ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική εργασία με τίτλο:

«Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη βοήθεια του ψηφιακού εργαλείου Casyopée»

ΚΑΦΕΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ – ΙΓΝΑΤΙΟΣ
Α.Μ. Δ201218

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΨΥΧΑΡΗΣ

ΑΘΗΝΑ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γεώργιος Ψυχάρης (επιβλέπων Καθηγητής)	Λέκτορας	……
2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής	……
3) Δέσποινα Πόταρη	Αν. Καθηγήτρια	……

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το Λέκτορα κ. Ψυχάρη Γεώργιο, για την καθοριστική συμβολή του στην παρούσα ερευνητική εργασία. Οι στοχευμένες παρατηρήσεις του και η πολύτιμη καθοδήγησή του σε όλο το διάστημα της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας με επηρέασαν βαθιά και ανέδειξαν τη σημασία της συνεργασίας μας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και την Αν. Καθηγήτρια Πόταρη Δέσποινα για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή και τις παρατηρήσεις τους στο σύνολο της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη γραμματέα του μεταπτυχιακού προγράμματος κ. Μπακογιάννη Διονυσία για την πολύτιμη βοήθειά της.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τους μαθητές και καθηγητές που εθελοντικά συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία.

Ευχαριστώ πολύ όλους τους συμφοιτητές μου και ιδιαίτερα το Βλάχο Ιωάννη, την Λεοντίου Ελένη και τον Μαρκόγλου Κωνσταντίνο για την εποικοδομητική συνεργασία μας ως ομάδα στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος. Επίσης ευχαριστώ τους φίλους και τις φίλες που με βοήθησαν με τα σχόλιά τους και συγκεκριμένα την Ελένη Στέφου για τη φιλολογική επιμέλεια της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου που με στήριξε μέχρι το πέρας της διπλωματικής εργασίας.

Καφετζόπουλος Γεώργιος – Ιγνάτιος, Ιούλιος 2014

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ **6**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ **7**

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 7
1.2 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ 11
1.3 ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ 16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ **29**

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ 29
2.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΝΟΗΜΑΤΟΣ 32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ CASYOPÉE **35**

3.1 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ 35
3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ 36

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ **42**

4.1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ 42
4.2 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ 42
4.3 ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ 44
4.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ 44
4.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ **54**

5.1 ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 55
5.2 ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ **99**

ΑΝΑΦΟΡΕΣ **102**

Πίνακας σχημάτων

Σχήμα 1: Το πλαίσιο της συνάρτησης 18
Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση ορισμού έννοιας και εικόνας έννοιας 31
Σχήμα 3: Παράθυρο «Algebra» - Παράθυρο «Notepad» 36
Σχήμα 4: Παράθυρο «Graphs» 36
Σχήμα 5: Μεταφορά καμπύλης στο παράθυρο Γεωμετρίας 37
Σχήμα 6: Γεωμετρικός υπολογισμός του μήκους ΑΜ 38
Σχήμα 7: Έλεγχος ανεξάρτητης μεταβλητής 38
Σχήμα 8: Ανατροφοδότηση από το λογισμικό 38
Σχήμα 9: Δημιουργία συνάρτησης – Αυτόματη εξαγωγή μαθηματικού τύπου 39
Σχήμα 10: Το παράθυρο του πίνακα τιμών 39
Σχήμα 11: Το παράθυρο των γραφικών παραστάσεων - «Κινούμενος στόχος» 40
Σχήμα 12: Πώς προέκυψαν τα επίπεδα συμμεταβολής. 52
Σχήμα 13: Δεντροδιάγραμμα των τριών κατηγοριών νοημάτων των μαθητών για τη συνάρτηση. 55
Σχήμα 14: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 3. 57
Σχήμα 15: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 1. 58
Σχήμα 16: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 2 59
Σχήμα 17: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 1. 60
Σχήμα 18: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 2 61
Σχήμα 19: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 3. 62
Σχήμα 20: Παράθυρο πίνακας τιμών στη Δραστηριότητα 3. 62
Σχήμα 21: Παράθυρο πίνακας τιμών και παράθυρο υπολογισμών μεταβλητών στη Δραστηριότητα 2. 63
Σχήμα 22: Παράθυρο Γεωμετρίας και υπολογισμών στη Δραστηριότητα 1. 70
Σχήμα 23: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 2. 71
Σχήμα 24: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 2. 72
Σχήμα 25: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 3. 73
Σχήμα 26: Εργαλείο «Model» για ανατροφοδότηση. 75
Σχήμα 27: Παράθυρο Γεωμετρίας και υπολογισμών στη Δραστηριότητα 1. 76
Σχήμα 28: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 2. 81
Σχήμα 29: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 3. 82
Σχήμα 30: Εργαλείο «Model» του λογισμικού – Ορισμός μεταβλητών. 83
Σχήμα 31: Παράθυρο πίνακας τιμών και παράθυρο γραφικών παραστάσεων. 85
Σχήμα 32: Παράθυρο Γεωμετρίας και παράθυρο γραφικών παραστάσεων με τη χρήση κινούμενου στόχου. 87
Σχήμα 33: Σύνδεση παραθύρου Γεωμετρίας και παραθύρου γραφικών παραστάσεων. 89
Σχήμα 34: Παράθυρο πίνακα τιμών, παράθυρο Γεωμετρίας και παράθυρο γραφικών παραστάσεων. 90
Σχήμα 35: Παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο Γεωμετρίας. 91
Σχήμα 36: Παράθυρο πίνακα τιμών, παράθυρο Άλγεβρας και παράθυρο γραφικών παραστάσεων. 92
Σχήμα 37: Σύνδεση αναπαραστάσεων (παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο μεταβλητών). 94
Σχήμα 38: Σύνδεση αναπαραστάσεων (παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο γραφικών παραστάσεων). 94
Σχήμα 39: Σύνδεση αναπαραστάσεων (παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο μεταβλητών). 96

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο κύριος στόχος της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου στο πλαίσιο της μοντελοποίησης γεωμετρικών προβλημάτων. Οι μαθητές εργάστηκαν στο υπολογιστικό περιβάλλον Casyopée, το οποίο προσφέρει διασυνδεόμενες γεωμετρικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Επίσης, μελετάται αν και με ποιους τρόπους οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις όσο και οι σχεδιαζόμενες δραστηριότητες παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή. Τα αποτελέσματα δείχνουν η μοντελοποίηση γεωμετρικής κατάστασης και η χρήση διασυνδεόμενων αναπαραστάσεων έπαιξαν κρίσιμο ρόλο στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών. Τα νοήματα για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή κατατάχθηκαν σε τέσσερα διακριτά επίπεδα αναδεικνύοντας ποιοτικές διαφορές στις κατανοήσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση με τα κύρια ευρήματα άλλων σχετικών μελετών και δίνονται ορισμένες υποδείξεις σχετικά με την παιδαγωγική αξιοποίηση των υπολογιστικών περιβαλλόντων που περιλαμβάνουν σύνδεση Άλγεβρας και Γεωμετρίας.

Λέξεις κλειδιά: γεωμετρική μοντελοποίηση, νοηματοδότηση συνάρτησης, συμμεταβολή, Casyopée, διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις

The main objective of the present study is to investigate conceptualization of function as covariation by groups of 11th grade students of high school in the context of geometric modeling problems. The students worked with Casyopée, a computer environment which offers interconnected geometric and algebraic representations of functions. It is also studied whether and how the available computational representations as well as the designed tasks provide students with opportunities to conceptualize function as covariation. The results show that the modeling of the geometric situation and the use of interconnected representations played a crucial role in students' conceptualizations. The constructed meanings are categorized into four levels indicating qualitative differences in students' understandings. The results are confronted to the main findings of other related studies and some suggestions on the pedagogical exploitation of computational environments integrating geometry and algebra are expressed.

Keywords: geometric modelling, conceptualization of function, covariation, Casyopée, interconnected representations

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδης έννοια των Μαθηματικών και η ύπαρξή της μπορεί να ανιχνευθεί σε βάθος χιλιετιών. Εμφανίζεται όχι βέβαια με τη σημερινή της έννοια, της αντιστοιχίας μεταξύ συνόλων ή της συμμεταβολής, αλλά με την έννοια της συναρτησιακής σχέσης, αφού η διαδικασία της αρίθμησης είναι μία αντιστοιχία μεταξύ των αντικειμένων και των αριθμών. Αντιστοίχως, οι τέσσερις βασικές πράξεις των μαθηματικών είναι συναρτήσεις δυο μεταβλητών (Ponte, 1992), όπου το αποτέλεσμα καθορίζεται από τον τρόπο ορισμού της πράξης και τις δύο μεταβλητές.

Οι Βαβυλώνιοι και οι Σουμέριοι χρησιμοποιούσαν συναρτήσεις, χωρίς όμως να αναφέρονται στην έννοια της συνάρτησης. Η χρήση αυτή περιοριζόταν στις πράξεις, στην εύρεση τετραγώνων και αντιστρόφων αριθμών με τη βοήθεια πινάκων (Van der Waerden, 2007). Ο Ίππαρχος (150 π.Χ.) ήταν ο πρώτος που συνέταξε πίνακες για τα μήκη χορδών των αντίστοιχων τόξων ενός κύκλου στο έργο του «Περί των εν κύκλω ευθειών» για τον υπολογισμό του χρόνου ανατολής και δύσης των απλανών αστέρων και ζωδίων (Van Der Waerden, 2007).

Η έννοια της συνάρτησης δεν είχε καταγραφεί με τη σημερινή έννοια από τους Αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς, κυρίως για δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι γιατί το ενδιαφέρον τους ήταν στραμμένο σε γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα και κωνικές τομές, η μελέτη των οποίων δεν απαιτούσε την εισαγωγή της συνάρτησης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα σχήματά τους ήταν στατικά. Ο Αρχιμήδης (3ος αι. π.Χ.) προσέγγισε την έννοια της συνάρτησης εφόσον στο έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» ορίζει τα αξιώματα κυρτότητας για μία καμπύλη, και επομένως βρίσκεται πολύ κοντά στο γενικό ορισμό της συνάρτησης (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1987). Ο δεύτερος είναι η κυριαρχία της έννοιας του «λόγου», η οποία διατρέχει τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η έννοια της συνάρτησης είναι στενά συνδεμένη με την ανάγκη για μέτρηση, όμως στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά κυριαρχούσε η έννοια του λόγου, η οποία δεν παρέπεμπε άμεσα στη μέτρηση, αλλά στη συσχέτιση μεταξύ ποσοτήτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ανθυφαίρεση ως τρόπος εύρεσης μέγιστου κοινού μέτρου σε δύο μεγέθη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αρχαιότητα να χαρακτηρίζεται ως η εποχή κατά την οποία η μελέτη συγκεκριμένων περιπτώσεων των εξαρτήσεων μεταξύ των δύο ποσοτήτων δεν έχει ακόμη απομονωμένες γενικές έννοιες των μεταβλητών ποσοτήτων και των συναρτήσεων (Youschkevitch, 1976).

Αντίστοιχα με τους Έλληνες, Άραβες και Ινδοί αστρονόμοι ασχολήθηκαν έμμεσα με την έννοια της συνάρτησης στο πλαίσιο των αστρονομικών μελετών τους. Ο Μεσαίωνας θεωρείται το χρονικό διάστημα, όπου για πρώτη φορά, στην Ευρωπαική Επιστήμη του 14ου αιώνα, αναπτύχθηκαν κάποιες γενικές έννοιες. Αυτές μάλιστα παρουσιάστηκαν και σε πλαίσιο συνδυασμένης γεωμετρίας και μηχανικής. Σε αυτή την περίπτωση, όπως και στην αρχαιότητα,

κάθε συγκεκριμένη εξάρτηση μεταξύ δύο ποσοτήτων οριζόταν από μια λεκτική περιγραφή ή από ένα γράφημα και όχι από την ύπαρξη κάποιου τύπου (Youschkevitch, 1976). Αρκετοί μαθηματικοί προσέγγισαν την έννοια της συνάρτησης, όπως ο γάλλος σχολαστικός Nikola Oresme (1323-1382, Παρίσι) (Όρεσμος), ο οποίος ανέπτυξε τη γεωμετρική θεωρία των «latitude of forms» και αναπαράστησε την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μία γραφική παράσταση, η οποία ήταν η πρώτη γραφική αναπαράσταση ενός νόμου της φυσικής. Σε αυτή τη θεωρία υπήρξαν μερικές γενικές αντιλήψεις για την εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή (Ponte, 1992).

Ο Galileo Galilei (1564-1642) (Γαλιλαίος), μετέφερε νόμους της Φυσικής στη γλώσσα των Μαθηματικών. Στη Φυσική κατάφερε να ξεπεράσει τη σκέψη των Αρχαίων Ελλήνων και να εισαγάγει τη μελέτη της κίνησης, συνδέοντας με σχέση λόγου την απόσταση με το χρόνο, ποσοτικοποιώντας έτσι την κίνηση με αριθμούς. Ο Γαλιλαίος απέρριψε την Αριστοτελική άποψη ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν γρηγορότερα σε σχέση με τα ελαφρύτερα και διατύπωσε το 1604 τον νόμο για την πτώση των σωμάτων, βασιζόμενος στην εμπειρία και την παρατήρηση. Στόχος του ήταν να μελετήσει τις κινήσεις και συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης.

Ο Descartes (1596-1650) (Καρτέσιος) πρώτος άρχισε την μελέτη της Αναλυτικής γεωμετρίας στο έργο του «Η Γεωμετρία» που δημοσιεύτηκε το 1637. Με το έργο αυτό, οι καμπύλες που περιγράφονται από τους τύπους, αναφέρονται στις κινήσεις ως μια σχέση που μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα τύπο και μια γραφική παράσταση. Επομένως προκύπτει για πρώτη φορά η γενική εξάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων, με τέτοιο τρόπο ώστε μεταβάλλοντας τις τιμές της μίας ποσότητας να αντιστοιχίζονται δεδομένες τιμές στην άλλη: «Λαμβάνοντας διαδοχικά διαφορετικά μεγέθη για την άπειρου μήκους γραμμή y, προκύπτει το ίδιο για την άπειρου μήκους γραμμή x, και έτσι θα έχουμε μια απειρία από διάφορα σημεία, που επισημαίνονται με C, μέσω της οποίας προκύπτει η ζητούμενη καμπύλη γραμμή» (Youschkevitch, 1976). Η Σύγχρονη Εποχή είναι το επίπεδο, το οποίο ξεκινά από το τέλος του 16ου αιώνα, όπου κυριάρχησαν αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων. Αμέσως μετά, το 1679 θα ακολουθήσει ο ορισμός του Fermat: «όσο δύο άγνωστες ποσότητες εμφανίζονται σε μια τελική ισότητα, υπάρχει ένας γεωμετρικός τόπος και το τελικό σημείο της μίας από τις δύο ποσότητες περιγράφει μια ευθεία ή μια καμπύλη γραμμή (Youschkevitch, 1976).

Η περιγραφή της συνάρτησης ως άπειρης δυναμοσειράς αποτέλεσε τη νέα κατηγορία ορισμών που άρχισε να χρησιμοποιείται (Youschkevitch, 1976). Με την εξέλιξη της έννοιας, από τα μέσα του 18ου αιώνα, αυτή η ερμηνεία αποδείχθηκε ανεπαρκής - αφού εμφανίστηκαν κι άλλες περιπτώσεις - με αποτέλεσμα να προκύψει ένας νέος γενικός ορισμός της συνάρτησης. Αφετηρία είναι ο ορισμός του Bernoulli το 1718 ως «η ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από μια μεταβλητή και σταθερές». Στη συνέχεια μεταβαίνουμε στον ορισμό του Euler (που ήταν μαθητής του Bernoulli), το 1747, στον οποίο αλλάζει η λέξη «ποσότητα» σε «αναλυτική έκφραση». Έτσι προέκυψε ο ορισμός: «Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας

είναι μια αναλυτική έκφραση που συνθέτει με οποιοδήποτε τρόπο μια μεταβλητή ποσότητα με αριθμούς ή σταθερές ποσότητες» (Youschkevitch, 1976).

Μέχρι τον 19^{ο} αι. ο ορισμός του Euler είχε γίνει μερικώς αποδεκτός από την ακαδημαϊκή κοινότητα. Ο Fourier διατύπωσε σε ένα έργο του τον εξής ορισμό: «Γενικά μια συνάρτηση $f(x)$ αναπαριστά μια ακολουθία τιμών ή εντολών όπου κάθε μια είναι αυθαίρετη». Σε αντίθεση με το Fourier, ο Lobatchevsky και ο Dirichlet δημοσίευσαν πιο εκτεταμένους ορισμούς. Ο Lobatchevsky το 1834 έγραψε: «Η γενική αντίληψη απαιτεί ότι μια συνάρτηση του x καλείται ένας αριθμός που δίνεται για κάθε x και ο οποίος αλλάζει σταδιακά με το x. Η τιμή της συνάρτησης μπορεί να δοθεί είτε με αναλυτική έκφραση, είτε με από μια συνθήκη η οποία προσφέρει ένα μέσο για επαλήθευση όλων των αριθμών και επιλογή ενός από αυτούς ή τελικά, η εξάρτηση μπορεί να υπάρχει, αλλά να παραμένει άγνωστη».

Η μελέτη των σειρών Fourier και η έρευνα των συνθηκών υπό τις οποίες συγκλίνει οδήγησε τον Dirichlet να διατυπώσει το 1837, το γενικό ορισμό για τη συνάρτηση: «Μια συνάρτηση $y(x)$ είναι δοσμένη αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα που δίνει μια συγκεκριμένη τιμή y σε κάθε x σε κάποιο σύνολο σημείων. Δεν είναι αναγκαίο το y να υπόκειται στον ίδιο κανόνα που αφορά το x μέσα σ' ολόκληρο το διάστημα» (Davis & Hersh, 1981). Παρατηρούμε στον παραπάνω ορισμό ότι για πρώτη φορά εμφανίζεται η έννοια του μονοσήμαντου, όπως και ο συσχετισμός της μορφής πολλά - ένα, με άλλα λόγια, ότι πολλές μετρήσεις μπορούν να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα. Ο Cauchy (αρχές 19ου αι.) δίνει τον εξής ορισμό: «Όταν μεταβλητές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν δίνεται η τιμή της μιας να μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της άλλης, συνήθως θεωρούμε ότι αυτές οι διάφορες ποσότητες οι οποίες εκφράζονται μέσω της μίας εξ αυτών και η οποία τότε παίρνει την ονομασία της 'ανεξάρτητης μεταβλητής' τότε, οι απομένουσες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι εκείνες τις οποίες κάποιος μπορεί να τις ονομάσει 'συνάρτηση' αυτής της μεταβλητής» (Youschkevitch, 1976).

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, η αναζήτηση του γενικού ορισμού προσφέρει δυνατότητες για την ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων, αλλά ταυτόχρονα εμφανίστηκαν δυσκολίες που στον 20ό αιώνα οδήγησαν στο να επανεξεταστεί η έννοια της συνάρτησης (Youschkevitch, 1976). Ο Peano το 1911 εισήγαγε ένα νέο ορισμό, προτείνοντας η έννοια της συνάρτησης να αναχθεί στην έννοια της σχέσης: «Η συνάρτηση είναι ένα ιδιαίτερο είδος σχέσης, με την οποία κάθε τιμή μιας μεταβλητής αντιστοιχεί σε μια μοναδική τιμή… η συνάρτηση είναι μια σχέση u, τέτοια ώστε αν δύο ζεύγη y, x και z, x έχουν το ίδιο δεύτερο στοιχείο και ικανοποιούν τη σχέση u, τότε απαραίτητα θα είναι $y = z$, οποιαδήποτε κι αν είναι τα x, y, z». Λίγο αργότερα ο Haussdorff παρατήρησε για τον ορισμό του Peano ότι αντίστροφα, η έννοια της σχέσης μπορεί να μετασχηματιστεί σε αυτήν της συνάρτησης με ένα ακόμα επιχείρημα, τον περιορισμό της έννοιας της συνάρτησης σε αυτή του «διατεταγμένου ζεύγους». Ο ορισμός διατεταγμένου ζεύγους έλαβε έντονη κριτική για παιδαγωγικούς λόγους, επειδή έχει νόημα μόνο για αυτούς που αναγνωρίζουν τα προβλήματα που επιλύει αυτός ο ορισμός, αλλά

όχι για έναν μαθητή ο οποίος μαθαίνει πρώτη φορά την έννοια της συνάρτησης (Thompson, 1994).

Παρατηρώντας τους ορισμούς που παρατέθηκαν προκύπτει ότι η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή, που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα. Συγκεκριμένα οι Bourbaki, το 1939, δίνουν τον ορισμό της συνάρτησης ως αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων, γενικεύοντας τον ορισμό του Dirichlet. Εξαιτίας της πολυπλοκότητας και των απαιτήσεων του ορισμού αυτού, ο ορισμός που επικράτησε είναι του Dirichlet, ως ο πιο κατάλληλος για τις διδακτικές ανάγκες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Sierpinska, 1992). Όπως αναφέρει η ίδια: «Η έννοια της συνάρτησης είναι ένα πολύ φιλοσοφημένο (sophisticated) εργαλείο, που χρειάζεται πολύ υψηλό επίπεδο αφαίρεσης. Το εργαλείο αυτό γίνεται απαραίτητο μόνο όταν πρέπει να διατυπωθούν θεωρήματα για περιεκτικές κλάσεις μαθηματικών σχέσεων. Είναι περιττό όταν το μόνο που μελετάμε είναι οι ευθείες γραμμές ή οι αναλογίες». Στη συνέχεια τονίζει ότι: «Οι μαθητές δεν μπορούν να εκτιμήσουν τη γενικότητα και τη δύναμη της έννοιας τη στιγμή που τους την εισάγουν. Στην πραγματικότητα αυτός ο ορισμός δεν είναι ακριβής. Μια ειδική διμελής σχέση ανάμεσα σε αυθαίρετα σύνολα; Μα τότε το καθετί μπορεί να ονομαστεί συνάρτηση. Και τότε οι μαθητές αρχίζουν να κατασκευάζουν τη δική τους έννοια της συνάρτησης με τη βοήθεια συγκεκριμένων παραδειγμάτων που ο καθηγητής ονομάζει συναρτήσεις» (Sierpinska, 1994).

Τέλος, γίνεται αντιληπτό ότι ο ορισμός της έννοιας ακολούθησε μια διαδρομή και τελικά προέκυψε ως σύμβαση της μαθηματικής κοινότητας, με βάση τη σύνθεση των ερευνών που υπήρχαν μέχρι εκείνη τη στιγμή.

1.2 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Η έννοια της συνάρτησης στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα εισάγεται από τη Β΄ Γυμνασίου. Σύμφωνα με τα προγράμματα σπουδών Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου (ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ http://www.pi-schools.gr/programs/depps/) προβλέπονται τα παρακάτω:

Τάξη	**Άξονες γνωστικού περιεχομένου**	**Γενικοί στόχοι (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες)**	**Ενδεικτικές Θεμελιώδεις Έννοιες Διαθεματικής προσέγγισης**
Β Γυμνασίου	*Συναρτήσεις*	Οι μαθητές επιδιώκεται: Να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης, να μπορούν να ερμηνεύουν τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης και να μπορούν να μεταβαίνουν από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο. Να γνωρίσουν τα διάφορα είδη των αναπαραστάσεων των συναρτήσεων $y = ax$ και $y = \frac{a}{x}$ και να τα χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (π.χ. ανάλογα ποσά, αντιστρόφως ανάλογα ποσά κτλ.).	Αλληλεπίδραση Επικοινωνία Μεταβολή Ομοιότητα-Διαφορά Πολιτισμός
Γ Γυμνασίου	*Συναρτήσεις*	Να γνωρίσουν τα διάφορα είδη των αναπαραστάσεων της συνάρτησης $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και να μπορούν να τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.	Αλληλεπίδραση Μεταβολή Ομοιότητα-Διαφορά

Το παραπάνω πρόγραμμα σπουδών παρόλο που δεν ισχύει πλέον, παρουσιάζεται γιατί με αυτό διδάχθηκαν μαθηματικά οι μαθητές του δείγματος της έρευνας. Τα τελευταία χρόνια το Πρόγραμμα Σπουδών υποχρεωτικής εκπαίδευσης μαθηματικών άλλαξε (http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps). Το ισχύον πρόγραμμα σπουδών (πιλοτικό) δεν το αναφέρουμε αναλυτικά, διότι αφορά τους μελλοντικούς μαθητές της Β΄ Λυκείου και επομένως ένα επόμενο επίπεδο έρευνας. Να σημειωθεί ότι στο καινούργιο πρόγραμμα σπουδών (Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση) γίνεται αναφορά στη συμμεταβολή:

> Κανονικότητες – Συναρτήσεις
>
> συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης (7 ώρες).

Ανάλογη αναφορά γίνεται και στον οδηγό για τον εκπαιδευτικό:

Συνάρτηση	Διερεύνηση σχέσεων μεγεθών από την καθημερινή ζωή - συμμεταβαλλόμενα μεγέθη.
	Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (μεταβλητή, μονοσήμαντη απεικόνιση, αναπαραστάσεις συναρτήσεων, ερμηνεία αναπαραστάσεων).
	Μοντελοποίηση απλών καταστάσεων και απαντήσεις σε ερωτήματα που τις αφορούν μέσω συναρτήσεων.
	Διερεύνηση συγκεκριμένων συναρτήσεων (γραμμικών, της μορφής $\psi = \frac{\alpha}{x}$, τετραγωνικών και ρυθμού μεταβολής)

Σύμφωνα με τα προγράμματα σπουδών Α΄ Λυκείου (Απόσπασμα από το ΦΕΚ 1168/2011 - Αρ.59614/Γ2) προβλέπονται τα εξής:

Α Λυκείου	**Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων (ΒΣ) (6 ώρες)**		
	ΒΣ1. Εισάγονται στην έννοια της συνάρτησης μέσα από πραγματικές καταστάσεις αντιστοίχησης διαφόρων ειδών ώστε να αποκτήσει νόημα ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης. ΒΣ2. Επιχειρηματολογούν αν μία αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι και εξοικειώνονται με το συμβολισμό και την ορολογία. ΒΣ3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συναρτήσεων (και δίκλαδων). ΒΣ4. Διερευνούν αν μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. ΒΣ5. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση). ΒΣ6. Ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα. ΒΣ7. Προσδιορίζουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες και τη σχετική της θέση με το χ΄χ, επιλύοντας εξισώσεις και ανισώσεις.	Η έννοια της συνάρτησης. (3ώρες) Γραφική παράσταση συνάρτησης. (3 ώρες)	Παραδείγματα δραστηριοτήτων είναι οι Δ.22 και Δ.23 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.15 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.24 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.25 Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.26

Με βάση το πρόγραμμα σπουδών Γυμνασίου έχουν συγγραφεί τα σχετικά σχολικά βιβλία, στα οποία η έννοια της συνάρτησης αναφέρεται για πρώτη φορά στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, στο Κεφάλαιο 3 της Άλγεβρας, αμέσως μετά το Κεφάλαιο των πραγματικών αριθμών και περιλαμβάνει τα εξής:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 - Η έννοια της συνάρτησης 55
3.2 - Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης 58
3.3 - Η συνάρτηση y=αx 67
3.4 - Η συνάρτηση y=αx + β 72
3.5 - Η συνάρτηση y=α/x - Η υπερβολή 79

Από το σύνολο της ύλης για τις συναρτήσεις εστιάζουμε στους ορισμούς της έννοιας της συνάρτησης. Στο μάθημα 3.1 μετά από ένα επιλυμένο παράδειγμα του βιβλίου εισάγεται ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης και είναι ο ακόλουθος (σχολικό βιβλίο Β΄ Γυμνασίου σελ. 55):

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση).
Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **«η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x»**. Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση y = 0,03x.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση εισάγεται ως αντιστοιχία δύο μεταβλητών και δίνεται έμφαση στην έννοια του μονοσήμαντου. Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών τονίζεται από παραδείγματα που παρουσιάζουν ζεύγη τιμών με τη χρήση πινάκων. Στο μάθημα 3.2 δίνεται ορισμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και φαίνεται η προσπάθεια του βιβλίου να ξεφύγει από το στατικό τρόπο παρουσίασης των εννοιών, παρουσιάζοντας τη γραφική παράσταση που κατασκευάζεται σταδιακά και τον πίνακα τιμών που συμπληρώνεται για διάφορες τιμές της μεταβλητής x. Στα επόμενα μαθήματα παρουσιάζονται συναρτήσεις όπου δίνεται ταυτόχρονα και ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση και εισάγονται με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας κάποιες δραστηριότητες, όμοια με το μάθημα 3.1.

Στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου οι συναρτήσεις εισάγονται στο Κεφάλαιο 4 της Άλγεβρας μετά το κεφάλαιο των γραμμικών συστημάτων, και έχει την ακόλουθη δομή:

Κεφάλαιο 4ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$ 144
4.2 Η συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ 150
Γενικές ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου 156
Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση 4ου Κεφαλαίου 158

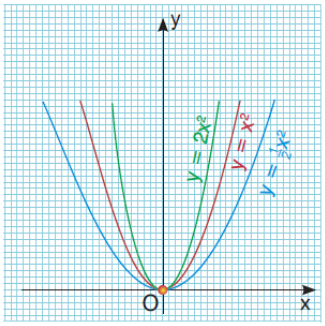
Ο ορισμός της συνάρτησης εμφανίζεται στο πρώτο μάθημα του Κεφαλαίου 4 και είναι ο ακόλουθος (σχολικό βιβλίο Γ΄ Γυμνασίου, σελ 144):

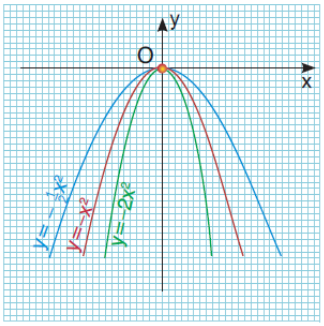
Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

Διαβάζοντας τον παραπάνω ορισμό αντιλαμβάνεται κανείς ότι η συνάρτηση στην Γ΄ Γυμνασίου εισάγεται ως «σύνδεση» δύο μεταβλητών, όπου τελικά είναι μια διαδικασία αντιστοίχισης κάθε τιμής της μεταβλητής x σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y. Πάλι δίνεται έμφαση στην ύπαρξη του μονοσήμαντου μεταξύ των μεταβλητών με τη χρήση του παραδείγματος $y = x^2$ το οποίο εισάγει τις τετραγωνικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια το βιβλίο διαπραγματεύεται χαρακτηριστικά των τετραγωνικών συναρτήσεων με χαρακτηριστική προσπάθεια να ξεφύγει από τη στατικότητα του γραπτού λόγου. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις γραφικές παραστάσεις γιατί ακολουθούν οι μετατοπίσεις των τετραγωνικών συναρτήσεων, όμως παραμένει το πρόβλημα της στατικής μορφής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η διερεύνηση του συντελεστή α για τις διάφορες τιμές του (σχολικό βιβλίο, σελ.146):

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή $y = ax^2$ για διάφορες τιμές του αριθμού α. Παρατηρούμε ότι:

α) Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = ax^2$ ως προς τον άξονα x′x, αλλά καθορίζει και το «άνοιγμά» της.
Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».





Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών και το βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, εισάγεται ο ορισμός της συνάρτησης ως διαδικασίας (κανόνα) αντιστοίχισης (σχολικό βιβλίο, σελ. 146): «Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β». Ωστόσο, η σχετική έρευνα δείχνει ότι η έμφαση στην εισαγωγή της συνάρτησης ως διαδικασίας έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις συνδέσεις μεταξύ των μεταβλητών και των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης.

Στην Α΄ Λυκείου η εισαγωγή της συνάρτησης γίνεται στο Κεφάλαιο 6 μετά από τη διδασκαλία των προόδων. Η δομή που έχει το κεφάλαιο αυτό είναι η ακόλουθη:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6°: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης 145
6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης 152
6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ 159
6.4 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης 168
6.5 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης 175

Στην εισαγωγή του 6ου Κεφαλαίου (σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ. 145) αναγράφεται το εξής: «σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα». Η παραπάνω εισαγωγή μας δίνει μια ιδέα μεταβολής των μεγεθών, με την υπόνοια ότι είναι συμμεταβολή καθώς η τιμή του ενός καθορίζει την τιμή του άλλου μεγέθους. Ο ορισμός όμως που χρησιμοποιείται είναι της διαδικασίας αντιστοίχισης όπως και στις προηγούμενες τάξεις και αφήνεται να εννοηθεί η ύπαρξη κάποιου μαθηματικού τύπου. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα συναρτήσεων και τέλος, διατυπώνεται ο αυστηρός ορισμός ως διαδικασία (κανόνας) αντιστοίχισης (σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ. 146):

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Στη συνέχεια ακολουθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης και άλλες σχετικές έννοιες. Τη χρήση των καθημερινών παραδειγμάτων, διαδέχονται πιο πολύπλοκα παραδείγματα.

Συνοψίζοντας, στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα η έννοια της συνάρτησης προσεγγίζεται ως σχέση (Β΄ Γ΄ Γυμνασίου), ως αντιστοιχία (Β΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου), με έμφαση στο μαθηματικό φορμαλισμό (σε όλες τις τάξεις). Από τα παραπάνω φαίνεται ότι απουσιάζει η αναφορά της συνάρτησης ως συμμεταβολής μεγεθών και μάλιστα από όλο το αναλυτικό πρόγραμμα της ελληνικής σχολικής εκπαίδευσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι ανάλογη έλλειψη αναφοράς της συμμεταβολής εμφανίζεται στη διεθνή βιβλιογραφία (Thompson, 1994).

1.3 ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Η συνάρτηση αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών, εμπεριέχοντας μεγάλη ποικιλία ερμηνειών και αναπαραστάσεων. Με την έννοια της συνάρτησης συνδέονται ολόκληροι κλάδοι των μαθηματικών όπως ο Απειροστικός Λογισμός, η Αναλυτική Γεωμετρία και η Στατιστική. Για τη διδασκαλία της συνάρτησης στα προγράμματα σπουδών, αφιερώνεται εκτεταμένος χρόνος κατά τη διδακτική πράξη, όμως παρ' όλα αυτά παραμένει από τις πιο δυσπρόσιτες έννοιες τις οποίες διαπραγματεύονται οι μαθητές κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής τους.

Στην παράγραφο αυτή θα εστιαστούμε κυρίως στις δυσκολίες ως προς την έννοια της συνάρτησης όπως έχουν καταγραφεί από την υπάρχουσα έρευνα. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση έχει αποτελέσει αντικείμενο μεγάλου αριθμού ερευνών, οι οποίες εστιάζουν επί το πλείστον στις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι διάφορες πτυχές της. Οι Dubinsky & Harel (1992) αναφέρουν ότι η συνάρτηση, εξαιτίας της επιστημολογικής της πολυπλοκότητας, μπορεί να θεωρηθεί ως σχέση, ως μετασχηματισμός ή ως αντικείμενο ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Επιπλέον πολλές από τις δυσκολίες της συνάρτησης οφείλονται σε ελλείψεις από προαπαιτούμενες μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες και στις παρανοήσεις ή εννοιολογικές αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές (Sierpinska, 1992). Οι διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης της συνάρτησης, αλλά και οι συνδέσεις μεταξύ αυτών, αποτελούν πηγή δυσκολιών για τους μαθητές (Sierpinska, 1992). Έτσι, η παράγραφος αυτή διαρθρώνεται με βάση μία σειρά από ζητήματα σχετικά με την έννοια της συνάρτησης. Θεωρούμε ως αφετηρία την έννοια της μεταβλητής καθώς κάποιες από τις δυσκολίες που φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές, αντικατοπτρίζονται στην έννοια της μεταβλητής (Ursini & Trigueros, 2001).

1.3.1 Μεταβλητή

Οι Wagner, Rachlin και Jensen (1984) τονίζουν ότι ο ρόλος της μεταβλητής δεν είναι κατανοητός σε βάθος από τους μαθητές. Πολλοί ερευνητές έχουν παρατηρήσει ότι οι μαθητές φαίνεται να εμφανίζουν δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης για προβλήματα στα οποία αλλάζει μόνο το όνομα της μεταβλητής (Eisenberg, 1991). Στα προβλήματα αυτά διατηρώντας όλα τα στοιχεία απαράλλακτα και διαφοροποιώντας μόνο την ονομασία των μεταβλητών (η μεταβλητή να ονομαστεί y αντί για x) παρατηρήθηκε ότι ένα μέρος των μαθητών διατηρεί πολλές ασάφειες στην προσέγγιση του προβλήματος και το λύνει από την αρχή, θεωρώντας το ένα εντελώς διαφορετικό πρόβλημα. Οι μαθητές από τις εμπειρίες που έχουν, αναπτύσσουν νοητικές εικόνες και τον ορισμό μιας έννοιας, όπως θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 2 (Tall & Vinner, 1981, Vinner, 1983). Υπάρχει περίπτωση νοητικές εικόνες των μαθητών να διαμορφώνουν υποκειμενικούς ορισμούς των εννοιών. Αποτέλεσμα αυτού είναι σε ορισμένες

περιπτώσεις να θεωρούν ότι ορισμένα παραδείγματα καθορίζουν πλήρως μία έννοια, ενώ η έννοια είναι ευρύτερη των παραδειγμάτων αυτών. Έτσι προκύπτει ότι «το σύνολο των αντικειμένων που ένας μαθητής θεωρεί ως παραδείγματα για μία έννοια να μην ταυτίζεται με το σύνολο των αντικειμένων που προκύπτουν πραγματικά από τον ορισμό της έννοιας» (Vinner & Dreyfus,1989).

