ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ-ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Επιβλέπων καθηγητής

Ευστάθιος Γιαννακούλιας

Λάττας Κυριάκος

Δ 200706

Αθήνα Ιούνιος 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια για το θέμα της παρούσας διπλωματικής, την προθυμία του να τεθεί επιβλέπων καθώς και την αμέριστη υποστήριξη που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ. Διονύσιο Λάππα και κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για την διαρκή εκπαιδευτική υποστήριξη σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και την τιμή που μου έκαναν να τεθούν μέλη της τριμελούς επιτροπής.

Ευχαριστίες απευθύνω επίσης προς όλους τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού καθώς και τους συμφοιτητές μου για την πολύπλευρη και επικοδομητική συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στην σύντροφό μου Μαρία, την κόρη μου Δήμητρα καθώς και στους γονείς μου Ανδρέα και Μαρία.

Κ.Α.Λ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ…….....6

2.ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ…….....8

Αρχαία Αίγυπτος……..……..……...10

Αρχαία Βαβυλώνα……..…….....11

3.ΠΡΟΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ……..…….....12

Θαλής ο Μιλήσιος……..……...…….……...13

Αναξίμανδρος…….....…...15

Οινοπίδης ο Χίος…….……16

Ευκλείδης……..17

4.ΕΛΛΗΝΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ…...…….…….…..18

Αρίσταρχος ο Σάμιος…….…….....…….20

Αρχιμήδης ο Συρακούσιος…….……....24

Ερατοσθένης ο Κυρηναίος……..…….…….…25

5.ΘΕΜΕΛΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΤΡΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ…….28

Ίππαρχος……...……..…...28

Μενέλαος……...…....30

Κλαύδιος Πτολεμαίος……..……..……31

6.Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΣ ΤΟΥ ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ……...32

7.ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ-ΔΥΟ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ……....39

8.ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟ ΩΣ ΤΟΝ 5° Μ.Χ. ΑΙΩΝΑ……..……...48

9.Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΙΣ ΙΝΔΙΕΣ……49

Περί ημιχορδής……..……50

10.Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΥΣ ΑΡΑΒΕΣ……51

11.Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ ΤΟ ΜΕΣΑΙΩΝΑ…….…….……..53

Η συμβολή του Βυζαντίου…….54

12.ΟΙ ΚΥΡΙΕΣ ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ…….……..58

13.Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΥΤΙΚΗ ΕΥΡΩΠΗ…….....63

14.ΤΟ ΙΝΔΟΑΡΑΒΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΝΕΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ……64

Gerardus Cremoniensis……..66

Leonardo Pisano (Fibonacci)……66

George von Peuerbach……...66

Johann Muller (Regiomontanus)……...……66

Nicolaus Copernicus...……..…74

15.ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ…….....80

Ονομασία και Σύμβολα……..80

Τριγωνομετρικοί Πίνακες……..80

16.ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ……..82

Η Τριγωνομετρία του Viete……...82

Η Τριγωνομετρία στο Ηνωμένο Βασίλειο……..……...89

Abraham de Moivre……...93

17.ΧΑΡΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΓΗΣ……...……99

18.Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ……..……...……..110

19.ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ……...…….121

20.ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ(EULER-COTES)……133

21.Ο FOURIER ΚΑΙ Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ…….……..144

22.ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ…….…...……150

Ορισμός με τη βοήθεια Τριγωνομετρικού κύκλου……..……150

Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με Δυναμοσειρές……..……..162

Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με με τη βοήθεια του ολοκληρώματος $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dt$ ……168

Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με με τη βοήθεια της αντίστροφης συνάρτησης τοξεφx=$\tan^{-1}$x……..……174

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ……..……..……181

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..……190

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..……..……...194

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Η Τριγωνομετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών, που έχει ως πρωταρχικό σκοπό την επίλυση τριγώνων είτε επίπεδων, είτε σφαιρικών, δηλαδή τον υπολογισμό των αγνώστων πλευρών και γωνιών του τριγώνου με επαρκή δεδομένα και με μεθόδους καθαρά λογιστικές. Κατά τους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιούνται ειδικά «τριγωνομετρικά μεγέθη» που σήμερα λέγονται «τριγωνομετρικές συναρτήσεις». Η μέτρηση των γωνιών, με τα τόξα που καλύπτουν σε ένα κύκλο, είναι τόσο αρχαία, όσο και η ίδια η έννοια της γωνίας, και ήδη χρησιμοποιούνταν από τους Βαβυλωνίους, στους οποίους οφείλεται και η μονάδα μέτρησης της γωνίας, ο βαθμός. Βέβαια οι Βαβυλώνιοι, που χρησιμοποιούσαν τις γωνίες για επιστημονικούς και αστρολογικούς σκοπούς ,θέση και τροχιές ουρανίων αντικειμένων, μετρούσαν γωνίες μόνο μεταξύ 0° και 360°.Οι Έλληνες αστρονόμοι γενικά, στο θέμα της μέτρησης γωνιών, συμφωνούσαν με τους Βαβυλώνιους, ενώ οι Έλληνες γεωμέτρες της κλασσικής εποχής όριζαν τη γωνία κατά τρόπο πλέον αυστηρό και ακόμη πιο περιοριστικό: γι΄ αυτούς γωνίες είναι πάντοτε μικρότερες των δύο ορθών.

Η ιστορία της Τριγωνομετρίας αρχίζει με τις πρώτες μαθηματικές καταγραφές στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα. Οι Βαβυλώνιοι καθιέρωσαν τη μέτρηση των γωνιών σε μοίρες σε πρώτα λεπτά και σε δεύτερα. Οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό δεδομένων από παρατηρήσεις και είναι σήμερα γνωστό ότι ένα μεγάλο μέρος πέρασε στους Έλληνες. Αυτά τα πρώτα βήματα στην Αστρονομία οδήγησαν και στη γέννηση της Τριγωνομετρίας.

