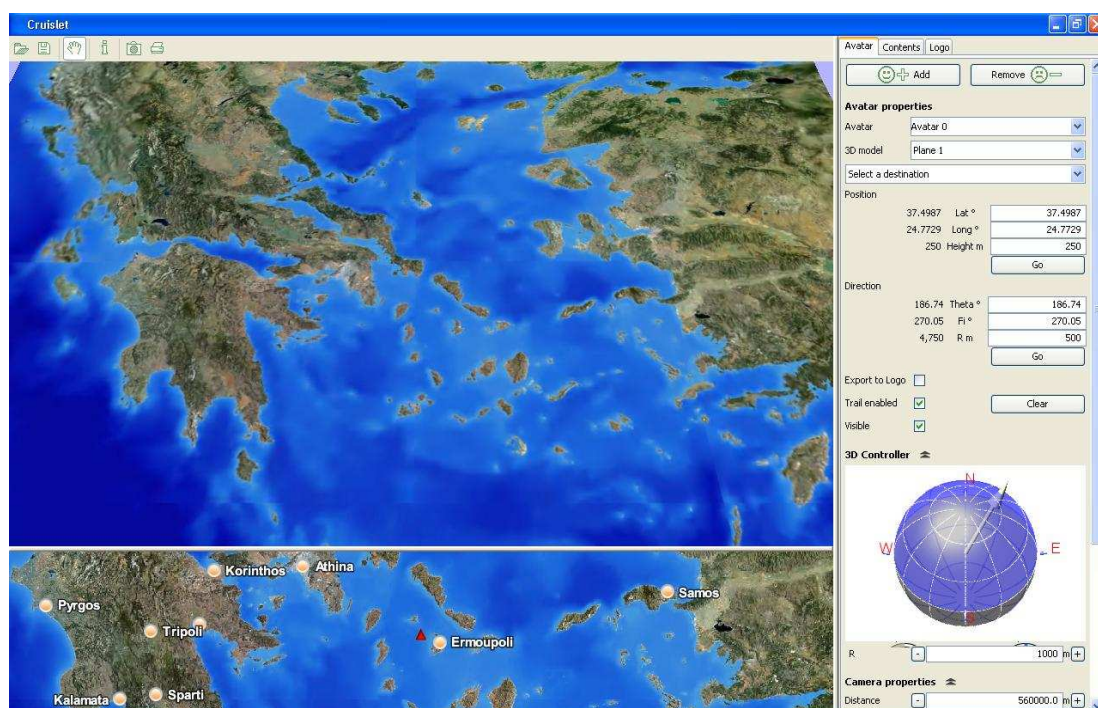


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ &
ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η έννοια της συνάρτησης κατά την πλοήγηση στο χώρο με τρισδιάστατα ψηφιακά εργαλεία διαχείρισης γεωγραφικής πληροφορίας

ΚΟΥΚΙΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ
Επιβλέπων καθηγητής: Χρόνης Κυνηγός
ΑΘΗΝΑ 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Κυνηγός Χρόνης (επιβλέπων)	Καθηγητής	
2) Φαρμάκη Βασιλική	Αναπ Καθηγήτρια	
3) Ζαχαριάδης Θεοδόσης	Αναπ Καθηγητής	

ΚΟΥΚΙΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ Ιούνιος 2008

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΛΟΗΓΗΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΜΕ
ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗΣ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ(σελ.124)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα έρευνα μελετάμε την χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία και μάθηση Μαθηματικών. Δώδεκα μαθητές της Α τάξης του Λυκείου εμπλέκονται σε παιγνιώδεις δραστηριότητες μέσα σε μαθησιακό περιβάλλον που βασίζεται στη χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου μαθηματικής πλοήγησης σε αναπαραστάσεις τρισδιάστατων γεωγραφικών χώρων. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της χρήσης υπολογιστικών μέσων και της προσέγγισης μαθηματικών εννοιών μέσα από διαδικασίες κατασκευής, πειραματισμού και επικοινωνίας. Μέσα από την πλοήγηση, τις μαθησιακές δραστηριότητες, και τις αναπαραστάσεις που δέχονται οι μαθητές από το υπολογιστικό περιβάλλον κατασκευάζουν μαθηματικά νοήματα και αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή ποσοτήτων. Η έρευνα χρησιμοποίησε το πλαίσιο της συμμεταβολής που προτείνεται από τους Carlson et al. 2002. Οι μαθητές ανέπτυξαν λογικές που αναφέρονται στις τρεις πρώτες κύριες νοητικές ενέργειες της συμμεταβολής. Το υπολογιστικό περιβάλλον λειτούργησε ως ενισχυτικό στοιχείο στην όλη μαθησιακή διαδικασία, αφού οι μαθητές έκαναν πτήσεις, προσγειώσεις, απογειώσεις ακόμα και βομβαρδισμούς δημιουργώντας έτσι μια παιγνιώδη διάθεση. Ο γεωγραφικός χώρος ανέδειξε προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε κάποιες έννοιες, ωστόσο λειτούργησε και σαν αφετηρία για ν' αναδειχτούν καινούριες.

© Κούκιου Αλεξάνδρα , 2008

**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΛΟΗΓΗΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΜΕ
ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗΣ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ**

Κούκιου Αλεξάνδρα

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει
το Μαθηματικό Τμήμα

Αθήνα, Ελλάδα
Ιούνιος, 2008

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα έρευνα μελετάμε τα μαθηματικά νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές της Α Λυκείου όταν εμπλέκονται σε διαδικασίες πλοήγησης σε ένα τρισδιάστατο υπολογιστικό περιβάλλον που αναπαριστά το χάρτη της Ελλάδας με την βοήθεια δύο συστημάτων αναφοράς.

Η εργασία αυτή απαρτίζεται από 5 κεφάλαια. Την εισαγωγή στην έρευνα, την ανασκόπηση βιβλιογραφίας, την μεθοδολογία, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα: Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες και συνοψίζεται η βασική βιβλιογραφία που σχετίζεται με το υπό διερεύνηση θέμα, ώστε να διαφανεί η ένταξη της παρούσας προσπάθειας στο ευρύτερο πλαίσιο. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται με λεπτομέρεια τα στάδια και οι ενέργειες που ακολουθήθηκαν για τη διεξαγωγή της ερευνητικής προσπάθειας για την εκπλήρωση του σκοπού της παρούσας μελέτης. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της έρευνας. Η δομή τους βασίζεται στα ερευνητικά ερωτήματα. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων και η σύνδεσή τους με το θεωρητικό πλαίσιο της μελέτης.

Ευχαριστώ θερμά:

- ☞ Τον κ Χρόνη Κυνηγό ο οποίος επέβλεπε τη συγγραφή της διπλωματικής εργασίας και ήταν πάντα πρόθυμος να βοηθήσει αποτελεσματικά.
- ☞ Την ομάδα του Remath Γιώργο, Στέλλα, Μαρία, Φωτεινή, Χρήστο για τις πολλές και ουσιαστικές συζητήσεις μας σχετικά με το θέμα της εργασίας και ειδικά την Έφη για την πολύτιμη συνεργασία της.
- ☞ Την κ. Β. Φαρμάκη και τον Θ. Ζαχαριάδη που δέχτηκαν να είναι στην τριμελή επιτροπή.
- ☞ Τους μαθητές που πρόθυμα συμμετείχαν στην έρευνα και τους καθηγητές τους οι οποίοι διευκόλυναν την πραγματοποίησή της.
- ☞ Την οικογένεια μου και ειδικά τον άντρα μου Δημήτρη για την αμέριστη συμπαράσταση τους

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ	
Περίληψη.....	14
Διατύπωση του προβλήματος.....	14
Σκοπός της έρευνας.....	15
Ερευνητικά ερωτήματα.....	15
Αναγκαιότητα της έρευνας.....	15
Σημαντικότητα της έρευνας.....	16
Οριοθέτηση του προβλήματος.....	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	
Περίληψη.....	17
Ιστορική αναδρομή της έννοιας της συνάρτησης.....	17
Δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην έννοια της συνάρτησης.....	21
Η συνάρτηση ως συμμεταβολή	26
Το πλαίσιο της συμμεταβολής.....	28
Αναπαραστάσεις.....	31
Είδη αναπαραστάσεων.....	32
Αναπαραστάσεις και συναρτήσεις.....	34
Νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση	36
Μικρόκοσμοι	42
Artifact-Instrument.....	46
Παρουσίαση του λογισμικού Cruislet.....	50
Επιστημολογία του Cruislet.....	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ	
Περίληψη.....	58
Μέσα συλλογής δεδομένων	58
Καθορισμός του πληθυσμού –Δείγμα.....	58
Παραδοχές της έρευνας.....	59
Επεξεργασία των δεδομένων.....	59
Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας.....	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ	
Περίληψη.....	66
Εισαγωγή	66
Αποτελέσματα.....	66
Η χρήση του λογισμικού	66
Εξοικείωση με το λογισμικό	66
POSITION- γεωγραφικές συντεταγμένες.....	68
DIRECTION σφαιρικές συντεταγμένες.....	71
3d controller	74
Η Logo.....	75
Η τρίτη διάσταση του ύψους	77
Μαθηματικές έννοιες	78
Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης.....	78

Το πέρασμα από την οθόνη του υπολογιστή στην λεκτική και συμβολική αναπαράσταση.....	80
Το πέρασμα από την οθόνη του υπολογιστή στην γραφική αναπαράσταση.....	84
Η συνάρτηση ως συμμεταβολή.....	85
Συμμεταβολή και αναλογία	93
Γραφική αναπαράσταση της συμμεταβολής	95
Η αντίστροφη συνάρτηση μέσα στο πλαίσιο της συμμεταβολής	99
Δυσκολία με τους δεκαδικούς.....	103
Η ταυτοτική συνάρτηση μέσα στο πλαίσιο της συμμεταβολής.....	106
Άλλες μαθηματικές έννοιες.....	108
Επέμβαση στο πρόγραμμα	110
Ερωτηματολόγιο	114
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	
Περίληψη.....	120
Συμπεράσματα.....	121
Αλληλεπίδραση με το λογισμικό	122
Μαθηματικές έννοιες	122
Η επέμβαση των μαθητών στο πρόγραμμα	126
Επίλογος.....	127
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	128

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Το υπολογιστικό περιβάλλον του Cruislet	51
Εικόνα 2: Μοντέλα αεροπλάνων	51
Εικόνα 3: Επιλογή προορισμού	52
Εικόνα 4: Τα δύο συστήματα αναφοράς.....	52
Εικόνα 5: Ο 3d controller.....	52
Εικόνα 6: Το contex tab	53
Εικόνα 7: Το logo tab.....	54
Εικόνα 8: Οι μαθητές εξοικειώνονται με τις σφαιρικές συντεταγμένες και φτιάχνουν σχήματα στον αέρα	71
Εικόνα 9: Αλλαγή συντεταγμένων μέσω του 3d controller.....	75
Εικόνα 10: Μεταφορά των εντολών πλοήγησης στην ετικέτα της logo.....	76
Εικόνα 11: Δραστηριότητα 9 (η εύρεση του ύψους)	79
Εικόνα 12: Δραστηριότητα 11 (εύρεση της κρυμμένης συνάρτησης)	91
Εικόνα 13: Δραστηριότητα 12 (αντίστροφη συνάρτηση).....	102
Εικόνα 14: Στρατηγική μείωσης του R ώστε να προσεγγίσουν τα όρια της Ελλάδας ...	109
Εικόνα 15: Το πρόγραμμα που έφτιαξαν οι μαθητές της ομάδας 4.....	111

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Περίληψη

Η συνάρτηση είναι μια βασική έννοια που χρησιμοποιείται ευρέως στη σχολική τάξη. Εντούτοις δεν συνδέεται συστηματικά με πραγματικά φαινόμενα με αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να κατανοήσουν σημαντικές πτυχές της. Ένα παράδειγμα είναι η μεταβλητή ως συνεχής μετατόπιση στο καρτεσιανό επίπεδο. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές ένα ψηφιακό εργαλείο μαθηματικής πλοήγησης σε αναπαραστάσεις τρισδιάστατων γεωγραφικών χώρων για να μελετηθεί ο τρόπος που κατανοούν την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή. Θα γίνει σχεδιασμός της δραστηριότητας και εμπειρική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας σε σχολική τάξη Γυμνασίου.

Διατύπωση του προβλήματος

Τόσο στην Ελλάδα όσο και στην διεθνή βιβλιογραφία είναι καταγεγραμμένες έρευνες που δείχνουν την αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης. Οι μαθητές είναι δύσκολο να ξεφύγουν από τον διαδικαστικό τρόπο σκέψης και να μεταβούν σ' έναν πιο αφηρημένο, όπως είναι η έννοια της συνάρτησης (Gray & Tall, 1994)

Σύμφωνα με τους Marrioti & Fischbein (1997), είναι χρήσιμο να εισάγεται ένας ορισμός διαμέσου μιας προβληματικής κατάστασης από την οποία να αναδεικνύεται η σημαντικότητα του νέου αντικειμένου που ορίζεται. Η αντικατάσταση της οριζόμενης έννοιας και η σχηματοποίηση της μέσα από ένα σύμβολο αποκτούν νόημα για τους μαθητές όταν δημιουργείται η δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με ευκρινέστερο και ταχύτερο τρόπο από πριν. Στηριζόμενοι λοιπόν σ' αυτή την άποψη πιστεύουμε ότι η έννοια της συνάρτησης, έτσι όπως διδάσκεται στο σχολικό βιβλίο, υστερεί σε αυτό που λέμε βιωματική προσέγγιση. Χρειάζεται λοιπόν να εμπλουτίσουμε τον ορισμό της έννοιας με παραστάσεις και παραδείγματα από την καθημερινή πραγματικότητα

Σκοπός της έρευνας

Στόχος της παρούσας ερευνητικής προσέγγισης είναι η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της χρήσης υπολογιστικών μέσων και της προσέγγισης μαθηματικών εννοιών μέσα από διαδικασίες κατασκευής πειραματισμού και επικοινωνίας. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δείξει πώς ένας μαθητής αναπτύσσει την έννοια της συνάρτησης σαν γενικευμένη διαδικασία που περιέχει συμμεταβολή ανάμεσα στις μεταβλητές. Η ανάπτυξη αυτή γίνεται μέσα από ένα δυναμικό φυσικό περιβάλλον.

Ερευνητικά ερωτήματα

- 1 Τι είδους νοήματα κατασκευάζουν οι μαθητές για τις συναρτήσεις καθώς το αεροπλάνο μετατοπίζεται κατά την πλοήγηση στο γεωγραφικό περιβάλλον του cruilet;
- 2 Πώς οι μαθητές δημιουργούν πίνακες, ισότητες, γραφικά που σκοπό έχουν να παρουσιάσουν τις συναρτήσεις που δημιουργήθηκαν από το δυναμικό μοντέλο;
- 3 Πώς βοηθά το λογισμικό στην ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων;

Αναγκαιότητα

Πολλές έρευνες στην Ελλάδα και στο εξωτερικό έχουν ασχοληθεί με την έννοια της συνάρτησης. Καμία όμως δεν συνδέει τα γεωγραφικά συστήματα αναφοράς με την έννοια αυτή. Θεωρήθηκε λοιπόν σκόπιμο να διερευνηθεί το κατά πόσο μπορεί ένα τέτοιο υπολογιστικό περιβάλλον να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν νοήματα για την έννοια της συνάρτησης, να αναδείξει τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια αυτή και να τους βοηθήσει να την κατανοήσουν βαθύτερα .

Σημαντικότητα της έρευνας

Η συνάρτηση είναι ένα σημαντικό κεφάλαιο στην μαθηματική εκπαίδευση αφού διαπερνά όλους τους κλάδους των μαθηματικών (Τουμάσης 2002). «Η ανάπτυξη της έννοιας έχει φέρει επανάσταση στα μαθηματικά, όπως ακριβώς και η εμφάνιση της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας την ίδια περίπου εποχή. Η έννοια αυτή έχει μετατρέψει τα μαθηματικά από μια καθαρή φυσική επιστήμη -τη βασίλισσα των επιστημών- σε κάτι πολύ ανώτερο. Έχει καθιερώσει τα μαθηματικά ως τη βάση της κάθε αυστηρής σκέψης τη λογική όλων των δυνατών συσχετίσεων».(Boyer 1946)

Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα και τη χρησιμότητα της έννοιας, η παρούσα έρευνα μελετά τον τρόπο και τον βαθμό που οι μαθητές την κατανοούν μέσα από ένα υπολογιστικό περιβάλλον. Διερευνούμε επίσης τις δυσκολίες και τις αδυναμίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με στόχο την καλύτερη προετοιμασία και οργάνωση από του καθηγητές της διδασκαλίας της έννοιας έτσι ώστε αυτή να είναι περισσότερο αποτελεσματική.

Οριοθέτηση του προβλήματος

Η παρούσα έρευνα ασχολείται μόνο με τους μαθητές και δεν λαμβάνει υπ' όψιν την άποψη των καθηγητών για το θέμα της συνάρτησης. Δεν λάβαμε επίσης υπ' όψιν τον τρόπο με τον οποίο έγινε η διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας στους μαθητές .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τις βασικές πτυχές που μελετώνται στην παρούσα ερευνητική προσπάθεια. Αρχικά γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην έννοια της συνάρτησης και ύστερα περιγράφονται οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές με την έννοια αυτή και τις διάφορες αναπαραστάσεις της. Δίνεται το θεωρητικό πλαίσιο της συμμεταβολής σύμφωνα με τους Carlson et al, 2002 πάνω στο οποίο στηρίχτηκε η έρευνα. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά σε θέματα τεχνολογίας και εκπαίδευσης και τέλος μια σύντομη περιγραφή του λογισμικού cruilet που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα έρευνα.

Ιστορική αναδρομή της έννοιας της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες των μαθηματικών αλλά και των περισσότερων επιστημονικών κλάδων και σ' αυτήν έχει επικεντρωθεί η προσοχή της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας (Dubinski & Harel, 1992).

Η έννοια της συνάρτησης εξελίχτηκε σιγά σιγά στη διάρκεια των αιώνων. Πολύ ωρίς οι Βαβυλώνιοι (γύρω στα 1800π.Χ) συνέταξαν και χρησιμοποίησαν για τις αστρονομικές τους παρατηρήσεις πίνακες, οι οποίοι τους βοήθησαν να διατυπώσουν τους πρώτους εμπειρικούς νόμους των πλανητών. Μπορούμε να πούμε ότι τότε εμφανίζεται για πρώτη φορά η έννοια της συνάρτησης σε μορφή πινάκων. Στις εργασίες του Αρχιμήδη προπαρασκευάζεται η έννοια, χωρίς όμως ιδιαίτερη αναφορά σε αυτήν. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι αρχαίοι Έλληνες ενδιαφέρονταν περισσότερο για τις μορφές των αντικειμένων παρά για τις μεταβολές τους.

Πολύ αργότερα ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (128-168μΧ), που ασχολήθηκε πολύ με την αστρονομία, συνέταξε τριγωνομετρικούς πίνακες πους οποίους καταχώρησε στους 13 τόμους της Αλμαγέστης. Στους πίνακες αυτούς συσχετίζονται τα μήκη των χορδών με τα αντίστοιχα τόξα. Μεγέθη δηλαδή συνεχή(τόξα κύκλου) αντιστοιχίζονται με άλλα συνεχή μεγέθη (χορδές) πράγμα που διευρύνει κατά πολύ την αντίληψη των

αριθμητικών σχέσεων, αγγίζοντας σχεδόν την γενικότερη έννοια της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής.

Παρ' ότι οι παραπάνω πίνακες εκφράζουν κατά βάθος συναρτήσεις, η έννοια της συνάρτησης δεν προήλθε από τα μαθηματικά, αλλά εμπειρικά από τις φυσικές επιστήμες.

Η άνθιση των μαθηματικών και φυσικών επιστημών στο 17ο αιώνα οδήγησε τους ανθρώπους στη σπουδή των μεταβολών και ιδιαίτερα αυτών που προκύπτουν από τις κινήσεις. Για να εκφραστούν με μαθηματική γλώσσα οι μεταβολές των μεγεθών που παρουσιάζονται στην εξέταση ενός φαινομένου, έγινε εισαγωγή στη μαθηματική επιστήμη της σπουδαίας έννοιας της μεταβλητής.

Οι γάλλοι μαθηματικοί P. Fermat(1601-1665) και R.Descartes (1596-1650) έκαναν ουσιαστική διάκριση μεταξύ σταθερών και μεταβλητών μεγεθών. Στις εργασίες με μεταβλητές παρουσιάστηκε η ανάγκη της εισαγωγής νέων εννοιών για να περιγραφεί η εξάρτηση μεταξύ σταθερών και μεταβλητών μεγεθών.

Ο όρος "function" (από το λατινικό ρήμα fungor που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο «η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων», στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μιας καμπύλης, όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων, που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Ο Bernoulli έδωσε το 1718 τον επόμενο γενικό ορισμό :

«Συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους ορίζεται μια ποσότητα, που σχηματίζεται με οποιονδήποτε τρόπο απ' αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές».

Ο Euler το 1748 δίνει το εξής ορισμό στο έργο του *Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση*:

Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συνθέτει με οποιοδήποτε τρόπο μια μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες.(Katz1993, σελ 512)

Για τον Euler αναλυτική έκφραση σημαίνει μαθηματικός τύπος. Είναι ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε το σύμβολο 'f' από το function και μίλησε για διάφορα είδη συναρτήσεων (αλγεβρικές, υπερβατικές). Αργότερα διατύπωσε έναν πιο αφηρημένο ορισμό:

Μια ποσότητα είναι συνάρτηση όταν εξαρτιέται από μια άλλη ποσότητα με τέτοιο τρόπο ώστε εάν η τελευταία αλλάζει η πρώτη ποσότητα να υφίσταται αλλαγή από μόνη της. (Katz1993,σελ 515)

Σύμφωνα με τον Valiron η αντίληψη στον Euler της συνάρτησης ως αναλυτικής έκφρασης των μεταβλητών και των γνωστών ποσοτήτων περιλαμβάνει τις συναρτήσεις που ορίζονται με δυναμοσειρά ως προς x , της μορφής

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Ο Euler αντιλαμβάνονταν ως συνάρτηση, περισσότερο έναν τύπο (αλγεβρική παράσταση) παρά μια καμπύλη ή μια αντιστοιχία, γιατί αντιλαμβάνονταν την έννοια της συνεχούς συνάρτησης όχι όπως την όρισε το 19^ο αιώνα ο Cauchy αλλά ως μια συνάρτηση που ορίζεται μέσω ενός ενιαίου αλγεβρικού τύπου. Αυτή η εμπράγματη αναφορά που αποδίδεται στο όνομα της συνέχειας μας δείχνει ότι η 'πραγματική οντότητα' πίσω απ' όλα αυτά, για τους μαθηματικούς του 18^{ου} αιώνα, είναι ο τύπος που καθορίζει την συνάρτηση. (Πατρώνης, Σπανός 1996)

Στην συνέχεια, από μια σχετική εργασία του D. Bernoulli το 1753 και την σύγκριση των αποτελεσμάτων της μ' αυτά του Euler, τέθηκε το ερώτημα αν οποιαδήποτε συνάρτηση που ορίζεται μέσω μιας αυθαίρετης καμπύλης μπορεί ν' αναπαρασταθεί από μια τριγωνομετρική σειρά. Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε θετικά στις αρχές του 19^{ου} αιώνα από τον Fourier με την περίφημη εργασία του για την αναλυτική Θεωρία της Θερμότητας [F] όπου ισχυρίζονταν ότι κάθε συνάρτηση της μεταβλητής x που ορίζεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ αναπτύσσεται σε τριγωνομετρική σειρά της μορφής

$$a_0 + a_1 \cos x + \beta_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \dots$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχτηκε τελικά από τον Dirichlet το 1829 και είναι ακριβώς αυτή η αφορμή που ο Dirichlet, προκειμένου να διατυπώσει αυστηρά τα συμπεράσματά του, στην εργασία του «Επί της αναπαραστάσεως μιας αυθαίρετης συνάρτησης με σειρά ημίτονων και συνημίτονων», οδηγείται στο να δώσει επιτέλους το γενικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης:

«Μια συνάρτηση $\psi(\chi)$ είναι δοσμένη αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα που δίνει μια συγκεκριμένη τιμή ψ σε κάθε χ σε κάποιο σύνολο σημείων. Δεν είναι αναγκαίο το ψ να υπόκειται στον ίδιο κανόνα που αφορά το χ μέσα σ'ολόκληρο το διάστημα» (Davis &Hersh 1981 σελ 257)

Το 1828 ο Dirichlet ορίζει μια εντελώς παράδοξη συνάρτηση: η $\varphi(\chi)$ είναι ίση με 1 αν το χ είναι ρητός και 0 αν το χ είναι άρρητος. Αφου κάθε διάστημα όσο μικρό και αν είναι περιέχει ρητά και άρρητα σημεία, είναι εντελώς αδύνατον να σχεδιάσουμε ένα γράφημα αυτής της συνάρτησης. Έτσι με τον ορισμό του Dirichlet για την συνάρτηση, η ανάλυση προσπέρασε την γεωμετρία και την άφησε πολύ πίσω.(Davis &Hersh 1981 σελ 257)

Εξετάζοντας το έργο των μαθηματικών του δεύτερου μισού του 19^{ου} αιώνα, βλέπουμε ότι το νόημα, ο ιδιαίτερος χαρακτήρας ή η «φυσιογνωμία» της έννοιας της συνάρτησης προέκυψε από τη γεωμετρία και τη νεότερη (ή συμβολική) άλγεβρα και ήταν ουσιαστικά μια γενίκευση της έννοιας του μετασχηματισμού. Για παράδειγμα, ο R. Dedekind στο περίφημο άρθρο του «Η Φύση και το Νόημα των Αριθμών» γράφει «Ορισμός: Ως μετασχηματισμό φ ενός συστήματος S εννοούμε ένα νόμο (κανόνα) σύμφωνα με τον οποίο κάθε στοιχείο s του S “ανήκει” ένα επίσης καθορισμένο αντικείμενο, που λέγεται “μετασχηματισμένο” και σημειώνεται με $\varphi(s)$. Λέμε ακόμη ότι το $\varphi(s)$ “αντιστοιχεί” στο στοιχείο s , ότι το $\varphi(s)$ “προκύπτει” ή “παράγεται” από το s μέσω του V μετασχηματισμού φ , και ότι το s “μετασχηματίζεται” στο $\varphi(s)$ μέσω του φ ».

Είναι φανερό ότι ο όρος «συνάρτηση», παρ' όλο που δεν χρησιμοποιείται ρητά, υποδηλώνεται έμμεσα στον ορισμό του Dedekind και μάλιστα με την πιο γενική του σημασία. Θα ακολουθήσουν πρδ συναρτήσεων του είδους της καμπύλης του Peano (συνεχής συνάρτηση με πεδίο τιμών το $[0,1]$ υποσύνολο των πραγματικών αριθμών που έχει τιμή ένα τετράγωνο)ή εκείνη του Weierstrass (συνάρτηση παντού συνεχής αλλά πουθενά παραγωγίσιμη) Ο Peano πιστεύει ότι η έννοια της συνάρτησης θα έπρεπε να αναχθεί στην έννοια της σχέσης και ο Hausdorff(1914) δίνει τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους, ορισμό που τελειοποιεί αργότερα ο Kuratowski.

Ο ορισμός που διδάσκεται σήμερα στους μαθητές είναι ο συνολοθεωρητικός:

«Συνάρτηση είναι μια διαδικασία κατά την οποία αντιστοιχίζουμε ένα στοιχείο x ενός συνόλου A που το ονομάζουμε πεδίο ορισμού, σε ένα και μόνο στοιχείο y ενός συνόλου B που το ονομάζουμε πεδίο τιμών».

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο ορισμός της έννοιας συνάρτηση δεν είναι μονοσήμαντος και πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί σε επιστημολογικό επίπεδο με τη έννοια αυτή. Είναι ένας ορισμός που ολοκληρώθηκε σχετικά πρόσφατα μέσα στην επιστήμη.

Δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην έννοια της συνάρτησης

Αρκετές μελέτες έδειξαν ότι η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι αρκετά πολύπλοκη. Μαθητές που σκέφτονται για την συνάρτηση μόνο σε σχέση με συμβολικούς χειρισμούς και διαδικαστικές τεχνικές αδυνατούν να καταλάβουν μια γενικότερη απεικόνιση από input values σε ένα σετ από output values και ως εκ τούτου υστερούν σε εννοιολογικές δομές για την μοντελοποίηση συναρτησιακών σχέσεων στις οποίες η τιμή της συνάρτησης (output value) αλλάζει συνεχώς καθώς γίνονται και συνεχείς αλλαγές στην input value (Carlson, 1998; Monk & Nemirovsky, 1994; Thomson, 1994a). Αυτές οι ικανότητες έχουν αποδειχτεί ότι είναι σχετικές με την αναπαράσταση και την ερμηνεία της μεταβαλλόμενης φύσης πολλών συναρτησιακών καταστάσεων (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Thompson, 1994a) καθώς και θεμελιακές για την κατανόηση κύριων εννοιών των ανώτερων μαθηματικών (Carlson, Smith & Person, 2003; Cottrill et al., 1996; Kaput, 1992; Rasmussen, 2000; Thompson, 1994a; Zandieh, 2000).

Γιατί η συνάρτηση είναι τόσο δύσκολη έννοια για τους μαθητές; Σύμφωνα με τον Thomson οι μαθητές συχνά καλούνται να χειριστούν αλγεβρικές εξισώσεις και να δώσουν απαντήσεις σε ειδικούς τύπους ερωτήσεων. Οι μαθητές εισάγονται βιαστικά στον χειρισμό συμβόλων, στις διαδικασίες και στις λύσεις προβλημάτων. Φθάνει να κοιτάξουμε τα μαθηματικά εγχειρίδια για να αντιληφθούμε ότι το μεγαλύτερο μέρος της ενασχολήσεως με τα μαθηματικά αποτελείται από επαναλαμβανόμενες ανιαρές εφαρμογές σταθερών διαδικασιών σε αναρίθμητες συλλογές προβλημάτων. Αυτή η

επίμονη έμφαση σε διαδικασίες χωρίς να συνοδεύεται από ενέργειες που αναπτύσσουν μια βαθιά κατανόηση της έννοιας δεν βοηθά στο να χτιστούν θεμελιακές συναρτησιακές έννοιες, τέτοιες που να επιτρέπουν την εννοιολογική ερμηνεία και χρήση της συνάρτησης σε διάφορες αναπαραστασιακές και καινοτόμες καταστάσεις. Ακόμη και η κατανόηση της συνάρτησης σαν input-output value μπορεί να είναι κύρια πρόκληση για τους μαθητές. Σαν παράδειγμα το 43% των μαθητών της Α τάξης ενός κολεγίου στην άλγεβρα προσπάθησαν να βρουν το $f(x+a)$ προσθέτοντας το a στο τέλος της έκφρασης του f παρά να αντικαταστήσουν το $x+a$ μέσα στη συνάρτηση (Carlson, 1998). Όταν κλήθηκαν να δώσουν τις εξηγήσεις τους, πρόβαλλαν κάποιους μνημονικούς κανόνες ή διαδικασίες για να υποστηρίξουν τις απαντήσεις τους. Προφανώς αυτοί οι μαθητές δεν κατάλαβαν το $x+a$ σαν μια τιμή της συνάρτησης.

Μια άλλη παρερμηνεία είναι ότι η σταθερή συνάρτηση (π.χ. $\psi=3$) δεν είναι συνάρτηση γιατί δεν μεταβάλλεται. Σε μια έρευνα, μόνο το 7% της Α τάξης σε ένα κολλέγιο κατάφερε να δώσει ένα σωστό παράδειγμα μιας συνάρτησης όπου όλες οι τιμές είναι ίσες μεταξύ τους, ενώ το 25% έδωσαν την $\psi=x$ σαν ένα $\pi\rho\delta$ (Carlson, 1998).

Ακόμα πιο προβληματική είναι η κατάσταση κατά την οποία οι μαθητές βλέπουν τη συνάρτηση σαν 2 εκφράσεις οι οποίες χωρίζονται από ένα ίσον (Thompson, 1994b). Αυτή η φτωχή κατανόηση των συναρτήσεων είναι ανεπαρκής βάση για μια πιο πλούσια κατανόηση των πιο προχωρημένων μαθηματικών.

Είναι συχνό επίσης το φαινόμενο οι μαθητές να δυσκολεύονται να ξεχωρίσουν μια αλγεβρικά ορισμένη συνάρτηση και μια εξίσωση (Carlson, 1998). Το σύμβολο της ισότητας προκαλεί δυσκολία στο να διαχωρίσουν πότε είναι μέσο ορισμού μιας σχέσης ανάμεσα σε 2 μεταβαλλόμενες ποσότητες και πότε είναι μια κατάσταση ισότητας 2 εκφράσεων.

Μια άλλη δυσκολία είναι ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι όλες οι συναρτήσεις ορίζονται από έναν μόνο τύπο. Πχ πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x^2}, & x > 0, \end{cases}$$

είναι δύο διαφορετικές συναρτήσεις και ότι η συνάρτηση του Dirichlet

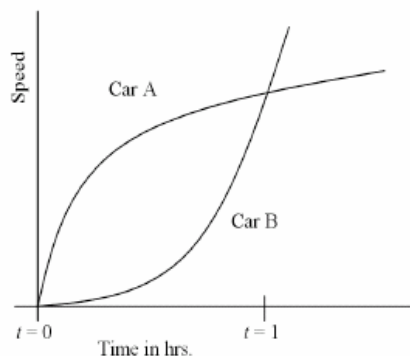
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ is rational,} \\ 0, & x \text{ is irrational,} \end{cases}$$

δεν είναι συνάρτηση γιατί συμπεριφέρεται « άσχημα»

Κατά παρόμοιο τρόπο διαφορετικοί τύποι δεν μπορούν να αντιπροσωπεύουν την ίδια συνάρτηση όπως για πρδ $f_1(n)=n^2$ και $f_2(n) = \sum_{k=1}^n (2k-1)$ που στην ουσία ορίζουν την ίδια συνάρτηση φυσικών αριθμών παρ'όλο που έχουν διαφορετικό τύπο .

Πολλοί μαθητές επίσης έχουν την τάση να ισχυρίζονται ότι όλες οι συναρτήσεις είναι γραμμικές ή τετραγωνικές θεωρώντας για πρδ ότι οποιαδήποτε με γράφημα σαν υ είναι παραβολή (Schwarz & Hershkowitz, 1999). Όλα αυτά βέβαια δεν είναι και πολύ απροσδόκητα αν σκεφτούμε ότι αυτές είναι οι συναρτήσεις που προσφέρονται στο σχολείο από τις πρώτες κιόλας τάξεις.

Ακόμη μια δυσκολία για τους μαθητές είναι να ξεχωρίζουν τα οπτικά χαρακτηριστικά μιας φυσικής κατάστασης και τα αντίστοιχα αντιληπτικά χαρακτηριστικά του γραφήματος της συνάρτησης που μοντελοποιεί την κατάσταση. Οι μαθητές θεωρούν συχνά ότι το γράφημα της συνάρτησης είναι μια εικόνα της φυσικής κατάστασης. Όταν κλήθηκαν να ερμηνεύσουν το παρακάτω διάγραμμα οι μαθητές μπερδέψαν την θέση με την ταχύτητα (Monk, 1992). Έτσι είπαν ότι το αυτοκίνητο Α συναντά το Β την χρονική στιγμή $t=1$.



Η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης σε τέτοιες πραγματικές καταστάσεις που το μοντέλο δυναμικά αλλάζει δημιουργεί ένα βασικό σκαλί για την επιτυχία στα ανώτερα μαθηματικά.

Οι μαθητές επίσης δείχνουν ανικανότητα να εκφράσουν τις συναρτησιακές σχέσεις χρησιμοποιώντας τα συναρτησιακά σύμβολα. Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να εκφράσουν το s σαν συνάρτηση του t πολλοί μαθητές δεν ήξεραν ότι το αντικείμενό

τους ήταν να γράψουν μια φόρμουλα στον τύπο του 's=<κάποια έκφραση που περιέχει t>' Πολλοί μαθητές αδυνατούν να ξεχωρίσουν ότι στην απλή συνάρτηση $f(x) = 3x$ οι παρενθέσεις είναι ένα σύμβολο για την τιμή του x , ότι το $f(x)$ παριστάνει την τιμή της συνάρτησης, ότι f είναι το όνομα της συνάρτησης και ότι το $3x$ μας δείχνει πως το x απεικονίζεται στο $f(x)$. Αυτή η αδύναμη κατανόηση και βαθιά διαδικαστική κατεύθυνση εξηγεί την ανικανότητα των μαθητών να κινούνται άνετα ανάμεσα σε διαφορετικές συναρτησιακές αναπαραστάσεις καθώς δεν μπορούν να κατασκευάσουν ένα τύπο μιας συναρτησιακής κατάστασης που δίνεται με λόγια (Carlson,1998)

Σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus (1991) οι μαθητές δε χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και προτιμούν να χειρίζονται τη συνάρτηση μέσα από τον αλγεβρικό της τύπο. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και η Καλδρυμίδου η οποία επισημαίνει ότι η αρνητική τάση των μαθητών, των φοιτητών αλλά και των εκπαιδευτικών, προς τις εικονικές αναπαραστάσεις και η προτίμησή τους σε προσεγγίσεις αλγεβρικού τύπου οφείλεται σε λόγους:

- Γνωστικής φύσης, που αφορούν τη δυσκολία της ολιστικής και επιλεκτικής φύσης της εικόνας ως τρόπου παράστασης πληροφοριών
- Επιστημολογικής φύσης που αναφέρονται στην επιστημολογία της μαθηματικής κοινότητας και της διδακτικής των σχολικών μαθηματικών
- Συναισθηματικής φύσης, που σχετίζονται με την αβεβαιότητα και το άγχος που αισθάνονται τα υποκείμενα όταν έρχονται αντιμέτωποι με εικονικές ή γραφικές παραστάσεις (στο Γαγάτσης, 1995)

Σύμφωνα με έρευνα του Thomson,1994a Markowits (1986) οι μαθητές έχουν δυσκολία στη μεταφορά πληροφορίας μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων ακόμη και σε απλές περιπτώσεις. Ο Ponte (1984) διαπίστωσε ότι μαθητές του Λυκείου θεωρούσαν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από διακριτά σημεία (διακριτές τιμές) και δυσκολεύονταν να περιγράψουν τη συνάρτηση ως μεταβολή. Οι Dreyfus και Eisenberg (1986) διαπίστωσαν επίσης τη δυσκολία των μαθητών να συνδέσουν την αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης με τη γεωμετρική (γραφική παράσταση).

Η Sfard (1994) υποστηρίζει ότι ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης αποτελεί για τους περισσότερους μαθητές μία ακολουθία συμβόλων μέσω του οποίου εφαρμόζεται

κάποιος αλγόριθμος και προτείνει την εξής διαδικασία διδασκαλίας: πρώτα να ασκούνται οι μαθητές σε υπολογισμούς, μετά να παρατηρούν το αποτέλεσμα των υπολογισμών (το γράμμα σαν άγνωστος) και τελικά τη συνάρτηση (το γράμμα σαν μεταβλητή). Σε αυτό το πλαίσιο η Confrey (1992) επισημαίνει ότι οι επαναλαμβανόμενες ενέργειες σε πραγματικές καταστάσεις αποτελούν τις βάσεις για τη μοντελοποίηση και τη σύνδεση ανάμεσα στην κατάσταση και τη μαθηματική έκφραση (επαναλαμβανόμενη άθροιση οδηγεί στη γραμμική συνάρτηση) και προτείνει την προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης μέσα από σύστημα πολλαπλών αναπαραστάσεών της.

Η Sierpinska (1992).αναζητώντας εμπόδια που συναντούν οι μαθητές κατά την διδασκαλία της έννοιας τα συσχετίζει με την ιστορική και διδακτική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης

Ας δούμε μερικά από τα εμπόδια που προτείνει η Sierpinska.

1. Το ασυνείδητο σχήμα σκέψης που αναφέρεται στις αλλαγές του κόσμου ως φαινόμενα και χωρίς να επικεντρώνεται στο πως τα πράγματα αλλάζουν, παραγνωρίζοντας το τι αλλάζει, δηλ τις παραμέτρους της αλλαγής. Μια τέτοια στάση βλέπει κατά ποιοτικό τρόπο τον κόσμο και δεν στέκεται στις ποσοτικές σχέσεις.
2. Η σκέψη, που κατά πρωταρχικό τρόπο αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στον χωρισμό σε σταθερές και άγνωστες ποσότητες, οδηγεί συχνά στη ιδέα της εξίσωσης και όχι στην συνάρτηση
3. Η συμμετρία μεταξύ των x και y . Στην εξίσωση της έλλειψης ή του κύκλου έχουμε τις σχέσεις των x και y , οι οποίες εμφανίζονται κατά ένα ισοδύναμο και συμμετρικό τρόπο. Δηλαδή δεν έχουμε να κάνουμε με ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή και η σειρά τους είναι αδιάφορη. Ο χειρισμός συμβόλων στην άλγεβρα είναι συχνά αδιαφοροποίητος στο αν λύνω μια εξίσωση για x ή για y , ακόμη δε για σταθερές ή μεταβλητές.
4. Η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.
5. Η διάκριση μεταξύ της χρήσης του αριθμού και της ποσότητας. Αυτό οφείλεται στην περιορισμένη κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
6. Η εντύπωση ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με αναλυτικό τύπο.
7. Το πρόβλημα μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης, συμβολική, γραφική, με πίνακα τιμών κ.λ.π.

8. Η χρονικότητα της μεταβλητής

9. Άλλα εμπόδια όπως η εύκολη εντύπωση της συνάρτησης ως 1-1.