Οι Ursini και Trigueros (2001) ανέπτυξαν ένα μοντέλο για την περιγραφή των εμφανίσεων της μεταβλητής στα μαθηματικά σε όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (έως και το Πανεπιστήμιο). Παρουσιάζουν την μεταβλητή ως έννοια με τρεις διαφορετικές χρήσεις (3UV model ή TUV model – Three Uses of Variable), επιβεβαιώνοντας τη δυσκολία κατανόησής της από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, η μεταβλητή μπορεί να εμφανίζεται ως ο ορισμός ενός αγνώστου, δηλαδή να αποτελεί μια άγνωστη ποσότητα σε ένα πρόβλημα, να παρουσιάζεται ως παράμετρος σε ένα πρόβλημα ή ως συναρτησιακή σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών (Ursini & Trigueros, 2001). Το μοντέλο TUV βασίζεται στην περαιτέρω ανάλυση των στρατηγικών των μαθητών, όταν εργάζονται με τις διαφορετικές χρήσεις της μεταβλητής, στην υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετικά με τις δυσκολίες που έχουν καταγραφεί για το αντικείμενο από τις αρχές του 20ού αιώνα και τέλος στην πολυετή εμπειρία των ερευνητών πάνω στο αντικείμενο (Ursini & Trigueros, 2001). Στην κατανόηση καθεμιάς από τις παραπάνω εμφανίσεις της μεταβλητής (μοντέλο TUV) εμπλέκονται διάφορες διαδικασίες. Συγκεκριμένα, η κατανόηση της μεταβλητής ως συναρτησιακής σχέσης διενεργείται μέσα από τα εξής:

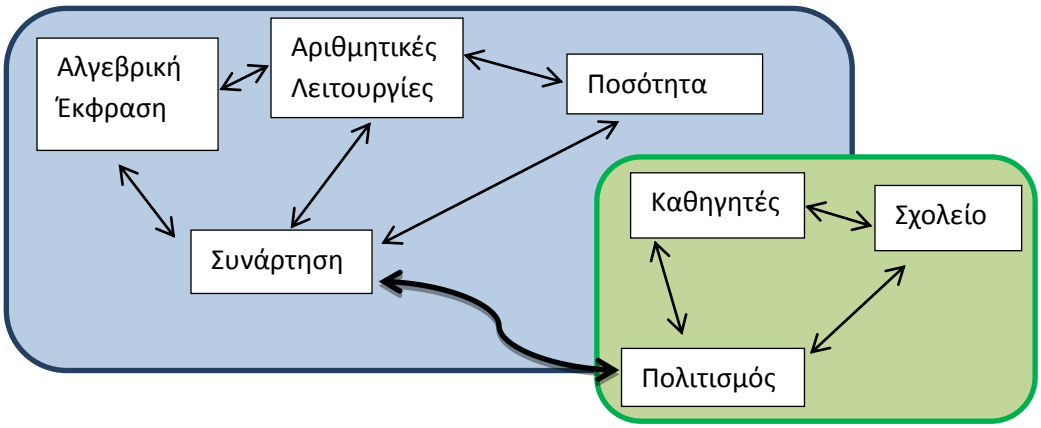
- F1: Αναγνώριση της αντιστοιχίας μεταξύ των σχετιζομένων μεταβλητών ανεξάρτητα από τον τύπο αναπαράστασης που χρησιμοποιείται.
- F2: Καθορισμός τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής δεδομένων των τιμών της ανεξάρτητης.
- F3: Καθορισμός τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής δεδομένων των τιμών της εξαρτημένης.
- F4: Αναγνώριση της συμμεταβολής των μεταβλητών που εμπλέκονται σε μια σχέση ανεξαρτήτως της αναπαράστασης (πίνακας τιμών, γραφική παράσταση, κλπ.).
- F5: Καθορισμός εύρους τιμών της μιας μεταβλητής δεδομένου του εύρους τιμών της άλλης.
- F6: Διατύπωση του μαθηματικού τύπου της συνάρτησης από την ανάλυση των δεδομένων του προβλήματος.

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση ως προς τη μεταβλητή χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες έρευνες. Πραγματοποιήθηκε έρευνα σε μαθητές, όπως αναφέρουν οι Ursini και Trigueros (1997), όπου μελετήθηκαν οι αντιλήψεις τους σχετικά με τη μεταβλητή και είχε παρόμοια αποτελέσματα με αντίστοιχη έρευνα σε εκπαιδευτικούς. Παρατηρήθηκε ότι παρόλο που αναγνώριζαν και εργάζονταν με αντιστοιχίες (F1) και ταυτόχρονα μπορούσαν να προσδιορίσουν την τιμή της μιας από τις μεταβλητές, όταν γνώριζαν την άλλη (F2, F3), είχαν πρόβλημα ως προς τη συμμεταβολή μεγεθών και ως προς το συμβολισμό τους (F4, F6) (Ursini & Trigueros, 2001). Ως αποτέλεσμα του τελευταίου, γίνεται αντιληπτό ότι μαθητές και εκπαιδευτικοί

παρουσιάζουν παρόμοια προβλήματα ως προς την κατανόηση της συμμεταβολής και το συμβολισμό των μεταβλητών.

1.3.2 Επιστημολογικά εμπόδια συνάρτησης

Σχετικά με τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης εμφανίζεται πληθώρα επιστημολογικών εμποδίων των μαθητών, τα οποία σχετίζονται με την προϋπάρχουσα γνώση τους. Συγκεκριμένα, η προϋπάρχουσα γνώση τους μπορεί να βοηθά στο να ξεπεράσουν οι μαθητές κάποιες δυσκολίες, αλλά πολύ συχνά αποτελεί εμπόδιο. Ένα επιστημολογικό εμπόδιο σύμφωνα με τη Sierpinska (1985, 1988b) είναι ένα εμπόδιο που συναντά μια ομάδα ανθρώπων και έχει εξαπλωθεί για κάποιο χρονικό διάστημα σε ένα πολιτισμό. (Sierpinska, 1992). Πολλοί ερευνητές έχουν επισημάνει ως επιστημολογικό εμπόδιο ότι οι επιδόσεις των μαθητών εξαρτώνται από το γεγονός ότι διδάσκονται από καθηγητές με τις δικές τους εικόνες για τη φύση των μαθηματικών. Έτσι, τόσο η εκμάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών αντικειμένων διέπονται από τις κουλτούρες (σχολείο, εθνικές και διεθνείς) στις οποίες ανήκουν (Thompson, 1994). Στο σχήμα 1 βλέπουμε ότι η συνάρτηση συνδέεται τόσο με ζητήματα που αφορούν το μαθηματικό πλαίσιο (αλγεβρική έκφραση, αριθμητικές λειτουργίες, ποσότητα) όσο και ζητήματα που αφορούν το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία της συνάρτησης (καθηγητές, σχολείο, πολιτισμός).



Σχήμα 1: Το πλαίσιο της συνάρτησης

Η Sierpinska (1992) αναφέρει ότι η προέλευση των επιστημολογικών εμποδίων προέρχεται από το επίπεδο των στάσεων και των πεποιθήσεων, από το επίπεδο των ασυνείδητων σχημάτων σκέψης και τέλος, το επίπεδο της τεχνικής γνώσης. Τα εμπόδια αυτά μπορούν να ξεπεραστούν αν το άτομο αποστασιοποιηθεί από αυτό που πιστεύει ή αν δει τις συνέπειές της στάσης του και είναι ικανό να τα αντιληφθεί από άλλες οπτικές γωνίες. Έτσι, εμφανίζονται επιστημολογικά εμπόδια που συνδέονται είτε με τη φιλοσοφία των μαθηματικών και με

υποσυνείδητα γνωστικά σχήματα, είτε με την έννοια της συνάρτησης και με τις έννοιες που συνδέονται με αυτήν, όπως ο ορισμός της, οι μεταβλητές που περιέχει και το γράφημά της. Όπως γίνεται αντιληπτό τα επιστημολογικά εμπόδια της συνάρτησης συνυπάρχουν με τα διδακτικά εμπόδια. Παρακάτω παρουσιάζονται τα επιστημολογικά εμπόδια (Epistemological obstacles) και οι δράσεις κατανόησης (acts of Understanding) για να ξεπεραστούν τα εμπόδια, όπως προτείνει η Sierpinska:

E(f)-1: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών). Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα.

U(f)-1: Προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί.

U(f)-2: Προσδιορισμός των κανονικοτήτων των σχέσεων μεταξύ των αλλαγών ως ένα μέσο για να ασχοληθούμε με τις αλλαγές.

E(f)-2: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών). Υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πινάκων που παρουσιάζουν αριθμητικές σχέσεις, δεν είναι αντικείμενο άξιο προς μελέτη στα μαθηματικά.

E(f)-3: (Ασυνείδητο σχήμα σκέψης). Η θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα· γίνεται εστίαση στον τρόπο που τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας τις αλλαγές αυτές καθαυτές.

U(f)-3: Ο προσδιορισμός των ποσοτήτων που αλλάζουν κατά τη μελέτη μεταβολών.

E(f)-4: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης). Πρέπει να εκμαιευθεί η σκέψη με όρους εξισώσεων κι αγνώστων.

U(f)-4: Η διάκριση μεταξύ των δύο τρόπων μαθηματικής σκέψης: η μία με όρους γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων, η άλλη με όρους μεταβλητών και σταθερών ποσοτήτων.

U(f)-5: Η διάκριση μεταξύ των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών.

E(f)-5: (Ασυνείδητο σχήμα σκέψης). Θεώρηση της σειράς των μεταβλητών ως μη σημαντικής.

E(f)-6: (Μια στάση προς την έννοια του αριθμού). Μια ετερογενής αντίληψη του αριθμού.

U(f)-6: Γενίκευση και σύνθεση της έννοιας του αριθμού.

E(f)-7: (Μια στάση προς την έννοια του αριθμού). Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία του αριθμού: τα πάντα είναι αριθμοί.

U(f)-7: Διάκριση μεταξύ αριθμού και ποσότητας

E(f)-8: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης). Οι νόμοι στη Φυσική και οι συναρτήσεις στα Μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό· ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές της σκέψης.

U(f)-8: Η σύνθεση των εννοιών των νόμων και της έννοιας της συνάρτησης· ειδικά, η επίγνωση της δυνατής χρήσης των συναρτήσεων για τη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών και άλλων μεγεθών.

E(f)-9: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης). Η αναλογία είναι μια προνομιούχα μορφή σχέσης.

E(f)-10: (Μια πεποίθηση αναφορικά με τις μαθηματικές μεθόδους). Η ισχυρή πεποίθηση της ισχύος των τυπικών πράξεων στις αλγεβρικές εκφράσεις.

E(f)-11: (Μια αντίληψη για τη συνάρτηση). Μόνο οι σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους αξίζει να ονομαστούν συναρτήσεις.

U(f)-9: Η διάκριση μεταξύ της συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων, τα οποία μερικές φορές χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον κανόνα της.

E(f)-12: (Η αντίληψη του ορισμού). Ο ορισμός είναι η περιγραφή ενός αντικειμένου που γίνεται αντιληπτό είτε με τις αισθήσεις είτε με την ενόραση. Ο ορισμός δεν προσδιορίζει το αντικείμενο· μάλλον το αντικείμενο προσδιορίζει τον ορισμό. Ο ορισμός δεν είναι λογικά δεσμευτικός (binding logically).

U(f)-10: Η διάκριση μεταξύ μαθηματικών ορισμών και περιγραφών αντικειμένων.

U(f)-11: Η σύνθεση της γενικής αντίληψης της συνάρτησης ως αντικειμένου.

E(f)-13: (Η αντίληψη της συνάρτησης). Οι συναρτήσεις είναι ακολουθίες.

U(f)-12: Η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και σχέσης.

U(f)-13: Η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της ακολουθίας.

E(f)-14: (Η αντίληψη για τις συντεταγμένες). Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι ευθύγραμμα τμήματα (όχι αριθμοί).

U(f)-14: Η διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου της καμπύλης και των ευθυγράμμων τμημάτων ικανοποιώντας μια λειτουργία της συνάρτησης.

E(f)-15: (Η αντίληψη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης). Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο, μία συναρτησιακή σχέση. Δε χρειάζεται να είναι πιστή, μπορεί να περιέχει και σημεία (x, y), στα οποία η συνάρτηση να μην ορίζεται στο x.

U(f)-15: Η διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων.

U(f)-16: Η σύνθεση των διαφορετικών μορφών απεικόνισης των συναρτήσεων. Αντιπροσωπεύοντας τις συναρτήσεις και μιλώντας για αυτές.

E(f)-16: (Η αντίληψη της μεταβλητής). Οι αλλαγές στη μεταβλητή είναι αλλαγές στο χρόνο.

U(f)-17: Η γενίκευση της έννοιας της μεταβλητής.

U(f)-18: Η σύνθεση των ρόλων των εννοιών της συνάρτησης και του σκοπού στην ιστορία της επιστήμης: η επίγνωση του γεγονότος ότι η αναζήτηση συναρτησιακών και αιτιολογικών σχέσεων είναι και οι δυο εκφράσεις της ανθρώπινης προσπάθειας να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τις αλλαγές στον κόσμο που τους περιβάλλει.

U(f)-19: Η διάκριση μεταξύ των εννοιών των συναρτησιακών και αιτιωδών σχέσεων.

Τα παραπάνω εμπόδια είναι καθαρά επιστημολογικά καθώς δεν έχουν ληφθεί υπόψη άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν γενικότερα τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, και άρα την εκμάθηση των συναρτήσεων, όπως κοινωνιολογικοί, ψυχολογικοί και διδακτικοί παράγοντες.

Από τη μελέτη των παραπάνω εμποδίων η Sierpinska (1992) καταλήγει στα εξής συμπεράσματα: Οι συναρτήσεις μπορεί να παρουσιάζονται στους μαθητές ως λύσεις σε προβλήματα μοντελοποίησης σχέσεων, που παρατηρούνται από προβλήματα πραγματικών καταστάσεων. Η συνάρτηση κατ' αυτό τον τρόπο εμφανίζεται ως εργαλείο στους μαθητές με σκοπό την λύση προβλήματος. Επίσης, η κατασκευή των πινάκων τιμών και η μετάβαση σε διαφορετικές αναπαραστάσεις βοηθούν στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας. Παρατηρώντας τις λεπτομέρειες σχετικά με τις μεταβολές οι μαθητές αναπτύσσουν βαθύτερο επίπεδο κατανόησης. Επίσης, η εισαγωγή του ορισμού της έννοιας της συνάρτησης θα πρέπει να προκύψει σε κάποια φάση που οι μαθητές έχουν κάποιο μαθηματικό υπόβαθρο. Η δυναμική των αναπαραστάσεων πρέπει να ποικίλλει, ώστε να αντιλαμβάνονται τις διάφορες «εμφανίσεις» της συνάρτησης. Συνεπαγωγικά, η ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων βοηθά τους μαθητές σε μια βαθύτερη και πολύπλευρη αντίληψη της έννοιας. Τέλος, για τη διάκριση της έννοιας της συνάρτησης και άλλων γενικών εννοιών θα πρέπει να πραγματοποιούνται συζητήσεις στην τάξη για ομοιότητες και διαφορές μεταξύ συναρτησιακών και αιτιώδους συνάφειας σχέσεων.

Από την έρευνα της Sierpinska για τις ενέργειες κατανόησης παρατηρείται ότι πρώτον ορισμένες από τις ενέργειες κατανόησης ενισχύονται από την αντίληψη της συνάρτησης ως συμμεταβολής, όπως η παρατήρηση των μεταβλητών στοιχείων. Δεύτερον, η μοντελοποίηση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί εύφορο έδαφος για την ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης, μέσω της λύσης προβλήματος. Τρίτον, η χρήση λογισμικών που υποστηρίζουν πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης περιορίζει την εμφάνιση εμποδίων σχετικά με το ευρύ φάσμα των αναπαραστάσεων που μπορούν να προσφέρουν, το οποίο είναι απαραίτητο για την συνολική κατανόηση από τους μαθητές της έννοιας της συνάρτησης.

Σχετικά με την αξιοποίηση λογισμικών που υποστηρίζουν πολλαπλές αναπαραστάσεις, για το ξεπέρασμα των επιστημολογικών εμποδίων (Sierpinska, 1992), θα πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση τεχνολογικών εργαλείων δεν παρέχει μόνο μαθηματικά οφέλη, αλλά και παιδαγωγικά. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, όπου συχνά μαθητές παραιτούνται της προσπάθειας στα μαθηματικά, η τεχνολογία μπορεί να προσφέρει το δέλεαρ

του εναλλακτικού και του καινούριου με το οποίο οι μαθητές θα αποκτούν ανανεωμένο ενδιαφέρον και όρεξη να ασχοληθούν με τα μαθηματικά. Η λύση προβλήματος, με την έννοια της γεωμετρικής μοντελοποίησης, μπορεί να προσφέρει μια βάση για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, δεδομένου ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μεταβαίνουν με ευκολία ανάμεσα σε γεωμετρικές και συμβολικές σχέσεις (Lagrange & Minh, 2010). Δεδομένου ότι λογισμικά, όπως το Casyopée έχουν δημιουργηθεί ώστε να προσφέρουν ένα παράθυρο γεωμετρίας συνδεδεμένο με το παράθυρο της άλγεβρας (Artigue & Lagrange, 2009), ενισχύεται η χρήση των τεχνολογιών για τη διδασκαλία της συνάρτησης. Συμπερασματικά, οι Η/Υ και τα διαδραστικά προγράμματα μαθηματικών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αποτελεσματικό μέσο εμπλουτισμού της μαθηματικής γνώσης των μαθητών, καθώς και να τους βοηθήσουν στην κατανόηση δυναμικών μαθηματικών εννοιών που δεν θα μπορούσαν να προσεγγίσουν εύκολα αποκλειστικά και μόνο με τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Παράλληλα οι μαθητές αλληλεπιδρώντας κιναισθητικά με τα λογισμικά αυτά, εμπλέκονται στη διαδικασία της διερεύνησης, αναπτύσσουν τη διαίσθηση και την κριτική τους ικανότητα και τέλος αποκτούν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών αντικειμένων με τα οποία αλληλεπιδρούν, ξεπερνώντας επιστημολογικά εμπόδια για τη συνάρτηση.

1.3.3 Πολλαπλές αναπαραστάσεις

Η συνάρτηση είναι μια έννοια για την κατανόηση της οποίας αξιοποιούνται πολλές εξωτερικές αναπαραστάσεις που συναντώνται στο σχολείο, με πιο γνωστές τον πίνακα τιμών, τη γραφική παράσταση και τη συμβολική αναπαράσταση. Με την έννοια «μετάφραση αναπαραστάσεων» εννοείται η μετάβαση από μια εξωτερική αναπαράσταση της συνάρτησης σε μια άλλη. Ο Janvier (1987) συνέταξε ένα κατάλογο μετάβασης από μία αναπαράσταση σε μία άλλη, σχετικά με την έννοια της συνάρτησης, όπου τονίζει ότι η δυνατότητα ερμηνείας ενός πίνακα τιμών ή μιας γραφικής παράστασης αποκτάται σχετικά δύσκολα (Sierpinska, 1992). Σύμφωνα με τους Ellis και Grinstead (2008), οι έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης, δηλαδή της γραφικής παράστασης, του αλγεβρικού τύπου και του πίνακα τιμών (Koklu & Topcu, 2012). Επιπλέον, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση του ρόλου των μεταβλητών, όπως και στο να αντιλαμβάνονται το γράφημα μιας συνάρτησης σαν σύνολο επιμέρους στοιχείων και όχι σαν μια στατική εικόνα (Moschkovich, Schoenfeld, & Arcavi, 1993; Santos, 2000). Τέλος, παρουσιάζονται παρανοήσεις στη μετάβαση και μετάφραση μεταξύ αναπαραστάσεων (Ellis & Grinstead, 2008). Ανάλογες διαπιστώσεις διατυπώθηκαν για το τελευταίο σημείο και από τους Zazkis, Lijedahl, and Gadowsky (2003), οι οποίοι παρατηρώντας την εμπλοκή των μαθητών με γραφήματα παραβολών, εντόπισαν δυσκολίες κατανόησης και αδυναμία πραγματοποίησης μεταβάσεων σε διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus (1991) οι μαθητές δε χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και προτιμούν να χειρίζονται τη συνάρτηση μέσα από τον

αλγεβρικό της τύπο. Αυτό το χαρακτηριστικό υποδεικνύει μια προσκόλληση σε μία αναπαράσταση της συνάρτησης και επιμονή στη χρήση αλγεβρικού τύπου, παραμελώντας τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις. Ο Tall (1991, 1996) αναφέρει ότι μπορεί να προκύψουν παρανοήσεις στους μαθητές που συνδέονται με την ερμηνεία των γραφικών αναπαραστάσεών της, ή ακόμα και από την αδυναμία συνειδητοποίησης της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών (Carlson, 1998).

Η εικόνα της έννοιας της συνάρτησης, όπως υποστηρίζει και ο Hitt (1998), μπορεί να περιλαμβάνει τη διαδικασία παραγωγής στοιχείων - «βάζεις έναν αριθμό και σου βγάζει κάποιον άλλο» ή ότι «αν φέρεις κάθετη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο», σύμφωνα με συνήθεις εκφράσεις. Ακόμα, είναι πολύ πιθανό η εικόνα μίας έννοιας στο μυαλό του μαθητή να μην περιλαμβάνει τον μαθηματικό ορισμό της έννοιας. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Gerson (2008), οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται κατά τη μετάβαση από μία αναπαράσταση της συνάρτησης σε μία άλλη. Είναι δε αξιοσημείωτο ότι, ακόμα και όταν οι μαθητές μπορούν να μεταβούν με ευκολία από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, συχνά δυσκολεύονται να μεταφέρουν τις πληροφορίες που έχουν ως γνώση από τη μία αναπαράσταση σε μία άλλη (Τζιώτη, 2008).

Σύμφωνα με τον Tall (1993), μπορούμε να διακρίνουμε δύο γνωστικές διαδικασίες που αφορούν την εκμάθηση των μαθηματικών: την κατακόρυφη και την οριζόντια ανάπτυξη. Η πρώτη αναφέρεται στη διαδικασία ενσωμάτωσης και αφομοίωσης της νέας μαθηματικής γνώσης, ενώ η δεύτερη στις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Μάλιστα, και οι δυο αυτές μορφές δημιουργούν δυσκολίες στους μαθητές, καθώς είτε απαιτούν χρόνο για κατάλληλη εξοικείωση είτε γιατί ο έλεγχος και η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων αποτελεί αρκετά πολύπλοκη γνωστική διαδικασία (Tall, 1993). Καταλυτικό παράγοντα στην αντιμετώπιση των δυσκολιών που αφορούν τη συνάρτηση, μπορεί να διαδραματίσει η ενσωμάτωση και χρήση διαδραστικών προγραμμάτων άλγεβρας και γεωμετρίας. Όσον αφορά στην κατακόρυφη συνιστώσα, τέτοιου είδους προγράμματα συμβάλλουν στη διαισθητική μελέτη υψηλού επιπέδου εννοιών, ενώ αναφορικά με την οριζόντια ανάπτυξη, αποτελούν αποτελεσματικό μέσο παροχής διασυνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (Παπαδοπούλου, 2006). Τέλος, προτείνεται να βρεθούν καταστάσεις που είναι αρκετά ευνοϊκές, για την πρόκληση πλήθους δραστηριοτήτων με τη χρήση αναπαραστάσεων, και να προσανατολιστούν οι μαθητές στην δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των αναπαραστασιακών δραστηριοτήτων τους αναφέροντας την κατάσταση που εμπλέκονται, ώστε να αποφευχθεί η απομονωμένη γνώση (Thompson, 1994).

Από τα προηγούμενα προκύπτει η ανάγκη ενίσχυσης των πολλαπλών αναπαραστάσεων, για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές. Μάλιστα η χρήση λογισμικών, όπως το Casyopée, ενισχύει τη μετάβαση μεταξύ αναπαραστάσεων, ώστε να αναπτύσσεται πολυποίκιλη μαθηματική γνώση (Lagrange, 2010).

1.3.4 Χειρισμός μαθηματικών συμβόλων

Οι μαθητές στη σχολική εκπαίδευση έχουν χαμηλό επίπεδο κατανόησης σχετικά με την έννοια του αριθμού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το να απομνημονεύουν μαθηματικά σύμβολα χωρίς νόημα (Thompson, 1994). Ο ρόλος του χειρισμού μαθηματικών συμβόλων στο πεδίο των συναρτήσεων αποτελεί μία από τις κύριες δυσκολίες των μαθητών, ειδικά όταν συνδέεται με ζητήματα επιλογής της ανεξάρτητης μεταβλητής (Lagrange & Psycharis, 2013). Υπάρχει περίπτωση οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως αντιστοιχία, η οποία προκύπτει από είσοδο τιμών και εξαγωγή ενός αποτελέσματος (Lagrange & Psycharis, 2013). Επομένως, η αντίληψη του χειρισμού μαθηματικών συμβόλων από τους εκπαιδευτικούς, δεν ταυτίζεται με την αντίληψη των μαθητών για τη χρήση του μαθηματικού συμβολισμού (Thompson, 1994).

Ο καθορισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι στοιχείο που εμφανίζεται σε μαθητές ως πρόβλημα χειρισμού μαθηματικών συμβόλων. Η αιτία αυτού του προβλήματος είναι η χρήση λανθασμένων εικόνων έννοιας από τους μαθητές (Tall & Vinner, 1981, Vinner 1983). Μάλιστα στην έρευνα του Thompson (1994) αναφέρεται ότι όταν ζητήθηκε να δοθεί ο τύπος του αθροίσματος $\mathrm{S_n} = 1^2 + 2^2 + \ldots + \mathrm{n}^2$, ένας σπουδαστής έγραψε $f(x) = \frac{\mathrm{n(n+1)(2n+1)}}{6}$. Το αξιοπερίεργο είναι ότι οι υπόλοιποι σπουδαστές δεν συνειδητοποιούσαν ότι υπάρχει κάποιο πρόβλημα στον παραπάνω τύπο, θεωρώντας ότι είναι σωστός. Οι μαθητές σε αυτή την περίπτωση έχουν στο νου τους, κατά μια έννοια δύο διαφορετικά μέρη όπου το πρώτο εμφανίζεται ως «ετικέτα» για το δεύτερο, χωρίς να υπάρχει ένωση των δύο σε εννοιολογικό επίπεδο (Lagrange, 2013). Ο Thompson (1994) αναφέρει ότι οι μαθηματικές εμπειρίες των σπουδαστών δεν περιλαμβάνουν την εκμάθηση του πώς να χρησιμοποιούν το συμβολισμό και ότι θα υπήρχε η δυνατότητα να ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη της συνάρτησης στο Α.Π., δίνοντας έμφαση στη συνάρτηση ως συμμεταβολή και στη συνέχεια, να εισάγεται η συνάρτηση ως αντιστοιχία. Επίσης, η Kieran (2007) καταγράφει τις χαμηλές επιδόσεις των μαθητών στην έρευνα TIMSS, όπου περιεχόταν παραγωγή ή ερμηνεία συναρτήσεων για την περιγραφή φαινομένων που εξαρτώνται από μία μεταβλητή (Lagrange & Psycharis, 2013).

Σχετικά με τον εντοπισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής από τους μαθητές και τη σημασία του για το χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων οι Arzarello et al. (2012), παρατηρούν ότι η επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι αρκετά σύνθετη, κατά τη χρήση ψηφιακών εργαλείων, καθώς οι μαθητές μπορεί να επιλέγουν ως ανεξάρτητη μία μεταβλητή που δεν επηρεάζει την εξαρτημένη μεταβλητή. Με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων αναδεικνύεται ο κρίσιμος ρόλος του χειρισμού μαθηματικών συμβόλων στην προσπάθεια ορισμού ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τον αλγεβρικό συμβολισμό σε διαφορετικές μορφές, όπως σε διαγράμματα και εξισώσεις. Έτσι προκύπτει η ανάγκη για τη μελέτη της κατανόησης του αλγεβρικού συμβολισμού διαφορετικά πλαίσια, όπως π.χ. στο πλαίσιο της Γεωμετρίας (Slavit, 1997). Έχοντας υπόψη το τελευταίο, η παρούσα έρευνα δίνει έμφαση στη μοντελοποίηση μεταβαλλόμενων ποσοτήτων σε γεωμετρικό πλαίσιο, το οποίο

θεωρείται πρόσφορο πεδίο για την εμπλοκή των μαθητών με την έννοια της συνάρτησης (Lagrange & Psycharis, 2013).

1.3.5 Η συνάρτηση ως δράση, ως διαδικασία και ως αντικείμενο

Οι δυσκολίες της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να οφείλονται στη σύνθετη φύση της έννοιας και των μαθηματικών αντικειμένων που τη διέπουν (Sfard, 1991). Σύμφωνα με τη Sfard (1991), η συνάρτηση μπορεί να κατανοηθεί είτε δομικά (ως αντικείμενο), είτε διαδικαστικά (ως διαδικασία). Αυτές οι δύο μέθοδοι αντίληψης της συνάρτησης μπορεί να φαίνεται ότι αποκλείουν η μία την άλλη, όμως στην πραγματικότητα αλληλοσυμπληρώνονται και συγκροτούν μια ισχυρή ενότητα. Παράλληλα, είναι απαραίτητο η συνάρτηση να κατανοηθεί πρώτα διαδικαστικά, προτού γίνει η μετάβαση στη δομική της κατανόηση (Sfard, 1991).

Ο Thomspon (1994), από την άλλη, προσθέτει μια ακόμα αντίληψη της συνάρτησης, η οποία προκύπτει από τους σπουδαστές και είναι η αντίληψη της συνάρτησης ως δράσης, αφού οι σπουδαστές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια αλγεβρική έκφραση μέσω της οποίας εξάγεται ένα αποτέλεσμα υπολογισμού (π.χ. 4(12 - (4 +5)) και x(12 - (x +5))). Οι Breidenbach et al. (1992) αναφέρουν ότι αντίληψη της συνάρτησης ως διαδικασίας χαρακτηρίζεται από την εστίαση των μαθητών στο αποτέλεσμα μετά από μια σειρά υπολογιστικών ενεργειών (δηλαδή υπολογισμό τιμών), ενώ η αντίληψη της συνάρτησης ως αντικειμένου βασίζεται στη γενίκευση της σχέσης εξάρτησης μεταξύ των ζευγών «εισόδου» - «εξόδου» των δύο μεγεθών (Lagrange & Psycharis, 2013). Ο Thompson (1994) τονίζει ότι για πολλούς σπουδαστές η αντίληψη της συνάρτησης ως διαδικασίας δεν επιτυγχάνεται χωρίς τη λήψη οδηγιών, οι οποίες δύνανται να εστιάζουν ρητά στην ανάπτυξη της, αντίθετα η συνάρτηση ως αντικείμενο έχει το χαρακτηριστικό ότι ο μαθητής μπορεί να κάνει πράξεις σε σύνολα συναρτήσεων.

Από τις παραπάνω αντιλήψεις για τη συνάρτηση προκύπτει ότι οι διαδικασίες κατανόησης της συνάρτησης από τους μαθητές ακολουθούν τέσσερα επίπεδα (Minh, in press). Αρχικά, είναι το επίπεδο της «δράσης» (action), όπου η σκέψη των μαθητών συνδέεται με τα δεδομένα και τα αποτελέσματα της συνάρτησης (είσοδος – έξοδος δεδομένων). Επόμενο επίπεδο σκέψης είναι αυτό της «συνέπειας» (punctual), το οποίο αναφέρεται στη δυναμική διαδικασία ή τη συμμεταβολή των μεταβλητών. Στο τρίτο «σφαιρικό» (global) επίπεδο, η συνάρτηση θεωρείται ως μαθηματικό αντικείμενο. Στο τελευταίο επίπεδο, της βαθύτερης κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης που αποκαλείται «διαδικασιο – έννοιας» (procept), μπορούν να βλέπουν οι μαθητές τη συνάρτηση, άλλοτε ως αντικείμενο και άλλοτε ως διαδικασία, ανάλογα με την κατάσταση.

1.3.6 Η συνάρτηση ως συμμεταβολή

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει η τάση ορισμένων ερευνητών (Thompson 1994; Confrey and Smith 1995; Slavit 1997; Carlson et al. 2002; Artigue & Lagrange, 2009; Lagrange, 2013) να δίνουν νόημα στη συνάρτηση ως συμμεταβολή. Επομένως, ο διπλός ρόλος της έννοιας της συνάρτησης έχει εξελιχθεί από τους ερευνητές, καθώς υπάρχει η μετακίνηση από την οπτική της συνάρτησης ως διαδικασίας – αντικειμένου στη συνάρτηση ως συμμεταβολή (Slavit, 1997). Η αλλαγή αυτή έχει να προσφέρει ότι η έμφαση στη συνάρτηση ως αντικείμενο ευνοεί την ανάπτυξη της συμμεταβολής ως πτυχή της συνάρτησης. Μάλιστα εκτός από την αντίληψη της συνάρτησης ως γεννήτριας αποτελεσμάτων με την έννοια «εισόδου – εξόδου», νοείται η αντίληψη της συνάρτησης ως συμμεταβολή που διατρέχει με ένα δυναμικό τρόπο το συνεχές των αριθμών, δηλαδή τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (Lagrange & Psycharis, 2013).

Το πλαίσιο των Carlson et al. (2002), το οποίο καθορίζει τα επίπεδα κατανόησης της συμμεταβολής (covariational reasoning) αποτελείται από τις γνωστικές δραστηριότητες που εμπλέκονται στην αλληλεξάρτηση δύο μεταβαλλόμενων ποσοτήτων. Προκύπτει από την παρατήρηση των τρόπων με τους οποίους αλλάζουν οι τιμές της μίας μεταβαλλόμενης ποσότητας σε σχέση με τις τιμές της άλλης μεταβαλλόμενης ποσότητας. Όπως είναι αντιληπτό, αυτός ο τρόπος σκέψης αυτός είναι αρκετά δύσκολος για τους μαθητές, αφού δεν είναι εμφανής η σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών και πρέπει να γίνει αντιληπτή ταυτόχρονα. Επομένως, θα πρέπει να υπάρχουν συνθήκες κατάλληλες με ευκαιρίες για τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με τη φύση της συνάρτησης ως συμμεταβολής όταν μοντελοποιούν προβλήματα (Lagrange & Psycharis, 2013). Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι η προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής δεν είναι καθόλου προφανής στους μαθητές.

Ένας τρόπος είναι να δοθεί έμφαση στη συνάρτηση ως συμμεταβολή και στη συνέχεια να εισαχθεί η συνάρτηση ως αντιστοίχιση, όπως η ανάγκη επιβάλλει (π.χ. διαφορικές εξισώσεις, κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων). Αυτό θα υπάκουε και στο σύγχρονο τρόπο σκέψης σχετικά με την ανάπτυξη των εννοιών της συνάρτησης διαμέσου των επιπέδων της δράσης, της διαδικασίας και του αντικειμένου (Thompson, 1994). Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές που αναπτύσσουν πολλαπλές στρατηγικές έχουν οικοδομήσει συμπαγείς εικόνες για τη συνάρτηση βασιζόμενοι στην ποσοτική συμμεταβολή. Αποτέλεσμα του τελευταίου είναι τα τελευταία χρόνια να υπάρχει η τάση της ενίσχυσης της οπτικής της συνάρτησης και ως συμμεταβολής και πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν αυτή την οπτική. Μάλιστα, τονίζεται ότι η αμφιταλάντευση ανάμεσα στο να σκεφτόμαστε τη συνάρτηση ως συμμεταβολή και ως αντιστοίχιση είναι φυσική. Και οι δύο οπτικές της συνάρτησης είναι μέρη της πνευματικής μας κληρονομιάς και εμφανίζονται στη συλλογική μας σκέψη (Thompson, 1994). Αν λάβουμε υπόψη μας την ιστορική αναδρομή, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση προέκυψε πρώτα ως συμμεταβολή και στη συνέχεια, ως αντιστοιχία με τον ορισμό που υπάρχει σήμερα.

Οι Carlson et al. (2002) στο πλαίσιο της συμμεταβολής, δημιουργούν ένα πίνακα που περιέχει πέντε διαφορετικά επίπεδα νοητικών ενεργειών. Ο πίνακας που προτείνουν είναι ο εξής:

Νοητική Ενέργεια (Mental Action)	Περιγραφή της Νοητικής Ενέργειας
Νοητική Ενέργεια 1 (MA1)	Συσχετίζοντας την τιμή της μιας μεταβλητής με τις αλλαγές στην άλλη (εξάρτηση).
Νοητική Ενέργεια 2 (MA2)	Συσχετίζοντας την κατεύθυνση της αλλαγής της μιας μεταβλητής με αλλαγές στην άλλη (αύξηση ή μείωση).
Νοητική Ενέργεια 3 (MA3)	Συσχετίζοντας το ποσό της αλλαγής της μιας μεταβλητής με αλλαγές στην άλλη.
Νοητική Ενέργεια 4 (MA4)	Συσχετίζοντας το μέσο ρυθμό της αλλαγής της συνάρτησης με ομοιόμορφες αυξήσεις αλλαγής στην ανεξάρτητη μεταβλητή.
Νοητική Ενέργεια 5 (MA5)	Συσχετίζοντας το στιγμιαίο ρυθμό της μεταβολής της συνάρτησης με συνεχείς αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή για όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Εκτός από τις πέντε νοητικές ενέργειες προτείνουν και πέντε επίπεδα ανάπτυξης των εικόνων της συμμεταβολής. Τονίζουν ότι ένας μαθητής έχει φτάσει σε ένα επίπεδο ανάπτυξης της συμμεταβολής, όταν υποστηρίζει τις νοητικές ενέργειες που σχετίζονται με το εκάστοτε επίπεδο, αλλά και τις ενέργειες που υπάρχουν σε όλα τα προηγούμενα επίπεδα.

Επίπεδα ανάπτυξης των εικόνων της συμμεταβολής
Επίπεδο 1 (E1) Συσχετισμός (Coordination) Στο επίπεδο του συσχετισμού, οι εικόνες συμμεταβολής υποστηρίζονται από την νοητική ενέργεια του συντονισμού των μεταβολών της μιας μεταβλητής με τις μεταβολές στην άλλη (MA1).
Επίπεδο 2 (E2) Κατεύθυνση (Direction) Στο επίπεδο της κατεύθυνσης, οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζονται από τις νοητικές ενέργειες συσχετισμού της κατεύθυνσης των μεταβολών της μιας μεταβλητής με τις μεταβολές στην άλλη. Οι νοητικές ενέργειες MA1,MA2 υποστηρίζονται και οι δύο από εικόνες του E2.
Επίπεδο 3 (E3) Ποιοτική συσχέτιση (Quantitative coordination) Σε αυτό το επίπεδο οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζουν τις νοητικές ενέργειες συσχέτισης του ποσού των μεταβολών της μιας μεταβλητής με τις μεταβολές στην άλλη. Οι νοητικές ενέργειες MA1, MA2, MA3 υποστηρίζονται και οι τρεις από τις εικόνες του E3.
Επίπεδο 4 (E4) Μέσος ρυθμός (Average rate) Σε αυτό το επίπεδο, οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζουν τις νοητικές ενέργειες της συσχέτισης του μέσου ρυθμού των μεταβολών της συνάρτησης με ομοιόμορφες μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι νοητικές ενέργειες από MA1 έως MA4 υποστηρίζονται από τις εικόνες του E4.
Επίπεδο 5 (E5) Στιγμιαίος ρυθμός (Instandaneous rate) Σε αυτό το επίπεδο οι εικόνες της συμμεταβολής υποστηρίζουν τις νοητικές ενέργειες της συσχέτισης του στιγμιαίου ρυθμού των μεταβολών της συνάρτησης με τις συνεχόμενες μεταβολές στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Σε αυτό το επίπεδο είναι κατανοητό ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής προκύπτει από όλο και μικρότερα διαστήματα του μέσου ρυθμού της αλλαγής. Γίνεται επίσης κατανοητό ότι το σημείο καμπής είναι εκεί όπου ο ρυθμός μεταβολής αλλάζει. Οι νοητικές ενέργειες MA1 έως MA5 υποστηρίζονται από τις εικόνες του E5.

Το πλαίσιο συμμεταβολής που προτείνεται αφορά ένα εργαλείο με το οποίο αποτιμάται η σκέψη με όρους συμμεταβολής. Επιπλέον η δομή του και η γλώσσα που χρησιμοποιείται προσφέρονται για την ταξινόμηση των σκέψεων των μαθητών αναφορικά με τη συμμεταβολή κατά τη λύση προβλήματος, ώστε να προκύπτουν οι ικανότητες του μαθητή στα επίπεδα κατανόησης της συμμεταβολής (Carlson et al., 2002).

