ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαρία Ε. Κανελλοπούλου

Α.Μ. 200719

Επιβλέπων Καθηγητής

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1. Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	……
2. Δέσποινα Πόταρη	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	……
3. Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Ομότιμος Καθηγητής	……

Στους γονείς μου

και

το σύζυγό μου,

που είναι πάντα δίπλα μου και στηρίζουν κάθε προσπάθειά μου

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

• Τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για τις πολύτιμες συμβουλές του, τη συνεχή υποστήριξη και την καθοδήγηση στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αλλά και για το ανθρώπινο ενδιαφέρον και την κατανόησή του σε όλες τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν.

• Την κ. Δέσποινα Πόταρη και τον κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια, οι οποίοι με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

• Τους φίλους Χρήστο, Χρήστο και Χαρά για τις συζητήσεις, τους προβληματισμούς και τις ιδέες που μοιραστήκαμε.

• Τους διδάσκοντες του προγράμματος και τους συμφοιτητές μου για τη διαρκή, πολύπλευρη και εποικοδομητική συνεργασία σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ιούνιος 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ – ABSTRACT……..……..6

ΕΙΣΑΓΩΓΗ……..….8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

Η σημασία του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος στα μαθηματικά και την εξέλιξη τους……...…… 12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

Ο ρόλος των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών……...…….……39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

Η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές…….……...…...76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων από τους καθηγητές…….……....128

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……..……..186

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..188

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τη συμβολή των παραδειγμάτων, των μη παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων στην εξέλιξη και στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Μέσα από την παρουσίαση μίας ευρείας γκάμας ερευνών διαπιστώθηκε ότι τα παραδείγματα συμβάλουν καθοριστικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Τα αντιπαραδείγματα από την άλλη χρησιμοποιούνται για την διάψευση των λανθασμένων ισχυρισμών των μαθητών και τα μη παραδείγματα για να οριοθετήσουν το πεδίο ισχύος μίας έννοιας ή ενός θεωρήματος. Οι μαθητές συχνά καλούνται να δημιουργήσουν προσωπικά παραδείγματα και να εμπλουτίσουν το χώρο παραδειγμάτων τους. Με τον τρόπο αυτό οικειοποιούνται τη νέα γνώση και κατανοούν σε βάθος τα μαθηματικά αντικείμενα. Οι εκπαιδευτικοί επιβάλλεται να παρουσιάζουν ποικιλία παραδειγμάτων στους μαθητές, προς αποφυγή λανθασμένων γενικεύσεων. Συχνά σχεδιάζουν οι ίδιοι τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουν στην τάξη, μία εργασία εξαιρετικά απαιτητική που προϋποθέτει άριστη γνώση της θεωρίας, διδακτική εμπειρία και ενημέρωση για τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών. Ενώ στις μελέτες που παρουσιάζονται η συμβολή των αντιπαραδειγμάτων και των μη παραδειγμάτων είναι καταλυτική για τη διδασκαλία, οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί δεν φαίνονται εξοικειωμένοι με τη χρήση τους. Συνήθως τα αντιμετωπίζουν ως εξαιρέσεις, χωρίς ανασκευαστική ισχύ, που λειτουργούν υποστηρικτικά στη θεωρία.

Λέξεις – κλειδιά : Παράδειγμα, αντιπαράδειγμα, μη παράδειγμα, χώροι παραδειγμάτων, κατανόηση, διδασκαλία.

ABSTRACT

The present work looks into the contribution of the examples, non examples and counterexamples to the teaching of Mathematics. Through the presentation of a wide variety of inquiries, it has been found out that examples contribute decisively to the understanding of Mathematics concepts. From the other hand the counterexamples are used for the contradiction of the wrong claims of the students while the non examples are used to continue the scope of a concept or a theorem. Students are often asked to create personal examples and enrich their field of examples. In this way they appropriate the new knowledge and deeply comprehend the mathematical matters. Teachers are imposed to present a variety of examples to their students in order to avoid wrong generalizations. They often pre-plan by themselves the examples they are going to use in classroom, an especially demanding work that presupposes excellent knowledge of theory, teaching experience and awareness of pre – existing learning of students. Although in the presented studies the contribution of the counterexamples and the non examples is catalytic for the teaching procedure, students and teachers aren't familiar with their use. They usually see them as exceptions, with no reconstructive force, that just support theory.

Key words: Example, counter example, non example, example space, teaching, understanding.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κεντρική θέση των παραδειγμάτων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών έχει από καιρό αναγνωριστεί και πολλές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί για τη σπουδαιότητα και το σημαντικό τους ρόλο. Τα παραδείγματα θεωρούνται ως «εικόνες των ιδεών και αρχών» (Watson & Mason, 2005) και είναι ένα σημαντικό συστατικό εξειδικευμένης γνώσης. Χρησιμοποιούνται για να επαληθεύσουν περιπτώσεις, να παρουσιάσουν αλγορίθμους και διαδικασίες, και να φανερώσουν ειδικές περιπτώσεις που ταιριάζουν στις απαιτήσεις του ορισμού (Rissland, 1991). Επιπλέον τα παραδείγματα συντελούν στη θεμελίωση και την εξερεύνηση νέων ιδεών και ελέγχουν το ρόλο των περιορισμών. Όπως συμβαίνει και με τη φυσική γλώσσα, το νόημα προκύπτει από τις περιπτώσεις που συναντούμε κατά τη χρήση, έτσι τα παραδείγματα αποτελούν το μέσο προσέγγισης αφηρημένων ιδεών αλλά και το μέσο επικοινωνίας των μαθητών με τα μαθηματικά.

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται αρχικά μία ιστορική ανασκόπηση της χρήσης παραδειγμάτων αλλά και του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Παρουσιάζονται αναλυτικά, μέσω των ιστορικών περιπτώσεων που περιγράφονται στο βιβλίο του Lakatos, μέθοδοι μαθηματικής ανακάλυψης, όπως *η μέθοδος εκδίωξης των τεράτων, η μέθοδος αποκλεισμού των εξαιρέσεων και η μέθοδος των αποδείξεων και ανασκευών.* Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Euler για τα πολύεδρα και του θεωρήματος του Cauchy για τη συνέχεια του ορίου κάθε συγκλίνουσας σειράς συνεχών συναρτήσεων, γίνεται εμφανής ο τρόπος αντιμετώπισης των αντιπαραδειγμάτων που αρχικά χαρακτηρίζονταν ως ¨τέρατα¨ και αποκλείονταν. Στη συνέχεια με τη μέθοδο του αποκλεισμού των εξαιρέσεων, επιχειρούνταν η εύρεση ενός ασφαλούς πλαισίου ισχύος των θεωρημάτων και ο χαρακτηρισμός των αντιπαραδειγμάτων ως εξαιρέσεων. Τέλος, με τη μέθοδο των αποδείξεων και ανασκευών, που θεωρείται και η πιο εκλεπτυσμένη μέθοδος, γίνεται ανάλυση της απόδειξης με σκοπό να βρεθεί το κρυμμένο λήμμα και να ενσωματωθεί στην αρχική εικασία. Με τη

βοήθεια της τελευταίας μεθόδου γίνεται αναφορά στην αξία της απόδειξης, που μπορεί να αποδεικνύει ακόμη και όταν η αρχική εικασία είναι ψευδής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται ο διαχωρισμός ανάμεσα στα παραδείγματα, στα αντιπαραδείγματα και στα μη- παραδείγματα, καθώς και στις υποκατηγορίες αυτών. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στους χώρους παραδειγμάτων και στον τρόπο που συμβάλλουν στην κατανόηση μιας έννοιας. Ο χώρος παραδειγμάτων είναι συλλογές από παραδείγματα που πληρούν μία συγκεκριμένη λειτουργία, στην οποία κάποιος έχει πρόσβαση. Σκοπός κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, είναι οι μαθητές να διευρύνουν το χώρο παραδειγμάτων τους και να αναγνωρίζουν μία απεικόνιση ως αντιπρόσωπο μίας ευρύτερης κατηγορίας, χωρίς να της προσδίδουν άσχετα χαρακτηριστικά. Προς την κατεύθυνση αυτή οι Watson και Mason (2005) χρησιμοποίησαν τον όρο διαστάσεις της δυνατής αλλαγής, για να αναφερθούν σε χαρακτηριστικά ενός παραδείγματος που οι μαθητές αναγνωρίζουν ως κατάλληλα για αλλαγή χωρίς να χαθεί η γενικότητα και αναφέρεται ως εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής. Για τη διεύρυνση του χώρου παραδειγμάτων των μαθητών ουσιαστικό ρόλο διαδραματίζει η ικανότητά τους να παράγουν οι ίδιοι παραδείγματα αλλά και να μοιράζονται τις ιδέες και τις σκέψεις τους με τους συμμαθητές τους.

Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη *γνωστική σύγκρουση* που μπορεί να προκληθεί σε ένα μαθητή από τα αντιπαραδείγματα, όταν δημιουργείται αντίφαση με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του. Στην εκπαιδευτική διαδικασία επιδιώκεται η γνωστική σύγκρουση ώστε να αρθούν οι πιθανές παρανοήσεις των μαθητών. Οι Zazkis & Chernoff (2008) για την επίλυση της γνωστικής σύγκρουσης εισήγαγαν τις έννοιες των παραδειγμάτων μεταστροφής και των παραδειγμάτων γεφύρωσης. Τα παραδείγματα μεταστροφής δημιουργούν ένα σημείο μεταστροφής στη γνωστική αντίληψη των μαθητών, ενώ τα παραδείγματα γεφύρωσης βοηθούν επιπλέον και στην επίλυση των γνωστικών συγκρούσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, μέσα από την παρουσίαση διάφορων μελετών, φαίνεται ο τρόπος που οι μαθητές χρησιμοποιούν τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα κατά την εκμάθηση των μαθηματικών και την ανασκευή λανθασμένων εικασιών. Πολλοί μαθητές για να ανασκευάσουν μία εικασία παρουσίαζαν ευρετικά

επιχειρήματα και αντιπαραδείγματα, ενώ άλλοι τα θεωρούσαν ως εξαίρεση, χωρίς ανασκευαστική ισχύ. Υπήρχαν αρκετοί μαθητές που αναγνώριζαν τον ιδιαίτερο ρόλο των αντιπαραδειγμάτων αλλά δεν μπορούσαν να τα δημιουργήσουν οι ίδιοι.

Σπουδαία στρατηγική διδασκαλίας αποδείχτηκε η δημιουργία παραδειγμάτων από τους μαθητές. Οι Watson & Mason (2005) υποστηρίζουν ότι τα παραδείγματα που είναι φτιαγμένα από τους μαθητές χρησιμεύουν ως ένα ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο για την ενίσχυση της μάθησης των μαθηματικών σε διάφορα επίπεδα. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην ικανότητα των μαθητών να παράγουν παραδείγματα σε άγνωστα γι' αυτούς μαθηματικά αντικείμενα, αλλά και να επιτυγχάνουν υψηλά επίπεδα κατανόησης με τον τρόπο αυτό. Ο τύπος της τάξης, ο τρόπος εργασίας, τα διαθέσιμα εργαλεία, η χρήση της γνώσης που μοιράζεται στην τάξη και ο τρόπος διδασκαλίας των εκπαιδευτικών συνδυάζονται με τη μέθοδο δημιουργίας νέων παραδειγμάτων με σκοπό τη προώθηση νέων εννοιών.

Η επιλογή παραδειγμάτων στα οποία έχουν εκτεθεί οι μαθητές διαδραματίζει καίριο ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητάς τους να γενικεύουν και μέσω αυτού να κατανοούν τα μαθηματικά. Ως τρόποι γενίκευσης προτείνονται παραδείγματα με μεγάλους αριθμούς ή με αριθμητική μεταβολή. Είναι απαραίτητο βέβαια κατά την παρουσίαση παραδειγμάτων στους μαθητές με σκοπό τη γενίκευση, αυτά να είναι πολύ προσεκτικά επιλεγμένα καθώς μία ακατάλληλη επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένες γενικεύσεις.

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αναλύεται η επιχειρηματολογία που αναπτύσσουν οι καθηγητές ώστε να πείσουν τους μαθητές τους για τις λανθασμένες εικασίες τους. Ανάμεσα σε άλλα, ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Από τις μελέτες που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό γίνεται φανερό ότι οι εκπαιδευτικοί προτιμούν να βασίζονται στη θεωρία για να καταρρίψουν τους λανθασμένους ισχυρισμούς των μαθητών τους παρά να παρουσιάζουν κάποιο αντιπαράδειγμα. Συνηθίζουν να χρησιμοποιούν τα αντιπαραδείγματα συμπληρωματικά στη θεωρία ή όταν δεν υπάρχει σχετική θεωρία και τα θεωρούν εξαιρέσεις.

Η χρήση κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων χαρακτηρίζεται ως επίπονη διαδικασία που απαιτεί από τον εκπαιδευτικό γνώσεις για το θέμα μελέτης, διδακτική εμπειρία και ενημέρωση για τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών του. Αλλά και η επιλογή σωστών παραδειγμάτων από τους εκπαιδευτικούς αποτελεί μεγάλη ευθύνη και απαιτεί εκτίμηση πολλών χαρακτηριστικών, εφόσον τα παραδείγματα μπορούν να διευκολύνουν ή να εμποδίσουν τη μάθηση. Είναι αναγκαία η σωστή προετοιμασία των εκπαιδευτικών ώστε να παρουσιάσουν κατάλληλα παραδείγματα μέσα στην τάξη, που δε θα οδηγήσουν σε λανθασμένες γενικεύσεις. Τα παραδείγματα αυτά μπορεί να έχουν σχεδιαστεί εκ των προτέρων ή αυθόρμητα ή να έχουν σχεδιαστεί από πριν και να τροποποιούνται μέσα στην τάξη ανάλογα με τις απαιτήσεις των μαθητών. Καθοριστική είναι η συμβολή του χώρου παραδειγμάτων του εκπαιδευτικού ώστε να αντιμετωπίσει την ανάγκη μίας αυτόματης κατασκευής ή τροποποίησης ενός παραδείγματος.

Είναι γεγονός ότι η επιλογή παραδειγμάτων αντικατοπτρίζει τις θεωρήσεις των καθηγητών. Από τις έρευνες που αναλύθηκαν διαπιστώθηκε ότι οι καθηγητές συνήθως επιλέγουν παραδείγματα ξεκινώντας με απλές και γνωστές για τους μαθητές τους περιπτώσεις. Άλλες θεωρήσεις που διαπιστώθηκαν ήταν η επιλογή παραδειγμάτων λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα λάθη των μαθητών, εστιάζοντας την προσοχή τους σε πιο γενικές περιπτώσεις, επιλέγοντας τυχαία τις λεπτομέρειες ώστε να διατηρηθεί η αίσθηση της γενικότητας, παρουσιάζοντας ασυνήθιστες περιπτώσεις που εμφανίζονται σπάνια στην εκπαιδευτική διαδικασία ή τέλος περιορίζοντας την περιττή εργασία, όπως είναι οι πολύπλοκες πράξεις. Τέλος, εξετάστηκε αν τα παραδείγματα που φτιάχνονται από καθηγητές φανερώνουν τη γνώση και την κατανόησή τους για τα μαθηματικά αντικείμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Η σημασία του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος στα μαθηματικά και την εξέλιξη τους

Υπάρχουν στοιχεία από παλαιότερα ιστορικά αρχεία ότι τα παραδείγματα έχουν κεντρικό ρόλο τόσο στην ανάπτυξη των μαθηματικών σαν επιστημονικό κλάδο, όσο και στη διδασκαλία τους. Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι τα παραδείγματα κατέχουν εξέχουσα θέση σε ποικίλες θεωρίες που σχετίζονται με την εκμάθηση των μαθηματικών (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson, & Zaslavsky, 2006). Η λέξη παράδειγμα χρησιμοποιείται στη μαθηματική εκπαίδευση με πολλούς τρόπους: για να αναδείξει σχέσεις που προκύπτουν από τη διαίσθηση, για την επεξήγηση εννοιών και αρχών, για την εκπροσώπηση μίας μεγαλύτερης κατηγορίας, για να δείξει μία πιθανή διαφοροποίηση και για να αποτελέσει κίνητρο μάθησης (Watson & Mason, 2002a, 2002b). Παραδείγματα με τη μορφή λύσεων σε προβλήματα αποτελούν χαρακτηριστικά γνωρίσματα σε κάθε εκπαιδευτική εξήγηση (Leinhardt, 2001), αλλά και παραδείγματα κάθε είδους αποτελούν πρωταρχικό ¨μηχανισμό¨ για τη σαφή διευκρίνιση και τη μεταλαμπάδευση εννοιών μεταξύ καθηγητών και μαθητών (Bruner,1956, Tall&Vinner,1981, Peled & Zaslavsky,1997).

Σύμφωνα με τους Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson, & Zaslavsky (2006), τα παραδείγματα επιτρέπουν να εμβαθύνουμε στη φύση των μαθηματικών μέσω της χρησιμοποίησής τους: σε πολύπλοκες εργασίες που αποσκοπούν στην ανάδειξη μεθόδων, σε διαδικασίες ανάπτυξης εννοιών που αποσκοπούν στην ανάδειξη υπαρχουσών σχέσεων αλλά και σε επεξηγήσεις και αποδείξεις. Γίνεται μία παιδαγωγική διάκριση ανάμεσα σε παραδείγματα εννοιών (*examples of a concept*) όπως για παράδειγμα τρίγωνα, πολυώνυμα και σε παραδείγματα εφαρμογής διαδικασιών, όπως η εύρεση εμβαδού τριγώνου ή η εύρεση ριζών πολυωνύμου. Ο Sowder (1980) διέκρινε αντίστοιχα μεταξύ παραδειγμάτων και απεικονίσεων. Τα παραδείγματα εφαρμογής διαδικασιών ή διαφορετικά οι απεικονίσεις, διαχωρίζονται περαιτέρω σε λυμένα παραδείγματα, που δίνονται από το διδάσκοντα με κάποια επεξήγηση και σε ασκήσεις που θέτονται στο μαθητή σαν εργασίες. Οι παραπάνω

διαχωρισμοί δεν είναι ακριβείς, καθώς η ίδια σημείωση μπορεί να θεωρηθεί και ως διαδικασία και ως αντικείμενο, όπως για παράδειγμα η αναπαράσταση ψ=2χ+3 που αποτελεί ταυτόχρονα παράδειγμα γραμμικής συνάρτησης αλλά και παράδειγμα διαδικασίας για το σχεδιασμό μίας γραφικής παράστασης (Gray & Tall,1994).

Παρότι οι μαθηματικές διερευνήσεις και η χρήση ¨αυθεντικών¨ ή ¨υποδειγματικών¨ προσεγγίσεων είναι μία σχετικά πρόσφατη στρατηγική, υπάρχει ένα ιστορικό προηγούμενο. Στα αρχαιότερα μαθηματικά αρχεία (Αιγυπτιακοί πάπυροι, Βαβυλώνιες πλάκες και Κινέζικα χειρόγραφα) χρησιμοποιούνται λυμένα παραδείγματα που στοχεύουν στην ανάδειξη των διαδικασιών που ακολουθήθηκαν. Αυτά συνήθως παραπέμπουν σε μία γενίκευση με σχόλια όπως *¨κατ' αυτόν τον τρόπο γίνεται¨* ή *¨κάν' το έτσι¨* (Gillings,1972) και *¨κατ' αυτόν τον τρόπο μπορείς να λύσεις παρόμοια προβλήματα¨* ή *¨με την ίδια μέθοδο λύστε όλα τα παρόμοια προβλήματα¨* (Swetz, 1987).

Το 16^{ο} αιώνα οι ευρωπαίοι μαθηματικοί είχαν ήδη αρχίσει να αιτιολογούν την παρουσία παραδειγμάτων στα κείμενά τους και να σχολιάζουν τον καθοριστικό τους ρόλο. Ο Girolamo Cardano (1545) χαρακτηριστικά αναφέρει: *¨Έχουμε χρησιμοποιήσει μία ποικιλία παραδειγμάτων έτσι ώστε να καταλάβετε πως το ίδιο μπορεί να συμβεί και σε άλλες περιπτώσεις… Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που πρέπει να τηρείται πάντα.¨* (Witmer, 1968).

Το 19^{ο} και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, οι παιδαγωγικές αρχές σχετικά με το ρόλο των παραδειγμάτων γίνονται περισσότερο επεξηγηματικές, όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα: *¨Πιστεύεται πως όλες οι ασκήσεις και οι συζητήσεις γύρω από τα παραδείγματα είναι 'τακτοποιημένες' κατά τέτοιον τρόπο , και είναι τόσο λεπτομερείς και πλήρεις, ώστε κοιτάζοντάς τες ο μαθητής να μην μπορεί παρά να αποκτήσει μία τέτοια γνώση των αρχών και των πληροφοριών, και να λάβει την ανάλογη νοητική πειθαρχία, που θα τον προετοιμάσουν κατάλληλα για την μελέτη μαθηματικών υψηλότερου επιπέδου¨* (MacVicar,1879). Υπάρχουν μαθηματικοί οι οποίοι χρησιμοποιούν διαφορετικού είδους προβλήματα με σκοπό να καθοδηγήσουν το μαθητή να ανακαλύψει το συγκεκριμένο είδος. Άλλοι, παρουσιάζουν μία ποικιλία ασκήσεων όπου ακολουθείται κάποια τεχνική, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν την αίσθηση της γενικότητας της οποίας οι ασκήσεις αποτελούν εκφράσεις. Η επέκταση

που έκανε ο Iohn Mellis (Record, 1632) στην επέκταση που είχε ήδη κάνει ο John Dee στην αρχική αριθμητική του Robert Record (Record,1543/1969) προσφέρει μία συλλογή λυμένων παραδειγμάτων με ποικιλία διαφορών μεταξύ του τι δίνεται και του τι ζητείται, έτσι ώστε να επιστήσει την προσοχή σε μία ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων που να μπορούν να λυθούν με την ίδια μέθοδο.

Ο τρόπος εκμάθησης μέσω παραδειγμάτων διαχωρίζεται σε επαγωγικό *(inductive),* αν ο μαθητής πραγματοποιεί γενικεύσεις επεξεργαζόμενος μία γκάμα παραδειγμάτων και σε παραγωγικό *(deductive),* αν μπορεί να συνάγει δικό του αποτέλεσμα από έναν ορισμό ή μία γενική αρχή. Στην περίπτωση αυτή η παρουσίαση ξεκινά με προσεκτικά διατυπωμένα αξιώματα και ορισμούς, που ακολουθούνται από εξίσου προσεκτικά διατυπωμένα θεωρήματα και τις αποδείξεις τους. Το 18^{ο} αιώνα οι προσεγγίσεις για τη χρήση παραδειγμάτων διαφοροποιήθηκαν υπό τους όρους αναλυτική και συνθετική, ανάλογα με το αν οι γενικοί κανόνες δίνονταν πριν ή μετά τα λυμένα παραδείγματα. Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα ο Warren Colburn καθιέρωσε στις ΗΠΑ την επαγωγική μέθοδο που υποστήριζε ο Johann Pestalozzi (1801): *¨Ο συλλογισμός που χρησιμοποιήθηκε για να εκτελεστούν αυτά τα μικρά παραδείγματα είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιείται και για τα μεγάλα. Και όταν κάποιος συναντά μία δυσκολία στο να λύσει μία ερώτηση, θα την ξεπεράσει γρηγορότερα και πολύ πιο αποτελεσματικά, παίρνοντας ένα πολύ μικρό παράδειγμα αυτού του είδους , και παρατηρώντας πώς γίνεται, από το να προσφύγει σε έναν ορισμό¨* (Colburn, 1826).

Ο Herbert Spencer (1878), ανέπτυξε περαιτέρω τις ιδέες αυτές, προσδοκώντας οι μαθητές να συμπεράνουν το γενικό από επιμέρους στοιχεία που έχουν παρουσιαστεί προσεκτικά. Ο Alfred Whitehead συνοψίζει αυτή την προσέγγιση ως εξής *: ¨Για να δεις τί είναι γενικό σε αυτό που είναι ειδικό και τί είναι μόνιμο σε αυτό που είναι παροδικό ο στόχος είναι η επιστημονική σκέψη* (Whitehead, 1911). Ο Polya (1962) παρουσίασε μία μεγάλη ποικιλία ασκήσεων, γενικεύοντας σταδιακά από μία απλή αρχική ιδέα. Ο ίδιος υποστήριζε ότι: *¨χρειάζεται να υιοθετήσουμε μία επαγωγική συμπεριφορά η οποία απαιτεί μία ανοδική πορεία από τις παρατηρήσεις στις γενικεύσεις, και μία καθοδική πορεία από τις υψηλότερες γενικεύσεις στις πιο χειροπιαστές παρατηρήσεις¨* (Polya, 1945). Ο Zazkis (2001) αντίθετα υποστήριξε ότι ξεκινώντας με πιο πολύπλοκες καταστάσεις προβλημάτων δίνεται η δυνατότητα

στους μαθητές να τις απλοποιήσουν και να αντιληφθούν τη γενικότητα που υπάρχει πίσω από συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ο Lakatos (1976) υποστηρίζει ότι η ¨παραγωγική¨ μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών αποκρύπτει τη διαδικασία με την οποία αυτά ανακαλύφθηκαν. Στο βιβλίο του *Αποδείξεις και Ανασκευές* παρουσιάζει κάποια επεισόδια σε μία υποθετική τάξη, για να δείξει μέσω παραδειγμάτων, μεθόδους μαθηματικών ανακαλύψεων στην ιστορία των μαθηματικών. Στις μελέτες αυτές γίνεται φανερό πως ακόμα και οι διατυπωμένοι με ακρίβεια ορισμοί και θεωρήματα συχνά αποκρύπτουν μεγάλο μέρος της μαθηματικής δραστηριότητας. Η παραπάνω διαπίστωση βρίσκει σύμφωνο τον Freudenthal (1983), ο οποίος υποστηρίζει πως τα μαθηματικά διδάσκονται ως προκατασκευασμένο μάθημα και αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να μην μαθαίνουν μαθηματικά, αφού δεν τους δίνεται η δυνατότητα να αυτενεργήσουν.

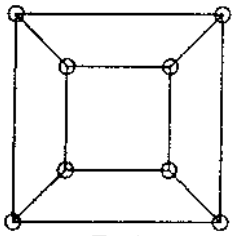
Στο παραπάνω βιβλίο μέσα από ένα υποτιθέμενο διάλογο ανάμεσα στο δάσκαλο και τους μαθητές του, περιγράφονται κάποιες μέθοδοι μαθηματικής ανακάλυψης. Ο διάλογος ξεκινά θέτοντας ένα ερώτημα στην τάξη, σχετικά με το αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο πλήθος των κορυφών K, των ακμών A και των εδρών E ενός κανονικού πολυέδρου που θα βοηθούσε στην ταξινόμησή τους. Έπειτα από πολλές δοκιμές και λάθη οι μαθητές καταλήγουν στη σχέση: K+E-A=2 (θεώρημα Euler). Οι μαθητές προσπαθούν να διαψεύσουν αυτή την εικασία αλλά δεν τα καταφέρνουν και έτσι καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να αποδεικνύεται με κάποιο τρόπο. Στο σημείο αυτό εισέρχεται στην τάξη ο δάσκαλος και παρουσιάζει μία απόδειξη μέσα από ένα νοητικό πείραμα. Το πείραμα αυτό αποτελείται από τρία βήματα και πρόκειται για μία αποδεικτική ιδέα που προέρχεται από τον Cauchy (1813α).

Νοητικό Πείραμα

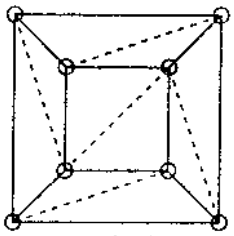
Βήμα 1: Φανταζόμαστε το πολυεδρικό κενό, σαν επιφάνεια κατασκευασμένη από ελαστικό. Αν αποκόψουμε μία έδρα, τότε μπορούμε να απλώσουμε την υπόλοιπη επιφάνεια στον πίνακα και να την κάνουμε επίπεδη, χωρίς να τη σκίσουμε. Οι έδρες και οι ακμές θα παραμορφωθούν, πιθανόν οι ακμές να καμπυλωθούν, το πλήθος τους όμως δεν θα αλλάξει. Θα ίσχυε επομένως ότι Κ+Ε-Α=2 αν στο νέο επίπεδο ισχύει Κ+Ε-Α=1(έχει αποκοπεί μία έδρα) (σχήμα 1:παρουσιάζει την περίπτωση του κύβου).

Βήμα 2: Τριγωνοποιούμε το χάρτη. Σχεδιάζουμε ίσως καμπύλες διαγώνιους σε αυτά τα πολύγωνα αν δεν είναι ήδη τρίγωνα. Σχεδιάζοντας κάθε διαγώνιο αυξάνεται το πλήθος των Ε και των Α κατά 1 άρα το σύνολο Κ+Ε-Α δε μεταβάλλεται (σχήμα 2).

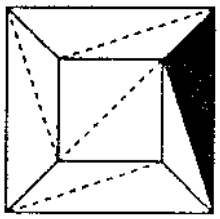
Βήμα 3: Από το τριγωνοποιημένο δίκτυο αφαιρούμε τα τρίγωνα ένα προς ένα. Για να αφαιρέσουμε ένα τρίγωνο είτε αφαιρούμε μία ακμή, οπότε συνολικά αφαιρείται μία έδρα και μία ακμή (σχήμα 3α), είτε αφαιρούμε δύο ακμές και μία κορυφή, οπότε συνολικά αφαιρείται μία έδρα, δύο ακμές και μία κορυφή (σχήμα 3β). Έτσι η συνθήκη Κ+Ε-Α=1 ισχύει πριν την αφαίρεση αν ισχύει και μετά την αφαίρεση του τριγώνου. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας απομένει ένα τρίγωνο για το οποίο προφανώς ισχύει Κ+Ε-Α=1, άρα η εικασία αποδείχτηκε.



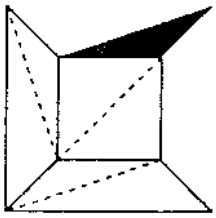
Σχ. 1



Σχ. 2



(α)



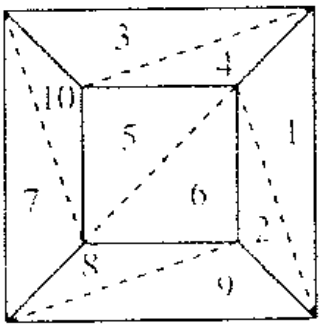
(β)

Σχ. 3

Στη συνέχεια οι μαθητές εκφράζουν κάποιες αμφιβολίες για την απόδειξη που παρουσιάστηκε, όπως για παράδειγμα αν μπορούν όλα να πολύεδρα να απλωθούν μετά την αφαίρεση μία έδρας, ή αν τριγωνοποιώντας το χάρτη θα υπάρχει πάντα μία ακριβώς έδρα για κάθε προστιθέμενη ακμή-διαγώνιο, ή αν η αφαίρεση ενός τριγώνου γίνεται μόνο με τους δυο τρόπους που παρουσιάστηκαν και αν τελικά απομένει ένα τρίγωνο στο τέλος της διαδικασίας. Μετά την αποδοχή των αμφιβολιών των μαθητών, ο δάσκαλος δίνει ένα ορισμό για την ¨απόδειξη¨ σύμφωνα με τον οποίο, *απόδειξη για ένα νοητικό πείραμα χαρακτηρίζεται αυτή που αναλύει την αρχική εικασία σε υποεικασίες ή λήμματα, ενθέτοντας έτσι αυτήν την εικασία σε ένα εντελώς διαφορετικό σώμα γνώσεων*.

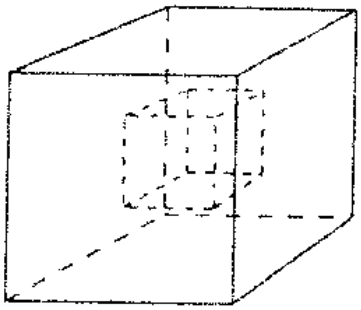
Οι μαθητές με την καθοδήγηση του δασκάλου αποφασίζουν να παρουσιάσουν αντιπαραδείγματα στα βήματα του νοητικού πειράματος. Το πρώτο αντιπαράδειγμα που παρουσιάστηκε αφορούσε το τρίτο βήμα. Σύμφωνα με αυτό, αφαιρείται ένα τρίγωνο από το εσωτερικό του δικτύου (σαν παζλ) και έτσι δεν μεταβάλλεται ο αριθμός των ακμών και των κορυφών. Άρα το λήμμα είναι ψευδές για όλα τα πολύεδρα εκτός του τετραέδρου. Ο δάσκαλος επισημαίνει ότι το αντιπαράδειγμα του μαθητή ακυρώνει το τρίτο λήμμα αλλά όχι την κύρια εικασία, αφού για τον κύβο ισχύει Κ+Ε-Α=2. Και συνεχίζει κάνοντας το διαχωρισμό ανάμεσα στα *τοπικά αντιπαραδείγματα*, που ανασκευάζουν ένα λήμμα και τα *καθολικά αντιπαραδείγματα* που ανασκευάζουν την κύρια εικασία. Ο δάσκαλος βελτιώνει την απόδειξη του μετά το αντιπαράδειγμα του μαθητή εισάγοντας την πληροφορία ότι τα τρίγωνα που αποκόπτονται είναι πάντα τα συνοριακά.

Το δεύτερο αντιπαράδειγμα που παρουσιάζεται σχετίζεται με τον τρόπο αφαίρεσης των συνοριακών τριγώνων. Έτσι αφαιρώντας 8 από τα 10 τρίγωνα που αποτελούν το επίπεδο δίκτυο του κύβου με τη σειρά που δίνεται στο σχήμα 4, κατά την αφαίρεση του όγδοου τριγώνου αφαιρούνται δύο ακμές και καμία κορυφή, άρα αλλάζει η ποσότητα Κ+Ε-Α κατά 1. Επιπλέον απομένουν δύο ασύνδετα τρίγωνα τα 9 και 10. Ο δάσκαλος επανέρχεται κάνοντας μία δεύτερη βελτίωση σύμφωνα με την οποία, τα τρίγωνα μπορούν να αριθμηθούν έτσι ώστε κατά την αφαίρεσή τους με τη σωστή σειρά το άθροισμα Κ+Ε-Α να παραμένει αμετάβλητο μέχρι να φτάσουμε στο τελευταίο τρίγωνο.



Σχ. 4

Οι μαθητές αντέδρασαν στις συνεχείς βελτιώσεις του λήμματος και έτσι παρουσίασαν ένα αντιπαράδειγμα που διαψεύδει το πρώτο λήμμα και είναι ταυτόχρονα και καθολικό. Αυτό το αντιπαράδειγμα παρουσιάζει δύο κύβους, τον ένα εγκιβωτισμένο μέσα στον άλλο, χωρίς να έχουν κοινά σημεία (σχήμα 5). Σε αυτό το σχήμα αν αφαιρεθεί μία έδρα από τον εσωτερικό ή τον εξωτερικό κύβο προκύπτει μία επιφάνεια που δεν μπορεί να απλωθεί και επιπλέον για κάθε κύβο ισχύει Κ+Ε=Α+2 επομένως και για τους δύο μαζί ισχύει Κ+Ε=Α+4.



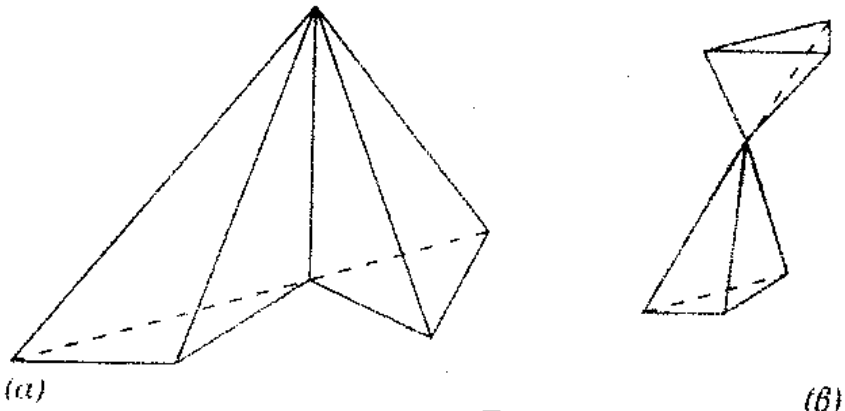
Σχ. 5

Οι μαθητές καλούν το δάσκαλο να παραιτηθεί από την αρχική εικασία εφόσον το αντιπαράδειγμα που παρουσιάστηκε είναι καθολικό. Εκείνος όμως αν και συμφωνεί ότι η αρχική εικασία υπέστη ισχυρό πλήγμα, ισχυρίζεται ότι η απόδειξή του δεν καταρρίφτηκε.

Στη συνέχεια ένας μαθητής επιχειρεί να απορρίψει το αντιπαράδειγμα χαρακτηρίζοντας το ως ¨τέρας¨, με μία μέθοδο που ονομάστηκε μέθοδος ¨*εκδίωξης των τεράτων*¨. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή επινοούνται ορισμοί που αποδεσμεύουν τα παραδείγματα αυτά από τυχόν προβληματισμούς. Με αυτόν τον τρόπο όμως θα μπορούσε ένας ορισμός που αποκλείει ένα αντιπαράδειγμα να επιτρέψει την

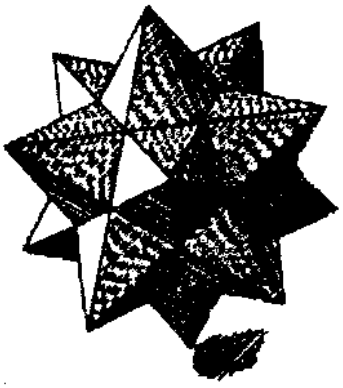
εμφάνιση ενός άλλου αντιπαραδείγματος, ή να εμποδίσει την εύρεση παραδειγμάτων για τα οποία το θεώρημα ισχύει. Έτσι στον αρχικό ορισμό του πολυέδρου που διατυπώνεται *ως στερεό που η επιφάνειά του αποτελείται από πολυγωνικές έδρες* προκύπτει ένας νέος ορισμός ο οποίος αναφέρει ότι πολύεδρο είναι *μία επιφάνεια που αποτελείται από ένα σύστημα πολυγώνων*. Σύμφωνα με το δεύτερο ορισμό το πολύεδρο του σχήματος 5 αποτελείται από δυο πολύεδρα.

Συνεχίζοντας, ένας άλλος μαθητής θέτει δύο νέα αντιπαραδείγματα που ανασκευάζουν και πάλι την εικασία μετά το δεύτερο ορισμό που δόθηκε. Τα νέα αντιπαραδείγματα περιγράφουν αντίστοιχα δύο τετράεδρα με κοινή ακμή (σχήμα 6α) ή δύο τετράεδρα με κοινή κορυφή (σχήμα 6β), που και στις δύο περιπτώσεις ισχύει Κ+Ε-Α=3.

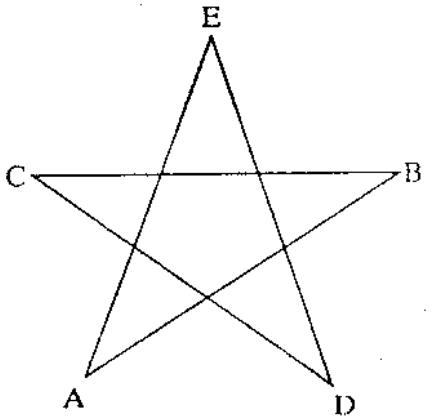


Σχ. 6

Ακολουθεί η διατύπωση ενός νέου ορισμού σύμφωνα με τον οποίο πολύεδρο *είναι ένα σύστημα πολυγώνων διευθετημένων έτσι ώστε (1) ακριβώς δύο πολύγωνα συναντώνται σε μία ακμή και (2) υπάρχει διαδρομή που ενώνει το εσωτερικό κάθε πολυγώνου με το εσωτερικό κάθε άλλου πολυγώνου χωρίς η διαδρομή αυτή να περιλαμβάνει καμία κορυφή*. Με το νέο ορισμό 3 εξαιρούνται τα αντιπαραδείγματα του σχήματος 6α και 6β. Ένα νέο αντιπαράδειγμα παρουσιάζεται στον ορισμό 3 που περιγράφει ένα αστεροειδές πολύεδρο. Αυτό το πολύεδρο αποκαλείται *αχινός* (σχήμα 7) και αποτελείται από 12 αστεροειδή πεντάγωνα (σχήμα 8). Έχει 12 κορυφές, 30 ακμές και 12 έδρες, άρα ισχύει Κ+Ε=Α-6.

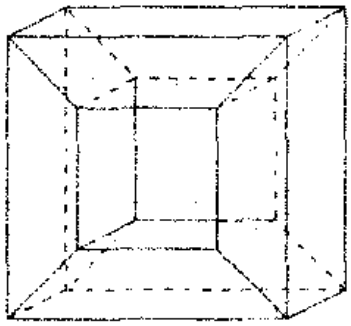


Σχ. 7



Σχ. 8

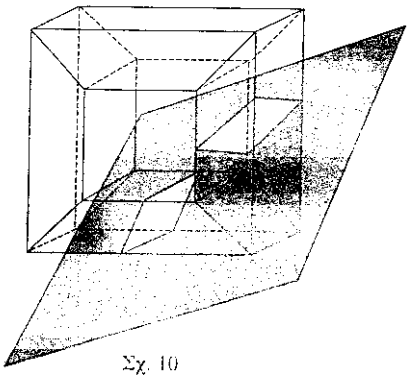
Ο 4ος στη σειρά ορισμός του πολυέδρου που επινοήθηκε για να εκδιωθούν τα παραπάνω αντιπαραδείγματα – τέρατα, υποστηρίζει ότι *πολύεδρο είναι ένα σύστημα ακμών διευθετημένο έτσι ώστε (1) ακριβώς δυο ακμές συναντώνται σε κάθε κορυφή και (2) οι ακμές να μην έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από τις κορυφές.* Και για αυτόν τον ορισμό παρουσιάστηκε όμως αντιπαράδειγμα το οποίο αποτελείται από το πολύεδρο του σχήματος 9. Αυτό ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό αλλά ισχύει ότι Κ+Ε=Α.



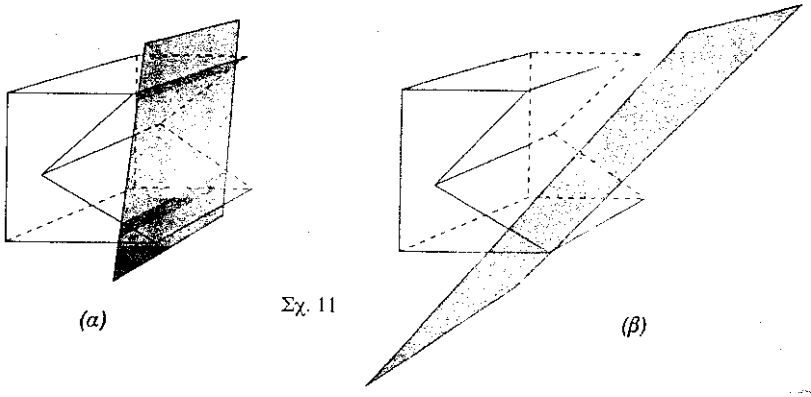
Σχ. 9

Κάποιος υποτιθέμενος μαθητής υπενθυμίζει όμως στην τάξη τον ορισμό 5 σύμφωνα με τον οποίο σε ένα *αυθεντικό πολύεδρο, δια μέσου οποιουδήποτε σημείου στο χώρο πρέπει να υπάρχει ένα τουλάχιστον επίπεδο η τομή του οποίου με το πολύεδρο να αποτελείται από ένα και μόνο πολύγωνο*. Στην περίπτωση του σχήματος 9 αυτό δεν ισχύει αφού κάθε επίπεδο έχει πάντα δύο διαφορετικές τομές με το πλαίσιο (σχήμα 10). Στην περίπτωση των κυρτών πολυέδρων όλα τα επίπεδα ικανοποιούν αυτή την συνθήκη, ενώ για τα μη κυρτά κανονικά πολύεδρα κάποια επίπεδα θα

δίνουν περισσότερες από μία τομές αλλά θα υπάρχει πάντοτε ένα που θα δίνει μόνο μία τομή (σχήμα 11α , 11β).



Σχ. 10



(α) Σχ. 11 (β)

Τον ορισμό 5 ακολουθεί νέο αντιπαράδειγμα, αυτό του κυλίνδρου, που έχει 3 έδρες (πάνω και κάτω βάση και περίβλημα), δύο ακμές (οι δυο κύκλοι) και καμία κορυφή, άρα Κ+Ε=Α+1. Επιπλέον το αντιπαράδειγμα αυτό ικανοποιεί όλους τους προηγούμενους ορισμούς. Ακολουθεί ο ορισμός 6 για τις ακμές, *αφού κάθε ακμή πρέπει έχει δυο κορυφές.* Στο σημείο αυτό παρεμβαίνει ο δάσκαλος ο οποίος επισημαίνει ότι θα πρέπει να αντιμετωπίζονται τα αντιπαραδείγματα με περισσότερο σεβασμό και όχι σαν ¨τέρατα¨. Και προσθέτει ότι θα μπορούσε η αρχική εικασία να ήταν ψευδής αλλά η «απόδειξή» της εξακολουθεί να παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Ο δεύτερος τρόπος αντιμετώπισης των αντιπαραδειγμάτων σύμφωνα με το Lakatos είναι η μέθοδος ¨*φραγής των εξαιρέσεων*¨. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει την καταγραφή των εξαιρέσεων στο εκάστοτε θεώρημα με σκοπό την εύρεση ενός ασφαλούς πεδίου στα πλαίσια του οποίου εξασφαλίζεται η εγκυρότητά του. Έτσι τα αντιπαραδείγματα θεωρούνται ως εξαιρέσεις. Πιο συγκεκριμένα θεωρείται ότι

υπάρχουν τρία είδη μαθηματικών προτάσεων: (1) αυτές που αληθεύουν καθολικά χωρίς περιορισμούς και εξαιρέσεις, (2) αυτές που στηρίζονται σε ψευδείς αρχές και δε μπορούν να γίνουν αποδεκτές με κανένα τρόπο και (3) όσες στηρίζονται σε αληθείς αρχές αλλά επιδέχονται περιορισμούς και εξαιρέσεις σε κάποιες περιπτώσεις. Η αδυναμία της μεθόδου αυτής είναι πως ακόμα και αν υποθέσουμε πως όλες οι εξαιρέσεις έχουν ανακαλυφθεί, υπάρχει το ρίσκο να περιοριστεί το πεδίο εγκυρότητας του θεωρήματος.

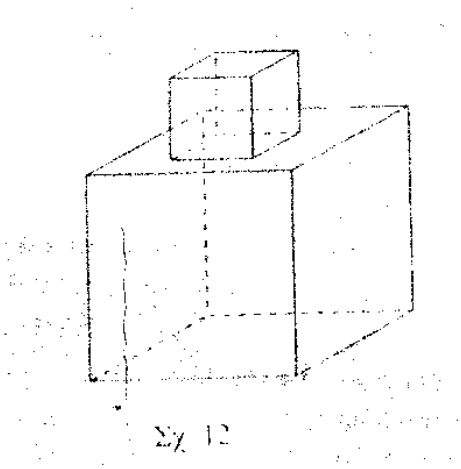
Στον υποτιθέμενο διάλογο που περιγράφεται στο βιβλίο του Lakatos η μέθοδος της φραγής των εξαιρέσεων διατυπώνεται με την εξής πρόταση ενός μαθητή: *¨για όλα τα πολύεδρα που δεν έχουν κοιλότητες(όπως οι εγκιβωτισμένοι κύβοι), σήραγγες(όπως το πλαίσιο) ή πολλαπλή δομή(όπως τα δίδυμα τετράεδρα) ισχύει Κ+Ε=Α+2¨*. Η παραπάνω πρόταση φαίνεται να έχει διατυπωθεί ώστε να τοποθετήσει φραγμό στα αντιπαραδείγματα που εμφανίστηκαν ήδη στην τάξη. Αυτό δεν συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν και άλλες εξαιρέσεις που δεν έχουν ήδη αναφερθεί. Στην προσπάθεια του ένας μαθητής να αποφύγει όλες τις εξαιρέσεις που ενδέχεται να εμφανιστούν κάνει αναδίπλωση της αρχικής εικασίας υποστηρίζοντας ότι *¨όλα τα κυρτά πολύεδρα είναι Euler-ιανά¨*. Το πρόβλημα με αυτήν την αναδίπλωση είναι ότι πιθανών να απορρίπτει κάποια πολύεδρα που είναι Euler-ιανά, λόγω υπερβολικής αυστηρότητας. Σχετικά με την απόδειξη της βελτιωμένης εικασίας υποστηρίζεται ότι αν περιοριστεί και αυτή στην περιοχή των κυρτών πολυέδρων γίνεται αυστηρή, χωρίς άλλα ψευδή λήμματα.

Η επόμενη μέθοδος που περιγράφεται είναι αυτή *¨της εξημέρωσης των τεράτων¨*. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή οι εξαιρέσεις που εμφανίστηκαν στο θεώρημα του Euler είναι φαινομενικές και προκύπτουν από παρερμηνείες, έτσι το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει ακόμα και γι' αυτές. Στο παράδειγμα του αχινού δεν υπάρχουν πενταγωνικές έδρες αλλά μόνο τριγωνικές και συγκεκριμένα έχει 60 έδρες, 90 ακμές και 32 κορυφές και επομένως ισχύει Κ+Ε=Α+2. Ο αχινός εσφαλμένα παρουσιάστηκε ως αντιπαράδειγμα αφού σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή πρόκειται για παράδειγμα Euler-ιανού πολυέδρου.

Ο δάσκαλος παρεμβαίνει και προσπαθεί να βελτιώσει την αρχική εικασία με τη μέθοδο *¨της ενσωμάτωσης των λημμάτων¨*. Με τη μέθοδο αυτή γίνονται δεκτά τα

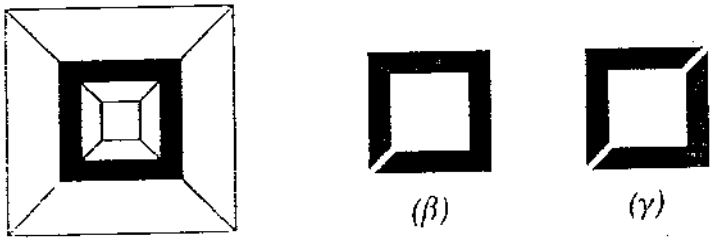
αντιπαραδείγματα που παρουσιάστηκαν και περιορίζεται η κύρια εικασία στην περιοχή της εγκυρότητας του ένοχου λήμματος, δηλαδή γίνεται αναθεώρηση της αρχικής εικασίας και όχι των λημμάτων. Έτσι η αρχική υπόθεση τροποποιείται και διατυπώνεται ως εξής: ¨ *η εικασία των Descartes-Euler ισχύει για τα «απλά» πολύεδρα, δηλαδή γι' αυτά που μπορούν να απλωθούν στο επίπεδο αν τους αφαιρέσουμε μία έδρα*¨.

Και πάλι εμφανίζεται ένα νέο αντιπαράδειγμα, αυτό του σχήματος 12. Πρόκειται για ένα κύβο που σε μία έδρα του φέρει ένα άλλο κύβο. Αυτό το σχήμα συμφωνεί με όλους τους προηγούμενους ορισμούς και τη βελτιωμένη εικασία αλλά έχει (Κ,Ε,Α)=(16,11,24) και άρα ο χαρακτηριστικός αριθμός Euler είναι 3.



Σχ. 12

Επανεξετάζοντας την απόδειξη ο δάσκαλος προσπαθεί να εντοπίσει το ψευδές λήμμα. Στην περίπτωση αυτή ήταν το δεύτερο, αφού αν φέρουμε μία διαγώνιο στο τριγωνοποιημένο σχήμα (σχήμα 13α), στην δακτυλιοειδή έδρα (σχήμα 13β), δεν αυξάνεται το πλήθος των εδρών κατά 1, αλλά χρειάζονται δύο διαγώνιοι (σχήμα 13γ) για να συμβεί αυτό.



Σχ. 13

Μέσα από την ανάλυση της απόδειξης ο δάσκαλος προχωρά σε μετατροπή του ψευδούς λήμματος σε προϋπόθεση και το ενσωματώνει στην αρχική εικασία ανασκευάζοντας την ως εξής: *¨για κάθε απλό πολύεδρο με «απλώς συνδεδεμένες» έδρες, δηλαδή έδρες που διαχωρίζονται από μία διαγώνιο σε δύο έδρες, ικανοποιούν τη σχέση Κ+Ε=Α+2¨*. Στη συνέχεια του διαλόγου εκφράζονται κάποιες απόψεις για τη σύνδεση των κορυφών των κύβων του σχήματος 12 με ακμές, ώστε να γίνει απαλοιφή της δακτυλιοειδούς έδρας. Επίσης, προτείνεται να ενσωματωθεί και το τρίτο λήμμα στην αρχική εικασία, δηλαδή να προστεθεί ότι *¨τα τρίγωνα στο επίπεδο τριγωνικό δίκτυο , που προκύπτουν από το άπλωμα και την τριγωνοποίηση, μπορούν να αριθμηθούν ώστε η αφαίρεσή τους με τη σωστή σειρά να μη μεταβάλλει την ποσότητα Κ+Ε-Α¨*.

Με αφορμή την τελευταία πρόταση διεξάγεται ένας διάλογος για το πέρας της διαδικασίας ενσωμάτωσης νέων λημμάτων. Οι προτάσεις που διατυπώνονται περιλαμβάνουν μόνο εκείνα τα λήμματα για τα οποία έχει βρεθεί αντιπαράδειγμα (μετατρέποντάς τα σε προϋποθέσεις ισχύος του θεωρήματος) ή όλα τα λήμματα για τα οποία ενδέχεται να βρεθεί αντιπαράδειγμα. Υπάρχει όμως και η περίπτωση, η ενσωμάτωση ενός λήμματος να απαλλάσσει από την ενσωμάτωση κάποιου άλλου. Η παλινδρόμηση αυτή προτείνεται να σταματά όταν εμφανίζονται τετριμμένα λήμματα, δηλαδή αυτά που δεν είναι αναγκαίο να μετατραπούν σε προϋποθέσεις και για να αποδειχθούν χρησιμοποιούν τετριμμένες αληθείς αρχές. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν οι μαθητές είναι ότι *¨ο πραγματικός στόχος ενός προβλήματος προς απόδειξη θα πρέπει να είναι η βελτίωση της αρχικής «αφελούς» εικασίας ώστε να καταστεί γνήσιο θεώρημα¨*. Υπάρχουν αναφορές ότι τα θεωρήματα προηγούνται των αποδείξεων στη σειρά ανακάλυψης αλλά και αντίστροφα, οι μαθητές καταλήγουν ότι στην ευρετική μέθοδο η ανακάλυψη δεν πηγαίνει πάνω ή κάτω, αλλά ακολουθεί μία δαιδαλώδη διαδρομή. Κεντρισμένη από αντιπαραδείγματα κινείται από την αφελή εικασία στις προϋποθέσεις και επιστρέφει, διαγράφοντας την αφελή εικασία και αντικαθιστώντας την με το θεώρημα. Πρέπει να σημειωθεί βέβαια ότι η αρχική αφελής εικασία δε διαφέρει πάντα από το θεώρημα και η απόδειξη δε σημαίνει κατ' ανάγκη βελτίωση. Αυτό συμβαίνει όταν ανακαλύπτονται απροσδόκητες πλευρές της αφελούς εικασίας οι οποίες πρέπει να εμφανιστούν στο θεώρημα και είναι

χαρακτηριστικό περισσότερο των νέων αναπτυσσόμενων θεωριών και όχι τόσο των ώριμων.

Το αντιπαράδειγμα του κυλίνδρου επανέρχεται στη συζήτηση ως ένας νέος τύπος αντιπαραδείγματος που είναι καθολικό αλλά όχι τοπικό και ανασκευάζει το θεώρημα. Ελέγχεται αν ικανοποιεί τα λήμματα και διαπιστώνεται αρχικά ότι με την αφαίρεση του περιβλήματος του κυλίνδρου προκύπτουν δύο κομμάτια. Αυτό μπορεί τυπικά να ικανοποιεί το πρώτο λήμμα αλλά δεν ικανοποιεί ένα πρόσθετο ¨κρυμμένο¨ λήμμα ότι *¨το επίπεδο δίκτυο που προκύπτει είναι επίσης συνδεδεμένο¨*, το οποίο δεν διατυπώθηκε άμεσα. Επίσης, πρόβλημα εμφανίζεται και με το δεύτερο λήμμα, αφού δεν γίνεται να τριγωνοποιηθεί ο κύκλος ή το περίβλημα καθώς δεν υπάρχουν διαγώνιοι. Όμως μπορεί να θεωρηθεί ότι οι έδρες είναι απλώς συνδεδεμένες αφού οποιαδήποτε ακμή φέρουμε δημιουργεί νέα έδρα, καθώς η πρόταση ότι *¨υπάρχει διαγώνιος στον κύκλο που δεν δημιουργεί νέα έδρα¨* χαρακτηρίζεται ως ψευδής. Στο σημείο αυτό γίνεται μία διευκρίνιση για τον ορισμό της απλώς συνδεδεμένης έδρας, σύμφωνα με αυτόν: *¨μία έδρα είναι απλώς συνδεδεμένη αν για όλα τα χ, όπου χ διαγώνιος, τότε το χ αποκόπτει την έδρα σε δύο έδρες¨*. Στην περίπτωση του κυλίνδρου δεν υπάρχουν διαγώνιες στις κυκλικές βάσεις και στο κυκλικό περίβλημα άρα ότι και να είναι το χ τα προηγούμενα είναι ψευδή. Η πρόταση μπορεί να έχει συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπου το χ οποιοδήποτε αντικείμενο, που να είναι αληθής και να έχει νόημα, άρα ικανοποιείται το δεύτερο λήμμα. Αυτό προκαλεί την αντίδραση ενός μαθητή που υποστηρίζει ότι υπήρχε μία κρυμμένη υπόθεση και διορθώνει την παραπάνω διατύπωση ως εξής: *¨μία έδρα είναι απλώς συνδεδεμένη αν για όλα τα χ, όπου χ διαγώνιος, τότε το χ αποκόπτει την έδρα σε δύο έδρες και υπάρχει τουλάχιστον ένα χ το οποίο είναι διαγώνιος¨*. Σύμφωνα με την τελευταία πρόταση ο κύλινδρος είναι καθολικό και τοπικό αντιπαράδειγμα και δεν ανασκευάζει το θεώρημα.

Τελικά οι μαθητές καταλήγουν ότι ο κύλινδρος είναι ένα γνήσιο καθολικό και όχι τοπικό αντιπαράδειγμα του θεωρήματος και γι' αυτό αποφασίζουν να επινοήσουν ένα λήμμα που θα ανασκευαστεί από αυτό και θα το προσθέσουν στο νέο κατάλογο. Με αυτόν τον τρόπο το αντιπαράδειγμα θα μετατραπεί από καθολικό σε τοπικό και θα ικανοποιήσει *την αρχή της αναμετάδοσης του ψεύδους*, που απαιτεί τα καθολικά αντιπαραδείγματα να είναι και τοπικά. Το ψεύδος θα πρέπει να αναμεταδίδεται από την αφελή εικασία στα λήμματα.

Η ανάλυση της απόδειξης δεν προέρχεται μόνο υπό την πίεση κάποιων καθολικών αντιπαραδειγμάτων αλλά και από την επιφυλακτικότητα των ανθρώπων απέναντι σε «πειστικές» αποδείξεις. Στην πρώτη περίπτωση όλα τα αντιπαραδείγματα εμφανίζονται ως καθολικά και όχι τοπικά και όλα τα λήμματα είναι «κρυμμένα». Στη δεύτερη περίπτωση, που αναζητούμε ανασκευές, μπορεί να υπάρξει αποδεικτική διαδικασία χωρίς αντιπαραδείγματα ή με τοπικά αντιπαραδείγματα. Τελικά υπάρχει μία αλληλεξάρτηση ανάμεσα στις ανασκευές και τις αποδείξεις. Η μέθοδος επομένως της *ενσωμάτωσης των λημμάτων* μετονομάζεται σε *μέθοδο της απόδειξης και ανασκευών*, που οι κύριες πλευρές της είναι οι παρακάτω τρεις κανόνες:

1. *Αν έχεις μία εικασία προσπάθησε να την αποδείξεις και να την ανασκευάσεις. Εξέτασε προσεκτικά την απόδειξη συντάσσοντας έναν κατάλογο μη τετριμμένων λημμάτων(αποδεικτική ανάλυση).Αναζήτησε αντιπαραδείγματα τόσο για την εικασία (καθολικά) όσο και για τα ύποπτα λήμματα(τοπικά).*
2. *Αν έχεις ένα καθολικό αντιπαράδειγμα που καταρρίπτει την εικασία, πρόσθεσε στην αποδεικτική ανάλυση ένα κατάλληλο λήμμα που δεν θα ανασκευαστεί από το αντιπαράδειγμά σου και αντικατέστησε την παλιά εικασία με μία βελτιωμένη που ενσωματώνει το λήμμα ως προϋπόθεση. Μην επιτρέψεις να εκδιωχθεί αυτή η ανασκευή ως τέρας. Προσπάθησε να κάνεις ρητά όλα τα λήμματα.*
3. *Αν συναντήσεις ένα τοπικό αντιπαράδειγμα, έλεγξε μήπως είναι καθολικό και τότε εφάρμοσε τον κανόνα 2.*

Το κατάλληλο λήμμα που αναφέρεται στον κανόνα 2 δεν έχει επιλεγεί αυθαίρετα αλλά μετά από προσεκτική εξέταση της απόδειξης. Στο σημείο αυτό ένας μαθητής προτείνει την κατασκευή αυστηρών αποδείξεων προς αποφυγή όλων των προηγούμενων κανόνων, ενώ κάποιος άλλος προσθέτει ότι πρέπει να συνδυαστεί η αυστηρότητα της απόδειξης με την αυστηρότητα της αποδεικτικής διαδικασίας. Υπάρχει και αντίλογος στα παραπάνω, αφού ένας μαθητής υποστηρίζει ότι η αύξηση της αυστηρότητας ελαττώνει το πλήθος των πολυέδρων , δηλαδή κάθε νέο λήμμα της αποδεικτικής διαδικασίας και κάθε νέα προϋπόθεση μειώνει την περιοχή εγκυρότητας του θεωρήματος. Και συνεχίζει υπενθυμίζοντας ότι όταν βρέθηκε το πρώτο τοπικό και όχι καθολικό αντιπαράδειγμα τότε έγινε ανασκευή του κατάλληλου λήμματος και αντικατάστασή του με ένα που να επαληθεύεται και όχι ενσωμάτωσή του, που θα συνεπάγονταν την ελάττωση της περιοχής εφαρμογής του θεωρήματος. Επιπρόσθετα

προτείνει τη διατύπωση ενός ακόμα κανόνα στη μέθοδο της απόδειξης και των ανασκευών:

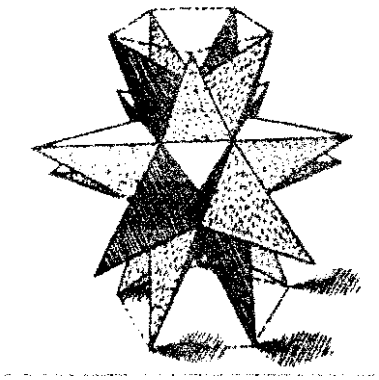
4. *Αν συναντήσεις ένα τοπικό αλλά όχι καθολικό αντιπαράδειγμα, προσπάθησε να βελτιώσεις την αποδεικτική διαδικασία αντικαθιστώντας το λήμμα που ανασκευάστηκε με ένα λήμμα που να επαληθεύεται.*

Ο ίδιος μαθητής προτείνει μία εντελώς νέα απόδειξη (η απόδειξη του Gergonne). Η απόδειξη αυτή προτείνει να φανταστούμε ένα πολυεδρικό κενό με μία επιφάνεια από στερεό υλικό. Βάφουμε το εσωτερικό των εδρών, το φωτίζουμε πολύ καλά και υποθέτουμε ότι μια έδρα είναι ο φακός μίας φωτογραφικής μηχανής, η έδρα από την οποία μπορώ να φωτογραφίσω όλες τις ακμές και κορυφές. Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε μία εικόνα του επίπεδου δικτύου και μπορούμε να αποδείξουμε όπως και πριν ότι απλά συνδεδεμένες έδρες ικανοποιούν τη σχέση K+E=A+1, οπότε με την πρόσθεση της έδρας-φακού προκύπτει ο τύπος του Euler. Το κύριο λήμμα είναι ότι υπάρχει μία έδρα, που αν μετασχηματιζόταν σε φακό φωτογραφικής μηχανής, θα φωτογράφιζε το εσωτερικό του πολυέδρου έτσι ώστε όλες οι κορυφές και οι ακμές θα αποτυπώνονταν στο φιλμ, αυτό θα ονομάζεται *ωσεί κυρτό πολύεδρο*. Επομένως όλα τα ωσεί κυρτά πολύεδρα (πολύεδρα Gergonne) είναι Euler-ιανά. Επειδή υπάρχουν όμως πολλά απλά Euler-ιανά πολύεδρα που είναι τόσο παραμορφωμένα ώστε δεν γίνεται από μία έδρα να φωτογραφηθεί όλο το εσωτερικό τους, η προηγούμενη απόδειξη του Cauchy θεωρείται βαθύτερη. Λόγω ανεπάρκειας εγκαταλείφτηκε και η απόδειξη του Legendre, η οποία προβάλει το πολύεδρο πάνω σε μία σφαίρα που το περιέχει. Διαλέγει την ακτίνα της σφαίρας ως 1 και προϋποθέτει (1° λήμμα) ότι υπάρχει ένα σημείο ως κέντρο προβολής, ώστε η σφαίρα να καλυφθεί από ένα δίκτυο μη επικαλυπτόμενων σφαιρικών τριγώνων. Το δεύτερο λήμμα αφορά το σφαιρικό πολυεδρικό δίκτυο όπου K+E=A+2.

Το επόμενο θέμα που απασχόλησε τους μαθητές της υποτιθέμενης τάξης είναι η οριστικότητα (με δεδομένη τη βεβαιότητα) του θεωρήματος. Με αφορμή το παράδειγμα του μεγάλου αστεροειδούς δωδεκαέδρου (σχήμα 14) που αποτελείται από E=12, A=30, K=20 και ικανοποιεί το K+E=A+2, εξετάζεται γιατί η αρχική απόδειξη δεν ερμηνεύει ότι αυτό το αστεροειδές πολύεδρο είναι Euler-ιανό. Ένας μαθητής απορρίπτει αυτή την απόδειξη επειδή οι συνθήκες της δεν είναι αναγκαίες

και ικανές. Και συνεχίζει λέγοντας ότι μία και μόνη απόδειξη δεν είναι κατ' ανάγκη αρκετή για την κριτική βελτίωση μιας αφελούς εικασίας. Προτείνει να συμπεριληφθεί ο παραπάνω κανόνας 4 στη μέθοδο της απόδειξης και των ανασκευών και να μετονομαστεί σε *μέθοδο των αποδείξεων και των ανασκευών*.

Η μέθοδος αυτή είναι σαφώς πιο εκλεπτυσμένη μαθηματικά και αποτελείται τελικά από τέσσερα στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι η *πρωταρχική εικασία*. Ακολουθεί *η απόδειξη*, που χαρακτηρίζεται από τον Lakatos ως «μία ακατέργαστη σκέψη, πείραμα ή επιχείρημα, που αποσυνθέτει την πρωταρχική εικασία σε επιμέρους εικασίες και λήμματα». Το τρίτο στάδιο είναι η εμφάνιση *καθολικών αντιπαραδειγμάτων,* υπό την έννοια ότι εφαρμόζονται στην αρχική εικασία και όχι στις επιμέρους. Το τέταρτο στάδιο είναι η *ανάλυση της απόδειξης* που έχει ως σκοπό την ανακάλυψη κάποιου λήμματος που θα μετατρέψει το καθολικό αντιπαράδειγμα σε τοπικό και την ενσωμάτωση του στην αρχική εικασία ως προϋπόθεση. Με τον τρόπο αυτό θα διατυπωθεί μια βελτιωμένη εικασία που θα χαρακτηρίζεται από μία γενική ιδέα και θα έχει παραχθεί από την απόδειξη. Η ανάλυση της απόδειξης είναι που διαφοροποιεί τη μέθοδο αυτή από τη μέθοδο φραγής των εξαιρέσεων.