Οι ερευνητές Vinner & Dreyfus, 1983; Marcovitz et al., 1983; Hercovics, 1982 διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι

1. οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν τύπο .Αν δίνονται πολλαπλοί τύποι συναρτήσεων , τότε έχουμε πολλές συναρτήσεις
2. μια συνάρτηση υπάρχει αν υπάρχει ένας τύπος που την περιγράφει
3. η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να έχει καλή συμπεριφορά (συμμετρικότητα, ομαλότητα συνεχώς να αυξάνεται ..)
4. θα πρέπει να υπάρχει μια πράξη στο χ που να αποδίδει το ψ ,αυτό αποκλείει άλλες είδους σχέσεις
5. οι σταθερές και καθορισμένα σύμβολα σημείων δεν είναι συναρτήσεις
6. ο καθορισμός του πεδίου δεν αποτελεί μέρος του ορισμού της συνάρτησης

Η Συνάρτηση ως συμμεταβολή

Η επικρατούσα άποψη για τις συναρτήσεις στα σημερινά μαθηματικά μπορεί να περιγραφεί ως η συνάρτηση σαν αντιστοιχία, ή σαν ένας κανόνας που απεικονίζει κάθε στοιχείο χ από ένα σύνολο A σε ακριβώς ένα στοιχείο ψ , το οποίο καλείται $f(\chi)$, ενός συνόλου B . Αυτός ο ορισμός επικρατεί, παρά το γεγονός ότι πολλοί μαθηματικοί τον κριτικάρουν (Eisenberg, 1991, Thompson, 1994, Wilder, 1967). Σε απάντηση σε αυτές τις κριτικές ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών (Carlson, 1998, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002, Confrey & Smith, 1995, Thompson, 1994, Thompson & Thompson, 1994) προτείνει την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή. Η άποψη αυτή έχει τις ρίζες της στον Euler: «όταν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν οι τελευταίες αλλάξουν τότε αλλάζουν και οι πρώτες, τότε οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων ποσοτήτων». (Kleiner, 1989). Οι Saldanha και Thompson(1998) περιγράφουν την έννοια της συμμεταβολής ως «...κρατάμε στο μυαλό μια σταθερή εικόνα των τιμών δύο ποσοτήτων ταυτόχρονα» (σ298). Οι εικόνες της συμμεταβολής είναι αναπτυξιακές «...στην αρχική ανάπτυξη

κάποιος συντονίζει 2 τιμές ποσοτήτων-σκέφτεται την μία ,ύστερα την άλλη, μετά την πρώτη ,ύστερα την 2^η κ.ο.κ. Αργότερα οι εικόνες της συµµεταβολής συνεπάγονται την κατανόηση του χρόνου σαν μια συνεχή ποσότητα έτσι στη σκέψη κάποιου παραμένουν οι τιμές των 2 ποσοτήτων. Στην περίπτωση της συνεχούς συµµεταβολής, κάποιος κατανοεί ότι ακόμη και αν η ποσότητα έχει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αυτή αλλάζει από τη μία στην άλλη παίρνοντας όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Οι Confrey and Smith(1994,95) εξηγούν την έννοια της συµµεταβολής ως κίνηση ανάμεσα σε διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής (ψ_m, ψ_{m+1}) και συντονίζουν (coordinating) αυτές με την κίνηση ανάμεσα στις αντίστοιχες διαδοχικές τιμές μιας άλλης μεταβλητής (χ_m, χ_{m+1}). Επίσης εξηγούν ότι μέσα στο πλαίσιο της συµµεταβολής, μια συνάρτηση είναι κατανοητή σαν τοποθέτηση πλάι πλάι δύο σειρών (αντιπαράθεση 2 ακολουθιών) κάθε μια από τις οποίες δημιουργείται ανεξάρτητα μέσα από ένα πίνακα τιμών (1995 σ.67). Οι Coulomb and Berenson στηρίχτηκαν πάνω σ αυτούς τους ορισμούς και στις ιδέες που συζητήθηκαν από τους Thomson and Thomson (1994b,1996) για να περιγράψουν μια έννοια συµµεταβολής που εµπεριέχει τα παρακάτω:

- α)την αναγνώριση δύο συνόλων στοιχείων
- β)τον συντονισμό από 2 τύπους δεδομένα για να σχηµατίσουν σχέσεις ανάμεσα στην αύξηση την μείωση και τις σταθερές σχέσεις
- γ)την σύνδεση των 2 τύπων δεδομένων για να εδραιώσουν σαφείς σχέσεις ανάμεσα στις τιμές των δεδομένων και
- δ)την γενίκευση της σύνδεσης για να προβλέψει άγνωστες τιμές δεδομένων (σελ 88)

Βασισµένοι στις µελέτες και στην έρευνα των τελευταίων χρόνων (Carlson,1998; Carlson, Jacobs, & Larsen, 2001;Carlson & Larsen in press) οι Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002, ορίζουν ως **covariational reasoning να είναι οι γνωστικές ενέργειες που εµπλέκονται κατά τον συντονισμό 2 μεταβαλλόμενων ποσοτήτων παρακολουθώντας τους τρόπους με τους οποίους αλλάζει η μία σε σχέση με την άλλη.**

Έρευνες πάνω στις αναπτυσσόμενες έννοιες των µαθητών για την συνάρτηση έδειξαν ότι η εικόνα της συνάρτησης σαν διαδικασία που δέχεται δεδομένα (input) και παράγει εξαγόμενα (output) (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols,1992) είναι βασική για την ανάπτυξη μιας πλήρους εικόνας της συνάρτησης. Αυτή η άποψη είναι

επίσης θεμελιακή για τον συντονισμό εικόνων 2 μεταβλητών που αλλάζουν διαδοχικά η μια μετά την άλλη.(Carlson,1998; Thomson,1994a)

Η εικόνα της συνάρτησης ως συμμεταβολή έχει βρεθεί επίσης ότι είναι ουσιώδης για την κατανόηση των εννοιών της ανάλυσης :

OPIO: Οι δυσκολίες των μαθητών στο να μάθουν την έννοια του ορίου έχει συνδεθεί με φτωχές ικανότητες στη λογική της συμμεταβολής. Η έννοια του ορίου θα έπρεπε να αρχίζει με την ανεπίσημη δυναμική έννοια των «τιμών της συνάρτησης να πλησιάζουν μια οριακή τιμή καθώς οι τιμές του πεδίου ορισμού πλησιάζουν κάποια ποσότητα» (Cottrill et al,1996).

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ: Περιγράφοντας την εργασία της στην κατανόηση των μαθητών για την παράγωγο η Zandieh (2000) προτείνει επίσης ότι η εικόνα της συνάρτησης ως συμμεταβολή των εισερχόμενων τιμών με τις εξερχόμενες είναι θεμελιακή .Στην εργασία της καταθέτει ότι «η παραγωγός συνάρτηση ενεργεί ως μια διαδικασία που περνά μέσα από πολλές input values και για κάθε μια ορίζει μια output value η οποία δίνεται από το όριο του πηλίκου διαφοράς στο σημείο» (σελ107) δίνοντας έμφαση στην έννοια ότι η παράγωγος συνάρτηση προκύπτει από την συμμεταβολή των εισερχόμενων τιμών στην παράγωγο συνάρτηση με τις τιμές του ρυθμού μεταβολής της original συνάρτησης

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ : Ο Thomson (1994a) προτείνει ότι η λογική της συμμεταβολής είναι θεμελιακή για να κατανοήσουν οι μαθητές το θεμελιώδες θεώρημα της ανάλυσης, ένα θεώρημα που αποτελεί σημαντική σφραγίδα στην ανάπτυξη της ανάλυσης.(σελ130)

Το πλαίσιο της συμμεταβολής

Οι Carlson et al (2002) παρουσιάζουν ένα πλαίσιο συμμεταβολής που περιγράφει 5 νοητικές ενέργειες(mental actions) και 5 επίπεδα λογικής συμμεταβολής Οι νοητικές ενέργειες του πλαισίου της συμμεταβολής προβλέπουν ένα μέσο από ταξινομημένες συμπεριφορές οι οποίες παρουσιάζονται καθώς οι μαθητές εμπλέκονται σε ενέργειες συμμεταβολής .

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Νοητική ενέργεια (Mental action)

Περιγραφή της νοητικής ενέργειας

Νοητική ενέργεια 1 (MA1)	Συντονίζοντας (coordinating) την εξάρτησης της μιας μεταβλητής με την άλλη
Νοητική ενέργεια 2 (MA2)	Συντονίζοντας την κατεύθυνση της αλλαγής της μιας μεταβλητής με αλλαγές στην άλλη (αύξηση ή μείωση)
Νοητική ενέργεια 3 (MA3)	Συντονίζοντας το ποσό της αλλαγής της μιας μεταβλητής με αλλαγές στην άλλη
Νοητική ενέργεια 4 (MA4)	Συντονίζοντας το μέσο ρυθμό της αλλαγής της συνάρτησης με ομοιόμορφες αυξήσεις αλλαγής στην ανεξάρτητη(input)μεταβλητή
Νοητική ενέργεια 5 (MA5)	Συντονίζοντας το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης με συνεχείς αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή για όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Το πλαίσιο της συμμεταβολής περιέχει επίσης 5 διακριτά αναπτυξιακά επίπεδα (πίνακας 2). Λέμε ότι η ικανότητα κάποιου στη λογική της συμμεταβολής έχει φτάσει σ' ένα δοσμένο επίπεδο ανάπτυξης όταν υποστηρίζει τις νοητικές ενέργειες που αντιστοιχούν σ' αυτό το επίπεδο και τις ενέργειες που αντιστοιχούν σ' όλα τα κατώτερα επίπεδα

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Επίπεδο 1 (E1)Συντονισμός(Coordination) Στο επίπεδο του συντονισμού οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητική ενέργεια του συντονισμού των αλλαγών της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη(MA1) Επίπεδο 2 (E2) Κατεύθυνση (Direction)
--

Στο επίπεδο της κατεύθυνσης οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητικές ενέργειες του συντονισμού της κατεύθυνσης των αλλαγών της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη. Οι νοητικές ενέργειες MA1 MA2 υποστηρίζονται και οι 2 από τις εικόνες του E2

Επίπεδο 3 (E3) Ποιοτικός συντονισμός (Quantitative coordination)

Σ' αυτό το επίπεδο οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητική ενέργεια του συντονισμού του ποσού των αλλαγών της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη. Οι νοητικές ενέργειες MA1 MA2 και MA3 υποστηρίζονται και οι 2 από τις εικόνες του E3

Επίπεδο 4(E4) Μέσος ρυθμός (Average rate)

Σ' αυτό το επίπεδο οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητική ενέργεια του συντονισμού του μέσου ρυθμού των αλλαγών της συνάρτησης με ομοιόμορφες αλλαγές στην input μεταβλητή. Οι νοητικές ενέργειες από MA1 έως MA4 υποστηρίζονται από τις εικόνες του E4

Επίπεδο 5(E5) Στιγμιαίος ρυθμός (Instandaneous rate)

Σ' αυτό το επίπεδο οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητική ενέργεια του συντονισμού του στιγμιαίου ρυθμού των αλλαγών της συνάρτησης με τις αλλαγές στην input μεταβλητή. Σ' αυτό το επίπεδο είναι κατανοητό ότι ο στιγμιαίος ρυθμός της αλλαγής είναι αποτέλεσμα από όλο και μικρότερα διαστήματα του μέσου ρυθμού της αλλαγής. Γίνεται επίσης κατανοητό ότι το σημείο καμπής είναι εκεί όπου ο ρυθμός μεταβολής αλλάζει. Οι νοητικές ενέργειες από MA1 έως MA5 υποστηρίζονται από τις εικόνες του E5

Το προτεινόμενο πλαίσιο συμμεταβολής προτείνει ένα αναλυτικό εργαλείο με το οποίο εκτιμούμε την σκέψη της συμμεταβολής σ' ένα καλύτερο βαθμό από ότι στο παρελθόν. Επιπλέον προτείνει μια δομή και μια γλώσσα για να ταξινομήσουμε την σκέψη της συμμεταβολής κατά την ανταπόκριση ενός μαθητή σ' ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, και για να περιγράψουμε γενικά τις ικανότητες του μαθητή στη λογική της συμμεταβολής (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002).

Αναπαραστάσεις

Ο όρος αυτός όπως επισημαίνουν πολλοί ερευνητές είναι ασαφής. Σύμφωνα με τους Karut (1987a;1987b) και Goldin(1987), η έννοια περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες:

1. Την ολότητα που αναπαρίσταται
2. Την ολότητα που αναπαριστά
3. Τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης, που αναπαρίσταται
4. Τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και
5. Την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες

Δηλαδή, όπως επισημαίνουν οι De Loache et al (1998 b), τα παιδιά θα πρέπει να αντιμετωπίζουν μια αναπαράσταση ως ολότητα με δική της υπόσταση, χαρακτηριστικά, ιδιότητες και ταυτόχρονα ως αναπαράσταση μιας άλλης ολότητας στην οποία αναφέρεται και για την οποία παρέχει πληροφορίες: στη συγκεκριμένη περίπτωση, μια μαθηματική έννοια.

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις, όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν

α) η ικανότητα για αναγνώριση της έννοιας σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και

β) η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post & Behr, 1987). Η τελευταία προϋπόθεση, δηλαδή η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών αλλά και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Janvier, 1987). Με βάση ευρήματα ερευνών, μαθητές και φοιτητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σε αυτή τη διαδικασία, που επηρεάζουν τόσο τη μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλήματος.

Είδη αναπαραστάσεων

Οι αναπαραστάσεις, διακρίνονται συνήθως σε δύο είδη: τις εσωτερικές / νοητικές και τις εξωτερικές / σημειωτικές.

Ο όρος **εσωτερικές/νοητικές αναπαραστάσεις** αναφέρεται σε νοητικές εικόνες που κατασκευάζουν τα υποκείμενα, για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο επίπεδο του σημαινόμενου) και δεν είναι προσβάσιμες από άλλους. (Dufour –Janvier et al., 1987). Είναι γενικότερα ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ένα άτομο κινητοποιεί τις γνώσεις του όταν βρίσκεται απέναντι σε ένα πρόβλημα. Αναφέρονται σε νοητικούς σχηματισμούς που οικοδομούν μαθητές για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα.. Η φύση των νοητικών αναπαραστάσεων είναι πιο ασαφής, επειδή δεν μπορούν να παρατηρηθούν απευθείας και συμπεραίνουμε την ύπαρξή τους λόγω της εξωτερικής συμπεριφοράς των μαθητών.

Ο όρος **εξωτερικές/σημειωτικές αναπαραστάσεις** αναφέρεται σε όλους τους εξωτερικούς συμβολικούς φορείς (σύμβολα, σχήματα, εικόνες, πίνακες, γραφικές παραστάσεις) οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν εξωτερικά μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος) (Dufour-Janvier et al., 1987). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις ενδείκνυνται στο να κάνουν το αντικείμενο μάθησης γοητευτικό και ενδιαφέρον για τους μαθητές, και μπορούν να αποτελούν τα πεδία πρώτης αναφοράς των μαθητών προκειμένου να οικοδομήσουν βασικές έννοιες (Dufour-Janvier 1987, Bednarz, & Belanger, 1987; Kaput, 1987)

Με το όρο **“μετάφραση αναπαραστάσεων”** εννοούμε τη ψυχολογική διαδικασία που λαμβάνει χώρα όταν μεταφερόμαστε από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, όπως για παράδειγμα από μια αλγεβρική εξίσωση σε γραφική παράσταση.(Janvier, 1987a, σ.27) Για να γίνει η μετάφραση χρειάζονται δύο τουλάχιστον μορφές αναπαράστασης. Η αρχική αναπαράσταση(πηγή) πρέπει να ειδοθεί από την οπτική γωνία της τελικής αναπαράστασης(στόχος). Αν για παράδειγμα οι δύο μορφές αναπαράστασης είναι η εξίσωση και η γραφική παράσταση τότε προκύπτουν οι εξής μεταφράσεις: από γραφική παράσταση σε εξίσωση και από εξίσωση σε γραφική παράσταση. Η επίδραση των μέσων αυτών εξαρτάται σε μεγάλο μέρος από το είδος των αναπαραστάσεων που ενσαρκώνουν, από τον τρόπο που αυτές ερμηνεύονται από τους μαθητές (von

Glaserfeld, 1987) καθώς και από τον τύπο των δραστηριοτήτων που καλούνται οι μαθητές να φέρουν σε πέρας, την αλληλεπίδρασή τους με το δάσκαλο και γενικά με το μαθησιακό πλαίσιο συμφραζομένων στο οποίο εντάσσονται (Cobb, Yael, & Wood, 1992).

Ανάμεσα στα δύο είδη αναπαραστάσεων υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης. Συγκεκριμένα, σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που προέρχονται από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές του συμβολικού συστήματος διαβάζοντας και ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Πολύ συχνά οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα (Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998). Κατά συνέπεια, η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης διαφοροποιείται ανάλογα με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων από τα οποία δίνεται η ερμηνεία (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2001).

Κατά την Κολέζα (2003) μια αναπαράσταση δεν χαρακτηρίζεται εξωτερική ή εσωτερική απλά και μόνο από τη μορφή της, αλλά από τον τρόπο που δημιουργείται και το ρόλο που καλείται να παίξει στην κατασκευή της γνώσης. Για παράδειγμα ένα σχήμα ή ένα διάγραμμα δεν είναι απαραίτητα εξωτερική αναπαράσταση, αλλά μπορεί να υφίσταται και ως νοητική εικόνα, προϊόν εσωτερίκευσης μιας εξωτερικής σημειωτικής αναπαράστασης. Οι νοητικές αυτές εικόνες σε ένα δεύτερο επίπεδο αφαίρεσης μπορούν να λειτουργήσουν ως «ευρετικό πεδίο» για τη σύλληψη, την κατανόηση, ή την επεξήγηση συνθετότερων εννοιών.

Σύμφωνα με τον Duval (1995α, σελ. 3-4):

«η νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών), εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης. Αρκεί να εξετάσει κάποιος την περίπτωση της Αριθμητικής για να το καταλάβει: δεν παρατηρείται το ίδιο επίπεδο δυσκολίας στην περίπτωση της δεκαδικής γραφής και στη περίπτωση της κλασματικής γραφής ενός αριθμού»

Στην περίπτωση διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας θα πρέπει να μπορεί ο μαθητής να συνειδητοποιεί τις κοινές ιδιότητες της έννοιας εκφρασμένες στις

διαφορετικές αναπαραστάσεις της και να εξάγει τη δομή της. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις δίνουν διαφορετικές όψεις του όλου και αποδίδουν έτσι έναν πλουραλιστικό χαρακτήρα στις μαθηματικές έννοιες (Lesh, Mehr & Post, 1987α). Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η αποτελεσματικότητα των μαθητών στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων εξαρτάται από την ικανότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση σε μια άλλη. Ειδικότερα στη Γεωμετρία η εικόνα και η έννοια βρίσκονται πολύ κοντά, δηλαδή οι εσωτερικές και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις της έννοιας πλησιάζουν (Mariotti, 1995). Επιπλέον, οι μαθητές φάνηκε ότι μπορούν να εκφραστούν καλύτερα σε εικονικά απ' ό τι σε προτασιακά συστήματα (Sutherland, 1995).

Αναπαραστάσεις και συναρτήσεις

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι οι αναπαραστάσεις είναι στενά συνδεδεμένες με πολλές μαθηματικές έννοιες και κυρίως με τις συναρτήσεις. Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης: ο αναλυτικός μέσω τύπου, ο αριθμητικός μέσω πίνακα ή γραφήματος τιμών, ο γραφικός μέσω γραφικής αναπαράστασης. Κάθε ένας δίνει πληροφορίες για μερικές πλευρές της ,αλλά δεν μπορεί να την περιγράψει πλήρως. Έτσι η κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να θεωρηθεί από μόνη της ως γενικό σύμβολο της έννοιας της συνάρτησης αλλά όλες μαζί συμβάλλουν στην συνολική εννοιολογική αντίληψη της έννοιας αυτής (Καλδρυμίδου και Οικονόμου 1992)

Αποτελέσματα ερευνών καταδεικνύουν ότι η μετάφραση από την μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές γυμνασίου και Λυκείου όσο και σε φοιτητές (Hitt,1998;Gagatsis,1997;Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992; Artigue,1992;Even,1998). Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το πλαίσιο της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και καλλιεργείται κυρίως η μετάβαση από τον τύπο της συνάρτησης στην γραφική της παράσταση

Έρευνες σχετικά με τις δυσκολίες του συνδυασμού των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης , ανέδειξαν την ύπαρξη 5 επιπέδων οικοδόμησης της έννοιας (Hitt,1998)

Επίπεδο 1: Τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συναφές μίγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας)

Επίπεδο 2: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να εντοπίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας

Επίπεδο 3: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Επίπεδο 4: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης

Επίπεδο 5: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση του προβλήματος

Με βάση τα επίπεδα που έχουν εντοπιστεί είναι εμφανές ότι η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο (επίπεδο3) αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος .

Νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση

«...η παρουσία του υπολογιστή μπορεί να αλλάξει όχι μόνο τον τρόπο με τον οποίο διδάσκουμε στα παιδιά μας τα μαθηματικά, αλλά, πολύ πιο ουσιαστικά, τον τρόπο με τον οποίο σκέπτεται η παιδεία μας ως σύνολο με τη γνώση και τη μάθηση» (Papert, 1991, σελ. 58).

Από τα πρώτα κιόλας δείγματα που έχουμε για την ανθρώπινη διερεύνηση της γνώσης παρατηρούμε ότι ο άνθρωπος χρησιμοποιούσε κάθε φορά τα μέσα που είχε στη διάθεσή του για να προσεγγίσει να κατανοήσει ή να προσομοιώσει τις καταστάσεις που ήθελε να μελετήσει. Η προσπάθεια του αυτή πολλές φορές λειτουργούσε και αντίστροφα αφού η αναζήτηση της αλήθειας και η κοινωνική διαπραγμάτευση των προβλημάτων οδηγούσε στην ανακάλυψη νέων εργαλείων. Ο Αρχιμήδης για παράδειγμα σχεδίαζε σχήματα στην άμμο ή κατασκεύαζε μηχανικά ανάλογα για να μπορέσει να οδηγηθεί σε μηχανο-τεχνικές λύσεις που στην συνέχεια διερευνούσε θεωρητικά. Κάθε φορά τα εργαλεία αποτελούσαν το κλειδί που καθόριζε τα νοητικά και κοινωνικά του χαρακτηριστικά.

Στην σύγχρονη εποχή τα εργαλεία του ανθρώπου είναι κυρίως ηλεκτρονικά. Είναι κοινή διαπίστωση ότι η εποχή μας χαρακτηρίζεται από την ραγδαία εξέλιξη των νέων τεχνολογιών. Ο υπολογιστής, πέρα από την χρησιμότητά του ως εργαλείο διεκπεραίωσης καθημερινών εργασιών, έχει εισβάλλει για τα καλά στο χώρο της εκπαίδευσης, δημιουργώντας νέους τρόπους μάθησης και αναπτύσσοντας νέες στάσεις και δεξιότητες. Η εξέλιξη των υπολογιστών και η εισαγωγή τους στην καθημερινότητα έχουν αλλάξει τα πολιτιστικά και κοινωνικά δεδομένα του σύγχρονου ανθρώπου. Όπως είναι φυσικό λοιπόν έχει επηρεάσει και την μαθηματική εκπαίδευση.

Στην μαθηματική κοινότητα φαίνεται να υπάρχουν διαφορετικές απόψεις σχετικά με την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Μερικοί τους αντιμετωπίζουν με *σκεπτικισμό* θεωρώντας πως δεν έχουν τίποτα καινούριο να προσφέρουν στον τρόπο σκέψης και μάθησης των ανθρώπων ενώ άλλοι τους αντιμετωπίζουν με *κριτικισμό* θεωρώντας τους μάλιστα πιθανούς αίτιους βλαβών της πνευματικής υγείας των μαθητών (Papert, νοητικές θύελλες σελ42)

Η αλήθεια είναι πως η χρήση των ΗΥ μπορεί να έχει βλαβερές συνέπειες εάν δεν γίνεται σωστά. Αυτό που έχει σημασία είναι οι δυνατότητες που προσφέρουν και η παιδαγωγική αξιοποίησή τους. Με σωστή χρήση ο μαθητής μαθαίνει να σκέφτεται, να βιώνει καταστάσεις, να διαπραγματεύεται τις απόψεις του, να μην είναι παθητικός και να επιλέγει τον καλύτερο από διαφορετικούς τρόπους λύσης. Οι ΗΥ έρχονται να βελτιώσουν την διαδικασία προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης τόσο σε επίπεδο διαδικασίας όσο και σε επίπεδο περιεχομένου. Η χρήση του υπολογιστή στη μαθηματική διαδικασία αναθεωρεί τις υπάρχουσες δομές αναφορικά με το ρόλο του μαθητή, προσφέροντας δυνατότητες για εναλλακτικές μορφές έκφρασης, διερεύνησης, οικοδόμησης και προσέγγισης της γνώσης (Hoyles, Noss & Adamson 2002).

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας συνετέλεσε, ώστε οι υπολογιστές να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην εκπαίδευση και κυρίως στα Μαθηματικά. Οι ερευνητές τα τελευταία χρόνια τονίζουν την εκπαιδευτική αξία της διδασκαλίας με τη χρήση υπολογιστών για πολλούς λόγους (Ράπτης Αρ., Ράπτη Αθ., 2003), μερικοί από τους οποίους είναι οι εξής:

- Τα εκπαιδευτικά προγράμματα των υπολογιστών, που βασίζονται στην εικόνα, το χρώμα, τον ήχο και την κίνηση, κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με αποτέλεσμα το μάθημα να γίνεται περισσότερο κατανοητό και ευχάριστο δίνοντας ερεθίσματα για μεγαλύτερη εμβάθυνση.
- Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατακτούν τα γνωστικά αντικείμενα ανάλογα με το νοητικό τους επίπεδο και βάση των ατομικών τους ιδιομορφιών.
- Τέλος, ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εποπτικό μέσο διδασκαλίας, δίνοντας τη δυνατότητα να συνδυαστεί άμεσα η θεωρία με τις εφαρμογές της στην καθημερινή ζωή κατά την πορεία του μαθήματος.

Η πρώτη χρησιμοποίηση των υπολογιστών στην εκπαίδευση έγινε με σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές στις αριθμητικές πράξεις, αλλά κατά την τελευταία δεκαετία χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλείο για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων στα μαθηματικά προβλήματα καθώς και για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Heid, M., Sheets, C., Matras, M., & Menasian, J., 1988). Η ανάγκη χρησιμοποίησης εκπαιδευτικού λογισμικού, ως εργαλείο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, υποδεικνύεται από το National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 1989) των

Ηνωμένων Πολιτειών. “Η τεχνολογία στην εκπαιδευτική διαδικασία θα τροποποιήσει τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Το λογισμικό των υπολογιστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την παρουσίαση του μαθήματος στην τάξη από το διδάσκοντα και μεμονωμένα από τους μαθητές με πληθώρα παραδειγμάτων, με σκοπό την ανακάλυψη της γνώσης, τη γενίκευση και την εξαγωγή συμπερασμάτων.” (σ. 128) Ακόμα, στην έκδοση του NCTM (2000) «Αρχές της Διδασκαλίας των Μαθηματικών» επισημαίνεται, ότι η τεχνολογία αποτελεί βασικό στοιχείο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Κατά τους Κυνηγό και Δημαράκη (2002) οι νέες τεχνολογίες στην Εκπαίδευση διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες : τα νοητικά εργαλεία και τα επικοινωνιακά μέσα.

Τα νοητικά εργαλεία που συνήθως τα αποκαλούμε και διερευνητικό λογισμικό δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να δημιουργούν και να κατασκευάζουν μοντέλα φαινομένων, σχέσεων και αναπαραστάσεων και ταυτόχρονα να αξιοποιούν την άμεση, ακριβή αλλά και ουδέτερη ανταπόκριση του εργαλείου για να πειραματίζονται, διερευνούν, διατυπώνουν και αναπαριστούν ιδέες και έννοιες. Οι εξειδικευμένες υπολογιστικές εφαρμογές έχουν σχεδιαστεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο μαθητής να οδηγείται στην κατανόηση εννοιών του διδακτικού αντικειμένου μέσα από τη μάθηση και τη χρήση του ίδιου του νοητικού εργαλείου (Jonassen et al., 1998, Κυνηγός, 2002). Τα επικοινωνιακά μέσα δίνουν έμφαση στην πληροφόρηση και στην πρόσβαση σε αυτή, καθώς και στην επικοινωνία από απόσταση και στους τρόπους διαχείρισης της.

Ποιοι είναι όμως οι λόγοι για τους οποίους είναι σημαντικό να αξιοποιήσουμε τις νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευσή μας; Κατά την Δημητροπούλου (2002) οι λόγοι για τους οποίους είναι σημαντικό να αξιοποιήσουμε τις ψηφιακές τεχνολογίες στην εκπαίδευση κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες:

- Επιστημολογικοί λόγοι: Η τεχνολογική εξέλιξη έχει οδηγήσει στη μεταβολή του τρόπου εργασίας των επιστημόνων και της ανάπτυξης των γνωστικών πεδίων σήμερα. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια και την αναπροσαρμογή των προγραμμάτων σπουδών. Είναι πλέον επιβεβλημένη η ενσωμάτωση νέων δραστηριοτήτων που είναι πιο κοντά στις σημερινές επιστήμες. Για να έχουμε

λοιπόν νέες δραστηριότητες που να είναι πιο κατάλληλες από τις προηγούμενες για την εκπαίδευση των μαθητών θα πρέπει να αξιοποιήσουμε τη δυνατότητα που μας προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες να εμπλέξουμε τους μαθητές σε αυτές τις νέες δραστηριότητες.

- Μαθησιακοί λόγοι: Τα περισσότερα από τα λογισμικά που χρησιμοποιούνται έχουν σχεδιαστεί με βασική προϋπόθεση τη βελτίωση της διαδικασίας της μάθησης.
- Κοινωνικοί λόγοι: Στην εποχή μας οι τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας είναι πλέον εργαλεία της καθημερινότητάς μας. Συνεπώς η εκμάθηση της χρήσης τους και η εκμετάλλευση των δυνατοτήτων που μας παρέχουν στην εκπαίδευση από μικρή ηλικία και με φυσικό τρόπο είναι προφανές ότι θα πρέπει να είναι ένας από τους στόχους ενός σύγχρονου προγράμματος σπουδών.

Κατά τον Κυνηγό (2007) οι λόγοι είναι βαθύτεροι και πιο ουσιαστικοί. Η απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε βρίσκεται σε αυτό που ονομάζει *«πρόσθετη παιδαγωγική αξία ως προς την εκπαιδευτική πράξη»*. Το ερώτημα λοιπόν που πραγματικά τίθεται, είναι κατά τον Κυνηγό, τι μπορεί να κάνει σήμερα ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός με τη διαθέσιμη τεχνολογία που πρακτικά είναι αδύνατο ή πολύ δύσκολο να γίνει όταν δεν τη διαθέτει; Αυτό είναι το περιεχόμενο του όρου πρόσθετη παιδαγωγική αξία η οποία συνίσταται ακριβώς σε αυτό : *«στο ότι μπορεί να διαθέσει πολύ-αναπαραστασιακά εργαλεία με τα οποία ο μαθητής θα αποκτήσει εμπειρίες έκφρασης εννοιών και επιστημονικής επιχειρηματολογίας, διαχείρισης της πληροφορίας, δράσης μέσα σε πολυποίκιλες συλλογικότητες, εξάσκησης στην κρίση και τη δημιουργική αμφισβήτηση»*.

Ο Κυνηγός αναφέρεται ειδικότερα στις **πτυχές της μαθησιακής διαδικασίας** που μπορούν να καλλιεργηθούν αξιοποιώντας την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προκύπτει από τη χρήση διερευνητικού λογισμικού και οι οποίες, παρά το γεγονός ότι είναι εξαιρετικά σημαντικές για τη μάθηση, είναι υποβαθμισμένες στην εκπαιδευτική πρακτική.

Η πρώτη από τις πτυχές αυτές είναι η δράση. Ο μαθητής καθώς εμπλέκεται σε μια προβληματική κατάσταση, για την οποία εμφανίζει κάποιο προσωπικό ενδιαφέρον, θα υποχρεωθεί να «*κάνει μαθηματικά*» (learning by doing)(Papert 1991)

Το βίωμα είναι η δεύτερη πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που καλλιεργείται με τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή «η μάθηση καλλιεργείται μέσα από δραστηριότητες που δημιουργούν βιώματα ή εμπειρίες σχετικές με το διδακτικό στόχο» (Κυνηγός, 2007).

Μια τρίτη πτυχή είναι ο πειραματισμός. Ο Papert (1991) μιλάει για μαθητές «*μικρούς επιστήμονες*» που κάνουν υποθέσεις, διατυπώνουν εικασίες, τις επιβεβαιώνουν ή τις διαψεύδουν, διατυπώνουν συμπεράσματα. Η χρήση υπολογιστικών εργαλείων προσφέρει από τη μια πλευρά τη δυνατότητα ανάπτυξης πολλών παραδειγμάτων και από την άλλη εγγυάται την ορθότητα των υπολογισμών. Δίνει ακόμα τη δυνατότητα στο μαθητή να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει με τη βοήθεια νέων παραδειγμάτων τις εικασίες του.

Η τέταρτη πτυχή είναι η έρευνα και η αναζήτηση, μέρος της οποίας είναι βέβαια και ο πειραματισμός. Μέσα από το συνεχή πειραματισμό ο μαθητής μαθαίνει να ερευνά, να εκφράζει εικασίες και να προσπαθεί να τις επαληθεύσει ή να τις διαψεύσει. Το γεγονός αυτό τον υποχρεώνει να αναπτύξει την πεποίθηση ότι δεν είναι όλα γύρω του δεδομένα. Θα πρέπει ο ίδιος να δράσει για να ανακαλύψει και να οικοδομήσει τη γνώση του. Αναζητά πλέον μόνος του την κατανόηση και την πληροφορία αντί να περιορίζεται σε αυτή που θα του δοθεί (Κυνηγός, 2007).

Η πέμπτη πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που καλλιεργείται με τη χρήση του διερευνητικού λογισμικού και που σχετίζεται άμεσα με τις προηγούμενες είναι η αμφισβήτηση. Η διαδικασία της έρευνας και της αναζήτησης οδηγεί το μαθητή στην υιοθέτηση μιας στάσης αμφισβήτησης απέναντι στη γνώση.

Η έκτη πτυχή, που συνδέεται άμεσα με τα προηγούμενα, είναι η δημιουργία και το «*μαστόρεμα*», όπως την ονομάζει ο Κυνηγός (2007). Ο μαθητής δημιουργώντας ο ίδιος κατασκευές και μοντέλα ή μαστορεύοντας τις κατασκευές του μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον ανακαλύπτει και επεξεργάζεται τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του γνωστικού αντικείμενου.

Η έβδομη πτυχή είναι ο διάλογος και η επιχειρηματολογία. Ο Cobb (1997) αντιμετωπίζει το διάλογο ως μέγιστης σημασίας και άμεσης προτεραιότητας κοινωνικό γεγονός στο οποίο συμμετέχουν οι μαθητές. Ο δάσκαλος κατά τον Cobb δεν θα πρέπει να καθοδηγεί τους μαθητές του ούτε και να τους δελεάζει προκειμένου να αποδεχθούν μια συγκεκριμένη ερμηνεία. Αντίθετα θα πρέπει τους μνεί σε συζητήσεις γύρω από αντικείμενα τα οποία κρίνει ότι έχουν σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο. Έτσι ο μαθητής αισθάνεται υποχρεωμένος μέσα σε ένα πλαίσιο συνεργατικής επιστημονικής δράσης να επιχειρηματολογήσει προκειμένου να αιτιολογήσει τις επιλογές του, να διατυπώσει εικασίες, να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει τις εικασίες αυτές (Κυνηγός, 2007). Έτσι μέσα λοιπόν από το διάλογο και την επιχειρηματολογία ο μαθητής οδηγείται στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών με τις οποίες ασχολείται..

Η όγδοη πτυχή είναι η συνεργασία. Προϋπόθεση της ανάπτυξης του διαλόγου είναι η κατάκτηση ενός ικανοποιητικού επιπέδου συνεργασίας. Μέσα από τη συνεργασία των μαθητών στις δραστηριότητες που τους ανατίθενται από τον εκπαιδευτικό ωφελούνται τόσο ο κάθε μαθητής μεμονωμένα όσο και όλα τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Η συνεργατική μάθηση είναι ένας σημαντικός παράγοντας στην διδακτική διαδικασία. Οι ψηφιακές τεχνολογίες βοηθούν προς αυτή την κατεύθυνση. Και στην περίπτωση αυτή ο ρόλος τους είναι διττός. Αφενός τα διερευνητικά λογισμικά μπορούν να αξιοποιηθούν ως παράγοντες συνεργατικής μάθησης μέσα από καλά και προσεκτικά σχεδιασμένες δραστηριότητες. Αφετέρου ως εργαλεία επικοινωνίας παρέχουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να επιτύχει το διάλογο και τη συνεργασία μαθητών που βρίσκονται σε διαφορετικά απομακρυσμένα σημεία και χωρίς τη χρήση των τεχνολογιών αυτών δεν θα είχαν τη δυνατότητα της επικοινωνίας.

Η συμμετοχή σε μορφές συλλογικότητας είναι μια ακόμα πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που μπορεί να καλλιεργηθεί με τη χρήση των νέων τεχνολογιών. Με την κατάλληλη διδακτική μπορούν να δημιουργηθούν κοινότητες μάθησης, όπου οι μαθητές διδάσκονται εκτός από το γνωστικό αντικείμενο, τη συλλογική συμπεριφορά, πως δηλαδή να δρουν, να συνεισφέρουν και να αυτοπροσδιορίζονται μέσα σε μαθητικές κοινότητες» (Κυνηγός, 2007, σελ. 43).

Η δέκατη πτυχή, και μια από τις πιο σοβαρές, είναι η δημιουργία νοημάτων. Η μάθηση χαρακτηρίζεται κατά κύριο λόγο από τη δημιουργία νοημάτων από το μαθητή

και όχι από την κατανόηση έτοιμων και αφηρημένων πληροφοριών και νοημάτων. Όμως διαφορετικά λογισμικά είναι δυνατόν να οδηγήσουν τους μαθητές στην οικοδόμηση διαφορετικών νοημάτων ακόμα και όταν αυτοί δουλεύουν πάνω στο ίδιο πρόβλημα σε διαφορετικά περιβάλλοντα (Sutherland & Balacheff, 1999). Ο μαθητής λοιπόν δεν μπορεί να αφεθεί μόνος του να παράγει νοήματα. Το να λέμε ότι τα νοήματα και οι διανοητικές δομές κτίζονται από τον μαθητή παρά διδάσκονται από το δάσκαλο δεν σημαίνει ότι κατασκευάζονται από το τίποτα. Τα παιδιά, όπως και οι άλλοι δημιουργοί, χρησιμοποιούν τα υλικά που βρίσκουν στο περιβάλλον τους, ιδίως τα μοντέλα και τις μεταφορές που υποβάλλει το μορφωτικό περιβάλλον (Papert, 1991). Έτσι, πολύ συχνά, τα νοήματα που παράγονται από τους μαθητές μέσα στη σχολική τάξη είναι πολύ διαφορετικά από αυτά που προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα (Κυνηγός, 2007). Στο θέμα αυτό είναι καθοριστικός ο ρόλος του δασκάλου. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία επηρεάζεται ουσιαστικά από τον δάσκαλο ο οποίος έχει την ευθύνη της οργάνωσης της τάξης (Sutherland & Balacheff, 1999).

Η ενδέκατη πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας είναι η αναπαράσταση. Τα ψηφιακά εργαλεία ενέχουν πολυποίκιλες αναπαραστάσεις εννοιών και πληροφοριών κάποιες φορές ως πηγή και κάποιες άλλες ως εκφραστικά μέσα. Για τα εργαλεία που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για τη βασική εκπαίδευση η επιλογή των αναπαραστάσεων είναι κρίσιμη μια και αυτές συνδέονται άμεσα με τη δημιουργία νοημάτων (Κυνηγός, 2007).

Μικρόκοσμοι

Ο όρος «μικρόκοσμος» χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον Papert, στο χώρο της τεχνητής νοημοσύνης, για να περιγράψει «ένα μικρό, συνεκτικό σύνολο από αντικείμενα και δραστηριότητες τα οποία εφαρμόζονται σε ένα υπολογιστικό σύστημα κι ανταποκρίνονται σε ένα ενδιαφέρον κομμάτι του πραγματικού κόσμου (Sarama & Clements, 2002, σελ.1)». Παρά τις διαφορετικές προσεγγίσεις που έχουν αποδοθεί στην έννοια του μικρόκοσμου, φαίνεται ότι οι απόψεις συγκλίνουν προς την παραδοχή ότι οι μικρόκοσμοι είναι υπολογιστικά περιβάλλοντα στα οποία είναι ενσωματωμένες έννοιες

που αναφέρονται σε ένα ή περισσότερα γνωστικά αντικείμενα και τις οποίες εξερευνούν οι μαθητές μέσω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Ένας καλός μικρόκοσμος είναι αυτός που εύκολα τον χειρίζονται οι μαθητές ώστε μέσα από δραστηριότητες να κατανοήσουν τις κρυμμένες αρχές και δομές. (diSessa A, 2000).

Ο Papert (1980) αναφερόμενος στον μικρόκοσμο, τον είδε ως έναν «αυτόνομο» κόσμο, μέσα στον οποίο οι μαθητές μπορούν να μεταφέρουν συνήθειες εξερεύνησης από την προσωπική τους ζωή στην τυπική γλώσσα επιστημονικών κατασκευών. Ο τελευταίος συνέβαλε καθοριστικά στο σχεδιασμό του μικρόκοσμου της χελώνας ο οποίος σε συνδυασμό με την υπολογιστική γλώσσα Logo, θεωρήθηκε ως «ένα αντικείμενο με το οποίο μπορείς να σκέφτεσαι» και το οποίο εμπεριέχει έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας (Hoyles & Noss, 1993, Papert, 1980). Χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα και για τη δημιουργία πολλών άλλων μικρόκοσμων, καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών επιστημονικών περιοχών, όπως η φυσική (Papert, 1980) αλλά κι άλλων μαθηματικών εννοιών (Kynigos, 1993, Clements & Sarama, 1996).

