ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων και η συμβολή τους στις μετά-δεξιότητες και την εννοιολογική ανάπτυξη

Βασίλης Καραγιάννης

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Δέσποινα Πόταρη

Αθήνα 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Δέσποινα Πόταρη (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	…….
2) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής	……
3) Χαράλαμπος Σακονίδης	Καθηγητής	……

Στους γονείς μου

Χρυσαυγή και Τάκη

Θα ήθελα να ευχαριστήσω

- την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα Δέσποινα Πόταρη για την άμεση και ουσιαστική βοήθειά της και την επιστημονική συμβολή της στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.
- τους Καθηγητές κκ. Θ. Ζαχαριάδη και Χ. Σακονίδη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.
- τη Διευθύντρια του Γυμνασίου κα Β. Γκούβη για τη συμπαράστασή της και τη βοήθειά της να ξεπεραστούν οι γραφειοκρατικές αγκυλώσεις και να πραγματοποιηθεί η έρευνα.
- όλους τους μαθητές του Γυμνασίου που συμμετείχαν στην έρευνα.
- την Κυριακή για τις αμέτρητες ώρες συζήτησης με εποικοδομητικές αντιπαραθέσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη 1

Εισαγωγή 2

1. Μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων 4

1.1. Το στοιχείο της επιλογής δεδομένων από τα καθημερινά προβλήματα στις μαθηματικές δραστηριότητες 4

1.2. Ένα παράδειγμα καθημερινού προβλήματος ως οδηγός 9

1.3. Η μετάβαση στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων 12

1.4. Η σύμβαση του κόστους πρόσβασης στα δεδομένα 16

2. Θεωρητικό πλαίσιο – Βιβλιογραφική ανασκόπηση 21

2.1. Η επίδραση των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων στις μετά-δεξιότητες και τη βούληση 21

2.2. Η μαθηματική σκέψη ως αφαιρετική ικανότητα 25

2.3. Χώροι λύσεων των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων 30

2.4. Πολλαπλοί τρόποι επίλυσης και μαθηματική δημιουργικότητα 32

2.5. Μαθηματική επικοινωνία 35

2.6. Δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων και κατασκευή προβλήματος 41

3. Μεθοδολογία 45

3.1. Ερευνητικά ερωτήματα 45

3.2. Μέθοδος 45

3.3. Πλαίσιο έρευνας – Συμμετέχοντες 46

3.4. Διαδικασία της έρευνας – Δραστηριότητες 47

3.4.1. Δραστηριότητα «Παραγοντοποίηση» 49

3.4.2. Δραστηριότητα «Επιμεριστική» 51

3.4.3. Δραστηριότητα «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία » 53

3.4.4. Δραστηριότητα «Ισότητα τριγώνων» 56

3.4.5. Δραστηριότητα «Γραμμική συνάρτηση» 57

3.5. Διαδικασία ανάλυσης 61

4. Αποτελέσματα 63

4.1. «Παραγοντοποίηση»: 1η παρέμβαση, τμήμα Γ2 63

4.2. «Επιμεριστική»: 2η, 3η, 4η παρέμβαση, τμήματα Α1, Α2, Α3 64

4.3. «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία»: 5η παρέμβαση, τμήμα Β2 76

4.4. «Ισότητα τριγώνων»: 6η παρέμβαση, τμήμα Γ2 84

4.5. «Γραμμική συνάρτηση»: 7η παρέμβαση, τμήμα Β2 85

4.6. Συζήτηση περί επιπέδου μαθηματικής σκέψης: 8η παρέμβαση, τμήμα Β2 86

5. Συμπεράσματα – Συζήτηση 89

Βιβλιογραφικές αναφορές 94

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προτείνουμε ένα νέο είδος μαθηματικών δραστηριοτήτων και επιχειρούμε να διερευνήσουμε τη συνεισφορά τους στις μετά-δεξιότητες και την εννοιολογική ανάπτυξη. Τη φύση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων την καθορίζει η ενσωμάτωση ενός δομικού στοιχείου των πραγματικών προβλημάτων, η επιλογή δεδομένων. Τις ονομάζουμε μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων, ακριβώς γιατί το στοιχείο που τις χαρακτηρίζει και τις διαφοροποιεί, είναι ότι ορισμένα από τα δεδομένα, οι μαθητές τα επιλέγουν μέσα από διάφορα που τους προτείνονται. Η έρευνα είναι ποιοτική και διεξήχθη σε πραγματική τάξη σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Τα ευρήματα έδειξαν, ότι οι προτεινόμενες δραστηριότητες συνεισφέρουν, τόσο στις μετά-δεξιότητες όσο και στην εννοιολογική ανάπτυξη, υπό δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, οι μαθητές να κατέχουν τις απαιτούμενες βασικές γνωστικές δεξιότητες του προβλήματος και δεύτερον, να έχουν τη βούληση να συμμετάσχουν σε μαθηματικές δραστηριότητες υπό συνθήκες συνεργατικής μάθησης.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων, ομαδοσυνεργατική διδασκαλία, μετά-δεξιότητες, εννοιολογική ανάπτυξη.

ABSTRACT

In this paper, we propose a new kind of mathematical tasks and we try to explore their contribution to the meta-skills and conceptual development. The nature of the proposed tasks is determined by the incorporation of a structural element of the real problems, the data option. We call data option mathematical tasks, precisely because the element that characterizes and distinguishes them is that some of the data, students select them through various proposed to them. The qualitative research is conducted in a real class conditions in group teaching. The findings showed that the proposed tasks contribute both in the meta-skills and conceptual development under two conditions: First, students must possess the required basic cognitive skills of the problem and secondly must have the will to engage in mathematical tasks under collaborative learning.

Keywords: Data option mathematical tasks, group teaching, meta-skills, conceptual development.

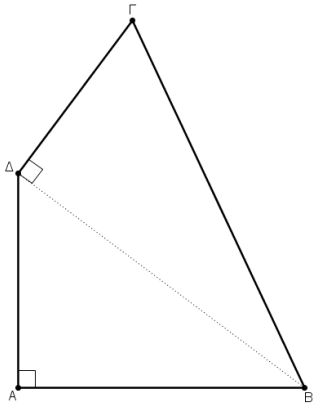
Εισαγωγή

«Ο Νίκος με τη γυναίκα του και τα δύο μικρά παιδιά τους μένουν στο κέντρο της Αθήνας. Το σπίτι που νοικιάζουν είναι πολύ μικρό, γι' αυτό αποφάσισαν να μετακομίσουν. Δουλεύουν και οι δύο, ο μηνιαίος μισθός του Νίκου είναι στα 1000€ και της γυναίκας του στα 800€. Εξετάζουν την περίπτωση να μετακομίσουν στην Πεντέλη, θα είναι καλό τα παιδιά τους να μεγαλώσουν σ' εκείνο το περιβάλλον. Είδαν ένα σπίτι των 80μ^2, σχετικά μικρό, στα 550€. Και στους δύο αρέσει το κέντρο, είναι και πολύ κοντά στη δουλειά τους, αλλά σκέφτονται ότι του χρόνου που θα πάει ο μεγάλος στο δημοτικό, οι μισοί μαθητές θα είναι παιδιά μεταναστών. Είδαν δύο σπίτια στο κέντρο της Αθήνας, το ένα είναι των 80μ^2 στα 300€ και το άλλο των 100μ^2 στα 350€. Εξετάζουν και την περίπτωση να μείνουν στο Μαρούσι, τους διευκολύνει και ο ηλεκτρικός για τη δουλειά τους. Είδαν και εκεί ένα σπίτι των 100μ^2 στα 550€.

Τελικά, επειδή τους αρέσει στο κέντρο και θέλουν το σπίτι να είναι ευρύχωρο, αποφασίζουν να νοικιάσουν το σπίτι των 100μ^2 με 350€ στο κέντρο της Αθήνας.»

«Ο Δημήτρης, μαθητής της Β΄ Γυμνασίου, αύριο έχει μαθηματικά και προσπαθεί να λύσει το εξής πρόβλημα:

Θέλουμε να περιφράξουμε τον κήπο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με συρματόπλεγμα το οποίο πωλείται σε ρολά των 3 μέτρων που το καθένα κοστίζει 25 €. Δίνονται ΑΒ=12m, ΒΓ=17m και ΒΔ=15m. Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης.



Ο Δημήτρης σκέφτεται ότι αν υπολογίσει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, μετά μπορεί να το λύσει. Επικεντρώνεται στα δεδομένα για λίγο και μετά λέει: θα κάνω πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΔ για να υπολογίσω την ΑΔ και μετά πυθαγόρειο στο ΒΓΔ για να υπολογίσω τη ΓΔ.»

Εξετάζοντας τις παραπάνω φανταστικές ιστορίες, θα λέγαμε ότι μια ομοιότητα είναι, ότι και στις δύο υπάρχει ένα πρόβλημα και ένας εμπλεκόμενος προσπαθεί να το λύσει. Μια διαφορά είναι ότι στην πρώτη ιστορία ο Νίκος προσπαθεί να λύσει ένα πραγματικό πρόβλημα, ενώ στη δεύτερη, ο Δημήτρης προσπαθεί να λύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα.
Διακρίνουμε, όμως και μια διαφορά στη δομή των δύο προβλημάτων, την οποία θεωρούμε σημαντική, διότι καθορίζει τη συμπεριφορά του εμπλεκόμενου ως προς τον τρόπο αντιμετώπισης. Στην πρώτη ιστορία, ο Νίκος με τη γυναίκα του είχαν μια σειρά δεδομένων στη διάθεσή τους, εκτίμησαν, με το δικό τους σκεπτικό, ποια θα λάβουν υπόψη ή ποια υπερισχύουν έναντι των άλλων και με βάση αυτά έλυσαν το πρόβλημα. Αντίθετα, στη δεύτερη ιστορία, ο Δημήτρης δεν είχε τη δυνατότητα επιλογής των δεδομένων, ήταν αναγκασμένος να χρησιμοποιήσει όλα όσα είχε στη διάθεσή του για να το λύσει.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προτείνουμε ένα νέο είδος μαθηματικών δραστηριοτήτων και επιχειρούμε να διερευνήσουμε τη συμβολή τους στις μετά-δεξιότητες και την εννοιολογική ανάπτυξη. Τη φύση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων την καθορίζει το στοιχείο της επιλογής δεδομένων, όπως αυτό απορρέει από τα πραγματικά προβλήματα.

1. Μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων

Προτείνουμε ένα είδος μαθηματικών δραστηριοτήτων, απόρροια της μεταφοράς και ενσωμάτωσης ενός δομικού στοιχείου των πραγματικών καταστάσεων, της επιλογής δεδομένων. Τις ονομάζουμε **μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων** ακριβώς γιατί το στοιχείο που τις χαρακτηρίζει και τις διαφοροποιεί από τις υπάρχουσες, είναι ότι ορισμένα από τα δεδομένα, οι μαθητές τα επιλέγουν μέσα από διάφορα που τους προτείνονται.

Για να στοιχειοθετήσουμε την πρότασή μας θα εξετάσουμε καταρχήν, την επιλογή δεδομένων σε προβλήματα της καθημερινότητας και πώς αυτή μπορεί να μεταφερθεί στις μαθηματικές δραστηριότητες. Στη συνέχεια μέσα από ένα παράδειγμα πραγματικού προβλήματος, θα δούμε πώς επιδρά το στοιχείο της επιλογής δεδομένων στον τρόπο αντιμετώπισης. Θα ενσωματώσουμε την επιλογή δεδομένων στο σχεδιασμό μαθηματικών δραστηριοτήτων, δίνοντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Τέλος θα εξετάσουμε το ρόλο του κόστους πρόσβασης των δεδομένων ως κίνητρο και τις συνέπειές του στην ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες.

1.1. Το στοιχείο της επιλογής δεδομένων από τα καθημερινά προβλήματα στις μαθηματικές δραστηριότητες

Υπάρχει μια ανατροφοδότηση ανάμεσα στη πραγματική ζωή και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Από τη μια, οι καταστάσεις της καθημερινότητας τροφοδοτούν με ιδέες το πώς διδάσκουμε μαθηματικά, από την άλλη, το τί μαθηματικά διδάσκονται οι μαθητές, έχει επίδραση στη δημιουργία βιώσιμων τρόπων προσαρμογής σε τομείς της εμπειρίας τους και στην αντιμετώπιση καθημερινών προβλημάτων, όχι μόνο κατά τη διάρκεια της σχολικής ζωής τους αλλά και μετ' έπειτα.

Σε πολλά προβλήματα της καθημερινότητας συμβαίνει να αναλογιζόμαστε ποια δεδομένα να λάβουμε υπόψη, ποια δεδομένα να χρησιμοποιήσουμε για να τα αντιμετωπίσουμε πιο εύκολα. Με άλλα λόγια, προϋπόθεση για την αντιμετώπιση πολλών καθημερινών προβλημάτων, είναι η επιλογή δεδομένων. Σ' ένα πραγματικό πρόβλημα τέτοιας φύσης, που η αντιμετώπισή του δεν απαιτεί απαραίτητα μαθηματική γνώση, πάντα τίθεται το ερώτημα, όχι όμως τα δεδομένα. Ενώ έχουμε στη διάθεσή μας μια σειρά δεδομένων που σχετίζονται με το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε μόνο ένα μέρος από αυτά. Το ποια θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται από τον τρόπο που σχεδιάζουμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα. Διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης απαιτούν διαφορετικό συνδυασμό δεδομένων.

Η φύση τέτοιων προβλημάτων επιβάλλει την άρρηκτη σύνδεση του τρόπου αντιμετώπισης με την επιλογή δεδομένων. Ανάμεσα στους τρόπους αντιμετώπισης, τα διαθέσιμα δεδομένα και το μηχανισμό σκέψης που αναπτύσσει ο εμπλεκόμενος, διακρίνουμε μια σχέση αλληλεξάρτησης και αλληλεπίδρασης. Για να είναι υλοποιήσιμος ένας τρόπος επίλυσης, θα πρέπει, πρώτον, να ανήκει στο ρεπερτόριο του εμπλεκόμενου και δεύτερον, να είναι δυνατή η πρόσβαση στα απαιτούμενα δεδομένα. Αν ένας τρόπος αντιμετώπισης υπάρχει στο μυαλό του εμπλεκόμενου ως πιθανός τρόπος επίλυσης, θα τον οδηγήσει στο να αναζητήσει τα απαιτούμενα για την υλοποίησή του δεδομένα: ένας τρόπος επίλυσης επηρεάζει την επιλογή των δεδομένων. Ενδέχεται όμως, κάποια από τα προσβάσιμα δεδομένα να λειτουργήσουν ως ερέθισμα για να ανασύρει ή να σχεδιάσει έναν τρόπο επίλυσης που μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν τον είχε στη διάθεσή του: τα προσβάσιμα δεδομένα επηρεάζουν τους τρόπους αντιμετώπισης.

Σε κάθε δυνατό τρόπο αντιμετώπισης αντιστοιχεί ένας διαφορετικός συνδυασμός δεδομένων, δηλαδή ένα υποσύνολο του συνόλου των διαθέσιμων δεδομένων. Στον προσωπικό χώρο στρατηγικών (τρόπων) αντιμετώπισης ανήκουν όλες οι στρατηγικές που ο εμπλεκόμενος έχει την ικανότητα να εφαρμόσει. Ο προσωπικός χώρος στρατηγικών αντιμετώπισης είναι υποσύνολο του χώρου των δυνατών στρατηγικών αντιμετώπισης.

Η ιδέα είναι να μεταφέρουμε και να ενσωματώσουμε στο σχεδιασμό μαθηματικών δραστηριοτήτων το στοιχείο της επιλογής δεδομένων. Στις δραστηριότητες που προτείνουμε, ορισμένα από τα δεδομένα που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος, επιλέγονται μέσα από ένα σύνολο δεδομένων, από τον ίδιο το μαθητή.

Τα προς επιλογήν δεδομένα είναι τέτοια ώστε διαφορετικοί συνδυασμοί επιλογών, επιτρέπουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.
Το στοιχείο που διαφοροποιεί τις προτεινόμενες δραστηριότητες είναι η μη επιβεβλημένη χρήση όλων των δεδομένων. Κατά συνέπεια καταργείται η σχέση αντιστοίχισης ανάμεσα στο σύνολο των δεδομένων και τη λύση και παύει να ισχύει ο μονόδρομος που τα συνδέει και που προκαλεί αυτοματοποιημένες ενέργειες των μαθητών.
Μια καλά σχεδιασμένη δραστηριότητα αυτής της μορφής, επιτρέπει να φτάσει κανείς στη λύση από εντελώς διαφορετικούς δρόμους. Κάθε δρόμος σηματοδοτεί διαφορετική μαθηματική προσέγγιση, αλλά και διαφορετικό επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Κατ' αυτόν τον τρόπο δίνεται χώρος για επιλογή και η διαδικασία επιλογής προϋποθέτει ερμηνεία και λήψη απόφασης. Οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν τα δεδομένα για να σχεδιάσουν τις δυνατές στρατηγικές επίλυσης και να αποφασίσουν ποια απ' αυτές θα εφαρμόσουν.

Ο Glasersfeld (1983) αναφέρει ότι ο όρος «ερμηνεία» σημαίνει εστίαση της προσοχής σε μια δραστηριότητα που απαιτεί αντίληψη και σκόπιμη επιλογή. Αν και το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί στη διαδικασία της ερμηνείας μπορεί να έχει σχηματοποιηθεί με βάση προγενέστερη γνώση, η διαδικασία της ίδιας της ερμηνείας απαιτεί αναστοχασμό. Με τον όρο «αναστοχασμό» εννοούμε την ικανότητα της νόησης να παρατηρεί τις δικές της λειτουργίες. Ένας οργανισμός που δρα και αντιδρά χωρίς να αναστοχάζεται, θα είναι λάθος να ισχυριστούμε ότι ερμηνεύει. Η ερμηνεία υποδηλώνει αντίληψη περισσότερων της μιας δυνατότητας, περίσκεψη, σκοπιμότητα και ορθολογιστικά ελεγχόμενη επιλογή.

Ο νομπελίστας Edelman (1992), υποστηρίζει ότι η διεργασία της επιλογής είναι χαρακτηριστικό του εγκεφάλου και ακριβώς αυτή η δυνατότητα διαφοροποιεί τα υποκείμενα ως προς τη μάθηση. Θεωρεί την επιστήμη του εγκεφάλου ως επιστήμη της αναγνώρισης. Αναφέρει ότι η αναγνώριση δεν είναι μια διαδικασία οδηγιών, δεν υπάρχει μεταφορά πληροφορίας, όπως δεν υπάρχει και στις εξελικτικές διαδικασίες. Αντίθετα, η αναγνώριση είναι επιλεκτική. Ο όρος «αναγνώριση» σημαίνει το συνεχές προσαρμοστικό ταίριασμα των οργανισμών στα γεγονότα του περιβάλλοντος. Αυτή η προσαρμογή συντελείται ακόμη και όταν οι περιβαλλοντικές αλλαγές δεν είναι δυνατόν να προβλεφτούν, δηλαδή, ακόμη και όταν οι αλλαγές συνιστούν

νεωτερισμούς. Η προσαρμοστικότητα δεν προϋποθέτει προηγούμενη σαφή πληροφορία (οδηγία) για τη φύση των νεωτερισμών του περιβάλλοντος.
Υποστηρίζει την ιδέα ότι ο εγκέφαλος είναι ένα σύστημα επιλεκτικής αναγνώρισης, ότι η εξέλιξη και η ανάπτυξη οδηγούν στη δημιουργία ενός σωματικού επιλεκτικού συστήματος στον εγκέφαλο. Προτείνει μια επιλεκτική θεωρία της λειτουργίας του εγκεφάλου, τη θεωρία επιλογής νευρωνικών ομάδων (TNGS), η οποία συμφωνεί με τα γεγονότα της εξέλιξης και της ανάπτυξης, εξηγεί την προσαρμοστική φύση των απαντήσεων σε νεωτερισμούς και δείχνει πώς οι λειτουργίες του εγκεφάλου κλιμακώνονται σε αναλογία με τις λειτουργίες του σώματος, καθώς το τελευταίο μεταβάλλεται υπό την επίδραση της ανάπτυξης και της εμπειρίας.
Αντιτίθεται σε κάθε θεώρηση του εγκεφάλου ως υπολογιστή, διότι, όπως ισχυρίζεται, μια τέτοια προσέγγιση δεν μπορεί να εξηγήσει πώς ένας οργανισμός που εκδηλώνει συγκεκριμένες συμπεριφορές, ταιριάζει προσαρμοστικά τις απαντήσεις του σε απρόβλεπτους νεωτερισμούς που ανακύπτουν στο περιβάλλον του. Αν θεωρήσουμε τον εγκέφαλο ως υπολογιστή και ότι οι πληροφορίες που προέρχονται από το περιβάλλον υφίστανται επεξεργασία από τον εγκέφαλο, τότε η ύπαρξη ενός μικρού ανθρώπου (ανθρωπάριο) «στην κορυφή του νου», που ενεργεί ως μεταφραστής συμβόλων και σημάτων, είναι επιβεβλημένη. Τότε όμως πρέπει να υπάρχει μια όμοια οντότητα, ένα άλλο ανθρωπάριο μέσα στο κεφάλι του πρώτου ανθρωπάριου για να επεξεργαστεί τα νέα μηνύματα. Έτσι καταλήγουμε στο παράδοξο της άπειρης διαδοχής εγκιβωτισμένων ανθρωπάριων.

Η διεργασία της επιλογής, ως βασικό γνώρισμα της λειτουργίας του εγκεφάλου και ως βασική προϋπόθεση της εκδήλωσης συμπεριφορών, ενισχύει την πρόθεσή μας να δημιουργήσουμε μαθηματικές δραστηριότητες, που η επίλυσή τους απαιτεί την επιλογή δεδομένων.

Ο Glasersfeld (1983) αναφέρει ότι, εκτός από την ικανότητα του μαθητή να επιλύει μαθηματικά προβλήματα, μας ενδιαφέρει και ένα επιπρόσθετο στοιχείο, η ικανότητά του να παρακολουθεί τις δικές του δράσεις. Δεν είναι αρκετό να γνωρίζει κανείς τι κάνει, αλλά να ξέρει γιατί αυτό που κάνει είναι σωστό.
Η ταχύτητα εκτέλεσης, που είναι αποτέλεσμα της αυτοματοποίησης, είναι χαρακτηριστικό μιας υπολογιστικής μηχανής, όχι όμως ενός μαθητή, γι’ αυτό η διδασκαλία των μαθηματικών είναι σημαντικό να στοχεύει στη συνειδητή κατανόηση

των μαθητών τού τι κάνουν και γιατί το κάνουν. Ο δάσκαλος πρέπει να βρίσκει τρόπους για να ενθαρρύνει λειτουργικές αντιλήψεις. Δεν πρέπει ποτέ να ξεχνάμε, ότι οι μαθητές δεν είναι αποθήκες γνώσης, αλλά οργανισμοί που, όπως όλοι μας, προσπαθούν αδιάκοπα να βγάλουν νόημα, για να συνειδητοποιήσουν την εμπειρία τους. Με όρους του Piaget η μαθηματική γνώση είναι μάλλον «λειτουργική» παρά «ψηφιακή». Είναι το προϊόν αναστοχασμού και, δεδομένου ότι ο αναστοχσμός δεν είναι παρατηρήσιμος, τα προϊόντα του μπορούν να συναχθούν από παρατηρήσιμες απαντήσεις. Επομένως η λειτουργική γνώση δεν είναι μια συσχετιστική ανάκτηση μιας συγκεκριμένης απάντησης, αλλά μάλλον γνώση τού τι να κάνω για να παράγω μια απάντηση. Η λειτουργική γνώση είναι κατασκευαστική και συνεπώς περιγράφεται καλύτερα σε καταστάσεις αντίληψης, σκόπιμης επιλογής και λήψης αποφάσεων.

Σύμφωνα με τον Glasersfeld (1983), αν κάτι χαρακτηρίζει τους γνωστικούς οργανισμούς, είναι η ικανότητα για μάθηση. Το να μαθαίνεις σημαίνει να βγάζεις συμπεράσματα από την εμπειρία και να ενεργείς αναλόγως. Ο γνωστικός οργανισμός προσπαθεί να βγάλει νόημα από την εμπειρία για να αποφύγει τη σύγκρουση με τον κόσμο των περιορισμών. Μπορεί να τροποποιήσει στρατηγικές, ιδέες και έννοιες για να επιτύχει καλύτερη βιωσιμότητα. Ένα παιδί, πρέπει να μάθει πολύ περισσότερα από το να απαντάει απλώς «μήλο» σε στιγμιαίες εμπειρίες πραγματικού μήλου. Αν, το να απαντάει απλώς «μήλο», είναι ό,τι ένα παιδί μπορεί να κάνει, η γλωσσική του ικανότητα θα παραμείνει ισάξια με αυτή ενός καλό-εκπαιδευμένου παπαγάλου. Για το πτηνό και τον εκπαιδευτή του, το να φτάσουν σ' αυτό το σημείο είναι ένα σημαντικό επίτευγμα. Για ένα παιδί όμως είναι ένα σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη της αυτορρύθμισης, της αντίληψης και του ελέγχου της λογικής.

Η ιδέα να ενσωματώσουμε το στοιχείο της επιλογής δεδομένων στις μαθηματικές δραστηριότητες, στοχεύει στο να δημιουργήσει καταστάσεις ελέγχου και συντονισμού των γνώσεων, σκόπιμης επιλογής και λήψης αποφάσεων. Στόχος είναι η λύση να παραχθεί μέσω της συνειδητής κατανόησης του τι κάνω και γιατί το κάνω, παρά να σχηματοποιηθεί μέσω ανάσυρσης και αντιστοίχισης αποθηκευμένων γνώσεων. Για τη διδασκαλία που έχει ως βασικό συστατικό τις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων, πρωταρχικής σημασίας είναι η επιστημολογική αρχή της προσαρμογής, δηλαδή της επιλογής, παρά της αντιστοίχισης.

1.2. Ένα παράδειγμα καθημερινού προβλήματος ως οδηγός

Μέσα από ένα παράδειγμα καθημερινού προβλήματος, θα εξετάσουμε πώς επιδρά η επιλογή δεδομένων στον τρόπο αντιμετώπισης και ποια είναι τα κίνητρα του εμπλεκόμενου. Το συγκεκριμένο παράδειγμα θα λειτουργήσει ως οδηγός για τη μετάβαση στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων.

Η προβληματική κατάσταση αφορά την κατασκευή ντουλαπιών στην κουζίνα του σπιτιού μας. Έχουμε ήδη αποφασίσει για το είδος του ξύλου και μετά από έρευνα αγοράς έχουμε στη διάθεσή μας τα εξής δεδομένα:

1. *Μέτρηση διαστάσεων της κουζίνας από ειδικό: 50€*
2. *Αγορά συναρμολογημένων ντουλαπιών: 1800€*
3. *Τοποθέτηση ντουλαπιών από ειδικό: 300€*
4. *Αγορά ξυλείας: 800€*
5. *Κοπή ξυλείας σε κομμάτια που χρειαζόμαστε: 200€*
6. *Μηχανικά εξαρτήματα (μεντεσέδες, πόμολα): 100€*

Περιγράφουμε τα κίνητρα και τον τρόπο αντιμετώπισης τεσσάρων ατόμων:

- Το κίνητρο του Α είναι να πληρώσει όσο το δυνατόν λιγότερα χρήματα. Εκτιμά ότι μπορεί να μετρήσει τις διαστάσεις της κουζίνας, αλλά ότι δεν έχει την ικανότητα ούτε να κόψει την ξυλεία, ούτε να συναρμολογήσει τα ντουλάπια, ούτε να τα τοποθετήσει, οπότε αποφασίζει να αγοράσει έτοιμα τα ντουλάπια και να πληρώσει τον ειδικό να τα τοποθετήσει, κόστος 1800+300=2100€.
- Το κίνητρο του Β είναι επίσης το μικρότερο κόστος. Εκτιμά ότι μπορεί να μετρήσει τις διαστάσεις, να συναρμολογήσει και να τοποθετήσει τα ντουλάπια, δεν μπορεί όμως να κόψει την ξυλεία. Αποφασίζει να αγοράσει τα μηχανικά εξαρτήματα και την ξυλεία και να τη δώσει για κοπή, κόστος 800+200+100=1100€.
- Ο Γ θέλει κι' αυτός να μειώσει όσο γίνεται το κόστος. Εκτιμά ότι μπορεί να τα κάνει όλα μόνος του. Ενδεχομένως να δυσκολευτεί στη συναρμολόγηση των ντουλαπιών αλλά θα προσπαθήσει, τα χρήματα που θα εξοικονομήσει είναι αρκετά, ίσως συμβουλευτεί και έναν ξυλουργού. Αποφασίζει να αγοράσει μόνο την ξυλεία και τα μηχανικά εξαρτήματα, κόστος 800+100=900€.
- Ο Δ θέλει να φτιάξει μόνος του τα ντουλάπια, σκέφτεται ότι είναι μια ευκαιρία να ασχοληθεί με την τέχνη της ξυλουργίας, τον ενδιαφέρουν πολύ οι ξυλουργικές

κατασκευές, δεν τον απασχολεί ο κόπος, απεναντίας νιώθει ευχαρίστηση όταν ασχολείται με δημιουργικές κατασκευές. Αγοράζει λοιπόν μόνο την ξυλεία και τα μηχανικά εξαρτήματα, κόστος 800+100=900€.

Παρατηρούμε ότι τα τέσσερα άτομα εμπλέκονται στην ίδια προβληματική κατάσταση, έχουν τον ίδιο στόχο, την κατασκευή των ντουλαπών, δεν ωθούνται όμως από το ίδιο κίνητρο. Κίνητρο των τριών πρώτων είναι η μείωση του κόστους, ενώ του Δ το ενδιαφέρον του για τις ξυλουργικές κατασκευές. Οι τρεις πρώτοι αξιοποιούν τις ικανότητές τους για να πληρώσουν όσο το δυνατόν λιγότερα χρήματα· η ανταμοιβή τους είναι η εξοικονόμηση χρημάτων. Ενώ για τον Δ η ανταμοιβή είναι η ίδια η κατασκευή των ντουλαπιών, είναι η ικανοποίηση το να χρησιμοποιήσει τις δεξιότητές του για να δημιουργήσει κάτι μόνος του.

Όσον αφορά τον τρόπο επίλυσης διακρίνουμε τρεις διαφορετικές στρατηγικές με διαφορετικό κόστος η καθεμία. Η στρατηγική του Α έχει κόστος 2100€, του Β 1100€, ενώ του Γ και του Δ 900€.
Κάθε στρατηγική για να εφαρμοστεί χρησιμοποιεί ένα μέρος των δεδομένων. Για τη στρατηγική του Α απαιτούνται τα δεδομένα 2 και 3, για τη στρατηγική του Β τα δεδομένα 4, 5 και 6, ενώ για τη στρατηγική των Γ και Δ τα δεδομένα 4 και 6. Συμπερασματικά έχουμε τρεις διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης, με διαφορετικό συνδυασμό απαιτούμενων δεδομένων για τη καθεμία.
Αν μας ενδιαφέρει να κρίνουμε την ικανότητα κάθε εμπλεκόμενου στην κατασκευή των ντουλαπιών μέσω του τρόπου που αντιμετώπισε το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι το κόστος της στρατηγικής που εφάρμοσε σηματοδοτεί το επίπεδο ικανότητας. Όσο μικρότερο είναι το κόστος τόσο υψηλότερο είναι το επίπεδο ικανότητας.

Εστιάζοντας στις στρατηγικές των Γ και Δ, διαπιστώνουμε ότι και οι δύο διαθέτουν το ίδιο επίπεδο ικανότητας, αλλά διαφέρουν ως προς το κίνητρο. Και οι δύο επιστράτευσαν τις δεξιότητές τους, αλλά για διαφορετικό λόγο ο καθένας, ο Γ για να πετύχει το μικρότερο κόστος, ενώ ο Δ λόγω ενδιαφέροντος. Πρόκειται για δύο ποιοτικά διαφορετικά είδη κινητοποίησης· για δύο διαφορετικές αντιλήψεις προσέγγισης του ίδιου προβλήματος.
Δεν μπορούμε να προεξοφλήσουμε ότι η ενασχόληση με το πρόβλημα, επηρέασε τον Γ ώστε να δει την κατασκευή των ντουλαπιών και γενικά τις ξυλουργικές κατασκευές με άλλο μάτι. Ότι, πέρα από τη μείωση του κόστους που πέτυχε, ένιωσε ικανοποίηση

από την ίδια τη δράση που ανέλαβε, ότι βρήκε ενδιαφέρουσα τη διαδικασία κατασκευής των ντουλαπιών, ότι αποκόμισε ευχαρίστηση από το δημιούργημά του. Ότι τελικά, αν του παρουσιαστεί στο μέλλον η ευκαιρία να εμπλακεί με ξυλουργική κατασκευή, θα το κάνει κι' ας μην αποκομίσει καμιά χρηματική ή άλλης φύσης ανταμοιβή. Αλλά συμφωνούμε με την άποψη του Glasersfeld (θα αναφερθούμε παρακάτω στη σελίδα 15) ότι, πέρα από ανταμοιβές υλικής ή άλλης φύσης που ο καθένας θα προσπαθήσει να αποκτήσει, η μακράν ισχυρότερη ανταμοιβή για ένα γνωστικό οργανισμό, είναι να επιτύχει μια ικανοποιητική οργάνωση, ένα βιώσιμο τρόπο αντιμετώπισης κάποιου τομέα της εμπειρίας.

Για τους τρεις πρώτους, που το κίνητρο ήταν τη μείωση του κόστους, θεωρήσαμε ότι επέλεξαν την ευνοϊκότερη γι' αυτούς στρατηγική επίλυσης και ότι το κόστος επίλυσης αντικατοπτρίζει το επίπεδο ικανότητάς τους. Μπορούμε να ισχυριστούμε όμως ότι σε όλες τις περιπτώσεις συμβαίνει το ίδιο; Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι κάποιος, ενώ έχει την ικανότητα να τοποθετήσει τα ντουλάπια και να εξοικονομήσει 300€, επέλεξε τη στρατηγική του Α και πλήρωσε 2100€, επειδή, όπως υπολόγισε, τα χρήματα που θα χάσει από τη δουλειά του, λόγω του χρόνου που θα διαθέσει για την τοποθέτηση, ξεπερνούν τα 300€. Σ' αυτή την περίπτωση, πράγματι, το κόστος επίλυσης δεν αντικατοπτρίζει το επίπεδο ικανότητάς του. Όμως, δεν είναι και το πλαίσιο του προβλήματος ίδιο. Για το συγκεκριμένο άτομο τα κόστη των δεδομένων είναι διαφορετικά. Εμείς εξετάζουμε προβληματικές καταστάσεις που το πλαίσιό τους, όπως διαμορφώνεται βάσει της δυνατότητας επιλογής των δεδομένων και του κόστους πρόσβασης, πληροί την υπόθεση: ο τρόπος αντιμετώπισης εκφράζει το επίπεδο ικανότητας. Τέτοιου είδους καταστάσεις επιχειρούμε να μεταφέρουμε στις προτεινόμενες δραστηριότητες.