Η λέξη «Τριγωνομετρία» πρωτοεμφανίσθηκε στη λατινική ως «Trigonometria» περί το τέλος του 16ου μ.Χ. αιώνα. Συγκεκριμένα ο Γερμανός κληρικός, αλλά και μαθηματικός, Bartholomew Pitiskus (1561-1613 μ.Χ.) εξέδωσε το 1595 μ.Χ. το βιβλίο του Trigonometriae sive, de dimensione triangulis, Liber. (Βιβλίο Τριγωνομετρίας ή Περί μετρήσεως των τριγώνων). Στην ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία ο όρος Τριγωνομετρία πρωτοεμφανίζεται το 1749 μ.Χ. στο σύγγραμμα: *Μεθοδίου Ανθρακίτη - Μπαλάνου Βασιλοπούλου,* Οδός Μαθηματικής (3 τόμοι), Βενετία 1749. Η πραγματική Τριγωνομετρία γεννήθηκε και έλαβε την πρώτη της μορφή κατά τους ελληνιστικούς χρόνους (ακριβέστερα: 300 π.Χ. έως 150 μ.Χ.), για να εξυπηρετήσει τη Μαθηματική Αστρονομία. Αρχικά η Τριγωνομετρία ήταν ένα

«παρακλάδι» της Αστρονομίας. Η ανάγκη της Τριγωνομετρίας προέκυψε, όταν οι Έλληνες θετικοί επιστήμονες, οι ασχολούμενοι με την ανάπτυξη της Μαθηματικής Αστρονομίας, διαπίστωσαν, ότι χρειάζονται ένα πρόσθετο μαθηματικό εργαλείο επιβοηθητικό της Γεωμετρίας, που θα τους έδινε τη δυνατότητα να επιλύουν λογιστικά και με ακρίβεια τα τρίγωνα, τόσο τα επίπεδα όσο και τα σφαιρικά. Αυτό συνέβη κατά τους ελληνιστικούς χρόνους ,μετά το 300 π.Χ. περίπου. Από την αρχαιότητα μέχρι το 300 π.Χ. είναι φυσικό και αναμενόμενο να μην έχουμε σαφή δείγματα πρόδρομων τριγωνομετρικών εργασιών. Πράγματι, ερευνώντας σ' αυτό το χρονικό διάστημα, θα συναντήσουμε ή θα δούμε να διαφαίνονται κάποια ίχνη προσπαθειών ή μεθόδων:

- *για την έκφραση της κλίσης μιας ευθείας ή ενός επιπέδου*
- *για τη συσχέτιση της σκιάς του γνώμονα, δηλαδή του μήκους της σκιάς με το ύψος του Ηλίου δηλαδή με μια γωνία*
- *για την εν γένει συσχέτιση τόξου ή γωνίας με κάποιο συναφές ευθύγραμμο τμήμα*
- *για την επίλυση με γεωμετρικές μεθόδους π.χ. με αναλογίες ομοίων τριγώνων προβλημάτων όπως π.χ. της εύρεσης του ύψους ή της απόστασης απροσίτου αντικειμένου ή οικοδομήματος, τα οποία αρκετά αργότερα θα επιλύονται πολύ πιο απλά και εύκολα με χρήση της Τριγωνομετρία*

Όταν όμως εξετάζουμε τέτοια μαθηματικά συμβάντα όπως τα προαναφερθέντα, δεν είναι πάντοτε εύκολο να αποφανθούμε, αν ένα θεωρούμενο συμβάν έχει σαφή σχέση με την Τριγωνομετρία ή όχι. Συνέπεια αυτού είναι να υπάρχουν διαφορετικές απόψεις μεταξύ των μελετητών κατά το χαρακτηρισμό του θεωρουμένου συμβάντος ως τριγωνομετρικού ή μη. Για παράδειγμα για ένα μαθηματικό συμβάν μπορεί να λεχθεί, ότι:

- *είτε εμπεριέχει ένα προανάκρουσμα Τριγωνομετρίας*
- *είτε ισοδυναμεί με «οιονεί» τριγωνομετρική εργασία*
- *είτε αποτελεί πρόδρομο βήμα προς την Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία.*

Η αναζήτηση για την τριγωνομετρία ξεκινά στα ίχνη των πολιτισμών που αναπτύχθηκαν και ήκμασαν κατά μήκος της κοιλάδας του ποταμού Νείλου στην Αίγυπτο και στην περιοχή ανάμεσα στους ποταμούς Τίγρη και Ευφράτη στη Μεσοποταμία. Παράλληλα προς τους ανωτέρω δύο πολιτισμούς υπήρξε ανατολικότερα και ένας άλλος πολιτισμός στην κοιλάδα του ποταμού Ινδού, σημερινό Πακιστάν, με δύο μεγάλα αστικά κέντρα τη Harappa και το Mohenjo-Daro. Οι διενεργούμενες ανασκαφές βρίσκονται ακόμα σε εξέλιξη και δεν έχουν ακόμη αποκρυσταλλωθεί απόψεις σχετικά με την

ανάπτυξη, που είχε λάβει στην εν λόγω περιοχή, η Αριθμητική και η Γεωμετρία. .(βλ.[59])

ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Όλο το χρονικό διάστημα 600 π.Χ. - 300 π.Χ. η Γεωμετρία, στα χέρια των Ελλήνων μαθηματικών, ξέφυγε από την εμπειρική στάθμη, που είχε στους Αιγυπτίους και Βαβυλώνιους ,πρακτικοί κανόνες υπολογισμού εμβαδών και όγκων και ανέβηκε πολύ ψηλά. Έγινε καθαρή επιστήμη με λογική μαθηματική συγκρότηση δηλαδή αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις κ.λπ. Η έρευνα για σχετικά ίχνη συνεχίζεται στον ελληνικό χώρο, όπου έχει ήδη αρχίσει η καλλιέργεια των Μαθηματικών. Σταματάμε συμβολικά στο έτος 300 π.Χ. Έτσι περί το 300 π.Χ. εκδίδεται από τον Ευκλείδη το περίφημο σύγγραμμά του «Στοιχεία» , όπου στα δεκατρία βιβλία του συγκεντρώθηκαν και διατάχθηκαν συστηματικά οι μέχρι τότε μαθηματικές γνώσεις. Η Γεωμετρία των «Στοιχείων» , η Ευκλείδεια Γεωμετρία, είναι αυτή που διδάσκεται βασικά μέχρι και σήμερα, στη Μέση Εκπαίδευση στα περισσότερα προηγμένα κράτη.