Σχήμα 14

Το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι διαφορετικές αποδείξεις της ίδιας αφελούς εικασίας οδηγούν σε διαφορετικά θεωρήματα. Η μία και μόνη εικασία των Euler- Descartes βελτιώνεται από κάθε απόδειξη σε ένα διαφορετικό κάθε φορά θεώρημα. Η αρχική απόδειξη έδειξε ότι «όλα τα πολύεδρα Cauchy είναι Euler-ιανά», είδαμε ακόμη ότι «όλα τα πολύεδρα Gergonne είναι Euler-ιανά» και «όλα τα πολύεδρα Legendre είναι Euler-ιανά». Ενδιαφέρουσα είναι η άποψη ενός μαθητή ότι

μόνο η αρχική εικασία αφορά τα πολύεδρα ενώ τα θεωρήματα είναι για τα αντικείμενα του Cauchy ή του Gergonne ή του Legendre. Και εξηγεί την παρατήρησή του αυτή στο πλαίσιο του σχηματισμού των εννοιών εν γένει. Προηγείται ο αντίλογος ενός άλλου μαθητή για το πρόβλημα του περιεχομένου.

Αυτός ο μαθητής επανατοποθετεί το πρόβλημα ισχυριζόμενος ότι το αρχικό πρόβλημα δεν ήταν να ανακαλύψουμε την περιοχή εγκυρότητας της σχέσης K+A=E+2 αλλά να βρούμε τη σχέση που διέπει τα K,A,E για οποιοδήποτε πολύεδρο, όπως ανάλογα είχε βρεθεί K=A για τις ακμές και κορυφές του πολυγώνου(όπως διευκρίνισε λίγο αργότερα ο δάσκαλος). Παραβλέποντας τις αντιδράσεις κάποιων συμμαθητών του για τα Euler-ιανά πολύεδρα που δεν είναι πολύεδρα Cauchy(όπως το πολύεδρο πλαίσιο) και την επιμονή τους να λυθούν πρώτα αυτοί οι γρίφοι πριν προχωρήσουν σε ένα γενικότερο πρόβλημα, ο μαθητής προχωρά σε περιγραφή της ιδέας του.

Ισχυρίζεται ότι ένα πρόβλημα δεν αναδύεται από το κενό αλλά σχετίζεται με το γνωστικό μας υπόβαθρο. Είναι γνωστό ότι K=A για τα πολύγωνα. Επίσης ένα πολύγωνο είναι σύστημα πολυγώνων που αποτελείται από ένα μόνο πολύγωνο, ενώ πολύεδρο είναι σύστημα πολυγώνων που αποτελείται από πολλά πολύγωνα. Αναζητά το λόγο για τον οποίο παραβιάστηκε η σχέση K=A. Και συνεχίζοντας ένας συμμαθητής του ισχυρίζεται ότι για οποιοδήποτε πολύγωνο ισχύει A-K=0. Αν συγκολλήσουμε σε αυτό το πολύγωνο ένα άλλο πολύγωνο με n_1 ακμές και n_1 κορυφές κατά μήκος των n_1' ακμών και $n_1'+1$ κορυφών θα αυξηθεί το πλήθος των ακμών κατά n_1-n_1' και των κορυφών κατά $n_1-(n_1'+1)$. Δηλαδή στο νέο 2-πολυγωνικό σύστημα θα υπερέχουν οι ακμές έναντι των κορυφών κατά 1 (A-K=1) και όμοια σε ένα E-πολυγωνικό σύστημα θα ισχύει A-K=E-1 άρα K+E=A+1.Επειδή όμως η κατασκευή αυτή οδηγεί σε ανοιχτά πολυγωνικά συστήματα φραγμένα από ένα δίκτυο ακμών, μπορεί να επεκταθεί αυτό το νοητικό πείραμα σε κλειστά με την προσθήκη ενός καλύμματος που θα αυξήσει το E αλλά όχι τα K και A, επομένως K+E=A+2. Έτσι δημιουργήθηκε η απόδειξη και μπορούν να υπάρξουν ανασκευές, αποδεικτικές διαδικασίες και διατυπώσεις θεωρημάτων.

Η απόδειξη αυτή στηρίχτηκε στη σχέση Α=Κ για τα πολύγωνα, αλλά και αυτή η σχέση αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Προφανώς ισχύει Κ-Α=1 για μία ακμή και προσθέτοντας κάθε φορά νέες ακμές αυξάνεται ο αριθμός των ακμών και των κορυφών κατά 1. Μεταβαίνοντας από ένα ανοιχτό σύστημα ακμών σε κλειστό, προσαρμόζοντας μία ακόμη ακμή αλλά όχι κορυφή, προκύπτει Κ-Α=0. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής έδειξε ότι *για το λογικό σχήμα των αποδείξεων και ανασκευών δεν απαιτούνται αφελείς εικασίες ούτε επαγωγικά σημεία εκκίνησης.* Ο δάσκαλος υποστηρίζει ότι οι αφελείς εικασίες δεν είναι επαγωγικές εικασίες αλλά φτάνουμε σε αυτές μέσα από δοκιμές και λάθη, μέσα από εικασίες και ανασκευές. Και συνεχίζει λέγοντας, ότι αν υπάρχει μία εικασία και ένα αντιπαράδειγμα σε αυτήν τότε πρέπει να ελέγξουμε την εικασία με ένα νοητικό πείραμα. Έτσι μπορεί να τύχει μια απόδειξη και να περάσουμε από τη φάση των δοκιμών και λαθών στη μέθοδο των αποδείξεων και ανασκευών.

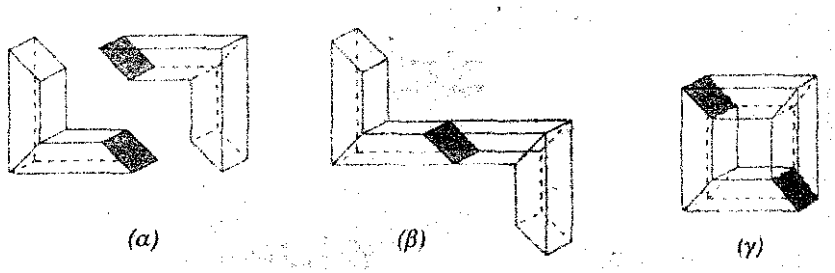
Έπειτα διατυπώνεται ένας ακόμα κανόνας, ο 5^{ος} κατά σειρά:

5. *Αν υπάρχουν αντιπαραδείγματα οποιουδήποτε τύπου, προσπάθησε με παραγωγική μαντική να διατυπώσεις ένα βαθύτερο θεώρημα για το οποίο να μην ισχύουν.*

Και στη συνέχεια ακολουθεί μία νέα εικασία με επαύξηση του περιεχομένου, η οποία ήταν: *«όλα τα κλειστά κανονικά πολύεδρα είναι Euler-ιανά».* Κανονικά είναι τα πολύεδρα που μπορούν να συντεθούν από ένα «τέλειο» πολύγωνο προσαρμόζοντας σε αυτό (α) πρώτα Ε-2 έδρες χωρίς να αλλάξει το Κ-Α+Ε (ανοιχτά κανονικά πολύεδρα) και (β) στο τέλος μία καλύπτουσα έδρα να αυξάνει το Κ-Α+Ε κατά 1. Το «τέλειο» πολύγωνο είναι εκείνο που μπορεί να κατασκευαστεί από μία κορυφή αν της προσαρμόσουμε αρχικά (n-1) ακμές χωρίς να αλλάξει το Κ-Α και στη συνέχεια μία ακμή που θα το κλείνει και θα μειώνει τη διαφορά κατά 1.

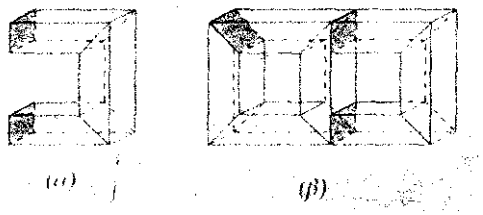
Ο ίδιος μαθητής παρουσιάζει μία νέα εικασία με πλήρη απόδειξη. Θεωρεί δύο Euler-ιανά παραδείγματα και τα μετατρέπει σε ένα αντιπαράδειγμα. Ξεκινά με δύο κλειστά κανονικά πολύεδρα (σχήμα 15α) και τα συγκολλά κατά μήκος ενός πολυγωνικού κυκλώματος, ώστε αν δύο έδρες συμπίπτουν να εξαφανίζονται (σχήμα 15β). Επειδή για τα δύο πολύεδρα ισχύει Κ+Ε=Α+4 μετά τη συγκόλληση θα ισχύει

Κ+Ε=Α+2. Αν συγκολλήσουμε τώρα τα πολύεδρα αυτά όμως κατά μήκος δύο πολυγώνων εξαφανίζονται 4 έδρες και ισχύει Κ+Ε=Α (σχήμα 15γ).



Σχήμα 15

Αν στο πλαίσιο που δημιουργήθηκε στο σχήμα 15γ συγκολληθεί ένα άλλο κανονικό πολύεδρο (σχήμα 16α) τότε θα ισχύει Κ+Ε= Α-2 (σχήμα 16β). Άρα για ένα μονο-σφαιροειδές πολύεδρο Κ+Ε=Α+2, για ένα δι-σφαιροειδές Κ+Ε=Α, για ένα τρι-σφαιροειδές Κ+Ε=Α-2 και για ένα n-σφαιροειδές Κ+Ε=Α+2-2(n-1).



Σχήμα 16

Ένας άλλος μαθητής ξεκινά με ένα αντιπαράδειγμα και το μετατρέπει σε παράδειγμα. Ξεκινώντας με το πλαίσιο εικόνας, που είναι φτιαγμένο από εύπλαστο υλικό, περνάει μία κλωστή μέσα από την οπή και με αυτή τέμνει το πολύεδρο μετατρέποντας το σε απλό σφαιροειδές. Έτσι αυξάνεται το πλήθος των εδρών κατά 2 και των ακμών και κορυφών κατά τον ίδιο αριθμό n. Αν ισχύει Κ+Ε=Α+2 για το τελικό πολύεδρο τότε για το αρχικό θα ίσχυε Κ+Ε=Α. Στην περίπτωση που οι τομές είναι n τότε η χαρακτηριστική θα είναι 2-2n. Ο πρώτος μαθητής αποδεικνύει χωρίς αρχική εικασία, επινοώντας μία σύνθεση, δηλαδή μία απόδειξη πείραμα με αφετηρία μία γνωστή αληθή πρόταση και ο δεύτερος δεν χρειάστηκε εικασία αλλά επινόησε μία ανάλυση, γνωρίζοντας ότι το αποτέλεσμα ισχύει. Η σχέση Κ+Ε=Α+2-2(n-1) που αποδείχτηκε να ένα n- σφαιροειδές πολύεδρο γενικεύεται στη συνέχεια για ένα n-σφαιροειδές ή n-πολλλαπλώς συνδεδεμένο πολύεδρο με e_k ακμές, των οποίων η αφαίρεση δεν μειώνει το πλήθος των εδρών και παίρνει τη μορφή:

$$K+E=A+2-2(n-1)+\sum_{k=1}^{F} e_k$$

Ο τύπος αυτός εξηγεί το παράδειγμα του κύβου με λοφίο που είναι ένα πολύεδρο με μία δακτυλιοειδή έδρα (n=1 και e_k=0) και τον κύβο με δύο δακτυλιοειδείς έδρες και μία σήραγγα, που είναι ένα δι- σφαιροειδές πολύεδρο (n=2 και $\sum_{k=1}^{F} e_k$=2). Και για τα πολύεδρα με κοιλότητες ο τύπος γίνεται:

$$K+E=A+\sum_{j=1}^{K}\left\{2-2\left(n_j-1\right)+\sum_{k=1}^{F} e_{kj}\right\}$$

Παρεμβαίνει ένας μαθητής επιδιώκοντας να ξεκαθαρίσει ότι οι διώκτες των τεράτων δεν συστέλλουν τις έννοιες αλλά οι ανασκευαστές τις διευρύνουν. Συγκεκριμένα υποστηρίζει ότι οι πρώτοι εξερευνητές είχαν στο μυαλό τους τα κανονικά πολύεδρα, τα οποία με την εικασία των Euler- Descartes διευρύνθηκαν και περιέλαβαν τα κοίλα και κυρτά. Δεν περιελάμβαναν όμως μη απλά πολύεδρα ή πολύεδρα με δακτυλιοειδείς έδρες. Οπότε η εικασία ήταν αληθής και η απόδειξη επαρκής. Οι ανασκευαστές στη συνέχεια επέκτειναν την έννοια του πολυέδρου και έτσι η εικασία ήταν ψευδής κατά την ερμηνεία που εισήγαγαν. Κατά αυτήν την έννοια τα αντιπαραδείγματα που δόθηκαν δεν ήταν λογικά (καθολικά αλλά όχι τοπικά) αλλά ευρετικά (τοπικά και όχι καθολικά ή καθολικά και τοπικά) και βοήθησαν στην ανάπτυξη της γνώσης. Έπειτα αναφέρει ότι το θεώρημα «όλα τα απλά πολύεδρα με απλώς συνδεδεμένες έδρες είναι Euler-ιανά» έχει παραπλανητική διατύπωση, καθώς η αρχική κλάση των πολυέδρων περιείχε μόνο απλά πολύεδρα με απλώς συνδεδεμένες έδρες.

Με τη βοήθεια της απόδειξης του Cauchy έγινε σύλληψη της ιδέας για γενίκευση της έννοιας του πολυέδρου ώστε να συμπεριλάβει και καμπυλόγραμμα πολύεδρα. Οι πράξεις της απόδειξης μπορούν να ερμηνευτούν και σε αυτά τα πολύεδρα. Στην πραγματικότητα ο Cauchy δεν είχε φανταστεί το πολύεδρο σαν ελαστικό αλλά σαν επιφάνεια (και όχι σαν στερεό). Το θεωρούσε μία στέρεα επιφάνεια. Όταν αφαιρούσε μία έδρα και απεικόνιζε το υπόλοιπο σε ένα επίπεδο πολυγωνικό δίκτυο δεν θεωρούσε ότι αυτή η εκδίπλωση εκτείνει ή κάμπτει τις έδρες και τις ακμές.

Οι αποδείξεις και ανασκευές διαγράφουν τις αφελείς έννοιες και τις αντικαθιστούν με έννοιες αποδεικτικής καταγωγής. Ο αφελής όρος «πολύεδρο» όριζε ένα στερεό με επίπεδες έδρες και ευθύγραμμες ακμές. Οι αποδεικτικές ιδέες εξαφάνισαν αυτή την αφελή έννοια και κάθε απόδειξη δημιουργούσε τις χαρακτηριστικές της αποδεικτικής καταγωγής έννοιες όπως η διατασιμότητα, η διογκωσιμότητα , η φωτογραφισιμότητα κ.α. Τελικά δεν επιλύεται το πρόβλημα που έπρεπε να επιλυθεί. Κατά αυτήν την έννοια η αρχική εικασία του Euler διαλύθηκε και επανεμφανίστηκε αναγεννημένη στην προβολική γεωμετρία μέσα από την απόδειξη του Gergonne, στην αναλυτική τοπολογία με την απόδειξη του Cauchy ή στην αλγεβρική τοπολογία με την απόδειξη του Poincare. Δεν υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στις αποδείξεις και ανασκευές και στις αλλαγές σε εννοιολογικό, ταξινομητικό και γλωσσικό πλαίσιο. Οι επιλογές που υπάρχουν με την εμφάνιση ενός αντιπαραδείγματος είναι είτε να αγνοηθεί καθώς στη γλώσσα που χρησιμοποιείται δεν είναι αντιπαράδειγμα, είτε να γίνει αλλαγή του γλωσσικού πλαισίου, διαστέλλοντας τις έννοιες και αποδοχή του αντιπαράδειγμα σε μία νέα γλώσσα.

Η αφελής επέκταση των εννοιών ενδέχεται να είναι υπερβολική και να δημιουργήσει ένα χάος αντιπαραδειγμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση η παραγωγική μαντική μπορεί να αντιμετωπίσει τα αντιπαραδείγματα, δημιουργώντας ένα σχήμα συνεχούς γενίκευσης μέσα από μία ανασκευή, που θα οδηγήσει σε τμηματική ανάπτυξη της θεωρίας. Ενδέχεται μία ανασκευή ή διεύρυνση των αφελών εννοιών να ακολουθείται από διεύρυνση της θεωρίας που θα την καταστήσει πιο ισχυρή. Η θεωρία με αυτόν τον τρόπο βασίζεται στην ικανότητα της να ερμηνεύει τις ανασκευές της καθώς αναπτύσσονται. Υπάρχει όμως και ένα δεύτερο σχήμα παραγωγικής μαντικής στο οποίο η θεωρία ερμηνεύει αλλά και παράγει τις ανασκευές της. Ο έλεγχος μίας πρότασης γίνεται απόδειξη μίας άλλης και αντιπαραδείγματα της πρώτης παραδείγματα της δεύτερης. Με τον τρόπο ατό επιτυγχάνεται αύξηση του περιεχομένου, επεκτείνοντας την απόδειξη με χειρισμούς που διευρύνουν την περιοχή εφαρμογής της.

Αυτή η ¨συνεχής¨ ανάπτυξη που περιγράφηκε παραπάνω θα φτάσει κάποια στιγμή σε ένα σημείο κορεσμού της θεωρίας. Οι αφελείς ανασκευές μπορούν να συνεχίζονται αλλά οι θεωρητικές όχι. Το πρώτο είδος είναι συμπτωματικό και μπορεί

να δημιουργείται από αυθαίρετη επέκταση μιας έννοιας. Τα αποδεχόμαστε ως αντιπαραδείγματα *καλής πίστεως* επειδή συνήθως είναι δεκτή η κριτική που διαστέλλει τις έννοιες και τα ονομάζουμε αφελή αντιπαραδείγματα ή *ιδιοτροπίες*. Τα θεωρητικά αντιπαραδείγματα προέρχονται από επεκτάσεις των αποδείξεων, δηλαδή είναι ιδιοτροπίες που καλύφθηκαν από διευρυμένες αποδείξεις. Οι ιδιοτροπίες ενδέχεται να μην είναι γνήσια αντιπαραδείγματα αλλά περιπτώσεις μίας άλλης θεωρίας. Θα πρέπει να προαγάγουμε τα αφελή αντιπαραδείγματα σε θεωρητικά, επαυξάνοντας τις αποδείξεις, μέσα από την ανάπτυξη της θεωρίας. Οι ιδιοτροπίες είναι πραγματικές ανασκευές που δεν ταιριάζουν στο σχήμα των συνεχών γενικεύσεων και μπορεί να οδηγήσουν σε ριζική αλλαγή του θεωρητικού πλαισίου.

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι για οποιαδήποτε πρόταση θα υπάρχει πάντα μία στενή ερμηνεία των όρων της ώστε να φαίνεται αληθής, αλλά και μία επαρκώς ευρεία ερμηνεία που θα φαίνεται ψευδής. Η πρώτη ερμηνεία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως δογματική, επαληθευτική ή απολογητική και η δεύτερη σκεπτική, κριτική ή ανασκευαστική. Κατανοώντας το μηχανισμό των ανασκευών μέσω της διαστολής των εννοιών, θα μπορούσε να ανασκευαστεί οποιοσδήποτε ισχυρισμός και τελικά να μην υπάρχει αληθινή πρόταση. Η διαστολή των εννοιών καθιστά την ανασκευασιμότητα βέβαιη ανασκευή. Έτσι, ανασκευάζοντας κάθε θεώρημα αντικαθίσταται με ένα αυστηρότερο, του οποίου η αναλήθεια θα αποκαλυφθεί αργότερα, διαγράφοντας μία άπειρη διαδικασία. Αντίθετα, αν σταματήσεις σε ένα σημείο αποδεχόμενος τις απολογητικές ερμηνείες, θα πρέπει να παραδεχτείς ότι η γλωσσική μορφή του θεωρήματος δεν ήταν ακριβής και πρέπει να ενσωματωθούν σε αυτό αυστηρότεροι ορισμοί, η ανακρίβεια των οποίων θα αποκαλυφθεί αργότερα. Η απεριόριστη διαστολή των εννοιών επομένως καταστρέφει το νόημα και την αλήθεια.

Μία μετριοπαθής διαστολή των εννοιών όμως θα μπορούσε να μετατρέψει μία μαθηματική αλήθεια σε λογική. Αν μία πρόταση δεν μπορεί να ανασκευαστεί ως προς κάποια στοιχεία της τότε είναι λογικά αληθής ως προς αυτά. Η διαστολή των εννοιών σε ένα διακεκριμένο υποσύνολο των συστατικών της πρότασης θα μπορούσε να αποτελέσει τον κύριο στόχο της κριτικής. Άρα η αλήθεια είναι ανεξάρτητη από το νόημα κάποιων από των εμπλεκόμενων όρων.

Μία ακόμη περίπτωση που βρίσκει εφαρμογή η μέθοδος των αποδείξεων και ανασκευών και περιγράφεται στο βιβλίο του Lakatos (1976) είναι το θεώρημα του Cauchy. Η αρχική εικασία είναι ότι το όριο κάθε συγκλίνουσας σειράς συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Όλο το 18° αιώνα η αλήθεια της εικασίας αυτής θεωρούνταν δεδομένη μέχρι που ο Cauchy (1821) έδωσε την πρώτη απόδειξη. Η ανάγκη που τον ώθησε να αποδείξει την αρχική εικασία ήταν τα αντιπαραδείγματα που εμφανίστηκαν στην εργασία του Fourier (1808). Η εργασία του Fourier περιείχε ένα παράδειγμα μία συγκλίνουσας σειράς συνεχών συναρτήσεων η οποία τείνει σε μία κατά Cauchy ασυνεχή συνάρτηση την cos(x) - $\frac{1}{3}$ cos(3x) + $\frac{1}{5}$ cos(5x)-…

Είναι γεγονός ότι ο Fourier δεν ισχυρίστηκε ότι βρήκε ένα αντιπαράδειγμα στο θεώρημα του Cauchy, αφού δήλωνε ότι πρόκειται για μία παντού συγκλίνουσα συνάρτηση με συνάρτηση-όριο που αποτελείται από διακριτά ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα προς τον άξονα χ και ίσα με π. Αυτές οι παράλληλες είναι τοποθετημένες εναλλασσομένως πάνω και κάτω από τον άξονα χ , σε απόσταση π/4 και ενώνονται με κάθετα τμήματα που θεωρούνται μέρη της σχετικής καμπύλης. Ο Fourier θεωρούσε αυτές τις οριακές συναρτήσεις συνεχείς. Στο φως όμως της εργασίας του Cauchy για το χαρακτηρισμό της συνέχειας, αυτές οι οριακές συναρτήσεις μπορούσαν να θεωρηθούν ασυνεχείς και επομένως να χαρακτηριστούν αντιπαραδείγματα της αρχικής εικασίας.

Αν η απόδειξη του Cauchy ήταν σωστή τότε τα παραδείγματα του Fourier δεν θα ήταν πραγματικά αντιπαραδείγματα. Ένας τρόπος απόδειξης αυτού θα μπορούσε να είναι η απόδειξη ότι η σειρά μόνο φαινομενικά συγκλίνει σε ασυνεχή συνάρτηση κατά Cauchy δηλαδή ότι αποκλίνει. Ακόμη και ό ίδιος ο Fourier αμφέβαλλε για τη σύγκλιση των σειρών του σε τέτοιες κρίσιμες περιπτώσεις. Εκ των υστέρων έγινε γνωστό ότι όπου η συνάρτηση ήταν ασυνεχής, η σειρά έτεινε στο $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ και όχι στο f(x). Τείνει σε αυτό μόνο όταν f(x)= $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Ο Abel (1826β) ανέφερε σε μία υποσημείωση ότι υπάρχουν εξαιρέσεις στο θεώρημα του Cauchy, ακόμη και αν η απόδειξή του δεν είχε κάποιο λάθος. Και

αναφέρει τη σειρά: sin(x) - $\frac{1}{2}$ sin (2x) + $\frac{1}{3}$ sin(3x)-…, προσθέτοντας ότι υπάρχουν και άλλα παρόμοια αντιπαραδείγματα. Ακολουθώντας τη μέθοδο αποκλεισμού των εξαιρέσεων, υποστηρίζει ότι η περιοχή εγκυρότητας του θεωρήματος του Cauchy και των θεωρημάτων της ανάλυσης γενικότερα, περιορίζεται στις δυναμοσειρές αφού οι γνωστές εξαιρέσεις του θεωρήματος ήταν οι τριγωνομετρικές σειρές (του Fourier). Στη συνέχεια διατυπώνει και αποδεικνύει το περίφημο θεώρημά του, που ήταν ουσιαστικά η ανακάλυψη της ιδιότητας της ομοιόμορφης σύγκλισης. Σύμφωνα με αυτό αν η σειρά $f(\alpha)=\nu_0+\nu_1\alpha^1+\nu_2\alpha^2+\ldots+\nu_\kappa\alpha^\kappa+\ldots$ συγκλίνει για μία δεδομένη τιμή δ για το α, τότε συγκλίνει και για κάθε τιμή μικρότερη του δ. Η συνάρτηση f(α-β) θα προσεγγίζει αορίστως το όριο f(α) υπό τον όρο το α να είναι μικρότερο ή ίσο με το δ, για τις σταθερά μειούμενες τιμές του β. Ο Abel δεν είχε παρατηρήσει ότι αυτό που έπρεπε να περιοριστεί ήταν ο τρόπος σύγκλισης και πίστευε ότι υπήρχε ένα μόνο είδος σύγκλισης, η απλή (στην περίπτωση των δυναμοσειρών η απλή σύγκλιση συμπίπτει με την ομοιόμορφη).

Το πρόβλημα που δημιουργήθηκε έχοντας ένα αποδεδειγμένο θεώρημα που θα έπρεπε να ήταν ψευδές ή να είχε εξαιρέσεις λύθηκε από τον Seidel (1847) ανακαλύπτοντας το ένοχο λήμμα στην απόδειξη του Cauchy, με τη μέθοδο των αποδείξεων και ανασκευών. Η ανακάλυψή του ήταν η εξής:

Έστω $\sum f_\nu(\chi)$ μία συγκλίνουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε ν ορίστηκε $\Sigma_\nu(\chi) = \sum_{\mu=0}^{\nu} f_\mu(\chi)$ και $\rho_\nu(\chi) = \sum_{\mu=(\nu+1)}^{\infty} f_\nu(\chi)$.

Η απόδειξη του Cauchy ήταν σχηματικά η εξής:

Δεδομένου ενός ε>0, τότε:

1. Υπάρχει ένα δ ώστε για κάθε β , αν $|\beta|$<δ τότε $|\Sigma_\nu(\chi+\beta) - \Sigma_\nu(\chi)|$<ε και αυτό λόγω της συνέχειας των $\Sigma_\nu(\chi)$.
2. Υπάρχει ένα N ώστε για κάθε ν ≥ N να ισχύει $|\rho_\nu(\chi)|$<ε και αυτό λόγω της σύγκλισης της $\sum f_\nu(\chi)$.
3. Υπάρχει ένα N΄ ώστε να ισχύει το ίδιο για ν ≥ N΄ για το $|\rho_\nu(\chi+\beta)|$<ε και αυτό λόγω της σύγκλισης της $\sum f_\nu(\chi+\beta)$.

Από όλα τα παραπάνω για όλα τα β με β<δ προκύπτει:

$|f(\chi+\beta)-f(\chi)|=|\Sigma_\nu(\chi+\beta)+\rho_\nu(\chi+\beta)-\Sigma_\nu(\chi)-\rho_\nu(\chi)|$

$\leq |\Sigma_\nu(\chi+\beta)-\Sigma_\nu(\chi)|+|\rho_\nu(\chi+\beta)|+|\rho_\nu(\chi)|<3\varepsilon.$

Αναλύοντας προσεκτικότερα την απόδειξη και καθιστώντας ρητές τις συναρτησιακές εξαρτήσεις μερικών ποσοτήτων προκύπτει ότι:

1. $|\Sigma_\nu(\chi+\beta)-\Sigma_\nu(\chi)|<\varepsilon$ για $\beta<\delta(\varepsilon,\chi,\psi)$
2. $|\rho_\nu(\chi)|<\varepsilon$ για $\nu>N(\varepsilon,\chi)$
3. $|\rho_\nu(\chi+\beta)|<\varepsilon$ για $\nu>N(\varepsilon,\chi+\beta)$

Επομένως $|\Sigma_\nu(\chi+\beta)+\rho_\nu(\chi+\beta)-\Sigma_\nu(\chi)-\rho_\nu(\chi)|=|f(\chi+\beta)-f(\chi)|<3\varepsilon$ αν $\nu>\max z\ N(\varepsilon,z)$: για όλα τα z και $\beta<\delta(\varepsilon,\chi,\mu)$.

Το κρυμμένο λήμμα που ανακάλυψε ο Seidel ήταν ότι αυτό το μέγιστο θα έπρεπε να υπάρχει για όλα τα ε. Αυτό ονομάστηκε απαίτηση της *ομοιόμορφης σύγκλισης*.

Τα εμπόδια προς αυτήν την ανακάλυψη ήταν η ¨χαλαρή¨ χρήση των απείρως μικρών ποσοτήτων από τον Cauchy, η παραδοχή από τους μαθηματικούς ότι υπάρχει ένα μέγιστο ενός άπειρου συνόλου N και τέλος η κυριαρχία της ευκλείδειας μεθοδολογίας. Δηλαδή η προσπάθεια να οριστούν όροι της ανάλυσης όπως το όριο, η σύγκλιση και η συνέχεια μέσω των οικείων όρων της αριθμητικής και η απόδειξη για οτιδήποτε δεν είχε ήδη αποδειχτεί ή δεν ήταν προφανές. Στο πλαίσιο αυτό η προσπάθεια να αποδειχθεί κάτι που ήταν ψευδές ήταν χωρίς νόημα. Τα αντιπαραδείγματα ήταν *βαριές και καταστροφικές* κριτικές που έδειχναν ότι η εικασία ήταν λανθασμένη και έπρεπε να ξεκινήσει μία νέα αναζήτηση εκ του μηδενός. Οι αποδείξεις χαρακτηρίζονταν ως αποδείξεις μόνο όταν αποδείκνυαν και δεν ήταν σεβαστές αν δεν ήταν αλάνθαστες. Για να αναπτυχθεί η μέθοδος των αποδείξεων και ανασκευών έπρεπε να εγκαταλειφθεί η ιδέα ότι όλα τα μαθηματικά μπορούσαν να αναχθούν σε αδιαμφισβήτητες αληθείς κοινοτοπίες και ότι η παραγωγική συμπερασματική μας διαίσθηση ήταν αλάνθαστη.

Πολλοί εκπαιδευτικοί με αντικείμενο τα μαθηματικά κάνουν αναφορές στις υπό μελέτη ιστορικές περιπτώσεις και τις περιγραφές των διαδικασιών ανακάλυψης

των μαθηματικών του Lakatos. Μεταξύ αυτών αναφέρουμε τους Zandich και Rasmussen (2007) οι οποίοι σημειώνουν ότι στα πλαίσια μιας μαθητικής κοινότητας η διατύπωση ενός ορισμού μπορεί να εξελιχθεί σύμφωνα με τις μεθόδους του Lakatos, ενώ ο Lambert παραλληλίζει τις μαθηματικές δραστηριότητες μαθητών πέμπτης δημοτικού με τις μεθόδους αυτές. Ο De Villiers (2000) περιγράφει ένα παράδειγμα γενίκευσης της ακολουθίας Fibonacci μέσω μιας διαδικασίας παρόμοιας με αυτήν που περιγράφει ο Lakatos.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

Ο ρόλος των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Στα μαθηματικά, τα παραδείγματα διαδραματίζουν ένα διπλό ρόλο στη σύλληψη των ιδεών. Χρησιμεύουν ως τα δομικά στοιχεία στη διαμόρφωση μιας έννοιας αλλά και ως τα αποτελέσματα της απόκτησή της. Ο Rissland (Michener,1978) διέκρινε τις εξής κατηγορίες παραδειγμάτων στα μαθηματικά: *τα παραδείγματα εκκίνησης*, που προσφέρουν κίνητρα για έναρξη ενός θέματος, *τα παραδείγματα αναφοράς*, που χρησιμεύουν για την ανάπτυξη της διαίσθησης, *τα γενικά παραδείγματα,* που μπορεί να είναι παραδείγματα εννοιών ή διαδικασιών ή να αποτελούν τον πυρήνα μίας απόδειξης και *τα αντιπαραδείγματα (counter examples),* που είναι παραδείγματα που πληρούν τις προϋποθέσεις μιας εικασίας αλλά παραβιάζουν το συμπέρασμα και χρησιμοποιούνται για να καταρρίψουν έναν ισχυρισμό. Οι Zazkis και Leikin (2008) πρόσθεσαν και τα *μη παραδείγματα (nonexamples)*, που εσφαλμένα θεωρούνται ως παραδείγματα μιας έννοιας αλλά βοηθούν στη διευκρίνιση των ορίων της έννοιας, στην υπόδειξη σαφών προϋποθέσεων για να ισχύει ένα θεώρημα και στην ανάδειξη περιπτώσεων όπου μία διαδικασία μπορεί να μην εφαρμόζεται.

Σε ένα μαθηματικό πλαίσιο υπάρχει μικρή διαφορά ανάμεσα σε ένα παράδειγμα, ένα μη παράδειγμα και ένα αντιπαράδειγμα. Κάτι που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως παράδειγμα για μία έννοια ή θεώρημα, θα μπορούσε να θεωρηθεί μη παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα για μία άλλη έννοια ή θεώρημα. Έτσι η συνάρτηση f(x)=$|x|$ είναι ταυτόχρονα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης των πραγματικών αριθμών αλλά μη παράδειγμα παντού παραγωγίσιμης συνάρτησης και αντιπαράδειγμα στη λανθασμένη εικασία ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι και παντού παραγωγίσιμες. Όμοια το 0,9 είναι ταυτόχρονα ένα παράδειγμα ενός θετικού αριθμού που το τετράγωνό του δεν είναι μεγαλύτερο του 1, ένα αντιπαράδειγμα στη λανθασμένη εικασία ότι η ύψωση στο τετράγωνο δίνει πάντα μεγαλύτερο αριθμό

αλλά και ένα μη παράδειγμα ενός αριθμού του οποίου το τετράγωνο είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό (Goldenberg &Mason,2008).

Τα μη παραδείγματα διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες. Τα διαισθητικά μη παραδείγματα, που γίνονται αποδεκτά ως έχουν και αναγνωρίζονται εύκολα από τους μαθητές και τα μη διαισθητικά, που αποτελούνται από μη παραδείγματα που παρουσιάζουν ομοιότητα όμως με παραδείγματα της έννοιας και εσφαλμένα μπορεί να χαρακτηριστούν ως παραδείγματα (Tsamir, Tirosh & Levenson,2008). Χαρακτηριστικά, μπορεί να αναφερθεί ως διαισθητικό μη παράδειγμα τριγώνου ένα τετράγωνο, ενώ μη διαισθητικό μη παράδειγμα τριγώνου θα μπορούσε να είναι ένα ¨τρίγωνο¨ με στρογγυλεμένες γωνίες. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά τέτοιων περιπτώσεων.

Η σημασία χρησιμοποίησης παραδειγμάτων κατά την εκμάθηση των μαθηματικών είναι αντικείμενο μελέτης πολλών θεωριών. Στην ψυχολογία έχει μελετηθεί ο τρόπος που οι άνθρωποι καταλήγουν σε μία έννοια μέσα από παραδείγματα καθώς και ο τρόπος που παραδείγματα και μη-παραδείγματα επηρεάζουν τη διάκριση των εννοιών (Bruner,1956, Wilson,1986,1990, Charles, 1980, Petty & Janson, 1987). Η Γενετική Επιστημολογία (Piaget,1970) υποθέτει ότι οι άνθρωποι προσπαθούν να κατανοήσουν τον κόσμο της εμπειρίας εντασσόμενοι σε κοινωνικές ομαδοποιήσεις. Αναφέρεται σε θεωρίες εκμάθησης των μαθηματικών μέσω της αφομοίωσης και της προσαρμογής νέων παραδειγμάτων σε ήδη υπάρχοντες νοητικούς σχηματισμούς.

Ο Skemp (1969) στηριζόμενος στο *σχήμα* του Piaget, υποστήριξε την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών μέσω της *αφαίρεσης* από παραδείγματα. Συμπεριέλαβε τις προφανείς ιδιότητες του παραδείγματος, που δεν είναι ουσιαστικές για την έννοια και του μη παραδείγματος, για να γίνει διάκριση μεταξύ των ουσιαστικών και μη ιδιοτήτων της έννοιας, ώστε τελικά να διασαφηνιστούν τα όρια της. Ο Vinner (1983,1991) περιγράφει ένα χάσμα ανάμεσα στον τρόπο που ο μαθητής αντιλαμβάνεται την εικόνα μίας έννοιας και στον ορισμό της. Η εικόνα της έννοιας ενδέχεται να στηρίζεται σε μία περιορισμένη διεύρυνση των παραδειγμάτων και να περιλαμβάνει χαρακτηριστικά δεν ανήκουν στην έννοια. Έτσι οι μαθητές περιορίζουν

τις εικόνες των εννοιών σε τομείς που είναι εξοικειωμένοι με αποτέλεσμα να μην είναι χρήσιμες.

Ο Thorndike (1924) ακολούθησε μία συμπεριφοριστική γραμμή χρησιμοποιώντας παραδείγματα σαν ερεθίσματα για να προκαλέσει τις αντιδράσεις εκμάθησης (*learning responses*), και ο Gagne (1985) ανέπτυξε περαιτέρω την τακτική αυτή δημιουργώντας μία ιεραρχία συμπεριφορών αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Ο Dienes (1960) χρησιμοποίησε έξυπνα προσχεδιασμένα παιχνίδια και προ-δομημένες καταστάσεις σαν παραδείγματα μαθηματικών δομών και μετέπειτα 'βύθισε' σε αυτές τους μαθητές έτσι ώστε να βιώσουν παραδείγματα περίπλοκων μαθηματικών εννοιών μέσω της δικής τους άμεσης εμπειρίας (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson, & Zaslavsky, 2006).

Ο Dubinsky (1991) εισήγαγε μία θεωρία ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης που την ονόμασε APOS(actions, processes, objects, schemas). Σύμφωνα με αυτή η ενασχόληση των μαθητών με παραδείγματα είναι μέρος της διαδικασίας μέσω της οποίας οι μαθητές θα κινηθούν από την πράξη στη διαδικασία για να καταλήξουν στην αντίληψη του αντικειμένου. Το μοντέλο ανάπτυξης της κατανόησης των Pirie & Kieren (1994), εστιάζει στην κατασκευή της εικόνας και στην αναδίπλωση μεταξύ των σταδίων, αλλά αναγνωρίζει παρόλα αυτά πως η άμεση εμπειρία των παραδειγμάτων είναι εκείνη που συνεισφέρει στο να σχηματιστούν προσωπικές εικόνες και γνώσεις.

Οι Marton & Booth (1997) ασχολήθηκαν με τη συμβολή ποικίλων παραδειγμάτων στην εύρεση εννοιών. Επεσήμαναν ότι οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν την παραλλαγή μέσα από μία ποικιλομορφία παραδειγμάτων και διατύπωσαν ως ορισμό της μάθησης την αναγνώριση μίας ή περισσοτέρων διαστάσεων της παραλλαγής που θα μπορούσε να παρουσιάσει ένα παράδειγμα. Οι Watson & Mason (2005) επέκτειναν τον παραπάνω ορισμό εισάγοντας τις έννοιες της *πιθανής αλλαγής* και του *εύρους της επιτρεπόμενης αλλαγής* στα πλαίσια των οποίων ένα αντικείμενο παραμένει ένα παράδειγμα της έννοιας. Η Sfard (1991) ακολουθεί τον Freudenthal (1983) παρακολουθώντας τους μαθητές να κινούνται από μία λειτουργική σε μία δομική κατανόηση της έννοιας μέσω μίας διαδικασίας *εσωτερίκευσης* και *συμπύκνωσης* που οδηγεί σε *αναπαράσταση γνώσης*. Τα δύο

πρώτα στάδια συντελούνται αργά και σταδιακά, συντελούμενα με την πάροδο του χρόνου και μέσω επαναλαμβανόμενων συναντήσεων με παραδείγματα.

Οι έννοιες χρησιμεύουν ως μέσο για την κατηγοριοποίηση διαφορετικών αντικειμένων και άρα η κατανόησή τους μπορεί να επιτρέψει σε κάποιον να προσδιορίσει παραδείγματα αλλά και μη παραδείγματα Ο σχηματισμός μίας έννοιας είναι μία σύνθετη διαδικασία και τα παραδείγματα συμβάλουν καθοριστικά σ' αυτήν. Οι δύο θεωρίες που επιχειρούν να περιγράψουν τις διαδικασίες της κατηγοριοποίησης και του σχηματισμού μιας έννοιας είναι η *κλασική* και η *πρωτοτυπική* άποψη. Σύμφωνα με την *κλασική* άποψη οι έννοιες καθορίζονται από ένα σύνολο χαρακτηριστικών που είναι κοινά σε όλα τα παραδείγματα (Klausmeier & Sipple 1980, Smith,Shoben & Rips 1974, Smith & Medin 1981). Πιθανά νέα χαρακτηριστικά που θα προκύψουν, θα αξιολογηθούν σύμφωνα με τα γνωρίσματα κάθε κατηγορίας και θα συντελέσουν στην επανένταξη των παραδειγμάτων. Η *πρωτοτυπική* άποψη προτείνει την ύπαρξη ιδανικών παραδειγμάτων, τα οποία ονομάζονται πρωτοτυπικά. Το γενικό ή πρωτοτυπικό παράδειγμα, που σύμφωνα με τον Balacheff(1988) *¨περιλαμβάνει την αποσαφήνιση των λόγων που ένας ισχυρισμός είναι αληθινός δια μέσου των λειτουργιών ή των μετατροπών ενός αντικειμένου που βρίσκεται εκεί σαν χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος της κατηγορίας του¨* θεωρείται από τον Fraudenthal (1983) ως *παράδειγμα (paradigm).* Τα πρωτοτυπικά παραδείγματα αποκτούνται στην αρχή και χρησιμεύουν ως βάση συγκρίσεως κατά την κατηγοριοποίηση των επιπλέον παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων (Attneave 1957, Posner & Keele 1968, Reed 1972, Rosch 1973). Στη μαθηματική εκπαίδευση, και οι δύο απόψεις συχνά χρησιμοποιούνται κατά το σχηματισμό των γεωμετρικών εννοιών.

Η νοητική κατασκευή μιας έννοιας περιλαμβάνει κυρίως οπτικές εικόνες που βασίζονται στις αντιληπτικές ομοιότητες των παραδειγμάτων, γνωστή ως χαρακτηριστικά γνωρίσματα (σύμφωνα με τους Smith et al.1974). Η αρχική αυτή διάκριση μπορεί να οδηγήσει σε μερική μόνο απόκτηση της έννοιας. Έπειτα, τα παραδείγματα χρησιμεύουν ως βάση στη δημιουργία μιας έννοιας, που στηρίζεται στον καθορισμό των αισθητών και μη αισθητών χαρακτηριστικών των παραδειγμάτων. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από τους Vinner και Hershkowitz (1980), οι οποίοι εισήγαγαν τους όρους, έννοια της εικόνας και ορισμός έννοιας σε

σχέση με γεωμετρικές έννοιες. Οι οπτικές αναπαραστάσεις, οι εντυπώσεις και οι εμπειρίες συνθέτουν την πρώτη εικόνα της έννοιας. Οι επίσημοι μαθηματικοί ορισμοί συνήθως προστίθενται σε ένα μεταγενέστερο στάδιο.

Οι εκπαιδευτικοί συνηθίζουν να χρησιμοποιούν παραδείγματα και μη παραδείγματα κατά τη διδασκαλία μιας έννοιας καθώς θεωρούν αυτό τον τρόπο αποτελεσματικότερο (Klausmeier and Feldman,1975 McKinney, Larkins, Ford &Davis, 1983). Τα μη παραδείγματα χρησιμεύουν στην «διεύρυνση των συνόρων» μιας έννοιας (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006) και άρα μπορούν να θεωρηθούν απαραίτητα στη διαμόρφωσή της. Πολλές φορές όμως τα πρωτοτυπικά παραδείγματα μπορεί να λειτουργήσουν και ως εμπόδιο στο σχηματισμό μιας έννοιας, γιατί ενώ είναι εύκολα αναγνωρίσιμα η λογική πάνω στην οποία βασίζονται οδηγεί σε μία περιορισμένη εικόνα της έννοιας με αποτέλεσμα τα μη πρωτοτυπικά παραδείγματα να θεωρούνται μη παραδείγματα. Η Hershkowitz (1990) αναφέρεται στην τάση που υπήρχε στα μαθηματικά να θεμελιώνεται κάτι λογικά ξεκινώντας από πρωτοτυπικά παραδείγματα αντί για ορισμούς καθώς και στα λάθη που αυτό συνεπάγεται. Τα λάθη αυτά σχετίζονται με τα συμπεράσματα που εξάγουν οι μαθητές στηριζόμενοι αποκλειστικά σε ένα περιορισμένο αριθμό πρωτοτυπικών παραδειγμάτων και αγνοώντας τα μη πρωτοτυπικά παραδείγματα.

Ο εντοπισμός κατάλληλων παραδειγμάτων κατά το σχηματισμό των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές τους εντάσσει ανάλογα σε κάποιο από τα πέντε επίπεδα του Van Hiele (1958). Ο Van Hiele υποστήριξε ότι η γεωμετρική σκέψη των μαθητών προχωράει μέσα από την ιεράρχηση πέντε επιπέδων (Αναγνώριση, Ανάλυση, Διάταξη, Αφαίρεση, Αυστηρότητα). Στο επίπεδο της *αναγνώρισης* οι μαθητές αναγνωρίζουν και κατονομάζουν τα σχήματα βασιζόμενοι στη συνολική μορφή τους. Οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του σχήματος δε γίνονται αντιληπτές. Στο επόμενο επίπεδο της *ανάλυσης,* οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν όλα τα σχήματα σε μια ομάδα και αντιλαμβάνονται ότι το σχήμα που παρατηρούν είναι αντιπρόσωπος της κατηγορίας που ανήκει. Στη *διάταξη,* κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων και μεταξύ των σχημάτων. Συνδέουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους και τα ταξινομούν σε κατηγορίες. Κατά την *αφαίρεση* οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Διακρίνουν ένα αξίωμα από ένα θεώρημα και συμπεραίνουν

ότι μια πρόταση είναι λογικό επακόλουθο μιας άλλης. Στο τελευταίο επίπεδο της *αυστηρότητας* οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της ακρίβειας για τη διατύπωση των γεωμετρικών θεωριών και είναι σε θέση να αναλύσουν διάφορα αξιωματικά συστήματα με μεγάλη αυστηρότητα.

Τα χαρακτηριστικά μίας έννοιας διακρίνονται σε κρίσιμα (critical) και μη κρίσιμα (non-critical) (Hershkowitz,1989). Στα μαθηματικά τα κρίσιμα χαρακτηριστικά απορρέουν από τον ορισμό της έννοιας ή αιτιολογούνται απ' αυτόν. Για παράδειγμα στον καθορισμό του τετραπλεύρου ως ¨ ένα πολύγωνο τεσσάρων πλευρών¨ τα κρίσιμα χαρακτηριστικά είναι (α) το κλειστό σχήμα, (β) οι τέσσερις πλευρές, (γ) οι τέσσερις κορυφές και (δ) οι τέσσερις γωνίες. Μη κρίσιμα χαρακτηριστικά είναι το μέγεθος του σχήματος και ο προσανατολισμός. Οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να χρησιμοποιούν μόνο τα κρίσιμα χαρακτηριστικά για τον εντοπισμό παραδειγμάτων και το σχηματισμό εννοιών (Tsamir, Tirosh & Levenson,2008) και έτσι θα λειτουργούν τουλάχιστον στο δεύτερο επίπεδο του Van Hiele.

Τα παραδείγματα θα πρέπει να περιλαμβάνουν όλα τα κρίσιμα χαρακτηριστικά μιας έννοιας ενώ οι μη κρίσιμες ιδιότητες να βρίσκονται σε μερικά μόνο από αυτά. Η Hannibal (1999), στη μελέτη της κατανόησης των σχημάτων από τα παιδιά, διαπίστωσε ότι πολλά από αυτά στράφηκαν στη χρήση μη κρίσιμων ιδιοτήτων όταν προσπάθησαν να διαφοροποιήσουν παραδείγματα και μη παραδείγματα μεταξύ παρόμοιων σχημάτων. Οι Burger και Shaughnessy (1986) ισχυρίστηκαν ότι η αναφορά ενός ατόμου στις μη κρίσιμες ιδιότητες έχει ένα στοιχείο οπτικής αιτιολόγησης. Έτσι, υποστήριξαν περαιτέρω, ότι ένα παιδί με αυτό το σκεπτικό μπορεί να είναι είτε στο πρώτο επίπεδο van Hiele, είτε στο δεύτερο επίπεδο, καθώς ο ίδιος άνθρωπος μπορεί να είναι στραμμένος σε ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, και να μην κρίνει την εικόνα ως σύνολο. Στην πραγματικότητα, έρευνες έχουν δείξει ότι τα επίπεδα van Hiele μπορεί να μην είναι διακριτά και ότι ένα παιδί μπορεί να εμφανίσει διαφορετικά επίπεδα σκέψης για διαφορετικά πλαίσια και για διαφορετικές εργασίες (Burger & Shaughnessy, 1986).

Στη γεωμετρία, ένα μη παράδειγμα μιας έννοιας, είναι ένα παράδειγμα από το οποίο λείπει τουλάχιστον ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό της έννοιας που εξετάζεται.

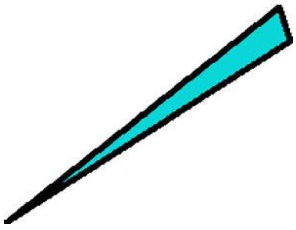
Όσο πιο πολλά κρίσιμα χαρακτηριστικά λείπουν από ένα μη παράδειγμα, τόσο αυξάνεται η πιθανότητα να είναι διαισθητικά αποδεκτό ως μη παράδειγμα. Υποστηρίζεται ότι η διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών θα πρέπει να περιλαμβάνει κάτι περισσότερο από απλή έκθεση σε τυπικά παραδείγματα της έννοιας (Clements et al. 1999, Hershkowitz, 1989). Επίσης ,σύμφωνα με τους Tsamir, Tirosh & Levenson, (2008) προτείνεται η διδασκαλία της γεωμετρίας να περιλαμβάνει έκθεση σε μια ποικιλία από μη παραδείγματα , και όχι απλώς σε διαισθητικά μη παραδείγματα.

Η κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων από τα παιδιά μπορεί επίσης να σχετίζεται με την *ονοματολογία*, που λειτουργεί και ως καταλύτης για να διαμορφώσει τις κατηγορίες (Waxman,1999). Στην πραγματικότητα, η κατηγοριοποίηση βελτιώνεται σημαντικά όταν τα παιδιά ακούν ένα ενιαίο αμετάβλητο όνομα για διάφορα παραδείγματα μίας κατηγορίας σε αντίθεση με την ακοή διαφορετικών ονομάτων για τα διάφορα παραδείγματα (Waxman & Braun,2005). Ο Markman (1989) υποστηρίζει ότι όταν τα παιδιά ακούν ένα νέο όνομα για ένα αντικείμενο, υποθέτουν ότι αναφέρεται σε ολόκληρο αντικείμενο και όχι στα τα μέρη του, για παράδειγμα η χρησιμοποίηση ενός ενιαίου ονόματος για τα τρίγωνα σε σχέση με το διαχωρισμό τους σε ισοσκελή, ισόπλευρα, σκαληνά, ορθογώνια, αμβλυγώνια ή οξυγώνια. Αυτό συμπίπτει με τα επίπεδα van Hiele ,στα οποία τα παιδιά λαμβάνουν πρώτα ολόκληρο το σχήμα υπόψη χωρίς αναφορά στα μέρη του. Μελέτες έχουν επίσης δείξει ότι τα παιδιά υποθέτουν ότι ένα συγκεκριμένο αντικείμενο θα έχει μία και μόνο ονομασία (π.χ. Markman και Watchtel 1988). Η υπόθεση αυτή μπορεί να προκαλέσει δυσκολίες στην αποδοχή της ιεραρχικής δομής γεωμετρικών σχημάτων, όπου ένα τετράγωνο είναι επίσης ένα ορθογώνιο και ένα τετράπλευρο (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008).

Η έννοια της *διαίσθησης* έχει αποδειχθεί ότι διαδραματίζει ουσιαστικό ρόλο στη διαδικασία μαθηματικής σκέψης των μαθητών (Fischbein,1987). Η διαισθητική γνώση είναι αυτονόητη και άμεση αλλά συχνά προέρχεται και από την πρακτική εμπειρία. Ο Fischbein (1993) εξέτασε τις σχηματικές έννοιες μιας ιδιαίτερα ενδιαφέρουσας κατάστασης όπου διαισθητικές και τυπικές πλευρές αλληλεπιδρούν. Η εικόνα ενός σχήματος προωθεί μια άμεση διαισθητική απάντηση. Ωστόσο, οι

γεωμετρικές έννοιες είναι αφηρημένες ιδέες που προέρχονται από επίσημους ορισμούς. «Πολύ συχνά η διαισθητική παράσταση είναι ισχυρότερη και τείνει να εξολοθρεύσει την επίσημη σύλληψη» (Fischbein,1987). Στην περίπτωση των παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, διαισθητικά αποδεκτά παραδείγματα και μη παραδείγματα θα ήταν τα σχήματα που τα παιδιά αμέσως προσδιορίζουν ως τέτοια, χωρίς να χρειάζεται να δικαιολογήσουν τους ισχυρισμούς τους.

Ο Fischbein(1987,1993) χρησιμοποίησε τον όρο *σχηματικό (figural)* για να αναφερθεί στη διπλή φύση των γεωμετρικών εννοιών, που γίνονται κατανοητές τόσο μέσω της αντίληψης των παραδειγμάτων όσο και της λογικής των ιδανικών χαρακτηριστικών, δίνοντας την έννοια της *σχηματικής έννοιας*. Στην περίπτωση που η αντίληψη κυριαρχεί της λογικής υπάρχει παρανόηση καθώς οι μαθητές μπορούν να συμπεριλάβουν ακατάλληλα χαρακτηριστικά αντίληψης στην επέκταση της έννοιας πέρα από τα παραδείγματα. Έτσι πολλά σχολικά βιβλία συνήθιζαν να σχεδιάζουν τα τετράγωνα με τις πλευρές παράλληλες στις σελίδες τους, παραπλανώντας τους μαθητές οι οποίοι υπέθεσαν ότι ένα κεκλιμένο τετράγωνο δεν είναι τετράγωνο αλλά ένα ¨διαμάντι¨. Το ίδιο συνέβαινε και με τα τρίγωνα αφού συνηθίζεται να σχεδιάζονται με τη μία πλευρά παράλληλα με τη σελίδα του βιβλίου και έτσι σχήματα όπως το σχήμα 17 χαρακτηρίζονται από τους μαθητές ως ¨ραβδιά¨ (Sfard, 2001).



Σχήμα 17

Η έννοια του Fischbein (1993) μπορεί να επεκταθεί περιλαμβάνοντας καταστάσεις στις οποίες κάποια άσχετα χαρακτηριστικά μπορούν να εισχωρήσουν ή και να κυριαρχήσουν σε μια έννοια. Η ιδέα κάποιου ατόμου μπορεί να χαρακτηριστεί ως σχηματική αν περιλαμβάνει παραδείγματα με άσχετες ιδιότητες που οι μαθητές σιωπηρά έχουν συνδέσει με την έννοια. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί η ετοιμότητα του εκπαιδευτικού, που θα πρέπει να αναφέρει κατάλληλα επιλεγμένα

παραδείγματα επιτρέποντας στο μαθητή να γνωρίζει ποια χαρακτηριστικά μπορούν να αλλάξουν καθώς και το εύρος αυτής της αλλαγής.

Τα *πρωτοτυπικά* παραδείγματα είναι εξίσου σημαντικά στο σχηματισμό των εννοιών. Σε σχέση με τη γεωμετρική διαμόρφωση της έννοιας, η Hershkowitz (1989) υποστήριξε ότι εκτός από τα αναγκαία και κρίσιμα χαρακτηριστικά που μοιράζονται όλα τα παραδείγματα, τα τυπικά παραδείγματα του σχήματος έχουν ειδικά (μη κρίσιμα) χαρακτηριστικά «τα οποία είναι κυρίαρχα και τραβούν την προσοχή μας». Τα τυπικά παραδείγματα έχουν συχνά το μεγαλύτερο κατάλογο χαρακτηριστικών γνωρισμάτων. Αρχικά, η αντίληψη των εικόνων από τα παιδιά αποτελείται από τυπικά παραδείγματα. Κατά την επεξεργασία των χαρακτηριστικών, τα παιδιά συνήθως σχεδιάζουν ένα πρωτοτυπικό παράδειγμα. Η Hershkowitz (1989) διαπίστωσε ότι, ακόμη και όταν μια επινοημένη έννοια εισάγεται αποκλειστικά από ένα λεκτικό ορισμό, μια πρωτοτυπική μορφή προκύπτει από τα σχέδια των μαθητών. Οι Smith et al. (1974) υποστήριξαν ότι ορισμένα τυπικά παραδείγματα είναι γρήγορα χαρακτηρίσημα ως ένα παράδειγμα της κατηγορίας, ενώ άλλα παραδείγματα μπορεί να πάρει περισσότερο για να αναγνωρισθούν. Επίσης, διατύπωσε την πιθανότητα ότι ορισμένα μη παραδείγματα είναι τόσο ανόμοια ώστε να είναι γρήγορα αναγνωρίσιμα ως μη παραδείγματα της κατηγορίας.

Οι Clements, Swaminathan, Hannibal και Sarama (1999) προτείνουν ότι διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν διαφορετικούς αριθμούς πρωτοτυπικών παραδειγμάτων. Ανέφεραν ότι ο κύκλος και ο κύβος έχουν λιγότερα πρωτοτυπικά παραδείγματα από τα ορθογώνια και τα τρίγωνα. Μερικές μελέτες έχουν δείξει ότι η υπερβολική έκθεση σε πρωτοτυπικά παραδείγματα μπορεί να παρεμποδίσει την ανάπτυξη της πληρέστερης απόκτησης μιας έννοιας, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Για παράδειγμα, ο Kellogg (1980) πρότεινε ότι τα πρωτοτυπικά παραδείγματα σχηματίζονται όταν ορισμένα μη κρίσιμα χαρακτηριστικά ενός σχήματος εμφανίζονται συχνά σε παραδείγματα και οι μαθητές αρχίζουν να συνδέουν αυτές τις μη κρίσιμες ιδιότητες με τα παραδείγματα του σχήματος. Ο Wilson (1986) υποστήριξε τη χρησιμοποίηση μη παραδειγμάτων, προκειμένου να μειώσει την επίδραση των πρωτοτυπικών παραδειγμάτων. Εκθέτοντας τους μαθητές σε μη

παραδείγματα με τις ίδιες μη κρίσιμες ιδιότητες, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να κάνουν διάκριση μεταξύ κρίσιμης και μη κρίσιμης ιδιότητας.

Κατά τη διαδικασία της μάθησης και κατανόησης των μαθηματικών βασικό ρόλο διαδραματίζει η έννοια της *διαφάνειας (transparency),* (Zaslavsky, 2004). Αυτή αναφέρεται τόσο στην εξέταση των μαθηματικών αντικειμένων σε βάθος όσο και στο κατά πόσο αυτά είναι ορατά, δηλαδή αναφέρεται σε διαφανή αντιπαραδείγματα που αποκαλύπτουν και την αιτία για την οποία δεν ισχύει ένας ισχυρισμός. Τα γενικά παραδείγματα (Mason & Pimm, 1984), τα οποία είναι συγκεκριμένα παραδείγματα που μεταφέρουν γενικές ιδέες και περιπτώσεις, μπορούν να χαρακτηριστούν ως *διαφανή (transparent)* για τη γενική περίπτωση. Παρόλα αυτά, οι μαθητές μπορεί να θεωρήσουν τα γενικά παραδείγματα ως ειδικά, παραβλέποντας τη γενικότητά τους, επειδή αδυνατούν να κατανοήσουν το σκοπό για τον οποίο επιλέχτηκαν από το διδάσκοντα. Σ' αυτήν την περίπτωση το παράδειγμα χαρακτηρίζεται ως *μη διαφανές (non-transparent/opaque).*

Η θεώρηση των Movshovitz-Hadar (2002) για τις *διαφανείς αποδείξεις (transparent proofs)* είναι μια επέκταση της διαφάνειας. Διάκριση υπάρχει και στα αντιπαραδείγματα, ανάμεσα σε αυτά που τα οποία μόνο διαψεύδουν μία δήλωση και στα *διαφανή αντιπαραδείγματα (transparent counter example)* που επιπλέον αντανακλούν ένα επεξηγηματικό χαρακτηριστικό σχετικά με το πώς και γιατί δημιουργήθηκαν.

Εκτός από την εξέταση σε βάθος που παρουσιάστηκε παραπάνω, η διαφάνεια σχετίζεται και με μαθηματικά αντικείμενα που είναι ορατά. Δηλαδή εξετάζεται επιπλέον αν τα διαφανή αντικείμενα ή οι διαδικασίες, συμβάλουν στη μαθηματική κατανόηση. Έτσι για παράδειγμα οι αλγόριθμοι, που ενσωματώνουν πολλές μαθηματικές αρχές, δεν είναι εξίσου διαφανείς σε κάθε αρχή. Ο αλγόριθμος της διαίρεσης είναι διαφανής για την έννοια της περιοδικότητας αλλά αδιαφανής για την αξία θέσης κάθε ψηφίου σε έναν αριθμό.

Σε μελέτη των Shir &Zaslavsky (2002) για τους μαθηματικούς ορισμούς, διαπιστώθηκε ότι οι συμμετέχοντες (μαθητές και καθηγητές) δεν αποδέχονται ορισμούς για γεωμετρικά σχήματα οι οποίοι βασίζονται σε ¨κρυφά¨ στοιχεία τους (όπως για παράδειγμα ο ορισμός ενός τετραπλεύρου με τη βοήθεια της διαγωνίου

του). Αυτό το φαινόμενο εξηγείται από τη τάση να θεωρούνται στοιχεία του σχήματος μόνο όσα είναι ορατά. Επίσης τα ορατά χαρακτηριστικά των μαθηματικών αντικειμένων υπερίσχυαν στη συλλογή κριτηρίων σε σχέση με τα αδιαφανή, τα οποία δεν εντοπίστηκαν ή χρησιμοποιήθηκαν μετέπειτα, στην έρευνα των Zaslavsky & Leikin (2004).

Οι Watson και Mason (2005) υποστήριξαν ότι ένας σημαντικός στόχος της μάθησης των μαθηματικών είναι η διεύρυνση και η ενίσχυση του *χώρου παραδειγμάτων (example space)*, που είναι συλλογές παραδειγμάτων που πληρούν μία συγκεκριμένη λειτουργία, στην οποία κάποιος έχει πρόσβαση. Η μελέτη των μη παραδειγμάτων, συμπεριλαμβανομένης της έννοιας των διαισθητικών μη παραδειγμάτων και των πρωτοτυπικών μη παραδειγμάτων, μπορεί να συμβάλλει σημαντικά στην επίτευξη του παραπάνω στόχου.

Τα είδη των χώρων παραδειγμάτων είναι τέσσερα.

- Οι τοποθετημένοι (τοπικοί), προσωπικοί (ατομικοί) χώροι παραδειγμάτων, οι οποίοι ενεργοποιούνται από κάποια εργασία, νύξη, το περιβάλλον, καθώς και από πρόσφατη εμπειρία.
- Ο προσωπικός εν δυνάμει χώρος παραδειγμάτων από τον οποίο προκύπτει ένας τοπικός χώρος που συνίσταται από την περασμένη εμπειρία του προσώπου και μπορεί να μην είναι δομημένος με τρόπους που επιτρέπουν την εύκολη πρόσβαση.
- Ο συμβατικός χώρος παραδειγμάτων, όπως γίνεται κατανοητός από τους μαθηματικούς και όπως εκτίθεται στα εγχειρίδια, στον οποίο ο δάσκαλος ελπίζει να εισάγει τους μαθητές του.
- Ο συλλογικός και τοποθετημένος χώρος παραδειγμάτων, τοπικός σε μία τάξη ή άλλη ομάδα σε κάποιο συγκεκριμένο χρόνο, που δρα ως ένας τοπικός συμβατικός χώρος.

Περαιτέρω οι συμβατικοί χώροι παραδειγμάτων διαχωρίζονται σε ¨σε ¨ειδικούς¨, οι οποίοι παρουσιάζουν πλούσια ποικιλία εξειδικευμένης γνώσης και σε ¨διδακτικούς¨, που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια και χρησιμοποιούνται κυρίως στη διδασκαλία.

Οι χώροι παραδειγμάτων αναπτύσσονται καλύτερα μέσα σε μια τυπική τάξη, σε αυτό που οι Cobb & Yackel (1996) αναφέρονται ως κοινωνικό-μαθηματικές νόρμες, συμβατές με την μαθητική κατασκευή και την αλληλεπίδραση. Αυτή η ατμόσφαιρα στην τάξη προωθεί την διατύπωση εικασιών και όχι την εστίαση σε γενικά παραδείγματα. Τα παραδείγματα αναλύονται για τα χαρακτηριστικά τους, τα οποία συμβάλλουν στην εκτίμηση της γενικότητας, στην κατασκευή και την επιδιόρθωση καθώς και στους τρόπους που παράγουν νέες κατηγορίες. Οι μαθητές γνωρίζουν ότι όλα όσα ειπώθηκαν είναι μια εικασία που μπορεί να απαιτεί τροποποίηση και αναζητούν όχι μόνο παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, αλλά και τρόπους για να τα αξιοποιήσουν προκειμένου να τροποποιήσουν τις εικασίες. Οι μαθητές που ελέγχουν την ομοιότητα και τη διαφορά μαθηματικών αντικειμένων ως εκπαιδευτική στρατηγική και τρόπο επίλυσης προβλημάτων, αναπτύσσουν πλούσιους και εκτεταμένους χώρους παραδειγμάτων, σε αντίθεση με εκείνους που προσπαθούν να ελέγξουν τα παραδείγματα που τους δίνονται ως πρωτοτυπικά (Goldenberg &Mason,2008).

Η προσβασιμότητα του χώρου παραδειγμάτων είναι μία περίπλοκη διαδικασία, όπως αναφέρεται από τους Goldenberg &Mason(2008). Μια τεράστια συλλογή παραδειγμάτων μπορεί να είναι στο ¨πίσω μέρος¨ του μυαλού ενός μαθητή αλλά κάθε φορά ένας περιορισμένος αριθμός τους είναι προσβάσιμος. Κάποια ενδέχεται να είναι άμεσα και άλλα να απαιτούν προσπάθεια για να ανασκευαστούν λεπτομερώς.

Στο ίδιο άρθρο ακολουθεί η παρουσίαση δυο εργασιών που σχετίζονται με την προσβασιμότητα του χώρου παραδειγμάτων. Έτσι ζητείται να κατασκευαστεί ένας αριθμός από τον οποίο να αφαιρείται το 1 και το υπόλοιπο να διαιρείται με το 7 και επίσης να κατασκευαστεί ένας αριθμός που είναι κατά 1 μεγαλύτερος από ένα πολλαπλάσιο του 7. Οι δύο αυτές εργασίες, ενώ περιγράφουν το ίδιο μαθηματικό πρόβλημα, αντιμετωπίζονται διαφορετικά. Η πρώτη θεωρείται δύσκολη και προσεγγίζεται με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους ενώ η δεύτερη λαμβάνεται ως ρητή συνταγή κατασκευής και χαρακτηρίζεται απλή. Κάποια άτομα θεωρούν τους αριθμούς 1 και 7 ως διαστάσεις μιας δυνατής αλλαγής με την έννοια ότι θα μπορούσε στη θέσης τους να υπάρχουν οποιοιδήποτε αριθμοί, ενώ κάποια άλλα όχι.

Παιδαγωγικά, η πρώτη παρουσίαση του προβλήματος θεωρείται ότι εκπροσωπεί μια ευρύτερη κατηγορία εργασιών και εκφράζει τη γενικότητα.