Γενικά, για να αποφασίσει κανείς ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική επίλυσης σε τέτοιας φύσης καθημερινά προβλήματα, σίγουρα έχει να κάνει με το ποιες στρατηγικές έχει την ικανότητα να εφαρμόσει, όμως, έχει να κάνει και με μια πολύ συγκεκριμένη διαδικασία. Για κάθε διαθέσιμη στρατηγική, πρέπει να συνυπολογίσει τη δυσκολία πρόσβασης (κόστος) των απαιτούμενων δεδομένων. Το πώς θα εκτιμήσει τη δυσκολία πρόσβασης, είναι θέμα της ίδιας της φύσης των δεδομένων, αλλά και προσωπικό του ζήτημα.

Ενδεχομένως να απαιτούνται χρήματα, ή κάτι ανάλογο υλικής φύσης, να απαιτείται προσωπικός χρόνος, περισσότερο ή λιγότερο επίπονη εργασία ή συνδυασμός αυτών.

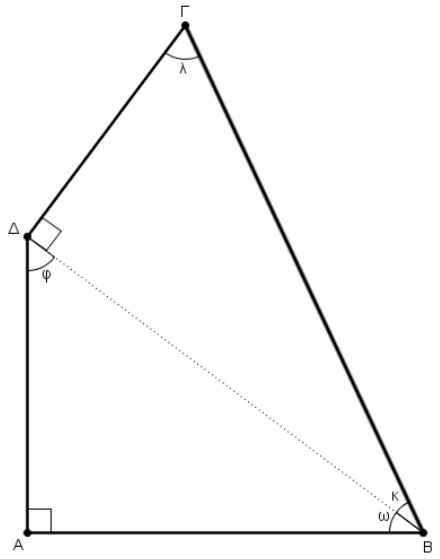
Είναι προσωπικό του ζήτημα αν, για παράδειγμα, το χρόνο που θα διαθέσει τον εκτιμήσει βάσει των απολαβών της δουλειάς του ή βάσει κάποιων άλλων παραμέτρων. Το σίγουρο είναι ότι, πριν αποφασίσει για τον τρόπο αντιμετώπισης, θα πρέπει να επινοήσει ένα «κοινό μέτρο», μια «κοινή μονάδα μέτρησης» και βάσει αυτής να «μετρήσει» το «κόστος πρόσβασης» κάθε δεδομένου. Στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν πρόκειται για κάποια φυσική μονάδα μέτρησης, αλλά για μια εντελώς προσωπική μονάδα, που επινόησε ο εμπλεκόμενος για τις ανάγκες του προβλήματος. Τα διαθέσιμα δεδομένα, συνοδευόμενα με τα κόστη πρόσβασης συγκροτούν τις συνθήκες της προβληματικής κατάστασης. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο, σε κάθε στρατηγική επίλυσης θα αντιστοιχεί ένα «κόστος επίλυσης» ίσο με το άθροισμα των κόστων πρόσβασης των απαιτούμενων δεδομένων.

1.3. Η μετάβαση στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων

Στις δραστηριότητες που προτείνουμε έχουμε ενσωματώσει το στοιχείο της επιλογής δεδομένων και τη σύμβαση του κόστους πρόσβασης, όπως αυτά απορρέουν από τα καθημερινά προβλήματα σαν κι' αυτό της προηγούμενης παραγράφου. Αναφέρουμε ένα παράδειγμα μαθηματικής δραστηριότητας με επιλογή δεδομένων.

Δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων

Θέλουμε να περιφράξουμε τον κήπο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με συρματόπλεγμα το οποίο πωλείται σε ρολά των 3 μέτρων που το καθένα κοστίζει 25 €. Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Το μήκος της πλευράς ΑΒ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μήκος της πλευράς ΑΔ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μήκος της πλευράς ΒΓ= ……. (κόστος 2)*
- *Το μήκος της πλευράς ΓΔ= ……. (κόστος 2)*
- *Το μέτρο της γωνίας κ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μέτρο της γωνίας λ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μέτρο της γωνίας ω= ……. (κόστος 2)*
- *Το μέτρο της γωνίας φ= ……. (κόστος 2)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε οπωσδήποτε τα αρχικά δεδομένα, δηλαδή αυτά που προκύπτουν από την ερμηνεία του σχήματος και ότι το ρολό 3 μέτρων κοστίζει 25€. Προφανώς δεν είναι αρκετά, χρειάζονται και κάποια από τα προς επιλογήν δεδομένα. Για να αποκτήσουμε τη δυνατότητα πρόσβασης σε οποιοδήποτε από αυτά, πρέπει να «επωμιστούμε» το αντίστοιχο «κόστος πρόσβασης».

Οι μαθητές οφείλουν να επιλέξουν τα απαραίτητα δεδομένα που κρίνουν ότι θα τους οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Τα αρχικά δεδομένα μαζί με τα επιλεγμένα αποτελούν τα απαιτούμενα δεδομένα μιας στρατηγικής επίλυσης. Το άθροισμα των κόστων πρόσβασης εκφράζει το «κόστος επίλυσης» της συγκεκριμένης στρατηγικής. Ζητούμενο είναι να λύσουν το πρόβλημα με το μικρότερο δυνατό κόστος.

Ο σχεδιασμός μιας δραστηριότητας αυτής της μορφής απαιτεί τα προς επιλογή δεδομένα, σε συνδυασμό με τα αντίστοιχα κόστη πρόσβασης, να είναι τέτοια ώστε διαφορετικοί συνδυασμοί επιλογών, να επιτρέπουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης και μάλιστα το κόστος επίλυσης να σηματοδοτεί το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Η μαθηματική σκέψη συνδέεται, όπως θα διαφανεί στο θεωρητικό πλαίσιο, με την αφαιρετική ικανότητα.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Ο διδακτικός στόχος είναι οι μαθητές να συνδυάζουν κατάλληλα την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος και των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Για να επιλύσουν το πρόβλημα χρειάζεται να γνωρίζουν ή να υπολογίσουν το μήκος των τεσσάρων πλευρών του κήπου.

Οι στρατηγικές με το μικρότερο κόστος επίλυσης είναι δύο: να ζητήσουν πρόσβαση σε 3 δεδομένα, στο μήκος των πλευρών ΒΓ και ΓΔ και στο μέτρο της γωνίας ω ή φ, συνολικό κόστος 6. Να εφαρμόσουν πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΓΔ για να υπολογίσουν την πλευρά ΒΔ και στη συνέχεια κατάλληλους τριγωνομετρικούς αριθμούς στο τρίγωνο ΑΒΔ για να υπολογίσουν τις πλευρές ΑΒ, ΑΔ.

Συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης είναι 41. Αν τους κατηγοριοποιήσουμε με βάση ποιες βασικές μαθηματικές γνώσεις ή συνδυασμό γνώσεων απαιτεί η εφαρμογή τους, προκύπτουν οι επόμενες τέσσερις κατηγορίες:

1η Να ζητήσουν πρόσβαση στις τέσσερις πλευρές του κήπου και να μην χρησιμοποιήσουν ούτε πυθαγόρειο θεώρημα, ούτε τριγωνομετρικούς αριθμούς, 1 τρόπος επίλυσης με κόστος 10.

2η Να ζητήσουν πρόσβαση σε τρεις πλευρές και να χρησιμοποιήσουν μόνο πυθαγόρειο θεώρημα, 4 τρόποι επίλυσης με ελάχιστο κόστος 7 και μέγιστο 8.

3η Να ζητήσουν πρόσβαση σε μια πλευρά και δύο γωνίες (μια του ενός τριγώνου και μία του άλλου) και να χρησιμοποιήσουν μόνο τριγωνομετρικούς αριθμούς, 16 τρόποι επίλυσης με ελάχιστο κόστος 7 και μέγιστο 8.

4η Να ζητήσουν πρόσβαση σε δύο πλευρές και μια γωνία και να χρησιμοποιήσουν συνδυασμό πυθαγορείου θεωρήματος και τριγωνομετρικών αριθμών, 20 τρόποι επίλυσης με ελάχιστο κόστος 6 και μέγιστο 9.

Για να επιτύχει ο μαθητής το ελάχιστο κόστος πρέπει, όχι μόνο να κάνει χρήση πυθαγορείου θεωρήματος και τριγωνομετρικών αριθμών, αλλά και να τα συνδυάσει κατάλληλα.

Μια δυνατότητα που μας παρέχουν οι δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων είναι ότι μπορούμε, με κατάλληλη αλλαγή στα κόστη πρόσβασης, να διαφοροποιήσουμε τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης. Για παράδειγμα στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, μπορούμε, με κατάλληλη αλλαγή στα κόστη, να καταστήσουμε ως βέλτιστη στρατηγική τη χρήση μόνο του πυθαγορείου θεωρήματος ή τη χρήση μόνο τριγωνομετρικών αριθμών ή έναν οποιονδήποτε συνδυασμό τους.

Ένα σημαντικό στοιχείο των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων, είναι ότι επιτρέπουν στους μαθητές να εμπλακούν με την ίδια δραστηριότητα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, ώστε, κάθε φορά, εφαρμόζοντας τη νέα γνώση να μειώνουν το κόστος επίλυσης. Για παράδειγμα, το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούν να το

επιλύσουν, πριν τη διδασκαλία του πυθαγορείου θεωρήματος με κόστος 10, μετά τη διδασκαλία του πυθαγορείου θεωρήματος με ελάχιστο κόστος 7, ενώ μετά και τη διδασκαλία των τριγωνομετρικών αριθμών με ελάχιστο κόστος 6. Στόχος αυτής της διδακτικής πρακτικής είναι να συμβάλλει στη συνειδητοποίηση της νέας γνώσης και στη σύνδεση της παλιάς με τη νέα γνώση. Βοηθά τους μαθητές να δουν τη μία ως συνέχεια της άλλης, και τις δύο ως μέρη μιας ενιαίας μαθηματικής ολότητας και όχι ξεκομμένες και ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

Ο Glasersfeld (1983) αναφέρει ότι, από κονστρουκτιβιστικής άποψης, δεν έχει νόημα να υποθέσουμε ότι οποιαδήποτε γνωστική ικανοποίηση του μαθητή, πηγάζει απ' το να του πούμε ότι έχει κάνει το σωστό, εφ' όσον η «ορθότητα» προσδιορίζεται από κάποιον άλλο. Για να αποτελέσει πηγή πραγματικής ικανοποίησης, η «ορθότητα» πρέπει να ιδωθεί ως μια κατάλληλη προσαρμογή που ο ίδιος έχει εγκαθιδρύσει. Αν, ως δάσκαλοι, εμμένουμε και ενισχύουμε την άποψη ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα αντικειμενικό πρόβλημα και μια αντικειμενικά σωστή λύση, πρέπει να αναμένουμε ότι οι μαθητές, κατά κάποιο τρόπο, θα έρθουν να «δουν» το πρόβλημα, τη λύση του και την «ανάγκη» να συνδέσουν αυτά τα δύο. Όμως η λογική ή η μαθηματική αναγκαιότητα δεν ανήκουν σε κανένα ανεξάρτητο κόσμο. Για να το καταλάβουν και να κερδίσουν κάτι από αυτό οι μαθητές, πρέπει να αναστοχαστούν πάνω στις δικές τους κατασκευές και στον τρόπο με τον οποίο τις έχουν συνθέσει.

Στις προτεινόμενες δραστηριότητες, το στοιχείο που δημιουργεί τις πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, είναι ακριβώς η δυνατότητα της επιλογής δεδομένων. Δηλαδή οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης προκύπτουν ως άμεση συνέπεια τού ότι τα δεδομένα δεν είναι όσα ακριβώς απαιτούνται για την επίλυση. Το ερώτημα που προκύπτει είναι, κατά πόσο η συστηματική ενασχόληση των μαθητών με τέτοιου είδους δραστηριότητες, συμβάλλει στο να δουν την επίλυση προβλήματος όχι σαν μια προκαθορισμένη διαδικασία, αλλά σαν μια διαδικασία με διακριτά στοιχεία, τη μαθηματική γνώση και τη λήψη αποφάσεων που αλληλεπιδρούν επηρεάζοντας το ένα το άλλο, είναι ένα γενικότερο ερώτημα.

1.4. Η σύμβαση του κόστους πρόσβασης στα δεδομένα

Η σύμβαση του κόστους πρόσβασης, σε μια δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων, όπως αυτή που αναφέραμε, φαίνεται να διαμορφώνει ως κίνητρο τη μείωση του κόστους επίλυσης. Οι στρατηγικές επίλυσης ιεραρχούνται μέσω ενός μηχανιστικού κριτηρίου, του κόστους, το οποίο, ενδεχομένως, να αποκρύπτει από τους μαθητές το κριτήριο του επιπέδου μαθηματικής σκέψης.

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν η σύμβαση του κόστους πρόσβασης δημιουργεί συνθήκες, ώστε ο μηχανισμός μάθησης να συντελείται μέσα σε αυστηρά συμπεριφοριστικά πλαίσια και συνεπώς, να μη συνάδει με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση της μάθησης. Η ικανοποίηση των μαθητών μέσα από τη γνωστική διαδικασία για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής, αντλείται αποκλειστικά και μόνο μέσα από τη μείωση του κόστους επίλυσης ή και από την οργάνωση και προσαρμογή που πέτυχαν με τη δική τους κατασκευή; Αντιλαμβάνονται όντως μια στρατηγική ως βέλτιστη, μόνο λόγω του ελάχιστου κόστους και όχι λόγω του υψηλότερου επιπέδου μαθηματικής σκέψης που απαιτεί η εφαρμογή της; Θα μπουν σε μια παρόμοια διαδικασία μόνο αν υπάρχει το κίνητρο του κόστους;

Αν ορίσουμε ως συμπεριφορισμό το είδος του συνειρμισμού που θεωρεί ότι η μάθηση συντελείται μέσω της σύνδεσης μυϊκών αντιδράσεων με εξωτερικά ερεθίσματα (Βοσνιάδου 2001), πιστεύουμε ότι η σύμβαση του κόστους πρόσβασης δεν οδηγεί τη μάθηση σε συμπεριφοριστικά πλαίσια και θεωρούμε, όσον αφορά τις προτεινόμενες δραστηριότητες, ότι σε πρώτη φάση τουλάχιστον το κόστος πρόσβασης είναι απαραίτητο. Η άποψή μας ενισχύεται, από όσα υποστηρίζει ο Glasersfeld περί ερμηνείας της ενίσχυσης και του συμπεριφορισμού, από την αναφορά του Brousseau σχετικά με το ρόλο των διδακτικών δραστηριοτήτων και από το ότι πρέπει να λάβουμε οπωσδήποτε υπόψη το ρόλο της αξιολόγησης στο πλαίσιο της εκπαίδευσης. Παραθέτουμε τα στοιχεία αυτά αμέσως τώρα.

Σύμφωνα με τον Glasersfeld (1983), οποιαδήποτε επιτυχημένη προσπάθεια απαιτεί κίνητρα. Η ανάγκη για κίνητρα αποτελεί κοινή παραδοχή σε όσους έχουν διδάξει. Για το πώς αυτά αναπτύσσονται έχει συζητηθεί αρκετά. Όμως, εδώ, δημιουργείται πρόβλημα από την παρερμηνεία του συμπεριφορισμού. Το βασικό δόγμα του συμπεριφορισμού απλώς λέει ότι η συμπεριφορά καθορίζεται από τις συνέπειες που είχε παραγάγει στο παρελθόν. Αυτό, δεν είναι τίποτα άλλο από το να ισχυριστούμε

ότι οι οργανισμοί λειτουργούν επαγωγικά. Με την άποψη αυτή έχουμε κάθε λόγο να συμφωνήσουμε. Το πρόβλημα ανακύπτει από τη συνήθη ερμηνεία της «ενίσχυσης», ότι η ανταμοιβή ενδυναμώνει συγκεκριμένες συμπεριφορές και αυξάνει την πιθανότητα επανάληψης. Υπάρχει η ευρέως διαδεδομένη παρανόηση ότι η ενίσχυση είναι το αποτέλεσμα πολύ γνωστών ανταμοιβών, όπως χρήματα ή κοινωνική αποδοχή. Είναι μια εσφαλμένη αντίληψη, όχι επειδή οι οργανισμοί δε θα δουλέψουν αρκετά σκληρά για να τα αποκτήσουν, αλλά επειδή αποκρύπτει το μακράν πιο ενισχυτικό για ένα γνωστικό οργανισμό: να επιτύχει μια ικανοποιητική οργάνωση, ένα βιώσιμο τρόπο αντιμετώπισης κάποιου τομέα της εμπειρίας. Αυτό προσθέτει μια διαφορετική διάσταση στην αντίληψη της ενίσχυσης, διότι οποιαδήποτε συνέπεια της ανταμοιβής παράγεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό σύστημα του οργανισμού. Η αυτό-δημιουργία, ως ενίσχυση, έχει τεράστια δυναμική για τους γνωστικούς οργανισμούς. Όλοι μας έχουμε ξοδέψει πολύτιμο χρόνο και ιδρώτα σε γρίφους, που η λύση τους δεν απέφερε ούτε χρήματα, ούτε κοινωνική αποδοχή.

Ο Brousseau (1986), στο πλαίσιο της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων, επισημαίνει ότι:

> «Οι γνώσεις δεν υπάρχουν και δεν έχουν κανένα νόημα για το μαθητή, παρά μόνο διότι αντιπροσωπεύουν την καλύτερη δυνατή λύση σ' ένα σύστημα συμβάσεων (contraintes). Οι σχέσεις του υποκειμένου με το περιβάλλον και ιδιαίτερα η δυναμική που δημιουργείται από την ανατροφοδότηση, καθορίζουν, για κάθε διδακτική πράξη, το κόστος της εφαρμογής, της δοκιμής, της μάθησης, του λάθους, που με τη σειρά τους προκαλούν την εμφάνιση, την εξέλιξη, τη διαμόρφωση, την εξαφάνιση ή την επανάληψη των εννοιών, μέσω των ισορροπιών, των συγκρούσεων και των ρήξεων. Η διδακτική δραστηριότητα έγκειται στο να οργανώσει αυτές τις συμβάσεις και να διατηρήσει τις καλύτερες δυνατές συνθήκες αλληλεπιδράσεων». (σελ. 368-369)

Οι Sierpinska και Lerman (1997) αναφέρουν ότι στη βάση της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων του Brousseau, βρίσκεται η επιστημολογική υπόθεση ότι η γνώση υπάρχει και έχει νόημα για το υποκείμενο που βρίσκεται σε γνωστική διαδικασία, μόνο επειδή αντιπροσωπεύει μια προαιρετική επιλογή σε ένα σύστημα εξαναγκασμών (constraints). Η μάθηση λαμβάνει χώρα όταν η εφαρμογή

προηγούμενα κατασκευασμένων γνώσεων γίνεται πολύ δαπανηρή και το υποκείμενο αναγκάζεται να κάνει προσαρμογές ή και απορρίψεις. Για ένα δοσμένο διδακτικό στόχο, το καθήκον του δασκάλου είναι να οργανώσει καταστάσεις ή συστήματα εξαναγκασμών, στα οποία ο συγκεκριμένος στόχος θα εμφανιστεί ως η πλέον ευνοϊκή (λιγότερο δαπανηρή) λύση.

Πέρα από το αν συμφωνεί ή διαφωνεί κανείς με τις προηγούμενες απόψεις, όταν μπει στη διαδικασία να σχεδιάσει μαθηματικές δραστηριότητες, δεν μπορεί να μη λάβει υπόψη ότι στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού συστήματος, η αξιολόγηση αποτελεί σημαντική διάσταση της εκπαιδευτικής διαδικασίας, είναι βασικός παράγοντας κινητοποίησης και ανατροφοδότησης μαθητών και εκπαιδευτικών. Για το μαθητή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αποτελεί μηχανισμό συνεχούς παρακολούθησης των επιδόσεών του και μηχανισμό πιστοποίησης για την προαγωγή του στην επόμενη τάξη, για την εισαγωγή του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, για την απόκτηση τίτλων σπουδών. Για τον εκπαιδευτικό αποτελεί μια διαρκή διαδικασία ενσωματωμένη στη διδακτική διαδικασία.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κυριαρχεί η ποσοτική αποτύπωση της επίδοσης του μαθητή. Προκύπτει συνθετικά από την καθημερινή συμμετοχή του στη μαθησιακή διαδικασία, τις γραπτές δοκιμασίες, τις εργασίες που εκτελεί στο σπίτι και τις τελικές γραπτές εξετάσεις. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο, οι μαθητές αισθάνονται ότι καθημερινά αξιολογούνται. Αναμένουν ότι οποιαδήποτε δραστηριότητά τους, στα πλαίσια της μαθησιακής διαδικασίας, παίζει ρόλο στην ενδοσχολική αξιολόγησή τους.

Σύμφωνα με στοιχεία της έρευνας του Μαυρομάτη κ.α. (2008), η αριθμητική βαθμολογία φαίνεται να είναι η κυρίαρχη μορφή αξιολόγησης, όχι μόνο στις προτιμήσεις των καθηγητών, αλλά και των ίδιων των μαθητών και των γονέων. Το 72% των διδασκόντων στο Λύκειο και το 70% των διδασκόντων στο Γυμνάσιο προτιμούν την αριθμητική βαθμολογία. Άλλωστε οι εκπαιδευτικοί υποχρεώνονται από το ίδιο το εκπαιδευτικό σύστημα να βαθμολογούν αριθμητικά. Οι μαθητές γυμνασίου σε ποσοστό 71% και οι μαθητές λυκείου σε ποσοστό 64% προτιμούν επίσης την αριθμητική βαθμολογία. Οι γονείς μαθητών Λυκείου σε ποσοστό 67% και οι γονείς μαθητών Γυμνασίου σε ποσοστό 82%, πιστεύουν (πολύ ή αρκετά) ότι η αριθμητική βαθμολογία αποτυπώνει με ακρίβεια και αντικειμενικότητα την πρόοδο του παιδιού τους.

Είναι φανερό ότι το ίδιο το εκπαιδευτικό σύστημα και το ευρύτερο κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον επιβάλλει την αξιολόγηση και μάλιστα με αριθμητική κλίμακα. Έχει περάσει στη συνείδηση μαθητών, γονέων και εκπαιδευτικών, ότι κάθε μαθησιακό έργο αξιολογείται και μάλιστα με μετρήσιμα χαρακτηριστικά. Όσοι διδάσκουν το κατανοούν παρατηρώντας πώς αντανακλάται σε επίπεδο μαθητών. Συχνά, οι μαθητές, για να μπουν στη διαδικασία ενασχόλησης με κάποια μαθησιακή δραστηριότητα, επιζητούν την ύπαρξη ανταμοιβής με μετρήσιμα χαρακτηριστικά. Το διαπιστώσαμε και εμείς στην έρευνα που κάναμε, τόσο μετά την ολοκλήρωση κάθε δραστηριότητας όταν οι μαθητές συζητούσαν για το κόστος επίλυσης που ο καθένας πέτυχε, όσο και κατά τη φάση σύνοψης όταν ζήτησαν να εκφραστούν οι απαντήσεις τους σε αριθμητική κλίμακα με άριστα το 20.

Η συμβολή των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, γίνεται πιο ουσιαστική, όσο περισσότερο οι μαθητές εμπλέκονται στη διαδικασία αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής. Και επειδή κάθε επιτυχημένη προσπάθεια απαιτεί κίνητρα, το κόστος πρόσβασης λειτουργεί ως κίνητρο προς αυτή την κατεύθυνση.

Προφανώς, η ανταμοιβή του μαθητή είναι το ελάχιστο κόστος επίλυσης. Όμως, συμφωνώντας με την άποψη του Glasersfeld, πιστεύουμε ότι για τον μαθητή, το πλέον ενισχυτικό, δημιουργείται εσωτερικά και έχει να κάνει με το πώς συντόνισε, οργάνωσε και εφάρμοσε τις μαθηματικές στου γνώσεις για να επιτύχει τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης. Άρα το κόστος πρόσβασης μπορεί να ιδωθεί ως ένα στοιχείο αυτόαξιολόγησης και αυτό-παρακολούθησης της δράσης του.

Ο απώτερος σκοπός είναι, το κόστος πρόσβασης να μην έχει λόγο ύπαρξης και να αφαιρεθεί. Αυτό θα συμβεί, όταν οι μαθητές έρθουν σε κατάσταση να αντιλαμβάνονται ότι μια στρατηγική είναι βέλτιστη, επειδή σηματοδοτεί το υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Όταν θα αποκτήσουν την ικανότητα να αξιολογούν τις στρατηγικές με βάση το τί επιπέδου μαθηματικά απαιτεί η εφαρμογή τους.

Θεωρούμε ότι η διδασκαλία που έχει ως συστατικό τις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων, πρέπει να στοχεύει σ’ αυτού του είδους τη μετάβαση. Πιστεύουμε όμως, ότι είναι ένα δύσκολο εγχείρημα, διότι, σε μεγάλο βαθμό, εξαρτάται από το πώς θα ενεργοποιηθούν και πώς θα αντιδράσουν οι ίδιοι οι μαθητές σε μια τέτοια προοπτική, αλλά και από το πώς θα θέσει ο δάσκαλος αυτή την προοπτική. Είναι αναγκαίο να

δούμε με ποιον τρόπο η διδακτική διαχείριση θα τους βοηθήσει, κατά κάποιο τρόπο να αποτινάξουν ένα κίνητρο με μετρήσιμα χαρακτηριστικά και να υιοθετήσουν ένα κίνητρο με καθαρά ποιοτικά χαρακτηριστικά.

2. Θεωρητικό πλαίσιο – Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο και τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, θα διαμορφώσουμε τα ερευνητικά ερωτήματα, θα καθορίσουμε τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας που θα ακολουθήσουμε και θα ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης που αναπτύχθηκαν στην τάξη κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες.

Οι βασικές θεματικές ενότητες που θα παρουσιάσουμε είναι:

- Η επίδραση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στις μετά-δεξιότητες και τη βούληση.
- Η ερμηνεία του απαιτούμενου επίπεδου μαθηματικής σκέψης των στρατηγικών επίλυσης, ως επιπέδου αφαιρετικής ικανότητας.
- Ο ορισμός της έννοιας του χώρου λύσεων των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, ως εργαλείου για την ανάλυση των δεδομένων.
- Η επίδραση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στη μαθηματική δημιουργικότητα.
- Ο ρόλος της συζήτησης σε πρακτικές συνεργατικής μάθησης. Οι μορφές μαθηματικής επικοινωνίας που αναπτύσσονται κατά την ενασχόληση με μαθηματικά έργα. Οι αποτελεσματικές εκπαιδευτικές πρακτικές για τη διαχείριση μαθηματικών συζητήσεων.
- Η σχέση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων με την κατασκευή προβλήματος.

2.1. Η επίδραση των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων στις μετά-δεξιότητες και τη βούληση

Οι βιβλιογραφικές αναφορές αυτής της θεματικής ενότητας, αντλούνται από το άρθρο του Mayer (1998) με θέμα το ρόλο των δεξιοτήτων, μετά-δεξιοτήτων και κινήτρων για την επίλυση προβλήματος. Με βάση τα στοιχεία που θα παρουσιάσουμε, θα

εξετάσουμε την επίδραση των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων στις μετά-δεξιότητες και τη βούληση.

Σύμφωνα με τον Mayer η επιτυχής επίλυση προβλημάτων εξαρτάται από τρεις συνιστώσες: τις γνωστικές δεξιότητες, τις μεταγνωστικές δεξιότητες και τη βούληση. Οι γνωστικές δεξιότητες είναι οι βασικές δεξιότητες που αναπτύσσονται στοχευμένα και μεμονωμένα, οι μεταγνωστικές δεξιότητες αναφέρονται στις στρατηγικές επίλυσης, ενώ η βούληση αφορά τα κίνητρα, τα οποία διακρίνονται σε τρία είδη: κίνητρα με βάση το ενδιαφέρον, την αυτό-αποτελεσματικότητα και την απόδοση. Ο Mayer θεωρεί, ότι η διδασκαλία μπορεί να επιδράσει σε κάθε μία από τις παραπάνω συνιστώσες.

Αν υποθέσουμε ότι ένας μαθητής αποτυγχάνει να λύσει ένα πρόβλημα τεσσάρων πράξεων, ενώ διαθέτει τις βασικές δεξιότητες επίλυσης, δηλαδή είναι σε θέση να εκτελεί σωστά την πράξη της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, τότε, ο συγκεκριμένος μαθητής δείχνει ότι δεν μπορεί να αποδώσει καλά σε μια μεταφορά, δηλαδή, στην εφαρμογή της κατεχόμενης γνώσης σε μια νέα κατάσταση. Αυτό το μοτίβο της σωστής εφαρμογής βασικών δεξιοτήτων και της κακής μεταφοράς τους παρατηρείται συνήθως μεταξύ των μαθητών του σχολείου.

Μια σοβαρή πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς είναι να προωθήσουν τη μεταφορά, δηλαδή την εκμάθηση της μεταβίβασης των βασικών δεξιοτήτων.

Το ερώτημα είναι, πώς μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να είναι δημιουργικοί όταν έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα.

Κατά πρώτον, οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν τις βασικές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Η εκμάθησή τους γίνεται κυρίως μεμονωμένα και απαιτεί στόχευση και επαναληψιμότητα. Μια τέτοια διδασκαλία επιδρά θετικά στην πρώτη συνιστώσα, όμως δεν είναι αρκετή για την επίλυση προβλημάτων μη ρουτίνας. Ο μαθητής πρέπει να γνωρίζει όχι μόνο τι να κάνει, αλλά και πότε να το κάνει.

Η δεύτερη συνιστώσα είναι η μεταγνώση με τη μορφή μετά-δεξιοτήτων και αφορά την ικανότητα του μαθητή να ελέγχει και να παρακολουθεί τις γνωστικές διεργασίες του. Η συνιστώσα αυτή, είναι κεντρική στην επίλυση προβλημάτων, διότι υποδηλώνει την ικανότητα διαχείρισης και συντονισμού των βασικών δεξιοτήτων. Οι μαθητές, εκτός από το να διαθέτουν δεξιότητες σε συγκεκριμένους τομείς, πρέπει να μπορούν και να τις διαχειριστούν. Πρέπει να γνωρίζουν πότε να τις χρησιμοποιούν, πώς να τις συντονίζουν και πώς να τις παρακολουθούν.

Ωστόσο, η εστίαση αποκλειστικά και μόνο στη διδασκαλία βασικών δεξιοτήτων και μετά-δεξιοτήτων είναι ατελής, διότι παραβλέπει τα συναισθήματα του μαθητή και το ενδιαφέρον του για το πρόβλημα. Η τρίτη συνιστώσα απορρέει από την έρευνα για τα κίνητρα πτυχών της νόησης και είναι η βούληση του μαθητή. Όσον αφορά τη βούληση έχουν αναπτυχθεί τρεις θεωρίες, η θεωρία ενδιαφέροντος, η θεωρία αυτό-αποτελεσματικότητας και η θεωρία απόδοσης.

Σχετικά με τη θεωρία ενδιαφέροντος, η σύγχρονη έρευνα περιλαμβάνει εμπειρικές μελέτες δύο τύπων ενδιαφέροντος, ενδιαφέρον προσωπικό και ενδιαφέρον κατάστασης. Το προσωπικό ενδιαφέρον αφορά τις διαθέσεις του ατόμου, ενώ το ενδιαφέρον κατάστασης αναφέρεται σε ενδιαφέρουσες εργασίες, είναι ένα χαρακτηριστικό του περιβάλλοντος. Και στις δύο περιπτώσεις, το ενδιαφέρον καθορίζεται από την αλληλεπίδραση του ατόμου με την κατάσταση. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές σκέφτονται και επεξεργάζονται το υλικό σε βάθος όταν ενδιαφέρονται παρά όταν αδιαφορούν. Ωστόσο, οι ερευνητές δεν είναι ακόμη σε θέση να προσδιορίσουν το μηχανισμό που επηρεάζει το ενδιαφέρον, δεν μπορούν να καθορίσουν με σαφήνεια τι είναι ενδιαφέρον.

Η θεωρία αυτό-αποτελεσματικότητας προβλέπει ότι οι μαθητές καταβάλουν μεγαλύτερη προσπάθεια για ένα μαθησιακό έργο, όταν κρίνουν τον εαυτό τους ικανό να αντεπεξέλθει, παρά όταν δεν έχουν εμπιστοσύνη στις ικανότητές τους. Οι Pintrich και De Groot (1990) διαπίστωσαν ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ της αυτό-αποτελεσματικότητας των μαθητών και της χρήσης ενεργητικών στρατηγικών μάθησης (Mayer 1998).

Σύμφωνα με τη θεωρία απόδοσης (Weiner, 1986), τα αίτια στα οποία αποδίδει ένας μαθητής τις επιτυχίες του και τις αποτυχίες του, σχετίζονται με την επίδοσή του. (Mayer 1998). Συγκεκριμένα, οι μαθητές που θεωρούν ως αιτία την έλλειψη προσπάθειας, είναι πιθανό να εργαστούν πιο σκληρά από αυτούς που θεωρούν ως αιτία την έλλειψη ικανότητας. Επίσης, όταν οι εκπαιδευτικοί τους προσφέρουν συμπάθεια ή οίκτο ως απάντηση στην αποτυχία τους, οι μαθητές συμπεραίνουν ότι δεν έχουν την απαιτούμενη ικανότητα, ενώ όταν οι εκπαιδευτικοί τους ενθαρρύνουν με επιμονή, οι μαθητές νιώθουν την ανάγκη να προσπαθήσουν περισσότερο. Όταν ο εκπαιδευτικός δείχνει στο μαθητή πώς να λύσει ένα πρόβλημα, μπορεί να του μεταφέρει το μήνυμα ότι δεν είναι αρκετά ικανός για να το λύσει.

Όσον αφορά τις προτεινόμενες δραστηριότητες, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την επίδρασή τους στις μετά-δεξιότητες, στα κίνητρα με βάση το ενδιαφέρον κατάστασης και στα κίνητρα βάσει αυτό-αποτελεσματικότητας.

Χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων είναι οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης. Η μη ύπαρξη αντιστοίχισης του συνόλου των δεδομένων με τον τρόπο επίλυσης, έχει ως αποτέλεσμα, διαφορετικοί συνδυασμοί δεδομένων να δίνουν διαφορετικούς τρόπους επίλυσης. Δεδομένου ότι κάθε τρόπος επίλυσης απαιτεί χρήση διαφορετικών γνωστικών δεξιοτήτων, ο σχεδιασμός στρατηγικών επίλυσης, προϋποθέτει συντονισμό, έλεγχο και διαχείριση της γνώσης. Ο μαθητής πρέπει να γνωρίζει ποιες γνώσεις θα χρησιμοποιήσει, πού θα τις χρησιμοποιήσει και γιατί. Αυτή η διαδικασία προϋποθέτει μεταγνωστική ικανότητα με τη μορφή μετά-δεξιοτήτων. Κατά συνέπεια, οι δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων μπορούν να συνεισφέρουν στον τομέα των μετά-δεξιοτήτων, αρκεί οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να μειώσουν το κόστος επίλυσης, να αναπτύξουν όσο το δυνατόν περισσότερες στρατηγικές επίλυσης. Η ενθάρρυνση να μην μένουν σε έναν τρόπο επίλυσης, αλλά να αναζητούν και άλλους, βοηθάει προς αυτή την κατεύθυνση. Γι' αυτό, το να αναπτύσσουν οι μαθητές πολλές στρατηγικές επίλυσης, όταν εμπλέκονται σε τέτοιου είδους δραστηριότητες, έχει μεγάλη σημασία, διότι αποκαλύπτει κατά πόσο μπαίνουν σε μεταγνωστικές διεργασίες.