Από την αρχή όμως των ελληνιστικών χρόνων το σκηνικό αλλάζει, καθώς γίνεται ένα άνοιγμα και προς τις εφαρμοσμένες επιστήμες (Αστρονομία, Μηχανική, Φυσική κ.λπ.). Η Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, εκτός από μεγάλο και δυναμικό εμπορικό και ναυτιλιακό κέντρο, γίνεται το μεγαλύτερο πνευματικό κέντρο του τότε κόσμου. Κατά τους ελληνιστικούς χρόνους δηλαδή μετά το 300 π.Χ. προσεγγιστικά, έγιναν μεγάλες ζυμώσεις και ανακατατάξεις. Τελικό αποτέλεσμα αυτών υπήρξε η Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία, δηλαδή η αρχαία ελληνική Τριγωνομετρία, όπως αυτή είναι διαμορφωμένη και διατυπωμένη στο περισπούδαστο σύγγραμμα Μαθηματικής Αστρονομίας του Κλαύδιου Πτολεμαίου με τον τίτλο «Μαθηματική Σύνταξις» αποτελούμενο από 13 βιβλία. Σαν συμβολική χρονολογία έκδοσης αυτού του συγγράμματος θεωρούμε το 150 μ.Χ.

Οι Έλληνες αστρονόμοι Ίππαρχος, Μενέλαος και Πτολεμαίος , γνώστες ήδη και της Βαβυλωνιακής Αστρονομίας, εργάσθηκαν επίπονα για να βελτιώσουν την Αστρονομία και να τη μετασχηματίσουν από απλή περιγραφική σε μαθηματική, δηλαδή με δυνατότητες αναλυτικής σπουδής των φαινομενικών τροχιών των ουρανίων σωμάτων δηλαδή των απλανών αστέρων, του Ηλίου, της Σελήνης και των πέντε τότε γνωστών πλανητών, καθώς και της πρόβλεψης κατόπιν υπολογισμού της θέσης τους συναρτήσει του χρόνου. Στην προσπάθεια αυτή, οι Έλληνες αστρονόμοι αντιμετώπιζαν, εκτός των

άλλων, αστρονομικά προβλήματα συνυφασμένα με την επίλυση τριγώνων, είτε επίπεδων ευθύγραμμων, είτε, ως επί το πλείστον, σφαιρικών δηλαδή επάνω στη σφαιρική επιφάνεια του ουρανίου θόλου. Η σφαιρική τριγωνομετρία προϋποθέτει σφαιρική γεωμετρία, για παράδειγμα τις ιδιότητες των μεγίστων κύκλων και των σφαιρικών τριγώνων, πολλές εκ των οποίων ήταν ήδη γνωστές, είχαν ερευνηθεί όταν η αστρονομία έγινε μαθηματική επιστήμη, από την εποχή των τελευταίων Πυθαγορείων. Τα «Φαινόμενα» του Ευκλείδη, που βασίζονται σε προγενέστερη εργασία, περιέχουν αρκετή σφαιρική γεωμετρία. Πολλά θεωρήματα ήταν σχεδιασμένα έτσι ώστε να διαπραγματεύονται με τη φαινόμενη κίνηση των άστρων. Ο Θεοδόσιος (20 π.Χ) συγκέντρωσε την υπάρχουσα γνώση της σφαιρικής γεωμετρίας στα «Σφαιρικά» αλλά η εργασία του δεν ήταν αριθμητική και έτσι δεν μπορούσε να δώσει λύση στο βασικό πρόβλημα της Ελληνικής αστρονομίας, δηλαδή τη μέτρηση του χρόνου τη νύχτα με παρατήρηση των αστέρων.

Η επίλυση με γραφική κατασκευή είναι μεν δυνατή θεωρητικά, στην περίπτωση επίπεδων τριγώνων, αλλά δεν μπορεί να γενικευθεί η χρήση της στην πράξη. Ο λόγος είναι, ότι προκύπτουν σε πολλές περιπτώσεις ανακριβείς τιμές λόγω σφαλμάτων σχεδιάσεως, λόγω ανεπάρκειας ή ατελειών των οργάνων σχεδιάσεως κλπ., τα οποία σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. γωνίες πολύ μικρές, ή με τιμή που περιέχει πρώτα ή δεύτερα λεπτά της μοίρας , μικρή κλίμακα κ.α.) μπορούν να υπερβούν κατά πολύ τα ανεκτά όρια. Για τα σφαιρικά τρίγωνα δεν συζητείται επίλυση με γραφική κατασκευή.