Να σημειωθεί ότι στα προηγούμενα δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις ενέργειες που αναπτύσσει ο μαθητής. Η παραπάνω έρευνα έγινε χωρίς τη χρήση ψηφιακών εργαλείων και τα επίπεδα κατανόησης των Carlson et al. (2002) αναφέρονται σε ποσοτικά χαρακτηριστικά της συμμεταβολής. Πρέπει να υπογραμμιστεί, ότι στο πλαίσιο της μελέτης συναρτήσεων δεν υπάρχει αναφορά για τις μεταβάσεις μεταξύ αναπαραστάσεων και τον τρόπο που διατυπώνεται η συμμεταβολή σε διαφορετικές αναπαραστάσεις άρα κατ' επέκταση ποιοτική περιγραφή των ενεργειών κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Η αναγνώριση των μεταβλητών και έκφραση συμμεταβολής, ειδικά όταν γίνεται με τη χρήση τεχνολογίας έχει να προσφέρει στο μαθητή τον εντοπισμό των στοιχείων που συνιστούν συνάρτηση, παρά την παραγωγή ενός μαθηματικού τύπου (Lagrange, 2013). Αυτό το γεγονός έρχεται να τονίσει τη χρήση ψηφιακών εργαλείων στην υπερπήδηση των εμποδίων του χειρισμού μαθηματικών συμβόλων, αλλά και την σημαντικότητα της έννοιας της συμμεταβολής στην παρούσα έρευνα. Η ανάπτυξη νέων μέσων αναπαράστασης, μέσω ειδικά διαμορφωμένων τεχνολογικών εργαλείων δημιουργεί προοπτικές αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών. Με τη χρήση τέτοιων δυναμικών εργαλείων, καθίσταται δυνατή η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα γόνιμο έδαφος για την ανάπτυξη της διαίσθησης και της κριτικής ικανότητας των μαθητών, αλλά και ταυτόχρονα να γίνεται εμφανής η σχέση συμμεταβολής και αλληλεξάρτησης μεταξύ των συναρτησιακών μεγεθών (Langrange & Psycharis, 2013).

Τέλος, αξιοσημείωτος είναι ο ρόλος του χειρισμού μαθηματικών συμβόλων που ενισχύεται με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας, όπως το Casyopée. Το Casyopée δίνει τη δυνατότητα να εξάγεται απευθείας ο μαθηματικός τύπος της συνάρτησης και έτσι συμφιλιώνει τη χρήση συμβολικών μορφών και δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων (Lagrange, 2013).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ

Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από μια αυστηρότητα και ακρίβεια που δεν εμφανίζεται σε άλλες επιστήμες. Η ακρίβεια αυτή είναι που τελικά οδηγεί στη δημιουργία αυστηρά θεμελιωμένων δομών, ορισμών, θεωρημάτων και προτάσεων, που συντελούν στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Όπως έχει αναφερθεί ήδη στην ιστορική αναδρομή για τη συνάρτηση, πολλές έννοιες στα μαθηματικά έχουν διατρέξει μια ιστορία αρκετών χρόνων μέχρι να δοθεί ο ορισμός ο οποίος θα ορίζει με ακρίβεια την έννοια και θα είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση, χρησιμοποιούν εκφράσεις από την εμπειρία τους, οι οποίες άλλες είναι διαισθητικές, που προκύπτουν από την άμεση παρατήρηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων της έννοιας, και άλλες που προέρχονται από προηγούμενες εμπειρίες. Συνήθως οι εκφράσεις που χρησιμοποιούν με τη βοήθεια της εμπειρίας τους δεν είναι αυστηρά ορισμένες και ενδιαφέρον προκαλεί το ότι εμφανίζονται συνδέσεις μεταξύ της ιστορίας της εξέλιξης της έννοιας και των διατυπώσεων των μαθητών.

Στην έρευνα έχει γίνει προσπάθεια περιγραφής της διαφοροποίησης μεταξύ αφηρημένου ορισμού μιας έννοιας, όπως προέρχεται από τη μαθηματική κοινότητα και του τρόπου με τον οποίο οι εμπειρίες ενός μαθητή αλληλεπιδρούν. Οι Tall και Vinner (1981) στην προσπάθειά τους αυτή ορίζουν την «εικόνα έννοιας» (concept image) και τον «ορισμό έννοιας» (concept definition). Η εικόνα έννοιας περιλαμβάνει όλες τις γνωστικές δομές που είναι στο νου των μαθητών και σχετίζονται με μια δοθείσα έννοια, η οποία περιέχει τις νοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες. Ο ορισμός έννοιας είναι μια αλληλουχία από λέξεις που χρησιμοποιούνται για να δώσουν νόημα σε μία έννοια. Επομένως, οι άνθρωποι για να κατανοήσουν μια πρόταση ή για να προσπαθήσουν να την κατανοήσουν, όταν βρίσκονται σε ορισμένα πλαίσια και προκειμένου να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα, θα πρέπει να συμβουλεύονται τους ορισμούς, αλλιώς θα υπάρχει ενδεχόμενο εμφάνισης παρανοήσεων (Vinner, 1991).

Η εικόνα έννοιας αφορά οτιδήποτε έρχεται στη μνήμη κάποιου ατόμου, όταν ακούει μια λέξη σχετική με την έννοια (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983) και είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις προηγούμενες εμπειρίες του, επομένως είναι μοναδική για κάθε μαθητή, αφού οι εμπειρίες κάθε ατόμου είναι διαφορετικές. Έτσι, όπως τονίζουν οι Tall & Vinner (1981), η εικόνα έννοιας αποτελεί μια μεταβαλλόμενη νοητική κατασκευή που αλλάζει με το πέρασμα του χρόνου καθώς το άτομο συναντά καινούρια ερεθίσματα και αποκτά νέες εμπειρίες. Για την κατανόηση του ορισμού της εικόνας έννοιας προσφέρεται από τους παραπάνω ερευνητές το παράδειγμα της αφαίρεσης δύο φυσικών αριθμών. Οι μαθητές στην πρώτη τους επαφή με την αφαίρεση φυσικών αριθμών, μπορεί να παρατηρήσουν ότι το αποτέλεσμα είναι πάντα μικρότερο από τον πρώτο

αριθμό. Αυτός ακριβώς ο ισχυρισμός είναι μέρος της εικόνας έννοιας για την αφαίρεση και μπορεί να προκληθούν παρανοήσεις όταν γίνει επέκταση της έννοιας στους ακεραίους, αφού κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τους αρνητικούς φυσικούς. Επίσης, η εικόνα έννοιας στην ανάπτυξή της δεν είναι συναφής, διότι ο νους δε λειτουργεί με αυτό τον τρόπο. Επομένως, με αυτή την περιγραφή για την εικόνα έννοιας, παρατηρούμε ότι διαφορετικά ερεθίσματα μπορεί να προκαλέσουν ενεργοποίηση διαφορετικών μερών της εικόνας έννοιας (Tall & Vinner, 1981).

Επιπλέον, ανάλογα με το εκάστοτε πλαίσιο, υπάρχει περίπτωση ανάκλησης διαφορετικής εικόνας έννοιας. Την ανάκληση διαφορετικής εικόνας έννοιας για κάποια συγκεκριμένη έννοια οι Tall και Vinner (1981) την ονομάζουν «προκληθείσα εικόνα για την έννοια» (evoked concept image). Αυτή περιγράφει το μέρος της μνήμης που ενεργοποιείται για έναν όρο σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, όπου πιθανώς το άτομο έχει παρανοήσεις σχετικά με αυτή την έννοια (Vinner, 1991). Σε διαφορετικές χρονικές στιγμές υπάρχει περίπτωση να έχουν προκληθεί αντικρουόμενες εικόνες από το ίδιο άτομο. Σε αυτή την περίπτωση το άτομο μπορεί να χρησιμοποιεί σε διαφορετικά πλαίσια διαφορετικές εικόνες, ανάλογα με τα ερεθίσματα που τις προκαλούν, κάνοντας έτσι διαφορετικά λάθη, ανάλογα με το πρόβλημα. Προκύπτει ότι μόνο αν αναφερθούν ταυτόχρονα οι αντικρουόμενες εικόνες υπάρχει αίσθηση της γνωστικής σύγκρουσης ή της παρανόησης (Tall & Vinner, 1981).

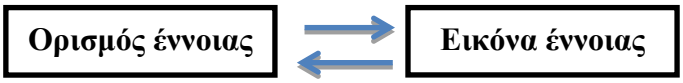
Ο ορισμός έννοιας μπορεί να απομνημονευθεί από τους μαθητές με μηχανική αποστήθιση χωρίς βαθύτερη κατανόηση, ή ακόμα καλύτερα να προσληφθεί με τη δυνατότητα να γίνονται συνδέσεις σε ένα βαθμό με την έννοια. Μπορεί επίσης να αποτελεί μια προσωπική ανακατασκευή του ορισμού από ένα μαθητή (Tall & Vinner, 1981). Σε αυτή την περίπτωση η αλληλουχία των λέξεων που χρησιμοποιεί ο μαθητής για να εξηγήσει τον ορισμό που έδωσε αποτελεί «προκληθείσα εικόνα για την έννοια». Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο προήλθε ο ορισμός έννοιας, αυτός μπορεί να διαφέρει σε βάθος χρόνου. Από τη στιγμή που θα σχηματιστεί η εικόνα έννοιας, ο ορισμός γίνεται πλέον μη αναγκαίος και δεν χρησιμοποιείται ή μπορεί να ξεχαστεί (Vinner, 1991). Με αυτή την ερμηνεία, ο προσωπικός ορισμός κάθε ατόμου μπορεί να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό έννοιας, ο οποίος είναι αποδεκτός από την μαθηματική κοινότητα (Tall & Vinner, 1981).

Από τα παραπάνω, αντιλαμβάνεται κανείς ότι ο ορισμός έννοιας, ο οποίος είναι ένας ορισμός που έχει αποδεχτεί η μαθηματική κοινότητα, δημιουργεί σε κάθε άτομο τη δική του αντίληψη της εικόνας του, το οποίο είναι η εικόνα έννοιας. Η εικόνα έννοιας δεν σημαίνει ότι υπάρχει απαραίτητα σε όλους τους ανθρώπους. Για παράδειγμα, όταν ένα άτομο αποστηθίσει έναν ορισμό, χωρίς να αντιλαμβάνεται τη χρήση του, τότε δεν υπάρχει εικόνα έννοιας για το συγκεκριμένο άτομο (Vinner, 1991). Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τις συνδέσεις με άλλα τμήματα της εικόνας έννοιας (Tall & Vinner, 1981). Παραδείγματος χάριν, γίνεται αντιληπτός ο ορισμός της συνάρτησης ο οποίος αποδίδεται ως σχέση μεταξύ δύο συνόλων Α και Β, όπου κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται ακριβώς σε ένα στοιχείο του συνόλου Β. Οι μαθητές, όπως αναφέρουν οι Tall & Vinner (1981), ενδέχεται να θυμούνται τον ορισμό της συνάρτησης και να τον διατυπώσουν, αλλά μπορεί και να μην θυμούνται τον ορισμό και η εικόνα έννοιας για

τη συνάρτηση να περιέχει ορισμένες οπτικές. Παραδείγματα τέτοιων οπτικών είναι ότι η συνάρτηση δίνεται από ένα κανόνα ή ένα τύπο, ή ότι η συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων Α και Β, ή να την αντιλαμβάνονται ως γραφική παράσταση ή ως πίνακα τιμών. Τονίζεται ότι τα παραπάνω πιθανώς να αποτελούν εικόνες έννοιας μαθητών.

Όπως γίνεται αντιληπτό οι εικόνες έννοιας και ο ορισμός έννοιας αλληλεπιδρούν συνεχώς. Όταν ένα μέρος της εικόνας έννοιας ή του ορισμού έννοιας συγκρούεται με ένα άλλο μέρος της εικόνας έννοιας ή του ορισμού έννοιας, ονομάζεται «δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης» (potential conflict factor) (Tall & Vinner, 1981). Η περίπτωση δυνητικού παράγοντα συγκρούσεων, όπου μια εικόνα έννοιας έρχεται σε σύγκρουση με τον τυπικό ορισμό έννοιας, χωρίς να συγκρούεται με άλλη εικόνα έννοιας, είναι ιδιαίτερη. Αυτοί οι παράγοντες μπορούν να παρεμποδίσουν σοβαρά την εκμάθηση της επίσημης θεωρίας, γιατί δεν μπορεί να γίνει ουσιαστική σύγκρουση γνωστικών παραγόντων. Η μόνη περίπτωση σύγκρουσης γνωστικών παραγόντων είναι αν από τον επίσημο ορισμό έννοιας προκύψει μια εικόνα έννοιας, η οποία θα οδηγήσει σε γνωστική σύγκρουση. Οι μαθητές χαρακτηρίζονται από ένα δυνητικό παράγοντα συγκρούσεων. Η εικόνα έννοιας μπορεί να νιώθουν ότι είναι ισχυρή στη δική τους ερμηνεία και να θεωρούν την επίσημη θεωρία ως περιττή (Tall & Vinner, 1981). Αυτή η περίπτωση αναμένεται να εμφανίζεται σε καταστάσεις όπου οι εικόνες έννοιας των μαθητών είναι ισχυρές, αλλά δεν ικανοποιούν πλήρως τον τυπικό ορισμό έννοιας.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας και ορισμού έννοιας φαίνεται από το σχήμα (Vinner, 1983):



Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση ορισμού έννοιας και εικόνας έννοιας

Η αλληλεπίδραση μεταξύ ορισμού έννοιας και εικόνα έννοιας δεν είναι αναγκαίο να συμβαίνει σε κάθε περίπτωση, όμως το τελικό συμπέρασμα πρέπει να προκύπτει πάντοτε από τον ορισμό έννοιας. Σε αντίθετη περίπτωση θα υπάρχουν μη επιθυμητά αποτελέσματα. Έτσι πρέπει να δοθεί έμφαση στη δημιουργία δραστηριοτήτων και διατύπωση κατάλληλων προβλημάτων που θα οδηγούν τις ατελείς εικόνες έννοιας να χάνουν την ισχύ τους (Vinner, 1991). Οι αποτυχίες των ατελών εικόνων έννοιας θα οδηγήσουν τους μαθητές να στραφούν στον ορισμό της έννοιας ως μοναδικό κριτήριο για διάφορα μαθηματικά προβλήματα.

2.2 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΝΟΗΜΑΤΟΣ

Οι μαθητές στο πλαίσιο της εμπλοκής τους με μαθηματικού περιεχομένου δραστηριότητες δημιουργούν νοήματα, προκειμένου να κατασκευάσουν τη γνώση. Υπάρχουν δύο βασικές θεωρίες που υποστηρίζουν την κατασκευή της γνώσης από τους μαθητές. Ο κονστρουκτιβισμός (Constructivism), ο οποίος αναπτύχθηκε από τον Piaget και η θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism), την οποία εισήγαγε ο Papert. Και οι δύο θεωρίες αναγνωρίζουν ως κεντρικό το ρόλο των εμπειριών του μαθητή στην κατασκευή της γνώσης.

Η Ackermann (2001) παρουσιάζει κάποιες απόψεις της θεωρίας κονστρουκτιβισμού του Piaget και τις αντιπαραβάλλει με τη θεωρία του Papert. Όπως αναφέρει, η θεωρία του Piaget περιγράφει την εξέλιξη των πράξεων και της σκέψης των ατόμων με την πάροδο του χρόνου και τονίζει ότι οι μαθητές είναι σταθεροί στις απόψεις τους, δηλαδή δεν αλλάζουν εύκολα άποψη όταν τους επισημαίνεται ότι έχουν κάνει λάθος. Επομένως, η θεωρία αυτή τείνει στο να αγνοείται ο ρόλος του πλαισίου και των εκπαιδευτικών μέσων. Επίσης, παραβλέπεται η σημασία των ατομικών προτιμήσεων και των ατομικών επιλογών στην ανθρώπινη μάθηση, αφού οι μαθητές έχουν «ακλόνητες» θέσεις απέναντι στη νέα γνώση.

Από την άλλη, η θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών του Papert (1991) δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στη δημιουργία γνωστικών δομών μέσω της σταδιακής εσωτερίκευσης των δράσεων των μαθητών (Ackermann, 2001). Με άλλα λόγια, δίνεται περισσότερη έμφαση στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν, τονίζοντας τη σημαντικότητα των δράσεων των μαθητών, προκειμένου να μάθουν. Ο Papert στη θεωρία του ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο τα άτομα εμπλέκονται σε επικοινωνία με τα τεχνουργήματα (artifacts), αλλά και πως αυτή η επικοινωνία προωθεί τη μάθηση και διευκολύνει τελικά την κατασκευή της νέας γνώσης. Αντίθετα με τον Piaget, τονίζει την σημαντικότητα των εργαλείων, των μέσων και του πλαισίου που τα άτομα νοηματοδοτούν τις εμπειρίες τους, παρατηρώντας τις αλληλεπιδράσεις με τον κόσμο (Ackermann, 2001). Αναδύεται επομένως η σημαντικότητα της έκφρασης των συναισθημάτων και των σκέψεων των μαθητών για την δημιουργία νοημάτων.

Η κατασκευή της γνώσης και επανακατασκευή της με τη βοήθεια των προσωπικών εμπειριών, η ανάπτυξη νοημάτων και επισήμανση των χαρακτηριστικών και των διαδικασιών με τις οποίες οι άνθρωποι αναπτύσσουν τις απόψεις τους και δημιουργούν βαθύτερα νοήματα στο περιβάλλον τους, αποτελούν χαρακτηριστικά των παραπάνω θεωριών. Η βασική τους όμως διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ο Piaget ενδιαφέρεται για την κατασκευή της εσωτερικής σταθερότητας, ενώ ο Papert δίνει βαρύτητα στη δυναμική της αλλαγής (Ackermann, 2001). Συμπέρασμα της θεωρίας του Papert είναι ότι οι μαθητές με την εμπλοκή τους σε περιβάλλοντα ψηφιακής τεχνολογίας συμπεριφέρονται ως επιστήμονες καθώς χρησιμοποιούν αυστηρή μαθηματική γλώσσα για να μάθουν (Papert, 1980). Ο Papert δίνει βαρύτητα στην κατασκευή νοημάτων όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν τα κατάλληλα εργαλεία.

Σχετικά με την κατασκευή νοημάτων οι Healy, Hoyles & Noss (1997) αναφέρουν ότι σε περιβάλλοντα υπολογιστών είναι πιθανό να κατασκευάζονται πλούσιες περιγραφές της σκέψης των μαθητών, μελετώντας αυτά που κατασκευάζουν και παρατηρώντας τον τρόπο που τα χρησιμοποιούν στην πράξη. Μάλιστα τονίζουν ότι τα περιβάλλοντα αυτά είναι κατασκευασμένα κατά τρόπο ώστε να στηρίζονται στη γλώσσα ως το μέσο ελέγχου αντικειμένων, ώστε οι σχέσεις μεταξύ αντικειμένων να είναι συμπαγείς και να έχουν νόημα. Ορισμένοι ερευνητές όμως, υπογραμμίζουν ότι μπορεί σε κάποιες έρευνες να δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στις οπτικές προσεγγίσεις, αλλά οι συμμετέχοντες στην έρευνα συχνά να μην δείχνουν ιδιαίτερο ζήλο στην εκμετάλλευση των οπτικών αυτών καταστάσεων (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Τονίζεται ότι όταν οι μαθητές εργάζονται σε ψηφιακά περιβάλλοντα και μπορούν να κατασκευάσουν τις δικές τους συσχετίσεις με τα μαθηματικά αντικείμενα, οι συσχετίσεις αυτές αποκτούν βαθύτερο νόημα. Μάλιστα όσο περισσότερες είναι οι συνδέσεις που κάνουν μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων, τόσο πιο ευδιάκριτο γίνεται το αντικείμενο για αυτούς, ειδικά αν μπορεί να εκφραστεί μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις (Wilensky, 1991).

Οι Hillel & Kieran (1987) αναφέρουν ότι οι μαθητές τείνουν στο να μην κάνουν συνδέσεις μεταξύ των αναπαριστώμενων μαθηματικών αντικειμένων και της αναλυτικής σκέψης. Ο Dreyfus (1993) τονίζει τη σημασία της συστηματικής ανάλυσης και αντιμετώπισης των δυσκολιών που συνδέονται με τις αναπαραστάσεις, ώστε οι μαθητές να τις ξεπερνούν. Αναζητώντας τις δράσεις που προκαλούν κατασκευή των νοήματων των μαθητών, οι Healy, Hoyles και Noss (1997) μελέτησαν μία μαθήτρια που χρησιμοποιούσε ένα ψηφιακό εργαλείο για να κατανοήσει κανονικότητες. Η μαθήτρια κατασκεύασε τελικά νόημα για την έννοια της γενίκευσης δοκιμάζοντας με το εργαλείο και ανασκευάζοντας τις αρχικές τις εκτιμήσεις, δηλαδή μέσα από μια αλληλουχία αντιπαραθέσεων σε σχέση με τις αρχικές τις κατανοήσεις. Τα παραπάνω οδηγούν αρχικά στην επιθυμία για γενίκευση των απαντήσεων, ενώ ταυτόχρονα παρατηρείται ότι το ψηφιακό εργαλείο επέτρεψε στη μαθήτρια να κατασκευάσει ένα νόημα που σε άλλη περίπτωση μπορεί να είχε χαθεί (Healy, Hoyles & Noss, 1997).

Στο πλαίσιο αυτό οι Hoyles και Noss ανέπτυξαν την έννοια της πλαισιοθετημένης αφαίρεσης (situated abstraction) για να περιγράψουν την κατασκευή της γνώσης από τους μαθητές, καθώς αλληλεπιδρούν με τα ψηφιακά εργαλεία, η οποία εξαρτάται από το πλαίσιο δηλαδή τη φύση των εργαλείων. Αυτή η αφαίρεση είναι συνθετική, αφού συνδυάζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις. Αναζητώντας κατάλληλα περιβάλλοντα προκειμένου να παρατηρήσουν σε τι είδους περιβάλλοντα ευνοούνται τέτοιες αφαιρετικές διαδικασίες οι Hoyles και Noss διαπίστωσαν ότι είναι περιβάλλοντα με τα οποία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εκφράζουν τα μαθηματικά νοήματα μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις. Τα παραπάνω τονίζουν ότι θα πρέπει να επικεντρωθούμε στις αναπαραστάσεις και στην έκφραση των μαθηματικών αντικειμένων (Hoyles & Noss, 1996). Οι δύο ερευνητές είδαν τη διαδικασία κατασκευής της γνώσης ως διαδικασία αφαιρέσεων που τις ονόμασαν τοπικές αφού καθορίζονται κάθε φορά από το πλαίσιο και τα εργαλεία. Κύριο χαρακτηριστικό των αφαιρέσεων αυτών είναι ότι χαρακτηρίζονται από τις συνδέσεις που κάνουν οι μαθητές μεταξύ

διαφορετικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούν στο πλαίσιο των συγκεκριμένων υπολογιστικών περιβαλλόντων.

Οι Sfard και Linchevski (1994) εκφράζουν τις ανησυχίες τους για την μαζική χρήση υπολογιστών στη διδασκαλία συναρτήσεων, η οποία πιθανώς θα ανατρέψει την «φυσική αλληλουχία» της μάθησης. Για να βελτιώσουμε τη διαδικασία της μάθησης θα πρέπει πρώτα να εστιάσουμε την προσοχή μας στα ψηφιακά εργαλεία και στις ιδιότητές τους, όσο και στην ψυχολογία και στην επιστημολογία. Δεύτερον, τα περιβάλλοντα υπολογιστών δίνουν σημασία κατά τη διαδικασία μάθησης και στο πλαίσιο μάθησης, με τη χρήση διάφορων διαθέσιμων εργαλείων. Με αυτή την έννοια ο υπολογιστής κρίνεται κατάλληλος για την δημιουργία νοημάτων (Hoyles & Noss, 1996). Με άλλα λόγια, αυτό το θεωρητικό πλαίσιο προσπαθεί να εστιάσει στους τρόπους με τους οποίους τα νοήματα κατασκευάζονται με τη χρήση διάφορων εικονικών αντικειμένων και σχέσεων μεταξύ αυτών και κατ' επέκταση με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων. Σε αυτά τα περιβάλλοντα ο μαθητής θα μπορεί να διατηρήσει και να επεκτείνει τα νοήματα που κατασκευάζει. Ταυτόχρονα θα υπάρχει μια σαφής εκτίμηση των σχέσεων και των νοημάτων που παράγονται, τα οποία με τη συμβολή του εργαλείου θα έχουν γίνει πλέον το ίδιο με αυτό που θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε «επίσημα» (real) μαθηματικά (Healy, Hoyles & Noss, 1997). Έτσι προκύπτει η μάθηση ως διαδικασία τοπικών αφαιρέσεων όπου είναι άλλοτε λιγότερο και άλλοτε περισσότερο κοντά στη μαθηματική γνώση.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το πεδίο μάθησης της συνάρτησης αναδεικνύεται ως εξαιρετικά ενδιαφέρον για την ανάπτυξη συνδέσεων, αφού περιέχει πληθώρα από διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η θεωρία του Papert η οποία συνδυάζει τα μαθηματικά, τη διδακτική και τις τεχνολογίες προσφέρεται για την δημιουργία νοημάτων από πλευράς μαθητών με αποτέλεσμα να κρίνεται κατάλληλη για την έρευνα που ακολουθεί. Ακόμη, η ύπαρξη ψηφιακών εργαλείων που υποστηρίζουν τις μεταβάσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, αλλά και οι κατάλληλες δραστηριότητες που μπορούν να δοθούν στους μαθητές, ενισχύουν την κατασκευή νοημάτων. Οι συνδέσεις που γίνονται, όπως αναφέρει ο Wilensky (1991) είναι όλο και περισσότερο «συμπαγείς» με αποτέλεσμα τη δημιουργία νοήματος για διάφορες έννοιες. Παράλληλα η πλαισιοθετημένη αφαίρεση, δηλαδή η διαδικασία με την οποία οι μαθητές παράγουν γενικευμένες αφαιρέσεις εννοιών, έχοντας την εμπειρία τοπικών γενικεύσεων, συνεισφέρει κατά μεγάλο μέρος στη δημιουργία «βαθύτερων» νοημάτων από τους μαθητές. Η καταλληλότητα του υπολογιστή και των εκπαιδευτικών λογισμικών που αφορούν τη συνάρτηση, οι κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες και η μοντελοποίηση σε γεωμετρικό πλαίσιο αναμένεται να αποτελέσουν το έναυσμα για ενασχόληση και παραγωγή νοημάτων από τους μαθητές στο πλαίσιο που αναφέρθηκε προηγουμένως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ CASYOPÉE

3.1 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

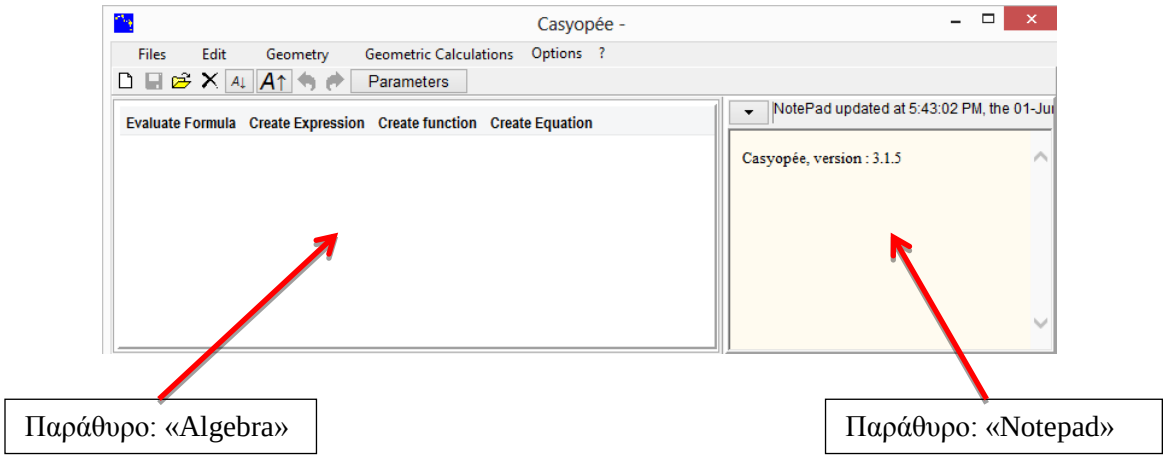
Το Casyopée είναι ένα ψηφιακό περιβάλλον που συνδυάζει Άλγεβρα και Γεωμετρία, με απώτερο σκοπό την εκμάθηση των συναρτήσεων για τη δευτεροβάθμια ή και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, δίνοντας έμφαση κυρίως στις τάξεις του Λυκείου. Η δημιουργία της ομάδας του Casyopée έγινε σε πρώτη φάση το 1995-2000 όπου οι ερευνητές από το Πανεπιστήμιο Paris-Diderot συνεργάστηκαν με εκπαιδευτικούς για τον πειραματισμό του DERIVE και του TI92 υπολογιστή (Lagrange, 1999). Σε μια δεύτερη φάση, η ερευνητική ομάδα προβληματιζόταν για τις δυσκολίες και τα επιστημολογικά εμπόδια που αναφέρονταν στα λογισμικά Άλγεβρας Computer Algebra Software (CAS), που ήταν φτιαγμένα για έμπειρους χρήστες. Έτσι άρχισαν να κατασκευάζουν ένα εργαλείο CAS που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην τάξη. Η διαδικασία για τη διασφάλιση της συνέπειας και κάποιοι διδακτικοί σχεδιασμοί στο περιβάλλον, το ενίσχυσαν ώστε να γίνει ένα καινοτόμο αλγεβρικό εργαλείο αποδοχής από τους εκπαιδευτικούς. Αρχικά, ήταν ένα εργαλείο με δυνατότητες διερεύνησης και επίλυσης προβλημάτων, όπως μοντελοποίησης γεωμετρικών μεγεθών. Η ερευνητική ομάδα προβληματιζόταν καθώς η διερεύνηση και μοντελοποίηση ήταν διεργασίες που δεν γίνονταν ταυτόχρονα με το Casyopée (Lagrange, 2013). Το 2006-2009 η ερευνητική ομάδα του Casyopée ασχολήθηκε με το πρόγραμμα Remath, το οποίο περιλάμβανε πολλαπλές αναπαραστάσεις, με αποτέλεσμα να ενσωματωθούν στο παραθυρικό περιβάλλον της Άλγεβρας, τα παράθυρα: α) της Δυναμικής Γεωμετρίας, β) των μετρήσεων και γ) των συμμεταβολών. Αποτέλεσμα ήταν η ολοκληρωμένη μελέτη μεταβαλλόμενων μεγεθών που βρίσκονταν σε εξάρτηση μεταξύ τους και η δημιουργία και αυτόματη εξαγωγή μαθηματικών τύπων, που περιγράφουν τη συμμεταβολή (Lagrange, 2013), συνδέοντας έτσι την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία.

Το Casyopée αποτελείται από ένα πολύ ισχυρό λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας Dynamic Geometry System (DGS), το οποίο έχει τα κύρια χαρακτηριστικά της δημιουργίας και κίνησης γεωμετρικών αντικειμένων. Επιπλέον, προτείνει τη χρήση παραμέτρων στους ορισμούς γεωμετρικών αντικειμένων και μετρήσεων, ώστε να διευκολύνονται οι γενικεύσεις με χρήση αλγεβρικών συμβόλων. Επίσης, επιτρέπει την μοντελοποίηση μεταξύ δύο μεγεθών που αλληλοεξαρτώνται, δίνοντας στο χρήστη τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει γεωμετρικούς υπολογισμούς και μετρήσεις. Στη συνέχεια, μετά τον προσδιορισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής από το χρήστη, προκύπτει αυτόματα η συνάρτηση, η οποία περιγράφει τη συμμεταβολή των μεταβλητών. Αυτή η δυνατότητα βοηθά στην γεφύρωση μεταξύ του γεωμετρικού σχήματος και της έννοιας της συνάρτησης, η οποία χωρίς τη βοήθεια του Casyopée θα γινόταν πολύ δύσκολα (Artigue & Lagrange, 2009). Με την ύπαρξη της παραπάνω ιδιότητας το Casyopée πλέον γίνεται εργαλείο που κατά κύριο λόγο αφορά συναρτήσεις. Όταν εισάγεται κάποια συνάρτηση στο πρόγραμμα, η οποία έχει προκύψει από μοντελοποίηση μιας εξάρτησης, εμφανίζεται ταυτόχρονα ο μαθηματικός τύπος της και το πεδίο ορισμού της στο παράθυρο της

Άλγεβρας. Επιπλέον υπάρχει δυνατότητα εμφάνισης της γραφικής της παράστασης είτε στη Γεωμετρία, είτε στο παράθυρο των γραφημάτων. Το παράθυρο γραφημάτων είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς κάνοντας κλικ επάνω στη συνάρτηση, δίνεται η δυνατότητα για περιήγηση επάνω στην καμπύλη της συνάρτησης με ένα «κινούμενο στόχο» που εμφανίζεται και ακολουθά την τροχιά της καμπύλης.

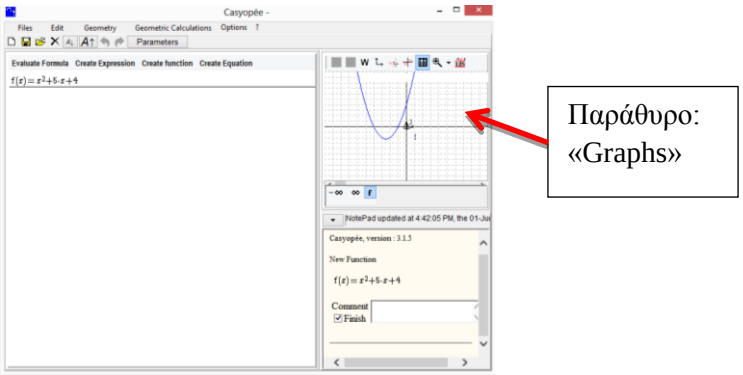
3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Ανοίγοντας το πρόγραμμα Casyopée (έκδοση 3.1.5), αντικρίζει κανείς το εξής παράθυρο:



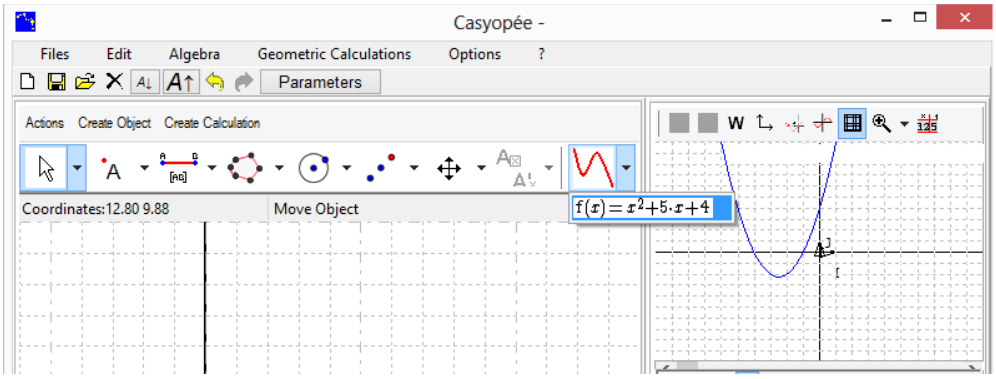
Σχήμα 3: Παράθυρο «Algebra» - Παράθυρο «Notepad»

Το παράθυρο αυτό, έχει τη μορφή ενός Αλγεβρικού λογισμικού (CAS) και αποτελεί το μέρος του παραθύρου «Algebra» στο λογισμικό. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα Υπολογισμού Μαθηματικού Τύπου, Δημιουργίας Αλγεβρικής Έκφρασης, Δημιουργίας Συνάρτησης και Δημιουργίας Ισότητας. Σε περίπτωση που δημιουργηθεί ένα μαθηματικό αντικείμενο, εμφανίζεται στο παράθυρο «Algebra», αλλά και στο «Notepad» που βρίσκεται στο δεξί μέρος του παραθύρου. Με τη δημιουργία της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ενεργοποιείται το παράθυρο «Graphs» στο δεξί μέρος με τη δυνατότητα εμφάνισης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (βλ. σχήμα 4).



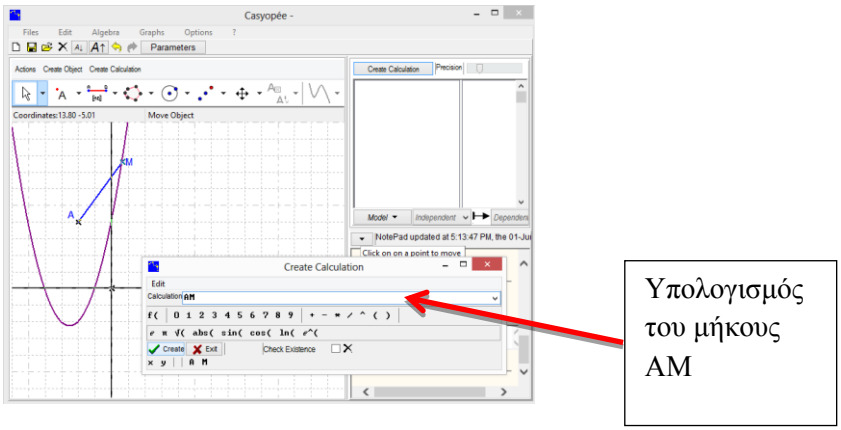
Σχήμα 4: Παράθυρο «Graphs»

Κάνοντας κλικ στη λέξη «Geometry» στη γραμμή εργαλείων, υπάρχει δυνατότητα εναλλαγής των παραθύρων «Algebra» και «Geometry». Αντίστοιχη είναι η δυνατότητα εναλλαγής παραθύρων «Geometric calculations» και «Graphs». Με αυτή την παρατήρηση φαίνεται ότι το Casyopée υποστηρίζει μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων για την περίπτωση των συναρτήσεων. Επιπλέον υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης στο παράθυρο της «Geometry» της συνάρτησης που ορίσαμε στην «Algebra», κάνοντας κλικ στο κουμπί με την κόκκινη καμπύλη (βλ. σχήμα 5).



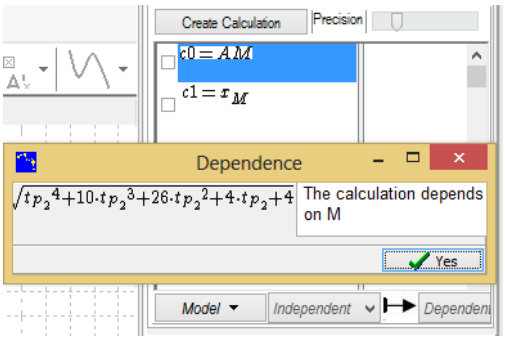
Σχήμα 5: Μεταφορά καμπύλης στο παράθυρο Γεωμετρίας

Το παράθυρο «Geometry» έχει τα χαρακτηριστικά ενός DGS. Υπάρχει δυνατότητα δημιουργίας σταθερών σημείων, όπως το A(-2,4) και ελεύθερων σημείων, όπως η δημιουργία ελεύθερου σημείου M, πάνω στην καμπύλη $f(x)$ (βλ. σχήμα 6). Για να γίνουν κατανοητές οι δυνατότητες του προγράμματος Casyopée, θα αναζητηθεί αν υπάρχει ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων A και M. Μετά τη δημιουργία του τμήματος AM και το σύρσιμο του σημείου M πάνω στην καμπύλη επιλέγονται οι «Geometric calculations», όπου υπολογίζεται το μήκος AM. Με αριστερό κλικ πάνω στον υπολογισμό AM υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης των εξαρτήσεων της απόστασης AM. Η δυνατότητα παρατήρησης της εξάρτησης μεταξύ μεγεθών με τις υποδείξεις του λογισμικού συμβάλλει στην αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης (Artigue & Lagrange, 2009). Παρατηρώντας ότι το μήκος του AM εξαρτάται από το σημείο M, προκύπτει ότι η συντεταγμένη x του σημείου M συμμεταβάλλεται με την απόσταση AM, όπου την υπολογίζουμε στο παράθυρο «Geometric calculations» (βλ. σχήμα 6):



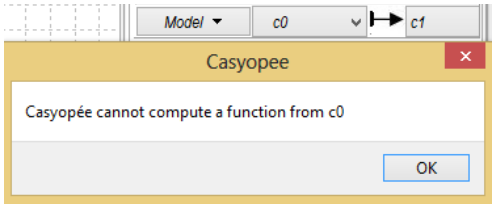
Σχήμα 6: Γεωμετρικός υπολογισμός του μήκους ΑΜ

Ιδιαίτερη σημασία έχει η δημιουργία συνάρτησης από το χρήστη, όπου πρέπει να τοποθετηθεί μια ανεξάρτητη και μια εξαρτημένη μεταβλητή στο παράθυρο των υπολογισμών. Τοποθετείται ως ανεξάρτητη μεταβλητή το xM (συντεταγμένη x του σημείου M) και ως εξαρτημένη το ΑΜ, καθώς το λογισμικό μας αναφέρει ότι η απόσταση ΑΜ εξαρτάται από το σημείο M (βλ. σχήμα 7).



