ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ»

ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ
Α.Μ. Δ200611

Επιβλέπων Καθηγητής: Θ. ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ

ΑΘΗΝΑ, Μάρτης 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η παρούσα διπλωματική εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα
Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος (επιβλέπων καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	……
Γιαννακούλιας Ευστάθιος	Αν. Καθηγητής	……
Πόταρη Δέσποινα	Αν. Καθηγήτρια	……

Ευχαριστώ θερμά:

- Τον κ**. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη** ο οποίος επέβλεψε τη συγγραφή της διπλωματικής εργασίας και ήταν πάντα πρόθυμος να βοηθήσει αποτελεσματικά.
- Τον κ. **Ευστάθιο Γιαννακούλια** για τις πολλές και ουσιαστικές συζητήσεις μας σχετικά με το θέμα, καθώς επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε.
- Την κ. **Δέσποινα Πόταρη** για τις χρήσιμες υποδείξεις της όσον αφορά τη διεξαγωγή της έρευνας.
- Τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα και τους συναδέλφους μαθηματικούς καθηγητές που πρόθυμα συνέβαλαν στην πραγματοποίηση της έρευνας.

Στις κόρες μου Ιλιάνα και Σίλια
Στην γυναίκα μου Ελένη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

Εισαγωγή …….. 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1. Ιστορική ανασκόπηση…….. 10

2. Η απόδειξη…… 15

2.1 Μορφές απόδειξης……. 17

2.2 Η εικασία πριν την απόδειξη……. 18

2.3 Η απόδειξη στην μέση εκπαίδευση…….. 19

2.4 Η επιχειρηματολογία σην απόδειξη…….. 20

2.5 Το δυναμικό λογισμικό και η απόδειξη…… 21

2.6 Ο ρόλος της απόδειξης και του πειραματισμού……... 23

2.7 Η απόδειξη ως φορέας της μαθηματικής γνώσης……. 23

2.8 Η περιεκτική προοπτική της απόδειξης…… 25

3. Μέθοδοι απόδειξης στα μαθηματικά……. 28

3.1 Γενικά…… 28

3.2 Κατηγορίες αποδείξεων…… 30

3.3 Συμπεράσματα…….. 34

4. Η μαθηματική λογική…….. 38

4.1 Οι απαρχές της λογικής……. 38

4.2 Η θεωρία των συλλογισμών……. 39

4.3 Η Στωική λογική……... 42

4.4 Η λογική στην ύστερη αρχαιότητα, στους άραβες και στον μεσαίωνα……... 43

4.5 Η νεότερη λογική……... 44

4.6 Στοιχεία μαθηματικής λογικής…….. 48

4.7 Κατηγορικός λογισμός…….. 61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

5. Η μέθοδος της «εις ατόπου απαγωγής»…….. 67

5.1 Εφαρμογές ……..……... 68

6. Η μέθοδος της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής…… 72

6.1 Εφαρμογές ……..……... 80

7. Η απόδειξη με χρήση του αντιπαραδείγματος…….. 85

7.1 Εφαρμογές ……..……... 90

8. Η συμπερασματική απόδειξη……. 93

8.1 Εφαρμογές ……..……... 96

8.2 Συμπερασματική απόδειξη με ισοδυναμία……... 99

8.3 Εφαρμογές ……..……... 101

9. Η απαγωγική μέθοδος απόδειξης……... 107

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

10. Τα λάθη και οι παρανοήσεις στα μαθηματικά…… 110

10.1 Οι παρανοήσεις στην απόδειξη……. 110

10.2 Το σωστό και το λάθος σε μια μαθηματική πρόταση……... 113

10.3 Η λάθος εύρεση ενός μαθηματικού αντικειμένου……. 118

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

11. Έρευνα « Η απόδειξη στα μαθηματικά»……. 122

11.1 Εισαγωγή για την έρευνα……... 123

11.2 Το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας……... 123

11.3 Το ερευνητικό πρόβλημα και τα ερωτήματα……. 124

11.4 Ο τρόπος διεξαγωγής της έρευνας……. 127

11.5 Τα ευρήματα της έρευνας…….. 145

11.6 Τα αποτελέσματα της έρευνας…….. 152

11.7 Το ερωτηματολόγιο της έρευνας……... 158

12. Επίλογος (Η κατασκευή των αποδείξεων)…… 161

13. Αναφορές – Βιβλιογραφία……. 161

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γιατί αποδεικνύουμε; Τι είναι το να αποδεικνύουμε; Ποια έννοια έχει το να αποδεικνύουμε; Ποια είναι η αξία και η σημασία μιας απόδειξης; Αυτές οι ερωτήσεις είναι προκαταρκτικές κάθε σκέψης πάνω στην εκμάθηση της απόδειξης. Είναι γενικά παραδεκτό ότι μια μαθηματική απόδειξη είναι περισσότερο ελκυστική όταν είναι μικρή, κατανοητή και κομψή. Διερωτάται κανείς ποιος είναι ο ρόλος των αποδείξεων στον τρόπο σκέψης και μάθησης; Η κατάκτηση της διαδικασίας της απόδειξης αποτελεί αναμφισβήτητα το πιο κρίσιμο σημείο της μαθησιακής διαδικασίας, σηματοδοτεί το πέρασμα από τα πρακτικά-εμπειρικά μαθηματικά στην επιστήμη των μαθηματικών. Είναι το περιβάλλον μια πηγή μαθηματικής γνώσης, από το οποίο οι αντλούμενες εμπειρίες μπορούν να εκφραστούν με αυξανόμενη ακρίβεια, ώστε να αποτελέσουν συνεκτικά σύνολα γνώσεων.

Η ιστορία των μαθηματικών είναι ένα μέσο για να συλλάβουμε την αξία και την σημασία των μαθηματικών αντικειμένων. Οι μαθηματικές έννοιες και θεωρίες έχουν μια ιστορία, όπως επίσης και η ιδέα της απόδειξης. Για να φωτίσουμε αυτή την πτυχή της αποδεικτικής διαδικασίας εξετάζουμε την ιστορία των μαθηματικών, ερευνώντας ποια ήταν η σημασία της απόδειξης δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στα κύρια σημεία της εξέλιξης, δηλαδή στην γέννηση της ιδέας της απόδειξης και στην μετέπειτα εξέλιξή της. Κάτω από αυτό το ιστορικό πρίσμα εμφανίζονται τα προβλήματα στην εκμάθηση μιας απόδειξης και αναδεικνύονται οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές εργαζόμενοι σε μια αποδεικτική διαδικασία.

Η αυξημένη χρήση των Η/Υ στα μαθηματικά έχει αρχίσει να προβληματίζει σοβαρά τη μαθηματική κοινότητα για τη φύση της μαθηματικής απόδειξης. Ήδη υπάρχουν αρκετές αποδείξεις σημαντικών μαθηματικών προβλημάτων (π.χ. θεώρημα τεσσάρων χρωμάτων, εικασία του Κέπλερ κλπ) για τις οποίες κάποιοι θεωρούν ότι ουσιαστικά έχουν πραγματοποιηθεί με χρήση Η/Υ. Τίθεται λοιπόν ένα καίριο ερώτημα: Οι αποδείξεις αυτές είναι αποδεκτές από μαθηματικής άποψη; Ποια η ποιοτική διαφοροποίηση ανάμεσα στις παραδοσιακές αποδείξεις και σ' αυτές με χρήση Η/Υ;

Οι παραπάνω προβληματισμοί μας οδηγούν να προσεγγίσουμε με όρους

διαφορετικούς και πιο σύνθετους το θέμα της εκμάθησης της απόδειξης και να καταδείξουμε τα όρια των ισοδυναμιών «απόδειξη = επαγωγικός συλλογισμός» και «αποδεικνύω = πείθω». Η εκμάθηση μιας απόδειξης πρέπει να γίνεται σε στάδια και απαιτεί την σύσταση ενός ορθολογισμού από τους μαθητές, γεγονός που μας οδηγεί στο να καθιστούμε προνομιούχα την επεξεργασία, την ανάλυση και την τελειοποίηση των μεθόδων επίλυσης από τους μαθητές.

Τέλος είναι φανερή η αναγκαιότητα συστηματοποίησης των μεθόδων απόδειξης και πάντοτε κάτω από την επίβλεψη της λογικής και μάλιστα της μαθηματικής λογικής, γιατί η γνώση της μαθηματικής λογικής ανοίγει σίγουρους δρόμους στην διαδικασία μιας απόδειξης, δημιουργεί συνθήκες για την διατύπωση σωστών μαθηματικών συλλογισμών και το σπουδαιότερο ελέγχει αν μια αποδεικτική διαδικασία είναι σωστή ή όχι.

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην εργασία αυτή καταγράφεται ποια είναι η έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά αναφέροντας μια ιστορική αναδρομή όπου διαφαίνεται η αναγκαιότητα ύπαρξής της μέσα από προβληματισμούς από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Παρουσιάζονται η αναγκαιότητα. Αναφέρεται για ποιο λόγο η απόδειξη συνέβαλε αποφασιστικά στην επινόηση νέων μαθηματικών εννοιών και θεωριών, στην δημιουργία και ανάπτυξη καινούριων μαθηματικών κλάδων καθώς και στην λογική δόμηση και θεωρητική θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης στο σύνολό της.

Η εργασία στην συνέχεια χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος, παρουσιάζεται μια ιστορική ανασκόπηση της έννοιας της απόδειξης από την εποχή των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών μέχρι σήμερα.Στην συνέχεια δίνεται ο ορισμός της απόδειξης και παρουσιάζονται όλα τα εργαλεία που χρειάζεται ένα μαθηματικό σύστημα για να γίνει μια απόδειξη πλήρης. Τέλος παρουσιάζονται μέρη από τα οποία αποτελείται μια μαθηματική απόδειξη και καταγράφεται η ιστορία της μαθηματικής λογικής και η εξέλιξη της από την αρχαιότητα μέχρι την νεότερη λογική. Επίσης καταγράφονται τα βασικά της στοιχεία, απαραίτητα εργαλεία στα χέρια ενός χειριστή των μαθηματικών εννοιών για να καταγράψει μια μαθηματική απόδειξη σωστά και με σαφήνεια.

Στο δεύτερο μέρος αναλύονται οι βασικές μέθοδοι απόδειξης όπως η απόδειξη με συνεπαγωγή και ισοδυναμία με χρήση αντιπαραδείγματος, η μέθοδος της ατόπου απαγωγής και της μαθηματικής επαγωγής και αναφέρονται εφαρμογές από το πεδίο του απειροστικού λογισμού.

Στο τρίτο μέρος γίνεται μια συλλογή λαθών και παρανοήσεων που έχουν βρεθεί στην ελληνική βιβλιογραφία και που οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης των βασικών κανόνων της μαθηματικής λογικής.

Στο τέταρτο μέρος αναλύεται μια έρευνα που έγινε από τον Μάρτιο μέχρι τον Ιούνιο του 2007 σε πανελλήνια κλίμακα σε μαθητές λυκείου. Η έρευνα αυτή είχε σκοπό να αναλύσει τις απόψεις των μαθητών για την έννοια της απόδειξης και να διερευνήσει τα επίπεδα κατανόησης από τους μαθητές των βασικών μεθόδων απόδειξης που διδάσκονται και χρησιμοποιούνται στα λύκεια της χώρας μας, καθώς επίσης και να εντοπίσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν τις διάφορες αποδεικτικές μεθόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η απόδειξη έπαιξε σημαντικό και καθοριστικό ρόλο στην πορεία των μαθηματικών μέσα στους αιώνες. Συνέβαλε αποφασιστικά στην επινόηση νέων μαθηματικών εννοιών και θεωριών, στην δημιουργία και ανάπτυξη καινούριων μαθηματικών κλάδων καθώς και στην λογική δόμηση και θεωρητική θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης στο σύνολό της.

Η λογική απόδειξη πρωτοεμφανίστηκε και αναπτύχθηκε σε μια περίοδο που θεωρείται ως η χρυσή εποχή των μαθηματικών, μια εποχή δημιουργίας, ανάπτυξης και θεμελίωσης των μαθηματικών ως θεωρητικής επιστήμης. Αυτή η περίοδος ονομάστηκε περίοδος των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, που ξεκινά από τον Θαλή (640 π. Χ. περίπου) και συνεχίζεται μέχρι τον Διόφαντο (240 π.Χ.)

Μέχρι τότε και για 3.000 χρόνια περίπου, οι αρχαίοι λαοί που ζούσαν γύρω από τα μεγάλα ποτάμια της Ανατολής, όπως οι λαοί της Μεσοποταμίας (Σουμέριοι, Ασσύριοι, Βαβυλώνιοι), οι Αιγύπτιοι, οι Ινδοί και οι Κινέζοι καλλιέργησαν αξιόλογα μαθηματικά και οι μαθηματικές γνώσεις τους ήταν αρκετά προχωρημένες. Όλες οι μαθηματικές γνώσεις βασίζονταν στην εμπειρία χωρίς την χρήση της απόδειξης. Κατά τη χρονική περίοδο 2700 – 1700 π.Χ. τα πρώτα στοιχεία μαθηματικών συλλογισμών που έφτασαν σε μας είναι από δύο Αιγυπτιακούς πάπυρους και από πολλές Βαβυλωνιακές πινακίδες με περιεχόμενο όμως που στερείται της αποδεικτικής διαδικασίας, αλλά που περιέχει διατυπώσεις και λύσεις προβλημάτων. Στους Αιγυπτίους η γεωμετρία τους ήταν κυρίως υπολογιστική. Τα εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων (ορθογώνιο, τρίγωνο, τραπέζιο) είναι γνωστά όχι με μαθηματικούς τύπους που έχουν αποδειχθεί με ακρίβεια ή εμπειρικά, αλλά με την τεχνική του «κοψίματος» του επιπέδου σχήματος σε τρίγωνα όπου στην συνέχεια γίνεται ανακατανομή των κομματιών του σχήματος ώστε αυτό να καταλήγει σε νέο σχήμα με ένα ή περισσότερα ορθογώνια. Ακόμη οι Αιγύπτιοι είχαν την ιδέα να υπολογίσουν προσεγγιστικά το π, υπολογίζοντας το εμβαδό του μοναδιαίου κύκλου, τριχοτομώντας κάθε πλευρά του περιγγεγραμμένου τετραγώνου και αφαιρώντας τα τέσσερα γωνιακά τρίγωνα που σχηματίζονταν. Με αυτό τον τρόπο πέτυχαν μια

ικανοποιητική προσέγγιση 3,16 για τον αριθμό π.

Οι Βαβυλώνιοι είχαν και αυτοί με την σειρά τους εμπειρικές μεθόδους, με ολοκληρωτική έλλειψη της αποδεικτικής διαδικασίας. Εμπειρικά είχαν υπολογίσει τα εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων και είχαν υπολογίσει τους όγκους κυλίνδρων και πρισμάτων. Γνώριζαν επίσης εμπειρικά και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Το πιο αξιόλογο όμως επίτευγμα των Βαβυλωνίων ήταν η δημιουργία της άλγεβρας και η ανακάλυψη της τεχνικής για την λύση δευτεροβαθμίων εξισώσεων. Μπορούσαν επίσης να υπολογίζουν προσεγγιστικά τις τιμές τετραγωνικών ριζών και να αθροίζουν αριθμητικές προόδους. Σε καμία περίπτωση όμως ούτε οι Βαβυλώνιοι, ούτε οι Αιγύπτιοι, έφτασαν στην μαθηματική αφαίρεση, την αυστηρή διατύπωση υποθέσεων και συμπερασμάτων, στην αποδεικτική διαδικασία. Δεν φαίνεται πουθενά ο σαφής διαχωρισμός του προσεγγιστικού από το υπολογιστικό. Όλα τα διατύπωναν υπό μορφή συνταγής χωρίς να αποδεικνύουν την ορθότητά τους.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν τις γνώσεις τους αποκλειστικά για να εξυπηρετήσουν τις πρακτικές ανάγκες της γεωργίας, του εμπορίου, της μηχανικής, της αρχιτεκτονικής κ.λ.π. και όχι για να αποκαταστήσουν αλήθειες θεωρητικού χαρακτήρα. Στην λύση προβλημάτων εκείνο που τους απασχολούσε ήταν να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα και η εμπειρία ήταν επαρκής για να το λύσουν. Όπως φαίνεται ή δεν τους απασχολούσε το γιατί λύνεται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο ή δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν τη διαδικασία της λύσης και έτσι δεν επινόησαν μαθηματική απόδειξη, που απαιτεί παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό.

Ο πρώτος λαός που εισήγαγε και ανάπτυξε την αποδεικτική διαδικασία των αφηρημένων γεωμετρικών εννοιών ήταν οι αρχαίοι Έλληνες. Αυτό δεν ήταν συμπτωματικό. Οι Αρχαίοι Έλληνες ήταν λαός κατεξοχήν φιλοπερίεργος και μόλις η οικονομική και πολιτική συγκυρία του το επέτρεψε, θέλησε να απαγκιστρωθεί από τα δεσμά της μυθολογικής αφέλειας και δεισιδαιμονίας και να βρει μόνος του λογικές εξηγήσεις για τον κόσμο και την ζωή. Η γέννηση της φιλοσοφίας στην Ελληνική Ιωνία τα μέσα του $7^{ου}$ αιώνα ήταν η απαρχή μιας λαμπρής πορείας του Ελληνικού πνεύματος στον κόσμο της αναζήτησης της αλήθειας, με στόχο όχι απλώς την

εξυπηρέτηση πρακτικών αναγκών, αλλά την πνευματική ικανοποίηση που προσφέρει η γνώση και η λογική εξήγηση.

Τα μαθηματικά ήταν ένα ευρύτατο πεδίο πνευματικής αναζήτησης, γι' αυτό και ασχολήθηκαν μαζί τους οι περισσότεροι Ίωνες φιλόσοφοι. Ο Θαλής ήταν εκείνος που πρώτος αισθάνθηκε την ανάγκη να δικαιολογήσει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Πρώτος επινόησε και εισήγαγε την απόδειξη και χρησιμοποίησε πλήρη αποδεικτική διαδικασία για να δείξει την αλήθεια πολλών γεωμετρικών προτάσεων. Στη συνέχεια ο Πυθαγόρας και η σχολή του καθώς και όλη εκείνη η στρατιά των μεγάλων μαθηματικών που ακολούθησαν μέχρι το 300 π.Χ. χρησιμοποίησαν και βελτίωσαν την αποδεικτική διαδικασία που εισήγαγε ο Θαλής. Οι Πυθαγόρειοι είναι αυτοί που διαμόρφωσαν τη γεωμετρία σε μια αφηρημένη επιστήμη που μελετούσε ιδιότητες ιδανικών σχημάτων που δεν υπήρχαν σε καθαρή μορφή στην φύση. Οι μεγάλοι γεωμέτρες της χρυσής εποχής των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών έφτασαν σε εξαιρετική τολμηρή σκέψη, ότι όλες οι ιδιότητες των σωμάτων μπορούσαν να εξαχθούν από λίγες βασικές προτάσεις, τα αξιώματα. Αυτές οι προτάσεις γίνονταν δεκτές δίχως απόδειξη, την ορθότητα των οποίων επικύρωνε η πολύχρονη πείρα. Έτσι εμφανίστηκε το επαγωγικό σύστημα, η αξιωματική μέθοδος είναι δίχως αμφιβολία η πιο σπουδαία συμβολή της αρχαίας Ελλάδας στην αποδεικτική διαδικασία των μαθηματικών.

Η εμφάνιση της επαγωγικής μεθόδου ως μέθοδος απόδειξης οφείλεται στους εξής λόγους:

- Στην προδιάθεση των Ελλήνων στη φιλοσοφική έρευνα. Έχει υποστηριχθεί ότι η αξιωματική μέθοδος έχει τις ρίζες της στην Ελεατική σχολή της φιλοσοφίας που ξεκίνησε ο Παρμενίδης και συνέχισε ο μαθητής του Ζήνωνας στις αρχές του 5^{ου} π. Χ. αιώνα.
- Στην ανάγκη να επιλυθεί η «κρίση» που προκλήθηκε από την Πυθαγόρεια «ανακάλυψη» της ασυμμετρίας διαγωνίου και πλευράς τετραγώνου. Αυτό δίχως αμφιβολία, παρείχε μια σημαντική ώθηση για την κριτική επανεκτίμηση των θεμελίων των μαθηματικών, εφόσον οι ρητοί αριθμοί δεν αρκούσαν πλέον για την μέτρηση των γεωμετρικών μεγεθών και τη θεμελίωση της θεωρίας της ομοιότητας.

- Στην επιθυμία τους να αποφασίσουν μεταξύ αντικρουόμενων αποτελεσμάτων που κληροδοτήθηκαν σ' αυτούς από αρχαιότερους πολιτισμούς. Η επιθυμία τους αυτή επέδρασε ώστε να δημιουργηθεί η αντίληψη της μαθηματικής απόδειξης, που με την πάροδο του χρόνου εξελίχθηκε στην επαγωγική μέθοδο.
- Στην φύση της ελληνικής κοινωνίας. Η δημοκρατία στην Αρχαία Ελλάδα απαιτούσε την τέχνη της επιχειρηματολογίας και της πειθούς, απ' όπου ξεπήδησε μη λογική και η επαγωγική μέθοδος.

Η ανακάλυψη από τους Πυθαγόρειους της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου του τετραγώνου, δημιούργησε στην αρχαία Ελλάδα κρίση, ο Εύδοξος δημιουργός της θεωρίας των λόγων βοήθησε ώστε αυτή να ξεπεραστεί. Ο Αριστοτέλης στο έργο του «Αναλυτικά Ύστερα» ασχολείται με την επιστημονική μέθοδο και την απόδειξη. Ο Ευκλείδης τελειοποίησε την αποδεικτική διαδικασία δημιουργώντας ένα πρότυπο θεωρητικό και επιστημονικό έργο, τα «Στοιχεία» το οποίο είναι ένας σημαντικός σταθμός για την παραπέρα πορεία της μαθηματικής επιστήμης. Στο σημείο αυτό τίθεται το ερώτημα : Γιατί από την στιγμή που οι Αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά «εισήγαγαν» την απόδειξη η οποία έλαβε σημαντική θέση στην επιστήμη; Μια άποψη που απαντάει σε αυτό το ερώτημα είναι ότι αν ο ρόλος των μαθηματικών είναι μόνο να βάζουν τάξη στα προφανή τότε ίσως η απόδειξη να είναι περιττή. Αν όμως τα μαθηματικά αποδεικνύουν και διαπραγματεύονται κάτι που είναι αντίθετο στην διαίσθηση ή δεν μπορεί να γίνει κατανοητό, τότε η απόδειξη του είναι απαραίτητη. Απαραίτητη λοιπόν είναι η απόδειξη για κάτι που δεν το κατανοεί ο κοινός νους, επομένως η σημασία της είναι αρκετά μεγάλη.

Σε αυτό το σημείο ωστόσο, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι Αρχαίοι Έλληνες δεν παρέβλεψαν ούτε υποτίμησαν την αξία της εμπειρίας. Απλώς δεν περιορίζονταν μόνο σ' αυτή, αλλά αισθάνονταν την ανάγκη να δικαιολογήσουν την διαδικασία που ακολουθούσαν στη λύση ενός προβλήματος. Πίστευαν ότι μια μαθηματική πρόταση η οποία ήταν αποτέλεσμα εμπειρίας ή προέκυπτε από κάποιο πείραμα για να αποτελέσει γενική αρχή πλήρως παραδεκτή, θα πρέπει να αποδειχθεί. Ο Αρχιμήδης για παράδειγμα στο έργο του «Έφοδος» διαπίστωσε ότι ο όγκος κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με κώνο είναι τριπλάσιος από τον όγκο του κώνου.

Την εικασία αυτή ο Αρχιμήδης την επιβεβαίωσε πρώτα εμπειρικά, γεμίζοντας με άμμο ένα κωνικό δοχείο και αδειάζοντας την στο κυλινδρικό διαπίστωσε ότι ο κύλινδρος χωρούσε τριπλάσια ποσότητα άμμου από ότι ο κώνος και στην συνέχεια έδωσε την αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Η μέθοδος απόδειξης του Αρχιμήδη με την «τεχνική» της εξάντλησης που επινόησε θα αποτελέσουν τα θεμέλια του ολοκληρωτικού λογισμού για τη δημιουργία του οποίου χρειάστηκαν να περάσουν 20 αιώνες.

Το γεγονός ότι οι Αρχαίοι Έλληνες δεν αρκούνταν στην διαίσθηση, την εμπειρία ή το πείραμα αλλά τεκμηρίωναν τα συμπεράσματά τους με παραγωγικό συλλογισμό, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών. Δεν θα ήταν υπερβολή ο ισχυρισμός ότι η λογική απόδειξη αποτέλεσε το «κλειδί» της θεμελίωσης και ανάπτυξης της μαθηματικής επιστήμης. Με την συμβολή της απόδειξης όχι μόνο αιτιολογήθηκε και τεκμηριώθηκε ένας μεγάλος όγκος συσσωρευμένης γνώσης, αλλά και πραγματοποιήθηκαν πολλά από τα καταπληκτικά επιτεύγματα της αρχαίας ελληνικής εποχής. Η απόδειξη συνέβαλε, για παράδειγμα, στην επίλυση σπουδαίων μαθηματικών προβλημάτων που αποτέλεσαν σταθμούς στην ιστορία των μαθηματικών, όπως η απόδειξη της ύπαρξης αρρήτων αριθμών. Ακόμη και η προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων, έστω και αν ορισμένα από αυτά δεν λύθηκαν τελικά, οδήγησε στην δημιουργία νέων κλάδων στα μαθηματικά και στην ολοκλήρωση και θεμελίωση πολλών μαθηματικών θεωριών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

- Οι προσπάθειες που έγιναν μέσα στους αιώνες για να αποδειχθεί ότι το αίτημα των παραλλήλων του Ευκλείδη είναι συνέπεια άλλων προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και να ανοίξει ο δρόμος για την ανακάλυψη νέων Γεωμετριών με αξιωματική θεμελίωση διαφορετική από εκείνη της Ευκλείδειας.
- Η προσπάθεια απόδειξης ότι η γενική πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου από τον τέταρτο επιδέχεται γενική λύση με ριζικά, οδήγησε στην δημιουργία και θεμελίωση της θεωρίας των πολυωνύμων και συνέβαλε στην ανάπτυξη της συμβολικής άλγεβρας.

2. Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα γνώσεων, που αποτελείται από πρωταρχικές έννοιες και βασικές προτάσεις, μαζί με όλες τις λογικές τους συνέπειες. Οι λογικές αυτές συνέπειες δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων, αλλά προκύπτουν από τις βασικές έννοιες και προτάσεις της θεωρίας με διανοητικές επεξεργασίες που το σύνολό τους αποτελεί μέρος του περιεχομένου της θεωρίας. Οι πρώτες έννοιες και οι βασικές προτάσεις αποτελούν την βάση της μαθηματικής επιστήμης, οι συνέπειες των οποίων αποτελούν τα λεγόμενα θεωρήματα. Δηλαδή τα θεωρήματα είναι προτάσεις που η αλήθεια τους δεν είναι άμεσα φανερή αλλά χρειάζεται να αποδειχτεί, δηλαδή να γίνουν αντικείμενο πνευματικής και λογικής επεξεργασίας για να προκύψουν ως συμπέρασμα ενός λογικού συλλογισμού. Ένας τέτοιος συλλογισμός που αποκαθιστά την αναγκαιότητα ενός θεωρήματος μέσα στα πλαίσια ενός θεωρητικού συστήματος είναι η απόδειξη.

Επομένως η απόδειξη είναι το όργανο και συγχρόνως ο νωτιαίος μυελός της θεωρίας, με αυτήν εξασφαλίζεται η εσωτερική συνοχή ενός συστήματος θεωρητικής γνώσης και με αυτή αποκαθίσταται η λογική οργάνωση και η αλληλουχία των διαφόρων μερών του συστήματος. Για τον λόγο αυτό μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα μαθηματικά είναι η μήτρα κάθε θεωρητικής γνώσης, δίνουν το πρότυπο μιας θαυμαστής εσωτερικής αρμονίας με την οποία γοητεύουν και συναρπάζουν. Είναι φανερό πως η χρήση της απόδειξης προϋποθέτει την κατοχή της αποδεικτέας αλήθειας, αλλιώς δεν θα ξέραμε τι να αποδείξουμε. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα. Πως θα βαδίσει ο νους για να φτάσει στην ανακάλυψη των θεωρημάτων, που απορρέουν από την βάση μιας μαθηματικής δομής ως αναγκαίες συνέπειες; Στο ερώτημα όμως αυτό δεν είναι δυνατό να δοθεί μια σαφή και συγκεκριμένη απάντηση. Αν ήταν δυνατό να γνωρίζουμε κανόνες , όπου με την εφαρμογή τους, θα μπορούσαμε να βρίσκουμε και να κατασκευάζουμε επιστημονικές αλήθειες, τότε όλοι θα μπορούσαμε να τους εφαρμόσουμε. Ωστόσο δεν μένει παρά η ελπίδα πως με την μακριά και προσεκτική μελέτη των έργων μεγάλων δασκάλων της επιστήμης και με επιμονή και άσκηση των πνευματικών μας δυνάμεων πάνω στα αντικείμενα της μαθηματικής επιστήμης ίσως μπορέσουμε να πλησιάσουμε στο ύψος τους.

Ενώ όμως μας είναι αδύνατο να υποδείξουμε πως ακριβώς θα βαδίσουμε για να φτάσουμε στην ανακάλυψη της αλήθειας δεν μας είναι δύσκολο να μεταδώσουμε στους άλλους την πεποίθηση για την αλήθεια που ήδη κατέχουμε. Οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους είναι δυνατό να επιτύχουμε αυτό το αποτέλεσμα ανάγονται σε δύο γενικούς τύπους, που ανταποκρίνονται ο καθένας σε μια ιδιαίτερη ομάδα ψυχολογικών συνειρμών. Ο ένας είναι η επαλήθευση με την εφαρμογή και ο άλλος είναι η απόδειξη μέσα από τους νόμους της λογικής. Οι δύο αυτοί τύποι παρουσιάζουν συγχρόνως ένα μεγάλο μειονέκτημα και ένα μεγάλο πλεονέκτημα. Η επαλήθευση με την εφαρμογή πάνω σε συγκεκριμένα ζητήματα της πράξης ή της θεωρίας δεν φωτίζει εσωτερικά το ζήτημα, δεν μας εξηγεί γιατί οι ισχυρισμοί μας είναι αναγκαστικά αληθείς, αλλά μας προσφέρει μια «έξωθεν μαρτυρία» πως αυτό που προτείνουμε είναι αληθινό, αφού όχι μόνο δεν συγκρούεται με τα πράγματα, αλλά αντίθετα εναρμονίζεται και συμβιβάζεται με αυτά. Έχει λοιπόν το προσόν – και αυτό είναι το μεγάλο πλεονέκτημά της – η απόδειξη στερεώνει όσο τίποτε άλλο την πίστη στην αλήθεια των ισχυρισμών της επιστήμης. Από την άλλη μεριά η απόδειξη μέσα στα πλαίσια της λογικής έχει το μεγάλο προσόν να φωτίζει το ζήτημα «εκ των έσω» δηλαδή να δίνει λογική εξήγηση και συγχρόνως διέξοδο και ικανοποίηση στην δομή της επιστήμης που είναι έμφυτη στον άνθρωπο που αναζητά να μάθει την αλήθεια. Εδώ πρόκειται προφανώς για την ικανοποίηση ενός βαθύτατα ριζωμένου ενστίκτου, που μαρτυρεί ακριβώς από πού προέρχονται τα ανώτερα εκείνα πνευματικά συναισθήματα και οι βαθιές χαρές που συναρπάζουν τις ευαίσθητες ψυχές των διανοούμενων ανθρώπων.

Στο βάθος όμως κάθε συλλογισμού οσονδήποτε αυστηρού βρίσκεται πάντα μια προϋπόθεση: ότι «συλλογιζόμαστε σωστά» και μια αμφιβολία: «μήπως δεν συλλογιζόμαστε σωστά». Η αμφιβολία αυτή πλανιέται σαν φάντασμα πάνω από κάθε ισχυρισμό που αντλεί το κύρος του από μια καθαρή θεωρία. Έχουμε κριτήριο αλάνθαστο για να αναγνωρίζουμε ότι η σειρά των σκέψεών μας είναι σωστή; Τέτοιο υπέρτατο κριτήριο μάταια θα αναζητήσουμε μέσα στα πλαίσια της ανθρώπινης λογικής. Βλέπουμε λοιπόν πως η απόδειξη υπερέχει εκεί όπου ακριβώς υστερεί η πειραματική επαλήθευση και υστερεί πάλι η πρώτη εκεί όπου υπερέχει η δεύτερη. Είναι λοιπόν ευνόητο πως ο συνδυασμός και των δύο μαζί θα δώσει στην επιστήμη τα μέσα να επιβεβαιώσει το κύρος της. Έτσι ικανοποιούνται και οι δύο απαιτήσεις της

ανθρώπινης ιδιοσυγκρασίας για την αποδοχή της αλήθειας.

Η διδακτική των μαθηματικών δεν πρέπει ποτέ να παραγνωρίζει το ουσιώδες αυτό γεγονός. Η ολοκλήρωση της θεωρητικής γνώσης πρέπει να γίνεται από δύο πλευρές. Η μία θα προσφέρει την χαρά του γιατί έτσι συμβαίνουν τα πράγματα και η άλλη την χαρά της επιβεβαίωσης των στοχασμών μας με την μαρτυρία του εξωτερικού κόσμου. Έτσι εξηγείται η παιδαγωγική ανάγκη του παραδείγματος και της εφαρμογής στην εκπαιδευτική διαδικασία.

2.1 Μορφές απόδειξης

Η απόδειξη από καθαρά λογική άποψη είναι το όργανο της θεωρίας που μπορεί να κατοχυρώσει την αλήθεια σε μια μαθηματική επιστήμη. Για τα μαθηματικά οι σπουδαιότερες μορφές απόδειξης που έγιναν αντικείμενο μελέτης είναι η αναλυτική μέθοδος, η συνθετική μέθοδος και η εις άτοπον απαγωγή. Η πρώτη έρευνα των βασικών αυτών τρόπων του σκέπτεσθαι είχε γίνει από τους Αρχαίους Έλληνες και μάλιστα από την σχολή του Πλάτωνα, στον οποίο αποδίδεται η ανάπτυξη της αναλυτικής μεθόδου. Φυσικά οι τρεις αποδεικτικές μέθοδοι που αναφέραμε δεν είναι οι μοναδικοί που χρησιμοποιεί ο νους στην άγρυπνη προσπάθεια του να οργανώσει λογικά το περιεχόμενο της συνείδησης του. Αναφέρουμε και άλλες μεθόδους όπως η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή αλλά οι τρείς πρώτες είναι τόσο βασικές και έχουν μια τέτοια γενικότητα , που θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί, χωρίς καμία δόση υπερβολής, πως αποτελούν θεμελιακές μορφές νόησης. Ο νους δουλεύει με αυτούς τους τρόπους κάθε στιγμή πάνω στο υλικό της εμπειρίας, χωρίς εμείς να έχουμε συνείδηση της απίστευτα γρήγορης και γόνιμης αυτής δραστηριότητας.

Στην αποδεικτική διαδικασία οι διάφορες μορφές των αποδείξεων παρουσιάζουν διαφορετικές παιδαγωγικές ιδιότητες και διδακτικές λειτουργίες (G. Hanna & M. De Villiers 2008). Ο τρόπος παρουσίασης των αποδείξεων όπως ο λεκτικός ή ο οπτικός μπορεί να είναι παράγοντας σημαντικός στην κατανόησή τους. Για κάθε τύπο αποδείξεων εισέρχονται διάφοροι διδακτικοί προβληματισμοί που πρέπει να απασχολούν τον εκπαιδευτικό. Οι σημαντικότεροι προβληματισμοί για τους τύπους των αποδείξεων είναι:

α) Ποιο είναι το καταλληλότερο επίπεδο εκπαίδευσης που πρέπει να έχει ένας

μαθητής ώστε να διδαχθεί κάποιο συγκεκριμένο είδος απόδειξης. Είναι δυνατό για παράδειγμα η μαθηματική επαγωγή να διδαχτεί στις τάξεις του γυμνασίου ή το μυαλό των μαθητών δεν είναι ώριμο να αφομοιώσει τις έννοιες που την διέπουν;

β) Σε ποιο στάδιο γνώσης πρέπει οι καθηγητές να κάνουν την μετάβαση από απλά παραδείγματα σε επιμελημένες μορφές απόδειξης;

γ) Σε ποιο επίπεδο και σε ποια τάξη μπορεί να γίνει η εισαγωγή της έννοιας του αντιπαραδείγματος ως μέθοδος απόδειξης;

δ) Ποιοι τύποι αποδείξεων είναι κατάλληλοι και για ποιες μαθηματικές περιοχές;

ε) Ποια θέση πρέπει να έχει η γενίκευση ενός μαθηματικού θέματος μέσα στην διαδικασία μιας απόδειξης;

στ) Πως θα μπορέσει ο εκπαιδευτικός να χρησιμοποιήσει την απόδειξη για να υποστηρίξει την μετάβαση των μαθητών από την επαγωγική στην παραγωγική σκέψη;

ζ) Με ποιο τρόπο θα παρουσιαστεί από τον εκπαιδευτικό μια απόδειξη ώστε να γίνει κατανοητή από το σύνολο των μαθητών του.

Τι είναι πραγματικά αυτό που κάνει ο στοχασμός στην κίνησή του προς την απόδειξη μιας αλήθειας ή ενός ψεύδους; Ποια βήματα ακολουθεί και ποιες είναι οι σταθερές μορφές αυτού του λογικού συνειρμού, που ονομάζεται απόδειξη; Πως υφαίνει το υλικό της εσωτερικής και εξωτερικής εμπειρίας και πως διεγείρει μέσα στην συνείδηση την επιστήμη; Τα ζητήματα αυτά ανήκουν βασικά στην φιλοσοφία των μαθηματικών, η ψυχολογία όμως πρώτη εξετάζει ποιες ψυχικές ενέργειες καθορίζουν την ειδική αυτή πορεία της σκέψης. Τέλος η λογική εξετάζει ειδικότερα τους κανόνες της ορθής πορείας της σκέψης.

2.2 Η εικασία πριν από την απόδειξη

Τα μαθηματικά συνήθως αναπτύσσονται από ένα πρόβλημα ή μια εικασία. Η απόδειξη δεν είναι μια μηχανική διαδικασία που επιβάλλει την αλήθεια μέσα από μια αδιάσειστη ακολουθία υποθέσεων και συμπερασμάτων, αλλά απόδειξη σημαίνει εξηγήσεις, πιστοποιήσεις, επεξεργασίες που κάνουν την εικασία πιο εύλογη, πιο πειστική και μέσω των αντιπαραδειγμάτων πιο αναλυτική και ακριβή. Τα μη τυπικά μαθηματικά δηλαδή εκείνα τα μαθηματικά που βρίσκονται στη διαδικασία της

ανάπτυξης και της ανακάλυψης είναι μια επιστήμη που αναπτύσσεται μέσω διαδοχικών κριτικών και βελτιώσεων των θεωριών, καθώς και με την προώθηση νέων και ανταγωνιστικών θεωριών, και όχι με τον παραγωγικό τρόπο των τυποποιημένων μαθηματικών.

Κάθε πρόταση που υποστηρίζεται από μια εμπειρική επαγωγική πληροφορία πρέπει να θεωρείται ως εικασία, δηλαδή μια υπόθεση η οποία έχει πιθανότητα να είναι αληθής. Παραμένει εικασία μέχρι να βρεθεί μια αυστηρή απόδειξη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εικασία του Fermat ότι οι αριθμοί της μορφής

$$2^{2^n}+1$$

είναι πρώτοι. Ενώ αληθεύει για n = 0, 1, 2, 3, 4, ο Euler ανακάλυψε, έναν αιώνα αργότερα, πως για n = 5 προκύπτει ο αριθμός 4294967297 = 641×6700417 ο οποίος είναι σύνθετος.

2.3 Η απόδειξη στην μέση εκπαίδευση

Οι μαθηματικοί έχουν επιφορτιστεί με ένα σπουδαίο ρόλο, να κάνουν τους μαθητές να κατανοήσουν τον σημαντικό ρόλο που έχει η απόδειξη στα μαθηματικά. Η απόδειξη έχει αποκτήσει στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διδακτική υπόσταση γι αυτόν το λόγο έχουν γίνει αρκετές έρευνες για τον ρόλο της απόδειξης σε σχέση με άλλες μορφές εξήγησης των μαθηματικών θεωρημάτων όπως η απεικόνιση, η αιτιολόγηση και η χρήση δυναμικών γραφικών λογισμικών. Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία μορφών αποδείξεων που όλες τους κρύβουν μια κοινή αρχή: « *Η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης για να χρησιμοποιήσει τις υποθέσεις της πρότασης και να βγάλει τα ζητούμενα συμπεράσματα, χρησιμοποιεί μαθηματικά επιχειρήματα που υποστηρίζουν ισχυρούς συλλογισμούς*» (Rina Zazkis & Egan J. Chernoff 2008) Οι συλλογισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι και επεκτείνονται σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων έξω από την μαθηματική επιστήμη και αποτελούν βάση για τον ανθρώπινο συλλογισμό. Σύμφωνα με τους G. Hanna και M. De Villiers στην μέση εκπαίδευση έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αναπτυξιακή απόδειξη (developmental proof), δηλαδή σε εκείνη την απόδειξη που αυξάνεται ανάλογα με την εμπειρία που έχει αποκτήσει κάποιος. Η μελέτη της αναπτυξιακής απόδειξης και η παρουσία της στα σχολικά μαθηματικά έχει τρία χαρακτηριστικά γνωρίσματα.

α) Παρέχει μια μέθοδο σκέψης που εμβαθύνει την μαθηματική κατανόηση και την ευρύτερη φύση του ανθρώπινου συλλογισμού.
β) Αναπτύσσεται βαθμιαία.
γ) Μακροπρόθεσμα παρέχει τον «τρόπο σκέψης» στους μαθητές.

Σημαντικός ρόλος στην σχολική τάξη είναι προσοχή που πρέπει να έχουν οι μαθητές κατά την διάρκεια της διδασκαλίας των αποδείξεων. Αν κατά την διάρκεια παρουσίασης από τον καθηγητή μιας αποδεικτικής διαδικασίας οι μαθητές δεν δίνουν την δέουσα προσοχή η απόδειξη δεν είναι δυνατό να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Οι μαθηματικές αποδείξεις αποτελούνται, φυσικά, από μια αλυσίδα λογικών συμπερασμάτων που ακολουθούν τους νόμους της λογικής, είναι κάτι περισσότερο από μια σειρά σωστών βημάτων, είναι μια ακολουθία ιδεών και αρχών με στόχο την κατανόηση και την απόδειξη της αλήθειας. Κατά συνέπεια, η πρόκληση για τον εκπαιδευτικό είναι να ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν και να μελετούν τις μαθηματικές αποδείξεις όχι για μάθουν την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων αλλά και να για να κατανοήσουν γιατί οι μαθηματικές αυτές προτάσεις είναι αληθείς. Η μάθηση των μαθηματικών αποδείξεων πρέπει να ξεκινά από τις αρχικές τάξεις του σχολείου. Η επιτυχία αυτής της διαδικασίας εξαρτάται από τον εκπαιδευτικό που κατά την διάρκεια μιας απόδειξης μπορεί να εφαρμόσει τους διδακτικούς του στόχους και να δίνει την δυνατότητα στους μαθητές του να κατανοήσουν τα δύσκολα σημεία των αποδείξεων με εκπαιδευτικές παρεμβάσεις ώστε να υπερνικηθούν όλες οι δυσκολίες που παρουσιάζονται. Στην μαθηματική απόδειξη εμφανίζονται γνωστικές πτυχές που δείχνουν τον τρόπο που αναπτύσσονται τα μαθηματικά. Οι γνωστικές αυτές πτυχές όταν παρουσιαστούν στους μαθητές με πρωτότυπα παραδείγματα στις περισσότερες περιπτώσεις κάνουν την απόδειξη αποδεκτή.

2.4 Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη

Η επιχειρηματολογία και η μαθηματική απόδειξη έχουν ουσιαστική σχέση μεταξύ τους η οποία στοχεύει στην κατανόηση των αποδείξεων εκ μέρους των μαθητών. Οι μαθητές από τις μικρές ηλικίες παρουσιάζουν ψηλούς βαθμούς δυνατότητας στον συλλογισμό και στην δικαιολόγηση των επιχειρημάτων τους, χωρίς όμως, να

κατανοούν την έννοια της απόδειξης και του παραγωγικού συλλογισμού. Για τον λόγο αυτό οι εκπαιδευτικοί πρέπει να βοηθήσουν τους μαθητές να αναγνωρίσουν την αξία της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης. Αρκετοί εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η διδασκαλία της μαθηματικής λογικής θα μπορούσε να βοηθήσει ώστε να γίνει κατανοητή η παραγωγική δομή των μαθηματικών και να αφομοιωθούν από τους μαθητές οι διάφορες αποδείξεις. Έρευνες όμως έχουν δείξει ότι η μεταφορά των νόμων που διέπουν την μαθηματική λογική και τους νόμους της στην αποδεικτική διαδικασία δεν συμβαίνει εύκολα, για τον λόγο αυτό υπάρχει μια διαφορετική άποψη που δηλώνει ότι το όφελος από την γνώση της μαθηματικής λογικής παραμένει ασαφές στην αποδεικτική διαδικασία, ως εκ τούτου χρειάζεται περισσότερη έρευνα για να υποστηριχθεί η άποψη ότι η λογική αυξάνει την δυνατότητα οι μαθητές να καταλάβουν τις μαθηματικές αποδείξεις (G. Hanna & M. De Villiers 2008).

2.5 Το δυναμικό λογισμικό και η απόδειξη.

Τα σύγχρονα λογισμικά που έχουν εμφανιστεί τα τελευταία χρόνια στην εκπαίδευση (πχ Geogebra, Capri κτλ) χρησιμεύουν για την παραγωγή διαφόρων υποθέσεων για ένα γεωμετρικό θέμα όπου η δυναμική κίνηση του λογισμικού είναι δυνατό να τροποποιήσει το γεωμετρικό σχήμα ως τις ακραίες θέσεις του, ώστε να εξεταστούν οι οριακές θέσεις του γεωμετρικού θέματος. Η λειτουργία αυτή του λογισμικού ανοίγει νέες διαδρομές στην θεωρητική γνώση σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον που είναι σημαντικό για τους μαθητές(G. Hanna & M. De Villiers 2008). Για παράδειγμα η χρήση του λογισμικού μπορεί να εισάγει άπειρα παραδείγματα που να υποστηρίζουν μια υπόθεση ή να δημιουργήσει αντιπαράδειγμα ή τετριμμένα παραδείγματα. Η τροποποίηση του γεωμετρικού σχήματος που γίνεται με την βοήθεια του λογισμικού από τις μετρήσεις με αριθμούς σε γεωμετρικές έννοιες βοηθάει τους μαθητές να προχωρήσουν από ένα εμπειρικό επίπεδο σε ένα άλλο επίπεδο θεωρητικό. Στην πραγματικότητα ο μετασχηματισμός ενός γεωμετρικού σχήματος καθιστά προσιτές τις γεωμετρικές έννοιες. Η χρήση των λογισμικών στην εκπαίδευση δημιουργεί αρκετούς προβληματισμούς που πρέπει να απασχολούν έναν εκπαιδευτικό.

α) Μέχρι ποιο σημείο πρέπει να γίνεται η χρήση του λογισμικού ώστε να ενθαρρύνει τους μαθητές να μεταβούν από τις απλές εικασίες στις επίσημες πτυχές της μαθηματικής απόδειξης; Ποιες πρέπει να είναι οι συγκεκριμένες ενέργειες που θα

πρέπει να εκτελέσουν οι μαθητές ώστε να υποστηρίξουν αυτή την μετάβαση;

β) Πως θα μπορέσει ο εκπαιδευτικός να διαχειριστεί τις διάφορες πτυχές της παρουσίασης μιας απόδειξης σε σχέση με την εξερεύνηση τους με την χρήση του λογισμικού;

γ) Ποιες είναι οι σημαντικότερες διαφορές μεταξύ της παρουσίασης των αποδείξεων μέσα από ένα δυναμικό λογισμικό και μέσα από την παρουσίαση στον πίνακα με την χρήση της κιμωλίας;

δ) Πως θα μπορέσει ο εκπαιδευτικός να παρουσιάσει τις διάφορες μορφές των αποδείξεων μέσο του δυναμικού λογισμικού;

ε) Πως μπορεί ένα δυναμικό λογισμικό να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη ενός αντιπαραδείγματος;

στ) Πως μπορεί ένα δυναμικό λογισμικό να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη άλλων θεμάτων εκτός των γεωμετρικών όπως η άλγεβρα και οι στοιχειώδεις υπολογισμοί.