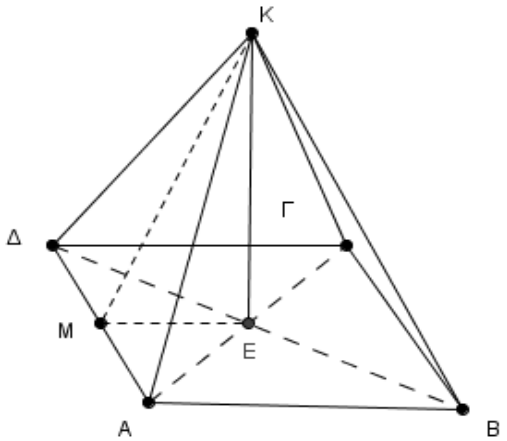
Όπως γνωρίζουμε, με μόνη την Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν μπορούμε να επιλύσουμε λογιστικά το κάθε τρίγωνο επίπεδο ή σφαιρικό. Έτσι, στην Αστρονομία στην αρχή, άρχισε να διαφαίνεται η ανάγκη ενός πρόσθετου μαθηματικού κλάδου, με τη βοήθεια του οποίου θα μπορούσε να επιλύεται λογιστικά το τυχόν τρίγωνο, επίπεδο ή σφαιρικό, έστω και αν οι προκύπτουσες τιμές των αγνώστων θα ήταν προσεγγιστικές. Ο δρόμος προς την κατεύθυνση αυτή άνοιξε από τη στιγμή, όπου ωρίμασε η ιδέα της εισαγωγής κάποιου τριγωνομετρικού μεγέθους. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν ένα μονάχα τριγωνομετρικό μέγεθος και συγκεκριμένα την χορδή τόξου κύκλου, η οποία στην αρχαία μαθηματική διάλεκτο αναφέρεται ως *«η εν κύκλω ευθεία»*. Οι δύο Τριγωνομετρίες δηλαδή η Επίπεδη και η Σφαιρική γεννήθηκαν συγχρόνως και αναπτύχθηκαν παράλληλα.

Ο αρχικός αυτός δεσμός Τριγωνομετρίας-Αστρονομίας υπήρξε και διατηρήθηκε τόσο στενός, ώστε επί πολύ καιρό η Τριγωνομετρία εθεωρείτο προσάρτημα της Αστρονομίας. Δείγμα αυτής της αντίληψης είναι το γεγονός, ότι ο Κλαύδιος

Πτολεμαίος, στο καθαρά αστρονομικό έργο του *«Μαθηματική Σύνταξις»*, πραγματεύεται στο πρώτο βιβλίο ειδικά την Τριγωνομετρία (Η Αριθμητική και η Γεωμετρία θεωρούνται γνωστές). Στους μετά το 150 μ.Χ. χρόνους η Τριγωνομετρία θα περάσει από πολλά και διάφορα στάδια. Καταρχήν θα παραμείνει μέσα στον ρωμαιοκρατούμενο και φθίνοντα ελληνιστικό κόσμο στάσιμη ή με βραχείες σποραδικές αναλαμπές. Κατόπιν θα μεταναστεύσει σε άλλες χώρες και θα γνωρίσει νέους θεράποντες. Από την Αναγέννηση και κατόπιν θα μετεξελιχθεί με ραγδαία βήματα ,πολλές φορές με άλματα, θα φορέσει καινούργιο «ένδυμα» και θα καταλάβει σπουδαία και επίζηλη θέση μέσα στα σύγχρονα Μαθηματικά, καθώς και σε πολλούς άλλους επιστημονικούς και τεχνολογικούς κλάδους όπως στη Φυσική, Μηχανική, Ηλεκτροτεχνία, Γεωδαισία και Τοπογραφία, Αστρονομία, Ναυτιλία κ.λπ.

Αρχαία Αίγυπτος

Στο Βρετανικό Μουσείο (British Museum - Λονδίνο) βρίσκεται, μεταξύ άλλων, και ένας περίφημος, αρχαίος, αιγυπτιακός, πάπυρος με μαθηματικό περιεχόμενο, ο επονομαζόμενος *«Πάπυρος Rhind».* Από την αρχαία αιγυπτιακή λέξη pir-em-us ή per-em-us (=ύψος) πιθανόν να προέρχεται ο ελληνικός όρος «πυραμίς». Ο πάπυρος αυτός αποτελεί μια συλλογή διαφόρων μαθηματικών παραδειγμάτων και προβλημάτων καθώς και των λύσεων τους. Στα προβλήματα με αριθμό 56 έως 60, που πραγματεύονται θέματα σχετικά με τη γεωμετρία των πυραμίδων, αναφέρεται και η σχέση seqt ή se-qet. Από γλωσσολογικής άποψης η λέξη αυτή σημαίνει σε ελεύθερη απόδοση: «αυτό που καθορίζει τις αναλογίες της πυραμίδος».



Για την ακριβή μαθηματική σημασία του όρου se-qet δεν υπάρχει ομοφωνία μεταξύ των διαφόρων ερευνητών.

Πιθανές εκδοχές:

1. se-qet= $AE/AK = \cos(EAK)$
2. se-qet= $EM/EK = \cot g(EMK)$
3. se-qet= $EK/EM = \tan(EMK)$

Σε όλες όμως τις εκδοχές παρατηρούμε, ότι ο όρος se-qet αποτελεί το λόγο των δύο πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και εκφράζει την κλίση ενός επιπέδου {(2) και (3) } ή μιας ευθείας (1). Αυτό δεν είναι τίποτε άλλο, παρά ένα αρχικό προανάκρουσμα για την έκφραση του ανοίγματος μιας γωνίας με ένα τριγωνομετρικό μέγεθος (cosφ, tanφ, cotφ). Ο ακριβής προσδιορισμός της κλίσης ήταν ιδιαίτερα απαραίτητος κατά την επικάλυψη της εξωτερικής επιφανείας της πυραμίδος.(βλ.[59],[11],[38],[54],[61])

Αρχαία Βαβυλώνα

Λέγοντας «Βαβυλωνιακά Μαθηματικά» εννοούμε τα Μαθηματικά, που αναπτύχθηκαν από τους λαούς της Αρχαίας Μεσοποταμίας προσεγγιστικά κατά το χρονικό διάστημα 3500 π.Χ. έως το 500 π.Χ.