Οι Watson και Mason (2005) χρησιμοποιούν μία μεταφορά ¨τύπου ντουλαπιού¨ για τα παραδείγματα που είναι αποθηκευμένα και την προσβασιμότητα σε αυτά. Κάποια είναι μπροστά και χρησιμοποιούνται συχνά ενώ κάποια άλλα είναι πιο πίσω και αναμένουν μία ευκαιρία για να χρησιμοποιηθούν. Κάποια μπορεί να αποκτήθηκαν όταν συναντήθηκε ένα ενδιαφέρον αντικείμενο ενώ άλλα κατά την πρώτη επαφή με ένα νέο όρο, θεώρημα ή τεχνική. Η αποθήκευση διαφέρει από την προσβασιμότητα. Διαφορετικά παραδείγματα είναι διαθέσιμα σε διαφορετικές στιγμές ανάλογα με την αιτία που τα προκαλεί. Η προσβασιμότητα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες μεταξύ των οποίων το πλαίσιο, το σύνθημα αλλά και η κατάσταση του ατόμου.

Διερευνώντας το χώρο παραδειγμάτων των ατόμων μπορούν να προκύψουν σημαντικά αποτελέσματα για τον τρόπο σκέψης τους. Σε έρευνα των Zazkis & Leikin (2007), ζητήθηκε από ένα μαθητή μίας ομάδας να κατασκευάσει πολλά παραδείγματα άρρητων μεταξύ του 100 και του 200. Ο μαθητής ξεκίνησε με το $\sqrt{2}$ και στη συνέχεια πρόσθετε ακέραιους σε αυτό, αποδεικνύοντας ότι τα παραδείγματα δεν είναι μόνο μνημονική αναζήτηση αλλά και δημιουργία. Η συνδυαστική προσέγγιση ξεκίνησε με κάποιους γνωστούς άρρητους στους οποίους εφαρμόστηκαν βασικές πράξεις και έτσι προέκυψε απεριόριστος αριθμός παραδειγμάτων. Μία ενδεχόμενη μετάβαση σε ένα εντελώς νέο παράδειγμα (π.χ. $\sqrt{10001}$) υποδηλώνει έμμεση πρόσβαση σε πολλά παραδείγματα μέσα από το συνδυασμό γνωστών παραδειγμάτων και του τρόπου κατασκευής νέων.

Συνοψίζοντας, ο χώρος παραδειγμάτων είναι στοιχείο της εμπειρίας των μαθητών. Μία ή περισσότερες κατηγορίες μαθηματικών αντικειμένων και οι μέθοδοι κατασκευής τους συσχετίζονται και είτε υπάρχει εσωτερική δομή που συνδέει τα παραπάνω είτε δεσμοί συνάφειας με έννοιες , θεωρήματα και διαδικασίες. Οι μαθητές διαμορφώνουν τους προσβάσιμους χώρους παραδειγμάτων, διαφοροποιώντας τις μεταβλητές στα επιτρεπτά πλαίσια και δημιουργώντας νέα σύνθετα αντικείμενα. Ο χώρος παραδειγμάτων είναι επομένως δυναμικός και εξελισσόμενος. Η αρχική σκέψη

μπορεί να ενεργοποιήσει την πρόσβαση σε νέα παραδείγματα και τεχνικές και να οδηγήσει σε μεγαλύτερη εμπειρία στο μέλλον.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μία αποτελεσματική διδασκαλία θα πρέπει να περιλαμβάνει τη χρήση καθηκόντων και αλληλεπιδράσεων, μέσω των οποίων οι μαθητές αποκτούν πρόσβαση στα παραδείγματα, στις μεθόδους κατασκευής τους και στα μαθηματικά χαρακτηριστικά διαφορετικών παραδειγμάτων. Δίνοντας απλά παραδείγματα στους μαθητές και κατασκευαστικές τεχνικές δεν είναι αρκετό. Οι εκπαιδευόμενοι θα πρέπει να κατασκευάσουν παραδείγματα για να συμπληρώσουν το χώρο παραδειγμάτων τους και να επωφεληθούν από ερεθίσματα για να δείξουν τις διαστάσεις μιας δυνατής αλλαγής αλλά και το εύρος των επιτρεπτών αλλαγών (Goldenberg &Mason,2008).

Στο άρθρο των Goldenberg & Mason(2008) αναφέρεται ότι για να θεωρηθεί κάτι ως παράδειγμα πρέπει να πληρούνται δυο προϋποθέσεις. Αρχικά, να υπάρχει επίγνωση των πιθανών και επιτρεπτών αλλαγών που διατηρούν όμως τη γενικότητα του παραδείγματος, δηλαδή να παραμένει αναλλοίωτο κατά τη διάρκεια της αλλαγής. Έτσι στο παράδειγμα του τριγώνου μπορεί να υπάρχει μια αίσθηση της αλλαγής των κορυφών χωρίς αυτή η αλλαγή να επηρεάζει το άθροισμα των γωνιών του. Ο δεύτερος τρόπος αντίληψης ενός αντικειμένου ως παράδειγμα συντελείται όταν αυτό βιώνεται ως ιδιαίτερη περίπτωση μιας γενικότητας, για παράδειγμα το τετράγωνο μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση ενός ορθογωνίου.

Οι Watson και Mason (2005) χρησιμοποίησαν τον όρο *διαστάσεις της δυνατής αλλαγής (dimensions of possible variation)*, για να αναφερθούν σε χαρακτηριστικά ενός παραδείγματος που οι μαθητές αναγνωρίζουν ως κατάλληλα για αλλαγή χωρίς να χαθεί η γενικότητα. Αυτή η συνειδητοποίηση μπορεί να είναι άμεση ή να ενεργοποιηθεί από το δάσκαλο και αναφέρεται *ως εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής (range of permissible change)*. Στο παράδειγμα του $\sqrt{2}$ ως παράδειγμα ενός άρρητου αριθμού και μέσα στα όρια της επιτρεπόμενης αλλαγής, θα μπορούσε να αλλάξει τόσο ο αριθμός μέσα στη ρίζα όσο και η τάξη της.

Ο χαρακτηρισμός της αλλαγής ως ¨δυνατής¨ εισήχθη ως υπενθύμιση ότι διαφορετικά άτομα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές μπορούν να λαμβάνουν γνώση των διαφορετικών διαστάσεων. Ενώ η κατασκευή ¨του εύρους των επιτρεπόμενων αλλαγών¨ προστέθηκε γιατί οι άνθρωποι έχουν περιορισμένη την έννοια του πεδίου εφαρμογής της αλλαγής σε οποιαδήποτε διάσταση. Οι εκπαιδευτικοί σε σύγκριση με τους μαθητές έχουν αναμφισβήτητα μεγαλύτερο εύρος των επιτρεπόμενων αλλαγών και γνωρίζουν περισσότερες διαστάσεις. Στην έρευνα των Zazkis & Leikin (2008) εντοπίστηκαν σημαντικές διαφορές σε αυτό που είναι ¨γενικά κατανοητό από τους μαθηματικούς¨ και σε αυτό που ¨παρουσιάζεται στα εγχειρίδια¨. Οι Mason και Pimm (1984) υποστηρίζουν ότι όταν ένας καθηγητής παρουσιάζει ένα παράδειγμα, ο ίδιος αντιλαμβάνεται τη γενικότητά του και αναφέρετε σε ό,τι το παράδειγμα αντιπροσωπεύει. Ωστόσο, ένας εκπαιδευόμενος μπορεί να παρατηρήσει μόνο τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου παραδείγματος, δίνοντας την προσοχή του στο παράδειγμα το ίδιο και όχι σε αυτό που αντιπροσωπεύει. Ως εκ τούτου, οι Mason και Pimm (1984) συνηγορούν υπέρ της χρήσης των λεγόμενων «γενικών παραδειγμάτων», που αποτελούν τη γενική περίπτωση και προσπαθούν να αγνοήσουν τις ιδιαιτερότητες του ίδιου του παραδείγματος.

Η *θεωρία μεταβολής (variation)* του Marton (2006), εξηγεί τον τρόπο που οι μαθητές μπορούν να μάθουν έννοιες από παραδείγματα αλλά και πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δομήσουν τα παραδείγματα για να έχουν το μέγιστο αποτέλεσμα. Μεταβάλλοντας κατάλληλα την πολυπλοκότητα (όχι πολλοί παράγοντες ταυτόχρονα ούτε πολύ λίγοι) και σε επαρκή χρονική και φυσική απόσταση, οι μαθητές μπορούν να γενικεύσουν. Αυτή η γενίκευση γίνεται εκτιμώντας τις διαστάσεις μιας δυνατής αλλαγής αλλά και το εύρος των επιτρεπτών αλλαγών.

Καλώντας τους μαθητές να κατασκευάσουν παραδείγματα που υπόκεινται σε περιορισμούς όπως απλό, περίπλοκο, γενικό και μαθηματικό, εκμεταλλευόμενοι τα χαρακτηριστικά της έννοιας ή του θεωρήματος, αποκαλύπτεται και ένα μέρος της πολυπλοκότητας του χώρου παραδειγμάτων τους. Ταυτόχρονα οι μαθητές συγκρίνουν τα παραδείγματά τους και εμπλουτίζουν το χώρο παραδειγμάτων τους, λαμβάνοντας υπόψη τις διαστάσεις των συμμαθητών τους. Σε αυτό η συμβάλει η ανάλυση των χαρακτηριστικών που είναι διαφορετικά και ο τρόπος που διαφέρουν.

Σύμφωνα με τους Schwarz & Hershkowitz (1999) η παιδαγωγική αποτελεσματικότητα των παραδειγμάτων είναι συνάρτηση της ευκρίνειας και της σαφήνειας τους. Για παράδειγμα, σε ένα μάθημα ο δάσκαλος ανέπτυξε την εξίσωση του κύκλου με ακτίνα 2 και κέντρο το (α, β). Ωστόσο, ο αριθμός 4 στην εξίσωση $(x-a)^2+(y-\beta)^2= 4$ θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως το διπλάσιο της ακτίνας αλλά και ως το τετράγωνό της. Η επιλογή του 2 για την ακτίνα δημιουργεί ασάφεια και δίνει τη δυνατότητα ακατάλληλων εικασιών ως προς τη σημασία του 4. Ανάλογο πρόβλημα τίθεται όταν ένας κύκλος με ακτίνα 2 χρησιμοποιείται για την εφαρμογή των τύπων της περιμέτρου και του εμβαδού. Το γεγονός ότι $2 +2 = 2 \times 2$ καθιστά το 2 μια κακή επιλογή παραμέτρου στις περισσότερες περιπτώσεις.

Ανάλογα προβλήματα δημιουργούνται όταν άπειροι συνήθως εκπαιδευτικοί επιλέγουν ως παράδειγμα αφαίρεσης το 4-2=2 και όχι 5-2=3 ή χρησιμοποιούν το σημείο (1,1) όταν εξηγούν την έννοια των συντεταγμένων ή τέλος επιλέγουν ως κέντρο του κύκλου το σημείο (1,-1). Οι μαθητές στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαν να κάνουν αυθαίρετες γενικεύσεις ή να συνδέσουν επιφανειακές σχέσεις και να οδηγηθούν σε λάθος συμπεράσματα. Για το λόγο αυτό οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί στην επιλογή παραδειγμάτων. Επιβάλλεται κατά την προετοιμασία της διδασκαλίας του μαθήματος ή και κατά τη διάρκειά του, ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει από ποιο χώρο παραδειγμάτων μπορεί να επιλέξει παραδείγματα και να αποφεύγεται η αυθόρμητη επιλογή. Οι έννοιες της διάστασης της δυνατής αλλαγής και το εύρος των επιτρεπτών αλλαγών είναι πολύτιμες για τους καθηγητές. Τους υπενθυμίζουν ότι οι μαθητές είναι απαραίτητο να γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου που το καθιστούν παράδειγμα. Δηλαδή, ποια χαρακτηριστικά είναι δομικά, και ποια μπορούν να μεταβληθούν και με ποιους τρόπους.

Πολλοί ερευνητές εξαρτώνται από παραδείγματα για να εμπλουτίσουν την κατανόηση των παιδαγωγικών κατασκευασμάτων. Οι Goldenberg &Mason (2008) υποστηρίζουν ότι οι ορισμοί στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ιδιαίτερα ασαφείς, εξαιτίας της έλλειψης αξιωματικής θεμελίωσης για νέες κατασκευές. Και συνεχίζουν αναφέροντας ότι στα μαθηματικά δεν έχει καταστεί δυνατό να αναπτυχθεί μία πρακτική για τη διαπραγμάτευση της συνάφειας και της επεξήγησης της κατασκευής

παραδειγμάτων. Ένα σημαντικός ρόλος που θα μπορούσε να διαδραματίσει η κατασκευή του χώρου παραδειγμάτων στη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι να υπενθυμίζει ότι αυτό που καθορίζει τη χρήση μίας έννοιας είναι η σύνδεσή της με το χώρο παραδειγμάτων. Η *επιστήμη της εκπαίδευσης* (Gattegno, 1970) και *η αρχή της παρατήρησης* (Mason, 2002) έχουν αναγνωριστεί ως συνεισφορές στην πιο προσεκτική ανταλλαγή και διαπραγμάτευση των παραδειγμάτων και στις περιπτώσεις παιδαγωγικών κατασκευών, προκειμένου να μετατρέψουν τη μαθηματική εκπαίδευση από μια σύγχυση πολλαπλών χρήσεων παρόμοιων όρων και πολλαπλών όρων με παρόμοια σημασία, σε μια παραγωγική και αναπτυσσόμενη αρχή.

Οι Zazkis & Leikin (2008), παρουσιάζουν την σπουδαιότητα των παραδειγμάτων και τη χρησιμότητα των χώρων παραδειγμάτων κατά τη διδασκαλία των ορισμών και συγκεκριμένα του ορισμού του τετραγώνου από μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών. Η σημασία των μαθηματικών ορισμών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών είναι αδιαμφισβήτητη και η συμβολή των παραδειγμάτων σε αυτήν, καθοριστική.

Οι ορισμοί και οι τρόποι που παρουσιάζονται στους μαθητές διαμορφώνουν τη σχέση μεταξύ της εικόνας μιας έννοιας και του ορισμού της, σχηματίζοντας ένα βασικό τμήμα της δομής των γνώσεων κάποιου, το οποίο επηρεάζει τις νοητικές διαδικασίες του μανθάνοντα (Tall & Vinner, 1981). Η προσωπική γνώση των δασκάλων για τους μαθηματικούς ορισμούς επηρεάζει τις αποφάσεις τους για τη διδακτέα ύλη σχετικά με το πώς διδάσκονται μαθηματικές έννοιες, αλλά και την παιδαγωγική τους αντίληψη για τους τρόπους που οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τις έννοιες αυτές. Εργασίες διάσημων μαθηματικών και ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Khinchin, 1968, Poincare, 1909/1952, Solow, 1984, Vinner, 1991) πρότειναν λογικές αρχές που έπρεπε να ικανοποιούν οι ορισμοί μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με αυτές ο ορισμός πρέπει να δίνει ένα νόημα, να καθορίζει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την έννοια που πρέπει να είναι και οι ελάχιστες δυνατές και να χρησιμοποιεί μόνο προηγούμενα ορισμένες έννοιες. Για να υποστηριχθεί η διανοητική ανάπτυξη των μανθανόντων ο ορισμός πρέπει να ανήκει στη *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης* (-Zone of Proximal Development-, ZPD) (Vygotsky, 1982) των μαθητών και να είναι έμφυτα αντιληπτός και κομψός

(Fischbein 1987, Mariotti & Fischbein 1997, Vinner 1991, Van Dormolen & Zaslavsky 2003).

Για να εκφράσει τη μίμηση, στα πλαίσια μιας κοινωνικοπολιτισμικής δραστηριότητας, ο Vygotsky (1982) εισήγαγε την ιδέα της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης. Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης είναι η απόσταση ανάμεσα στο αναπτυξιακό επίπεδο, στο οποίο βρίσκεται το παιδί, με βάση τα προβλήματα που μπορεί να επιλύσει μόνο του, χωρίς εξωτερική βοήθεια, και στο εν δυνάμει επίπεδο, με βάση τα προβλήματα που μπορεί να επιλύσει με τη βοήθεια ενός ενηλίκου (εκπαιδευτικού ή γονέα) ή σε συνεργασία με ικανότερους συνομηλίκους. Στο πλαίσιο της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης, ενεργοποιούνται εσωτερικές αναπτυξιακές διεργασίες, λόγω της αλληλεπίδρασης του παιδιού με άτομα του περιβάλλοντός του και μ' αυτόν τον τρόπο, μπορεί να αποκομίσει τα μεγαλύτερα μαθησιακά οφέλη. Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης αποτελεί ένα υποστηρικτικό πλαίσιο, μια «σκαλωσιά», που υποβοηθά τη μάθηση (Κολέζα, 2000).

Ένας επιπλέον ρόλος των παραδειγμάτων είναι ¨να αλλάξουν το μυαλό κάποιου ή τους τρόπους λειτουργίας του¨ (Zazkis & Chernoff, 2008) . Παραδείγματα που περιλαμβάνουν μεγάλους αριθμούς μπορεί να βοηθήσουν τους σπουδαστές να επιτύχουν μια καλύτερη προσέγγιση για μια συγκεκριμένη λύση. Τα αντιπαραδείγματα μπορεί να βοηθήσουν τους σπουδαστές να αναπροσαρμόσουν τις αντιλήψεις ή τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων.

Περαιτέρω, ο ρόλος των αντιπαραδειγμάτων έχει αναγνωριστεί και συζητηθεί για τη δημιουργία μιας *γνωστικής σύγκρουσης* (Klymchuk, 2001, Peled & Zaslavsky, 1997, Zaslavsky & Ron, 1998). Η γνωστική σύγκρουση αναφέρεται σε έναν παιδαγωγικό χώρο και στη γνωστική ανάπτυξη ενός μαθητή. Προκαλείται όταν ένας μαθητής βρίσκεται αντιμέτωπος με μία αντίφαση ή ασυνέπεια στις ιδέες του. Οι μαθητές ενδέχεται να κατέχουν αντικρουόμενες ιδέες οι οποίες, αν δεν αναγνωριστούν, δεν προκαλούν σύγκρουση. Σε μία εκπαιδευτική κατάσταση επιδιώκεται η γνωστική σύγκρουση ώστε να γίνεται άρση των παρανοήσεων από την πλευρά των μαθητών. Η σημασία της σύγκρουσης μεταξύ πληροφοριών και εμπειριών υπογραμμίζεται από την έννοια της *εννοιολογικής αλλαγής*. Ο όρος

εννοιολογική αλλαγή, χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει «το είδος της εκπαίδευσης που απαιτείται κατά την πρόσληψη νέων πληροφοριών που μπορούν να αντληθούν και έρχονται σε αντίθεση με προηγούμενη γνώση των μαθητών, που συνήθως έχει αποκτηθεί βάσει της καθημερινής τους εμπειρίας» (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Ωστόσο, τα αντιπαραδείγματα μπορεί να μην είναι επαρκή στην επίλυση συγκρούσεων, η οποία αποτελεί απώτερο στόχο της διδασκαλίας. Οι Zazkis & Chernoff (2008) αναζήτησαν στρατηγικά παραδείγματα που θα συνέβαλαν όχι μόνο στην επίκληση μιας γνωστικής σύγκρουσης αλλά και για την επίλυσή της. Έτσι, εισήγαγαν δύο θεωρητικές κατασκευές: το *παράδειγμα μεταστροφής (pivotal example) και το παράδειγμα γεφύρωσης (bridging example).*

Ένα παράδειγμα χαρακτηρίζεται ως παράδειγμα μεταστροφής, αν δημιουργεί ένα σημείο μεταστροφής στην γνωστική αντίληψη του εκπαιδευόμενου ή στις προσεγγίσεις επίλυσης του προβλήματος που του παρουσιάζεται. Δηλαδή τα παραδείγματα μεταστροφής βοηθούν τους μαθητές να πετύχουν την εννοιολογική αλλαγή. Αν ένα παράδειγμα βοηθά επιπλέον και στην επίλυση των γνωστικών συγκρούσεων χαρακτηρίζεται ως παράδειγμα μεταστροφής- γεφύρωσης ή απλά γεφύρωσης, γιατί χρησιμεύει ως γέφυρα ανάμεσα στην αρχική/αφελή αντίληψη του μαθητή και στις κατάλληλες μαθηματικές έννοιες (Zazkis & Chernoff, 2008). Τα παραδείγματα μεταστροφής θεωρούνται ως παιδαγωγικές αντιλήψεις, ενώ τα αντιπαραδείγματα είναι μαθηματικές έννοιες.

Το παράδειγμα μεταστροφής – γεφύρωσης παίζει αντίστοιχο ρόλο με αυτόν του ¨γενικού παραδείγματος¨ των Mason & Pimm (1984) αλλά μετατοπίζει την προσοχή μας από τα χαρακτηριστικά του παραδείγματος στο ρόλο που αυτό διαδραματίζει. Το γενικό παράδειγμα αντιπροσωπεύει μία γενική περίπτωση και αγνοεί τις ιδιαιτερότητες του εκάστοτε παραδείγματος αποτελώντας ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μετάβαση από το συγκεκριμένο στο γενικό, κατ’ αντιστοιχία με το παράδειγμα γεφύρωσης που συμβάλει στη μετάβαση από την προσωπική αντίληψη στις κατάλληλες μαθηματικές αντιλήψεις.

Οι Zazkis & Chernoff (2008) παρουσίασαν δυο επεισόδια αλληλεπίδρασης της διδασκαλίας, στα οποία χρησιμοποιούνται παραδείγματα για να βοηθήσουν τους εκπαιδευόμενους να αντιμετωπίσουν τις παρανοήσεις τους. Τα δεδομένα της έρευνας δεν συγκεντρώθηκαν με σκοπό να δοκιμαστεί η έννοια του παραδείγματος μεταστροφής ή γεφύρωσης, αντίθετα από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε το νέο θεωρητικό κατασκεύασμα. Τα επεισόδια εξελίχθησαν με δυο δασκάλες δημοτικών σχολείων, τη Selina και την Tanya και μπορούν να θεωρηθούν ως δυο ξεχωριστές μελέτες που συνδέονται με αυτό που αναφέρεται από τον Mason (2006) ως ¨μεθοδολογία της παρατήρησης¨, δηλαδή μέθοδος έρευνας που εντοπίζονται φαινόμενα που πρόκειται να μελετηθούν και αναζητούνται παραδείγματα εμπειρίας.

Η Selina κατά τη διάρκεια παρακολούθησης του μαθήματος «Αρχές των Μαθηματικών για τους εκπαιδευτικούς», που είναι βασικό για την πιστοποίηση των δασκάλων δημοτικού, έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον και δέχτηκε να συμμετάσχει σε μία κλινική συνέντευξη για τη γνώση του μαθηματικού περιεχομένου των μελλοντικών εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, οι ερευνητές ήθελαν να εστιάσουν στο πως οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν ή αλλάζουν την κατανόηση της δομής του αριθμού, όταν τους παρουσιάζονται ιδιαίτερες μαθηματικές εργασίες.

Η εργασία που δόθηκε στη Selina ήταν να απλοποιηθεί το κλάσμα : $\frac{13x17}{19x23}$. Η συγκεκριμένη εργασία ήταν οικεία στους εκπαιδευόμενους, καθώς είχαν εξοικειωθεί τόσο με την απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων όσο και με την απλοποίηση κλασμάτων. Η καινοτομία ήταν ο τρόπος που η εργασία αυτή παρουσιάστηκε, αφού ο αριθμητής και ο παρανομαστής είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων. Το ζητούμενο της έρευνας ήταν να παρατηρήσουν οι εκπαιδευόμενοι αυτό το γεγονός και να καταλάβουν πως δεν υπάρχει η δυνατότητα απλοποίησης του συγκεκριμένου κλάσματος.

Η Selina ξεκίνησε με τον πολλαπλασιασμό των αριθμών μετατρέποντάς τους σε 221 και 437 αντίστοιχα. Έπειτα ακολουθώντας τους κανόνες διαιρετότητας ή χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης έλεγξε αν οι αριθμοί διαιρούνται με το 2 ή το 3. Συνέχισε προσπαθώντας να διαπιστώσει αν το 437 διαιρείται με το 4 και τότε για πρώτη φορά εξέφρασε την εικασία ότι ενδέχεται να είναι πρώτος. Όμως συνέχισε τον έλεγχο για τους αριθμούς 7, 13 και 17 και κατέληξε με το 19, το οποίο αφού πρώτα

το είχε ελέγξει ότι διαιρεί το 437, επιβεβαίωσε τελικά ότι υπήρχε ήδη στην αρχική μορφή που είχε δοθεί, δηλαδή 19x23. Από εκείνη τη στιγμή και έπειτα συμπέρανε ότι οι αριθμοί 19 και 23 είναι πρώτοι αριθμοί και κατέληξε στο αυθαίρετο συμπέρασμα ότι το γινόμενο δυο πρώτων αριθμών είναι πρώτος, το οποίο εκφράζει τη γενικότερη τάση που παρατηρείται και απαιτεί το αποτέλεσμα της πράξης δύο στοιχείων ενός συνόλου να είναι στοιχείο του συνόλου.

Ακολουθούν οι σχετικοί διάλογοι.

1ος Διάλογος:

Σελίνα: Δηλαδή 13 × 17 μας κάνει 221, ναι καλά, και στη συνέχεια 19 × 23, εεε, (παύση), μου επιτρέπεται να χρησιμοποιήσω την αριθμομηχανή.
Ερευνητής: Φυσικά ...
Σελίνα: Εντάξει, είναι 437. Εντάξει, έτσι έχουμε 221/437, κανένας από αυτούς δεν διαιρείται με το 2, κανένας από αυτούς δεν είναι διαιρετός, καλά αυτό, όχι δεν διαιρείται με το 3, διότι αυτό ισοδυναμεί 5, εμμ, και αυτό ισούται με 14, γι 'αυτό θα προσπαθήσω ...
Ερευνητής: Τί εννοείς ισούται με το 5, ισούται με 14 ...
Σελίνα: Λοιπόν τσεκάρω εάν διαιρείται με το 3, έτσι προσθέτω αυτά τα τρία νούμερα, για να δω αν διαιρείται με το 3, εμμ, έτσι δεν είναι ..., 221 διά του 4, δεν το πιστεύω, θα το ελέγξω, όχι δεν είναι ένας δεκαδικός. Εμ, λοιπόν νομίζω ότι, νομίζω ότι το 437 είναι πρώτος αριθμός, πρέπει να δω τι μας κάνει 37 διά 2 είναι, 18,5.Θα δοκιμάσω να το τεστάρω αυτό (παύση), 437 διαιρούμενο με, ας πούμε το 7 ...
Ερευνητής: Είπατε ότι πρόκειται να το τεστάρετε, τι ακριβώς τεστάρεις;
Σελίνα: Ω δοκιμάζω εάν αυτός ο αριθμός είναι πρώτος ή όχι, 437, είτε πρόκειται για πρώτο ... Έτσι, εμ, απλά δοκιμή και λάθος, απλώς πρόκειται να προσπαθήσω να το διαιρέσω..., γιατί είναι μονός αριθμός, Πάω να προσπαθήσω διαιρεμένο με εμ, ορισμένους πρώτους αριθμούς που γνωρίζουμε, όπως και 13, που ισούται με ένα δεκαδικό, διαιρείται διά του 17, που ισούται με ένα δεκαδικό, εμ, διαιρούμενο με (παύση) χμμμ, δεν ξέρω, (παύση) θα έλεγα ότι είναι, δεν ξέρω τι άλλο, πώς αλλιώς να το βρω, να βρω

αυτό.

Ερευνητής: Έτσι άρχισες να ελέγχεις κατά πόσον το 437 ήταν πρώτος ...

Σελίνα: Χμμ εμμ ...

Ερευνητής: Είναι;

Σελίνα: Δεν ξέρω, είμαι τεμπέλα πάλι. Λοιπόν, δεν δουλεύει για το 13, δεν λειτουργεί για το 17, ας προσπαθήσουμε για το 11, όχι, ας προσπαθήσουμε, το δοκίμασα το 7 ήδη, δεν είναι σίγουρα το 5, σίγουρα δεν είναι το 3, δεν είναι σίγουρα το 2, εμ, (παύση) και ξέρουμε ότι διαιρεί, το 19 διαιρεί το 437, 23 φορές γιατί αυτό είναι στην αρχική εξίσωση ...

Ερευνητής: Είναι λοιπόν πρώτος;

Σελίνα: Ναι, είναι, γιατί είναι δύο πρώτοι αριθμοί, βέβαια είναι, διότι δύο πρώτοι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται ο ένας με τον άλλο είναι πρώτοι, (παύση).

Είναι φανερό από τον παραπάνω διάλογο ότι η Selina έχει εκφράσει ένα λανθασμένο ισχυρισμό. Ο ερευνητής προσπάθησε στη συνέχεια να προκαλέσει μία γνωστική σύγκρουση στις αρχικές της ιδέες, εστιάζοντας σε ένα παράδειγμα μεταστροφής. Έτσι ξεκινά το δεύτερο διάλογο με την ερώτηση αν ο αριθμός 15 είναι πρώτος. Η Selina αντιμετωπίζει μία σύγκρουση και τελικά αντιλαμβάνεται ότι οι αριθμοί 15 ή 6 δεν είναι πρώτοι αν και είναι το γινόμενο δυο πρώτων αριθμών. Έτσι αναιρεί την αρχική πρότασή της, αναφέροντας ότι οι πρώτοι αριθμοί κάτω από την πράξη του πολλαπλασιασμού δεν είναι κλειστό σύνολο. Συνεχίζοντας ισχυρίζεται ότι ο αριθμός 437 είναι πρώτος γιατί δεν διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3 ή 5, ακολουθώντας μία συνηθισμένη τακτική των μαθητών να ελέγχουν τη διαιρετότητα ενός αριθμού που ενδέχεται να είναι πρώτος, μόνο με τους μικρούς πρώτους αριθμούς.

2^{ος} Διάλογος:

Ερευνητής: Είναι το 15 πρώτος αριθμός;

Σελίνα: Όχι.

Ερευνητής: Αλλά είναι δύο πρώτοι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται ο ένας με τον

άλλο, το 3 και το 5 ...

Σελίνα: Αλλά (παύση) κάτι για το, 2 και 3 είναι περίπλοκο, διότι είναι, είναι, εγώ διαπίστωσα ότι στο μυαλό μου σε ψάχνοντας για πρώτους αριθμούς το 2 και το 3

και το 5, το 15 δεν είναι πρώτος αριθμός, όμως είναι το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών, αλλά (παύση) οι αριθμοί αυτοί έχουν ένα κοινό παρονομαστή, το 1 και

μόνο το 1, έτσι ώστε (παύση) δεν μπορώ, δεν μπορώ να εκφράσω με λέξεις αυτό

που θέλω να πω ...

Ερευνητής: Μπορείς να μου το ζωγραφίσεις (γέλια) ...

Σελίνα: Εντάξει. Οι 2 και 3, είναι πρώτοι αριθμοί, οι 19, 23, 13 και 17 είναι όλοι πρώτοι αριθμοί, εμ, 2 επί 3 ίσον 6, αλλά το 6 δεν είναι πρώτος αριθμός, έτσι ώστε η θεωρία ότι κάθε πρώτος, (παύση), έτσι η θεωρία ότι πρόκειται για ένα κλειστό

σύνολο, δεν είναι ένα κλειστό σύνολο. Έτσι, οι πρώτοι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται δεν είναι απαραίτητα ένα κλειστό σύνολο, δεν είναι κλειστό σύνολο, επειδή υπάρχει η διάψευση αυτού. Έτσι ...

Ερευνητής: Με ποιο τρόπο το 19 πολλαπλασιαζόμενο επί το 23 είναι διαφορετικό

από το 2 πολλαπλασιασμένο με το 3, και αυτό που σου έδωσα πριν, το 3 πολλαπλασιάζεται επί το 5; Μπορείς να ισχυριστείς ότι το 6 δεν είναι πρώτος, ισχυρίζεσαι ότι το 15 δεν είναι πρώτος, ...

Σελίνα: Εμ εμμ ...

Ερευνητής: Και ακόμη προτείνεις ότι ο 437 είναι πρώτος. Το ερώτημά μου είναι, τι διαφέρει;

Σελίνα: Λοιπόν ότι μπορείς, ότι δεν μπορείς να το διαιρέσεις αυτό με τα 2, 3 ή 5 ...

Ερευνητής: Ναι, αλλά μπορείς να το διαιρέσεις με το 19 ...

Σελίνα: (παύση) μου φαίνεται ότι το 2, 3 και 5 ως δομικές μονάδες για όλους τους άλλους, εε άλλους αριθμούς, έτσι περίπου το βλέπω.

Και θεωρώ ότι από τη στιγμή που μπορείς να εξαλείψεις αυτές ως επιλογές, τότε έχουμε να κάνουμε με, τότε έχουμε να κάνουμε με πρώτους αριθμούς που,

εγώ (παύση), εγώ δεν ξέρω πώς να το πω αυτό, είναι απογοητευτικό (γέλια).

Στη συνέχεια ο ερευνητής εισάγει ένα επιπλέον στρατηγικό παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την τεχνική που περιγράφεται ως «η εγκαθίδρυση της δύναμης των πεποιθήσεων» (Ginsburg,1997), με σκοπό να καθοριστεί αν η απάντηση του ερωτούμενου είναι σύμφωνη με τις απαντήσεις του σε παρόμοια εργασία. Έτσι ξεκινά τον 3^{ο} διάλογο με τη ερώτηση αν ο αριθμός 77 είναι πρώτος. Αυτό, είναι και το παράδειγμα που λειτούργησε ως παράδειγμα γεφύρωσης για τη Selina, αφού τη βοήθησε να επιλύσει τη γνωστική της σύγκρουση και να οδηγηθεί στο σωστό συμπέρασμα. Η επιλογή του αριθμού 77 στο παράδειγμα είναι εύστοχη, γιατί όπως και οι αριθμοί 6,15,221,437 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων, είναι αρκετά ¨μικρός¨ ώστε να μοιάζει με τους 6 και 15 και σε αντίθεση με τον 437 οι παράγοντες του είναι αμέσως αναγνωρίσιμοι και τέλος δεν αναλύεται με τη βοήθεια των αριθμών 2,3,5 που αναφέρθηκαν ως ¨δομικές μονάδες¨ από τη Selina. Σύμφωνα με τη δασκάλα λοιπόν αυτό το παράδειγμα ¨αλλάζει τα πάντα¨, σε αντίθεση με το προηγούμενο (τον αριθμό 15) που λειτούργησε απλώς ως αντιπαράδειγμα.

3^{ος} Διάλογος:

Ερευνητής: Ω, δεν θέλω να σε μπερδέψω, αλλά είναι πολύ ενδιαφέρον αυτό που λέτε. Πώς σου φαίνεται το 77;
Σελίνα: Το 77 δεν είναι πρώτος επειδή διαιρείτε με το 11.
Ερευνητής: Ωοο κατάλαβα, είναι το 11 ένα από τα δομικά σου στοιχεία;
Σελίνα: Το 11 είναι, (παύση) θέλω να πω σε αυτή την περίπτωση το 11 και το 7 επίσης βγαίνουν έξω, ενεργούν επίσης, με τον ίδιο τρόπο, όχι επειδή, όχι δεν νομίζω το 7 και το 11 να είναι τα δομικά στοιχεία για τα οποία μιλώ. Θεωρώ ότι τα 2, 3 και 5 είναι.
Ερευνητής: Μα το 77 είναι πρώτος;
Σελίνα: Όχι.
Ερευνητής: Το 221;
Σελίνα: Το 221 δεν νομίζω ότι είναι πρώτος.
Ερευνητής: Γιατί νομίζεις ότι αυτοί δεν είναι πρώτοι;
Σελίνα: (παύση) Καλά, δεν μπορεί (παύση), όχι εντάξει δεν είναι πρώτοι, επειδή δεν είναι, έχουν περισσότερους παράγοντες από ό, τι μόνο 1, σωστά, έτσι το 437 δεν μπορεί να είναι πρώτος γιατί ο παράγων του είναι το 19 και το

23. Έτσι πρώτος σημαίνει ότι μπορεί μόνο να πολλαπλασιαστεί ο αριθμός από τον ίδιο, σωστά, έτσι αυτοί δεν είναι πρώτοι. Το 437 δεν είναι πρώτος, (παύση) έτσι αυτό αλλάζει τα πάντα.
Ερευνητής: Τι σημαίνει, αλλάζει τα πάντα;
Σελίνα: Λοιπόν αλλάζει αυτό που είπα πρώτα, γιατί είπα ότι οι δύο αριθμοί που πολλαπλασιάζονται ο ένας με τον άλλον, δύο πρώτοι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται ο ένας με τον άλλο, θα ισούται με ένα πρώτο αριθμό, αλλά έκανα λάθος όταν το είπα αυτό, εντελώς λάθος.

Η συζήτηση συνεχίστηκε με τη Selina να ισχυρίζεται ότι το κλάσμα δεν απλοποιείται, αλλά χρειάστηκε τον ισχυρισμό της αυτό να τον επιβεβαιώσει με κομπιουτεράκι, όπως φαίνεται από το διάλογο που ακολουθεί:

Ερευνητής: Οπότε ας πάμε πίσω στο πρόβλημά μας για την απλούστευση αυτού του αριθμού, εσύ κάνεις τον πολλαπλασιασμό στον αριθμητή και τον παρονομαστή για να πάρεις αυτό, 221 για του 437. Το ερώτημα είναι, μπορεί να το απλοποιήσεις;

Σελίνα: Οχι, γιατί αυτά τα τέσσερα νούμερα είναι πρώτοι, δεν μπορείς να τα απλοποιήσεις γιατί θα έπρεπε να είναι, αυτός ο αριθμός [επισημαίνοντας το 221] θα πρέπει να διαιρείται από ένα από αυτούς τους δύο αριθμούς [δείχνοντας τα 19 και 23], και θα το δοκιμάσουμε αυτό. Έτσι, το 221 διαιρούμενο με το 19 ισοδυναμεί με ένα δεκαδικό, έτσι αυτό δεν βγαίνει. Το 221 διαιρούμενο με το 23 είναι επίσης ένας δεκαδικός, ούτε αυτό λειτουργεί.

Τελειώνοντας τη συνέντευξη αυτή, γίνεται φανερό ότι η Selina δεν έχει συνειδητοποιήσει τη θεμελιώδη θεωρία της αριθμητικής, αναζητώντας ένα μοτίβο για να εξηγήσει γιατί το γινόμενο 13x17 δεν διαιρείται με το 19. Δεν φαίνεται να έχει αποδεχτεί την ιδέα ότι οι τέσσερις αριθμοί που της δόθηκαν δεν απλοποιούνται καθώς είναι πρώτοι. Αυτό παρατηρείται συχνά στους μαθητές, κυρίως όταν οι αριθμοί που τους δίνονται είναι μεγαλύτεροι του 10. Ο ερευνητής αποφάσισε να σταματήσει σε αυτό το σημείο τη συνέντευξη.

4^{ος} Διάλογος:

Ερευνητής: Είναι δυνατόν να ξέρεις ότι δεν θα λειτουργήσει, αυτό που μόλις έλεγξες, χωρίς να δουλέψεις με τον υπολογιστή και χωρίς να κάνεις μια μεγάλη διαίρεση; Σελίνα: (παύση) είμαι σίγουρη ότι υπάρχει ένα μοτίβο κάπου, αλλά εγώ δεν, δεν το βλέπω. [παύση] Λοιπόν ξέρετε τι, βλέπω ότι το 3 επί 7 κάνει 21 εδώ και βλέπω ότι 9 επί 3 είναι 27, έτσι αυτό μπορεί να εξηγήσει γιατί αυτό το 7 είναι εδώ, εμ, θα κοίταζα ίσως και αυτή θα ήταν η κατεύθυνση που θα άρχιζα να το ψάχνω, τα ψηφία αυτά εδώ, το 3, το 7, το 9 και το 3, θα το έβλεπα ότι, απλά θα προσπαθήσω να το καταλάβω.

Το δεύτερο επεισόδιο που παρουσιάζεται στο άρθρο των Zazkis & Chernoff (2008) εξελίσσεται με μία δασκάλα δημοτικού, τριάντα περίπου χρόνων, την Tanya. Η Tanya συμμετείχε στο μάθημα « Σχέδια για μάθηση: Μαθηματικά Δημοτικού», το οποίο είναι ένα μάθημα μεθόδων με διπλό στόχο: 1) την έκθεση σε διαφορετικές παιδαγωγικές προσεγγίσεις και 2) τη δυνατότητα να ενισχύσουν και να εμπλουτίσουν οι σπουδαστές τις μαθηματικές τους γνώσεις. Η Tanya είχε θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους, αλλά δεν ήταν επαρκώς δεχτική σε νέες ιδέες και στρατηγικές που παρουσιαζόταν κατά τη διάρκεια της φοίτησής της.

Το μάθημα που έγινε στην τάξη αφορούσε τη σύγκριση κλασμάτων αποφεύγοντας τη στρατηγική του ¨κοινού παρανομαστή¨. Στο τέλος του μαθήματος η Tanya πλησίασε τον εκπαιδευτή εκθέτοντάς του μία δική της λανθασμένη στρατηγική, όπως φαίνεται από το διάλογο που ακολουθεί:

Τάνια: Υπάρχει και μια άλλη στρατηγική που δεν έχετε αναφέρει, που λειτουργούσε πάντα για μένα. Διδάσκων: Εντάξει, δείξε μου σε παρακαλώ. Τάνια: Μπορείς απλά να αφαιρέσεις το πάνω μέρος από το κάτω και να δούμε ποιό είναι μεγαλύτερο. Όταν ο αριθμός είναι μεγαλύτερος, το κλάσμα είναι μικρότερο, όπως το $\frac{2}{7}$ και $\frac{3}{7}$, το 5 είναι μεγαλύτερο από το 4, έτσι αυτό κλάσμα

(επισημαίνοντας $\frac{2}{7}$) είναι μικρότερο.

Διδάσκων: Χμμ, ενδιαφέρον ...

Τάνια: Και τα παραδείγματα που σας έδειξα λειτουργούν κάπως έτσι.

Διδάσκων: Θα μας εξηγήσεις γιατί αυτό δουλεύει;

Τάνια: Δεν είμαι βέβαια πώς να το εξηγήσω αυτό, απλά βγάζει νόημα.

Προφανώς η τακτική της δασκάλας είναι λανθασμένη, όμως εκείνη δεν φαίνεται διατεθειμένη να εξηγήσει στον εκπαιδευτή πώς λειτουργεί, εφόσον βγάζει σωστό αποτέλεσμα στα παραδείγματα που είχαν παρουσιαστεί ως εκείνη την ώρα στην τάξη. Ο εκπαιδευτής αντιλαμβανόμενος τη σύγκρουση που υπάρχει, αποφασίζει να αναδείξει την απόκλιση και να βοηθήσει την Tanya χρησιμοποιώντας αντιπαραδείγματα.

Διδάσκων: Και τι γίνεται με διαφορετικούς παρονομαστές;

Τάνια: Ω-ναι, αυτό θα λειτουργήσει, πάντα το έκανε.

Διδάσκων: Λοιπόν, τι λες για το $\frac{1}{2}$ και για το $\frac{2}{4}$; Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο σου, θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι ένα από αυτά τα κλάσματα είναι μεγαλύτερο από το άλλο.

Τάνια: Αλλά δεν πρόκειται ποτέ να σας δώσουν κλάσματα που είναι ίδια για να τα συγκρίνεται. Έτσι, η μέθοδος λειτουργεί όταν δεν είναι τα ίδια.

Διδάσκων: Και τι γίνεται με το $\frac{5}{6}$ και για το $\frac{6}{7}$; Έχουμε μόλις δείξει πώς να τα σκεφτόμαστε και τα συγκρίνουμε χωρίς να βρούμε ένα κοινό παρονομαστή. Πώς θα μπορούσες να εφαρμόσεις τη μέθοδό σου σε αυτή την περίπτωση;

Τάνια: Δεν μπορείς, εάν η διαφορά είναι το ίδιο. Αλλά αν δεν είναι το ίδιο, δουλεύει [παύση], νομίζω ότι δουλεύει, πάντα λειτουργούσε για μένα, στο σχολείο, εννοώ. Όπως το $\frac{4}{9}$ και το $\frac{5}{7}$. Είπες, χρήσιμοποιησε το $\frac{1}{2}$ ως ορόσημο. Μόλις κοίταξα το 5 εδώ και 2 εδώ [δείχνοντας το $\frac{4}{9}$ και το $\frac{5}{7}$], όπου παίρνεις το 2 το κλάσμα είναι μεγαλύτερο.

Παρατηρείται ότι κάθε φορά που ο εκπαιδευτής παρουσιάζει ένα αντιπαράδειγμα στην Tanya, εκείνη δεν αναιρεί τον ισχυρισμό της αλλά μειώνει την έκταση εφαρμογής της μεθόδου της. Φαίνεται ότι η Tanya αντιμετωπίζει αυτά τα αντιπαραδείγματα με τη μέθοδο που περιγράφεται από το Lakatos (1976) ως ¨μέθοδος εκδίωξης των τεράτων¨. Έτσι, ισχυρίζεται ότι η στρατηγική της δεν εφαρμόζεται όταν τα κλάσματα είναι ίσα ($\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{4}$) και αργότερα ότι δεν χρησιμοποιείται όταν οι διαφορές αριθμητών παρανομαστών είναι ίδιοι ($\frac{5}{6}$ και $\frac{6}{7}$). Συνεχίζοντας παραθέτει ένα ακόμη παράδειγμα για το οποίο ο ισχυρισμός της εφαρμόζεται.

Ο εκπαιδευτής δίνει τώρα ένα παράδειγμα μεταστροφής το οποίο ικανοποιεί τις νέες απαιτήσεις που έχουν τεθεί από τη νεαρή δασκάλα και δεν επαληθεύει τον ισχυρισμό της.

Διδάσκων: Και τι γίνεται με κάτι σαν το $\frac{9}{10}$και το $\frac{91}{100}$;
Τάνια: [παύση]. Οπότε λέτε ότι με αυτό τον αστείο μεγάλο αριθμό κομματιών αυτό δεν λειτουργεί;
Διδάσκων: Απλά κάνω ερωτήσεις ...

Η αντίδραση της Tanya μπορεί να θεωρηθεί ως αναγνώριση του γεγονότος ότι η μέθοδός της δεν ισχύει για τα παραδείγματα που παρουσιάζονται αλλά και ως μία προσπάθεια να μειώσει ακόμη περισσότερο το πεδίο εφαρμογής της, αφού υπονοείται στα λόγια της ότι η μέθοδος λειτουργεί για ¨λογικούς αριθμούς¨ και όχι για ¨εξωφρενικά¨ μεγάλους. Ακολούθησαν και άλλα παραδείγματα, που ίσως αυτά έπεισαν τελικά την Τάνια να αναθεωρήσει τη στρατηγική της, καθώς χρησιμοποιήθηκαν ¨λογικοί αριθμοί ¨ όπως η σύγκριση $\frac{2}{3}$ με $\frac{5}{7}$ ή $\frac{3}{4}$ με $\frac{8}{11}$.

Από την παραπάνω συνέντευξη με την Tanya γίνεται επιπλέον φανερός ο ρόλος των παραδειγμάτων στην κατάδειξη των λανθασμένων γενικεύσεων των μαθητών. Οι Zazkis & Chernoff (2006) εισήγαγαν την έννοια του θεμελιώδους

παραδείγματος, ορίζοντάς το ως το παράδειγμα που προκαλεί ή επιλύει μία γνωστική σύγκρουση και κάνει τους μαθητές να αλλάζουν στρατηγική ή πεποιθήσεις.

Τα δυο παραπάνω επεισόδια που περιγράφηκαν αφορούσαν δυο διαφορετικούς εκπαιδευόμενους, σε διαφορετικές τάξεις που συσχετίστηκαν με έναν ειδικό σε δυο διαφορετικές περιπτώσεις, η μία με κλινική συνέντευξη και η άλλη σε τάξη. Για την επίλυση των συγκρούσεων που διαπιστώθηκε χρειάστηκαν διαφορετικό αριθμό παραδειγμάτων όμως και οι δυο εκπαιδευόμενες θεώρησαν τα αντιπαραδείγματα που δόθηκαν από τον εκπαιδευτή ως εξαιρέσεις.

Προφανώς το «σύστημα απόδειξης» του ερευνητή (Harel &Sowder,1998) είναι διαφορετικό από των μαθητών. Το σύστημα απόδειξης δείχνει τι είναι αποδεκτό ως πειστικό επιχείρημα και θα μπορούσε να διαφέρει από τη μαθηματική θεώρηση του τι είναι απόδειξη. Το αντιπαράδειγμα παρέχει ένα είδος μαθηματικής απόδειξης, καταδεικνύοντας μια λανθασμένη εικασία, αλλά μπορεί να αμφισβητηθεί ως τέτοιο. Από τη προσπάθεια των μαθητών να αντιμετωπίσουν τα αντιπαραδείγματα που καταρρίπτουν τις εικασίες ή τους ισχυρισμούς τους, συμπεραίνεται ότι αυτά είναι συνεπή με το σύστημα απόδειξης του ειδικού. Το σύστημα αυτό δεν είναι πάντα κατανοητό από τους εκπαιδευόμενους και γι' αυτό διαφορετικά αντιπαραδείγματα δεν έχουν την ίδια πειστική δύναμη.

Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως παράδειγμα μεταστροφής αν επιπλέον διευρύνει τα όρια του προσωπικού χώρου παραδειγμάτων των μαθητών. Δηλαδή, ξεπερνά τους τοποθετημένους, ατομικούς χώρους παραδειγμάτων, οι οποίοι ενεργοποιούνται από κάποια εργασία ή από πρόσφατη εμπειρία. Αντίθετα, τα παραδείγματα που ανήκουν σε συμβατικούς χώρους παραδειγμάτων περιορίζουν την ανάπτυξη των προσωπικών χώρων και αποτυγχάνουν ως παραδείγματα μεταστροφής, όπως τα διδακτικά παραδείγματα που εστιάζουν σε ¨μικρούς¨ πρώτους αριθμούς ή σε ¨μικρά¨ κλάσματα και περιορίζουν τη γενίκευση από τους μαθητές. Βέβαια, ο χαρακτηρισμός ενός παραδείγματος ως μεταστροφής ή γεφύρωσης εξαρτάται και από τον εκπαιδευόμενο, καθώς δεν λειτουργούν όλα τα παραδείγματα σε όλους με τον ίδιο τρόπο.

Η σύνδεση της επιτυχίας στα μαθηματικά με την ικανότητα να παράγει κάποιος παραδείγματα και μη παραδείγματα παρουσιάζεται και στο άρθρο των Selden A. & J. (1998). Στο άρθρο αυτό περιγράφεται αρχικά η μελέτη των Dahlberg & Housman (1997) του Allegheny College σε έντεκα προπτυχιακούς φοιτητές, εκ των οποίων οι δέκα ήταν μαθηματικοί και ένας ασχολούνταν με την επιστήμη των υπολογιστών. Οι φοιτητές αυτοί είχαν παρακολουθήσει επιτυχώς μαθήματα πραγματικής ανάλυσης και γραμμικής άλγεβρας, καθώς και ένα σεμινάριο για τη θεμελιώδη θεωρία της ανάλυσης.

Η έρευνα ξεκινά δίνοντας στους φοιτητές τον ορισμό της *τέλειας συνάρτησης (fine function),* δηλαδή μίας συνάρτησης που έχει ρίζα κάθε ακέραιο αριθμό, ώστε να κατανοηθεί πώς οι φοιτητές θα αντιμετωπίσουν μία τυπικά καθορισμένη έννοια. Αφού μελέτησαν τον ορισμό για δέκα λεπτά καταγράφοντας τις σκέψεις τους, τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν οι ίδιοι παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας. Στη συνέχεια τους δόθηκαν συναρτήσεις όπως $f(x)=sin(\pi x)$ και $f(x)=0$ και τους ζητήθηκε να εξετάσουν αν αυτά είναι παραδείγματα τέλειας συνάρτησης και γιατί. Τέλος, τους ζητήθηκε να ορίσουν το αληθές των τεσσάρων εικασιών καθώς και η γνώμη τους για τη συνέντευξη.

Οι στρατηγικές εκμάθησης που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές ήταν η δημιουργία παραδειγμάτων, η αναδιατύπωση, η ανάλυση και σύνθεση και τέλος η απομνημόνευση. Στα παραδείγματα που τους δόθηκαν περιλαμβάνονται η σταθερή μηδενική συνάρτηση και η ημιτονοειδής καμπύλη που τέμνει τον άξονα χ.

Η αναδιατύπωση περιελάμβανε παραδείγματα όπως $f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, ..., $f(n)=0$ *για κάθε* $n \varepsilon Z$. Η ανάλυση και η σύνθεση περιορίζονταν στην υπογράμμιση του ορισμού και στην εξέταση της έννοιας της ρίζας. Οι μαθητές που ακολούθησαν την απομνημόνευση, την ανάλυση και τη σύνθεση συνήθως παρερμήνευαν τον ορισμό και αδυνατούσαν να παράγουν παραδείγματα, αλλά και εκείνοι που ακολούθησαν την αναδιατύπωση ανέπτυξαν αλγορίθμους για να διαχωρίσουν τις τέλειες συναρτήσεις αλλά δεν μπορούσαν να φτιάξουν αντιπαραδείγματα για τις λανθασμένες υποθέσεις.

Από τις τέσσερις αυτές στρατηγικές εκμάθησης, η παραγωγή παραδειγμάτων θεωρήθηκε η ισχυρότερη στην ανάπτυξη πραγματικής προόδου για την κατανόηση

της νεοεισαχθείσας έννοιας. Οι φοιτητές που υιοθέτησαν αυτή τη μέθοδο, παρουσίασαν μία ποικιλία από ασυνεχή , περιοδικά συνεχή και μη περιοδικά συνεχή παραδείγματα τα οποία μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν στις επεξηγήσεις τους.

Οι Dahlberg & Housman (1997) κατέληξαν ότι θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμο να ζητείται από τους μαθητές να δημιουργούν δικά τους παραδείγματα ή να ελέγχουν τα παραδείγματα και μη παραδείγματα των καθηγητών τους κατά την εισαγωγή νέων εννοιών.

Στο ίδιο άρθρο παρουσιάζεται και η έρευνα των Hazzan & Zazkis (1997) σε τρεις ομάδες δασκάλων, που είχε ως στόχο να διερευνήσει τη σύγχυση που μπορεί να προκληθεί στους εκπαιδευόμενους όταν τους ζητείται να δημιουργήσουν παραδείγματα. Οι ερευνητές ζήτησαν από τους δασκάλους να φτιάξουν παραδείγματα για καθένα από τα εξής τρία ζητήματα: 1) ένας εξαψήφιος αριθμός που διαιρείται από το 9 και ένας που διαιρείται από το 17, 2) μία συνάρτηση που για $\chi=3$ η τιμή της είναι -2 και 3) ένα δείγμα και ένα γεγονός με πιθανότητα 2/7. Έπειτα τους ζητήθηκε να εξηγήσουν πως έφτιαξαν τα παραδείγματα καθώς και να φτιάξουν πέντε ακόμη.

Οι δάσκαλοι ξεκίνησαν τη δημιουργία παραδειγμάτων με τη μέθοδο της δοκιμής και σφάλματος, επιλέγοντας ένα αριθμό τυχαία και ελέγχοντας αν διαιρείται με το 9. Κάποιοι άλλοι διάλεξαν τον αριθμό N όπου μετά τη διαίρεση με το 17 να δίνει υπόλοιπο 2, συνεχίζοντας τη δοκιμή με το N-2. Έκαναν ερωτήσεις για τα στοιχεία του δείγματος που τους ζητήθηκε, δηλαδή αν θα ήταν αριθμοί, γράμματα ή άλλα αντικείμενα και έφτιαξαν δικούς τους αλγορίθμους για τη συνάρτηση, υποθέτοντας ότι είναι η $y=ax+b$ όπου με αντικατάσταση προέκυπτε $-2=3a+b$ και με τυχαία επιλογή για $a=2$ έβρισκαν $b=-8$ και τελικά τη συνάρτηση $y=2x-8$.

Ενδιαφέρον προκάλεσε το γεγονός ότι ελάχιστοι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν ¨τετριμμένα παραδείγματα¨, όπως το 170000 ως εξαψήφιο αριθμό που διαιρείται με το 17 ή την $\psi=-2$ ως συνάρτηση. Οι ερευνητές είκασαν ότι τα παραδείγματα αυτά δεν μπορούσαν να θεωρηθούν ως πρωτοτυπικά, γιατί η συνάρτηση δεν περιείχε χ και ο εξαψήφιος αριθμός δεν είχε ποικιλία ψηφίων, και για το λόγο αυτό δεν χρησιμοποιήθηκαν. Οι δάσκαλοι έλεγχαν αμέσως την ορθότητα των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούσαν, έτσι η δημιουργία ενός αριθμού που διαιρείται με το 17 ως γινόμενο παραγόντων επαληθεύτηκε και από τη διαίρεση. Αρκετοί δάσκαλοι

δυσκολεύτηκαν να διαχειριστούν τους ¨βαθμούς ελευθερίας¨, για παράδειγμα στην εξεύρεση ενός αριθμού που διαιρείται με το 9 γνωρίζοντας ότι το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού πρέπει να διαιρείται με το 9 επέλεξαν το 18, ανέλυσαν το 10 σε 8 και 2 και το 8 σε 4, 3, 1 και έφτιαξαν τον αριθμό 82431. Όταν τους ζητήθηκε κάποια άλλη στρατηγική πρότειναν το ίδιο αλλάζοντας τον αρχικό αριθμό από 18 σε 27.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας αποδεικνύεται ότι οι δάσκαλοι δυσκολεύτηκαν αρκετά στη δημιουργία παραδειγμάτων, ήταν αβέβαιοι για τον τρόπο που θα συνέχιζαν και αρκετά προβληματισμένοι όταν έπρεπε να κάνουν επιλογές στα μαθηματικά.

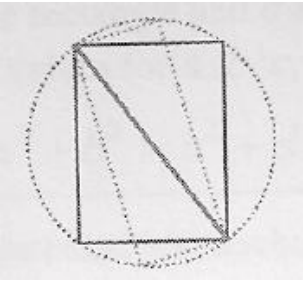
Οι ερευνητές προτείνουν ότι θα πρέπει σε όλα τα επίπεδα να ζητούνται από τους μαθητές να δημιουργούν παραδείγματα. Επιπλέον θα πρέπει να ενθαρρύνονται στη δημιουργία εικασιών μέσα στην τάξη αλλά και στη συζήτηση μαθηματικών εννοιών. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αξιολογούν τα παραδείγματα των μαθητών αλλά και να προτείνουν εναλλακτικά παραδείγματα, βοηθώντας τους να κατανοήσουν ότι τα παραδείγματα είναι γενικά και όχι μοναδικά σε κάθε περίπτωση και έτσι ένα και μόνο αντιπαράδειγμα αρκεί για να αντικρούσει μία εικασία.

Συνεχίζοντας στο άρθρο αυτό εξετάζεται, μέσα από τη μελέτη των Peled & Zaslavsky (1997) , η ετοιμότητα των έμπειρων καθηγητών μαθηματικών αλλά και των άπειρων φοιτητών να δημιουργήσουν επεξηγηματικά αντιπαραδείγματα.

Για τη μελέτη αυτή σχηματίστηκαν δυο ομάδες καθηγητών, 38 καθηγητές με πτυχίο στα μαθηματικά και πενταετή τουλάχιστον εμπειρία και 45 τριτοετείς φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει αρκετά προπτυχιακά μαθήματα μαθηματικών. Τους ζητήθηκε να σχηματίσουν από ένα τουλάχιστον αντιπαράδειγμα για δύο ψευδείς γεωμετρικές υποθέσεις που υποτίθεται ότι δόθηκαν σε ένα μαθητή γυμνασίου. Η πρώτη υπόθεση διατυπώθηκε ως εξής*: Δυο ορθογώνια με ανάλογες διαγώνιες είναι όμοια* και η δεύτερη*: Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν μία ίση πλευρά και μία ίση διαγώνιο είναι ίσα.* Το 97% των καθηγητών με προϋπηρεσία έδωσαν επαρκή αντιπαραδείγματα για την πρώτη υπόθεση και το 53% των φοιτητών, ενώ για τη δεύτερη υπόθεση τα ποσοστά ήταν αντίστοιχα 76% και 43%.

Τα αντιπαραδείγματα που δόθηκαν αναλύθηκαν ως προς την επεξηγηματική τους ισχύ σε *συγκεκριμένα, ημι-γενικά και γενικά*. Ένα αντιπαράδειγμα είναι συγκεκριμένο όταν αντιφάσκει ως προς τον ισχυρισμό χωρίς όμως να δίνει καμία ένδειξη για τον τρόπο που θα μπορούσαν να κατασκευαστούν παρεμφερή αντιπαραδείγματα. Έτσι για την πρώτη υπόθεση κατασκευάστηκαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαφορετικών διαστάσεων που είχαν ίσες διαγώνιες. Το ημι-γενικό αντιπαράδειγμα παρέχει κάποιες μη ολοκληρωμένες πληροφορίες για το σχηματισμό συγγενών αντιπαραδειγμάτων που δεν καλύπτουν όμως όλες τις περιπτώσεις. Στην περίπτωση αυτή για την πρώτη υπόθεση σχεδιαστήκαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ίσες διαγώνιες αλλά η γωνία μεταξύ των διαγωνίων του δεύτερου ορθογωνίου αναφέρθηκε ως διπλάσια από αυτήν του πρώτου. Στην τρίτη περίπτωση των γενικών παραδειγμάτων παρέχονται ενδείξεις που δικαιολογούν γιατί η υπόθεση είναι ψευδής και προτείνονται τρόποι για να δημιουργηθεί ένας χώρος αντιπαραδειγμάτων. Σχετικά με τη πρώτη υπόθεση διευκρινίζεται γιατί η γωνία μεταξύ των διαγωνίων είναι διπλάσια.

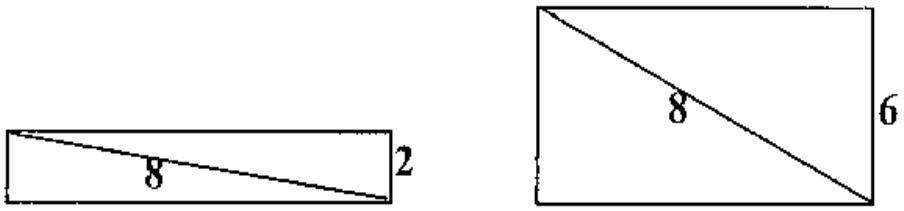
Ένα γενικό αντιπαράδειγμα για την πρώτη περίπτωση είναι και αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (σχήμα18) και φανερώνει ένα γενικό επιχείρημα και ένα τρόπο για την αναπαραγωγή πολλών ορθογωνίων με κοινή διαγώνιο.



Σχήμα 18

Παρά τα πλεονεκτήματα των γενικών παραδειγμάτων για την επεξήγηση και την απόδειξη, τα συγκεκριμένα παραδείγματα θα μπορούσαν μερικές φορές να είναι πειστικότερα για τους μαθητές που χρειάζονται χειροπιαστές εμπειρίες. Οι μαθητές ίσως να μην αντιλαμβάνονται τη γενική περίπτωση και να αδυνατούν να τη συνδέσουν με τη σχετική δήλωση. Τέτοιοι μαθητές θα πείθονταν καλύτερα αν

σχεδίαζαν σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί δύο ορθογώνια που δεν είναι όμοια και στη συνέχεια συνέκριναν το μήκος των διαγωνίων τους. Για να σχεδιάσουν τα ορθογώνια θα έπρεπε να γνωρίζουν το μήκος και το πλάτος τους δηλαδή τα μήκη των πλευρών και των δύο ορθογωνίων. Τα συγκεκριμένα παραδείγματα που δημιούργησαν οι εκπαιδευτικοί στην εργασία των Peled και Zaslavsky (1997) δεν επαρκούσαν για το σκοπό αυτό. Στο Σχήμα 19 απεικονίζεται ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα που προτάθηκε στη μελέτη τους.

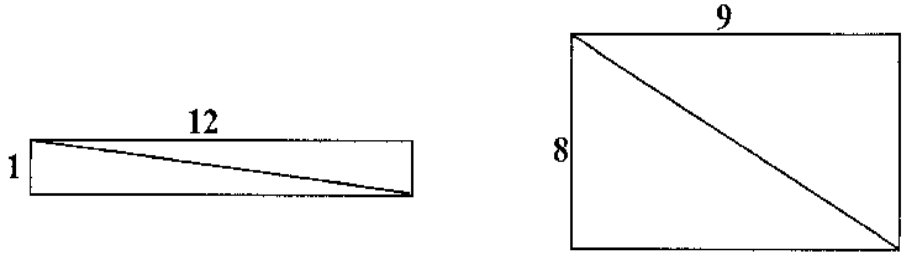


Σχήμα 19

Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν μέρος των μαθηματικών τους γνώσεων για το παραπάνω παράδειγμα, όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα, με τη βοήθεια του οποίου εύκολα συμπέραναν ότι οι πλευρές των ορθογωνίων δεν είναι ίσες. Επίσης γνώριζαν ότι ένα ορθογώνιο ορίζεται μοναδικά από τη διαγώνιο και μία πλευρά του, καθώς και ότι η διαγώνιος είναι μεγαλύτερη από τις πλευρές. Θα μπορούσαν να είχαν δώσει και τα μήκη των άλλων δύο πλευρών αλλά επέλεξαν να μην το κάνουν επειδή ήταν άρρητοι αριθμοί. Και αυτό το αντιπαράδειγμα όμως δεν θα ικανοποιούσε τους μαθητές και δεν θα φαίνονταν αξιόπιστο, αφού δε μπορεί να σχηματιστεί με ακρίβεια σε τετραγωνισμένο χαρτί.

Έτσι οι εκπαιδευτικοί έρχονται αντιμέτωποι με ένα δυσκολότερο μαθηματικό πρόβλημα, προκειμένου να ικανοποιήσουν τους μαθητές που θα ήθελαν τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου να είναι ακέραιοι αριθμοί και να ταιριάζουν ακριβώς σε τετραγωνισμένο χαρτί. Το μαθηματικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: « *Αν a και b είναι τα ακέραια μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου και c και d είναι τα ακέραια μήκη των πλευρών ενός άλλου ορθογωνίου, να βρεθούν οι τιμές των a,b,c,d που ικανοποιούν τη σχέση:* $a^2+b^2=c^2+d^2$».

Μετά από μικρή έρευνα των εκπαιδευτικών παρουσιάζεται το παράδειγμα που ακολουθεί στο σχήμα 20.



Σχήμα 20

Οι μαθητές τώρα μπορούν να σχεδιάσουν με ακρίβεια τα ορθογώνια σε τετραγωνισμένο χαρτί, να μετρήσουν τις διαγώνιους και να καταλάβουν ότι αυτά είναι δύο ανόμοια ορθογώνια με ίσες διαγώνιους.

Παρατηρήθηκε ότι οι καθηγητές με μεγαλύτερη εμπειρία παρήγαγαν περισσότερο γενικά και ημι-γενικά αντιπαραδείγματα (92% έναντι 38% για την πρώτη υπόθεση και 61% έναντι 33% για τη δεύτερη) που χαρακτηρίστηκαν ως επεξηγηματικά. Η δυσκολία στο να προτείνεται ένα μόνο συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές θα μπορούσαν να παραπλανηθούν αλλά και τα αντιπαραδείγματα δεν θα μπορούσαν να παρέχουν εξηγήσεις γιατί μία υπόθεση αποτυγχάνει. Οι συγγραφείς καταλήγουν ότι και οι καθηγητές με εμπειρία και οι φοιτητές θα ωφελούνταν από την ανάλυση και συζήτηση των παιδαγωγικών πτυχών των αντιπαραδειγμάτων.

Το άρθρο αυτό καταλήγει με το ερώτημα πώς μπορούν οι μαθητές να φτιάξουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα όταν δεν έχουν γνώση και κατανόηση της εξεταζόμενης έννοιας. Αλλά και πώς θα μπορούσαν να αποκτήσουν καλύτερα αυτή τη νέα έννοια. Η απάντηση είναι μέσα από τη μελέτη παραδειγμάτων. Δημιουργείται ένα δίλλημα στους μαθητές αφού οι μαθηματικοί ορισμοί παρέχουν μερικές μόνο έννοιες, οι έννοιες απορρέουν από τις ιδιότητες που με τη σειρά τους εξαρτώνται από τους ορισμούς. Οι μαθηματικοί ξεπερνούν αυτό το δίλλημα και αναζητούν παραδείγματα για να αποκτήσουν αντιλήψεις των επίσημων ορισμών.