Είναι γνωστό ότι η παραδοσιακή άποψη της απόδειξης έχει αγνοήσει τον ρόλο του πειραματισμού στα μαθηματικά. Τα τελευταία χρόνια όμως, συντάκτες εκπαιδευτικών άρθρων όπως Rina Zazkis & Egan J. Chernoff υποστηρίζουν ότι υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της απόδειξης και του πειραματισμού που πέρα από την απλή επαλήθευση. Ο πειραματισμός στα μαθηματικά συντελεί στη εξήγηση των μαθηματικών εννοιών, στην ανακάλυψη, στην διανοητική πρόκληση και στην συστηματοποίηση. Έρευνές έχουν δείξει ότι η χρήση των δυναμικών λογισμικών είναι αναγκαία για να επιδειχθεί η γνωστική ανάγκη για μια εξήγηση ενός μαθηματικού προβλήματος. Όμως θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο πειραματισμός δεν ανακαλύπτει μαθηματικά συμπεράσματα, εδώ χρειάζεται ο παραγωγικός συλλογισμός όπου συχνά οδηγεί σε νέα συμπεράσματα και σε νέες ανακαλύψεις. Στο πλαίσιο αυτό η απόδειξη παίρνει ένα συστηματοποιημένο ρόλο που συνδέει ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα σε μια παραγωγική αλυσίδα που παρουσιάζει την ισχύ μιας μαθηματικής σχέσης. Η σχέση μεταξύ της απόδειξης και του πειραματισμού θέτει μια γενική διδακτική και εκπαιδευτική ερευνητική ερώτηση: «Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τις δραστηριότητες μάθησης στις οποίες
οι μαθητές μπορούν να δοκιμάσουν και να αναπτύξουν τους, αλληλένδετους ρόλους της απόδειξης και του πειραματισμού;

2.6 Ο ρόλος της απόδειξης και του πειραματισμού.

Πρόσφατα έχει υπογραμμιστεί η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην απόδειξη και στον πειραματισμό, εκτός βέβαια από την επαλήθευση της ισχύς μιας μαθηματικής πρότασης που έχει ήδη αποδειχθεί. Η χρήση των δυναμικών λογισμικών τα τελευταία χρόνια ενισχύει αυτή την σχέση, ο πειραματισμός στα μαθηματικά περιλαμβάνει σημαντικές λειτουργίες σχετικές με την απόδειξη όπως η υπόθεση, η επαλήθευση, η διάψευση, η σύγκριση, η κατανόηση και η παρουσίαση όπου είναι εφικτό μιας γραφικής παράστασης (G. Hanna – M. De Villiers 2008). Με την βοήθεια του πειραματισμού η απόδειξη παίρνει μια ειδίκευση που συνδέει τους ορισμούς, τα αξιώματα και τα θεωρήματα σαν μια παραγωγική αλυσίδα στην γνώση των μαθηματικών αντικειμένων. Η σχέση μεταξύ της απόδειξης και του πειραματισμού θέτει μια γενική διδακτική και εκπαιδευτική ερώτηση: « Πως μπορούμε να σχεδιάσουμε δραστηριότητες μάθησης στις οποίες οι μαθητές να αναπτύξουν τους αλληλένδετους ρόλους μεταξύ απόδειξης και πειραματισμού;». Τα δεδομένα ερωτήματα που τίθενται για την αποδεικτική διαδικασία είναι: α) Με ποιο τρόπο οι καθηγητές μπορούν να αναπτύξουν αποτελεσματικές στρατηγικές ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές να δουν και να εκτιμήσουν την λειτουργία μιας απόδειξης; β) Ποια επιχειρήματα μπορούν οι καθηγητές να χρησιμοποιήσουν μέσα σε μια σχολική αίθουσα για να ενθαρρύνουν και να παρακινήσουν τους μαθητές να μελετήσουν αποδείξεις; γ) Ποιος τύπος «καθοδήγησης» απαιτείται για να βοηθήσει τους μαθητές να παράγουν ανεξάρτητες αποδείξεις μέσα από διαφορετικά πλαίσια;

2.7 Η απόδειξη ως φορέας της μαθηματικής γνώσης.

Στο ερώτημα «Γιατί αποδεικνύουμε τα θεωρήματα» ο Yehuda Ray (1999) υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι πολύτιμη στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών επειδή συμβάλλει στις γνωστικές διαδικασίες που απαιτούνται για την επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος. Οι αποδείξεις μέσα στην σχολική τάξη πρέπει να εστιάζονται αρχικά στο μαθηματικό ενδιαφέρον που έχουν γιατί αυτό ενσωματώνει τις μεθόδους, τα εργαλεία και τις στρατηγικές έννοιες που είναι φορείς της μαθηματικής γνώσης. Μαθηματικοί φιλόσοφοι και δάσκαλοι συμφωνούν ότι η απόδειξη καθιερώνει την αλήθεια μιας μαθηματικής σχέσης, ενός μαθηματικού θεωρήματος. Η διαδικασία μιας

απόδειξης μπορεί να επιδείξει νέες μεθόδους, εργαλεία, στρατηγικές και έννοιες που είναι ευρύτερης δυνατότητας εφαρμογής μέσα τα μαθηματικά που ανοίγουν τις νέες μαθηματικές κατευθύνσεις. Με άλλα λόγια οι αποδείξεις είναι φορείς της μαθηματικής γνώσης (G. Hanna & E. Barbeau 2008).

Η άποψη του Yehuda Ray είναι ότι αν υπήρχε μια μηχανή μαθηματικών που εξετάζοντας διάφορα θεωρήματα και προτάσεις θα μπορούσε να τις χαρακτηρίσει ως αληθή ή ως ψευδή μια τέτοια μηχανή δεν θα ικανοποιούσε την μαθηματική κοινότητα, γιατί η ίδια η διαδικασία της απόδειξης συμβάλλει στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Οι αποδείξεις παράγουν νέες μαθηματικές ιδέες και νέες μεθόδους που αποκτούν αξία αρκετά πέρα από την καθιέρωση και την αλήθεια των υποδεικνυομένων προτάσεων.

Σύμφωνα με τους G. Hanna – Ed. Barbeau (2004) υπάρχουν δύο είδη απόδειξης. Το πρώτο είδος ονομάζεται «παραγωγική» απόδειξη (derivation proof) που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως φορμαλιστική απόδειξη όπου σε αυτήν γίνεται εφαρμογή των κανόνων της λογικής. Η «παραγωγική απόδειξη» αποτελείται από μια πεπερασμένη σειρά τύπων, αξιωμάτων ή θεωρημάτων που προέρχονται από τα αξιώματα. Το δεύτερο είδος απόδειξης είναι η «εννοιολογική» απόδειξη (conceptual proof) που περιέχει ένα σημασιολογικό περιεχόμενο. Αποτελούνται οι αποδείξεις αυτές από αυστηρά επιχειρήματα αποδεκτά από την μαθηματική κοινότητα και η δομή της αποτελείται από λογικά βήματα.

Ο Dawson (2006) αναφέρει την μεγάλη σημασία που έχει για την μαθηματική γνώση η εμφανιζόμενη ποικιλία διαφορετικών αποδείξεων ενός θεωρήματος. Θεωρεί ότι υπάρχουν αρκετοί λόγοι που οι μαθηματικοί επιδιώκουν την διατύπωση νέων αποδείξεων για θεωρήματα που έχουν ήδη αποδειχθεί. Οι λόγοι αυτοί είναι:

- Η αναγκαιότητα να θεραπευτούν ανεπάρκειες που υπήρχαν στις προηγούμενες αποδείξεις.
- Η αναγκαιότητα να υιοθετηθούν απλούστεροι συλλογισμοί.
- Η κατάδειξη διαφορετικών μεθοδολογιών.
- Η αναγκαιότητα αιτιολόγησης για ιστορικούς λόγους.
- Μια νέα απόδειξη είναι δυνατόν να επεκτείνει κάποιο αποτέλεσμα ή να

δημιουργήσει γενικεύσεις.

- Μια νέα απόδειξη είναι δυνατόν να ανακαλύψει νέες μαθηματικές διαδρομές.
- Η νέα απόδειξη εκφράζει την ανησυχία των μαθηματικών για την ανακάλυψη νέων μεθοδολογιών.
- Η ύπαρξη πολλαπλών αποδείξεων εξυπηρετεί έναν ανώτερο σκοπό που είναι ανάλογος της επιβεβαίωσης των φυσικών επιστημών.

Ο ρόλος των αποδείξεων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι σημαντικός. Οι αποδείξεις στα σχολεία έχουν την δυνατότητα να μεταβιβάσουν στους μαθητές σημαντικά μαθηματικά στοιχεία, όπως είναι οι διάφορες στρατηγικές επίλυσης και οι μέθοδοι. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να στρέψουν την προσοχή των μαθητών στην εκμετάλλευση αυτών των στοιχείων της αποδεικτικής διαδικασίας. Η διδασκαλία των αποδείξεων δίνει την δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να μεταβιβάσει στους μαθητές του σημαντικά κομμάτια της μαθηματικής γνώσης και να δώσει μια ευρύτερη εικόνα της φύσης των μαθηματικών.

2.8 Η περιεκτική προοπτική (comprehensive perspective) της απόδειξης

Η περιεκτική προοπτική στην μάθηση και τη διδασκαλία των αποδείξεων είναι μια διαδικασία που ενσωματώνει μια ευρεία σειρά παραγόντων όπως οι γνωστικοί παράγοντες για τα μαθηματικά, τα ιστορικά και επιστημολογικά στοιχεία τους καθώς και κοινωνιολογικά και εκπαιδευτικά δεδομένα. Οι περιεκτική προοπτική στην απόδειξη απαιτείται, προκειμένου να γίνουν καλύτερα κατανοητές η φύση και οι ρίζες των δυσκολιών των μαθητών με την απόδειξη έτσι ώστε αποτελεσματικές εκπαιδευτικές επεξεργασίες να έχουν ως σκοπό, αν εφαρμοστούν, να αλλάξουν τη στάση των μαθητών απέναντι στην απόδειξη. Η προοπτική αυτή αυξήθηκε από μια δεκαετία ερευνών —εμπειρικών και θεωρητικών —στις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της απόδειξης. Η ενοποίηση όλων των παραπάνω για πρώτη φορά έγινε από τους Harel & Sowder, (1998) με την κατασκευή και μελέτη ενός «σχεδίου απόδειξης»

Το ουσιαστικό μέρος του *περιεχομένου* της περιεκτικής προοπτικής στην απόδειξη εξετάζει και δίνει απαντήσεις σε αρκετά ερωτήματα όπως τα παρακάτω.

1. Τι είναι απόδειξη και ποιες είναι οι λειτουργίες της;
2. Πώς οι αποδείξεις κατασκευάζονται, ελέγχονται, και γίνονται αποδεκτές στην κοινότητα των μαθηματικών;
3. Ποιες είναι οι κρίσιμες φάσεις στην ανάπτυξη της απόδειξης στην ιστορία των μαθηματικών;
5. Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών σε μία απόδειξη;
6. Ποιοι απολογισμοί υπάρχουν για αυτές τις δυσκολίες;
7. Γιατί διδάσκεται η απόδειξη ;
8. Πώς πρέπει να διδάσκεται μια απόδειξη;
9. Πώς οι αποδείξεις κατασκευάζονται, ελέγχονται, και γίνονται αποδεκτές στην τάξη;
10. Ποιες είναι οι κρίσιμες φάσεις στην ανάπτυξη της απόδειξης για ένα μεμονωμένο μαθητή μέσα στην τάξη;
11. Ποιο είναι το κατάλληλο περιβάλλον που πρέπει να έχει μια τάξη ώστε να συμβάλλει στην ανάπτυξη της έννοιας της απόδειξης με τους μαθητές;
12. Ποια μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών ή μεταξύ των μαθητών και του δασκάλου μπορεί να ενθαρρύνει τη σύλληψη μιας απόδειξης από τους μαθητές;
13. Ποιες μαθηματικές δραστηριότητες – ενδεχομένως με τη χρήση της τεχνολογίας – μπορούν να ενισχύσουν τους μαθητές ώστε να κατανοήσουν μια απόδειξη;

Μία βασική έννοια που φωτογραφίζει την περιεκτική προοπτική στην μάθηση και τη διδασκαλία των αποδείξεων είναι ή έννοια του «**σχεδίου απόδειξης**» (proof scheme) που χρησιμεύει ως ο κύριος φακός της περιεκτικής προοπτικής στην απόδειξη. Μέσω του σχεδίου απόδειξης, αναλύουμε και ερμηνεύουμε τον τρόπο που παρουσιάζουν τις αποδείξεις οι μαθητές —στη μεμονωμένη εργασία τους καθώς επίσης και στην αλληλεπίδρασή τους με άλλους μαθητές —και καταλαβαίνουμε την ανάπτυξη της απόδειξης μέσα από την ιστορία των μαθηματικών.

Για να καθοριστεί ένα «σχέδιο απόδειξης» είναι απαραίτητα να διευκρινίσουμε ορισμένες έννοιες: Στην διαδικασία μιας απόδειξης (για παράδειγμα ενός θεωρήματος) τα δεδομένα μαθηματικά αντικείμενα είναι η υπόθεση και τα συμπεράσματα που πρέπει να εξαχθούν χαρακτηρίζονται ως ο ισχυρισμός της απόδειξης. Ο ισχυρισμός όταν αποδειχθεί η αλήθεια του γίνεται ένα μαθηματικό γεγονός που είναι αποδεκτό για αυτόν που διενεργεί την απόδειξη. Η παρουσίαση της

απόδειξης *είναι* η διαδικασία που υιοθετείται από ένα άτομο (ή μια κοινότητα) για να αφαιρεθούν οι αμφιβολίες για την αλήθεια του ισχυρισμού. Η παρουσίαση της απόδειξης σκοπό έχει να πείσει για την αλήθεια του μαθηματικού γεγονότος. Επομένως το «σχέδιο απόδειξης» περιλαμβάνει όλα τα παραπάνω δηλαδή την διαδικασία της απόδειξης και τα απαραίτητα εργαλεία που θα πείσουν για την ισχύ αυτού που έχει αποδειχθεί.

Τα σχέδια απόδειξης σύμφωνα με τους G. Harel – L. Sowder ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες. Α) τα **εξωτερικά σχέδια απόδειξης** που βασίζονται στις γνώσεις του δασκάλου ή του βιβλίου που διδάσκει. Στα εξωτερικά αυτά σχέδια τα μαθηματικά επιχειρήματα είναι αυστηρά διατυπωμένα και ο καλός χειρισμός των συμβόλων είναι απαραίτητος. Β) **τα εμπειρικά σχέδια απόδειξης** που βασίζονται στις αντιλήψεις των μαθητών, σε παραδείγματα και μετρήσεις μεγεθών και γ) στα **παραγωγικά σχέδια απόδειξης** που βασίζονται στην λειτουργική σκέψη και στην μαθηματική λογική.

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3.1 Γενικά

Σε ένα μαθηματικό σύστημα, όταν λέμε ότι θα αποδείξουμε την αλήθεια μιας πρότασης p εννοούμε ότι θα κατασκευάσουμε μια πεπερασμένη διαδοχή προτάσεων της θεωρίας του συστήματος με τελευταία την πρόταση p, έτσι ώστε κάθε πρόταση της διαδοχής ή να είναι μια αληθής πρόταση της θεωρίας ή να προέρχεται από μια ή περισσότερες προηγούμενες στην διαδοχή προτάσεων με εφαρμογή των νόμων της λογικής. Επομένως για να αποδείξουμε μια πρόταση σε μια μαθηματική θεωρία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλες αληθείς προτάσεις της θεωρίας.

Οι προτάσεις οι οποίες σε ένα μαθηματικό σύστημα γίνονται δεκτές ως αληθείς χωρίς απόδειξη, ονομάζονται **αξιώματα** της θεωρίας του συστήματος. Κάθε πρόταση του συστήματος, της οποίας η αλήθεια μπορεί να αποδειχτεί, ονομάζεται **θεώρημα** της θεωρίας του συστήματος. Μερικά θεωρήματα έχουν επικρατήσει με ιδιαίτερα ονόματα όπως **«λήμμα»** και **«πόρισμα».** Λήμμα ονομάζουμε ένα προκαταρτικό θεώρημα που χρησιμεύει για την απόδειξη ενός άλλου σπουδαιότερου θεωρήματος, ενώ πόρισμα ονομάζουμε ένα θεώρημα του οποίου η απόδειξη προκύπτει άμεσα από ένα ή περισσότερα θεωρήματα που ήδη έχουν αποδειχθεί.
Επομένως όταν λέμε **μαθηματικό σύστημα** εννοούμε ένα σύνολο μαθηματικών θεωριών. Μια δε μαθηματική θεωρία αποτελείται από

- Τις πρωταρχικές έννοιες (έννοιες που δεν ορίζονται)
- Τους οριζόμενους όρους (έννοιες που ορίζονται)
- Τα αξιώματα (προτάσεις που τις δεχόμαστε ως αληθείς)
- Τα θεωρήματα (προτάσεις που αποδεικνύουμε ότι είναι αληθείς)

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω ορισμό της έννοιας της απόδειξης:

Απόδειξη μιας πρότασης p μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα είναι η διαδικασία παραγωγής της ισχύος της p με την βοήθεια των αξιωμάτων του συστήματος ή με την βοήθεια πεπερασμένου πλήθους προτάσεων του, των οποίων η ισχύς είτε είναι δεδομένη είτε προκύπτει από άλλες γνωστές προτάσεις του συστήματος.

Στην πράξη η απόδειξη μιας πρότασης δεν γίνεται πάντοτε με την παραπάνω διαδοχή των αξιωμάτων και των προτάσεων του μαθηματικού συστήματος. Η μαθηματική λογική μας παρέχει κανόνες, βάσει των οποίων η εν λόγω διαδοχή είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με άλλη διαδοχή προτάσεων της θεωρίας η οποία είναι πιθανό να αποδεικνύει την πρόταση ευκολότερα.

Σε κάθε απόδειξη διακρίνουμε:

- **Την υπόθεση**, που είναι τα δεδομένα μιας πρότασης που πρόκειται να αποδειχτεί ή τα δεδομένα ενός προβλήματος, δηλαδή είναι προτάσεις των οποίων η ισχύς είναι δεδομένη.
- **Το συμπέρασμα,** που είναι τα ζητούμενα της πρότασης που είναι να αποδειχθεί ή τα ζητούμενα ενός προβλήματος, για τα οποία θέλουμε να δείξουμε την ισχύ τους.
- **Τα αποδεικτικά στοιχεία,** που είναι οι αρχικές έννοιες, οι ορισμοί, τα αξιώματα και άλλες προτάσεις του μαθηματικού συστήματος, των οποίων γνωρίζουμε την ισχύ τους.
- **Τους αποδεικτικούς κανόνες,** που είναι οι νόμοι ή οι αρχές που ισχύουν μέσα στο σύστημα και μας εξασφαλίζουν τη σωστή πορεία από την αφετηρία μέχρι το τέλος της διαδικασίας.

Όταν λοιπόν λέμε ότι θα αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης p μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα, γνωρίζοντας τις προτάσεις p_1, p_2, …, p_ν που ισχύουν στο σύστημα, εννοούμε ότι:

- Έχουμε δεδομένη την ισχύ των προτάσεων p_1, p_2, …, p_ν στο μαθηματικό σύστημα (υπόθεση)
- Θέλουμε να δείξουμε την ισχύ της πρότασης p στο μαθηματικό σύστημα (συμπέρασμα)
- Χρησιμοποιούμε τις προτάσεις p_1, p_2, …, p_ν καθώς και οποιαδήποτε άλλη πρόταση του συστήματος η οποία πιθανόν να χρειαστεί και της οποίας η ισχύς στο σύστημα είναι γνωστή. Έτσι δημιουργούμε μια διαδοχή προτάσεων:

  $$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_\nu \Rightarrow p$$

  που δηλώνουν την ισχύ της πρότασης p, δηλαδή την απόδειξη του συμπεράσματος.

3.2 Κατηγορίες αποδείξεων

Οι κύριοι τύποι συλλογισμών και άρα της απόδειξης μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρείς κατηγορίες: Την **διαισθητική** (ενορατική) απόδειξη, την **επαγωγική** απόδειξη και την **παραγωγική** απόδειξη. (Baroody, A. 1993).

Με τον όρο **διαισθητική** (ενορατική) απόδειξη, νοείται η ξαφνική σύλληψη της αλήθειας, σαν έμπνευση, χωρίς την παρέμβαση της λογικής, χωρίς δηλαδή, τη λογική απόδειξή της. Για παράδειγμα, μπορεί να μην έχουμε όλες τις αναγκαίες πληροφορίες για να πάρουμε μια απόφαση, για να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα, οπότε βασιζόμαστε σε κάτι που φαίνεται προφανές ή στηριζόμαστε στις αισθήσεις μας.

Διαίσθηση είναι η ικανότητα ενός ατόμου, μέσω της οποίας τα μαθηματικά αντικείμενα που εξετάζει γίνονται άμεσα γνωστά. Αυτά τα αντικείμενα μπορεί να τα κατανοήσει και να τα συγκρίνει με άλλα αντικείμενα και να οδηγηθεί στην έμμεση εννοιολογική γνώση. (Fischbein E. 1999). Το διαισθητικό είδος γνώσης είναι μια έννοια με την οποία έχουν ενδιαφερθεί κυρίως φιλόσοφοι μαθηματικοί. Στις εργασίες των Descartes (1967) και Spinoza (1967) η διαίσθηση παρουσιάζεται ως γνήσια πηγή αληθινής γνώσης. Από την άλλη μεριά υπάρχουν φιλόσοφοι που επικρίνουν την διαίσθηση και τον αντίκτυπό της στον επιστημονικό συλλογισμό, θεωρούν ότι η διαίσθηση μπορεί να είναι παραπλανητική και επομένως, πρέπει να αποφεύγεται στον επιστημονικό συλλογισμό. Hans Hahn (1956) και Bunge (1962). Οι ψυχολόγοι παρουσιάζουν λίγο ενδιαφέρον για την διαισθητική γνώση και την θεωρητική της υπόσταση. Εκτός από τα βιβλία των Westcott (1968), Fischbein (1975, 1987) και Bastick (1982), δεν υπάρχει καμία συστηματική μελέτη στην περιοχή της διαίσθησης.

Το ενδιαφέρον για τη διαισθητική γνώση (αν και μερικές φορές όχι με το ίδιο όνομα) εμφανίζεται κυρίως στην εργασία μελετητών όπως οι DiSessa, και Gelman (1988) που εξετάζουν την επιστημονική και μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών Αυτό είναι μόνο ένα πολύ μικρό δείγμα των εργασιών που γίνονται όσον αφορά τις πρακτικές και αναπτυξιακές πτυχές της διαίσθησης που εμπνέονται κυρίως από εκπαιδευτικές ανάγκες. Τελευταία το επιστημονικό ενδιαφέρον για την διαίσθηση έχει αυξηθεί λόγω δύο κυρίως γεγονότων. Το πρώτο είναι η αυξανόμενη προσπάθεια των μαθηματικών να «καθαρίσουν» την γνώση μας από τις υποκειμενικές ερμηνείες

και πεποιθήσεις που οδηγούν σε αντιφάσεις πάνω σε επιστημονικά θέματα. Μια δεύτερη πηγή του ανανεωμένου ενδιαφέροντος για τη διαισθητική γνώση προέρχεται από τη διδακτική των μαθηματικών. Όταν ο καθηγητής διδάσκει μια μαθηματική έννοια συνήθως αναφέρει τις δικές του γνώσεις για το θέμα αυτό. Συγχρόνως θεωρεί ότι οι μαθητές είναι έτοιμοι να απομνημονεύσουν την γνώση αυτή. Στην πραγματικότητα όμως συμβαίνουν άλλα γεγονότα, οι μαθητές δεν απομνημονεύουν πραγματικά την αντίστοιχη γνώση αλλά γίνεται μια διαισθητική κατανόηση του φαινομένου που συνήθως είναι διαφορετική από την επιστημονική του ερμηνεία. Αυτή η αντίσταση στην γνώση του μαθητή μπορεί να είναι σιωπηρή ή ανοικτή, υπονοούμενη ή ρητή, αλλά υπάρχει. Για παράδειγμα η ιδέα ότι ένα τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο είναι διαισθητικά παράξενη για πολλούς μαθητές. Η ιδέα ότι με τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, μπορεί να επιτύχει ένα αποτέλεσμα που είναι μικρότερο από τον έναν ή και οι δύο από τους πολλαπλασιασμένους αριθμούς, είναι επίσης δύσκολο να το δεχτεί ένας μαθητής. Ο καθηγητής ανακαλύπτει ότι η γνώση που είναι υποτιθέμενος να διαβιβάσει στο μαθητή συγκρούεται, πολύ συχνά, με τις πεποιθήσεις και τις ερμηνείες του που είναι φυσικά πολύ ανθεκτικές και συγκρουόμενες με τις επιστημονικά καθιερωμένες έννοιες. Αλλά μια πληρέστερη περιγραφή των διαισθητικών γνώσεων είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνει κατανοητός ο ρόλος τους σε μια διαδικασία συλλογισμού. Οι διαισθητικές γνώσεις έχουν τα παρακάτω κύρια χαρακτηριστικά.

Η άμεσα αυτονόητη διαισθητική γνώση (*Direct, self-evident* cognition) που σημαίνει ότι ένας μαθητής κάνει αποδεκτές τις γνώσεις χωρίς να αισθάνεται την ανάγκη για περαιτέρω έλεγχο και απόδειξή. Για παράδειγμα η πρόταση ότι η πιο σύντομη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του επιπέδου είναι μια ευθεία γραμμή είναι μια άμεσα αυτονόητη διαισθητική γνώση. Η εγγενής βεβαιότητα (Intrinsic certainty*)*. Αυτή είναι μια διαισθητική γνώση συνδέεται συνήθως με ένα συναίσθημα βεβαιότητας. Θεωρείται η γνώση που προκύπτει από ένα ορισμό και δεν απαιτείται καμία υποστήριξη για να γίνει από τους μαθητές άμεσα αποδεκτή. Αναγκαστική διαίσθηση. Είναι μια διαισθητική γνώση που επιδράει στις στρατηγικές συλλογισμού του μαθητή και απορρίπτει οτιδήποτε έρχεται σε αντίθεση με τις διαισθήσεις του. Για παράδειγμα οι περισσότεροι μαθητές διαισθάνονται ότι το γινόμενο δύο αριθμών θα πρέπει να είναι υποχρεωτικά μεγαλύτερο από καθένα από

τους όρους του γινομένου.

Οι διαισθήσεις που αναπτύσσει ένας μαθητής κατά την προσπάθεια απόδειξης μιας μαθηματικής σχέσης είναι άλλοτε σωστές και άλλοτε λανθασμένες. Αυτό εξαρτάται από την προσωπική του εμπειρία και από την δυσκολία των εννοιών που επεξεργάζεται. Τέλος οι διαισθήσεις που αναπτύσσει ένας μαθητής επί ανθεκτικές σε κάθε εννοιολογική αλλαγή. Ο κύριος λόγος είναι ότι οι διαισθήσεις συσχετίζονται με τα καλά δομημένα συστήματα της γνωστικό-συμπεριφοριστικής, προσαρμοστικής δραστηριότητάς μας. Γι' αυτό το λόγο μια διαίσθηση δεν μπορεί να αλλάξει ως απομονωμένη διανοητική συσκευή. Οι διαισθήσεις αλλάζουν μαζί με το ολόκληρο προσαρμοστικό σύστημα στο οποίο ανήκουν.

Με τον όρο **επαγωγική** απόδειξη , ορίζεται η απόδειξη, όταν κάνει χρήση μιας κανονικότητας. Κατά την επαγωγική απόδειξη, βρίσκουμε μια κοινή ιδιότητα μεταξύ πολλών διαφορετικών παραδειγμάτων, περιπτώσεων ή μοτίβων που επαναλαμβάνονται, και αυτή η ιδιότητα αποτελεί μια βάση για γενίκευση και εξαγωγή συμπερασμάτων. Ο όρος επαγωγική απόδειξη, δεν ταυτίζεται με την τέλεια ή μαθηματική επαγωγή.

Τέλος η **παραγωγική** απόδειξη, που συνήθως φαίνεται να φοβίζει στην πραγματικότητα είναι απλά η διαδικασία της εξαγωγής συμπεράσματος, που αναγκαστικά ακολουθεί προηγούμενες γνώσεις και στηρίζεται σε αυτές.

Και οι τρεις προηγούμενοι τύποι αποδείξεων, διαισθητική, επαγωγική και παραγωγική παίζουν σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη και εφαρμογή των μαθηματικών. Η μαθηματική έρευνα συχνά ξεκινά με ένα συμπέρασμα βασισμένο στην διαίσθηση, ή σε μια εικασία, σε μια πρόγνωση.(Hanna G. 1996). Πολλές φορές, πάλι, χρειάζεται να εξετάσει συγκεκριμένες περιπτώσεις προκειμένου να γίνει γενίκευση. Η παραγωγική απόδειξη στην συνέχεια είναι το μέσο για να ελεγχθούν οι εικασίες που έχουν προηγηθεί. Μια επιτυχημένη, επομένως, διδασκαλία δεν μπορεί παρά να περιέχει και τους τρεις τύπους αποδείξεων. Έτσι αν δεχτούμε πως ο κύριος σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών θα πρέπει να εδραιώνει στους μαθητές την πεποίθηση, ότι τα μαθηματικά έχουν λογική και να καλλιεργεί την ικανότητά τους να βγάζουν συμπεράσματα, τότε η ανάπτυξη της επιτηδειότητας του συλλογίζεσθε, είναι

αναγκαία για να προχωρήσουν οι μαθητές παραπέρα στο επίπεδο της απομνημόνευσης, της απλής παρατήρησης και των κανόνων των διαδικασιών μιας απόδειξης.

Μια πρώτη ενορατική προσέγγιση της αλήθειας, είναι απαραίτητη, γιατί είναι πιο κοντά στην εμπειρία και την πραγματικότητα. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές, εξοικειώνονται με την αλήθεια, πριν ακόμη αυτή αποδειχθεί, με συνέπεια η ορθολογική απόδειξη, όχι μόνο να βρει καλύτερη αποδοχή, αλλά και σε πολλές περιπτώσεις να γίνει από τους ίδιους τους μαθητές, Τότε, η αλήθεια γίνεται πιο γόνιμη, αφού, γίνεται κατανοητή πριν την απόδειξή της. Το σχήμα, η εποπτική εργασία, η αναλογική σκέψη, η εικόνα, η μοντελοποίηση, η εύρεση ενός pattern, τα γραφικά του υπολογιστή, καλλιεργούν στους μαθητές, την ενόραση, απαραίτητη πρώτη φάση των επιχειρημάτων. Η διαισθητική απόδειξη, βασίζεται στην εντύπωση ή σε παραδοχές. Υπάρχει όμως μεγάλος κίνδυνος η εντύπωση να παρερμηνευτεί και μια παραδοχή να είναι εσφαλμένη. Έτσι, η διαίσθηση μπορεί να είναι εξ ίσου σωστή ή λάθος. Η επαγωγική απόδειξη, όπως και η διαισθητική δεν είναι ικανή να αποδείξει την αλήθεια μιας πρότασης ή όχι. Μια επαγωγική διαδικασία, εξετάζει μερικές περιπτώσεις ή παραδείγματα, οπότε μπορεί να αποδείξει την αλήθεια για αυτές μόνο τις ειδικές περιπτώσεις. Η επαγωγική απόδειξη δεν μπορεί να αποδείξει ότι μια πρόταση ισχύει για όλες τις περιπτώσεις.

Οι παραγωγικές αποδείξεις, μπορούν να ξεκαθαρίσουν κατά πόσο μια εντύπωση ή μια εικασία είναι λογικά αποδεκτές και κατά πόσο αυτές ισχύουν. Παρόλο που η παραγωγική απόδειξη άρα και οι παραγωγικοί συλλογισμοί είναι μια πολύ ισχυρή διαδικασία προκειμένου να αποφανθεί κανείς ότι μια διαίσθηση ή μια επαγωγή ισχύει γενικά, έχει και αυτή όρια και μπορεί να γίνει κατάχρηση επίσης. Μια παραγωγική απόδειξη για να εγγυηθεί ένα σωστό αποτέλεσμα, χρειάζονται δύο προϋποθέσεις. Η πρώτη: Η (αρχική) υπόθεση να είναι σωστή , δηλαδή οι υποθέσεις που διέπουν το μαθηματικό αντικείμενο (πρόταση, θεώρημα, πρόβλημα) που εξετάζετε είναι πλήρεις και αληθείς και η δεύτερη: οι συλλογισμοί που περιέχονται στην αποδεικτική διαδικασία είναι λογικοί. Αν μια από αυτές τις δύο προϋποθέσεις δεν ισχύουν, τότε η παραγωγική απόδειξη μπορεί να καταλήξει σε εσφαλμένο συμπέρασμα. Για παράδειγμα το θεώρημα: «Ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι το

ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει». Ας εξετάσουμε αν το θεώρημα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις. Οι περισσότεροι πιστεύουν πως μπορεί. Αν εφαρμόσουμε όμως το θεώρημα στην επιφάνεια μιας σφαίρας και όχι στο επίπεδο, θα διαπιστώσουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει, φαίνεται λοιπόν ότι έχει μεγάλη σημασία να ξέρει κανείς σε ποιο χώρο βρίσκεται και να ελέγχει αν ισχύον κάθε φορά όλες οι προϋποθέσεις. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται πως η έλλειψη αντιπαραδειγμάτων, ώστε με την βοήθειά τους να μπορεί κανείς να ελέγχει τις υποθέσεις μπορούν να εδραιώσουν πεποιθήσεις που δύσκολα μπορούν να ανατραπούν.

3.3 Συμπεράσματα.

Είναι γενικά αποδεκτό, ότι η εποπτεία και η εμπειρία βοηθούν την διαίσθηση, την εμπλουτίζουν, θέτουν ερωτήματα, δημιουργούν αμφιβολίες. Η εξαγωγή μιας μαθηματικής έννοιας από μια συγκεκριμένη κατάσταση – πρόβλημα, υπαρκτό, μια γενίκευση μετά από την εξέταση περιπτώσεων, που μπορεί να παρατηρηθούν στην συνέχεια, οι διαισθητικές αιτιολογήσεις, όλα αυτά, αποτελούν τρόπους σκέψης. Χωρίς την εξοικείωση του μαθητή με αυτές τις άτυπες διεργασίες σκέψης, δεν μπορεί να καταλάβει ποτέ τον αληθινό ρόλο της απόδειξης, που δεν είναι άλλος από το να επικυρώνει και να νομιμοποιεί τις κατακτήσεις της διαίσθησης. (Schoefeld, A. 1999). Η αποκλειστική παρουσία διαισθητικών – εποπτικών και επαγωγικών αποδείξεων, εκτός των άλλων διαμορφώνει και για πολλούς παγιώνει την αντίληψη των μαθητών για την ίδια την επιστήμη των μαθηματικών, γιατί η ανάγκη υποστήριξης και δικαιολόγησης με επιχειρήματα και αντιπαραδείγματα είναι δυνατόν να γίνει μέσω της παραγωγικής απόδειξης. Επιπλέον, μια παραγωγική μαθηματική απόδειξη, θέτει δημόσια και με διαφάνεια τα επιχειρήματα προκειμένου να στηρίξει την αλήθεια, οπότε, κάθε πληροφορία και όλοι οι κανόνες είναι ανοικτοί σε κριτική. (Hanna, G.1996).

Η αντικατάσταση της απόδειξης από την διαδικασία της εποπτικής δικαιολόγησης, δηλαδή της διατύπωσης επιχειρημάτων και συλλογισμών μετατοπίζει τον χαρακτήρα των μαθηματικών από την τέχνη του συλλογίζεσθε σε ένα αντικείμενο, που δέχεται παθητικά την αλήθεια. Αποσπασματικές αποδείξεις (όπως παρατίθενται σε πολλά σχολικά βιβλία ιδιαίτερα σε γυμνασιακές τάξεις) δημιουργούν μαθητές που

αρκούνται από τις εκφράσεις «μου φαίνεται ότι ισχύει», «ας κάνω μερικές δοκιμές και μου αρκούν». Επομένως απαραίτητα είναι τα επιχειρήματα γιατί είναι εκείνα που πείθουν για την ισχύ μιας μαθηματικής πρότασης. Με επιχειρήματα μπορεί κανείς να γενικεύσει, αλλά και να πείσει πως αυτό που ανακάλυψε δεν ισχύει μόνο για την συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά ισχύει γενικά. Οι μετρήσεις και οι δοκιμές μπορεί να δημιουργήσουν αυταπάτες ή αμφιβολίες.

Διαδικασίες, όπως η αναγωγή του προβλήματος σε απλούστερες περιπτώσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες και παραγωγικές. Η διδακτική διαδικασία τέτοιων αναγωγών είναι δεδομένη, ωστόσο πρέπει να έχουμε υπόψη μας και να είμαστε προετοιμασμένοι για το απροσδόκητο, γιατί ακόμα και να μπορούσαμε να βρούμε υψηλής ποιότητας τέτοιες ευρετικές, δηλαδή ασφαλείς μεθόδους για να οδηγήσουν στον χειρισμό μαθηματικών προβλημάτων, κάποιες φορές ένας τύπος, ένας κανόνας που δουλεύει για πάρα πολλές περιπτώσεις, για την εκατομμυριοστή όμως δεν ισχύει. (Schoenfeld, A. 1992)

Η αποσπασματική παρουσία των παραγωγικών αποδείξεων στερεί από την διδασκαλία των μαθηματικών τον βασικότερο από τους κύριους σκοπούς της. Είναι γνωστό ότι, όπως τα μαθηματικά τα ίδια, έτσι και η μάθησή τους είναι μια κοινωνική δραστηριότητα (Schoenfeld, A. 1992). Μια διδασκαλία που δίνει έμφαση στην παραγωγή και διατύπωση των επιχειρημάτων, στην πραγματικότητα διδάσκει τους μαθητές να επικοινωνούν μεταξύ τους στην σχολική τάξη, να κριτικάρουν τις απόψεις τους, αλλά και τις απόψεις του δασκάλου τους καθώς και τις στρατηγικές που ακολουθούν. Επίσης, μια τέτοια διδασκαλία ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν την αυτοπεποίθησή τους και να αποκτήσουν σχέσεις συνεργασίας και όχι ανταγωνισμού. (Barrody, A. 1993)

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών και η εισδοχή όλο και περισσότερο των υπολογιστών στην ζωή μας, δεν θα μπορούσε να αφήσει άθικτη την μαθηματική απόδειξη. Πολλοί πιστεύουν, ότι η διείσδυση του υπολογιστή στα μαθηματικά πρέπει να επηρεάσει την διδασκαλία τους στο επίπεδο της σχολικής αίθουσας, με το να εξασθενίσει την σημασία της παραδοσιακής μαθηματικής απόδειξης, προς όφελος πιο εμπειρικών δοκιμαστικών τρόπων. (De Villiers, M.

1998). Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη, η εγκυρότητα κάποιων μαθηματικών προτάσεων, μπορεί να εξασφαλιστεί και η «πειραματική» διαδικασία μιας υπολογιστικής απόδειξης. Ερωτήματα που τίθενται και από την σκοπιά της φιλοσοφίας των μαθηματικών, τα οποία αναγκαστικά επαναπροσδιορίζουν την έννοια της απόδειξης, αλλά και κατ' επέκταση των ίδιων των μαθηματικών και που αποσιωπώνται στα σχολικά εγχειρίδια. Αποσιωπάται δηλαδή, η πολυπλοκότητα της απόδειξης.(Van Bendegem, J. P. 2003)

Ο υπολογιστής, όπως όλα τα διδακτικά μέσα, ούτε μπορεί ούτε πρέπει να θεωρηθεί πανάκεια, που θα λύσει όλα τα προβλήματα της εκπαίδευσης των μαθηματικών. Ούτε μπορεί, ούτε πρέπει βέβαια, να υποκαταστήσει τα επιχειρήματα από την διδασκαλία. (Λάππας, Δ. 1999). Και για να επικαλεστούμε ακόμα μια φορά την G. Hanna, «το να διδάσκεις τους μαθητές να αναγνωρίζουν και να παράγουν σωστά μαθηματικά επιχειρήματα, είναι σίγουρα, μια πρόκληση». Όλοι ξέρουμε πολύ καλά ότι πολλοί μαθητές έχουν δυσκολίες να παρακολουθήσουν κάθε είδους λογικά επιχειρήματα και πολύ περισσότερο μια μαθηματική απόδειξη. Για τους μαθητές «απόδειξη» σημαίνει μια σειρά από διαφορετικά πράγματα και είναι πολύ πιθανόν να διαφέρει από την αντίληψη ενός δασκάλου των μαθηματικών, αλλά και από δάσκαλο σε δάσκαλο. Λέξεις και σημασίες, όπως δείξε, απόδειξε, εφάρμοσε, επαλήθευσε, δικαιολόγησε το συμπέρασμα, έχουν διαφορετικό νόημα η δεν λένε τίποτα για τους μαθητές, οι οποίοι μάλιστα, συχνά θέτουν το ερώτημα «Γιατί είναι αναγκαίο να αποδειχθεί κάτι που είναι γνωστό ότι είναι αληθές»(Tall, D. 1989). Δεν μπορούμε όμως να αποφύγουμε αυτή την πρόκληση. Χρειαζόμαστε να βρούμε δρόμους, μέσω της έρευνας και τις διδακτικής εμπειρίας, να βοηθήσουμε τους μαθητές να αποκτήσουν τις ικανότητες που απαιτούνται για να κατακτήσουν την απόδειξη. Η αποτυχία μας σε ατό το στόχο θα μας στερήσει ένα πολύτιμο διδακτικό εργαλείο και θα αποκλείσει τους μαθητές μας από ένα κρίσιμο στοιχείο της μαθηματικής γνώσεις. Αυτό που θα πρέπει τα μαθηματικά να κάνουν, είναι να δίνουν στους μαθητές πλούσιες σε έννοιες καταστάσεις και να τους ενθαρρύνουν να κάνουν συλλογισμούς και να διατυπώνουν επιχειρήματα.

Τέλος σε καμιά περίπτωση όμως δεν πρέπει να διδάσκονται οι μαθητές μια σειρά μόνο από παραγωγικές αποδείξεις θεωρημάτων, ούτε πιστεύουμε ότι είναι πρέπει να

προστεθούν ακόμα μερικές αποδείξεις στα σχολικά βιβλία. Αντίθετα θα πρέπει οι μαθητές να διδάσκονται εκτός από τις αποδείξεις, παράδοξα, αντιπαραδείγματα, διαφόρων ειδών αποδείξεις. Υπάρχουν, άλλωστε αρκετά επίπεδα αυστηρότητας στα μαθηματικά, οι μαθητές θα πρέπει σταδιακά να μαθαίνουν να αναζητούν, να σκέφτονται και να δικαιολογούν, να ασκούν κριτική σε όσα μαθαίνουν. (Τουμάσης, Μ. 1999)

4. Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

4.1 ΟΙ ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η λογική ασχολείται με την μελέτη διαδικασιών και νόμων, με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε με ορθό τρόπο από **υποθέσεις** σε **συμπεράσματα.** Θεμελιωτής της λογικής θεωρείται ο **Αριστοτέλης**, αλλά από διάφορες πηγές προκύπτει ότι με την λογική ασχολήθηκαν και φιλόσοφοι πριν από αυτόν. Φυσικά, οι άνθρωποι επιχειρηματολογούσαν για αιώνες πριν, χωρίς να μπουν στον κόπο να διατυπώσουν κανόνες για το πώς ακριβώς έπρεπε να το κάνουν. Κάτι τέτοιο συμβαίνει με πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες: συνήθως εκτελούμε κάποια σωματική ή πνευματική εργασία χωρίς να θεωρούμε απαραίτητο πριν να διατυπώσουμε κανόνες για το πώς ακριβώς πρέπει να εκτελείται. Άραγε που βρίσκονται οι **απαρχές της λογικής,** δηλαδή σε ποιες ανθρώπινες δραστηριότητες υπήρχε έντονη και διαρκής χρήση επιχειρημάτων, ώστε να αναδειχθεί η ανάγκη για βέβαιη γνώση και η ανάγκη για την συστηματική μελέτη; Τα πεδία με αυτό το χαρακτηριστικό ήταν τρία, δηλαδή τα μαθηματικά, η φιλοσοφία και η καθημερινή επιχειρηματολογία, ειδικότερα στο πολιτικό και στο δικαστικό στίβο. Ό όρος **«λογική»** χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά με την έννοια που έχει σήμερα τον 3^{ο} αιώνα μ. Χ. από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα. Στους διαλόγους του, όμως, ο Πλάτωνας διατυπώνει, συχνά με έμμεσο τρόπο, λογικές αρχές. Για παράδειγμα, στην Πολιτεία αναφέρει τον επικαλούμενο «Νόμο της Αντίφασης», σύμφωνα με τον οποίο είναι αδύνατο κάτι να ισχύει και να μην ισχύει ταυτόχρονα. Παρόλο που ο Πλάτωνας ανακάλυψε μερικές έγκυρες λογικές αρχές, δεν έκανε καμιά συστηματική προσπάθεια να δημιουργήσει ένα σύστημα αρχών και νόμων, πράγμα που έκανε ο Αριστοτέλης.

Το σύνολο των εργασιών του Αριστοτέλη που αφορούσαν στη λογική είναι γνωστό ως «Όργανον» και εκδόθηκε από τους μαθητές του, μετά τον θάνατο του (322 π. Χ.). Είναι δύσκολο να κρίνουμε ποια είναι η χρονολογική σειρά σύνθεσης των μερών του Οργάνου, γιατί συχνά ο Αριστοτέλης αναθεωρούσε τις εργασίες του, παραπέμποντας μερικές φορές σε μεταγενέστερες. Η χρονολογική σειρά που δέχονται οι περισσότεροι ερευνητές για τα μέρη του οργάνου είναι η εξής: Κατηγορίαι, Τοπικά, Περί Σοφιστικών Ελέγχων, Περί Ερμηνείας, Αναλυτικά Πρότερα και

Αναλυτικά Ύστερα. Το έργο του Κατηγορίαι δεν είναι αυστηρά λογικού χαρακτήρα και αφορά σε μια κατάταξη των **κατηγορημάτων** (ιδιοτήτων) σε δέκα τύπους, τους εξής: Ουσίαν, ποσόν, ποιον, προς τι, πού, ποτέ, κείσθε, έχειν, ποιείν, πάσχειν. Στα τοπικά ο Αριστοτέλης, **ασχολείται με κανόνες κατασκευής ορθών συλλογισμών**. Το υλικό του έργου αυτού αποτελεί ουσιαστικά τη θεωρία που αποκρυσταλλώθηκε σε μεταγενέστερα έργα. Είναι εύλογο να δεχθούμε επιπλέον ότι το πρακτικό ενδιαφέρον για υπερίσχυση του συνομιλητή κατά τη διάρκεια ανταλλαγής επιχειρημάτων οδήγησε στη μελέτη ορθών αρχών επιχειρηματολογίας. Το έργο Περί Σοφιστικών Ελέγχων θεωρείται ως παράρτημα των Τοπικών και αφορά τους τρόπους ανίχνευσης λανθασμένων επιχειρημάτων. Στο Περί Ερμηνείας εξετάζεται ποια ζεύγη προτάσεων έρχονται σε αντίθεση μεταξύ τους και με ποιον τρόπο. Τέλος τα Αναλυτικά Πρότερα αφορούν την ανάλυση επιχειρημάτων με βάση την μορφή τους, ενώ τα Αναλυτικά Ύστερα στη θεωρία της γνώσης και στους τρόπους απόκτησής της. Η κύρια συνεισφορά του Αριστοτέλη στην λογική περιέχεται στο πρώτο κεφάλαιο των Αναλυτικών Πρότερων.