Οι Βαβυλώνιοι είχαν κάνει μεγάλες προόδους στην Αριθμητική, στη Γεωμετρία και στην Αστρονομία. Κατά τις ανασκαφές, που έγιναν, ήλθαν στο φως πάμπολλες πήλινες πινακίδες, γραμμένες στη σφηνοειδή γραφή. Μεταξύ αυτών των πινακίδων υπάρχουν 400 περίπου με μαθηματικό περιεχόμενο. Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες πινακίδες είναι γνωστή ως πινακίδα *Plimpton 322* (συλλογή του G.A. Plimpton στο Πανεπιστήμιο Columbia στη Νέα Υόρκη) που περιέχει αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων αλλά και τα τετράγωνα του λόγου γ/α , δηλαδή τις τιμές της συντέμνουσας της γωνίας Α υψωμένης στο τετράγωνο (cosec^2A). Τα αναγραφόμενα προβλήματα, καθώς και οι λύσεις τους, έχουν καθαρά πρακτικό χαρακτήρα. Από τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων μεταδόθηκαν στην Ελλάδα κατά τους ελληνιστικούς χρόνους και

υιοθετήθηκαν από τους Έλληνες αστρονόμους τα ακόλουθα, που έχουν σχέση με την Τριγωνομετρία:

- Το 60-δικό σύστημα αριθμήσεως
- Η διαίρεση της περιφέρειας κύκλου σε 360 μοίρες

Και σήμερα ακόμη χρησιμοποιείται ευρύτατα η μέτρηση των γωνιών σε μοίρες, πρώτα λεπτά, δεύτερα λεπτά κ.ο.κ. , καθώς και του χρόνου (ώρες, min, sec).Ομοίως μεταδόθηκαν στην Ελλάδα και οι γνώσεις των Βαβυλωνίων για τον γνώμονα. Ο γνώμονας, ως γνωστόν, αποτελεί σκιοθηρικό όργανο και από τη σκιά του (μήκος, διεύθυνση κ.λπ.) προσδιορίζεται η ώρα της ημέρας, το ύψος του Ηλίου ,δηλαδή μια γωνία όπως περίπου με το se-qet των Αιγυπτίων.{ Ηρόδοτος Β.109 «Πόλον μέν γάρ και γνώμονα και δυοδώδεκα μέρεα της ημέρης παρά Βαβυλωνίων έμαθον οι Έλληνες»}(βλ.[59])

ΠΡΟΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Για τη χρονική περίοδο 650 π.Χ. έως 300 π.Χ. δεν έχουμε ξεκάθαρες αναφορές. Ανατρέχοντας στις πρόδρομες τριγωνομετρικές εργασίες, ανακαλύπτουμε μόνο κάποιες ιδέες, μεθόδους ή εργασίες, που συνέβαλαν κατά κάποιο τρόπο άλλη λιγότερο, άλλη περισσότερο στην προπαρασκευή του εδάφους και στη διάνοιξη του αρχικού τμήματος της οδού προς την Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία. Συγκεκριμένα αναφέρουμε μερικούς θετικούς επιστήμονες και μνημονεύουμε συνοπτικά τις εργασίες τους εκείνες, που πιθανόν να συνέβαλαν κατά τον ένα ή τον άλλο τρόπο στη σύλληψη της αρχικής ιδέας της Τριγωνομετρίας και που ίσως συναποτέλεσαν δομικά στοιχεία του υπόβαθρου, επάνω στο οποίο θεμελιώθηκε κατά τους ελληνιστικούς χρόνους το οικοδόμημα της Πτολεμαϊκής Τριγωνομετρίας.

Θαλής ο Μιλήσιος (624-546 π.Χ.)

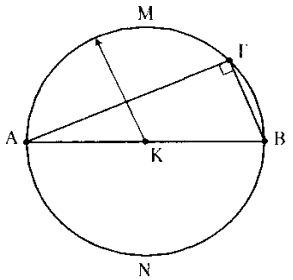
Στα περισσότερα βιβλία ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών η εξιστόρηση αρχίζει συνήθως από τον Θαλή, ο οποίος υπήρξε ο πατέρας των Ιώνων μαθηματικών, αστρονόμων και εν γένει φυσικών φιλοσόφων. Σχετικά με τις γεωμετρικές γνώσεις του Θαλή υπάρχουν μαρτυρίες, ότι κατείχε τις ακόλουθες ,ορισμένες μάλιστα τις απέδειξε πρώτος:

- *(i)Η διάμετρος διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη*
- *(ii)Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες*
- *(iii)Δύο κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες*
- *(iv)Όταν δύο τρίγωνα έχουν αντιστοίχως ίσες μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες γωνίες, τότε είναι ίσα*

  όπως αναφέρονται στα ακόλουθα: Πρόκλου Διαδόχου «Σχόλια εις το Α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδου» (TEUBNER, Λειψία 1873, Επιστημονική επιμέλεια G. Friedlein - Εδάφια 157.10 έως 158.3,250.20 έως 251.2,299.1 έως 5 και 352.13 έως 18).[βλ.61]
- *(v)Η εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία, που βαίνει σε ημιπεριφέρεια, είναι ορθή.*

  όπως αναφέρεται στο *Διογένη Λαερτίου «Βίοι* φιλοσόφων» (Βιβλίο Ι - Κεφ. α': ΘΑΛΗΣ -Τέλος παραγράφου 24) - Έκδοση Loeb.[βλ.59]

Οι ανωτέρω προτάσεις επίσης αντιστοιχούν με τις ακόλουθες των Στοιχείων του Ευκλείδη:



i)«Στοιχεία» - Βιβλ. Α - Ορισμός 17
ii)«Στοιχεία» - Βιβλ. Α - Θεώρημα 5
iii)«Στοιχεία» - Βιβλ. Α - Θεώρημα 15
iv)«Στοιχεία»-Βιβλ.Α - Θεώρημα26
v) «Στοιχεία» - Βιβλ. Γ - Θεώρημα 31

Οι ανωτέρω (i) και (v) προτάσεις του Θαλή, με μια μικρή συμπλήρωση, συνενώνονται στην εξής:

Σε μια περιφέρεια κύκλου (με κέντρο το Κ και ακτίνα r):

Η διάμετρος ΑΒ = d = 2 · r είναι η μέγιστη χορδή και διαιρεί την περιφέρεια σε δύο ίσα μέρη: Α ΜΒ = ΑΝΒ = 180°.