Το δεύτερο ζήτημα είναι, αν η ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες έχει επίδραση στο δεύτερο τύπο ενδιαφέροντος, το ενδιαφέρον κατάστασης. Η εκχώρηση της επιλογής των δεδομένων στους ίδιους τους μαθητές, δημιουργεί μια άλλου είδους σχέση ανάμεσα στο μαθητή και τη πορεία επίλυσης. Η πορεία δεν προκαθορίζεται από το ίδιο το πρόβλημα, αλλά ο μαθητής, μέσω της επιλογής δεδομένων, συμμετέχει ενεργά στον καθορισμό της. Η διαδρομή επίλυσης δεν υπάρχει κάπου «έξω» και «πάνω» από τον μαθητή και ο ίδιος καλείται να την ανακαλύψει, αλλά προσπαθεί να την επινοήσει, να την εφεύρει, να τη χαράξει. Το ερώτημα είναι αν αυτό το πλαίσιο δημιουργεί κίνητρα ενδιαφέροντος, αν επιδρά στη βούληση του μαθητή.

Οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, είναι διαφορετικού γνωστικού επιπέδου ο καθένας. Η διαβάθμιση αυτή, επιτρέπει την επιτυχή αντιμετώπιση του προβλήματος από ένα ευρύ φάσμα μαθητών, διότι ένας τρόπος επίλυσης, ανεξάρτητα από το τι επίπεδο μαθηματικής σκέψης σηματοδοτεί, είναι ένας τρόπος επίλυσης.

Γι' αυτό, η συστηματική ενασχόληση με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, μαθητών με χαμηλή εκτίμηση για τις ικανότητές τους στα μαθηματικά, ίσως τους βοηθήσει να ανακτήσουν την εμπιστοσύνη στις δυνάμεις τους. Όταν ο μαθητής εφαρμόσει ένα τρόπο επίλυσης, έστω και χαμηλού γνωστικού επιπέδου, προσλαμβάνει ότι έλυσε το πρόβλημα και όχι ότι απέτυχε. Αυτό ίσως λειτουργήσει ως κίνητρο ώστε να κινητοποιηθεί και να ενεργοποιηθεί. Για ορισμένους μαθητές η αποτυχία στα μαθηματικά γίνεται καθεστώς. Συνήθως ξεκινάει από διαδοχικές αποτυχίες και εξελίσσεται σε απροθυμία, αδιαφορία και πολλές φορές αποστροφή για τα μαθηματικά έργα. Γι' αυτούς τους μαθητές ίσως είναι πρωτόγνωρο να λύσουν ένα πρόβλημα, έστω και με υψηλό κόστος επίλυσης και μπορεί να λειτουργήσει θετικά να δουν με άλλο μάτι και τα μαθηματικά και τις ικανότητές τους στα μαθηματικά.
Από τα παραπάνω, ανακύπτει ένα αρκετά σημαντικό ερώτημα, αν η συστηματική ενασχόληση με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, μαθητών με χαμηλή αυτοεκτίμηση για τις ικανότητές τους στα μαθηματικά, δημιουργεί κίνητρα βάσει αυτό-αποτελεσματικότητας και προϋποθέσεις για να αντιμετωπίσουν την αποτυχία τους στα μαθηματικά. Το ερώτημα σχετίζεται άμεσα με τη σχολική αποτυχία, ένα φαινόμενο που δεν αποτελεί μόνο παθογόνα διάσταση του εκπαιδευτικού συστήματος, αλλά είναι ένα σοβαρό πρόβλημα της ίδιας της κοινωνίας.

Γενικά, όταν ως δάσκαλοι σχεδιάζουμε μαθηματικά προβλήματα, πρέπει να λάβουμε υπόψη, όπως αναφέρει ο Kilpatrick (1987), ότι στο σχολείο, σχεδόν όλα τα προβλήματα διατυπώνονται από κάποιον άλλο, π.χ. τον καθηγητή ή τα σχολικά εγχειρίδια, ενώ στην πραγματική ζωή το πρόβλημα το διατυπώνει και το διαμορφώνει αυτός που καλείται να το λύσει. Ένα πρόβλημα, σύμφωνα με τους ψυχολόγους, δεν είναι πρόβλημα, παρά μόνο γι' αυτόν που το δέχεται ως τέτοιο.
Σύμφωνα με τον Schön (1979), τα προβλήματα δεν δίνονται, αλλά κατασκευάζονται από ανθρώπους που προσπαθούν να δώσουν νόημα και να αντιμετωπίσουν προβληματικές καταστάσεις. (Kilpatrick 1987).

2.2. Η μαθηματική σκέψη ως αφαιρετική ικανότητα

Το επίπεδο μαθηματικής σκέψης είναι κεντρικής σημασίας για τις προτεινόμενες δραστηριότητες. Μια σωστά σχεδιασμένη δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων πληροί την υπόθεση: το κόστος επίλυσης σηματοδοτεί το επίπεδο μαθηματικής

σκέψης. Γι' αυτό είναι αναγκαίο, να αποσαφηνίσουμε τι σημαίνει ότι μια στρατηγική επίλυσης απαιτεί ανώτερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης από μια άλλη. Η προσέγγισή μας θα είναι κονστρουκτιβιστική. Από κονστρουκτιβιστικής άποψης οι μαθηματικές έννοιες και λειτουργίες ερμηνεύονται ως αποτέλεσμα επιπέδων αφαιρετικής δράσης.

Παρουσιάζουμε την έννοια της αναστοχαστικής αφαίρεσης, όπως τα αναλύει ο Glasersfeld (1991).

Για τις έννοιες της αφαίρεσης και του αναστοχασμού, όπως τις προσέγγισε ο Piaget ως ερμηνεία της εμπειρίας, ο Glasersfeld αναφέρει:

> «Έστω ότι κάποιος, έχοντας ήδη φάει ένα μήλο, παίρνει ένα δάγκωμα από ένα δεύτερο. Αν ερωτηθεί ποιο από τα δύο είχε πιο γλυκιά γεύση, υπό φυσιολογικές συνθήκες μπορεί να πάρει μια απόφαση και να δώσει μια απάντηση. Δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε πώς λαμβάνεται μια τέτοια απόφαση, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε μερικά από τα βήματα που φαίνονται απαραίτητα για να ληφθεί. Καταρχήν θα πρέπει να θυμάται, τουλάχιστον έως ότου υποβληθεί η ερώτηση, τα αισθήματα που συνοδεύουν την κατανάλωση του πρώτου μήλου. Τα αισθήματα αυτά θα πρέπει να τα αναπαραστήσει και στη συνέχεια να τα συγκρίνει (σε σχέση με ό,τι ορίζει ο ίδιος ως «γλύκα») με τα αισθήματα που συνοδεύουν το δάγκωμα του δεύτερου μήλου. Αυτή η αναπαράσταση και σύγκριση είναι ένας τρόπος λειτουργίας, διαφορετικός από τις διαδικασίες των αισθήσεων που παρείχαν το υλικό για τη σύγκριση.
>
> **Αναστοχασμός** είναι η ικανότητα που μας επιτρέπει να βγούμε από τη ροή της άμεσης εμπειρίας, να αναπαραστήσουμε ένα κομμάτι της και να το δούμε σαν να ήταν άμεση εμπειρία, έχοντας πλήρη επίγνωση ότι δεν είναι. Με την κυριολεκτική έννοια του όρου, αυτό είναι ένα είδος **αφαίρεσης**, το πιο απλό είδος. Εστιασμένη προσοχή παίρνει ένα κομμάτι της εμπειρίας, το απομονώνει από ό,τι υπήρχε πριν και από ό,τι ακολουθεί, και το αντιμετωπίζει ως μια κλειστή οντότητα». (σελ. 46)

Όπως αναφέρει ο Glasersfeld, σύμφωνα με τον Piaget, όλες οι νέες γνώσεις προϋποθέτουν μια αφηρημένη έννοια, όμως όλες οι αφαιρέσεις δεν είναι ίδιες. Ο Piaget διέκρινε δύο είδη αφαίρεσης, την **εμπειρική** και την **αναστοχαστική**. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι η εμπειρική αφαίρεση αφορά παρατήρηση, ενώ η αναστοχαστική αφορά συντονισμό.

Η **αναστοχαστική αφαίρεση** περιλαμβάνει πάντα δύο αναπόσπαστα χαρακτηριστικά: «ανάκλαση» (γαλλικός όρος “reflechissement’’) με την έννοια της «προβολής», δηλαδή ότι κάτι δανείζεσαι από ένα προηγούμενο επίπεδο για ένα υψηλότερο, καθώς και ένα «αναστοχασμό» (γαλλικός όρος “reflexion’’) με την έννοια μιας περισσότερο ή λιγότερο συνειδητής γνωστικής ανασυγκρότησης ή αναδιοργάνωσης τού τι έχει μεταφερθεί.

Σύμφωνα με τον Glasersfeld, ο Piaget διέκρινε τρεις τύπους αναστοχαστικής αφαίρεσης.

1ος τύπος: Στον πρώτο τύπο αναστοχαστικής αφαίρεσης, μια δραστηριότητα ή διανοητική λειτουργία (όχι ένας στατικός συνδυασμός αισθητηριακών στοιχείων), αναπτύσσεται σε ένα επίπεδο και αντλείται από αυτό για να εφαρμοστεί σε ένα ανώτερο.

2ος τύπος: Ο δεύτερος τύπος είναι παρόμοιος με τον πρώτο, με τη διαφορά ότι περιλαμβάνει τη γνώση του υποκειμένου για το τι έχει αφαιρεθεί. Την αναστοχαστική αφαίρεση προχωρημένου επιπέδου, όταν ο αναστοχασμός πλέον είναι έργο της σκέψης, πρέπει κανείς να τη διακρίνει και να την σκεφτεί ως μια διαδικασία κατασκευής της σκέψης. Οι μαθηματικές έννοιες και τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αποτέλεσμα δράσεων αναστοχαστικής αφαίρεσης 2ου τύπου.

3ος τύπος: Τον τρίτο τύπο ο Piaget τον ονόμασε ψευδό-εμπειρική αφαίρεση. Δεν θα ασχοληθούμε μ’ αυτόν τον τύπο αναστοχαστικής αφαίρεσης, αφού δεν χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το κόστος επίλυσης αντικατοπτρίζει το επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Με βάση τις παραπάνω αναφορές, συνδέουμε το επίπεδο μαθηματικής σκέψης με την αφαιρετική ικανότητα. Συγκεκριμένα, κατατάσσουμε τις στρατηγικές επίλυσης σε επίπεδα αναστοχαστικής αφαίρεσης 2ου τύπου. Τις αξιολογούμε ανάλογα με το πόσα επίπεδα αφαιρετικής δράσης απαιτούν τα μαθηματικά που εφαρμόστηκαν. Χαμηλότερο κόστος επίλυσης, σημαίνει υψηλότερο επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης.

Οι έννοιες και οι λειτουργίες που εμπλέκονται με τα μαθηματικά, δεν είναι απλώς αφαιρέσεις, αλλά οι περισσότερες από αυτές είναι το αποτέλεσμα πολλών επιπέδων αφαίρεσης. Γι’ αυτό δεν χρειάζεται μόνο διαδοχικές δράσεις αφαίρεσης, αλλά και μια επιτυχημένη προσπάθεια αναστοχασμού. (Glasersfeld 1983)

Ο Wheatley (1992) αναφέρει για το ρόλο του αναστοχασμού στη μάθηση των μαθηματικών ότι, σύμφωνα με τον Sigel (1981), στη μάθηση των μαθηματικών αναστοχασμός χαρακτηρίζεται η αποστασιοποίηση από τη δράση τού να κάνεις μαθηματικά. Είναι άλλο πράγμα να λύσεις ένα πρόβλημα και εντελώς άλλο να εκλάβεις τη δική σου δράση ως αντικείμενο αναστοχασμού. Άτομα που αναστοχάζονται δεν δραστηριοποιούνται απλώς, αλλά έχουν μεγαλύτερο έλεγχο πάνω στον τρόπο σκέψης τους και μπορούν να αποφασίσουν ποια από τις πολλές διαδρομές πρέπει να ακολουθήσουν. Όταν οι εμπλεκόμενοι προβληματίζονται πάνω στη λύση της δραστηριότητας, κρατούν τον εαυτό τους σε απόσταση από τη δραστηριότητα, κρατώντας τη δραστηριότητα στη σκέψη. Με αυτόν τον τρόπο, κάνουν τη δράση τους ένα αντικείμενο που μπορεί να εξετασθεί.

Σύμφωνα με τον Wheatley, οι μαθητές κινούνται σ' ένα υψηλότερο επίπεδο από αυτό της δραστηριοποίησης, όταν συμμετέχουν σε αναστοχασμό. Η εκτέλεση ακόμη και αυτοδημιούργητων μαθηματικών λειτουργιών δεν έχει τη δύναμη που απορρέει από τον αναστοχασμό πάνω στη δραστηριότητα. Για τους μαθητές, δεν είναι αρκετό μόνο η ολοκλήρωση μιας δραστηριότητας. Θα πρέπει να ενθαρρύνονται στο να προβληματιστούν σχετικά με τη δράση τους, να εξηγούν και να δικαιολογούν τη μέθοδο επίλυσης σε συνθήκες μικρής ομάδας συνεργατικής μάθησης, ή και σε συζήτηση με όλη την τάξη.

Επίσης, ο Wheatley υποστηρίζει ότι όταν οι μαθητές είναι τόσο ενεργοποιημένοι ώστε να μην στοχάζονται, δεν μαθαίνουν. Όταν δεν τους δίνουμε την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν τις μεθόδους και τις επιλογές τους, τους μεταδίδουμε ένα σιωπηρό μήνυμα ότι δεν θα πρέπει να σκέφτονται τι κάνουν. Το να έχουμε απλά μαθητές συμμετέχοντες σε δραστηριότητες με νόημα, δεν οδηγεί πάντα σε ένα επιθυμητό επίπεδο μαθηματικής ικανότητας. Η δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος, στο οποίο ενθαρρύνεται ο αναστοχασμός των δράσεων, μπορεί να είναι αρκετά αποτελεσματικό. Έχουμε σοβαρές ενδείξεις ότι η διδασκαλία που έχει ως κύριο συστατικό τον αναστοχασμό, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν ισχυρές μαθηματικές σχέσεις. Όταν οι μαθητές βιώνουν διδασκαλία με επίκεντρο τον αναστοχασμό, είναι σε θέση να λύνουν προβλήματα μη ρουτίνας και να κατασκευάζουν νέα γνώση.

Μια άλλη θεωρία που φαίνεται να μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τη σημασία των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων, είναι το μοντέλο της εννοιολογικής

ανάπτυξης που προτείνεται από την Sfard (1992). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, μια μαθηματική έννοια την κατανοούμε, σ' ένα αρχικό επίπεδο με βάση τη λειτουργία της, ενώ σ' ένα ανώτερο επίπεδο με βάση τη δομή της. Στο αρχικό επίπεδο τη βλέπουμε ως σύνολο ενεργειών μιας διαδικασίας, ενώ στο ανώτερο επίπεδο ως ένα πλήρες μαθηματικό αντικείμενο με ιδιαίτερα δομικά χαρακτηριστικά.

Η Sfard υποστηρίζει ότι κατά τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο, μπορεί να εντοπιστεί μια σταθερή διαδρομή αποτελούμενη από τρία στάδια: Στο πρώτο στάδιο υπάρχει μια διαδικασία που εκτελείται πάνω στα ήδη οικεία μαθηματικά αντικείμενα. Στο δεύτερο στάδιο αυτή η διαδικασία μετατρέπεται σε ένα πιο συμπαγές, αυτοδύναμο σύνολο και τέλος στο τρίτο στάδιο, αναπτύσσεται η ικανότητα να ιδωθεί αυτή τη νέα οντότητα ως μόνιμο αντικείμενο. Η εμφάνιση των δύο πρώτων σταδίων γίνεται βαθμιαία, ενώ το τρίτο στάδιο πραγματοποιείται ως μια αιφνίδια μεταβολή.

1^{ο} στάδιο: **Εσωτερίκευση** (*interiorization*). Όταν μια διαδικασία μπορούμε να την εκτελούμε μέσω νοητικών αναπαραστάσεων και έχουμε φτάσει στο σημείο να μπορούμε να σκεφτούμε τι θα συμβεί χωρίς να την εκτελέσουμε, η διαδικασία έχει εσωτερικευθεί. Ο μαθητής αρχικά εκτελεί τη διαδικασία επενεργώντας στα οικεία μαθηματικά αντικείμενα. Όταν δεν χρειάζεται πλέον να σκεφτεί τον αλγόριθμο για να την εκτελέσει, τότε έχει εσωτερικεύσει τη διαδικασία.

2^{ο} στάδιο: **Συμπύκνωση** (*condensation*). Σ' αυτό το στάδιο γινόμαστε όλο και πιο ικανοί να σκεφτόμαστε τη συγκεκριμένη διαδικασία στο σύνολό της χωρίς να αισθανόμαστε την ανάγκη να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, τη βλέπουμε ως αυτόνομη. Στο στάδιο της συμπύκνωσης ο μαθητής αναφέρεται στη διαδικασία με βάση τις σχέσεις εισόδου-εξόδου και όχι με βάση τα απαιτούμενα βήματα εκτέλεσης. Η συμπύκνωση επιδρά στην αφαιρετική ικανότητα διότι χάρη σ' αυτή, μπορούμε να συνδυάζουμε τη συγκεκριμένη διαδικασία με άλλες διαδικασίες και να κάνουμε πολύ πιο εύκολα συγκρίσεις και γενικεύσεις.

3^{ο} στάδιο: **Υποστασιοποίηση (πραγμοποίηση)** (*reification*). Η φάση της συμπύκνωσης διαρκεί όσο η νέα μαθηματική οντότητα είναι στενά συνδεδεμένη με τη συγκεκριμένη διαδικασία. Στο στάδιο της υποστασιοποίησης η νέα μαθηματική οντότητα αποσπάται από τη διαδικασία, η οποία την παρήγαγε και αρχίζει να αντλεί το νόημά της από την ιδιότητά της ως μέλος μιας συγκεκριμένης κατηγορίας. Μια υποστασιοποιημένη μαθηματική έννοια, μπορεί να ειδωθεί ως ένα πλήρες μαθηματικό αντικείμενο με τα δικά του χαρακτηριστικά.

Το μοντέλο εννοιολογικής ανάπτυξης της Sfard, προϋποθέτει ότι η ανθρώπινη μνήμη δομείται σε γνωστικά σχήματα. Οι πληροφορίες αποθηκεύονται στη μακροπρόθεσμη μνήμη ως οργανωμένα συστήματα (chunks). Πολλά τέτοια συστήματα, συνδεόμενα μεταξύ τους, σχηματίζουν ένα γνωστικό σχήμα. Όλες οι νοητικές διεργασίες γίνονται στη βραχυπρόθεσμη μνήμη, με ανάκληση των κατάλληλων γνωστικών σχημάτων από τη μακροπρόθεσμη μνήμη. Το 3^{ο} στάδιο της υποστασιοποίησης ταυτίζεται με τη δόμηση και οργάνωση των γνωστικών σχημάτων και αποτελεί το απαραίτητο βήμα για την εννοιολογική ανάπτυξη.

Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε, αν οι προτεινόμενες δραστηριότητες συμβάλλουν στην εννοιολογική ανάπτυξη. Οι μαθητές, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής επίλυσης, αναπτύσσουν πολλαπλούς τρόπους επίλυσης, κατά συνέπεια διαχειρίζονται, συντονίζουν, συνδυάζουν μαθηματικές διαδικασίες, προσπαθώντας να κάνουν συγκρίσεις και γενικεύσεις. Υποθέτουμε ότι αυτή η νοητική διεργασία τους βοηθάει να «δουν» τις διαδικασίες αυτές ως δομή, να τις σκέφτονται με βάση τις σχέσεις εισόδου-εξόδου, κατά συνέπεια ευνοεί τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης.
Ένα από τα ερωτήματα της έρευνάς μας είναι, αν οι δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων συμβάλλουν στη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο.

2.3. Χώροι λύσεων των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων

Οι Leikin και Lev (2007) προτείνουν μια έννοια του χώρου λύσεων, που επιτρέπει στους ερευνητές να εξετάσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης.
Δανειζόμαστε την έννοια του χώρου λύσεων και την προσαρμόζουμε στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων.
Ειδικός χώρος λύσεων είναι το σύνολο όλων των στρατηγικών επίλυσης που μπορούν να προκύψουν από οποιονδήποτε συνδυασμό επιλογής δεδομένων. Χωρίζεται σε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους. Τον **συμβατικό χώρο λύσεων,** λύσεις που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών, περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια και αντιστοιχούν στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών και τον **αντισυμβατικό χώρο λύσεων,** πρωτότυπες στρατηγικές επίλυσης και στρατηγικές

επίλυσης ανωτέρου γνωστικού επιπέδου, δηλαδή λύσεις που απαιτούν γνώσεις αποκτώμενες σε μεγαλύτερη τάξη.

Ο **ατομικός χώρος λύσεων** αφορά το μαθητή προσωπικά και χωρίζεται επίσης σε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους. Τον **διαθέσιμο χώρο λύσεων**, στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει ο μαθητής μόνος του και ανεξάρτητα, χωρίς τη βοήθεια του καθηγητή ή των συμμαθητών του και τον **δυνητικό χώρο λύσεων,** στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει ο μαθητής με τη βοήθεια του καθηγητή ή των συμμαθητών του, αλλά όχι μόνος του. Οι στρατηγικές αυτές ανταποκρίνονται στην προσωπική ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (ZPD) του μαθητή (Vygotsky, 1978).

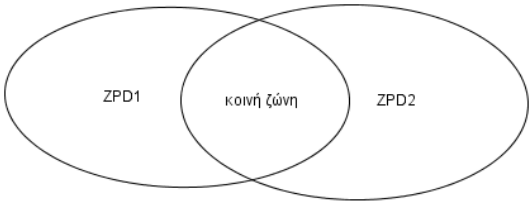
Ο **συλλογικός χώρος λύσεων** περιλαμβάνει όλες τις στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει μια ομάδα μαθητών. Στο πλαίσιο ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας αφορά το σύνολο των λύσεων μιας ομάδα, ενώ στο πλαίσιο τάξης αφορά το σύνολο των λύσεων όλων των μαθητών του τμήματος.

Η ύπαρξη αντισυμβατικών στρατηγικών εξαρτάται από τον σχεδιασμό της δραστηριότητας. Αν μια δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων δεν περιέχει πρωτότυπες στρατηγικές επίλυσης ή στρατηγικές ανωτέρου γνωστικού επιπέδου, ο αντισυμβατικός χώρος λύσεων είναι κενός.

Ο ατομικός χώρος λύσεων καθορίζεται από όλες τις στρατηγικές που ανέπτυξε ο μαθητής, μέχρι να φτάσει σ' αυτή που εφάρμοσε. Για τη μαθησιακή διαδικασία η δημιουργία του δυνητικού χώρου λύσεων είναι μεγάλης σημασίας, διότι οι λύσεις που ανήκουν εκεί, βρίσκονται στη ZPD του μαθητή και καθορίζουν το εν δυνάμει αναπτυξιακό του επίπεδο.

Σύμφωνα με τον Lerman (2001) η ZPD δεν είναι κάτι που οι μαθητές φέρνουν μαζί τους, τα μόνα εφόδια που κουβαλάνε είναι οι προηγούμενες εμπειρίες τους. Η ZPD δεν εμφανίζεται πριν την αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές τους ή τον καθηγητή, η ανάδυσή της μπορεί να προκληθεί μέσω της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης.

Η ZPD δύο μαθητών μπορεί να περιγραφεί ως επικαλυπτόμενες ζώνες (εικόνα 2.1). Στην κοινή ζώνη που δημιουργείται, αν δημιουργείται, συντελείται η μάθηση.



Εικόνα 2.1

Στην περίπτωση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, οι δύο ZPD ταυτίζονται με τους δυνητικούς χώρους στρατηγικών επίλυσης των δύο μαθητών. Στην κοινή ζώνη ανήκουν οι στρατηγικές, που την προκειμένη στιγμή δεν θα μπορούσε κανένας απ' τους δύο να τις αναπτύξει μόνος του και ανεξάρτητα, αλλά θα μπορούσαν να τις αναπτύξουν σε συνθήκες επικοινωνίας, συνεργασίας και διαπραγμάτευσης μεταξύ τους ή με τον καθηγητή.

Προφανώς, η ανάπτυξη τέτοιων φαινομένων ευνοείται από πρακτικές που στηρίζονται στην επικοινωνία και την αλληλεπίδραση. Γι' αυτό το λόγο, η ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες θα αποβεί περισσότερο χρήσιμη, σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας.

Το αν η χρήση δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων ευνοεί την ανάπτυξη επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων, είναι σημαντικό στοιχείο, διότι αποκαλύπτει κατά πόσο συντελείται και αναπτύσσεται η μάθηση διαμέσου αυτών των δραστηριοτήτων. Ο σχεδιασμός των προτεινόμενων δραστηριοτήτων συμβάλει σ' αυτό, αν πληροί το κριτήριο: το κόστος των στρατηγικών επίλυσης του δυνητικού χώρου να είναι μικρότερο, από το κόστος των στρατηγικών του διαθέσιμου χώρου.

2.4. Πολλαπλοί τρόποι επίλυσης και μαθηματική δημιουργικότητα

Στη βιβλιογραφία, τα μαθηματικά προβλήματα με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης έχουν συνδεθεί με την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας. Το ζήτημα σχετίζεται άμεσα με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, αφού ένα χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης.

Οι Leikin και Lev (2007) αναφέρουν ότι η δημιουργικότητα θεωρείται ως ένα από τα κύρια συστατικά της χαρισματικότητας. Η ερευνητική βιβλιογραφία κάνει διάκριση μεταξύ γενικής και ειδικής χαρισματικότητας, και γενικής και ειδικής δημιουργικότητας. Η **ειδική χαρισματικότητα** αναφέρεται σε σαφή και διακριτή πνευματική ικανότητα σε ένα συγκεκριμένο τομέα. Συνήθως εκφράζεται με κοινωνικά αναγνωρισμένη επίδοση και επίτευξη στόχων. Η **ειδική δημιουργικότητα** προσδιορίζεται, με σαφή και διακριτό τρόπο, ως η ικανότητα δημιουργίας σε ένα τομέα.

Σύμφωνα με τους Leikin και Lev (2007), οι Polya, Krutetskii και αργότερα οι Ervynck, Silver συνδέουν την έννοια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά με τις

δραστηριότητες πολλαπλών τρόπων επίλυσης και τονίζουν ότι η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους χαρακτηρίζει τη δημιουργικότητα της μαθηματικής σκέψης.
Ο Torrance (1974) ορίζει την **ευχέρεια**, την **ευελιξία** και την **πρωτοτυπία** ως βασικά συστατικά της δημιουργικότητας. (Leikin and Lev 2007)

Οι Leikin κ. α. (2010) εξετάζοντας, μέσω δύο εμπειρικών μελετών, τη σχέση των δραστηριοτήτων πολλαπλών λύσεων με την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, αναφέρουν ότι η τακτική χρήση τέτοιων δραστηριοτήτων, αύξησε σημαντικά την ευχέρεια και την ευελιξία των μαθητών, όχι όμως την πρωτοτυπία. Διαπίστωσαν ότι η συσχέτιση ανάμεσα στην ευελιξία και την ευχέρεια είναι υψηλή. Επίσης, υψηλή είναι και η συσχέτιση μεταξύ πρωτοτυπίας και δημιουργικότητας, φαίνεται ότι η πρωτοτυπία αποτελεί την ισχυρότερη συνιστώσα της δημιουργικότητας. Η ευχέρεια και η ευελιξία δείχνουν να έχουν ένα δυναμικό χαρακτήρα, ενώ η πρωτοτυπία μάλλον είναι χάρισμα.
Με βάση τις διαπιστώσεις της έρευνας, υποθέτουν ότι ένας από τους τρόπους αναγνώρισης των μαθηματικά προικισμένων μαθητών είναι η πρωτοτυπία των λύσεων που προτείνουν. Επισημαίνουν όμως, ότι πρέπει να γίνει συστηματική έρευνα για να επιβεβαιωθεί αυτή η υπόθεση.
Θεωρούν μεγάλης σημασίας την ανάπτυξη της ευχέρειας και της ευελιξίας, μέσω των δραστηριοτήτων με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης, διότι καθιστά τις δραστηριότητες αυτές ένα αποτελεσματικό διδακτικό εργαλείο. Πιθανώς άλλα είδη δραστηριοτήτων, όπως η κατασκευή προβλήματος από τους μαθητές ή δραστηριότητες μαθηματικών αναζητήσεων, να είναι αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της πρωτοτυπίας, αλλά αυτή η υπόθεση απαιτεί μια διαφορετική εμπειρική έρευνα.

Η διαχρονική μελέτη, διάρκειας ενός έτους, των Levav-Waynberg και Leikin (2011), μεταξύ της ομάδας πειράματος και της ομάδας ελέγχου, έδειξε ότι η συστηματική εισαγωγή των δραστηριοτήτων πολλαπλών λύσεων συμβάλλει στην ανάπτυξη δύο παραμέτρων της δημιουργικότητας, στην ευχέρεια και στην ευελιξία. Δεν βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικά αποτελέσματα ότι είχε επίδραση στην τρίτη παράμετρο, την πρωτοτυπία. Υπογραμμίζουν ότι πολύ περισσότερες πληροφορίες, σχετικά με την επίδραση δραστηριοτήτων με πολλαπλές λύσεις στην ανάπτυξη της

δημιουργικότητας, θα αντληθούν αν οι δραστηριότητες αφορούν συνδέσεις διαφορετικών περιοχών των μαθηματικών.

Όπως αναφέρουν οι Levav-Waynberg και Leikin (2012), οι δραστηριότητες με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης μπορούν να χρησιμεύσουν:

- Ως ένα εργαλείο αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης και της δημιουργικότητας.
- Για τη μέτρηση και παρακολούθηση της εξέλιξης της μαθηματικής γνώσης και δημιουργικότητας.
- Για τη σύγκριση της γνώσης και της δημιουργικότητας μεταξύ μαθητών με διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής ικανότητας.
- Ως εργαλείο έρευνας για την επαλήθευση των θεωρητικών υποθέσεων, όπως οι σχέσεις μεταξύ της μαθηματικής γνώσης και της ευελιξίας ή μεταξύ μαθηματικής δημιουργικότητας και πρωτότυπου συλλογισμού.

Οι Lev και Leikin (2013), στη σχετική έρευνά τους, διαπίστωσαν ότι, σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η γενική χαρισματικότητα και η αριστεία στα μαθηματικά, έχουν σημαντική επίδραση στη δημιουργικότητα, η οποία σχετίζεται με την παραγωγή πολλαπλών λύσεων σε μαθηματικές δραστηριότητες με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης. Ωστόσο, αυτά τα αποτελέσματα εξαρτώνται από το είδος αυτών των δραστηριοτήτων. Συμπεραίνουν ότι διαφορετικοί τύποι δραστηριοτήτων με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για διαφορετικούς σκοπούς της έρευνας.

Αν κάτι χαρακτηρίζει τις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων είναι οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις μάλιστα, το πλήθος τους είναι αρκετά μεγάλο. Η διαφορά με τις έρευνες που προαναφέραμε, έγκειται στο ότι οι μαθητές δεν καλούνται να βρουν και να διατυπώσουν όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους επίλυσης, αλλά να αναζητήσουν και να εφαρμόσουν τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης, τη στρατηγική με το μικρότερο κόστος. Άρα, στην περίπτωση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, αν μας ενδιαφέρει να αξιολογήσουμε την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία ως συστατικά της δημιουργικότητας, πρέπει να το κάνουμε με διαφορετικά κριτήρια.

Τα κριτήρια βρίσκονται στη πορεία που έκανε ο μαθητής για να φτάσει στη λύση που εφάρμοσε. Η αξιολόγηση πρέπει να γίνει με βάση τις στρατηγικές που ανέπτυξε πριν

καταλήξει σ' αυτή. Συγκεκριμένα η ευχέρεια αξιολογείται βάσει του πλήθους των διαφορετικών τρόπων επίλυσης που εντόπισε ο μαθητής. Η ευελιξία βάσει της ταχύτητας επίλυσης και της ικανότητάς του να εναλλάσσεται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών, ιδίως όταν η δραστηριότητα προσφέρεται ώστε οι στρατηγικές να ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες, όπως στο παράδειγμα της σελίδας 11. Η πρωτοτυπία έχει να κάνει με το αν ο μαθητής έχει αναπτύξει στρατηγικές του αντισυμβατικού χώρου λύσεων. Προφανώς, για να αξιολογηθεί πρέπει ο αντισυμβατικός χώρος λύσεων της δραστηριότητας να είναι μη κενός.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν οι δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων συμβάλλουν στη βελτίωση της ευελιξίας και της ευχέρειας των μαθητών.

Επίσης, θεωρούμε ότι πρέπει να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να προσεγγίσουν πρωτότυπες λύσεις. Και ότι αυτό μπορεί να γίνει μέσω των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, αρκεί ο σχεδιασμός να είναι τέτοιος ώστε να εμπεριέχονται και πρωτότυποι τρόποι επίλυσης.

2.5. Μαθηματική επικοινωνία

Μια δραστηριότητα, όσο καλά κι αν έχει σχεδιαστεί, δεν μπορεί από μόνη της να ανταποκριθεί στους διδακτικούς στόχους, αν δεν είναι ενταγμένη στο κατάλληλο πλαίσιο διδακτικής πρακτικής. Όπως εξηγήσαμε ήδη, κατά την ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες επιλογής δεδομένων, φαινόμενα δημιουργίας δυνητικών χώρων λύσεων και επικαλυπτόμενων ZPD, ευνοούνται σε συνθήκες επικοινωνίας και διαπραγμάτευσης.

Οι διεργασίες αυτές συνάδουν με τη θεωρία επικοινωνιακής προσέγγισης του Vygotsky. Στην επικοινωνιακή προσέγγιση οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες αναπτύσσονται διαμέσου της εσωτερίκευσης πολιτισμικών εργαλείων, όπως τα μαθηματικά, συνεπώς, προηγείται ο κοινωνικός λόγος, ο οποίος στη συνέχεια εξελίσσεται σε εσωτερικό λόγο. Υιοθετούμε ως πρακτική της τάξης μια άμεση συνέπεια της θεωρίας του Vygotsky, την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία διαφέρει τόσο από τις δασκαλοκεντρικές όσο και από τις μαθητοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας, διότι οι πρώτες δεν λαμβάνουν υπόψη την επικοινωνία που αναπτύσσεται στην τάξη, ενώ οι δεύτερες αγνοούν το ρόλο του δασκάλου. Στην ομαδοσυνεργατική διδασκαλία ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι αποφασιστικός στη διαμόρφωση της κατεύθυνσης και του χαρακτήρα της

επικοινωνίας στην τάξη. Οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στη μάθηση και ο εκπαιδευτικός έχει το ρόλο του συν-κατασκευαστή της γνώσης.
Θα μελετήσουμε τα εξελισσόμενα φαινόμενα επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης στην τάξη, όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων και θα διαμορφώσουμε την πρακτική μας κατά τη διδακτική διαδικασία, με βάση την ακόλουθη βιβλιογραφία.