Ο συνδυασμός συμβολικού και οπτικού ελέγχου ενός μικρόκοσμου με την πρόσβαση στη βαθιά δομή (Eisenberg, 1995, Kynigos, 1995) μέσω μιας συμβολικής γλώσσας (π.χ. Logo) μπορεί να δράσει καταλυτικά στη διαδικασία κατασκευής νοήματος (Kynigos & Psycharis, 2003). Οι μαθητές χειριζόμενοι τα αντικείμενα, εκτελούν διάφορες διαδικασίες προκειμένου να ανακαλύψουν τις ιδιότητες του μικρόκοσμου και να κατανοήσουν το σύστημα στο σύνολό του. Κατά μια έννοια λοιπόν πρόκειται είτε για ελεύθερες δραστηριότητες διερεύνησης όπου το ζητούμενο τίθεται από τους ίδιους τους μαθητές, είτε για δραστηριότητες οι οποίες έχουν συγκεκριμένο διδακτικό στόχο, ο οποίος τίθεται από τον εκπαιδευτικό.

Η Edwards (1998), προκειμένου να διασαφηνίσει το ρόλο ενός μικρόκοσμου στην μαθησιακή διαδικασία προσεγγίζει την εν λόγω έννοια με δυο διαφορετικούς τρόπους. Η πρώτη προσέγγιση αφορά τα δομικά χαρακτηριστικά του μικρόκοσμου, ενώ η δεύτερη προσέγγιση στηρίζεται στις διαφορετικές δυνατότητες χρήσης του. Αυτές οι δυνατότητες αποτελούν τα λειτουργικά χαρακτηριστικά του μικρόκοσμου. Εξετάζοντας μια σειρά από μικρόκοσμους μέσα από την προοπτική του σχεδιαστή συγκέντρωσε τα κοινά δομικά χαρακτηριστικά τους. Σύμφωνα με τη δομική προσέγγιση ένας μικρόκοσμος:

1. περιέχει ένα σύνολο από υπολογιστικά αντικείμενα τα οποία έχουν σχεδιαστεί με τρόπο ώστε να αντανakλούν τη δομή μαθηματικών ή άλλων επιστημονικών οντοτήτων σε μια αντίστοιχη γνωστική περιοχή
2. συνδέει περισσότερες από μια αναπαραστάσεις που αφορούν σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Τέτοιες αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν μια συμβολική και μια οπτική ή γραφική εκδοχή της έννοιας
3. Συχνά τα αντικείμενα και οι λειτουργίες ενός μικρόκοσμου μπορούν να συνδυαστούν προκειμένου να σχηματίσουν πιο σύνθετα αντικείμενα ή λειτουργίες. Αυτό συμβαίνει ιδιαίτερα στους μικρόκοσμους που μια μορφή αναπαράστασης είναι η συμβολική γλώσσα και η οποία απευθύνεται σε οντότητες ή λειτουργίες του συστήματος
4. περιλαμβάνει ένα σύνολο από δραστηριότητες, οι οποίες μπορεί να είναι ήδη προγραμματισμένες στο υπολογιστικό περιβάλλον ή να ενεργοποιούνται μέσω φύλλων εργασίας ή άλλων λεκτικών εντολών, έτσι ώστε με το συνδυασμό τους ο χρήστης να είναι σε θέση να πετύχει το στόχο του, να επιλύσει ένα πρόβλημα, να προσομοιώσει μια κατάσταση κ.τ.λ.

Η λειτουργική προσέγγιση του μικρόκοσμου δεν εστιάζει στα γνωρίσματα που έχουν προσδοθεί στο πρόγραμμα από το σχεδιαστή αλλά στα χαρακτηριστικά που αναδύονται όταν ο μικρόκοσμος τοποθετηθεί μπροστά στο μαθητή. Οι μικρόκοσμοι έχουν κάποια κοινά λειτουργικά αν τους εξετάσουμε μέσα στο πλαίσιο του τι αναμένεται να κάνει ο μαθητής όταν τους χρησιμοποιεί. Οι χρήστες-μαθητές αναμένεται να μπορούν

1. να χειρίζονται τα αντικείμενα και να εκτελούν τις υποστασιοποιημένες λειτουργίες σε ένα μικρόκοσμο με σκοπό την ανακάλυψη ή την επαγωγική συναγωγή των ιδιοτήτων τους κατανοώντας το σύστημα σαν ολότητα. Πειραματίζονται κάνουν υποθέσεις ελέγχουν και ερευνούν
2. Ερμηνεύουν την ανατροφοδότηση –αποτέλεσμα των χειρισμών τους έτσι ώστε να διορθώσουν τον εαυτό τους ή να εκσφαλματώνουν την κατανόησή τους για το πεδίο που μελετούν

3. Χρησιμοποιούν τα αντικείμενα και τις λειτουργίες του μικρόκοσμου ώστε να δημιουργήσουν νέες οντότητες ή να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα ή προκλήσεις ή και τα δύο (Edwards 1998) .

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περιγραφή για τους μικρόκοσμους προέρχεται από τους Hoyles και Noss (1993) οι οποίοι θεωρούν τους μικρόκοσμους «αναπαραστάσεις μαθηματικών δομημάτων και σχέσεων τις οποίες ο μαθητής αναμένεται να αποσπάσει μέσα από την αλληλεπίδρασή του με αυτές».. Η μάθηση προάγεται μέσα από διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης κι επίλυσης προβλήματος (Hoyles & Noss, 1993, Sarama & Clements, 2002). Η γνώση που θέλουμε να προσεγγισθεί βρίσκεται ενσωματωμένη μέσα στον μικρόκοσμο κι ο μαθητής επιχειρεί να την ανακαλύψει δημιουργώντας, κινώντας ή διαχειριζόμενος αντικείμενα και δοκιμάζοντας πώς αυτά αλληλοεπηρεάζονται (Hoyles & Noss, 1993, Jonassen, 1996). Επιπλέον πρόκειται για ένα πλούσιο μαθησιακά περιβάλλον το οποίο παρέχει δυνατότητες να κάνουν οι μαθητές συνδέσεις ανάμεσα στις νέες καταστάσεις που αντιμετωπίζουν και τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους. Οι μαθητές αλληλεπιδρούν στο περιβάλλον του μικρόκοσμου με ένα πλήθος στρατηγικών. Η χρήση των στρατηγικών αυτών προωθεί τον αναστοχασμό πάνω στα αποτελέσματα και τη συζήτηση μεταξύ των μαθητών για τη διατύπωση προβλέψεων και την ερμηνεία αποτελεσμάτων (Hoyles και Noss 1996). Ο αναστοχασμός γίνεται με τη χρήση πολλαπλών μορφών αναπαράστασης, τη διασύνδεση μεταξύ των μορφών αυτών, την πρόκληση κοινωνικό – γνωστικής σύγκρουσης και ενθάρρυνση για υπέρβασή της. Σημαντικό πλεονέκτημα αποτελεί η δυνατότητα που έχουν οι μαθητές να αναλαμβάνουν το ρόλο του κατασκευαστή. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές έρχονται σε άμεση επαφή με τους κανόνες που διέπουν τη χρήση και λειτουργία ενός μικρόκοσμου και στη συνέχεια καθορίζουν οι ίδιοι τις δικές τους αρχές και κανόνες για να κατασκευάσουν τους δικούς τους μικρόκοσμους. Σύμφωνα με την Harel (1988), οι μαθητές αποκτούν μια βαθύτερη και ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, όταν κατασκευάζουν και χειρίζονται οι ίδιοι αναπαραστάσεις και όταν με τη χρήση των αναπαραστάσεων αυτών κατασκευάζουν προβλήματα για άλλους μαθητές.

Artifact-Instrument

Όπως έχουν δείξει εμπειρικές έρευνες (Guin & Trouche 1999, Lagrange 1999) η σχέση του ατόμου με τα εργαλεία δεν είναι γραμμική ούτε μονοδιάστατη (δεν ακολουθεί δηλαδή μία προδιαγεγραμμένη πορεία προς μία κατεύθυνση). Αντίθετα, οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιήσουν κάθε τεχνολογικό κατασκεύασμα με διαφορετικούς και μη προβλέψιμους τρόπους, στοιχείο που παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία και την επηρεάζει. Με δεδομένη λοιπόν την πολυδιάστατη σχέση του ατόμου με τα εργαλεία, επισημαίνεται η ανάγκη για εκτενέστερη μελέτη αυτής της σχέσης, και γίνεται διάκριση ανάμεσα σε τεχνολογικά προϊόντα (artifacts) και εργαλεία (instruments).

Artifact είναι ένα κατασκευασμένο υλικό αντικείμενο (όπως ένα εργαλείο ή ένα μηχανήμα) με τα εγγενή χαρακτηριστικά του που σχεδιάστηκε για κάποιο συγκεκριμένο έργο. Ο χρήστης καθώς το χειρίζεται αναπτύσσει νέες αναπαραστάσεις σχετικά με τη χρήση του. Σχήματα δράσης δημιουργούνται. Η ανάπτυξη του artifact βέβαια συνδέεται με την προσδοκία ότι, αν χρησιμοποιηθεί σωστά, λόγω του σχεδιασμού του θα μας δώσει εντυπωσιακά αποτελέσματα. Αλλά, μια και οι συνθήκες δεν είναι ποτέ ίδιες, το artifact δεν εμπλέκεται ποτέ σε μια κατάσταση με τον ίδιο τρόπο, ακόμα και όταν χρησιμοποιείται σύμφωνα με τον σχεδιασμό του. Δηλαδή κάθε μεμονωμένη χρήση του το επαναπροσδιορίζει Όπως παρατηρεί ο Verillon (2000) δίνοντας το παράδειγμα ενός κατσαβιδιού που μπορεί κάποιες φορές να χρησιμοποιηθεί και σαν σφυρί, τα artefacts μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για έργα διαφορετικά από αυτά για τα οποία σχεδιάστηκαν. Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, μέσα από την ποικιλία των τρόπων χρήσης του από τον άνθρωπο, η διαδικασία σχεδιασμού του συνεχίζεται αρκετά μετά την ίδια την κατασκευή του (Rabardel, 1995)

Instrument (εργαλείο ή όργανο) είναι το artifact και οι μορφές της χρήσης του, όπως είναι διαμορφωμένες από έναν ιδιαίτερο χρήστη.(Mariotti,2002). Είναι εν μέρει ένα artifact και εν μέρει ένα γνωστικό σχήμα, που είναι ακριβώς αυτό που το καθιστά instrument (Artigue, 2002).

Σύμφωνα με την Mariotti ένα εργαλείο είναι η σύνδεση μεταξύ ενός αντικειμένου (artifact/τεχνική συσκευή) και η οργάνωση των πιθανών ενεργειών δηλ. των "σχεδίων χρησιμοποίησης", τα οποία αποτελούν ένα δομημένο σύνολο σταθερών, που

αντιστοιχούν στις κατηγορίες πιθανών διαδικασιών. Τέτοια σχήματα λειτουργούν σαν διοργανωτές της δραστηριότητας του χρήστη. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ένα εργαλείο είναι μια εσωτερική κατασκευή, η ανάπτυξη της οποίας είναι μια μακροπρόθεσμη διαδικασία. Η σχέση μεταξύ του χρήστη και του artifact εξελίσσεται: αυτή η διαδικασία καλείται “εργαλειακή γένεση” ή “ενοργανωτική γένεση” (instrumental genesis). Η εργαλειακή γένεση δουλεύει σύμφωνα με την Artigue σε δυο κατευθύνσεις.

- Προς το artefact: Το φορτώνει προοδευτικά με δυνατότητες μετασχηματίζοντάς το τελικά σε εργαλείο κατάλληλο για μια συγκεκριμένη χρήση. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται κατά τον Rabardel (1995) αλλοίωση κατασκευής ή ενοργανοποίηση (instrumentalisation) του artefact
- Προς το υποκείμενο: Οδηγεί στην ανάπτυξη ή οικειοποίηση σχημάτων εργαλειακής δράσης τα οποία σταδιακά σχηματοποιούνται ως τεχνικές που επιτρέπουν μια αποτελεσματική απάντηση σε δοσμένα έργα. Η κατεύθυνση αυτή ονομάζεται κατά τον Rabardel (1995) δημιουργία εργαλείου ή ενοργάνωση (instrumentation).

Κατά τους Verillon και Rabardel (1995) η διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης εξελίσσεται σε γενικές γραμμές με τον ακόλουθο τρόπο. Αρχικά έχουμε άμεση αλληλεπίδραση ανάμεσα στο υποκείμενο και το αντικείμενο η οποία οδηγεί το υποκείμενο στην ανάπτυξη των κατάλληλων αναπαραστάσεων. Στη συνέχεια η προσπάθεια κατάλληλης χρήσης ενός artifact υποχρεώνει το υποκείμενο να αναπτύξει νέα σχήματα και αναπαραστάσεις που συνδέονται με το ίδιο το artifact αλλά και με το αντικείμενο της εργασίας του. Οι διαδοχικές δοκιμές που απαιτούνται ώστε να ξεπεραστεί η αρχικά αναποτελεσματική χρήση του αλλά και οι νέες ιδιότητες τόσο του ίδιου του artifact όσο και του αντικειμένου που ανακαλύπτονται σταδιακά μέσα από τις δοκιμές αυτές από το χρήστη οδηγούν τελικά στην ενοργανοποίηση του artifact και την ενοργάνωση της δραστηριότητας. Έτσι τώρα, στα πλαίσια πια της ενοργανωμένης δραστηριότητας, μπορούμε να παρατηρήσουμε και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ οργάνου και αντικειμένου, υποκειμένου και οργάνου και τελικά την έμμεση αλληλεπίδραση μεταξύ υποκειμένου και αντικειμένου με τη διαμεσολάβηση του οργάνου. Η δράση του υποκειμένου λοιπόν και η αλληλεπίδρασή του με το αντικείμενο, είτε αυτή είναι άμεση ή

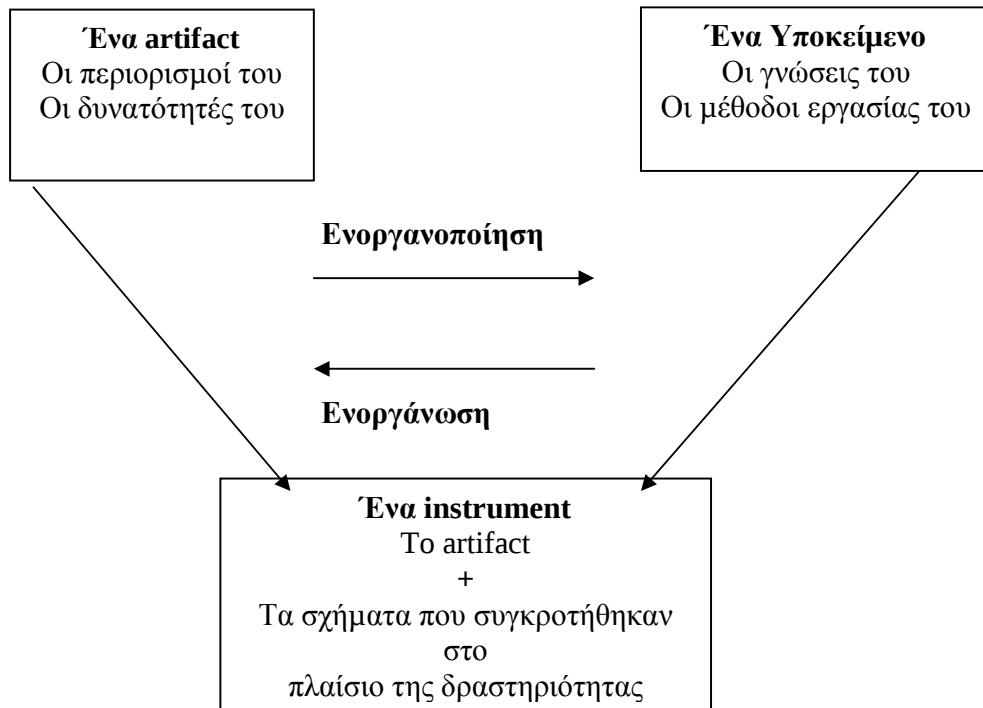
έμμεση, σχετίζεται πάντα με τις αναπαραστάσεις που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα στάδια της ενοργανωτικής γένεσης.

Κατά τον Lagrange (1999) *‘Μια ανθρώπινη ύπαρξη που θέλει να χρησιμοποιήσει ένα artifact κτίζει τη σχέση του με αυτό σε δυο κατευθύνσεις: Εξωτερικά αναπτύσσει τρόπους χρήσης του και εσωτερικά οικοδομεί γνωστικές δομές για να ελέγξει αυτές τις χρήσεις’*. Οι δυο αυτές κατευθύνσεις δεν είναι ανεξάρτητες. *‘Κατά την πρώτη χρήση το υποκείμενο καθοδηγεί το εργαλείο μέσα από τα υπάρχοντα σχήματα. Η πρωτογενής αυτή εμπειρία του παρέχει την ευκαιρία για προσαρμογή των σχημάτων. Τα νέα καλύτερα προσαρμοσμένα στις καταστάσεις σχήματα αποτελούν με τη σειρά τους το εφελτήριο για την ανάπτυξη νέων τρόπων χρήσης κ.ο.κ’*.

Διακρίνονται λοιπόν δυο φάσεις στη διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης. Η πρώτη είναι η φάση της ανακάλυψης των διάφορων εντολών, της εξερεύνησης της χρήσης τους και της διερεύνησης των αποτελεσμάτων και της οργάνωσής τους. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτής της φάσης είναι η ισχυρή εξάρτηση του χρήστη από το μηχάνημα. Οι μαθητές συχνά αγνοούν κατά τη διάρκεια της οποιαδήποτε άλλη πηγή πληροφόρησης. Αλλά, παρόλα αυτά, παρατηρείται στη φάση αυτή μια πρώτη μορφή ενοργάνωσης με μια μεγάλη ποικιλία στρατηγικών και τεχνικών (Guin & Trouche, 1999).

Από τη στιγμή που οι εντολές αποκτούν μαθηματικό περιεχόμενο οι μαθητές μπαίνουν στη δεύτερη φάση που είναι φάση οργάνωσης. Το κύριο χαρακτηριστικό της φάσης αυτής είναι ότι οι μαθητές υιοθετούν μια στάση περιορισμού των στρατηγικών και των τεχνικών που έχουν αναπτυχθεί στην προηγούμενη φάση. Αρχίζουν να οργανώνουν τη δράση τους, να συνδέουν τις εντολές μεταξύ τους και με άλλα διαθέσιμα εργαλεία, να ενδιαφέρονται για τις δυνατότητες και τους περιορισμούς που προκύπτουν.

Τη διαδικασία αυτή περιγράφει μέσα από το παρακάτω διάγραμμα ο Trouche (2004) ως μια αμφίδρομη κίνηση. Η μια φορά της κίνησης, που είναι η ενοργανοποίηση (instrumentalisation) του artifact, κατευθύνεται προς το εργαλείο, με την έννοια ότι ο χρήστης *‘παίρνει το εργαλείο στο χέρι’*, το προσαρμόζει στις μεθόδους του. Η άλλη φορά της κίνησης, που είναι η ενοργάνωση (instrumentation) της δράσης, έχει κατεύθυνση προς το χρήστη, με την έννοια ότι οι περιορισμοί που το εργαλείο επιβάλλει συμβάλλουν στο να δομηθεί η δραστηριότητα του χρήστη.

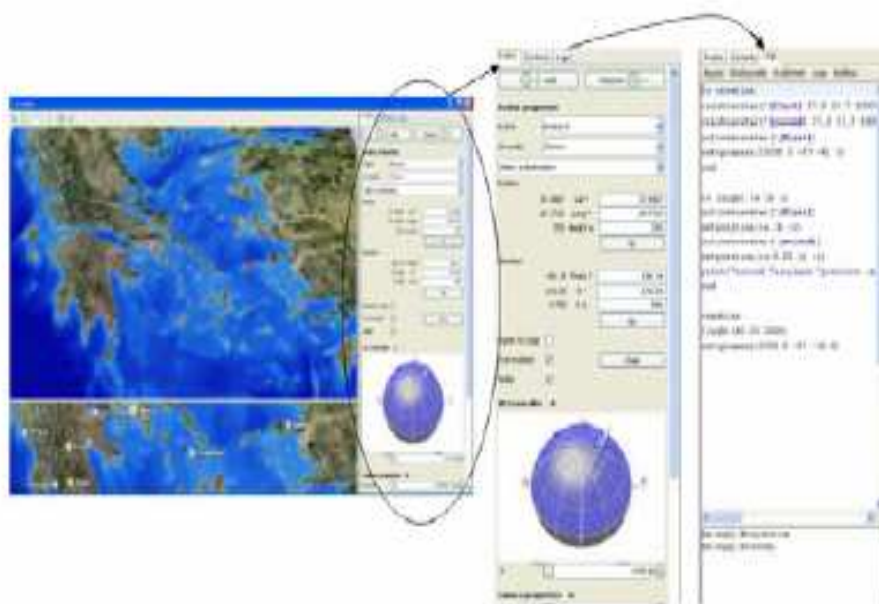


Παρουσίαση του λογισμικού CRUISLET

Ο Cruislet¹ είναι ένα ψηφιακό μέσο που προσφέρεται για μαθηματική πλοήγηση στον τρισδιάστατο γεωγραφικό χώρο. Συνδυάζει την τεχνολογία των GIS (γεωγραφικών πληροφοριακών συστημάτων) με την γλώσσα προγραμματισμού logo. Περιέχει 2 αναπαραστασιακά συστήματα αναφοράς: το γεωγραφικό σύστημα συντεταγμένων και το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να περιπλανηθεί μέσα στο χώρο της Ελλάδας, αναπτύσσοντας έννοιες όπως η έννοια της συνάρτησης. Αυτό γίνεται γιατί ο χρήστης μπορεί να ελέγξει και να μετρήσει τις συμπεριφορές των αντικειμένων είτε χρησιμοποιώντας τις γεωγραφικές ή τις σφαιρικές συντεταγμένες είτε τη logo. Τα αντικείμενα είναι αεροπλάνα ή ελικόπτερα (avatars) και η μετατόπισή τους αναπαρίσταται με ένα διάνυσμα. Η πλοήγηση των αεροπλάνων γίνεται είτε χρησιμοποιώντας το avatar tab είτε μέσα από χρήση της logo στο logo tab.

Η σκηνή του cruislet αποτελείται από 2 παράθυρα. Το επάνω παράθυρο που αποτελεί την κύρια σκηνή είναι μία τρισδιάστατη αναπαράσταση του χάρτη της Ελλάδας ενώ το κάτω παράθυρο είναι μια δισδιάστατη αναπαράσταση. Ο χρήστης μπορεί να πλοηγηθεί μέσα στην Ελλάδα κινώντας το ποντίκι και κάνοντας αριστερό κλικ επάνω του να πλησιάσει κοντά σε μια περιοχή ενώ κάνοντας δεξί κλικ να απομακρυνθεί απ' αυτήν. Οι 2 χάρτες καταλαμβάνουν τα 2/3 της οθόνης Στο υπόλοιπο 1/3 είναι η κύρια περιοχή του cruislet και υπάρχουν 3 tabs: το avatar tab, το contex tab, και το logo tab

¹Το περιβάλλον Cruislet καθώς και η παρούσα εργασία αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού έργου ReMath «Representing Mathematics with Digital Media» FP6, IST-4-26751-STP (2005-2008), <http://remath.cti.gr>.



Εικόνα 1: Το υπολογιστικό περιβάλλον του Cruislet

Στο **avatar tab** ο χρήστης μπορεί

- Να δημιουργήσει avatars και να διαλέξει το μοντέλο που του αρέσει(add)



i. Plane 1



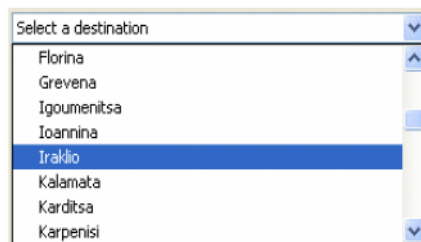
ii.Plane 2



iii.Helicopter

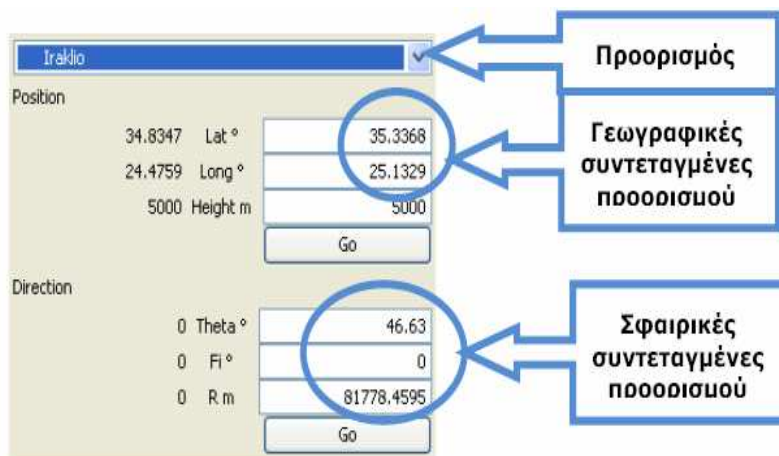
Εικόνα 2: Μοντέλα αεροπλάνων

- Να διαγράψει avatars(remove)
- Να ορίσει την θέση του avatar μέσα στον 3d χώρο της Ελλάδας με τους εξής τρόπους
 1. επιλέγοντας πόλη προορισμού από το select a destination



Εικόνα 3: Επιλογή προορισμού

2. ορίζοντας συγκεκριμένες τιμές στο lat long height του position και κάνοντας go
3. δίνοντας τιμές στο θ ϕ R του direction και κάνοντας go



Εικόνα 4: τα δύο συστήματα αναφοράς

4. ενεργοποιώντας το 3-D controller



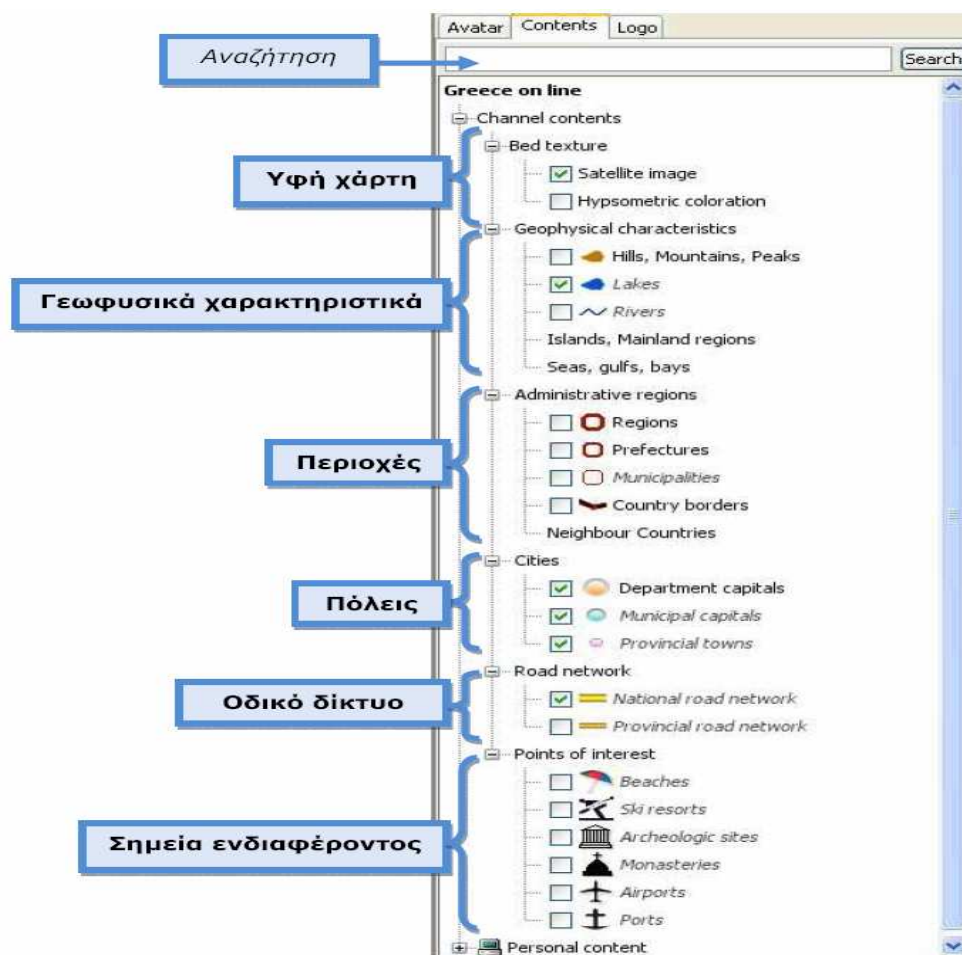
Εικόνα 5: Ο 3d controller

- Να μετατρέπει κάθε κίνηση που κάνει σε logo διαδικασία(export)

- Να επιλέγει αν θέλει το αεροπλάνο να αφήνει ίχνος ή όχι(trail)
- Να ρυθμίζει την θέση και την απόσταση της κάμερας (που παρακολουθεί τον avatar)

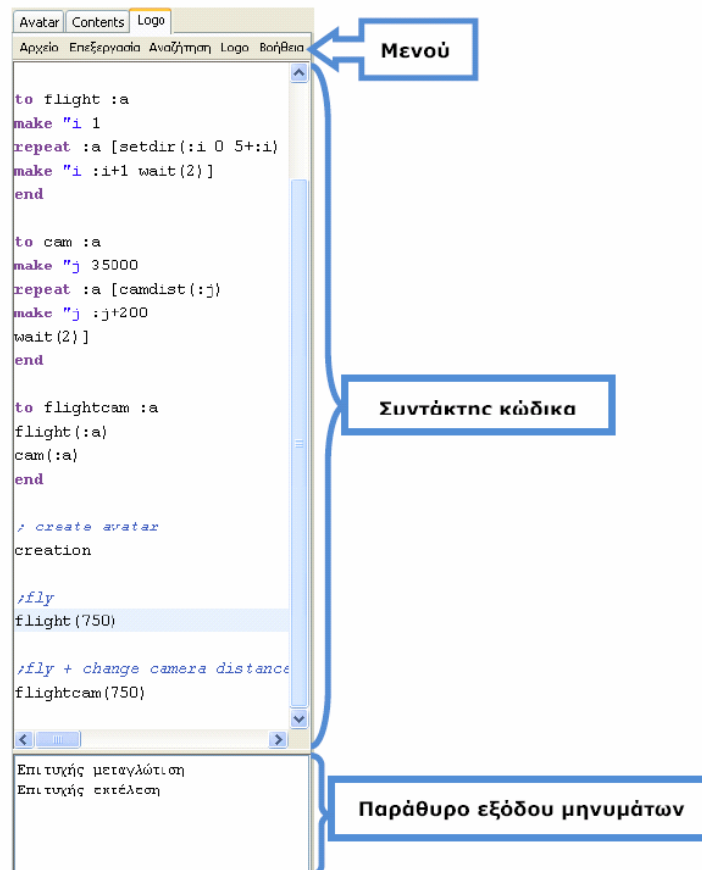
Οποιαδήποτε αλλαγή στο position (lat long height) έχει σαν αποτέλεσμα την δυναμική αλλαγή και στο direction (θ, φ, R)

Στο **context tab** υπάρχουν μια σειρά από γεωγραφικές πληροφορίες που ο χρήστης μπορεί να τοποθετήσει στον χάρτη όπως λίμνες, ποτάμια, βουνά, αεροδρόμια, πόλεις, αρχαιολογικούς χώρους, δρόμους κ.α



Εικόνα 6: Το context tab

Στο **logo tab** ο χρήστης μπορεί να γράφει και να τρέχει logo εντολές ώστε να μετατοπίζει τον avatar στο χώρο. Οι εντολές ενεργοποιούνται πατώντας insert και αφορούν τη θέση την κατεύθυνση και την κίνηση του αεροπλάνου, την θέση και την κατεύθυνση της κάμερας.



Εικόνα 7: Το logo tab

Η δυνατότητα προγραμματισμού μέσω της logo δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να προβλέψει τις ενέργειες του avatar και να εκφράσει μαθηματικές ιδέες. Ο cruilet λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κατασκευαστικό μέσο στο οποίο ο χρήστης μπορεί να κατασκευάσει πτήσεις διαφορετικών αεροπλάνων καθώς και να σχετίσει τις πτήσεις μεταξύ τους (Kafai & Resnick, 1996)

Επιστημολογία του CRUISLET

Όπως προαναφέραμε ο Cruislet είναι ένας μικρόκοσμος που προσφέρεται για πλοήγηση μέσα στο 3σδιαστατο γεωγραφικό χώρο. Τα μαθηματικά που υπάρχουν πίσω από αυτή την πλοήγηση αναφέρονται σε 2 μεγάλες κατηγορίες:

- στην έννοια της μετατόπισης(διάνυσμα)
- στον ορισμό του 3d συστήματος αναφοράς μέσα στον οποίο γίνεται η πλοήγηση

► Η θέση ενός avatar στον cruislet καθορίζεται από ένα σύστημα γεωγραφικών συντεταγμένων (lat, long, height). Κάθε σημείο του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση προβάλλεται πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας(στην περίπτωση μας η γη είναι ελλειψοειδές) κατά τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια αυτή. Το μήκος της καθέτου, δηλαδή η απόσταση του σημείου από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα, ονομάζεται **γεωμετρικό υψόμετρο** ή απλά **υψόμετρο(h)**.

Γεωγραφικό πλάτος (φ) ή lat είναι η γωνία που σχηματίζει η κάθετος από το σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με το επίπεδο του ισημερινού . Η διέδρη γωνία που σχηματίζεται από το επίπεδο του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο και από έναν αυθαίρετα επιλεγμένο μεσημβρινό ονομάζεται **γεωγραφικό μήκος (λ) ή long** Ο αυθαίρετα επιλεγμένος μεσημβρινός συνήθως είναι ο μεσημβρινός που διέρχεται από το Greenwich

Οι γωνίες φ, λ συνήθως μετριοούνται σε δεκαδικούς βαθμούς(DD) ή σε βαθμούς-λεπτά-δευτερόλεπτα (DMS). Στον cruislet τα lat - long ορίζονται στο DD σύστημα

Παράδειγμα :Ένας avatar βρίσκεται στη θέση (37.23, 22.3, 2000) σημαίνει ότι η θέση του έχει γεωγραφικό πλάτος 37.23

γεωγραφικό μήκος 22.3 και

πετά σε ύψος 2000 m

Στον χάρτη της Ελλάδας που είναι στον cruislet οι συντεταγμένες κυμαίνονται :

Lat: από 34 έως 42 περίπου

Long: από 19 έως 27 περίπου

Height: από 0 έως 100km

► Το περιβάλλον του cruisset μέσα στο οποίο γίνεται η πλοήγηση είναι μία προβολή – απεικόνιση. (Αναλυτική χαρτογραφία Νάκος 2006) της επιφάνειας της γης πάνω στο επίπεδο του χάρτη. Στον cruisset το σχήμα της γης είναι ελλειψοειδές (GRS84) και η προβολή που χρησιμοποιείται είναι η εγκάρσια μερκατορική προβολή (<http://www.uwgb.edu/dutchs/FieldMethods/UTMSystem.htm>)

Η εγκάρσια μερκατορική προβολή είναι μια σύμμορφη κυλινδρική προβολή στην οποία όλοι οι παράλληλοι έχουν μήκος ίσο με αυτό του σημερινού.

Η επιλογή αυτής της προβολής έγινε διότι

α)το σχήμα της Ελλάδας είναι επίμηκες (άρα επιλέγεται η κυλινδρική προβολή)

β)το επίμηκες αυτό σχήμα ακολουθεί έναν μεσημβρινό(άρα επιλέγεται εγκάρσια κυλινδρική προβολή).

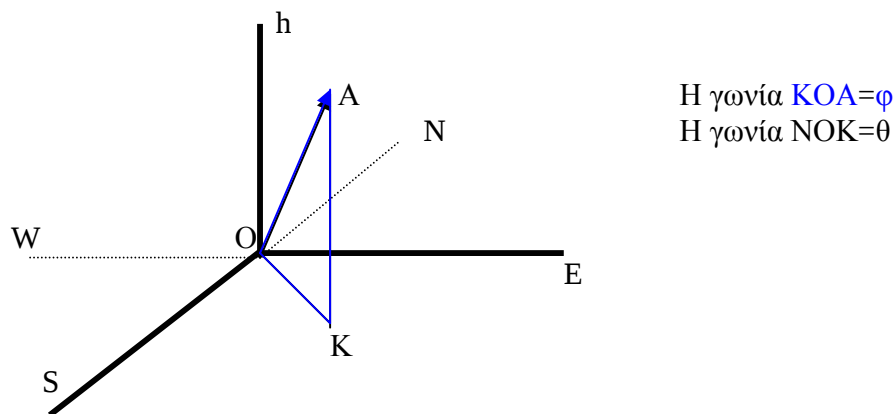
γ) έχουμε έναν τοπογραφικό χάρτη άρα επιλέγουμε την μερκατορική προβολή που είναι μια σύμμορφη προβολή(διατηρεί αναλλοίωτη τη μορφή).

Το σύστημα απεικόνισης που εφαρμόζεται στον cruisset είναι το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς του 1987 (ΕΓΣΑ87)(Νάκος 2006)

► Η πλοήγηση του avatar γίνεται μέσα από διαδοχικές μετακινήσεις Κάθε μετακίνηση είναι μια ενέργεια η οποία ορίζεται από την προηγούμενη κατάσταση του avatar και αναπαριστάται με ένα διάνυσμα. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι μετακίνησης:

1)ορίζοντας την νέα θέση του avatar(position)είτε με καινούριες συντεταγμένες(lat-long-height) είτε επιλέγοντας το όνομα της πόλης που θα πάει

2)δίνοντας κατεύθυνση(direction) στον avatar ορίζοντας την γωνία ϕ και θ και την απόσταση r του διανύσματος της μετατόπισης. Η γωνία ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο avatar με το οριζόντιο επίπεδο($\phi=0$ ο avatar είναι οριζόντια, $\phi=90$ ο avatar πηγαίνει επάνω ενώ $\phi=270$ ο avatar πηγαίνει κάτω)Η γωνία ϕ παίρνει τιμές μόνο από 0-90 και από 270-360. Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει η προβολή του avatar στο οριζόντιο επίπεδο με τον άξονα του βορρά($\theta=0$ ο avatar είναι οριζόντια και κοιτά το Βορρά, $\theta=90$ ο avatar στρίβει δεξιά προς την ανατολή)



Η προηγούμενη κίνηση του avatar φαίνεται και από τον 3d controller

► Στον *cruislet*² καθώς μετακινείται ο avatar αφήνει πίσω του ένα ίχνος. Το ίχνος αυτό είναι ένα τρισδιάστατο αντικείμενο (ένας λεπτός κύλινδρος που καταλήγει σε ένα βέλος). Είναι στην πραγματικότητα μια αναπαράσταση ενός διανύσματος. Επιλέγοντας το διάνυσμα (κάνοντας κλικ επάνω του) μπορώ να το πολλαπλασιάσω με ένα συγκεκριμένο αριθμό n . Το αποτέλεσμα είναι να προκύψει ένα νέο διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και μήκος n φορές το μήκος του αρχικού. Εάν έχω επιλέξει 2 ή περισσότερα διανύσματα μπορώ να τα προσθέσω.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_%28spatial%29)

► Κάθε avatar ακολουθείται από μια κάμερα. Η κάμερα έχει τα εξής στοιχεία

- απέχει από τον avatar συγκεκριμένη απόσταση (distance) η οποία μπορεί να μεταβάλλεται
 - μπορεί να στρίβει δεξιά ή αριστερά(yaw)
 - μπορεί να στρίβει πάνω ή κάτω(pitch)
- } orientation

Η κάμερα μπορεί επίσης να μετακινείται η ίδια

- γύρω από τον avatar (azimuth)ή
 - δεξιά αριστερά από αυτόν(pitch)
- } position

² Περισσότερες πληροφορίες στην ηλεκτρονική διεύθυνση
http://etl.ppp.uoa.gr/_content/download/index_download.htm

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Περίληψη

Η έρευνα που ακολουθεί έγινε σ'ένα σχολείο της Αττικής σε 14 μαθητές της Α Λυκείου. Η έρευνα έλαβε χώρα στο εργαστήριο των υπολογιστών του σχολείου, όπου οι μαθητές ανά ομάδες των 2 ή 3 ατόμων αλληλεπιδρούσαν με το περιβάλλον του cuislet πάνω σε συγκεκριμένες δραστηριότητες. Οι διάλογοι απομαγνητοφωνήθηκαν και η ανάλυση ακολούθησε την ποιοτική μέθοδο

Μέσα συλλογής δεδομένων

Κατά την διάρκεια της έρευνας δύο ερευνήτριες παρατηρούσαν τις ομάδες εργασίας παρεμβαίνοντας όπου χρειάζονταν, επεξηγώντας και κάνοντας ερωτήσεις (θεατή-συμμετοχική παρατήρηση).

Τα μέσα συλλογής των δεδομένων της έρευνας είναι:

- ❖ Λογισμικό το οποίο μαγνητοσκοπούσε την οθόνη του υπολογιστή και μαγνητοφωνούσε τους μαθητές (hypercamp).
- ❖ Σημειώσεις των ερευνητριών
- ❖ Τα φύλλα εργασίας που συμπλήρωναν οι μαθητές

Καθορισμός του πληθυσμού –Δείγμα

Στην έρευνα πήραν μέρος οι 14 μαθητές της Α τάξης του Λυκείου των Γλυκών Νερών. Η έρευνα έγινε στην τάξη των υπολογιστών του σχολείου όπου οι μαθητές (όλοι αγόρια) κάθονταν ανά 2 ή 3 σε έναν υπολογιστή. Οι έξι ομάδες των μαθητών έγιναν κατά τυχαίο τρόπο ανάλογα με την διάθεσή τους. Στόχος ήταν τα παιδιά να νιώσουν οικεία ώστε να ευνοείται η αλληλεπίδραση ανάμεσά τους και η ανάπτυξη ενός αισθήματος συμμετοχής σε ένα ομαδικό παιχνίδι. Δεν θέλαμε οι συναντήσεις να θυμίζουν μάθημα κατά παραδοσιακό τρόπο. Πραγματοποιήθηκαν οκτώ συναντήσεις

διάρκειας 8 διδακτικών ωρών εκ των οποίων η πρώτη αφιερώθηκε στην γνωριμία των ερευνητριών με τους μαθητές .