Αν Γ σημείο της ημιπεριφέρειας ΑΜΒ, τότε η γωνία ΑΓΒ, που βαίνει στην ημιπεριφέρεια ΑΜΒ (= 180°), ισούται προς μία ορθή.

Μεταξύ δύο τόξων της ημιπεριφέρειας ΑΜΒ και των αντίστοιχων χορδών ισχύει: Αν ΑΓ > ΓΒ, τότε και ΑΓ > ΓΒ και αντιστρόφως. Συμπέρασμα:

Η τιμή του μήκους των χορδών κυμαίνεται μεταξύ της ελαχίστης τιμής 0 για μηδενικό τόξο και της μεγίστης τιμής d = 2 · r για ημιπεριφέρεια. Για τόξα μεταξύ 0° και 180° το μήκος χορδής αυξάνει, καθώς αυξάνεται το τόξο.

Από τα ανωτέρω καταφαίνεται, ότι υπάρχει κάποια συναρτησιακή σχέση μεταξύ του μήκους (c) της χορδής και του εύρους (α) του αντίστοιχου τόξου. Είναι ενδεχόμενο, η ανωτέρω παρατήρηση, συσχετιζόμενη συν τω χρόνω και με άλλες συναφείς σκέψεις και προτάσεις, να οδήγησε σιγά-σιγά τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς στην ιδέα καταρτίσεως του *Χορδομετρικού Πίνακα*, όπου σε κάθε αναγραφόμενο τόξο δίδεται η τιμή του σχετικού μήκους της αντίστοιχης χορδής. Υπάρχουν επίσης γραπτές μαρτυρίες από πολύ μεταγενέστερους όμως συγγραφείς για τα εξής δύο «ευρήματα» του Θαλή:

Ο Θαλής, κατά τη διάρκεια της παραμονής του στην Αίγυπτο, βρήκε μέθοδο για να προσδιορίζει εμμέσως το ύψος μιας πυραμίδας. Αυτό το πετύχαινε μετά από ταυτόχρονη μέτρηση τόσο του μήκους σκιάς ,λόγω Ηλίου, της πυραμίδας, όσον και του μήκους της σκιάς κατακόρυφου γνώμονα γνωστού ύψους.

Οι πηγές είναι οι εξής:

- *Plinius (23 μ.Χ.- 79 μ.Χ.) Naturalis Historiae XXXVI, 82*
- *Πλούταρχος (46μ.Χ.-127μ.Χ.) Επτά σοφών συμπόσιον (147 Α)*
- *Διογένης Λαέρτιος (250 μ. Χ.;) Βίοι φιλοσόφων (Α. 27) [βλ.61]*

Ο Θαλής στην πατρίδα του Μίλητο, όπου έζησε και ήκμασε, είχε επινοήσει μέθοδο, με την οποία προσδιόριζε την απόσταση, στην οποία βρισκόταν από την Ξηρά, ένα πλοίο, που ταξίδευε ανοικτά στη θάλασσα. Αυτή η πληροφορία βρίσκεται στο σύγγραμμα του Πρόκλου Διαδόχου(410-485 μ.Χ.):

«Σχόλια εις το Α' βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» (Teubner, Λειψία 1873, Επιστημονική επιμέλεια G. Friedlein - Εδάφιο 352.13 έως 18).[βλ.59]
Τα δύο αυτά «ευρήματα» του Θαλή αρκετοί μελετητές των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών τα εντάσσουν στις πρόδρομες τριγωνομετρικές εργασίες.

Αναξίμανδρος (610-546 π.Χ.)

Ο Αναξίμανδρος ήταν μαθηματικός, αστρονόμος και φιλόσοφος, από την Μίλητο. Ήταν μαθητής του Θαλή, αργότερα δε τον διαδέχθηκε στην αρχηγία της Ιωνικής Σχολής. Αναφέρεται εδώ λόγω της συμβολής του στην εισαγωγή και χρήση του γνώμονα. Πρώτη μνεία για τον γνώμονα έχουμε από τον Ηρόδοτο (Β. 109): «Πόλον μέν γάρ καί γνώμονα καί τά δυώδεκα μέρεα της ήμερης παρά Βαβυλωνίων έμαθον οί "Ελληνες». Ο γνώμονας, ως γνωστόν, ήταν ένα απλό αστρονομικό όργανο, από τα πιο παλαιά , ίσως και το παλαιότερο. Αποτελείται από ένα ευθύγραμμο στυλίσκο, τοποθετημένο κατακορύφως επάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο σε ηλιόφωτη θέση. Με συστηματική αποτύπωση και μέτρηση του μήκους και της διευθύνσεως της σκιάς επί του οριζοντίου επιπέδου, καθώς και με τη βοήθεια πρόσθετων κατάλληλων χαράξεων επί του οριζοντίου επιπέδου, προσδιορίζονται τα Ηλιοστάσια ,θερινό και χειμερινό, οι ισημερίες ,εαρινή και φθινοπωρινή, το ύψος και το αζιμούθιο Ηλίου, ο τοπικός χρόνος, η διεύθυνση αληθούς Βορρά-Νότου κ.λ.π. Αποτελεί γενική εκτίμηση ότι η ανάγκη αναλυτικής σπουδής των σχέσεων μεταξύ στοιχείων του Γνώμονα ,ύψος και σκιά του και διαφόρων αστρονομικών θεμάτων (Ηλιοστάσια, Ισημερίες, Λόξωση εκλειπτικής) κ.λπ. υπήρξε μια από τις γενεσιουργές αιτίες, όχι η μόνη, για την εμφάνιση της Πτολεμαϊκής Τριγωνομετρίας. Υπάρχουν ιστορικές μαρτυρίες, ότι ο Αναξίμανδρος χρησιμοποίησε πρώτος το γνώμονα στην Ελλάδα και ότι με τη βοήθεια του προσδιόρισε τα Ηλιοστάσια ,θερινό και χειμερινό, τις ισημερίες, εαρινή και φθινοπωρινή και τις τέσσερις εποχές. Τα σχετικά αποσπάσματα προέρχονται από τις ακόλουθες πηγές:i)*Διογένης Λαέρτιος*- Βίοι Φιλοσόφων (Β' Κεφ. α' - Παραγρ. 1/2). ii)*Ευσέβιος ο Παμφίλου*-Ευαγγελική Προπαρασκευή (Χ - 14.11) *iii)Λεξικό Σούδα- Αναξίμανδρος.* Οι ανωτέρω πηγές είναι πολύ μεταγενέστερες του Αναξίμανδρου *[(i) 3ος ή 4ος π.Χ. - (ii) 4ος μ.Χ. - (iii) 10ος μ.Χ.*]. Και τα τρία αποσπάσματα μπορεί κανείς να τα ανεύρει και στο *Diels-*