Οι Peled &Zaslavsky (1996) συνεχίζοντας την έρευνα τους, ζήτησαν από 67 καθηγητές χωρίς προϋπηρεσία και 36 με προϋπηρεσία να φτιάξουν παραδείγματα για την αντιμεταθετική και τη προσεταιριστική ιδιότητα για να βοηθήσουν τους μαθητές που αντιμετώπιζαν δυσκολίες. Μόνο το 33%των έμπειρων καθηγητών και το 4% των φοιτητών βρήκαν πλήρη, με ακρίβεια και άρτια αιτιολογημένα παραδείγματα. Μόλις το 56% και το 31% αντίστοιχα ήταν σε θέση να δώσουν οποιοδήποτε παράδειγμα.

Διερευνώντας το πρόβλημα αυτό οι συγγραφείς διαπίστωσαν ότι η γνώση των εξεταζομένων ήταν ελλιπής. Κάποιοι όρισαν a*b=$|a+b|$ και υποστήριξαν ότι δεν ίσχυε η προσεταιριστική ιδιότητα γιατί $|a+b|+|c| \neq |a|+|b+c|$. Κάποιο άλλοι έδωσαν παράδειγμα αντιμεταθετικότητας για την αφαίρεση γράφοντας: -2-3=-3-2 αντί για 3-(-2) και τέλος όρισαν τη συνάρτηση α*=α^2 -1 και προσπάθησαν να ελέγξουν την αντιμεταθετικότητα χρησιμοποιώντας τη σχέση α*b=$(a+b)^2$-1. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι συγχέονταν η αντιμεταθετική με την προσεταιριστική ιδιότητα εξαιτίας του τρόπου που αντιμετωπίζεται στα σχολεία το ζήτημα της σειράς των πράξεων, δηλαδή όταν ζητείται από τους μαθητές να κάνουν την πράξη 6+7+4 ενθαρρύνονται να την εκτελέσουν πιο αποτελεσματικά ως εξής (6+4)+7.

Πολλές φορές σε μία αίθουσα διδασκαλίας, ο δάσκαλος ή ο συγγραφέας του εγχειριδίου μπορεί να θεωρηθεί ως ¨μαθηματική αυθεντία¨ που γνωρίζει εξ αρχής την απάντηση. Η κατάσταση αυτή λειτουργεί αποτρεπτικά για την ανάπτυξη νέων ιδεών των μαθηματικών. Τα είδη της μαθηματικής δραστηριότητας που περιγράφει ο Lakatos απαιτούν μια συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση για να εφαρμοστούν. Χρειάζονται μια αρχική εικασία που να συνοδεύεται από μια αιτιολόγηση, ενώ η εικασία θα περιλαμβάνει μία ή περισσότερες γενικές ιδέες και ορισμούς που μπορεί να μην έχουν διατυπωθεί προσεκτικά από τους μαθητές. Επίσης πρέπει να υπάρχει ένα αντιπαράδειγμα στην εικασία αυτή.

Για να κατηγοριοποιηθεί η μαθηματική δραστηριότητα ως προς τους τρόπους αντιμετώπισης των αντιπαραδειγμάτων μελετάτε αρχικά το σημείο εστίασης της προσοχής των μαθητών και το αποτέλεσμα της δραστηριότητας τους. Αναλύετε αν οι μαθητές εστιάζουν στα αντιπαραδείγματα, στους ορισμούς, στην εικασία ή την απόδειξη και αν η δραστηριότητα τους καταλήγει σε τροποποίηση ενός ορισμού ή μιας εικασίας. Στην κατηγορία φραγής των τεράτων εντάσσεται κάθε απάντηση που

χωρίς αιτιολόγηση απορρίπτει ως μη πραγματικό ένα παράδειγμα ή που περιλαμβάνει μία πιο σαφή διατύπωση ενός ορισμού. Το αποτέλεσμα της δραστηριότητας στη φάση αυτή είναι η τροποποίηση ή η αποσαφήνιση ενός ορισμού.

Στην μέθοδο φραγής των εξαιρέσεων εντάσσονται απαντήσεις που αποκλείουν ένα αντιπαράδειγμα, χωρίς αναφορά στην απόδειξη, τροποποιώντας την εικασία. Αυτό πραγματοποιείται είτε με την απλή σύσταση μιας λίστας με τα αντιπαραδείγματα που αποτελούν εξαιρέσεις, είτε με την αναδιατύπωση μιας εικασίας που να αποκλείει τα αντιπαραδείγματα. Στην μέθοδο αυτή, σε αντίθεση με την μέθοδο φραγής των τεράτων τα αντιπαραδείγματα θεωρούνται ¨νόμιμα¨ και ως εκ τούτου μετατρέπεται η εικασία και όχι ο ορισμός

Η μέθοδος της εκδίωξης των τεράτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει την παραγωγή ορισμών από τους μαθητές, εστιάζοντας την προσοχή τους στα αντιπαραδείγματα και στον ορισμό ενώ η μέθοδος φραγής των εξαιρέσεων θα μπορούσε να χρησιμεύσει για την αναθεώρηση της εικασίας.

Στην μέθοδο των αποδείξεων και ανασκευών κεντρικό ρόλο παίζει η ανάλυση της απόδειξης, η οποία λειτουργεί μετά την τροποποίηση της εικασίας. Το αποτέλεσμα της δραστηριότητας είναι επιπλέον και η δημιουργία ενός νέου ορισμού για μία νέα γενική ιδέα που θα παραχθεί από την απόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

Η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές

Οι έρευνες για τη γνώση των μαθητών στα μαθηματικά συνήθως στοχεύουν στην εξερεύνηση της σκέψης τους και του τρόπου που κατευθύνεται, καθώς και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν και γιατί. Οι πληροφορίες που συλλέγονται χρησιμοποιούνται για τον επανασχεδιασμό των τεχνικών διδασκαλίας ώστε να ενισχυθεί η μάθηση των μαθηματικών. Η μαθηματική γνώση των μαθητών και τα σχετικά προγράμματα διδασκαλίας συνδέονται με εμπειρικές αποδείξεις και αποτελούν βασικό άξονα διδασκαλίας για τους εκπαιδευτικούς (Lin, 1991, 2000, Harel, 2002, Boero et al., 1998, 2002, Duval, 2002).

Το άρθρο του Lin (2005) εστιάζει στην έρευνα στρατηγικών διδασκαλίας και μάθησης που συνδέονται με τη μαθηματική γνώση των μαθητών, για την ενίσχυση της μάθησης μέσω της μαθηματικής απόδειξης και ανασκευής. Για να εφαρμοστεί εύκολα η έρευνα αυτή στην πρακτική του σχολείου επιλέχθηκε η στρατηγική της αναίρεσης για τη μάθηση μέσω εικασιών.

Τα στοιχεία που προέκυψαν από την έρευνα σχετίστηκαν με τον τρόπο που οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις λανθασμένες υποθέσεις που τους δίνονται. Οι μαθητές κλήθηκαν να επιλέξουν μεταξύ τριών απαντήσεων, αν συμφωνούν, διαφωνούν, ή δεν γνωρίζουν και να εξηγήσουν την επιλογή τους αυτή. Χρησιμοποιήθηκαν κάποια κωδικοποιημένα σχήματα, τόσο στην άλγεβρα όσο και στη γεωμετρία, για να αναλυθούν οι παρουσιάσεις των μαθητών και βάση αυτών παρουσιάστηκε ένα μοντέλο ανασκευής.

Οι ερευνητές για να καταλάβουν τον τρόπο σκέψης κατά τη μαθηματική ανασκευή, εξέτασαν έναν εμπειρογνώμονα μαθηματικό με το προσωνύμιο ο κύριος

Αντιπαράδειγμα. Εξετάζοντας τη διαδικασία ανασκευής του Κυρίου Αντιπαράδειγμα εμφανίστηκαν πέντε διαδοχικές διαδικασίες:

1. Εισαγωγική
2. Ο έλεγχος συγκεκριμένων παραδειγμάτων που έχουν επιλεγεί για να καταλήγουν σε συμπέρασμα
3. Ο έλεγχος διαφορετικών ειδών παραδειγμάτων
4. Η οργάνωση όλων των ειδών παραδειγμάτων
5. Η ανακάλυψη ενός αντιπαραδείγματος όταν συνειδητοποιείται η αναλήθεια της πρότασης.

Με δεδομένη την ανάλυση του τρόπου σκέψης του εμπειρογνώμονα, οι ερευνητές προχώρησαν στην ανάλυση της αιτιολόγησης των ανασκευών των μαθητών. Έδωσαν σε αυτούς τρεις λανθασμένες γεωμετρικές εικασίες:

- Οποιοδήποτε τετράπλευρο που έχει τις γωνίες του σε έναν κύκλο, έχει διαγώνιες που διέρχονται πάντα από το κέντρο του κύκλου (7G1,γεωμετρία)
- Σε οποιοδήποτε τετράπλευρο τουλάχιστον μία διαγώνιος θα το χωρίσει στη μέση (8G1,γεωμετρία)
- Ένα τετράπλευρο, στο οποίο το ένα ζευγάρι των απέναντι γωνιών είναι ορθές, είναι ορθογώνιο (7&8 G5, γεωμετρία).

Κάθε γεωμετρική εικασία οι μαθητές έπρεπε να την επιβεβαιώσουν ή να την ανασκευάσουν. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των παρουσιάσεων των μαθητών 7^{ης} και 8^{ης} τάξης (Α΄ και Β΄ Γυμνασίου) στην εικασία G5, διαπιστώθηκε ότι δεν υπήρχε πρόοδος ανάλογα με την τάξη (τα ποσοστά σωστών αποφάσεων ήταν αντίστοιχα 26% και 37%). Ταξινομώντας τις φράσεις των μαθητών που διαφωνούσαν προέκυψαν τρεις κατηγορίες, το ρητορικό επιχείρημα, η διόρθωση της δοσμένης πληροφορίας και η ανάπτυξη αντιπαραδείγματος. Σύμφωνα με το Duval (1999,2002) υπάρχουν δύο είδη σχέσης ανάμεσα σε μία δήλωση Α και μία Β, η παραγωγική και η σχέση αιτιολόγησης. Το σημασιολογικό συμπέρασμα και η μαθηματική απόδειξη υποστηρίζουν την παραγωγική σχέση, ενώ το ευρετικό και το ρητορικό επιχείρημα, τη σχέση αιτιολόγησης. Στην έρευνα αυτή, οι κωδικοί c2,c3,c4,g1,g2 αναφέρονται

στο ευρετικό επιχείρημα που λαμβάνει υπόψη τους περιορισμούς. Γενικά, ένα επιχείρημα θεωρείται ότι αναπτύχθηκε ή χρησιμοποιήθηκε για να αιτιολογήσει ή να ανασκευάσει μία πρόταση, είτε πρόκειται για γεγονός, για αποτέλεσμα ενός πειράματος, για ένα απλό παράδειγμα, για έναν ορισμό, για την ανάκληση ενός κανόνα ή την παρουσίαση μίας αντίφασης (Duval,1999). Οι λόγοι που σχετίζονται με τον ομιλητή ή τις πεποιθήσεις του συνομιλητή εντάσσονται στα ρητορικά επιχειρήματα. Οι κωδικοί d_4 , d_3 αναφέρονται σε ρητορικό και ευρετικό επιχείρημα αντίστοιχα.

Στο παρακάνω σχήμα κωδικοποίησης καλύπτει τρία από τα τέσσερα είδη κωδικοποίησης που παρουσιάστηκαν κατά την ανασκευή λανθασμένων εικασιών από τους μαθητές της $7^{ης}$ και $8^{ης}$ τάξης, τα ρητορικά επιχειρήματα, τα ευρετικά επιχειρήματα και τη μαθηματική απόδειξη (τα σαφή αντιπαραδείγματα). Η υψηλή συχνότητα που παρατηρείται στον κωδικό c_2 στο 7G5, αναφέρεται σε μαθητές που αιτιολογούσαν την απάντησή τους υπό την προϋπόθεση ότι το τετράπλευρο είναι τετράγωνο ή ορθογώνιο, γεγονός που αποδεικνύει την παρανόησή τους για τη σχέση των δυο αυτών σχημάτων. Παρατηρείται ακόμη ότι 11% και 36% των μαθητών της $7^{ης}$ τάξης και 20% και 24% των μαθητών της $8^{ης}$, ποσοστά που προέκυψαν από την άθροιση των συχνοτήτων των κωδικών c_2,c_3,c_4, g_1, g_2, παρουσίασαν ευρετικά επιχειρήματα κατά την ανασκευή των G1 και G5.

Λανθασμένες Εικασίες, αν P τότε Q				
Κωδικός	Συχνότητα(%)			
	7G1	7G5	8G1	8G5
Επιβεβαίωση	44	26	31	37
d_0 – Παρερμηνεία της δοσμένης πληροφορίας	1	2	2	1
d_1- Πολύ κακό για το τίποτα	23	5	12	9
d_2-Επιβεβαίωση του Q με λανθασμένη αιτιολόγηση	9	3	8	6
d_3- Δίνοντας το P΄, P΄→Q	3	12	3	17
d_4- Αρχή	0,1		0,2	1,1
Ανασκευή	52	67	68	59
Ρητορικά επιχειρήματα	8	8	17	11
Διορθώνοντας τη δοσμένη πληροφορία	15	51	12	33
c_0- Κριτική στη δοσμένη πληροφορία	9	13	3	5
c_1- Μη παράδειγμα	3	3	5	9
c_2- Προβάλλοντας εναλλακτικά Q		32		16
c_3- Χαρακτηρίζοντας το Q, P΄→Q	2	3	3	2
c_4- Εμπειρική απόφαση	0,3		0,5	0,1
Ανάπτυξη αντιπαραδείγματος	24	4	34	11
g_0- Δεν πιστεύουν ότι είναι πάντα αλήθεια	3	1	5	3
g_1- Δίνουν την πιθανότητα ενός αντιπαραδείγματος	5	0,6	13	4
g_2-Δίνουν τον τρόπο για να αναπτυχθεί ένα αντιπαράδειγμα	4	0,3	4	1
g_3- Ρητό, σαφές αντιπαράδειγμα	12	2	10	3
g_4- Αντιπαράδειγμα με μαθηματική απόδειξη		0,1	0,9	0,1

Πίνακας 1: Συχνότητες κωδικών για μαθητές $7^{ης}$ και $8^{ης}$ τάξης στα στοιχεία G1, G5 (N7=1146, N8=1050)

Η έρευνα συνεχίστηκε με την επιλογή τριών λανθασμένων εικασιών στην άλγεβρα που δόθηκαν και πάλι σε μαθητές $7^{ης}$ και $8^{ης}$ τάξης. Αυτές ήταν:

- Α3 : Αν το άθροισμα δύο ακεραίων αριθμών είναι ζυγός, τότε οι αριθμοί είναι περιττοί (δόθηκε και στις δύο τάξεις από Küchemann & Holyes, 2002)

- A6b : το άθροισμα ενός πολλαπλασίου του 3 και ενός πολλαπλασίου του 6 πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 6 (δόθηκε στους μαθητές της $8^{η}$)

Τα δεδομένα (3,6,6) στην A6b αντικαταστάθηκαν από (3,6,9) στην A6c για την $8^{η}$ τάξη και αντίστοιχα το (2,4,4) σε (2,4,6) στις A6b και A6c για $7^{η}$. Οι παρουσιάσεις των μαθητών που εργάστηκαν σε αυτές τις εικασίες, αναλύθηκαν με το παρακάτω σύστημα κωδικοποίησης:

- g3: Ρητό, σαφές αντιπαράδειγμα, που διαχωρίστηκε σε τρεις υποκατηγορίες
  - g31: αντιπαράδειγμα χωρίς αιτιολόγηση
  - g32 : υποστήριξη και αντιπαραδείγματα
  - g33: αντιπαράδειγμα χωρίς αναλυτική αιτιολόγηση

Αναφερόμενοι στην διαδικασία σκέψης ενός εμπειρογνώμονα, που παρουσιάστηκε παραπάνω, οι διαδικασίες 2 και 5 κωδικοποιούνται στο g31, που είναι αποτέλεσμα και αρχικής και προχωρημένης σκέψης.

Οι ερευνητές παρουσιάζουν στη συνέχεια μία κωδικοποίηση των απαντήσεων των μαθητών. Αυτή παρουσιάζει τα παρακάτω στάδια:

a) προτάσεις επιβεβαίωσης: 1) « πιστεύω ότι μόνο αληθείς προτάσεις θα παρουσιάζονται στη μάθησή μου» (d_1), 2) «το θεωρώ σωστό γιατί είναι συναφές με αυτό που υπάρχει στο βιβλίο» (d_4), 3) «έδωσα κάποια παραδείγματα που το υποστηρίζουν, όπως 3+6=9 και 3x2+6x2=18, που είναι πολλαπλάσια του 9» (A6c),(d_3)
b) αβέβαιες απαντήσεις: 1) « δεν είμαι σίγουρος γιατί ο πολλαπλασιασμός δεν δίνεται», οι μαθητές παρερμήνευαν το πολλαπλασιασμό σαν πολλαπλασιασμό με συγκεκριμένους αριθμούς (r_1), 2) « το υποστήριξα και έδωσα και αντιπαραδείγματα» (g_{32})
c) απαντήσεις ανασκευής: 1) « η πρόταση είναι πολύ ραφιναρισμένη, θα έπρεπε να την είχα μάθει, αλλά δεν την έχω. Επομένως δεν μπορεί να είναι πάντα σωστή» (g_0) 2) έδωσαν απλώς αρνητική απάντηση χωρίς αιτιολόγηση (r_1)

Τα ρητορικά επιχειρήματα εμφανίζονται στους κωδικούς g1,g2, g31,g32, g33, και g4.

Στην έρευνα αυτή παρατηρήθηκε ότι καθώς οι μαθητές εξηγούσαν τους λόγους της ανασκευής τους, παρουσίαζαν ευρετικά επιχειρήματα και σαφή αντιπαραδείγματα, παράγοντας σχέσεις, γνωστές ιδιότητες και γενικούς κανόνες. Αυτό οδήγησε τους ερευνητές να εξετάσουν μία άλλη πτυχή της διαδικασίας ανασκευής, αυτήν που παράγει εικασίες. Η δραστηριότητα της ανασκευής θεωρείται ότι βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν ικανότητες κριτικής σκέψης. Σε αυτήν την κατεύθυνση μία νέα έρευνα πραγματοποιήθηκε με δύο εργασίες ανασκευής εικασιών στην άλγεβρα και στη γεωμετρία. Κάθε εργασία αποτελούνταν από διάφορα θέματα. Το πρώτο θέμα στη λήψη αποφάσεων σε εύκολες λανθασμένες εικασίες, στόχευε να παρακινήσει τους μαθητές να γνωρίσουν ότι η εργασία ήταν σχετική με την ανασκευή. Στο δεύτερο θέμα δόθηκαν κάποιες λανθασμένες εικασίες που χρησιμοποιήθηκαν στην εθνική έρευνα για την ανασκευή. Το τρίτο και τέταρτο θέμα ζητούσε από τους μαθητές να παράγουν μία ή περισσότερες εικασίες που να βασίζονται στη διαδικασία ανασκευής.

Και οι εννέα μαθητές της 7^{ης} τάξης που συμμετείχαν, παρήγαγαν ουσιαστικές εικασίες στην εργασία της άλγεβρας. Τρεις από αυτούς παρήγαγαν ένα γενικό κανόνα για όλους τους αριθμούς μ που διαιρούνται από το γραμμικό συνδυασμό όλων των αριθμών αχ+βψ. Οι 75 μαθητές της 8^{ης} από δύο τάξεις που συμμετείχαν στην έρευνα, ανέλαβαν την εργασία της γεωμετρίας. Οι τέσσερις λανθασμένες εικασίες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 7G1(αφορά το θέμα G1 σε μαθητές της 7^{ης}), 8G1, 8G5, 9G6. Σύμφωνα με τον κωδικό των συχνοτήτων στο σχήμα ανασκευής, τα ποσοστά 76%, 73%, 53% και 60% των παρουσιάσεων στην κατηγορία ¨ανάπτυξης αντιπαραδειγμάτων, αντιστοιχούσαν στις λανθασμένες εικασίες 7G1, 8G1, 8G5, 9G6, όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα 2.

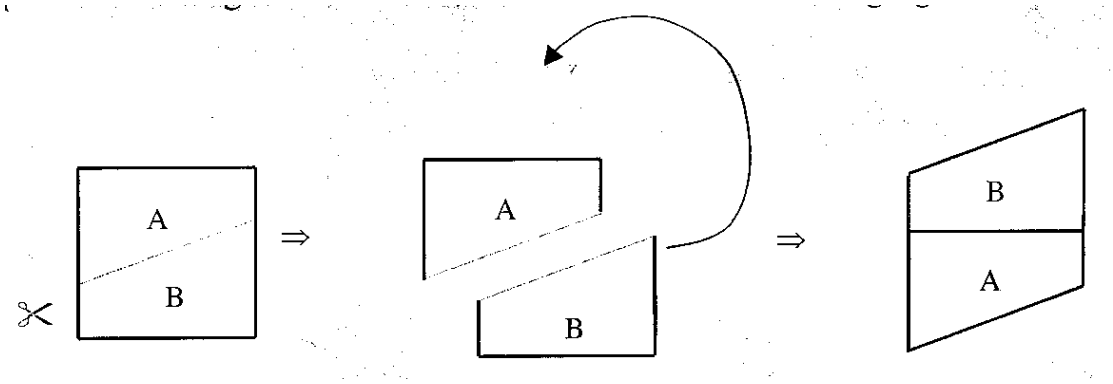
%	7G1	8G1	8G5	9G6
Θμ.	33	20	52	7
Νέα πρόταση	17	8	7	1
Καινοτομία	5	33	8	56
Σύνολο	55	61	67	64

Πίνακας 2

Παρατήρηση : Το θμ υποδηλώνει ότι η εικασία είναι θεώρημα. Η νέα πρόταση υποδηλώνει ότι η εικασία είναι μια νέα γραφή γνωστών ιδιοτήτων. Καινοτομία σημαίνει ότι η εικασία είναι καινοτόμα.

Από τον πίνακα 2 συμπεραίνεται ότι κατά μέσο όρο το 60% των μαθητών της 8^{ης} έφτιαξαν σωστές εικασίες. Πιο συγκεκριμένα, στις εργασίες 8G1 και 9G6 οι μαθητές σημείωσαν μεγάλα ποσοστά επιτυχίας στη δημιουργία νέων εικασιών.

Στην εργασία 9G6 διατυπώνονταν το εξής πρόβλημα: αν κόψουμε το τετράγωνο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και το αναποδογυρίσουμε, τότε το νέο σχήμα που δημιουργείται είναι ρόμβος; Οι εικασίες που διατυπώθηκαν από τους μαθητές κατά τη διαδικασίας της ανασκευής αυτής της εργασίας διακρίθηκαν σε ¨ συσχετισμένες¨ ή ¨μη συσχετισμένες¨.



Σχήμα 21

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η συσχέτιση ανάμεσα στη διαδικασία ανασκευής και τη δημιουργία εικασιών. Τα υψηλά ποσοστά που παρατηρούνται, ενισχύουν την άποψη ότι η ανασκευή είναι μία αποτελεσματική διαδικασία μάθησης για τη δημιουργία εικασιών.

	7G1	8G1	8G5	9G6
T1	40	57	38	69

Πίνακας 3

Ο Boero (2002) αναφέρει ότι στην Ιταλική σχολή είχαν διαπιστωθεί τέσσερα είδη συμπερασμάτων κατά τη διαδικασία εικασιών: (1) τα συμπεράσματα που βασίζονται στην επαγωγή, (2) τα συμπεράσματα που βασίζονται στην απαγωγή, (3) τα συμπεράσματα που βασίζονται στη χρονική ενότητα μια διερευνητικής διαδικασίας και (4) τα συμπεράσματα που βασίζονται στη χρονική επέκταση της κανονικότητας. Οι εικασίες που εμφανίζονται στις εργασίες 7Α3 και 8Α6 μπορούν να ενθαρρύνουν τη δημιουργία εικασιών που τα συμπεράσματά τους να βασίζονται στην επαγωγή, στην απαγωγή και στην αφαίρεση, στην εργασία 9G6 βασίζονται στη χρονική ενότητα της διερευνητικής εργασίας και στις 7G1 και 8G1 βασίζονται στην επέκταση της κανονικότητας(για παράδειγμα νέες προτάσεις κάποιων ιδιοτήτων).

Ανακεφαλαιώνοντας τα συμπεράσματα της έρευνας που παρουσιάστηκε παραπάνω πρέπει να αναφερθεί, ότι όσον αφορά τη μάθηση των μαθηματικών ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών παρήγαγαν σωστές εικασίες κατά τη διαδικασία ανασκευής λανθασμένων εικασιών. Αυτό για κάποιους μαθητές επεκτείνονταν στην αποδεικτική τους διαδικασία, ενώ κάποιοι άλλοι παρήγαγαν αντιπαραδείγματα.

Η κατανόηση του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στη μάθηση των μαθηματικών και στην ανασκευή λανθασμένων προτάσεων, ο τρόπος που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές καθώς και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, εξετάζεται αναλυτικά και στο άρθρο των Zaslavsky & Ron (1998). Οι μαθητές ολοένα και περισσότερο ενθαρρύνονται να φτιάχνουν εικασίες, να βρίσκουν αποδείξεις και να δημιουργούν επιχειρήματα για να αποδείξουν ή να ανασκευάσουν μία εικασία, όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά παραπάνω. Στη δημιουργία των επιχειρημάτων καθοριστικό ρόλο διαδραματίζει η χρήση των αντιπαραδειγμάτων, που θεωρούνται όμως από τους περισσότερους μαθητές σαν μία εξαίρεση στον κανόνα, χωρίς αποδεικτική ισχύ.

Οι στόχοι της έρευνας των Zaslavsky & Ron (1998) ήταν οι εξής:

1. το επίπεδο κατανόησης του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων στην ανασκευή λανθασμένων εικασιών από τους μαθητές
2. η συχνότητα ανάπτυξης πρωτοβουλιών για την παρουσίαση αντιπαραδειγμάτων σε λανθασμένες εικασίες
3. το επίπεδο επιτυχίας στη δημιουργία σωστών αντιπαραδειγμάτων
4. οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ανασκευή λανθασμένων εικασιών.

Στην έρευνα συμμετείχαν 150 μαθητές 9^{ης} και 10^{ης} τάξης (Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου), υψηλού επιπέδου, από τέσσερα διαφορετικά σχολεία. Πριν την έρευνα, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν αντιπαραδείγματα κατά την ανασκευή και να συζητήσουν το ρόλο τους. Χρησιμοποιήθηκαν δύο ερωτηματολόγια των πέντε τμημάτων, με την ίδια δομή. Το ένα εστίαζε στην άλγεβρα και το άλλο στη γεωμετρία. Οι μαθητές παρέλαβαν ένα μόνο ερωτηματολόγιο ο καθένας με τυχαία σειρά και καθένα από τα πέντε τμήματα που το αποτελούσαν τους δόθηκαν σταδιακά. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η δομή του ερωτηματολογίου.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Τμήμα	Ενότητα	Δεδομένα	Εργασία	Στόχος
Α		Έξι μαθηματικές προτάσεις (4 λανθασμένες και 2 σωστές)	Να εντοπίσουν δύο λανθασμένες προτάσεις και να εξηγήσουν γιατί είναι λάθος	1.να ερευνήσουν τη συχνότητα των περιπτώσεων που οι μαθητές χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα για την αιτιολόγησή του 2.να ανακαλύψουν τα χαρακτηριστικά των προσπαθειών των μαθητών να δημιουργήσουν αντιπαραδείγματα
Β	Πρόλογος	Μία λανθασμένη μαθηματική πρόταση, που ακολουθούνταν από την περιγραφή		

		τριών μαθητών που εξηγούσαν την ορθότητά της		
	1	Μία απάντηση ενός μαθητή που υποστηρίζει την ορθότητα της πρότασης δίνοντας και ένα παράδειγμα	Να διαπιστωθεί αν ο μαθητής έχει δίκιο και γιατί	Να ανακαλύψουν μαθητές που δέχονται μία ειδική περίπτωση σαν απόδειξη της πρότασης
	2	Μία απάντηση ενός μαθητή που υποστηρίζει ότι η πρόταση είναι λανθασμένη δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα	Να διαπιστωθεί αν ο μαθητής έχει δίκιο και γιατί	Να ανακαλύψουν μαθητές που δέχονται τη χρήση αντιπαραδειγμάτων για την ανασκευή λανθασμένων εικασιών
	3	Μία απάντηση ενός μαθητή που αναγνωρίζει ότι η πρόταση είναι λανθασμένη, αλλά δεν δέχεται το αντιπαράδειγμα ως αποδεικτικό στοιχείο και παρουσιάζει ένα διαφορετικό επιχείρημα	Να διαπιστωθεί αν ο μαθητής έχει δίκιο και γιατί	Να ανακαλύψουν μαθητές που δεν δέχονται τα αντιπαραδείγματα ως αποδεικτικά στοιχεία για την ανασκευή λανθασμένων εικασιών
Γ		Μία λανθασμένη μαθηματική πρόταση που ακολουθείτε από ένα λανθασμένο ισχυρισμό και τις περιγραφές τεσσάρων μαθητών που εξηγούν γιατί η δοσμένη πρόταση είναι λάθος	Για κάθε εξήγηση να διαπιστωθεί αν είναι έγκυρη και να αντικατασταθεί από μία πιο πειστική	Να ερευνηθούν τα είδη των επιχειρημάτων που οι μαθητές θεωρούν πειστικά με αναφορά στη χρήση αντιπαραδειγμάτων
Δ	1-8	Προτάσεις που εκφράζουν τις αντιλήψεις και τις στάσεις σχετικά με το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων	Να σημειώσουν την έκταση της συμφωνίας με κάθε πρόταση	Να ανακαλύψουν τις αντιλήψεις και τις στάσεις των μαθητών σχετικά με τη χρήση και το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων

Ε	1-4	Τέσσερις λανθασμένες μαθηματικές προτάσεις	Για κάθε πρόταση να δημιουργήσουν διάφορα αντιπαραδείγματα και να δικαιολογήσουν γιατί είναι έγκυρα	Να εξετάσουν τα είδη των αντιπαραδειγμάτων που φτιάχνουν οι μαθητές όταν τους ζητείται ξεκάθαρα να το κάνουν

Τα αποτελέσματα του τμήματος Α παρουσιάζονται αναλυτικά στη συνέχεια, με αναφορές και στα ευρήματα των άλλων τμημάτων. Ένα αντιπαράδειγμα χαρακτηρίστηκε «λανθασμένο» όταν δεν ικανοποιούσε τις συνθήκες ενός αντιπαραδείγματος. Για παράδειγμα, στον ισχυρισμό ¨αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε αυτό είναι ορθογώνιο¨, όποιος μαθητές έδωσε σαν αντιπαράδειγμα το τετράγωνο θεωρήθηκε λάθος, γιατί το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ορθογωνίου και επιπλέον έχει διαγώνιες ίσες, άρα δεν αντιφάσκει με τον ισχυρισμό. Η αναφορά στην ύπαρξη αντιπαραδειγμάτων, χωρίς όμως να παρουσιάζεται κάποιο, δημιούργησε την κατηγορία της ¨αναφοράς σε αντιπαραδείγματα¨. Έτσι, οι μαθητές που απάντησαν ότι ο παραπάνω ισχυρισμός είναι λανθασμένος γιατί υπάρχουν πολλά τετράπλευρα με ίσες διαγώνιες τα οποία δεν είναι ορθογώνια, εντάχθηκαν σε αυτήν την κατηγορία.

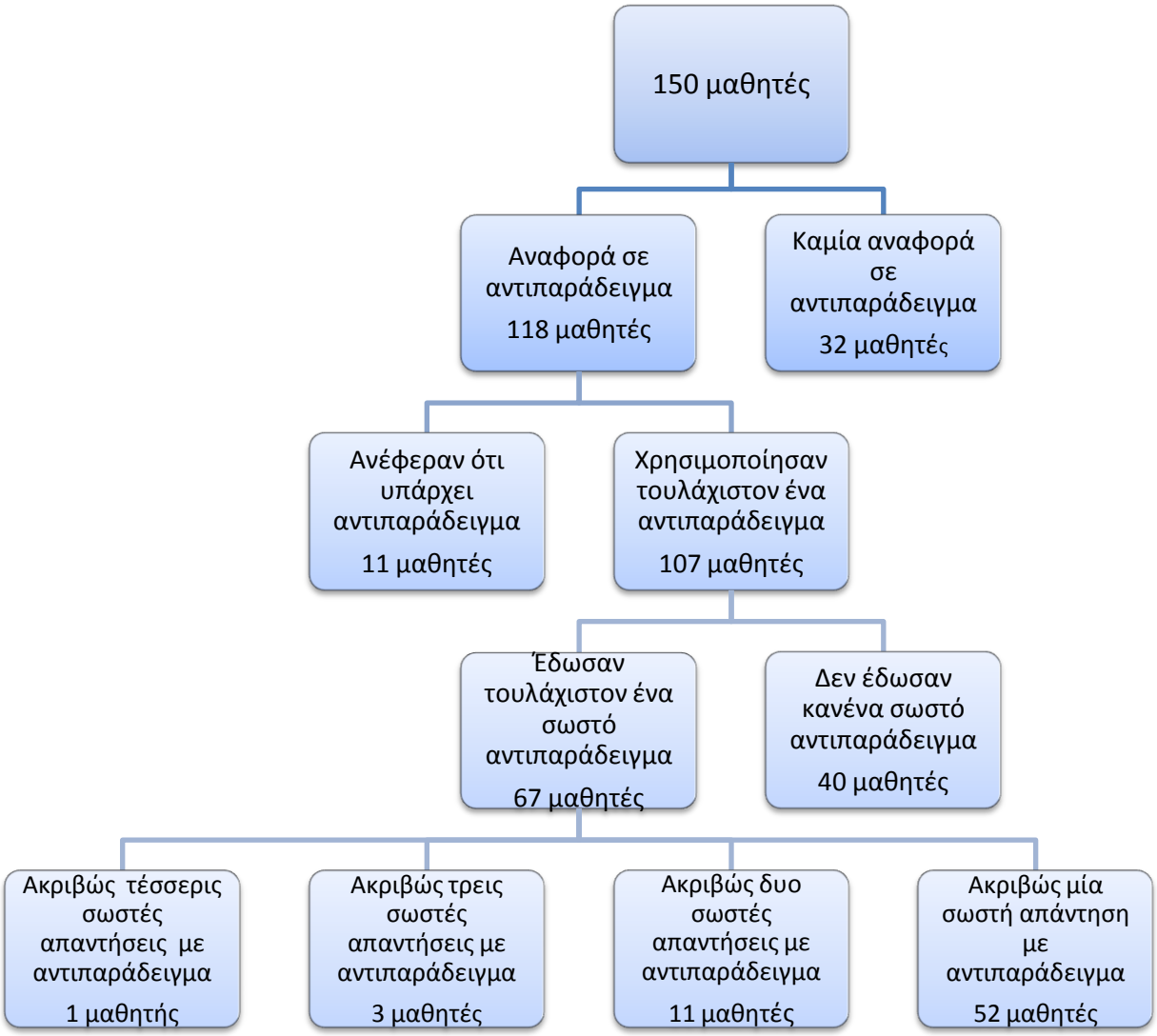
Ο πίνακας 4 παρουσιάζει την κατανομή των απαντήσεων στο Α μέρος του ερωτηματολογίου. Από τα αποτελέσματα διακρίνεται μία διαφορά στις απαντήσεις που εξαρτάται από τη συγκεκριμένη πρόταση που δίνεται κάθε φορά στους μαθητές. Στην πρόταση #2, το 96% των μαθητών που διαπίστωσαν ότι ήταν λάθος δικαιολόγησαν τον ισχυρισμό τους αναφέροντας ένα αντιπαράδειγμα, ενώ στην πρόταση #4 το αντίστοιχο ποσοστό ήταν 17%. Επίσης παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές ανέφεραν πιο συχνά αντιπαραδείγματα σε θέματα που αφορούσαν τη γεωμετρία σε αντίθεση με την άλγεβρα. Οι Perkins & Salomon (1989) ανέφεραν σχετικά, ότι η ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν αντιπαραδείγματα εξαρτάται πολύ από το περιεχόμενο. Παρατηρήθηκε επίσης ότι το 33% των μαθητών δεν ήταν ικανό να διακρίνει τις τέσσερις λανθασμένες προτάσεις, αυτό ενδέχεται να οφείλεται στη απροθυμία τους να χρησιμοποιήσουν αντιπαραδείγματα.

Η λανθασμένη πρόταση	#1	#2	#3	#4
Τύποι απαντήσεων(N=150)	Αν σε δύο τετράπλευρα όλες οι πλευρές είναι αντίστοιχα ίσες τότε είναι ίσα	Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο	Η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-2$ είναι περιττή	Η συνάρτηση $f(x)=-x^2-2x$ είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της
Δεν υποστηρίζουν ότι η πρόταση είναι λάθος	81 (54%)	50 (33%)	49 (33%)	68 (45%)
Υποστήριξαν ότι η πρόταση είναι λάθος με:	69 (46%)	100 (67%)	101 (67%)	82 (55%)
Χωρίς αιτιολόγηση	4	1	-	1
Σωστή αιτιολόγηση χωρίς αντιπαράδειγμα	-	-	9	46
Μερική αιτιολόγηση χωρίς αντιπαράδειγμα	38	3	52	5
Λάθος αιτιολόγηση χωρίς αντιπαράδειγμα	-	-	19	16
Αιτιολόγηση με αναφορά σε αντιπαραδείγματα (χωρίς να δίνουν κάποιο)	1	10	-	1
Λανθασμένη αναφορά σε αντιπαράδειγμα, χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα που δεν είναι αντιπαράδειγμα	2	10	-	1
Σωστή χρησιμοποίηση αντιπαραδειγμάτων	24	23	20	13

Πίνακας 4

Στο σχήμα 22 απεικονίζονται οι απαντήσεις των μαθητών στις τέσσερις λανθασμένες προτάσεις του Α μέρους. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι μόνο το

10% των μαθητών χρησιμοποίησαν σωστά αντιπαραδείγματα σε περισσότερες από μία περιπτώσεις, ενώ τα 2/3 δεν θεωρούσαν τη χρήση αντιπαραδειγμάτων επαρκή ή δεν μπορούσαν να τα χρησιμοποιήσουν σωστά.



Σχήμα 22

Τα αποτελέσματα από τα υπόλοιπα μέρη της έρευνας έδειξαν ότι πολλοί μαθητές που δέχτηκαν ένα αντιπαράδειγμα ως αποδεικτικό στοιχείο για την ανασκευή μίας μαθηματικής πρότασης, δεν μπορούσαν να διακρίνουν μεταξύ ενός παραδείγματος που ικανοποιεί τις συνθήκες ενός αντιπαραδείγματος και ενός που δεν τις ικανοποιεί. Έτσι κάποιοι μαθητές χρησιμοποίησαν ένα αντιπαράδειγμα για την αντίστροφη πρόταση σαν να ήταν αντιπαράδειγμα για τη δοσμένη. Ενώ άλλοι

χρησιμοποίησαν ένα παράδειγμα που ικανοποιούσε μία πρόταση σαν να αντιβαίνει σε αυτήν. Τέλος, οι μαθητές που δημιούργησαν αντιπαραδείγματα προσπάθησαν να ικανοποιήσουν πολλές προϋποθέσεις σε ένα παράδειγμα, με αποτέλεσμα να φτιάξουν παραδείγματα που δεν υπάρχουν, όπως ότι το άθροισμα δυο πλευρών ενός τριγώνου δεν ήταν μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά.

Καταλήγοντας, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι υπάρχουν πολλές πτυχές της κατανόησης του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων. Από τη λογική πλευρά, η κατανόηση αναφέρεται στην αποδοχή των αντιπαραδειγμάτων ως ικανοποιητικό επιχείρημα ανασκευής μαθηματικών προτάσεων. Η κατανόηση του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων από τους μαθητές όμως επηρεάζεται από προηγούμενες εμπειρίες τους και συχνά θεωρούνται ως εξαίρεση, χωρίς ανασκευαστική ισχύ. Μία άλλη πτυχή της κατανόησης σχετίζεται με τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί ένα αντιπαράδειγμα. Πολλοί μαθητές, αν και κατανοούν τον ιδιαίτερο ρόλο των αντιπαραδειγμάτων αδυνατούν να τα δημιουργήσουν και στην προσπάθειά τους αυτή, δίνουν παραδείγματα που δεν ικανοποιούν τις προϋποθέσεις ή δεν υπάρχουν.

Στην προσπάθεια να αναπτυχθεί μία μαθηματική εκπαίδευση, η οποία να βασίζεται στην ανθρώπινη δραστηριότητα, έχουμε τη δημιουργία της θεωρίας της διδασκαλίας της *ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης* (-Realistic Mathematics Education – RME*)* . Οι ερευνητές φτιάχνουν projects με σκοπό να αναπτύξουν θεωρίες διδασκαλίας και να επεξεργαστούν γενικές αρχές. Κεντρική ιδέα είναι οι μαθητές να θεωρούν την αποκτηθείσα γνώση δική τους και να είναι υπεύθυνοι γι' αυτήν. Τα προϊόντα που περιλαμβάνει είναι αλγόριθμοι, ορισμοί, υποθέσεις και αποδείξεις. Με την ανάπτυξη της RME προέκυψαν διαδικασίες αυτοδιδασκαλίας που καθοδηγούν το σχεδιασμό της διδασκαλίας που στηρίζει την ¨εξ' αρχής ανακάλυψη¨ των μαθηματικών. Έτσι γίνεται η συγκρότηση «επίσημων» μαθηματικών από «ανεπίσημες» στρατηγικές μαθητών (Gravemeijer, 1999).

Στα πλαίσια της έρευνας για τη χρησιμότητα της θεωρίας της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης παρουσιάζεται το παρακάτω επεισόδιο παρμένο από μια αίθουσα διδασκαλίας όπου διδάσκονταν αφηρημένη άλγεβρα σε προπτυχιακούς φοιτητές (Larsen & Zandieh, 2007).Η ανάλυση του επεισοδίου θα βοηθήσει στην σύνδεση των ιδεών του Lakatos (1976) με την έννοια της εξ' αρχής ανακάλυψης του

Fraudenthal (1973). Τα δεδομένα του διδακτικού πειράματος αρχικά αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας τεχνικές επαλήθευσης οι οποίες είχαν τροποποιηθεί από εκείνες που περιέγραψαν οι Cobb και Whitenack (1996) και οι Lesh και Lehrer (2000). Ένα αποτέλεσμα της ανάλυσης αυτής ήταν η παρατήρηση πως η δραστηριότητα παραγωγής ορισμών των μαθητών θα μπορούσε να υποστηριχτεί από τη δραστηριότητα παραγωγής αποδείξεων (Larsen και Zandieh, 2005).

Μετά από ένα εισαγωγικό μάθημα στην άλγεβρα που αφιερώθηκε στην εύρεση των ελάχιστων συνθηκών που αρκούν ώστε το υποσύνολο μιας ομάδας να είναι υποομάδα, η έρευνα επικεντρώθηκε σε μια ομάδα φοιτητών, οι οποίοι παρήγαγαν εικασίες, ανέπτυξαν επιχειρήματα και αντιμετώπισαν αντιπαραδείγματα, δηλαδή βρέθηκαν σε μία παρόμοια κατάσταση με αυτήν που περιγράφει ο Lakatos (1976).

Αρχικά αναπτύχθηκε ένας ορισμός για την έννοια της ομάδας μέσω της διαδικασίας της εξ' αρχής ανακάλυψης. Έτσι ορίστηκε ως ομάδα ένα σύνολο, G, μαζί με μία πράξη *, που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες : (1) το G είναι *κλειστό* για την πράξη * (2) το G έχει ένα ουδέτερο στοιχείο , (3) κάθε στοιχείο του G έχει ένα *αντίστροφο και* (4) ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Ο καθηγητής ενημέρωσε την τάξη πως μία *υποομάδα* είναι ένα υποσύνολο μίας ομάδας, που είναι η ίδια ομάδα στα πλαίσια της ίδιας πράξης, και σημείωσε πως ένα κλειστό για την πράξη * υποσύνολο μίας ομάδας κληρονομεί την προσεταιριστική ιδιότητα. Με δεδομένο ότι το υποσύνολο είναι κλειστό, οι μαθητές διατύπωσαν την αρχική εικασία πως κάθε κλειστό υποσύνολο μιας ομάδας είναι υποομάδα. Ένας μαθητής από την ομάδα έδωσε σχεδόν αμέσως μια απόδειξη της εικασίας αυτής στηριζόμενος στην ιδέα πως κάθε στοιχείο της ομάδας εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Στο πρώτο βήμα της απόδειξης αυτής θα πρέπει να παρατηρηθεί πως κάθε στοιχείο μιας ομάδας στον πίνακα εργασιών εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάθε γραμμή και αν το υποσύνολο είναι κλειστό στα πλαίσια της πράξης της ομάδας, μόνο στοιχεία από το υποσύνολο θα εμφανιστούν στον πίνακα εργασιών. Με τα δεδομένα αυτά ο μαθητής καταλήγει στο συμπέρασμα ότι σε κάθε γραμμή του πίνακα εργασιών κάθε στοιχείο του υποσυνόλου εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Στο δεύτερο βήμα της απόδειξης του μαθητή πρέπει να παρατηρηθεί η γραμμή η οποία αντιστοιχεί στο στοιχείο α του υποσυνόλου. Δεδομένου ότι το α είναι στοιχείο του υποσυνόλου πρέπει επίσης να εμφανίζεται σε αυτή η γραμμή του πίνακα εργασιών. Αν το x είναι το στοιχείο που αντιστοιχεί στη στήλη όπου το α εμφανίζεται, βλέπουμε ότι α*x=α, άρα το x είναι το ουδέτερο στοιχείο I της ομάδας, άρα το υποσύνολο έχει ουδέτερο στοιχείο.

Στο τρίτο βήμα της απόδειξης πρέπει και πάλι να θεωρήσουμε τη γραμμή που αντιστοιχεί στο στοιχείο α. Καθώς το ουδέτερο στοιχείο I είναι στοιχείο του υποσυνόλου πρέπει επίσης να εμφανίζεται σε αυτή τη γραμμή του πίνακα εργασιών. Αν το x είναι στοιχείο που αντιστοιχεί στη στήλη όπου το I εμφανίζεται βλέπουμε ότι α*x=I, άρα το x είναι το αντίστροφο του α, επομένως το υποσύνολο έχει αντίστροφο στοιχείο.

Έχοντας ήδη δεχθεί ότι η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει για κάθε κλειστό υποσύνολο μιας ομάδας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πληρούνται οι τέσσερις απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε το κλειστό υποσύνολο μιας ομάδας είναι υποομάδα στα πλαίσια της ίδιας πράξης.

Στο πρώτο βήμα της αποδείξεις αυτής υπάρχει ένα κρυμμένο λήμμα. Είναι γεγονός πως στο πίνακα εργασιών ενός κλειστού υποσυνόλου μιας ομάδας μπορούν να εμφανιστούν μόνο τα στοιχεία του υποσυνόλου χωρίς κανένα από αυτά να εμφανίζεται πάνω από μία φορά σε κάθε γραμμή. Το γεγονός αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα πως κάθε στοιχείο του υποσυνόλου εμφανίζεται μία τουλάχιστον φορά σε κάθε γραμμή του πίνακα εργασιών - αυτό ισχύει στη πεπερασμένη περίπτωση μόνο. Συνεπώς το κρυμμένο λήμμα είναι πως *κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά σε κάθε γραμμή του πίνακα εργασιών του υποσυνόλου* , και ένας τρόπος για να διασφαλιστεί η ορθότητα του λήμματος είναι να απαιτηθεί το υποσύνολο να είναι πεπερασμένο. Υπάρχει βέβαια και η απαίτηση το υποσύνολο να είναι μη κενό κάτι που όμως δεν προέκυψε στο επεισόδιο που περιγράφουμε.

Ακολουθεί η παρέμβαση του καθηγητή με ένα καθολικό και ταυτόχρονα τοπικό αντιπαράδειγμα. Ξεκινά με την ερώτηση αν οι πραγματικοί αριθμοί με πράξη την πρόσθεση είναι ομάδα που η απάντηση είναι καταφατική και συνεχίζει με το αν οι θετικοί αριθμοί με πράξη την πρόσθεση είναι υποομάδα, κάτι το οποίο δεν ισχύει.

Αυτό αποτελεί και τοπικό αντιπαράδειγμα για το πρώτο βήμα της απόδειξης, αφού αν θεωρήσουμε τη γραμμή του πίνακα που αντιστοιχεί το νούμερο 2 , βλέπουμε ότι το 1 δεν εμφανίζεται στη γραμμή αυτή. Άρα δεν ισχύει ότι κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά σε κάθε γραμμή του πίνακα εργασιών αυτού του υποσυνόλου.

Οι μαθητές αντιδρούν με σκοπό να απορρίψουν το αντιπαράδειγμα με μια μέθοδο που μοιάζει με αυτή που αναφέρεται από τον Lakatos ως μέθοδος εκδίωξης των τεράτων χωρίς να τροποποιήσουν την αρχική τους εικασία ή κάποιο ορισμό. Όταν η προσπάθεια τους αποκρούστηκε από τον καθηγητή στράφηκαν στη μέθοδο της φραγής των εξαιρέσεων, υποστηρίζοντας ότι η υποομάδα δεν έχει αντίστροφους. Οι μαθητές συνεχίζουν με δυο νέες εικασίες εστιάζοντας στο αντιπαράδειγμα και όχι στη απόδειξη οι οποίες όμως γρήγορα εγκαταλείφτηκαν. Έτσι παράγεται μία βελτιωμένη εικασία η οποία αναφέρει πως *κάθε πεπερασμένο υποσύνολο της ομάδας που είναι κλειστό στα πλαίσια της πράξης είναι υποομάδα.* Αυτό φαίνεται να είναι αποτέλεσμα της ανάλυσης αποδείξεων και όχι φραγής των εξαιρέσεων.

Το παραπάνω επεισόδιο δείχνει πως τα μαθηματικά μπορούν να ανακαλυφθούν εξ' αρχής σε μια αίθουσα διδασκαλίας μαθηματικών προπτυχιακού επιπέδου, μέσω διαδικασιών που θυμίζουν αυτές που περιγράφει ο Lakatos στο βιβλίο Αποδείξεις και Ανασκευές (1976). Οι Larsen & Zandieh (2007) υποστηρίζουν πως η μέθοδος της ανακάλυψης του Lakatos (1976) μπορεί να κατανοηθεί εναλλακτικά σαν εκπαιδευτικό σχέδιο αυτοδιδασκαλίας. Όπως οι μαθηματικοί στις ιστορικές μελέτες του Lakatos έτσι και οι μαθητές στο επεισόδιο που περιγράψαμε πιο πάνω ακολούθησαν μεθόδους φραγής των τεράτων, φραγής εξαιρέσεων και ανάλυση αποδείξεων κινούμενοι προς την ανάπτυξη σημαντικών μαθηματικών ιδεών. Το παραπάνω πλαίσιο βοηθά να εξηγηθεί η συνολική επιτυχία της διαδικασίας της εξ' αρχής ανακάλυψης που παρατηρήθηκε στο επεισόδιο. Σύμφωνα με τους συγγραφείς οι μαθητές ανάπτυξαν το θεώρημα στηριζόμενοι στην απόδειξη. Αυτό έγινε σταδιακά, αρχικά με την εικασία ότι όλα τα κλειστά υποσύνολα των ομάδων είναι υποομάδες και έπειτα, από την ανάγκη κάθε στοιχείο του υποσυνόλου να εμφανίζεται σε κάθε γραμμή του πίνακα εργασιών, συνειδητοποίησαν πως αυτό λειτουργεί στην πεπερασμένη περίπτωση, έτσι οδηγήθηκαν στην τελική μορφή του θεωρήματος.

Τα παραδείγματα που φτιάχνουν οι μαθητές είναι μία στρατηγική διδασκαλίας, με την οποία ζητείται από τους μανθάνοντες να φτιάξουν δικά τους παραδείγματα μαθηματικών αντικειμένων υπό δοσμένους περιορισμούς. Οι Watson & Mason (2005) υποστηρίζουν και παρέχουν άφθονες μαρτυρίες, ότι τα παραδείγματα που είναι φτιαγμένα από τους μαθητές χρησιμεύουν ως ένα ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο για την ενίσχυση της μάθησης των μαθηματικών σε διάφορα επίπεδα. Οι Zazkis & Leikin (2007) πρότειναν πως αυτό το παιδαγωγικό εργαλείο μπορεί να γίνει και εργαλείο έρευνας καθώς εξετάζοντας τα παραδείγματα που φτιάχνουν οι μαθητές μπορούν να βγουν συμπεράσματα για τις γνώσεις τους , τη γνώση της ύλης του αντικειμένου και του παιδαγωγικού περιεχομένου της.

Οι Watson & Shipman (2008) περιγράφουν τη διαδικασία με την οποία ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν παραδείγματα πάνω σε νέες μαθηματικές έννοιες, ώστε να εξερευνήσουν το χώρο παραδειγμάτων τους. Η έρευνα αυτή εντάσσεται ανάμεσα σε δύο θεωρητικές ιδέες: τη θεωρία της διαφοροποίησης (Marton & Booth,1997) και τις θεωρίες που σχετίζονται με παραδείγματα που δίνουν οι μαθητές LGEs (Learner Generated Examples) (Watson & Mason, 2005). Σύμφωνα με την άποψη των Marton & Booth (1997), η μάθηση πραγματοποιείται μέσω της αντίληψης της διαφοροποίησης γεγονότων που συμβαίνουν σχεδόν ταυτόχρονα. Αυτό συμβαίνει στα μαθηματικά, καθώς η μαθηματική δομή, δηλαδή ο τρόπος που σχετίζονται μεταξύ τους τα στοιχεία και οι ιδιότητες των μαθηματικών εκφράσεων, εκδηλώνεται μέσα από τις σχέσεις διακύμανσης/ σταθερότητας και ομοιότητας /διαφοράς. Η διάκριση των σχέσεων αυτών οδηγεί στον ορισμό των κατηγοριών των μαθηματικών αντικειμένων, την κατανόηση των πράξεων, την έκφραση και το χειρισμό των σχέσεων και την αντιμετώπιση των σχέσεων ως νέα αντικείμενα. Ο έλεγχος των μεταβλητών συνεισφέρει στην αντίληψη, τον ορισμό και την κατανόηση των σχέσεων που αποδεικνύονται με παραδείγματα. Δηλαδή αν οι μαθητές δίνουν παραδείγματα τότε προβληματίζονται πάνω σε αυτά και αυτό οδηγεί στην αναγνώριση των μαθηματικών δομών.

Έχει ήδη αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο πως υπάρχουν αμφιβολίες για το αν ένας μαθητής μπορεί να δημιουργήσει νέα αντικείμενα χωρίς να τα γνωρίζει καθόλου. Το ¨παράδοξο της μάθησης¨, όπως περιγράφεται από τον Fodor (1980),

υποδεικνύει πως οι μαθητές δε μπορούν να δημιουργήσουν ένα σύστημα εννοιολογικά πλουσιότερο από αυτό που γνωρίζουν ήδη. Στα μαθηματικά όμως η μάθηση δεν αναφέρεται σε εξοικείωση με άγνωστες ιδέες, αλλά στην κατασκευή άγνωστων αντικειμένων με τη χρήση γνωστών. Για παράδειγμα, όταν ζητείται από τους μαθητές η κατασκευή μίας συνάρτησης που δεν είναι συνεχής, θα πρέπει να γνωρίζουν τη έννοια της συνέχειας και να αντιλαμβάνονται κάποιες σχετικές συνθήκες, αλλά δεν απαιτείται η γνώση των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων. Ένας τρόπος για τη δημιουργία άγνωστων αντικειμένων, όπως ισχυρίζονται οι ερευνητές, είναι η εξάσκηση της διαφοροποίησης. Ένας άλλος τρόπος είναι η αναγνώριση της δομής των μαθηματικών αναπαραστάσεων, των προφανών και μη πτυχών τους και η παρουσίασή τους με νέες μορφές.

Ένα δεύτερο εμπόδιο που εμφανίζεται προς αυτήν την κατεύθυνση, είναι η αντίληψη πως οι μαθητές δεν μπορούν να επιτύχουν εμπειρικά υψηλά επίπεδα κατανόησης, γιατί οι πράξεις της μαθηματικής σκέψης που απαιτούνται για τη δημιουργία δεδομένων, δεν επαρκούν για τη διαμόρφωση εννοιών. Για την επίτευξη της κατανόησης απαιτείται η βοήθεια κάποιου ειδικού. Ο Schmittau (2003), ασκεί πολύ αυστηρή κριτική στις σύγχρονες πρακτικές, σύμφωνα με τις οποίες οι μαθητές ενθαρρύνονται να δώσουν και να συγκρίνουν παραδείγματα με στόχο την επίτευξη της αφηρημένης κατανόησης. Ισχυρίζεται ότι όσα αντιλαμβάνονται οι μαθητές αυθόρμητα, παραμορφώνονται για να ανταπεξέλθουν σε γενικεύσεις που προκύπτουν από τα παραδείγματα, χωρίς μεγάλη επιτυχία. Οι ερευνητές αντιλαμβάνονται ότι αυτό που υποδεικνύει ο Schmittau είναι η συνήθεια να περιμένουμε από τους μαθητές να εντοπίσουν πρότυπα και να τα εξελίξουν συγκρίνοντας σχετικές περιπτώσεις, ώστε να εντοπίσουν από πού προέκυψαν τα πρότυπα. Η Watson (2000) παρομοίασε την παραπάνω κατάσταση με την πρόταση «ακολουθώντας τα νερά» (μία μεταφορά από την ξυλογλυπτική, όπου το κόψιμο παράλληλα με τα νερά του ξύλου φαίνεται εύκολο), για να δείξει ότι τέτοιες γενικεύσεις από όρο σε όρο, μπορεί να αντιπροσωπεύουν τη δομή. Ωστόσο, παρουσιάζοντας στους μαθητές αναπαραστάσεις σχέσεων και ζητώντας τους να κατανοήσουν τις δομές, επιτυγχάνεται ένα μαθησιακό φαινόμενο που περιγράφεται από το Vygotsky (1982) ως μία σκαλωσιά. Στην περίπτωση αυτή, μέσα από προσεκτικά σχεδιασμένα παραδείγματα, παρέχεται μία υποβοήθηση στους μαθητές ώστε να λειτουργήσουν σε ένα υψηλότερο πνευματικό

επίπεδο συνδέοντας όσα έχουν κατανοήσει αυθόρμητα, με την επίσημη μαθηματική κουλτούρα.

Ένα ακόμη πρόβλημα που σχετίζεται με τη μάθηση μέσω δημιουργίας παραδειγμάτων από τους μαθητές, είναι ότι σπανίζει η βιβλιογραφία για τη χρήση μίας τέτοιας προσέγγισης στα σχολεία, με αποτέλεσμα η χρήση των LEGs για ενασχόληση με νέες ιδέες να αναφέρεται κυρίως σε προχωρημένους μαθητές.

Η θέση των Watson & Shipman (2008) είναι ότι μπορούν τα φτιαχτούν παραδείγματα ακόμη και έχοντας πλήρη άγνοια, από μη προχωρημένους μαθητές. Χρησιμοποιούν μία έκφραση κλειδί, η οποία είναι *¨ένα παράδειγμα από…¨*, ώστε να κατευθύνουν την κατασκευή σε ένα συγκεκριμένο στόχο και έτσι ο μαθητής θα συναντήσει νέες ιδέες, σχέσεις και τρόπους κατηγοριοποίησης. Με τη λέξη ¨μαθαίνω¨ εννοούν τη διαδικασία εξοικείωσης με μαθηματικές ιδέες που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα. Για την ενίσχυση των θέσεών τους πραγματοποιούν κάποιες μικρές μελέτες σε πραγματικές αίθουσες διδασκαλίας και με συνηθισμένους μαθητές, σε συνηθισμένα θέματα και μαθήματα χρησιμοποιώντας τους τη στρατηγική των LEGs.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μαθητές 9^{ης} τάξης (13-14 ετών), υψηλού επιπέδου, σε ένα αγγλικό σχολείο. Πρέπει να αναφερθεί ότι στο Ηνωμένο Βασίλειο οι τάξεις δημιουργούνται ανάλογα με τους προηγούμενες επιδόσεις των παιδιών. Ο καθηγητής τους ο Steve, δίδασκε σε αυτήν την ομάδα για περίπου ένα χρόνο και ταυτόχρονα βοηθούσε μία παράλληλη τάξη κάποιου άλλου καθηγητή. Η στρατηγική του Steve ήταν να αφιερώνει το 50% του μαθήματός του για συζήτηση και παράδοση, το 30% για μικρές ομαδικές εργασίες και το 20% σε ανεξάρτητη έρευνα σε βιβλία ή στο διαδίκτυο. Επίσης, στην αρχή και το τέλος του μαθήματός του υπάρχουν «εργασίες σκέψης» που απαιτούν προσαρμοστική λογική και όχι μνήμη. Οι εργασίες για το σπίτι είναι απορίες μαθητών που έχουν χωριστεί σε ζευγάρια και καθένα θέτει μία δύσκολη ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί από τους υπόλοιπους μαθητές, ενώ και οι ίδιοι πρέπει να έχουν μία σχετική απάντηση. Ο Steve συνήθιζε να δίνει κατευθυνόμενη βοήθεια τους μαθητές του, ώστε να συμμετέχουν στις συζητήσεις των μαθηματικών ιδεών της τάξης και ταυτόχρονα επέτρεπε την ελεύθερη διάδοση

ιδεών κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Τέλος, στο μάθημα αναφερόταν σε στρατηγικές, όπως η χρήση αντιστρόφων και η σκέψη ειδικών περιπτώσεων.

Στην συγκεκριμένη μελέτη, εισήγαγε την έννοια των άρρητων αριθμών ζητώντας από τους μαθητές να δημιουργήσουν παραδείγματα με ρίζες, που αποσκοπούσαν στο να αντιληφθούν τον τρόπο που λειτουργούν οι ρίζες των άρρητων αριθμών. Οι μαθητές γνώριζαν ήδη πώς ο συμβολισμός $\sqrt{}$ αναφέρονταν σε τετραγωνική ρίζα, αλλά δεν είχαν ιδιαίτερη ευχέρεια στη χρήση ή τη σημασία του. Έμαθαν για την ύπαρξη ενός ¨νέου¨ είδους αριθμού που είχε τη μορφή ($\alpha+\sqrt{b}$). Στη συνέχεια τους ζητήθηκε με κατάλληλο πολλαπλασιασμό τέτοιων αριθμών να ελέγξουν αν μπορούν να καταλήξουν σε ακέραιες απαντήσεις, με σκοπό να αντιληφθούν την έννοια τους συζυγίας ($\alpha+\sqrt{b}$)($\alpha-\sqrt{b}$) που δίνει ακέραιο αποτέλεσμα αρκεί α,b να είναι ακέραιοι αριθμοί. Το όφελος από τη στρατηγική των LEGs ήταν δεδομένη ακόμη και αν οι μαθητές δεν κατάφερναν να καταλήξουν σε απαντήσεις.

Ο Steve ξεκίνησε δίνοντας κάποια παραδείγματα πολλαπλασιασμού με τη χρήση πίνακα, για να υπενθυμίσει στους μαθητές τη δομή αυτή, με την οποία ήταν αρκετά εξοικειωμένοι. Μετά από ένα αριθμητικό παράδειγμα τους έδειξε τον παρακάτω πίνακα.

X	6	+ψ
3		
+ψ		

Πίνακας 5

Οι μαθητές ξεκίνησαν να βρίσκουν τα περιεχόμενα των κελιών και κλήθηκαν να απαντήσουν για το νόημα του αθροίσματος των αριθμών στα τελικά κελιά. Στόχος του καθηγητή ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές πώς ο πίνακας ήταν ένα εργαλείο που θα μπορούσαν να το χρησιμοποιήσουν στα επόμενα παραδείγματα. Συνεχίζοντας, τους ζητήθηκε να φτιάξουν πίνακες για τις περιπτώσεις (7 + 2χ)(3 – 4χ) και (α + β)(c + d). Στο σημείο αυτό έγινε εισαγωγή της έννοιας της ρίζας και των αριθμών της μορφής $\alpha+\sqrt{b}$. Οι μαθητές καλούνταν να χρησιμοποιήσουν το πίνακα

για τον πολλαπλασιασμό $(\alpha+\sqrt{b})\ (c+\sqrt{d})$ και κάποιοι από αυτούς βρίσκουν $\sqrt{b}\,\sqrt{d}$ στο τελευταίο κελί του πίνακα. Η τελευταία ερώτηση που τους τίθεται είναι να δώσουν κατάλληλες τιμές στα α,b,c,d για να καταλήξουν σε ακέραια λύση, χωρίς να επιτρέπεται η χρήση των τετραγώνων των c,d.

Οι μαθητές δούλεψαν για περίπου μισή ώρα σε κόλες A_3, δημιουργώντας ένα αρχείο που επέτρεψε να φανούν και να συγκριθούν πολλά παραδείγματα χωρίς να γυρίσουν τις κόλες. Ο Steve συνομίλησε με κάθε μαθητή ξεχωριστά ανάλογα με τα παραδείγματα που είχε δώσει. Συλλέγοντας και αναλύοντας τα γραπτά, προέκυψαν οι διαστάσεις των διαφορών στις οποίες εστίασαν οι μαθητές. Αυτές ήταν : η επιλογή ακεραίων, η φύση των ακεραίων (μικροί, μεγάλοι), οι σχέσεις μεταξύ των επιλεγμένων ακεραίων (συνεχόμενοι, που σχετίζονται πολλαπλασιαστικά) και τα πρόσημα(αν και κανείς δεν χρησιμοποίησε το μείον). Αναλύθηκε ακόμη και η εξέλιξη των επιλογών ώστε να μελετηθεί η επιρροή των αρχικών συλλογισμών.

Σχετικά με τη διάταξη των απαντήσεων των μαθητών παρατηρήθηκε ότι τη συνέδεαν με την οργάνωση της διαφοροποίησης. Κάποιοι οργάνωσαν την εργασία τους με εμφανή τη χρονολογική σειρά, άλλοι δούλεψαν δισδιάστατα αναπτύσσοντας τη διαφοροποίησή τους οριζόντια και συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο από κάτω ενώ κάποιοι άλλοι κράτησαν σημειώσεις με τυχαίο τρόπο. Σε όλες τις περιπτώσεις ήταν φανερό ποια παραδείγματα δοκιμάστηκαν στην αρχή και ποια στο τέλος της ώρας, με κοινό χαρακτηριστικό η αρχή να γίνεται στο πάνω αριστερά μέρος του χαρτιού με εξέλιξη προς τα κάτω δεξιά.

