να πούμε ότι ο χρόνος είναι «γρήγορος» ή «αργός». Εντούτοις, μπορούμε εσφαλμένα να πούμε ότι ο χρόνος είναι σταθερός, από τη στιγμή που η διάρκεια, η οποία είναι χρόνος, δε μπορεί να υπολογιστεί σωστά εκτός από την περίπτωση της ομαλής κίνησης…*».

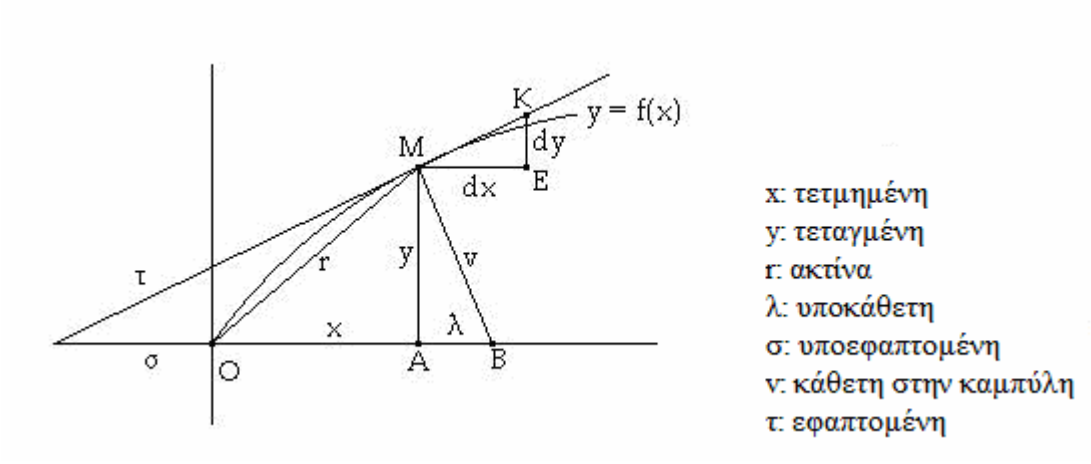
Στη συνέχεια ο Newton αποκαλεί το ρέον (*fluent*), που παίζει το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής, ως συσχετισμένη ποσότητα (*quantitas correlata*), και την εξαρτημένη ποσότητα ως σχετιζόμενη (*relata*). Κατά συνέπεια, μόνο οι βασικές έννοιες εισάγονται κινηματικά, και η μέθοδος των ροών αναπτύσσεται για τα ρέοντα που εκφράζονται με αναλυτικό τρόπο, είτε σε πεπερασμένη μορφή, είτε ως αθροίσματα απείρων δυναμοσειρών (Whiteside, Hoskin & Prag, 1969).

Η σκέψη του Newton ότι οι *ροές* (*fluxions*) δεν ήταν δυνατό να θεωρούνται ποτέ μόνες τους αλλά σε λόγους παρουσιάστηκε καθαρά, το 1676, στην εργασία του «*Τετραγωνισμός των καμπυλών*» (*De quadratura curvarum*) που δημοσιεύτηκε το 1704. Συγκεκριμένα γράφει: «…*Θεωρώ τα μαθηματικά μεγέθη σ' αυτή την εργασία, όχι ως αποτελούμενα από πολύ μικρά μέρη, αλλά ως περιγραφόμενα από μια συνεχή κίνηση. Οι γραμμές περιγράφονται, και συνεπώς παράγονται, όχι από παράθεση τμημάτων, αλλά από τη συνεχόμενη κίνηση σημείων, οι επιφάνειες από την κίνηση γραμμών, τα χρονικά διαστήματα από συνεχή ροή… Αυτή η γέννηση (των γραμμών) στην πραγματικότητα συμβαίνει στη φύση των πραγμάτων, και τη βλέπουμε καθημερινά στην κίνηση των σωμάτων…*». Σύμφωνα με τον Kline (1972), οι Gilles Persone de Roberval (1602 – 1675), Barrow και Newton με τις εργασίες τους συνέβαλαν ώστε η έννοια της καμπύλης ως τροχιάς ενός κινούμενου σημείου να αναγνωριστεί ρητά και να γίνει ευρέως αποδεκτή.

Την ίδια εποχή με τον Newton, αλλά ανεξάρτητα απ' αυτόν, ο Γερμανός Gottfried Wilhem Von Leibniz (1646 – 1716) κατέληξε στις βασικές έννοιες του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία των καμπυλών. Το 1684 δημοσίευσε στο περιοδικό *Πεπραγμένα Σοφών* (*Acta Eruditorum*) το πρώτο άρθρο του για το διαφορικό λογισμό, με τίτλο «*Μια νέα μέθοδος για μέγιστα και ελάχιστα καθώς και για εφαπτόμενες, η οποία δεν παρακωλύεται ούτε από κλασματικές ούτε από άρρητες ποσότητες, και ένας ειδικός τρόπος για τον υπολογισμό τους*». Στην εργασία αυτή ο Leibniz θεώρησε μια αυθαίρετη ποσότητα που την ονόμασε *διαφορά* (dx) και είναι η απείρως μικρή αύξηση της τετμημένης. Στη συνέχεια, περιέγραψε το

διαφορικό (dy) της τεταγμένης ενός σημείου κάποιας καμπύλης ως ένα τμήμα του οποίου ο λόγος προς το dx είναι ίσος με το λόγο της τεταγμένης προς την υποεφαπτομένη (**Γιαννακούλιας**, 2007), δηλαδή :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\upsilon\pi o\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta}.$$



Σχήμα 1.

Η λέξη ***«συνάρτηση»*** εμφανίζεται για πρώτη φορά στα χειρόγραφα του Leibniz τον Αύγουστο του **1673**, και ιδιαίτερα στο χειρόγραφο του με τίτλο *«Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτόμενων, ή περί συναρτήσεων»* (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*). Αρχικά ο προσδιορισμός των υποεφαπτομένων, των υποκαθέτων και άλλων τμημάτων που έχουν σχέση με διάφορα σημεία μιας καμπύλης αντιμετωπίζεται σ' αυτή την εργασία και για «γεωμετρικές» και για «μη γεωμετρικές» καμπύλες για τις οποίες (**Mahnke**, 1925): *«…η σχέση ανάμεσα στην τεταγμένη τους και στην τετμημένη τους παριστάνεται από κάποια γνωστή εξίσωση…»*. Κατόπιν ο Leibniz συνεχίζει με την εξέταση του αντίστροφου προβλήματος του προσδιορισμού των τεταγμένων από μια δοθείσα ιδιότητα της εφαπτομένης της καμπύλης ή *«…άλλων ειδών γραμμών οι οποίες, σε ένα δοθέν σχήμα, παρουσιάζουν κάποια συνάρτηση (**function**)…»* (Mahnke, 1925). Όπως παρατηρεί ο Youschkevitch (1976), το λατινικό ρήμα ***fungor, functus sum, fungi*** σημαίνει αποδίδω, εκτελώ, ή αλλιώς, διεκπεραιώνω μια υποχρέωση, λειτουργώ κλπ. Αλλά παρακάτω στο ίδιο χειρόγραφο ο όρος συνάρτηση αποκτά ένα νέο νόημα ως ένας γενικός όρος για διάφορα τμήματα που συνδέονται με δοθείσα καμπύλη. Συγκεκριμένα, ο Leibniz χρησιμοποιεί τον όρο ***«συνάρτηση»*** για κάθε ποσότητα που αλλάζει από σημείο σε σημείο μιας καμπύλης – για παράδειγμα, το μήκος της εφαπτομένης, την κάθετη, την

υποκάθετη, και την τεταγμένη, όπου η καμπύλη δίνεται από μια εξίσωση (Kline, 1972).

Ο ορισμός της συνάρτησης, υπό την ίδια σχετικά ευρεία έννοια της διαφορικής γεωμετρίας εμφανίστηκε αρχικά σε μερικά άρθρα του Leibniz που δημοσιεύτηκαν το 1692 και το **1694**. Σ' αυτά τα άρθρα ο Leibniz αποκαλεί συναρτήσεις (*functiones*, *fonctions*) οποιαδήποτε μέρη από ευθείες γραμμές, δηλαδή τμήματα που προκύπτουν κατασκευάζοντας άπειρες ευθείες γραμμές που αντιστοιχούν σε ένα σταθερό σημείο και σε σημεία μιας δοθείσης καμπύλης, εννοώντας τετμημένες, τεταγμένες, χορδές, τμήματα εφαπτόμενων και καθέτων που αποκόπτονται από άξονες συντεταγμένων, τμήματα υποεφαπτόμενων και υποκαθέτων κλπ. Εντούτοις, ένας τέτοιος ορισμός της συνάρτησης δεν αντιστοιχούσε σ' ένα ευρύτερο αναλυτικό πλαίσιο. Με την ίδια έννοια ο όρος ***συνάρτηση*** χρησιμοποιήθηκε από τον Jacob Bernoulli σε εργασία του που δημοσιεύτηκε στο *Acta Eruditorum* τον Οκτώβριο του 1694, ενώ μερικά χρόνια αργότερα, στην *«Ιστορία»* του (*Historia*, 1714), ο Leibniz χρησιμοποιούσε τον όρο ***«συνάρτηση»*** για ποσότητες που εξαρτώνται από μια μεταβλητή (Kline, 1972).

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΑΥΘΑΙΡΕΤΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

Η πρώτη προσέγγιση σ' ένα γενικό ορισμό της συνάρτησης ως «αναλυτικής» έκφρασης που εμπλέκει άπειρες διαδικασίες, ανιχνεύεται τον 17^{ο} αιώνα στην εργασία του Gregory *«Πραγματικός τετραγωνισμός του κύκλου και της υπερβολής» (Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura)*, που δημοσιεύτηκε το **1667** (Kline, 1972). Ο ορισμός που πρότεινε ο Gregory αναφέρεται σε άρθρο των **Dehn** και **Hellinger** (1839): «…*Θα λέμε ότι **συνάρτηση** είναι μια **ποσότητα** που σχηματίζεται με αναλυτικό τρόπο...από άλλες ποσότητες, από τις τέσσερις βασικές πράξεις, από εξαγωγή ριζών ή από οποιαδήποτε άλλη νοητή πράξη*…». Σύμφωνα με την Baron (1969), ο ορισμός αυτός χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Gregory ο οποίος όρισε την αναλυτική ποσότητα ως εκείνη την ποσότητα η οποία μπορεί να προκύψει αν προσθέσουμε στις αλγεβρικές πράξεις και την πράξη που μας περνάει στο όριο, δηλαδή μια μάλλον γενική άπειρη διαδικασία που αποκαλείται απ' αυτόν «*η έκτη μας πράξη»* (*nostra sexta operatio*). Ωστόσο, σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), η έκφραση *με αναλυτικό τρόπο* χρησιμοποιήθηκε από τον Gregory με την έννοια που είχε δώσει σε αυτήν ο *Viète*, και ο όρος συνάρτηση αντιστοιχεί ως ένα βαθμό στη δική μας αλγεβρική συνάρτηση. Αναμφίβολα, ο Gregory υπήρξε ο μαθηματικός του

17ου αιώνα που έδωσε ένα σαφή ορισμό στην έννοια της συνάρτησης, αλλά η άποψη του αγνοήθηκε εκείνη την εποχή λόγω της αναπαράστασης των συναρτήσεων με σειρές (Γιαννακούλιας, 2007). Επίσης, στον Gregory αποδίδονται τόσο η σαφής διάκριση μεταξύ αλγεβρικών και υπερβατικών συναρτήσεων όσο και η προσπάθεια της απόδειξης του ισχυρισμού (1667) ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα δεν μπορεί να είναι αλγεβρική συνάρτηση της ακτίνας και της χορδής (Kline, 1972).

Στις 2 Σεπτεμβρίου **1694** σε επιστολή του προς τον **Leibniz** (**Gerhardt**, III), ο Ελβετός Johann Bernoulli (1667 – 1748) αναφέρεται στην ανακάλυψη του για το ανάπτυγμα του $\int ndz$ σε μια άπειρη σειρά

$$\int ndz = nz - \frac{1}{1\cdot 2} z^2 \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 \frac{d^2 n}{dz^2} - \ldots,$$

το οποίο, ωστόσο, ήταν ήδη γνωστό στον Leibniz. Στην ίδια επιστολή ο Bernoulli έγραψε ότι: «*…ως n αντιλαμβάνομαι μια ποσότητα η οποία κατά κάποιο τρόπο εκφράζεται από απροσδιόριστες και σταθερές ποσότητες…*».

Αυτή η ανακάλυψη, διατυπωμένη με τα ίδια λόγια, παρουσιάστηκε την ίδια χρονιά σε άρθρο του **Bernoulli** στο *Acta Eruditorum* (Opera omnia, I). Στο άρθρο του αυτό με τίτλο «*Effectiones omnium quadra turam…*», ο Joh. Bernoulli χρησιμοποίησε μια μέθοδο που ήταν περίπου η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά μέρη, με τη βοήθεια της οποίας κατέληξε, χωρίς όμως να αντιληφθεί την πλήρη σημασία της, σε μια τροποποιημένη μορφή της σειράς Taylor (Γιαννακούλιας, 2007). Ο όρος συνάρτηση δεν χρησιμοποιείται ακόμα, και στην επιστολή του με ημερομηνία 25 Αυγούστου **1696**, ο Bernoulli προτείνει το συμβολισμό

$$\overset{1}{X}, \overset{2}{X}$$

«*…για τις διαφορετικές ποσότητες οι οποίες δίνονται κατά κάποιο τρόπο από μια απροσδιόριστη ποσότητα x και από σταθερές…είτε αλγεβρικά είτε υπερβατικά…*» (Gerhardt, III).

Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), ο Joh. Bernoulli χρησιμοποιεί για πρώτη φορά τη λέξη ***συνάρτηση*** μόλις δύο χρόνια αργότερα, υιοθετώντας τη φράση του Leibniz ***«συνάρτηση του x»*** (Kline, 1972), σε ένα άρθρο του που επισυνάπτεται σε επιστολή του με ημερομηνία 5 Ιουλίου **1698** και είναι αφιερωμένο στην επίλυση του ισοπεριμετρικού προβλήματος που είχε τεθεί από τον αδελφό του Jacob. Το πρόβλημα αυτό ζητάει, ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες δεδομένου μήκους και βάσης να βρεθεί μια καμπύλη έτσι ώστε, οποιεσδήποτε δυνάμεις των τεταγμένων της να

παράγουν τις τεταγμένες μιας άλλης καμπύλης μέγιστου, ή ελάχιστου, εμβαδού, δηλαδή με δεδομένη περίμετρο και μήκος βάσης, να βρεθεί η καμπύλη που έχει το μέγιστο ή το ελάχιστο εμβαδόν. Ο Bernoulli (Opera omnia, I) γενικεύει περαιτέρω αυτό το πρόβλημα ως εξής: «…*να βρεθεί μια καμπύλη, της οποίας οι τεταγμένες, υψωμένες σε δοθείσα δύναμη... ή, γενικά, <u>να βρεθεί μια καμπύλη, της οποίας κάποιες συναρτήσεις αυτών των τεταγμένων, που εκφράζονται από άλλες τεταγμένες</u>*…».Δεν εξηγεί με ποια έννοια παίρνει «κάποιες» συναρτήσεις (Youschkevitch, 1976), ωστόσο δε θα μπορούσε να εννοεί κάτι διαφορετικό από τις αναλυτικές εκφράσεις επειδή αυτές ήταν ήδη γνωστές εκείνη την εποχή.

Στις 29 Ιουλίου 1698 ο Leibniz εξέφρασε την ικανοποίηση του για τη χρήση από τον Joh. Bernoulli του δικού του όρου «συνάρτηση» (Gerhardt, III) και η μεταξύ τους αλληλογραφία την περίοδο 1694 – 1698 αποκαλύπτει πως η αναζήτηση ενός γενικού ορισμού για την αναπαράσταση αυθαίρετων ποσοτήτων που εξαρτώνται από κάποια μεταβλητή σύντομα επέφερε τη χρήση του όρου συνάρτηση με την έννοια μιας αναλυτικής έκφρασης (Youschkevitch, 1976). Σ’ αυτή την αλληλογραφία αντάλλαξαν αρκετές φορές απόψεις για τον καταλληλότερο συμβολισμό για μια συνάρτηση μιας ή πολλών μεταβλητών. Ο Johann Bernoulli έγραφε X ή ξ για μια γενική συνάρτηση του x. Ο Leibniz το ενέκρινε, αλλά πρότεινε επίσης το συμβολισμό x^1 και x^2 για συναρτήσεις του x, όπου ο εκθέτης χρησιμοποιείτο όταν γινόταν αναφορά σε πολλές συναρτήσεις (Kline, 1972). Οι δύο μαθηματικοί δεν υιοθετούσαν τον τρόπο με τον οποίο κάνουμε σήμερα τον διαχωρισμό των συναρτήσεων, για παράδειγμα ο Leibniz πρότεινε τη γραφή dz για τον λόγο $\frac{dz}{dx}$. Ωστόσο αυτός ο συμβολισμός δεν διάρκεσε πολύ.

Λίγο νωρίτερα, ο Leibniz χρησιμοποιούσε τις λέξεις «σταθερά», «μεταβλητή», «συντεταγμένες», το 1692, (Gerhardt, V), και «παράμετρος» με την έννοια ενός αυθαίρετου σταθερού τμήματος ή ποσότητας, το 1679 και το 1692, (Gerhardt, III). Οι δύο λέξεις «σταθερά» και «μεταβλητή» έτυχαν ευρύτερης φήμης λόγω των καθοριστικών ορισμών τους στο πρώτο εγχειρίδιο για τον απειροστικό λογισμό, που γράφτηκε από τον Marquis Guillance F.A. de l’ Hôpital (1661 – 1704) και δημοσιεύτηκε στο Παρίσι το 1696, με τίτλο *«Analyse des infiniment petits pour l’ intelligence des lignes courbes»*, δηλαδή *«Ανάλυση των απειροστών για την κατανόηση των καμπύλων γραμμών»* (Γιαννακούλιας, 2007). Τέλος, ο Leibniz

άλλαξε, ως ακατάλληλη, την ορολογία και την κατηγοριοποίηση των καμπυλών από τον Descartes, χωρίζοντας τις συναρτήσεις και τις καμπύλες σε δύο κλάσεις: τις αλγεβρικές, που τις αποκαλούσε «αναλυτικές» *(curva analytica)*, δηλαδή αυτές που μπορούν να παρασταθούν από μια εξίσωση συγκεκριμένου βαθμού (*certi gradus*), και τις υπερβατικές. Οι υπερβατικές συναρτήσεις και καμπύλες, αν και διαφορετικής φύσης, μπορούσαν να μελετηθούν μεθοδικά και να χρησιμοποιηθούν στο λογισμό, μέσω της αναπαράστασης τους με εξισώσεις απροσδιόριστου (*gradus indefiniti*) ή άπειρου βαθμού οι οποίες *«…υπερβαίνουν οποιαδήποτε αλγεβρική εξίσωση (omnem aequationem algebraicam transcendant)…»* (Gerhardt, V). Επιπλέον, ο Leibniz απέδειξε ότι το $\sin x$ δε μπορεί να είναι αλγεβρική συνάρτηση του x καθώς και το αποτέλεσμα του Gregory για το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα (Kline, 1972).

Ο ορισμός του Leibniz για τις υπερβατικές συναρτήσεις ως εκείνες που είναι μη αλγεβρικές επαναλαμβάνεται στα σχολικά εγχειρίδια μέχρι και σήμερα. Εντούτοις, έπρεπε να περάσουν είκοσι χρόνια μέχρι να εμφανιστεί ο νέος ορισμός της συνάρτησης. Όλο αυτό το διάστημα ο όρος συνάρτηση παρέμενε ελάχιστα γνωστός. Για παράδειγμα, ενώ στο Μαθηματικό Λεξικό (*Mathematisches Lexicon*) του **Wolff** αναφέρεται ότι η διάκριση ανάμεσα στα δύο είδη ποσοτήτων (μεταβλητές και σταθερές) είναι ουσιώδης, στη νέα ανάλυση του Leibniz, απουσιάζει η λέξη συνάρτηση. Η ιδέα της συναρτησιακής σχέσης ούτε καν αναφέρεται σε άρθρα όπως (*Calculus differentialis*) *«Διαφορικός Λογισμός»* και (*Calculus integralis*) *«Ολοκληρωτικός Λογισμός»* (Youschkevitch, 1976).

Ο πρώτος ρητά διατυπωμένος ορισμός της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης (Opera omnia, II) αναφέρεται στο άρθρο του Johann Bernoulli *«Παρατηρήσεις πάνω σε ότι είναι μέχρι τώρα γνωστό για την επίλυση των ισοπεριμετρικών προβλημάτων»* (**1718**): *«**Ορισμός**. Ονομάζουμε **συνάρτηση** ενός μεταβλητού μεγέθους μια **ποσότητα** που αποτελείται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές»*.

Στο ίδιο άρθρο ο Bernoulli πρότεινε επίσης το Ελληνικό γράμμα φ ως σύμβολο για το *χαρακτηριστικό* (*caractéristique*) μιας συνάρτησης και έγραφε τη μεταβλητή χωρίς παρενθέσεις: φx. Ήταν λοιπόν ο πρώτος που έδωσε ένα ορισμό της συνάρτησης απελευθερωμένο από γεωμετρικά στοιχεία. Ο ορισμός αυτός παρέμεινε αμετάβλητος ως τον 19^{ο} αιώνα. Το 1697, σε άρθρο του στο *Acta Eruditorum* ανέπτυξε το λογισμό των εκθετικών συναρτήσεων e^x, α^x, x^x και παρουσίασε σχέσεις

μεταξύ τριγωνομετρικών, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων. Ειδικότερα, η μελέτη του για την εκθετική συνάρτηση, σε συνδυασμό με αντίστοιχες μελέτες των John Wallis (1616 – 1703), Newton, και Leibniz οδήγησε, τον 18^{ο} αιώνα, στην παρουσίαση της λογαριθμικής συνάρτησης σε νέα βάση: η λογαριθμική συνάρτηση, που αρχικά επινοήθηκε ως η σχέση μεταξύ των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου, και αντιμετωπίστηκε τον 17^{ο} αιώνα ως η σειρά που προκύπτει από την ολοκλήρωση του $1/(1+x)$, είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης. Στον Johann Bernoulli αποδίδεται επίσης η ανάπτυξη των τύπων για τις συναρτήσεις του αθροίσματος και της διαφοράς δύο γωνιών, δηλαδή $\sin(x+y), \sin(x-y)$ κλπ. (Kline, 1972).

Στον ορισμό του Joh. Bernoulli δεν υπάρχει κάποια ένδειξη για τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να προκύψουν συναρτήσεις από την ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλά φαίνεται ότι μάλλον εννοούσε τις αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων, σύμφωνα και με τη βασική τάση στην εξέλιξη του απειροστικού λογισμού, που διατηρώντας και μάλιστα ενδυναμώνοντας τις σχέσεις του με τη Γεωμετρία, τη Μηχανική και τη Φυσική, έγινε κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα ένας επιστημονικός κλάδος όλο και πιο ανεξάρτητος από τις αρχές του, δηλαδή όλες οι αρχικές έννοιες του λογισμού έχασαν βαθμιαία το γεωμετρικό και μηχανικό περίβλημα τους και διατυπώθηκαν αριθμητικά ή αλγεβρικά.

Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα, τα νέα δεδομένα στη μελέτη των φυσικών φαινομένων και της κίνησης οδηγούσαν σε προβλήματα πολλών μεταβλητών, των οποίων η επίλυση απαιτούσε την ανάπτυξη των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ο μετασχηματισμός Laplace, ο λογισμός των μεταβολών και η συνάρτηση γάμμα έλυναν πολλά προβλήματα, με τη γλώσσα όμως του απειροστικού λογισμού. Κατά συνέπεια, ο λογισμός του Leibniz αναπτύχθηκε και προσαρμόστηκε στα νέα δεδομένα με πρωταγωνιστή τον μαθητή του Johann Bernoulli, τον Ελβετό μαθηματικό Leonhard Euler (1707 – 1783), από τον οποίο επηρεάστηκε η περαιτέρω ουσιαστική ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης (Γιαννακούλιας, 2007).

Η άποψη ότι η μαθηματική ανάλυση είναι η γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεων τους, φαίνεται ότι οφείλεται στον Euler ο οποίος είπε ακριβώς αυτό στην εισαγωγή του περίφημου έργου του «*Introductio in analysin infinitorum*», που ολοκληρώθηκε το 1744 και δημοσιεύτηκε το **1748**. Είναι ένα από τα πιο σημαντικά βιβλία Μαθηματικών όλων των εποχών και χαρακτηρίστηκε ως η εργασία

που έκανε τη συνάρτηση βασική έννοια στα Μαθηματικά. Πριν από τον Euler ο απειροστικός λογισμός μελετούσε ιδιότητες των καμπυλών, ενώ μετά απ' αυτόν διαπραγματευόταν ιδιότητες των συναρτήσεων. Η αλλαγή που προκάλεσε στο μαθηματικό τοπίο ήταν μεγάλη. Ο Euler μετέτρεψε το διαφορικό λογισμό σε μια φορμαλιστική θεωρία συναρτήσεων χωρίς να αναφέρεται σε διαγράμματα ή γεωμετρικές έννοιες που χρησιμοποιούσαν οι περισσότεροι από τους προγενέστερους μαθηματικούς. Ήταν ο *πρώτος* που απάλλαξε την τριγωνομετρία από τη γεωμετρική γλώσσα και θεώρησε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Υπήρξε ο *πρώτος* μαθηματικός που έδωσε ένα ορισμό για την έννοια της συνάρτησης και έκανε συστηματική μελέτη και ταξινόμηση *όλων* των στοιχειωδών συναρτήσεων, των διαφορικών τους και των ολοκληρωμάτων τους. Επίσης, οι παρενθέσεις, καθώς και το σύμβολο f για τη συνάρτηση αποδίδονται στον Euler. Στην εργασία του *«Institutiones calculi differentialis»* (*Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού*) που δημοσιεύτηκε το 1755, καθώς και στα *«Μαθήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού»* (*Institutiones calculi integralis*), το 1768, εισήγαγε το συμβολισμό $y = f(x)$ για τη συνάρτηση μιας μεταβλητής (Γιαννακούλιας, 2007).

Σημαντική ήταν η προσφορά του Euler και στη μελέτη των απείρων σειρών που κατά τον 18^{ο} αιώνα χρησιμοποιήθηκαν ευρέως σε αριθμητικές προσεγγίσεις, στην ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων και στη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Οι δυναμοσειρές και, σε μικρότερη έκταση, τα άπειρα γινόμενα και τα αναπτύγματα σε αθροίσματα απλών κλασμάτων ή συνεχών κλασμάτων ερευνήθηκαν διεξοδικά στο *Introductio* ως το βασικό εργαλείο μελέτης διάφορων ομάδων στοιχειωδών συναρτήσεων. Σ' αυτή την εργασία εισήγαγε το λογάριθμο του x ως προς βάση a

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

και αυτή ήταν *η πρώτη ιστορικά εμφάνιση των λογαρίθμων, υπό την ερμηνεία τους ως εκθέτες*. Στην ίδια εργασία ο Euler εισήγαγε τον αριθμό e, απέδειξε ότι $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$, δηλαδή σε σύγχρονο συμβολισμό ότι $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, όρισε την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση ως

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad \log x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n} - 1\right),$$

έδωσε μια πλήρη συστηματική πραγματεία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων τονίζοντας την περιοδικότητα τους, βρήκε τα αναπτύγματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \text{ και } \eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

και εισήγαγε το μέτρο των γωνιών σε ακτίνια (Kline, 1972). Ωστόσο, ο αλγεβρικός λογισμός του Euler, όπως και των περισσότερων μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα, έγινε αποδεκτός με σημαντικές αβαρίες, παρόλο που οδήγησε σε ενδιαφέροντα, και στις περισσότερες περιπτώσεις επαληθεύσιμα αποτελέσματα (Γιαννακούλιας, 2007).

Στο «*Introductio in analysin infinitorum*» ο Euler μελέτησε λεπτομερώς την έννοια της συνάρτησης, έτσι όπως αυτή χρησιμοποιείται στη μαθηματική ανάλυση. Ξεκίνησε ορίζοντας τις αρχικές έννοιες. Σύμφωνα με τον **Euler**, η *σταθερά* είναι μια καθορισμένη ποσότητα η οποία θεωρείται δεδομένο ότι παίρνει πάντα την ίδια μοναδική τιμή ενώ η *μεταβλητή* είναι το σύνολο ή κάποιο υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών. Αναλυτικότερα (**Krazer** & **Rudio,** 1922): «*…Μια μεταβλητή ποσότητα, είναι μια απροσδιόριστη, ή μια γενική, ποσότητα, η οποία περιλαμβάνει όλες απολύτως τις καθορισμένες τιμές. Έτσι, η μεταβλητή ποσότητα περιλαμβάνει όλους απολύτως τους αριθμούς, και τους θετικούς και τους αρνητικούς, και τους ακέραιους και τους κλασματικούς, και τους ρητούς και τους άρρητους και τους υπερβατικούς. Ακόμα και το μηδέν και οι φανταστικοί αριθμοί δεν εξαιρούνται από την έννοια της μεταβλητής ποσότητας…*» (Opera omnia, VIII).

Στον ορισμό που έδωσε για τη συνάρτηση στο Introductio ο Euler ακολούθησε το δάσκαλο του, Johann Bernoulli, αλλάζοντας ωστόσο τη λέξη «ποσότητα» σε «αναλυτική έκφραση»: «*…**Συνάρτηση** μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες…*». Έχουμε δηλαδή εδώ ένα σαφή ορισμό της στενής, υπολογιστικής έννοιας της συνάρτησης (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999). Σ’ αυτόν τον ορισμό ο Euler συμπεριέλαβε τα πολυώνυμα, τις δυναμοσειρές, και τις λογαριθμικές και τριγωνομετρικές εκφράσεις. Όρισε επίσης τη συνάρτηση πολλών μεταβλητών (Kline, 1972).

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ο Euler κατηγοριοποίησε τις συναρτήσεις υπό το πρίσμα του πρώτου δικού του γενικού ορισμού μιας συνάρτησης, και ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να απαντήσει στο ερώτημα *«τι σημαίνει και πώς σχηματίστηκε ο όρος **αναλυτική έκφραση**;»* (Youschkevitch, 1976). Αρχικά, απαρίθμησε τις συναρτήσεις που εκφράζονται αναλυτικά, ξεκινώντας με τις αλγεβρικές συναρτήσεις με τις οποίες επιλύονται οι αλγεβρικές εξισώσεις. Σ' αυτές τις συναρτήσεις οι μετασχηματισμοί στην ανεξάρτητη μεταβλητή εμπλέκουν μόνο αλγεβρικές διαδικασίες, οι οποίες με τη σειρά τους χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις ρητές, που εμπλέκουν μόνο τις τέσσερις συνήθεις πράξεις, και τις άρρητες, που εμπλέκουν τις ρίζες. Κατόπιν, εισήγαγε διάφορες υπερβατικές συναρτήσεις καταλήγοντας ειδικότερα στις τριγωνομετρικές, στις εκθετικές και στις λογαριθμικές συναρτήσεις και σ' ένα άπειρο αριθμό άλλων συναρτήσεων του ολοκληρωτικού λογισμού, συμπεριλαμβανομένης και της ολοκλήρωσης των διαφορικών εξισώσεων. Κατά τον Euler, η κύρια διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων έγκειται στο συνδυασμό των μεταβλητών και των σταθερών από τις οποίες αποτελούνται. Έτσι, οι υπερβατικές συναρτήσεις διαχωρίζονται από τις αλγεβρικές συναρτήσεις επειδή οι πρώτες επαναλαμβάνουν άπειρες φορές τους συνδυασμούς των δεύτερων, δηλαδή, οι υπερβατικές συναρτήσεις θα μπορούσαν να δοθούν από άπειρες σειρές. Ωστόσο, ο Euler και οι σύγχρονοι του δεν έκριναν απαραίτητο να εξετάσουν την εγκυρότητα των εκφράσεων που προκύπτουν από την επ' άπειρον εφαρμογή των τεσσάρων ρητών πράξεων (Kline, 1972).

Επειδή ήταν αδύνατο να απαριθμηθούν οι διάφορες μέθοδοι έκφρασης των συναρτήσεων με αναλυτικό τρόπο, στο *Introductio* ο Euler τις περιόρισε όλες σε μια και μοναδική έκφραση, εκφράζοντας την άποψη ότι η πλέον κατάλληλη μορφή της αναλυτικής έκφρασης μιας συνάρτησης είναι μια άπειρη δυναμοσειρά του τύπου

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots,$$

χωρίς φυσικά να αποδείξει ότι οποιαδήποτε συνάρτηση θα μπορούσε να αναπτυχθεί σε μια τέτοια σειρά. Για να καταστήσει αυτή την ερμηνεία του σαφέστερη, ο Euler πρόσθεσε (Krazer & Rudio, 1922) ότι σ' αυτή την έκφραση: *«…θα μπορούσαν να γίνουν δεκτές, όχι μόνο θετικές ακέραιες δυνάμεις του* z*, αλλά οποιεσδήποτε δυνάμεις. Έτσι δε θα υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι οποιαδήποτε συνάρτηση του* z *θα μπορούσε να μετασχηματιστεί σε μια άπειρη έκφραση του τύπου*

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \ldots,$$

όπου οι εκθέτες $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ *κλπ. δηλώνουν οποιονδήποτε αριθμό…»* (Opera omnia, VIII). Για τον Euler η δυνατότητα της ανάπτυξης όλων των συναρτήσεων σε σειρές επιβεβαιωνόταν από τη δική του εμπειρία και την εμπειρία όλων των σύγχρονων του, και, σύμφωνα με τον Kline (1972), πράγματι, εκείνη την εποχή αλήθευε ότι όλες οι συναρτήσεις που δίνονται από αναλυτικές εκφράσεις μπορούσαν να αναπτυχθούν σε σειρά. Περαιτέρω, κατά τον Youschkevitch (1976), ο Euler ερμήνευσε την ικανότητα αναλυτικής αναπαράστασης των συναρτήσεων παρόμοια με τον Gregory.

Ο Euler έκανε επίσης το διαχωρισμό μεταξύ λελυμένων και πεπλεγμένων συναρτήσεων, και μεταξύ μονότιμων και πλειότιμων συναρτήσεων, με τις τελευταίες να είναι ρίζες εξισώσεων ανώτερου βαθμού με δύο μεταβλητές, και με συντελεστές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Κατά τον Euler, αν μια συνάρτηση, όπως η $\sqrt[3]{P}$, όπου P είναι μια μονότιμη συνάρτηση, έχει πραγματικές τιμές για τις πραγματικές τιμές της μεταβλητής, τότε συγκαταλέγεται συνήθως μεταξύ των μονότιμων συναρτήσεων. Απ' αυτούς τους ορισμούς (που έχουν αρκετές αντιφάσεις), ο Euler πέρασε στις ρητές ολοκληρωτικές συναρτήσεις ή πολυώνυμα, αναφέροντας ότι τέτοιες συναρτήσεις με πραγματικούς συντελεστές, μπορούν να διασπαστούν σε παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές (Kline, 1972).

Κατόπιν, διατύπωσε θεωρήματα για την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης και για την ύπαρξη πεπλεγμένων ή παραμετρικών συναρτήσεων (δοθέντων των y και x ως συναρτήσεων του z, το y είναι μια συνάρτηση του x και, αντιστρόφως, το x είναι μια συνάρτηση του y). Κατά τον Euler, μια αυθαίρετη αλγεβρική εξίσωση οποιουδήποτε βαθμού είναι επιλύσιμη με ριζικά, και γενικότερα, επειδή κάθε συνάρτηση, y, θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από μερικές σειρές όρων που περιέχουν δυνάμεις της μεταβλητής, z, αυτή η μεταβλητή θα μπορούσε να εκφραστεί με όρους του y αντιστρέφοντας τις σειρές με τις μεθόδους αντιστροφής των σειρών του Newton (Youschkevitch, 1976).

Ο ορισμός των Johann Bernoulli και Euler για τη συνάρτηση ως αναλυτική έκφραση της οποίας η πιο γενική μορφή είναι μια δυναμοσειρά έγινε αποδεκτός από πολλούς άλλους μαθηματικούς μέχρι και τον Joseph Louis **Lagrange** (1736 – 1813) ο οποίος, στα τέλη του 18^{ου} αιώνα, αναφερόμενος στο έργο του *«Théorie des fonctions analytiques»* (*Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων*, 1797) στους Leibniz και Bernoulli (**Serret**, 1881), αποκάλεσε ως συνάρτηση οποιαδήποτε *έκφραση υπολογισμού* (*expression de calcul*): *«…Ονομάζουμε* ***συνάρτηση*** *μιας ή περισσότερων*

ποσοτήτων, οποιαδήποτε ***υπολογιστική έκφραση*** *την οποία αυτές οι ποσότητες εισάγουν με έναν απροσδιόριστο τρόπο, εμπλεκομένων ή όχι άλλων ποσοτήτων, που θεωρείται ότι παίρνουν δεδομένες και αμετάβλητες τιμές, ενώ οι ποσότητες της συνάρτησης μπορούν να λάβουν όλες τις πιθανές τιμές. Έτσι στις συναρτήσεις εξετάζουμε μόνο τις ποσότητες που υποθέτουμε ότι είναι μεταβλητές, χωρίς να αναφερόμαστε στις σταθερές που μπορεί να εμπλέκονται…»* (Oeuvres de J.L.Lagrange, IX). Το νέο στοιχείο στον ορισμό του Lagrange είναι η έννοια της συνάρτησης, ως μιας απλής αλγεβρικής έκφρασης, ή γενικότερα, ως σχέσης εξάρτησης, που ελευθέρωσε την έννοια της παραγώγου από την έννοια της ροής, ως ρυθμού μεταβολής (Γιαννακούλιας, 2007). Επιπλέον, έδωσε τον ίδιο ορισμό για τη συνάρτηση και στα *«Leçons sur le calcul des fonctions»* (*Μαθήματα επί του λογισμού των συναρτήσεων*,1801) (Oeuvres, X). Συγκεκριμένα, σ' αυτή την εργασία του ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις παριστάνουν διαφορετικούς μετασχηματισμούς που πρέπει να εφαρμοστούν σε γνωστές ποσότητες ώστε να προκύψουν οι τιμές των άγνωστων ποσοτήτων, και ότι οι άγνωστες ποσότητες είναι κυριολεκτικά απλώς το τελευταίο αποτέλεσμα του υπολογισμού, δηλαδή μια συνάρτηση είναι ένας συνδυασμός πράξεων (Kline, 1972).

Στη *«Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων»* ο Lagrange προσπάθησε να αναπτύξει το λογισμό χωρίς τη χρήση των διαφορικών, των απειροστών, των ροών και των ορίων, γιατί πίστευε ότι οι ορισμοί τους ήταν εξαιρετικά ασαφείς. Η νέα περιεκτική μέθοδος του λογισμού βασιζόταν στον ισχυρισμό ότι *κάθε συνάρτηση* αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με καθαρές αλγεβρικές διαδικασίες (Γιαννακούλιας, 2007). Γενικότερα, και άλλοι μαθηματικοί του 18^{ου} αιώνα, όπως ο Euler, θεωρούσαν πέραν πάσης αμφιβολίας ότι κάθε συνάρτηση της μαθηματικής ανάλυσης μπορούσε να αναπαρασταθεί από μια σειρά όρων ανάλογων προς τις πραγματικές δυνάμεις της ανεξάρτητης μεταβλητής. Επιπλέον ο Lagrange (Oeuvres de J.L.Lagrange, IX) προσπάθησε ακόμα και να αποδείξει ότι, γενικά, οι δυνάμεις που εμφανίζονται είναι θετικές ακέραιες, ενώ οι ρητές ή οι αρνητικές δυνάμεις μπορούν να εμφανιστούν μόνο σε περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε μεμονωμένες, ειδικές τιμές της μεταβλητής. Έτσι, η συνάρτηση, που ορίζεται στο *Introductio* του Euler ως αναλυτική έκφραση, αργότερα αναφέρεται ότι είναι, σε σύγχρονη ορολογία, μια αναλυτική συνάρτηση σε κάθε σημείο εκτός, ίσως, από μεμονωμένα ειδικά σημεία στη γειτονιά των οποίων θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από μια γενικευμένη δυναμοσειρά (Youschkevitch, 1976).

Έτσι ξεκίνησε η παρατεταμένη διαδικασία του μετασχηματισμού της μαθηματικής ανάλυσης σε ένα αυτόνομο επιστημονικό κλάδο, η οποία τον 19^{ο} αιώνα μετατράπηκε σε διαδικασία αριθμητικοποίησης του. Ενώ για τον Newton η ροή μιας ποσότητας ήταν η ταχύτητα μεταβολής της, για τον Lagrange η ταχύτητα ήταν η παράγωγος της συνάρτησης η οποία αναπαριστούσε την απόσταση σε σχέση με το χρόνο. Η παράγωγος του, ως συνάρτηση, ήταν αντικείμενο του ίδιου είδους με την αρχική συνάρτηση. Αν και η μέθοδος του είχε περιορισμένη εφαρμογή, συντέλεσε στην εμφάνιση μιας πρώτης θεωρίας συναρτήσεων μιας μεταβλητής, με εφαρμογές σε πολλά προβλήματα της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, θέτοντας στο περιθώριο τη γεωμετρική θεώρηση του Newton για το λογισμό (Γιαννακούλιας, 2007).

Στο κλασικό έργο του *«Mécanique analytique»* (Αναλυτική Μηχανική, 1788) ο Lagrange διαπραγματεύτηκε τη Μηχανική με τη βοήθεια του νέου λογισμού, δηλώνοντας ότι είναι μέρος της μαθηματικής ανάλυσης, της οποίας η παρουσίαση δεν απαιτούσε εν γένει ούτε σχήματα ούτε γεωμετρικό ή μηχανικό τρόπο σκέψης. Μια παρόμοια τάση υπήρξε για τη σχέση της μαθηματικής ανάλυσης με τη Γεωμετρία, της οποίας οι μέθοδοι έπαψαν να εφαρμόζονται για τον καθορισμό και την επεξήγηση των βασικών εννοιών της ανάλυσης. Αυτό πιστοποιείται και από τη σύγκριση του εγχειριδίου του L' Hôpital για τον απειροστικό λογισμό με μια σειρά διαλέξεων των Euler και Lagrange, στις οποίες οι γεωμετρικές επεξηγήσεις δε χρησιμοποιούνται καθόλου. Ωστόσο, η εκπαιδευτική αξία των γεωμετρικών και μηχανικών αναλογιών διατηρήθηκε, η γεωμετρική διαίσθηση συνέχιζε να διαδραματίζει ένα εποικοδομητικό ρόλο και πολλοί μελετητές τεκμηρίωναν «θεωρήματα ύπαρξης» αναλυτικά, αναφέροντας ότι ήταν προφανή γεωμετρικά. Μόλις το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα κρίθηκε απαραίτητος ο αναλυτικός ορισμός γεωμετρικών εννοιών όπως, για παράδειγμα, το εμβαδόν μιας επιφάνειας, το μήκος μιας καμπύλης κλπ., οι οποίες πριν θεωρείτο ότι ήταν διαισθητικά προφανείς (Youschkevitch, 1976).

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟΝ EULER

Εκτός από τις αναλυτικές συναρτήσεις, ο Euler γνώριζε ότι υπάρχουν επίσης και συναρτήσεις διαφορετικού είδους στις οποίες αναφέρεται στο μέρος του *«Introductio in analysin infinitorum»*, που είναι αφιερωμένο κυρίως στη θεωρία των επίπεδων καμπυλών. Κατά τον **Euler** (**Speiser**, 1945), οι καμπύλες γραμμές παριστάνονται από

συναρτήσεις του x, και «…*από αυτή την ιδέα για τις* <u>*καμπύλες*</u> *γραμμές προέκυψε ο διαχωρισμός τους σε* <u>*συνεχείς*</u> *και* <u>*ασυνεχείς ή μικτές*</u>…» (Opera omnia, IX). Αυτή η ορολογία είχε για τον Euler μια ειδική έννοια και χρησιμοποιήθηκε μέχρι τη στιγμή που οι Bolzano και Cauchy, το 1817 και το 1821 αντιστοίχως, συνέδεσαν τις εκφράσεις *συνεχής* και *ασυνεχής* με την έννοια που εν γένει υιοθετείται σήμερα.

Κατά την άποψη του Euler, του Leibniz και άλλων μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα (Kline, 1972), που χρησιμοποιήθηκε και μεταγενέστερα, *συνεχής* σημαίνει *αμετάβλητος* (αναλλοίωτος), δηλαδή *συνέχεια* σημαίνει αμεταβλητότητα (*σταθερότητα*) του τύπου, δηλαδή της εξίσωσης που προσδιορίζει τη συνάρτηση σε όλο το πεδίο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ *ασυνέχεια* μιας συνάρτησης σημαίνει μια *μεταβολή* του αναλυτικού κανόνα, δηλαδή *αλλαγή του αναλυτικού τύπου*, ή αλλιώς, την ύπαρξη διαφορετικών τύπων σε δύο ή περισσότερα διαστήματα του πεδίου τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι <u>*ασυνεχείς καμπύλες*</u> αποτελούνται από *συνεχή* τμήματα και γι' αυτό ονομάζονται *μικτές* (*mixed*) ή *μη κανονικές* (*irregulares*) ή *μηχανικές* (*mechanices*) καμπύλες, ενώ στη Γεωμετρία, κατά τον Euler, μελετώνται κυρίως οι *συνεχείς*, δηλαδή οι *αναλυτικές*, καμπύλες.

Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), οι *ασυνεχείς* ή *μικτές* συναρτήσεις και καμπύλες του *Introductio* αντιστοιχούν, σε σύγχρονη ορολογία, στις κατά τμήματα αναλυτικές συναρτήσεις, και συνεπώς δεν επεκτείνουν ουσιαστικά την έννοια της συνάρτησης. Ωστόσο, ο **Grattan – Guinness** (1970) θεωρεί ότι οι όροι του Euler «*συνεχής*» και «*ασυνεχής*» είναι, σε σύγχρονη ορολογία, συνώνυμοι με τους όρους «*διαφορίσιμος*» και «*συνεχής*» αντιστοίχως, ενώ οι **Speiser** (1952) και Kline (1972), παρατηρούν ότι: «…με τον όρο *συνεχής συνάρτηση* ο Euler, όπως και ο Leibniz πριν απ' αυτόν, εννοεί μια συνάρτηση που προσδιορίζεται από ένα αναλυτικό τύπο, δηλαδή σε σύγχρονη ορολογία μια αναλυτική συνάρτηση…». Ο **Truesdell** (1956) υποστήριξε ότι το πλαίσιο των μερικών διαφορικών εξισώσεων, στο οποίο ο Euler εισήγαγε τις ασυνεχείς συναρτήσεις του, έκανε σαφές ότι θεωρούσε αυτές τις συναρτήσεις ως μη διαφορίσιμες μόνο σε μεμονωμένα σημεία. Εντούτοις, σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), οι συναρτήσεις του Euler, είτε συνεχείς είτε ασυνεχείς, δηλαδή μικτές, με οποιαδήποτε από τις έννοιες αυτών των λέξεων, μπορεί να έχουν ασυνέχειες, με τη σύγχρονη έννοια, σε μεμονωμένα σημεία.

Το ίδιο έτος (1748) που δημοσίευσε το *Introductio*, ο Euler κατάλαβε ότι η κλάση των *ασυνεχών* συναρτήσεων (καμπυλών) έπρεπε να επεκταθεί. Στην πραγματικότητα, ο Euler είχε αντιληφθεί την αναγκαιότητα μιας τέτοιας επέκτασης από το 1744 που

δημοσίευσε την εργασία του «*Methodus Inveniendi lineas Curvas maximi minimive proprietate qaudentes*» (*Μέθοδος για την εύρεση καμπύλων γραμμών προικισμένων με ιδιότητες μεγίστων και ελαχίστων*), στην οποία αναπτύχθηκε για πρώτη φορά ο λογισμός των μεταβολών. Η αναγκαιότητα αυτή προέκυψε όταν συνέκρινε ακραίες καμπύλες, που ήταν λύσεις σε προβλήματα μεταβολών, με καμπύλες που διέφεραν απείρως λίγο από αυτές στη γειτονιά ενός, ή λίγων, μεμονωμένων σημείων.

Εντούτοις, *η κύρια ώθηση για την περαιτέρω ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης* προήλθε από την εργασία του Euler στη μαθηματική φυσική, που αρχίζει με το περίφημο πρόβλημα σχετικά με τις απειροελάχιστες ταλαντώσεις μιας πεπερασμένου μήκους ομογενούς χορδής που είναι στερεωμένη και από τα δύο άκρα της. Ωστόσο, ο Grattan – Guinness (1970) αμφισβητεί την άποψη ότι η διάκριση μεταξύ *συνεχών* και *ασυνεχών* συναρτήσεων από τον Euler στο *Introductio* προέκυψε από τη μελέτη του για το πρόβλημα της χορδής. Η πρώτη μαθηματική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, για το οποίο είχαν γίνει εικασίες από την εποχή ακόμα του Γαλιλαίου, δόθηκε από τον Taylor (το 1715), αν και το πρώτο καθοριστικό βήμα προς τη διαμόρφωση της αντίστοιχης θεωρίας έγινε από τον Γάλλο Jean Le Rond D'Alembert (1717 – 1783). Ο D'Alembert προσπαθώντας να περιγράψει το πρόβλημα της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής, το 1747, σχημάτισε και έλυσε την κυματική εξίσωση που αποτελούσε τη γενική λύση του προβλήματος. Το πρόβλημα απαιτούσε τη χρήση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, και γι' αυτό θεωρείται μαζί με τον Daniel Bernoulli συνιδρυτής της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων (Γιαννακούλιας, 2007).