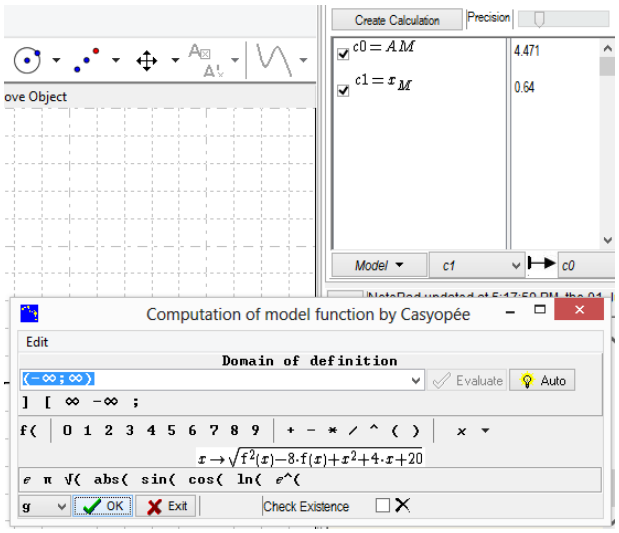
Σχήμα 7: Έλεγχος ανεξάρτητης μεταβλητής

Κάνοντας κλικ στο Model, προκύπτει η δημιουργία νέας συνάρτησης, ως μοντελοποίηση των δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών. Σε περίπτωση που γίνει κάποιο λάθος επιλογής στις ποσότητες, από τις οποίες θα προκύψει η συνάρτηση, υπάρχει ανατροφοδότηση από το λογισμικό (Lagrange, 2010), (βλ. σχήμα 8).



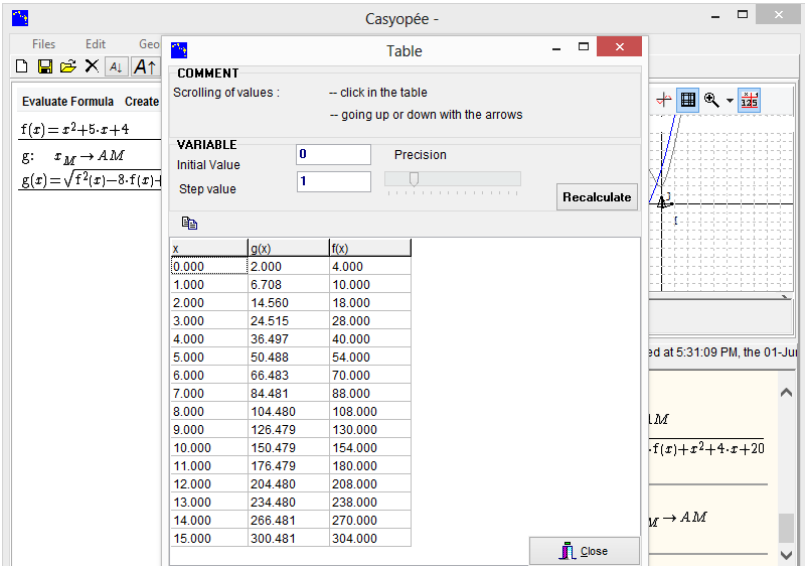
Σχήμα 8: Ανατροφοδότηση από το λογισμικό

Η νέα συνάρτηση ορίζεται από τις δύο ποσότητες και εμφανίζεται αυτόματα στο παράθυρο της «Algebra». Ο μαθηματικός τύπος που προκύπτει για τη συνάρτηση εξάγεται αυτόματα από το λογισμικό όπως φαίνεται στο (βλ. σχήμα 9).



Σχήμα 9: Δημιουργία συνάρτησης – Αυτόματη εξαγωγή μαθηματικού τύπου

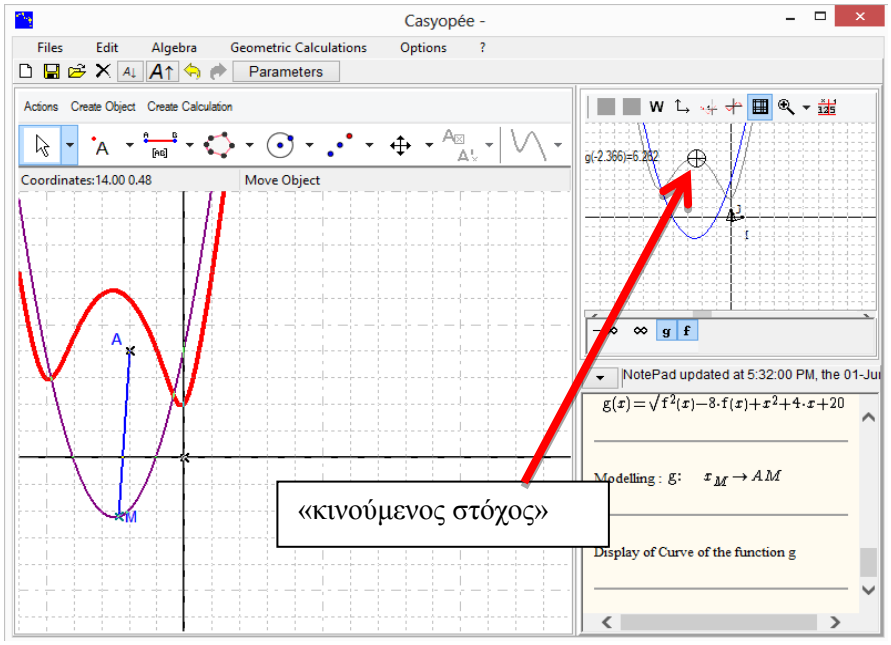
Τέλος, για τη νέα συνάρτηση που προέκυψε, υπάρχει η δυνατότητα μελέτης και εξαγωγής συμπερασμάτων για τη συνάρτηση με τη βοήθεια πίνακα τιμών (βλ. σχήμα 10) και γραφικής παράστασης (βλ. σχήμα 11), από την επιλογή «Graphs». Σχετικά με τον πίνακα τιμών υπάρχει δυνατότητα αλλαγής της ακρίβειας, της αρχικής τιμής και του βήματος που μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή.



x	g(x)	f(x)
0.000	2.000	4.000
1.000	6.708	10.000
2.000	14.560	18.000
3.000	24.515	28.000
4.000	36.497	40.000
5.000	50.488	54.000
6.000	66.483	70.000
7.000	84.481	88.000
8.000	104.480	108.000
9.000	126.479	130.000
10.000	150.479	154.000
11.000	176.479	180.000
12.000	204.480	208.000
13.000	234.480	238.000
14.000	266.481	270.000
15.000	300.481	304.000

Σχήμα 10: Το παράθυρο του πίνακα τιμών

Η γραφική παράσταση προσφέρει τη δυνατότητα εμφάνισης και χρήσης ενός «κινούμενου στόχου», ο οποίος ακολουθά τη συνάρτηση που θα επιλέξουμε στην καμπύλη της με αντίστοιχες μεταβολές στο παράθυρο της «Geometry» (βλ. σχήμα 11). Η μετακίνηση του στόχου παραπέμπει στην συνάρτηση ως διαδικασία, ενώ η συνάρτηση ως αντικείμενο γίνεται αντιληπτή από τις καθολικές ιδιότητες της γραφικής παράστασης (Minh, 2011).



Σχήμα 11: Το παράθυρο των γραφικών παραστάσεων - «Κινούμενος στόχος»

Όπως παρατηρήθηκε το Casyopée ασχολείται κυρίως με συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Lagrange, 2010). Οι δυνατότητες του Casyopée περιλαμβάνουν επίσης ζητήματα Απειροστικού λογισμού (εύρεση παραγώγου, μελέτη συνάρτησης). Σχετικά με τη Γεωμετρία υπάρχει πλήθος δυνατοτήτων μετασχηματισμού και δημιουργίας αντικειμένων, όπως σε άλλα DGS. Επειδή όμως η συγκεκριμένη έρευνα αφορά μαθητές Β΄ Λυκείου και μελετώνται θέματα αναφορικά με τη συνάρτηση ως συμμεταβολή, πραγματοποιείται μόνο αναφορά στα ζητήματα Απειροστικού λογισμού και στους μετασχηματισμούς.

Συνοπτικά, το παράθυρο «Άλγεβρας» του Casyopée έχει τη δυνατότητα αξιοποίησης αλγεβρικών τύπων, εκφράσεων ή συναρτήσεων, με τη δυνατότητα παραγοντοποίησης και εύρεσης παραγώγου – αντιπαραγώγου συναρτήσεων αλλά και επίλυσης εξισώσεων. Επιπλέον, δύναται να υποστηρίξει γραφικές αναπαραστάσεις συναρτήσεων με διάφορες λειτουργίες μεγέθυνσης ή αλλαγής κλίμακας των αξόνων. Ακόμη, υποστηρίζει μελέτη συναρτήσεων και έχει δυνατότητες για παραγωγή αποδείξεων. Ταυτόχρονα, στο παράθυρο της Γεωμετρίας υποστηρίζει γεωμετρικές κατασκευές με τη δυνατότητα χρήσης παραμέτρων σε αυτές (ένα σημείο που έχει ως συντεταγμένες εκφράσεις με παραμέτρους).

Τέλος, είναι διαθέσιμες στο περιβάλλον η δημιουργία γεωμετρικών υπολογισμών, η αριθμητική μέτρηση μεγεθών και δυνατότητες για να καθορίζουν συνδέσμους μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων μετρήσεων. Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση του λογισμικού, η σημαντικότερη δυνατότητα είναι η δημιουργία και αυτόματη εξαγωγή μαθηματικού τύπου από δύο μεγέθη που συμμεταβάλλονται στο παράθυρο «Algebra» του Casyopée (Lagrange, 2010). Οι παραπάνω δυνατότητες ήταν ένας βασικός λόγος για την επιλογή του λογισμικού Casyopée για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο 1, καταγράφεται η προϋπάρχουσα έρευνα για ορισμένες πτυχές σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Η δυσκολία αναγνώρισης των συνδέσεων μεταξύ των μεταβλητών και των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης και η σημαντικότητα της συμμεταβολής, αποτελούν το έναυσμα για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Η συμμεταβολή προσφέρεται στην αντιμετώπιση επιστημολογικών εμποδίων στην προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης. Η αξιοποίηση αλγεβρικών σχέσεων στο πλαίσιο γεωμετρικών προβλημάτων και η σημασία της έννοιας της συμμεταβολής, οδήγησαν στην διαμόρφωση των εξής ερευνητικών ερωτημάτων για τη συγκεκριμένη έρευνα:

Ερευνητικό Ερώτημα 1: Η διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής, από μαθητές Β΄ Λυκείου στο πλαίσιο της μοντελοποίησης γεωμετρικών προβλημάτων.

Ερευνητικό Ερώτημα 2: Η συνεισφορά του λογισμικού Casyopée στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Η μελέτη των δύο αυτών ερευνητικών ερωτημάτων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση τριών δραστηριοτήτων (tasks). Τρεις ομάδες μαθητών επεξεργάστηκαν αυτές τις δραστηριότητες και καταγράφηκαν οι διάλογοι κατά την επίλυσή τους. Η ανάλυση των διαλόγων οδήγησε στα συμπεράσματα της έρευνας και την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

4.2 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Αρχικά διεξήχθη πιλοτική έρευνα σε 2 μαθητές Β΄ Λυκείου (περίπου 16 ετών), οι οποίοι φοιτούσαν σε Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο της Αθήνας. Σκοπός της πιλοτικής έρευνας ήταν η διαμόρφωση των δραστηριοτήτων και η επεξεργασία των ερωτήσεων που θα κάνει ο ερευνητής, για να προκύψει η δημιουργία νοημάτων από τους μαθητές. Στη συνέχεια, αφού έγινε απομαγνητοφώνηση και μελέτη της πιλοτικής έρευνας, προέκυψαν αλλαγές οι οποίες διαμόρφωσαν την κυρίως έρευνα. Οι αλλαγές αφορούσαν το περιεχόμενο των ερωτημάτων αλλά και τη σειρά εμφάνισής τους στις δραστηριότητες, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 4.4. Οι διάλογοι της πιλοτικής έρευνας δε χρησιμοποιήθηκαν για την απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας, αλλά μόνο για τη διαμόρφωση της συνολικής διαδικασίας της έρευνας.

Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης (case study) (Yin, 1994, 2003), καθώς εξετάστηκαν τρεις ομάδες από δύο άτομα η καθεμία, με στόχο να πραγματοποιηθεί ανάλυση σε βάθος. Η μελέτη περίπτωσης αφορά στη συλλογή και παρουσίαση λεπτομερών πληροφοριών που αφορούν ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων που αναφέρονται στο συγκεκριμένο άτομο ή στη συγκεκριμένη ομάδα και αποκλειστικά για το συγκεκριμένο πλαίσιο που πραγματοποιείται η έρευνα. Τα αποτελέσματα της έρευνας δεν προσφέρονται για γενικεύσεις και καθολικά συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν αφορούν αποκλειστικά και μόνο το άτομο ή την ομάδα ατόμων που μελετήθηκε. Προαπαιτούμενο για ασφαλή και έγκυρα αποτελέσματα είναι η μακροχρόνια παρατήρηση και όσο το δυνατόν η καλύτερη γνώση του υποκειμένου που μελετάται (Yin, 1994).

Οι συμμετέχοντες της έρευνας ήταν 4 μαθητές Β΄ Λυκείου (Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης) που φοιτούσαν σε ένα Γενικό Λύκειο της Νίκαιας, καθώς και 2 μαθητές Β΄ Λυκείου (Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης) που φοιτούσαν σε ένα Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο της Αθήνας. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν εθελοντική και η έρευνα διεξήχθη σε κάποιο φιλικό τους χώρο, με την έγγραφη συναίνεση των κηδεμόνων τους. Χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων για να υπάρχει συνεργασία στην επίλυση των δραστηριοτήτων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλοι οι μαθητές ασχολήθηκαν με το εκπαιδευτικό λογισμικό Casyopée για πρώτη φορά. Σε κάθε ομάδα έγινε δύο ωρών παρουσίαση του προγράμματος με την επίλυση διάφορων προβλημάτων, ορισμένων από τα σχολικά βιβλία, με σκοπό την εξοικείωση με το πρόγραμμα και την ανάδειξη των δυνατοτήτων του. Μετά την εξοικείωση, ακολούθησε τρίωρη εφαρμογή του λογισμικού η οποία αποτέλεσε τα δεδομένα της έρευνας. Αξίζει να σημειωθεί ότι συνήθως τουλάχιστον ένας από τους συμμετέχοντες σε κάθε ομάδα είχε προηγούμενη εμπειρία από κάποιο εκπαιδευτικό λογισμικό, εκτός από μία ομάδα, όπου οι μαθητές για πρώτη φορά χρησιμοποιούσαν ψηφιακά εργαλεία με εφαρμογές στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Επιλέχθηκαν τα δεδομένα όλων των ομάδων για ανάλυση, εκτός από την ομάδα που συμμετείχε στην πιλοτική έρευνα. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα είναι η Ελευθερία (Μ1) και η Βασιλική (Μ2) ($1^{η}$ ομάδα), ο Γιάννης (Μ3) και η Δανάη (Μ4) ($2^{η}$ ομάδα) και ο Κώστας (Μ5) και η Αλεξάνδρα (Μ6) ($3^{η}$ ομάδα). Τα ονόματα που αναφέρονται είναι πλασματικά και αντιπροσωπεύουν τους πραγματικούς μαθητές ως προς το φύλο. Το επίπεδο των μαθητών ήταν μέτριο έως πολύ καλό σύμφωνα με τις αξιολογήσεις των καθηγητών τους (βαθμολογίες στα μαθήματα Μαθηματικών: 15 - 18). Κεντρική πτυχή της έρευνας ήταν η κατασκευή των νοημάτων ως προς τη συνάρτηση και η συμβολή του λογισμικού Casyopée για την δημιουργία των νοημάτων.

4.3 ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η συλλογή δεδομένων στην μελέτη περίπτωσης πραγματοποιείται από την καταγραφή δεδομένων, από σχετικά έγγραφα, από άμεση παρατήρηση ή από συμμετοχική παρατήρηση (Yin, 1994). Στην παρούσα έρευνα έγινε βιντεοσκόπηση και ηχογράφηση των διαλόγων των μαθητών κατά την τρίωρη διάρκεια της εφαρμογής του εκπαιδευτικού λογισμικού. Η κάμερα ήταν στημένη πίσω από τους μαθητές και βιντεοσκοπούσε την οθόνη του υπολογιστή και διάφορες κινήσεις που έκαναν κατά τη διάρκεια της έρευνας. Το μαγνητόφωνο ήταν ακριβώς μπροστά τους και δίπλα στον υπολογιστή, ώστε να καταγράφονται καθαρά οι διάλογοι των μαθητών. Επίσης μετά το πέρας της συνολικής ενασχόλησης κάθε ομάδας με τις δραστηριότητες κρατήθηκαν σημειώσεις (1 σελίδα για κάθε ομάδα), οι οποίες υποδείκνυαν την πορεία της εκάστοτε ομάδας και την αξιοποίηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων στο περιβάλλον του λογισμικού Casyopée.

4.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

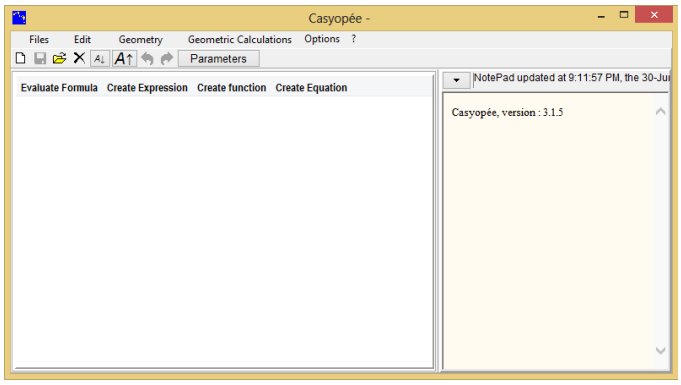
Σχεδιάστηκαν τρεις δραστηριότητες που αντιστοιχούν σε τρία διαφορετικά φύλλα εργασίας, ώστε να ανταποκρίνονται στα Ερευνητικά Ερωτήματα. Μέρος των δραστηριοτήτων αυτών βασίστηκε σε ιδέες που είχαν ήδη επεξεργαστεί ερευνητές που είχαν εργαστεί με το λογισμικό Casyopée.

Η Δραστηριότητα 1 είχε χαρακτήρα εισαγωγικό για εξοικείωση με το λογισμικό. Η Δραστηριότητα 2 επικεντρώθηκε σε ένα αρχικό πρόβλημα που δόθηκε έμφαση στην ανάδειξη των ελεύθερων και εξαρτώμενων σημείων. Η Δραστηριότητα 3 είχε χαρακτήρα μοντελοποίησης ενός πραγματικού προβλήματος στο περιβάλλον από τους μαθητές εξ’ ολοκλήρου. Στις δραστηριότητες αυτές ενδιέφερε η δημιουργία συνάρτησης από τους μαθητές στο λογισμικό Casyopée, με σκοπό τη διερεύνηση προβλημάτων μεγίστου – ελαχίστου.

<u>Δραστηριότητα 1η</u>

Έστω μια καμπύλη συνάρτησης, η οποία ορίζεται στο ℝ με τύπο f (x) = $x^2 + 5x + 4$ *και το σημείο Α (-2, 4) το οποίο είναι σταθερό. Αν Μ είναι ένα ελεύθερο σημείο της καμπύλης της συνάρτησης , να βρεθεί αν υπάρχει, ελάχιστη απόσταση του τμήματος ΑΜ.*

1. *Μεταφέρετε το πρόβλημα στο λογισμικό Casyopée. Πειραματιστείτε με το σύρσιμο των σημείων και στη συνέχεια διατυπώστε μια εικασία σχετικά με αυτό (η οποία θα βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος).*



2. *Γράψτε μια εικασία για τη θέση/εις του Μ στις οποίες η απόσταση ελαχιστοποιείται (δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση).*

3. *Με τη βοήθεια του λογισμικού προτείνετε μια συνάρτηση που επιτρέπει τη μοντελοποίηση του προβλήματος.*

4. *Αξιοποιήστε αυτή τη συνάρτηση με τη βοήθεια του λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος.*

5. *Γιατί αποτελεί συνάρτηση αυτό που ορίσατε; Ερμηνεύστε με τη βοήθεια πίνακα τιμών και γραφικών παραστάσεων.*

Ερευνητικοί στόχοι Δραστηριότητας 1

Στη δραστηριότητα 1, που προτείνεται ως εισαγωγική δραστηριότητα, οι μαθητές καλούνται να πειραματιστούν στο λογισμικό Casyopée και ερευνάται αν και με ποιους τρόπους κατασκευάζουν νοήματα για την έννοια της συνάρτησης και την έννοια της ανεξάρτητης μεταβλητής. Ταυτόχρονα ελέγχεται η λειτουργία των υπολογιστικών εργαλείων σε παρόμοια γεωμετρικά προβλήματα.

Συγκεκριμένα, για το ερώτημα 1, οι μαθητές ερευνάται αν μπορούν να παρατηρήσουν και να υποδείξουν συμμεταβαλλόμενες ποσότητες στα αντικείμενα που μόλις δημιούργησαν στο ίδιο το περιβάλλον. Στόχος είναι οι μαθητές να μεταφέρουν τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 5x + 4$ στο λογισμικό, να την εμφανίσουν στο παράθυρο Γεωμετρίας και να ορίσουν το σταθερό σημείο Α. Κατόπιν πρέπει να οριστεί ένα ελεύθερο σημείο Μ πάνω στην καμπύλη της $f(x)$ και να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις τους σχετικά με τη συμμεταβολή της κίνησης του Μ και της απόστασης ΑΜ. Με την εισαγωγή του λογισμικού στην αρχή της Δραστηριότητας αναμένουμε οι αναπαραστάσεις να «φωτίσουν» την προβληματική κατάσταση.

Στο ερώτημα 2, στόχος είναι να ερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να κάνουν εικασίες σχετικά με προβλήματα δυναμικής γεωμετρίας, έχοντας υπόψη το επόμενο ερώτημα που κρίνεται απαραίτητο. Το ερώτημα αυτό έχει κατεύθυνση την επίλυση του αρχικού προβλήματος με τη χρήση μιας αρχικής εικασίας, δηλαδή του προσδιορισμού της θέσης του σημείου Μ που η απόσταση του τμήματος ΑΜ γίνεται ελάχιστη.

Στο ερώτημα 3, στόχος είναι να ερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να παρατηρήσουν και να υποδείξουν τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες. Επίσης, ερευνάται η μετάβαση από τις ποσότητες που συσχετίζονται στις συναρτήσεις. Καθοριστικό ρόλο για τη μετάβαση αυτή έχει η έρευνα του τρόπου που ορίζουν οι μαθητές την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή. Επιπλέον ερευνώνται τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές σχετικά με τη συνάρτηση, ως προς το είδος τους. Η χρήση των δυνατοτήτων του προγράμματος αναμένεται να οδηγήσει τους μαθητές στη λύση.

Στο ερώτημα 4, στόχος είναι να ερευνηθεί η συμβολή του λογισμικού στη λύση του προβλήματος ελάχιστης απόστασης. Οι μαθητές ερευνάται αν μπορούν να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες του λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος. Ταυτόχρονα ερευνώνται τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές για τη συνάρτηση, την οποία δημιούργησαν στο προηγούμενο ερώτημα.

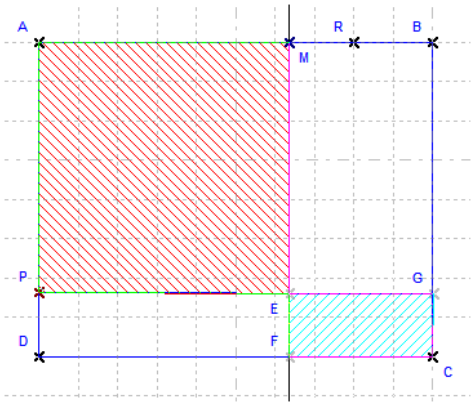
Στο ερώτημα 5, στόχος είναι να ερευνηθούν και πάλι τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές για τη συνάρτηση με τη χρήση των δυνατοτήτων του λογισμικού, δηλαδή μελετώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, όπως ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

<u>Δραστηριότητα 2η</u>

Έστω ένα κτήμα ABCD σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου τέτοιο ώστε AB = 10m και AD = 8m. Θέλουμε να φτιάξουμε κήπο στο κτήμα αυτό με τον ακόλουθο τρόπο:

Το σημείο M είναι ένα κινητό σημείο πάνω στο τμήμα AR, όπου το AR = 8m. Ταυτόχρονα υπάρχει και ένα σημείο P στην πλευρά AD και ένα σημείο E, ώστε το AMEP να είναι τετράγωνο. Επίσης τοποθετούμε το σημείο G στην πλευρά BC και το F στην DC, ώστε το EGCF να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Τα δυο γραμμοσκιασμένα μέρη αποτελούν τα κομμάτια του κήπου και στο υπόλοιπο μέρος πρόκειται να κτιστούν κατοικίες. Τοποθετώντας το σημείο M μεταξύ των A και R δημιουργείται το κομμάτι του κήπου.



Ερωτήματα:

1. *Παρατηρείτε κάποιες ποσότητες να συμμεταβάλλονται;*

- *Ανοίξτε το αρχείο drast2.CAS*

2. *Ο Μπάμπης λέει χωρίς να σκεφτεί πολύ ότι οι δύο γραμμοσκιασμένες περιοχές θα έχουν ίσο εμβαδό, όταν το E βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο RD. Έχει δίκιο;*

3. *Προσδιορίστε τη θέση του M στο AR ώστε οι δύο κήποι να έχουν ίσο εμβαδό. Δικαιολογήστε με τη βοήθεια πινάκων και γραφικών παραστάσεων.*

4. *Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν; Απαντήστε, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού για τις συναρτήσεις.*

Ερευνητικοί στόχοι Δραστηριότητας 2

Στη Δραστηριότητα 2, οι μαθητές καλούνται να πειραματιστούν με το λογισμικό Casyopée και μελετάται αν και πώς νοηματοδοτούν τη συνάρτηση και ερευνώνται ζητήματα σχετικά με την ανεξάρτητη μεταβλητή. Ταυτόχρονα ελέγχεται ο ρόλος των υπολογιστικών εργαλείων σε γεωμετρικά προβλήματα. Η δραστηριότητα αυτή συνεισφέρει στην έρευνα, καθώς οι μαθητές αναμένεται ότι έχουν εξοικειωθεί ήδη με το λογισμικό και ερευνάται αν οι παρατηρήσεις τους σχετίζονται με τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Συγκεκριμένα, για το ερώτημα 1, ερευνάται αν οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν και να υποδείξουν συμμεταβαλλόμενες ποσότητες στα αντικείμενα που εμφανίζονται στο περιβάλλον με τη βοήθεια του δυναμικού χειρισμού των σημείων. Συγκεκριμένα, ερευνάται αν οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν ότι η κίνηση των σημείων, ευθυγράμμων τμημάτων και εμβαδών εξαρτώνται από την κίνηση του ελεύθερου σημείου Μ. Το πρώτο ερώτημα τοποθετείται σε αυτή τη θέση στην αρχή της δραστηριότητας για να προκληθούν οι μαθητές να συνδέσουν την κίνηση του σημείου Μ με τη συμμεταβολή μεγεθών. Ερευνάται στη συνέχεια αν συνεισφέρει η αντίληψη της συμμεταβολής για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης.

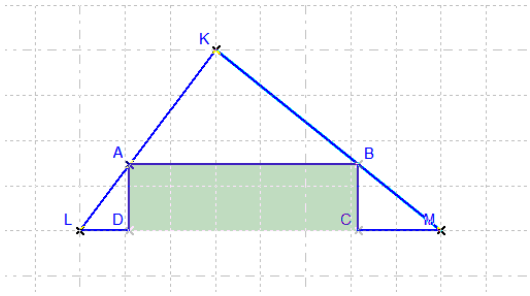
Στο ερώτημα 2, στόχος είναι να ερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να διερευνήσουν μία λανθασμένη άποψη με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού. Εδώ ενδιαφέρον έχει η προσπάθεια δυναμικής μετακίνησης του σημείου Ε ή του σημείου Μ καθώς το Μ είναι ελεύθερο σημείο και το Ε εξαρτάται από το Μ. Αυτό το ερώτημα τονίζει ότι το ανεξάρτητο σημείο είναι το Μ, ενώ όλα τα υπόλοιπα εξαρτώνται από αυτό με σκοπό να ερευνηθεί αν οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στον ορισμό ανεξάρτητης μεταβλητής.

Στο ερώτημα 3, στόχος είναι να ερευνηθεί η συμβολή του προγράμματος σε προβλήματα με όχι τόσο προφανείς λύσεις. Στόχος είναι να μελετηθεί η ικανότητα των μαθητών να ορίσουν συνάρτηση που θα έχει ως ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος ΑΜ και ως εξαρτημένη το εμβαδό του κήπου ΑΜΕΡ. Στη συνέχεια ερευνάται η ικανότητα τους να ορίσουν συνάρτηση του ΑΜ με το εμβαδό του κήπου EGCF. Επίσης, ζητείται από τους μαθητές να δικαιολογήσουν τις συναρτήσεις που μόλις κατασκεύασαν στο λογισμικό με τη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Στη συνέχεια ερευνάται η ερμηνεία των συναρτήσεων, ως συμμεταβαλλόμενων μεγεθών και ταυτόχρονα η διερεύνηση των νοημάτων που δημιουργούν οι μαθητές. Οι μαθητές μελετάται αν μπορούν να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες του λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος και το νόημα που προσδίδουν σε αυτές. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αφού ορίσουν τις δύο συναρτήσεις, πρέπει να δημιουργήσουν την ισότητά τους για να προκύψουν οι θέσεις του ΑΜ στις οποίες τα εμβαδά των κήπων θα έχουν ίσο εμβαδό.

Στο ερώτημα 4, στόχος είναι να ερευνηθεί αν οι μαθητές μπορούν να προσδιορίσουν εκ νέου τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και να δημιουργήσουν αθροίσματα συναρτήσεων ή να ορίσουν συναρτήσεις ως συμμεταβολή του μήκους ΑΜ με το άθροισμα εμβαδών. Ερευνώνται οι αντιλήψεις τους σχετικά με το ζήτημα της συνάρτησης ως αθροίσματος συναρτήσεων. Ακολουθεί η δημιουργία συναρτήσεων, η αξιοποίηση με διαφορετικές αναπαραστάσεις και η εξίσωση συναρτήσεων.

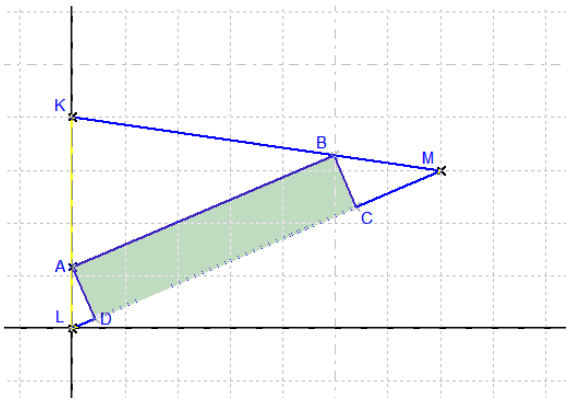
Δραστηριότητα 3η

Σε ένα τρίγωνο ΚLM σχεδιάζεται ορθογώνιο ABCD ώστε οι κορυφές του να ανήκουν πάνω στις πλευρές του τριγώνου, όπου το Α είναι ελεύθερο σημείο πάνω στην ΚL και τα σημεία C και D ανήκουν στην LM.



Ερωτήματα:

1. *Μεταφέρετε τη δραστηριότητα στο περιβάλλον Casyopée, όπου το L θα συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και το K θα βρίσκεται στον άξονα yy΄.*



2. *Υπάρχει κάποια σχέση στο εμβαδό ορθογωνίου και στη μετακίνηση του σημείου Α;*

3. *Να βρείτε (αν υπάρχει) η θέση του σημείου Α, όπου το εμβαδό του ABCD γίνεται μέγιστο. Δικαιολογήστε με τη βοήθεια των δυνατοτήτων του λογισμικού.*

- *Αναφέρετε πως μπορείτε να εκμεταλλευτείτε το πρόγραμμα για να οδηγηθείτε στη λύση.*

4. *Υπάρχει θέση του Α όπου τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΒΜC έχουν ίσο εμβαδό; Δικαιολογήστε με τη χρήση γραφημάτων και πινάκων.*

- *Γράψτε που χρησιμεύει το λογισμικό για την απάντηση της ερώτησης.*

Ερευνητικοί στόχοι Δραστηριότητας 3

Στη Δραστηριότητα 3, οι μαθητές καλούνται να μεταφέρουν το πρόβλημα που τους δίνεται στο λογισμικό Casyopée, το οποίο στη συνέχεια ζητείται να λυθεί. Η Δραστηριότητα 3, έχει κατασκευαστικό μέρος, καθώς τίθενται ζητήματα στα οποία υπάρχει ανάγκη κατασκευής γεωμετρικών αντικειμένων. Αξίζει να τονιστεί ότι τέτοια ζητήματα κατασκευής στο ψηφιακό περιβάλλον εξοικειώνουν περαιτέρω τους μαθητές με τη χρήση του λογισμικού και επιπλέον προκαλούν τους μαθητές να σκεφτούν τρόπους με τους οποίους υλοποιούν τις κατασκευές αυτές, οι οποίες συνήθως επιδέχονται παραπάνω από μια λύσεις. Κατά τη διάρκεια της Δραστηριότητας 3, ελέγχεται η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τους μαθητές, με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων (πίνακας τιμών, γραφική παράσταση συνάρτησης).

Συγκεκριμένα, για το ερώτημα 1, στόχος είναι να ερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να μεταφέρουν την κατασκευή που τους δίνεται στο ψηφιακό περιβάλλον. Επίσης, ερευνάται η ικανότητά τους να κατασκευάσουν το ορθογώνιο ABCD, μέσα στο τρίγωνο KLM, έχοντας ως μοναδικό δεδομένο ότι οι κορυφές του ABCD βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τριγώνου KLM, με μοναδικό περιορισμό ότι η LM είναι η μεγαλύτερη πλευρά. Ερευνάται ακριβώς η εξοικείωση των μαθητών με κατασκευές στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης με το λογισμικό.

Στη συνέχεια, στο ερώτημα 2 μελετάται αν οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν αρχικά από τι εξαρτάται το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπου οι κορυφές του είναι πάνω σε τυχαίο τρίγωνο. Κατόπιν, ερευνάται αν μπορούν να εντοπίσουν κάποια σχέση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων στο περιβάλλον, δηλαδή του εμβαδού του ABCD και του AL ή yA (συντεταγμένη y του σημείου A), αφού το A είναι ελεύθερο σημείο. Εδώ στόχος είναι να ερευνηθεί σχετικά με το ζήτημα της ανεξάρτητης μεταβλητής η στάση που θα έχουν οι μαθητές απέναντι στην επιλογή του yA ως ανεξάρτητης μεταβλητής.

Στο ερώτημα 3, στόχος είναι οι μαθητές να δημιουργήσουν συνάρτηση με τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες που παρατήρησαν στο προηγούμενο ερώτημα. Επιπλέον, ελέγχεται η συμβολή του λογισμικού στην λύση του προβλήματος, ο σχηματισμός συνάρτησης, όπου ανεξάρτητη μεταβλητή θα αποτελεί η συντεταγμένη y του σημείου A ή το AL. Ακόμη, ερευνώνται τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές για τη συνάρτηση που μόλις όρισαν, χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις που προσφέρονται από το λογισμικό.

Στο ερώτημα 4, στόχος είναι να ερευνηθεί αν οι μαθητές μπορούν να προσδιορίσουν εκ νέου τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες για να ορίσουν συναρτήσεις στο λογισμικό Casyopée. Στο ερώτημα αυτό, στόχος είναι οι μαθητές να δημιουργήσουν συναρτήσεις ως συμμεταβαλλόμενες ποσότητες, του yA (συντεταγμένη y του σημείου A) ή του AL, με το εμβαδό των τριγώνων. Η σύγκριση των εμβαδών των τριγώνων με τη χρήση συναρτήσεων, θα οδηγήσει στην εύρεση θέσεων του σημείου A, όπου τα τρίγωνα θα έχουν ίσο εμβαδό. Με αυτή τη διαδικασία ελέγχεται η συμβολή του λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος και τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

4.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Αμέσως μετά τη συλλογή δεδομένων, πραγματοποιήθηκε μια πρώτη αποτίμηση της πορείας της νοηματοδότησης κάθε ομάδας, προσδιορίζοντας σημεία που απαντούσαν στα ερευνητικά ερωτήματα. Τα σημεία αυτά είναι η δυσκολία των μαθητών να ξεπεράσουν προηγούμενες γνώσεις, η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής σε διακριτά επίπεδα και η συνεισφορά των διαφορετικών αναπαραστάσεων του λογισμικού Casyopée. Οι διάλογοι, αφού καταγράφηκαν, μεταφέρθηκαν σε κείμενο, αποτελούμενο από πίνακες με αρίθμηση κάθε πρότασης των συμμετεχόντων. Δημιουργήθηκαν τρία πακέτα διαλόγων για κάθε ομάδα, τα οποία περιλαμβάνουν περίπου 400 έως 800 επιμέρους διαφορετικές προτάσεις των συνομιλητών.

Για την επεξεργασία των δεδομένων πραγματοποιήθηκε ανάλυση κρίσιμων συμβάντων (critical incidents), όπου οι διάλογοι χωρίστηκαν σε επεισόδια. Στη θεωρία κρίσιμων συμβάντων (Maher, 2002; Maher & Martino, 1996a, 1996b, 2000) αναφέρεται ότι τα συμβάντα παρουσιάζονται μέσα από τα επεισόδια ως αποσπάσματα διαλόγων γύρω από ένα θέμα που έχουν προκύψει από τα δεδομένα παρατήρησης (Powell, Francisco & Maher, 2003). Τα επεισόδια αυτά προέκυψαν από τα ερευνητικά ερωτήματα με τον εξής τρόπο: μελετώντας τους διαλόγους και το βίντεο, αναδείχθηκε σε κάποια σημεία το ότι ήταν εμφανής η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Η νοηματοδότηση ως συμμεταβολή, φαινόταν από την αναφορά σε δύο ποσότητες που συμμεταβάλλονται ή σε κάποια αναπαράσταση ή στην έννοια της συνάρτησης. Επίσης, κρίσιμα συμβάντα θεωρήθηκαν επεισόδια ή καταστάσεις όπου οι μαθητές είχαν δυσκολίες στην νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, αλλά και επιτυχείς συνδέσεις προκειμένου να νοηματοδοτηθεί η συνάρτηση ως συμμεταβολή.