Δεκαοχτώ από τους τριάντα μαθητές δοκίμασαν αριθμούς που υποδήλωναν μία οργανωμένη σκέψη (φαίνεται στις απαντήσεις στον πίνακα που ακολουθεί), ενώ 12 δεν έδωσαν διακριτά δείγματα συστηματικής επιλογής. Όλοι οι μαθητές όμως έδωσαν τουλάχιστον τέσσερα παραδείγματα και κάποιοι πολλά περισσότερα. Η ύπαρξη υπολογιστών τσέπης οδήγησε κάποιους μαθητές να τους χρησιμοποιήσουν, μετατρέποντας τους αριθμούς σε δεκαδικούς, ιδέα που σύντομα εγκαταλείφτηκε αφού διαπιστώθηκε ότι το πρόβλημα δεν αφορούσε τη εύρεση ειδικών αριθμών αλλά την άλγεβρα των άρρητων ριζών. Οι μαθητές σταδιακά οδηγήθηκαν από τη δοκιμή ¨άλλων¨ αριθμών στη δοκιμή ¨άλλων δομών¨, αφού εγκατέλειψαν τη χρήση του

υπολογιστή τσέπης και υιοθέτησαν τη σημειογραφία των ριζών ως αλγεβρικό αντικείμενο π.χ $\sqrt{4}\ x\ \sqrt{3}$= 2 x $\sqrt{3}$ ή επέλεξαν ειδικά παραδείγματα όπως (4 x $\sqrt{5}$)(5 x $\sqrt{4}$). Κάποιοι σταμάτησαν τον υπολογισμό του τελικού αθροίσματος εστιάζοντας στην απαλοιφή, ενώ άλλοι αντιμετώπισαν τους αριθμούς ως γενικούς χρησιμοποιώντας παραδείγματα όπως (8+$\sqrt{8}$))(8+$\sqrt{8}$). Σύμφωνα με την ανάλυση τουλάχιστον δέκα μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος στράφηκαν προς την εργασία με δομές και κάποιοι πλησίασαν στη σκέψη πώς για να απλοποιηθούν οι ρίζες έπρεπε να είναι ίδιες, δίνοντας το παράδειγμα του αριθμού $(2+\sqrt{2})^2$:

	2	$\sqrt{2}$
2	4	$2\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2

Πίνακας 6

Εντύπωση προκάλεσε η απογοήτευση των μαθητών στην εμφάνιση του ακεραίου στον κάτω δεξιά κελί του πίνακα 6, αν και αυτό ήταν το ζητούμενο της εργασίας. Δύο μαθητές έγραψαν δίπλα στο αριθμό 2 κάτω δεξιά, «χαμένος ακέραιος».

Στον πίνακα 7 που ακολουθεί φαίνεται αυτό που ισχυρίζονται οι ερευνητές, δηλαδή ότι κατά τη διάρκεια της δημιουργίας παραδειγμάτων άλλαξε η κατανόηση των μαθητών. Στα παραδείγματα αυτά το είδος της συλλογιστικής που ακολουθείται δεν είναι επαγωγική, δηλαδή δεν χρησιμοποιούνται για την επαγωγή μίας γενίκευσης που στη συνέχεια θα εκφραστεί αλγεβρικά. Οι μαθητές εργάστηκαν με τη δομή μέσω της ειδικής επιλογής αριθμών και κάποιοι ακόμη και με την άλγεβρα, χωρίς να γνωρίζουν πως συμπεριφέρονται οι άρρητοι αριθμοί κατά τον πολλαπλασιασμό.

Στο συγκεκριμένο μάθημα είναι φανερό ότι η ελεύθερη διάδοση μαθηματικών ιδεών που επετράπη από τον καθηγητή, οδήγησε πολλούς μαθητές να χρησιμοποιήσουν το παράδειγμα του 2+$\sqrt{2}$. Αν και είχαν δανειστεί την ιδέα από

τους συμμαθητές τους, το 1/3 των μαθητών προσπάθησε στη συνέχεια να την εξερευνήσει.

Η επιλογή πιθανών ακεραίων και η μετατροπή των ριζών σε δεκαδικούς φάνηκε αντιπαραγωγική και οδήγησε τους μαθητές σε αναζήτηση πιο αποτελεσματικών τρόπων αντιμετώπισης του προβλήματος. Μερικά παραδείγματα προέκυψαν τυχαία και εξετάστηκαν περεταίρω μετά από συζήτηση των μαθητών μεταξύ τους. Ο καθηγητής δεν έδωσε καμία πληροφορία σχετικά με το $\sqrt{b}\sqrt{b}$=b αλλά και οι μαθητές δεν σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν αρνητικό πρόσημο και έτσι οδηγήθηκαν σε εικασίες σχετικά με $\sqrt{a}\sqrt{b}$. Περίπου έξι μαθητές αντιλήφθηκαν τη χρησιμότητα των αριθμών που είναι τέλεια τετράγωνα, ενώ 3 έφτιαξαν λίστες δεκαδικών αριθμών που προέκυψαν από το α$\sqrt{b}$, 2 από αυτούς σταμάτησαν στο 3$\sqrt{4}$. Οι ερευνητές υποθέτουν ότι αυτό συνέβη γιατί το 4 είναι τέλειο τετράγωνο. Στην συνέχεια ένας μαθητής έγραψε χωρίς κανένα σχόλιο √9√1, √9√4, √9√9, √9√16…, ενώ προηγουμένως είχε γράψει 1$\sqrt{8}$ (2$\sqrt{2}$) και 2$\sqrt{8}$ (4$\sqrt{2}$).

<u>Πίνακας παραδειγμάτων των μαθητών του Steve στην ανάπτυξη LEGs</u>

LEGs	**Ερμηνευτικά σχόλια**
(7+$\sqrt{5}$) (6+$\sqrt{7}$) (7+$\sqrt{10}$) (6+$\sqrt{6}$) (7+$\sqrt{8}$) (6+$\sqrt{4}$) (7+$\sqrt{4}$) (6+$\sqrt{3}$)	Αυτή η ακολουθία δείχνει κατανόηση χειρισμού των μεταβλητών αλλά, αν και το τρίτο παράδειγμα έχει προοπτική στο να δώσει χρήσιμες πληροφορίες, στο επόμενο χρησιμοποιεί τις √4 και √3 που δεν βοηθάνε καθόλου.
(7+$\sqrt{19}$)($\sqrt{17}$+3) (7+$\sqrt{18}$)($\sqrt{18}$+3) (7+$\sqrt{18}$)($\sqrt{17}$+3) (7+$\sqrt{17}$)($\sqrt{17}$+3)	Σε παλαιότερες εργασίες παραδειγματοποίησης έχουμε δει πως συχνά επιλέγονται συγκεκριμένοι πρώτοι αριθμοί όπως το 7 και το 17 σαν να είναι ουδέτεροι ή γενικοί. Αυτό μπορεί να δείχνει επίγνωση ότι ίσως είναι χρήσιμες οι πολλαπλασιαστικές ιδιότητες. Αυτός ο μαθητής χρησιμοποίησε υπολογιστή τσέπης και για τα τέσσερα παραδείγματα. Στη συνέχεια ο ίδιος μαθητής σταμάτησε , ίσως έχοντας την αίσθηση ότι ταιριάζουν οι ρίζες.
(4+$\sqrt{4}$)(5+$\sqrt{5}$) (2+$\sqrt{2}$)(2+$\sqrt{2}$)	Αυτός ο μαθητής ίσως καταλαβαίνει πως η πρόκληση αφορά τη δομή και πειραματίζεται έχοντας αυτό στο μυαλό του, ελέγχοντας την

$(8+\sqrt{8})(8+\sqrt{8})$	διαφοροποίηση μέσα σε κάθε παράδειγμα και όχι ανάμεσα στα παραδείγματα. Χρησιμοποιήθηκε υπολογιστής τσέπης. Στην τάξη δεν είχε ακόμη ειπωθεί πως το $\sqrt{8}$ είναι το ίδιο με το $2\sqrt{2}$.
$(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{8})$	Αυτό το παράδειγμα προέρχεται από κάποιον που μπορεί να καταλαβαίνει πως συγκεκριμένες ρίζες ίσως απλοποιούν η μια την άλλη και προσπαθεί με αυτές να φτιάξει γενικεύσεις.
$(12+\sqrt{6})(2+\sqrt{3})$ $(12+\sqrt{6})(12+\sqrt{3})$ $(12+\sqrt{12})(\sqrt{12}+12)$	Αυτό δείχνει τη μετάβαση σε μια κατασκευασμένη προσέγγιση. Αυτός ο μαθητής φαίνεται να αντιλαμβάνεται πως ο τετραγωνισμός της τετραγωνικής ρίζας μπορεί να είναι χρήσιμος. Δεν καταγράφηκαν δεκαδικοί υπολογισμοί. Μερικοί μαθητές όπως σε αυτή την περίπτωση άλλαξαν την σειρά των όρων. Δεν γνωρίζουμε αν σκέφτηκαν την μεταβατικότητα.
$(\alpha+\sqrt{b})(b+\sqrt{a})$	Αυτός ο μαθητής ίσως προσπαθεί να αλλάξει την σειρά ώστε να επηρεάσει την επιθυμητή απαλοιφή. Το παράδειγμα αυτό ακολούθησαν αρκετά άλλα μάλλον τυχαία παραδείγματα, όχι όμως αυτής της δομής.
$(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{2})$ $(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$	Αυτό δείχνει μια έρευνα της δομής για κάποιες σχέσεις ανάμεσα στους επιλεγμένους ακέραιους. Μόνο το πρώτο δουλεύτηκε με υπολογιστή τσέπης.

Πίνακας 7

Από τα παραδείγματα που έδωσαν οι μαθητές φάνηκε πως ανέπτυξαν μία αίσθηση της δομής, ενώ ταυτόχρονα η πρακτική εξάσκηση στον πολλαπλασιασμό ριζών άρρητων αριθμών συντέλεσε στην κατανόηση της έννοιας. Επίσης, εντοπίστηκε η χρησιμοποίηση των αριθμών ως αντικείμενα του ίδιου συνόλου που έπρεπε να έχουν σχέσεις μεταξύ τους. Στο μάθημα που ακολούθησε, ο καθηγητής έδειξε ότι η χρήση του μείον θα έλυνε το πρόβλημα και συζητώντας με τους μαθητές κατέληξαν στο πότε η μέθοδος απαλοιφής των ριζών είναι χρήσιμη (όταν εμφανίζονται στον παρανομαστή) και πότε είναι καλύτερο να παραμένουν ως έχουν (όταν πολλαπλασιάζονται με άλλη άρρητη ρίζα).

Σε αντίθεση με την τάξη του Steve, η παράλληλη τάξη του άλλου καθηγητή που είχε διδαχθεί τη νέα έννοια με κανόνες και ορισμούς, μπορούσε να αντιμετωπίσει οικίες ερωτήσεις αλλά δυσκολεύονταν σε πολυπλοκότερα προβλήματα. Οι μαθητές αυτοί δεν πρότειναν μεθόδους που βασίζονταν στο νόημα, αλλά προσπαθούσαν να εντοπίσουν ποια μέθοδος θα ήταν χρήσιμη.

Από την περιγραφή του παραπάνω μαθήματος επιβεβαιώνεται ότι η δημιουργία παραδειγμάτων είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος κατανόησης μίας νέας έννοιας. Αρχικά, στο μάθημα αυτό υπήρχε ένας στόχος και όχι μία απλή διεύρυνση χωρίς κατευθύνσεις, ο οποίος μπορούσε να επιτευχθεί με μία στρατηγική αναζήτησης (συγκεκριμένα με τον πίνακα). Έπειτα η διδασκαλία του Steve ήταν προσαρμοσμένη στην έρευνα διαρθρωτικών πτυχών των μαθηματικών. Έτσι πολλοί μαθητές κατασκεύασαν ειδικές περιπτώσεις, που δεν σχετίζονταν μόνο με τις άρρητες ρίζες αλλά και τις σχέσεις μεταξύ τους. Χρησιμοποίησαν τον πολλαπλασιασμό και έλεγξαν τα γινόμενα ώστε να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ των άρρητων ριζών. Με τον τρόπο αυτό εξερευνούσαν και διεύρυναν την εμπειρία τους πάνω στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και αποκτούσαν μία ευρύτερη αίσθηση της σχέσης που προκύπτει μεταξύ των ¨νέων ¨αυτών αριθμών κατά τον πολλαπλασιασμό. Οι μαθητές δεν περιγράφουν παραδείγματα που απλώς δημιουργούνται «με τα νερά» δηλαδή δημιουργούνται διαδοχικά με ένα επαναλαμβανόμενο κανόνα, αλλά αναγνωρίζουν και παράγουν σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του παραδείγματος και έτσι μαθαίνουν περισσότερα για τις ιδιότητες της νέας κατηγορίας. Φαίνεται πως ο ισχυρισμός του Davydov (1972), ότι η γενίκευση επιτυγχάνεται με τη σύγκριση παραδειγμάτων, είναι αποδεκτός.

Η βιβλιογραφία πάνω στα LEGs σχετίζεται μόνο με ομάδες μαθητών που είχαν υψηλές επιδόσεις. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι αντίστοιχες επιδόσεις θα μπορούσαν να σημειωθούν και από τους υπόλοιπους μαθητές σε ένα κατάλληλο περιβάλλον, για το λόγο αυτό οδηγήθηκαν στην παρακάτω μελέτη.

Ο Steve δίδασκε σε δύο τάξεις δεκαεξάχρονων μαθητών, η μία αποτελούνταν από μαθητές με πολύ χαμηλές επιδόσεις και η άλλη τάξη, που είχε παλαιότερα άλλο καθηγητή, παρουσίαζε τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στις

εξετάσεις του σχολείου. Από την πρώτη ομάδα ζητήθηκε να σχεδιάσουν δέκα ορθογώνια τρίγωνα, να μετρήσουν με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια τις πλευρές τους και να ονομάσουν με θ μία από τις μη ορθές γωνίες. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, μέσω της μεθόδου της ελεύθερης διάδοσης μαθηματικών ιδεών, οι μαθητές εξοικειώθηκαν με την ιδέα πως ο λόγος του μήκους των πλευρών οδηγούσε στα ίδια αποτελέσματα για τις ίδιες γωνίες. Σε διάστημα μίας διδακτικής ώρας βρέθηκε μέσα από συνεργασία και συζήτηση με συντονιστή το Steve, ότι το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη παραμένουν αναλλοίωτοι για σταθερές γωνίες σε διαφορετικά τρίγωνα. Στο επόμενο μάθημα οι μαθητές της τάξης αυτής κατάφεραν να απαντήσουν σωστά σε 30 τυπικές ερωτήσεις εξετάσεων, σχεδιασμένες για μαθητές υψηλών επιδόσεων.

Η άλλη ομάδα των μαθητών του Steve είχε διδαχθεί τριγωνομετρία με τον άλλο καθηγητή πριν δύο χρόνια και έκαναν επαναλήψεις για τις εξετάσεις. Σε συζήτηση μέσα στην τάξη παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αυτοί δεν ανταποκρίνονταν σε ερωτήσεις που δεν τους ήταν οικείες και δε μπορούσαν να δημιουργήσουν δικά τους παραδείγματα και μεθόδους. Οι ερευνητές εκτιμούν ότι αυτό συνέβη εξαιτίας της παλαιότερης εκπαίδευσής τους, που εστιάζονταν στη διαδικασία και την ικανότητα, με σκοπό την επιτυχία στις εξετάσεις. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τους τύπους που ήξεραν και αναδιάταξαν τις εξισώσεις σύμφωνα με τις μεθόδους, χωρίς βαθύτερη γνώση και διαίσθηση.

Η παραπάνω σύγκριση δείχνει πως οι τύποι των τάξεων, οι αναμενόμενοι τρόποι εργασίας, τα διαθέσιμα εργαλεία, η χρήση της γνώσης που μοιράζεται στην τάξη και ο τρόπος διδασκαλίας των εκπαιδευτικών συνδυάζονται με την δύναμη των LGEs στην προώθηση νέων εννοιών. Βασικό ρόλο στην επιτυχία τους έπαιξαν οι τρόποι με τους οποίους δομείται η δημιουργία καθώς και οι κανόνες διαφοροποίησης στην διερεύνηση και την δημιουργία. Οι μαθητές που ανακάλυψαν τους τριγωνομετρικούς λόγους μέσα από τα παραδείγματά τους, θεώρησαν την αποκτηθείσα γνώση δική τους.

Μετά τα θετικά αποτελέσματα των προηγούμενων μελετών, τον επόμενο χρόνο ο Steve χρησιμοποίησε την ίδια διδακτική προσέγγιση στη διδασκαλία των

άρρητων ριζών σε μία νέα τάξη μαθητών με μέτριες επιδόσεις, εισάγοντας αυτή τη φορά τη χρήση και αρνητικών αριθμών. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιοι μαθητές βρήκαν τη συζυγία γράφοντας $(2+\sqrt{12})(-2+\sqrt{12})$. Κάποιος άλλος ανέφερε πως είχε χρησιμοποιήσει αριθμούς που ήταν κοντά, γράφοντας $\sqrt{5}$ και $\sqrt{20}$ και προφανώς εννοώντας κοντά στην έννοια. Και αυτοί οι μαθητές οικειοποιήθηκαν τους κανόνες και τους ανακαλούσαν από τη μνήμη τους για τους επόμενους μήνες.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η εξερεύνηση νέων εννοιών μέσω της δημιουργίας παραδειγμάτων είναι εφικτή τόσο για μαθητές υψηλών επιδόσεων όσο και για μαθητές χαμηλότερων. Είναι σημαντικό επίσης ότι οι μελέτες που πραγματοποιήθηκαν βασίστηκαν στην παραδειγματοποίηση σχέσεων και όχι αντικειμένων. Η απαίτηση οι μαθητές να παράγουν παραδείγματα σε εντελώς άγνωστα αντικείμενα πιθανόν είναι ουτοπική καθώς και η παραδειγματοποίηση ενός αντικειμένου σε μία ακολουθία, που είναι γνωστός ο τρόπος που προκύπτει, μπορεί να μην οδηγήσει την εκμάθηση της υποκείμενης δομής. Στις μελέτες, τα LGEs απαιτούσαν την αναγνώριση ή την δημιουργία σχέσεων, την αντίληψη της δομής ή την εμπλοκή με τη σημειολογία μιας μαθηματικής έκφρασης και όχι με την σύνταξή της.

Οι ερευνητές καταλήγουν ότι αυτό που απαιτείται στην εκμάθηση μέσω της παραδειγματοποίησης δεν είναι τόσο η παρατήρηση των αριθμητικών μοτίβων που δημιουργούνται στην ακολουθία διαφορετικών παραδειγμάτων, αλλά η υπόθεση σχέσεων που συνδέουν διαφορετικές μεταβλητές μέσα στα παραδείγματα. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι η αντίληψη των σημαντικών χαρακτηριστικών μέσω της σύγκρισης παρόμοιων παραδειγμάτων. Ένας άλλος είναι να βγουν συμπεράσματα κάνοντας υποθέσεις από τα χαρακτηριστικά των ειδικών περιπτώσεων. Τα στοιχεία όλων αυτών των μαθημάτων αποδεικνύουν πως οι μαθητές μπορούν να μάθουν νέες έννοιες μέσω της συνύπαρξης της εμπειρικής επαγωγής και απαγωγής και της αφαίρεσης από τις σχέσεις που δημιουργούνται σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Δηλαδή η εμπειρία τους μπορεί να οργανωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συμβαίνουν μετατοπίσεις της κατανόησης τους ως αποτέλεσμα των πράξεων του ίδιου του μαθητή, συμπεριλαμβανομένων πνευματικών πράξεων συλλογισμού

παραδειγμάτων που έχουν δημιουργηθεί από τους ίδιους και παραδειγματικών χώρων.

Τα παραδείγματα κατέχουν κυρίαρχη θέση στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και συντελούν καθοριστικά τόσο στην κατανόηση των ορισμών όσο και στη δημιουργία νέων εννοιών και θεωρημάτων από τους μαθητές, όπως φάνηκε από την παραπάνω έρευνα. Όμως και τα μη παραδείγματα έχει αποδειχθεί ότι ενθαρρύνουν τους μαθητές να δικαιολογούν φωναχτά, επιτρέποντας στους εκπαιδευτικούς να εξετάσουν τον τρόπο σκέψης τους (Clements et al.,1999). Στη γεωμετρία, στόχος των εκπαιδευτικών είναι να παροτρύνουν τους μαθητές να κατασκευάσουν εννοιολογικές εικόνες που συμφωνούν με τον ορισμό μιας ιδέας και να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό ως κριτήριο για τον προσδιορισμό ενός αντικειμένου ως παράδειγμα μιας έννοιας.

Οι Tsamir, Tirosh & Levenson (2008) πραγματοποίησαν μία έρευνα σε 65 παιδιά ηλικίας 5-6 ετών που φοιτούσαν σε τέσσερις διαφορετικούς κρατικούς παιδικούς σταθμούς σε δυο μεσαίες κοινωνικοοικονομικές γειτονιές, προκειμένου να διερευνήσουν τι τα παιδιά θεωρούν παράδειγμα ή μη παράδειγμα και ποια από αυτά μπορούν να θεωρηθούν διαισθητικά. Τα παιδιά ρωτήθηκαν ξεχωριστά, σε μία ήσυχη γωνιά της τάξης, σχετικά με μια κάρτα που περιείχε δεκατέσσερα διαφορετικά σχήματα με την ίδια σειρά κάθε φορά. Οι ερωτήσεις που τους τέθηκαν ήταν δύο: αν αυτό που έβλεπαν ήταν τρίγωνο και γιατί. Με τις ερωτήσεις αυτές οι ερευνητές επιδίωκαν να εξακριβώσουν αν τα παραδείγματα και τα μη παραδείγματα τριγώνων αναγνωρίστηκαν από τους μαθητές καθώς επίσης να μελετήσουν τη λογική των παιδιών για τον προσδιορισμό ενός σχήματος.

Επτά παραδείγματα και επτά μη παραδείγματα συμπεριλαμβάνονταν στην κάρτα που δόθηκε στους μαθητές (πίνακας 8). Το ισοσκελές και το ισόπλευρο τρίγωνο (σχ.1 και σχ.4) θεωρήθηκαν διαισθητικά παραδείγματα και τα υπόλοιπα πέντε (σχ. 2,5,6,8,13) μη διαισθητικά. Τα μη παραδείγματα ήταν δισδιάστατα σχήματα τριών κατηγοριών: πρωτοτυπικά γεωμετρικά σχήματα (εκτός από τρίγωνα), μη πρωτοτυπικά γεωμετρικά σχήματα (εκτός από τρίγωνα) και ¨σχεδόν τρίγωνα¨ . Επειδή σε προκαταρκτική έρευνα που είχε πραγματοποιηθεί πολλοί από τους ερωτηθέντες απάντησαν με τα σχήματα τετράγωνο ή κύκλος στην ερώτηση να δοθεί

ένα παράδειγμα σχήματος που δεν είναι τρίγωνο, αποφασίστηκε στο σύνολο των μη τριγώνων να συμπεριληφθούν ο κύβος, το εξάγωνο και η έλλειψη (σχ.3,9,11 αντίστοιχα). Στην κατηγορία μη πρωτοτυπικά γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιήθηκε ένα μη πρωτοτυπικό πεντάγωνο που η τοποθέτησή του υπονοούσε οπτικά ένα τρίγωνο (σχ.10). Τέλος, στα ¨σχεδόν τρίγωνα¨ τοποθετήθηκαν τα ζιγκ-ζαγκ "τρίγωνα", τα ανοιχτά "τρίγωνα", και στρογγυλεμένα «τρίγωνα» (σχήματα 7, 12, και 14 αντίστοιχα). Στο ανοικτό "τρίγωνο" λείπει το κρίσιμο χαρακτηριστικό του να είναι ένα κλειστό σχήμα. Το ζιγκ-ζαγκ "τρίγωνο" έχει οδοντωτές πλευρές. Στο στρογγυλεμένο "τρίγωνο" λείπουν οι κορυφές. Από την άλλη πλευρά, όλα έχουν οριζόντιες βάσεις και όλα έχουν την ψευδαίσθηση της τριάδας.

Dimensions	Psycho-didactical							
Mathematical	Intuitive[1]			Non-intuitive[1]				
Examples	1. Isosceles triangle		4. Equilateral triangle	2. Sideways triangle	5. Upside down triangle	6. Right triangle	8. Scalene triangle	13. Obtuse triangle
Non-examples	3. Square	9. Hexagon	11. Ellipse	7. Zig-zag "triangle"	10. Pentagon	12. Open "triangle"	14. Rounded "triangle"	

πίνακας 8

Αναλύθηκαν δύο σύνολα δεδομένων που αντιστοιχούσαν στις δύο ερωτήσεις που τέθηκαν. Στο πρώτο σύνολο υπήρχαν οι απαντήσεις των παιδιών σχετικά με την αναγνώριση των σχημάτων όπου με χαρακτηριστικό της διαίσθησης την αμεσότητα, δόθηκαν σε αυτό το σύνολο τέσσερις βαθμίδες: αμέσως σωστό, σωστό αλλά όχι αμέσως, εσφαλμένο αμέσως και εσφαλμένο αλλά όχι αμέσως. Το δεύτερο σύνολο

αναφέρονταν στην αιτιολόγηση της αναγνώρισης των σχημάτων (πίνακας 9). Χρησιμοποιώντας τα στάδια του Van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη, η λογική των παιδιών κατηγοριοποιήθηκε σε οπτική και το σκεπτικό τους με βάση τα χαρακτηριστικά του σχήματος.

Στην κατηγορία της οπτικής λογικής δημιουργήθηκαν δύο υποκατηγορίες. Στην πρώτη υποκατηγορία εντάσσονται απαντήσεις που βασίζονται μόνο στην εμφάνιση, όπως η απάντηση του μαθητή Κ14 που υποστήριξε ότι το εξάγωνο δεν είναι τρίγωνο γιατί « δεν βλέπετε το σχήμα». Στη δεύτερη υποκατηγορία τα παιδιά ονόμαζαν τα σχήματα είτε γεωμετρικά είτε με μη γεωμετρικά ονόματα, όπως ο μαθητής Κ36 που δικαιολόγησε ότι το πεντάγωνο δεν ήταν τρίγωνο γιατί « ήταν παρόμοιο με σκηνή».

Κατηγορία	Αιτιολόγηση
Καθαρά οπτική αναφορά σε ολόκληρο το σχήμα	¨Μοιάζει (δεν μοιάζει) με τρίγωνο¨ ¨ Βλέπεις(δεν βλέπεις) το σχήμα¨ Δείχνουν το σχήμα χωρίς να μιλούν
Ονοματολογία	¨Είναι ένας ρόμβος (ή κάποιο άλλο γεωμετρικό σχήμα- σωστό ή λανθασμένο)¨ ¨Είναι μία φωτιά (ή άλλα ονόματα αντικειμένων)¨
Αναφορές σε μη κρίσιμα χαρακτηριστικά	¨ Επειδή αυτό (δείχνουν μία συγκεκριμένη πλευρά) είναι πολύ μικρό (ή κοντό, ή μακρύ, ή μεγάλο)¨ ¨Είναι (αναφερόμενος στο σχήμα) πολύ λεπτό (ή παχύ, ή μακρύ, ή αιχμηρό)¨
Αναφορές σε κρίσιμα χαρακτηριστικά	¨Έχει τρεις (ή τέσσερις, ή πέντε, ή πολλές ή καμία) πλευρές (ή γραμμές, ή κορυφές, ή γωνίες)¨ ¨Θα έπρεπε να είναι κλειστό¨ ¨Έχει τρεις στρογγυλεμένες κορυφές¨

Πίνακας 9

Στο δεύτερο επίπεδο του Van Hiele το σκεπτικό βασίζεται στα χαρακτηριστικά των σχημάτων. Τα χαρακτηριστικά αυτά διαχωρίζονται σε κρίσιμα και μη κρίσιμα, όπως αναφέρεται στο προηγούμενο κεφάλαιο Ο ορισμός του τριγώνου που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη είναι μη μινιμαλιστικός: ένα τρίγωνο είναι ένα κλειστό σχήμα με τρεις κορυφές και τρεις ευθείες πλευρές. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό υπάρχουν τέσσερα κρίσιμα χαρακτηριστικά: (α) κλειστό σχήμα, (β)τρία, (γ)κορυφές, (δ) ευθείες πλευρές.

Τα μη κρίσιμα χαρακτηριστικά μπορεί να αναφέρονται στο μήκος των πλευρών, στη μέτρηση των γωνιών ή στον προσανατολισμό του σχήματος και είναι συνήθως τα χαρακτηριστικά ενός πρωτοτυπικού που παραδείγματος. Η αιτιολόγηση με βάση τα μη κρίσιμα χαρακτηριστικά βρίσκεται στο δεύτερο στάδιο του Van Hiele της λογικής ιδιότητας, αλλά μπορεί να θεωρηθεί και οπτική έτσι θεωρείται η γέφυρα ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο επίπεδο.

Η τρίτη κατηγορία της έρευνας ήταν αιτιολόγηση που βασίζεται σε μη κρίσιμες ιδιότητες. Για παράδειγμα ο μαθητής K49 ισχυρίστηκε ότι το ανοιχτό τρίγωνο δεν ήταν ένα τρίγωνο γιατί "έχει εδώ (στραμμένο προς τη δεξιά πλευρά) μια μακριά γραμμή και εδώ (επισημαίνοντας την αριστερή πλευρά) είναι μικρή." Η τέταρτη κατηγορία ήταν βασισμένη σε αιτιολόγηση με κρίσιμα χαρακτηριστικά. Ορισμένα παιδιά χρησιμοποιούν σωστά τα κρίσιμα γνωρίσματα υπολογίζοντας τις πλευρές ή τις κορυφές. Άλλοι αναφέρονται σε κρίσιμες ιδιότητες, αλλά τις εφαρμόζουν εσφαλμένα. Για παράδειγμα, ένα παιδί (K63) εξετάζοντας το στρογγυλεμένο τρίγωνο είπε: "Είναι ένα τρίγωνο, επειδή υπάρχουν τρεις γωνίες." Αυτή η απάντηση δείχνει ότι το παιδί έχει επίγνωση του γεγονότος ότι ένα τρίγωνο πρέπει να έχει τρεις κορυφές. Ωστόσο, λανθασμένα συγχέει μια κορυφής με μια γωνία.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι το 90% των παιδιών αναγνώρισε αμέσως και σωστά τα διαισθητικά τρίγωνα ως παραδείγματα και το 50% περίπου αναγνώρισε σωστά τα μη διαισθητικά τρίγωνα. Τα περισσότερα παιδιά αναγνώρισαν πιο εύκολα τα μη τρίγωνα από τα τρίγωνα, αφού το 100% των μαθητών εντόπισαν εύκολα τα πρωτοτυπικά γεωμετρικά σχήματα, όπως το τετράγωνο, το εξάγωνο και η έλλειψη. Το 80% προσδιόρισαν σωστά το μη πρωτοτυπικό

πεντάγωνο, το ζιγκ-ζαγκ ¨τρίγωνο¨ και το ανοιχτό ¨τρίγωνο¨ ως μη τρίγωνα και μόνο το 5% (3 παιδιά) αναγνώρισαν το στρογγυλοποιημένο ¨τρίγωνο¨ ως μη τρίγωνο.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι αιτιολογήσεις των παιδιών για τα παραδείγματα των μη τριγώνων χωρίστηκαν σε τέσσερις τύπους, ενώ υπήρχαν και 35 περιπτώσεις απαντήσεων που δεν κατηγοριοποιήθηκαν λόγω έλλειψης αιτιολόγησης ή ακατανόητου λόγου.

Μελετώντας προσεκτικά τον πίνακα 10 παρατηρείται ότι οι περισσότερες αιτιολογήσεις βασίστηκαν σε οπτικές υποδείξεις παρά σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Και από αυτές που βασίστηκαν σε χαρακτηριστικά το μεγαλύτερο μέρος εντοπίζεται στα κρίσιμα χαρακτηριστικά. Ακολουθεί με φθίνουσα σειρά η αιτιολόγηση που βασίστηκε στην ονομασία του σχήματος, σε ολόκληρο το σχήμα και στις μη κρίσιμες ιδιότητες. Πρέπει να σημειωθεί ότι το τετράγωνο ήταν το σχήμα που τα παιδιά έδωσαν τις περισσότερες αιτιολογήσεις (74 αιτιολογήσεις σε σύνολο 65 συμμετεχόντων).

Η αιτιολόγηση για τα πρωτοτυπικά σχήματα (τετράγωνο, έλλειψη , εξάγωνο) βασίστηκε στην ικανότητα των παιδιών να ονομάσουν μόνο το σχήμα, χωρίς να αισθάνονται την ανάγκη να προχωρήσουν πέρα από το σύνολο της εικόνας και να δικαιολογήσουν την ταυτοποίησή τους. Έτσι, για το τετράγωνο το ήμισυ των απαντήσεων στηρίχτηκε στο χαρακτηρισμό του ως τέτοιο. Εξάλλου, με το να ονομάσουν τα παιδιά το σχήμα αυτό ως τετράγωνο σημαίνει αυτομάτως ότι διαισθητικά το κατονομάζουν ως μη τρίγωνο. Ανάλογα, το 50% ονόμασαν την έλλειψη ως έλλειψη ή κύκλο και το 15% την παρομοίασαν ως καθρέπτη ή αυγό. Για το εξάγωνο τα ποσοστά ήταν χαμηλότερα αφού οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν είναι εξοικειωμένοι μα αυτό το σχήμα. Το 24% των απαντήσεων περιελάμβανε την ονομασία του εξαγώνου ως γεωμετρική μορφή και το 13% αναφέρονταν στο εξάγωνο ως κάποιο αντικείμενο.

Σχετικά με το μη πρωτοτυπικό πεντάγωνο παρατηρήθηκε μία διαφορετική τάση σε σχέση με τα υπόλοιπα σχήματα. Σε αυτό η αιτιολόγηση των μαθητών βασίστηκε κατά 28% σε μη κρίσιμες ιδιότητες κατατάσσοντας σωστά το σχήμα αυτό στα μη τρίγωνα και σχολιάζοντας τη λεπτότητα της μορφής και την παραμορφωμένη του όψη. Αντίθετα η αιτιολόγηση που στηρίχτηκε στα κρίσιμα χαρακτηριστικά ήταν

μικρότερη και τις περισσότερες φορές εσφαλμένη, όπως για παράδειγμα ο μαθητής Κ19 που δικαιολόγησε το χαρακτηρισμό του πενταγώνου ως μη τρίγωνο αναφέροντας ότι ¨οι πλευρές του είναι στραβές¨.

Σχήμα	**Τύπος αιτιολόγησης**							
	Οπτική αιτιολόγηση				Αιτιολόγηση στηριζόμενη στα χαρακτηριστικά			
	Ολόκληρο το σχήμα		Ονοματολογία		Μη κρίσιμα χαρακτηριστικά		Κρίσιμα χαρακτηριστικά	
Αναγνώριση	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος
Τετράγωνο	14	-	34	-	4	-	22	-
Εξάγωνο	14	-	23	-	4	-	21	-
Έλλειψη	9	-	43	-	-	-	12	-
πεντάγωνο	11	4	8	2	16	-	10	6
Ζιγκ-ζαγκ	7	3	18	4	1	-	28	5
ανοιχτό	17	7	-	1	-	1	37	5
στρογγυλεμένο	-	23	-	1	1	4	2	33

Πίνακας 10

Στα ¨σχεδόν¨ τρίγωνα και συγκεκριμένα στα ανοικτά και στρογγυλεμένα ¨τρίγωνα¨, μόνο ένα παιδί έδωσε ένα όνομα για κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία. Οι περισσότερες απαντήσεις (πάνω από 35%) αποτελούνταν από οπτική αιτιολόγηση με βάση το συνολικό σχήμα για αυτά. Αυτό το είδος αιτιολόγησης οδήγησε στην σωστή ή λανθασμένη ταυτοποίηση ανάλογα με το αν το παιδί σκέφτηκε ότι έμοιαζε με ένα τρίγωνο, ή όχι. Η εξαίρεση στην ομάδα ήταν το ζιγκ-ζαγκ ¨τρίγωνο¨ για το οποίο οι περισσότερες απαντήσεις (33%) αποτελούνταν από την ονομασία του σχήματος αυτού ως κάποιο αντικείμενο (μια φωτιά, βουνό, ή αγκαθωτός θάμνος) παρά από ό, τι έγινε και για οποιοδήποτε άλλο σχήμα σε αυτή τη μελέτη. Αυτού του είδους η αιτιολόγηση συνήθως συνοδεύεται από ορθή ταυτοποίηση.

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα στην ομάδα των ¨σχεδόν τριγώνων¨, ήταν ότι πολύ περισσότερες αιτιολογήσεις βασίστηκαν σε κρίσιμα χαρακτηριστικά κατά τον προσδιορισμό των σχημάτων από ό, τι για τα άλλα μη τρίγωνα. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν ιδιαίτερα αξιοσημείωτο για το ανοιχτό «τρίγωνο», όπου το 62% των απαντήσεων περιελάμβαναν αυτό το είδος της αιτιολόγησης. Ωστόσο, αυτή η αιτιολόγηση δεν συνοδεύεται πάντοτε από μια ορθή ταυτοποίηση. Μερικά παιδιά απλώς ανέφεραν ότι ¨είναι ακόμα ένα τρίγωνο, ακόμα και αν είναι ανοιχτό¨. Η κανονική λέξη «ανοιχτό» αναφέρθηκε μόλις στο 28% των απαντήσεων.

Όσον αφορά τα ζιγκ-ζαγκ "τρίγωνα", το 85% των απαντήσεων που αναφέρονται σε κρίσιμα γνωρίσματα συνδέθηκαν με την ορθή ταυτοποίηση του σχήματος αυτού ως μη τρίγωνο. Ο μαθητής K48, αναφέρθηκε στα «αγκάθια» των πλευρών. Δεν είναι σαφές αν αυτό το παιδί αναφέρεται σε πλευρές που δεν ήταν ευθείες ή στα υπερβολικά σημεία. Άλλα παιδιά ήταν πιο ακριβή με την αναφορά ότι "υπάρχουν πολλές γωνίες και σημεία." Από την άλλη πλευρά, η χρήση κρίσιμων ιδιοτήτων δεν εγγυάται ορθή ταυτοποίηση. Ένα παιδί (K56), υποστήριξε ότι ήταν ένα τρίγωνο γιατί "έχει τρεις πλευρές." Φαίνεται ότι αυτό το παιδί κοίταξε σε απόσταση το συνολικό σχήμα και επικεντρώθηκε στις κορυφές που βρίσκονταν στην πρωτότυπη θέση. Ωστόσο, χρησιμοποίησε ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό για να κάνει την κρίση του.

Σχετικά με τα στρογγυλοποιημένα «τρίγωνα», το 42% της αιτιολόγησης με βάση τα κρίσιμα χαρακτηριστικά επικεντρώθηκε στις τρείς «πλευρές» του «τριγώνου». Τα υπόλοιπα επικεντρώθηκαν σε τρία «σημεία» ή «γωνίες». Ενώ τα περισσότερα παιδιά δεν έκαναν κανένα σχόλιο σχετικά με την κυκλικότητα, τέσσερα παιδιά επεσήμαναν τις τρεις στρογγυλεμένες γωνίες και υποστηρίξαν πως «έχει τρεις γωνίες, ακόμη κι αν είναι στρογγυλεμένες». Αυτά τα παιδιά δεν θεώρησαν την κυκλικότητα ως λόγο ακαταλληλότητας του σχήματος αυτού για να είναι ένα τρίγωνο.

Από την παραπάνω έρευνα προέκυψε ένα ακόμη αποτέλεσμα που αφορούσε την έλλειψη συνοχής στις απαντήσεις των μαθητών. Χαρακτηριστικά ο μαθητής K11, ενώ μέτρησε σωστά τα έξι σημεία του εξαγώνου και το κατέταξε στα μη τρίγωνα δεν έκανε το ίδιο για το πεντάγωνο, το οποίο υποστήριξε ¨ότι είναι λίγο πιεσμένο¨, αλλά

ούτε για το ζιγκ-ζαγκ ¨τρίγωνο¨ που το χαρακτήρισε ως τρίγωνο ακόμη και αν είχε πολλές κορυφές. Χρησιμοποίησε επομένως ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό κατατάσσοντας σωστά το εξάγωνο κάτι που δεν συνέβη για τα άλλα δυο σχήματα, γεγονός που αποδεικνύει την πολυπλοκότητα στην αιτιολόγηση παραδειγμάτων.

Είναι ακόμη φανερό ότι τα παιδιά θεωρούν μερικά κρίσιμα χαρακτηριστικά περισσότερο σημαντικά από κάποια άλλα. Ο κύβος και το εξάγωνο, διαισθητικά αποδεκτά ως μη παραδείγματα, και στα δυο λείπει μόνο το κρίσιμο χαρακτηριστικό της τριάδας. Από την άλλη πλευρά, το πεντάγωνο, καθώς και τα ¨σχεδόν τρίγωνα¨ έδιναν την ψευδαίσθηση της τριάδας. Ίσως η σχέση ανάμεσα σε ένα τρίγωνο και τα χαρακτηριστικά της τριάδας είναι ισχυρότερη από την ανάγκη να είναι κλειστό ή για οι κορυφές του να είναι αιχμηρές. Επιπλέον, μπορεί να υποστηριχθεί ότι ο δεσμός ανάμεσα σε ένα τρίγωνο και τα χαρακτηριστικά της τριάδας εκφράζεται επίσης στο ίδιο το όνομα, αφού προέρχεται από τη ρίζα τρία. Έτσι, εάν ένα παιδί αντιλαμβάνεται την τριάδα σε ένα σχήμα, τότε το παιδί βλέπει ένα τρίγωνο. Αντίστροφα, σε ένα σχήμα που λείπει η τριάδα δεν μπορεί να είναι τρίγωνο.

Συμπερασματικά καταλήγουμε ότι τα διαισθητικά μη παραδείγματα όπως και τα διαισθητικά παραδείγματα, μπορούν να ενθαρρύνουν την οπτική αιτιολόγηση αλλά όχι την αναλυτική σκέψη, επομένως ο δάσκαλος θα πρέπει να επισημάνει τα κρίσιμα χαρακτηριστικά. Επίσης είναι σημαντικό να υπάρχει διάκριση μεταξύ διαισθητικών και μη διαισθητικών μη παραδειγμάτων ώστε ο εκπαιδευτικός να κατανοήσει πώς αυτά επηρεάζουν τη σκέψη των παιδιών αλλά και οι ίδιοι οι μαθητές να προβληματιστούν σχετικά με το εννοιολογικό επίπεδο που έχουν επιτύχει.

Τα παραδείγματα μεταξύ άλλων βοηθούν τους μαθητές να κάνουν γενικεύσεις και μέσω αυτού να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθηματικά αντικείμενα. Η σημασία της γενίκευσης στη μάθηση γενικά, αλλά και στην εκμάθηση των μαθηματικών ειδικότερα είναι αναγνωρισμένη και θεωρείται ένας από τους κυριότερους σκοπούς της διδασκαλίας. Η γενίκευση έχει να κάνει με την αναγνώριση μοτίβων και κοινών ιδιοτήτων σε διαφορετικές περιπτώσεις (Mason,1999). Αναγνωρίζοντας τη σημασία της γενίκευσης και το κεντρικό ρόλο που κατέχει στη μαθηματική εμπειρία, αναγνωρίζεται επίσης ευρέως ότι η γενίκευση στα μαθηματικά αποτελεί πρόκληση

για πολλούς μαθητές (Bills, Ainley & Wilson, 2006, Lee, 1996, Stacey, 1989, Stacey & McGregor, 2001, Becker & Rivera, 2005).

Η εκπαίδευση των μαθητών ώστε να κάνουν αποτελεσματικές γενικεύσεις, διέρχεται μέσα από την κατανόηση του τι συνεπάγεται η γενίκευση στα μαθηματικά. Η διερεύνηση αυτή γίνεται βάσει τριών κατευθύνσεων: (1) ταξινόμηση των διαφορετικών ειδών γενίκευσης, (2) ταξινόμηση των διαφορετικών προσεγγίσεων που έχουν οι μαθητές ως προς την γενίκευση, συμπεριλαμβανομένης της ανάλυσης των λαθών τους, και (3) εισαγωγή διαφορετικών εκπαιδευτικών μεθόδων οι οποίες μαθαίνουν στους μαθητές πώς να γενικεύουν και διερεύνηση αυτών των μεθόδων (Zazkis, Liljedahl & Chernoff, 2008).

Η ταξινόμηση των ειδών της γενίκευσης ως διαδικασίας χωρίζεται σε εμπειρική και διαρθρωτική (Bills και Rowland, 1999) ή σε εμπειρική και θεωρητική (Dorfler, 1991). Η εμπειρική γενίκευση αναγνωρίζει τα κοινά χαρακτηριστικά ή τις κοινές ιδιότητες των αντικειμένων και εξαρτάται από τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται, για το λόγο αυτό ενδέχεται να υστερεί στον καθορισμό των απαραίτητων στοιχείων για τη γενίκευση. Ο Davidov (1972/1990) κατέδειξε ότι ο εμπειρικός χαρακτήρας της γενίκευσης των μαθητών, αποτελεί μια από τις αιτίες της δυσκολίας που έχουν στο να κατανοήσουν την διδακτέα ύλη. Σε αντίθεση, στη θεωρητική γενίκευση αναγνωρίζονται οι θεμελιώδεις σταθερές και υποκαθίστανται από αρχέτυπα. Στη συνέχεια η γενίκευση κατασκευάζεται μέσω της αφαίρεσης των θεμελιωδών σταθερών.

Ο Ranford (2003) διαχώρισε τη γενίκευση που στηρίζεται σε γεγονότα, σε αυτή που στηρίζεται στην ουσία τους και σε αυτή που στηρίζεται σε συμβολισμούς. Η γενίκευση που στηρίζεται στα γεγονότα γενικεύει την αριθμητική διεργασία, ενώ αυτή που στηρίζεται στην ουσία των γεγονότων γενικεύει επίσης τα αποτελέσματα της αριθμητικής διεργασίας. Η γενίκευση που στηρίζεται στα σύμβολα έχει να κάνει με την κατανόηση και την χρησιμοποίηση της γλώσσας της άλγεβρας. Παρόλο που πολλοί ερευνητές επικρίνουν την εμπειρική γενίκευση, ο Radford (2003) θεωρεί ότι η γενίκευση που στηρίζεται στα γεγονότα είναι ένα σημαντικό πρώτο βήμα προς πιο εξελιγμένες μορφές γενίκευσης.

Οι Harel και Tall (1991) ταξινομούν τα είδη της γενίκευσης, σε (1) *επεκτατικά (expansive)* , όταν το εύρος εφαρμογής ενός υπάρχοντος θεωρητικού σχήματος επεκτείνεται, χωρίς να είναι αναγκαία η ανασυγκρότησή του, (2) *ανακατασκευαστικά (reconstructive)*, όταν το υπάρχον θεωρητικό σχήμα αναδομείται για να διευρύνει το εύρος εφαρμογής του, και (3) *διαζευκτικά (disjunctive)*, όταν δημιουργείται ένα νέο θεωρητικό σχήμα κατά την μετάβαση σε ένα νέο πλαίσιο. Οι μαθητές που εφαρμόζουν διαζευκτική γενίκευση πιθανότατα κατασκευάζουν ξεχωριστές μεθόδους για διαφορετικές περιπτώσεις και αδυνατούν να εντάξουν τα προηγούμενα παραδείγματα ως επί μέρους περιπτώσεις της γενικής μεθόδου.

Περιγράφοντας και αναλύοντας τις προσεγγίσεις των μαθητών, η Stacey (1989) σημείωσε ότι η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 9-13 ετών όταν γενικεύει μία γραμμική σχέση χρησιμοποιεί μια λανθασμένη μέθοδο ευθείας αναλογίας, υπολογίζοντας το ν-στό στοιχείο από το ν-στο πολλαπλάσιο της διαφοράς. Όμοια οι Zazkis & Liljedahl (2002) αναφέρουν ότι μαθητευόμενοι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν τη προσέγγιση του ¨πολλαπλασίου σταθερής διαφοράς¨ για την εύρεση ενός μεγάλου στοιχείου σε μία αριθμητική ακολουθία. Τέλος, οι Orton &Orton (1999) ανέφεραν την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν τις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών στοιχείων σε μια ακολουθία ως προτιμώμενη μέθοδο, και να εστιάζουν στην αναδρομική προσέγγιση, που συχνά τους εμποδίζει να δουν την γενική δομή των στοιχείων.

Οι Rivera και Becker (2005) κατατάσσουν τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να γενικεύουν ένα μοτίβο, σε σχηματικές, αριθμητικές και πραγματιστικές, βάσει της ομοιότητας της αναγνώρισης των αντικειμένων. Σημειώνουν ότι οι μαθητές που δεν μπορούν να γενικεύσουν εξετάζουν τα αριθμητικά μοτίβα, αλλά δεν αναγνωρίζουν τη σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων. Αυτό επαληθεύεται και από τα ευρήματα του Lannin (2005), ο οποίος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν γεωμετρικά σχέδια που συνδέουν τον «κανόνα» με την οπτική αναπαράσταση, μπορούν να γενικεύσουν καλύτερα από μαθητές οι οποίοι ανατρέχουν κατά κύριο λόγο στην αριθμητική, ή από εκείνους που χρησιμοποιούν την στρατηγική του «μαντεύω και ελέγχω». Ο Lannin πρότεινε επίσης, να παρουσιάζονται στην τάξη οι διαφορετικές

στρατηγικές και αιτιολογήσεις των μαθητών έτσι ώστε ο υπόλοιποι μαθητές να τις εξετάζουν ως προς την ισχύ και την εγκυρότητά τους.

Αναγνωρίζοντας τη δυσκολία των μαθητών στη γενίκευση αλλά και στην έκφρασή της, οι Zazkis, Liljedahl & Chernoff (2008) ισχυρίστηκαν ότι η επιλογή παραδειγμάτων στα οποία έχουν εκτεθεί οι μαθητές διαδραματίζει καίριο ρόλο στην ανάπτυξη της ικανότητας τους να γενικεύουν. Η επιλογή αυτών των παραδειγμάτων επηρεάζεται από μια ποικιλία παραγόντων και συνεχίζουν εστιάζοντας το άρθρο τους σε δυο βασικά χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων γενίκευσης, στους μεγάλους αριθμούς και στην αριθμητική μεταβολή.

Το πλαίσιο της μελέτης τους περιγράφεται από το ¨γνωστικό αντικείμενο της παρατήρησης¨ (Mason,2002), όπου ερευνώντας μια ομάδα ερευνητών και δασκάλων πάνω σε κάποια στοιχεία της πρακτικής τους προκύπτουν στοιχεία για την αποτελεσματικότητα των μεθόδων τους. Περιγράφουν και αναλύουν περιπτώσεις που τα παραδείγματα είχαν εκπαιδευτικό χαρακτήρα, προσδοκώντας οι αναγνώστες να αναδημιουργήσουν και να εξετάσουν ανάλογες εμπειρίες στη δική τους πρακτική. Με τον τρόπο αυτό ενεργοποιείται το ενδιαφέρον για αυτές (Mason, 2006) και οι αναγνώστες κατορθώνουν να αναγνωρίσουν προβληματικές πτυχές τους που δεν είχαν παρατηρηθεί στο παρελθόν. Η φιλοσοφική θεμελίωση αυτής της μεθόδου έγκειται στην πρόταση της Mason (2002) ότι *«το ερευνητικό πεδίο της παρατήρησης του υποκειμένου αποτελεί ερευνητική μέθοδο η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τους ερευνητές που διερευνούν τις μεθόδους τους».*

Στο άρθρο τους παραθέτονται παραδείγματα από επιτυχίες και αποτυχίες μαθητών στη γενίκευση, αλλά και εκπαιδευτικών στο να διδάξουν τους μαθητές να γενικεύουν. Οι μαθητές ήταν διαφόρων ηλικιών και φύλων, από διαφορετικά υπόβαθρα, σε διαφορετικό στάδιο εκπαίδευσης και με διαφορετική γνώση των μαθηματικών. Τα περιβάλλοντα ποικίλουν, περιλαμβάνοντας οδηγίες μέσα στην τάξη, συνομιλίες με ομάδες μαθητών και κλινικές συνεντεύξεις. Το κοινό χαρακτηριστικό που εντοπίστηκε ήταν ότι τα παραδείγματα που χρησιμοποιούν οι μαθητές μπορούν να είναι βοηθητικά ή να αποτελέσουν τροχοπέδη για την εκμάθηση της γενίκευσης.

Στην πρώτη ενότητα του άρθρου διερευνάται η συμβολή των ¨μεγάλων¨ και των ¨μικρών¨ αριθμών στη γενίκευση, ως προς την άλγεβρα και τη στοιχειώδη αριθμητική θεωρία. Η έρευνα ξεκινά με μία εκπαιδευόμενη δασκάλα τη Julie, η οποία συμμετείχε στο μάθημα « Τα θεμέλια των μαθηματικών για τους εκπαιδευτικούς». Οι μαθητές που συμμετείχαν στο μάθημα αυτό, αναμενόταν να έχουν μια ευχέρεια στη δημιουργία και στο χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων και έπρεπε να λύνουν ασκήσεις που απαιτούσαν τη γενίκευση μοτίβων με τη βοήθεια αλγεβρικών συμβόλων. Η Julie δεν θεωρούσε ότι έχει κλίση στα μαθηματικά, αντιμετώπιζε δυσκολίες στη δημιουργία και ερμηνεία της αλγεβρικής σημειογραφίας και πίστευε ότι δεν ήταν αναγκαίο να γνωρίζει άλγεβρα.

Η συνέντευξη ξεκινά δίνοντας στη Julie ένα μοτίβο:

$P_1 = 2 \times 3$
$P_2 = 3 \times 4$ και τα λοιπά. Με τι ισούται το P_{100} και το P_n;
$P_3 = 4 \times 5$

Ως πρώτη προσπάθεια, η Julie εξέφρασε τους πρώτους αριθμούς του μοτίβου ως 6, 12, 20, 30, 42 ..., και κατέγραψε την αλληλουχία των αυξανόμενων διαφορών. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο απόσπασμα της συνέντευξης παρακάτω, όταν της ζητήθηκε να εξετάσει το P_{100} φάνηκε να αντιλαμβάνεται το μοτίβο των παραγόντων.

Συνέντευξη:

Ερευνητής: Μπορείτε να γράψετε μια έκφραση για το P_n;

Julie: Δεν είμαι σίγουρη τι είναι το P_n.

Ερευνητής: Είναι απλά ένας τρόπος για να αναφερθώ στις n-οστό αριθμό του μοτίβου μας. Ορίσαμε τον πρώτο αριθμό μας ως P_1, τον δεύτερο ως P_2 και ούτω καθεξής, έτσι ώστε ο $75^{ος}$ αριθμός να είναι ο P_{75}. Ο «n» μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός ...

Julie: Άρα η απάντηση θα εξαρτηθεί από τον αριθμό.

Ερευνητής: Μπορείτε να γράψετε μια φόρμουλα που να εξαρτάται από το n, η οποία θα μας δίνει τον P_n;

Julie: Δεν είμαι σίγουρη πώς να το κάνω αυτό.

Ερευνητής: Εντάξει. Ας υποθέσουμε ότι n = 100. Ποιος είναι ο P_n αν το n είναι 100;

Julie: Είναι 10.100. Συγνώμη, περιμένετε , (χρησιμοποιώντας ένα κομπιουτεράκι), είναι 10.302, ναι, 10.302.

Ερευνητής: Πώς το υπολογίσατε;

Julie: 101 x 102 ισούται με 10302, έκανα πρώτα 100 x 101, αλλά πρέπει να πάω έναν αριθμό μετά.

Ερευνητής: Τι γίνεται αν το n είναι 173;

Julie: Θα είναι 173 επί, όχι, 174 επί 175, θα είναι ίσο με 30.450.

Ερευνητής: Θα μπορούσατε σας παρακαλώ να γράψετε μία φόρμουλα για το P_{173}, όχι για αυτόν καθαυτό τον αριθμό, αλλά για τον τρόπο υπολογισμού του;

Julie: (γράφει 174 x 175)

Ερευνητής: Τι γίνεται λοιπόν με το n, μπορείτε να γράψετε μια έκφραση το n;

Julie: Είναι ο επόμενος αριθμός επί τον επόμενο του επόμενου αριθμού, αλλά δώστε μου το n, για να κάνω τον υπολογισμό.

Ερευνητής: Εντάξει, ο n είναι 3^{100}.

Julie: (προσπαθεί να το υπολογίσει στο κομπιουτεράκι). Δεν μπορώ να το υπολογίσω.

Ερευνητής: Είναι 3^{100}. Δεν χρειάζεται να το υπολογίσετε. Απλά γράψτε μια φόρμουλα που να περιέχει αυτόν τον αριθμό.

Julie: Χρειάζομαι τον επόμενο αριθμό.

Ερευνητής: Μάλιστα. Χρειάζεστε το επόμενο. Ποιός είναι ο επόμενος αριθμός;

Julie: (διστάζει) $3^{100} + 1$;

Ερευνητής: Δηλαδή ..?

Julie: (γράφει $3^{100} + 1 \times 3^{100} + 2$), αυτό θέλετε;

Ερευνητής: Μήπως αυτό σας δείχνει πώς να βρίσκετε τον αριθμό;

Julie: Περίπου, δεν μου δείχνει ποιος είναι ο αριθμός.

Ερευνητής: Είναι μια χαρά. Ό,τι χρειαζόμαστε είναι εδώ. Αν ο αριθμός σας είναι άγνωστος, ας τον πούμε n, πώς θα υπολογίσετε τον P_n;

Julie: Εννοείτε n+1 επί n+2 φορές; Έτσι; (Γράφει κάτω την φόρμουλα, ξεχνώντας τις παρενθέσεις)

Σύμφωνα με τους ερευνητές η Julie αναγνώρισε το σχέδιο, αλλά είχε δυσκολία να εκφράσει τη γενικότητα του με αλγεβρικούς όρους. Υπολόγισε αμέσως το P_{173} ως 175×174, όμως αντιλήφθηκε το 174 ως «τον επόμενο» αριθμό αντί για 173 + 1. Πολλοί μαθητές που είναι εξοικειωμένοι με την άλγεβρα, αντιλαμβάνονται πιο εύκολα την έκφραση $(\nu + 1)^{\times}(\nu + 2)$ από την $(3100 + 1)^{\times}(3100 + 2)$. Για εκείνους που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την έκφραση της γενίκευσης με αλγεβρικούς όρους, η χρησιμοποίηση ενός μεγάλου αριθμού μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη.

Έχει παρατηρηθεί ακόμα ότι οι μαθητές που μπορούν να δουλεύουν με συγκεκριμένες περιπτώσεις, έχουν δυσκολία στην έκφραση της γενίκευσης. Ο Lee (1996) παρατήρησε ότι «το μεγάλο πρόβλημα των μαθητών δεν ήταν να δουν ένα μοτίβο, αλλά να αντιληφθούν ένα αλγεβρικά χρήσιμο μοτίβο» . Η Julie, όπως οι μαθητές του Lee, δεν έχει δυσκολία στο να «βλέπει» το μοτίβο. Η δυσκολία της έγκειται στην έκφραση της γενίκευσης του μοτίβου. Οι Zazkis και Liljedahl (2002) υποστήριξαν ότι υπάρχει ένα σημαντικό χάσμα μεταξύ της αναγνώρισης ενός μοτίβου και της ικανότητας να εκφραστεί αλγεβρικά. Στην έρευνά τους οι μαθητές δεν είχαν μεγάλη δυσκολία στο να περιγράψουν ένα μοτίβο προφορικά και στο να κάνουν μια πρόβλεψη βασισμένη στις σχέσεις του μοτίβου, αλλά δεν ήταν σε θέση να δώσουν μια αλγεβρική περιγραφή.

Η Julie παρουσίασε μία επιπλέον δυσκολία επιδιώκοντας το αποτέλεσμά της να βγει ένας αριθμός και όχι μία αλγεβρική παράσταση. Πολλοί μαθητές θεωρούν ως

αριθμό μόνο αυτόν που αναπαριστάτε στο δεκαδικό σύστημα, κατατάσσοντας άλλες μορφές όπως η παραγοντοποίηση σε πρώτους αριθμούς ή το άθροισμα αριθμών ως εκφράσεις ή ασκήσεις (Zazkis & Gadowsky,2001). Ωστόσο, δημιουργώντας μια αριθμητική έκφραση η Julie μπόρεσε να δημιουργήσει μια αλγεβρική έκφραση. Αυτό δείχνει ότι οι «μεγάλοι αριθμοί» μπορεί να χρησιμεύσουν ως ένα σκαλοπάτι προς την έκφραση της γενίκευσης με αλγεβρικά σύμβολα.

Στο ίδιο άρθρο παρουσιάζεται μία ακόμη εργασία που δόθηκε σε μαθητές Λυκείου. Ζητήθηκε να απλοποιήσουν την παράσταση $(2\chi-3\psi)^2 - (\chi+3\psi)^2$. Οι περισσότεροι μαθητές έβγαλαν τις παρενθέσεις υπολογίζοντας το τετράγωνο αθροίσματος και διαφοράς αφού δεν έβλεπαν το πλεονέκτημα στον υπολογισμό της διαφοράς τετραγώνου. Το πλεονέκτημα αυτό έγινε φανερό όταν επιλέχτηκαν στην ίδια άσκηση μεγαλύτεροι αριθμοί όπως $(26\chi-15\psi)^2 - (24\chi+15\psi)^2$ ή ακόμα καλύτερα $(255\alpha - 15\beta)^2 - (245\alpha +15\beta)^2$. Όσοι από τους μαθητές εξέτασαν τη δομή της διαφοράς τετραγώνων, απλοποίησαν ευκολότερα και ταχύτερα τις εκφράσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, αυτό ενθάρρυνε και τους υπόλοιπους μαθητές προς αυτή την κατεύθυνση.

Η έρευνα για τη συμβολή των ¨μεγάλων¨ αριθμών στη γενίκευση συνεχίζεται με μία μελέτη για τους πρώτους αριθμούς. Ενώ υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί, αυτοί που συνήθως χρησιμοποιούνται και συναντούνται από τους μαθητές είναι οι πρώτοι αριθμοί που είναι μικρότεροι από το 31. Προβλήματα που αναφέρονται στην ανάλυση αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων συνήθως λύνονται χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 3,5,7, καλλιεργώντας την εσφαλμένη εντύπωση ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι μικροί και η ανάλυσή τους γίνεται με μικρούς πρώτους. Ακολουθεί ένα απόσπασμα από μία κλινική συνέντευξη με την Tania, μία εκπαιδευόμενη δασκάλα, που ρωτήθηκε αν το 391 μπορεί να διαιρεθεί με το 23.

Συνέντευξη:

Tania: Δεν ξέρω. Υποθέτω ότι, χμ, λέγοντας ότι, ξέρω ότι υπάρχει ένας τρόπος για να το κάνουμε, την παραγοντοποίηση του σε πρώτους αριθμούς, και γνωρίζω ότι το 23 είναι ένας πρώτος αριθμός, αλλά μάλλον, χμμ, υποθέτω, για κάποιο λόγο, ότι αν το 391 δεν ήταν ένας πρώτος αριθμός, θα είχε έναν παράγοντα μικρότερο του 23, ένα πρώτο αριθμό μικρότερο του 23.

Ερευνητής: Και υπάρχει λόγος, που το σκεφτήκατε μ' αυτόν τον τρόπο;

Tania: Χμμ, υποθέτω ότι από την εμπειρία μου στις περισσότερες περιπτώσεις, ένας μεγάλος αριθμός, σχετικά μεγάλος αριθμός, όπως 391, θα είχε, στην πραγματικότητα ένας οποιοδήποτε αριθμός ακόμη και όχι μεγάλος, οποιοσδήποτε αριθμός έχει χμμ κάποιους μικρούς πρώτους αριθμούς ως παράγοντες επιπλέον σε ό,τι άλλο έχουμε, μπορούμε να έχουμε έναν μεγάλο αριθμό, με παράγοντες πρώτους αριθμούς όπως το 23, αλλά θα τείνει να έχει επίσης παράγοντες όπως το 2, το 3, το 5 και το 7.

Ερευνητής: Τι θα γινόταν λοιπόν αν παίρναμε 2 πολύ μεγάλους πρώτους αριθμούς;

Tania: Χμμμ …

Ερευνητής: Και τους πολλαπλασιάζαμε μεταξύ τους για να πάρουμε έναν άλλο αριθμό;

Tania: Χμμμ …

Ερευνητής: Θα είχε αυτός ο αριθμός ένα μικρό πρώτο αριθμό ως παράγοντα;

Tania: (Παύση) Χμμμ, όχι, δεν νομίζω.

[...]

Tania: Υποθέτω ότι βασίζομαι κυρίως στην εμπειρία μου παρά σε κάτι άλλο, αλλά μου φαίνεται ότι όταν παραγοντοποιείς έναν αριθμό στους πρώτους αριθμούς του, εννοώ όταν προσπαθείς να κάνεις κάτι τέτοιο,

προσπαθείς να βρεις τους μικρότερους, εννοώ εκείνους τους αριθμούς που δεν μπορούν πλέον να σπάσουν σε μικρότερους εκτός από το 1 και τους ίδιους, οπότε, υποθέτω ότι είναι μια διαδικασία παραγοντοποίησης στα μικρότερά τους μέρη...

Ερευνητής: Χμμ.

Tania: Υποθέτω αυτό με κάνει να θεωρώ ότι τα μέρη αυτά θα είναι επίσης μικρά.

Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981) η αντίληψη ενός ατόμου για μία έννοια δεν είναι σταθερή αλλά εξελίσσεται και διαφοροποιείται με την εμπειρία και ενδέχεται, τα επιμέρους στοιχεία της να αναπτύσσονται σε διαφορετικούς χρόνους και τρόπους. Οι Zazkis, Liljedahl & Chernoff (2008) προσθέτουν ότι για την ανασυγκρότηση της αντίληψης των μαθητών χρειάζεται μία πλουσιότερη σειρά παραδειγμάτων, δηλαδή μία επέκταση του χώρου παραδειγμάτων. Αυτό μπορεί να συμβεί με τη χρησιμοποίηση αριθμομηχανών για τον έλεγχο των πρώτων μεγάλων αριθμών και την περεταίρω παραγοντοποίησή τους σε μεγάλους πρώτους αριθμούς.

Το ερώτημα που γενάτε για το πότε ένας αριθμός χαρακτηρίζεται ως ¨μεγάλος¨ δεν έχει σαφή απάντηση. Από τα παραδείγματα που δόθηκαν ως τώρα, μεγάλος μπορεί να χαρακτηριστεί ένας αριθμός αν είναι πέρα από την υπολογιστική ικανότητα μίας αριθμομηχανής (1^{ο} παράδειγμα) ή αν δεν ενθαρρύνει άμεσα τη διαδικασία υπολογισμού από τους μαθητές (2^{ο} παράδειγμα) ή τέλος αν είναι πρώτος αριθμός που δεν αναλύεται με τη βοήθεια των 2,3,5,7 (3^{ο} παράδειγμα).

Η αριθμητική μεταβολή στα παραδείγματα, δηλαδή η αλλαγή των αριθμών που αφήνει αναλλοίωτη τη δομή τους και η συμβολή της στη λύση των προβλημάτων και τη γενίκευση, είναι το επόμενο θέμα που πραγματεύεται το ίδιο άρθρο. Και ξεκινά θέτοντας ένα γνωστό αίνιγμα: αν μιάμιση κότα γεννάει ενάμιση αυγό σε μιάμιση μέρα, πόσες μέρες χρειάζεται μία κότα για γεννήσει ένα αυγό; Πολλοί μαθητές από αδράνεια απαντούν «μία μέρα», ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι το πρόβλημα δεν λύνεται.

Οι συγγραφείς για να καταστήσουν σαφές το παραπάνω πρόβλημα, θέτουν ένα νέο πρόβλημα πιο ρεαλιστικό. Έτσι ρωτούν μαθητές της μέσης εκπαίδευσης αλλά και μαθητευόμενους δασκάλους δημοτικών σχολείων, πόσο σιτάρι μπορείς να αγοράσεις με 0,5$ αν ένα κιλό σιτάρι κοστίζει 1,68$. Ένας σημαντικός αριθμός των εξεταζομένων έκανε λάθη στο στήσιμο της διαίρεσης δηλαδή διαίρεσαν το 1,68 με το 0,50 και όχι το 0,50 με το 1,68. Για να βοηθηθούν οι εκπαιδευόμενοι πρέπει να κατανοήσουν τη δομή στο πρόβλημα, αν ένα κιλό σιτάρι κοστίζει Χ, πόσο σιτάρι μπορείς να αγοράσεις με Ψ, δηλαδή πόσες φορές χωράει το Χ στο Ψ. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι αυτό μπορεί να συμβεί με αλλαγή των αριθμών. Έτσι επαναδιατύπωσαν το πρόβλημα ως εξής:

- Ένα κιλό σιτάρι πρώτης ποιότητας κοστίζει 2 δολάρια, πόσο σιτάρι μπορείτε να αγοράσετε με 6 δολάρια;
- Ένα κιλό σιτάρι πρώτης ποιότητας κοστίζει 2 δολάρια, πόσο σιτάρι μπορείτε να αγοράσετε με 20 δολάρια;

Οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στα παραπάνω προβλήματα είναι συμβατοί και εύκολα διαχειρίσιμοι από τους μαθητές. Τα προβλήματα αυτά δόθηκαν σαν εκκίνηση και οι ερευνητές συνέχισαν με πιο ¨προβληματικούς¨ αριθμούς επαναδιατυπώνοντας το πρόβλημα ως εξής :

- Ένα κιλό σιτάρι πρώτης ποιότητας κοστίζει 2 δολάρια, πόσο σιτάρι μπορείτε να αγοράσετε με 0,5 δολάρια;

Με τη σταδιακή αυτή αριθμητική μεταβολή, οι ερευνητές προσπαθούν να παρακινήσουν τους εκπαιδευόμενους στη αναγνώριση της δομής του προβλήματος. Η δομή είναι πιο εύκολα αναγνωρίσιμη με συμβατούς αριθμούς και αυτό οφείλεται στο εύρος των δυνατών αλλαγών που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι μαθητές διαχειρίζονται ευκολότερα προβλήματα με αριθμούς που μοιάζουν με αυτούς που έχουν διδαχθεί και αυτό βοηθά στην αναγνώριση των ομοιοτήτων και στην επέκταση της γενικής δομής.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα με τα κοτόπουλα και τα αυγά, οι αρθρογράφοι επαναδιατυπώνουν το πρόβλημα ως εξής:

- Αν έξι κότες γεννήσουν έξι αυγά σε 1 ημέρα, πόσο καιρό θα πάρει σε μία κότα να γεννήσει ένα αυγό;
- Αν έξι κότες γεννήσουν έξι αυγά σε 1μιση ημέρα, πόσο καιρό θα πάρει σε μία κότα να γεννήσει ένα αυγό;
- Αν έξι κότες γεννήσουν έξι αυγά σε έξι ημέρες, πόσο καιρό θα πάρει σε μία κότα να γεννήσει ένα αυγό;

Με την σταδιακή αριθμητική μεταβολή και την προφανή αναλογία η λύση του αρχικού προβλήματος γίνεται πλέον φανερή.