Συγκεκριμένα, ο D'Alembert εξέφρασε τις συνθήκες του προβλήματος της κίνησης της παλλόμενης χορδής με εξισώσεις ισοδύναμες με τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

και απέδειξε ότι η γενική λύση $y = y(x,t)$ του προβλήματος θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από το άθροισμα δύο τυχαίων συναρτήσεων

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \qquad (2)$$

και λόγω των οριακών συνθηκών να καταλήξει στη μορφή

$$y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x)$$

(**Gonzàlez – Velasko**, 1992).

Σε κάθε ειδική περίπτωση οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στη γενική λύση καθορίζονται από το αρχικό σχήμα της χορδής και από τις αρχικές ταχύτητες των σημείων της. Φυσικά, αυτές οι αρχικές συνθήκες μπορεί να ποικίλουν, αλλά ο D'Alembert περιόρισε αυστηρά την κλάση των αποδεκτών σχημάτων που έχει αρχικά η χορδή, θεωρώντας ότι χωρίς αυτούς τους περιορισμούς δε θα ήταν εφικτή η λύση του προβλήματος μέσω της μαθηματικής ανάλυσης. Μεταξύ των περιορισμών που επέβαλε ο D'Alembert ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η υπόθεση ότι το αρχικό σχήμα της χορδής πρέπει να εκφράζεται σε όλη την έκταση του από μια και μοναδική εξίσωση, οπότε η χορδή είναι *συνεχής*, με την κατά Euler έννοια του όρου (Youschkevitch, 1976).

Αυτό που δημιούργησε ουσιαστικά μεγάλες αντιπαραθέσεις ανάμεσα στους D'Alembert και Euler, ήταν το γενικότερο πρόβλημα της εύρεσης των πλήρων λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η διαμάχη τους εστιάστηκε στις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις φ και ψ της σχέσης (2) (Γιαννακούλιας, 2007).

Αμέσως μετά από τη γνωστοποίηση των απόψεων του D'Alembert, ο **Euler** παρουσίασε, στις 16 Μαΐου 1748, την εργασία του *«De vibratione chordarum exercitation»* (*Επί της ταλάντωσης των χορδών*) που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Nova Acta Eruditorum* το 1749, και σε γαλλική μετάφραση, το 1750 (Opera omnia, X), από τη Βασιλική Ακαδημία του Βερολίνου (**Stüssi & Favre**, 1947). Αν και εκτιμούσε ιδιαίτερα και συνολικά τη μέθοδο του D'Alembert, ο Euler εξέφρασε τη διαφωνία του σχετικά με τη φύση των συναρτήσεων που είναι αποδεκτές με βάση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, καθοδηγούμενος από τη βαθιά μαθηματική διαίσθηση του: *«…Η πρώτη ταλάντωση εξαρτάται από το αρχικό σχήμα της χορδής, που μπορεί να είναι απροσδιόριστο. Αυτό είναι που κάνει την ταλάντωση της ίδιας χορδής να διαφοροποιείται άπειρες φορές, σύμφωνα με το σχήμα της χορδής στην αρχή της κίνησης…»* (Opera omnia, X). Στην έρευνα του ο Euler εξέτασε μια καμπύλη *«…είτε κανονική, που εκφράζεται με μια συγκεκριμένη εξίσωση, είτε μη κανονική, δηλαδή μηχανική…»*, δηλαδή δεν επέβαλλε περιορισμούς στο σχήμα της χορδής. Στην ειδική περίπτωση της χορδής με αρχικό σχήμα που περιγράφεται από ένα συνεχή τύπο (*συνεχές* αρχικό σχήμα), έδωσε μια λύση που παριστάνεται από την τριγωνομετρική σειρά

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{l} + \beta \sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots, \qquad (3)$$

με τη χορδή να είναι στερεωμένη στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = l$. Ενώ, δηλαδή, στη μέθοδο του D'Alembert οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν μόνο διαφορίσιμες, ο Euler αποδέχτηκε και συναρτήσεις κατά τμήματα διαφορίσιμες, εκτός των σημείων σύνδεσης, τις οποίες ονόμασε «ασυνεχείς», επιμένοντας ότι η λύση που πρότεινε ήταν γενικότερη απ' αυτήν του D'Alembert .

Ο D'Alembert δε συμφωνούσε με τον Euler και αμφισβήτησε την ερμηνεία του. Έτσι ξεκίνησε μια μακρόχρονη διαμάχη σχετικά με τη φύση των αποδεκτών συναρτήσεων με βάση τις αρχικές συνθήκες και τα ολοκληρώματα των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Τέτοιες συναρτήσεις εμφανίζονταν την εποχή εκείνη, και με συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό, στις θεωρίες της ελαστικότητας, της υδροδυναμικής, της αεροδυναμικής, και της διαφορικής γεωμετρίας (Youschkevitch, 1976).

Σ' αυτή τη διαμάχη έδωσε νέα διάσταση ο γιος του Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, ο οποίος το 1753 έδωσε μια λύση στο πρόβλημα της εύρεσης της εξίσωσης που εξέφραζε την κίνηση της παλλόμενης χορδής. Αναπτύσσοντας μια αρχή που είχε παρουσιάσει στις πρώτες μελέτες του, την αρχή της υπέρθεσης ή επαλληλίας των ταλαντώσεων, ο D.Bernoulli ισχυρίστηκε ότι το τυχαίο αρχικό σχήμα της χορδής και οι επακόλουθες ταλαντώσεις θα μπορούσαν να αναπαρασταθούν από μια άπειρη σειρά όρων που περιλαμβάνουν ημίτονα πολλαπλασίων γωνιών. Αν και η μέθοδος του υπολογισμού των «συντελεστών Fourier» παρέμενε άγνωστη σ' αυτόν, για τον Bernoulli, η κατάλληλη επιλογή συντελεστών κάνει τη σειρά $y = \alpha \sin\frac{\pi x}{l} + \beta \sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots,$ τόσο γενική όσο και οι δυναμοσειρές. (Youschkevitch, 1976).

Σύμφωνα με τη λύση του Bernoulli, που δημοσιεύτηκε τελικά το 1755, η απομάκρυνση της χορδής εκφράζεται ως συνάρτηση δύο μεταβλητών σε μια μόνο έκφραση, δηλαδή, η πλήρης λύση της εξίσωσης κύματος δίνεται από τη σχέση

$$y = \alpha_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi ct}{l} + \alpha_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi ct}{l} + \ldots,$$

ενώ η άποψη του Euler ήταν ότι ο Bernoulli είχε βρει μόνο τις λύσεις που μπορούσαν να εκφραστούν με ένα μόνο τύπο, εφόσον υπάρχουν περιορισμοί στη μορφή της παραπάνω λύσης που οφείλονται στο χαρακτήρα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια, η λύση του δεν θεωρήθηκε πλήρης και δεν έγινε δεκτή (Γιαννακούλιας, 2007).

Στη συνέχεια, ο Euler (1766) με την εργασία του *«Eclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes»* (*Εξηγήσεις επί της κίνησης των παλλόμενων χορδών*), απέκλεισε κάθε δυνατότητα αναπαράστασης σ' αυτή τη μορφή τυχαίων *μικτών* συναρτήσεων ή εκτενών κλάσεων *συνεχών* συναρτήσεων, όπως των αλγεβρικών (Opera omnia, X). Υποθέτοντας ότι μια συνάρτηση *συνεχής* σε κάποιο διάστημα ορίζεται από ένα μόνο τύπο σε όλο το διάστημα, ένα περιττό, περιοδικό άθροισμα μιας σειράς ημίτονων δε θα μπορούσε να είναι αναπαράσταση αλγεβρικής συνάρτησης ή υπερβατικών συναρτήσεων (Stüssi & Favre, 1947). Το 1772, ο D. Bernoulli, ξεκινώντας από ένα άλλο συλλογισμό, ανέπτυξε τη συνάρτηση

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \qquad (4)$$

σε μια σειρά ημιτόνων, παρατηρώντας ότι το ανάπτυγμα ισχύει στο διάστημα $(0, 2\pi)$ και περιγράφοντας επίσης με απολύτως αυστηρό τρόπο τη συμπεριφορά της σειράς και στα άκρα, και εκτός αυτού του διαστήματος. Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτό το ανάπτυγμα ήταν γνωστό στον **Euler** ο οποίος, παρά την αντίθετη άποψη του, το συμπεριέλαβε στην εργασία του *«Institutiones calculi differentialis»* (**Kowalewski**, 1913), χωρίς να αναφέρει ότι το ανάπτυγμα ισχύει μόνο για $0 < x < 2\pi$ (Opera omnia, X). Αυτή είναι μια από τις περιπτώσεις που ο Euler γνώριζε παραδείγματα τα οποία δε συμφωνούσαν με τις αντιλήψεις του αλλά τα θεωρούσε ασήμαντες εξαιρέσεις του γενικού κανόνα (Youschkevitch, 1976). Σε εργασία του, του 1777, που δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του, το 1798, ο **Euler** (**Boehm**, 1933) κατέληξε σε τύπους για τους «συντελεστές Fourier» στο διάστημα $[0, \pi]$ (Opera omnia, XVI – I). Ωστόσο, δεν έλαβε μέρος περαιτέρω στη διαμάχη σχετικά με την ικανότητα αναπαράστασης των συναρτήσεων από τριγωνομετρικές σειρές.

Ο D'Alembert απέρριψε επίσης τη λύση του D.Bernoulli, και η διαμάχη για την έννοια της συνάρτησης και την αναπαράσταση των συναρτήσεων, που οδήγησε τον Euler στη γενίκευση της δικής του έννοιας της συνάρτησης, συνεχίστηκε με την εμπλοκή όλων των σημαντικών μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα. Η έννοια που επικρατούσε εκείνη την περίοδο ήταν ακόμα η έννοια μιας συνάρτησης που δίνεται από μια μοναδική αναλυτική έκφραση, πεπερασμένη ή άπειρη (Kline, 1972). Ο Lagrange, την περίοδο 1759 – 1762 και αργότερα οι Monge, Laplace, Arbogast και Fourier έφεραν στην επιφάνεια τις ασάφειες που υπήρχαν γύρω από τις έννοιες της συνάρτησης και της συνέχειας των συναρτήσεων. Έτσι γεννήθηκε η ανάγκη ορισμού

των παραπάνω εννοιών, καθώς και του ολοκληρώματος, για συναρτήσεις των οποίων οι αντιπαράγωγοι δε μπορούσαν να υπολογιστούν. Τελικά η οριστική απάντηση δόθηκε τον 19^{ο} αιώνα από τον Γάλλο Joseph Fourier (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο **Truesdell** (1960) εξιστόρησε λεπτομερώς, μέχρι το 1788, αυτή τη διαμάχη, που βοήθησε σημαντικά την πρόοδο της μαθηματικής φυσικής και τη μεθοδολογική ανάπτυξη των θεμελίων της μαθηματικής ανάλυσης. Επίσης παρέθεσε στοιχεία για να δείξει ότι στο πλαίσιο του προβλήματος της παλλόμενης χορδής, ο Euler εννοούσε με τον όρο «συνάρτηση», και όχι απαραίτητα συνεχής κατά τη δική του έννοια, τη, σε σύγχρονη ορολογία, συνεχή συνάρτηση με κατά τμήματα συνεχή κλίση και καμπυλότητα. Κατά την άποψη του Youschkevitch (1976), είναι ουσιώδες το γεγονός ότι, από την αρχή της μελέτης του γι' αυτό το πρόβλημα, ο Euler υποστήριξε ότι στη δική του λύση θα έπρεπε να γίνουν αποδεκτές οι καμπύλες που δεν ανήκουν στη κλάση των *μικτών* συναρτήσεων, και γενικά δεν υπακούουν σε κάποιο αναλυτικό τύπο, δηλαδή οι καμπύλες αυθαίρετου σχήματος.

Ο **Euler** ανέπτυξε τις απόψεις του γι' αυτό το θέμα με περισσότερες λεπτομέρειες στην εργασία του *«De usu functionum discontinuarum in analysi»*, που δημοσιεύτηκε το 1767, και στην οποία (**Dulac**, 1938) οι *συνεχείς* συναρτήσεις ορίζονται, υπό το πρίσμα γεωμετρικών σχημάτων, υποθέτοντας όχι μόνο ότι η σχέση μεταξύ των συντεταγμένων όλων των σημείων οποιασδήποτε τέτοιας καμπύλης καθορίζεται από ένα και μοναδικό τύπο ή εξίσωση αλλά επίσης ότι: *«…όλα τα μέρη της συνεχούς καμπύλης συνδέονται σταθερά το ένα με το άλλο με ένα τέτοιο τρόπο που καθιστά αδύνατη οποιαδήποτε μεταβολή σ' αυτά χωρίς να διαταραχθεί η σχέση της συνέχειας…»* (Opera omnia, XXIII). Αυτή η κύρια ιδιότητα των *συνεχών* γραμμών προέκυπτε άμεσα από την αντίληψη του για τη *συνέχεια*. Ο Euler επισήμανε ότι αυτό που εννοεί δεν είναι η συνεκτικότητα, ή η συνέχεια, της πορείας, ή η ροή, της καμπύλης (*continuitas tractu*), αλλά η μοναδικότητα του αντίστοιχου αναλυτικού τύπου, ή αλλιώς, οποιοδήποτε μικρό μέρος μιας *συνεχούς* γραμμής (συνάρτησης) καθορίζει με μοναδικό τρόπο αυτή τη γραμμή στο σύνολο της. Έτσι, για παράδειγμα, οι δύο κεκλιμένοι κλάδοι μιας υπερβολής αποτελούν μια *συνεχή* καμπύλη. Όπως αναφέρει και ο Youschkevitch (1976): *«… στο βαθμό που ο Euler ταυτοποίησε τις αναλυτικές εκφράσεις με συναρτήσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν από σειρές Taylor, η ιδιότητα της «συνέχειας» αντιστοιχεί στην ιδιότητα της μοναδικότητας των αναλυτικών συναρτήσεων με την έννοια που έδινε στον όρο ο Weierstrass…»*.

Όσον αφορά τις ασυνεχείς καμπύλες, ο Euler τις όρισε (Dulac, 1938) ως «*…όλες τις καμπύλες που δεν καθορίζονται από κάποια συγκεκριμένη εξίσωση, που συνήθως σχεδιάζεται με μια ελεύθερη επαναλαμβανόμενη κίνηση του χεριού…*» (Opera omnia, XXIII). Όπως και πριν η *ασυνέχεια* δεν ισχύει για την πορεία της καμπύλης. *Ασυνεχείς* είναι επίσης οι γραμμές που εκτείνονται συνεχώς με την έννοια της συνεκτικότητας. Αγνοώντας το εμπειρικό γεγονός ότι δε μπορούν να σχεδιαστούν ιδανικά γεωμετρικά σχήματα, οι *ασυνεχείς* συναρτήσεις αντιστοιχούν στις δικές μας τυχαίες κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις με κατά τμήματα συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης (Truesdell, 1960). Χωρίς αυτή τη συνθήκη, που υπονοείται από τη γεωμετρική περιγραφή αν και δε διατυπώνεται ρητά, η *ασυνέχεια* γίνεται απολύτως αυθαίρετη έτσι που δεν απαιτείται κάποιο μέρος μιας *ασυνεχούς* καμπύλης να είναι *συνεχές*, δηλαδή, οι καμπύλες που μπορούν να αναπαρασταθούν με αναλυτικό τρόπο και κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον Euler, οι αναλυτικές συναρτήσεις. Το εύρος της νέας αντίληψης του Euler επιβεβαιώνεται από τη συμπερίληψη στην κλάση των *ασυνεχών*, ή *μηχανικών*, καμπυλών «*…και γραμμών που συνήθως αποκαλούνται μικτές…*» όπως, για παράδειγμα, μια πολυγωνική γραμμή.

Στη συνέχεια ο Euler μελέτησε το ρόλο των διαφορετικών ειδών συναρτήσεων στα Μαθηματικά. Έτσι, ενώ σε παραδοσιακούς κλάδους της μαθηματικής ανάλυσης και της ανώτερης Γεωμετρίας μελετώνται οι *συνεχείς* συναρτήσεις, στον ολοκληρωτικό λογισμό μελετάται μια κάπως διαφορετική περίπτωση, η ολοκλήρωση των εξισώσεων που περιέχουν διαφορικά συναρτήσεων δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Ο **Euler** επισήμανε (Dulac, 1938) ότι, όπως οι αυθαίρετες σταθερές ποσότητες εμφανίζονται στα ολοκληρώματα των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων, έτσι οι λύσεις αυτών των ουσιαστικά νέων τύπων εξισώσεων περιέχουν απολύτως απροσδιόριστες *ασυνεχείς* συναρτήσεις (Opera omnia, XXIII). Αυτές οι συναρτήσεις είναι, κατά τον ίδιο, το βασικό χαρακτηριστικό της ολοκλήρωσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων (**Engel & Schlesinger**, 1914), στις οποίες αφιέρωσε το τρίτο μέρος του έργου του «*Institutiones calculi integralis*» (Opera omnia, XIII).

Ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ EULER ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ο ορισμός της συνάρτησης που δόθηκε από τον Euler στο *Introductio* ήταν πολύ περιοριστικός γιατί οι *ασυνεχείς* συναρτήσεις δε μπορούσαν γενικά να αναπαρασταθούν με αναλυτικό τρόπο. Κατά συνέπεια, για να διατυπώσει ένα άλλο

ορισμό συμπεριλαμβάνοντας όλες τις γνωστές κλάσεις, ο Euler χρησιμοποίησε τη γενική έννοια της αντιστοίχησης ανάμεσα σε ζεύγη στοιχείων, το καθένα από τα οποία ανήκει στο δικό του σύνολο τιμών μεταβλητών ποσοτήτων. Αυτή η έννοια υπήρχε πάντα, αλλά όχι ρητά διατυπωμένη, σε κάθε μέθοδο εισαγωγής συναρτήσεων, και δε συνδέεται με ορισμένη αναλυτική έκφραση.

Κατά τον Euler (Krazer & Rudio, 1922): *«…Οι συναρτήσεις μετασχηματίζονται σε άλλες μορφές είτε εισάγοντας μια άλλη μεταβλητή ποσότητα αντί αυτής που χρησιμοποιήθηκε αρχικά ή ακόμη και διατηρώντας την ίδια μεταβλητή ποσότητα…»* (Opera omnia, VIII). Τα παραδείγματα στο *Introductio* επεξηγούν τον τρόπο με τον οποίο μια και μοναδική μεταβλητή ποσότητα μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορες μορφές. Έτσι, μια συνάρτηση του z, η $u = 2 - 3z + z^2$ είναι ίδια με την $u = (1-z)(2-z)$, και η $\upsilon = a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$ μετασχηματίζεται σε μια πιο απλή συνάρτηση του y, την $\upsilon = y^4$, με την αντικατάσταση $a - z = y$, ενώ μια άρρητη συνάρτηση του z, η $w = \sqrt{a^2 + z^2}$, γίνεται μια ρητή συνάρτηση του y, η $w = \dfrac{a^2 + y^2}{2y}$, μετά από την αντικατάσταση $z = \dfrac{a^2 - y^2}{2y}$. Δύο ή περισσότερες τέτοιες αναλυτικές εκφράσεις έχουν μια κοινή ιδιότητα, δηλαδή εκφράζουν με διαφορετική μορφή την ίδια αντιστοιχία ανάμεσα σε δύο σύνολα αριθμητικών τιμών της μεταβλητής z και την αντίστοιχη συνάρτηση u ή υ ή w. Η ιδέα αυτής της σχέσης δίνεται με πιο γενική και αφηρημένη μορφή από τον Euler στο νέο ορισμό του για τη συνάρτηση (1755), που διατυπώνεται στον πρόλογο του έργου του *«Institutiones calculi differentialis»* (Kowalewski, 1913): ***«…Αν μερικές ποσότητες εξαρτώνται από κάποιες άλλες ποσότητες έτσι ώστε αν οι τελευταίες αλλάζουν και οι πρώτες να μεταβάλλονται, τότε οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτή η μετονομασία είναι ευρύτερης φύσης και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με τη βοήθεια της οποίας μια ποσότητα θα μπορούσε να καθοριστεί από άλλες. Αν, επομένως, το x δηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες οι οποίες εξαρτώνται από το x με οποιονδήποτε τρόπο ή καθορίζονται από αυτό καλούνται συναρτήσεις αυτού του x…»*** (Opera omnia, X). Εντούτοις, σ' αυτό το έργο, ο Euler μελετά μόνο τις αναλυτικές συναρτήσεις, χωρίς ρητή χρήση της έννοιας του ορίου μιας συνάρτησης, και βασιζόμενος σ' ένα ιδιόμορφο «λογισμό των μηδενικών» (**Youschkevitch**, 1959).

Η έννοια της συνάρτησης του Euler άσκησε μεγάλη θετική επιρροή στην επακόλουθη ανάπτυξη των Μαθηματικών. Δύο χρόνια αργότερα, το 1757 εισήχθησαν οι υπερβολικές συναρτήσεις από τον Ιταλό μαθηματικό Vincenzo Riccati (1707 – 1775). Η μελέτη των υπερβολικών συναρτήσεων, που είναι ανάλογες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ξεκίνησε από την παρατήρηση ότι το εμβαδόν υπό τον κύκλο δίνεται ως $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ ενώ το εμβαδόν υπό την υπερβολή δίνεται ως $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$. Επειδή τα δύο ολοκληρώματα διαφέρουν μόνο σ' ένα πρόσημο, και το εμβαδόν υπό τον κύκλο μπορεί να εκφραστεί από τριγωνομετρικές συναρτήσεις (θέτοντας $x = a\sin\theta$), ενώ το εμβαδόν υπό την υπερβολή σχετίζεται με τη λογαριθμική συνάρτηση, θα έπρεπε να υπάρχει μια σχέση με φανταστικούς αριθμούς μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και της λογαριθμικής συνάρτησης. Αυτή η ιδέα επεκτάθηκε από πολλούς μαθηματικούς και τελικά ο σύγχρονος του Euler Ελβετός μαθηματικός Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) ήταν εκείνος που μελέτησε λεπτομερώς τις υπερβολικές συναρτήσεις και ανέπτυξε την αντίστοιχη θεωρία (1768), εισάγοντας το σημερινό συμβολισμό τους (Kline, 1972).

Επιπλέον, μέγιστης σημασίας ήταν η απομόνωση της κλάσης των *συνεχών* συναρτήσεων, δηλαδή των αναλυτικών συναρτήσεων που μπορούν να αναπαρασταθούν από δυναμοσειρές, και η ανακάλυψη των βασικών ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν αυτή την κλάση, όπως είναι το μονοσήμαντο αυτής της αναπαράστασης, που αποτελεί χαρακτηριστικό, όπως ανακαλύφθηκε τον 20^{ο} αιώνα, και της γενικότερης κλάσης των ημι – αναλυτικών συναρτήσεων (Youschkevitch, 1976).

Ο Euler, καθώς και ο D'Alembert μέχρι κάποιο σημείο, καθόρισε και άλλες ουσιώδεις ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων. Ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε μιγαδικές ποσότητες στους υπολογισμούς ορισμένων ολοκληρωμάτων (μιγαδική ολοκλήρωση ή ολοκλήρωση ως προς μιγαδική μεταβλητή) και συμπέρανε (1777), χρησιμοποιώντας γενικούς αναλυτικούς τρόπους σκέψης, τις ονομαζόμενες εξισώσεις Cauchy – Riemann, στις οποίες είχε καταλήξει νωρίτερα (1752) και ο D'Alembert στα πλαίσια των υδροδυναμικών ερευνών του. Κατά συνέπεια, η γενική θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων του 19^{ου} αιώνα, με τις τρεις κατευθύνσεις της που αναπτύχθηκαν από τους Cauchy, Riemann και Weierstrass, έχει τις ρίζες της στις εργασίες των Euler και D'Alembert. Εξίσου σημαντική για την περαιτέρω εξέλιξη της μαθηματικής ανάλυσης ήταν η εισαγωγή

των αυθαίρετων ασυνεχών συναρτήσεων και η μελέτη ενός αριθμού προβλημάτων που αφορούν τις σχέσεις ανάμεσα στις εγγενείς ιδιότητες κλάσεων συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής και τη φύση των μαθηματικών εργαλείων που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί για να αναπαραστήσουν αυτές τις συναρτήσεις (Youschkevitch, 1976).

Η αντίληψη του Euler για τη συνάρτηση συνάντησε την παρατεταμένη και επίμονη αντίθεση του D'Alembert, ο οποίος επεσήμανε τα αδύνατα σημεία του παραπάνω ορισμού και κάποιες ειδικές δυσκολίες σχετικά με τα προβλήματα της ασυνέχειας, με τη δική μας έννοια του όρου, της κλίσης και της καμπυλότητας του αρχικού σχήματος στο πρόβλημα της παλλόμενης χορδής. Ωστόσο, αυτή η αντίληψη έγινε βαθμιαία ευρέως αποδεκτή. Ο πρώτος που τάχθηκε υπέρ του Euler ήταν ο Lagrange, την περίοδο 1759 – 1762, στις εργασίες του σχετικά με τη διάδοση του ήχου και την ταλάντωση των χορδών. Με κάποιες επιφυλάξεις, ή, υπό όρους, η άποψη του Euler υποστηρίχθηκε αργότερα και από πολλούς άλλους μαθηματικούς, συμπεριλαμβανομένων των Monge, Laplace, Condorcet και Arbogast. Ακόμα και ο D'Alembert, στα τελευταία χρόνια της ζωής του, άλλαξε γνώμη και χρησιμοποιώντας την έννοια της δεξιάς και της αριστερής παραγώγου σε ένα σημείο, στην εργασία του *«Sur les fonctions discontinues»* (*Επί των ασυνεχών συναρτήσεων*), έκανε δεκτές υπό προϋποθέσεις, ως λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων οποιασδήποτε τάξης, τις ασυνεχείς συναρτήσεις (1780).

Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), αυτές οι συζητήσεις αποκάλυψαν την ανάγκη για ένα πιο ευδιάκριτο διαχωρισμό των συνεχών από τις ασυνεχείς συναρτήσεις. Αυτή η διάκριση πραγματοποιήθηκε τελικά από τον **Arbogast** σε εργασία του (1791) σχετικά με τη φύση των αυθαίρετων συναρτήσεων που γίνονται δεκτές στην επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ο Arbogast θεώρησε ότι μπορεί να χρησιμοποιεί όχι μόνο συναρτήσεις με ασυνεχείς παραγώγους, αλλά και συναρτήσεις ασυνεχείς σε μεμονωμένα σημεία, τις οποίες αποκαλούσε ασυνεχείς συναρτήσεις *«…επειδή όλα τα μέρη τους δε συνεχίζονται ή δεν είναι γειτονικά το ένα με το άλλο…»*. Ωστόσο, ο Arbogast δεν έδωσε κάποιο αναλυτικό ορισμό της συνέχειας ή της ασυνέχειας. Οι μαθηματικοί του 18^{ου}αιώνα δεν είχαν ακόμα αισθανθεί την ανάγκη για ένα τέτοιο ορισμό και όπου ήταν απαραίτητο περιέγραφαν λεκτικά την κύρια ιδιότητα της συνέχειας.

Έτσι, για παράδειγμα, εξηγώντας τις μεθόδους του προσεγγιστικού υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων στο έργο του *«Institutiones calculi integralis»* (1768), ο

Euler παρατήρησε (**Engel & Schlesinger**, 1913) ότι ο υπολογισμός του $\int Xdx$ είναι τόσο πιο ακριβής όσο μικρότερες είναι οι υποτιθέμενες αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x με την προϋπόθεση ότι οι αυξήσεις της ολοκληρωτέας συνάρτησης X είναι επίσης μικρές. Ο Euler περιγράφει επίσης λεκτικά τη συμπεριφορά μιας ασυνεχούς συνάρτησης της $X = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στη γειτονιά του σημείου $x = 1$, παρατηρώντας, χωρίς να χρησιμοποιήσει τον όρο συνέχεια, ότι οποιαδήποτε μικρή αύξηση του x προκαλεί μια εξαιρετικά μεγάλη μεταβολή της συνάρτησης X (Opera omnia, XI).

Οι ασυνέχειες στις παραγώγους των λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες, οι οποίες αντιμετωπίστηκαν επιτυχώς στο πλαίσιο της μαθηματικής ανάλυσης κατά το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα (Truesdell, 1960). Μια περαιτέρω, εξαιρετικά ευρεία και πιο σημαντική αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος αναπτύχθηκε μέσω της συναρτησιακής ανάλυσης, με τη θεωρία των γενικευμένων λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων, κυρίως από τους Sobolev (1936) και Schwartz (1945). Αυτές οι γενικευμένες συναρτήσεις (Sobolev) ή κατανομές (Schwartz) είναι γραμμικοί συναρτησιακοί συσχετισμοί, που δεν απαιτείται να είναι διαφορίσιμοι με τη συνήθη έννοια του όρου αλλά να έχουν γενικευμένες παραγώγους. Η θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων επεξηγεί θαυμάσια τη βαθιά διαίσθηση και οξυδέρκεια του Euler όσον αφορά τις ασυνεχείς συναρτήσεις. Εντούτοις, η γενική κατάσταση στο χώρο της μαθηματικής ανάλυσης τον 18^{ο} αιώνα δεν επέτρεψε στον Euler να καθιερώσει τις ιδέες του, ή να διατυπώσει ακριβείς ορισμούς, ή, επίσης, να αποφύγει λάθη, μερικά από τα οποία έγιναν αντιληπτά ακόμα και από τους νεότερους μαθηματικούς της εποχής του (Youschkevitch, 1976).

ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ ΜΙΚΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η πρώτη από τις ιδέες του Euler που έγινε αντικείμενο κριτικής ήταν η απομόνωση της κλάσης των μικτών συναρτήσεων. Αμέσως μετά από το θάνατο του αποδείχθηκε ότι οι συναρτήσεις που δίνονταν από διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις σε διαφορετικές περιοχές κάποιου πεπερασμένου, ή, μερικές φορές, άπειρου

διαστήματος, μπορούσαν να αναπαρασταθούν επίσης από μια και μοναδική εξίσωση. Τα πρώτα παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων δόθηκαν από τον **Charles** (1785), στην εργασία του *«Fragment sur les fonctions discontinues»* (*Απόσπασμα επί των ασυνεχών συναρτήσεων*). Πολύ αργότερα (1844) ο ίδιος ο Augustin Louis **Cauchy** (1789 – 1857) αναφέρθηκε ρητά σ' αυτό το πρόβλημα, στο *«Mémoire sur les fonctions continues»*. Το πιο απλό παράδειγμα που έδωσε ήταν η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} +x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases},$$

η οποία με αυτή τη μορφή είναι ασυνεχής αλλά ταυτόχρονα μπορεί να παρασταθεί από μια μόνο εξίσωση, την $y = \sqrt{x^2}$, για κάθε $-\infty < x < +\infty$, και άρα είναι συνεχής. Έτσι η διάκριση μεταξύ μικτών και συνεχών συναρτήσεων αποδείχθηκε ότι είναι θεωρητικώς αστήρικτη (Oeuvres complètes, VIII).

Ωστόσο, σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), πολύ πιο σημαντική ήταν η κριτική της έννοιας των μικτών συναρτήσεων μέσα στο πλαίσιο της θεωρίας των τριγωνομετρικών σειρών. Ο Euler είχε αρνηθεί κατηγορηματικά τον ισχυρισμό ότι το αρχικό σχήμα στο πρόβλημα της παλλόμενης χορδής μπορεί να δοθεί από δύο διαφορετικές εξισώσεις στα δύο μέρη ενός δοθέντος πεπερασμένου διαστήματος και από μια σειρά όρων που περιέχουν ημίτονα πολλαπλασίων τόξων. Στις αρχές του 19^{ου}αιώνα, ο Fourier (1768 – 1830) αντίκρουσε αυτό τον ισχυρισμό στις εργασίες του σχετικά με τη θεωρία της διάδοσης της θερμότητας, που οδήγησε στη δημιουργία της γενικής θεωρίας των τριγωνομετρικών σειρών. Μετά από έρευνα του πάνω σ' αυτό το θέμα, το 1805, ο Fourier παρουσίασε μερικά παραδείγματα με τη βοήθεια γραφημάτων και υποστήριξε: *«…ότι οι ασυνεχείς τυχαίες συναρτήσεις μπορούν πάντα να παρασταθούν από αναπτύγματα ημιτόνων ή συνημίτονων πολλαπλασίων τόξων, και τα ολοκληρώματα των μερικών διαφορικών εξισώσεων τα οποία περιέχουν αυτά τα αναπτύγματα είναι τόσο γενικά όσο εκείνα που εισάγουν τις αυθαίρετες συναρτήσεις των πολλαπλασίων τόξων. Συμπέρασμα που ο διάσημος Euler είχε αποκηρύξει…»* (Grattan – Guinness & Ravetz, 1972).

Ο Fourier υπέβαλλε, το **1807**, στη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών την εργασία του *«Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides»* (Grattan – Guinness & Ravetz, 1972), που αφορούσε τη θερμική αγωγιμότητα των στερεών, και μέσω αυτής ανέπτυξε με περισσότερες λεπτομέρειες το συλλογισμό του για το πρόβλημα της αναπαράστασης μιας αυθαίρετης, και πιθανώς ασυνεχούς, συνάρτησης από

τριγωνομετρική σειρά. Ισχυρίστηκε ότι κάθε φραγμένη συνάρτηση $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ μπορεί να αναπαρασταθεί σ' αυτό το διάστημα από μια σειρά της μορφής $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$, όπου α_n,β_n είναι κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί. Τα μέλη της Ακαδημίας διαφώνησαν με τον ισχυρισμό του Fourier υποστηρίζοντας ότι ακόμα και ένα άπειρο άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση εφόσον οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο είναι απείρως διαφορίσιμες. Έτσι η εργασία του Fourier απορρίφθηκε από τη Γαλλική Ακαδημία.

Εντούτοις, ο Fourier συνέχισε τις έρευνες του και το 1822 δημοσίευσε τα συμπεράσματα του επί της θερμότητας στην κλασική εργασία του με τίτλο *«Théorie analytique de la chaleur»* (*Αναλυτική Θεωρία της θερμότητας*). Σ' αυτή την εργασία του ισχυρίστηκε ότι κάθε συνάρτηση $f:(-\ell,\ell)\to\mathbb{R}$ μπορεί να αναπαρασταθεί στο διάστημα αυτό από σειρές ημιτόνων και συνημίτονων:

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}),$$

όπου οι συντελεστές α_n,β_n υπολογίζονται με ολοκλήρωση όρο – με – όρο από τους τύπους $\alpha_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}dt$ και $\beta_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\sin\frac{n\pi t}{\ell}dt$. Τα α_n,β_n είναι, με σύγχρονη ορολογία, οι <u>*συντελεστές Fourier*</u> της f στο διάστημα $(-\ell,\ell)$. Ωστόσο, δεν εξέτασε την ισχύ της ολοκλήρωσης που οδηγεί στον υπολογισμό αυτών των συντελεστών (Γιαννακούλιας, 2007).

Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε ο Fourier το 1807, ενώ έτυχαν ενθουσιώδους υποδοχής από τους επιστήμονες μετά από το 1822, προκάλεσαν τη δυσπιστία του Lagrange και άλλων μαθηματικών των παλαιότερων γενεών. Γαλουχημένος με τις παραδόσεις του 18^{ου} αιώνα, ο Fourier υπέθεσε ότι μια τριγωνομετρική σειρά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να αναπαραστήσει οποιαδήποτε *μικτή* συνάρτηση και δεν έδωσε ικανοποιητική ανάλυση του προβλήματος της αναπαράστασης των συναρτήσεων από τέτοιες σειρές. Εντούτοις, τα επόμενα χρόνια το πρόβλημα αυτό έγινε το αντικείμενο ειδικών μελετών και αναρίθμητων ερευνών που βασίζονταν στη νέα γενική αντίληψη του λογισμού και ήταν αφιερωμένες στις ικανοποιητικές συνθήκες υπό τις οποίες είναι εφικτή η αναπαράσταση των συναρτήσεων από τις σειρές Fourier (Youschkevitch, 1976).

Ένα από τα ερωτήματα που προέκυψαν μετά από τη δημοσίευση της εργασίας του Fourier αφορούσε τον προσδιορισμό της κλάσης των συναρτήσεων f, για τις οποίες το ανάπτυγμα της σειράς Fourier συγκλίνει προς την $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού τους. Ο Fourier, χωρίς αυστηρή μαθηματική απόδειξη και μέσα από φυσικές ερμηνείες, υποστήριξε ότι για κάθε συνάρτηση f η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη της εύρεσης των συνθηκών υπό τις οποίες η σειρά Fourier της f συγκλίνει προς την f. Ο μαθηματικός που ερεύνησε το θέμα αυτό ήταν ο Πρώσος Johann Peter Gustav Lejeune – Dirichlet (1805 – 1859), μαθητής του Fourier. Στο Παρίσι του 1822, ο Fourier έθεσε στον τότε σπουδαστή των Μαθηματικών το ερώτημα της εύρεσης των συνθηκών για τη σύγκλιση των σειρών Fourier. Έτσι ο Dirichlet διαπίστωσε ότι για να απαντηθεί σωστά αυτό το ερώτημα απαιτείται να ξεκαθαριστούν πρώτα οι έννοιες της μεταβλητής και της συνάρτησης. Κατά τον Dirichlet: *«…η **μεταβλητή** είναι ένα σύμβολο του τυχαίου στοιχείου…»* και *«… μια **συνάρτηση** $y(x)$ είναι ορισμένη, αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα, που σε <u>κάθε</u> τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί <u>μια συγκεκριμένη</u> τιμή του y, δίχως να είναι απαραίτητο να διατυπωθεί συναρτήσει κάποιας αναλυτικής έκφρασης ή εξίσωσης…»*. Στον ορισμό αυτό εμφανίζεται καθαρά για πρώτη φορά το **μονοσήμαντο** της τιμής του y, και η μεταβλητή έχει τη θέση της νοητής επιλογής ενός στοιχείου χωρίς κάποια εποπτική ή χρονική διάσταση (**Frege**, 1974 & **Ρουσόπουλος**, 1991). Το 1829, ο Dirichlet, ως καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, μελέτησε τα μερικά αθροίσματα $s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, όπου α_k, β_k οι συντελεστές Fourier, και απέδειξε ότι

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}. \end{aligned}$$

Στην εργασία του *«Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données»* (*Επί της σύγκλισης των τριγωνομετρικών σειρών οι οποίες χρησιμεύουν στην αναπαράσταση μιας αυθαίρετης συνάρτησης μεταξύ δοσμένων ορίων*), έθεσε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η φραγμένη συνάρτηση f ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα της f και τα

ολοκληρώματα $\int f(x)\cos kxdx, \int f(x)\sin kxdx,$ ώστε να ορίζονται οι συντελεστές Fourier α_k, β_k.

Όπως αναφέρει ο Youschkevitch (1976), από τις συνθήκες Dirichlet, που παρουσιάστηκαν την περίοδο 1829 – 1837, προέκυψε ότι οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση αν είναι κατά τμήματα συνεχής και κατά τμήματα μονότονη σε ένα δεδομένο διάστημα θα μπορούσε να αναπτυχθεί σε μια σειρά Fourier που συγκλίνει σ' αυτή τη συνάρτηση. Συνεπώς, μια τυχαία καμπύλη που σχεδιάζεται για ένα γνωστό διάστημα με μια μονοκονδυλιά, δηλαδή οποιαδήποτε τυχαία, ασυνεχής – με την κατά Euler έννοια του όρου – και φραγμένη συνάρτηση, θα μπορούσε να παρασταθεί από ένα μόνο αναλυτικό τύπο, οπότε είναι μια συνεχής συνάρτηση. Φυσικά, κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σε ένα δεδομένο διάστημα δε μπορεί να παρασταθεί από μια σειρά Fourier η οποία, σ' αυτό το διάστημα, μπορεί να αποκλίνει σε απείρως πολλά σημεία.

Πολλοί μαθηματικοί, όπως ο Lagrange, υπέθεταν ότι μια συνάρτηση μπορούσε να χαρακτηριστεί πλήρως από την αντίστοιχη άπειρη σειρά της. Το 1823, ο Cauchy δημοσίευσε στην εργασία του «*Résumé des leçons données a l' école Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*» (*Περίληψη των μαθημάτων που δόθηκαν στη Βασιλική Πολυτεχνική σχολή επί του απειροστικού λογισμού*) το κλασικό αντιπαράδειγμα του $F(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$, τονίζοντας ότι η $e^{-\frac{1}{x^2}}$ αναπτύσσεται σε μια άπειρη σειρά μηδενικών συναρτήσεων, ενώ είναι μη μηδενική συνάρτηση. Έτσι, ο Cauchy απέδειξε ότι ακόμα και μια συνάρτηση απείρως διαφορίσιμη σε ένα δεδομένο σημείο δε θα μπορούσε να εκφραστεί με αναλυτικό τρόπο σ' αυτό το σημείο. Επιπλέον, όπως τονίστηκε από τον Pringsheim, το 1893, υπήρχαν απείρως διαφορίσιμες συναρτήσεις μη αναλυτικές σε οποιοδήποτε διάστημα (Youschkevitch, 1976). Το συμπέρασμα του Cauchy ήταν ότι έπρεπε να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη σύγκλιση των σειρών και να διατυπωθούν αυστηρές συνθήκες υπό τις οποίες μπορεί κάποιος να αποφανθεί αν μια σειρά παριστάνει ή όχι ακριβώς μια συνάρτηση. Εντούτοις, δεν ξεχώρισε τη συνέχεια σ' ένα σημείο και την ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης και έτσι έδωσε ένα λανθασμένο συμπέρασμα στο πρώτο μέρος του σημαντικού έργου του «*Cours d'analyse*» (**1821**): «…*Καμία ασυνεχής συνάρτηση δε μπορεί να έχει ανάπτυγμα Fourier, γιατί το άθροισμα μιας*

άπειρης σειράς συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση…». Τελικά, μετά από 20 χρόνια, οι Dirichlet, Seidel και Weierstrass απέδειξαν ότι ο ισχυρισμός του Cauchy ήταν λανθασμένος (Γιαννακούλιας, 2007).

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η ικανότητα της αναλυτικής αναπαράστασης μιας δοθείσης συνάρτησης εξαρτάται από τις αποδεκτές μεθόδους αναλυτικής έκφρασης, έτσι, για παράδειγμα, αν επεκταθούν οι αλγεβρικές εκφράσεις τότε διευρύνεται εξαιρετικά η σφαίρα των συναρτήσεων που μπορούν να παρασταθούν αναλυτικά. Ο Euler στο *Introductio* είχε ισχυριστεί ότι η πιο γενική μορφή αναλυτικής έκφρασης είναι μια δυναμοσειρά που παράγεται από ένα αριθμήσιμο πλήθος προσθέσεων και πολλαπλασιασμών της μεταβλητής x, από ένα αριθμήσιμο πλήθος σταθερών, και από μια πρόσθετη οριακή διαδικασία. Αργότερα εξέφρασε κατηγορηματικά την πεποίθησή του ότι οι *ασυνεχείς* – με τη δική του έννοια του όρου – συναρτήσεις δεν είναι γενικά αναλυτικές. Περαιτέρω, ο Γερμανός Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) έδειξε ότι κάθε συνάρτηση συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα θα μπορούσε να παρασταθεί στο διάστημα αυτό από το άθροισμα ομοιόμορφα συγκλινουσών σειρών ακεραίων πολυωνύμων (1885). Ακόμα και ασυνεχείς συναρτήσεις πολύ σύνθετης φύσης, οι οποίες ταξινομήθηκαν από τον Baire τη διετία 1898 – 1899, μπορούν να παρασταθούν από αθροίσματα σειρών που συγκλίνουν καθώς και πολλαπλασίων σειρών πολυωνύμων. Ο Lebesgue ονόμασε αναλυτικά αναπαραστάσιμη κάθε συνάρτηση η οποία θα μπορούσε να κατασκευαστεί από ένα αριθμήσιμο σύνολο προσθέσεων, πολλαπλασιασμών και οριακών διαδικασιών, που εκτελούνται σύμφωνα μ' ένα ορισμένο κανόνα όσον αφορά την ανεξάρτητη μεταβλητή, και από ένα αριθμήσιμο σύνολο σταθερών ποσοτήτων (Youschkevitch, 1976). Η ταξινόμηση του Baire, όπως καθιερώθηκε το 1905 από τον Lebesgue, περιλαμβάνει όλες αυτές τις συναρτήσεις οι οποίες είναι επίσης μετρήσιμες με την έννοια που δίνει στον όρο αυτό ο Borel. Ο Lebesgue ονόμασε αυτό τον κανόνα κατασκευής *μια αναλυτική έκφραση* (**Monna**, 1972).

Η ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ EULER

Ενώ ο διαχωρισμός των συναρτήσεων σε συνεχείς και ασυνεχείς δεν διατηρήθηκε στα Μαθηματικά, ο γενικός ορισμός του Euler για τη συνάρτηση κέρδισε σταδιακά ευρεία αναγνώριση και χρησιμοποιήθηκε εκτεταμένα. Όπως αναφέρει ο Youschkevitch (1976), ο πρώτος που εκτίμησε σωστά τη σημασία αυτού του νέου

ορισμού ήταν ο Condorcet, ο οποίος ανέπτυξε την αντίληψη του Euler στην «*Traité du calcul integral*» (*Πραγματεία του ολοκληρωτικού λογισμού*, **1778**).

Στο πρώτο μέρος αυτής της εργασίας, με τίτλο «*De fonctions analytiques*» (*Των αναλυτικών συναρτήσεων*) εξήγησε την άποψη του για την **αναλυτική συνάρτηση**: «*…Υποθέτω ότι έχω ένα συγκεκριμένο αριθμό των ποσοτήτων* $x, y, z, ..., F$, *και ότι για κάθε καθορισμένη τιμή των* $x, y, z, ...$ *κλπ., η* F *έχει μια ή περισσότερες καθορισμένες τιμές. Τότε λέω ότι η* F *είναι μια* ***συνάρτηση*** *των* $x, y, z, ...$». Στη συνέχεια έδωσε μερικά παραδείγματα πεπλεγμένων ή λελυμένων συναρτήσεων με εξισώσεις και συνέχισε διευκρινίζοντας ότι: «*…η* F *θα καθορίζεται αν ξέρουμε ότι τα* x, y, z *είναι καθορισμένα, ανεξάρτητα από τον τρόπο αναπαράστασης της* F *από τα* x, y, z *και τη μορφή της εξίσωσης μεταξύ των* F *και* x, y, z. *Τότε η* F *είναι συνάρτηση των* x, y, z *…*» (**Youschkevitch**, 1974).

Ο Condorcet διέκρινε τρία είδη συναρτήσεων:

1. Συναρτήσεις με γνωστό τύπο (λελυμένες συναρτήσεις).
2. Συναρτήσεις που εισάγονται με άλυτες εξισώσεις μεταξύ των F και x, y, z (πεπλεγμένες συναρτήσεις).
3. Συναρτήσεις που δίνονται μόνο υπό ορισμένες συνθήκες (π.χ. από διαφορικές εξισώσεις).

Κατόπιν, παράθεσε μερικά φυσικά φαινόμενα με άγνωστη μαθηματική περιγραφή και έδωσε κάποια μηχανικά παραδείγματα ώστε να διευκρινιστεί το τρίτο είδος συναρτήσεων, στο οποίο περιλαμβάνονται και οι «*…συναρτήσεις που είναι γνωστές μόνο επειδή κάποιος γνωρίζει γενικά ότι μια ορισμένη ποσότητα θα είναι καθορισμένη όταν άλλες ποσότητες είναι καθορισμένες…*».

Συνεχίζοντας την ανάλυση του, ο Condorcet επιχείρησε να παραγωγίσει μια σειρά Taylor για μια τυχαία συνάρτηση, σχεδόν με τον τρόπο που το είχε κάνει λίγο νωρίτερα ο Lagrange. Ωστόσο, φαίνεται ότι ο Condorcet ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο *fonction analytique* (*αναλυτική συνάρτηση*) για να περιγράψει συναρτήσεις αυθαίρετης φύσης, υπονοώντας κυρίως τις συναρτήσεις που μελετώνται στη μαθηματική ανάλυση (Youschkevitch, 1976).

Το **1797** δημοσιεύτηκε ο πρώτος τόμος του εγχειριδίου του Γάλλου μαθηματικού Sylvestre François **Lacroix** (1765 – 1843) με τίτλο «*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*» (*Πραγματεία του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού*) (Γιαννακούλιας, 2007). Σ' αυτό ο Lacroix όρισε τη συνάρτηση ακολουθώντας την

αντίληψη των Euler και Condorcet. Παρατηρώντας αρχικά ότι μια συνάρτηση κάποιας ποσότητας ήταν κατανοητή ως οποιαδήποτε συνάρτηση δυνάμεων αυτής της ποσότητας, και ως οποιαδήποτε συνάρτηση άλλων αλγεβρικών εκφράσεων, ο Lacroix «*…επηρεασμένος από τις νέες ιδέες, που βελτιώθηκαν με την πρόοδο της ανάλυσης…*», έδωσε τον ακόλουθο ορισμό της συνάρτησης: «*…Οποιαδήποτε **ποσότητα** της οποίας η τιμή εξαρτάται από μία ή πολλές άλλες ποσότητες, είναι γνωστή ως **συνάρτηση** αυτών…*».