Παραδοχές της έρευνας

Στην έρευνα κάναμε την παραδοχή ότι όλοι οι μαθητές έχουν διδαχθεί την έννοια της συνάρτησης, ξέρουν πως γίνεται μια γραφική παράσταση και γνωρίζουν σχετικά καλά να χειρίζονται υπολογιστές.

Επεξεργασία των δεδομένων

Μέσα από λογισμικό Hypercamp έγινε απομαγνητοφώνηση όλων των διαλόγων και των 6 ομάδων μαθητών, καθώς και περιγραφή των κινήσεων τους πάνω στον υπολογιστή. Ακολούθησε διεξοδική μελέτη των πληροφοριών αυτών σε σχέση με τα φύλλα εργασίας των μαθητών και τις καταγεγραμμένες σημειώσεις της ερευνήτριας. Η ανάλυση των δεδομένων ήταν ποιοτική και εστίασε:

- στα μαθηματικά νοήματα που οι μαθητές ανέπτυξαν κατά την διάρκεια των δραστηριοτήτων και ειδικότερα στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή
- στην αλληλεπίδραση του λογισμικού με τους μαθητές.

Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Η έρευνα περιλαμβάνει 3 φάσεις : 1η φάση :εξοικείωση με το λογισμικό

2^η φάση:εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης

3^η φάση :φτιάξε το δικό σου πρόγραμμα

Σε όλη την διάρκεια της έρευνας οι μαθητές είναι χωρισμένοι ανά 2 ή 3 σ' ένα PC και κάθε μαθητής έχει ένα συγκεκριμένο ρόλο π.χ. ένας πληκτρολογεί και ο άλλος

καταγράφει τις παρατηρήσεις στο χαρτί. Ο καθηγητής-ερευνητής συμβουλεύει, παρατηρεί και απευθύνει ερωτήσεις για να κατανοήσει καλύτερα τις στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές

1η φάση : εξοικείωση με το λογισμικό

Σ' αυτή την φάση αφιερώθηκαν (2) ώρες για να εξοικειωθούν οι μαθητές με το λογισμικό και τα χαρακτηριστικά του. Ο καθηγητής συστήνει το περιβάλλον στους μαθητές:

-Δείχνει πώς να δημιουργούν ένα αεροπλάνο και να το μετακινούν από το ένα μέρος στο άλλο.

-Εξηγεί τι είναι το position (lat long height) και το direction(ρ ϕ θ) του avatar tab

-Δίνει πρδ logo εντολών (πώς δίνονται και πώς εκτελούνται)

-Δείχνει πώς χειριζόμαστε την κάμερα και τον 3d condroller

-Εξηγεί την λειτουργία του contex tab

Για το σκοπό αυτό δόθηκαν οι παρακάτω δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες δόθηκαν και σε φύλλα εργασίας όπου οι ομάδες σημείωναν τις απαντήσεις και όποιες τυχόν παρατηρήσεις ήθελαν.

19-10-07 ΠΡΩΤΗ ΜΕΡΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (χρήση του add και εντολών logo)

Δημιούργησε έναν avatar χρησιμοποιώντας α)το avatar tab

β)το logo tab

Προσγείωσε το αεροπλάνο στην Αθήνα χρησιμοποιώντας α)το avatar tab

β)το logo tab

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2 (εξοικείωση με τις γεωγραφικές συντεταγμένες)

Βρίσκεσαι στην Αθήνα. Μετακίνησε το αεροπλάνο προς τα

--ανατολικά(ή δυτικά). Αλλάζει το lat ή το long;

--βόρεια(ή νότια). Αλλάζει το lat ή το long;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3 (εξοικείωση με τις γεωγραφικές συντεταγμένες)

Προσδιόρισε τα όρια του lat και του long μέσα στο γεωγραφικό χώρο της Ελλάδας.

22-10-07 ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΡΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4 (χρήση του ρ, φ, θ του direction και του height του position)

Πήγαινε το αεροπλάνο στην Άμφισσα και βρες το υψόμετρο της περιοχής

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5 (χρήση του ρ του direction)

Βρες την απόσταση της Άμφισσας από την Άρτα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6 (χρήση του θ του direction)

Βρίσκεσαι στην Άρτα. Πόσες μοίρες βορειοανατολικά βρίσκεται η Αλεξανδρούπολη

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7 (χρήση του position ή του direction)

Προσγείωσε το αεροπλάνο στο Λουτράκι (δεν υπάρχει στο select a destination) και βρες τις γεωγραφικές συντεταγμένες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 8 (χρήση του direction)

Δημιούργησε ένα αεροπλάνο στην Ερμούπολη της Σύρου. Πήγαινε το στην Μυτιλήνη και προσπάθησε να δημιουργήσεις ισοσκελές τρίγωνο με την μια από τις ίσες πλευρές την απόσταση Ερμούπολη-Μυτιλήνη

(Η δραστηριότητα 8 ήταν εφεδρική και δόθηκε μόνο σε όσους είχαν τελειώσει τα προηγούμενα)

2^η φάση: η έννοια της συνάρτησης

Σ' αυτή την φάση δίνονται στους μαθητές κάποια σενάρια με στόχο να βρουν την σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε 2 μεταβλητές. (3 ώρες). Οι μαθητές εξερευνούν την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή, μέσα από την πλοήγηση των avatars και έχοντας ως σύστημα αναφοράς τις γεωγραφικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Καταγράφουν τις παρατηρήσεις τους στα φύλλα εργασίας όπου φτιάχνουν πίνακες τιμών, τύπους και γραφικές παραστάσεις.

29-10-07 ΤΡΙΤΗ ΜΕΡΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 9(σχέση του R και του H)(εισαγωγή στη συνάρτηση)

Βρίσκεσαι στην Αθήνα σε ύψος 5000μ. Θέσε στο direction $\theta=0$ και $\varphi=90$ και $R=1000$. Για κάθε go που πατάς συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

	R (direction)	H (position)
Go(1 ^η φορά)		
Go(2 ^η φορά)		
Go(3 ^η φορά)		
Go(4 ^η φορά)		
Go(5 ^η φορά)		

Τι συμπεραίνεται; Πώς κινείται το αεροπλάνο;

Μπορείς να εκφράσεις πως βρίσκεται το ύψος του αεροπλάνου κάθε φορά α) με λόγια β) με σύμβολα(δηλ χρησιμοποιώντας τύπο);

Πού θα βρίσκεται το αεροπλάνο μετά από 50 go(δηλ την 50^η φορά)

Μπορείτε να κάνετε γραφική παράσταση;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 10 (σύνδεση avatar tab με logo tab)

Πήγαινε το αεροπλάνο σε όποια πόλη θέλεις εσύ και προσπάθησε να δημιουργήσεις ένα γεωμετρικό σχήμα στον αέρα με το ίχνος του. Σε κάθε βήμα που κάνεις να βλέπεις και την αντίστοιχη εντολή στη logo ώστε στο τέλος να δημιουργήσεις μια διαδικασία στη logo που να δημιουργεί το σχήμα που έκανες πάνω από οποιαδήποτε πόλη

12-11-07 ΤΕΤΑΡΤΗ ΜΕΡΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 11

Τα όργανα έχουν χαλάσει και το αεροπλάνο πηγαίνει σε διαφορετική θέση από αυτή που εμείς του δίνουμε. Βρες το λάθος της πορείας.

Οδηγίες

Πήγαινε στο logo tab και πληκτρολόγησε `#include <fly1.lgo>|.Από κάτω γράψε create και πάτα insert. Θα δημιουργηθεί το χαλασμένο αεροπλάνο. Στη συνέχεια γράψε την εντολή fly1(35 26 200) και πάτα ξανά insert. Πήγε το αεροπλάνο στην θέση 35 26 200 που του είπες; Στους παρακάτω πίνακες σημείωσε τις συντεταγμένες που δίνεις εσύ (σωστό) και τις συντεταγμένες που τελικά πηγαίνει το αεροπλάνο (λάθος).`

Lat σωστό						
Lat λάθος						

Ο ίδιος πίνακας δίνεται για το long και για το height και ακολουθεί ένα τετραγωνισμένο φύλλο όπου καλούνται να κάνουν τις γραφικές παραστάσεις.

Υπάρχει μια logo διαδικασία (π.χ. fly1) η οποία καθορίζει την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην θέση που δίνουμε εμείς στα lat long height (σωστό) και στην τελική θέση του αεροπλάνου (λάθος) αλλά οι μαθητές δεν την βλέπουν (με την βοήθεια της εντολής include). Δίνουν απλώς τιμές στο fly1 και το λογισμικό τους δείχνει την θέση που πηγαίνει το αεροπλάνο. Αν π.χ. δώσουν στο fly1 τιμές

fly1 (37 24 100)

το αεροπλάνο θα πάει στη θέση 36.5 23.3 10000

Οι μαθητές καλούνται μέσα από διαδοχικές δοκιμές ν' ανακαλύψουν την κρυμμένη σχέση (πρδ $\psi = \chi - 0.5$ για το lat στο fly1). Καταγράφουν τις τιμές στο φύλλο εργασίας που τους έχει δοθεί με σκοπό την καλύτερη παρατήρηση. Στην συνέχεια τους ζητείται να προσπαθήσουν να εκφράσουν την σχέση που βρήκαν με λόγια, με σύμβολα και τέλος με γραφική παράσταση.

Τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν είναι

```
to create
```

```
createavatar ("|white| 37 25 10000 "|plane 1|)
```

```
end
```

```
to fly1 :a :b :c
```

```
setposition (:a-0.5 :b-0.7 :c*:c)
```

```
Print ("first "airplane "position :a-0.5 :b-0.7 :c*:c)
```

```
end
```

```
to fly2 :a :b :c
```

```
setposition (:a-0.1 :b-0.2 :c*:c-1000)
```

```
print("first "airplane "position :a-0.1 :b-0.2 :c*:c-1000)
```

```
end
```

Αφού οι μαθητές καταφέρουν να βρουν την συνάρτηση που συνδέει τις μεταβλητές (μια για το lat, μια για το long και μια για το height) τους δίνεται η εξής δραστηριότητα

30-11-07 ΠΕΜΠΤΗ ΜΕΡΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 12

α) Μπορείς να πας το αεροπλάνο σε συγκεκριμένη θέση (ενώ ξέρουμε τώρα το λάθος της πορείας του);

β) Μπορείς να πας το αεροπλάνο στην Ρόδο και να το προσγειώσεις($h=64m$) ;

Οι μαθητές τώρα καλούνται να χειριστούν μια αντίστροφη διαδικασία.(αντίστροφη συνάρτηση) Τώρα ξέρουν τα lat long height της θέσης που θέλουν να πάνε και πρέπει να δώσουν συντεταγμένες (όχι τυχαίες) στο χαλασμένο αεροπλάνο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 13

Αν με κάποιο τρόπο τα όργανα του αεροπλάνου επισκευαστούν ποια νομίζεις ότι θα είναι η νέα συνάρτηση; Βρες τον τύπο και φτιάξε την γραφική παράσταση.

Εδώ η ζητούμενη συνάρτηση είναι η ταυτοτική($\psi=\chi$) αφού ότι τιμές δίνουμε στο αεροπλάνο αυτό πηγαίνει ακριβώς εκεί που το στέλνουμε. Οι μαθητές καλούνται να εκφραστούν με λόγια ,με σύμβολα και με γραφική παράσταση

3^η φάση :Φτιάξε το δικό σου πρόγραμμα

Στο τέλος της προηγούμενης φάσης δείχνουμε στους μαθητές τον κώδικα της logo και εξηγούμε τις εντολές. Έτσι τώρα σ' αυτή την φάση(1 ώρα) οι μαθητές καλούνται ανά 2 να δημιουργήσουν ένα αντίστοιχο δικό τους πρόγραμμα και να το δώσουν σε κάποιο άλλο ζευγάρι να το αποκωδικοποιήσει.

3-12-07 ΕΚΤΗ ΜΕΡΑ

Οι μαθητές εκτελούν την Διαδικασία 11 για το fly2 με σκοπό να θυμηθούν τι ακριβώς έκαναν. Αμέσως μετά επεμβαίνουν στον κώδικα τον αλλάζουν και τον ανταλλάσσουν με άλλη ομάδα .

Αξιολόγηση

Αφού τελειώσουν και οι 3 φάσεις η ερευνήτρια συζητά με όλους τους μαθητές για το πρόγραμμα που μόλις τελείωσε , ακούει σχόλια ,κρίσεις και επικρίσεις. Δίνεται στους μαθητές ένα φύλλο αξιολόγησης της όλης διαδικασίας. Σ αυτό οι μαθητές καλούνται να κρίνουν το πρόγραμμα, να εκφράσουν τις εντυπώσεις τους ,τι τους άρεσε και τι όχι, τι τους δυσκόλεψε και τι τους φάνηκε εύκολο.

14-12-07 ΕΒΔΟΜΗ ΜΕΡΑ

Συζήτηση-ερωτηματολόγιο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Περίληψη

Οι μαθητές στο σύνολό τους μέσα από το λογισμικό είδαν τις συναρτήσεις ως συμμεταβολή ποσοτήτων. Η πλοήγηση στον τρισδιάστατο χώρο λειτούργησε ως ενισχυτικό στοιχείο στην όλη μαθησιακή διαδικασία, αφού οι μαθητές έκαναν πτήσεις, προσγειώσεις, απογειώσεις ακόμα και βομβαρδισμούς δημιουργώντας έτσι μια παιγνιώδη διάθεση. Ο γεωγραφικός χώρος ανέδειξε προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε κάποιες έννοιες, ωστόσο λειτούργησε και σαν αφετηρία για ν' αναδειχτούν καινούριες.

Εισαγωγή

Στα πλαίσια της έρευνας επιδιώχθηκε να διερευνηθούν τα μαθηματικά νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές κυρίως για την έννοια της συνάρτησης καθώς πλοηγούνται μέσα στον τρισδιάστατο γεωγραφικό χώρο του Cruislet. Η παρουσίαση των δεδομένων που θα ακολουθήσει, γίνεται μέσω της αναλυτικής περιγραφής των δρώμενων και υποστηρίζεται από μέρος του απομαγνητοφωνημένου υλικού και των φύλλων εργασίας των μαθητών.

Είναι χωρισμένη σε 3 μεγάλες ενότητες. Η πρώτη ενότητα αναφέρεται στο λογισμικό, τις διάφορες λειτουργικότητες του και την χρήση του από τους μαθητές, η δεύτερη στα μαθηματικά νοήματα που ανέπτυξαν οι μαθητές και η τρίτη στην επέμβαση των μαθητών στο πρόγραμμα ώστε να δημιουργήσουν ένα δικό τους. Τέλος σχολιάζουμε ένα φύλλο αξιολόγησης της όλης διαδικασίας που δόθηκε στους μαθητές μετά το πέρας της δραστηριότητας

Αποτελέσματα

Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Εξοικείωση με το λογισμικό

Ένας σημαντικός παράγοντας για να ενταχθούν σωστά οι ψηφιακές τεχνολογίες στην εκπαίδευση και ειδικότερα στην διδασκαλία των μαθηματικών είναι η εξοικείωση και η προσαρμογή των μαθητών. Θεωρήθηκε λοιπόν σημαντικό στην έρευνα αυτή να

υποστηριχτούν ουσιαστικά οι μαθητές προς την κατεύθυνση αυτή. Οι αναλυτικές οδηγίες που δόθηκαν στα φύλλα εργασίας, καθώς και αυτές που δίνονταν από τις δύο ερευνήτριες σε όλες τις ομάδες καθ' όλη την διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας, βοήθησαν τους μαθητές να προσαρμοστούν με ευκολία στο λογισμικό και στην χρήση του.

Στην αρχή οι μαθητές αφέθηκαν ελεύθεροι να πλοηγηθούν μέσα στον χώρο για να γνωρίσουν σιγά σιγά τις λειτουργικότητες και να προσαρμοστούν στο περιβάλλον. Από την πρώτη κιάλας στιγμή άρχισαν να κουνούν το ποντίκι κάνοντας zoom in zoom out στην Ελλάδα. Περιπλανήθηκαν σε διάφορες περιοχές και κυρίως στον τόπο καταγωγής και στον τόπο διαμονής τους. Χαρακτηριστικός είναι ο ενθουσιασμός του μαθητή στον παρακάτω διάλογο:

Ομάδα 5

M1	Οου τι ωραία η Καλαμάτα!	Έχει πλησιάσει κοντά στην Καλαμάτα
M1	Αχα! Το χωριό μου! Αμφιθέα !Ο Άρης, Αγριλιάκαι κάπου εδώ είναι..	Χαίρεται και γελάει
M1	Κυρία βρήκα το χωριό μου!	
M2	Άσε ρε!	Του μιλάει κάποιος από διπλανή ομάδα
M1	Νάτο ρε, αλήθεια , το χωριό μου	Δείχνει στο χάρτη

Ο ενθουσιασμός των μαθητών συνεχίστηκε και αργότερα όταν έφτιαξαν avatars (αεροπλάνα ή ελικόπτερα) και άρχισαν να τα κινούν. Η ομάδα 7 μάλιστα ήταν πολύ εκφραστική και έκανε πολλά ηχητικά εφεξέ

M3	Ανάποδα το πήγες	
M2	Ωχ κυρία κοιτάτε πετάει ανάποδα! Πω πω ο πιλότος θα τα χει φτύσει τώρα	
M1	Νάτο το βρήκα ιιιιιαααααουουου	Έβαλε $\theta=270$ και το αεροπλάνο άρχισε να πέφτει
M3	Έπεσε! έπεσε!	Κατεβαίνει
M2	Βάρα βάρα βάρα	Εννοεί πάτα και άλλο go
M1	Α δεν πάει άλλο	Τους έβγαλε avatar cannot move
M1	ιιιιιιοοοοοο	Βάζει πάλι 180 στο φ ,πάει αριστερά
M2	Κυρία εμάς θα συγκρουστεί φφσσστ	Βάζουν $\varphi=270$ πάλι πάει κάτω
M2	Ελεύθερη πτώση	Γέλια πολλά
M1	Πάμε να βομβαρδίσουμε την Αθήνα	Κάνει go στο position και το αεροπλάνο πηγαίνει Αθήνα στα 3500μ
M2	Φφσσστ ρίξε βόμβα με τα fire all...φφσσσμπουμ	Βάζει $\varphi=270$

Στα παραπάνω επεισόδια είναι εμφανές ότι οι μαθητές έχουν εντυπωσιαστεί. Το αεροπλάνο που πετούσε, οι πόλεις που γνώριζαν, η περιπλάνηση πάνω από την Ελλάδα,

τους ενθουσίασαν. Το γεγονός φυσικά ότι όλοι οι μαθητές ήταν αγόρια ήταν ένας θετικός παράγοντας, μιας και είναι γνωστό ότι οι πτήσεις με αεροπλάνα είναι αγαπημένο τους παιχνίδι. Όπως είπαν αργότερα, το world of warcraft είναι η ιστοσελίδα που επισκέφτονται πολύ συχνά. Δεν έλειψαν τα ηχητικά εφεε (βzzζουμμ) και οι κραυγές καθώς έριχναν το αεροπλάνο στο έδαφος. Το κλίμα που δημιουργήθηκε μέσα στην τάξη ήταν αρκετά ενθαρρυντικό για την πορεία της μαθησιακής διαδικασίας.

Οι μαθητές φάνηκε ότι είναι εξοικειωμένοι με τον υπολογιστή, αφού αρκετοί από αυτούς ανακάλυψαν λειτουργικότητες πολύ πριν τις παρουσιάσει η ερευνήτρια. Είχαν ήδη πατήσει το κουμπί add για να δημιουργήσουν ένα αεροπλάνο και είχαν ήδη πάει σε μια πόλη με το select a destination όπως φαίνεται στα παρακάτω επεισόδια

E	Ξεκινάμε λοιπόν προσπαθώ να δημιουργήσω έναν avatar. Πώς;	Ρωτάει όλη την τάξη
M1	Να πω; να πω;	Το έχει κάνει ήδη, αλλά η ερευνήτρια δεν τον ακούει

E	Επίσης μπορείτε να πάτε στο select a destination ..	
M1	Πήγαμε	Το έχουν κάνει ήδη

Η εξοικείωση αυτή φάνηκε και αργότερα όταν με μεγάλη άνεση έκαναν αντιγραφή-επικόλληση τις συντεταγμένες μιας πόλης (πατώντας τα πλήκτρα ctrl+c ,ctrl+v) από το position στη logo

POSITION- γεωγραφικές συντεταγμένες

Οι πρώτες δραστηριότητες ζητούσαν από τους μαθητές

• να δημιουργήσουν αεροπλάνα (ότι μοντέλα θέλουν) και να περιπλανηθούν με αυτά μέσα στον γεωγραφικό χώρο της Ελλάδας

• να προσανατολιστούν μέσα στο χώρο και να δουν πώς αλλάζει το lat και το long

• να προσδιορίσουν τα όρια του lat και long μέσα στον χάρτη που έχουν μπροστά τους

Οι μαθητές ωστόσο δυσκολεύτηκαν αρχικά με τον προσανατολισμό τους μέσα στο χώρο. Η ομάδα 7 μπερδεψε το που είναι η ανατολή και που η δύση μιας και δεν είχαν δουλέψει ξανά σε επίπεδο χάρτη, ενώ όλες οι ομάδες φάνηκε ότι δεν είχαν κατανοήσει καλά τι είναι το lat και το long .

Ομάδα 4

M1	Το long πρέπει να είναι πόσο μακριά πήγε και το lat πόσο έστριψε.....
----	---

Ομάδα 9

M2	Γράψε αριστερά δεξιά αλλάζει το long
----	--------------------------------------

Ομάδα 7

E2	Πώς σκέφτεστε; Τι πήγατε να αλλάξετε πείτε μου	
M2	Να στρίψουμε το αεροπλάνο πρδ 90 μοίρες ή κάτι τέτοιο	Εννοεί με το direction
E	Και πώς θα πήγαινε το αεροπλάνο	
M2	Έτσι	Δείχνει δεξιά
E2	Θα πήγαινε ανατολικά δηλ	
M2	Ή δυτικά ξέρω εγώ κυρία. Δεν ξέρω που είναι ο βορράς και ο νότος. Που θέλουμε ναμαστε εδώ;	

Σιγά σιγά άρχισαν να παρατηρούν τις γεωγραφικές συντεταγμένες και να ξεκαθαρίζουν τις τιμές που έχουμε στην Ελλάδα. Κατέγραφαν στο φύλλο εργασίας τα lat long διαφόρων πόλεων και σχεδόν όλες οι ομάδες διαπίστωσαν ότι ανατολή –δύση αλλάζει το long ενώ βορράς- νότος αλλάζει το lat .Όσο μάλιστα κινούμαστε προς την ανατολή το long μεγαλώνει και αντίστοιχα, όσο κινούμαστε προς τον βορρά μεγαλώνει το lat Το παρακάτω φύλλο εργασίας είναι από την ομάδα 9

Βρίσκεσαι στην Αθήνα. Μετακίνησε το αεροπλάνο προς τα ανατολικά (ή δυτικά). Αλλάζει το lat ή το long; βόρεια (ή νότια) αλλάζει το lat ή το long;

Όταν... τα... βρετανικά... ανατολικά... ή δυτικά...
αλλάζει... το... long... Όταν... τα... βρετανικά... βορρά...
ή... κατ'... αλλάζει... το... lat... Αυτό... το... καταγράφει...
βρετανικών... το... αεροπλάνο... το... direction...

Καθώς όμως οι μαθητές έδιναν τιμές στα lat και long ανακάλυψαν ότι σε κάποιες τιμές το αεροπλάνο δεν κουνιόταν «avatar can't move». Προβληματίστηκαν, γιατί να συμβαίνει αυτό. Ύστερα από συζήτηση με τις ερευνήτριες κατάλαβαν ότι ο ελληνικός χώρος έχει συγκεκριμένες τιμές .Αποφάσισαν λοιπόν να ανακαλύψουν τα όρια του lat και long μέσα στον γεωγραφικό χώρο της Ελλάδας. Ο τρόπος με τον οποίο δούλεψαν οι περισσότερες ομάδες δεν διαφέρει από αυτόν που περιγράφει η ομάδα 9

E2	Πως σκεφτήκατε για να βρείτε τα όρια;	
----	---------------------------------------	--

M2	Λέγαμε ότι..	
M1	τελείως πάνω, τελείως κάτω	Πάνω εννοεί βόρεια και κάτω νότια
M2	Τη μια τελείως πάνω την άλλη τελείως κάτω και μετά	Μιλούν μαζί
M1	Ανατολικά δεξιά	
M2	Και μετά ανατολικά και μετά...	
M1	Μέχρι που δεν γίνεται άλλο	
M2	Πηγαίναμε όσο γίνεται ανατολικά μέχρι να μας βγάλει ειδοποίηση ότι δεν γίνεται άλλο. Αλλά εμείς βλέπαμε ότι μπορούσε λίγο ακόμα, μειώναμε απλά τα μέτρα ώστε να πάει ακριβώς στο τέλος	Εννοεί ότι έδιναν μικρότερες τιμές στο R του direction

Από τον διάλογο φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι μαθητές είχαν αρχίσει να εξοικειώνονται με τον γεωγραφικό χώρο. Προσπαθώντας μάλιστα να βρουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις ακραίες τιμές των lat και long δημιούργησαν την εξής στρατηγική(κοινή για όλες τις ομάδες): όταν το αεροπλάνο δεν πήγαινε άλλο (avatar can't move) αυτό ήταν γιατί με την συγκεκριμένη απόσταση R έβγαινε εκτός ορίων του χάρτη. Μείωναν λοιπόν το R και το αεροπλάνο κινούνταν λίγο ακόμη. Γενικότερα οι μαθητές ακολούθησαν τρεις στρατηγικές για να βρουν τα όρια της Ελλάδας

Στρατηγική 1: επιλέγω το position κινούμαι ανατολικά, δυτικά, βόρεια, νότια και καταγράφω τις τιμές των lat long.

Στρατηγική 2: επιλέγω το direction και κατευθύνω το αεροπλάνο ανατολικά, δυτικά, βόρεια, νότια και καταγράφω τις τιμές των lat long

Στρατηγική 3: πηγαίνω σε παραμεθόριες πόλεις της Ελλάδος που βρίσκονται βόρεια (Ορεστιάδα), δυτικά (Κέρκυρα), ανατολικά (Ρόδος) και νότια (Κρήτη) και καταγράφω τις τιμές των lat long

Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το εργαλείο(artifact) και αλληλεπιδρούν μαζί του. Αρχίζουν να ανιχνεύουν το τι μπορούν να κάνουν με αυτό, πως μπορούν να πλοηγηθούν στο χώρο. Εξερευνούν τις δυνατότητες του και ανακαλύπτουν κάποιες από τις ιδιότητες του. Το λογισμικό παρέχει πολλές και ποικίλες αναπαραστάσεις που οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν. Οι αποφάσεις τους και οι στρατηγικές που ακολουθούν είναι σημαντικές και αντανakλούν τον τρόπο με τον οποίο το υπολογιστικό περιβάλλον παρέχει μια σειρά από λειτουργικότητες, τις οποίες οι μαθητές μπορούν να ελέγξουν και να αξιοποιήσουν σε μια δεδομένη στιγμή, ώστε να πετύχουν το στόχο τους (Noss & Hoyles,1996). Αυτή η άμεση αλληλεπίδραση ανάμεσα στο υποκείμενο

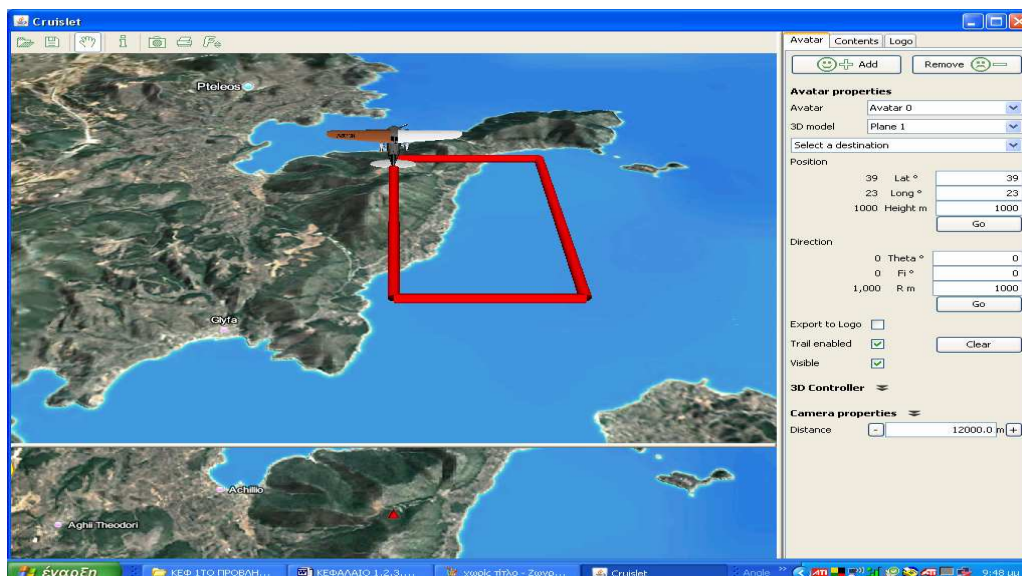
(μαθητές) και το αντικείμενο (cruislet), οδηγεί το υποκείμενο στην ανάπτυξη των κατάλληλων αναπαραστάσεων (Verillon & Rabardel, 1995). Οι νέες αυτές αναπαραστάσεις έχουν να κάνουν με το χώρο και την πλοήγηση μέσα σε αυτόν. Ο μαθητής αναπτύσσει νέα γνωστικά σχήματα που συνδέονται με το artifact και ανακαλύπτονται σταδιακά μέσα από διαδοχικές δοκιμές και πειραματισμούς. Οδηγούμαστε σιγά σιγά στην ενοργανοποίηση του artifact και στην ενοργάνωση της δραστηριότητας.

DIRECTION σφαιρικές συντεταγμένες

► Οι γωνίες ϕ, θ του direction

Κατά την πλοήγηση μέσα στον χώρο οι τέσσερις από τις έξι ομάδες χρησιμοποιούσαν το direction, έδιναν δηλαδή κατεύθυνση στο αεροπλάνο και το πήγαιναν σε διάφορες περιοχές. Ανακάλυψαν σιγά σιγά ότι με σταθερό $\phi=0$ και $\theta=90$ το αεροπλάνο στρίβει δεξιά. και κινείται προς την ανατολή ενώ με $\phi=0$ και $\theta=270$ το αεροπλάνο κινείται δυτικά

M2	Όχι ετσι πάει επάνω (βόρεια)	Ο μ1 προσπαθώντας να στρίψει αριστερά είχε βάλει $\theta=0$
M2	Βάλε 180	Βάζει 180
M1	180 πάει κάτω(νότια). 270;	Βάζει 270
M1	νάτο!	



Εικόνα 8: οι μαθητές εξοικειώνονται με τις σφαιρικές συντεταγμένες και φτιάχνουν σχήματα στον αέρα

Ο έλεγχος τους πάνω στις έννοιες του χώρου αυξάνεται. Οι συνεχείς πειραματισμοί είχαν σαν αποτέλεσμα να γνωρίσουν καλύτερα τις δυνατότητες του εργαλείου. Ανακάλυψαν ότι με αλλαγή στο ϕ το αεροπλάνο κινείται πάνω - κάτω, ενώ με αλλαγή στο θ δεξιά - αριστερά. Μπορούν σιγά σιγά να οργανώνουν πιο ολοκληρωμένες πτήσεις καθώς και να δημιουργούν σχήματα στον αέρα.

Η δραστηριότητα: « Πόσες μοίρες βορειοανατολικά είναι η Αλεξανδρούπολη από την Άρτα» φάνηκε εύκολη στους μαθητές. Όλοι, μόλις πήγαν το αεροπλάνο στην Αλεξανδρούπολη, παρατήρησαν το θ του direction. Το περίεργο βέβαια είναι ότι κάποιοι κατέληξαν σε αυτή την απάντηση, γιατί «...ήταν το μόνο σημείο που έβλεπαν μοίρες». Όταν η ερευνήτρια τους ρώτησε γιατί δεν είπαν το ϕ που και αυτό είναι σε μοίρες, κάποιοι απάντησαν σωστά ότι με αυτό αλλάζει το ύψος του αεροπλάνου και κάποιοι άλλοι ότι το $\phi=0$ που έδειχνε η οθόνη ήταν μια τιμή που δεν τους άρεσε .

► Η απόσταση R του direction

Το direction θεωρείται ένα χρήσιμο εργαλείο όπως δείχνει το παρακάτω επεισόδιο και για ένα άλλο λόγο: έχει το R(απόσταση)

E	Τι χρησιμοποιήσατε για να τα κάνετε αυτά, το position ή το direction;
M1	To direction
E	Γιατί χρησιμοποιήσατε αυτό;
M2	Γιατί μπορούσαμε να δώσουμε ακριβείς οδηγίες για το..
E	Είναι πιο εύκολο;
M2	Ναι
M1	Είναι πιο ακριβές !
E	Γιατί το άλλο τι είναι;
M2	Το άλλο σε πάει σε μια περιοχή ..δεν πιστεύω ότι μπορεί να είναι τόσο αξιόπιστο όσο το direction γιατί μπορείς να τ' αλλάξεις από μόνος σου ,να βάλεις εσύ πληροφορίες ν' αφαιρέσεις μέτρα που θέλεις να προχωρήσει ή να αλλάξεις μοίρες οτιδήποτε

Το R είναι χρήσιμο γιατί μπορούμε να καθορίσουμε εμείς πόσα ακριβώς μέτρα θέλουμε να προχωρήσει το αεροπλάνο. Με το R οι μαθητές κατανόησαν την απόσταση στο χάρτη: τι σημαίνει δηλαδή ότι το αεροπλάνο προχωράει 1000μ ή 100000μ.; Η αντίστοιχη απόσταση στον χάρτη είναι πολύ μικρή για τα 1000μ αφού το αεροπλάνο μετακινείται μόνο λίγα εκατοστά και πολύ μεγάλη για τα 100000μ .

Ομάδα 4

		Ξεκινούν από Αθήνα και προχωρούν βάζοντας στο direction 0 0 1000
M1	Βάλε πιο πολύ... αύριο θα φτάσει	Ο M1 το λειει ειρωνικά γιατί το αεροπλάνο προχωρά πολύ σιγά και ο M2 βάζει 10000μ

Η δραστηριότητα «βρείτε την απόσταση της Άμφισσας από την Άρτα» είχε στόχο την καλύτερη κατανόηση του R . Όλοι οι μαθητές πήγαν με το select a destination στις δύο πόλεις και άρχισαν να κάνουν εικασίες

Ομάδα 5

E	Στην επόμενη.. συνεχίστε... βρείτε την απόσταση Άμφισσας- Άρτας	
M2, M1		Πηγαίνουν Άρτα και μετά ξανά Άμφισσα άλλα δεν μπορούν να βρουν την απόσταση
M1	Ρε άσε το βελάκι	Έχει πάει στο 3d controller και γυρίζει το βελάκι
M1	Πρέπει να είναι αυτή εδώ η διαφορά τους	Δείχνει το διάνυσμα του αεροπλάνου και όταν το πατάει αυτό γίνεται πράσινο
M2	Ναι αλλά πως την βρίσκεις;;;	
M1	Το Rm	Εννοεί το R στο direction
M2	Όχι ρε δεν είναι το Rm.. .Ωχ δίκιο έχεις! Κάτσε κάτσε	Πηγαίνει από Άμφισσα Άρτα και από Άρτα Άμφισσα και παρατηρεί το R
M1	Είδες το ίδιο είναι	

Η ομάδα 7 σκέφτηκε λίγο περίεργα

M1	Κυρία το long δεν σημαίνει μήκος δηλαδή απόσταση;	Κάνει μετάφραση στην λέξη
E	Αυτές παιδιά είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες, το γεωγραφικό πλάτος και γεωγραφικό μήκος	
M1	Ναι αλλά εδώ που λέει να βρούμε την απόσταση πώς θα το κάνουμε;	
E	Για σκεφτείτε	
M1	Τις συντεταγμένες που θα βρούμε θα τις αφαιρέσουμε από την Άρτα	
E	Για προσπαθήστε	Πηγαίνουν στην Άρτα
M1	Να βλέπεις έχει διαφορετικό τέτοιο ...	Εννοεί συντεταγμένες
M2	Αυτό εδώ είναι!	Το λέει με σιγουριά δείχνοντας το R του direction
M1	Αυτό είναι ; Α ναι αυτό είναι τα μέτρα σωστά	
E	Γιατί είναι αυτό για πες μου	
M1	Γιατί ξεκίνησε από την Άμφισσα και πάει Άρτα. Η απόσταση που έκανε είναι αυτή 139.955μ	
E	Ωραία γράψτε το	
M2	Αφού έχετε εμένα ρε στην ομάδα	

Την ίδια αρχική άποψη, το να αφαιρέσουν δηλαδή τις συντεταγμένες, είχαν και οι μαθητές της ομάδας 4

M1	Πρέπει να είναι αυτή εδώ η διαφορά τους	Εννοεί η διαφορά των γεωγραφικών συντεταγμένων
M2	Ναι αλλά πως την βρίσκεις;	

Στην προσπάθειά τους να βρουν την απόσταση των δυο πόλεων Άρτας-Άμφισσας οι μαθητές προσπαθούν να κινητοποιήσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους (την απόσταση δύο σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο). Διατυπώνουν την εικασία ότι πρέπει να αφαιρέσουν τις συντεταγμένες των δυο πόλεων. Δεν έχουν όμως δουλέψει ξανά με γεωγραφικές συντεταγμένες και δεν ξέρουν τι να κάνουν. Αρχίζουν λοιπόν να ψάχνουν νέους τρόπους. Και ξαφνικά παρατηρούν ότι το ίδιο το λογισμικό τους παρέχει έτοιμη την λύση. Η ζητούμενη απόσταση είναι το R του direction. Η παρατήρηση που έκαναν πρέπει όμως να ελεγχθεί. Γνωρίζοντας ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα AB έχει ίδιο μήκος με το BA πηγαίνουν το αεροπλάνο από την Άμφισσα στην Άρτα και μετά ξανά από την Άρτα στην Άμφισσα και επιβεβαιώνουν ότι το R=139,5 παραμένει ίδιο και στις δύο περιπτώσεις. Είναι λοιπόν σίγουροι πια ότι η απόσταση Άμφισσας-Άρτας είναι 139.5χλμ. Το περιβάλλον του cruilet έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές

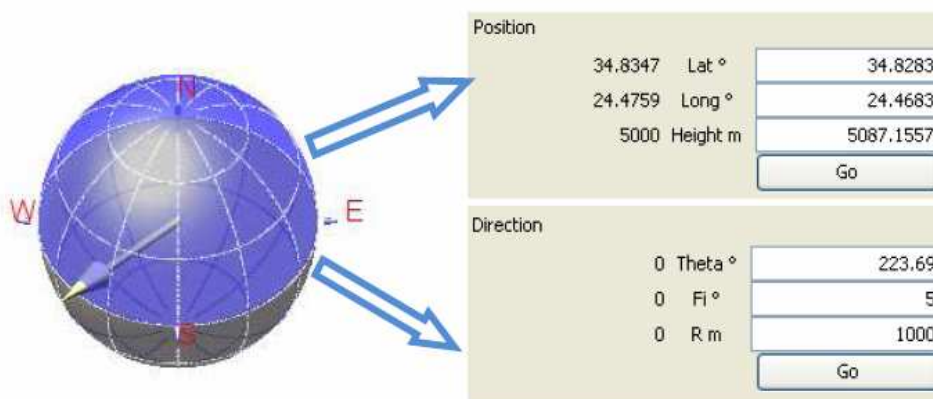
- ☞ κινητοποιήσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους
- ☞ διατυπώσουν υποθέσεις
- ☞ να προβληματιστούν
- ☞ να παρατηρήσουν και να ανακαλύψουν
- ☞ να ελέγξουν και να επιβεβαιώσουν

3d controller

Μία ομάδα (η 7) ανακάλυψε μόνη της τον 3d controller, προτού καν να τον παρουσιάσει η ερευνήτρια σε όλη την τάξη, και ήταν ενθουσιασμένη με το εύρημα της

M1	Αυτό είναι πολύ πιο εύκολο	Δείχνουν το 3d controller
E2	Τι είναι αυτό ,τι κάνει;	
M2	Του λέμε πως θέλουμε ανατολικά δυτικά βόρεια και πατάμε go	Κινούν το βέλος δεξιά αριστερά
M3	Του βάζουμε και κλίση να κοιτάξετε	Εννοούν λοξή πορεία πχ βορειοανατολικά
E	Εσας πώς σας φαίνεται αυτό;	
M1	Πολύ πιο εύκολο	
M2	Σαν πυξίδα είναι	

E	Σχετίζεται με κάτι άλλο; Γιατί πατάς εκείνο και δεν πατάς το από πάνω;	Εννοεί το go στο position
M2	Σχετίζεται με το direction	
M1	Είναι ανάποδο το από πάνω	
E	Σχετίζεται;	
M2	Ανάλογα	
E	Ανάλογα ;	
M2	Όχι το ίδιο είναι κυρία. Ότι βάζουμε εδώ πέρα	Εννοεί όπως τοποθετούμε το βελάκι
M1	Το ίδιο γίνεται και εδώ	Στο direction δίνει ανάλογες τιμές
M2	Και αν γράψουμε εδώ τα νούμερα αυτά θα μας βγάλει εδώ το βελάκι το ίδιο	
M1	Ας πάμε προς τα πάνω για να κάνουμε έναν τέλειο βομβαρδισμό	Ανεβάζει το αεροπλάνο και ύστερα το ρίχνει



Εικόνα 9:Αλλαγή συντεταγμένων μέσω του 3d controller

Οι μαθητές πιστεύουν ότι ο 3d controller είναι πιο λειτουργικός αφού με αυτόν προσανατολίζονται πιο εύκολα στο χώρο, χωρίς να χρειάζεται να ασχοληθούν με γωνίες ϕ, θ . Έχουν φυσικά κατανοήσει ότι συνδέεται με το direction αφού

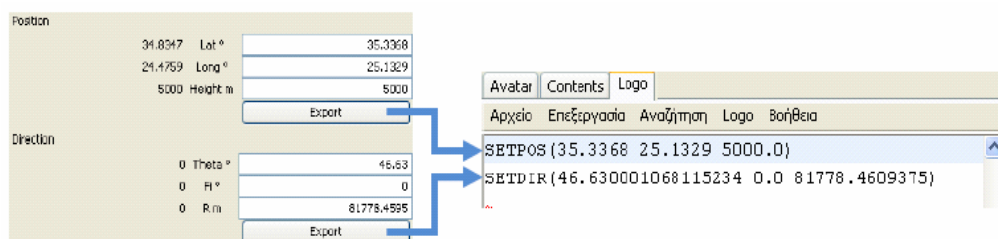
- 1)ότι κατεύθυνση δώσουν στο βέλος , αντίστοιχα αλλάζουν και οι τιμές των ϕ, θ
- 2)μετά από κάθε προσανατολισμό του βέλους πατούν το go του direction

Η Logo

Η πρώτη επαφή των μαθητών με την logo έγινε με την παρακάτω δραστηριότητα Δραστηριότητα 10 (σύνδεση avatar tab με logo tab)
Πήγαινε το αεροπλάνο σε όποια πόλη θέλεις εσύ και προσπάθησε να δημιουργήσεις ένα γεωμετρικό σχήμα στον αέρα με το ίχνος του. Σε κάθε βήμα που κάνεις να βλέπεις και την

αντίστοιχη εντολή στη logo, ώστε στο τέλος να δημιουργήσεις μια διαδικασία στη logo, που να δημιουργεί το σχήμα που έκανες πάνω από οποιαδήποτε πόλη.