Kranz Fragmente der Vorsokratiker (Anaximandros A. 1,4 και 2 αντιστοίχως).([βλ.59],

Θινοπίδης ο Χίος (450 π.Χ.)

Ο Οινοπίδης ο Χίος υπήρξε μαθηματικός και αστρονόμος, του οποίου η ακμή δράσης τοποθετείται γύρω στο 450 π.Χ. Από τον Πρόκλο τον Λύκειο (5ος μ.Χ.) στο «Σχόλια εις το πρώτον βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη», (Fried. 283.7 και 333.5) αναφέρεται ότι στον Οινοπίδη οφείλονται οι εξής δύο γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη μόνο:

i)Να αχθεί κάθετος σε δεδομένη ευθεία από σημείο εκτός αυτής (Ευκλ. Α. 12)
ii)Επάνω σε δεδομένη ευθεία και από δεδομένο σημείο αυτής να κατασκευασθεί γωνία, ίση προς μια δεδομένη (Ευκλ. Α.23).

Για τη συμβολή του στην Αστρονομία έχουμε μια σχετική μαρτυρία από τον Θέωνα τον Σμυρναίο (2ος μ.Χ.) στο «Θέωνος Σμυρναίου Πλατωνικού περί των κατά μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν» (ΙΙΙ, 40). Μεταξύ των διαφόρων επιτευγμάτων του Οινοπίδη αναφέρεται ότι βρήκε, ότι το τόξο του ουράνιου μεσημβρινού, που περιλαμβάνεται μεταξύ του Πόλου του ουράνιου ισημερινού και του αντίστοιχου πόλου της εκλειπτικής ισούται προς το τόξο που αντιστοιχεί στην πλευρά του κανονικού 15-γώνου, του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο δηλ. στον ουράνιο μεσημβρινό. Η επίκεντρος γωνία, που αντιστοιχεί στο τόξο αυτό, είναι ίση, ως γνωστόν, προς τη *«λόξωση της εκλειπτικής»*. Η τιμή της λόξωσης, κατά Οινοπίδη, είναι ε = $\frac{360}{15}$= 24°. Κατά τον Πτολεμαίο ε = 23° 51΄ 20". Σημερινή ορθή τιμή ε =23° 26'.

Από τη σκοπιά της Τριγωνομετρίας παρατηρούμε, ότι το τόξο, που αντιστοιχεί στη «λόξωση», εκφράζεται όχι σε μοίρες, αλλά με τη χορδή που αντιστοιχεί σ' αυτό δηλαδή ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού 15-γώνου. Βλέπουμε δηλαδή, ότι περί το 450 π.Χ. έχει ήδη γίνει ένα σημαντικό βήμα προς την ιδέα του Χορδομετρικού Πίνακα.

Ευκλείδης (325-265 π.Χ.)

Για τον περίφημο αυτό μαθηματικό της αρχαιότητας έχουμε ελάχιστα βιογραφικά στοιχεία. Προσεγγιστικά μπορούμε να λέμε, ότι ήκμασε περί το 300 π.Χ. Υπήρξε πολυγραφότατος, εκείνο δε από τα έργα του, που τον κατέστησε διάσημο ανά τους αιώνες, είναι το σύγγραμμα «Στοιχεία» (βιβλία 13). Στο σύγγραμμα αυτό, το οποίον βασίζεται εν μέρει σε εργασίες προγενέστερων αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών και εν μέρει σε δικές του, εκθέτει κατά μεθοδικό, συστηματικό και παραδειγματικό τρόπο τα της Γεωμετρίας , επίπεδης και στερεάς, καθώς και ορισμένα θέματα Αριθμητικής. Ο βασικός κορμός της γεωμετρίας των «Στοιχείων» εξακολουθεί να διδάσκεται, μέχρι και σήμερα, στα σχολεία Μέσης Εκπαίδευσης όλου του κόσμου.

Η θεωρία κατάρτισης του Χορδομετρικού Πίνακα στηρίζεται κατά μεγάλο μέρος σε θεωρήματα των «Στοιχείων». Δεν υπάγονται στα «Στοιχεία» το θεώρημα του Πτολεμαίου για τα εγγεγραμμένα σε κύκλο τετράπλευρα και το θεώρημα του Μενελάου για τα σφαιρικά τρίγωνα.