Η Πραγματεία του Lacroix συνέβαλε πολύ στη διάδοση της νέας έννοιας της συνάρτησης, σε μια εποχή που ο παλιός ορισμός της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης αναφερόταν σε πολλά βιβλία και εγχειρίδια. Σύμφωνα με τον Youschkevitch (1976), αυτή η παλιά ερμηνεία της έννοιας της συνάρτησης υπονοείται επίσης στην «*Analyse algébrique*» (*Αλγεβρική Ανάλυση*, 1821) του Cauchy, αν και στον ορισμό ο όρος αναλυτική έκφραση δεν χρησιμοποιείται. Ο ορισμός του Cauchy είναι (**Cauchy**, 1897): «*…Όταν οι μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε, όταν δίνεται η τιμή της μιας, κάποιος να μπορεί να ορίσει τις τιμές των άλλων, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι διάφορες ποσότητες μπορούν να εκφραστούν μέσω μιας απ' αυτές, η οποία παίρνει το όνομα της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι εκείνες που ονομάζονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής…*» (Oeuvres complètes, III). Ο Youschkevitch (1976) υποθέτει ότι ο Cauchy, δίνοντας αυτό τον ορισμό, ουσιαστικά είχε υπόψη του μόνο τις συναρτήσεις που εκφράζονται με αναλυτικό τρόπο. Αυτό υπονοείται από τη διατύπωση του, στην οποία δύο φορές αναφέρει ότι *οι συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής*, καθώς και από τον διαχωρισμό του για τις συναρτήσεις σε λελυμένες και πεπλεγμένες, με τις τελευταίες να χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι οι εξισώσεις που αυτές και η ανεξάρτητη μεταβλητή ικανοποιούν δε λύνονται *αλγεβρικά*.

Ωστόσο, πολύ σύντομα ο γενικός ορισμός του Euler έγινε αποδεκτός από τρεις επιφανείς μαθηματικούς – τους Fourier, Lobatchevsky και Dirichlet – και σε συνδυασμό με τις έρευνες τους στη θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών. Αρχικά ένας τέτοιος ορισμός δόθηκε στην «*Théorie analytique de la chaleur*» (**1821**) του Fourier: «*…Πάνω απ' όλα, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση* $f(x)$*,…, είναι τελείως αυθαίρετη, και δεν υπόκειται σε κανένα νόμο συνέχειας…Γενικά η **συνάρτηση***

$f(x)$ *παριστά μια διαδοχή τιμών που δίνονται στην τετμημένη* x, *και για τις οποίες υπάρχει, ένας ίσος αριθμός τεταγμένων* $f(x)$*…Δεν υποθέτουμε ότι οι τεταγμένες υπόκεινται σ' ένα κοινό κανόνα. Διαδέχονται η μια την άλλη με οποιοδήποτε τρόπο, και η καθεμία ορίζεται σα να ήταν μοναδική ποσότητα...»* (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999).

Ακολουθώντας τον λακωνικό ορισμό του Fourier, οι Lobatchevsky και Dirichlet δημοσίευσαν εκτενέστερους ορισμούς. Ο Ρώσος Nikolai Lobatchevsky (1792 – 1856) στο άρθρο του *«On the convergence of trigonometric series»* (Επί της σύγκλισης των τριγωνομετρικών σειρών, **1834**) έγραψε ότι: *«…Ο γενικός ορισμός απαιτεί ως* ***συνάρτηση*** *του* x *να ονομάζεται ένας αριθμός ο οποίος δίνεται για κάθε* x *και ο οποίος αλλάζει βαθμιαία μαζί με το* x. *Η τιμή της συνάρτησης μπορεί να δίνεται είτε από μια αναλυτική έκφραση, είτε από μια συνθήκη η οποία παρέχει ένα τρόπο για έλεγχο όλων των αριθμών και για επιλογή ενός απ' αυτούς, ή, τέλος, η εξάρτηση ίσως υπάρχει αλλά παραμένει άγνωστη…»*. Στη συνέχεια υποστήριξε ότι: *«…η δυνατότητα αναπαράστασης οποιασδήποτε συνάρτησης με αναλυτικό τρόπο δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια αυθαίρετη εικασία…»*, αν και δεν είχαν ακόμα γίνει γνωστά αντιπαραδείγματα, και κατέληξε ως εξής: *«…Φαίνεται αδύνατο να αμφισβητηθεί είτε ότι οτιδήποτε στον κόσμο μπορεί να εκφραστεί από αριθμούς είτε ότι οποιαδήποτε μεταβολή ή σχέση παριστάνεται από μια αναλυτική συνάρτηση. Εν τω μεταξύ η ευρεία άποψη της θεωρίας επιτρέπει την ύπαρξη της εξάρτησης μόνο υπό την έννοια ότι οι αριθμοί, σε σχέση ο ένας με τον άλλο, θεωρούνται σα να δίνονται μαζί. Γι' αυτό το λόγο ο Lagrange, στο έργο του «Calcul des fonctions» (Λογισμός των συναρτήσεων), με το οποίο ήλπιζε να αντικαταστήσει το διαφορικό λογισμό, προκάλεσε τόση ζημιά στη γενικότητα της έννοιας όση αυστηρότητα του ισχυρισμού ήθελε να κερδίσει…»*. Κατά συνέπεια, είναι ευδιάκριτη μια τάση συμπερίληψης στην έννοια της συνάρτησης υποθετικών εξαρτήσεων που δε μπορούν να παρασταθούν με αναλυτικό τρόπο. Επειδή όμως ο όρος του Lobatchevsky *βαθμιαία* σημαίνει *συνεχώς*, με την κατά Cauchy έννοια του όρου, ο ορισμός του Lobatchevsky, αν ερμηνευθεί κατά γράμμα, αφορά μόνο τις συνεχείς συναρτήσεις. Το ίδιο ισχύει σχετικά με τον ορισμό που ο Dirichlet έδωσε το **1837** στην εργασία του *«Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus und Cosinusreihen»* (*Επί της αναπαράστασης απολύτως αυθαίρετων συναρτήσεων από σειρές ημιτόνων και συνημίτονων*). Οι ορισμοί των Lobatchevsky και Dirichlet είναι ουσιαστικά ίδιοι, με μόνη διαφορά το ότι ο Dirichlet

πρόσθεσε και μια γεωμετρική εξήγηση. Επίσης, χαρακτηρίζονται από τη ρητώς διατυπωμένη γενική φύση τους σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις και τη δυνατότητα άμεσης γενίκευσης τους έτσι ώστε να συμπεριληφθούν και οι ασυνεχείς συναρτήσεις (Youschkevitch, 1976).

Έτσι, ενώ οι μαθηματικοί μελετούσαν ασυνεχείς συναρτήσεις, οι ορισμοί τους περιορίζονταν σε συνεχείς, με την κατά Cauchy έννοια του όρου, συναρτήσεις, και συναρτήσεις, ή παράγωγοι, με μεμονωμένα σημεία ασυνέχειας περιλαμβάνονταν σαφώς στις επαρκείς συνθήκες που απαιτούνται για την αναπαράσταση μιας συνάρτησης από μια σειρά Fourier, όπως αυτές καθιερώθηκαν από τους ίδιους τους Lobatchevsky και Dirichlet. Όσον αφορά τον Dirichlet έχουμε επίσης το περίφημο παράδειγμα του για μια συνάρτηση που είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος $0 \le x \le 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\alpha\nu \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & ,\alpha\nu \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Η συνάρτηση αυτή που έμεινε γνωστή ως συνάρτηση του Dirichlet και την οποία οι σύγχρονοι του μαθηματικοί αποκάλεσαν «τρελή συνάρτηση», αναφέρεται στην εργασία του «*Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données*» (1829), και δεν ικανοποιεί τις συνθήκες σύγκλισης των σειρών Fourier που δημοσιεύτηκαν στην ίδια εργασία (Γιαννακούλιας, 2007).

Ο Youschkevitch (1976) προσπάθησε να εξηγήσει τον περιορισμό των ορισμών των Lobatchevsky και Dirichlet στις συνεχείς συναρτήσεις, με το επιχείρημα ότι η κλάση των συνεχών συναρτήσεων, με την κατά Cauchy έννοια του όρου, έπρεπε να ελευθερωθεί από τον περιορισμό της αναλυτικής αναπαράστασης, αφού μερικοί μελετητές, ταύτισαν αργότερα την άποψη του Cauchy για τη *συνέχεια* με την αντίληψη του Euler για την ίδια έννοια. Ο Burkhardt παρατήρησε ότι ο Cournot διατύπωσε στη «*Théorie des fonctions*» (Θεωρία των συναρτήσεων, 1841) ένα ορισμό της συνάρτησης με τον ίδιο βαθμό γενικότητας που είχαν οι αντίστοιχοι ορισμοί των Dirichlet και Lobatchevsky: «*…Αντιλαμβανόμαστε ότι ένα μέγεθος μπορεί να εξαρτάται από ένα άλλο, χωρίς αυτή η εξάρτηση να μπορεί να εκφραστεί από ένα συνδυασμό αλγεβρικών συμβόλων…*» (**Burkhardt**, 1904 – 1916), και πρότεινε «*…να φανταστούμε μια θεωρία με αντικείμενο τη συζήτηση για τις γενικές ιδιότητες των συναρτήσεων…*».

Ωστόσο οι εργασίες των Cournot και Lobatchevsky δεν έτυχαν ευρείας δημοσιότητας εκείνη την εποχή, όπως καταγράφτηκε από τον Hankel στις *«Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen»* (*Έρευνες επί των απείρως συχνά παλινδρομικών και μη σταθερών συναρτήσεων*, 1870). Εκεί διατυπώθηκε η άποψη του για τους συναρτησιακούς συσχετισμούς με τον ακόλουθο ορισμό (Hankel, 1905): «*…Μια* ***συνάρτηση*** $y(x)$ *είναι η* ***σχέση*** *με την οποία σε κάθε τιμή της μεταβλητής* x *αντιστοιχεί μέσα σ' ένα συγκεκριμένο διάστημα μια συγκεκριμένη τιμή του* y*, είτε το* y *εξαρτάται σε ολόκληρα διαστήματα από τον ίδιο κανόνα του* x *είτε όχι, είτε η εξάρτηση από τις μαθηματικές διαδικασίες μπορεί να αποτυπωθεί είτε όχι…»*, που τον αποκάλεσε με το όνομα του Dirichlet «*…επειδή λειτουργεί περισσότερο επί των σειρών Fourier…»*, και ονόμασε την παλιά έννοια της συνάρτησης *αντίληψη του Euler*, αναφερόμενος στις *συνεχείς* και *ασυνεχείς* συναρτήσεις στο *Introductio*. Ο ίδιος ο Hankel περιέγραψε τον ορισμό του λέγοντας ότι *η συγκεκριμένη τιμή του* y δεν περιλαμβάνει την περίπτωση της άπειρης ασυνέχειας και μετά έδωσε ένα νέο ορισμό που σχεδόν συμπίπτει με μέρος του αρχικού. Σύμφωνα πάντως με τον Youschkevitch (1976), ο Hankel διατύπωσε τον ορισμό του προσεκτικά, και χωρίς να αναπαράγει τον ορισμό του Dirichlet, για τον οποίο σωστά παρατήρησε ότι αφορούσε τις συνεχείς συναρτήσεις. Μ' αυτή ακριβώς ή με μια παρόμοια μορφή, ο γενικός ορισμός της συνάρτησης κυριάρχησε στη μαθηματική ανάλυση στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και στον 20^{ο} αιώνα.

Ο ΙΣΤΟΡΙΚΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ EULER

Η έννοια της συνάρτησης που δόθηκε από τον Euler (1755), υποβλήθηκε σε ουσιαστική εξέλιξη από πολλούς μαθηματικούς, συμπεριλαμβανομένων των Lobatchevsky και Dirichlet. Ειδικότερα, μελετήθηκαν *η αυθαίρετη φύση των συναρτησιακών σχέσεων* και *η ικανότητα της αναλυτικής αναπαράστασης* τους.

Οι διαφορετικές αντιλήψεις για το βαθμό αυθαιρεσίας και για το είδος της συμπεριφοράς των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν είναι χαρακτηριστικά των διαφορετικών εποχών και των διαφορετικών γενεών των μαθηματικών. Αν και ο Euler, ο Lacroix, ή ο Fourier δε συνάντησαν ποτέ τέτοιες συναρτήσεις, όπως η ασυνεχής συνάρτηση του Dirichlet, η δική τους έννοια της συνάρτησης ως μιας αυθαίρετης αντιστοιχίας ήταν για την εποχή τους τόσο γενική όσο γενική ήταν και η

έννοια του Dirichlet για τη δική του εποχή. Για τον ίδιο λόγο, ο Dirichlet δε μπορούσε να φανταστεί τα είδη των συναρτήσεων που μελέτησαν οι Cantor, Baire, Borel και Lebesgue. Επιπλέον, το πρόβλημα της ικανότητας της αναλυτικής αναπαράστασης των συναρτήσεων αποδείχθηκε ότι ήταν πιο σύνθετο απ' ότι είχε υποτεθεί μέχρι την αρχή του 20^{ου} αιώνα. Το θέμα αυτό παρακάμφτηκε σε όλη τη διάρκεια μιας μακράς περιόδου που ξεκίνησε από τον Euler και τελείωσε με τους Dirichlet και Cournot. Αλλά μετά, σταδιακά ανακαλύφθηκε ότι όλο και περισσότερες εκτεταμένες κλάσεις συναρτήσεων, αρχικά αυτές που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet στη θεωρία των σειρών Fourier, μετά οι συνεχείς συναρτήσεις και τέλος αυτές που ήταν γενικότερης φύσης, μπορούσαν να παρασταθούν με κάποια αναλυτική μέθοδο (Youschkevitch, 1976).

Ο **Dini** (1892), στο έργο του *«Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabiliti reali»* (*Τα θεμέλια για τη θεωρία των συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής*), που δημοσιεύτηκε το 1878, ερεύνησε αν, στα πλαίσια της διατήρησης του νοήματος του ορισμού της συνάρτησης, είναι πάντα δυνατό να γράψουμε με αναλυτικό τρόπο σε ένα συγκεκριμένο διάστημα μια συνάρτηση $y(x)$ για όλες τις τιμές της μεταβλητής σ' αυτό το διάστημα και για μια ή πολλές, πεπερασμένες ή άπειρες διαδικασίες υπολογισμού, που κάνουμε με τη μεταβλητή. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω (Monna, 1972), ο Lebesgue (1905) απάντησε θετικά στο ερώτημα αυτό, όσον αφορά όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις, και ταυτόχρονα έδωσε ένα παράδειγμα συνάρτησης που δε μπορεί να αναπαρασταθεί αναλυτικά με τη δική του έννοια του όρου. Εντούτοις, η αδύναμη πλευρά του ορισμού του Euler δεν διέφυγε της προσοχής του Hankel ο οποίος, πρωτίστως, τον θεώρησε ως *καθαρό συμβολικό (εικονικό) ορισμό* (Hankel, 1905), υπογραμμίζοντας ότι οι συναρτήσεις που ορίζονται τόσο καθολικά δεν έχουν κάποια κοινή ιδιότητα.

Σύμφωνα πάντως με τον Youschkevitch (1976), η κατάλληλη απάντηση στην παραπάνω ερώτηση δίνεται τελικά από την ίδια την εξέλιξη της θεωρίας των συναρτήσεων. Με την πάροδο του χρόνου, η κλάση των υπό μελέτη συναρτήσεων διευρύνθηκε και υποβλήθηκε σε ουσιαστικές αλλαγές. Αρχικά, και κατά τη διάρκεια περίπου δύο αιώνων, οι αναλυτικές εκφράσεις που χρησιμοποιούσαν συγκριτικά απλές διαδικασίες υπολογισμού, ήταν σχεδόν το μόνο αντικείμενο μελέτης. Αλλά μετά, προέκυψε η ανάγκη μελέτης διαφορετικών κλάσεων συναρτήσεων, όπως είναι οι συνεχείς, οι διαφορίσιμες, οι κατά σημεία ασυνεχείς, οι μετρήσιμες συναρτήσεις

κλπ. Οι συναρτήσεις αυτές εισάγονταν μέσω κάποιας βασικής ιδιότητας που καθόριζε όλη τη δομή μιας συγκεκριμένης κλάσης, ανεξάρτητα από το αν οι συναρτήσεις αυτής της κλάσης μπορούσαν να παρασταθούν αναλυτικά.

Ο **Luzin** (1915) στο βιβλίο του «*Integral and trigonometric series*» (*Ακέραιες και τριγωνομετρικές σειρές*), παρατηρεί ότι: «*…η κύρια διαφορά ανάμεσα στις μεθόδους της μελέτης των συναρτήσεων εντός του πλαισίου της μαθηματικής ανάλυσης και μέσω της θεωρίας των συναρτήσεων είναι ότι η κλασική ανάλυση συμπεραίνει ιδιότητες ξεκινώντας από τις ιδιότητες εκείνων των αναλυτικών εκφράσεων και τύπων με τους οποίους αυτή η συνάρτηση καθορίζεται, ενώ η θεωρία των συναρτήσεων προσδιορίζει τις ιδιότητες μιας συνάρτησης ξεκινώντας από εκείνη την ιδιότητα η οποία εκ των προτέρων χαρακτηρίζει την κλάση των εξεταζόμενων συναρτήσεων…*». Επίσης, στη θεωρία των συναρτήσεων χρησιμοποιούνται γενικά οι λεκτικές περιγραφές της συμπεριφοράς των συναρτήσεων στα διάφορα σύνολα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Η σύγχρονη μαθηματική λογική αποκάλυψε ουσιαστικές έμφυτες δυσκολίες στη γενίκευση, όπως είναι, για παράδειγμα, ο μη αλγοριθμικός ορισμός της συνάρτησης. Ο **Weyl** (1927) στην εργασία του «*Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*» (*Η φιλοσοφία των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών*), υποστήριξε ότι: «*…Κανείς δε μπορεί να ερμηνεύσει τι είναι η συνάρτηση. Αλλά: «Μια συνάρτηση* f *θεωρείται γνωστή, αν με οποιοδήποτε τρόπο που ορίζεται σύμφωνα μ' ένα κανόνα, κάθε αριθμός* a *αντιστοιχεί στον αριθμό* b*… Τότε λέμε ότι, το* b *είναι η τιμή της συνάρτησης* f *σε εκείνο το* a*…»…*». Έτσι, δύο διαφορετικά ορισμένες συναρτήσεις θεωρούνται ίδιες αν, για όλες τις δυνατές τιμές του a, οι αντίστοιχες τιμές του b συμπίπτουν. Οι απόψεις των μαθηματικών για το νόημα της φράσης «*…με οποιοδήποτε τρόπο που ορίζεται σύμφωνα μ' ένα κανόνα…*» διαφέρουν. Εντούτοις, ο *γενικός εικονικός (nominal) ορισμός της συνάρτησης κατά τον Euler*, που ήταν απαραίτητος από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία ως *ένα μέσο ελεύθερης έκφρασης*, για όλο και πιο σύνθετες δομές στη θεωρία των συναρτήσεων και, επίσης, άνοιξε νέους ορίζοντες στην ανάπτυξη πολλών κλάδων της μαθηματικής ανάλυσης και των εφαρμογών της. Ακόμα και οι δυσκολίες που οφείλονται στην ίδια τη φύση του ορισμού αυτού, έπαιξαν ένα θετικό ρόλο στην ανάλυση και στη μελέτη ενός αριθμού προβλημάτων των Μαθηματικών και της μαθηματικής λογικής (Youschkevitch, 1976).

ΙΙ. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Σ' αυτή την ενότητα θα δείξουμε πως η απόσταση, μαζί με συναφείς έννοιες όπως είναι το μήκος και το μέτρο γωνίας, μπορούν να γενικευθούν σε αυθαίρετους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους. Απ' αυτές τις αποκαλούμενες «μετρικές» έννοιες, που είναι το θεμέλιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, προκύπτουν πολλά αποτελέσματα, όχι μόνο στη Γεωμετρία , αλλά και στην Ανάλυση (**Kreider, Kuller, Ostberg & Perkins**, 1966).

Για να εισάγουμε μια μετρική σ' ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο πρέπει πρώτα να διαλέξουμε μια μονάδα απόστασης για τις μετρήσεις μας. Αυτό μπορεί να γίνει πιο εύκολα ορίζοντας το ***εσωτερικό γινόμενο*** σ' ένα διανυσματικό χώρο. Λαμβάνοντας την έννοια του εσωτερικού γινομένου ως πρωταρχική, θα τη χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε, το μήκος, το μέτρο γωνίας, και την απόσταση. Έτσι, αυτές οι έννοιες γίνονται αντιληπτές από το μαθητή ως φυσική συνέπεια της έννοιας του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 1. Ένα εσωτερικό γινόμενο ορίζεται σ' ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο V αν μαζί με κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x},\mathbf{y}$ στον V καθορίζεται ένας πραγματικός αριθμός $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ με τέτοιο τρόπο ώστε

1) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$,
2) $(\alpha\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$ για κάθε πραγματικό αριθμό α,
3) $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{y}$,
4) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$, και $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι γνωστός ως ***Ευκλείδειος χώρος ή χώρος με εσωτερικό γινόμενο***, και ο πραγματικός αριθμός $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ ονομάζεται ***εσωτερικό γινόμενο*** των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Στη βιβλιογραφία το $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ αναφέρεται και ως ***«βαθμωτό ή αριθμητικό γινόμενο»*** των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

Αν εφαρμόσουμε την (1) στις (2) και (3), θα δούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί και τις ισότητες

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_2 \quad \text{και} \quad \mathbf{x}\cdot(\alpha\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}). \qquad (5)$$

Γενικότερα, έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2)\cdot(\beta_1\mathbf{y}_1+\beta_2\mathbf{y}_2)=\alpha_1\beta_1(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}_1)+\alpha_1\beta_2(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}_2)\\ +\alpha_2\beta_1(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{y}_1)+\alpha_2\beta_2(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{y}_2),\end{aligned} \tag{6}$$

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ είναι αυθαίρετα βαθμωτά (μονόμετρα) μεγέθη. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0 \text{ όταν } \mathbf{x}=\mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{y}=\mathbf{0}. \tag{7}$$

Η ισότητα (1) στον παραπάνω ορισμό δείχνει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μια αντιμεταθετική ή *συμμετρική* πράξη ανάμεσα σε ζεύγη διανυσμάτων, ενώ η (3) ότι αυτή η πράξη είναι επιμεριστική. Αυτές οι δύο συνθήκες, μαζί με τις ανάλογες τους που δίνονται στην (5), κάνουν το εσωτερικό γινόμενο *διγραμμικό*. Τέλος, η (4) αναφέρει ρητά ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι *θετικά ορισμένο*, και ότι το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του είναι πάντα μεγαλύτερο από το μηδέν εκτός και αν αυτό το διάνυσμα είναι το μηδενικό. Συνοψίζοντας τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να πούμε ότι ένα *εσωτερικό γινόμενο* είναι μια *συμμετρική, διγραμμική, και θετικά ορισμένη πράξη ανάμεσα σε ζεύγη διανυσμάτων*, η οποία δίνει ως αποτέλεσμα ένα πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα1. Έστω ότι $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ και $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, και το $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ ορίζεται από την

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+...+x_ny_n. \tag{8}$$

Τότε ο $\mathbb{R}^n$ γίνεται Ευκλείδειος χώρος, και καλείται ***Ευκλείδειος*** n***-χώρος***. Στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι το γνωστό «εσωτερικό ή βαθμωτό ή αριθμητικό ή ευθύ γινόμενο», όπου ο ορισμός συνήθως διατυπώνεται γεωμετρικά ως το γινόμενο του μήκους του $\mathbf{x}$, του μήκους του $\mathbf{y}$, και του συνημιτόνου της μεταξύ τους γωνίας.

Παράδειγμα 2. Ο διανυσματικός χώρος είναι ο $\mathbb{C}[a,b]$, ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$, με το $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ να ορίζεται ως

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}=\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{9}$$

Η (9) ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Πράγματι, είναι προφανές ότι το $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ είναι συμμετρική πράξη που δίνει πραγματικές τιμές, ενώ η

διγραμμικότητα έπεται από τις εξισώσεις $\int_a^b \alpha f(x)g(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)g(x)dx$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός, και

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) \right] g(x)dx = \int_a^b f_1(x)g(x)dx + \int_a^b f_2(x)g(x)dx .$$

Τέλος, επειδή το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνάρτησης είναι μη αρνητικός αριθμός, και το ολοκλήρωμα μιας *συνεχούς* μη αρνητικής συνάρτησης είναι μηδέν αν και μόνο αν η συνάρτηση ταυτίζεται με τη μηδενική, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f} = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0$, και $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

<u>Παράδειγμα 3</u>. Έστω ότι $\mathbf{r}$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{C}[a,b]$ η οποία μηδενίζεται το πολύ σε μεγάλο αριθμό πεπερασμένων σημείων στο διάστημα $[a,b]$. Τότε η ισότητα

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx , \qquad (10)$$

ορίζει επίσης ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}[a,b]$. Η συνάρτηση $\mathbf{r}$ καλείται η <u>*συνάρτηση βάρους*</u> γι' αυτό το εσωτερικό γινόμενο, και παρατηρούμε ότι όταν η $\mathbf{r}$ είναι η ταυτοτική, η (10) ανάγεται στο εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στο Παράδειγμα 2.

<u>Παράδειγμα 4</u>. Έστω ότι P είναι ο διανυσματικός *χώρος* που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα του x με πραγματικούς συντελεστές. Συνήθως τα διανύσματα αυτού του χώρου θεωρούνται ως αντικείμενα, και αγνοείται η ερμηνεία τους ως πραγματικές συνεχείς *συναρτήσεις* που ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό ή σε οποιαδήποτε υποδιάστημα του άξονα των πραγματικών αριθμών. Από εδώ και πέρα, ωστόσο, θα θεωρούμε τα στοιχεία του P ως <u>*πολυωνυμικές συναρτήσεις*</u>, έτσι ώστε ο P να θεωρείται ως *υπόχωρος* του $\mathbb{C}[a,b]$ για οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών αριθμών $a < b$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον P από τις ισότητες (9) ή (10).

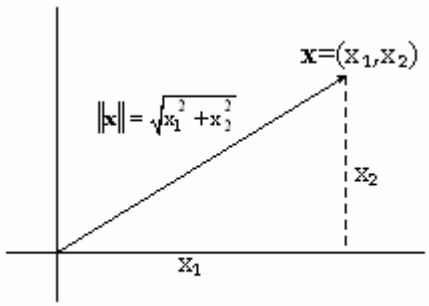
Υπενθυμίζουμε ότι ένας Ευκλείδειος χώρος W είναι υπόχωρος ενός Ευκλείδειου χώρου V αν ο W είναι ένα υποσύνολο του V, που είναι και αυτό διανυσματικός χώρος αλλά με τις ίδιες πράξεις που υπάρχουν στο διανυσματικό χώρο V, και κατά συνέπεια το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στον W συμπίπτει με το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στον V. Εντούτοις, είναι δυνατό να εφοδιάσουμε τον W μ' ένα

εσωτερικό γινόμενο που διαφέρει απ' αυτό που ορίζεται στον V, στην περίπτωση που ο W, ως *Ευκλείδειος χώρος*, δεν είναι ένας υπόχωρος του V.

ΜΗΚΟΣ, ΜΕΤΡΟ ΓΩΝΙΑΣ, ΑΠΟΣΤΑΣΗ

Σ' αυτή την υποενότητα θα ορίσουμε το μήκος, το μέτρο γωνίας, και την απόσταση με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου σ' ένα Ευκλείδειο χώρο. Καθεμία απ' αυτές τις έννοιες είναι καλά ορισμένη στο δισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, και γι' αυτό απαιτούμε κάθε ορισμός που θα υιοθετήσουμε να μπορεί να αναχθεί στον οικείο ορισμό του $\mathbb{R}^2$. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος, θα χρησιμοποιήσουμε τους σχετικούς τύπους από την Αναλυτική Γεωμετρία με την ορολογία του εσωτερικού γινομένου στον $\mathbb{R}^2$, ώστε να καταλήξουμε σε αποδεκτούς ορισμούς σ' αυτό το χώρο, τους οποίους θα γενικεύσουμε για αυθαίρετους Ευκλείδειους χώρους (Kreider, Kuller, Ostberg & Perkins, 1966).

Έστω ότι $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$. Τότε το μήκος του $\mathbf{x}$, που συμβολίζεται με $\|\mathbf{x}\|$, είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Αλλά επειδή $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2$, αυτή η έκφραση μπορεί να ξαναγραφτεί



Σχήμα 2.

με χρήση του εσωτερικού γινομένου στον $\mathbb{R}^2$ ως $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2. Το ***μήκος*** (ή ***νόρμα***) ενός διανύσματος $\mathbf{x}$ σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι ο *μη αρνητικός* πραγματικός αριθμός

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}. \qquad (11)$$

Ειδικότερα, το μήκος ενός διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\ , \tag{12}$$

ενώ το μήκος ενός διανύσματος $\mathbf{f}$ στον $\mathbb{C}[a,b]$ είναι

$$\|\mathbf{f}\| = \left(\int_a^b f(x)^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$, ο τύπος

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\ ,\quad 0 \le \theta \le \pi\ , \tag{14}$$

είναι μια άμεση συνέπεια του νόμου των συνημίτονων. Αλλά η έκφραση $\dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$ είναι επίσης καλά ορισμένη σ' ένα αυθαίρετο Ευκλείδειο χώρο, και κατά συνέπεια η ισότητα (14) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γενικός ορισμός του $\cos\theta$, με την προϋπόθεση ότι θ' αποδείξουμε την ανισότητα

$$-1 \le \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1 \tag{15}$$

για κάθε ζεύγος μη μηδενικών διανυσμάτων σ' ένα Ευκλείδειο χώρο, αφού, φυσικά, οποιοσδήποτε ορισμός του $\cos\theta$ πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $-1 \le \cos\theta \le 1$. Η απόδειξη της (15) είναι συνέπεια του παρακάτω σημαντικού αποτελέσματος, που είναι γνωστό ως <u>*ανισότητα Schwarz*</u> ή <u>*ανισότητα Cauchy – Schwarz*</u>.

<u>Θεώρημα 1 (ανισότητα Schwarz)</u>. Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι δύο οποιαδήποτε διανύσματα σ' ένα Ευκλείδειο χώρο, τότε

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) \tag{16}$$

<u>Απόδειξη</u>. Η ανισότητα προκύπτει άμεσα αν είτε το $\mathbf{x}$ είτε το $\mathbf{y}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, αφού τότε και τα δύο μέλη της (16) είναι μηδέν λόγω της (7). Έτσι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι μη μηδενικά. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα (6) για να αναπτύξουμε το $(\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y})\cdot(\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y})$, όπου α και β είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Από τη σχέση (4) έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\le (\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y})\cdot(\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}) \\ &= \alpha^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) - 2\alpha\beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \beta^2(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει

$$2\alpha\beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) \le \alpha^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) + \beta^2(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}).$$

Τώρα θέτουμε

$$\alpha = \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} \text{ και } \beta = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\,.$$

Αυτό δίνει

$$2\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) \le 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}),$$

ή

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\,,$$

και τετραγωνίζοντας, παίρνουμε την ανισότητα (16).

Στον $\mathbb{R}^n$ η ανισότητα Schwarz παίρνει τη μορφή

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \tag{17}$$

ενώ στον $\mathbb{C}[a,b]$ γίνεται

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right). \tag{18}$$

Η πρώτη απ' αυτές τις ανισότητες ισχύει για κάθε $x_1,....,x_n, y_1,....,y_n$ πραγματικούς αριθμούς, και συνήθως καλείται <u>*ανισότητα Cauchy*</u>.

Με τον συμβολισμό του Ορισμού 2 η ανισότητα Schwarz γίνεται

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|, \tag{19}$$

δηλαδή <u>η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων δεν υπερβαίνει το γινόμενο των μηκών τους</u>. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1,$$

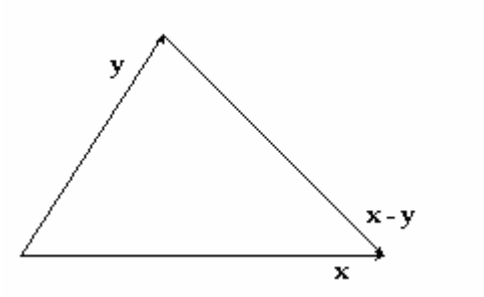
όταν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι μη μηδενικά, που σημαίνει ότι $-1 \le \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1$, και έτσι αποδείχθηκε η (15). Τώρα μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του $\cos\theta$.

<u>Ορισμός 3</u>. Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα σ' ένα Ευκλείδειο χώρο ορίζουμε το ***<u>συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας</u>*** ως

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\,. \tag{20}$$

Αν ένα από τα διανύσματα είναι το μηδενικό, τότε θέτουμε $\cos\theta = 0$. Η γωνία των δύο διανυσμάτων ορίζεται ως η πρωτεύουσα τιμή του τόξου συνημίτονου.

Απομένει να ορίσουμε την απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε διανύσματα ενός Ευκλείδειου χώρου. Και αυτό γίνεται απλώς γενικεύοντας τον ορισμό από τον $\mathbb{R}^2$ όπου η απόσταση μεταξύ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι το μήκος του διανύσματος $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.



Σχήμα 3.

<u>Ορισμός 4</u>. Η ***<u>απόσταση</u>*** ανάμεσα σε δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι, εξ' ορισμού,

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|. \tag{21}$$

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία πρέπει να είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, που είναι μηδέν αν και μόνο αν τα σημεία συμπίπτουν. Επίσης, η απόσταση πρέπει να είναι ανεξάρτητη της σειράς με την οποία θεωρούμε τα σημεία, και τέλος πρέπει να ικανοποιείται η γνωστή από την επιπεδομετρία τριγωνική ανισότητα. Κατά συνέπεια προκειμένου να δικαιολογηθεί η χρησιμοποίηση του όρου *«απόσταση»* στον Ορισμό 4 πρέπει να δείξουμε ότι το $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0, \tag{22}$$

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \text{ αν και μόνο αν } \mathbf{x}=\mathbf{y}, \tag{23}$$

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x}), \tag{24}$$

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \text{ για οποιαδήποτε τρία διανύσματα } \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}. \tag{25}$$

Οι πρώτες τρεις απ' αυτές τις ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του μήκους και από τα αξιώματα που διέπουν το εσωτερικό γινόμενο. Για να αποδείξουμε τη σχέση (25) αποδεικνύουμε αρχικά μια ανισότητα.

<u>Λήμμα 1</u>. Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι τυχαία διανύσματα σ' ένα Ευκλείδειο χώρο, τότε

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \tag{26}$$

<u>Απόδειξη</u>.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= \left[(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right]^{1/2}\\ &= \left[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})+2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\right]^{1/2}\\ &\le \left[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})+2\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}+(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\right]^{1/2} \quad \text{(από την ανισότητα Schwarz)}\\ &= \left[\left(\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}+\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\right)^2\right]^{1/2}\\ &= \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}+\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\\ &= \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|.\end{aligned}$$

Η τριγωνική ανισότητα (25) προκύπτει άμεσα απ' αυτό το αποτέλεσμα. Πράγματι,

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{y})+(\mathbf{y}-\mathbf{z})\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|, \qquad (27)$$

δηλαδή,

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \le d(\mathbf{x},\mathbf{y})+d(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Τέλος, η συνάρτηση της απόστασης που ορίστηκε παραπάνω έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$d(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}) = |\alpha|\, d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } \alpha, \qquad (28)$$

και

$$d(\mathbf{x}+\mathbf{z},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (29)$$

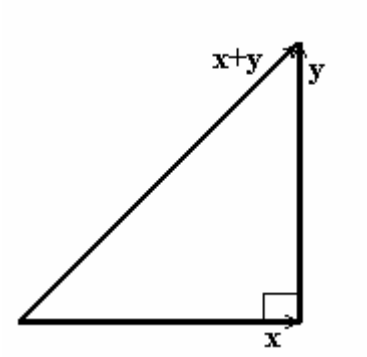
<u>ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ</u>

Δύο διανύσματα σ' ένα Ευκλείδειο χώρο λέγονται ***<u>ορθογώνια</u>*** ή ***<u>κάθετα</u>*** αν το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, από τον Ορισμό 3 προκύπτει ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ορθογώνιο με οποιοδήποτε διάνυσμα, και, γενικά, ότι τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι ορθογώνια αν και μόνο αν $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$. Για την ορθογωνιότητα δύο διανυσμάτων χρησιμοποιούμε και το γνωστό Πυθαγόρειο Θεώρημα.

<u>Θεώρημα 2 (Πυθαγόρειο Θεώρημα)</u>. Δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι ορθογώνια αν και μόνο αν

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2.$$

<u>Απόδειξη</u>.



Σχήμα 4.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})\\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\\ &= \|\mathbf{x}\|^2+2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2,\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$ αν και μόνο αν $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ για τα οποία ισχύουν $f(x)=1$ και $g(x)=\sin x$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. Τότε, σύμφωνα με την ισότητα (9) έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx\\ &= -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\end{aligned}$$

οπότε από τον Ορισμό 3 συμπεραίνουμε ότι τα $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι ορθογώνια. Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα γι' αυτά τα διανύσματα. Ειδικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|^2 = \|1+\sin x\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}(1+\sin x)^2\,dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\sin x+\sin^2 x\right)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}dx+2\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx\\ &= x\Big|_{-\pi}^{\pi}-2\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\pi\\ &= 2\pi+\pi = 3\pi,\end{aligned}$$

εφόσον

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx \quad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2} x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Επίσης $\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 3\pi,$ άρα $\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2$.

Για να γενικεύσουμε την έννοια της ορθογωνιότητας δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός 5</u>. Ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_i, ...$ σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι ένα ***<u>ορθογώνιο σύνολο</u>*** αν $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ για όλα τα i και

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0 \tag{30}$$

όταν $i \neq j$. Αν, επιπροσθέτως,

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1 \tag{31}$$

για κάθε i, το σύνολο είναι ***<u>ορθοκανονικό</u>***.

Έτσι ένα ορθογώνιο σύνολο είναι ένα σύνολο *αμοιβαία κάθετων μη μηδενικών* διανυσμάτων, ενώ ένα ορθο*κανονικό* σύνολο είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στο οποίο κάθε ένα από τα διανύσματα είναι μοναδιαίου μήκους. Χάριν συντομίας, για ορθοκανονικά σύνολα, οι εξισώσεις (30) και (31) γίνονται

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \text{ όπου } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ,\alpha\nu \quad i \neq j, \\ 1 & ,\alpha\nu \quad i = j. \end{cases} \tag{32}$$

Το σύμβολο δ_{ij} καλείται ***<u>δέλτα του Kronecker</u>***.

Επειδή πολλές φορές είναι πιο εύκολη η εργασία με μοναδιαία διανύσματα, απαιτείται να εισάγουμε ένα ορθοκανονικό αντί για ένα ορθογώνιο σύνολο. Γι' αυτό αντικαθιστούμε κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ σ' ένα ορθογώνιο σύνολο από το «κανονικοποιημένο» διάνυσμα $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ μοναδιαίου μήκους, οπότε το σύνολο που προκύπτει είναι προφανώς ορθοκανονικό.

Στον παραπάνω ορισμό πρέπει να τονίσουμε δύο σημεία. <u>Το πρώτο είναι ότι κάθε διάνυσμα σε ένα ορθογώνιο (ή ορθοκανονικό) σύνολο είναι μη μηδενικό. Το δεύτερο είναι ότι δεν έχουμε θέσει κάποιο περιορισμό στον αριθμό των διανυσμάτων σε τέτοια σύνολα</u>. Ειδικότερα, ένα ορθογώνιο σύνολο μπορεί να περιέχει ένα άπειρο αριθμό διανυσμάτων, όπως θα δούμε στα παρακάτω παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ορίζουμε ως *τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού* $2n+1$ μια έκφραση της μορφής

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx, \end{aligned} \tag{33}$$

όπου $a_0, \ldots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, και $a_n \neq 0$, ή $b_n \neq 0$, ή και τα δύο. Έστω ότι $\Im_n$ συμβολίζει το σύνολο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού $\leq 2n+1$, μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο. Κάνουμε το $\Im_n$ ένα Ευκλείδειο χώρο ορίζοντας πρόσθεση και βαθμωτό (αριθμητικό) πολλαπλασιασμό των τριγωνομετρικών πολυωνύμων κατά όρους, όπως με τα κοινά πολυώνυμα, και ένα εσωτερικό γινόμενο ως

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx\,. \tag{34}$$

Το σύνολο των συναρτήσεων

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx \tag{35}$$

είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στον $\Im_n$ αφού, για μη αρνητικούς ακεραίους m και n έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx \\ &= \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2(m-n)} \cdot 0 - \frac{1}{2(m+n)} \cdot 0 = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx \\ &= -\frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2(m-n)} \left\{ \cos(m-n)\pi - \cos\left[-(m-n)\pi\right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2(m+n)} \left\{ \cos(m+n)\pi - \cos\left[-(m+n)\pi\right] \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2(m-n)}\{\cos(m-n)\pi - \cos(m-n)\pi\}$$

$$-\frac{1}{2(m+n)}\{\cos(m+n)\pi - \cos(m+n)\pi\}$$

$$= -\frac{1}{2(m-n)}\cdot 0 - \frac{1}{2(m+n)}\cdot 0 = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx \qquad = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx$$

$$= -\frac{1}{4n}\cos 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4n}\cos 2n\pi + \frac{1}{4n}\cos(-2n\pi)$$

$$= -\frac{1}{4n}\cos 2n\pi + \frac{1}{4n}\cos 2n\pi = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m = n,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \qquad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\cdot 0 + \frac{1}{2(m+n)}\cdot 0 = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n,$$

δηλαδή

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \tag{36}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n.$$

Για να κανονικοποιήσουμε αυτό το σύνολο παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

και (37)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi, \quad \alpha\nu \ \ m > 0,$$

γιατί

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx \qquad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mx dx$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4m}\sin 2mx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2mxdx$$
$$= \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4m}\sin 2mx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\|1\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}dx\right)^{1/2} = (2\pi)^{1/2} = \sqrt{2\pi},$$

και για $n > 0$

$$\|\cos nx\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx\right)^{1/2} = \pi^{1/2} = \sqrt{\pi},$$
$$\|\sin nx\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\right)^{1/2} = \pi^{1/2} = \sqrt{\pi}.$$

Γι' αυτό το λόγο οι συναρτήσεις

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \qquad (38)$$

συγκροτούν ένα *ορθοκανονικό* σύνολο στον $\Im_n$.

<u>Παράδειγμα 3</u>. Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι το άπειρο σύνολο

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

είναι ορθογώνιο στο χώρο $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

Η σημαντικότερη κοινή ιδιότητα των ορθογωνίων, εξ' ου και των ορθοκανονικών, συνόλων είναι ότι <u>κάθε τέτοιο σύνολο σ' ένα διανυσματικό χώρο V είναι γραμμικά ανεξάρτητο</u>. Για ν' αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό με κάθε γενικότητα, <u>επεκτείνουμε τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας</u> έτσι ώστε να περιλαμβάνει *άπειρα* σύνολα, με τη συμφωνία ότι κάθε τέτοιο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν *κάθε ένα* από τα *πεπερασμένα* υποσύνολα του είναι γραμμικά ανεξάρτητο με την αρχική έννοια του όρου.

<u>Θεώρημα 3</u>. Κάθε ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων σ' ένα Ευκλείδειο χώρο V είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω ότι S είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στον V, και ας υποθέσουμε ότι

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}, \qquad (39)$$

με $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n$ στο S. Τότε, για κάθε δείκτη i, $1 \le i \le n$,

$$\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{x}_n\right)\cdot\mathbf{x}_i = \mathbf{0}\cdot\mathbf{x}_i = 0.$$

Αλλά εφόσον $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0$ όταν $i \ne j$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε απλούστερη μορφή ως

$$\alpha_i\left(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i\right) = 0,$$

και αφού $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i \ne 0$, προκύπτει ότι $\alpha_i = 0$. Έτσι κάθε ένας από τους συντελεστές στην ισότητα (40) είναι μηδέν, και επομένως το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ειδικότερα, προκύπτει το ακόλουθο χρήσιμο πόρισμα.

<u>Πόρισμα 1</u>. Ένα ορθογώνιο σύνολο είναι μια βάση για ένα n - διάστατο Ευκλείδειο χώρο αν και μόνο αν περιέχει n διανύσματα.

<u>Παράδειγμα 4</u>. Στο χώρο P_3 των πολυωνυμικών συναρτήσεων με πραγματικούς συντελεστές , και με εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx,$$

τα πολυώνυμα $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ είναι αμοιβαία ορθογώνια, γιατί

$$1\cdot x \qquad = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0,$$

$$1\cdot\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \qquad = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \left.\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]\right|_{-1}^{1} = 0,$$

και $$x\cdot\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_{-1}^{1} x\cdot\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{1}{3}x\right)dx = \left.\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6}\right]\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Έτσι, το σύνολο $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ είναι ένα ορθογώνιο σύνολο τριών διανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο P_3, και γι' αυτό το λόγο είναι μια βάση αυτού του χώρου.

<u>Παράδειγμα 5</u>. Είδαμε παραπάνω ότι οι συναρτήσεις

$$1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$$

είναι αμοιβαία ορθογώνιες στον $\Im_n$, το χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού $\le 2n+1$. Έτσι, αυτές οι συναρτήσεις συγκροτούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στον $\Im_n$. Επιπλέον, από την ισότητα (33) έχουμε ότι κάθε διάνυσμα σ' αυτό το χώρο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων, και επομένως αυτές αποτελούν μια *βάση* για τον $\Im_n$.

<u>Παράδειγμα 6</u>. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο παράδειγμα, η ορθογωνιότητα του συνόλου των συναρτήσεων

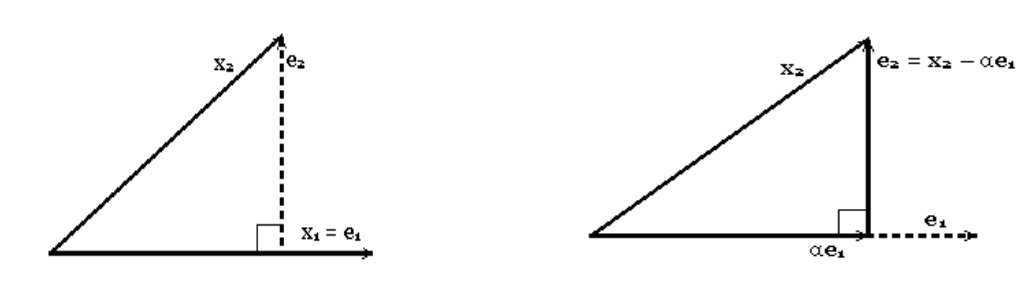
$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

στο χώρο $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ υποδηλώνει ότι αυτό το σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οποιαδήποτε $n+1$ διανύσματα σε ένα n - διάστατο χώρο είναι γραμμικά εξαρτημένα, συμπεραίνουμε ότι ο $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ είναι απειροδιάστατος χώρος.

<u>ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ</u>

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, κάθε ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό το αποτέλεσμα έχει μεγάλο ενδιαφέρον γιατί ένας Ευκλείδειος χώρος περιέχει «αρκετά» ορθογώνια διανύσματα , ώστε να μπορούμε να αντικαταστήσουμε ένα δεδομένο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο από ένα ισοδύναμο ορθογώνιο σύνολο. Αναλυτικότερα, σ' αυτή την υποενότητα <u>θα αποδείξουμε ότι οποιοδήποτε, πεπερασμένο ή άπειρο, γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο X σ' ένα Ευκλείδειο χώρο μπορεί να μετατραπεί σε ένα ορθογώνιο σύνολο που παράγει τον υπόχωρο $S(X)$</u>. Αυτή η διαδικασία λέγεται *ορθογωνιοποίηση* (*orthogonalization*) ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου, και έχει πολλές σημαντικές και χρήσιμες συνέπειες, που δεν περιορίζονται στις απλοποιήσεις των υπολογισμών με ορθογώνια διανύσματα (Kreider, Kuller, Ostberg & Perkins, 1966).

Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο της ορθογωνιοποίησης με δύο παραδείγματα. Το πρώτο προέρχεται από τον $\mathbb{R}^2$ όπου θεωρούμε ένα ζεύγος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Τότε τα $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ αποτελούν μια βάση για τον $\mathbb{R}^2$, και θέλουμε ν' αντικαταστήσουμε τα $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ με μια ορθογώνια βάση $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ που δομείται από τα $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ με κάποιο λογικό τρόπο. Όπως προκύπτει από το σχήμα 5, η πιο φυσική λύση αυτού του προβλήματος είναι να θέσουμε $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1$, και να υποθέσουμε ότι το $\mathbf{e}_2$ είναι η «συνιστώσα» του $\mathbf{x}_2$ που είναι κάθετη στο $\mathbf{x}_1$. Τότε $\alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2$, και έτσι γράφουμε το $\mathbf{e}_2$ στη μορφή $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha\mathbf{e}_1$.



Σχήμα 5.