Οι περισσότεροι προσπάθησαν να φτιάξουν ένα τετράγωνο ή ορθογώνιο γιατί όπως είπαν αυτά είναι τα πιο εύκολα σχήματα. Δουλεύοντας όλοι με το direction έβαζαν διαδοχικά $\theta=0$, $\theta=90$, $\theta=180$, $\theta=270$ και με R =συγκεκριμένο π.χ. 2000μ και $\phi=0$ το αεροπλάνο έφτιαχνε ένα τετράγωνο στον αέρα. Ένας μόνο μαθητής κατάφερε να κάνει κύκλο. Ακολουθώντας τις υποδείξεις της ερευνήτριας σε κάθε go που έκαναν είτε στο position είτε στο direction, αμέσως μετά πατούσαν export to logo και έβλεπαν την αντίστοιχη εντολή στην logo. Γνώρισαν έτσι τις πρώτες εντολές του λογισμικού setposition (ορισμός θέσης), setdirection (ορισμός κατεύθυνσης). Αυτό όμως που τους εντυπωσίασε είναι ότι οι εντολές έμπαιναν σε μια διαδικασία η οποία είχε την δυνατότητα να εκτελεί πάντα το συγκεκριμένο σχήμα. Θα μπορούσαν να φτιάξουν ολόκληρα σχήματα, να αποθηκεύσουν τα προγράμματα και στην συνέχεια με ένα απλό insert να τα επαναφέρουν.



Εικόνα 10: Μεταφορά των εντολών πλοήγησης στην ετικέτα της logo

Η αυτοματοποίηση της όλης διαδικασίας ήταν θεαματική. Κάθε κίνηση του αεροπλάνου μεταφράζεται σε κώδικα και κάθε εντολή κώδικα εκτελείται από τον avatar. Οι μαθητές έχοντας στα χέρια τους την εντολή export to logo μπορούν να προγραμματίσουν σε μια γλώσσα που είναι αρκετά κατανοητή. Μπορούν να φτιάξουν ένα απλό γεωμετρικό σχήμα με το ίχνος του αεροπλάνου, αλλά και μια πιο πολύπλοκη πτήση βάζοντας τον avatar να κάνει πιο θεαματικούς ελιγμούς στον αέρα. Στην παρούσα δραστηριότητα βέβαια οι μαθητές έφτιαξαν μόνο τρίγωνα, τετράγωνα και έναν κύκλο. Δεν ασχολήθηκαν με πιο πολύπλοκες παραμετρικές διαδικασίες λόγω της μικρής χρονικής διάρκειας που είχαν στην διάθεσή τους.

Η τρίτη διάσταση του ύψους

Οι μαθητές έδειξαν μεγάλο ενθουσιασμό όταν μπορούσαν να ρίχνουν αεροπλάνα και να «βομβαρδίζουν» όπως είπαν μια περιοχή. Αυτό στην αρχή έγινε τυχαία και χωρίς να μπορούν να το ελέγξουν. Για να εξοικειωθούν λοιπόν καλύτερα με την τρίτη διάσταση του ύψους και να μπορούν να ανεβοκατεβάζουν το αεροπλάνο, δόθηκε η επόμενη δραστηριότητα: *Βρείτε το υψόμετρο της Άμφισσας*. Ο διάλογος που ακολουθεί είναι από την ομάδα 4

M1	Πήγαινε τώρα το αεροπλάνο στην Άμφισσα	Πηγαίνουν για να βρουν το υψόμετρο
M2	5000	Κοιτούν το h
M1	Όχι ρε αυτό είναι η απόσταση του αεροπλάνου από το έδαφος	Πήγε στην κάμερα και απομακρύνεται
M1	Κατέβασε το	Πατάει πλην στο κάμερα και πλησιάζει στο αεροπλάνο
M1	Δε λέει, αυτή είναι η κάμερα	Πάνε στο height και βάζουν 0 αλλά δεν πάει, βάζουν 100 πάλι δεν πάει
M1	Βάλε 1000	Ο μ2 βάζει 5000
M1	Εκεί ήταν και πριν	Βάζει 1000 και πάει. Πατάει go συνεχόμενα γιατί νομίζει ότι δουλεύει όπως το direction

Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να κατεβάσουν το αεροπλάνο μπερδεύονται με την κάμερα, την πλησιάζουν και την απομακρύνουν από το αεροπλάνο. Καταλαβαίνουν βέβαια ότι αυτό δεν έχει καμία επίπτωση στο ύψος του αεροπλάνου και την εγκαταλείπουν. Πηγαίνουν στο height και κάνουν δεύτερο λάθος, δίνουν την τιμή 0 θεωρώντας μάλλον ότι στο 0 είναι το έδαφος. Όταν βλέπουν την αποτυχία τους αποφασίζουν να δώσουν τιμές ύψους πιο αληθινές. Στο h=1000 κατέβηκε το αεροπλάνο και θέλουν να συνεχίσουν. Πατούν όμως το go συνεχώς γιατί νομίζουν ότι το position δουλεύει όπως και το direction. Αυτά τα απανωτά λάθη συνεχίζονται καθώς αλληλεπιδρούν με το λογισμικό

M2		Βάζει 500 στο h δεν πάει και αμέσως μετά βάζει 400
M1	Βάλε 600 ρε παραπάνω	
M2	Αφού δεν κατεβαίνει στα 500 θα κατεβεί στα 600; Πόντιε!	Συνεχίζει και μικραίνει τις τιμές 300 200
M1	Αφού δεν το χεις πιάσει ρε!	
M2	Ωραία 600	Το βάζει
M1	600 Height είναι η απόσταση του ελικόπτερου από το έδαφος αλλά πώς θα μετρήσουμε το ύψος	
M2	Είχε 5000 σωστά ;κατεβήκαμε 1000 και μετά 600 σωστά ;δεν κατεβαίνει παρακάτω	Βάζει 700
M2	Αχ τι κάνω!	Επιτέλους καταλαβαίνει το λάθος του

M1	Κατέβασε το 10 10 .Βάλε 590	Βάζει διαδοχικά 590 580 570 και το αεροπλάνο κατεβαίνει
M1	550	Συνεχίζει

Κάνοντας λοιπόν διάφορους πειραματισμούς και πολλά λάθη οι μαθητές της ομάδας 4 καταφέρνουν να κατέβουν στο $h=520$. Εκεί ακολουθούν την γνώριμη τακτική: μειώνουν το R σε 1 και προσπαθούν να κατέβουν και άλλο. Βλέποντας όμως ότι το αεροπλάνο δεν προχωράει άλλο αποφασίζουν ότι το υψόμετρο της Άμφισσας είναι 520 μέτρα. Στο ίδιο συμπέρασμα έφτασαν και οι υπόλοιπες ομάδες. Όλες σχεδόν δούλεψαν με το position όπου μείωναν τις τιμές στο height. Μόνο η ομάδα 7 χρησιμοποίησε τον 3d controller. Κατέβασε το βελάκι προς τα κάτω και πατώντας συνεχώς go στο direction φτάνει σε υψόμετρο 1500μ. Αμέσως μετά αλλάζει το R από 1000 σε 100 και συνεχίζει να κατεβαίνει κατά 100 μέτρα. Τέλος με $R=10$ και μετά $R=1$ φτάνει στο $h = 520$ όπου οι μαθητές διαπιστώνουν ότι είναι το υψόμετρο της Άμφισσας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης

Καθώς οι μαθητές άρχισαν να εξοικειώνονται με τον χώρο, με τις σφαιρικές και γεωγραφικές συντεταγμένες, οι δραστηριότητες άρχισαν να γίνονται πιο σύνθετες. Έπρεπε τώρα να καταγράφουν όσα γίνονταν στην οθόνη στα φύλλα εργασίας. Δόθηκε λοιπόν η εξής δραστηριότητα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 9 (σχέση position direction, εισαγωγή στη συνάρτηση)

Βρίσκεσαι στην Αθήνα σε ύψος 5000μ. Θέσε στο direction $\theta=0$ και $\varphi=90$ και $R=1000$. Για κάθε go που πατάς συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα

	R (direction)	H (position)
Go(1 ^η φορά)		
Go(2 ^η φορά)		
Go(3 ^η φορά)		
Go(4 ^η φορά)		
Go(5 ^η φορά)		

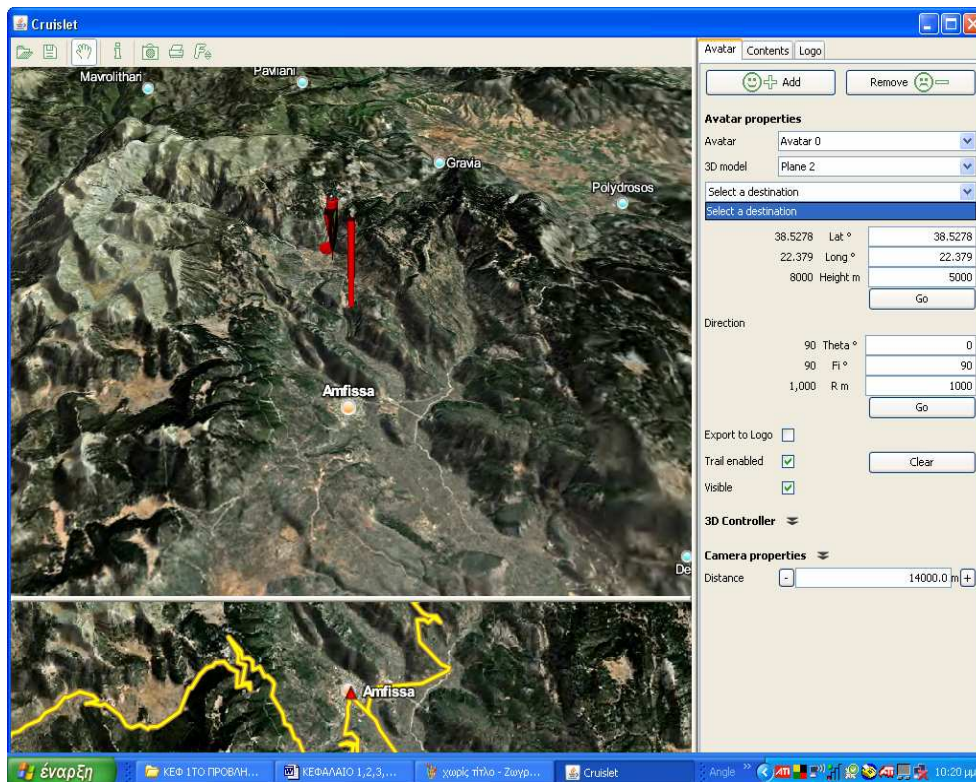
Τι συμπεραίνεται; Πώς κινείται το αεροπλάνο;

Μπορείς να εκφράσεις πως βρίσκεται το ύψος του αεροπλάνου κάθε φορά α) με λόγια β) με σύμβολα (δηλ χρησιμοποιώντας τύπο);

Πού θα βρίσκεται το αεροπλάνο μετά από 50 go(δηλ την 50^η φορά)

Μπορείτε να κάνετε γραφική παράσταση;

Η δραστηριότητα ζητούσε να πάνε το αεροπλάνο στην Αθήνα σε υψόμετρο 5000μ, να βάλουν τιμές $\theta=0$, $\phi=90$ και $R=1000$ στο direction και να καταγράφουν σε έναν πίνακα τις τιμές του height για κάθε go που κάνουν στο direction. Ύστερα έπρεπε να παρατηρήσουν πώς κινείται το αεροπλάνο, να βρουν έναν τύπο για το ύψος και να κάνουν μια γραφική παράσταση. Για να μην μείνουν μάλιστα μόνο στον αναδρομικό τύπο της συνάρτησης η ερευνήτρια ζητούσε να βρουν το ύψος του αεροπλάνου την 50^η φορά που πατάμε go



Εικόνα 11: Δραστηριότητα 9 (η εύρεση του ύψους)

Αρχικά όλοι οι μαθητές ενθουσιασμένοι παρατήρησαν ότι το αεροπλάνο κινείται προς τα πάνω κατά 1000 μ

Ομάδα 4

M1	Γράψε $\theta=0$ $\varphi=90$ και $\rho=1000$	Το γράφει
M1	5000 υψόμετρο είμαστε .Πάτα go	
M2	Όπα !	Ενθουσιάστηκαν που το αεροπλάνο κινήθηκε κατακόρυφα προς τα πάνω
E1	Για κάθε go να κοιτάτε και να καταγράφετε τις τιμές	
M1	Αα! Πήγε 6000	

Μερικοί μάλιστα ανακάλυψαν θεαματικές πτώσεις του αεροπλάνου καθώς αντί να πατήσουν go στο direction πάτησαν στο position

Ομάδα 7

M1	Κινείται κάθετα προς τα πάνω	Πατούν go στο direction
M2	Ββββμπουμ!	Πατάει clear και μετά το go του position οπότε το αεροπλάνο γυρίζει ξανά κατακόρυφα προς τα κάτω στα 5000μ
M2	Κοίτα κοίτα!	Πατά go στο direction,το αεροπλάνο ανεβαίνει πάλι και μετά αμέσως πατάει go στο position οπότε φαίνεται η κατακόρυφη πτώση του

Το πέρασμα από την οθόνη του υπολογιστή στην λεκτική και συμβολική αναπαράσταση

Η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στην μαθηματική εκπαίδευση σε καμία περίπτωση δεν αποσκοπεί στην μείωση της χρήσης της τυπικής μαθηματικής έκφρασης. Αντίθετα η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει στους μαθητές την δυνατότητα να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα χρησιμοποιώντας ως μέσο τον τυπικό φορμαλισμό(Κυνηγός, 2002). Έτσι οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν τα όσα συμβαίνουν στην οθόνη του υπολογιστή με λόγια, με πίνακα , με μαθηματικά σύμβολα και με γραφική παράσταση στο φύλλο εργασίας . Σε κάθε go που πατούν στο direction το αεροπλάνο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω κατά 1000μ ξεκινώντας από τα 5000μ. Αυτό ήταν αρκετά εύκολο να το εκφράσουν όλοι οι μαθητές . Το πέρασμα από την οθόνη του υπολογιστή στην λεκτική αναπαράσταση ήταν μια εύκολη υπόθεση. Όλοι οι μαθητές παρατήρησαν την συµµεταβολή ανάμεσα στο ύψος του αεροπλάνου και στην λειτουργία go του position.(Επίπεδο1) Ανακαλύπτουν μάλιστα και την κατεύθυνση αυτής της συµµεταβολής: Όσο περισσότερα go πατάμε, τόσο πιο ψηλά πηγαίνει.(Επίπεδο 2).Το ίδιο εύκολη ήταν και η συμπλήρωση του πίνακα τιμών. Το R είναι πάντα 1000 και οι τιμές στο h μεταβάλλονται από 6000, 7000, 8000 κοκ για κάθε go που πατάμε.Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι σταθερός και είναι ίσος με 1000

Το επόμενο ερώτημα όμως δυσκόλεψε όλες τις ομάδες. Έπρεπε να εκφράσουν το ύψος του αεροπλάνου με λόγια και με σύμβολα. Πολλοί ήταν αυτοί που δεν κατάλαβαν ακριβώς την ερώτηση. Θεώρησαν πως είναι περιττή αφού «...το ύψος το βλέπουμε κάθε φορά από το height του position». Όλοι (εκτός της ομάδα 4 που βρήκε απευθείας τον γενικό τύπο), υπολόγισαν την συνάρτηση του ύψους με την βοήθεια του αναδρομικού τύπου. Είπαν δηλαδή ότι το ύψος το βρίσκουμε κάθε φορά εάν προσθέσουμε το $R=1000$ στο height που δείχνει κάθε φορά το position

β) με σύμβολα (δηλ χρησιμοποιώντας τύπο);

1 ^η φορά $H = H_{\text{αρχικό}} + 1000$	
2 ^η φορά $H = 5000 + 1000 = 6000$	
3 ^η φορά $H = 6000 + 1000 = 7000$	$H_{\text{απλ}} = H_{\text{αρχικό}} + 1000$
4 ^η φορά $H = 7000 + 1000 = 8000$	
5 ^η φορά $H = 8000 + 1000 = 9000$	

Ο αναδρομικός αυτός τύπος φανερώνει ότι οι μαθητές είδαν και το ρυθμό αλλαγής του ύψους κάθε φορά : είναι 1000 και είναι σταθερός. «Για κάθε go που πατάμε το ύψος ανεβαίνει κατά 1000 (Επίπεδο 3). Ο τρόπος αυτός βέβαια, ενώ ήταν σωστός, είχε ένα βασικό μειονέκτημα: θα πρέπει κάθε φορά να υπολογίζουμε το προηγούμενο ύψος για να βρούμε το επόμενο. Αυτό δεν βόλεψε καθόλου ειδικά στην περίπτωση που θα έπρεπε να βρουν το h50. Κάποιοι μαθητές σκέφτονται την πιο εύκολη και απλή λύση: να πατήσουν 50 go στο direction και να κοιτάξουν σε πιο ύψος έχει φτάσει το αεροπλάνο από το position. Σύντομα όμως εγκαταλείπουν αυτήν την σκέψη αφού αυτό αποδεικνύεται αρκετά χρονοβόρο και κουραστικό. Αρχίζουν να ψάχνουν άλλους τρόπους επίλυσης του θέματος. Στο σημείο αυτό η ερευνήτρια συνέστησε στους μαθητές να παρατηρήσουν πόσα go πατούν και αν μπορούν να το χρησιμοποιήσουν στον τύπο. Οι μαθητές όμως δεν μπορούσαν εύκολα να «ξεκολλήσουν» από το προηγούμενο κάθε φορά ύψος. Χρειάστηκε η βοήθεια της ερευνήτριας για να μπορέσουν να συνδέσουν τον

αριθμό των g_0 με το ύψος. Δηλαδή το ύψος την 2^η φορά είναι $h_2=5000 + 2 \cdot 1000$ και όχι $5000 + h_1$

Ομάδα 7

E1	Κάτσε ξεκίνα γράψε h_1	
M2	Είναι 6000	
E1	Μην το πεις κατευθείαν. Ήταν 5000...	
M2	$H_1=5000 + 1000$	Αναδρομικός τύπος
E1	Ωραία h_2 , το επόμενο ύψος, πώς βρήκες το 7000;	
M2	$h_2=5000 + 2000$	Αναδρομικός τύπος
M1	$5000 + 2000$	Γενικός τύπος
E1	Το 2000 πώς το βρήκες;	
M1	Επειδή είναι η 2 ^η φορά	
E1	Ααα πάτησες 2 φορές g_0	Το τονίζει
M2	Άρα είναι $5000 + 50 \text{ φορές } 1000$ για να βρούμε την 50 ^η φορά	

Η ερευνητρια αρπάζεται από την ευκαιρία που της δίνει ο μαθητής M1, και τους υποδεικνύει τον δρόμο που πρέπει να ακολουθήσουν ώστε να βρουν τον γενικό τύπο της συνάρτησης.

Καταφέρνουν έτσι σχεδόν όλοι οι μαθητές να φτάσουν σε ένα επίπεδο παρόμοιο με το παρακάτω φύλλο εργασίας

Ομάδα 5

β) με σύμβολα (δηλ χρησιμοποιώντας τύπο);

$h_1 = 6000$ $h_2 = 7000$ $h_3 = 8000$ $h_1 = 5000 + 1000$ $h_2 = 5000 + 2000$ $h_3 = 5000 + 3000$

Άρα $h_n = 5000 + x \text{ φορές } 1000$

Ο τύπος $H_n=5000+x\text{φορές} \cdot 1000$ στον οποίο κατέληξε η συγκεκριμένη ομάδα μαθητών εν πρώτοις όψεως είναι σωστός. Δηλαδή για να βρω το ύψος την 50^η φορά που πατάω g_0 , θα πολλαπλασιάσω το 50 με το 1000 και θα το προσθέσω στο 5000. Το λάθος όμως των μαθητών βρίσκεται στους συμβολισμούς. Το γράμμα x θα έπρεπε να ταυτίζεται με το n .

Περίεργο συμβολισμό χρησιμοποίησε και η ομάδα 2 η οποία έσβησε τους παλιούς τύπους όπου σωστά χρησιμοποιούσε h_2 , h_3 , h_4 και έφτιαξε καινούριους χρησιμοποιώντας το Δh για το κάθε ύψος

β) με σύμβολα (δηλ χρησιμοποιώντας τύπο):

$$h_1 = 5000$$

$$h_2 = h_1 + 1000$$

$$h_3 = h_2 + 1000$$

$$h_4 = h_3 + 1000$$

$$h_5 = h_4 + 1000$$

$$\Delta h = 5000 + \kappa \cdot 1000$$

1) $\Delta h = h + 1000$

2) $\Delta h = h + 2 \cdot 1000$

3) $\Delta h = h + 3 \cdot 1000$

4) $\Delta h = h + 4 \cdot 1000$

5) $\Delta h = h + 5 \cdot 1000$

► Πού θα βρίσκεται το αεροπλάνο μετά από 50 go (δηλ την 50^η φορά);

$$\Delta h = 5000 + 50 \cdot 1000$$

$$\Delta h = 5000 + 50000$$

$$\Delta h = 55000$$

Οι περισσότερες ομάδες κατάφεραν να φτάσουν σε γενικό τύπο και να υπολογίσουν το h_{50} . Η δυσκολία που συναντούν οι μαθητές με τα σύμβολα φαίνεται και στην ομάδα 5. Η ομάδα αυτή ξεκίνησε θέτοντας $h_1=5000$, $h_2=5000+1000$, $h_3=5000+2000$ κοκ. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να δυσκολευτούν να βρουν το h_{50}

E1	Μην βιάζεστε να φτάσετε στο 50 ,κάντε παραδείγματα	Τους προτρέπει να υπολογίσουν τα h_1 , h_2 , h_3
M1	Κάτσε λίγο. Αφου εδώ πέρα είναι h_2 και είναι 1000 εδώ είναι h_3 και είναι 2000 άρα εδώ(εννοεί στο h_{50}) θα είναι 40000	Κάπου μπερδεύεται .Αντί να πει 49000 λέει 40000αντι δηλαδή να αφαιρέσει 1000 αφαιρεί 10000
		Γράφει ο M2: $h_a=5000+a \cdot 1000$
E1	Καλός φαίνεται ο τύπος σας αλλά πρέπει να προσέξετε λιγάκι .Για κάντε επαλήθευση τον τύπο που βρήκατε	Δεν συμφωνεί ο δείκτης a στο h με το $a \cdot 1000$
M1	Κυρία είναι 5000 συν 40000	Συνεχίζει να μπερδεύεται
E1	Για κάντε και ένα ακόμα	
M1	Ωραία $h_4=5000+3000$	
E1	3 φορές το 1000	Το τονίζει για να το προσέξουν
M2	Δεν μπορώ να πω αυτά με άλλη σειρά δηλ h_0 το h_1	Αντιλαμβάνεται ξαφνικά ότι τον δυσκολεύουν οι δείκτες
E1	Α πολύ ωραία	
M2	Ε λοιπόν τελείωσε !	Αλλάζουν τα h_1 , h_2 , h_3 σε h_0 , h_1 , h_2 κλπ και γράφουν τον τελικό τύπο

Παρ όλο που αρχικά δυσκολεύτηκαν οι μαθητές της ομάδας 5 κατάφεραν να ξεπεράσουν το πρόβλημα. Με την αντικατάσταση του h_1 σε h_0 έχουν ότι

$$h_0=5000 \quad h_1= 5000+1 \cdot 1000 \quad h_2=5000+2 \cdot 1000 \quad h_3=5000+3 \cdot 1000$$

και έτσι ο δείκτης του h συμφωνεί με τον αριθμό που πολλαπλασιάζεται με το 1000. Καταλήγουν λοιπόν στον τύπο $h_a = 5000 + a \cdot 1000$ με τον οποίο υπολογίζουν τελικά και το h_{50}

Είναι φανερό πως τους δυσκολεύουν τα σύμβολα και οι μεταβλητές. Το πέρασμα στην συμβολική αναπαράσταση δεν είναι τόσο απλό. Οι μαθητές της ομάδας 5 γράφουν $h_v = 5000 + x \cdot 1000$ μπερδεύοντας έτσι το δείκτη v με τη μεταβλητή x , ενώ οι μαθητές της ομάδας 7 δυσκολεύονται να καταλήξουν στον γενικό τύπο γιατί στα pr_d που έκαναν δεν ταυτίζεται ο δείκτης του h με τον αριθμό των φορών που πατάνε go . Ο μαθηματικός συμβολισμός είναι ένα εκπληκτικό και ισχυρό εργαλείο, η μάθηση του όμως είναι μια δύσκολη και περίπλοκη διαδικασία (*it is subtle and difficult to learn*) (Davis & Hersh, 1981, Schoenfeld & Arcavi, 1988). Ενώ οι μαθηματικοί κατανοούν εύκολα την έννοια της μεταβλητής από τον αντίστοιχο συμβολισμό σε πολλά και διαφορετικά πλαίσια, οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στη σχολική άλγεβρα με την κατανόηση της έννοιας αυτής, λόγω των πολλαπλών νοημάτων της και της απαιτούμενης ακρίβειας στη σήμανση και το χειρισμό (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

Το πέρασμα από την οθόνη του υπολογιστή στην γραφική αναπαράσταση

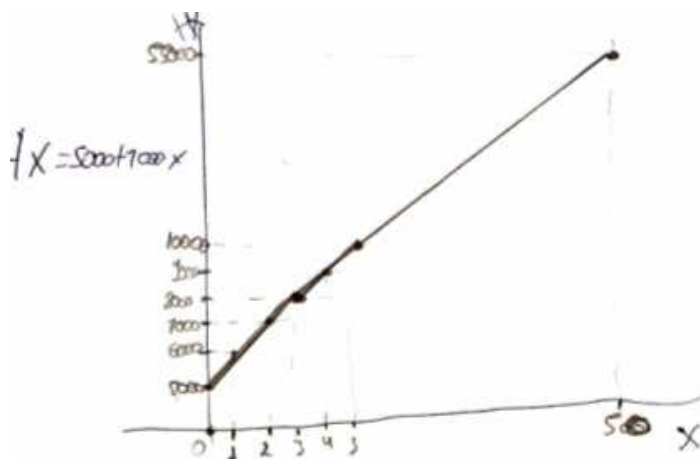
Σύμφωνα με τους (Leinhardt et al., 1990) οι γραφικές αναπαραστάσεις αφορούν 2 μεγάλες κατηγορίες: την ερμηνεία και την κατασκευή. Η ερμηνεία αναφέρεται κυρίως στην ικανότητα των μαθητών να διαβάζουν ένα γράφημα και να βγάζουν νοήματα από αυτό, ενώ η κατασκευή αναφέρεται στη γένεση κάτι καινούριου. Οι μαθητές κατασκευάζουν ένα γράφημα ή τσεκάρουν σημεία από μια σειρά δεδομένων που τα βρίσκουν είτε από τον πίνακα τιμών είτε από τον τύπο της συνάρτησης. Όλα αυτά γίνονται μέσα από μια διαδικασία επιλογής αξόνων, τοποθέτησης των μεταβλητών πάνω σε αυτούς, επιλογής της κλίμακας, αναγνώρισης των μοναδιαίων και τελικά τοποθέτησης των δοθέντων σημείων. Η ερμηνεία είναι αρκετά διαφορετική από την κατασκευή. Ενώ η ερμηνεία απαιτεί επαναδραστηριοποίηση πάνω σε έναν ορισμένο αριθμό δεδομένων, η κατασκευή χρειάζεται να γεννηθούν νέα κομμάτια τα οποία δεν δίνονται καν. Στην δική μας έρευνα οι μαθητές έπρεπε να ασχοληθούν με την κατασκευή ενός διαγράμματος που είναι αποτέλεσμα των όσων βλέπουν στην οθόνη. Θα πρέπει εδώ να τονίσουμε, πως αυτό το σκέλος της δραστηριότητας δεν τους άρεσε καθόλου. Από την αρχή δήλωσαν

μια αποστροφή για την γραφική αναπαράσταση. Ίσως αυτός να ήταν και ένας από τους λόγους που έκαναν τόσα πολλά λάθη στις γραφικές παραστάσεις. Τα λάθη αυτά θα μπορούσαν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

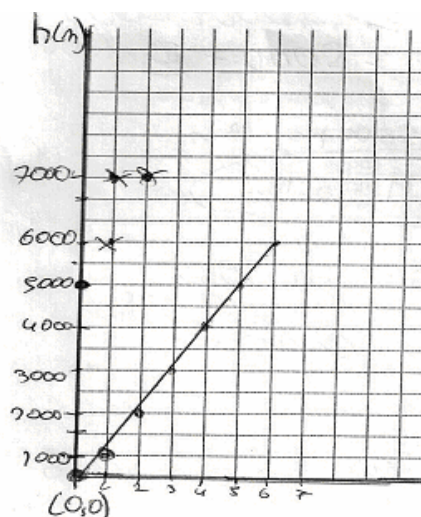
Διακριτές τιμές Καμία ομάδα (εκτός ίσως από την 5) δεν σκέφτηκε ότι οι τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτές 1,2,3....και κατά συνέπεια η γραφική παράσταση αποτελείται από μεμονωμένα σημεία Α(1,6000) Β(2,7000) Γ(3,8000) και όχι από μια συνεχή γραμμή. Τι σημαίνει άλλωστε ότι πατάω go 1,5 φορά ; Ένας πρώτος λόγος που το κάνουν αυτό, είναι ότι οι μαθητές στο σχολείο έχουν μάθει να ενώνουν τα σημεία, αφού μια καμπύλη ή μια ευθεία είναι αποτέλεσμα της συνένωσης των σημείων. Ένας δεύτερος λόγος είναι ότι αυτό που βλέπουν στην οθόνη τους είναι το αεροπλάνο να ανεβαίνει με σταθερό ρυθμό. Εδώ δημιουργείται ένα σημαντικό εμπόδιο. Το αεροπλάνο περνάει από όλες τις διαδοχικές θέσεις κατά την διάρκεια του χρόνου. Άρα το ύψος φαίνεται να παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές μετά την τιμή 5000. Η χρονικότητα της μεταβλητής είναι ένα σημαντικό εμπόδιο που έχει εντοπιστεί από πολλούς ερευνητές (Sierpinska 1992)

Ανεξάρτητη- Εξαρτημένη μεταβλητή Όλοι έβαλαν στους άξονες τις μεταβλητές ύψος και go. Δεν κατανόησαν όμως όλοι ποια ακριβώς γραφική παράσταση ζητείται.

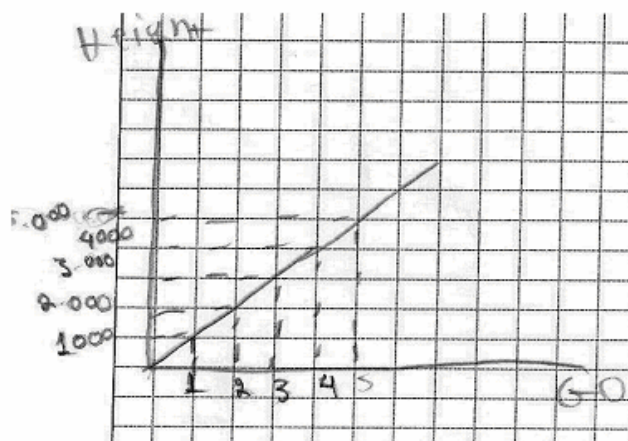
- Οι ομάδες 9,5,7 έκαναν την γραφική παράσταση του ύψους που βρίσκεται το αεροπλάνο για κάθε go του position (για 1 go το h=6000μ, για 2 go το h=7000κοκ) Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ακολουθεί την πορεία της γραμμικής $\psi = \alpha\chi + \beta$



- Οι ομάδες 4,5 έκαναν τη γραφική παράσταση της συνολικής μετατόπισης του αεροπλάνου για κάθε go. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση είναι αναλογική της μορφής $\psi = ax$



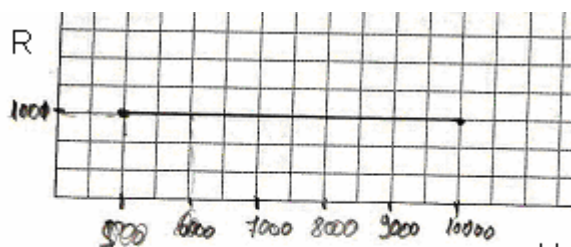
ομάδα 4



ομάδα 5

Η ομάδα 4 είναι σαν να έκανε 2 διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Η ευθεία γραμμή δείχνει τη συνολική μετατόπιση του αεροπλάνου σε κάθε go και τα τσεκαρισμένα σημεία (0,5000) (1,6000) (2,7000) αντιστοιχούν στο υψόμετρο του αεροπλάνου σε κάθε go. Αυτή η δεύτερη φαίνεται να είναι και η μόνη σωστή γραφική παράσταση που παρατηρήθηκε από όλες τις ομάδες αφού αποτελείται από διακριτά σημεία

- Η ομάδα 9 είναι η μοναδική που θεώρησε την απόσταση $R=1000$ η οποία δεν άλλαξε σαν εξαρτημένη μεταβλητή και το ύψος h ως ανεξάρτητη, οπότε το αποτέλεσμα ήταν μια σταθερή συνάρτηση. Οι μαθητές προφανώς παρασύρθηκαν από τον πίνακα τιμών και χωρίς να το πολυσκεφτούν θεώρησαν ότι οι δύο μεταβλητές είναι το R και το h



ομάδα 9

Η συνάρτηση ως συμμεταβολή

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 11

Τα όργανα έχουν χαλάσει και το αεροπλάνο πηγαίνει σε διαφορετική θέση από αυτή που εμείς του δίνουμε Βρες το λάθος της πορείας

Οδηγίες

Πήγαινε στο logo tab και πληκτρολόγησε #include “|fly1.lgo|.Από κάτω γράψε create και πάτα insert.Θα δημιουργηθεί το χαλασμένο αεροπλάνο. Στη συνέχεια γράψε την εντολή fly1(35 26 200) και πάτα ξανά insert. Πήγε το αεροπλάνο στην θέση 35 26 200 που του είπες; Στους παρακάτω πίνακες σημείωσε τις συντεταγμένες που δίνεις εσύ(σωστό)και τις συντεταγμένες που τελικά πηγαίνει το αεροπλάνο(λάθος)

Lat σωστό						
Lat λάθος						

Ο ίδιος πίνακας δίνεται για το long και για το height και ακολουθεί ένα τετραγωνισμένο φύλλο όπου καλούνται να κάνουν τις γραφικές παραστάσεις

Τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν είναι

```
to create
createavatar("|white| 37 25 10000 "|plane 1|)
end
```

```
to fly1 :a :b :c
setposition(:a-0.5 :b-0.7 :c*:c)

Print ("first "airplane "position :a-0.5 :b-0.7 :c*:c)
end
```

```
to fly2 :a :b :c
setposition (:a-0.1 :b-0.2 :c*:c-1000)
print("first "airplane "position :a-0.1 :b-0.2 :c*:c-1000)
end
```

Περιγραφή

Υπάρχει μια logo διαδικασία (η fly1) η οποία καθορίζει την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην θέση που δίνουμε εμείς στα lat long height (σωστό) και στην τελική θέση του αεροπλάνου(λάθος) αλλά οι μαθητές δεν την βλέπουν (με την βοήθεια της εντολής include). Δίνουν απλώς τιμές στο fly1 και το λογισμικό τους δείχνει την θέση που πηγαίνει το αεροπλάνο. Αν π.χ. δώσουν στο fly1 τιμές

fly1 (37 24 100)

το αεροπλάνο θα πάει στη θέση 36.5 23.3 10000

Έτσι λοιπόν το χαλασμένο αεροπλάνο δεν ακολουθούσε τις εντολές που του έδιναν και πήγαινε όπου ήθελε. Ή μάλλον, όχι ακριβώς όπου ήθελε, αφού πάντα έκανε το ίδιο λάθος. Οι μαθητές πρέπει να βρουν αυτό το λάθος ν' ανακαλύψουν την κρυμμένη σχέση (πρδ $\psi = \chi - 0.5$ για το lat στο fly1). Είναι μια αναζήτηση που την είδαν λίγο και σαν παιχνίδι, πράγμα που αποδείχτηκε ότι ήταν θετικός παράγοντας σε όλη την μαθησιακή διαδικασία.

Αρχίζουν λοιπόν και καταγράφουν τις τιμές σε ένα φύλλο εργασίας που τους έχει δοθεί με σκοπό την καλύτερη παρατήρηση. Στην συνέχεια τους ζητείται να προσπαθήσουν να εκφράσουν την σχέση που βρήκαν με λόγια, με σύμβολα και τέλος με γραφική παράσταση. Αμέσως μετά οι μαθητές αρχίζουν να δίνουν τιμές στο fly1 και κοιτούν το αποτέλεσμα. Πχ για fly1 (35 26 100) οι μαθητές παρατηρούν ότι το αεροπλάνο τους πηγαίνει στη θέση 34,5 25,3 10000. Οι μαθητές ελέγχουν την νέα θέση του αεροπλάνου με 2 τρόπους:

- 1) Κάποιες ομάδες κοιτούν στο κάτω μέρος του logo tab όπου το λογισμικό παρέχει την δυνατότητα να βλέπουμε τις συντεταγμένες της θέσης που βρίσκεται το αεροπλάνο, και
- 2) κάποιες άλλες ομάδες κοιτούν το position στο avatar tab.

Συνειδητοποιούν ότι η εντολή που δίνουν κινητοποιεί το αεροπλάνο και ενθουσιάζονται

E1	Γράψτε τώρα fly1(35 26 100) και πάτα insert	Το κάνουν και βλέπουν το αεροπλάνο που προχωράει
M1	Ωχ κουνήθηκε είναι ζωντανό	Αμέσως μετά διαβάζει τις οδηγίες του φυλλαδίου

Οι τιμές που δίνουν όμως στο fly1 δεν κινούν πάντα το αεροπλάνο. Αυτό προφανώς γίνεται γιατί δεν είναι μέσα στον ελληνικό χώρο. Οι μαθητές όμως δεν το

θυμούνται και πολλοί, απορροφημένοι από την δραστηριότητα, δεν άκουσαν καν την υπόδειξη της ερευνήτριας

Ομάδα 4

E1	Συνεχίστε δίνοντας δικές σας τιμές, όμως να είναι μέσα στην Ελλάδα	η ερευνήτρια το λέει σε όλη την τάξη οι μαθητές όμως δεν την προσέχουν
M2	Βάλε στην τύχη 37 25 και 250.Πάμε ;	
M2	Φύγαμε !	Το αεροπλάνο κινείται
M1	Δεξιά πήγαινε να δούμε	Εννοεί κάτω στη logo να δουν τις τιμές
M1	36,5 25,3 62500	Ο μ2 γράφει
M2	Πάμε 38 27 και 25...5	
M1	Όχι μην το βάλεις	Εννοεί το 255, είναι όμως αργά έχει πατήσει insert
M2	Άντε σημείωνε 38- 37,5 27- 26,3 και 255- 65025	Συμπληρώνουν τους πίνακες
M2	Ωραία να βάλουμε ένα 40 ένα 30 και ένα 300 όχι πολύ είναι, 270 .	Πατούν insert
M2	Ωχ ίσα ίσα	Βρίσκονται στην ΒΑ γωνία του χάρτη
M1	39,5 29.3 και	
M2	29,3 και 270 72900	Γράφουν

Ομάδα 5

M2	Δώσε άλλα νούμερα	Δίνουν 46 35 280 και το αεροπλάνο δεν πηγαίνει
M2	Κλείσε την παρένθεση	Δίνουν 46 35 201 ,εξακολουθεί να μην κινείται
E	Γιατί δεν μπορεί να πάει;	Εκνευρισμένος
M2	Δεν αλλάζει το height νομίζω	Δίνουν 46 35 150
M2	Δεν πάει ούτε πάνω από 200 ούτε κάτω από 200	Δεν σκέφτονται ότι μπορεί να φταίει κάτι άλλο

Ομάδα 7

M2	Τυχαία, ναι τυχαία δίνανε αριθμούς που μας βολεύουν	Στα lat long height εννοεί
E	Τι αριθμούς δηλ;	
M2	Πάνω κάτω κοντά σ' αυτούς που μας δίνετε εσείς	Εννοεί κοντά στις πρώτες τιμές 35 26 200 που έδωσε η ερευνήτρια στο φύλλο εργασίας

Όπως φάνηκε από τα παραπάνω επεισόδια της ομάδας 4, 5 και 7 οι μαθητές έβαζαν τιμές κυριολεκτικά στην «τύχη». Η ομάδα 7 έδινε τιμές κοντά σ' αυτές που τους δόθηκαν σαν παράδειγμα. Κανένας μαθητής δεν σκέφτηκε ότι οι τιμές που έχουν οι γεωγραφικές συντεταγμένες στην Ελλάδα είναι συγκεκριμένες. Τις είχαν άλλωστε υπολογίσει στο 2^ο μάθημα. Μόνο που είχε μεσολαβήσει αρκετός καιρός από τότε μιας και είχε γίνει κατάληψη στο σχολείο. Το λογισμικό όμως τους αναγκάζει να το θυμηθούν αφού το αεροπλάνο δεν κινείται σε τιμές εκτός της Ελλάδας. Αυτή η ακινησία του αεροπλάνου

εκνευρίζει κάποιους. Το “avatar can’t move” τους ενοχλεί. Μετά από αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες αναγκάζονται να ζητήσουν την βοήθεια της ερευνήτριας .