4.2 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΩΝ

Κατά τον Αριστοτέλη, μια έννοια είναι δυνατό να οριστεί «κατά πλάτος» και «κατά βάθος». Το **πλάτος** μιας έννοιας είναι το σύνολο των αντικειμένων που αντιπροσωπεύει η έννοια αυτή. Για παράδειγμα, το πλάτος της έννοιας «τρίγωνο» είναι το σύνολο όλων των δυνατών τριγωνικών (αισθητών ή νοητών) αντικειμένων. Από την άλλη πλευρά **βάθος** είναι το σύνολο των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων τα οποία είναι κοινά σε όλα τα αντικείμενα που αντιπροσωπεύει η έννοια. Για παράδειγμα το βάθος της έννοιας «τρίγωνο» αποτελείται από τα εξής χαρακτηριστικά γνωρίσματα: Κλειστό επίπεδο σχήμα, τρεις πλευρές, τρεις κορυφές. Στη σύγχρονη επιστήμη αντί για τους όρους πλάτος και βάθος χρησιμοποιούν αντίστοιχα τους όρους **έκταση** και **ένταση.**

Στα Τοπικά μελετώνται ορισμοί και κατατάξεις εννοιών, δηλαδή προτάσεις της μορφής:

« κάθε Χ είναι Υ »

« κάθε Χ δεν είναι Υ »

« μερικά Χ είναι Υ »

« μερικά Χ δεν είναι Υ »

Η μελέτη συλλογισμών του Αριστοτέλη αφορά σε συλλογισμούς με χρήση τέτοιων προτάσεων και μπορεί να θεωρηθεί ως φυσικό επακόλουθο των αναζητήσεων του στα Τοπικά. Στην αρχή των Αναλυτικών Πρότερων ο Αριστοτέλης ορίζει την έννοια **συλλογισμός,** όπως ορίζεται και σήμερα. Δηλαδή, λέει ότι «συλλογισμός» είναι μια λεκτική μορφή σύμφωνα με την οποία από ένα σύνολο υποθέσεων παράγονται κατ' ανάγκη συγκεκριμένα συμπεράσματα. Αργότερα όμως στο ίδιο έργο ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο αυτό μόνο για επιχειρήματα στα οποία το **συμπέρασμα** προκύπτει από δύο μόνο **προκείμενες** (υποθέσεις), όπου και οι τρεις προτάσεις είναι απλές και αναφέρονται σε γενικούς όρους, δηλαδή σε ονόματα κάποιων ειδών. Ακριβέστερα λέει ότι το συμπέρασμα έπεται από τις υποθέσεις, οι οποίες συσχετίζουν τους **όρους** (έννοιες) του συμπεράσματος προς ένα τρίτο όρο. Ο όρος που εμφανίζεται ως κατηγόρημα του συμπεράσματος καλείται «μείζων όρος», ο όρος που εμφανίζεται ως υποκείμενο καλείται «ελάσσων όρος» και ο τρίτος όρος καλείται «μέσος όρος». Το συμπέρασμα λοιπόν είναι της μορφής **Ελάσσων όρος – Μείζων όρος.** Η επιλογή των όρων «μείζων» και «ελάσσων» οφείλεται στο γεγονός ότι το βασικό παράδειγμα συλλογισμού ο μείζων είναι ευρύτερος ενώ ο ελάσσων είναι ο στενότερος από τους τρεις όρους. Για παράδειγμα στο επιχείρημα:

Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα, κάθε τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο.

ελάσσων όρος είναι ο όρος « τετράγωνο » και μείζων όρος είναι ο όρος «παραλληλόγραμμο».

Υπάρχουν τέσσερεις δυνατότητες συσχετισμού των όρων στις προκείμενες, οι εξής:

(1) μέσος - μείζων
ελάσσων – μέσος

(2) μέσος – μείζων
Μέσος - ελάσσων

(3) μείζων – μέσος
Ελάσσων – μέσος

(4) μείζων – μέσος
Μέσος – ελάσσων

Κατά τον Αριστοτέλη, δεν είναι φυσιολογικό και οι δύο όροι του συμπεράσματος να εμφανίζονται με αντεστραμμένους ρόλους στις προκείμενες οπότε το τέταρτο

σχήμα δεν είναι αποδεκτό. Έτσι, για παράδειγμα, το συμπέρασμα «Κανένα τραπέζιο δεν είναι ρόμβος» δεν είναι φυσιολογικό να προκύψει, με βάση το τέταρτο σχήμα, από τις προκείμενες «Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο» και «Κανένα παραλληλόγραμμο δεν είναι τραπέζιο», αλλά από τις «Κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο» και «Κανένα τραπέζιο δεν είναι παραλληλόγραμμο», με βάση το δεύτερο σχήμα. Κατά συνέπεια, υπάρχουν μόνο τρία συλλογιστικά σχήματα, τα (1), (2) και (3) πιο πάνω.

Ο Αριστοτέλης διέκρινε δεκατέσσερις τρόπους κατασκευής ορθών συλλογισμών στα πλαίσια των παραπάνω σχημάτων, μερικά παραδείγματα παραθέτουμε παρακάτω:

1^{ο} παράδειγμα που εντάσσεται στα πλαίσια του πρώτου συλλογιστικού σχήματος:

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο
Κάθε τετράγωνο είναι κανονικό πολύγωνο
Άρα, κάθε τετράγωνο εγγράφεται σε κύκλο.

2^{ο} παράδειγμα που εντάσσεται στα πλαίσια του δεύτερο συλλογιστικού σχήματος:

Κανένα τρίγωνο δεν είναι τετράπλευρο
Κάθε ρόμβος είναι τετράπλευρο
Άρα, κανένας ρόμβος δεν είναι τρίγωνο.

3^{ο} παράδειγμα που εντάσσεται στα πλαίσια του τρίτου συλλογιστικού σχήματος:

Μερικοί ρόμβοι είναι τετράγωνα
Κάθε ρόμβος είναι τετράπλευρο
Άρα, μερικά τετράπλευρα είναι τετράγωνα.

Σημειώνουμε ότι στο Μεσαίωνα δόθηκαν μνημονικά ονόματα στους τρόπους του Αριστοτέλη, με στόχο τη δυνατότητα εύκολης απομνημόνευσής τους. Εκτός από συλλογισμούς που εμπλέκουν προτάσεις σαν αυτές που είδαμε, ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε και με συλλογισμούς που αφορούν σε «τροπικές προτάσεις», δηλαδή προτάσεις στις οποίες υπάρχει ο όρος «αναγκαίος» ή «δυνατός» ή κάποιος παρόμοιος όρος. Αργότερα, προτάσεις της μορφής « είναι αναγκαίο ότι….» ονομάστηκαν **αποδεικτικές,** προτάσεις της μορφής « είναι δυνατόν ότι….» ονομάστηκαν **προβληματικές** ενώ οι υπόλοιπες προτάσεις ονομάστηκαν **βεβαιωτικές.** Ο

Αριστοτέλης ασχολήθηκε με τροπικές προτάσεις στο Περί Ερμηνείας και στα Αναλυτικά Πρότερα και με τροπικούς συλλογισμούς στα Αναλυτικά Πρότερα.

Η έκδοση των έργων του Αριστοτέλη έγινε κυρίως από το **Θεόφραστο,** διάδοχο του Αριστοτέλη στη διεύθυνση του **Λυκείου.**

4.3 Η ΣΤΩΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Εκτός από την Περιπατητική λογική, δηλαδή τη σχολή του Αριστοτέλη, υπήρξε στην αρχαιότητα και η Στωική σχολή λογικής. Η σχολή αυτή ιδρύθηκε από τον Χρύσιππο που θεωρήθηκε από πολλούς ως ο μεγαλύτερος λογικός της αρχαιότητας και έζησε από το 280 έως το 205 π.χ. Σύμφωνα με τον Διογένη τον Λαέρτιο, ο Χρύσιππος έγραψε 705 έργα, από τα οποία έχει διασωθεί πολύ μικρό μέρος. Το έργο του ήταν τόσο σπουδαίο που ο Κλήμης ο Αλεξανδρεύς τον τοποθετεί πρώτο μεταξύ των λογικών. Σε αντίθεση με αυτό που συνέβη στο έργο του Αριστοτέλη, μόνο μικρό μέρος του έργου των Στωικών διασώθηκε. Ίσως ο σημαντικότερος λόγος ήταν ότι η επιρροή της αριστοτελικής λογικής ήταν τόσο μεγάλη που οδήγησε στην υποτίμηση από πολλούς ιστορικούς της συνεισφοράς των Στωικών.

Ενώ η λογική του Αριστοτέλη αφορά σε επιχειρήματα μαθηματικού και φιλοσοφικού χαρακτήρα, η λογική των Στωικών αφορά σε επιχειρήματα διαλεκτικού χαρακτήρα και αυτός ήταν ο λόγος που η λογική των Στωικών έγινε γνωστή ως «διαλεκτική» λογική. Στην ουσία η λογική των Στωικών αφορά την **λογική των προτάσεων,** ενώ η αριστοτελική λογική αφορά την **λογική των κατηγορημάτων.** Όταν λέμε «λογική κατηγορημάτων» εννοούμε την μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων με έμφαση στην εσωτερική δομή των προτάσεων, δηλαδή στη μορφή «υποκείμενο – κατηγόρημα». Όταν λέμε «λογική προτάσεων» εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον.

Οι Στωικοί διερεύνησαν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια υποθετική πρόταση, δηλαδή μια πρόταση της μορφής «αν ….τότε….» μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής. Επιπλέον έκαναν τη σπουδαιότατη διάκριση ανάμεσα στο

«σημαινόμενο» δηλαδή στο νόημα, και στο «σημαίνον» δηλαδή στη λέξη ή στην ακολουθία λέξεων που είναι φορέας του νοήματος. Αυτή η διάκριση απασχόλησε σοβαρά φιλόσοφους πολύ αργότερα, για παράδειγμα τον Frege στον 19^{ο} αιώνα. Στο ίδιο πλαίσιο, οι Στωικοί διατύπωσαν την **θεωρία των λεκτών.** Οι Στωικοί καλούσαν λεκτό αυτό που στην εποχή μας καλείται γραμματική πρόταση. Μεγάλο μέρος των λεκτών ήταν τα «αξιώματα», δηλαδή προτάσεις που μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως αληθείς ή ως ψευδείς. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ο όρος αξίωμα διαφέρει ουσιαστικά από την σημερινή του έννοια. Σύμφωνα με τον Διογένη τον Λαέρτιο, τα αξιώματα διακρίνονταν από στους Στωικούς σε «απλά» και «μη απλά». Τα δεύτερα κατατάσσονταν σε κατηγορίες μεταξύ των οποίων είναι τα «αποφατικά» (δηλαδή αρνήσεις), τα «συνημμένα» (συνεπαγωγές), τα «συμπλεγμένα» (συζεύξεις) και τα «διαζευγμένα» (διαζεύξεις). Εύλογα λοιπόν αναφέρουμε ότι οι Στωικοί ασχολήθηκαν με τις βασικές έννοιες της λογικής.

4.4 Η ΛΟΓΙΚΗ ΣΤΗΝ ΥΣΤΕΡΗ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΥΣ ΑΡΑΒΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΜΕΣΑΙΩΝΑ.

Αρχικά εμφανίστηκε μια αντιζηλία μεταξύ των αριστοτελικών και των στωικών φιλοσόφων. Θεωρήθηκε ότι οι προσεγγίσεις τους σε θέματα λογικής ήταν αντικρουόμενες. Στο τέλος όμως του 1^{ου} μ. Χ. αιώνα, άρχισε να σβήνει αυτή η αντιζηλία και να διαφαίνεται ότι οι δύο θεωρίες είναι συμπληρωματικές. Ο διάσημος γιατρός **Γαληνός** (129- 199) ασχολήθηκε και με τις δύο θεωρίες, διεξήγαγε σοβαρές λογικές έρευνες και υπήρξε συγγραφέας κριτικών σχολιασμών έργων του Αριστοτέλη και του Χρύσιππου. Μετά τον Γαληνό, το μόνο πράγμα που έγινε για αιώνες ήταν η συγγραφή σχολιασμών για το έργο του Αριστοτέλη και με τους σχολιασμούς αυτούς έφτασαν οι πληροφορίες για τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον Μεσαίωνα.

Οι Άραβες μετά την κατάκτηση της Συρίας και του Ιράκ ήλθαν σε επαφή με την ελληνική επιστήμη, ειδικότερα με την αριστοτελική λογική. Τα πρώτα έργα λογικής στα αραβικά οφείλονται σε χριστιανούς μελετητές από την Συρία και έθεσαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη της αραβικής λογικής. Ο πρώτος άραβας που έγραψε για θέματα λογικής ήταν ο φιλόσοφος **Αλ – Κιντί** (περίπου 8005 – 873 μ. Χ.). Στο τέλος του 9^{ου} αιώνα και σε όλο τον 10^{ο} αιώνα ήταν έντονη η δραστηριότητα της σχολής

λογικής στην Βαγδάτη, όπου εγράφησαν εξαιρετικοί σχολιασμοί των λογικών έργων του Αριστοτέλη. Σημαντικός Άραβας λογικός ήταν ο **Αβικέννας (Αμπού ιμπν Σινά)** (980 – 1037), ο οποίος υποστήριξε ότι η λογική πρέπει να μελετάται ανεξάρτητα από τα κείμενα του Αριστοτέλη και όχι διαμέσου αυτών, όπως γινόταν στα πλαίσια της σχολής της Βαγδάτης. Η στάση όμως αυτή δεν έγινε αποδεκτή από τους Άραβες στην Ισπανία, οι οποίοι εξακολούθησαν για ένα ορισμένο διάστημα να ασχολούνται με το έργο του Αριστοτέλη. Η Ανδαλουσία υπήρξε κέντρο αραβικών λογικών ερευνών κατά τον 11^{ο} και τον 12^{ο} αιώνα. Ο σπουδαιότερος εκπρόσωπος της σχολής αυτής ήταν ο **Αβερρόης** (**Ιμπν Ρουσντ** 1126 – 1198) . Η αντιπαλότητα μεταξύ ανατολικής και δυτικής αραβικής σχολής λογικής συνεχίστηκε μέχρις ότου αποδέχτηκαν και οι δύο μεριές ότι ήταν σωστό να γίνει σύνθεση των δύο απόψεων.

Οι λογικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν στα πανεπιστήμια της Δυτικής Ευρώπης μεταξύ 11^{ου} και 15^{ου} αιώνα είναι γνωστές με τον όρο «**μεσαιωνική λογική**» όπου η Δυτική Ευρώπη είχε στη διάθεσή της τα έργα των σχολιαστών των αρχαίων Ελλήνων. Ο πρώτος σημαντικός λογικός ήταν ο **Peter Abelard** (1079 – 1142), ο οποίος δίδαξε στο Παρίσι. Επηρεασμένοι από το έργο του πολλοί λογικοί μελέτησαν σε βάθος τα κείμενα του Αριστοτέλη και συνέγραψαν εγχειρίδια λογικής που χρησιμοποιήθηκαν στα πανεπιστήμια της εποχής. Η λογική έφτασε στο ζενίθ της ανάπτυξής της κατά την διάρκεια του 14^{ου} αιώνα. Δυστυχώς όμως η άνθηση της λογικής σταμάτησε τον 15^{ο} αιώνα, παρά το γεγονός ότι το ενδιαφέρον για αυτήν επεκτάθηκε στα πανεπιστήμια της Γερμανίας και της Ιταλίας. Τα λογικά δόγματα δεν άλλαξαν ουσιαστικά, απλώς παρήχθησαν πολλά απλοποιημένα συγγράμματα, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ευρέως για πολύ καιρό, όπως η Λογική του Port Royal.

4.5 Η ΝΕΟΤΕΡΗ ΛΟΓΙΚΗ

Η νεότερη λογική, η οποία είναι γνωστή ως «συμβολική» ή «τυπική» ή «μαθηματική», άρχισε ουσιαστικά με τα έργα *Formal Logic* (Τυπική Λογική) του **Augustus De Morgan** (1806 – 1871) και *Mathematical Analysis of Logic* (Μαθηματική Ανάλυση της Λογικής) του **George Boole** (1815 – 1864) τα οποία δημοσιεύτηκαν το 1847. Πριν από αυτά όμως υπήρχαν και άλλοι φιλόσοφοι και μαθηματικοί με παρόμοιες ιδέες. Από αυτούς ξεχωρίζουν οι **Gottfried Leibniz** (1646

– 1716) και **Bernard Bolzano** (1781 – 1848). Ο πρώτος προσπάθησε να αναπτύξει μια παγκόσμια γλώσσα, την «*characteristica universalis*», μέσω της οποίας θα ήταν δυνατόν να αναχθούν σε υπολογισμούς όλες οι επιστημονικές και φιλοσοφικές διερευνήσεις. Αν και το σχέδιο αυτό δεν αναπτύχθηκε σε μεγάλο βαθμό, μπορεί να θεωρηθεί ως προάγγελος μεγάλου μέρους συζητήσεων της μαθηματικής λογικής. Ο δεύτερος ανέπτυξε κεντρικές έννοιες της λογικής, μεταξύ των οποίων και την έννοια της λογικής συνέπειας. Αξιοσημείωτο είναι ότι χρησιμοποίησε μια εν μέρει τυπική γλώσσα, δηλαδή την γερμανική γλώσσα εμπλουτισμένη με διάφορα είδη σταθερών και μεταβλητών. Προς το τέλος του 19^{ου} αιώνα μπορούμε να διακρίνουμε τρεις επικαλυπτόμενες σχολές λογικών αναζητήσεων, την «αλγεβρική», τη «λογικιστική» και την «φορμαλιστική» σχολή. Στην εκπληκτική άνθησή τους, ιδιαίτερα της δεύτερης και της τρίτης, οδήγησε η ανακάλυψη παραδόξων στην θεωρία συνόλων που ανέπτυξε αποφασιστικά ο **George Cantor** (1845 – 1918) – μεταξύ αυτών και του περίφημου « παραδόξου του Ράσελ»

Κυριότεροι εκπρόσωποι της αλγεβρικής σχολής υπήρξαν οι **John Venn** (1834 – 1923), **Charles Peirce** (1839 – 1914) και **Ernst Schroder** (1841 – 1902). Η σχολή αυτή επικέντρωσε το ενδιαφέρον της στη μελέτη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ πράξεων όπως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός και λογικών πράξεων στα πλαίσια επιχειρηματολογίας. Κύριος στόχος ήταν η ανάπτυξη λογισμών με εφαρμογή σε διάφορες περιπτώσεις, όπως προτάσεις, σύνολα και πιθανότητες. Αρχίζοντας με ένα ή περισσότερα συγγενή αλγεβρικά συστήματα, οι αλγεβριστές διατύπωναν ένα σύνολο αξιωμάτων τα οποία αλήθευαν σε κάθε ένα από τα συστήματα αυτά. Το σύστημα που ανέπτυξε για παράδειγμα ο Boole ήταν αυτό που σήμερα καλείται «άλγεβρα Boole»

Τα μέλη της λογικιστικής σχολής πίστευαν ότι η λογική αποτελούσε τη βάση για κάθε είδους επιχειρηματολογία. Οι κύριοι εκπρόσωποι της σχολής αυτής ήταν οι **Bertrand Russell** (1872 – 1970) και **Gottlob Frege** (1848 – 1925), ίσως ο μεγαλύτερος λογικός μετά τον Αριστοτέλη. Ο Frege ανέπτυξε με μαθηματική αυστηρότητα μια πλούσια τυπική γλώσσα στο έργο του Begriffsschrift (Εννοιογραφία) και προσπάθησε να δείξει ότι μέρη των μαθηματικών, όπως η θεωρία των αριθμών και η ανάλυση ήταν μέρη της λογικής. Επίσης στην προσπάθεια του να

θεμελιώσει την γεωμετρία υποστήριξε ότι αρκεί μια ιδιότητα για να περιγράψει το σύνολο των αντικειμένων που την ικανοποιούν. Όπως έδειξε όμως ο Russell με την ανακάλυψη του περίφημου παραδόξου του, το σύστημα του Frege ήταν αντιφατικό και κατά συνέπεια έπρεπε να απορριφθεί. Σε μια προσπάθεια να βελτιώσει την κατάσταση ο Russell σε συνεργασία με τον **Alfred Whitehead** (1861-1947), συνέγραψαν το τρίτομο έργο *Principia Mathematica* (Οι Αρχές των Μαθηματικών), στο οποίο ανέπτυξαν την λεγόμενη «θεωρία των τύπων». Ο τρόπος με τον οποίο οι Russell και Whitehead απέφυγαν τα παράδοξα ήταν να μην συμπεριλάβουν στο σύστημα τους την «αρχή του φαύλου κύκλου», η οποία έλεγε ότι καμία οντότητα δεν μπορεί να οριστεί ως μια ολότητα που περιέχει τον εαυτό της.

Η φορμαλιστική σχολή είχε ως σημαντικότερους εκπρόσωπους της τον **Richard Dedekind** (1831 – 1916), τον **Giuseppe Peano** (1858-1932) και τον **David Hilbert** (1862-1943) . Σκοπός των ερευνών της σχολής αυτής ήταν η κατασκευή αξιωματικών συστημάτων για επί μέρους κλάδους των μαθηματικών, δηλαδή την γεωμετρία, τη θεωρία αριθμών, την θεωρία συνόλων κ.α. Η βασική επιδίωξη ήταν να αποδειχθεί ότι τα αξιωματικά συστήματα δεν οδηγούν σε αντιφάσεις. Μάλιστα ο Hilbert κατέστρωσε το περίφημο «πρόγραμμα Χίλμπερτ», στόχος του οποίου ήταν η τυποποίηση των μαθηματικών προς αυτή την κατεύθυνση.

Η μαθηματική λογική γνώρισε εκπληκτική ανάπτυξη στον 20^{ο} αιώνα. Μερικοί από τους σημαντικότερους λογικούς υπήρξαν οι **Leopold Lowenheim** (Λεοπολντ Λέβενχαϊμ, 1878 – 1957), **Thoralf Skolem** (1887 – 1963), **Alonzo Church** (1903 – 1995), **Kurt Gödel** (1906 – 1978) **Stephen Kleene** (1909 – 1994) . Ειδικά ο Gödel θεωρείται ως ο κορυφαίος λογικός του 20^{ου} αιώνα, αφού απέδειξε δύο από τα πιο θεμελιώδη θεωρήματα του αιώνα αυτού, δηλαδή το «θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού» και το «θεώρημα μη πληρότητας της τυπικής αριθμητικής». Αξιοσημείωτο είναι και το αποτέλεσμα που απέδειξε το 1963 ο **Paul Cohen** ότι το «αξίωμα επιλογής» και η «υπόθεση του συνεχούς» στην θεωρία των συνόλων είναι προτάσεις ανεξάρτητες από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας αυτής.

Η μαθηματική λογική συστηματοποίησε την κλασική λογική, διεύρυνε αυτήν και άνοιξε νέους ορίζοντες άγνωστους στην κλασική λογική. Ο ακαδημαϊκός Ευάγγελος

Παπανούτσος (1900 – 1981) στον πρόλογο του βιβλίου του με τίτλο: «ΛΟΓΙΚΗ» γράφει: « Η κλασική Λογική που λέγεται και Αριστοτελική από το όνομα του Έλληνα φιλόσοφου που πρώτος την συστηματοποίησε, αποτελεί την βάση, αλλά δεν είναι πλέον το ¨όργανο¨ των συγχρόνων μας μαθηματικών και φυσικών επιστημών. Πολλές από τις έννοιες της έχουν αναθεωρηθεί και νέες έχουν πλασθεί με τις μεθοδολογικές διερευνήσεις που άνοιξαν καινούριους δρόμους στον επιστημονικό στοχασμό». Με την βοήθεια της μαθηματικής λογικής τα μαθηματικά αναθεωρήθηκαν, θεμελιώθηκαν, τακτοποιήθηκαν, έγιναν κατανοητά και επομένως ευκολότερα και έτσι άρχισε μια ξέφρενη ανάπτυξή τους η οποία συνεχίζεται και στις μέρες μας.

Η μαθηματική λογική δεν συνετέλεσε μόνο στην θεμελίωση και ανάπτυξη των μαθηματικών αλλά βοήθησε να αναπτυχθούν και άλλες επιστήμες. Αναφέρουμε ότι η μαθηματική λογική έχει αποτελέσει βασικό εργαλείο για πολλούς συγχρόνους αναλυτικούς φιλόσοφους, γλωσσολόγους, αλλά και επιστήμονες που ασχολούνται με την θεμελίωση της επιστήμης των υπολογιστών, για ειδικά θέματα της λογικής όπως είναι η τροπική λογική, οι πλειότιμες λογικές, η επιστημική λογική, η ασαφής λογική, η γραμμική λογική κ.α. Αφού λοιπόν τα μαθηματικά βασίζονται στην μαθηματική λογική, είναι φανερό ότι είναι αδύνατο να μάθει κάποιος σωστά τα μαθηματικά και πολύ περισσότερο να εμβαθύνει σε αυτά, χωρίς μερικά, τελείως απαραίτητα στοιχεία της μαθηματικής λογικής. Στο βιβλίο «ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ» τόμος ΙΙ του Ε.Τ. Bell (Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης 1993 σελίδα 253) διαβάζουμε: « Σήμερα, η συμβολική μαθηματική λογική, είναι απαραίτητη σε κάθε σοβαρή προσπάθεια να κατανοηθεί η φύση των μαθηματικών και η κατάσταση των θεμελίων τους επάνω στα οποία στηρίχθηκε ολόκληρο το κολοσσιαίο οικοδόμημα» .

Η μαθηματική λογική χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος μελετά τις προτάσεις και ονομάζεται **Προτασιακός Λογισμός** και το δεύτερο μέρος μελετά τα κατηγορήματα και τους ποσοδείκτες και ονομάζεται **Κατηγορικός Λογισμός**.

4.6 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

4.6.1 ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πρόταση

Πρόταση (ή λογική πρόταση) στα μαθηματικά ονομάζεται κάθε έκφραση που έχει πλήρες και αυτοτελές νόημα και μπορεί να χαρακτηριστεί κατά μοναδικό τρόπο είτε ως «αληθής» είτε ως «ψευδής»

Οι μαθηματικές προτάσεις συμβολίζονται με τα τελευταία μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου: p, q, r,…… Κάνουμε την παραδοχή ότι σε κάθε μαθηματική πρόταση αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας από τους δύο χαρακτηρισμούς «αληθής», «ψευδής».

Τιμή αλήθειας πρότασης

Κάθε πρόταση που έχει χαρακτηριστεί ως «αληθής» λέμε ότι έχει τιμή αλήθειας **α** και κάθε πρόταση που έχει χαρακτηριστεί ως «ψευδής» λέμε ότι έχει τιμή αλήθειας **ψ.**

Η τιμή αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης **p** συμβολίζεται με **τ(p)** και διαβάζεται «τιμή αλήθειας της πρότασης **p**», επομένως έχουμε:

$$\tau(p) = \begin{cases} \alpha & \text{αν} \quad p \quad \text{αληθής} \\ \psi & \text{αν} \quad p \quad \text{ψευδής} \end{cases}$$

Στην μαθηματική λογική δεν ενδιαφερόμαστε για το σημασιολογικό περιεχόμενο των προτάσεων, αλλά αποκλειστικά και μόνο για τις τιμές αλήθειας των προτάσεων αυτών.

Λογικές πράξεις – λογικοί σύνδεσμοι.

Θεωρούμε τις μαθηματικές προτάσεις, για τις οποίες ενδιαφερόμαστε μόνο για τις τιμές αλήθειας τους και τις αντιμετωπίζουμε ως μεγέθη που μπορούν να

χαρακτηριστούν με μια και μόνο μια από τις δύο τιμές αλήθειας **α** και **ψ.** Στις προτάσεις αυτές ορίζουμε «πράξεις» που μας επιτρέπουν, ξεκινώντας από κάποιες προτάσεις που τις θεωρούμε αρχικές να σχηματίσουμε νέες προτάσεις. Μια τέτοια «πράξη» ουσιαστικά συνίσταται στην κατασκευή νέων προτάσεων αποτελουμένων από μια ή περισσότερες προτάσεις.

Ορίζουμε πέντε τέτοιου είδους «πράξεις» με την βοήθεια πέντε συμβόλων, τα οποία ονομάζονται **λογικοί σύνδεσμοι** και είναι:

- « $-$ » και διαβάζεται «όχι»
- « $\vee$ » και διαβάζεται « ή »
- « $\wedge$ » και διαβάζεται « και »
- « $\Rightarrow$ » και διαβάζεται « αν …. τότε »
- « $\Leftrightarrow$ » και διαβάζεται « ισοδύναμα » ή « αν και μόνο αν » ή « τότε και μόνο τότε »

Οι παραπάνω πέντε πράξεις ονομάζονται **λογικές πράξεις.** Από τις παραπάνω πράξεις η πρώτη συσχετίζεται με μία μόνο πρόταση και ονομάζεται **μονομελή** πράξη και οι υπόλοιπες τέσσερεις «συνδέουν» δύο προτάσεις και ονομάζονται **διμελής** πράξεις, η δε ονομασία των παραπάνω πέντε πράξεων είναι κατά σειρά:

- **Άρνηση**
- **Διάζευξη**
- **Σύζευξη**
- **Συνεπαγωγή και**
- **Ισοδυναμία**

Άρνηση

Έστω μια πρόταση p. Ονομάζουμε **άρνηση** της πρότασης p μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $\overline{p}$ και διαβάζεται «όχι p» για την οποία ισχύουν:

- Η πρόταση $\overline{p}$ είναι αληθής αν η πρόταση p είναι ψευδής
- Η πρόταση $\overline{p}$ είναι ψευδής αν η πρόταση p είναι αληθής

Τα παραπάνω παριστάνονται στον διπλανό πίνακα

p	$\overline{p}$
α	**ψ**
ψ	**α**

Οι προτάσεις p και $\overline{p}$ έχουν πάντοτε αντίθετες τιμές αλήθειας.

Διάζευξη

Έστω δύο προτάσεις p, q. Ονομάζουμε **διάζευξη** (ή **εγκλειστική διάζευξη**) των προτάσεων p, q με την σειρά που αναφέρονται μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \vee q$ και διαβάζεται « p ή q » για την οποία ισχύουν:

- Η πρόταση $p \vee q$ είναι ψευδής μόνο αν οι προτάσεις p, q είναι και οι δύο ψευδής
- Η πρόταση $p \vee q$ είναι αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις

Τα παραπάνω παριστάνονται στον παρακάτω πίνακα

p	q	$p \vee q$
α	**α**	**α**
α	**ψ**	**α**
ψ	**α**	**α**
ψ	**ψ**	**ψ**

Σύζευξη

Έστω δύο προτάσεις p, q. Ονομάζουμε **σύζευξη** των προτάσεων p, q με την σειρά που αναφέρονται μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \wedge q$ και διαβάζεται « p και q » για την οποία ισχύουν:

- Η πρόταση $p \wedge q$ είναι αληθής μόνο αν οι προτάσεις p, q είναι και οι δύο αληθείς
- Η πρόταση $p \wedge q$ είναι ψευδής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις

Τα παραπάνω παριστάνονται στον παρακάτω πίνακα

p	q	$p \wedge q$
α	**α**	**α**
α	**ψ**	**ψ**
ψ	**α**	**ψ**
ψ	**ψ**	**ψ**

Συνεπαγωγή

Έστω δύο προτάσεις p, q. Ονομάζουμε **συνεπαγωγή** των προτάσεων p, q με την σειρά που αναφέρονται μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \Rightarrow q$ και διαβάζεται « αν p τότε q » ή « p συνεπάγεται q » για την οποία ισχύουν:

- Η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής μόνο αν η πρόταση p είναι αληθής και η πρόταση q είναι ψευδής.
- Η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις

Τα παραπάνω παριστάνονται στον παρακάτω πίνακα

p	q	$p \Rightarrow q$
α	**α**	**α**
α	**ψ**	**ψ**
ψ	**α**	**α**
ψ	**ψ**	**α**

Η πρόταση p ονομάζεται πρώτο μέλος της συνεπαγωγής και η πρόταση q δεύτερο μέλος ή το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Άλλοι τρόποι έκφρασης της συνεπαγωγής είναι οι « p είναι ικανή συνθήκη της q », « q είναι αναγκαία συνθήκη της p».

Έστω η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, τότε:
η συνεπαγωγή $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ονομάζεται **αντιστροφοαντίθετος** της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$

Σημειώνουμε ότι:
Αν η πρόταση p είναι ψευδής, τότε η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι πάντοτε αληθής ανεξάρτητα αν η πρόταση q είναι ψευδής ή αληθής.
Αν η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι αληθής δεν μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα για τις προτάσεις p και q αν είναι αληθείς ή ψευδείς.
Αν η πρόταση p και η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθείς προτάσεις, τότε η πρόταση q είναι αληθής πρόταση (κανόνας αποσπάσεως)

Ισοδυναμία

Έστω δύο προτάσεις p, q. Ονομάζουμε **ισοδυναμία** των προτάσεων p, q με την σειρά που αναφέρονται μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \Leftrightarrow q$ και διαβάζεται «p αν, και μόνο, αν q » ή « p ισοδυναμεί q » για την οποία ισχύουν:

- Η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής μόνο αν οι προτάσεις p, q έχουν την ίδια τιμή αληθείας
- Η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ είναι ψευδής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις

Τα παραπάνω παριστάνονται στον παρακάτω πίνακα

p	q	$p \Leftrightarrow q$
α	**α**	**α**
α	**ψ**	**ψ**
ψ	**α**	**ψ**
ψ	**ψ**	**α**

Άλλοι τρόποι έκφρασης της ισοδυναμίας είναι οι: «p είναι ικανή και αναγκαία

συνθήκη της q», «p πρέπει και αρκεί q», «p τότε, και μόνο τότε q», «p και q είναι ισοδύναμες»

Αποκλειστική διάζευξη

Εκτός από τις πέντε λογικές πράξεις, ορίζεται και μια επιπλέον λογική πράξη που ονομάζεται **αποκλειστική διάζευξη.**

Έστω δύο προτάσεις p, q. Ονομάζουμε **αποκλειστική διάζευξη** των προτάσεων p, q με την σειρά που αναφέρονται μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $p \veebar q$ και διαβάζεται «ή μόνο p ή μόνο q » για την οποία ισχύουν:

- Η πρόταση $p \veebar q$ είναι ψευδής μόνο αν οι προτάσεις p, q έχουν την ίδια τιμή αληθείας
- Η πρόταση $p \veebar q$ είναι αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις

Τα παραπάνω παριστάνονται στον παρακάτω πίνακα

p	q	$p \veebar q$
α	**α**	**ψ**
α	**ψ**	**α**
ψ	**α**	**α**
ψ	**ψ**	**ψ**

Απλές και σύνθετες προτάσεις

Ξεκινώντας από ένα σύνολο αρχικών προτάσεων p, q, r,… με την βοήθεια των λογικών συνδέσμων μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες προτάσεις, όπως π.χ. $p \vee q$, $p \Leftrightarrow q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow p$, $p \wedge \overline{q}$, κ.λ.π. Οι αρχικές προτάσεις ονομάζονται **απλές προτάσεις** και οι προτάσεις που κατασκευάζουμε ονομάζονται **σύνθετες προτάσεις.**

Οι σύνθετες προτάσεις αποτελούνται από απλές που συνδέονται κατάλληλα με τους λογικούς συνδέσμους.

Προτασιακές παραστάσεις – πίνακες τιμών αληθείας

Κάθε έκφραση που αποτελείται από μεταβλητές p, q, r,… και λογικούς συνδέσμους η οποία γίνεται πρόταση όταν οι μεταβλητές αυτές αντικατασταθούν από προτάσεις, ονομάζεται **προτασιακή παράσταση** ή απλά **παράσταση**. Η προτασιακή παράσταση συμβολίζεται με P(p, q, r,…) ή απλούστερα με P καθώς και με τα κεφαλαία γράμματα Q, R,… Για παράδειγμα οι εκφράσεις $p \vee q$, $p \Leftrightarrow q$, $\overline{p}$ είναι προτασιακές παραστάσεις.

ΣΧΟΛΙΟ

Δεν πρέπει να συγχέουμε τις προτασιακές παραστάσεις με τις σύνθετες προτάσεις. Μια σύνθετη πρόταση έχει μια καθορισμένη τιμή αλήθειας, ενώ η προτασιακή παράσταση δεν είναι πρόταση, γίνεται δε πρόταση μόνο αν οι προτασιακές μεταβλητές της αντικατασταθούν με συγκεκριμένες προτάσεις, οπότε λαμβάνει μία τιμή αλήθειας.

Για κάθε μια προτασιακή παράσταση P(p, q, r,…) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα, στον οποίο να εμφανίζεται η τιμή αλήθειας που παίρνει η προτασιακή παράσταση P(p, q, r,…) για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών αληθείας των μεταβλητών p, q, r,…. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται **πίνακας τιμών αληθείας** της προτασιακής παράστασης. Αν μια προτασιακή παράσταση έχει ν το πλήθος μεταβλητές, τότε οι δυνατοί συνδυασμοί των τιμών αληθείας της είναι 2^{ν}. Για παράδειγμα η προτασιακή παράσταση $P(p, q,) = (p \vee \overline{q}) \wedge (p \Rightarrow q)$ που περιέχει 2 μεταβλητές τις p και q , οι συνδυασμοί των τιμών αληθείας είναι $2^2 = 4$ και ο πίνακας τιμών αληθείας είναι ο παρακάτω:

p	q	$\overline{q}$	$p \vee \overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$(p \vee \overline{q}) \wedge (p \Rightarrow q)$
α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	ψ	α	α	α	α

Κάθε προτασιακή παράσταση που για κάθε συνδυασμό των τιμών αληθείας των μεταβλητών της παίρνει την τιμή αληθείας (α) ονομάζεται **ταυτολογία**, ενώ αν παίρνει την τιμή αληθείας (ψ) ονομάζεται **αυτοαντίφαση.** Κάθε προτασιακή παράσταση που δεν είναι ταυτολογία ή αυτοαντίφαση ονομάζεται **σχετική.**

4.6.2 Νόμοι της λογικής των προτάσεων

Οι ταυτολογίες ονομάζονται **αρχές** ή **νόμοι** της λογικής των προτάσεων. Οι σημαντικότεροι νόμοι είναι:

1. Νόμοι ταυτότητας: $p \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow p$

2. Νόμοι αποκλείσεως τρίτου: $p \vee \overline{p}$, $p \veebar \overline{p}$

3. Νόμος αντίφασης: $\overline{p \wedge \overline{p}}$

4. Νόμοι αντιμετάθεσης: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$,

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$,

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

5. Προσεταιριστικοί νόμοι: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$

6. Επιμεριστικοί νόμοι: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$[p \vee (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)]$

$[p \vee (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)]$

7. Νόμος διπλής άρνησης: $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

8. Νόμοι De Morgan: $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

9. Νόμος άρνησης συνεπαγωγής: $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

10. Νόμος άρνησης ισοδυναμίας: $\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$

11. Νόμοι αντικαταστάσεως: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

12. Νόμος αποσπάσεως: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

13. Νόμος υποθετικού συλλογισμού: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

14. Νόμος αντιθετοαντιστροφής: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

15. Νόμος δυνατών περιπτώσεων: $(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow q$

16. Νόμος της εις άτοπον απαγωγής: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r})]$

Οι παραπάνω νόμοι είναι ταυτολογίες και διαπιστώνεται αν κατασκευαστεί ο πίνακας αληθείας τους.

4.6.3 Μόρφωση ταυτολογιών

Με τους πίνακες τιμών αλήθειας δεν μπορούμε να σχηματίσουμε ταυτολογίες, παρά μόνο να ελέγξουμε αν μια δοσμένη παράσταση είναι ταυτολογία ή όχι (και αυτό, όταν το πλήθος των μεταβλητών είναι μεγάλο, είναι εξαιρετικά επίπονο.) Αυτό οδήγησε στην διατύπωση κανόνων μορφώσεως (σχηματισμού) ταυτολογιών, από τους οποίους οι σπουδαιότεροι είναι.

1. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΡΝΗΣΗΣ**

«Αν μια προτασιακή παράσταση P είναι αυτοαντίφαση (παίρνει την τιμή αληθείας (ψ)), τότε η προτασιακή παράσταση $\bar{P}$ είναι ταυτολογία (παίρνει την τιμή αληθείας (α)) και αντιστρόφως.»

Για παράδειγμα επειδή η παράσταση $p \wedge \bar{p}$ είναι αυτοαντίφαση, σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα, η παράσταση $\overline{p \wedge \bar{p}}$ είναι ταυτολογία.

2. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΙΑΖΕΥΞΗΣ**

«Αν από δύο προτασιακές παραστάσεις P και Q η μία τουλάχιστον είναι ταυτολογία, τότε η προτασιακή παράσταση $P \vee Q$ είναι ταυτολογία»

Για παράδειγμα επειδή η παράσταση $p \vee \bar{p}$ είναι ταυτολογία, τότε σύμφωνα με τον κανόνα διάζευξης η παράσταση $(p \vee \bar{p}) \vee (p \Leftrightarrow q)$ είναι επίσης ταυτολογία.

3. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ**

«Αν δύο προτασιακές παραστάσεις P και Q είναι ταυτολογίες , τότε η προτασιακή παράσταση $P \wedge Q$ είναι ταυτολογία»

Για παράδειγμα επειδή οι παραστάσεις $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ και $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ είναι ταυτολογίες τότε σύμφωνα με τον κανόνα σύζευξης, η παράσταση:

$$(\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}) \wedge [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)]$$

Είναι επίσης ταυτολογία.

4. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΟΣΠΑΣΕΩΣ ή MODUS PONENS**

- Κανόνας αποσπάσεως για προτάσεις: « Θεωρούμε δύο προτάσεις p και q. Αν οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και p είναι αληθείς, τότε και η πρόταση q είναι επίσης αληθής.»
- Κανόνας αποσπάσεως για προτασιακές παραστάσεις: « Θεωρούμε δύο παραστάσεις P και Q. Αν οι παραστάσεις $P \Rightarrow Q$ και P είναι ταυτολογίες, τότε και η παράσταση Q είναι επίσης ταυτολογία.»

5. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ**

«Αν από δύο προτασιακές παραστάσεις P και Q, η Q παίρνει τιμή αλήθειας (α) για κάθε συνδυασμό των τιμών αληθείας των μεταβλητών τους, για τον οποίο η P λαμβάνει τιμή αλήθειας (α), τότε η παράσταση $P \Rightarrow Q$ είναι ταυτολογία και αντιστρόφως.»

Για παράδειγμα η προτασιακή παράσταση: $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

είναι μια ταυτολογία. Πράγματι έστω ότι για ένα συνδυασμό των τιμών αλήθειας των μεταβλητών της p και q είναι $\tau(p \wedge q) = \alpha$, τότε $\tau(p) = \alpha$ και $\tau(q) = \alpha$ και επομένως $\tau(p \Rightarrow q) = \alpha$. Συνεπώς σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα η προτασιακή παράσταση $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ είναι ταυτολογία.

6. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ**

«Αν μια προτασιακή παράσταση P παίρνει την ίδια τιμή αλήθειας με μια προτασιακή παράσταση Q για κάθε συνδυασμό των τιμών αλήθειας των μεταβλητών τους, τότε η παράσταση: $P \Leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία και αντιστρόφως.»

Για παράδειγμα η παράσταση $p \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow p)$ είναι μια ταυτολογία. Πράγματι:

α) Έστω ότι $\tau(p) = \alpha$, τότε $\tau(\overline{p}) = \psi$, επομένως $\tau(\overline{p} \Rightarrow p) = \alpha$.

β) Έστω ότι $\tau(p) = \psi$, τότε $\tau(\overline{p}) = \alpha$, επομένως $\tau(\overline{p} \Rightarrow p) = \psi$.

συνεπώς σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα η παράσταση $p \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow p)$ είναι μια ταυτολογία.

7. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ**

« Αν σε μια ταυτολογία αντικαταστήσουμε μια ή περισσότερες μεταβλητές της με οποιεσδήποτε προτασιακές παραστάσεις, τότε η παράσταση που προκύπτει είναι πάλι μια ταυτολογία»

Για παράδειγμα στην ταυτολογία : $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ αν αντικαταστήσουμε το p με την παράσταση $\bar{p}$ και το q με την $(\bar{p} \Leftrightarrow q)$, τότε προκύπτει η εξής παράσταση:

$$\bar{p} \wedge [\bar{p} \Rightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow q)] \Rightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow q)$$

η οποία σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα είναι ταυτολογία.

4.6.4 Λογική συνεπαγωγή και ισοδυναμία παραστάσεων.

ΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ

«Μια παράσταση P λέμε ότι συνεπάγεται λογικά ή συνεπάγεται ταυτολογικά μια παράσταση Q αν, και μόνο αν, η παράσταση $P \Rightarrow Q$ είναι ταυτολογία.»

Για παράδειγμα η παράσταση: $p \vee \bar{r}$ συνεπάγεται λογικά την παράσταση: $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, γιατί όπως μπορούμε να δείξουμε εύκολα, η παράσταση $p \vee \bar{r} \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$ είναι μια ταυτολογία.

ΛΟΓΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

«Μια παράσταση P λέμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη ή απλά ισοδύναμη με μια παράσταση Q, και γράφουμε $P \equiv Q$, αν και μόνο αν, η παράσταση $P \Leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία.»

Για παράδειγμα $(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$ γιατί η παράσταση $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ είναι ταυτολογία.

Για τις ισοδύναμες προτασιακές παραστάσεις ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- $P \equiv P$ (αυτοπαθής)
- Αν $P \equiv Q$, τότε $Q \equiv P$ (συμμετρική)
- Αν $P \equiv Q$ και $Q \equiv R$, τότε $P \equiv R$ (μεταβατική)

όπου P, Q και R οποιεσδήποτε προτασιακές παραστάσεις.

- Δύο προτασιακές παραστάσεις είναι ισοδύναμες, αν και μόνο αν, κάθε μια από αυτές συνεπάγεται λογικά την άλλη.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

- Έστω ότι μια σύνθετη πρόταση περιέχει μια πρόταση p και ότι η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής. Τότε η τιμή αληθείας της σύνθετης αυτής πρότασης δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε την p με την q.
- Έστω ότι μια προτασιακή παράσταση P΄ περιέχεται σε μια άλλη παράσταση P. Έστω ακόμα Q η παράσταση που προκύπτει από την P όταν αντικαταστήσουμε την P΄ με μια άλλη παράσταση Q΄.

  α) Αν $P' \equiv Q'$ τότε $P \equiv Q$

β) Αν η P είναι μια ταυτολογία και $P' \equiv Q'$, τότε και η Q είναι ταυτολογία.

4.6.5 Άλγεβρα των παραστάσεων.

Όπως είδαμε η σχέση « ≡ » μεταξύ των προτασιακών παραστάσεων είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική δηλαδή είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η σχέση αυτή λέγεται ακόμα και «**λογική ισότητα**» ή απλά «ισότητα» . Έτσι πολλές φορές, αντί να λέμε ότι δύο παραστάσεις είναι ισοδύναμες λέμε ότι είναι ίσες. Με βάση τις ιδιότητες της σχέσεως « ≡ », τον κανόνα αντικαταστάσεως για παραστάσεις και γνωρίζοντας μερικές απλές ισοδυναμίες (ισότητες) μπορούμε, όταν δοθεί μια προτασιακή παράσταση P να βρούμε μια άλλη παράσταση ισοδύναμη (ίση) με την P και η οποία να περιέχει όσο το δυνατό λιγότερους λογικούς συνδέσμους, δηλαδή να είναι όπως λέμε απλούστερης μορφής. Η εργασία αυτή ονομάζεται απλοποίηση της δοσμένης παράστασης P και το σχετικό μέρος της λογικής λέγεται «άλγεβρα των παραστάσεων»

Για να απλοποιήσουμε λοιπόν με παράσταση, πρέπει να γνωρίζουμε ένα επαρκές πλήθος ισοδυναμιών που τις ονομάζουμε «**Νόμους της άλγεβρας των παραστάσεων**». Οι σπουδαιότεροι νόμοι είναι:

1. $\overline{\overline{p}} = p$
2. $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

3. $p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
4. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$,
5. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
6. $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$
7. $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$
8. $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$
9. $\overline{p \Leftrightarrow q} \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$
10. $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
11. $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

Αν Α είναι μια μεταβλητή, η οποία μπορεί να αντικατασταθεί μόνο με μια οποιαδήποτε αληθή πρόταση και Ψ είναι μια μεταβλητή, η οποία μπορεί να αντικατασταθεί μόνο με μια ψευδή πρόταση, τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες.

12. $p \vee A \equiv A, \; p \vee \Psi \equiv \Psi$
13. $p \wedge A \equiv p, \; p \wedge \Psi \equiv \Psi$
14. $p \vee \overline{p} \equiv A \; , \; p \wedge \overline{p} \equiv \Psi$
15. $\overline{A} \equiv \Psi \; , \; \overline{\Psi} = A$

Σημειώνουμε ακόμα ότι οι λογικές πράξεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μερικές από αυτές μπορεί να αντικατασταθούν από όλες τις άλλες.