Προσδιορίζουμε το α έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ορθογωνιότητας $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \\ &\left(\mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{e}_1\right) \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \end{aligned}$$

Αυτή η ισότητα δίνει την εξίσωση $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1 - \alpha\left(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1\right) = 0$, και συνεπώς η τιμή του α είναι

$$\alpha = \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}.$$

Μ' αυτό τον τρόπο, το $\mathbf{e}_2$ προσδιορίζεται συναρτήσει των $\mathbf{x}_1\left(=\mathbf{e}_1\right)$ και $\mathbf{x}_2$, δηλαδή

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1,$$

και η βάση $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ του $\mathbb{R}^2$ έχει ορθογωνιοποιηθεί.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Αν $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,1)$ και $\mathbf{x}_2 = (0,1)$, τότε

$$\alpha = \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \frac{(0,1)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)} = \frac{1}{2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 \quad &= \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{e}_1 \\ &= (0,1) - \frac{1}{2}(1,1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

και έτσι

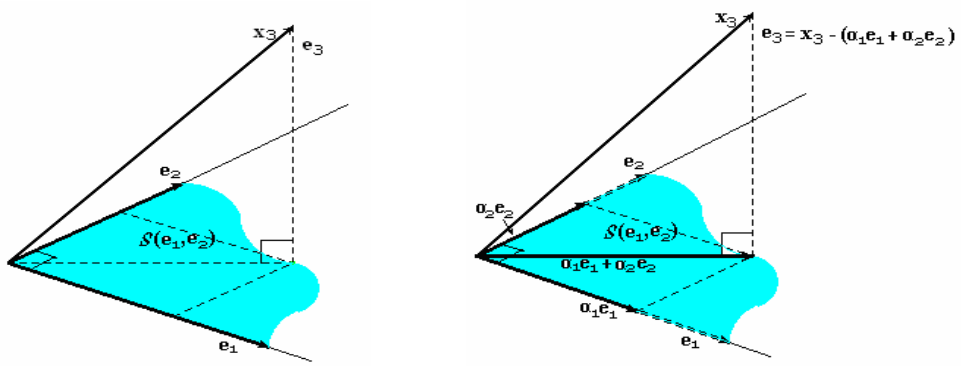
$$\mathbf{e}_1 = (1,1), \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ως δεύτερο παράδειγμα ορθογωνιοποιούμε μια αυθαίρετη βάση $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ στον $\mathbb{R}^3$. Η διαδικασία είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω

στον $\mathbb{R}^2$, και ξεκινάει επιλέγοντας $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1$. Στο δεύτερο βήμα προσδιορίζουμε το $\mathbf{e}_2$ σύμφωνα με το ζεύγος των εξισώσεων $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ και $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{e}_1$, που δίνει πάλι $\alpha = \dfrac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}$. Το $\mathbf{e}_2$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και τα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ανήκουν στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$. Γι' αυτό ο $S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ είναι υπόχωρος του $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Επιπλέον, εφόσον τα ορθογώνια διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ο υπόχωρος $S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ έχει την ίδια διάσταση με τον $S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Έτσι

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ σχηματίζουν μια βάση του $\mathbb{R}^3$, αυτή η ισότητα συνεπάγεται ότι το $\mathbf{x}_3$ δεν ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$. Από το σχήμα 6 είναι γεωμετρικά σαφές ότι η διαδικασία της



Σχήμα 6.

ορθογωνιοποίησης ολοκληρώνεται παίρνοντας ως $\mathbf{e}_3$ τη συνιστώσα του $\mathbf{x}_3$ που είναι κάθετη στον υπόχωρο $S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Τότε $(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3$, οπότε $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3 - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \alpha_2 \mathbf{e}_2$, και μετά βρίσκουμε τα α_1 και α_2 μέσω των συνθηκών ορθογωνιότητας $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Αυτές δίνουν το ζεύγος των εξισώσεων

$$0 = \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_1 - \alpha_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \text{ και } 0 = \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_2 - \alpha_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2),$$

απ' όπου προκύπτουν οι ισότητες

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} \text{ και } \alpha_2 = \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2},$$

οπότε

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2,$$

και έτσι ολοκληρώνεται η ορθογωνιοποίηση της βάσης $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Έστω $\mathbf{x}_1 = (1,1,0), \mathbf{x}_2 = (0,1,0), \mathbf{x}_3 = (1,1,1)$.

Τότε $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha\mathbf{e}_1$, και $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3 - \alpha_1\mathbf{e}_1 - \alpha_2\mathbf{e}_2$, όπου τα α, α_1, και α_2 υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\alpha = \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2}.$$

Τότε

$$\mathbf{e}_1 = (1,1,0),\ \alpha = \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \frac{1}{2},\ \alpha_1 = \frac{(1,1,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \frac{2}{2} = 1,$$

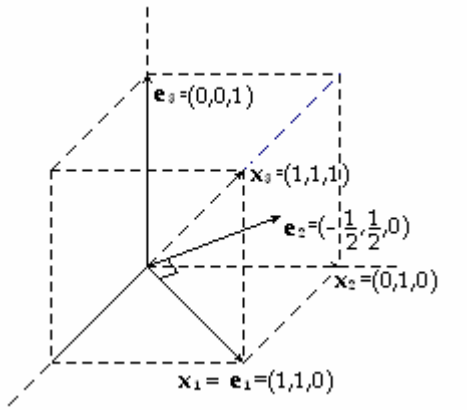
$$\mathbf{e}_2 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ \alpha_2 = \frac{(1,1,1)\cdot\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0,$$

και $\quad \mathbf{e}_3 = (1,1,1) - 1(1,1,0) - 0\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (0,0,1)$.

Επομένως $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$, και

$$\mathbf{e}_1 = (1,1,0), \qquad \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \qquad \mathbf{e}_3 = (0,0,1),$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.



Σχήμα 7.

Στη γενική περίπτωση απαιτείται να ορθογωνιοποιήσουμε ένα αυθαίρετο σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ σ' ένα Ευκλείδειο χώρο. Πρώτα θέτουμε $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1$, και μετά υποθέτουμε ότι $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{e}_1$, όπου το α είναι επιλεγμένο έτσι ώστε $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$. Από το ζεύγος των δύο τελευταίων εξισώσεων προσδιορίζεται το α ως $\alpha = \dfrac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}$, και η γραμμική ανεξαρτησία των $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ συνεπάγεται ότι $\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$. Περαιτέρω, με την ίδια επιχειρηματολογία που αναπτύχθηκε παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα $S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Απομένει να δείξουμε ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον βήμα προς βήμα. Η απόδειξη γίνεται με μαθηματική επαγωγή. Υποθέτουμε ότι έχουμε ήδη κατασκευάσει ένα ορθογώνιο σύνολο $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ από τα $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ έτσι ώστε $S(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = S(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Μετά, για να προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω, θέτουμε

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \alpha_2 \mathbf{e}_2 - \ldots - \alpha_n \mathbf{e}_n, \qquad (40)$$

και προσδιορίζουμε τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ έτσι ώστε το $\mathbf{e}_{n+1}$ να είναι ορθογώνιο με κάθε ένα από τα $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Από τις συνθήκες ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\
&\mathbf{e}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\mathbf{e}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_n = 0
\end{aligned}$$

και την ισότητα (40) οδηγούμαστε στις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_1 - \alpha_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 0, \\
&\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_2 - \alpha_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) = 0, \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_n - \alpha_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n) = 0,
\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια στις

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}, \alpha_2 = \frac{\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2}, \ldots, \alpha_n = \frac{\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n},$$

που σε συνδυασμό με την ισότητα (40) προσδιορίζουν το $\mathbf{e}_{n+1}$. Και πάλι η γραμμική ανεξαρτησία των $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n+1}$ συνεπάγεται ότι $\mathbf{e}_{n+1} \neq \mathbf{0}$, και, όπως πριν, μπορούμε να δείξουμε ότι $S(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_{n+1}) = S(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n+1})$. Έτσι αποδείχθηκε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

<u>Θεώρημα 4</u>. Έστω ότι $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...$ είναι ένα, πεπερασμένο ή άπειρο, σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σ' ένα Ευκλείδειο χώρο V. Τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο σύνολο $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...$ στον V τέτοιο ώστε για κάθε ακέραιο n, $S(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n) = S(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$. Επιπλέον, το $\mathbf{e}_n$ μπορεί να επιλεγεί σύμφωνα με τον κανόνα

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 \tag{41}$$

και

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \alpha_1\mathbf{e}_1 - \alpha_2\mathbf{e}_2 - ... - \alpha_n\mathbf{e}_n, \tag{42}$$

όπου

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{x}_{n+1}\cdot\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1}, \alpha_2 = \frac{\mathbf{x}_{n+1}\cdot\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2}, ..., \alpha_n = \frac{\mathbf{x}_{n+1}\cdot\mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n}. \tag{43}$$

Η διαδικασία της ορθογωνιοποίησης που περιγράφεται σ' αυτό το θεώρημα είναι γνωστή ως ***<u>μέθοδος ορθογωνιοποίησης των Gram – Schmidt</u>***.

<u>Παράδειγμα 3</u>. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της ορθογωνιοποίησης στο άπειρο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο των διανυσμάτων $1, x, x^2, ...$ στο χώρο των πολυωνύμων P με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την ισότητα

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx. \tag{44}$$

Η ορθογωνιοποίηση γίνεται ως εξής:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 = 1, \tag{i}$$

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \int_{-1}^{1} 1dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha\mathbf{e}_1 = x - \alpha, \tag{ii}$$

όπου $\alpha = \dfrac{\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} xdx = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$.

Έτσι

$$\mathbf{e}_2 = x,$$

$$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_3 - \alpha_1\mathbf{e}_1 - \alpha_2\mathbf{e}_2 = x^2 - \alpha_1 - \alpha_2 x\,, \qquad \text{(iii)}$$

όπου

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = \frac{1}{\frac{2}{3}}\int_{-1}^{1} x^2 x dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{3}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0\,.$$

Οπότε

$$\mathbf{e}_3 = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 &= \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)dx \\
&= \frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{9}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{45}, \\
\mathbf{e}_4 &= \mathbf{x}_4 - \alpha_1\mathbf{e}_1 - \alpha_2\mathbf{e}_2 - \alpha_3\mathbf{e}_3 \\
&= x^3 - \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}$$

όπου

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{x}_4\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{\mathbf{x}_4\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = \frac{1}{\frac{2}{3}}\int_{-1}^{1} x^3 x dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}, \\
\alpha_3 &= \frac{\mathbf{x}_4\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3} = \frac{1}{\frac{8}{45}}\int_{-1}^{1} x^3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \frac{45}{8}\int_{-1}^{1}\left(x^5 - \frac{1}{3}x^3\right)dx \\
&= \frac{45}{8}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{1}{3}\frac{x^4}{4}\right]\bigg|_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

Άρα $\mathbf{e}_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$, και συνεχίζοντας μ' αυτή τη μέθοδο παίρνουμε την ορθογώνια ακολουθία του P

$$1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x, x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \ldots. \qquad (45)$$

Αυτά τα πολυώνυμα με κατάλληλες πολλαπλασιαστικές σταθερές δίνουν τα γνωστά ***πολυώνυμα Legendre*** της Ανάλυσης, δηλαδή *τα πολυώνυμα Legendre είναι σταθερά πολλαπλάσια των ορθογώνιων πολυωνύμων της σχέσης (45)*. Άρα τα πολυώνυμα Legendre σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο στον P όταν το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από την ισότητα (44).

Μια από τις πολλές χρήσιμες συνέπειες του θεωρήματος 4 είναι και το παρακάτω χρήσιμο πόρισμα.

Πόρισμα 2. Κάθε πεπερασμένης διάστασης Ευκλείδειος χώρος έχει μια ορθογώνια βάση.

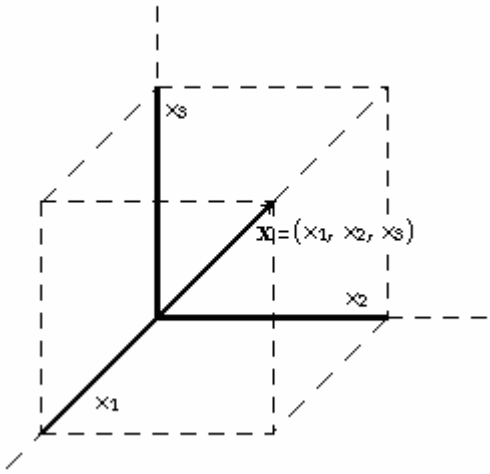
Αυτό το αποτέλεσμα απλοποιεί πολλούς υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, αν $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ είναι μια ορθοκανονική βάση σε ένα n- διάστατο Ευκλείδειο χώρο V, και αν $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα στον V, τότε αφού $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = \alpha_i$$

για κάθε ακέραιο i, $1 \le i \le n$. Έτσι κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ στον V μπορεί να γραφτεί μονοσήμαντα στη μορφή

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n, \qquad (46)$$

οπότε οι συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ ως προς μια ορθοκανονική βάση στον V είναι τα διάφορα εσωτερικά γινόμενα του $\mathbf{x}$ με τα διανύσματα βάσης. Με γεωμετρική ερμηνεία αυτό το συμπέρασμα υποδηλώνει ότι οι συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ είναι τα μήκη των προβολών του στους άξονες συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.



Σχήμα 8.

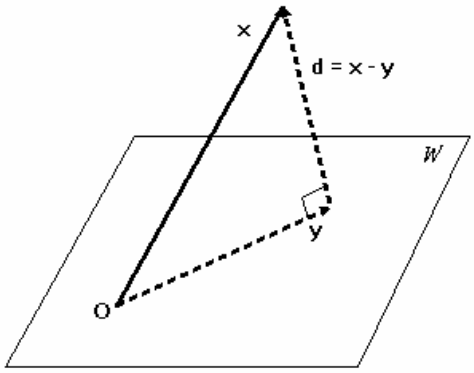
Τέλος, αν $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$ και $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n$ είναι δύο οποιαδήποτε διανύσματα στον V, το εσωτερικό γινόμενο τους είναι

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_n\beta_n . \qquad (47)$$

Λεκτικά, αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί λέγοντας ότι ***<u>το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σ' ένα πεπερασμένης διάστασης Ευκλείδειο χώρο είναι το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συνιστωσών τους όταν αυτές υπολογίζονται ως προς μια ορθοκανονική βάση για το χώρο</u>***.

<u>ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΕ ΥΠΟΧΩΡΟ</u>

Έστω ότι W είναι ένα επίπεδο που περνάει από την αρχή του $\mathbb{R}^3$, και έστω ότι $\mathbf{x}$ είναι ένα αυθαίρετο σημείο που δεν ανήκει στο W. Τότε, αν $\mathbf{y}$ συμβολίζει την κάθετη προβολή του $\mathbf{x}$ στο W, η *απόσταση από το* $\mathbf{x}$ *στο* W ορίζεται ως το μήκος του διανύσματος $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 9. Επιπλέον, το διάνυσμα



Σχήμα 9.

$\mathbf{y}$ είναι το *μοναδικό* διάνυσμα στο W τέτοιο ώστε το $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ να είναι κάθετο στο W. Υπενθυμίζουμε ότι ένα διάνυσμα είναι κάθετο ή ορθογώνιο σ' ένα υπόχωρο W ενός Ευκλείδειου χώρου αν είναι ορθογώνιο με κάθε διάνυσμα του W.

Σ' αυτή την υποενότητα θα γενικεύσουμε αυτές τις έννοιες σε αυθαίρετους Ευκλείδειους χώρους. Για να το επιτύχουμε απαιτούμε ο W να είναι ένας *πεπερασμένης διάστασης* υπόχωρος του χώρου V, και δεχόμαστε ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{d}$ είναι ορθογώνιο στον W αν και μόνο αν το $\mathbf{d}$ είναι ορθογώνιο με κάθε ένα από τα διανύσματα μιας βάσης του W. Ωστόσο, δεν θέτουμε κάποιο περιορισμό για τη διάσταση του V.

Αρχικά διαπιστώνουμε την ύπαρξη των κάθετων προβολών αποδεικνύοντας το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 5</u>. Έστω ότι ο W είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος ενός Ευκλείδειου χώρου V, και έστω ότι το $\mathbf{x}$ είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα στον V. Τότε το $\mathbf{x}$ μπορεί να αναλυθεί *μονοσήμαντα* ως

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{d}, \tag{48}$$

όπου το $\mathbf{y}$ είναι ένα διάνυσμα του W, και το $\mathbf{d}$ είναι κάθετο στον W.

<u>Απόδειξη</u>. Αφού ο W είναι πεπερασμένης διάστασης, εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2 και βρίσκουμε μια *ορθοκανονική βάση* $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ για τον W.Το διάνυσμα $\mathbf{y}$ της εξίσωσης (48), αν υπάρχει, πρέπει να είναι της μορφής

$$\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n, \tag{49}$$

και απομένει να δείξουμε ότι τα α_i μπορούν να προσδιοριστούν έτσι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ να είναι ορθογώνιο με κάθε ένα από τα διανύσματα βάσης $\mathbf{e}_i$. Το επιχείρημα που ακολουθεί είναι μια επανάληψη του $(n+1)$ βήματος στη μέθοδο ορθογωνιοποίησης των Gram – Schmidt που εφαρμόζεται στα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n,\mathbf{x}$. Αντικαθιστούμε την (49) στην (48) και παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n + \mathbf{d},\\ \mathbf{d} &= \mathbf{x} - \alpha_1\mathbf{e}_1 - ... - \alpha_n\mathbf{e}_n,\end{aligned}$$

μετά εφαρμόζουμε τη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_i = 0,\ \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

οπότε βρίσκουμε ότι

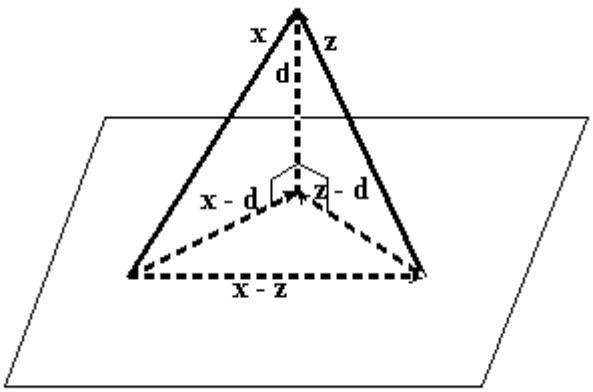
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_1 = 0\\ .\\ .\\ .\\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_n = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1 - \alpha_1 = 0\\ .\\ .\\ .\\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_n - \alpha_n = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1\\ .\\ .\\ .\\ \alpha_n = \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_n\end{array}\right\}. \tag{50}$$

Αυτό το σύνολο εξισώσεων προσδιορίζει το $\mathbf{y}$ *μονοσήμαντα* σε σχέση με το $\mathbf{x}$ και με τα διανύσματα βάσης $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ ως

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + ... + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n. \tag{51}$$

Προφανώς το διάνυσμα $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ είναι κάθετο στον W, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Τώρα θα δείξουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{d}$, το οποίο καλείται η ***συνιστώσα του*** $\mathbf{x}$ ***που είναι κάθετη στον*** W, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσει την απόσταση από το $\mathbf{x}$ στον W. Έστω ότι $\mathbf{z} \neq \mathbf{d}$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του V τέτοιο ώστε το $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ να ανήκει στον W, δηλαδή το $\mathbf{z}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διάνυσμα από τον W στο σημείο $\mathbf{x}$. Επειδή $\mathbf{z} - \mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{d}) - (\mathbf{x} - \mathbf{z})$, δηλαδή το $\mathbf{z} - \mathbf{d}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά δύο διανυσμάτων του W, συμπεραίνουμε ότι και αυτό ανήκει στον W, και εφόσον το $\mathbf{d}$ είναι κάθετο στον W, προκύπτει ότι το $\mathbf{z} - \mathbf{d}$ είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{d}$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{d}\|^2 + \|\mathbf{z} - \mathbf{d}\|^2$, και εφόσον



Σχήμα 10.

$\|\mathbf{z} - \mathbf{d}\| > 0$, συνεπάγεται ότι $\|\mathbf{z}\| > \|\mathbf{d}\|$. Με άλλα λόγια, ***απ' όλα τα διανύσματα*** $\mathbf{z}$ ***στον*** V ***που είναι τέτοια ώστε το*** $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ ***να ανήκει στον*** W***, το*** $\mathbf{d}$ ***είναι αυτό που έχει το μικρότερο μήκος***. Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται για να δικαιολογήσουμε τον παρακάτω ορισμό.

<u>Ορισμός 6</u>. Αν ο W είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος ενός Ευκλείδειου χώρου V, και το $\mathbf{x}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στον V, τότε ***η απόσταση από το*** $\mathbf{x}$ ***στον*** W είναι το μήκος της συνιστώσας του $\mathbf{x}$ που είναι κάθετη στον W.

Με την ορολογία αυτού του ορισμού μπορούμε να περιγράψουμε την κάθετη προβολή $\mathbf{x} - \mathbf{d}$ του $\mathbf{x}$ στον W ως εκείνο το σημείο του W που είναι το «πλησιέστερο» στο $\mathbf{x}$, με την έννοια ότι αν $\mathbf{w}$ είναι ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα στον W, τότε η $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|$ είναι μεγαλύτερη από την $\|\mathbf{d}\|$.

Η χρήση μιας ορθογώνιας βάσης του W διευκολύνει τους παραπάνω υπολογισμούς, αλλά δεν είναι αναγκαία. Γενικά, αν $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ είναι μια *αυθαίρετη*

βάση του W, και $\mathbf{d}$ είναι η συνιστώσα του $\mathbf{x}$ που είναι κάθετη στον W, τότε, επειδή το $\mathbf{x}-\mathbf{d}$ ανήκει στον W, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}-\mathbf{d} &= \alpha_1\mathbf{e}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n,\\ \mathbf{x} &= \mathbf{d}+\alpha_1\mathbf{e}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Επειδή το $\mathbf{d}$ είναι ορθογώνιο με κάθε ένα από τα $\mathbf{e}_i$, ισχύει ότι $\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_i=0$ για κάθε $1\le i\le n$, και έτσι οδηγούμαστε στο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1=\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_1+\alpha_1\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1\right)+\ldots+\alpha_n\left(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_1\right)\\ &\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2=\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_2+\alpha_1\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\right)+\ldots+\alpha_n\left(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_2\right)\\ &.\\ &.\\ &.\\ &\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_n=\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_n+\alpha_1\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_n\right)+\ldots+\alpha_n\left(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)\alpha_1+(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_2+\ldots+(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_n)\alpha_n=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{x}\\ &(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)\alpha_1+(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_2+\ldots+(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_n)\alpha_n=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{x}\\ &.\\ &.\\ &.\\ &(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_1)\alpha_1+(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_2+\ldots+(\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n)\alpha_n=\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{x}\end{aligned}\right\}\qquad(52)$$

με αγνώστους $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, οι οποίες πρέπει να επιλυθούν ώστε να βρούμε το $\mathbf{d}$. Από τα προηγούμενα αποτελέσματα γνωρίζουμε ότι το $\mathbf{d}$ καθορίζεται μονοσήμαντα από το $\mathbf{x}$ και τον W, οπότε συμπεραίνουμε ότι αυτό το σύστημα έχει *μοναδική* λύση. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους έχει μοναδική λύση *αν και μόνο αν* η ορίζουσα των συντελεστών του είναι διαφορετική από το μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_n\\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_n\\ & . & & .\\ & . & & .\\ & . & & .\\ \mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n\end{vmatrix}\neq 0.\qquad(53)$$

Αυτή η ορίζουσα είναι γνωστή ως η *ορίζουσα Gram* των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, και άρα σύμφωνα με το προηγούμενο επιχείρημα η ορίζουσα Gram n γραμμικά

ανεξάρτητων διανυσμάτων σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι πάντα διαφορετική από το μηδέν. Το αντίστροφο αυτού του ισχυρισμού αληθεύει επίσης, και έτσι έχουμε το

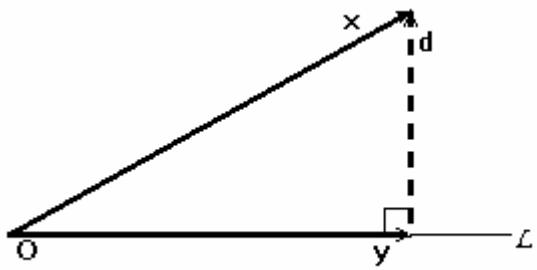
Θεώρημα 6. Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ σ' ένα Ευκλείδειο χώρο είναι γραμμικά ανεξάρτητα *αν και μόνο αν* η αντίστοιχη ορίζουσα Gram είναι διαφορετική από το μηδέν.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε πολλές ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 1. *Η απόσταση από ένα σημείο σε μια γραμμή*.

Έστω ότι το $\mathbf{x}$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα σ' ένα Ευκλείδειο χώρο, και έστω ότι L είναι η γραμμή που προσδιορίζεται από το μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{y}$, δηλαδή, ο L είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος που παράγεται από το $\mathbf{y}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση $\|\mathbf{d}\|$ από το $\mathbf{x}$ στην L.



Σχήμα 11.

Εφόσον το $\mathbf{y}$ παράγει τον L, μπορούμε να πάρουμε το ίδιο το $\mathbf{y}$ ως μια βάση για τον L. Μ' αυτό το δεδομένο, πρέπει να προσδιορίσουμε το α έτσι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}$ να είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{y}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\cdot\mathbf{y} &= 0, \\ (\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} &= 0, \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) &= 0, \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}), \end{aligned}$$

και

$$\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}.$$

Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\|\mathbf{d}\| &= (\mathbf{d}\cdot\mathbf{d})^{1/2}\\ &= \left[(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})\right]^{1/2}\\ &= \left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-2\alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+\alpha^2(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\right]^{1/2}\\ &= \left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}+\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

και έχουμε τον τύπο

$$\|\mathbf{d}\| = \left[\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\right]^{1/2} \qquad (54)$$

για την απόσταση από το $\mathbf{x}$ στη γραμμή που προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ σε οποιοδήποτε Ευκλείδειο χώρο.

Αυτός ο τύπος παίρνει μια ιδιαίτερα απλή μορφή στον $\mathbb{R}^2$. Γιατί αν $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ και $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$, τότε

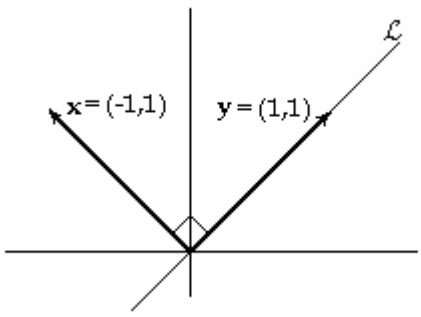
$$\begin{aligned}\|\mathbf{d}\| &= \left[\frac{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2}{y_1^2+y_2^2}\right]^{1/2}\\ &= \left[\frac{x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2-x_1^2y_1^2-2x_1y_1x_2y_2-x_2^2y_2^2}{y_1^2+y_2^2}\right]^{1/2}\\ &= \left[\frac{x_1^2y_2^2-2x_1y_2x_2y_1+x_2^2y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\right]^{1/2}\\ &= \left[\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{y_1^2+y_2^2}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί ως

$$\|\mathbf{d}\| = \frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}. \qquad (55)$$

Για παράδειγμα, η απόσταση από το σημείο $(-1,1)$ στη γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και προσδιορίζεται από το σημείο $(1,1)$ είναι

$$\|\mathbf{d}\| = \frac{|-1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$



Σχήμα 12.

Στον $\mathbb{R}^3$ ο τύπος για την απόσταση από ένα σημείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ στη γραμμή που προσδιορίζεται από το μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ δεν είναι τόσο απλός όσο είναι στον $\mathbb{R}^2$. Ένας ευθύς υπολογισμός που ξεκινάει από τη σχέση (54) δίνει τον παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{d}\| &= \left[\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\right]^{1/2} \\
&= \left[\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right]^{1/2} \\
&= \left[\frac{x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_3^2+x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2-2x_1y_1x_2y_2-2x_1y_1x_3y_3-2x_2y_2x_3y_3}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right]^{1/2} \\
&= \left[\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Ένας παρόμοιος τύπος μπορεί να αποδειχθεί και για τον $\mathbb{R}^n$, αλλά είναι προφανώς ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τον τύπο (54).

<u>Εφαρμογή 1</u>. Ζητείται να βρεθεί η κάθετη προβολή του διανύσματος $\mathbf{f}$ του χώρου $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ στον υπόχωρο W, όταν $f(x) = x$ και $W = S(1, \cos x, \sin x)$, και στη συνέχεια να υπολογιστεί η απόσταση από το διάνυσμα στον υπόχωρο.

Αν $\mathbf{d}$ είναι η συνιστώσα του $\mathbf{f}$ που είναι κάθετη στον W, τότε η κάθετη προβολή του $\mathbf{f}$ στον W είναι της μορφής $\mathbf{f} - \mathbf{d} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, όπου $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{1, \cos x, \sin x\}$ είναι μια ορθογώνια, αλλά όχι ορθοκανονική, βάση του W, εφόσον $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 2\pi$ και $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \pi$ (από τις σχέσεις (37)), και συνεπώς $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \sqrt{2\pi}$ και ομοίως $\|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = \sqrt{\pi}$. Επίσης,

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \sin\pi - \sin(-\pi) = 0,$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos(-\pi) = 0,$$

και λόγω της ισότητας $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4}\left[\cos 2\pi - \cos(-2\pi)\right] = 0,$$

οπότε το σύστημα (52) παίρνει τη μορφή

$$\left.\begin{aligned} 2\pi \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f} \\ 0 \cdot \alpha_1 + \pi \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f} \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \pi \cdot \alpha_3 &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f} \end{aligned}\right\}.$$

Εφόσον

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f} = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f} &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x)' dx \\ &= x \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (x)' \sin x dx \\ &= \pi \sin\pi + \pi \sin(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \cos\pi - \cos(-\pi) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f} &= \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = -\int_{-\pi}^{\pi} x(\cos x)' dx \\ &= -x \cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (x)' \cos x dx \\ &= -\left[\pi \cos\pi + \pi \cos(-\pi)\right] + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \\ &= -(-2\pi) + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi + \sin\pi - \sin(-\pi) = 2\pi, \end{aligned}$$

το παραπάνω σύστημα δίνει

$$\left.\begin{aligned} 2\pi \cdot \alpha_1 &= 0 \\ \pi \cdot \alpha_2 &= 0 \\ \pi \cdot \alpha_3 &= 2\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Άρα η ζητούμενη κάθετη προβολή του διανύσματος $\mathbf{f}$ στον υπόχωρο W είναι η συνάρτηση $g(x) = 2\sin x$, και η συνιστώσα του $\mathbf{f}$ που είναι κάθετη στον W είναι το διάνυσμα $\mathbf{d}$ με $d(x) = x - 2\sin x$. Κατά συνέπεια, η απόσταση από το διάνυσμα $\mathbf{f}$ στον υπόχωρο W υπολογίζεται ως εξής:

$$\|\mathbf{d}\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}(x-2\sin x)^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2-4x\sin x+4\sin^2 x\right)dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx - 4\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x dx + 4\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} - 4\cdot 2\pi + 4\pi\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} - 4\pi\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2\pi^3}{3} - 4\pi\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2\pi^3-12\pi}{3}}.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>. Οι συντελεστές Fourier του $f(x)$. Έστω ότι $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

και έστω ότι $\Im_n$ είναι ο $(2n+1)$- διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$, που περιέχει όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού $\le 2n+1$. Ζητείται να υπολογίσουμε την κάθετη προβολή μέσα στον $\Im_n$ οποιασδήποτε συνάρτησης f του $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$.

Από τον τύπο (33) αυτή η προβολή είναι της μορφής

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2 cos 2x + \ldots + a_n\cos nx$$
$$+b_1\sin x + b_2\sin 2x + \ldots + b_n\sin nx,$$

όπου $a_0,\ldots,b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, και $a_n \ne 0$, ή $b_n \ne 0$, ή και τα δύο, και πρέπει να προσδιορίσουμε τιμές για τα a_i και b_i έτσι ώστε το

$$\mathrm{d}(x) = f(x) - T(x)$$

να είναι ορθογώνιο με καθεμία από τις συναρτήσεις $1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos nx,\sin nx$.

Από τις συνθήκες ορθογωνιότητας με τα εσωτερικά γινόμενα έχουμε

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{d}(x)\cdot 1 & =0 \\ \mathrm{d}(x)\cdot\cos x & =0 \\ \mathrm{d}(x)\cdot\sin x & =0 \\ . & \\ . & \\ \mathrm{d}(x)\cdot\cos nx & =0 \\ \mathrm{d}(x)\cdot\sin nx & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]dx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]\cos xdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]\sin xdx & =0\\ . & \\ . & \\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]\cos nxdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]\sin nxdx & =0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{ll}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-\int_{-\pi}^{\pi}T(x)dx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx-\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\cos xdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx-\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\sin xdx & =0\\ . & \\ . & \\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx-\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\cos nxdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx-\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\sin nxdx & =0\end{array}\right\}.$$

Αλλά, από τις σχέσεις (36), για τους μη αρνητικούς ακεραίους m και n ισχύουν

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0,\qquad \alpha\nu\qquad m\neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0,\qquad \alpha\nu\qquad m\neq n,$$

και επειδή

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}\left[\sin n\pi-\sin(-n\pi)\right]=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}\left[\cos n\pi-\cos(-n\pi)\right]=0,$$

οι συναρτήσεις $1,\cos x,\cos 2x,\ldots,\cos nx,\sin x,\sin 2x,\ldots,\sin nx$ είναι αμοιβαία ορθογώνιες στον $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$, και έτσι έχουμε

$$\left.\begin{array}{ll}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx-\int_{-\pi}^{\pi}a_1\cos^2 xdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx-\int_{-\pi}^{\pi}b_1\sin^2 xdx & =0\\ . & \\ . & \\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx-\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nxdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx-\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin^2 nxdx & =0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{ll}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos xdx-a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx-b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx & =0\\ . & \\ . & \\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx-a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx & =0\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx-b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx & =0\end{array}\right\}.$$

Εφόσον $\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$, και $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx=\pi$, αν $m>0$, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2\frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} &&= 2\frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\
a_1 &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx} &&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx,\\
&. \\
&. \\
a_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx} &&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\\
b_1 &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx} &&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx,\\
&. \\
&. \\
b_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} &&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Αυτοί οι συντελεστές είναι γνωστοί ως οι <u>*συντελεστές Fourier*</u> της συνάρτησης f. <u>*Άρα η κάθετη προβολή κάθε συνάρτησης*</u> f <u>*του Ευκλείδειου χώρου*</u> $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ <u>στον υπόχωρο</u> $\mathfrak{I}_n$ <u>*είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*</u> T <u>*με συντελεστές τους συντελεστές Fourier της*</u> f.

<u>Εφαρμογή 2</u>. Ζητείται να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier (για όλες τις τιμές του n) της συνάρτησης $f(x)=e^x$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$.

Σύμφωνα με τους τύπους (57) του Παραδείγματος 2 έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx = \frac{1}{\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-\frac{1}{e^{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{e^{\pi}},
\end{aligned}
$$

άρα

$$a_0 = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}}.$$

Για κάθε n θετικό ακέραιο, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos nx\,dx$.

Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος θέτουμε $I=\int e^x \cos nx dx$ και εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x \cos nx dx = \int \left(e^x\right)' \cos nx dx \\
&= e^x \cos nx - \int e^x \left(\cos nx\right)' dx \\
&= e^x \cos nx + n\int e^x \sin nx dx \\
&= e^x \cos nx + n\int \left(e^x\right)' \sin nx dx \\
&= e^x \cos nx + n\left[e^x \sin nx - \int e^x \left(\sin nx\right)' dx\right] \\
&= e^x \cos nx + n\left[e^x \sin nx - n\int e^x \cos nx dx\right] \\
&= e^x \cos nx + ne^x \sin nx - n^2 \int e^x \cos nx dx \\
&= e^x \cos nx + ne^x \sin nx - n^2 I.
\end{aligned}$$

Επομένως ,

$$\begin{aligned}
I + n^2 I &= e^x \cos nx + ne^x \sin nx + c_1, \\
\left(1+n^2\right) I &= e^x \left(\cos nx + n\sin nx\right) + c_1,
\end{aligned}$$

οπότε

$$I = \frac{e^x \left(\cos nx + n\sin nx\right)}{1+n^2} + c\,,$$

όπου c, c_1 οι σταθερές ολοκλήρωσης, και επειδή $\cos n\pi = \cos\left(-n\pi\right) = \left(-1\right)^n$ και $\sin n\pi = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx &= \frac{1}{1+n^2}\left[e^x \left(\cos nx + n\sin nx\right)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{1+n^2}\left[e^{\pi}\left(\cos n\pi + n\sin n\pi\right) - e^{-\pi}\left(\cos\left(-n\pi\right) + n\sin\left(-n\pi\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+n^2}\left[e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos\left(-n\pi\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+n^2}\left[e^{\pi}\left(-1\right)^n - e^{-\pi}\left(-1\right)^n\right] \\
&= \frac{\left(-1\right)^n}{1+n^2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{1+n^2}\left(e^{\pi} - \frac{1}{e^{\pi}}\right) \\
&= \frac{\left(-1\right)^n}{1+n^2}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{e^{\pi}},
\end{aligned}$$

άρα

$$a_n = \frac{(-1)^n \left(e^{2\pi} - 1\right)}{\pi e^{\pi}\left(1+n^2\right)}.$$

Ομοίως για τον υπολογισμό του $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx$, θέτουμε $J = \int e^x \sin nx dx$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
J &= \int e^x \sin nx dx = \int \left(e^x\right)' \sin nx dx \\
&= e^x \sin nx - \int e^x \left(\sin nx\right)' dx \\
&= e^x \sin nx - n\int e^x \cos nx dx \\
&= e^x \sin nx - n\int \left(e^x\right)' \cos nx dx \\
&= e^x \sin nx - n\left[e^x \cos nx - \int e^x \left(\cos nx\right)' dx\right] \\
&= e^x \sin nx - ne^x \cos nx - n^2 \int e^x \sin nx dx \\
&= e^x \sin nx - ne^x \cos nx - n^2 J.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
J + n^2 J &= e^x \sin nx - ne^x \cos nx + c_2, \\
\left(1+n^2\right) J &= e^x \left(\sin nx - n\cos nx\right) + c_2,
\end{aligned}$$

οπότε

$$J = \frac{e^x \left(\sin nx - n\cos nx\right)}{1+n^2} + c_3,$$

όπου c_2, c_3 σταθερές, συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx &= \frac{1}{1+n^2}\left[e^x \left(\sin nx - n\cos nx\right)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{1+n^2}\left[e^{\pi}\left(\sin n\pi - n\cos n\pi\right) - e^{-\pi}\left(\sin\left(-n\pi\right) - n\cos\left(-n\pi\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+n^2}\left[-ne^{\pi}\cos n\pi + ne^{-\pi}\cos\left(-n\pi\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+n^2}\left[-ne^{\pi}\left(-1\right)^n + ne^{-\pi}\left(-1\right)^n\right] \\
&= \frac{n\left(-1\right)^n}{1+n^2}\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right) = \frac{n\left(-1\right)^n}{1+n^2}\left(\frac{1}{e^{\pi}} - e^{\pi}\right) \\
&= \frac{n\left(-1\right)^n}{1+n^2}\cdot\frac{1-e^{2\pi}}{e^{\pi}},
\end{aligned}$$

άρα

$$b_n = \frac{n(-1)^n\left(1-e^{2\pi}\right)}{\pi e^{\pi}\left(1+n^2\right)}.$$

Με την ορολογία του ορισμού της απόστασης ενός διανύσματος $\mathbf{x}$ του Ευκλείδειου χώρου V από τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο W του V, μπορούμε να πούμε ότι η κάθετη προβολή $T(x) = f(x) - \mathrm{d}(x)$ της f στον $\Im_n$ είναι εκείνο το στοιχείο του $\Im_n$ που είναι πλησιέστερο στην f, δηλαδή αν P είναι οποιοδήποτε άλλο πολυώνυμο στον $\Im_n$ τότε

$$\begin{aligned}
&\|f-P\| > \|\mathbf{d}\|,\\
&\|f-P\| > \|f-T\|,\\
&\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-P(x)\right]^2 dx\right)^{1/2} > \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]^2 dx\right)^{1/2},\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-P(x)\right]^2 dx > \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T(x)\right]^2 dx,
\end{aligned}$$

δηλαδή το T είναι εκείνο το πολυώνυμο του $\Im_n$ που ελαχιστοποιεί την $\|f-P\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-P(x)\right]^2 dx\right)^{1/2}$, για κάθε πολυώνυμο P του υπόχωρου $\Im_n$ του χώρου $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$. Γι' αυτό το λόγο λέμε ότι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο T είναι η *βέλτιστη προσέγγιση* στον $\Im_n$ για τη συνάρτηση f, με την έννοια ότι από όλες τις συναρτήσεις P που ανήκουν στον $\Im_n$, η T είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-P(x)\right]^2 dx. \qquad (58)$$

Η τιμή αυτού του ολοκληρώματος καλείται *μέση (απόλυτη) απόκλιση* (ή *μέση τετραγωνική απόκλιση*) της P από την f. Μ' αυτή την ορολογία, λέμε ότι *το T είναι εκείνο το τριγωνομετρικό πολυώνυμο του $\Im_n$ που έχει την ελάχιστη μέση απόκλιση από την f*. Γενικότερα, αν V είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, $\mathbf{x} \in V$ και W είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του V, τότε η κάθετη προβολή του $\mathbf{x}$ στον W είναι η βέλτιστη προσέγγιση του $\mathbf{x}$ στον W.

Εφαρμογή 3. Ζητείται να προσδιοριστεί η βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = \sin \pi x$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{C}[-1,1]$, στον υπόχωρο των πολυωνύμων 2ου βαθμού, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του χώρου.

Θεωρούμε τη βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{1, x, x^2\}$ του υπόχωρου των πολυωνύμων 2ου βαθμού, τότε η κάθετη προβολή του διανύσματος **f** σ' αυτόν είναι της μορφής $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$, και εφόσον έχουμε

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \int_{-1}^{1} dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2\,,$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0\,,$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\,,$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \int_{-1}^{1} x x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1} = 0\,,$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \int_{-1}^{1} x^2 x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\,,$$

και

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f} = \int_{-1}^{1} \sin \pi x = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{\pi}\cos \pi + \frac{1}{\pi}\cos(-\pi) = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f} &= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x(\cos \pi x)' \, dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left\{\left[x \cos \pi x\right]\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x)' \cos \pi x dx\right\} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\cos \pi + \cos(-\pi) - \int_{-1}^{1} \cos \pi x dx\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[-2 - \frac{1}{\pi}\sin \pi x\Big|_{-1}^{1}\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[-2 - \frac{1}{\pi}\left(\sin \pi - \sin(-\pi)\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}(-2) \\
&= \frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f} &= \int_{-1}^{1} x^2 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x^2 (\cos \pi x)' \, dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2 \cos \pi x\right]\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2)' \cos \pi x dx\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}\left[\cos\pi - \cos(-\pi) - 2\int_{-1}^{1} x\cos\pi x dx\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x(\sin\pi x)' \, dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left\{\left[x\sin\pi x\right]\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(x)'\sin\pi x dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left[\sin\pi + \sin(-\pi) - \int_{-1}^{1}\sin\pi x dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi^3}\cos\pi x\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{\pi^3}\left(\cos\pi - \cos(-\pi)\right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

το σύστημα (52) γίνεται

$$
\left.\begin{aligned}
2\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \frac{2}{3}\cdot\alpha_3 &= 0 \\
0\cdot\alpha_1 + \frac{2}{3}\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 &= \frac{2}{\pi} \\
\frac{2}{3}\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \frac{2}{5}\cdot\alpha_3 &= 0
\end{aligned}\right\}.
$$

Άρα $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{3}{\pi}, \alpha_3 = 0$, οπότε η βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = \sin\pi x$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{C}[-1,1]$ στον υπόχωρο των πολυωνύμων 2^{ου} βαθμού είναι η κάθετη προβολή του διανύσματος **f** σ' αυτόν, δηλαδή η συνάρτηση $g(x) = \frac{3}{\pi}x$.

ΙΙΙ. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΧΩΡΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Σ' ένα χώρο με νόρμα μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε διανύσματα με βαθμωτά μεγέθη, όπως στη στοιχειώδη Διανυσματική Άλγεβρα. Επίσης, η νόρμα σ' ένα τέτοιο χώρο γενικεύει τη βασική έννοια του μήκους ενός διανύσματος. Εντούτοις, αυτό που θέλουμε είναι ένα ανάλογο του γνώριμου εσωτερικού γινομένου $a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ και τύπους που προκύπτουν απ' αυτόν, ιδιαιτέρα τον τύπο $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$ και τη συνθήκη για την ορθογωνιότητα (καθετότητα) $a \cdot b = 0$ που είναι σημαντικά εργαλεία σε πολλές εφαρμογές. Έτσι προκύπτει το ερώτημα πότε το εσωτερικό γινόμενο και η ορθογωνιότητα μπορούν να γενικευτούν από το δισδιάστατο επίπεδο και τον τρισδιάστατο χώρο σε αυθαίρετους απειροδιάστατους χώρους. Πράγματι, αυτό μπορεί να γίνει και να οδηγήσει σε <u>*χώρους με εσωτερικό γινόμενο*</u> και σε <u>*πλήρεις χώρους με εσωτερικό γινόμενο*</u>, που καλούνται <u>*χώροι Hilbert*</u> (**Kreyszig & Wiley**, 1978).

<u>*Οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι ειδικοί χώροι με νόρμα και ιστορικά είναι παλαιότεροι από τους γενικούς χώρους με νόρμα*</u>. Η θεωρία τους είναι πιο πλούσια και διατηρεί πολλά χαρακτηριστικά του Ευκλείδειου χώρου, με κεντρική έννοια την ορθογωνιότητα. Στην πραγματικότητα, οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι η πιο φυσική γενίκευση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ (**Αργυρός**, 2004). Ένας <u>*χώρος με εσωτερικό γινόμενο*</u> X είναι ένας διανυσματικός χώρος με <u>*εσωτερικό γινόμενο*</u> $\langle x, y \rangle$ που ορίζεται σ' αυτόν, το οποίο γενικεύει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο, και χρησιμοποιείται για να ορίσει μια <u>*νόρμα*</u> $\|\cdot\|$ ως $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ και την <u>*ορθογωνιότητα*</u> από τη σχέση $\langle x, y \rangle = 0$. Ως εκ τούτου, η γεωμετρία αυτών των χώρων είναι όμοια μ' αυτή των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$. Ένας <u>*χώρος Hilbert*</u> H είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο – ένας αφηρημένος διανυσματικός χώρος όπου μπορούμε να μετρήσουμε αποστάσεις και γωνίες – που είναι πλήρης, δηλαδή αν μια ακολουθία διανυσμάτων είναι Cauchy, τότε συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου.

Η θεωρία των χώρων με εσωτερικό γινόμενο και των χώρων Hilbert είναι πιο πλούσια απ' αυτή των γενικών χώρων με νόρμα και των χώρων Banach. Μερικά από

τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα τους είναι οι αναπαραστάσεις του H ως ευθύ άθροισμα ενός κλειστού υπόχωρου και του *ορθογώνιου συμπλήρωματος* του, τα *ολικά ορθοκανονικά σύνολα και ακολουθίες* και οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις των στοιχείων του H. Επιπλέον είναι μοναδικοί εφόσον όλοι οι χώροι Hilbert με την ίδια τοπολογική διάσταση ταυτίζονται. Έτσι, όλοι οι διαχωρίσιμοι απειροδιάστατοι χώροι Hilbert είναι ισομετρικοί μεταξύ τους (Kreyszig & Wiley, 1978).

Οι πρώτοι χώροι Hilbert μελετήθηκαν την πρώτη δεκαετία του 20ου αιώνα από τους *David Hilbert*, *Erhard Schmidt* και *Frigyes Riesz*. Την εποχή εκείνη παράλληλες εξελίξεις οδήγησαν στην εισαγωγή των χώρων Hilbert. Η *πρώτη* ήταν η παρατήρηση των Hilbert και Schmidt κατά τη μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων ότι δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[a,b]$ έχουν *εσωτερικό γινόμενο* (inner product) $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ που έχει πολλές από τις γνωστές ιδιότητες του Ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου, και ειδικότερα, ότι έχει νόημα η ιδέα μιας ορθογώνιας οικογένειας συναρτήσεων. Η *δεύτερη* εξέλιξη ήταν το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη συνεχείς συναρτήσεις, μια εναλλακτική λύση στο ολοκλήρωμα Riemann, που παρουσιάστηκε από τον *Henri Lebesgue* το 1904. Το 1907, οι Riesz και *Ernst Sigismund Fischer* απέδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας απ' τον άλλο, ότι ο χώρος L^2 των τετραγωνικά Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ως συνέπεια της αλληλεπίδρασης μεταξύ Γεωμετρίας και πληρότητας, *τα αποτελέσματα του 19ου αιώνα των Joseph Fourier, Friedrich Bessel και Marc – Antoine Parseval στις τριγωνομετρικές σειρές* εύκολα *μεταφέρθηκαν σ' αυτούς τους πιο γενικούς χώρους*, καταλήγοντας στο γνωστό ως θεώρημα των Riesz – Fischer. *Στις αρχές του 20ου αιώνα* αποδείχθηκαν και άλλα βασικά αποτελέσματα, όπως το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz από τους *Maurice Fréchet* και Riesz το 1907 (**Berberian**, 1961).