Τελικά όλες οι ομάδες, καταγράφουν τις παρατηρήσεις τους σε τρεις διαφορετικούς πίνακες που τους έχουν δοθεί στα φύλλα εργασίας. Ένας πίνακας είναι για το lat , ένας για το long και ένας για το height

Lat σωστό	36	37	38
Lat λάθος	35,5	36,5	37,5

Long σωστό	26	27	28
Long λάθος	24,3	26,3	27,3

Height σωστό	200	150
Height λάθος	40000	22500

Στην συνέχεια οι μαθητές παρατηρώντας τις τιμές που έχουν συγκεντρώσει βρίσκουν εύκολα ότι το χαλασμένο αεροπλάνο χάνει 0,5 στο lat και 0,7 στο long.

Ομάδα 9

M2	Έχουμε βρει ήδη κατά πόσο αυξάνεται ή μειώνεται	Μετά από αρκετές δοκιμές
E	Πόσο ;	
M2	Εδώ μειώνεται κατά μισό και εδώ κατά 7 εε 0.7 και εδώ πέρα επί 200	Εννοεί το lat το long και το height Το αρχικό ύψος ήταν 200 και έγινε 40000
E	Επί 200; Ωραία δηλ 150 επί 200πάει 22500	
E	Δηλ κάθε φορά πολ/εται επι 200	
M2	ναι	
M1	Όχι δεν πάει εδώ	Παρατηρεί ότι δεν ισχύει για h=150

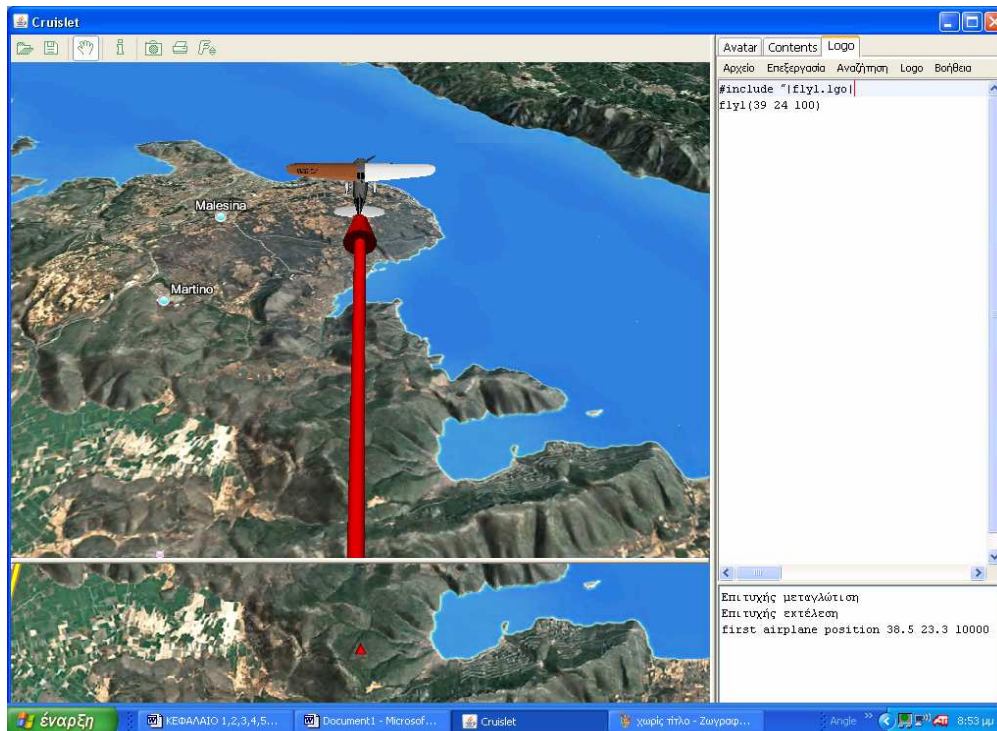
E	Οι τιμές που δίνετε ήταν τυχαίες;	Στα lat long height
M2	Αυξάνονται κατά 10	Έδωσαν στο lat 36, 46 στο long 26,36
M1	Αλλά λίγο πολύ ήταν τυχαίες αυξάνεται το ένα αυξάνεται το άλλο	

Ομάδα 4

M2	Βάλε στην τύχη 37 25 και 250.Πάμε ;	
M2	Φύγαμε !	Το αεροπλάνο κινείται
M1	Δεξιά πήγαινε να δούμε	Εννοεί κάτω στη logo να δουν τις τιμές
M1	36,5 25,3 62500	Ο μ2 γράφει
M2	Πάμε βάλε ένα μεγαλύτερο 38 26 και 251	
M1	Όχι μην το βάλεις	Εννοεί το 251, είναι όμως αργά έχει πατήσει insert
M2	Άντε σημείωνε 38- 37,5 26- 25,3 και 251- 62901	
M1	Το ίδιο άλλαξαν κατά ένα	

Ομάδα 4

M1	Κατάλαβα ότι κάθε φορά στο lat κάνει λάθος γύρω στις μισές μοίρες στο long περίπου 0.7 και στο ύψος κάνει τεράστιο λάθος άμα το στείλουμε 200 αυτό πάει 200 φορές, 200επι 200
----	---



Εικόνα 12:Δραστηριότητα 11 (εύρεση της κρυμμένης συνάρτησης)

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της συμμεταβολής (Carlson et al, 2002) στα παραπάνω επεισόδια οι μαθητές, μέσα από την πλοήγηση στο περιβάλλον του cruilet, ανέπτυξαν κυρίως τα 3 πρώτα επίπεδα συμμεταβολής. Στην περίπτωση μας οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες που εμείς δίνουμε στο αεροπλάνο(latσωστό, longσωστό, heightσωστό) και εξαρτημένες είναι οι συντεταγμένες στις οποίες πηγαίνει το αεροπλάνο του οποίου τα όργανα έχουν χαλάσει (latλάθος, longλάθος, heightλάθος).

Οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται αμέσως πως οι τιμές του latλάθος και του latσωστού είναι σε άμεση αλληλεξάρτηση μεταξύ τους.

Στα παραπάνω επεισόδια λοιπόν οι μαθητές

☞ παρατηρούν ότι κάθε αλλαγή στο lat που εμείς δίνουμε (latσωστό) έχει σαν αποτέλεσμα να αλλάζει και το lat στο οποίο πηγαίνει το χαλασμένο αεροπλάνο(latλάθος)(E1)

☞ αναγνωρίζουν την κατεύθυνση αυτής της αλλαγής δηλαδή αν αυξήσω το latσωστό τότε αυξάνει και το lat λάθος(E2)

☞ βρίσκουν την ακριβή τιμή αυτής της αλλαγής δηλαδή όσο αλλάζει το latσωστό τόσο αλλάζει και το latλάθος (E3)

Αξιοπρόσεχτος ήταν ο τρόπος που δούλεψε η ομάδα 4 στην προσπάθειά της να βρει τον τύπο του ύψους σε μια αντίστοιχη διαδικασία την fly2. Ο ζητούμενος τύπος είναι τώρα $h_l = h_s^2 - 1000$

Ομάδα 4

M1	Όχι όχι κοίτα 11100-9000= 2100 ωραία; Θα κάνουμε τώρα 13400-11100=2300	Έχει βρει ότι το 100→9000 Το 110→11100 και το 120→13400
M1	Το βρήκα 2300 προστίθεται ανά 10, 2300	
M2		Έχει μείνει άφωνος
M1	Αν κάνουμε 100 και πάει 110 το 9000 γίνεται 11100 δηλ +2300 αν πάει από 110 σε 120 πάλι προστίθεται 2300	

Μπορεί ο μαθητής να έχει λάθη στην σκέψη του,(την πρώτη φορά είναι 2100 την δεύτερη είναι 2300) ο τρόπος όμως που δούλεψε για να βρει τον σωστό τύπο, φανερώνει πως αναπτύσσει μια λογική συμμεταβολής που αγγίζει το επίπεδο 4. Στην προσπάθειά του να βρει τον τύπο του ύψους ελέγχει το ποσό που μεταβάλλεται το ύψος του αεροπλάνου (εξαρτημένη μεταβλητή) ενώ κάνει ίσες αλλαγές στις τιμές που του δώσαμε εμείς να πάει (ανεξάρτητη μεταβλητή). Όταν έδινε την τιμή $h=100\mu$ το αεροπλάνο πήγαινε στα 9000μ ενώ όταν έδινε την τιμή 110 πήγαινε στα 11100. Για διαφορά 10 μέτρων το αεροπλάνο ανέβαινε παραπάνω 2100μ. Ο μαθητής αναπτύσσει μια λογική συμμεταβολής του επιπέδου E3 αφού συντονίζει τις αλλαγές στην εξαρτημένη μεταβλητή με τις αλλαγές στην ανεξάρτητη. Στην συνέχεια βρίσκει τα ίδια πράγματα για το ύψος 120. Για διαφορά άλλων 10 μέτρων το αεροπλάνο τώρα ανέβηκε 2300μ. Οι ομοιόμορφες αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή συνεχίζονται και ο μαθητής βρίσκεται πολύ κοντά στο 4 επίπεδο της συμμεταβολής. Σταματάει όμως τις προσπάθειες και απογοητεύεται. Ο στόχος του, να βρει τον τύπο του ύψους, δεν επιτεύχθηκε. Ας μην

ξεχνάμε πως απευθυνόμαστε σε μαθητή της Α Λυκείου που δεν έχει ακούσει τίποτε ακόμα για ρυθμό μεταβολής..

Συμμεταβολή και αναλογία

Οι μαθητές ερευνώντας τις σχέσεις των lat long που είναι γραμμικές, ανέπτυξαν λογικές συμμεταβολής που πλησιάζουν το τρίτο επίπεδο Στο height τα πράγματα δυσκολεύουν. Είδαν αμέσως ότι το ύψος μεγαλώνει πολύ σε σχέση με την τιμή που εμείς του δίνουμε. Το χαλασμένο αεροπλάνο αντί να πάει σε υψόμετρο 100μ πηγαίνει στα 10000μ, αντί να πάει στα 200μ πηγαίνει στα 40000μ. Στην προσπάθειά τους να βρουν πόσο αλλάζει το ύψος, καταλήγουν αρκετοί στην αναλογία. «Το ύψος πολλαπλασιάζεται πάντα επί 200» λέει ο μαθητής της ομάδας 9. Ο αναλογικός συλλογισμός επανέρχεται καθώς είναι βαθιά ριζωμένος στην σκέψη των μαθητών.

Την ίδια άποψη για αναλογικά μεγέθη έχουν και οι μαθητές άλλων ομάδων

Ομάδα 5-αναλογία στο ύψος

E1	Για να δω έχετε βρει τι λάθος κάνει ;	
M1	Βάζουμε εδώ 35 θα πάει 34,5 ,βάζουμε εδώ 28 θα πάει 27,3 και εδώ είναι ανάλογα	Το πρώτο είναι για το lat το δεύτερο για το long και το τελευταίο είναι για το ύψος
E1	Ανάλογα είναι ;	
M1	Εε εδώ πέρα είναι πολύ δύσκολα	Εννοεί το ύψος

Ομάδα 5-αναλογία στην γραφική παράσταση

M2	Όχι εδώ είναι λάθος κυρία ανάποδα τα είπατε εδώ είναι το σωστό Βάλε εδώ 35 και εδώ 34,5 και τα ενώνεις	Γράφει ο μ2 το σχήμα βάζοντας στον οριζόντιο άξονα το lat λάθος και στον κατακόρυφο το lat σωστό
M1	Ε μετά είναι ανάλογα πάει έτσι	Δείχνει ευθεία

Ομάδα 4-αναλογα τα lat long

M1	Και πώς είναι; δεν είναι ανάλογα ! πως θα την κάνουμε;	Μιλάει για την γραφ παράσταση του ύψους και εννοεί ότι τα προηγούμενα ήταν εύκολα και τα έκαναν γιατί ήταν ανάλογα
----	--	--

Ομάδα 9-αναλογία στην γραφική παράσταση

M1	Ναι αλλά πρέπει να έχει σωστές αποστάσεις μεταξύ τους	Κάνουν την γραφική παράσταση
M2	Εντάξει τώρα ..θέλει να παρατηρήσουμε ότι θα είναι ανάλογα μάλλον	

Ο αναλογικός συλλογισμός φαίνεται να είναι βαθιά ριζωμένος στη σκέψη των μαθητών και χρησιμοποιείται αυθόρμητα και ασυνείδητα Η τάση της ευρείας εφαρμογής του αναλογικού μοντέλου, ακόμη και σε μη γραμμικές καταστάσεις αναφέρεται στη

βιβλιογραφία ως ψευδαίσθηση της αναλογίας («illusion of linearity»), (De Bock et al, 1998). Η αναλογικότητα φαίνεται να είναι σε τέτοιο βαθμό ενσωματωμένη στον τρόπο σκέψης των μαθητών που πολύ εύκολα παραπλανιούνται και χειρίζονται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική (Freudenthal, 1983).

Στην περίπτωση του ύψους βέβαια η αναλογία που εκφράζουν οι μαθητές είναι και αυτή μια έκφραση της συμμεταβολής του h σωστό και h λάθος, δύο δηλαδή μεταβλητών ποσοτήτων. Οι μαθητές βρίσκονται στο 2^ο επίπεδο της συμμεταβολής και δεν μπορούν να φτάσουν στο 3^ο όπου θα πρέπει να βρουν την ακριβή τιμή αυτής της μεταβολής. Οι συνεχείς ερωτήσεις της ερευνήτριας έχουν σαν αποτέλεσμα να αμφισβητήσουν οι μαθητές την αρχική τους εικασία και να βρεθούν σε κατάσταση προβληματισμού. Η ομάδα 9, όπως φαίνεται παραπάνω, αντιλαμβάνεται ότι η αρχική τους διαίσθηση, πως το ύψος πολλαπλασιάζεται επί 200, είναι λανθασμένη αφού δεν ισχύει για $h=150$. Αρχίζουν λοιπόν να δίνουν καινούριες τιμές στο ύψος

M1	90000 πάει στο 300	Έχει βάλει στο direction τιμές 50 40 300
M2	160000 στο 400	Αλλάζει τιμές στο ύψος h
M1	150 επί 150, 160 επί 160, 170 επί 170 έτσι είναι! Επὶ τον εαυτό του!	Χαίρεται που το βρήκε !
M2	Σωστά !	Το βρήκαν!

Μέσα από τις συνεχείς επαναλήψεις που τους προσφέρει το λογισμικό καταγράφουν και άλλα ύψη στον πίνακα τιμών. Δίνοντας την τιμή 300 στο fly1 το αεροπλάνο πηγαίνει στα 90000μ, δίνοντας 400 πηγαίνει στα 160000μ. Έτσι καταφέρνουν να ξεπεράσουν την αναλογική σκέψη και να εκφράσουν την τελική σχέση: «το ύψος είναι επί τον εαυτό του». Χαίρονται μάλιστα και πανηγυρίζουν γι' αυτό. Εύκολα λοιπόν τώρα φτάσουν στον τελικό σωστό τύπο: $h_{\text{λάθος}} = h_{\text{σωστό}}^2$ (E3)

Εδώ φυσικά μιλάμε για μια τετραγωνική συνάρτηση. Οι μαθητές όμως δεν το αντιλαμβάνονται αντιδρούν μάλιστα όταν η ερευνήτρια προσπαθεί να τους το θυμίσει

Ομάδα 9

E	Πως πήγαμε εδώ;	Κοιτάει τα φύλλα εργασίας
E	Μπράβο, θέλω και τύπο, λόγια τι κάνατε κάθε φορά πώς βρήκατε το λάθος και προσέξτε να το γράψετε στη σωστή θέση	Εννοεί το lat να γραφτεί στο φύλλο του lat, το long στο φύλλο του long kok
M2	Εδώ βρήκαμε για το ύψος ότι κάθε φορά πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του	
E	Κάπως την λέμε αυτή τη συνάρτηση;	

M2	Ω ! μη μου βάζεις τα μαθηματικά μέσα, μη μου βάζεις τα μαθηματικά μέσα!!	Ο μαθητής αντιδρά στο άκουσμα της λέξης συνάρτηση
----	--	---

Οι μαθητές είχαν ήδη βρει τη σχέση των lat long, την είχαν εκφράσει με λόγια και τώρα είχαν βρει και το ύψος. Παρ' όλα αυτά δεν είχαν αντιληφθεί ότι κάνουν μαθηματικά και μάλιστα συναρτήσεις. Και μόνο η αναφορά στην λέξη συνάρτηση ήταν αρκετή για ν' αντιδράσει ο μαθητής αρνητικά. Είναι φανερό πως η σχέση του με τα μαθηματικά είναι κακή, ή τουλάχιστον έτσι έχει μάθει να πιστεύει.

.

Γραφική αναπαράσταση της συμμεταβολής

Οι μαθητές παρατηρούν, καταγράφουν, κάνουν εικασίες, βγάζουν συμπεράσματα. Βλέπουν στην οθόνη του υπολογιστή τους πού ακριβώς πηγαίνει το χαλασμένο αεροπλάνο και καταγράφουν τις παρατηρήσεις τους στον πίνακα τιμών. Το λάθος που κάνει το αεροπλάνο εντοπίζεται και περιγράφεται εύκολα κυρίως λεκτικά: «το αεροπλάνο χάνει 0,5 στο lat, 0,7 στο long και στο ύψος πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του». Η συμβολική αναπαράσταση δυσκολεύει κάποιους, στο τέλος όμως όλοι τα καταφέρνουν. Οι τύποι

$$\text{lat}\lambda\theta\omicron\varsigma = \text{lat}\sigma\omega\sigma\tau\acute{o} - 0,5$$

$$\text{long}\lambda\theta\omicron\varsigma = \text{long}\sigma\omega\sigma\tau\acute{o} - 0,7$$

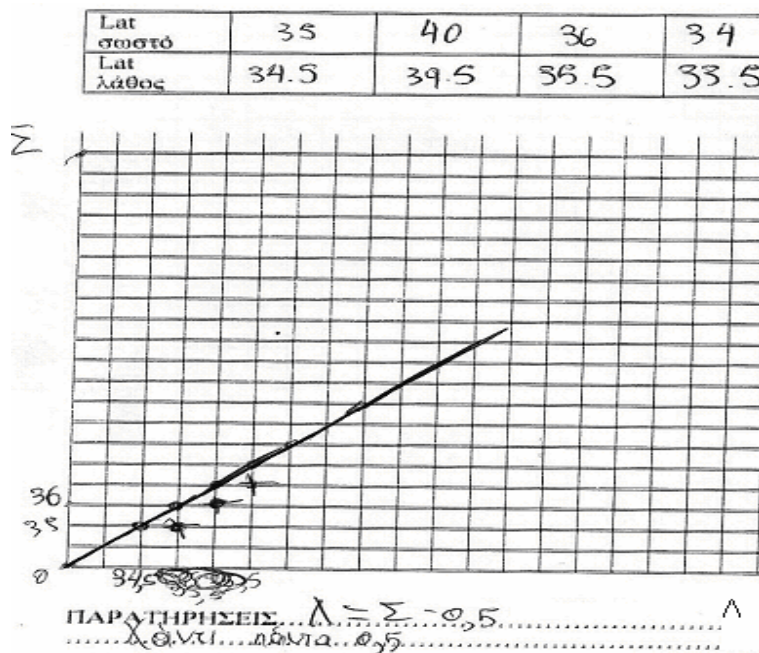
$$\text{h}\lambda\theta\omicron\varsigma = \text{h}\sigma\omega\sigma\tau\acute{o}^2$$

ήταν γραμμένοι σε όλα τα φύλλα εργασίας.

Τα πράγματα όμως αρχίζουν να δυσκολεύουν όταν οι μαθητές καλούνται να κάνουν γραφικές παραστάσεις. Οι δύο μεταβλητές πρέπει να πάρουν μια θέση στους άξονες. Οι μαθητές τσεκάρουν τους άξονες του γραφήματος ακολουθώντας εκφράσεις που αποδεικνύουν αναγνώριση ότι η μια μεταβλητή αλλάζει καθώς αλλάζει και η άλλη. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο (Carlson et al, 2002) αυτή είναι η πιο συνηθισμένη συμπεριφορά που παρατηρείται από τους μαθητές στο επίπεδο E1. Στην συνέχεια κατασκευάζουν γραμμές που ανεβαίνουν καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά στο γράφημα, γεγονός που υποδεικνύει μια κατανόηση της κατεύθυνσης της αλλαγής στην εξαρτημένη μεταβλητή ενώ θεωρούνται αυξήσεις στην ανεξάρτητη. Πχ όσο μεγαλώνει

το latσωστό τόσο μεγαλώνει και το latλάθος. Βρισκόμαστε στο επίπεδο E2. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές έκαναν μερικά βασικά λάθη:

☞ Άλλαξαν τις μεταβλητές πάνω στους άξονες. Δηλαδή έβαλαν την ανεξάρτητη μεταβλητή στον κατακόρυφο άξονα και την εξαρτημένη στον οριζόντιο κάτι που έρχεται σε αντίθεση με ότι έχουν μάθει στο Γυμνάσιο.



Στο παραπάνω διάγραμμα της ομάδας 5 φαίνεται η αλλαγή των ρόλων. Τυπικά το latσωστό παίζει το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής και το latλάθος το ρόλο της εξαρτημένης. Το αποτέλεσμα δεν αλλάζει στο γράφημά μας, αφού εξακολουθεί να παραμένει ευθεία στην περίπτωση των lat, long. Είναι όμως λάθος για το ύψος αφού η αλλαγή των μεταβλητών στους άξονες έχει σαν αποτέλεσμα και αλλαγή της καμπύλης. Παρ' όλα αυτά οι μαθητές δεν φαίνεται να το προσέχουν και σχηματίζουν την καμπύλη της τετραγωνικής συνάρτησης όπως την ξέρουν (έχοντας τα κοίλα κάτω). (ομάδα 5,9)

Ομάδα 9

M1	Πειράζει αμα βάζουμε αριθμούς όχι από αυτούς που είναι πάνω; με τη σειρά	Ήθελε να βάλει το 1, 2 ,3
----	--	---------------------------

Ομάδα 5

M2	Με δικές μας συντεταγμένες όμως όχι μ' αυτές, πειράζει να βάλουμε άλλες τιμές δικές μας	
----	---	--

β) δεν δίνουν καθόλου σημασία στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Σημασία γι αυτούς έχει το σχήμα της συνάρτησης και όχι τα όρια της γραφικής παράστασης. Για τους μαθητές η γραφική παράσταση είναι μια συνεχής γραμμή που δεν έχει αρχή και τέλος. Δεν μπορούν ίσως να κατανοήσουν πως οι συναρτήσεις $\psi=2\chi$ με $\chi<0$ και $\psi=2\chi$ με $3<\chi<9$ είναι διαφορετικές .

☞Τέλος, ένα ακόμη λάθος που έκαναν οι περισσότεροι στις γραφικές παραστάσεις είναι ότι όλες οι ευθείες περνούσαν από την αρχή των αξόνων. Η εμμονή στο αναλογικό μοντέλο που αναφέραμε πρωτύτερα φαίνεται και στην γραφική αναπαράσταση. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της ομάδας 5 που μόλις έχουν τελειώσει την γραφική παράσταση της λατλάθος =λατσωστό -0.5 .

M1	Κυρία εντάζει το κάναμε έχει πάει ανάλογα, νατο πάει έτσι φσσσσσ	Κάνει μια γραμμή προς τα πάνω που περνά από το (0,0)
E	Εντάζει βάλανε όλες τις τιμές ;	
M2	Βασικά ένα σημείο χρειάζεται κυρία και το (0,0) που το βρήκαμε από εδώ	Δείχνει τον τύπο
E1	Που βγαίνει το 0,0 σοβαρά μιλάς, ναι ε;;;	Απορεί και κοιτάζει
M2	Βασικά δεν βγαίνει, άλλα δεν πειράζει βγαίνει το μείον 0,5	
M1	Περίμενε περίμενε εδώ είναι όλη η ουσία. Εδώ αν βάλεις 0 θα βγει το λάθος λατ 0;	
M2	Όχι	
E	και τότε γιατί περνάει από το 0,0;	
M3	Από το 0,5 περνάει	Εννοεί το -0,5
M2	Ε γιατί έτσι το μάθαμε, δεν έχουμε μάθει κάτι άλλο στα μαθηματικά	

Παρ όλο που καταλαβαίνουν ότι η γραφική παράσταση δεν περνά από την αρχή των αξόνων γιατί αν δώσω στο λατσωστο τιμή 0 τότε το λατλάθος θα γίνει -0,5 ωστόσο κάνουν την γραφική παράσταση λάθος γιατί «έτσι έχουν μάθει». Στην επόμενη όμως γραφική παράσταση για το λογκκλάθος =λογγκσωστό -0,7 ο M2 το διορθώνει και βάζει το λογκκλάθος να τέμνει τον άξονα στο -0,7

M1	Γιατί έβαλες -0,7 υπάρχει -0,7;;;	Έβαλε μια τιμή αριστερότερα από το 0 στον οριζόντιο άξονα που είχε το λατλαθος και ο M1 τον κοροϊδεύει
M2	Ρε βλάκα του ελέους ,αυτό είναι το λάθος και αυτό είναι το σωστό	Οι άλλοι 2 γελούν
M2	0,7 έχω βάλει	Μιλάει στον εαυτό του
M3	Μείον 0,7 έχεις βάλει	Του φωνάζει
M2	Εε ναι!	
M3	0,7!	Εννοεί 0,7 πρέπει να βάλεις
M2	Τι λέτε ρε νουμπάδες!	
M3	Μα δεν υπάρχει	Εννοεί δεν υπάρχει αρνητική τιμή
M2	Για κοιτάτε για $\Lambda=0$ πόσο έχουμε το Σ	
M1	$\Lambda =\Sigma-0,7$	Βλέπει ότι για $\Lambda=0$ βγαίνει το $\Sigma=+0,7$
M2	κάτι λάθος έχω κάνει	Ξαφνικά βλέπει λάθος γιατί έχει βάλει το -0,7 στον άξονα του λογκκλάθος

Είναι γεγονός πως οι μαθητές όλοι έχουν δίκιο από την δική του πλευρά ο καθένας. Οι M3 M1 γελούν με τον συμμαθητή τους γιατί θεωρούν πως είναι αστείο να μιλούν για αρνητικές τιμές στα λατ και λογκκ. Τι θα πει λατ = -0,5; Το λογισμικό επηρεάζει τους 2 μαθητές στην λήψη απόφασης. Από την άλλη πάλι ο M2 στην προσπάθειά του να πετύχει καλύτερο σχήμα ξεχνάει το λογισμικό και χρησιμοποιεί την αρνητική τιμή. Την θέτει όμως σε λάθος άξονα. Έχουν μπερδέψει την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη μεταβλητή και την αναπαράσταση της κάθε μιας στον άξονα.

Η αντίστροφη συνάρτηση μέσα στο πλαίσιο της συμμεταβολής

Έρευνες πάνω στις αναπτυσσόμενες έννοιες των μαθητών για την συνάρτηση (Breindenbach, Dubinsky, Hawks & Nicols 1992) έδειξαν ότι η εικόνα της συνάρτησης σαν διαδικασία που δέχεται δεδομένα (inputs) και παράγει τιμές (outputs) είναι βασική για την ανάπτυξη μιας πλήρους εικόνας της συνάρτησης. Αυτή η άποψη είναι επίσης θεμελιακή για τον συντονισμό των εικόνων 2 μεταβλητών που αλλάζουν διαδοχικά η μια μετά την άλλη. (Carlson, et al, 2002). Σύμφωνα με την Carlson et al, 2002 οι μαθητές αρχικά για να κατανοήσουν καλύτερα την συνάρτηση θα πρέπει να κινηθούν από την έννοια ως ενέργεια(action) στην έννοια ως διεργασία.(process).Στην συνέχεια έχοντας μια γενικευμένη άποψη από inputs και outputs μπορούν να σκεφτούν την συνάρτηση σαν μια διεργασία η οποία μπορεί να αντιστραφεί. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι διάφορες έννοιες που έχει η αντίστροφη συνάρτηση για τους μαθητές: σαν αλγεβρικό πρόβλημα, σαν γεωμετρικό πρόβλημα και σαν μια διεργασία που αντιστρέφεται

a) Inverse as Algebra:

$$y = \frac{2x+1}{7-x} \text{ (original function)}$$

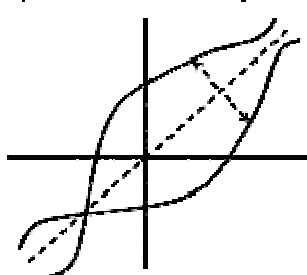
$$x = \frac{2y+1}{7-y} \text{ (switch } x \text{ \& } y\text{)}$$

$$7x - xy = 2y + 1 \text{ (expand)}$$

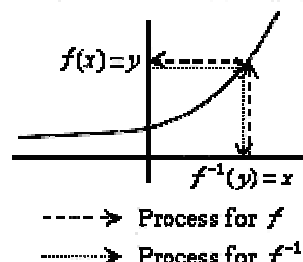
$$-xy - 2y = 1 - 7x \text{ (move } y \text{ to one side)}$$

$$y = \frac{7x-1}{x+2} \text{ (solve for } y\text{)}$$

b) Inverse as Geometry:



c) Inverse as Reversal of a Process:



Μαθητές που κατέχουν μόνο την ενεργητική κατεύθυνση (action view) του σχήματος a) ή b) δεν κατανοούν το γιατί μια διαδικασία δουλεύει και είναι ανίκανοι να αναγνωρίσουν ακόμα και απλές καταστάσεις στις οποίες αυτές οι διαδικασίες εφαρμόζονται. Το μόνο που οριακά κατανοούν είναι ενέργειες όπως να αντιστρέψουν τα x και y και να λύσουν ως προς y (σχήμα α) ή να δουν το γράφημα της f συμμετρικό με την f^{-1} ως προς την ευθεία $y=x$ (σχήμα β). Αντίθετα οι μαθητές μέσα από την διεργασία (process view) του σχήματος γ είναι περισσότερο ικανοί να κατανοήσουν τις 2 πτυχές της συνάρτησης όπως είναι η σύνθεση και η αντιστροφή. Και αυτό γιατί θεωρούν την αντιστροφή σαν ανάποδη διαδικασία έτσι ώστε τα παλιά outputs να γίνονται νέα inputs και το ανάποδο. Ρωτώντας «τι πρέπει να κάνει κάποιος για να πάει πίσω στις αρχικές τιμές» είναι ικανοί να απαντήσουν σε ένα ευρύ πλήθος ερωτήσεων για τις αντίστροφες συναρτήσεις (Carlson et al,1996)

Κάτι ανάλογο συνέβει στην δική μας έρευνα. Συνεχίζοντας το προηγούμενο σενάριο του χαλασμένου αεροπλάνου, όπου οι μαθητές έδιναν γεωγραφικές συντεταγμένες στο αεροπλάνο (inputs) και αυτό πήγαινε σε άλλες θέσεις (outputs) δόθηκε στους μαθητές μια νέα δραστηριότητα που στόχο είχε την αντιστροφή συνάρτηση

Δραστηριότητα 12

A) Στην προηγούμενη δραστηριότητα δημιουργήσαμε ένα αεροπλάνο στη θέση 37 25 100 και το πήγαμε σε διάφορες τοποθεσίες. Παρατηρήσαμε ότι έκανε λάθος στην πορεία του

γιατί είχαν χαλάσει τα όργανα Γνωρίζοντας το λάθος που κάνει μπορείς να ξαναπάς το αεροπλάνο στην θέση 39 22 10000; Πως θα το καταφέρεις αυτό;

B)Μπορείς να προσγειώσεις το αεροπλάνο στην Ρόδο σε υψόμετρο 64μ;

Οι μαθητές τώρα πρέπει τώρα να χειριστούν μια αντίστροφη διαδικασία.(αντίστροφη συνάρτηση). Ξέρουν δηλαδή τα lat long height της θέσης που θέλουν να πάνε και πρέπει να δώσουν συντεταγμένες(όχι τυχαίες) στο χαλασμένο αεροπλάνο. Στην αρχή οι περισσότεροι μπερδεύτηκαν. Ήξεραν ότι το αεροπλάνο χάνει 0,5 στο lat. Τι έπρεπε να κάνουν τώρα, να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν το λάθος που είχαν βρει;

Ομάδα 9

M1	Έλα έλα βάλε 39.5	Ο M1 έχει διαβάσει το φυλλάδιο. Θέλει να πάει στη θέση lat=39
M1	0.5 λιγότερο ή 0.5 παραπάνω; Ααα 0.5 παραπάνω	Μόνος του ρωτάει μόνος του απαντάει
M2	0.5 παραπάνω είναι το λάθος	
M1	Άρα θα βάλουμε εδώ....	Γράφει 38,5
		
E	Πως σκεφτήκαμε εδώ πέρα;38 πήγε το αεροπλάνο Στο 39 έπρεπε να πάει λέει το φ ε	Κοιτάζουν το avatar και βλέπουν ότι όντως οι συντεταγμένες είναι 38 22 10000
M1	Α!!... 38 πήγε ... κάτσε κάτσε 39,5	Κοιτά απορημένος και μετά αλλάζει το 38.5σε 39.5
M2	Μπράβο άξιος !!	

Ομάδα 7

E1	Στο 22 θέλω να πάει	Μιλάνε για το long όπου το λάθος είναι0,7
M3	Αα 22 ε τότε 22,7	Εννοεί θα βάλουμε 22,7 στο fly1
M2	22,3	Διαφωνεί
E1	22,7ή 22,3	
M2	22,7	Συμφωνούν τελικά και οι δύο

Ομάδα 5

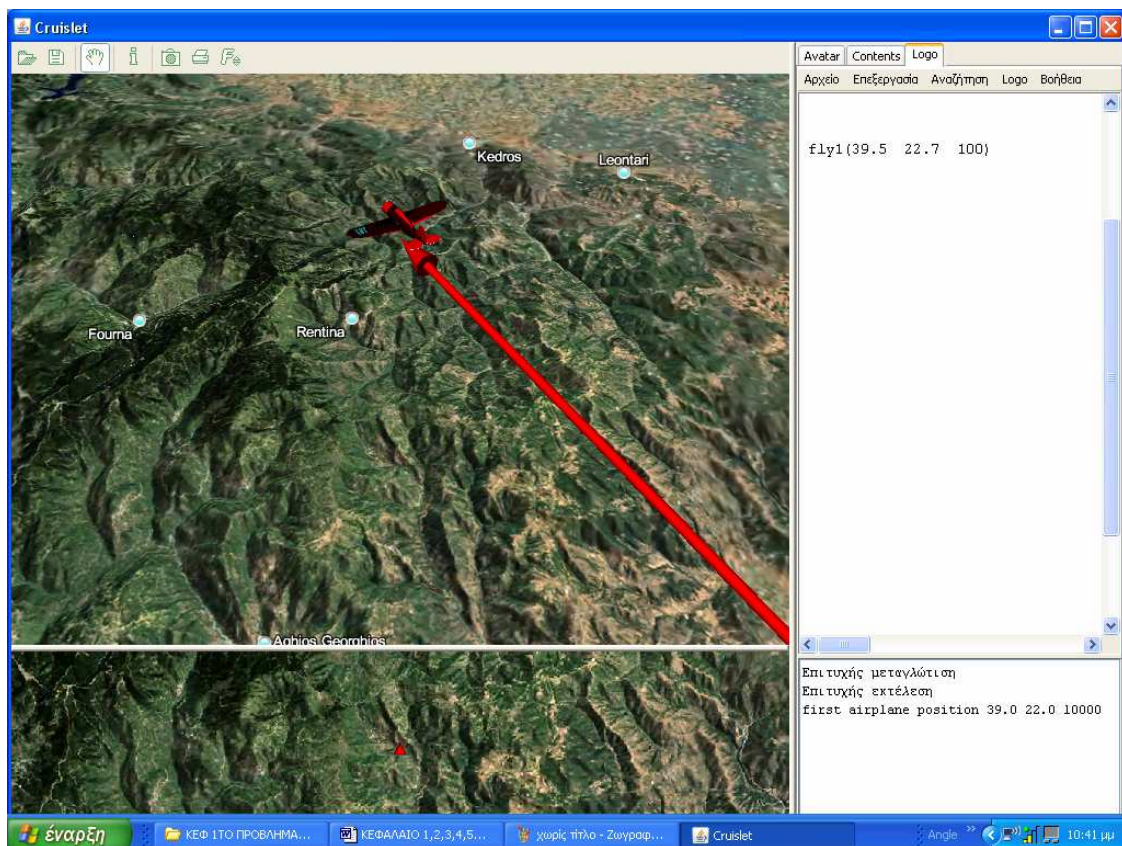
M2	Σκεφτήκαμε ανάποδα και προσθέσαμε αυτό που χάνει ώστε να πάει εκεί	
----	---	--

Κάπως παρόμοια σκέφτηκαν όλες οι ομάδες. Η μόνη ομάδα που δεν προβληματίστηκε καθόλου ήταν η ομάδα 4

Ομάδα4

M1	Χάνει 0,5 άρα θα βάλουμε 39,5	Γράφει στο fly1 τις συντεταγμένες lat
M1	Στο άλλο χάνει 0,7 άρα 22,7	Long
M1	Ποιος αριθμός ακριβώς κάνει 10000 να το πάς στη δευτέρα	height
M2	10000... να το βάλεις στη δευτέρα ,πού θες να	

	ξέρω..	
M2	100 επί 100	Ξαφνικά το βρήκε



Εικόνα 13: Δραστηριότητα 12 (αντίστροφη συνάρτηση)

Το να αντιστρέψεις μια συνάρτηση δεν είναι μια απλή διαδικασία. Οι μαθητές όμως μέσα από το λογισμικό το έκαναν σχετικά εύκολα. Πώς θα πάμε το χαλασμένο αεροπλάνο στην επιθυμητή θέση; «Πρέπει να σκεφτούμε ανάποδα» όπως είπε ο μαθητής της ομάδας 5. Να κάνουμε μια αντίστροφη διαδικασία. Αφού το αεροπλάνο χάνει 0,5 στο λάτ και 0,7 στο λονγκ εμείς θα του πούμε να πάει σε 0,5 και 0,7 μοίρες παραπάνω .Οι μαθητές εκφράζουν λεκτικά την σχέση: «η αντίστροφη συνάρτηση της $\psi = \chi - 0,5$ είναι η $\chi = \psi + 0,5$ ». Το ίδιο κάνουν και με την τετραγωνική συνάρτηση του ύψους. Ποιος αριθμός στο τετράγωνο κάνει 10000; Το 100 . Η $\psi = \chi^2$ αλλάζει σε $\chi = \sqrt{\psi}$. Το αποτέλεσμα τους δικαιώνει. Βάζουν τα δεδομένα στο λογισμικό και βλέπουν ότι το αεροπλάνο πήγε στην

θέση που έπρεπε. Ακόμη και αυτοί που στην αρχή έβαλαν 38,5, δηλαδή 0,5 λιγότερο στο latσωστό, κατάλαβαν το λάθος τους αμέσως μόλις κοίταξαν την θέση του αεροπλάνου: είχε πάει στην θέση lat=38. Το αεροπλάνο δεν πηγαίνει εκεί που πρέπει. Το λάθος είναι ολοφάνερο, το βλέπουν στην οθόνη τους και το διορθώνουν αμέσως. Έβαλαν λοιπόν 0,5 παραπάνω δηλαδή 39,5 και έτσι το αεροπλάνο κατέληξε στην επιθυμητή θέση που ήταν το 39. Οι μαθητές θεωρούν την αντιστροφή σαν ανάποδη διαδικασία έτσι ώστε τα παλιά outputs να γίνονται νέα inputs και το ανάποδο. Ρωτώντας «τι πρέπει να κάνουμε για να πάει το αεροπλάνο πίσω σε μια αρχική θέση» είναι ικανοί να απαντήσουν με άνεση .