Οι φάσεις ανάλυσης είναι οι ακόλουθες:

Φάση 1. Παρατήρηση: Απομαγνητοφώνηση των διαλόγων των μαθητών.

Φάση 2. Καταγραφή: Καταγραφή των διαλόγων σε φύλλα απομαγνητοφώνησης για την καλύτερη εμφάνιση αντιθέσεων και καταχώρηση σχολίων.

Φάση 3. Προσδιορισμός κρίσιμων συμβάντων: Ακολούθησε η προσεκτική παρακολούθηση των βιντεοσκοπημένων αρχείων, όπου ο ερευνητής πρόσθεσε σημειώσεις σχετικά με τις κινήσεις των μαθητών και τη χρήση των αναπαραστάσεων και των διάφορων παραθύρων που περιέχει το λογισμικό. Ο προσδιορισμός των κρίσιμων συμβάντων προκύπτει από τη σύνδεση και την περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων και με συνεχείς συγκρίσεις (Glaser & Strauss, 1967).

Φάση 4 Διαμόρφωση κατηγοριών για την έννοια της συνάρτησης: Με τη μελέτη των απομαγνητοφωνημένων διαλόγων, ο ερευνητής εστίασε την προσοχή του στη νοηματοδότηση της έννοιας της συνάρτησης κατά τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων. Από τη μελέτη των διαλόγων, προέκυψαν ενότητες αλληλεπίδρασης γύρω από ένα θέμα. Ανάλογα με τη συχνότητα

εμφάνισης των ενοτήτων αυτών και ανάλογα αν το θέμα αφορούσε τη νοηματοδότηση της συνάρτησης, προέκυψαν τρεις κατηγορίες νοημάτων, που παρουσιάζονται αναλυτικά στην ενότητα 5.1. Αυτές οι *κατηγορίες νοημάτων* είναι *«σχέση», «αντιστοιχία», «συμμεταβολή»*. Η κωδικοποίηση ολοκληρώθηκε διαμορφώνοντας τις κατηγορίες από τα δεδομένα, σύμφωνα με τη Θεωρία που θεμελιώνεται στα δεδομένα (Grounded theory) (Strauss & Corbin, 1998). Σκοπός ήταν να δημιουργηθούν σαφείς και ακριβείς *κατηγορίες* που να αντικατοπτρίζουν τα δεδομένα, σχετικά με τη νοηματοδότηση της συνάρτησης. Το σύνολο των κατηγοριών που δημιουργήθηκε, αποτέλεσε ένα χάρτη στον οποίο αποτυπώνονται όλα τα νοήματα που δημιούργησαν οι μαθητές για τη συνάρτηση.

Φάση 5. Διαμόρφωση υποκατηγοριών για τη συμμεταβολή: Τα νοήματα της συνάρτησης που περιείχαν τη συμμεταβολή κατατάχθηκαν σε τέσσερα «*επίπεδα*», με βάση στοιχεία από την προϋπάρχουσα έρευνα για τις πέντε νοητικές εικόνες συμμεταβολής (Carlson et al., 2002). Τα κριτήρια για τη διαμόρφωση των τεσσάρων επιπέδων συμμεταβολής ήταν: η συμμεταβολή χωρίς ποσοτική αναφορά, η αλληλεξάρτηση μεγεθών, ο μαθηματικός φορμαλισμός και η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων.

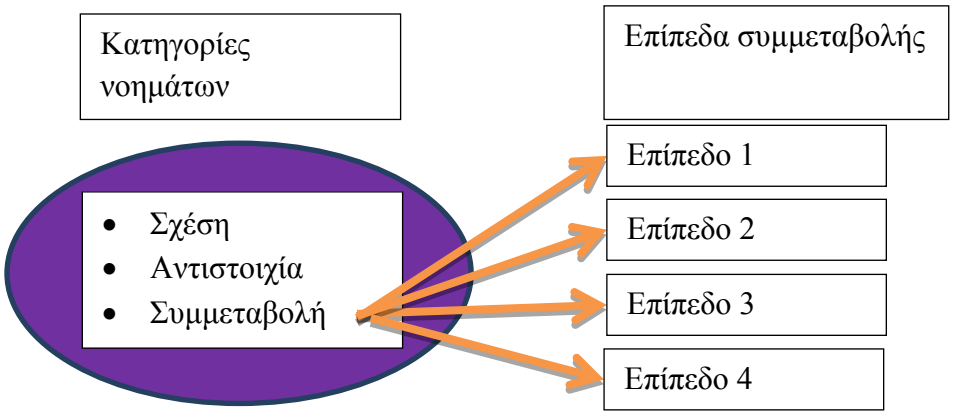
Παρακάτω (βλ. σχήμα 12), παρουσιάζονται οι κατηγορίες νοημάτων για τη συνάρτηση και τέλος, αναφέρεται η ανάλυση του νοήματος της συμμεταβολής σε τέσσερα διακριτά επίπεδα ως προς το επίπεδο κατανόησης της έννοιας της συμμεταβολής:

Επίπεδο 1. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά.

Επίπεδο 2. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών.

Επίπεδο 3. Νοηματοδότηση συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό.

Επίπεδο 4. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.



Σχήμα 12: Πώς προέκυψαν τα επίπεδα συμμεταβολής.

Φάση 6. Χρονική εξέλιξη των νοημάτων ανά δραστηριότητα: Αφορά τη συνοπτική περιγραφή της εξέλιξης των νοημάτων από τις ομάδες των μαθητών, σε πίνακες για κάθε δραστηριότητα.

Φάση 7. Σύνθεση αφήγησης για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέσα από επεισόδια: Μελετήθηκε κάθε επίπεδο κατανόησης της συμμεταβολής χωριστά και έγινε σύνθεση της πορείας κάθε ομάδας, μέσα από ομάδες επεισοδίων, όπου παράλληλα σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η θέση των εργαλείων (του εκπαιδευτικού λογισμικού Casyopée). Για την προσέγγιση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής πραγματοποιήθηκε ανάλυση των διαλόγων των μαθητών και συγκεκριμένα, ανάλυση τεσσάρων ομάδων επεισοδίων των διαλόγων των μαθητών, όπου απαντώνται το πρώτο και δεύτερο ερευνητικό ερώτημα (ενότητα 5.2).

Οι ομάδες επεισοδίων προέκυψαν: από την ταξινόμηση του περιεχομένου των διαλόγων των μαθητών, από τη διαδικασία εμπλοκής των μαθητών με το εκπαιδευτικό λογισμικό, από τις δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές και από τη σταδιακή δημιουργία νοημάτων για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με την αξιοποίηση του λογισμικού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

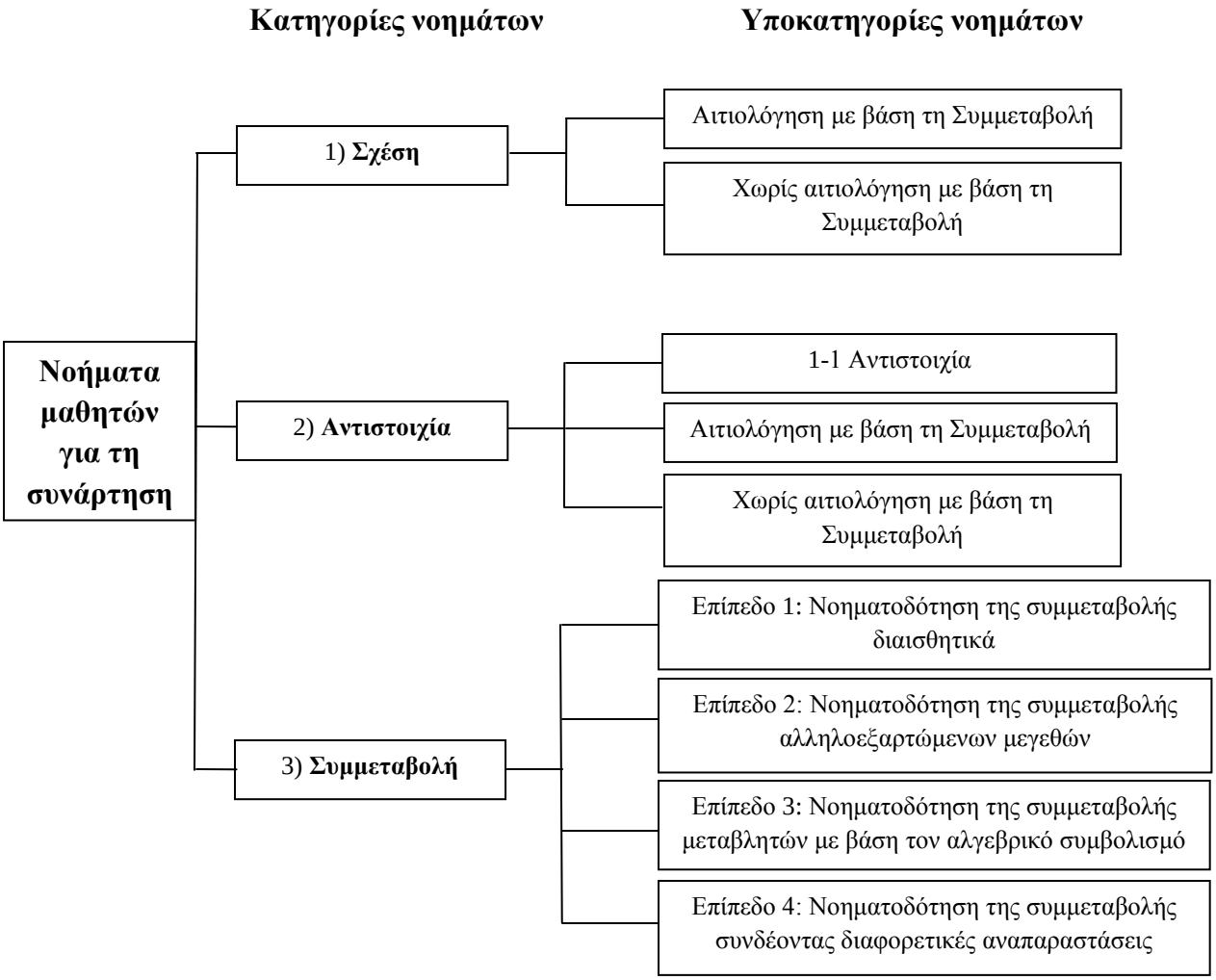
Στο Κεφάλαιο αυτό καταγράφονται τα αποτελέσματα που συνάγονται από τα δεδομένα της έρευνας σύμφωνα με τη Μέθοδο Ανάλυσης. Αρχικά, δίνεται μια συνοπτική περιγραφή των κατηγοριών νοημάτων για τη συνάρτηση, που προέκυψαν από τις ομάδες μαθητών (ενότητα 5.1.1). Ακολουθεί η παρουσίαση των νοημάτων σε πίνακες που δημιούργησαν οι μαθητές (ενότητα 5.1.2). Οι πίνακες αυτοί συντάχθηκαν με βάση τη χρονική εξέλιξη της εργασίας των ομάδων ανά δραστηριότητα.

Στη συνέχεια, μέσα από ομάδες επεισοδίων που χαρακτηρίζουν κρίσιμα ζητήματα της κατανόησης των μαθητών, παρουσιάζεται η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής (ενότητα 5.2). Στην ενότητα αυτή απαντώνται τα δύο ερευνητικά ερωτήματα.

5.1 ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

5.1.1 Κατηγορίες νοημάτων των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης

Αναδύθηκαν τρεις κατηγορίες νοημάτων των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης, που προέκυψαν από τα δεδομένα και καταγράφονται στο ακόλουθο δεντροδιάγραμμα:



Σχήμα 13: Δεντροδιάγραμμα των τριών κατηγοριών νοημάτων των μαθητών για τη συνάρτηση.

Η διάρθρωση των κατηγοριών νοημάτων σε υποκατηγορίες

Από τα δεδομένα προέκυψαν οι κατηγορίες νοημάτων, οι οποίες αναλύονται σε υποκατηγορίες. Οι υποκατηγορίες νοημάτων εξειδικεύτηκαν ως προς το περιεχόμενο, με βάση τον τρόπο αιτιολόγησης του νοήματος που είχαν δημιουργήσει οι μαθητές, το μαθηματικό φορμαλισμό και την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Η πρώτη κατηγορία νοημάτων «συνάρτηση ως σχέση» διαρθρώθηκε σε δύο υποκατηγορίες. Κάποια νοήματα αφορούσαν την αιτιολόγηση του νοήματος της σχέσης με βάση τη συμμεταβολή, ενώ τα υπόλοιπα ήταν χωρίς αιτιολόγηση με βάση τη συμμεταβολή.

Η δεύτερη «συνάρτηση ως αντιστοιχία» χωρίστηκε σε τρεις υποκατηγορίες. Κάποια νοήματα αναφέρονταν σε 1-1 αντιστοιχία. Άλλα νοήματα αφορούσαν την αιτιολόγηση του νοήματος της αντιστοιχίας με βάση τη συμμεταβολή, ενώ κάποια άλλα ήταν χωρίς αιτιολόγηση με βάση τη συμμεταβολή.

Η τρίτη κατηγορία νοημάτων της «συμμεταβολής» αποτελεί το αντικείμενο ερευνητικής εστίασης. Οι υποκατηγορίες νοημάτων αντιστοιχούν σε επίπεδα κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Τα επίπεδα κατανόησης δομήθηκαν έχοντας υπόψη την έρευνα των Carlson et al. (2002), η οποία εστιάζει σε ποσοτικά χαρακτηριστικά (ποσό της αλλαγής). Στην παρούσα έρευνα, δίνεται έμφαση σε ποιοτικά χαρακτηριστικά (χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων) και σηματοδοτούνται διαφορετικά επίπεδα κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Τα επίπεδα κατανόησης της συμμεταβολής είναι ιεραρχικά δομημένα από το απλό στο πιο σύνθετο. Έτσι, υποδεικνύουν περισσότερο εκλεπτυσμένα επίπεδα κατανόησης, με βάση:

1) Τη συμμεταβολή μεγεθών (ποιοτική αναφορά).
2) Την αλληλεξάρτηση μεγεθών.
3) Τη χρήση μαθηματικών όρων (μαθηματικός φορμαλισμός).
4) Την εμπλοκή διαφορετικών αναπαραστάσεων (συμβολική – πίνακας τιμών – γραφική παράσταση).

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται αναλυτικά η κάθε κατηγορία νοημάτων και οι αντίστοιχες υποκατηγορίες μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα της δραστηριότητας των μαθητών.

1. *Η συνάρτηση ως σχέση*

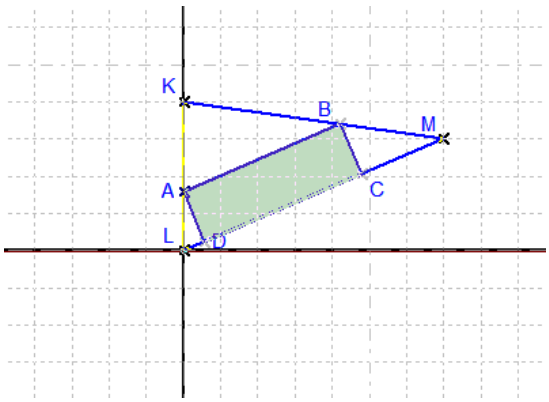
Σε αυτή την κατηγορία οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τη συνάρτηση με την έννοια της αλληλεξάρτησης. Περιέγραφαν τη μία μεταβλητή «συναρτήσει» της άλλης, τόνιζαν τη «σύνδεση» των δύο μεταβλητών, ή ανέφεραν την ύπαρξη σχέσης, χωρίς να περιγράφουν κάποια χαρακτηριστικά ποσοτικά ή ποιοτικά της σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

1.1. *Η συνάρτηση ως σχέση που αιτιολογείται με βάση τη συμμεταβολή*

Σε αυτή την υποκατηγορία, η έννοια της συμμεταβολής ερχόταν συμπληρωματικά για να αιτιολογήσει το νόημα της σχέσης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω:

Δραστηριότητα 3: Υπάρχει θέση του Α όπου τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΒΜC έχουν ίσο εμβαδό; Δικαιολογήστε με τη χρήση γραφημάτων και πινάκων. (Ομάδα 1)



Σχήμα 14: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 3.

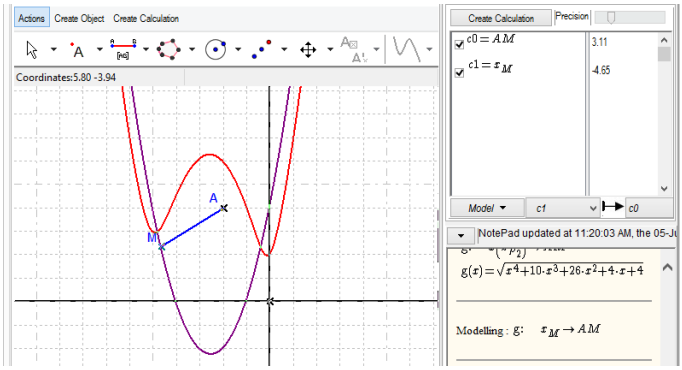
E: Οι δύο τιμές. Πολύ ωραία. Λοιπόν, άρα για να καταλάβω τι έχουμε πει μέχρι τώρα. Εμείς φτιάξαμε την (συνάρτηση) g, η οποία η g είπαμε τι εκφράζει;	(Ομάδα 1 , Δραστηριότητα 3, στίχοι 500-507).
M1: Την σχέση του AL με το εμβαδόν του τριγώνου ΚΒΑ.	Εκφράζει τη σχέση του AL…
M2: Την σχέση του AL με το εμβαδόν του τριγώνου ΚΒΑ.	
E: ΚΒΑ, σωστά. Ωραία. Εκφράζει την σχέση και γιατί αυτό είναι συνάρτηση είπαμε; Γιατί;	
M2: Όταν μεταβάλλεται το AL..	Είναι συνάρτηση, γιατί συμμεταβάλλονται (η συμμεταβολή χρησιμοποιείται ως αιτιολόγηση).
M1: Όταν μεταβάλλεται το AL, το μήκος του AL, μεταβάλλεται και το εμβαδόν του ΚΒΑ.	

1.2. Η συνάρτηση ως σχέση χωρίς αιτιολόγηση με βάση τη συμμεταβολή

Στην υποκατηγορία αυτή ανήκουν περιπτώσεις, όπου οι μαθητές αναγνώριζαν την εξάρτηση («συναρτήσει») ή αναγνώριζαν τη σύνδεση δύο μεταβλητών, χωρίς αναφορά στην έννοια της συμμεταβολής.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα από τη Δραστηριότητα 1:

Δραστηριότητα 1: Με τη βοήθεια του λογισμικού προτείνετε μια συνάρτηση που επιτρέπει τη μοντελοποίηση του προβλήματος εύρεσης της ελάχιστης απόστασης του τμήματος ΑΜ. (Ομάδα 3)



Σχήμα 15: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 1.

M5: (Η συνάρτηση) Μας δείχνει ποια θα είναι η απόσταση του Α από το Μ συναρτήσει του x.	«Συναρτήσει» άρα σχέση (ομάδα 3, Δραστηριότητα 1, στίχος 244).

M5: (Η συνάρτηση) Είναι η σχέση που μας δίνει την απόσταση. Εμείς το έχουμε θέσει. Την απόσταση.	Σχέση από πίνακα τιμών (ομάδα 3, Δραστηριότητα 1, στίχος 365).

2. Η συνάρτηση ως αντιστοιχία

Σε αυτή την κατηγορία οι μαθητές νοηματοδότησαν τη συνάρτηση μέσα από νοήματα σχετικά με την έννοια της αντιστοιχίας. Η κατηγορία αυτή, διαφέρει από την κατηγορία της «συνάρτησης ως σχέσης», γιατί χαρακτηρίζεται από την έννοια της αντιστοιχίας και όχι της εξάρτησης.

2.1. *Η συνάρτηση ως 1-1 αντιστοιχία*

Σε αυτή την υποκατηγορία, οι μαθητές έδιναν έμφαση στην 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών της συνάρτησης, όπου για κάθε διαφορετικό x υπάρχει ένα διαφορετικό y. Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό:

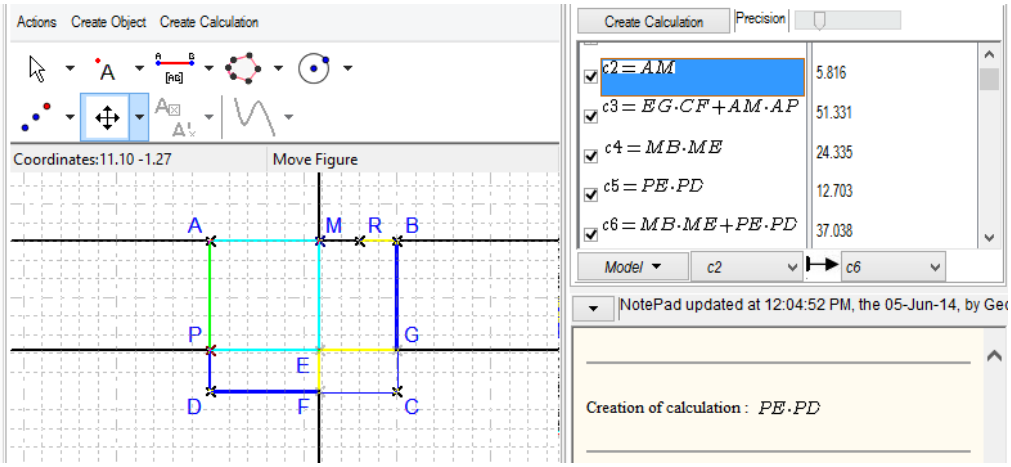
M1: Ότι για κάθε.. Ότι βλέπουμε ότι για κάθε διαφορετικό σημείο στον άξονα των x, έχουμε ένα διαφορετικό y.	1-1 Αντιστοιχία (ομάδα 1, Δραστηριότητα 1, στίχος 408).

2.2. *Η συνάρτηση ως αντιστοιχία που αιτιολογείται με βάση τη συμμεταβολή*

Σε αυτή την υποκατηγορία, όταν οι μαθητές ερωτήθηκαν για την έννοια της συνάρτησης, απαντούσαν ότι η συνάρτηση είναι αντιστοιχία και χρησιμοποίησαν τη συμμεταβολή ως αιτιολόγηση του νοήματος της αντιστοιχίας.

Ακολουθεί χαρακτηριστικό παράδειγμα:

Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν; Απαντήστε, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού για τις συναρτήσεις. (Ομάδα 2)



Σχήμα 16: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 2

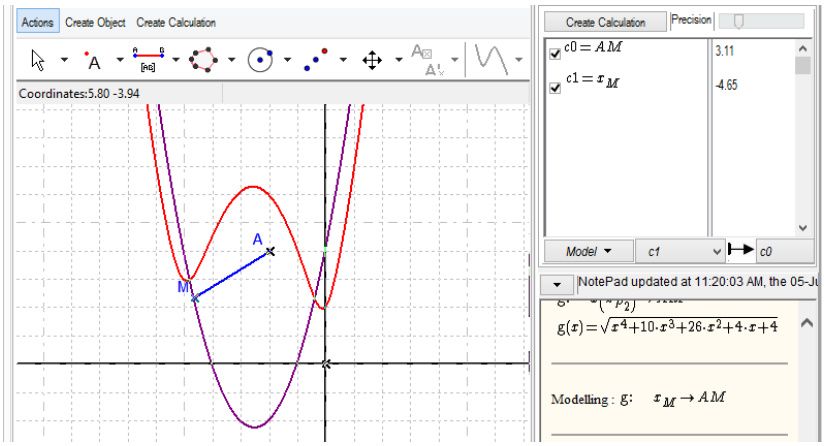
E: Εδώ παρατηρώ τι κάνει λοιπόν, η συνάρτηση. Είναι συνάρτηση αυτό;	(ομάδα 2, Δραστηριότητα 2, στίχοι 436-441).
M3: Ναι είναι.	
M4: Έχουμε για σχέση του c2, έχουμε ένα c6.	Αντιστοιχία.
M3: Μια τιμή για το c6.	
E: ΟΚ.	
M4: Οπότε, μεταβάλλεται το ένα, μεταβάλλεται και το άλλο.	Με τη συμμεταβολή σαν αιτιολόγηση.

2.3. Η συνάρτηση ως αντιστοιχία χωρίς αιτιολόγηση με βάση τη συμμεταβολή

Σε αυτή την υποκατηγορία η συνάρτηση νοηματοδοτείται ως αντιστοιχία, αλλά όχι ως 1-1 αντιστοιχία και δεν χρησιμοποιείται η συμμεταβολή ως αιτιολόγηση του νοήματος της αντιστοιχίας.

Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα:

Δραστηριότητα 1: Με τη βοήθεια του λογισμικού προτείνετε μια συνάρτηση που επιτρέπει τη μοντελοποίηση του προβλήματος εύρεσης της ελάχιστης απόστασης του τμήματος ΑΜ. (Ομάδα 1 και Ομάδα 3)



Σχήμα 17: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 1.

M1: Γιατί για κάθε x του Μ μας δίνει μια απόσταση, την απόσταση του ΑΜ.	Αντιστοιχία (ομάδα 1, Δραστηριότητα 1, στίχος 326).

M5: Συνάρτηση… αντιστοιχίζει τις διάφορες τιμές του x με τιμή y.	Αντιστοιχία από πίνακα (ομάδα 3, Δραστηριότητα 1, στίχος 339).

3. Η συνάρτηση ως συμμεταβολή

Η συνάρτηση ως συμμεταβολή αναλύεται στις παρακάτω τέσσερις επιμέρους υποκατηγορίες που σηματοδοτούν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης.

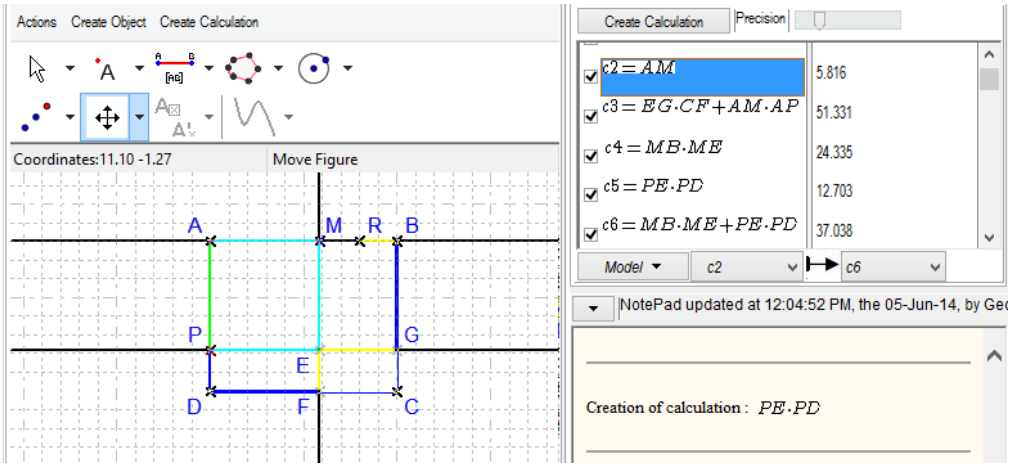
Συγκεκριμένα: *η «Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά», η «Νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών», η «Νοηματοδότηση συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό» και η «Νοηματοδότηση της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης».* Πιο αναλυτικά:

3.1. *Επίπεδο 1: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά*

Στο επίπεδο 1 συμμεταβολής, οι μαθητές συνέδεαν τις μεταβολές δύο μεγεθών (απόσταση και εμβαδόν ή θέση σημείου και μήκος τμήματος) σε ένα διαισθητικό επίπεδο. Οι μαθητές αντιμετώπιζαν ανεξάρτητα τη μία μεταβλητή από την άλλη, δηλαδή δεν εστίαζαν σε κάποια ποσοτική περιγραφή των μεταβολών.

Για παράδειγμα:

Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του Μ κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν; Απαντήστε, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού για τις συναρτήσεις. (Ομάδα 1)

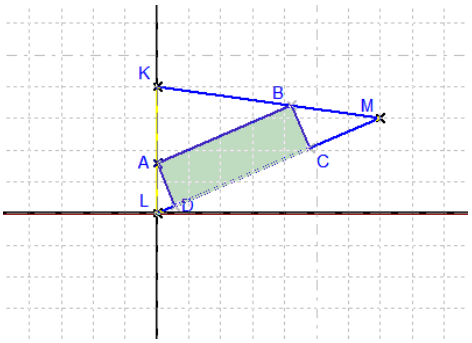


Σχήμα 18: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 2

M2: Μεταβάλλεται το ΑΜ και μεταβάλλεται και το εμβαδόν αυτουνού (το εμβαδόν των κατοικιών PEFD και MBGE).	(Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2, στίχος 621) Νοηματοδότηση συμμεταβολής διαισθητικά.

3.2. *Επίπεδο 2: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών*

Στο επίπεδο 2 συμμεταβολής, οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μια αντίστοιχη μεταβολή στο άλλο μέγεθος, σε δύο συμμεταβαλλόμενα μεγέθη. Έτσι, το κεντρικό στοιχείο του επιπέδου 2 είναι η έννοια της αλληλεξάρτησης. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, η αλληλεξάρτηση των μεγεθών εκφράζεται από τη λέξη «όσο».



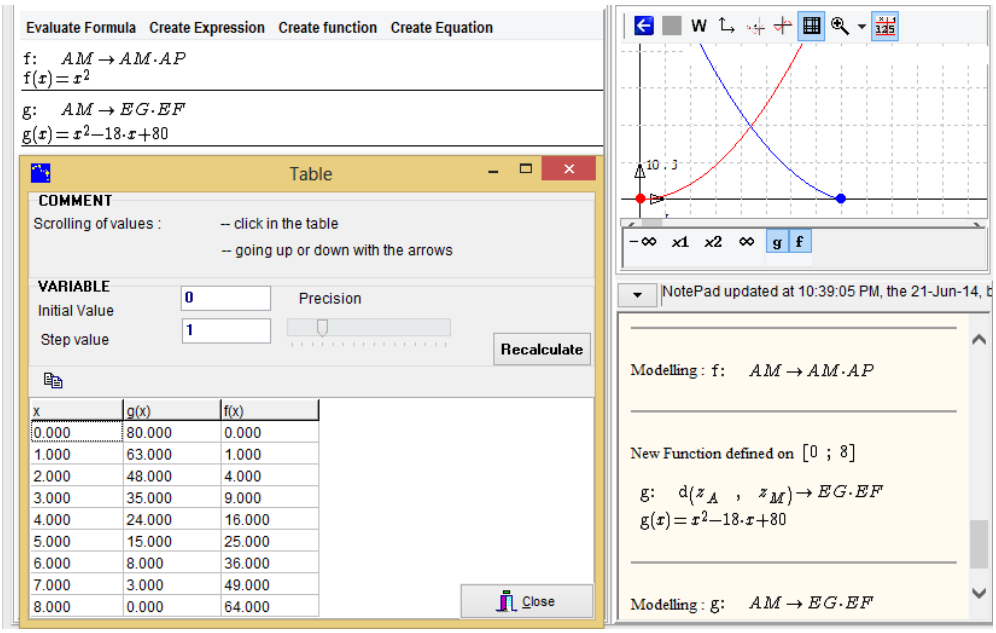
Σχήμα 19: Παράθυρο λογισμικού στη Δραστηριότητα 3.

M5: Όσο μεταβάλλεται το x, μεταβάλλονται και τα εμβαδά των τριγώνων (εννοεί τα KBA, BMC).	συμμεταβολή επίπεδο 2 (ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, στίχος 384).

3.3. Επίπεδο 3: Νοηματοδότηση συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό

Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο έκαναν περιγραφή της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών με μαθηματικούς όρους, δηλαδή γινόταν μια περιγραφή της συμμεταβολής με τη χρήση μόνο αλγεβρικών στοιχείων. Για παράδειγμα:

Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν; Απαντήστε, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού για τις συναρτήσεις. (Ομάδα 2)

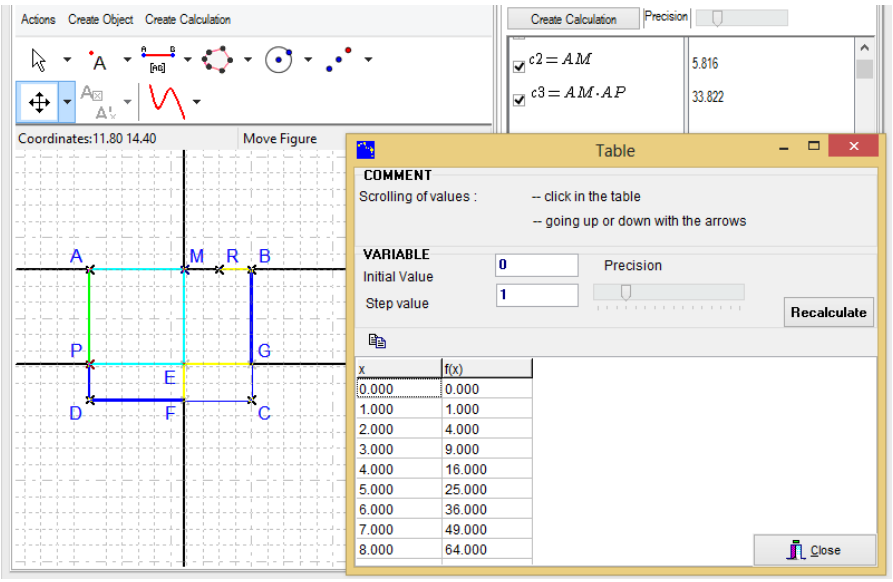


Σχήμα 20: Παράθυρο πίνακας τιμών στη Δραστηριότητα 3.

M3: Όσο μεταβάλλεται το x μεταβάλλονται οι τιμές του $g(x)$ και του $f(x)$. Δεν έχουμε κάπου διπλή τιμή, οπότε είναι συνάρτηση.	Συμμεταβολή με μαθηματικούς όρους –προσκόλληση στον ορισμό του μονοσήμαντου από το σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (ΟΕΒΔ 2010, σελ. 146). (ομάδα 2, Δραστηριότητα 2, στίχος 305).

3.4. Επίπεδο 4: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Στο επίπεδο 4 της συμμεταβολής, οι μαθητές έκαναν περιγραφή της συμμεταβολής με μαθηματικούς όρους, συνδέοντας ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Αυτό το επίπεδο χαρακτηρίζεται από εις βάθος κατανόηση της συμμεταβολής. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω παράδειγμα:



Σχήμα 21: Παράθυρο πίνακας τιμών και παράθυρο υπολογισμών μεταβλητών στη Δραστηριότητα 2.

M3: Α, να δούμε τον πίνακα;	Ομάδα 2, Δραστηριότητα 2, στίχοι 388-392
E: Ε, ναι εδώ.	
M4: Λοιπόν.	
E: Τι μας λέει αυτό;	
M4: Βλέπουμε ότι για κάθε c2 που μεταβάλλεται, δηλαδή μήκος ΑΜ, μεταβάλλεται και το c3.	Συμμεταβολή επίπεδο 4 Αναφέρεται στον πίνακα και περιγράφει με τα c2 και c3.

5.1.2 Χρονική εξέλιξη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ανά δραστηριότητα

Στο σημείο αυτό, παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ανά δραστηριότητα. Στην κατηγοριοποίηση αυτή ενδιέφερε να φανεί και η συνεισφορά των προσφερόμενων αναπαραστάσεων στη νοηματοδότηση των μαθητών. Έτσι κατηγοριοποιείται κάθε νόημα εισάγοντας σε παρένθεση και το σημείο εστίασης των μαθητών στο υπολογιστικό περιβάλλον, όταν δημιούργησαν το νόημα αυτό. Τα σημεία εστίασης είναι:

- η παρατήρηση μεταβολών
- η δημιουργία της συνάρτησης στο λογισμικό Casyopée
- η ερμηνεία της συνάρτησης που δημιούργησαν οι μαθητές
- η παρατήρηση του πίνακα τιμών
- η μελέτη της γραφικής παράστασης

Η αιτία της μη συμπλήρωσης κάποιων από τα κελιά προς το τέλος του πίνακα είναι ότι τα νοήματα σε κάθε ομάδα διαφέρουν σε αριθμό. Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στην εισαγωγική δραστηριότητα των μαθητών, πριν ακόμα κατασκευάσουν συνάρτηση με το λογισμικό (αρχικά ερωτήματα κάθε δραστηριότητας) και δίνει την κεντρική ιδέα που είχαν οι μαθητές από τον πειραματισμό με το δυναμικό χειρισμό των σημείων ή την συζήτηση μεταξύ τους. Ακολούθως οι γραμμές του κάθε πίνακα αναφέρονται στα επόμενα ερωτήματα. Τέλος, οι πίνακες αυτοί προσφέρονται για την ανάλυση των νοημάτων μεταξύ των ομάδων και την εύρεση σχέσεων μεταξύ αυτών.

Πίνακας 1 - Δραστηριότητα 1: Καταγραφή νοημάτων των μαθητών			
Ερωτήματα	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1,2 (πριν την κατασκευή συνάρτησης)	*Παρατήρηση τιμών και διαισθητική περιγραφή της εξάρτησης μεταξύ των μεγεθών.*	*Παρατήρηση τιμών και διαισθητική περιγραφή της συμμεταβολής μεγεθών.*	*Παρατήρηση τιμών και διατύπωση συνδυασμού εξάρτησης και συμμεταβολής.*
3 (μετά την κατασκευή συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Αντιστοιχία 1-1 (από πίνακα τιμών)	
	Αντιστοιχία (ερμηνεία συνάρτησης)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	
4,5 (ερμηνεία της συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (γραφική παράσταση – κινούμενος στόχος)	Σχέση και συμμεταβολής (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών -	Αντιστοιχία (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (γραφική παράσταση)

	παρατηρώντας μεταβολές)		
	Αντιστοιχία 1-1 (πίνακας τιμών)	Συνάρτηση ως σχέση Αιτιολόγηση συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (2ο επίπεδο) (γραφική παράσταση – κινούμενος στόχος)
	Αντιστοιχία 1-1 (γραφική παράσταση)	Αντιστοιχία και Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία και Συμμεταβολή (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (από γραφική παράσταση)	Αντιστοιχία 1-1 (γραφική παράσταση)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών - παρατηρώντας μεταβολές)		Αντιστοιχία (πίνακας τιμών) Συμμεταβολή (επίπεδο 1 και 2) (πίνακας τιμών – ερμηνεία μεταβολών) Συνάρτηση ως σχέση (πίνακας τιμών)
			Αντιστοιχία (γραφική παράσταση)
			Αντιστοιχία και Συμμεταβολή (πίνακας τιμών)

Ο Πίνακας 2 περιέχει τα νοήματα που δημιουργήθηκαν κατά τη διάρκεια της Δραστηριότητας 2 από τις τρεις ομάδες μαθητών. Η Δραστηριότητα 2 περιέχει δύο ερωτήματα σύμφωνα με τα οποία δημιουργούνται αρχικά συναρτήσεις και στη συνέχεια ερμηνεύονται. Ο Πίνακας 2 χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος (ερωτήματα 1,2) αφορά την συζήτηση πριν την δημιουργία συνάρτησης και παρατίθεται στην πρώτη σειρά του πίνακα. Το δεύτερο μέρος (ερώτημα 3) περιλαμβάνει την αρχική δημιουργία συνάρτησης και ερμηνεία της με τη χρήση των αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Το τρίτο μέρος (ερώτημα 4) περιλαμβάνει για δεύτερη φορά τη δημιουργία συναρτήσεων και την ερμηνεία τους.