Η Hoyles (1985) αναφέρει ότι τα παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας των μαθηματικών, ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, υποστηρίζουν τη μετάδοση της γνώσης από το δάσκαλο, χωρίς την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης. Η ανεπάρκεια αυτού του τρόπου διδασκαλίας οδήγησε σε αναζήτηση πιο αποτελεσματικών μεθόδων διδασκαλίας και τρόπων οργάνωσης της τάξης των μαθηματικών. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο οι δάσκαλοι των μαθηματικών έχουν στρέψει την προσοχή τους στην συνεργατική μάθηση και το δυναμικό ρόλο της συζήτησης. Η συζήτηση στην τάξη των μαθηματικών υποδηλώνει την αναγνώριση της σημασίας του κοινωνικοπολιτισμικού περιβάλλοντος στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης του παιδιού.

Ο Hirschfeld-Cotton (2008) διερεύνησε τη χρήση της μαθηματικής επικοινωνίας, μέσα από προφορικές παρουσιάσεις εργασιών και γραπτές καταχωρήσεις σε περιοδικά, καθώς και τις επιδράσεις της στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών. Διαπίστωσε ότι προκαλώντας τους μαθητές να επικοινωνούν μαθηματικά, τόσο προφορικά όσο και γραπτά, εμβάθυνε την κατανόησή τους. Αυξημένη κατανόηση παρατηρήθηκε σε διερευνητικές ερωτήσεις που προκαλούν τους μαθητές να προβληματιστούν σχετικά με τη μάθησή τους και να επαναξιολογήσουν το σκεπτικό τους. Από κονστρουκτιβιστικής άποψης, το νόημα δεν είναι αναπόσπαστο του γραπτού ή προφορικού λόγου. Σημασία έχει να κατασκευαστεί από κάθε άτομο με βάση τη δική του εμπειρία και να περιλαμβάνει ατομική ερμηνεία.
Σύμφωνα με την Wood (1999), «Τα παιδιά καταλαβαίνουν τα μαθηματικά καλύτερα εάν συμμετέχουν ενεργά στη μάθησή τους». Η απαίτηση οι μαθητές να εκφράσουν τη σκέψη τους, είτε προφορικά είτε γραπτά, τους επιτρέπει να αναλάβουν την ευθύνη της μάθησής τους και να συμμετέχουν ενεργά σ’ αυτή. (Hirschfeld-Cotton 2008).

Οι Brendefur και Frykholm (2000) εξετάζοντας με ποιους τρόπους οι εκπαιδευτικοί διευκολύνουν και καθοδηγούν τη συζήτηση στην τάξη, πώς λειτουργεί η ποιότητα του προβληματισμού και ποιες είναι οι επιδράσεις στην ανάπτυξη μιας πλούσιας μαθηματικής κατανόησης, προτείνουν ένα πλαίσιο τεσσάρων δομών, χρήσιμο στην ανάλυση των μορφών επικοινωνίας στην τάξη: επικοινωνία μονής κατεύθυνσης *(uni-directional communication)*, επικοινωνία συνεισφοράς *(contributive communication)*, αναστοχαστική επικοινωνία *(reflective communication)* και διδακτική επικοινωνία *(instructive communication)*.

Πολλοί εκπαιδευτικοί παραμένουν προσκολλημένοι στην **επικοινωνία μονής κατεύθυνσης** *(uni-directional communication)*, ακολουθώντας διδακτικές πρακτικές που τείνουν να προωθούν τα μαθηματικά ως ένα στατικό σύνολο γνώσεων, που αρχικά ερμηνεύεται και μεταφέρεται από το δάσκαλο και στη συνέχεια λαμβάνεται παθητικά από τους μαθητές. Οι δάσκαλοι τείνουν να κυριαρχούν στις συζητήσεις, με διαλέξεις διατυπώνοντας ερωτήσεις κλειστού τύπου και δίνουν λίγες ευκαιρίες στους μαθητές να επικοινωνούν τις στρατηγικές, τις ιδέες και τις σκέψεις τους.

Η **επικοινωνία συνεισφοράς** *(contributive communication)* επικεντρώνεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών και μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών. Η συζήτηση περιορίζεται σε βοήθεια ή ανταλλαγή, αλλά με ελάχιστη ή καμία εμβάθυνση.

Η **αναστοχαστική επικοινωνία** *(reflective communication)* είναι όπως η επικοινωνία συνεισφοράς, όπου οι μαθητές ανταλλάσσουν ιδέες για στρατηγικές επίλυσης, είτε μεταξύ τους είτε με το δάσκαλο, με τη διαφορά ότι αυτές οι μαθηματικές συζητήσεις χρησιμοποιούνται ως εφαλτήρια για βαθύτερες διερευνήσεις και αναζητήσεις Συγκεκριμένα, η επικοινωνία γίνεται αναστοχαστική όταν οι μαθητές συμμετέχουν σε συζήτηση με αντικείμενο προηγούμενη δραστηριότητά τους. Οι μαθητές δεν αρχίζουν να αναστοχάζονται αυθόρμητα, ο αναστοχασμός υποστηρίζεται και ενεργοποιείται από τη συμμετοχή στη συζήτηση. Μια πλούσια αναστοχαστική συζήτηση συνήθως λαμβάνει χώρα όταν οι μαθητές επιχειρούν να δικαιολογήσουν ή να διαψεύσουν εικασίες.

Η **διδακτική επικοινωνία** *(instructive communication)* περιλαμβάνει περισσότερα από αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και δασκάλων. Οι Steffe και D'Ambrosio (1995), αξιοποιώντας την έννοια της διδακτικής επικοινωνίας υποδεικνύουν ότι, το να θέτεις καταστάσεις και να ενθαρρύνεις για αναστοχασμό, είναι και θα εξακολουθήσει να είναι η κύρια αξία του δασκάλου. Υποστηρίζουν ότι το να θέτουν οι καθηγητές

καταστάσεις, αναδεικνύει, στηρίζει, ενθαρρύνει, και τροποποιεί τα μαθηματικά των μαθητών. (Brendefur and Frykholm 2000).

Το κάθε επίπεδο στο πλαίσιο των τεσσάρων δομών, προϋποθέτει αναγκαστικά την ύπαρξη του προηγούμενου. Για παράδειγμα, αν οι μαθητές επικοινωνούν αναστοχαστικά, μπορεί κανείς να υποθέσει ότι έχει λάβει επίσης χώρα κάποια επικοινωνία συνεισφοράς και μονής κατεύθυνσης. Ομοίως, προκειμένου η επικοινωνία στην τάξη να φτάσει σε διδακτικό επίπεδο, όπου αποκαλύπτονται ιδέες για τη σκέψη των μαθητών ώστε τελικά να έχει επίδραση στις αποφάσεις των δασκάλων για την ίδια τη διδασκαλία, η συζήτηση θα πρέπει να αναπτυχθεί αρκετά πλούσια ώστε να υποκινείται ο αναστοχασμός των μαθητών. (Brendefur, J. and Frykholm, J., 2000).

Οι Stein κ.α. (2008) προτείνουν ένα μοντέλο πέντε πρακτικών για τη διευκόλυνση της μαθηματικής συζήτησης γύρω από γνωστικά απαιτητικές δραστηριότητες. Αναφέρουν ότι οι καθηγητές, προσπαθώντας να χρησιμοποιήσουν δραστηριότητες που έχουν ως επίκεντρο το μαθητή, αντιμετωπίζουν προκλήσεις που υπερβαίνουν τον εντοπισμό καλά σχεδιασμένων δραστηριοτήτων και το κατάλληλο στήσιμό τους στην τάξη. Επειδή, για αυτά τα είδη των δραστηριοτήτων, τα μονοπάτια λύσεων συνήθως δεν είναι καθορισμένα, οι μαθητές έχουν την τάση να τα προσεγγίζουν με τρόπο μοναδικό και ενίοτε απρόβλεπτο. Οι εκπαιδευτικοί δεν πρέπει μόνο να κατανοούν πώς οι μαθητές κατασκευάζουν έννοιες, αλλά να δείχνουν ενδιαφέρουν και να εξετάζουν τις διαφορετικές ιδέες και προσεγγίσεις των μαθητών. Η έρευνα δείχνει ότι για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς αυτό είναι δύσκολο.

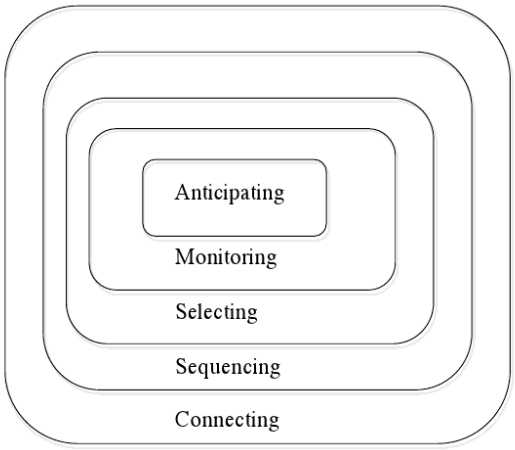
Ένα παιδαγωγικό μοντέλο πέντε βασικών εκπαιδευτικών πρακτικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά στη συζήτηση πάνω στις απαντήσεις των μαθητών: πρόβλεψη, παρακολούθηση, επιλογή, αλληλουχία, και συνδέσεις. Η χρήση κάθε πρακτικής, μπορεί να βελτιώσει μια τυπική συζήτηση πάνω σε μια γνωστικά δύσκολη δραστηριότητα και να την κάνει παιδαγωγικά διαχειρίσιμη για τον καθηγητή.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της συζήτησης στην τάξη, είναι η ανάπτυξη και αξιοποίηση της προσωπικής και συλλογικής λήψης αποφάσεων των μαθητών και όχι απλά η επικύρωση μιας συγκεκριμένης προσέγγισης ως ορθής ή η επίδειξη διαδικασιών για την επίλυση δραστηριοτήτων.

Συγκεκριμένα, οι πέντε πρακτικές είναι:

1. **Πρόβλεψη** πιθανών αντιδράσεων των μαθητών για γνωστικά απαιτητικές μαθηματικές δραστηριότητες (Anticipating).
2. **Παρακολούθηση** των απαντήσεων των μαθητών κατά τη διάρκεια της φάσης διερεύνησης (Monitoring).
3. **Επιλογή** συγκεκριμένων μαθητών να παρουσιάσουν τις μαθηματικές απαντήσεις τους στη φάση σύνοψης (Selecting).
4. Σκόπιμη **αλληλουχία** που θα εμφανιστεί στις απαντήσεις των μαθητών (Sequencing).
5. Βοήθεια ώστε η τάξη να κάνει μαθηματικές **συνδέσεις** μεταξύ διαφορετικών απαντήσεων των μαθητών και μεταξύ απαντήσεων των μαθητών και ιδεών κλειδιά (Connecting).

Στην εικόνα 2.2 βλέπουμε πώς επωφελείται κάθε πρακτική, από τις πρακτικές που εφαρμόστηκαν πριν από αυτή.



Εικόνα 2.2

Για παράδειγμα, η παρακολούθηση των μαθητών να εργάζονται κατά τη διάρκεια της φάσης διερεύνησης, επωφελείται από την πρόβλεψη τού πώς οι μαθητές θα προσεγγίσουν τη δραστηριότητα. Ομοίως, η πρακτική της επιλογής συγκεκριμένων μαθητών να παρουσιάσουν το έργο τους, επωφελείται από την προσεκτική παρακολούθηση της σειράς των απαντήσεων που παράγουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της φάσης διερεύνησης.

Η επιτυχής χρήση των πέντε πρακτικών εξαρτάται από τη φύση της δραστηριότητας, πιθανόν με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης, με σαφώς καθορισμένους διδακτικούς στόχους, ώστε, με τη βοήθεια των εκπαιδευτικών, οι μαθητές να κατανοήσουν την τρέχουσα μαθηματική σκέψη και πρακτική.

Ο Hiebert (1992), για το ρόλο του αναστοχασμού και της επικοινωνίας στις μεταρρυθμιστικές προσπάθειες στην εκπαίδευση όσον αφορά τα μαθηματικά, αναφέρει, ότι διαμορφώνονται εν μέρει από την κατανόησή μας για το πώς οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά. Δύο παραδόσεις στην ψυχολογία επηρεάζουν τις τρέχουσες θέσεις μας πιο δυναμικά. Η γνωστική ψυχολογία με έμφαση στις προσωπικές διανοητικές λειτουργίες και η κοινωνική γνώση με έμφαση στα συμφραζόμενα και την αλληλεπίδραση της ομάδας. Ο αναστοχασμός και η επικοινωνία, ως εκπρόσωποι των εν λόγω παραδόσεων, χρησιμοποιούνται για να καθοριστεί η γνωστική βάση και το σκεπτικό της μεταρρύθμισης και να αναλυθεί η φύση των προτεινόμενων αλλαγών. Ο αναστοχασμός υποδηλώνει μια ιδιωτική εσωτερική διαδικασία με ρίζες στη γνωστική ψυχολογία, δίνοντας έμφαση στις ψυχικές διεργασίες, εσωτερικές αναπαραστάσεις, και τις ψυχικές δομές της γνώσης. Η επικοινωνία υποδηλώνει μια πιο δημόσια διαδικασία με ρίζες στην κοινωνική ψυχολογία, με έμφαση στην κοινωνική γένεση της μάθησης και της επιρροής των άλλων στις γνωστικές εμπειρίες του ατόμου.

Ως κεντρικό θέμα αναδεικνύεται η αλληλεξάρτηση του αναστοχασμού και της επικοινωνίας, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυτές οι διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των πτυχών του προγράμματος των σχολικών μαθηματικών. Παρά το γεγονός ότι τα θεωρητικά επιχειρήματα για τον αναστοχασμό και την επικοινωνία είναι ολοένα και πιο άρτια διαρθρωμένα, τα εμπειρικά δεδομένα είναι σχετικά ελάχιστα και δεν ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις. Η συλλογιστική για τις προσπάθειες μεταρρύθμισης τροφοδοτείται περισσότερο από θεωρητικά επιχειρήματα από ό,τι με προσεκτικά συλλεγμένα εμπειρικά δεδομένα. Τα θεωρητικά επιχειρήματα τρέχουν πολύ πιο μπροστά από τα δεδομένα.

Σύμφωνα με τον Hiebert, η έρευνα πρέπει να είναι σχεδιασμένη πάνω σε δύο άξονες:

1. Τα ερευνητικά προγράμματα θα πρέπει να ελέγξουν τις αξιώσεις και υποθέσεις που προκύπτουν από θεωρητικά επιχειρήματα. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί για να διακρίνουμε τις πεποιθήσεις ή τις αξίες από τις θεωρητικές αξιώσεις. Για παράδειγμα, το να πιστεύουμε ότι για να κάνουμε μαθηματικά χρειάζονται αναστοχαστικές διαδικασίες ή συμμετοχή σε επικοινωνιακές δραστηριότητες, δεν υπόκειται σε έλεγχο. Είναι μια έκφραση των αξιών. Ωστόσο, συνταγές που οδηγούν σε αποτελέσματα, μπορεί να προβλεφθούν και πρέπει να ελεγχθούν. Για παράδειγμα, η πρόβλεψη ότι η επικοινωνία ενός συγκεκριμένου είδους θα

διευκολύνει στην κατανόηση ορισμένων εννοιών ή στην απόκτηση συγκεκριμένων δεξιοτήτων, θα πρέπει να δοκιμαστεί.

2. Για τη βελτίωση των θεωρητικών επιχειρημάτων που επηρεάζουν τις μεταρρυθμίσεις, πρέπει να κατανοήσουμε τις σχέσεις μεταξύ της μάθησης και δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν αναστοχασμό και επικοινωνία. Πρέπει να αυξήσουμε τις γνώσεις μας για τον τρόπο με τον οποίο οι διαδικασίες αυτές διευκολύνουν την κατανόηση. Αυτό σημαίνει ότι οι συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων, δεν μπορεί να είναι χρήσιμες, αν τα δεδομένα δεν μας βοηθούν να κατανοήσουμε τα φαινόμενα που ερευνώνται.

Στην έρευνά μας, οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων στο πλαίσιο ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Καθώς εργάζονται σε μικρές ομάδες, θα παρατηρήσουμε τις διάφορες μορφές επικοινωνίας που λαμβάνουν χώρα. Συγχρόνως, παρακολουθώντας κάθε ομάδα θα προσπαθούμε με κατάλληλες παρεμβάσεις, να αναβαθμίσουμε την επικοινωνία σε επίπεδα αναστοχαστικής ή και διδακτικής επικοινωνίας.

Θα ακολουθήσουμε το μοντέλο των πέντε πρακτικών, τόσο κατά τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων όσο και κατά τις φάσεις διερεύνησης και σύνοψης. Συγκεκριμένα, κατά τον σχεδιασμό θα προβλέπουμε πιθανές αντιδράσεις και προσεγγίσεις των μαθητών. Κατά την ενασχόλησή τους με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, θα παρακολουθούμε τις διεργασίες τους. Κατά τη φάση σύνοψης θα εφαρμόσουμε σκόπιμη επιλογή και αλληλουχία των μαθητών που θα παρουσιάσουν τις απαντήσεις τους. Συγχρόνως θα κάνουμε τις κατάλληλες συνδέσεις που θα εξυπηρετούν τους διδακτικούς στόχους.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα συλλεγόμενα δεδομένα για να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε τις υποθέσεις μας για τις προτεινόμενες δραστηριότητες, αλλά και για να βελτιώσουμε τόσο τη μορφή τους όσο και την πρακτική στην τάξη.

2.6. Δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων και κατασκευή προβλήματος

Σχετικά με τον ορισμό και τα είδη των καταστάσεων problem posing, οι Stoyanova και Ellerton (1996) αναφέρουν:

Η έννοια του problem posing έχει διερευνηθεί από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Ως η παραγωγή ενός νέου προβλήματος ή η αναδιατύπωση ενός συγκεκριμένου προβλήματος (Duncker, 1945), ως η διατύπωση μιας αλληλουχίας μαθηματικών προβλημάτων από μια δεδομένη κατάσταση (Shukkwan, 1993), ή ως προκύπτουσα δραστηριότητα όταν ένα πρόβλημα προκαλεί την παραγωγή άλλων προβλημάτων (Mamona-Downs, 1993). Σύμφωνα με τον Silver (1993, 1995) ως problem posing ορίζεται η δημιουργία ενός νέου προβλήματος από μια κατάσταση ή εμπειρία, ή η αναδιατύπωση ενός δεδομένου προβλήματος.

Problem posing μπορεί να προκύψει πριν από την επίλυση ενός προβλήματος (όταν το πρόβλημα δημιουργείται από μια δεδομένη τεχνητή ή φυσική κατάσταση), κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος (όταν κανείς αλλάζει σκόπιμα μερικούς από τους στόχους ή τους όρους του προβλήματος), ή μετά την επίλυση ενός προβλήματος (περίπτωση που τα προβλήματα δημιουργούνται με βάση την εμπειρία που αποκτήθηκε από την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος).

Κάθε κατάσταση problem posing μπορεί να χαρακτηριστεί ως ελεύθερη, ημιδομημένη ή δομημένη.

Στα problem posing **ελεύθερης κατάστασης** οι μαθητές διατυπώνουν προβλήματα σχετικά με συγκεκριμένες προηγούμενες εμπειρίες τους. Για παράδειγμα, τους ζητείται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα για τις εξετάσεις, ή να δημιουργήσουν ένα δύσκολο πρόβλημα.

Τα problem posing **ημιδομημένης κατάστασης** ενσωματώνουν ημιτελείς δομές, ή καταστάσεις που προκύπτουν από αλληλουχίες διασυνδεδεμένων προβλημάτων. Για παράδειγμα, ζητείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα που να απαιτεί τη χρήση της έννοιας του ορθογωνίου τριγώνου.

Στα problem posing **δομημένης κατάστασης**, παραλείπεται το ερώτημα του προβλήματος και ζητείται να θέσουν οι μαθητές μια σειρά πιθανών ερωτήσεων. Σε άλλες περιπτώσεις, τους ζητείται να προσθέσουν δομή στο πρόβλημα και κατόπιν να θέσουν το ερώτημα.

Παρά το γεγονός ότι το problem posing τυγχάνει μεγαλύτερης προσοχής και αναγνώρισης τα τελευταία χρόνια, η έλλειψη ενός πλαισίου που συνδέει το problem posing και problem solving με τα σχολικά προγράμματα, έχει μειώσει την αξιοπιστία της έρευνας σε αυτόν τον τομέα, και έχει καθυστερήσει τη συστηματική εφαρμογή του problem posing στις αίθουσες διδασκαλίας των μαθηματικών.

Ο Silver (1994) υποστηρίζει ότι το problem posing παρουσιάζει ενδιαφέρον διότι:

1) Σχετίζεται με τη δημιουργικότητα και την ικανότητα στα μαθηματικά.
2) Είναι ένα μέσο για τη βελτίωση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων.
3) Είναι ένα παράθυρο για την κατανόηση των μαθηματικών.
4) Βελτιώνει τη διάθεση των μαθητών για τα μαθηματικά
5) Βοηθάει τους μαθητές να γίνουν αυτόνομοι μαθητές.

Αναφέρει ότι η ευθύνη για τη διαμόρφωση προβλημάτων θα μπορούσε να εκχωρηθεί εν μέρει και στους μαθητές και αποφαίνεται ότι οι μαθητές δεν πρέπει κατ' ανάγκη να εμπλέκονται με προβλήματα που τους τίθενται, αλλά θα μπορούσαν να εκθέσουν και τα δικά τους προβλήματά και να τα μοιραστούν με τους άλλους.

Αν δούμε τις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων ως προβλήματα συμπλήρωσης, εμφανίζουν ομοιότητες με τα problem posing. Η εφαρμογή μιας στρατηγικής επίλυσης απαιτεί επιλογή ενός συνδυασμού δεδομένων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το αρχικό πλαίσιο συμπληρωμένο με τα επιλεγμένα δεδομένα, συνιστά ένα ξεχωριστό πρόβλημα που η λύση του είναι η εν λόγω στρατηγική.

Η διαφοροποίηση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων με τα problem posing, είναι προφανής και ως προς τον στόχο και ως προς τη διαδικασία. Σε οποιαδήποτε μορφή problem posing το ερώτημα τίθεται από τους μαθητές, ενώ στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων εμπεριέχεται. Στόχος του problem posing είναι η δημιουργία προβλήματος, ενώ των προτεινόμενων δραστηριοτήτων η επίλυση με το μικρότερο κόστος.

Στις προτεινόμενες δραστηριότητες, σε κάθε στρατηγική επίλυσης απαιτείται ένας διαφορετικός συνδυασμός επιλεγμένων δεδομένων, άρα αντιστοιχεί κι' ένα διαφορετικό πρόβλημα. Το πλήθος των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι μεγάλης σημασίας, διότι, στην πραγματικότητα, όσες στρατηγικές επίλυσης αναπτύσσουν, τόσα διαφορετικά προβλήματα εν μέρει κατασκευάζουν και επιλύουν. Η αξία έγκειται σίγουρα στο μεγάλο πλήθος στρατηγικών που ανέπτυξαν, αφού υποδηλώνει πόσα διαφορετικά προβλήματα επιλύουν με την εμπλοκή τους σε μια δραστηριότητα. Πολύ περισσότερο όμως έγκειται στο ότι τα προβλήματα αυτά δεν τίθενται εξ' αρχής και καλούνται οι μαθητές να τα λύσουν, αλλά τα κατασκευάζουν εν μέρει οι ίδιοι. Επιπλέον, η κατασκευή και η επίλυση διενεργούνται ταυτόχρονα, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην τις βλέπουν ως δύο διακριτές διαδικασίες όπως γίνεται

συνήθως. Δεν καταπιάνονται μόνο με τη μία, την επίλυση, αλλά και με τις δύο, ως αλληλοεξαρτώμενες δικές τους δράσεις.

Στην έρευνα που κάναμε, τα προς επιλογήν δεδομένα όλων των δραστηριοτήτων είναι καθορισμένα από εμάς. Η σκέψη, τα προς επιλογήν δεδομένα να μην είναι καθορισμένα εξ' αρχής αλλά να τα αναζητούν και να τα συλλέγουν οι μαθητές χωρίς κανένα περιορισμό, αποτελεί μια προοπτική και μια εναλλακτική μορφή των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων.

3. Μεθοδολογία

3.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Το ερευνητικό πρόβλημα, σχετικά με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, είναι κατά πόσο συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και ποιες συνθήκες διδασκαλίας ευνοούν τη λειτουργία τους ως εργαλείο μάθησης των μαθηματικών.

Σκοπός της έρευνας, που πραγματοποιήσαμε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι να διερευνήσει ορισμένες πτυχές αυτού του ερευνητικού προβλήματος.

Τόσο στην παρουσίαση του σκεπτικού των δραστηριοτήτων, όσο και στο θεωρητικό πλαίσιο, έχουμε ήδη θέσει μια σειρά ερωτημάτων και έχουμε εκφράσει ορισμένες υποθέσεις, σχετικά με τη μορφή των προτεινόμενων δραστηριοτήτων και το ρόλο τους στη μάθηση των μαθηματικών. Μέσω της έρευνας που διενεργήσαμε θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε σε δύο ερωτήματα;

1. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες συνεισφέρουν στην ανάπτυξη μετά-δεξιοτήτων; Οι μαθητές, μπαίνουν σε μεταγνωστικές διεργασίες κατά την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες αυτές;
2. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες συμβάλλουν στην εννοιολογική ανάπτυξη; Ευνοούν τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης; Βοηθούν τους μαθητές να διαχειρίζονται τις νέες μαθηματικές έννοιες με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά;

3.2. Μέθοδος

Η φύση των διερευνητικών ερωτημάτων απαιτεί, να παρατηρήσουμε και να ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα που αναπτύσσονται και εξελίσσονται κατά την ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, σε συνθήκες

πραγματικής τάξης. Ως εκ τούτου, η έρευνά μας αναφέρεται στη συλλογή λεπτομερών πληροφοριών, προσπαθεί να δώσει έμφαση στη διερεύνηση και την περιγραφή και να διεισδύσει σε καταστάσεις πέρα από τη μέτρηση. Τα σημεία αυτά, υπαγορεύουν η μεθοδολογία της έρευνας να είναι ποιοτική.

Οι Cohen, Manion και Morrison (2000) αναφέρουν, ότι σύμφωνα με τους Adelman κ.α. (1980) και Nisbet κ.α. (1984), ορισμένα από τα πλεονεκτήματα που μας παρέχει η ποιοτική έρευνα, είναι η στενή και ισχυρή σύνδεσή της με την πραγματικότητα, η ιδιαίτερη δύναμή της λόγω της προσοχής που δίνει στη λεπτομέρεια και την πολυπλοκότητα και η δυνατότητά της να χτίσει πάνω σε απρόσμενα γεγονότα και ανεξέλεγκτες μεταβλητές. Τα κυριότερα μειονεκτήματά της έχουν να κάνουν, με το ότι τα αποτελέσματα μπορεί να μην είναι γενικεύσιμα και να ισχύουν μόνο για το συγκεκριμένο πλαίσιο διεξαγωγής, με το ότι είναι επιρρεπής στις προκαταλήψεις των ερευνητών και ότι δεν είναι εύκολο να υποβληθεί σε επανέλεγχο, ως εκ τούτου μπορεί να είναι επιλεκτική, προκατειλημμένη και υποκειμενική.

Για να αυξήσουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας ακολουθήσαμε τα παρακάτω: συλλέξαμε τα δεδομένα σε συνθήκες πραγματικής διδασκαλίας, πραγματοποιήσαμε ικανοποιητικό πλήθος παρεμβάσεων και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου, επιδιώξαμε τα αποτελέσματα να περιγράφουν με ακρίβεια τα φαινόμενα που μελετώνται και προσπαθήσαμε η τεκμηρίωση να είναι ακριβής και όχι επιλεκτική ή διαστρεβλωμένη.

Για τη διασφάλιση της φυσικότητας και της αυθεντικότητας, αποφασίσαμε, οι παρεμβάσεις να γίνουν στο δημόσιο σχολείο που εργάζομαι ως καθηγητής, εντός του ωρολογίου προγράμματος, σε τμήματα που η διδασκαλία των μαθηματικών ήταν δικής μου αρμοδιότητας. Γι’ αυτό, ο τύπος της έρευνάς μας είναι συμμετοχική παρατήρηση.

3.3. Πλαίσιο έρευνας - Συμμετέχοντες

Η έρευνά μας διενεργήθηκε κατά το σχολικό έτος 2012-13 σ’ ένα τυπικό Γυμνάσιο του κέντρου της Αθήνας, όπου οι μισοί περίπου μαθητές του σχολείου είναι έλληνες, ενώ οι άλλοι μισοί είναι παιδιά μεταναστών διαφόρων εθνικοτήτων.

Στην έρευνα συμμετείχαν οι μαθητές πέντε τμημάτων, τριών της Α΄ τάξης, ενός της Β΄ τάξης και ενός της Γ΄ τάξης. Συγκεκριμένα, από την Α΄ τάξη συμμετείχαν οι 20 μαθητές του 1^{ου} τμήματος, οι 22 μαθητές του 2^{ου} τμήματος και οι 17 μαθητές του 3^{ου} τμήματος. Από τη Β΄ τάξη οι 22 μαθητές του 2^{ου} τμήματος και από τη Γ΄ τάξη οι 19 μαθητές του 2^{ου} τμήματος. Με όλους τους συμμετέχοντες μαθητές είχα καθημερινή επαφή και στη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών, αλλά και εκτός μαθήματος. Τους μαθητές της Α΄ τάξης τους γνώρισα τη φετινή χρονιά, ενώ αυτούς της Β΄ και της Γ΄ τάξης τους γνώριζα ήδη από την προηγούμενη χρονιά. Η επίδοσή τους στα μαθηματικά εμφανίζει μεγάλες αποκλίσεις. Σε κάθε τμήμα βρίσκουμε μαθητές με άριστες επιδόσεις, αλλά και μαθητές εντελώς αδιάφορους. Η μέση επίδοση των τμημάτων της Α΄ τάξης είναι εμφανώς υψηλότερη έναντι των τμημάτων της Β΄ και Γ΄ τάξης.

3.4. Διαδικασία της έρευνας - Δραστηριότητες

Για τις ανάγκες της έρευνας, σχεδιάσαμε 5 δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων και πραγματοποιήσαμε συνολικά 8 παρεμβάσεις, από το Δεκέμβριο του 2012 μέχρι το Απρίλιο του 2013. Στις 7 πρώτες, οι μαθητές ενεπλάκησαν με μια δραστηριότητα που τους δόθηκε υπό μορφή φύλλου εργασίας. Η 8^{η} παρέμβαση ήταν εντελώς διαφορετική. Επιχειρήσαμε μια εισαγωγή στο πλαίσιο της αφαίρεσης του κόστους πρόσβασης, πραγματοποιώντας συζήτηση στην τάξη με θέμα το επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Στον πίνακα 3.1 βλέπουμε, σε χρονική σειρά τις παρεμβάσεις που διενεργήσαμε.

Παρεμβάσεις	**Δραστηριότητα**	**Τμήμα**	**Διάρκεια**	**Οι μαθητές εργάστηκαν**	**Ηχογράφηση**
1^{η}	Παραγοντοποίηση	Γ2	1	Ατομικά	Όχι
2^{η}	Επιμεριστική	Α1	1	Κατά ομάδες (5)	3 ομάδες
3^{η}	Επιμεριστική	Α2	1	Κατά ομάδες (5)	3 ομάδες
4^{η}	Επιμεριστική	Α3	1	Κατά ομάδες (4)	3 ομάδες
5^{η}	Πυθαγόρειο - Τριγωνομετρία	Β2	1	Κατά ομάδες (5)	3 ομάδες
6^{η}	Ισότητα τριγώνων	Γ2	1	Κατά ομάδες (4)	3 ομάδες
7^{η}	Γραμμική συνάρτηση	Β2	3	Κατά ομάδες (5)	3 ομάδες
8^{η}	Επίπεδο μαθηματικής σκέψης	Β2	1	Συζήτηση	Ναι

Πίνακας 3.1

Σε κάθε παρέμβαση φαίνεται η δραστηριότητα που θέσαμε, το τμήμα στο οποίο διεξήχθη, η διάρκεια σε διδακτικές ώρες, ο τρόπος που εργάστηκαν οι μαθητές – αν εργάστηκαν κατά ομάδες αναγράφεται το πλήθος των ομάδων - και το πλήθος των ομάδων που ηχογραφήσαμε.

Η 1η παρέμβαση είχε περισσότερο πειραματικό χαρακτήρα. Θέλαμε να δούμε πώς λειτουργεί μια δραστηριότητα τέτοιας μορφής σε επίπεδο τάξης, ποιες θα ήταν οι αντιδράσεις των μαθητών και τι ρόλο θα έπαιζε το κόστος πρόσβασης στα δεδομένα. Σ' αυτή την παρέμβαση, οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά ο καθένας, ενώ ο δικός μου ρόλος ήταν περισσότερο ρόλος παρατηρητή παρά συμμετοχικός.

Από τη 2η μέχρι την 6η παρέμβαση, οι μαθητές εργάστηκαν κατά ομάδες, επί το πλείστον των τεσσάρων, ανάλογα με τη δύναμη του τμήματος. Για να εξυπηρετηθεί όσο το δυνατόν περισσότερο η συμμετοχή και ενεργοποίηση όλων των μαθητών, κρίναμε ότι οι μαθητές κάθε ομάδας πρέπει να παρουσιάζουν ανομοιομορφία ως προς τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά. Αφήσαμε στους ίδιους την ευθύνη για τη συγκρότηση των ομάδων, θέτοντάς τους ως προϋπόθεση να τηρηθεί η ανομοιομορφία κάθε ομάδας. Σε τρεις περιπτώσεις χρειάστηκαν αλλαγές από μένα.

Ο δικός μου ρόλος ήταν πλήρως συμμετοχικός. Έχοντας ήδη κάνει προβλέψεις για πιθανές προσεγγίσεις των μαθητών αναφορικά με τη δραστηριότητα, παρακολουθούσα όλες τις ομάδες κάθε στιγμή πώς λειτουργούσαν και ποιες διεργασίες ανέπτυσσαν. Παρατηρούσα τις μορφές επικοινωνίας που λάμβαναν χώρα, παρενέβαινα όταν το έκρινα χρήσιμο συζητώντας με τους μαθητές, προσπαθούσα να αναβαθμίσω την επικοινωνία σε επίπεδα αναστοχαστικής επικοινωνίας και γενικά στόχος μου ήταν να δημιουργήσω όσο το δυνατόν καλύτερες συνθήκες συμμετοχής, ενεργοποίησης και επικοινωνίας όλων των μαθητών.

Σε κάθε τμήμα στο οποίο είχε γίνει η παρέμβαση, την επόμενη διδακτική ώρα που σύμφωνα με το ωρολόγιο πρόγραμμα είχε μαθηματικά, πραγματοποιούσα συζήτηση στην τάξη με θέμα τις στρατηγικές επίλυσης που εφάρμοσε κάθε ομάδα. Η επιλογή συγκεκριμένων μαθητών για να παρουσιάσουν τον τρόπο επίλυσης της ομάδας τους και η σκόπιμη αλληλουχία των παρουσιάσεων, αποσκοπούσε στο να κατανοήσει όλη η τάξη, τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης και το επίπεδο μαθηματικής σκέψης που απαιτούσε η εφαρμογή της καθεμίας.