Δυσκολία με τους δεκαδικούς

Στην ίδια λογική κινείται και η επόμενη δραστηριότητα «Μπορείς να προσγειώσεις το αεροπλάνο στην Ρόδο σε ύψος 64μ».Ο στόχος ήταν και εδώ οι μαθητές να αναπτύξουν πάλι την αντίστροφη λογική έχοντας τώρα μια συγκεκριμένη πόλη της Ελλάδας στην οποία πρέπει να προσγειωθούν. Αρχικά οι περισσότεροι έψαξαν την Ρόδο στο select a destination και πήγαν το αεροπλάνο εκεί με ένα απλό go. Στην συνέχεια η ερευνήτρια διευκρίνισε πως θα έπρεπε να πάνε στην Ρόδο μέσα από το πρόγραμμα της logo πάνω στο οποίο δούλευαν. Όταν κατάλαβαν πώς έπρεπε να δουλέψουν, οι μαθητές ακολούθησαν την εξής τακτική: σημείωσαν τις συντεταγμένες της Ρόδου(36.4411, 28.2257) που είχαν βρει από το select a destination, σε ένα χαρτί και προσπάθησαν να σκεφτούν τι πρέπει να βάλουν στο fly1 ώστε το αεροπλάνο να πάει στην Ρόδο. Στο σημείο αυτό λοιπόν τους δυσκόλεψαν τα δεκαδικά νούμερα. Δεν μπορούσαν να κάνουν πρόσθεση με δεκαδικούς

Ομάδα 7

E1	Εμείς θέλουμε εδώ κάτω να βγάλεις στο lat 36,4411	Εννοεί στο κάτω μέρος του logo tab
M2	Εκεί τι πρέπει να βάλουμε 94;	Μιλά για τα 2 πρώτα δεκαδικά
E1	Εεε	Παρ'όλο που φαίνεται να το βρήκε ο M2, ο M1 δεν τον ακούει και βάζει στο lat 36,44,5
E1	Πρόσεχε 36,4411 θέλεις να πάει ,και μας είπανε ότι χάνει πόσο;...	
M1	0,5	
E1	Το 0,5 ποιο δεκαδικό ψηφίο θα αλλάξει το 1 ^ο το 2 ^ο το 3 ^ο	
M2	Το πρώτο	
E1	Θες να πάει στο 44	
M3	44,5	

Είναι φανερό πως η ομάδα αυτή έχει κακή σχέση με την πρόσθεση δεκαδικών αφού στο 36,44 προσθέτει 0,5 και το αποτέλεσμα βγαίνει 36,44,5 ένας νέος αριθμός δηλαδή με 2 υποδιαστολές!!! Αντιμετωπίζουν τον δεκαδικό αριθμό σαν να είναι φυσικός. Το λογισμικό όμως δεν τον δέχεται και ευτυχώς γρήγορα κατανοούν το λάθος τους. Δυσκολεύονται όμως ακόμη να προσθέσουν το 0,5 στον δεκαδικό 36,44. Στο τέλος ύστερα από συνεχόμενα λάθη αναγκάζονται να κάνουν κατακόρυφη πρόσθεση και βρίσκουν το σωστό. Το χαρτί βοηθάει στην συγκεκριμένη περίπτωση γιατί ξέρουν καλά πώς να τοποθετήσουν τα νούμερα σε μια κατακόρυφη πρόσθεση δεκαδικών. Στην ίδια μέθοδο, δηλαδή την κατακόρυφη πρόσθεση, κατέφυγαν και οι υπόλοιπες ομάδες. Αυτό δείχνει την εμμονή των μαθητών σε ενέργειες και διαδικασίες που έχουν μάθει αρκετά καλά από το δημοτικό.

Η δυσκολία που συνάντησαν οι μαθητές με τους δεκαδικούς φανερώνει μια γενικότερη αποτυχία στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Σύμφωνα με έρευνες η αποτυχία αυτή αποδίδεται τόσο στην εννοιολογική φύση των ρητών αριθμών, στο συμβολισμό και τις αναπαραστάσεις τους, (Γαγάτσης, Α. Μιχαηλίδου, Ε. Σιακαλλή, Μ. 2001; Φιλίππου & Χρίστου, 1995) όσο και σε άλλα επιστημολογικά εμπόδια. Για παράδειγμα πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να βάλουν σε σειρά τους αριθμούς 0,5 0,34 και 0,252 και θεωρούν ως μεγαλύτερο αριθμό τον τελευταίο, γιατί έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Δυσκολίες, παρουσιάζουν επίσης και στην περίπτωση που τους ζητείται να βρουν έναν αριθμό μεταξύ του 0,1 και 0,2. Συνήθως, δεν απαντούν καθόλου σε αυτές τις περιπτώσεις, ενώ όταν ρωτηθούν να βρουν ένα αριθμό μεταξύ του 0,10 και 0,20 δε δυσκολεύονται (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Ερευνητές όπως οι Thomson & Walker (1996), πιστεύουν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν διάφορες παρανοήσεις σχετικά με τους δεκαδικούς αριθμούς γιατί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους δε γίνεται καμία σύνδεση με άλλες μαθηματικές έννοιες όπως τα κλάσματα, την αξία θέσης ψηφίου, το νομισματικό σύστημα, τις μετρήσεις μήκους τα ποσοστά και αναπαραστάσεις των πιο πάνω εννοιών (Μιχαηλίδου, 2004).

Αφού κατάφεραν να κάνουν την πρόσθεση των δεκαδικών οι μαθητές έβαλαν τις νέες τιμές στο fly1 και περίμεναν να έχουν πετύχει τον προορισμό τους. Δυστυχώς όμως

απογοητεύτηκαν. Το αεροπλάνο δεν ήταν ακριβώς στη Ρόδο. Ο Cruislet όμως είναι ένα λογισμικό που έχει απαιτήσεις. Για να πάει το αεροπλάνο στην Ρόδο θέλει ακρίβεια. Όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχουν οι γεωγραφικές συντεταγμένες τόσο καλύτερα εντοπίζουμε μια θέση στον χάρτη. Αν γράψουν μόνο το πρώτο δεκαδικό ψηφίο των συντεταγμένων της Ρόδου αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να απομακρυνθούμε από την πόλη της Ρόδου. Χαρακτηριστικό είναι το απόσπασμα από την ομάδα 4

M2	Και θα τα βάλουμε και πόσο χάνει	Γώρα κατάλαβαν ότι πρέπει να υπολογίσουν και το λάθος
M1	0,5 χάνει	
M2	35 κόμμα	Σβήνει το 36.4411 και πάει να γράψει 0,5 λιγότερο
M1	Όχι όχι χάνει άρα βάζεις μεγαλύτερο για να βγει, άμα είναι 36.44 βάζεις 36,94.....	Το γράφουν
M2	28,2	Κοιτούν μια τη logo μια το avatar
M1	Να το γράψουμε ρε κάπου	Εννοεί να το γράψουν σε χαρτί
M2	28,2 το κάνω 28,9	Γράφει τις συντεταγμένες και πατάει insert
M2	Έλα αγόρι μου έλα ψυχή μου αααααα	Μιλάει στον υπολογιστή καθώς περιμένει το αποτέλεσμα στην οθόνη
M1	Πέσαμε λίγο έξω	Ξανακοιτούν τις συντεταγμένες της Ρόδου
M2	36,4411 ωραία, τι θες μωρό μου να σουβάλω. 36,9411 άντε γιατί μου τα πρηξες	Βάζουν όλα τα δεκαδικά
M2	28,9257 άντε στο διάλογο	
M1	Πατάω insert	Πήγε ακριβώς στη Ρόδο
M2	Ναι !Έτσι, Ρόδος ρε! πάρτα ρε !	Στον υπολογιστή μιλάει
M2	Έτσι έτσι αα!!!	
M1	Τι ααα!!!	
M2	Αααακριβώς	Το ευχαριστήθηκαν

Το αξιοπρόσεχτο στον παραπάνω διάλογο είναι ότι οι μαθητές «μιλάνε» στο λογισμικό. Του συμπεριφέρονται σαν να είναι ζωντανός οργανισμός με τον οποίο έχουν κάποια αντιπαράθεση. Το εργαλείο αποκτά οντότητα και γίνεται ανταγωνιστής «Διαβάζουν» τις απαιτήσεις του και τις ικανοποιούν, «παλεύουν» μαζί του και στο τέλος τον νικούν! Είναι σαν να παίζεται ένα παιχνίδι ανάμεσα στον μαθητή και στον υπολογιστή όπου ο ένας προσπαθεί να νικήσει τον άλλο. Όταν ο μαθητής καταφέρνει τελικά να προσγειώσει το αεροπλάνο στην Ρόδο, αισθάνεται νικητής και ζητωκραυγάζει.

Η ταυτοτική συνάρτηση μέσα στο πλαίσιο της συμμεταβολής

Δραστηριότητα 13

Αν με κάποιο τρόπο τα όργανα του αεροπλάνου επισκευαστούν ποια νομίζεις ότι θα είναι η νέα συνάρτηση; Βρες τον τύπο και φτιάξε την γραφική παράσταση

Η δραστηριότητα αυτή ζητάει από τους μαθητές να σκεφτούν τι θα γίνει εάν τα όργανα επισκευαστούν. Ποια θα είναι τώρα η νέα συνάρτηση; Στο φύλλο εργασίας που τους έδωσε η ερευνήτρια ζητείται να εκφράσουν την σχέση που θα βρουν συμβολικά και γραφικά. Οι περισσότερες ομάδες κατάφεραν να βρουν την σχέση

Ομάδα 5

M2	Κυρία ελάτε λίγο	Έχει βρει την απάντηση
M2	Άμα επισκευαστούν τα όργανα δεν χρειάζεται να προσθέσουμε αυτό που χάνει. Δε χάνει τίποτα, απλά θα δίνουμε συντεταγμένες και θα πηγαίνει εκεί που πρέπει	
E2	Άρα πια συνάρτηση θα έχουμε	
M2	Ξέρω γω άμα ονομάσουμε χ την συνάρτηση που παίρνουμε από τον avatar και ψ αυτή(δείχνει στο logo) τότε $\chi=\psi$	
E2	Πολύ ωραία γράψα	

Ομάδα 9

M1	Θα βγαίνει ακριβώς ότι βάζουμε εδώ θα βγαίνει εδώ	Εννοεί ότι δίνουμε στο fly1 το ίδιο θα βγαίνει στο position
M2	Θα δίνουμε ακριβώς τις πληροφορίες	
E2	Ωραία στα μαθηματικά μιλάμε με σύμβολα έτσι;	
M2	Ναι	
E2	Δηλαδή εάν του βάζουμε X τι θα μας βγάλει το αντίστοιχο...	
M1	X	
M2	Οτιδήποτε και να του δώσουμε θα μας βγάλει το ίδιο, το αντίστοιχο	
E2	Άρα ποια συνάρτηση είναι αυτή;	
M1	Έτσι $x = x$	Γράφουν (F)X=X

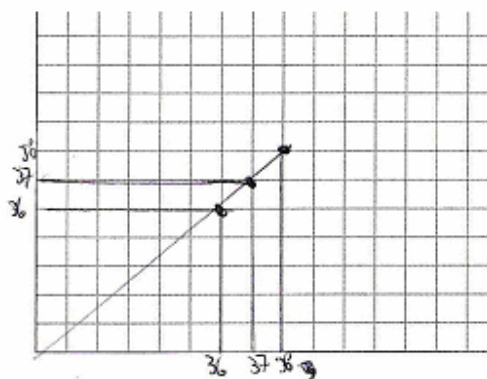
Το αποτέλεσμα εκφράστηκε αβίαστα και σχετικά εύκολα για τις περισσότερες ομάδες. Όλοι είπαν πως το αεροπλάνο θα πηγαίνει όπου του λέμε εμείς να πάει. Τι πιο φυσικό άλλωστε, για ένα σωστό και χωρίς βλάβες αεροπλάνο. Ότι τιμή και να δώσουμε σαν input το ίδιο θα βγαίνει και σαν output.

Η δυσκολία εμφανίστηκε όταν ήρθαν τα σύμβολα. Η ομάδα 4 εκφράστηκε σωστά και είπε ότι στον προηγούμενο τύπο λατλάθος =λατσωστό-0,5 θα προσθέσω 0,5. Όταν όμως πήγε στο φύλλο εργασίας έγραψε λατλάθος =λατσωστό +0,5.

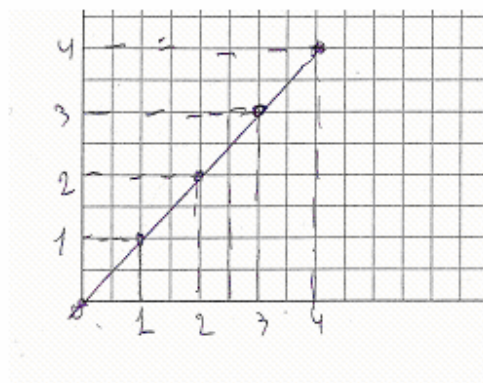
Ομάδα 4

E1	Α συγγνώμη ,εδώ θα κάνει λάθος 0,5 συν 0,5 θα χάνει ;αυτό εννοείς ; Μήπως εννοείς αυτό που έχανε προηγουμένως +0,5	Μόλις διάβασε το φύλλο εργασίας και είδε ότι έγραφαν λατλ=λατσ+0,5
M2	Ναι πριν αυτό που βάζαμε	Πριν είχαν γράψει λατλ=λατσ-0,5
E1	Έχανε μισό	
M2	Ναι	
E1	Τώρα ;	
M2	Θα κερδίζει μισό	
E2	Θα κερδίζει μισό;	
M1	Θα χάνει μισό	
M2	Βασικά δε θα κερδίζει τίποτα	Το φωνάζει δυνατά
E1	Σωστά αφού επισκευάζονται τα όργανα ότι του δίνω στο fly αυτό θα βγάζει εκεί κάτω	Εννοεί στο κάτω μέρος του logo tab

Καθώς οι μαθητές εξερευνούν δυναμικά συναρτησιακές σχέσεις, όπως το πώς αλλάζει η θέση του αεροπλάνου σε σχέση με τις τιμές που δίνουμε εμείς στο λατ, αρχίζουν να σκέφτονται πώς μια μεταβλητή (συνήθως η εξαρτημένη) αλλάζει καθώς συμβαίνουν αλλαγές στην άλλη (ανεξάρτητη μεταβλητή).(E1) Συντονίζοντας τέτοιες αλλαγές, οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αναπαριστούν και να ερμηνεύουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά στο γράφημα μιας τέτοιας δυναμικής κατάστασης. (Carlson et al, 2002) Στην περίπτωση που το αεροπλάνο επισκευάζεται, η εξαρτημένη μεταβλητή έχει τις ίδιες τιμές με την ανεξάρτητη. Και πράγματι οι μαθητές δεν έχουν καμία δυσκολία να αναπαραστήσουν αυτή την κατάσταση γραφικά. Ότι τιμή δίνω στο λατσωστό ακριβώς εκεί πηγαίνει και το αεροπλάνο. Κατασκευάζουν μια ευθεία γραμμή που είναι η διχοτόμος των αξόνων, αφού πρώτα έχουν ορίσει τα σημεία στους άξονες. Μόνο η ομάδα 5 αλλάζει τις τιμές και θέτει στους άξονες τα νούμερα 1,2,3 αφού όπως δήλωσαν δεν τους αρέσουν οι δεκαδικοί αριθμοί.



ομάδα 9



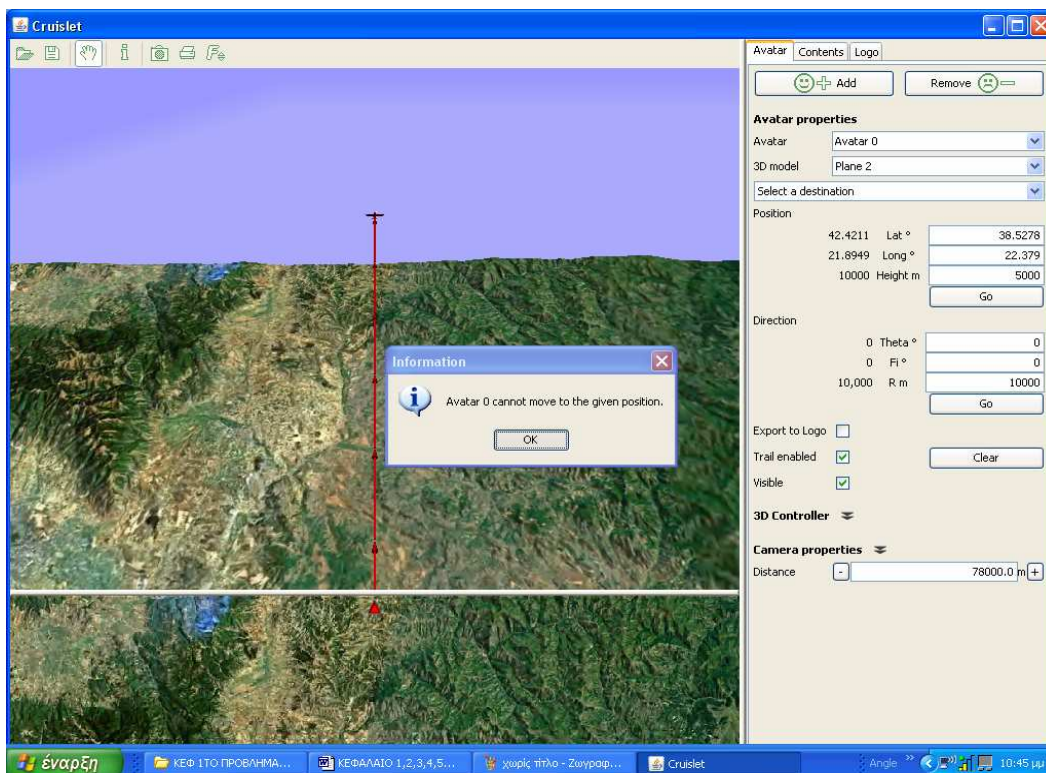
ομάδα 5

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι οι μαθητές για πρώτη φορά διαιρούν τους άξονες σε διαστήματα σταθερού μήκους: 36, 37, 38 και θεωρούν ότι ίσες μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβλητή έχει ως αποτέλεσμα ίσες αλλαγές και στην εξαρτημένη. (E3) Ο ρυθμός δηλαδή με τον οποίο αλλάζουν οι θέσεις του αεροπλάνου είναι σταθερός. Είναι ίσως άλλη μια περίπτωση που οι μαθητές αναπτύσσουν λογική συμμεταβολής πολύ κοντά στο επίπεδο 4.

Άλλες μαθηματικές έννοιες

Κατά την αλληλεπίδρασή τους με το λογισμικό οι μαθητές ανέπτυξαν και άλλες μαθηματικές έννοιες:

→ Σε αρκετές περιπτώσεις δημιούργησαν την γνωστή στρατηγική μείωσης του R. Όταν δηλαδή το αεροπλάνο δεν μπορούσε να προχωρήσει άλλο οι μαθητές μείωναν το R του direction. Μπορούσαν έτσι να προσεγγίσουν με πιο μεγάλη ακρίβεια τα όρια του lat long ή το υψόμετρο μιας περιοχής. Η απόφαση αυτή αναδεικνύει την σκέψη που έχουν οι μαθητές για το «πλησιάζω κάτι όσο πιο κοντά γίνεται»: πρέπει να μειώσω το βήμα με το οποίο το πλησιάζω. Αυτή είναι μια πρώτη επαφή με την έννοια του **ορίου** την οποία οι μαθητές της Α Λυκείου δεν έχουν ακόμη διδαχτεί. Σταμάτησαν να μειώνουν το βήμα, όταν ένιωθαν αρκετά ικανοποιημένοι από την προσέγγιση έστω και διορατικά. Έτσι μέσα από το λογισμικό αναπτύχθηκε μια πρώτη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου.



Εικόνα 14:Στρατηγική μείωσης του R ώστε να προσεγγίσουν τα όρια της Ελλάδας

→ Το λογισμικό δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να κατανοήσουν την έννοια της **απόλυτης θέσης** στο γήινο σύστημα συντεταγμένων. Όταν προσπαθούσαν να προσγειώσουν το αεροπλάνο στην Ρόδο κατάλαβαν πως πρέπει να είναι όσο πιο ακριβείς γίνεται προκειμένου να το καταφέρουν. Η θέση ενός σημείου (ή μιας πόλης) στην επιφάνεια της γης είναι μονοσήμαντα ορισμένη και αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζευγάρι συντεταγμένων. Ισχύει και το αντίστροφο. Κάθε ζευγάρι συντεταγμένων ορίζει ένα και μοναδικό σημείο στην επιφάνεια της γης.

→ Καθώς προσπαθούσαν να βρουν την απόσταση Άρτας-Αμφισσας οι μαθητές ισχυρίστηκαν ότι πρέπει να αφαιρέσουν τις συντεταγμένες. Η αφαίρεση των γεωγραφικών συντεταγμένων για να βρω την **απόσταση των δύο πόλεων** δεν είναι εντελώς λάθος. Απλώς έχει πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις αφού πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι οι γεωγραφικές συντεταγμένες είναι τόξα. Οι μαθητές αυτοί φάνηκε ότι είχαν στο μυαλό τους την απόσταση δυο σημείων $A(x,y)$ και $B(k,l)$ στο καρτεσιανό επίπεδο. Στην ίδια πάλι δραστηριότητα οι μαθητές θέλοντας να ελέγξουν την τιμή της απόστασης

των δύο πόλεων οδηγούν το αεροπλάνο από την Άρτα στην Άμφισσα και μετά από την Άμφισσα στην Άρτα και ελέγχουν το R. Κινητοποιούν δηλαδή την εξής απλή και βασική γνώση: **το μέτρο του διανύσματος AB = το μέτρο του διανύσματος BA .**

→ Η ομάδα 9 στην προσπάθειά της να εκφράσει το τι ακριβώς γίνεται, διατυπώνει μια ενδιαφέρουσα άποψη. **Η συνάρτηση είναι κάτι σαν εξίσωση**

Ομάδα 9

M1	Τι εννοεί μ' αυτό; κανονικά θα βγαίνει	Εννοεί μάλλον ο τύπος θα βγαίνει κανονικά
M2	Κανονικά θα βγαίνει αλλά θα είναι συνάρτηση	
M1	Δηλαδή;	
M2	Δηλ πως το χαμε βρει το παλιο κάτι σαν εξίσωση	Εννοεί τον παλιο τύπο $\lambda_{ατλ} = \lambda_{ατσ} - 0,5$

Είναι συχνό επίσης το φαινόμενο οι μαθητές να δυσκολεύονται να ξεχωρίσουν μια αλγεβρικά ορισμένη συνάρτηση και μια εξίσωση (Carlson, 1998). Ο τύπος της συνάρτησης $\psi = \chi + 5$ παίρνει την μορφή εξίσωσης όταν δώσω στο χ ή στο ψ μια συγκεκριμένη τιμή. Το σύμβολο της ισότητας προκαλεί δυσκολία στο να διαχωρίσουν πότε είναι μέσο ορισμού μιας σχέσης ανάμεσα σε 2 μεταβαλλόμενες ποσότητες και πότε είναι μια κατάσταση ισότητας 2 εκφράσεων.

ΕΠΕΜΒΑΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Όταν τελείωσε και η δεύτερη φάση της έρευνας, η ερευνήτρια έδειξε στους μαθητές τον κώδικα της logo για την διαδικασία fly1 που μέχρι εκείνη την στιγμή ήταν «black box» γι αυτούς. Στόχος ήταν

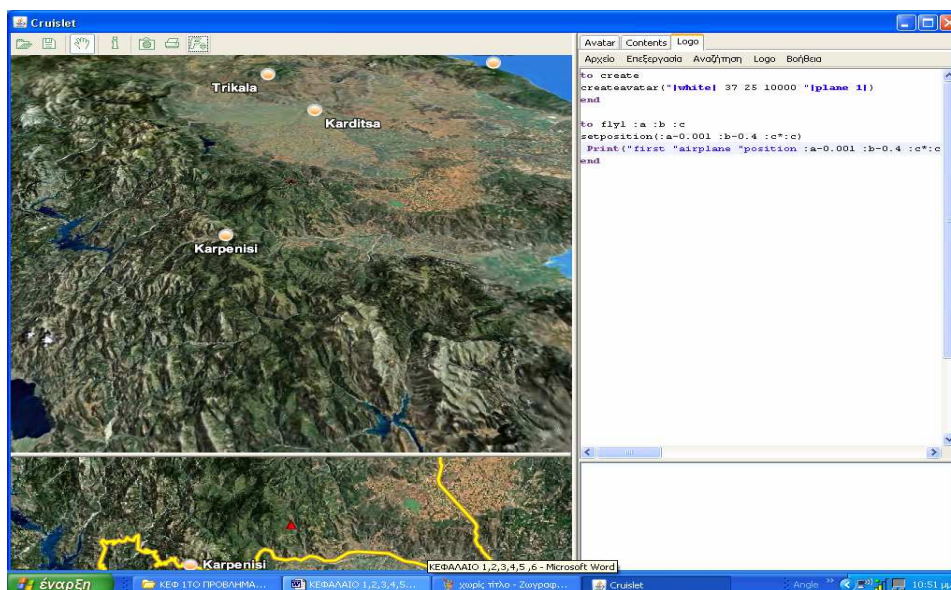
- 1) ν' αναγνωρίσουν τις εντολές και να κατανοήσουν την χρήση τους.
- 2) να επεμβούν στον κώδικα ώστε να τον αλλάξουν
- 3) ν' ανταλλάξουν το πρόγραμμα που έφτιαξαν με διπλανή ομάδα

Δεδομένου ότι οι μαθητές δεν ήταν άσχετοι με την γλώσσα, δεν δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν την κάθε εντολή. Η logo είναι μια γλώσσα δομημένη με τέτοιο τρόπο ώστε να προσεγγίζει τη φυσική γλώσσα, με αποτέλεσμα οι μαθητές να διευκολύνονται στην κατανόηση ή σύνταξη εντολών και διαδικασιών. Οι εντολές createavatar, setposition και print έγιναν αμέσως κατανοητές.

Η ερευνήτρια ζήτησε λοιπόν από τους μαθητές να προσπαθήσουν να επέμβουν στον κώδικα και να δημιουργήσουν ένα δικό τους πρόγραμμα. Με αυτό τον τρόπο οι

μαθητές αποκτούν ενεργό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς δεν αλληλεπιδρούν με το υπολογιστικό περιβάλλον διερευνώντας απλώς τους προκατασκευασμένους κανόνες, αλλά συμμετέχουν ταυτόχρονα στη διαδικασία κατασκευής τους. Η ιδέα βασίζεται στους μισοψημένους μικρόκοσμους οι οποίοι είναι «λογισμικά σχεδιασμένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να προκαλούν τους μαθητές να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς, να τους αλλάξουν ή να αποδομήσουν μέρη τους, προκειμένου να κάνουν μαθηματικά. Προορίζονται να λειτουργήσουν ως εναύσματα, ώστε να γεννηθούν ιδέες μέσα από την κατασκευή ή την αποδόμηση τμημάτων λογισμικού.» (Κυνηγός, 2007, σελ.92).

Οι μαθητές αντιμετώπισαν το ρόλο του προγραμματιστή με μεγάλο ενθουσιασμό. Όλες σχεδόν οι ομάδες ήθελαν να κάνουν κάτι δύσκολο ώστε να μην μπορεί η άλλη ομάδα να το ανακαλύψει. Οι περισσότεροι ασχολήθηκαν με την εντολή `setposition` και προσπάθησαν να αλλάξουν τα νούμερα σε αυτήν. Η ομάδα 4 έβαλε το αεροπλάνο να κάνει λάθος στο `lat` 0,0001 και στο `long` 0,4 ενώ η ομάδα 5 έβαλε στο `lat` 0,7 και στο `long` 0,8. Θέλοντας να δυσκολέψει ακόμη την κατάσταση, η ομάδα 5 βάζει στο `lat` το λάθος να είναι 0.7,5 Τον διορθώνει όμως αμέσως ο συμμαθητής του λέγοντας του ότι αυτό δεν γίνεται. Έτσι βάζουν 0,74. Το ίδιο λάθος είχε κάνει και η ομάδα 7 την προηγούμενη μέρα. Σίγουρα οι μαθητές αυτοί δεν έχουν ξεκαθαρίσει στο μυαλό τους τις υποδιαιρέσεις του δέκατου, εκατοστού, χιλιοστού. Τον αριθμό ακριβώς ανάμεσα στα 7 δέκατα(0,7) και στα 8 δέκατα(0,8) τον γράφουν 0.7,5 δέκατα



Εικόνα 15: Το πρόγραμμα που έφτιαξαν οι μαθητές της ομάδας 4

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι οι επιλογές τους στηρίχτηκαν σε 2 επίπεδα:

1. αλλαγή στον τύπο της συνάρτησης που εκφράζει το λάθος των συντεταγμένων. Οι μαθητές έδωσαν νέους τύπους όπως π.χ $c*(-c)$ ή $c+c$ ή $c-10000$ για την μεταβλητή του ύψους
2. αλλαγή των σταθερών τιμών της συνάρτησης. Στην θέση π.χ του $a-0,5$ έβαλαν $a-0,0001$ για την μεταβλητή του $lat..$

Οι μαθητές μπήκαν λοιπόν στο ρόλο του δημιουργού και προγραμματιστή. Σύμφωνα με την Harel (1988), οι μαθητές αποκτούν μια βαθύτερη και ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, όταν κατασκευάζουν και χειρίζονται οι ίδιοι αναπαραστάσεις και όταν με τη χρήση των αναπαραστάσεων αυτών κατασκευάζουν προβλήματα για άλλους μαθητές. Ο προγραμματισμός άλλωστε αποτελεί το πρωταρχικό εργαλείο της οικοδομιστικής προσέγγισης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Σε περίπτωση που ένας μικρόκοσμος δεν παρέχει την ευκαιρία προγραμματισμού, υπάρχει ο κίνδυνος ουσιαστικής αποδυνάμωσής του (Hoyles & Noss, 1996), αφού στερεί ουσιαστικά στο μαθητή τη δυνατότητα να παρεμβαίνει δημιουργικά και να σχεδιάζει τις δικές του λύσεις. Συγκεκριμένα, οι μαθητές “πήραν στα χέρια τους το εργαλείο”(artifact) και το προσαρμοσαν στις δικές τους μεθόδους (instrumentalization). Δεν μπήκαν όμως στην διαδικασία να αλλάξουν τελείως την λογική του προγράμματος. Και τα δύο επίπεδα αλλαγής αφορούσαν την εντολή `setposition` και `print` του αρχικού κώδικα. Ίσως αυτό να συνέβει γιατί οι μαθητές είχαν μικρή εμπειρία στον προγραμματισμό. Το μόνο που κράτησε αμείωτο το ενδιαφέρον τους, ήταν να κάνουν ένα, όσο πιο δύσκολο γινόταν, πρόγραμμα για τους συμμαθητές τους. Και δύσκολο γι αυτούς σημαίνει δύσκολα δεκαδικά νούμερα, τετραγωνική και όχι γραμμική συνάρτηση

Κατά την διάρκεια της κατασκευής του νέου προγράμματος οι μαθητές έδειξαν μια παιχνιδιάρικη διάθεση. Προσπαθούσαν να κρυφοκοιτάζουν το πρόγραμμα των διπλανών ή έκρυβαν με επιδέξιο τρόπο το δικό τους (πήγαιναν την οθόνη του `logo tab` τελείως δεξιά και έτσι η οθόνη γινόταν λευκή)

Μετά από τον προγραμματισμό, η κάθε ομάδα έπρεπε να εκτελέσει το πρόγραμμα που έφτιαξε για να δει εάν δουλεύει. Σημαντική σε αυτό το σημείο ήταν η παρέμβαση

των ερευνητριών. Πολλές ομάδες τότε ανακάλυψαν τα λάθη τους. Οι περισσότεροι δεν είχαν προσέξει το print και δεν είχαν αλλάξει τις τιμές σε αυτό, με αποτέλεσμα το αεροπλάνο να μην τυπώνει τις σωστές συντεταγμένες στις οποίες πήγε.

Ομάδα 4

E	Τι έχετε αλλάξει εδώ θα μου πείτε και εμένα	
M2	Να έχουμε αλλάξει εδώ και εδώ	Δείχνει το position και το print
E	Διαφορετικά είναι ή τα ίδια ;	
M1	Διαφορετικά	
E	Δηλ τι κάνει η μια εντολή και τι κάνει η άλλη	
M1	Η μια το setposition σε πάει στο μέρος και	
E	Ωραία	
M1	Και ...	Διστάζει για την print
E	Η print την ξέρετε ή να σας την πω τι κάνει	
M2	Όχι δεν την ξέρουμε	
E	Η print τυπώνει αυτό που θέλουμε να μας δείχνει εμάς εδώ κάτω	
M2	Αα!	
E	Δηλαδή εσείς μου λέτε ,άλλα θα του δίνεις; σε άλλο μέρος θα σε πάει και άλλα θα τυπώνει;	
M1	Σωστά χα χα!!	Γελούν μόλις συνειδητοποιήσαν τι έκαναν

Η ομάδα 9 φάνηκε ότι έδινε τιμές τυχαία και χωρίς να τις πολυσκεφτεί. Έτσι έβαλε στο ύψος το αεροπλάνο να χάνει 10000μ χωρίς να σκεφτεί τι τιμές θα έπρεπε να δίνουν σαν input ώστε να έχει νόημα η παρέμβασή τους. Όταν λοιπόν εκτέλεσαν το πρόγραμμα και έδωσαν στο fly τιμές ύψους 200 το αεροπλάνο δεν κινιόταν

Ομάδα 9

E	Πάτα insert στο fly1	Βγάζει επιτυχής εκτέλεση
E	Επιτυχής εκτέλεση λέει αλλά δεν πάει στη θέση που του είπες γιατί τι του έχεις βάλει για να δούμε	Κοιτούν το setpos
E	Κοίτα c- 10000 δηλ αν του δώσεις c=200 πού θα πάει 200-10000;	
M1	Αα το + που είναι	Καταλαβαίνει το λάθος και αλλάζει το – σε +

Η αλληλεπίδραση του υπολογιστή με τον μαθητή είναι εμφανής. Ο υπολογιστής δεν δέχεται οποιαδήποτε τιμή και ο μαθητής πρέπει να προσαρμοστεί σε αυτό. Είναι ένας πολύ καλός τρόπος για να μάθει να ελέγχει τα δεδομένα του. Τι νόημα έχει το υψόμετρο να είναι αρνητικό; Πρέπει λοιπόν να προσέξει τι τιμές θα δώσει. Το πεδίο ορισμού είναι το πρώτο πράγμα που κοιτάμε σε μια συνάρτηση. Ο μαθητής το μαθαίνει σιγά σιγά αυτό μέσα από το λογισμικό.

Παρατηρώντας λοιπόν τα αποτελέσματα στην οθόνη του υπολογιστή ανακάλυψαν αρκετά λάθη .Τα λάθη που είχαν κάνει ήταν

ΛΑΘΗ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Καμία από τις αλλαγές στην εντολή setpos δεν είχε εφαρμοστεί στην εντολή print (ομάδα 5,9 ,7)	Το πρόγραμμα δεν τύπωνε την θέση στην οποία πήγαινε το αεροπλάνο
Άλλαξαν την εντολή print αλλά με διαφορετικές τιμές από την εντολή setposition (ομάδα 4)	Το αεροπλάνο φαινόταν να είναι σε διαφορετική θέση από αυτή που πραγματικά πήγαινε
Οι τύποι που δόθηκαν στις συναρτήσεις δεν ανταποκρίνονταν σε πραγματικές καταστάσεις (ομάδα 5)	Το αεροπλάνο δεν κουνιόταν “avatar can’t move”
Ξεχνούσαν να βάλουν τα διαλυτικά μπροστά από κάθε μεταβλητή (όλες οι ομάδες)	Το πρόγραμμα δεν λειτουργούσε καθόλου

Η αναγνώριση του λάθους έγινε σε αρκετές περιπτώσεις με την βοήθεια των ερευνητριών. Μέσα από αυτά τα λάθη οι μαθητές κατάλαβαν ότι δεν είναι αρκετά εύκολη υπόθεση η δημιουργία ενός προγράμματος. Πρέπει να ληφθούν υπ’ όψιν οι συνθήκες μέσα στις οποίες λειτουργεί το πρόγραμμα. Στην περίπτωση μας οι συντεταγμένες στον γεωγραφικό χώρο δεν μπορούν να πάρουν τυχαίες τιμές. Δεν έχει δηλαδή νόημα να βάλω το αεροπλάνο να χάνει 10000μ στο ύψος, γιατί κινδυνεύω να βρεθώ κάτω από την επιφάνεια της γης. Ούτε μπορώ να δώσω μεγάλη τιμή λάθους στα lat long γιατί κινδυνεύω να βρεθώ εκτός των ορίων της Ελλάδας. Οι μαθητές διόρθωσαν τα λάθη τους και είδαν αρκετά ικανοποιημένοι ότι το πρόγραμμά τους δουλεύει. Το αποθήκευσαν λοιπόν δίνοντας οι περισσότεροι περίεργες ονομασίες (όπως ibeleiveicanfly).

Στην συνέχεια όμως τα πράγματα δεν κύλησαν όπως αρχικά είχαν σχεδιαστεί .Οι μαθητές αντάλλαξαν θέσεις με σκοπό να ανακαλύψει η μια ομάδα το πρόγραμμα της άλλης. Ενώ στην αρχή φάνηκε ότι δούλευαν με ενδιαφέρον για να βρουν την συνάρτηση

που μας δίνει το λάθος, στην συνέχεια με την πρώτη ευκαιρία άνοιξαν το αρχείο των συμμαθητών τους, μιας και τώρα γνώριζαν πού αυτό βρίσκονταν. Η διαδικασία αποθήκευσης που είχαν κάνει προηγούμενα στο πρόγραμμα τους αποκάλυψε ότι αυτό κάθε φορά βρίσκεται μέσα στα αρχεία.. Αποκάλυψε όμως ακόμη ότι όταν έρχεσαι σε επαφή με μαθητές είναι σίγουρο ότι δεν ξέρεις τι σε περιμένει. Είναι απρόβλεπτοι, εφευρετικοί, και συχνά δεν ακολουθούν τους κανόνες. Όταν μάλιστα πρόκειται να γλιτώσουν από μια εργασία ανακαλύπτουν λειτουργικότητες του λογισμικού με μεγάλη ευκολία.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Όταν η έρευνα τελείωσε η ερευνήτρια έδωσε στους μαθητές να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο. Στόχος ήταν να εκφράσουν οι μαθητές τις απόψεις τους για το λογισμικό, τι τους άρεσε, τι τους δυσκόλεψε, τι θα ήθελαν ν' αλλάξουν. Το ερωτηματολόγιο έδειξε ότι

- Οι μαθητές στο σύνολό τους ήταν πολύ καλοί έως άριστοι και αγαπούσαν τα μαθηματικά
- Η επαφή τους με τον υπολογιστή ήταν καλή
- Βρήκαν τον cuislet ένα ενδιαφέρον λογισμικό .
- Προτίμησαν να κινούνται με το position(6 στους 14)
- Θυμούνταν ότι ασχολήθηκαν με τις γραμμικές συναρτήσεις
- Κάποιοι βρήκαν δύσκολες τις γεωγραφικές συντεταγμένες κάποιοι τις σφαιρικές κάποιοι τους δεκαδικούς και κάποιοι άλλοι τη logo
- Τους άρεσε να συνεργάζονται ομαδικά.
- Καλό θα ήταν ο cuislet να μπορούσε να επεκταθεί και σε άλλες περιοχές εκτός Ελλάδας

Το ερωτηματολόγιο ακολουθεί παρακάτω .Σε κάθε ερώτηση είναι σημειωμένες όλες οι απαντήσεις των μαθητών. Ο κάθε αριθμός αντιστοιχεί σε έναν από τους 14 μαθητές

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1 Σου αρέσουν τα μαθηματικά;

1.	Όχι
2.	Ναι
3.	Οχι
4.	Ναι
5.	Πάρα πολύ
6.	Ναι
7.	Ναι
8.	Ναι
9.	Ναι
10.	Ούτε τρελαίνομαι ούτε τα μισώ
11.	Ναι
12.	Ναι είναι το αγαπημένο μου μάθημα
13.	Ναι μου αρέσουν καλύτερα από τα υπόλοιπα
14.	Σχετικά ναι

2 Τι βαθμό είχες πέρσι

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10	11	12	13	14
17	19	12	19	17	19	17	20	17	16	16	17	16	12 με 15

3 Ποια η σχέση σου με τον Η.Υ;

1.	Κοιμάμαι και ξυπνάω με αυτόν
2.	Ασχολούμαι πολύ
3.	Όλη μέρα
4.	Ασχολούμαι πολύ
5.	Πολύ καλή
6.	Πολύ καλή
7.	----
8.	Πολλές ώρες
9.	Από τότε που γεννήθηκα έχω ΗΥ
10.	Δεν είχα ποτέ ΗΥ
11.	Για δουλειές
12.	Ασχολούμαι 3 ώρες την ημέρα
13.	Πολύ καλή και συχνή
14.	Πάρα πολύ καλή

4 Τι λογισμικά γνωρίζεις;

1.	Office, Games, logo, internet
2.	Office, World of warcraft, μουσικής
3.	Online games, chat σαν το wow και το lineag..
4.	Παιχνίδια ,κατεβάζω τραγούδια, γράφω εργασία σε word
5.	On line games (WOW)
6.	Word, excel, παιχνίδια online (countler strike;)
7.	Word, excel, παιχνίδια
8.	Word, βιντεοπαιχνίδια
9.	-----
10.	-----
11.	Παιχνίδια τραγούδια wow
12.	Word logo games
13.	word
14.	Τις καθημερινές παίζω και ακούω τραγούδια 6 ώρες τα σαββατοκύριακα 10-16 ώρες

5 Πως σου φάνηκε ο cruilet; Ποια η γνώμη σου γι αυτόν;

1. Καλό αλλά κουραστικό
2. Ενδιαφέρον, πολύ χρήσιμο, εύκολο στην χρήση ,μπερδεύει η λογική
3. Καλό το πρόγραμμα αλλά χωρίς να μου κινήσει το ενδιαφέρον
4. Καλός ήταν κάποια στιγμή ψιλοβαρέθηκα αλλά μπορεί να μου φανεί χρήσιμος στο μέλλον Μάθε τέχνη και αστίνε
5. Πολύ ενδιαφέρον πρόγραμμα θα ήθελα να ξαναζήσω την εμπειρία
6. Πολύ καλό πρόγραμμα ιδιαίτερα με τις εργασίες έμαθα περισσότερα
7. Ήταν πολύ καλό αν και κάποιες συναρτήσεις ήταν λίγο δύσκολες
8. Ενδιαφέρον πρόγραμμα και μέσω των εργασιών τον γνωρίσανε καλύτερα
9. Ήταν ενδιαφέρον πρόγραμμα και πολύ ενημερωτικό
10. Στην αρχή μου άρεσε αλλά μετά από 3 μαθήματα τον βαρέθηκα
11. Καλά ήταν είχε πλάκα .Παίξει να μου φανεί και χρήσιμος στο μέλλον Πάντως δεν βαρέθηκα
12. Είναι ένα πολύ αξιόπιστο και χρήσιμο πρόγραμμα. Στην αρχή ήταν ενδιαφέρον αλλά αργότερα βαρέθηκα από τις πολλές ασκήσεις
13. Ένα από τα ωραιότερα προγράμματα που έχω δει Μπορώ να πω ότι με εντυπωσίασε. Το πρόγραμμα ήταν εύκολο, παρ όλα αυτά είχε και τη δυσκολία του
14. Πολύ ενδιαφέρον και κάποιες φορές λίγο δύσκολο

6 Με ποιο από τα παρακάτω προτιμούσες να κινείσαι και γιατί ;

Με το position

Με το direction.....

Με το 3d controller.....

Με την logo

1. 3d controller
2. 3d controller εύκολο και ευχρηστο
3. 3d controller
4. position
5. Position γιατί μπορούσες να βρείς πιο εύκολα συντεταγμένες
6. Position γιατί πηγαίνες πιο εύκολα στον προορισμό που ήθελες
7. Logo γιατί είναι πιο ευκολο
8. Position γιατί κινείται πιο εύκολα σε καποιες περιοχές αλλά όχι σε όλες
9. direction
10. 3d controller
11. 3d controller
12. Position γιατί είναι ευκολότερο και ακριβές
13. 3d controller
14. Position γιατί ήταν πολύ εύκολο

7 Οι συναρτήσεις ήταν στο επίκεντρο των διαδικασιών. Θυμάσαι τι έκανες; Μπορείς να περιγράψεις ξανά κάποια διαδικασία με λίγα λόγια;

1. Δεν θυμάμαι τίποτα όλα της στιγμής ήταν
2. Δεν θυμάμαι πάντως οι συναρτήσεις ήταν εύκολες
3. Κουνούσαμε το αεροπλάνο προς μια κατεύθυνση προσπαθώντας να βρούμε τις συντεταγμένες
4. Θυμάμαι πως ήταν χαλασμένο το αεροπλάνο και βλέπαμε πόσο έχανε
5. $Lat = \text{λάθος κατά } 0,5$ $Long = \text{λάθος κατά } 0,3$ $H = a * a$
6. $Lat = lats - 0,5$ $Long = lonk - 0,7$ $H = h^2$
7. H^2
8. Βάζαμε στη λογική σε μια εντολή κάποιες συντεταγμένες οι οποίες αποδιδονταν με κάποιο λάθος το οποίο έπρεπε να βρούμε. Το λάτ ήταν λάθος 0,5 το λογκ 0,7 και το h ήταν h^2
9. Γράφεις μια συνάρτηση και σε πάει στο ανάλογο position
10. Νομίζω ότι βάζαμε μια συνάρτηση να μας πάει στον τόπο που επιλέξαμε
11. Έγραφα στη λογική και μου έδειχνε τον προορισμό
12. Για να δημιουργήσω μια συνάρτηση έβγαζα συμπέρασμα από αυτά που έβγαζα στον avatar, και μετά επαλήθευα αυτά που έκανα
13. --
14. Το λατ έπεφτε 0,2 και το λογκ 0,8

8 Με ποιες συναρτήσεις ασχοληθήκαμε; Τι γνωρίζεις γι' αυτές ;

1. X^2 με την λατσωστό και λατλάθος
2. Δεν θυμάμαι έχω αλτσαμιερ
3. Δεν θυμάμαι δεν απαντώ
4. Που να τις θυμάμαι όλες Ρωτήστε το παιδί που ήταν δίπλα μου
5. Με τις παραβολές
6. Γραμμικές όπως η $ax+b$ και παραβολές όπως η a^2
7. Με τις γραμμικές συναρτήσεις
8. Γραμμικές και παραβολές όπως η $\psi=\chi-0,5$ και η $\Psi=\chi^2$
9. Τις γραμμικές
10. Γραμμικές
11. Δεν θυμάμαι ήταν πολλές
12. Ήταν η τετραγωνική ,για να βρούμε το ύψος βάσαμε το ύψος στο τετράγωνο
13. Με την γραμμική και την τετραγωνική
14. --

9 Συνεργάστηκες καλά με τους συμμαθητές σου; Προτιμάς να δουλεύεις μόνος σου ή σε ομάδα;

1. Με ομάδα
2. Με ομάδα γιατί όταν μπερδεύομαι θέλω να συζητώ με τους υπόλοιπους
3. Με ομάδα ώστε να συζητάμε και να βρίσκουμε την απάντηση μετά από διάλογο και διαλογισμό
4. Σε ομάδα γιατί συνεργαζόμαστε και επικρατεί πολύ καλό κλίμα
5. Συνεργάστηκα πολύ καλά με τους συμμαθητές μου Προτιμώ σε ομάδα γιατί μπορούμε να ανταλλάσσουμε ιδέες
6. Συνεργάστηκα πολύ καλά με τους συμμαθητές μου και δεν θα ήθελα να είμαι μόνος μου
7. Ναι δουλεύω σε ομάδα γιατί είναι πιο ευχάριστο και δημιουργικό
8. Ναι σε ομάδα γιατί μοιράζουμε τις εργασίες και βοηθούμε ο ένας τον άλλο
9. Σε ομάδα γιατί αν έχω κάποια απορία μου την λύνουν
10. Χρόνια μόνος μου αλλά νομίζω ότι έτσι ήταν καλύτερα
11. Προτιμώ να δουλεύω σε ομάδα γιατί τότε δουλεύουν οι άλλοι και εγώ κάθομαι
12. Συνεργάστηκα άψογα με τους συμμαθητές μου. Προτιμώ να δουλεύω σε ομάδα γιατί κυριαρχεί το ομαδικό πνεύμα
13. Συνεργάστηκα πολύ καλά Είναι λογικότερο και καλύτερο να είσαι σε μια ομάδα Όταν συνεργάζεσαι δεν κολλάς πουθενά αφού έχεις και τις γνώμες των άλλων
14. Συνεργάζομαι καλά αλλά μερικές φορές θέλω να δουλεύω μόνος μου

10 Τι σε δυσκόλεψε περισσότερο; (οι δεκαδικοί , οι γεωγραφικές συντεταγμένες, οι σφαιρικές συντεταγμένες ,η logo ,οι γραφικές παραστάσεις, τα σύμβολα, κάτι άλλο)

1. Τίποτε
2. Η λογκο ήταν κάπως περίεργη
3. Οι γραφικές παραστάσεις
4. Η λογκο
5. Οι σφαιρικές συντεταγμένες
6. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες γιατί ήταν δύσκολο να εντοπιστούν μόνο με το direction
7. Οι γραφικές παραστάσεις
8. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες γιατί ήταν δύσκολο να τις βρούμε
9. Οι γεωγραφικές
10. Οι σφαιρικές γιατί δεν τις πολυκατάλαβα
11. Οι δεκαδικοί γιατί τους βαριέμαι
12. Οι δεκαδικοί ήταν άριστα εκνευριστικοί
13. Οι σφαιρικές συντεταγμένες
14. Λίγο όλα, αλλά μόλις είδα πως λειτουργούν ήταν εύκολα

11 Τι θα ήθελες να προτείνεις για να γίνει καλύτερος ο cruisset;

1. Να υπάρχει όλος ο χάρτης της Ευρώπης
2. Περισσότερα χρώματα στα αεροπλανάκια
3. Να υπήρχε αυτόματη κατεύθυνση του αεροπλάνου χωρίς να μπερδεύομαι με συντεταγμένες
4. Οι κυρίες να φέρνουν περισσότερα κέικ
5. Να υπάρχουν και χώρες εκτός Ελλάδας
6. Να υπάρχουν και χώρες εκτός Ελλάδας
7. Να είναι πιο απλές μερικές από τις συναρτήσεις
8. Να γίνει πιο εύκολη η προσδιόριση των συντεταγμένων
9. Δεν πιστεύω ότι μπορεί να γίνει κάτι καλύτερο
10. Δεν μπορώ να σκεφτώ τίποτα
11. Τίποτα
12. Δεν νομίζω ότι χρειάζεται βελτίωση. Ίσως λίγο τα χρώματα του προγράμματος
13. Τίποτε απολύτως
14. Μια χαρά είναι όπως είναι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Μέσα από την πλοήγηση, τις μαθησιακές δραστηριότητες, και τις αναπαραστάσεις που δέχονται οι μαθητές από το υπολογιστικό περιβάλλον κατασκευάζουν μαθηματικά νοήματα και αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή ποσοτήτων. Τα συμπεράσματα, τα οποία συνοπτικά θα παρουσιαστούν, συνδέονται άμεσα με τα δύο βασικά θέματα αυτής της έρευνας: την αλληλεπίδραση των μαθητών με το λογισμικό και τις μαθηματικές έννοιες που αναπτύχθηκαν μέσα από αυτή την αλληλεπίδραση.

Συμπεράσματα

Αλληλεπίδραση με το λογισμικό

Η εργασία της παρούσας έρευνας σχεδιάστηκε πάνω σε ενδιαφέροντα των μαθητών. Το υπολογιστικό περιβάλλον περιλαμβάνει την προσομοίωση ενός φαινομένου το οποίο είναι οικείο στους μαθητές αφού οι περισσότεροι δήλωσαν ότι παίζουν το world of warcraft στο διαδίκτυο. Για το λόγο αυτό εξοικειώθηκαν γρήγορα με το λογισμικό και ανακάλυψαν τις δυνατότητες του. Ο τρισδιάστατος χώρος του cruilet προσφέρθηκε για πτήσεις αλλά και για « βομβαρδισμούς» πόλεων αφού συχνά οι μαθητές έριχναν το αεροπλάνο. Μέσα σε αυτό το κλίμα που θύμιζε και λίγο παιχνίδι οι μαθητές ανέπτυξαν αναπαραστάσεις για το χώρο και την πλοήγηση.

Διερευνώντας μέσα σε υπολογιστικά περιβάλλοντα προσομοίωσης, οι μαθητές **αναπτύσσουν και βελτιώνουν την αντίληψη που έχουν για το χώρο**. Το συμπέρασμα αυτό βγαίνει αβίαστα στην παρούσα έρευνα αφού οι μαθητές μέσα από την πλοήγηση με τον cruilet ξεκαθαρίζουν τις έννοιες ανατολή(δεξιά) δύση(αριστερά) βορράς(πάνω) νότος(κάτω). Μπορούν μάλιστα να κινούνται με την βοήθεια των δύο γεωγραφικών συστημάτων αναφοράς προς όλες τις κατευθύνσεις, ορίζοντας κατάλληλα την θέση του διανύσματος της μετατόπισης ή δίνοντας κατεύθυνση σε αυτό. Καθώς προχωρούν με τις δραστηριότητες ο έλεγχος τους πάνω στις έννοιες του χώρου αυξάνεται. Ανακαλύπτουν ότι με αλλαγή στο φ το αεροπλάνο κινείται πάνω - κάτω, ενώ με αλλαγή στο θ δεξιά - αριστερά. Βόρεια νότια αλλάζει το lat, ενώ ανατολικά δυτικά αλλάζει το lon. Βρίσκουν τα όρια των γεωγραφικών συντεταγμένων του ελληνικού χώρου. Μπορούν

ακόμα να υπολογίσουν το υψόμετρο μιας περιοχής ή την απόσταση δύο πόλεων, να οργανώσουν πτήσεις ή και να «ρίξουν» ένα αεροπλάνο. Από τα προσφερόμενα συστήματα αναφοράς οι μαθητές προτιμούν να κινούνται με το direction και το 3d controller. Η οπτική αναπαράσταση του διανύσματος της μετατόπισης μέσα από τον 3d controller βοηθάει τους μαθητές να προσανατολίζονται καλύτερα μέσα στο χώρο. Είναι κάτι σαν πυξίδα όπως είπε κάποιος μαθητής. Αντίθετα οι γεωγραφικές συντεταγμένες δεν φάνηκε να τους ενθουσίαζαν. Αυτό οφείλεται μάλλον στα δεκαδικά νούμερα και στην γενικότερη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στην κατανόηση των ρητών αριθμών.

Καθώς έρχονται σε επαφή με το εργαλείο(artifact) και αλληλεπιδρούν μαζί του οι μαθητές **κάνουν εικασίες και αναπτύσσουν διάφορες στρατηγικές**. Οι αποφάσεις τους και οι στρατηγικές που ακολουθούν είναι σημαντικές και ενδιαφέρουσες και αντανακλούν τον τρόπο με τον οποίο το υπολογιστικό περιβάλλον παρέχει μια σειρά από λειτουργικότητες, τις οποίες οι μαθητές μπορούν να ελέγξουν και να αξιοποιήσουν σε μια δεδομένη στιγμή, ώστε να πετύχουν το στόχο τους (Noss & Hoyles,1996) . Αυτή η άμεση αλληλεπίδραση ανάμεσα στο υποκείμενο (μαθητές) και το αντικείμενο (cruislet), οδηγεί το υποκείμενο στην ανάπτυξη των κατάλληλων αναπαραστάσεων (Verillon & Rabardel,1995).

Οι μαθητές ερευνούν, ερμηνεύουν, διαμορφώνουν κανόνες, τους δοκιμάζουν, οδηγούνται στην απορία και μέσα από τα εργαλεία που τους παρέχει το λογισμικό **χειρίζονται μαθηματικές έννοιες** και τους μεταξύ τους συσχετισμούς χωρίς καν να το καταλάβουν. Δρώντας δε, μέσα από «ρόλους» που αναλαμβάνουν στο πλαίσιο πραγματικών «αποστολών», αισθάνονται πρόκληση και παρακινούνται σε εκούσια συμμετοχή με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και προσωπική επένδυση. Εμπλέκονται δηλαδή σε μια ενεργητική διαδικασία μάθησης μέσα από τη δημιουργία (learning by doing) όπου η μαθηματική γνώση προσεγγίζεται με τη συμβολή του εκπαιδευτικού μέσα από την κατασκευή πτήσεων και την αναπαράσταση χωρικών εννοιών.

Μαθηματικές έννοιες

Ο γεωγραφικός χώρος και η πλοήγηση μέσα σε αυτόν λειτούργησε σαν αφετηρία για να κατασκευάσουν οι μαθητές νοήματα γύρω από την έννοια της συνάρτησης ωστόσο ανέδειξε και διάφορα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια αυτή.

► Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης

Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να μετακινήσουν το αεροπλάνο συνειδητοποίησαν ότι ο τρισδιάστατος χάρτης της Ελλάδας αποτελεί ένα σύστημα γεωγραφικών συντεταγμένων με συγκεκριμένα όρια. Η ανακάλυψη αυτών των ορίων αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης και πειραματισμού μέσα από το συνδυασμό των λειτουργικοτήτων του λογισμικού. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αξιοποιώντας τα συστήματα αναφοράς μετακινούσαν το αεροπλάνο προς το βορρά, τον νότο, την ανατολή και τη δύση ώστε να φθάσουν στο άκρο του τρισδιάστατου χάρτη της Ελλάδας. Σε κάθε περίπτωση μέσα από τον καθορισμό του διανύσματος της μετακίνησης μελετούσαν τις τιμές των γεωγραφικών συντεταγμένων και με αυτό τον τρόπο προσέγγισαν το εύρος των τιμών των lat και long που στη συνέχεια αποτέλεσε και πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που δημιούργησαν. Οι μαθητές συχνά ξεχνούσαν ποιες τιμές παίρνει το lat και το long, το λογισμικό όμως τους ανάγκαζε να το θυμηθούν αφού ο «avatar can't move».

► Η συνάρτηση ως συμμεταβολή.

Οι μαθητές αξιοποιώντας το δύο συστήματα αναφοράς των σφαιρικών και γεωγραφικών συντεταγμένων ανέπτυξαν νοήματα για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή. Συγκεκριμένα, παρατηρώντας το διάνυσμα μετατόπισης μιας κατακόρυφης πτήσης προς τα πάνω ($\theta=0$, $\varphi=90$, $\rho=1000$) είδαν πως στο position μεταβάλλεται μόνο το ύψος του αεροπλάνου κατά 1000m. Μέσα από μια σειρά ίδιων μετατοπίσεων οι μαθητές αναγνώρισαν την εξάρτηση ανάμεσα στη λειτουργία go του direction και στο ύψος του αεροπλάνου. Προκειμένου να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τις παρεχόμενες αναπαραστάσεις, η ερευνήτρια τους προέτρεψε να παρουσιάσουν λεκτικά, συμβολικά και γραφικά τις προσωπικές τους ερμηνείες. Εκφράσεις όπως «Όσο περισσότερα go πατάμε, τόσο πιο ψηλά πηγαίνει το αεροπλάνο» δηλώνουν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν ικανότητες λογικής της συμμεταβολής σύμφωνα με το 2^ο επίπεδο των Carlson et al 2002(οι μεταβλητές αλλάζουν σε συνδυασμό η μία με

την άλλη). Επιπλέον ο αναδρομικός τύπος $h_2 = h_1 + 1000$ τον οποίο αρχικά έγραψαν οι μαθητές δείχνει ότι είδαν και το ρυθμό αλλαγής του ύψους κάθε φορά που πατούν go: είναι 1000 και είναι σταθερός.(E3). Δεν μπόρεσαν όμως να απαντήσουν εύκολα στην ερώτηση που θα βρίσκεται το αεροπλάνο μετά από 50 go και χρειάστηκε η παρέμβαση της ερευνήτριας για να καταλήξουν στον γενικό τύπο $h_a = 5000 + a \cdot 1000$.

Οι μαθητές ανέπτυξαν λογικές συμμεταβολής καθώς παρατηρούσαν και την πλοήγηση ενός χαλασμένου αεροπλάνου. Μέσα από την διαδικασία fly1 της logo (που ήταν γι αυτούς μαύρο κουτί) έδιναν τιμές (latcorrect-independent variable) στο αεροπλάνο και μέσα από το position παρατηρούσαν την θέση που αυτό πήγαινε (latwrong-dependent variable). Στην προσπάθειά τους να ανακαλύψουν την κρυμμένη συνάρτηση οι μαθητές φάνηκε ότι ήταν ικανοί να συντονίσουν αλλαγές στην κατεύθυνση και στο ποσό της αλλαγής της εξαρτημένης μεταβλητής καθώς άλλαζε η ανεξάρτητη(E3) Μόνο σε μία περίπτωση παρατηρήθηκε μια λογική συμμεταβολής που αγγίζει το 4^ο επίπεδο(E4) των Carlson et al 2002. Ωστόσο φάνηκε ότι δεν μπορούσαν να αναπτύξουν τις ίδιες λογικές όταν κατασκεύαζαν τα αντίστοιχα γραφήματα

► Η αντίστροφη συνάρτηση.

Οι μαθητές αλληλεπιδρώντας με το λογισμικό θεώρησαν την αντιστροφή σαν ανάποδη διαδικασία έτσι ώστε τα παλιά outputs να γίνονται νέα inputs και το ανάποδο Συνεχίζοντας λοιπόν το σενάριο του χαλασμένου αεροπλάνου και γνωρίζοντας το λάθος που κάνει ο avatar, οι μαθητές έπρεπε μέσα από την logo (διαδικασία fly1) να τον οδηγήσουν σε συγκεκριμένη πόλη (Ρόδο). «Πρέπει να σκεφτούμε ανάποδα» όπως είπε ο μαθητής της ομάδας 5. «Να κάνουμε μια αντίστροφη διαδικασία. Αφού το αεροπλάνο χάνει 0,5 στο λάτ και 0,7 στο λονγκ εμείς θα του πούμε να πάει σε 0,5 και 0,7 μοίρες παραπάνω». Οι μαθητές εκφράζουν λεκτικά την σχέση: «η αντίστροφη συνάρτηση της $\psi = \chi - 0,5$ είναι η $\chi = \psi + 0,5$ ». Η εικασία που κάνουν επιβεβαιώνεται μέσα από το λογισμικό αφού βλέπουν ότι το αεροπλάνο πήγε στην θέση που έπρεπε. Οι λάθος επιλογές έχουν σαν αποτέλεσμα το αεροπλάνο να μην πάει στην σωστή θέση. Μέσα από αυτή την αλληλεπίδραση και την άμεση ανατροφοδότηση που δέχονται από το μηχανήμα, οι μαθητές χτίζουν σιγά σιγά την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

► Η ταυτοτική συνάρτηση

Καθώς οι μαθητές εξερευνούν δυναμικά συναρτησιακές σχέσεις, όπως το πώς αλλάζει η θέση του αεροπλάνου σε σχέση με τις τιμές που δίνουμε εμείς στο λ ατ, λ ονγκ, λ height αρχίζουν να σκέφτονται πώς μια μεταβλητή (συνήθως η εξαρτημένη) αλλάζει καθώς συμβαίνουν αλλαγές στην άλλη (ανεξάρτητη μεταβλητή) (E1) Στην περίπτωση που το αεροπλάνο επισκευάζεται, η εξαρτημένη μεταβλητή έχει τις ίδιες τιμές με την ανεξάρτητη. Ότι τιμή δίνω στο λ ατσωστό ακριβώς εκεί πηγαίνει και το αεροπλάνο.

Οι μαθητές δεν έχουν καμία δυσκολία να διατυπώσουν αυτή την κατάσταση 1)λεκτικά: «Δε χάνει τίποτα, απλά θα δίνουμε συντεταγμένες και θα πηγαίνει εκεί που πρέπει» 2)συμβολικά: $\psi=\chi$ και 3) γραφικά: μια ευθεία γραμμή που είναι διχοτόμος των αξόνων

► Αναλογική σκέψη

Στην προσπάθειά τους να βρουν πόσο χάνει το χαλασμένο αεροπλάνο στο ύψος, καταλήγουν αρκετοί στην αναλογία. Όταν δίνουμε στο λ σωστό την τιμή 200 το λ λάθος γίνεται 40000 «Το ύψος πολλαπλασιάζεται πάντα επί 200» λέει ο μαθητής της ομάδας 9, καταλήγοντας σε λάθος συμπέρασμα, αφού το ύψος πολλαπλασιάζεται πάντα επί τον εαυτό του όπως πολύ σωστά διορθώνει λίγο αργότερα. Η αλλαγή αυτή στις απόψεις του προήλθε μέσα από τις πολλές δοκιμές που έκανε με το λογισμικό. Ωστόσο φάνηκε ότι ο αναλογικός συλλογισμός είναι βαθιά ριζωμένος στη σκέψη των μαθητών και χρησιμοποιείται αυθόρμητα και ασυνείδητα. Η τάση της ευρείας εφαρμογής του αναλογικού μοντέλου, ακόμη και σε μη γραμμικές καταστάσεις αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ψευδαίσθηση της αναλογίας («illusion of linearity»), (De Bock et al, 1998). Η ίδια εμμονή στην αναλογική σκέψη φάνηκε και στις γραφικές παραστάσεις αφού οι περισσότερες ευθείες περνούσαν από την αρχή των αξόνων. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα ενός μαθητή που όταν τον ρωτάει η ερευνήτρια γιατί η ευθεία $\psi=\chi-0,5$ περνάει από το σημείο (0,0) απαντά «Ε γιατί έτσι το μάθαμε, δεν έχουμε μάθει κάτι άλλο στα μαθηματικά».

► Λεκτική, συμβολική και γραφική αναπαράσταση

Στα πλαίσια των δραστηριοτήτων οι μαθητές έπρεπε να εκφράσουν λεκτικά συμβολικά και γραφικά τα όσα έβλεπαν στην οθόνη του υπολογιστή τους. Στόχος ήταν να φανεί ο βαθμός στον οποίο οι αναπαραστάσεις του συστήματος βοήθησαν τους μαθητές στην κατασκευή προσωπικών αναπαραστάσεων για την έννοια της συνάρτησης.

Η διαδικασία αυτή ανέδειξε διάφορα προβλήματα που οι μαθητές αντιμετώπισαν. Μερικά από αυτά ήταν

- Ενώ η λεκτική διατύπωση των δρώμενων της οθόνης ήταν σχετικά εύκολη υπόθεση, η συμβολική αναπαράσταση συχνά τους δυσκόλευε.
- Οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις περνούσαν από την αρχή των αξόνων (αναλογικό μοντέλο) ακόμη και όταν δεν έπρεπε.
- Οι μαθητές δεν μπορούν να σκεφτούν ότι μια συνάρτηση μπορεί να αποτελείται από διακριτές τιμές και σαν συνέπεια το γράφημα της να αποτελείται από μεμονωμένα σημεία.
- Άλλαξαν τους ρόλους ανάμεσα στην εξαρτημένη και στην ανεξάρτητη μεταβλητή.
- Ελάχιστη σημασία έδωσαν επίσης στον σωστό χωρισμό των αξόνων σε διαστήματα. Αυτό πιθανόν οφείλεται στα δεκαδικά νούμερα των lat και long, που τους δυσκόλεψαν αρκετά.

► Άλλες μαθηματικές έννοιες

Εκτός από την έννοια της συνάρτησης που ήταν και η κεντρική έννοια στην παρούσα έρευνα, ο γεωγραφικός χώρος ανέδειξε προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε κάποιες άλλες έννοιες, ωστόσο λειτούργησε και σαν αφετηρία για ν' αναδειχτούν καινούριες.

→ Τα δεκαδικά ψηφία των γεωγραφικών συντεταγμένων φάνηκε ότι δυσκόλεψαν τους μαθητές αφού αρκετοί ήταν αυτοί που δεν μπορούσαν να κάνουν πρόσθεση δεκαδικών. Τα λάθη που έκαναν φανερώνουν μια γενικότερη αποτυχία στην κατανόηση των ρητών αριθμών (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

→ Καθώς οι μαθητές μετακινούσαν το αεροπλάνο μέσα στο γεωγραφικό χώρο ανέπτυξαν μια ενδιαφέρουσα διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Όταν ήθελαν να πλησιάσουν σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χάρτη, χρησιμοποιούσαν τις σφαιρικές συντεταγμένες και μείωναν το μέτρο R του διανύσματος της μετατόπισης. Μπορούσαν έτσι να προχωρήσουν λίγο ακόμη και να προσεγγίσουν με πιο μεγάλη ακρίβεια τα όρια του lat long της Ελλάδας ή το υψόμετρο μιας περιοχής. Η απόφαση αυτή αναδεικνύει την σκέψη που έχουν οι μαθητές για το «πλησιάζω κάτι όσο πιο κοντά γίνεται»: πρέπει να μειώσω το βήμα με το οποίο το πλησιάζω. Έτσι μέσα από την πλοήγηση στο εικονικό περιβάλλον του λογισμικού, το δυναμικό χειρισμό των

λειτουργικότητων του περιβάλλοντος και την άμεση ανατροφοδότηση που δέχονται από το μηχάνημα, οι μαθητές σχηματίζουν μια πρώτη διαισθητική αντίληψη της έννοιας του ορίου που το σχολικό πρόγραμμα προβλέπει να διδαχθούν σε πιο ώριμη φάση

→ Το λογισμικό δίνει στους μαθητές την δυνατότητα να κατανοήσουν την έννοια της **απόλυτης θέσης** στο γήινο σύστημα συντεταγμένων. Όταν προσπαθούσαν να προσγειώσουν το αεροπλάνο σε συγκεκριμένη πόλη (δραστηριότητα 12β) κατάλαβαν πως πρέπει να είναι όσο πιο ακριβείς(περισσότερα δεκαδικά ψηφία) γίνεται προκειμένου να το καταφέρουν. Η θέση ενός σημείου (ή μιας πόλης) στην επιφάνεια της γης είναι μονοσήμαντα ορισμένη και αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζευγάρι συντεταγμένων. Ισχύει και το αντίστροφο. Κάθε ζευγάρι συντεταγμένων ορίζει ένα και μοναδικό σημείο στην επιφάνεια της γης .

→ Οι μαθητές μέσα από το λογισμικό κινητοποίησαν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους αρκετές φορές. Καθώς προσπαθούσαν να βρουν την απόσταση δύο πόλεων (δραστηριότητα 5) φάνηκε ότι είχαν στο μυαλό τους **την απόσταση δυο σημείων** $A(\chi, \psi)$ και $B(\kappa, \lambda)$ στο καρτεσιανό επίπεδο. Στην ίδια πάλι δραστηριότητα οι μαθητές θέλοντας να επιβεβαιώσουν την τιμή της απόστασης των δύο πόλεων οδηγούν το αεροπλάνο από την Άρτα στην Άμφισσα και μετά από την Άμφισσα στην Άρτα και ελέγχουν το R. Κινητοποιούν δηλαδή την εξής απλή και βασική γνώση: **το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ =το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BA}$.**

→ Κάποιοι μαθητές εκφράζοντας τις σκέψεις τους διατύπωσαν την άποψη ότι η **συνάρτηση είναι κάτι σαν εξίσωση**. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται συχνά μέσα στην σχολική τάξη αφού οι μαθητές μπερδεύουν την έννοια της εξίσωσης με την συνάρτηση. Ο τύπος της συνάρτησης $\psi = \chi + 5$ παίρνει την μορφή εξίσωσης όταν δώσω στο χ ή στο ψ μια συγκεκριμένη τιμή

Η επέμβαση των μαθητών στο πρόγραμμα

Κατά την διάρκεια του 3^{ου} μέρους της έρευνας οι μαθητές προσπάθησαν να φτιάξουν ένα δικό τους πρόγραμμα στην logo στηριζόμενοι στην διαδικασία fly1.O cruilet μετατράπηκε σε ένα μισοψημένο μικρόκοσμο και οι μαθητές καλούνται να αλλάξουν τον κώδικα με σκοπό να κατασκευάσουν μια νέα πτήση για τους συμμαθητές τους . Παρ όλο που αφέθηκαν ελεύθεροι να δημιουργήσουν ότι αυτοί ήθελαν, εντούτοις

οι περισσότεροι επενέβησαν μόνο στις συναρτησιακές σχέσεις αλλάζοντας τις σταθερές τιμές ή τον τύπο της συνάρτησης. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στην μικρή εμπειρία που είχαν οι μαθητές με τον προγραμματισμό και την logo.

Μέσα από αυτή την διαδικασία επίσης φάνηκε ότι οι μαθητές θεωρούν πιο δύσκολη την τετραγωνική και όχι την γραμμική συνάρτηση, πιο δύσκολα τα δεκαδικά και όχι τα ακέραια ψηφία. Καθώς οι μαθητές κατασκευάζουν την δική τους συναρτησιακή σχέση τούς δίνεται η ευκαιρία να αναστοχαστούν πάνω σε έννοιες με τις οποίες είχαν ασχοληθεί νωρίτερα, όπως π.χ αυτή του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει να προσέξουν τον τύπο που θα δώσουν στην συνάρτηση του ύψους γιατί κινδυνεύουν να βρεθούν κάτω από την επιφάνεια της γης. Το λογισμικό για άλλη μια φορά βοηθά στην ανάπτυξη μαθηματικού νοήματος

Επίλογος

Η νέα εποχή διαθέτει πλήθος από τεχνολογίες που προσφέρουν στην μαθησιακή διαδικασία πλούσιες παιδαγωγικές ευκαιρίες για να χτίσουν πάνω στις διαισθήσεις των μαθητών και να εξασκηθούν με ποσότητες που αλλάζουν δυναμικά. Σε συνδυασμό με την σωστή εκπαίδευση του καθηγητή αυτές οι τεχνολογίες μπορούν να προσφέρουν πολύτιμα εργαλεία στους μαθητές ώστε να εκφράζουν μαθηματικές έννοιες (όπως λογικές συμμεταβολής) αναλύοντας και ερμηνεύοντας δυναμικά συναρτησιακές καταστάσεις. Μελλοντικές έρευνες θα πρέπει να λάβουν υπ' όψιν το έντονο ενδιαφέρον των μαθητών για την προσομοίωση καταστάσεων της καθημερινής εμπειρίας που ενσωματώνουν διαφορετικές συμμεταβαλλόμενες ποσότητες. Ο υπολογιστής και τα μέσα που τον συνοδεύουν μπορούν να ανατρέψουν την ισχύουσα κατάσταση στην εκπαιδευτική διαδικασία και να συμβάλλουν τόσο στην καλλιέργεια μιας νέας παιδαγωγικής αντίληψης, όσο και στην ανάπτυξη νέων στάσεων και δεξιοτήτων των μαθητών. Η μάθηση έτσι θα είναι πιο αποτελεσματική και διασκεδαστική σε αντίθεση με τον συμβατικό τρόπο που κυριαρχούσε μέχρι σήμερα

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alexopoulou, E., Kynigos, C. & Markopoulos, C. (2007). Changing a half-baked 3d navigational game. In I. Kalaš (Eds.). *Proceedings of the 11th European Logo Conference*, Bratislava, Slovakia.

Arcavi, A., Schoenfeld, A., On the meaning of variable, *Mathematics Teache* 81(6) (1987) 420-427.

Artigue, M. (2002): Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12, 245-274. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, (7), pp. 115-162. Providence, RI: American Mathematical Society.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.

Carlson, M. P., Oehrtman, M., & Thompson, P. W. (2007). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 150-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M. P., Smith, N., & Persson, J. (2003). *Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus*. Paper presented at the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA, Honolulu, HI.

Clements, D., & Sarama, J. (1997). Research on Logo: a Decade of Progress. *Computers in the Schools*, 14(1-2), 9-46

Cobb P., Confrey J., DiSessa A., Lehrer R., and Schauble L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32-1, 9-13.

Cobb, P., Yackel, E., and Wood, T.: (1992) "A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education", *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1),2-33.

Confrey, J., Smith,E., *Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit*. Paper resented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, April, 1992.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, (2), 167-192.

Coulombe, W. N., Berenson, S. B. (unpublished manuscript). First year students' development of the construction of covariation. North Carolina State University.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981): *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.

diSessa, A. (2000). Changing minds, computers, learning and literacy. Cambridge, MA: MIT Press.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E.

Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). The Mathematical Association of America.

Dufour – Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Edwards, L. D. (1995). Microworlds as Representations. In A. diSessa, C. Hoyles & R. Noss (Eds.) *Computers and Exploratory Learning*, 127-154. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag

Eisenberg, T. & Dreyfus, D., (1991), On the Reluctance to Visualize in Mathematics, in *For the Learning of Mathematics* 6(2), 18-24.

Eisenberg, T., Functions and associated learning difficulties, in *Advanced mathematical thinking*, D. Tall, Editor, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991,p. 140-152.

Goldin, G. A., & Kaput, J.J. (1996): A joint perspective on the idea of representation in learning and doing Mathematics. In L.Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin

(Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Guin, D., & Trouche, L.(1999): The complex process of converting tool into mathematical instruments: The case of calculators, *International Journal of computer for mathematical learning*, 3(3), 195-227.

Harel, G., Dubinsky,E., ed. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes, Vol. 25. Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1991.

Hoyles C., Noss R. and Adamson R. (2002) 'Rethinking the Microworld Idea'. *Journal of Educational Computing Research, Special issue on: Microworlds in mathematics education*. 27, 1&2, 29-53.

Hoyles, C. & Noss, R. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer Academic Publishers,Dordrecht/Boston/London

Hoyles, C. I R. Noss (1986). Scaling a mountain - a study of the use, in Logo environment, *European Journal of Psychology of Education*,1(2), 111—126.

Hoyles, C., & Noss, R. (1989). The Computer as a Catalyst in Children's Proportion strategies. *Journal of Mathematical behavior*, 8, 53-75.

Hoyles, C., Noss, R. & Sutherland, R. (1989) *The Ratio and Proportion Microworld, Final report of the Microworlds project*, Vol. III, Institute of Education, University of London.

Confrey,J., Smith,E., *Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, April, 1992.

Confrey, J.,Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions, in *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, G. Harel and J. Confrey, Editor, SUNY Press, Albany, NY, in press,

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kafai Y., Resnick M. (Eds) (1996) *Constructionism in Practice*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey

Kaput, J. J. (1987a). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987b). Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J., (1992), Technology and mathematics education, in D.A.Grouws (Ed.) *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY.

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computers and Education*, 31, 405-422.

Kynigos C. (1999). *Perspectives in analyzing classroom interaction data on collaborative computer based mathematical projects*. In C. Hoadley and J. Roschelle (Eds.), *Proceedings of the CSDL Conference* (333-341)

Kynigos, C. & Psycharis, G. (2003). 13 year-olds' meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation, 27th PME Conference, Honolulu, U.S.A. Hawaii, Vol.3, pp. 165-172.

Kynigos, C. (2007) Half-baked Microworlds in use in Challenging Teacher Educators' Knowing, *international Journal of Computers for Mathematical Learning*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands

Kynigos, C., Koutlis, M. & Hatzilacos, T. (1997) Mathematics with component-oriented exploratory software, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 229-250

Kynigos, C. and Gavrilis, S. (2006) Constructing A Sinusoidal Periodic Covariation. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education* (4), 9-16, Novotna J., Moraova H., Kratka Mm. & Stehlikova N. (Eds), Charles University, Faculty of Education, Prague.

Lagrange, J.B. (1999): Learning pre-calculus with complex calculators: Mediation and instrumental genesis, *Proceedings of the 23rd PME Conference. Haifa*. 3(pp. 193- 200).

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., and Stein, M.K., Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching, *Review of Educational Research* 60(1) (1990) 1-64.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In Kelly, A., Lesh, R. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, pp. 591-646. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Publishers.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale Erlbaum

Lesh, R., Post, T., and Behr, M. Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments, in *Developments in school mathematics education around the world*, I. Wirszup and R. Streit, Editor, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1987, p. 1-25.

Mariotti, M.A. (2002): Influences of technologies advances in students' math learning. In L. D. English (ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 695-723). Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *MAA Notes*, 25, 175–193).

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education* 1994(4), 139–168.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H. and Arcavi, A. Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them, in *Integrating research on the graphical representation of functions*, T. A. Romberg, E.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Papert S., (1980). Νοητικές Θύελλες Παιδιά, Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές και Δυναμικές Ιδέες. Εκδόσεις Οδυσσέας

Rabardel, P. (1995): *Les hommes et les technologies*. Paris: Armand Colin.

Rasmussen, C. L. (2000). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55–87.

Saldanha, L., & Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensen & W. N. Coulombe (Eds.). *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education North America*. Raleigh, NC.

Sarama, J., & Clements, D. (2002). Design of Microworlds in Mathematics and Science Education, *Journal of Educational Computing Research*. 27(1), 1-3.

Schwartz J. und Yerushalmy M. (1992). Getting students to function in and with algebra, in G. Harel and E Dubinsky (Eds.) *The concept of function aspects of epistemology*, MA.A. Notes, Vol. 25, pp. 261 - 289.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 362–389.

Sfard, A. (1989). Transition from Operational to Structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of the 13 International Conference for the Psychology of Mathematics Education Paris*.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-28). The Mathematical Association of America.

Sutherland, R. (1989) Providing a computer-based framework for algebraic thinking, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 20, No 3, pp. 317-344

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274

Thompson, P., Thompson, A. G. *Images of rate*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA, April, 1992.

Trouche, L. (2004): Environnements Informatiques et Mathématiques: Quels usages pour quels entissages? *Educational Studies in Mathematics* 55, 181–197. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Verillon, P. (2000): Revisiting Piaget and Vygotsky: In Search of a Learning Model for Technology Education. *The journal of Technology Studies XXVI*, 1.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995): Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77- 101.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 97–129.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics education*, 20(4), 356-266. ABSTRACT

von Glasersfeld, E., (1987). Preliminaries to Any Theory of Representation. In C. Janvier eds. Problems of representation in teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum associates, London, 215-226.

Yackel, E., and Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 4, 458-477.

Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics: Research in Collegiate Mathematics Education*, IV(8), 103–127

Βουλγαρη, Ν. (2005) *Μαθαίνω για την εκθετική συνάρτηση με την βοήθεια του function prode*. Διπλωματική εργασία. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών». Αθήνα.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., Σιακαλλή, Μ. (2000). *Συναρτήσεις: Ένα παιχνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης*. Λευκωσία: Τμήμα Επιστημών της Αγωγής. Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε., Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες αναπαράστασης και μάθηση των μαθηματικών*. Λευκωσία: Erasmus IP1- Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., Σπύρου, Π., (2004) *Επίλυση προβλημάτων μοντέλα και συναρτήσεις* (Τόμος 1). Λευκωσία: intercollege, Κυπριακή μαθηματική εταιρεία

Δημητρακοπούλου, Α. (2002): *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής* (σελ. 57-81). Αθήνα: Καστανιώτης.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα Χειρισμού Γραφικών Παραστάσεων Αποφοίτων Λυκείου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, 10-11, 21-43.

Κλαουδάτος, Ν. (1996). *Σημειώσεις Διδακτικής Μαθηματικών* Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Εκδόσεις Leader Books

Κυνηγός, Χ. (2007): *Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Κυνηγός, Χ. και Δημαράκη, Ε. (2002): *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής* (σελ. 17-26). Αθήνα: Καστανιώτης.

Μεταξάς, Ν. (2006): *Η δυσκολία κατανόησης του ορισμού του αορίστου ολοκληρώματος. Ανάλυση μέσα από διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια*. Διπλωματική εργασία. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών». Αθήνα.

Παλαιογιαννίδης, Δ. (2007): *Μια προσέγγιση της διδασκαλίας εννοιών που σχετίζονται με πειρες διαδικασίες: Η περίπτωση της διδασκαλίας του ορισμένου ολοκληρώματος με τη χρήση του λογισμικού Autograph*. Διπλωματική εργασία. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών». Αθήνα.

Παπαναστασίου, Κ. & Παπαναστασίου, Ε.Κ. (2005). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Λευκωσία: Συγγραφέας.

Πατρώνης, Τ., Σπανός, Δ., (1996) *Σύγχρονες θεωρήσεις και ερευνες στην μαθηματική παιδεία* Αθήνα : Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού

Συκαρά, Ν. (2005): *Προσεγγίσεις της έννοιας του διανύσματος από μαθητές δημοτικού μέσα σε ένα τρισδιάστατο υπολογιστικό περιβάλλον προσομοίωσης*. Διπλωματική εργασία. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών». Αθήνα

Νάκος Βύρωνας : Αναλυτική χαρτογραφία 2006

Τουμάσης Χ. (2002) *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg.