- Οι τρεις πράξεις $-$, $\vee$, $\wedge$ μπορούν να αντικαταστήσουν όλες τις άλλες. Πράγματι, έχουμε: $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$ και $p \Leftrightarrow q \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p)$
- Οι δύο πράξεις $-$, $\vee$ μπορούν να αντικαταστήσουν όλες τις άλλες. Πράγματι, έχουμε: $p \wedge q \equiv \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$, : $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$, $p \Leftrightarrow q \equiv \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \vee \overline{(\overline{p} \vee q)}$
- Οι δύο πράξεις $-$, $\wedge$ μπορούν να αντικαταστήσουν όλες τις άλλες. Πράγματι, έχουμε: $p \vee q \equiv \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$, $p \Rightarrow q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}}$, $p \Leftrightarrow q \equiv \overline{(p \wedge \overline{q})} \wedge \overline{(\overline{p} \wedge q)}$

4.7 ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Προτασιακοί τύποι

Προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής ονομάζεται κάθε έκφραση που περιέχει μια μεταβλητή, η οποία μεταβλητή όταν αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός μη κενού συνόλου, η έκφραση γίνεται μια πρόταση.
Τους προτασιακούς τύπους μιας μεταβλητής τους συμβολίζουμε με: p(x), q(x), r(x),…

Παράδειγμα: Η έκφραση p(x) : «Ο αριθμός x είναι περιττός» είναι προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής και όταν το x παίρνει τιμές από το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση, άλλοτε αληθής και άλλοτε ψευδής.

- Το σύνολο Ω από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή x ονομάζεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο αναφοράς** του προτασιακού τύπου p(x).
- Ένα στοιχείο $\xi \in \Omega$ λέμε ότι **επαληθεύει** τον προτασιακό τύπο p(x) αν, και μόνο, αν η πρόταση p(ξ) είναι αληθής.
- Το υποσύνολο του συνόλου Ω που τα στοιχεία του επαληθεύουν τον προτασιακό τύπο p(x) ονομάζεται **σύνολο αλήθειας** του p(x) και συμβολίζεται με: $\{x \in \Omega: p(x)\}$

Προτασιακός τύπος δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών ονομάζεται κάθε έκφραση που περιέχει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, οι οποίες όταν αντικατασταθούν με οποιαδήποτε στοιχεία δύο ή περισσοτέρων μη κενών συνόλων αντιστοίχως, η έκφραση γίνεται μια πρόταση.
Τους προτασιακούς τύπους δύο μεταβλητών x, y τους συμβολίζουμε με:
p(x,y), q(x,y), r(x,y),…
Τους προτασιακούς τύπους τριών μεταβλητών x, y, z τους συμβολίζουμε με:
p(x,y,z), q(x,y,z), r(x,y,z),… κτλ

Παράδειγμα: Η έκφραση p(x,y): « ο αριθμός x είναι μικρότερος από τον αριθμό y» είναι προτασιακός τύπος με δύο μεταβλητές. Όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από

ένα σύνολο {1,3,7} και η μεταβλητή y παίρνει τιμές από ένα άλλο σύνολο (2,4,8}ο παραπάνω προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση με τιμή αληθή ή ψευδή.

Έστω ένας προτασιακός τύπος p(x, y) με δύο μεταβλητές x και y:

- Αν ονομάσουμε A το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή x και B το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή y, έτσι το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) παίρνει τιμές από το σύνολο AxB που ονομάζεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο αναφοράς** του προτασιακού τύπου p(x,y).
- Ένα στοιχείο (ξ, η) του συνόλου AxB λέμε ότι **επαληθεύει** τον προτασιακό τύπο p(x,y) αν, και μόνο, αν η πρόταση p(ξ, η) είναι αληθής.
- Το υποσύνολο του συνόλου AxB που τα στοιχεία του επαληθεύουν τον προτασιακό τύπο p(x,y) ονομάζεται **σύνολο αλήθειας** του p(x,y) και συμβολίζεται με: $\{(x,y)\in AxB: p(x,y)\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν p(x) και q(x) είναι προτασιακοί τύποι με πεδίο ορισμού Ω, τότε οι εκφράσεις:

$\overline{p(x)}$, $p(x) \vee q(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \Rightarrow q(x)$, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ είναι επίσης προτασιακοί τύποι με το ίδιο πεδίο ορισμού Ω.

4.7.1 Ποσοδείκτες

Α. Καθολικός ποσοδείκτης

Έστω ένας προτασιακός τύπος p(x) με πεδίο ορισμού Ω. Έστω $A = \{x \in \Omega: p(x)\}$ το σύνολο αληθείας του προτασιακού τύπου, προφανώς είναι $A \subseteq \Omega$, τότε:

Η πρόταση που είναι:

- Αληθής αν $A = \Omega$, δηλαδή αν όλα τα στοιχεία του Ω επαληθεύουν τον προτασιακό τύπο p(x)
- Ψευδής αν $A \neq \Omega$, δηλαδή στην αντίθετη περίπτωση

συμβολίζεται με: $\mathbf{p(x)\ ,\forall x \in \Omega}$ και διαβάζεται «**p(x), για κάθε x ∈ Ω**»

Το σύμβολο ∀, που μετατρέπει τον προτασιακό τύπο p(x) σε πρόταση, ονομάζεται

καθολικός ποσοδείκτης και διαβάζεται « για κάθε ».

Παράδειγμα 1.

Έστω ο προτασιακός τύπος: p(x): « $x^2 + 1 > 0$ » . Αν θεωρήσουμε ως σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, τότε η έκφραση « $x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$» είναι πρόταση και μάλιστα αληθής.

Παράδειγμα 2.

Έστω ο προτασιακός τύπος: q(ν): « $\nu + 1 > 10$ » . Αν θεωρήσουμε ως σύνολο αναφοράς της μεταβλητής ν το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, τότε η έκφραση « $\nu + 1 > 10$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$» είναι πρόταση και μάλιστα ψευδής.

Β. Υπαρξιακός ποσοδείκτης

Έστω ένας προτασιακός τύπος p(x) με πεδίο ορισμού Ω. Έστω $A = \{x \in \Omega: p(x)\}$ το σύνολο αληθείας του προτασιακού τύπου, προφανώς είναι $A \subseteq \Omega$, τότε:

Η πρόταση που είναι:

- Αληθής αν $A \neq \varnothing$, δηλαδή αν ένα τουλάχιστον στοιχείο του συνόλου Ω επαληθεύει τον προτασιακό τύπο p(x)
- Ψευδής αν $A = \varnothing$, δηλαδή στην αντίθετη περίπτωση

συμβολίζεται με: $\exists x \in \Omega, p(x)$ και διαβάζεται «**υπάρχει $x \in \Omega$, p(x) »**

Το σύμβολο ∃, που μετατρέπει τον προτασιακό τύπο p(x) σε πρόταση, ονομάζεται **υπαρξιακός ποσοδείκτης** και διαβάζεται « υπάρχει » με την έννοια « υπάρχει τουλάχιστον ένα».

Παράδειγμα 1.

Έστω ο προτασιακός τύπος: q(ν): « $2^\nu < 3$ » . Αν θεωρήσουμε ως σύνολο αναφοράς της μεταβλητής ν το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, τότε η έκφραση « $\exists \nu \in \mathbb{N}, 2^\nu < 3$» είναι πρόταση και μάλιστα αληθής.

Παράδειγμα 2.

Έστω ο προτασιακός τύπος: p(x): « $x^2 + 1 = 0$ » . Αν θεωρήσουμε ως σύνολο

αναφοράς της μεταβλητής x το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, τότε η έκφραση «$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 = 0$» είναι πρόταση και μάλιστα ψευδής.

Γ. Η θέση των ποσοδεικτών σε μια μαθηματική πρόταση

Αν μια μαθηματική πρόταση περιέχει δύο ή περισσότερους ποσοδείκτες και αλλάξουμε την σειρά των ποσοδεικτών, τότε η πρόταση που θα προκύψει δεν έχει πάντοτε την ίδια τιμή αλήθειας με την αρχική. Για παράδειγμα αναφέρουμε τις προτάσεις:

«$\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$, $\nu < y$ » η οποία είναι αληθής, ενώ η πρόταση
«$\exists y \in \mathbb{N}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\nu < y$ » είναι ψευδής

Γενικά για κάθε προτασιακό τύπο με δύο μεταβλητές p(x, y) οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς

$\forall x, \forall y, p(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, p(x, y)$

$\exists x, \exists y, p(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, p(x, y)$

$\exists x, \forall y, p(x, y) \Rightarrow \forall y, \exists x, p(x, y)$

$\exists y, \forall x, p(x, y) \Rightarrow \forall x, \exists y, p(x, y)$

Αντίθετα οι παρακάτω προτάσεις δεν είναι πάντοτε αληθείς.

$\forall x, \exists y, p(x, y) \Rightarrow \exists y, \forall x, p(x, y)$

$\forall y, \exists x, p(x, y) \Rightarrow \exists x, \forall y, p(x, y)$

Δ. Καθολικά αληθείς προτασιακοί τύποι

Θεωρούμε έναν προτασιακό τύπο p(x) όπου το x διατρέχει το σύνολο Ω. Ο προτασιακός τύπος p(x) ονομάζεται **καθολικά αληθής** επί του συνόλου Ω, αν και μόνο αν η πρόταση «$\forall x \in \Omega$: p(x)» είναι αληθής.

Παράδειγμα

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ισχύει: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ γιατί η πρόταση «$\forall x \in \mathbb{R}$: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$» είναι αληθής.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν στους νόμους της λογικής των προτάσεων αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές p, q, r, … με οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους p(x), q(x), r(x), … ορισμένους σε ένα σύνολο Ω, τότε οι προτασιακοί τύποι που θα προκύψουν θα είναι καθολικά αληθείς επί του συνόλου Ω.

Ε. Αρνήσεις προτάσεων που περιέχουν ποσοδείκτες

Έστω ένας προτασιακός τύπους p(x) όπου η μεταβλητή του διατρέχει ένα σύνολο Ω. τότε:

- Η άρνηση της πρότασης $\forall x, p(x)$ είναι η πρόταση $\exists x, \overline{p(x)}$
- Η άρνηση της πρότασης $\exists x, p(x)$ είναι η πρόταση $\forall x, \overline{p(x)}$

Δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $\overline{\forall x, p(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{p(x)}$
- $\overline{\exists x, p(x)} \Leftrightarrow \forall x, \overline{p(x)}$

Παραδείγματα

Η άρνηση της πρότασης «$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$» είναι η πρόταση «$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$ » και η άρνηση της πρότασης «$\exists x \in \mathbb{Z}$, $2x + 5 = 0$» είναι η πρόταση «$\forall x \in \mathbb{Z}$, $2x + 5 = 0$»

ΣΤ. Νόμοι των ποσοδεικτών

Έστω ότι p(x) και q(x) είναι δύο προτασιακοί τύποι ορισμένοι επί ενός συνόλου Ω.
Οι παρακάτω προτάσεις **είναι αληθείς:**

- $\forall x, [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x, p(x)] \wedge [\forall x, q(x)]$
- $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x, p(x)] \vee [\exists x, q(x)]$
- $[\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)] \Rightarrow \forall x, [p(x) \vee q(x)]$
- $\exists x, [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x, p(x)] \wedge [\exists x, q(x)]$

Αντιθέτως, οι παρακάτω προτάσεις **δεν είναι πάντοτε αληθείς:**

- $\forall x, [p(x) \vee q(x)] \Rightarrow [\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)]$
- $[\exists x, p(x)] \wedge [\exists x, q(x)] \Rightarrow \exists x, [p(x) \wedge q(x)]$

4.7.2 Κανόνες συμπεράσματος

Η μαθηματική λογική μας παρέχει κανόνες, με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να βρίσκουμε αληθείς προτάσεις από άλλες αληθείς. Οι κανόνες αυτοί ονομάζονται **κανόνες συμπεράσματος** και οι βασικότεροι είναι:

Ο **κανόνας απόσπασης (modus ponens):** Αν οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και p είναι αληθείς, τότε και η πρόταση q είναι επίσης αληθής. Ο κανόνας αυτός παριστάνεται συμβολικά με:

$p \Rightarrow q$, p
q

Ο **κανόνας συλλογισμού αρνητικής μορφής (modus tollens):** Αν οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και $\overline{q}$ είναι αληθής, τότε και η πρόταση $\overline{p}$ είναι επίσης αληθής. Ο κανόνας αυτός παριστάνεται συμβολικά με:

$p \Rightarrow q$, $\overline{q}$
$\overline{p}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ «ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗΣ»

Ιστορικά η μέθοδος αυτή εμφανίστηκε από τον **Ζήνωνα** (488 – 430 π. Χ.) από την Ελέα της Κάτω Ιταλίας που ήταν μαθητής του Παρμενίδη. Ο Ζήνων χρησιμοποίησε για πρώτη φορά την εις άτοπον απαγωγή, ως επιστημονική μέθοδο για την ερμηνεία των παραδόξων του. Η εις άτοπον απαγωγή εμφανίζεται συχνά στα Στοιχεία του Ευκλείδη, αλλά και στους νεότερους χρόνους πολλοί συγγραφείς μαθηματικών κειμένων έδειξαν κάποια προτίμηση στην μέθοδο αυτή. Αυτή οφείλεται στην απόλυτη πειστικότητα με την οποία επιβάλλεται η ισχύς της προς απόδειξη πρότασης. Όμως η μέθοδος αυτή έχει το μειονέκτημα να μην φωτίζει εσωτερικά την ουσία της αποδεικτέας αλήθειας. Μας αναγκάζει να δεχτούμε την αλήθεια μιας πρότασης μέσα από την απόρριψη της άρνησής της, γεγονός που συχνά δεν ικανοποιεί κατά βάθος το πνεύμα, που αρέσκεται στην θεώρηση της αλήθειας μέσα από μια αυστηρή διαδοχή αποδεικτικών λόγων. Παρόλα αυτά η μέθοδος της εις ατόπου απαγωγής αποτελεί σπουδαιότατο όργανο του αποδεικτικού συστήματος της μαθηματικής επιστήμης. Πολλές φορές οι προσπάθειες μας να βρούμε μια συνθετική ή αναλυτική απόδειξη μιας πρότασης οδηγούμαστε σε αδιέξοδο είτε γιατί τέτοια απόδειξη δεν υπάρχει είτε γιατί η εύρεση της ξεπερνά την αποδεικτική μας δύναμη. Τότε καταφεύγουμε στην εις άτοπον απαγωγή. Χωρίς αυτή πολλά ζητήματα των μαθηματικών θα περίμεναν ακόμη την λύση τους και η όλη εξέλιξη της επιστήμης θα συναντούσε ανυπέρβλητες δυσχέρειες. Η απόδειξη με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής στηρίζεται πάνω στους κανόνες της λογικής για το κύρος δύο αντιφατικών προτάσεων. Για να αποδειχτεί η αλήθεια μιας πρότασης αρκεί να αποδειχτεί το ψεύδος της αντίστοιχης αντιφατικής πρότασης. Η απόδειξη του ψεύδους είναι συχνά ευκολότερη από την απόδειξη της αλήθειας μιας πρότασης, γιατί το ψεύδος είναι ένας ισχυρισμός που έρχεται σε σύγκρουση με την παραδεκτή και αποκατεστημένη γνώση και έτσι αποκρούεται με δύναμη από τον στοχασμό σαν κάτι το επικίνδυνο, που έρχεται να διαταράξει την λογική του εσωτερική τάξη και αρμονία. Γι’ αυτό κριτήριο της ψευδούς γνώσης είναι η σύγκρουση προς αναγνωρισμένες αλήθειες (υποθέσεις, αιτήματα, θεωρήματα) δηλαδή το άτοπο. Καμιά γνώση δεν μπορεί να γίνει δεκτή ως αληθινή, αν οδηγεί σε άτοπα συμπεράσματα.

Τέλος και στην καθημερινή ζωή μας βρισκόμαστε συχνά στην ανάγκη να αποδείξουμε το ψεύδος ενός ισχυρισμού γιατί η εφαρμογή αυτής της μορφής σκέψης είναι αρκετά συχνή στην καθημερινότητα μας. Δεν είναι υπερβολή να ισχυριστούμε πως η εις άτοπον απαγωγή είναι συνεχώς παρούσα στην καθημερινή διαλεκτική και πως πρέπει να συγκαταλέγεται στους γενικούς τρόπους που ακολουθεί η νόηση στην έρευνα της αλήθειας.

Μετά από όσα είπαμε παραπάνω ας μελετήσουμε την ουσία της μεθόδου:

Έστω ότι σε ένα μαθηματικό σύστημα θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση p. Η μέθοδος της **«εις άτοπον απαγωγής»** συνίσταται στο να θεωρήσουμε την άρνηση $\bar{p}$ της πρότασης p και θα αποδείξουμε μια πρόταση της μορφής:

$$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$$

όπου q είναι μια αληθινή πρόταση του μαθηματικού συστήματος (αξίωμα ή θεώρημα). Τότε θα έχουμε:

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ αληθής

q αληθής

οπότε με βάση του κανόνα συλλογισμού αρνητικής μορφής (modus tollens) η πρόταση p θα είναι αληθής.

5.1 Εφαρμογές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ, λ με (κ, λ) =1

ώστε $\frac{\kappa^2}{\lambda^2} = 2$

τότε $\kappa^2 = 2\lambda^2$ άρα ο κ^2 είναι άρτιος, συνεπώς και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή κ =2ν

Αντικαθιστώντας στην $\kappa^2 = 2\lambda^2$ έχουμε:

$(2\nu)^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\nu^2$

άρα ο λ^2 είναι άρτιος επομένως ο λ είναι άρτιος.

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι (κ, λ) = 1, επομένως η υπόθεσή ότι

Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ, λ με (κ, λ) =1 ώστε $\frac{\kappa^2}{\lambda^2} = 2$ είναι λανθασμένη.

ΣΧΟΛΙΟ

Η παραπάνω απόδειξη είναι σύγχρονη βασισμένη πάνω σ' αυτή που υπάρχει στον Αριστοτέλη στα « Αναλυτικά Ύστερα 41α 23-30»

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει κ το πολύ ρίζες σε διάστημα (α, β)

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση f(x)=0 έχει κ το πολύ ρίζες σε ένα διάστημα (α, β) ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Αρχικά δεχόμαστε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει κ+1 ρίζες και τις διατάσουμε $\rho_1<\rho_2<\ldots..<\rho_{\kappa+1}$.
- Οι ρίζες αυτές ορίζουν κ διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, ……,$[\rho_\kappa, \rho_{\kappa+1}]$ και αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά και παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα.
- Ισχύουν επίσης $f(\rho_1)= f(\rho_2)=\ldots\ldots..= f(\rho_{\kappa+1})=0$ αφού όλοι οι αριθμοί $\rho_1,\rho_2,\ldots..\rho_{\kappa+1}$ είναι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0 αρά για κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά ισχύει το θεώρημα του Rolle.
- Με δεδομένη την ισχύ του θεωρήματος του Rolle η εξίσωση f ΄(x)=0 θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα, συνολικά κ τουλάχιστον.
- Υπολογίζουμε την f ΄(x)=0 και δείχνουμε ότι είναι αδύνατο να έχει κ τουλάχιστον ρίζες, καταλήγοντας σε άτοπο, άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει κ το πολύ ρίζες σε ένα διάστημα (α, β).

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^{2\nu} = \alpha x + \beta$ ($\nu \in N^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^{2\nu} - \alpha x - \beta$ και υποθέτουμε ότι αυτή έχει τρείς πραγματικές ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Για την συνάρτηση αυτή έχουμε ότι σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα (ρ_1, ρ_2), (ρ_2, ρ_3) με παράγωγο $f'(x) = 2\nu \cdot x^{\nu - 1} - \alpha$ και επιπλέον είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ αφού οι ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) και μια τουλάχιστον στο διάστημα (ρ_2, ρ_3)

Αλλά είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\nu x^{2\nu - 1} - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^{2\nu - 1} = \frac{\alpha}{2\nu}, \nu \in N^*$$

η εξίσωση όμως είναι περιττού βαθμού, επομένως έχει μια μόνο πραγματική ρίζα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. ΑΤΟΠΟ .
Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει τρεις πραγματικές ρίζες, επομένως έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Η μέθοδος της ατόπου απαγωγής μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και στον υπολογισμό ορίου συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **Η συνάρτηση f έχει όριο στο $+\infty$**
- **$f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$**

τότε να υπολογίσετε το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο $+\infty$

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ τότε έχουμε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + e^{f(x)}] = -\infty$, ενώ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + e^{f(x)}] = \ell + e^{\ell}$, ενώ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ έχουμε υποχρεωτικά ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

6. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ Ή ΤΕΛΕΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Η **μαθηματική επαγωγή**, ή διαφορετικά **τέλεια επαγωγή**, είναι μια μέθοδος μαθηματικής απόδειξης που συνήθως χρησιμοποιείται για να αποδειχτεί ότι μια πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Η μαθηματική επαγωγή σαν τεχνική που ξεκινάει από το μερικό και ειδικό και διατυπώνει συμπεράσματα γενικού και καθολικού περιεχομένου, χρησιμοποιήθηκε από τους αρχαίους χρόνους ως μέθοδος απόδειξης, αλλά και ως εργαλείο επιχειρηματολογίας. Όπως προκύπτει από τα κείμενα των Νεοπυθαγορείων φιλοσόφων (Ιάμβλιχος, Θέων ο Σμυρνεύς), ήδη από την εποχή των **Πυθαγορείων**, στα πλαίσια της Θεωρίας Αριθμών, όπως την είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι, χρησιμοποιείτο μια μορφή ατελούς επαγωγής.

Οι Πυθαγόρειοι εισήγαγαν μορφές αποδείξεων βελτιωμένες σε σχέση με εκείνες των προγενεστέρων Ελλήνων μαθηματικών θεωρώντας ότι η αποδεικτική διαδικασία δεν είναι απλά ένας παραγωγικός συλλογισμός, αλλά πρέπει να έχει δεδομένα (υποθέσεις) και κάποιους αρχικούς συλλογισμούς. Μια μέθοδος απόδειξης που αναπτύχθηκε από τους Πυθαγόρειους είναι και η μαθηματική επαγωγή. Η χρήση της μεθόδου φαίνεται σε αρκετές εργασίες τους όπως:

- Στην πρόταση Ι45 όπου αναφέρει την κατασκευή παραλληλογράμμου με δοθείσα γωνία που είναι ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο.
- Στην απόδειξη της αλγεβρικής πρότασης $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2$
- Στις προτάσεις VII 14, VIII 13 IX 20 X2 των στοιχείων του Ευκλείδη.

Ενώ η χρήση της μαθηματικής επαγωγής ως μέθοδο απόδειξης είναι αρκετά διαδεδομένη στους πυθαγόρειους που την εφάρμοζαν στην γεωμετρική άλγεβρα, παρατηρούμε ότι στον Ευκλείδη είναι τελείως υποβαθμισμένη. Μια λογική εξήγηση του γεγονότος αυτού είναι η εξής: Αρχικά η μαθηματική επαγωγή αναπτύχθηκε παράλληλα με την έννοια της ανθυφαίρεσης. Μετά την εμφάνιση της θεωρίας των λόγων η ανθυφαίρεση ατόνησε και μαζί της ατόνησε και η μαθηματική επαγωγή. (Νεγρεπόντης, 2006). Ο **Σωκράτης** πολλές φορές για να ορίσει έννοιες που αφορούσαν ανθρώπινους χαρακτηρισμούς (σοφία, δικαιοσύνη, εγκράτεια, αρετή, ανδρεία κ.α) συνήθως διάλεγε κάποια άτομα με προσωπικότητα, ξεχώριζε τα κοινά

τους χαρακτηριστικά και στην συνέχεια τους προσέδινε γενική ισχύ. Τον επαγωγικό συλλογισμό τον χρησιμοποίησε επίσης και ο **Πλάτωνας**, αλλά κυρίως οι Επικούρειοι Φιλόσοφοι που τον μετέτρεψαν σε σύστημα φιλοσοφικής έρευνας. Στην ιστορία της φιλοσοφίας έγιναν απόπειρες να παρουσιαστεί ένας τύπος συλλογισμού σαν μοναδικά ορθός και αυθεντικός τρόπος απόκτησης νέων γνώσεων. Έτσι ο **Αριστοτέλης** ενώ υποστήριζε πως για την γνώση του γενικού είναι απαραίτητο να ξεκινάμε από το μερικό και να χρησιμοποιούμε την επαγωγή για την εξαγωγή κρίσεων, εντούτοις όπως γνωρίζουμε υπερτόνισε την σημασία του παραγωγικού συλλογισμού σαν τον μοναδικά ορθό τρόπο ασφαλούς σκέψης και θεμελίωσε την τυπική λογική η οποία θεωρείται ως το απαραίτητο εργαλείο παραγωγικού διαλογισμού, που από την αλήθεια μιας πρότασης για ένα σύνολο συμπεραίνουμε την αλήθεια για τα επί μέρους στοιχεία ή υποσύνολά του.

Αντίθετα ο **Φραγκίσκος Βάκων** ($16^{ος}$ αιώνας) άσκησε οξύτατη κριτική στην «συνηθισμένη» λογική και στον παραγωγικό τρόπο του Αριστοτέλη με το επιχείρημα ότι δεν στηρίζεται στην πείρα, στην πρακτική και αφήνει από τα χέρια του την φύση. Τεράστια θεωρείται η προσφορά του στην ανάπτυξη της λογικής με την επεξεργασία της επαγωγής, παρόλο που τα βήματά του που έκανε προς τα εμπρός ήταν μονόπλευρα. Από τους μαθηματικούς ο **J. Bernoulli** ($17^{ος}$ αιώνας) ήταν ο πρώτος που απέκρουσε συστηματικά την επαγωγή σαν μέθοδο εξαγωγής μαθηματικής γνώσης και δίνοντας αντιπαραδείγματα δεν την δέχτηκε σαν αποδεικτική μέθοδο γενικών προτάσεων. Γεννήθηκε λοιπόν το ερώτημα πως θα βρεθεί μια αυστηρή συλλογιστική διαδικασία που θα αξιοποιούσε και διασφάλιζε την εγκυρότητα της επαγωγικής μεθόδου, ώστε από την αλήθεια ειδικών περιπτώσεων να καταλήγουμε στην αλήθεια γενικών περιπτώσεων. Έτσι δημιουργήθηκε η **μαθηματική** ή **τέλεια επαγωγή** όπως την γνωρίζουμε σήμερα και εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε τέλεια μορφή από τον **Pascal** το 1654 στην απόδειξη μιας ιδιότητας του ομώνυμου τριγώνου του Pascal. Δείγματα της μεθόδου όμως εμφανίστηκαν νωρίτερα στην εργασία του Ιταλού μαθηματικού και αστρονόμου **Franciscus Maurolycus** (1495 – 1575) στο έργο *Arithmeticorum libri duo*, όπου χρησιμοποίησε τη μέθοδο για να αποδείξει ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών αριθμών είναι $ν^2$. Το όνομα «μαθηματική επαγωγή» ή «τέλεια επαγωγή» καθιερώθηκε από τις εργασίες των **A. De Morgan** (1838) και R. Dedekind (1887). Είναι απαραίτητο να γίνει διάκριση από την «ατελή

επαγωγή»Ο **Giuseppe Peano** (1852 – 1932) σε μια εντυπωσιακή προσπάθεια να τυποποιήσει την αριθμητική συμπεριέλαβε το 1889 στο έργο του «*Arithmetices principia nova methodo exposita*» την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στα πέντε αξιώματα του για την θεμελίωση του συνόλου των φυσικών αριθμών. Τα αξιώματα αυτά είναι:

Αξίωμα Ι. Ο 1 είναι φυσικός αριθμός, δηλαδή $1 \in \mathbb{N}$

Αξίωμα ΙΙ. Για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας και μόνο ένας επόμενος φυσικός αριθμός, δηλαδή για κάθε $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow (\nu + 1) \in \mathbb{N}$.

Αξίωμα ΙΙΙ Ο 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού, δηλαδή $\nu + 1 \neq 1$ (ακριβέστερα $\nu + 1 > 1$) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Αξίωμα IV Δύο φυσικοί αριθμοί που έχουν τον ίδιο επόμενο, είναι ίσοι, δηλαδή για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ ισχύει: $\nu + 1 = \mu + 1 \Rightarrow \nu = \mu$.

Αξίωμα V **Η αρχή της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής.**

Αν S είναι ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών που περιλαμβάνει το 1 και τον επόμενο κάθε αριθμού του, τότε το S ταυτίζεται με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, δηλαδή:

αν $S \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

(α) $1 \in S$,

(β) για κάθε $k \in S \Rightarrow (k + 1) \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$

Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής δημιουργήθηκε από την ανάγκη να ελεγχθούν τα αποτελέσματα της επαγωγικής μεθόδου. Για τον λόγο αυτό η μέθοδος είναι μια μορφή παραγωγικού συλλογισμού και δεν μπορούσε να είναι διαφορετικά, αφού σύμφωνα με τα πρότυπα του παρελθόντος, κανένα μαθηματικό αποτέλεσμα δεν μπορούσε να θεωρηθεί έγκυρο εκτός αν είχε βγει με παραγωγικό τρόπο με τις αρχές της τυπικής λογικής από τις υποθέσεις και τα αξιώματα.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι μια ακριβώς διατυπωμένη πρόταση της οποίας η διαισθητική πειστικότητα θεωρείται από τους μαθηματικούς αναμφισβήτητη. Εμφανίζεται όμως και σαν αξίωμα στην αξιωματική κατασκευή των φυσικών αριθμών, επιτρέποντας έτσι την εξαγωγή μιας καθαρά παραγωγικής απόδειξης για το ότι μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό ν ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Η μέθοδος όμως σαν παραγωγική μέθοδος απόκτησης της γνώσης έχει τις αδυναμίες και τις ατέλειες της και με κανένα τρόπο δεν μπορεί να εκφράσει το ζηλευτό και αξιοθαύμαστο πλούτο των μορφών που χρησιμοποιεί η ανθρώπινη γνώση για την κατάκτηση της αλήθειας και της γνώσης του κόσμου που μας περιβάλλει. Η μαθηματική επαγωγή όπως και οποιαδήποτε παραγωγική μέθοδος συλλογισμού δεν είναι σε θέση από μόνη της να ανακαλύψει καινούργια γνώση, καινούργιες αλήθειες για τον απλούστατο λόγο πως η αφετηρία από την οποία αρχίζει η κίνησή της, η γνώση δηλαδή του γενικού έχει ανάγκη θεμελίωσης και είναι αποτέλεσμα κάποιων άλλων τρόπων γνώσης. Επομένως οι πηγές της μεθόδου ξεκινούν από κάτι που δεν είναι απαγωγή. Είναι φυσικό ότι για να αποδειχτεί κάτι με παραγωγικό τρόπο πρέπει να είναι γνωστό με άλλες μεθόδους απόδειξης.

Ο **I. Lakatos** παραθέτει αποσπάσματα των Πρόκλου, Πάππου, Χρύσιππου, Euler, Polya κ.α. που φαίνεται ότι ήταν κοινή πίστη στους μαθηματικούς όλων των εποχών πως οι εικασίες (ή τα θεωρήματα) προηγούνται των αποδείξεων τους στην ευρετική διάταξη. Η αντίληψη αυτή συνοψίζεται στα λόγια του Riemann: «Τα θεωρήματα να υπάρχουν μόνο και μετά θα εύρισκα εύκολα τις αποδείξεις». Πρέπει λοιπόν με κάποιους άλλους τρόπους και μεθόδους να ανακαλύψει κανείς τα θεωρήματα και τις προτάσεις για να τις αποδείξει με την μαθηματική επαγωγή ή με οποιονδήποτε άλλο παραγωγικό τρόπο. Αυτή είναι και η βασική αδυναμία της μαθηματικής επαγωγής και οποιασδήποτε παραγωγικής μεθόδου, ότι δηλαδή δεν επιτρέπει από μόνη της την ανακάλυψη νέων γνώσεων.

Από την θεωρία των φυσικών αριθμών αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^{ο} (πρώτη μορφή τέλειας επαγωγής)

Έστω p(ν) ένας προτασιακός τύπος ορισμένος στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.
Αν:

- p(0) είναι αληθής πρόταση και
- $\forall \kappa \in \mathbb{N}$, p(κ) $\Rightarrow$ p(κ+1)

Τότε ο προτασιακός τύπος p(ν) ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Η απόδειξη μιας πρότασης της μορφής «$\forall \nu \in \mathbb{N}$, p(ν)» με βάση το παραπάνω θεώρημα ή όπως λέγεται επαγωγικά, γίνεται σε δύο βήματα ως εξής:
Α) Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση p(1) είναι αληθής .
Β) Θεωρούμε ένα τυχαίο φυσικό αριθμό κ και με την υπόθεση ότι η πρόταση p(κ) είναι αληθής, αποδεικνύουμε ότι και η πρόταση p(κ + 1) είναι επίσης αληθής.

Με χρήση των συμβόλων της λογικής το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\{ p(0) \wedge [\forall \kappa \in \mathbb{N}: p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)]\} \text{ αληθής} \Rightarrow p(\nu) \text{ αληθής } \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις του θεωρήματος αναφέρεται ως βάση της επαγωγής ή βασικό βήμα και η δεύτερη σχέση ως βήμα της επαγωγής ή επαγωγικό βήμα. Η υπόθεση ότι η p(κ) είναι αληθής στην δεύτερη σχέση αναφέρεται ως επαγωγική υπόθεση. (Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Σ. & Γιαννακούλιας Ε. 1999)

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^{ο} (δεύτερη μορφή τέλειας επαγωγής)

Έστω p(ν) ένας προτασιακός τύπος ορισμένος στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.
Αν:

- p(1) είναι αληθής πρόταση και
- $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ με $\kappa \geq 1$, p(1), p(2), …, p(κ) αληθής $\Rightarrow$ p(κ+1) αληθής

Τότε ο προτασιακός τύπος p(ν) ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Η απόδειξη μιας πρότασης της μορφής «$\forall \nu \in \mathbb{N}$, p(ν)» με βάση το παραπάνω θεώρημα ή όπως λέγεται επαγωγικά, γίνεται σε δύο βήματα ως εξής:

Α) Αποδεικνύουμε ότι οι προτάσεις p(1) και p(2) είναι αληθείς

Β) Θεωρούμε ένα τυχαίο φυσικό αριθμό κ και με την υπόθεση ότι οι προτάσεις p(κ -1) και p(κ -2) είναι αληθείς, αποδεικνύουμε ότι και η πρόταση p(κ + 1) είναι επίσης αληθής.

Με χρήση των συμβόλων της λογικής το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\{ p(1), p(2) \ \wedge [\forall \kappa \in \mathbb{N}\ \kappa > 2 : p(\kappa -1) \wedge p(\kappa -2) \Rightarrow p(\kappa)]\} \text{ αληθής}$$
$$\Rightarrow p(\nu) \text{ αληθής } \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^{ο} (γενίκευση)

Έστω ένας ακέραιος αριθμός α και ένας προτασιακός τύπος p(ν), ορισμένο στο σύνολο $S_\alpha = \{ \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots\}$. Αν:

- p(α) είναι αληθής πρόταση και
- $\forall \kappa \in S_\alpha = \{ \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots\}$, $p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa +1)$

Τότε ο p(ν) ισχύει για κάθε ακέραιο $\nu \geq \alpha$.

Η απόδειξη μιας πρότασης της μορφής «$\forall \kappa \in S_\alpha$, p(ν)» με βάση το παραπάνω θεώρημα ή όπως λέγεται επαγωγικά, γίνεται σε δύο βήματα ως εξής:

Α) Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση p(α) είναι αληθής .

Β) Θεωρούμε ένα τυχαίο ακέραιο $\kappa \geq \alpha$ και με την υπόθεση ότι η πρόταση p(κ) είναι αληθής, αποδεικνύουμε ότι και η πρόταση p(κ +1) είναι επίσης αληθής.

Μια άλλη χρήσιμη διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής είναι η πρόταση: «Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ελάχιστο στοιχείο» Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως η αρχή του ελαχίστου ή αρχή της καλής διάταξης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4^{ο}

Η αρχή του ελάχιστου είναι ισοδύναμη με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι αληθεύει η αρχή του ελάχιστου και έστω ότι:

- $p(0)$ είναι αληθής πρόταση και
- $\forall \kappa \in \mathbb{N}, p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός μ τέτοιος ώστε η $p(\mu)$ να είναι ψευδής. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{ \nu \in \mathbb{N}: p(\nu)$ ψευδής.$\}$ Το σύνολο Α είναι μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών, επομένως σύμφωνα με την αρχή του ελαχίστου, έχει ελάχιστο στοιχείο έστω το λ. Προφανώς $\lambda \neq 0$ εφόσον η $p(0)$ είναι αληθής πρόταση. Επειδή το λ είναι το ελάχιστο στοιχείο του Α θα έχουμε ότι $\lambda - 1 \notin A$, δηλαδή η $p(\lambda - 1)$ ισχύει. Από την υπόθεση προκύπτει ότι η πρόταση $p(\lambda)$ είναι αληθής, δηλαδή $\lambda \notin A$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως η πρόταση $p(\nu)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Αντίστροφο.

Έστω ότι αληθεύει η αρχή της μαθηματικής επαγωγής και έστω ότι Α είναι ένα μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι το σύνολο Α δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θεωρούμε το σύνολο Β που αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι από όλα τα στοιχεία του συνόλου Α, δηλαδή:

$\kappa \in B \Leftrightarrow [$ για κάθε $\mu \in A: \kappa < \mu]$.

Παρατηρούμε ότι $0 \in B$(διαφορετικά θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του Α)

Έστω $\nu \in B$, τότε όλα τα στοιχεία του συνόλου Α είναι μεγαλύτερα από το ν. Από την υπόθεση ότι το σύνολο Α δεν έχει ελάχιστο στοιχείο έπεται ότι $\nu + 1 \in A$, συνεπώς όλα τα στοιχεία του Α είναι μεγαλύτερα από το $\nu + 1$. Δηλαδή $\nu + 1 \in B$. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής συμπεραίνουμε ότι $B = N$, άρα $A = \varnothing$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως το Α έχει ελάχιστο στοιχείο. (Μυτιληναίος, Μ & Κατερίνης, Π. 1993)

Η μαθηματική επαγωγή δεν περιορίζεται μόνο στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Μπορεί να εφαρμοστεί στην απόδειξη μιας πρότασης $p(\kappa)$ για κάθε ακέραιο $\kappa \geq \beta$, όπου β είναι ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Στην πραγματικότητα πρόκειται για

μια μετατόπιση του συνόλου των φυσικών αριθμών κατά β μονάδες. Αν ζητείται να αποδειχτεί με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής μια πρόταση p(κ) για όλους τους ακεραίους κ είναι αναγκαίο και ικανό να γίνουν δύο επαγωγές: μια προς τα δεξιά του μηδέν (θετικούς ακεραίους) και μια προς τα αριστερά του μηδέν (αρνητικούς ακεραίους)

Σύμφωνα με τους Avital, S. & Hansen, R. (1978), η μαθηματική επαγωγή μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- Ύπαρξη διάταξης (για οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου να είναι φανερό ποιο προηγείται του άλλου.)
- Ασυμμετρία (αν το α προηγείται του β, τότε το β δεν προηγείται του α)
- Μεταβατικότητα (για οποιαδήποτε τριάδα στοιχείων α, β, γ του συνόλου, αν το α προηγείται του β και το β προηγείται του γ, τότε το α προηγείται του γ)
- Καλή διάταξη (κάθε υποσύνολο του συνόλου έχει ελάχιστο στοιχείο)

Επιπλέον πρέπει να ισχύει η ιδιότητα πως κάθε στοιχείο του συνόλου, εκτός από το πρώτο, έχει ένα καλά ορισμένο προηγούμενο στοιχείο. Κάθε σύνολο που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες μπορεί να τοποθετηθεί σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς, αρκεί τα στοιχεία του δοσμένου συνόλου να είναι τοποθετημένα κατά μέγεθος.

Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής αποτελείται από δύο βήματα. Και τα δύο βήματα είναι απολύτως αναγκαία, για να εξασφαλίσουμε την αλήθεια ενός ισχυρισμού, γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα. Υπάρχουν δηλαδή, περιπτώσεις στις οποίες ικανοποιείται το πρώτο βήμα χωρίς να ικανοποιείται και το δεύτερο. Για παράδειγμα η πρόταση P(ν) : «$\forall \nu \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $\nu^2 - \nu + 41$ είναι πρώτος» για ν = 2 δίνει αριθμητική τιμή στο πολυώνυμο 41 που είναι πρώτος αριθμός. Ακόμη για ν = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 10 έχουμε ότι το πολυώνυμο έχει τιμές 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113 και 131 αντίστοιχα, που είναι όλοι επίσης πρώτοι αριθμοί. Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να υποθέσει ότι για οποιοδήποτε φυσικό ν η τιμή του πολυωνύμου $\nu^2 - \nu + 41$ είναι πρώτος αριθμός. Αυτό όμως

ισχύει μέχρι και για ν = 40 αλλά δεν ισχύει για ν = 41 , για το οποίο έχουμε $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, που δεν είναι πρώτος. Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις στις οποίες ικανοποιείται το 2° βήμα της μαθηματικής επαγωγής χωρίς όμως να ικανοποιείται και το πρώτο. Για παράδειγμα στον ισχυρισμό «$\forall \nu \in \mathbb{N} : \nu = \nu + 1$» ο οποίος προφανώς είναι ψευδής, ωστόσο ισχύει το δεύτερο βήμα της μαθηματικής επαγωγής. Πράγματι αν ισχύει η πρόταση Ρ(κ): κ = κ +1 έχουμε ότι κ +1 = κ + 1 + 1 δηλαδή κ + 1 = κ + 2 που είναι η πρόταση Ρ(κ + 1) δηλαδή ισχύει το δεύτερο βήμα. Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση αυτή αν δεν εξετάσουμε το πρώτο βήμα της επαγωγής και βγάλουμε συμπεράσματα μόνο από την ισχύ του δεύτερου βήματος έχουμε ότι ν = ν +1 για κάθε φυσικό αριθμό που δηλώνει ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι ίσος με τον επόμενο του δηλαδή ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι ίσοι!!!

6.1 Εφαρμογές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Υπολογισμός νιοστής παραγώγου τριγωνομετρικής συνάρτησης με χρήση της μαθηματικής επαγωγής.

« Να υπολογιστεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f(x) = ημx»

Αρχικά υπολογίζουμε την πρώτη, δεύτερη, και τρίτη παράγωγο της συνάρτησης f(x) = ημx.

Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

$$f''(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

$$f^{(3)}(x) = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$$

Στην συνέχεια προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τις παραπάνω παραγώγους σε συγκεκριμένη μορφή με χρήση τριγωνομετρικών μετασχηματισμών:

$$f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f''(x) = (\text{συν}x)' = -\,\text{ημ}x = \text{ημ}(\pi + x) = \text{ημ}\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(3)}(x) = (-\,\text{ημ}x)' = -\,\text{συν}x = \text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

με βάση τους παραπάνω τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς προκύπτει η εικασία ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f(x) = ημx, είναι:

$$f^{(\nu)}(x) = \text{ημ}\left(\frac{\nu\pi}{2} + x\right) \text{ με } \nu \in \mathbb{N}^*$$

η παραπάνω σχέση είναι απλά μια εικασία για την νιοστή παράγωγο της συνάρτησης f(x) = ημx και η απόδειξη της γίνεται με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, όπου έχουμε:

Έστω ο προτασιακός τύπος p(ν): $f^{(\nu)}(x) = \text{ημ}\left(\frac{\nu\pi}{2} + x\right)$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$

Α. Η πρόταση p(1): $f'(x) = \text{ημ}\left(\frac{1\cdot\pi}{2} + x\right)$ είναι αληθής

γιατί είναι $f'(x) = (\text{ημ}x)' = \text{συν}x = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Β. Υποθέτουμε ότι η πρόταση p(κ): $f^{(\kappa)}(x) = \text{ημ}\left(\frac{\kappa\pi}{2} + x\right)$,$\kappa \in \mathbb{N}$ είναι αληθής,

οπότε αρκεί να αποδειχτεί η συνεπαγωγή $\forall \kappa \in \mathbb{N}$, p(κ) $\Rightarrow$ p(κ+1) δηλαδή η ισχύς της πρότασης:

$$p(\kappa+1):\quad f^{(\kappa+1)}(x) = \text{ημ}\left(\frac{(\kappa+1)\cdot\pi}{2} + x\right),\ \kappa \in \mathbb{N}$$

Πράγματι έχουμε: $f^{(\kappa+1)}(x) = [f^{(\kappa)}(x)]' = \left[\text{ημ}\left(\frac{\kappa\pi}{2} + x\right)\right]' = \text{συν}\left(\frac{\kappa\pi}{2} + x\right)\cdot\left(\frac{\kappa\pi}{2} + x\right)' =$

$$= \text{συν}\left(\frac{\kappa\pi}{2} + x\right) = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\kappa\pi}{2} + x\right) = \text{ημ}\left(\frac{\kappa\pi + \pi}{2} + x\right) = \text{ημ}\left(\frac{(\kappa+1)\cdot\pi}{2} + x\right)$$

Τότε σύμφωνα με την μέθοδο της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής ο προτασιακός τύπος p(ν) : $f^{(\nu)}(x) = \text{ημ}\left(\frac{\nu\pi}{2} + x\right)$ ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Απόδειξη συναρτησιακών σχέσεων για πεπερασμένο πλήθος $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ σημείων του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης.

«Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N} - \{1\}$ και $x_1, x_2, \ldots x_\nu \in \mathbb{R}$.»

Η σχέση αποδεικνύεται με την μέθοδος της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής.
Έστω ο προτασιακός τύπος $p(\nu)$: $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu)$

Α. Η πρόταση $p(1)$: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ είναι αληθής λόγω της υπόθεσης αφού $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Β. Υποθέτουμε ότι η πρόταση $p(\kappa)$: $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{N} - \{1\}$ είναι αληθής,
οπότε αρκεί να αποδειχτεί η συνεπαγωγή $\forall \kappa \in \mathbb{N}$, $p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$ δηλαδή η ισχύς της πρότασης:
$p(\kappa+1)$: $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{\kappa+1}) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{\kappa+1})$, $\kappa \in \mathbb{N}$

Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{\kappa+1}) = \\ &= f[(x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa) + x_{\kappa+1}] = \\ &= f(x_1 + x_2 + \ldots + x_\kappa) + f(x_{\kappa+1}) = \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\kappa) + f(x_{\kappa+1}). \end{aligned}$$

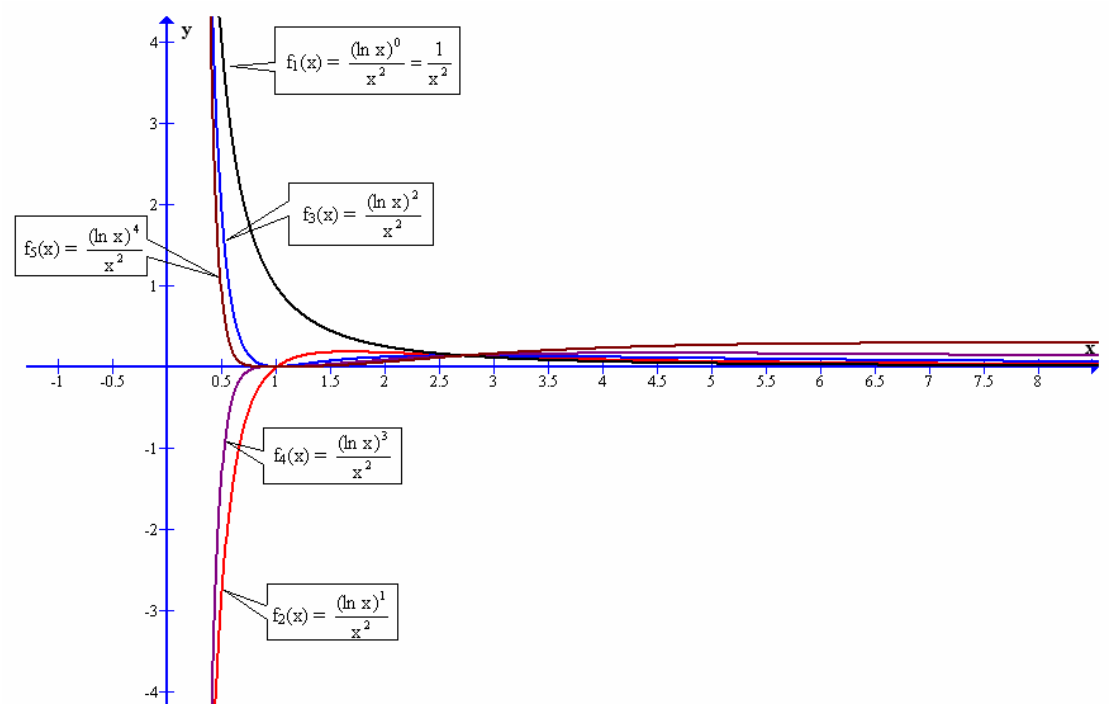
Τότε σύμφωνα με την μέθοδο της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής ο προτασιακός τύπος $p(\nu)$: $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu)$ ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N} - \{1\}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Υπολογισμός ορίου συνάρτησης

«Δίνεται η συνάρτηση f(0, +∞)→ ℝ με f(x) = $\frac{(\ell nx)^{\nu}}{x^2}$ ν∈ℕ,να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$»

Αρχικά δίνοντας τιμές στον φυσικό αριθμό ν = 0, 1, 2, 3, 4 προκύπτουν οι πέντε πρώτες συναρτήσεις, όπου σχεδιάζοντας με κατάλληλο πρόγραμμα τις γραφικές τους παραστάσεις προκύπτει η **εικασία** ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\nu}}{x^2} = 0$



Αρχικά το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\nu}}{x^2}$ παρουσιάζει απροσδιόριστη μορφή και η άρση της απροσδιοριστίας που θα επιτρέψει τον υπολογισμό του ορίου επιχειρείται να γίνει με τους κανόνες του De l' Hospital, όμως ο υπολογισμός του λόγου $\frac{[(\ell nx)^{\nu}]'}{(x^2)'}$ δημιουργεί συνάρτηση με συνθετότερο τύπο, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{[(\ell nx)^{\nu}]'}{(x^2)'} = \frac{\nu \cdot (\ell nx)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \frac{\nu \cdot (\ell nx)^{\nu-1}}{2x^2}$$

Συνεπώς η απόδειξη της εικασίας $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\nu}}{x^2} = 0$, γίνεται με την μέθοδο της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής.