Πίνακας 2 - Δραστηριότητα 2: Καταγραφή νοημάτων των μαθητών			
Ερωτήματα	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1,2 (πριν την κατασκευή συνάρτησης)	*Παρατήρηση τιμών (συμμεταβολή μεγεθών) (εξάρτηση μεγεθών).*	*Παρατήρηση τιμών (εξάρτηση μεγεθών).*	*Παρατήρηση τιμών (συμμεταβολή μεγεθών) (εξάρτηση μεγεθών).*

3 (αρχική κατασκευή συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Αντιστοιχία (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)	Αντιστοιχία (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Σχέση και συμμεταβολή (πίνακας τιμών)
		Συμμεταβολή (επίπεδο 3 και 4) (πίνακας τιμών - μεταβλητές)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (από ερμηνεία συνάρτησης)
		Αντιστοιχία (γραφική παράσταση)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)
		Αντιστοιχία 1-1 (από γραφική παράσταση – κινούμενος στόχος)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
		Αντιστοιχία 1-1 (ερμηνεία συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (από γραφική παράσταση)
		Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	Αντιστοιχία με αιτιολόγηση συμμεταβολή (επίπεδο 2) (από γραφική παράσταση)
		Συμμεταβολή (επίπεδο 3) (πίνακας τιμών)	Σχέση με δικαιολόγηση συμμεταβολή (επίπεδο 1) (από γραφική παράσταση)
			Αντιστοιχία (πίνακας τιμών)
			Συμμεταβολή (επίπεδο 3) (πίνακας τιμών)
			Αντιστοιχία (από πίνακα τιμών – χρήση ορισμού)
4 (επόμενη κατασκευή συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	Σχέση και συμμεταβολής (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συμμεταβολή (επίπεδο 4) (πίνακας τιμών - μεταβλητές)

	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 3 και 4) (πίνακας τιμών - μεταβλητές)	Αντιστοιχία (γραφική παράσταση)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (παρατηρώντας μεταβολές)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Αντιστοιχία με δικαιολόγηση συμμεταβολή (επίπεδο 1) (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (παρατήρηση 1ου ερωτήματος)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Αντιστοιχία (από γραφική παράσταση)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (απάντηση για το 2ο ερώτημα)	Συμμεταβολή (επίπεδο 3) (από γραφική παράσταση)	Αντιστοιχία και συμμεταβολή (επίπεδο 3 και 4) (πίνακας τιμών)
	Αντιστοιχία (γραφική παράσταση)	Συμμεταβολή (επίπεδο 3) (πίνακας τιμών)	Αντιστοιχία (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)		
	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)		

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές από όλες τις ομάδες στην Δραστηριότητα 3 και ακολουθεί τη δομή των προηγούμενων πινάκων. Ο Πίνακας 3, στη γραμμή των ερωτημάτων 1 και 2, περιέχει τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές παρατηρώντας τις μεταβολές, πριν δημιουργήσουν κάποια συνάρτηση. Στις γραμμές του ερωτήματος 3 περιέχονται τα νοήματα από την αρχική δημιουργία συνάρτησης και την ερμηνεία της. Στις γραμμές του ερωτήματος 4 υπάρχουν τα νοήματα από την επόμενη δημιουργία συνάρτησης.

Πίνακας 3 - Δραστηριότητα 3: Καταγραφή νοημάτων των μαθητών			
Ερωτήματα	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3
1,2 (πριν την κατασκευή συνάρτησης)	*Παρατήρηση τιμών (διαισθητική συμμεταβολή μεγεθών χωρίς αναφορά σε ποσοτική σχέση).*	*Παρατήρηση τιμών (εξάρτηση μεγεθών) (διαισθητική συμμεταβολή μεγεθών χωρίς αναφορά σε ποσοτική σχέση).*	*Παρατήρηση τιμών (συνδυασμός εξάρτησης και διαισθητική συμμεταβολή χωρίς αναφορά σε ποσοτική σχέση).*

3 (αρχική κατασκευή συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (γραφική παράσταση)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (γραφική παράσταση – κινούμενος στόχος)	Αντιστοιχία (γραφική παράσταση)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (από γραφική παράσταση – κινούμενος στόχος)	Αντιστοιχία (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)		Συνάρτηση ως σχέση (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (πίνακας τιμών)		
	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)		
4 (επόμενη κατασκευή συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (παρατήρηση μεταβολών)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Αντιστοιχία (γραφική παράσταση)
	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)
	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)	Αντιστοιχία (ερμηνεία συνάρτησης)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (ερμηνεία συνάρτησης)
	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 1) (πίνακας τιμών)	Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)
	Συνάρτηση ως σχέση με αιτιολόγηση συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	Συνάρτηση ως σχέση (δημιουργία συνάρτησης στο Casyopée)	
		Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	

		Σχέση και συμμεταβολή (γραφική παράσταση)	
		Συμμεταβολή (επίπεδο 2) (ερμηνεία συνάρτησης)	

Οι πληροφορίες που παρέχουν οι παραπάνω Πίνακες αξιοποιούνται κατά την ανάλυση της νοηματοδότησης της συμμεταβολής, μέσα από επεισόδια (ενότητα 5.2), όπου γίνονται αναφορές σε συγκεκριμένες δραστηριότητες.

5.2 ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Η ανάλυση περιλαμβάνει την εξέταση τεσσάρων ομάδων επεισοδίων των διαλόγων των μαθητών. Αυτά προέκυψαν από την σύνθεση των νοημάτων των μαθητών στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής σε κοινές θεματικές ενότητες. Σε κάθε ομάδα επεισοδίων επιδιώκεται, μέσα από την παράθεση και την ανάλυση επεισοδίων, να σκιαγραφηθεί τόσο η συνεισφορά του λογισμικού Casyopée στην κατανόηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τους μαθητές, όσο και να συσχετιστεί η εργασία των ομάδων για την τεκμηρίωση των αποτελεσμάτων.

Οι κοινές θεματικές ενότητες περιλαμβάνουν τα κρίσιμα ζητήματα που προέκυψαν κατά τη μετάβαση από την αλληλεξάρτηση μεγεθών προς τη συμμεταβολή. Αρχικά, παρατηρήθηκε η νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεταξύ μεγεθών και η συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά, πριν την δημιουργία συνάρτησης. Σε αυτό το σημείο, καθοριστικό ρόλο είχε ο προσδιορισμός της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης προβληματικών καταστάσεων. Τέλος, σημαντική ήταν η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση μεγεθών προς τη συμμεταβολή μεγεθών ή τη συμμεταβολή μεταβλητών, καθώς και προς την σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης, που έγινε σταδιακά. Στα παραπάνω, καθοριστικός ήταν ο ρόλος των εργαλείων του λογισμικού.

Οι ομάδες επεισοδίων που μελετώνται είναι οι εξής:

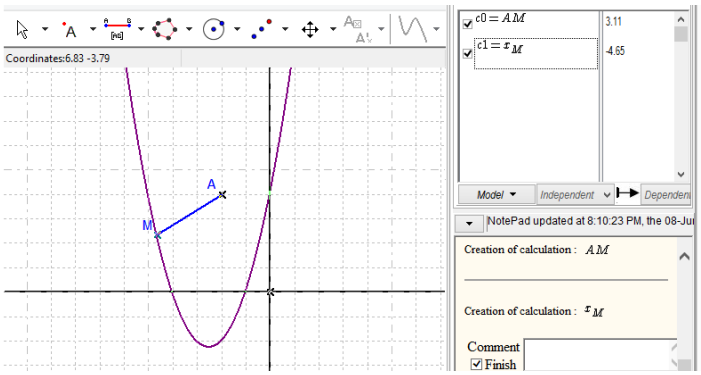
1. Η νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεταξύ μεγεθών.
2. Ο καθορισμός της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
3. Η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή.
4. Η νοηματοδότηση της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις.

5.2.1. Η νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεταξύ μεγεθών

Σε αυτή την ομάδα επεισοδίων εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές, μέσα από την εμπλοκή τους με κατάλληλες δραστηριότητες και τη συμβολή του λογισμικού Casyopée, δημιούργησαν νοήματα σχετικά με την αλληλεξάρτηση μεγεθών. Παρατίθενται επεισόδια, όπου οι μαθητές παρατήρησαν διαισθητικά τη συμμεταβολή μεγεθών, πριν κατασκευάσουν συνάρτηση με το λογισμικό Casyopée. Για το λόγο αυτό, το πρώτο επεισόδιο αναφέρεται σε αλληλεξάρτηση μεγεθών, ενώ το δεύτερο επεισόδιο αναφέρεται στη συμμεταβολή των μεγεθών διαισθητικά. Στο τρίτο επεισόδιο, αναδεικνύεται ο ρόλος των εργαλείων στη νοηματοδότηση.

Επεισόδιο 1: Παρατήρηση αλληλεξάρτησης μεγεθών

Αναζητώντας στη Δραστηριότητα 1 τη θέση του Μ πάνω στην καμπύλη $f(x)$, ώστε να ελαχιστοποιείται η απόσταση του τμήματος ΑΜ, οι μαθητές όλων των ομάδων, μετά την κατασκευή των στοιχείων του προβλήματος, παρατηρούσαν ότι η δυναμική μετακίνηση του σημείου Μ επηρεάζει το μήκος της απόστασης ΑΜ. Το πρώτο επεισόδιο αφορά στην παρατήρηση της αλληλεξάρτησης δύο μεγεθών από τη μαθήτρια Μ2 της ομάδας 1.



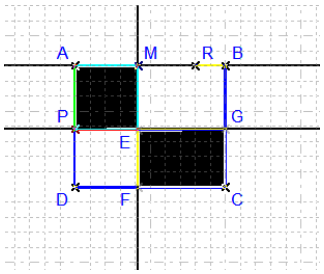
Σχήμα 22: Παράθυρο Γεωμετρίας και υπολογισμών στη Δραστηριότητα 1.

Ε: ΑΜ. Άρα θα το πληκτρολογήσουμε.. Και τα σημεία εκεί πέρα. ΑΜ	Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1, στίχοι 81- 84.
Μ2: Αυτό;	
Ε: Ναι.. νάτο εδώ τώρα θα εμφανιστεί. Εμφανίζεται ακριβώς το μήκος του ΑΜ.	
Μ2: Α.. Και όταν το κουνάω (εννοεί το σημείο Μ) αλλάζει. (εννοεί την απόσταση ΑΜ)	Υπολογισμός – παρατηρήσεις από δυναμικό χειρισμό.

Το γεγονός αυτό κατά την επίλυση της Δραστηριότητας 1, οδήγησε όλους τους μαθητές των ομάδων στην αλληλεξάρτηση μεταξύ της θέσης του σημείου Μ και του μήκους του ΑΜ.

Επεισόδιο 2: Παρατήρηση διαισθητικής συμμεταβολής

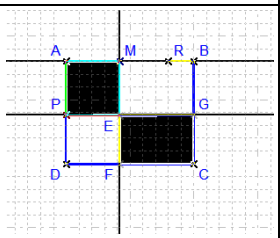
Στη Δραστηριότητα 2, οι μαθητές όλων των ομάδων πειραματίστηκαν με τη θέση του σημείου Μ (ελεύθερο σημείο), για το οποίο οι κήποι (ΑΜΕΡ και ΕGCF) έχουν ίσο εμβαδό. Έχοντας εξοικειωθεί με το λογισμικό, χειρίζονταν με άνεση τη συμμεταβολή των μεγεθών (πλευρών, εμβαδών) του λογισμικού, περιγράφοντάς την διαισθητικά.



Σχήμα 23: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 2.

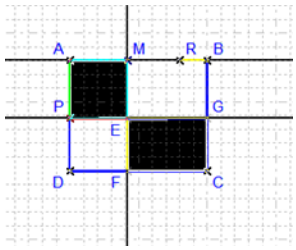
Η δομή της Δραστηριότητας 2 και η επιλογή των ερωτημάτων είχαν καθοριστικό ρόλο για την παρατήρηση της διαισθητικής συμμεταβολής μεγεθών. Το πρώτο ερώτημα της Δραστηριότητας 2 είναι: «*Παρατηρείτε κάποιες ποσότητες να συμμεταβάλλονται;*», το οποίο είχε στόχο να παρακινήσει τους μαθητές να μετακινήσουν το ελεύθερο σημείο Μ του σχήματος και να περιγράψουν τις ταυτόχρονες μεταβολές που εμφανίζονταν κατά τη διάρκεια της δυναμικής μετακίνησης του σημείου Μ. Οι μαθητές όλων των ομάδων καταγράφηκε ότι παρατηρούσαν πρώτα την αλληλεξάρτηση μεταξύ των μεγεθών. Στη συνέχεια, μέσω της κίνησης του σημείου Μ οδηγούνταν στην διαισθητική συμμεταβολή των μεγεθών. Το επεισόδιο που ακολουθεί είναι αντιπροσωπευτικό για όλες τις ομάδες.

Η μαθήτρια Μ1 της ομάδας 1, διαπίστωσε τη διαισθητική συμμεταβολή των εμβαδών ΑΜΕΡ και ΕGCF. Η ομάδα 1, εκτός από την διαισθητική συμμεταβολή του σημείου Μ (ελεύθερο σημείο) και των εμβαδών (ΑΜΕΡ και ΕGCF), παρατήρησε ότι και η θέση των σημείων (Ρ, G, Ε, F), όπως και τα εμβαδά όλων των σχημάτων (εκτός του ABCD), εξαρτώνται από την κίνηση του Μ.

Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2, στίχοι 38-45	
Μ1: Λοιπόν.. Το σημείο Μ δεν είναι το κινητό σημείο; 	Η μαθήτρια 1 καταλαβαίνει πιο είναι το ελεύθερο σημείο, άρα πρόκειται να το μετακινήσει.
Ε: Ωραία. Άρα τι μπορούμε να το κάνουμε το σημείο Μ; Να το…	
Μ1: Μετακινήσουμε!	
Ε: Ωραία. Μετακινούμε το σημείο Μ και τι παρατηρούμε;	
Μ1: Ότι.. Μεταβάλλονται..	Διαισθητική μεταβολή μεγεθών.

M2: Ότι μεταβάλλεται και το χωρίο AMEP.	
E: Το AMEP ναι.	
M1: Και το EGCF	
Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2, στίχοι 77,78,80-85	
E: Να ρωτήσω τώρα εγώ. Εσείς όταν λέτε ότι συμμεταβάλλεται το εμβαδό, εννοείτε το ένα εμβαδό σε σχέση με το άλλο, το ένα εμβαδό με το σημείο Μ, το άλλο εμβαδό με το σημείο Μ, τι ακριβώς εννοείτε; Ποιος μεταβάλλεται μαζί με ποιόν;	
M2: Τα εμβαδά με το Μ;	
M1: Όταν μεταβάλλουμε το Μ…	
E: Ναι,	Κίνηση του Μ σημαίνει μεταβολή του κάθε εμβαδού.
M1: Μεταβάλλεται και το ένα εμβαδό και το άλλο.	
E: Και το άλλο. Άρα εννοείς ότι μεταβάλλοντας το σημείο Μ μεταβάλλονται και τα δύο εμβαδά. Πολύ ωραία. Άρα τα εμβαδά σε σχέση με το Μ, τι λέμε ότι μεταξύ τους;	
M2: Συμμεταβάλλονται	Συμμεταβολή μεγεθών.
E: Συμμεταβάλλονται, πολύ ωραία.	

Συμπερασματικά, οι μαθητές όλων των ομάδων, πριν ορίσουν και ερμηνεύσουν τη συνάρτηση, παρατηρούσαν ότι τα δύο μεγέθη αλληλοεξαρτώνται και συμμεταβάλλονται, χωρίς να αναφέρουν ποσοτικές μεταβολές. Όπως φάνηκε στο προηγούμενο επεισόδιο, η ομάδα 1 ανακάλυψε την συμμεταβολή μεγεθών, πέρα από την αλληλεξάρτηση.



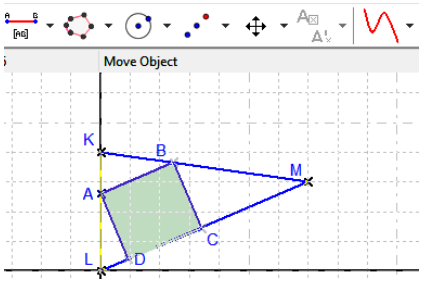
Σχήμα 24: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 2.

Παρατηρώντας τους διαλόγους μεταξύ μαθητών και τους διαλόγους μαθητών – ερευνητή, μέσω της ενασχόλησης με το ψηφιακό περιβάλλον Casyopée, αναδύεται η έννοια της συμμεταβολής, όπως φάνηκε από τα λόγια της μαθήτριας Μ1: «Όταν μεταβάλλουμε το Μ, μεταβάλλεται και το ένα εμβαδό και το άλλο». Οι ομάδες αντιλαμβάνονταν σταδιακά τη συμμεταβολή μεγεθών, με τα οποία αργότερα δημιουργούν συνάρτηση μέσω του προγράμματος. Καθοριστικό ρόλο είχαν οι εκφωνήσεις των δραστηριοτήτων, που οδηγούσαν τους μαθητές στη συμμεταβολή. Για παράδειγμα στη Δραστηριότητα 2 το δεύτερο ερώτημα είναι: «*Ο Μπάμπης λέει χωρίς να σκεφτεί πολύ ότι οι δύο γραμμοσκιασμένες περιοχές θα έχουν ίσο εμβαδό, όταν το Ε βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο RD. Έχει δίκιο;*». Οι μαθητές στις ομάδες, παρατηρούσαν ότι η κίνηση του σημείου Ε εξαρτάται από τη μετακίνηση του σημείου Μ, που είναι ελεύθερο σημείο.

Όλες οι ομάδες απαντούσαν με ευκολία στο ερώτημα αυτό, αφού αντιλαμβάνονταν ότι το σημείο Μ είναι το μόνο ελεύθερο σημείο στο σχήμα.

Επεισόδιο 3: Παρατήρηση συμμεταβολής στο ψηφιακό περιβάλλον

Οι μαθητές της ομάδας 3 παρατηρούσαν τις μεταβολές στις παραμέτρους σε καθεμιά από τις δραστηριότητες και διατύπωσαν τις παρατηρήσεις τους, νοηματοδοτώντας την αλληλεξάρτηση και τη συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά στην έκταση όλων των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα στη Δραστηριότητα 3, οι μαθητές είχαν απαντήσει στο πρώτο ερώτημα μεταφέροντας την κατασκευή στο λογισμικό. Στη συνέχεια, θα έπρεπε να προσδιορίσουν τη θέση του σημείου Α ώστε να μεγιστοποιείται το εμβαδό του ορθογωνίου ABCD, όπου οι κορυφές του είναι στις πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 25: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 3.

Η ομάδα 3 παρατήρησε ότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ της κατακόρυφης μετακίνησης του σημείου Α και του εμβαδού του ορθογωνίου ABCD. Επίσης, η διερεύνηση της κίνησης του σημείου Α, γίνεται διαπιστώνοντας τη συμμεταβολή των δύο ποσοτήτων (μήκος AL και εμβαδόν ABCD), σε διαισθητικό επίπεδο.

Ε: ... Υπάρχει λέει κάποια σχέση στο εμβαδό του ορθογωνίου και στην μετατόπιση του σημείου Α;	Ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, στίχοι 129-139.
Μ5: Σαφώς και υπάρχει, αλλά θα το παρατηρήσουμε εδώ πέρα. Να πάρουμε το ποντίκι.	Ο δυναμικός χειρισμός των σημείων οδηγεί στην εξάρτηση και συμμεταβολή.
Ε: Λίγο πιο δυνατά αν θες.	
Μ5: Ναι, ωραία. Θα πάρουμε μια σχέση που θα μας δίνει το εμβαδόν για το ABCD και μετακινώντας το Α θα δούμε αν μεταβάλλεται και το εμβαδόν του ορθογωνίου.	Παρατήρηση συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων.
Ε: Οκ. Πριν πάρουμε αυτή την σχέση μπορούμε να δούμε αν μεταβάλλεται το με την κίνηση του σημείου Α το εμβαδόν του ορθογωνίου;	
Μ5: Θα το πάρουμε εδώ να το κινήσουμε.	

Ε: Μπράβο. Όπως λες κινώντας το. Έτσι;	
Μ5: Ωραία. Εδώ πέρα βλέπουμε ότι έχει πολύ μικρό εμβαδό και εδώ πέρα γίνεται ευθεία.	
Ε: Οκ. Εκεί γίνεται μηδέν το εμβαδόν. Μπράβο.	
Μ5: Οπότε όσο κατεβαίνουμε μεταβάλλεται, αλλά..	Παρατηρήσεις από την κίνηση του σημείου Α.
Μ6: Και γίνεται πάλι σαν τετράγωνο.. κάπως.	

Επομένως, η ομάδα 3 αξιοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού, όπως το δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών αντικειμένων και μετακινώντας τα ελεύθερα σημεία, διατύπωσε την εξάρτηση και τη συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά. Η μαθήτρια Μ5 στο επεισόδιο οδηγήθηκε στην συμμεταβολή μεγεθών από τις παρατηρήσεις της σχετικά με τις μεταβολές μεγεθών.

Σύνοψη σχετικά με τη νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεταξύ μεγεθών

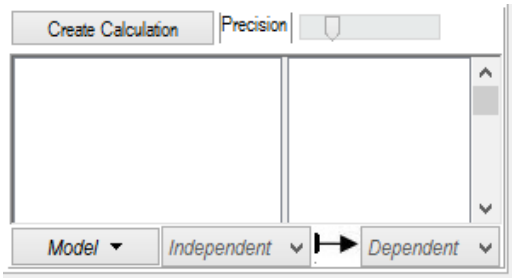
Από τα παραπάνω αντιπροσωπευτικά επεισόδια, οι μαθητές στο στάδιο εργασίας τους με αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη, φαίνεται ότι παρατηρούσαν τις εξαρτήσεις μεταξύ των μεγεθών με σχετική ευκολία, όπως φάνηκε στο πρώτο επεισόδιο. Σε αυτό το στάδιο, πριν κατασκευάσουν τη συνάρτηση, κάποιες από τις ομάδες παρατηρούσαν διαισθητικά τη συμμεταβολή μεγεθών (δεύτερο επεισόδιο), ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία του λογισμικού (τρίτο επεισόδιο). Η παρατήρηση της αλληλεξάρτησης και της συμμεταβολής διαισθητικά έχει παρουσιαστεί στα εισαγωγικά ερωτήματα στους Πίνακες Καταγραφής Νοημάτων (ενότητα 5.1.2). Η ομάδα 1, πριν τη δημιουργία συνάρτησης παρατηρούσε ότι τα δύο μεγέθη εξαρτώνται. Οι ομάδες 2 και 3 παρατηρούσαν ότι όταν προκαλούνται μεταβολές στο ένα μέγεθος, προκαλούνται μεταβολές και στο άλλο. Άρα, έχουν μία επιπλέον αίσθηση της συμμεταβολής από την ομάδα 1, η οποία είχε προέλθει από την εξοικείωση με τις δυναμικές μεταβολές στο λογισμικό, όπως παρατηρήθηκε στο τρίτο επεισόδιο.

Οι δραστηριότητες και ο σχεδιασμός τους στα πρώτα ερωτήματα φάνηκε ότι επηρέασαν τους μαθητές για την εμπλοκή τους και τη νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης και της διαισθητικής συμμεταβολής μεγεθών. Συγκεκριμένα, η Δραστηριότητα 1 αποτέλεσε εισαγωγή και εξοικείωση με το λογισμικό και κατεύθυνε τους μαθητές σε αναζήτηση νοημάτων για τη συνάρτηση. Στο πλαίσιο της Δραστηριότητας 2, δόθηκε έμφαση στον εντοπισμό ανεξάρτητων και εξαρτημένων αντικειμένων και παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές ενεπλάκησαν στην νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης και της διαισθητικής συμμεταβολής μεγεθών. Τέλος, τα αρχικά ερωτήματα της Δραστηριότητας 3 έδιναν έμφαση σε γεωμετρικές κατασκευές και διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές οδηγήθηκαν στην παρατήρηση των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, μέσω των γεωμετρικών κατασκευών. Προκύπτει ότι πριν την κατασκευή συνάρτησης οι ομάδες νοηματοδότησαν την αλληλεξάρτηση και συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά.

5.2.2. Ο καθορισμός ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής

Σε αυτή την ομάδα επεισοδίων μελετάται η εξέλιξη της σκέψης των μαθητών κατά τον καθορισμό της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, καθώς κατέχει τον κύριο ρόλο για τη συμμεταβολή μεγεθών. Το ζήτημα επιλογής της ανεξάρτητης μεταβλητής ήρθε στην επιφάνεια όταν οι μαθητές οδηγήθηκαν στη δημιουργία συνάρτησης, μέσα από την ανάγκη για μοντελοποίηση των προβλημάτων που υπήρχαν στις δραστηριότητες. Τα πρώτα δύο επεισόδια που ακολουθούν αναφέρονται στις δυσκολίες των μαθητών για την κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Σταδιακά στο επόμενο επεισόδιο φαίνεται η εξοικείωση με το λογισμικό και ο προσδιορισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής χωρίς δυσκολία.

Κεντρικό ρόλο από πλευράς εργαλείων για την κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής έχει το εργαλείο Model για ανατροφοδότηση. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί η στάση των μαθητών προς το εργαλείο του λογισμικού. Παρόλο που οι μαθητές γνώριζαν ότι μπορούν να ελέγξουν αν κάποια από τις μεταβλητές μπορεί να αποτελέσει ανεξάρτητη μεταβλητή με τη χρήση της επιλογής “Dependence” στο παράθυρο Model του λογισμικού, καμία ομάδα δε χρησιμοποίησε αυτή τη δυνατότητα του λογισμικού όταν ερωτήθηκαν για τον καθορισμό της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Όλοι οι μαθητές των ομάδων λόγω αυτού του γεγονότος συνάντησαν επιπλέον δυσκολίες στην Δραστηριότητα 1. Μόνο οι μεταβολές που προσφέρει το λογισμικό κατεύθυναν τους μαθητές στην μοντελοποίηση του προβλήματος με την κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής και χωρίς να ζητήσουν ανατροφοδότηση από το ψηφιακό περιβάλλον Casyopée. Η πιθανότερη αιτία που δεν χρησιμοποίησαν αυτή την επιλογή, ήταν ότι το κείμενο ανατροφοδότησης του λογισμικού ήταν γραμμένο στα αγγλικά και επομένως δεν κατανόησαν πλήρως τις δυνατότητες του ψηφιακού περιβάλλοντος.

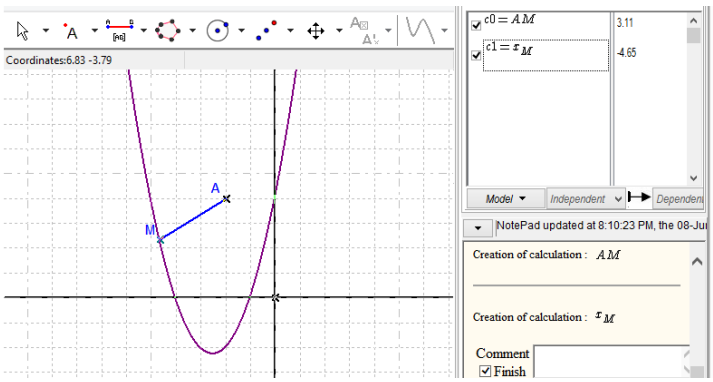


Σχήμα 26: Εργαλείο «Model» για ανατροφοδότηση.

Η δυσκολία στην παρατήρηση των σταθερών και μεταβλητών στοιχείων του προβλήματος ήταν καθοριστική. Έτσι οι μαθητές προσδιόριζαν με ευκολία την εξαρτημένη μεταβλητή του προβλήματος, αλλά δυσκολεύονταν να αναγνωρίσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή (Lagrange & Psycharis, 2013). Ακολουθεί το πρώτο επεισόδιο που είναι αντιπροσωπευτικό για όλες τις ομάδες.

Επεισόδιο 1: Δυσκολίες καθορισμού ανεξάρτητων – εξαρτημένων στοιχείων

Στη Δραστηριότητα 1, ζητείται η θέση του Μ για την ελαχιστοποίηση του μήκους ΑΜ (βλ. σχήμα 27). Όλες οι ομάδες συναντούσαν δυσκολίες στον καθορισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής στην Δραστηριότητα 1. Η ομάδα 1 είχε τις περισσότερες δυσκολίες στην κατανόηση των μεταβολών στο περιβάλλον Casyopée.



Σχήμα 27: Παράθυρο Γεωμετρίας και υπολογισμών στη Δραστηριότητα 1.

Στο επεισόδιο 1, καταγράφεται η δυσκολία ως προς την επιλογή του σημείου που είναι ανεξάρτητο. Επίσης, εμφανίστηκε δυσκολία στην επιλογή της κατάλληλης συντεταγμένης που θα αποτελέσει την ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι μαθητές της ομάδας 1 δεν είχαν πειραματιστεί εκτενώς με το δυναμικό χειρισμό σημείων και φαίνεται ότι απαντούσαν τυχαία ως προς τον καθορισμό ανεξάρτητης μεταβλητής, αφού το Α είναι σταθερό σημείο. Μετά από κάποιο διάστημα, όταν ξεκίνησε η συζήτηση για την ανεξάρτητη μεταβλητή, η μαθήτρια Μ2 δυσκολευόταν στον εντοπισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ η μαθήτρια Μ1 είχε καταφέρει να ξεπεράσει τις δυσκολίες της.

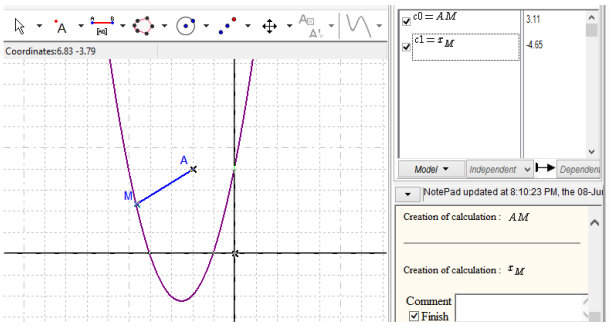
Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1, στίχοι 115-119	
Ε: Δηλαδή τι επηρεάζει την απόσταση (ΑΜ); Το μόνο πράγμα που επηρεάζει την απόσταση ποιο είναι;	
Μ1: Η συνάρτηση και το όχι.. Βασικά το σταθερό σημείο Α.	Απάντηση στην τύχη.
Ε: Το σταθερό σημείο Α, αλλά είναι σταθερό αυτό οπότε δεν την επηρεάζει την απόσταση.	
Μ2: Εε το Μ.	
Μ1: Άρα το Μ.	Δυσκολία αναγνώρισης ανεξάρτητων και εξαρτημένων στοιχείων.
Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1, στίχοι 178-184	
Ε: Μειώνεται. Άρα μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε το x;	
Μ2: Όχι.	

M1: Ναι.	
M2: Ναι.	
M1: Ναι το y δε μπορούμε.. Το x μπορούμε.	
E: Το y γιατί δε μπορούμε …;	
M1: Γιατί αυξάνεται είτε πάμε προς τα δεξιά είτε πάμε προς τα αριστερά.	Δικαιολόγηση– από δυναμική μετακίνηση του Μ.

Παρά την αρχική δυσκολία διάκρισης των μεταβλητών και την επιλογή της κατάλληλης ανεξάρτητης μεταβλητής, ο δυναμικός χειρισμός των εργαλείων του λογισμικού (όπως η μετακίνηση του σημείου Μ πάνω στην καμπύλη και η παρατήρηση των τιμών του μήκους του ΑΜ), οδήγησε σταδιακά τους μαθητές στην σωστή επιλογή και δικαιολόγηση της επιλογής της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Επεισόδιο 2: Ζητήματα συμβολισμού στην επιλογή ανεξάρτητης μεταβλητής

Παρότι οι μαθητές της ομάδας 3 είχαν ανακαλύψει εύκολα τη συμμεταβολή ποσοτήτων, οδηγήθηκαν δύσκολα στην κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Καθοριστικό ρόλο διαδραμάτισαν τα ζητήματα σχετικά με το ρόλο του αλγεβρικού συμβολισμού (Thompson, 1994). Οι μαθητές της ομάδας 3 επηρεάστηκαν από το μαθηματικό φορμαλισμό και δεν ήταν εξοικειωμένοι με το συμβολισμό συνάρτησης f με ανεξάρτητη μεταβλητή διαφορετική από το x (παραδείγματος χάριν ανεξάρτητη μεταβλητή το y), που κυριαρχεί στα σχολικά βιβλία. Η ομάδα 3 αδυνατούσε να προσδιορίσει με σαφήνεια και με επιχειρήματα ποια από τις δύο συντεταγμένες είναι απαραίτητη για την δημιουργία της συνάρτησης που υπολογίζει την απόσταση. Καθοριστικό ρόλο σε αυτό το σημείο διαδραμάτισε η αλληλεπίδραση με το εκπαιδευτικό λογισμικό, καθώς η ομάδα 3 ανακάλυψε τη συντεταγμένη που χρειάζεται μετακινώντας το σημείο Μ.

Ομάδα 3, Δραστηριότητα 1, στίχοι 151-153	
M5: Εε, ποια από τις 2 θα πάρω…. Την x λογικά γιατί η συνάρτηση είναι ως προς x γραμμένη ας πούμε. Και..	Ανεξάρτητη μεταβλητή το x γιατί ως προς x είναι γραμμένη
E: Δηλαδή αν έλεγε $f(y) = y^2 + 5y + 4$; 	
M5: (γέλια) Σωστό και αυτό.	

Ομάδα 3, Δραστηριότητα 1, στίχοι 160-163	
M6: Να πάρουμε μήπως το x επειδή το y είναι ίδιο και από δω και από δω;	Σωστή επιλογή ανεξάρτητης μεταβλητής, από παρατήρηση μεταβολής των σημείων.
E: Λέει ότι το y θα είναι ίδιο και από δω και από δω, ενώ το x τι θα παθαίνει;	
M6: Θα αλλάζει.	Αντιλαμβάνεται τις μεταβολές των τιμών της τετμημένης x.
M5: Το x πάντα θα αλλάζει. Ναι, όντως.	

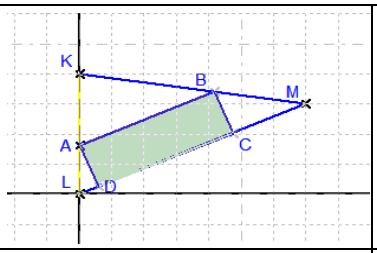
Στο παραπάνω επεισόδιο, στο στίχο 160, η μαθήτρια M6 της ομάδας 3 αντιλήφθηκε την κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής, εξαιτίας του μονοσήμαντου της μεταβλητής y.

Στη Δραστηριότητα 2, οι μαθητές των ομάδων άλλοτε δυσκολεύονταν και άλλοτε όχι κατά την επιλογή των κατάλληλων μεταβλητών που αποτελούσαν την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, καθώς είχαν εξοικειωθεί ως ένα βαθμό με το εκπαιδευτικό λογισμικό.

Επεισόδιο 3: Εστιασμένη οπτική μαθητών στη Δραστηριότητα 3

Στη Δραστηριότητα 3, οι μαθητές όλων των ομάδων είχαν προσαρμόσει τον τρόπο που δικαιολογούσαν την επιλογή ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, παρατηρώντας τις αντίστοιχες μεταβολές του μήκους του AL και του εμβαδού του ABCD. Οι μαθητές άρχισαν σταδιακά να έχουν πιο εστιασμένη οπτική για τη χρήση των μεταβολών. Για παράδειγμα στη Δραστηριότητα 3, οι μαθητές από όλες τις ομάδες έκαναν συνειδητή δοκιμή και περιγραφή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή στη Δραστηριότητα 3 ορίζονταν με ιδιαίτερη ευκολία, παρόλο που στο σχεδιασμό αναμενόταν ότι θα υπάρχει δυσκολία στον ορισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής, καθώς αποτελούσε τη συντεταγμένη y του σημείου A.

Στο παρακάτω επεισόδιο, η ομάδα 2 μετά την παρότρυνση του ερευνητή για δυναμικό χειρισμό του ελεύθερου σημείου A, παρατήρησε τις τιμές για το εμβαδό του ορθογωνίου ABCD και διατυπώθηκε μια εικασία για τη θέση του σημείου A που μεγιστοποιεί το εμβαδό του ορθογωνίου ABCD. Στη συνέχεια, προέκυψε η κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής χωρίς δυσκολία. Η κατάλληλη επιλογή της μεταβλητής με την απαραίτητη αιτιολόγηση οδήγησε τους μαθητές στην δημιουργία της συνάρτησης από το λογισμικό Casyopée.

Ε: Ο.Κ. Να το κουνήσουμε λίγο το Α να δούμε που περίπου γίνεται μέγιστο; Μειώνεται προς τα πάνω. 	Πειραματισμός μαθητών.. Ομάδα 2, Δραστηριότητα 3, στίχοι 176-193.
Μ4: Βλέπουμε ότι μειώνεται προς το Κ. Εδώ αυξάνεται κοντά στο μέσον του ΚL και μετά αρχίζει πάλι και ξαναπέφτει.	Παρατηρήσεις με την κίνηση του Α.
Μ3: Και μειώνεται	
Ε: Ο.Κ.	
Μ4: Οπότε παρατηρούμε ότι περίπου στο μέσον του ΚL.	Εικασία.
Ε: Λογικά, μπράβο.	
Μ4: θα είναι το μέγιστο.	
Μ3: Κάπου εκεί.	
Ε: Οκ. Πολύ καλή η εικασία αυτή. Μπράβο. Λοιπόν. Πώς θα το βρούμε τώρα; Γιατί εμείς..	
Μ4: (Να δημιουργήσουμε) Συνάρτηση;	
Ε: Ωραία.	
Μ4: θα έχουμε και το μήκος ή το ΑΚ ή το ΑL.	Ορισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής χωρίς δυσκολία.
Ε: Ή το ΑL. Αν θέλαμε να χρησιμοποιούσαμε μια συντεταγμένη του Α, ποια θα χρησιμοποιούσαμε;	
Μ4: Την y, η x είναι σταθερή.	Αιτιολόγηση
Ε: Μπράβο, η x είναι πάντα σταθερή.	
Μ4: Πάντα μηδέν.	
Ε: Πάντα μηδέν. Εντάξει; Άρα, δεν υπάρχει..	
Μ4: Γατί βρισκόμαστε πάνω στον yy'.	

Στο τρίτο επεισόδιο φαίνεται η συμβολή του δυναμικού χειρισμού αντικειμένων στην επιλογή της κατάλληλης ανεξάρτητης μεταβλητής, προκειμένου οι μαθητές να οδηγηθούν στη δημιουργία συνάρτησης. Η αιτιολόγηση της επιλογής είναι η παρατήρηση που κάνει η μαθήτρια Μ4 ότι «η x είναι πάντα σταθερή, πάντα μηδέν», επομένως δε μπορεί να αποτελέσει μεταβλητή.