Ο *John von Neumann* επινόησε πρώτος τον όρο *αφηρημένος χώρος Hilbert* στη φημισμένη εργασία του επί των μη φραγμένων ερμιτιανών τελεστών. Ο von Neumann ήταν ίσως ο μαθηματικός που αναγνώρισε πιο ξεκάθαρα τη σημαντικότητα τους ως αποτέλεσμα μιας εργασίας του επί της μαθηματικής θεμελίωσης της Κβαντικής Μηχανικής (1927), όπου *έδωσε* και *τον αξιωματικό ορισμό του χώρου Hilbert*. Αυτός ο ορισμός περιλάμβανε τη διαχωρισιμότητα, μια συνθήκη που αργότερα αφαιρέθηκε από τον ορισμό όταν, το 1934, οι *H.Löwig*, *F.Rellich*, και Riesz απέδειξαν ότι αυτή η συνθήκη ήταν ένας μη αναγκαίος περιορισμός για το

μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας. Η ονομασία «χώρος Hilbert» υιοθετήθηκε σύντομα και από άλλους, όπως για παράδειγμα από τον *Hermann Weyl* σε βιβλίο του για την Κβαντομηχανική (Berberian, 1961).

Οι χώροι Hilbert έχουν εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και της Φυσικής, ως απειροδιάστατοι χώροι συναρτήσεων. Είναι απαραίτητα εργαλεία στις θεωρίες όχι μόνο της Κβαντομηχανικής αλλά και της Μαθηματικής Φυσικής, των μερικών διαφορικών εξισώσεων, της Ανάλυσης Fourier με εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος, και της εργοδικής θεωρίας που αποτελεί το μαθηματικό υπόβαθρο της μελέτης της Θερμοδυναμικής. Αυτοί οι χώροι είναι, μέχρι σήμερα, οι πιο χρήσιμοι χώροι σε πρακτικές εφαρμογές της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Εκτός από τους κλασικούς Ευκλείδειους χώρους, παραδείγματα χώρων Hilbert περιλαμβάνουν χώρους τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, χώρους ακολουθιών, χώρους Sobolev γενικευμένων συναρτήσεων και χώρους Hardy ολόμορφων συναρτήσεων (Αργυρός, 2004).

Πολλές από τις εφαρμογές των χώρων Hilbert αξιοποιούν το γεγονός ότι αυτοί οι χώροι *γενικεύουν απλές γεωμετρικές έννοιες*. Πράγματι, η γεωμετρική διαίσθηση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές πλευρές της θεωρίας των χώρων Hilbert, για παράδειγμα, ισχύουν σχέσεις ανάλογες του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του νόμου του παραλληλογράμμου. Σε βαθύτερο επίπεδο, η κάθετη προβολή σ' ένα υπόχωρο εξυπηρετεί σημαντικά την οπτικοποίηση προβλημάτων και άλλων πλευρών της θεωρίας. Επιπλέον, και σε αναλογία με τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο, κάθε στοιχείο ενός χώρου Hilbert μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο από τις συντεταγμένες του ως προς μια ορθοκανονική ακολουθία. Τέλος, ο γεωμετρικός συμβολισμός και η ορολογία που χρησιμοποιούνται είναι ανάλογοι μ' αυτούς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και επινοήθηκαν από τους Schmidt (1908) και *Kowalewski* (Kreyszig & Wiley, 1978).

ΧΩΡΟΣ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ – ΧΩΡΟΣ HILBERT

Οι χώροι που θα μελετηθούν σ' αυτή την ενότητα ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 1 (Χώρος με εσωτερικό γινόμενο, Χώρος Hilbert). Ένας *χώρος με εσωτερικό γινόμενο* (*pre – Hilbert space*) είναι ένας διανυσματικός χώρος X μ' ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στον X. Ένας *χώρος Hilbert* είναι ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή πλήρης στη μετρική που επάγεται από το

εσωτερικό γινόμενο. Ένα **εσωτερικό γινόμενο** *στον* X είναι μια απεικόνιση του $X \times X$ μέσα στο σώμα K του X, δηλαδή $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to K$, τέτοια ώστε κάθε ζεύγος διανυσμάτων $(x, y) \in X \times X$ να συσχετίζεται μ' ένα μονόμετρο μέγεθος το οποίο γράφεται $\langle x, y \rangle$ και καλείται *εσωτερικό γινόμενο* (*inner product*) [ή *βαθμωτό γινόμενο* (*scalar product*), αλλά αυτό δεν πρέπει να συγχέεται με το γινόμενο ενός διανύσματος επί ένα μονόμετρο μέγεθος σ' ένα διανυσματικό χώρο] των x και y, έτσι ώστε για όλα τα διανύσματα x και y, και τα μονόμετρα μεγέθη α να έχουμε

I. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

II. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

III. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

IV. $\begin{cases} \langle x, x \rangle \geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$

Τότε το ζεύγος $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ονομάζεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο** (inner product space) και συμβολίζεται με X, όταν δεν απαιτείται σαφής αναφορά στο εσωτερικό γινόμενο. Στην ισότητα (***III***), ο $\overline{\langle y, x \rangle}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του $\langle y, x \rangle$. Κατά συνέπεια, αν ο X είναι ένας *πραγματικός* διανυσματικός χώρος ($K = \mathbb{R}$), έχουμε απλά τη σχέση $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (*Συμμετρία*).

Ένα εσωτερικό γινόμενο στον X ορίζει μια *νόρμα* του X που δίνεται από τη σχέση

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\,, \tag{1}$$

και μια *μετρική* στον X που δίνεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}\,. \tag{2}$$

Συνεπώς, *οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι χώροι με νόρμα, και οι χώροι Hilbert είναι χώροι Banach.*

Η (1) ορίζει μια νόρμα γιατί

$\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$, λόγω της (***IV***),

$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, λόγω της (***IV***),

$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in K$ και $\forall x \in X$,

εφόσον από τις ιδιότητες (***II***) και (***III***) του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \langle x, \alpha x \rangle = \alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2\,,$$

και, τέλος, ισχύει $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα) .

Από την (***I***) ως την (***III***) παίρνουμε τους τύπους

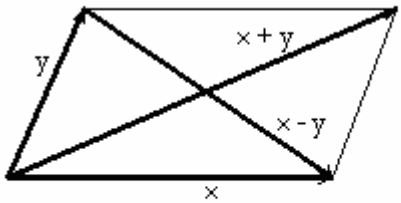
$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \\ &\text{b)} \quad \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle \\ &\text{c)} \quad \langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

$\forall x, y, z \in X$ και $\alpha, \beta \in K$. Η (3a) δείχνει ότι ο εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό στον πρώτο παράγοντα. Εφόσον στην (3c) έχουμε μιγαδικούς συζυγείς $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ στα δεξιά, λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι *γραμμικός συζυγής* (*conjugate linear*) στον δεύτερο παράγοντα. Εκφράζοντας και τις δύο ιδιότητες μαζί, λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι « $1\frac{1}{2}$ φορές γραμμικό» (*sesquilinear*) και αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι ο όρος «γραμμικός συζυγής» είναι επίσης γνωστός ως «ημιγραμμικός» (semilinear ή halflinear).

Αποδεικνύεται ότι μια νόρμα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί το **νόμο του παραλληλογράμμου** (parallelogram equality), δηλαδή, αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε $\forall x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{4}$$

Αυτή η ονομασία προέρχεται από τη στοιχειώδη Γεωμετρία, όπως φαίνεται και στο σχήμα 13, εφόσον η νόρμα γενικεύει τη στοιχειώδη έννοια του μήκους ενός διανύσματος. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι αν μια νόρμα δεν ικανοποιεί



Παραλληλόγραμμο με πλευρές x και y στο επίπεδο

Σχήμα 13.

την ισότητα (4), δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο με χρήση της (1). Γι' αυτό λέμε ότι *όλοι οι χώροι με νόρμα δεν είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο*.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τη βασική έννοια της ορθογωνιότητας (orthogonality). Γνωρίζουμε ότι αν το εσωτερικό γινόμενο (dot product) δύο διανυσμάτων σε τρισδιάστατους χώρους είναι μηδέν, τα διανύσματα είναι ορθογώνια, που σημαίνει ότι είναι κάθετα ή ότι ένα τουλάχιστον απ' αυτά είναι το μηδενικό διάνυσμα. Απ' αυτό προέρχεται και δικαιολογείται ο ακόλουθος ορισμός:

<u>Ορισμός 2 (Ορθογωνιότητα)</u>. Ένα στοιχείο x ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X λέγεται *ορθογώνιο* μ' ένα στοιχείο $y \in X$ αν $\langle x, y \rangle = 0$. Επίσης λέμε ότι *τα* x *και* y *είναι ορθογώνια* , και γράφουμε $x \perp y$. Παρομοίως, για υποσύνολα $A, B \subset X$ γράφουμε $x \perp A$ αν $x \perp a$ για όλα τα $a \in A$, και $A \perp B$ αν $a \perp b$ για όλα τα $a \in A$ και όλα τα $b \in B$.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \ldots + \xi_n \eta_n \qquad (5)$$

όπου $x = \left(\xi_j\right) = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$ και $y = \left(\eta_j\right) = \left(\eta_1, \ldots, \eta_n\right)$. Από την (5) παίρνουμε $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\right)^{1/2}$ και απ' αυτήν η Ευκλείδεια μετρική ορίζεται ως

$$d\left(x, y\right) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \left[\left(\xi_1 - \eta_1\right)^2 + \ldots + \left(\xi_n - \eta_n\right)^2\right]^{1/2}.$$

Αν $n = 3$, ο τύπος (5) δίνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$$

των $x = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$ και $y = \left(\eta_1, \eta_2, \eta_3\right)$, και η ορθογωνιότητα $\langle x, y \rangle = x \cdot y = 0$ συμπίπτει με τη στοιχειώδη έννοια της καθετότητας.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ο μοναδιαίος χώρος $\mathbb{C}^n$. Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που δίνεται από την ισότητα

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \overline{\eta_1} + \ldots + \xi_n \overline{\eta_n}, \qquad (6)$$

όπου $x = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$, $y = \left(\eta_1, \ldots, \eta_n\right) \in \mathbb{C}^n$, είναι χώρος Hilbert. Από την (6) παίρνουμε τη νόρμα που ορίζεται από την ισότητα

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\xi_1 \overline{\xi_1} + \ldots + \xi_n \overline{\xi_n}\right)^{1/2} = \left(\left|\xi_1\right|^2 + \ldots + \left|\xi_n\right|^2\right)^{1/2}.$$

<u>Παράδειγμα 3</u>. Ο χώρος $L^2\left[a, b\right]$. Ο διανυσματικός χώρος όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο $\left[a, b\right]$ γίνεται ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\,, \qquad (7)$$

από την οποία παίρνουμε τη νόρμα $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b \left[x(t)\right]^2 dt\right)^{1/2}$. Σε συγκεκριμένες εφαρμογές δεν περιοριζόμαστε σε πραγματικές συναρτήσεις αλλά θεωρούμε *μιγαδικές συναρτήσεις* με $t \in [a,b]$, όπως προηγουμένως. Αυτές οι συναρτήσεις σχηματίζουν ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο, ο οποίος γίνεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν ορίσουμε

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt \qquad (7^*)$$

όπου $\overline{y(t)}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του $y(t)$. Η νόρμα ορίζεται από την ισότητα $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b x(t)\overline{x(t)}dt\right)^{1/2}$, δηλαδή από την $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

Ο μετρικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την (7) δεν είναι πλήρης. Η πλήρωση αυτού του χώρου είναι ο πραγματικός χώρος $L^2[a,b]$. Παρομοίως, η πλήρωση του μιγαδικού διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την (7^*) καλείται *μιγαδικός χώρος* $L^2[a,b]$. Παρακάτω θ' αποδείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να επεκταθεί από ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο στην πλήρωση του, που σημαίνει ότι ο $L^2[a,b]$ είναι χώρος Hilbert.

<u>Παράδειγμα 4</u>. Ο χώρος l^p. Έστω $p \geq 1$ ένας καθορισμένος πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθιών $l^p = \{x = (\xi_i) = (\xi_1, ..., \xi_n, ...)\}$, τέτοιων ώστε το άθροισμα $|\xi_1|^p + ... + |\xi_n|^p + ...$ να συγκλίνει. Έτσι $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$, και το σύνολο l^p εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις κατά συντεταγμένη, είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα $\|x\| := \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$. Η μετρική σ' αυτό το χώρο ορίζεται από την ισότητα

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p},$$

όπου $x = (\xi_i) = (\xi_1, ..., \xi_n, ...)$, $y = (\eta_i) = (\eta_1, ..., \eta_n, ...)$ με $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ και $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p < \infty$.

<u>Πρόταση 1</u>. Ο χώρος l^p με $p \neq 2$ δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και ως εκ τούτου δεν είναι χώρος Hilbert .

<u>Απόδειξη</u>. Ο ισχυρισμός μας σημαίνει ότι η νόρμα του l^p με $p \neq 2$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο. Αυτό αποδεικνύεται δείχνοντας ότι η νόρμα δεν ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου. Πράγματι, έστω ότι $x = (1,1,0,0,...) \in l^p$ και $y = (1,-1,0,0,...) \in l^p$. Τότε $x + y = (2,0,0,0,...)$ και $x - y = (0,2,0,0,...)$ οπότε έχουμε $\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$, $\|x+y\| = \|x-y\| = 2$ και βλέπουμε ότι η ισότητα $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ δεν ικανοποιείται αν $p \neq 2$, γιατί

$$2^3 = 2\left(2^{2/p} + 2^{2/p}\right) \Leftrightarrow 2^3 = 2^{\frac{2}{p}+2} \Leftrightarrow \frac{2}{p} + 2 = 3 \Leftrightarrow p = 2 .$$

Ο l^p είναι πλήρης χώρος. Γι' αυτό *ο* l^p *με* $p \neq 2$ *είναι χώρος Banach που δεν είναι χώρος Hilbert* .

<u>Παράδειγμα 5</u>. ***Ο χώρος Hilbert*** l^2. Ο χώρος l^2 είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j} , \qquad (8)$$

που αποτελεί γενίκευση της (6), όπου $x = (\xi_j) = (\xi_1,...,\xi_n,...)$, $y = (\eta_j) = (\eta_1,...,\eta_n,...)$ και $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2 < \infty$. Η σύγκλιση αυτής της σειράς προκύπτει από την ανισότητα Cauchy – Schwarz , και από το γεγονός ότι $x, y \in l^2$, από την υπόθεση. Η νόρμα ορίζεται από την ισότητα $\|x\| := \|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\xi_j} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2}$.

Ο l^2 είναι το αρχέτυπο ενός χώρου Hilbert. Παρουσιάστηκε και ερευνήθηκε από τον Hilbert (1912) στην εργασία του επί των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

<u>Παράδειγμα 6</u>. ***Ο χώρος*** $\mathbb{C}[a,b]$.

<u>Πρόταση 2</u>. Ο χώρος $\mathbb{C}[a,b]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ($a < b$) δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και ως εκ τούτου δεν είναι χώρος Hilbert .

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η νόρμα που ορίζεται από την ισότητα $\|x\| := \|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ δεν επάγεται από εσωτερικό γινόμενο εφόσον αυτή η νόρμα δεν ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου. Πράγματι, αν πάρουμε $x(t)=1$ και $y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$, έχουμε $\|x\|=\|y\|=1$ και

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a},$$
$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a},$$

οπότε είναι $\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=1$, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5\neq 4=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, άρα δεν ικανοποιείται ο νόμος του παραλληλογράμμου.

Μέχρι τώρα είδαμε ότι σ' ένα εσωτερικό γινόμενο αντιστοιχεί μια νόρμα που δίνεται από την ισότητα $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. Αντίστροφα, μπορούμε να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο από την αντίστοιχη νόρμα. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι για ένα πραγματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) \qquad (9)$$

και ότι για ένα μιγαδικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle x,y\rangle&=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\\ \mathrm{Im}\langle x,y\rangle&=\frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\right)\end{aligned} \quad (\textbf{polarization identity}). \qquad (10)$$

Άλλες ιδιότητες των χώρων με εσωτερικό γινόμενο είναι η τριγωνική ανισότητα, η ανισότητα Schwarz και η συνέχεια του εσωτερικού γινομένου.

Λήμμα 1. Ένα εσωτερικό γινόμενο και η επαγόμενη νόρμα ικανοποιούν την ανισότητα Schwarz και την τριγωνική ανισότητα ως εξής:

a) Έχουμε

$$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\| \qquad (\textbf{ανισότητα Schwarz}) \qquad (11)$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το $\{x,y\}$ είναι ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο.

b) Αυτή η νόρμα ικανοποιεί επίσης την

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\| \qquad (\textbf{τριγωνική ανισότητα}) \qquad (12)$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y=0$ ή $x=cy$, όπου ο c είναι πραγματικός μη αρνητικός αριθμός.

<u>Απόδειξη</u>.

a) Αν $y=0$ τότε $\langle x,0\rangle=0$, οπότε ισχύει η (11). Έστω $y\neq 0$. Για κάθε αριθμητικό μέγεθος α έχουμε

$$\begin{aligned} 0\le \|x-\alpha y\|^2 &= \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \\ &= \langle x, x-\alpha y\rangle - \alpha\langle y, x-\alpha y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\left[\langle y,x\rangle - \overline{\alpha}\langle y,y\rangle\right]. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\overline{\alpha}=\langle y,x\rangle/\langle y,y\rangle$ η έκφραση $\langle y,x\rangle-\overline{\alpha}\langle y,y\rangle$ είναι μηδέν και η προηγουμένη ανισότητα γίνεται

$$0\le \langle x,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle = \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} 0 &\le \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ \|y\|^2\cdot 0 &\le \|y\|^2\cdot\|x\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 \\ |\langle x,y\rangle|^2 &\le \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \\ \sqrt{|\langle x,y\rangle|^2} &\le \sqrt{\|x\|^2\cdot\|y\|^2} \\ |\langle x,y\rangle| &\le \|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$y=0 \text{ ή } \|x-\alpha y\|^2=0 \Leftrightarrow x-\alpha y=0 \Leftrightarrow x=\alpha y$$

που αποδεικνύει ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το $\{x,y\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο.

b) Έχουμε

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Schwarz $|\langle x,y\rangle| = |\langle y,x\rangle| \le \|x\|\|y\|$, και συνεπώς από την τριγωνική ανισότητα γι' αριθμούς παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2\\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= \left(\|x\|+\|y\|\right)^2.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\le \left(\|x\|+\|y\|\right)^2\\ \sqrt{\|x+y\|^2} &\le \sqrt{\left(\|x\|+\|y\|\right)^2}\\ \|x+y\| &\le \|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle &= 2\|x\|\|y\|\\ \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} &= 2\|x\|\|y\|\\ 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle &= 2\|x\|\|y\|\\ \mathrm{Re}\langle x,y\rangle &= \|x\|\|y\|,\end{aligned}$$

και λόγω της $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \ge |\langle x,y\rangle|$, και επειδή $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle|$, πρέπει $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$, δηλαδή $\|x\|\|y\| = |\langle x,y\rangle|$, οπότε συνεπάγεται από το (a) ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το $\{x,y\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, δηλαδή $y=0$ ή $x=cy$. Θ' αποδείξουμε ότι ο c είναι πραγματικός και μη αρνητικός αριθμός. Επειδή $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ πρέπει $\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = 0$. Έτσι

$$\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle \ge 0 \ ,$$

γιατί $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| \ge 0$, και εφόσον $0 \le \langle x,y\rangle = \langle cy,y\rangle = c\langle y,y\rangle = c\|y\|^2$ προκύπτει $c \ge 0$.

<u>Λήμμα 2</u> (***Συνέχεια του εσωτερικού γινομένου***). Αν σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο, $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$.

<u>Απόδειξη</u>. Προσθαφαιρώντας ένα όρο, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα γι' αριθμούς και, τέλος, την ανισότητα Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle + \langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle|\\ &\le |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle| + |\langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle|\\ &= |\langle x_n,y_n-y\rangle| + |\langle x_n-x,y\rangle|\\ &\le \|x_n\|\|y_n-y\| + \|x_n-x\|\|y\| \to 0,\end{aligned}$$

εφόσον $y_n - y \to 0$ και $x_n - x \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Με εφαρμογή αυτού του λήμματος μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι είναι εφικτή η πλήρωση κάθε χώρου με εσωτερικό γινόμενο. Η πλήρωση είναι χώρος Hilbert και είναι μοναδικός εξαιρουμένων των ισομορφισμών. Εδώ ο ορισμός του ισομορφισμού έχει ως εξής:

Ένας **ισομορφισμός** T ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X επί ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\widetilde{X}$ πάνω από το ίδιο σώμα είναι ο ένα – προς – ένα και επί γραμμικός τελεστής $T : X \to \widetilde{X}$ που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\forall x, y \in X$ ισχύει $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, όπου συμβολίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα στους χώρους X και $\widetilde{X}$ με το ίδιο σύμβολο, για απλούστευση. Ο $\widetilde{X}$ καλείται *ισόμορφος* με τον X, και οι X και $\widetilde{X}$ καλούνται *ισόμορφοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο*. Οι ιδιότητες ένα – προς – ένα, επί και η γραμμικότητα εξασφαλίζουν ότι ο T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων του X επί του $\widetilde{X}$, έτσι ώστε ο T να διατηρεί όλη τη δομή του χώρου με εσωτερικό γινόμενο. Ο T είναι επίσης ισομετρία του X επί του $\widetilde{X}$ γιατί οι αποστάσεις στους χώρους X και $\widetilde{X}$ προσδιορίζονται από νόρμες που επάγονται από τα εσωτερικά γινόμενα στους X και $\widetilde{X}$.

Το θεώρημα για την πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο διατυπώνεται ως εξής:

<u>Θεώρημα 1</u> (***Πλήρωση***). Για κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο X υπάρχει ένας χώρος Hilbert H και ένας ισομορφισμός A από τον X επί ενός πυκνού υπόχωρου $W \subset H$. Ο χώρος H είναι μοναδικός εξαιρουμένων των ισομορφισμών.

<u>Απόδειξη</u>. Αν $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα του X που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του X, γνωρίζουμε από γνωστό θεώρημα ότι υπάρχει χώρος Banach H και μια ισομετρία A από τον X επί του $W \subset H$ που είναι πυκνός υπόχωρος του H. Λόγω της συνέχειας, υπό μια τέτοια ισομετρία, τα αθροίσματα και τα βαθμωτά πολλαπλάσια των στοιχείων στους X και W αντιστοιχούν το ένα στο άλλο, και έτσι ο A είναι ισομορφισμός χώρων με νόρμα, του X επί του W. Λόγω της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον H θέτοντας $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle$, δηλαδή οι (x_n) και (y_n) είναι αναπαραστάσεις των $\hat{x} \in H$ και $\hat{y} \in H$, αντίστοιχα. Επειδή ο ισομορφισμός A διατηρεί τη νόρμα και ισχύουν οι σχέσεις

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

και

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
$$\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right),$$

για πραγματικό και μιγαδικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο, συμπεραίνουμε ότι ο A διατηρεί και το εσωτερικό γινόμενο, άρα ο A είναι ισομορφισμός χώρων με εσωτερικό γινόμενο, του X επί του W. Το ίδιο γνωστό θεώρημα εξασφαλίζει ότι ο H είναι μοναδικός εξαιρουμένων των ισομετριών, δηλαδή δύο πληρώσεις H και $\widetilde{H}$ του X σχετίζονται με μια ισομετρία $T: H \to \widetilde{H}$. Όπως και στην περίπτωση του A, με ανάλογους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι ο T πρέπει να είναι ισομορφισμός του χώρου Hilbert H επί του χώρου Hilbert $\widetilde{H}$.

Το θεώρημα για την πλήρωση λέει ότι οποιεσδήποτε πληρώσεις του X είναι ισόμορφοι χώροι Hilbert και, επομένως, μπορούμε ν' αναφερόμαστε *στην* πλήρωση του X σε χώρο Hilbert και να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό (**Παπαδημητράκης**, 2004):

Ορισμός 3. Αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ο χώρος Hilbert H με την ιδιότητα ο X να είναι πυκνός υπόχωρος του H ονομάζεται ***η* πλήρωση του** X **σε χώρο Hilbert**.

Επειδή ένας **υπόχωρος** Y ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X ορίζεται ως ο διανυσματικός υπόχωρος του X με το εσωτερικό γινόμενο στον X να περιορίζεται στο $Y \times Y$, παρομοίως έχουμε ότι ένας **υπόχωρος** Y ενός χώρου Hilbert H, θεωρείται ως χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Σημειώνουμε ότι ο Y δεν είναι κατ' ανάγκη χώρος Hilbert γιατί ο Y μπορεί να μην είναι πλήρης. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2 (***Υπόχωρος***). Έστω ότι ο Y είναι ο υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Τότε

a) Ο Y είναι πλήρης αν και μόνο αν ο Y είναι κλειστός στον H.
b) Αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο Y είναι πλήρης.
c) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, τότε είναι και ο Y. Γενικότερα, κάθε υποσύνολο ενός διαχωρίσιμου χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι διαχωρίσιμο.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΕΥΘΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

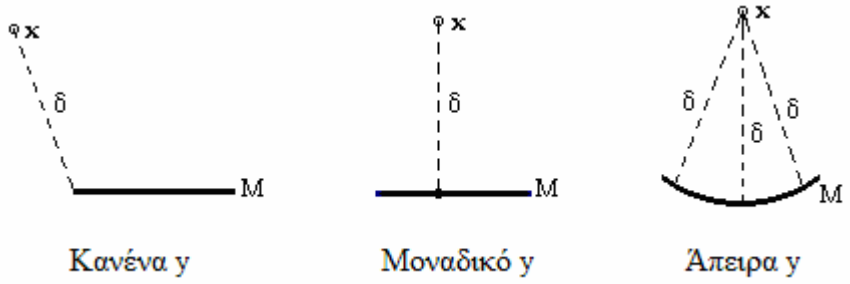
Σ' ένα μετρικό χώρο X, η *απόσταση* δ από ένα στοιχείο $x \in X$ σ' ένα μη κενό υποσύνολο $M \subset X$ ορίζεται ως $\delta = \inf_{y \in M} d\left(x, \tilde{y}\right)$. Σ' ένα χώρο με νόρμα αυτός ο τύπος γίνεται

$$\delta = \inf_{y \in M} \left\| x - \tilde{y} \right\|. \qquad (1)$$

Ένα στοιχείο $y \in M$ (αν υπάρχει) τέτοιο ώστε $\|x - y\| \le \|x - y^*\|$, $\forall y^* \in M$ λέγεται *βέλτιστη προσέγγιση* του x από το M. Επομένως, αν $\left(X, \|\cdot\|\right)$ είναι χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $M \subset X$ όπου $M \ne \varnothing$, ένα στοιχείο $y \in M$ είναι η *βέλτιστη προσέγγιση* του x από το M αν $\|x - y\| = \delta$ (**Ακρίβης**, 1987). Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πότε υπάρχει αυτή η βέλτιστη προσέγγιση, δηλαδή πότε υπάρχει ένα $y \in M$ τέτοιο ώστε

$$\delta = \|x - y\|, \qquad (2)$$

δηλαδή πότε υπάρχει ένα σημείο $y \in M$ που είναι το πλησιέστερο στο δεδομένο x, και αν υπάρχει ένα τέτοιο στοιχείο, πότε είναι μοναδικό. Αυτό είναι ένα *πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας*, θεμελιώδους σπουδαιότητας τόσο θεωρητικά όσο και για τις εφαρμογές, για παράδειγμα, σε σχέση με τις προσεγγίσεις συναρτήσεων. Όπως προκύπτει και από το σχήμα 14, ακόμα και σ' ένα πολύ απλό χώρο όπως



Σχήμα 14.

είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^2$, μπορεί να μην υπάρχει y που να ικανοποιεί την (2), ή να υπάρχει μόνο ένα, ή να υπάρχουν άπειρα y. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι πιο περίπλοκη για γενικούς απειροδιάστατους χώρους με νόρμα, αλλά στους χώρους Hilbert είναι πιο απλή, και αυτό το γεγονός έχει ποικίλες θεωρητικές και πρακτικές συνέπειες.

Για να εξετάσουμε το πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας της βέλτιστης προσέγγισης, και για να διατυπώσουμε το παρακάτω βασικό θεώρημα χρειαζόμαστε δύο έννοιες:

Το **τμήμα** που ενώνει δύο δεδομένα στοιχεία x και y ενός διανυσματικού χώρου X ορίζεται ως το σύνολο όλων των $z \in X$ της μορφής $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \le \alpha \le 1$. Ένα υποσύνολο M του X λέγεται **κυρτό** αν για κάθε $x, y \in M$ το τμήμα που ενώνει τα x και y περιέχεται στο M. Για παράδειγμα, κάθε υπόχωρος Y του X είναι κυρτό σύνολο, και η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

<u>Θεώρημα 1</u> (***Ύπαρξη και μοναδικότητα βέλτιστης προσέγγισης***). Έστω ότι X είναι *χώρος με εσωτερικό γινόμενο* και $M \ne \varnothing$ ένα *κυρτό υποσύνολο* που είναι *πλήρες* στη μετρική που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε δεδομένο $x \in X$ υπάρχει *ένα μοναδικό* $y \in M$ (***minimizing vector***) τέτοιο ώστε

$$\delta = \inf_{y \in M} \left\| x - \tilde{y} \right\| = \left\| x - y \right\|. \qquad (3)$$

<u>Απόδειξη</u>.

a) <u>*Ύπαρξη*</u>. Από τον ορισμό του infimum υπάρχει ακολουθία (y_n) στο M τέτοια ώστε $\delta_n \to \delta$, όπου

$$\delta_n = \left\| x - y_n \right\|. \qquad (4)$$

Θα δείξουμε ότι η (y_n) είναι Cauchy. Γράφοντας $y_n - x = \upsilon_n$, έχουμε $\left\| \upsilon_n \right\| = \delta_n$ και

$$\left\| \upsilon_n + \upsilon_m \right\| = \left\| y_n - x + y_m - x \right\| = \left\| y_n + y_m - 2x \right\| = 2\left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\| \ge 2\delta$$

γιατί το M είναι κυρτό, που σημαίνει ότι $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$, οπότε είναι $\left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\| \ge \delta$. Επιπλέον, έχουμε $y_n - y_m = \upsilon_n - \upsilon_m$. Έτσι από το νόμο του παραλληλογράμμου $\left\| \upsilon_n + \upsilon_m \right\|^2 + \left\| \upsilon_n - \upsilon_m \right\|^2 = 2\left(\left\| \upsilon_n \right\|^2 + \left\| \upsilon_m \right\|^2 \right)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \left\| y_n - y_m \right\|^2 = \left\| \upsilon_n - \upsilon_m \right\|^2 &= -\left\| \upsilon_n + \upsilon_m \right\|^2 + 2\left(\left\| \upsilon_n \right\|^2 + \left\| \upsilon_m \right\|^2 \right) \\ &\le -(2\delta)^2 + 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2 \right), \end{aligned}$$

και λόγω της (4) συνεπάγεται ότι $\|y_n - y_m\|^2 \to 2\left(\delta^2 + \delta^2\right) - 4\delta^2 = 0$, άρα η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο M είναι πλήρης, η (y_n) συγκλίνει, και έστω ότι $y_n \to y \in M$. Εφόσον $y \in M$ έχουμε $\|x - y\| \geq \delta$. Επίσης, από την (4),

$$\|x - y\| = \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta,$$

άρα $\|x - y\| = \delta$.

b) <u>*Μοναδικότητα*</u>. Υποθέτουμε ότι τα $y \in M$ και $y_0 \in M$ ικανοποιούν τις $\|x - y\| = \delta$ και $\|x - y_0\| = \delta$. Θα δείξουμε ότι $y_0 = y$. Από το νόμο του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}
\|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\
&= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - \|y + y_0 - 2x\|^2 \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Επειδή το M είναι κυρτό, έχουμε ότι $\frac{1}{2}(y + y_0) \in M$, οπότε $\left\|\frac{1}{2}(y + y_0) - x\right\| \geq \delta$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|y - y_0\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$. Έτσι καταλήξαμε στην ανισότητα $\|y - y_0\| \leq 0$. Προφανώς όμως $\|y - y_0\| \geq 0$, οπότε ισχύει η ισότητα $y_0 = y$.

Μεταβαίνοντας από αυθαίρετα κυρτά σύνολα σε υπόχωρους, παίρνουμε ένα λήμμα που γενικεύει τη γνωστή ιδέα της στοιχειώδους Γεωμετρίας ότι το μοναδικό σημείο y σ' ένα δεδομένο υπόχωρο Y που είναι το πλησιέστερο σε δεδομένο x βρίσκεται «φέρνοντας την κάθετη από το x στον Y». Αυτό το μοναδικό y είναι η προβολή του x στον Y, επομένως και σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έχει μοναδική λύση.

<u>Λήμμα 1</u> (***Ορθογωνιότητα***). Με τις υποθέσεις του θεωρήματος (1), έστω ότι το $M \neq \varnothing$ είναι *πλήρης υπόχωρος* του Y και το $x \in X$ είναι σταθερό. Τότε το $z = x - y$ είναι ορθογώνιο με τον Y.

<u>Απόδειξη</u>. Αν δεν ισχύει $z \perp Y$, θα υπάρχει ένα $y_1 \in Y$ τέτοιο ώστε

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0 . \qquad (5)$$

Προφανώς, $y_1 \neq 0$ γιατί αλλιώς θα ήταν $\langle z, y_1 \rangle = 0$. Επιπλέον για κάθε βαθμωτό μέγεθος α,

$$\begin{aligned}
\|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z - \alpha y_1 \rangle + \langle -\alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha \langle y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha \left[\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right] \\
&= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \beta - \alpha \left[\overline{\beta} - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right].
\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $\overline{\alpha} = \dfrac{\overline{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}$, τότε $\overline{\beta} - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle = 0$. Από την (3) έχουμε ότι $\|z\| = \|x - y\| = \delta$, οπότε η προηγούμενη ισότητα δίνει την

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{\beta \overline{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \delta^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2 .$$

Αλλά αυτό είναι άτοπο γιατί έχουμε $z - \alpha y_1 = x - y - \alpha y_1 = x - y_2$, όπου $y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$, οπότε από τον ορισμό του δ, ισχύει $\|z - \alpha y_1\| \geq \delta$. Άρα $\langle z, y_1 \rangle = 0$ για κάθε $y_1 \in Y$, συνεπώς $z \perp Y$.

Με χρήση της ορθογωνιότητας θα αναπαραστήσουμε ένα χώρο Hilbert ως ευθύ άθροισμα. Αρχικά θα ορίσουμε το ευθύ άθροισμα για κάθε διανυσματικό χώρο.

<u>Ορισμός 1</u> (***Ευθύ άθροισμα***). Ένας διανυσματικός χώρος X λέγεται *ευθύ άθροισμα* δύο υπόχωρων Y και Z του X, και συμβολίζεται $X = Y \oplus Z$, αν κάθε $x \in X$ έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $x = y + z$, όπου $y \in Y$ και $z \in Z$. Τότε το Z λέγεται *αλγεβρικό συμπλήρωμα* του Y στον X και αντιστρόφως, και το ζεύγος Y, Z λέγεται *συμπληρωματικό ζεύγος* υπόχωρων στον X.

Για παράδειγμα, ο $Y = \mathbb{R}$ είναι υπόχωρος του Ευκλείδειου επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Προφανώς ο Y έχει άπειρα αλγεβρικά συμπληρώματα στον $\mathbb{R}^2$, καθένα από τα οποία είναι μια πραγματική γραμμή. Αλλά το πιο βολικό είναι το συμπλήρωμα που είναι κάθετο, και αυτό το γεγονός το εκμεταλλευόμαστε όταν επιλέγουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ανάλογη κατάσταση έχουμε και στον $\mathbb{R}^3$.

Παρομοίως, στην περίπτωση *ενός γενικού χώρου Hilbert* H, ενδιαφέρουν κυρίως οι *αναπαραστάσεις* του H, *ως ευθύ άθροισμα ενός κλειστού υπόχωρου* Y *και του*

ορθογώνιου συμπληρώματος του $Y^{\perp} = \{z \in H \,/\, z \perp Y\}$, που είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του χώρου που είναι ορθογώνια με τον Y. Αυτή η αναπαράσταση δίνει ένα βασικό αποτέλεσμα που λέγεται *θεώρημα προβολής*.

<u>Θεώρημα 2</u> (***Ευθύ άθροισμα***). Έστω ότι Y είναι οποιοσδήποτε κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Τότε

$$H = Y \oplus Z \qquad \text{όπου } Z = Y^{\perp}, \tag{6}$$

δηλαδή κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$, $y \in Y, z \in Y^{\perp}$.

<u>Απόδειξη</u>. Επειδή ο H είναι πλήρης χώρος και ο Y είναι κλειστός υπόχωρος, από το θεώρημα (2) της προηγούμενης υποενότητας έχουμε ότι ο Y είναι πλήρης. Εφόσον το Y είναι κυρτό από το θεώρημα (1) και το λήμμα (1) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in H$ υπάρχει ένα $y \in Y$ τέτοιο ώστε

$$x = y + z, \tag{7}$$

όπου $z \in Z = Y^{\perp}$.

Για ν' αποδείξουμε τη μοναδικότητα υποθέτουμε ότι $x = y + z = y_1 + z_1$ όπου $y, y_1 \in Y$ και $z, z_1 \in Z = Y^{\perp}$. Τότε $y - y_1 = z_1 - z$, και εφόσον $y - y_1 \in Y$ ενώ $z_1 - z \in Z = Y^{\perp}$, προκύπτει ότι $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\} \Rightarrow y = y_1$, οπότε και $z = z_1$.

Το $y = x - z$ λέγεται **ορθογώνια προβολή** (ή απλά *προβολή*) του x στον Y. Αυτός ο όρος προέρχεται από τη στοιχειώδη Γεωμετρία. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $H = \mathbb{R}^2$ και να προβάλουμε οποιοδήποτε σημείο $x = (\xi_1, \xi_2)$ στον ξ_1-άξονα, που παίζει το ρόλο του Y. Η προβολή είναι το $y = (\xi_1, 0)$.

Η εξίσωση $x = y + z$ ορίζει μια απεικόνιση

$$\begin{aligned} P: \quad & H \to Y \\ & x \to y = Px. \end{aligned}$$

Η P λέγεται (ορθογώνια) **προβολή** (ή *τελεστής προβολής*) του H επί του Y. Ο P είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, απεικονίζει τον H επί του Y, τον Y επί του Y, το $Y^{\perp}$ επί του $\{0\}$, και είναι **ταυτοδύναμος** (idempotent) ή αλλιώς εκθετικά αναλλοίωτος, που σημαίνει ότι $P^2 = P$. Έτσι , για κάθε $x \in H$, $P^2 x = P(Px) = Px$, $P/_Y$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον Y, και για $Z = Y^{\perp}$ καταλήγουμε στο παρακάτω συμπέρασμα:

<u>Λήμμα 2</u> (***Μηδενικός χώρος***). Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $Y^{\perp}$ ενός κλειστού υπόχωρου Y ενός χώρου Hilbert H είναι ο μηδενικός χώρος $N(P)$ της ορθογώνιας προβολής P του H επί του Y.

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα είναι ένας εκμηδενιστής, όπου εξ' ορισμού, ο *εκμηδενιστής* (annihilator) $M^{\perp}$ ενός συνόλου $M \neq \varnothing$ σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X είναι το σύνολο $M^{\perp} = \{x \in X \,/\, x \perp M\}$. Έτσι, $x \in M^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, \upsilon \rangle = 0$ για κάθε $\upsilon \in M$. Αυτό εξηγεί και την ονομασία του.

Σημειώνουμε ότι ο $M^{\perp}$ είναι διανυσματικός χώρος γιατί αν $x, y \in M^{\perp}$ τότε για κάθε $\upsilon \in M$ και για όλα τα βαθμωτά μεγέθη α, β, $\langle \alpha x + \beta y, \upsilon \rangle = \alpha \langle x, \upsilon \rangle + \beta \langle y, \upsilon \rangle = 0$, οπότε $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$. Επίσης, ο $M^{\perp}$ είναι κλειστός χώρος, $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} := M^{\perp\perp}$, και γενικά ισχύει $M \subset M^{\perp\perp}$ γιατί $x \in M \Rightarrow x \perp M^{\perp} \Rightarrow x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

Για κλειστούς υπόχωρους έχουμε επίσης το παρακάτω λήμμα:

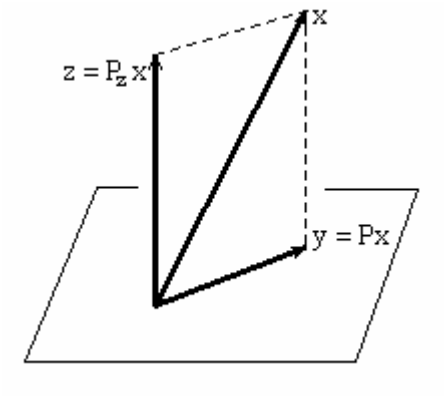
<u>Λήμμα 3</u> (***Κλειστός υπόχωρος***). Αν Y είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε $Y = Y^{\perp\perp}$.

<u>Απόδειξη</u>. Επειδή $Y \subset Y^{\perp\perp}$ αρκεί να δείξουμε ότι $Y \supset Y^{\perp\perp}$. Έστω τυχαίο $x \in Y^{\perp\perp}$. Τότε από το θεώρημα (2), $x = y + z$, όπου $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ και $z \in Y^{\perp}$. Αφού ο $Y^{\perp\perp}$ είναι διανυσματικός χώρος και $x \in Y^{\perp\perp}$ από την υπόθεση, έχουμε ότι και $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$ που συνεπάγεται ότι $z \perp Y^{\perp}$. Από τις $z \perp Y^{\perp}$, $z \in Y^{\perp}$ προκύπτει

$$z \perp z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = y \in Y \Rightarrow x \in Y .$$

Άρα $Y \supset Y^{\perp\perp}$.

Αν θέσουμε $Z = Y^{\perp}$ και εφόσον $Z^{\perp} = \left(Y^{\perp}\right)^{\perp} = Y^{\perp\perp} = Y$, ο τύπος (6) μπορεί να πάρει τη μορφή $H = Z \oplus Z^{\perp}$. Έτσι προκύπτει ότι η απεικόνιση $x \to z$ ορίζει την προβολή $P_Z : H \to Z$ του H επί του Z, με ιδιότητες παρόμοιες μ' αυτές της προβολής P.



Σχήμα 15.

Το θεώρημα (2) συνεπάγεται το παρακάτω λήμμα:

<u>Λήμμα 4</u> (***Πυκνό σύνολο***). Για κάθε υποσύνολο $M \neq \varnothing$ ενός χώρου Hilbert H, ο span$M$ είναι πυκνός υπόχωρος του H αν και μόνο αν $M^{\perp} = \{0\}$, δηλαδή

$$\overline{\text{span}M} = H \Leftrightarrow M^{\perp} = \{0\}.$$

<u>Απόδειξη</u>.

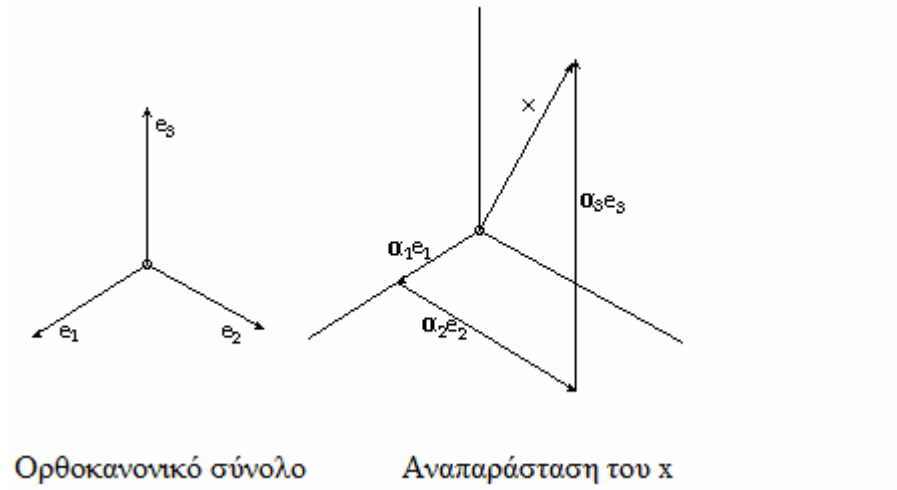
a) ($\Rightarrow$) Έστω τυχαίο $x \in M^{\perp}$ και υποθέτουμε ότι ο $V = \text{span}M$ είναι πυκνός υπόχωρος του H.Τότε $x \in \overline{V} = H$. Από γνωστό θεώρημα υπάρχει ακολουθία (x_n) του V τέτοια ώστε $x_n \to x$. Επειδή $x \in M^{\perp}$ και $M^{\perp} \perp V$, έχουμε $\langle x_n, x \rangle = 0$. Η συνέχεια του εσωτερικού γινομένου συνεπάγεται ότι $0 = \langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, έτσι $x = 0$. Άρα $M^{\perp} = \{0\}$.

b) ($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $M^{\perp} = \{0\}$. Αν $x \perp V$, τότε $x \perp M \Rightarrow x \in M^{\perp} \Rightarrow x = 0$. Έτσι $V^{\perp} = \{0\}$, και επειδή ο V είναι υπόχωρος του H, παίρνουμε $\overline{V} = H$ από το θεώρημα (2) με $Y = \overline{V}$. Άρα ο V είναι πυκνός υπόχωρος του H.

<u>ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ</u>

Η ορθογωνιότητα των στοιχείων όπως ορίστηκε παραπάνω διαδραματίζει βασικό ρόλο σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο και σε χώρους Hilbert. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα σύνολα με στοιχεία ορθογώνια κατά ζεύγη. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι στον χώρο $\mathbb{R}^3$ ένα τέτοιο σύνολο είναι το σύνολο των τριών μοναδιαίων διανυσμάτων e_1, e_2, e_3 στους θετικούς ημιάξονες ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Αυτά τα διανύσματα σχηματίζουν μια βάση του $\mathbb{R}^3$,

έτσι κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Το μεγάλο πλεονέκτημα της ορθογωνιότητας είναι ότι για δεδομένο x, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τους άγνωστους συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ παίρνοντας εσωτερικά γινόμενα. Πράγματι, για να βρούμε το α_1, πολλαπλασιάζουμε αυτή την



Σχήμα 16.

αναπαράσταση του x επί e_1, έτσι έχουμε

$$\langle x, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \alpha_3 \langle e_3, e_1 \rangle = \alpha_1$$

κλπ. Σε πιο γενικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο υπάρχουν παρόμοιες και άλλες δυνατότητες για τη χρήση ορθογώνιων και ορθοκανονικών συνόλων και ακολουθιών. Πράγματι, η εφαρμογή τέτοιων συνόλων και ακολουθιών αποτελεί ένα ουσιώδες μέρος όλης της θεωρίας των χώρων με εσωτερικό γινόμενο και των χώρων Hilbert.

<u>Ορισμός 1</u> (***Ορθοκανονικά σύνολα και ακολουθίες***). Ένα *ορθογώνιο σύνολο* M σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X είναι ένα υποσύνολο $M \subset X$ με στοιχεία κατά ζεύγη ορθογώνια. Ένα *ορθοκανονικό* σύνολο $M \subset X$ είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στον X με στοιχεία που έχουν νόρμα ίση με 1, που σημαίνει ότι, για όλα τα $x, y \in M$,

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \ x \neq y \\ 1, & \alpha\nu \ x = y. \end{cases} \qquad (1)$$

Αν ένα ορθογώνιο ή ορθοκανονικό σύνολο M είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία του σε μια ακολουθία (x_n) την οποία ονομάζουμε *ορθογώνια* ή *ορθοκανονική* ακολουθία, αντίστοιχα.

Γενικότερα, μια *οικογένεια* $(x_\alpha), \alpha \in I$, λέγεται *ορθογώνια* αν $x_\alpha \perp x_\beta, \forall \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$. Η οικογένεια λέγεται *ορθοκανονική* αν είναι ορθογώνια και όλα τα x_α έχουν νόρμα 1, δηλαδή $\forall \alpha, \beta \in I$ έχουμε

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \ \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha\nu \ \alpha = \beta, \end{cases} \qquad (2)$$

όπου $\delta_{\alpha\beta}$ είναι το δέλτα του Kronecker.

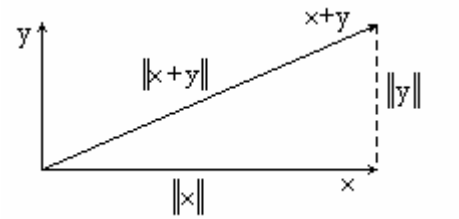
Οι έννοιες του προηγούμενου ορισμού συσχετίζονται στενά και ο λόγος είναι ότι σε κάθε υποσύνολο M του X μπορούμε πάντα να βρούμε μια οικογένεια στοιχείων του X τέτοια ώστε το σύνολο των στοιχείων της οικογένειας να είναι το M. Ειδικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε την οικογένεια που ορίζεται από τον περιορισμό στο M της ταυτοτικής απεικόνισης $x \to x$ στον X.

Θα εξετάσουμε μερικές απλές ιδιότητες και παραδείγματα ορθογωνίων και ορθοκανονικών συνόλων.

Για ορθογώνια στοιχεία x, y έχουμε $\langle x, y \rangle = 0$, έτσι εύκολα παίρνουμε το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \qquad (3)$$

Στο σχήμα 17 απεικονίζεται αυτή η σχέση στον $\mathbb{R}^2$. Γενικότερα, αν $\{x_1, ..., x_n\}$



Σχήμα 17.

είναι ορθογώνιο σύνολο, τότε

$$\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2 . \qquad (4)$$

Πράγματι, $\langle x_j, x_k \rangle = 0, \ \alpha\nu \ j \neq k$ και συνεπώς

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 .$$

<u>Λήμμα 1</u> (***Γραμμική ανεξαρτησία***). Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\{e_1,...,e_n\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο και θεωρούμε την εξίσωση $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0$. Σταθεροποιούμε ένα e_j και πολλαπλασιάζοντας μ' αυτό την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$.

Έτσι αποδείχθηκε η γραμμική ανεξαρτησία για κάθε πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο. Απ' αυτό το αποτέλεσμα και από τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας συνεπάγεται και η γραμμική ανεξαρτησία ενός άπειρου ορθοκανονικού συνόλου.

<u>Παράδειγμα 1</u>. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$. Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, τα τρία μοναδιαία διανύσματα $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ των τριών αξόνων ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύνολο.

<u>Παράδειγμα 2</u>. Ο χώρος l^2. Στο χώρο l^2 το σύνολο $\{e_n : n = 1,2,...\}$ όπου $e_n = (\delta_{nj}) = (0,...,0,1,0,...)$ και το 1 εμφανίζεται στη n-θέση, είναι μια ορθοκανονική ακολουθία (e_n).

<u>Παράδειγμα 3</u>. Συνεχείς συναρτήσεις. Έστω ότι X είναι ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο $[0,2\pi]$ με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την ισότητα $\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt$. Μια ορθογώνια ακολουθία στον X είναι η (u_n), όπου $u_n(t) = \cos nt$, $n = 0,1,2,...$. Μια άλλη ορθογώνια ακολουθία στον X είναι η (υ_n), όπου $\upsilon_n(t) = \sin nt$, $n = 1,2,...$.

Πράγματι, με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\langle u_m, u_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)t\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \cdot 0 + \frac{1}{2(m+n)} \cdot 0 = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_m, u_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2nt dt \\
&= \frac{1}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4n} \sin 2nt\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{4n} \cdot 0 \\
&= \pi, \qquad \alpha\nu \ m = n = 1,2,...,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u_m, u_n\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} dt \\ &= t\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi, \qquad \alpha\nu\ m = n = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε

$$\langle u_m, u_n\rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt dt = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ m \neq n, \\ \pi, & \alpha\nu\ m = n = 1,2,..., \\ 2\pi, & \alpha\nu\ m = n = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για την ακολουθία (υ_n) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle \upsilon_m, \upsilon_n\rangle = \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)t\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\cdot 0 - \frac{1}{2(m+n)}\cdot 0 = 0, \qquad \alpha\nu \qquad m \neq n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \upsilon_m, \upsilon_n\rangle = \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2nt dt \\ &= \pi, \qquad \alpha\nu\ m = n = 1,2,...,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\langle \upsilon_m, \upsilon_n\rangle = \int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ m \neq n, \\ \pi, & \alpha\nu\ m = n = 1,2,... . \end{cases} \quad (6)$$

Από τον τύπο (5) προκύπτει ότι για $n = 1,2,...$, $\|u_n\| = \sqrt{\langle u_n, u_n\rangle} = \sqrt{\pi}$ και για $n = 0$, $\|u_0\| = \sqrt{\langle u_0, u_0\rangle} = \sqrt{2\pi}$. Έτσι μια ορθοκανονική ακολουθία είναι η (e_n), όπου

$$e_0(t) = \frac{u_0(t)}{\|u_0\|} = \frac{\cos 0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ και } e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \ (n = 1,2,...).$$

Ομοίως από τον τύπο (6) και για $n = 1,2,...$, έχουμε $\|\upsilon_n\| = \sqrt{\langle \upsilon_n, \upsilon_n\rangle} = \sqrt{\pi}$, οπότε από την (υ_n) παίρνουμε την ορθοκανονική ακολουθία $(\widetilde{e_n})$, όπου για $n = 1,2,...$

$$\widetilde{e_n}(t) = \frac{\upsilon_n(t)}{\|\upsilon_n\|} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}.$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι $u_m \perp \upsilon_n$ για κάθε m και n, όπου τα m και n μπορούν να πάρουν τις τιμές $1,2,3,\ldots$. Πράγματι για $m \neq n$,

$$\begin{aligned}
\langle u_m, \upsilon_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \sin ntdt \quad &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)tdt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)tdt \\
&= -\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)t\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{2(m-n)}\cos\left[2(m-n)\pi\right] + \frac{1}{2(m-n)} \\
&\quad -\frac{1}{2(m+n)}\cos\left[2(m+n)\pi\right] + \frac{1}{2(m+n)} \\
&= -\frac{1}{2(m-n)} + \frac{1}{2(m-n)} - \frac{1}{2(m+n)} + \frac{1}{2(m+n)} = 0,
\end{aligned}$$

και για $m = n$,

$$\begin{aligned}
\langle u_m, \upsilon_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \sin ntdt \quad &= \int_0^{2\pi} \cos nt \sin ntdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2ntdt = -\frac{1}{4n}\cos 2nt\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{4n}\cos 4n\pi + \frac{1}{4n} = -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = 0,
\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε $\langle u_m, \upsilon_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \sin ntdt = 0$, $\forall m, n$.

Αυτές οι ακολουθίες εμφανίζονται στις *σειρές Fourier* .

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα των ορθοκανονικών ακολουθιών έναντι των τυχαίων γραμμικά ανεξάρτητων ακολουθιών είναι το εξής: Αν γνωρίζουμε ότι ένα δεδομένο x μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός κάποιων στοιχείων μιας ορθοκανονικής ακολουθίας, τότε η συνθήκη της ορθοκανονικότητας προσδιορίζει πολύ εύκολα τους συντελεστές αυτού του γραμμικού συνδυασμού. Πράγματι, αν $(e_1, e_2, \ldots)$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X και έχουμε $x \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, όπου το n είναι σταθερό, τότε από τον ορισμό του $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ έχουμε

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \ , \tag{7}$$

και αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο επί ένα σταθεροποιημένο e_j, προκύπτει

$$\langle x, e_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \ .$$

Μ' αυτούς τους συντελεστές η (7) γίνεται

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \ . \qquad (8)$$

Ένα άλλο πλεονέκτημα της ορθοκανονικότητας γίνεται προφανές αν στις (7) και (8) θελήσουμε να προσθέσουμε ένα άλλο όρο $\alpha_{n+1} e_{n+1}$, οπότε έχουμε το

$$\tilde{x} = x + \alpha_{n+1} e_{n+1} \ \in \ \mathrm{span}\{e_1, ..., e_{n+1}\} \ .$$

Τότε αρκεί να υπολογίσουμε ένα επιπλέον συντελεστή εφόσον οι άλλοι συντελεστές παραμένουν αναλλοίωτοι.

Γενικότερα, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε $x \in X$, όχι κατ' ανάγκη στον $Y_n = \mathrm{span}\{e_1, ..., e_n\}$, μπορούμε να ορίσουμε $y \in Y_n$ θέτοντας $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$, όπου το n είναι σταθερό, όπως προηγουμένως, και μετά να ορίσουμε το z θέτοντας

$$x = y + z \Rightarrow z = x - y \ .$$

Θ' αποδείξουμε ότι $z \perp y$. *Κάθε* $y \in Y_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, όπου $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$, όπως προκύπτει από τα παραπάνω. Ισχυριζόμαστε ότι αν επιλέξουμε $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$, $k = 1, 2, ..., n$, θα πάρουμε ένα y τέτοιο ώστε $z = x - y \perp y$.

Για να το αποδείξουμε, αρχικά παρατηρούμε ότι, από την ορθοκανονικότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_m e_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \langle \alpha_k e_k, \alpha_m e_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, \alpha_m e_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_m} \langle e_k, e_m \rangle \qquad (9) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 . \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \rangle - \|y\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, \alpha_k e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x, e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 = 0,$$

άρα $z \perp y$.

Έτσι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 . \qquad (10)$$

Από τις (9) και (10) προκύπτει ότι

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 . \qquad (11)$$

Επειδή $\|z\| \geq 0$, από την (11) και για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Αυτά τα αθροίσματα έχουν μη αρνητικούς όρους, και έτσι σχηματίζουν μια μονότονη αύξουσα ακολουθία, η οποία συγκλίνει γιατί φράσσεται από τη $\|x\|^2$. Αυτή είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μιας άπειρης σειράς, η οποία ως εκ τούτου συγκλίνει. Από την $\sum_{k=1}^{n} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2$ συνεπάγεται το παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u> (***Ανισότητα Bessel***). Έστω ότι (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X. Τότε για κάθε $x \in X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 . \qquad (12)$$

Τα εσωτερικά γινόμενα $\langle x, e_k \rangle$ στην ανισότητα Bessel λέγονται **συντελεστές Fourier** του x ως προς την ορθοκανονική ακολουθία (e_k), και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ ονομάζεται **σειρά Fourier** του x ως προς την (e_k) (Παπαδημητράκης, 2004).

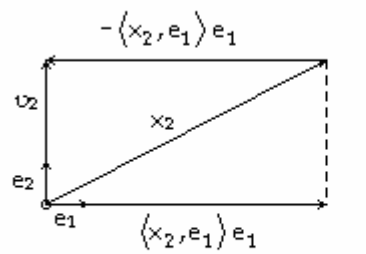
Σημειώνουμε ότι αν ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε ορθοκανονικό σύνολο στον X πρέπει να είναι πεπερασμένο ως γραμμικά ανεξάρτητο, οπότε στην ανισότητα Bessel έχουμε πεπερασμένο άθροισμα.

Ένα άλλο ερώτημα είναι *πώς μπορούμε να πάρουμε μια ορθοκανονική ακολουθία αν δίνεται μια αυθαίρετη γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία*. Αυτό επιτυγχάνεται με μια κατασκευαστική διαδικασία, τη μέθοδο **Gram – Schmidt** για την ορθοκανονικοποίηση (*orthonormalization*) μιας γραμμικά ανεξάρτητης ακολουθίας (x_j) σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Η ορθοκανονική ακολουθία (e_j) που προκύπτει έχει την ιδιότητα για κάθε n, $\operatorname{span}\{e_1,...,e_n\} = \operatorname{span}\{x_1,...,x_n\}$.

Η μέθοδος έχει ως εξής:

<u>*1ο βήμα*</u>. Το πρώτο στοιχείο της (e_k) είναι $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$. Τότε $\operatorname{span}\{e_1\} = \operatorname{span}\{x_1\}$.

<u>*2ο βήμα*</u>. Το x_2 μπορεί να γραφτεί ως $x_2 = \langle x_2, e_1\rangle e_1 + \upsilon_2$, οπότε $\upsilon_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$ και το υ_2 δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα γιατί τα (x_j) είναι γραμμικά ανεξάρτητα.



Μέθοδος Gram - Schmidt
(Δεύτερο βήμα)

Σχήμα 18.

Επίσης $\langle \upsilon_2, e_1\rangle = 0 \Rightarrow \upsilon_2 \perp e_1$, και έτσι μπορούμε να πάρουμε ως e_2 το $e_2 = \frac{1}{\|\upsilon_2\|}\upsilon_2$.

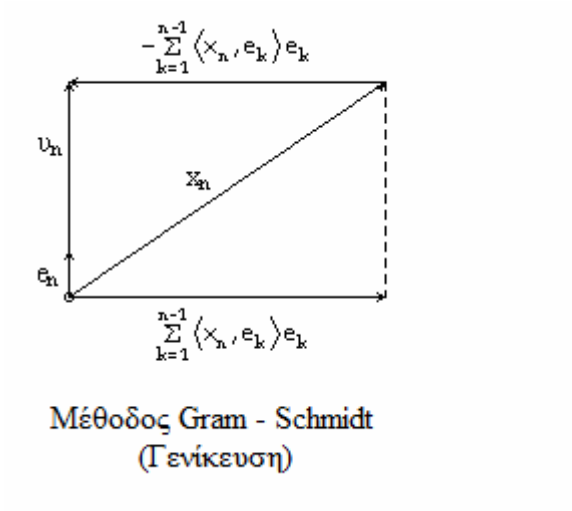
<u>*3ο βήμα*</u>. Το x_3 μπορεί να γραφτεί ως $x_3 = \langle x_3, e_1\rangle e_1 + \langle x_3, e_2\rangle e_2 + \upsilon_3$, οπότε

$$\upsilon_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2,$$

το υ_3 δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, $\upsilon_3 \perp e_1$ και $\upsilon_3 \perp e_2$, οπότε παίρνουμε $e_3 = \frac{1}{\|\upsilon_3\|}\upsilon_3$.

<u>*nο βήμα*</u>. Το διάνυσμα

$$\upsilon_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k \qquad (13)$$



Σχήμα 19.

δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα και είναι ορθογώνιο με τα $e_1,...,e_{n-1}$. Απ' αυτό παίρνουμε

$$e_n = \frac{1}{\|\upsilon_n\|}\upsilon_n . \qquad (14)$$

Οι (13) και (14) είναι οι γενικοί τύποι για τη μέθοδο Gram – Schmidt, που επινοήθηκε από τον E.Schmidt το 1907 (Kreyszig & Wiley, 1978). Παρατηρούμε ότι το άθροισμα που αφαιρείται στο δεξί μέλος της (13) είναι η προβολή του x_n στον $\operatorname{span}\{e_1,...,e_{n-1}\}$. Με άλλα λόγια, σε κάθε βήμα αφαιρούμε από το x_n τις «συνιστώσες» του που είναι παράλληλες στα ορθογώνια διανύσματα που κατασκευάσαμε μέχρι και το προηγούμενο βήμα. Έτσι προκύπτει το διάνυσμα υ_n, που μετά πολλαπλασιάζεται επί $\frac{1}{\|\upsilon_n\|}$, έτσι ώστε να προκύψει διάνυσμα με νόρμα ένα.

Επίσης το υ_n δε μπορεί να είναι το μηδενικό διάνυσμα, για οποιοδήποτε n. Πράγματι, αν n ήταν ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο $\upsilon_n = 0$, τότε από την (13) θα είχαμε ότι το x_n θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των $e_1,...,e_{n-1}$, δηλαδή θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των $x_1,...,x_{n-1}$ που είναι άτοπο γιατί από την υπόθεση τα $\{x_1,...,x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΑ

Από την ανισότητα Bessel προκύπτουν κάποια θέματα και ερωτήματα. Σ' αυτή την υποενότητα θα αιτιολογήσουμε τον όρο «συντελεστές Fourier» για τα εσωτερικά γινόμενα $\langle x, e_k \rangle$, θα εξετάσουμε άπειρες σειρές με ορθοκανονικές ακολουθίες, και τέλος θα πάρουμε μια πρώτη ιδέα των ορθοκανονικών συνόλων που είναι μη αριθμήσιμα.

Παράδειγμα 1. (***Σειρές Fourier***). Μια *τριγωνομετρική σειρά* είναι μια σειρά της μορφής

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right). \qquad (1^*)$$

Μια πραγματική συνάρτηση x στο $\mathbb{R}$ λέγεται *περιοδική* αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός p (που λέγεται *περίοδος* της x) τέτοιος ώστε $x(t+p) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η συνάρτηση x έχει περίοδο 2π και είναι συνεχής. Εξ' ορισμού, η *σειρά Fourier* της x είναι η τριγωνομετρική σειρά (1^*) με συντελεστές a_k και b_k που δίνονται από τους *τύπους* του *Euler*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt dt \qquad k = 1, 2, ..., \qquad (2) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt dt \qquad k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Αν η σειρά Fourier της x συγκλίνει για κάθε t και έχει άθροισμα $x(t)$ τότε γράφουμε

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right). \qquad (1)$$

Εφόσον η x είναι περιοδική με περίοδο 2π, στην (2) μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 2\pi]$ από οποιοδήποτε άλλο διάστημα μήκους 2π, για παράδειγμα $[-\pi, \pi]$.

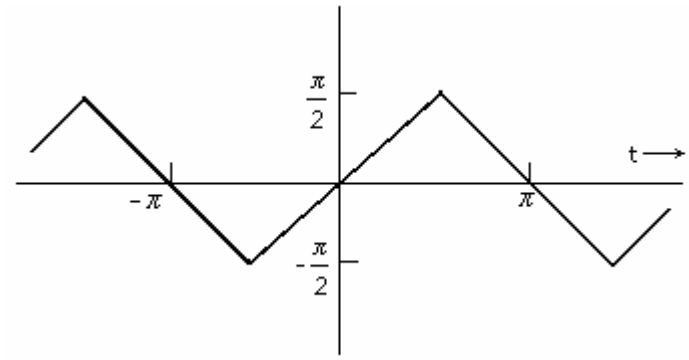
Οι σειρές Fourier παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά σε προβλήματα Φυσικής από τους D.Bernoulli (στο πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, 1753) και J.Fourier (στο πρόβλημα της θερμικής αγωγιμότητας, 1822). Μ' αυτές τις σειρές μπορούμε ν' αναπαραστήσουμε περίπλοκα περιοδικά φαινόμενα με την ορολογία απλών περιοδικών συναρτήσεων (συνημίτονο και ημίτονο). Έχουν πολλές φυσικές

εφαρμογές σε σχέση με τις διαφορικές εξισώσεις (ταλαντώσεις, διάδοση της θερμότητας, προβλήματα δυναμικού κλπ.) (Kreyszig & Wiley, 1978).

Από την (2) βλέπουμε ότι ο προσδιορισμός των συντελεστών Fourier απαιτεί ολοκλήρωση. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$x(t)=\begin{cases} t & \alpha\nu \ -\dfrac{\pi}{2}\le t<\dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-t & \alpha\nu \ \ \dfrac{\pi}{2}\le t<\dfrac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

με γραφική παράσταση



Σχήμα 20.

έχουμε $x(t+2\pi)=x(t)$. Επιλέγοντας ως κατάλληλο διάστημα ολοκλήρωσης το $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, από τους τύπους (2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{2\pi}\left[\pi t-\frac{t^2}{2}\right]\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{8}\right)+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{9\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

και με παραγοντική ολοκλήρωση

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)\cos kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x(t)\cos kt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\cos kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\cos kt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t(\sin kt)'\,dt + \frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)(\sin kt)'\,dt \\
&= \frac{1}{\pi k}\left[t\sin kt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin kt\,dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi k}\left[(\pi - t)\sin kt\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin kt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi k}\left[\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{\pi k^2}\left[\cos kt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&\quad + \frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{3k\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi k^2}\left[\cos kt\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi k}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi k^2}\left[\cos\frac{k\pi}{2} - \cos\left(-\frac{k\pi}{2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi k}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi k^2}\left(\cos\frac{3k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) \\
&= 0, \qquad \alpha\nu\ k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)\sin kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x(t)\sin kt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)\sin kt\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t(\cos kt)'\,dt - \frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t)(\cos kt)'\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi k}\left[t\cos kt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kt\,dt \\
&\quad - \frac{1}{\pi k}\left[(\pi - t)\cos kt\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} - \frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos kt\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi k}\left[\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{k\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{\pi k^2}\left[\sin kt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&\quad - \frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{3k\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi k^2}\left[\sin kt\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi k}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{1}{\pi k^2}\left[\sin\frac{k\pi}{2}-\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{3k\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi k^2}\left(\sin\frac{3k\pi}{2}-\sin\frac{k\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi k}\pi\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{\pi k^2}\left(\sin\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}\right) \\
&\quad -\frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi k^2}\left(-\sin\frac{k\pi}{2}-\sin\frac{k\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2} \\
&= \frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2},\ \alpha\nu\ k=1,2,....
\end{aligned}
$$

Άρα $a_k = 0$ για $k = 0,1,2,...$ και $b_k = \frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2}$ για $k = 1,2,...$. Έτσι η (1) παίρνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin kt \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin kt \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{2}\sin t+\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{2}\sin 3t+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{2}\sin 5t+...\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin t-\frac{1}{3^2}\sin 3t+\frac{1}{5^2}\sin 5t-.+...\right).
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια θα δούμε *πως οι γενικές σειρές Fourier εκφράζονται με την ορολογία και το φορμαλισμό των ορθοκανονικών ακολουθιών και συνόλων*. Προφανώς, οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο στην (1) είναι αυτές των ακολουθιών (u_k) και (υ_k) του παραδείγματος (3) της προηγούμενης υποενότητας, δηλαδή $u_k(t) = \cos kt$ και $\upsilon_k(t) = \sin kt$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την (1) στη μορφή

$$
x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k u_k(t) + b_k \upsilon_k(t)\right]. \qquad (3)
$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3) επί ένα σταθεροποιημένο u_j και ολοκληρώνουμε ως προς t στο $[0,2\pi]$. Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, u_j\rangle$ όπως έχει οριστεί στο παράδειγμα (3) της προηγούμενης υποενότητας και έχουμε

$$
\langle x, u_j\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)u_j(t)\,dt\,.
$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση οπότε επιτρέπεται η κατά όρους ολοκλήρωση, και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των (u_k) και (υ_k) καθώς και το γεγονός ότι $u_j \perp \upsilon_k$ για κάθε j,k, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\langle x, u_j \rangle &= \langle a_0 u_0, u_j \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k u_k + b_k \upsilon_k, u_j \rangle \\
&= a_0 \langle u_0, u_j \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \langle u_k, u_j \rangle + b_k \langle \upsilon_k, u_j \rangle \right] \\
&= a_j \langle u_j, u_j \rangle \\
&= a_j \left\| u_j \right\|^2 = \begin{cases} 2\pi a_0, & \alpha\nu\ j = 0, \\ \pi a_j, & \alpha\nu\ j = 1, 2, \ldots . \end{cases}
\end{aligned}$$

Παρομοίως, αν πολλαπλασιάσουμε την (3) επί ένα υ_j και συνεχίσουμε όπως προηγουμένως, θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
\langle x, \upsilon_j \rangle &= \langle a_0 u_0, \upsilon_j \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k u_k + b_k \upsilon_k, \upsilon_j \rangle \\
&= a_0 \langle u_0, \upsilon_j \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \langle u_k, \upsilon_j \rangle + b_k \langle \upsilon_k, \upsilon_j \rangle \right] \\
&= b_j \langle \upsilon_j, \upsilon_j \rangle \\
&= b_j \left\| \upsilon_j \right\|^2 = \pi b_j, \qquad \alpha\nu\ j = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς a_j, b_j και χρησιμοποιώντας τις ορθοκανονικές ακολουθίες (e_j) και $(\widetilde{e_j})$, όπου $e_j = \dfrac{u_j}{\left\| u_j \right\|} = \left\| u_j \right\|^{-1} u_j$ και $\widetilde{e_j} = \dfrac{\upsilon_j}{\left\| \upsilon_j \right\|} = \left\| \upsilon_j \right\|^{-1} \upsilon_j$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{\left\| u_j \right\|^2} \langle x, u_j \rangle = \frac{1}{\left\| u_j \right\|} \left\| u_j \right\|^{-1} \langle x, u_j \rangle = \\
&= \frac{1}{\left\| u_j \right\|} \langle x, \left\| u_j \right\|^{-1} u_j \rangle = \frac{1}{\left\| u_j \right\|} \langle x, e_j \rangle, \qquad \alpha\nu\ j = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_j &= \frac{1}{\left\| \upsilon_j \right\|^2} \langle x, \upsilon_j \rangle = \frac{1}{\left\| \upsilon_j \right\|} \left\| \upsilon_j \right\|^{-1} \langle x, \upsilon_j \rangle = \\
&= \frac{1}{\left\| \upsilon_j \right\|} \langle x, \left\| \upsilon_j \right\|^{-1} \upsilon_j \rangle = \frac{1}{\left\| \upsilon_j \right\|} \langle x, \widetilde{e_j} \rangle, \qquad \alpha\nu\ j = 1, 2, \ldots .
\end{aligned} \tag{4}$$

Οι σχέσεις (2) και (4) ταυτίζονται γιατί για $j = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\left\| u_0 \right\|} \langle x, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x(t) e_0(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, dt ,$$

και για $j = 1, 2, \ldots$

$$a_j = \frac{1}{\|u_j\|}\langle x, e_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)e_j(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)\frac{\cos jt}{\sqrt{\pi}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos jt dt$$

και

$$b_j = \frac{1}{\|\upsilon_j\|}\langle x, \widetilde{e_j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)\widetilde{e_j}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)\frac{\sin jt}{\sqrt{\pi}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin jt dt\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι στην (3) έχουμε

$$a_k u_k(t) = \frac{1}{\|u_k\|}\langle x, e_k\rangle u_k(t) = \langle x, e_k\rangle \frac{1}{\|u_k\|}u_k(t) = \langle x, e_k\rangle e_k(t),$$

$$b_k \upsilon_k(t) = \frac{1}{\|\upsilon_k\|}\langle x, \widetilde{e_k}\rangle \upsilon_k(t) = \langle x, \widetilde{e_k}\rangle \frac{1}{\|\upsilon_k\|}\upsilon_k(t) = \langle x, \widetilde{e_k}\rangle \widetilde{e_k}(t).$$

Ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε τη <u>*σειρά Fourier*</u> (1) στη μορφή

$$x = \langle x, e_0\rangle e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\langle x, e_k\rangle e_k + \langle x, \widetilde{e_k}\rangle \widetilde{e_k}\right]. \qquad (5)$$

Αυτή η ισότητα αιτιολογεί τον όρο «συντελεστές Fourier» για τα εσωτερικά γινόμενα $\langle x, e_k\rangle$.

Το προηγούμενο παράδειγμα αφορά άπειρες σειρές και θέτει το ερώτημα πως μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή τη μελέτη σε άλλες ορθοκανονικές ακολουθίες και τι μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση των αντίστοιχων σειρών.

Αν δοθεί οποιαδήποτε ορθοκανονική ακολουθία (e_k) σ' ένα χώρο Hilbert H, μπορούμε να μελετήσουμε σειρές τις μορφής

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\,, \qquad (6)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ είναι οποιαδήποτε αριθμητικά μεγέθη. Εξ' ορισμού μια τέτοια σειρά *συγκλίνει* και έχει *άθροισμα* s αν υπάρχει ένα $s \in H$ τέτοιο ώστε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων $s_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ να συγκλίνει στο s, δηλαδή αν υπάρχει ένα $s \in H$ έτσι ώστε $\|s_n - s\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

<u>Θεώρημα 1</u> (***Σύγκλιση***). Έστω ότι (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία σ' ένα χώρο Hilbert H. Τότε:

a) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ συγκλίνει (ως προς τη νόρμα του H) αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ συγκλίνει. (7)

b) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ συγκλίνει και έχει άθροισμα x, τότε οι συντελεστές α_k είναι οι *συντελεστές Fourier* $\langle x, e_k\rangle$. Έτσι σ' αυτή την περίπτωση, η (6) μπορεί να γραφτεί

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k \ . \qquad (8)$$

c) Για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ με $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ συγκλίνει (ως προς τη νόρμα του H).

<u>Απόδειξη</u>.

a) Θεωρούμε τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \text{ και } \sigma_n = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 .$$

Τότε για κάθε m και $n > m$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n - \alpha_1 e_1 - \ldots - \alpha_m e_m \\ &= \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n , \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_n - \sigma_m &= |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_m|^2 + |\alpha_{m+1}|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 - |\alpha_1|^2 - \ldots - |\alpha_m|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 , \end{aligned}$$

και λόγω της ορθοκανονικότητας

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n\|^2 \\ &= \langle \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n, \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n\rangle \\ &= \alpha_{m+1}\langle e_{m+1}, \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n\rangle + \ldots + \alpha_n \langle e_n, \alpha_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \alpha_n e_n\rangle \\ &= \alpha_{m+1}\left[\overline{\alpha_{m+1}}\langle e_{m+1}, e_{m+1}\rangle + \ldots + \overline{\alpha_n}\langle e_{m+1}, e_n\rangle\right] \\ &\quad + \ldots + \alpha_n\left[\overline{\alpha_{m+1}}\langle e_n, e_{m+1}\rangle + \ldots + \overline{\alpha_n}\langle e_n, e_n\rangle\right] \\ &= \alpha_{m+1}\overline{\alpha_{m+1}} + \ldots + \alpha_n\overline{\alpha_n} \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 \\ &= \sigma_n - \sigma_m . \end{aligned}$$

Συνεπώς η (s_n) είναι Cauchy στον H αν και μόνο αν η (σ_n) είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Επειδή κάθε ακολουθία Cauchy σ' ένα πλήρη μετρικό χώρο συγκλίνει προς ένα σημείο του χώρου και οι H, $\mathbb{R}$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι, προκύπτει ότι η (s_n) συγκλίνει στον H αν και μόνο αν η (σ_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ συγκλίνει.

b) Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των s_n, e_j και χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα, έχουμε

$$\begin{aligned}\langle s_n, e_j\rangle &= \langle \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, e_j\rangle \\ &= \alpha_1\langle e_1, e_j\rangle + \ldots + \alpha_n\langle e_n, e_j\rangle \\ &= \alpha_j\langle e_j, e_j\rangle = \alpha_j, \qquad \textit{για } j = 1,\ldots,k \quad (k \le n \textit{ και σταθερό}).\end{aligned}$$

Από την υπόθεση, $s_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k \to x$ καθώς $n \to \infty$. Από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου

$$\alpha_j = \langle s_n, e_j\rangle \to \langle x, e_j\rangle \quad (j \le k).$$

Μπορούμε να πάρουμε το k $(\le n)$ οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε γιατί $n \to \infty$, έτσι ώστε να έχουμε $\alpha_j = \langle x, e_j\rangle$ για κάθε $j = 1,2,\ldots$. Τότε $x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$.

Αν λοιπόν η (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία σ' ένα χώρο Hilbert H, τότε κάθε $x \in H$ έχει ανάπτυγμα ως προς την (e_k) με συντελεστές Fourier τα εσωτερικά γινόμενα $\langle x, e_k\rangle$.

c) Από την ανισότητα Bessel $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$ βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2$ συγκλίνει γιατί φράσσεται από τη $\|x\|^2$. Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$ συγκλίνει και λόγω του (a) και η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ συγκλίνει (ως προς τη νόρμα του H).

Αν μια ορθοκανονική οικογένεια (e_k), $k \in I$, σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X είναι μη αριθμήσιμη (γιατί το σύνολο των δεικτών I είναι μη αριθμήσιμο),

μπορούμε και πάλι να βρούμε τους συντελεστές Fourier $\langle x, e_k \rangle$ ενός $x \in X$, όπου $k \in I$. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε την $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2$ για να συμπεράνουμε ότι για κάθε σταθεροποιημένο $m = 1, 2, \ldots$ ο αριθμός των συντελεστών Fourier τέτοιων ώστε $|\langle x, e_k \rangle| > \frac{1}{m}$ πρέπει να είναι πεπερασμένος. Αυτό αποδεικνύει το αξιοσημείωτο παρακάτω λήμμα:

<u>Λήμμα</u> (***Συντελεστές Fourier***). Κάθε x σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X μπορεί να έχει το πολύ αριθμήσιμο μεγάλο πλήθος μη μηδενικών συντελεστών Fourier $\langle x, e_k \rangle$ ως προς μια ορθοκανονική οικογένεια (e_k), $k \in I$, στον X.

Έτσι με κάθε σταθεροποιημένο $x \in H$ μπορούμε να πάρουμε μια σειρά παρόμοια με την $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$, την

$$\sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k \tag{9}$$

και μπορούμε να διατάξουμε τα e_k με $\langle x, e_k \rangle \ne 0$ σε μια ακολουθία $(e_1, e_2, \ldots)$, έτσι ώστε η (9) να πάρει τη μορφή $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$. Τότε η σύγκλιση προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα σύγκλισης . Θα δείξουμε ότι το άθροισμα δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία αυτά τα e_k διατάσσονται σε μια ακολουθία.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω ότι (w_m) είναι μια τυχαία αναδιάταξη της (e_n). Εξ' ορισμού αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια *ένα – προς – ένα* απεικόνιση $n \to m(n)$ του $\mathbb{N}$ *επί* του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε οι αντίστοιχοι όροι των δύο ακολουθιών να είναι ίσοι, δηλαδή $w_{m(n)} = e_n$. Θέτουμε $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$, $\beta_m = \langle x, w_m \rangle$ και $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, $x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m w_m$. Τότε από το (b) του θεωρήματος σύγκλισης, $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle = \langle x_1, e_n \rangle$ και $\beta_m = \langle x, w_m \rangle = \langle x_2, w_m \rangle$. Επειδή $w_{m(n)} = e_n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle x_1 - x_2, e_n \rangle &= \langle x_1, e_n \rangle - \langle x_2, e_n \rangle \\
&= \langle x_1, e_n \rangle - \langle x_2, w_{m(n)} \rangle \\
&= \langle x, e_n \rangle - \langle x, w_{m(n)} \rangle \\
&= \langle x, e_n \rangle - \langle x, e_n \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

και ομοίως

$$\begin{aligned}\langle x_1 - x_2, w_m\rangle &= \langle x_1, w_m\rangle - \langle x_2, w_m\rangle \\ &= \langle x_1, w_{m(n)}\rangle - \langle x_2, w_{m(n)}\rangle \\ &= \langle x_1, e_n\rangle - \langle x_2, w_{m(n)}\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \langle x, w_{m(n)}\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle - \langle x, e_n\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Από τις ισότητες $\langle x_1 - x_2, e_n\rangle = \langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 &= \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle \\ &= \langle x_1 - x_2, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n - \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m w_m\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha_n}\langle x_1 - x_2, e_n\rangle - \sum_{m=1}^{\infty}\overline{\beta_m}\langle x_1 - x_2, w_m\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

ΟΛΙΚΑ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Τα πραγματικά ενδιαφέροντα ορθοκανονικά σύνολα σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο και σε χώρους Hilbert είναι αυτά που αποτελούνται από «επαρκώς μεγάλο αριθμό» στοιχείων έτσι ώστε κάθε στοιχείο του χώρου να μπορεί να αναπαρασταθεί ή να μπορεί να προσεγγιστεί επαρκώς και με ακρίβεια με χρήση αυτών των ορθοκανονικών συνόλων. Στους χώρους πεπερασμένης διάστασης n η κατάσταση είναι απλή γιατί το μόνο που χρειαζόμαστε είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο n στοιχείων. Το ερώτημα είναι τι μπορεί να γίνει ώστε να επιτευχθεί αυτό και στους απειροδιάστατους χώρους.

Ορισμός 1 (Ολικό ορθοκανονικό σύνολο – Total orthonormal set). *Ολικό σύνολο* (ή *βασικό σύνολο – fundamental set*) σ' ένα χώρο με νόρμα X είναι ένα υποσύνολο $M \subset X$ τέτοιο ώστε ο span$M$ να είναι πυκνός υπόχωρος του X. Συνεπώς, ένα ορθοκανονικό σύνολο (ή μια ορθοκανονική ακολουθία ή οικογένεια) σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο X που είναι ολικό στον X λέγεται *ολικό ορθοκανονικό σύ*νολο ή κατ' άλλους *πλήρες* (complete) ορθοκανονικό σύνολο (ή ολική ορθοκανονική ακολουθία ή οικογένεια, αντίστοιχα) στον X.

Από τον ορισμό είναι προφανές ότι το M είναι ολικό στον X αν και μόνο αν $X = \overline{\text{span}M}$.

Μια ολική ορθοκανονική οικογένεια στον X λέγεται μερικές φορές και *ορθοκανονική βάση* του X, και σημαίνει ότι δεν περιέχεται γνήσια σε μια άλλη ορθοκανονική οικογένεια του X. Ωστόσο, δεν πρόκειται για αλγεβρική βάση του X ως διανυσματικού χώρου, εκτός και αν ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης (Kreyszig & Wiley, 1978). Με τον όρο βάση ενός διανυσματικού χώρου X εννοούμε ένα υποσύνολο B του X που αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα με την ιδιότητα κάθε στοιχείο του X να γράφεται ως *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B. Σε ορισμένους χώρους , όπως στον l^p, $p \geq 1$ κάθε στοιχείο τους γράφεται ως «άπειρο» άθροισμα, δηλαδή ως σειρά της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Έτσι σ' αυτούς τους χώρους μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία (e_k) είναι ένα είδος «βάσης» όπου όμως κάθε στοιχείο του χώρου είναι ένας μοναδικός «άπειρος» γραμμικός συνδυασμός των $e_k, k \in \mathbb{N}$. Τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν σε όλους τους διαχωρίσιμους χώρους Hilbert και μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να είναι και ορθοκανονικές (Αργυρός, 2004).

Σε κάθε χώρο Hilbert $H \neq \{0\}$ υπάρχει ένα ολικό ορθοκανονικό σύνολο και όλα τα ολικά ορθοκανονικά σύνολα σ' ένα δεδομένο χώρο Hilbert $H \neq \{0\}$ έχουν την ίδια ισχύ (cardinality), δηλαδή τον ίδιο πληθικό αριθμό. Αυτή η ισχύς λέγεται *διάσταση Hilbert* ή *ορθογώνια διάσταση* του H. Αν $H = \{0\}$ αυτή η διάσταση είναι εξ' ορισμού ίση με μηδέν.

Το παρακάτω θεώρημα είναι ένα κριτήριο για να είναι ένα σύνολο ολικό σ' ένα χώρο Hilbert, αποδεικνύοντας ότι ένα ολικό ορθοκανονικό σύνολο δε μπορεί να επεκταθεί σ' ένα πιο ευρύ ορθοκανονικό σύνολο με την προσθήκη νέων στοιχείων.

<u>Θεώρημα 1</u> (***Totality***). Έστω ότι M είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X. Τότε:

a) Αν το M είναι ολικό στον X, τότε δεν υπάρχει μη μηδενικό $x \in X$ που να είναι ορθογώνιο με κάθε στοιχείο του M, δηλαδή

$$x \perp M \Rightarrow x = 0. \qquad (1)$$

b) Αν ο X είναι πλήρης, η (1) είναι επίσης ικανή συνθήκη για να είναι το M ολικό στον X.

<u>Απόδειξη</u>.

a) Έστω ότι ο H είναι η πλήρωση του X σε χώρο Hilbert, τότε ο X είναι πυκνός υπόχωρος του H. Από την υπόθεση, το M είναι ολικό στον X, οπότε ο span$M$ είναι πυκνός υπόχωρος του X, και άρα είναι πυκνός υπόχωρος του H. Τότε από γνωστό λήμμα συνεπάγεται ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του M στον H είναι το $\{0\}$, δηλαδή $H = \overline{\text{span}M} \Rightarrow M^{\perp} = \{0\}$. Έτσι, αν $x \in X$ και $x \perp M$, τότε $x = 0$.

b) Αν ο X είναι χώρος Hilbert και το M ικανοποιεί τη συνθήκη (1), δηλαδή $M^{\perp} = \{0\}$, τότε από το αντίστροφο του ίδιου λήμματος συνεπάγεται ότι $X = \overline{\text{span}M}$, δηλαδή το M είναι ολικό σύνολο στον X.

Η πληρότητα του X στο (b) είναι ουσιώδης, γιατί αν ο X δεν είναι πλήρης τότε μπορεί να μην υπάρχει ολικό ορθοκανονικό σύνολο $M \subset X$. Σχετικά παραδείγματα έχουν δοθεί από τους J.Dixmier (1953) και N.Bourbaki (1955) (Kreyszig & Wiley, 1978).

Ένα άλλο σημαντικό κριτήριο για να είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ολικό σ' ένα χώρο Hilbert προκύπτει από την ανισότητα Bessel

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2, \qquad (2)$$

όπου το αριστερό μέλος είναι μια άπειρη σειρά ή ένα πεπερασμένο άθροισμα. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι δίνεται ένα οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύνολο M σ' ένα χώρο Hilbert H και σταθεροποιούμε ένα $x \in H$. Από γνωστό λήμμα γνωρίζουμε ότι κάθε τέτοιο x έχει το πολύ αριθμήσιμο μεγάλο πλήθος μη μηδενικών συντελεστών Fourier $\langle x, e_k \rangle$ ως προς μια ορθοκανονική οικογένεια (e_k), $k \in I$ στον H, οπότε μπορούμε να διατάξουμε αυτούς τους συντελεστές σε μια ακολουθία, έστω $\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots$. Με το σύμβολο της ισότητας η (2) γίνεται

$$\sum_{k \in I} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \text{ (}\textbf{Ισότητα Parseval}\text{)} \qquad (3)$$

και δίνει ένα άλλο κριτήριο για να είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ολικό σ' ένα χώρο Hilbert.

<u>Θεώρημα 2</u> (***Totality***). Ένα ορθοκανονικό σύνολο M σ' ένα χώρο Hilbert H είναι ολικό στον H αν και μόνο αν για όλα τα $x \in H$ ισχύει η ισότητα Parseval (άθροιση επί όλων των μη μηδενικών συντελεστών Fourier του x ως προς το M).

<u>Απόδειξη</u>.

a) ($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι ισχύει η ισότητα Parseval $\sum_{k\in I}|\langle x,e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$ για όλα τα $x \in H$. Αν το M δεν είναι ολικό, από την περίπτωση (a) του θεωρήματος (1) θα υπάρχει ένα *μη μηδενικό* x στον H με $x \perp M$. Επειδή

$$x \perp M \Rightarrow x \perp e_k \Rightarrow \langle x,e_k\rangle = 0, \forall k \in I,$$

οπότε το αριστερό μέλος της ισότητας Parseval είναι μηδέν, δηλαδή $\sum_{k\in I}|\langle x,e_k\rangle|^2 = 0$, ενώ $\|x\|^2 \neq 0$ εφόσον $x \neq 0$. Άρα $\|x\|^2 \neq 0 = \sum_{k\in I}|\langle x,e_k\rangle|^2$, που είναι άτοπο και ως εκ τούτου αν η ισότητα Parseval ισχύει για όλα τα $x \in H$, τότε το M πρέπει να είναι ολικό στον H.

b) ($\Rightarrow$) Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το M είναι ολικό στον H. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $x \in H$ και τους μη μηδενικούς συντελεστές Fourier του x διατεταγμένα σε μια ακολουθία $\langle x,e_1\rangle, \langle x,e_2\rangle, \ldots$, ή με ορισμένη σειρά αν ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος. Ορίζουμε το y ως

$$y = \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle e_k \qquad (4)$$

όπου στην περίπτωση της άπειρης σειράς, η σύγκλιση προκύπτει από το θεώρημα σύγκλισης. Θα δείξουμε ότι $x - y \perp M$. Για κάθε e_j στην (4) έχουμε, λόγω της ορθοκανονικότητας,

$$\begin{aligned}
\langle x-y,e_j\rangle &= \langle x,e_j\rangle - \langle y,e_j\rangle \\
&= \langle x,e_j\rangle - \langle \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle e_k, e_j\rangle \\
&= \langle x,e_j\rangle - \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,e_j\rangle \\
&= \langle x,e_j\rangle - \langle x,e_j\rangle\langle e_j,e_j\rangle \\
&= \langle x,e_j\rangle - \langle x,e_j\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Επίσης <u>για κάθε</u> $\upsilon \in M$ που δεν περιέχεται στην (4) έχουμε $\langle x,\upsilon\rangle = 0$, οπότε

$$\begin{aligned}
\langle x-y,\upsilon\rangle &= \langle x,\upsilon\rangle - \langle y,\upsilon\rangle \\
&= \langle x,\upsilon\rangle - \langle \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle e_k, \upsilon\rangle \\
&= \langle x,\upsilon\rangle - \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle\langle e_k,\upsilon\rangle \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Έτσι $x-y \perp M \Rightarrow x-y \in M^{\perp}$. Επειδή το M είναι ολικό στον H, εξ' ορισμού ο span$M$ είναι πυκνός υπόχωρος του H και από γνωστό λήμμα συνεπάγεται ότι $M^{\perp}=\{0\}$. Άρα $x-y=0 \Rightarrow x=y$. Χρησιμοποιώντας την $x=y=\sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle e_k$ και την ορθοκανονικότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x,x\rangle = \langle \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle e_k, \sum_{m\in I}\langle x,e_m\rangle e_m\rangle \\
&= \sum_{k\in I}\sum_{m\in I}\langle \langle x,e_k\rangle e_k, \langle x,e_m\rangle e_m\rangle \\
&= \sum_{k\in I}\sum_{m\in I}\langle x,e_k\rangle \langle e_k, \langle x,e_m\rangle e_m\rangle \\
&= \sum_{k\in I}\sum_{m\in I}\langle x,e_k\rangle \overline{\langle x,e_m\rangle}\langle e_k,e_m\rangle \\
&= \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle \overline{\langle x,e_k\rangle}\langle e_k,e_k\rangle \\
&= \sum_{k\in I}\langle x,e_k\rangle \overline{\langle x,e_k\rangle} \\
&= \sum_{k\in I}\left|\langle x,e_k\rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η ισότητα Parseval και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Γνωρίζουμε ότι εξ' ορισμού ένας διαχωρίσιμος χώρος έχει αριθμήσιμο υποσύνολο που είναι πυκνό στο χώρο. Έτσι, οι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert είναι πιο απλοί από τους μη διαχωρίσιμους γιατί δε μπορεί να περιέχουν μη αριθμήσιμα ορθοκανονικά σύνολα.

Θεώρημα 3 (***Διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert***). Έστω H ένας χώρος Hilbert. Τότε:

a) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, κάθε ορθοκανονικό σύνολο στον H είναι αριθμήσιμο.

b) Αν ο H έχει μια ορθοκανονική ακολουθία που είναι ολική στο χώρο, τότε ο H είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη.

a) Έστω ότι ο H είναι διαχωρίσιμος, το B είναι ένα οποιοδήποτε πυκνό σύνολο στον H και το M είναι ένα οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύνολο. Τότε δύο οποιαδήποτε διακεκριμένα στοιχεία x και y του M έχουν απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ γιατί λόγω της ορθοκανονικότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle = 0 = \langle y,x\rangle, \\
&\langle x,x\rangle = \|x\|^2 = 1, \\
&\langle y,y\rangle = \|y\|^2 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2 \Rightarrow d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Έτσι οι σφαιρικές περιοχές N_x του x και N_y του y ακτίνας $\frac{\sqrt{2}}{3} < \sqrt{2}$ είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα, δηλαδή $N_x \cap N_y = \varnothing$. Επειδή το B είναι πυκνό σύνολο στον H ισχύουν $N_x \cap B \neq \varnothing$ και $N_y \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχουν ένα στοιχείο $b \in B$ με $b \in N_x$ και ένα στοιχείο $\tilde{b} \in B$ με $\tilde{b} \in N_y$ και $\tilde{b} \neq b$ εφόσον $N_x \cap N_y = \varnothing$. Έτσι αν το M ήταν μη αριθμήσιμο σύνολο, θα είχαμε μη αριθμήσιμο πλήθος τέτοιων ανά δύο ξένων μεταξύ τους σφαιρικών περιοχών (μια για κάθε $x \in M$), οπότε το B θα ήταν μη αριθμήσιμο. Άρα ο H θα είχε μη αριθμήσιμο υποσύνολο πυκνό στο χώρο. Επειδή το B είναι ένα τυχαία επιλεγμένο πυκνό σύνολο, αυτό σημαίνει ότι ο H δεν θα είχε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο στο χώρο, που είναι άτοπο εφόσον ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Άρα συμπεραίνουμε ότι το M πρέπει να είναι αριθμήσιμο.

b) Έστω ότι $(e_k), k \in N$ είναι μια ολική ορθοκανονική ακολουθία στον H και A είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών της μορφής

$$\gamma_1^{(n)} e_1 + \ldots + \gamma_n^{(n)} e_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

όπου $\gamma_k^{(n)} = a_k^{(n)} + i b_k^{(n)}$ με $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$ ρητούς και $b_k^{(n)} = 0$ όταν ο H είναι πραγματικός χώρος. Προφανώς το A είναι αριθμήσιμο σύνολο. Θ' αποδείξουμε ότι το A είναι πυκνό στον H δείχνοντας ότι για κάθε $x \in H$ υπάρχει $\upsilon \in A$ με $\upsilon \to x$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \in H$ και $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\upsilon \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - \upsilon\| < \varepsilon$.

Επειδή η ακολουθία $(e_k), k \in N$ είναι ολική στον H, υπάρχει ένα n τέτοιο ώστε ο $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ να περιέχει ένα σημείο του οποίου η απόσταση από το x είναι μικρότερη από $\varepsilon/2$. Ειδικότερα, $\|x - y\| < \varepsilon/2$ για την ορθογώνια προβολή y του x στον Y_n που δίνεται από την ισότητα $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Έτσι έχουμε

$$\|x-y\|<\varepsilon/2 \Rightarrow \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|<\varepsilon/2\,.$$

Επειδή το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $\langle x,e_k\rangle$ υπάρχει ένα $\gamma_k^{(n)}$ (με το πραγματικό μέρος $a_k^{(n)}$ και το φανταστικό μέρος $b_k^{(n)}$ ρητούς) τέτοιο ώστε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left\|\sum_{k=1}^{n}\left[\langle x,e_k\rangle-\gamma_k^{(n)}\right]e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ως εκ τούτου το $\upsilon\in A$ που ορίζεται ως $\upsilon=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned}\|x-\upsilon\| &= \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k\right\| = \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k+\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k\right\| \\ &\le \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα το σύνολο A είναι πυκνό στον H, και επειδή το A είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του H, ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Γνωρίζουμε ότι ένας **ισομορφισμός** ενός χώρου Hilbert H επί ενός χώρου Hilbert $\widetilde{H}$ πάνω από το ίδιο σώμα είναι ένας ένα – προς – ένα και επί γραμμικός τελεστής $T:H\to\widetilde{H}$ τέτοιος ώστε για όλα τα $x,y\in H$,

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle\,. \qquad (5)$$

Τότε οι H και $\widetilde{H}$ λέγονται *ισόμορφοι χώροι Hilbert*. Επειδή ο T είναι γραμμικός τελεστής, διατηρεί τη δομή του διανυσματικού χώρου, και η (5) δείχνει ότι ο T είναι ισομετρία. Επειδή ο T είναι ένα – προς – ένα και επί και ισομετρία προκύπτει ότι οι H και $\widetilde{H}$ είναι αλγεβρικά και μετρικά όμοιοι, είναι ουσιαστικά ο ίδιος χώρος, εκτός από τη φύση των στοιχείων τους, και έτσι μπορούμε να θεωρούμε τους H και $\widetilde{H}$ ως δύο αντίγραφα του ίδιου αφηρημένου χώρου, όπως ακριβώς κάνουμε συχνά στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου διάστασης n.