Έστω ο προτασιακός τύπος p(ν): $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\nu}}{x^2} = 0$, $\nu\in\mathbb{N}$

Α. Η πρόταση p(1): $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)}{x^2} = 0$ είναι αληθής

Πράγματι έχουμε: $\frac{(\ell nx)'}{(x^2)'} = \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2x^2}$, όπου το όριο της συνάρτησης $\frac{1}{2x^2}$ υπάρχει

όταν το $x\to +\infty$ επομένως έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

Β. Υποθέτουμε ότι η πρόταση p(κ): $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\kappa}}{x^2} = 0$,$\kappa\in\mathbb{N}$ είναι αληθής,

οπότε αρκεί να αποδειχτεί η συνεπαγωγή $\forall\kappa\in\mathbb{N}$, $p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$ δηλαδή η ισχύς της πρότασης:

$$p(\kappa+1):\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\kappa+1}}{x^2} = 0,\ \kappa\in\mathbb{N}$$

Πράγματι έχουμε:

$\frac{[(\ell nx)^{\kappa+1}]'}{(x^2)'} = \frac{(\kappa+1)\cdot(\ell nx)^{\kappa}\cdot\frac{1}{x}}{2x} = \frac{\kappa+1}{2}\cdot\frac{(\ell nx)^{\kappa}}{x^2}$, όπου το όριο της συνάρτησης

$\frac{(\ell nx)^{\kappa}}{x^2}$ λόγω της πρότασης p(κ) υπάρχει, επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[(\ell nx)^{\kappa+1}]'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa+1}{2}\cdot\frac{(\ell nx)^{\kappa}}{x^2} = \frac{\kappa+1}{2}\cdot 0 = 0$$

Τότε σύμφωνα με την μέθοδο της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής ο προτασιακός τύπος p(ν) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ell nx)^{\nu}}{x^2} = 0$ ισχύει για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$

7. Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Γενικά

Η θέση του αντιπαραδείγματος είναι αρκετά σημαντική στην αποδεικτική διαδικασία των μαθηματικών προτάσεων. Ο όρος «αντιπαράδειγμα» κατασκευάστηκε στα νεώτερα χρόνια και δεν υπάρχει στα αρχαία Ελληνικά, δεν είναι αυστηρά μαθηματικός όρος, αλλά χρησιμοποιείται σε πολλές επιστήμες. Σύμφωνα με το Νεοελληνικό Λεξικό του Μπαμπινιώτη αντιπαράδειγμα είναι το παράδειγμα που ανατρέπει την ισχύ μιας υπόθεσης ή μιας άποψης η οποία βασίζεται σε άλλα παραδείγματα.

Μαθηματικός ορισμός του αντιπαραδείγματος.

Ένας βασικός νόμος της λογικής είναι ο νόμος της αποκλίσεως τρίτου. Σύμφωνα με αυτόν για κάθε λογική πρόταση p έχουμε ότι η πρόταση p είναι αληθής ή η άρνησή της $\overline{p}$ είναι αληθής. Δηλαδή με άλλα λόγια έχουμε τους ισχυρισμούς:

- Η πρόταση p είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση $\overline{p}$ είναι ψευδής

και αντίστροφα

- Η πρόταση $\overline{p}$ είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση p είναι ψευδής.

Ο παραπάνω νόμος ισχύει στα πλαίσια της δίτιμης λογικής, δηλαδή της λογικής που αναφέρει ότι κάθε μαθηματική πρόταση p μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές: Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής). Επειδή το αντιπαράδειγμα σχετίζεται άμεσα με τον υπαρξιακό (∀) και τον καθολικό (∃) ποσοδείκτη, έχουμε τις προϋποθέσεις αλήθειας ή ψεύδους των παρακάτω προτάσεων.

$$(\forall x)\ [p(x)]$$

Είναι αληθής αν για όλα τα x, η P(x) είναι αληθής.

Είναι ψευδής αν για ένα τουλάχιστον x, η P(x) είναι ψευδής.

$$(\exists x)[p(x)]$$

Είναι αληθής αν για ένα τουλάχιστον x, η P(x) είναι αληθής.

Είναι ψευδής αν για όλα τα x, η P(x) είναι ψευδής.

$$(\forall x)\ [\overline{p(x)}\,]$$

Είναι αληθής αν για όλα τα x, η P(x) είναι ψευδής.

Είναι ψευδής αν για ένα τουλάχιστον x, η P(x) είναι αληθής.

$$(\exists x)[\ \overline{p(x)}\,]$$

Είναι αληθής αν για ένα τουλάχιστον x, η P(x) είναι ψευδής.

Είναι ψευδής αν για όλα τα x, η P(x) είναι αληθής.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$\overline{(\forall x)[p(x)]} \Leftrightarrow (\exists x)[\overline{p(x)}]$$

$$\overline{(\exists x)[p(x)]} \Leftrightarrow (\forall x)[\overline{p(x)}]$$

Με βάση τα παραπάνω δίνουμε τον μαθηματικό ορισμό του αντιπαραδείγματος.

Ορισμός

Έστω η πρόταση (∀x) [p(x)], η οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι ψευδής. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι η πρόταση $(\exists x)[\,\overline{p(x)}\,]$ είναι αληθής. Επομένως θα πρέπει να βρούμε ένα τουλάχιστον στοιχείο κ του συνόλου αναφοράς Ω έτσι ώστε η πρόταση p(κ) να είναι ψευδής.

Το στοιχείο κ ονομάζεται **αντιπαράδειγμα** της πρότασης (∀x) [p(x)].

Είδη αντιπαραδείγματος.

Ταξινομώντας τα αντιπαραδείγματα σε σχέση με την δομή τους είναι δυνατόν να τα κατατάξουμε στις παρακάτω βασικές κατηγορίες. (Selden, J. & Selden A. 1998)

1. Το ειδικό αντιπαράδειγμα

Τέτοιας μορφής αντιπαράδειγμα δεν δίνει καμία πληροφορία για τον τρόπο κατασκευής του και δεν μπορούμε να βρούμε μέθοδο ώστε να κατασκευάσουμε άλλο όμοιο αντιπαράδειγμα.

Ένα ειδικό αντιπαράδειγμα συνάρτησης που είναι παντού ασυνεχής στο πεδίο

ορισμού της είναι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{άν } x \text{ ρητός} \\ -1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$.

2. Το γενικό αντιπαράδειγμα

Τέτοιας μορφής αντιπαράδειγμα εμφανίζεται όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια μαθηματική πρόταση είναι ψευδής. Στην περίπτωση αυτή το ίδιο το αντιπαράδειγμα προτείνει τρόπο παραγωγής μιας κλάσης αντιπαραδειγμάτων που δηλώνουν την μη ισχύ της μαθηματικής πρότασης.

Ένα γενικό αντιπαράδειγμα μπορεί να προκύψει αν σε μια μαθηματική πρόταση παραλείψουμε μια αναγκαία συνθήκη της. Στην περίπτωση αυτή μπορούν να προκύψουν άπειρα παραδείγματα που δεν ικανοποιούν την παραληφθείσα συνθήκη και επομένως δεν ικανοποιούν την μαθηματική πρόταση. Πιο συγκεκριμένα αν στο θεώρημα του Bolzano παραληφθεί η αναγκαία του συνθήκη « η συνάρτηση να μην έχει σταθερό πρόσημο σε ένα διάστημα [α, β]» προκύπτει μια απειρία συνεχών συναρτήσεων σε διάστημα [α, β] για τις οποίες δεν ισχύει το θεώρημα.

Το αντιπαράδειγμα αν και ως έννοια υπάρχει από παλιά, στην μαθηματική βιβλιογραφία συχνά δεν εμφανίζεται με το όνομά του. Σύμφωνα με την ετυμολογία της λέξης το αντιπαράδειγμα είναι ένα «παράδειγμα» που περιέχει και το πρόθεμα «αντί» όταν υπάρχει κάποια μαθηματική πρόταση στην οποία αυτό εναντιώνεται. Θα μπορούσαμε όμως να πούμε ότι το αντιπαράδειγμα δεν είναι απλά ένα είδος παραδείγματος, χαρακτηρίζεται όμως έτσι από την χρήση του σε κάποια συγκεκριμένη αποδεικτική διαδικασία διάψευσης μιας μαθηματικής πρότασης ή ενός ισχυρισμού, επομένως το αντιπαράδειγμα θεωρείται μια μέθοδος απόδειξης στα μαθηματικά. Σε ότι αφορά την συγγραφή διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών χρειάζονται πάντοτε τα κατάλληλα αντιπαραδείγματα ώστε να διευκρινίζονται όλες οι περιπτώσεις εφαρμογής μιας μαθηματικής πρότασης ώστε να προλαμβάνουν και να αποφεύγουν παρανοήσεις που πιθανόν προκύπτουν από την μελέτη μιας έννοιας ή ενός θεωρήματος. Έμφαση επίσης πρέπει να δίνονται σε αντιπαραδείγματα που δεν πληρούν μια από τις συνθήκες μιας μαθηματικής πρότασης.

Τρόποι εισαγωγής ενός αντιπαραδείγματος

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διατυπώσουμε ένα αντιπαράδειγμα και να το χρησιμοποιήσουμε ως μέθοδο απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης (Δρόσος, Κ. 1986). Οι τρόποι αυτοί αναπτύσσονται παρακάτω:

1. Δίνεται η πρόταση: p(x) με $x \in \Omega$. Αν η πρόταση είναι αληθής να αποδειχτεί, διαφορετικά να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Η παραπάνω πρόταση είναι υπόδειγμα που περιλαμβάνει μια ανοικτή διατύπωση αλλά απαιτείται μια κλειστή απάντηση. Τέτοιας μορφής ερωτήματα είναι σημαντικά στην κατανόηση των εννοιών που περικλείουν αλλά δυστυχώς τέτοιου είδους αναφορές απουσιάζουν από τα βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου και του λυκείου.

2. Υπάρχει $x \in \Omega$ ώστε να ικανοποιείται η πρόταση p(x)

Τέτοιας μορφής ερώτηση είναι στην ουσία ο έλεγχος ύπαρξης ενός αντιπαραδείγματος x μέσα από το σύνολο αναφοράς Ω για την υπονοούμενη αντίθετη πρόταση «$\forall x \in \Omega$: $\overline{p(x)}$» της πρότασης p(x). Τέτοιας μορφής ερώτηση μπορεί να έχει και ερωτηματική διατύπωση αν η πρόταση δεν είναι διαισθητικά προφανής.

3. Να αποδειχθεί ότι η συνθήκη p(x) είναι αναγκαία για την ισχύ του συμπεράσματος του θεωρήματος q(x).

Στην παραπάνω διατύπωση βρίσκεται στην ουσία ένα αντιπαράδειγμα αφού ζητείται να ανακαλυφθεί ένα στοιχείο $\kappa \in \Omega$ ώστε να ικανοποιεί την πρόταση «$\overline{p(\kappa)} \wedge \overline{q(\kappa)}$»

4. Να αποδειχθεί ότι η πρόταση «$\forall x \in \Omega$: p(x)»είναι ψευδής.

Με την παραπάνω έκφραση έχουμε μια κλειστή ερώτηση και αναμένεται ανοικτή

απάντηση με την έννοια ότι ζητάμε με την ερώτηση αυτή την εύρεση ενός αντιπαραδείγματος όχι κατ' ανάγκη μοναδικού.

Η κατασκευή των αντιπαραδειγμάτων

Η κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος είναι μια πράξη της οποίας η δυσκολία ποικίλει, κυμαίνεται από αρκετά εύκολη ως αρκετά δύσκολη. Δεν υπάρχει όμως πάντοτε κάποιος αλγόριθμος κατασκευής ενός αντιπαραδείγματος, η κατασκευή του γίνεται συνήθως με πειραματισμό πράγμα που συνεπάγεται μεγάλη κατανάλωση χρόνου. Ο πειραματισμός όμως αναπτύσσει μια διαίσθηση του τι είναι αυτό που ακυρώνει την εφαρμογή ενός ορισμού ή που διαψεύδει μια πρόταση. Η κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος έγκειται στο να πάρουμε ένα παράδειγμα και να το αλλοιώσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει αντιπαράδειγμα. (Δαμαλάς, Γ 1998)

Παιδαγωγικές αντιλήψεις για το αντιπαράδειγμα

Σύμφωνα με την Κονστρουκτιβιστική θεωρία, οι επεμβάσεις του εκπαιδευτικού δεν επιδρούν στην κατασκευή της γνώστης ενός μαθητή, αλλά οι εμπειρίες του μαθητή από αυτές τις επεμβάσεις μαζί βέβαια με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του. Για την κατανόηση λοιπόν μιας μαθηματικής έννοιας χρειάζεται από τον εκπαιδευτικό κατάλληλη σχεδίαση μέσω της οποίας θα δοθεί η δυνατότητα στον μαθητή να κτίση την μάθησή του. Τέτοιου είδους σχεδιασμοί χρειάζονται από το μέρους του εκπαιδευτικού πειραματισμό, εικασίες, διαπραγμάτευση. Πριν διατυπωθεί μια μαθηματική έννοια θα πρέπει να περάσει από ενδιάμεσα στάδια λανθασμένων εικασιών που καταρρίπτονται από αντιπαραδείγματα, ώστε να γίνεται αναθεώρηση της λανθασμένης εικασίας και στην συνέχεια η παρουσίαση και η απόδειξη της μαθηματικής έννοιας. Για τον λόγο αυτό ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να εξοικειωθεί με τα αντιπαραδείγματα θεωρώντας τα ως ισότιμα εργαλεία με τα παραδείγματα και να ενθαρρύνει τους μαθητές να τα ανακαλύπτουν και να τα χρησιμοποιούν (Τουμάσης, Μ. 2000)

7.1 Εφαρμογές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Υπάρχει συνάρτηση η οποία σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό;

Με μια τέτοια ερώτηση ουσιαστικά γίνεται έλεγχος ύπαρξης ενός αντιπαραδείγματος για την μη ισχύ του αντίστροφου του θεωρήματος
«Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό».

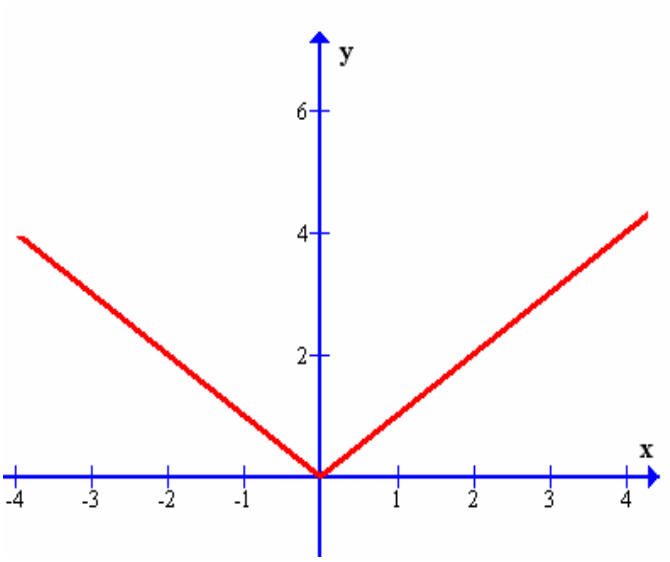
Το κλασσικό αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x|$ η οποία γράφεται και $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$ όπου για το σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της έχουμε

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ και

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$

Επομένως $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

δηλαδή είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 0$



Αλλά

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 0$

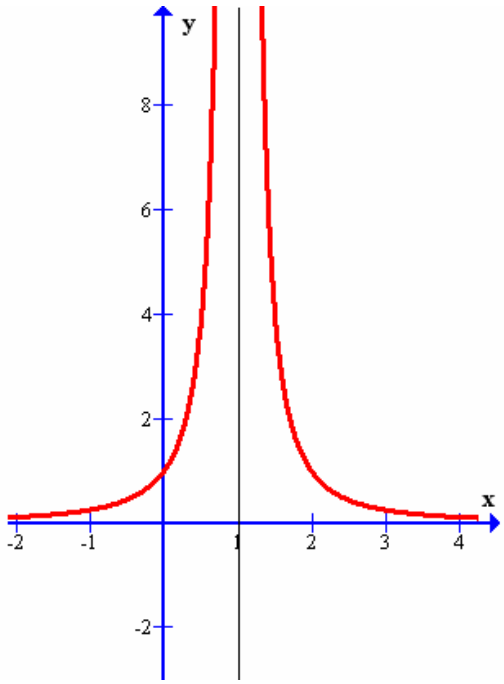
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται η πρόταση: « Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] τότε η f είναι φραγμένη στο [α, β]»
Να εξεταστεί αν η προϋπόθεση της συνέχειας της συνάρτησης είναι αναγκαία για την ισχύ της παραπάνω πρότασης;

Στο παραπάνω ερώτημα ζητείται ουσιαστικά η εύρεση ενός αντιπαραδείγματος, δηλαδή μιας συνάρτησης f η οποία να ικανοποιεί την πρόταση:
«η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο [α, β] και δεν είναι φραγμένη στο [α, β]»

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{αν} \quad x\in[0,1)\cup(1,2]\\ 1 & \text{αν} \quad x=1\end{cases}$$



για την οποία έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ συνεπώς στο σημείο $x_o = 1$ δεν είναι συνεχής.

Επιπλέον η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών:

$f([0,2]) = [f(0), \lim\limits_{x\to 1} f(x)) = [1, +\infty)$

άρα στο διάστημα [0,1] δεν είναι άνω φραγμένη.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα αντιπαράδειγμα για την μη ισχύ του αντιστρόφου της παραπάνω πρότασης είναι η συνάρτηση του Dirichlet $f(x) = \begin{cases}1 & \text{αν} \quad x\in Q \quad \text{και} \quad x\in[\alpha,\beta]\\ 0 & \text{αν} \quad x\in Q \quad \text{και} \quad x\in[\alpha,\beta]\end{cases}$ η οποία είναι φραγμένη γιατί $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ αλλά δεν είναι συνεχής στο [α, β].

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

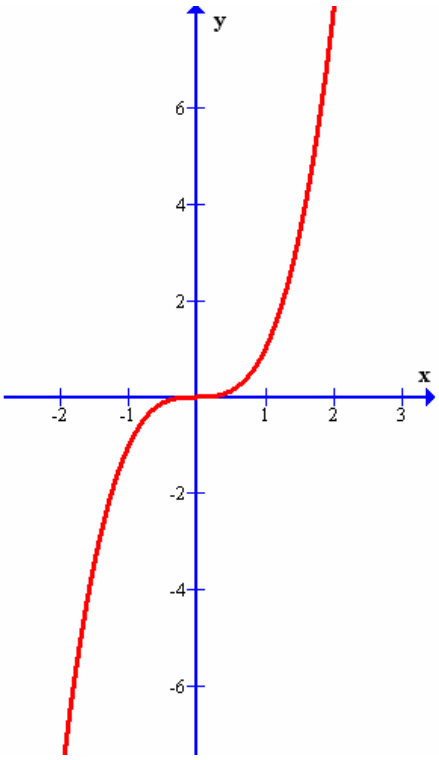
Να αποδειχθεί ότι η πρόταση:
«αν συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η παράγωγός της είναι θετική στο εσωτερικό του Δ»
είναι ψευδής.

Με την ερώτηση αυτή ζητάμε την εύρεση ενός αντιπαραδείγματος όχι κατ' ανάγκη μοναδικού.

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, εντούτοις έχει παράγωγο

$f'(x) = 3x^2$

η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$
δηλαδή ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$



8. Η ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συμπερασματική απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι η απόδειξη με χρήση της συνεπαγωγής και είναι από τις βασικές μεθόδους απόδειξης που θα συναντήσει κανείς όταν μελετά οποιοδήποτε μαθηματική θεωρία.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση ω. Για την απόδειξη της πρότασης ω, **αρκεί** να κατασκευάσουμε μια πεπερασμένη διαδοχή αληθών προτάσεων της μορφής:

$$p \Rightarrow q\ ,\ q \Rightarrow r,\ \ldots,\ t \Rightarrow u,\ u \Rightarrow \omega \quad (1)$$

όπου p είναι μια αληθής πρόταση της θεωρίας (αξίωμα ή θεώρημα που έχει ήδη αποδειχθεί.)

Η μαθηματική λογική μας παρέχει κανόνες με τους οποίους μπορούμε από αληθείς προτάσεις να βρούμε άλλες προτάσεις αληθείς. Οι κανόνες αυτοί ονομάζονται **κανόνες συμπεράσματος**. Τρεις από τους βασικότερους κανόνες συμπεράσματος της μαθηματικής λογικής είναι:

$1^{ος}$ κανόνας . **ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΟΣΠΑΣΕΩΣ** «Αν οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και p είναι προτάσεις αληθείς, τότε και η πρόταση q είναι επίσης αληθής»

$2^{ος}$ κανόνας. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ** « Έστω ότι μια σύνθετη πρόταση περιέχει μια πρόταση p και ότι η πρόταση: $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής, τότε η τιμή αλήθειας αυτής της πρότασης δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε την πρόταση p με την πρόταση q»

$3^{ος}$ κανόνας. **ΚΑΝΟΝΑΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ** « Αν οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow r$ είναι αληθείς, τότε και η πρόταση $p \Rightarrow r$ είναι αληθής.»

Με βάση τους παραπάνω κανόνες από την ακολουθία των αληθινών προτάσεων που υπάρχουν στην σχέση (1) έχουμε ότι και η πρόταση

$$p \Rightarrow \omega$$

είναι αληθής.

Συνήθως την διαδοχή των αληθών προτάσεων που εκφράζονται από την σχέση (1) την γράφουμε συντομότερα και ως εξής:

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow \ldots. \Rightarrow t \Rightarrow u \Rightarrow \omega \quad (2)$$

Όταν η έναρξη μιας απόδειξης δεν είναι εύκολη, επιχειρούμε συνήθως την κατασκευή της ακολουθίας των αληθών προτάσεων (1) , αρχίζοντας από το τέλος. Τότε λέμε:
Για να αποδείξουμε την πρόταση ω
αρκεί να δείξουμε την πρόταση u (και εννοούμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $u \Rightarrow \omega$)
αρκεί να δείξουμε την πρόταση t (και εννοούμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $t \Rightarrow u$)
κ. ο. κ
και προχωράμε με αυτόν τον τρόπο έως ότου φτάσουμε σε μια αληθινή πρόταση , έστω την p.
Συνήθως, αντί να επαναλαμβάνουμε το «**αρκεί** να δείξουμε την πρόταση…» λέμε:
Για να ισχύει η πρόταση ω, **αρκεί** να ισχύει η πρόταση u ή t ή …ή p και εννοούμε ότι:

$$\omega \Leftarrow u \Leftarrow t \Leftarrow \ldots \Leftarrow p \quad (3)$$

και εφ' όσον η πρόταση p είναι αληθής, συμπεραίνουμε την αλήθεια της αποδεικτέας πρότασης ω.

Επομένως προκειμένου να αποδείξουμε μια πρόταση ω τότε:

ή ξεκινάμε από μια αληθή πρόταση p προχωρώντας με συνεπαγωγές έως ότου αποδειχθεί η πρόταση ω

ή ξεκινάμε από την αποδεικτέα πρόταση ω και προχωρούμε με το «**αρκεί»** έως ότου καταλήξουμε στην πρόταση p που ισχύει.

ΣΧΟΛΙΟ

Στην απόδειξη της πρότασης ω δεν χρησιμοποιήθηκε καμία από τις συνεπαγωγές

$$\omega \Rightarrow u,\ u \Rightarrow t,\ t, \ldots, r \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$$

αν κάποια από τις παραπάνω συνεπαγωγές συμβεί να ισχύει δεν το σημειώνουμε, γιατί οι συνεπαγωγές αυτές δεν έχουν καμία σχέση με την απόδειξη της πρότασης ω.

Απόδειξη συνεπαγωγής με αντιθετοαντιστροφή

Με βάση τον νόμο της λογικής της αντιθετοαντιστροφής

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

Προκύπτει ένας τέταρτος κανόνας συμπεράσματος:

«Αν η πρόταση $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ είναι αληθής, τότε και η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι επίσης αληθής και αντίστροφα»

Με βάση τον παραπάνω κανόνα για να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ εάν αυτό είναι ευκολότερο αποδεικνύουμε την συνεπαγωγή $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. Επομένως λεκτικά αντί να δείξουμε p συνεπάγεται q, αποδεικνύουμε ισοδύναμα ότι από την άρνηση της πρότασης q συνεπάγεται η άρνηση της πρότασης p. Η ετυμολογία της ονομασίας της μεθόδου απόδειξης (αντιθετοαντιστροφή = αντίθετη – αντίστροφη) περιγράφει με σαφήνεια την τεχνική της απόδειξης.

8.1 Εφαρμογές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Χαρακτηριστικό παράδειγμα απόδειξης με συνεπαγωγή είναι το σχετικό θεώρημα που προσδιορίζει το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης με την βοήθεια των παραγώγων.

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η $f'(x) > 0$ σε κάθε σημείο x του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Θεωρούμε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ οπότε έχουμε:

$f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του $\Delta \Rightarrow$

$f'(\xi) > 0$ (αφού $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$) $\Rightarrow$

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow$

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ (αφού $x_2 - x_1 > 0$) $\Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

ΣΧΟΛΙΟ

Προφανώς το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της απόδειξης μιας συνεπαγωγής με αντιθετοαντιστροφή είναι η απόδειξη μιας συνάρτησης ότι είναι συνάρτηση 1 – 1. Σύμφωνα με τον ορισμό της 1 – 1 συνάρτησης έχουμε ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$

ισχύει η συνεπαγωγή: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Η απόδειξη όμως της παραπάνω συνεπαγωγής και ανάλογα με την μορφή της συνάρτησης f είναι πολύπλοκη και πολλές φορές δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί, για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή, δηλαδή την:

Μια συνάρτηση f: $A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
και ως παράδειγμα έχουμε:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$ είναι συνάρτηση 1 – 1.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την αντιθετοαντίστροφη της συνεπαγωγής του ορισμού της συνάρτησης 1 – 1
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$2e^{3x_1-2} + 1 = 2e^{3x_2-2} + 1 \Rightarrow$

$2e^{3x_1-2} = 2e^{3x_2-2} \Rightarrow$

$e^{3x_1-2} = e^{3x_2-2} \Rightarrow$

$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$ (αφού η εκθετική συνάρτηση είναι 1 – 1) $\Rightarrow$

$3x_1 = 3x_2 \Rightarrow$

$x_1 = x_2$

επομένως αποδείχτηκε η συνεπαγωγή
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
και σύμφωνα με τους νόμους της μαθηματικής λογικής ισχύει και η αντιθετοαντίστροφή της
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
άρα η συνάρτηση f είναι 1 – 1.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση f:A → ℝ. Αν α, β∈A να αποδειχτεί ότι για κάθε α, β ∈ A ισχύει $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Αν α = β, η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα.

Έστω α < β, από το θεώρημα της Μέσης Τιμής για την συνάρτηση f στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ και $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ έχουμε ότι υπάρχουν

$\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$ και $\xi_2 \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ τέτοια ώστε:

- $f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \dfrac{2}{\beta-\alpha} \cdot \left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)\right]$ και
- $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{2}{\beta-\alpha} \cdot \left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$

επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα, επομένως για κάθε $\xi_1, \xi_2 \in A$ με $\xi_1 < \xi_2$ έχουμε ότι:

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\beta-\alpha} \cdot \left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)\right] < \frac{2}{\beta-\alpha} \cdot \left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)\right] < \left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} > f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

γιατί είναι β – α > 0.

Η περίπτωση α > β αντιμετωπίζεται ανάλογα και έτσι η ζητούμενη σχέση αποδείχθηκε.

8.2 Συμπερασματική απόδειξη με ισοδυναμία.

Σημαντική μορφή συμεπρασματικής απόδειξης είναι η και μέθοδος απόδειξης στα μαθηματικά με την χρήση της ισοδυναμίας. Εμφανίζεται σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και είναι από τις πλέον διαδεδομένες μορφές απόδειξης.
Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να αποδείξουμε στα μαθηματικά μια ισοδυναμία που έχει την μορφή:

$$p \Leftrightarrow q$$

Η αντιμετώπιση μιας τέτοιας απόδειξης είναι δυνατόν να γίνει με τρεις τρόπους:

1ος τρόπος

Από τους νόμους της λογικής έχουμε τον παρακάτω νόμο της αντικατάστασης:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Με βάση αυτόν τον νόμο προκύπτει ένας νέος κανόνας συμπεράσματος
«Αν οι προτάσεις: $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ είναι αληθείς, τότε και η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής και αντίστροφα»

Με βάση τον παραπάνω κανόνα συμπεράσματος, για να αποδείξουμε μια ισοδυναμία

$$p \Leftrightarrow q$$

αρκεί, να αποδείξουμε καθεμία από τις συνεπαγωγές:

$$p \Rightarrow q \text{ και } q \Rightarrow p$$

ΣΧΟΛΙΟ

Την απόδειξη της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$ την ονομάζουμε ευθεία πορεία ή ευθύ τμήμα της απόδειξης και την απόδειξη της δεύτερης συνεπαγωγής $q \Rightarrow p$ την ονομάζουμε αντίστροφη πορεία ή αντίστροφο της απόδειξης.

2^{ος} τρόπος

Για να αποδείξουμε μια ισοδυναμία : $p \Leftrightarrow q$ αρκεί να κατασκευάσουμε μια πεπερασμένη διαδοχή προτάσεων της μορφής:

$$p \Leftrightarrow r,\ r \Leftrightarrow t, \dots , u \Leftrightarrow q \quad (1)$$

οπότε από διαδοχή των προτάσεων (1) προκύπτει η αλήθεια της ισοδυναμίας $p \Leftrightarrow q$.

ΣΧΟΛΙΟ

Συνήθως την διαδοχή των προτάσεων (1) την γράφουμε συντομότερα και ως εξής:

$$p \Leftrightarrow r \Leftrightarrow t \dots \Leftrightarrow u \Leftrightarrow q$$

3^{ος} τρόπος

Για να αποδείξουμε μια ισοδυναμία : $p \Leftrightarrow q$ πολλές φορές είναι βολικό να αποδείξουμε δύο άλλες ισοδυναμίες

$$p \Leftrightarrow s \text{ και } q \Leftrightarrow s$$

όπου s μια άλλη μαθηματική πρόταση, οπότε λόγω της μεταβατικότητας είναι αληθής και η πρόταση $p \Leftrightarrow q$

8.3 Εφαρμογές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Στο παρακάτω θέμα γράφοντας $f^{(k)}$ θα εννοούμε την k τάξης παράγωγο της συνάρτησης f. Ειδικά $f^{(0)}$ δηλώνει την f.

Έστω f ένα πολυώνυμο. Ένας αριθμός ρ θα ονομάζεται ρίζα του f πολλαπλότητας k αν το πολυώνυμο $(x - \rho)^{\kappa}$ είναι παράγοντας του f ενώ το πολυώνυμο $(x - \rho)^{\kappa + 1}$ δεν είναι παράγοντας του.

Α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου f πολλαπλότητας 2 αν και μόνο αν $f(\rho) = f'(\rho) = 0 \neq f''(\rho)$

Β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου f πολλαπλότητας k αν και μόνο αν $f(\rho) = f'(\rho) = f''(\rho) = \ldots = f^{(k-1)}(\rho) = 0 \neq f^{(k)}(\rho)$

Για την απόδειξη των παραπάνω ισοδυναμιών θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά θα αποδείξουμε την συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ (ευθεία πορεία ή ευθύ) και στην συνέχεια θα αποδείξουμε την συνεπαγωγή $q \Rightarrow p$ (αντίστροφη πορεία ή αντίστροφο της απόδειξης) όπου οι προτάσεις p και q είναι:

p : «**ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου του f πολλαπλότητας 2**» και
q : «$\mathbf{f(\rho) = f'(\rho) = 0 \neq f''(\rho)}$»
για την πρώτη ισοδυναμία και για την δεύτερη έχουμε:

p : «**ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου του f πολλαπλότητας k**» και
q : «$\mathbf{f(\rho) = f'(\rho) = f''(\rho) = \ldots = f^{(k-1)}(\rho) = 0 \neq f^{(k)}(\rho)}$»

Α.Ευθύ:

Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου f(x) πολλαπλότητας 2, τότε υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο π(x) τέτοιο ώστε: $f(x) = (x - \rho)^2 \cdot \pi(x)$, με $\pi(\rho) \neq 0$ οπότε

παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$f'(x) = 2(x-\rho)\cdot\pi(x) + (x-\rho)^2\cdot\pi'(x)$ και

$f''(x) = 2\pi(x) + 4(x-\rho)\cdot\pi'(x) + (x-\rho)^2\cdot\pi''(x)$

από όπου προκύπτει ότι $f(\rho) = f'(\rho) = 0$ και $f''(\rho) = 2\pi(\rho) \neq 0$.

Αντίστροφα:

Έστω $f(\rho) = f'(\rho) = 0$, $f''(\rho) \neq 0$ και $f(x) = (x-\rho)^2\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$ όπου $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$ τότε είναι:

$f'(x) = 2(x-\rho)\cdot\pi(x) + (x-\rho)^2\cdot\pi'(x) + \upsilon'(x)$ και

επειδή είναι $f(\rho) = f'(\rho) = 0$ προκύπτει $\upsilon(\rho) = \upsilon'(\rho) = 0$ και παραγωγίζοντας το πολυώνυμο $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$ έχουμε $\upsilon'(x) = \alpha$, από όπου παίρνουμε $\alpha = \beta = 0$ άρα $f(x) = (x-\rho)^2\cdot\pi(x)$, δηλαδή ο ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ πολλαπλότητας 2.

Επίσης $\pi(\rho) \neq 0$ αφού $f''(\rho) = 2\pi(\rho) \neq 0$

Β.

Ευθύ:

Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ πολλαπλότητας k, τότε υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο ώστε: $f(x) = (x-\rho)^k\cdot\pi(x)$, με $\pi(\rho) \neq 0$ και παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$f(x) = (x-\rho)^k\cdot\pi(x)$,

$f'(x) = k(x-\rho)^{k-1}\cdot\pi(x) + (x-\rho)^k\cdot\pi'(x) = (x-\rho)^{k-1}[k\cdot\pi(x) + (x-\rho)\cdot\pi'(x)]$

$= (x-\rho)^{k-1}\cdot\pi_1(x)$ όπου $\pi_1(x) = k\cdot\pi(x) + (x-\rho)\cdot\pi'(x)$ και $\pi_1(\rho) \neq 0$

$f^{(2)}(x) = (x-\rho)^{k-2}\,\pi_2(x)$ και $\pi_2(\rho) \neq 0$

……

$f^{(k-1)}(x) = (x-\rho)\cdot\pi_{k-1}(x)$ και $\pi_{k-1}(\rho) \neq 0$

$f^{(k)}(x) = \pi_k(x)$ και $\pi_k(\rho) \neq 0$

οπότε $f(\rho) = f'(\rho) = f''(\rho) = \ldots = f^{(k-1)}(\rho) = 0$ και $f^{(k)}(\rho) = \pi_k(\rho) \neq 0$

Αντίστροφα

Έστω $f(\rho) = f'(\rho) = f''(\rho) = \ldots = f^{(k-1)}(\rho) = 0 \neq f^{(k)}(\rho)$ και $f(x) = (x-\rho)^k\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$ όπου $\upsilon(x) = \alpha_{\nu-1}x^{\kappa-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\kappa-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{\kappa-1}, \alpha_{\kappa-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_o \in \mathbb{R}$

Έχουμε:

$f'(x) = (x-\rho)^{k-1}\cdot\pi_1(x) + \upsilon'(x)$

$f^{(2)}(x) = (x-\rho)^{k-2}\,\pi_2(x) + \upsilon''(x)$

……

$f^{(k-1)}(x) = (x - \rho)\cdot \pi_{k-1}(x) + \upsilon^{(k-1)}(x)$

τότε λόγω της υπόθεσης $f(\rho) = f'(\rho) = f''(\rho) = \ldots f^{(k-1)}(\rho) = 0$

έχουμε ότι $\upsilon(\rho) = \upsilon'(\rho) = \upsilon''(\rho) = \ldots = \upsilon^{(k-1)}(\rho) = 0$

και παραγωγίζοντας k – 1 φορές το πολυώνυμο υ(x) προκύπτει ότι

$\alpha_{\kappa-1} = \alpha_{\kappa-2} = \ldots = \alpha_1 = \alpha_o = 0$ άρα $\upsilon(x) = 0$, επομένως : $f(x) = (x - \rho)^k\cdot\pi(x)$. Όπως στο ευθύ διαπιστώνεται ότι $\pi(\rho) \neq 0$ δηλαδή ο ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου f(x) πολλαπλότητας k.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Έστω α, β με α < β και η συνάρτηση f:(α, β)→ ℝ διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε ισχύει η ισοδυναμία «η f είναι κυρτή, αν και μόνο αν η f ΄ είναι αύξουσα»

Για την απόδειξη των παραπάνω ισοδυναμιών θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία. Αρχικά θα αποδείξουμε την συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ (ευθεία πορεία ή ευθύ) και στην συνέχεια θα αποδείξουμε την συνεπαγωγή $q \Rightarrow p$ (αντίστροφη πορεία ή αντίστροφο της απόδειξης) όπου οι προτάσεις p και q είναι:

p : « **η f είναι κυρτή»** και

q : «**f ΄ είναι αύξουσα»**

όπου f :(α, β)→ ℝ διαφορίσιμη συνάρτηση.

Πράγματι:

Α.(Ευθύ)

Αφού η συνάρτηση f :(α, β)→ ℝ είναι κυρτή τότε σύμφωνα με τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης υπάρχει λ με $0 \leq \lambda \leq 1$ τέτοιο ώστε:

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)z] \leq \lambda\cdot f(x) + (1 - \lambda)f(z) \quad \text{για κάθε } x, z \in (\alpha, \beta)$$

έστω $\alpha < x < y < z < \beta$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ ώστε

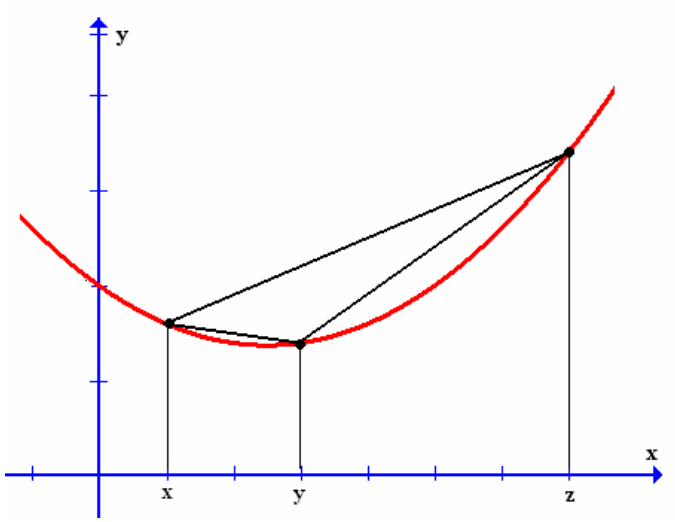
$$0 < \lambda < 1 \text{ και}$$

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)z$$

Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε:

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)z] \leq \lambda\cdot f(x) + (1 - \lambda)f(z) \quad \text{για κάθε } x, z \in (\alpha, \beta)$$

$$f(y) \leq \lambda\cdot f(x) + (1 - \lambda)f(z) \quad \text{για κάθε } x, z \in (\alpha, \beta)$$



Άρα $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(z)-f(x)}{\lambda x+(1-\lambda)z-x} = \dfrac{\lambda f(x)+f(z)-\lambda f(z)-f(x)}{\lambda x+z-\lambda z-x} =$

$$= \frac{f(z)(1-\lambda)-f(x)(1-\lambda)}{z(1-\lambda)-x(1-\lambda)} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Επομένως είναι: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι: $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

Και τελικά προκύπτει:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $y \to \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ η οποία με βάση τα παραπάνω είναι αύξουσα συνάρτηση του y, επομένως υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της f:

$$f'_{\alpha}(x) = \lim_{y\to x^-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{και} \quad f'_{\delta}(x) = \lim_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Για $h > 0$ αρκετά μικρό ώστε να είναι: $\alpha < x-h < x < x+h < y-h < y < y+h < \beta$

έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} \le \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \dfrac{f(y)-f(y-h)}{h}$

άρα : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} \le \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y)-f(y-h)}{h}$

επομένως: $f'_{\alpha}(x) \le f'_{\delta}(x) \le f'_{\alpha}(y)$

άρα η f ΄ είναι αύξουσα.

Β. (Αντίστροφο)

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή ότι η συνάρτηση f ΄ είναι αύξουσα, αλλά η f δεν είναι κυρτή, τότε υπάρχουν x, y τέτοια ώστε $\alpha < x < y < \beta$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] > \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in (\alpha, \beta)$$

Θέτουμε $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, οπότε $x < z < y$ και παρατηρούμε ότι:

$$f(z) > \frac{y-z}{y-x} \cdot f(x) + \frac{z-x}{y-x} \cdot f(y)$$

άρα
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

και από το θεώρημα της Μέσης Τιμής σε κάθε ένα από τα διαστήματα [x, z] και [z, y] υπάρχουν ξ και η με $x < \xi < z < \eta < y$ τέτοια ώστε,

$$f'(\xi) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\eta)$$

Δηλαδή είναι $f'(\xi) > f'(\eta)$, επομένως η f ΄ δεν είναι αύξουσα. ΑΤΟΠΟ άρα η f είναι κυρτή συνάρτηση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Έστω f: A→ ℝ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:
« f κοίλη αν και μόνο αν – f κυρτή»

Για να αποδείξουμε μια ισοδυναμία : $p \Leftrightarrow q$ αρκεί να κατασκευάσουμε μια πεπερασμένη διαδοχή προτάσεων της μορφής:

$$p \Leftrightarrow r,\ r \Leftrightarrow t, \dots, u \Leftrightarrow q \quad (1)$$

οπότε από διαδοχή των προτάσεων (1) προκύπτει η αλήθεια της ισοδυναμίας $p \Leftrightarrow q$.

οι προτάσεις p και q είναι:

p : «**η f είναι κοίλη**» και

q : «**η - f είναι κυρτή**»

όπου $f: A \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση.

Έχουμε λοιπόν ισοδύναμα:

f κοίλη στο A $\Leftrightarrow$ f ΄ γνησίως φθίνουσα

$\Leftrightarrow$ (Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$)

$\Leftrightarrow$ (Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow - f(x_1) < -f(x_2)$)

$\Leftrightarrow$ - f ΄ γνησίως αύξουσα

$\Leftrightarrow$ - f είναι κυρτή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Έστω f: ℝ → ℝ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

« f(x) = x (ταυτοτική συνάρτηση) αν και μόνο αν f (x) = f^{-1}(x) »

Α. (Ευθύ)

Έστω ότι f(x) = x τότε προφανώς η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι $f^{-1}(x) = x$

Επομένως $f(x) = f^{-1}(x)$

Β. (Αντίστροφο)

Έστω ότι f: ℝ → ℝ γνησίως αύξουσα συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x) = f^{-1}(x)$

- Εάν $f(x) > x$ τότε $f^{-1}(x) > x$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα συνεπάγεται ότι $f(f^{-1}(x)) > f(x) \Rightarrow x > f(x)$ ΑΤΟΠΟ.
- Εάν $f(x) < x$ τότε $f^{-1}(x) < x$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα συνεπάγεται ότι $f(f^{-1}(x)) < f(x) \Rightarrow x < f(x)$ ΑΤΟΠΟ.

Επομένως είναι f(x) = x.

10. Η ΑΠΑΓΩΓΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Η απαγωγική μέθοδος απόδειξης (deductive proof) θεωρείται ως η διαδικασία όπου εξετάζονται ποιες είναι οι απαιτούμενες συνθήκες για να είναι μια μαθηματική πρόταση έγκυρη, επομένως αποδεκτή. (Hiebert, D.& Carpenter, T.P., 1992) Η απαγωγική απόδειξη προσδιορίζει τις συνθήκες εγκυρότητας μιας πρότασης και τις αναλύει με απαγωγικούς συλλογισμούς (Απαγωγή: μέθοδος συλλογισμού κατά την οποία η σκέψη ξεκινά από το γενικό και καταλήγει σε κάποιο μερικό συμπέρασμα). Η απαγωγική απόδειξη παρουσιάζει διδακτικό ενδιαφέρον γιατί καταδεικνύει την σημασία των επαγωγικών διαδικασιών σύλληψης και τεκμηρίωσης μιας πρότασης ως ένα προγενέστερο στάδιό της απόδειξης. Από ιστορικής πλευράς η απαγωγική απόδειξη εμφανίστηκε για πρώτη φορά στον Θαλή (640 – 546 π.χ περίπου) όπου φαίνεται να εμφανίζεται ως διαδικασία μερικής τεκμηρίωσης μιας μαθηματικής πρότασης, ακολουθούμενη στην συνέχεια από την κυρίως απόδειξή της.

Η απαγωγική μέθοδος στα μαθηματικά χρησιμοποιείται όταν η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης ω με συνεπαγωγές, δεν είναι εύκολη. Τότε, συνήθως επιχειρούμε την κατασκευή της διαδοχής των συνεπαγωγών αρχίζοντας από το τέλος, δηλαδή από την αποδεικτέα πρόταση ω. Τότε λέμε:

Για να δείξουμε την ω,

αρκεί να δείξουμε την u (εννοούμε $u \Rightarrow \omega$).

αρκεί να δείξουμε την t (εννοούμε $t \Rightarrow u$).

Κ. ο. κ.

Προχωράμε απαγωγικά, έως ότου φθάσουμε σε μία αληθή πρόταση p της θεωρίας. Τότε έχουμε:

ω αρκεί u, αρκεί t, …, αρκεί p,

δηλαδή:

$$\omega \Leftarrow u \Leftarrow t \Leftarrow ... \Leftarrow p.$$

Η παραπάνω διαδοχή είναι η διαδοχή μιας απόδειξης με συνεπαγωγή, γραμμένη από το τέλος προς την αρχή.

Με άλλα λόγια:

Ξεκινάμε από την αποδεικτέα πρόταση ω και με αρκεί $(\Leftarrow)$ (αντίστροφες συνεπαγωγές) φθάνουμε σε μία αληθή πρόταση p.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Για τους αριθμούς α, β, γ $\in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha+\beta+\gamma=1$. Να δείξετε ότι, για την ταυτοτική συνάρτηση f(x) = x ισχύει: $f^2(\alpha) + f^2(\beta) + 2[f(\alpha\beta)+f(\gamma)] = f^2(\gamma) + 1$.

Για να δείξουμε τη ζητούμενη ισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$f^2(\alpha) + f^2(\beta) + 2[f(\alpha\beta)+f(\gamma)] = f^2(\gamma) + 1$

αρκεί $\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\beta + \gamma) = \gamma^2 + 1$,

αρκεί $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+2\gamma=\gamma^2+1$,

αρκεί $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=1+\gamma^2-2\gamma$,

αρκεί $(\alpha+\beta)^2=(1-\gamma)^2$,

αρκεί $\alpha+\beta=1-\gamma$,

αρκεί $\alpha+\beta+\gamma=1$, που ισχύει.

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

3. Στην απόδειξη της ω με την απαγωγική μέθοδο, **δεν χρησιμοποιήθηκε** καμία από τις αντίστροφες συνεπαγωγές, δηλαδή από τις συνεπαγωγές:

$$\omega \Rightarrow u \Rightarrow t \Rightarrow \ldots \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p\,. \quad (1)$$

παρά μονάχα οι συνεπαγωγές:

$$\omega \Leftarrow u \Leftarrow t \Leftarrow \ldots \Leftarrow p \quad (2)$$

Έτσι λοιπόν δεν μας ενδιαφέρει αν οι συνεπαγωγές αυτές ισχύουν ή όχι, αφού δεν έχουν καμία σχέση με την κατασκευαζόμενη απόδειξη της ω. Στο ερώτημα που πιθανό να τεθεί:

«Και αν μία ή περισσότερες από αυτές τις αντίστροφες συνεπαγωγές ισχύουν, τότε δεν θα το σημειώνουμε στη διαδικασία της απόδειξης;»

η απάντηση είναι: **Όχι**, γιατί σκοπός μας δεν είναι να αναφέρουμε όλα όσα ισχύουν στα Μαθηματικά, αλλά από αυτά που ισχύουν, εκείνα που χρειάζονται για να κάνουμε την απόδειξη της ω. Το χειρότερο είναι, όταν, για να αποδείξει ένας την ω,

προσπαθεί να κατασκευάσει τη διαδοχή των ισοδυναμιών

$$\omega \Leftrightarrow u \Leftrightarrow t \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$$

και συμβεί οι συνεπαγωγές (2) **(που αποτελούν την απόδειξη της ω)** να ισχύουν και μία τουλάχιστον από τις συνεπαγωγές (1) δεν ισχύει. Τότε, **χωρίς λόγο, δεν θα κάνει την απόδειξη της ω.**

2. Αν, ξεκινώντας από την αποδεικτέα πρόταση ω και προχωρώντας με "αρκεί" φθάσουμε σε μία ψευδή πρόταση p, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα για την αλήθεια της ω. Στη περίπτωση αυτή επαναλαμβάνουμε την προσπάθειά μας με άλλες προτάσεις, οι οποίες ενδεχομένως να μας οδηγήσουν απαγωγικά σε μία αληθή πρόταση p.

3. Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση ω είναι λάθος να λέμε:

«Έστω ότι ω ισχύει» και μετά (με συνεπαγωγές) να φθάνουμε σε μία αληθή πρόταση p και στη συνέχεια να λέμε: «άρα, η ω ισχύει», γιατί η ω υποθέσαμε ότι ισχύει **(φαύλος κύκλος).**

Ακριβέστερα, τότε, θα έχουμε αποδείξει την αλήθεια των προτάσεων: $\omega \Rightarrow p$ και p, από τις οποίες συμπεραίνουμε την αλήθεια της ω, που, όπως είδαμε παραπάνω, είναι λάθος. Έτσι λοιπόν, τότε, όχι μόνο δεν έχουμε αποδείξει την αλήθεια της ω, αλλά **οι συνεπαγωγές αυτές δεν έχουν καμία σχέση με την απόδειξη της ω.**

10. ΤΑ ΛΑΘΗ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

10.1 ΟΙ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχει παρατηρηθεί ότι η μη κατανόηση βασικών εννοιών από την μαθηματική λογική είναι δυνατόν πολλές φορές να οδηγήσει σε λάθη και παρανοήσεις κατά την αντιμετώπιση της απόδειξης ενός μαθηματικού θέματος. Τα τελευταία χρόνια από την Ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν χρησιμοποιήθηκαν ορισμένα μαθηματικά σύμβολα και φυσικά εξαφανίστηκαν από τα σχολικά βιβλία. Στα σημερινά σχολικά βιβλία δεν βλέπουμε σύμβολα όπως :

$\forall$ (για κάθε),

$\exists$ (υπάρχει τουλάχιστον ένα),

$\Rightarrow$ (συνεπάγεται).

Σχολιάζοντας αυτή την κατάσταση έχουμε να παρατηρήσουμε ότι τα παραπάνω σύμβολα της μαθηματικής λογικής τα έβγαλαν από τα σχολικά βιβλία (στα παλαιότερα υπήρχαν) αλλά δεν είναι δυνατόν να βγουν οι έννοιες τους από τα μαθηματικά, οι οποίες έννοιες δεν θα μπορούσαν για κανένα λόγο να τις βγάλουν. Αυτό έγινε όπως είχε πει τότε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, όχι γιατί δεν χρειάζονται, αλλά γιατί δυσκολεύονται οι μαθητές να τα κατανοήσουν και να τα χρησιμοποιούν σωστά, με αποτέλεσμα να γράφουν το ένα σύμβολο αντί του άλλου και να τα θεωρούν ως σύμβολα στενογραφίας μέσα στα μαθηματικά κείμενα.

Οι παρανοήσεις και τα λάθη που εμφανίζονται από την μη γνώση της μαθηματικής λογικής και την μη χρήση των συμβόλων της θα πρέπει να επισημαίνονται από τους εκπαιδευτικούς και σε κάθε ευκαιρία να δίνονται παραδείγματα που να διαλευκάνουν τις παρανοήσεις των μαθητών σε λεπτά ζητήματα της μαθηματικής απόδειξης.

Ακολουθούν παραδείγματα παρανόησης, λάθος αποδείξεων σε μαθηματικά θέματα και σχολιασμοί που συχνά εμφανίζονται μέσα σε σχολικές τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^{ο}

Στην άσκηση:

«Να βρείτε τις συναρτήσεις f: ℝ → ℝ για τις οποίες για κάθε x, y ∈ℝ, ισχύει: $|\mathbf{f(x)+f(y)}| = |\mathbf{x+y}|$ **(1)»**

Κάποιος μαθητής έδωσε την εξής απάντηση:

Επειδή η δοθείσα σχέση (1) ισχύει για κάθε x,y∈ℝ θα ισχύει και για y = x επομένως έχουμε:

$$|f(x)+f(x)| = |x+x| \Rightarrow$$

$$|2f(x)| = |2x| \Rightarrow$$

$$|f(x)| = |x| \Rightarrow$$

$$[f(x) = x \text{ ή } f(x) = -x]$$

Επομένως οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι f(x) = x και f(x) = - x.

Σχολιασμός της απάντησης

Την σχέση $|f(x)| = |x|$ δεν πληρούν μόνο οι συναρτήσεις που βρήκε ο μαθητής, δηλαδή οι f(x) = x και f(x) = - x, αλλά και πολλές άλλες όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x & \alpha\nu \quad x \geq 1 \\ -x & \alpha\nu \quad x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

πράγματι, αυτή είναι ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και έχουμε:

- Αν x ≥ 1, είναι f(x) = x, επομένως $|f(x)| = |x|$
- Αν x < 1, είναι f(x) = - x, επομένως $|f(x)| = |-x| = |x|$

Συνεπώς $|f(x)| = |x|$ για κάθε x ∈ℝ

Η λύση του μαθητή δεν είναι σωστή, γιατί από αυτά που γράφει δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι μόνο αυτές που βρήκε. Στην παραπάνω λύση ο μαθητής θεώρησε την συνάρτηση ως ένα πραγματικό αριθμό και

την αντιμετώπισε ως πραγματικό αριθμό, πράγμα λαθεμένο.

Σχολιάζοντας την λύση του μαθητή αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση f έχει μια μεταβλητή x που παίρνει τιμές από το πεδίο ορισμού της (οι τιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί). Έτσι, όταν γράφουμε μια σχέση που περιέχει μια μεταβλητή θα πρέπει να αναφέρουμε για ποιες τιμές της μεταβλητής ισχύει (ή θα θέλαμε να ισχύει). Αν δεν γράφουμε για ποια x ισχύει και αυτό υπονοείται, τότε τα πράγματα δυσκολεύουν. Αν όμως δεν το γράφουμε ούτε το υπονοούμε, τότε όχι μόνο αρχίζουν οι ασάφειες αλλά είναι σίγουρο ότι θα γίνουν και λάθη στην απόδειξη.

Στην λύση που έκανε ο μαθητής πρέπει να υπονοεί ότι οι συνεπαγωγές ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ο μαθητής δεν υπονοεί αυτό αντιμετωπίζει της συνάρτηση ως πραγματικό αριθμό και αυτή η αντιμετώπιση είναι λαθεμένη. Ας ξαναγράψουμε λοιπόν τις συνεπαγωγές αυτές βάζοντας μπροστά αυτό που υπονοείτε, δηλαδή το για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για ευκολία ας γράψουμε την λύση συμβολικά, έχουμε:

$$[\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(x)| = |x + x|] \Rightarrow$$

$$[\forall x \in \mathbb{R},\ |2f(x)| = |2x|] \Rightarrow$$

$$[\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|] \Rightarrow$$

$$[\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \text{ ή } f(x) = -x] \quad (3)$$

Σε αυτό το σημείο, ας εξετάσουμε αν είναι σωστό από την σχέση (3) να προκύψει η σχέση:

$$[(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \text{ ή } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x)] \ (4)$$

Αν από την σχέση (3) προέκυπτε με συνεπαγωγή η σχέση (4) θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι $f(x) = x$ και $f(x) = -x$. και η λύση του μαθητή θα ήταν σωστή (εξετάζοντας και το αντίστροφο).

Δυστυχώς όμως από την σχέση (3) ΔΕΝ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ η σχέση (4) για αυτό και η λύση του μαθητή δεν είναι σωστή, όπως είπαμε με το προηγούμενο αντιπαράδειγμα.

Γενικεύοντας έχουμε ότι:

« Αν για δύο συναρτήσεις f: $A \to \mathbb{R}$ και g: $A \to \mathbb{R}$ ισχύει: $\forall x \in A$, $f(x) \cdot g(x) = 0$ τότε δεν έπεται αναγκαστικά ότι: ($\forall x \in A$, $f(x) = 0$) ή ($\forall x \in A$, $g(x) = 0$)»

Πράγματι, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 2 \\ 0 & \text{αν} \quad x < 2 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \geq 2 \\ 4 & \text{αν} \quad x < 2 \end{cases}$$

για $x \geq 2$, έχουμε $f(x) = x$ και $g(x) = 0$, επομένως $f(x) \cdot g(x) = x \cdot 0 = 0$ και

για $x < 2$ έχουμε $f(x) = 0$και $g(x) = 4$, επομένως $f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot 4 = 0$

έτσι έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \cdot g(x) = 0$, αλλά δεν ισχύει

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ούτε $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$

10.2 ΤΟ ΣΩΣΤΟ ΚΑΙ ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΣΕ ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ

Τα τελευταία χρόνια στις εξετάσεις έχει καθιερωθεί να δίνονται και θέματα στα οποία οι μαθητές να απαντήσουν αν μια πρόταση είναι Σωστή (αληθής) ή Λάθος (ψευδής). Όμως τις περισσότερες φορές οι εξεταστές ακόμη και στις Πανελλήνιες εξετάσεις αντί να αναφερθούν σε προτάσεις, αναφέρονται σε προτασιακούς τύπους μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών με αποτέλεσμα να μην έχει καν νόημα η ερώτηση που τίθεται στους μαθητές προς εξέταση. Για να εξηγήσουμε γιατί δεν έχει νόημα ο χαρακτηρισμός ενός προτασιακού τύπου ως αληθής ή ψευδής αναφερόμαστε παρακάτω:

Λέγοντας μεταβλητή εννοούμε ένα σύμβολο (π.χ. το γράμμα x) που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου Ω το οποίο έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Αν το σύνολο Ω είναι μονοσύνολο τότε συμβατικά το x θεωρείται μεταβλητή εκφυλισμένη σε σταθερά. Με αυτές τις προϋποθέσεις μπορούμε να πούμε ότι το x διατρέχει το σύνολο Ω σε αντιδιαστολή με κάθε στοιχείο του Ω που λέμε ότι είναι μια σταθερά.

Όπως αναφέραμε και αρχικά προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής x λέγεται κάθε έκφραση που περιέχει την μεταβλητή αυτή και γίνεται πρόταση όταν η μεταβλητή αυτή αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου Ω ($\Omega \neq \varnothing$) το οποίο διατρέχει η μεταβλητή x και συμβολίζεται με p(x). Το σύνολο των στοιχείων ξ του συνόλου Ω για τα οποία η p(ξ) είναι αληθής πρόταση λέγεται σύνολο αληθείας του προτασιακού τύπου p(x) και συμβολίζεται με $A = \{x \in \Omega: p(x)\}$, λέμε δε ότι για κάθε $x \in A$, ο προτασιακός τύπος p(x) επαληθεύεται.

Για παράδειγμα αν η μεταβλητή x διατρέχει το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3\}$, τότε οι παρακάτω εκφράσεις:

$p_1(x)$: « ο x είναι άρτιος, $x \in \Omega$»

$p_2(x)$: « $x + 1 > 2$, $x \in \Omega$»

$p_3(x)$: « $x + 1 \geq 2$, $x \in \Omega$»

$p_4(x)$: « $x + 2 < 3$, $x \in \Omega$»

είναι προτασιακοί τύποι με σύνολα αλήθειας
$A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\} = \Omega$ και $A_4 = \varnothing$ αντίστοιχα.

Κάθε προτασιακός τύπος λοιπόν μπορεί να γίνει αληθής πρόταση στις παρακάτω περιπτώσεις:

- **Για κάποιες** τιμές της μεταβλητής $x \in \Omega$
- **Για όλες** τις τιμές της μεταβλητής $x \in \Omega$
- **Για καμία** τιμή της μεταβλητής $x \in \Omega$

Για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εκφράσεις που χαρακτηρίζονται ως αληθείς προτάσεις:

- **Υπάρχει $x \in \Omega$** ώστε να ισχύει p(x) [συμβολικά: $(\exists\, x \in \Omega, p(x))$]
- **Για κάθε $x \in \Omega$** ισχύει p(x) [συμβολικά: $(\forall x \in \Omega, p(x))$]
- **Δεν υπάρχει $x \in \Omega$** ώστε να ισχύει p(x) [συμβολικά: $(\overline{\exists x \in \Omega, p(x)})$]

Δεν είναι λοιπόν ορθό να χαρακτηρίσουν κάποιες από τις εκφράσεις:

$p_1(x)$: « ο x είναι άρτιος»

$p_2(x)$: « $x + 1 > 2$ »

$p_3(x)$: « $x + 1 \geq 2$ »

$p_4(x)$: « $x + 2 < 3$ »

ως αληθής ή ως ψευδής, γιατί αυτές δεν είναι προτάσεις αλλά προτασιακοί τύποι. Μπορούν να γίνουν προτάσεις μόνο όταν το x αντικατασταθεί με κάποιο στοιχείο του $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ή αν προτάξουμε μια από τις εκφράσεις **υπάρχει, για κάθε, δεν υπάρχει,** όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

- Η πρόταση: Για κάθε $x \in \Omega$, ισχύει « $x + 1 > 2$ » είναι ψευδής αφού για $x = 1$ δεν ισχύει.
- Η πρόταση: Για κάθε $x \in \Omega$, ισχύει «$x + 1 \geq 2$» είναι αληθής.
- Η πρόταση: Υπάρχει $x \in \Omega$ ώστε να ισχύει « $x + 2 < 3$ » είναι ψευδής.
- Η πρόταση: Δεν υπάρχει $x \in \Omega$ ώστε να ισχύει « $x + 1 > 3$ » είναι ψευδής.

Ακολουθούν παραδείγματα λανθασμένων ερωτήσεων

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

«Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ως ψευδή την ισότητα: $ημ^2x – συν^2x = 1$»

Σχολιασμός: Η παραπάνω έκφραση δεν είναι μαθηματική πρόταση αλλά προτασιακός τύπος αφού εξαρτάται από την μεταβλητή x, επομένως δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ως ψευδής.

Αν όμως γράφαμε:

« Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $ημ^2x – συν^2x = 1$»

θα ήταν μια ψευδής πρόταση γιατί για $x = 0$ δεν ισχύει αφού $0^2 – 1^2 \neq 1$

Αν όμως γράφαμε:

«Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $ημ^2x – συν^2x = 1$»

θα ήταν μια αληθής πρόταση αφού για $x = \frac{\pi}{2}$ ισχύει. Μάλιστα ισχύει για κάθε $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ανάλογα οφείλουμε να εκφραζόμαστε και σε περίπτωση προτασιακών τύπων με περισσότερες μεταβλητές.

2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

« Αν α, β $\in$[0, +∞), τότε να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή την ισότητα:
$\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ **»**

Η έκφραση αυτή δεν είναι πρόταση αλλά προτασιακός τύπος με δύο μεταβλητές τις α και β.

Αν γράφαμε:

« Για κάθε α, β$\in$[0, +∞), ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ »

θα ήταν ψευδής πρόταση, αφού για α = 1 και β = 1 δεν ισχύει, εφόσον $\sqrt{2} \neq 2$.
Αν γράφαμε:

« Υπάρχουν α, β$\in$[0, +∞), ώστε να ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ »,

τότε θα ήταν αληθής πρόταση, αφού για α = 1 και β = 0 ισχύει.

3ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

« Αν α, β $\in\mathbb{R}$ τότε να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή την ισοδυναμία:
$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ **ή** $\beta = 0$ **»**

Ούτε η παραπάνω έκφραση είναι πρόταση αλλά προτασιακός τύπος με δύο μεταβλητές τις α και β.

Αν γράφαμε:

« Για κάθε α, β $\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ »

τότε θα ήταν ψευδής πρόταση αφού για $\alpha = 1$, $\beta = 0$ η πρόταση $1^2 + 0^2 = 0$ είναι ψευδής, ενώ η πρόταση $(1 = 0$ ή $0 = 0)$ είναι αληθής.

Να υπενθυμίσουμε από την μαθηματική λογική ότι μια ισοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ δύο προτάσεων p, q είναι αληθής, μόνο αν οι προτάσεις p, q είναι συγχρόνως αληθείς ή ψευδείς.

Αν γράφαμε:

« Υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ »

τότε θα ήταν αληθής πρόταση, αφού για $\alpha = 0$, $\beta = 0$ είναι αληθείς και οι δύο προτάσεις: $0^2 + 0^2 = 0$ και $(0 = 0$ ή $0 = 0)$. Αλλά και για $\alpha = 1$, $\beta = 2$ είναι και οι δύο προτάσεις: $1^2 + 2^2 = 0$ και $(1 = 0$ ή $2 = 0)$ ψευδείς. Άρα ισχύει η ισοδυναμία και στις δύο περιπτώσεις.

Τέλος είναι γνωστό από την μαθηματική λογική ότι μια έκφραση είναι πρόταση στα μαθηματικά όταν έχει πλήρες και αυτοτελές νόημα και μπορεί κατά ένα και μόνο τρόπο να χαρακτηρισθεί ως αληθής ή ψευδής.

Για παράδειγμα δεν είναι ορθό να ρωτήσουμε αν είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση:

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ ισχύει } \frac{x(x+1)}{x} = x+1$$

αφού η έκφραση αυτή για $x = 0$ δεν έχει νόημα, διότι το πρώτο μέλος της δεν ορίζεται. Το σωστό είναι να γράψουμε:

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^*, \text{ ισχύει } \frac{x(x+1)}{x} = x+1 \quad (\text{αληθής})$$

και ανάλογα

$$\text{Υπάρχει } x \in \mathbb{R}^*, \text{ ώστε να ισχύει } \frac{x(x+1)}{x} = x+1 \quad (\text{αληθής})$$

Στην δεύτερη περίπτωση όμως συνηθίζεται να μην καθορίζουμε εμείς το σύνολο τιμών του x για τα οποία έχει νόημα αυτή η έκφραση (πεδίο ορισμού εξίσωσης ή ανίσωσης), αλλά αφήνουμε να το βρει ο ερωτώμενος. Δηλαδή ρωτάμε αν:

$$\text{Υπάρχει } x \in \mathbb{R}, \text{ ώστε να ισχύει } \frac{x(x+1)}{x} = x+1$$

Αν από τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχει νόημα αυτή η έκφραση κάποια επαληθεύουν τον προτασιακό τύπο που προκύπτει.

10.3 Η ΛΑΘΟΣ ΕΥΡΕΣΗ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Όταν σ' ένα πρόβλημα ζητάμε να βρούμε ένα μαθηματικό αντικείμενο, (αριθμός, διάνυσμα, συνάρτηση κτλ) εργαζόμαστε συνήθως με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους. Πρέπει να είμαστε προσεχτικοί γιατί η μη τήρηση των απαιτουμένων μαθηματικών κανόνων και συλλογισμών μπορεί να οδηγήσει σε λάθη και παρανοήσεις.

Η εύρεση ενός μαθηματικού αντικειμένου με την μέθοδο των ισοδυναμιών.

Βρίσκουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που οφείλει να πληροί το ζητούμενο αντικείμενο και μετά με ισοδυναμίες βρίσκουμε το αντικείμενο αυτό (μπορεί να βρούμε περισσότερα από ένα).

Χαρακτηριστικό λάθος που είναι πιθανό να γίνει κατά την εύρεση του μαθηματικού αντικειμένου είναι να μην βρούμε όλες τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που πρέπει να πληροί το ζητούμενο αντικείμενο.

Παράδειγμα:

Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{2x+5}$ και $g(x) = x+1$.

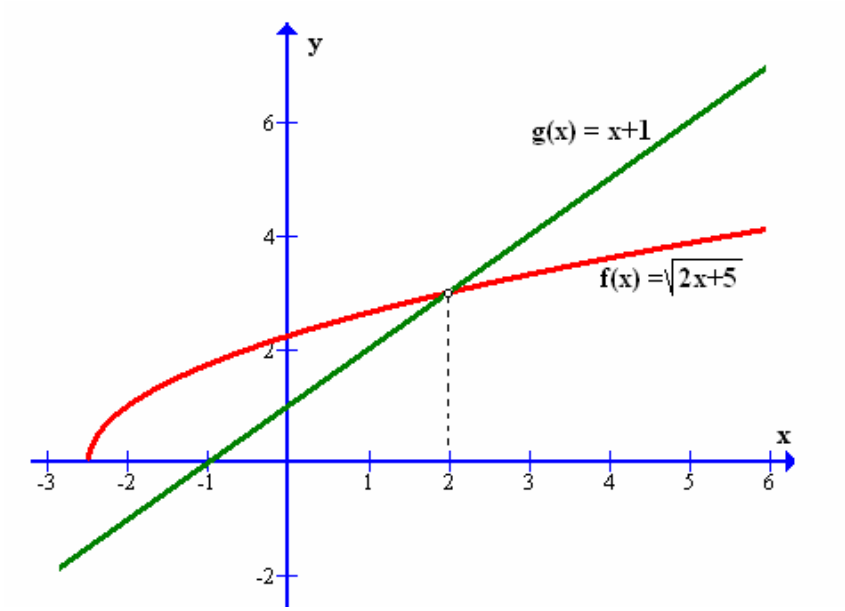
Συχνή αντιμετώπιση σε μια τέτοια περίπτωση είναι να πραγματοποιείται η λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ η οποία προσδιορίζει τις τετμημένες των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων χωρίς να υπολογίζονται όλες οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες που οφείλουν να πληρούν οι δύο συναρτήσεις.

Γράφεται : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x+1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+5})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία που έχουν τετμημένες -2 και 2.

Σχεδιάζοντας όμως με κατάλληλο λογισμικό τις γραφικές παραστάσεις των δύο παραπάνω συναρτήσεων f και g προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:



Όπου φαίνεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων τέμνονται μόνο σε ένα σημείο με μάλιστα το σημείο με τετμημένη 2. Που οφείλεται λοιπόν η διαφορά μεταξύ της αλγεβρικής και της γραφικής λύσης του προβλήματος; Φυσικά στον μη υπολογισμό όλων των ικανών και αναγκαίων συνθηκών που οφείλουν να πληρούν οι δύο συναρτήσεις.

Η σωστή αντιμετώπισή θα πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω ικανές και αναγκαίες συνθήκες, οπότε έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \geq -1 \\ 2x+5 = x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \geq -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \geq -1 \\ (x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων τέμνονται σε ένα σημείο με τετμημένη x = 2.

Η εύρεση ενός μαθηματικού αντικειμένου με την μέθοδο «ευθύ – αντίστροφο»

Παράδειγμα

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1} = 5$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ζητάμε ένα αντικείμενο (τον πραγματικό αριθμό λ) για τον οποίο πληρούνται κάποιες συνθήκες (Η ύπαρξη και η τιμή του ορίου της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1}$). Μία αντιμετώπιση του θέματος είναι η παρακάτω:

Θέτουμε $f(x)=\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1}$, τότε προκύπτουν τα παρακάτω

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad (x-1)\cdot f(x) = x^2+\lambda x-2\lambda \quad (2)$$

Από την σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+\lambda x-2\lambda)$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+\lambda x-2\lambda)$$

$$0\cdot 5 = 1^2+\lambda\cdot 1-2\lambda$$

$$\lambda = 1$$

Επομένως για λ = 1 ισχύει $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1} = 5$.

Η λύση είναι λαθεμένη, γιατί με αυτή την αποδεικτική διαδικασία εύρεσης του πραγματικού αριθμού λ **από πουθενά δεν εξασφαλίζεται ότι ο αριθμός που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες**.

Η εύρεση ενός μαθηματικού αντικειμένου με την μέθοδο «ευθύ – αντίστροφο» γίνεται με την εξής διαδικασία.

Α) Υποθέτουμε ότι ένα αντικείμενο που μπορεί να είναι αριθμός, συνάρτηση κτλ. πληροί τις δοσμένες συνθήκες και με συνεπαγωγές το βρίσκουμε (μπορεί να βρούμε περισσότερα από ένα).

Τονίζουμε ότι κατ' αυτόν τον τρόπο από πουθενά δεν εξασφαλίζεται ότι το αντικείμενο που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Γι' αυτό είναι απαραίτητο να εξετάσουμε και το αντίστροφο.

Β) Αντίστροφο. Εξετάζουμε αν το αντικείμενο που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες.
Αν το αντικείμενο που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες, τότε αυτό είναι το ζητούμενο. Αν όχι, τότε τέτοιο αντικείμενο δεν υπάρχει. Εννοείται ότι αν βρούμε περισσότερα από ένα αντικείμενα, τότε θα εξετάσουμε το καθένα χωριστά, αν πληροί τις δοσμένες συνθήκες και θα κρατήσουμε εκείνα που τις πληρούν αν τέτοια αντικείμενα υπάρχουν.

Επομένως ο παραπάνω συλλογισμός για τον υπολογισμό των πραγματικών αριθμών λ για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1}=5.$$

είναι ελλιπής χωρίς την εξέταση αν τιμή του πραγματικού αριθμού λ πληροί τις δοσμένες συνθήκες της υπόθεσης, θα πρέπει να εξεταστεί και το αντίστροφο:

Έστω ότι λ = 1. Τότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-2\lambda}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+2)=3\neq 5.$$

Άρα, τέτοιος αριθμός λ δεν υπάρχει.

11. Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΕΥΝΑ

Η έρευνα που θα παρουσιάσουμε έχει σκοπό να αναλύσει τις απόψεις των μαθητών για την έννοια της απόδειξης και να διερευνήσει τα επίπεδα κατανόησης από τους μαθητές των βασικών μεθόδων απόδειξης που διδάσκονται και χρησιμοποιούνται στα λύκεια της χώρας μας, καθώς επίσης και να εντοπίσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν τις διάφορες αποδεικτικές μεθόδους. Η έρευνα κατέδειξε κυρίως την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης στην πιστοποίηση της μαθηματικής αλήθειας, την άγνοια των μαθητών για την έννοια και την φύση του αντιπαραδείγματος ως μέσου απόδειξης της μη ισχύος μιας μαθηματικής πρότασης καθώς και τη διάσταση των απόψεων των μαθητών για το τι είναι σωστό και τι είναι λάθος στα μαθηματικά

11.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές διδάσκονται διάφορες αποδεικτικές μεθόδους με σκοπό να είναι σε θέση να αποδεικνύουν τα θεωρήματα και τις προτάσεις που διδάσκονται και να εφαρμόζουν τις διάφορες μεθόδους απόδειξης στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων στην καθημερινή τους ασχολία με τα μαθηματικά. Η παρακάτω έρευνα πραγματοποιήθηκε για να εξετάσει τις γνώσεις των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την έννοια της απόδειξης στα μαθηματικά. Η έρευνά μας εστιάζει στον μαθητή και μόνο σ' αυτόν, δεν εξετάζει τις μεθόδους διδασκαλίας και τις δραστηριότητες που πραγματοποιήθηκαν από τον καθηγητή της τάξης οι οποίες πιστεύεται ότι επηρεάζουν τις απόψεις τους σχετικά με την έννοια της απόδειξης. Επιπλέον η έρευνα δεν εξετάζει τις απόψεις και τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού για την έννοια της απόδειξης ούτε και τις μεθοδεύσεις που χρησιμοποιεί στην τάξη κατά την διαπραγμάτευση μιας απόδειξης.

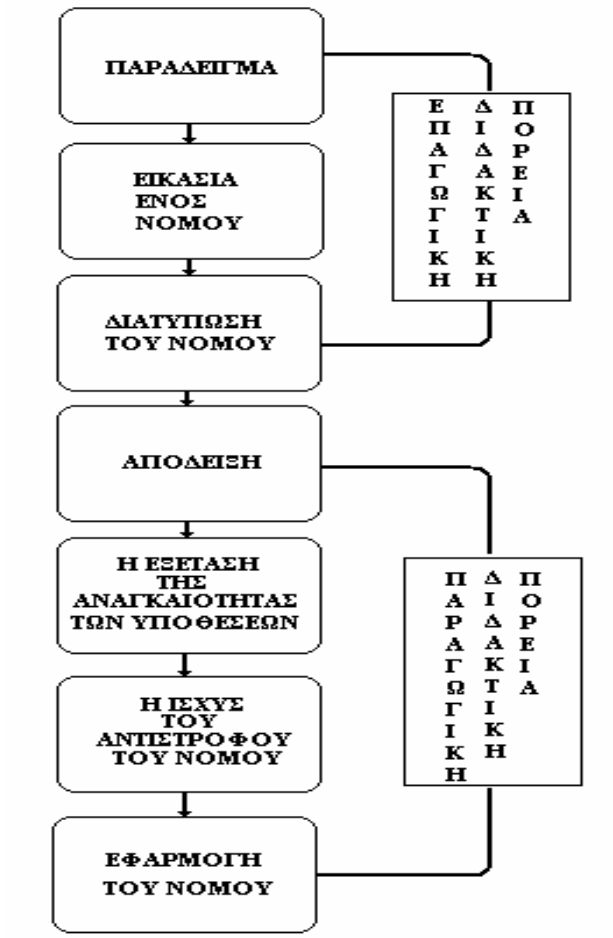
11.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ερευνητικά αποτελέσματα των Healy & Hoyles (2000) έχουν δείξει ότι η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 15-17 χρόνων αντιλαμβάνεται ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα δεν έχουν γενικό και καθολικό χαρακτήρα (ιδιαίτερα αν η πρόταση προς απόδειξη είναι μη οικεία), αλλά αναγνωρίζει ότι τα παραδείγματα αποτελούν ένα δυνατό μέσο για την επικύρωση της αλήθειας μιας πρότασης. Ακόμη, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι μια έγκυρη απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι αρκετή και δεν είναι απαραίτητη επιπλέον η εξακρίβωση της ισχύος της πρότασης με παραδείγματα. Οι μαθητές θεωρούν ότι φορμαλιστικού τύπου αποδείξεις είναι δύσκολες και δεν προσφέρουν αρκετά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που περικλείουν. Η Hanna (2000) θεωρεί πως, ενώ η εξερεύνηση μιας μαθηματικής πρότασης ή ενός προβλήματος και η απόδειξη είναι ξεχωριστές δραστηριότητες, η μία ενισχύει και συμπληρώνει την άλλη. Η εξερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη, ενώ η απόδειξη είναι η επικύρωση του μαθηματικού ισχυρισμού. Μέσω της εξερεύνησης τα συμπεράσματα παραμένουν προσωρινά. Η απόδειξη είναι εκείνη που εγκαθιδρύει τα συμπεράσματα.

Οι Κολέζα, Μακρής και Σούρλας (2000) προτείνουν, από διδακτική άποψη ότι η παρουσίαση στην τάξη ενός μαθηματικού ισχυρισμού που διατίθεται για διαπραγμάτευση θα πρέπει να παρουσιάζεται με μορφή ερωτήσεων ώστε να διεγείρεται η περιέργεια των μαθητών και να προκαλείται η ενεργητική τους συμμετοχή. Με τον τρόπο αυτό καλλιεργείται η

ερευνητική τους διάθεση και ενισχύεται η παρατηρητικότητά τους. Την ίδια άποψη υποστηρίζουν και οι Avital & Hansen (1976) οι οποίοι προτείνουν να ζητείται από τους μαθητές να πειραματιστούν, να διατυπώσουν μια εικασία, να ελέγξουν την εικασία και στο τέλος να προσπαθήσουν να συνθέσουν την απόδειξη του προς διαπραγμάτευση μαθηματικού ισχυρισμού.

Προκειμένου να επιτευχθεί μια σύνθεση μεταξύ της διατύπωσης μιας εικασίας (επαγωγική διδακτική πορεία) και της αναγκαιότητας και δημιουργίας της απόδειξης (παραγωγική διδακτική πορεία), ο Ζαχαριάδης (2006) προτείνει το παρακάτω σχήμα για την διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών αντικειμένων



11.3 ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Αρκετές έρευνες εξετάζουν κατά πόσο οι μαθητές έχουν επίγνωση της αναγκαιότητας της απόδειξης σε αντιδιαστολή με άλλους διαισθητικούς ή εμπειρικούς συλλογισμούς που κάνουν, όταν χρησιμοποιούν συγκεκριμένες αποδεικτικές μεθόδους. Μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν συχνά δυσκολίες στην κατανόηση της

αναγκαιότητας της χρήσης της μαθηματικής απόδειξης.

ΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Στην παρούσα ερευνητική εργασία επιδιώκεται να ερευνηθεί ο τρόπος και ο βαθμός που κατανοούν οι μαθητές την δομή μιας μαθηματικής απόδειξης. Ειδικότερα διερευνώνται τα εξής ερωτήματα:

- Της αναγκαιότητας της απόδειξης ενός θεωρήματος ώστε να καθιερωθεί η αλήθεια του.
- Στην σημαντικότητα της απόδειξης για την ανακάλυψη και συστηματοποίηση των γνώσεων.
- Μπορούν οι μαθητές να δεχτούν την ισχύ μιας μαθηματικής πρότασης μόνο με εικασίες που αφορούν την ισχύ τους ή αισθάνονται την ανάγκη να υπάρχει και η απόδειξη της πρότασης;
- Γνωρίζουν οι μαθητές τις κλασικές μεθόδους απόδειξης μιας μαθηματικής έννοιας;

11.4 Ο ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Δείγμα

Το δείγμα αποτελείται από 100 μαθητές λυκείου από σχολεία αστικών και ημιαστικών περιοχών της Ελλάδας.

Επιλογή δείγματος- πληθυσμός δείγματος

Η επιλογή του δείγματος έγινε με δειγματοληψία και περιλαμβάνει μαθητές λυκείων από τις περιοχές των Αθηνών, του Πειραιά και από μεγάλες επαρχιακές πόλεις. Πιο συγκεκριμένα έγινε επιλογή δείγματος από Χαλκίδα, Αλεξανδρούπολη, Κομοτηνή, Ιωάννινα, Τρίκαλα, Ελασσόνα, και από την νησιωτική Ελλάδα επιλέχτηκαν λύκεια από την Κω και την Κρήτη (Ηράκλειο)

Είδος έρευνας:

Ποσοτική με χρήση ερωτηματολογίου 14 ερωτήσεων ορισμένες από τις οποίες είναι και ανοιχτού τύπου.

Συνθήκες και τρόπος συλλογής δεδομένων

Αρχικά έγινε αποστολή ερωτηματολογίων σε συναδέλφους μαθηματικούς που διδάσκουν σε λύκεια των παραπάνω περιοχών με οδηγίες αντικειμενικότητας και μη παρέμβασης στην επιλογή των απαντήσεων.

Χρονοδιάγραμμα έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τους μήνες Απρίλιο και Μάιο του έτους 2008.

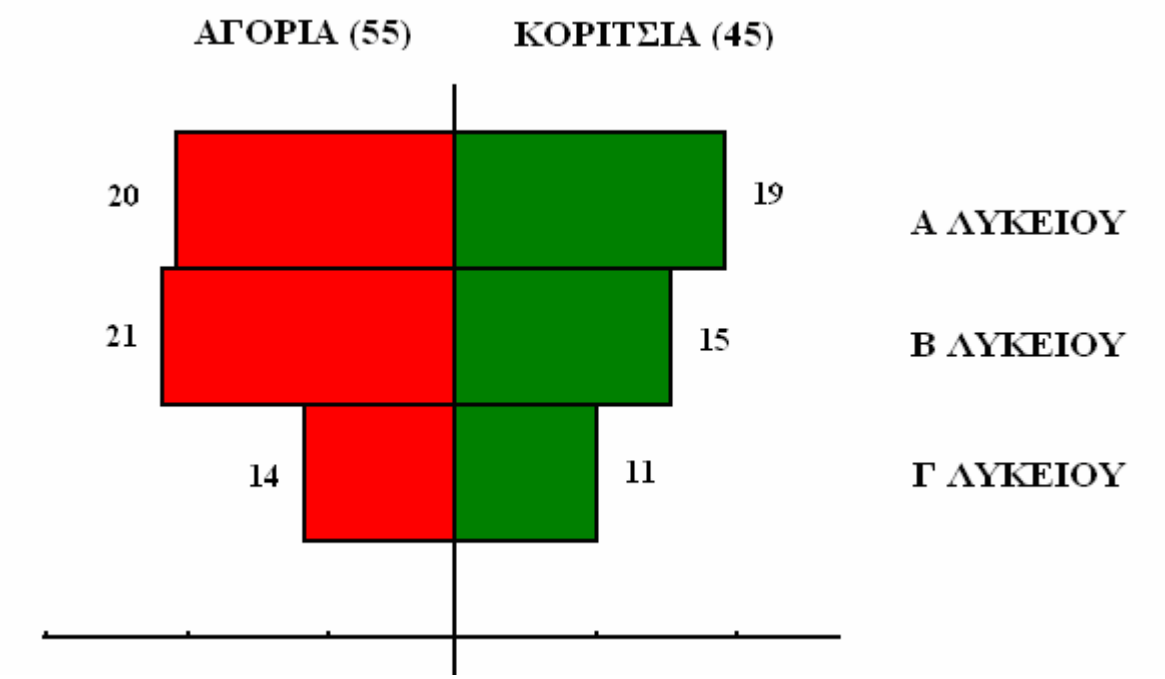
Δομή ερωτηματολογίου

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από τρία μέρη:

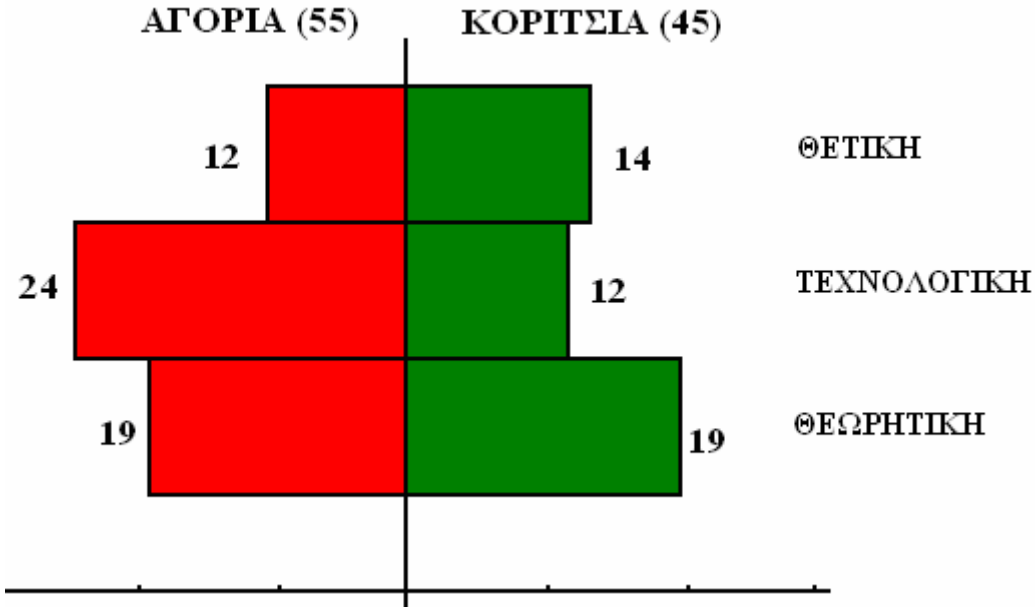
Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει ερωτήσεις που αφορούν την μαθητική ταυτότητα των ερωτηθέντων (φύλο , τάξη και κατεύθυνση που ακολουθούν ή πρόκειται να ακολουθήσουν). Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει ερωτήματα γενικού χαρακτήρα που αποβλέπουν στην καταγραφή των απόψεων των μαθητών για την αναγκαιότητα και την σημαντικότητα της απόδειξης στα μαθηματικά και το τρίτο μέρος περιλαμβάνει ερωτήματα διερεύνησης των γνώσεων τους για τις κλασσικές μεθόδους απόδειξης καθώς και των απόψεων τους για τον ρόλο των νέων τεχνολογιών στην αποδεικτική διαδικασία στα μαθηματικά.

11.5 ΕΥΡΗΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. ΠΥΡΑΜΙΔΑ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΩΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑ ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΤΑΞΗ



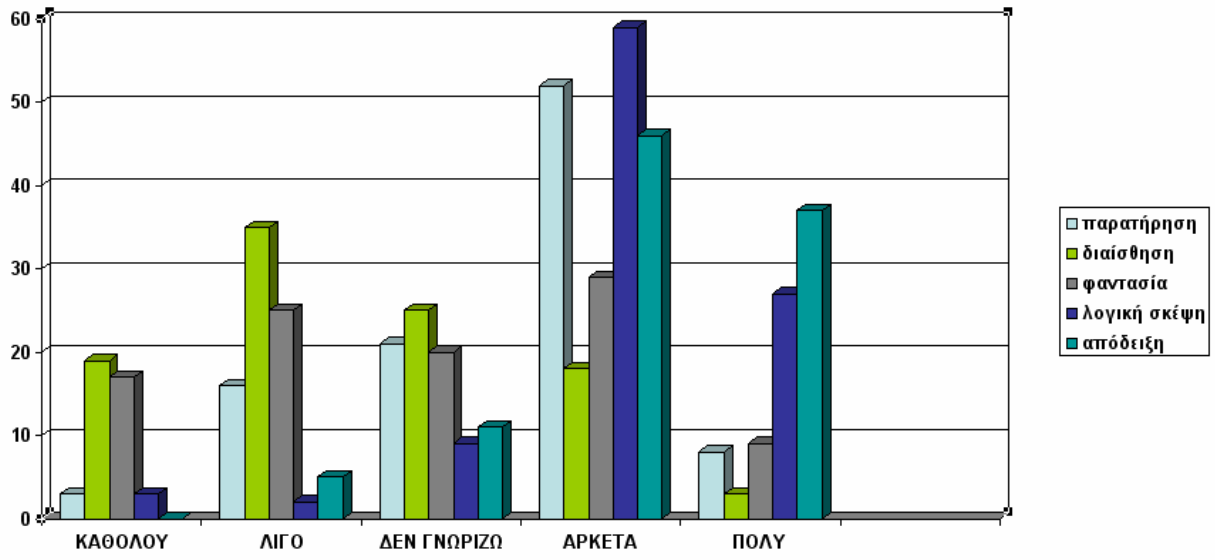
2. ΠΥΡΑΜΙΔΑ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΩΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑ ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ



ΕΡΩΤΗΣΗ 1η Τα μαθηματικά ,όπως τα διδάσκεσαι στο σχολείο , σε ποιο βαθμό θεωρείτε ότι σχετίζονται με την : α. Παρατήρηση, β. Διαίσθηση, γ. Φαντασία, δ. Λογική σκέψη και ε. Απόδειξη.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Καθόλου – λίγο – δεν γνωρίζω - αρκετά - πολύ** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

	ΚΑΘΟΛΟΥ	ΛΙΓΟ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΑΡΚΕΤΑ	ΠΟΛΥ
Παρατήρηση	3	16	21	52	8
Διαίσθηση	19	35	25	18	3
Φαντασία	17	25	20	29	9
Λογική σκέψη	3	2	9	59	27
Απόδειξη		6	11	46	37

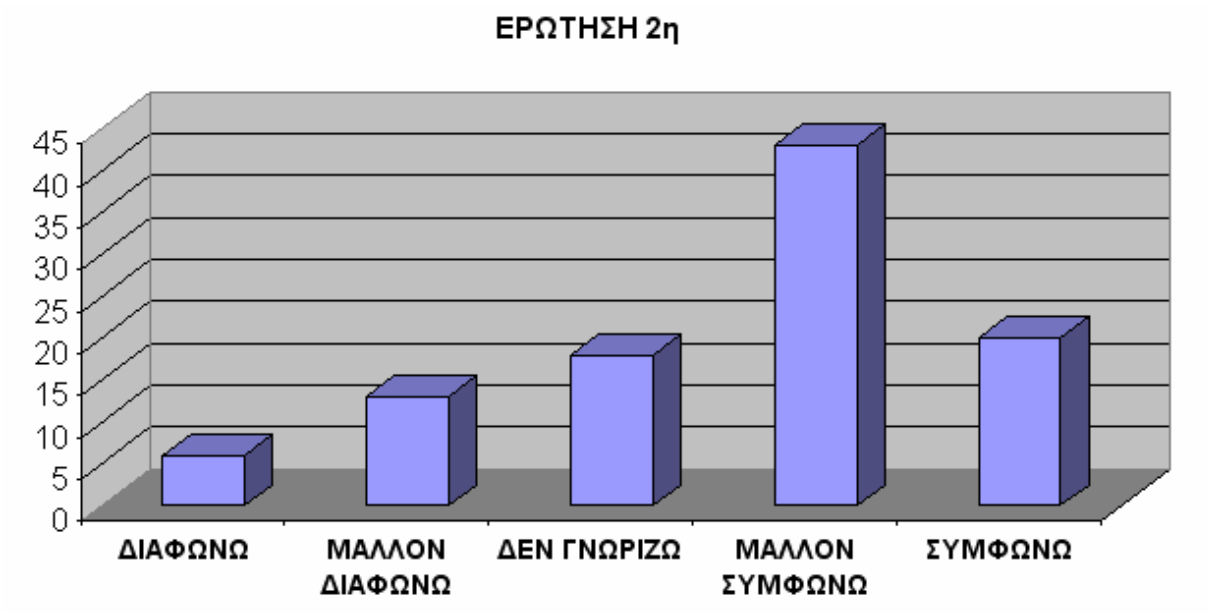


Από τις απαντήσεις συνάγεται ότι οι ερωτώμενοι στην συντριπτική πλειονότητα τους θεωρούν ότι τα μαθηματικά όπως τα διδάσκονται στο σχολείο σχετίζονται με την λογική σκέψη (59+27 = 86%) και την απόδειξη (46 + 47 = 93%) επιλέγοντας οι ερωτώμενοι τις απαντήσεις αρκετά και πολύ. Τα ποσοστά αυτά πέφτουν αισθητά για τις επιλογές τους στην συσχέτιση των μαθηματικών με την φαντασία (38%), τη διαίσθηση (21%) και παραμένουν ψηλά στην επιλογή παρατήρηση (60%).

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η Τα μαθηματικά είναι χρήσιμα γιατί έχουν σχέση με «τον πραγματικό κόσμο»

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ – μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω –μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
6	13	18	43	20

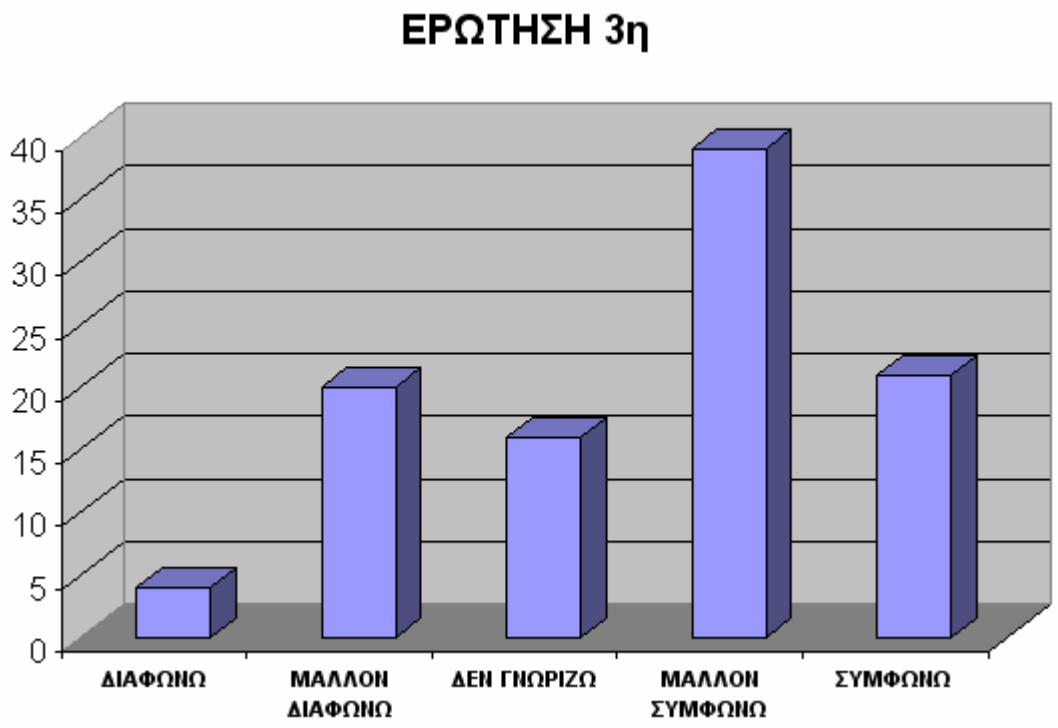


Η πλειοψηφία των ερωτώμενων μαθητών (43+20 = 63%) θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι χρήσιμα γιατί έχουν σχέση με τον «πραγματικό κόσμο», ενώ το ποσοστό των ερωτώμενων που δεν είναι σίγουροι για την χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή είναι αρκετά σημαντικό (18%). Τέλος σημαντικό είναι και το ποσοστό των ερωτώμενων μαθητών που θεωρεί τα μαθηματικά του σχολείου είναι ξεκομμένα από την πραγματικότητα. Συγκεκριμένα το άθροισμα όσων απαντούν «διαφωνώ» (6%) και «μάλλον διαφωνώ» (13%) φτάνει το 19%. Είναι φανερό από τα αποτελέσματα ότι τα παιδιά που ρωτήθηκαν δεν κατανοούν σε μεγάλο βαθμό την σχέση των λυκειακών μαθηματικών που διδάσκονται με προβλήματα της καθημερινότητας που αντιμετωπίζει ένας σύγχρονος πολίτης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η Αντίθετα από τα περισσότερα άλλα μαθήματα, στα μαθηματικά είναι ξεκάθαρο τι είναι σωστό και τι είναι λάθος.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ –μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
4	20	16	39	21

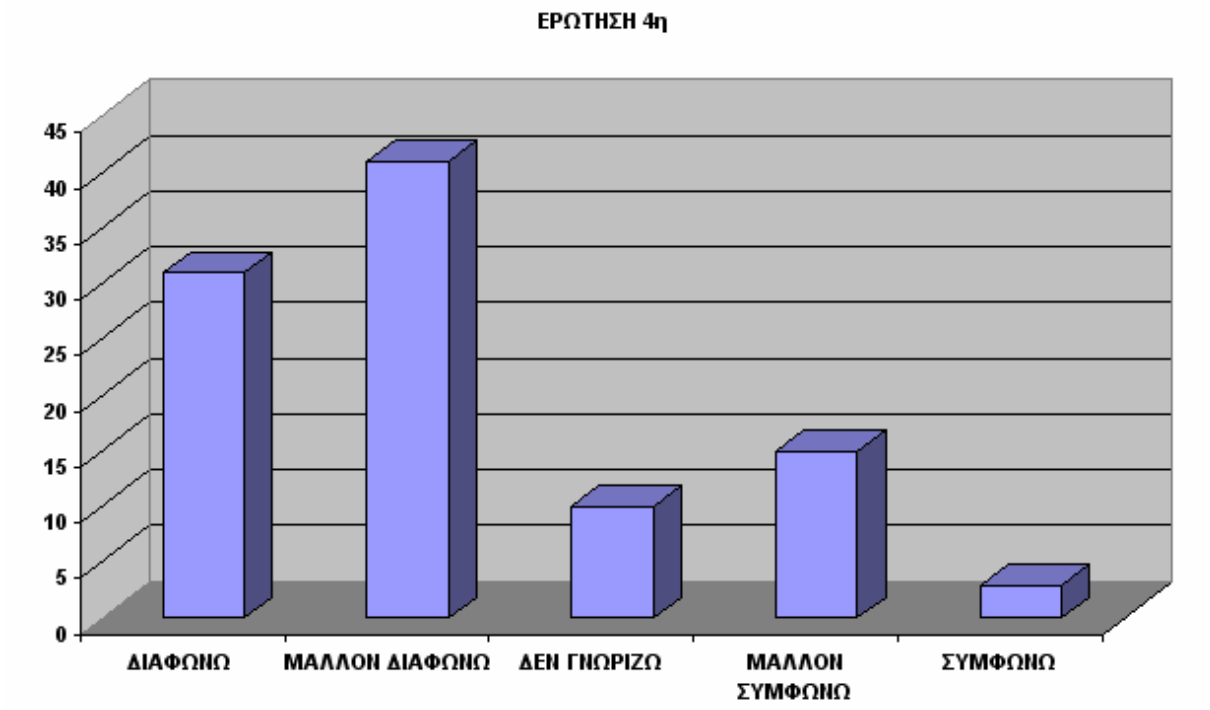


Μια προφανής ιδιότητα των μαθηματικών διχογνωμεί τις απαντήσεις των ερωτώμενων μαθητών. Ποσοστό 20% θεωρεί ότι στα μαθηματικά δεν είναι ξεκάθαρο τι είναι σωστό και τι είναι λάθος, ποσοστό 16% δεν μπορεί να εκφράσει γνώμη για αυτή την άποψη και ποσοστό 39% θεωρεί ότι στα μαθηματικά είναι ξεκάθαρο τι είναι σωστό και τι είναι λάθος. Η διχογνωμία αυτή πιθανό να οφείλετε στην παρανόηση που πολλές φορές υπάρχει στους μαθητές του λυκείου για το ρόλο των μαθηματικών στην εκπαίδευση.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η Εάν ο καθηγητής σας αναφέρει ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αληθινή, τότε δεν είναι αναγκαίο αυτή η πρόταση να αποδειχτεί.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ – μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
31	41	10	15	3

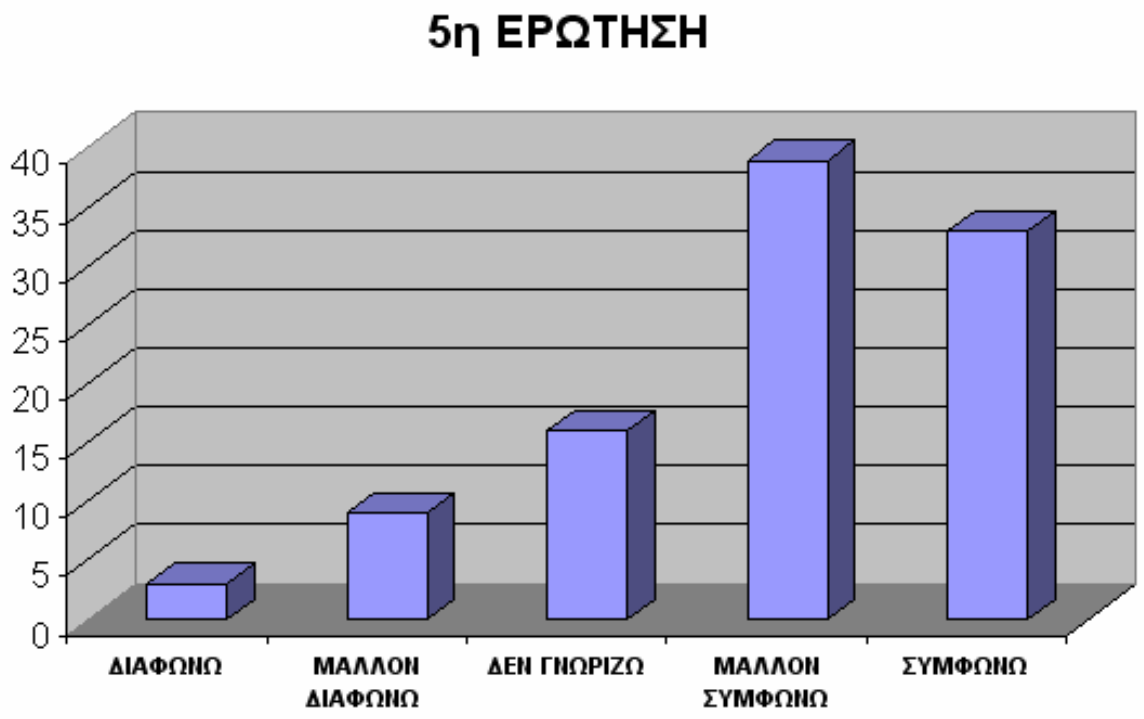


Ευχάριστη είναι η διαπίστωση ότι το (31 +41 = 72%) των ερωτώμενων μαθητών δεν δέχεται την ύπαρξη της «αυθεντίας του καθηγητή των μαθηματικών» και διαφωνεί ή μάλλον διαφωνεί με την άποψη ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αληθινή αν το επιβεβαιώσει ο καθηγητής της τάξης του. Θεωρεί ότι η απόδειξη έχει πρωταρχικό ρόλο στην επιβεβαίωση ενός μαθηματικού συλλογισμού, επομένως οι μαθητές την θεωρούν σημαντική στην μαθησιακή διαδικασία μαθηματικών εννοιών, προτάσεων και θεωρημάτων.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η Η απόδειξη ενός θεωρήματος από το σχολικό σας βιβλίο είναι αναγκαία για το κατανοήσετε καλύτερα.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ – μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
3	9	16	39	33

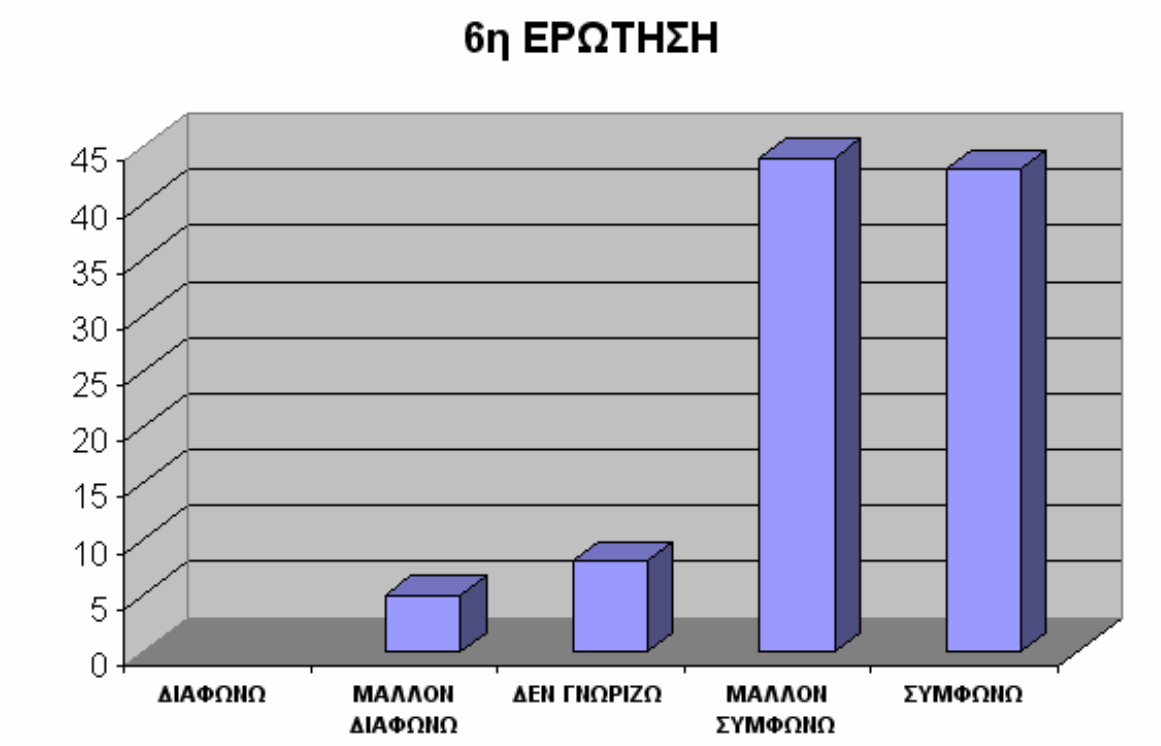


Σε αυτή την ερώτηση φαίνεται ότι η απόδειξη θεωρείται από τους ερωτώμενους σημαντική και αναγκαία για την διαπίστωση των μαθηματικών συμπερασμάτων που προκύπτουν από ένα μαθηματικό θεώρημα με βάση τα αναγραφόμενα στο σχολικό βιβλίο. Το ποσοστό που συμφωνεί με την αναγκαιότητα της απόδειξης είναι αρκετά μεγάλο (39 +33 = 72%), ενώ σημαντικό είναι και το ποσοστό των μαθητών (16%) που δεν εκφέρουν άποψη για την αναγκαιότητα αυτή. Τέλος το ποσοστό που θεωρεί την απόδειξη ενός θεωρήματος από το σχολικό βιβλίο μη αναγκαία είναι αρκετά μικρό (3%).

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η Η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι αναγκαία για να διαπιστωθεί η αλήθεια της.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ– μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
	5	8	44	43

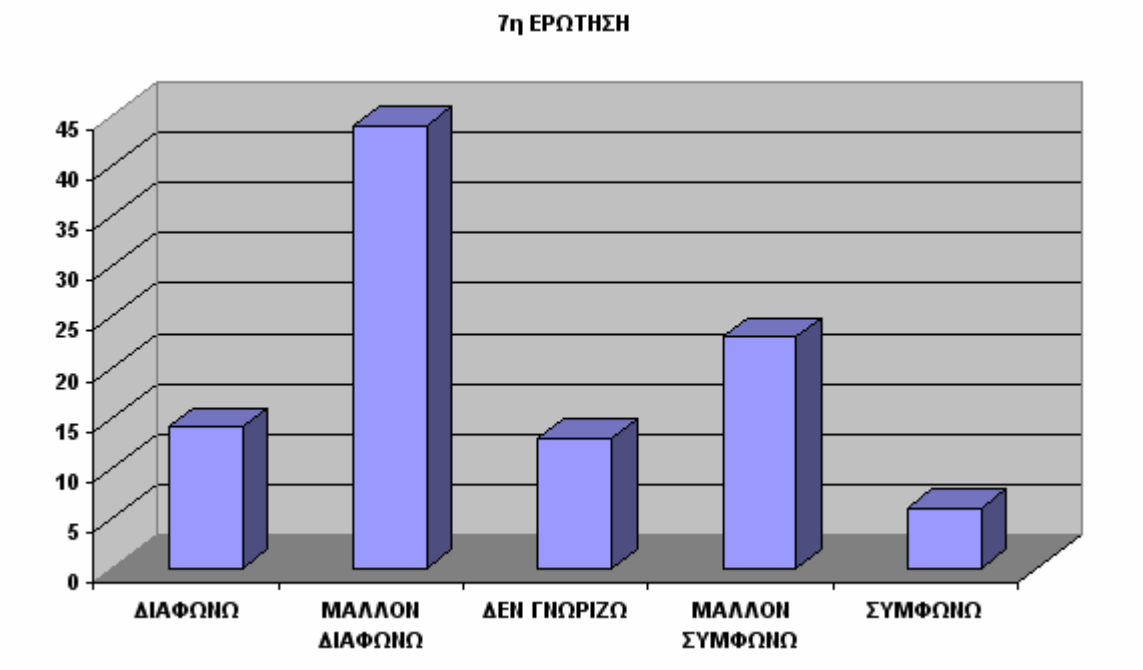


Η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτώμενων μαθητών (44 + 43 = 87%) θεωρεί ότι η απόδειξη μιας μαθητικής πρότασης είναι αναγκαία για να διαπιστωθεί η αλήθεια της. Τα ποσοστά στις άλλες απαντήσεις είναι αμελητέα. Με τις απαντήσεις στην ερώτηση αυτή είναι φανερή η άποψη των μαθητών για την σημασία και την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης και για τον ρόλο που έχει στην διαπίστωση των αληθειών που προκύπτουν από τους μαθηματικούς συλλογισμούς. Η άποψη ότι οι αποδείξεις δεν είναι αναγκαίες για την διαπίστωση της αλήθειας δεν έχει «εισχωρήσει στις τάξεις των μαθητών» όπως συμβαίνει σε κάποιους «ειδικούς» που τείνουν να εξοβελίσουν την αποδεικτική διαδικασία από τα σχολικά βιβλία.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η Εάν μια μαθηματική πρόταση είναι προφανώς αληθινή δεν είναι απαραίτητο να αποδειχτεί.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ – μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
14	44	13	23	6

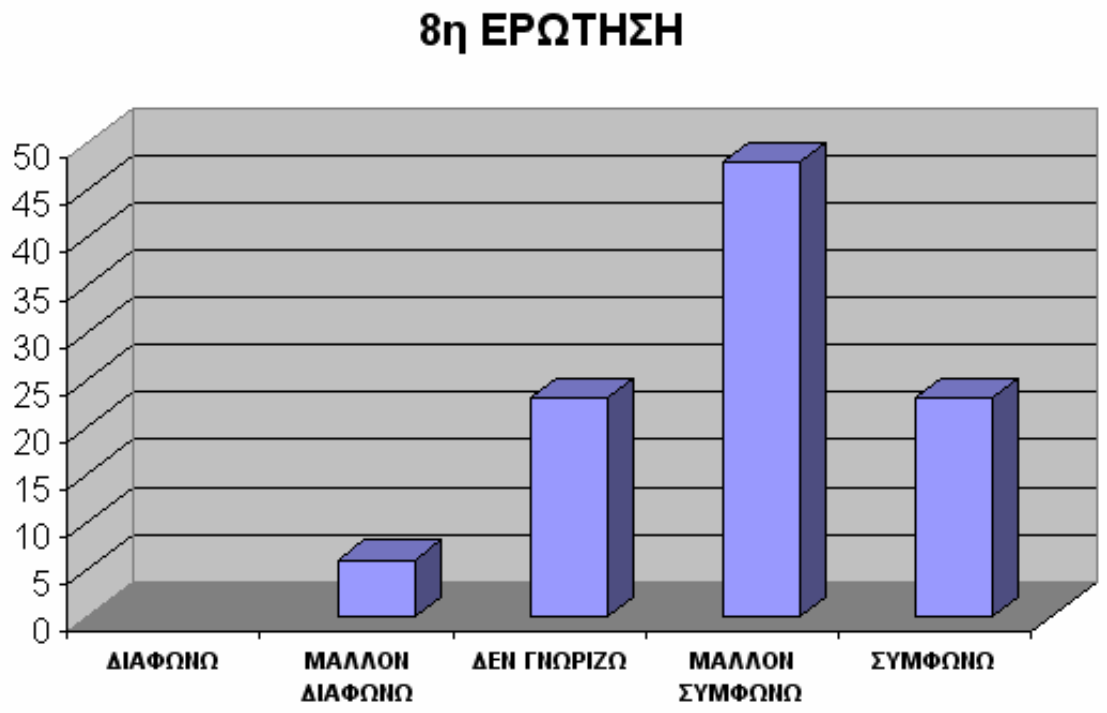


Το μεγαλύτερο ποσοστό των ερωτώμενων μαθητών θεωρεί ότι μια πρόταση που είναι προφανώς αληθής θα πρέπει επιπλέον να αποδειχτεί για να θεωρηθεί καθολική η ισχύς της. Για τον λόγο αυτό στην ερώτηση το 58% μάλλον διαφωνεί ή διαφωνεί. Αξιοσημείωτο είναι όμως το γεγονός ότι το 23% των ερωτώμενων μαθητών θεωρεί ότι δεν είναι απαραίτητη η απόδειξη μιας προφανώς αληθινής πρότασης, ενώ σημαντικό είναι και το ποσοστό των μαθητών (13%) που δεν είναι σίγουροι για το αν μια προφανής πρόταση θα πρέπει να αποδειχτεί ή όχι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η Η χρήση της απόδειξης θεωρείται σημαντική για την ανακάλυψη ή την συστηματοποίηση νέων γνώσεων και θεωριών.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ – μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
	6	23	48	23

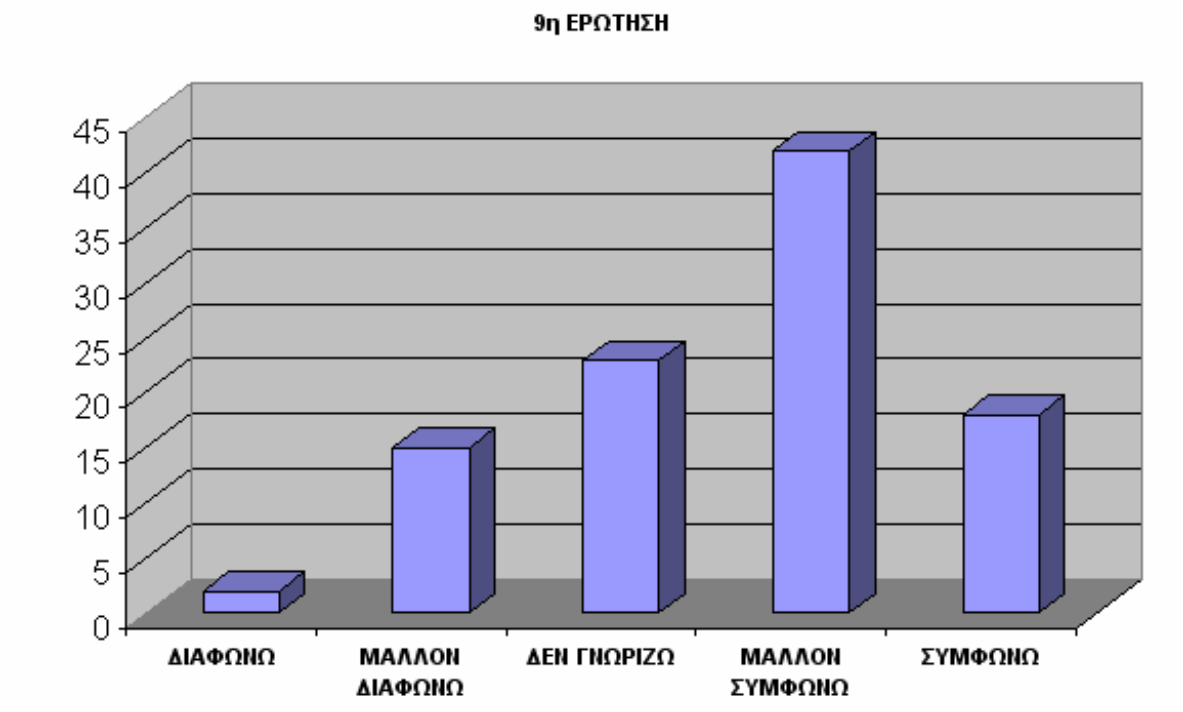


Σε αυτή την ερώτηση μεγάλο ποσοστό των ερωτώμενων (48 +23 = 71%) θεωρεί σημαντική την χρήση της απόδειξης για την ανακάλυψη ή την συστηματοποίηση των νέων γνώσεων και θεωριών. Παρατηρούμε ότι δεν υπήρξε ούτε ένας ερωτώμενος που να απάντησε αρνητικά σε αυτή την άποψη με την επιλογή διαφωνώ. Το ποσοστό των ερωτώμενων που διαφωνεί με τη χρήση της απόδειξης ως εργαλείο ανακάλυψης στα μαθηματικά είναι μόλις το 6%. Τέλος σημαντικό είναι το ποσοστό (23%) των ερωτώμενων που δεν εκφράζει γνώμη επιλέγοντας την απάντηση «δεν γνωρίζω».

ΕΡΩΤΗΣΗ 9η Η απάντηση με βάση την παρατήρηση ενός σχήματος ή μιας γραφικής παράστασης τεκμηριώνει την αλήθεια ενός ισχυρισμού στα μαθηματικά.

Οι απαντήσεις δόθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων: **Διαφωνώ – μάλλον διαφωνώ – δεν γνωρίζω – μάλλον συμφωνώ – συμφωνώ.** και σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

ΔΙΑΦΩΝΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΔΙΑΦΩΝΩ	ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ	ΜΑΛΛΟΝ ΣΥΜΦΩΝΩ	ΣΥΜΦΩΝΩ
2	15	23	42	18



Η τεκμηρίωση ενός μαθηματικού ισχυρισμού με βάση την παρατήρηση ενός σχήματος ή μιας γραφικής παράστασης δεν είναι επαρκής σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσαν οι ερωτώμενοι μαθητές. Βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (42 +18 = 60%) δεν θεωρεί την ενορατική αντίληψη μιας μαθηματικής πρότασης ως απόδειξη, ούτε τη θεωρεί ικανή να τεκμηριώσει το συμπέρασμά της ώστε να έχει καθολική ισχύ. Παρατηρούμε όμως ότι το ποσοστό των ερωτώμενων που δεν γνώριζαν για την απάντηση της ερώτησης είναι αρκετά σημαντικό (23%).

ΕΡΩΤΗΣΗ 10η Στο σχολικό σας βιβλίο υπάρχουν μαθηματικές προτάσεις στις οποίες δεν υπάρχει η απόδειξή τους ή υπάρχει αλλά με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα είναι εκτός ύλης. Σε αυτές τις μαθηματικές προτάσεις οι αποδείξεις τους πρέπει διδάσκονται στην τάξη;

Οι απαντήσεις δόθηκαν με επιλογή 5 σημείων αλλά υπήρχε και έκτη επιλογή για ανοιχτή απάντηση εκ μέρους των ερωτώμενων. Οι μαθητές είχαν να επιλέξουν μια από τις παρακάτω απόψεις:

1η επιλογή: **Όχι δεν είναι σημαντικό να μαθαίνεις κάτι που είναι εκτός ύλης.**

2η επιλογή: **Όχι δεν πρέπει να διδάσκονται γιατί δημιουργούν σύγχυση στους μαθητές.**

3η επιλογή: **Να γίνονται κάποιες από τις αποδείξεις για τους καλούς μαθητές.**

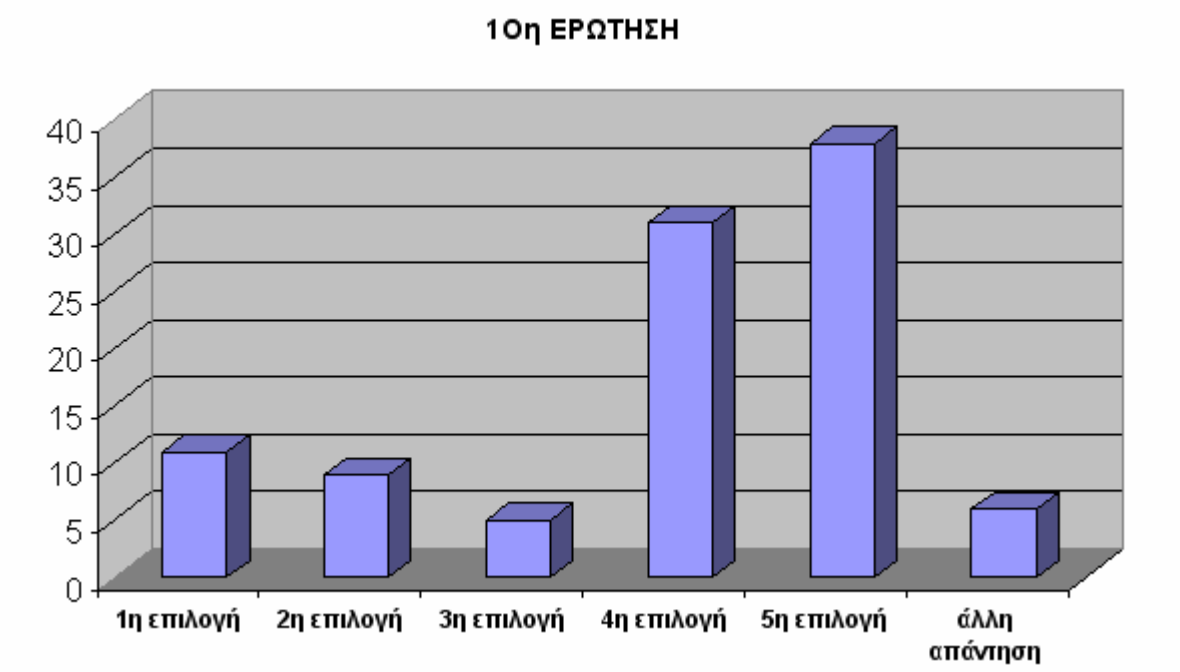
4η επιλογή: **Να γίνονται όλες οι αποδείξεις αλλά να μην εξετάζονται γιατί κατά κανόνα είναι δύσκολες.**

5η επιλογή: **Ναι, να διδάσκονται ώστε οι μαθητές να κατανοούν καλύτερα την πρόταση που αποδεικνύουν.**

6η επιλογή: **Διατυπώστε άλλη απάντηση, αν υπάρχει.**

Οι απαντήσεις σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

1η επιλογή	2η επιλογή	3η επιλογή	4η επιλογή	5η επιλογή	άλλη απάντηση
11	9	5	31	38	6



Στην ερώτηση αν θα πρέπει να διδάσκονται αποδείξεις μαθηματικών προτάσεων οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο ή υπάρχουν αλλά με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα η απόδειξη είναι εκτός ύλης η πλειονότητα των ερωτώμενων (31 + 38 = 69%) θεωρεί ότι θα πρέπει να διδάσκονται για την καλύτερη κατανόηση τους ή να διδάσκονται αλλά να μην εξετάζονται. Στην ερώτηση αυτή είναι φανερή η κατά πλειοψηφία πεποίθηση των μαθητών για την αναγκαιότητα της απόδειξης ως μέσου για την πλήρη κατανόηση μιας μαθηματικής πρότασης. Το ποσοστό των ερωτώμενων που θεωρεί ότι τέτοιου είδους αποδείξεις δεν πρέπει να διδάσκονται είναι σχετικά μικρό (9%) , ενώ ένα ποσοστό μαθητών (11%) δεν θεωρεί σημαντικό να μαθαίνεται και να διδάσκεται κάτι που είναι εκτός ύλης. Η ερώτηση έδινε την ευκαιρία στους ερωτώμενους μαθητές να διατυπώσουν αν το επιθυμούν και άλλη απάντηση. Στην ερώτηση αυτή δόθηκαν και διαφορετικές απαντήσεις από αυτές του ερωτηματολογίου με πιο χαρακτηριστικές τις εξής:

1. Να διδάσκονται για να έχουν μια ιδέα οι μαθητές μπορεί να είναι εκτός ύλης αλλά στη ζωή ας πούμε μπορεί να τους χρειαστούν
2. Να διδάσκονται ώστε οι μαθητές να παίρνουν μια ιδέα, αλλά να μην τις μαθαίνουν διότι είναι εκτός ύλης.
3. Να διδάσκονται ώστε οι μαθητές να κατανοούν καλύτερα την πρόταση που αποδεικνύουν αλλά αν είναι εφικτό να παραμένουν εκτός ύλης την περίοδο των εξετάσεων, λόγω της δυσκολίας που έχουν μερικές από αυτές.
4. Να διδάσκονται ώστε οι μαθητές να τις κατανοούν και να τις εμπεδώνουν καλύτερα. Αυτό μόνο εφόσον μπορούν να αποδειχτούν με τις υπάρχουσες γνώσεις του μαθητή.
5. Θεωρώ πως κάποιες από αυτές θα ήταν καλό να διδάσκονται στην τάξη. Γνωρίζω το πρόβλημα με την ύλη (χρόνος) αλλά με το να διδάσκονται κάποιες από αυτές (κρίση καθηγητή) έχουμε μόνο να κερδίσουμε. Από την άλλη, αν πιέζει ο χρόνος ή δεν υπάρχει ανταπόκριση από τους μαθητές τότε τα πράγματα αλλάζουν
6. Τι σημαίνει εκτός ύλης; Η γνώση είναι γνώση.

(Η λεκτική διατύπωση των απαντήσεων είναι ακριβώς όπως καταγράφτηκαν από τους μαθητές στα ερωτηματολόγια.)

ΕΡΩΤΗΣΗ 11η Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι μια μαθηματική πρόταση δεν ισχύει παρουσιάζει ένα παράδειγμα όπου ισχύουν οι υποθέσεις της πρότασης αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμά της και το παράδειγμα αυτό (αντιπαράδειγμα) το παρουσιάζει ως απόδειξη. Η δική σας άποψη είναι:

Οι απαντήσεις δόθηκαν με επιλογή 4 σημείων αλλά υπήρχε και πέμπτη επιλογή για ανοιχτή απάντηση εκ μέρους των ερωτώμενων. Οι μαθητές είχαν να επιλέξουν μια από τις παρακάτω απόψεις:

1η επιλογή: **Τέτοιας μορφής απόδειξη είναι λάθος. Το αντιπαράδειγμα δεν είναι μέθοδος απόδειξης.**

2η επιλογή: **Με την χρήση του αντιπαραδείγματος η απόδειξη είναι ελλιπής, θα πρέπει να αποδειχθεί επιπλέον ότι η πρόταση δεν ισχύει με μαθηματικούς συλλογισμούς.**

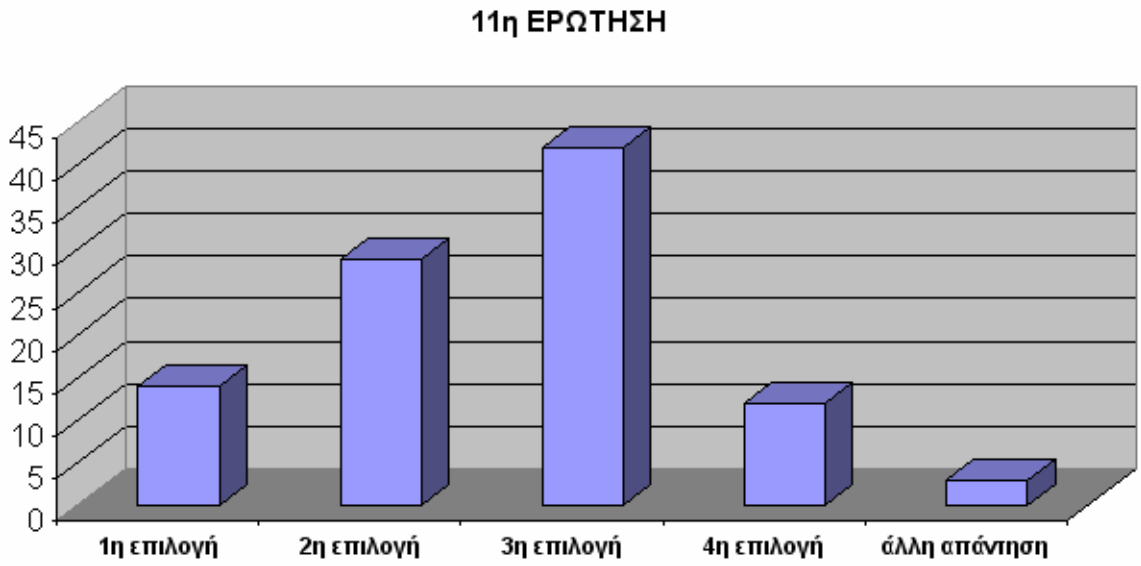
3η επιλογή: **Η χρήση ενός αντιπαραδείγματος που φανερώνει ότι η μαθηματική πρόταση δεν ισχύει είναι αρκετή για να δηλώσει την μη ισχύ της μαθηματικής πρότασης.**

4η επιλογή: **Θα πρέπει να βρεθεί τουλάχιστον άλλο ένα αντιπαράδειγμα ώστε να θεωρηθεί η απόδειξη πλήρης.**

5η επιλογή: **Διατυπώστε άλλη απάντηση, αν υπάρχει.**

Οι απαντήσεις σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

1η επιλογή	2η επιλογή	3η επιλογή	4η επιλογή	άλλη απάντηση
14	29	42	12	3



Στην ερώτηση αυτή είναι φανερή η άγνοια των ερωτώμενων μαθητών για την έννοια και την χρήση του αντιπαραδείγματος στην αποδεικτική διαδικασία μιας μαθηματικής πρότασης. Μόνο το 42% των ερωτώμενων θεωρεί ότι το αντιπαράδειγμα είναι μέθοδος απόδειξης στα μαθηματικά. Το υπόλοιπο ποσοστό των ερωτώμενων θεωρεί είτε ότι το αντιπαράδειγμα δεν είναι μέθοδος απόδειξης (14%) είτε ότι είναι μέθοδος αλλά είναι ελλιπής (29%) είτε ότι για να είναι η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης πλήρης θα πρέπει να υπάρχει και άλλο αντιπαράδειγμα (12%).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η απάντηση ενός ερωτώμενου ο οποίος αναφέρει ότι « Πρέπει να γίνεται πάντοτε απόδειξη γιατί το αντιπαράδειγμα καλύπτει μόνο μία ή λίγες περιπτώσεις».

ΕΡΩΤΗΣΗ 12η Σε μια μαθηματική πρόταση παρουσιάζεται η απόδειξη της με την χρήση λογισμικού σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η δική σας άποψη για τέτοιου είδους αποδείξεις είναι:

Οι απαντήσεις δόθηκαν με επιλογή 5 σημείων αλλά υπήρχε και έκτη επιλογή για ανοιχτή απάντηση εκ μέρους των ερωτώμενων. Οι μαθητές είχαν να επιλέξουν μια από τις παρακάτω απόψεις:

1η επιλογή**: Η επιβεβαίωση της ισχύος της πρότασης μέσα από ένα λογισμικό είναι αρκετή για να δηλωθεί ως απόδειξη της πρότασης.**

2η επιλογή: **Η επιβεβαίωση της ισχύος της πρότασης μέσα από λογισμικό δεν είναι αρκετή χρειάζεται και ένα τουλάχιστον παράδειγμα χωρίς την χρήση του υπολογιστή που να επιβεβαιώνει την αλήθεια της πρότασης.**

3η επιλογή: **Η επιβεβαίωση της πρότασης μέσα από λογισμικό προσδιορίζει μια εικασία για την ισχύ της πρότασης, για την πλήρη απόδειξη της πρότασης χρειάζεται οπωσδήποτε η απόδειξη της με μαθηματικούς συλλογισμούς.**

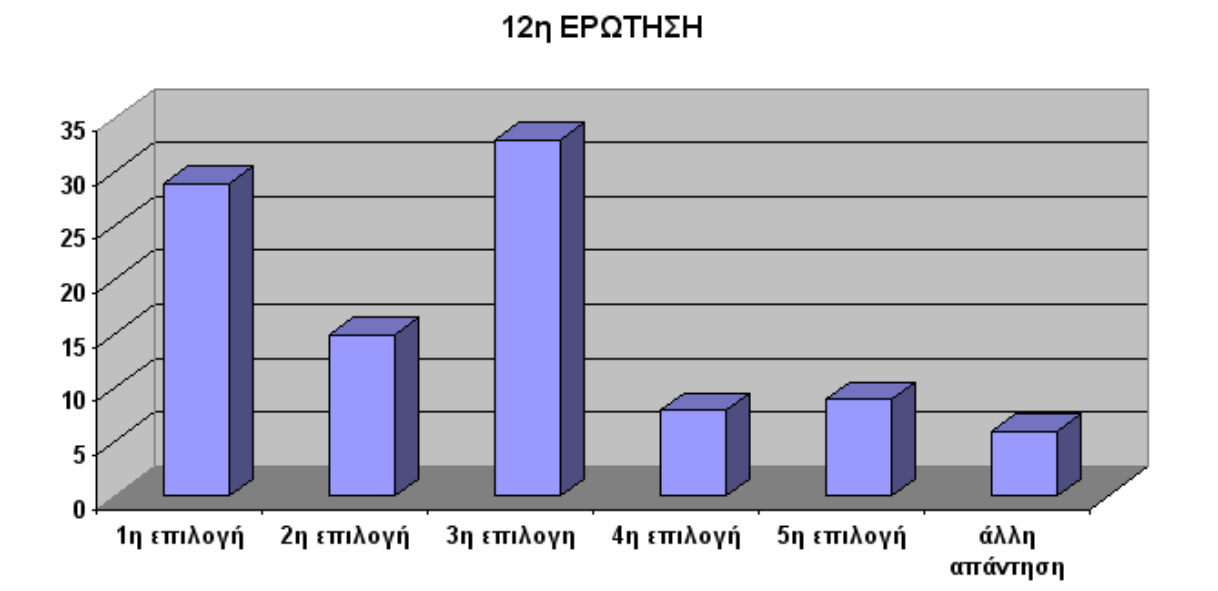
4η επιλογή: **Η επιβεβαίωση της πρότασης μέσα από λογισμικό μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη αν το λογισμικό είναι εγκεκριμένο από το υπουργείο Παιδείας.**

5η επιλογή: **Η επιβεβαίωση της πρότασης μέσα από λογισμικό μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη όταν έχει γίνει σύμβαση από τον καθηγητή και τους μαθητές της τάξης.**

6η επιλογή: **Διατυπώστε άλλη απάντηση, αν υπάρχει.**

Οι απαντήσεις σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

1η επιλογή	2η επιλογή	3η επιλογη	4η επιλογή	5η επιλογή	άλλη απάντηση
29	15	33	8	9	6



Σημαντική ερώτηση για την επιρροή των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση. Αν και οι ερωτώμενοι σε μεγάλο ποσοστό (33%) θεωρούν ότι η επιβεβαίωση μιας πρότασης μέσα από ένα λογισμικό δεν είναι ικανή να οδηγήσει στην απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης αλλά χρειάζονται οπωσδήποτε και οι μαθηματικοί συλλογισμοί, εντούτοις υπάρχει ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών που παρερμηνεύει την χρήση και την ικανότητα ενός λογισμικού και θεωρεί ότι μια απόδειξη είναι δυνατό να προέλθει από την χρήση ενός λογισμικού (29%) ή να χρειάζεται και παράδειγμα για να είναι πλήρης η απόδειξη (15%) ή να είναι το λογισμικό εγκεκριμένο από το Υπουργείο Παιδείας (8%) ή τέλος να είναι στην ευχέρεια ενός διδακτικού συμβολαίου μεταξύ μαθητών και καθηγητή της τάξης (9%).

Στην ερώτηση αυτή δόθηκαν και ανοικτές απαντήσεις από ορισμένους μαθητές που οφείλονται στην άγνοια τους για τα λογισμικά και την χρήση τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις απαντήσεις:

1. Τέτοιου είδους αποδείξεις βοηθούν στην κατανόηση της μαθηματικής πρότασης.

2. Δεν γνωρίζω και δεν είχα ποτέ μου καμία επαφή με τέτοια λογισμικά.

3. Πιθανότατα η ισχύς μιας μαθηματικής πρότασης να αποδεικνύεται με ένα λογισμικό

πρόγραμμα, αλλά η απόδειξη της πρότασης με μαθηματικούς συλλογισμούς είναι εξίσου σημαντική.

4. Αν η απόδειξη είναι αναλυτική και πλήρης και το λογισμικό είναι δημιουργημένο από κάποιο πανεπιστήμιο και συγχρόνως εγκεκριμένο από το υπουργείο, τότε τη θεωρώ απόδειξη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13η Ένας μαθητής στην προσπάθεια του να αποδείξει την ισότητα

$$1+2+3+...+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$ **για κάθε θετικό ακέραιο ν,**

απέδειξε ότι ισχύει για ν = 1, 2, 3, 4 και 5 και στη συνέχεια θεώρησε ότι αφού η ισότητα ισχύει για τις πέντε πρώτες τιμές του θετικού ακέραιου ν θα ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους. Η δική σας άποψη είναι:

Οι απαντήσεις δόθηκαν με επιλογή 5 σημείων αλλά υπήρχε και έκτη επιλογή για ανοιχτή απάντηση εκ μέρους των ερωτώμενων. Οι μαθητές είχαν να επιλέξουν μια από τις παρακάτω απόψεις:

1η επιλογή: **Για να είναι η απόδειξη της ισότητας πλήρης θα πρέπει να αποδειχτεί για περισσότερες τιμές του θετικού ακεραίου ν.**

2η επιλογή: **Δεν είναι αναγκαία η απόδειξη της ισότητας για πέντε διαφορετικές τιμές του θετικού ακέραιου ν, τρεις μόνο αρκούν.**

3η επιλογή: **Για να είναι σωστή η απόδειξη της ισότητας θα πρέπει να δεχτούμε την ισχύ της για ένα τυχαίο θετικό ακέραιο κ και στην συνέχεια να αποδείξουμε την ισχύ της για τον επόμενο θετικό ακέραιο κ + 1.**

4η επιλογή: **Η απόδειξη είναι πλήρης. Η αλήθεια της ισότητας για πέντε διαφορετικές τιμές του θετικού ακεραίου ν είναι αρκετή για να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η πρόταση ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο.**

5η επιλογή: **Για να είναι σωστή η απόδειξη της ισότητας θα πρέπει να αποδείξουμε την ισχύ της για ν = 1 και μετά πρέπει να δεχτούμε την ισχύ της για ένα τυχαίο θετικό ακέραιο κ και στην συνέχεια να αποδείξουμε την ισχύ της για τον επόμενο θετικό ακέραιο κ+1.**

6η επιλογή: **Διατυπώστε άλλη απάντηση, αν υπάρχει.**

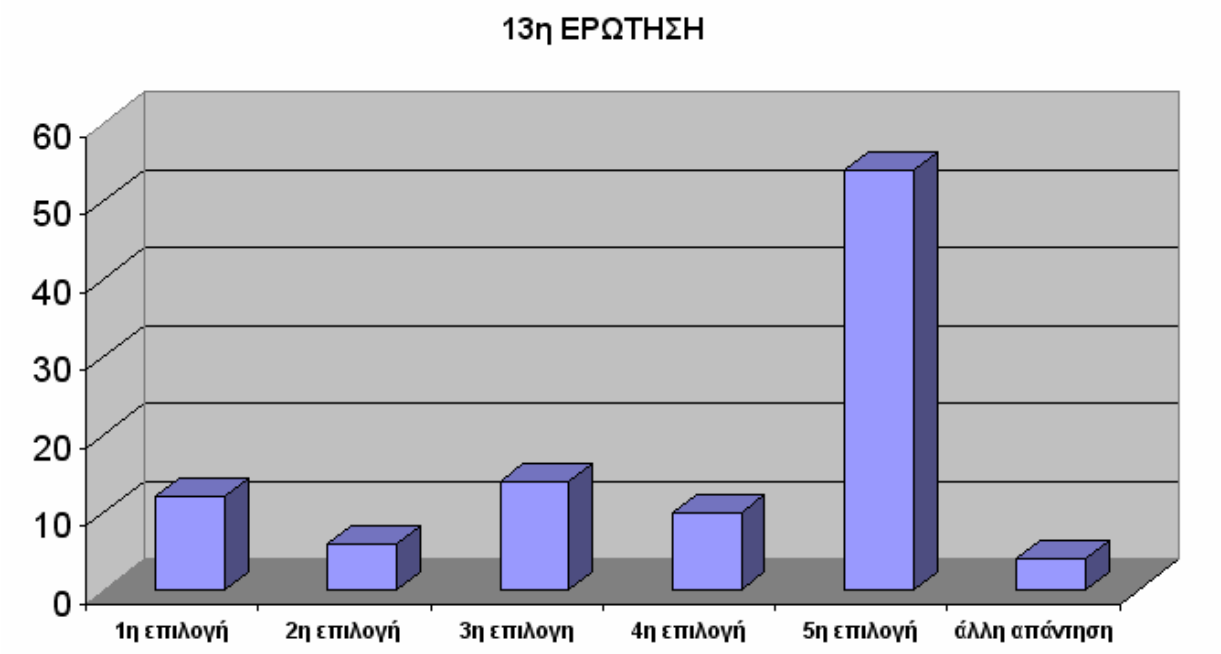
Σχόλιο

Επειδή η έρευνα διεξήχθη σε όλες τις τάξεις του λυκείου και το ερώτημα αφορά την χρήση της επαγωγικής μεθόδου ως διαδικασία απόδειξης, που δεν έχει διδαχτεί στους μαθητές της Α

τάξης του Λυκείου, στα ποσοστά που αναφέρουμε παρακάτω αποκλείσαμε όλους τους μαθητές της Α τάξης.

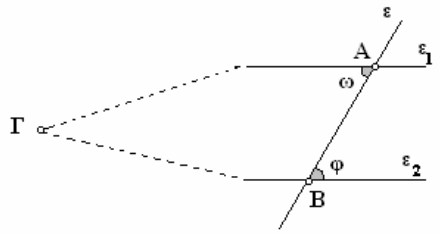
Οι απαντήσεις σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

1η επιλογή	2η επιλογή	3η επιλογη	4η επιλογή	5η επιλογή	άλλη απάντηση
12	6	14	10	54	4



Στην ερώτηση αυτή οι ερωτώμενοι μαθητές αποδεικνύουν ότι γνωρίζουν μέθοδο απόδειξης της μαθηματικής επαγωγής σε αρκετά μεγάλο ποσοστό (54%) όμως δεν είναι ευκαταφρόνητο το ποσοστό των ερωτώμενων που δεν έχει κατανοήσει πλήρως την επαγωγική αποδεικτική διαδικασία επιλέγοντας τις άλλες λανθασμένες απαντήσεις. Οι μαθητές θεωρούν ότι η μαθηματική επαγωγή είναι μια μέθοδος απόδειξης στην οποία υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε! Οι μαθητές δεν κατανοούν ότι στην επαγωγική υπόθεση το ν συμπεριφέρεται ως σταθερά, ενώ στο συμπέρασμα συμπεριφέρεται ως ελεύθερη μεταβλητή. Επιπλέον , συναντούν τεχνικής φύσεως δυσκολίες στο τελευταίο βήμα της μαθηματικής επαγωγής όπου πολλές φορές απαιτείται ευχέρεια αλγεβρικών χειρισμών. Περαιτέρω, θεωρούν ότι η μαθηματική επαγωγή σχετίζεται μόνο με αλγεβρικές αποδείξεις και δεν εφαρμόζεται σε δραστηριότητες που απαιτούν γεωμετρικές αποδείξεις

ΕΡΩΤΗΣΗ 14η Θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση «Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ω και φ ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες»



Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε ότι οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Γ, τότε φ = ω + Γ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή φ ≠ ω. Άτοπο, επομένως οι ευθείες είναι παράλληλες. Η άποψή σας για την παραπάνω απόδειξη είναι:

Οι απαντήσεις δόθηκαν με επιλογή 5 σημείων αλλά υπήρχε και έκτη επιλογή για ανοιχτή απάντηση εκ μέρους των ερωτώμενων. Οι μαθητές είχαν να επιλέξουν μια από τις παρακάτω απόψεις:

1η επιλογή: **Η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί το τρίγωνο ΑΒΓ.**

2η επιλογή: **Η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.**

3η επιλογή: **Η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί όταν δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου δεν είναι παράλληλες, δεν είναι αναγκαστικά τεμνόμενες.**

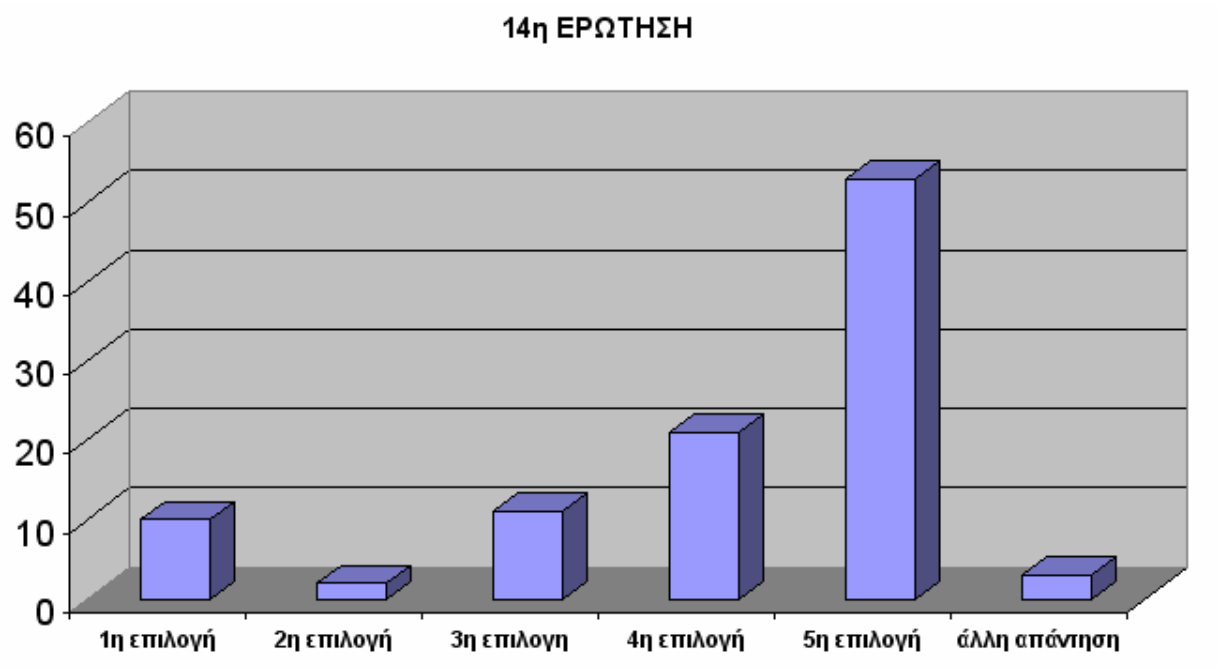
4η επιλογή: **Η απόδειξη είναι σωστή αλλά δεν είναι αναγκαία η ύπαρξή της γιατί διαισθητικά είναι φανερό ότι αν οι εντός εναλλάξ γωνίες ω και φ είναι ίσες τότε αναγκαστικά θα είναι οι ευθείες παράλληλες.**

5η επιλογή: **Η απόδειξη είναι σωστή γιατί η μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιήθηκε είναι μια παραδεκτή μέθοδος απόδειξης στα μαθηματικά.**

6η επιλογή: **Διατυπώστε άλλη απάντηση, αν υπάρχει.**

Οι απαντήσεις σε ποσοστά είναι οι παρακάτω:

1η επιλογή	2η επιλογή	3η επιλογη	4η επιλογή	5η επιλογή	άλλη απάντηση
10	2	11	21	53	3



Στην ερώτηση αυτή φαίνεται ότι περίπου οι μισοί ερωτώμενοι μαθητές (53%) γνωρίζουν την εις άτοπο απαγωγή ως αποδεικτική διαδικασία μιας μαθηματικής πρότασης, αλλά αξιοσημείωτο είναι πάλι το γεγονός ότι οι υπόλοιποι μαθητές επιλέγουν λανθασμένη επιλογή με ένα σημαντικό ποσοστό (21%) να θεωρεί την απόδειξη σωστή όταν αυτή βασίζεται σε εποπτική εξήγηση μέσω του γεωμετρικού σχήματος.

11.6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Αναλύοντας τα αποτελέσματα της έρευνας παρατηρούμε ότι προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για την αναγκαιότητα της απόδειξης και την σημαντικότητα της στα σχολικά μαθηματικά. Από την πρώτη ερώτηση είναι φανερή η γνώμη των μαθητών ότι η διδασκαλία των μαθηματικών βασίζεται στην λογική σκέψη και στην απόδειξη. Όμως δέχονται ότι η φαντασία, η διαίσθηση και η παρατήρηση απουσιάζει από την διαδικασία της ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης. Με βάση αυτή την ανάλυση είναι φανερό ότι θα πρέπει να γίνει μια νέα προσαρμογή στα σχολικά προγράμματα και τα βιβλία ώστε να συμπεριληφθούν βασικές παράμετροι στην διδασκαλία των μαθηματικών που σήμερα απουσιάζουν. Η αναγκαιότητα της εισαγωγής των νέων αυτών παραμέτρων διατυπώθηκε στις απαντήσεις των ερωτώμενων που όχι μόνο διαπίστωσαν την απουσία τους αλλά επισήμαναν και την αναγκαιότητα ύπαρξής τους. Αν και αρκετοί μαθητές μέσα από τις απαντήσεις τους διαπίστωσαν τα παραπάνω, εντούτοις υπάρχει ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών που δεν γνωρίζει τις παραπάνω

παραμέτρους και δεν κατανοεί αν υπάρχουν ή όχι στα σχολικά τους μαθηματικά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην επιδερμική διδασκαλία που έχουν οι μαθητές και κατά συνέπεια στην επιφανειακή γνώση που αποκτούν. Θεωρείται δεδομένο ότι θα πρέπει να αλλάξει εκτός από το αναλυτικό πρόγραμμα και ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών. Φυσικά μια τέτοια αλλαγή δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί στην Ελληνική εκπαίδευση αν δεν αναδιαρθρωθούν οι καταστάσεις ώστε να επιφέρουν την σωστή επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε σύγχρονες παιδαγωγικές αντιλήψεις και ιδέες πάνω στην μαθησιακή διαδικασία.

Αρκετοί μαθητές θεωρούν – μέσα από τις απαντήσεις τους – ότι τα μαθηματικά έχουν σχέση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά επίσης μεγάλο ποσοστό μαθητών αγνοεί αυτή την πτυχή. Η διπλή φύση των μαθηματικών συνίσταται αφενός από την σχέση τους με την περιγραφή της σειράς των γεγονότων στο χρόνο, με τη διάταξη των αντικειμένων στο χώρο και με την επίλυση πρακτικών προβλημάτων και αφετέρου οι μαθηματικές δομές αναπαρίστανται συμβολικά και γίνονται αντικείμενα συλλογισμού και επεξεργασίας (Healy L. & Hoyles C.1998). Η παραδοσιακή αντίληψη για τα μαθηματικά είναι κυρίως ότι έχουν σχέση με ακριβείς υπολογιστικές διαδικασίες. Η πολυπλοκότητα της σχέσης μεταξύ φυσικών και κοινωνικών φαινομένων και η χρήση των μαθηματικών διαδικασιών στη μοντελοποίηση αυτών των όψεων της πραγματικότητας δεν έχει γίνει συνείδηση από όσους χαράσσουν πολιτικές στην εκπαίδευση αλλά και από άλλες ομάδες όπως εκπαιδευτικούς, γονείς και μαθητές. Ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών είναι ένας βασικός συντελεστής στη διαμόρφωση μιας τέτοιας άποψης , αφού από την διδασκαλία των μαθηματικών απουσιάζει η επίλυση προβλήματος. Η απουσία προβλημάτων που λαμβάνουν υπόψη πραγματικές καταστάσεις δημιουργεί στους μαθητές την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι ασύνδετα με την καθημερινή πραγματικότητα και με τις άλλες επιστήμες. Αυτές οι πεποιθήσεις των μαθητών καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από την εκπαιδευτική πολιτική, η οποία επηρεάζεται από το εκπαιδευτικό σύστημα και , σε γενικότερο επίπεδο, από τις πεποιθήσεις για την φύση των μαθηματικών και τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης που επικρατούν στην κοινωνία. Όπως αναφέρθηκε και στο 23^{ο} Πανελλήνιο συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, στα αναλυτικά προγράμματα, στους προλόγους των κεφαλαίων και στις εισαγωγές των σχολικών βιβλίων διαβάζουμε πολλά πράγματα σχετικά με την διάταξη και τον τρόπο προσφοράς της ύλης, αλλά ποτέ δεν ελέγχθηκε αν και με ποιο τρόπο αυτά εκφράζονται στην πράξη, ώστε με αυτά τα συμπεράσματα να καταλήξουμε στο πώς πρέπει να αναπροσαρμοστούν ή να

αντικατασταθούν. Οι σύγχρονες έρευνες της Γνωστικής Ψυχολογίας οι οποίες σχετίζονται με το πώς κατακτάτε η γνώση ,έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η διαδικασία ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης είναι, μεταξύ άλλων, άμεσα συνδεδεμένη με την πρακτική δραστηριότητα Θα πρέπει λοιπόν οι επιτελείς που διαμορφώνουν τα αναλυτικά προγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα να μεριμνήσουν ώστε, τα σχολικά μαθηματικά να εστιάζουν στη φύση του μαθηματικού προτύπου ως συνδέσμου μεταξύ των μαθηματικών δομών και των πτυχών του πραγματικού κόσμου. Περαιτέρω, πρέπει οι εκπαιδευτικοί να επιμορφωθούν ώστε να μην διδάσκουν τα μαθηματικά με τρόπο που προωθεί την απομνημόνευση κανόνων και αλγορίθμων και δημιουργεί στους μαθητές την εντύπωση ότι τα μαθηματικά είναι σύνολο αφηρημένων εννοιών. Η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να δίνει έμφαση στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη κριτικής και δημιουργικής σκέψης. Άλλωστε τα αποτελέσματα από σύγχρονους διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς όπου κυριαρχεί η επίλυση προβλήματος δείχνουν ότι οι Έλληνες μαθητές δεν είχαν σημαντικές επιτυχίες, γεγονός που ενισχύει την παραπάνω άποψη.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκε και μια διχογνωμία των μαθητών σχετικά με το ερώτημα ότι στα μαθηματικά είναι ξεκάθαρο τι είναι σωστό και τι είναι λάθος. Οι μισοί περίπου μαθητές δηλώνουν ότι στα μαθηματικά ισχύει το παραπάνω και οι υπόλοιποι διαφωνούν ή δεν γνωρίζουν αν όντως συμβαίνει αυτό. Ο ρόλος των μαθηματικών στην εκπαίδευση δημιουργεί παρανοήσεις στους μαθητές και αυτός είναι ο βασικός λόγος της ύπαρξης αυτής της διχογνωμίας. Η κατάσταση αυτή οφείλεται στον χρόνο που διαθέτει το αναλυτικό πρόγραμμα για την διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία. Πώς είναι δυνατόν οι μαθητές να κατανοήσουν βασικές μαθηματικές έννοιες, την έννοια της απόδειξης και τον ρόλο που διαδραματίζει στην μαθηματική διαδικασία όταν τα αναλυτικά προγράμματα παρέχουν διττή λαθεμένη κατεύθυνση στην μαθηματική κουλτούρα της εκπαίδευσης; Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η διαδικασία εισαγωγής του μαθήματος του επαγγελματικού προσανατολισμού στην Α τάξη του Λυκείου που εισάγεται στο δεύτερο εξάμηνο σπουδών των μαθητών και από τα τόσα μαθήματα που διδάσκονται, για να διδαχτεί αντικαθιστά στο ωρολόγιο πρόγραμμα των μαθητών το μάθημα της γεωμετρίας! Οι διδακτικές ώρες των μαθηματικών είναι ούτως ή άλλως ελλιπείς και αναγκάζουν τους εκπαιδευτικούς να προχωρούν γρήγορα την ύλη άσχετα από το αν οι μαθητές την έχουν εμπεδώσει η όχι. Λαμβάνοντας υπόψη και τις ιδιαιτερότητες του μαθήματος των μαθηματικών, οι διδακτικές ώρες πρέπει να αυξηθούν και όχι να ελαττώνονται προκειμένου

να ενσωματωθούν στο ωρολόγιο πρόγραμμα και άλλα μαθήματα.

Μια ευχάριστη θα λέγαμε πτυχή της έρευνας είναι το γεγονός ότι από τις απαντήσεις φαίνεται ότι οι μαθητές δεν δέχονται πλέον την αυθεντία του καθηγητή των μαθηματικών. Οι μαθητές στη συντριπτική τους πλειοψηφία διαφωνούν με την άποψη ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αληθινή αν το επιβεβαιώσει ο καθηγητής της τάξης τους. Η έννοια της απόδειξης είναι πρωταρχική για τους μαθητές και την θεωρούν ως σημαντικό παράγοντα για την επιβεβαίωση ενός μαθηματικού συλλογισμού. Παρατηρούμε ότι η άποψη που ίσχυε τις προηγούμενες δεκαετίες για την αυθεντία των «δασκάλων» τείνει να εξαλειφθεί. Η δασκαλοκεντρική διδασκαλία με τον μονότονο λόγο του εκπαιδευτικού και τον υπερβολικό φορμαλισμό δεν είναι πλέον προσφιλής και αποδεκτή, από τους μαθητές, μέθοδος προσέγγισης. Οι καθηγητές που διδάσκουν μαθηματικά πρέπει να πραγματοποιούν επιπλέον ενέργειες. Τα διδακτικά μέσα, οι επιλεγόμενες στρατηγικές και ο τρόπος προσέγγισης των μαθητών σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο πρέπει να είναι προς την κατεύθυνση της υλοποίησης των σύγχρονων συμπερασμάτων της Διδακτικής.

Η αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης και του ρόλου που διαδραματίζει στην πιστοποίηση των μαθηματικών αληθειών προκύπτει από τα στοιχεία της έρευνας. Η πλειοψηφία των ερωτώμενων μαθητών θεωρεί ότι η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι αναγκαία για να διαπιστωθεί η αλήθεια της. Οι απόψεις των μαθητών φαίνεται ότι έρχονται σε αντίθεση με τις απόψεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου που με την πάροδο του χρόνου εξοβελίζει την αποδεικτική διαδικασία από τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία. Έτσι έρχονται οι ίδιοι οι μαθητές που θεωρούν ναι μεν ένα «βραχνά» την απόδειξη, αλλά την επιζητούν γιατί την θεωρούν σημαντική εκπαιδευτική διαδικασία. Η έρευνα κατέδειξε ότι οι ερωτώμενοι μαθητές θεωρούν ότι για μια προφανώς αληθινή πρόταση, η απόδειξη είναι απαραίτητη. Δηλαδή η απόδειξη στα μαθηματικά είναι αναγκαία και για τα προφανή συμπεράσματα. Αυτό το γεγονός δείχνει ωριμότητα των μαθητών που δεν θεωρούν αυτονόητες καταστάσεις προφανείς. Θεωρούν ακόμη την απόδειξη ως μοχλό που θα δώσει νέες μαθηματικές ανακαλύψεις, αλλά και εργαλείο που έχει την δυνατότητα να συστηματοποιήσει τις νέες γνώσεις. Μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών όμως διαπιστώνεται μια παρανόηση τους. Θεωρούν σε αρκετά μεγάλο ποσοστό ότι η παρατήρηση ενός σχήματος ή μιας γραφικής παράστασης είναι επαρκής για να τεκμηριώσει την αλήθεια ενός ισχυρισμού, δηλαδή οι μαθητές θεωρούν την ενορατική αντίληψη μιας μαθηματικής

πρότασης ικανή να θεωρηθεί ως απόδειξη και να τεκμηριώσει το συμπέρασμά της ώστε να έχει καθολική ισχύ. Η εμφάνιση μιας τέτοιας άποψης βασίζεται στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί στην προσπάθεια τους να απλοποιήσουν τις μαθηματικές διαδικασίες ώστε να γίνουν πιο κατανοητές, δεν διδάσκουν πολλές φορές τις αποδείξεις και για να κατανοήσουν οι μαθητές τις αντίστοιχες προτάσεις χρησιμοποιούν οπτικά εργαλεία όπως η παρατήρηση. Η συχνά εμφανιζόμενη αυτή κατάσταση ωθεί τους μαθητές να θεωρούν την παρατήρηση ενός σχήματος ή μιας γραφικής παράστασης και την οπτική διαπίστωση κάποιας ιδιότητας ως απόδειξη. Η κατάσταση αυτή δυστυχώς επιδεινώνεται τα τελευταία χρόνια, όπου στον βωμό των εισαγωγικών εξετάσεων η σχολική τάξη μετατράπηκε σε φροντιστηριακή και αυτοσκοπός της έγινε πλέον η μεθόδευση και η ασκησιολογία και όχι η εμβάθυνση των βασικών σημείων της διδακτέας ύλης.

Το παιδαγωγικό ινστιτούτο και οι συγγραφικές ομάδες των σχολικών βιβλίων πιεζόμενες από άλλους εξωγενείς παράγοντες αποκτούν την τάση απλούστευσης της διδακτικής ύλης των σχολείων. Παρατηρούμε τα τελευταία χρόνια συνεχή αφαίρεση αποδείξεων θεωρημάτων και βασικών μαθηματικών προτάσεων από την σχολική ύλη. Η διαδικασία αυτή από την μια μεριά μειώνει τον όγκο της εξεταζόμενης ύλης καθιστώντας την μελέτη ευκολότερη για τους μαθητές, αλλά δημιουργεί παρανοήσεις στην ισχύ των αντίστοιχων μαθηματικών προτάσεων. Η έρευνα κατέδειξε ότι οι μαθητές ναι μεν ζητούν την ύπαρξη απόδειξης σε τέτοιες περιπτώσεις αλλά απωθούν με μεγάλη ένταση την προοπτική της εξέτασής τους σε αποδείξεις που ,είτε δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, είτε υπάρχουν αλλά είναι εκτός ύλης, φοβούμενοι την πιθανή δυσκολία τους και την πιθανή αύξηση του όγκου της ύλης που έχουν για να μελετήσουν. Αποτέλεσμα αυτής της κατάστασης είναι από την μια μεριά να υπάρχει αυξημένος όγκος ύλης στα σχολικά μαθηματικά, αλλά η ύλη αυτή να υφίσταται επιφανειακή μελέτη. Τα αναλυτικά προγράμματα απαιτούν από τους μαθητές να αποκτήσουν πολλές μαθηματικές γνώσεις σε μικρό χρονικό διάστημα και έτσι η νέα γνώση είναι επιφανειακή. Ίσως θα έπρεπε να συμβαίνει το αντίθετο!

Σημαντική είναι η καταγραφή της έρευνας για τον ρόλο του αντιπαραδείγματος στην αποδεικτική διαδικασία. Είναι φανερή η άγνοια των μαθητών για την έννοια και την χρήση του αντιπαραδείγματος και πώς να μην είναι εφόσον αυτό εμφανίζεται σπανιότατα έως καθόλου στα σχολικά εγχειρίδια. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών δεν θεωρεί το αντιπαράδειγμα ως μέθοδο απόδειξης για την μη ισχύ μιας μαθηματικής πρότασης, γεγονός

που οφείλεται στην μη χρήση του αντιπαραδείγματος στην μαθησιακή διαδικασία. Η πλήρης απουσία του αντιπαραδείγματος από την διαδικασία της μάθησης μαθηματικών εννοιών, δημιουργεί συχνά πυκνά τραγελαφικές καταστάσεις. Υπάρχουν μαθητές που κατανοούν την χρήση του αντιπαραδείγματος και παρά την κατανόηση αυτή δεν το θεωρούν μέθοδο απόδειξης. Ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών (85%) θεωρεί την μέθοδο του αντιπαραδείγματος λανθασμένη και συμπληρώνει είτε ότι χρειάζεται και άλλη απόδειξη είτε ότι χρειάζεται και άλλο αντιπαράδειγμα ώστε μια πρόταση να έχει καθολική ισχύ. Η κατάσταση αυτή μεταφέρεται συχνά και στην καθημερινότητα όπου βλέπουμε στα μέσα ενημέρωσης δημοσιογράφους να διατυπώνουν εκφράσεις όπως «…. Η εξαίρεση αυτή επιβεβαιώνει τον κανόνα…» χωρίς να κατανοούν ότι μια μόνο εξαίρεση δηλώνει ότι δεν ισχύει αυτός ο κανόνας.

Τα τελευταία χρόνια εμφανίζεται στην εκπαιδευτική διαδικασία σιγά - σιγά και η νέα τεχνολογία. Εμφανίζονται νέα λογισμικά που χρησιμοποιούνται για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και προτάσεων. Μαζί με την εισαγωγή όμως των νέων τεχνολογιών που αναμφισβήτητα βοηθούν στην ανακάλυψη της νέας γνώσης εισάγονται και αρκετές παρανοήσεις για την χρήση τους. Δυστυχώς ένα πάρα πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών (85%) θεωρεί ότι η επιβεβαίωση μιας μαθηματικής σχέσης ή πρότασης μέσα από ένα λογισμικό είναι απόδειξη. Χαρακτηριστική έκφραση πολλών μαθητών είναι: «… αφού φαίνεται, …δεν ισχύει;». Οι μαθητές δεν κατανοούν ότι μια εικασία για την ισχύ μιας μαθηματικής πρότασης δεν είναι και δεν μπορεί να είναι απόδειξη. Το γεγονός αυτό οφείλεται σε πάρα πολλούς παράγοντες. Από την μια η άγνοια πολλών εκπαιδευτικών για τον ρόλο και την χρήση των νέων αυτών λογισμικών και από την άλλη η απομυθοποίηση που καλλιεργείται τα τελευταία χρόνια δημιουργούν καταστάσεις ώστε όχι μόνο οι μαθητές αλλά και πολλοί εκπαιδευτικοί να θεωρούν τα λογισμικά ως εργαλεία απόδειξης. Υπάρχουν όντως εκπαιδευτικοί που θεωρούν την χρήση των λογισμικών ως αποδεικτικό εργαλείο, χαρακτηριστικό δε παράδειγμα είναι το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων, όπου πολλοί θεωρούν την βοήθεια του λογισμικού στην εκτέλεση πολύπλοκων πράξεων ως απόδειξη. Η κατάσταση αυτή θα πρέπει να προσεχθεί και προς αποφυγή δημιουργίας παρανοήσεων , η εμφάνιση λογισμικών και η χρήση τους από εκπαιδευτικούς και μαθητές θα πρέπει να συνοδεύεται και από την ρητή θέση ότι δημιουργεί μόνο οπτικές αντιλήψεις και εικασίες, δηλώνει θέσεις και καταστάσεις εποπτικά, δεν κάνει ποτέ απόδειξη. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να επιλέγουν καταστάσεις και προβλήματα που αναφέρονται στην καθημερινή εμπειρία των μαθητών και που ανάλογες έχουν γίνει

αντικείμενο επεξεργασίας στην σχολική τάξη με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Έτσι οι μαθητές εμβαθύνουν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών οι οποίες με την βοήθεια των νέων τεχνολογιών γίνονται αντικείμενο εξερεύνησης κάτω από διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Το τρίτο μέρος της έρευνας εξέτασε την σχέση των ερωτώμενων μαθητών με δύο βασικές μεθόδους απόδειξης, την μαθηματική επαγωγή και την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Η έρευνα κατέδειξε ότι η πλειονότητα των μαθητών θεωρεί αξιόπιστες τις δύο αυτές μεθόδους απόδειξης και ικανές να αποδείξουν μια μαθηματική πρόταση όταν ενδείκνυται η χρήση μιας από τις παραπάνω μεθόδους σε αυτή. Το ποσοστό των μαθητών που θεώρησε την αντίθετη άποψη μάλλον οφείλεται στην άγνοια ορισμένων εξ΄ αυτών για τον τρόπο λειτουργίας των παραπάνω αποδεικτικών μεθόδων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι η μη ύπαρξη στο αναλυτικό πρόγραμμα της μαθηματικής λογικής δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές και δυσχεραίνει την κατανόηση των εννοιών. Η μαθηματική λογική στην δεκαετία του 80 αφαιρέθηκε από τα σχολικά μαθηματικά γιατί όπως ισχυριζόταν τότε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο δημιουργούσε σύγχυση στους μαθητές οι οποίοι χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά σύμβολα ως σύμβολα στενογραφίας. Η κατάσταση αυτή άρχισε να δημιουργεί προβλήματα γιατί ναι μεν καταργήθηκαν από τα σχολικά βιβλία τα μαθηματικά σύμβολα αλλά οι έννοιες τους δεν εξαφανίστηκαν από τα μαθηματικά – άλλωστε αυτό δεν μπορεί να γίνει. Η έλλειψη της μαθηματικής λογικής δημιουργεί συχνότατα λανθασμένες αποδείξεις σε πολλά σημεία. Μια πρόταση για περαιτέρω εμβάθυνση και έρευνα είναι να καθοριστεί ο ρόλος που έχει η λογική στην αποδεικτική διαδικασία των μαθηματικών και οι επιπτώσεις από την μη χρήση της στα σχολικά μαθηματικά.

11.7 ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Απαντήστε σύμφωνα με το φύλο, την τάξη και την κατεύθυνση που παρακολουθείται ή σκοπεύετε να επιλέξετε.

☐ Αγόρι ☐ Κορίτσι

☐ Θεωρητική ☐ Τεχνολογική ☐ Θετική

☐ Α Λυκείου ☐ Β Λυκείου ☐ Γ Λυκείου

1. Τα μαθηματικά ,όπως τα διδάσκεσαι στο σχολείο, σε ποιο βαθμό θεωρείτε ότι σχετίζονται με την :

	Καθόλου	Λίγο	Δεν γνωρίζω	Αρκετά	Πολύ
α. Παρατήρηση	☐	☐	☐	☐	☐
β. Διαίσθηση	☐	☐	☐	☐	☐
γ. Φαντασία	☐	☐	☐	☐	☐
δ. Λογική σκέψη	☐	☐	☐	☐	☐
ε. Απόδειξη	☐	☐	☐	☐	☐

2. Τα μαθηματικά είναι χρήσιμα γιατί έχουν σχέση με «τον πραγματικό κόσμο»

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

3. Αντίθετα από τα περισσότερα άλλα μαθήματα, στα μαθηματικά είναι ξεκάθαρο τι είναι σωστό και τι είναι λάθος.

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

4. Εάν ο καθηγητής σας αναφέρει ότι μια μαθηματική πρόταση είναι αληθινή, τότε δεν είναι αναγκαίο αυτή η πρόταση να αποδειχτεί.

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

5. Η απόδειξη ενός θεωρήματος από το σχολικό σας βιβλίο είναι αναγκαία για το κατανοήσετε καλύτερα.

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

6. Η απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης είναι αναγκαία για να διαπιστωθεί η αλήθεια της.

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

7. Εάν μια μαθηματική πρόταση είναι προφανώς αληθινή δεν είναι απαραίτητο να αποδειχτεί.

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

8. Η χρήση της απόδειξης θεωρείται σημαντική για την ανακάλυψη ή την συστηματοποίηση νέων γνώσεων και θεωριών

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

9. Η απάντηση με βάση την παρατήρηση ενός σχήματος ή μιας γραφικής παράστασης τεκμηριώνει την αλήθεια ενός ισχυρισμού στα μαθηματικά.

☐ Διαφωνώ ☐ Μάλλον Διαφωνώ ☐ Δεν γνωρίζω ☐ Μάλλον Συμφωνώ ☐ Συμφωνώ

10. Στο σχολικό σας βιβλίο υπάρχουν μαθηματικές προτάσεις στις οποίες δεν υπάρχει η απόδειξή τους ή υπάρχει αλλά με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα είναι εκτός ύλης. Σε αυτές τις μαθηματικές προτάσεις οι αποδείξεις τους πρέπει να διδάσκονται στην τάξη;

☐ Όχι δεν είναι σημαντικό να μαθαίνεις κάτι που είναι εκτός ύλης.

☐ Όχι δεν πρέπει να διδάσκονται γιατί δημιουργούν σύγχυση στους μαθητές

☐ Να γίνονται κάποιες από τις αποδείξεις για τους καλούς μαθητές.

☐ Να γίνονται όλες οι αποδείξεις αλλά να μην εξετάζονται γιατί κατά κανόνα είναι δύσκολες.

☐ Ναι, να διδάσκονται ώστε οι μαθητές να κατανοούν καλύτερα την πρόταση που αποδεικνύουν.

Αν υπάρχει άλλη απάντηση να διατυπωθεί

_____
_____
_____
_____

11. Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι μια μαθηματική πρόταση δεν ισχύει παρουσιάζει ένα παράδειγμα όπου ισχύουν οι υποθέσεις της πρότασης αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμά της και το παράδειγμα αυτό (αντιπαράδειγμα) το παρουσιάζει ως απόδειξη. Η δική σας άποψη είναι:

☐ Τέτοιας μορφής απόδειξη είναι λάθος. Το αντιπαράδειγμα δεν είναι μέθοδος Απόδειξης.

☐ Με την χρήση του αντιπαραδείγματος η απόδειξη είναι ελλιπής, θα πρέπει να αποδειχθεί επιπλέον ότι η πρόταση δεν ισχύει με μαθηματικούς συλλογισμούς.

☐ Η χρήση ενός αντιπαραδείγματος που φανερώνει ότι η μαθηματική πρόταση δεν ισχύει είναι αρκετή για να δηλώσει την μη ισχύ της μαθηματικής πρότασης.

☐ Θα πρέπει να βρεθεί τουλάχιστον άλλο ένα αντιπαράδειγμα ώστε να θεωρηθεί η απόδειξη πλήρης.

Αν υπάρχει άλλη απάντηση να διατυπωθεί

_____
_____
_____

12. Σε μια μαθηματική πρόταση παρουσιάζεται η απόδειξη της με την χρήση λογισμικού σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η δική σας άποψη για τέτοιου είδους αποδείξεις είναι:

☐ Η επιβεβαίωση της ισχύος της πρότασης μέσα από ένα λογισμικό είναι αρκετή για να δηλωθεί ως απόδειξη της πρότασης.

☐ Η επιβεβαίωση της ισχύος της πρότασης μέσα από λογισμικό δεν είναι αρκετή χρειάζεται και ένα τουλάχιστον παράδειγμα χωρίς την χρήση του υπολογιστή που να επιβεβαιώνει την αλήθεια της πρότασης.

☐ Η επιβεβαίωση της πρότασης μέσα από λογισμικό προσδιορίζει μια εικασία για την ισχύ της πρότασης, για την πλήρη απόδειξη της πρότασης χρειάζεται οπωσδήποτε η απόδειξη της με μαθηματικούς συλλογισμούς.

☐ Η επιβεβαίωση της πρότασης μέσα από λογισμικό μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη αν το λογισμικό είναι εγκεκριμένο από το υπουργείο Παιδείας.

☐ Η επιβεβαίωση της πρότασης μέσα από λογισμικό μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη όταν έχει γίνει σύμβαση από τον καθηγητή και τους μαθητές της τάξης.

Αν υπάρχει άλλη απάντηση να διατυπωθεί

_____

_____

_____

_____

13. Ένας μαθητής στην προσπάθεια του να αποδείξει την ισότητα

$$1+2+3+...+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$ **για κάθε θετικό ακέραιο ν,**

απέδειξε ότι ισχύει για ν = 1, 2, 3, 4 και 5 και στη συνέχεια θεώρησε ότι αφού η ισότητα ισχύει για τις πέντε πρώτες τιμές του θετικού ακέραιου ν θα ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους. Η δική σας άποψη είναι:

☐ Για να είναι η απόδειξη της ισότητας πλήρης θα πρέπει να αποδειχτεί για περισσότερες τιμές του θετικού ακεραίου ν.

☐ Δεν είναι αναγκαία η απόδειξη της ισότητας για πέντε διαφορετικές τιμές του θετικού ακέραιου ν, τρεις μόνο αρκούν.

☐ Για να είναι σωστή η απόδειξη της ισότητας θα πρέπει να δεχτούμε την ισχύ της για ένα τυχαίο θετικό ακέραιο κ και στην συνέχεια να αποδείξουμε την ισχύ της για τον επόμενο θετικό ακέραιο κ + 1.

☐ Η απόδειξη είναι πλήρης. Η αλήθεια της ισότητας για πέντε διαφορετικές τιμές του θετικού ακεραίου ν είναι αρκετή για να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η πρόταση ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο.

☐ Για να είναι σωστή η απόδειξη της ισότητας θα πρέπει να αποδείξουμε την ισχύ της για ν = 1 και μετά πρέπει να δεχτούμε την ισχύ της για ένα τυχαίο θετικό ακέραιο κ και στην συνέχεια να αποδείξουμε την ισχύ της για τον επόμενο θετικό ακέραιο κ+1.

Αν υπάρχει άλλη απάντηση να διατυπωθεί

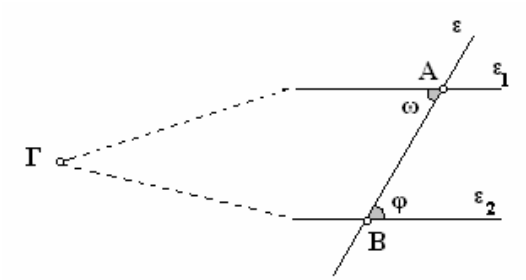
_____

_____

_____

_____

14. Θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση «**Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ω και φ ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες**»



Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε ότι οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Γ,
τότε $\varphi = \omega + \Gamma$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή $\varphi \neq \omega$. Άτοπο, επομένως οι ευθείες είναι παράλληλες.

Η άποψή σας για την παραπάνω απόδειξη είναι:

☐ Η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί το τρίγωνο ΑΒΓ.

☐ Η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.

☐ Η απόδειξη δεν είναι σωστή γιατί όταν δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου δεν είναι παράλληλες, δεν είναι αναγκαστικά τεμνόμενες.

☐ Η απόδειξη είναι σωστή αλλά δεν είναι αναγκαία η ύπαρξή της γιατί διαισθητικά είναι φανερό ότι αν οι εντός εναλλάξ γωνίες ω και φ είναι ίσες τότε αναγκαστικά θα είναι οι ευθείες παράλληλες.

☐ Η απόδειξη είναι σωστή γιατί η μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιήθηκε είναι μια παραδεκτή μέθοδος απόδειξης στα μαθηματικά.

Αν υπάρχει άλλη απάντηση να διατυπωθεί

_____

_____

_____

_____

12 ΕΠΙΛΟΓΟΣ (Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ)

Το 1928, ο G.H. Hardy έγραψε: Δεν υπάρχει αυστηρά καθορισμένη ομιλία στις μαθηματικές αποδείξεις. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε στο τελικό μέρος της ανάλυσης είναι να υποδεικνύουμε... οι αποδείξεις είναι αυτό που ο Littlewood ονομάζει "φλυαρίες", ρητορικά στολίδια σχεδιασμένα να επηρεάζουν την ψυχολογία, σχέδια πάνω στον πίνακα σε κάποια διάλεξη, επινοήσεις σχεδιασμένες για να ερεθίζουν τη φαντασία των μαθητών (Kline,1980). Κάποια χρόνια μετά, ο μαθηματικός R. L. Wilder υποστήριξε ότι μια απόδειξη είναι απλά ένας τρόπος να "δοκιμάσουμε τα προϊόντα της διαίσθησής μας". Προφανώς, ποτέ δεν κατέχουμε και, πιθανότατα ποτέ δεν θα κατέχουμε, κανένα τύπο αποδείξεων που να είναι ανεξάρτητος του χρόνου, του προς απόδειξη πράγματος, ή του ατόμου ή της σχολής σκέψης που τον χρησιμοποιεί. Και κάτω από αυτές τις συνθήκες, το λογικό είναι να παραδεχτούμε ότι δεν υπάρχει, σε γενικές γραμμές, η απόλυτη αλήθεια [απόδειξη] στα μαθηματικά, ότι κι αν νομίσει ο κόσμος . Ο Whitehead αντιτάχθηκε στη θεμελίωση της φιλοσοφικής σκέψης στις συγκεκριμένες αναλύσεις των ειδικών επιστημών- από την πλευρά της ανάπτυξης της σκέψης, η ακρίβεια και η λογική είναι μια "απάτη" (Kline,1980).

Η άποψη που έχουν οι μαθηματικοί για τις αποδείξεις ποικίλλει ανάλογα με το χώρο και το χρόνο. Οι J.Hoene- Wronski, Lacroix και Jacobi ήταν οι μαθηματικοί που συνεισέφεραν στη χαμηλή υπόληψη της αυστηρότητας και των αποδείξεων στα 1850 (Kline,1980). Εύκολα βρίσκουμε παραδείγματα μιας συνεχιζόμενης προτίμησης στην αυστηρότητα και την απόδειξη, ακόμα και στον "θεμελιώδη" ευαίσθητο εικοστό αιώνα. Ακόμα και ο Bertrand Russel έγραψε το 1903 ότι μια από τις κύριες αξίες των αποδείξεων είναι ότι "προωθούν σιγά σιγά ένα βέβαιο σκεπτικισμό σχετικά με το αποτέλεσμα της απόδειξης" (Kline,1980). Ο Kline (1980) υποστήριξε ότι στο τέλος η λογική ηττήθηκε από την αυστηρότητα και την τυπικότητα των μαθηματικών. Σαν αποτέλεσμα, η απόδειξη ακόμα μια φορά αναλαμβάνει ένα δευτερεύοντα ρόλο, με τη διαίσθηση να αναπτύσσεται ως η ουσιαστική βάση των δημιουργικών μαθηματικών.

Ο Kline κρούει τον κώδωνα του κινδύνου ενάντια στη "λογική αμηχανία" που προτείνεται από τους Βουρβακιστές. Οι ιστορικές αλλαγές στο νόημα που αποδίδεται στις αποδείξεις και στο ποσό ενέργειας που αφιερώνεται στη διαδικασία των αποδείξεων δείχνει ότι πρέπει να εξετάσουμε τη σχέση των αλλαγών αυτών

(ταλαντεύσεων) με τις αλλαγές στην κοινωνική δομή της μαθηματικής εργασίας. Για την ώρα, ας σημειώσουμε ότι η διαδικασία των αποδείξεων φαίνεται να αποκτά όλο και μεγαλύτερη σημασία όποτε η μαθηματική εργασία αναπτύσσει έναν συγκεκριμένο βαθμό κοινωνικής αυτονομίας. Μπορούμε να φανταστούμε τις αποδείξεις σαν αντικείμενα πολιτισμού και, συγκεκριμένα, αν μπορούμε να τις δούμε σαν εργαλεία ή μηχανές για την επεξεργασία δεδομένων μαθηματικών αντικειμένων και για την παραγωγή νέων μαθηματικών αντικειμένων. Ο Kitcher παραθέτει έναν λειτουργικό χαρακτηρισμό για τις αποδείξεις. Τις ονομάζει "μια σειρά δηλώσεων στην οποία κάθε μέλος της σειράς είναι ή μια βασική, εκ των προτέρων δήλωση ή μια δήλωση η οποία ακολουθεί προηγούμενα μέλη της σειράς, σύμφωνα με έναν κανόνα ο οποίος εξασφαλίζει εκ των προτέρων κάποιο συμπέρασμα" Το άγχος της απόδειξης είναι συνηθισμένο στα μαθηματικά και δεν είναι προϊόν κάποιων αποδείξεων οι οποίες έχουν προέλθει με τη βοήθεια υπολογιστή. Υπάρχει πάντα το μέλημα σε μια μακροσκελή απόδειξη πως ακόμα και αν κάποιος είναι σίγουρος για την ορθότητα του κάθε βήματος, εντούτοις πάντα μπορεί να κρύβεται κάπου ένα λάθος. Ο Kitcher σημειώνει ότι υπάρχει ένα είδος κοινωνικής ψυχολογίας στις αποδείξεις. Είτε είσαι αρχάριος είτε "παλιός", αν οι άλλοι υποστηρίζουν την αιτιολόγησή σου νιώθεις σίγουρος για την ορθότητα της απόδειξής σου. Εντούτοις, η λογική αμφιβολία που εγείρεται όταν ακολουθούμε περίπλοκες αποδείξεις μπορεί να αξιοποιηθεί στις περιπτώσεις όπου δεχόμαστε κριτική και όχι χειροκροτήματα από τον κόσμο των γραμμάτων. Η αβεβαιότητα είναι λογικά συμβατή με τη γνώση εξαιτίας της φύσης των μέχρι τώρα εμπειριών. Μετασχηματίζοντας την ποιότητα της ζωής μας, η γνώση και η αβεβαιότητα θα σταματήσουν να συνυπάρχουν (Kitcher,1984).

Κάποιοι διορατικοί θεωρούν ότι το μόνο που κάνει μια απόδειξη είναι να πιστοποιεί ότι κάποιες συγκεκριμένες κατασκευές έχουν συγκεκριμένες ιδιοκτησίες (Kitcher,1983). Αλλά κάποιες άλλες εκθέσεις θεωρούν ότι οι αποδείξεις έχουν άλλη λειτουργία: για παράδειγμα, μπορούν να παράγουν γνώση ή να μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε νέα γνώση από την ήδη υπάρχουσα. Αλλά αν και όπου μια αποδεικτική διαδικασία είναι, στην πραγματικότητα, "ένας καλά ορισμένος επαναληπτικός μετασχηματισμός κάποιων τύπων σε νέους τύπους", μπορούμε να μηχανοποιήσουμε τη διαδικασία (Hawkins,1964). Αυτή είναι μια σημείωση που υποδηλώνει πολλά

πράγματα και με ωθεί να σκεφτώ μέχρι σε ποιο σημείο οι αποδείξεις, γενικά, είναι μηχανισμοί.

Ο Curry (1951) φαντάζεται ότι τα τυπικά συστήματα ορίζονται από ένα πρωτόγονο πλαίσιο, δηλαδή από μια ομάδα συνηθειών. Αυτό το πρωτόγονο πλαίσιο παρέχει στον "μηχανικό" (μαθηματικό) "όσα δεδομένα χρειάζεται (εκτός από την τεχνογνωσία) για να κατασκευάσει τον απαιτούμενο μηχανισμό για την παραγωγή των τύπων". Αυτό φαίνεται να είναι σύμφωνο με ορισμούς τυπικών αποδείξεων όπως ο παρακάτω: "Μια (τυπική) απόδειξη είναι μια πεπερασμένη σειρά ενός ή περισσοτέρων τύπων, τέτοια ώστε κάθε τύπος της σειράς αυτής είναι ή ένα αξίωμα ή μια άμεση συνέπεια των προηγουμένων τύπων της σειράς (Kleene,1971). Δείτε μια απόδειξη σαν ένα πείραμα. Φτιάχνουμε έναν μηχανισμό ο οποίος ονομάζεται "Δεδομένο ότι..." ή "Εάν...". Έπειτα, "τρέχουμε" το πείραμα. Στην απόδειξη, μεταφέρουμε διαισθητικά ή και κατασκευαστικά λειτουργίες οι οποίες επιτρέπονται από το μηχανισμό, ή βάζουμε το μηχανισμό να λειτουργήσει. Μετά, περιμένουμε για κάποιο "αποτέλεσμα". Αυτό είναι το "Τότε.." ή το "Έπεται ότι...". Αυτή η αντίληψη για τις αποδείξεις, συμπτωματικά, έρχεται αμέσως μετά τη θεώρηση της απόδειξης σαν μια μαθηματική επίδειξη.

13. ΑΝΑΦΟΡΕΣ - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Avital. L. & Hansen, R. (1976). Mathematical induction in the classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 7, 399 – 411.

Balacheff, N. (1988). A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics 7, 23 – 40*

Balacheff, N. (1989). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof CNRS Grenoble - France

Ball, D. L.,& Bass, H. (2000). *Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.),* Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education, 193–224.Chicago: University of Chicago Press.

Fischbein E. (1999). *Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning.* Educational Studies in Mathematics (38): 11 – 50.

Greer, B. Vercschaffel, L, and Eric de Corte: *"The answer is really 4.5"*: Beliefs about word problems.

Hanna, G.(2000) The ongoing value of proof. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 1,Valencia, Spain.

Hanna, G. & Jahnke, N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop; K. Clements, C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education, 877– 908. Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education. III, 428. Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy L. & Hoyles C. (1998) *Justifying and proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK.* Research Report. Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London.

Healy, L. and Hoyles, C.(2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education* 31 no4 396-428 Jl

Hiebert, J.& Carpenter, T.P. (1992). *"Learning and Teaching with Understanding"* in D.A. Grouws (ed.) *Handbook of research in mathematic teaching and learning,* New York: McMillan.

Hoyles, C. and Jones, K. (1998). Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: C. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Dordrecht: Kluwer. p.p. 121 – 128.

Lampert, M (2001) When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), Spring.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Alan H. Schoenfeld, editor, *Mathematical Thinking and Problem Solving*, p. 53–70. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Sternberg, R. (1999). The nature of mathematical reasoning. In Lee V. Stiff, editor, *1999 NCTM Yearbook: Developing Mathematical Reasoning in Grades K–12*, pages 37–44. NCTM, Reston, VA

Pedemonde B. (2007). *How can the Relationship Between Argumentation and Proof be Analyzed?* Educational Studies of Mathematics (66): 23 – 41.

Pedemonde B. (2008). *Argumentation and Algebraic Proof.* Mathematical Education (385- 400).

Polya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. Vol.1: Induction and analogy in mathematics. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. New York: John Wiley & Sons.

Reid, D. (1996) The Meaning of Proof in Mathematics Education.

Van Dyke, B.(2003). Final Paper Math 791. *Kansas State University*

Αναπολιτάνος, Δ. (1985) *«Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών»* Εκδόσεις Νεφέλη. Αθήνα.

Γαγάτσης, Α. (1995) *«Διδακτική των Μαθηματικών».* Εκδόσεις: Art of Text. Θεσσαλονίκη.

Γιαννακούλιας Ε. (2006) *«Απειροστικός Λογισμος. Η Ιστορική του Εξέλιξη από τον 5^{ο} π.χ έως τον 19^{ο} Αιώνα».* Εκδοσεις Αθανασόπουλος Σ.- Παπαδάμης Ε. και Σία Ε.Ε. Αθήνα.

Δαμαλάς, Γ. (1998) *« Το Αντιπαράδειγμα και η Διδακτική του Σημασία».* Πρακτικά 15^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Χίος.

Δρόσος, Κ. (1986) *«Περιήγηση στα Μαθηματικά».* Πανεπιστήμιο Πατρών. Πάτρα.

Κυριακόπουλος Αντώνης (1990) *«Μέθοδοι Απόδειξης»* Αθήνα: Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας. Ε. (1999). *Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι.* Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Μυτιληναίος, Μ. (2004). *Λογική.* Αθήνα: Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Μυτιληναίος, Μ.& Κατερίνης, Π. (1993). *Διακριτά Μαθηματικά.* Αθήνα: Εκδόσεις Ε. Μπένου.

Τουμάσης, Μ. (2000). *« Η Απόδειξη στα Μαθηματικά».* Αθήνα.