Σύνοψη του καθορισμού της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής

Συνοψίζοντας, ο εντοπισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι σημαντικός για τη διατύπωση της συμμεταβολής των μεγεθών. Το πρόβλημα καθορισμού της κατάλληλης ανεξάρτητης μεταβλητής που εμφανίζεται στις ομάδες μαθητών, έχει επισημανθεί στη βιβλιογραφία. Χαρακτηριστικό των ομάδων στις δραστηριότητες είναι ότι όλες συνάντησαν δυσκολίες στην Δραστηριότητα 1, για τον καθορισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής, όπως φάνηκε στο πρώτο επεισόδιο. Μάλιστα οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν το εργαλείο

ανατροφοδότησης του λογισμικού, με αποτέλεσμα να έχουν επιπλέον δυσχέρειες. Οι δυσχέρειες αυτές ξεπεράστηκαν από την παρατήρηση των μεταβολών στα γεωμετρικά προβλήματα (επεισόδια 1 και 2). Στη Δραστηριότητα 2, η επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής άλλοτε δυσκόλευε και άλλοτε όχι τους μαθητές, κατ' αντιστοιχία με τις Δραστηριότητες 1 και 3. Επιπλέον, στη Δραστηριότητα 3, μετά την εξοικείωση που είχαν με το εκπαιδευτικό λογισμικό, όλες οι ομάδες διατύπωσαν με ιδιαίτερη ευκολία την ανεξάρτητη μεταβλητή, με την απαραίτητη δικαιολόγηση, παρουσιάζοντας βελτίωση στον τρόπο σκέψης τους, όπως τονίστηκε στο τρίτο επεισόδιο. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης Δραστηριότητας, οι μαθητές πλέον σκέφτονταν με όρους συμμεταβολής, καθώς διατύπωσαν με ευκολία τη συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά και κατέληξαν στην σωστή επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής, υπερπηδώντας τα προβλήματα του συμβολισμού. Η εξοικείωση με το λογισμικό οδήγησε σε πιο εστιασμένη οπτική απέναντι στην επιλογή της κατάλληλης ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Η εξοικείωση προήλθε λαμβάνοντας υπόψη, κατά κύριο λόγο, τη μεταβολή του ελεύθερου σημείου Α και την παρατήρηση των τιμών των εμβαδών των σχημάτων στο ψηφιακό περιβάλλον.

5.2.3. Η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή

Σε αυτή την ομάδα επεισοδίων μελετάται η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση μεγεθών στη συμμεταβολή και περιλαμβάνει τη νοηματοδότηση της συνάρτησης. Διακρίνεται σε τρεις ενότητες επεισοδίων:

I. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης μέσω της δημιουργίας της από τους μαθητές στο λογισμικό.

II. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών (επίπεδα 1 και 2 κατανόησης της συμμεταβολής) .

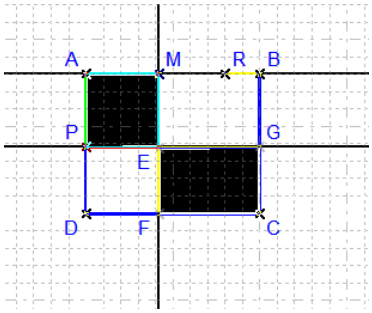
III. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό (επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής).

5.2.3.1. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης μέσω της δημιουργίας της από τους μαθητές στο λογισμικό

Σε αυτή την ενότητα οι μαθητές δημιούργησαν συνάρτηση, ορίζοντας συμμεταβαλλόμενες ποσότητες, στο λογισμικό. Ενδιαφέρον έχει η ποικιλία νοηματοδοτήσεων της συνάρτησης από τους μαθητές και η πορεία σταδιακά προς τη συμμεταβολή. Το πρώτο επεισόδιο αφορά στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως αντιστοιχίας. Το δεύτερο επεισόδιο παρουσιάζει την πορεία των νοηματοδοτήσεων των μαθητών προς τη συμμεταβολή.

Επεισόδιο 1: Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως αντιστοιχία

Παρατηρήθηκε ότι κατά τη δημιουργία συναρτήσεων στο λογισμικό, οι μαθητές νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση άλλοτε ως «σχέση» και άλλοτε ως «αντιστοιχία». Στο πρώτο επεισόδιο από τη Δραστηριότητα 2, οι μαθητές της ομάδας 1, είχαν ορίσει εξαρτημένη μεταβλητή (το εμβαδό ΑΜΕΡ) και ανεξάρτητη μεταβλητή (το μήκος ΑΜ) και δημιούργησαν συνάρτηση στο λογισμικό. Παρόλο που είχε παρατηρηθεί η διαισθητική συμμεταβολή μεγεθών, η μαθήτρια Μ1 νοηματοδοτούσε τη συνάρτηση ως «αντιστοιχία».



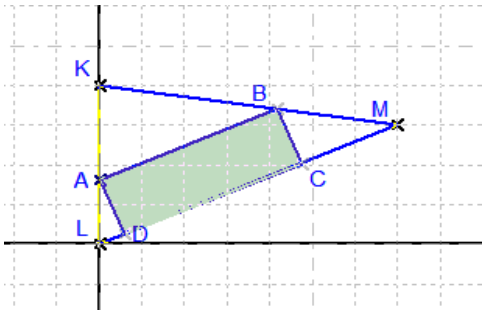
Σχήμα 28: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 2.

E: ... Θέλω να μου πείτε γιατί η F είναι συνάρτηση.	Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2, στίχοι 349-354.
M1: Γιατί η F είναι συνάρτηση.	
E: Ναι, ναι.	
M1: Για κάθε διαφορετική τιμή του A.. ένα λεπτό.	
E: Πες το λίγο πιο δυνατά αυτό.	
M1: Για κάθε τιμή του AM μας δίνει… ένα εμβαδό;	Η συνάρτηση ως αντιστοιχία.

Παρόλο που οι μαθητές είχαν παρατηρήσει τη συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά, ώστε να προσδιορίσουν την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, στην ομάδα 1 όταν δημιουργούσαν συνάρτηση και ερωτήθηκαν γιατί αποτελεί συνάρτηση, διατύπωναν νοήματα για τη συνάρτηση ως «σχέση» ή ως «αντιστοιχία». Επομένως, οι μαθητές είχαν προβλήματα στην διατύπωση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, παρόλο που είχαν περιγράψει αρχικά ότι οι ποσότητες συμμεταβάλλονται.

Επεισόδιο 2: Από την «αντιστοιχία» στη «σχέση» και στη «συμμεταβολή»

Οι ομάδες μαθητών 1 και 3 τόνισαν την αλληλουχία νοημάτων που έδιναν για την έννοια της συνάρτησης. Οι μαθητές αρχικά νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως «αντιστοιχία», διότι έτσι την είχαν διδαχθεί σύμφωνα με το σχολικό πρόγραμμα. Στη συνέχεια οι μαθητές νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως «σχέση» τονίζοντας την εξάρτηση μεταβλητών. Οι μαθητές της ομάδας 3 παρουσίασαν τα βήματα νοηματοδότησης της συνάρτησης μέχρι τη συμμεταβολή. Η συνάρτηση ως συμμεταβολή εμφανίζεται μετά το νόημα της συνάρτησης ως σχέση. Η πορεία αυτή από την «αντιστοιχία» στη «σχέση» και τέλος, στη «συμμεταβολή» είναι η αλληλουχία που συνήθως εμφανιζόταν μεταξύ των τριών νοημάτων για τη συνάρτηση.



Σχήμα 29: Παράθυρο Γεωμετρίας στη Δραστηριότητα 3.

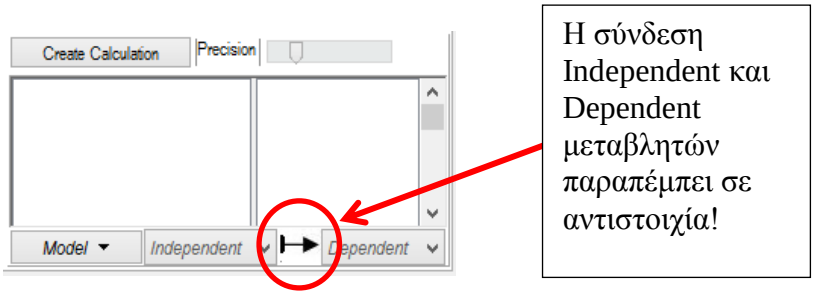
E: Τέλεια. Βρήκαμε λοιπόν την τιμή που εδώ τα 2 τρίγωνα (KBA και BMC) θα είναι ίσα (ισεμβαδικά). Θέλω να μου πείτε από δω πάλι πώς καταλαβαίνουμε ότι αυτά είναι συναρτήσεις;	Ομάδα 3, Δραστηριότητα 3, στίχοι 379-384.
M5: Από εδώ πάλι. Ωραία. Σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια τιμή στο y και τι άλλο;	Και έτσι προκύπτει ότι είναι 1) Αντιστοιχία.

M6: Εξαρτιούνται.	2) Εξάρτηση.
M5: Ναι, υπάρχει εξάρτηση.	
E: Ο.Κ.	
M5: Όσο μεταβάλλεται το x, μεταβάλλονται και τα εμβαδά των τριγώνων.	3) Συμμεταβολή.

Ο μαθητής M5 έχοντας δημιουργήσει τη νέα συνάρτηση, τη νοηματοδότησε ως αντιστοιχία. Η μαθήτρια M6 αμέσως μετά τόνισε την εξάρτηση που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών. Τέλος, ο M5 ανέφερε τη συμμεταβολή στον τελευταίο στίχο του επεισοδίου, αποσαφηνίζοντας ότι η εξάρτηση είναι προαπαιτούμενο της συμμεταβολής.

Σύνοψη ενότητας νοηματοδότησης της συνάρτησης μέσω της δημιουργίας της από τους μαθητές στο λογισμικό

Στην πρώτη ενότητα της τρίτης ομάδας επεισοδίων εμφανίζεται η δημιουργία ποικίλων νοημάτων για τη συνάρτηση, όπως το νόημα της «σχέσης» ή της «αντιστοιχίας», όπως φάνηκε στο πρώτο επεισόδιο. Η λειτουργία του λογισμικού για τον ορισμό συνάρτησης φαίνεται να δημιουργούσε στους μαθητές παρανοήσεις. Η λειτουργία αυτή δεν οδηγούσε άμεσα στη συμμεταβολή, αλλά οδήγησε στη νοηματοδότηση της συνάρτησης είτε ως «σχέση» (ομάδες 1 και 3) είτε ως «αντιστοιχία» (ομάδα 2 – πρώτο επεισόδιο). Το γεγονός αυτό επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη φύση του προγράμματος καθώς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο ορισμός της συνάρτησης γίνεται με μορφή αντιστοιχίας.



Σχήμα 30: Εργαλείο «Model» του λογισμικού – Ορισμός μεταβλητών.

Επίσης, αυτή η ερμηνεία έχει άμεση επιρροή στο 2^{ο} Ερευνητικό Ερώτημα, καθώς η συνεισφορά του προγράμματος στην νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής είναι περιορισμένη σχετικά με την δικαιολόγηση ή ερμηνεία της φύσης της συνάρτησης από τον τρόπο που έχει δημιουργηθεί. Οι μαθητές κάθε ομάδας σε όλη την έκταση της έρευνας νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως «σχέση» ή ως «αντιστοιχία» κατά τη δημιουργία της από το λογισμικό Casyopée, εκτός από μία περίπτωση στην οποία νοηματοδοτείται ως συμμεταβολή από την ομάδα 2. Σε αυτή την περίπτωση, όταν εμφανίζεται η νοηματοδότηση της συνάρτησης

ως συμμεταβολής από την ερμηνεία της, η ομάδα 2 οδηγείται σε ανώτερα επίπεδα κατανόησης μελετώντας τον πίνακα τιμών.

Στο δεύτερο επεισόδιο αναδεικνύεται η πορεία νοηματοδοτήσεων των μαθητών. Επομένως, οι μαθητές νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως «αντιστοιχία» και ως «σχέση» και τέλος, ως «συμμεταβολή». Συμπερασματικά, το νόημα της συνάρτησης ως «σχέση» κατά τη λειτουργία ορισμού συνάρτησης, το οποίο επισημαίνει την εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών, οδηγεί στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Με αυτή την έννοια είναι προαπαιτούμενη η αλληλεξάρτηση της συμμεταβολής, γι' αυτό στο σύνολο των δραστηριοτήτων η συμμεταβολή εμφανίζεται πάντα μετά το νόημα της «σχέσης».

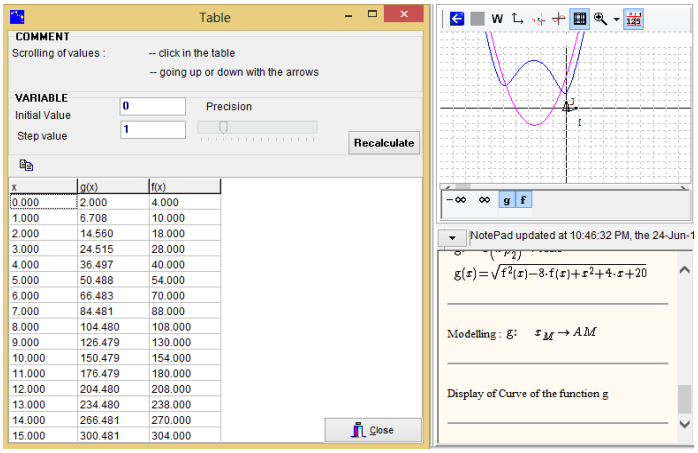
Όλοι οι μαθητές στις πρώτες ομάδες επεισοδίων φάνηκε να διατυπώνουν με όρους συμμεταβολής την σχέση μεταξύ δύο αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών. Το γεγονός αυτό αναδεικνύεται και από τους Πίνακες Καταγραφής Κοημάτων. Προκύπτει, επομένως, ότι η αλληλεξάρτηση και η συμμεταβολή των μεγεθών στο περιβάλλον του λογισμικού από τους μαθητές, έχουν καθοριστικό ρόλο για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής στα επόμενα επεισόδια.

5.2.3.2. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών (επίπεδα 1 και 2)

Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως διαισθητικής συμμεταβολής (χωρίς ποσοτικές αναφορές) και ως συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών προέκυψε κυρίως από την εργασία των μαθητών με τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση. Οι δύο αυτές αναπαραστάσεις μελετήθηκαν και ερμηνεύθηκαν από τους μαθητές σε όλες τις δραστηριότητες αμέσως μετά τη δημιουργία συνάρτησης στο λογισμικό. Η ερμηνεία της γραφικής παράστασης από τις ομάδες πραγματοποιήθηκε αμέσως μετά τη μελέτη του πίνακα τιμών. Θα πρέπει να τονιστεί ότι η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή δεν έγινε άμεσα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση ως «σχέση» ή ως «αντιστοιχία» και χρησιμοποιούσαν ως αιτιολόγηση του νοήματος τη συμμεταβολή. Το πρώτο επεισόδιο παρουσιάζει την αποτυχία της πρώτης ομάδας να νοηματοδοτήσει τη συνάρτηση ως συμμεταβολή από τον πίνακα και τη γραφική παράσταση. Το δεύτερο επεισόδιο τονίζει τη δυναμική του πίνακα τιμών για την περιγραφή της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής. Τέλος, το τρίτο επεισόδιο αναδεικνύει το ρόλο του «κινούμενου στόχου» για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, ερμηνεύοντας τη γραφική παράσταση. Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα επεισόδια αυτής της ενότητας είναι αντιπροσωπευτικά και ισχύουν για όλες τις ομάδες μαθητών.

Επεισόδιο 1: Αποτυχία νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής

Πολλές φορές από την ερμηνεία των διαφορετικών αναπαραστάσεων οι ομάδες μαθητών δεν νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή ιδιαίτερα στην Δραστηριότητα 1, όπως φαίνεται στους Πίνακες Καταγραφής Νοημάτων (ενότητα 5.1.2). Χαρακτηριστικό της ομάδας 1 είναι ότι οι μαθητές από την παρατήρηση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης, αρχικά νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση ως 1-1 αντιστοιχία. Στο πρώτο επεισόδιο, είναι χαρακτηριστική η προσπάθεια των μαθητών της ομάδας να τονίσουν το μονοσήμαντο της συνάρτησης, η οποία κατέληξε στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως 1-1 αντιστοιχία.



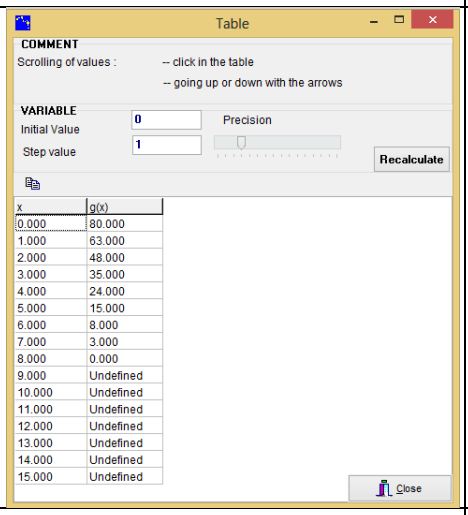
Σχήμα 31: Παράθυρο πίνακας τιμών και παράθυρο γραφικών παραστάσεων.

E: Ωραία εκεί είναι το τέσσερα. Άρα μπορώ να δικαιολογήσω ότι αυτό είναι μια συνάρτηση από τον πίνακα τιμών; Μπορώ να το πω αυτό;	Ομάδα 1, Δραστηριότητα 1, στίχοι 396-408.
M2: Ναι.	
M1: Ναι	
E: Γιατί;	
M2: Για κάθε x έχουμε και ένα	
M1: Διαφορετικό	Αντιστοιχία 1-1.
M2: $g(x)$	
E: Για κάθε x έχουμε ένα διαφορετικό $g(x)$. Οκ. Για να πάμε λίγο πάλι στο γράφημα. Ας το κλείσουμε αυτό.	
M2: Να το κλείσουμε;	
E: Ναι, άλλωστε μπορούμε να το ξαναέχουμε. Από δω πέρα μπορούμε να το δικαιολογήσουμε ότι η $g(x)$ που φτιάξαμε είναι μια συνάρτηση; Τι θα μπορούσαμε να πούμε;	Γιατί είναι συνάρτηση;
M1: Πάλι με την ίδια λογική;	
E: Δηλαδή;	
M1: Ότι για κάθε.. Ότι βλέπουμε ότι για κάθε διαφορετικό σημείο στον άξονα των x, έχουμε ένα διαφορετικό y.	Αντιστοιχία 1-1.

Στο πρώτο επεισόδιο, η μαθήτρια Μ1 επηρεάστηκε από το νόημα της αντιστοιχίας και οδηγήθηκε σε 1-1 αντιστοιχία τονίζοντας το μονοσήμαντο και για τις δύο μεταβλητές. Επομένως, ο πίνακας τιμών ερμηνεύτηκε από τη μαθήτρια ως αντιστοιχία και όχι ως συμμεταβολή. Από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης στο επεισόδιο, η μαθήτρια Μ1 συνέχιζε να νοηματοδοτεί τη συνάρτηση πάλι ως 1-1 αντιστοιχία. Έτσι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης οδηγούσαν τους μαθητές της ομάδας 1 σε νοήματα αντιστοιχίας.

Επεισόδιο 2: Ο κρίσιμος ρόλος του πίνακα τιμών για την περιγραφή της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής

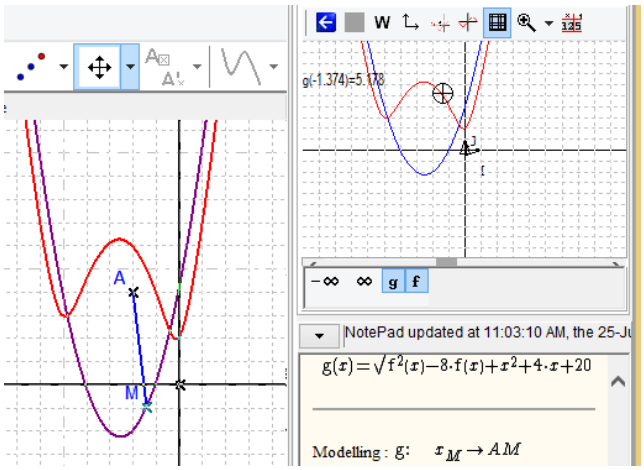
Στη Δραστηριότητα 2, η συμμεταβολή προέκυψε από τη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα του πίνακα τιμών, όπως φαίνεται στους Πίνακες Καταγραφής Νοημάτων (ενότητα 5.1.2). Οι μαθητές της ομάδας 1, μελετώντας τον πίνακα τιμών, παρατήρησαν ότι οι τιμές της στήλης της ανεξάρτητης μεταβλητής μεταβάλλονταν. Στη συνέχεια, παρατήρησαν ότι και οι τιμές της στήλης της εξαρτημένης μεταβλητής μεταβάλλονταν παρατηρώντας δίπλα ακριβώς τις μεταβολές της 1^{ης} στήλης. Επομένως, κατέληξαν εύκολα στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Στο παράδειγμα αυτό, οι μαθήτριες μελέτησαν τον πίνακα τιμών παρατηρώντας αυξήσεις ή μειώσεις τιμών και οδηγήθηκαν στη συμμεταβολή.

Ε: Μας ενδιαφέρει αν μειώνονται ή ανεβαίνουνε; Ή αν κατεβαίνουνε;	Ομάδα 1, Δραστηριότητα 2, στίχοι 367- 372.
Μ1: Όχι. Μεταβάλλονται. 	Από τον πίνακα προκύπτει η συμμεταβολή.
Ε: Μεταβάλλονται και αυτές. Εντάξει;	
Μ1: Ωραία.	
Ε: Άρα, τι παρατηρώ; Ότι σε κάθε μεταβολή των τιμών του x τι θα έχω;	
Μ1: Μεταβολή στις τιμές του g.	Συμμεταβολή.

Στο δεύτερο επεισόδιο, ο πίνακας τιμών οδήγησε την ομάδα 1 στη συμμεταβολή. Τα νοήματα που δημιουργούσαν οι μαθητές ταλαντεύονταν μεταξύ συνάρτησης ως «σχέσης», «αντιστοιχίας» και «συμμεταβολής». Από τη μελέτη των διαφορετικών αναπαραστάσεων προκύπτει το εξής περιστατικό σε όλες τις ομάδες: οι μαθητές από τη γραφική παράσταση νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση ως αντιστοιχία. Αντίθετα από τον πίνακα τιμών έφταναν συνήθως μέχρι και το επίπεδο 2 κατανόησης της συμμεταβολής. Το τελευταίο γεγονός υποστηρίζεται από την έρευνα, καθώς ο Thompson (1994) αναφέρει ότι ο πίνακας τιμών ενισχύει την κατανόηση της συμμεταβολής. Η δυνατότητα της ανάγνωσης του πίνακα τιμών σε στήλες, πράγματι οδηγεί τους μαθητές στο να παρατηρούν τις διαφοροποιήσεις στις τιμές της στήλης της ανεξάρτητης μεταβλητής και τις ανάλογες διαφοροποιήσεις που προκαλούνται στις τιμές της στήλης της εξαρτημένης, διατυπώνοντας νοήματα για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή. Συμπερασματικά, ο πίνακας τιμών ευνοεί τις προϋποθέσεις νοηματοδότησης της συνάρτησης ως εξάρτησης μεγεθών και αμέσως μετά ως συμμεταβολής.

<u>Επεισόδιο 3: Ο κρίσιμος ρόλος της γραφικής παράστασης στη νοηματοδότηση της συμμεταβολής</u>

Το παράθυρο των γραφικών παραστάσεων συνδέεται με το παράθυρο της Γεωμετρίας κατά την περιήγηση με τον «κινούμενο στόχο» πάνω σε μια συνάρτηση. Μεταβάλλοντας τη θέση του «κινούμενου στόχου», μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των σημείων στο παράθυρο Γεωμετρίας. Με αυτό τον τρόπο, η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων εμφανίζει σημαντικό ρόλο για την μετάβαση στη συμμεταβολή. Στο σχήμα 32, φαίνεται ότι η τετμημένη του στόχου στο παράθυρο γραφικών παραστάσεων είναι η ίδια με του παραθύρου Γεωμετρίας.



Σχήμα 32: Παράθυρο Γεωμετρίας και παράθυρο γραφικών παραστάσεων με τη χρήση κινούμενου στόχου.

Συχνά, από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης χωρίς τη χρήση του «κινούμενου στόχου», η συνάρτηση νοηματοδοτείται ως «σχέση» ή ως «αντιστοιχία». Σε αντίθεση με τις προηγούμενες χρήσεις των γραφικών παραστάσεων, οι μαθητές της ομάδας 3, αφού νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως σχέση, στη συνέχεια εμφάνιζαν τον «κινούμενο στόχο» πάνω στη γραφική παράσταση και διατυπώνοντας τις παρατηρήσεις τους, νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή αλληλεξαρτώμενων μεγεθών (επίπεδο 2 κατανόησης της συμμεταβολής). Το συμβάν αυτό παρατηρήθηκε σε όλες τις ομάδες. Το τελευταίο αποτέλεσμα αναδεικνύει το ρόλο του λογισμικού, αφού η νοηματοδότηση της συμμεταβολής προκύπτει από τη λειτουργία του «κινούμενου στόχου».

Στο τρίτο επεισόδιο που ακολουθεί, οι μαθητές μετακινούσαν το στόχο πάνω στη συνάρτηση και ο ερευνητής πρότεινε να παρατηρήσουν τις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις (σχήμα Γεωμετρίας και Γραφική παράσταση), οι οποίες συνδέονταν με την κίνηση του στόχου στη γραφική παράσταση. Η μαθήτρια Μ5 κατέληξε στο επίπεδο 2 συμμεταβολής από την μεταβολή του «κινούμενου στόχου».

Μ5: Λοιπόν, κινούμε το x κινώντας το βελάκι.	Ομάδα 3, Δραστηριότητα 1, στίχοι 283-289.
Ε: Ωραία, κινούμε το x ακριβώς.	
Μ5: Ωραία και ε… εδώ είμαστε.	
Ε: Παρατηρείς ότι κινούνται και τα δύο έτσι; (οι αναπαραστάσεις)	Γραφήματα (μικρό εικονίδιο).
Μ5: Ωραία. Όσο κατεβαίνουμε το x πλησιάζει ας πούμε στο 0.	Συσχέτιση του x με τις τιμές Συμμεταβολή (επίπεδο 2).
Ε: Τέλεια.	
Μ5: Και εδώ μηδενίζεται.	

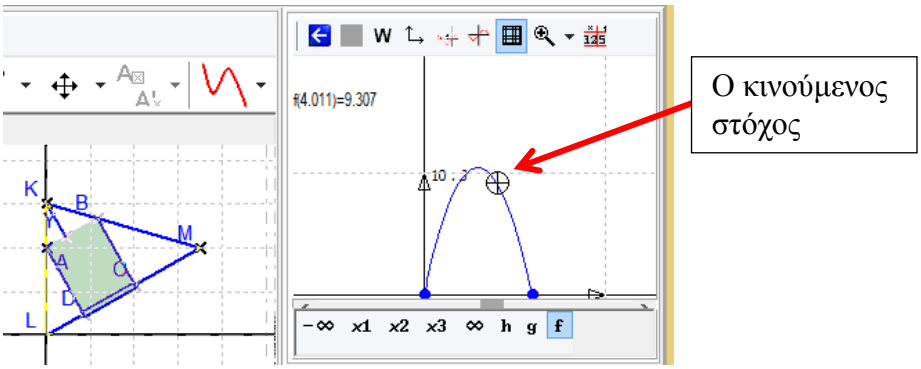
Από το παραπάνω επεισόδιο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι και από τη γραφική παράσταση δημιουργούνται νοήματα ως προς τη συμμεταβολή και δεν συνεισφέρει μόνο ο πίνακας τιμών για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Επίσης, μόνο σε μια περίπτωση νοηματοδότησης της συνάρτησης από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης με τη χρήση του «κινούμενου στόχου», η συνάρτηση προκύπτει ως 1-1 αντιστοιχία (μία περίπτωση νοηματοδότησης από τις πέντε στους Πίνακες Καταγραφής Νοημάτων). Επομένως, τα νοήματα όλων των μαθητών από τον πίνακα τιμών και από τη γραφική παράσταση με τη χρήση του κινούμενου στόχου οδηγούνται στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Σύνοψη ενότητας νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών (επίπεδα 1 και 2)

Ο ρόλος του πίνακα τιμών στην νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής φαίνεται να είναι καθοριστικός. Στο πρώτο επεισόδιο προκύπτει ότι η ομάδα 1 από τον πίνακα

τιμών νοηματοδοτούσε τη συνάρτηση ως 1-1 αντιστοιχία. Αντίστοιχη νοηματοδότηση προκύπτει από όλες τις ομάδες. Στη συνέχεια όμως, παρατηρώντας τις μεταβολές στον πίνακα τιμών, κατέληγαν στη συμμεταβολή άλλοτε στο επίπεδο 1 (νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής διαισθητικά) και άλλοτε στο επίπεδο 2 (νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών), όπως προέκυψε στο δεύτερο επεισόδιο. Επειδή το δεύτερο επεισόδιο ήταν αντιπροσωπευτικό, αναδεικνύεται ο ρόλος του πίνακα τιμών για τη νοηματοδότηση από τους μαθητές των ομάδων της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Ο ρόλος της γραφικής παράστασης επίσης αναδεικνύεται στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Στο πρώτο επεισόδιο φάνηκε ότι η γραφική παράσταση ερμηνευόταν ως αντιστοιχία ή ως 1-1 αντιστοιχία. Η ομάδα 1 με τη χρήση του «κινούμενου στόχου» στη γραφική παράσταση νοηματοδότησε τη συνάρτηση ως συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά.



Σχήμα 33: Σύνδεση παραθύρου Γεωμετρίας και παραθύρου γραφικών παραστάσεων.

Από τις ομάδες 2 και 3 προκύπτει ότι η συνεισφορά του «κινούμενου στόχου» πάνω στη συνάρτηση, κατευθύνει τις απαντήσεις των μαθητών δίνοντας νόημα στη συνάρτηση ως συμμεταβολή αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών (όπως φάνηκε στο τρίτο επεισόδιο). Τα αποτελέσματα αυτά οδηγούσαν τις ομάδες μέχρι το επίπεδο 2 κατανόησης της συμμεταβολής. Το συμπέρασμα είναι ότι η γραφική παράσταση βοηθά τους μαθητές να δώσουν νόημα στη συνάρτηση ως συμμεταβολή, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιείται ο κινούμενος στόχος που αποτελεί δυνατότητα του λογισμικού Casyopée.

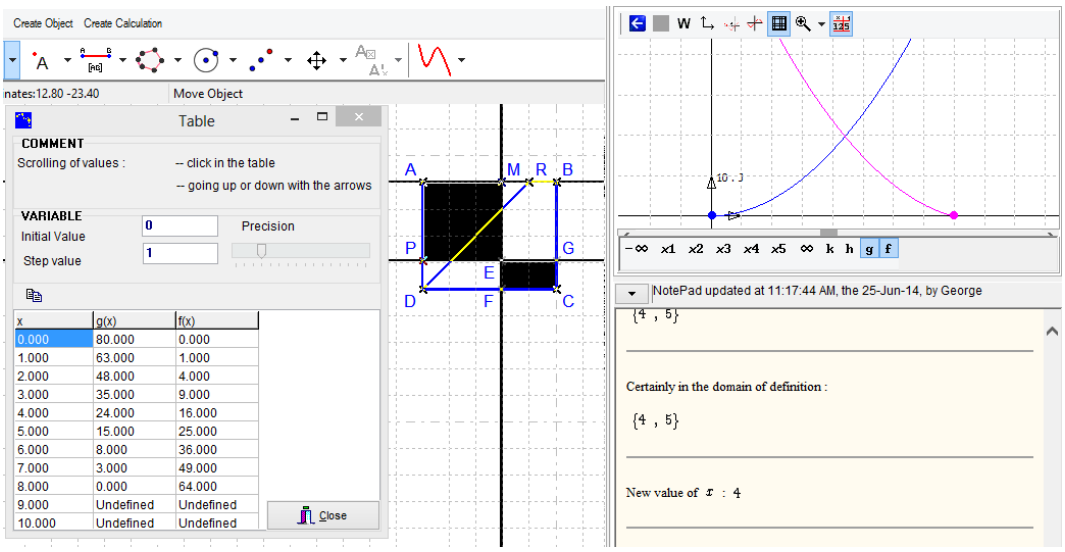
Όπως φάνηκε στο τρίτο επεισόδιο, αλλά και από τους Πίνακες 2 και 3 (Καταγραφής Νοημάτων για τις Δραστηριότητες 2 και 3) οι μαθητές δε χρησιμοποιούσαν σε όλες τις περιπτώσεις τη λειτουργία του «κινούμενου στόχου» και νοηματοδοτούσαν τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας τον ορισμό των σχολικών βιβλίων. Η χρήση του ορισμού δεν σημαίνει ότι γίνεται πάντα επιτυχώς, καθώς υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου διατυπώνεται λανθασμένα. Ο ορισμός παραπέμπει στην αντιστοιχία, επομένως σχεδόν σε κάθε περίπτωση που γίνεται ανάκληση ορισμού, εμφανιζόταν το νόημα της αντιστοιχίας. Άρα η συνεισφορά του λογισμικού έγκειται στο γεγονός ότι οδηγούσε τους μαθητές να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με τη χρήση του «κινούμενου στόχου», όπως στο δεύτερο επεισόδιο.

5.2.3.3. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό (επίπεδο 3)

Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό προέκυψε μέσα από την αλληλεπίδραση των μαθητών με τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση. Οι ομάδες 2 και 3, έφτασαν στο επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής, διατυπώνοντας τη σχέση των ποσοτήτων με τη χρήση αλγεβρικών όρων. Στα επεισόδια που ακολουθούν, οι μαθητές εργαζόμενοι κυρίως με τον πίνακα τιμών (επεισόδια 1 και 2), αλλά και τη γραφική παράσταση, επιτυγχάνουν το επίπεδο κατανόησης 3 της συμμεταβολής.

Επεισόδια 1 και 2: Ο κρίσιμος ρόλος του πίνακα τιμών για το επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής

Στο πρώτο επεισόδιο, εμφανίζεται ο κρίσιμος ρόλος του πίνακα στην περιγραφή της συμμεταβολής από την ομάδα 2 με αλγεβρικούς όρους. Για την ομάδα 2 εμφανίστηκε προσκόλληση στον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης. Οι μαθητές της ομάδας 2 δεν αντιλαμβάνονταν ότι η συμμεταβολή δεν απαιτεί την αναφορά στο μονοσήμαντο της μεταβλητής y. Έτσι η φράση «δεν βλέπουμε να έχει δύο τιμές» χρησιμοποιείται σε όλη την έκταση της ερευνητικής διαδικασίας, από την ομάδα 2. Το πρώτο επεισόδιο αποσαφηνίζει τα παραπάνω που έχουν ειπωθεί για τα νοήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές στη δημιουργία μίας συνάρτησης και δείχνει τη συνεισφορά του πίνακα τιμών ως κατάλληλο μέσο ερμηνείας της συμμεταβολής των μεταβλητών, αφού οι μαθητές από την ερμηνεία του πίνακα τιμών, φτάνουν στο επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής.

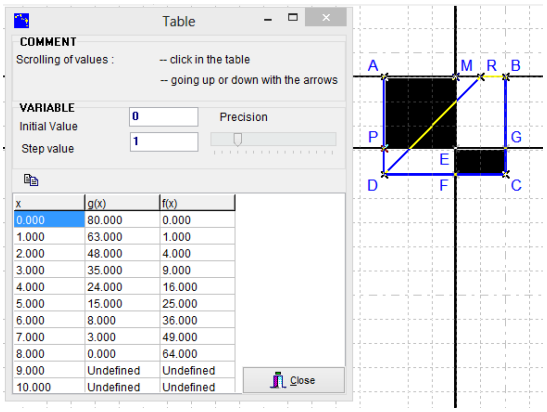


Σχήμα 34: Παράθυρο πίνακα τιμών, παράθυρο Γεωμετρίας και παράθυρο γραφικών παραστάσεων.

E: Άρα και από δω μπορούμε να πούμε ποια είναι η τιμή ας πούμε που έχουνε ίσο εμβαδό. Γιατί αυτά τα πράγματα είναι συνάρτηση ως προς τον πίνακα τώρα;	Ομάδα 2, Δραστηριότητα 2, στίχοι 303-305.
M4: Γιατί βλέπουμε ότι όσο μεταβάλλεται το x...	Αναφορά στον πίνακα τιμών.
M3: Όσο μεταβάλλεται το x μεταβάλλονται οι τιμές του $g(x)$ και του $f(x)$. Δεν έχουμε κάπου διπλή τιμή, οπότε είναι συνάρτηση.	Συμμεταβολή με αλγεβρικούς όρους – και προσκόλληση στον ορισμό.

Από το επεισόδιο 1 προκύπτει αρχικά ο κρίσιμος ρόλος του πίνακα τιμών προκειμένου ο μαθητής M5 να νοηματοδοτήσει τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με χρήση αλγεβρικών όρων, όπως φαίνεται στο στίχο 305. Επίσης, οι μαθητές επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από το μονοσήμαντο του ορισμού και το αναφέρουν μαζί με το νόημα της συμμεταβολής.

Εκτός από την ομάδα 2, σε δύο περιπτώσεις και η ομάδα 3 ερμηνεύοντας τον πίνακα τιμών έφτασε στο επίπεδο 3 της συμμεταβολής. Η ομάδα 3 προσπαθούσε να δικαιολογήσει ότι η σχέση που ορίζει το εμβαδόν του EGCF (g) και η σχέση που ορίζει το εμβαδόν του AMEP (f) είναι συναρτήσεις.



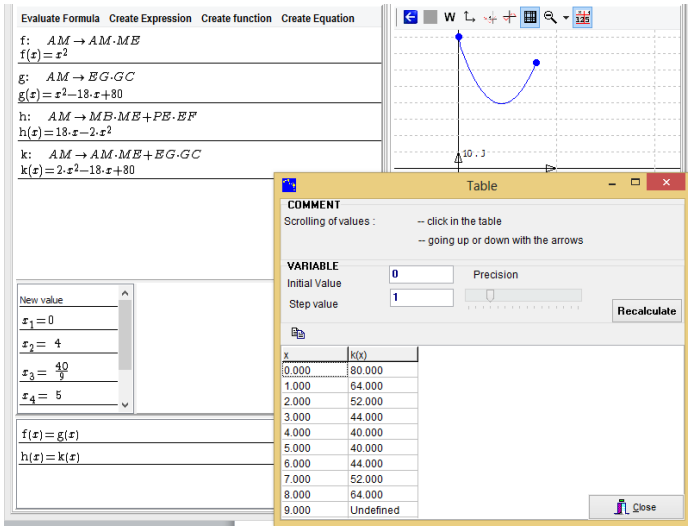
Σχήμα 35: Παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο Γεωμετρίας.