Στην 8η παρέμβαση, προκαλέσαμε τους μαθητές να εκθέσουν τις απόψεις τους για το τι σημαίνει γι' αυτούς επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Επίσης τους δώσαμε 6

διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης μιας δραστηριότητας με επιλογή δεδομένων και τους ζητήσαμε να τις ιεραρχήσουν ανάλογα με το επίπεδο μαθηματικής σκέψης που απαιτεί η εφαρμογή τους.

Στις παρεμβάσεις από τη 2η έως την 7η ηχογραφήσαμε 3 ομάδες μαθητών, καθώς και ολόκληρη τη συζήτηση της 8ης παρέμβασης. Το σύνολο του ηχογραφημένου υλικού, σε διάρκεια, είναι 25 διδακτικές ώρες. Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας κάναμε λεπτομερή και ακριβή απομαγνητοφώνηση μόνο των ηχογραφήσεων της 2ης, 3ης, 4ης και 5ης παρέμβασης, δηλαδή των παρεμβάσεων που αφορούν στις δραστηριότητες «Επιμεριστική» και «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία» και απευθύνονται στα τρία τμήματα της Α΄ τάξης και στο ένα τμήμα της Β΄ τάξης αντίστοιχα. Συνολικά απομαγνητοφωνήσαμε 12 διδακτικές ώρες.
Τα διερευνητικά εργαλεία της παρούσας μελέτης είναι οι 12 διδακτικές ώρες απομαγνητοφώνησης, οι δικές μου παρατηρήσεις που κατέγραφα μετά από κάθε παρέμβαση και οι εμπειρίες που αποκόμισα ως συμμετέχων, από την όλη διαδικασία.

Θα παρουσιάσουμε τις 5 δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων, που χρησιμοποιήσαμε στην έρευνά μας και θα αναπτύξουμε το σκεπτικό βάσει του οποίου τις σχεδιάσαμε. Σε δύο δραστηριότητες, «Επιμεριστική» και «πυθαγόρειο – τριγωνομετρία», θα αναφέρουμε όλες τις δυνατές στρατηγικές επίλυσης, ταξινομημένες ανά επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης 2ου τύπου που απαιτεί η εφαρμογή της καθεμίας, όπου θα φαίνεται ότι το κόστος επίλυσης αντιστοιχεί στο επίπεδο κατάταξης. Θα το κάνουμε μόνο σ' αυτές τις δύο, διότι τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτουν κατά βάση από τα δεδομένα των τεσσάρων παρεμβάσεων που αφορούν αυτές τις δύο δραστηριότητες.

3.4.1. Δραστηριότητα «Παραγοντοποίηση»

Η 1η δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές του 2ου τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου. Αφορά την 1η παρέμβαση και πραγματοποιήθηκε όταν ήδη οι μαθητές είχαν διδαχθεί την παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.
Ο χαρακτήρας της ήταν περισσότερο πειραματικός. Μας ενδιέφερε να δούμε, αφενός τις αντιδράσεις των μαθητών σε μια δραστηριότητα διαφορετική από τις συνηθισμένες και αφετέρου, αν το κόστος πρόσβασης στα δεδομένα θα λειτουργούσε

ως κίνητρο, που θα τους ωθήσει να εφαρμόσουν κανόνες παραγοντοποίησης. Γι' αυτό το λόγο, τους θέσαμε την ίδια άσκηση δύο φορές, αλλά με διαφορετική μορφή. Στην πρώτη δεν υπήρχε το κόστος πρόσβασης, όλα τα δεδομένα ήταν γνωστά, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν όσα από αυτά ήθελαν χωρίς κανένα περιορισμό. Στο 2^{ο} φύλλο εργασίας τους δόθηκε η ίδια άσκηση, αλλά υπό τη μορφή δραστηριότητας με επιλογή δεδομένων. Τα δύο φύλλα εργασίας φαίνονται παρακάτω.

Άσκηση

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\omega x^2-\omega y^2+2x^2-2y^2}{\omega+2}\cdot\dfrac{1}{x^2+xy}$

Δίνεται ότι: x=6, y=-2, ω=1, x-y=8, $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{x}{y}=-3$

1^{η} δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\omega x^2-\omega y^2+2x^2-2y^2}{\omega+2}\cdot\dfrac{1}{x^2+xy}$

Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Την τιμή x …….. (κόστος 4)*
- *Την τιμή y …….. (κόστος 5)*
- *Την τιμή ω …….. (κόστος 5)*
- *Την τιμή* $\dfrac{y}{x}$ *…… (κόστος 5)*
- *Την τιμή* $\dfrac{x}{y}$ *…… (κόστος 4)*
- *Την τιμή x-y …… (κόστος 3)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Όσον αφορά τις στρατηγικές επίλυσης, αναφέρουμε εν συντομία ότι μπορούμε να θέσουμε εξ' αρχής τις τιμές των x, y, ω, ή εφαρμόζοντας παραγοντοποίηση να φτάσουμε $A=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$, ώστε να μην χρειαζόμαστε την τιμή ω. Μπορούμε, επίσης να συνεχίσουμε την παραγοντοποίηση καταλήγοντας $A=\dfrac{x-y}{x}$, οπότε χρειαζόμαστε μόνο τις τιμές των x και x-y. Τέλος, αν γράψουμε την παράσταση Α στη μορφή $A=1-\dfrac{y}{x}$, μας αρκεί μόνο η τιμή $\dfrac{y}{x}$, ή μόνο η τιμή $\dfrac{x}{y}$ που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος επίλυσης.

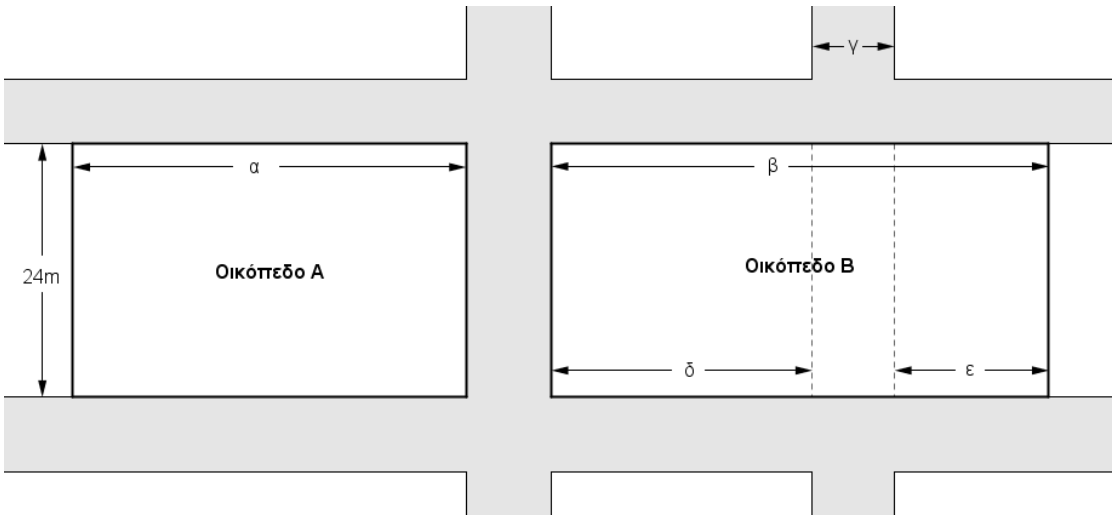
3.4.2. Δραστηριότητα «Επιμεριστική»

Η 2η δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές των τριών τμημάτων της Α΄ Γυμνασίου, αφορά τη 2η, 3η και 4η παρέμβαση και πραγματοποιήθηκε όταν είχαν ήδη διδαχθεί την επιμεριστική ιδιότητα.

Το σκεπτικό είναι να δούμε αν η εμπλοκή των μαθητών με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, συμβάλλει στην κατανόηση και αφομοίωση της επιμεριστικής ιδιότητας, κατά πόσο εξυπηρετεί τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα.

2η δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη των οικοπέδων Α και Β. Η αρμόδια διεύθυνση του υπουργείου αποφάσισε να κατασκευάσει δρόμο, ο οποίος θα περάσει μέσα από το οικόπεδο Β όπως δείχνουν οι διακεκομμένες γραμμές. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδό των οικοπέδων μετά την κατασκευή του δρόμου.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Πόσο είναι η απόσταση α …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι η απόσταση β …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι το πλάτος του δρόμου γ …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι η απόσταση δ …….. (κόστος 5)*
- *Πόσο είναι η απόσταση ε …….. (κόστος 5)*
- *Πόσο είναι η διαφορά β-γ …….. (κόστος 3)*
- *Πόσο είναι το άθροισμα δ+ε …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+β-γ …….. (κόστος 3)*
- *Πόσο είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+δ+ε …….. (κόστος 4)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

<u>Κατάταξη στρατηγικών επίλυσης ανά επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης</u>

Το πλήθος των δυνατών στρατηγικών επίλυσης είναι έξι. Τις κατατάσσουμε ανά επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης 2^{ου} τύπου που απαιτεί η εφαρμογή τους, αναφέροντας συγχρόνως και το κόστος επίλυσης της καθεμιάς.

Επίπεδο Ι

<u>1^{η} στρατηγική:</u> Απαιτούμενα δεδομένα α, δ, ε. Κόστος επίλυσης 14.

Εμβαδόν $= \alpha \cdot 24 + \delta \cdot 24 + \varepsilon \cdot 24$

<u>2^{η} στρατηγική:</u> Απαιτούμενα δεδομένα α, β, γ. Κόστος επίλυσης 12.

Εμβαδόν $= \alpha \cdot 24 + \beta \cdot 24 - \gamma \cdot 24$

Το επίπεδο αυτό απαιτεί διαχείριση και συντονισμό βασικών δεξιοτήτων (τέσσερεις πράξεις, εμβαδόν ορθογωνίου, πρόσθεση και αφαίρεση εμβαδών). Και στις δύο στρατηγικές αυτού του επιπέδου «βλέπουμε» τρία ορθογώνια και το συνολικό εμβαδό προκύπτει από κατάλληλες πράξεις μεταξύ των εμβαδών τους. Επειδή η πράξη της αφαίρεσης, ως διεργασία είναι πιο δύσκολη από την πράξη της πρόσθεσης, το κόστος της 2^{ης} στρατηγικής, που απαιτεί αφαίρεση εμβαδών, είναι μικρότερο από το κόστος της 1^{ης}.

Επίπεδο ΙΙ

<u>3^{η} στρατηγική:</u> Απαιτούμενα δεδομένα α, δ+ε. Κόστος επίλυσης 8.

Εμβαδόν $= \alpha \cdot 24 + (\delta + \varepsilon) \cdot 24$

<u>4^{η} στρατηγική:</u> Απαιτούμενα δεδομένα α, β-γ. Κόστος επίλυσης 7.

Εμβαδόν $= \alpha \cdot 24 + (\beta - \gamma) \cdot 24$

- Υπό τη γεωμετρική οπτική: Το εναπομείναν οικόπεδο Β τώρα το «βλέπουμε» ως ένα ορθογώνιο, στη μεν 3^{η} στρατηγική με πλευρές δ+ε , 24, στη δε 4^{η} με πλευρές β-γ , 24. Στη συνέχεια δανειζόμαστε την πρόσθεση ή την αφαίρεση εμβαδών από το επίπεδο Ι.
- Υπό την οπτική τυπικού κώδικα: Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:
  - 3^{η} στρατηγική: $\delta \cdot 24 + \varepsilon \cdot 24 = (\delta + \varepsilon) \cdot 24$
  - 4^{η} στρατηγική: $\beta \cdot 24 - \gamma \cdot 24 = (\beta - \gamma) \cdot 24$

  Στη συνέχεια δανειζόμαστε την εκτέλεση πράξεων από το επίπεδο Ι.

Η διαφορά κόστους των δύο στρατηγικών αυτού του επιπέδου, έγκειται στο ότι η 3^{η} στρατηγική απαιτεί επιμεριστική ως προς την πρόσθεση, ενώ η 4^{η} στρατηγική επιμεριστική ως προς την αφαίρεση.

Επίπεδο ΙΙΙ

5η στρατηγική: Απαιτούμενο δεδομένο α+δ+ε. Κόστος επίλυσης 4.

Εμβαδόν $=(\alpha+\delta+\varepsilon)\cdot 24$

6η στρατηγική: Απαιτούμενο δεδομένο α+β-γ. Κόστος επίλυσης 3.

Εμβαδόν $=(\alpha+\beta-\gamma)\cdot 24$

- Υπό τη γεωμετρική οπτική: Δανειζόμαστε τη νοητική διεργασία του επιπέδου ΙΙ που μας επέτρεψε να δούμε το εναπομείναν οικόπεδο Β ως ένα ορθογώνιο. Την επεκτείνουμε συμπεριλαμβάνοντας και το οικόπεδο Α, με αποτέλεσμα να «βλέπουμε» πλέον ένα ορθογώνιο, για τη μεν 5η στρατηγική με πλευρές α+δ+ε , 24, για τη δε 6η με πλευρές α+β-γ , 24. Στη συνέχεια δανειζόμαστε το εμβαδόν ορθογωνίου από το επίπεδο Ι.
- Υπό την οπτική τυπικού κώδικα: Δανειζόμαστε την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας του επιπέδου ΙΙ και την επεκτείνουμε συμπεριλαμβάνοντας την τιμή α:
  - 5η στρατηγική: $\alpha\cdot 24+(\delta+\varepsilon)\cdot 24=(\alpha+\delta+\varepsilon)\cdot 24$
  - 6η στρατηγική: $\alpha\cdot 24+(\beta-\gamma)\cdot 24=(\alpha+\beta-\gamma)\cdot 24$

  Στη συνέχεια δανειζόμαστε την εκτέλεση πράξεων από το επίπεδο Ι.

Εδώ η διαφορά στο κόστος των δύο στρατηγικών, έγκειται στην προϋπάρχουσα διαφορά κόστους των στρατηγικών του επιπέδου ΙΙ.

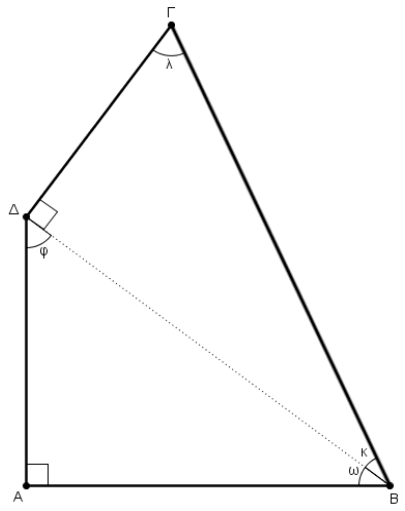
3.4.3. Δραστηριότητα «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία»

Η 3η δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές του 2ου τμήματος της Β΄ Γυμνασίου, αφορά την 5η παρέμβαση και πραγματοποιήθηκε όταν είχαν ήδη διδαχθεί το πυθαγόρειο θεώρημα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας.

Η διαφοροποίηση αυτής της δραστηριότητας, σε σχέση με τις προηγούμενες, έγκειται στο μεγάλο πλήθος τρόπων επίλυσης.

3η δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων

Θέλουμε να περιφράξουμε τον κήπο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με συρματόπλεγμα το οποίο πωλείται σε ρολά των 3 μέτρων που το καθένα κοστίζει 25 €. Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Το μήκος της πλευράς ΑΒ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μήκος της πλευράς ΑΔ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μήκος της πλευράς ΒΓ= ……. (κόστος 2)*
- *Το μήκος της πλευράς ΓΔ= ……. (κόστος 2)*
- *Το μέτρο της γωνίας κ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μέτρο της γωνίας λ= ……. (κόστος 3)*
- *Το μέτρο της γωνίας ω= ……. (κόστος 2)*
- *Το μέτρο της γωνίας φ= …….. (κόστος 2)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

<u>Κατάταξη στρατηγικών επίλυσης ανά επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης</u>

Οι δυνατές στρατηγικές επίλυσης της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι 41. Οι βέλτιστες στρατηγικές επίλυσης, είναι 2. Αν τις ταξινομήσουμε ανά επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης $2^{ου}$ τύπου, προκύπτουν τα παρακάτω στοιχεία:

Επίπεδο Ι

Απαιτούμενα δεδομένα: Οι 4 πλευρές. Τρόπος επίλυσης: 1, με κόστος 10.

Η λύση απαιτεί διαχείριση και συντονισμό των τεσσάρων πράξεων:

Υπολογίζουμε την περίμετρο προσθέτοντας τις πλευρές. Διαιρούμε την περίμετρο διά του 3. Αν η διαίρεση είναι τέλεια, το πλήθος των ρολών που πρέπει να αγοράσουμε ισούται με το πηλίκο, διαφορετικά ισούται με το πηλίκο αυξημένο κατά 1. Πολλαπλασιάζουμε το πλήθος των ρολών επί 25.

Επίπεδο ΙΙ

Οι δυνατοί τρόποι επίλυσης του επιπέδου ΙΙ είναι 20. Τους χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν η εφαρμογή τους απαιτεί πυθαγόρειο θεώρημα ή τριγωνομετρικούς αριθμούς.

- Κατηγορία 1η: Απαιτούμενα δεδομένα: 3 πλευρές. Τρόποι επίλυσης: 4, με ελάχιστο κόστος 7 και μέγιστο 8.

  Υπολογίσουμε την τέταρτη πλευρά εφαρμόζοντας δύο φορές το πυθαγόρειο θεώρημα διαδοχικά στα δύο τρίγωνα.
- Κατηγορία 2η: Απαιτούμενα δεδομένα: 1 πλευρά και δύο γωνίες (μία από κάθε τρίγωνο). Τρόποι επίλυσης: 16, με ελάχιστο κόστος 7 και μέγιστο 8.

  Υπολογίζουμε τις τρεις πλευρές που δεν γνωρίζουμε, εφαρμόζοντας κατάλληλους τριγωνομετρικούς αριθμούς διαδοχικά στα δύο τρίγωνα.

Ακολούθως, για κάθε τρόπο επίλυσης, ανεξάρτητα σε ποια κατηγορία ανήκει, δανειζόμαστε τον υπολογισμό του κόστους της περίφραξης που εφαρμόσαμε στο επίπεδο Ι.

Επίπεδο ΙΙΙ

Απαιτούμενα δεδομένα: 2 πλευρές και 1 γωνία. Τρόποι επίλυσης: 20, με ελάχιστο κόστος 6 και μέγιστο 9.

Χωρίζουμε τους τρόπους επίλυσης σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το τι δανειζόμαστε από το επίπεδο ΙΙ:

- Κατηγορία 1η: Από το επίπεδο ΙΙ κατηγορία 1η δανειζόμαστε το πυθαγόρειο θεώρημα. Εφαρμόζουμε κατάλληλο συνδυασμό πυθαγορείου θεωρήματος στο ένα τρίγωνο και τριγωνομετρικών αριθμών στο άλλο τρίγωνο για να υπολογίσουμε τις δύο άγνωστες πλευρές του κήπου.
- Κατηγορία 2η: Δανειζόμαστε από το επίπεδο ΙΙ κατηγορία 2η τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Εφαρμόζουμε κατάλληλο συνδυασμό πυθαγορείου θεωρήματος στο ένα τρίγωνο και τριγωνομετρικών αριθμών στο άλλο τρίγωνο για να υπολογίσουμε τις δύο άγνωστες πλευρές του κήπου.

Στη συνέχεια, για κάθε τρόπο επίλυσης δανειζόμαστε τον υπολογισμό του κόστους της περίφραξης που εφαρμόσαμε στο επίπεδο Ι.

Οι μαθητές, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, είναι αναγκασμένοι να ελέγξουν μεγάλο πλήθος στρατηγικών επίλυσης. Αυτό όμως, λειτουργεί απαγορευτικά στο να αναπτύξουν τη καθεμιά λεπτομερώς. Για να αντεπεξέλθουν, πρέπει να διαχειριστούν το πυθαγόρειο θεώρημα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, όχι αναφερόμενοι στη διαδικασία αλλά με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά, δηλαδή με σχέσεις εισόδου-εξόδου. Ακριβώς εκεί έγκειται το σκεπτικό αυτής της δραστηριότητας. Να δημιουργήσει ευνοϊκές

συνθήκες, ώστε οι μαθητές να διαχειριστούν τις δύο μαθηματικές έννοιες σε δομικό επίπεδο.

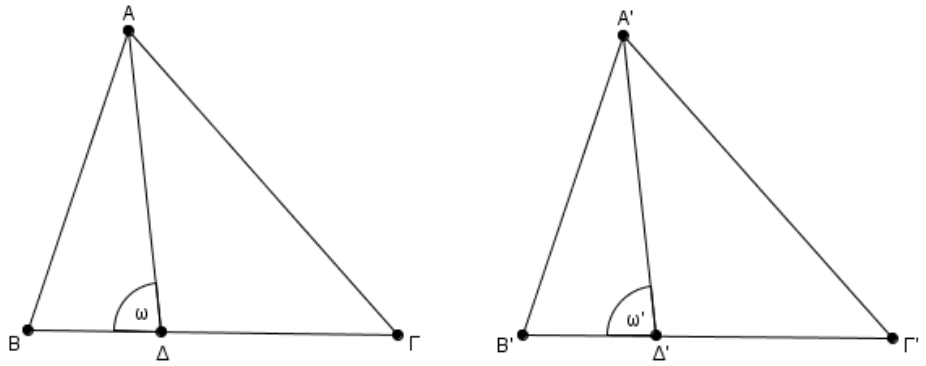
3.4.4. Δραστηριότητα «Ισότητα τριγώνων»

Η $4^{η}$ δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές του $2^{ου}$ τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου, αφορά την $6^{η}$ παρέμβαση και πραγματοποιήθηκε όταν είχαν ήδη διδαχθεί τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Σ' αυτή τη δραστηριότητα εισάγουμε δύο διαφοροποιήσεις σε σχέση με τις προηγούμενες. Η πρώτη έχει να κάνει με τα προς επιλογήν δεδομένα. Στις προηγούμενες δραστηριότητες, οι μαθητές αποκτούσαν πρόσβαση σε όσα δεδομένα επέλεγαν. Εδώ, τα προς επιλογήν δεδομένα είναι γνωστά εκ των προτέρων και επιλέγουν όσα από αυτά κρίνουν απαραίτητα για την επίλυση. Η δεύτερη διαφοροποίηση έχει να κάνει με το ότι οι βέλτιστες στρατηγικές επίλυσης, δηλαδή αυτές με το μικρότερο κόστος, είναι πολλές και μάλιστα αποτελούν την πλειοψηφία.

$4^{η}$ δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν ίσες τις διχοτόμους ΑΔ και Α΄Δ΄. Επιλέξτε όσα από τα παρακάτω δεδομένα είναι απαραίτητα για να αποδείξετε ότι είναι ίσα. Προσπαθήστε το συνολικό κόστος που προκύπτει από την επιλογή των δεδομένων να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.



Δεδομένα που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε:

- *ΑΒ=Α΄Β΄ (κόστος 2)*
- *ΑΓ=Α΄Γ΄ (κόστος 2)*
- *ΒΔ=Β΄Δ΄ (κόστος 2)*
- *ΔΓ=Δ΄Γ΄ (κόστος 2)*

- *ΒΓ=Β΄Γ΄ (κόστος 2)*
- $\widehat{A} = \widehat{A}'$ *(κόστος 2)*
- $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}'$ *(κόστος 2)*

Το πλήθος των διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης είναι 8. Στις 2 από αυτές απαιτείται μια σύγκριση τριγώνων, των ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (κόστος επίλυσης 6). Στις άλλες 6 απαιτούνται, αρχικά δύο συγκρίσεις τριγώνων, των ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄ και ΑΓΔ, Α΄Γ΄Δ΄ και στη συνέχεια σύγκριση των ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ (κόστος επίλυσης 4). Εδώ οι 6 από τις 8 στρατηγικές επίλυσης είναι βέλτιστες.

Οι μαθητές, δεν είναι δύσκολο να εντοπίσουν μια από τις βέλτιστες στρατηγικές επίλυσης. Όμως για να σιγουρευτούν ότι είναι πράγματι βέλτιστη, πρέπει να ελέγξουν αν υπάρχει άλλη στρατηγική επίλυσης με κόστος 2, δηλαδή αν το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μόνο ένα από τα προς επιλογήν δεδομένα. Η δική μου μέριμνα ήταν, να παρακολουθώ τους μαθητές και να τους προτρέπω προς αυτή την κατεύθυνση.
Μας ενδιέφερε να παρατηρήσουμε, αν μέσα από αυτή τη διεργασία ελέγχου και σύγκρισης, οι μαθητές θα βοηθηθούν στο να δουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά, δηλαδή να κατανοήσουν ότι για να είναι δύο τρίγωνα ίσα, πρέπει να έχουν οπωσδήποτε τρία κύρια στοιχεία τους ίσα εκ των οποίων το ένα να είναι πλευρά.

3.4.5. Δραστηριότητα «Γραμμική συνάρτηση»

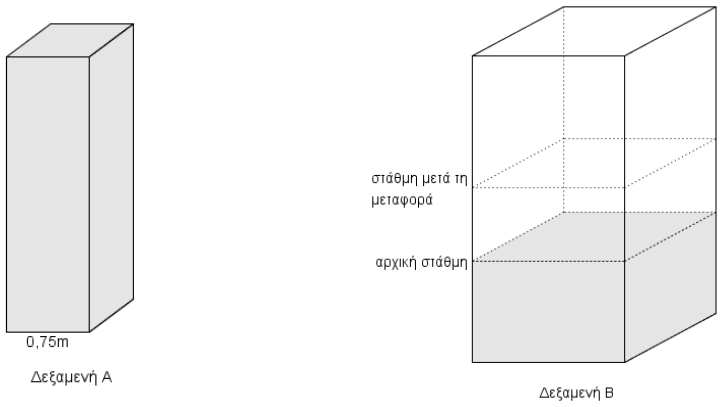
Η $5^{η}$ δραστηριότητα απευθύνεται στους μαθητές του $2^{ου}$ τμήματος της Β΄ Γυμνασίου, αφορά την $7^{η}$ παρέμβαση και πραγματοποιήθηκε όταν είχαν ήδη διδαχθεί την έννοια της συνάρτησης και τις ευθείες της μορφής y=αx και y=αx+β.
Η συγκεκριμένη δραστηριότητα διαφοροποιείται, σε σχέση με τις προηγούμενες, στο ότι τα προς επιλογήν δεδομένα είναι πολύ περισσότερα. Αυτό σημαίνει ότι η διαχείρισή τους ενέχει μεγάλη δυσκολία, άρα καθιστά τη δραστηριότητα αρκετά απαιτητική για μαθητές Β΄ Γυμνασίου.

Πρόθεσή μας ήταν να δώσουμε περισσότερο χρόνο στους μαθητές να ασχοληθούν μ' αυτή τη δραστηριότητα, αρχικά υπολογίζαμε δύο διδακτικές ώρες, αλλά τελικά χρειάστηκαν τρεις. Επίσης, λόγω του ότι η δραστηριότητα ήταν αρκετά απαιτητική,

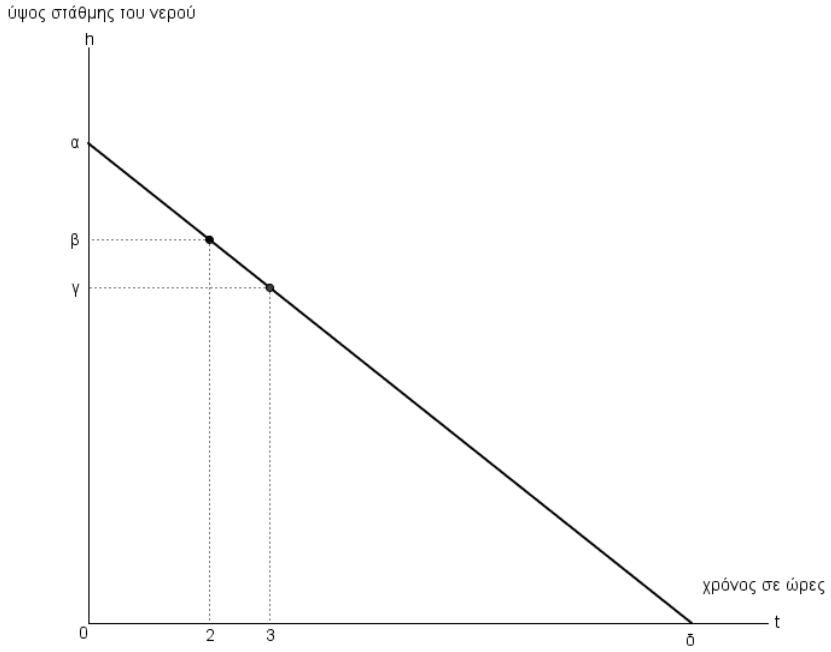
εκτιμήσαμε ότι η δική μου βοήθεια προς τους μαθητές θα έπρεπε να ήταν μεγαλύτερη, σε σχέση με τις προηγούμενες δραστηριότητες.

5η δραστηριότητα με επιλογή δεδομένων

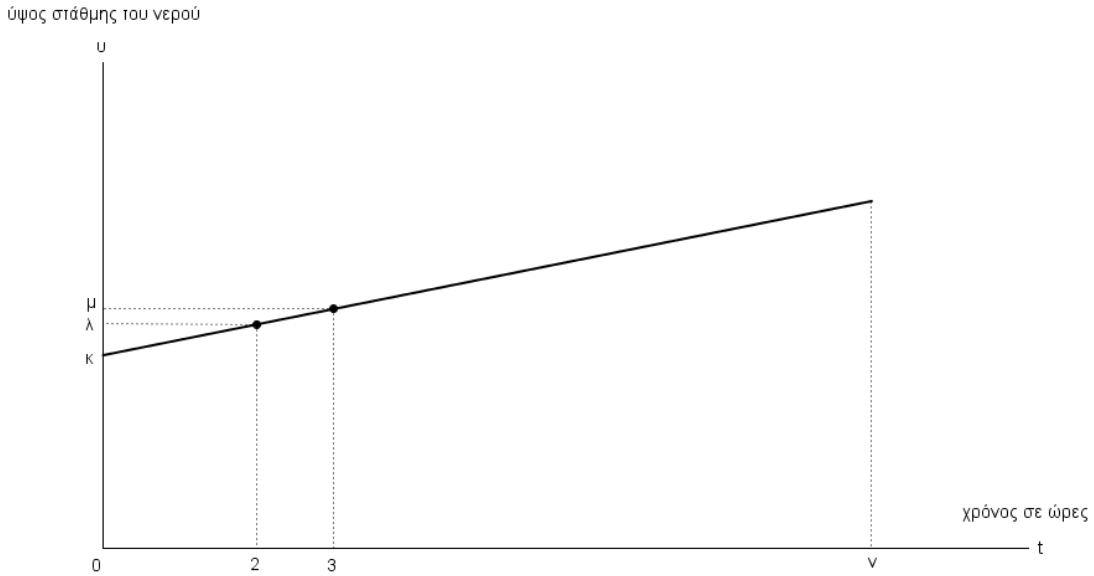
Οι δεξαμενές νερού Α και Β είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με βάσεις τετράγωνα. Στη δεξαμενή Α η πλευρά της βάσης είναι 0,75m. Αρχικά η Α είναι γεμάτη με νερό. Το περιεχόμενό της, με τη βοήθεια αντλίας, μεταγγίζεται με σταθερό ρυθμό στη μεγάλη δεξαμενή Β, η οποία περιέχει ήδη μια ποσότητα νερού. Στο σχήμα βλέπεται την αρχική στάθμη του νερού και τη στάθμη μετά τη μετάγγιση. Γνωρίζετε ότι μετά την ολοκλήρωση της μετάγγισης έχει καλυφθεί το 60% της χωρητικότητας της δεξαμενής Β.



Η επόμενη γραφική παράσταση δείχνει πώς μεταβάλλεται το ύψος h σε μέτρα της στάθμης του νερού στη δεξαμενή Α, από τη στιγμή που αρχίζει μέχρι τη στιγμή που ολοκληρώνεται η μετάγγιση.



Η επόμενη γραφική παράσταση δείχνει πώς μεταβάλλεται το ύψος υ σε μέτρα της στάθμης του νερού στη δεξαμενή Β, από τη στιγμή που αρχίζει μέχρι τη στιγμή που ολοκληρώνεται η μεταφορά νερού από τη δεξαμενή Α.



Να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής Β.

Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Το ύψος της δεξαμενής Α: ……. (κόστος 8)*
- *Τον τύπο της συνάρτησης της στάθμης h ως προς τον χρόνο t: ……. (κόστος 10)*
- *Τον αριθμό α: ……. (κόστος 4)*
- *Τον αριθμό β: ……. (κόστος 4)*
- *Τον αριθμό γ: ……. (κόστος 4)*
- *Τον αριθμό δ: ……. (κόστος 4)*
- *Τη διαφορά β-γ: ……. (κόστος 2)*
- *Το ύψος της αρχικής στάθμης στη δεξαμενή Β: ……. (κόστος 8)*
- *Το ύψος της στάθμης μετά τη μεταφορά στη δεξαμενή Β: ……. (κόστος 10)*
- *Τον τύπο της συνάρτησης της στάθμης υ ως προς τον χρόνο t:……. (κόστος 10)*
- *Τον αριθμό κ: ……. (κόστος 4)*
- *Τον αριθμό λ: ……. (κόστος 4)*
- *Τον αριθμό μ: ……. (κόστος 4)*
- *Τον αριθμό ν: ……. (κόστος 6)*
- *Τη διαφορά μ-λ: ……. (κόστος 2)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Οι μαθητές, για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις αυτής της δραστηριότητας, εκτός από το να διαχειριστούν το μεγάλο πλήθος των δεδομένων, πρέπει να δράσουν σε πολλά επίπεδα. Καταρχήν εμπλέκονται με ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο, τη

συνάρτηση, που διδακτικά έχουν έρθει σε επαφή πρόσφατα. Πρέπει να ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις και να τις συνδέσουν με την πραγματική κατάσταση. Να δουν τη γραφική παράσταση και τον τύπο της συνάρτησης, ως δύο όψεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου, της συνάρτησης και να μπορούν να μεταβαίνουν από το ένα στο άλλο. Να αντλήσουν πληροφορίες από τη μία συνάρτηση και να τις μεταφέρουν στην άλλη. Τέλος, πρέπει να χρησιμοποιήσουν όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και ποσοστά. Το σκεπτικό αυτής της δραστηριότητας έγκειται στο να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τις παραπάνω δεξιότητες, αλλά και σε κάτι ακόμη. Να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να προσεγγίσουν μια ενδιαφέρουσα στρατηγική επίλυσης που ανήκει στον ειδικό χώρο λύσεων της δραστηριότητας. Γι' αυτή τη στρατηγική θα αναφερθούμε παρακάτω.

Αν δε χρησιμοποιήσουμε καθόλου τις γραφικές παραστάσεις και τους τύπους των συναρτήσεων, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα, επιλέγοντας 3 δεδομένα: Το ύψος της δεξαμενής Α, το ύψος της αρχικής στάθμης στη δεξαμενή Β και το ύψος μετά τη μεταφορά στη δεξαμενή Β. Κόστος επίλυσης 26.
Οι βέλτιστες στρατηγικές έχουν κόστος επίλυσης 12 και προκύπτουν από 7 διαφορετικούς συνδυασμούς δεδομένων. Ενδεικτικά αναφέρουμε μία από αυτές.
<u>Βέλτιστη στρατηγική επίλυσης:</u>
Απαιτούμενα δεδομένα: $\alpha=8$, $\beta-\gamma=0,8$, $\kappa=2,5$, $\mu-\lambda=0,2$.
Αν η ευθεία h είναι της μορφής $h=at+b$
Τότε ισχύουν: $a=-(\beta-\gamma)$ και $b=\alpha$. Άρα $h=-0,8t+8$.
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\upsilon=0,2t+2,5$.
Στη συνέχεια, αντλώντας τις κατάλληλες πληροφορίες από τις δύο συναρτήσεις και χρησιμοποιώντας τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και το ποσοστό κάλυψης 60%, υπολογίζουμε τις διαστάσεις της δεξαμενής Β.

Ανάμεσα στις βέλτιστες στρατηγικές επίλυσης, υπάρχει μια με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντλεί πληροφορίες από τις γραφικές παραστάσεις, αλλά δεν χρησιμοποιεί τους τύπους των συναρτήσεων. Στην ουσία βασίζεται στο ότι οι ρυθμοί μεταβολής των δύο συναρτήσεων, κατ' απόλυτη τιμή και τα εμβαδά των βάσεων των δύο δεξαμενών, είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Την αναφέρουμε αμέσως τώρα.
<u>Ενδιαφέρουσα στρατηγική επίλυσης:</u>
Απαιτούμενα δεδομένα: $\delta=10$, $\beta-\gamma=0,8$, $\kappa=2,5$, $\mu-\lambda=0,2$.

Κάθε ώρα η στάθμη νερού στη δεξαμενή Α κατεβαίνει κατά 0,8 m, ενώ στη δεξαμενή Β ανεβαίνει κατά 0,2m. Κάθε ώρα, ο όγκος νερού που φεύγει από τη δεξαμενή Α, είναι ίσος με τον όγκο νερού που εισέρχεται στη δεξαμενή Β. Αν x είναι η πλευρά της βάσης της δεξαμενής Β, ισχύει:

$0{,}75^2 \cdot 0{,}8 = x^2 \cdot 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}45 = x^2 \cdot 0{,}2 \Leftrightarrow x^2 = 2{,}25 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

Η μετάγγιση διήρκησε δ=10 ώρες. Άρα από τη δεξαμενή Α μεταφέρθηκαν στη δεξαμενή Β $0{,}75^2 \cdot 0{,}8 \cdot 10 = 4{,}5\,m^3$ νερού.

Αν η στάθμη νερού στη δεξαμενή Β ανέβηκε κατά y, θα ισχύει:

$1{,}5^2 \cdot y = 4{,}5 \Leftrightarrow y = 2$.

Συνεπώς, το ύψος της στάθμης του νερού στη δεξαμενή Β, μετά τη μεταφορά είναι κ+2=4,5m και αντιστοιχεί στο 60% του ύψους της δεξαμενής.

Αν z είναι το ύψος της δεξαμενής Β, τότε $\frac{60}{100} = \frac{4{,}5}{z} \Leftrightarrow z = 7{,}5$ m.

3.5. Διαδικασία ανάλυσης

Η διαδικασία ανάλυσης πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις:

<u>1η φάση:</u> Μετά από κάθε παρέμβαση, επιχειρήθηκε μια πρώτη ερμηνεία των ηχογραφημένων δεδομένων και σε συνδυασμό με τις δικές μου παρατηρήσεις, έγιναν κάποιες σκέψεις αναφορικά με τα φαινόμενα που εξελίχθηκαν στην τάξη, την ενεργοποίηση και συμμετοχή των μαθητών και το δικό μου ρόλο ως διδάσκοντα. Εξήχθησαν τα πρώτα συμπεράσματα σχετικά με το ρόλο των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στη διδασκαλία και με βάση αυτά, αποφασίσαμε ορισμένες διαφοροποιήσεις, τόσο στο σχεδιασμό των επόμενων δραστηριοτήτων, όσο και στις πρακτικές διδασκαλίας που θα ακλουθούσα στη συνέχεια.

<u>2η φάση:</u> Εξετάστηκαν λεπτομερώς οι απομαγνητοφωνήσεις και εντοπίστηκαν κρίσιμα συμβάντα και γεγονότα που φωτίζουν με ευκρίνεια τη συμβολή των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων στις μετά-δεξιότητες και την εννοιολογική ανάπτυξη.

Στη 2η φάση, η ανάλυση των δεδομένων στηρίζεται σε δύο άξονες:

<u>1ος άξονας:</u> Καταγράφουμε όλες τις διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης που ανέπτυξε κάθε ομάδα μαθητών κατά την ενασχόλησή της με τη δραστηριότητα. Δεν μας

ενδιαφέρει αν μια στρατηγική την ανέπτυξαν πλήρως και με κάθε λεπτομέρεια, αλλά αν από τους διαλόγους διαφαίνεται ότι θα μπορούσαν να την εφαρμόσουν. Το στοιχείο αυτό σχετίζεται άμεσα με τη συνεισφορά των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στις μετά-δεξιότητες.

2ος άξονας: Εντοπίσαμε σημεία στους διαλόγους που φανερώνουν με ευκρίνεια:

- φαινόμενα επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων. Τέτοια φαινόμενα αποκαλύπτουν ότι αναπτύσσεται η μάθηση, ότι διενεργείται κατασκευή του νοήματος. Σχετίζονται άμεσα με την εννοιολογική ανάπτυξη.
- ότι οι μαθητές χειρίζονται κατ' εξακολούθηση συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά ή ότι κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, παρατηρείται μετακίνηση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης.
- φαινόμενα αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης μεταξύ παλιάς και νέας γνώσης, που σηματοδοτούν πορεία για κατασκευή της νέας γνώσης.
- αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη δραστηριότητα. Σχετίζεται με τις μετά-δεξιότητες, αλλά και την εννοιολογική ανάπτυξη.

4. Αποτελέσματα

Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας, ανά δραστηριότητα. Το κύριο μέρος αναφέρεται στις παρεμβάσεις που απομαγνητοφωνήσαμε, δηλαδή σ' αυτές που αφορούν τις δραστηριότητες «Επιμεριστική» και «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία». Αναφορικά με τις υπόλοιπες, τα αποτελέσματα βασίζονται στις δικές μου παρατηρήσεις και στα φύλλα εργασίας των μαθητών.

Στην ανάλυση των κρίσιμων συμβάντων, θα επικεντρωθούμε στα σημεία που συνδέονται με τα ερευνητικά ερωτήματα, παράλληλα όμως θα αναφέρουμε και όσα κρίνουμε ενδιαφέροντα για τον τρόπο επικοινωνίας, τη συμπεριφορά των μαθητών, τις πρακτικές διδασκαλίας και τη μάθηση γενικά.

4.1 «Παραγοντοποίηση»: 1η παρέμβαση, τμήμα Γ2

Η παρέμβαση αυτή είχε περισσότερο πειραματικό χαρακτήρα. Διήρκησε μια διδακτική ώρα, συμμετέχοντες ήταν οι μαθητές του 2ου τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου και αφορά την 1η δραστηριότητα.

Τα αποτελέσματα, όπως προκύπτουν από τα φύλλα εργασίας των μαθητών, έδειξαν ότι στην πρώτη φάση της παρέμβασης, μόνο ένας μαθητής – ο καλύτερος από πλευράς επίδοσης στα μαθηματικά – εφάρμοσε παραγοντοποίηση, ενώ όλοι οι άλλοι υπολόγισαν την παράσταση με αντικατάσταση των τιμών των x, y, ω και εκτέλεση πράξεων. Στη δεύτερη φάση όμως, που τους δόθηκε η ίδια άσκηση αλλά με τη μορφή δραστηριότητας με επιλογή δεδομένων, τα πράγματα εξελίχθηκαν εντελώς διαφορετικά: όλοι οι μαθητές επιχείρησαν να εφαρμόσουν παραγοντοποίηση. Το στοιχείο αυτό ενισχύει την άποψή μας ότι το κόστος πρόσβασης μπορεί να λειτουργήσει ως κίνητρο.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση τεσσάρων μαθητών, οι οποίοι, ενώ στη δεύτερη φάση της παρέμβασης εφαρμόζοντας παραγοντοποίηση βρήκαν σωστό

αποτέλεσμα, στην πρώτη φάση εφαρμόζοντας αντικατάσταση και εκτελώντας τις πράξεις βρήκαν λάθος αποτέλεσμα. Σε σχετική ερώτησή μου, μου ανέφεραν ότι προτίμησαν την αντικατάσταση, διότι τη θεωρούσαν ως διαδικασία πιο οικεία κι' ας απαιτούσε πολλές και πολύπλοκες πράξεις. Είχαν εξ' αρχής κατανοήσει ότι η άσκηση πιθανώς να επιλύεται και με παραγοντοποίηση, αλλά δεν επιχείρησαν να εφαρμόσουν τη νέα γνώση, διότι αισθανόταν πιο σίγουροι επιλέγοντας την παλιά. Στη δεύτερη φάση όμως, η εισαγωγή του κόστους πρόσβασης, τους έκανε να στραφούν στην εφαρμογή της παραγοντοποίησης. Προφανώς οι μαθητές δύσκολα αποχωρίζονται την παλιά γνώση έστω κι' αν η διαδικασία εφαρμογής της είναι επίπονη. Η σύμβαση του κόστους πρόσβασης ακριβώς εκεί αποβλέπει, να εμφανίσει τη νέα γνώση ως μια εναλλακτική και λιγότερο δαπανηρή λύση.

Όπως ήδη αναφέραμε, ο δικός μου ρόλος σ' αυτή την παρέμβαση ήταν περισσότερο ρόλος παρατηρητή. Δεν έκανα καμία υπόδειξη, ούτε στην πρώτη φάση για το ποια δεδομένα θα χρησιμοποιήσουν, ούτε στη δεύτερη φάση για το αν θα εφαρμόσουν παραγοντοποίηση. Διαπίστωσα όμως ότι πολλοί μαθητές, με μια μικρή βοήθεια, θα μπορούσαν να εφαρμόσουν σωστά τους κανόνες παραγοντοποίησης. Συγκεκριμένα, υπήρξαν μαθητές που εφάρμοσαν σωστά τον κοινό παράγοντα, αλλά όχι τη διαφορά τετραγώνων και άλλοι που εφάρμοσαν σωστά τη διαφορά τετραγώνων, αλλά όχι τον κοινό παράγοντα. Σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, είναι πιθανό αυτοί οι μαθητές, μέσα από τη συνεργασία, την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση, να αποκόμιζαν σημαντικά οφέλη αναφορικά με την εφαρμογή της νέας γνώσης. Άλλωστε, η πλειοψηφία των μαθητών δεν είχε αποκτήσει ακόμη την απαιτούμενη ευχέρεια στην εφαρμογή της παραγοντοποίησης. Αυτό το στοιχείο, ενίσχυσε την πρόθεσή μας να εφαρμόσουμε ομαδοσυνεργατική διδασκαλία στις επόμενες παρεμβάσεις.

4.2 «Επιμεριστική»: 2η, 3η, 4η παρέμβαση, τμήματα Α1, Α2, Α3

Στις παρεμβάσεις αυτές συμμετείχαν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και ενεπλάκησαν με τη δραστηριότητα «Επιμεριστική». Στη 2η παρέμβαση συμμετείχαν οι μαθητές του 1ου τμήματος, στη 3η οι μαθητές του 2ου και στην 4η οι μαθητές του 3ου τμήματος. Η διάρκεια κάθε παρέμβασης ήταν μια διδακτική ώρα.

Ένα στοιχείο που μας ενδιέφερε να ελέγξουμε, είναι πόσες στρατηγικές επίλυσης ανέπτυξε κάθε ομάδα κατά την ενασχόλησή της με τη δραστηριότητα. Ο πίνακας 4.1 αποτυπώνει πόσες και ποιες στρατηγικές επίλυσης ανέπτυξε κάθε ομάδα και προέκυψε μετά από προσεκτική μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων. Οι δυνατές στρατηγικές επίλυσης κατατάσσονται ανά επίπεδο αναστοχαστικής αφαίρεσης και είναι διατεταγμένες σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με το κόστος επίλυσης. Για την καθεμία αναγράφεται ο συνδυασμός δεδομένων που απαιτεί η εφαρμογή της και σε παρένθεση το κόστος επίλυσης.

Κάθε τσεκαρισμένη στρατηγική, σημαίνει ότι συζητήθηκε τουλάχιστον από δύο μαθητές της ομάδας. Δεν σημαίνει απαραίτητα, ότι την ανέπτυξαν με κάθε λεπτομέρεια, αλλά ότι είχαν τη δυνατότητα να την εφαρμόσουν.

Η προσεκτική μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων, αναφορικά με τη συμμετοχή των μαθητών ανέδειξε τα εξής στοιχεία:

- Έξι μαθητές φαίνεται να μην έχουν καμία ή ελάχιστη συμμετοχή στη δραστηριότητα. Δεν πρότειναν κάτι, ούτε ζήτησαν κάποια εξήγηση. Οι δύο από αυτούς έχουν καλές επιδόσεις στα μαθηματικά.
- Για πέντε μαθητές δεν μπορούμε να αποφανθούμε, βάσει των ηχογραφημένων δεδομένων, αν τελικά κατανόησαν όλους τους τρόπους επίλυσης που ανέπτυξε η ομάδα τους.

Όσον αφορά τις δύο στρατηγικές επίλυσης της 3^{ης} ομάδας του Α1, που είναι τσεκαρισμένες με διαφορετικό σύμβολο, θα αναφερθούμε στην ανάλυση του 4^{ου} κρίσιμου συμβάντος παρακάτω.

Τμήμα	**Ομάδα**	**Στρατηγικές επίλυσης**					
		Επίπεδο Ι		**Επίπεδο ΙΙ**		**Επίπεδο ΙΙΙ**	
		α, δ, ε (14)	α, β, γ (12)	α, δ+ε (8)	α, β-γ (7)	α+δ+ε (4)	α+β-γ (3)
Α1	1η		#				#
	2η		#				#
	3η		#	#	√	#	√
Α2	1η		#	#			#
	2η		#	#	#		#
	3η		#	#	#	#	#
Α3	1η	#		#	#		#
	2η			#	#		#
	3η	#	#		#		

Πίνακας 4.1

Παρατηρώντας τον πίνακα 4.1 διαπιστώνουμε ότι:

- Όλες οι ομάδες, εκτός της 1ης και 2ης του Α1, ανέπτυξαν περισσότερες από 2 στρατηγικές επίλυσης και μάλιστα στρατηγικές και των τριών επιπέδων αναστοχαστικής αφαίρεσης. Στις περιπτώσεις της 1ης και 2ης ομάδας του Α1, συνέβη το εξής: Ένας μαθητής πρότεινε πολύ γρήγορα τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης και αυτό φαίνεται να λειτούργησε ανασταλτικά στην ανάπτυξη και άλλων στρατηγικών επίλυσης, αφού η μετ' έπειτα συζήτηση εξελίχθηκε γύρω από αυτή την στρατηγική.
- Όλες οι ομάδες εκτός από μία, που εφάρμοσαν επιμεριστική ιδιότητα με δύο αριθμούς (στρατηγικές επιπέδου ΙΙ), κατάφεραν να την επεκτείνουν με τρεις αριθμούς (στρατηγικές επιπέδου ΙΙΙ).

Επιλέξαμε να αναφέρουμε και να αναλύσουμε 4 κρίσιμα συμβάντα που εξελίχθηκαν κατά τη διάρκεια αυτών των παρεμβάσεων, όπου φαίνεται να αναπτύσσονται φαινόμενα που σχετίζονται με το 2ο άξονα ανάλυσης, αλλά και ορισμένα άλλα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον αναφορικά με την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση των μαθητών.

1ο κρίσιμο συμβάν. Τμήμα Α2 Ομάδα 2η

Σ' αυτό το συμβάν αναπτύσσονται τα εξής φαινόμενα: επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων, παλινδρόμηση και αντιπαράθεση ανάμεσα στη παλιά και νέα γνώση, αναστοχασμός πάνω στη δραστηριότητα.

[1] Βάσω: Το μεγάλο πρόβλημα είναι στο δεύτερο οικόπεδο
[2] Κάτια: Είναι πολλά…. Να πάρουμε δ+ε;
[3] Βάσω: Αα το βρήκα … παίρνουμε δ+ε και βρίσκουμε το εμβαδόν χωρίς το δρόμο, αυτό λογικά πρέπει να κάνουμε

…….

[4] Λένα: Λοιπόν, τι κάνουμε τώρα, α και δ+ε;
[5] Κάτια: Λοιπόν κοίτα, θα γράψω αριθμούς, φέρε πρόχειρο, θα κάνω παραδείγματα….

……

[6] Κάτια: κάνουμε 10 επί 24 για το πρώτο σχήμα και αν είναι 8 αυτό κι' αυτό ας πούμε... ο δρόμος πες είναι 2… είναι χωρίς το γ αυτό. Επειδή δεν έχει αριθμούς πρέπει να υποθέσουμε…

…….

[7] Βάσω: Το α το χρειαζόμαστε οπωσδήποτε

…….

[8] Βάσω: Κύριε νομίζω τελειώσαμε
[9] Καθηγητής: Θα τελειώσετε αφού σας δώσω τα δεδομένα. Για ν' ακούσω
[10] Βάσω: Θέλουμε το α για να βρούμε το εμβαδόν του πρώτου σχήματος, το β και το γ για να το αφαιρέσουμε μετά.

[11] Καθηγητής: Ωραία, πόσο κόστος έχουν αυτά;
[12] Βάσω: Κόστος 12.
[13] Καθηγητής: Αυτή είναι μια λύση, αλλά κοιτάξτε μήπως μπορείτε να το λύσετε με μικρότερο κόστος, κοιτάξτε τα δεδομένα.
……..
[14] Κάτια: Αντί να πάρουμε μόνο του το α, το β, ….. να πάρουμε α+β-γ με κόστος 3
[15] Βάσω: α+β-γ;
[16] Κάτια: Ναι
[17] Καθηγητής: Συζητήστε το λίγο
[18] Κάτια: Ναι άμα πάρουμε α+β-γ επί 24 βρίσκουμε αυτό και αυτό χωρίς αυτό
…….
[19] Καθηγητής: Έχετε αποφασίσει;
[20] Κάτια: Ναι
[21] Καθηγητής: Τι θέλετε; Το α+β-γ;
[22] Κάτια: Ναι
[23] Καθηγητής: Ωραία αυτό είναι 71m.
……
[24] Βάσω: Για πες τώρα, λάθος είναι
[25] Κάτια: Λάθος είναι;
[26] Βάσω: Αφού δεν ξέρουμε τώρα ούτε πόσο είναι το α ούτε το β ούτε το γ, πώς θα το λύσουμε.
[27] Λένα: Χρειαζόμασταν ξεχωριστά τα α, β, γ ή τα α, δ, ε.
[28] Βάσω: Ναι
…….
[29] Καθηγητής: Τη γράψατε τη λύση;
[30] Βάσω: Όχι γιατί έκανε βλακεία η κοπελιά από ‘δώ
[31] Καθηγητής: Γιατί
[32] Βάσω: Δεν ξέρουμε πόσο είναι τα α, β, γ
[33] Καθηγητής: Δηλαδή μ’ αυτό το δεδομένο δεν μπορείτε να το λύσετε;
[34] Βάσω: Όχι
[35] Καθηγητής: Για εξήγησε εσύ Κάτια πώς το σκέφτηκες
[36] Κάτια:……
……
[37] Βάσω: Μπορούμε να το λύσουμε άμα βάλουμε δικούς μας αριθμούς
[38] Κάτια: Αν κάνεις α+β-γ επί 24 βρίσκεις το εμβαδό και των δύο
[39] Λένα: Δε λέμε ότι δεν είναι αυτό, αλλά αριθμούς πες μας
[40] Κάτια: Το α+β-γ είναι το Α και το Β χωρίς το δρόμο. Επί 24 βγαίνει. Αυτό δεν είναι;
[41] Καθηγητής: Το θέμα είναι να την πείσεις την ομάδα
[42] Κάτια: Ρε παιδιά μα το θεό, αφού είναι οι δύο πλευρές χωρίς το δρόμο
……..
[43] Ελίνα: Λοιπόν …. 1704
[44] Λένα: Λοιπόν πες αυτό είναι 10….
[45] Βάσω: Δεν μπορείς, γιατί αυτούς πρέπει να τους προσθέσεις, να αφαιρέσεις το γ και να βγει 71, δηλαδή….
[46] Λένα: Όχι, γίνεται, ας πούμε ότι αυτό είναι 60…..
…….
[47] Βάσω: Λοιπόν αυτό είναι, το γράφουμε

Ανάλυση 1^{ου} συμβάντος

- Η Βάσω κατάφερε να αναπτύξει την 3^{η} στρατηγική ([1],[2],[3]), αλλά σίγουρα δεν θα μπορούσε από μόνη της να αναπτύξει την 6^{η} στρατηγική. Καταρχήν φαίνεται να απορεί όταν την προτείνει η Κάτια ([14],[15],[16]) και αμέσως μετά ισχυρίζεται με σιγουριά ότι είναι λανθασμένη ([24]-[34]). Από την άλλη, η Κάτια, αν και την πρότεινε ως στρατηγική επίλυσης ([14]), δεν ήταν καθόλου σίγουρη, αφού σε πρώτη φάση αδυνατεί να την εξηγήσει ([35],[36]). Βέβαια την κατανοεί, αλλά αρκετά μετά, όταν επιχειρηματολογεί για την ορθότητά της ([38]-[42]). Φαίνεται ότι ούτε κι' αυτή θα μπορούσε να την αναπτύξει από μόνη της. Παρατηρούμε ότι, ενώ δεν θα μπορούσε, καμία από τις δύο, να την αναπτύξει από μόνη της, μέσα από την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση την ανέπτυξαν και την κατανόησαν και οι δύο. Πιστεύουμε ότι εδώ αναπτύχθηκε ένα φαινόμενο επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων των δύο μαθητριών, με την 6^{η} στρατηγική να ανήκει στην κοινή περιοχή και αποτελεί τεκμήριο ότι πραγματοποιήθηκε μάθηση.
- Η Βάσω και η Κάτια, ενώ δείχνουν να έχουν αναπτύξει την 3^{η} στρατηγική ([1],[2],[3]), στη συνέχεια γυρνάνε στη 2^{η} στρατηγική ([8]-[13]). Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, παρατηρούμε να εξελίσσεται το φαινόμενο της παλινδρόμησης ανάμεσα στη παλιά και τη νέα γνώση, που φανερώνει ακριβώς τη διαδρομή των μαθητών προς την κατασκευή της νέας γνώσης (επιμεριστική ιδιότητα).
- Όταν τους δίνω ότι α+β-γ=71m ([19]-[23]), ενδιαφέρον έχει, τόσο η αντίδραση της Βάσως και της Λένας ([24]-[34]), όσο και η αμηχανία της ίδιας της Κάτιας ([35],[36]). Περίμεναν ότι θα τους δώσω την τιμή του καθενός και μάλιστα φαίνεται να είναι πεπεισμένες ότι δεν μπορούν να υπολογίσουν το εμβαδό αν δε γνωρίζουν πόσο είναι τα α, β, γ ξεχωριστά. Ενώ έδειχναν να είχαν φτάσει στην κατασκευή νοήματος, στην πραγματικότητα αυτό δεν είχε ακόμη επιτευχθεί, διότι βρίσκονται στη φάση αντιπαράθεσης ανάμεσα στην παλιά και τη νέα γνώση που τις φέρνει, προς στιγμήν, σε κατάσταση αποδιοργάνωσης. Και αυτό το στοιχείο καταδεικνύει ότι βρίσκονται στην πορεία για την κατασκευή της νέας γνώσης.
- Παρατηρούμε, ότι οι τρεις μαθήτριες (Βάσω, Κάτια, Λένα) προσπαθούν να κατασκευάσουν νόημα και να ελέγξουν εικασίες, θέτοντας δικές τους τιμές στα δεδομένα του προβλήματος ([5],[6],[37],[44],[45],46]). Στην ουσία, προσπαθούν

με τη βοήθεια παραδειγμάτων, να αναδιοργανώσουν τη γνώση τους και να γενικεύσουν. Το στοιχείο αυτό είναι σημαντικό, διότι το ίδιο φαινόμενο διαπιστώσαμε να συμβαίνει σε αρκετές ομάδες. Συγκεκριμένα οι τρεις από τις εννέα ομάδες προσπάθησαν να ελέγξουν αν ισχύει ένας τρόπος επίλυσης μέσω παραδειγμάτων, ενώ άλλες δύο μέσω μέτρησης με χάρακα. Διαπιστώνουμε ότι όταν οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να επιλέξουν δεδομένα που δε γνωρίζουν την τιμές τους, αναπτύσσουν εικασίες και αναζητούν διάφορους τρόπους για να τις ελέγξουν.

- Παρατηρούμε επίσης, ότι η Κάτια μπαίνει στη διαδικασία να σκεφτεί πάνω στη στρατηγική επίλυσης που πρότεινε. Αρχικά δεν είναι σίγουρη ότι είναι σωστή, δεν αντιδρά όταν η Βάσω και η Λένα υποστηρίζουν ότι είναι λανθασμένη ([24]-[28]) και δεν μπορεί να εξηγήσει πώς τη σκέφτηκε ([35],[36]). Στη συνέχεια όμως, αρχίζει να επιχειρηματολογεί για να αποδείξει την ορθότητά της και φαίνεται ότι όσο εξηγεί, τόσο περισσότερο πείθεται και ίδια ότι πράγματι είναι σωστή ([38]-[42]). Στην ουσία αυτό που κάνει είναι ότι έχει εκλάβει τη δράση της ως αντικείμενο αναστοχασμού.
- Ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι η Κάτια, αν και δεν είναι η καλύτερη μαθήτρια της ομάδας, εντούτοις είναι αυτή που πρότεινε τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης και αυτή που είχε την πρωτοβουλία σε όλη τη διάρκεια της ενασχόλησης. Οι επιδόσεις της Βάσως και της Λένας είναι λίγο καλύτερες επιδόσεις από την επίδοση της Κάτιας. Το επίπεδο στα μαθηματικά, των τριών αυτών μαθητριών είναι λίγο πάνω του μετρίου, ενώ της Ελίνας είναι πολύ κάτω του μετρίου.

2^{ο} κρίσιμο συμβάν. Τμήμα Α3 Ομάδα 1^{η}

Και σ' αυτό το συμβάν, αναπτύσσεται το φαινόμενο επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων και διενεργείται αναστοχασμός πάνω στη δράση της ομάδας.

[1] Καθηγητής: Για πέστε μου τι θα θέλατε να ξέρετε από αυτά εδώ τα δεδομένα για να το βρείτε
[2] Έλενα: Θα πάρουμε το α…
[3] Καθηγητής: Ναι
[4] Έλενα: Θα πάρουμε το δ για να κάνουμε επί 24 και το ε επί 24 και θα τα προσθέσουμε
[5] Καθηγητής: Ωραία, πόσο κόστος έχουν αυτά
[6] Ντίνα: Είναι 14, ρε είναι πολύ
[7] Καθηγητής: Αυτός είναι ένα τρόπος να το λύσετε. Κοιτάξτε όμως μήπως μπορείτε να το λύσετε με λιγότερο κόστος
[8] Έλενα: Θα κάνουμε δ+ε επί 24
[9] Ντίνα: Αυτό σου λέω

[10] Έλενα: Όμως το β-γ είναι 3, να πάρουμε αυτό, δε χρειαζόμαστε το δ+ε
[11] Άννα: Όμως δε θα σου πει πόσο είναι το β και πόσο το γ
[12] Έλενα: Ε;
[13] Άννα: Έλενα να σου πω, όμως θα σου πει πόσο είναι το β-γ, δε θα σου πει πόσο είναι το β και πόσο το γ
[14] Έλενα: Εε ναι αυτό θέλουμε, δε θέλουμε πόσο είναι το β και πόσο το γ
[15] Ντίνα: Ναι αφού το γ σου λέει είναι δρόμος
[16] Άννα: Αα κατάλαβα, κατάλαβα

……..

[17] Έλενα: Κοίτα, παίρνουμε αυτό και βρίσκουμε αυτό, μόνο με 3 πόντους (*εννοεί το β-γ*), και αυτό εντάξει, είναι απαραίτητο να το κάνουμε (*εννοεί το α*), 7 πόντους (*εννοεί 4+3=7 κόστος επίλυσης*)

……

[18] Καθηγητής: Για πέστε μου
[19] Έλενα: Βρήκαμε ένα που έχει 7 πόντους. 24 επί α για να βρούμε το εμβαδό αυτό
[20] Καθηγητής: Σωστά
[21] Έλενα: Και μετά β-γ επί 24 για να βρούμε αυτό
[22] Καθηγητής: Και είναι 7
[23] Έλενα: Ναι, μόνο 7
[24] Καθηγητής: Είδατε πώς κατέβηκε από το αρχικό που λέγατε;
[25] Ντίνα: Ναι. Δώστε μας τώρα αυτά
[26] Καθηγητής: Είσαστε σίγουρες όμως;
[27] Έλενα: Τι, υπάρχει λιγότερο;
[28] Καθηγητής: Δεν ξέρω, μπορεί
[29] Άννα: Να κάνουμε α και β-γ μαζί επί 24
[30] Καθηγητής: Δυνατά, δυνατά, να ακούγονται αυτά που λες
[31] Έλενα: Ωωω α+β-γ επί 24 και παίρνουμε 3 βαθμούς μόνο
[32] Μίνα: Ώπα, ώπα περίμενε…..
[33] Ντίνα: Περίμενε, λέει α+β ……
[34] Έλενα: Κοίτα τα παίρνουμε και τα ενώνουμε, τα ενώνουμε και παίρνει 3 βαθμούς
[35] Μίνα: 3 βαθμούς
[36] Έλενα; Ναι. Μπράβο ρε Άννα
[37] Μίνα: Μπράβο Άννα

……..

[38] Έλενα: Λοιπόν, πρώτος τρόπος που σκεφτήκαμε ήταν α επί 24, δ επί 24, ε επί 24, που έπαιρνε 14 βαθμούς. Δεύτερος ήταν 24 επί α, β-γ και αυτό που θα βρούμε επί 24 και έπαιρνε 7 βαθμούς. Τελευταίος ήταν α+β-γ επί 24 που παίρνει 3 βαθμούς.

<u>Ανάλυση 2^{ου} συμβάντος</u>

- Η Έλενα αναπτύσσει, μαζί με την Ντίνα, την 3^{η} στρατηγική ([8],[9]), προτείνει την 4^{η} στρατηγική ([10]), όμως θεωρεί την απόσταση α ως απαραίτητο δεδομένο για να λύσουν το πρόβλημα ([17]). Δείχνει ότι δεν θα μπορούσε να αναπτύξει από μόνη της την 6^{η} στρατηγική. Η Άννα δεν έχει κατανοήσει την 4^{η} στρατηγική και ζητάει να της την εξηγήσει η Έλενα ([11]-[16]). Ως εκ τούτου, είναι αδύνατο να μπορούσε να αναπτύξει μόνη της την 6^{η} στρατηγική. Όμως, και εδώ είναι το

ενδιαφέρον, είναι αυτή που την προτείνει ([29]). Παρατηρούμε ότι, με τη βοήθεια της Έλενας ([16]), κατανοεί το σκεπτικό της 4^{ης} στρατηγικής και τώρα το επεκτείνει, προτείνοντας την 6^{η} στρατηγική. Πιστεύουμε, ότι εδώ αναπτύχθηκε και εξελίχθηκε με μεγάλη ευκρίνεια ένα φαινόμενο επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων των δύο μαθητριών, με την 6^{η} στρατηγική να ανήκει στην κοινή περιοχή.

- Παρατηρούμε ότι η Έλενα, σε δύο περιπτώσεις προσπαθεί να εξηγήσει και να δικαιολογήσει το σκεπτικό μιας στρατηγικής επίλυσης και μάλιστα με επιτυχία. Στην πρώτη περίπτωση εξηγεί το σκεπτικό της 4^{ης} στρατηγικής στην Άννα και τη Μίνα ([10]-[16]), που όπως απεδείχθη, ήταν καθοριστικό για να φτάσει η ομάδα στην 6^{η} στρατηγική επίλυσης. Στη δεύτερη περίπτωση, αφού αρχικά κατανοεί αμέσως την 6^{η} στρατηγική επίλυσης ([31]), στη συνέχεια προσπαθεί να την εξηγεί στη Ντίνα και τη Μίνα ([34]). Επίσης, η ίδια μαθήτρια, όταν πλέον έχουν ολοκληρώσει την επίλυση, κάνει μια ανασκόπηση των στρατηγικών που ανέπτυξαν, αναφέροντας μάλιστα και τη διαδικασία επίλυσης ([38]). Είναι φανερό ότι πρόκειται για αναστοχασμό πάνω στη δράση της ομάδας.
- Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το εξής στοιχείο: Το επίπεδο της Άννας που πρότεινε την 6^{η} στρατηγική, είναι κάτω του μετρίου. Οι άλλες τρεις μαθήτριες είναι πολύ καλύτερες απ' αυτήν. Η Έλενα σχεδόν άριστη, ενώ η Μίνα και η Ντίνα πάρα πού καλές.

3^{ο} κρίσιμο συμβάν. Τμήμα Α1 Ομάδα 2^{η}

Σ' αυτό το συμβάν διαπιστώσαμε ένα μαθητή να είναι στη φάση αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στην παλιά και νέα γνώση και αμέσως μετά να καταφέρνει να κατασκευάσει νόημα. Επίσης παρατηρήσαμε, αναστοχασμό του ίδιου μαθητή πάνω στη δράση του.

[1] Γιώργος: Κύριε δε συμφωνούμε καθόλου
[2] Καθηγητής: Για πέστε μου, βρήκατε κάποιον τρόπο;
[3] Γιώργος: Εγώ και ο Λεωνίδας συμφωνούμε σ' έναν τρόπο και είναι αυτός εδώ
[4] Καθηγητής: Πέστε μου
[5] Γιώργος: Αυτό επί α βρίσκουμε αυτό το οικόπεδο, αυτό επί β βρίσκουμε αυτό το οικόπεδο, άμα τα ενώσουμε βρίσκουμε και τα δύο τα εμβαδά, και μείον το γ που θ' ανοίξει ο δρόμος
[6] Καθηγητής: Ωραία, οπότε τι χρειάζεστε
[7] Γιώργος: Μόνο αυτό
[8] Καθηγητής: Μόνο αυτό, ποιο; Το α+β-γ;
[9] Γιώργος: Ναι

[10] Καθηγητής: Αα μ' αυτό δηλαδή το βρίσκετε
[11] Γιώργος: Αυτός είναι ο δικός μου τρόπος
[12] Καθηγητής: Ο δικός σου τρόπος, αν είναι σωστός τι κόστος έχει
[13] Γιώργος: Είναι πάρα πολύ φθηνός, 3.
[14] Καθηγητής: Ωραία, για πέστε μου άλλον τρόπο
[15] Γιώργος: δεν έχουν σκεφτεί κύριε κανέναν
[16] Λεωνίδας: Εγώ είμαι μαζί με το Γιάννη
[17] Καθηγητής: Πρέπει όμως να δείτε αν λύνεται και να συμφωνήσετε, έχουμε πολύ χρόνο
……..
[18] Καθηγητής: Λοιπόν, καταλήξατε τι θέλετε;
[19] Μάνος: Ναι, αυτό, α και β μείον γ
[20] Καθηγητής: Ωραία, να σας το δώσω. Σημειώνω εδώ 71m. Τη λύση θα τη γράψετε πίσω
[21] Άλκης: Αυτό όμως είναι η απάντηση κύριε, εμείς πρέπει να βρούμε πόσο είναι το α, το β και το γ, πώς θα τα βρούμε εμείς αυτά;
[22] Καθηγητής: Αυτό είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+β-γ. Εσείς πρέπει να βρείτε πόσα τετραγωνικά είναι συνολικά αυτό που έμεινε
[23] Γιώργος: Κύριε αφού αυτό είναι η απάντηση
[24] Καθηγητής: Ποια είναι η απάντηση; 71 τετραγωνικά είναι τα οικόπεδα που έμειναν; 71 είναι η απόσταση α συν την απόσταση β μείον την απόσταση γ. Για συζητήστε το να δείτε
……
[25] Γιώργος: Λοιπόν, 71 δεν είναι το α συν το δ συν το ε;
[26] Λεωνίδας: Ναι
[27] Γιώργος: Αυτά αν τα ενώσουμε μαζί και κόψουμε αυτό δε θα μας βγει 71 αυτή η πλευρά;
[28] Άλκης: Δεν τα ενώνουμε, πρέπει να βρούμε το καθένα
[29] Γιώργος: Ρε αφήστε με να σας το πω, 71 είναι η πάνω πλευρά
[30] Λεωνίδας: Ναι, αλλά δεν τα ενώνουμε
[31] Μάνος: Ναι αλλά και να τα ενώσουμε πάλι 71 βγαίνει
[32] Γιώργος: Ναι, 71 η πάνω πλευρά, επί 24 η κάθετη
[33] Λεωνίδας: 71 διά 24
[34] Άλκης: Όχι 71 επί 24, όχι διά, θυμάστε πώς βρίσκουμε το εμβαδό από το δημοτικό; Αυτό συν αυτό συν αυτό είναι 71 και αυτό 24. Για να βρούμε το εμβαδόν πρέπει να κάνουμε αυτό επί αυτό
[35] Γιώργος: Ναι
[36] Άλκης: Όπως άμα θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν εδώ, θα κάνουμε αυτό επί 24

Ανάλυση 3^{ου} συμβάντος

- Ο Γιώργος, εξηγώντας τον τρόπο επίλυσης που προτείνει ([5]-[9]), δεν αφήνει καμία αμφιβολία ότι τον έχει κατανοήσει και ότι για να τον εφαρμόσει, το μόνο που χρειάζεται είναι η τιμή α+β-γ. Εντούτοις όμως, όταν του σημειώνω ότι α+β-γ=71m, δείχνει όχι μόνο να αιφνιδιάζεται αλλά και να συμφωνεί με τον Άλκη ότι χρειάζονται οπωσδήποτε τις τιμές των α, β, γ ξεχωριστά ([18]-[23]). Είναι εμφανές ότι η κατασκευή της νέας γνώσης δεν έχει επιτευχθεί ακόμη και ότι τη δεδομένη στιγμή κυριαρχεί η αντιπαράθεση και η παλινδρόμηση ανάμεσα στην

παλιά και νέα γνώση που τον φέρνει σε κατάσταση αποδιοργάνωσης. Αμέσως μετά όμως, και κατόπιν της δικής μου παρότρυνσης ([24]), αντιλαμβάνεται σιγά-σιγά ότι τα τρία οικόπεδα μπορεί να τα δει ως ένα, με πλευρές α+β-γ, 24. Έτσι, φαίνεται να κατασκευάζει νόημα και να εξηγεί και στους υπόλοιπους το σκεπτικό του ([25]-[32]).

- Διαπιστώνουμε ότι ο Γιώργος μπαίνει στη διαδικασία να εξηγήσει τον τρόπο επίλυσης που πρότεινε ([25]-[36]) και μάλιστα στην προσπάθειά του αυτή, χρησιμοποιεί και ένα επιπλέον επιχείρημα για να πείσει τους συμμαθητές του ([25]). Η διαδικασία αυτή φανερώνει αναστοχασμό του Γιάννη πάνω στη δράση του, αλλά και μια καλή μαθηματική επικοινωνία των μαθητών της ομάδας, αφού τελικά, ο Μάνος και ο Άλκης σίγουρα κατανόησαν τον τρόπο επίλυσης, ο δε Λεωνίδας, δείχνει να τον κατανόησε, χωρίς όμως να είμαστε απολύτως σίγουροι γι' αυτό.
- Παρατηρούμε ότι ο Λεωνίδας εμπιστεύεται το Γιώργο ([16]), χωρίς να έχει κατανοήσει τον τρόπο επίλυσης ([30]), αλλά και χωρίς να του ζητάει να του τον εξηγήσει. Δεδομένου ότι οι επιδόσεις του Λεωνίδα στα μαθηματικά είναι μέτριες, ενώ του Γιώργου σχεδόν άριστες, διαπιστώνουμε να εξελίσσεται το εξής φαινόμενο: Ο μέτριος μαθητής εμπιστεύεται τον καλό και συμφωνεί μαζί του σε ότι προτείνει, όχι επειδή το κατανόησε αλλά επειδή ως άριστος μαθητής, σίγουρα έχει προτείνει το σωστό.

4^{ο} κρίσιμο συμβάν. Τμήμα Α1 Ομάδα 3^{η}

Εδώ διαπιστώνουμε να εξελίσσεται ένα φαινόμενο αποτυχημένης επικοινωνίας ανάμεσα σε δύο μαθητές και μάλιστα δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές, που τους εμποδίζει να αναπτύξουν τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης.

[1] Στέλιος: Λοιπόν, χρειαζόμαστε το άθροισμα δ, ε σίγουρα
[2] Χρόνης: Όχι, είναι το ίδιο με το β, γ (*εννοεί το β-γ*)
[3] Στέλιος: Άμα πάρεις το β είναι 4 και 3 αυτό, 7 (*εννοεί το β και το γ χωριστά*). Ενώ άμα πάρεις δ, ε (*εννοεί το δ+ε*) είναι μόνο 4 κατάλαβες;
[4] Χρόνης: Άμα ζητήσουμε τη διαφορά β, γ μας βγαίνει κόστος 3, άμα πάρουμε το άθροισμα δ, ε μας βγαίνει κόστος 4
[5] Στέλιος: Άμα πάρεις β, γ θα βρεις ..….. δε μας χρειάζεται
……
[6] Καθηγητής: Ποια θέλετε
[7] Παναγιώτα: Πόσο είναι το άθροισμα δ+ε και το α
[8] Καθηγητής: Δεν έχετε βρει κάτι άλλο μήπως μειώσετε το κόστος; Κοιτάξτε το λίγο και επανέρχομαι
[9] Στέλιος: Ναι, ναι υπάρχει….

[10] Χρόνης: Άμα κάνουμε……
[11] Στέλιος: Ναι, ναι υπάρχει….
[12] Χρόνης: Γιατί δε μ' αφήνεις να μιλήσω λίγο;
[13] Στέλιος: Όχι. Ναι, ναι υπάρχει. Πόσο είναι το αποτέλεσμα α, δ, ε (*εννοεί το α+δ+ε*)
[14] Χρόνης: Θα μ' αφήσεις να μιλήσω;
[15] Στέλιος: Όχι
…….
[16] Στέλιος: Κύριε το βρήκαμε, χρειαζόμαστε μόνο αυτό (*δείχνει το α+δ+ε*)
[17] Καθηγητής: Ωραία, θα σας δώσω αυτό. Αυτό είναι 71m

Ανάλυση $4^{ου}$ συμβάντος

- Ο Στέλιος προτείνει να ζητήσουν τα δεδομένα α και δ+ε ($3^{η}$ στρατηγική). Ο Χρόνης προσπαθεί να του εξηγήσει ότι το β-γ είναι το ίδιο με το δ+ε ($4^{η}$ στρατηγική), αλλά ο Στέλιος δεν φαίνεται να τον ακούει, δεν εξετάζει τι ακριβώς του λέει, επιμένει στη δική του άποψη και τελικά ο Χρόνης υποχωρεί ([1]-[5]).
- Μετά από παρότρυνση δική μου να ψάξουν και για άλλο τρόπο επίλυσης [8], ο Στέλιος εντοπίζει την $5^{η}$ στρατηγική. Ο Χρόνης κάτι θέλει να προτείνει, αλλά αυτή τη φορά ο Στέλιος ούτε καν τον αφήνει να μιλήσει. Τελικά ο Χρόνης πάλι υποχωρεί χωρίς καν να διατυπώσει αυτό που θέλει ([6]-[17]).

Το συγκεκριμένο συμβάν δεν το αντιλήφθηκα κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, το διαπίστωσα όμως την ίδια μέρα ακούγοντας την ηχογράφηση. Αποφάσισα, την επόμενη ώρα των μαθηματικών, στη φάση σύνοψης, να το συζητήσουμε στην τάξη. Από τη συζήτηση προέκυψε ότι τελικά ο Χρόνης, ήθελε να προτείνει να ζητήσουν το α+β-γ αντί του α+δ+ε, δηλαδή την $6^{η}$ στρατηγική. Ο δε Στέλιος κατανόησε και παραδέχτηκε το λάθος του. Ο λόγος, που στον πίνακα 4.1 έχουμε τσεκάρει με διαφορετικό σύμβολο την $4^{η}$ και $6^{η}$ στρατηγική, έγκειται στο ότι η συγκεκριμένη ομάδα θα μπορούσε, αν υπήρχε στοιχειώδης επικοινωνία μεταξύ του Στέλιου και του Χρόνη, να αναπτύξει και αυτές τις δύο στρατηγικές.

Στην εξέλιξη της συζήτησης, χρησιμοποίησα το συγκεκριμένο περιστατικό ως αφορμή, για να κατανοήσουν όλοι οι μαθητές ότι, όταν εργάζονται ομαδικά πρέπει να επικοινωνούν, να μάθουν να μιλάνε αλλά και να ακούνε, να διατυπώνουν την άποψή τους, να την υποστηρίξουν, να επιμένουν να ακουστεί, αλλά συγχρόνως να επιτρέπουν να ακουστεί και η άποψη των συμμαθητών τους.

Η μελέτη του συνόλου των 9 ηχογραφήσεων αυτών των παρεμβάσεων, μας έδειξε ότι οι μαθητές εργαζόμενοι κατά ομάδες πάνω στη δραστηριότητα «Επιμεριστική», δημιούργησε συνθήκες ώστε:

- Κάθε ομάδα, μέσα από την επικοινωνία, να αναπτύξει πολλαπλούς τρόπους επίλυσης. Συγκεκριμένα οι 7 από τις 9 ομάδες ανέπτυξαν από 3 έως 5 διαφορετικούς τρόπους επίλυσης.
- Στις 6 από τις 9 ομάδες να αναπτυχθούν επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων.
- Στις 8 από τις 9 ομάδες να διενεργηθεί αναστοχασμός πάνω στη δραστηριότητα.
- Σε 4 περιπτώσεις να λάβουν χώρα φαινόμενα αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στη παλιά και νέα γνώση που μαρτυρούν προσπάθεια των μαθητών για κατασκευή νοήματος.

Τα παραπάνω συνδέονται άμεσα με τα ερωτήματα της έρευνας. Επίσης, εντοπίσαμε άλλα τέσσερα σημεία με ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

- Οι 5 από τις 9 ομάδες, προσπαθώντας να κατασκευάσουν τη νέα γνώση, επιχείρησαν έλεγχο εικασιών είτε μέσω παραδειγμάτων είτε μέσω μέτρησης.
- Διαπιστώσαμε ότι σε δύο περιπτώσεις, η βέλτιστη στρατηγική επίλυσης προήλθε από μαθητές με μέτρια ή και κάτω από μέτρια επίδοση.
- Η αποτυχημένη επικοινωνία μεταξύ δύο μαθητών, τους εμπόδισε να αναπτύξουν τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης.
- Εξελίχθηκε το φαινόμενο ο μέτριος μαθητής να εμπιστεύεται και να ακολουθεί τυφλά τον άριστο μαθητή. Αυτό, ίσως να σημαίνει ότι η ανομοιομορφία των ομάδων δημιουργεί τέτοια φαινόμενα.

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που αναδείχτηκε στη φάση σύνοψης στην τάξη, είναι ότι και τα τρία τμήματα μου ζήτησαν να βαθμολογήσω τα φύλλα εργασίας κάθε ομάδας σε 20βάθμια κλίμακα. Είναι κάτι που αναμέναμε, γι' αυτό παρότρυνα τους μαθητές να προτείνουν οι ίδιοι τον τρόπο αξιολόγησης. Μετά από συζήτηση συμφωνήσαμε η βαθμολογία να γίνει ως εξής: Αν Κ είναι το κόστος επίλυσης της στρατηγικής που εφάρμοσε μια ομάδα και Ε το ελάχιστο δυνατό κόστος επίλυσης του προβλήματος (για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι Ε=3), τότε βαθμός=20-Κ+Ε. Στην ουσία οι μαθητές επιζητούσαν την αξιολόγηση από τον καθηγητή με τη δική τους συμφωνία. Το κόστος επίλυσης να είναι ένα εργαλείο για την συνειδητοποίηση των ικανοτήτων τους και για άτυπη αυτοαξιολόγηση. Να λειτουργήσει ως παράγοντας αυτό-παρακολούθησης των δράσεών τους.

4.3. «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία»: 5η παρέμβαση, τμήμα Β2

Στην παρέμβαση αυτή συμμετείχαν οι μαθητές του 2ου τμήματος της Β΄ Γυμνασίου, ενεπλάκησαν, για μια διδακτική ώρα, με τη δραστηριότητα «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία».

Επειδή το πλήθος των στρατηγικών επίλυσης της συγκεκριμένης δραστηριότητας είναι μεγάλο, ο πίνακας 4.2 που αποτυπώνει ποιες στρατηγικές ανέπτυξε κάθε ομάδα, καταρτίζεται με διαφορετικό τρόπο. Χωρίζουμε τις στρατηγικές επίλυσης σε 4 κατηγορίες, ανάλογα με το αν κάνουν χρήση πυθαγορείου θεωρήματος ή τριγωνομετρικών αριθμών. Στην κατηγορία «4 πλευρές» ανήκει μια στρατηγική, αυτή που δεν κάνει χρήση καμιάς από τις δύο μαθηματικές έννοιες και εντάσσεται στο επίπεδο Ι αναστοχαστικής αφαίρεσης. Στις κατηγορίες «Πυθαγόρειο» και «Τριγων. Αρ.» ανήκουν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν μόνο πυθαγόρειο ή μόνο τριγωνομετρία αντίστοιχα και εντάσσονται στο επίπεδο ΙΙ αναστοχαστικής αφαίρεσης. Ενώ στην κατηγορία «Συνδυασμός» ανήκουν όσες στρατηγικές χρησιμοποιούν συνδυασμό πυθαγορείου και τριγωνομετρίας και εντάσσονται στο επίπεδο ΙΙΙ αναστοχαστικής αφαίρεσης. Σε παρένθεση, αναγράφεται το ελάχιστο και μέγιστο κόστος των στρατηγικών κάθε κατηγορίας.

Τμήμα	**Ομάδα**	**Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης**			
		Επίπεδο Ι	**Επίπεδο ΙΙ**		**Επίπεδο ΙΙΙ**
		4 πλευρές (12)	Πυθαγόρειο (7-8)	Τριγων. αρ. (7-8)	Συνδυασμός (6-9)
Β2	1η		#		#
	2η		#	#	#
	3η		#		#

Πίνακας 4.2

Αν μια κατηγορία είναι τσεκαρισμένη, σημαίνει ότι η συγκεκριμένη ομάδα, ανέπτυξε τουλάχιστον μια στρατηγική επίλυσης που ανήκει εκεί. Δηλαδή, ότι συζητήθηκε μεταξύ δύο τουλάχιστον μαθητών της ομάδας, χωρίς απαραίτητα να την έχουν αναπτύξει με κάθε λεπτομέρεια. Στην 3η ομάδα για παράδειγμα, από τα δεδομένα φαίνεται ότι ο Ντίνος ελέγχει αν υπάρχει στρατηγική επίλυσης της κατηγορίας «Τριγων. Αρ.» με κόστος μικρότερο από 7 και αποφαίνεται ότι τελικά δεν υπάρχει. Η συγκεκριμένη κατηγορία δεν είναι τσεκαρισμένη διότι ακριβώς δεν το συζήτησε με κάποιο συμμαθητή του.

Από την προσεκτική μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων προέκυψε ότι:

- Δύο μαθητές δεν συμμετείχαν καθόλου ή συμμετείχαν ελάχιστα στη διαδικασία.
- Για τέσσερεις μαθητές, δεν μπορούμε να αποφανθούμε ότι κατανόησαν τις στρατηγικές που ανέπτυξε η ομάδα.

Στον πίνακα 4.2 παρατηρούμε ότι και οι τρεις ομάδες, ανέπτυξαν στρατηγικές και του ΙΙ και του ΙΙΙ επιπέδου αναστοχαστικής αφαίρεσης. Το ότι δεν είναι τσεκαρισμένη καθόλου η κατηγορία «4 πλευρές», σημαίνει ότι καμία ομάδα δεν ξεκίνησε από τη συγκεκριμένη στρατηγική. Σίγουρα όμως την εφάρμοσε, αφού τη δανείζεται κάθε στρατηγική των επιπέδων ΙΙ και ΙΙΙ.

Επιλέξαμε να αναφέρουμε και να αναλύσουμε 2 κρίσιμα συμβάντα που εξελίχθηκαν κατά τη διάρκεια της 5^{ης} παρέμβασης, διότι αφενός περιέχουν σημεία που συνδέονται με τα ερευνητικά ερωτήματα, αφετέρου εντοπίσαμε και κάποια άλλα ενδιαφέροντα στοιχεία.

5^{ο} κρίσιμο συμβάν. Τμήμα Β2 Ομάδα 3^{η}

Εδώ, όσον αφορά τα ερευνητικά ερωτήματα, παρατηρήσαμε να αναπτύσσεται το φαινόμενο επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων, να αντιμετωπίζουν οι μαθητές τις δύο μαθηματικές έννοιες με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά και επίσης να αναστοχάζονται πάνω στη δραστηριότητα.

[1] Άρης: Θες με πυθαγόρειο;
[2] Ντίνος: Εγώ σας είπα με πυθαγόρειο
[3] Αντώνης: Πόσο θα δώσει με πυθαγόρειο;
[4] Ντίνος: Με πυθαγόρειο είναι 7
[5] Άρης: Με πυθαγόρειο είναι 6, άμα πάρουμε αυτές τις δύο 3 και 3 είναι 6
[6] Ντίνος: Όχι αυτές ρε
[7] Δήμος: Αφού πρέπει να το βρούμε όλο
[8] Ντίνος: Ναι, μετά πρέπει να βρούμε κι' αυτό
[9] Άρης: Οπότε θέλει κι' άλλο πυθαγόρειο
[10] Ντίνος: Κοίτα, κοίτα, άμα πάρουμε αυτές, είναι 4 (*εννοεί τις ΒΓ, ΓΔ*). Μετά παίρνουμε κι' αυτή… 7
[11] Αντώνης: Αυτές οι δύο πάνε 6
[12] Ντίνος: Ρε κοίτα, αυτή κι' αυτή 4 (*εννοεί τις ΒΓ, ΓΔ*) και μια από αυτές, 7 (*εννοεί την ΑΒ ή την ΑΔ*).
[13] Αντώνης: Να πάρουμε την πρώτη την τρίτη και την τέταρτη
…….
[14] Ντίνος: Ρε μήπως να το κάνουμε με τις γωνίες
[15] Άρης: Με γωνίες είναι πιο δύσκολο ρε
[16] Ντίνος: Ναι αλλά μπορεί να έχει λιγότερο κόστος όμως
……
[17] Ντίνος: Ρε βρήκα, με 5 ευρώ βρίσκουμε όλες τις γωνίες ……. αλλά πάλι με 7 γίνεται, όλα με 7 γίνονται

[18] Άρης: Να κάνουμε πυθαγόρειο να ξεμπερδεύουμε

……...

[19] Ντίνος: Κύριε, θα πάρουμε την ΑΒ, τη ΒΓ και τη ΓΔ, κόστος 7 και θα κάνουμε δύο πυθαγόρεια

[20] Καθηγητής: Ωραία, αυτή είναι μια λύση. Μπορείτε μήπως να ψάξετε για άλλες λύσεις με λιγότερο κόστος;

[21] Δήμος: Εγώ βρήκα μια λύση, αυτές εδώ τις δύο (*εννοεί τις ΒΓ, ΓΔ*) και μια γωνία από αυτές (*εννοεί την ω ή τη φ*)

[22] Καθηγητής: Τη λύση να την καταθέσεις και να πείσεις τον κόσμο, να πείσεις το λαό. Για ελέγξτε αυτό που λέει. Τι κόστος έχει καταρχήν;

[23] Ντίνος; 6

[24] Καθηγητής: Για ελέγξτε να δείτε, λύνεται;

……

[25] Άρης: Κοίτα, θα πάρουμε αυτήν κι' αυτήν (*τις ΒΓ, ΓΔ*) και μια γωνία από εδώ (*την ω ή τη φ*), όποια να 'ναι δεν έχει σημασία,

[26] Ντίνος: Ναι

[27] Άρης: Θα κάνουμε πυθαγόρειο, θα βρούμε αυτή εδώ (*εννοεί τη ΒΔ*) …..

[28] Ντίνος: Ναι, και μετά;

[29] Άρης: Και μετά θα έχουμε αυτή (*ΒΔ*) και μια γωνία (*ω ή φ*)

[30] Ντίνος: Θα έχουμε αυτή και μια γωνία. Και μετά τις άλλες πώς θα τις βρούμε;

[31] Άρης: Ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, δε ξέρεις τίποτα απ' αυτά ρε; Θα βρούμε μία και μετά πυθαγόρειο να βρούμε κι' αυτή. Το κατάλαβες;

[32] Ντίνος: Ναι, αυτό θα κάνουμε

[33] Άρης: Οπότε φώναξε τον κύριο τώρα

[34] Δήμος: Τη φ να πάρουμε, τη φ

[35] Άρης: Όχι τη φ, δεν μ' αρέσει η φ ακούς. Λοιπόν θα πάρουμε αυτά εδώ που είπαμε και την ω.

……..

[36] Ντίνος: Άμα ξέραμε μια γωνία, θα γινόταν και με 5 ή με 4. Κάτσε, αν ξέρουμε αυτή … αν ξέρουμε κι' αυτή …. Όχι αυτή είναι 3 …..

<u>Ανάλυση 5^{ου} συμβάντος</u>

- Παρατηρούμε ότι, στους διαλόγους [1]-[13], [19], [27] οι μαθητές αναφέρονται στο πυθαγόρειο θεώρημα με σχέσεις εισόδου-εξόδου. Δεν υπεισέρχονται καθόλου σε λεπτομέρειες, δεν τους ενδιαφέρει η διαδικασία, παρά μόνο τι μπορούν να υπολογίσουν βάσει των δεδομένων.
- Ο Ντίνος στρέφεται στη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών ([14]-[16]), ελέγχει μήπως υπάρχει στρατηγική επίλυσης με κόστος μικρότερο από 7 και τελικά αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει ([17]). Δεδομένου ότι οι συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης είναι 8 και η παύση στα λόγια του είναι πολύ μικρή, ο έλεγχος δεν μπορεί παρά να έγινε με βάση τα δομικά χαρακτηριστικά των τριγωνομετρικών αριθμών. Αποκλείεται σε τόσο μικρό χρονικό διάστημα, για να ελέγξει τις 16 στρατηγικές, να εφάρμοσε αναλυτικά τη διαδικασία, δηλαδή, για την καθεμία να

σκέφτηκε ποιους ακριβώς τριγωνομετρικούς αριθμούς πρέπει να εφαρμόσει διαδοχικά στα δύο τρίγωνα για να υπολογίσει τις τρεις πλευρές. Φαίνεται να συνειδητοποίησε ότι χρειάζεται μια γωνία του ενός τριγώνου, μια γωνία του άλλου τριγώνου (γι' αυτό αναφέρει κόστος 5) και μια οποιαδήποτε πλευρά. Και αφού το μικρότερο κόστος πλευράς είναι 2, αναφέρει ότι το συνολικό κόστος δεν μπορεί να είναι μικρότερο από 7.

- Ο Ντίνος και ο Άρης, αφού ανέπτυξαν στρατηγικές επίλυσης με χρήση μόνο πυθαγορείου θεωρήματος ([1]-[13]) και αφού ο Ντίνος ήλεγξε τρόπους επίλυσης με χρήση μόνο τριγωνομετρικών αριθμών ([17]), σταματούν κάθε προσπάθεια αναζήτησης στρατηγικής με μικρότερο κόστος και αποφασίζουν να εφαρμόσουν δύο πυθαγόρεια ([18]) ζητώντας μου τα απαιτούμενα δεδομένα ([19]). Όμως, η δική μου παρότρυνση ([20]), σε συνδυασμό με την πρόταση του Δήμου ([21]), έχει ως αποτέλεσμα, τελικά να αναπτύξουν στρατηγική επίλυσης με κόστος 6 ([25], [32]), που από μόνοι τους δεν φαίνεται να μπορούσαν να την αναπτύξουν, διότι αρχικά, κανείς από τους δύο δεν είχε σκεφτεί να εφαρμόσει συνδυασμό πυθαγορείου θεωρήματος και τριγωνομετρικών αριθμών. Θεωρούμε, ότι εδώ έχουμε περίπτωση επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων των δύο μαθητών, με τη συγκεκριμένη στρατηγική να ανήκει στην κοινή περιοχή.
- Παρατηρούμε ότι ο Άρης εξηγώντας στο Ντίνο τη στρατηγική επίλυσης με κόστος 6, μπαίνει στη διαδικασία αναστοχασμού. Στην εξήγησή του μάλιστα, αναφορικά με τις δύο μαθηματικές έννοιες, δεν αναφέρεται καθόλου στη διαδικασία, αλλά μιλάει με σχέσεις εισόδου-εξόδου ([25]-[32]).
- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα λόγια του Ντίνου ([36]). Η σκέψη του αποτελεί μια επιτυχημένη ανασκευή του συγκεκριμένου προβλήματος. Στην ουσία προτείνει μια νέα δραστηριότητα. Αντιλαμβάνεται ότι αν δοθεί μια γωνία του τριγώνου ΑΒΔ το ελάχιστο κόστος επίλυσης θα είναι 4, ενώ αν δοθεί μία γωνία του τριγώνου ΒΓΔ τότε το ελάχιστο κόστος επίλυσης θα είναι 5. Πιστεύουμε ότι ο συλλογισμός του είναι προϊόν υψηλού επιπέδου αναστοχασμού. Επίσης, παρατηρούμε ότι μπαίνει σ' αυτή τη νοητική διεργασία χωρίς να έχει στόχο τη μείωση του κόστους, το κίνητρό του είναι καθαρά εσωτερικό και όχι το ελάχιστο κόστος. Αν την ικανοποίησή του την αντλούσε μόνο από το ελάχιστο κόστος, δεν θα είχε κανένα λόγο να μπει στη διαδικασία ανάπτυξης αυτού του συλλογισμού. Το στοιχείο αυτό καταδεικνύει, ότι, πέρα από το κόστος επίλυσης

ως ανταμοιβή, το πλέον ενισχυτικό για το συγκεκριμένο μαθητή, είναι να εμβαθύνει πάνω στον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος.

- Παρατηρώντας τα λόγια του Δήμου ([21]), διαπιστώνουμε ότι προτείνει ένα συνδυασμό δεδομένων, χωρίς να διατυπώνει συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης. Κατά πάσα πιθανότητα, δεν είχε σκεφτεί κανένα τρόπο επίλυσης και απλώς είχε στόχο να εντοπίσει ένα συνδυασμό δεδομένων με συνολικό κόστος πρόσβασης 6, χωρίς καν να γνωρίζει αν με τα δεδομένα αυτά επιλύεται το πρόβλημα. Εδώ το κόστος πρόσβασης λειτούργησε μάλλον προς τη λάθος κατεύθυνση. Αντί να ωθήσει το Δήμο να σκεφτεί τρόπο επίλυσης, τον ώθησε να σκέφτεται συνδυασμούς δεδομένων με κόστος μικρότερο από 7, χωρίς να τους συνδέει με τρόπους επίλυσης. Το φαινόμενο αυτό ήταν μεμονωμένο, δεν εντοπίσαμε άλλο παρόμοιο.

6^{ο} κρίσιμο συμβάν. Τμήμα Β2 Ομάδα 2^{η}

Σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα, παρατηρήσαμε μαθήτρια να αντιμετωπίζει, σε όλη τη διάρκεια της ενασχόλησης, τις δύο μαθηματικές έννοιες με τα δομικά τους χαρακτηριστικά, διαπιστώσαμε μαθήτρια να μετακινείται προς το δομικό επίπεδο κατανόησης των τριγωνομετρικών αριθμών και επίσης, παρατηρήσαμε μαθήτρια να γενικεύει τις 8 στρατηγικές επίλυσης μιας κατηγορίας.

[1] Αναστασία: Άμα ζητήσουμε αυτή τη γωνία (*την ω*), θα ξέρουμε κι αυτή τη γωνία (*τη φ*) και μετά θα μπορέσουμε να βρούμε …..

[2] Βάνα: Τις πλευρές

[3] Αναστασία: Τις πλευρές; …. Πρέπει να πάρουμε και μια πλευρά

……

[4] Αναστασία: Άμα έχουμε αυτή τη πλευρά (*ΑΒ ή ΑΔ*) κι αυτή τη γωνία (*ω ή φ*) , 3 και 2 μπορούμε να βρούμε αυτή τη πλευρά (*ΑΒ ή ΑΔ*) με ημίτονα, συνημίτονα

[5] Βάνα: Πρέπει να το κάνεις με εφαπτομένη αυτό

[6] Αναστασία: Ε και; … Κι' άμα ξέρουμε αυτές τις πλευρές (*ΑΒ, ΑΔ*), βρίσκουμε την υποτείνουσα

[7] Βάνα: Ναι

[8] Αναστασία: Ξέρουμε όλο το τρίγωνο αυτό (*το ΑΒΔ*).

[9] Κορίνα: Ναι

[10] Αναστασία: Οπότε, σ' αυτό το τρίγωνο (*ΒΓΔ*) ξέρουμε αυτή τη πλευρά (*ΒΔ*), θέλουμε κι' άλλη μία γωνία και το βρίσκουμε με ημίτονο, συνημίτονο ξέρω 'γω

[11] Βάνα: Να πάρουμε άλλη μια πλευρά, να το κάνουμε με 7.

……

[12] Αναστασία; Κοίτα, αυτό το λ είναι ένας αριθμός ξέρω 'γω. Αφού ξέρουμε και τη μία πλευρά βρίσκουμε και την άλλη πλευρά. Οπότε, αφού ξέρουμε τις δύο πλευρές κάνουμε πυθαγόρειο και βρίσκουμε και την άλλη πλευρά

[13] Κορίνα: Ναι

[14] Βάνα: Ε ναι εντάξει, αυτό οκ
[15] Αναστασία: Αυτό είναι ότι θέλουμε δύο γωνίες και μια πλευρά
[16] Ίνα: Υπάρχει άλλος τρόπος;
[17] Αναστασία: Όχι
……
[18] Αναστασία; Θέλουμε μια γωνία απ' το ένα τρίγωνο, μια γωνία απ' το άλλο τρίγωνο και μια πλευρά
……..
[19] Ίνα: Να πάρεις απ' τις γωνίες μια και από τις πλευρές δύο
[20] Κορίνα: Όχι, είπαμε δύο γωνίες και μια πλευρά
……
[21] Αναστασία: Λοιπόν, αφού έχουμε την ω, μπορούμε να βρούμε πόσο είναι η φ
[22] Κορίνα: Ωραία, θέλουμε δύο γωνίες και μια πλευρά
[23] Ίνα: Μια γωνία και δύο πλευρές
[24] Κορίνα: Η Αναστασία είπε δύο γωνίες και μια πλευρά
[25] Βάνα: Ναι, δύο γωνίες και μια πλευρά
……..
[26] Κορίνα: Λοιπόν, θα πάρουμε τη ΒΓ πλευρά και άλλες δύο γωνίες
[27] Αναστασία: Ναι. Να πάρουμε την κ …….. και την ω
[28] Ίνα: Γιατί παίρνεις την κ, πάρε αυτές τις δύο (*ΒΓ, ΓΔ*);
[29] Αναστασία: Δεν μπορώ αυτές τις δύο
[30] Ίνα: Γιατί δεν μπορείς
[31] Αναστασία: Δεν βγαίνει μ' αυτές τις δύο
[32] Βάνα: Ναι δε βγαίνει
[33] Αναστασία: Ρε μήπως βγαίνει;
.....
[34] Αναστασία: Με δύο πλευρές και μια γωνία γίνεται;
[35] Κορίνα: Όχι
[36] Αναστασία: Γιατί όχι, αφού ουσιαστικά τις πλευρές θέλουμε
[37] Βάνα: Είπες θέλουμε δύο γωνίες και μια πλευρά
[38] Αναστασία: Περίμενε, ΒΓ και ΓΔ. Άμα ξέρουμε αυτές βρίσκουμε κι' αυτή (*ΒΔ*). Κι' άμα βρούμε αυτή θέλουμε άλλη μια πλευρά και το έχουμε βρει όλο.
[39] Βάνα: Ναι
[40] Αναστασία: 2 και 2 τέσσερα και 3 επτά
[41] Βάνα: Και χωρίς γωνίες
[42] Καθηγητής: Γιατί έχετε κολλήσει στο κάτω τρίγωνο;
[43] Αναστασία: Τώρα πήγαμε στο πάνω
[44] Καθηγητής: Στο επάνω τρίγωνο τι πήρατε;
[45] Αναστασία: Πήραμε τη ΒΓ και τη ΓΔ, βρήκαμε τη ΒΔ και μια από αυτές τις δύο πλευρές (*ΑΒ, ΑΔ*) για να βρούμε αυτή.
[46] Καθηγητής: Σωστά, με κόστος 7. Για κοιτάξτε μήπως υπάρχει και κάτι άλλο
[47] Αναστασία: Εγώ το βρήκα το κάτι άλλο
[48] Κορίνα: Για πες
[49] Αναστασία: Μπορούμε να πάρουμε τη γωνία ω, και αφού ξέρουμε αυτή (*ΒΔ*) …
[50] Βάνα: Ε ναι, κάνεις μετά από αυτά εδώ πέρα (*τριγωνομετρικούς αριθμούς*)
[51] Αναστασία: Αααα και με 6

Ανάλυση 6^{ου} συμβάντος

- Παρατηρούμε ότι σε όλη τη διάρκεια της ενασχόλησης, η Αναστασία αναφέρεται τόσο στο πυθαγόρειο θεώρημα, όσο και στους τριγωνομετρικούς αριθμούς με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά ([4], [6], [10], [12], [38], [45]).
- Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, διακρίνουμε μια αλλαγή στον τρόπο διαχείρισης των τριγωνομετρικών αριθμών από τη Βάνα. Αρχικά, ενώ η Αναστασία αναφέρεται στους τριγωνομετρικούς αριθμούς με σχέσεις εισόδου-εξόδου, η Βάνα αισθάνεται την ανάγκη να αναφερθεί αναλυτικά στη διαδικασία ([4]-[7]). Λίγο πιο μετά όμως, όταν η Αναστασία εξηγεί πώς θα υπολογίσουν τις δύο πλευρές του τριγώνου ΒΓΔ αν γνωρίζουν τη γωνία λ και μια πλευρά, η Βάνα δεν κάνει καμία αναφορά πλέον στη διαδικασία, δείχνει να κατανοεί τον τρόπο και να συμφωνεί ([12]-[15]). Ώσπου στο τέλος, όταν η Αναστασία εντοπίζει τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης και προσπαθεί να την εξηγήσει, η Βάνα συμπληρώνει το σκεπτικό της, αναφερόμενη για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με σχέσεις εισόδου-εξόδου ([45]-[50]).
- Η Αναστασία αφού κατανόησε πώς μπορεί να λυθεί το πρόβλημα με χρήση τριγωνομετρικών αριθμών, κατάφερε να γενικεύσει τις 16 στρατηγικές επίλυσης που ανήκουν στη κατηγορία «Τριγων. Αρ.» ([18]). Θεωρούμε ότι ο συλλογισμός της, κατά πρώτον είναι προϊόν αναστοχασμού υψηλού επιπέδου και κατά δεύτερον αποτελεί ένδειξη ότι έχει κατανοήσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς σε δομικό επίπεδο. Δεν ισχυριζόμαστε ότι η δομική κατανόηση προήλθε αποκλειστικά μέσω της δραστηριότητας. Υποστηρίζουμε όμως, ότι η διαχείριση των πολλών τρόπων επίλυσης, δημιούργησε συνθήκες δομικής αντιμετώπισης των τριγωνομετρικών αριθμών. Επίσης, πιστεύουμε ότι το κίνητρο της μαθήτριας για την προσπάθεια γενίκευσης, είναι εσωτερικό και δεν έχει σχέση με το ελάχιστο κόστος επίλυσης. Με το να γενικεύει, δεν αποβλέπει σε μείωση του κόστους, αλλά στο να οργανώσει όλους τους δυνατούς τρόπους επίλυσης, που χρησιμοποιούν τριγωνομετρικούς αριθμούς και έχουν κόστος επίλυσης 7.
- Από τους διαλόγους [18]-[25] διαπιστώνουμε ότι η ομάδα εγκλωβίζεται στον τρόπο σκέψης της Αναστασία. Φαίνεται ότι οι άριστες επιδόσεις της στα μαθηματικά, κάνουν τις συμμαθήτριές της να τα περιμένουν όλα απ' αυτή. Την εμπιστεύονται, της έχουν δώσει την πρωτοβουλία των κινήσεων, της έχουν εκχωρήσει το δικαίωμα να καθορίσει τον τρόπο επίλυσης αλλά συνάμα και την

ευθύνη να τον εντοπίσει. Οι ίδιες μοιάζουν να έχουν αποποιηθεί των δικών τους ευθυνών αναφορικά με τη δραστηριότητα. Το ότι εντοπίσαμε κι' άλλες δύο παρόμοιες περιπτώσεις, αποτελεί ένδειξη ότι η ανομοιομορφία των ομάδων μπορεί να προκαλέσει τέτοια φαινόμενα.

Συνοψίζοντας για την παρέμβαση αυτή, αναφορικά με τα ερευνητικά ερωτήματα, η μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων έδειξε ότι:

- Και οι τρεις ομάδες ανέπτυξαν στρατηγικές επίλυσης και του ΙΙ και του ΙΙΙ επιπέδου αναστοχαστικής αφαίρεσης.
- Το μεγάλο πλήθος των στρατηγικών επίλυσης της προτεινόμενης δραστηριότητας, λειτούργησε θετικά στο να αντιμετωπίσουν οι μαθητές το πυθαγόρειο θεώρημα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά.
- Υπήρξε περίπτωση μαθήτριας, που μετακινήθηκε από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης των τριγωνομετρικών αριθμών.
- Στις 2 από τις 3 ομάδες αναπτύχθηκαν επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων.
- Υπήρξαν δύο μαθητές που γενίκευσαν τις στρατηγικές επίλυσης μιας κατηγορίας, προϊόν υψηλού επιπέδου αναστοχασμού πάνω στη δραστηριότητα.

Επίσης εντοπίσαμε και 3 άλλα ενδιαφέροντα σημεία:

- Το κίνητρο των νοητικών διεργασιών δύο μαθητών, φαίνεται να είναι εσωτερικό και να μην έχει σχέση με το ελάχιστο κόστος επίλυσης.
- Παρατηρήσαμε το κόστος επίλυσης ως κίνητρο, να λειτουργεί προς τη λάθος κατεύθυνση. Μαθητής έψαχνε συνδυασμούς δεδομένων με συνολικό κόστος μικρότερο από 7, χωρίς να ενδιαφέρεται αν αυτοί οι συνδυασμοί αντιστοιχούν σε κάποια στρατηγική επίλυσης.
- Διαπιστώσαμε τις τρεις μαθήτριες μιας ομάδας να αποποιούνται των ευθυνών τους και να τα περιμένουν όλα από την άριστη μαθήτρια, εκχωρώντας όλα τα δικαιώματα αλλά και τις ευθύνες σ' αυτή. Ένδειξη ότι η ανομοιομορφία των ομάδων προκαλεί τέτοιου είδους φαινόμενα.

4.4 «Ισότητα τριγώνων»: 6η παρέμβαση, τμήμα Γ2

Στην 6η παρέμβαση συμμετείχαν οι μαθητές του 2ου τμήματος της Γ΄ Γυμνασίου, η διάρκειά της ήταν μια διδακτική ώρα και αφορά τη δραστηριότητα «Ισότητα τριγώνων».

Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παρέμβασης που αναφέρουμε παρακάτω, βασίζονται στις δίκες μου παρατηρήσεις και στα φύλλα εργασίας των μαθητών.

- Το ότι οι μαθητές γνώριζαν εξ' αρχής τα προς επιλογήν δεδομένα της συγκεκριμένης δραστηριότητας, δεν προκάλεσε κάποια διαφοροποίηση ούτε στον τρόπο που προσέγγισαν το πρόβλημα, ούτε στη μεταξύ τους επικοινωνία και αλληλεπίδραση, σε σχέση με τις προηγούμενες δραστηριότητες.
- Και οι τέσσερεις ομάδες ανέπτυξαν με σχετική ευκολία μια από τις 6 βέλτιστες στρατηγικές επίλυσης. Στη συνέχεια, και με παρότρυνση δική μου, άρχισαν να αναζητούν μήπως υπάρχει τρόπος επίλυσης με μικρότερο κόστος. Στην ουσία, έπρεπε να ελέγξουν, αν αποδεικνύεται η ισότητα τριγώνων με μόνο ένα από τα προς επιλογήν δεδομένα. Ο αρκετός χρόνος που αφιέρωσαν για να το ελέγξουν, μας κάνει να πιστεύουμε, ότι κανένας μαθητής δεν ήταν σε θέση να χειριστεί τα κριτήρια ισότητας τριγώνων με τα δομικά τους χαρακτηριστικά. Δηλαδή δεν ήταν σε θέση να κρίνουν ότι δεν μπορεί να προκύψει ισότητα τριγώνων με μόνο δύο κύρια στοιχεία τους ίσα.
- Στη 2η ομάδα, η Δέσποινα και ο Χάρης πήραν διαδοχικά, ένα κάθε φορά, όλα τα προς επιλογήν δεδομένα και θεωρώντας ότι ισχύει, ήλεγξαν αν μπορούν να αποδείξουν ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Στην ουσία, μπήκαν στη διαδικασία που αποβλέπαμε μέσω αυτής της δραστηριότητας.
- Προς το τέλος της παρέμβασης, όταν ρώτησα την 3η ομάδα αν έχουν βρει τρόπο επίλυσης με μικρότερο κόστος, ο Οδυσσέας μου ανέφερε ότι δεν πρέπει να υπάρχει γιατί χρειαζόμαστε τρία στοιχεία για να είναι δύο τρίγωνα ίσα. Και αφού έχουμε ήδη ένα (ΑΔ=Α΄Δ΄), χρειαζόμαστε οπωσδήποτε άλλα δύο, άρα δεν μπορεί να γίνει μόνο με ένα ακόμη. Η απάντησή του εκφράζει ακριβώς το στόχο της συγκεκριμένης δραστηριότητας, να δημιουργήσει συνθήκες, ώστε οι μαθητές να μετατοπιστούν προς το δομικό επίπεδο κατανόησης των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.

4.5 «Γραμμική συνάρτηση»: 7η παρέμβαση, τμήμα Β2

Στην 7η παρέμβαση συμμετείχαν οι μαθητές του 2ου τμήματος της Β΄ Γυμνασίου, η διάρκειά της ήταν τρεις διδακτικές ώρες και αφορά τη δραστηριότητα «Γραμμική συνάρτηση».

Τα αποτελέσματα και αυτής της παρέμβασης βασίζονται στις δίκες μου παρατηρήσεις και στα φύλλα εργασίας των μαθητών.

- Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στη διαχείριση του μεγάλου πλήθους των δεδομένων. Βέβαια χρειάστηκαν τη δική μου βοήθεια, που σ' αυτή την παρέμβαση ήταν εμφανώς μεγαλύτερη. Επίσης χρειάστηκαν και αρκετό χρόνο, ένδειξη ότι η πρώτη διδακτική ώρα αφιερώθηκε εξ' ολοκλήρου στο να κατανοήσουν τα δεδομένα, να τα ερμηνεύσουν και να εντοπίσουν ποια από αυτά είναι ισοδύναμα.
- Το ότι καμία ομάδα δε χρησιμοποίησε δεδομένα που αφορούν τις δύο δεξαμενές, έστω κι' αν εγώ τους προέτρεψα προς αυτή την κατεύθυνση, υποδηλώνει προσπάθεια σύνδεσης των συναρτήσεων με την πραγματική κατάσταση, άντληση πληροφοριών από τις γραφικές παραστάσεις και μετατροπή τους σε στοιχεία για τη διαδικασία μετάγγισης από τη δεξαμενή Α στη δεξαμενή Β.
- Καμία ομάδα δεν επέλεξε ως δεδομένο τους τύπους των συναρτήσεων. Τους προσδιόρισαν με βάση τα δεδομένα των γραφικών παραστάσεων. Αυτό, σε συνδυασμό με το ότι χρησιμοποίησαν τους τύπους για να προσδιορίσουν το σημείο (δ,0) της πρώτης συνάρτησης και το σημείο με τετμημένη ν της δεύτερης, σημαίνει ότι μπήκαν στη λογική της μετάβασης από τη γραφική παράσταση στον τύπο της συνάρτησης και αντίστροφα, έστω κι' αν και σ' αυτό το σημείο προσέφερα όση βοήθεια χρειάστηκε κάθε ομάδα. Η αξία αυτού του στοιχείου μεγιστοποιείται, αν αναλογιστούμε ότι οι μαθητές είχαν έρθει πρόσφατα σ' επαφή με την έννοια της συνάρτησης.
- Ένα σημαντικό στοιχείο κατά την άποψή μας, είναι ότι ένας μαθητής προσέγγισε την ενδιαφέρουσα στρατηγική επίλυσης. Αρχικά, μου αναφέρει μια σκέψη του, που στη ουσία ήταν η απαρχή της συγκεκριμένης στρατηγικής. Αμέσως τον ενθάρρυνα να συνεχίσει προς αυτή την κατεύθυνση. Στην πορεία αντιμετώπισε κάποια προβλήματα, αλλά τον βοήθησα να τα ξεπέρασε και τελικά, κατάφερε να την αναπτύξει και να την ολοκληρώσει. Εκτιμούμε ότι η προσέγγιση της

στρατηγικής αυτής, καταδεικνύει τη δημιουργική ικανότητα του συγκεκριμένου μαθητή.

4.6 Συζήτηση περί επιπέδου μαθηματικής σκέψης: 8η παρέμβαση, τμήμα Β2

Η 8η παρέμβαση ήταν διαφορετική από τις προηγούμενες. Εντάσσεται στο πλαίσιο της προοπτικής να αφαιρεθεί το κόστος πρόσβασης από τις προτεινόμενες δραστηριότητες και να υιοθετηθεί ως κίνητρο το επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Επιχειρήσαμε μια εισαγωγή, πραγματοποιώντας συζήτηση με τους μαθητές του 2ου τμήματος της Β΄ Γυμνασίου, με θέμα το επίπεδο μαθηματικής σκέψης, διάρκειας μιας διδακτικής ώρας. Θέλαμε να δούμε, τι σημαίνει γι' αυτούς ότι μια στρατηγική επίλυσης απαιτεί υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης από μια άλλη, πώς το αντιλαμβάνονται οι ίδιοι.

Δώσαμε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας που περιείχε τη δραστηριότητα «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία», χωρίς όμως να αναγράφονται τα κόστη πρόσβασης στα δεδομένα και 6 προτεινόμενους συνδυασμούς δεδομένων που ο καθένας αντιστοιχούσε σε μια διαφορετική στρατηγική επίλυσης. Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα είχαν εμπλακεί οι ίδιοι μαθητές περίπου 2 μήνες πριν. Οι 6 διαφορετικοί συνδυασμοί δεδομένων φαίνονται παρακάτω.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

1η $AB=12m,\ A\Delta=9m,\ B\Gamma=17m,\ \Gamma\Delta=8m$

2η $AB=12m,\ A\Delta=9m,\ B\Gamma=17m$

3η $AB=12m,\ B\Gamma=17m,\ \Gamma\Delta=8m$

4η $AB=12m,\ \omega=37^o,\ \kappa=28^o$

5η $A\Delta=9m,\ \omega=37^o,\ B\Gamma=17m$

6η $AB=12m,\ A\Delta=9m,\ \lambda=62^o$

Η 1η στρατηγική δε χρησιμοποιεί ούτε πυθαγόρειο ούτε τριγωνομετρία, η 2η και 3η χρησιμοποιούν μόνο πυθαγόρειο, η 4η μόνο τριγωνομετρία, ενώ η 5η και 6η συνδυασμό πυθαγορείου και τριγωνομετρίας.

Αφού αναπτύξαμε στον πίνακα τις 6 στρατηγικές, προκάλεσα τους μαθητές να εκφέρουν τη γνώμη τους για το ποια νομίζουν ότι απαιτεί το υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης και γιατί. Από μένα δεν έγινε κανένα σχόλιο πάνω στα λεγόμενά τους. Ακούστηκαν ενδιαφέρουσες απόψεις. Τέσσερεις από αυτές είναι οι παρακάτω.

- Η Φανή αρχικά υποστήριξε ότι είναι η $4^{η}$ επειδή είναι πιο δύσκολη η τριγωνομετρία. Όμως, αμέσως μετά ανασκεύασε, λέγοντας ότι μάλλον η $5^{η}$ και $6^{η}$ είναι, διότι απαιτούν και πυθαγόρειο και τριγωνομετρία.
- Ο Ντίνος είπε ότι είναι η $4^{η}$ γιατί οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι δύσκολοι, ενώ το πυθαγόρειο είναι πιο εύκολο.
- Η Άννα συμφώνησε με την Φανή, υποστηρίζοντας ότι για να εφαρμόσουμε την $5^{η}$ και την $6^{η}$ πρέπει να ξέρουμε και πυθαγόρειο και τριγωνομετρία και ότι αν ένας μαθητής εφαρμόσει την $4^{η}$ δεν θα γνωρίζουμε αν ξέρει το πυθαγόρειο θεώρημα.
- Η Μαίρη όμως, εξέφρασε μια εντελώς διαφορετική άποψη. Υποστήριξε ότι είναι η $1^{η}$ γιατί ο τρόπος επίλυσης είναι πιο απλός, δεν απαιτεί ούτε πυθαγόρειο ούτε τριγωνομετρία και μπορεί να τον εφαρμόσει και ένας μαθητής του δημοτικού.

Στη συνέχεια ζήτησα από τους μαθητές, να ιεραρχήσουν τις 6 στρατηγικές από το υψηλότερο προς το χαμηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης, με όποιο κριτήριο αυτοί νομίζουν και να τις γράψουν στο φύλλο εργασίας.

Εξετάζοντας όσα φύλλα εργασίας εμπεριείχαν δομή στο σκεπτικό ιεράρχησης, με την έννοια ότι οι στρατηγικές $2^{η}$, $3^{η}$ και $5^{η}$, $6^{η}$ να είναι στο ίδιο επίπεδο κατάταξης ή έστω η μια αμέσως μετά την άλλη, δεν διακρίναμε κάποια τάση στις προτιμήσεις των μαθητών. Υπήρχαν 6 φύλλα εργασίας με την $5^{η}$ και $6^{η}$ στρατηγική στο υψηλότερο επίπεδο, ενώ άλλα 5 με την $4^{η}$ στρατηγική. Αυτές ήταν οι επικρατέστερες απόψεις. Αξιοσημείωτο είναι ότι 3 μαθητές θεώρησαν ότι η $1^{η}$ στρατηγική είναι αυτή με το υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης. Φαίνεται ότι η άποψη της Μαίρης απηχεί και σε άλλους δύο μαθητές.

Δεν κάναμε απομαγνητοφώνηση της συζήτησης, ούτε περεταίρω ανάλυση. Τα πρώτα συμπεράσματα, βάσει των φύλλων εργασίας και της δικής μου εμπειρίας από τη συζήτηση, είναι ότι δεν υπάρχει κυρίαρχη άποψη. Κάποιοι μαθητές εκτιμούν ως υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης το συνδυασμό μαθηματικών γνώσεων, ενώ κάποιοι άλλοι, το ταυτίζουν με το βαθμό δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι ίδιοι στην

εφαρμογή μαθηματικών εννοιών. Επίσης, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι στη συνείδηση κάποιων μαθητών, ανώτερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης σημαίνει χρήση λιγότερων μαθηματικών. Η άποψη αυτή παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αν συνυπολογίζουμε, ότι η Μαίρη που την εξέφρασε έχει πολύ καλές επιδόσεις στα μαθηματικά.

5. Συμπεράσματα - Συζήτηση

Η παρούσα εργασία προτείνει ένα νέο είδος μαθηματικών δραστηριοτήτων, τις μαθηματικές δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων και επιχειρεί να διερευνήσει πτυχές του γενικού ερωτήματος: κατά πόσο αυτές οι δραστηριότητες συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και ποιες συνθήκες διδασκαλίας ευνοούν τη λειτουργία τους ως εργαλείο μάθησης των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, προσπαθεί να απαντήσει, αν η ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, συνεισφέρει στην ανάπτυξη μετά-δεξιοτήτων και στην εννοιολογική κατανόηση.

Τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης και διαπραγμάτευσης και η μαθηματική επικοινωνία που αναπτύσσεται στην τάξη, όταν οι μαθητές εμπλέκονται με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, δεν μπορούν να αποκαλυφθούν χωρίς την εμπλοκή του ερευνητή και δίχως την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων.

Η ακριβής καταγραφή συμβάντων που φώτισαν με ευκρίνεια τα φαινόμενα που μελετάμε, παρέχουν ισχυρά τεκμήρια για την εξαγωγή συμπερασμάτων, σε καμία περίπτωση όμως δεν αποτελούν αδιαμφισβήτητες αποδείξεις. Δεν είναι στους στόχους μας η γενίκευση των συμπερασμάτων, δεν αναζητούμε τις μεγάλες και καθολικές θεωρίες. Η ισχύς των συμπερασμάτων είναι «τοπική», με την έννοια των ιδιαίτερων συνθηκών και καταστάσεων υπό τις οποίες διεξήχθη η έρευνα. Η γενίκευση μπορεί να επιτευχθεί μόνο μέσα από την επανάληψη της έρευνας, υπό άλλες συνθήκες και σε διαφορετικές καταστάσεις.

Από τη στιγμή που προσπαθώ να δω τα πράγματα από μέσα, ως παρατηρητής, ερευνητής και καθηγητής της τάξης, εγείρεται ζήτημα αντικειμενικότητας των ερμηνειών. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις τέτοιου τύπου ερευνών, ακριβώς αυτό το υποκειμενικό στοιχείο είναι που τελικά κυριαρχεί και γίνεται αποδεκτό.

- Η έρευνα έδειξε, ότι κάθε ομάδα, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, ανέπτυξε ικανοποιητικό πλήθος στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές με διάθεση συμμετοχής, μπήκαν στη διαδικασία να συντονίσουν, να ελέγξουν και να διαχειριστούν βασικές γνωστικές δεξιότητες.
- Διαπιστώσαμε, ότι το στοιχείο της επιλογής δεδομένων, δημιούργησε, στους μαθητές που διέθεταν τις απαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες, συνθήκες προβληματισμού για το ποιες γνώσεις να χρησιμοποιήσουν, πότε να τις χρησιμοποιήσουν και γιατί. Οι μαθητές που συμμετείχαν ενεργά στο σχεδιασμό στρατηγικών επίλυσης, είχαν την ευκαιρία να αξιοποιήσουν, αλλά και να βελτιώσουν την ικανότητά τους στο να συγκρίνουν στρατηγικές, να γενικεύουν λύσεις και να παρακολουθούν τις γνωστικές τους διεργασίες.
- Διαπιστώσαμε, ότι, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, η αλληλεπίδραση των μαθητών που συμμετείχαν στην κοινή προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, οδήγησε στην ανάπτυξη επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων, δηλαδή στη δημιουργία επικαλυπτόμενων ZPD, που σηματοδοτεί ότι οι μαθητές αυτοί μπήκαν σε διαδικασία μάθησης.
- Ανιχνεύσαμε περιπτώσεις, που η δυνατότητα επιλογής δεδομένων, μη γνωστών εξ' αρχής, συνέβαλε στη δημιουργία φαινομένων αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στην παλιά και νέα γνώση. Στοιχείο που αποκαλύπτει την ύπαρξη πορείας προς την κατασκευή της νέας γνώσης.
- Η έρευνα έδειξε, ότι οι μαθητές που συμμετείχαν ενεργά στην κοινή προσπάθεια ανάπτυξης και ελέγχου πολλών στρατηγικών επίλυσης, με στόχο τον εντοπισμό της βέλτιστης στρατηγικής, είχαν την ευκαιρία να διαχειριστούν κατ' εξακολούθηση μαθηματικές έννοιες βάσει των δομικών τους χαρακτηριστικών ή και να μετακινηθούν από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης των εννοιών αυτών.
- Τα στοιχεία απέδειξαν, ότι η ύπαρξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές με ενεργητική διάθεση, να επιχειρηματολογήσουν και να δικαιολογήσουν την επιλογή τους ή και να κρίνουν τις επιλογές των συμμαθητών τους, να αποστασιοποιηθούν από τη δράση τους και να την εκλάβουν ως αντικείμενο αναστοχασμού.

Όλα τα παραπάνω, μας οδηγούν στο συμπέρασμα, ότι η ενασχόληση των μαθητών με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, σε συνθήκες αμαδοσυνεργατικής διδασκαλίας,

συνεισφέρουν τόσο στις μετά-δεξιότητες όσο και στην εννοιολογική ανάπτυξη, υπό δύο προϋποθέσεις.

Πρώτον, ο μαθητής πρέπει να κατέχει τις βασικές γνωστικές δεξιότητες που απαιτεί η δραστηριότητα. Οι προαπαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες μιας σωστά σχεδιασμένης δραστηριότητας με επιλογή δεδομένων, είναι αυτές που μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε τις στρατηγικές με το μεγαλύτερο κόστος επίλυσης. Μαθητές χωρίς τη γνώση βασικών δεξιοτήτων, δεν μπόρεσαν να συμμετάσχουν στη μαθηματική επικοινωνία και τη διαπραγμάτευση. Ως εκ τούτου δεν ωφελήθηκαν διδακτικά. Η φύση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, είναι τέτοια που δεν ενδείκνυνται για διδασκαλία με στόχο την εκμάθηση βασικών γνωστικών δεξιοτήτων.

Δεύτερον, ο μαθητής πρέπει να έχει τη βούληση να συμμετάσχει σε μαθηματικές δραστηριότητες και μάλιστα σε πρακτικές συνεργατικής μάθησης. Πρέπει να επιδείξει ενεργητική στάση, πνεύμα συνεργασίας και διάθεση να δραστηριοποιηθεί. Οι ενεργά συμμετέχοντες μαθητές επωφελούνται πολλαπλώς από την εμπλοκή τους στις δραστηριότητες με επιλογή δεδομένων. Διαπιστώσαμε ότι, εκτός από τους μαθητές που, είτε λόγω γνωστικής αδυναμίας, είτε λόγω αρνητικής στάσης σε οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα, δεν συμμετείχαν σχεδόν καθόλου, μη συμμετοχή ή πολύ μικρή συμμετοχή επέδειξαν επίσης και μαθητές με καλές επιδόσεις στα μαθηματικά. Για τους τελευταίους, έχουμε ενδείξεις ότι η στάση τους αυτή, οφείλεται στην ανταγωνιστικότητα και στην έλλειψη αλληλεγγύης που επιδεικνύουν γενικά ως άτομα στην τάξη, όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά σε όλα τα μαθήματα. Η συστηματική συμμετοχή τους σε παρόμοιες δραστηριότητες συνεργατικής μάθησης, ίσως συμβάλλει στο να ενταχθούν και να λειτουργήσουν ως μέλη ομάδας

Η έρευνα φώτισε ορισμένα σημεία με ιδιαίτερο ενδιαφέρον, πέρα από αυτά που έχουν σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα.

- Διαπιστώσαμε ότι η ενασχόληση με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, έδωσε την ευκαιρία να αναδειχθούν μαθητές μετρίων ή και χαμηλών επιδόσεων, είτε προτείνοντας αυτοί τη βέλτιστη στρατηγική, είτε συμβάλλοντας καθοριστικά στον εντοπισμό της, είτε πρωταγωνιστώντας στη συζήτηση, σε επίπεδο ομάδας.
- Έχουμε σοβαρές ενδείξεις, ότι η ανομοιομορφία των επιδόσεων. ως προϋπόθεση συγκρότησης των ομάδων, γεννά προβλήματα συνοχής και μη καλής συνεργασίας των μαθητών. Διαπιστώσαμε να εκχωρούνται τα δικαιώματα αλλά και οι ευθύνες

στον άριστο μαθητή της ομάδας, ενώ οι υπόλοιποι, αποποιούμενοι των ευθυνών τους να παίζουν ρόλο κομπάρσου στην όλη διαδικασία.

- Εντοπίσαμε περιπτώσεις δράσης των μαθητών, που το κίνητρο φαίνεται να είναι εσωτερικό και να μη σχετίζεται με το ελάχιστο κόστος επίλυσης.
- Εντοπίσαμε όμως και περίπτωση, που το κόστος πρόσβασης στα δεδομένα λειτούργησε αποπροσανατολιστικά. Μαθητής επιδίδονταν σε προσπάθεια αναζήτησης συνδυασμού τριών δεδομένων, με σύνολο κόστους πρόσβασης μικρότερο από το μέχρι τότε ελάχιστο κόστος που είχε πετύχει η ομάδα, χωρίς να ενδιαφέρεται αν σ' αυτό το συνδυασμό αντιστοιχεί στρατηγική επίλυσης.

Περισσότερα στοιχεία, σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα, ίσως προκύψουν από την απομαγνητοφώνηση και λεπτομερή μελέτη των υπόλοιπων παρεμβάσεων, ή και από τη χρήση άλλων εργαλείων ανάλυσης.

Αναφέρουμε ορισμένες σκέψεις, προεκτάσεις και ερωτήματα, που απορρέουν από τη φύση των μαθηματικών δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων.

- Ένα πλεονέκτημά τους είναι, ότι επιτρέπουν στους μαθητές να εμπλακούν με την ίδια δραστηριότητα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, ώστε, κάθε φορά, εφαρμόζοντας τη νέα γνώση να μειώνουν το κόστος επίλυσης. Αυτή η διδακτική πρακτική, συμβάλλει στη σύνδεση της παλιάς με τη νέα γνώση. Βοηθάει τους μαθητές να δουν τη μία ως συνέχεια της άλλης, και τις δύο ως μέρη μιας ενιαίας μαθηματικής ολότητας και όχι ξεκομμένες και ασυσχέτιστες μεταξύ τους.
- Οι προτεινόμενες δραστηριότητες μας παρέχουν τη δυνατότητα, με κατάλληλη αλλαγή στα κόστη πρόσβασης, να διαφοροποιήσουμε τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης, αλλάζοντας, ενδεχομένως, το διδακτικό στόχο.
- Η εκχώρηση της επιλογής των δεδομένων στους ίδιους τους μαθητές, δημιουργεί μια άλλου είδους σχέση ανάμεσα στο μαθητή και τη πορεία επίλυσης. Η πορεία επίλυσης δεν προκαθορίζεται από το ίδιο το πρόβλημα, αλλά ο μαθητής, μέσω της επιλογής δεδομένων, συμμετέχει ενεργά στον καθορισμό της. Το ερώτημα είναι αν αυτό το πλαίσιο δημιουργεί κίνητρα ενδιαφέροντος, αν επιδρά στη βούληση του μαθητή.
- Όσες στρατηγικές επίλυσης αναπτύσσουν ο μαθητές, κατά την ενασχόλησή τους με μια προτεινόμενη δραστηριότητα, τόσα διαφορετικά προβλήματα, εν μέρει κατασκευάζουν και επιλύουν. Η κατασκευή και η επίλυση διενεργούνται

ταυτόχρονα, με αποτέλεσμα να μην τις βλέπουν ως δύο διακριτές διαδικασίες όπως γίνεται συνήθως. Δεν καταπιάνονται μόνο με τη μία, την επίλυση, αλλά και με τις δύο, ως αλληλοεξαρτώμενες δικές τους δράσεις.

- Οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης διαβαθμισμένου γνωστικού επιπέδου, επιτρέπουν την επιτυχή αντιμετώπιση του προβλήματος από ένα ευρύ φάσμα μαθητών. Το ερώτημα αφορά μαθητές, που επιδεικνύουν συστηματική αποτυχία και αποστροφή στα μαθηματικά προβλήματα και έχει να κάνει, με το αν η ενασχόλησή τους με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, μπορεί να λειτουργήσει θετικά, στο να δουν με άλλο μάτι και τα μαθηματικά και τις ικανότητές τους στα μαθηματικά.
- Δεδομένου ότι οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης είναι εγγενής ιδιότητα των προτεινόμενων δραστηριοτήτων, το ερώτημα που προκύπτει είναι, αν συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας.
- Μια προοπτική και μια εναλλακτική μορφή των δραστηριοτήτων με επιλογή δεδομένων είναι, τα προς επιλογήν δεδομένα να μην προκαθορίζονται εξ' αρχής, αλλά να τα αναζητούν και να τα συλλέγουν οι ίδιοι οι μαθητές χωρίς κανένα περιορισμό.
- Οι προτεινόμενες δραστηριότητες φαίνεται να είναι πιο κοντά στη φύση των πραγματικών προβλημάτων. Σ' ένα πραγματικό πρόβλημα, πάντα τίθεται το ερώτημα, όχι όμως το ποια δεδομένα θα χρησιμοποιηθούν οπωσδήποτε για την αντιμετώπισή του.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Adelman, C. Kemmis, S. & Jenkins, D. (1980). Rethinking case study: notes from the Second Cambridge Conference. *Towards a Science of the Singular: Centre for Applied Research in Education*, University of East Anglia, 45-61.

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education 3*: pp.125–153.

Brousseau, G. (1986). Théorisation des Phénomènes d'Enseignement des Mathématiques, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université de Bordeaux I.

Cohen, L. Manion, L. & Morrison, K. (2000), *Research Methods in Education*. Publisher: Routledge Falmer. Για την ελληνική γλώσσα: Εκδόσεις Μεταίχμιο 2008.

Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs, 58* (5, Whole No. 270).

Edelman, G. (1992). *Bright Air, Brilliant Fire*. Basic Books, Inc. (ed.) Για την ελληνική γλώσσα: Εκδόσεις Κάτοπτρο 1996.

Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: Cognitive considerations in school mathematics reform. In W.G. Secada (Ed.), *International Journal of Educational Research, Vol. 17* (pp. 439–456). Oxford: Pergamon Press.

Hirschfeld-Cotton, K. (2008). Mathematical Communication, Conceptual Understanding, and Students' Attitudes Toward Mathematics. *Action Research Projects.* Paper 4.

Hoyles, C. (1985). What is the point of group discussion in mathematics? *Educational Studies inMathematics, 16*, 205-214.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from?, In A.H. Schoenfeld, (Ed.) *Cognitive Science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum associates, Publishers London, 123-147, Hillsdale, NJ: Erlbaum

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161–168). Seoul, South Korea: PME.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A. & Guberman, R. (2010). *Employing multiple solution tasks for the development of mathematical creativity: Two comparative studies*, In the 7th conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 7.

Lerman, S. (2001). Accounting for accounts of learning mathematics: reading the ZPD in videos and transcripts. In D. Clarke (Ed.), *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms,* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2011). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry, *Journal of Mathematical Behavior 31*, pp. 73– 90.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2012). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12:4*, pp. 311-333.

Lev, M. & Leikin, R. (2013). *The connection between mathematical creativity and high ability in mathematics*, In the 8th conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 8.

Mamona-Downs, J. (1993).On analysing problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. Ill, pp. 41-47). Tsukuba (Japan): International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science 26*: 49-63.

Nisbet, J. & Watt, J. (1984). Case study. In Bell, J., Bush, T., Fox, A., Goodey, J. & Goulding, S, (eds.) *Conducting Small-scale investigations in Education Management*. London: Harper and Row, 72-92.

Pintrich, P.R. & De Groot, E.V. (1990). Motivation and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology 82*: 33–40.

Schön, D. (1979). Generative Metaphor: A Perspective on Problem Setting in Social Policy. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and Thought*, 254-283 Cambridge: Cambridge University Presss.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In Harel, G. and Dubinsky, E. (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp.59-84, Washington:MAA.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1997). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. *International Handbook of Mathematics Education* Kluwer International Handbooks of Education Volume 4, 827-876.

Sigel, I. A. (1981). Social experience in the development of representational thought: Distancing theory. In I. E. Sigel, D. M. Brodzinksy, and R. M. Golinkoff (eds.), *New Directions in Piagetian Theory and Practice*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NL

Silver, E. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. L. Lin (Eds.). *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 66-85). Tsukuba (Japan): International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematical Education*, 2, 67-72.

Shukkwan, S. L. (1993). Mathematical problem posing: The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol III. pp. 33-40). Tsukuba (Japan): International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Steffe, L.P. & D'Ambrosio, B.S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114–145.

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S. & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Torrance, E. P. (1974). *The Torrance Tests of Creative Thinking.* Benseville, IL: Scholastic Testing Services.

Von Glasersfeld, E. (1983). Learning as a constructive activity. In: J. C. Bergeron & N. Herscovics (ed*.) Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education*, Vol. 1. Montreal: PME-NA, 41–101.

Von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, Re-Presentation, and Reflection: An Interpretation of Experience and of Piaget's Approach. In: L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience.* New York: Springer, pp.45–67.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Weiner, B. (1986). *An Attributional Theory of Motivation and Emotion*. New York: Springer-Verlag.

Wheatley, G.H. (1992). The role of reflection in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics 23*: pp. 529-541, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 171-191.

Βοσνιάδου Σ. (2001). *Εισαγωγή στην ψυχολογία. Τόμος Α΄.* Εκδόσεις Gutenberg.

Μαυρομάτης Ι., Ζουγανέλη Α., Φρυδά Ε. & Λουκά Σ. (2008). Αξιολόγηση του μαθητή. *Έρευνα για την αξιολόγηση ποιοτικών χαρακτηριστικών του συστήματος πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, σελ. 241-280.