Τα προβλήματα με τους μεγάλους συνεχίζονται όταν γίνεται χρήση μεγάλων ποσοστών, δηλαδή ποσοστών που ξεπερνούν το 100%. Τα προβλήματα αυτά συνήθως εκλαμβάνονται ως προσπάθεια των ανθρώπων να δώσουν έμφαση σε μία προσπάθεια ή βεβαιότητα, για παράδειγμα όταν κάποιος ισχυρίζεται ότι βάζει το 120% της προσπάθειας του ή ότι είναι 200% σίγουρος για κάτι. Όταν όμως το μεγάλο ποσοστό εμφανίζεται σε μαθηματικά προβλήματα οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν τη γενική δομή.

Σε μία τάξη μαθητευόμενων δασκάλων δημοτικών σχολείων τέθηκε το ακόλουθο πρόβλημα: Η τιμή του πακέτου του καφέ ήταν 10$, αν αυξήθηκε κατά 400% ποια είναι η νέα τιμή; Οι μισοί μόνο από αυτούς βρήκαν τη νέα τιμή, αντιλαμβανόμενοι ότι 400% συνεπάγεται με τετραπλασιασμό της παλιάς τιμής. Έτσι και πάλι οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της αριθμητικής μεταβολής για την αναγνώριση της δομής του προβλήματος και τη γενίκευσή του. Διατύπωσαν λοιπόν σταδιακά τα ακόλουθα προβλήματα:

- Η τιμή του πακέτου του καφέ ήταν $ 10. Αυξήθηκε κατά 20%, ποια είναι η νέα τιμή;
- Η τιμή του πακέτου του καφέ ήταν $ 10. Αυξήθηκε κατά 35%, ποια είναι η νέα τιμή;
- Η τιμή του πακέτου του καφέ ήταν $ 10. Αυξήθηκε κατά 100%, ποια είναι η νέα τιμή;

Με τον τρόπο αυτό βοήθησαν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του προβλήματος και να ξεπεράσουν το πρόβλημα που δημιουργήθηκε από τη λανθασμένη αντίληψη του εύρους των δυνατών αλλαγών.

Ο «γρίφος του χαμένου δολαρίου» ή το «παράδοξο του χαμένου δολαρίου», είναι το επόμενο παράδειγμα που περιγράφεται στην εργασία των Zazkis, Liljedahl & Chernoff (2008), με σκοπό να αναδείξει τη συμβολή της αριθμητικής μεταβολής στην επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με το γρίφο αυτό, που εμφανίζεται σε πολλές δημοσιευμένες συλλογές μαθηματικών προβλημάτων με διάφορες εκδοχές αλλά με τα ίδια πάντα νούμερα, υπάρχουν τρεις άνθρωποι που πηγαίνουν σε ένα ξενοδοχείο (ή εστιατόριο) και θέλουν να μοιραστούν το κόστος του δωματίου (ή του γεύματος) που ανέρχεται στο ποσό των 30$, έτσι ο καθένας συνεισφέρει 10$. Έπειτα ο διευθυντής του ξενοδοχείου αποφασίζει να τους κάνει έκπτωση και να χρεώσει τελικά το δωμάτιο με 25$. Στέλνει το γκρουμ να επιστρέψει τα 5$ και εκείνος για να μοιράσει το ποσό σε ίσα μέρη, αποφασίζει να κρατήσει τα 2$ και να επιστρέψει από 1$ στον καθένα. Επομένως ο κάθε πελάτης πλήρωσε 9$, άρα και οι τρεις μαζί 27$ και ο γκρουμ κράτησε 2$ τελικά το σύνολο είναι 29$. Η ερώτηση που τίθεται είναι που πήγε το 1$ που λείπει.

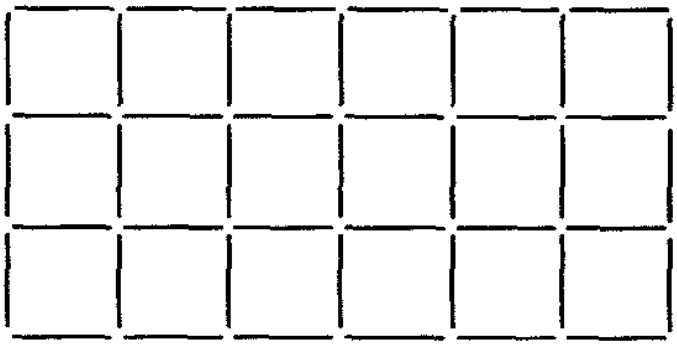
Σύμφωνα με τους ερευνητές η πρόσθεση των δυο ποσών (27$+2$) δεν απαντάει σε καμία ερώτηση και πολύ περισσότερο δεν αντιστοιχεί στο ποσό που συγκεντρώθηκε. Αντίθετα η διαφορά των ποσών αυτών (27-2=25$) απαντάει στο ερώτημα πόσα χρήματα έμειναν στο ταμείο του ξενοδοχείου (ή εστιατορίου). Για να γίνει σαφέστερο το παραπάνω πρόβλημα οι ερευνητές προχωρούν σε αριθμητική μεταβολή των δεδομένων. Διατυπώνουν ξανά το ίδιο πρόβλημα ως εξής: αν το δωμάτιο κοστίζει 20$, ο γκρουμ έπρεπε να επιστρέψει τα 10$ και για να μοιράσει εξίσου το ποσό κράτησε το 1$ και επέστρεψε 3$ στον καθένα, τότε οι πελάτες πλήρωσαν από 7$ δηλαδή σύνολο 21$ και προσθέτοντας το 1$ που κράτησε ο γκρουμ συγκεντρώνονται 22$. Στην περίπτωση αυτή το έλλειμμα διαμορφώνεται στα 8$. Και συνεχίζουν επαναδιατυπώνοντας το πρόβλημα για να γίνει σαφέστερο. Αν το δωμάτιο κόστιζε αρχικά 30$ και υπάρχει προσφορά στη διαμονή στο 1/3 της τιμής, ο γκρουμ πρέπει να επιστέψει 20$. Κρατάει 2$ και επιστρέφει από 6$ στον καθένα. Οι

πελάτες τώρα έχουν πληρώσει από 4$ ο καθένας, σύνολο 12$ και προσθέτοντας τα 2$ που κράτησε ο γκρουμ το ποσό διαμορφώνεται σε 14$ και το έλλειμμα είναι 16$.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι το παράδοξο του χαμένου δολαρίου προέκυψε εξαιτίας της πρόσθεσης του πληρωτέου ποσού με το παρακρατημένο ποσό που δεν είχε κανένα νόημα και δεν απαντούσε σε καμία ερώτηση. Με τη μέθοδο της αριθμητικής μεταβολής η εξήγηση του προβλήματος έγινε πιο κατανοητή και γι' αυτό χαρακτηρίζεται ως μία αποτελεσματική στρατηγική.

Ενώ οι γενικεύσεις γίνονται με εξέταση παραδειγμάτων, ωστόσο δεν είναι γνωστός ο απαραίτητος αριθμός και το είδος των παραδειγμάτων που χρειάζονται για να σχηματιστεί μία γενίκευση. Επιπρόσθετα, τα παραδείγματα μπορεί να οδηγήσουν σε κατάλληλες γενικεύσεις αλλά μερικές φορές και σε λανθασμένες. Στις περιπτώσεις που ακολουθούν παρουσιάζονται παραδείγματα που οδήγησαν σε λανθασμένη γενίκευση.

Το πρώτο πρόβλημα που παρουσιάζεται στο άρθρο των Zazkis, Liljedahl & Chernoff (2008), είναι αυτό με τις οδοντογλυφίδες που αναφέρεται από τους Simmt, Davis, Gordon & Towers (2003). Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές καλούνται να εξετάσουν τετράγωνα τοποθετημένα σε σειρά, φτιαγμένα από οδοντογλυφίδες και να δημιουργήσουν μία αλγεβρική γενίκευση για τον αριθμό των οδοντογλυφίδων που απαιτούνται για ένα πίνακα ν γραμμών και κ στηλών. Αρχικά δόθηκε στους μαθητές ένας πίνακας 3x6 και τους ζητήθηκε να ορίσουν τον αριθμό των απαιτούμενων οδοντογλυφίδων (σχήμα 23).



Σχήμα 23

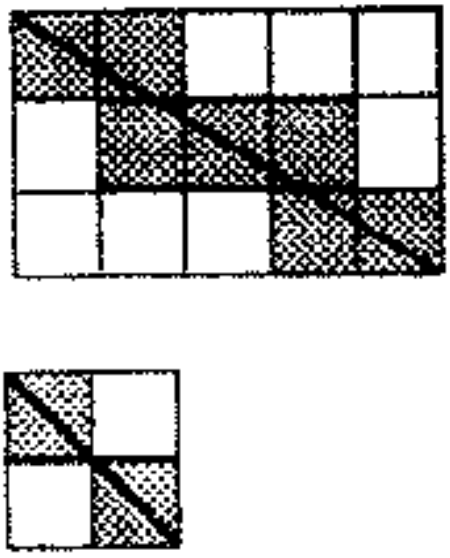
Έπειτα ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν έναν κανόνα, ο οποίος να καθορίζει τον αριθμό των οδοντογλυφίδων που χρειάζονται για ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οποιουδήποτε μεγέθους, να εκφράσουν τον κανόνα αυτό αλγεβρικά και να τον επαληθεύσουν για ένα ορθογώνιο 10x15.

Ο σωστός τύπος, που δίνει λύση στο πρόβλημα που παρουσιάζεται, είναι L(W+1)+W(L+1), όπου L είναι το μήκος του ορθογωνίου (το πλήθος των γραμμών) και W το πλάτος (το πλήθος των στηλών). Παρόλα αυτά μία μαθήτρια, η Arlene, υπολόγισε το σωστό αποτέλεσμα για το πρώτο παράδειγμα του 3x6 πίνακα, που χρειάζονται 45 οδοντογλυφίδες, χρησιμοποιώντας τον τύπο 3^2+6^2. Έπειτα γενικεύοντας αυτήν την παρατήρηση κατέληξε στον τύπο L^2+W^2, ο οποίος επαληθεύονταν και στη δεύτερη περίπτωση του 10x15 πίνακα.

Ο δάσκαλος της Arlene, προβληματισμένος με την απάντησή της, εξέτασε τις περιπτώσεις για τις οποίες ισχύει $L(W+1)+W(L+1)= L^2+W^2$, και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που L,W είναι διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί (τριγωνικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί 1,3,6,10… δηλαδή αυτοί που προκύπτουν από του τύπο ν(ν+1)/2 ξεκινώντας για ν=1 με ν $\in N$).

Η επιλογή των αριθμών στο παράδειγμα ήταν συμπτωματική, οδήγησε όμως σε μία λανθασμένη γενίκευση και αποκάλυψε μία ενδιαφέρουσα μαθηματική περίπτωση. Οι συμπτωματικές επιλογές δε μπορούν να αποφευχθούν πάντα, όμως η γνώση του δασκάλου για το πώς τα παραδείγματα επηρεάζουν τη γενίκευση είναι απαραίτητη και η καθοδήγησή του καθοριστική.

Το επόμενο παράδειγμα που θα εξεταστεί αναφέρεται σε μία εργασία των Edwards & Zazkis (2002), οι οποίοι ζήτησαν από μαθητευόμενους δασκάλους δημοτικών σχολείων να μετρήσουν τα τετράγωνα που διασχίζει η διαγώνιος στο ορθογώνιο πλέγμα του σχήματος 24. Ο γενικός τύπος που απαντά στην ερώτηση αυτή είναι d=n+k-GCD(n,k), όπου d ο αριθμός των τετραγώνων που διασχίζει η διαγώνιος ενός n x k ορθογωνίου και GCD ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των n,k.



Σχήμα 24

Η δημοφιλέστερη λύση του παραπάνω προβλήματος από τους δασκάλους δίνονταν από τον τύπο d=n+k-1. Ακόμη και εκείνοι που κατάφεραν να παρουσιάσουν μία πλήρη λύση είχαν χρησιμοποιήσει κάποια στιγμή το τύπο αυτό. Για παράδειγμα σε ένα πίνακα 5x4 η διαγώνιος διασχίζει 5+4-1=8 τετράγωνα. Η γενίκευση αυτή είναι λανθασμένη και ισχύει μόνο στην περίπτωση που n,k είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί. Εξετάζοντας και άλλα παραδείγματα μαθητών, προέκυψε η ευρεία χρήση του τύπου d=n+k-2 για n,k ζυγούς αριθμούς και d=n+k-1 στις περιπτώσεις που n,k είναι περιττοί αριθμοί ή ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός. Οι περισσότεροι μαθητές προσπάθησαν να βρουν μία φόρμουλα που να εξαρτάται μόνο από n,k και σε καμία περίπτωση δεν αποδέχονταν το GCD(n,k) στη γενική λύση. Με το παράδειγμα αυτό υπογραμμίζεται η αναγκαιότητα της σωστής επιλογής παραδειγμάτων και ο κίνδυνοι των περιορισμένων χώρων παραδειγμάτων κατά τη διαδικασία της γενίκευσης.

Το άρθρο που παρουσιάσαμε καταλήγει αναφέροντας μία φράση της Mason (1999) που υποστηρίζει ότι ¨*ο λόγος για εξειδίκευση είναι η προώθηση της γενίκευσης*¨. Η φράση αυτή βρίσκει σύμφωνους τους συγγραφείς, οι οποίοι προσθέτουν ότι η εξειδίκευση περιλαμβάνει την εξέταση παραδειγμάτων και αυτό το γεγονός χρειάζεται προσοχή, γιατί κάθε σειρά παραδειγμάτων δεν οδηγεί πάντα σε επιτυχημένη γενίκευση. Η γενίκευση υποστηρίζεται από τον εμπλουτισμό ή την

επεξήγηση των παραδειγμάτων, ενός χώρου παραδειγμάτων. Οι μεγάλοι αριθμοί μπορεί να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ των συγκεκριμένων μικρών αριθμών και του αφηρημένου αλγεβρικού συμβολισμού, οι μικροί ή συμβατοί αριθμοί, είναι δυνατόν να βοηθήσουν στην αποκάλυψη της δομής που κρύβεται κατά την εξέταση των μεγαλύτερων αριθμών και τέλος μια διαφορετική επιλογή αριθμών μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση παράξενων συμπτώσεων και παραπλανητικών επιχειρημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων από τους καθηγητές

Μία βασική καθημερινή δραστηριότητα των καθηγητών είναι η ερμηνεία των απαντήσεων και των απορριών των μαθητών τους, καθώς και η επιχειρηματολογία που πρέπει να αναπτύξουν για να τους πείσουν σε περίπτωση λάθους ισχυρισμού τους. Η επιχειρηματολογία αυτή μπορεί να βασίζεται στη θεωρία, στη χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Η παρουσίαση ενός κατάλληλου παραδείγματος είναι μία σύνθετη διαδικασία που σχετίζεται με τις γνώσεις των καθηγητών και τον χώρο παραδειγμάτων τους και αναλύεται σε επόμενη έρευνα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό. Τα αντιπαραδείγματα, αν και αρκούν για να καταρρίψουν έναν άκυρο ισχυρισμό εντούτοις χρησιμοποιούνται ελάχιστα από τους καθηγητές και γενικά υποτιμάται η αξία τους ως μέθοδος απόδειξης, όπως αναφέρεται στην έρευνα των Giannakoulias, Mastorides, Potari & Zachariades (2010) που παρουσιάζεται παρακάτω.

Στην έρευνα αυτή μελετάται ο τρόπος που οι καθηγητές διαψεύδουν τους λανθασμένους αλγεβρικούς ισχυρισμούς στις γραπτές αποδείξεις των μαθητών τους στο μάθημα της ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές εστιάζουν στο περιεχόμενο και στη δομή της επιχειρηματολογίας των καθηγητών, στην υποκείμενη συλλογιστική και τις πεποιθήσεις τους και στο είδος των δοσμένων αντιπαραδειγμάτων. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με το μοντέλο του Toulmin (2003) και προέκυψαν τρία είδη συλλογιστικής. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό τα επιχειρήματα αποτελούνται από 6 βασικά μέρη που το καθένα παίζει διαφορετικό ρόλο σε μία διαφωνία. Ο *ισχυρισμός, (conclusion)* (C) είναι η δήλωση πάνω στην οποία υπάρχει διαφωνία. Τα *δεδομένα, (data)* (D) είναι τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζεται το επιχείρημα. Η *εγγύηση, (warrant)* (W) δικαιολογεί τη σύνδεση ανάμεσα στα αποδεκτά στοιχεία και τον ισχυρισμό. Η *υποστήριξη, (backing)* (B) παρέχει τη στήριξη, την αιτιολογία ή τους λόγους υποστήριξης της εγγυητικής μαρτυρίας δίνοντας περισσότερα στοιχεία. Ο *βαθμός σιγουριάς, (modal qualifier)* (Q) πιστοποιεί τον ισχυρισμό εκφράζοντας βαθμούς εμπιστοσύνης και *η ανασκευή του*

επιχειρήματος, (rebuttal) (R) αποτελείται από εξαιρέσεις στον ισχυρισμό υποδηλώνοντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες δεν θα ίσχυε.

Στη μελέτη συμμετείχαν 18 καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που παρακολουθούσαν ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στη Διδακτική των Μαθηματικών. Κάποιοι ήταν πεπειραμένοι και άλλοι νεοδιόριστοι. Τους δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με τρία προβλήματα ανάλυσης και οι υποθετικές απαντήσεις ενός φοιτητή, που είχαν κάποια αλγεβρικά λάθη. Ζητήθηκε από τους καθηγητές να αναγνωρίσουν αυτά τα λάθη και να δώσουν γραπτή εξήγηση στο φοιτητή που θα τον βοηθούσε να τα συνειδητοποιήσει. Οι καθηγητές χρειάστηκαν περίπου 90 λεπτά για να απαντήσουν το ερωτηματολόγιο και ακολούθησε συνέντευξη με δυο από αυτούς.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες τρεις ασκήσεις δόθηκαν στους φοιτητές κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος Απειροστικού Λογισμού και κάποιοι φοιτητές έδωσαν τις αποδείξεις που ακολουθούν. Διορθώστε τα λάθη σε αυτές τις αποδείξεις, αν υπάρχουν, και γράψτε τις εξηγήσεις που θα δίνατε σε αυτούς τους φοιτητές ώστε να τους πείσετε για τα λάθη τους.

Άσκηση 1

Έστω ότι (α_n) $n \in N$,(b_n) $n \in N$ είναι δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε $\alpha_n, b_n > 0$ για n=1, 2, ... Αν $\alpha_n \to \alpha$ και $b_n \to b$ και $\alpha, b > 0$, τότε $\alpha_n / b_n \to \alpha/b$.

Απόδειξη: Αφού $\alpha_n \to \alpha$ και $\alpha/2 > 0$ υπάρχει $n_1 \in N$ τέτοιο ώστε $| \alpha_n - \alpha | < \alpha/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Έτσι έχουμε $\alpha/2 < \alpha_n < 3\alpha/2$ για κάθε $n \geq n_1$.
Ομοίως, καθώς $b_n \to b$ και $b/2 > 0$, υπάρχει $n_2 \in N$ τέτοιο ώστε
$b/2 < b_n < 3b/2$ για κάθε $n \geq n_2$.
Από τα παραπάνω παίρνουμε $a/b < \alpha_n/b_n < a/b$ για κάθε $n \geq \max \{ n_1,n_2\}$, και έτσι,
$\lim \alpha_n/b_n = \alpha/b$.

Άσκηση 2

Αν $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, και $|f(x)| \leq 1$ για $-1 \leq x \leq 1$, τότε $|f'(x)| \leq 4$ για $-1 \leq x \leq 1$.

Απόδειξη: Αφού $|f(1)| \leq 1$ παίρνουμε $|a + b + c| \leq 1$. Έτσι, $|a| + |b| + |c| \leq 1$.

Για $-1 \leq x \leq 1$ έχουμε $|f'(x)| = |2ax + b| \leq |2ax| + |b| = 2|a||x| + |b| \leq 2|a| + |b|$.

Έτσι, $|f'(x)| \leq 2|a| + |b| \leq 2(|a| + |b| + |c|) \leq 2 \leq 4$ για κάθε $-1 \leq x \leq 1$.

Άσκηση 3

Ελέγξτε αν η ακόλουθη δήλωση είναι σωστή.

" Έστω ότι (α_n) $n \in N$, (b_n) $n \in N$ είναι δύο ακολουθίες. Αν $0 \leq \alpha_n \leq b_n$ για κάθε $n \in N$, και $b_n \to b$, τότε $\alpha_n \to b$."

Απόδειξη: Αφού $b_n \to b$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε $|b_n - b| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την υπόθεση παίρνουμε $|\alpha_n - b| \leq |b_n - b|$. Έτσι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε $|\alpha_n - b| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι $\alpha_n \to b$. Επομένως η δήλωση είναι σωστή.

Στις αποδείξεις των μαθητών είχαν εσκεμμένα συμπεριληφθεί τυπικές μαθητικές δυσκολίες. Ενώ τα προβλήματα που τέθηκαν προέρχονταν από ύλη της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης οι δυσκολίες των μαθητών εντοπίστηκαν στις ανισότητες των απολύτων τιμών, που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια. Σκοπός των ερευνητών ήταν να μελετηθεί η μαθηματική ικανότητα των καθηγητών να αναγνωρίζουν λάθη στα ενδιάμεσα βήματα των αποδείξεων και οι εκπαιδευτικές τους αντιδράσεις σε ένα εξωσχολικό πλαίσιο.

Στην πρώτη άσκηση ο φοιτητής απέδειξε ότι το όριο του πηλίκου δύο ακολουθιών με θετικά όρια που συγκλίνουν ισούται με το πηλίκο των αντίστοιχων ορίων. Το λάθος στην απόδειξη του φοιτητή είναι ότι διαίρεσε κατά μέλη δυο ανισότητες. Αυτό είναι ένα κλασικό λάθος των μαθητών το οποίο οφείλεται στο ότι μεταφέρουν τις ιδιότητες των ισοτήτων στις ανισότητες. Ο καθηγητής καλείται να πείσει το φοιτητή για το λανθασμένο ισχυρισμό του και δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα να τον βοηθήσει να καταλάβει το λόγο που δεν ισχύει.

Στη δεύτερη άσκηση ζητήθηκε από το φοιτητή να αποδείξει ότι η παράγωγος μίας συνάρτησης δευτέρου βαθμού παίρνει τιμές σε συγκεκριμένο διάστημα κάτω από κάποιες συνθήκες. Το λάθος στην απόδειξη αυτή είναι η παραδοχή πώς αν $|a +b +c| \leq 1$ τότε $|a|+ |b|+ |c| \leq 1$. Αυτό μπορεί να οφείλεται στη λανθασμένη εφαρμογή της μεταβατικότητας ή στη δυσκολία που έχουν γενικά οι μαθητές με την απόλυτη τιμή. Ο φοιτητής πιθανόν δίνει γραμμικές ιδιότητες στην περίπτωση της συνάρτησης με απόλυτες τιμές. Θεωρεί ότι $|a +b| = |a| +|b|$, όπως συμβαίνει στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση, παρόλο που παρακάτω στην απόδειξή του εφαρμόζει σωστά αυτή την ιδιότητα. Ο καθηγητής θα μπορούσε να βοηθήσει το φοιτητή να ξεπεράσει αυτή τη δυσκολία δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα με ετερόσημους αριθμούς ($\alpha=1000$ $b= -1001$ και $c=0.01$) όπως αναφέρεται στο άρθρο που περιγράφεται.

Στην τρίτη άσκηση δόθηκε ένας λανθασμένος ισχυρισμός και ζητήθηκε από το φοιτητή να τον αξιολογήσει. Εκείνος μετά από μία λανθασμένη υπόθεση κατέληξε ότι ήταν σωστός. Υποθέτουμε ότι ο φοιτητής σκέφτηκε ότι αν $\alpha_n \leq b_n$ τότε $\alpha_n - b \leq b_n - b$ και στη συνέχεια μετέφερε την ανισότητα των αριθμών σε ανισότητα απολύτων τιμών γράφοντας $|\alpha_n - b| \leq | b_n - b|$. Αυτό πιθανόν οφείλεται και πάλι σε μεταφορά των ιδιοτήτων των ισοτήτων στις ανισότητες ή και σε δυσκολίες στις απόλυτες τιμές. Για να βοηθήσει ο καθηγητής αυτόν το φοιτητή προτείνεται να παρουσιάσει την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυο αριθμών ως την απόστασή τους πάνω στον άξονα.

Οι απαντήσεις των καθηγητών ταξινομήθηκαν σε σχέση με τα μαθηματικά επιχειρήματα που χρησιμοποίησαν κατά τη διάψευση των λανθασμένων ισχυρισμών. Με τον τρόπο αυτό προέκυψαν δύο μορφές επιχειρηματολογίας, αυτή που βασίζεται στη χρήση αντιπαραδειγμάτων και αυτή που στηρίζεται στη χρήση ενός γενικού κανόνα ή θεωρήματος. Υπήρξαν καθηγητές που δεν αναγνώρισαν τα λάθη του φοιτητή ή δεν έδωσαν καθόλου απαντήσεις. Στον παρακάτω πίνακα 11 φαίνεται η ταξινόμηση της επιχειρηματολογίας.

Στον πίνακα αυτό φαίνεται ότι οι περισσότεροι καθηγητές στήριξαν το συλλογισμό τους στη θεωρία. Σχετικά με τα λάθη στις εργασίες 1 και 2 οι μισοί καθηγητές στηρίχτηκαν στη θεωρία και μόνο το ένα τέταρτο σε αντιπαραδείγματα.

Μία καθηγήτρια βασίστηκε σε μία αντίφαση που εμφανίστηκε στην πρώτη εργασία υποδεικνύοντας την ακυρότητα της ανισότητας $a/b < \alpha_n/b_n < a/b$ αφού δεν γίνεται a/b να είναι μικρότερο του a/b. Πρέπει να σημειωθεί ότι μόνο δύο καθηγητές έδωσαν αντιπαράδειγμα και στις τρεις εργασίες.

Τα λάθη των μαθητών	**Επιχειρηματολογία καθηγητών**			
	Βασισμένη σε θεωρία	Βασισμένη σε αντιπαραδείγματα	Βασισμένη σε αντίφαση	Καμία εξήγηση
Διαίρεση ανισοτήτων	9	4	1	1
Αν $\|a+b+c\| \leq 1$ τότε $\|a\|+\|b\|+\|c\| \leq 1$.	9	3	-	2
Αν $\alpha_n - b \leq b_n - b$ τότε $\|\alpha_n - b\| \leq \| b_n - b\|$	5	5	-	3

Πίνακας 11

Οι καθηγητές που στήριξαν την επιχειρηματολογία τους στη θεωρία προσπάθησαν να πείσουν τον υποτιθέμενο φοιτητή είτε αναφερόμενοι στην μη ύπαρξη κάποιου σχετικού θεωρήματος, είτε στην λανθασμένη εφαρμογή κάποιου θεωρήματος από το φοιτητή. Τέλος, ορισμένοι αναφέρθηκαν σε ένα γενικό κανόνα χωρίς καμία άλλη εξήγηση, μία προσέγγιση που είναι παιδαγωγικά λανθασμένη (στην άσκηση 1). Στην κατηγορία αυτή ο καθηγητής ανέφερε ότι *¨είναι λάθος γιατί δε διαιρούμε ανισώσεις¨* (άσκηση 1, Κ8). Κάποιος άλλος καθηγητής ανέφερε ότι *¨η ανίσωση $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$ ισχύει, αλλά αυτό δε σημαίνει ότι αν ισχύει $|a+b+c| \leq 1$ τότε $|a|+|b|+|c| \leq 1$ αλλά μπορεί $|a|+|b|+|c| > 1$¨* (άσκηση 2, Κ11).

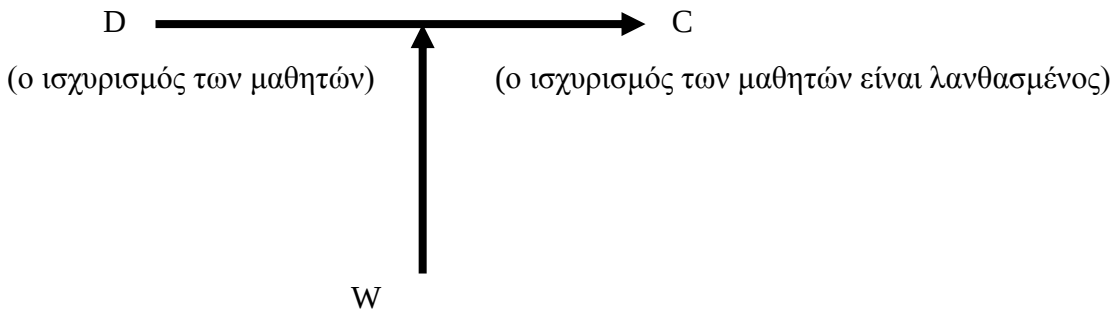
Στο παρακάτω απόσπασμα συνέντευξης με τον καθηγητή Κ13 εμφανίζονται και οι τρεις περιπτώσεις συλλογιστικής.

K13:[Αναφερόμενος στην άσκηση 2] σχετικά με την απόλυτη τιμή υπάρχει η τριγωνική ανισότητα την οποία ο μαθητής θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει λανθασμένα – να τη γράψει ας πούμε αντίστροφα. Ωστόσο, [στην άσκηση 1] ξέρουμε πως ποτέ δεν διαιρούμε ανισότητες. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει κάτι (ένα θεώρημα) για να εφαρμόσουμε. Οι μαθητές δεν πρέπει να το κάνουν.

Ε: Οκ, ας υποθέσουμε πως ένας μαθητής σας χρησιμοποιεί σε μία απόδειξη την ακόλουθη πρόταση: « τα δύο τρίγωνα έχουν όλες τις (αντίστοιχες) γωνίες τους ίσες, άρα είναι ίσα» τι θα κάνατε σε αυτή την περίπτωση;

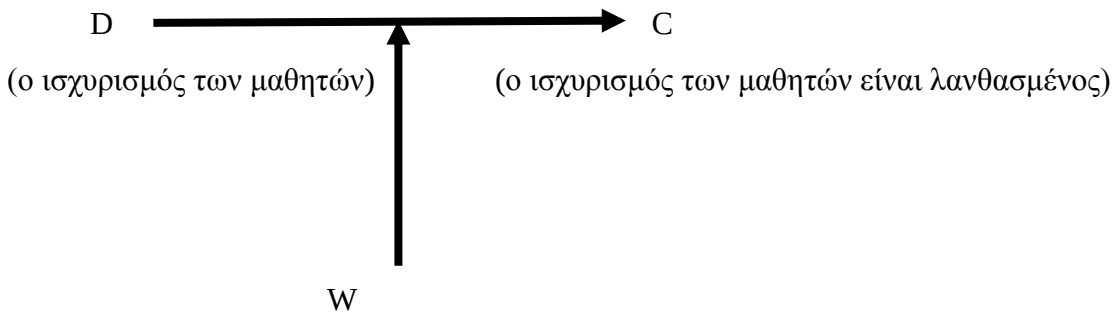
Τ13: θα του ζητούσα να μου πει το θεώρημα που εφαρμόζει. Έτσι θα βλέπαμε πως δεν υπάρχει τέτοιο θεώρημα. Το υπάρχον θεώρημα λέει πως είναι ίσα τα τρίγωνα με ίσες πλευρές και όχι με ίσες γωνίες.

Αρχικά, ο καθηγητής θεωρεί ότι στην άσκηση 2 υπάρχει ένα θεώρημα (η τριγωνική ανισότητα) το οποίο φαίνεται να έχει χρησιμοποιηθεί από το φοιτητή με ακατάλληλο τρόπο, ενώ ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει τέτοιο θεώρημα στην άσκηση 1. Επίσης ισχυρίστηκε ότι στην άσκηση 1 υπήρχε ένας κανόνας (δεν διαιρούμε ανισότητες) που έπρεπε να ακολουθήσει ο φοιτητής. Σύμφωνα με το μοντέλο του Toulmin προέκυψαν δύο περιπτώσεις συλλογιστικής για τους τρόπους που οι καθηγητές χρησιμοποιούν τη θεωρία. Η πρώτη (σχήμα 25), περιγράφει τις περιπτώσεις που ο καθηγητής απορρίπτει τον ισχυρισμό του φοιτητή είτε λόγω μη ύπαρξης θεωρήματος είτε λόγω ακατάλληλης χρήσης του από τους μαθητές. Η δεύτερη περίπτωση (σχήμα 26) αποδεικνύει το λάθος του ισχυρισμού του φοιτητή επικαλούμενη ένα γενικό κανόνα. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η μέθοδος αυτή δεν είναι παιδαγωγικά σωστή, γιατί καλλιεργεί στους μαθητές μία συμπεριφορά αποδοχής οποιασδήποτε μαθηματικής δήλωσης που έχει διατυπωθεί από τον καθηγητή, χωρίς περεταίρω έρευνα. Στην περίπτωση αυτή θα ήταν χρήσιμο ένα αντιπαράδειγμα, που θα λειτουργούσε ως υποστήριξη στην εγγύηση.



(¨μη ύπαρξη ενός σχετικού θεωρήματος¨ ή
¨ακατάλληλη εφαρμογή ενός θεωρήματος¨)

Σχήμα 25



(γενικός κανόνας: ¨ δεν διαιρούμε ανισότητες)

Σχήμα 26

Υπήρξαν καθηγητές που χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα για τη διάψευση των ισχυρισμών του φοιτητή. Οκτώ από αυτούς χρησιμοποίησαν μόνο αντιπαράδειγμα ως εγγύηση στην επιχειρηματολογία τους (σχήμα 27 (α)), ενώ τέσσερις χρησιμοποίησαν το αντιπαράδειγμα ως υποστήριξη σε ένα θεωρητικό επιχείρημα (σχήμα 27(β)).

D: ο ισχυρισμός των μαθητών, C: το συμπέρασμα των καθηγητών ότι ο ισχυρισμός των μαθητών είναι λανθασμένος, W_1: ένα αντιπαράδειγμα, W_2: ένα θεωρητικό επιχείρημα, B: ένα αντιπαράδειγμα

Σχήμα 27

Στις τρεις από τις τέσσερις περιπτώσεις που χρησιμοποιήθηκαν τα αντιπαραδείγματα υποστηρικτικά στη θεωρία ο συλλογισμός ήταν σωστός, όπως για παράδειγμα ο καθηγητής K6 που δήλωσε ότι *¨δεν μπορούμε να διαιρέσουμε ανισότητες¨* και στη συνέχεια έδωσε ένα αντιπαράδειγμα. Στην περίπτωση του καθηγητή K16 όμως, το θεωρητικό επιχείρημα δεν στηρίζει τον ισχυρισμό. Ο συγκεκριμένος καθηγητής κατά τη γραπτή του απάντηση, αρχικά δήλωσε ότι *¨δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις απόλυτες τιμές αν δεν ελέγξουμε ότι ισχύει* $\alpha_n - b \geq 0$ *και* $b_n - b \geq 0$¨ και στη συνέχεια έδωσε ένα αντιπαράδειγμα. Στη συνέντευξη που ακολούθησε διαπιστώθηκε ότι ο καθηγητής χρησιμοποίησε την αρχική δήλωση ως εγγύηση*: ¨αν ο μαθητής είχε κάνει τον έλεγχο (αν* $\alpha_n - b \geq 0$ *και* $b_n - b \geq 0$*) θα διαπίστωνε ότι δε μπορεί να γράψει* $|\alpha_n - b| \leq |b_n - b|$¨. Η δήλωση αυτή περισσότερο θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ανασκευή του επιχειρήματος παρά ως εγγύηση, ενώ το αντιπαράδειγμα λειτούργησε ανεξάρτητα ως εγγύηση.

Σε πολλές περιπτώσεις παρατηρήθηκε το φαινόμενο οι καθηγητές να χρησιμοποιούν και θεωρητικά επιχειρήματα και αντιπαραδείγματα. Στις συνεντεύξεις που ακολούθησαν προέκυψε ότι οι καθηγητές χρησιμοποιούσαν τα αντιπαραδείγματα συμπληρωματικά στη θεωρία ή όταν δεν υπήρχε σχετικό θεώρημα. Πίστευαν ότι η

θεωρία είναι ισχυρότερο εργαλείο από τα αντιπαραδείγματα κατά τη διάψευση των λανθασμένων ισχυρισμών και θεωρούσαν τα αντιπαραδείγματα ως εξαιρέσεις. Αυτό είναι εμφανές στη συνέντευξη με τον καθηγητή Κ16 που ακολουθεί.

1. Κ16: Αν ο μαθητής είχε κάνει τον έλεγχο ($\alpha_n - b \geq 0$ και $b_n - b \geq 0$) θα διαπίστωσε ότι δε μπορεί να γράψει $|\alpha_n - b| \leq |b_n - b|$
2. Ε: Και τι γίνεται με την διαίρεση των ανισοτήτων (στην άσκηση 1);
3. Κ16: Εκεί δεν μπορεί να ελέγξει τίποτα. Ακόμη και στην περίπτωση που είναι θετικοί οι αριθμοί δεν μπορούμε να κάνουμε διαίρεση.
4. Ε: Σε αυτή την περίπτωση (στην άσκηση 1) θα προτιμούσατε να αναφερθείτε σε μια γενικότερη περίπτωση ή να χρησιμοποιήσετε το παράδειγμα που δώσατε;
5. Κ16: Γιατί όχι; Αν έχουμε κάτι που είναι έγκυρο…
6. Ε: Τι δείχνει το παράδειγμα που χρησιμοποιήσατε (στην άσκηση 1);
7. Κ16: Δείχνει μία εξαίρεση
8. Ε: Τι υποδεικνύει αυτό;
9. Κ16: Ότι κάτι δεν ισχύει
10. Ε: Δεν είναι αρκετό αυτό για να μας πείσει πως αυτό δεν είναι σωστό;
11. Κ16: Αυτό ναι αλλά όχι ένα θεώρημα. Τα θεωρήματα είναι πάντα έγκυρα

Στη συνέντευξη αυτή (σειρές 1-3) ο καθηγητής Κ θεωρούσε ότι στην άσκηση 3 υπήρχε ένα θεώρημα που λειτουργούσε ως εγγύηση, κάτι που δε συνέβαινε στην άσκηση 1. Στην ερώτηση του ερευνητή Ε για το ρόλο του αντιπαραδείγματος και του θεωρήματος (σειρά 4), ο καθηγητής απαντά ότι το αντιπαράδειγμα θεωρείται εξαίρεση που υποδεικνύει ότι κάτι είναι άκυρο (σειρές 5-9). Και συνεχίζει, θεωρώντας ότι είναι καλύτερο να υπάρχει ένα θεώρημα που θα διαψεύδει έναν ισχυρισμό (σειρά 11).

Τα αντιπαραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν από τους καθηγητές για τη διάψευση των λανθασμένων ισχυρισμών του φοιτητή, ταξινομούνται ως προς τη γενικότητά τους και ως προς πλαίσιο με το οποίο σχετίζονται. Ο βαθμός γενικότητας ποικίλοι, ανάλογα με το πλήθος αντιπαραδειγμάτων που μπορούν να παραχθούν στη

συνέχεια. Για παράδειγμα οι καθηγητές Κ4 και Κ6 έδωσαν αντίστοιχα τα εξής αντιπαραδείγματα για την άσκηση 1 :

“1<2<3 και 1<3<100 αλλά 1<2/3< 3/100, το οποίο δεν ισχύει” (άσκηση 1, Κ4)
“1<3<5 και 1<4<10,έτσι 1<3/4<5/10 που δεν ισχύει”(άσκηση 1,Κ6)

Και οι δυο καθηγητές χρησιμοποίησαν από ένα αντιπαράδειγμα με διπλή ανισότητα. Ο καθηγητής Κ4 επέλεξε να χρησιμοποιήσει ένα μεγάλο αριθμό στη δεύτερη σχέση, δημιουργώντας ένα πιο γενικό παράδειγμα, αφού μετά τη διαίρεση θα προέκυπτε ένα πολύ μικρό κλάσμα. Με τη στρατηγική αυτή γίνεται ξεκάθαρος ο λόγος για τον οποίο δεν διαιρούνται οι ανισότητες και ταυτόχρονα δίνεται η δυνατότητα για τη δημιουργία πολλών αντιπαραδειγμάτων. Σε αντίθεση ο καθηγητής Κ6 χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα που δεν προσφέρει εξηγήσεις για το λόγο που δεν διαιρούνται ο ανισότητες.

Δυο άλλοι καθηγητές ο Κ16 και ο Κ13 έδωσαν τα παρακάτω αντιπαραδείγματα:

“1<3<5 και 2<3<7, έτσι 1/2<1<5/7 το οποίο δεν ισχύει (άσκηση 1,Κ16)
“Αν $a = 1/2$, $b = -1/2$, $c = 1$ έχουμε $|a + b + c| = |1/2 - 1/2+1| = 1$ ενώ $|1/2| + |-1/2| + |1| = 2$” (άσκηση 2, Κ13)

Ο καθηγητής Κ16 επέλεξε να χρησιμοποιήσει τον ίδιο αριθμό στη μέση των δυο ανισοτήτων και έτσι κατέληξε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, επιλέγοντας ο μεγαλύτερος αριθμός της δεύτερης ανισότητας να είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της πρώτης. Ο καθηγητής Κ13 χρησιμοποιώντας αντίθετους αριθμούς έφτασε σε αντίφαση. Και οι δύο στρατηγικές λειτούργησαν βοηθητικά προς τους μαθητές προσφέροντας τους πληθώρα αντιπαραδειγμάτων. Παρόλα αυτά θα μπορούσαν να λειτουργήσουν και παραπλανητικά, οδηγώντας τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι η δήλωση τους είναι αναληθής κάτω από ειδικές συνθήκες και θεωρώντας τα αντιπαραδείγματα ως εξαιρέσεις.

Σχετικά με το πλαίσιο που σχετίζονταν τα αντιπαραδείγματα, αυτό μπορεί να παρέμενε στην άλγεβρα ή στην ανάλυση. Για παράδειγμα ο καθηγητής Κ4

χρησιμοποίησε αριθμούς στο αντιπαράδειγμα της εργασίας 3 ενώ ο καθηγητής Κ16 ακολουθίες, όπως φαίνεται παρακάτω:

"$0 \leq 2 \leq 3$ αλλά αυτό δεν σημαίνει πως $|2–4|\leq|3–4|$" (Κ4)

"αν $\alpha_n = 1/n + 3$ και $b_n = 1/n + 4$ τότε $1/n + 3 – 4 < 1/n + 4 – 4$ έτσι $(1 - n)/n < 1/n$. Ωστόσο, $|(1 - n)/n| < |1/n|$ δεν ισχύει για κάθε $n \neq /1,2$. Για παράδειγμα, αν $n = 3$ έχουμε $| -2 | > 1$" (Κ16).

Ο καθηγητής Κ4 επέλεξε να αφαιρέσει έναν αριθμό μεγαλύτερο από τους δοσμένους στην ανισότητα κάνοντας ξεκάθαρη τη στρατηγική του. Η λογική που πιθανόν κρύβεται πίσω από αυτή τη στρατηγική είναι πως αν έχουμε τρεις αριθμούς a,b,c ώστε $a < b < c$, τότε η απόσταση του c από το a είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του c από το b, δηλαδή $|a - c| > |b - c|$. Όμοια και ο καθηγητής Κ16 δημιούργησε ένα αντιπαράδειγμα, χρησιμοποιώντας όμως ακολουθίες. Στο παράδειγμα αυτό πιθανόν οι μαθητές να δυσκολεύονταν περισσότερο να αντιληφθούν την έννοια της απόλυτης τιμής ως απόσταση.

Οι ερευνητές καταλήγουν ότι ο ρόλος των αντιπαραδειγμάτων για την διάψευση των άκυρων ισχυρισμών των μαθητών είναι υποτιμημένος. Λίγοι καθηγητές χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα στην επιχειρηματολογία τους και οι περισσότεροι θέλησαν να βασιστούν στη θεωρία. Οι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν ότι η διάψευση με τη χρήση θεωρημάτων είναι ισχυρότερη από ότι με αντιπαραδείγματα, τα οποία αντιμετωπίστηκαν ως εξαιρέσεις, με την έννοια που είχε δοθεί από το Lakatos (1976). Οι ίδιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν τα αντιπαραδείγματα συμπληρωματικά στη θεωρία ή σε περιπτώσεις όπου δεν υπήρχε κάποιο κατάλληλο θεώρημα. Σχετικά με τη δομή της επιχειρηματολογίας αναγνωρίστηκαν τρία είδη συλλογιστικής των καθηγητών. Το σκεπτικό του πρώτου είδους ήταν ή μαθηματικά λανθασμένο ή παιδαγωγικά ακατάλληλο και βασίζονταν σε ένα θεωρητικό επιχείρημα ως εγγύηση. Δηλαδή οι καθηγητές απέρριπταν ένα ισχυρισμό λόγω έλλειψης ενός θεωρήματος ή ακατάλληλης εφαρμογής του, δίνοντας πολλές φορές ένα γενικό κανόνα. Στο δεύτερο είδος συλλογιστικής δίνονταν μόνο αντιπαραδείγματα. Αυτό ήταν σωστό από μαθηματική άποψη, αλλά η θετική συμβολή του εξαρτιόταν από το είδος των αντιπαραδειγμάτων και το πόσο ξεκάθαρα ήταν για τους μαθητές. Το τρίτο είδος συλλογιστικής ενσωματώνει επιχειρήματα και

αντιπαραδείγματα με δυο διαφορετικούς τρόπους. Το αντιπαράδειγμα δικαιολογεί ένα μαθηματικά σωστό θεωρητικό επιχείρημα και καθιστά την επιχειρηματολογία πειστικότερη για τον μαθητή, αλλά και το θεωρητικό επιχείρημα είναι μια ιδιότητα στην οποία ο ισχυρισμός ισχύει μόνο υπό προϋποθέσεις. Αυτό το θεωρητικό επιχείρημα δεν υποστηρίζει το συμπέρασμα αλλά λειτουργεί ως ανασκευή του επιχειρήματος, ενώ το αντιπαράδειγμα είναι στην πραγματικότητα η εγγύηση. Στην τελευταία περίπτωση το θεωρητικό επιχείρημα μπορεί να οδηγήσει στην εικασία πως ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος και μπορεί να υποστηρίξει τη δημιουργία ενός αντιπαραδείγματος εξαιρώντας κάποιες περιπτώσεις.

Διερευνώντας τη συλλογιστική με την οποία οι καθηγητές διαψεύδουν τους λανθασμένους ισχυρισμούς των μαθητών τους οι Potari, Zachariades & Zaslavsky (2009) πραγματοποίησαν μία ακόμη έρευνα σε γεωμετρικό πκλαίσιο. Όπως και στην προηγούμενη μελέτη οι δυο κύριες προσεγγίσεις που εντοπίστηκαν ήταν η χρήση γνωστών θεωρημάτων και η χρήση αντιπαραδειγμάτων. Η χρήση σωστών αντιπαραδειγμάτων αποδείχτηκε δύσκολη διαδικασία, που απαιτούσε από τον εκπαιδευτικό γνώσεις σχετικά με το θέμα μελέτης, διδακτική εμπειρία και ενημέρωση για τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών του.

Στην έρευνα συμμετείχαν 76 εκπαιδευτικοί που ήταν υποψήφιοι σε ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Οι έξι από αυτούς ήταν δάσκαλοι στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι υπόλοιποι είχαν πτυχίο στα μαθηματικά. Τριάντα ήταν εν ενεργεία εκπαιδευτικοί μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κατά τη διαδικασία επιλογής για ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα, οι εκπαιδευτικοί έδωσαν τρίωρες γραπτές εξετάσεις σε πέντε δραστηριότητες που αφορούσαν υποθετικά διδακτικά συμβάντα. Οι απαντήσεις τους κρίθηκαν από μαθηματική και παιδαγωγική άποψη και ακολούθησε συνέντευξη 15-30 λεπτών με 45 από αυτούς. Παρακάτω αναλύεται μία δραστηριότητα που αναφέρεται στις ιδιότητες και την ισότητα των τριγώνων, που αποτελεί μέρος του μαθήματος της Ευκλείδειας γεωμετρίας που διδάσκεται στη δέκατη τάξη (Α΄ Λυκείου) των ελληνικών σχολείων.

Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα μάθημα Γεωμετρίας στην δέκατη τάξη ο εκπαιδευτικός έδωσε την ακόλουθη άσκηση:

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΗΖ έχουν ΒΓ = ΗΖ = 12 και ΑΒ = ΕΗ = 7 και οι γωνίες ΑΓΒ και ΕΖΗ είναι ίσες με 30 μοίρες. Εξετάστε αν τα δύο τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

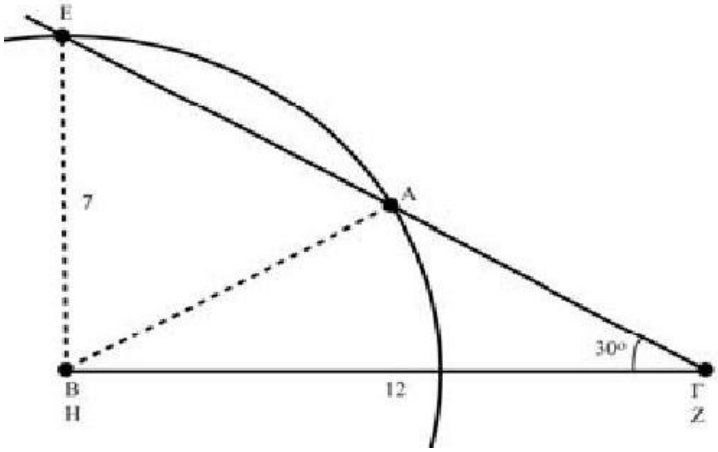
Δύο μαθητές συζήτησαν την παραπάνω άσκηση και εξέφρασαν τις παρακάτω απόψεις:

Μαθητής Α: Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μία γωνία ίσες. Επομένως είναι ίσα.

Μαθητής Β: Γνωρίζουμε από τη θεωρία πως δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες. Επομένως τα δύο παραπάνω τρίγωνα δεν είναι μεταξύ τους ίσα.

Πώς θα αντιδρούσατε αν αυτός ο διάλογος λάμβανε χώρα στην αίθουσα διδασκαλίας σας;

Ο μαθητής Α φαίνεται να υπερ-γενικεύει το γνωστό θεώρημα ¨όταν δύο τρίγωνα έχουν τις δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία σε αυτές αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα¨. Έτσι εκφράζει την πεποίθηση ότι δύο πλευρές και μία γωνία ίσες, είναι αρκετά για την ισότητα των τριγώνων. Για την διάψευση του λανθασμένου ισχυρισμού του μαθητή Α μπορούν να ακολουθηθούν τρεις προσεγγίσεις: α) η χρήση κατάλληλου γεωμετρικού αντιπαραδείγματος (σχήμα 28), β) η απόδειξη ενός γενικού θεωρήματος και η εφαρμογή του στη συγκεκριμένη περίπτωση και γ) η χρήση των νόμων ημιτόνων και συνημίτονων της τριγωνομετρίας.

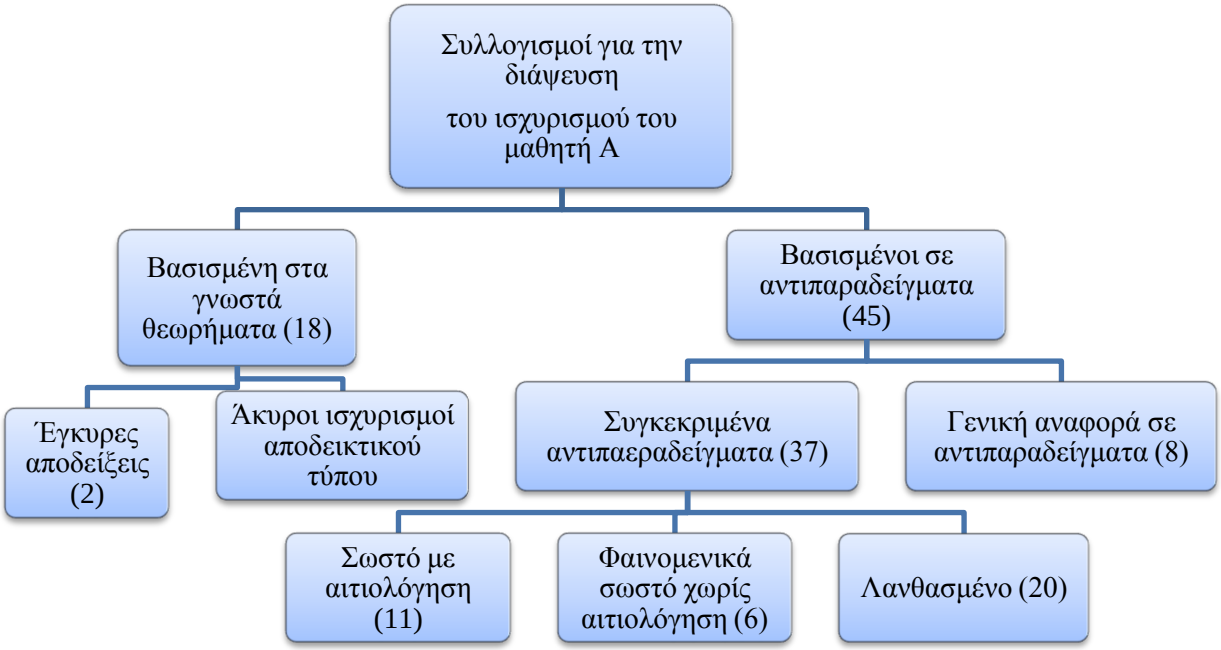


Σχήμα 28: γεωμετρική κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος

Στην περίπτωση της γεωμετρικής κατασκευής, όπως φαίνεται παραπάνω, κατασκευάζονται δύο άνισα τρίγωνα με πλευρές α και β (12 και 7) με α>β και γωνία Β (30^0) απέναντι από τη μικρότερη πλευρά. Στην ειδική περίπτωση όπου sinB=β/α το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ορίζεται μοναδικά. Το γενικό θεώρημα που μπορεί να αποδειχθεί είναι ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες και μία μη περιεχόμενη γωνία ίση τότε είναι ίσα ή οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι παραπληρωματικές. Ακολουθώντας την προσέγγιση με τη χρήση των νόμων ημιτόνων και συνημίτονων και εφαρμόζοντας το νόμο συνημίτονων για τη δοσμένη γωνία, προκύπτουν δυο τιμές για την τρίτη πλευρά. Εφαρμόζοντας το νόμο ημιτόνων προκύπτουν δυο τιμές για τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά α, μία οξεία γωνία και η συμπληρωματική της. Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά τρίγωνα που ικανοποιούν τα δεδομένα. Αν και για να είναι μαθηματικά πλήρεις οι παραπάνω απαντήσεις που στηρίζονται στη θεωρία, απαιτείται να αποδειχθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν αντίστοιχα τρίγωνα , τέτοιες απαντήσεις θεωρήθηκαν σωστές.

Από τους 76 εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν οι 3 δεν έδωσαν καμία απάντηση ενώ 8 υποστήριξαν ότι τα τρίγωνα ήταν ίσα. Οι υπόλοιποι 65 εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι τα τρίγωνα δεν ήταν απαραίτητα ίσα, με τους 63 από αυτούς να δίνουν ρητή αιτιολόγηση του ισχυρισμού τους όπως φαίνεται αναλυτικά στο παρακάτω δενδροδιάγραμμα (σχήμα 29). Δεκαοκτώ από τους 63 καθηγητές στήριξαν

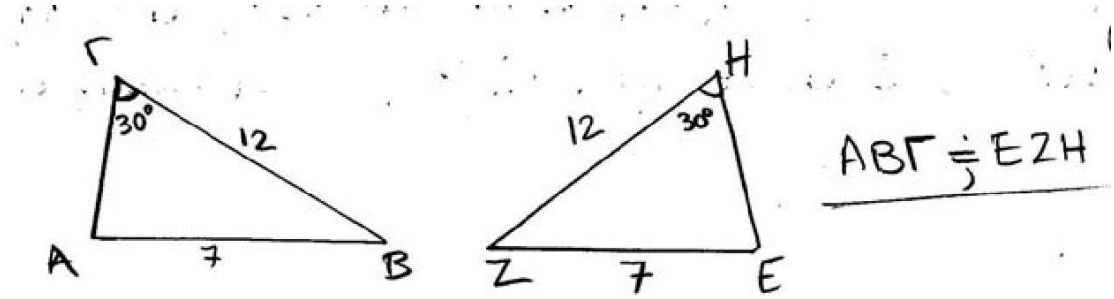
την απάντησή τους σε μαθηματικά θεωρήματα και 45 ισχυρίστηκαν ότι ήταν απαραίτητο ένα αντιπαράδειγμα.



Σχήμα 29

Από τους εκπαιδευτικούς που βασίστηκαν σε γνωστά θεωρήματα, μόνο δύο έδωσαν πλήρεις και έγκυρες αποδείξεις, οι υπόλοιποι έδωσαν άκυρες αποδείξεις με αιτιολογίες αποδεικτικού τύπου. Οι εκπαιδευτικοί που έδωσαν σωστές αποδείξεις βασίστηκαν στην τριγωνομετρία, συγκεκριμένα ο Κ64 χρησιμοποίησε το νόμο ημιτόνων και ο Κ32 το νόμο συνημιτόνων. Οι υπόλοιποι 16 καθηγητές για να στηρίξουν τον ισχυρισμό τους επικαλέστηκαν τα γνωστά θεωρήματα. Ο καθηγητής Κ10 δήλωσε συγκεκριμένα ότι ¨*Ο μαθητής Α απάντησε χωρίς να λάβει υπόψη του τα γνωστά κριτήρια ισότητας τριγώνων. Θα τον ενθάρρυνα να σχεδιάσει τα δύο τρίγωνα ώστε να συνειδητοποιήσει ότι τα κριτήρια δεν μπορούν να εφαρμοστούν στην συγκεκριμένη περίπτωση*¨. Αυτοί οι καθηγητές πίστευαν ότι η συλλογιστική τους προσέφερε έγκυρες αποδείξεις.

Από τους καθηγητές που στηρίχτηκαν σε αντιπαραδείγματα, μόνο 11 από αυτούς έδωσαν συγκεκριμένα αντιπαραδείγματα με σωστές αιτιολογήσεις. Ο καθηγητής Κ33 έγραψε ότι ¨*θα ζητούσα από τους μαθητές να προσπαθήσουν να αποδείξουν πως αν ένα τρίγωνο έχει δύο πλευρές και τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μία πλευρά ίσες με τις αντίστοιχες πλευρές και τη γωνία ενός άλλου τριγώνου , τότε οι αντίστοιχες γωνίες που δεν περιέχονται στις δύο πλευρές είναι ή ίσες ή συμπληρωματικές*¨. Οι οκτώ αναφέρθηκαν γενικά στην ανάγκη χρήσης ενός αντιπαραδείγματος αναφέροντας ότι ¨*... για να πείσουμε το μαθητή Α θα του δείχναμε κάποια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές και μία γωνία ίση αλλά δεν είναι ίσα*¨ (Κ23) ή ¨*θα ζητούσαμε από τους μαθητές να πειραματιστούν με τα σχήματα και να κάνουν πολλές διαφορετικές προσπάθειες, έτσι ο μαθητής Α θα έβλεπε ένα καλό αντιπαράδειγμα που θα έρχονταν σε αντίθεση με την άποψή του*¨ (Κ18). Είκοσι από τους 37 καθηγητές που έδωσαν συγκεκριμένα αντιπαραδείγματα, έθεσαν λανθασμένα αντιπαραδείγματα. Κάποιοι σχεδίασαν δύο τρίγωνα που ικανοποιούσαν τις συνθήκες και ισχυρίστηκαν ότι δεν ήταν ίσα ενώ έμοιαζαν ως τέτοια. Αυτά θεωρήθηκαν από τους ερευνητές ακατάλληλα. Άλλοι έδωσαν παραδείγματα με πολλούς περιορισμούς που ήταν ουσιαστικά ανύπαρκτα, όπως ο καθηγητής Κ72 που στην προσπάθειά του να φτιάξει δυο τρίγωνα που δεν ήταν ίσα, σχεδίασε δύο τρίγωνα που έμοιαζαν ίσα και συμμετρικά (σχήμα 35) .



Σχήμα 30

Κάποιοι εκπαιδευτικοί εξέτασαν τη διαφοροποίηση σε ένα ζεύγος γωνιών χωρίς να δώσουν συγκεκριμένες τιμές, ενώ κάποιοι άλλοι έδιναν συγκεκριμένες τιμές στις γωνίες που ήταν ανάμεσα στις γνωστές πλευρές. Υπήρξαν καθηγητές οι οποίοι δεν έλεγξαν την ύπαρξη του τριγώνου που ζητούσαν να σχηματίσουν οι μαθητές τους, όπως ο Κ74 που ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΖΕ με ΒΓ=ΖΗ=12 και ΑΒ=ΕΖ=7, τις γωνίες ΑΓΒ=ΕΗΖ=30^0, τη γωνία ΑΒΓ=90^0

και τη γωνία ΕΖΗ=45^0. Έξι καθηγητές έδωσαν αντιπαραδείγματα που ήταν φαινομενικά σωστά αλλά δεν αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους, σχεδιάζοντας δύο τρίγωνα που ικανοποιούσαν τα δεδομένα και φαίνονταν να είχαν τις απέναντι γωνίες από την πλευρά των 12 μονάδων συμπληρωματικές.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ένα σοβαρό επιστημολογικό πρόβλημα που προέκυψε από την παραπάνω εργασία, είναι η ύπαρξη των τριγώνων στα δοσμένα αντιπαραδείγματα. Στη συνέντευξη που ακολούθησε οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν σχετικά με την ύπαρξη των τριγώνων που είχαν σχεδιάσει και οι απαντήσεις τους βασίστηκαν σε κάποιο γνωστό θεώρημα ή σε μία εικόνα ή τέλος περιέγραψαν τον τρόπο σχεδίασης. Κάποιες από τις απαντήσεις που έδωσαν ήταν οι εξής: *«Αυτό το αντιπαράδειγμα το έχω δει σε ένα σχολικό βιβλίο»* (Κ32 αναφέρεται σε μία εικόνα) *«Αν θυμάμαι καλά υπάρχει ένα θεώρημα που λέει πως οι μη περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες ή συμπληρωματικές»* (Κ40 βγάζοντας συμπεράσματα από ένα θεώρημα) *«Το άθροισμα των γωνιών τους είναι 180 μοίρες… Μπορούν να κατασκευαστούν… μπορώ να διαφοροποιήσω τις γωνίες»* (Κ69, βγάζοντας συμπεράσματα από θεώρημα) *«Τα έφτιαξα, μέτρησα τις πλευρές τους με το χάρακα»* (Κ30 περιγράφοντας τη διαδικασία σχεδίασης). Κάποιοι άλλοι θεώρησαν την ερώτηση για την ύπαρξη των τριγώνων περιττή, δίνοντας απαντήσεις όπως: *«Ναι γιατί δε μπορούμε να τα σχεδιάσουμε; Πρέπει να το αποδείξουμε ότι υπάρχουν;»* (Κ45) *«Είναι δυνατόν να μην υπάρχει;»* (Κ60) *«Νόμιζα πως ήταν σίγουρο ότι υπάρχουν δύο τρίγωνα (που ικανοποιούν τις συγκεκριμένες συνθήκες) που δεν είναι ίσα. Έτσι άνοιξα λίγο την γωνία και μετακίνησα την πλευρά σε εκείνη τη διεύθυνση»* (Κ73).

Ένα ακόμη πρόβλημα που διαπιστώθηκε κατά τη διαδικασία ήταν η πεποίθηση των εκπαιδευτικών ότι υπάρχουν πολλά αντιπαραδείγματα στη δοσμένη εργασία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο καθηγητής Κ39 που στην αρχή της συνέντευξης υποστήριξε ότι θα σχεδίαζε δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΗ με τα δοσμένα στοιχεία και τις γωνίες ΑΒΓ και ΕΖΗ οξείες και τη μία μικρότερη από την άλλη, όπου με διαφανές χαρτί θα αποδεικνύονταν ότι τα τρίγωνα δεν ήταν ίσα. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης διαπίστωσε ότι τα τρίγωνα θα έπρεπε να ήταν το ένα οξυγώνιο και το άλλο αμβλυγώνιο και κατέληξε να χρησιμοποιήσει το νόμο ημιτόνων για να αποδείξει την υπόθεση.

Τέλος, πολλοί εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι η μη εφαρμογή των γνωστών σχετικών θεωρημάτων σήμαινε (λανθασμένα) πως ο ισχυρισμός ήταν λανθασμένος. Ο καθηγητής Κ11 στη γραπτή του απάντηση προς το μαθητή ανέφερε: *«το πρόβλημα δεν ικανοποιεί το κριτήριο Π-Γ-Π άρα από τα δοσμένα στοιχεία δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα».* Παρόμοια ήταν και η απάντηση του καθηγητή Κ47 και παρότι η πεποίθησή του αμφισβητήθηκε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, φάνηκε ότι ήταν πολύ ισχυρή για να μεταβληθεί όπως φαίνεται από το ακόλουθο απόσπασμα:

Κ47: Τα δύο τρίγωνα δεν είναι απαραίτητα ίσα

Ε: Πώς το ξέρετε αυτό;

Κ47: Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο Π – Γ – Π

Ε: εντάξει δεν μπορεί να εφαρμοστεί ένα γνωστό κριτήριο. Αλλά πως γνωρίζετε πως δεν υπάρχει άλλος τρόπος για την απόδειξη της ισότητας των δύο τριγώνων.

Κ47:Με τα κριτήρια που διδάσκουμε δεν μπορούμε να αποδείξουμε την ισότητα.

Υπήρξαν κάποιοι εκπαιδευτικοί που ανέφεραν ότι επειδή δεν ίσχυαν τα τρία κριτήρια ισότητας (Π-Π-Π, Π-Γ-Π, Γ-Π-Γ) τα τρίγωνα δεν ήταν απαραίτητα ίσα. Αυτός ο ισχυρισμός, αν και φαίνεται λογικός, μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που η μικρότερη πλευρά που δίνονταν ήταν 6 αντί για 7 τότε τα τρίγωνα θα ήταν ορθογώνια και επομένως ίσα. Αν και ο παραπάνω τρόπος διάψευσης δεν ήταν έγκυρος μαθηματικά, παρόλα αυτά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία εικασιών, όπως έπραξε για παράδειγμα ο καθηγητής Κ21, που αρχικά δήλωσε ότι δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα γνωστά κριτήρια και έπειτα έδωσε ένα αντιπαράδειγμα.

Συνολικά από τους 76 καθηγητές που συμμετείχαν μόνο 13 διέψευσαν σωστά το λανθασμένο ισχυρισμό του υποτιθέμενου μαθητή. Οι έντεκα από αυτούς χρησιμοποίησαν αντιπαράδειγμα και οι δύο βασίστηκαν σε θεωρήματα. Υπήρξαν καθηγητές που επιβεβαίωσαν το λανθασμένο ισχυρισμό και άλλοι που αναφέρθηκαν στην ύπαρξη αντιπαραδείγματος χωρίς όμως να το παρουσιάσουν. Από την έρευνα προκύπτει ότι οι εκπαιδευτικοί βασίστηκαν στον προσωπικό χώρο παραδειγμάτων τους για να αντλήσουν υλικό. Κάποιοι που προσπάθησαν να σχεδιάσουν δύο τυχαία τρίγωνα δεν κατάφεραν να δώσουν ένα σωστό αντιπαράδειγμα, αφού στο

συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχει μόνο ένα. Έτσι η απαίτηση να το σκεφτούν εκείνη τη στιγμή οι καθηγητές φάνηκε να είναι πολύ δύσκολη. Ιδιαίτερη ανησυχία προκάλεσε στους ερευνητές η παράβλεψη ελέγχου ορθότητας των δοσμένων παραδειγμάτων από τους καθηγητές καθώς επίσης και η υπερβολική στήριξή τους σε γνωστά θεωρήματα που συνήθως συμπεριλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω οι γνώσεις που πρέπει να έχουν οι εκπαιδευτικοί ώστε να επιλέξουν και να κατασκευάσουν σωστά παραδείγματα για τη διδασκαλία των μαθηματικών, περιλαμβάνουν άρτια γνώση του μαθηματικού αντικειμένου, γνώση της μάθησης των μαθητών και πολύ καλή γνώση της παιδαγωγικής. Η ποιότητα της μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών έχει επιπτώσεις στο περιεχόμενο και στον τρόπο διδασκαλίας. Η γνώση του τρόπου μάθησης των μαθητών αναφέρεται στην κατανόηση από τους εκπαιδευτικούς του πώς οι μαθητές μαθαίνουν και πώς η προϋπάρχουσα γνώση επηρεάζει τη νέα. Επίσης σχετίζεται με τον εντοπισμό των δυνατοτήτων και αδυναμιών των μαθητών, τη συνειδητοποίηση των συνεπειών της υπερ- γενίκευσης των παραδειγμάτων ή την έλλειψη γενικεύσεων και την τάση των μαθητών να εστιάζουν σε άσχετα χαρακτηριστικά. Η γνώση του παιδαγωγικού περιεχομένου φαίνεται στη μεταφορά των μαθηματικών αντικειμένων ώστε να διευκολυνθεί η μάθηση μέσω αναπαραστάσεων και διατυπώσεων που καθιστούν τη έννοια κατανοητή. Στην εργασία της Zaslavsky (2008) παρουσιάζεται το περίπλοκο σκεπτικό και η εξειδικευμένη γνώση που είναι συχνά αναγκαία εργαλεία για την δημιουργία εκπαιδευτικά σωστών επιλογών και την αναπαραγωγή κατάλληλων παραδειγμάτων που θα εξυπηρετούν συγκεκριμένους στόχους εκμάθησης.

Τα παραδείγματα είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών και σημαντικό στοιχείων γνώσεων των εκπαιδευτικών. Συντελούν στην ανάπτυξη αφαιρετικής και αναλογικής σκέψης και είναι βασικής σημασίας για τη γενίκευση. Σύμφωνα με τους Leinhardt, Zaslavsky, και Stein (1990), η κατασκευή μιας εξήγησης για την διδασκαλία στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό σε συγκεκριμένες επιλογές παραδειγμάτων: «*Οι επεξηγήσεις αποτελούνται από τις ενορχηστρώσεις των αποδείξεων, των αναλογικών αναπαραστάσεων και των παραδειγμάτων […]. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των επεξηγήσεων είναι η χρήση καλά κατασκευασμένων*

παραδειγμάτων, παραδειγμάτων που τονίζουν την ουσία και περιορίζουν τις γενικεύσεις, παραδειγμάτων που είναι ισορροπημένα και δεν είναι αντιπαραδείγματα ή παραδείγματα που δεν λαμβάνουν υπόψη όλες τις μεταβλητές».

Οι Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson και Zaslavsky (2006) αναφέρουν δύο βασικά χαρακτηριστικά τα οποία καθιστούν ένα παράδειγμα παιδαγωγικά χρήσιμο. Ένα παράδειγμα θα πρέπει να είναι ξεκάθαρο, δηλαδή να μεταφέρει στο κοινό που απευθύνεται την ουσία του θέματος που προορίζεται να εξηγήσει. Θα πρέπει επίσης να ενθαρρύνει τη γενίκευση, δηλαδή, θα πρέπει να τονίζει τα απαραίτητα ειδικά χαρακτηριστικά που συνιστούν ένα παράδειγμα , και ταυτόχρονα να τονίζει τα χαρακτηριστικά που είναι αυθαίρετα και μεταβλητά. Προφανώς, είναι υποκειμενικός ο βαθμός στον οποίο ένα παράδειγμα είναι ξεκάθαρο ή χρήσιμο. Τα συγκεκριμένα στοιχεία και η αναπαράσταση των παραδειγμάτων και αντίστοιχα το πόσο εστιάζει σε αυτά ο εκπαιδευτικός έχουν σημαντικό αντίκτυπο σε αυτά που τραβούν την προσοχή των μαθητευόμενων και κατ' επέκταση στην μαθηματική τους κατανόηση. Έτσι, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να παρέχει ευκαιρίες εκμάθησης οι οποίες περιλαμβάνουν μια μεγάλη ποικιλία από «χρήσιμα παραδείγματα» που ικανοποιούν τις ποικίλες ανάγκες και τα διαφορετικά χαρακτηριστικά των μαθητών (Zaslavsky,2008).

Οι Rowland, Thwaites και Huckstep (2003) αναγνωρίζουν τρεις τύπους κακής επιλογής παραδειγμάτων από εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης:

- Επιλογή υποδειγμάτων που επισκιάζουν τον ρόλο των μεταβλητών (για παράδειγμα, κατά την εκμάθηση της ώρας η χρήση του παραδείγματος των έξι και μισή ή σε ένα σύστημα συντεταγμένων η χρήση παραδειγμάτων με σημεία που έχουν την ίδια τιμή και για τις δύο μεταβλητές)
- Επιλογές αριθμών που χρησιμοποιούνται για την επεξήγηση αριθμητικών διαδικασιών ενώ θα ήταν λογικότερο με τους επιλεγμένους αριθμούς να εκτελεστεί μια άλλη διαδικασία (για παράδειγμα η χρήση του 49x4 για την εξήγηση του συμβατικού πολλαπλασιασμού)
- Παραδείγματα που προκύπτουν τυχαία (για παράδειγμα από τη ρίψη ενός ζαριού) ενώ θα έπρεπε να γίνουν προσεγμένες επιλογές.

Η επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων από τους εκπαιδευτικούς αποτελεί μεγάλη ευθύνη και απαιτεί εκτίμηση πολλών χαρακτηριστικών, εφόσον τα παραδείγματα μπορούν να διευκολύνουν ή να εμποδίσουν τη μάθηση. Είναι απαραίτητη γνώση για τη διδασκαλία και ταυτόχρονα συντελεί στη βελτίωση των γνώσεων των εκπαιδευτικών σε θέματα που σχετίζονται με την παιδαγωγική, τα μαθηματικά και την επιστημολογία των μαθητών. Ένα παράδειγμα θα πρέπει ταυτόχρονα να ικανοποιεί συγκεκριμένες μαθηματικές συνθήκες, από μαθηματική άποψη, να μεταφέρει το κατάλληλο ¨μήνυμα¨ από παιδαγωγική άποψη και από επιστημολογική άποψη να αποφεύγεται η υπερ-γενίκευση των παραδειγμάτων από τους μαθητές και να υπάρχει κατανόηση της αντίληψης τους για τα παραδείγματα.

Η Zaslavsky (2008) υποστηρίζει στο άρθρο της, ότι τα περισσότερα μαθηματικά προγράμματα κατάρτισης εκπαιδευτικών δεν τους προετοιμάζουν συστηματικά ώστε να ασχοληθούν με την κατασκευή κατάλληλων διδακτικών παραδειγμάτων. Έτσι, οι απαραίτητες δεξιότητες για την αποτελεσματική μεταχείριση παραδειγμάτων αποκτούνται μέσα από την προσωπική διδακτική εμπειρία με την πάροδο του χρόνου και είναι πρακτικές γνώσεις των εκπαιδευτικών. Περαιτέρω, η μελέτη των πρακτικών γνώσεων χειρισμού των παραδειγμάτων, θα μπορούσε να δώσει πληροφορίες για τις γνώσεις των εκπαιδευτικών και θα συντελούσε στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων επαγγελματικής ανάπτυξης που θα διευκόλυναν στη δόμηση συστηματικών γνώσεων των εκπαιδευτικών.

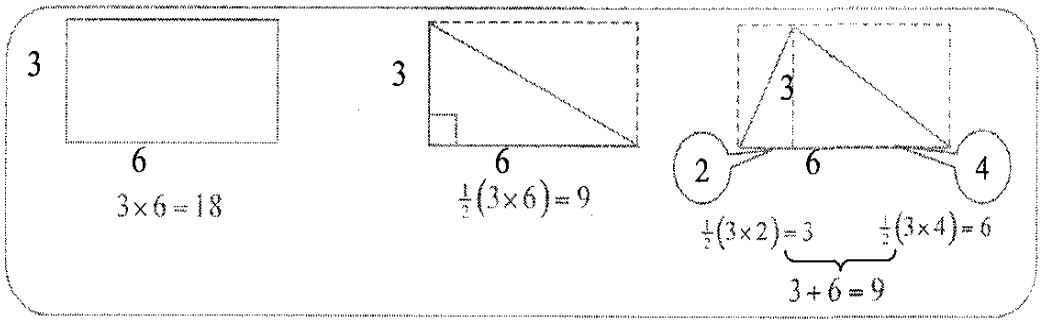
Οι Zaslavsky & Zodik (2007) πραγματοποίησαν μία μελέτη για τα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται από τους έμπειρους καθηγητές και τα οποία μπορούν να υποστηρίξουν ή να εμποδίσουν την κατανόηση των αντικειμένων από τους μαθητές. Στη μελέτη αυτή θεωρήθηκε ως παράδειγμα οποιοδήποτε μαθηματικό αντικείμενο ή διαδικασία που αναφέρονταν σαν περίπτωση ή μέλος μίας γενικότερης υπόθεσης ή κατηγορία. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τάξεις έμπειρων καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και είναι μία ερμηνευτική μελέτη της διδασκαλίας, που βασίζεται στην παρατήρηση και στοχεύει στην κατανόηση της πρακτικής των καθηγητών. Τα ευρήματα προέκυψαν τόσο από προσεκτικά επιλεγμένα μαθήματα μαθηματικών όσο και από εντελώς τυχαία. Οι προσεκτικά επιλεγμένες παρατηρήσεις αναφέρονταν σε μαθήματα στα οποία ο

καθηγητής προσκάλεσε τους ερευνητές να τα παρακολουθήσουν, θεωρώντας ότι πρόκειται για την καλύτερη περίπτωση παρουσίασης παραδειγμάτων μέσα στην τάξη. Οι μαθητές ήταν ηλικίας 13-15 ετών ($7^{ης}$ ως $9^{ης}$ τάξης). Πριν και μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με του καθηγητές για να ξεκαθαριστούν το πλαίσιο, οι στόχοι και οι βασικές θεωρήσεις τους.

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν απεικονίζουν διάφορες πτυχές της πολυπλοκότητας των αποφάσεων, που οι καθηγητές οφείλουν να πάρουν κατά την επιλογή και παρουσίαση ενός παραδείγματος. Με δεδομένη τη δυσκολία της επιλογής κατάλληλων παραδειγμάτων για τη διδασκαλία, κάθε παράδειγμα αναλύθηκε και παρουσιάστηκαν τα θετικά και αρνητικά στοιχεία του, δηλαδή ελέγχθηκε αν ήταν ή όχι αποτελεσματικό κατά τη μάθηση. Αυτό έγινε με σκοπό να ενημερωθούν οι διδάσκοντες για τις πιθανές επιπτώσεις κάποιων επιλογών τους. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν επιπρόσθετα και κάποια γεγονότα που διαδραματίστηκαν στην τάξη γύρω από κάποια παραδείγματα, με σκοπό να κάνουν προτάσεις που θα ενισχύσουν τις δυνατότητες μάθησης.

<u>Παράδειγμα 1</u> (από Zaslavsky et al, 2006): *Μία σταδιακή ακολουθία παραδειγμάτων που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της έννοιας του αμετάβλητου.*

Σε ένα προ-αλγεβρικό μάθημα, η καθηγήτρια έγραψε στον πίνακα τρία παραδείγματα (σχήμα 31) που οδηγούν στον υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου με τη βοήθεια ενός ορθογωνίου.



Σχήμα 31: Ένα προσχεδιασμένο σύνολο παραδειγμάτων από τον καθηγητή, με τους σχετικούς υπολογισμούς

Η καθηγήτρια ξεκίνησε με ένα ορθογώνιο και τους υπολογισμούς σε αυτό, που ήταν ήδη γνωστά στους μαθητές, συνέχισε με ένα ορθογώνιο τρίγωνο που ήταν ακριβώς το μισό από το ορθογώνιο και τελείωσε με μία γενικότερη μορφή τριγώνου, διατηρώντας σταθερά τα μεγέθη (3 και 6). Οι υπολογισμοί που εμφανίζονται στο σχήμα 31 έγιναν από μαθητές στον πίνακα. Τα τρία παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν φαίνεται να ήταν μία σωστή επιλογή, καθώς ήταν καλά συνδεδεμένα, είχαν κάποια σταθερά στοιχεία και ελέγχονταν η μεταβλητότητα στα άλλα. Το γεγονός αυτό επέτρεπε καλύτερη εστίαση στα στοιχεία που μεταβάλλονταν, όπως το σχήμα και η σχέση ανάμεσα στην πλευρά και το αντίστοιχο ύψος. Στο τρίτο σχήμα -την περίπτωση του πιο γενικού τριγώνου- συζητήθηκε στην τάξη ο χωρισμός της πλευράς των 6 μονάδων και αποφασίστηκε να χωριστεί σε 2 και 4 μονάδες, που βασίζονταν στην προηγούμενη περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου.

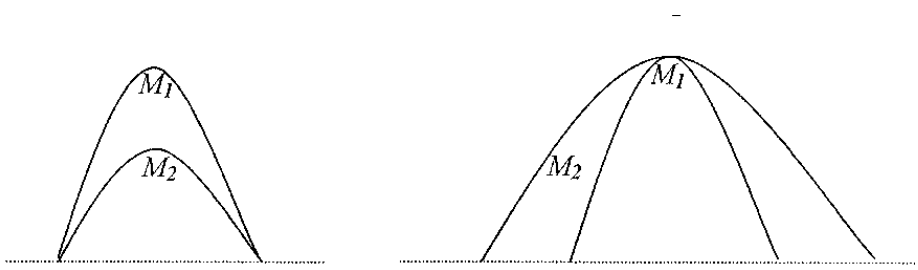
Αν και η παραπάνω παρουσίαση θεωρείται καλά σχεδιασμένη και φάνηκε να εισάγει τους μαθητές στον τύπο του εμβαδού τριγώνου, ώστε να μπορούν να τον χρησιμοποιήσουν μελλοντικά, παρόλα αυτά υπάρχουν κάποιες χαμένες ευκαιρίες που θα μπορούσαν να επηρεάσουν την κατανόηση των μαθητών. Αρχικά δεν είναι ξεκάθαρη, ούτε αναφέρεται από την καθηγήτρια, η γενικότητα της περίπτωσης του τρίτου τριγώνου. Δεν διαπιστώθηκε πώς το εξέλαβαν οι μαθητές, αν το θεώρησαν σαν ένα άλλο ορθογώνιο τρίγωνο που είχε στραφεί ή κατανόησαν ότι κάθε τρίγωνο, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο μπορεί να αναπαρασταθεί με αυτόν τον τρόπο και άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια διαδικασία κατά τον υπολογισμό του εμβαδού του.

Έπειτα ζητήθηκε από τους μαθητές (τυχαία) να προτείνουν τρόπους διαχωρισμού της πλευράς του τριγώνου. Αν γινόταν δεκτές οι προτάσεις τους, πιθανόν οι μαθητές θα αντιλαμβάνονταν ότι δεν έχει σημασία το μήκος του κάθε τμήματος κατά τη διχοτόμηση αφού το εμβαδόν θα παρέμενε πάντα σταθερό (ίσο με 9 τετραγωνικές μονάδες). Σύμφωνα με τους ερευνητές, αυτή θα μπορούσε να είναι μια εξαιρετική ευκαιρία για την καθηγήτρια να εισάγει την έννοια του αμετάβλητου στο εμβαδόν του τριγώνου. Αυτό θα επιτυγχάνονταν, είτε ζητώντας από τους μαθητές περισσότερες προτάσεις διαχωρισμού της πλευράς, είτε θέτοντας ερωτήσεις υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου με δεδομένες τις πλευρές, για παράδειγμα πόσο θα είναι το εμβαδόν αν τα τμήματα που χωρίστηκε η πλευρά είναι 1 και 5 ή 2.5

και 3.5. Η παραπάνω μελέτη δείχνει τη δυναμική μίας προσεκτικά σχεδιασμένης και λογικής ακολουθίας παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2 (από Zaslavsky & Lavie, 2005): *Ένα παράδειγμα που απαιτεί ευαισθησία για την επίλυση των παρανοήσεων των μαθητών.*

Σε ένα μάθημα άλγεβρας σε μαθητές Β΄ Γυμνασίου (8ης τάξης) η καθηγήτρια θέλησε να εισάγει την έννοια της κλίσης μέσω ενός παραδείγματος από την καθημερινότητα των μαθητών. Έτσι σχεδίασε δυο βουνά, όπως φαίνεται στο σχήμα 32 (α), επισημαίνοντας ότι το βουνό Μ1 είναι πιο απότομο από το Μ2.



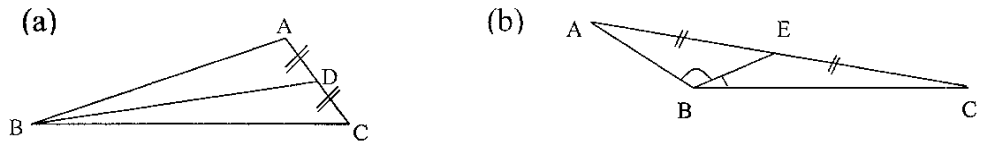
(α) (β)

Σχήμα 32

Ένας μαθητής, παρανοώντας την έννοια της κλίσης με του ύψους, συμφώνησε με την καθηγήτρια αναφέροντας ότι αυτό ισχύει αφού το Μ1 είναι ψηλότερο από το Μ2. Αυτή ήταν μία παρανόηση που παρατηρήθηκε σε πολλούς μαθητές αλλά η καθηγήτρια δεν το είχε αντιληφθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Για την επίλυση της παρανόησης αυτής η καθηγήτρια έσβησε το πρώτο σχήμα και έφτιαξε αυτό του σχήματος 32(β), όπου τα δύο βουνά έχουν το ίδιο ύψος. Από την αντίδραση του μαθητή η καθηγήτρια αντιλήφθηκε τους περιορισμούς του αρχικού της παραδείγματος και το βελτίωσε, αυτό αποτέλεσε μία ευκαιρία μάθησης και για την ίδια που θα την επηρέαζε στη μελλοντική επιλογή παραδειγμάτων της.

Παράδειγμα 3 (από Zodik & Zaslavsky, 2007): *Ένα παράδειγμα που χρησιμοποιείται για να επιστήσει την προσοχή των μαθητών στην υπερ- γενίκευση.*

Σε ένα μάθημα γεωμετρίας ο καθηγητής επιχείρησε να εισάγει την έννοια της διαμέσου ενός τριγώνου και έτσι σχεδίασε το τρίγωνο που φαίνεται στο σχήμα 33(α).



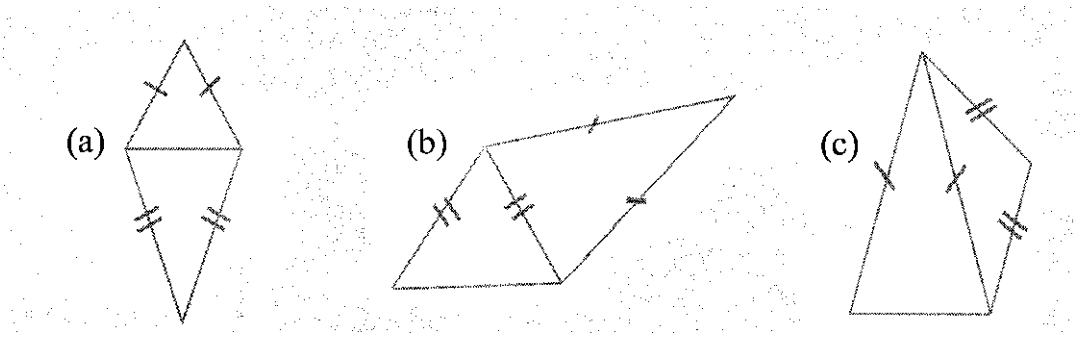
Σχήμα 33

Βασιζόμενος σε αυτό το παράδειγμα και βγάζοντας συμπεράσματα από το σχήμα, ένας μαθητής συμπέρανε ότι αυτή η διάμεσος πρέπει να είναι ταυτόχρονα και διχοτόμος. Από την παρατήρηση του μαθητή φάνηκε ότι ο καθηγητής δεν είχε συνειδητοποιήσει ότι το αρχικό παράδειγμα είχε κάποια μη κρίσιμα ειδικά χαρακτηριστικά, (δηλαδή ότι η διάμεσος έμοιαζε ταυτόχρονα και με διχοτόμο), που πιθανόν μπέρδευαν τους μαθητές του. Στη συνέχεια ο καθηγητής παράλλαξε το αρχικό σχήμα ζωγραφίζοντας το 33 (β) και προέτρεψε το μαθητή να παρατηρήσει στο νέο σχήμα, ακόμη και χωρίς μοιρογνωμόνιο, ποια ήταν η μεγαλύτερη γωνία.

Το καινούριο σχήμα φάνηκε να αντιμετωπίζει την υπερ- γενίκευση του μαθητή, αφού πλέον η διάμεσος δεν έμοιαζε με τη διχοτόμο. Η αυθόρμητη αντίδραση του καθηγητή αντανακλά την προσοχή του στο σκεπτικό των μαθητών και η τροποποίησή του δημιουργεί ένα αντιπαράδειγμα στην λανθασμένη εικασία του μαθητή. Από μαθηματική θεώρηση και τα δύο παραδείγματα είναι προβληματικά. Το πρώτο γιατί μοιάζει με ένα μη-ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο η διάμεσος φαίνεται να ταυτίζεται με τη διχοτόμο και το δεύτερο, αν και μπορεί να υπάρχει, ο καθηγητής δεν δίνει καμία λογική υποστήριξη για την ύπαρξη του. Το παραπάνω επεισόδιο θα μπορούσε να είναι μία πολύ καλή ευκαιρία για τον καθηγητή για να εμπλέξει τους μαθητές του στην εξερεύνηση και τη δημιουργία παραδειγμάτων που σχετίζονται με το θέμα της υπερ- γενίκευσης, συμπεριλαμβάνοντας και τον έλεγχο της ύπαρξης τους.

Παράδειγμα 4 (από Zodik & Zaslavsky, 2007): *Ένα μη- παράδειγμα που επιζητεί μία γενικότερη περίπτωση.*

Σε ένα μάθημα γεωμετρίας για την εισαγωγή της έννοιας του χαρταετού, η καθηγήτρια αφού έδωσε τον ορισμό ζωγράφισε ένα κλασικό πρωτοτυπικό παράδειγμα (σχήμα 34(a)).



Σχήμα 34

Ο ορισμός του χαρταετού δόθηκε ως ένα τετράπλευρο που αποτελείται από δύο ισοσκελή τρίγωνα που μοιράζονται την ίδια βάση. Η καθηγήτρια προσπαθώντας να κατασκευάσει ένα μη- παράδειγμα χαρταετού έφτιαξε το σχήμα 34 (b), στο οποίο άλλαξε τη θέση του ενός ισοσκελούς τριγώνου ώστε τα δύο τρίγωνα να έχουν κοινή πλευρά διαφορετική από τη βάση τους. Η παρατήρηση ενός μαθητή, που επισήμανε ότι κατά λάθος το ένα από τα δύο τρίγωνα ήταν ισόπλευρο, οδήγησε την καθηγήτρια να αντιληφθεί ότι το δεύτερο παράδειγμα που χρησιμοποίησε είχε κάποιες οπτικές συνεπαγωγές που λανθασμένα το παρουσίαζαν σαν ειδικό παράδειγμα και όχι σαν μη- παράδειγμα. Το γεγονός αυτό οδήγησε την καθηγήτρια να σχεδιάσει ένα νέο σχήμα (34 (c)), το οποίο έχει πολλές ομοιότητες με το προηγούμενο, με μόνη διαφορά το μέγεθος των πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου σε σχέση με τη βάση του. Αυτό φαίνεται να βοήθησε τους μαθητές να ξεκαθαρίσουν το ρόλο των μεταβλητών.

Παράδειγμα 5 (από Zodik & Zaslavsky, 2007): *Μία επιλογή αριθμών με σημασία.*

Σε ένα μάθημα άλγεβρας, σχετικά με την εφαρμογή των τύπων αθροίσματος και γινομένου των ριζών μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης του Viete, ο καθηγητής έδωσε το παρακάτω παράδειγμα: $2\chi^2+4\chi+5=0$. Σύμφωνα με τους τύπους Viete, αν χ_1

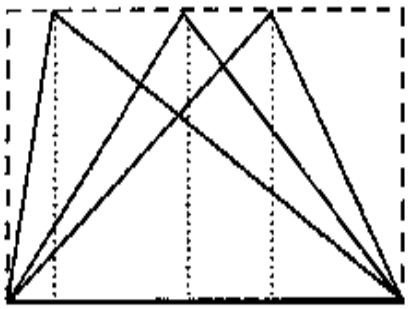
και χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ τότε $\chi_1+\chi_2= -\frac{\beta}{\alpha}$ και $\chi_1\chi_2=\frac{\gamma}{\alpha}$. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος ο καθηγητής συνειδητοποίησε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση που έδωσε δεν είχε πραγματικές λύσεις ($\Delta= - 24$) και δεν εξυπηρετούσε το σκοπό του. Έτσι, ανακοίνωσε στους μαθητές ότι το παράδειγμα δεν είχε πραγματικές λύσεις γιατί το επέλεξε τυχαία και τους έδωσε ένα καινούριο $\chi^2+5\chi+4=0$ που είχε ρίζες.

Το επεισόδιο αυτό δείχνει την ευελιξία που χρειάζεται να έχει ένας καθηγητής, ώστε να αλλάξει ένα παράδειγμα με κάποιο άλλο που εξυπηρετεί το σκοπό της διδασκαλίας. Αρχικά, επέλεξε ένα τυχαίο παράδειγμα χωρίς να ελέγξει τους συντελεστές, αλλά όταν αντιλήφθηκε τα εμπόδια σκέφτηκε κατευθείαν μία εξίσωση που γνώριζε ότι έχει δυο πραγματικές ρίζες. Από τη συνέντευξη που ακολούθησε, αποκαλύφθηκε ότι αυτό ήταν ένα παράδειγμα που χρησιμοποιούσε συχνά κατά την παραγοντοποίηση του τριωνύμου.

Από την παρουσίαση των πέντε παραπάνω παραδειγμάτων φαίνεται ότι η χρησιμοποίηση παραδειγμάτων κατά τη διάρκεια του μαθήματος είναι ένα απαραίτητο αλλά και δύσκολο εγχείρημα. Απαιτεί προσεκτική επιλογή παραδειγμάτων που θα οδηγήσουν την προσοχή των μαθητών στην επεξήγηση και τη δημιουργία γενικεύσεων. Η επιλογή των παραδειγμάτων είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων, όπως ο σκοπός της διδασκαλίας και η ενημέρωση του καθηγητή για τις προκαταλήψεις και τη διάθεση των μαθητών (Bills et al,2006).

Στην παραπάνω έρευνα διακρίνονται πολλά ισχυρά σημεία της χρήσης παραδειγμάτων από τους καθηγητές αλλά και πολλές αδυναμίες και προβλήματα. Μεταφέρεται η πολυπλοκότητα των επιλογών κατά τη λήψη κατάλληλων παραδειγμάτων καθώς και η συνειδητοποίηση του νοήματος αυτών των επιλογών από τους καθηγητές. Στο παράδειγμα 5, η τυχαία επιλογή των συντελεστών δίνει μία αίσθηση γενικότητας αλλά ταυτόχρονα μπορεί να καταλήξει και σε ακατάλληλο παράδειγμα. Στο παράδειγμα 1, η ακολουθία παραδειγμάτων που διατηρεί σταθερό ένα πυρήνα στοιχείων μεταβάλλοντας μόνο τα απαραίτητα χαρακτηριστικά είναι χρήσιμη για την παρατήρηση αυτής της μεταβολής, αλλά θα ήταν ακόμη καλύτερη η

παρουσίαση του προβλήματος μέσω του σχήματος 35. Με την παρουσίαση αυτή, θα διαφαίνονταν οι εναλλακτικοί τρόποι διαχωρισμού της πλευράς καθώς επίσης και η σταθερότητα του εμβαδού του τριγώνου καθώς το η κορυφή του κινείται σε μία πλευρά παράλληλη με τη βάση.



Σχήμα 35

Η σύγχυση του ύψους και της κλίσης στο παράδειγμα 2, ξεπεράστηκε μετά την παρατήρηση του μαθητή και την εύστοχη τροποποίηση του παραδείγματος από τον καθηγητή. Στο παράδειγμα αυτό φαίνεται και η αναντιστοιχία μεταξύ των προθέσεων του καθηγητή και της συγκέντρωσης της προσοχής των μαθητών. Παρόμοια προβλήματα εμφανίζονται και σε γεωμετρικές κατασκευές που δεν έχουν γίνει με ακρίβεια, όπως στα παραδείγματα 3 και 4. Σε αυτά δεν είναι ξεκάθαρο ποιες οπτικές πληροφορίες είναι χρήσιμες. Έτσι στο παράδειγμα 3 ταυτίζεται η διάμεσος με τη διχοτόμο, ενώ στο 4 λαμβάνεται το ισοσκελές τρίγωνο ως ισόπλευρο.

Στα περισσότερα παραδείγματα παρουσιάζεται η συμβολή των παρατηρήσεων των μαθητών στην τροποποίηση των αρχικών παραδειγμάτων των καθηγητών. Αυτό οδηγεί στη δημιουργία νέων παραδειγμάτων όπου κρίνεται απαραίτητο, καταδεικνύει την ευελιξία των καθηγητών και συντελεί στην επέκταση του χώρου παραδειγμάτων τους. Παράλληλα, η απουσία ερωτήσεων από τους καθηγητές προς τους μαθητές σχετικά με τους ισχυρισμούς και τις παρατηρήσεις τους, που θα βοηθούσαν στη διεύρυνση του χώρου παραδειγμάτων τους, μπορεί να θεωρηθεί ως χαμένη ευκαιρία να εμπλακούν οι μαθητές στη δημιουργία και την εξερεύνηση παραδειγμάτων. Καταλήγοντας, μία καλύτερη προετοιμασία κατά την παρουσίαση παραδειγμάτων από τους καθηγητές κρίνεται απαραίτητη αλλά ταυτόχρονα η χρησιμοποίηση αυτών

των ¨αποτυχημένων¨ παραδειγμάτων, ως πρακτική διδασκαλίας, θα μπορούσε να είναι καθοριστική για την ανάδειξη και την επίλυση λανθασμένων θεωρήσεων.

Ένα ακόμη άρθρο που αναφέρεται στη μελέτη και το χαρακτηρισμό της χρήσης «διδακτικών» παραδειγμάτων καθώς επίσης και στην αναγνώριση των στοιχειών τους που αποδίδονται στη διδακτική πείρα των εκπαιδευτικών, είναι των Zaslavsky & Lavie (2005). Στη μελέτη αυτή εξετάζονται τρία αλληλοεξαρτώμενα ζητήματα: η συλλογιστική των εκπαιδευτικών, οι πρακτικές τους και η εκμάθηση των διδακτικών παραδειγμάτων από τους ίδιους. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων οι ερευνητές εξέτασαν τις προκαταρκτικές εκτιμήσεις των εκπαιδευτικών στο στάδιο του προγραμματισμού, τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στη αίθουσα διδασκαλίας και τις αναφορές τους σε προσωπικές εμπειρίες που σχετίζονται με τη χρήση παραδειγμάτων. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην εξέλιξη των εκπαιδευτικών μέσα από τη χρήση διδακτικών παραδειγμάτων.

Τα μαθηματικά τόσο για τους αρχάριους όσο και για τους καθηγητές μαθηματικών συχνά συνεπάγονται την ανάπτυξη μαθηματικής διαίσθησης. Δηλαδή γίνεται η εξέταση των εμπειριών μέσω πολλών παραδειγμάτων για να αποκτηθεί διαίσθηση μίας κατάστασης, η οποία στη συνέχεια θα γενικευθεί και θα δημιουργηθεί κάποια συλλογιστική. Η συλλογιστική στα μαθηματικά βασίζεται στη λογική και στα παραδείγματα. Με τον όρο «διδακτικό» παράδειγμα χαρακτηρίζεται κάθε παράδειγμα που δίνεται από τον εκπαιδευτικό στο πλαίσιο της διδασκαλίας ενός συγκεκριμένου θέματος και θεωρείται αναπόσπαστο κομμάτι διδακτικής πρακτικής. Ο χαρακτηρισμός αυτός προϋποθέτει ότι το παράδειγμα είναι ¨ξεκάθαρο¨ και ενθαρρύνει τη γενίκευση, όπως έχει αναλυθεί πιο πάνω.

Στη συνέχεια του ίδιου άρθρου παρουσιάζεται μία δευτεροβάθμια συνάρτηση σε τρεις διαφορετικές μορφές, ώστε κάθε φορά να είναι ξεκάθαρα κάποια χαρακτηριστικά της ενώ άλλα όχι. Οι αναπαραστάσεις ήταν οι εξής:

1. $\psi = (\chi + 1)(\chi - 3)$
2. $\psi = (\chi + 1)^2 - 4$
3. $\psi = \chi^2 - 2\chi - 3$

Στην πρώτη περίπτωση είναι ξεκάθαρες οι ρίζες της εξίσωσης (-1 και 3), στη δεύτερη η κορυφή της παραβολής (1,-4) και στην τρίτη το σημείο τομής με τον άξονα ψψ΄ (0,-3). Παρόλα αυτά χωρίς την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, οι σύνδεσμοι αυτοί ενδέχεται να μην αναγνωριστούν από τους μαθητές. Επιπλέον η πρώτη αναπαράσταση θα μπορούσε να μη θεωρηθεί ως παράδειγμα δευτεροβάθμιας συνάρτηση καθώς η δύναμη του 2 δεν είναι προφανής. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να επιλέξει ανάμεσα στις τρεις μορφές, ή να τις χρησιμοποιήσει όλες ώστε να δείξει την έννοια των ισοδύναμων εκφράσεων.

Το πλαίσιο στο οποίο θα παρουσιαστούν τα παραδείγματα και οι δραστηριότητες που θα πραγματοποιηθούν στην τάξη θα καθορίσουν την αντίληψη των μαθητών σχετικά με αυτά. Κάποιος μαθητής θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τις διαφορετικές αυτές εκφράσεις σε παρόμοια περίπτωση. Ωστόσο υπάρχουν και κάποια άσχετα χαρακτηριστικά που θα μπορούσαν να ληφθούν διαφορετικά. Για παράδειγμα στην ονομασία των συμβόλων, θα μπορούσε αντί για χ να χρησιμοποιηθεί το m και αντί για ψ το f(m). Πολλοί μαθητές όμως θεωρούν ότι τα σύμβολα χ και ψ είναι υποχρεωτικά στο συμβολισμό μίας συνάρτησης. Επίσης οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν στις παραπάνω συναρτήσεις είναι όλοι ακέραιοι, γεγονός που θα μπορούσε να παραπλανήσει τους μαθητές αν δεν εκτεθούν σε ένα πλουσιότερο χώρο παραδειγμάτων. Τέλος, κάποιος μαθητής θα μπορούσε γενικεύοντας να υποθέσει ότι όλες οι δευτεροβάθμιες συναρτήσεις έχουν και τις τρεις μορφές, κάτι που δεν ισχύει για την πρώτη περίπτωση η οποία υφίσταται μόνο αν η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις. Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι η καθοδήγηση του εκπαιδευτικού είναι απαραίτητη και συντελεί στην κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές.

Οι ερευνητές επιχειρούν να προσφέρουν ένα εννοιολογικό πλαίσιο για το χαρακτηρισμό της χρήσης διδακτικών παραδειγμάτων στα μαθηματικά. Δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στη συνεχή εξέλιξη της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς, η οποία αποτελεί προϊόν προσωπικής εκμάθησης από την καθημερινή πρακτική στην αίθουσα διδασκαλίας. Προσπαθούν να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως τι θεωρείται καλό διδακτικό παράδειγμα, ποιες είναι οι θεωρήσεις των εκπαιδευτικών κατά την ενσωμάτωση παραδειγμάτων στη διδασκαλία τους, ποια είναι τα χαρακτηριστικά της

χρήσης διδακτικών παραδειγμάτων, ποιες είναι οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις αντιδράσεις των μαθητών και την προσωπική εκμάθηση των εκπαιδευτικών και τέλος πως βλέπουν οι εκπαιδευτικοί τις πρακτικές τους και τη μεταβολή που συντελείται σε αυτές μέσα από την προσωπική τους εμπειρία.

Η μελέτη που πραγματοποίησαν για το σκοπό αυτό περιελάμβανε την παρακολούθηση και ανάλυση της διδασκαλίας μέσω συνεντεύξεων, 12 έμπειρων καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (οι 6 από αυτούς είχαν προταθεί ως πολύ αξιόπιστοι) , που δίδασκαν σε μαθητές Β΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου. Παρουσιάζονται παρακάτω δύο επεισόδια από την τάξη μίας πεπειραμένης δασκάλας της Ann, που εστιάζουν στις ευκαιρίες εκμάθησης που παρουσιάζονται στον εκπαιδευτικό μέσα στην τάξη κατά τη χρήση παραδειγμάτων και πώς αυτός τις εκμεταλλεύεται ή όχι.

Στο πρώτο επεισόδιο η Ann αποφάσισε να εισάγει τις γραμμικές συναρτήσεις δίνοντας το παράδειγμα ψ=2χ-1, που το θεώρησε ως γενική περίπτωση γραμμικής συνάρτησης. Έτσι ζήτησε από τους μαθητές της να συμπληρώσουν τον παρακάτω πίνακα τιμών, έχοντας ήδη επιλέξει συγκεκριμένες τιμές για τα χ.

χ	-2	-1	0	1	2
ψ	-5	-3	-1	1	3

Πίνακας 12

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να αναζητήσουν ειδικές σχέσεις για τις παραπάνω τιμές και εκείνοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία σταθερή διαφορά, αναφερόμενοι στη διαφορά 2 ανάμεσα στις τιμές των ψ. Η καθηγήτρια έμεινε ικανοποιημένη από τη γενίκευση των μαθητών, χωρίς όμως να παρατηρήσει την ενδεχόμενη πλάνη τους, αφού επικεντρώθηκαν στη διαφορά και όχι στη διαφορά σε σχέση με το πηλίκο. Στο παράδειγμα που επέλεξε να παρουσιάσει ο παρανομαστής του πηλίκου είναι 1 και δεν επηρεάζει το κλάσμα. Οι μαθητές δεν έκαναν παρατηρήσεις σχετικά με αυτό και έτσι δεν υπήρξε καμία ευκαιρία μάθησης για την εκπαιδευτικό.

Το δεύτερο επεισόδιο στην τάξη της Ann έχει παρουσιαστεί και αναλυθεί παραπάνω. Πρόκειται για το παράδειγμα 2 που αναφέρεται στην κλίση των δύο βουνών που σχεδίασε η καθηγήτρια (σχήμα 32). Στο παράδειγμα αυτό υπήρξε παρερμηνεία ανάμεσα στην κλίση και στο ύψος των δύο γραφικών παραστάσεων, η οποία λύθηκε μετά την παρέμβαση ενός μαθητή και τη βελτίωση του σχήματος από την εκπαιδευτικό. Αυτό αποτέλεσε ευκαιρία εκμάθησης για την καθηγήτρια και θα επηρέαζε τις επιλογές παραδειγμάτων της στο μέλλον, όπως αποκαλύφθηκε από τη συνέντευξη που ακολούθησε.

Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στη γνωστική βάση που χρειάζεται ένας εκπαιδευτικός για να κατασκευάσει χρήσιμα διδακτικά παραδείγματα και τη γνώση που αντικατοπτρίζεται μέσα από τη χρήση των παραδειγμάτων του ερευνάται αναλυτικά από τους Zodik & Zaslavsky (2007). Παραδείγματα από τη μελέτη αυτή έχουν ήδη αναφερθεί παραπάνω (παραδείγματα 3,4.5). Ο σκοπός της έρευνας ήταν ο χαρακτηρισμός της επιλογής και της χρήσης των παραδειγμάτων από εκπαιδευτικούς στην αίθουσα διδασκαλίας. Μελετήθηκαν 15 ομάδες μαθητών, 3 της Α΄ Γυμνασίου , 6 της Β΄ Γυμνασίου και 6 της Γ΄ Γυμνασίου, 7 από αυτές ήταν υψηλού επιπέδου και 6 μέτριου και χαμηλού. Συνολικά παρακολουθήθηκαν 54 μαθήματα, 5 διαφορετικών εκπαιδευτικών με δεκαετή τουλάχιστον διδακτική εμπειρία. Η επιλογή των μαθημάτων έγινε είτε τυχαία είτε μετά από πρόσκληση των ίδιων των καθηγητών και πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις πριν και μετά το μάθημα.

Το σύστημα κατηγοριοποίησης της φύσης και της χρήσης των παραδειγμάτων είχε δύο βασικούς άξονες:

1. Το βαθμό σχεδιασμού ενός παραδείγματος εκ των προτέρων από τον εκπαιδευτικό (ένα παράδειγμα μπορεί εξ ολοκλήρου να σχεδιαστεί εκ των προτέρων ή μπορεί να ανακληθεί από μνήμης ή να δημιουργηθεί αυθόρμητα ως απάντηση σε μια πραγματική ανάγκη που προκύπτει μέσα στην αίθουσα).
2. Το είδος της μαθηματικής οντότητας (ιδέας/αρχής) την οποία προορίζεται να παρουσιάσει το παράδειγμα.

Ως προς το βαθμό σχεδιασμού ενός παραδείγματος, διακρίνονται οι κατηγορίες του σχεδιασμού εκ των προτέρων και της κατασκευής αυθόρμητα από

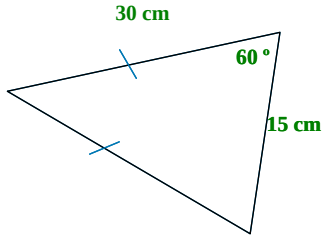
κάποια ανάγκη που προέκυψε στην αίθουσα διδασκαλίας. Υπάρχει και ο συνδυασμός των δύο αυτών κατηγοριών, όταν πρόκειται για ένα προσχεδιασμένο παράδειγμα που τροποποιείται αυθόρμητα αν απαιτηθεί από μία κατάσταση μέσα στην τάξη. Ο τρόπος που αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός την ανάγκη της αυτόματης κατασκευής ή τροποποίησης ενός παραδείγματος, υποδεικνύει την άμεση σχέση που έχει με το σχετικό σύνολο των γνώσεων που αφορούν τα παραδείγματα. Η απουσία σύνδεσης με το σύνολο αυτό δημιούργησε προβληματικές καταστάσεις στην τάξη, ως αποτέλεσμα της προσπάθειας του εκπαιδευτικού να παράγει μη αναμενόμενα παραδείγματα. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τα αυθόρμητα παραδείγματα είναι περισσότερο διαφωτιστικά για τον τρόπο δημιουργίας τους από ότι τα προσχεδιασμένα παραδείγματα, που αποτελούν το τελικό προϊόν της σκέψης των εκπαιδευτικών.

Η δημιουργία αυθόρμητων παραδειγμάτων συμβαίνει ως απάντηση σε ερωτήματα των μαθητών, όταν οι εκπαιδευτικοί καταλαβαίνουν ότι οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί βασικές ιδέες ή δεν έχει επιτευχθεί ο στόχος του μαθήματος. Τότε προσπαθούν να δώσουν διαφορετικά παραδείγματα δημιουργώντας έτσι τρεις υποκατηγορίες αυθόρμητων παραδειγμάτων: α) τη δημιουργία ενός φαινομενικά κατάλληλου παραδείγματος, β) τη δημιουργία ενός παραδείγματος που δεν υπάρχει (έχει αντικρουόμενα στοιχεία), γ) τη δημιουργία ενός παραδείγματος που δεν εξυπηρετεί το σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκε.

Στην κατηγορία των φαινομενικά σωστών παραδειγμάτων ή αντιπαραδειγμάτων βρίσκεται το παράδειγμα 3 (σχήμα 32) που αναλυτικά έχει περιγραφεί παραπάνω. Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο καθηγητής, λαμβάνοντας υπόψη την υπερβολική γενίκευση του μαθητή, έδωσε αυθόρμητα ένα νέο τροποποιημένο παράδειγμα που κάλυπτε τις απαιτήσεις, χωρίς όμως να δώσει καμία λογική στήριξη για την ύπαρξή του.

Ο σχεδιασμός παραδειγμάτων που δεν υπάρχουν, συμβαίνει όταν ο εκπαιδευτικός πρέπει να επινοήσει ένα παράδειγμα που να πληροί κάποιες συγκεκριμένες προϋποθέσεις παραβλέποντας κάποιες ιδιότητες που δεν χρειάζονται εκείνη τη στιγμή. Μερικές φορές δεν είναι δυνατόν να ελεγχθούν επιτόπου όλες οι

απαραίτητες προϋποθέσεις, όπως στο παράδειγμα του τριγώνου που ακολουθεί (σχήμα 36). Σε ένα μάθημα γεωμετρίας σχετικά με τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, ο καθηγητής επέλεξε αυθόρμητα το τρίγωνο του σχήματος 36 ζητώντας από τους μαθητές να υπολογίσουν το μέγεθος των υπολοίπων πλευρών και γωνιών του τριγώνου.



Σχήμα 36: Το αυθόρμητο παράδειγμα του εκπαιδευτικού

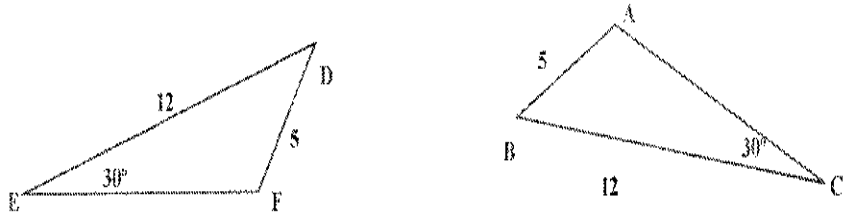
Το παράδειγμα αυτό προκάλεσε σύγχυση στους μαθητές, που αναρωτήθηκαν πώς γίνεται να είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση 15 cm και πλευρά 30 cm ενώ οι γωνίες του είναι 60^0 η καθεμία και άρα μετατρέπεται σε ισόπλευρο. Ο καθηγητής απάντησε ότι έβαλε την τιμή της γωνίας χωρίς να ελέγξει τι συμβαίνει στην τρίτη πλευρά. Φαίνεται στο παράδειγμα αυτό πως ο καθηγητής γνώριζε ότι στο ισοσκελές τρίγωνο αρκούν τα μέτρα της βάσης και της μίας ίσης πλευράς για να υπολογιστεί η τρίτη πλευρά, καθώς επίσης ότι μία γωνία αρκεί για να υπολογιστούν ο άλλες δύο. Ωστόσο κατά τη διαδικασία της αυθόρμητης δημιουργίας δεν ασχολήθηκε με τη συνοχή αυτών των συνθηκών.

Το παράδειγμα 5 που παρουσιάστηκε παραπάνω είναι χαρακτηριστική περίπτωση αυθόρμητου παραδείγματος που δεν ικανοποιεί το σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκε. Υπενθυμίζεται ότι στο παράδειγμα αυτό ο καθηγητής προσπάθησε να εξηγήσει τον τρόπο εφαρμογής του τύπου Viete σε μία τυχαία δευτεροβάθμια εξίσωση που δεν είχε πραγματικές ρίζες. Όταν αντιλήφθηκε το λάθος του, παρουσίασε μία δευτεροβάθμια εξίσωση που χρησιμοποιούσε συχνά και γνώριζε τις λύσεις της.

Οι εκπαιδευτικοί κατά το χειρισμό των παραδειγμάτων ασχολούνται με τρεις βασικές μαθηματικές οντότητες. Η πιο συνηθισμένη πρακτική είναι η παρουσίαση επαναλαμβανόμενων παραδειγμάτων, ως πρακτική εξάσκηση, για την εκτέλεση διάφορων διαδικασιών. Κατά την παρουσίαση νέων εννοιών χρησιμοποιούνται ενδιαφέροντα παραδείγματα και μη- παραδείγματα, ενώ κατά την ενασχόληση με τα θεωρήματα τα παραδείγματα πρέπει να ικανοποιούν τις προϋποθέσεις των θεωρημάτων και να οδηγούν σε συμπεράσματα. Συχνά για την ανασκευή ενός θεωρήματος χρησιμοποιούνται αντιπαραδείγματα.

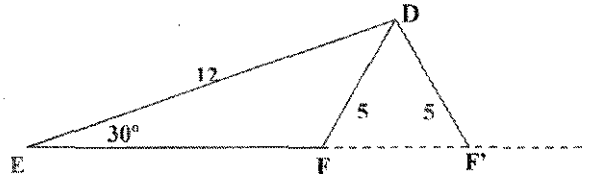
Η παρουσίαση μη- παραδειγμάτων κατά την εκμάθηση νέων εννοιών είναι μία διαδεδομένη και αποτελεσματική πρακτική. Με τη μέθοδο αυτή εστιάζεται η προσοχή των μαθητών σε κρίσιμα χαρακτηριστικά που διαφορετικά θα μπορούσε να μην είχαν γίνει αντιληπτά. Μία τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο παράδειγμα 4 παραπάνω. Στο παράδειγμα αυτό η καθηγήτρια προσπάθησε αρχικά να δώσει ένα μη- παράδειγμα χαρταετού, χρησιμοποιώντας ένα σχήμα που έμοιαζε με ισόπλευρο τρίγωνο αντί για ισοσκελές. Το παράδειγμά της βελτιώθηκε μετά την παρατήρηση ενός μαθητή. Αυτό θίγει ένα σημαντικό ζήτημα σχετικά με τα οπτικά – γεωμετρικά παραδείγματα. Από τα αποτελέσματα των ερευνών προκύπτει ότι υπάρχει μεγάλη ασάφεια στη χρήση οπτικών παραδειγμάτων και των συμπερασμάτων που μπορούν να συναχθούν από αυτά.

Συχνά οι εκπαιδευτικοί για να απορρίψουν ένα λανθασμένο ισχυρισμό των μαθητών δημιουργούν αυθόρμητα ένα αντιπαράδειγμα. Το αντιπαράδειγμα αυτό μπορεί να αποτελέσει ταυτόχρονα και μία ευκαιρία μάθησης για τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, όπως φαίνεται στο επεισόδιο που περιγράφεται παρακάτω. Σε ένα μάθημα γεωμετρίας σχετικά με το θεώρημα ισότητας τριγώνων ΠΓΠ, ζητήθηκε από τους μαθητές να ελέγξουν κάποια ζεύγη τριγώνων ως προς την ισότητα χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό. Στη συνέχεια η καθηγήτρια παρουσίασε ένα σχήμα (σχήμα 37) από το βιβλίο των μαθηματικών και ζήτησε από τους μαθητές να το ελέγξουν.



Σχήμα 37

Ένας μαθητής απάντησε ότι δεν ισχύει το κριτήριο ΠΓΠ, αλλά τα τρίγωνα είναι ίσα. Αυτό συνέβη γιατί το βιβλίο τα έχει σχεδιάσει ώστε είναι πανομοιότυπα. Η καθηγήτρια ισχυρίστηκε ότι μπορούσε να παρουσιάσει άπειρα αντιπαραδείγματα στον ισχυρισμό αυτό του μαθητή, τελικά διαπίστωσε ότι μόνο ένα ήταν κατάλληλο και έτσι σχεδίασε το σχήμα 38.



Σχήμα 38

Από τα σχήματα 37 και 38 και με την καθοδήγηση της καθηγήτριας διαπιστώθηκε ότι οι γωνίες DFE και BAC του πρώτου σχήματος είναι ίσες με τη γωνία DFE στο δεύτερο, ενώ η γωνία BAC δεν είναι ίση με τη DF΄E.

Το περιστατικό που περιγράφηκε αντανακλά την πολυπλοκότητα της χρήσης παραδειγμάτων από τους εκπαιδευτικούς και το γεγονός πως η επικέντρωση σε μία μόνο πτυχή δεν είναι αρκετή. Επιπλέον, η χρησιμοποίηση αντιπαραδειγμάτων μέσα στην τάξη ήταν αυθόρμητη και απαιτούσε καλή γνώση μαθηματικών. Από τη μελέτη προκύπτει ακόμη ο προβληματισμός που εμφανίζεται σε μαθητές και εκπαιδευτικούς σχετικά με τις οπτικές πληροφορίες που παρέχει ένα γεωμετρικό σχήμα.

Οι ίδιοι ερευνητές πραγματοποίησαν μία ακόμη μελέτη πάνω στο ίδιο αντικείμενο (Zodik & Zaslavsky, 2008), δηλαδή στο χαρακτηρισμό των

παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς στην τάξη. Στην έρευνά τους περιλαμβάνουν τόσο παραδείγματα, όσο και μη-παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, για να κάνουν πιο εμφανείς τις διακρίσεις και να προχωρήσουν σε μία βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών οντοτήτων. Μελέτες που εστιάζουν στον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές από παραδείγματα, δείχνουν τη συμβολή των πολλαπλών παραδειγμάτων με ποικίλα σχήματα που αναφέρονται στην δομή και όχι στα επιφανειακά χαρακτηριστικά. Από το άλλο μέρος, οι μελέτες που σχετίζονται με το σχηματισμό μίας έννοιας δίνουν έμφαση στο ρόλο των προσεκτικά σχεδιασμένων και διαδοχικά τοποθετημένων παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, που υποστηρίζουν τη διάκριση ανάμεσα σε κρίσιμα και μη κρίσιμα χαρακτηριστικά και συντελούν στην κατασκευή πλουσιότερων εικόνων της έννοιας.

Κάθε παράδειγμα ενδέχεται να περιέχει κάποια χαρακτηριστικά που επρόκειτο να εξηγηθούν και κάποια άλλα άσχετα. Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα θα πρέπει να επεξηγήσει μία ιδέα σύμφωνα με τη δική του οπτική, καθώς οι μαθητές μπορεί να εστιάζουν σε άσχετα χαρακτηριστικά. Ουσιαστική είναι η συμβολή της επιτρεπόμενης αλλαγής των μεταβλητών προς την κατεύθυνση αυτή. Οι εκπαιδευτικοί για να αποκαλύψουν τη μαθηματική δομή μπορούν να μεταβάλουν κάποια χαρακτηριστικά κρατώντας σταθερά κάποια άλλα αναγκάζοντας έτσι τους μαθητές να προσέξουν τη δομή και να γενικεύσουν. Ένα άλλο βασικό κομμάτι της εργασίας των εκπαιδευτικών περιλαμβάνει τη λήψη αποφάσεων. Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω οι καθηγητές ενδέχεται να έχουν σχεδιάσει από πριν τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουν κατά τη διδασκαλία τους, όμως υπάρχουν και περιπτώσεις που πρέπει να αυτοσχεδιάσουν δίνοντας μία άμεση απάντηση.

Ο βασικός στόχος της μελέτης που θα περιγραφεί είναι ο χαρακτηρισμός των βαθύτερων θεωρήσεων των εκπαιδευτικών, κατά την επιλογή και τη δημιουργία παραδειγμάτων μαθηματικών σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται οι αυθόρμητες αποφάσεις που λαμβάνουν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη κατά την αλληλεπίδραση με τους μαθητές, οι οποίες οδηγούν σε τροποποίηση ή δημιουργία νέων παραδειγμάτων. Τα στοιχεία της έρευνας προέκυψαν από την παρατήρηση 5 καθηγητών με δεκαετή εμπειρία που δίδασκαν σε μαθητές διαφορετικών επιπέδων. Οι 15 ομάδες των μαθητών που

μελετήθηκαν αποτελούνταν από 3 της Α΄ Γυμνασίου, 6 της Β΄ και 6 της Γ΄, 7 από αυτές ήταν υψηλού επιπέδου και 6 μέτριου και χαμηλού. Συνολικά παρατηρήθηκαν 52 μαθήματα που επιλέχθηκαν είτε τυχαία είτε μετά από πρόσκληση των διδασκόντων και πραγματοποιηθήκαν συνεντεύξεις με τους καθηγητές πριν και μετά από αυτά.

Στην έρευνα αυτή υπήρξαν δύο προκαταρκτικά στάδια στην ανάλυση των επιλογών των καθηγητών, οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί ένα παράδειγμα και η μαθηματική ορθότητα. Κατά τον προσδιορισμό των παραδειγμάτων διατυπώνονταν μία βασική ερώτηση, αν αυτό που παρουσιάζονταν ήταν πράγματι παράδειγμα. Ενώ θεωρητικά κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί παράδειγμα, οι ερευνητές χαρακτήρισαν παράδειγμα ένα αντικείμενο που αλληλεπιδρά διανοητικά με ένα άτομο και θεωρείται ως παράδειγμα μίας μεγαλύτερης κατηγορίας. Έτσι σε μία πρακτική άσκηση, όπως η επίλυση εξισώσεων, ένα παράδειγμα χαρακτηρίζονταν έτσι αν ο καθηγητής ή οι μαθητές το λάμβαναν ως αντιπρόσωπο μίας γενικότερης κατηγορίας εξισώσεων ή ως παρουσίαση μίας γενικότερης διαδικασίας. Με τον τρόπο αυτό πιθανόν να μη λαμβάνονταν υπόψη κάποιες σχετικές περιπτώσεις που ήταν δύσκολο να ανιχνευτούν, αλλά τα παραδείγματα που αναλύονταν αποτελούνταν από στοιχεία που τα χαρακτήριζαν ως τέτοια.

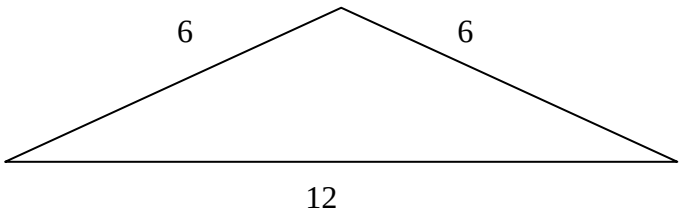
Ένα παράδειγμα μίας περίπτωσης που χαρακτηρίστηκε ως παράδειγμα είναι και το παρακάτω. Ο καθηγητής για να απαντήσει σε ερώτηση ενός μαθητή για το αν μπορεί σ' ένα τρίγωνο να υπάρχουν δύο αμβλείες γωνίες ζωγράφισε το παρακάτω σχήμα.

Σχήμα 39

Όπως φαίνεται ο καθηγητής ζωγράφισε δυο αμβλείες γωνίες που έχουν κοινή πλευρά και ζήτησε από τους μαθητές να προσέξουν την κατασκευή η οποία

φανερώνει το λόγο για τον οποίο οι πλευρές αυτές δεν τέμνονται ώστε να σχηματίσουν τρίγωνο.

Σχετικά με τη διαπίστωση της μαθηματικής ορθότητας των παραδειγμάτων, δηλαδή πότε ένα παράδειγμα θα χαρακτηρίζεται μαθηματικά σωστό, διαπιστώθηκαν τρεις τύποι ανακριβών μαθηματικών παραδειγμάτων. Ο πρώτος αναφέρεται στην ικανοποίηση κάποιων αναγκαίων προϋποθέσεων ώστε μία περίπτωση να αντιμετωπίζεται ως παράδειγμα μίας γενικότερης κατηγορίας. Έτσι είναι λανθασμένο να θεωρείται η απόλυτη τιμή μιας συνάρτησης ως παράδειγμα μίας παντού διαφορίσιμης συνάρτησης ή να παρουσιάζεται ο αριθμός 0,333 ως παράδειγμα άρρητου αριθμού. Ο δεύτερος τύπος σχετίζεται με τα αντιπαραδείγματα. Θεωρώντας ένα παράδειγμα ως αντιπαράδειγμα μίας υπόθεσης ή ενός ισχυρισμού χωρίς στην πραγματικότητα να αντιφάσκει με αυτόν είναι μαθηματικά λάθος. Επομένως είναι λάθος να παρουσιαστεί η διαδικασία $\alpha*\beta = \alpha^{\beta}$ ως αντιπαράδειγμα στο λανθασμένο ισχυρισμό ότι κάθε αντιμεταθετική πράξη είναι και προσεταιριστική ή να δοθεί η συνάρτηση $f(x)=x^3 +1$ σαν αντιπαράδειγμα μίας περιττής συνάρτησης που είναι μονότονη. Ο τρίτος τύπος μαθηματικής ανακρίβειας αντιμετωπίστηκε στην περίπτωση παραδειγμάτων που δεν υφίστανται. Για παράδειγμα το παρακάτω σχήμα που παρουσιάστηκε ως παράδειγμα ισοσκελούς τριγώνου, χωρίς να είναι στην πραγματικότητα τρίγωνο.



Σχήμα 40

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψε ότι τα μαθήματα ήταν περισσότερο δασκαλοκεντρικά, αφού διαπιστώθηκαν 604 παραδείγματα που συλλέχτηκαν και παρουσιάστηκαν από τους καθηγητές και μόνο 35 από τους μαθητές. Από αυτά μόνο 12 ήταν μαθηματικά λανθασμένα, 6 στην άλγεβρα και 6 στη γεωμετρία, τα 3 δεν υπήρχαν και τα 9 δεν ικανοποιούσαν τις απαραίτητες συνθήκες. Τα 11 από αυτά σχηματίστηκαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος στην προσπάθεια

απάντησης σε ερωτήσεις μαθητών. Οι καθηγητές επίσης χρησιμοποίησαν επιτυχώς 18 αντιπαραδείγματα.

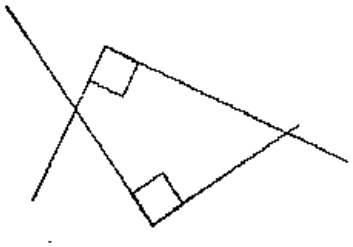
Από τις παρατηρήσεις των μαθημάτων έγινε σαφές ότι κάποια παραδείγματα των καθηγητών ήταν σχεδιασμένα εκ των προτέρων ενώ άλλα κατασκευάστηκαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Κάποιοι εκπαιδευτικοί σχεδίαζαν εκ των προτέρων τα παραδείγματα καθορίζοντας τις πιθανές διαστάσεις και το εύρος των αλλαγών αλλά δημιουργούσαν τα συγκεκριμένα παραδείγματα μέσα στην τάξη είτε μόνοι τους είτε με τη βοήθεια των μαθητών.

Στη συνέχεια ακολουθεί η περιγραφή των χαρακτηριστικών των δύο κύριων ειδών παραδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν: τα προσχεδιασμένα σε αντίθεση με τα αυθόρμητα παραδείγματα, καθώς και οι θεωρήσεις των καθηγητών στην επιλογή αυτών των ειδών παραδειγμάτων. Τα προσχεδιασμένα παραδείγματα είναι παραδείγματα που ο καθηγητής έχει σκεφτεί εκ των προτέρων και έχει αποφασίσει να τα συμπεριλάβει στο μάθημά του. Εμφανίζονται σε σημειώσεις των καθηγητών, σε φύλλα εργασίας για τους μαθητές, σε βιβλία στα οποία βασίζεται το μάθημα ή συμπεραίνονται από τις προτάσεις και τις πράξεις του καθηγητή. Στην περίπτωση που ήταν εμφανές για ποιο είδος επρόκειτο υπήρξαν συζητήσεις των ερευνητών με τους εκπαιδευτικούς για να διαπιστωθεί πότε και πώς αποφάσισαν να τα χρησιμοποιήσουν.

Τα αυθόρμητα παραδείγματα είναι αυτά που επιλέχτηκαν με μία απόφαση που πάρθηκε «στη στιγμή». Περιλαμβάνουν περιπτώσεις επιλογής παραδειγμάτων που δεν είχαν σχεδιαστεί από πριν ή που δημιουργήθηκαν εκείνη τη στιγμή, είτε πρόκειται για εντελώς νέα παραδείγματα είτε για τροποποίηση παλαιότερων μέσα στην τάξη. Τα στοιχεία που αποδεικνύουν ότι τα παραδείγματα ήταν αυθόρμητα, είναι κάποιες φράσεις των καθηγητών όπως ¨*προσπαθώ να φτιάξω ένα απλό παράδειγμα αλλά δεν είναι κατάλληλο*¨ ή ¨*επέλεξα αυτούς τους αριθμούς τώρα χωρίς να τους έχω σκεφτεί*¨. Επίσης ο χρόνος που αφιερώνεται στη δημιουργία ενός παραδείγματος από τους καθηγητές, οι δισταγμοί τους, οι εκφράσεις του σώματός τους ή ακόμη και οι ευθείες ερωτήσεις των μαθητών για το αν ανακάλυψαν το παράδειγμα εκείνη τη στιγμή.

Συνήθως οι καθηγητές δημιουργούν αυθόρμητα παραδείγματα ως απάντηση σε ερωτήσεις των μαθητών. Μία περίπτωση αυθόρμητου παραδείγματος παρουσιάστηκε όταν μία καθηγήτρια, που είχε ένα ξεκάθαρο σχέδιο μαθήματος, δεν είχε εντάξει σε αυτό συγκεκριμένα παραδείγματα. Έτσι μέσα στην τάξη και μπροστά στους μαθητές της προσπάθησε να κατασκευάσει το παράδειγμα σταδιακά, διορθώνοντας κάποια σημεία που δεν ταίριαζαν στην περίπτωση της και καταλήγοντας στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Το μάθημά της αναφέρονταν στις αλγεβρικές εκφράσεις και η καθηγήτρια ήθελε να εξηγήσει ότι ένα πολύπλοκο κλάσμα μπορεί να καταλήγει σε ένα αριθμό. Έφτιαξε λοιπόν την παράσταση $\frac{3\alpha^4\beta^2\gamma^3 * 4\alpha^3\beta}{36\alpha^7\beta^3\gamma^3}$ που κατέληγε στον αριθμό $\frac{1}{3}$.

Ένα ακόμη αυθόρμητο παράδειγμα εμφανίστηκε σαν αντιπαράδειγμα από μία καθηγήτρια σε ένα μάθημα γεωμετρίας, ως απάντηση στο λανθασμένο ισχυρισμό ενός μαθητή ότι ένα τετράπλευρο με δυο απέναντι γωνίες ορθές είναι χαρταετός. Στην προσπάθεια της να πείσει το μαθητή ότι ο ισχυρισμός του δεν ήταν σωστός η καθηγήτρια δημιούργησε εκείνη τη στιγμή ένα αντιπαράδειγμα, φτιάχνοντας δυο ορθές γωνίες και μετακινώντας τις ώστε να τμηθούν, όπως φαίνεται στο σχήμα 41.



Σχήμα 41

Από τα παραδείγματα που δημιούργησαν οι καθηγητές, τα 317 ήταν προσχεδιασμένα και τα 287 αυθόρμητα. Οι ερευνητές προβληματίστηκαν σχετικά με τον παραπάνω διαχωρισμό, αναγνωρίζοντας ότι τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν από έμπειρους καθηγητές θεωρήθηκαν προσχεδιασμένα ενώ είχαν κάποια αυθόρμητα στοιχεία. Παρόλα αυτά, τα αυθόρμητα παραδείγματα που παρατηρήθηκαν έδωσαν πολλές πληροφορίες για τον τρόπο που ενεργούν οι καθηγητές και τη γνώση που έχουν ώστε να ενεργούν αυθόρμητα. Κάποια από τα

αυθόρμητα παραδείγματα ήταν άμεσα, δηλαδή εύκολα προσιτά από το χώρο παραδειγμάτων των καθηγητών, ενώ άλλα χρειάζονταν περισσότερο χρόνο είτε γιατί ήταν λιγότερο προσβάσιμα είτε γιατί ήταν νέα για τους καθηγητές, αποτελώντας ταυτόχρονα ευκαιρίες μάθησης γι' αυτούς. Οι πέντε καθηγητές που συμμετείχαν στην έρευνα υποστήριξαν ότι ποτέ στο παρελθόν δεν είχαν εκφραστεί σχετικά με το πώς επιλέγουν ή δημιουργούν παραδείγματα αλλά και ούτε είχαν σκεφτεί αυτά τα θέματα. Κατά συνέπεια μέσα από την έρευνα αυτή βοηθήθηκαν και ενημερώθηκαν για τις προγραμματισμένες και τις στιγμιαίες ενέργειες.

Οι θεωρήσεις των καθηγητών είναι αυτές που αλληλεπιδρούν με το χώρο παραδειγμάτων τους και καθορίζουν την επιλογή παραδείγματος ή τη δημιουργία νέου. Από τις παρατηρήσεις και τις συζητήσεις κατά τη διάρκεια της έρευνας με τους καθηγητές, διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν αλληλένδετες και καμιά φορά επικαλυπτόμενες αρχές που κατευθύνουν τις επιλογές τους. Κάποιες θεωρήσεις αντανακλούν παιδαγωγική γνώση και κάποιες δείχνουν ευαισθησία προς τους μαθητές. Σε όλες τις περιπτώσεις όμως η επιλογή και η δημιουργία παραδειγμάτων στηρίχτηκε στην μαθηματική γνώση σχετικών θεμάτων. Σε πολλές περιπτώσεις υιοθετήθηκαν παραπάνω από μία εκτιμήσεις ενώ υπήρξαν και ακολουθίες παραδειγμάτων που βασίζονταν στην ίδια εκτίμηση. Συνολικά διαπιστώθηκαν 474 ρητά διατυπωμένες εκτιμήσεις οι οποίες αναλύονται παρακάτω.

Η πρώτη θεώρηση διατυπώνετε ως εξής: *¨Ξεκινάμε με μία απλή ή γνωστή περίπτωση¨*.

Οι εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην θεώρηση αυτή ήταν: [K1] *¨Δεν θέλω να ξεκινήσω με ένα στραμμένο ορθογώνιο τρίγωνο, αλλά με μία απλή περίπτωση όπου οι πλευρές της ορθής γωνίας να είναι οριζόντιες και κατακόρυφες. Θα εξετάσω άλλες περιπτώσεις αργότερα¨*, [K2] *¨Θα ξεκινήσω τη διδασκαλία της τετραγωνικής ρίζας με απλά και γνωστά παραδείγματα, όπως η τετραγωνική ρίζα του 9,16,25,…, έτσι οι μαθητές θα την υπολογίσουν χωρίς υπολογιστή τσέπης¨*. Κάποιοι καθηγητές εξέτασαν ακολουθίες παραδειγμάτων και κατασκεύασαν παραδείγματα βαθμιαία από ένα συγκεκριμένο κριτήριο. Με τον τρόπο αυτό μετέβαλαν ένα στοιχείο κάθε φορά ή αύξαναν σταδιακά το επίπεδο δυσκολίας και πολυπλοκότητας. Στη συνέχεια

παρουσιάζεται μία ακολουθία τριών συστημάτων εξισώσεων με κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, που επιλέχτηκαν από την καθηγήτρια [K3] και εξελίσσονται από απλές σε πιο πολύπλοκες. Στο δεξί μέρος είναι οι εξηγήσεις της καθηγήτριας για την επιλογή της.

$\begin{cases} \frac{\chi}{3}+\frac{\psi}{2}=2 \\ \frac{\chi-\psi}{2}-\frac{\chi+4}{5}=1 \end{cases}$ (6,0)	Παράδειγμα 1: Απλή έκφραση αριθμητικής, βρίσκεται εύκολα το ΕΚΠ.
$\begin{cases} \frac{2(\chi-3)}{7}+\frac{\psi-2}{4}=\frac{4\chi-5}{14} \\ 3(2\psi-\chi)-2\psi+14=0 \end{cases}$ (10,4)	Παράδειγμα 2: Όχι τόσο απλή έκφραση, θα πρέπει να χωρίσουν γνωστούς από αγνώστους και είναι πιο δύσκολο να βρουν το ΕΚΠ.
$\begin{cases} \frac{3}{2}(\chi-\psi)-\frac{2}{5}(\chi-2)=4 \\ 3(\chi-2)=5\psi \end{cases}$ (7,3)	Παράδειγμα 3: Μία διαφορετική παρουσίαση των κλασμάτων που προκαλεί δυσκολίες.

Πίνακας 13

Αυτή η κατηγορία ήταν η πιο διαδεδομένη με 193 περιπτώσεις, εκ των οποίων το 59% με αυθόρμητα παραδείγματα και το 41% με προσχεδιασμένα.

Η δεύτερη θεώρηση διατυπώνονταν ως εξής: *¨Λαμβάνοντας υπόψη τα λάθη των μαθητών¨*.

Συχνά οι καθηγητές φτιάχνουν παραδείγματα λαμβάνοντας υπόψη τους τα συχνά λάθη που κάνουν οι μαθητές ή τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. Οι εκφράσεις που χρησιμοποίησαν στην προσέγγιση αυτή ήταν: [K3] *¨Δεν επέλεξα αυτό γιατί σκεφτόμουν τις δυσκολίες που θα αντιμετώπιζαν οι μαθητές¨*, [K1] *¨Χρησιμοποίησα τα λάθη των μαθητών μου, δηλαδή την πεποίθησή τους ότι όταν απλοποιώ ένα κλάσμα και όλοι οι παράγοντες απλοποιούνται το αποτέλεσμα είναι 0 και όχι 1¨*, στη συνέχεια η καθηγήτρια έδωσε το ακόλουθο παράδειγμα: $\frac{4\alpha^4\beta^3\gamma^2\ 3\alpha^2\beta^4\gamma}{6\alpha^2\beta^4\gamma^2\ 2\alpha^4\beta^3\gamma}$. Μία άλλη καθηγήτρια [K2] επέλεξε να συμπεριλάβει τη $\sqrt{50}$ στα παραδείγματά της για τη διδασκαλία της τετραγωνικής ρίζας, γνωρίζοντας την

παρανόηση των μαθητών ότι $\sqrt{50} = 2 * \sqrt{25} = 2 * 5 = 10$ ενώ στην πραγματικότητα $\sqrt{50} \neq 2 * \sqrt{25}$. Επίσης επέστησε την προσοχή των μαθητών της στο παράδειγμα $\sqrt{25} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{4^2 + 3^2} \neq \sqrt{4^2} + \sqrt{3^2}$.

Η καθηγήτρια [K1] σε ένα μάθημα γεωμετρίας θέλησε να εισάγει τους όρους *εντός εκτός και επί ταυτά* και *εντός εναλλάξ* γωνίες μεταξύ δυο ευθειών που τέμνονται από μία άλλη. Εσκεμμένα και γνωρίζοντας το λάθος των μαθητών να θεωρούν τις ευθείες παράλληλες, η καθηγήτρια επέλεξε οι ευθείες να μην είναι παράλληλες και τις σχεδίασε ώστε να είναι αυτό φανερό. Η ίδια καθηγήτρια [K1] κατά τη διάρκεια ενός άλλου μαθήματος διαπίστωσε τη δυσκολία ενός μαθητή να κατανοήσει τη σειρά των εξισώσεων σε ένα σύστημα με δύο εξισώσεις και αποφάσισε να ξεκαθαρίσει ότι η λύση παραμένει σταθερή ανεξάρτητα με τη σειρά που οι εξισώσεις εμφανίζονται. Για το λόγο αυτό έφτιαξε μία γραφική παράσταση ενός απλού συστήματος εξισώσεων, όπου οι εξισώσεις παριστάνονταν με δυο ευθείες γραμμές που τέμνονταν, χωρίς να δοθεί καμία προσοχή στη σειρά. Έτσι στράφηκε η προσοχή των μαθητών στο αναλλοίωτο και ξεκαθαρίστηκε η παρανόησή τους, ενώ και οι ίδιοι έκριναν την παρέμβαση της καθηγήτριας πολύ χρήσιμη. Ογδόντα πέντε περιπτώσεις ήταν σε αυτή την κατηγορία, με το 79% να αναφέρεται σε αυθόρμητα παραδείγματα και το 21% σε προσχεδιασμένα.

Η τρίτη θεώρηση των καθηγητών που επηρέαζε τις επιλογές παραδειγμάτων τους ήταν: ¨*Βοηθώντας τους μαθητές να εντοπίσουν τα σχετικά χαρακτηριστικά*¨.

Με την έκφραση αυτή περιγράφεται η προσπάθεια των καθηγητών να εστιάσουν την προσοχή των μαθητών σε πιο γενικές περιπτώσεις, αποφεύγοντας τις ειδικές που τους αποπροσανατολίζουν. Η καθηγήτρια [K1] κινούμενη προς αυτήν την κατεύθυνση και θέλοντας να παρουσιάσει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έδινε παραδείγματα ορθογώνιων τριγώνων με δεδομένα τα μήκη των δυο κάθετων πλευρών και ζητούσε από τους μαθητές να υπολογίσουν την υποτείνουσα. Τα ζεύγη πλευρών που χρησιμοποίησε η καθηγήτρια αρχικά ήταν 3,4 και έπειτα 6,8. Το επόμενο ζευγάρι πλευρών που δόθηκε ήταν το 5,12 ώστε να καταρριφθεί το πρότυπο ότι οι αριθμοί των πλευρών είναι πολλαπλάσια του πρώτου ζεύγους. Ένας άλλος τρόπος που θα εφιστούσε την προσοχή των μαθητών σε σχετικά χαρακτηριστικά είναι η δομημένη

μεταβολή. Η καθηγήτρια [K5] για το λόγο αυτό, κινήθηκε από την παρουσίαση της ανίσωσης $|\chi^2 - \chi| < 20$ στην ανίσωση $|\chi^2 + \chi| < 20$ και η καθηγήτρια [K1] έδωσε μία σειρά γραμμικών συναρτήσεων μεταβάλλοντας ένα στοιχείο κάθε φορά : f(x)= -x+5 , f(x)= -2x+5 και f(x)= -3x+5. Όταν αποφάσισε να καταρρίψει αυτό το πρότυπο πρόσθεσε μία συνάρτηση δευτέρου βαθμού διατηρώντας σταθερούς τους συντελεστές: f(x)= $-x^2+5$. Από τις 68 περιπτώσεις αυτής της κατηγορίας το 57% σχετίζονταν με αυθόρμητα παραδείγματα και το 43% με προσχεδιασμένα.

Η τέταρτη θεώρηση περιγράφεται ως εξής: *¨Μεταβιβάστε τη γενικότητα επιλέγοντας τις λεπτομέρειες τυχαία¨*.

Με την τυχαία επιλογή ειδικών παραδειγμάτων θα μπορούσε να αναπτυχθεί η ιδέα της γενικότητας (Zaslavsky, Harel & Manaster, 2006). Είναι όμως σημαντικό να διακριθούν οι περιπτώσεις στις οποίες η επιλογή τυχαίων παραδειγμάτων λειτουργεί βοηθητικά, ενώ σε άλλες λειτουργεί παραπλανητικά και αποπροσανατολίζει τους μαθητές. Πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι αυτές οι επιλογές δεν γίνονται αυστηρά με τυχαίο τρόπο όπως η ρίψη ενός ζαριού. Κάποιες παρουσιάστηκαν ως μία γρήγορη επιλογή παραδειγμάτων ¨που έρχονται πρώτα στο μυαλό¨ και άλλες προέκυψαν από λεπτομέρειες που παρείχαν για τα παραδείγματα, τυχαία επιλεγμένοι μαθητές.

Κάποιοι καθηγητές υποστηρίζουν ότι η τυχαία επιλογή αριθμών στα παραδείγματα συντελεί θετικά στη γενίκευση. Σε αυτήν την περίπτωση οι καθηγητές είχαν μία σειρά πιθανών αριθμών στο μυαλό τους και συνεκτιμώντας το εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής, έκαναν μία τυχαία επιλογή. Αυτό το είδος εκτιμήσεων συνδέθηκε με τα αυθόρμητα παραδείγματα καθώς ο καθηγητής έκανε διαφανή αυτή τη διαδικασία στους μαθητές. Η καθηγήτρια [K5] κατά τη διδασκαλία της έννοιας των ρητών αριθμών σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου, έδωσε τον τυπικό ορισμό και ζήτησε από τους μαθητές να προτείνουν αριθμούς με ένα συγκεκριμένο εύρος δυνατοτήτων. Για να διασφαλίσει την τυχαία επιλογή αλλά και ένα ευρύ φάσμα διαφόρων αριθμών, ζήτησε δεκαδικούς αριθμούς μεταξύ του 0 και 1 και έπειτα κάποια ανάγωγα κλάσματα. Με αυτόν τον τρόπο η καθηγήτρια κατάφερε να δείξει ότι οι περισσότεροι αριθμοί με τους οποίους ήταν εξοικειωμένοι οι μαθητές ήταν ρητοί και ταυτόχρονα παρουσίασε μία άλλη μορφή τους, ως πηλίκο δυο ακεραίων.

Ο καθηγητής [Κ4] για να παρουσιάσει το θεώρημα σχετικά με το μέτρο της εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου, σχεδίασε ένα τρίγωνο στον πίνακα και ζήτησε από τους μαθητές να επιλέξουν οποιαδήποτε κορυφή και μία προσκείμενη πλευρά. Έπειτα προέκτεινε την πλευρά αυτή πέρα από την κορυφή εντοπίζοντας την εξωτερική γωνία. Με τον τρόπο αυτό επιδίωκε να φανερώσει ότι οτιδήποτε ίσχυε γι' αυτήν την εξωτερική γωνία θα ίσχυε και για οποιαδήποτε άλλη. Στη συνέχεια ζήτησε από τους μαθητές να προτείνουν τιμές για τις δύο απέναντι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου και εκείνοι πρότειναν 42^0 και 73^0, δίνοντας μία αίσθηση τυχαίας επιλογής αριθμών. Τελειώνοντας, τους ζήτησε να υπολογίσουν το μέτρο της εξωτερικής γωνίας και να παρατηρήσουν ότι ισούταν με το άθροισμα $42^0 + 73^0$. Παρόλα αυτά, η τυχαία επιλογή αριθμών δεν είναι πάντα χρήσιμη. Ο ίδιος καθηγητής για να παρουσιάσει τους τύπους Viete επέλεξε τυχαία μία δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία όμως δεν είχε πραγματικές λύσεις αποτυγχάνοντας έτσι να δώσει ένα γενικό παράδειγμα, όπως έχει αναλυτικά παρουσιαστεί παραπάνω (παράδειγμα 5, Zaslavsky & Zodik, 2007). Και οι 68 περιπτώσεις αυτής της κατηγορίας σχετίζονται με αυθόρμητα παραδείγματα.

Η πέμπτη εκτίμηση αναφέρεται στην *¨υποβολή ασυνήθιστων περιπτώσεων¨*.

Με τον όρο ¨ασυνήθιστες περιπτώσεις¨ χαρακτηρίζονται είτε οι εξαιρέσεις, είτε οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται ελάχιστα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Για παράδειγμα οι αριθμοί 0 και 1, που είναι οι μόνοι αριθμοί που παραμένουν αμετάβλητοι όταν υψωθούν σε δύναμη, δηλαδή $0^2 = 0$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\sqrt{0} = 0$ ή $1^2=1$ άρα $\sqrt{1} = 1$. Κάποιοι καθηγητές χρησιμοποίησαν αυτή την ιδιότητα όταν εξηγούσαν την επιλογή των $\sqrt{0}$ και $\sqrt{1}$ κατά τη διδασκαλία της τετραγωνικής ρίζας. Η καθηγήτρια [Κ3] χρησιμοποιώντας μη πρωτοτυπικά παραδείγματα, τα οποία συνήθως αγνοούνται, για να παρουσιάσει την έννοια του ρόμβου, σχεδίασε ένα κοίλο ρόμβο και ζήτησε από τους μαθητές να διαπιστώσουν αν ίσχυε ο ορισμός που γνώριζαν γι' αυτήν την περίπτωση. Διαπιστώθηκαν 40 περιπτώσεις σε αυτήν την κατηγορία εκ των οποίων το 22% σχετίζονταν με αυθόρμητα παραδείγματα και το 78% με προσχεδιασμένα.

Η έκτη θεώρηση διατυπώνονταν ως εξής: *¨Κρατήστε την περιττή εργασία στο ελάχιστο¨*.

Οι εκφράσεις που διατυπώθηκαν σε αυτή την κατηγορία ήταν: [K5] *¨Είναι κρίμα να σπαταλείται τόσος χρόνος μέσα στην τάξη για τεχνική εργασία αντί για την ουσία¨*. Αυτό ήταν φανερό από την επιλογή του κλάσματος $\frac{1}{7}$ για να παρουσιαστεί η περίοδος ενός ρητού αριθμού, αντί για τα παραδείγματα $\frac{1}{17}$ ή $\frac{1}{19}$, που σύμφωνα με τον καθηγητή είχαν πολύ μεγαλύτερη περίοδο και δε χρησίμευαν. Επίσης κάποιοι καθηγητές δίνουν έμφαση στο σχετικό μέρος ενός παραδείγματος χωρίς να προχωρούν σε λεπτομέρειες, όπως για παράδειγμα κατά την παρουσίαση ενός προβλήματος που δίνεται η γενική λύση χωρίς να ολοκληρώνονται οι πράξεις. Στην κατηγορία αυτή διαπιστώθηκαν 20 περιπτώσεις, το 25% αναφερόταν σε αυθόρμητα παραδείγματα και το 75% σε προσχεδιασμένα.

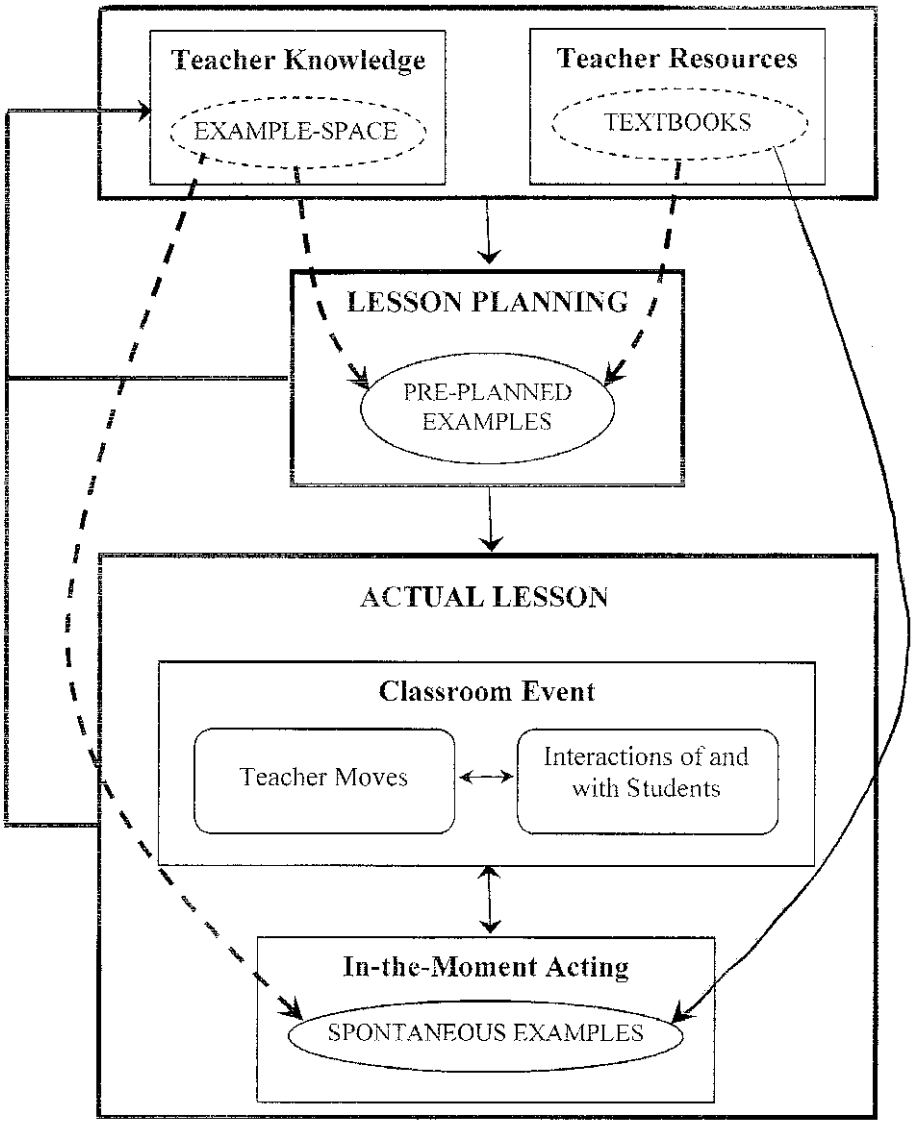
Συνολικά και στις 6 κατηγορίες, το 64% των θεωρήσεων σχετίζονταν με αυθόρμητα παραδείγματα και το 36% με προσχεδιασμένα. Συγκεκριμένα, στις κατηγορίες 2 και 4 ήταν συχνότερα τα αυθόρμητα παραδείγματα ενώ στις κατηγορίες 5 και 6 τα προσχεδιασμένα. Ειδικότερα στην κατηγορία 2, αυτή η διαφορά απεικονίζει το γεγονός ότι οι καθηγητές αντιμετωπίζουν τις δυσκολίες των μαθητών όταν ενημερώνονται από τους ίδιους μέσα στην τάξη και όχι εκ των προτέρων. Επιπλέον, η παρουσίαση τυχαίων επιλογών σχετίζεται με αντιδράσεις της στιγμής (κατηγορία 4), ενώ η ανακάλυψη ειδικών περιπτώσεων (κατηγορία 5) και η ανάλυση του μεγέθους της εργασίας που χρειάζεται κάθε επιλογή (κατηγορία 6), απαιτούν σχεδιασμό. Είναι ενδιαφέρον ότι η κατηγορία 1, δηλαδή η επιλογή απλών και γνωστών παραδειγμάτων για το ξεκίνημα, ήταν ο κύριος τύπος θεωρήσεων και είχε τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Από τις παραπάνω εκτιμήσεις γίνεται φανερή η βάση των γνώσεων στην οποία στηρίζονται οι καθηγητές. Κάποιοι καθηγητές βρίσκονται πιο κοντά στη μαθηματική γνώση όπως αποκαλύπτεται από τις λογικές πτυχές του αντιπαραδείγματος, ή από το εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής κατά την κατασκευή

τριγώνων, ή από το μήκος της περιόδου ενός κλάσματος ή τέλος από τις συνθήκες για τις οποίες οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες. Κάποιες άλλες εκτιμήσεις συνδέονται με τη παιδαγωγική γνώση, όπως για παράδειγμα δίνοντας έμφαση στα σχετικά χαρακτηριστικά καταρρίπτοντας ένα πρότυπο, ή κατασκευάζοντας βαθμιαία παραδείγματα, ή επιλέγοντας τυχαίους αριθμούς που μεταφέρουν τη γενικότητα. Τέλος, υπήρξαν πολλές θεωρήσεις που αποδεικνύουν ότι οι καθηγητές λάμβαναν υπόψη τους τον τρόπο σκέψης των μαθητών κατά την επιλογή παραδειγμάτων, όπως οι περιπτώσεις κατασκευής παραδειγμάτων που βασίζονται σε γνωστά λάθη των μαθητών και υπερ- γενικεύσεις τους ή δημιουργώντας πολυπλοκότερα παραδείγματα ξεκινώντας από απλά και γνωστά προς τους μαθητές.

Οι εκτιμήσεις των καθηγητών δεν είναι μεμονωμένες. Υπάρχει μία ακολουθία γεγονότων που τις προκαλούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Οι επιλογές των καθηγητών κατευθύνονται από κάποιες υιοθετημένες αρχές και στηρίζονται στη γνωστική τους βάση ή στο περιεχόμενο των προσιτών χώρων παραδειγμάτων τους. Στην περίπτωση που χρειαστεί να δημιουργήσουν νέα παραδείγματα, αυτά τελικά εντάσσονται στον υπάρχοντα χώρο παραδειγμάτων και τον εμπλουτίζουν.

Σύμφωνα με τον *κύκλο διδασκαλίας των μαθηματικών* του Simon (1995), προέκυψε το παρακάτω σχήμα (42) από τα αποτελέσματα της έρευνας.



Σχήμα 42

Ο κύκλος διδασκαλίας που απεικονίζεται παραπάνω εστιάζει στη γνώση των καθηγητών, στο σχεδιασμό του μαθήματος και στο πραγματικό μάθημα στην τάξη. Τα βέλη δείχνουν τη αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Η γνώση των εκπαιδευτικών συνίσταται από το χώρο παραδειγμάτων τους και από διάφορες πηγές (κυρίως τα εγχειρίδια). Τα βιβλία χρησιμοποιούνται κυρίως στο στάδιο του σχεδιασμού του μαθήματος ενώ οι χώροι παραδειγμάτων συντελούν τόσο στο σχεδιασμό όσο στη διεξαγωγή του μαθήματος. Η επιλογή παραδειγμάτων κατευθύνεται από διάφορους τύπους εκτιμήσεων των καθηγητών που σχετίζονται με τις προσωπικές τους κλίσεις και κρίσεις. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος τα γεγονότα μέσα στην τάξη απαρτίζονται από τις κινήσεις και την αλληλεπίδραση των καθηγητών με τους

μαθητές. Τα γεγονότα αυτά ωθούν με τη σειρά τους καθηγητές να αντιδράσουν στιγμιαία και να δημιουργήσουν ένα κατάλληλο παράδειγμα. Τα απροσδόκητα γεγονότα τα οποία απαιτούν ένα διαφορετικό ή ένα επιπλέον παράδειγμα μπορούν να λειτουργήσουν ως ευκαιρίες μάθησης για τον εκπαιδευτικό.

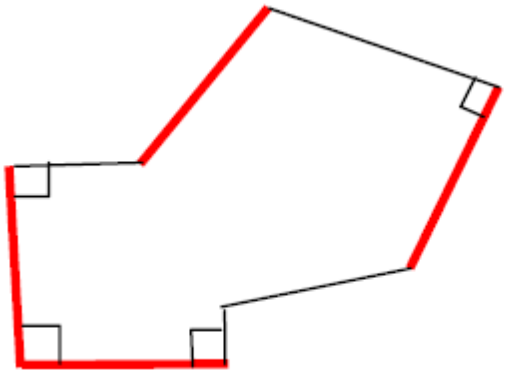
Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι κοινή αρχή των καθηγητών είναι η προσπάθεια επίλυσης των δυσκολιών των μαθητών τους. Ο τρόπος διαφέρει σε κάθε διδάσκοντα και σχετίζεται με τα χρόνια προϋπηρεσίας του. Κάποιοι δίνουν αυθόρμητα παραδείγματα που προκύπτουν άμεσα από το χώρο παραδειγμάτων τους, ενώ άλλοι δημιουργούν νέα παραδείγματα. Τα αυθόρμητα παραδείγματα προκύπτουν είτε από την ανάγκη για άμεση απάντηση, είτε από την ανεπάρκεια ενός προσχεδιασμένου παραδείγματος. Τα αντιπαραδείγματα που παρουσιάστηκαν στη μελέτη ήταν όλα αποτέλεσμα αυθόρμητης αντίδρασης των καθηγητών. Σημαντικός είναι και ο ρόλος των τυχαία επιλεγμένων παραδειγμάτων, που μεταφέρουν την αίσθηση της γενικότητας αν έχουν επιλεγεί σωστά, αλλά ταυτόχρονα μπορεί και να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές αν γίνει λανθασμένη επιλογή. Όλα τα επεισόδια που περιγράφηκαν σε αυτή την έρευνα μπορούν να αποτελέσουν πηγή για την επιμόρφωση των καθηγητών ενώ ταυτόχρονα συντελούν στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών, στην επέκταση του χώρου παραδειγμάτων των καθηγητών και στη συνειδητοποίηση των διαφορετικών πτυχών δημιουργίας και επιλογής παραδειγμάτων στα μαθηματικά.

Ένα άρθρο το οποίο δεν εστιάζει στο ρόλο των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων κατά την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών αλλά στην αυστηρότητα των μαθηματικών ορισμών είναι αυτό των Zazkis &Leikin (2008). Στο άρθρο αυτό εξετάζεται σε ποια έκταση παραδείγματα φτιαγμένα από τους συμμετέχοντες, που ήταν καθηγητές μαθηματικών, φανερώνουν τη γνώση και την κατανόησή τους για τα μαθηματικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα ερευνάται η κατανόηση της έννοιας του τετραγώνου και η μετα-μαθηματική έννοια του ορισμού, καθώς επίσης σε ποια έκταση το σχεδιασμένο πλαίσιο για την ανάλυση των παραδειγμάτων βοηθά το σκοπό αυτό και πως μπορεί να γίνει πιο ξεκάθαρο ή να επεκταθεί για να τον εξυπηρετήσει. Στο άρθρο αυτό ακόμη φανερώθηκε η ικανότητα των καθηγητών μαθηματικών να ξεχωρίζουν μεταξύ αναγκαίων και ικανών

συνθηκών και να εφαρμόζουν την κατάλληλη μαθηματική ορολογία, καθώς επίσης φανερώθηκαν οι ιδέες τους για το τι είναι ένας ορισμός. Επιπρόσθετα η εξέταση των παραδειγμάτων έδειξε ισχυρή προτίμηση για τις παιδαγωγικές θεωρήσεις έναντι των μαθηματικών, μία διδακτική πρακτική που αμφισβητήθηκε από πολλούς καθώς αρνείται την συμμετοχή μαθητών στη μαθηματική ενασχόληση και τους αποθαρρύνει από την κατασκευή δικών τους ορισμών.

Έτσι δόθηκαν στους συμμετέχοντες δυο εργασίες. Η πρώτη ήταν να δώσουν όσο το δυνατόν περισσότερους ορισμούς για το τετράγωνο και η δεύτερη περιείχε ένα κατάλογο 24 παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων τετραγώνων. Αυτά είχαν επιλεγεί είτε από τον ειδικό παραδειγματικό χώρο είτε από τις προηγούμενες απαντήσεις τους, που σκοπό είχε να κριθούν για το κύρος τους ατομικά από κάθε μανθάνοντα και να συγκριθούν τα αποτελέσματα σε μικρές ομάδες. Με τον τρόπο αυτό θα γινόταν φανερές οι ιδέες των συμμετεχόντων που κατεύθυναν τις απαντήσεις τους, θα εμπλουτίζονταν και θα αναλύονταν οι παραδειγματικοί τους χώροι ως προς την προσβασιμότητα , την ορθότητα, την αφθονία και τη γενικότητα.

Ως προς την *προσβασιμότητα και την ορθότητα* των παραδειγμάτων, εξετάστηκε αν ικανοποιούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις και αν παράγονται με ευκολία ή κόπο. Εξηγώντας με παραδείγματα τον ορισμό μιας έννοιας από ένα σύνολο συνθηκών που είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες ή αναγκαίες και όχι ικανές φαίνονται οι λογικές δυσκολίες. Τέτοιες δυσκολίες μπορεί να σχετίζονται με την απουσία κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας και των κρίσιμων χαρακτηριστικών της ή απουσία κατανόησης της έννοιας του ορισμού. Για παράδειγμα, ορίζοντας ένα τετράγωνο ως ένα «γεωμετρικό αντικείμενο με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις γωνίες των 90^0» περιέχει αναγκαίες αλλά όχι ικανές συνθήκες και, ως εκ τούτου, μπορεί να υπονοεί παρανόηση του ρόλου του ορισμού στα μαθηματικά (σχ.43).



Σχήμα 43. Παράδειγμα ενός πολυγώνου με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις γωνίες των 90^0.

Απεναντίας , μερικά παραδείγματα μπορεί να περιέχουν συγκεκριμένες ιδιότητες που είναι μη αναγκαίες συνθήκες για το αντικείμενο και ισχύουν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, το αντικείμενο που ορίζεται ως «ένα τετράπλευρο με τέσσερις γωνίες των 90^0 και τέσσερις πλευρές των 2 cm έκαστη» είναι σίγουρα ένα τετράγωνο, αλλά η πρόταση αυτή δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ορισμός, καθώς περιέχει ικανές αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες.

Από τα 140 παραδείγματα που δόθηκαν τα 85 κρίθηκαν κατάλληλα και τα 55 μη κατάλληλα. Τα κατάλληλα διακρίθηκαν σε αυτά με αυστηρούς και μη αυστηρούς ορισμούς. Οι αυστηροί ορισμοί (71 παραδείγματα) είναι μίνιμαλ (περιέχουν τις λιγότερες δυνατές λέξεις) ή οριακά μη μίνιμαλ και περιέχουν ακριβή μαθηματική ορολογία. Διατυπώσεις που εντάσσονται στην κατηγορία των αυστηρών ορισμών είναι οι ακόλουθοι.

Ένα τετράγωνο είναι:

Α-1 Ένα ορθογώνιο με όλες τις πλευρές ίσες (οριακά μη μίνιμαλ)
Α-2 Ένας ρόμβος με μια ορθή γωνία
Α-3 Ένα παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία και όλες τις πλευρές ισομήκεις (οριακά μη μίνιμαλ)

Α-4 Ένα ορθογώνιο που η διαγώνιός του διχοτομεί τις γωνίες
Α-5 Ένας ρόμβος με τέσσερις γωνίες 90^0 (οριακά μη μίνμαλ)

Α-6 Ένας ρόμβος και ένα ορθογώνιο
Α-7 Ένα κανονικό τετράπλευρο.

Οριακά μη μίνιμαλ παραδείγματα είναι και τα ακόλουθα. Ένα τετράγωνο είναι:

Α-8: Ένα τετράπλευρο του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούν γωνίες (μια διαγώνιος είναι αρκετή) (ΛΑΘΟΣ και στο ρόμβο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες)
Α-9: Ένα παραλληλόγραμμο με μια γωνία 90^0 και όλες τις πλευρές ίσες (δυο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι αρκετό)
Α-10: Ένα τετράπλευρο πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες 90^0 (μια γωνία ίση με 90^0 είναι αρκετή).

Οι υπόλοιπες 14 διατυπώσεις χαρακτηρίστηκαν κατάλληλες αλλά όχι αυστηρές είτε λόγω της ανακριβούς μαθηματικής ορολογίας, είτε λόγω σημαντικής μη μίνιμαλ τοποθέτησης όπου υπήρχε ανάμειξη ορισμού και ιδιοτήτων όπως φαίνεται στις παρακάτω προτάσεις. Ένα τετράγωνο είναι:

Α-11: Ένα σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές ίσου μήκους με γωνίες μεταξύ των διαδοχικών πλευρών ίσες με 90^0, δίνοντας ένα συνολικό μέτρο των εσωτερικών γωνιών ίσο με 360^0 (το άθροισμα των 360^0 είναι πλεονασμός και δεν αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα μόνο των τετραγώνων)
Α-12: Ένα κλειστό σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές που έχουν τις δυο ισομήκεις διαγώνιες να τέμνονται υπό ορθές γωνίες (η ιδιότητα ¨δυο ισομήκεις διαγώνιες είναι ικανή συνθήκη και έτσι η προσθήκη να τέμνονται κάθετα είναι περιττή).

Παραδείγματα με ανακριβή ορολογία είναι τα επόμενα όπου χρησιμοποιούνταν λέξεις όπως ¨σχήμα¨ ή ¨αντικείμενο¨.

Ένα τετράγωνο είναι:

Α-13: Ένα διαμάντι και ένα ορθογώνιο
Α-14: Ένα τετράπλευρο σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις ίσες γωνίες
Α-15: Ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές, όπου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και οι γωνίες σχηματίζουν ορθές γωνίες.

Ακατάλληλα παραδείγματα με αναγκαίες αλλά όχι ικανές συνθήκες είναι τα επόμενα που δόθηκαν με αναφορά στις ιδιότητες του τετραγώνου(I/1-I/3) ή που αναφέρονταν σε ένα γενικό τετράπλευρο και όχι αναγκαστικά σε τετράγωνο(I/4-I/8) ή τέλος που άφηνε χώρο για ποικίλες ερμηνείες(I/9-I/11) .

I-1: Υπάρχουν τέσσερις πλευρές που έχουν ίσο μήκος

I-2: Τέσσερις ίσες γωνίες, τέσσερις ίσες πλευρές

I-3: Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες μεταξύ τους

I-4: Ένα τετράπλευρο με ίσες πλευρές

I-5: Ένα πολύγωνο στο οποίο οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες

I-6: Ένα κλειστό γεωμετρικό σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές

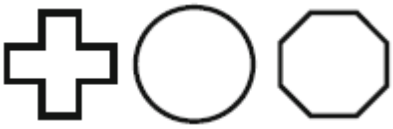
I-7: Ένα πολύγωνο που έχει διαγώνιες ίσου μήκους

I-8: Ένα πολύγωνο με τέσσερις ίσου μήκους πλευρές

I-9: Ένα σχήμα που φαίνεται το ίδιο κάθε φορά που στρέφεται κατά 90^0

I-10: Ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές που είναι ίσες και τέσσερις γωνίες 90^0

I-11: ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερις ίσες πλευρές



Αντικείμενα οριζόμενα από την I-9

Αντικείμενα οριζόμενα από την I-10

Αντικείμενα οριζόμενα από την I-11.

Ακολουθούν παραδείγματα ακατάλληλα με ικανές αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες, όπως:

I-12: Ένα τετράγωνο έχει τέσσερις κορυφές τοποθετημένες στα (x,y), (x,y+1), (x+1,y), (x+1,y+1) (υπάρχει περιορισμός στον προσανατολισμό και στο μέγεθος και υπονοείται ότι τα τέσσερα σημεία ενώνονται)

I-13: Δύο οριζόντιες και δυο κατακόρυφες παράλληλες γραμμές ίσων μηκών που σχηματίζουν γωνίες 90^0 στην τομή τους (περιορισμός προσανατολισμού και ακατάλληλη η χρήση της λέξης γραμμή).

Και καταλήγει με τα ακατάλληλα παραδείγματα που δεν έχουν ούτε ικανές ούτε αναγκαίες συνθήκες:

I-14: Δυο παράλληλες οριζόντιες γραμμές κάθετες σε δυο παράλληλες κατακόρυφες γραμμές.

I-15: Ένα τετράγωνο έχει τέσσερις κορυφές τέτοιες ώστε ακριβώς δυο ζεύγη κορυφών έχουν τις ίδιες x-συντεταγμένες και y-συντεταγμένες
I-16: Δυο ταυτόσημα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα ενωμένα στη βάση τους
I-17: Δυο ίδια ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μια κοινή υποτείνουσα
I-18: Δισδιάστατος κύβος.

Ως προς την *αφθονία* εξετάζεται αν τα παραδείγματα ποικίλουν ως προς τον τύπο και τη δομή και αν οι ορισμοί που έδωσαν ο συμμετέχοντες επεκτείνουν το συμβατικό διδακτικό παραδειγματικό χώρο. Έτσι οι ορισμοί για το τετράγωνο : 12) ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων σε ένα επίπεδο για τον οποίο το άθροισμα των αποστάσεων από δύο δοσμένες κάθετες γραμμές είναι σταθερό και 13) ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων σε ένα επίπεδο για τον οποίο η μεγαλύτερη των αποστάσεων από δυο δοσμένες κάθετες γραμμές είναι σταθερά, θεωρούνται πλούσιοι.

Παραδείγματα που συνεισφέρουν στην αφθονία ενός παραδειγματικού χώρου αν και χρειάζονται κάποιες τροποποιήσεις για να ικανοποιούν την αυστηρότητα είναι και οι παρακάτω.

Ένα τετράγωνο είναι:
R-1: Ένα παραλληλόγραμμο με ίσες και κάθετες διαγώνιες
R-2: Ρόμβος με ίσες διαγώνιες
R-3: Ορθογώνιο με κάθετες διαγώνιες
R-4: Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι διαγώνιες διχοτομούν η μια την άλλη υπό ορθές γωνίες σε τέσσερα ισομεγέθη τμήματα
R-5: Ένα τετράπλευρο, το εμβαδόν του οποίου ισούται με το τετράγωνο της μιας πλευράς

R-6: Ένα τετράπλευρο, όπου το μήκος της πλευράς ισούται με την τετραγωνική ρίζα του εμβαδού του
R-7: Μια τετράπλευρη περίμετρος με το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να υποστηρίξει η περίμετρος

R-8: Το σχήμα που προκύπτει, όταν φέρουμε τέσσερις χορδές ίσου μήκους ενωμένες από την αρχή ως το τέλος στο εσωτερικό ενός κύκλου.

Κάποια άλλα παραδείγματα ενώ ήταν πλούσια φάνηκαν ακατάλληλα και επιδέχονται μικρές αλλαγές. Τέτοια είναι τα παρακάτω. Ένα τετράγωνο είναι:

R-9: Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται υπό ορθές γωνίες(αρκεί να προστεθεί η συνθήκη ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται)
R-10: Ένα αντικείμενο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο, το οποίο έχει ακριβώς τέσσερα σημεία, που ανήκουν στην περιφέρεια, και οι εσωτερικές γωνίες του αντικειμένου είναι όλες ίσες με 90^0 (αρκεί να μετατραπεί το αντικείμενο σε τετράπλευρο και τα σημεία της περιφέρειας να ισαπέχουν)
R-11: Μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας ένα κύκλο με κάθετες διαμέτρους, ενώνοντας ακολούθως τα τέσσερα σημεία που τέμνουν τον κύκλο (θα πρέπει να οριστεί ο τρόπος που τα σημεία θα συνδεθούν)
R-12: Δυο ευθύγραμμα τμήματα διχοτομούν το ένα το άλλο, συνδέουμε αυτά τα τέσσερα σημεία για να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο (θα πρέπει να περιλάβει και κάποια άλλη ιδιότητα για να διαχωριστεί το τετράγωνο από το παραλληλόγραμμο).

Το παράδειγμα R-13 που ακολουθεί εισάγει ορολογία από τη θεωρία γραφικών και έτσι τίθεται εκτός σκοπού.

R-13: Μια γραφική παράσταση με τέσσερις κορυφές και τέσσερις ακμές, τέτοιες ώστε ο ‘μέσα’ και ‘έξω’ βαθμός της κάθε κορυφής είναι 1 και κάθε ακμή είναι κάθετη σε κάθε διαδοχική ακμή.

Τέλος, οι ορισμοί που ακολουθούν αναφέρονται στο εσωτερικό του τετραγώνου και συνεισφέρουν στην αφθονία του παραδειγματικού χώρου. Ένα τετράγωνο είναι :

R-14: Περιφραγμένη επιφάνεια με τέσσερις ίσες πλευρές, με κάθε πλευρά να ενώνεται υπό γωνία 90^0 R-15: Η μια πλευρά ενός κύβου
R-16: Μια φέτα ενός κύβου που έχει άπειρα μικρό πάχος.

Ως προς τη *γενικότητα* εξετάζεται αν τα παραδείγματα είναι ειδικά ή γενικά, με τα γενικά παραδείγματα να κυριαρχούν στη μαθηματική εκπαίδευση και να δείχνουν συνήθως ελλείψεις στην κατανόηση.

Στη δεύτερη φάση του άρθρου που παρουσιάζουμε δόθηκαν στους συμμετέχοντες 24 παραδείγματα και τους ζητήθηκε να εξετάσουν το κύρος τους. Κατά τη διάρκεια της άσκησης αυτής έγινε μεγάλη συζήτηση και προκλήθηκε διαφωνία μεταξύ των συμμετεχόντων.

Αρχικά οι ορισμοί του τετραγώνου που στηρίχτηκαν στη χρησιμοποίηση άλλων τετραπλεύρων, όπως για παράδειγμα (α) «ορθογώνιο με ίσες πλευρές» ή (β) «ρόμβος με ορθές γωνίες» ενώ από κάποιους θεωρήθηκαν ως οι καλύτεροι ορισμοί, κάποιοι άλλοι τους χαρακτήρισαν ως ¨απάτη¨, καθώς θεώρησαν ότι υπάρχει μία κυκλικότητα. Στην περίπτωση βέβαια αυτή υπήρξε σύγχυση μεταξύ αναγκαίων και ικανών συνθηκών και σχετικά με τη σχέση υποσυνόλου μεταξύ τετραγώνου και ορθογωνίου ή ρόμβου. Πολλοί επίσης θεώρησαν λανθασμένο τον ορισμό που δίνονταν ξεκινώντας με τον όρο *παραλληλόγραμμο* ή *ορθογώνιο* αλλά δέχονταν ορισμούς που ξεκινούσαν με τους όρους *πολύγωνο* ή *τετράπλευρο*. Μετά από συζήτηση κατέληξαν να δεχτούν την αξία των παραπάνω ορισμών διατηρώντας όμως την άποψη ότι δεν προτείνονται για μαθητές μεταθέτοντας το πρόβλημα σε παιδαγωγικό.

Στη συνέχεια υπήρξε διαφωνία μεταξύ των συμμετεχόντων για την εγκυρότητα των ορισμών που χρησιμοποιούσαν τα ελάχιστα δυνατά δεδομένα. Έτσι ο ορισμός «Ένα τετράγωνο είναι ένας ρόμβος με μια ορθή γωνία» τέθηκε υπό αμφισβήτηση λόγω της έλλειψης αναφοράς στο ότι όλες οι γωνίες πρέπει να είναι ορθές, συμπέρασμα στο οποίο θα μπορούσαν να καταλήξουν οι μαθητές μόνοι τους ή με απλή καθοδήγηση. Αυτό δείχνει ότι οι καθηγητές έχουν ενσωματώσει τα μαθηματικά στη διδακτική τους πρακτική, αφού βασικό τους μέλημα στη έρευνα ήταν αν οι ορισμοί θα ήταν εύκολα κατανοητοί από τους μαθητές τους.

Η έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας έναντι και πάλι της καθαρότητας και της προσβασιμότητας ενός ορισμού από τους καθηγητές ήταν ένα ακόμα αποτέλεσμα της έρευνας. Πολλοί συμμετέχοντες θεώρησαν ότι ο ορισμός: « τετράγωνο είναι ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις ορθές γωνίες» είναι κατάλληλος, χωρίς να ελέγξουν αν το σχήμα θα έπρεπε να είναι κλειστό ή οι πλευρές να είναι ευθύγραμμα τμήματα. Ορισμοί που χρησιμοποίησαν την έννοια του γεωμετρικού τόπου αν και ήταν ισοδύναμοι με τους άλλους απερρίφθησαν καθώς κρίθηκαν παιδαγωγικά ακατάλληλοι, ενώ τέλος ο ορισμός του τετραγώνου «ως μία πλευρά κύβου» προκάλεσε συζήτηση αλλά δεν φάνηκε να καταλήγει πουθενά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, μέσω της παρουσίασης πολλών μελετών αξιόλογων ερευνητών, προσπαθήσαμε να προβάλουμε το ρόλο και την αξία των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από τα αποτελέσματα των ερευνών έγινε φανερό ότι τα παραδείγματα έχουν εξέχουσα θέση στην εκπαιδευτική διαδικασία και χρησιμοποιούνται από μαθητές και καθηγητές.

Από την πλευρά των μαθητών διαπιστώθηκε ότι η δημιουργία προσωπικών παραδειγμάτων είναι εξαιρετικά αποτελεσματική στρατηγική εκμάθησης μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια που οι μαθητές παράγουν τα δικά τους παραδείγματα αποκτούν την εμπειρία της ανακάλυψης, της κατασκευής ενός χώρου αντικειμένων και των σχέσεων μεταξύ τους. Ξεκινώντας από γνωστά αντικείμενα και με την κατάλληλη στήριξη και ενθάρρυνση των καθηγητών, οι μαθητές μπορούν να κάνουν τις απαραίτητες προεκτάσεις και να φτάσουν σε υψηλά επίπεδα κατανόησης. Η χρήση παραδειγμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μπορεί να οδηγήσει επιπλέον τους μαθητές στη δημιουργία κατάλληλων γενικεύσεων, απαραίτητων για τη μάθηση. Μερικές φορές όμως τα λυμένα παραδείγματα ενδέχεται να οδηγήσουν τους μαθητές σε λανθασμένες γενικεύσεις ή ακόμα και να τους εμποδίσουν στη δημιουργία γενικεύσεων, κυρίως όταν λαμβάνονται ως προτωτυπικά. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί η συμβολή των μη παραδειγμάτων που βοηθούν στο διαχωρισμό των κρίσιμων από τα μη- κρίσιμα χαρακτηριστικά των αντικειμένων αλλά και η παρουσίαση μίας πλούσιας γκάμας παραδειγμάτων στους μαθητές. Η συμβολή των αντιπαραδειγμάτων κατά τη διαδικασία της μάθησης είναι λιγότερο αναγνωρισμένη αν και διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο. Οι μαθητές συχνά επηρεάζονται από προηγούμενες εμπειρίες και χαρακτηρίζουν τα αντιπαραδείγματα ως εξαιρέσεις. Επίσης πολλές φορές δεν αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα σε ένα παράδειγμα και ένα αντιπαράδειγμα.

Ο τρόπος χρησιμοποίησης και παρουσίασης των παραδειγμάτων αποτελεί πρόκληση όμως και για τον καθηγητή αφού πολλά χαρακτηριστικά θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και να ισορροπηθούν. Η αλληλουχία παραδειγμάτων έχει αντίκτυπο

στη μάθηση και προτείνεται ο συνδυασμός παραδειγμάτων, αντιπαραδειγμάτων και μη- παραδειγμάτων. Συχνά οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν οι ίδιοι τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουν στην τάξη. Ο σχεδιασμός παραδειγμάτων είναι απαιτητική εργασία και προϋποθέτει άριστη γνώση της θεωρίας, διδακτική εμπειρία και ενημέρωση για την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών. Κατά το σχεδιασμό παραδειγμάτων καθοριστικό ρόλο παίζουν οι θεωρήσεις των καθηγητών. Έτσι μπορεί να υπάρχει σταδιακή κλιμάκωση του βαθμού του βαθμού δυσκολίας των παραδειγμάτων ή να παρουσιάζονται ασυνήθιστα παραδείγματα. Επίσης, ο χώρος παραδειγμάτων των καθηγητών επηρεάζει την επιλογή τους. Ανάλογα με την ποικιλία παραδειγμάτων που περιέχει μπορεί να συμβάλει στη δημιουργία κατάλληλων παραδειγμάτων ή να συντελέσει στην εύστοχη παρουσίαση ενός αυθόρμητου παραδείγματος μέσα στην τάξη. Τα αντιπαραδείγματα, από τις μελέτες που παρουσιάστηκαν, φαίνεται να μην έχουν και πάλι την αξία που τους αναλογεί. Οι καθηγητές στηρίζονται κυρίως στη θεωρία για να απορρίψουν τους λανθασμένους ισχυρισμούς των μαθητών τους και όταν χρησιμοποιούν αντιπαραδείγματα συνήθως αυτά λειτουργούν υποστηρικτικά στη θεωρία και όχι αυτόνομα. Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι από την παραπάνω διαδικασία που περιγράφηκε και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί εντοπίζουν τις αδυναμίες των παρουσιαζόμενων παραδειγμάτων τα οποία βελτιώνουν, εμπλουτίζοντας έτσι το χώρο παραδειγμάτων τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Abel, N. H. (1826β). Untersuchungen uber die Reine $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2*3}x^3$ ... *Journal fur die Riene und Angewandte Mathematik,* I, pg 311-39.

[2] Attneave, F. (1957). Transfer of experience with a class schema to identification of patterns and shapes, . *Journal of Experimental Psychology 54*, 81–88.

[3] Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18(2), 147-176.

[4] Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. In D. Pimm, (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

[5] Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.*). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne: PME.

[6] Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2006). Modes of algebraic communication—moving between natural language, spreadsheet formulae and standard notation. *For the Learning of Mathematics 26*(1), 41–46.

[7] Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.*), Proceedings of the 30th PME International Conference* (vol. 1, pp. 126–154). Czech Republic: PME.

[8] Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. In L. Brown (Ed.), *Making meaning in mathematics. Advances in mathematics education* (Vol. 1, pp. 103–116). York, UK: QED.

[9] Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: a complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on Teaching and Learning in Mathematics Proof.* (990708).

[10] Boero, P. (2002). The Approach to Conjecturing and Proving: Cultural and Educational Choices. *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 248-254.

[11] Bruner, J., Goodnow, J., & Austin, A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

[12] Burger, W., & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31–48.

[13] Cauchy,A.L.(1813a). Recherches sur les Polyedres. *Journal de l' Ecole Polytechnique,9,* 68-86.

[14] Cauchy, A. L.(1821). *Coursd' Analyse de l' Ecole Royale Polytechnique.* Paris:de Bure.

[15] Charles, R. (1980). Exemplification and characterization moves in the classroom teaching of geometry Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 10-21.

[16] Cheng, Y. H. & Lin, F. L. (2005) *One more step toward acceptable proof in geometry.* Symposium Proposal EARLI 2005, Cyprus.

[17] Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192–212. doi:10.2307/749610.

[18] Cobb, P., & Whitenack, J. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom video recordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 213–228.

[19] Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context ofdevelopmental research. *Educational Psychologist, 31*(3&4), 175–191. doi:10.1207/s15326985ep3103&4_3.

[20] Colburn, W. (1826). *Intellectual arithmetic: Upon the inductive method of instruction*. Boston, USA: Reynolds & Co.

[21] Dahlberg, R., & Housman, D. (1997). Facilitating Learning Events Through Example Generation. *Education Studies in Mathematics 33,*283-299.

[22] Davydov, V. V. (1972/1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[23] Dienes, Z. (1960). *Building up Mathematics*. London, UK: Hutchinson Educational.

[24] Dorfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop (Ed.*), Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63–85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

[25] Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[26] Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[27] Duval, R., (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer Academic Publishers.

[28] Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International Newsletter on Teaching and Learning in Mathematics Proof.* (991112)

[29] Duval, R. (2002). Proof understanding in MATHEMATICS: What ways for STUDENTS? *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 61-77.

[30] Edwards, L., & Zazkis, R. (2002). Pre-service teachers' generalizations on a number theory task. In S. R. Campbell, & R. Zazkis (Eds.) Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction (pp. 139–156). Westport, CT: Ablex Publishing.

[31] Fischbein, E. (1987*). Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Kluwer.

[32] Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 231–245). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[33] Fodor, J. (1980). Fixation of belief and concept acquisition. In M. Piatelli-Palmerini (Ed.*), Language and learning: the debate between Jean Piaget and Noam Chomsky* (pp. 143–149). Cambridge: Harvard University Press.

[34] Fourier, J. (1808). Memoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides (Extrait). *Nouveau Bulletin des Sciences, par la Societe Philomathique de Paris,* I, pg 112-16.

[35] Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

[36] Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

[37] Gagné, R. (1985). *The conditions of learning* (4th edition). New York: Holt, Rinehart and Winston.

[38] Garuti, R., Boero, B., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of PME22,* Vol.2, 99345-352.

[39] Gattegno, C. (1970). *What we owe children: the subordination of teaching to learning.* London: Routledge & Kegan Paul.

[40] Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *Journal of Mathematical Behavior 29,* 160–168.

[41] Gillings, R. (1972). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. Reprinted 1982. New York, USA: Dover.

[42] Ginsburg, H. P. (1997). Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice. *Cambridge, UK: Cambridge University Press.*

[43] Goldenberg, P., &Mason, J.(2008).Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*,69:183-194 .

[44] Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

[45] Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

[46] Hanna, G., & Janke, N. (1993). Proof and application *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 421-438.

[47] Hanna, G., & Janke, N. (1996). Proof and proving. In: Bishop A. *et al.* (Eds.) *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[48] Hannibal, M. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 353–357

[49] Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zazkis (Eds.) *The learning and teaching number theory* (pp. 185–212). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[50] Harel, G. (2002). DNR-Based Instruction: Its Application in Developing Mathematics Teachers' Knowledge Base, Particularly their Proof Schemes. *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 78-90.

[51] Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.),

Research in collegiate mathematics education, III (pp. 234– 283). Providence, RI: American Mathematical Society.

[52] Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38–42.

[53] Hazzan,O.,& Zazkis, R.(1997). Constructing Knowledge by Constructing Examples for Mathematical Concepts. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 299-306.

[54] Healey, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. *Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK*. Research Report Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.

[55] Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61–76.

[56] Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[57] Hoyles, C., & Küchemann, D. (2002). Students' explanations in geometry: insights from a large-scale longitudinal survey. *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 9-22.

[58] Kellogg, R. (1980). Feature frequency and hypothesis testing in the acquisition of rule-governed concepts. *Memory & Cognition, 8*, 297–303.

[59] Khinchin, A. Y. (1968*). The teaching of mathematics*. London: The English Universities Press.

[60] Klausmeier, H., & Feldman, K. (1975). Effects of a definition and a varying number of examples and nonexamples on concept attainment. *Journal of Educational Psychology, 67*, 174–178.

[61] Klausmeier, H., & Sipple, T. (1980). *Learning and teaching concepts*. New York: Academic.

[62] Klymchuk, S. (2001). Counter examples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistakes. A case study. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th international conference for the psychology in mathematics education*, v. 1, (p. 326). Utrecht, The Netherlands.

[63] Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

[64] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

[65] Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258.

[66] Larsen, S., & Zandieh, M. (2005). *Conjecturing and proving as part of the process of defining*. Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Roanoke, Virginia, USA. Retrieved May 23, 2007, from http://www.pmena.org/2005/prog.htm

[67] Larsen, S., & Zandieh, M.(2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.1007/s10649-007-9106-0.

[68] Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87–106). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

[69] Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4th edition, pp. 333-357). Washington DC, USA: American Educational Research Association.

[70] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

[71] Lesh, R.,&Lehrer, R. (2000). Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. InA.Kelly, & R. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 665–708).Mahwah, NJ: Erlbaum.

[72] Lin, F. L. (1991). Characteristic of 'Adders' in Proportional Reasoning. *Proceedings of the National Science Council Part D: Mathematics, Science, and Technology Education,* Vol.1 (1), pp.1-13.

[73] Lin, F. L. (2004). Features and Relationship of Reasoning, Proving and Understanding Proof in Number Patterns. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(2), 227-256.

[74] Lin, F.L.(2005). Modeling students' learning on mathematical proof and refutation. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*Vol.1, pp. 3-18. Melbourne: PME.

[75] MacVicar, D. (1879). *A complete arithmetic, oral and written: designed for the use ofcommon and high schools and collegiate institutes.* Montreal, Canada: Dawson Bros.

[76] Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3)*, 219–248.

[77] Markman, E. (1989). *Categorization and naming in children*. Massachusetts: MIT.

[78] Markman, E., & Watchtel, G. (1988). Children's use of mutual exclusivity to constrain the meaning of words. *Cognitive Psychology*, 20(2), 121–157.

[79] Marton, F. (2006). Sameness and difference in transfer. *Journal of the Learning Sciences, 15*(4), 499–535. doi:10.1207/s15327809jls1504_3.

[80] Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. *Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.*

[81] Mason, J. (1999). Learning and doing mathematics. *(2nd revised edition). York, UK: QED.*

[82] Mason, J. (2002). Researching your own practice: the discipline of noticing. *London: RoutledgeFalmer.*

[83] Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. In R. Zazkis, & S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 41–68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Press

[84] Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 227–289

[85] McKinney, C., Larkins, A., Ford, M., & Davis III, J. (1983). The effectiveness of three methods of teaching social studies concepts to fourth-grade students: an aptitude-treatment interaction study. American Educational Research Journal, 20, 663–670.

[86] Michener, E. (1978). Understanding mathematics. Cognitive Science, 2, 361–383.

[87] Movshovitz-Hadar, N. (2002). The "Because for example…" Phenomenon, or Transparent Pseudo-Proofs Revisited. *Paper presentation at the International Congress of Mathematicians, Beijing, China.*

[88] Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104–120). London, UK: Cassell.

[89] Peled,I., & Zaslavsky,O.(1996). Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operations, *JRME* 27(1), 67-78.

[90] Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 19*(3), 49–61.

[91] Perkins, D. N., & Salomon, G.(1989). Are cognitive skills content bound? *Educational Researcher,18* (1),16-25.

[92] Pestalozzi, J. (1801). (Ed. E. Cooke, Trans. L. Holland & F. Turner 1894). *How Gertrude teaches her children: An attempt to help mothers to teach their own children and an account of the method.* London: Sonnenschen.

[93] Petty, O. S., & Jansson, L. C. (1987). Sequencing examples and non-examples to facilitate concept attainment. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 112-125.

[94] Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York, USA: Norton.

[95] Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26,* 165-190.

[96] Poincare, H. (1909/1952*). Science and method.* New York, NY: Dover.

[97] Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, USA: Princeton University Press.

[98] Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Combined edition). New York, USA: Wiley.

[99] Posner, M. I., & Keele, S. W. (1968). On the genesis of abstract ideas. *Journal of Experimental Psychology, 77,* 353–363.

[100] Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O.(2009). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *The Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* Lyon, France.

[101] Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37–70.

[102] Record, R. (1543/1969) *The Ground of Arts: teaching the perfect worke and practise of arithmeticke, both in whole numbers and fractions.* London:

Harper, Thomas. (Reprinted 1969) Amsterdam, The Netherlands: Da Capo Press.

[103] Record, R. (1632) *The Ground of Arts: teaching the perfect worke and practise of arithmeticke, both in whole numbers and fractions.* London: Harper, Thomas.

[104] Reed, S. K. (1972). Pattern recognition and categorization. *Cognitive Psychology, 3*, 382–407.

[105] Rissland, E. L. (1991). Example-based reasoning. In J. F. Voss, D. N. Parkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning in education* (pp. 187–208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[106] Rosch, E. (1973). Natural Categories. *Cognitive Psychology, 4*, 328–350.

[107] Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003). Novices' choice of examples in the teaching of elementary mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education (*pp. 242-245). Brno, Czech Republic.

[108] Schmittau, J. (2003). Cultural-historical theory and mathematics education. In A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev, & S. Miller (Eds.), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (pp. 225–245). Cambridge: Cambridge University Press.

[109] Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem Solving in the Mathematics Curriculum*. The Mathematical Association of America, Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (MAA Notes, No. 1).

[110] Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362–389. doi:10.2307/749706.

[111] Seidel, P.L.(1847). Note uber eine Eigenschaft der Reihen, Welche Discontinuirliche Functionen Darstellen. *Abhandlungen der Mathematisch – Physikalischen Klasse der Koniglich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*,5, pg 381-93.

[112] Selden, A.& J.(1998). The Role of Examples in Learning Mathematics http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html.

[113] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

[114] Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44–55.

[115] Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1/3), 13–57. doi:10.1023/A:1014097416157.

[116] Shir, K. & Zaslavsky, O. (2002). Students' Conceptions of an Acceptable Geometric Definition. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.4,* 201-208.

[117] Simmt, E., Davis, B., Gordon, L, & Towers, J. (2003). Teachers' mathematics: Curious obligations. In N. Patemen, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the Joint meetings of PME and PMENA* (pp. 175–182). Honolulu, HI: Centre for Research and Development group University of Hawaii.

[118] Simon, A. M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

[119] Skemp, R. (1969). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, UK: Penguin. Skemp, R.

[120] Smith, E., & Medin, D. (1981*).* Categories and concepts. *Cambridge, MA: Harvard University.*

[121] Smith, E., Shoben, E., & Rips, L. (1974). Structure and process in semantic memory: a featural model for semantic decisions. *Psychological Review, 81*, 214–241.

[122] Spencer, H. (1878). *Education: intellectual, moral and physical*. London: Williams & Norgate.

[123] Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164.

[124] Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141–154). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

[125] Solow, D. (1984). *Reading, writing and doing mathematical proofs*. Book I. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

[126] Swetz, F. (1987). *Capitalism and arithmetic: The New Math of the 15th century.* (Trans. Smith). LaSalle, USA: Open Court.

[127] Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics—With particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

[128] Thorndike, E., Cobb, M., Orleans, J., Symonds, P., Wald, E., & Woodyard, E. (1924). *The psychology of algebra*. New York, USA: Macmillan.

[129] Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

[130] Tsamir,P., Tirosh,D.,& Levenson, E.(2008). Intuitive nonexamples : the case of triangles. . *Educational Studies in Mathematics, 69*, 81-95, doi:10.1007/s10649-008-9133-5

[131] van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22(1),* 91–106.

[132] van Hiele, P. M., & van Hiele, D. (1958). A method of initiation into geometry. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: Walters

[133] Vinner, S. (1983). Concept image, concept definition and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

[134] Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

[135] Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th PME International Conference*, 177–184.

[136] Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14*(5), 445–451.

[137] Vygotsky, L. S. (1982). Mishlenie i rech (Thought and language). In L. S.

[138] Vygotsky (Ed.), *Sobranie Sochinenii, t.2*. Moscow: Pedagogika (in Russian).

[139] Watson, A., & Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377- 385). Norwich, UK: PME.

[140] Watson, A., & Mason, J. (2002b). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249.

[141] Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[142] Watson, A., &Shipman, S.(2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Education Studies in Mathematics 69*: 97-109. Doi: 10.1007/s10649-008-9142-4.

[143] Waxman, S. (1999). The dubbin ceremony revisited: Object naming and categorization in infancy and early childhood. In D. Medin, & S. Atran (Eds.), *Folkbiology*. Cambridge, MA: MIT

[144] Waxman, S., & Braun, I. (2005). Consistent (but not variable) names as invitations to form object categories: new evidence from 12-month-old infants. *Cognition*, 95(3), B59–B68.

[145] Whitehead, A. (1911). *An introduction to mathematics* (reprinted 1948). Oxford, UK: Oxford University Press.

[146] Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 130–139.

[147] Wilson, S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12,* 31-47.

[148] Witmer, T. (Trans.) (1968). *Ars Magna or the Rules of Algebra, Girolamo Cardano*. NewYork, USA: Dover.

[149] Yang, K. L. (2005). Conceptualizing reading comprehension of geometry proof. *Proceedings of 2005 International Conference on Reading and Writing in Science and Mathematics.* p. 61.

[150] Yu, Jya-Yi Wu, Chin E.-T., & Lin C.-J. (2004). Taiwanese Junior High School Students' Understanding about the Validity of Conditional Statement. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(2), 257-282.

[151] Zaslavsky, O.(2004).Transparent Objects and Processes in Learning Mathematics. *Technion -Israel Institute of Technology, Haifa, Israel,101-102.*

[152] Zaslavsky, O.(2008). What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples? *Paper submitted to WG2of the Symposium for celebration of centennial of ICMI, Rome, March 2008.*

[153] Zaslavsky, O. Harel, G. & Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base, in: J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. Five* (Prague, Czech Republic).

[154] Zaslavsky, O. & Lavie, O. (2005). Teachers' use of instructional examples, paper presented at the 15th ICMI study conference: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Águas de Lindóia, Brazil.

[155] Zaslavsky, O. & Leikin, R. (2004). Professional Development of Mathematics Teacher-Educators: Growth through Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(1), 5-32.

[156] Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education*, v. 4, (pp. 225–232). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

[157] Zaslavsky, O. & Zodik, I. (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education,9*:1,143-155. Doi: 10.1080/14794800008520176. URL: http://dx.doi.org/10.1080/14794800008520176.

[158] Zaslavsky, O. & Zodik, I. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 165–182.

[159] Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 676-681). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

[160] Zazkis, R., & Chernoff, E. (2006). Cognitive conflict and its resolution via pivotal/bridging example. *In Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 465–472). Prague, Czech Republic.

[161] Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics,68,*195-208 doi:10.1007/s10649-007-9110-4.

[162] Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15–21.

[163] Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of square. *Educational Studies in Mathematics,* doi:10.1007/s10649-008-9131-7.

[164]Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2*(1), 93–120.

[165] Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164–186.

[166] Zazkis, R., Liljedahl, P., &Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics education 40*: 131-141. Doi: 10.1007/s11858-007-0065-9.

[167] Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2004). Characteristics of Mathematical Problem Solving Tutoring in an Informal Setting. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

[168] Zodik , I. & Zaslavsky, O. (2007). Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply?, paper presented at the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5), Larnaka, Cyprus.