E: Λέει το εμβαδό του τετραγώνου. Σωστά. Και τι μας λέει η στήλη του $g(x)$;	Ομάδα 3, Δραστηριότητα 2, στίχοι 310-313.
M6: Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.	
E: Ωραία. Εγώ μπορώ να δικαιολογήσω από εδώ ότι τα g και f είναι συναρτήσεις;	
M5: Ε, ναι αφού για κάθε x.. ε.. έχω έναν άλλο y, θέτοντας x το AM έχω ένα άλλο y. Συνδέονται τέλος πάντων μεταξύ τους. Όσο μεγαλώνει ας πούμε το x, ανάλογα μεγαλώνει και το $f(x)$. Είπαμε αφού.. και θυμόμαστε πριν ότι είχαμε βρει ότι η συνάρτηση είναι $f(x) = x^2$ και βλέπουμε ότι όντως για το x ίσον 2 έχουμε $f(x) = 4$.	Στον πίνακα τιμών δικαιολογεί με ορισμό πρώτα και στη συνέχεια με συμμεταβολή επίπεδο 3.

Στο προηγούμενο επεισόδιο αρχική δικαιολόγηση του μαθητή Μ5 της ομάδας 3, ήταν ο ορισμός. Στη συνέχεια ο μαθητής Μ5 κατέφυγε στην εξάρτηση και τέλος στη συμμεταβολή μεταβλητών με τη χρήση αλγεβρικών όρων. Οι λέξεις που χρησιμοποιούσε, όπως η λέξη «ανάλογα», περιγράφουν την έμφαση που έδινε στην ύπαρξη της συμμεταβολής.

Επεισόδιο 3: Ο κρίσιμος ρόλος της γραφικής παράστασης στο επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής

Η ομάδα 3 διατύπωσε τη συμμεταβολή στο επίπεδο 3, από τη γραφική παράσταση, αρκετά αργότερα από την περιγραφή της με τον πίνακα τιμών. Συνδέοντας με τα παραπάνω οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τον κινούμενο στόχο για να επιτύχουν τα πρώτα επίπεδα της συμμεταβολής. Στη συνέχεια, αφού είχαν νοηματοδοτήσει τη συνάρτηση ως συμμεταβολή από τη γραφική παράσταση, διατύπωναν νοήματα χωρίς τη χρήση του κινούμενου στόχου, τα οποία όμως ήταν νοήματα συμμεταβολής σε ανώτερα επίπεδα όπως φαίνεται στο τρίτο επεισόδιο.



Σχήμα 36: Παράθυρο πίνακα τιμών, παράθυρο Άλγεβρας και παράθυρο γραφικών παραστάσεων.

Ε: Άρα γιατί είναι συνάρτηση αυτό; (εννοεί την $k(x)$, που περιγράφει το άθροισμα των κήπων ΑΜΕΡ και EGCF)	Ομάδα 3, Δραστηριότητα 2, στίχοι 473-477.
Μ5: Η συνάρτηση… γιατί κάθε x αντιστοιχίζεται μόνο σε ένα y.	Γραφική παράσταση-Αντιστοιχία.
Μ6: Ναι.	
Ε: Ναι. ωραία. Πάμε τώρα στον πίνακα. Εδώ, εδώ είναι ο πίνακας. Ωραία. Στον πίνακα γιατί δικαιολογείς ότι είναι συνάρτηση; Τι είπαμε πριν;	Πίνακας τιμών.
Μ5: Πριν.. ε, ναι. (εννοεί τη γραφική παράσταση) είπαμε ότι σε κάθε x αντιστοιχίζεται ένα y και όσο αλλάζει το x αλλάζει και η	Αντιστοιχία και συμμεταβολή (επίπεδο 3 και 4) από γραφική

τιμή ας πούμε στην συνάρτηση. Ταυτόχρονα.	παράσταση για τον πίνακα τιμών, σύνδεση αναπαραστάσεων.

Στο τρίτο επεισόδιο, η ομάδα 3 από τη γραφική παράσταση νοηματοδοτούσε τη συνάρτηση ως αντιστοιχία. Στη συνέχεια, όταν ερωτήθηκαν για τον πίνακα τιμών απάντησαν ανατρέχοντας στη γραφική παράσταση. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή γίνεται μια σύνδεση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης και περιγραφή της συμμεταβολής με μαθηματικούς όρους. Πάλι ο όρος «ταυτόχρονα» δίνει έμφαση στο νόημα της συμμεταβολής.

Σύνοψη ενότητας μετάβασης από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή

Στα δύο πρώτα επεισόδια αναδείχθηκε ο κρίσιμος ρόλος που έπαιξε η αλληλεπίδραση των μαθητών των ομάδων 2 και 3 με τον πίνακα τιμών στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη χρήση αλγεβρικών όρων (επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής). Συγκεκριμένα, ο πίνακας τιμών έπαιξε σπουδαίο ρόλο όπως φάνηκε στο επεισόδιο 1, όπου οι μαθητές από την ερμηνεία του πίνακα έφτασαν στο επίπεδο 3 κατανόησης της συμμεταβολής. Στο επεισόδιο 2 που αφορά στην ομάδα 3, ο μαθητής Μ5 πριν τη νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεταβλητών με τη χρήση αλγεβρικών όρων είχε διατυπώσει τα νοήματα «αντιστοιχίας» και «σχέσης». Συμπερασματικά, φαίνεται η πορεία νοημάτων της ομάδας 3 και η κατάκτηση ανώτερων σταδίων της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

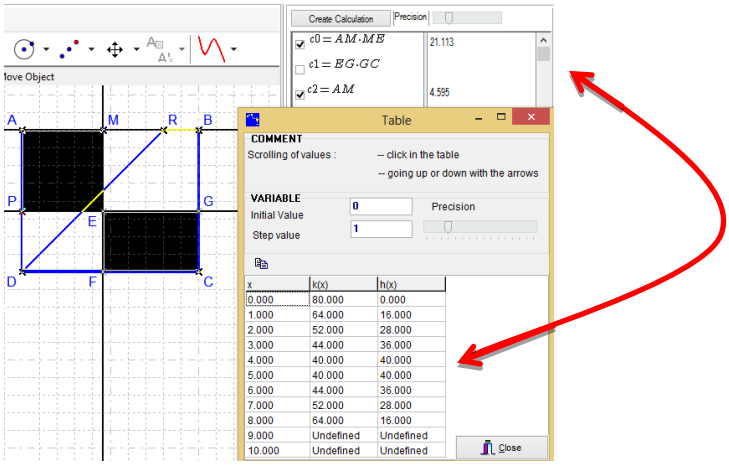
Ο πίνακας τιμών εκτός από την επίτευξη των επιπέδων 1,2,3 της συμμεταβολής, προσέφερε στην επίλυση των δραστηριοτήτων από τους μαθητές, καθώς από την παρατήρηση των τιμών του οι μαθητές σε όλες τις ομάδες ανακάλυπταν στοιχεία απαραίτητα για την απάντηση στα διάφορα ερωτήματα των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, με τη χρήση του επαναϋπολογισμού βήματος και την αύξηση ακρίβειας, οι μαθητές αντιλαμβάνονταν ποια θα είναι η θέση του ελεύθερου σημείου απαντώντας στα ερωτήματα κάθε δραστηριότητας.

Η γραφική παράσταση συνεισέφερε στην ενίσχυση της κατανόησης της συμμεταβολής, όπως φάνηκε στο τρίτο επεισόδιο. Οι μαθητές έφτασαν στο επίπεδο 3 κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέσα από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εκτός από τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής η γραφική παράσταση συνεισέφερε στις απαντήσεις για την επίλυση των δραστηριοτήτων. Οι απαντήσεις των μαθητών αφορούν τις παρατηρήσεις τους από τα γραφήματα των συναρτήσεων, καθώς για την αλγεβρική απάντηση και τον προσδιορισμό των σημείων μεγίστου ή ελαχίστου συνάρτησης απαιτούνται γνώσεις Απειροστικού Λογισμού.

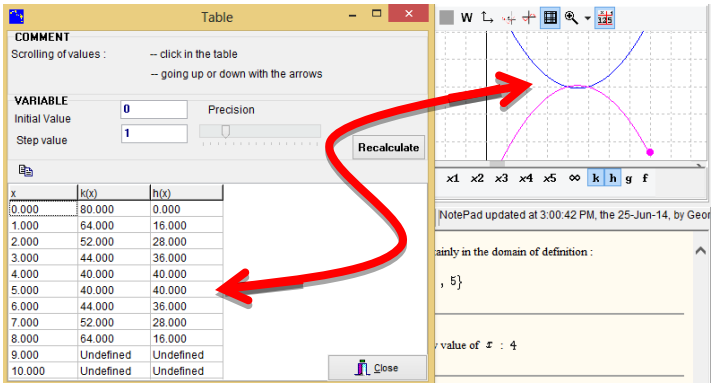
5.2.4. Η νοηματοδότηση της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις (επίπεδο 4 συμμεταβολής)

Σε αυτή την ομάδα επεισοδίων η νοηματοδότηση της συμμεταβολής με τη χρήση μαθηματικών όρων εμφανίζεται μέσα από τη σύνδεση διαφόρων αναπαραστάσεων. Δεν κατάφεραν όλες οι ομάδες να φτάσουν στο επίπεδο συνδέσεων αναπαραστάσεων με την έννοια της συμμεταβολής. Συγκεκριμένα, οι ομάδες 2 και 3 κατάφεραν να πραγματοποιούν μεταβάσεις μεταξύ του πίνακα τιμών και του παραθύρου μεταβλητών, όπου δημιουργείται μια συνάρτηση, περιγράφοντας ταυτόχρονα τον πίνακα τιμών με όρους από το παράθυρο δημιουργίας συναρτήσεων. Σε αυτή την ομάδα επεισοδίων έπαιξε μεγάλο ρόλο το παράθυρο «πίνακας τιμών» και ο τρόπος που οι μαθητές συνδύασαν τον πίνακα τιμών με τις μεταβλητές c0, c1 και c2 που είναι στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών και συντελούν στη δημιουργία συναρτήσεων.



Σχήμα 37: Σύνδεση αναπαραστάσεων (παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο μεταβλητών).

Επίσης, η ομάδα 3 πραγματοποίησε σύνδεση αναπαραστάσεων του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης για την περιγραφή της συμμεταβολής, όπως είδαμε στην προηγούμενη ομάδα επεισοδίων.



Σχήμα 38: Σύνδεση αναπαραστάσεων (παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο γραφικών παραστάσεων).

Στο πρώτο επεισόδιο που ακολουθεί, επιχειρείται μία σύγκριση της συνεισφοράς του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης. Στο δεύτερο επεισόδιο, αναδεικνύεται ο ρόλος του πίνακα ως καθοριστικός για την σύνδεση αναπαραστάσεων με όρους συμμεταβολής.

Επεισόδιο 1: Σύγκριση της δυναμικής του πίνακα τιμών και γραφικής παράστασης

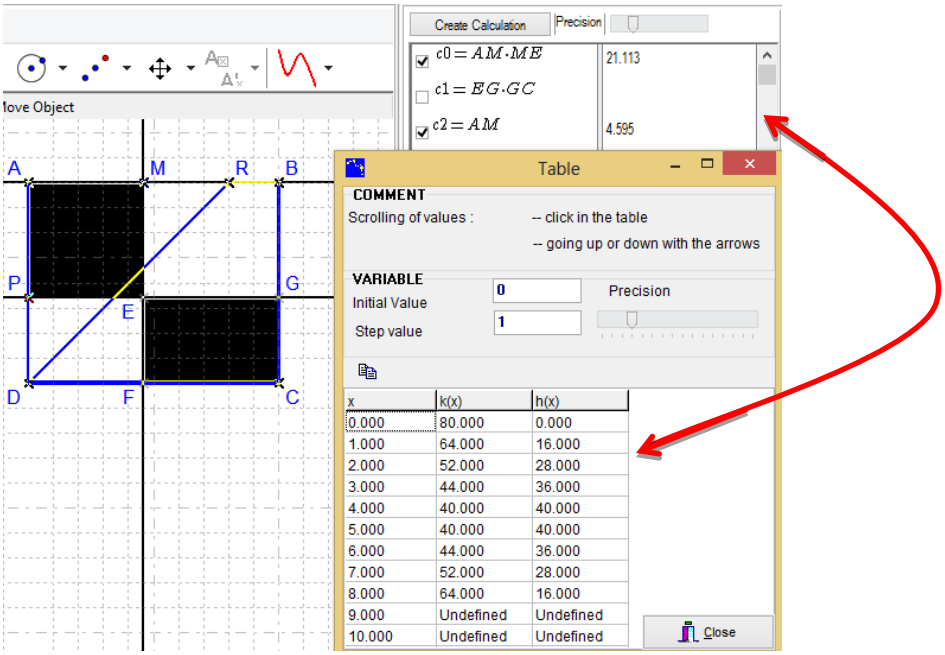
Στο πρώτο επεισόδιο από την ομάδα 3, στη Δραστηριότητα 2, φαίνεται η δυναμική του πίνακα τιμών σε αντίθεση με την γραφική παράσταση όταν δε χρησιμοποιείται η λειτουργία του «κινούμενου στόχου». Οι μαθητές στον πίνακα τιμών με δικά τους λόγια περιέγραφαν τη συμμεταβολή. Αντίθετα, οι μαθητές μέσα από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης κατέληγαν στην συνάρτηση ως «αντιστοιχία». Ο μαθητής Μ5 έκανε μια προσπάθεια να συνδέσει τις αναπαραστάσεις (του πίνακα τιμών και του παραθύρου μεταβλητών με το c1), άρα για την ομάδα 3 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι έφτασε στο επίπεδο 4 συμμεταβολής.

Ε: Ας πατήσουμε πρώτα τον πίνακα. Οκ. Τι είναι αυτό;	Ομάδα 3, Δραστηριότητα 2, στίχοι 398-410.
Μ6: Ξανά βλέπουμε πως μεταβάλλεται το εμβαδόν σε σχέση με το που βρίσκεται το Μ, το μήκος του ΑΜ.	Σχέση και συμμεταβολή.
Μ5: Άρα εδώ παρατηρούμε ότι έτσι όπως, όσο μεταβάλλεται το Μ φτάνει στη c1.	Πλησιάζουν οι μαθητές το επίπεδο 4 συμμεταβολής.
Μ6: Μεγαλώνει μέχρι ένα σημείο. Ναι, φτάνει μέχρι ένα σημείο και μετά ξανά μικραίνει.	Λεκτική περιγραφή.
Μ5: Μετά μικραίνει.	
Ε: Άρα τι παρατηρούμε ότι κάνουν αυτά τα 2 τα πράγματα. Δηλαδή τι παρατηρούμε ότι κάνει το άθροισμα των εμβαδών και η μετακίνηση.. το μήκος του ΑΜ.	
Μ5: Μεταβάλλονται ανάλογα μέχρι ένα σημείο. Ανάλογα.. μεταβάλλονται τέλος πάντων..	Συμμεταβολή Επίπεδο 1.
Ε: Μαζί.	
Μ5: Ναι, μαζί μέχρι την μία θέση, το 4,8 και μετά. Βασικά γενικά όντως μεταβάλλονται μαζί. Κάθε..	Τελικά καταλήγει στο ότι μεταβάλλονται μαζί (επίπεδο 2).
Ε: Ωραία, ωραία. Αυτό φαίνεται μόνο από τον πίνακα ή και από το γράφημα;	
Μ6: Και από την γραφική παράσταση γιατί βλέπουμε ότι φτάνουν σε ένα μέγιστο κατά κάποιο υψηλότερο σημείο και μετά βλέπουμε ότι ξεκινάει πάλι και πέφτει.	
Ε: Ναι. Ναι.	
Μ5: Και για κάθε x έχουμε ένα y ας πούμε όπου $y = 5$.	Στο γράφημα η δικαιολόγηση είναι και από τον ορισμό – αντιστοιχία.

Στο επεισόδιο που προηγήθηκε οι μαθητές της ομάδας 3, μέσα από την ερμηνεία του πίνακα τιμών πραγματοποιούσαν σύνδεση αναπαραστάσεων καθώς χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές c1 του παραθύρου υπολογισμών. Αντίθετα με τον πίνακα τιμών, ο μαθητής M5 της ομάδας 3 οδηγήθηκε στην συνάρτηση ως «αντιστοιχία», μέσα από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Μόνο για τη μαθήτρια M6 η μεταβολές έγιναν αντιληπτές και από τις δύο αναπαραστάσεις (στίχοι 399 και 408), χωρίς όμως να αναφέρει τη συμμεταβολή.

Επεισόδιο 2: Ο καθοριστικός ρόλος του πίνακα τιμών για την νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής κατά τις συνδέσεις διαφορετικών αναπαραστάσεων.

Οι μαθητές της ομάδας 2 μέσα από τη συνεργασία τους κατέληξαν στη δημιουργία συνάρτησης και την περιγραφή της ως συμμεταβολής. Στο δεύτερο επεισόδιο η συνάρτηση κατά την ερμηνεία της αμέσως μετά τη δημιουργία της, δεν αναφερόταν ως «σχέση» ή ως «αντιστοιχία». Αντίθετα με τις άλλες ομάδες, η ομάδα 2 από τη δημιουργία συνάρτησης στο λογισμικό νοηματοδότησε μία φορά τη συνάρτηση ως συμμεταβολή. Μέσα από την ερμηνεία της από τον πίνακα τιμών οι μαθητές της ομάδας 2 μετακινούνται σε ανώτερα επίπεδα συμμεταβολής (επίπεδα 3 και 4), καθώς η μαθήτρια M4 περιγράφει τη συνάρτηση με αλγεβρικούς όρους, συνδέοντας αναπαραστάσεις. Η επίτευξη του επιπέδου 4 κατανόησης της συμμεταβολής εμφανίστηκε μια φορά ακόμα στην ομάδα 2, συνδέοντας αυτές τις αναπαραστάσεις.



Σχήμα 39: Σύνδεση αναπαραστάσεων (παράθυρο πίνακα τιμών και παράθυρο μεταβλητών).

E: Όχι δεν θέλουμε κάτι άλλο. Άρα, πάμε να δούμε τι θέση θα πάρει το c0 και το c2. Και βάζεις το c0 εκεί και σε ρωτάω γιατί.	Ομάδα 2, Δραστηριότητα 2, στίχοι 213-223.
M3: Γιατί πάλι είναι το ίδιο με το c1. Ανάλογα με τη θέση του M..	Ερμηνεία με συμμεταβολή – δεν αναφέρουν σχέση.
M4: Το μήκος του AM δηλαδή..	
M3: Το μήκος του AM, έχουμε διαφορετικά εμβαδά για το τετράγωνο.	
E: Τέλεια τέλεια. Μπράβο παιδιά.	
M4: Πάμε στον πίνακα να δούμε αν είναι πιθανή η συνάρτηση.	
E: Ωραία.	
M4: Παρατηρούμε πάλι ότι για το c2 που αλλάζει, μεταβάλλεται και το c0.	Νοήματα συμμεταβολής – επίπεδο 3 και 4.
E: Ωραία.	
M3: Δεν έχουμε κάπου 2 τιμές, οπότε είναι.	
E: Και πάμε τώρα να το φτιάξουμε.	

Το συμπέρασμα που προκύπτει από το παραπάνω επεισόδιο, είναι ότι οι μαθητές όταν δημιουργούν συνάρτηση και τη νοηματοδοτούν ως συμμεταβολή, ανεβαίνουν επίπεδο κατανόησης με τη βοήθεια του πίνακα τιμών φτάνοντας στο επίπεδο 3 και 4 κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Για την ομάδα 2 σημειώθηκε η χαρακτηριστική ευκολία στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων με την έννοια της συμμεταβολής. Στον παραπάνω διάλογο φάνηκε ο ρόλος των εργαλείων και συγκεκριμένα του πίνακα τιμών για την επίτευξη των ανώτερων επιπέδων κατανόησης της συμμεταβολής. Επίσης, η χρήση του ψηφιακού περιβάλλοντος Casyopée ήταν καθοριστική, καθώς σε προηγούμενες έρευνες χωρίς τη χρήση λογισμικών η έρευνα για τη συμμεταβολή είχε περισσότερο ποσοτικά χαρακτηριστικά, ενώ στην παρούσα έρευνα η συμμεταβολή αναλύεται μελετώντας ποιοτικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης, μελετώντας τις συνδέσεις των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη συμμεταβολή.

Σύνοψη των συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης

Ο ρόλος των διαφορετικών αναπαραστάσεων φάνηκε να είναι καθοριστικός από τα δύο επεισόδια της τέταρτης ομάδας επεισοδίων. Η σύνδεση αναπαραστάσεων με όρους συμμεταβολής παρατηρείται κατά την ερμηνεία του πίνακα τιμών και τη σύνδεσή του πίνακα τιμών με διαφορετικές αναπαραστάσεις. Όπως προκύπτει από τα επεισόδια, η συνεισφορά των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη Δραστηριότητα 2 είναι καθοριστική για τις συνδέσεις που κάνουν οι μαθητές μεταξύ του πίνακα τιμών και του παραθύρου μεταβλητών ή του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης. Η δυνατότητα μεταβάσεων σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και οι συνδέσεις αναπαραστάσεων είναι προαπαιτούμενο για την επίτευξη του επιπέδου 4 κατανόησης της συμμεταβολής από τις ομάδες 2 και 3. Έτσι ο πίνακας τιμών, οι μεταβλητές του παραθύρου υπολογισμών και η γραφική παράσταση έπαιξαν σπουδαίο ρόλο κατά τη μετάβαση

μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Η δυνατότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων του λογισμικού Casyopée προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές των ομάδων για να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή.

Σύνοψη ομάδων επεισοδίων

Συνοψίζοντας τα παραπάνω είναι σαφές ότι οι ομάδες εμφανίζουν ομοιότητες και διαφορές στη σύγκριση που έγινε μεταξύ τους. Ο ρόλος του πίνακα τιμών χαρακτηρίζεται καθοριστικός για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, αλλά παρόμοια θέση έχει και η γραφική παράσταση στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται ο «κινούμενος στόχος». Η συνάρτηση ως «σχέση» περιγράφει την αλληλεξάρτηση μεταξύ των μεγεθών, επομένως σε πολλές περιπτώσεις μετά από τη «σχέση» εμφανίζεται η συμμεταβολή μέχρι το επίπεδο 2. Επίσης, μέσα από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης χωρίς τη χρήση του «κινούμενου στόχου» οι μαθητές οδηγούνται στη συνάρτηση ως αντιστοιχία ή με την εμμονή στο μονοσήμαντο και για τις δύο μεταβλητές σε 1-1 αντιστοιχία. Οι ομάδες 1 και 3 κατάφεραν να προσεγγίσουν την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέχρι το επίπεδο 2, κυρίως από τη χρήση του πίνακα τιμών. Η ομάδα 3 έφτασε επιπλέον στα επίπεδα 3 και 4 κυρίως από την ερμηνεία του πίνακα τιμών και έκανε σύνδεση με το παράθυρο γραφικών παραστάσεων. Αντίθετα, η ομάδα 2 νοηματοδότησε τη συνάρτηση ως συμμεταβολή φτάνοντας στο επίπεδο 3 με την ερμηνεία του πίνακα τιμών αλλά και της γραφικής παράστασης με τη βοήθεια του κινούμενου στόχου. Η ομάδα 2 κατέληξε στο επίπεδο 4 μέσα από τη μετάβαση από τον πίνακα τιμών στο παράθυρο των μεταβλητών. Συμπερασματικά, οι ομάδες 2 και 3 έφτασαν στο επίπεδο 4 κατανόησης της συμμεταβολής, δηλαδή πραγματοποιούσαν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, σε αντίθεση με την ομάδα 1, που δεν χρησιμοποίησε τις δυνατότητες του λογισμικού στον ίδιο βαθμό και έδωσε ιδιαίτερη βαρύτητα στην εξάρτηση μεγεθών και όχι στη συμμεταβολή.

Το λογισμικό Casyopée βοήθησε προς αυτή την κατεύθυνση, υποστηρίζοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις για τη συνάρτηση. Οι επιπρόσθετες δυνατότητες του λογισμικού Casyopée (κινούμενος στόχος, πίνακας τιμών, δημιουργία συναρτήσεων, παράθυρο μεταβλητών) το καθιστούν εργαλείο με ιδιαίτερη σημασία για την προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία με τη βοήθεια του λογισμικού Casyopée και με τρεις κατάλληλα διαμορφωμένες μαθηματικές δραστηριότητες μελετήθηκε η δημιουργία νοημάτων για τη συμμεταβολή από τρεις ομάδες μαθητών Β΄ Λυκείου. Μετά από δίωρη εξοικείωση με το λογισμικό καταγράφηκε η τρίωρη ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες. Η έννοια της συνάρτησης προέκυψε μέσα από τη μοντελοποίηση γεωμετρικών προβλημάτων. Στο πλαίσιο αυτό μελετήθηκε η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της παρούσας έρευνας, αφορά στις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου, στο πλαίσιο της μοντελοποίησης γεωμετρικών προβλημάτων με τη χρήση του ψηφιακού εργαλείου Casyopée. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αφορά στη συνεισφορά του λογισμικού Casyopée στην νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, όπου κυρίαρχο ρόλο έχουν οι δυνατότητες που προσφέρονται από το λογισμικό, όπως η δημιουργία συνάρτησης από συμμεταβαλλόμενα μεγέθη.

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, μελετήθηκαν τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια εμπλοκής τους με τις δραστηριότητες. Διαπιστώθηκαν τρεις κατηγορίες νοημάτων που δημιουργούν οι μαθητές σχετικά με τη συνάρτηση και είναι οι: «σχέση», «αντιστοιχία» και «συμμεταβολή». Η μελέτη των κατηγοριών αυτών ως προς το περιεχόμενο οδήγησε στον εντοπισμό υποκατηγοριών. Το νόημα της συμμεταβολής μελετήθηκε ποιοτικά ως προς το επίπεδο κατανόησης της συμμεταβολής από τους μαθητές, σε αντίθεση με προηγούμενες έρευνες που εστιάζονταν κυρίως σε ποσοτικά χαρακτηριστικά της σκέψης των μαθητών. Η νοηματοδότηση της συμμεταβολής διακρίθηκε σε τέσσερα επίπεδα που είναι ιεραρχικά δομημένα ως προς το επίπεδο κατανόησης.

Συγκεκριμένα, τα τέσσερα επίπεδα είναι:

1) Η νοηματοδότηση της συνάρτησης διαισθητικά.
2) Η νοηματοδότηση της συνάρτησης αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών.
3) Η νοηματοδότηση συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό.
4) Η νοηματοδότηση της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης, το οποίο σημαίνει βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συμμεταβολής.

Από την χρονική εξέλιξη των νοημάτων των μαθητών ανά δραστηριότητα προέκυψαν ποικίλα νοήματα για την έννοια της συνάρτησης, τα οποία καταγράφηκαν σε Πίνακες. Στους Πίνακες αυτούς φαίνεται πως νοηματοδότησαν οι μαθητές τη συνάρτηση σε κάθε δραστηριότητα και από πού προήλθε το κάθε νόημα.

Διακρίθηκαν τέσσερις ομάδες επεισοδίων για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Η πρώτη ομάδα αφορά στην νοηματοδότηση της αλληλεξάρτησης μεγεθών. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές πριν δημιουργήσουν συνάρτηση στο λογισμικό Casyopee νοηματοδοτούσαν εύκολα την αλληλεξάρτηση μεγεθών και σε ορισμένες περιπτώσεις τη συμμεταβολή μεγεθών διαισθητικά. Η δεύτερη ομάδα επεισοδίων αφορά στον καθορισμό από τους μαθητές της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η ανάλυση των επεισοδίων ανέδειξε το πρόβλημα καθορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι μαθητές ενώ παρατηρούν εύκολα τις ποσότητες που συμμεταβάλλονται, δυσκολεύονται στο να καθορίσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή. Η τρίτη ομάδα επεισοδίων αφορούσε τη μετάβαση από την αλληλεξάρτηση μεγεθών στη συμμεταβολή. Παρατηρήθηκε η ποικιλία νοημάτων που προκύπτουν και η σημασία της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τον τρόπο ορισμού της στο λογισμικό Casyopée. Προκειμένου οι μαθητές των ομάδων να νοηματοδοτήσουν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή αναδεικνύεται η συνεισφορά των πολλαπλών αναπαραστάσεων του ψηφιακού εργαλείου Casyopée. Τέλος η τέταρτη ομάδα επεισοδίων ήταν η νοηματοδότηση της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Σε αυτή την ομάδα επεισοδίων διαπιστώθηκε η κατάκτηση μέχρι και του επιπέδου 4 κατανόησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής, από δύο ομάδες.

Αξίζει να σημειωθεί ο κρίσιμος ρόλος του λογισμικού Casyopée στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Κατά τη διάρκεια των επεισοδίων αναδεικνύεται η συνεισφορά των πολλαπλών αναπαραστάσεων που διαθέτει το πρόγραμμα Casyopée (συμβολική μορφή, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης. Το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να μεταβαίνουν μεταξύ αναπαραστάσεων με ιδιαίτερη ευκολία. Ο ρόλος του πίνακα τιμών κατά τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολή είναι κρίσιμος, καθώς οι μαθητές παρατηρούν την αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο ποσοτήτων και στη συνέχεια, αντιλαμβάνονται εύκολα τη συμμεταβολή κατά τη νοηματοδότηση της συνάρτησης. Το παραπάνω αποτέλεσμα ενισχύει την προϋπάρχουσα έρευνα, σύμφωνα με την οποία ο πίνακας τιμών προσφέρεται για την αναγνώριση της συμμεταβολής. Επίσης, ο ρόλος της γραφικής παράστασης εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Από τη μία, οι μαθητές μελετώντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, τη νοηματοδοτούν ως αντιστοιχία. Από την άλλη, όταν οι μαθητές εκμεταλλεύονται τις δυνατότητες του λογισμικού και στην συγκεκριμένη περίσταση τον «κινούμενο στόχο», ο οποίος προσφέρεται από το περιβάλλον Casyopée, καταλήγουν σε νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, σχεδόν σε όλα τα επεισόδια.

Ο ρόλος του πίνακα τιμών κρίνεται καθοριστικός για τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς η ομάδα 2 πραγματοποίησε δύο φορές σύνδεση μεταξύ του πίνακα τιμών και των μεταβλητών στοιχείων (c0 και c2), που συνιστούν συνάρτηση στο λογισμικό, ενώ η ομάδα 3 έκανε προσπάθεια σύνδεσης των δύο παραπάνω αναπαραστάσεων. Η ομάδα 3 έκανε σύνδεση αναπαραστάσεων του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης με την έννοια της συμμεταβολής.

Συμπληρωματικά για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με τη συνεισφορά του λογισμικού στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, παρατηρήθηκε ότι έγινε ερμηνεία της συνάρτησης από διαφορετικές αναπαραστάσεις με όρους συμμεταβολής μεγεθών. Από τη σύγκριση των νοημάτων που δημιουργούν οι μαθητές κατά τη δημιουργία συναρτήσεων, κατά τη χρήση του πίνακα τιμών και κατά τη μελέτη της γραφικής παράστασης, προέκυψε ότι:

1) Η δημιουργία και ερμηνεία της συνάρτησης συνήθως δεν οδηγεί στη συμμεταβολή. Συνήθως κάθε ομάδα μαθητών οδηγείται σε «σχέση» ή «αντιστοιχία». Αν και οι μαθητές πρόσφατα έχουν διατυπώσει διαισθητικά τη συμμεταβολή μεγεθών, ωστόσο δεν οδηγούνται στην περιγραφή της δημιουργίας της συνάρτησης με όρους συμμεταβολής. Όμως, σε περίπτωση που από το παράθυρο δημιουργίας της συνάρτησης οι μαθητές οδηγηθούν στη συμμεταβολή, τότε στη συνέχεια θα κατακτήσουν ανώτερα επίπεδα της συμμεταβολής.
2) Από τον πίνακα τιμών προκύπτει τις περισσότερες φορές η συμμεταβολή μεγεθών αρχικά στα κατώτερα επίπεδα κατανόησης της συμμεταβολής και σταδιακά οι μαθητές μεταφέρονται σε ανώτερα επίπεδα.
3) Από την γραφική παράσταση οι μαθητές συνήθως νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως 1-1 αντιστοιχία ή ως αντιστοιχία, ενώ η συμμεταβολή προκύπτει τις περισσότερες φορές με τη χρήση του «κινούμενου στόχου».
4) Η εμφάνιση μετρήσεων, ο δυναμικός χειρισμός αντικειμένων και οι συνδέσεις αναπαραστάσεων (παράθυρο μεταβλητών, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση) που διαθέτει το λογισμικό Casyopée, συμβάλλουν χαρακτηριστικά στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί διερεύνηση των επιπέδων κατανόησης της συμμεταβολής, με χρήση ποσοτικής έρευνας. Επιπλέον θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί έρευνα σε φοιτητές για να παρατηρηθεί αν κατασκευάζουν παρόμοια νοήματα για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή ή εμφανίζεται διαφοροποίηση ως προς τα επίπεδα κατανόησης. Τέλος, ιδιαίτερη επιθυμητή θα είναι η εφαρμογή του λογισμικού Casyopée με ελληνική μετάφραση σε μελλοντικό δείγμα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the dynamic role of representations, *Teaching Mathematics and its Applications*, 31 (1), pp. 20-30. ISSN 1471-6976.

Ackermann E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. Future of learning group.

Artigue, M. & Lagrange, J.-B. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education, 7*, pp. 114–162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.

Corbin, J., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13 (1), pp. 3–21.

Davis, P. J. and Hersh, R. (1981). The Mathematical Experience. Houghton Mifflin, Boston and New York.

Dreyfus, T. (1993). 'Didactic design of computer-based learning environments',Keitel,C.,& Ruthven, K. (Eds), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, pp. 100–130.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In Harel, G & Dubinsky, E., *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America. 85–106.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties, in *Advanced mathematical thinking*, D. Tall, Editor, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991, p.140-152.

Eisenberg, T. and Dreyfus, T. (1991). 'On the reluctance to visualize in mathematics', Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, Providence, RI, pp. 25–38.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research. New York: Aldine.

Hillel, J. and Kieran, C. (1987). ‘Schemas used by 12-year-olds in solving selected turtle geometry tasks’, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8 (1.2) pp. 61–102.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *The Journal of Mathematical Behavior, 27,* pp.123-134.

Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in mathematics learning and problem solving* (147-158), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston, VA: NCTM.

Koklu, O., Topcu, A. (2012). Effect of Cabri-assisted instruction on secondary school students’ misconceptions about graphs of quadratic functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 43, pp. 999-1011.

Lagrange, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching precalculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4(1) 51-81.

Lagrange, J.-B. (2005). Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 143–189.

Lagrange, J.-B. (2010). 'Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41: 2, pp. 243 — 255

Lagrange, J.-B., & Minh, T. K. (2010). Approaching functions via multiple representations: a teaching experiment with Casyopée. In *Proceedings of the 6th CERME Conference* (pp. 559-568), Lyon, France.

Lagrange, J.-B., & Psycharis, G. (2013). Exploring the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis From Two Traditions of Research. *Paper presented at CERME8 conference*, July 6th-10th, 2013, Manavgat-Side, Antalya – Turkey.

Lagrange, J.-B., & Psycharis, G. (in press). Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. *Technology, Knowledge and Learning*.

Lagrange, J.-B. (2014). A Functional Perspective on the Teaching of Algebra: Current Challenges and the Contribution of Technology. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, Vol. 21 Issue 1, p. 3

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 194–214.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996b). Young children invent methods of proof: the gang of four. In: P. Nesher, L. P. Steffe, P. Cobb, B. Greer, & J. Golden (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431–447). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maher, C. A. (2002). How students structure their own investigations and educate us: what we've learned from a fourteen year study. In: A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the Twenty-Sixth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 31–46). Norwich, UK: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Minh, T. K. (2011). Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves. Διδακτορική διατριβή, Université Paris Diderot, Διαθέσιμη σε: http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=jhpjm7e55u9ne50vvmvudorjf2&view_this_doc=tel-00658680&version=1

Minh, T. K. (in press). Approaching representations of functions with Casyopée. http://www.academia.edu/1040788/Approaching_representations_of_functions_with_Casyopee

Moschkovich, J., Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*, pp. 69–100. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Noss, R. and Hoyles, C. (1996b). Windows on Mathematical Meanings, Dordrecht, Kluwer.

Noss, R., Healy L. and Hoyles C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic, *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2): 203-233

Papert, S. (1980). Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas. New York: Basic books.

Papert, S (1991). Preface, In: I. Harel & S. Papert (Eds), Constructionism, Research reports and essays, 1985-1990 (p. 1), Norwood NJ.

Ponte, J. (1992). 'The history of the concept of function and some educational implications' *The mathematics Educator*, Vol. 3, 2, pp. 3-8.

Powell A. B., Francisco J. M., Maher C. A. (2003), An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data, The Robert B. Davis Institute for learning, Graduate School of Education, Rutgers University, 10 Seminary Pl., New Brunswick, NJ, USA, *Journal of Mathematical Behavior*, 22 pp. 405 – 435

Santos, E. (2000). The use of representations as a vehicle to promote students' mathematical thinking in problem solving. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, *7*(3), 193–212.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, 332, 259–281.

Sierpinska, A. (1985). La notion d' obstacle épistémologique dans l' enseignement des mathématiques, *Actes de la 37e Rencontre* CIEAEM, pp. 73–95.

Sierpinska, A. (1988b). Sur un programme de recherche lié a la notion d' obstacle épistémologique. In N.Bednarz & C.Garnier (Eds.), *Construction des saviors. Obstacles et conflicts*. Montréal: Agence d' Arc.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function, in E. Dubinsky and G. Harel (eds.), The Concept of Function. *Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, vol. 25,* pp. 25–58.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in mathematics. London: The Falmer Press.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research. *Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. (Second Edition).* London, United Kingdom: SAGE.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* pp. 151-169.

Tall, D. (1993). Technology and mathematics education; computer environments for the learning of mathematics, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* pp. 189–199.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1 (Issues in Mathematics Education Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ursini,S. and Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. *Proceedings of the XYIPME Conference*, Lahti, Finland pp 4-254 to 4-26 1.

Van Der Waerden, B.L. (2007). Η Αφύπνιση της επιστήμης (3η έκδοση), Απόδοση στα ελληνικά – επιστημονική επιμέλεια: Γιάννης Χριστιανίδης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics education*, 20(4), 356-266.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Wagner, S., Rachlin, S. & Jensen, R., (1984). Algebra Learning Project: Final Report, Dept. of Math Education, University of Georgia, Athens.

Wilensky, U. (1991). 'Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematics education', Harel, I.,&Papert, S. (Eds.), Constructionism, Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ, pp. 193–204.

Yin, R. K. (1994). Case Study Research. *Design and Methods (Third Edition).* London, United Kingdom: SAGE

Yin, R. K. (2003). Case study research: Design and methods (3rd ed.). Thousand Oaks,CA: Sage.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37-85.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., (2010) ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ) http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A100/489/3185,12906/

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ., (2007) Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ) http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-C104/68/542,2184/

Βανδουλάκης Ι.,Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ. (2010) Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ) http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-A200/293/2065,7177/

Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ., (2007) Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ) http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-B105/372/2488,9539/

Νεγρεπόντης, Σ., & Γιωτόπουλος, Σ., & Γιαννακούλιας, Ε.:(1987). Απειροστικός Λογισμός, Τόμος 1, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.

Τζιώτη, Σ. (2008). *Η Διδασκαλία των Συναρτήσεων στο Γυμνάσιο Μέσω της Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος*. Διπλωματική Διατριβή, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών".

Παπαδοπούλου, Α. (2006). *Γνωστική Εμπλοκή Μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου με την Πολυωνυμική Συνάρτηση Δευτέρου Βαθμού με Συνδυασμένη Χρήση Προσομοιωτή και Υπολογιστικού Αλγεβρικού Συστήματος.* Διπλωματική Διατριβή, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών".