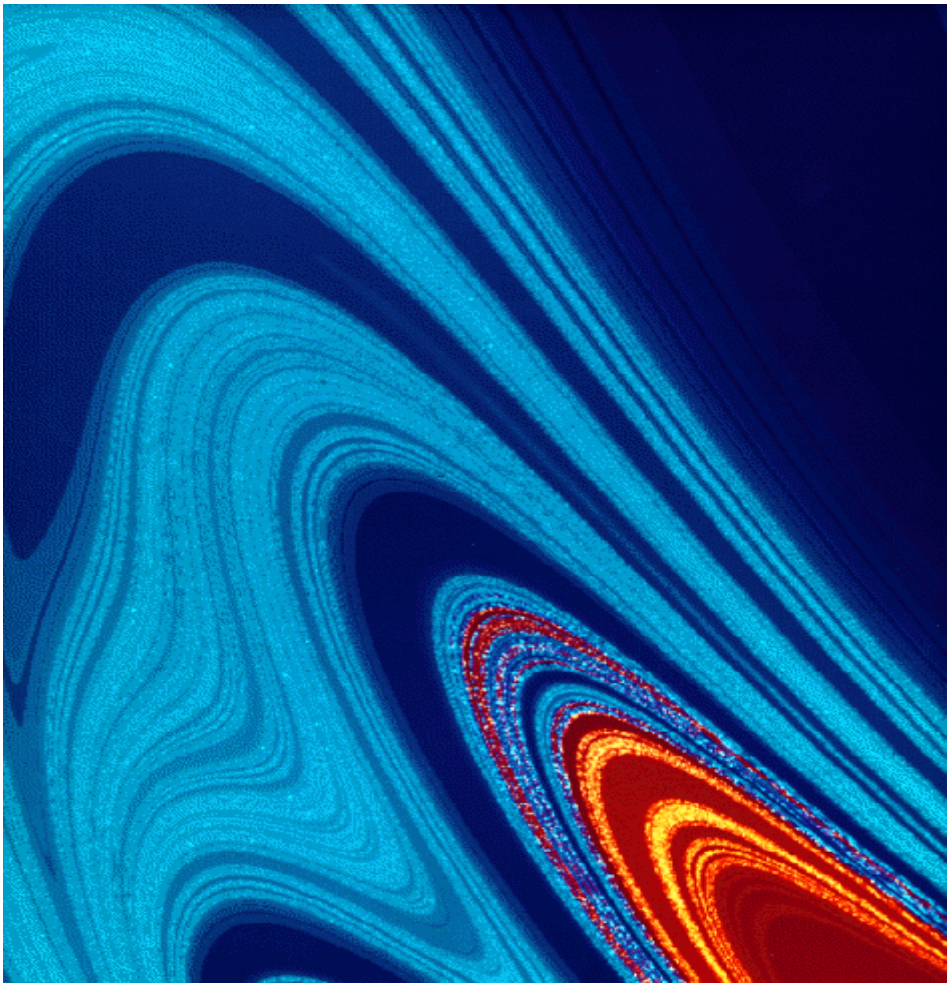
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"



ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑ
Α.Μ. Δ201027

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΛΑΠΠΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)…… (επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Διονύσιο Λάππα, αρχικά για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στην τριμελή επιτροπή και στη συνέχεια, για την πολύτιμη βοήθειά του σε κάθε στάδιο της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.
- Τους καθηγητές κ. Παναγιώτη Σπύρου, κ. Ευάγγελο Ράπτη & κ. Γρηγόρη Καλογερόπουλο, για τις συμβουλές, τις παρατηρήσεις και την άμεση ανταπόκρισή τους σε όποια θέματα και αν προέκυπταν κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου τόσο στο προπτυχιακό όσο και στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα.
- Την γραμματέα, του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, κα. Διονυσία Μπακογιάννη, για την απεριόριστη υπομονή της και τη συνεχή προσπάθειά της να μας ενημερώνει και να μας εξυπηρετεί άμεσα.
- Τον κ. Γιάννη Πλουμπίδη, για τη σημαντική βοήθειά του και την καλή του προαίρεση να στρίξει ενεργά το σύνολο των προσπαθειών για τη διεκπεραίωση των σπουδών μου.
- Όλους τους διδάσκοντες και τους συμφοιτητές μου.
- Ιδιαίτερα την Αγγελική Λαγοδόντη & την Ανθή Σαχά για τη συνεργασία και τη φιλία τους, που ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση των σπουδών μου.
- Τους γονείς μου Ελευθέριο & Χρυσούλα και τις αδελφές μου Παναγιώτα & Κωνσταντίνα, που στάθηκαν δίπλα μου με απεριόριστη υπομονή και αγάπη όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ…… **7**

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

1. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ……. **8**

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΕΝΙΚΑ……. **8**
1.2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ……. **10**
1.3. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ……... **13**
1.4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΧΑΟΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ…. **15**
1.5. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ……. **17**

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ, ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΟΥΣ... **22**

2.1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ…… **22**
2.1.1. Διακριτές Ακολουθίες…….. **22**
2.1.2. Η Συνέχεια των Μεταβλητών…….. **23**
2.1.3. Συμβολισμοί Διακριτών Δεδομένων……... **23**
2.2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ……. **25**
2.2.1. Διαφορετικά μοτίβα του ίδιου προβλήματος……... **26**
2.2.2. Διαφορετικές μορφές εξισώσεων διαφορών…… **29**
2.3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ…….. **31**
2.3.1. Αριθμητική προσέγγιση του μοντέλου…… **31**
2.3.2. Γραφική προσέγγιση του μοντέλου……. **32**
2.3.3. Θεωρητική προσέγγιση του μοντέλου……. **34**
2.3.4. Ακρίβεια του μοντέλου μέσω προσεγγίσεων…….. **36**
2.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ…….. **39**

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ Ή ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ……. **42**

3.1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ……. **42**
3.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ…... **43**
3.2.1. Αριθμητικές ιδιότητες μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης..... **44**
3.2.2. Γραφικές ιδιότητες μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης……... **44**
3.2.3. Θεωρητικές ιδιότητες μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης……... **45**
3.3. ΒΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ…… **46**
3.4. ΜΕΛΕΤΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ…… **50**
3.5. ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ… **51**

3.5.1. Αναλογική αιτιολόγηση……... **51**
3.5.2. Συνεχείς μεταβλητές…… **53**
3.6. ΑΠΟ ΑΠΛΑ ΣΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΠΕΡΙΠΛΟΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ: ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ……. **54**

4. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ……... **56**

4.1. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ……... **56**
4.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ… **60**
4.2.1. Αριθμητικές ιδιότητες μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης…… **60**
4.2.2. Γραφικές ιδιότητες μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης……. **61**
4.2.3. Θεωρητικές ιδιότητες μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης……. **62**
4.3. ΒΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ..... **65**
4.4. ΜΕΛΕΤΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ..... **68**
4.4.1. Αλγεβρικά..... **70**
4.4.2. Γραφικά..... **71**
4.4.3. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων..... **72**
Α. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων αριθμητικά και γραφικά..... **73**
Β. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων θεωρητικά..... **75**
Γ. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων αλγεβρικά..... **76**
4.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ..... **78**

5. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΚΑΙ ΡΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **79**

5.1. ΜΕΛΕΤΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ..... **79**
5.2. ΜΕΛΕΤΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ..... **83**
5.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΡΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ..... **86**

6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **89**

6.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ..... **89**

6.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ..... **94**
6.2.1. Αριθμητικές ιδιότητες μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης..... **94**
6.2.2. Γραφικές ιδιότητες μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης..... **94**
6.2.3. Θεωρητικές ιδιότητες μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης..... **96**
6.3. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ..... **99**
6.4. ΜΕΛΕΤΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ..... **102**
6.4.1. Αλγεβρικά..... **102**
6.4.2. Γραφικά..... **102**
6.4.3. Επίλυση γεωμετρικών εξισώσεων..... **105**

6.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ..... **111**

7. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **112**

7.1. ΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΙΣΤΟΡΙΚΑ..... **112**
7.2. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **113**
7.3. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ..... **114**
7.4. ΚΛΙΜΑΚΑ RICHTER..... **117**
7.5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ..... **118**

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ

8. ΜΕΙΚΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **122**

8.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ..... **122**
8.2. ΜΕΙΚΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ..... **123**

9. ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ (LOGISTICS) ΜΟΝΤΕΛΑ..... **129**

9.1. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ..... **129**
9.2. ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **132**
9.2.1. Εξισώσεις διαφορών λογιστικής ανάπτυξης..... **133**
9.2.2. Ποιο είναι το σωστό εύρος του πληθυσμού..... **134**
9.2.3. Που σταθεροποιείται ένα λογιστικό μοντέλο..... **135**
9.2.4. Πότε σταθεροποιείται ένα λογιστικό μοντέλο..... **137**
9.3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ..... **139**

10. ΧΑΟΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ..... **141**

10.1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ.. **141**
10.2. ΧΑΟΣ ΣΤΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ..... **144**
10.3. Η ΤΑΞΗ ΣΤΟ ΧΑΟΣ..... **153**

ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ..... **159**
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... **162**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η μαθηματική μοντελοποίηση και οι χαοτικές της επεκτάσεις αποτελούν το κύριο θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Βασίστηκε ουσιαστικά στο βιβλίο του Dan Kalman με τίτλο *Elementary Mathematical Models Order Aplenty and a Glimpse of Chaos*, το οποίο θεωρούμε ιδανικό για παρουσίαση θεμάτων μοντελοποίησης σε σχολικά περιβάλλοντα. Προσπαθήσαμε να διευρύνουμε το πνεύμα του βιβλίου, ενσωματώνοντας κάποια νέα παραδείγματα και θεωρητικές προεκτάσεις που εντοπίσαμε στη βιβλιογραφία που παρατίθεται και ιδιαίτερα στο βιβλίο του κ. Καλογερόπουλου, (2000) *Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές (Σημειώσεις Παραδόσεων)*.

Να σημειωθεί ότι τα στοιχειώδη μαθηματικά μοντέλα που θα παρουσιαστούν δεν εμφανίζονται με τυχαία σειρά αλλά, όπως θα προκύψει, με *αυξανόμενη συνθετότητα*. Τα κυριότερα από αυτά είναι τα γραμμικά, τα τετραγωνικά, τα γεωμετρικά μοντέλα, τα μεικτά και τελικά τα λογιστικά. Η ανάλυση της χαοτικής συμπεριφοράς των τελευταίων παρουσιασμένη με *μαθηματικό φορμαλισμό*, θα κλείσει τον κύκλο της μελέτης των μαθηματικών μοντέλων.

Πιο συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε τα μαθηματικά μοντέλα μελετώντας τα με *τρεις διαφορετικές μεθόδους*: αριθμητική, γραφική και θεωρητική. *Οι αριθμητικές μέθοδοι* εμπλέκουν τα πραγματικά δεδομένα (π.χ. υπολογισμός διαφορών ανάμεσα σε διαδοχικές καταχωρήσεις) και χρησιμοποιούν άμεση χρήση των αριθμών ως βασικό τους εργαλείο. Χρησιμοποιούν, δηλαδή, τα μαθηματικά για υπολογισμούς. Οι *γραφικές μέθοδοι* περιέχουν τρόπους που μπορούν να απεικονίσουν τα δεδομένα (π.χ. με ραβδόγραμμα ή διάγραμμα μέσω γραμμών) και να ερμηνεύσουν αυτές τις απεικονίσεις (π.χ. από μέγεθος ράβδων ή πόσο απότομα κλείνουν οι ευθείες στο γράφημα). Χρησιμοποιούν, δηλαδή, τα μαθηματικά για γραφήματα. Οι *θεωρητικές μέθοδοι* ή Αναλυτικές/Συμβολικές μέθοδοι, χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία για την έκφραση και το χειρισμό σχέσεων ή προτύπων. Τα εργαλεία περιλαμβάνουν συναρτήσεις μεταβλητών, άλγεβρα καθώς και κατανόηση της συμπεριφοράς διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων.

Η ανάπτυξη των θεμάτων είναι κάπως εκτεταμένη γιατί ταυτόχρονα αυτά αποτελούν και *υλικό διδασκαλίας*. Οποιοσδήποτε καθηγητής που ενδιαφέρεται να διδάξει σε μαθητές ή φοιτητές κάποιο αντίστοιχο κεφάλαιο, σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση, θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει αυτούσια ή ακόμη και να προσαρμόσει, σύμφωνα με το επίπεδο των διδασκομένων, κάποιες από τις ενότητες που ακολουθούν. Να σημειωθεί ότι ο εκάστοτε διδάσκων μπορεί μέσω της θεωρίας και των παραδειγμάτων που παρουσιάζονται σε κάθε κεφάλαιο, να οργανώσει τη διδασκαλία του είτε στα πλαίσια της παραδοσιακής, δασκαλοκεντρικής μεθόδου ή εναλλακτικά και πιο σύγχρονα να βασιστεί σε ομαδοσυνεργατικά μοντέλα μάθησης.

1. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Παρά τη διαδεδομένη άποψη του ότι τα μαθηματικά διανύουν μια περίοδο τα τελευταία χρόνια βραδείας εξέλιξης, η πραγματικότητα φαίνεται να μας διαψεύδει. Τα μαθηματικά βρίσκονται σε ένα πλαίσιο αμφίδρομης σχέσης με την τεχνολογία καθώς και με τις άλλες επιστήμες. Αυτό συμβαίνει γιατί παράγουν την κατανόηση και τη μελέτη πολλών επιστημονικών τομέων και τα ίδια εμπλουτίζονται διαρκώς με νέα προβλήματα που ανακύπτουν.

Η μοντελοποίηση στα μαθηματικά αφορά στη μελέτη δυναμικών συστημάτων. Στην ουσία ένα σύστημα είναι ένας μετασχηματιστής, ο οποίος κάτω από τη επιρροή εξωτερικών ερεθισμάτων (εισόδους) είναι σε θέση να παράγει αποκρίσεις (εξόδους). Χαρακτηριστικό του συστήματος είναι ότι διαθέτει μια τρέχουσα εσωτερική κατάσταση και ενδεχομένως να διαθέτει και μνήμη (Καλογερόπουλος, 2011).

Στενή σύνδεση παρατηρούμε ανάμεσα στην έννοια του συστήματος και την ανάδραση (feedback). Μέσα από αυτή τη σχέση δημιουργείται ένα νέο σύστημα που δέχεται για είσοδο την έξοδο του αρχικού συστήματος η οποία μετασχηματίζεται σε πληροφορία που μπορεί να γίνει αποδεκτή από το αρχικό σύστημα, για να επιτύχουμε την επιθυμητή απόκριση (Καλογερόπουλος, 2011).

Μαθηματική μοντελοποίηση είναι η διαδικασία κατασκευής μαθηματικών μοντέλων των οποίων η συμπεριφορά ή οι ιδιότητες μπορούν και αντιστοιχούν σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα του πραγματικού κόσμου. Τα δύο πιο βασικά κίνητρα για τη μαθηματική μοντελοποίηση είναι η δυνατότητα κατανόησης και η δυνατότητα πρόβλεψης (ή προσομοίωσης). Η διαδικασία μοντελοποίησης μπορεί να περιγραφεί από τα εξής βήματα: παρατήρηση φαινομένου, διατύπωση μιας υπόθεσης, ανάπτυξη μεθοδολογίας ελέγχου της υπόθεσης, συλλογή δεδομένων, έλεγχος υπόθεσης ως προς τα δεδομένα, αποδοχή ή απόρριψη της υπόθεσης. Θα πρέπει να επιδιώκουμε μια ισορροπία ανάμεσα στις τρεις, ίσως αλληλοαναιρούμενες απαιτήσεις για ένα καλό μοντέλο: ακρίβεια, προσαρμοστικότητα, κόστος (Στρατής, 2011).

Στο κεφάλαιο της εργασίας μας, θα αναπτύξουμε αρχικά τη γενική έννοια της μοντελοποίησης, ξεκινώντας με μια ιστορική αναδρομή. Θα δούμε πως αυτή διαπερνά το φάσμα των επιστημών και ιδιαίτερα την επιστήμη των μαθηματικών. Η μοντελοποίηση, όπως θα δούμε στο τέλος του κεφαλαίου, σχετίζεται άμεσα και με τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία, βοηθώντας τα παιδιά να κατανοήσουν δύσκολες έννοιες αφού αποδοθούν με πιο απλοποιημένη μορφή μέσω των μοντέλων.

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΕΝΙΚΑ

Ιστορικά, τα πρώτα αναγνωρίσιμα μαθηματικά μοντέλα ήταν οι *αριθμοί*, οι οποίοι χρονολογούνται από το 30.000 π.Χ. περίπου. Στη συνέχεια, ακολούθησε η Αστρονομία και η Αρχιτεκτονική γύρω στο 4.000 π.Χ. Ο Βαβυλωνιακός, ο Ινδικός και ο Αιγυπτιακός πολιτισμός ανέπτυξαν την αλγοριθμική επίλυση προβλημάτων καθημερινής ζωής γύρω στο 2.000 π.Χ. Η ανάπτυξη της ελληνικής φιλοσοφίας και η

σχέση της με τα Μαθηματικά άνοιξε το δρόμο για παιδαγωγική μέθοδο, η οποία οδήγησε στα πρώτα στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας. Στο πέρασμα των αιώνων, η μοντελοποίηση αναπτύχθηκε εντυπωσιακά. Αρκεί μόνο να αναλογιστούμε τα επιτεύγματα ενός από τους πρώτους «εφαρμοσμένους μαθηματικούς», τον Ερατοσθένη, ο οποίος πρώτος κατάφερε να υπολογίσει την απόσταση ανάμεσα σε Γη και Ήλιο, Γη και Σελήνη και την περίμετρο της Γης με τη χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου γύρω στο 250 π.Χ. Ο σπουδαίος Άραβας Αλ- Χαρίζμι ($8^{ος}$ αιώνας μ.Χ.) συνεισέφερε πολύ στα μαθηματικά, ενώ στην Ευρώπη ο Fibonacci ($11^{ος}$ αιώνας μ.Χ.) επιτέλεσε σπουδαίο έργο για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Σταδιακά από τότε οδηγηθήκαμε στη σημερινή ανάπτυξη των μαθηματικών, στην οποία η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να βρει εφαρμογή σε οποιοδήποτε έκφανση της πραγματικής μας ζωής (Στρατής, 2011).

Στην καθημερινότητα το μοντέλο είναι ένα πρόσωπο ή αντικείμενο που χρησιμοποιεί ένας καλλιτέχνης ως πρότυπο για κάποιο έργο του. Μπορεί να είναι οτιδήποτε λειτουργεί ως υπόδειγμα για κάποιο έργο. Όσον αφορά στις φυσικές επιστήμες εννοούμε ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα, ένα αντικείμενο (φυσικό, συμβολικό ή νοητικό) που κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει για να αναπαραστήσει κάποιο κομμάτι του φυσικού κόσμου. Καταλήγουμε λοιπόν, πως *μοντελοποίηση* είναι μια δεξιότητα που αφ9ορά στην οικοδόμηση μοντέλων σε σχέση με τα φυσικά φαινόμενα και καταστάσεις (Γαγάτσης, 2008).

Το να μάθει κανείς για τα μοντέλα, πραγματοποιείται σε δύο φάσεις. Η πρώτη αφορά στην κατασκευή του και η δεύτερη στο χειρισμό του μοντέλου (Morgan, 1999). Δεν υπάρχουν ρητοί κανόνες σχετικά με την κατασκευή ενός μοντέλου. Για να μάθουμε τη συμπεριφορά και τους κανόνες του θα πρέπει να το θέσουμε σε λειτουργία και να το χειριστούμε για να αποκαλυφθούν σε εμάς όλες του οι ιδιότητες και τα μυστικά.

Φυσικά, η μοντελοποίηση χρησιμοποιείται και στον *επιχειρησιακό κλάδο*. Ένα επιχειρηματικό μοντέλο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ένας οργανισμός δημιουργεί και προσφέρει αξία. Η αξία χρησιμοποιείται με την ευρύτερη έννοια και δεν αποτελεί μόνο οικονομικό μέγεθος αλλά κοινωνική ή και άλλη αξία. Τα επιχειρηματικά μοντέλα αναφέρονται ως το προσχέδιο (το blueprint) του τρόπου με τον οποίο μια επιχείρηση «επιχειρεί», δηλαδή περιγράφει την ολότητα του πως η επιχείρηση επιλέγει τους πελάτες της, προσδιορίζει και διαφοροποιεί τα προϊόντα και τις υπηρεσίες της, προσδιορίζει τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται η ίδια και εκείνα που δίνει σε εξωτερικούς συνεργάτες, πώς διαμορφώνει τους πόρους που έχει στη διάθεσή της καθώς και πώς βγαίνει προς τα έξω στο περιβάλλον της για να γίνει χρήσιμη για τους πελάτες της και να επωφεληθεί από τα κέρδη της (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.epixeiro.gr).

Ένα επιχειρηματικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανεπίσημα (π.χ. για ανάπτυξη της δημιουργικότητας) αλλά και επίσημα για την αναπαράσταση των κεντρικών λειτουργιών μιας επιχείρησης όπως είναι ο σκοπός, το τι προσφέρει η επιχείρηση, τις στρατηγικές της, τις οργανωτικές δομές της, τις εμπορικές πρακτικές της καθώς και τις ευρύτερες λειτουργικές πολιτικές και διαδικασίες που χρησιμοποιεί. Η ουσία ενός επιχειρηματικού μοντέλου είναι ότι προσδιορίζει τον τρόπο με τον

οποίο μια επιχείρηση προσφέρει αξία στους πελάτες της, εμπλέκει τους πελάτες με τέτοιο τρόπο ώστε να πληρώσουν για την αξία που λαμβάνουν και μετατρέπει αυτές τις πληρωμές σε κέρδος – με αυτό τον τρόπο αποτυπώνει τις υποθέσεις των μάνατζερ σχετικά με το τι θέλουν οι πελάτες, πως το θέλουν και το πως μπορεί μια επιχείρηση να οργανωθεί καλύτερα για να καλύψει αυτές τις ανάγκες και ταυτόχρονα να πληρωθεί για αυτό ώστε να φτάσει στο κέρδος. Οι κύριες χρήσεις των επιχειρηματικών μοντέλων είναι για την περιγραφή και την κατηγοριοποίηση των επιχειρήσεων (ειδικά στην καλλιέργεια της επιχειρηματικότητας) αλλά χρησιμοποιούνται από τους μάνατζερ εσωτερικά σε μια επιχείρηση για την εξερεύνηση των μελλοντικών ευκαιριών για ανάπτυξη (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: http://www.epixeiro.gr).

1.2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Ξεκινώντας από την τέχνη, και περνώντας από την ιστορία και προχωρώντας στις βιολογικές και φυσικές επιστήμες του περιβάλλοντος, συναντάμε μια σειρά από μοντέλα ή πρότυπα που αναπαριστούν φαινόμενα, διαδικασίες ή συστήματα. Τα μοντέλα αυτά χαρακτηρίζονται ολοένα από μεγαλύτερη δυνατότητα για εμπειρική επαλήθευση ή διάψευση, χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα και βελτίωση. Μιλώντας για ένα μοντέλο, μπορούμε να πούμε πως είναι μια κατασκευή που αναπαριστά , αναλύει ή προσομοιώνει ένα φαινόμενο, μια διαδικασία, ένα σύστημα ή μια συμπεριφορά (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.geology.upatras.gr/filew/shmioseis/12102/ATT00026.pdf).

Η ποσότητα των μαθηματικών στις επιστήμες έχει αυξηθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της εξέλιξης και τη ανάπτυξης των επιστημών. Ξεκίνησαν συλλέγοντας και παρατηρώντας πεταλούδες κι εξελίχθηκαν σε κλωνοποίηση προβάτων. Σε αυτή τη μεγάλη εξέλιξη μας χρειάζεται μια γλώσσα κατανόησης των φαινομένων και των ρυθμών και αυτή η γλώσσα δεν μπορεί παρά να είναι τα *μαθηματικά*.

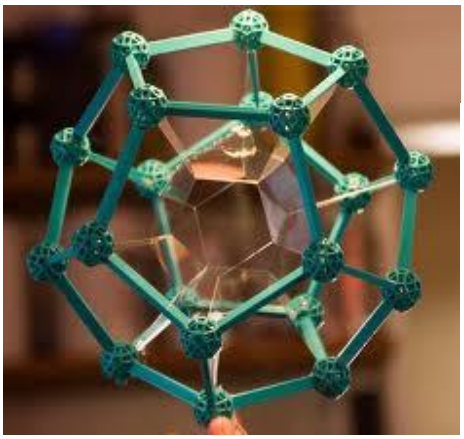
Τα μαθηματικά, λοιπόν, λειτουργούν χτίζοντας μοντέλα. Μπορούμε να παίξουμε με τα συμβολικά μοντέλα και να τα προσαρμόσουμε μέχρι να φθάσουν σε σημείο να συμπεριφέρονται με τρόπο που να μοιάζει στα πράγματα που μελετάμε. Όταν συμβεί αυτό κατανοούμε τα πράγματα για τα οποία ενδιαφερόμαστε από το να στεκόμασταν στη φυσική τους παρουσία. Τα μαθηματικά μοντέλα δεν αντικαθιστούν λέξεις ή εικόνες αλλά τις κάνουν πιο ακριβείς. Το εύρος των μοντέλων είναι πολύ μεγάλο και εισβάλει στο χώρο των επιστημών για τη ζωή μας. Ουσιαστικά τα μοντέλα μας κάνουν κατανοητά τα συστήματα είτε μιλάμε για μηχανική, χημεία, οικονομία, ιατρική ή οικολογία (Alder, 2001).

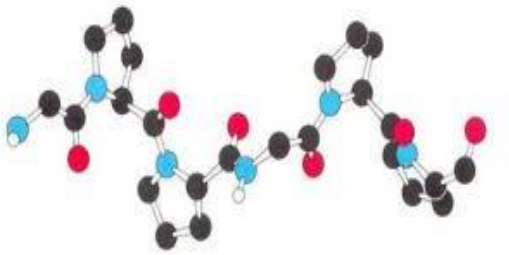
Η σημαντικότητα της χρήσης των μοντέλων στις επιστήμες είναι μεγάλη. Περιπτώσεις τέτοιου ενδιαφέροντος είναι το μοντέλο του ατόμου Bohr, το μοντέλο του MIT για το νουκλεόνιο, το μοντέλο πολυμερισμού Gaussian αλυσίδας και άλλα πολλά μοντέλα αποτελούν το κέντρο του ενδιαφέροντος (Frigg, Romant &Hartmann, Stephan, 2012).

Τα μοντέλα είναι πολύ σημαντικά για τις φυσικές επιστήμες καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία που βοηθούν στην κατασκευή και ανακατασκευή πολλών θεωριών. Μπορούν να αποτελέσουν πηγές παραγωγικής γνώσης που διαθέτουν μια επεξηγηματική δυναμική όσον αφορά στη διατύπωση υποθέσεων καθώς και να βοηθήσουν στην επιστημονική ανακάλυψη. Η μοντελοποίηση βασικών νοητικών εννοιών είναι απαραίτητη τόσο για τα παιδιά όσο και για τους ενήλικες καθώς έτσι δομούνται και οικοδομούνται βασικές έννοιες καθώς κι εννοιολογικές αλλαγές. Τα νοητικά μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διαμεσολαβητικοί μηχανισμοί που βοηθούν στην αναθεώρηση θεωριών και οικοδόμηση νέων (Magnani N. J. Nersessian, χ.χ.).

Στην επιστήμη της χημείας προκειμένου αυτή και οι όροι της να μας γίνουν κατανοητοί, θα πρέπει να γίνει μια μοντελοποίηση τους. Για παράδειγμα, για να εξηγήσουμε πώς το νερό αποτελείται από υδρογόνο και οξυγόνο θα πρέπει να διατυπωθεί η ατομική θεωρία σύμφωνα με την οποία η ύλη αποτελείται από άτομα, δηλαδή από μικροσκοπικά σωματίδια που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Τα άτομα ενώνονται μεταξύ τους και σχηματίζουν πιο σύνθετα σωματίδια, τα μόρια.

Με τι μοιάζουν όμως όλα αυτά τα άτομα; Πώς μπορούν αυτά να αναπαρασταθούν προκειμένου να οπτικοποιηθούν και να μελετηθούν; Μπορούμε να δημιουργήσουμε μοριακά και ατομικά μοντέλα που θα μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε καλύτερα την έννοια και τη λειτουργία των μορίων. Σύμφωνα με τον Dalton μοιάζουν με μικρές σφαίρες. Οι χημικοί δεσμοί που αναπτύσσονται ανάμεσα στα μόρια απεικονίζονται με ράβδους. Έτσι, στο επίπεδο τα αναπαριστούμε με απλούς κύκλους, ενώ στο χώρο με τρισδιάστατα σφαιρίδια σε διάφορα χρώματα για να διαχωρίζουμε εύκολα τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται ένας δεσμός. Φυσικά, τα χρώματα αυτά δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, αλλά χρησιμοποιούνται για να γίνεται ευκολότερη η μελέτη. Αυτές οι αναπαραστάσεις λέγονται μοντέλα.





Ακόμη και οι χημικοί τύποι (μεθάνιο: CH_4) αποτελούν οπτικοποίηση κάποιας χημικής ένωσης κι επομένως αποτελούν μοντέλα. Επίσης, κάθε χημική αντίδραση συμβολίζεται με μια χημική εξίσωση ($2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$). Σε αυτή, διακρίνουμε δύο μέλη που σχετίζονται μεταξύ τους. Παρατηρούμε πως η επιστήμη της χημείας, προκειμένου να μας κάνει κατανοητά τα στοιχεία, τις σχέσεις και τις αντιδράσεις του

φυσικού κόσμου, χρησιμοποιεί έντονα την έννοια της μοντελοποίησης. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν θα μπορούσε να μελετηθεί εύκολα το οποιοδήποτε χημικό στοιχείο ή να γίνει αντιληπτή και η παραμικρή χημική αντίδραση ώστε να αναλυθεί και να μελετηθεί (Σχολικό βιβλίο Χημείας Β΄ Γυμνασίου & Α΄ Λυκείου).

Στην επιστήμη της Φυσικής επίσης γίνεται ευρεία χρήση της μοντελοποίησης. Για οποιαδήποτε έννοια ή μέγεθος χρησιμοποιείται η χρήση συμβόλων και αριθμών προκειμένου να μας γίνουν κατανοητά. Θα λέγαμε λοιπόν πως ολόκληρη η φυσική είναι ένα μεγάλο μοντέλο του φυσικού πραγματικού κόσμου. Το μοντέλο όμως του πραγματικού κόσμου, δηλαδή τα σύμβολα, μας είναι απαραίτητα για την παρατήρηση, την πειραματική διαδικασία και τη μελέτη φαινομένων.

Η μεγάλη εξέλιξη της φυσικής έγινε κατά το $17^{ο}$ αιώνα όπου φάνηκε αναγκαία η χρήση της συμβολικής πειραματικής διαδικασίας καθώς και των μαθηματικών εξισώσεων και γραφικών παραστάσεων. Όλα αυτά αποτελούν μοντέλα πραγματικών καταστάσεων και χρησιμοποιούνται για να μας γίνει απλούστερη η οπτικοποίησή τους κι επομένως η μελέτη τους. Καταλαβαίνουμε πως η φυσική σαν επιστήμη αποτελεί εξ ολοκλήρου ένα μοντέλο του πραγματικού κόσμου προς διευκόλυνσή μας.

Για παράδειγμα, για να μελετηθεί ο πυρήνας ενός ατόμου, πρέπει πρώτα να οπτικοποιηθεί. Έτσι μας είναι απαραίτητο να κάνουμε μια προσομοίωση, να χρησιμοποιήσουμε ένα οπτικό μοντέλο. Το άτομο, λοιπόν, είναι σαν ένα μεγάλο στάδιο και ο πυρήνας σαν μια μπίλια στο κέντρο του. Αυτό μας βοηθά στην παρατήρηση μιας πειραματικής διαδικασίας και μιας πρακτικής εξάσκησης. (Σχολικό βιβλίο Φυσικής Β΄ Γυμνασίου & Γ΄ Γυμνασίου).

Η χρήση των μοντέλων δεν λείπει από την οδοντιατρική επιστήμη, καθώς είναι απαραίτητη στην Ακίνητη Οδοντική προσθετική. Η Ακίνητη Οδοντική είναι κλάδος της επανορθωτικής Οδοντιατρικής που το αντικείμενο της είναι αρκετά σύνθετο. Στόχος της είναι η επανόρθωση εκτεταμένων βλαβών μύλης ή ελλειπόντων δοντιών με αποκαταστάσεις οι οποίες σχεδιάζονται και συγκολλούνται μόνιμα στο φυσικό δόντι.

Αυτή η αποκατάσταση αποτελεί μια από τις σημαντικότερες επεμβάσεις οι συνέπειες της οποίας μπορούν να επηρεάσουν τη λειτουργία βασικών ιστών της στοματικής κοιλότητας και του στοματογναθικού συστήματος. Αυτό σημαίνει πώς η Ακίνητη προσθετική δεν είναι απλός κλάδος κατασκευής αλλά αναλαμβάνει προσθετικές καταστάσεις που καλούνται να αναπληρώσουν τα μέλη και τη λειτουργία ενός ολόκληρου συστήματος. Τα κινητά κολοβώματα αναπαριστούν τα φυσικά δόντια πάνω στα οποία επεμβαίνουμε οδοντιατρικά προκειμένου να επανέλθουν στα φυσικά επίπεδα η μάσηση και η αισθητική του προσώπου. Για να συμβεί αυτό λαμβάνεται ακριβές αποτύπωμα από τα παρασκευασμένα δόντια και τις γειτονικές περιοχές. Η κατασκευή κινητού κολοβώματος εξαρτάται από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση καθώς και από το υλικό κατασκευής ρητίνη, γύψος κτλ (Καραγεώργου, 2000).

Η Ακίνητη προσθετική εργασία εξυπηρετεί λειτουργικούς και αισθητικούς σκοπούς. Η επιτυχία της εξαρτάται από την επιμέλεια και την ακρίβεια. Η αποτυχία περιορίζεται από την κατασκευή του εκμαγείου και των κολοβωμάτων. Η

επεξεργασία μιας χυτής κατασκευής γίνεται πάνω στα κολοβώματα. Αυτό σημαίνει ότι η εφαρμογή στο στόμα του ασθενούς θα είναι αντίστοιχη της ταύτισης του εκμαγείου με την περιοχή που αντιπροσωπεύει. Για το λόγο αυτό εμφανίζεται η ανάγκη κατασκευής κολοβωμάτων ακριβείας. Πριν από την κατασκευή ενός κολοβώματος θα πρέπει να λαμβάνουμε ακριβές αποτύπωμα παρασκευασμένων δοντιών και περιοχών του στόματος. Το αποτύπωμα αυτό εκχύνεται με υλικό της επιλογής μας ώστε να γίνει δημιουργία εκμαγείου που θα αποτελέσει τη βάση μιας ακίνητης κατασκευής (Καραγεώργου, 2000).

1.3. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μαθηματική μοντελοποίηση είναι η μέθοδος να εξομοιώνουμε τις καταστάσεις της πραγματικής ζωής με μαθηματικές εξισώσεις για να προβλέψουμε τη μελλοντική τους συμπεριφορά. Η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμοποιεί εργαλεία όπως θεωρίες αποφάσεων, θεωρίες ουρών αναμονής, γραμμικό προγραμματισμό και απαιτεί μεγάλες ποσότητες από πληροφορίες συμπιεσμένων αριθμητικών δεδομένων (ανακτήθηκε από τις ιστοσελίδες: www.businessdictionary.com, www.definitions.net).

Η επιστημονική κατανόηση για τη μαθηματική μοντελοποίηση προστάζει πως ένα μοντέλο συμπεριλαμβάνει μια υπόθεση σχετικά με το σύστημα μελέτης και μας δίνει την ευκαιρία να συγκρίνουμε την υπόθεση αυτή με τα δεδομένα μας. Ένα μοντέλο είναι συχνά χρήσιμο όταν το ίδιο αποτυγχάνει να ταιριάξει με τα δεδομένα, επειδή μας δείχνει πως κάποιες ιδέες μας για τα δεδομένα είναι λάθος. Τόσο τα μαθηματικά μοντέλα όσο και οι εξομοιώσεις των υπολογιστών μας σχετικά με τα μοντέλα είναι χρήσιμα πειραματικά μοντέλα για την οικοδόμηση και τον έλεγχο θεωριών, αξιολόγηση ποιοτικών υποθέσεων, απάντηση συγκεκριμένων ερωτήσεων, απόφαση της ευαισθησίας στην αλλαγή των τιμών των παραμέτρων και την εκτίμηση των σημαντικών παραμέτρων από τα δεδομένα μας.

Η επιστημονική μας κατάρτιση μπορεί να μας βοηθήσει στην κατανόηση του κόσμου. Για παράδειγμα, μπορούμε να προβλέψουμε κάποια ασθένεια ή το ξέσπασμα κάποιας επιδημίας. Επίσης μπορούμε να σχεδιάσουμε συστήματα που θα μπορούσαν να βελτιώσουν την ποιότητα της ζωής μας όπως ο βιολογικός περιορισμός των επιδημιών, η διατήρηση συστημάτων όπως της αγροτικής διαδικασίας ή της αλιείας. Τέλος, μπορούμε να επιτύχουμε τη βελτιστοποίηση της φαρμακευτικής αγωγής για διάφορες ασθένειες που προσβάλλουν την ανθρωπότητα.

Ο πραγματικός πειραματισμός ενδεχομένως να είναι πολλές φορές αδύνατος. Για παράδειγμα, τα πειράματα με κάποιο θανατηφόρο ή εύκολα μεταδόσιμο ιό στην ανθρωπότητα μπορεί να είναι ανήθικα ή πάρα πολύ δαπανηρά. Δεν θα μπορούσαμε να διακινδυνεύσουμε τα είδη του οικοσυστήματος που είναι σπάνια ή προστατευόμενα με κάποιο σφάλμα ή δοκιμή. Δεν θα μπορούσαμε να θέσουμε ικανή μια δόση για κλινικές δοκιμές νέων φαρμάκων σε ανθρώπους ή να θέσουμε ασφαλή όρια για την έκθεσή μας σε τοξικές ουσίες χωρίς μεγάλη προηγούμενη κι απαραίτητη γνώση σχετικά με τις σοβαρές συνέπειες των δοκιμών αυτών. Καμιά φορά όμως η εντελώς αυστηρή πειραματική προσέγγιση δεν μπορεί να ανταποκριθεί στην

πραγματικότητα επειδή οι απαιτήσεις των δεδομένων μπορεί να αυξάνονται ή να μεταβάλλονται πολύ γρήγορα στον αριθμό των μεταβλητών. Συν τοις άλλοις, το να χρησιμοποιεί κανείς προγράμματα υπολογιστών μπορεί να έχει μηδενικό κόστος, μεγάλη ευκολία και διευκόλυνση της όλης διαδικασίας.

Οι *τύποι των μαθηματικών μοντέλων* είναι αρκετοί και μπορούν να παρουσιαστούν ανά ζεύγη ως εξής: Ντετερμινιστικά και στοχαστικά, στατικά και δυναμικά, συνεχή και διακριτά, ατομικά και δομημένα (κατασκευαστικά), μηχανιστικά και στατιστικά, ποιοτικά και ποσοτικά. Θα τα εξετάσουμε παρακάτω ανά ζεύγη:

Τα *ντετερμινιστικά μοντέλα* δεν έχουν καθόλου συνιστώσες που να είναι εγγενώς αβέβαιες, π.χ. δεν υπάρχουν παράμετροι στο μοντέλο οι οποίες να μπορούν να χαρακτηρισθούν από πιθανότητα, κατανομή, όπως στα *στοχαστικά* μοντέλα. Για αρχικά σταθερές τιμές, ένα ντετερμινιστικό μοντέλο πάντα μπορεί να παράγει το ίδιο αποτέλεσμα. Ένα στοχαστικό μοντέλο θα μπορέσει να παράγει πολλά και διαφορετικά αποτελέσματα τα οποία εξαρτώνται από τις πραγματικές τιμές οι οποίες είναι τυχαίες μεταβλητές που συμμετέχουν σε κάθε υλοποίηση.

Τα *στατικά μοντέλα* αποτελούν μια ισορροπία ή σταθερά, σε αντίθεση με τα *δυναμικά μοντέλα* που αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Τα *δομημένα* μοντέλα βασίζονται σε μεγέθη όπως η ηλικία, μέγεθος, επίπεδο κλπ.

Τα *στατιστικά* ή εμπειρικά μοντέλα συνήθως βασίζονται στην οπισθοδρόμηση. Παράγουν μια ποιοτική περίληψη για τις σχέσεις που μπορούν να παρατηρηθούν ανάμεσα στο σετ μετρημένων μεταβλητών. Ένα *μηχανιστικό* ή επιστημονικό μοντέλο ξεκινά με την περιγραφή του πώς η φύση μπορεί να λειτουργεί και να προχωράει από αυτή την περιγραφή σε ένα σετ από προβλέψεις που σχετίζουν τις ανεξάρτητες και της εξαρτημένες μεταβλητές.

Τα *ποσοτικά* μοντέλα οδηγούν σε μια λεπτομερή, αριθμητική πρόβλεψη σχετικά με τις απαντήσεις ενώ τα *ποιοτικά* μοντέλα οδηγούν σε περισσότερο γενικές περιγραφές σχετικά με τις απαντήσεις.

Οι αξιωματικές θεμελιώσεις των γεωμετρικών εννοιών πιστοποιούνται και πιθανόν θα κατανοούνται καλύτερα μέσω συγκεκριμένων μοντέλων – αναπαραστάσεων.

Μοντέλα στα μαθηματικά εκτός από τη γεωμετρία συναντάμε και στην άλγεβρα και αυτό γιατί υπάρχουν προβλήματα της καθημερινής μας ζωής τα οποία μπορούμε να μοντελοποιήσουμε με εξισώσεις που είναι εργαλείο της άλγεβρας. Ανάλογα με τη μορφή των εξισώσεων αυτών απαντώνται και διαφορετικά είδη μοντέλων, όπως τα γραμμικά, τα τετραγωνικά, τα πολυωνυμικά και τα ρητά, τα γεωμετρικά με τα εκθετικά, τα λογαριθμικά, τα σύνθετα, τα χαοτικά κλπ. Σε αυτά θα αναφερθούμε στο δεύτερο μέρος της εργασίας μας κι εδώ θα δώσουμε ένα παράδειγμα γραμμικού μοντέλου. Ενδεικτικά αναφέρουμε το επόμενο παράδειγμα.

Σε μια μεγάλη πόλη, η μόλυνση του αέρα αυξάνεται κατά τη διάρκεια της ημέρας καθώς τα καυσαέρια και άλλοι τύποι μόλυνσης εισέρχονται στην ατμόσφαιρα. Μια μέρα το επίπεδο μόλυνσης ήταν 20 μέρη ανά εκατομμύριο στις 8 το πρωί και αυξήθηκε στα 80 μέρη μέχρι το απόγευμα. Αναπτύξτε γραμμικό μοντέλο για το επίπεδο της μόλυνση σε συνάρτηση με το χρόνο. Μια εταιρία μπορεί να εκδώσει

ανακοίνωση οποιαδήποτε μέρα το επίπεδο μόλυνσης φτάσει τα 150 μέρη ανά εκατομμύριο. Αν το γραμμικό μοντέλο ισχύει από τις 8 το πρωί ως τις 6 το απόγευμα, θα είναι αναγκαίο να εκδοθεί συναγερμός; Έστω μ το επίπεδο της μόλυνσης, σε μέρη ανά εκατομμύριο, τ ώρες μετά τις 8 το πρωί. Αφού έχουμε ως δεδομένα δύο σημεία (0, 20) και (4, 80), μπορούμε να βρούμε τη γραμμική εξίσωση της συνάρτησης των μ και τ, ως $\mu = 15\tau + 20$. Στις 6 το απόγευμα που μας ενδιαφέρει, έχουν περάσει $\tau = 10$ ώρες από τις 8 το πρωί, άρα η εξίσωση των μ, τ δίνει $\mu = 150 + 20 = 170$ μέρη ανά εκατομμύριο, που είναι υψηλότερο επίπεδο από τα 150 που είναι το ανώτερο όριο μόλυνσης. Με αυτό για δεδομένο, η απάντηση στην ερώτηση για έκδοση συναγερμού είναι καταφατική.

1.4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΧΑΟΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στον αιώνα που μας αποχαιρέτησε τρεις ήταν οι μεγάλες επιστημονικές επαναστάσεις: η *θεωρία της σχετικότητας*, η *κβαντική μηχανική* και η *θεωρία του χάους*. Η πρώτη βρήκε τη σχέση ανάμεσα στο χώρο και το χρόνο, η δεύτερη την αρχή της αιτιότητας και η τρίτη διερευνά την έννοια της προβλεπτικότητας, πώς από παρόμοιες αρχικές υποθέσεις μπορούν να προκύψουν πολύ διαφορετικά συμπεράσματα (Gleich, 2008).

Το *χάος* ορίζεται σαν την εξαιρετικά ευαίσθητη εξάρτηση της εξέλιξης ενός φαινομένου από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή, χάος είναι η χαοτική κατάσταση που προκύπτει όταν μεταβληθούν έστω και κατ' ελάχιστον τα αρχικά δεδομένα ενός δυναμικού συστήματος. *Δυναμικό* καλείται κάθε σύστημα του οποίου η εξέλιξη από κάποια αρχική κατάσταση περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων (Gleich, 2008).

Τα παραδείγματα σχετικά με το χάος από την καθημερινή ζωή, είναι πολλά. Οι πολύπλοκες και απρόβλεπτες κινήσεις του καπνού του τσιγάρου, η διαδρομή των σταγόνων του νερού όπως αυτές πέφτουν από μια βρύση. Το νερό των κυμάτων που σκάζουν πάνω σε μια ακτή. Τα απρόβλεπτα σχήματα που φτιάχνει μια σταγόνα από μελάνι όταν πέσει σε ένα ποτήρι νερό (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.thalesandfriends.org).

Αλλά και στις επιστήμες εμφανίζεται πολύ συχνά το χάος. Στην αστρονομία, μπορεί να έχουμε μια τυχαία μεταβολή της τροχιάς κάποιου πλανήτη. Στη βιολογία, μια τυχαία μεταβολή των πληθυσμών στα ψάρια και στα φυτά. Στην οικονομία, παρατηρείται το απρόβλεπτο των τιμών στο χρηματιστήριο ενώ, στην ιατρική παρόμοιες εκδηλώσεις χαοτικής συμπεριφοράς συναντάμε στους χτύπους της καρδιάς και στη ροή του αίματος μέσα στις φλέβες. Τέλος, στη μετεωρολογία, το απρόβλεπτο του καιρού μετά από κάποιες μέρες, καθώς και της εξέλιξης του σχήματος ενός νέφους εμπεριέχουν επίσης χαοτικές καταστάσεις (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.thalesandfriends.org).

Κάνοντας μια ιστορική αναδρομή του χάους, διαπιστώνουμε ότι μέχρι τα τέλη του προ-περασμένου αιώνα η εύρεση της τροχιάς κάθε ουράνιου σώματος γινόταν προσεγγιστικά, χωρίς μεγάλη ακρίβεια ελλείψει των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με τη βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα και Κέπλερ. Για το λόγο αυτό οι κινήσεις των

πλανητών θεωρούνταν περιοδικές και κανονικές σαν την κίνηση ενός τέλειου εκκρεμούς.

Στα τέλη όμως του 19ου αιώνα, ο Γάλλος μαθηματικός και αστρονόμος Henri Poincare (1854 - 1912), έκανε μια ανακάλυψη που ερχόταν σε αντίθεση με τις αρχές των δύο προηγούμενων. Συγκεκριμένα, διαπίστωσε πως το πρόβλημα των τριών σωμάτων: του Ήλιου, της Γης και της Σελήνης, ήταν και παραμένει άλυτο, άρα δεν μπορεί να προβλεφθεί η τροχιά ενός ουράνιου σώματος που δέχεται την επίδρασή τους. Ο Poincare αποκάλυψε το χάος στο Ηλιακό σύστημα και μαζί ανακάλυψε την απρόβλεπτη εξέλιξη ενός μη γραμμικού συστήματος. Γι' αυτό και διατύπωσε την άποψη "Μια ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα". Η γέννηση ενός νέου κλάδου της επιστήμης: του χάους και του απρόβλεπτου ήταν γεγονός, αλλά χρειάστηκε να περάσουν 80 χρόνια από τότε για να θεωρηθεί ως σπουδαία ανακάλυψη από τους επιστήμονες (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.thalesandfriends.org).

Το 1954 πρώτος την κατανόησε ο σοβιετικός επιστήμονας A. Kolmogorov και ακολούθησαν και άλλοι. Στα ίδια συμπεράσματα οδηγήθηκε κι ένας σπουδαίος χημικός - Μαθηματικός ο Ιλιά Πριγκοζίν (Ott, 1993). Εκείνος είπε ότι οι ζωντανοί οργανισμοί βρίσκουν εν τέλει τάξη και νόμο, ζώντας μέσα σε ένα κόσμο που τρεκλίζει - κι ότι αυτή η τάξη βγαίνει από χημικά συστήματα ανισόρροπα και πολύπλοκα - δηλαδή χαοτικά. Είπε ακόμη ότι οι αλαζονικές κλασικές επιστήμες καταρρίπτονται (το ωρολογιακό σύμπαν του Νεύτωνα, η έννοια της αντιστρεψιμότητας, η γραμμική συμπεριφορά των συστημάτων) κι ότι ασήμαντες δυνάμεις, που οι επιστήμονες ως τώρα θεωρούσαν αμελητέες, μπορεί να εισχωρήσουν στο εσωτερικό των συστημάτων προκαλώντας γιγαντιαίες αλλαγές, την ώρα που γιγαντιαίες δυνάμεις μπορεί να αφήνουν τα συστήματα ανέπαφα (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.thalesandfriends.org).

Ένας ακόμα ιδρυτής της θεωρίας του χάους είναι ο Γάλλος μαθηματικός της IBM Μπενουά Μαντελμπρό. Αυτός εφεύρε πριν 25 χρόνια την Γεωμετρία των Fractals, η οποία στη θέση των καθαρών και συγκεκριμένων γραμμών της ευκλείδειας, εισάγει μια νέα έννοια της διάστασης που μας επιτρέπει να μετρήσουμε την αταξία, και το ακανόνιστο ενός αντικειμένου. Είναι μια νέα γεωμετρία, που μπορεί να αναπαραστήσει τις ατέλειωτες αντιθέσεις και στρεβλώσεις των φυσικών μορφών (της πλαγιάς ενός ηφαιστείου, του φύλλου μιας φτέρης, του πνεύμονα ενός εμβρύου...) στην οθόνη ενός κομπιούτερ. Το ιδιοφυές της γεωμετρίας αυτής είναι ότι τα σχήματα δημιουργούνται στον κομπιούτερ με την επανάληψη εις άπειρον μιας απλής μαθηματικής πράξης (π.χ. νιφάδα του Κοχ) και ότι ο βαθμός αταξίας ενός αντικειμένου παραμένει ο ίδιος σε κάθε κλίμακά του - στα μέρη και το όλο.

Ο πρώτος επιστήμονας που διέκρινε πως η επανάληψη γεννά το χάος, είναι ο Αμερικανός μετεωρολόγος Edward Lorenz που εργαζόταν στο MIT. Αναρωτιόταν γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε τον καιρό πάνω από 5 μέρες και χρησιμοποιούσε τρεις μη γραμμικές εξισώσεις για να ερμηνεύσει τις καιρικές αλλαγές. Αυτές τις εξισώσεις, έβαλε σε ένα πρωτόγονο κομπιούτερ της εποχής και δημιούργησε μια αναπαράσταση στην οθόνη χρησιμοποιώντας τη δεύτερη φορά στρογγυλοποιημένους αριθμούς, περιμένοντας την ίδια πρόγνωση. Το αποτέλεσμα

όμως τον σόκαρε επειδή ήταν τελείως διαφορετικό από το αρχικό, παρόλο που αντί να βάλει τον αριθμό 0,506127 με έξι δεκαδικά ψηφία, έβαλε 0,506. Η αναπαράσταση έμοιαζε μάλλον με συμμετρική καρναβαλιστική μάσκα του ντόμινο, πράγμα που σημαίνει ότι υπήρχε κρυμμένη δομή στο χάος. Μια απώτερη τάξη στην οποία υπάκουαν τα σύννεφα και οι άνεμοι (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.thalesandfriends.org).

Στον ίδιο τον Lorenz, οφείλεται και η θεωρία της πεταλούδας που πετάει στο Χονγκ-Κονγκ και μπορεί να δημιουργήσει καταιγίδα στη Νέα Υόρκη. Ξαφνικά οι επιστήμονες συνειδητοποίησαν πως σε αιτιοκρατικά δυναμικά συστήματα, η δυνατότητα γέννησης χάους παραμονεύει σε κάθε λεπτομέρεια, αλλά το θέμα δεν είναι αυτό. Είναι ότι με τις νέες θεωρίες, ο άνθρωπος χάνει την αίσθηση ότι ελέγχει τη φύση μέσω της λογικής. Η πορεία του κόσμου δεν είναι μια προβλέψιμη κίνηση.

Στην δεκαετία του 1970 οι επιστήμονες άρχισαν να προσεγγίζουν την έννοια της αταξίας. Οι μαθηματικοί, φυσικοί, φυσιολόγοι, βιολόγοι και χημικοί αναζητούσαν συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά είδη μη κανονικότητας. Μετά τις πρώτες εκπλήξεις από την χαώδη συμπεριφορά πολλών μοντέλων, οι μαθηματικοί του χάους ζητήσανε να καταλάβουν τις χαοτικές κινήσεις της καθημερινής ζωής. Τις αλλαγές του καιρού, τις διακυμάνσεις στους πληθυσμούς των αγρίων ζώων, την εξέλιξη των τιμών στο χρηματιστήριο. Αναπαριστούν τα ανεξέλεγκτα αυτά φαινόμενα με μη γραμμικές εξισώσεις σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές και ανακαλύπτουν την κρυφή τάξη που τα ορίζει (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.parganews.com).

Βρέθηκε λοιπόν, μια εκπληκτική *τάξη στο χάος* που αναπτύσσεται στην ανθρώπινη καρδιά, την κύρια αιτία του απρόσμενου θανάτου. Οι οικολόγοι ερεύνησαν την εμφάνιση και εξαφάνιση νομαδικών πληθυσμών εντόμων. Οι οικονομολόγοι εξέταζαν τις τιμές κάποιων προϊόντων. Οι μετεωρολόγοι εξέταζαν το σχήμα των νεφών, τις διαδρομές των αστραπών στον αέρα και οι αστροφυσικοί πως ομαδοποιούνται τα άστρα σε γαλαξίες. Στην αστρονομία η συνειδητοποίηση της ύπαρξης του χάους στο Ηλιακό σύστημα (παρόλο που το θεωρούσαμε ένα δυναμικό σταθερό σύστημα) προκαλεί ερωτήματα του κατά πόσο έπαιξε ρόλο το χάος στο σχηματισμό του. Έτσι, γρήγορα οι επιστήμονες άρχισαν να μελετούν το χάος στην εφαρμοσμένη επιστήμη από την θεωρητική που μέχρι τότε έκαναν.

Η ονομασία όμως Θεωρία του Χάους οφείλεται στον μαθηματικό του Πανεπιστημίου του Maryland Jim York μόλις το 1975. Μια θεωρία που όπως διαπιστώνουμε συνεχώς εξελίσσεται, κυριεύοντας όλους τους τομείς της επιστημονικής έρευνας: από την διαστημική έως τη δυναμική των υγρών, τις ακτίνες laser έως τις χημικές αντιδράσεις, από τις τηλεπικοινωνίες (λευκός θόρυβος της γραμμής) έως την καρδιολογία, από την οικονομία έως την νευροφυσιολογία. Αλλά ενδιαφέρει τελευταία και τους μουσικούς, τους συγγραφείς, τους ψυχαναλυτές και πολλούς άλλους (ανακτήθηκε από την ιστοσελίδα: www.thalesandfriends.org).

1.5. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ο Levins έχοντας στο μυαλό του τα μοντέλα ως μια αφηρημένη έννοια της πραγματικότητας, καταδεικνύει πως η μοντελοποίηση είναι μια συναλλαγή ανάμεσα

στη γενίκευση, το ρεαλισμό και την ακρίβεια (Levins, 1966). Η χρησιμότητα κάθε συγκεκριμένου μοντέλου εξαρτάται από τους στόχους που έχει θέσει ο δημιουργός του. Για να περιγράψουμε γενικές οικολογικές αρχές, είναι συνήθως απαραίτητο μα θυσιάσουμε τον ρεαλισμό και την ακρίβεια, ενώ για να περιγράψουμε έναν συγκεκριμένο πληθυσμό, είναι συνήθως απαραίτητο να θυσιάσουμε τη γενίκευση.

Κατ' επέκταση για να παρουσιάσουμε σε παιδιά δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου, καθώς και φοιτητές, έννοιες από την καθημερινή ζωή που σχετίζονται με τις επιστήμες της φυσικής, της χημείας και των μαθηματικών θα πρέπει να κάνουμε κάποιες παραδοχές ούτως ώστε να απλοποιήσουμε τα φαινόμενα που θέλουμε να παρουσιάσουμε με στόχο την κατανόησή τους σε πρώτο επίπεδο. Συχνά κι εδώ χρησιμοποιούμε την έννοια των μοντέλων για να οπτικοποιήσουμε ένα φαινόμενο.

Η μοντελοποίηση ως δεξιότητα, όπως όλες οι δεξιότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου, εξαρτάται από το ρυθμό με τον οποίο δουλεύεται. Πρόκειται για μια απαραίτητη δεξιότητα σκέψης η οποία υποστηρίζει τη διαδικασία της μάθησης. Η σύνθετη αυτή δεξιότητα επίσης στηρίζεται στην κατανόηση αρκετών δεξιοτήτων, οι οποίες είναι πολύ βασικές. Τέτοιες είναι η παρατήρηση, η ταξινόμηση, η μέτρηση, η επικοινωνία και η υποβολή ερωτημάτων (Γαγάτσης, 2008).

Στην παιδική σκέψη η μοντελοποίηση αφορά στην κατασκευή φυσικών μοντέλων, περιγραφή της σχέσης καθενός από αυτά με το αντίστοιχο φυσικό φαινόμενο καθώς επίσης και από τη σύγκριση δύο ή περισσότερων μοντέλων του ίδιου συστήματος. Το παιδί για να κατακτήσει αυτή τη δεξιότητα θα πρέπει να αντιλαμβάνεται έννοιες όπως «μικρότερο», «μεγαλύτερο» κι επομένως τις εμφανείς διαφορές μεταξύ των αντικειμένων. Πέρα από τις διαφοροποιήσεις θα πρέπει να αντιλαμβάνεται και τα όμοια χαρακτηριστικά των αντικειμένων και να τα συνδυάζει (Γαγάτσης, 2008).

Για να συμβεί όμως η κατάκτηση της δεξιότητας της μοντελοποίησης, το παιδί θα πρέπει να ενθαρρύνεται να αναγνωρίζει και να περιγράφει τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου. Η διαδικασία αυτή θα πρέπει να επαναλαμβάνεται ώσπου η παιδική σκέψη να καταλήγει στην εύκολη αναγνώριση διαφορών, ομοιοτήτων και περιορισμών. (Γαγάτσης, 2008).

Από τη στιγμή που θα αποκτήσουμε γνώση σχετικά με το μοντέλο, αυτή θα πρέπει να μεταφραστεί ως γνώση για το σύστημα στόχου. Εδώ οι παραστατικές συναρτήσεις των μοντέλων μπορούν να μας φανούν πολύ χρήσιμες. Τα μοντέλα μπορούν να μας καθοδηγήσουν καλά σχετικά με τη φύση της πραγματικότητας αν υποθέσουμε ότι πλευρές του μοντέλου έχουν ανταπόκριση στην πραγματικότητα. Η γνώση όμως που συνδέεται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις (π.χ. ανάλυση, εξιδανίκευση) μπορεί να είναι διαφορετικού είδους μάθησης. (Γαγάτσης, 2008).

Ο όρος *αναπαράσταση* είναι ασαφής και γι' αυτό επιδέχεται πολλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996 σε: Γαγάτσης, Α. & Σπύρου, Π. χ.χ.). Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά. Τα συστήματα αυτά ονομάστηκαν από τον Kaput σχήματα συμβόλων ή συστήματα αναπαράστασης από τον Goldin.

Στο πιο πάνω γενικό πλαίσιο μπορούν να ενταχθούν δύο είδη αναπαραστάσεων: οι εσωτερικές ή νοητικές και οι εξωτερικές ή σημειωτικές. Είναι

λοιπόν, δύσκολο να οριστεί η έννοια της αναπαράστασης και υπάρχουν διάφοροι ορισμοί:

Ο πιο εύκολος λέει ότι «αναπαράσταση είναι κάτι που μπορεί να σταθεί στη θέση κάποιου άλλου αντικειμένου ή προσώπου ή ενέργειας κ.α.». Είναι λειτουργικός και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πράξη. Ένας εμπειρικός ορισμός λέει ακόμη πως αναπαράσταση αναφέρεται σε ότι έχουμε πρόσβαση με τις αισθήσεις μας.

Επικρατέστερος είναι του Kaput, κατά τον οποίο η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις 5 ακόλουθες ολότητες:

1) Την ολότητα των αντικειμένων που αναπαρίστανται (Α: εμείς οι 15 άνθρωποι)
2) Την ολότητα που αναπαριστά (Β: όλα τα σύμβολα, στοιχεία, αυτοκόλλητα, κλπ.)
3) Στοιχεία της ολότητας Α που θέλουμε να αναπαραστήσουμε (Αυτοί με τα γυαλιά)
4) Σύμβολα της ολότητας Β που θα επιλέξουμε για αναπαράσταση
(ροζ αυτοκόλλητο με γυαλιά)
5) Αντιστοίχηση (αντικειμένου-συμβόλου) των στοιχείων της ολότητας Α με τα στοιχεία της ολότητας Β που επιλέξαμε (Kaput, 1987a).

Οι ψυχολόγοι δέχονται πως υπάρχει ένα είδος αναπαράστασης, η εσωτερική. Αντίθετα, οι μαθηματικοί διακρίνουν δύο είδη, εσωτερικές κι εξωτερικές. *Εσωτερικές ή νοητικές αναπαραστάσεις* είναι οι νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε (μαθητές ή λύτες προβλημάτων) για να αναπαραστήσουμε την πραγματικότητα. (Βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου). Λόγω της φύσης τους οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. *Εξωτερικές ή σημειωτικές αναπαραστάσεις* αφορούν στην εξωτερική οργάνωση συμβόλων, που αναπαριστούν μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα. (Βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος).

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε εσωτερικές κι εξωτερικές αναπαραστάσεις που πολύ συχνά συμβαίνουν ταυτόχρονα. Όσο πιο πλούσιες είναι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις τόσο πιο εύκολα κατανοούνται και οι εσωτερικές και το αντίστροφο.

Οι αναπαραστάσεις στη μάθηση των μαθηματικών είναι καθοριστικής σημασίας. Ο Duval υποστηρίζει πως δεν μπορεί να υπάρξει γνώση χωρίς αναπαραστάσεις γιατί βοηθούν στη διαμόρφωση καλύτερης εικόνας για την όποια μαθηματική έννοια. Καλύπτουν τις διαφορετικές ερμηνείες της και παρέχουν μια συνεχή ερμηνεία για αυτήν. Βοηθούν τους μαθητές να οργανώσουν, να παρακολουθήσουν τα συμπεράσματά τους και να μετριάζουν ορισμένες δυσκολίες. Ακόμα, καθιστούν τα μαθηματικά ελκυστικότερα κι ενδιαφέροντα (Παυλοπούλου, 2005).

Στα μαθηματικά όταν προσπαθούμε να ορίσουμε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο δεν μας είναι πάντα εύκολο να το προσεγγίσουμε ή να το καταλάβουμε ακριβώς. Αντίθετα, αυτό δεν συμβαίνει με άλλες θετικές επιστήμες όπως η φυσική και η χημεία στις οποίες μπορεί να γίνει φυσική αναφορά σε ό,τι μελετάμε. Για παράδειγμα όταν μιλάμε για το φαινόμενο της ταχύτητας μπορούμε να ανακαλέσουμε ένα παρόμοιο γεγονός από τον πραγματικό μας κόσμο, ενώ όταν μιλάμε για μια μαθηματική συνάρτηση αυτό δεν μπορεί να συμβεί. Για το λόγο αυτό μπορούμε να καταλάβουμε πως στα μαθηματικά είναι απαραίτητες οι αναπαραστάσεις και τα συστήματα έκφρασης πέρα από τη φυσική γλώσσα ή τις εικόνες. Στα μαθηματικά,

λοιπόν, έχουμε κατασκευάσει συστήματα γραφής μαθηματικών, συμβολικές επισημειώσεις για αντικείμενα, γραφήματα, αλγεβρικές γραφές, γεωμετρικά σχήματα, δίκτυα, αναπαραστάσεις σε προοπτική κλπ. Αυτή η ποικιλία των συστημάτων αναπαράστασης μας δίνει τη δυνατότητα επιλογής του πιο λειτουργικού συστήματος με βάση την κάθε περίπτωση (Παυλοπούλου, 2005).

Από έρευνες φαίνεται πως μέσα από αυτές τις σημειωτικές αναπαραστάσεις, ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει καλύτερα το φαινόμενο που μελετάται και να το επεξεργαστεί ευκολότερα φτάνοντας γρηγορότερα στη λύση του. Δεν υπάρχει μόνο επιτυχία αλλά και ολική αλλαγή της ποιότητας της παραγωγής.

Παρόλο που ένα μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να παρουσιαστεί με πολλούς διαφορετικούς σημειωτικούς τρόπους, δεν θα πρέπει να συγχέεται το αντικείμενο με την αναπαράστασή του. Δηλαδή, δεν θα πρέπει να συγχέουμε την έννοια της ευθείας με το σύμβολο της ευθείας. Αυτός ο συσχετισμός είναι έλλειψη κατανόησης (Duval, 1995). Βέβαια, από έρευνες στο Πανεπιστήμιο του Στρασβούργου φάνηκε πως ένα μεγάλο ποσοστό πρωτοετών φοιτητών συγχέει την έννοια του διανύσματος με το σύμβολο του βέλους. Επίσης, από άλλες έρευνες φάνηκε πως πολλοί μαθητές συγχέουν την έννοια της συνάρτησης με εκείνη της εξίσωσης ή της ευθείας σε κάποιο γράφημα.

Μπορούμε, λοιπόν, να καταλάβουμε πως το σύστημα της συμβολικής γραφής είναι το πιο ισχυρό αφού μας επιτρέπει την αναπαράσταση μεγαλύτερης ποικιλίας καταστάσεων. Για να αποφύγουμε τη συσχέτιση των αντικειμένων με τις αναπαραστάσεις τους, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε πολλές διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις για το ίδιο αντικείμενο δημιουργώντας ένα σύστημα. Θα πρέπει δηλαδή, να συντονίζουμε ετερογενείς αναπαραστάσεις του αντικειμένου για να το κατανοούμε ολικά (Duval, 1995). Οι ιδιομορφίες του κάθε συστήματος αναπαράστασης περιορίζουν τις δυνατότητες περιγραφής μιας μαθηματικής έννοιας. Με μια σημειωτική αναπαράσταση παρουσιάζεται μόνο μια πλευρά του ίδιου θεωρητικού περιεχομένου (Παυλοπούλου, 2005).

Προκειμένου, λοιπόν, η γνώση μας να γίνει σφαιρική για κάποιο αντικείμενο, θα πρέπει να περνάμε ανάμεσα από πολλά και διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης. Το ένα και το άλλο σύστημα περιγράφουν ακριβώς την ίδια κατάσταση χωρίς καμία απώλεια πληροφορίας.

Συγκεντρωτικά, μια διδασκαλία με ποικιλία στη χρήση σημειωτικών αναπαραστάσεων προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα διάκρισης ανάμεσα σε αναπαραστάτη και αναπαριστούμενου, που αποτρέπει το συσχετισμό του αντικειμένου και των αναπαραστάσεών του. Ακόμα δίνει τη δυνατότητα επιλογής του επιπέδου αναπαράστασης που είναι το καταλληλότερο ως προς την επεξεργασία και τις δυνατότητες αναπαράστασης και τέλος, αποτελεί ένα μέσο ελέγχου, γιατί μπορούν να επαληθεύσουν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που έλαβαν από το σύστημα.

Για να γίνει αυτό το πέρασμα από το ένα σύστημα στο άλλο, θα πρέπει να εφαρμόζονται δύο βασικοί κανόνες. Πρώτον, όταν το πέρασμα γίνεται προς το σύστημα συμβολικής γραφής, τα ποσοστά επιτυχίας αυτόματα ελαττώνονται και πέφτουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα και δεύτερον, οι κανόνες του περάσματος από τη

μια αναπαράσταση στην άλλη δεν είναι οι ίδιοι σε σχέση με τη φορά του περάσματος (Παυλοπούλου, 2005).

Για να συμβεί η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας με όρους αναπαράστασης τρεις δεξιότητες απαιτούνται. Αναγνώριση της έννοιας σε διάφορα συστήματα αναπαράστασης. Για παράδειγμα, ο μαθητής αναγνωρίζει την y = 5x σε διάφορες μορφές: αλγεβρική, βελοδιαγράμματα, καρτεσιανή αναπαράσταση κλπ. Ευέλικτο χειρισμό εντός κάθε συστήματος αναπαράστασης και μετάφραση από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο. Για παράδειγμα, δίνεται η y = 5x, να γίνει η γραφική αναπαράσταση (Γαγάτσης, 2008).

Μια μαθηματική έννοια που εμφανίζεται συχνά στις περισσότερες σχολικές βαθμίδες, είναι αυτή της συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Hitt υπάρχουν πέντε επίπεδα οικοδόμησης της έννοιας αυτής (Hitt, 1998). Στο πρώτο επίπεδο, τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια, ενώ όταν είναι σε θέση να εντοπίζουν (αναγνώριση) διαφορετικές αναπαραστάσεις της, έχουν περάσει στο δεύτερο επίπεδο. Το τρίτο επίπεδο έχει κατακτηθεί όταν τα υποκείμενα είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα σε κάποιο άλλο, ενώ αν συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης τότε γίνεται λόγος για το τέταρτο επίπεδο. Τέλος, στο πέμπτο επίπεδο τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος (Γαγάτσης, 2008).

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ, ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Σε αυτό το μέρος θα γίνει μια λεπτομερής παρουσίαση για τις εξισώσεις διαφορών, οι οποίες θα μας απασχολήσουν σε όλες τις επόμενες παραγράφους της παρούσας διπλωματικής. Αρχικά, θα αναφερθούμε στις ακολουθίες διακριτών και συνεχών μεταβλητών, αλλά προς το παρόν θα επικεντρωθούμε στις ακολουθίες διακριτών δεδομένων. Οι τελευταίες με τη σειρά τους, θα μας εισάγουν στην έννοια των εξισώσεων διαφορών που στη συνέχεια, θα δούμε τις βασικές ιδιότητές τους, τη μαθηματική ορολογία τους και το συμβολισμό που χρησιμοποιείται για τη μελέτη τους.

2.1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

2.1.1. Διακριτές Ακολουθίες

Όλα τα παραπάνω θα τα κατανοήσουμε καλύτερα μέσα από ένα παράδειγμα για *την παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου*, βασισμένο στον αντίστοιχο πίνακα της USA Today (June 16, 1994), όπως φαίνεται παρακάτω:

Έτος	1991	1992	1993	1994	1995
Χρήση Πετρελαίου	66,6	66,9	66,9	67,6	68,4

Πίνακας 2.1
Παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα.

Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζεται η παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου για κάποια χρόνια στο παρελθόν αλλά και τα προβλεπόμενα επίπεδα της κατανάλωσης αυτής για το μέλλον. Οι μονάδες των αριθμητικών στοιχείων του πίνακα αναφέρονται σε εκατομμύρια βαρέλια πετρελαίου ανά ημέρα. Έτσι, για παράδειγμα το έτος 1992 η ένδειξη του πίνακα 66,9 δείχνει ότι κατά μέσο όρο η παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου είναι 66,9 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα (Kalman, 1997).

Ένα σημαντικό στοιχείο που εμφανίζεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα που εντοπίζεται ξανά και ξανά σε πολλές άλλες εφαρμογές, είναι ότι τα δεδομένα είναι μια σειρά από αριθμητικές τιμές που συνοδεύονται με μια σειρά χρόνων που ισαπέχουν. Το κοινό στοιχείο των εφαρμογών αυτών είναι ότι τα δεδομένα είναι μοιρασμένα σε ίσες χρονικές περιόδους (κάθε έτος ή κάθε μήνα ή κάθε μέρα κλπ.). Στο παράδειγμά μας έχουμε μια τιμή για κάθε έτος. Τέτοιου τύπου δεδομένα, που οι τιμές τους είναι διαχωρισμένες και μπορούν να μπουν σε λίστα με σαφή σειρά, ορίζονται ως *διακριτά δεδομένα*. Ως *ακολουθία* ορίζεται η συλλογή των τιμών των δεδομένων και ως *όροι της ακολουθίας* οι μεμονωμένες τιμές των δεδομένων που αναφέρονται.

Συνήθως, οι διακριτές μεταβλητές (δεδομένα) αντιστοιχούν σε μετρήσεις που έγιναν σε τακτά χρονικά διαστήματα όπως η ετήσια βροχόπτωση, η θερμοκρασία κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου, η θερμοκρασία ενός σπιτιού κάθε πρωί. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι απαραίτητο, δηλαδή, τα δεδομένα δεν χρειάζεται να έχουν σχέση με χρονικά διαστήματα αλλά, πρέπει να διαχωρίζονται. Θα βοηθούσε αν μπορούσαμε να γράφαμε τα δεδομένα αυτά σε μια λίστα ξεχωριστών τιμών ώστε να εξασφαλίζαμε το ότι μπορούν τελικά να διαχωριστούν (Kalman, 1997).

2.1.2. Η Συνέχεια των Μεταβλητών

Αντιθέτως, ας φανταστούμε κάποια παραδείγματα στα οποία τα δεδομένα δεν είναι διακριτά, όπως ο χρόνος που χρειάζεται ένας φοιτητής για να απαντήσει στα θέματα ενός διαγωνίσματος Στατιστικής, η θερμοκρασία του αέρα κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας, το ύψος των ατόμων ενός πληθυσμού κλπ. Αυτές οι δύο μεταβλητές τιμές του χρόνου, της θερμοκρασίας και του ύψους στα προηγούμενα παραδείγματα αντίστοιχα, μπορούν να πάρουν, θεωρητικά τουλάχιστον, κάθε τιμή ενός διαστήματος (α,β) με α<β και $\alpha,\beta \in [-\infty,+\infty]$. Τέτοιου είδους μεταβλητές ορίζονται ως συνεχείς (Δαμιανού & Κούτρας, 2003). Σκεφτείτε τον τρόπο με τον οποίο ο χρόνος στο παράδειγμα του διαγωνίσματος της Στατιστικής αλλάζει από μαθητή σε μαθητή. Δεν υπάρχει ο *επόμενος* χρόνος να λάβουμε υπόψη μας. Αντίθετα, ο χρόνος μπορεί να θεωρηθεί ως κάτι συνεχές με πολλές πιθανές τιμές, όπως τα άπειρα σημεία πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Όπως θα δούμε αργότερα, αυτό είναι συνδεδεμένο με την ιδέα των *συνεχών μεταβλητών*. Αλλά προς το παρόν θα συγκεντρωθούμε στην ακολουθία διακριτών δεδομένων.

2.1.3. Συμβολισμοί Διακριτών Δεδομένων

Πίσω στα διακριτά δεδομένα. Για να οδηγήσουμε την σκέψη μας πιο γρήγορα στα αριθμητικά δεδομένα των προβλημάτων μας, χωρίς να αναφερόμαστε σε αυτά αναλυτικά, επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα σύμβολα. Ένα τέτοιο σύμβολο συνήθως περιλαμβάνει ένα γράμμα, κεφαλαίο ή μικρό, συνοδευόμενο από έναν αριθμό που σημειώνεται δεξιά του γράμματος αυτού και κάτω από τη γραμμή που το γράφουμε. Συνήθως, προσπαθούμε να επιλέγουμε ένα γράμμα που βοηθά να θυμόμαστε κάτι από τα δεδομένα. Σε ένα πρόβλημα που αφορά στον πληθυσμό μπορεί να χρησιμοποιήσουμε το Π, ενώ σε ένα πρόβλημα με ύψη είναι βολικό το γράμμα Υ. Ο αριθμός που συνοδεύει κάτω δεξιά το επιλεγμένο γράμμα, είναι μικρότερης γραμματοσειράς από του γράμματος στο οποίο αναφέρεται και λέγεται *δείκτης* (Kalman, 1997).

Κάποιες φορές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα κεφαλαίο γράμμα (Κ) και το μικρό του (κ) για να συμβολίσουμε έτσι τα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος και τα δεδομένα του μοντέλου του αντίστοιχα. Ένας άλλος τρόπος συμβολισμού αυτών των δεδομένων που συναντάμε, είναι και με το ίδιο γράμμα σε

μέγεθος μόνο που στο δεύτερο υπάρχει μια προσθήκη ενός ακόμα συμβόλου, δηλαδή, έχουμε x και $\hat{x}$ αντίστοιχα.

Στο παράδειγμα της παγκόσμιας κατανάλωσης πετρελαίου που προαναφέρθηκε, μπορούμε να συμβολίσουμε την κατανάλωση του πετρελαίου με το γράμμα Κ από το οποίο αρχίζει και η λέξη «κατανάλωση», έτσι ώστε συνειρμικά να ξέρουμε που αναφερόμαστε. Έτσι, όταν γράφουμε Κ, εννοούμε το μέσο όρο της καθημερινής κατανάλωσης πετρελαίου και όταν χρησιμοποιούμε και δείκτη για παράδειγμα K_{1991}, εννοούμε το μέσο όρο της καθημερινής κατανάλωσης για το 1991. Επειδή όμως αυτή η κατανάλωση σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 είναι 66,6 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα, μπορούμε να γράψουμε K_{1991}= 66,6. Εννοείτε πως για κάθε άλλο έτος του προβλήματος ο συμβολισμός είναι παρόμοιος, όπως το K_{1992} δείχνει την ημερήσια κατανάλωση το 1992 που είναι 66,9 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα κλπ. (Kalman, 1997).

Είναι σημαντικό να μην γίνεται σύγχυση κατά τη διάρκεια χρήσης των δεικτών στον τρόπο με τον οποίο τους γράφουμε. Αν έχουμε το K_{1991+4}, γενικά είναι διαφορετικό από το K_{1991}+4. Συγκρίνοντας τα δύο αυτά σύμβολα παρατηρούμε ότι για το πρώτο, όλοι οι αριθμοί στο 1991+4 είναι στη θέση του δείκτη κάτω από τη γραμμή του τύπου. Έτσι, το K_{1991+4} είναι στην ουσία ίσο με το K_{1995} που δείχνει την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου το έτος 1995, η οποία σύμφωνα με τον πίνακα 2.1 αντιστοιχεί σε 68,4 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα. Δηλαδή, ισχύει: $K_{1991+4} = K_{1995}$ = 68,4. Από την άλλη, στο σύμβολο K_{1991}+4, μόνο ο αριθμός 1991 βρίσκεται στη θέση του δείκτη του Κ. Άρα, το K_{1991}+4 αντιπροσωπεύει την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου το έτος 1991, αυξημένη κατά 4 μονάδες, δηλαδή, ισχύει:

K_{1991}+4 = 66,6 + 4 = 70,6 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα.

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν πόσο σημαντικό είναι να κατανοήσουμε τη λογική των δεικτών. Αυτό μπορεί να είναι ακόμα πιο δύσκολο αν προσπαθήσουμε να γράψουμε με το χέρι σε χαρτί αυτά τα σύμβολα, γιατί χρειάζεται να ξεχωρίσουμε ποιο μέρος ανήκει στο δείκτη και ποιο όχι. Κάτι τέτοιο διαφοροποιεί κατά πολύ τη σημασία της κάθε έκφρασης. Από τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο φαίνεται πως στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός 4 προστίθεται στο έτος (1991+4 = 1995), ενώ στη δεύτερη περίπτωση προστίθεται στην ημερήσια ποσότητα κατανάλωσης πετρελαίου για το έτος 1991 (66,6+4 = 70,6). Έτσι, φαίνονται οι ποσοτικές και οι ποιοτικές διαφορές που μπορεί να προκύψουν από τη διαφορετική χρήση των δεικτών των δεδομένων ενός προβλήματος (Kalman, 1997).

Υπάρχουν και άλλοι διαφορετικοί τρόποι χρήσης συμβολισμού των δεικτών. Ένας από αυτούς είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα γράμμα με τον ίδιο τρόπο όπως πριν, όπως το Κ, και σαν δείκτη να βάλουμε τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, ... (εκτός του 0), για το 1° , το 2° , το 3° , το 4° κλπ. δεδομένο μας. Για το παράδειγμά μας αντί για K_{1991}, K_{1992}, K_{1993}, K_{1994} και K_{1995}, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα K_1, K_2, K_3, K_4 και K_5 αντίστοιχα. Έτσι, K_1 είναι η $1^η$ τιμή δεδομένων, K_2 η δεύτερη τιμή κλπ.

Βολικό είναι επίσης να ξεκινάμε την αρίθμηση των δεικτών αρχίζοντας από το 0 και όχι από το 1. Τότε, K_0 θα είναι η κατανάλωση πετρελαίου για το 1991, K_1 η κατανάλωση πετρελαίου για το 1992 κλπ. αυτήν την περίπτωση, ο δείκτης σε κάθε όρο δείχνει έναν αριθμό ετών μετά τον αρχικό χρόνο 1991. Δηλαδή, K_0 είναι 0 χρόνια μετά το 1991, άρα το 1991, K_1 είναι 1 χρόνος μετά το 1991, άρα το 1992, K_2 είναι 2 χρόνια μετά το 1991, άρα το 1993 κλπ.

Συχνά είναι χρήσιμο να γράφουμε στη θέση ενός δείκτη και μια μεταβλητή (έστω n) εκτός από αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό συμπτύσσουμε σημαντικά τα δεδομένα μας και εξοικονομούμε έτσι χρόνο και χώρο. Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή με ποικίλους αριθμούς, μπορούμε να δημιουργήσουμε τη δική μας λίστα αληθών προτάσεων. Για παράδειγμα, στη χρήση του πετρελαίου παίρνουμε τις ακόλουθες πέντε δηλώσεις:

K_0 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 0 χρόνια μετά το 1991

K_1 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 1 χρόνια μετά το 1991

K_2 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 2 χρόνια μετά το 1991

K_3 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 3 χρόνια μετά το 1991

K_4 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 4 χρόνια μετά το 1991

Αντί για αυτές τις πέντε προτάσεις, μπορούμε να γράφουμε μια χρησιμοποιώντας για δείκτη τη μεταβλητή n, έτσι έχουμε την πρόταση:

K_n είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου n χρόνια μετά το 1991

Η σημασία της χρήσης της μεταβλητής n ως δείκτη αποκαλύπτει την ιδέα του ότι αν αντικαταστήσουμε το n με το 2 ή το 3 ή το 145 προκύπτει μια αληθής πρόταση.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε η μελέτη των διακριτών δεδομένων και του τρόπου με τον οποίο, το ένα διαδέχεται το άλλο, καθώς επίσης και η λογική των δεικτών στο συμβολισμό των δεδομένων αυτών. Στις παραγράφους που ακολουθούν αμέσως μετά, όλα αυτά χρησιμοποιούνται για να μας εισάγουν στην έννοια των εξισώσεων διαφορών (Kalman, 1997).

2.2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η εφημερίδα USA Today που δημοσιεύτηκε το 1994, περιείχε έναν πίνακα που έδειχνε την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου. Όμως, αυτός ο πίνακας εκδόθηκε χωρίς να είναι διαθέσιμα ακόμη τα στοιχεία για τα έτη 1994 και 1995. Παρόλα αυτά, έχουν συμπληρωθεί τα στοιχεία και αυτών των ετών στον πίνακα, όχι όμως σαν γνωστά δεδομένα, αλλά σαν εκτιμήσεις ή προβλέψεις. Τίθεται έτσι το ερώτημα: Πώς μπορούν να γίνουν τέτοιου είδους εκτιμήσεις; Γενικά μιλώντας, η απάντηση περιλαμβάνει μοτίβα στα γνωστά δεδομένα. Αν τα δεδομένα ακολουθούν κάποιο

αναγνωρίσιμο μοτίβο, φανταζόμαστε ότι το μοτίβο θα συνεχίσει στο μέλλον κάνοντας προβλέψεις σε αυτή τη βάση. Πιθανώς στο σχετικό άρθρο της USA Today να βρέθηκαν μοτίβα πολλών ειδών δεδομένων που συνεισφέρουν το καθένα ξεχωριστά στη διαμόρφωση της ημερήσιας κατανάλωσης πετρελαίου, όπως μοτίβα για την ανάπτυξη του πληθυσμού, τη βιομηχανοποίηση και την οικονομική ανάπτυξη (Kalman, 1997).

2.2.1. Διαφορετικά μοτίβα του ίδιου προβλήματος

Για δική μας ευκολία, θα απλοποιήσουμε λίγο τα πράγματα. Έτσι, θα θεωρήσουμε ένα πολύ απλό μοτίβο, μόνο από τα δεδομένα της κατανάλωσης πετρελαίου του πίνακα 1, αφού κάνουμε πρώτα τις παραδοχές ότι τα δεδομένα είναι πραγματικές τιμές και ότι οι δύο τελευταίες τιμές συμπεριλαμβάνονται στα γνωστά δεδομένα και δεν θεωρούνται ουσιαστικά προβλέψεις (Kalman, 1997).

Αρχικά, κοιτάξτε τις τιμές της κατανάλωσης πετρελαίου των δύο πρώτων δεδομένων. Το 1991 ήταν 66,6 και το 1992 έγινε 66,9 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα. Αυξήθηκε, δηλαδή, κατά 0,3. Μια πολύ απλή υπόθεση που θα μπορούσατε να κάνετε είναι ότι η ίδια αύξηση θα συμβαίνει κάθε χρόνο. Αυτή η υπόθεση μπορεί να διατυπωθεί με την παρακάτω μορφή:

Ο μέσος όρος της ημερήσιας κατανάλωσης πετρελαίου κάθε χρόνου είναι κατά 0,3 μονάδες αυξημένος από του προηγούμενου χρόνου.

Με μια πρώτη ματιά στον πίνακα 1, μπορούμε να δούμε ότι το μοτίβο αυτό δεν είναι σωστό, αφού δεν ανταποκρίνεται σε όλα τα αρχικά δεδομένα. Ενώ, δηλαδή, το 1991 η κατανάλωση ήταν 66,6 και το 1992 ήταν 66,6 + 0.3 = 66,9, κάθε επόμενο έτος δεν αυξάνει κατά 0,3 μονάδες. Δείτε για παράδειγμα, από το 1992 που ήταν 66,9 το 1993 δεν πήγε στην τιμή 66,9 + 0,3 = 67,2 αλλά παρέμεινε στην ίδια τιμή 66,9. Επειδή το μοτίβο είναι ένα είδος μαθηματικού μοντέλου και τα τελευταία πάντα περιλαμβάνουν την απλούστευση και την προσέγγιση, δεν υπάρχει η απαίτηση να ταιριάζει το μοτίβο ακριβώς στα δεδομένα ενός προβλήματος. Στόχος μας είναι να βρούμε και να μελετήσουμε μοτίβα που σχεδόν να προσεγγίζουν τα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος και τελικά να τα συγκρίνουμε με αυτά (Kalman, 1997).

Θυμηθείτε τα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος της ημερήσιας κατανάλωσης πετρελαίου και ας τα συμβολίσουμε με έναν από τους τρόπους που δείξαμε παραπάνω:

K_0 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 0 χρόνια μετά το 1991

K_1 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 1 χρόνια μετά το 1991

K_2 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 2 χρόνια μετά το 1991

K_3 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 3 χρόνια μετά το 1991

K_4 είναι η καθημερινή κατανάλωση πετρελαίου 4 χρόνια μετά το 1991

Σε απλούστερη μορφή έχουμε:

$K_0 = 66,6$

$K_1 = 66,9$

$K_2 = 66,9$

$K_3 = 67,6$

$K_4 = 68,4$

Ας δούμε τώρα τα δεδομένα σύμφωνα με το απλό μοτίβο που περιγράψαμε πιο πάνω. Αρχίζοντας με την πρώτη τιμή του πίνακα για το έτος 1991 που είναι 66,6, προσδιορίζουμε την επόμενη τιμή για το 1992 που θα είναι 66,9 κλπ. Η διαδικασία αυτή εύρεσης τιμών ανά έτος, συνεχίζεται όσο εμείς θέλουμε. Όμως, θα πρέπει να δώσουμε έναν άλλο συμβολισμό για αυτές τιμές μιας και όπως είπαμε είναι διαφορετικές από τις πραγματικές. Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε το μικρό γράμμα κ αντί του κεφαλαίου Κ για την κατανάλωση του πετρελαίου, έχουμε:

$\kappa_0 = 66,6$

$\kappa_1 = 66,6 + 0,3 = 66,9$

$\kappa_2 = 66,9 + 0,3 = 67,2$

$\kappa_3 = 67,2 + 0,3 = 67,5$

Το μοτίβο που εμφανίζεται εδώ, με τη μορφή των παραπάνω εξισώσεων, μπορεί να γίνει πιο ξεκάθαρο αν αλλάξουμε τον τρόπο γραφής τους. Επειδή ο αριθμός 66,6 εμφανίζεται σε δύο διαφορετικές εξισώσεις, και στ ο $\kappa_0 = \underline{66,6}$ αλλά και στο $\kappa_1 = \underline{66,6} + 0,3 = 66,9$, θα μπορούσαμε να γράψουμε το κ_1 σε συνάρτηση με το κ_0, δηλαδή, $\kappa_1 = \kappa_0 + 0,3$ (Kalman, 1997). Όμοια, παρατηρούμε ότι συμβαίνει και μια επανάληψη με τους αριθμούς 66,9 και 67,2 στις εξισώσεις των κ_1,κ_2 και κ_2,κ_3 αντίστοιχα. Με τις παρατηρήσεις αυτές το τελευταίο μοντέλο μπορεί να μετασχηματιστεί στο επόμενο:

$\kappa_0 = 66,6$

$\kappa_1 = \kappa_0 + 0,3$

$\kappa_2 = \kappa_1 + 0,3$

$\kappa_3 = \kappa_2 + 0,3$

Στο μοτίβο αυτό δίνεται έμφαση στη σχέση που έχουν όλα τα δεδομένα με την τιμή 0,3, σε αντίθεση με την έμφαση που πριν δινόταν στις ξεχωριστές τιμές του κάθε δεδομένου. Εδώ δηλαδή, φαίνεται ξεκάθαρα ότι προσθέτουμε 0,3 στην αρχική τιμή των δεδομένων και παίρνουμε την επόμενη τιμή στην οποία προσθέτουμε ξανά 0,3

και προκύπτει η επόμενη τιμή κλπ. Το ξεκάθαρο πια μοτίβο που εμφανίστηκε θα μπορούσε να γραφτεί και σε συμπτυγμένη μορφή ως:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$$

Υπάρχει ένα μοτίβο στη μέχρι τώρα εργασία μας, που όμως εκφράζεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

Λεκτικά: *Κάθε τιμή των δεδομένων είναι κατά 0,3 αυξημένη από την προηγούμενη τιμή.*

Συμβολικά με πολλές εξισώσεις:

$\kappa_0 = 66,6$
$\kappa_1 = \kappa_0 + 0,3$
$\kappa_2 = \kappa_1 + 0,3$
$\kappa_3 = \kappa_2 + 0,3$

Συμβολικά με μια συμπτυγμένη εξίσωση: $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$ **(2.1)**

Η συμπτυγμένη αυτή μορφή του μοτίβου, δεν δίνει μόνο τις ίδιες πληροφορίες με τις τρεις τελευταίες παραπάνω εξισώσεις για n = 0, 1 ή 2, αλλά μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για κάθε αριθμό n. Για παράδειγμα, αν n = 50, έχουμε την εξίσωση $\kappa_{51} = \kappa_{50} + 0,3$, που σημαίνει ότι η *πεντηκοστή πρώτη* τιμή των δεδομένων είναι ίση με την *πεντηκοστή* τιμή συν 0,3. Θα πρέπει όμως όταν χρησιμοποιούμε την συμπτυγμένη μορφή του μοτίβου, να είμαστε αρκετά εξοικειωμένοι με αυτήν, γιατί κάποιες φορές χρειάζεται προσπάθεια για να πάρουμε όλες τις πληροφορίες που κρύβει. Ακολουθούν κάποια απλά βήματα που θα μας βοηθούν να χειριστούμε μια τέτοια εξίσωση σαν την (2.1) (Kalman, 1997).

1^{ov} : Δηλώνουμε λεκτικά τις μεταβλητές της εξίσωσης.
2^{ov} : Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή στο δείκτη με πολλούς αριθμούς διαδοχικά.
3^{ov} : Γράφουμε λεκτικά μια περιγραφή του πώς λειτουργεί το μοτίβο.
4^{ov} : Διαλέγουμε μια αρχική τιμή για τα δεδομένα και παράγουμε αρκετές τιμές δεδομένων.

Εφαρμόζοντας αυτά τα βήματα για την εξίσωση (2.1), έχουμε:

1^{ov} : *Η τιμή κ_n είναι η τιμή του μοντέλου για την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου, n χρόνια μετά το 1991.*

2^{ov} : Για n = 0, (2.1) $\Rightarrow \kappa_{0+1} = \kappa_0 + 0,3 \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_0 + 0,3$
Για n = 1, (2.1) $\Rightarrow \kappa_{1+1} = \kappa_1 + 0,3 \Rightarrow \kappa_2 = \kappa_1 + 0,3$
Για n = 2, (2.1) $\Rightarrow \kappa_{2+1} = \kappa_2 + 0,3 \Rightarrow \kappa_3 = \kappa_2 + 0,3$

3^{ον} : *Κάθε τιμή των δεδομένων βρίσκεται προσθέτοντας 0,3, στην προηγούμενη τιμή των δεδομένων.*

4^{ον} : Για αρχική τιμή των δεδομένων $\kappa_0 = 66,6$, έχουμε:

$\kappa_0 = 66,6$
$\kappa_1 = 66,6 + 0,3 = 66,9$
$\kappa_2 = 66,9 + 0,3 = 67,2$
$\kappa_3 = 67,2 + 0,3 = 67,5$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί η σημαντική διαφορά ανάμεσα στα σύμβολα Κ και κ του προβλήματος της κατανάλωσης πετρελαίου. Το σύμβολο K_n παριστάνει μια πραγματική τιμή των δεδομένων, ενώ το κ_n παριστάνει την αντίστοιχη τιμή του μοντέλου. Φυσικά, <u>*στόχος*</u> μας είναι να επιλέξουμε ένα μοντέλο που να δίνει μια καλή προσέγγιση των πραγματικών δεδομένων, έτσι ώστε το κ_n και το K_n να είναι σχεδόν ίσα. Ένας καλός τρόπος για να ελέγξουμε την ακρίβεια του μοντέλου που επιλέξαμε, είναι να συγκρίνουμε το κ_n και το K_n (Kalman, 1997).

Το απλό μοτίβο που εκφράζεται με την εξίσωση (2.1), είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα μια πολύ μεγάλης οικογένειας μοτίβων που θα αποτελέσουν τον πυρήνα της γενικότερης μελέτης μας. Αυτά ονομάζονται *εξισώσεις διαφορών*.

Ένα *κοινό χαρακτηριστικό* των εξισώσεων διαφορών είναι ότι πάντα μας δείχνουν πώς να υπολογίζουμε έναν όρο της ακολουθίας από έναν ή περισσότερους προηγούμενους όρους της (Kalman, 1997).

2.2.2. Διαφορετικές μορφές εξισώσεων διαφορών

Μια εξίσωση διαφορών από μόνη της μπορεί να παρασταθεί με πολλές μορφές. Για το παράδειγμά μας, αντί για την μορφή:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3 \qquad \textbf{(2.1)}$$

μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\kappa_n = \kappa_{n-1} + 0,3 \qquad \textbf{(2.2)}$$

Συγκρίνοντας τους δύο τρόπους γραφής (2.1) και (2.2), παρατηρούμε ότι περιγράφουν το ίδιο μοτίβο. Και οι δύο εξισώσεις δείχνουν πως ο όρος που βρίσκεται στο 1^{ο} μέλος τους είναι ίσος με τον προηγούμενο όρο της ακολουθίας, αυξημένο κατά 0,3. Υπάρχει όμως, και μια λεπτή διαφορά μεταξύ των δύο εξισώσεων ως προς τον τρόπο που χρησιμοποιούν τη μεταβλητή τους n. Στην εξίσωση (2.1), η μεταβλητή n είναι ο δείκτης του παλαιού όρου κ_n που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό, ενώ η ίδια μεταβλητή n στην εξίσωση (2.2), είναι ο δείκτης του νέου όρου κ_n που πρόκειται να υπολογιστεί (Kalman, 1997).

Μια ακόμη παρατήρηση που πρέπει να επισημάνουμε για την εξίσωση (2.2), είναι πως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή κ_0, γιατί για n = 0 δεν υπάρχει ο προηγούμενος όρος της! Στην εξίσωση (2.2) οι δυνατές τιμές του n μπορεί να είναι

n = 1, 2, 3,..., ενώ η εξίσωση (2.1) ισχύει για n = 0, 1, 2, 3,… Άρα, θα πρέπει να σκεφτόμαστε πάντα ποιές τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή n του προβλήματος μας. Ακολουθεί μια ακόμη εναλλακτική μορφή της εξίσωσης (2.1) με τύπο:

$$\kappa_{n+1} - \kappa_n = 0{,}3 \qquad \textbf{(2.3)}$$

Σε αυτήν την εξίσωση, το 1^{ο} μέλος δείχνει την διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας και μάλιστα το 2^{ο} μέλος δείχνει πως αυτή η διαφορά είναι πάντα *σταθερή*. Ο τρόπος γραφής αυτής της μορφής δίνει έμφαση σε αυτήν ακριβώς την ύπαρξη της σταθεράς των διαφορών ανάμεσα στους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας. Τόσο στα μαθηματικά όσο και στις άλλες επιστήμες, η εμφάνιση σταθερών σε ένα μοντέλο είναι θεμελιώδους σημασίας. Οι μαθηματικοί τις λένε αναλλοίωτες και οι φυσικοί κάνουν λόγο για αρχές διατήρησης (Kalman, 1997).

Όταν χειριζόμαστε προβλήματα μοντέλων, αρκετά είναι τα πράγματα που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας:

- τα πραγματικά δεδομένα,
- το μοντέλο,
- το συμβολισμό,
- τη μεταβλητή στο δείκτη και
- την εξίσωση διαφορών.

Όλες αυτές οι πληροφορίες για το παράδειγμά μας παρουσιάζονται συμπτυγμένες στο παρακάτω πλαίσιο:

> K_n είναι ο μέσος όρος της καθημερινής κατανάλωσης πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια, n χρόνια μετά το 1991. Ένα μοντέλο για αυτά τα δεδομένα δίνεται από τους αριθμούς κ_n, με $\kappa_n = K_n$ και για $n > 0$ ισχύει $\kappa_n = \kappa_{n-1} + 0{,}3$.

Καθώς θα δουλεύουμε με προβλήματα εξισώσεων διαφορών, θα πρέπει να μπορούμε να φτιάχνουμε περιγραφές τους, όπως αυτή του παραπάνω πλαισίου. Αυτό είναι ένα εργαλείο οργάνωσης. Κάτι τέτοιο δεν θα γίνεται μονομιάς, αλλά σιγά σιγά, καθώς θα δουλεύουμε το πρόβλημα.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώσαμε τη μελέτη του βασικού εργαλείου που θα χρησιμοποιήσουμε στα παρακάτω κεφάλαια στη μελέτη προβλημάτων: τις εξισώσεις διαφορών. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τους τρεις τύπους ανάλυσης: αριθμητική, γραφική και θεωρητική. Οι προσεγγίσεις θα γίνουν με βάση δύο τυπικά ερωτήματα στη χρήση μοντέλων, σχετικά με το πρόβλημα της καθημερινής κατανάλωσης πετρελαίου (Kalman, 1997).

Ερώτηση $1^{η}$: Σύμφωνα με το μοντέλο, ποια είναι η ημερήσια κατανάλωση το 1999;
Ερώτηση $2^{η}$: Σύμφωνα με το μοντέλο, πότε η ημερήσια κατανάλωση θα φτάσει τα 70 εκατομμύρια βαρέλια; (Kalman, 1997).

2.3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στις τρεις επόμενες παραγράφους που ακολουθούν θα μελετήσουμε τα αριθμητικά μοντέλα από αριθμητικής, γραφικής και θεωρητικής άποψης. Στο μοντέλο αυτό, η ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου το 1999 προβλέπεται στα 69,0 εκατομμύρια βαρέλια (Kalman, 1997).

2.3.1. Αριθμητική προσέγγιση του μοντέλου

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα δύο προηγούμενα ερωτήματα σχετικά με την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου με αριθμητικούς υπολογισμούς.

Στην πρώτη ερώτηση, θέλαμε να βρούμε την καθημερινή κατανάλωση για το έτος 1999. Η τιμή $κ_n$, θεωρείται η τιμή του μοντέλου για την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου, n χρόνια μετά το 1991. Αφού το 1999 που μας ενδιαφέρει για το ερώτημά μας, είναι n = 8 χρόνια μετά το 1991, ψάχνουμε την τιμή του $κ_8$. Όπως δείξαμε πριν, η εξίσωση διαφορών που δίνεται από την σχέση (2.1) μπορεί να παράγει ένα μοντέλο δεδομένων για όσα χρόνια θέλουμε. Έτσι, προκύπτει μια σειρά εξισώσεων αρχίζοντας από την αρχική τιμή $κ_0$ = 66,6:

$κ_0$ = 66,6
$κ_1$ = 66,6 + 0,3 = 66,9
$κ_2$ = 66,9 + 0,3 = 67,2
$κ_3$ = 67,2 + 0,3 = 67,5
$κ_4$ = 67,5 + 0,3 = 67,8
$κ_5$ = 67,8 + 0,3 = 68,1
$κ_6$ = 68,1 + 0,3 = 68,4
$κ_7$ = 68,4 + 0,3 = 68,7
$κ_8$ = 68,7 + 0,3 = 69,0

Σύμφωνα λοιπόν με το μοντέλο αυτό, η ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου το 1999 προβλέπεται στα 69,0 εκατομμύρια βαρέλια (Kalman, 1997).

Στο δεύτερο ερώτημα, στόχος μας ήταν να βρούμε πότε η ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου θα φτάσει τα 70 εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα. Για να βρούμε κάτι τέτοιο θα πρέπει να συνεχίσουμε να υπολογίζουμε τις τιμές των $κ_n$ από την σχέση (2.1), μέχρι να βρούμε αποτέλεσμα 70 ή περισσότερο. Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς από την τιμή του $κ_8$ που είχαμε μείνει πριν, παίρνουμε:

$κ_9$ = 69,0 + 0,3 = 69,3
$κ_{10}$ = 69,3 + 0,3 = 69,6

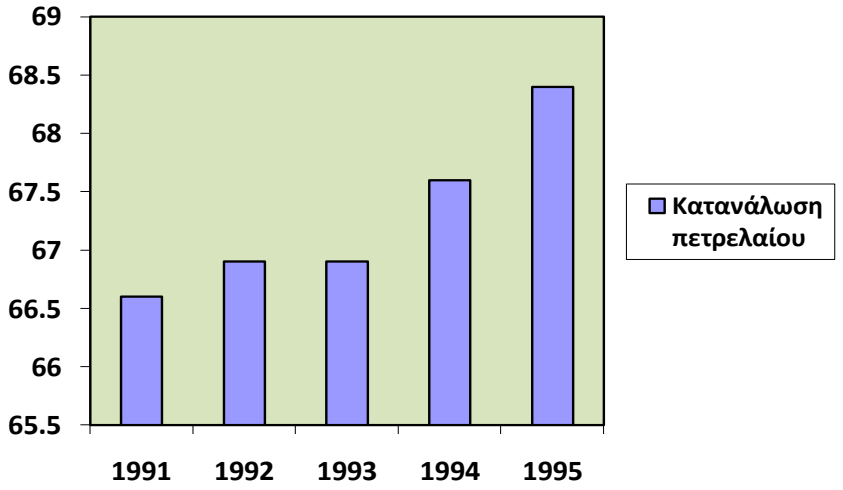
$\kappa_{11} = 69,6 + 0,3 = 69,9$
$\kappa_{12} = 69,9 + 0,3 = 70,2$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του κ_{11} (69,9) δεν είναι ακόμα 70, ενώ η τιμή του κ_{12} (70,2) ξεπερνά αυτήν την τιμή. Επομένως, για την απάντηση στο δεύτερο ερώτημά μας κρατάμε την τιμή $\kappa_{12} = 70,2$. Έτσι, η ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου θα φτάσει τα 70 εκατομμύρια βαρέλια n = 12 χρόνια μετά το 1991, δηλαδή, μέσα στο έτος 2003 (Kalman, 1997).

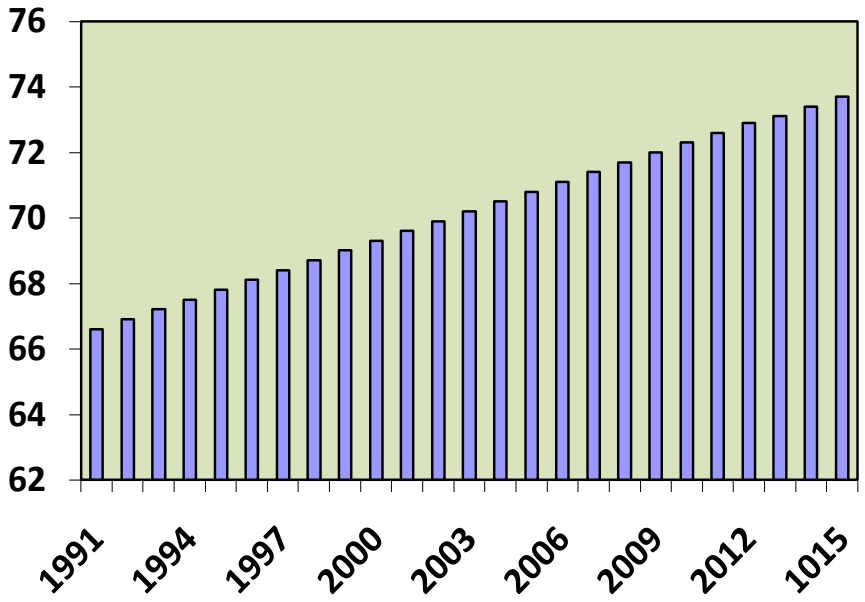
Αυτοί οι υπολογισμοί αποτελούν έναν υποδειγματικό τρόπο της αριθμητικής προσέγγισης για τη χρήση του μοντέλου. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε υπάρχει μια συνεχώς επαναλαμβανόμενη διαδικασία, κατά την οποία ένα αποτέλεσμα χρησιμοποιείται ως αρχή για να βρεθεί το επόμενο. Η εξίσωση διαφορών ονομάζεται *αναδρομικός τύπος* και η διαδικασία ονομάζεται *αναδρομή* ή περιφραστικά για το πρόβλημά μας λέμε ότι υπολογίζουμε αναδρομικά τις τιμές για την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούν να γίνουν αυτοί οι υπολογισμοί με γραφική προσέγγιση του μοντέλου (Kalman, 1997).

2.3.2. Γραφική προσέγγιση του μοντέλου

Όταν μελετάμε τις εξισώσεις διαφορών με τη βοήθεια των γραφημάτων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κυρίως *ραβδογράμματα* και *γραφήματα μέσω γραμμών*. Αρκετά συχνά, με τη χρήση διαγραμμάτων και αριθμητικών στοιχείων έχουμε τη δυνατότητα να αποκτήσουμε πρόσθετες γνώσεις για τις σχέσεις. Πίσω στο πρόβλημα της ημερήσιας κατανάλωσης πετρελαίου, δημιουργούμε το ραβδόγραμμα για τα πραγματικά δεδομένα του πίνακα 1 (σχήμα 1) και το ραβδόγραμμα 2 για τα δεδομένα του μοντέλου (σχήμα 2) (Kalman, 1997).



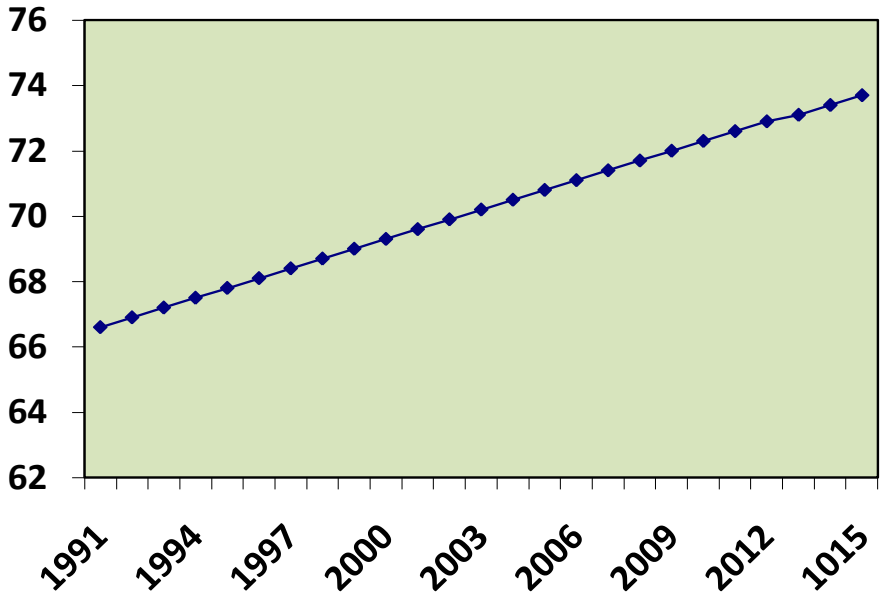
Σχήμα 1
Ραβδόγραμμα για τα πραγματικά δεδομένα της κατανάλωσης πετρελαίου



Σχήμα 2
Ραβδόγραμμα για τα δεδομένα του μοντέλου της κατανάλωσης πετρελαίου

Παρατηρώντας τα δύο σχήματα με τα ραβδογράμματα βλέπουμε ότι στο πρώτο με τα πραγματικά δεδομένα έχουμε κάποιες οπτικές εντυπώσεις αλλά τα λίγα νούμερα που παίρνουν μέρος δεν μας οδηγούν σε βαθύτερες γνώσεις. Αντίθετα, από το σχήμα 2 για τα δεδομένα του μοντέλου, που περιλαμβάνει πολύ περισσότερες τιμές έχουμε άμεσα καινούρια γνώση: στο μοντέλο, οι κορυφές των ράβδων σχηματίζουν μια ευθεία γραμμή. Αν ξέρουμε όμως ότι συνήθως δεν ακολουθούν ευθεία γραμμή τα γραφήματα της κατανάλωσης πετρελαίου, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το μοντέλο δεν είναι ακριβές (Kalman, 1997).

Ένας δεύτερος τρόπος για γραφική αναπαράσταση των δεδομένων είναι, όπως αναφέραμε, το γράφημα μέσω γραμμών όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα 3 για τα δεδομένα του μοντέλου της κατανάλωσης πετρελαίου. Αυτό γίνεται αν ενώσουμε όλα τα σημεία που αποτελούν το μέσο της άνω βάσης κάθε ράβδου του αντίστοιχου ραβδογράμματος. Αντικαθιστούμε, δηλαδή, κάθε ράβδο με ένα σημείο τα οποία και ενώνουμε με μια γραμμή. Στο διάγραμμα αυτό παρατηρείται ευκολότερα το ότι τα δεδομένα του μοντέλου ανήκουν σε ευθεία γραμμή. Επειδή τα σημεία είναι αρκετά μπορούμε ή να τα παραλείψουμε εντελώς και να έχουμε μόνο την ευθεία γραμμή τους ή να τα σχεδιάσουμε πιο μικρά σε μέγεθος (Kalman, 1997).



Σχήμα 3
Γράφημα μέσω γραμμών για τα δεδομένα του μοντέλου της κατανάλωσης πετρελαίου

Ας δούμε τώρα τις δύο ερωτήσεις που μας απασχόλησαν και στην αριθμητική προσέγγιση του μοντέλου, αλλά από τη γραφική προσέγγιση. Παρατηρώντας το ραβδόγραμμα ή το γράφημα μέσω ευθειών στα σχήματα 2 και 3 αντίστοιχα, μπορούμε να διαβάσουμε τόσο την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου το 1999, όσο και το έτος που η κατανάλωση αυτή θα φτάσει τα 70 εκατομμύρια βαρέλια ημερησίως (Kalman, 1997).

Για ερωτήσεις όμως αυτού του τύπου, η αριθμητική προσέγγιση είναι περισσότερο ακριβής από τη γραφική. Από την άλλη μεριά όμως, η γραφικές μέθοδοι μπορούν να δείχνουν καλύτερα τάσεις ή μοτίβα τόσο στα πραγματικά δεδομένα όσο και στα δεδομένα του μοντέλου. Γι' αυτόν το λόγο μπορούμε να κάνουμε μια πρώτη εκτίμηση των δεδομένων με γραφική προσέγγιση και στη συνέχεια να τη βελτιώνουμε με την αριθμητική.

Μετά από τη μελέτη των αριθμητικών και γραφικών προσεγγίσεων, θα δούμε πως μπορούν να γίνουν αυτοί οι υπολογισμοί με θεωρητική προσέγγιση των δεδομένων του μοντέλου (Kalman, 1997).

2.3.3. Θεωρητική προσέγγιση του μοντέλου

Κατά τις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις του μοντέλου, αριθμητικής και γραφικής, για να απαντήσουμε στις δύο ερωτήσεις που τέθηκαν χρησιμοποιήσαμε τον αναδρομικό τύπο (2.1) του μοντέλου:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$$

Ο τύπος αυτός όμως έχει ένα μειονέκτημα (Kalman, 1997). Για να υπολογίσουμε το κ_n για μια τιμή του n, πρέπει να έχουμε υπολογίσει όλες τις προηγούμενες τιμές των $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$. Για το λόγο αυτό, δίνουμε έναν άλλο τρόπο εύρεσης των τιμών των κ_n, μέσω της εξίσωσης:

$$\kappa_n = n \cdot 0{,}3 + 66{,}6 \qquad \textbf{(2.4)}$$

Μια τέτοιου είδους εξίσωση, η οποία δίνει το κ_n ως συνάρτηση του n, ονομάζεται *συναρτησιακή εξίσωση*. Σε σχέση με την αναδρομική εξίσωση (2.1), η συναρτησιακή εξίσωση (2.4) έχει ένα σημαντικό προτέρημα. Για τον υπολογισμό του κ_n δεν χρειάζεται και ο υπολογισμός όλων των προηγούμενων τιμών $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}$, αλλά πρέπει μόνο να γνωρίζουμε την αρχική τιμή κ_0 και το n. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα κ_{10} και κ_{100}, θέτουμε στην σχέση (2.4) όπου n = 10 και n = 100 αντίστοιχα και έχουμε:

$$n = 10 \;,\; (2.4) \Rightarrow \quad \kappa_{10} = 10 \cdot 0{,}3 + 66{,}6 = 3 + 66{,}6 = 69{,}6$$
$$n = 100,\; (2.4) \Rightarrow \quad \kappa_{100} = 100 \cdot 0{,}3 + 66{,}6 = 30 + 66{,}6 = 96{,}6$$

Για να δώσουμε απάντηση στα δύο ερωτήματα που μας απασχολούσαν και στις προηγούμενες προσεγγίσεις, από την θεωρητική πλευρά τώρα, θα πρέπει να μπορούμε αρχικά να βρούμε την συναρτησιακή εξίσωση των δεδομένων, κάτι που θα μελετηθεί σε επόμενες παραγράφους (Kalman, 1997). Έτσι, στο ερώτημα της ημερήσιας κατανάλωσης για το 1999, απλά θέτουμε n = 8 στην (2.4) και παίρνουμε άμεσα το αποτέλεσμα:

$$\kappa_8 = 8 \cdot 0{,}3 + 66{,}6 = 2{,}4 + 66{,}6 = 69{,}0$$

Για το δεύτερο ερώτημα τώρα, του πότε η ημερήσια κατανάλωση θα φτάσει τα 70 εκατομμύρια βαρέλια, θέτουμε στην (2.4) $\kappa_n = 70$ και με απλή άλγεβρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} & 70 = n \cdot 0{,}3 + 66{,}6 \\ \Rightarrow\; & n \cdot 0{,}3 = 70 - 66{,}6 \\ \Rightarrow\; & n \cdot 0{,}3 = 3{,}4 \\ \Rightarrow\; & n = 3{,}4 / 0{,}3 \\ \Rightarrow\; & n = 11{,}333\ldots \end{aligned}$$

Άρα, τα 70 εκατομμύρια βαρέλια τα φτάνει σε περισσότερο από 11 χρόνια και λιγότερο από 12 μετά το 1991, δηλαδή, η πρώτη χρονιά που συμβαίνει αυτό είναι 12 χρόνια μετά το 1991 επομένως, το 2003. Η τελική τιμή για το ζητούμενο n, μπορεί να βρεθεί είτε διαιρώντας το 3,4 με το 0,3 με ένα υπολογιστή τσέπης (αριθμητική προσέγγιση), είτε πολλαπλασιάζοντας τους όρους του κλάσματος με το 10 για να

πάρουμε 34 / 3 που μετατρέπεται σε ένα μεικτό κλάσμα $11\frac{1}{3}$ (θεωρητική προσέγγιση) (Kalman, 1997).

Παρατηρούμε ότι η αριθμητική μέθοδος δίνει μια απάντηση κατά προσέγγιση, σε αντίθεση με την θεωρητική που δίνει μια ακριβή απάντηση. Ένα άλλο πλεονέκτημα της θεωρητικής προσέγγισης είναι η μεγαλύτερη γενικότητά της έναντι των άλλων δύο μεθόδων, αριθμητικής και γραφικής. Δηλαδή, μπορεί να λύνει πολύ στενά συνδεδεμένα προβλήματα μονομιάς.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε πότε η τιμή της κατανάλωσης θα φτάσει το 80 ή 90, με τη βοήθεια της άλγεβρας παρόμοια με πριν, θα βρούμε μια νέα εξίσωση, που προς το παρόν παίρνουμε χωρίς να δείξουμε τα ενδιάμεσα βήματά της και είναι:

$$n = (\kappa_n - 66{,}6)/0{,}3 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Τώρα, για να βρούμε πότε θα γίνει 80 ή 90 αρκεί να θέσουμε στην (2.5) αντίστοιχα: $\kappa_n = 80$ ή $\kappa_n = 90$ και έχουμε:

$$(2.5) \Rightarrow n = (80 - 66{,}6)/0{,}3 = 13{,}4/0{,}3 = 44{,}666\ldots$$

$$(2.5) \Rightarrow n = (90 - 66{,}6)/0{,}3 = 23{,}4/0{,}3 = 78{,}0$$

που δείχνουν ότι θα γίνει 45 και 78 χρόνια μετά το 1991, δηλαδή, το 2036 και 2069 αντίστοιχα (Kalman, 1997).

Σημειώστε στο σημείο αυτό ότι χρησιμοποιούμε την έννοια της *αντίστροφης συνάρτησης*. Με άλλα λόγια, ενώ είχαμε την συνάρτηση (2.4) στην οποία το κ_n βρίσκεται μόνο του στο ένα μέλος της εξίσωσης και εκφράζεται σε συνάρτηση με το n, βρήκαμε την εξίσωση (2.5) σύμφωνα με την οποία συμβαίνει το αντίστροφο. Το n βρίσκεται μόνο του στο ένα μέλος της εξίσωσης και εκφράζεται σε συνάρτηση με το κ_n. Αυτή η αντίστροφη διαδικασία εύρεσης των συναρτήσεων θα μελετηθεί σε επόμενες παραγράφους.

2.3.4. Ακρίβεια του μοντέλου μέσω προσεγγίσεων

Σε αυτό το μέρος της εργασίας θα προσπαθήσουμε να βρούμε τρόπους με τους οποίους να διαλέγουμε τις καλύτερες δυνατές εξισώσεις διαφορών σε ένα πραγματικό πρόβλημα καθώς και πώς να αναγνωρίσουμε ποιο είδος μοντέλου θα δουλέψει καλά για ποιο είδος προβλήματος. Όλα αυτά σχετίζονται με την *ακρίβεια του μοντέλου*, την οποία και θα δούμε από την σκοπιά και των τριών ειδών προσεγγίσεων: αριθμητική, γραφική και τέλος θεωρητική (Kalman, 1997).

Ας ασχοληθούμε ξανά με το πρόβλημα της ημερήσιας κατανάλωσης πετρελαίου. Το πρώτο μοντέλο που βρήκαμε ήταν αυτό που περιγράφηκε από τον αναδρομικό τύπο $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0{,}3$. Όπως είπαμε και προηγουμένως, μας ενδιαφέρει η ακρίβεια των μοντέλων που θα βρούμε για ένα πραγματικό πρόβλημα που μελετάμε. Δηλαδή, στόχος μας είναι να επιλέξουμε ένα μοντέλο που να δίνει μια καλή προσέγγιση των πραγματικών δεδομένων, έτσι ώστε το κ_n και το K_n να είναι σχεδόν ίσα. Έτσι, για να ελέγξουμε την ακρίβεια του μοντέλου που επιλέξαμε, καλό είναι να

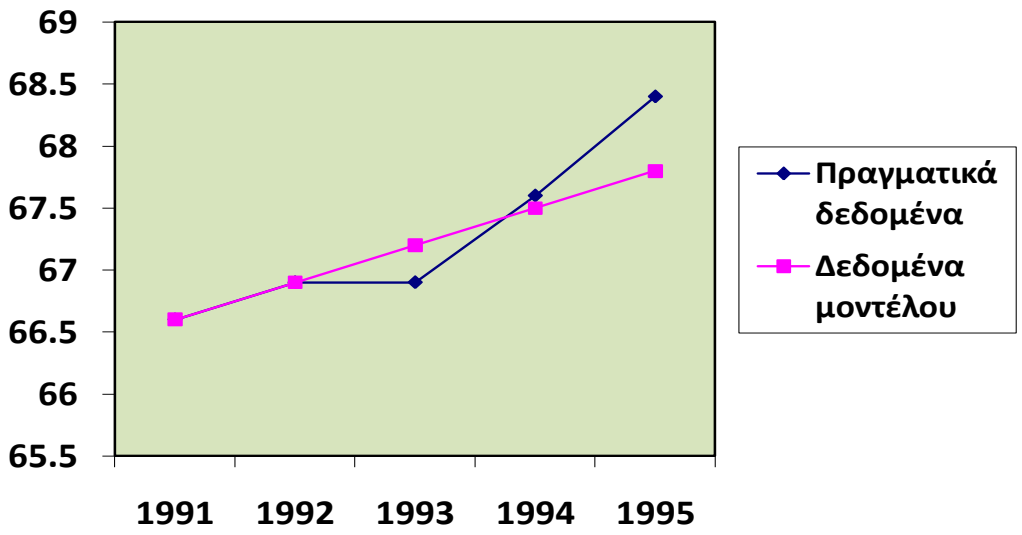
συγκρίνουμε το κ_n και το K_n, υπολογίζοντας τις μεταξύ τους *διαφορές* K_n - κ_n (Kalman, 1997).
Χρησιμοποιώντας τα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος που σημειώνονται στον πίνακα 1 και βρίσκοντας τις διαφορές τους από τα αντίστοιχα δεδομένα του μοντέλου που περιγράφεται από τη σχέση (2.1), προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας 2.

Έτος	1991	1992	1993	1994	1995
n	0	1	2	3	4
K_n	66,6	66,9	66,9	67,6	68,4
κ_n	66,6	66,9	67,2	67,5	67,8
K_n-κ_n	0,0	0,0	-0,3	0,1	0,6

Πίνακας 2.2
Σύγκριση δεδομένων και μοντέλου

Αριθμητικά, είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις τιμές των δεδομένων του μοντέλου κ_n από τη σχέση (2.1) και να τις αφαιρέσουμε από αυτές των πραγματικών δεδομένων K_n. Όπως φαίνεται στον πίνακα 2 για τα έτη 1991 και 1992 οι διαφορές (σφάλματα) είναι μηδενικές, ενώ στα επόμενα έτη αυξάνονται. Δεν είναι όμως αρκετή αυτή η παρατήρηση για να πούμε αν το μοντέλο είναι ακριβές ή όχι, γιατί αυτό εξαρτάται και από το σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται. Η αριθμητική μελέτη των δεδομένων απλά δείχνει το πόσο καλά το μοντέλο συμφωνεί με τα πραγματικά δεδομένα (Kalman, 1997).

Γραφικά, θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε στο ίδιο γράφημα και τα πραγματικά και τα δεδομένα του μοντέλου, όπως δείχνει και το σχήμα 4 παρακάτω.



Σχήμα 4
Γράφημα μέσω γραμμών της κατανάλωσης πετρελαίου δεδομένων και μοντέλου.

Και πάλι φαίνεται ότι αρχικά οι τιμές των δύο συμπίπτουν αλλά καθώς τα διαγράμματα προχωρούν προς τα δεξιά, διαχωρίζονται. Για δεύτερη φορά όμως πρέπει να τονιστεί, όπως και στην αριθμητική προσέγγιση, πως η σημασία των διαφορών εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος.

Θεωρητικά, θα μας ενδιέφερε μια λίγο διαφορετική ερώτηση. Αφού βρούμε ένα μοντέλο για το πρόβλημά μας, πως θα μπορούσαμε να το αλλάξουμε ώστε να ταιριάζει καλύτερα με τα πραγματικά δεδομένα; Για παράδειγμα, αν αντί στη σχέση (2.1) του αριθμού 0,3 βάζαμε τον 0,25 θα ήταν καλύτερο το μοντέλο; υπάρχει μια θεωρητική μέθοδος για την εύρεση των καλύτερων τιμών στη θέση του 0,3 αλλά δεν θα αναφερθούμε σε αυτό εδώ (Kalman, 1997).

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούμε ανήκουν σε ομάδες σύμφωνα με τον *τύπο* της εξίσωσης διαφορών τους. Οι τελευταίες έχουν παρόμοιες ιδιότητες (για παράδειγμα έχουν όλες γράφημα ευθεία γραμμή) και παρόμοιες μεθόδους ανάλυσης. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0{,}3$$
$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0{,}4$$
$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0{,}5$$
$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 2$$
$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - 3$$

έχουν τον ίδιο τύπο που σε συμπτυγμένη μορφή, χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή α στη θέση του τελευταίου αριθμού, γίνεται:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \alpha$$

Η μεταβλητή α, ονομάζεται *παράμετρος* του τύπου της εξίσωσης και σε κάθε μοντέλο θα παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή.
Για παράδειγμα, οι εξισώσεις:

$$\kappa_{n+1} = 3\cdot\kappa_n + 6$$
$$\kappa_{n+1} = 2{,}4\cdot\kappa_n + 0{,}3$$
$$\kappa_{n+1} = 0{,}5\cdot\kappa_n - 7$$
$$\kappa_{n+1} = -2\cdot\kappa_n - 8{,}2$$

ανήκουν στις εξισώσεις διαφορών με τύπο: $\kappa_{n+1} = \alpha\cdot\kappa_n$, με παράμετρο το α (Kalman, 1997).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε διαφορετικές οικογένειες μοντέλων που καθεμιά θα περιγράφεται από έναν τύπο εξίσωσης διαφορών με μια ή περισσότερες παραμέτρους. Θα μας απασχολήσουν δύο θέματα:
1°: Ποια είναι η καλύτερη τιμή για τις παραμέτρους και
2°: Πως αναγνωρίζουμε ποιο είδος μοντέλου θα δουλέψει καλά για ποιο είδος προβλήματος.

Ακολουθούν κάποια παραδείγματα διαφορετικών τύπων εξισώσεων διαφορών με τα αντίστοιχα μοντέλα τους για περεταίρω κατανόηση (Kalman, 1997).

2.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, το πρόβλημα της ημερήσιας κατανάλωσης πετρελαίου έχει ένα μοντέλο με εξίσωση διαφορών της μορφής $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$. Αυτή ανήκει σε μια ομάδα εξισώσεων διαφορών με κοινό τύπο της μορφής:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \alpha, \text{ όπου } \alpha \text{ η παράμετρος.}$$

Τα μοντέλα που περιγράφονται από αυτού του τύπου την εξίσωση διαφορών εκθέτουν τι ονομάζεται αριθμητική ή γραμμική ανάπτυξη. Κάτι που θα μελετήσουμε παρακάτω αναλυτικά (Kalman, 1997).

Ως δεύτερο παράδειγμα, αναφέρουμε το πρόβλημα της συγκέντρωσης τόκων σε ένα λογαριασμό τράπεζας. Ο τόκος πληρώνεται μια φορά το μήνα και υπολογίζεται στο 0,5% του υπολοίπου ακριβώς πριν γίνει η αποπληρωμή του τόκου. Αν υ_n είναι η ποσότητα μετά από n πληρωμές τόκου, θέλουμε να βρούμε ποιά θα είναι η ποσότητα μετά από ακόμη μια πληρωμή, δηλαδή, ποιό θα είναι το υ_{n+1}. Ας σκεφτούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, με το υπόλοιπο είναι $\upsilon_1 = 60$ ευρώ. Τότε ο τόκος που αποπληρώνεται είναι το 0,5% των 60 ευρώ, που υπολογίζεται με τον πολλαπλασιασμό $\frac{0,5}{100} \cdot 60 = 0,005 \cdot 60$. Μετά την αποπληρωμή του τόκου αυτού, το νέο υπόλοιπο θα είναι $\upsilon_2 = 60 + 0,005 \cdot 60$, δηλαδή, $\upsilon_2 = \upsilon_1 + 0,005 \cdot \upsilon_1$. Αυτό οδηγεί στην εξίσωση διαφορών της μορφής:

$$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n + 0,005 \cdot \upsilon_n \text{ (Kalman, 1997).}$$

Όπως θα δούμε αργότερα, τα μοντέλα που περιγράφονται με αυτού του τύπου την εξίσωση διαφορών περιγράφουν τι ονομάζεται γεωμετρική ανάπτυξη (Kalman, 1997).

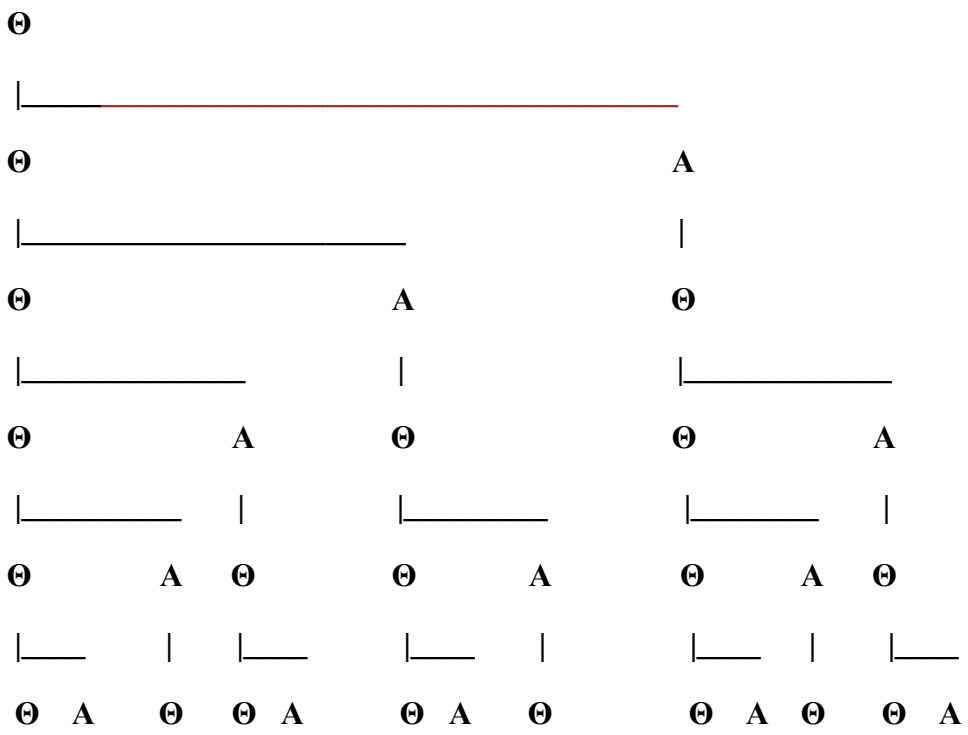
Ως τρίτο παράδειγμα, αναφέρουμε το πρόβλημα της αναπαραγωγής των κουνελιών που μελετήθηκε από τον μαθηματικό Leonardo Fibonacci το 1202. Κάθε μήνα ένα ζευγάρι κουνελιών παράγει ένα ζευγάρι παιδιών, ένα αρσενικό κι ένα θηλυκό. Κάθε νέο ζευγάρι παράγει παιδιά από μόνο του, ένα ζευγάρι για κάθε μήνα, ξεκινώντας 2 μήνες μετά τη γέννησή τους. Αν ξεκινήσετε με ένα ζευγάρι νέων παιδιών, πόσα κουνέλια θα υπάρχουν μετά από 10, 15 και γενικότερα n μήνες; Η λύση του Fibonacci ήταν να δείξει ότι, αν f_n είναι το πλήθος των κουνελιών σε n μήνες, τότε $f_0=f_1=1$ και για $n>0$, ισχύει:

$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$$

Οι αριθμοί Fibonacci είναι η ακολουθία αριθμών κατά την οποία οι δύο πρώτοι όροι είναι 1, ο επόμενος 2, μετά 1+2=3, μετά 2+3=5, κλπ. Η ακολουθία αυτή φτιάχνει μια εξίσωση διαφορών όπως αυτή για το πλήθος κουνελιών του Fibonacci, κατά την οποία κάθε νέο f βρίσκεται με την πρόσθεση 2 προηγούμενων f. Οι παραπάνω αυτοί αριθμοί, αποκαλύπτουν ένα μεγάλο αριθμό προτύπων με ενδιαφέρον, φυσικά από τη βιολογία (Kalman, 1997).

Όπως για παράδειγμα, το πρόβλημα για την καταμέτρηση των προγόνων μιας μέλισσας. Οι αρσενικές μέλισσες παράγονται μη σεξουαλικά από τη βασίλισσα, έτσι έχουν μητέρα (τη βασίλισσα) αλλά όχι και πατέρα. Από την άλλη, κάθε βασίλισσα έχει και μητέρα και πατέρα. Ξεκινώντας από μια βασίλισσα, μπορούμε να φτιάξουμε ένα διάγραμμα με τους προγόνους της όπως το σχήμα 5 που ακολουθεί.

Συμβολίζουμε με Α κάθε αρσενική μέλισσα και με Θ κάθε θηλυκή. Το πρώτο Θ στην αρχή του σχήματος, συμβολίζει την βασίλισσα για την οποία θέλουμε να καταγράψουμε τους προγόνους της. Ακριβώς μετά ακολουθεί η μητέρα της Θ και ο πατέρας της Α, ενώ μετά από ένα Α ακολουθεί πάντα μόνο ένα Θ, γιατί κάθε αρσενική δεν έχει πατέρα Α. Παρατηρώντας το διάγραμμα βλέπουμε πως η βασίλισσα έχει 2 γονείς, 3παπούδες, 5 προπάππους, 8 προ-προπάππους, κλπ. Το μοτίβο που παίρνουμε είναι 2, 3, 5, 8, κλπ (Kalman, 1997).



Σχήμα 5
Πρόγονοι της μέλισσας βασίλισσας.

Πιο συγκεκριμένα, έστω α_v ο αριθμός των προγόνων της βασίλισσας τη ν-οστή προηγούμενη γενιά της. Έτσι, α_1 είναι ο αριθμός των προγόνων $1^{ης}$ γενιάς, δηλαδή, γονέων. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το α_v για κάθε ν; Αφού η μητέρα και η γιαγιά είναι επίσης βασίλισσες, οι πρόγονοί τους είναι ακριβώς όμοιες με εκείνες που ξεκινήσαμε. Επίσης, μπορούμε να βρούμε όλους τους προγόνους για τη βασίλισσά μας κοιτάζοντας στους προγόνους της μητέρας και της γιαγιάς. Για παράδειγμα, ο αριθμός των προγόνων για τη βασίλισσα 4 γενιές πίσω μπορούν να βρεθούν προσθέτοντας στους προγόνους της μητέρας της 3 γενιές πίσω (α_3) στης γιαγιάς τους προγόνους 2 γενιές πίσω (α_2). Άρα $\alpha_4=\alpha_3+\alpha_2$. Παρατηρώντας το διάγραμμα μπορούμε να απαντήσουμε πως οι αριθμοί που ψάχνουμε είναι οι αριθμοί Fibonacci και η εξίσωση που περιγράφουν είναι η Fibonacci:

$$\alpha_{v+1}=\alpha_v+\alpha_{v-1}$$

Κάποιες φορές οι εξισώσεις διαφορών δεν συνδέονται με κάποια εφαρμογή. Για παράδειγμα, ένα απλό μοτίβο είναι: $\alpha_{v+1} = \alpha_v / \alpha_{v-1}$. Για να ξεκινήσουμε το μοτίβο επιλέγουμε δύο αριθμούς για παράδειγμα, $\alpha_1 = 4$ και $\alpha_2 = 7$. Κάνουμε τους υπολογισμούς σύμφωνα με τον τύπο και έχουμε το επαναλαμβανόμενο μοτίβο:

$\alpha_3 = \alpha_2 / \alpha_1 = 7/4$

$\alpha_4 = \alpha_3 / \alpha_2 = 1/4$

$\alpha_5 = \alpha_4 / \alpha_3 = 1/7$

$\alpha_6 = \alpha_5 / \alpha_4 = 4/7$

$\alpha_7 = \alpha_6 / \alpha_5 = 4$

$\alpha_8 = \alpha_7 / \alpha_6 = 7$

$\alpha_9 = \alpha_8 / \alpha_7 = 7/4$

$\alpha_{10} = \alpha_9 / \alpha_8 = 1/4$

$\alpha_{11} = \alpha_{10} / \alpha_9 = 1/7$, κλπ. (Kalman, 1997).

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ Ή ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στο κεφάλαιο που προηγήθηκε, μελετήσαμε ένα πρόβλημα σχετικά με την καθημερινή παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου χρόνο με το χρόνο, το οποίο περιγράψαμε με την εξίσωση διαφορών $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$ (2.1).

Το παράδειγμα αυτού του μοντέλου ανήκει, όπως θα δούμε, σε μια οικογένεια μοντέλων που ονομάζεται *αριθμητικής ανάπτυξης*. Ένα ακόμα παράδειγμα τέτοιου τύπου θα παρουσιαστεί παρακάτω, μέσω του οποίου θα περιγραφούν και αναλυτικά όλα τα βήματα μιας γενικής διαδικασίας για την εύρεση της συναρτησιακής εξίσωσης (Kalman, 1997). Η συναρτησιακή εξίσωση είναι πιο βολική από την εξίσωση διαφορών για την απάντηση σε ερωτήσεις σχετικά με τη συμπεριφορά του μοντέλου.

3.1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Μπορούμε να διατυπώσουμε την ιδέα της αριθμητικής ανάπτυξης ως εξής:

Η *ανάπτυξη μιας μεταβλητής* αφορά στον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητή *αλλάζει με τον χρόνο*.

Υπό την *υπόθεση της αριθμητικής ανάπτυξης*, *ίσες χρονικές περίοδοι* n έχουν ως αποτέλεσμα *ίσες αυξήσεις* d (d>0) της μεταβλητής α.

Ας δούμε πως εφαρμόζεται η υπόθεση της αριθμητικής ανάπτυξης, μέσα από το παράδειγμα της καθημερινής παγκόσμιας κατανάλωσης πετρελαίου κάθε χρόνο. Έτσι, αν η καθημερνή κατανάλωση πετρελαίου αυξηθεί 0,3 εκατ. βαρέλια από το 1991 έως το 1992, τότε θα πρέπει να αυξηθεί και κατά ίση ποσότητα (0,3 εκατ. βαρέλια) κάθε χρόνο. Την μεταβολή αυτήν την περιγράψαμε με την εξίσωση διαφορών $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$ (2.1) (Kalman, 1997).

Γενικά, σε ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης, η *αύξηση* μπορεί να είναι οποιαδήποτε ποσότητα και συμβολίζεται με μια *παράμετρο d*. Αυτό οδηγεί σε μια *γενική εξίσωση διαφορών*:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d \qquad \textbf{(3.1)}$$

Υπό την *υπόθεση της αριθμητικής ανάπτυξης*, *ίσες χρονικές περίοδοι* n έχουν ως αποτέλεσμα *ίσες μειώσεις* d (d<0) της μεταβλητής α.

Αν και η αριθμητική ανάπτυξη ως έκφραση δείχνει ότι κάτι μεγαλώνει, μερικές φορές χρησιμοποιείται και για να περιγράψει μια μεταβλητή α που σημειώνει *μείωση* με το χρόνο ως εξής:

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να μοντελοποιήσουμε τα αποθέματα μιας μη ανανεώσιμης πηγής ενέργειας, όπως το πετρέλαιο ενός καυστήρα μιας πολυκατοικίας κατά τη διάρκεια των χειμερινών μηνών ενός έτους. Αν οι ένοικοί της χρησιμοποιούν την ίδια ποσότητα πετρελαίου, 1.500 λίτρα κάθε μήνα, το απόθεμα α θα μειωθεί. Έτσι, το μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης αυτού του προβλήματος περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 1.500$. Παρατηρούμε ότι το παράδειγμα αυτό ακολουθεί την γενική εξίσωση διαφορών (3.1) με αρνητική παράμετρο d = - 1.500 (Kalman, 1997).

Το μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης είναι ένα από τα απλούστερα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Σε κάθε περίπτωση, στα παραδείγματα της αριθμητικής ανάπτυξης θα συμπεριλάβουμε τόσο τις αριθμητικά αύξουσες όσο και τις αριθμητικά φθίνουσες. Αργότερα, θα επιστρέψουμε στα μοντέλα με πιο προχωρημένα μαθηματικά εργαλεία που παρέχουν και μεγαλύτερη ακρίβεια. Για τώρα όμως, θα συνεχίσουμε τη μελέτη της αριθμητικής ανάπτυξης.

3.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Η ιδέα της αριθμητικής ανάπτυξης θα προσεγγιστεί σε αυτό το μέρος μέσα από τις αριθμητικές, γραφικές και θεωρητικές ιδιότητες των μοντέλων της. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε πρόβλημα που εντάσσεται στο πλαίσιο της αριθμητικής ανάπτυξης, περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών της μορφής $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$ (3.1). Τις παραπάνω τρεις ιδιότητες των μοντέλων θα τις μελετήσουμε μέσα από ένα παράδειγμα σχετικό με τον πληθυσμό παιδιών σχολικής ηλικίας από τους σχολικούς πίνακες (Kalman, 1997).

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Αν ο πληθυσμός των μαθητών αυξάνεται, θα πρέπει να χτιστούν περισσότερα σχολεία. Σε αντίθετη περίπτωση, αν ο πληθυσμός μειωθεί, ίσως χρειαστεί να κλείσουν κάποια σχολεία. Για μικρό χρονικό διάστημα, ας πούμε για πέντε χρόνια, ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης μπορεί να είναι αρκετά ακριβές για να δίνει μερικές λογικές προβλέψεις για μελλοντικά στοιχεία πληθυσμού. Αν από τους πίνακες προκύψει ότι ο αριθμός μαθητών δημοτικού έχει αυξηθεί κατά 5.000 τα τελευταία 2 ή 3 χρόνια, είναι εύκολο να φανταστείτε ότι ο πληθυσμός θα αυξηθεί με τον ίδιο τρόπο και στο μέλλον (Kalman, 1997).

Μπορούμε να εκφράσουμε το παραπάνω πρόβλημα του σχολικού πληθυσμού με μια εξίσωση διαφορών. Αρχικά, ορίζουμε π_n να είναι η μεταβλητή του αριθμού των παιδιών σχολικής ηλικίας της επαρχίας σε n χρόνια. Τότε, η εξίσωση διαφορών γίνεται:

$$\pi_{n+1} = \pi_n + 5.000$$

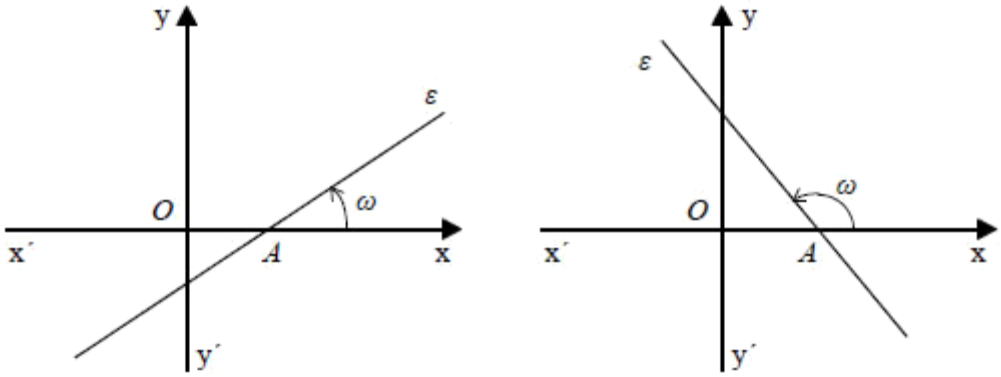
3.2.1. Αριθμητικές ιδιότητες μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης

Η εξίσωση διαφορών, δηλαδή, ο αναδρομικός τύπος του κάθε προβλήματος, από μόνη της δε μας δίνει τις προβλεπόμενες τιμές για τα επόμενα έτη. Πρέπει να ξέρουμε και την αρχική τιμή της, π_0. Πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι η αρχική τιμή είναι απαραίτητη για τη χρήση οποιασδήποτε εξίσωσης διαφορών για τον υπολογισμό των τιμών όσο μακριά θέλουμε στο χρόνο. Αν στο παραπάνω πρόβλημα ο σημερινός πληθυσμός είναι π_0 = 100.000 μαθητές, τότε ένα χρόνο μετά το μοντέλο προβλέπει πληθυσμό $\pi_1 = \pi_0 + 5.000 \Rightarrow \pi_1 = 100.000 + 5.000 = 105.000$ μαθητών, δύο χρόνια μετά $\pi_2 = \pi_1 + 5.000 \Rightarrow \pi_2 = 105.000 + 5.000 = 110.000$ κλπ. Χωρίς την αρχική τιμή, η εξίσωση διαφορών $\pi_{n+1} = \pi_n + 5.000$, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μας πει ποιες θα ήταν οι ακόλουθες τιμές. Γι' αυτό το λόγο, το να διαλέξουμε την αρχική τιμή είναι ένα σημαντικό μέρος της ανάπτυξης ενός μοντέλου το οποίο περιλαμβάνει μια εξίσωση διαφορών. Η εναρκτήρια αυτή τιμή π_0, ονομάζεται (Kalman, 1997).

3.2.2. Γραφικές ιδιότητες μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης

Οι εξισώσεις διαφορών των μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια γραφημάτων (α-n). Στην περίπτωση όμως των αριθμητικών μοντέλων είτε χρησιμοποιήσουμε ένα ραβδόγραμμα είτε ένα γραφήματα μέσω γραμμών, παρατηρούμε ότι πάντα θα δημιουργηθεί μια ευθεία γραμμή. Γι' αυτό η αριθμητική ανάπτυξη αναφέρεται ως *γραμμική ανάπτυξη* και τα αντίστοιχα μοντέλα της γραμμικά. Στο ραβδόγραμμα οι κορυφές των στηλών του σχηματίζουν μια ευθεία γραμμή, ενώ στο γράφημα μέσω γραμμών τα μεμονωμένα σημεία της ακολουθίας των τιμών ανήκουν σε μια ευθεία γραμμή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην εξίσωση διαφορών, η τιμή για την παράμετρο d αντανακλά στην *κλίση της ευθείας* του γραφήματος. Δηλαδή, στην εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας x΄x του γραφήματος (που θα είναι ο άξονας του χρόνου n) όταν στραφεί κατά τη θετική φορά (αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε (σχήμα 6) (Kalman, 1997).



Σχήμα 6
Κλίση της ευθείας του γραφήματος.

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $\omega \in [0^0,180^0)$ ή σε ακτίνια $\omega \in [0,\pi)$. Προφανώς η κλίση της ευθείας είναι ανοδική αν η εφω είναι θετική, δηλαδή αν η γωνία ω είναι οξεία. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι αμβλεία, η εφω είναι αρνητική και η κλίση της ευθείας ε είναι καθοδική. Αν η γωνία ω είναι η μηδενική, τότε εφω = 0, και η ευθεία ε είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα. Στην περίπτωση που η γωνία $\omega = 90^0$, δηλαδή δεν υπάρχει η εφω, η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x΄x (Kalman, 1997).

Ως προς την παράμετρο d της εξίσωσης διαφορών (3.1), μπορούμε να πούμε ότι αν d είναι θετική, η κλίση πάει προς τα πάνω όσο πάμε προς τα δεξιά (αύξουσα), ενώ αν d είναι αρνητική, η κλίση πάει προς τα κάτω όσο πάμε προς τα δεξιά (φθίνουσα). Όσο μεγαλώνει η παράμετρος d (όχι κατά απόλυτη τιμή), τόσο απότομη γίνεται η κλίση της ευθείας στο γράφημα (Kalman, 1997).

3.2.3. Θεωρητικές ιδιότητες μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης

Είδαμε ότι όταν προσεγγίζουμε αριθμητικά ή γραφικά ένα πρόβλημα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση διαφορών που είναι ο αναδρομικός τύπος $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$ του μοντέλου. Όμως, η εξίσωση διαφορών χρησιμοποιείται επαναληπτικά και αυτό αποτελεί ένα μειονέκτημα. Για να υπολογίσουμε το α_{100}, πρέπει να έχουμε υπολογίσει και όλες τις προηγούμενες 99 τιμές $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{99}$! Η συναρτησιακή εξίσωση από την άλλη είναι άμεση. Μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την $100^η$ τιμή των δεδομένων με έναν μόνο υπολογισμό. Αυτό είναι που κάνει τη συναρτησιακή εξίσωση τόσο χρήσιμη.

Στη θεωρητική προσέγγιση του αριθμητικού μοντέλου πρέπει πρώτα να μπορούμε να βρούμε τη συναρτησιακή εξίσωση του προβλήματος. Για το παράδειγμα του σχολικού πληθυσμού που μελετήσαμε στην παράγραφο 3.2., αν ξεκινήσουμε με αρχική τιμή $\pi_0 = 50.000$, παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές:

$$\pi_0 = 50.000$$
$$\pi_1 = \pi_0 + 5.000 = \pi_0 + 5.000 \text{ x } 1$$
$$\pi_2 = \pi_1 + 5.000 = \pi_0 + 5.000 \text{ x } 2$$
$$\pi_3 = \pi_2 + 5.000 = \pi_0 + 5.000 \text{ x } 3$$
$$\pi_4 = \pi_3 + 5.000 = \pi_0 + 5.000 \text{ x } 4$$

Όλα τα παραπάνω μπορούν να συμπτυχθούν στην εξίσωση: $\pi_n = \pi_0 + 5.000n$.
Το π_0 εδώ αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίστηκε η d νωρίτερα. Είναι μια παράμετρος. Θεωρείται σαν να είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός σε κάθε ξεχωριστή εφαρμογή της εξίσωσης, αλλά καταλαβαίνουμε ότι θα είναι διαφορετικοί αριθμοί σε διαφορετικές εφαρμογές (Kalman, 1997).

Παρατηρώντας την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι υπακούει στον ορισμό της συναρτησιακής εξίσωσης, δηλαδή, το π_n είναι μια συνάρτηση του n. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το π_{100} απευθείας χρησιμοποιώντας n=100 χωρίς πρώτα να υπολογίσουμε τις προηγούμενες 99 τιμές όπως στην εξίσωση διαφορών.

Όλη αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται σε κάθε μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης. Αν η εξίσωση διαφορών είναι $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$, τότε ο όρος της α_n θα προσεγγιστεί αφού προσθέσουμε επανειλημμένα το d, n φορές στην αρχική τιμή α_0. Έτσι, ξεκινώντας από α_0 καταλήγουμε σε μια τιμή $\alpha_n = \alpha_0 + dn$. Αυτός είναι ένας γενικός τύπος συναρτησιακών εξισώσεων για όλα τα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης που μπορούμε να συγκεντρώσουμε σε έναν πίνακα:

Αν ένα *μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης*
έχει *αρχική τιμή* α_0 και *εξίσωση διαφορών*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d,$$

τότε έχει *συναρτησιακή εξίσωση*

$$\alpha_n = \alpha_0 + dn, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Με τη συναρτησιακή εξίσωση $\alpha_n = \alpha_0 + dn$ (3.2)
μπορούμε εύκολα να προβλέψουμε τι θα συμβεί στο μέλλον ή πότε θα συμβεί κάτι ενδιαφέρον στο μέλλον. Υπάρχει μία διαδικασία βημάτων ρουτίνας που παρουσιάζονται στο ακόλουθο παράδειγμα για το σχηματισμό της εξίσωσης αυτής όταν χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης (Kalman, 1997).

3.3. ΒΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Μέσα από το επόμενο παράδειγμα, θα παρουσιάσουμε όλα τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε για το σχηματισμό μιας συναρτησιακής εξίσωσης και στη συνέχεια θα τη χρησιμοποιήσουμε για να βγάλουμε συμπεράσματα για το πρόβλημα που μελετάμε. Είναι σημαντικό να πούμε πως η ακριβής σειρά αυτών των βημάτων δεν είναι υποχρεωτική. Αυτό που έχει σημασία είναι να γίνει κατανοητή η συνολική προσέγγιση του σχηματισμού του μοντέλου λεκτικά, μετά ως εξίσωση διαφορών και μετά χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή εξίσωση. (Kalman, 1997).

Πρόβλημα: Μια επιστήμονας μελετά την εξάπλωση μιας νέας ασθένειας σε μια μικρή πόλη. Εκτιμά ότι 3.700 άτομα πάσχουν από τη νόσο κατά την έναρξη της μελέτης της και ότι υπάρχουν 45 νέα κρούσματα κάθε μέρα. Να γίνει ανάλυση του μοντέλου ανάπτυξης για την επιδημία αυτή. Επίσης η επιστήμονας βρήκε ότι περίπου το 3% των ανθρώπων που νοσούν από την ασθένεια απαιτεί θεραπεία με ειδικά φάρμακα. Το τοπικό νοσοκομείο είχε 500 δόσεις του φαρμάκου άμεσα διαθέσιμες κατά την έναρξη της μελέτης. Ανάλογα με το μοντέλο, σε πόσο χρόνο αυτό το φάρμακο θα εξαντληθεί;

1° ΒΗΜΑ : Σχηματίζοντας ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης.

Σε αυτήν την περίπτωση η ιδέα ότι οι ασθενείς αυξάνονται κάθε μέρα κατά τον ίδιο αριθμό, 45, δείχνει ότι πρόκειται για ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης. Τί είναι αυτό που θα θέλαμε να μελετήσουμε; Τον αριθμό των ασθενών. Άρα, ορίζουμε ένα όνομα για τη μεταβλητή: α_n ο αριθμός άρρωστων ανθρώπων σε μονάδες, n ημέρες μετά την αρχή της μελέτης. Παρατηρήστε ότι αυτή η δήλωση κάνει δύο πράγματα: δίνει ένα *γράμμα για τα δεδομένα των μεταβλητών* και υποδεικνύει ότι οι *μονάδες δεδομένων* θα είναι σε μονάδες ασθενών. Θα μπορούσε σε άλλες περιπτώσεις παραδειγμάτων να κάνει και κάτι ακόμα: να εγκαθιδρύει το αρχικό έτος ή το *χρόνο έναρξης του μοντέλου* (Kalman, 1997).

2° ΒΗΜΑ: Σχηματίζοντας την εξίσωση διαφορών της αριθμητικής ανάπτυξης.

Αφού ο αριθμός των ασθενών αυξάνεται κατά 45 νέα κρούσματα τη μέρα, η εξίσωση διαφορών θα πρέπει να λέει ότι κάθε α είναι 45 περισσότερο από το προηγούμενο α. Σημειώστε ότι 45 ασθενείς είναι 45 μονάδες και στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν χρειάζεται να γίνει αναγωγή σε άλλες μονάδες μέτρησης. Έτσι, η εξίσωση διαφορών είναι :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 45$$

Αν όμως για παράδειγμα οι μονάδες μέτρησης ήταν σε δεκάδες, έπρεπε να σκεφτούμε πως οι 45 ασθενείς είναι τέσσερις και μισό δεκάδες, δηλαδή, 4,5 δεκάδες και τότε η εξίσωση διαφορών μεταβάλλεται ως εξής:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 4{,}5 \text{ (Kalman, 1997)}$$

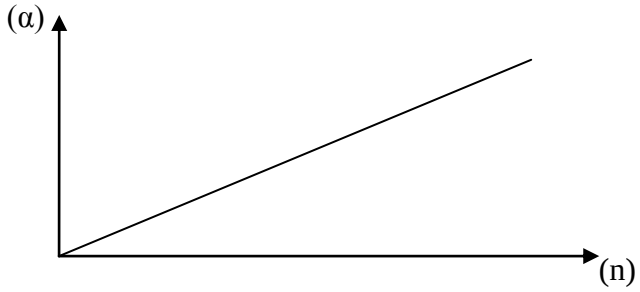
3° ΒΗΜΑ: Σχηματίζοντας την αρχική τιμή και κάθε περιορισμό του n.

Το πρόβλημα λέει ότι υπήρχαν 3.700 άτομα που πάσχουν από τη νόσο κατά την έναρξη της μελέτης. Αφού ορίσαμε ως α_n τον αριθμό των ανθρώπων που πάσχουν, n ημέρες μετά την αρχή της μελέτης, η αρχική τιμή $\boldsymbol{\alpha_0}$ θα πρέπει να δείχνει τον αριθμό των ασθενών 0 ημέρες μετά την αρχή της μελέτης, άρα θα πρέπει να δείχνει τον αριθμό των ασθενών στην αρχή της μελέτης. Τότε όμως οι ασθενείς ήταν 3.700 και αυτό δίνει την αρχική τιμή $\alpha_0 = 3.700$. Η εξίσωση διαφορών ισχύει για κάθε $n \geq 0$ (Kalman, 1997).

4° ΒΗΜΑ: Σχεδιάζοντας ένα γράφημα.

Η οπτική απεικόνιση του μοντέλου μας δίνει έναν άλλον τρόπο να δούμε τα πράγματα. Μερικές φορές μπορούμε να αναγνωρίσουμε λάθη ή σφάλματα γιατί κάτι από την εξίσωση διαφορών ή τα αριθμητικά αποτελέσματα δεν συμφωνεί με το γράφημα. Για να κάνουμε το γράφημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα

υπολογιστικό πακέτο στον ηλεκτρονικό υπολογιστή όπως: maple, matlab, geogebra, excel, κλπ. Μπορούμε όμως να το κάνουμε και με το χέρι (Kalman, 1997).



Σχήμα 7
Γράφημα ημέρες-ασθενείς

5^{ο} ΒΗΜΑ: Σχηματίζοντας τη συναρτησιακή εξίσωση.

Η συναρτησιακή εξίσωση μας λέει ευθέως ποιο θα είναι το α_n. Εάν ο αριθμός των ασθενών αυξάνεται κατά 45 τη μέρα, τότε μετά από n μέρες θα έχει αυξηθεί κατά 45n. Αφού ξεκίνησε από 3.700 ασθενείς, έχουμε α_n = 3.700 + 45n. Πιο αναλυτικά έχουμε μερικές πρώτες τιμές δεδομένων:

α_0 = 3.700
α_1 = 3.700 + 45x1
α_2 = 3.700 + 45x2
α_3 = 3.700 + 45x3
α_4 = 3.700 + 45x4
α_5 = 3.700 + 45x5

Όλα τα παραπάνω μπορούν να συμπτυχθούν στη συναρτησιακή εξίσωση:

α_n = 3.700 + 45n.

Αν θέλουμε μπορούμε να την υπολογίσουμε με τύπους. Χρησιμοποιούμε δηλαδή τον τύπο (3.2) $\alpha_n = \alpha_0 + dn$, όπου α_0 = 3.700 να είναι ο αρχικός αριθμός ασθενών και d = 45 είναι το ποσό της αύξησης των ασθενών κάθε μέρα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι c_n= 70+4,5n (Kalman, 1997).

6^{ο} ΒΗΜΑ: Απαντώντας κάθε συγκεκριμένη ερώτηση.

Στο βήμα αυτό πρέπει να αναδιατυπώσουμε τις ερωτήσεις με όρους του μοντέλου, ώστε να μπορέσουμε να απαντήσουμε σε αυτές.

Αρχικά, όμως, πρέπει να βρούμε πόση αγωγή χρησιμοποιείται μετά από 1 ημέρα, μετά από 2 ημέρες, κλπ. Στην αρχή, με 3.700 ανθρώπους μολυσμένους, χρειάζεται το 3% του 3.700 αγωγή, δηλαδή, $\frac{3}{100} \cdot 3700 = 0{,}03 \cdot 3700 = 111$. Άρα στην αρχή ($0^{η}$ μέρα) από τους 3.700 ασθενείς μόνο οι 111 χρειάζονται αγωγή, δηλαδή, χρειάζονται 111 δόσεις. Μετά από 1 μέρα ($1^{η}$ μέρα), άλλες 45 περιπτώσεις ασθενών εμφανίστηκαν. Από αυτούς θα χρειαστούν αγωγή μόνο το 3% του 45, έχουμε δηλαδή, $\frac{3}{100} \cdot 45 = 0{,}03 \cdot 45 = 1{,}35$ ασθενείς (δεκαδικός!). Φυσικά εκείνη την ημέρα δε θα χρησιμοποιήσουμε 1,35 δόσεις. Αλλά η ιδέα του ότι το 3% των ασθενών χρειάζεται τη δόση του φαρμάκου είναι κατά μέσο όρο. Κάποιες μέρες, δηλαδή, μπορεί να δώσουμε 1 δόση, ακόμα άλλες μέρες 2, αλλά μακροπρόθεσμα θα είναι ο μέσος όρος 3%. Για το λόγο αυτό, θα προσποιηθούμε ότι 1,35 δόσεις δόθηκαν την $1^{η}$ μέρα. Τότε, η συνολική αγωγή που θα χρησιμοποιηθεί είναι 111+1,35=112,35 δώσεις. Επειδή κάθε μέρα προστίθενται άλλοι 45 ασθενείς, κάθε μέρα θα χρησιμοποιηθούν και 1, 35 δόσεις. Έτσι αφού η ποσότητα της αγωγής που χρησιμοποιήθηκε αυξάνει σταθερά κάθε μέρα, κατά 1,35, δείχνει ότι ο αριθμός δόσεων είναι μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης. Έστω δ_n να είναι ο αριθμός δόσεων που χρησιμοποιήθηκαν στο τέλος της μέρας n. Τότε έχουμε τα εξής:

$\delta_0 = 111$
$\delta_1 = \delta_0 + 1{,}35$
$\delta_2 = \delta_1 + 1{,}35$
$\delta_3 = \delta_2 + 1{,}35$ κλπ.

Η εξίσωση διαφορών που προκύπτει για τον αριθμό των δόσεων είναι:

$\delta_{n+1} = \delta_n + 1{,}35$

Αυτό σημαίνει ότι η συναρτησιακή εξίσωση είναι: $\delta_n = 111 + 1{,}35n$ (Kalman, 1997).

Τώρα που βρήκαμε τη συναρτησιακή εξίσωση του μοντέλου, θέλουμε να δούμε πότε αυτό θα φτάσει σύνολο $\delta_n = 500$ δόσεις σε διαθεσιμότητα. Έτσι, θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση 111+1,35n=500. Συνήθως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γραφικές και αριθμητικές μεθόδους για να πάρουμε μια ιδέα σχετικά με το ποια μπορεί να είναι η απάντηση. Για μια ακριβή όμως απάντηση χρησιμοποιούμε άλγεβρα ως εξής:

$111+1{,}35n=500 \Rightarrow 1{,}35n=500-111 \Rightarrow 1{,}35n=389 \Rightarrow n=389/1{,}35 \Rightarrow n=288{,}15.$

Αυτό δείχνει ότι η φαρμακευτική αγωγή θα διαρκέσει 288 μέρες και θα εξαντληθεί την άλλη μέρα ($289^{η}$), υποθέτοντας ότι η επιδημία συνεχίζεται σύμφωνα με το μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης (Kalman, 1997).

3.4. ΜΕΛΕΤΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κάθε συναρτησιακή εξίσωση μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης $\alpha_n = \alpha_0 + dn$, έχει γράφημα με σημεία (n, α_n). Σε αυτό το μέρος της εργασίας θα τις μελετήσουμε από την οπτική των γραμμικών εξισώσεων.

Αριθμητικά, γραμμικές εξισώσεις είναι ισότητες με μεταβλητές και σταθερές μόνο:

α) με προσθέσεις, αφαιρέσεις και

β) πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις με τουλάχιστον μια σταθερά.

Οπτικά, γραμμικές εξισώσεις είναι ισότητες με μεταβλητές και σταθερές, που οι μεταβλητές:

α) δεν έχουν εκθέτες

β) δεν πολλαπλασιάζονται με μεταβλητές

γ) δεν μπαίνουν σε παρονομαστές

δ) δεν μπαίνουν σε ρίζες, λογαρίθμους, απόλυτα, κλπ. (Kalman, 1997).

Οι γραμμικές εξισώσεις, με μια μεταβλητή, είναι εύκολο να λυθούν αλγεβρικά γι' αυτό δεν θα αναφερθούμε σε κάτι τέτοιο. Θα δούμε όμως κάποια γραφικά χαρακτηριστικά αυτών με δύο μεταβλητές μέσα από τρεις διαφορετικούς τρόπους έκφρασης της εξίσωσής τους. Επειδή ο συμβολισμός κάθε μεταβλητών και παραμέτρων, που εμπλέκονται στις συναρτησιακές εξισώσεις, αλλάζει ανάλογα με το κάθε πρόβλημα που μελετάμε, θα χρησιμοποιήσουμε έναν ενιαίο συμβολισμό. Έστω λοιπόν x, y οι μεταβλητές των εξισώσεων ώστε όταν κάνουμε το γράφημά τους ο οριζόντιος άξονας να είναι του x και ο κατακόρυφος του y.

Αφού η εξίσωση είναι γραμμική το γράφημά της θα είναι μια ευθεία γραμμή (ε). Θυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι σε περίπτωση που γνωρίζουμε ένα σημείο μιας ευθείας (ε), έστω $A(x_1, y_1)$ και την γωνία ω της (ε) ή δύο σημεία μιας ευθείας (ε), έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$, τότε μπορούμε να βρούμε την κλίση της d και στη συνέχεια την εξίσωσή της, με τους εξής τρόπους:

Κλίση ευθείας (ε): d = εφω ή $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, αν $d = y_0 / x_0$, με την ευθεία να κινείται y_0 μονάδες πάνω (αν $y_0>0$) ή κάτω ($y_0<0$), για x_0 μονάδες που η ευθεία κινείται δεξιά (Kalman, 1997).

Μορφές γραμμικής εξίσωσης ευθείας (ε):

1. *Τύπος κλίσης-τεταγμένης:* $y = dx + b$, όπου d η κλίση της (ε) και (0,b) το σημείο που η (ε) τέμνει το άξονα y΄y.

2. *Τύπος κλίσης-σημείου:* $y - y_1 = d(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_2 = d(x - x_2)$, όπου d η κλίση και (x_1, y_1) ένα σημείο της (ε).

3. *Τύπος τετμημένης-τεταγμένης:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, όπου (α,0) το σημείο που η (ε) τέμνει τον άξονα x΄x και (0,b) το σημείο που η (ε) τέμνει το άξονα y΄y.

(Προσοχή, ο τύπος 3. δεν ισχύει αν η ευθεία περνά από το O(0,0))

3.5. ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Μέσα από την ιδέα της αριθμητικής ανάπτυξης οδηγούμαστε σε δύο επιπλέον σημαντικές ιδέες για την μαθηματική μοντελοποίηση. Αρχικά, θα αναφερθούμε στην αναλογική αιτιολόγηση και στη συνέχεια στα συνεχή μοντέλα.

3.5.1. Αναλογική αιτιολόγηση

Ακολουθεί ένα παράδειγμα: Με τιμή 50 λεπτά του ευρώ, μπορούν να πουληθούν 140 κουτάκια τσίχλες. Αν η τιμή γίνει 65 λεπτά, τότε θα πουληθούν 110 κουτάκια. Στην περίπτωση που η τιμή ανέβει στα 70 λεπτά το κουτάκι, πόσα κουτάκια τσίχλες πιστεύετε ότι μπορούν να πουληθούν; (Kalman, 1997).

Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί και σε πινακική μορφή ως εξής:

Τιμή κουτιού σε λεπτά του ευρώ	50	65	70
Ποσότητα κουτιών που πουλήθηκαν	140	110	**;**

Πίνακας 3.1
Ποσότητες κουτιών τσίχλες που πουλήθηκαν.

Αν σκεφτούμε και προσπαθήσουμε να απαντήσουμε με κοινή λογική στην ερώτηση, θα προβλέψουμε ότι θα πουληθούν 100 κουτάκια με 70 λεπτά το κουτί. Πώς όμως το σκεφτήκαμε αυτό; Πιθανά να είπαμε ότι αυξάνοντας την τιμή κατά 15 λεπτά προκαλείται μείωση 30 κουτιών στις πωλήσεις. Αυτό σημαίνει πως κάθε φορά που αυξάνουμε την τιμή κατά 5 λεπτά (το 1/3 της αύξησης των 15 λεπτών), χάνουμε ανάλογα 10 πωλήσεις (το 1/3 της μείωσης των 30 κουτιών). Έτσι, αυξάνοντας την τιμή από τα 65 στα 70 λεπτά, περιμένουμε να χάσουμε άλλες 10 πωλήσεις και να πουλήσουμε τελικά 100 κουτιά. Έτσι, αν η τιμή ορίζεται στα 70 λεπτά το κουτί περιμένουμε να πουλήσουμε 100 κουτιά τσίχλες (Kalman, 1997).

Ο τρόπος που αιτιολογήθηκε το παραπάνω παράδειγμα είναι συχνός και ονομάζεται *αναλογική αιτιολόγηση***.** Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται όταν υποθέτουμε ότι δύο ποσότητες αλλάζουν με τέτοιο τρόπο, ώστε ο λόγος τους να παραμένει σταθερός ή αμετάβλητος (δηλαδή, να δημιουργείται αναλογία). Στην περίπτωση του παραδείγματος με τις τσίχλες, υποθέτουμε ότι ο λόγος: αύξηση τιμής / μείωση πωλήσεων, δίνει την ίδια τιμή, είτε η αύξηση της τιμής στο κουτάκι είναι 15 λεπτά, είτε είναι 5 λεπτά, είτε 20. Πράγματι, έχουμε:

αύξηση τιμής / μείωση πωλήσεων = 15/30 = 5/10 = 20/40 (= 1/2).

Η αναλογική αιτιολόγηση μπορεί πάντα να εκφραστεί με μια αναλογία. Η σύνδεση τέτοιου τύπου αναλογικής αιτιολόγησης σε μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης είναι αρκετά άμεση: μια υπόθεση αριθμητικής ανάπτυξης οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα, όπως όταν χρησιμοποιούμε αναλογική αιτιολόγηση (Kalman, 1997).

Δυστυχώς, μόνο η χρήση κοινής λογικής για το σχηματισμό των μοντέλων μπορεί να οδηγήσει σε δραματικά λάθη. Οι πληροφορίες που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα με τα κουτάκια τσίχλες ήταν ότι 140 κουτάκια μπορεί να πωληθούν προς 50 λεπτά και 100 για την τιμή των 70. Για να προβλέψουμε πόσα θα πωληθούν σε άλλες τιμές, έστω 51 λεπτά, θα ήταν πολύ βολικό να είχαμε μία εξίσωση που να δίνει τον αριθμό των πωλήσεων π σε συνάρτηση της τιμής τ. Χρησιμοποιώντας την αναλογική αιτιολογία θα λέγαμε ότι αύξηση 20 λεπτών της τιμής προκαλεί μείωση 40 κουτιών στις πωλήσεις, έτσι που για κάθε 1 λεπτό που αυξάνεται η τιμή του κουτιού, οι πωλήσεις μειώνονται κατά 2. Πώς μπορεί αυτό να εκφραστεί σε εξίσωση; Πολλοί μαθητές γράφουν ως απάντηση:

$$\boldsymbol{\tau + 1 = \pi - 2}$$

και θα το ερμήνευαν ως η πρόσθεση 1 στην τιμή πηγαίνει μαζί με αφαίρεση 2 από τα κουτιά. Αυτό όμως είναι *λάθος*. Το πρόβλημα είναι ότι το « = » παρερμηνεύεται. Δε σημαίνει «πηγαίνει με», αλλά σημαίνει ότι «είναι ο ίδιος αριθμός όπως». Αν ξαναδιαβάσουμε την εξίσωση από αυτή την οπτική, καταλαβαίνουμε ότι η τιμή, συν ένα ακόμη, είναι ίδιος αριθμός όπως ο αριθμός των κουτιών μείον 2. Αυτό δεν είναι σωστό. Πρώτον, γιατί τα δύο μέλη της εξίσωσης εξισώνουν *ανόμοια* πράγματα, δηλαδή, λεπτά του ευρώ στο πρώτο μέλος και κουτάκια τσίχλες στο δεύτερο μέλος. Δεύτερον, γιατί ξέρουμε ότι στην τιμή των 50 μπορούμε να πουλήσουμε 140 κουτάκια. Αυτό είναι όταν $\tau = 50$, ξέρουμε ότι $\pi = 140$. Χρησιμοποιώντας την αναλογική αιτιολογία στην τιμή του 51, ο αριθμός πωλήσεων θα είναι 138, γιατί το $\tau + 1 = 81$ και $\pi - 2 = 138$. Αυτοί όμως οι αριθμοί πάνε μαζί αλλά δεν επαληθεύουν την εξίσωση $\tau + 1 = \pi – 2$, αφού $51 \neq 138$ (Kalman, 1997).

Ποιά όμως είναι η κατάλληλη προσέγγιση; Η απάντηση είναι να χρησιμοποιήσουμε όλα τα εργαλεία των γραμμικών εξισώσεων. Αρχικά, αναγνωρίζουμε ότι χρησιμοποιώντας την αναλογική αιτιολογία υιοθετούμε ένα γραμμικό μοντέλο που σημαίνει γραμμική εξίσωση για τ και π. Ξέρουμε δύο σημεία δεδομένων γιατί το $\pi = 140$ όταν $\tau = 50$ και $\pi = 100$ όταν $\tau = 70$. Για να βρούμε την εξίσωση για την ευθεία γραμμή που ενώνει αυτά τα σημεία δεδομένων, μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση και να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο σημείου κλίσης για τη γραμμή. Χρησιμοποιώντας τα σημεία (140,50) και (100,70) βρίσκουμε την κλίση της ευθείας να είναι (100-140) / (70-50) = - 40/20 = - 2. Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$\pi - 100 = - 2(\tau - 70)$$

Αυτή είναι η σωστή εξίσωση και δεν είναι εύκολο να βρούμε στην εξίσωση τους αριθμούς που αναφέρθηκαν στη δήλωση: Για κάθε αύξηση **5** λεπτών υπάρχει μείωση **10** κουτιών (Kalman, 1997).

Κάνοντας άμεση χρήση της ιδέας την αναλογικής αιτιολόγησης για να εξάγουμε τη σωστή εξίσωση είναι λίγο περίπλοκο και δύσκολο να το αντιληφθεί κανείς. Είναι πολύ πιο εύκολα να εφαρμόσει κανείς μια γνώση άλγεβρας και γραμμικής εξίσωσης.

3.5.2. Συνεχείς μεταβλητές

Κάθε αριθμητική ανάπτυξη ακολουθείται από ένα είδος εξίσωσης διαφορών. Όμως η αρχική υπόθεση της αριθμητικής ανάπτυξης υποδηλώνει κάτι περισσότερο από αυτό που υποδηλώνει η εξίσωση διαφορών της. Ενώ, δηλαδή, η εξίσωση διαφορών ίσως να λέει ότι η ίδια αύξηση εμφανίζεται για παράδειγμα κάθε χρόνο, η αρχή της αριθμητικής ανάπτυξης υποδηλώνει ότι ίδια ανάπτυξη πρέπει επίσης να συμβαίνει κάθε μισό χρόνο, κάθε μήνα, κάθε εβδομάδα κτλ. Στην πραγματικότητα αν ξέρουμε την ανάπτυξη που συμβαίνει σε ένα χρόνο, μπορούμε ουσιαστικά να περιγράφουμε αναλογικά πόση ανάπτυξη συμβαίνει σε κάθε άλλη χρονική περίοδο (Kalman, 1997).

Μέσα από ένα *παράδειγμα απλού τόκου* θα δούμε τι σημαίνουν όλα τα παραπάνω. Έστω ένας φοιτητής δανείζεται 2.000€ από ένα θείο του, για να πληρώσει μέρος των διδάκτρων του μεταπτυχιακού του. Για την αποπληρωμή του συμφώνησε να δίνει τόκο 5% κάθε χρόνο. Έτσι, με το τέλος του 1^{ου} χρόνου ο τόκος είναι το 5% των 2.000€, δηλαδή, 100€, με αποτέλεσμα να πρέπει να δώσει τότε 2.000 + 100 = 2.100€. Δεν μπόρεσε όμως να εξοφλήσει το ποσό στο τέλος του 1^{ου} έτους και έτσι στο τέλος του 2^{ου} έτους χρωστά άλλα 100€, σύνολο 2.200€. Κάθε χρόνος που περνά αυξάνει το χρωστούμενο ποσό κατά 100€. Αν συμβολίσουμε με π_n το ποσό που οφείλει ο φοιτητής στο τέλος του n-ου έτους και π_0 = 2.000 το αρχικό ποσό που δανείστηκε, τότε η εξίσωση διαφορών του προβλήματος είναι $\pi_n = \pi_{n-1} + 100$. Από την μορφή της εξίσωσης, που συμφωνεί με τον τύπο (3.1), προκύπτει ότι το πρόβλημα ακολουθεί το αριθμητικό μοντέλο ανάπτυξης (Kalman, 1997).

Η υπόθεση της αριθμητικής ανάπτυξης μας λέει επίσης ότι θα πρέπει να υπάρχει αύξηση 50€ για κάθε μισό του έτους. Μετά από όλα αυτά η αύξηση στο πρώτο μισό του έτους θα πρέπει να είναι ίδια με εκείνη του δεύτερου μισού και η τελική αύξηση θα πρέπει μέσα στο έτος να είναι 100€. Χρησιμοποιώντας παρόμοιες προτάσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε την αύξηση για κάθε κλάσμα του χρόνου. Αυτό είναι ένα άλλο παράδειγμα αναλογικής αιτιολογίας. Το τελικό αποτέλεσμα: Η συνάρτηση που παίρνουμε για την αριθμητική ανάπτυξη βγάζει νόημα ακόμα και όταν οι τιμές του δεν είναι ακέραιοι αριθμοί. Στο παράδειγμα τόκου η ποσότητα που οφείλεται μετά από n έτη δίνεται από την συναρτησιακή εξίσωση: $\pi_n = 2.000 + 100n$. Το αποτέλεσμα εξάχθηκε από την υπόθεση ότι το n είναι ακέραιος αριθμός. Αλλά ακόμα και για κλασματικές τιμές του n βγαίνει νόημα. Για παράδειγμα, αν n = 3,5 χρόνια, βρίσκουμε την οφειλομένη ποσότητα η οποία είναι $\pi_{3,5}$ = 2.000 + 1000 x 3,5 = 2.350€ και αυτή είναι η ποσότητα που θα οφειλόταν μετά από 3,5 χρόνια. Κάποιες φορές αντί να χρησιμοποιούμε τους δεκαδικούς δείκτες, χρησιμοποιούμε παρενθέσεις. Εδώ για παράδειγμα, $\pi_{3,5}$ γράφεται και π(3,5) (Kalman, 1997).

Όσο συχνά και πριν, έτσι και δω συναντάμε μια *θεμελιώδη γενική αρχή* σε ένα παράδειγμα. Συχνά θα συναντήσουμε την ιδέα ότι μια συναρτησιακή εξίσωση που προκύπτει αν σκεφτούμε ότι το n είναι ακέραιος, ακόμα βγάζει νόημα αν το n πάρει κλασματικές τιμές. Όταν μια μεταβλητή (όπως το n) λογίζεται ως περιορισμένη σε ακέραιες τιμές ή σε ένα σύνολο ξεχωριστών τιμών, περιγράφεται ως *διακριτή μεταβλητή*. Αντιθέτως, όταν η μεταβλητή μπορεί να πάρει όλες τις δυνατές

κλασματικές τιμές, λέγεται *συνεχής*. Ένας καλός τρόπος για να εξετάσουμε αν μια μεταβλητή είναι διακριτή ή συνεχής είναι αν για κάθε τιμή υπάρχει ή όχι αντίστοιχα μια συγκεκριμένη επόμενη τιμή. Αυτή είναι η ιδέα μιας συνεχής μεταβλητής.

Από τον ορισμό της συναρτησιακής εξίσωσης $\alpha_n = \alpha_0 + dn$, είδαμε ότι το α_n είναι μια συνάρτηση του n. Αντίστροφα, αν λύσουμε ως προς n την συναρτησιακή εξίσωση παίρνουμε μια άλλη εξίσωση χρήσιμη εξίσωση:

$$n = (\alpha_n - \alpha_0) / d \qquad \textbf{(3.3)}$$

η οποία ονομάζεται *αντίστροφη της συναρτησιακής εξίσωσης* (Kalman, 1997).

Πολλές φορές καθώς θα συνεχίσουμε να μελετάμε μοντέλα, θα ακολουθήσουμε το εξής σκεπτικό: ξεκινώντας από ένα μοντέλο με διακριτές μεταβλητές, φτιάχνουμε μια εξίσωση διαφορών από την οποία οδηγούμαστε σε μια συναρτησιακή εξίσωση και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την εξίσωση αυτή ως μέρος του συνεχούς μοντέλου με συνεχείς μεταβλητές (Kalman, 1997).

Στα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης με διακριτές μεταβλητές η συναρτησιακή εξίσωση και η αντίστροφή της είναι: $\alpha_n = \alpha_0 + dn$ και $n = (\alpha_n - \alpha_0) / d$ αντίστοιχα. Σε εκείνα με συνεχείς μεταβλητές οι συμβολισμοί αλλάζουν λίγο:

$$\alpha(n) = \alpha_0 + dn \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$n(\alpha) = (\alpha - \alpha_0) / d \qquad \textbf{(3.5)}$$

3.6. ΑΠΟ ΑΠΛΑ ΣΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΠΕΡΙΠΛΟΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ: ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ

Η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου είναι μια διαδικασία υπολογιστική. Ένα μοντέλο για ένα φαινόμενο χρησιμοποιείται ως βάση για τη μοντελοποίηση ενός σχετικού φαινομένου. Αυτή η διαδικασία συνεχίζει, οδηγώντας σε περισσότερο περίπλοκα μοντέλα. Για να δείξουμε τη διαδικασία, θα ξεκινήσουμε από το *μοντέλο της κατανάλωσης πετρελαίου* και θα προχωρήσουμε στο *μοντέλο των αποθεμάτων πετρελαίου*. Χρησιμοποιώντας το 1991 ως αρχικό χρόνο, θα εξετάσουμε το συνολικό απόθεμα που υπάρχει σε κάθε επόμενο χρόνο. Σύμφωνα με τη Διεθνή Πετρελαϊκή Εγκυκλοπαίδεια για το 1994, το συνολικό απόθεμα πετρελαίου για το 1991 μετρήθηκε στα 999,100 δις. βαρέλια = 999.100 εκατ. βαρέλια. Πόσο πετρέλαιο έμεινε το 1992 και το 1993; Αν αφαιρέσουμε όσο καταναλώθηκε σε ένα χρόνο από τα αποθέματα πετρελαίου στην αρχή του έτους, το αποτέλεσμα δίνει το πετρέλαιο που έμεινε στην αρχή του επόμενου χρόνου. Αυτό οδηγεί αμέσως σε μια νέα εξίσωση διαφορών (Kalman, 1997).

Αν συμβολίσουμε με α_n τα αποθέματα πετρελαίου n χρόνια μετά την αρχή του 1991, τότε α_0 είναι τα αποθέματα πετρελαίου για το 1991, δηλαδή, α_0 = 999.100. Το α_1 είναι τα αποθέματα πετρελαίου για το 1992 κλπ. Αφού από τον πίνακα1, για την ημερήσια κατανάλωση πετρελαίου, κ_0 = 66,6 εκατ. βαρέλια πετρέλαιο είναι η

καθημερινή κατανάλωση κατά τη διάρκεια του 1991, τότε για έναν ολόκληρο χρόνο, που έχει 365 ημέρες, θα καταναλωθούν $365\kappa_0$ εκατ. βαρέλια.
Ανάλογα, $\alpha_1 = \alpha_0 - 365\kappa_0$ δίνει τα αποθέματα για τον επόμενο χρόνο (Kalman, 1997).
Όμοια, $\alpha_2 = \alpha_1 - 365\kappa_1$, $\alpha_3 = \alpha_2 - 365\kappa_2$ κλπ.
Αυτό το μοτίβο δίνει μια εξίσωση διαφορών για τα αποθέματα πετρελαίου:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365\kappa_n.$$

Συνδυάζοντας το μοντέλο αποθέματος με εκείνο της κατανάλωσης μας δίνει την ακόλουθη πιο πλούσια περιγραφή:

Το κ_n εκφράζει τον μέσο όρο της καθημερινής παγκόσμιας κατανάλωσης σε εκατομμύρια βαρέλια, n χρόνια μετά το 1991.

Το α_n εκφράζει το συνολικό απόθεμα πετρελαίου στην αρχή του χρόνου σε εκατομμύρια βαρέλια, n χρόνια μετά το 1991.

Το μοντέλο έχει αρχικές τιμές:
$\kappa_0 = 66{,}6$ και $\alpha_0 = 999.100$

και εξισώσεις διαφορών:
$\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0{,}3$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365\kappa_n$ (Kalman, 1997).

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο για να υπολογίσουμε και την ετήσια κατανάλωση και τα αποθέματα για κάθε έτος μετά το 1991. Αν ενδιαφερόμαστε κυρίως για τα αποθέματα, μπορούμε να απλοποιήσουμε τη διαδικασία λίγο χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή εξίσωση $\kappa_n = \kappa_0 + 0{,}3n$ ή $\kappa_n = 66{,}6 + 0{,}3n$. Αν αντικαταστήσουμε το κ_n με $66{,}6 + 0{,}3n$ στην εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365\kappa_n$, παίρνουμε την εξίσωση διαφορών μόνο για το α:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365(66{,}6 + 0{,}3n)$$

Έτσι δείξαμε ότι χτίζοντας το απλό μοντέλο για την κατανάλωση του πετρελαίου, έχουμε σχηματίσει μια εξίσωση διαφορών για ένα περισσότερο πολύπλοκο μοντέλο των αποθεμάτων πετρελαίου. Η σημασία του παραδείγματος είναι να δείξει πώς τα μοντέλα μπορούν να χτιστούν πάνω σε άλλα μοντέλα.

Σε αυτό το κεφάλαιο συζητήσαμε την αριθμητική ανάπτυξη. Τα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά, συμπεριλαμβανομένων του τύπου των εξισώσεων διαφορών και συναρτησιακών εξισώσεων τους. Όλα έχουν ευθεία γραμμή ως γράφημα και όλα χρησιμοποιούν αναλογική σκέψη. Παρουσιάστηκαν έννοιες κλίσεων ευθείας και σχηματισμός τύπου ευθείας. Η αριθμητική ανάπτυξη μας οδήγησε στην ιδέα των συνεχών μεταβλητών. Επίσης είδαμε πως ένα μοντέλο μπορεί να κατασκευαστεί πάνω σε ένα άλλο στο παράδειγμα των αποθεμάτων πετρελαίου (Kalman, 1997).

4. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στο κεφάλαιο που προηγήθηκε, μελετήσαμε μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης. Οι εξισώσεις αυτών είναι όπως είδαμε 1^{ου} βαθμού. Υπάρχουν όμως παραδείγματα από την καθημερινότητά μας, που όταν τα μοντελοποιούμε για να τα μελετήσουμε, δεν μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση από αυτές των αριθμητικών μοντέλων που περιγράφτηκε στο κεφάλαιο 3. Δεν αρκούν, δηλαδή, μόνο τα γραμμικά μοντέλα γιατί έχουμε προβλήματα που δεν υπακούουν σε αυτά. Έτσι, θα δούμε και θα μελετήσουμε εδώ μια άλλη οικογένεια μοντέλων που ονομάζεται *τετραγωνικής ανάπτυξης*, καθώς και τη σχέση που έχει με την αντίστοιχη των μοντέλων αριθμητικής ανάπτυξης. Στην οικογένεια αυτή θα επεκτείνουμε την ιδέα ότι όλα τα τετραγωνικά μοντέλα έχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά, συμπεριλαμβανομένων των εξισώσεων διαφορών, των συναρτησιακών εξισώσεων και των γραφημάτων τους (Kalman, 1997).

4.1. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Ένα παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου, σχετικά με τα *συνολικά στρέμματα που υλοτόμησε μια εταιρεία ξυλείας* ανά χρόνο, θα παρουσιαστεί παρακάτω, μέσω του οποίου θα περιγραφούν όλα τα βήματα για την εύρεση της εξίσωσης διαφορών. Έστω ότι η εταιρεία είχε στην κατοχή της για εκμετάλλευση 50.000 στρέμματα. Το έτος 1991 υλοτόμησε 1.200 στρέμματα, ένα χρόνο μετά υλοτόμησε συνολικά 2.600 στρέμματα. Τα υπόλοιπα δεδομένα, από τη μελέτη των 50.000 στρεμμάτων που υλοτομούσε κάθε χρόνο η εταιρεία ξυλείας από το 1991 έως το έτος 1994, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 4.1 (Kalman, 1997).

Έτος	1991	1992	1993	1994
Συνολικά στρέμματα υλοτόμησης	1.200	2.600	4.200	6.000

Πίνακας 4.1
Συνολικά στρέμματα υλοτόμησης μιας εταιρείας ξυλείας ανά χρόνο

Αν παρατηρήσουμε τα δεδομένα του πίνακα 4.1 θα δούμε ότι η αύξηση των στρεμμάτων από το 1991 και κάθε χρόνο μετά μέχρι το 1994 είναι 1.400, 1.600 και 1.800 αντίστοιχα. Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει μια σταθερή αύξηση στις διαφορές αυτές από χρόνο σε χρόνο. Έτσι, ένα αριθμητικού τύπου ανάπτυξης μοντέλο δεν είναι κατάλληλο γι' αυτό το πρόβλημα.

Αντιλαμβανόμαστε όμως, πως οι διαφορές των δεδομένων με τη σειρά τους διαφέρουν κατά 200 στρέμματα. Έχουν, δηλαδή, μια σταθερή αύξηση σε αντίθεση με αύξηση των στρεμμάτων. Έτσι, όπως αυτές αναφέρονται, οι διαφορές των διαφορών είναι όλες ίσες με 200. Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός διαφορετικού είδους μοντέλου, που ονομάζεται *τετραγωνικής ανάπτυξης μοντέλο* (Kalman, 1997).

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα δεδομένων που δημιουργούν την ακολουθία: 10, 12, 16, 22, 30, 40. Από κάθε επόμενο αριθμό αν αφαιρέσουμε τον προηγούμενό του δημιουργείται ένα νέο σύνολο τιμών, που στην περίπτωσή μας είναι 2, 4, 6, 8, 10. Αυτές οι νέες τιμές ονομάζονται οι *διαφορές* του αρχικού συνόλου δεδομένων. Οι διαφορές είναι οι αυξήσεις ή οι μειώσεις στο πρωτότυπο σύνολο δεδομένων.
Όταν το σύνολο δεδομένων περιέχει αριθμούς που αυξάνονται (ή μειώνονται), οι διαφορές του είναι θετικές (ή αρνητικές). Άρα μπορούμε να πούμε ότι:

Μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης, είναι αυτά στα οποία οι *διαφορές* των δεδομένων τους ακολουθούν ένα *μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης*.

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος για να δούμε τα μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης, με τις διαφορές των διαφορών τους που ονομάζονται και *δεύτερες διαφορές*. Ας υποθέσουμε ξανά ότι οι αρχικές τιμές των δεδομένων είναι 10, 12, 16, 22, 30, 40. Μετά οι διαφορές των δεδομένων είναι 2, 4, 6, 8, 10, ενώ οι διαφορές των διαφορών των δεδομένων είναι όλες ίσες με το 2. Αυτό φαίνεται στον πίνακα 4.2 (Kalman, 1997).

Αρχικά δεδομένα	10		12		16		22		30		40
Διαφορές		2		4		6		8		10	
Δεύτερες διαφορές			2		2		2		2		

Πίνακας 4.2
Σταθερές οι δεύτερες διαφορές

Έτσι, ένα δεύτερο χαρακτηριστικό της τετραγωνικής ανάπτυξης είναι:

Μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης, είναι αυτά στα οποία οι *δεύτερες διαφορές* των δεδομένων τους είναι *σταθερές*.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι τετραγωνικής ανάπτυξης είναι ένα είδος μοντέλου που μπορεί να εξεταστεί όταν ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης είναι ακατάλληλο. Η τετραγωνική ανάπτυξη εφαρμόζεται όταν οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας της αυξάνονται όχι κατά μια σταθερή ποσότητα, αλλά κατά μια ποσότητα που από μόνη της μεταβάλλεται όσο περνά ο χρόνος, αν και με απλό τρόπο.

Τα μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης χρησιμοποιούνται για να κάνουν προβλέψεις σχετικά με πραγματικά φαινόμενα. Αυτό περιλαμβάνει τις ίδιες βασικές μεθόδους ανάλυσης που είδαμε για την αριθμητική ανάπτυξη. Αρχικά, το μοντέλο

συχνά σχηματίζεται χρησιμοποιώντας μια εξίσωση διαφορών, όμοια για όλα τα τετραγωνικά μοντέλα. Από την εξίσωση διαφορών, δημιουργείται μια συναρτησιακή εξίσωση, η οποία δίνει απάντηση σε συγκεκριμένες ερωτήσεις σχετικά με τη μελλοντική συμπεριφορά του μοντέλου (Kalman, 1997).

Για να δημιουργήσουμε την εξίσωση διαφορών του μοντέλου τετραγωνικής ανάπτυξης θα αναφερθούμε ξανά στα δεδομένα του πίνακα 4.1, σχετικά με τον αριθμό των στρεμμάτων μιας εταιρείας ξυλείας. Θα συμβολίσουμε με α_0 την αρχική καταγραφή των στρεμμάτων για το έτος 1991 και θα εκφράσουμε τις επόμενες τιμές σε σχέση αυτήν, ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

$\alpha_0 = 1.200$
$\alpha_1 = 2.600 = \alpha_0 + 1.400$
$\alpha_2 = 4.200 = \alpha_0 + 3.000$
$\alpha_3 = 6.000 = \alpha_0 + 4.800$

Θα συσχετίσουμε τώρα σε κάθε μια από τις παραπάνω τιμές με την αμέσως προηγούμενή της και παράλληλα τις διαφορές με την αρχική διαφορά, $\alpha_0 = 1.200$, ως εξής:

$\alpha_0 = 1.200$
$\alpha_1 = \alpha_0 + 1.400$
$\alpha_2 = \alpha_1 + 1.400 + 200 = \alpha_1 + 1.400 + 200x1$
$\alpha_3 = \alpha_2 + 1.400 + 400 = \alpha_2 + 1.400 + 200x2$

Τώρα, μπορούμε να κάνουμε πρόβλεψη της κατάλληλης εξίσωσης για κάθε α_n, όπως για παράδειγμα του $\alpha_{10} = \alpha_9 + 1.400 + 200x9$. Έτσι, με ανάλογο σκεπτικό, θα μπορούμε να δώσουμε μια μόνο εξίσωση, χρησιμοποιώντας στους δείκτες τη μεταβλητή n για κάθε α_n. Έτσι, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1.400 + 200n \qquad \textbf{(4.1)}$$

Αυτή είναι η *εξίσωση διαφορών* για το παράδειγμα των στρεμμάτων μιας εταιρείας ξυλείας (Kalman, 1997).

Αν δούμε με προσοχή τις διαφορές των αρχικών δεδομένων: 1.400, 1.600 και 1.800. Αυτές ακολουθούν μια υπόθεση αριθμητικής ανάπτυξης που ξεκινά με αρχική τιμή 1.400 και αυξάνονται σταθερά κατά 200. Δηλαδή, θα είχε εξίσωση διαφορών $\beta_{\kappa+1} = \beta_\kappa + 200$ και συναρτησιακή εξίσωση $\beta_\kappa = 1.400 + 200\kappa$. Βλέπουμε ότι σταθερές αυτές στην εξίσωση διαφορών της αριθμητικής ανάπτυξης των διαφορών των δεδομένων, εμφανίζονται και στην εξίσωση διαφορών (4.1) των δεδομένων της τετραγωνικής ανάπτυξης.

Μέσα και από άλλες εφαρμογές μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης φαίνεται πως αυτές οι ίδιες σχέσεις μπορούν να παρατηρηθούν και σε κάθε άλλο μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης.

Άρα, η γενική μορφή κάθε τετραγωνικής ανάπτυξης εξίσωση διαφορών είναι:

$\alpha_{n+1} = \alpha_n$ + ένας *σταθερός αριθμός* + άλλος *σταθερός αριθμός* · n

Σε αυτή τη μορφή, οι σταθεροί αριθμοί είναι *παράμετροι*. Όσο για την αριθμητική ανάπτυξη, θα παρουσιάσουμε αυτές τις παραμέτρους με μεταβλητές, d για την πρώτη και e για την άλλη. Τότε, έχουμε τον εξής ορισμό:

Κάθε *μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης*, έχει *εξίσωση διαφορών* της μορφής:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en \qquad \textbf{(4.2)}$$

d είναι η *σταθερή αρχική διαφορά* του μοντέλου και είναι ίση με το $d = \alpha_1 - \alpha_0$ και

e είναι η *σταθερή δεύτερη διαφορά* του μοντέλου ή *βήμα* που αναπτύσσεται το d

Παρατηρούμε πόσο μοιάζει η εξίσωση διαφορών (4.2) με τη εξίσωση διαφορών αριθμητικής ανάπτυξης (3.1). Υπάρχει ακόμη ένας όρος en. Αυτό επίσης δίνει έναν διαφορετικό τρόπο ορισμού του τι σημαίνει η τετραγωνική ανάπτυξη. Θυμηθείτε ότι για την αριθμητική ανάπτυξη, η διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς όρους είναι σταθερός αριθμός d. Για την τετραγωνική ανάπτυξη, η διαφορά ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς όρους έχει τη μορφή d + en, δηλαδή, είναι μια γραμμική συνάρτηση του n. Έτσι,

Κάθε *μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης*, έχει διαφορά ανάμεσα στο α_{n+1} και α_n:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = d + en$$

και είναι μια *γραμμική συνάρτηση* του n.

Η σπουδαιότητα της διαφορικής εξίσωσης σε τετραγωνική ανάπτυξη κυρίως εμπλέκεται με το σχηματισμό του μοντέλου. Εκφράζοντας τη εξίσωση διαφορών σε συγκεκριμένη μορφή, μας βοηθάει να καταλάβουμε ποιες είναι οι παράμετροι του μοντέλου. Αυτές οι παράμετροι ξαναεμφανίζονται στη συναρτησιακή εξίσωση για την τετραγωνική ανάπτυξη και αυτή είναι η εξίσωση που είναι χρήσιμη στο να κάνουμε προβλέψεις (Kalman, 1997).

4.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Όπως και στα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης έτσι και στο κεφάλαιο αυτό, με τα τετραγωνικά μοντέλα, θα αναφερθούμε στις αριθμητικές, γραφικές και θεωρητικές ιδιότητές τους. Κάθε πρόβλημα που εντάσσεται στο πλαίσιο της τετραγωνικής ανάπτυξης περιγράφεται, όπως είδαμε, από την εξίσωση διαφορών της μορφής:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en \qquad \textbf{(4.2)}$$

Αυτές τις τρεις ιδιότητες των μοντέλων θα τις δούμε μέσα από το παράδειγμα σχετικά με τα συνολικά στρέμματα υλοτόμησης μιας εταιρείας ξυλείας ανά χρόνο, όπως αυτά αναφέρονται στον πίνακα 4.1 (Kalman, 1997).

Και στο κεφάλαιο αυτό μπορούμε να εκφράσουμε το παραπάνω πρόβλημα της υλοτομίας με μια εξίσωση διαφορών. Αρχικά, ορίζουμε α_n να είναι η μεταβλητή του αριθμού των συνολικών στρεμμάτων που υλοτομήθηκαν n χρόνια μετά το 1991. Τότε, η εξίσωση διαφορών δείξαμε πως γίνεται:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1.400 + 200n$$

Θέλουμε να βρούμε πόσα στρέμματα συνολικά θα έχουν υλοτομηθεί από την εταιρεία μετά από 10 χρόνια και σε πόσα χρόνια η εταιρεία θα έχει υλοτομήσει και τα 50.000 στρέμματα που διαθέτει για εκμετάλλευση (Kalman, 1997).

4.2.1. Αριθμητικές ιδιότητες μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης

Με την διαδικασία της αναδρομής που αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, υπολογίζουμε τις τιμές του αριθμού των συνολικών στρεμμάτων που υλοτομήθηκαν n χρόνια μετά το 1991. Κάτι τέτοιο γίνεται στο παράδειγμά μας με τον αναδρομικό τύπο της εξίσωσης διαφορών (4.1).

Και στα μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης, όπως και της αριθμητικής ανάπτυξης, η *αρχική τιμή* α_0 είναι πρωτεύουσας σημασίας αν θέλουμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια της εξίσωσης διαφορών όσες τιμές θέλουμε στο μέλλον. Έχει διαφορά αν αρχικά το 1991 είχαν υλοτομηθεί 1.200 στρέμματα δάσους ή 1.000. Αν τα στρέμματα είναι $\alpha_0 = 1.200$, τότε ένα χρόνο μετά το 1991 το μοντέλο προβλέπει $\alpha_1 = \alpha_0 + 1.400 \Rightarrow \alpha_1 = 2.600$ στρέμματα, δύο χρόνια μετά το 1991 $\alpha_2 = \alpha_1 + 1.400 + 200 = \alpha_1 + 1.400 + 200x1 = 4.200$ στρέμματα κλπ. Έτσι, 10 χρόνια μετά το 1991 μπορούμε να βρούμε αναδρομικά ότι:

$\alpha_3 = \alpha_2 + 1.400 + 400 = 6.000$
$\alpha_4 = \alpha_3 + 1.400 + 600 = 8.000$
$\alpha_5 = \alpha_4 + 1.400 + 800 = 10.200$
$\alpha_6 = \alpha_5 + 1.400 + 1.000 = 12.600$
$\alpha_7 = \alpha_6 + 1.400 + 1.200 = 15.200$
$\alpha_8 = \alpha_7 + 1.400 + 1.400 = 18.000$
$\alpha_9 = \alpha_8 + 1.400 + 1.600 = 21.000$
$\alpha_{10} = \alpha_9 + 1.400 + 1.800 = 24.200$ στρέμματα υλοτομήθηκαν από τα 50.000.

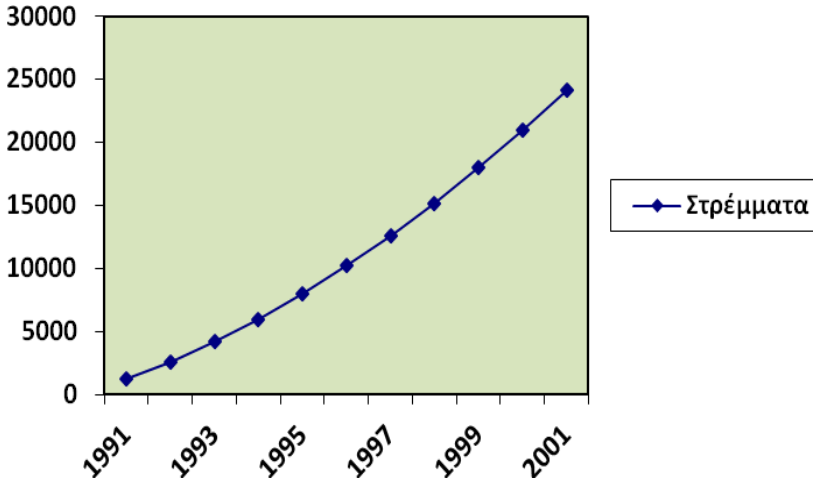
Προφανώς, αν δεν είχαμε την συγκεκριμένη αρχική τιμή, αλλά κάποια άλλη, η εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1.400 + 200n$, δεν θα έδινε τις παραπάνω τιμές. Για παράδειγμα, αν $\alpha_0 = 1.000$, τότε ένα χρόνο μετά το 1991 το μοντέλο προβλέπει $\alpha_1 = \alpha_0 + 1.400 \Rightarrow \alpha_1 = 2.400$ στρέμματα, δύο χρόνια μετά το 1991 $\alpha_2 = \alpha_1 + 1.400 + 200 = \alpha_1 + 1.400 + 200x1 = 4.000$ στρέμματα κλπ. Έτσι, 10 χρόνια μετά το 1991 μπορούμε να βρούμε αναδρομικά ότι:

$\alpha_3 = \alpha_2 + 1.400 + 400 = 5.800$
$\alpha_4 = \alpha_3 + 1.400 + 600 = 7.800$
$\alpha_5 = \alpha_4 + 1.400 + 800 = 10.000$
$\alpha_6 = \alpha_5 + 1.400 + 1.000 = 12.400$
$\alpha_7 = \alpha_6 + 1.400 + 1.200 = 15.000$
$\alpha_8 = \alpha_7 + 1.400 + 1.400 = 17.800$
$\alpha_9 = \alpha_8 + 1.400 + 1.600 = 20.800$
$\alpha_{10} = \alpha_9 + 1.400 + 1.800 = 24.000$ στρέμματα υλοτομήθηκαν από τα 50.000.

Ακόμη, αν δεν είχαμε καμιά πληροφορία για την αρχική τιμή των δεδομένων μας δεν θα μπορούσαμε να βρούμε καμιά τιμή, γιατί πάντα θα μας έλλειπε η προηγούμενή της. Γι' αυτούς τους λόγους, η επιλογή της αρχικής τιμής είναι σημαντική για την ανάπτυξη και μελλοντική μελέτης ενός μοντέλου το οποίο περιλαμβάνει μια τετραγωνική εξίσωση διαφορών (Kalman, 1997).

4.2.2. Γραφικές ιδιότητες μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης

Οι εξισώσεις διαφορών των μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων (α-n), με σημεία της μορφής (n,α_n) που προκύπτουν από αυτήν. Ο οριζόντιος άξονας συνήθως, παριστάνει τις τιμές n του χρόνου, ενώ ο κατακόρυφος άξονας τις τιμές της μεταβλητής α, για κάθε χρονική στιγμή (Kalman, 1997).



Σχήμα 8
Γράφημα τετραγωνικού μοντέλου σχήματος παραβολής

Ενώ όμως στην περίπτωση των αριθμητικών μοντέλων, είτε χρησιμοποιήσουμε ραβδόγραμμα, είτε ένα γραφήματα μέσω γραμμών, θα δημιουργηθεί πάντα μια ευθεία γραμμή, στα τετραγωνικά μοντέλα η γραμμή δεν θα είναι ποτέ ευθεία. Στο παράδειγμά μας για την υλοτομία, αλλά και για κάθε γράφημα τετραγωνικού τύπου ανάπτυξης μοντέλου, τα σημεία που δημιουργούνται στο διάγραμμα (α-n), ανήκουν σε ένα τμήμα μιας καμπύλης όπως αυτήν του σχήματος 8 , που λέγεται *παραβολή* (Kalman, 1997).

Θα ασχοληθούμε με ιδιότητες παραβολών και ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των τετραγωνικών γραφημάτων στις επόμενες παραγράφους του κεφαλαίου. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε πως η αναλογική αιτιολογία που χρησιμοποιήσαμε στα γραμμικά μοντέλα, βγάζει νόημα μόνο σε ένα μοντέλο με γράφημα ευθείας γραμμής. Όσο περισσότερο παρεκκλίνει το μοντέλο από την ευθεία γραμμή, τόσο μεγαλύτερο σφάλμα γίνεται με τη χρήση της αναλογικής αιτιολογίας. Έτσι, εφαρμόζοντας στα τετραγωνικά μοντέλα την αναλογική αιτιολογία, θα οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα (Kalman, 1997).

4.2.3. Θεωρητικές ιδιότητες μοντέλων τετραγωνικής ανάπτυξης

Στην αριθμητική ή γραφική μελέτη ενός προβλήματος, χρησιμοποιούμε την εξίσωση διαφορών που είναι ο αναδρομικός τύπος $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en$ του μοντέλου. Όμως, η εξίσωση διαφορών λόγω του μειονεκτήματος της επαναληπτικής διαδικασίας είναι δύσκολα εφαρμόσιμη, ιδίως για μεγάλες τιμές του α_n. Ως αντίλογο στο θέμα αυτό φέρνουμε πάλι την *συναρτησιακή εξίσωση*. Κατά τον ίδιο τρόπο με τα γραμμικά μοντέλα, έτσι και στα τετραγωνικά για να μελετηθούν θεωρητικά πρέπει πρώτα να βρεθεί η συναρτησιακή τους εξίσωση. Οι συναρτησιακές εξισώσεις των μοντέλων αυτών, μοιράζονται μια κοινή μορφή, όπως θα φανεί στο παράδειγμα των συνολικών στρεμμάτων υλοτόμησης μιας εταιρείας ξυλείας ανά χρόνο, που αναφέραμε πριν.

Αν ξεκινήσουμε με αρχική τιμή $\alpha_0 = 1.200$, παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές:

$\alpha_0 = 1.200$
$\alpha_1 = 2.600 = \alpha_0 + 1.400 + 0 \quad = \alpha_0 + 1.400 + 200x0$
$\alpha_2 = 4.200 = \alpha_1 + 1.400 + 200 = \alpha_1 + 1.400 + 200x1$
$\alpha_3 = 6.000 = \alpha_2 + 1.400 + 400 = \alpha_2 + 1.400 + 200x2$, κλπ.

Όλα τα παραπάνω μπορούν να συμπτυχθούν στην εξίσωση διαφορών (4.1) (Kalman, 1997). :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1.400 + 200n$$

Ξεκινώντας με $\alpha_0 = 1.200$, μπορούμε συστηματικά να βρούμε το α_1, μετά το α_2, κλπ. Με τον τρόπο που θα γράφουμε τις τιμές αυτές, θα προκύψει ένα πρότυπο που θέλουμε να βρούμε στο οποίο κάθε φορά που γράφουμε την επόμενη τιμή, θα κρατάμε τα νούμερα 1.400 μαζί και τα 200 επίσης μαζί. Στο παράδειγμα έχουμε,

α_0 = 1.200
α_1 = 1.200 + 1.400
α_2 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 200x1
α_3 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 200x1+ 200x2
α_4 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 200x1+ 200x2+ 200x3
α_5 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 200x1+ 200x2+ 200x3+ 200x4
κλπ.

Συνεχίζοντας όσο θέλουμε, βρίσκουμε το ακόλουθο πρότυπο:

α_0 = 1.200
α_1 = 1.200 + 1.400
α_2 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 200x1
α_3 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 200x1+ 200x2
α_4 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 200x1+ 200x2+ 200x3
α_5 = 1.200 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 1.400 + 200x1+ 200x2+ 200x3+ 200x4
κλπ.

Το πρότυπο αυτό μπορεί να συμπτυχθεί αρκετά, αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το 1.400 και ξεχωριστά το 200, όπως:

α_0 = 1.200
α_1 = 1.200 + 1.400(1)
α_2 = 1.200 + 1.400(2) + 200(1)
α_3 = 1.200 + 1.400(3) + 200(1+2)
α_4 = 1.200 + 1.400(4) + 200(1+2+3)
α_5 = 1.200 + 1.400(5) + 200(1+2+3+4), κλπ. (Kalman, 1997).

Έτσι, θα μπορούμε να υπολογίζουμε όποια τιμή θέλουμε για το α_n άμεσα. Παρόλο όμως που υπάρχει αυτό το πρότυπο για οποιοδήποτε υπολογισμό, δεν είναι πολύ βολικό στη χρήση. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το α_{10}, το πρότυπο λέει να ξεκινήσουμε με την αρχική τιμή 1.200 προσθέτοντας το 1.400x10 που είναι αρκετά εύκολο. Στη συνέχεια όμως πρέπει το 200 να πολλαπλασιαστεί με το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών από το 1 έως και το 9 (μέχρι το 9, γιατί βλέπουμε ότι το άθροισμα σταματά έναν φυσικό αριθμό πριν από αυτόν που ψάχνουμε, εδώ στο α_{10}). Κάτι τέτοιο είναι χρονοβόρο και κανείς δεν θέλει στην πραγματικότητα να κάνει αυτές τις πράξεις. Έτσι, θα δώσουμε και μια συντόμευση (Kalman, 1997).

Για να προσθέσουμε όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9, πολλαπλασιάζουμε το 9 με τον επόμενο φυσικό αριθμό, 10, και διαιρούμε με το 2. Η απάντηση είναι 9x10/2 = 45. Αυτό το μονοπάτι είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί ακόμη και σε πολύ μεγάλους αριθμούς και είναι γνωστό από το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της 1ης Λυκείου, ως *άθροισμα ν όρων αριθμητικής προόδου*, με πρώτο όρο το a_1 = 1, βήμα ω = 1, και ν-οστό όρο a_ν = 9. Ακολουθεί ο γενικός τύπος των ν όρων αριθμητικής προόδου:

Το *άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου* (a_ν) με *διαφορά* (βήμα) ω είναι

$$S_\nu = (a_1 + a_\nu)\cdot \nu / 2 \qquad \textbf{(4.3)}$$

Έτσι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τις τιμές των α_0 έως α_5 καθώς και μερικές επόμενες, με τη βοήθεια του αθροίσματος των όρων αριθμητικής προόδου, της σχέσης (4.3), ως εξής:

$\alpha_0 = 1.200$
$\alpha_1 = 1.200 + 1.400(1)$
$\alpha_2 = 1.200 + 1.400(2) + 200(1)(2)/2$
$\alpha_3 = 1.200 + 1.400(3) + 200(2)(3)/2$
$\alpha_4 = 1.200 + 1.400(4) + 200(3)(4)/2$
$\alpha_5 = 1.200 + 1.400(5) + 200(4)(5)/2$
$\alpha_6 = 1.200 + 1.400(6) + 200(5)(6)/2$
$\alpha_7 = 1.200 + 1.400(7) + 200(6)(7)/2$
$\alpha_8 = 1.200 + 1.400(8) + 200(7)(8)/2$, κλπ.

Παρατηρώντας τις παραπάνω τιμές μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ακόμα πρότυπο. Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή n, το πρότυπο παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_n = 1.200 + 1.400(n) + 200(n-1)(n)/2$$

Αυτή είναι μια συναρτησιακή εξίσωση για το μοντέλο των συνολικών στρεμμάτων υλοτόμησης μιας εταιρείας ξυλείας, γιατί το α_n είναι σε σχέση μόνο με το n. Με αυτήν τη συναρτησιακή εξίσωση μπορούμε να προσβλέψουμε πόσα στρέμματα συνολικά θα έχουν υλοτομηθεί από την εταιρεία μετά από 10 χρόνια από το 1991. Αφού ως α_n έχουμε θεωρήσει τη μεταβλητή του αριθμού των συνολικών στρεμμάτων που υλοτομήθηκαν n χρόνια μετά το 1991, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\alpha_{10} = 1.200 + 1.400(10) + 200(9)(10)/2 = 24.200$ στρέμματα (Kalman, 1997).

Η συναρτησιακή εξίσωση γι' αυτό το παράδειγμα αποκαλύπτει τη μορφή που εμφανίζεται πάντα για ένα μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης. Βλέπουμε ότι οι αριθμοί 1.400 και 200 είναι οι ίδιες σταθερές που εμφανίζονται και στην εξίσωση διαφορών και στη συναρτησιακή εξίσωση. Η σταθερά που παραμένει, 1.200, είναι η αρχική τιμή του μοντέλου, γιατί η υλοτόμηση ξεκίνησε στα $\alpha_0 = 1.200$ στρέμματα. Με τον ίδιο τρόπο, η αρχική τιμή του μοντέλου και οι δύο παράμετροι για την εξίσωση διαφορών πάντα θα εμφανίζονται στη συναρτησιακή εξίσωση (Kalman, 1997). Θα το δείξουμε αυτό στη γενική του μορφή, στην επόμενη παράγραφο.

4.3. ΒΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Βρίσκοντας τη *συναρτησιακή εξίσωση* ενός προβλήματος, μπορούμε εύκολα να βγάλουμε συμπεράσματα για το μέλλον. Θα περιγράψουμε παρακάτω μια διαδικασία βημάτων που οδηγούν στο σχηματισμό της εξίσωσης αυτής όταν χρησιμοποιούμε ένα οποιοδήποτε μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης.

1° ΒΗΜΑ : Σχηματίζοντας ένα μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης.

Αν στα παραδείγματα που θέλουμε να μελετήσουμε, οι δεύτερες διαφορές των δεδομένων τους είναι σταθερές, τότε, σίγουρα πρόκειται για παραδείγματα που μοντελοποιούνται με τετραγωνικά μοντέλα. Στην περίπτωση αυτή, αρχίζουμε ορίζοντας ένα όνομα α_n για τη μεταβλητή που θέλουμε να μελετήσουμε και τις μονάδες n για το χρόνο που αλλάζει η μεταβλητή αυτή (Kalman, 1997).

2° ΒΗΜΑ: Σχηματίζοντας την εξίσωση διαφορών της τετραγωνικής ανάπτυξης.

Όπως έχουμε δείξει και στην παράγραφο 4.1, μπορούμε να σχηματίσουμε την εξίσωση διαφορών του προβλήματός μας σύμφωνα με τον τύπο:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en \text{ (Kalman, 1997).}$$

3° ΒΗΜΑ: Σχηματίζοντας την αρχική τιμή και κάθε περιορισμό του n.

Από τα δεδομένα του προβλήματος είναι εύκολο να βρούμε την αρχική τιμή των δεδομένων μας και να την συμβολίσουμε με α_0. Πρέπει από το είδος των δεδομένων να θέσουμε τυχών περιορισμούς για το n. Συνήθως $n \geq 0$.

4° ΒΗΜΑ: Σχεδιάζοντας ένα γράφημα.

Κάνοντας έναν πίνακα τιμών των δεδομένων α_n και των αντίστοιχων χρόνων n που αυτές συμβαίνουν, μπορούμε να φτιάξουμε τα αντίστοιχα σημεία αυτών (n,α_n). Τοποθετώντας αυτά σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (n-α), παίρνουμε μια καμπύλη που στα τετραγωνικά μοντέλα είναι πάντα παραβολή (Kalman, 1997).

5° ΒΗΜΑ: Σχηματίζοντας τη συναρτησιακή εξίσωση.

Ξεκινάμε από την εξίσωση διαφορών με μορφή $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en$, όπου d και e παράμετροι. Έχοντας γνωστή και την αρχική τιμή α_0, μπορούμε να θέσουμε στην εξίσωση διαφορών n = 0, 1, 2, 3 αντίστοιχα και να πάρουμε εκφράσεις των δεδομένων α_1, α_2, α_3, α_4, κλπ. Έτσι, έχουμε τις εκφράσεις:

$\alpha_0 = \alpha_0$
$\alpha_1 = \alpha_0 + d$
$\alpha_2 = \alpha_0 + d + d + e\cdot 1$
$\alpha_3 = \alpha_0 + d + d + d + e\cdot 1 + e\cdot 2$
$\alpha_4 = \alpha_0 + d + d + d + d + e\cdot 1 + e\cdot 2 + e\cdot 3$
$\alpha_5 = \alpha_0 + d + d + d + d + d + e\cdot 1 + e\cdot 2 + e\cdot 3 + e\cdot 4$, κλπ.

Συνεχίζοντας όσο θέλουμε, βρίσκουμε το ακόλουθο πρότυπο:

$\alpha_0 = \alpha_0$
$\alpha_1 = \alpha_0 + d$
$\alpha_2 = \alpha_0 + d + d \qquad + ex1$
$\alpha_3 = \alpha_0 + d + d + d \qquad + ex1 + ex2$
$\alpha_4 = \alpha_0 + d + d + d + d \qquad + ex1 + ex2 + ex3$
$\alpha_5 = \alpha_0 + d + d + d + d + d + ex1 + ex2 + ex3 + ex4$, κλπ.

Το πρότυπο αυτό μπορεί να συμπτυχθεί αρκετά, αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το d και ξεχωριστά το e, όπως:

$\alpha_0 = \alpha_0$
$\alpha_1 = \alpha_0 + d(1)$
$\alpha_2 = \alpha_0 + d(2) + e(1)$
$\alpha_3 = \alpha_0 + d(3) + e(1+2)$
$\alpha_4 = \alpha_0 + d(4) + e(1+2+3)$
$\alpha_5 = \alpha_0 + d(5) + e(1+2+3+4)$, κλπ.

Έτσι, θα μπορούμε να υπολογίζουμε όποια τιμή θέλουμε για το α_n άμεσα. Μπορούμε όμως, να ξαναγράψουμε τις τιμές των α_0 έως α_5 καθώς και μερικές επόμενες, με τη βοήθεια του αθροίσματος των όρων αριθμητικής προόδου, της σχέσης (4.3), ως εξής:

$\alpha_0 = \alpha_0$
$\alpha_1 = \alpha_0 + d(1)$
$\alpha_2 = \alpha_0 + d(2) + e(1)(2)/2$
$\alpha_3 = \alpha_0 + d(3) + e(2)(3)/2$
$\alpha_4 = \alpha_0 + d(4) + e(3)(4)/2$
$\alpha_5 = \alpha_0 + d(5) + e(4)(5)/2$
$\alpha_6 = \alpha_0 + d(6) + e(5)(6)/2$
$\alpha_7 = \alpha_0 + d(7) + e(6)(7)/2$
$\alpha_8 = \alpha_0 + d(8) + e(7)(8)/2$, κλπ.

Παρατηρώντας τις παραπάνω τιμές μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ακόμα πρότυπο. Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή n, το πρότυπο παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_n = \alpha_0 + d(n) + e(n-1)(n)/2 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Αυτό δίνει τη συναρτησιακή εξίσωση σε μια παραμετρική μορφή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης. Για μελλοντικές αναφορές συνοψίζουμε τα αποτελέσματα παρακάτω:

Αν ένα *μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης*
έχει *αρχική τιμή* α_0 και *εξίσωση διαφορών*

$\alpha_{n+1}=\alpha_n+d+en$, (Kalman, 1997)

τότε έχει *συναρτησιακή εξίσωση*

$\alpha_n= \alpha_0+dn+e(n-1)n/2$

Παρατηρώντας την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι υπακούει στον ορισμό της συναρτησιακής εξίσωσης, δηλαδή, το α_n είναι μια συνάρτηση του n. Έτσι, για παράδειγμα θα μπορούμε να υπολογίσουμε το α_{100} απευθείας χρησιμοποιώντας n=100, χωρίς πρώτα να υπολογίσουμε όλες τις προηγούμενες 99 τιμές, όπως στην εξίσωση διαφορών (Kalman, 1997).

6° ΒΗΜΑ: Απαντώντας κάθε συγκεκριμένη ερώτηση.

Στο βήμα αυτό πρέπει να αναδιατυπώσουμε τις ερωτήσεις με όρους του μοντέλου, ώστε να μπορέσουμε να απαντήσουμε σε αυτές. Αν για παράδειγμα, θέλουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα του προβλήματος υλοτομίας: πότε θα έχει υλοτομήσει η εταιρεία και τα 50.000 στρέμματα που διαθέτει για εκμετάλλευση, θέλουμε να βρούμε το n, για α_n = 50.000. Χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή εξίσωση α_n = 1.200 + 1.400(n) + 200(n-1)(n)/2, που έχουμε βρει στα προηγούμενα, μπορούμε με τη βοήθεια της άλγεβρας να λύσουμε ως προς n την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού:

$1.200 + 1.400(n) + 200(n-1)(n)/2 = 50.000 \Leftrightarrow$
$1.200 + 1.400(n) + 200(n-1)(n)/2 – 50.000 = 0 \Leftrightarrow$
$100n^2 + 1.300n – 48.800 = 0 \Leftrightarrow$
$n^2 + 13n – 488 = 0$

Αφού γράφτηκε η εξίσωση σε φθίνουσα σειρά, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακρίνουσα της:
$\Delta = 13^2 – 4(- 488) = 169 + 1952 = 2121 > 0$, με $\sqrt{2121} \cong 46$
Άρα $n = (- 13 \pm 46)/2 \Rightarrow n = - 29,5 < 0$ (μη δεκτή λύση γιατί $n \geq 0$) ή $n = 16,5$

Η τιμή n = 16,5 που βρήκαμε, δείχνει ότι η εταιρεία θα μπορεί να υλοτομεί για 16 ολόκληρα χρόνια μετά το 1991, όμως η ξυλεία θα τελειώσει το 17° χρόνο μετά το 1991. Με άλλα λόγια τα 50.000 στρέμματα που έχει η εταιρεία στην κατοχή της, θα τελειώσουν στα μέσα του έτους 2008, γιατί 1991 + 17 = 2008 (Kalman, 1997).

Θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά, στην επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου, τις συναρτησιακές εξισώσεις των τετραγωνικών μοντέλων αλγεβρικά, γραφικά και θα δούμε διάφορους τρόπους για την επίλυσή τους.

4.4. ΜΕΛΕΤΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για όλα τα μοντέλα ανάπτυξης, υπάρχουν 2 βασικά είδη ερωτήσεων που προκύπτουν: τι θα προβλέψει το μοντέλο για δεδομένη τιμή του n (α_n = ;) και για ποια τιμή του n θα παρατηρηθεί μια καθορισμένη τιμή δεδομένων (n = ;). Για να απαντήσουμε σε τέτοιες ερωτήσεις που αφορούν σε μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης, πρέπει να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητές τους. Η μελέτη αυτή είναι το θέμα αυτού του μέρους (Kalman, 1997).

Θα αναφερθούμε ξανά στο παράδειγμα, της παραγράφου 3.6 του κεφαλαίου 3 των γραμμικών μοντέλων, σχετικά με τα αποθέματα α_n που είναι διαθέσιμα στην αρχή κάθε έτους σε σχέση με την καθημερινή παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου κ_n. Είχαμε βρει εκεί ότι το μοντέλο έχει αρχικές τιμές: $\kappa_0 = 66,6$

$\alpha_0 = 999.100$

και εξισώσεις διαφορών: $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$

$\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365\kappa_n$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες αριθμών στο παράδειγμα αυτό που καθεμία έχει μια δική της εξίσωση διαφορών. Η πρώτη εξίσωση διαφορών, $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 0,3$, είναι παράδειγμα αριθμητικής ανάπτυξης, άρα η συναρτησιακή εξίσωσή της μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της αριθμητικής ανάπτυξης που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 3 (Kalman, 1997). Έτσι, για $\kappa_0 = 66,6$ και d = 0,3 η συναρτησιακή εξίσωση έχει τύπο:

$$\kappa_n = 66,6 + 0,3n \qquad \textbf{(4.5)}$$

Η συναρτησιακή εξίσωση αυτή, μπορεί να συνδυαστεί με την δεύτερη εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365\kappa_n$, αν αντικαταστήσουμε το κ_n με 66,6+0,3n. Άρα:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365(66,6 + 0,3n) \Rightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n - 24.309 - 109,5n$$

Με τον τελευταίο αυτόν τύπο μπορούμε να πούμε ότι τα αποθέματα του πετρελαίου α_n ακολουθούν ένα μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης, με $\alpha_0 = 999.100$, d = -24.309 και e = -109,5. Τότε, η συναρτησιακή εξίσωση αυτού του τετραγωνικού μοντέλου είναι:

$$\alpha_n = 999.100 - 24.309n - 109,5(n-1)n/2 \Rightarrow$$

$$\alpha_n = 999.100 - 24.254,25n - 54,75n^2 \qquad \textbf{(4.6)}$$

Αυτή η εξίσωση για τα αποθέματα πετρελαίου, *δεν είναι γραμμική εξίσωση*, γιατί εμφανίζεται στον τύπο το n^2. Αυτό είναι ένα παράδειγμα τετραγωνικής συνάρτησης και μας ενδιαφέρει να βρούμε σε πόσα χρόνια θα χρησιμοποιηθεί το μισό του πετρελαίου, δηλαδή, τα 999.100/2 = 499.550 εκατομμύρια βαρέλια. Όταν συμβεί όμως αυτό, τα αποθέματα του πετρελαίου θα είναι επίσης 499.550, οπότε θα θέλαμε να βρούμε το n για το οποίο α_n = 499.550. Από τη συναρτησιακή εξίσωση (4.6), έχουμε να λύσουμε ως προς n την εξίσωση:

$$499{,}550 = 999.100 - 24.254n - 54{,}75n^2 \qquad \text{(Kalman, 1997)}$$

Θα μπορέσουμε να απαντήσουμε στην παραπάνω ερώτηση για το παράδειγμα των αποθεμάτων πετρελαίου καθώς και σε παρόμοια ερωτήματα σε άλλα τετραγωνικά μοντέλα μελετώντας πρώτα τις τετραγωνικές εξισώσεις και τις ιδιότητές τους.

Υπάρχουν αρκετές διαφορετικές αλγεβρικές μορφές γραφής μιας τετραγωνικής εξίσωσης και της αντίστοιχης συνάρτησής της. Γι' αυτό πρέπει να δώσουμε ένα γενικό ορισμό ώστε να μπορούμε να τις αναγνωρίζουμε. Ενώ όταν αναφερθήκαμε στις ακολουθίες ονομάσαμε όρους τα νούμερα που δημιουργούν μια ακολουθία, στις τετραγωνικές εξισώσεις *όρος* θα είναι:

α) ένας αριθμός ή
β) ένα γινόμενο αριθμού επί μεταβλητή ή
γ) ένα γινόμενο αριθμού επί μεταβλητή υψωμένη σε έναν εκθέτη.

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι όροι μιας εξίσωσης είναι τα μέρη της που χωρίζονται με τα σύμβολα + και -. Για μια τετραγωνική συνάρτηση δεχόμαστε το πολύ 2 μεταβλητές σε κάθε όρο. Με αυτή την ορολογία, μπορούμε να έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς (Kalman, 1997):

Τετραγωνική συνάρτηση είναι κάθε συνάρτηση που μπορεί να γραφεί
από έναν ή περισσότερους όρους,
που ο καθένας έχει το πολύ δύο μεταβλητές.

Τετραγωνική εξίσωση είναι κάθε εξίσωση που μπορεί να γραφεί
με μια τετραγωνική συνάρτηση στο ένα μέλος της
και μια σταθερά στο άλλο.

Τα ακόλουθα είναι όλα παραδείγματα τετραγωνικής συνάρτησης:

$3x^2+4x-5$, $(3x-2)(4x-5)$, $(3x-2)(4y-5)$, $2xy+3yz-6xz$, $(3x+4)^2$, $x/2+3x^2/4$

Όπως δείχνουν τα παραδείγματα, κάποιες φορές απαιτείται άλγεβρα μόνο για να αναγνωρίσουμε αν είναι ή όχι τετραγωνική συνάρτηση. Επίσης, όπως θα δούμε αργότερα, διαφορετικές μορφές τετραγωνικών συναρτήσεων είναι πολύ χρήσιμες για διαφορετικούς σκοπούς. Μια μορφή είναι περισσότερο βολική αν προσπαθούμε να λύσετε μια τετραγωνική εξίσωση, ενώ μια άλλη είναι περισσότερο βολική αν προσπαθούμε να κάνουμε το γράφημα της εξίσωσης. Για όλους αυτούς τους λόγους, η άλγεβρα παίζει βασικό ρόλο σε πολλά που καλύψαμε σε αυτό το μέρος. Γι' αυτό, στην επόμενη παράγραφο θα εστιάσουμε σε μερικές αλγεβρικές ιδιότητες των τετραγωνικών εξισώσεων (Kalman, 1997).

4.4.1. Αλγεβρικά

Μέχρι τώρα, αρκετές φορές αλλάξαμε μια αλγεβρική μορφή τετραγωνικής εξίσωσης σε μια άλλη. Υπάρχουν κάποιοι τρόποι για να μπορέσουμε να πούμε αν δύο εκφράσεις καθορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Αρχικά, αν δοκιμάζοντας τις ίδιες αριθμητικές τιμές και στις δυο εκφράσεις, προκύψουν διαφορετικά αποτελέσματα, τότε αυτές δεν αναφέρονται στην ίδια συνάρτηση. Όμως, αυτός ο τρόπος ελέγχου δεν μας βοηθά αν τα αποτελέσματα των εκφράσεων είναι ίδια για κάθε τιμή που δοκιμάζουμε. Αυτό γιατί θα μπορούσε πάντα να υπάρχει μια άλλη τιμή που να τα διαφοροποιούσε, την οποία και
να μη ελέγχαμε! Έτσι, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $y = x^2 + 2$ και $y = 3x$, ενώ για $x = 2$ δίνουν τι ίδιο αποτέλεσμα $y = 6$, και για $x = 1$ έχουν την ίδια τιμή $y = 3$, οι τιμές τους είναι διαφορετικές αν $x = 3$ με $y = 11$ και $y = 9$ αντίστοιχα. Αυτά τα διαφορετικά αποτελέσματα καθορίζουν διαφορετικές συναρτήσεις, λόγω του ορισμού της συνάρτησης που αναφέρεται και στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου:

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια *διαδικασία* (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο $y \in B$.

Δεύτερος τρόπος ελέγχου των δύο εκφράσεων είναι να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες της άλγεβρας όπως απαλοιφή παρενθέσεων και επιμεριστική ιδιότητα ή αντίστροφα με παραγοντοποίηση, ώστε να δούμε αν μπορεί η μία να μεταλλάσσεται στην άλλη. Για παράδειγμα, η έκφραση $(x - 2)(5x + 3)$, μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$\begin{aligned}(x - 2)(5x + 3) &= x(5x + 3) - 2(5x + 3)\\ &= 5x^2 + 3x - 10x - 6\\ &= 5x^2 - 7x - 6\end{aligned}$$

Ένας τρίτος τρόπος ελέγχου δύο αλγεβρικών εκφράσεων, όταν αυτές αποτελούν *τετραγωνικές συναρτήσεις μιας μόνο μεταβλητής,* είναι να ελέγξουμε *μόνο 3 τιμές* των μεταβλητών. Αν οι συναρτήσεις έχουν κοινή τιμή για τρεις διαφορετικές τιμές της μεταβλητής, τότε είναι πραγματικά η ίδια εξίσωση. Στο παράδειγμα πιο πάνω με $(x - 2)(5x + 3)$ και $5x^2 - 7x - 6$, πρέπει για $x = 0$, 1 και 2 κάθε έκφραση να έχει ίδιο αποτέλεσμα. Πράγματι, για $x=0$ δίνουν -6, για $x=1$ κάνουν -8 και 0 για $x=2$. Άρα ισχύει: $(x - 2)(5x + 3) = 5x^2 - 7x - 6$ (Kalman, 1997).

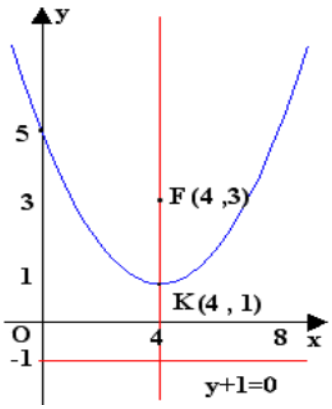
Η παραπάνω αλγεβρική έκφραση $5x^2 - 7x - 6$ μιας εξίσωσης με μια μεταβλητή είναι αρκετά συχνή στις εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού (τετραγωνικές) και λέμε ότι με αυτόν τον τρόπο γράφουμε την *τετραγωνική συνάρτηση σε φθίνουσα σειρά*. Δηλαδή, στη μορφή:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

όπου οι όροι του πολυωνύμου γράφονται από αυτόν με τον μέγιστο εκθέτη (τάξη του πολυωνύμου) του x, κλιμακωτά προς αυτόν με το μικρότερο, με τελευταίον το σταθερό όρο. Οι παράμετροι α, β, γ ονομάζονται και ***συντελεστές*** και είναι δεδομένοι σταθεροί αριθμοί. Η αντίθετη σειρά γραφής της συνάρτησης ορίζει αυτό που λέμε *αύξουσα σειρά* (Kalman, 1997).

4.4.2. Γραφικά

Το γράφημα της συνάρτησης δημιουργείται από πολλά σημεία (x,y) που συνδέονται με τον ίδιο κανόνα. Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x,y), ο πρώτος αριθμός x είναι η τιμή που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή στη συνάρτηση, και ο δεύτερος αριθμός y η τιμή του αποτελέσματος της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν στη συνάρτηση $y = 8x^2 - 64x + 129$, η μεταβλητή $x = 4$, τότε $y = 1$, τότε δημιουργείται το σημείο (4,1) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με οριζόντιο άξονα των τιμών x και κάθετο των y. Αν κάνουμε το γράφημα πολλών τετραγωνικών εξισώσεων θα δούμε ότι προκύπτει πάντα ένα συγκεκριμένο συμμετρικό σχήμα $\cap$ ή $\cup$, που ονομάζεται *παραβολή* και είναι σχήμα μόνο τετραγωνικών συναρτήσεων (σχήμα 9).



Σχήμα 9 ε
Γράφημα παραβολής

Στο σχήμα 9, υπάρχει μια κάθετη ευθεία γραμμή (ε), που ονομάζεται ***άξονας*** *συμμετρίας της παραβολής* και χωρίζει ακριβώς στη μέση το γράφημα της παραβολής, ώστε κάθε μια από τις πλευρές της να αντικατοπτρίζεται στην άλλη. Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής την τέμνει στο ανώτατο σημείο της, αν το γράφημά της έχει τη μορφή $\cap$, ενώ στο κατώτατο σημείο της, αν το γράφημά της έχει τη μορφή $\cup$. Σε κάθε περίπτωση αυτό το ανώτατο ή κατώτατο σημείο της παραβολής αντίστοιχα, ονομάζεται *κορυφή Κ της παραβολής* (Kalman, 1997).

Αυτό το χαρακτηριστικό σχήμα της παραβολής εξηγεί γραφικά τη μη γραμμικότητα των τετραγωνικών συναρτήσεων. Τα γραφήματα των γραμμικών εξισώσεων είναι ευθείες γραμμές, σε αντίθεση με τα γραφήματα των τετραγωνικών που είναι παραβολές. Αυτό δείχνει ότι μια τετραγωνική συνάρτηση αυξάνεται πολύ γρηγορότερα από κάθε συνάρτηση ευθείας γραμμής.

Με τη βοήθεια των κανόνων της άλγεβρας που περιγράψαμε στην παράγραφο 4.4.1, μπορούμε να φέρουμε κάθε τετραγωνική συναρτησιακή εξίσωση σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τον τύπο (4.7). Γνωρίζοντας έτσι τις τιμές των συντελεστών α, β και γ, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για και από το γράφημα της παραβολής της. Στην ύλη της $1^{ης}$ και $2^{ας}$ Λυκείου υπάρχουν κεφάλαια που μελετούν αναλυτικά τις εξισώσεις και συναρτήσεις $2^{ου}$ βαθμού καθώς και τις παραβολές (Kalman, 1997).

Είναι γνωστό ότι αν ο συντελεστής α είναι θετικός (αρνητικός), τότε η παραβολή έχει τη μορφή $\cup(\cap)$, είναι ,δηλαδή, κυρτή (κοίλη). Ο σταθερός όρος γ μας δίνει ακόμα μια πληροφορία. Δείχνει την τεταγμένη του σημείου (0,γ) που το γράφημα της παραβολής τέμνει τον κατακόρυφο άξονα y.

Με τη βοήθεια των συντελεστών α και β μπορούμε να βρούμε και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής ως $x = -\beta/2\alpha$, καθώς και την κορυφή της παραβολής $K(-\beta/2\alpha, (-\beta^2+4\alpha\gamma)/4\alpha)$. Παρατηρούμε ότι το x της εξίσωσης του άξονα συμμετρίας, είναι το ίδιο και ως τετμημένη της κορυφής της παραβολής.

Μπορούμε ακόμη να βρούμε και τα σημεία (αν υπάρχουν) στα οποία η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον οριζόντιο άξονα x. Ενώ τα σημεία τομής (0,γ) της παραβολής με τον άξονα y απαντούν στις ερωτήσεις «Τί συμβαίνει όταν $x = 0$;», τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα x απαντούν στην αντίστροφη ερώτηση: «Υπάρχει σημείο στο οποίο η τιμή της συνάρτησης να είναι $y = 0$;». Αυτός ο διαχωρισμός μπορεί να βγάζει περισσότερο νόημα στο πλαίσιο εφαρμογής (Kalman, 1997).

Αλγεβρικά, οι τετμημένες των σημείων τομής της παραβολής με τον άξονα x, για την τετραγωνική συνάρτηση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$. Αυτοί οι αριθμοί επίσης ονομάζονται και *ρίζες της συνάρτησης* που για να βρεθούν χρειάζεται να λύσουμε μια τετραγωνική εξίσωση. Με τη λύση αυτών των εξισώσεων θα ασχοληθούμε παρακάτω (Kalman, 1997).

4.4.3. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων

Όπως οι συναρτήσεις, έτσι και οι τετραγωνικές εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε πολλές μορφές. Θα μελετήσουμε όμως δυο βασικές συγκεκριμένες

μορφές. Για την πρώτη, θα έχουμε μια τετραγωνική συνάρτηση γραμμένη σε *φθίνουσα σειρά* στο ένα μέλος της εξίσωσης και έναν *αριθμό* στο άλλο. Η δεύτερη μορφή έχει μια τετραγωνική συνάρτηση γραμμένη πάλι σε *φθίνουσα σειρά* στο ένα μέλος της εξίσωσης και τον *αριθμό 0* στο άλλο (Kalman, 1997).

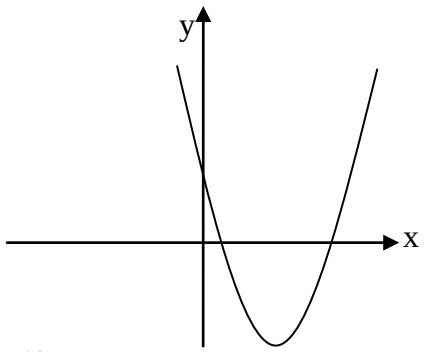
Έτσι, η εξίσωση που δίνεται νωρίτερα στο παράδειγμα αποθεμάτων πετρελαίου, γίνεται:

$$999.100-24.254,25n-54,75n^2 = 499.550$$
$$\Rightarrow - 54,75n^2 - 24.254,25n + 999.100 = 499.550$$

Αυτή η εξίσωση θα μας πει πότε (n = ;) τα αποθέματα πετρελαίου θα φθάσουν τα α_n = 499.550. Ομοίως, για να βρούμε πότε (n = ;) το πετρέλαιο θα εξαντληθεί (α_n = 0), θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση: $- 54,75n^2- 24.254,25n + 999.100 = 0$. Στα ακόλουθα θα δούμε τρόπους επίλυσης των τετραγωνικών εξισώσεων αριθμητικά, γραφικά, θεωρητικά και αλγεβρικά θα υπενθυμίσουμε την χρήση του τύπου της διακρίνουσας καθώς και την παραγοντοποίηση σε τέτοιου είδους εξισώσεις (Kalman, 1997).

Α. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων αριθμητικά και γραφικά

Μπορούμε να λύσουμε κάθε εξίσωση με τη χρήση γραφικών και αριθμητικών μεθόδων. Ας χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα ξανά την συνάρτηση με τύπο $y = 5x^2 - 7x – 6$, το γράφημα της οποίας φαίνεται στο σχήμα 10.

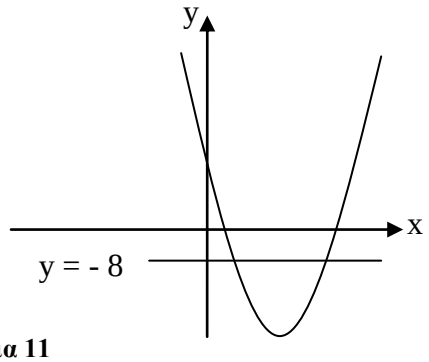


Σχήμα 10
Γράφημα της συνάρτησης $y = 5x^2 - 7x – 6$

Αν η μεταβλητή y αντικατασταθεί με έναν συγκεκριμένο αριθμό, παίρνουμε μια τετραγωνική εξίσωση που μπορούμε να λύσουμε ως προς x. Για παράδειγμα, αν αλλάξουμε το y με το - 8, η εξίσωση είναι:

$$- 8 = 5x^2 - 7x – 6 \Leftrightarrow 5x^2 - 7x – 6 = - 8$$

Αλγεβρικά, λύνοντας την εξίσωση σημαίνει να βρούμε έναν αριθμό για το x που κάνει το $5x^2 - 7x – 6$ να είναι – 8 (Kalman, 1997).



Σχήμα 11
Σημεία τομής της καμπύλης της συνάρτησης $y = 5x^2 - 7x – 6$ με την ευθεία $y = - 8$

Σε μια γραφική ερμηνεία, ψάχνουμε ένα σημείο στο γράφημα της παραβολής το οποίο να ανήκει και στην ευθεία $y = - 8$. Οπτικά στο γράφημα μπορούμε να τοποθετήσουμε το σημείο αυτό, σχεδιάζοντας την οριζόντια ευθεία $y = - 8$ και να δούμε που αυτή τέμνει την καμπύλη (σχήμα 11). Στο σχήμα μας υπάρχουν δύο τέτοια σημεία. Στο πρώτο σημείο, το x εμφανίζεται ανάμεσα στο 0 και 0,5, ενώ στο δεύτερο ανάμεσα στο 0,5 και 2. Αν για παράδειγμα πούμε ότι οι κοντινές λύσεις στην εξίσωση $5x^2 - 7x – 6 = - 8$ είναι $x = 0,1$ και $x = 1,5$, δεν είναι ακριβώς σωστές. Αν βάλουμε την τιμή $x= 0,1$ στην εξίσωση, το αποτέλεσμα είναι $5(0,1)^2 - 7(0,1) – 6 = - 6,695$ το οποίο δεν είναι πολύ κοντά στο - 8. Αλλά το νόημα της γραφικής μεθόδου είναι να πάρει μια πρώτη εκτίμηση (Kalman, 1997).

Μετά, χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους για να βελτιώσουμε την προσέγγιση. Αφού το $x = 0,1$ δίνει την απάντηση - 6,695 που είναι πιο μεγάλη από το -8 που θέλουμε, το γράφημα δείχνει ότι θα πρέπει να κάνουμε μια άλλη υπόθεση που είναι πιο δεξιά. Αν δοκιμάσουμε το 0,45 αντί του 0,1, τότε έχουμε το αποτέλεσμα $5(0,45)^2 - 7(0,45) - 6 = - 8,1375$, που είναι πιο μικρή από το - 8. Άρα το x που ψάχνουμε βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 0,1 και 0,45, που είναι καλύτερη προσέγγιση από πριν. Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε σίγουρα αλλά αργά να βρίσκουμε όλο και καλύτερα κοντινότερες λύσεις. Μερικοί *υπολογιστές γραφημάτων* μπορούν να κάνουν αυτό το είδος υπολογισμού αυτόματα. Τελικά, αυτό που βασικά συμβαίνει είναι να προσπαθούμε να δοκιμάσουμε διαδοχικά διαφορετικές τιμές για το x, που πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο στην απάντηση (Kalman, 1997).

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει μια σημαντική σύνδεση, ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης $y = 5x^2 - 7x – 6$ και στην εξίσωση $5x^2 - 7x – 6 = -8$. Αν θέλουμε να λύσουμε ως προς x την εξίσωση, είναι το ίδιο όπως το να βρούμε ένα σημείο στο γράφημα όπου $y = -8$.

Υπάρχει και μια ειδική περίπτωση, όπου στο ένα μέλος της εξίσωσης είναι η συνάρτηση και στο άλλο το 0. Κάθε εξίσωση μπορούμε τη φέρουμε σε αυτή την μορφή μετακινώντας όλους τους όρους στο πρώτο μέλος της, αφήνοντας το 0 στο δεύτερο. Αν θέλαμε να λύσουμε την $x^2 + x - 5 = 0$. Αν κοιτάξουμε στο γράφημα του $y = x^2 + x - 5$, θέλουμε τα σημεία όπου το γράφημα τέμνει τον άξονα x. Για τις τετραγωνικές εξισώσεις, υπάρχει και μια θεωρητική προσέγγιση για τη λύση τους που θα αναφέρουμε στην επόμενη παράγραφο (Kalman, 1997).

Β. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων θεωρητικά

Με τη βοήθεια της γραφικής και αριθμητικής προσέγγισης που αναφέραμε προηγουμένως, μέσω δοκιμής και λάθους, μπορούμε να παίρνουμε όλο και καλύτερες προσεγγίσεις για τη λύση μιας τετραγωνικής εξίσωσης. Για παράδειγμα, ας σκεφτούμε την εξίσωση $x^2 = 7$. Όταν όμως υπολογίζουμε αυτές τις προσεγγίσεις, το κάνουμε με δεκαδικούς αριθμούς που προφανώς όσο συνεχίζεται η διαδικασία, *δεν μπορεί να υπάρξει μια μόνο ακριβής απάντηση (λύση)* (Kalman, 1997).

Υπάρχει μια μαθηματική σκέψη γι' αυτές τις λύσεις, οι τετραγωνικές ρίζες. Γενικά,

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού c,
είναι η μη αρνητική λύση
της τετραγωνικής εξίσωσης με τύπο
$x^2 = c$

Κάθε τετραγωνική εξίσωση μπορεί να αλλάξει μορφή που να μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο τετραγωνικής ρίζας. Θα το δούμε αυτό από αλγεβρική και γραφική οπτική.

Αλγεβρικά, η ιδέα είναι αρχίζοντας με μια τετραγωνική εξίσωση να τη γράψουμε σε φθίνουσα σειρά $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (4.7) και μετασχηματίζοντάς τη, να τη φέρουμε στη μορφή $z^2 = c$, την οποία και να λύσουμε με ρίζες του c, αν υπάρχουν (Kalman, 1997).

Γραφικά, θέλουμε να κάνουμε παράλληλη μεταφορά αξόνων της παραβολής ώστε ο άξονας συμμετρίας της $x = -\beta/2\alpha$, να μετατοπιστεί και να ταυτιστεί με τον άξονα y και κατ' επέκταση η κορυφή της K, με τετμημένη $-\beta/2\alpha$, να ανήκει στον άξονα y. Στόχος είναι να δημιουργηθεί ένας απλούστερος τύπος στον οποίο να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τετραγωνικές ρίζες. Για τη μεταφορά αξόνων αρκεί να θέσουμε :

$$z = x - (-\beta/2\alpha) \Leftrightarrow z = x + \beta/2\alpha \Leftrightarrow x = z - \beta/2\alpha \qquad \textbf{(4.8)}$$

Έτσι, η (4.7) μέσω της (4.8) γίνεται:

$$\alpha (z - \beta/2\alpha)^2 + \beta(z - \beta/2\alpha) + \gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z^2 - 2z\beta/2\alpha + \beta^2/4\alpha^2) + \beta z - \beta^2/2\alpha + \gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha z^2 - z\beta + \beta^2/4\alpha + \beta z - \beta^2/2\alpha + \gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha z^2 + \beta^2/4\alpha - \beta^2/2\alpha + \gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha z^2 = -\beta^2/4\alpha + \beta^2/2\alpha - \gamma, \text{ αλλά } \alpha \neq 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 = -\beta^2/4\alpha^2 + \beta^2/2\alpha^2 - \gamma/\alpha$$
$$\Leftrightarrow z^2 = -\beta^2/4\alpha^2 + 2\beta^2/4\alpha^2 - 4\alpha\gamma/4\alpha^2$$

$\Leftrightarrow \quad z^2 = (-\beta^2 + 2\beta^2 - 4\alpha\gamma)/4\alpha^2$

$\Leftrightarrow \quad z^2 = (\beta^2 - 4\alpha\gamma)/4\alpha^2$ **(4.9)**

Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε η (4.9) $\Leftrightarrow$ $z = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}/2\alpha$,

έτσι η (4.8) $\Leftrightarrow$ $x = (-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})/2\alpha$

Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, τότε η (4.9) $\Leftrightarrow$ $z = 0$, έτσι η (4.8) $\Leftrightarrow$ $x = -\beta/2\alpha$

Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, τότε η (4.9) είναι αδύνατη, έτσι και η (4.8) είναι αδύνατη (Kalman, 1997).

Γ. Επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων αλγεβρικά

Η θεωρητική μέθοδος που παρουσιάστηκε παραπάνω μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε τετραγωνική εξίσωση. Όμως, υπήρξαν πολλά αλγεβρικά βήματα για να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης (4.7), που θα μπορούσαμε να τα παραλείψουμε. Έτσι, προκύπτει ένας τύπος που μπορεί άμεσα να αποφασίσει τις λύσεις για κάθε τετραγωνική εξίσωση. Αν στη σχέση (4.9) ονομάσουμε τον αριθμητή του κλάσματος $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε έχουμε:

(4.9) $\Leftrightarrow \quad z^2 = \Delta/4\alpha^2$

Αν $\Delta > 0$, τότε η (4.8) $\Leftrightarrow$ $x = (-\beta \pm \sqrt{\Delta})/2\alpha$

Αν $\Delta = 0$, τότε η (4.8) $\Leftrightarrow$ $x = -\beta/2\alpha$

Αν $\Delta < 0$, τότε η (4.8) είναι αδύνατη

Αυτός ο τρόπος εύρεσης των ριζών της τετραγωνικής εξίσωσης ονομάζεται *τετραγωνικός τύπος με τη βοήθεια της διακρίνουσας Δ*. Για να χρησιμοποιήσουμε τον τετραγωνικό τύπο, μια τετραγωνική εξίσωση θα πρέπει να εκφραστεί σε φθίνουσα σειρά. Για παράδειγμα, η εξίσωση $3x - x^2 = 4 + x$, θα πρέπει πρώτα να γραφτεί σε φθίνουσα σειρά εκθετών του x και να πάρουμε $x^2 - 2x + 4 = 0$. Τότε, $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 4$. Αφού $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = -12 < 0$, η αρχική εξίσωση δεν έχει ρίζες γιατί δεν υπάρχει η τετραγωνική ρίζα του – 12 (Kalman, 1997).

Ο τετραγωνικός τύπος ξεκαθαρίζει *αλγεβρικά* το πρόβλημα επίλυσης τετραγωνικών εξισώσεων. Αλλά ο τύπος είναι χρήσιμος και για *θεωρητικούς λόγους*. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για να δείξει ότι μια εξίσωση *δεν έχει λύση*, όσο και για να *αντιστρέψουμε* μια τετραγωνική συνάρτηση.

Από την αντιστροφή μιας συνάρτησης, για παράδειγμα που δίνεται ως $\pi = 500\tau - 4\tau^2$ του εισοδήματος από τις πωλήσεις (π) σε συνάρτηση με την τιμή (τ) ανά κουτάκι τσίχλας, μας επιτρέπετε να εκφράσουμε το τ σε σχέση με το π. Έτσι, θα μπορούμε να απαντήσουμε ερωτήσεις όπως «ποια τιμή θα έπρεπε να χρεωθεί αν θέλουμε να βγάλουμε π = 120 ευρώ έσοδα;». Για να εκτελέσουμε την αντιστροφή, γράφουμε την τετραγωνική εξίσωση σε φθίνουσα σειρά $4\tau^2 - 500\tau + \pi = 0$. Με $\alpha = 4$, $\beta = -500$ και $\gamma = \pi$, ο τετραγωνικός τύπος δείχνει ότι υπάρχουν δύο λύσεις για το τ:

$$\tau = (500 \pm \sqrt{250.000 - 16\pi})/8$$

Αυτός ο τύπος δεδομένης της ποσότητας του εισοδήματος π = 12.000 λεπτά, δίνει τα αποτελέσματα 93 και 32, γύρω από το κοντινότερο λεπτό. Έτσι, αν θέσουμε την τιμή του κουτιού 32 λεπτά ή 93 λεπτά, το μοντέλο προβλέπει ότι θα έχουμε έσοδα 120 ευρώ (Kalman, 1997).

Όταν έχουμε τη συνάρτηση στη μορφή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, μπορούμε να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα για το γράφημά της που συγκεντρώνεται στον παρακάτω πίνακα:

Στο *γράφημα της παραβολής* του $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

- Αν $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), το σχήμα της παραβολής είναι $\cup$ ($\cap$).
- Η παραβολή τέμνει τον άξονα y στο γ.
- Ο άξονας συμμετρίας της $x = -\beta/2\alpha$, τέμνει τον άξονα x στο $-\beta/2\alpha$.
- Η κορυφή της παραβολής $\cup$ ($\cap$), έχει τετμημένη $x = -\beta/2\alpha$,

  με το y να μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση του x με $-\beta/2\alpha$ στη συνάρτηση.
- Αν $\Delta < 0$, η συνάρτηση δεν τέμνει τον άξονα x.
  Αν $\Delta > 0$, η συνάρτηση τέμνει τον άξονα x στα $x = (-\beta \pm \sqrt{\Delta})/2\alpha$.
  Αν $\Delta = 0$, η συνάρτηση τέμνει τον άξονα x στο $x = -\beta/2\alpha$.

Μια αλγεβρική μορφή των εξισώσεων δευτέρου βαθμού είναι βολική για την επίλυσή τους. Αυτή είναι η *παραγοντοποιημένη μορφή* που από τη φθίνουσα γραφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και τον τύπο της διακρίνουσας, γίνεται:

Αν $\Delta > 0$, τότε η (4.8) $\Leftrightarrow$ $x_{1,2} = (-\beta \pm \sqrt{\Delta})/2\alpha$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
Αν $\Delta = 0$, τότε η (4.8) $\Leftrightarrow$ $x_0 = -\beta/2\alpha$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - x_0)^2$
Αν $\Delta < 0$, τότε η (4.8) είναι αδύνατη, άρα δεν παραγοντοποιείται.

Είναι εύκολο να πάμε από τον παραγοντοποιημένο τύπο στη συνηθισμένη φθίνουσα μορφή. Το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι τόσο εύκολο. Μπορεί συνήθως να εκτελεστεί με δοκιμή και λάθος. Μέσα από αυτό το κεφάλαιο είδαμε ότι οι τετραγωνικές εξισώσεις κατέχουν έναν αριθμό από καλά κατανοητές ιδιότητες. Άλλη μια ενδιαφέρουσα πλευρά των τετραγωνικών μοντέλων είναι το πώς συγκρίνονται με τα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης (Kalman, 1997).

4.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Οι εξισώσεις διαφορών και οι συναρτησιακές για αυτά τα δύο μοντέλα, σημειώνονται στον πίνακα 4.3 και ακολουθούν ένα πρότυπο.

ΤΥΠΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ	ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$	$\alpha_n = \alpha_0 + dn$
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en$	$\alpha_n = \alpha_0 + dn + e(n-1)n/2$

Πίνακας 4.3
Σύγκριση οικογενειών μοντέλων

Η εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en$, για την τετραγωνική ανάπτυξη έχει την ίδια γενική μορφή όπως εκείνη της αριθμητικής ανάπτυξης $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$, αλλά υπάρχει ένας επιπλέον όρος, ένα πολλαπλάσιο του n. Ομοίως, η συναρτησιακή εξίσωση $\alpha_n = \alpha_0 + dn + e(n-1)n/2$, τετραγωνικής ανάπτυξης ξεκινάει όπως εκείνη της αριθμητικής ανάπτυξης $\alpha_n = \alpha_0 + dn$, αλλά υπάρχει ένας επιπλέον όρος, ένα πολλαπλάσιο του (n- 1)n (Kalman, 1997).

Για ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης, οι διαφορές των τιμών των δεδομένων είναι ίσες. Για ένα μοντέλο τετραγωνικής ανάπτυξης, οι δεύτερες διαφορές είναι ίσες. Ποια είναι η επέκταση αυτού του υποδείγματος; Ποιο θα είναι το επόμενο είδος διαφορικής εξίσωσης μετά την αριθμητική και τετραγωνική ανάπτυξη; Εξετάζοντας τα πρότυπα τέτοιου τύπου είναι μια πλευρά των μαθηματικών που συχνά οδηγεί σε νέα αποτελέσματα (Kalman, 1997).

5. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΚΑΙ ΡΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Κάθε συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από πολυώνυμα. Άρα αυτά προσεγγιστικά αρκούν για να περιγράψουν τα μοντέλα τοπικά. Παρόλα αυτά, σημαντικά φυσικά φαινόμενα χρειάζονται ρητές συναρτήσεις για την περιγραφή τους, γιατί δεν αρκούν οι πολυωνυμικές όπως οι $1/x$, $1/x^2$, κλπ. Το σημαντικό που εμφανίζεται και πρόκειται να μελετήσουμε σε αυτές τις συναρτήσεις είναι η έννοια της ασύμπτωτης. Θα ξεκινήσουμε με τις πολυωνυμικές και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις ρητές συναρτήσεις και τις ασύμπτωτες (Kalman, 1997).

5.1. ΜΕΛΕΤΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι γραμμικές και οι τετραγωνικές συναρτήσεις, που μελετήσαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, ανήκουν στην κατηγορία των *πολυωνυμικών συναρτήσεων*. Μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

> *Πολυωνυμικές συναρτήσεις* είναι κάθε συνδυασμός πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού σταθερών και/ή μεταβλητών, και διαίρεσης μόνο με σταθερές.

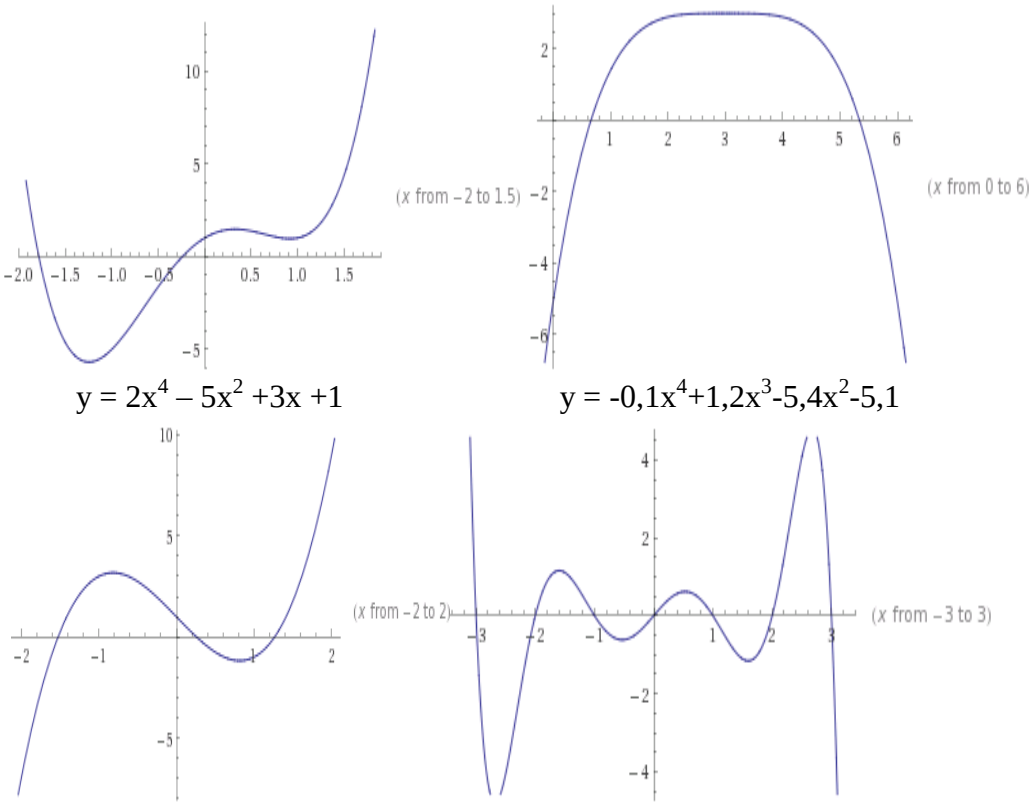
Παραδείγματα πολυωνύμων που εμπλέκονται σε πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι τα ακόλουθα: $3x^2 + 5x – 4$, $2x^3 – 7x + 5$, $6 – x^2 + xyz^4$, $2xy + x^3/9– x^2$, κλπ. (Kalman, 1997).

Αλγεβρικά, τα πολυώνυμα μπορούν να εκφραστούν με πολλούς τρόπους, συνήθως όμως γράφουμε τους όρους τους σε *φθίνουσα σειρά*. Όταν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι όροι, *βαθμός του πολυωνύμου* είναι ο μεγαλύτερος βαθμός ανάμεσα στους όρους του. Για παράδειγμα, το $5x^6-x^4-7x+8$, είναι πολυώνυμο $6^{ου}$ βαθμού γραμμένο σε φθίνουσα σειρά. Η σταθερά κάθε όρου ονομάζεται *συντελεστής του όρου*. Για το παράδειγμά μας οι συντελεστές είναι 5, 0, -1, 0, 0, -7 και 8 αντίστοιχα.

Οι αλγεβρικές διαδικασίες μετατροπής των τετραγωνικών πολυωνύμων σε διαφορετικούς τύπους, χρησιμοποιούνται και σε κάθε είδους πολυώνυμα. Όπως με τις τετραγωνικές συναρτήσεις, ελέγχουμε για *αλγεβρικά σφάλματα*, το ίδιο μπορούμε να κάνουμε για όλα τα πολυώνυμα. Αν η έκφραση που ξεκινήσαμε είναι πραγματικά ισοδύναμη με εκείνη που βρήκαμε χρησιμοποιώντας άλγεβρα, θα πρέπει να δίνουν την ίδια απάντηση όταν αντικαθιστούμε τη μεταβλητή με έναν αριθμό, τόσες φορές όσες είναι ο βαθμός του πολυωνύμου συν μία. Έτσι, αν ένα πολυώνυμο είναι $4^{ου}$ βαθμού, πρέπει να ελέγξουμε $4 + 1 = 5$ παραδείγματα για να είμαστε σίγουροι (Kalman, 1997).

Τα *γραφήματα των πολυωνύμων* έχουν κοινά χαρακτηριστικά. Μια πρώιμη ιδέα για το σχήμα μπορεί να αποφασιστεί από τον μεγιστοβάθμιο όρο του

πολυωνύμου. Γενικά, οι καμπύλες των γραφημάτων είναι απότομες προς τα πάνω (κυρτή) ή προς τα κάτω (κοίλη) στα άκρα του γραφήματος, και ανεβοκατεβαίνουν στο ενδιάμεσο τεμνόμενες κάποιες φορές ή όχι από κάθε οριζόντια ευθεία. Έτσι, αν ο βαθμός του πολυωνύμου είναι άρτιος και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου θετικός (αρνητικός), τότε η καμπύλη είναι απότομη προς τα πάνω (κάτω) και στα δύο άκρα του γραφήματος. Ενώ, αν ο βαθμός του πολυωνύμου είναι περιττός και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου θετικός (αρνητικός), τότε η καμπύλη είναι απότομη προς τα πάνω (κάτω) στο αριστερό άκρο της και απότομη προς τα κάτω (πάνω) στο δεξί άκρο της. Επίσης, αν ο βαθμός του πολυωνύμου είναι n, μια οριζόντια γραμμή μπορεί να τέμνει το γράφημα το πολύ n φορές. Και κατ' επέκταση, μπορεί να υπάρχουν το πολύ 3 σημεία που να τέμνουν τον άξονα x αν το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού. Επίσης τα σημεία του άξονα x που τέμνουν το γράφημα, λέγονται και *ρίζες του πολυωνύμου*. Ενδεικτικά τα παραπάνω παρουσιάζονται στο σχήμα 12, με τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου wolframalpha (Kalman, 1997).



$y = 2x^4 - 5x^2 + 3x + 1$ $\qquad$ $y = -0{,}1x^4 + 1{,}2x^3 - 5{,}4x^2 - 5{,}1$

$y = 2x^3 - 4x + 1$ $\qquad$ $y = -0{,}05x^7 + 0{,}7x^5 - 2{,}45x^3 + 1{,}8x$

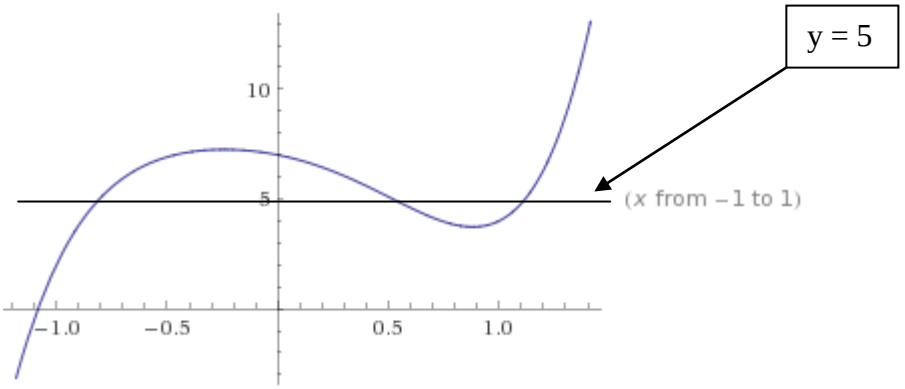
Σχήμα 12
Περιπτώσεις γραφημάτων πολυωνυμικών συναρτήσεων

Για την *επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων*, δεν υπάρχουν γενικές θεωρητικές μέθοδοι, άρα θα πρέπει να χρησιμοποιούνται συχνά η γραφική και η αριθμητική μέθοδος. Παρόλα αυτά, υπάρχουν ενδιαφέροντα θεωρητικά αποτελέσματα που δίνουν

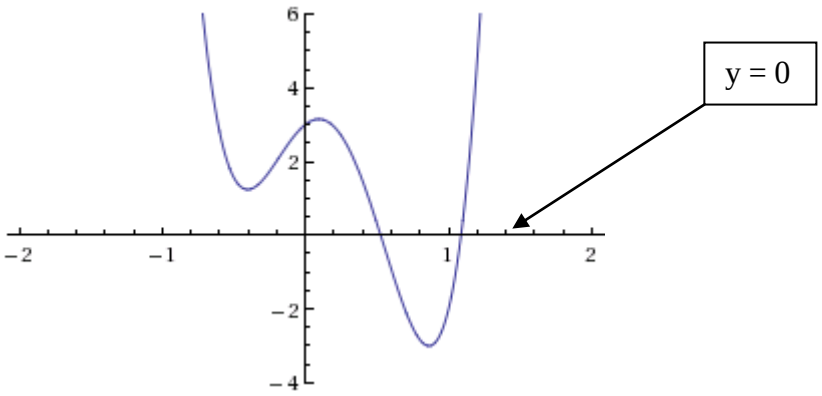
μερικές πληροφορίες για τις λύσεις. Οι λύσεις για τις πολυωνυμικές εξισώσεις μπορούν να βρεθούν με μια γραφική μέθοδο. Αν η εξίσωση είναι της μορφής:

πολυώνυμο = *b*, όπου b είναι αριθμός,

οι λύσεις βρίσκονται ως τομές του γραφήματος του πολυωνύμου και της οριζόντιας ευθείας που τέμνει τον άξονα y στο b. Στην ειδική περίπτωση που b = 0, η οριζόντια ευθεία είναι ο άξονας x (σχήμα 13). Πιο εύκολα, αν το πολυώνυμο είναι σε παραγοντοποιημένη μορφή, οι ρίζες μπορούν να βρεθούν και αριθμητικά από την εύρεση των ριζών μεμονωμένων παραγόντων (Kalman, 1997).



$3x^5 - 4x^2 - 2x - 7 = 5$

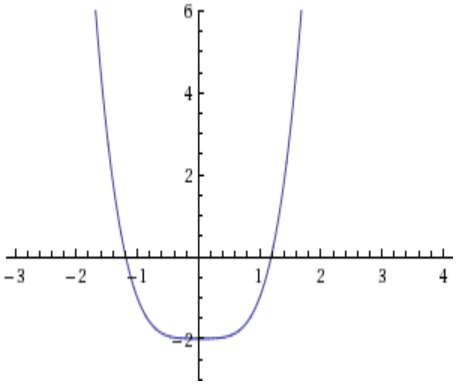


$23x^4 - 17x^3 - 14x^2 + 3x + 3 = 0$

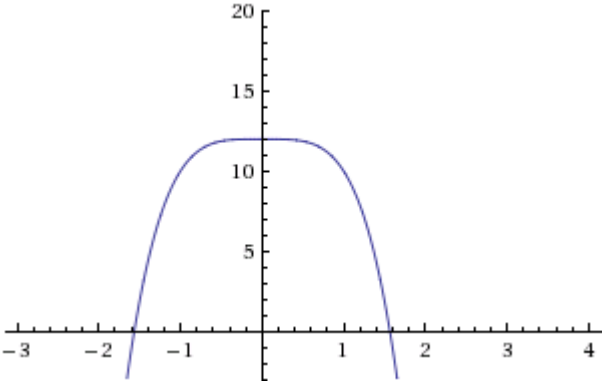
Σχήμα 13
Γραφική μέθοδος επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων

Η *επιλογή των πολυωνυμικών μοντέλων* μπορεί να γίνει έχοντας υπόψη είτε το *σχήμα του γραφήματος* των δεδομένων, είτε τον τρόπο που αυτά εμφανίζονται κατά ένα φυσικό τρόπο από *υπολογισμούς των δεδομένων*, είτε από μια *θεωρητική διαπίστωση* (Kalman, 1997).

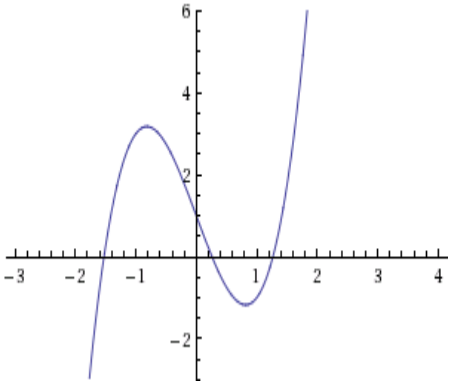
Αν το σχήμα ενός γραφήματος είναι της μορφής $\cup$ (ή $\cap$), προτείνει ένα τετραγωνικό πολυώνυμο (σχήμα 14α), ενώ αν έχει το σχήμα πλάγιο S, προτείνει ένα 3^{ου} βαθμού πολυώνυμο (σχήμα 14β).



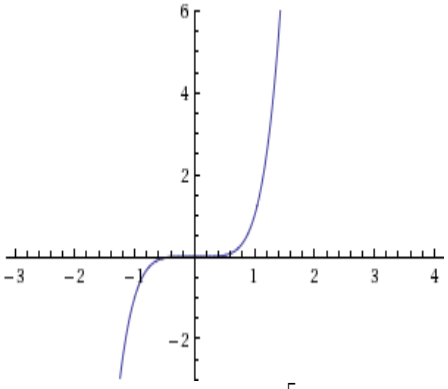
α. $y = x^4 - 2$



α. $y = -2x^2 + 12$



β. $y = 2x^3 - 4x + 1$



β. $y = x^5$

Σχήμα 14
Γραφήματα της μορφής $\cup$ ή πλάγιου S

Το πιο σημαντικό όμως είναι να μπορείς να προσεγγίζεις μια πολύπλοκη συνάρτηση χρησιμοποιώντας ένα πολυώνυμο. Έχουμε ήδη δει πως τα τετραγωνικά πολυώνυμα μπορούν να προκύψουν σε εξισώσεις διαφορών. Συγκεκριμένα, όταν δεδομένα έχουν δεύτερες διαφορές σχεδόν σταθερές, είναι μια ένδειξη ότι ένα τετραγωνικό μοντέλο είναι μια πολύ καλή προσέγγιση. Αυτή η ιδέα επεκτείνεται και σε μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμα. Έτσι, αν οι τρίτες διαφορές (δηλαδή, οι διαφορές των διαφορών των διαφορών) είναι σχεδόν σταθερές, ένα τρίτου βαθμού πολυώνυμο παρέχει μια καλή προσέγγιση, κλπ. Το ίδιο πρότυπο ισχύει και γενικά:

Για κάθε *n-τες διαφορές* των δεδομένων που είναι *σταθερές*,
μπορεί να βρεθεί
ένα *n-ου βαθμού πολυώνυμο* που να είναι
μια καλή προσέγγιση για τα δεδομένα.

Ολοκληρώνοντας στο σημείο αυτό τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, θα στραφούμε στη συνέχεια στο θέμα των ρητών συναρτήσεων (Kalman, 1997).

5.2. ΜΕΛΕΤΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αρχικά, θα ορίσουμε τις ρητές συναρτήσεις και θα τις συνδέσουμε με τα πολυώνυμα.

Ρητές συναρτήσεις είναι κάθε συνδυασμός
πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης
σταθερών και/ή μεταβλητών,
με μόνο περιορισμό τη διαίρεση με το 0.

Παραδείγματα ρητών συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{4x^3-6xy+1}{-3x+2y^5z}$, $\frac{7x^2+y-4}{x-3y^2}$, κλπ. Οι ρητές συναρτήσεις έχουν, λόγω του ορισμού τους, διαφορετικούς τρόπους έκφρασης. Σε έναν από αυτούς συνδέονται με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, μέσω *τυποποιημένης μορφής*, ως εξής:

Κάθε *ρητή συνάρτηση* μπορεί να γραφτεί
ως *κλάσμα με όρους πολυώνυμα*.

Αλγεβρικά, μπορούμε να φέρουμε τις ρητές συναρτήσεις σε μορφή κλάσματος με όρους πολυώνυμα και το κάθε πολυώνυμο να γραφτεί σε φθίνουσα ή παραγοντοποιημένη μορφή, ανάλογα το τι μελετάμε.

Γραφικά, οι ρητές συναρτήσεις έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες. Δύο χαρακτηριστικά που θα συζητηθούν και δεν εμφανίζονταν ποτέ στα γραφήματα των πολυωνύμων, είναι η *ασύμπτωτες* και οι *ασυνέχειες* (Kalman, 1997).

Ασυνέχεια, ονομάζεται ένα σημείο
όπου υπάρχει μια διακοπή
από το ένα μέρος του γραφήματος στο άλλο.

Ασύμπτωτη, είναι μια ευθεία γραμμή
που σταδιακά προσεγγίζεται από ένα γράφημα.

Οι ασύμπτωτες παρουσιάζονται με διακεκομμένες ευθείες γραμμές. Αν ένα γράφημα σχεδιάζεται σε μια αρκετά μεγάλη κλίμακα, μέρη της καμπύλης θα φαίνονται να ακουμπούν κατευθείαν στην κορυφή των διακεκομμένων ασύμπτωτων γραμμών. Κατά μια έννοια αυτές οι γραμμές δείχνουν που το γράφημα ευθειάζεται. Τα γραφήματα των πολυωνύμων δεν έχουν ασύμπτωτες.

Ένας τρόπος για να βρεθούν οι ρίζες, οι ασυνέχειες και οι ασύμπτωτες είναι να γραφεί η ρητή συνάρτηση σε έναν ειδικό τύπο. Όπως προαναφέραμε, είναι πάντα δυνατό να εκφράσουμε μια ρητή συνάρτηση ως κλάσμα με όρους πολυώνυμα (Kalman, 1997).

Ο *υπολογισμός ριζών ρητής συνάρτησης*, ή με άλλα λόγια των σημείων τομής του γραφήματος με τον άξονα x, γίνεται αν αυτά τα πολυώνυμα εκφραστούν σε παραγοντοποιημένη μορφή και απλοποιηθεί το κλάσμα.

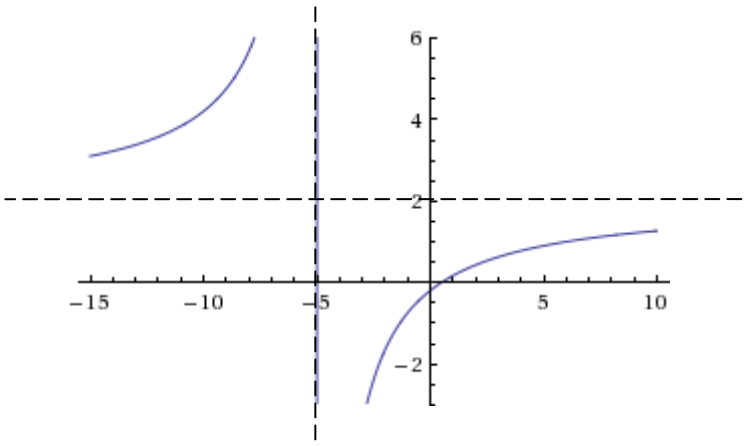
Για παράδειγμα, η έκφραση:

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2+8x+15} =$$

$$\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+5)(x+3)} =$$

$$\frac{2x-1}{x+5}$$

Τότε, κάθε ρίζα του αριθμητή αντιστοιχεί σε ένα σημείο τομής του γραφήματος με τον άξονα x. Στο παράδειγμα ο αριθμητής 2x - 1 = 0, όταν x = 1/2. Έτσι, το x = 1/2 μηδενίζει τη συνάρτηση και αυτό προσδιορίζει ένα σημείο τομής με τον άξονα x (σχήμα 15).



$$y = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 8x + 15} = \frac{2x - 1}{x + 5}$$

Σχήμα 15
Ασυνέχειες και ασύμπτωτες στα γραφήματα ρητών συναρτήσεων

Ασυνέχειες και κάθετες ασύμπτωτες. Οι ρίζες του απλοποιημένου παρονομαστή κάθε ρητής συνάρτησης δείχνουν τα σημεία ασυνέχειας που το γράφημα πρέπει να έχει. Επιπλέον, η διακοπή αυτού του είδους είναι πάντα σε ένα σημείο της καμπύλης που αυτή ευθειάζεται κατά μήκος μια κάθετης ευθείας που είναι στην ουσία μια κατακόρυφη ασύμπτωτή του. Στο παραπάνω παράδειγμα, στο γράφημα υπάρχει μια ασυνέχεια στο σημείο -5 του άξονα x, άρα θα έχει και κάθετη ασύμπτωτη την x = -5, αφού το x = -5 μηδενίζει τον παρονομαστή x + 5 (Kalman, 1997).

Οριζόντιες ασύμπτωτες. Για να εντοπίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, είναι πιο βολικό να εκφράσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της ρητής συνάρτησης σε φθίνουσα σειρά.

Στο τελευταίο παράδειγμα είχαμε: $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 8x + 15}$

και φανταστείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μεγάλο αριθμό για τον x, ας πούμε της τάξεως του 1.000. Τότε, το $2x^2$ θα γίνει περίπου 2.000.000. Αυτό είναι τόσο πολύ μεγαλύτερο από το x και τις σταθερές, που ο αριθμητής τείνει να προσεγγίζεται από το $2x^2$ και ο παρονομαστής από το x^2 , οι υπόλοιποι όροι είναι τόσο μικροί που δεν επηρεάζουν. Έτσι, αν χρησιμοποιήσετε ένα μεγάλο αριθμό για το x, το τελικό αποτέλεσμα θα είναι πολύ κοντά στο $2x^2/x^2 = 2/1 = 2$. Αυτό αποκαλύπτει μια οριζόντια ασύμπτωτη, την y = 2. Γενικά, αν υπάρχει μια οριζόντια ασύμπτωτη, είναι εύκολο να βρεθεί χρησιμοποιώντας φθίνουσα σειρά και στον αριθμητή και στον παρονομαστή της ρητής συνάρτησης, διαιρώντας μόνο τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή (Kalman, 1997).

Η *επιλογή των ρητών μοντέλων* μπορεί να γίνει επίσης έχοντας υπόψη είτε το *σχήμα του γραφήματος* των δεδομένων, είτε τον τρόπο που αυτά εμφανίζονται κατά ένα φυσικό τρόπο από *υπολογισμούς των δεδομένων*. Αν το σχήμα του γραφήματος είναι όποιας μορφής του L, ειδικά αν παραλείψουμε τις πρώτες τιμές του, τότε προτείνει ένα ρητό μοντέλο με απλοποιημένο τύπο της μορφής:

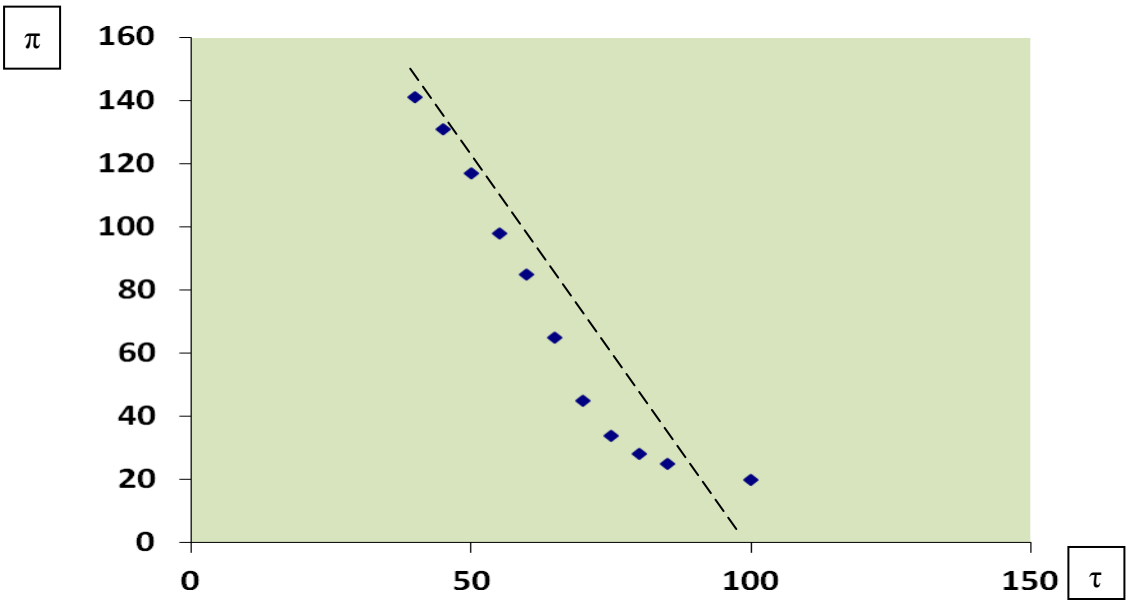
$$\frac{ax+b}{x-c}$$

για κατάλληλες σταθερές a, b και c. Όπως είπαμε, οι σταθερές a, b και c σχετίζονται με το γράφημα της ρητής συνάρτησης, έτσι ώστε το α να δίνει που τείνει οριακά η καμπύλη στον οριζόντιο άξονα. Η τιμή του c δίνει την κατακόρυφη ασύμπτωτη και το b δείχνει την πόσο περισσότερο ή λιγότερο στρογγυλή είναι η καμπύλη (Kalman, 1997).

5.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΡΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Για να δείξουμε αυτήν την ιδέα, θα κοιτάξουμε τα δεδομένα σόδας από φοιτητές του Αμερικανικού Πανεπιστημίου το 1994. Οι μαθητές ρώτησαν τους συμμαθητές τους για την τιμή της σόδας. Κάθε μαθητής ερωτήθηκε αν θα αγόραζε ή όχι τη σόδα ανάμεσα στις ώρες μαθημάτων, δεδομένων πολλών τιμών για τη σόδα.

Τα αποτελέσματα παρήγαγαν μια ιδέα για το πόσες σόδες θα μπορούσαν να πουληθούν με τις ποικίλες αυτές τιμές. Τα δεδομένα από την ερώτηση φαίνονται με τελείες στο σχήμα 16, ενώ με διακεκομμένες γραμμές είναι η ευθεία του γραμμικού μοντέλου που τα προσεγγίζουμε



Σχήμα 16
Δεδομένα κουτιών σόδας

Κάθε σημείο των δεδομένων αποτελείται από μια τιμή (τ) σε δολάρια για ένα κουτί σόδας (οριζόντιος άξονας) και το πλήθος (π) των κουτιών που μπορούν να πουληθούν σε αυτή την τιμή (κατακόρυφος άξονας). Για παράδειγμα, ένα σημείο δεδομένων δείχνει ότι, αν η τιμή είναι 0,45133 δολάρια, θα μπορούν να πωληθούν 133 σόδες. Αυτό σημαίνει πως από όλους τους μαθητές που ρωτήθηκαν, οι 133 ήταν διαθέσιμοι να πληρώσουν 0,45 δολάρια ή περισσότερο για μια σόδα.

Αν προσεγγίσουμε τα δεδομένα αυτά με ένα *γραμμικό μοντέλο* και βασιστούμε σε όσα συζητήθηκαν στο κεφάλαιο των γραμμικών μοντέλων, μπορούμε να βρούμε: την εξίσωση διαφορών και τη συναρτησιακή εξίσωση για τη ζήτηση π και την τιμή πώλησης τ αντίστοιχα:

$$\pi_{n+1} = \pi_n - 8 \Leftrightarrow \pi_n = 141 - 8n$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n + 5 \Leftrightarrow \tau_n = 40 + 5n$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τη ζήτηση π, τα έσοδα ε = τπ, το κόστος λ = απ και το κέρδος κ = ε – λ, σε συνάρτηση με την τιμή πώλησης τ, αν κάθε κουτάκι έχει για παράδειγμα τιμή αγοράς α = 10 λεπτά. Αν λύσουμε τη συναρτησιακή εξίσωση του τ, ως προς n (= (τ - 40)/5), τότε με συνεχείς αντικαταστάσεις στις προηγούμενες σχέσεις προκύπτουν τα εξής:

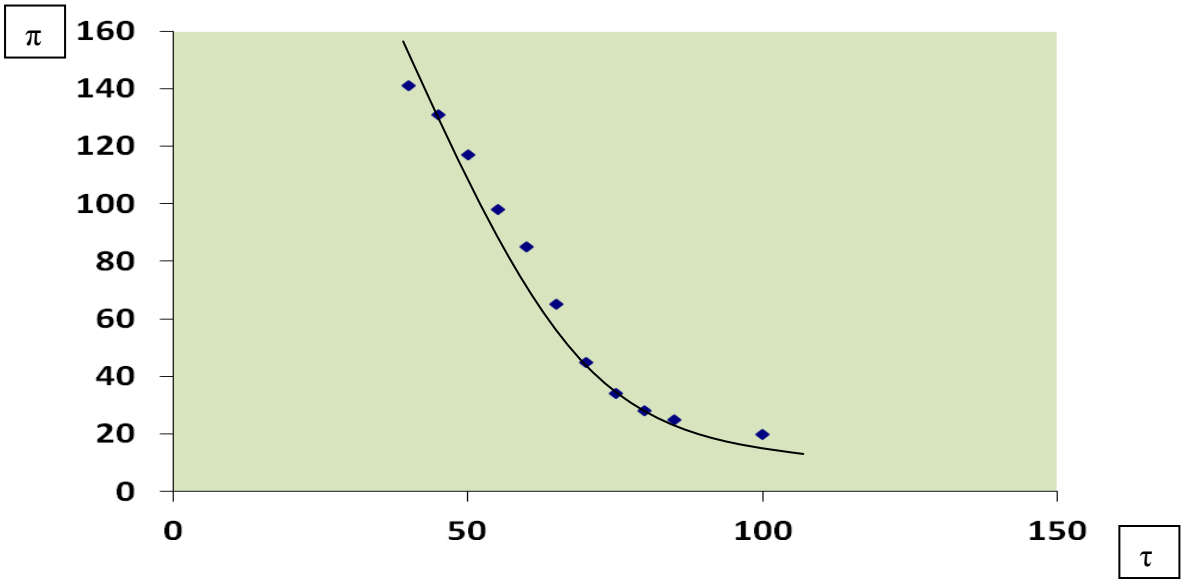
$$\pi = -231{,}5\tau + 225{,}9$$

$$\varepsilon = -231{,}5\,\tau^2 + 225{,}9\tau$$

$$\lambda = -23{,}15\tau + 22{,}59$$

$$\kappa = -231{,}5\,\tau^2 + 249{,}05\tau - 22{,}59$$

Τα δεδομένα στο σχήμα 16, φαίνονται να ακολουθούν μια απαλή καμπύλη σε σχήμα L, ειδικά αν παραβλέψουμε τα πρώτα λίγα σημεία. Χρησιμοποιώντας ένα γραφιστικό πρόγραμμα, μπορούμε να πειραματιστούμε με ποικίλες τιμές για τα a,b και c που αναφέρθηκαν παραπάνω, μέχρι να βρούμε το γράφημα του σχήματος 17 (Kalman, 1997).



Σχήμα 17
Ρητή συνάρτηση μοντέλου ζήτησης

Η καμπύλη τότε, έχει την εξίσωση: $\pi = \frac{90 - 75\tau}{\tau}$, με τ σε μονάδες δολαρίου.

Αυτό παράγει ένα μοντέλο εναλλακτικής του γραμμικού για το πρόβλημα σόδας μέσω του οποίου μπορούμε να βρούμε:

$$\varepsilon = \left(\frac{90 - 75\tau}{\tau}\right)\tau$$

$$\lambda = 0{,}1\left(\frac{90 - 75\tau}{\tau}\right)$$

$$\kappa = \left(\frac{90 - 75\tau}{\tau}\right)\tau - 0.1\left(\frac{90 - 75\tau}{\tau}\right)$$

Η σημασία του παραδείγματος είναι να δείξει το πώς μια ρητή συνάρτηση μπορεί να επιλεγεί βάσει του σχήματος του γραφήματος. Αυτό επίσης δείχνει την ιδέα ότι η ρητή συνάρτηση μπορεί να εμφανιστεί σε ένα πρόβλημα με άλλη μορφή παρά ως απλό κλάσμα (Kalman, 1997).

6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στο κεφάλαιο με τα πολυωνυμικά και ρητά μοντέλα είδαμε ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από πολυώνυμα, αλλά και σημαντικά φυσικά φαινόμενα προσεγγίζονται από ρητές συναρτήσεις, γιατί δεν αρκούν οι πρώτες. Υπάρχουν ωστόσο παραδείγματα, που δεν μπορούν να προσεγγιστούν ούτε από πολυώνυμα ούτε από ρητές συναρτήσεις, αλλά από γεωμετρικά μοντέλα. Κάποια από αυτά θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό, όπως το παράδειγμα των πληθυσμιακών μοντέλων και του χρόνου υποδιπλασιασμού της ραδιενέργειας. Θα ξεκινήσουμε όμως θεωρητικά το κεφάλαιο, με ορισμούς, εξισώσεις διαφορών, συναρτησιακές εξισώσεις και ιδιότητες των γεωμετρικών μοντέλων.

6.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η ιδέα της γεωμετρικής ανάπτυξης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η *ανάπτυξη μιας μεταβλητής* αφορά στον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητή *αλλάζει με τον χρόνο*.

Υπό την *υπόθεση της γεωμετρικής ανάπτυξης*, *ίσες χρονικές περίοδοι* n έχουν ως αποτέλεσμα *ίσες αυξήσεις ή μειώσεις* κατά ένα *σταθερό ποσοστό* της μεταβλητής α.

Θα μελετήσουμε την υπόθεση της γεωμετρικής ανάπτυξης, μέσα από ένα *παράδειγμα του πληθυσμού κουνελιών* που εμφανίζονται στο οικοσύστημα και αφορά στις ίσες *αυξήσεις* κατά ένα σταθερό ποσοστό της μεταβλητής. Αργότερα, θα μελετήσουμε και το πρόβλημα του *χρόνου υποδιπλασιασμού της ραδιενέργειας* που έχει σχέση με ίσες *μειώσεις* κατά ένα σταθερό ποσοστό της μεταβλητής (Kalman, 1997).

Σχετικά με το πρόβλημα του πληθυσμού των κουνελιών, όταν ένα κουνέλι εμφανίζεται, οι ερευνητές εκτιμούν ότι άλλα 100 θα ζουν στην περιοχή του. Ένα μήνα αργότερα μια άλλη μελέτη βρίσκει ότι ο πληθυσμός των κουνελιών αυξήθηκε στα 200. Ποιός θα είναι ο πληθυσμός των κουνελιών ένα μήνα μετά;

Υπό το πρίσμα της υπόθεσης της γραμμικής ανάπτυξης, σύμφωνα με την οποία, *ο πληθυσμός των κουνελιών θα αυξηθεί κατά 100 κάθε μήνα*, η απάντηση θα ήταν 300 κουνέλια. Στην υπόθεση αυτή το μόνο που υποθέτουμε είναι ότι η αύξηση των κουνελιών εξαρτάται μόνο από την ποσότητα του χρόνου. Έτσι, προκύπτουν τα δεδομένα του πίνακα 6.1 (Kalman, 1997).

Μήνες	0	1	2	3
Κουνέλια	100	200	300	400

Πίνακας 6.1
Γραμμική ανάπτυξη πληθυσμού κουνελιών

Τί γίνεται όμως αν εκτός από αυτό, το μέγεθος του πληθυσμού στην αρχή του μήνα έχει επίδραση στον αριθμό νέων μελών που προστίθεται στον πληθυσμό κατά τη διάρκεια του μήνα;

Στην δεύτερη υπόθεση, *ο πληθυσμός των 100 κουνελιών θα αυξηθεί κατά 100 κάθε μήνα.* Έτσι, ο πληθυσμός ξεκινά με 100 κουνέλια που μετά από ένα μήνα αυξάνονται στα 200. Αυτά τα 200 κουνέλια αποτελούνται από 2 πληθυσμούς των 100. Άρα ένα μήνα μετά κάθε πληθυσμός των 100 αυξάνεται στα 200, δηλαδή συνολικά θα υπάρχουν 200 + 200 = 400 κουνέλια μετά τον δεύτερο μήνα. Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία, τώρα τα 400 κουνέλια χωρίζονται σε 4 πληθυσμούς των 100, άρα ένα μήνα μετά κάθε πληθυσμός των 100 θα αυξηθεί σε 200 κουνέλια δηλαδή συνολικά 200 + 200 + 200 + 200 = 800 κουνέλια. Τα δεδομένα αυτής της υπόθεσης παρουσιάζονται στον πίνακα 6.2 (Kalman, 1997).

Μήνες	0	1	2	3
Κουνέλια	100	200	400	800

Πίνακας 6.2
Γεωμετρική ανάπτυξη πληθυσμού κουνελιών, ποσοστού 100%

Αυτό είναι ένα παράδειγμα γεωμετρικής ανάπτυξης, αρκετά διαφορετικό της γραμμικής γιατί η αύξηση του πληθυσμού δεν εξαρτάται μόνο από την *ποσότητα του χρόνου* αλλά και από το *μέγεθος του πληθυσμού*. Κατά τον πρώτο μήνα ο πληθυσμός των κουνελιών αυξήθηκε από 100 σε 200, άρα κατά 100%. Το *ίδιο ποσοστό αύξησης* θα έχουμε και για κάθε επόμενο μήνα, σε αντίθεση με το μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης που τα ποσοστά δεν είναι σταθερά ανά μήνα αλλά μεταβάλλονται από 100% σε 50%, 33% κτλ. (Kalman, 1997).

Υπάρχει και ένας *άλλος τρόπος* να σκεφτούμε τη γεωμετρική ανάπτυξη. Σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα 6.2 παρατηρούμε ότι ο πληθυσμός διπλασιάζεται κάθε μήνα. Αν συμβολίσουμε π_n το πληθυσμό των κουνελιών στην αρχή κάθε μήνα τότε παίρνουμε την εξίσωση διαφορών:

$$\pi_{n+1} = \pi_n \text{ x } 2$$

Η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών από τα δεδομένα του πίνακα 6.1 της αριθμητικής ανάπτυξης είναι:

$$\pi_{n+1} = \pi_n + 100$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ομοιότητα στις δύο αυτές εξισώσεις διαφορών. Στη γεωμετρική ανάπτυξη πολλαπλασιάζουμε την τιμή κάθε δεδομένου με μια σταθερή ποσότητα για να πάρουμε την επόμενη, ενώ στην αριθμητική ανάπτυξη προσθέτουμε στην τιμή κάθε δεδομένου μια σταθερή ποσότητα για να πάρουμε την επόμενη. Τη σταθερή ποσότητα της γεωμετρικής ανάπτυξης που πολλαπλασιάζουμε την ονομάζουμε *παράγοντα ανάπτυξης* (που στο παράδειγμά μας είναι το 2).

Έτσι, η υπόθεση της γεωμετρικής ανάπτυξης μπορεί να εκφραστεί ως αύξηση κατά ένα σταθερό ποσοστό κάθε μήνα ή κατά ένα σταθερό παράγοντα αύξησης. Τί σχέση όμως έχουν το σταθερό ποσοστό με το σταθερό παράγοντα της γεωμετρικής ανάπτυξης; (Kalman, 1997).

Στο παράδειγμα με τα 100 κουνέλια να αυξάνουν κατά 100% το μήνα, έχουμε τον επόμενο μήνα συν την ίδια ποσότητα, δηλαδή, μια και μια ακόμα φορά τα αρχικά κουνέλια, τότε ο παράγοντας αύξησης είναι r = 1 + 1 = 2.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα στον πληθυσμό των κουνελιών που ενώ έχουν πάλι αρχικό πληθυσμό 100, αυτός αυξάνει με σταθερό ποσοστό 50%. Οι τιμές που προκύπτουν φαίνονται στον πίνακα 6.3.

Μήνες	0	1	2	3
Κουνέλια	100	150	225	337,5

Πίνακας 6.3
Γεωμετρική ανάπτυξη πληθυσμού κουνελιών, ποσοστού 50%

Ξεκινάμε με 100 κουνέλια και υπολογίζουμε το 50% των 100 κουνελιών που είναι ο πολλαπλασιασμός 0,50 x 100 = 50. Έχουμε, αρχικά, 100 κουνέλια και τον επόμενο μήνα συν μισή ποσότητα, δηλαδή, είναι μια και μισή φορά αυτά που ξεκινήσαμε. Αυτός είναι ο παράγοντας αύξησης r = 1 + 0,5 = 1,5. Όλα αυτά τα παραδείγματα δείχνουν το ίδιο μοτίβο. Σε κάθε περίπτωση, ο παράγοντας αύξησης είναι 1 συν ο δεκαδικός του ποσοστού της αύξησης (Kalman, 1997).

Στο παράδειγμα με τα 100 κουνέλια που αυξάνονται σταθερά με ποσοστό 50%, κάθε αριθμός κουνελιών του επόμενου μήνα υπολογίζεται ως εξής:

$\pi_0 = \pi_0 = 100$
$\pi_1 = \pi_0 + 0,5 \text{ x } \pi_0 = (1 + 0,5)\pi_0 = 1,5\ \pi_0 = 1,5 \text{ x } 100 \quad = 150$
$\pi_2 = \pi_1 + 0,5 \text{ x } \pi_1 = (1 + 0,5)\pi_1 = 1,5\ \pi_1 = 1,5 \text{ x } 150 \quad = 225$
$\pi_3 = \pi_2 + 0,5 \text{ x } \pi_2 = (1 + 0,5)\pi_2 = 1,5\ \pi_2 = 1,5 \text{ x } 225 \quad = 337,5$
$\pi_4 = \pi_3 + 0,5 \text{ x } \pi_3 = (1 + 0,5)\pi_3 = 1,5\ \pi_3 = 1,5 \text{ x } 337,5 = 506,25$

άρα γενικά μπορούμε να πούμε ότι $\pi_{n+1} = 1,5\ \pi_n$.

Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε σε παραδείγματα πληθυσμιακών μοντέλων στα οποία, σε ίσες χρονικές περιόδους, οι μεταβλητές αυξάνονται κατά ένα σταθερό ποσοστό ή ισοδύναμα αυξάνονται κατά ένα σταθερό παράγοντα. Μια άλλη εφαρμογή που είναι αρκετά ακριβής έχει σχέση με το χρόνο διάσπασης ραδιενεργών στοιχείων

στη φύση. Μέσα από το παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε τη γεωμετρική ανάπτυξη κατά την οποία οι μεταβλητές μειώνονται κατά ένα σταθερό ποσοστό ή αλλιώς κατά ένα σταθερό παράγοντα (Kalman, 1997).

Μερικά στοιχεία, όπως το ουράνιο, υπάρχουν στη φύση σε διαφορετικές μορφές, που λέγονται ισότοπα, μερικά από τα οποία είναι ραδιενεργά. Καθώς ένα ραδιενεργό ισότοπο εκπέμπει ραδιενέργεια, μεταβάλλεται σε άλλο ισότοπο ή άλλο στοιχείο. Γι' αυτήν την εφαρμογή, μοντελοποιούμε την ποσότητα του ραδιενεργού ισότοπου, ακόμη κι αν αυτή δεν υπάρχει, σε αρχική μορφή. Έχει βρεθεί ότι κάθε ισότοπο ακολουθεί το δικό του μοτίβο γεωμετρικής ανάπτυξης. Σε κάθε περίπτωση, ένα σταθερό ποσοστό του υλικού μεταλλάχθηκε σε κάτι άλλο σε κάθε μονάδα χρόνου. Αυτό σημαίνει πως η ποσότητα ραδιενεργών στοιχείων που απομένει μετά από κάθε μονάδα χρόνου είναι σταθερό ποσοστό από αυτό που ήταν στην αρχή. Επειδή η ποσότητα γίνεται όλο και μικρότερη όσο περνά ο χρόνος, αυτό αναφέρεται ως *ραδιενεργός διάσπαση* παρά σαν ανάπτυξη.

Εμπειρική μελέτη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε πόσο γρήγορα κάθε στοιχείο διασπάται στο μισό του, κάτι που ονομάζεται *χρόνος ημιζωής*. Ας υποθέσουμε ότι ένα μίγμα στοιχείων περιέχει και ουράνιο 237 σε αρχική ποσότητα 100 γραμμαρίων. Η ημιζωή του ουρανίου 237 είναι 6,75 μέρες, άρα μετά από 6,75 μέρες το μίγμα θα περιλαμβάνει μόνο 50 γραμμάρια ουρανίου 237. Το συνολικό βάρους του ουρανίου 237 θα μειωθεί από 100 σε 50 γραμμάρια, άρα θα έχει μια μείωση της τάξης του 50% σε 6,75 μέρες. Έτσι, οι πρώτες πέντε διαδοχικές τιμές της ποσότητας του ουρανίου που απομένει είναι:

$\pi_0 = \pi_0 = 100$
$\pi_1 = \pi_0 - 0{,}5 \times \pi_0 = (1 - 0{,}5)\pi_0 = 0{,}5\ \pi_0 = 0{,}5 \times 100 = 50$
$\pi_2 = \pi_1 - 0{,}5 \times \pi_1 = (1 - 0{,}5)\pi_1 = 0{,}5\ \pi_1 = 0{,}5 \times 50 = 25$
$\pi_3 = \pi_2 - 0{,}5 \times \pi_2 = (1 - 0{,}5)\pi_2 = 0{,}5\ \pi_2 = 0{,}5 \times 25 = 12{,}5$
$\pi_4 = \pi_3 - 0{,}5 \times \pi_3 = (1 - 0{,}5)\pi_3 = 0{,}5\ \pi_3 = 0{,}5 \times 12{,}5 = 6{,}25$

άρα γενικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση διαφορών είναι:

$$\pi_{n+1} = 0{,}5\ \pi_n \text{ (Kalman, 1997)}$$

Στην περίπτωση του σταθερού ποσοστού μείωσης σε ένα πρόβλημα γεωμετρικής ανάπτυξης προκύπτει, σε αντιστοιχία με προβλήματα αύξησης, πως αν το σταθερό αυτό ποσοστό γραφτεί σε δεκαδική μορφή και του αφαιρεθεί μια μονάδα θα προκύψει ο παράγοντας αύξησης μόνο που στην περίπτωση αυτή θα είναι μικρότερος της μονάδας και οι τιμές της μεταβλητής συνεχώς θα μειώνονται. Στο παράδειγμα με το χρόνο ημιζωής του ουρανίου 237, είναι $r = 0{,}5 < 1$ (Kalman, 1997). Άρα,

Η *ανάπτυξη μιας μεταβλητής* αφορά στον τρόπο με τον οποίο η μεταβλητή *αλλάζει με τον χρόνο*.

Υπό την *υπόθεση της γεωμετρικής ανάπτυξης*, *ίσες χρονικές περίοδοι* n έχουν ως αποτέλεσμα *ίσες αυξήσεις ή μειώσεις* κατά ένα *σταθερό παράγοντα* r της μεταβλητής α.

Από όλες αυτές τις παρατηρήσεις που συγκεντρώσαμε, θα προκύψει και το παρακάτω πλαίσιο:

Σε μια *γεωμετρική ανάπτυξη*, αν μετατρέψουμε το *σταθερό ποσοστό* σε δεκαδικό αριθμό και *προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον αριθμό 1*, βρίσκουμε τον *παράγοντα αύξησης* r.

Ακόμα σε ένα μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης η αύξηση ή μείωση μπορεί να είναι οποιαδήποτε ποσότητα και συμβολίζεται με μια *παράμετρο* r. Αυτό οδηγεί σε μια *γενική εξίσωση διαφορών* για τα γεωμετρικά μοντέλα:

Κάθε *μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης*, έχει *εξίσωση διαφορών* της μορφής:

$$\alpha_{n+1} = r\alpha_n \qquad (6.1)$$

r είναι ο σταθερός παράγοντας αύξησης του μοντέλου (Kalman, 1997)

Η επιλογή των γεωμετρικών μοντέλων μπορεί να γίνει σύμφωνα με την *απλή λογική,* όπως στο παράδειγμα με τον πληθυσμό των κουνελιών για να είμαστε πιο ακριβείς θα επιλέξουμε το γεωμετρικό αντί του γραμμικού μοντέλου. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί απλά να επιλέξουμε το γεωμετρικό μοντέλο, όταν υποθέσουμε ότι η ανάπτυξη συμβαίνει με ένα *σταθερό ποσοστό ή τα δεδομένα* που εμφανίζονται να την προσεγγίζουν (Kalman, 1997).

6.2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Στα επόμενα θα αναφερθούμε σε αριθμητικές, γραφικές και θεωρητικές ιδιότητες γεωμετρικών μοντέλων.

6.2.1. Αριθμητικές ιδιότητες μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης

Έχοντας υπολογίσει προηγουμένως την εξίσωση διαφορών του πληθυσμού των κουνελιών, με αρχική τιμή τα 100 και παράγοντα αύξησης 1,5 ως $\pi_{n+1} = 1,5\ \pi_n$, μπορούμε να κάνουμε κάποιες διαπιστώσεις. Αρχικά, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες *διαδοχικές τιμές*, όπως:

$\pi_0 = 100$
$\pi_1 = 1,5 \times 100 = 150$
$\pi_2 = 1,5 \times 150 = 225$
$\pi_3 = 1,5 \times 225 = 337,5$
$\pi_4 = 1,5 \times 337,5 = 506,25$ (Kalman, 1997).

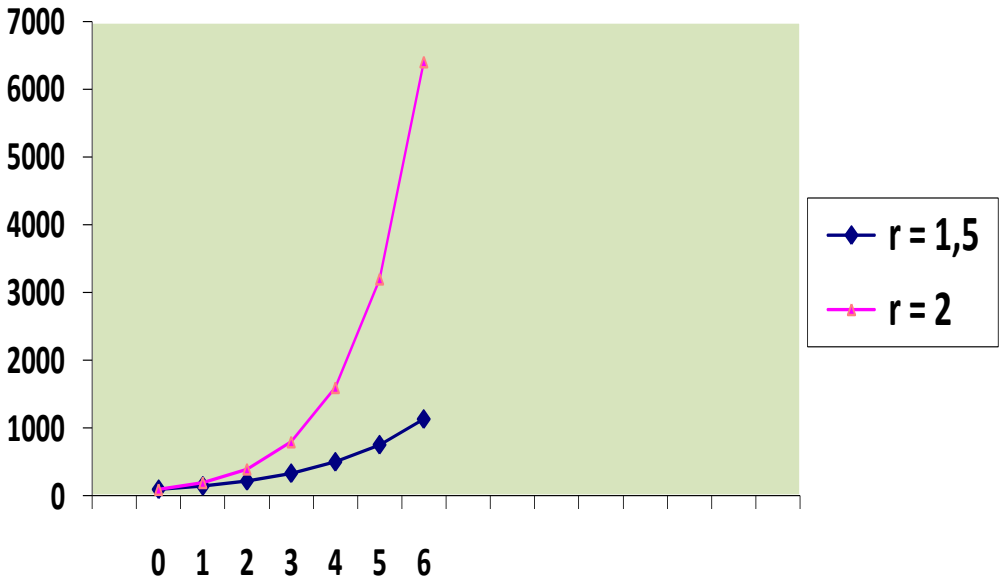
Στο παράδειγμα με το χρόνο ημίσειας ζωής του ουρανίου 237 με αρχική τιμή 100 γραμμάρια και παράγοντα r = 0,5 και εξίσωση διαφορών $\pi_{n+1} = 0,5\ \pi_n$, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες διαδοχικές τιμές ως εξής:

$\pi_0 = 100$
$\pi_1 = 0,5 \times 100 = 50$
$\pi_2 = 0,5 \times 50 = 25$
$\pi_3 = 0,5 \times 25 = 12,5$
$\pi_4 = 0,5 \times 12,5 = 6,25$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς, παρατηρούμε μια γενική ιδιότητα της γεωμετρικής ανάπτυξης, ότι αν ο παράγοντας r είναι *μεγαλύτερος (μικρότερος) της μονάδας*, τότε ο *αριθμός των π_n γίνεται σταθερά μεγαλύτερος (μικρότερος),* καθώς επίσης και ότι οι *αυξήσεις μεγαλώνουν (μειώσεις μικραίνουν).* Ακόμα, αν ο παράγοντας r είναι *μικρότερος της μονάδας*, τότε ο *αριθμός των π_n γίνεται σταθερά μικρότερος*, καθώς επίσης και ότι οι *μειώσεις μικραίνουν*. Και στο κεφάλαιο αυτό, είναι σημαντικό να τονίσουμε πως η αλλαγή της *αρχικής τιμής π_0,* μεταβάλλει και όλα τα επόμενα δεδομένα (Kalman, 1997).

6.2.2. Γραφικές ιδιότητες μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης

Τα δεδομένα του παραπάνω παραδείγματος μπορούν να παρασταθούν και γραφικά με ένα διάγραμμα ως *σημεία* (n,α_n).



Σχ

ήμα 18
Γεωμετρική ανάπτυξη με παράγοντα r_1 = 1,5 και r_2 = 2

Στο σχήμα 18 παρουσιάζονται τα πρώτα 6 σημεία με $\pi_0 = 100$, για $r_1 = 1,5$ και $r_2 = 2$ αντίστοιχα, τα οποία ενώνονται με *ευθείες γραμμές*. Αλλά όταν βλέπουμε συνολικά το διάγραμμά τους, εμφανίζεται μια *αύξουσα καμπύλη γραμμή* που *προσεγγίζει τον οριζόντιο άξονα των χρόνων n*. Η ιδέα αυτή εμφανίζεται και σε κάθε άλλο γεωμετρικό μοντέλο αρκεί ο παράγοντας να είναι $r > 1$. Κάτι τέτοιο είναι λογικό αν σκεφτούμε ότι η ποσότητα αύξησης, όπως είπαμε τότε, γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη (Kalman, 1997).

Όσο *μεγαλύτερος είναι ο παράγοντας ανάπτυξης, τόσο πιο γρήγορα οι γραμμές θα κάνουν ανοδική καμπύλη*. Δηλαδή, το μοντέλο που έχει παράγοντα ανάπτυξης 2 αντί για 1,5 η καμπύλη του στο γράφημα είναι πάλι αύξουσα αλλά πιο απότομη από την πρώτη (σχήμα 18). Αυτό αντιστοιχεί στο παράδειγμα με εξίσωση διαφορών $\pi_{n+1} = 1,5\ \pi_n$, και παρουσιάζει 100% ανάπτυξη κάθε μήνα. Όλες οι καμπύλες δείχνουν το ίδιο χαρακτηριστικό σχήμα, διαφέροντας μόνο στην απότομη κλίση της καμπύλης.

Στα παραδείγματα που εξετάσαμε ως τώρα στην παράγραφο αυτή, ο παράγοντας ανάπτυξης ήταν $r > 1$, με εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = r\alpha_n$. Είδαμε πως υπάρχουν και παραδείγματα που $r < 1$. Αυτό σημαίνει ότι το α_n δεν μεγαλώνει περισσότερο καθώς αυξάνεται το n. Αντιθέτως, γίνεται όλο και μικρότερο. Αυτό είναι αλήθεια για κάθε μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης με $r < 1$. Κάθε φορά που πολλαπλασιάζετε με r, το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από αυτό με το οποίο ξεκινήσαμε (Kalman, 1997).

Για παράδειγμα, αν r = 0,5 και ξεκινήσαμε με $\alpha_0 = 80$, τότε η εξίσωση διαφορών οδηγεί στο:

$\alpha_0 = 80$
$\alpha_1 = 40$
$\alpha_2 = 20$
$\alpha_3 = 10$ κλπ.

Εδώ τα α γίνονται συνεχώς μικρότερα, έτσι:

Σε ένα *γεωμετρικό μοντέλο* με *εξίσωση διαφορών*

$$\alpha_{n+1} = r\alpha_n$$

αν r > 1, τα α *αυξάνονται,* ενώ
αν r < 1, τα α *ελαττώνονται.*

Όταν ο παράγοντας ανάπτυξης είναι r < 1, υπάρχει χαρακτηριστικό σχήμα για το γράφημα «καθρέπτης» του σχήματος που θα είχε αν r > 1. Καθώς δηλαδή, το ακολουθείτε από τα αριστερά προς τα δεξιά, το γράφημα *φθίνει και προσεγγίζει τον οριζόντιο άξονα των χρόνων n* (Kalman, 1997).

Από την γραφική και αριθμητική εξέταση παραδειγμάτων γεωμετρικής ανάπτυξης, έχουν βρεθεί *κοινά χαρακτηριστικά*. Για παράγοντες ανάπτυξης r > 1, τα δεδομένα μεγαλώνουν ολοένα και περισσότερο, με ένα γράφημα που κλίνει απότομα στα δεξιά. Όσο πιο μεγάλος ο παράγοντας ανάπτυξης, τόσο πιο γρήγορα η καμπύλη κλίνει ανοδικά. Για παράγοντες ανάπτυξης r < 1, τα δεδομένα μικραίνουν ολοένα και περισσότερο και ισοπεδώνονται όσο πάνε προς τα δεξιά. Όσο πιο μικρός ο παράγοντας ανάπτυξης, τόσο πιο γρήγορα η καμπύλη ισοπεδώνεται. Οι καμπύλες με παράγοντες r > 1, είναι είδωλα των καμπυλών με παράγοντες ανάπτυξης r < 1. Στο επόμενο τμήμα, θα δούμε ότι υπάρχει συναρτησιακή εξίσωση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης στη θεωρητική μελέτη του (Kalman, 1997).

6.2.3. Θεωρητικές ιδιότητες μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης

Μελετώντας θεωρητικά τα μοντέλα γεωμετρικής ανάπτυξης, πρέπει αρχικά όπως έχουμε αναφέρει και σε κάθε άλλο μοντέλο, να βρούμε τη συναρτησιακή εξίσωση. Σύμφωνα με τον ορισμό της συναρτησιακής εξίσωσης, θυμίζουμε ότι πρέπει το α_n να εκφραστεί ως μια συνάρτηση του n. Με την εξίσωση αυτή, ο υπολογισμός μικρών και μεγάλων τιμών του π_n γίνεται άμεσα χωρίς να χρειαστεί να βρεθούν και όλες οι διαδοχικές τιμές.

Αν εκφράσουμε σε κάθε γεωμετρικό μοντέλο κάθε τιμή του α_n σε σχέση με το α_0 και το n, θα καταλήξουμε σε ένα γενικό τύπο συναρτησιακής εξίσωσής τους. Τελικά, θα προκύψει ο ακόλουθος τύπος:

$$\alpha_n = \alpha_0 r^n \qquad \textbf{(6.2)}$$

με τη βοήθεια του οποίου θα είμαστε σε θέση να κάνουμε προβλέψεις για το τι ή το πότε θα συμβεί κάτι μελλοντικά. Μπορούμε να συγκεντρώσουμε τα παραπάνω στο επόμενο πλαίσιο:

Αν ένα *μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης*
έχει *αρχική τιμή* α_0 και *εξίσωση διαφορών*

$$\alpha_{n+1} = r\alpha_n,$$

τότε έχει *συναρτησιακή εξίσωση*

$\alpha_n = \alpha_0 r^n$, για κάθε $n \geq 1$ (Kalman, 1997).

Τα βήματα που περιγράψαμε αναλυτικά στα κεφάλαια των γραμμικών και τετραγωνικών μοντέλων θα ακολουθηθούν και στα γεωμετρικά μοντέλα. Δεν θα αναφερθούμε εκτενώς στα βήματα αυτά, αλλά μέσα από το παράδειγμα του πληθυσμού με τα κουνέλια και της ημίσειας ζωής του ουρανίου 237, θα υπολογίσουμε τη συναρτησιακή εξίσωση του γεωμετρικού μοντέλου.

Όπως είπαμε ο πληθυσμός των 100 κουνελιών θα αυξηθεί κατά 100 κάθε μήνα. Η συναρτησιακή εξίσωση για την αριθμητική και τετραγωνική ανάπτυξη μπορεί να βρεθεί με την παρατήρηση απλών μοτίβων που παράγονται από την εξίσωση διαφορών. Το ίδιο ισχύει και για τη γεωμετρική ανάπτυξη. Ως παράδειγμα της ιδέας αυτής, αναλογιστείτε την εξίσωση διαφορών για τον πληθυσμό των κουνελιών:

$$\pi_{n+1} = 1{,}5\ \pi_n$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις πρώτες τιμές, αλλά δεν θα εκτελέσουμε τις πράξεις για να βρούμε το μοτίβο που οδηγεί στη συναρτησιακή εξίσωση του μοντέλου (Kalman, 1997).

$\pi_0 = 100$
$\pi_1 = 1{,}5 \times \pi_0 = 1{,}5 \times 100$
$\pi_2 = 1{,}5 \times \pi_1 = 1{,}5 \times 1{,}5 \times 100$
$\pi_3 = 1{,}5 \times \pi_2 = 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 100$
$\pi_4 = 1{,}5 \times \pi_3 = 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 100$

Το μοτίβο είναι ξεκάθαρο αλλά γίνεται αρκετά άβολο αν θελήσουμε να βρούμε μια τιμή για μεγάλο n. Σκεφτείτε ότι για να υπολογίσουμε το π_8 πρέπει να γράψουμε αναλυτικά π_8 = 1,5 x 1,5 x 1,5 x 1,5 x 1,5 x 1,5 x 1,5 x 1,5 x 100. Φανταστείτε να γράφαμε το μοτίβο για π_{30}! Έτσι, αφού ένας εκθέτης δείχνει επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό, μπορούμε να γράψουμε να ξαναγράψουμε τις παραπάνω τιμές με τη βοήθεια των δυνάμεων, ως εξής:

π_1 = 1,5 x π_0 = 1,5 x 100 = $1,5^1$ x 100
π_2 = 1,5 x π_1 = 1,5 x 1,5 x 100 = $1,5^2$ x 100
π_3 = 1,5 x π_2 = 1,5 x 1,5 x 1,5 x 100 = $1,5^3$ x 100
π_4 = 1,5 x π_3 = 1,5 x 1,5 x 1,5 x 1,5 x 100 = $1,5^4$ x 100 (Kalman, 1997).

Ως συνήθως, μπορούμε να συνοψίσουμε το μοτίβο με μια μόνο εξίσωση:

$$\pi_n = 1,5^n \text{ x } 100$$

Αυτή η εξίσωση ταιριάζει με όλες τις παραπάνω τιμές, αλλά για n = 0 λέει:

$$\pi_0 = 1,5^0 \text{ x } 100$$

Αυτή τη φορά, ο εκθέτης έχει λίγο διαφορετική σημασία από πριν. Όταν γράφουμε $1,5^2$ σημαίνει να πολλαπλασιάσουμε δύο 1,5 μαζί. Στη δύναμη όμως $1,5^0$ δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μηδέν 1,5 μαζί. Αντιθέτως, $1,5^0$ ορίζεται ως 1. Για το παράδειγμα που χρησιμοποιούμε, η συναρτησιακή εξίσωση είναι $\pi_n = 1,5^n$ x 100. Οι αριθμοί 1,5 και 100 που εμφανίζονται είναι ο παράγοντας αύξησης r = 1,5 και η αρχική τιμή π_0 = 100, αντίστοιχα. Άρα, η συναρτησιακή συνάρτηση για το παράδειγμα με τα κουνέλια γίνεται:

$$\pi_n = r^n \pi_0$$

Ας δούμε τώρα το παράδειγμα με παράγοντα μικρότερο της μονάδας, σχετικά με το χρόνο ημιζωής του ουρανίου 237, με αρχική τιμή 100 γραμμάρια. Και εδώ από τις αρχικές διαδοχικές τιμές θα βρούμε τη συναρτησιακή εξίσωση, έχοντας:

π_0 = 100
π_1 = 0,5 x π_0 = 0,5 x 100 = $0,5^1$ x 100
π_2 = 0,5 x π_1 = 0,5 x 0,5 x 100 = $0,5^2$ x 100
π_3 = 0,5 x π_2 = 0,5 x 0,5 x 0,5 x 100 = $0,5^3$ x 100
π_4 = 0,5 x π_3 = 0,5 x 0,5 x 0,5 x 0,5 x 100 = $0,5^4$ x 100 (Kalman, 1997).

Για r < 1, μπορούμε επίσης να συνοψίσουμε το μοτίβο με μια μόνο εξίσωση:

$$\pi_n = 0,5^n \text{ x } 100$$

Τόσο τα παραδείγματα με $r < 1$, όσο και αυτά με $r > 1$ έχουν τελικά τον ίδιο τύπο για συναρτησιακή εξίσωση που συμφωνεί με τη σχέση 6.2. Έχοντας τη συναρτησιακή εξίσωση μπορούμε να δώσουμε απαντήσεις και σε δύο ακόμα τύπους ερωτήσεων σχετικά με την άμεση τιμή της μεταβλητής α_n για κάποιο δεδομένο n (π.χ. $n = 10$) καθώς και το αντίστροφο πρόβλημα όπου θέλουμε να ορίσουμε την τιμή του n για μια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής α_n. Για τη δεύτερη ερώτηση στο σημείο αυτό μπορούμε να δώσουμε απάντηση μόνο με την αριθμητική μέθοδο της δοκιμής και του λάθους για τις τιμές όμως του α_n (Kalman, 1997).

6.3. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Υπάρχει μια συγκεκριμένη *συναρτησιακή εξίσωση* για τη γεωμετρική ανάπτυξη και έχει τη μορφή $\pi_n = r^n \pi_0$. Παρόλο που αυτό ορίζεται με όρους τιμών *ακέραιων αριθμών n*, υπάρχει τρόπος να επεκτείνουμε και την ιδέα της γεωμετρικής ανάπτυξης στις κλασματικές τιμές. Αυτό οδηγεί σε ένα μοντέλο με *συνεχείς* μεταβλητές χρόνου. Η συναρτησιακή εξίσωση που προκύπτει για την κατάσταση αυτή ονομάζεται *εκθετική συνάρτηση* και θα μελετήσουμε παρακάτω.

Στη συζήτηση για τη γραμμική ανάπτυξη, από τη στιγμή που βρέθηκε η συναρτησιακή εξίσωση, επεκτείναμε το μοντέλο μας σε μια μεταβλητή συνεχούς χρόνου. Θα έβγαζε αυτό νόημα εδώ;

Για το μοντέλο του πληθυσμού των κουνελιών, με $\kappa_0 = 100$ και $r = 1,5$, έχουμε τη συναρτησιακή εξίσωση:

$$\pi_n = 100(1,5)^n \qquad \text{(Kalman, 1997)}$$

όπου π_n είναι ο πληθυσμός τους μετά από n μήνες, δηλαδή, για n ακέραιο αριθμό.

Τί γίνεται όμως αν το n γίνει δεκαδικός αριθμός; Αν θέλουμε για παράδειγμα να βρούμε τον πληθυσμό π_n με από 3,5 μήνες; Όπως και πριν, όταν χρησιμοποιούμε δεκαδικές τιμές για το n, το π_n το συμβολίζουμε με $\pi(n)$. Σύμφωνα με τη συναρτησιακή εξίσωση, το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι $\pi(3,5) = 100\ (1,5)^{3,5}$, που αν σκεφτούμε τον ορισμό μιας δύναμης ως επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό δημιουργεί μια δυσκολία μιας και δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το 1,5 με τον εαυτόν του 3,5 φορές. Με έναν <u>υπολογιστή</u> όμως θα μπορούσαμε να την υπολογίσουμε και θα παίρναμε την τιμή $\pi(3,5) = 100(1,5)^{3,5} = 413,35137$. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον υπολογιστή για να υπολογίσουμε τα π_n για δεκαδικές τιμές του n όπως 1,1, 1,2, 1,3, κλπ. Το <u>γράφημά</u> των δεκαδικών n θα είναι μια απαλή καμπύλη που συνδέει τα σημεία των ακεραίων n (Kalman, 1997).

Παρατηρούμε ότι όπως η εξίσωση διαφορών γραμμικής ανάπτυξης οδηγεί στη γενική ιδέα της αναλογικής αιτιολογίας, έτσι η εξίσωση διαφορών γεωμετρικής ανάπτυξης οδηγεί σε ένα γενικότερο είδος αιτιολογίας. Αρχικά, η γεωμετρική ανάπτυξη ορίστηκε με όρους χρονικής περιόδου συγκεκριμένου μήκους, όπως 1

μήνας ή 1 εβδομάδα. Η πιο γενική ιδέα οδηγεί σε ένα συνεχές μοντέλο για ανάπτυξη και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> Σε κάθε *δύο χρονικές περιόδους*
> *ίσου μήκους,*
> ο *παράγοντας ανάπτυξης* r,
> είναι ο *ίδιος*.

Στο μοντέλο πληθυσμού των κουνελιών, έχουμε:

$r = 1,5$ και

$\pi(3) = 100(1,5)^3 = 337,5$

$\pi(4) = 100(1,5)^4 = 506,25$

και με τη βοήθεια του υπολογιστή, βρίσκουμε:

$\pi(3,5) = 100(1,5)^{3,5} = 413,35137$

Αν αυτό είναι σωστό, θα πρέπει να έχουμε τον ίδιο παράγοντα ανάπτυξης στο πρώτο μισό του μήνα ($n = 3$ έως $n = 3,5$) όπως και στο δεύτερο μισό του μήνα ($n = 3,5$ έως $n = 4$). Πράγματι,

$r_1 = \pi(3,5)\ \pi(3) = 413,35137/337,5 = 1,2247448$ και

$r_2 = \pi(4)/\pi(3,5) = 506,25/413,35137 = 1,2247449$ είναι σχεδόν ίσα (Kalman, 1997).

Μια <u>θεωρητική</u> προσέγγιση μας βοηθά να βρούμε τη σχέση που συνδέει τους παράγοντες r, r_1, r_2. Ο παράγοντας ανάπτυξης για 1 μήνα είναι $r = 1,5$. Ποιος θα πρέπει να είναι ο παράγοντας ανάπτυξης για το μισό του μήνα r_1; Αν σκεφτούμε ως $r_1 = 1,5/2 = 0,75$ έχουμε κάνει λάθος. Και αυτό γιατί αν $r_1 = 0,75$ στο 1° μισό του μήνα και ξανά στο 2° μισό, τότε ο αρχικός πληθυσμός των $\pi_0 = 100$ θα γινόταν $\pi(0,5) = 75$ στο 1° μισό του μήνα και $\pi(0,5+0,5) = 75x0,75 = 56,35$ στο 2° μισό του μήνα που είναι άτοπο γιατί το $\pi(0,5+0,5)$ είναι η τιμή των δεδομένων 1 μήνα μετά που σύμφωνα με τα δεδομένα είναι $\pi_1 = 150$ και όχι 56,35.

Για να βρούμε το σωστό παράγοντα ανάπτυξης για το μισό μήνα, θα χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή r. Ξεκινώντας από $\pi_0 = 100$, το 1° μισό μήνα, ο πληθυσμός θα είναι $\pi(0,5) = 100r$. Στο 2° μισό μήνα είναι $\pi(1) = 100r^2$, όπως ο πληθυσμός στο τέλος του μήνα. Αλλά ξέρουμε ότι αυτό θα πρέπει να είναι 150. Έτσι, $100r^2 = 150$. Αυτή είναι μια *τετραγωνική εξίσωση*, και μπορούμε να τη λύσουμε ως $r^2 = 1,5$ άρα $r = \sqrt{1,5}$. Έτσι, αν r είναι ο παράγοντας ανάπτυξης για το 1° μισό του μήνα, τότε r^2 θα πρέπει να είναι ίσο με του 1 μήνα. Γενικεύοντας αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να πούμε ότι:

> Αν **s** είναι ο παράγοντας ανάπτυξης για το 1/κ του μήνα,
>
> τότε s^κ είναι ο παράγοντας ανάπτυξης για 1 μήνα.

Χρησιμοποιώντας αυτή την αιτιολογία, μπορούμε να υπολογίσουμε ποιος θα είναι ο πληθυσμός για κάθε κλάσμα του μήνα. Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει πως μια εξίσωση όπως η $\pi_n = 100(1,5)^n$ ισχύει και για δεκαδικές τιμές του n. Τότε, συμβολίζουμε αντί του n το t και έχουμε συνεχείς μεταβλητές με εξίσωση $\pi(t) = 100(1,5)^t$ (Kalman, 1997).

Το *συνεχές γεωμετρικό μοντέλο*
με *αρχική τιμή* α_0
και *παράγοντα ανάπτυξης* r (για μια μονάδα χρόνου),

έχει *συναρτησιακή εξίσωση*

$$\alpha(t) = \alpha_0 \, r^t \qquad \textbf{(6.3)}$$

Αυτού του είδους οι συναρτήσεις που έχουν τον άγνωστο στον εκθέτη λέγονται *εκθετικές συναρτήσεις* και θα τις μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Μια παραλλαγή του θέματος παρουσιάζεται όταν ο παράγοντας ανάπτυξης r δεν δίνεται από μια μονάδα χρόνου αλλά από ένα πλήθος d αυτών των μονάδων χρόνου. Αν θέλουμε να εκφράσουμε αυτό ως συνεχές μοντέλο, θα ήταν πιο φυσικό να χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή t ως το χρόνο σε μια από τις μονάδες που αποτελείται το d, έτσι:

Το *συνεχές γεωμετρικό μοντέλο*,
με *αρχική τιμή* α_0 για t = 0
και *παράγοντα ανάπτυξης* r (για κάθε d μονάδες χρόνου)

έχει *συναρτησιακή εξίσωση*

$$\alpha(t) = \alpha_0 \, r^{t/d} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Στο παράδειγμα της ημιζωής με μια μείωση της τάξης του 50% σε 6,75 μέρες, μέσω ενός συνεχούς γεωμετρικού μοντέλου, μπορούμε αμέσως να γράψουμε μια εξίσωση για την ποσότητα που έμεινε μετά από t μέρες, επειδή ξέρουμε τον παράγοντα ανάπτυξης r = 0,5 σε περίοδο d = 6,75 μέρες (Kalman, 1997). Έτσι, καταλήγουμε στη συναρτησιακή εξίσωση της μορφής:

$$\pi(t) = \pi_0 \, 0,5^{t/6,75}$$

6.4. ΜΕΛΕΤΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

6.4.1. Αλγεβρικά

Υπάρχουν *τρεις βασικοί κανόνες* σχετικά με τις εκθετικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε στις αλγεβρικές διαδικασίες και μας επιτρέπουν να γράψουμε μια εκθετική έκφραση με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Οι σχέσεις αυτές θα βοηθήσουν σημαντικά και στη επίλυση εξισώσεων και στην κατανόηση ιδιοτήτων των γεωμετρικών μοντέλων.

Στην πραγματικότητα με τους κανόνες αυτούς θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε όποιον αριθμό θέλουμε για βάση μιας δεδομένης εκθετικής έκφρασης. Δεν θα αναφερθούμε με λεπτομέρεια σε αυτούς γιατί τους συναντάμε στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου και επομένως έχουμε εξοικειωθεί αρκετά.

Σε άλλες καταστάσεις ένας εκθετικός τύπος είναι ευκολότερος να χρησιμοποιηθεί σε σχέση με κάποιον άλλον. Επίσης, πρέπει να πούμε στο σημείο αυτό πως οι κανόνες αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν *όχι μόνο για ακέραιους εκθέτες*, αλλά και για εκθέτες κλασματικούς ή δεκαδικούς, θετικούς ή αρνητικούς.

Για κάθε *βάση* $\alpha > 0$ και για κάθε *εκθέτη* n και m:

1. $\alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m}$

2. $(\alpha^n)^m = \alpha^{nm}$

3. $\alpha^n / \alpha^m = \alpha^{n-m}$

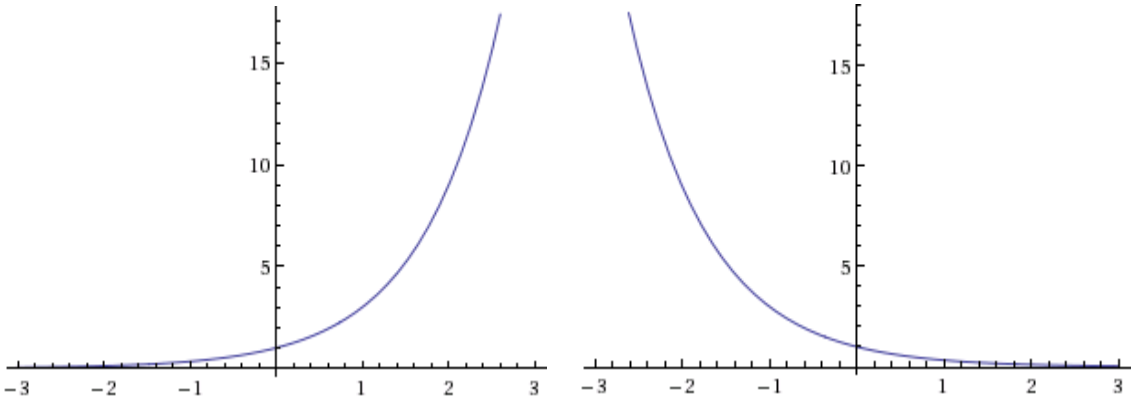
6.4.2. Γραφικά

Θέλουμε να εξετάσουμε ξανά τα γραφήματα των εκθετικών συναρτήσεων για τιμές των μεταβλητών που δεν είναι μόνο ακέραιες αλλά και κλασματικές, δεκαδικές, θετικές ή αρνητικές. Πράγματι, θέλουμε να φανταστούμε την εμπλοκή των σημείων του γραφήματος για κλασματικές τιμές του n που είναι τόσο κοντά μεταξύ τους που σχηματίζουν μια συνεχή καμπύλη. Θα χρησιμοποιήσουμε τις συμβατικές μεταβλητές x για τον οριζόντιο άξονα και y για τον κάθετο (Kalman, 1997). Η γενική μορφή της εκθετικής συνάρτησης θα είναι:

$$y = Ab^x, \text{ όπου } A,b \text{ σταθερές} \qquad \textbf{(6.5)}$$

Στα επόμενα θα δούμε τα γενικά χαρακτηριστικά των γραφήματα των εκθετικών συναρτήσεων. Επίσης θα δούμε πως να προβλέπουμε από τις τιμές των A και b ποια θα είναι η φύση του γραφήματος.

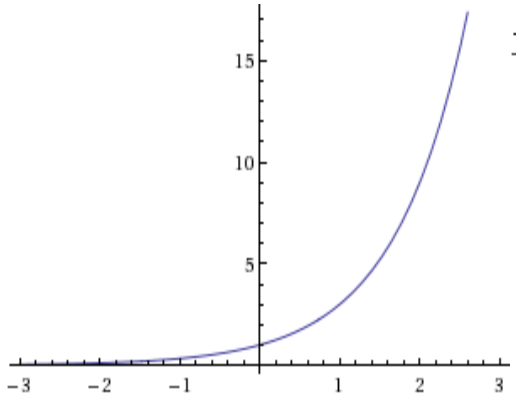
Κάθε συναρτησιακή εξίσωση έχει το ίδιο γενικό σχήμα που φαίνεται στο σχήμα 19. Σχεδόν οριζόντιο στη μια πλευρά, με τον άξονα των x να είναι οριζόντια ασύμπτωτη εκεί, και καμπύλη στην άλλη (Kalman, 1997).

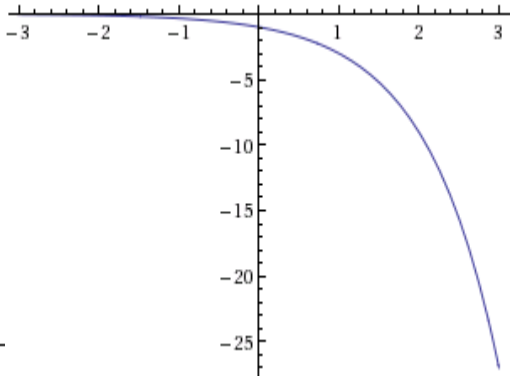


Σχήμα 19
Γενικό γράφημα εκθετικών εξισώσεων

Μελετώντας τις εκθετικές συναρτήσεις παρατηρούμε κάποιες κοινές ιδιότητες. Η *οριζόντια πλευρά* της καμπύλης μπορεί να εμφανιστεί και στη δεξιά ή στην αριστερή πλευρά του γραφήματος και η *καμπύλη πλευρά* μπορεί να κλείνει απότομα πάνω ή κάτω. Ακόμη ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των εκθετικών συναρτήσεων είναι πως *δεν έχουν σημεία τομής στον άξονα x*. Όλο το γράφημα πρέπει να μείνει πάνω ή κάτω από τον x.

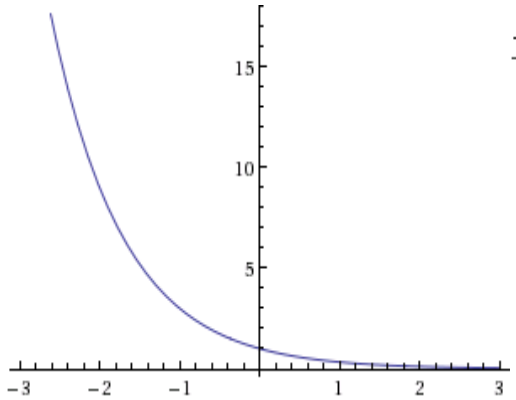
Ανάλογα με τα *πρόσημα* των A και b στην εξίσωση $y = Ab^x$ έχουμε και άλλες ιδιότητες. Αν A είναι θετικό, όλο το γράφημα πρέπει να μείνει πάνω από τον άξονα x. Για $A > 0$, αν $b > 1$ τότε η αριστερή πλευρά είναι η οριζόντια και η δεξιά η καμπύλη, ενώ αν $b < 1$ ισχύει το αντίστροφο. Αν A είναι αρνητικό, όλο το γράφημα πρέπει να μείνει κάτω από τον άξονα x. Για $A < 0$, αν $b > 1$ τότε η αριστερή πλευρά είναι η καμπύλη και η δεξιά η οριζόντια, ενώ αν $b < 1$ ισχύει το αντίστροφο. Όλες αυτές οι παραλλαγές φαίνονται στο σχήμα 20 (Kalman, 1997).

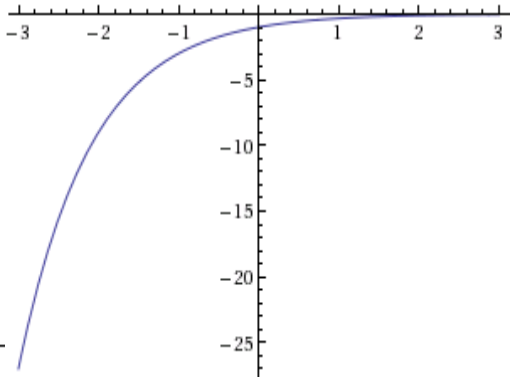




A > 0
b > 1

A < 0
b > 1





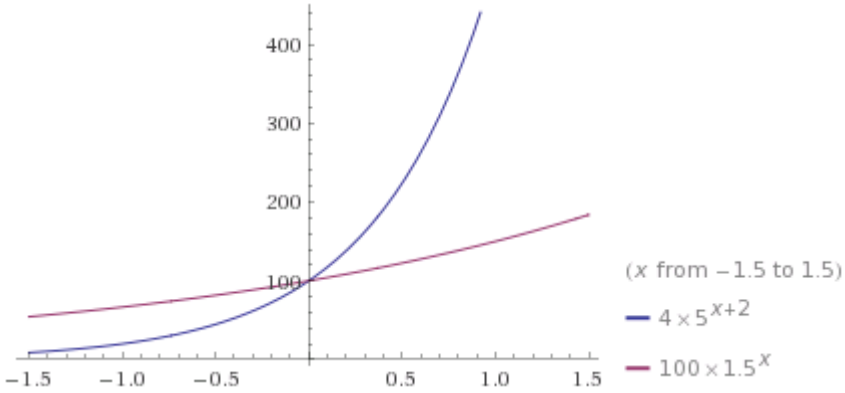
A > 0
b < 1

A < 0
b < 1

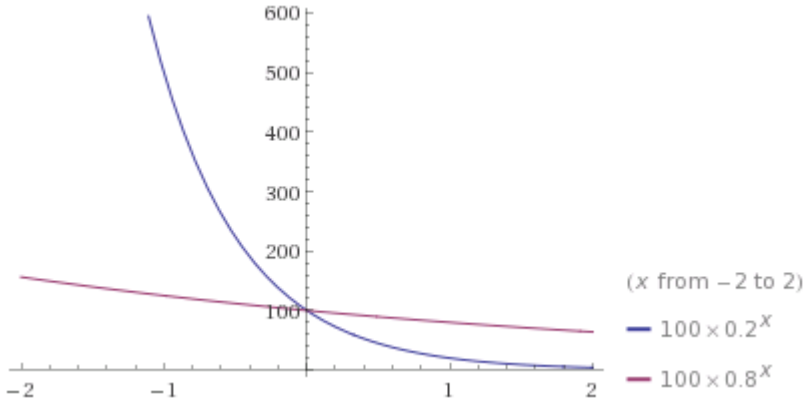
Σχήμα 20
Γενικά σχήματα εκθετικών γραφημάτων

Μπορούμε να βρούμε από τον τύπο $y = Ab^x$ **(6.5)**, το σημείο που μια εκθετική συνάρτηση τέμνει τον άξονα y ότι είναι το (0, A), με A να είναι και η αρχική τιμή του μοντέλου. Αλγεβρικά, ξέρουμε ότι τα σημεία τομής με τον άξονα y μπορούν να βρεθούν θέτοντας x = 0. Αν A > 0, τα σημεία τομης με τον y καθώς και όλη η καμπύλη, θα βρίσκονται πάνω από τον άξονα x. Αν A < 0, τα σημεία τομής του y όπως όλη η καμπύλη, είναι κάτω από τον x.

Σαν τελική παρατήρηση για τα γραφήματα εκθετικών συναρτήσεων, θα αναφέρουμε ότι η τιμή του b ελέγχει το πως η καμπύλη κλίνει προς τα επάνω ή κάτω. Έτσι, αν $b_1 < b_2 < 1$, τότε το γράφημα με το μικρότερο b_1, θα κλίνει πιο γρήγορα προς τα πάνω. Αν $1 < b_1 < b_2$, τότε το γράφημα με το μεγαλύτερο b_2, θα κλίνει πιο γρήγορα προς τα πάνω. Αυτές οι παρατηρήσεις φαίνονται στο σχήμα 21 (Kalman, 1997).



$1 < b_1 < b_2$



$b_1 < b_2 < 1$

Σχήμα 21
Γραφήματα για b < 1 και b > 1

6.4.3. Επίλυση εκθετικών εξισώσεων

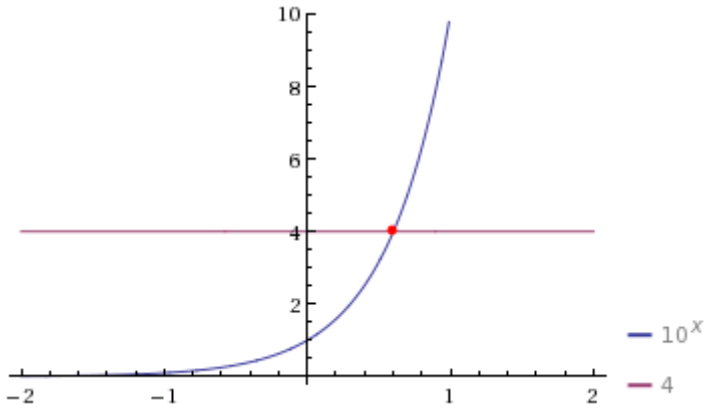
Θα συζητήσουμε μεθόδους επίλυσης εκθετικών συναρτήσεων. Τη διαδικασία αυτή θα απλοποιήσει σημαντικά η ιδέα του λογάριθμου, που οι περισσότεροι υπολογιστές πια μπορούν να υπολογίσουν με το πάτημα μόνο ενός κουμπιού. Για να μελετήσουμε την επίλυση των εκθετικών εξισώσεων θα δώσουμε πρώτα έναν ορισμό τους:

Εκθετική εξίσωση είναι μια ισότητα στην οποία η μεταβλητή βρίσκεται στη θέση του εκθέτη (Kalman, 1997).

Η πιο απλή μορφή εκθετικής εξίσωσης έχει μόνο εκθετική έκφραση στη μια πλευρά του ίσον κι έναν αριθμό από την άλλη, δηλαδή, είναι της μορφής:

$$\beta^x = \alpha \qquad \textbf{(6.6)}$$

Ως συνήθως, μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα γραφικά και αριθμητικά. Στο παράδειγμα που θέλουμε να λύσουμε γραφικά την εξίσωση $10^x = 4$, που φαίνεται στο σχήμα 22, πρέπει να βρούμε ένα σημείο Α της καμπύλης $y = 10^x$ με $y = 4$. Με άλλα λόγια θέλουμε να δούμε σε ποιο σημείο Α η οριζόντια ευθεία $y = 4$ τέμνει την καμπύλη $y = 10^x$. Στο κοινό τους σημείο αυτό σχεδιάζουμε μια κάθετη ευθεία μέχρι τον άξονα x. Το σημείο αυτό του άξονα x δίνει την τετμημένη του σημείου τομής Α που αναζητούσαμε αρχικά η οποία είναι πολύ κοντά στον αριθμό 0,6. Αυτή θα είναι και η τιμή του x για την εξίσωση $10^x = 4$ (Kalman, 1997).



Σχήμα 22
Γραφική επίλυση της εκθετικής εξίσωσης $10^x = 4$

Όταν θέλουμε να λύσουμε *αριθμητικά* την εξίσωση $10^x = 4$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή. Τότε, θα βρούμε ότι $10^{0,4} \cong 3,98$ ενώ $10^{0,41} \cong 4,07$. Άρα η λύση στην εξίσωση $10^x = 4$, είναι $0,4 < x < 0,41$. Αυτό σημαίνει ότι η λύση θα πρέπει να ξεκινά με 0,40. Χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή ξανά και τη διαδικασία της συστηματικής *δοκιμής και λάθους*, υπολογίζουμε τις δυνάμεις $10^{0,401}$, $10^{0,402}$, $10^{0,403}$, $10^{0,404}$, κλπ, μέχρι να υπολογίσουμε και τα υπόλοιπα ψηφία της λύσης. Με τον τρόπο αυτόν όμως θα μπορούμε να βρούμε μόνο όσα ψηφία μπορεί να υποστηρίξει ο υπολογιστής που έχουμε (Kalman, 1997).

Οι εκθετικές εξισώσεις συναντώνται έμμεσα σε μοντέλα γεωμετρικής ανάπτυξης όταν σε μια συναρτησιακή εξίσωσή τους $\alpha(t) = \alpha_0 r^t$, θέλουμε να υπολογίσουμε σε ποια χρονική στιγμή t θα πάρει μια συγκεκριμένη το α(t). Έτσι, αφού διαιρέσουμε τα δύο μέλη με το α_0, βρίσκουμε $r^t = c$, με c σταθερά που είναι η εκθετική εξίσωση που πρέπει να λύσουμε για να βρούμε τον άγνωστο χρόνο t. Σε αυτήν τη μορφή μπορούμε πάλι να εφαρμόσουμε γραφικές και αριθμητικές μεθόδους. Αυτή θα ήταν όμως μια χρονοβόρα διαδικασία.

Παρόλα αυτά επειδή οι εκθετικές εξισώσεις συναντώνται πολύ συχνά σε εφαρμογές, έχει αναπτυχθεί μια άλλη μέθοδος για την προσέγγισή τους μέσω λογαριθμικών εξισώσεων. Στη θεωρία των λογαρίθμων υπάρχουν διάφορες βάσεις τους, όταν όμως η βάση είναι το 10 λέγονται *κοινοί λογάριθμοι***,** ενώ όταν είναι το e λέγονται *φυσικοί λογάριθμοι.* Θα επικεντρωθούμε στις ιδιότητες των λογαρίθμων με βάση το 10, αλλά οι ίδιες ισχύουν και για όποια βάση όπως γνωρίζουμε από γνώσεις του βιβλίου της Β΄ Λυκείου. Οι λογάριθμοι μπορούν να υπολογιστούν είτε αριθμητικά με δοκιμή και λάθος ή εναλλακτικά με πίνακα τιμών για τη συνάρτηση 10^x για τις διάφορες τιμές του x, μέχρι να βρούμε κάποια κοντά στο c. Αναζητούμε τον εκθέτη x στον οποίο όταν υψωθεί το 10 δίνει την τιμή c, που στα Αγγλικά μεταφράζεται ως ΄΄*lo*cate the exponent *g*iving c΄΄. Από τη μετάφραση αυτή προκύπτει και ο συμβολισμός του λογαρίθμου ως ΄΄*log*΄΄ (Kalman, 1997). Με ένα μοτίβο εκφράζεται η γενική λύση μια εκθετικής εξίσωσης με τη βοήθεια λογαρίθμων στο παρακάτω πλαίσιο:

Η *λύση μιας εκθετικής εξίσωσης*
της μορφής $r^x = c$ είναι

$$x = \log c/\log r \qquad \textbf{(6.7)}$$

Βασικά, για τις περισσότερες εφαρμογές, η επιθυμητή βάση δεν είναι το 10, αλλά το e που είναι ένας άρρητος αριθμός που σχεδόν ίσος με 2,71828. Τότε, ο λογάριθμος με βάση το e συμβολίζεται ως *ln* από το ΄΄*l*ogarithm *n*atural΄΄. Το μοτίβο τότε της γενικής λύσης μια εκθετικής εξίσωσης με τη βοήθεια φυσικών λογαρίθμων γίνεται:

Η *λύση μιας εκθετικής εξίσωσης*
της μορφής $r^x = c$ είναι

$$x = \ln c/\ln r \qquad \textbf{(6.8)}$$

Στο παράδειγμα της ημιζωής του ραδιενεργού Ουρανίου 237, καταλήξαμε στη συναρτησιακή εξίσωση της μορφής:

$$\pi(t) = \pi_0\, 0{,}5^{\,t/6{,}75}$$

η οποία μπορεί να μετατραπεί από βάσης 0,5 σε βάσης e μετά από κάποια βήματα ως εξής:

$\pi(t) = \pi_0\, 0{,}5^{\,t/6{,}75}$
$\pi(t) = \pi_0 0{,}5^{\,t/6{,}75}$
$\pi(t) = \pi_0\, (e^{\ln 0{,}5})^{\,t/6{,}75}$
$\pi(t) = \pi_0 e^{t\ln 0{,}5/6{,}75}$, που είναι περίπου ίσο με $\pi(t) = \pi_0 e^{-10268847t}$

Σε πολλές εφαρμογές, γίνεται χρήση του άρρητου αριθμού e ως βάση για εκθετικές συναρτήσεις. Οι περισσότεροι υπολογιστές περιλαμβάνουν ειδικές διαδικασίες για το e^x και ln. Αλλά τι είναι αυτό που είναι τόσο ιδιαίτερο για το e και γιατί χρησιμοποιείται τόσο; Μια ολοκληρωμένη κατανόηση της ουσίας του e απαιτεί μια γνώση *calculus*. Παρόλα αυτά, υπάρχει ένα πλήθος ιδιοτήτων για το e, που όπως είδαμε μπορούν να κατανοηθούν και χωρίς αυτές (Kalman, 1997).

Μια πλευρά του *ορισμού του e* συνδέεται με τον υπολογισμό εκθετικών συναρτήσεων. Αν στο α^x ο x είναι ακέραιος αριθμός, τότε το α^x είναι ένας επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός, δηλαδή, γινόμενο x το πλήθος παραγόντων ίσων με α. Στην περίπτωση όμως που ο x δεν είναι ακέραιος το α^x, δεν ορίζεται όπως προηγουμένως. Όπως συζητήθηκε, οι υπολογιστές δίνουν αποτέλεσμα σε συνδυασμό με την ιδέα γεωμετρικής ανάπτυξης. Για παράδειγμα ο υπολογιστής βρίσκει $2^{0,2} = 1.1487$.

Μια προσέγγιση που βασίζεται στις μεθόδους calculus, χρησιμοποιεί ένα πολυώνυμο για να προσεγγίσει μια εκθετική συνάρτηση. Για μικρές τιμές εκθετών x, για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε:

$$\begin{aligned} a^x &\cong a^0 + \frac{\ln a^x}{1!} + \frac{(\ln a^x)^2}{2!} + \frac{(\ln a^x)^3}{3!} \\ &= 1 + \frac{x\ln a}{1} + \frac{(x\ln a)^2}{1\cdot 2} + \frac{(x\ln a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} \qquad \textbf{(6.9)} \end{aligned}$$

Για μεγαλύτερες τιμές του x, θα πρέπει να προσθέσουμε κι άλλους όρους στο ίδιο μοτίβο, όπως τους όρους:

$$\frac{(x\ln a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \frac{(x\ln a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\ \frac{(x\ln a)^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$, κλπ. (Kalman, 1997).

Αλλά ανεξάρτητα από το x που χρησιμοποιούμε, το πολυώνυμο δίνει μια καλή προσέγγιση αν χρησιμοποιήσουμε αρκετούς όρους.

Ας προσεγγίσουμε ξανά το $2^{0,2}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω προσέγγιση με το πολυώνυμο:

$$2^x \cong 2^0 + \frac{\ln 2^x}{1!} + \frac{(\ln 2^x)^2}{2!} + \frac{(\ln 2^x)^3}{3!}$$

$$= 1 + \frac{x\ln 2}{1} + \frac{(x\ln 2)^2}{1\cdot 2} + \frac{(x\ln 2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= 1 + \frac{0{,}693x}{1} + \frac{(0{,}693x)^2}{1\cdot 2} + \frac{(0{,}693x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= 1 + \frac{0{,}693\cdot 0{,}2}{1} + \frac{(0{,}693\cdot 0{,}2)^2}{1\cdot 2} + \frac{(0{,}693\cdot 0{,}2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= 1 + 0{,}1386 + \frac{0{,}1386^2}{2} + \frac{0{,}1386^3}{6}$$

$$= 1{,}1486$$

Φυσικά, θα ήταν όλες οι πράξεις πιο εύκολες αν στον τύπο του πολυωνύμου (6.9) υπήρχαν μόνο οι δυνάμεις του x στον αριθμητή. Τότε όμως το πολυώνυμο θα είχε τη μορφή:

$$a^x \cong 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \qquad \textbf{(6.10)}$$

Όμως ποιά εκθετική βάση α προσεγγίζει; Για να το βρούμε μπορούμε να πάρουμε x = 1. Τότε, το πολυώνυμο θα προσεγγίσει την $1^η$ δύναμη αυτής της βάσης. Έτσι, έχουμε:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

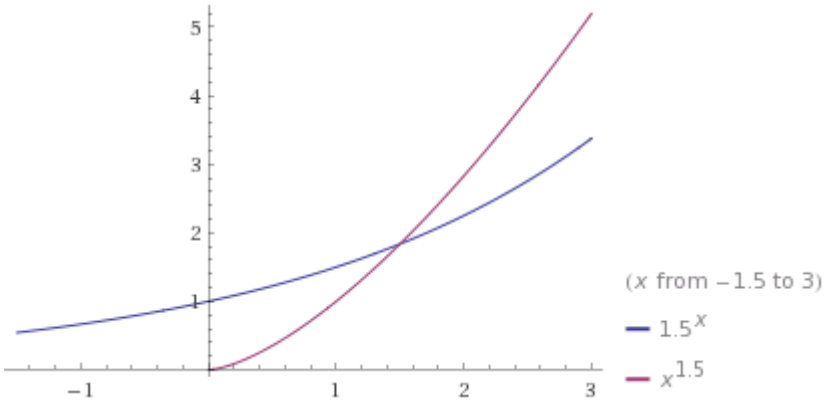
$$= 2{,}717$$

Αυτή η προσέγγιση είναι σωστή μόνο για τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία. Η ακριβής τιμή της *βάσης είναι ο αριθμός e*. Μια ιδιότητα λοιπόν του e είναι ότι η πολυωνυμική προσέγγιση για το e^x, χρησιμοποιεί μόνο δυνάμεις του x και όχι και πολλαπλασιασμούς αυτών των δυνάμεων με σταθερές. Στην πραγματικότητα, το e μπορεί να οριστεί ως το αποτέλεσμα αθροίσματος άπειρων όρων:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Μια δεύτερη ιδιότητα έχει να κάνει με τα *γραφήματα* καμπυλών του τύπου $y = b^x$ για διάφορες τιμές του b. Όπως είδαμε, όλα αυτά τα γραφήματα τέμνουν τον άξονα y στο ίδιο σημείο (0,1). Παρόλα αυτά, οι καμπύλες τον τέμνουν με διαφορετικές κλίσεις. Ανάμεσά τους υπάρχει μια καμπύλη που τέμνει τον άξονα y με γωνία 45 μοιρών. Αυτή η βάση είναι το e (Kalman, 1997).

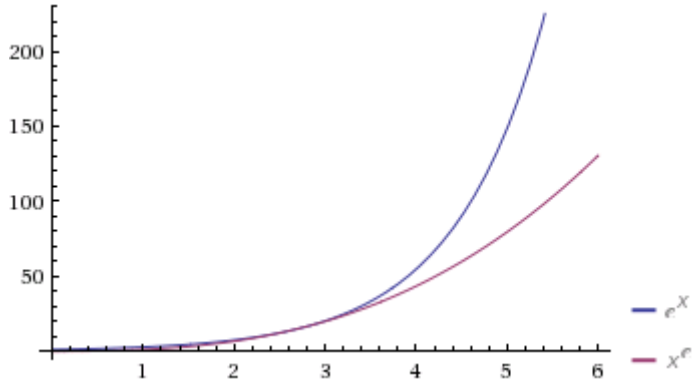
Μια τελευταία ιδιότητα του e, χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δυνάμεις της μορφής: α^x με x^α. Σε αυτήν την περίπτωση συγκρίνουμε τις καμπύλες των γραφημάτων τους. Η α^x είναι μια εκθετική συνάρτηση με βάση α, ενώ η x^α είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση με δύναμη το α. Από τις καμπύλες των συναρτήσεων αυτών, για κάποια x η συνάρτηση α^x είναι μεγαλύτερη, και για κάποια άλλα x η συνάρτηση $\mathbf{x^\alpha}$ είναι μεγαλύτερη. Ας δούμε για παράδειγμα $1{,}5^x$ και $x^{1,5}$ (σχήμα 23).



Σχήμα 23
Γραφήματα των $y = 1{,}5^x$ και $y = x^{1,5}$

Γι' αυτό είναι δύσκολο να προβλεφθεί μόνο με μια ματιά ποια δύναμη είναι μεγαλύτερη. Υπάρχει μόνο μια εξαίρεση, που φαίνεται στο σχήμα 24, όταν α = e. Τότε, ισχύει:

$$e^x \geq x^e, \text{ για κάθε } x > 0 \qquad \textbf{(6.11)}$$



Σχήμα 24
Γραφήματα των $y = e^x$ και $y = x^e$

6.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό έχει παρουσιαστεί η ιδέα των μοντέλων γεωμετρικής ανάπτυξης. Αυτά μπορούν να συγκριθούν με τα γραμμικά μοντέλα με δύο τρόπους. Αρχικά, στη γραμμική ανάπτυξη, μια μεταβλητή *αυξάνεται ή μειώνεται κατά μια συγκεκριμένη ποσότητα σε δεδομένη χρονική περίοδο*, ενώ στη γεωμετρική ανάπτυξη, η μεταβλητή *αυξάνεται ή μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό σε δεδομένη χρονική περίοδο*.

Εναλλακτικά, όπως είδαμε η γεωμετρική ανάπτυξη μπορεί να εξηγηθεί με τον παράγοντα ανάπτυξης. Ένας παράγοντας ανάπτυξης είναι ένας αριθμός που πολλαπλασιάζει μια τιμή της μεταβλητής για να δημιουργήσει την αμέσως επόμενη τιμή. Έτσι, ενώ σε ένα μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης υπολογίζουμε *κάθε νέα τιμή δεδομένων με την πρόσθεση μιας σταθεράς στην προηγούμενη τιμή*, στη γεωμετρική ανάπτυξη υπολογίζουμε *κάθε νέα τιμή δεδομένων με τον πολλαπλασιασμό μιας σταθεράς στην προηγούμενη τιμή* (Kalman, 1997).

Υπάρχει μια στενή αναλογία ανάμεσα στη γεωμετρική ανάπτυξη και την αριθμητική ανάπτυξη. Η αριθμητική ανάπτυξη εμφανίζεται από την υπόθεση όπου ένα φαινόμενο θα αυξηθεί ή θα μειωθεί κατά ίση ποσότητα, σε ίσες χρονικές περιόδους. Η υπόθεση της αριθμητικής ανάπτυξης οδηγεί σε μια εξίσωση διαφορών περιγράφοντας το πως κάθε δεδομένο εξαρτάται από τα προηγούμενα. Υπάρχει επίσης μια συναρτησιακή εξίσωση που δείχνει πως να υπολογίζουμε ένα δεδομένο χωρίς τη βοήθεια όλων των προηγούμενων. Στην αριθμητική ανάπτυξη, η συναρτησιακή εξίσωση είναι γραμμική και οδηγεί στη μελέτη γραμμικών εξισώσεων. Συχνά, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη συναρτησιακή εξίσωση ως συνεχές μοντέλο. Αυτό μας επιτρέπει να σκεφτούμε ότι τα δεδομένα θα υπάρχουν ανάμεσα σε περιόδους αληθινών δεδομένων.

Από την άλλη, η γεωμετρική ανάπτυξη ακολουθεί ένα *όμοιο πρότυπο*. Ξεκινά ξανά με μια υπόθεση που το φαινόμενο θα αυξηθεί ή θα μειωθεί κατά ίσο ποσοστό, σε ίσες χρονικές περιόδους,. Αυτό μας οδηγεί σε μια εξίσωση διαφορών και μια συναρτησιακή εξίσωση. Στη γεωμετρική ανάπτυξη η συναρτησιακή εξίσωση είναι εκθετική. Τέλος, η συναρτησιακή εξίσωση μπορεί να ερμηνευτεί και στο πλαίσιο ενός συνεχούς μοντέλου (Kalman, 1997).

7. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Αναλύοντας τα εκθετικά μοντέλα στο κεφάλαιο που προηγήθηκε, προέκυπταν εκθετικές εξισώσεις που έπρεπε να λυθούν, τις οποίες απλοποιούσαμε με τη βοήθεια των λογαριθμικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο αυτό, θα δούμε τη χρήση των λογαρίθμων σε τρεις σημαντικές εφαρμογές: τα λογαριθμικά μοντέλα, τις λογαριθμικές κλίμακες και το μετασχηματισμό δεδομένων. Αρχικά όμως, θα κάνουμε μια ιστορική ανασκόπηση του λογάριθμου.

7.1. ΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΙΣΤΟΡΙΚΑ

Η σημερινή έννοια των λογαρίθμων και η σύνδεσή τους με την εκθετική συνάρτηση προέρχεται από τον Leonard Euler (Λέοναρντ Όιλερ) το 18^{ο}αι.μΧ. Έτσι,

Λογάριθμος ενός αριθμού $\theta > 0$, με βάση $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, είναι
ο *εκθέτης* στον οποίο πρέπει
να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ
και συμβολίζεται με $\log_\alpha \theta$.

Αν α = 2, τότε ο λογάριθμος ονομάζεται δυαδικός και χρησιμοποιείται κυρίως στην πληροφορική, αν α = 10, τότε ονομάζεται κοινός λογάριθμος και βρίσκει χρήση στη μηχανική στους λογαριθμικούς πίνακες και τα επιστημονικά κομπιουτεράκια, αν α = e ονομάζεται φυσικός λογάριθμος με εφαρμογές στη μαθηματική ανάλυση, τη φυσική, τη χημεία, τη στατιστική και την οικονομία.

Οι λογάριθμοι δεν εισήχθησαν όμως με αυτή τη μορφή. Στις αρχές του 17^{ου} αι.μ.Χ. τους εφηύρε ο John Napier (Τζον Νάπιερ) (1550-1617) θέλοντας να βρει έναν τρόπο να γίνονται *γρηγορότερα οι πράξεις*. Βασική ιδέα των λογαρίθμων στηρίζεται στο γεγονός ότι *ανάγουν ένα γινόμενο σε ένα άθροισμα* που με σημερινούς συμβολισμούς δίνεται ως $\log_\alpha(xy) = \log_\alpha(x) + \log_\alpha(y)$. Αν τοποθετήσουμε σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία τους όρους μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, όπως:

αριθμητική πρόοδος:	0,	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18,...
γεωμετρική πρόοδος:	1,	2,	4,	8,	16,	31,	64,	128,	256,	512....

μπορούμε να δούμε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε όρων της γεωμετρικής προόδου π.χ. 4x128 = 512 βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον αριθμό 12 που είναι το άθροισμα των δύο αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου 4 + 14 = 18. Ανάλογα επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαίρεση ανάγεται σε αφαίρεση, η ύψωση σε δύναμη ανάγεται σε απλό πολλαπλασιασμό με τον εκθέτη και η εξαγωγή ρίζας σε απλή διαίρεση με την τάξη της ρίζας. Για παράδειγμα:

$$512 / 128 = 4 \qquad (12 - 8 = 4)$$
$$8^3 = 512 \qquad (6 \text{ x } 3 = 18)$$
$$\sqrt[3]{512} = 8 \qquad (18 / 3 = 6)$$

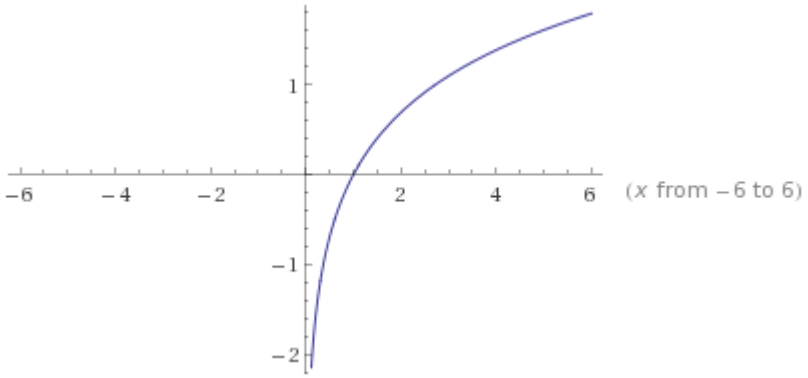
Οι προηγούμενες αναγωγές των βασικών πράξεων σε απλούστερες είναι φανερό σήμερα ότι στηρίζονται στις ιδιότητες των δυνάμεων χωρίς αυτές όμως να έχουν τότε έναν κοινά αποδεκτό συμβολισμό.

Πριν προχωρήσουμε στις εφαρμογές των λογαρίθμων, στις λογαριθμικές κλίμακες και το μετασχηματισμό δεδομένων, πρέπει να τονίσουμε ότι με τη βοήθεια της άλγεβρας μπορούμε να εφαρμόσουμε ιδιότητες λογαρίθμων για να αλλάξουμε τη μορφή μιας εξίσωσης. Αυτοί οι αλγεβρικοί κανόνες για τους λογάριθμους έχουν αναφερθεί αναλυτικά στο βιβλίο της άλγεβρας Β΄ Λυκείου και γι' αυτό δεν θα αναφερθούμε εδώ σχολαστικά.

7.2. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Αρχικά, οι λογάριθμοι δημιουργήθηκαν για συντομία των πράξεων, κυρίως τριγωνομετρικών συναρτήσεων, με τη λογική να αντιστοιχούν έναν πολλαπλασιασμό σε ένα άθροισμα. Αργότερα όμως, δεδομένου ότι κάποια προβλήματα δεν ήταν εύκολο να μοντελοποιηθούν με τις εκθετικές συναρτήσεις, αποδείχτηκε πως εμπλέκονται και σε προβλήματα της φύσης, όπως σεισμοί, ήχοι, οξύτητα υγρών κα. Ειδικά, έντονα μη γραμμικά προβλήματα μοντελοποιούνται μέσω εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων που έχουν και μεγάλο αριθμό λογιστικών ιδιοτήτων (Kalman, 1997).

Όπως στα γραμμικά, πολυωνυμικά και εκθετικά μοντέλα που μελετήθηκαν, αν τα δεδομένα φαίνεται να προσεγγίζουν γραφικά μια ευθεία γραμμή, αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε γραμμικό μοντέλο ή αν θυμίζουν το χαρακτηριστικό σχήμα μιας εκθετικές γραφικές παράστασης, τότε χρησιμοποιούμε εκθετικό μοντέλο, έτσι κι αν η εμφάνιση των δεδομένων θυμίζει το γράφημα της λογαριθμικής συνάρτησης (σχήμα 25) θα χρησιμοποιούμε ένα λογαριθμικό μοντέλο.



Σχήμα 25
Γράφημα Λογαριθμικής Εξίσωσης

Επειδή η προσέγγιση με τα μοντέλα αυτά είναι ίδια με εκείνη των οικογενειών των συναρτήσεων που μελετήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, δεν θα παρουσιαστεί συγκεκριμένο παράδειγμα τέτοιου τύπου (Kalman, 1997).

Μια όμως *ιδιότητα των λογάριθμων* πρέπει να αναφερθεί γιατί, σχετίζεται με τις λογαριθμικές κλίμακες που θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Για να προσεγγίσουμε έναν κοινό λογάριθμο οποιουδήποτε αριθμού θ, απλά μετράμε το πλήθος των ακεραίων ψηφίων του θ. Τότε, *ο λογάριθμος του θ θα είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό του πλήθους των ακεραίων ψηφίων του, αλλά και μικρότερος από τον αμέσως προηγούμενο ακέραιο του αριθμού αυτού.* Για παράδειγμα, ο αριθμός 46.387 έχει 5 ψηφία μπροστά από την υποδιαστολή, άρα $4 < \log 46.387 < 5$. Και αυτό γιατί $\log 46.387 = \log(10^4 \cdot 4{,}6387) = \log 10^4 + \log 4{,}6387 = 4 + \log 4{,}6387$ (Kalman, 1997).

7.3. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ

Η δεύτερη εφαρμογή των λογαρίθμων σχετίζεται με τις λογαριθμικές κλίμακες. Συχνά προκύπτουν προβλήματα της καθημερινής μας ζωής στα οποία είναι αρκετά δύσκολο να κατανοήσουμε τις σχέσεις των δεδομένων τους γιατί, αυτά ανήκουν σε ένα αρκετά μεγάλο εύρος τιμών. Έστω ότι θέλουμε για παράδειγμα να συγκρίνουμε πολλές διαφορετικές *ομάδες πληθυσμών*. Το μέγεθος κάθε ομάδας από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη παρουσιάζονται στον πίνακα 7.1.

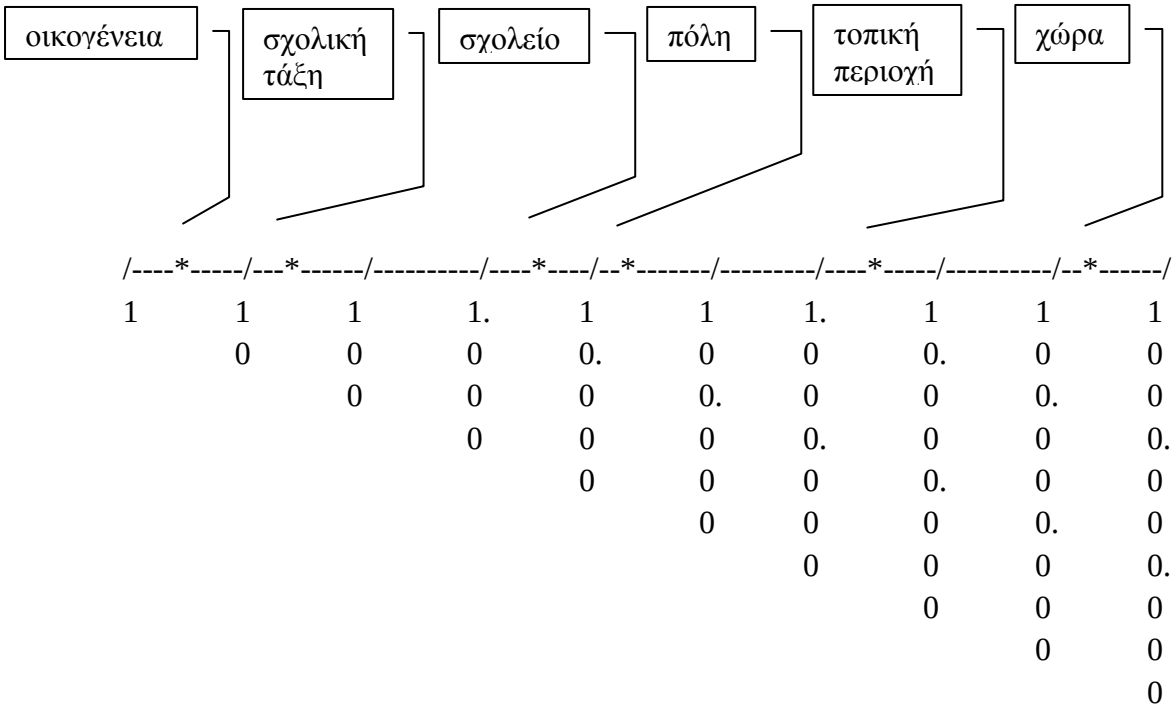
Ομάδα	Οικογένεια	Σχολική τάξη	Σχολείο	Πόλη	Τοπική περιοχή	Χώρα
Μέγεθος ομάδας	5	40	5.000	30.000	6.000.000	350.000.000

Πίνακας 7.1
Τιμές ομάδων πληθυσμών

Οι αριθμητικές τιμές του πίνακα 7.1 καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος. Αυτό μπορούμε να το αντιληφτούμε προσπαθώντας να τοποθετήσουμε όλες τις τιμές των δεδομένων σε μια ευθεία γραμμή χωρισμένη σε ίσα μέρη, όπως ακριβώς ένας χάρακας σε χιλιοστά. Ξεκινάμε την αρίθμηση από το 0 και αν θεωρήσουμε κάθε χιλιοστό του σαν ένα άτομο, τότε τοποθετούμε την οικογένεια στον αριθμό 5, τη σχολική τάξη στον αριθμό 40 κλπ. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο σκέψης, θα πρέπει να τοποθετήσουμε το τελευταίο δεδομένο του πίνακα στον αριθμό 350.000.000! Έτσι, το μήκος της ευθείας πρέπει να είναι ούτε λίγο ούτε πολύ 350.000 μέτρα. Με τον τρόπο αυτό γραφής της ευθείας, τα δεδομένα δεν είναι εύκολο να συγκριθούν ευθέως (Kalman, 1997).

Στην πραγματικότητα για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς από τον πίνακα 7.1, είναι σημαντικότερο να κοιτάμε το πλήθος των ψηφίων τους παρά τους ίδιους τους αριθμούς. Για παράδειγμα, το μέγεθος του σχολείου ανήκει στις χιλιάδες άρα έχει 4 ψηφία, ενώ το μέγεθος της τοπικής περιοχής είναι στα εκατομμύρια με 7 ψηφία. Η διαφορά του πλήθους των ψηφίων τους είναι 3, υποδεικνύοντας ότι ο ένας είναι

περίπου 1.000 το μέγεθος του άλλου. Αυτό οδηγεί στο να φτιάξουμε μια διαφορετική ευθεία αριθμών. Τώρα, θα χωρίσουμε την ευθεία ομοιόμορφα, με κάθε κουκίδα αυτή τη φορά να αντιστοιχεί στις τιμές 1, 10, 100, 1.000, 10.000 κλπ. Τότε, το μέγεθος της οικογένειας που είναι 4 θα βρίσκεται μεταξύ 1 και 10, ενώ το μέγεθος της σχολικής τάξης είναι μεταξύ 10 και 100 κλπ. Λόγω του ότι οι διαφορετικές δυνάμεις του 10 απέχουν ομοιόμορφα σε αυτό το γράφημα, η θέση του κάθε σημείου δεδομένων δείχνει κυρίως πόσα ψηφία έχει αυτό. Το γράφημα αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 26 (Kalman, 1997).

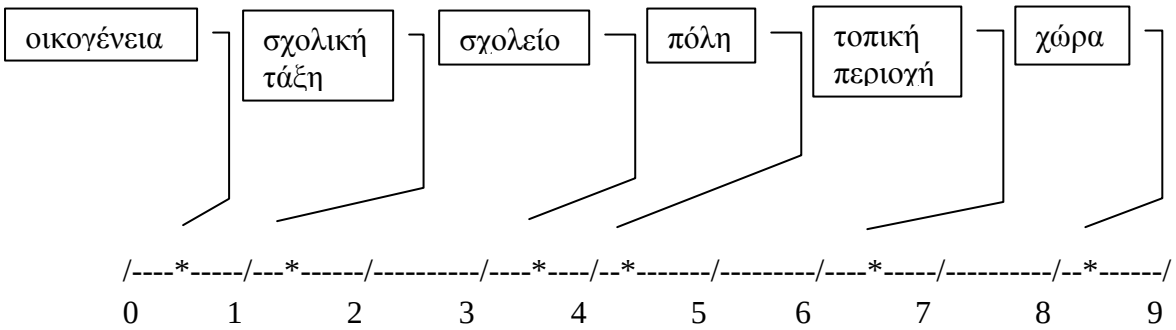


Σχήμα 26
Εναλλακτική ευθεία πληθυσμού

Η ευθεία των αριθμών στο σχήμα 26 ονομάζεται *λογαριθμική κλίμακα* γιατί ισοδυναμεί στο να σχεδιάσουμε σε γράφημα τους λογάριθμους των τιμών του πληθυσμού σε μια κανονική γραμμή αριθμών. Όπως είδαμε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας ο log ενός αριθμού είναι στενά συνδεδεμένος με το πλήθος των ψηφίων του. Οι λογάριθμοι των δεδομένων των πληθυσμών παρουσιάζονται στον πίνακα 7.2 Κάνοντας το γράφημα αυτών των λογάριθμων σε μια κανονική γραμμή λογάριθμων παίρνουμε το σχήμα 27, που είναι ουσιαστικά το ίδιο με το σχήμα 26 εκτός από τους αριθμούς κάτω από την αριθμογραμμή. Τώρα, αντί για τους αριθμούς 1, 10, 100, 1.000, 10.000 κλπ., θα έχουμε τους λογάριθμους αυτών που είναι οι ακέραιοι 0, 1, 2, 3, 4 κλπ. Αυτό το νέο είδος αριθμογραμμής, με διαφορετικές δυνάμεις του 10 που απέχουν ομοιόμορφα, ονομάζεται *λογαριθμική κλίμακα* (Kalman, 1997) .

Ομάδα	Οικογένεια	Σχολική τάξη	Σχολείο	Πόλη	Τοπική περιοχή	Χώρα
Λογάριθμος μεγέθους	0,70	1,60	3,70	4,48	6,78	8,50

Πίνακας 7.2
Λογάριθμοι τιμών ομάδων πληθυσμών



Σχήμα 27
Εναλλακτική ευθεία πληθυσμού

Η κλίμακα Ρίχτερ για την ένταση του σεισμού, η κλίμακα Ντεσιμπέλ για την ένταση του ήχου και η ph κλίμακα για τη μέτρηση της δύναμης της οξύτητας είναι μερικά παραδείγματα λογαριθμικών κλιμάκων. Για παράδειγμα όταν ακούτε ότι ένας σεισμός έχει ένταση 6 Ρίχτερ, σημαίνει ότι ο λογάριθμος ενεργειακής μέτρησης όταν σε κανονική αριθμογραμμή θα είναι 6.

Η λογαριθμική κλίμακα χρησιμοποιείται με δύο τρόπους. Πρώτα, μια λογαριθμική κλίμακα είναι μια αριθμογραμμή στην οποία υπάρχουν ισαπέχουσες κουκίδες με δυνάμεις του 10 (σχήμα 26). Αλλά λογαριθμική κλίμακα μπορεί να είναι επίσης και μια κανονική αριθμογραμμή που χρησιμοποιείται για να σχεδιάσει τιμές που απορρέουν από λογαριθμικά δεδομένα (σχήμα 27) (Kalman, 1997).

Συγκρίνοντας αριθμούς σε μια λογαριθμική κλίμακα, είναι σημαντικό να σκεφτόμαστε ότι αύξηση κατά 1 μονάδα αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με το 10. Δηλαδή, στον πίνακα 7.2, η τιμή για την Πόλη είναι 4.48 και η τιμή για την Τοπική περιοχή είναι 6,78, μια διαφορά περίπου 2. Αλλά αυτοί είναι λογάριθμοι, και κάθε ένας αντιστοιχεί ακριβώς στον αριθμό των ψηφίων σε μια από τις τιμές των πραγματικών δεδομένων. Επομένως, η διαφορά 2 δείχνει ότι η Τοπική Περιοχή έχει περίπου 100 φορές περισσότερους ανθρώπους από της Πόλης. Όμοια, μια διαφορά του 3 σε μια λογαριθμική κλίμακα αντιστοιχεί σε ένα παράγοντα του 1000 στα πραγματικά δεδομένα κτλ.

Αυτή η ενότητα ασχολήθηκε με το να εξηγήσει τι είναι λογαριθμικές κλίμακες και γιατί χρησιμοποιούνται. Παρουσιάστηκε ένα σχετικό παράδειγμα λογαριθμικής κλίμακας για πληθυσμούς. Τώρα θα μελετήσουμε λεπτομερώς τη λογαριθμική κλίμακα Richter (Kalman, 1997).

7.4. ΚΛΙΜΑΚΑ RICHTER

Η κλίμακα Richter χρησιμοποιείται για να μετρήσει την ένταση των σεισμών. Η ενέργεια που απελευθερώνεται από ένα σεισμό που είναι μόλις αισθητός, ισοδυναμεί περίπου με αυτήν των 10.000 ατομικών βομβών (Sheldon Gordon , et. al. Functioning in the Real World, Class Test Edition, Addison Wesley, 1995, σε: Kalman, 1997). Ονομάζουμε αυτό το αρχικό επίπεδο ενέργειας I_0. Η τιμή R της κλίμακας Richter για ένα σεισμό έντασης I δίνεται από τον τύπο:

$$R = \log (I / I_0) \qquad \textbf{(7.1)}$$

Για παράδειγμα, αν ένας σεισμός είναι 4 φορές πιο δυνατός από αυτόν που μόλις γίνεται αισθητός, τότε, η ενέργειά του I είναι $I = 4I_0$ και η τιμή του R της κλίμακας Richter είναι, από την σχέση (7.1), $R = \log (I / I_0) = \log (4I_0/I_0) = \log 4 = 0{,}60$. Έστω, ένας σεισμός μετράται στην κλίμακα Richter με την τιμή R = 5. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε πόσες φορές ισχυρότερος είναι ο σεισμός των 5 Richter από εκείνον που είναι μόλις αισθητός. Όπως και στο παράδειγμα του πληθυσμού, είναι απαραίτητο να θυμηθούμε τι σημαίνει μια τέτοια σύγκριση. Αν ένας σεισμός είναι 3 Richter και ένας άλλος 5 Richter, τότε η διαφορά 2 μονάδων σημαίνει ότι ο δεύτερος είναι $10^2 = 100$ φορές ισχυρότερος από τον πρώτο (Kalman, 1997). Άρα για το σεισμό των 5 Richter γνωρίζουμε ότι:

$$R = 5 \Rightarrow \log (I / I_0) = 5 \Rightarrow I / I_0 = 10^5 \Rightarrow I / I_0 = 100.000 \Rightarrow I = 100.000I_0$$

δηλαδή, ο σεισμός των 5 Richter είναι 100.000 φορές ισχυρότερος από εκείνον που είναι μόλις αισθητός.

Ακόμα, θέλουμε να μάθουμε πόσες ατομικές βόμβες εκλύουν το ίδιο ποσό ενέργειας με το σεισμό των 5 Richter. Αφού η ενέργεια που απελευθερώνεται από ένα σεισμό που είναι μόλις αισθητός, ισοδυναμεί περίπου με αυτήν των 10.000 ατομικών βομβών, τότε, τα 5 Richter αντιστοιχούν σε ενέργεια περίπου:

100.000x10.000 = 1.000.000.000 ατομικές βόμβες

Τελικά, αν ένας σεισμός έχει ένταση 7 Richter πόσες φορές ισχυρότερος είναι από αυτόν των 3 Richter; Ο σεισμός των 7 Richter είναι 4 μονάδες υψηλότερα στην κλίμακα Richter από αυτόν των 3 Richter, άρα θα είναι $10^4 = 10.000$ ισχυρότερος από των 3 Richter (Kalman, 1997).

Αυτό ολοκληρώνει τη συζήτηση για τις λογαριθμικές κλίμακες. Οι κεντρικές ιδέες αυτής της συζήτησης είναι ότι οι λογαριθμικές κλίμακες χρησιμοποιούνται όταν τα πραγματικά δεδομένα καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος τιμών. Οι λογαριθμικές κλίμακες ορίζονται ώστε να χρησιμοποιήσουν λογαρίθμους των δεδομένων και όχι τα ίδια τα δεδομένα. Σε λογαριθμικές κλίμακες, συγκεκριμένες διαφορές ανταποκρίνονται σε συγκεκριμένους παράγοντες που πολλαπλασιάζουν τα αρχικά

δεδομένα. Η χρήση, τέλος, των λογαριθμικών κλιμάκων είναι συχνή όπως των Richter, των Decibel και του Ph.

Όταν *χρησιμοποιούμε τις λογαριθμικές κλίμακες*, μας ενδιαφέρουν οι λογάριθμοι των τιμών των δεδομένων γιατί κάνουν πιο βολική τη *σύγκριση ευρέως διαφορετικών τιμών*. Μερικές φορές όμως το να επιλέξουμε λογάριθμους των τιμών των δεδομένων είναι χρήσιμο και για έναν τελείως διαφορετικό λόγο, σχετικά με την *ανακάλυψη γραμμικών σχέσεων*. Αυτό θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο (Kalman, 1997).

7.5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τέλος, μέσω της εφαρμογής του μετασχηματισμού δεδομένων, σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε μια γραμμική μορφή των δεδομένων που στην πραγματικότητα δεν είναι γραμμική. Αν τα μετασχηματισμένα δεδομένα, σχηματίζουν μια ευθεία γραμμή ή σχεδόν μια ευθεία γραμμή, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση αυτής της ευθείας για να βρούμε μια εξίσωση που σχετίζεται με τις αρχικές μεταβλητές. Αυτή η τεχνική του μετασχηματισμού δεδομένων συναντάται συχνά στα μοντέλα των επιστημών.

Έτσι, αν το γράφημα των σημείων που αποτελείται από δύο μεταβλητές των οποίων θέλουμε να βρούμε μια σχέση, φαίνεται ξεκάθαρα πως δεν σχηματίζει ευθεία γραμμή, τότε, μετασχηματίζουμε τα σημεία των δεδομένων αυτών βρίσκοντας το λογάριθμο και των δύο συντεταγμένων των σημείων των αρχικών δεδομένων. Τα μετασχηματισμένα σημεία χρησιμοποιούνται για να βρούμε μια ευθεία γραμμή μέσω της οποίας βρίσκουμε την εξίσωση των αρχικών μεταβλητών άρα και τη σχέση τους. Τοποθετώντας σε μια ευθεία γραμμή τα δεδομένα με αυτόν τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, είναι ακριβώς το ίδιο με το να αποφασίσουμε ποια από τα είδη μοντέλων θα χρησιμοποιήσουμε. Τις εκθετικές ή τις δυνάμεις συναρτήσεων. Γι' αυτές τις δύο συναρτήσεις βασιζόμαστε στα εξής:

Α. Αν η μια μεταβλητή προκύπτει ως εκθετική συνάρτηση της άλλης, τότε ο λογάριθμος της πρώτης μεταβλητής είναι μια γραμμική εξίσωση της δεύτερης.

Β. Αν η μια μεταβλητή προκύπτει ως ύψωση της άλλης μεταβλητής σε μια σταθερά, τότε ο λογάριθμος της πρώτης μεταβλητής είναι γραμμικός συνδυασμός του λογαρίθμου της άλλης (Kalman, 1997).

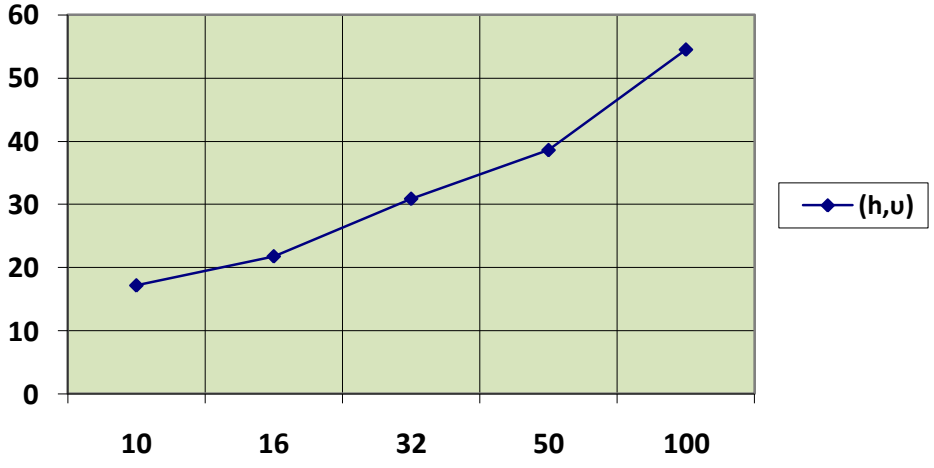
Παράδειγμα για την πρώτη περίπτωση, μπορούμε να αναφέρουμε την εξίσωση $y = e^x \Rightarrow \ln y = \ln e^x \Rightarrow \ln y = x\ln e \Rightarrow \ln y = x$. Πράγματι, σε αυτήν ο λογάριθμος της πρώτης μεταβλητής y είναι μια γραμμική εξίσωση του x, που είναι η δεύτερη μεταβλητή. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε την εξίσωση $y = x^2 \Rightarrow \ln y = \ln x^2 \Rightarrow \ln y = 2\ln x$. Σε αυτήν της περίπτωση αληθεύει ότι, ο λογάριθμος της πρώτης μεταβλητής y είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του λογαρίθμου της άλλης.

Γενικά, κοιτάζοντας κάποιος τα αρχικά δεδομένα ενός προβλήματος, δεν μπορεί να πει με σιγουριά αν ακολουθούν εκθετική ή καμπύλη των συναρτήσεων δυνάμεις. Ωστόσο μπορούμε φτιάχνοντας το γράφημα των σημείων των δεδομένων αυτών να δούμε αν αυτά ανήκουν σε μια ευθεία γραμμή. Υπάρχουν κάποια βήματα που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, που με τη βοήθεια των λογαρίθμων,

οδηγούμαστε στη ζητούμενη σχέση των αρχικών μεταβλητών του προβλήματος. Θα παρουσιάσουμε τα βήματα μέσω ενός παραδείγματος που ζητά να βρεθεί μαι σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών του ύψους h από την επιφάνεια του νερού και της ταχύτητας πρόσκρουσης υ στο νερό από το συγκεκριμένο ύψος. Στον πίνακα 7.3 παρουσιάζονται διάφορες τιμές δεδομένων αυτών των μεταβλητών που απεικονίζονται και στο σχήμα 28 (Kalman, 1997).

Ύψος h (πόδια)	10	16	32	50	100
Ταχύτητα πρόσκρουσης υ (μίλα ανά ώρα)	17,2	21,8	30,9	38,6	54,5

Πίνακας 7.3
Τιμές αρχικών δεδομένων ύψους και ταχύτητας πρόσκρουσης



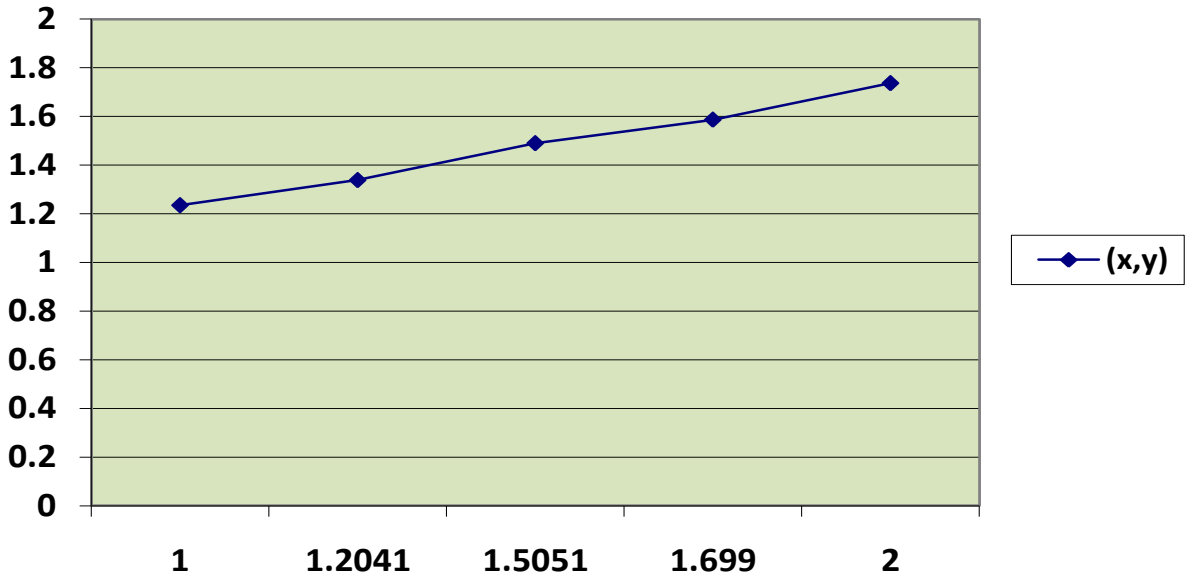
Σχήμα 28
Γράφημα αρχικών δεδομένων

Βήμα 1: Βρίσκουμε το λογάριθμο κάθε συντεταγμένης h, υ κάθε σημείου δεδομένων. Αν τα καινούρια σημεία δεδομένων ανήκουν σε μια ευθεία γραμμή, τότε τα αρχικά δεδομένα συνδέονται μεταξύ τους με μια σχέση που υπεισέρχονται δυνάμεις. Έτσι, δημιουργούνται οι μεταβλητές x = logh και y = logυ με τις τιμές των μετασχηματισμένων δεδομένων τους να παρουσιάζονται στον πίνακα 7.4 (Kalman, 1997).

Λογάριθμος του ύψους x	1	1,2041	1,5051	1,6990	2
Λογάριθμος της ταχύτητας πρόσκρουσης y	1,2355	1,3385	1,4900	1,5866	1,7364

Πίνακας 7.4
Τιμές μετασχηματισμένων δεδομένων ύψους και ταχύτητας πρόσκρουσης

Βήμα 2: Από τα δεδομένα του μετασχηματισμένου πίνακα x, y φτιάχνουμε ένα γράφημα. Πάνω σε αυτό το γράφημα σχεδιάζουμε μια ευθεία γραμμή όσο γίνεται πιο κοντά στα σημεία των δεδομένων. Παρατηρούμε ότι τα σημεία αυτά φαίνεται πραγματικά να ανήκουν όλα σε μια ευθεία γραμμή. Αυτό είναι εμφανές και στο σχήμα 29 (Kalman, 1997).



Σχήμα 29
Γράφημα μετασχηματισμένων δεδομένων

Βήμα 3: Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας γραμμής. Ένας τρόπος γι' αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε δύο σημεία της ευθείας αυτής και με τη βοήθεια του συντελεστή διεύθυνσης να βρούμε την εξίσωσή της. Έτσι, για το παράδειγμά μας, μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση ευθείας:

$$y = 0,5x + 0,73$$

Βήμα 4: Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας που βρήκαμε τις μεταβλητές x και y με logh και logu αντίστοιχα και με τη βοήθεια της άλγεβρας και των κανόνων των λογαρίθμων οδηγούμαστε σε μια εξίσωση που συνδέει τις αρχικές μεταβλητές μας h,υ. Έτσι, έχουμε:

$$y = 0{,}5x + 0{,}735 \Rightarrow$$

$$y - 0{,}5x = 0{,}735 \Rightarrow$$

$$\log\upsilon - 0{,}5 \log h = 0{,}735 \Rightarrow$$

$$2\log\upsilon - 2\log h^{0{,}5} = 2 \cdot 0{,}735 \Rightarrow$$

$$2\log\upsilon - 2\log h^{0{,}5} = 1{,}47 \Rightarrow$$

$$\log\upsilon^2 - \log h = 1{,}47 \Rightarrow$$

$$\log(\upsilon^2 / h) = 1{,}47 \Rightarrow$$

$$10^{\log(\upsilon^2 / h)} = 10^{1{,}47} \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 / h = 10^{1{,}47} \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 / h = 29{,}5 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = 29{,}5h \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{29{,}5h} \qquad \textbf{(7.2)}$$ (Kalman, 1997)

Μας ενδιαφέρει να απαντήσουμε στο ερώτημα του εάν είναι διπλάσιος ο κίνδυνος αν πέσουμε από διπλάσιο ύψος. Δηλαδή, αν πηδήξουμε από 80 πόδια ύψος θα έχουμε διπλή ταχύτητα πρόσκρουσης από αυτή που θα είχαμε αν πέφταμε από 40 πόδια ύψος; Η ερώτηση αυτή έχει σχέση με τη γραμμικότητα του μοντέλου μας. Η σχέση όμως (7.2) μεταξύ h και υ δεν είναι γραμμική, έτσι, η αναλογική αιτιολόγηση δεν εφαρμόζεται σε αυτή την περίπτωση. Άρα διπλασιάζοντας το ύψος δεν σημαίνει ότι διπλασιάζεται και η ταχύτητα πρόσκρουσης. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για h = 20, βρίσκουμε υ = $\sqrt{29{,}5h} = \sqrt{29{,}5 \cdot 20} = 24{,}3$ μίλια την ώρα. Για h = 80, υ = $\sqrt{29{,}5h} = \sqrt{29{,}5 \cdot 80} = 48.6$ μίλια την ώρα, αυτό όμως δεν είναι τετραπλάσιο, όπως το ύψος, αλλά μόνο διπλάσιο. Γενικά, διπλασιάζοντας το ύψος τελικά πολλαπλασιάζουμε την ταχύτητα πρόσκρουσης με $\sqrt{2}$ που είναι λιγότερο από 1,5. Έτσι, αν πηδήξουμε από διπλάσιο ύψος θα έχουμε ταχύτητα πρόσκρουσης περίπου μιάμιση φορά γρηγορότερη. Εξάλλου αυτό φαίνεται και από τον πίνακα δεδομένων (Kalman, 1997).

8. ΜΕΙΚΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Τα *μεικτά μοντέλα ανήκουν σε μια κατηγορία πολύπλοκων μοντέλων* και θα είναι το θέμα που θα αναπτύξουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Η προηγούμενη θεωρεία που βασίστηκε σε πιο απλά μοντέλα, τα γραμμικά και τα γεωμετρικά, δεν αρκεί για τη μελέτη τους. Τα μεικτά μοντέλα αποτελούν ένα *συνδυασμό γραμμικών και γεωμετρικών μοντέλων*, όπως προδίδει άλλωστε και το όνομά τους, παρόλο που η ορολογία τους δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία. Αρχικά, θα στηριχθούμε στη διαδικασία που είναι ενδεικτική του τρόπου που αναπτύσσονται τα μοντέλα γενικά, κατά την οποία, ένα πρόβλημα θα απλοποιηθεί για να δώσει ένα περίπλοκο μοντέλο.

Το πρόβλημα κατανάλωσης και αποθεμάτων πετρελαίου που μελετήσαμε στα κεφάλαια 2, 3 και 4, θα μας απασχολήσει ξανά για να αναπτύξουμε και τη θεωρεία των μεικτών μοντέλων, να δούμε τα προβλήματα που προκύπτουν στη μελέτη τους καθώς και να χρησιμοποιήσουμε τα *γεωμετρικά αθροίσματα* για να τα αντιμετωπίσουμε. Με τη χρήση της θεωρίας των αθροισμάτων στα μεικτά μοντέλα εξάλλου, βρισκόμαστε ένα βήμα πριν την χρήση ολοκληρωμάτων και παραγώγων (Kalman, 1997).

8.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Στα παραδείγματα μεικτών μοντέλων, *όσο διαφορετικής φύσεως και αν είναι, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα του υπολογισμού ενός γεωμετρικού αθροίσματος.* Ένα μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης πάντα παράγει ένα παρόμοιο μοτίβο δεδομένων. Χρησιμοποιώντας το κοινό αυτό μοτίβο που παρουσιάζεται στο γεωμετρικό άθροισμα, μπορούμε να αναπτύξουμε στη συνέχεια μια συναρτησιακή εξίσωση του μοντέλου και έτσι να το μελετήσουμε εκτενέστερα.

Γενικά, αν συμβολίσουμε α_0 την αρχική τιμή της μεταβλητής ενός γεωμετρικού μοντέλου και r τον παράγοντα ανάπτυξής του, τότε ο γενικός τύπος της εξίσωσης διαφορών θα είναι:

$$\alpha_{n+1} = r \cdot \alpha_n \qquad \textbf{(8.1)}$$

και δημιουργεί τις *διαδοχικές τιμές*:

$$\alpha_0,\ (r)\alpha_0,\ (r^2)\alpha_0,\ (r^3)\alpha_0,\ (r^4)\alpha_0,\ (r^5)\alpha_0,\ ....$$

οι οποίες ονομάζονται και *διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου* (Kalman, 1997).

Γεωμετρικό άθροισμα, ονομάζονται το άθροισμα
των n πρώτων όρων
μιας γεωμετρικής προόδου.

Σε κάθε περίπτωση γεωμετρικής ανάπτυξης εμφανίζεται το ίδιο μοτίβο:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad \textbf{(8.2)}$$

που ισοδύναμα παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \qquad \textbf{(8.3)}$$

Το πρώτο μοτίβο είναι πιο βολικό αν r < 1, ενώ το δεύτερο αν r > 1, παρόλο που και τα δύο δίνουν την ίδια απάντηση. Για παράδειγμα, για n = 4 και r = 5, το μοτίβο λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα ως:

$$(8.2) \quad \Rightarrow 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = \frac{1-5^{4+1}}{1-5} = \frac{1-5^5}{-4} = \frac{-3.124}{-4} = 781$$

$$\text{ή} \quad (8.3) \quad \Rightarrow 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = \frac{5^{4+1}-1}{5-1} = \frac{5^5-1}{4} = \frac{3.124}{4} = 781$$

Και τα δύο καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, αλλά το δεύτερο αποφεύγει τους αρνητικούς αριθμούς στον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος.

Θα συνεχίσουμε με το πρόβλημα της κατανάλωσης και της ζήτησης πετρελαίου, που θα μας οδηγήσει σε κάποιο γεωμετρικό άθροισμα. Τώρα όμως που έχουμε έναν τύπο για τον υπολογισμό του, θα έχουμε τη δυνατότητα να αποκτήσουμε και τη συναρτησιακή εξίσωση για το παράδειγμα. Αυτή με τη σειρά της θα μας δώσει τα μέσα να απαντήσουμε σε ερωτήσεις που προκύπτουν (Kalman, 1997).

8.2. ΜΕΙΚΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ

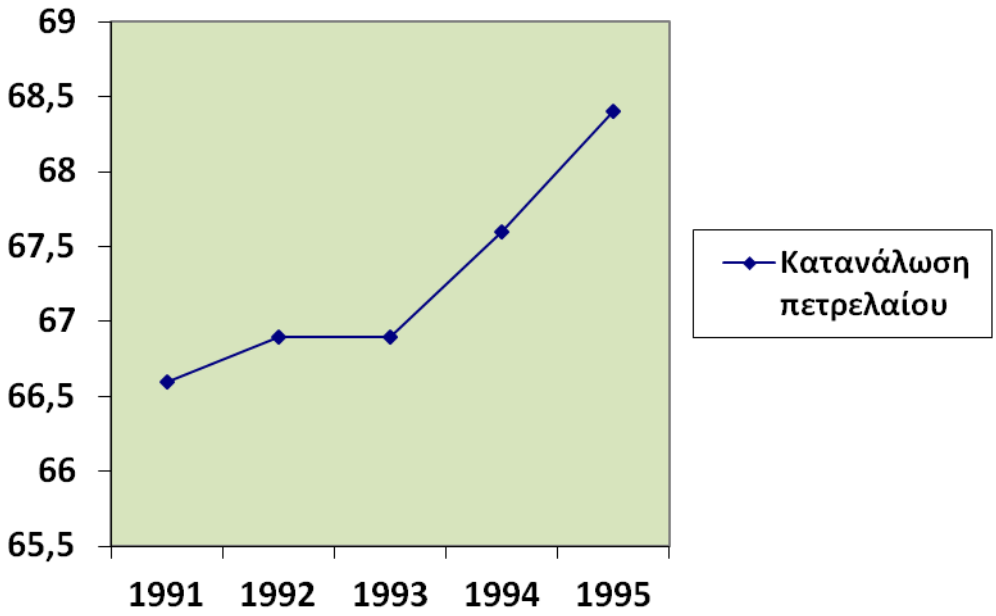
Σε αυτό το παράδειγμα θα αναλύσουμε ξανά το θέμα για τα αποθέματα πετρελαίου χρησιμοποιώντας ένα μεικτό μοντέλο για την ετήσια κατανάλωσή του. Τα αποτελέσματα θα συγκριθούν με εκείνα που πήραμε από την υπόθεση ενός απλού γραμμικού μοντέλου ανάπτυξης.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του πίνακα 2.1 για τη μελέτη του προβλήματος του πετρελαίου τα οποία θα επαναλάβουμε για μεγαλύτερη ευκολία.

Έτος	1991	1992	1993	1994	1995
Χρήση Πετρελαίου	66,6	66,9	66,9	67,6	68,4

Πίνακας 8.1
Παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα.

Παριστάνοντας τα πραγματικά δεδομένα γραφικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 30, δεν σχηματίζουν μια ευθεία γραμμή. Έτσι, ένα γραμμικό μοντέλο δεν θα ήταν πολύ ακριβές για την κατανάλωση πετρελαίου (Kalman, 1997).



Σχήμα 30
Γράφημα για την παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια την ημέρα.

Ίσως ένα γεωμετρικό μοντέλο να περιέγραφε καλύτερα το πρόβλημα. Η σκέψη αυτή ενισχύεται περισσότερο αν σκεφτούμε πως η κατανάλωση πετρελαίου θα επηρεάζεται πολύ και από την ανάπτυξη πληθυσμού, που όπως ξέρουμε, περιγράφεται ακριβέστερα από τη γεωμετρική παρά από την αριθμητική ανάπτυξη.

Δυστυχώς όμως, δεν είναι δυνατόν να βρούμε ένα μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης που να ταιριάζει με τα δεδομένα πάρα πολύ καλά. Αυτό δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει γιατί είναι λογικό να περιμένουμε η ανάπτυξη πληθυσμού να είναι ένας από τους πολλούς παράγοντες που συμβάλλουν στην κατανάλωση πετρελαίου, μαζί με την οικονομική ανάπτυξη και τις πιέσεις της αγοράς (Kalman, 1997).

Δεδομένων των παραπάνω σκέψεων, ένα *μεικτό μοντέλο* ίσως είναι μια ακόμα καλύτερη περίπτωση προσέγγισης της κατανάλωσης πετρελαίου. Γενικά,

Μεικτό μοντέλο, είναι ένας συνδυασμός αριθμητικού και γεωμετρικού μοντέλου, με εξίσωση διαφορών:

$\alpha_{n+1} = r\alpha_n + d$, με r και d παράμετροι **(8.4)**

Κάθε *μεικτό μοντέλο*, με *αρχική τιμή* α_0
και *εξίσωση διαφορών*
$\alpha_{n+1} = r\alpha_n + d$
έχει *συναρτησιακή εξίσωση*

$$\alpha_n = \alpha_0 r^n + d\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = \alpha_0 r^n + d\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) \qquad \textbf{(8.5)}$$

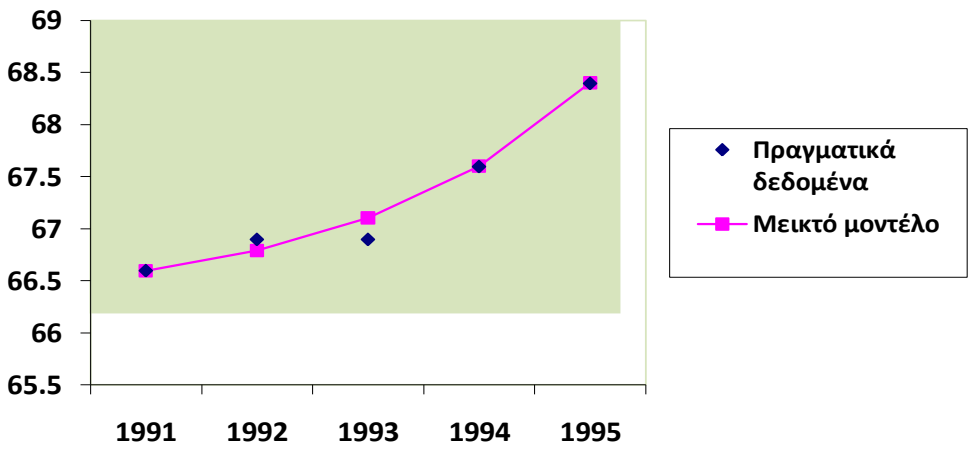
Ξεκινώντας με τον τύπο της εξίσωσης διαφορών των μεικτών μοντέλων (8.4), με τη μέθοδο της δοκιμής και λάθους μπορούμε να προσπαθήσουμε να βρούμε επιλογές για τις παραμέτρους r και d, που παράγουν ένα μοντέλο αρκετά κοντά στα δεδομένα. Έτσι, αν κ_n είναι ο μέσος όρος καθημερινής κατανάλωσης πετρελαίου σε n χρόνια μετά το 1991, οδηγούμαστε στο εξής μοντέλο:

$\kappa_{n+1} = 1{,}6\ \kappa_n - 39{,}765$, με $\kappa_0 = 66{,}6$ (Kalman, 1997).

Ας βρούμε κάποιες αρχικές τιμές του μοντέλου:

$\kappa_0 = 66{,}6$
$\kappa_1 = 1{,}6\ \kappa_0 - 39{,}765 = 1{,}6 \cdot 66{,}6 - 39{,}765 = 66{,}795$
$\kappa_2 = 1{,}6\ \kappa_1 - 39{,}765 = 1{,}6 \cdot 66{,}795 - 39{,}765 = 67{,}107$
$\kappa_3 = 1{,}6\ \kappa_2 - 39{,}765 = 1{,}6 \cdot 67{,}107 - 39{,}765 = 67{,}6062$
$\kappa_4 = 1{,}6\ \kappa_3 - 39{,}765 = 1{,}6 \cdot 67{,}6062 - 39{,}765 = 68{,}40492$

και ας τις παραστήσουμε γραφικά μαζί με τα πραγματικά δεδομένα στο σχήμα 31.



Σχήμα 31
Σύγκριση πραγματικών δεδομένων και μεικτού μοντέλου

Όπως φαίνεται από το γράφημα, το μεικτό μοντέλο προσεγγίζει αρκετά καλά τα δεδομένα.

Η *συναρτησιακή εξίσωση* του μοντέλου αυτού δίνεται από τον τύπο (8.5), ως:

$\kappa_n = \kappa_0 r^n + d\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$, με r = 1,6 και d = -39,765, με c_0 = 66,6.

$$\Rightarrow \kappa_n = 66{,}6 \cdot 1{,}6^n + 39{,}765\left(\frac{1{,}6^n - 1}{1{,}6 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \kappa_n = 66{,}6 \cdot 1{,}6^n + 39{,}765\left(\frac{1{,}6^n - 1}{0{,}6}\right)$$

$$\Rightarrow \kappa_n = 66{,}6 \cdot 1{,}6^n + 39{,}765\frac{1}{0{,}6}(1{,}6^n - 1)$$

$$\Rightarrow \kappa_n = 66{,}6 \cdot 1{,}6^n + 39{,}765 \cdot 1{,}6667(1{,}6^n - 1)$$

$$\Rightarrow \kappa_n = 66{,}6 \cdot 1{,}6^n + 39{,}765(1{,}6667 \cdot 1{,}6^n - 1{,}6667)$$

$$\Rightarrow \kappa_n = 66{,}6 \cdot 1{,}6^n + 39{,}765(1{,}6667 \cdot 1{,}6^n - 1{,}6667)$$

$$\Rightarrow \kappa_n = (66{,}6 - 66{,}275) \cdot 1{,}6^n + 66{,}275$$

$$\Rightarrow \kappa_n = 0{,}325 \cdot 1{,}6^n + 66{,}275 \qquad \textbf{(8.6)}$$

Θέλουμε τώρα να φτιάξουμε ένα *μοντέλο για τα αποθέματα πετρελαίου.* Στο κεφάλαιο γραμμικών μοντέλων φτιάξαμε ένα μοντέλο για τα αποθέματα πετρελαίου βασισμένοι στο γραμμικό μοντέλο κατανάλωσης. Θα δουλέψουμε και με το μεικτό μοντέλο όπως και με το γραμμικό (Kalman, 1997).

Τα αποθέματα τον επόμενο χρόνο θα είναι αυτά που έμειναν τον προηγούμενο χρόνο αφού τους αφαιρέσουμε την κατανάλωση αυτού του έτους. Η εξίσωση διαφορών για τα αποθέματα α_n, είναι:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - 365\,\kappa_n \qquad \textbf{(8.7)}$$

όπου ο παράγοντας 365 αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι το κ_n μας λέει πόσο πετρέλαιο χρησιμοποιείται κάθε χρόνο.

Εναλλακτικά, αλλά ισοδύναμα με τον τύπο (8.6), τα αποθέματα n χρόνια μετά, μπορούν να βρεθούν προσθέτοντας την κατανάλωση για όλα τα χρόνια και μετά να αφαιρέσουμε το σύνολό τους από τα αρχικά αποθέματα. Η εξίσωση διαφορών τότε για τα αποθέματα α_n, είναι:

$$\alpha_n = \alpha_0 - 365(\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_{n-1}) \qquad \textbf{(8.8)}$$

Μέχρι τώρα, έχουμε τη συναρτησιακή εξίσωση (8.6) για την κατανάλωση κ_n από το μεικτό μοντέλο. Αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε κάθε ένα από

τα κ_0, κ_1, κ_2,...,κ_{n-1} της (8.8) και να φτιάξουμε τη συναρτησιακή εξίσωση των αποθεμάτων α_n, ως εξής:

$\kappa_0 = 0{,}325 \cdot 1{,}6^0 + 66{,}275$
$\kappa_1 = 0{,}325 \cdot 1{,}6^1 + 66{,}275$
$\kappa_2 = 0{,}325 \cdot 1{,}6^2 + 66{,}275$
…
$\kappa_{n-1} = 0{,}325 \cdot 1{,}6^{n-1} + 66{,}275$

προσθέτοντας όλα αυτά μαζί στη σχέση (8.8) και κάνοντας πράξεις, βρίσκουμε:

$$\alpha_n = \alpha_0 - 365(\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_{n-1})$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \alpha_0 - 365[0{,}325(1 + 1{,}6 + 1{,}6^2 + ... + 1{,}6^{n-1}) + 66{,}275n]$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \alpha_0 - 365[0{,}325\left(\frac{1{,}6^n - 1}{1{,}6 - 1}\right) + 66{,}275n]$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \alpha_0 - 365[0{,}325\left(\frac{1{,}6^n - 1}{0{,}6}\right) + 66{,}275n]$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \alpha_0 - [197{,}708(1{,}6)^n + 24.190{,}375n - 197{,}708] \qquad \textbf{(8.9)}$$

Αυτή είναι η συναρτησιακή εξίσωση για τα αποθέματα πετρελαίου n χρόνια μετά το 1991. Αυτή η διαδικασία δείχνει ξανά τον τρόπο που το ένα μοντέλο χτίζεται πάνω στο άλλο. Σταδιακά, χρησιμοποιώντας μόνο μερικές μαθηματικές ιδιότητες, ξεκινώντας με αριθμητικά μοντέλα, συνεχίσαμε με μοντέλα τετραγωνικής ανάπτυξης, μετά γεωμετρικής ανάπτυξης, αθροίσματα γεωμετρικής ανάπτυξης, μεικτά μοντέλα και τελικά άθροισμα μεικτού μοντέλου (Kalman, 1997).

Στο γραμμικό μοντέλο μας ενδιέφερε πότε θα τελειώσει το πετρέλαιο. Δηλαδή, για ποιο n θα είχαμε $\alpha_n = 0$. Ποιο θα είναι το n για $\alpha_n = 0$, τώρα που το μοντέλο είναι μεικτό; Από την σχέση (8.9), έχουμε:

$$999.100 - [197{,}708(1{,}6)^n + 24.190{,}375n - 197{,}708] = 0$$

Μπορούμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση με αριθμητική προσέγγιση.

Έστω, ότι το πετρέλαιο θα τελειώσει σε n = 30 χρόνια.
(8.9) $\Rightarrow \alpha_{30} = -262.525.422{,}1326 < 0$, άρα δεν θα διαρκέσει τόσο πολύ.

Έστω, ότι το πετρέλαιο θα τελειώσει σε n = 20 χρόνια.
(8.9) $\Rightarrow \alpha_{20} = -1.874.652{,}851444 < 0$, άρα δεν θα διαρκέσει τόσο πολύ.
Έστω, ότι το πετρέλαιο θα τελειώσει σε n = 19 χρόνια.
(8.9) $\Rightarrow \alpha_{19} = -954.158{,}8291523 < 0$, άρα δεν θα διαρκέσει τόσο πολύ.

Έστω, ότι το πετρέλαιο θα τελειώσει σε n = 18 χρόνια.
(8.9) $\Rightarrow$ α_{18} = - 369.778,6745952 < 0, άρα δεν θα διαρκέσει τόσο πολύ.

Έστω, ότι το πετρέλαιο θα τελειώσει σε n = 17 χρόνια.
(8.9) $\Rightarrow$ α_{17} = + 4530,3126280045 > 0 (Kalman, 1997).

Άρα το πετρέλαιο τελειώνει ανάμεσα στο n = 17 και n = 18 . Έτσι, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, το πετρέλαιο τελειώνει ανάμεσα στο 2008 και 2009.

Η ίδια ερώτηση όταν τέθηκε στο γραμμικό μοντέλο, έπρεπε να λύσουμε μια $2^{ου}$ βαθμού εξίσωση που με τη βοήθεια του τύπου της διακρίνουσας βρήκαμε:
n = - 480,94 < 0 και n = 37,94 > 0. Τότε, η θετική τιμή προβλέπει ότι το πετρέλαιο θα τελειώσει σε 37,94 χρόνια.

Δηλαδή, με το γραμμικό μοντέλο το πετρέλαιο θα τελειώσει περίπου σε 18 χρόνια από το 1991, ενώ το μεικτό μοντέλο προβλέπει ότι αυτό θα συμβεί σε περίπου 40 χρόνια μετά το 1991. Αυτό δείχνει γιατί η επιστημονική ανάλυση συχνά παράγει *αντιπαρατιθέμενα αποτελέσματα.* Αλλά τελικά, κάθε μοντέλο κάνοντας διαφορετικές υποθέσεις μπορεί να οδηγήσει ευρέως σε πολλά συμπεράσματα. Διαφορετικοί επιστήμονες μπορεί αν βρουν διαφορετικά μοντέλα απολύτως πιστευτά και λογικά. Όταν τα αποτελέσματα είναι αντίθετα, θα πρέπει να πάμε πίσω στις υποθέσεις κάθε μοντέλου και να αποφασίσουμε ποιο είναι περισσότερο πιστευτό. Γενικά, ακόμη κι επιστημονικά αποδεδειγμένα αποτελέσματα μπορούν να είναι τόσο έγκυρα όσο οι υποθέσεις στις οποίες αυτά βασίστηκαν. Αν τα δεδομένα κατανάλωσης συνεχίζουν να ακολουθούν ένα μοντέλο, τα συμπεράσματα που σχεδιάζονται από το μοντέλο γίνονται πιο πιστευτά (Kalman, 1997).

9. ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ (LOGISTICS) ΜΟΝΤΕΛΑ

Στο κεφάλαιο 6 της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετήσαμε τα γεωμετρικά μοντέλα ανάπτυξης και παρουσιάσαμε δύο παραδείγματά τους. Το πρώτο παράδειγμα σχετίστηκε με τον πληθυσμό κουνελιών που εμφανίζονται στο οικοσύστημα, ενώ το δεύτερο με το πρόβλημα του χρόνου διάσπασης ραδιενεργών στοιχείων στη φύση. Στο πληθυσμιακό παράδειγμα οι μεταβλητές αυξάνονται κατά ένα σταθερό ποσοστό ή αλλιώς κατά ένα σταθερό παράγοντα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεωμετρικό αυτό μοντέλο για να προβλέψουμε τον πληθυσμό των κουνελιών όσο επιθυμούμε σε βάθος χρόνου, που όπως αυτό δείχνει αυτός συνεχώς θα αυξάνεται.

Στην πράξη όμως, αργά ή γρήγορα κάτι θα περιορίσει την ανάπτυξη αυτή, με αποτέλεσμα να θέτει το μοντέλο αυτό *μακροπρόθεσμα σε μη ρεαλιστική βάση*, γιατί αγνοεί εξωτερικούς παράγοντες που ασκούνται στο μέγεθος του πληθυσμού, όπως ο χώρος του οικοσυστήματος στο οποίο αναπτύσσονται ή ακόμα και ο ανταγωνισμός για τροφή από άλλα ζώα ή τον ίδιο τον άνθρωπο. *Τα μοντέλα γεωμετρικής ανάπτυξης, δηλαδή, είναι ακριβή μόνο για περιορισμένες χρονικές περιόδους* (Kalman, 1997).

Για να κάνουμε πιο πραγματικό ως προς τη ζωή το γεωμετρικό μοντέλο, μπορούμε να το *τροποποιήσουμε.* Με βάση τους περιορισμούς που θέτει το μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης για μεγάλους πληθυσμούς γεννιέται η ανάγκη για δημιουργία μιας παραλλαγής της ιδέας αυτής που είναι η *λογιστική ανάπτυξη*, την οποία θα μελετήσουμε διεξοδικά στο κεφάλαιο αυτό.

Τα μοντέλα λογιστικής ανάπτυξης προκύπτουν λοιπόν κατά ένα φυσικό τρόπο από την ιδέα ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού πρέπει τελικά να μειωθεί καθώς οι πληθυσμοί μεγαλώνουν. Θα μελετήσουμε τις εξισώσεις, τα γραφήματα και τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των μοντέλων που προκύπτουν. Θα παρουσιάσουμε τα μοντέλα αυτά μέσα από ένα παράδειγμα διακριτού χρόνου σχετικά με τον *πληθυσμό ενός είδους ψαριών σε μια λίμνη, που περιγράφεται από μια μη γραμμική δευτέρου βαθμού εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης.* Με τη βοήθεια του μη γραμμικού πληθυσμιακού αυτού παραδείγματος, στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε πως τα λογιστικά μοντέλα μπορούν να προβλέψουν μια χαοτική συμπεριφορά (Kalman, 1997).

9.1. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Στην παράγραφο αυτή, θα εισάγουμε τα λογιστικά μοντέλα ως βελτιωμένα μοντέλα των γεωμετρικών που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο 6 λόγω των περιορισμών που αυτά παρουσιάζουν. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια ενός παραδείγματος σχετικά με την ανάπτυξη του πληθυσμού μιας ποικιλίας ψαριών σε μια λίμνη.

Ας υποθέσουμε πως εισάγουμε 1.000 ψάρια σε μια μεγάλη λίμνη χωρίς αυτό το είδος να υπάρχει πριν στον πληθυσμό της. Από αυτά, γνωρίζουμε ότι ένα μέρος, ίσως το 50% , είναι γόνιμα θηλυκά που κάθε ένα γεννάει έναν αριθμό γόνων, ίσως 100. Από τους 100 γόνους θα επιβιώσουν μόλις οι 10. Με αυτά τα στοιχεία, τίθεται το

πρόβλημα της πρόβλεψης του αριθμού ψαριών για τον επόμενο χρόνο. Αυτό που είναι σημαντικό να σκεφτούμε είναι ότι αν ξεκινήσουμε τον επόμενο χρόνο με διαφορετικό πληθυσμό, λογικά αναμένουμε το ίδιο ποσοστό θηλυκών, το ίδιο ποσοστό γόνων ανά θηλυκό , το ίδιο ποσοστό γόνων που θα επιβιώνουν ανά θηλυκό και το ίδιο ποσοστό του πληθυσμού που θα πεθάνει (Kalman, 1997).

Με το σκεπτικό αυτό του σταθερού ποσοστού αύξησης του πληθυσμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα της γεωμετρικής ανάπτυξης για να περιγράψουμε αυτό το πρόβλημα. Το μοντέλο που προκύπτει, έχει εξίσωση διαφορών

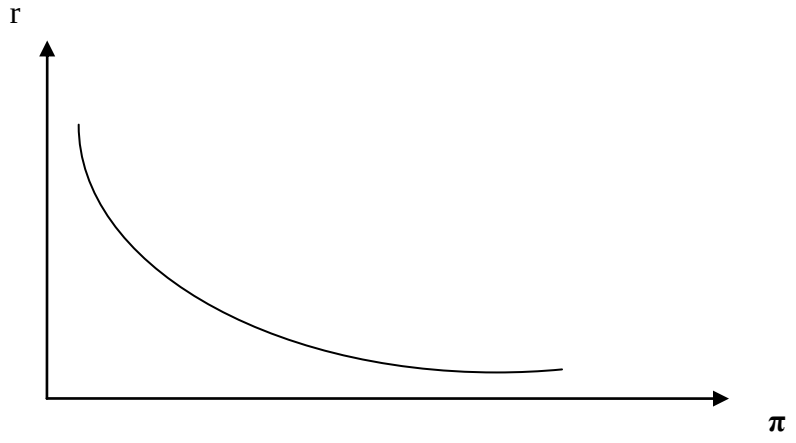
$$\pi_{n+1} = r\pi_n \qquad \textbf{(9.1)}$$

όπου π_n είναι ο πληθυσμός των ψαριών στη λίμνη μετά από n χρόνια και r ένα είδος παράγοντα γονιμότητας.

Αν για παράδειγμα r = 4 αυτό σημαίνει πως ο πληθυσμός των ψαριών μετά από 1 χρόνο θα είναι 4 φορές μεγαλύτερος και η εξίσωση διαφορών τότε θα ήταν $\pi_{n+1} = 4\pi_n$. Πρακτικά όμως, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβαίνει επ' αόριστον καθώς για παράδειγμα ο ανταγωνισμός για τροφή θα γίνεται μεγαλύτερος με αποτέλεσμα όλο και λιγότεροι γόνοι να επιβιώνουν. Έτσι, η αύξηση του πληθυσμού θα λιγοστεύει με αποτέλεσμα $r < 4$. Αν για παράδειγμα ο πληθυσμός αυξηθεί μόνο κατά 40% τότε r = 1,4 με εξίσωση διαφορών $\pi_{n+1} = 1{,}4\pi_n$. Με τα χρόνια ο πληθυσμός αυξάνεται, και δεδομένου του ανταγωνισμού των ειδών, μπορεί να επιτευχθεί ένα είδος ισορροπίας. Δηλαδή, ο πληθυσμός κάθε χρόνου να είναι ίδιος με του προηγούμενου. Τότε, r = 1 και η εξίσωση γίνεται $\pi_{n+1} = \pi_n$ (Kalman, 1997).

Αν υπερβάλλαμε στον αρχικό πληθυσμό των ψαριών ή αν άλλαζαν οι συνθήκες στη λίμνη, ο πληθυσμός θα υπερέβαινε το σημείο ισορροπίας. Τότε, το σημείο ισορροπίας αναμένεται να μειωθεί σε μέγεθος πληθυσμού κι ενώ για λίγο τα ψάρια θα ήταν περισσότερα από αυτά που μπορεί να υποστηρίξει το περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται, τελικά ο πληθυσμός θα μικρύνει. Τότε, το $r < 1$ έστω για παράδειγμα 0,3 με την εξίσωση διαφορών να γίνεται $\pi_{n+1} = 0{,}3\ \pi_n$.

Όλες αυτές οι αλλαγές του παράγοντα r δείχνουν την αναγκαιότητα να τον θεωρήσουμε ως συνάρτηση του πληθυσμού π και όχι ως κάτι σταθερό. Στο σχήμα 32 φαίνεται η σχέση που πρέπει να έχουν τα δύο αυτά μεγέθη (Kalman, 1997).



Σχήμα 32
Παράγοντας r σε σχέση με τον πληθυσμό π

Αν το r είναι μεγάλο, το μέγεθος του πληθυσμού είναι μικρό και το αντίστροφο. Έτσι, μεταβαίνουμε από το γεωμετρικό μοντέλο σταθερού παράγοντα r σε ένα άλλο μοντέλο μεταβλητού στο οποίο πρέπει να βρούμε μια σχέση του r με τον πληθυσμό π.

Η *απλούστερη προσέγγιση* των μεταβλητών r και π είναι μέσω *γραμμικού μοντέλου,* αν και τα δεδομένα δεν θα σχηματίζουν πάντα ευθεία γραμμή (σχήμα 32). Θέλουμε να σχεδιάσουμε μια γραμμή που να προσεγγίζει όσο το δυνατό την πραγματικότητα για ευρύ φάσμα πληθυσμού στο κέντρο του γραφήματος και όχι στα άκρα που ο πληθυσμός είναι ή πολύ μικρός ή πολύ μεγάλος (Kalman, 1997).

Για την εξίσωση της ευθείας των r και π, θα χρειαστούμε *δύο σημεία* του γραφήματός τους. Αν η ισορροπία γίνει για παράδειγμα με πληθυσμό 50.000 ψάρια, το πρώτο σημείο είναι το (50.000, 1), γιατί τότε r = 1. Αν όμως ο πληθυσμός δεν έχει φτάσει το σημείο ισορροπίας του ακόμα σημαίνει πως περιμένουμε να αυξηθεί τον επόμενο χρόνο, για παράδειγμα να διπλασιαστεί, από 10.000 που ήταν. Τότε, r = 2 και το δεύτερο σημείο θα είναι το (10.000, 2). Με δεδομένα τα δύο σημεία αυτά υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας, ως:

$$(1 - 2) / (50.000 - 10.000) = - 1 / 40.000 = - 0,000025$$

και την εξίσωσή της, ως:

$$r - 2 = - 0,000025 (\pi - 10.000) \Rightarrow r = 2,25 - 0,000025\pi \qquad \textbf{(9.2)}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το γραμμικό μοντέλο ο παράγοντας r εξαρτάται από το μέγεθος του πληθυσμού π γραμμικά. Αν αντικαταστήσουμε το r στη σχέση (9.1) του γεωμετρικού μοντέλου ανάπτυξης του πληθυσμού, έχουμε τα εξής:

$$\pi_{n+1} = (2,25 - 0,000025\pi_n)\pi_n \qquad \textbf{(9.3)}$$

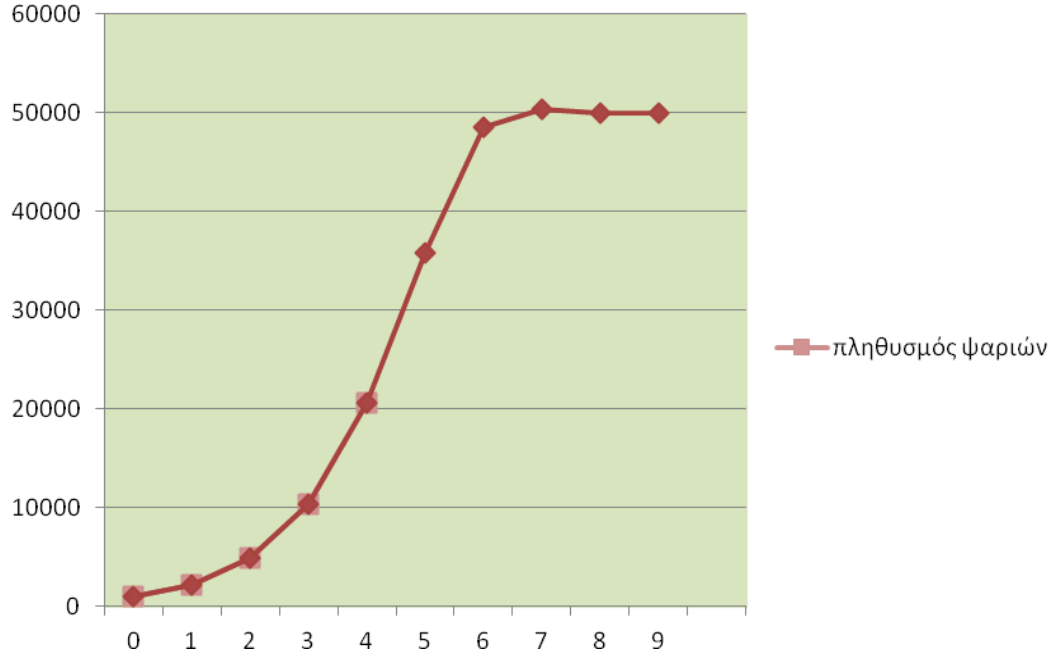
Αυτός ο τύπος εξισώσεων διαφορών ορίζει τη λογιστική ανάπτυξη του τύπου $\pi_{n+1} = r\pi_n$ όπου r δίνεται ως γραμμική συνάρτηση του π_n (Kalman, 1997).

Αριθμητικά, μπορούμε να προβλέψουμε τον πληθυσμό των ψαριών στη λίμνη, με αρχική τιμή π_0 = 1.000 και με διαδοχικές αντικαταστάσεις στη σχέση (9.3) προκύπτουν τα δεδομένα του πίνακα 9.1.

n	0	1	2	3	4
r		2,225	2,194375	2,12795	1,99025
π_n	1.000	2.225	4.882	10.390	20.678
n	5	6	7	8	9
r	1,73305	1,3541	1,03685	0,99215	1,002025
π_n	35.836	48.526	50.314	49.919	50.020

Πίνακας 9.1
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου πληθυσμού ψαριών

Γραφικά, αν αποτυπώσουμε τα δεδομένα του πίνακα 9.1 στο σχήμα 33, θα δούμε ότι συμφωνούν με τα αριθμητικά συμπεράσματά τους.



Σχήμα 33
Γράφημα των δεδομένων λογιστικού μοντέλου πληθυσμού ψαριών

Πιο συγκεκριμένα, αρχικά ο πληθυσμός αναπτύσσεται σχεδόν ίδια με του γεωμετρικού μοντέλου. Καθώς όμως ο πληθυσμός συνεχίζει να αυξάνεται, το ποσοστό ανάπτυξης άρα και το r μειώνεται σταδιακά. Τελικά, ο πληθυσμός ξεκινά να ταλαντεύεται και να σταθεροποιείται στα 50.000 ψάρια (Kalman, 1997).

9.2. ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Αυτή η εισαγωγική συζήτηση δείχνει πόσο ένα απλό μοντέλο, όπως το γεωμετρικό, μπορεί να τροποποιηθεί για να πάρει μια πιο ρεαλιστική συμπεριφορά. Όπως σε όλα τα προηγούμενα μοντέλα, έτσι και στα λογιστικά θα παρουσιάσουμε *εξισώσεις διαφορών,* μέσω παραμέτρων και *γενικά χαρακτηριστικά γραφημάτων* για κάθε τύπο μοντέλου.

Λόγω της πολυπλοκότητάς τους, σε αντίθεση με όλα τα προηγούμενα μοντέλα, τα λογιστικά *δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν με μια συναρτησιακή εξίσωση*. Έτσι, δεν υπάρχει απλή εξίσωση που να εκφράζει το π_n σε συνάρτηση του n, με αποτέλεσμα να μην μπορεί άμεσα να υπολογιστεί για παράδειγμα το π_{30}, αλλά να πρέπει να υπολογίσουμε όλες τις προηγούμενες τιμές του π_1, π_2, π_3, ..., π_{29}. Αυτή είναι *η μεγάλη διαφορά* ανάμεσα σε λογιστικά μοντέλα και σε όλα όσα μελετήσαμε πριν (Kalman, 1997).

9.2.1. Εξισώσεις διαφορών λογιστικής ανάπτυξης

Η λογιστική ανάπτυξη, όπως η γεωμετρική, ορίζει μια σχέση ανάμεσα σε διαδοχικούς όρους δεδομένων ακολουθίας α_n. Η αλλαγή από έναν όρο α_n στον επόμενο, περιλαμβάνει έναν *παράγοντα ανάπτυξης που εξαρτάται γραμμικά* από τον α_n, σε αντίθεση με τη γεωμετρική ανάπτυξη που η αλλαγή από έναν όρο α_n στον επόμενο, περιλαμβάνει έναν *παράγοντα ανάπτυξης σταθερό.*

Παρατηρώντας τη σχέση (9.3) της εξίσωσης διαφορών του παραδείγματος με τα ψάρια οδηγούμαστε στη γενική μορφή της εξίσωσης διαφορών λογιστικού μοντέλου και σε ακόμα δύο ισοδύναμές της μορφές:

Τα *λογιστικά μοντέλα* έχουν τις εξής μορφές *εξισώσεων διαφορών*:

$$\alpha_{n+1} = (r_0 - m\alpha_n)\alpha_n \quad \Leftrightarrow \qquad \textbf{(9.4)}$$

$$\alpha_{n+1} = r_0\,\alpha_n - m(\alpha_n)^2 \Leftrightarrow \qquad \textbf{(9.5)}$$

$$\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n, \text{ με} \qquad \textbf{(9.6)}$$

r_0 η *αρχική τιμή του παράγοντα ανάπτυξης,*
m η *απόλυτη τιμή της κλίσης* της ευθείας του διαγράμματος των $r\text{-}\alpha_n$ και

$$mL = r_0 \Leftrightarrow L = r_0 / m \qquad \textbf{(9.7)}$$

Ο τύπος **(9.5)**, δείχνει ότι το λογιστικό μοντέλο μπορεί να αντιμετωπιστεί ως αποτέλεσμα *προσθήκης* ενός όρου στο μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης. Ακόμα, επειδή ο *συντελεστής m του* $(\alpha_n)^2$ *είναι πολύ μικρός*, αυτός ο όρος δεν επηρεάζει πολύ το τελικό αποτέλεσμα του α_{n+1}, <u>*εκτός*</u> *αν το* α_n *είναι αρκετά μεγάλο*. Αυτό δείχνει πώς για μικρές τιμές α_n, ο τύπος για α_{n+1} προσεγγίζεται απλά από $r\alpha_n$ που είναι το είδος της γεωμετρικής ανάπτυξης (Kalman, 1997).

Ο τύπος **(9.6)**, μας βοηθά να καταλάβουμε κάποια όρια των λογιστικών μοντέλων. Αν $\alpha_n = 0$, τότε λογικά και κάθε επόμενη τιμή του πληθυσμού θα είναι 0. Αν $\alpha_n = L$, ο πληθυσμός του επόμενου χρόνου θα είναι 0, κάτι που δεν είναι απόλυτα λογικό. Στο παράδειγμά μας η (9.3) $\Leftrightarrow \pi_{n+1} = 0{,}000025(90.000 - \pi_n)\pi_n$. Αν τα ψάρια είναι 90.000, η λίμνη δεν μπορεί να τα υποστηρίξει, αλλά αυτό δε σημαίνει πως πρέπει να πεθάνει και όλος ο πληθυσμός τους σε ένα χρόνο. Αυτή είναι μια ακόμα αμφισβητούμενη πλευρά του μοντέλου. Αν $\pi_n > L$, η εξίσωση διαφορών προβλέπει αρνητικό πληθυσμό για τον επόμενο χρόνο κάτι που δεν βγάζει κανένα νόημα. Όλα αυτά τα παράλογα του μοντέλου, είναι συνέπειες της χρήσης του γραμμικού μοντέλου του παράγοντα r το μέγεθος του πληθυσμού, κάτι που δε θα συνέβαινε αν χρησιμοποιούσαμε γράφημα όπως στο σχήμα 32.

Αν και το λογιστικό μοντέλο έχει αμφισβητούμενη συμπεριφορά για τιμές του π_n έξω από τα όρια (0, L), είναι συχνά πολύ χρήσιμο αρκεί να έχουμε υπόψη αυτόν τον περιορισμό (Kalman, 1997).

9.2.2. Ποιο είναι το σωστό εύρος του πληθυσμού

Είδαμε ότι το μοντέλο λογιστικής ανάπτυξης βγάζει νόημα μόνο όταν ο πληθυσμός παραμένει ανάμεσα σε κατάλληλο εύρος. Στον τύπο (9.6) αν $\alpha_n > L$, το μοντέλο είναι άκυρο, γιατί, τότε $r < 0$ (Kalman, 1997). Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τη σχέση αυτού του εύρους για τον πληθυσμό και των παραμέτρων m και L στην εξίσωση διαφορών των λογιστικών μοντέλων:

$$\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n \qquad \textbf{(9.6)}$$

Θα μελετήσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση του τύπου (9.6), με μορφή:

$$y = m(L - x)x \Leftrightarrow y = -mx^2 + mLx \qquad \textbf{(9.8)}$$

Αρχικά, η συνάρτηση (9.8) έχει γράφημα σε σχήμα *παραβολής*, που *τέμνει τον οριζόντιο άξονα* στα σημεία με $x = 0$ και $x = L$, μιας και εκεί $y = 0$. Ακόμα, επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι αρνητικός, η παραβολή θα παρουσιάζει *μέγιστο* το y_{max}, στο x που βρίσκεται στο μέσο των 0 και L, λόγω συμμετρίας του γραφήματός της. Άρα έχει μέγιστο στο $x = L / 2$, το:

$$y_{max} = - mL^2 / 4 + mLL / 2 \Leftrightarrow y_{max} = mL^2 / 4$$

Όπως είπαμε και πριν, θέλουμε το y_{max} να μην ξεπερνά την τιμή του L, δηλαδή,

$$y_{max} < L \Leftrightarrow mL^2 / 4 < L \Leftrightarrow mL < 4$$

Οπότε, όταν χρησιμοποιούμε το λογιστικό μοντέλο με τύπο (9.6) θα πρέπει να ελέγξουμε αν $mL < 4$. Έτσι,

Αν ένα *λογιστικό μοντέλο* έχει *εξίσωση διαφορών*

$$\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n$$

και $\alpha_0 \in (0, L)$, τότε αν:

(1) $mL < 4, \Rightarrow \alpha_n \in (0, L)$ για κάθε α_n
(2) $mL > 4$, *μπορεί* να οδηγήσει σε $\alpha_n > L$ ή $\alpha_n < 0$
ή άλλα μη ρεαλιστικά αποτελέσματα (Kalman, 1997).

9.2.3. Που σταθεροποιείται ένα λογιστικό μοντέλο

Αρχικά ο νέος πληθυσμός αυξάνεται και σε κάποιες περιπτώσεις μετά από ένα χρονικό διάστημα σταθεροποιείται γύρω από μια συγκεκριμένη στιγμή. Τότε, ο πληθυσμός βρίσκεται σε ισορροπία με το περιβάλλον του και αυτό σημαίνει ότι μπορεί να επιβιώσει σε αυτό. Είναι σημαντικό να ξέρουμε χρησιμοποιώντας λογιστικά μοντέλα αν ένας πληθυσμός μπορεί να γίνει σταθερός και ποια θα είναι τότε η τιμή του (Kalman, 1997).

Ένας πληθυσμός α, λέγεται *σταθερός*,
αν μένει ο ίδιος χρόνο με το χρόνο,
δηλαδή αν

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \qquad \textbf{(9.9)}$$

Όπως βρίσκαμε τα σημεία ισορροπίας για τα μεικτά μοντέλα στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και για τα λογιστικά μοντέλα μπορούμε να υπολογίσουμε τα σημεία που σταθεροποιείται ο πληθυσμός (σημεία ισορροπίας πληθυσμού). Αν ο πληθυσμός σταθεροποιείται σε ένα μέγεθος x, δηλαδή αν $\alpha_n = x$ τότε και $\alpha_{n+1} = x$ (Kalman, 1997).Έτσι, αν το λογιστικό μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n$, μετατρέπεται σε:

$$x = m(L - x)x$$
$$x = mLx – mx^2$$
$$mx^2 + (1 - mL)x = 0$$

Αυτή όμως είναι μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που μπορούμε να τη λύσουμε ως προς x είτε με παραγοντοποίηση είτε με τον τύπο της διακρίνουσας. Επειδή είναι ελλιπής η μορφή της (ο σταθερός όρος είναι 0) προτιμούμε την παραγοντοποίηση κι έχουμε τα εξής:

$$[mx + (1 - mL)]\, x = 0$$
$$mx + (1 - mL) = 0 \text{ ή } x = 0$$
$$x = L - 1/m \text{ ή } x = 0$$

Εκτός από τους δύο τρόπους που αναφέραμε για να βρούμε το x, υπάρχει ακόμη κι ένας απλούστερος. Αν ο πληθυσμός σταθεροποιηθεί σε ένα λογιστικό μοντέλο, ο παράγοντας αύξησης του πληθυσμού σε εκείνο το σημείο θα πρέπει να είναι ίσος με 1. Έτσι, μπορούμε στην εξίσωση διαφορών $\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n$, να θέσουμε τον παράγοντα $m(L - \alpha_n) = 1$. Αν και πάλι ο πληθυσμός σταθεροποιείται στην τιμή x, τότε έχουμε τα εξής:

$$m(L - \alpha_n) = 1$$
$$mL – mx = 1$$
$$x = L - 1/m$$

Άρα γνωρίζοντας τις τιμές των παραμέτρων (m, L) της εξίσωσης διαφορών ενός λογιστικού μοντέλου, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή που θα έχει ο πληθυσμός όταν σταθεροποιείται ως $\alpha_n = L - 1/m$. *Ποια όμως θα επιλέξουμε ανάμεσα στις 2 τιμές που σταθεροποιείται* ο πληθυσμός 0 και $L - 1/m$; Η απάντησή μας εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων m, L (Kalman, 1997).

Αν $mL < 1$, τότε $L - 1/m < 0$ και σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Αφού $mL < 1 < 4$, από τα συμπεράσματα της παραγράφου 9.9.2., το εύρος του πληθυσμού θα είναι από 0 έως L ($0 < \alpha_n < L$). Έτσι, ο πληθυσμός δεν μπορεί να φθάσει την τιμή $L - 1/m$ γιατί αυτή είναι αρνητική. Άρα, αν ο πληθυσμός σταθεροποιείται σε κάποια τιμή αυτή είναι $\alpha_n = 0$, δηλαδή ο πληθυσμός τελικά θα εξαφανιστεί.

Σε περίπτωση που κάτι τέτοιο συμβεί μελετώντας ένα πραγματικό πρόβλημα με τη βοήθεια λογιστικού μοντέλου, μας κάνει να το αναθεωρήσουμε. Στο παράδειγμά μας, αν βάζοντας έναν αρχικό πληθυσμό ψαριών στη λίμνη, βρούμε ότι αυτός θα ισορροπήσει μετά από κάποια χρόνια σε πληθυσμό ίσο με:

$$\pi_n = 0$$

αυτό σημαίνει ότι τα ψάρια τελικά θα εξαφανιστούν. Πρακτικά όμως, δεν θέλουμε να συμβεί κάτι τέτοιο. Θέλουμε δηλαδή ο πληθυσμός να σταθεροποιηθεί σε έναν πληθυσμό $\pi_n > 0$. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $mL > 1$ με την τιμή του πληθυσμού να σταθεροποιείται στην τιμή του πληθυσμού $\pi_n = L - 1/m$ (Kalman, 1997). Η εξίσωση διαφορών είναι $\pi_{n+1} = 0{,}000025(90.000- \pi_n)\pi_n$ και επειδή $m = 0{,}000025$ και $L = 90.000$, έχουμε $mL = 2{,}25 > 1$, άρα ο πληθυσμός των ψαριών δεν θα εξαφανιστεί, αλλά θα σταθεροποιηθεί στο:

$$\pi_n = \pi_{n+1} = L - 1/m = 90.000 - 1/0{,}000025 = 50.000$$

Αν ένα *λογιστικό μοντέλο*, με *εξίσωση διαφορών*

$$\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n, \text{ έχει:}$$

(1) $mL \leq 1$, τότε ο πληθυσμός *μειώνεται σταθερά* και *σταθεροποιείται* στον $\alpha_n = 0$
(2) $mL > 1$, τότε ο πληθυσμός <u>*μπορεί*</u> να σταθεροποιείται στον $\alpha_n = L – 1 / m$

9.2.4. Πότε σταθεροποιείται ένα λογιστικό μοντέλο

Προηγουμένως, καταλήξαμε ότι αν το γινόμενο των παραμέτρων mL > 1 στο λογιστικό μοντέλο, τότε ο πληθυσμός μπορεί να σταθεροποιείται σε μια θετική τιμή L – 1/m. Η λέξει όμως «μπορεί» εμπεριέχει δύο περιπτώσεις: ο πληθυσμός σταθεροποιείται σε μια θετική τιμή ή ο πληθυσμός δεν σταθεροποιείται σε κάποια τιμή. Αυτό που μας ενδιαφέρει στο σημείο αυτό, είναι να δούμε πότε συμφέρει αυτή η σταθεροποίηση.

Ας δούμε πάλι τα δεδομένα στο 1^{ο} παράδειγμα. Είχαμε αρχικό πληθυσμό π_0 = 1.000 ψάρια και γνωστά δύο σημεία στο διάγραμμα παράγοντα ανάπτυξης με πληθυσμό. Το (10.000, 2) και (50.000, 1) (Kalman, 1997). Με τη βοήθειά τους φτιάξαμε τη γραμμική εξίσωση του παράγοντα ανάπτυξης και τον πληθυσμό ως:

$$r - 2 = -0{,}000025(\pi - 10.000)$$
$$r = 2{,}25 - 0{,}000025\pi$$

που οδηγεί στην εξίσωση διαφορών λογιστικού μοντέλου:

$$\pi_{n+1} = (2{,}25 - 0{,}000025\pi_n)\pi_n$$
$$\pi_{n+1} = 0{,}000025(90.000 - \pi_n)\pi_n$$

όπου m = 0,000025 και L = 90.000, οπότε mL = 2,25 > 1 που από τα παραπάνω βρήκαμε ότι το μοντέλο σταθεροποιείται στον πληθυσμό $\pi_n = \pi_{n+1}$ = 50.000 ψάρια. Η τιμή αυτή φαίνεται εξάλλου και από το γράφημα του μοντέλου αυτού στο σχήμα 31.

Θα τροποποιήσουμε ελάχιστα αυτό το αρχικό μοντέλο χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τα σημεία (10.000, 2,8) και (50.000, 1), με αρχικό πληθυσμό π_0 = 1.000 ψάρια. Έτσι, η γραμμική εξίσωση του παράγοντα και του πληθυσμού γίνεται:

$$r - 2{,}8 = -0{,}000045(\pi - 10.000)$$
$$r = 3{,}25 - 0{,}000045\pi$$

και η εξίσωση διαφορών τροποποιημένου μοντέλου γίνεται:

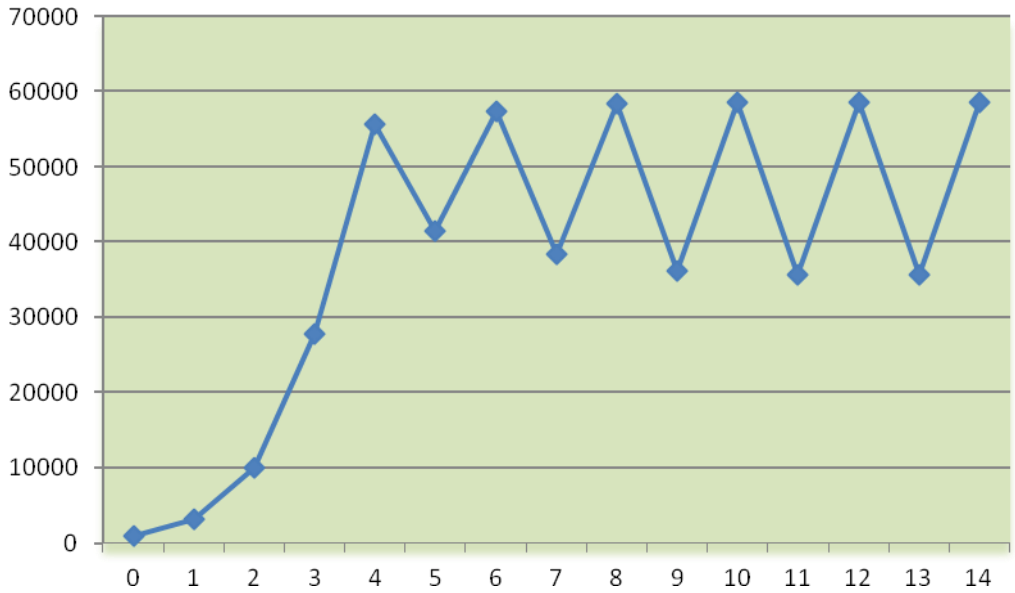
$$\pi_{n+1} = (3{,}25 - 0{,}000045\pi_n)\pi_n$$
$$\pi_{n+1} = 0{,}000045(72.222 - \pi_n)\,\pi_n$$

όπου m = 0,000045 και L = 72.222. Οπότε mL = 3,25 > 1, άρα μπορούμε να πούμε πως αν το μοντέλο σταθεροποιείται το κάνει στην τιμή πληθυσμού $\pi_n = \pi_{n+1}$ = L - 1/m = 49.999,778 ψάρια (Kalman, 1997).

Αν δημιουργήσουμε έναν πίνακα με τιμές του μοντέλου αυτού για τα 15 πρώτα χρόνια, θα προκύψουν τα δεδομένα του πίνακα 9.2, τα οποία φαίνονται και γραφικά στο σχήμα 34 που ακολουθεί.

n	0	1	2	3	4
r		3,205	3,106	2,802	1,990
π_n	1.000	3.205	9.954	27.892	55.641
n	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
r	0,746	1,381	0,669	1,524	0,620
π_n	41.518	57.365	38.352	58.454	36.215
n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
r	1,620	0,609	1,641	0,610	1,640
π_n	58.680	35.759	58.675	35.770	58.675

Πίνακας 9.2
Δεδομένα λογιστικού τροποποιημένου μοντέλου πληθυσμού ψαριών



Σχήμα 34
Γράφημα δεδομένων τροποποιημένου λογιστικού μοντέλου πληθυσμού ψαριών

Συγκρίνοντας τα δύο γραφήματα του αρχικού και τροποποιημένου μοντέλου, παρατηρούμε ότι μικρή αλλαγή σε ένα σημείο του αρχικού μοντέλου οδηγεί σε μια διαφορετική οπτική για το μέλλον της ανάπτυξης του πληθυσμού των ψαριών. Στο αρχικό μοντέλο πληθυσμός ξεκινά με μια γεωμετρική ανάπτυξη αλλά μετά σταθεροποιείται στις 50.000. Αντίθετα στο τροποποιημένο μοντέλο, ενώ ξεκινά ο πληθυσμός να αναπτύσσεται όπως και το αρχικό μοντέλο, μακροπρόθεσμα δεν σταθεροποιείται σε μια τιμή άλλα ταλαντεύεται γύρω από 56.000 και 36.000. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο σε άρτιους αριθμούς ετών σταθεροποιείται στις 56.000 και σε περιττούς αριθμούς ετών σταθεροποιείται στις 36.000. Στην πραγματικότητα μια μικρή αλλαγή στις τιμές των παραμέτρων οδηγεί σε μια διαφορετική εικόνα για τη μελλοντική ανάπτυξη του πληθυσμού, οι παράμετροι των λογιστικών μοντέλων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για άλλη μια φορά για την πρόβλεψη καταστάσεων. Οι μαθηματικές μέθοδοι που οδηγούν σε αυτή την πρόβλεψη περιλαμβάνουν μελέτη και χαρακτηριστικά πολυωνυμικών εξισώσεων κάτι που δεν θα αναλύσουμε στην

παρούσα εργασία. Θα δώσουμε μόνο τα αποτελέσματά τους στο παρακάτω πλαίσιο (Gulick & Hill, 1992 σε: Kalman, 1997).

Αν ένα *λογιστικό μοντέλο* με *εξίσωση διαφορών*:

$$\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n$$

και *αρχική τιμή* $\alpha_0 \in (0, L)$, τότε:

Αν $1 < mL < 3$, ο πληθυσμός *θα σταθεροποιηθεί* στην τιμή:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} = L - 1/m \qquad \textbf{(9.10)}$$

Στο αρχικό μοντέλο μας είχαμε $mL = 2{,}25$, δηλαδή, $1 < mL < 3$, άρα προβλέψαμε ότι το μοντέλο θα σταθεροποιηθεί τελικά για κάθε αρχική τιμή α_0 ανάμεσα σε 0 και 90.000 στην τιμή 90.000 - 1/0,000025 = 50.000 ψάρια και ακριβώς αυτό παρατηρήσαμε. Αντίθετα, το τροποποιημένο μοντέλο είχε $mL = 3{,}25 > 3$, άρα δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι αν ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί και όπως δείξαμε στο παράδειγμά μας, γραφικά, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει.

Όταν διαμορφώνουμε ένα μοντέλο λογιστικής ανάπτυξης, αν οι παράμετροι m και L ικανοποιούν τη σχέση $1 < mL < 3$, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί σε έναν θετικό αριθμό. Αυτό μπορεί να συμβεί με τρείς τρόπους. Πρώτον, ο πληθυσμός μπορεί να *αυξηθεί σταθερά* μέχρι να σταθεροποιηθεί. Η δεύτερη πιθανότητα είναι ότι ο πληθυσμός μπορεί να *μειωθεί σταθερά* μέχρι να σταθεροποιηθεί. Τελικά, ο πληθυσμός μπορεί και να *ταλαντεύεται λίγο πάνω και λίγο κάτω από την τιμή σταθεροποίησης, αλλά πάντα θα παίρνει όλο και πλησιέστερες τιμές σε αυτή*. Αυτό είδαμε στο παράδειγμα με το αρχικό λογιστικό μοντέλο του πληθυσμού ψαριών σε μια λίμνη (Kalman, 1997).

9.3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο να γίνει μια σύντομη αναφορά σε ό,τι αφορά τα μοντέλα που έχουν μελετηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Ξεκινήσαμε με τα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης, εξετάσαμε τα τετραγωνικά μοντέλα και συνεχίσαμε με τα γεωμετρικά. Επίσης, εξετάσαμε τα μεικτά μοντέλα αριθμητικής και γεωμετρικής ανάπτυξης και ολοκληρώσαμε με τα λογιστικά μοντέλα. Όλα τα μοντέλα που μελετήθηκαν παρουσίασαν μια ανάπτυξη κάτω από παρόμοιες συνθήκες. Αρχικά, ξεκίνησαν με μια διακριτή ακολουθία με τιμές της μεταβλητής που λειτουργούσαν αναπαριστώντας μετρήσεις κάποιου φαινομένου με σταθερή χρονική συχνότητα. Η κοινή πλευρά σε όλα τα παραδείγματα είναι πως *οι τιμές αυτές φτιάχνουν μια ακολουθία ανεξάρτητα από τη συχνότητα εμφάνισής τους* (Kalman, 1997).

Για να συνοψίσουμε την προσέγγιση σε όλους τους τύπους μοντέλων, ξεκινήσαμε σε κάθε περίπτωση με μια απλή περιγραφή του πώς ένας αριθμός θα οδηγήσει στον επόμενο. Με τη βοήθεια της εκάστοτε ακολουθίας τιμών που παράγεται, ορίστηκε μια *γενική εξίσωση διαφορών*, με κατάλληλες *παραμέτρους*. Προσδιορίστηκαν τα *κοινά χαρακτηριστικά* για συγκεκριμένο τύπο εξισώσεων διαφορών, περιλαμβανομένης κάθε περίπτωσης και μιας *συναρτησιακής εξίσωσης* για την ακολουθία, εκτός από της λογιστικής ανάπτυξης. Τα διαφορετικά είδη μοντέλων αναπτύσσονται στον πίνακα 9.3 (Kalman, 1997).

ΜΟΝΤΕΛΟ	**ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ**	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**	**ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ**
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ	**Πρόσθεση μιας σταθεράς**	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 0,3$	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ	**Πρόσθεση μιας ποσότητας που εξαρτάται γραμμικά από το n**	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 0,3 + 0,02n$	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en$
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ	**Πολλαπλασιασμός ενός σταθερού παράγοντα**	$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$	$\alpha_{n+1} = r\alpha_n$
ΜΕΙΚΤΟ	**Πολλαπλασιασμός ενός σταθερού παράγοντα και πρόσθεση μιας σταθεράς**	$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 0,3$	$\alpha_{n+1} = r\alpha_n + d$
ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ	**Πολλαπλασιασμός ενός παράγοντα που εξαρτάται γραμμικά από το α_n**	$\alpha_{n+1} = 0,001(1.000 - \alpha_n)\alpha_n$	$\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n$

Πίνακας 9.3
Εξισώσεις διαφορών μοντέλων

Συγκρίνοντας τα τέσσερα διαφορετικά σετ που προκύπτουν παρατηρούμε ότι *οι συγκεκριμένοι αριθμοί που εμφανίζονται είναι λιγότερο σημαντικοί από τις διαδικασίες που εκτελούνται*. Οδηγούμαστε έτσι, στη σημαντική λειτουργία της παραμέτρου.

Με τη βοήθεια των παραμέτρων προέκυπταν πολλές ιδιότητες για κάθε οικογένεια μοντέλων. Για παράδειγμα, κάθε μοντέλο αριθμητικής ανάπτυξης έχει γράφημα ευθεία γραμμή και η παράμετρος d δίνει την κλίση του γραφήματος. Όμοια, κάθε μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης έχει γράφημα μια εκθετική καμπύλη και η παράμετρος r μας δίνει τη βάση του εκθέτη. Στην περίπτωση των λογιστικών μοντέλων αν οι παράμετροι m και L έχουν γινόμενο $3 < mL < 1$, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία σταθεροποιείται στην τιμή $L - 1/m$ (Kalman, 1997).

Μια σημαντική παρατήρηση που πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό είναι η *έλλειψη συναρτησιακής εξίσωσης των λογιστικών μοντέλων*. Η απουσία της στα μοντέλα αυτά, οδηγεί σε νέα φαινόμενα, όπως το *χάος*, κάτι που δεν παρατηρείται στα υπόλοιπα μοντέλα που παρουσιάστηκαν. Η οπτική αυτή των λογιστικών θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο (Kalman, 1997).

10. ΧΑΟΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Στο τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής, θα αναφερθούμε στην ιδέα του χάους και πως αυτό αναδύεται μέσα από τα λογιστικά μοντέλα ανάπτυξης. Όλα τα προηγούμενα μοντέλα που μελετήσαμε πριν τα λογιστικά, έχουν εξισώσεις διαφορών που ανήκουν σε μια οικογένεια εξισώσεων γνωστές ως *γραμμικές*. Για αυτά τα μοντέλα όταν αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων τους, δεν αλλάζει σημαντικά η ποιοτική συμπεριφορά τους. Έτσι, για το μοντέλο γεωμετρικής ανάπτυξης, αν έχουμε μια λάθος τιμή της παραμέτρου r, μπορούμε να είμαστε σχεδόν σίγουροι για την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του που θα *αυξάνει* (αν $r > 1$) ή *μειώνεται* μέχρι το 0 (αν $r < 1$). Ομοίως, για τα μεικτά μοντέλα, μπορούμε να είμαστε σίγουροι πως η ακολουθία σταθεροποιείται, ακόμη κι αν έχουμε κάνει λάθη στις παραμέτρους (Kalman, 1997).

Αντίθετα, τα λογιστικά μοντέλα έχουν *μη γραμμικές* εξισώσεις διαφορών. Σε αυτού του είδους τις εξισώσεις *μια μικρή μεταβολή* των παραμέτρων τους μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλες διαφορές στη μελλοντική συμπεριφορά του πληθυσμού, με αποτέλεσμα η δυνατότητα να κάνουμε προβλέψεις να καταρρέει. Αυτό είναι το χάος στα μαθηματικά**.** Μέσα από το παράδειγμα που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετικά με το *πρόβλημα του πληθυσμού των ψαριών* σε μια λίμνη, θα μελετήσουμε και το χάος στο λογιστικά μοντέλα, μέσα από *διαφορετικές τιμές της παραμέτρου m.*

Παρόλο που τα χαοτικά λογιστικά μοντέλα, δεν μπορούν να προβλέψουν τη μελλοντική συμπεριφορά του μοντέλου με κανένα ποσοτικό τρόπο, δεν θα πρέπει να συνδέουμε την λέξη χάος με την λέξη αταξία όπως συμβαίνει στην καθημερινή ζωή. Αντίθετα, στο χάος θα δούμε πως παρουσιάζεται ένα άλλο είδος *τάξης.*

Μπορούμε να μελετήσουμε την τάξη αυτή μέσα από ένα άλλο είδος *γραφήματος, των διακλαδώσεων,* παίρνοντας πληροφορίες για την επίδραση της μεταβλητής παραμέτρου m, ενώ όλα τα προηγούμενα γραφήματα παρουσίαζαν αποτελέσματα του πληθυσμού για μία σταθερή τιμή της παραμέτρου αυτής. Μέσα από το γράφημα αυτό μπορούμε να βρούμε πως και πότε εμφανίζεται το χάος στα λογιστικά μοντέλα (Kalman, 1997).

10.1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Πριν τη μελέτη των χαοτικών λογιστικών μοντέλων θα αναφερθούμε σε δυο είδη εξισώσεων διαφορών: τις γραμμικές και τις μη γραμμικές, όπως αυτές αναφέρονται από τον κ. Γ. Η. Καλογερόπουλο στις σημειώσεις των παραδόσεων του προπτυχιακού μαθήματος, του τμήματος Μαθηματικών Αθήνας, με τίτλο «Διακριτά Δυναμικά Συστήματα Και Εφαρμογές».

Ακολουθούν οι ορισμοί για τις εξισώσεις διαφορών όπως αυτές διατυπώνονται στο παραπάνω σύγγραμμα, τις γραμμικές και μη εξισώσεις διαφορών, την τάξη μιας εξίσωσης διαφορών και οι κατηγορίες στις οποίες οι γραμμικές χωρίζονται σε ομογενείς και μη ομογενείς.

Έστω μια *ακολουθία* α_n, n = 0,1,2,3, ... , με όρους α_0, α_1, α_2, α_3, ...
και έστω ότι υπάρχει ένας νόμος υπολογισμού του γενικού της όρου α_n
που περιγράφεται από την σχέση:

$$\alpha_{n+k} = f(\alpha_{n+k-1}, \alpha_{n+k-2}, \dots , \alpha_n, n) \qquad \textbf{(10.1)}$$

όπου f μια συνάρτηση της *διακριτής* μεταβλητής n και
των k προηγούμενων του α_{n+k} όρων της ακολουθίας, α_{n+k-1}, α_{n+k-2}, ... , α_n.

Η **(10.1)** εκφράζει μια *συνήθη εξίσωση διαφορών ή διαφοροεξίσωση*

Τάξη μιας εξίσωσης διαφορών είναι η διαφορά μεταξύ
του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη
που εμφανίζεται στην εξίσωση.

Η εξίσωση διαφορών **(10.1)** είναι τάξης k.

Μια εξίσωση διαφορών είναι *γραμμική,*
αν μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha_{n+k} + g_1(n)\, \alpha_{n+k-1} + g_2(n)\, \alpha_{n+k-2} + \dots + g_k(n)\, \alpha_n = H_n \qquad \textbf{(10.2)}$$

όπου $g_i(n)$, i = 1, 2, 3, ... και H_n δοσμένες συναρτήσεις του n

Μια εξίσωση διαφορών είναι μη γραμμική,
αν στην **(10.1)** η f είναι *μη γραμμική*.

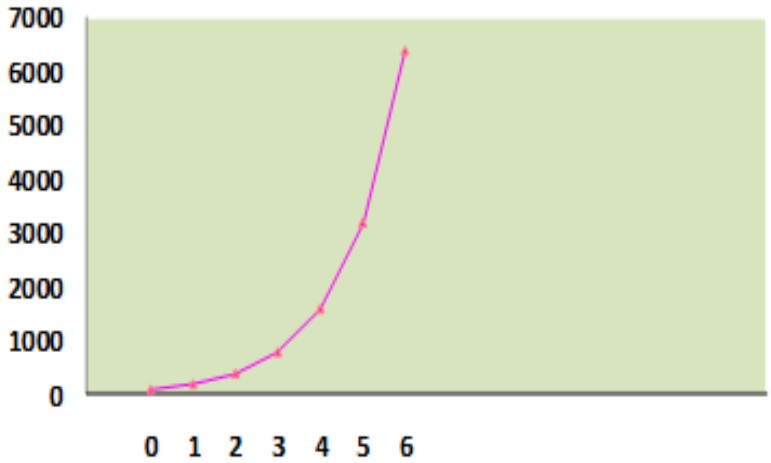
Μια γραμμική εξίσωση διαφορών λέγεται:

(i) *Ομογενής*, αν στην (10.2) $H_n = 0$
(ii)*Μη ομογενής*, αν στην (10.2) $H_n \neq 0$

Μπορούμε πια με βάση τους προηγούμενους ορισμούς, να προσδιορίσουμε το είδος των εξισώσεων διαφορών που μελετήσαμε στην παρούσα διπλωματική εργασία και αναφερθήκαν συγκεντρωτικά στον πίνακα 9.3.

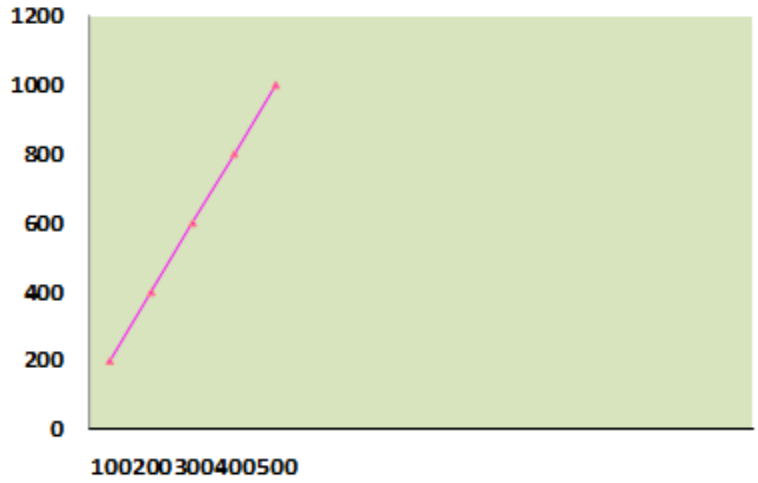
Για την αριθμητική ανάπτυξη, η εξίσωση διαφορών είναι $\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$, άρα έχει για $f(\alpha_n) = \alpha_n + d$ και η τετραγωνική έχει $f(\alpha_n) = \alpha_n + d + en$. Της γεωμετρικής ανάπτυξης, έχει αντίστοιχα $f(\alpha_n) = r\alpha_n$ και των μεικτών μοντέλων $f(\alpha_n) = r\alpha_n + d$. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις η συνάρτηση f είναι γραμμική, άρα και οι αντίστοιχες εξισώσεις διαφορών είναι γραμμικές, πρώτης τάξης, με τη γεωμετρική μόνο να είναι και ομογενής. Αντιθέτως, για την περίπτωση λογιστικής ανάπτυξης, η συνάρτηση $f(\alpha_n) = m(L - \alpha_n)\alpha_n$, είναι μια μη γραμμική εξίσωση διαφορών, ομογενής πρώτης τάξης, μιας και αν απλοποιηθεί ο τρόπος γραφής της με απαλοιφή παρενθέσεων παρατηρούμε ότι $f(\alpha_n) = mL\alpha_n - m(\alpha_n)^2$. Αυτή είναι μη γραμμική εξίσωση διαφορών, γιατί περιέχει το α_n στο τετράγωνο και άρα δεν μπορεί να πάρει τη μορφή του τύπου (10.2). Η μη γραμμικότητα των μοντέλων αυτών είναι που δημιουργεί το χάος.

Θα μπορούσε να γίνει *σύγχυση* στο σημείο αυτό μεταξύ των γραμμικών εξισώσεων διαφορών και των γραμμικών συναρτησιακών εξισώσεων. Είδαμε ότι στα γεωμετρικά μοντέλα, η εξίσωση διαφορών είναι $\alpha_{n+1} = r\alpha_n$ και δείχνει πως κάθε όρος της ακολουθίας εξαρτάται από τον προηγούμενο όρο της. Η αντίστοιχη συναρτησιακή εξίσωση είναι $\alpha_n = \alpha_0 r^n$, που δείχνει τη σχέση του α_n συνάρτηση του n (πώς ένα μοντέλο εξελίσσεται συν τω χρόνω) και όπως είδαμε στο κεφάλαιο 6 είναι εκθετικής μορφής, άρα μη γραμμική. Η γραφική παράσταση της συναρτησιακής εξίσωσης φαίνεται στο σχήμα 35, για $\alpha_0 = 100$ και $r = 2$.



Σχήμα 35
Πως εξαρτάται το α_n σε σχέση με το n

Στο σχήμα 36 υπάρχει το διάγραμμα με τη σχέση ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο διαδοχικούς όρους δεδομένων τιμών της ακολουθίας. Εδώ, αγνοούμε την τιμή του n, και επικεντρωνόμαστε στο πώς α_{n+1} εξαρτάται από το α_n. Για παράδειγμα, αν $\alpha_0 = 100$ το επόμενο θα είναι $\alpha_1 = 2x100 = 200$. Έτσι, έχουμε το σημείο (100, 200) και τα επόμενα (200, 400), (300, 600), κλπ (Kalman, 1997).



Σχήμα 36
Πως εξαρτάται το α_{n+1} σε σχέση με το α_n

Όπως δείχνουν τα δύο γραφήματα, ακόμη κι αν η εξίσωση διαφορών είναι γραμμική, το γράφημα που δείχνει πώς τα δεδομένα εξελίσσονται με το χρόνο (σχήμα 35) μπορεί να είναι μη γραμμικό.

Αν ένα μοντέλο έχει γραμμική ή μη γραμμική εξίσωση διαφορών έχει ιδιαίτερη σημασία για τη συζήτηση σχετικά με το χάος. Μοντέλα με γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεν είναι ΠΟΤΕ χαοτικές. Από όλα τα μοντέλα που έχουμε δει στην εργασία αυτή, *μόνο τα λογιστικά μοντέλα έχουν εξισώσεις διαφορών μη γραμμικές*, άρα μόνο αυτά μπορούν να οδηγήσουν στο χάος. Πώς μπορεί αυτό να συμβεί, και τι σημαίνει, θα συζητηθεί την επόμενη παράγραφο.

10.2. ΧΑΟΣ ΣΤΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Η μελέτη του χάους προϋποθέτει τη χρήση της «γλώσσας» των μαθηματικών. Τώρα πια, έχουμε μαθηματική ανάλυση που δείχνει για συγκεκριμένα μοντέλα ότι το χάος είναι αναπόφευκτο. Για αυτά τα μοντέλα, ακόμη και τα πιο μικρά σφάλματα στις παραμέτρους και στις αρχικές τιμές θα οδηγήσουν σε πολύ ανακριβείς προβλέψεις. Και αφού αληθινές μετρήσεις πάντα περιλαμβάνουν κάποια λάθη, δεν μπορούμε να εμπιστευθούμε τις προβλέψεις που προκύπτουν από τα μοντέλα αυτά. Για να καταλάβουμε την επίδραση του χάους θα εξετάσουμε το λογιστικό παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου για τον πληθυσμό των ψαριών σε μια λίμνη για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου m (Kalman, 1997).

Στο κεφάλαιο 9 μελετήσαμε τα λογιστικά μοντέλα μέσα από το παράδειγμα του πληθυσμού των ψαριών σε μια λίμνη. Έτσι, στον πληθυσμό π_n των ψαριών n χρόνια μετά, αντιστοιχεί η εξίσωση διαφορών:

$$\pi_{n+1} = 0{,}000025(90.000 - \pi_n)\pi_n \qquad \textbf{(10.3)}$$

Για ευκολία των πράξεων, αλλάζουμε το 90.000 με 100.000 και τη μονάδα μέτρησης των ψαριών από μονάδες σε εκατοντάδες χιλιάδες θέτοντας $\pi_n = 100.000\alpha_n$, με αποτέλεσμα η εξίσωση **(10.3)** να μετατραπεί σε:

$$100.000\alpha_{n+1} = 0,000025(100.000 - 100.000\alpha_n)100.000\alpha_n \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 0,000025(100.000 - 100.000\alpha_n)\alpha_n \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 2,5(1 - \alpha_n)\alpha_n \qquad \textbf{(10.4)}$$

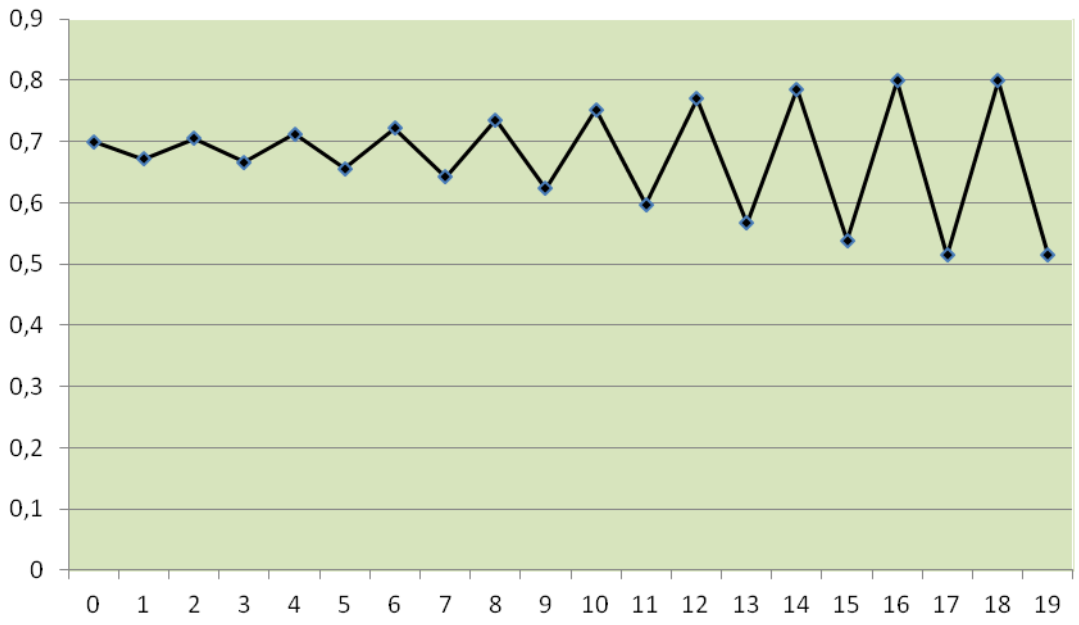
Η τελευταία εξίσωση δίνει τον πληθυσμό των ψαριών σε μια λίμνη σε εκατοντάδες χιλιάδες που σύμφωνα με τη γενική μορφή των λογιστικών μοντέλων $\alpha_{n+1} = m(L - \alpha_n)\alpha_n$, έχει m = 2,5 και L = 1. Αφού το mL = 2,5, ισχύει 1 < mL < 3 άρα το μοντέλο θα σταθεροποιηθεί μελλοντικά στον πληθυσμό $\alpha_n = L - 1/m = 0,6$, δηλαδή, στα π_n = 100.000x0,6 = 60.000 ψάρια (Kalman, 1997).

Μέσα από το λογιστικό αυτό μοντέλο που περιγράφεται όπως είπαμε από μια μη γραμμική εξίσωση διαφορών, αλλάζοντας μόνο την παράμετρο m (αφού για L = 1, mL = m), θα εξερευνήσουμε τον τρόπο που προκύπτει το χάος. Για m < 3, το μοντέλο τελικά θα σταθεροποιηθεί. Για m > 4, το μοντέλο μπορεί να οδηγήσει σε μη έγκυρα αποτελέσματα. Θα ενδιαφερθούμε για το τι συμβαίνει από αν 3 < m < 4.

<u>Παράδειγμα 1^{ο}</u>. Αν m = 3,2 τι θα γίνει στο μέλλον για τον πληθυσμό των ψαριών; Αν ο αρχικός πληθυσμός είναι π_0 = 70.000 ψάρια θα έχουμε αντίστοιχα α_0 = 0,7. Τα δεδομένα του πληθυσμού φαίνονται στον πίνακα 10.1 και το διάγραμμα στο σχήμα 37 για τα 20 πρώτα χρόνια.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
α_n	0,7	0,672	0,705	0,666	0,712
n	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
α_n	0,656	0,722	0,642	0,735	0,623
n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
α_n	0,752	0,597	0,770	0,567	0,786
n	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
α_n	0,538	0,799	0,514	0,799	0,514

Πίνακας 10.1
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου με m = 3,2 και α_0 = 0,7



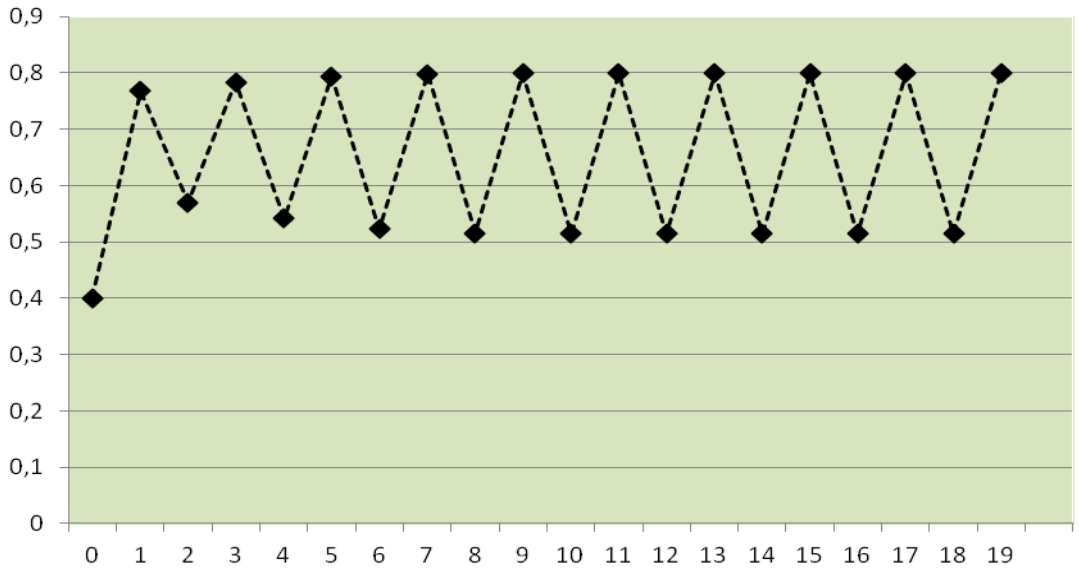
Σχήμα 37
Γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,2 και α_0 = 0,7 (Kalman, 1997).

Ξεκινώντας με αρχικό πληθυσμό α_0 = 0,7, αρχικά οι διακυμάνσεις στον πληθυσμό μεγαλώνουν, αλλά μετά από 15 χρόνια σταθεροποιούνται σε κανονικά επαναλαμβανόμενο πρότυπο με υψηλότερο τα 0,799 στα άρτια χρόνια και χαμηλότερο τα 0,514 στα περιττά χρόνια.

Στην περίπτωση που π_0 = 40.000 είναι α_0 = 0,4, ο αντίστοιχος πίνακας 10.2 των δεδομένων με το γράφημά τους στο σχήμα 38 παρουσιάζονται παρακάτω.

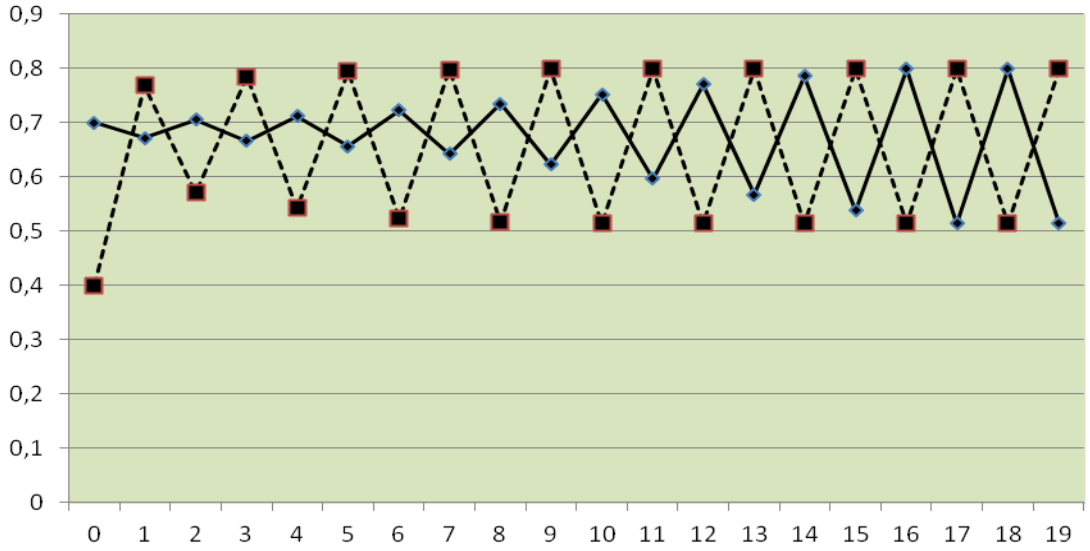
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
α_n	0,4	0,768	0,570	0,784	0,542
n	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
α_n	0,794	0,523	0,798	0,516	0,799
n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
α_n	0,514	0,799	0,514	0,799	0,514
n	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
α_n	0,799	0,514	0,799	0,514	0,799

Πίνακας 10.2
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου με m = 3,2 και α_0 = 0,4



Σχήμα 38
Γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,2 και α_0 = 0,4

Και σε αυτό το μοντέλο παρατηρείται το ίδιο πρότυπο διακύμανσης με εκείνο όπου α_0 = 0,7 που όμως σταθεροποιείται ανάμεσα σε δύο άλλες τιμές. Μετά από περίπου 6 χρόνια, ο πληθυσμός μεταβάλλεται ανάμεσα στο 0,799 και 0,514. Για άλλη μια φορά είναι εύκολο να γίνουν μελλοντικές προβλέψεις για τον πληθυσμό. Επίσης, η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του πληθυσμού στο μοντέλο δεν εξαρτάται από την αρχική τιμή του. Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούν να παρατηρηθούν καλύτερα αν φτιάξουμε το κοινό γράφημα και για τις δύο αρχικές τιμές του m = 3,2 στο σχήμα 39 (Kalman, 1997).



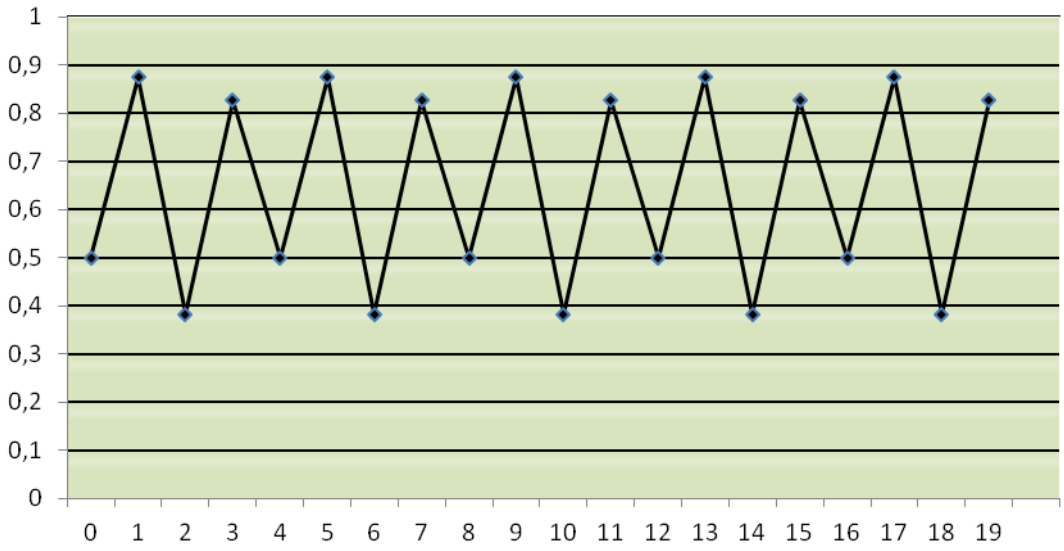
Σχήμα 39
Κοινό γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,2 με α_0 = 0,7 και α_0 = 0,4

Μέχρι στιγμής, στο παράδειγμα που μελετήσαμε για m = 3,2 είδαμε ότι ο πληθυσμός κυμαίνεται ανάμεσα σε 2 σταθερές τιμές και μπορούν να γίνουν σημαντικές προβλέψεις για τον τρόπο που μεγαλώνει ένας πληθυσμός σε ένα μοντέλο. Αυτές οι καταστάσεις δεν είναι αυτό που θα λέγατε χαοτικές. Αλλά καθώς δοκιμάζουμε ολοένα και υψηλότερες τιμές του m, το μοντέλο ξεκινάει να αλλάζει (Kalman, 1997).

Παράδειγμα 2^{ο}. Για m = 3,5, παρατηρούμε μια νέα συμπεριφορά του μοντέλου τόσο για $\alpha_0 = 0,5$ όσο και για $\alpha_0 = 0,7$. Για καθένα από τα α_0 φτιάχνεται ο πίνακας 10.3 και 10.4 καθώς και τα σχήματα 40 και 41 αντίστοιχα.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
α_n	0,5	0,875	0,383	0,827	0,5
n	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
α_n	0,875	0,383	0,827	0,5	0,875
n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
α_n	0,383	0,827	0,5	0,875	0,383
n	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
α_n	0,827	0,5	0,875	0,383	0,827

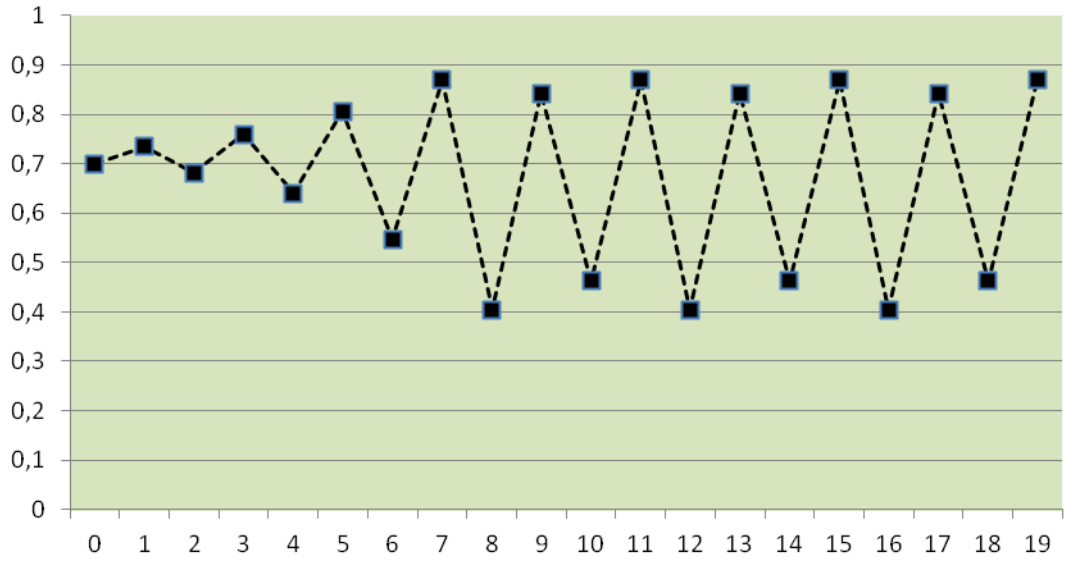
Πίνακας 10.3
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου με m = 3,5 και α_0 = 0,5



Σχήμα 40
Γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,5 και α_0 = 0,5

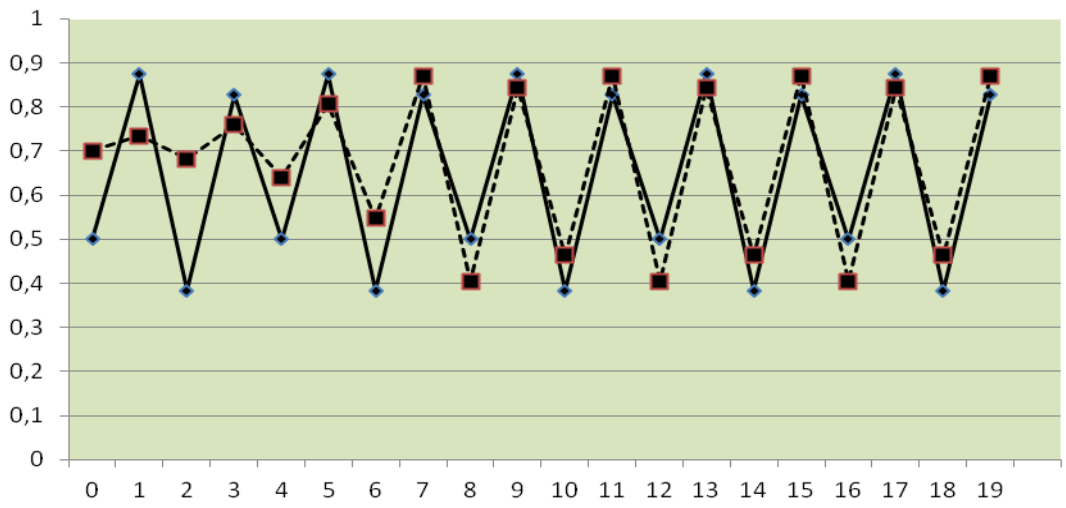
n	0	1	2	3	4
α_n	0,7	0,735	0,682	0,759	0,640
n	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
α_n	0,806	0,547	0,870	0,404	0,843
n	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
α_n	0,463	0,870	0,404	0,843	0,463
n	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
α_n	0,870	0,404	0,843	0,463	0,870

Πίνακας 10.4
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου με m = 3,5 και α_0 = 0,7



Σχήμα 41
Γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,5 και α_0 = 0,7

Αυτή τη φορά ο πληθυσμός ακολουθεί ένα πρότυπο κύμανσης ανάμεσα σε 4 σταθερές τιμές (0,5, 0,875, 0,383, 0,827, για m = 0,5) και (0,870, 0,404, 0,843, 0,463, για m = 0,7), κάτι που το κάνει πιο περίπλοκο από το προηγούμενο. Υπάρχει ακόμη μια κανονικότητα σε αυτό το πρότυπο, άρα δεν είναι χαοτικό, με τον αρχικό πληθυσμό να έχει λίγη επίδραση στη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του μοντέλου. Και οι 4 τιμές για α_0 = 0,5 δεν ταυτίζονται αυτή τη φορά με τις αντίστοιχες για α_0 = 0,7, όπως συνέβη για m = 3,2. Το κοινό τους διάγραμμα απεικονίζεται στο σχήμα 42 (Kalman, 1997).



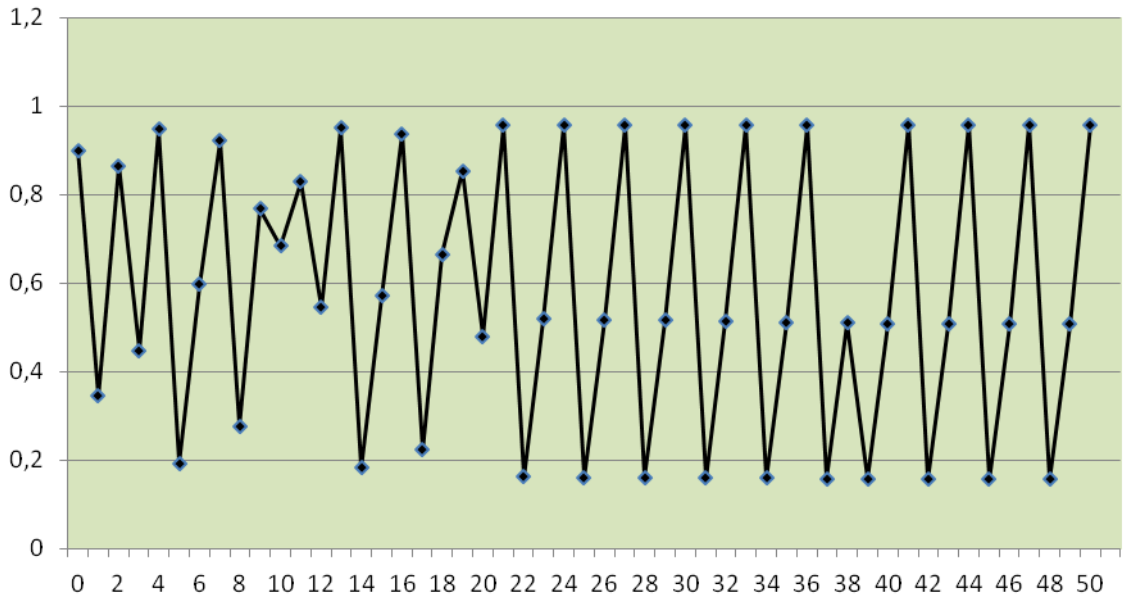
Σχήμα 42
Κοινό γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,5 με α_0 = 0,5 και α_0 = 0,7

Ως τώρα φαίνεται πως όσο το m γίνεται μεγαλύτερο, το πρότυπο του μοντέλου γίνεται περιπλοκότερο. *Υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η συμπεριφορά είναι τόσο περίπλοκη που όλα τα πρότυπα καταρρέουν*. Στο σημείο αυτό, μικρές διαφορές στο m έχουν μεγάλο αντίκτυπο στη συμπεριφορά του μοντέλου και στο σημείο αυτό παρουσιάζεται το χάος. Για να το δείξουμε αυτό, θα εξετάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα, για m = 3,8295.

Παράδειγμα 3°. Για m = 3,8295, θα υπολογίσουμε τα δεδομένα του πληθυσμού με αρχική τιμή α_0 = 0,9000 (90.000 ψάρια) και α_0 = 0,9001 (90.010 ψάρια) αντίστοιχα για 25 χρόνια. Έτσι, προκύπτουν οι πίνακες 10.5, 10.6 και τα σχήματα 43, 44 αντίστοιχα.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
α_n	0,9000	0.3447	0.8650	0.4472	0,9467	0,1932	0,5969
n	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
α_n	0,9214	0,2773	0,7674	0,6836	0,8283	0,5446	0,9498
n	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
α_n	0,1826	0,5716	0,9377	0,2237	0,6650	0,8531	0,4799
n	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
α_n	0,9558	0,1618	0,5194	0,9560	0,1611	0,5175	0,9562
n	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
α_n	0,1604	0,5157	0,9564	0,1597	0,5139	0,9566	0,1590
n	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**
α_n	0,5121	0,9568	0,1583	0,5102	0,1576	0,5084	0,9571
n	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
α_n	0,1572	0,5074	0,9572	0,1569	0,5066	0,9572	0,1569
n	**49**	**50**					
α_n	0,5066	0,9572					

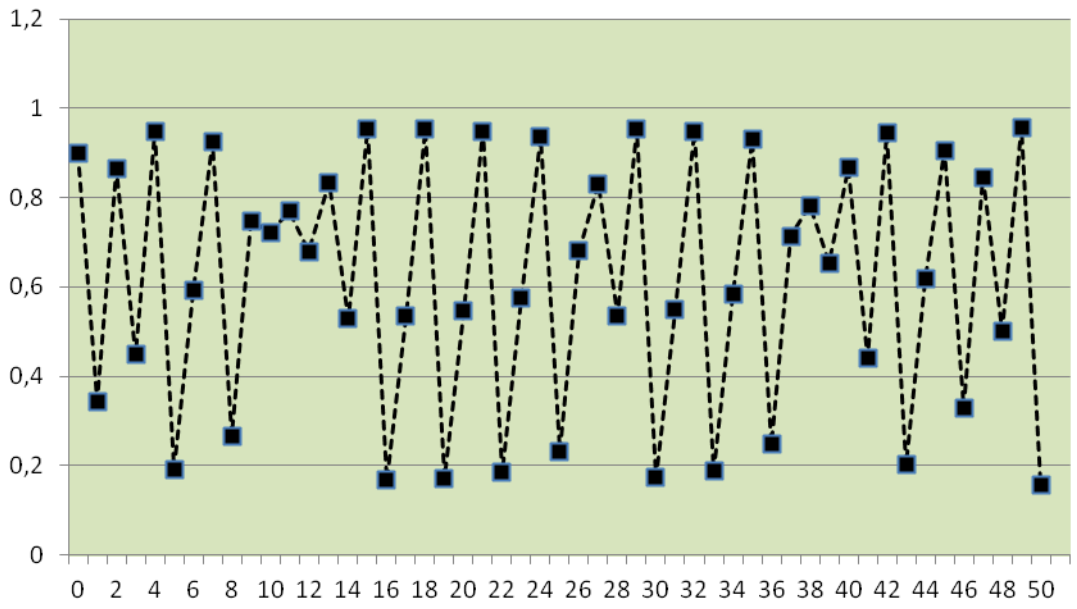
Πίνακας 10.5
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου με m = 3,8295 και α_0 = 0,9000



Σχήμα 43
Γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,8295 και α_0 = 0,9000

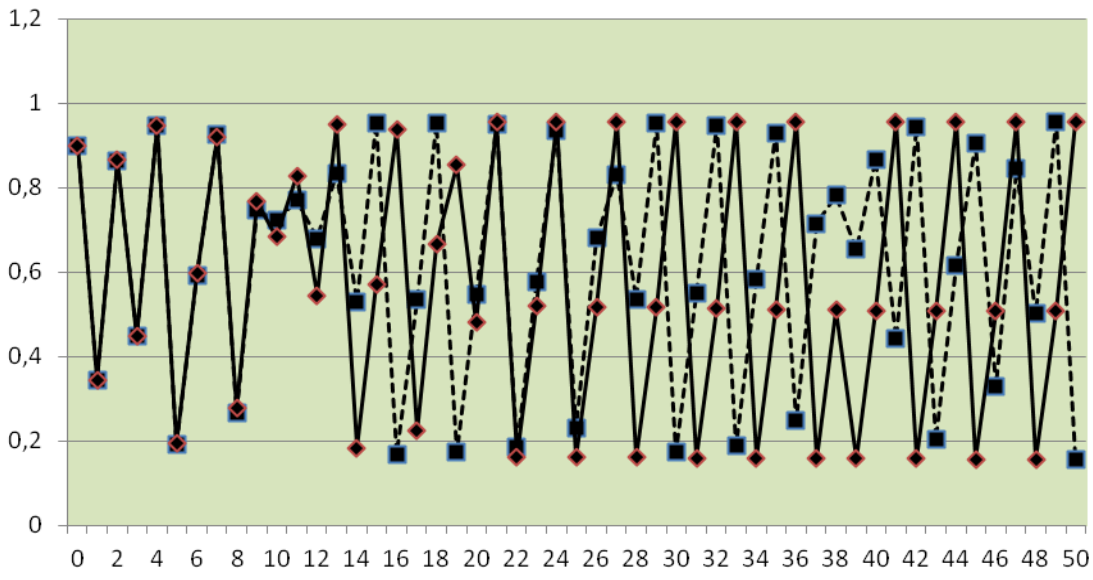
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
α_n	0,9001	0,3443	0,8645	0,4486	0,9473	0,1912	0,5922
n	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
α_n	0,9248	0,2663	0,7482	0,7215	0,7695	0,6792	0,8344
n	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
α_n	0,5291	0,9541	0,1677	0,5345	0,9528	0,1722	0,5459
n	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
α_n	0,9493	0,1843	0,5757	0,9354	0,2314	0,6811	0,8318
n	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
α_n	0,5358	0,9525	0,1733	0,5486	0,9483	0,1877	0,5839
n	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**
α_n	0,9304	0,2480	0,7142	0,7817	0,6535	0,8671	0,4413
n	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
α_n	0,9442	0,2018	0,6168	0,9051	0,3289	0,8453	0,5008
n	**49**	**50**					
α_n	0,9574	0,1562					

Πίνακας 10.6
Δεδομένα λογιστικού μοντέλου με m = 3,8295 και α_0 = 0,9001



Σχήμα 44
Γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,8295 και α_0 = 0,9001

Οι σχέσεις των δύο μοντέλων φαίνονται στο κοινό διάγραμμά τους στο σχήμα 45 (Kalman, 1997).



Σχήμα 45
Κοινό γράφημα δεδομένων λογιστικού μοντέλου με m = 3,5 με α_0 = 0,5 και α_0 = 0,7

Αρχικά, τα δύο γραφήματα δείχνουν πως για περίπου 10 χρόνια τα πρότυπα είναι ίδια. Αλλά στη συνέχεια διαχωρίζονται τόσο ώστε να μην υπάρχει κάποιο κοινό πρότυπο που να δίνει μακροπρόθεσμα συμπεράσματα για τον πληθυσμό, αλλά ούτε και μεμονωμένο πρότυπο για καθένα από τα μοντέλα. Αυτό είναι ένα *χαοτικό*

μοντέλο, γιατί απλά δεν υπάρχει πρότυπο που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθεί το μέλλον του μοντέλου.

Επιπλέον στην περίπτωση αυτή, σε αντίθεση με τις προηγούμενες που μελετήσαμε, μια πολύ μικρή αλλαγή στον αρχικό πληθυσμό (από 0,9000 σε 0,9001) οδηγεί σε εντελώς διαφορετικά συμπεράσματα για τον πληθυσμό. Αυτό αναφέρεται ως *επίδραση της πεταλούδας* και στηρίζεται στην ιδέα πως μια πεταλούδα στο Τόκιο μπορεί να αλλάξει τον προβλεπόμενο καιρό στη Νέα Υόρκη, δείχνοντας πόσο ευαίσθητο είναι το μοντέλο σε μικρές αλλαγές των παραμέτρων. Μπορούμε να δούμε την επίδραση της πεταλούδας στο μοντέλο του πληθυσμού των ψαριών, όπου η επίδραση των 10 επιπλέον ψαριών στο μοντέλο δίνει εντελώς διαφορετική πρόβλεψη πληθυσμού μετά από 10 χρόνια (Kalman, 1997).

Πρέπει να αναφερθούν δύο σημαντικές συνέπειες της επίδρασης της πεταλούδας. Πρώτον, δείχνει πως είναι *αδύνατη η μακροπρόθεσμη πρόβλεψη του πραγματικού πληθυσμού* σε αντίθεση με του μοντέλου. Ανεξάρτητα από το πόσο ακριβές μπορούμε να κάνουμε το μοντέλο, θα υπάρχουν ελαφρά σφάλματα στις μετρήσεις μας. Δεύτερον, δείχνει πως είναι *αδύνατη η πρόβλεψη προτύπων στο μοντέλο για κάθε αρχική τιμή.*

Η μελέτη του χάους είναι σημαντική γιατί δεν ανακύπτει μόνο στο μοντέλο λογιστικής ανάπτυξης για τον πληθυσμό των ψαριών, αλλά σε πολλά άλλα είδη μοντέλων. Το ότι στο χάος δεν υπάρχει κανόνας για μελλοντικές προβλέψεις πληθυσμών, δεν σημαίνει πως δεν υπάρχει κανένας κανόνας γενικά. Φαίνεται να υπάρχει ένα είδος τάξης στο χάος, που μας δίνει τη δυνατότητα να προβλέψουμε αν ένα σύστημα θα γίνει χαοτικό, και σε κάποιες περιπτώσεις, τι να κάνουμε για να το αποτρέψουμε.

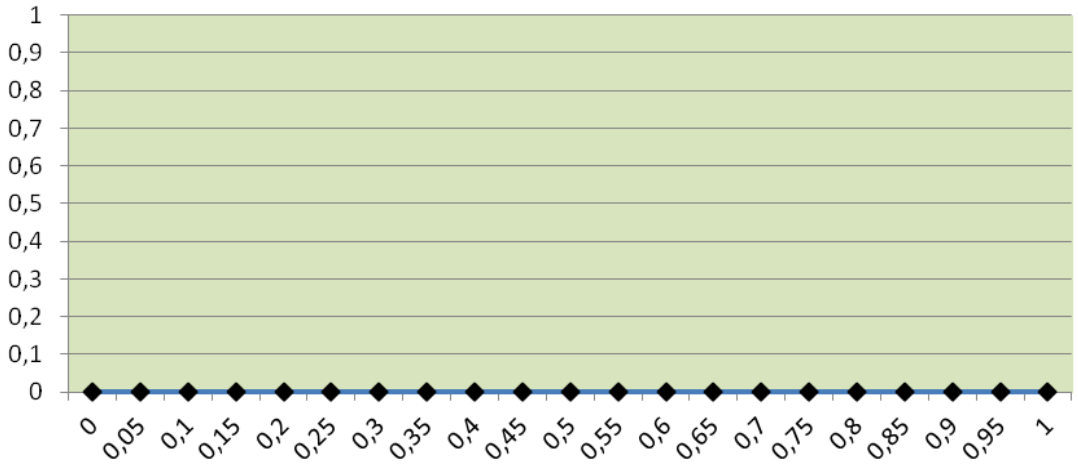
10.3. Η ΤΑΞΗ ΣΤΟ ΧΑΟΣ

Παρόλο που στα χαοτικά λογιστικά μοντέλα δεν υπάρχει πρότυπο για μελλοντική πρόβλεψη της συμπεριφοράς τους, εντούτοις μέσω ενός καινούργιου γραφήματος αναδεικνύεται και μπορεί να μελετηθεί ένα είδος τάξης. Ενώ όλα τα προηγούμενα γραφήματα αναφέρονταν σε σταθεροποιημένες τιμές παραμέτρων m, το νέο αυτό γράφημα είναι αποτέλεσμα πολλών διαφορετικών τιμών του m και δίνει πληροφορίες σχετικά με το αν και πότε εμφανίζεται το χάος στα λογιστικά μοντέλα.

Το νέο γράφημα περιλαμβάνει ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων που στον οριζόντιο άξονα παίρνει τιμές η παράμετρος m και στον κατακόρυφο άξονα η συμπεριφορά του πληθυσμού μακροπρόθεσμα. Η γραφική παράσταση αυτή ονομάζεται *διάγραμμα διακλαδώσεων (detailed graph) ή διάγραμμα τροχιάς* (Καλογερόπουλος, 2000). Θα θυμηθούμε ξανά τα παραδείγματα του πληθυσμού των ψαριών που χρησιμοποιήσαμε στην παράγραφο 10.3 και θα φτιάξουμε για αυτά τα δεδομένα το διάγραμμα διακλαδώσεων βήμα βήμα. Θα μελετήσουμε τις συνεχώς αυξανόμενες τιμές του m και πως αυτές κάνουν ένα λογιστικό μοντέλο να μεταβαίνει από μη χαοτικές σε χαοτικές καταστάσεις (Kalman, 1997).

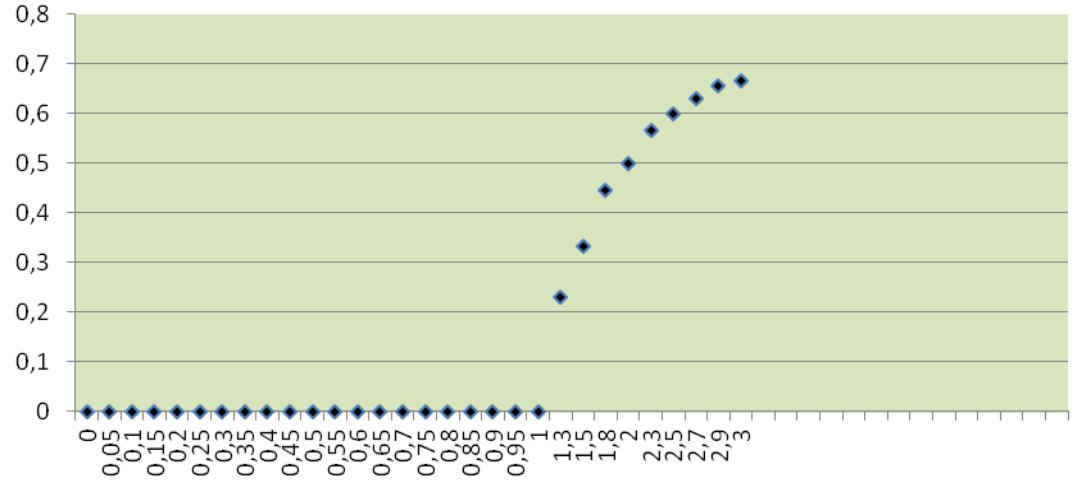
Ανακεφαλαιώνοντας ό,τι έχουμε πει ως τώρα σχετικά με την παράμετρο των λογιστικών μοντέλων m, θα λέγαμε πως όσο παραμένει μικρότερη ή ίση του 1,

μακροπρόθεσμα ο πληθυσμός τελικά θα εξαφανιστεί ($\alpha_n = 0$), με αποτέλεσμα στο διάγραμμα διακλαδώσεων για m < 1 ή m = 1, να δημιουργείται μια ευθεία γραμμή σημείων που ανήκει στον οριζόντιο άξονα των m (σχήμα 46).



Σχήμα 46
Διάγραμμα διακλαδώσεων για m ≤ 1

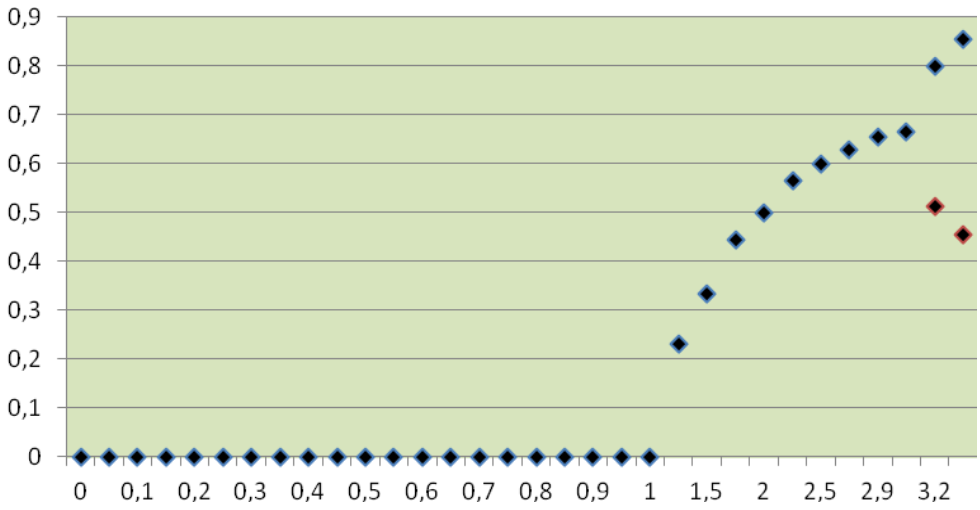
Για τιμές του m να κυμαίνονται από 1 έως 3, ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί σε μια συγκεκριμένη μη μηδενική τιμή (την L – 1/m). Για παράδειγμα, με L = 1, αν m 2,5, m = 2,6 ή m = 2,9, τότε, οι μελλοντικές σταθερές τιμές του πληθυσμού είναι αντίστοιχα: 0,6, 0,61538462 και 0,65517241. Τότε, το διάγραμμα, για m από 1 έως 3, θα σχηματίζει μια αύξουσα καμπύλη γραμμή (σχήμα 47) (Kalman, 1997).



Σχήμα 47
Διάγραμμα διακλαδώσεων για m < 3

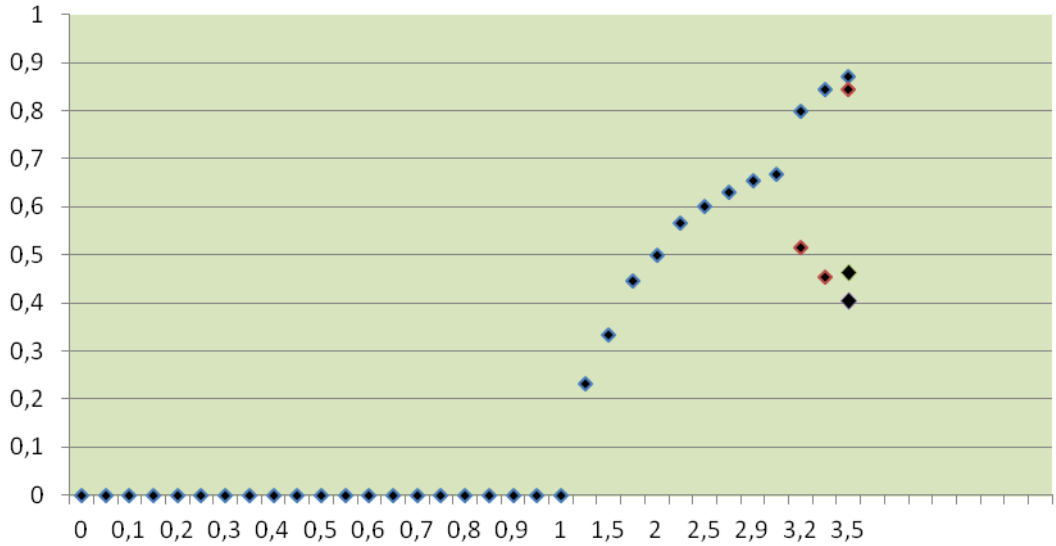
Αν τώρα το m πάρει τιμή λίγο μεγαλύτερη του 3, τότε το μοντέλο σταθεροποιείται σε δύο σταθερές τιμές. Αν m = 3,2 για οποιαδήποτε αρχική τιμή

είδαμε πως μελλοντικά ο πληθυσμός σταθεροποιείται στις τιμές 0,799 και 0,514. Στην περίπτωση που m = 3,4 θα βρούμε πάλι δύο τιμές περίπου 0,845 και 0,454. Όλα αυτά παρουσιάζονται στο σχήμα 48.



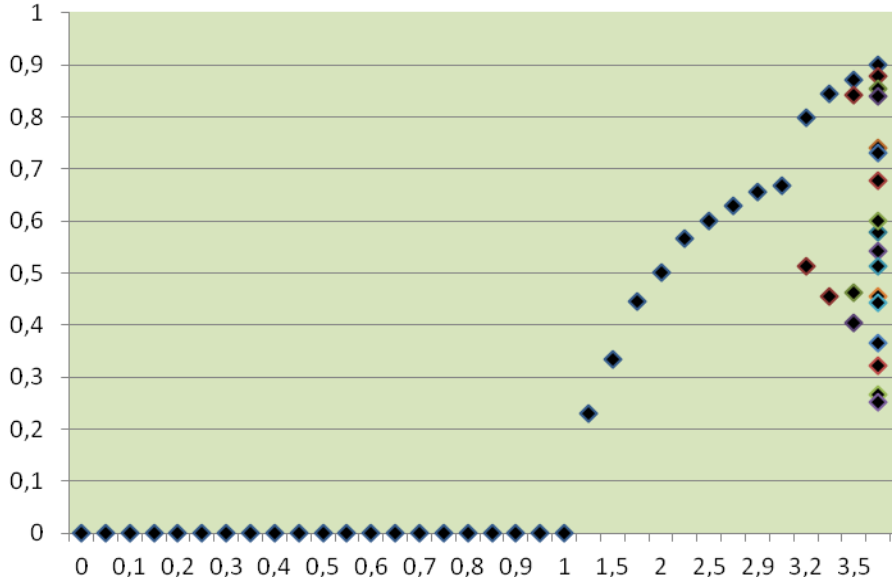
Σχήμα 48
Διάγραμμα διακλαδώσεων μέχρι m λίγο μεγαλύτερο του 3

Όταν το m αυξηθεί λίγο περισσότερο χωρίς όμως να ξεπερνά τον αριθμό 4, από δύο σημεία που ο πληθυσμός σταθεροποιείται μελλοντικά, τώρα προσεγγίζει τέσσερεις τιμές. Για m = 3,5 οι τιμές αυτές είναι περίπου 0,87, 0,843, 0,463, 0,404 και παρουσιάζονται στο σχήμα 49 (Kalman, 1997).



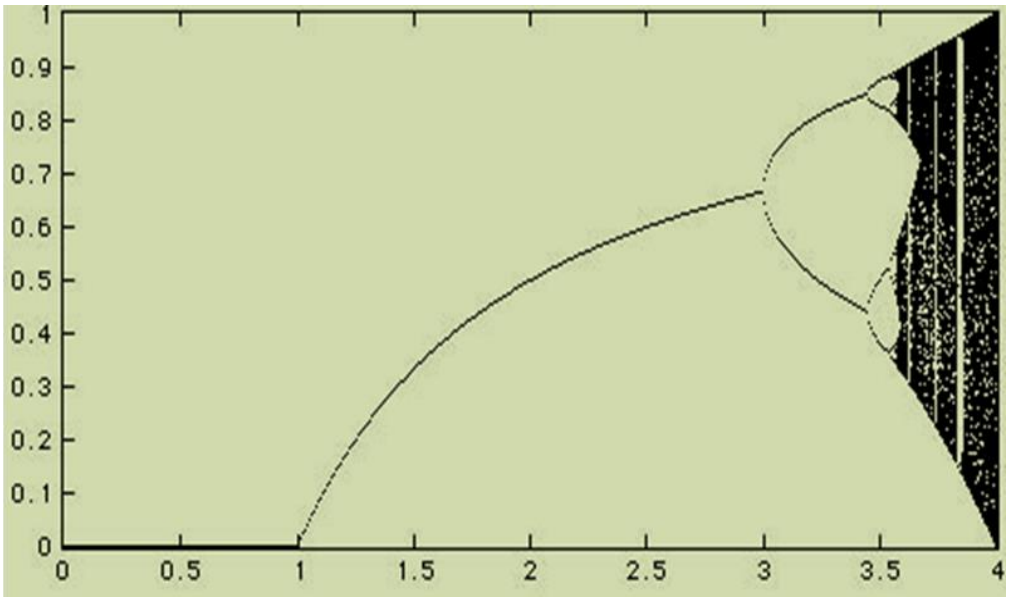
Σχήμα 49
Διάγραμμα διακλαδώσεων μέχρι m = 3,5

Όσο η τιμή του m μεγαλώνει κι άλλο και παίρνει την τιμή 3,8, δεν υπάρχουν μόνο μερικά σημεία ισορροπίας του μοντέλου (ένα, δύο ή τέσσερα όπως πριν), αλλά τα δεδομένα σημεία βρίσκονται διάσπαρτα στο μεγαλύτερο μέρος του διαστήματος 0,2 και 1 (σχήμα 50). Έτσι, *εμφανίζεται το χάος*, με αποτέλεσμα ακόμα και μετά από πάρα πολλά χρόνια ο πληθυσμός να μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, χωρίς τελικά να μπορεί να προβλεφθεί κάποια (Kalman, 1997).

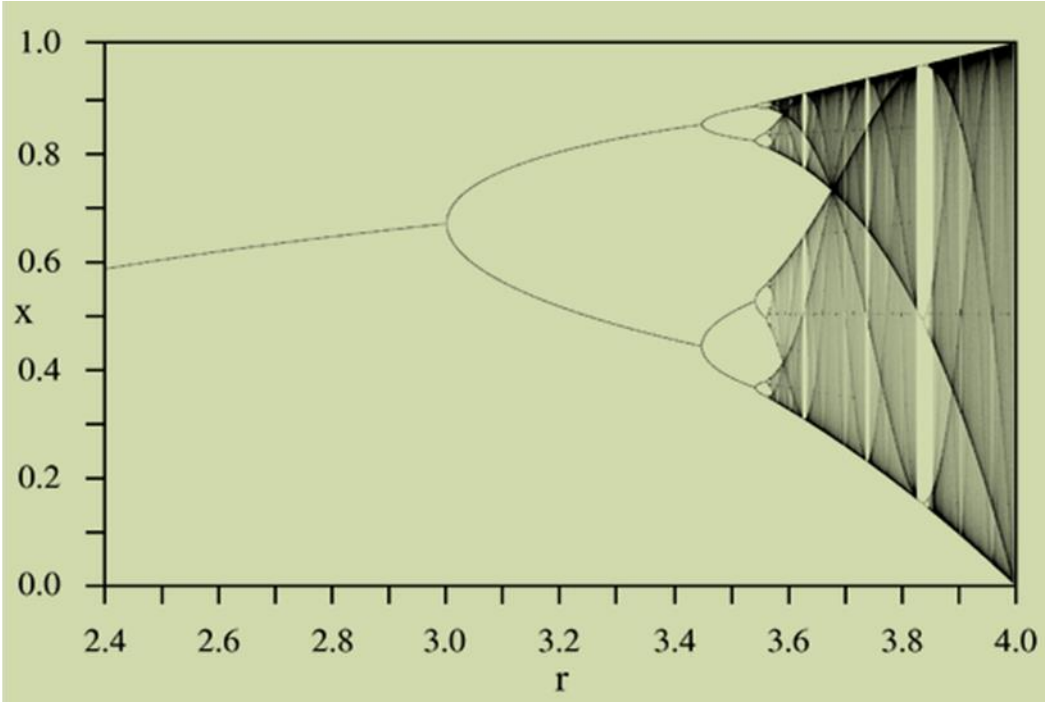


Σχήμα 50
Διάγραμμα διακλαδώσεων μέχρι m = 3,8

Στο σχήμα 51 φαίνεται ακόμα ένα διάγραμμα διακλαδώσεων για πολύ περισσότερες τιμές του m μέχρι την τιμή 4.



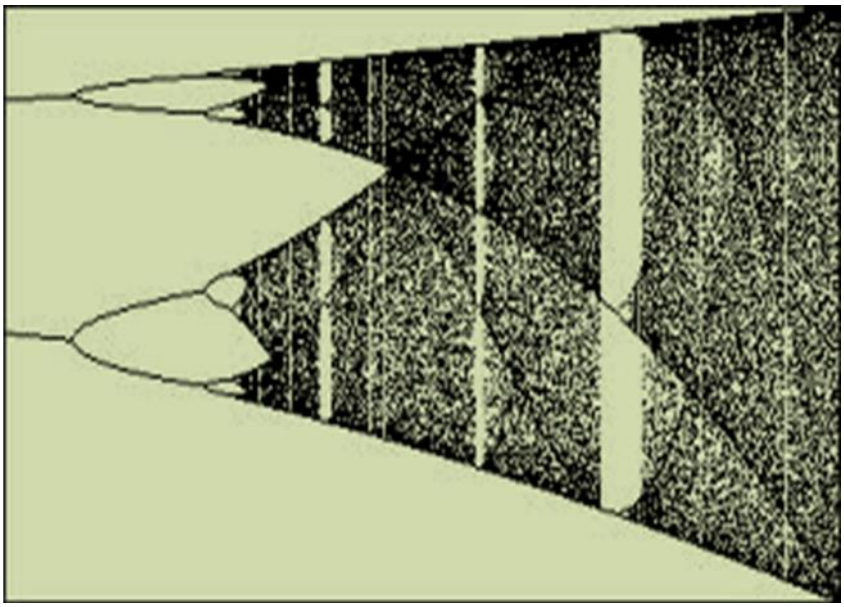
Σχήμα 50
Διάγραμμα διακλαδώσεων για διάφορες τιμές του m < 4



Σχήμα 52
Διάγραμμα διακλαδώσεων για διάφορες τιμές του 3< m < 4

Καθώς κοιτάμε το σχήμα 50, διακρίνουμε μια τάξη καθώς μεταβαίνουμε στο χάος. Αρχικά, μέχρι το m = 1, τα σημεία φτιάχνουν μια ευθεία γραμμή πάνω στον οριζόντιο άξονα που δείχνει ότι μακροπρόθεσμα ο πληθυσμός εξαφανίζεται. Στη συνέχεια, για 1 < m < 3, εμφανίζεται μια ομαλή ανοδική καμπύλη, αλλά στο m = 3 σχηματίζεται μια διακλάδωση με δύο άκρα που σημαίνει πως τα μοντέλα αυτά σταθεροποιούνται μεταξύ δύο τιμών. Αργότερα, κάθε μια από αυτές τις διακλαδώσεις χωρίζεται πάλι σε άλλες δύο, με συνέπεια τα μοντέλα σε αυτές τις περιπτώσεις να σταθεροποιούνται μελλοντικά μεταξύ τεσσάρων τιμών. Αν και δεν είναι απόλυτα εμφανές στο σχήμα, κάθε μια διακλάδωση χωρίζεται σε δύο άλλες, που αυτές με τη σειρά τους διαιρείται σε δύο άλλες, μέχρι που τελικά οι *καμπύλες εκφυλίζονται* σε ένα είδος *νέφους από σημεία*. Σε αυτό το σημείο προκύπτει το χάος και πέρα από αυτό υπάρχει μια μπερδεμένη λίστα με κάποιες μελλοντικές τιμές του πληθυσμού με καμία τάξη ή πρότυπο. Αντίθετα, πριν από αυτό το σημείο εμφάνισης του χάους, μόνο μερικές επαναλαμβανόμενες τιμές για τον πληθυσμό υπήρχαν που ακολουθούσαν ένα συγκεκριμένο πρότυπο (Kalman, 1997).

Για τιμές λοιπόν κοντά στο 4 μετά από την εμφάνιση χάους, φαίνεται στα λογιστικά μοντέλα να μην υπάρχει τάξη και κάποιο πρότυπο που να ακολουθούν μελλοντικά. Αλλά, αν μπορέσουμε να μεγεθύνουμε το μέρος του διαγράμματος κοντά στο 4, θα παρατηρήσουμε πως υπάρχει ένα *διαφορετικό πρότυπο*. Υπάρχει μια μικρογραφία χάους μέσα στο χάος (σχήμα 53).



Σχήμα 53
Διάγραμμα διακλαδώσεων για τιμές του m κοντά στο 4

Όταν συμβαίνει αυτό στο χάος λέγεται *αυτο-ομοιότητα* και όσο μεγεθύνουμε το διάγραμμα διακλαδώσεων και να δούμε κάτι που μοιάζει ακριβώς με το αρχικό διάγραμμα.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα πραγματικά προβλήματα σπάνια λύνονται με συνοπτική μαθηματική διαδικασία που οδηγεί σε καθαρή απάντηση, όπως τα μαθηματικά προβλήματα. Παρ' όλα αυτά, τα μαθηματικά είναι ένα ισχυρό εργαλείο για να μελετά κανείς πραγματικά προβλήματα.

Τα στοιχειώδη μαθηματικά μοντέλα υπήρξαν το κύριο θέμα της εργασίας που εκπονήθηκε. Αυτά περιγράφονται με διακριτές και συνεχείς συναρτήσεις, με τον κύριο όγκο της μελέτης μας να αφορά στην πρώτη κατηγορία. Έτσι, κάθε φορά ξεκινάμε με ένα διακριτό μοντέλο γύρω από μια ακολουθία (α_n). Υπάρχει μια απλή υπόθεση περιγραφής των όρων της ακολουθίας από τους προηγούμενούς της, που εκφράζεται στη συνέχεια αλγεβρικά με μια εξίσωση διαφορών. Κάθε τέτοια εξίσωση ανήκει σε μια κλάση εξισώσεων διαφορών που μπορεί να μελετηθεί με μια κοινή μεθοδολογία. Αφού αρχικά διατυπωθεί η οικογένεια των εξισώσεων διαφορών, προχωράμε στην ανάπτυξη των λύσεών τους και συνεχίζουμε με τη μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων που προκύπτουν.

Τα μοντέλα παρουσιάστηκαν διαδοχικά με αύξουσα σειρά πολυπλοκότητας, ξεκινώντας από τα αριθμητικά μοντέλα ως πιο απλά, που δίνουν τη σειρά τους στα τετραγωνικά, ακολουθούμενα από τα πολυωνυμικά και ρητά. Η γεωμετρική ανάπτυξη μελετά συνθετότερα μοντέλα που οδηγούν στα λογαριθμικά, όχι όμως περισσότερο περίπλοκα από τα μεικτά που έπονται. Τα λογιστικά μοντέλα θέτουν τον πήχη ακόμα πιο ψηλά. Η μελέτη κορυφώνεται με τη χαοτική συμπεριφορά που μπορεί να προκύψει στα λογιστικά μοντέλα.

Η ιδέα των μοντέλων προσεγγίστηκε μέσα από τις αριθμητικές, γραφικές και θεωρητικές μεθόδους. Η δύναμη της άλγεβρας να απαντά σε σημαντικές ερωτήσεις σχετικά με τα μοντέλα βρίσκεται πάντα στο προσκήνιο. Στη θεωρητική προσέγγισή τους πρέπει πρώτα να μπορούμε να βρούμε τη συναρτησιακή εξίσωση του προβλήματος, με μια διαδικασία βημάτων ρουτίνας. Έτσι, σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε εύκολα να προβλέψουμε τι θα συμβεί στο μέλλον ή πότε θα συμβεί κάτι ενδιαφέρον στο μέλλον.

Παρατηρώντας και συγκρίνοντας τις τρείς μεθόδους, μπορούμε να πούμε πως η μια συμπληρώνει την άλλη για την κατανόηση του προβλήματος. Η θεωρητική όμως, έχει μεγαλύτερη δύναμη και γενίκευση από τις άλλες δύο. Η συναρτησιακή εξίσωση είναι πιο βολική από την εξίσωση διαφορών για την απάντηση σε ερωτήσεις σχετικά με τη συμπεριφορά του μοντέλου. Επίσης και οι τρεις μέθοδοι έχουν κάποιους περιορισμούς, έτσι κάνουμε παραδοχές που αυτές είναι που μας επιτρέπουν να κάνουμε προβλέψεις.

Τα μοντέλα αριθμητικής ανάπτυξης είναι από τα απλούστερα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται όταν υποθέτουμε ότι δύο ποσότητες αλλάζουν με τέτοιον τρόπο, ώστε ο λόγος τους να παραμένει σταθερός ή αμετάβλητος. Μέσα από τα αριθμητικά μοντέλα οδηγηθήκαμε σε δύο επιπλέον σημαντικές ιδέες για την μαθηματική μοντελοποίηση: την αναλογική αιτιολόγηση και τα συνεχή μοντέλα. Χρησιμοποιώντας ως βάση το παράδειγμα του μοντέλου της

κατανάλωσης πετρελαίου, προχωρήσαμε στο μοντέλο των αποθεμάτων πετρελαίου και δείξαμε πως τα μοντέλα μπορούν να χτιστούν πάνω σε άλλα και με τον τρόπο αυτόν η διαδικασία συνεχίζει, οδηγώντας σε περισσότερο περίπλοκα μοντέλα.

Μελετήσαμε τα τετραγωνικά μοντέλα, ως συνέπεια της μη δυνατότητας να μοντελοποιηθούν κάποια παραδείγματα από την καθημερινότητά μας με αριθμητικά μοντέλα. Η εξίσωση διαφορών ($\alpha_{n+1} = \alpha_n + d + en$) της τετραγωνικής ανάπτυξης, έχει την ίδια γενική μορφή με της αριθμητικής ($\alpha_{n+1} = \alpha_n + d$), αλλά υπάρχει και ένα πολλαπλάσιο του n ως όρος. Ομοίως, στη συναρτησιακή ($\alpha_n = \alpha_0 + dn + e(n-1)n/2$) εξίσωση της τετραγωνικής ανάπτυξης υπάρχει ένας επιπλέον όρος, ένα πολλαπλάσιο του (n- 1)n. Δεν έχουν μόνο ομοιότητες τα δύο αυτά μοντέλα. Οι πρώτες διαφορές των αριθμητικών είναι ίσες, κάτι που τα τετραγωνικά το κάνουν στις δεύτερες. Ακόμη, στα τετραγωνικά μοντέλα η αναλογική αιτιολόγηση δεν ισχύει σε αντίθεση με τα αριθμητικά.

Στη συνέχεια, είδαμε πως τα πολυωνυμικά μοντέλα προσεγγιστικά αρκούν για να περιγράψουν τα μοντέλα τοπικά, καθώς και τα ρητά μοντέλα. Το σημαντικό που εμφανίζεται σε αυτές τις συναρτήσεις είναι η έννοια της ασύμπτωτης. Υπάρχουν ωστόσο παραδείγματα, που δεν μπορούν να προσεγγιστούν ούτε από πολυώνυμα, ούτε από ρητές συναρτήσεις, αλλά από γεωμετρικά μοντέλα. Αυτά όπως είδαμε, είναι άλλου τύπου μοντέλα. Ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών μοντέλων και αποτελούν εισαγωγή των εκθετικών μοντέλων.

Συγκρίνοντας τα γεωμετρικά με τα αριθμητικά μοντέλα μπορούμε να κάνουμε κάποιες βασικές παρατηρήσεις. Αρχικά, στην αριθμητική ανάπτυξη, μια μεταβλητή αυξάνεται ή μειώνεται κατά μια συγκεκριμένη ποσότητα, σε δεδομένη χρονική περίοδο, ενώ στη γεωμετρική ανάπτυξη, η μεταβλητή αυξάνεται ή μειώνεται κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό, σε δεδομένη χρονική περίοδο. Ακόμη, ενώ σε ένα μοντέλο αριθμητικό υπολογίζουμε κάθε νέα τιμή δεδομένων προσθέτοντας μια σταθερά στην προηγούμενη τιμή, στη γεωμετρική ανάπτυξη η αντίστοιχη πράξη που εκτελείται είναι αυτή του πολλαπλασιασμού. Υπάρχει και μια σημαντική ομοιότητα ανάμεσα στη γεωμετρική και στην αριθμητική ανάπτυξη. Ακολουθούν ένα όμοιο πρότυπο. Ξεκινούν με μια υπόθεση όπου ένα φαινόμενο θα αυξηθεί ή θα μειωθεί σε ίσες χρονικές περιόδους. Στη συνέχεια η υπόθεση αυτή θα οδηγήσει σε μια γραμμική εξίσωση διαφορών περιγράφοντας το πως κάθε δεδομένο εξαρτάται από τα προηγούμενα. Υπάρχει επίσης μια συναρτησιακή εξίσωση που δείχνει πως να υπολογίζουμε ένα δεδομένο χωρίς τη βοήθεια όλων των προηγούμενων. Στην αριθμητική ανάπτυξη, η συναρτησιακή εξίσωση είναι γραμμική και οδηγεί στη μελέτη γραμμικών εξισώσεων, ενώ στη γεωμετρική ανάπτυξη είναι εκθετική. Συχνά, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη συναρτησιακή εξίσωση ως συνεχές μοντέλο.

Για να απλοποιήσουμε και να αναλύσουμε τα εκθετικά μοντέλα χρησιμοποιήσαμε τη βοήθεια των λογαρίθμων. Τρεις σημαντικές εφαρμογές εξετάστηκαν: τα λογαριθμικά μοντέλα, οι λογαριθμικές κλίμακες και ο μετασχηματισμός δεδομένων.

Τα μεικτά μοντέλα ανήκουν σε μια κατηγορία πολύπλοκων μοντέλων έτσι, η προηγούμενη θεωρεία που βασίστηκε σε πιο απλά μοντέλα, τα γραμμικά και τα γεωμετρικά, δεν αρκεί για τη μελέτη τους. Τα μεικτά μοντέλα αποτελούν ένα

συνδυασμό αριθμητικών και γεωμετρικών μοντέλων που για να τα αντιμετωπίσουμε χρησιμοποιήσαμε τα γεωμετρικά αθροίσματα.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας μας, διαπιστώσαμε ότι το γεωμετρικό μοντέλο μακροπρόθεσμα, είναι μη ρεαλιστικό, γιατί αγνοεί εξωτερικούς παράγοντες που ασκούνται στο μέγεθος του πληθυσμού. Έτσι, το τροποποιήσαμε και δημιουργήσαμε ένα μη γραμμικό μοντέλο το λογιστικό. Λόγω της πολυπλοκότητάς του, σε αντίθεση με όλα τα προηγούμενα μοντέλα, δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί με μια συναρτησιακή εξίσωση. Η απουσία αυτή οδηγεί σε νέα φαινόμενα, όπως το χάος, κάτι που δεν παρατηρείται στα υπόλοιπα μοντέλα που παρουσιάστηκαν.

Συγκρίνοντας τα διαφορετικά είδη μοντέλων που έχουν γραμμική εξίσωση διαφορών, παρατηρούμε ότι όταν αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων τους, δεν αλλάζει σημαντικά η ποιοτική συμπεριφορά τους. Αντίθετα, στα λογιστικά μοντέλα που έχουν μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών, μια μικρή μεταβολή των παραμέτρων τους μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλες διαφορές στη μελλοντική συμπεριφορά του πληθυσμού, με αποτέλεσμα η δυνατότητα να κάνουμε προβλέψεις να καταρρέει. Έτσι, εμφανίζεται το χάος στα μαθηματικά.

Παρόλο που στα χαοτικά λογιστικά μοντέλα, είναι αδύνατη τόσο η μακροπρόθεσμη πρόβλεψη του πραγματικού πληθυσμού, όσο και η πρόβλεψη προτύπων στο μοντέλο για κάθε αρχική τιμή, η λέξη χάος στα μαθηματικά δεν είναι συνώνυμη με την λέξη αταξία όπως στην καθημερινή ζωή. Αντίθετα, όπως είδαμε στο χάος παρουσιάζεται ένα είδος τάξης που μελετήσαμε μέσα από το γράφημα διακλαδώσεων. Έτσι, μας δίνεται η δυνατότητα να προβλέψουμε αν ένα σύστημα θα γίνει χαοτικό και σε κάποιες περιπτώσεις τι να κάνουμε για να το αποτρέψουμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alder, M. (2001). *An introduction to Mathematical Modeling*, Heaven for books

Carrejo, D. & Marshall, J. (2007). *What is Mathematical Modeling? Exploring prospective teachers' use of experiments to connect mathematics to the study of motion.* Mathematics education research journal, 19, 45-76

Dangelmayr, G. & Kirby, M. (2005). *Mathematical Modeling a comprehensive introduction*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensee Humaine*, Peter Lang

Frigg, Romant &Hartmann, Stephan, (2012). *Models in Science, The Stanfored Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta*

Gleich J. (2008), *Chaos: The Making of a New Science*

Kalman, D. (1998). *Elementary Mathematical Models order aplenty and a glimpse of chaos, The mathematical association of America.*

Kaput, J. (1987a). Representation Systems and Mathematics. In Janvier, C. (ed). *Problems of Representation in the Learning of Mathematics (pp. 19-26).* Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum

Levins, R. (1966). *The strategy of model building in population biology*. Am. Sci.54:421-431

Morgan, M. (1999). *Learning from models*, Morgan & Morrison, 1999, 347-88

Ott, E. (1993). *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βοσνιάδου, Σ. (χ.χ.). L. Magnani N. J. Nersessian, *Mental Models in conceptual Development, Model-based reasoning: science, technology, values*, eds., kluwer academic press

Γαγάτσης, Α. & Δημητρίου, Α. & Παναούρα, Ρ. (2003), *Η ανάπτυξη της ικανότητας λύσης προβλήματος και αυτορύθμισης της γνωστικής συμπεριφοράς, Ερευνητικό πρόγραμμα ΑΛΠΑΣ*, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Γαγάτσης, Α. & Σπύρου, Π. (χ.χ.). *Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη Νοημοσύνη και Μάθηση*, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δαμιανού, Χ. & Κούτρας, Μ. (2003), *Εισαγωγή στη Στατιστική* (Ι), Αθήνα: Συμμετρία

Καλογερόπουλος, Γ. (2000), *Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές (σημειώσεις παραδόσεων)*

Καλογερόπουλος, Γ. (2011), *Πρακτικά, Μαθηματική Μοντελοποίηση: Εφαρμογές στις Επιστήμες την Τεχνολογία και την Εκπαίδευση*, 28^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας.

Καραγεώργου, Σ. (2000), *Πτυχιακή εργασία Εκμαγεία κινητών κολοβωμάτων*, επιμέλεια, τεχνολογικό εκπαιδευτικό ίδρυμα Αθήνας, Σχολή επαγγελμάτων υγείας και πρόνοιας τμήμα οδοντοτεχνικής

Κυνηγός, Χ. (1996), *Μαθηματική εκπαίδευση πρόχειρες σημειώσεις του μαθήματος, παιδαγωγικά*, επιμέλεια Χρονοπούλου Π.

Παυλοπούλου, Κ. (2005) , *Διδακτική των Μαθηματικών Ι, Τα συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης σύμφωνα με τη θεωρία του R. Duval*

Σπύρου, Π. (2006), *Michel Henry, Διδακτική των μαθηματικών Ι, Παρουσίαση της διδακτικής με στόχο την επιμόρφωση των διδασκόντων*, Πανεπιστήμιο Αθηνών τμήμα μαθηματικών

Σχολικά βιβλία Γυμνασίου, Λυκείου του Οργανισμού Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων Αθήνας

Στρατής, Ι. (2011), *Πρακτικά, Μαθηματική Μοντελοποίηση: Εφαρμογές στις Επιστήμες την Τεχνολογία και την Εκπαίδευση*, 28^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας.

ΑΝΑΚΤΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

http://mathworld.wolfram.com

http://plato.stanford.edu/entries/models-science/

www.businessdictionary.com

www.chaos.umd.edu/research.html

www.definitions.net

www.epixeiro.gr

www.geology.upatras.gr/filew/shmioseis/12102/ATT00026.pdf

www.heavenForBooks.com

www.parganews.com/ ένας-οδηγός-του-χάους-για-αρχαρίους-ει/#

www.thalesandfriends.org