Επειδή για κάθε διάσταση Hilbert υπάρχει ακριβώς ένας αφηρημένος πραγματικός χώρος Hilbert και ακριβώς ένας αφηρημένος μιγαδικός χώρος Hilbert, δύο αφηρημένοι χώροι Hilbert πάνω από το ίδιο σώμα διακρίνονται μόνο από τη

διάσταση Hilbert που έχουν, και αυτό το συμπέρασμα αποτελεί γενίκευση αντίστοιχου αποτελέσματος στην περίπτωση των Ευκλείδειων χώρων. Αυτό είναι το νόημα του παρακάτω θεωρήματος.

<u>Θεώρημα 4</u> (***Ισομορφισμός και διάσταση Hilbert***). Δύο χώροι Hilbert H και $\widetilde{H}$, και οι δύο πραγματικοί ή και οι δύο μιγαδικοί, είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση Hilbert.

<u>Απόδειξη</u>.

a) ($\Rightarrow$) Αν οι H και $\widetilde{H}$ είναι ισόμορφοι και ο $T : H \to \widetilde{H}$ είναι ισομορφισμός, τότε η ισότητα $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ που ισχύει για κάθε $x, y \in H$ δείχνει ότι τα ορθοκανονικά στοιχεία του H έχουν ορθοκανονικές εικόνες μέσω του T. Επειδή ο T είναι ένα – προς – ένα και επί, συμπεραίνουμε ότι ο T απεικονίζει κάθε ολικό ορθοκανονικό σύνολο του H επί ενός ολικού ορθοκανονικού συνόλου του $\widetilde{H}$. Επειδή όλα τα ολικά ορθοκανονικά σύνολα σ' ένα δεδομένο χώρο Hilbert έχουν την ίδια ισχύ, οι H και $\widetilde{H}$ έχουν την ίδια διάσταση Hilbert.

b) ($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι οι H και $\widetilde{H}$ έχουν την ίδια διάσταση. Η περίπτωση $H = \{0\}$ και $\widetilde{H} = \{0\}$, οπότε εξ' ορισμού και οι δύο χώροι έχουν διάσταση ίση με μηδέν, είναι τετριμμένη. Έστω ότι $H \neq \{0\}$, τότε $\widetilde{H} \neq \{0\}$ και δύο οποιαδήποτε ολικά ορθοκανονικά σύνολα M στον H και $\widetilde{M}$ στον $\widetilde{H}$ έχουν την ίδια ισχύ, και έτσι μπορούμε να τα καταχωρίσουμε με το ίδιο σύνολο δεικτών $\{k\}$ και να γράψουμε $M = (e_k)$ και $\widetilde{M} = (\widetilde{e_k})$.

Για να δείξουμε ότι οι H και $\widetilde{H}$ είναι ισόμορφοι, κατασκευάζουμε ένα ισομορφισμό T του H επί του $\widetilde{H}$. Για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k \,, \qquad (6)$$

όπου το δεξί μέλος της ισότητας είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα ή μια άπειρη σειρά και $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$ από την ανισότητα Bessel. Ορίζουμε $T : H \to \widetilde{H}$ και

$$\tilde{x} = Tx = \sum_k \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k} \,. \qquad (7)$$

Η σειρά $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$ συγκλίνει γιατί φράσσεται από την $\|x\|^2$, οπότε από το θεώρημα σύγκλισης προκύπτει η σύγκλιση της σειράς $\sum_k \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k}$, άρα $\tilde{x} \in \widetilde{H}$ και συνεπώς *ο* T *είναι καλά ορισμένος. Ο* τελεστής T *είναι γραμμικός* γιατί διατηρεί τις πράξεις. Πράγματι, για κάθε $x, y \in H$ και α βαθμωτό μέγεθος από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \sum_k \langle x+y, e_k \rangle \widetilde{e_k} = \sum_k \left[\langle x, e_k \rangle + \langle y, e_k \rangle \right] \widetilde{e_k} \\ &= \sum_k \left[\langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k} + \langle y, e_k \rangle \widetilde{e_k} \right] \\ &= \sum_k \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k} + \sum_k \langle y, e_k \rangle \widetilde{e_k} \\ &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \sum_k \langle \alpha x, e_k \rangle \widetilde{e_k} = \sum_k \alpha \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k} \\ &= \alpha \sum_k \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k} = \alpha Tx. \end{aligned}$$

Επειδή τα M και $\widetilde{M}$ είναι ολικά ορθοκανονικά σύνολα, για τα $x \in H$ με $x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$ και $\tilde{x} \in \widetilde{H}$ με $\tilde{x} = Tx = \sum_k \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k}$ ισχύει η ισότητα Parseval

$$\|\tilde{x}\|^2 = \|Tx\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2,$$

έτσι $\|Tx\| = \|x\|$, οπότε *ο* T *είναι ισομετρία*. Από τις σχέσεις

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) \text{ (για πραγματικούς χώρους)}$$

και

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) \\ \mathrm{Im}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right) \end{aligned}\right\} \text{ (για φανταστικούς χώρους)}$$

και την ισομετρία του T προκύπτει ότι *ο* T *διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο*. Επιπλέον, η ισομετρία συνεπάγεται ότι αν $Tx = Ty$ τότε $\|x-y\| = \|T(x-y)\| = \|Tx - Ty\| = 0$, άρα $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ και *ο* T *είναι ένα – προς – ένα*. Τέλος, αν δοθεί ένα τυχαίο $\tilde{x} \in \widetilde{H}$ με $\tilde{x} = \sum_k \alpha_k \widetilde{e_k}$ έχουμε

$\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$ από την ανισότητα Bessel, άρα η $\sum_k |\alpha_k|^2$ συγκλίνει. Έτσι $\sum_k \alpha_k e_k$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα ή μια σειρά που συγκλίνει σ' ένα $x \in H$ (λόγω του θεωρήματος σύγκλισης και της σύγκλισης της $\sum_k |\alpha_k|^2$), και $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ από το ίδιο θεώρημα. Συνεπώς έχουμε $\tilde{x} = \sum_k \langle x, e_k \rangle \widetilde{e_k} = Tx$, από την (7). Άρα *ο* T *είναι επί*.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LEGENDRE, HERMITE ΚΑΙ LAGUERRE

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η θεωρία των χώρων Hilbert έχει εφαρμογές σε πολλά θέματα της Ανάλυσης και για να τους χρησιμοποιήσουμε πρέπει να γνωρίζουμε ποιο ολικό ορθοκανονικό σύνολο ή σύνολα να επιλέξουμε σε μια συγκεκριμένη περίπτωση και πως να μελετήσουμε τις ιδιότητες των στοιχείων τέτοιων συνόλων. Μερικές ολικές ορθογώνιες και ορθοκανονικές ακολουθίες που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά σε πρακτικά προβλήματα (για παράδειγμα, στην Κβαντομηχανική), εμπλέκουν τις γνωστές ακολουθίες των ορθογώνιων πολυωνύμων Legendre, Hermite και Laguerre (Kreyszig & Wiley, 1978).

Μια *ακολουθία ορθογώνιων πολυωνύμων* είναι μια άπειρη ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων μιας μεταβλητής x, στην οποία κάθε πολυώνυμο έχει βαθμό n, και είναι τέτοια ώστε δύο οποιαδήποτε διαφορετικά πολυώνυμα αυτής της ακολουθίας να είναι ορθογώνια το ένα με το άλλο στο χώρο με εσωτερικό γινόμενο L^2. *Οι περισσότερες απ' αυτές τις πολυωνυμικές συναρτήσεις εισήχθησαν ώστε να επιλύσουν ειδικά προβλήματα,* οι ιδιότητες τους μελετήθηκαν με μεγάλη λεπτομέρεια και εφαρμογές τους αναπτύχθηκαν σε πολλά πεδία των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Οι ειδικές συναρτήσεις άρχισαν να παρουσιάζονται στα τέλη του 1600. Γύρω στα 1720 ο Euler ξεκίνησε την ενασχόληση του με πολλές απ' αυτές τις συναρτήσεις (π.χ. συνάρτηση γάμμα, συναρτήσεις Bessel). *Τα ορθογώνια πολυώνυμα* φαίνεται ότι *παρουσιάστηκαν αρχικά από τον Legendre* σε εργασία του επί της Ουράνιας

Μηχανικής. *Μερικά χρόνια αργότερα* αναπτύχθηκε η Αρμονική Ανάλυση και *εμφανίστηκαν τα ορθογώνια πολυώνυμα Laguerre και Hermite* (**Askey**, 2002).

Ο **Adrien – Marie Legendre** (1752 – 1833), το 1782, μελέτησε την έλξη των ελλειψοειδών, απέδειξε ότι οι έλξεις σ' ένα εξωτερικό σημείο που βρίσκεται στον άξονα των δύο ελλειψοειδών είναι ανάλογες των μαζών τους και εισήγαγε τις συναρτήσεις που σε σύγχρονη ορολογία ονομάζονται «*συναρτήσεις Legendre*», για να προσδιορίσει, χρησιμοποιώντας δυναμοσειρές, την έλξη ενός ελλειψοειδούς σε οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο. Αυτές οι συναρτήσεις είναι σημαντικές σε προβλήματα που εμπλέκουν σφαίρες ή σφαιρικές συντεταγμένες, και, λόγω των ιδιοτήτων της ορθογωνιότητας, είναι επίσης χρήσιμες στην Αριθμητική Ανάλυση. Το 1784, δημοσίευσε τις εργασίες του στην Ουράνια Μηχανική, συμπεριλαμβανομένης και της μελέτης του *«Recherches sur la figure des planets»* (*«Έρευνες επί του σχήματος των πλανητών»*), στην οποία περιλαμβάνονται τα «***πολυώνυμα Legendre***» ή, αλλιώς, ***συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους***, που είναι ειδικές περιπτώσεις των συναρτήσεων Legendre.

Η ανάπτυξη της γενικής θεωρίας των ορθογώνιων πολυωνύμων άρχισε στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, το 1850, από μια μελέτη των συνεχών κλασμάτων του *P.L.Chebyshev*, και συνεχίστηκε από τους *A.A. Markov*, *T.J.Stieltges* και άλλους μαθηματικούς.

Ο **Edmond Nicolas Laguerre** (1834 – 1886) ασχολήθηκε με τη μελέτη προσεγγιστικών μεθόδων και η σχετική εργασία του, που δημοσιεύτηκε το 1879, περιλαμβάνει τις ανακαλύψεις του για τις ομώνυμες διαφορικές εξισώσεις, τις ειδικές συναρτήσεις του (τα «***πολυώνυμα Laguerre***») και ένα από τα πρώτα άπειρα συνεχή κλάσματα που ήταν γνωστό ότι συγκλίνουν. Εξετάζοντας το $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$ βρήκε μια αποκλίνουσα σειρά, της οποίας οι πρώτοι όροι δίνουν μια καλή προσέγγιση αυτού του ολοκληρώματος. Κατόπιν, ανακάλυψε το ανάπτυγμα ενός συγκλίνοντος συνεχούς κλάσματος για το ολοκλήρωμα, καθώς και ότι το αποτέλεσμα της σύγκλισης ενέπλεκε τα πολυώνυμα Laguerre. Ερεύνησε τις ιδιότητες αυτών των πολυωνύμων, αποδεικνύοντας σχέσεις ορθογωνιότητας και δείχνοντας ότι *μια αυθαίρετη συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε μια «τύπου Fourier» σειρά στα πολυώνυμα Laguerre* (Askey, 2002).

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LEGENDRE

Θεωρούμε το χώρο X όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[-1,1]$ με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, y(t)\, dt\,.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα πλήρωσης, για τον X υπάρχει ένας μοναδικός χώρος Hilbert που συμβολίζεται ως $L^2[-1,1]$.

Θέλουμε να βρούμε μια ολική ορθοκανονική ακολουθία στον $L^2[-1,1]$, που ν' αποτελείται από «εύχρηστες» συναρτήσεις. Συναρτήσεις τέτοιου τύπου είναι τα πολυώνυμα, έτσι ξεκινάμε από τις δυνάμεις

$$x_0(t) = 1, \qquad x_1(t) = t, \ldots, \qquad x_j(t) = t^j, \ldots \qquad t \in [-1,1]. \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gram – Schmidt για τη γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία (x_j), προκύπτει μια ορθοκανονική ακολουθία (e_n) που έχει την ιδιότητα για κάθε k, $\operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_k\} = \operatorname{span}\{x_0, \ldots, x_k\}$. Κάθε e_n είναι ένα πολυώνυμο γιατί κατά τη διαδικασία αυτή παίρνουμε γραμμικούς συνδυασμούς των x_j. Ο βαθμός του πολυωνύμου e_n είναι n και

η ακολουθία (e_n) *είναι ολική στον* $L^2[-1,1]$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα πλήρωσης γνωρίζουμε ότι για τον χώρο X υπάρχει ένας ισομορφισμός A από το X επί ενός πυκνού υπόχωρου $W \subset L^2[-1,1]$. Επειδή το σύνολο $W = A(X)$ είναι πυκνό στον $L^2[-1,1]$, για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο $x \in L^2[-1,1]$ και δεδομένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση y ορισμένη στο $[-1,1]$ τέτοια ώστε $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*). Από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass, γι' αυτή την y υπάρχει ένα πολυώνυμο z τέτοιο ώστε για κάθε $t \in [-1,1]$, $|y(t) - z(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \langle y - z, y - z\rangle = \int_{-1}^{1} \left[y(t) - z(t)\right]^2 dt \\ &= \int_{-1}^{1} |y(t) - z(t)|^2\, dt < 2\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\|y-z\|<\frac{\varepsilon}{2}$ (**). Από τις σχέσεις (*),(**) και την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε $\|x-z\|\le\|x-y\|+\|y-z\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Ο αλγόριθμος της μεθόδου Gram – Schmidt δείχνει ότι, από την (1), έχουμε $z\in\operatorname{span}\{e_0,...,e_m\}$ για ικανοποιητικά μεγάλο m. Άρα για κάθε $x\in L^2[-1,1]$ και για κάθε $\varepsilon>0$ ο $\operatorname{span}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2[-1,1]$ και συνεπώς η ορθοκανονική ακολουθία (e_n) είναι ολική στον $L^2[-1,1]$.

<u>Ισχυρισμός</u>.

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t), \qquad n=0,1,... \qquad (2a)$$

όπου

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right]. \qquad (2b)$$

Το P_n λέγεται ***<u>πολυώνυμο Legendre</u>*** *τάξης* n και ο τύπος (2b) λέγεται ***<u>τύπος του Rodrigues</u>***.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του διωνύμου

$$\begin{aligned}\left(t^2-1\right)^n &= \binom{n}{0}\left(t^2\right)^n+\binom{n}{1}\left(t^2\right)^{n-1}(-1)+\binom{n}{2}\left(t^2\right)^{n-2}(-1)^2+...\\ &= t^{2n}-nt^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{2!}t^{2n-4}-...,\end{aligned}$$

και επειδή

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n n!}\left(t^2-1\right)^n &= \frac{(2n-1)(2n-3)...3\cdot1}{(2n)(2n-1)(2n-2)...2\cdot1}\left(t^2-1\right)^n\\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)...3\cdot1}{(2n)!}\left\{t^{2n}-nt^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{2!}t^{2n-4}-...\right\}\end{aligned}$$

παραγωγίζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα n φορές όρο προς όρο παίρνουμε από τον (2b) τον τύπο

$$P_n(t)=\frac{(2n-1)(2n-3)...3\cdot1}{n!}\left\{t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-...\right\}$$

δηλαδή τον

$$P_n(t)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n\,j!(n-j)!(n-2j)!}t^{n-2j} \qquad (2c)$$

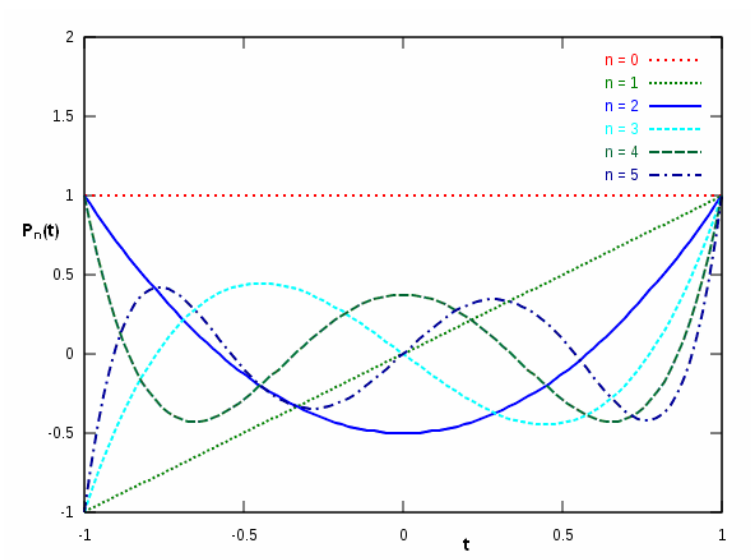
όπου $N=n/2$, αν ο n είναι άρτιος και $N=(n-1)/2$, αν ο n είναι περιττός. Από την (2c) παρατηρούμε ότι το $P_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού , που περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του t αν ο n είναι άρτιος και μόνο περιττές δυνάμεις του t αν ο n είναι περιττός. Για παράδειγμα, τα πρώτα έξι πολυώνυμα Legendre είναι:

$$P_0(t)=1 \qquad P_1(t)=t$$

$$P_2(t)=\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right) \qquad P_3(t)=\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)$$

$$P_4(t)=\frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right) \qquad P_5(t)=\frac{1}{8}\left(63t^5-70t^3+15t\right)$$

και οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο σχήμα[1] 21.



Σχήμα 21.

<u>Απόδειξη των(2a) και (2b)</u>.

a) Στο πρώτο μέρος θ' αποδείξουμε την

$$\|P_n\|=\langle P_n,P_n\rangle^{1/2}=\left[\int_{-1}^{1}P_n^2(t)\,dt\right]^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{2n+1}} \qquad (3)$$

από την (2b). Θέτουμε

$$u=t^2-1.$$

[1] Ανακτήθηκε από το Internet.

Η συνάρτηση u^n και οι παράγωγοι της $\left(u^n\right)',\ldots,\left(u^n\right)^{(n-1)}$ είναι μηδέν στο $t=\pm 1$, και $\left(u^n\right)^{(2n)}=(2n)!$. Από την (2b) έχουμε

$$P_n=\frac{1}{2^n n!}\left(u^n\right)^{(n)}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\|P_n\|^2 &= \langle P_n,P_n\rangle=\langle\frac{1}{2^n n!}\left(u^n\right)^{(n)},\frac{1}{2^n n!}\left(u^n\right)^{(n)}\rangle\\ &=\frac{1}{2^n n!}\langle\left(u^n\right)^{(n)},\frac{1}{2^n n!}\left(u^n\right)^{(n)}\rangle\\ &=\frac{1}{\left(2^n n!\right)^2}\langle\left(u^n\right)^{(n)},\left(u^n\right)^{(n)}\rangle,\end{aligned}$$

και συνεπώς ολοκληρώνοντας n φορές κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(2^n n!\right)^2\|P_n\|^2 &= \langle\left(u^n\right)^{(n)},\left(u^n\right)^{(n)}\rangle=\int_{-1}^{1}\left(u^n\right)^{(n)}\left(u^n\right)^{(n)}dt\\ &=\int_{-1}^{1}\left(\left(u^n\right)^{(n-1)}\right)'\left(u^n\right)^{(n)}dt\\ &=\left[\left(u^n\right)^{(n-1)}\left(u^n\right)^{(n)}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(u^n\right)^{(n-1)}\left(\left(u^n\right)^{(n)}\right)'dt\\ &=\left[\left(u^n\right)^{(n-1)}\left(u^n\right)^{(n)}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(u^n\right)^{(n-1)}\left(u^n\right)^{(n+1)}dt\\ &=\ldots\\ &=\left[\left(u^n\right)^{(n-1)}\left(u^n\right)^{(n)}-\left(u^n\right)^{(n-2)}\left(u^n\right)^{(n+1)}+\ldots+(-1)^{n-1}u^n\left(u^n\right)^{(2n-1)}\right]_{-1}^{1}\\ &\quad+(-1)^n\int_{-1}^{1}u^n\left(u^n\right)^{(2n)}dt\\ &=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}u^n dt\\ &=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^n dt\\ &=(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(-1)^n\left(1-t^2\right)^n dt\\ &=(-1)^{2n}(2n)!\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt\\ &=(2n)!\left[\int_{-1}^{0}\left(1-t^2\right)^n dt+\int_{0}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt\right]\\ &=2(2n)!\int_{0}^{1}\left(1-t^2\right)^n dt\end{aligned}$$

$$= 2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\tau\right)^n \cos\tau d\tau \qquad (t=\sin\tau)$$

$$= 2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\tau\right)^n \cos\tau d\tau$$

$$= 2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\tau d\tau$$

$$= 2(2n)!\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = 2\frac{\left[2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\right]^2}{2n+1}$$

$$= 2\frac{\left(2^n\right)^2\left(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\right)^2}{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

Άρα

$$\left(2^n n!\right)^2 \|P_n\|^2 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)\left(2^n n!\right)^2}$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Τότε από τον τύπο (2a) θα έχουμε $\|e_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\|P_n\| = 1$.

b) Στο δεύτερο μέρος θ' αποδείξουμε ότι η (P_n) είναι ορθογώνια ακολουθία στο χώρο $L^2[-1,1]$, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ όπου $0 \le m < n$. Επειδή το P_m είναι πολυώνυμο, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\langle x_m, P_n\rangle = 0$ για $m < n$, όπου το x_m ορίζεται από την (1). Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε ολοκληρώνοντας m φορές κατά παράγοντες:

$$2^n n!\langle x_m, P_n\rangle = 2^n n!\langle x_m, \frac{1}{2^n n!}\left(u^n\right)^{(n)}\rangle = 2^n n!\frac{1}{2^n n!}\langle x_m, \left(u^n\right)^{(n)}\rangle$$

$$= \langle x_m, \left(u^n\right)^{(n)}\rangle = \int_{-1}^{1} t^m \left(u^n\right)^{(n)} dt = \int_{-1}^{1} t^m \left(\left(u^n\right)^{(n-1)}\right)' dt$$

$$= \left[t^m \left(u^n\right)^{(n-1)}\right]_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} t^{m-1}\left(u^n\right)^{(n-1)} dt$$

$$= \left[t^m \left(u^n\right)^{(n-1)}\right]_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} t^{m-1}\left(\left(u^n\right)^{(n-2)}\right)' dt$$

$$=\left[t^m\left(u^n\right)^{(n-1)}\right]_{-1}^{1}-\left[mt^{m-1}\left(u^n\right)^{(n-2)}\right]_{-1}^{1}+m(m-1)\int_{-1}^{1}t^{m-2}\left(u^n\right)^{(n-2)}dt$$

$$=\ldots$$

$$=\left[t^m\left(u^n\right)^{(n-1)}-mt^{m-1}\left(u^n\right)^{(n-2)}+\ldots+(-1)^{m-1}m!t\left(u^n\right)^{(n-m)}\right]_{-1}^{1}$$

$$+(-1)^m m!\int_{-1}^{1}\left(u^n\right)^{(n-m)}dt$$

$$=(-1)^m m!\int_{-1}^{1}\left(\left(u^n\right)^{(n-m-1)}\right)'dt$$

$$=(-1)^m m!\left[\left(u^n\right)^{(n-m-1)}\right]_{-1}^{1}=(-1)^m m!\cdot 0=0.$$

c) Στη συνέχεια θ' αποδείξουμε τους τύπους (2a) και (2b). Συμβολίζουμε αρχικά το δεξί μέλος της (2a) ως $y_n(t)$, δηλαδή $y_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t)$. Τότε το y_n είναι πολυώνυμο $n-$ βαθμού, και τα (a) και (b) συνεπάγονται ότι η (y_n) είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L^2[-1,1]$.Έστω

$$Y_n=\operatorname{span}\{e_0,\ldots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_0,\ldots,x_n\}=\operatorname{span}\{y_0,\ldots,y_n\},$$

όπου η ισότητα $\operatorname{span}\{e_0,\ldots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_0,\ldots,x_n\}$ προκύπτει από τον αλγόριθμο της μεθόδου Gram – Schmidt και η ισότητα $\operatorname{span}\{x_0,\ldots,x_n\}=\operatorname{span}\{y_0,\ldots,y_n\}$ προκύπτει από την σχέση $\dim Y_n=n+1$ σε συνδυασμό με τη γραμμική ανεξαρτησία των $\{y_0,\ldots,y_n\}$, εφόσον ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έτσι το y_n αναπαρίσταται ως

$$y_n=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j e_j\ . \qquad (4)$$

Από την ορθογωνιότητα,

$$y_n\perp Y_{n-1}=\operatorname{span}\{y_0,\ldots,y_{n-1}\}=\operatorname{span}\{e_0,\ldots,e_{n-1}\},$$

και απ' αυτή τη σχέση συνεπάγεται ότι για $k=0,\ldots,n-1$ έχουμε

$$0=\langle y_n,e_k\rangle=\langle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j e_j,e_k\rangle=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\langle e_j,e_k\rangle=\alpha_k\ .$$

Τότε η (4) δίνει την $y_n=\alpha_0 e_0+\ldots+\alpha_{n-1}e_{n-1}+\alpha_n e_n=\alpha_n e_n$. Επειδή $\|y_n\|=\|e_n\|=1$ και $\|y_n\|=|\alpha_n|\|e_n\|$ έχουμε $|\alpha_n|=1$, και εφόσον τα y_n, e_n είναι

πραγματικοί προκύπτει ότι $\alpha_n = \pm 1$ και συνεπώς $y_n = e_n$ ή $y_n = -e_n$. Επειδή ο συντελεστής του t^n στην (2c) είναι θετικός, $y_n(t) > 0$ για ικανοποιητικά μεγάλο t. Επίσης από την $x_n(t) = t^n$ και τους γενικούς τύπους της μεθόδου Gram – Schmidt προκύπτει ότι και $e_n(t) > 0$ για ικανοποιητικά μεγάλο t. Έτσι $\alpha_n = +1$ και $y_n = e_n$, άρα $e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t)$ για κάθε $t \in [-1,1]$, οπότε αποδείχθηκε η (2a) όπου το P_n δίνεται από την (2b). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη των τύπων (2a) και (2b).

Αποδείξαμε ότι από την Gram – Schmidt ορθογωνιοποίηση της ακολουθίας (x_j), $j = 0,1,\ldots$ με $x_j(t) = t^j$, $\forall t \in [-1,1]$ προκύπτει η ορθοκανονική ακολουθία (e_n) με

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t),\ n = 0,1,\ldots,$$

όπου

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right] = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!} t^{n-2j} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{n!}\left\{t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \ldots\right\} \end{aligned}$$

είναι τα ***<u>πολυώνυμα Legendre</u>***. Αυτά τα πολυώνυμα είναι ***<u>λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Legendre</u>***

$$\left(t^2-1\right) P_n'' + 2tP_n' - n(n+1) P_n = 0. \qquad (5)$$

Πράγματι, θέτουμε

$$f(t) = \left(t^2-1\right)^n$$

και επειδή

$$2^n n! P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right],$$

προκύπτει

$$2^n n! P_n(t) = \left(f(t)\right)^{(n)}.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της $f(t) = \left(t^2-1\right)^n$ έπεται

$$f'(t)=2nt\left(t^2-1\right)^{n-1}\Rightarrow\left(t^2-1\right)f'(t)=2ntf(t)\Rightarrow\left(t^2-1\right)f'(t)-2ntf(t)=0,$$

και από τον τύπο του Leibniz για την $(n+1)$ παράγωγο έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(t^2-1\right)f'(t)\right)^{(n+1)}-2n\left(tf(t)\right)^{(n+1)}=0\\
\Rightarrow\quad &\left(t^2-1\right)^{(n+1)}f'(t)+(n+1)\left(t^2-1\right)^{(n)}f''(t)+\ldots\\
&+2\frac{n(n+1)}{2}\left(f'(t)\right)^{(n-1)}+2t(n+1)\left(f'(t)\right)^{(n)}+\left(t^2-1\right)\left(f'(t)\right)^{(n+1)}\\
&-2n\left[t^{(n+1)}f(t)+(n+1)t^{(n)}f'(t)+\ldots+(n+1)\left(f(t)\right)^{(n)}+t\left(f(t)\right)^{(n+1)}\right]=0\\
\Rightarrow\quad &n(n+1)\left(f(t)\right)^{(n)}+2t(n+1)\left(f(t)\right)^{(n+1)}\\
&+\left(t^2-1\right)\left(f(t)\right)^{(n+2)}-2n(n+1)\left(f(t)\right)^{(n)}-2nt\left(f(t)\right)^{(n+1)}=0\\
\Rightarrow\quad &\left(t^2-1\right)\left(f(t)\right)^{(n+2)}+2t\left(f(t)\right)^{(n+1)}-n(n+1)\left(f(t)\right)^{(n)}=0.
\end{aligned}$$

Από τις ισότητες

$$2^n n!P_n(t)=\left(f(t)\right)^{(n)},$$

$$\left(t^2-1\right)\left(f(t)\right)^{(n+2)}+2t\left(f(t)\right)^{(n+1)}-n(n+1)\left(f(t)\right)^{(n)}=0,$$

προκύπτει

$$\left(t^2-1\right)2^n n!\left(P_n(t)\right)''+2t\cdot 2^n n!\left(P_n(t)\right)'-n(n+1)2^n n!P_n(t)=0$$

και άρα

$$\left(t^2-1\right)\left(P_n(t)\right)''+2t\left(P_n(t)\right)'-n(n+1)P_n(t)=0.$$

Σημειώνουμε ότι ο τύπος

$$P_n(t)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}t^{n-2j}$$

μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας τη μέθοδο των δυναμοσειρών στη διαφορική εξίσωση του Legendre.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι μια ολική ορθοκανονική ακολουθία στο χώρο $L^2[a,b]$ είναι η (q_n), όπου

$$q_n=\frac{1}{\|p_n\|}p_n,\quad p_n(t)=P_n(s),\ s=1+2\frac{t-b}{b-a}\quad,\qquad (6)$$

γιατί $a\le t\le b\Rightarrow -1\le s\le 1$ και ο γραμμικός μετασχηματισμός $t\to s$ διατηρεί την ορθογωνιότητα. Έτσι έχουμε μια ολική ορθοκανονική ακολουθία στον $L^2[a,b]$ για

κάθε συμπαγές διάστημα $[a,b]$, και από το θεώρημα περί διαχωρίσιμων χώρων Hilbert συνεπάγεται ότι *ο πραγματικός χώρος* $L^2[a,b]$ *είναι διαχωρίσιμος*.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ HERMITE

Άλλοι χώροι πρακτικού ενδιαφέροντος είναι οι $L^2(-\infty,\infty)$, $L^2[a,+\infty)$ και $L^2(-\infty,b]$. Επειδή τα διαστήματα ολοκλήρωσης είναι άπειρα, δεν παίρνουμε τις δυνάμεις $x_0, x_1, \ldots$ αλλά πολλαπλασιάζουμε καθεμία απ' αυτές με μια απλή συνάρτηση που φθίνει ικανοποιητικά γρήγορα ώστε να καταλήξουμε σε πεπερασμένα ολοκληρώματα. Μια τέτοια επιλογή είναι οι εκθετικές συναρτήσεις με κατάλληλο εκθέτη.

Θεωρούμε τον πραγματικό χώρο $L^2(-\infty,\infty)$. Το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από την ισότητα $\langle x,y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,dt$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram – Schmidt στην ακολουθία των συναρτήσεων που ορίζονται από τις

$$w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad tw(t), \qquad t^2 w(t), \ldots .$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι στοιχεία του $L^2(-\infty,\infty)$. Πράγματι, είναι φραγμένες στο $\mathbb{R}$, έστω $\left|t^n w(t)\right| \le k_n, \quad \forall t$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\left|\langle t^m w(t), t^n w(t)\rangle\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-t^2/2} t^n e^{-t^2/2} dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} t^{m+n} e^{-t^2/2} e^{-t^2/2} dt\right| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|t^{m+n} e^{-t^2/2} e^{-t^2/2}\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|t^{m+n} e^{-t^2/2}\right| e^{-t^2/2} dt \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} k_{m+n} e^{-t^2/2} dt = k_{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = k_{m+n}\sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

Η μέθοδος Gram – Schmidt δίνει την ορθοκανονική ακολουθία (e_n), όπου

$$e_n(t) = \frac{1}{\left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t) \qquad \text{(7a)}$$

και

$$H_0(t) = 1, \qquad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right) \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad \text{(7b)}$$

Το H_n λέγεται ***πολυώνυμο Hermite*** *τάξης* n.

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις στην (7b) παίρνουμε

$$H_n(t) = n!\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j} \qquad (7c)$$

όπου $N = n/2$, αν ο n είναι άρτιος και $N = (n-1)/2$, αν ο n είναι περιττός. Η (7c) μπορεί επίσης να γραφτεί, όταν $n = 2, 3, \ldots$,

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\ldots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}. \qquad (7c')$$

Τα πρώτα έξι πολυώνυμα Hermite είναι

$$\begin{aligned} &H_0(t) = 1 && H_1(t) = 2t \\ &H_2(t) = 4t^2 - 2 && H_3(t) = 8t^3 - 12t \qquad (7^*) \\ &H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12 && H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t \end{aligned}$$

και οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο σχήμα[2] 22.

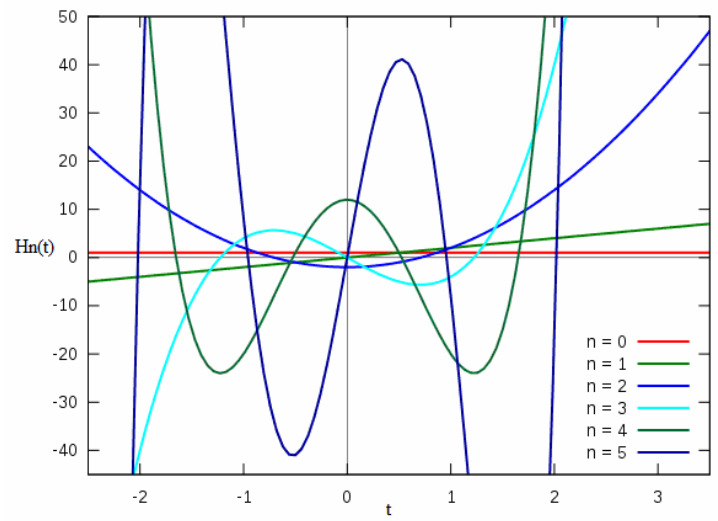
Γενικότερα αποδεικνύεται ότι αυτά τα πολυώνυμα ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t). \qquad (7c'')$$

Ωστόσο η ορολογία στη βιβλιογραφία δεν είναι μοναδική και οι συναρτήσεις H_{e_n} που ορίζονται ως

$$H_{e_0}(t) = 1, \qquad H_{e_n}(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2/2}\right) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

λέγονται επίσης «***πολυώνυμα Hermite***» και μερικές φορές συμβολίζονται ως H_n.



Σχήμα 22.

[2] Ανακτήθηκε από το Internet.

Η ακολουθία (e_n) που ορίζεται από τις ισότητες (7a) και (7b) είναι ορθοκανονική.

<u>Απόδειξη</u>. Λόγω των (7a) και (7b) αρκεί ν' αποδείξουμε ότι

a) $\langle e_n(t), e_m(t)\rangle = 0$, αν $m \neq n$ και

b) $\|e_n\| = 1$, για κάθε n.

a) Επειδή

$$\begin{aligned}\langle e_n(t), e_m(t)\rangle &= \langle \frac{1}{\left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t), \frac{1}{\left(2^m m!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}} e^{-t^2/2} H_m(t)\rangle \\ &= \frac{1}{\left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(2^m m!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}} \langle e^{-t^2/2} H_n(t), e^{-t^2/2} H_m(t)\rangle,\end{aligned} \qquad (*)$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle e^{-t^2/2} H_n(t), e^{-t^2/2} H_m(t)\rangle &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} H_n(t) e^{-t^2/2} H_m(t)\, dt &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t)\, dt &= 0, \qquad \alpha\nu\ m \neq n.\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\ldots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}$$

παίρνουμε για $n \geq 1$ τον αναδρομικό τύπο

$$\begin{aligned}H_n'(t) &= \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-2j)(2t)^{n-2j-1} \cdot 2 \\ &= 2n \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} (n-1)(n-2)\ldots(n-2j)(2t)^{n-1-2j} \\ &= 2nH_{n-1}(t),\end{aligned}$$

όπου $M = (n-2)/2$, αν ο n είναι άρτιος και $M = (n-1)/2$, αν ο n είναι περιττός. Εφαρμόζουμε αυτόν τον τύπο για το H_m, υποθέτουμε ότι $m \leq n$, συμβολίζουμε την εκθετική συνάρτηση ως $e^{-t^2} = \upsilon$, για λόγους απλούστευσης, και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες m φορές. Τότε από την

$$H_0(t) = 1, \qquad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

έχουμε

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \upsilon^{(n)}$$

οπότε

$$\upsilon^{(n)} = (-1)^n e^{-t^2} H_n(t)$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)\left[(-1)^n e^{-t^2} H_n(t)\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)\upsilon^{(n)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)\left(\upsilon^{(n-1)}\right)' dt \\
&= \left[H_m(t)\upsilon^{(n-1)}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H_m{}'(t)\upsilon^{(n-1)} dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} 2mH_{m-1}(t)\upsilon^{(n-1)} dt \\
&= -2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)\upsilon^{(n-1)} dt \\
&= -2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)\left(\upsilon^{(n-2)}\right)' dt \\
&= -2m\left[H_{m-1}(t)\upsilon^{(n-2)}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}{}'(t)\upsilon^{(n-2)} dt \\
&= 2m\int_{-\infty}^{\infty} 2(m-1) H_{m-2}(t)\upsilon^{(n-2)} dt \\
&= 2^2 m(m-1)\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-2}(t)\upsilon^{(n-2)} dt \\
&= \ldots \\
&= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t)\upsilon^{(n-m)} dt \\
&= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon^{(n-m)} dt.
\end{aligned}$$

Αν $m < n$, ολοκληρώνοντας ακόμα μια φορά, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon^{(n-m)} dt = \upsilon^{(n-m-1)}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(e^{-t^2}\right)^{(n-m-1)} - \lim_{t\to-\infty}\left(e^{-t^2}\right)^{(n-m-1)} = 0$$

γιατί η εκθετική συνάρτηση $e^{-t^2} = \upsilon$ και οι παράγωγοι της τείνουν στο μηδέν καθώς $t \to \infty$ ή $t \to -\infty$. Άρα αποδείξαμε την ορθογωνιότητα της (e_n).

b) Για να δείξουμε ότι $\|e_n\| = 1$, όπου $\|e_n\|^2 = \langle e_n, e_n\rangle$ με

$$\begin{aligned}
\langle e_n(t), e_n(t)\rangle &= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \langle e^{-t^2/2} H_n(t), e^{-t^2/2} H_n(t)\rangle \\
&= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} H_n(t) e^{-t^2/2} H_n(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_n(t)\, dt,
\end{aligned}$$

αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t)\, dt = 2^n n!\sqrt{\pi}$, αν $m = n$.

Από το (a) έχουμε ότι $(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t)\, dt = (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon^{(n-m)} dt$.

Άρα για $m = n$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t)\, dt = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$, οπότε αρκεί ν' αποδείξουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Θέτουμε $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$. Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, θεωρούμε το $J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)} ds dt$ και εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} s &= r\cos\theta \\ t &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{όπου} \qquad \begin{aligned} r &\in [0, +\infty) \\ \theta &\in [0, 2\pi] \end{aligned}.$$

Τότε

$$J^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} \left| \det \frac{\vartheta(s,t)}{\vartheta(r,\theta)}(r,\theta) \right| dr d\theta,$$

όπου $\left| \det \frac{\vartheta(s,t)}{\vartheta(r,\theta)}(r,\theta) \right|$ είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα Jacobi $\frac{\vartheta(s,t)}{\vartheta(r,\theta)}(r,\theta)$ με

$$\det \frac{\vartheta(s,t)}{\vartheta(r,\theta)}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\vartheta s(r,\theta)}{\vartheta r} & \frac{\vartheta s(r,\theta)}{\vartheta \theta} \\ \frac{\vartheta t(r,\theta)}{\vartheta r} & \frac{\vartheta t(r,\theta)}{\vartheta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$

οπότε $J^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$. Επειδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr &= \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \int_0^h \left(e^{-r^2}\right)' dr \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \left[e^{-r^2}\right]_0^h = -\frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \left(e^{-h^2} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

βρίσκουμε $J^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$. Άρα $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ που σημαίνει ότι $\|e_n\| = 1$.

Έτσι, με τα (a) και (b) αποδείξαμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \alpha\nu\ m = n, \end{cases} \qquad (8)$$

και ως εκ τούτου την ορθοκανονικότητα της (e_n).

Συχνά εκφράζουμε την (8) λέγοντας ότι <u>*τα πολυώνυμα Hermite* H_n *σχηματίζουν μια ορθογώνια ακολουθία σε σχέση με τη συνάρτηση βάρους* w^2</u>, όπου w είναι η συνάρτηση που ορίσαμε αρχικά ως $w(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, για κάθε $t \in (-\infty, \infty)$.

Αποδεικνύεται ότι η ορθοκανονική ακολουθία (e_n) που ορίζεται από τις σχέσεις (7a) και (7b) είναι ολική στον πραγματικό χώρο $L^2(-\infty, \infty)$ και ως εκ τούτου αυτός ο χώρος είναι διαχωρίσιμος. Τέλος, ***<u>τα πολυώνυμα Hermite</u>*** H_n, που έχουν εφαρμογές στην Κβαντομηχανική, ***<u>ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση του Hermite</u>***

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0. \qquad (9)$$

Πράγματι, από τους αναδρομικούς τύπους

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

και

$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$$

απαλείφοντας το $H_{n-1}(t)$ έχουμε

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t)$$

και παραγωγίζοντας

$$H_{n+1}'(t) = 2tH_n'(t) + 2H_n(t) - H_n''(t). \qquad (9^*)$$

Από την

$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$$

αντικαθιστώντας το n με $n+1$ έχουμε

$$H_{n+1}'(t) = 2(n+1)H_n(t). \qquad (9^{**})$$

Από τις σχέσεις (9*) και (9**) βρίσκουμε

$$2(n+1)H_n(t) = 2tH_n'(t) + 2H_n(t) - H_n''(t),$$

δηλαδή

$$H_n''(t) - 2tH_n'(t) + 2nH_n(t) = 0$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LAGUERRE

Μια ολική ορθοκανονική ακολουθία στον $L^2\left(-\infty,b\right]$ ή στον $L^2\left[a,+\infty\right)$ μπορεί να προέλθει από μια τέτοια ακολουθία του $L^2\left[0,+\infty\right)$ με τους μετασχηματισμούς $t=b-s$ και $t=s+a$, αντίστοιχα.

Θεωρούμε τον χώρο $L^2\left[0,+\infty\right)$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gram – Schmidt στην ακολουθία που ορίζεται ως

$$e^{-t/2}, \qquad te^{-t/2}, \qquad t^2e^{-t/2},...$$

παίρνουμε μια ορθοκανονική ακολουθία $\left(e_n\right)$. Αποδεικνύεται ότι η $\left(e_n\right)$ είναι ολική στον $L^2\left[0,+\infty\right)$ και δίνεται από την ισότητα

$$e_n\left(t\right)=e^{-t/2}L_n\left(t\right), \qquad n=0,1,... \tag{10a}$$

όπου $L_n\left(t\right)$ είναι το ***πολυώνυμο Laguerre*** *τάξης* n που ορίζεται ως

$$L_0\left(t\right)=1, \qquad L_n\left(t\right)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}\right) \qquad n=1,2,... \tag{10b}$$

δηλαδή ως

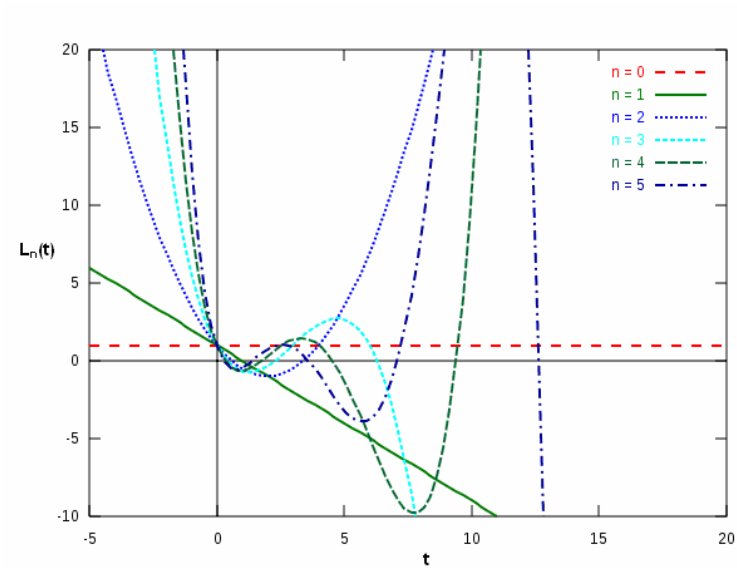
$$L_n\left(t\right)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^j}{j!}\binom{n}{j}t^j\ . \tag{10c}$$

Τα πρώτα έξι πολυώνυμα Laguerre είναι

$$\begin{aligned}
&L_0\left(t\right)=1 && L_1\left(t\right)=1-t\\
&L_2\left(t\right)=1-2t+\frac{1}{2}t^2 && L_3\left(t\right)=1-3t+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3\\
&L_4\left(t\right)=1-4t+3t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{24}t^4 && L_5\left(t\right)=1-5t+5t^2-\frac{5}{3}t^3+\frac{5}{24}t^4-\frac{1}{120}t^5
\end{aligned} \tag{10*}$$

και οι γραφικές παραστάσεις τους απεικονίζονται στο σχήμα[3] 23.

[3] Ανακτήθηκε από το Internet.



Σχήμα 23.

<u>Τα πολυώνυμα Laguerre είναι λύσεις</u> μιας αξιοσημείωτης διαφορικής εξίσωσης της Φυσικής, ***<u>της διαφορικής εξίσωσης του Laguerre</u>***

$$tL_n'' + (1-t)L_n' + nL_n = 0\,. \qquad (11)$$

IV. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΛΥΣΕΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ Δ.Ε.

Σε πολλά προβλήματα των Πειραματικών και Εφαρμοσμένων Επιστημών αλλά και σε προβλήματα καθαρών Μαθηματικών, στα οποία μια συνάρτηση είναι άγνωστη, καταλήγουμε από τα δεδομένα σε μια εξίσωση της μορφής

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0$$

ή

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right),\ n \in \mathbb{N}^*$$

που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση

$$y = y(x),\ x \in I$$

και *πεπερασμένο* πλήθος παραγώγων της, δηλαδή σε μια *συνήθη διαφορική εξίσωση* (Σ.Δ.Ε.) ή απλά *διαφορική εξίσωση* (Δ.Ε.) *νιοστής τάξης* σ' ένα διάστημα I (**Αθανασιάδης**, 2003).

Χρησιμοποιώντας την έννοια του εσωτερικού γινομένου μπορούμε ν' αποδείξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία των n διακεκριμένων λύσεων οποιασδήποτε ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης νιοστής τάξης με σταθερούς συντελεστές στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}(I)$, όπου I είναι ένα τυχαίο πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα. Μια τέτοια απόδειξη αποτελεί ένα άριστο παράδειγμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ της Ανάλυσης και της θεωρίας των Ευκλείδειων χώρων.

Ειδικότερα, θ' αποδείξουμε ότι κάθε σύνολο συναρτήσεων της μορφής $x^m e^{ax} \sin bx$ και $x^m e^{ax} \cos bx$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί ($b > 0$) και m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}(-\infty, \infty)$. Σημειώνουμε ότι αρκεί να εξετάσουμε τη γραμμική ανεξαρτησία στον $\mathbb{C}(-\infty, \infty)$ γιατί από το θεώρημα της μοναδικότητας ένα τέτοιο σύνολο λύσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{C}(-\infty, \infty)$ αν και μόνο αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{C}(I)$, για κάθε υποδιάστημα I του $(-\infty, \infty)$. Γι' αυτό υποθέτουμε ότι F είναι ένας (πεπερασμένος) γραμμικός συνδυασμός τέτοιων συναρτήσεων, και ότι $F(x) \equiv 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι όλοι οι συντελεστές στην F είναι μηδέν.

Αρχικά γράφουμε τον F συγκεντρώνοντας μαζί εκείνους τους όρους που περιέχουν τον ίδιο εκθετικό παράγοντα

$$F(x) = e^{a_1 x} P_1(x) + e^{a_2 x} P_2(x) + \ldots + e^{a_r x} P_r(x), \qquad (1)$$

όπου $a_1 > a_2 > \ldots > a_r \geq 0$, και κάθε $P_i(x)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $x^m \sin bx$ και $x^m \cos bx$. Μετά γράφουμε κάθε $P_i(x)$ βάζοντας μαζί εκείνους τους όρους που περιέχουν την ίδια δύναμη του x. Τότε

$$P_i(x) = T_{i0}(x) + T_{i1}(x)x + \ldots + T_{is_i}(x)x^{s_i}, \qquad (2)$$

όπου οι συντελεστές T_{ij} είναι τα *τριγωνομετρικά αθροίσματα*

$$T_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos a_k x + \beta_k \sin b_k x\right), \qquad (3)$$

με α_k, β_k πραγματικούς αριθμούς και a_k, b_k μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Κάθε τέτοιο άθροισμα μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos a_k x + \beta_k \sin b_k x\right),$$

όπου οι a_k, b_k είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Για ν' αποδείξουμε ότι όλοι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού F είναι μηδέν χρησιμοποιούμε ουσιαστικά το παρακάτω λήμμα:

<u>Λήμμα</u>. Αν T είναι ένα τριγωνομετρικό άθροισμα με την ιδιότητα

$$\lim_{x \to \infty} T(x) = 0,$$

τότε όλοι οι συντελεστές του T είναι μηδέν.

<u>Απόδειξη</u>.

Έστω ότι $\Im$ είναι ο πραγματικός διανυσματικός χώρος όλων των τριγωνομετρικών αθροισμάτων, με τους συνήθεις ορισμούς της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\Im$ ως

$$f \cdot g = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) g(x) dx, \qquad (4)$$

για κάθε ζεύγος τριγωνομετρικών αθροισμάτων f και g. Η ισότητα (4) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\Im$ με την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει πάντα. Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος προκύπτει ότι για ν' αποδείξουμε την ύπαρξη αυτού του ορίου αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία τα τριγωνομετρικά

αθροίσματα f και g είναι «μονώνυμα». Έτσι, θα διαπιστώσουμε την ύπαρξη της ισότητας (4) στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u>. $f(x)=\cos a_1 x,\quad g(x)=\cos a_2 x,\quad a_1,a_2\geq 0$.

<u>Περίπτωση 2</u>. $f(x)=\cos a_1 x,\quad g(x)=\sin b_1 x,\quad a_1\geq 0, b_1>0$.

<u>Περίπτωση 3</u>. $f(x)=\sin b_1 x,\quad g(x)=\sin b_2 x,\quad b_1,b_2>0$.

<u>Περίπτωση 1</u>.

Αν $a_1\neq a_2$

$$\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_1x\cos a_2x\,dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_0^t\left[\cos(a_1-a_2)x+\cos(a_1+a_2)x\right]dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[\frac{\sin(a_1-a_2)x}{a_1-a_2}+\frac{\sin(a_1+a_2)x}{a_1+a_2}\right]\Bigg|_0^t\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[\frac{\sin(a_1-a_2)t}{a_1-a_2}+\frac{\sin(a_1+a_2)t}{a_1+a_2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(a_1-a_2)t}{(a_1-a_2)t}+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(a_1+a_2)t}{(a_1+a_2)t}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0=0,
\end{aligned}$$

αν $a_1=a_2\neq 0$

$$\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos^2 a_1x\,dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1+\cos 2a_1x}{2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[x+\frac{\sin 2a_1x}{2a_1}\right]\Bigg|_0^t\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[t+\frac{\sin 2a_1t}{2a_1}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin 2a_1t}{2a_1t}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

και αν $a_1=a_2=0$

$$\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}x\Big|_0^t=1,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$f\cdot g=\begin{cases}0, & \text{αν } a_1\neq a_2,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } a_1=a_2\neq 0,\\ 1, & \text{αν } a_1=a_2=0.\end{cases}$$

<u>Περίπτωση 2</u>.

Αν $a_1\neq b_1$

$$\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_1x\sin b_1x\,dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_0^t\left[\sin(b_1-a_1)x+\sin(b_1+a_1)x\right]dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[-\frac{\cos(b_1-a_1)x}{b_1-a_1}-\frac{\cos(b_1+a_1)x}{b_1+a_1}\right]\Bigg|_0^t\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[-\frac{\cos(b_1-a_1)t}{b_1-a_1}-\frac{\cos(b_1+a_1)t}{b_1+a_1}+\frac{1}{b_1-a_1}+\frac{1}{b_1+a_1}\right]\\
&=-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\cos(b_1-a_1)t}{(b_1-a_1)t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\cos(b_1+a_1)t}{(b_1+a_1)t}+\frac{1}{2(b_1-a_1)}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}+\frac{1}{2(b_1+a_1)}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\\
&=-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2(b_1-a_1)}\cdot 0+\frac{1}{2(b_1+a_1)}\cdot 0=0,
\end{aligned}$$

και αν $a_1=b_1$

$$\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_1x\sin a_1x\,dx\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_0^t\sin 2a_1x\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[-\frac{\cos 2a_1x}{2a_1}\right]\Bigg|_0^t\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[-\frac{\cos 2a_1t}{2a_1}+\frac{1}{2a_1}\right]=-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\cos 2a_1t}{2a_1t}+\frac{1}{4a_1}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\\
&=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4a_1}\cdot 0=0,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$f\cdot g=0,\qquad \forall a_1\geq 0, b_1>0\,.$$

<u>Περίπτωση 3</u>.

Αν $b_1\neq b_2$

$$
\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin b_1x\sin b_2x\,dx\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_0^t\left[\cos(b_1-b_2)x-\cos(b_1+b_2)x\right]dx\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[\frac{\sin(b_1-b_2)x}{b_1-b_2}-\frac{\sin(b_1+b_2)x}{b_1+b_2}\right]\Bigg|_0^t\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[\frac{\sin(b_1-b_2)t}{b_1-b_2}-\frac{\sin(b_1+b_2)t}{b_1+b_2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(b_1-b_2)t}{(b_1-b_2)t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(b_1+b_2)t}{(b_1+b_2)t}\\
&= \frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0 = 0,
\end{aligned}
$$

και αν $b_1 = b_2$

$$
\begin{aligned}
f\cdot g &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin^2 b_1x\,dx\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1-\cos 2b_1x}{2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[x-\frac{\sin 2b_1x}{2b_1}\right]\Bigg|_0^t\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\left[t-\frac{\sin 2b_1t}{2b_1}\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin 2b_1t}{2b_1t}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
f\cdot g = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ b_1 \neq b_2,\\ \dfrac{1}{2}, & \alpha\nu\ b_1 = b_2.\end{cases}
$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα απαραίτητα όρια υπάρχουν, και η ισότητα (4) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\Im$. Επιπλέον, από τους προηγούμενους υπολογισμούς βλέπουμε ότι όταν οι a και b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\cos ax\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\sin bx\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\cos ax\sin bx\,dx = 0,
$$

συνεπώς οι συναρτήσεις $1, \cos ax, \sin bx$ είναι ορθογώνιες στον $\Im$, και

$$
\|1\| = \sqrt{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t dx} = \sqrt{1} = 1,
$$

$$
\|\cos ax\| = \sqrt{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\cos^2 ax\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (5)
$$

$$\|\sin bx\| = \sqrt{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin^2 bxdx} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos a_k x + \beta_k \sin b_k x\right)$$

είναι ένα τριγωνομετρικό άθροισμα τέτοιο ώστε $\lim_{x\to\infty} T(x) = 0$.

Κάνοντας χρήση της ορθογωνιότητας σε συνδυασμό με τις σχέσεις (5), έχουμε:

$$\begin{aligned}
T(x)\cdot\cos a_k x &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\cos a_k x dx \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_k x dx + \alpha_k \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_k x \cos a_k x dx \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n}\alpha_m \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_m x \cos a_k x dx + \sum_{k=1}^{n}\beta_k \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin b_k x \cos a_k x dx \qquad (m\neq k) \\
&= \alpha_k \|\cos a_k x\|^2, \\
T(x)\cdot\sin b_k x &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\sin b_k x dx \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin b_k x dx + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \cos a_k x \sin b_k x dx \\
&\quad + \beta_k \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin b_k x \sin b_k x dx + \sum_{m=1}^{n}\beta_m \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin b_m x \sin b_k x dx \qquad (m\neq k) \\
&= \beta_k \|\sin b_k x\|^2,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\alpha_k = \frac{T(x)\cdot\cos a_k x}{\|\cos a_k x\|^2} = \frac{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\cos a_k x dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\cos a_k x dx, \qquad k = 0,1,\ldots,n,$$

$$\beta_k = \frac{T(x)\cdot\sin b_k x}{\|\sin b_k x\|^2} = \frac{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\sin b_k x dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\sin b_k x dx, \qquad k = 1,2,\ldots,n,$$

και για ν' αποδείξουμε το λήμμα πρέπει να δείξουμε ότι όλοι αυτοί οι συντελεστές είναι μηδέν.

Θ' αποδείξουμε ότι $\alpha_k = 0$ για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$. Από την υπόθεση $\lim_{x\to\infty} T(x) = 0$ συνεπάγεται ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r > 0$ τέτοιος ώστε $|T(x)| < \varepsilon/2$ για κάθε $x > r$.Τότε:

$$
\begin{aligned}
|\alpha_k| &= \left| 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(x)\cos a_k x dx \right| \\
&= 2\lim_{t\to\infty}\left| \frac{1}{t}\int_0^r T(x)\cos a_k x dx + \frac{1}{t}\int_r^t T(x)\cos a_k x dx \right| \\
&\le 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left| \int_0^r T(x)\cos a_k x dx \right| + 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left| \int_r^t T(x)\cos a_k x dx \right|.
\end{aligned}
$$

Αλλά

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left| \int_0^r T(x)\cos a_k x dx \right| = 0,
$$

ενώ

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left| \int_r^t T(x)\cos a_k x dx \right| &\le \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_r^t \left| T(x)\cos a_k x dx \right| \\
&< \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_r^t \frac{\varepsilon}{2} dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[\frac{\varepsilon}{2} x \right]_r^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\varepsilon(t-r)}{2t} = \frac{\varepsilon}{2}\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{r}{t} \right) = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς $|\alpha_k| < \varepsilon$ για κάθε θετικό αριθμό ε, και έτσι προκύπτει ότι $\alpha_k = 0$ για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\beta_k = 0$ για όλα τα $k = 1,2,\ldots,n$, οπότε όλοι οι συντελεστές του τριγωνομετρικού αθροίσματος T είναι μηδέν.

<u>Θεώρημα</u>. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων της μορφής $x^m e^{ax}\sin bx$ και $x^m e^{ax}\cos bx$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί ($b > 0$) και m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}(-\infty,\infty)$.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω ότι F είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων έτσι ώστε $F(x) \equiv 0$. Γράφουμε τον F ως

$$
F(x) = e^{a_1 x}P_1(x) + e^{a_2 x}P_2(x) + \ldots + e^{a_r x}P_r(x) \qquad (6)
$$

όπου $a_1 > a_2 > \ldots > a_r$, και

$$
P_i(x) = T_{i0}(x) + T_{i1}(x)x + \ldots + T_{is_i}(x)x^{s_i}. \qquad (7)
$$

Υποθέτουμε ότι ο F έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό συντελεστή, και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ακέραιος i τέτοιος ώστε το P_i να έχει ένα μη μηδενικό συντελεστή. Επιλέγοντας το i όσο το δυνατό μικρότερο, έχουμε

$$F(x)=e^{a_i x}P_i(x)+e^{a_{i+1}x}P_{i+1}(x)+\ldots+e^{a_r x}P_r(x),$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}
e^{-a_i x}F(x) &= e^{-a_i x}e^{a_i x}P_i(x)+e^{-a_i x}e^{a_{i+1}x}P_{i+1}(x)+\ldots+e^{-a_i x}e^{a_r x}P_r(x)\\
e^{-a_i x}F(x) &= P_i(x)+e^{(a_{i+1}-a_i)x}P_{i+1}(x)+\ldots+e^{(a_r-a_i)x}P_r(x)\\
P_i(x) &= e^{-a_i x}F(x)-e^{(a_{i+1}-a_i)x}P_{i+1}(x)-\ldots-e^{(a_r-a_i)x}P_r(x).
\end{aligned}$$

Επειδή $F(x)\equiv 0$,

$$\lim_{x\to\infty} e^{-a_i x}F(x)=0,$$

και επειδή

$$\lim_{x\to\infty} e^{(a_j-a_i)x}P_j(x)=0$$

για κάθε $j>i$, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\infty} P_i(x)=0.$$

Αλλά το P_i έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό συντελεστή, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης j στην ισότητα (7) τέτοιος ώστε το τριγωνομετρικό άθροισμα T_{ij} να έχει ένα μη μηδενικό συντελεστή. Αν επιλέξουμε το j όσο το δυνατό μεγαλύτερο, τότε

$$P_i(x)=T_{i0}(x)+T_{i1}(x)x+\ldots+T_{ij}(x)x^j,$$

άρα

$$\begin{aligned}
T_{ij}(x) &= \frac{P_i(x)}{x^j}-\frac{T_{i0}(x)}{x^j}-\frac{T_{i1}(x)x}{x^j}-\ldots-\frac{T_{i,j-1}(x)x^{j-1}}{x^j}\\
T_{ij}(x) &= \frac{P_i(x)}{x^j}-\frac{T_{i0}(x)}{x^j}-\frac{T_{i1}(x)}{x^{j-1}}-\ldots-\frac{T_{i,j-1}(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Επειδή κάθε ένας από τους όρους στο δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης τείνει στο μηδέν καθώς $x\to\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to\infty} T_{ij}(x)=0$. Τότε από το λήμμα συνεπάγεται ότι όλοι οι συντελεστές του T_{ij} είναι μηδέν , άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το τριγωνομετρικό άθροισμα T_{ij} έχει μη μηδενικούς συντελεστές. Άρα όλοι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού F πρέπει να είναι μηδέν, συνεπώς το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής $x^m e^{ax}\sin bx$ και $x^m e^{ax}\cos bx$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{C}(-\infty,\infty)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Αν η λύση

$$y = y(x),\ x \in I = [\alpha, \beta]$$

μιας Δ.Ε. νιοστής τάξης ικανοποιεί μαζί με τις μέχρι $(n-1)$ τάξης παραγώγους της «κάποιες» συνθήκες (*συνοριακές συνθήκες*) στα άκρα, δηλαδή στα σύνορα, του πεδίου ορισμού της $[\alpha, \beta]$, τότε έχουμε ένα *πρόβλημα συνοριακών τιμών* (π.σ.τ.). Επομένως, ένα π.σ.τ. συνίσταται στην αναζήτηση της λύσης μιας Δ.Ε. που ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Από πλευράς εφαρμογών τα σημαντικότερα π.σ.τ. είναι εκείνα στα οποία η Δ.Ε. είναι γραμμική Σ.Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης της μορφής

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = g(x),$$

όπου οι a_j, $j = 0,1,2$ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα διάστημα I. Η επίλυση πολλών κλασικών προβλημάτων της Φυσικής, που τα μαθηματικά τους μοντέλα περιγράφονται από Δ.Ε. με μερικές παραγώγους, όπως ,για παράδειγμα, τα προβλήματα της διάδοσης της θερμότητας και της παλλόμενης χορδής, οδηγεί σε π.σ.τ. αυτού του τύπου (**Αθανασιάδης, Καλογερόπουλος & Στρατής**, 1990).

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = g(x) \qquad (1)$$

είναι μια γραμμική Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης, με $a_j, j = 0,1,2$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σ' ένα διάστημα I, και, αν $a_0 \neq 0$, τότε η Δ.Ε. (1) γράφεται ως

$$y''(x) + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y'(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)},$$

και θέτοντας

$$a = \frac{a_1}{a_0},\ b = \frac{a_2}{a_0},\ f = \frac{g}{a_0},$$

η (1) παίρνει τελικά τη μορφή

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x). \qquad (2)$$

Αν ορίσουμε ως L τον γραμμικό διαφορικό τελεστή

$$L=\frac{d^2}{dx^2}+a(x)\frac{d}{dx}+b(x),$$

όπου οι $a(x)$ και $b(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα διάστημα I, τότε η Δ.Ε. (2) γράφεται

$$L[y]=f(x), \qquad (3)$$

και λέγεται <u>*μη ομογενής γραμμική Δ.Ε. 2ης τάξης*</u>, ενώ η εξίσωση $L[y]=0$ λέγεται <u>*ομογενής*</u> αντίστοιχη της (3). Ο χώρος των λύσεων της $L[y]=0$ είναι ένας δισδιάστατος διανυσματικός χώρος. Κατά συνέπεια, αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L[y]=0$ σ' ένα διάστημα I, τότε κάθε λύση της $L[y]=0$ γράφεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο λύσεων, δηλαδή $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, όπου c_1,c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM – LIOUVILLE</u>

Θεωρούμε τη Δ.Ε.

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0 \qquad (\mathrm{E})$$

με $a_0(x)\neq 0$, $\forall x\in I$ και $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}(I)$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (Ε) επί $\frac{1}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$ οπότε η (Ε) γίνεται

$$\frac{1}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}a_0(x)y''(x)+\frac{1}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}a_1(x)y'(x)+\frac{1}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}a_2(x)y(x)=0$$

$$e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}y''(x)+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}y'(x)+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}y(x)=0,$$

και θέτοντας

$$p(x)=e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx},\ q(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

προκύπτει ότι

$$p'(x)=\left(e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}\right)'=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Τότε η (Ε) γράφεται ως

$$\begin{aligned} &p(x)y''(x)+p'(x)y'(x)+q(x)y(x)=0\\ &\left(p(x)y'(x)\right)'+q(x)y(x) \qquad\qquad =0. \end{aligned} \tag{4}$$

<u>Ορισμός 1</u>. Η Δ.Ε. της μορφής (4) με παράμετρο λ

$$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(q(x)+\lambda r(x)\right)y(x)=0,\ x\in I=[\alpha,\beta], \tag{5}$$

όπου $p\in\mathbb{C}^1(I)$, $q,r\in\mathbb{C}(I)$, με $p(x)\geq 0$ και $r(x)>0$ $\forall x\in I$, λέγεται ***<u>εξίσωση Sturm – Liouville</u>***. Αν $p(x)>0$, $\forall x\in I$ τότε η (5) λέγεται *<u>ομαλή (κανονική) εξίσωση Sturm – Liouville</u>* , και αν $p(\alpha)=0$ ή $p(\beta)=0$ τότε η (5) λέγεται *<u>ιδιάζουσα (μη κανονική) εξίσωση Sturm – Liouville</u>*.

Η εξίσωση Sturm – Liouville γράφεται και ως

$$p(x)y''(x)+p'(x)y'(x)+\left(q(x)+\lambda r(x)\right)y(x)=0,\ x\in I=[\alpha,\beta]$$

όπου οι $p,p',q+\lambda r$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, και κατά συνέπεια έχει πάντα λύσεις.

<u>Λήμμα 1</u> (***Ταυτότητα Lagrange***).

Αν $L=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)$ με $p,p',q\in\mathbb{C}[\alpha,\beta]$ είναι ένας διαφορικός τελεστής στο $[\alpha,\beta]$, και αν y_1,y_2 είναι συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$y_1L[y_2]-L[y_1]y_2=\left[p\left(y_1y_2'-y_1'y_2\right)\right]'.$$

<u>Απόδειξη</u>. Από τον ορισμό του L έχουμε $L[y]=(py')'+qy$, οπότε

$$\begin{aligned} y_1L[y_2]-L[y_1]y_2 &= y_1\left[(py_2')'+qy_2\right]-\left[(py_1')'+qy_1\right]y_2\\ &= y_1\left(p'y_2'+py_2''+qy_2\right)-\left(p'y_1'+py_1''+qy_1\right)y_2\\ &= y_1\left(p'y_2'+py_2''\right)+y_1qy_2-\left(p'y_1'+py_1''\right)y_2-qy_1y_2\\ &= y_1\left(p'y_2'+py_2''\right)-\left(p'y_1'+py_1''\right)y_2\\ &= y_1p'y_2'+y_1py_2''-p'y_1'y_2-py_1''y_2 \end{aligned}$$

$$= p'\left(y_1y_2' - y_1'y_2\right) + p\left(y_1y_2'' - y_1''y_2\right)$$
$$= \left[p\left(y_1y_2' - y_1'y_2\right)\right]',$$

γιατί

$$\begin{aligned}\left(y_1y_2' - y_1'y_2\right)' &= \left(y_1y_2'\right)' - \left(y_1'y_2\right)' \\ &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' \\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2.\end{aligned}$$

Άρα

$$y_1L\left[y_2\right] - L\left[y_1\right]y_2 = \left[p\left(y_1y_2' - y_1'y_2\right)\right]'.$$

Θεωρούμε την εξίσωση Sturm – Liouville

$$\left(p(x)y'(x)\right)' + \left(q(x) + \lambda r(x)\right)y(x) = 0, \qquad x \in I = [\alpha, \beta],$$

που μπορεί να γραφτεί και ως

$$\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) = -\lambda r(x)y(x),$$

ή ως

$$L[y] = \left(py'\right)' + qy = -\lambda ry,$$

όπου $p \in \mathbb{C}^1[\alpha, \beta]$ και $q, r \in \mathbb{C}[\alpha, \beta]$, και τις συνοριακές συνθήκες $b_1[y] = 0$, $b_2[y] = 0$, όπου b_1, b_2 είναι οι «συνοριακοί τελεστές»

$$\begin{aligned}b_1[y] &= \alpha_{11}y(\alpha) + \alpha_{12}y'(\alpha) + \beta_{11}y(\beta) + \beta_{12}y'(\beta) \\ b_2[y] &= \alpha_{21}y(\alpha) + \alpha_{22}y'(\alpha) + \beta_{21}y(\beta) + \beta_{22}y'(\beta).\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες δεν προκύπτουν η μια από την άλλη με πολλαπλασιασμό επί κατάλληλο αριθμό. Το π.σ.τ.

$$\begin{cases} L[y] = \left(py'\right)' + qy = -\lambda ry \\ b_1[y] = 0, \;\; b_2[y] = 0 \end{cases} \qquad (\Pi)$$

είναι ένα <u>*ομογενές γραμμικό π.σ.τ. με παράμετρο*</u> λ. Οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. έχει λύση, λέγονται <u>*ιδιοτιμές*</u> και οι αντίστοιχες λύσεις, <u>*ιδιοσυναρτήσεις*</u> ή <u>*ιδιολύσεις*</u> του προβλήματος. Επειδή το π.σ.τ. είναι ομογενές οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι μη μηδενικές (γνήσιες) λύσεις του.

<u>Θεώρημα 1</u>. Αν y_1, y_2 είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. (Π) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2, τότε

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta y_1(x)y_2(x)r(x)dx = p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha)$$

όπου $W(\alpha)$, $W(\beta)$ είναι οι τιμές της ορίζουσας Wronski για τις y_1, y_2 στα α, β.

<u>Απόδειξη</u>. Η ορίζουσα Wronski των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x)$ με $x \in I = [\alpha, \beta]$ είναι η

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

οπότε

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= W(y_1, y_2)(\alpha) = y_1(\alpha)y_2'(\alpha) - y_1'(\alpha)y_2(\alpha) \\ W(\beta) &= W(y_1, y_2)(\beta) = y_1(\beta)y_2'(\beta) - y_1'(\beta)y_2(\beta). \end{aligned}$$

Επειδή y_1, y_2 είναι λύσεις της Δ.Ε. $L[y] = (py')' + qy = -\lambda ry$ έχουμε $L[y_1] = -\lambda_1 r y_1$ και $L[y_2] = -\lambda_2 r y_2$, και αντικαθιστώντας στην ταυτότητα Lagrange

$$y_1 L[y_2] - L[y_1]y_2 = \left[p(y_1y_2' - y_1'y_2)\right]'$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} y_1(-\lambda_2 r y_2) - (-\lambda_1 r y_1)y_2 &= \left[p(y_1y_2' - y_1'y_2)\right]' \\ (\lambda_1-\lambda_2)r y_1 y_2 &= \left[p(y_1y_2' - y_1'y_2)\right]'. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την ισότητα στο $[\alpha, \beta]$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta r(x)y_1(x)y_2(x)dx &= \left[p(x)\left[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right]\right]\Big|_\alpha^\beta \\ &= p(\beta)\left[y_1(\beta)y_2'(\beta) - y_1'(\beta)y_2(\beta)\right] \\ &\quad - p(\alpha)\left[y_1(\alpha)y_2'(\alpha) - y_1'(\alpha)y_2(\alpha)\right] \\ &= p(\beta)W(y_1, y_2)(\beta) - p(\alpha)W(y_1, y_2)(\alpha), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta y_1(x)y_2(x)r(x)dx = p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha).$$

Από το θεώρημα 1 προκύπτει ότι αν οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι διαφορετικές $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ και οι συνοριακές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε $p(\alpha)W(\alpha) = p(\beta)W(\beta)$, τότε

$$\int_\alpha^\beta y_1(x)y_2(x)r(x)dx = 0,$$

που σημαίνει ότι οι ιδιοσυναρτήσεις y_1, y_2 είναι ***ορθογώνιες συναρτήσεις*** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ***με συνάρτηση βάρους*** $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

Ορισμός 2. Ένα π.σ.τ. που αποτελείται από μια Δ.Ε. Sturm – Liouville και συνοριακές συνθήκες τέτοιες ώστε οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές να είναι ορθογώνιες, λέγεται ***πρόβλημα ή σύστημα Sturm – Liouville***.

Τρεις σημαντικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στα προβλήματα Sturm – Liouville είναι οι εξής:

Περίπτωση 1. Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 y(\alpha)+\alpha_2 y'(\alpha)=0, & |\alpha_1|+|\alpha_2|>0 \\ \beta_1 y(\beta)+\beta_2 y'(\beta)=0, & |\beta_1|+|\beta_2|>0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

και λέγονται *χωρισμένες συνοριακές συνθήκες*. Το αντίστοιχο π.σ.τ. λέγεται *πρόβλημα Sturm – Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες*.

Περίπτωση 2. Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\left.\begin{array}{l} y(\alpha) \ = y(\beta) \\ y'(\alpha) \ = y'(\beta) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

και λέγονται *περιοδικές συνοριακές συνθήκες*. Το αντίστοιχο π.σ.τ. με την επιπλέον υπόθεση $p(\alpha)=p(\beta)$ λέγεται *περιοδικό πρόβλημα Sturm – Liouville*.

Περίπτωση 3. Αν $p(\alpha)=p(\beta)=0$, δηλαδή αν η Δ.Ε. είναι ιδιάζουσα εξίσωση Sturm – Liouville, τότε από το θεώρημα 1 προκύπτει άμεσα ότι οι ιδιοσυναρτήσεις y_1, y_2 του π.σ.τ. (Π), που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2, είναι ***ορθογώνιες συναρτήσεις***. Το αντίστοιχο π.σ.τ. λέγεται ***ιδιάζον πρόβλημα Sturm – Liouville***.

Θεώρημα 2. Θεωρούμε το ***π.σ.τ. τύπου Sturm – Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες***

$$\left.\begin{array}{ll} L[y]=(py')'+qy=-\lambda ry, & p,p',q,r\in\mathbb{C}[\alpha,\beta], \quad p,r>0 \\ \alpha_1 y(\alpha)+\alpha_2 y'(\alpha)=0, & |\alpha_1|+|\alpha_2|>0 \\ \beta_1 y(\beta)+\beta_2 y'(\beta)=0, & |\beta_1|+|\beta_2|>0 \end{array}\right\}.$$

Αν y_i, y_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j, τότε οι y_i, y_j είναι ***<u>ορθογώνιες συναρτήσεις</u>*** στο $[\alpha, \beta]$ ***<u>με συνάρτηση βάρους</u>*** $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>. Επειδή οι y_i, y_j είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα α και β του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 y_i(\alpha)+\alpha_2 y_i'(\alpha) &= 0\\ \alpha_1 y_j(\alpha)+\alpha_2 y_j'(\alpha) &= 0\end{aligned}\right\}(\Sigma_1) \qquad \left.\begin{aligned}\beta_1 y_i(\beta)+\beta_2 y_i'(\beta) &= 0\\ \beta_1 y_j(\beta)+\beta_2 y_j'(\beta) &= 0\end{aligned}\right\}(\Sigma_2).$$

Επειδή $|\alpha_1|+|\alpha_2|>0$, το ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς α_1, α_2 (Σ_1), έχει λύση $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$, που σημαίνει ότι πρέπει η ορίζουσα του συστήματος να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} y_i(\alpha) & y_i'(\alpha)\\ y_j(\alpha) & y_j'(\alpha)\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow W(y_i,y_j)(\alpha)=0 \Leftrightarrow W(\alpha)=0.$$

Ομοίως, επειδή $|\beta_1|+|\beta_2|>0$, το ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς β_1, β_2 (Σ_2), έχει λύση $(\beta_1,\beta_2)\neq(0,0)$, οπότε πρέπει

$$\begin{vmatrix} y_i(\beta) & y_i'(\beta)\\ y_j(\beta) & y_j'(\beta)\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow W(y_i,y_j)(\beta)=0 \Leftrightarrow W(\beta)=0.$$

Επειδή $W(\alpha)=W(\beta)=0$, από το θεώρημα 1 προκύπτει ότι

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_\alpha^\beta y_i(x)y_j(x)r(x)\,dx=0,$$

και εφόσον $\lambda_i\neq\lambda_j$ θα έχουμε

$$\int_\alpha^\beta y_i(x)y_j(x)r(x)\,dx=0.$$

Άρα οι ιδιοσυναρτήσεις y_i, y_j είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα 3</u>. Θεωρούμε το ***<u>περιοδικό π.σ.τ. Sturm – Liouville</u>***

$$\left.\begin{aligned} &L[y]=(py')'+qy=-\lambda ry, && p,p',q,r\in\mathbb{C}[\alpha,\beta],\quad p,r>0\\ &y(\alpha)=y(\beta) && \mu\varepsilon\ p(\alpha)=p(\beta)\\ &y'(\alpha)=y'(\beta) && \end{aligned}\right\}.$$

Αν y_i, y_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j, τότε οι y_i, y_j είναι ***<u>ορθογώνιες συναρτήσεις</u>*** στο $[\alpha, \beta]$ ***<u>με συνάρτηση βάρους</u>*** $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>. Επειδή οι y_i, y_j είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα α και β του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} y_i(\alpha)=y_i(\beta) \\ y_i'(\alpha)=y_i'(\beta) \end{array}\right\} (\Sigma_1) \qquad \left.\begin{array}{l} y_j(\alpha)=y_j(\beta) \\ y_j'(\alpha)=y_j'(\beta) \end{array}\right\} (\Sigma_2).$$

Επομένως, για την ορίζουσα Wronski

$$W(x)=W(y_i,y_j)(x)=\begin{vmatrix} y_i(x) & y_j(x) \\ y_i'(x) & y_j'(x) \end{vmatrix}=y_i(x)y_j'(x)-y_i'(x)y_j(x)$$

των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $y_i(x), y_j(x)$ με $x\in I=[\alpha,\beta]$ ισχύει

$$\begin{aligned} W(y_i,y_j)(\alpha) &= \begin{vmatrix} y_i(\alpha) & y_j(\alpha) \\ y_i'(\alpha) & y_j'(\alpha) \end{vmatrix}=y_i(\alpha)y_j'(\alpha)-y_i'(\alpha)y_j(\alpha)= \\ &= y_i(\beta)y_j'(\beta)-y_i'(\beta)y_j(\beta) \\ &= \begin{vmatrix} y_i(\beta) & y_j(\beta) \\ y_i'(\beta) & y_j'(\beta) \end{vmatrix}=W(y_i,y_j)(\beta), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$W(\alpha)=W(\beta).$$

Από την ισότητα $W(\alpha)=W(\beta)$, την υπόθεση $p(\alpha)=p(\beta)$, και το θεώρημα 1 προκύπτει

$$\begin{aligned} (\lambda_i-\lambda_j)\int_\alpha^\beta y_i(x)y_j(x)r(x)dx &= p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha) \\ &= p(\alpha)W(\alpha)-p(\alpha)W(\alpha)=0, \end{aligned}$$

και επειδή $\lambda_i\neq\lambda_j$, θα είναι

$$\int_\alpha^\beta y_i(x)y_j(x)r(x)dx=0,$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις y_i, y_j είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα</u>. Να επιλυθεί το ακόλουθο π.σ.τ.

$$\left.\begin{array}{l} y''+4y'+(4+9\lambda)y=0 \\ y(0)=0,\ y(\alpha)=0, \quad \alpha>0 \end{array}\right\},$$

όπου λ είναι πραγματική παράμετρος.

<u>Λύση</u>. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Δ.Ε. επί $e^{\int 4dx}=e^{4x}$ θα έχουμε

$$e^{4x}y''+4e^{4x}y'+(4+9\lambda)e^{4x}y=0$$

$$e^{4x}(y')'+\left(e^{4x}\right)'y'+4e^{4x}y=-9\lambda e^{4x}y$$

$$\left(e^{4x}y'\right)'+4e^{4x}y=-\lambda\left(9e^{4x}\right)y,$$

οπότε το π.σ.τ. γράφεται

$$\left.\begin{array}{l} \left(e^{4x}y'\right)'+4e^{4x}y=-\lambda\left(9e^{4x}\right)y \\ y(0)=0,\ y(\alpha)=0 \end{array}\right\}$$

που είναι ένα <u>*πρόβλημα Sturm – Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες*</u> (περίπτωση 1), όπου

$$p(x)=e^{4x},\ q(x)=4e^{4x},\ r(x)=9e^{4x}$$

με $x\in[0,\alpha]$, $p,p',q,r\in\mathbb{C}[0,\alpha]$ και $p,r>0$. Άρα σύμφωνα με το <u>*θεώρημα 2*</u> αυτό <u>*το π.σ.τ. έχει ως λύσεις ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις*</u> με συνάρτηση βάρους $r(x)=9e^{4x}$.

Η <u>*χαρακτηριστική εξίσωση*</u> της Δ.Ε.

$$y''+4y'+(4+9\lambda)y=0$$

είναι η

$$r^2+4r+(4+9\lambda)=0,$$

που έχει διακρίνουσα $\Delta=-36\lambda$ και γενικά δύο λύσεις τις

$$r_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36\lambda}}{2}=-2\pm3\sqrt{-\lambda}\ .$$

Συνεπώς, <u>για την εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων</u> του π.σ.τ. <u>διακρίνουμε τις περιπτώσεις</u>:

a) Αν $\underline{\lambda<0}$ τότε $\Delta>0$ και η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές και διακεκριμένες λύσεις

$$r_{1,2}=-2\pm3\sqrt{-\lambda}\ .$$

Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=e^{r_1x}=e^{\left(-2+3\sqrt{-\lambda}\right)x},\ y_2(x)=e^{r_2x}=e^{\left(-2-3\sqrt{-\lambda}\right)x}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $y''+4y'+(4+9\lambda)y=0$. Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}=c_1e^{\left(-2+3\sqrt{-\lambda}\right)x}+c_2e^{\left(-2-3\sqrt{-\lambda}\right)x},\qquad x\in[0,\alpha]$$

με c_1,c_2 αυθαίρετες σταθερές. Η απαίτηση να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες δίνει:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(\alpha)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} c_1+c_2 & =0 \\ c_1e^{\left(-2+3\sqrt{-\lambda}\right)\alpha}+c_2e^{\left(-2-3\sqrt{-\lambda}\right)\alpha} & =0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} c_1=-c_2 & \\ c_2\left[e^{\left(-2-3\sqrt{-\lambda}\right)\alpha}-e^{\left(-2+3\sqrt{-\lambda}\right)\alpha}\right] & =0 \end{array}\right\}.$$

Αν $c_2\neq 0$ τότε η δεύτερη εξίσωση του προηγούμενου συστήματος δίνει $e^{\left(-2-3\sqrt{-\lambda}\right)\alpha}=e^{\left(-2+3\sqrt{-\lambda}\right)\alpha}$ και τελικά (εφόσον $\alpha>0$) $\lambda=0$, που απορρίπτεται γιατί $\lambda<0$. Άρα πρέπει $c_2=0$, οπότε και $c_1=0$, δηλαδή

$$(c_1,c_2)=(0,0).$$

Τότε, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y(x)=0,\qquad x\in[0,\alpha]$$

και επειδή οι ιδιοσυναρτήσεις ενός ομογενούς π.σ.τ. είναι οι μη μηδενικές λύσεις του, συμπεραίνουμε ότι <u>το π.σ.τ. δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές</u>.

b) Αν $\underline{\lambda=0}$ τότε η Δ.Ε. γίνεται $y''+4y'+4y=0$ και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2+4r+4=0$, με $\Delta=0$, που έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες

$$r_1=r_2=r=-2.$$

Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=e^{rx}=e^{-2x},\qquad y_2(x)=xe^{rx}=xe^{-2x}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $y''+4y'+4y=0$. Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y(x)=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}=(c_1+c_2x)e^{-2x},\ x\in[0,\alpha].$$

Από τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(\alpha)=0 \\ (\alpha>0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} c_1 & =0 \\ c_2\alpha e^{-2\alpha} & =0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (c_1,c_2)=(0,0).$$

Τότε, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y(x)=0, \qquad x\in[0,\alpha]$$

δηλαδή η $\lambda=0$ <u>δεν είναι ιδιοτιμή</u>.

c) Αν <u>$\lambda>0$</u> τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει $\Delta<0$ και συνεπώς δύο μιγαδικές λύσεις

$$r_{1,2}=-2\pm 3i\sqrt{\lambda}\,.$$

Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις

$$e^{r_1x}=e^{\left(-2+3i\sqrt{\lambda}\right)x}=e^{-2x}\cdot e^{3i\sqrt{\lambda}x}, \quad e^{r_2x}=e^{\left(-2-3i\sqrt{\lambda}\right)x}=e^{-2x}\cdot e^{-3i\sqrt{\lambda}x}$$

είναι δύο μιγαδικές λύσεις της Δ.Ε., από τις οποίες, με τη βοήθεια του τύπου του Euler $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ($\theta\in\mathbb{R}$), προκύπτει ότι οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=e^{-2x}\cos 3\sqrt{\lambda}x, \qquad y_2(x)=e^{-2x}\sin 3\sqrt{\lambda}x$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις της $y''+4y'+(4+9\lambda)y=0$. Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι η

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \\ &= c_1e^{-2x}\cos 3\sqrt{\lambda}x+c_2e^{-2x}\sin 3\sqrt{\lambda}x \\ &= e^{-2x}\left(c_1\cos 3\sqrt{\lambda}x+c_2\sin 3\sqrt{\lambda}x\right), \end{aligned}$$

όπου $x\in[0,\alpha]$ και c_1,c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Η συνοριακή συνθήκη $y(0)=0$ δίνει $c_1=0$ και η $y(\alpha)=0$, $\alpha>0$ δίνει $e^{-2\alpha}c_2\sin 3\sqrt{\lambda}\alpha=0\Leftrightarrow c_2\sin 3\sqrt{\lambda}\alpha=0$. Αν $c_2=0$ τότε

$$(c_1,c_2)=(0,0),$$

οπότε

$$y(x)=0, \qquad x\in[0,\alpha].$$

Άρα <u>το π.σ.τ. έχει γνήσιες (μη μηδενικές) λύσεις αν και μόνο αν</u> $c_2\neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$
\begin{aligned}
\sin 3\sqrt{\lambda}\alpha &= 0 \\
3\sqrt{\lambda}\alpha &= n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \\
9\lambda\alpha^2 &= n^2\pi^2 \\
\lambda &= \frac{n^2\pi^2}{9\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

Επομένως <u>οι ιδιοτιμές είναι</u>:

$$
\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{9\alpha^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots
$$

και <u>οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις</u>:

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= ce^{-2x} \sin 3\sqrt{\lambda_n}\, x \\
&= ce^{-2x} \sin 3\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{9\alpha^2}}\, x \\
&= ce^{-2x} \sin \frac{n\pi x}{\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned}
$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ξενόγλωσσες

- **Adam, Ch., & Tannery, P.** (1903). *Oeuvres de Descartes*, t. VI. Paris.
- **Arbogast, L.** (1791). *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles*. St. Pétersbourg.
- **Askey, R.** (2002). *Orthogonal Polynomials and Special Functions* (3rd ed.). University of Wisconsin – Madison.
- **Baron, M.** (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford Pergamon Press.
- **Barrow, I.** (1670). *Lectiones geometricae*. London.
- **Barrow, I.** (1683). *Lectiones mathematicae*. London.
- **Bell, E. T.** (1945). *The Development of Mathematics* (2nd ed.). New York – London.
- **Berberian, S.** (1961). *Introduction to Hilbert Spaces*. New York: Oxford University Press.
- **Bernoulli, J.** (1742). *Opera omnia*, v. I – II. Lausannae et Genevae.
- **Boehm, C.** (1933). *Leonhardi Euleri*. *Opera omnia*, ser. I, v. XVI – I.
- **Bourbaki, N.** (1969). *Eléments d'histoire des mathématiques* (2nd ed.). Paris.
- **Boutroux, P.** (1920). *L'idéal scientifique des mathématiciens*. Paris.
- **Boyer, C. B.** (1956). *History of Analytic Geometry*. New York.
- **Boyer, C. B.** (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (3rd ed.). New York.
- **Burkhardt, H.** (1904 – 1916). *Trigonometrische Reihen und Integrale. 28. Exkurs betreffend die Entwicklung des Begriffs einer willkürlichen Funktion. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. II, T. I, 2 Hälfte. Leipzig, 958 – 971.
- **Busard, H. L. L.** (1961). *Nicole Oresme. Quaestiones super geometriam Euclidis*, v. I – II. Leiden.
- **Cauchy, A. L.** (1844). *Oeuvres complètes*, ser. I, v. VIII, 145 – 160.
- **Cauchy, A. L.** (1897). *Oeuvres complètes*, ser. II, v. III. Paris.
- **Charles, J.** (1785). *Fragment sur les fonctions discontinues*. *Mémoires de mathématiques et de physique présentés par divers savants* (pp. 585 – 588). Paris.

- **Clagett, M.** (1959). *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison.
- **Clagett, M.** (1968). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. Madison, Milwaukee & London.
- **Colson, J.** (1736). *I. Newton. The Method of Fluxions and Infinite Series, with its Application to the Geometry of Curve Lines*. London.
- **Crombie, A. C.** (1959 – 1961). *Augustine to Galileo*, v. II (2nd ed.). London – Melbourne – Toronto.
- **Dehn, M., & Hellinger, E.** (1839). *On James Gregory's "Vera Quadratura"*. In Turnbull, H. W. (Ed.), *James Gregory Tercentenary Memorial Volume* (pp. 468 – 478). London.
- **Dini, U.** (1892). *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Gröbe*. In Lüroth, G., & Schepp, A. (Eds.). Leipzig.
- **Dulac, H.** (1938). *Leonhardi Euleri*. *Opera omnia*, ser. I, v. XXIII.
- **Edwards, C. H.** (1979). *The historical Development of the calculus*. New York: Springer – Verlag.
- **Engels, F.** (1958). *Dialektik der Natur*. Berlin.
- **Engel, F., & Schlesinger, L.** (1913). *Leonhardi Euleri*. *Opera omnia*, ser. I, v. XI.
- **Engel, F., & Schlesinger, L.** (1914). *Leonhardi Euleri*. *Opera omnia*, ser. I, v. XIII.
- **Frege, G.** (1974). *Was ist eine Function?*. Hubert und Co. Göttingen.
- **Gerhardt, C. I.** (1849 – 1863). Leibnizens mathematische Schriften, v. III, V. Berlin – Halle.
- **Gonzàlez – Velasko, A.** (1992). *Connections in mathematical Analysis, the case of Fourier series*, In *Amer. Math. Monthly*, **5**, 427 – 441.
- **Grattan – Guinness, I.** (1970). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass.-London.
- **Grattan – Guinness, I., & Ravetz, J. R.** (1972). *Joseph Fourier*. 1768 – 1830. Cambridge, Mass.-London.
- **Hankel, H.** (1905). *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen* (2nd ed.). In Jourdain, Ph. E. B. (Ed.), Leipzig.

- **Hartner, W., & Schramm, M.** (1963). *Al – Biruni and the theory of the solar apogee: an example of originality in Arabic Science*. In Crombie, A. C. (Ed.), *Scientific change* (pp. 206 – 218). London.
- **Hofmann, J. E.** (1963). *Geschichte der Mathematik*, Bd. I, 2. Aufl. Berlin.
- **Katz, V.** (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Addison – Wesley, Longman.
- **Kline, M.** (1972*). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Fair Lawn, Nj: Oxford University Press.
- **Kowalewski, G.** (1913). *Leonhardi Euleri. Opera omnia*, ser. I, v. X.
- **Krazer, A., & Rudio, F.** (1922). *Leonhardi Euleri. Opera Omnia*, ser. I, v. VIII.
- **Kreider, D., Kuller, R., Ostberg, D., & Perkins, F.** (1966). *An Introduction to Linear Analysis*. New York: Addison – Wesley.
- **Kreyszig, E., & Wiley, J.** (1978). *Elementary Functional Analysis with Applications*. New York.
- **Lacroix, S. F.** (1810). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (2nd ed.). Paris.
- **Lagrange, J. L.** (1884). *Oeuvres*, t. X.
- **Luzin, N. N.** (1915). *Integral and trigonometric series (In Russian)*. Moscow – Leningrad.
- **Mahnke, D. (**1925). *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. - Math.
- **Monna, A. F.** (1972). *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue*. In Truesdell, C. (Ed.), *Archive for History of Exact Sciences*, **9**, 57 – 84.
- **Neugebauer, O.** (1957). *The Exact Sciences in Antiquity* (2nd ed.). Providence. R.I.
- **Pedersen, O.** (1974). *Logistics and the Theory of Functions*. In *Arch. Intern. d' Hist. d. Sciences*, **24**, N. 94, 29 – 50.
- **Ponte, J. P.** (1992). *The history of the concept of function and some educational implications*. In *The Mathematics Educator* **3** (2), 3 – 8.
- **Serret, J. A.** (1881). *Oeuvres de J. L. Lagrange*, t. IX.
- **Smith, D. E.** (1958). *History of Mathematics*, v.1. New York.
- **Speiser, A.** (1945). *Leonhardi Euleri. Opera omnia*, ser. I, v. IX.

- **Speiser, A.** (1952). *Über die diskontinuirlichen Kurven*. In *Leonhardi Euleri, Opera omnia*, ser. I, v. XXV, introduction (pp. XXI – XXIV).
- **Stüssi, F., & Favre, H.** (1947). *Leonhardi Euleri. Opera omnia*, ser. II, v. X.
- **Tannery, P., & Henry, Ch.** (1891). *Oeuvres de Fermat*, t. I. Paris.
- **Truesdell, C.** (1956). In *Leonhardi Euleri, Opera omnia*, ser. II, v. 13, introduction (pp. XLI – XLIII).
- **Truesdell, C.** (1960). *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*. 1638 – 1788. In *Leonhardi Euleri, Opera omnia*, ser. II, v. II-2. Turici.
- **Turnbull, H. W.** (1961). *The Correspondence of Isaac Newton*, v. III. Cambridge.
- **Weyl, H.** (1927). *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. München – Berlin.
- **Whiteside, D. T.** (1961). *Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century*. In Truesdell, C. (Ed.), *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, N3, 179 – 388.
- **Whiteside, D. T., Hoskin, M. A., & Prag, A.** (1969). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, v. III, 1670 – 1673. Cambridge.
- **Wieleitner, H.** (1912 – 1913). *Der "Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme*. *Bibl*. *Mathematica*, 3.F., Bd.13, 115 – 145.
- **Wolff, Chr.** (1965). *Mathematisches Lexicon*. In Hofmann, J. E. (Ed.), Hildesheim.
- **Youschkevitch, A. P.** (1959). *Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. – Sammelband...zu Ehren des 250. Geburtstages Leonard Eulers...* In Schröder, K. (Ed.), pp. 224 – 244. Berlin.
- **Youschkevitch, A. P.** (1974). *La notion de function chez Condorcet*. In Cohen, R. S., Stachel, J. J., & Wartofsky, M. W. (Eds.), *For Dirk Struik* (pp. 131 – 139). Dordrecht – Holland, Boston – U.S.A.
- **Youschkevitch, A. P.** (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. In Truesdell, C. (Ed.), *Archive for History of Exact Sciences*, **16**, 37 – 85.
- **Zeuten, H. G.** (1966). *Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterum* (2nd ed.). Hildesheim.

Ελληνόγλωσσες

- **Αθανασιάδης, Α.** (2003). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.
- **Αθανασιάδης, Χ., Καλογερόπουλος, Γ., & Στρατής, Ι.** (1990). *Μαθήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων* (Σημειώσεις Παραδόσεων). Πανεπιστήμιο Αθηνών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών.
- **Ακρίβης, Γ.** (1987). *Θεωρία Προσεγγίσεων* (Σημειώσεις Παραδόσεων). Πανεπιστήμιο Κρήτης, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών.
- **Αργυρός, Σ.** (2004). *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης* ($2^{η}$ εκδ.). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.
- **Γιαννακούλιας, Ε.** (2007). *Απειροστικός Λογισμός. Η Ιστορική του Εξέλιξη από τον $5^{ο}$ π.Χ. έως και τον $19^{ο}$ αιώνα*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.
- **Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., & Γιαννακούλιας, Ε.** (1999). *Απειροστικός Λογισμός*, τ. Ι – ΙΙα. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.
- **Παπαδημητράκης, Μ.,** (2004). *Συναρτησιακή Ανάλυση* (Σημειώσεις για μεταπτυχιακό μάθημα). Πανεπιστήμιο Κρήτης, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών.
- **Ρουσόπουλος, Γ.** (1991). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Guttenberg.
- **Σπύρου, Π.** (2000). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Σημειώσεις Παραδόσεων. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- **Σπύρου, Π., & Γαγάτσης, Α.** *Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και η διδακτική μεταφορά της*.
  Από http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf .
- **Struik, D.** (1982). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Ζαχαρόπουλος.
- **Van Der Waerden, B. L.** (2003). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης* ($2^{η}$ εκδ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.