Σημειώνουμε επίσης, ότι οι τύποι για τα μήκη των χορδών των βασικών τόξων, 120°, 90°, 72°, 60° και 36°, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά τα μήκη εγγεγραμμένων σε κύκλο κανονικών πολυγώνων (αντιστοίχως 3-γώνου, 4-γώνου, 5-γώνου, 6-γώνου και 10-γώνου), βρίσκονται μέσα στα «Στοιχεία». Ο Πρόκλος, στο βιβλίο του «Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη», αναφέρει, ότι ο Ευκλείδης περιέλαβε στα «Στοιχεία» αρκετά θεωρήματα, που είχαν προοπτική εφαρμογής στην Αστρονομία, εμμέσως επομένως, και στην Τριγωνομετρία.. Και συνεχίζει («χωρίον» 269.11-21):

«... τό γούν τελευταῖον έν τω τετάρτω, καθ'ό την του πεντεκαιδεκαγώνου πλευράν εγγράφει τω κύκλο}, τίνος ένεκα φησίν τις αυτόν προβάλλειν ή της πρός άστρονομίαν τούτου του προβλήματος αναφοράς; έγγράψαντες γάρ εις τόν διά των II πόλων κύκλον τό πεντεκαιδεκάγωνον εχουσι την άπόστασιν των πόλων του τε ισημερινού καί του ζωδιακού. Πεντεκαιδεκαγωνικήν γάρ αλλήλων πλευράν άφεστήκασιν εοικεν ούν ό στοιχειακής και πρός τήν άστρονομίαν βλέπων πολλά προδεικνύναι προευπρεπίζων ημάς και εις έκείνην τήν έπιστήμην».

Η απόδοση (κάπως ελεύθερη) του ανωτέρω αποσπάσματος στη νεοελληνική έχει ως εξής:

«Το τελευταίο λοιπόν [θεώρημα] του τετάρτου [βιβλίου], δηλαδή το θεώρημα IV. 16 των Στοιχείων του Ευκλείδη: «Σε δεδομένο κύκλο [ζητείται] να

εγγράψουμε δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο [δηλαδή κανονικό]», που αφορά την εγγραφή κανονικού 15-γώνου σε κύκλο, για ποιο λόγο λέγεται, ότι το παρουσιάζει αυτός [ο στοιχειωτής, δηλαδή ο Ευκλείδης] παρά για τη σχέση του προβλήματος αυτού (της γεωμετρικής αυτής κατασκευής) με την Αστρονομία; Αν γράψουμε (θεωρήσουμε) το μέγιστο κύκλο, που διέρχεται από τους δύο πόλους, τότε η πλευρά του εγγεγραμμένου σ' αυτόν τον κύκλο κανονικού 15-γώνου ισούται προς την απόσταση μεταξύ του πόλου του [ουράνιου] ισημερινού και του αντίστοιχου πόλου της εκλειπτικής (του ζωδιακού) διότι απέχουν μεταξύ τους κατά την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού 15-γώνου. Φαίνεται λοιπόν, ότι ο στοιχειωτής (ο Ευκλείδης) αποβλέποντας και προς την Αστρονομία παραθέτει αρκετά συναφή θεωρήματα, για να μας προπαρασκευάσει και για αυτή την Επιστήμη».

ΕΛΛΗΝΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Με τις κατά το διάστημα 336-323 π.Χ. εκστρατείες και κατακτήσεις του Μεγάλου Αλεξάνδρου και την εν συνεχεία δημιουργία διαφόρων βασιλείων από τους διαδόχους του ο ελληνικός πολιτισμός διείσδυσε στις χώρες της Ανατολής (Μ. Ασία, Συρία, Αίγυπτο, Περσία κ.λπ.) και εξαπλώθηκε η ελληνική παιδεία. Επίσης, πράγμα πολύ σημαντικό, διαδόθηκε παντού και ομιλήθηκε από όλους η ελληνική γλώσσα. Και μέσα από τη συνταρακτική αυτή αλλαγή γεννήθηκε ένας καινούργιος κόσμος, ο «Ελληνιστικός», με την «Κοινή Ελληνική Γλώσσα». Κέντρα του ελληνιστικού πολιτισμού δεν είναι πια οι γνωστές ιστορικές ελλαδικές πόλεις (Αθήνα, Σπάρτη, Θήβα κ.λπ.), αλλά άλλες νέες μεγάλες πόλεις, με σφρίγος και ζωντάνια, όπως π.χ. η Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, η Αντιόχεια, η Πέργαμος, η Πέλλα κ.ά. Σε δεύτερη γραμμή έρχονται η Ρόδος, η Ταρσός, η Έφεσος, οι Τράλλεις κ.ά. Από τις αρχαίες ελληνικές πόλεις διατήρησαν κάπως την ακμή τους κατά τους ελληνιστικούς χρόνους:

Οι Συρακούσες στη Σικελία (μέχρι το 212 π.Χ., οπότε κατελήφθησαν από τους Ρωμαίους).Η Αθήνα, χλωμή πλέον και όχι ακτινοβολούσα, κατορθώνει να επιζήσει ακόμη επί ένα χρονικό διάστημα, χάρις στις φιλοσοφικές της Σχολές, καθώς και ένεκα του σεβασμού που έτρεφαν όλοι προς αυτή, λόγω της παλαιάς της δόξας. Ο Παρθενώνας ήταν πάντοτε το σπουδαιότερο δείγμα. Η λειτουργία τους σταμάτησε οριστικά το 529 μ.Χ. μετά από αυτοκρατορικό Διάταγμα του Ιουστινιανού, το οποίο όριζε: μηδείς εν Αθήναις διδασκέτω φιλοσοφίαν.

Το πιο σημαντικό ίσως κέντρο της ελληνιστικής εποχής υπήρξε η Αλεξάνδρεια, η πρωτεύουσα του βασιλείου των Πτολεμαίων. Είχε καταστεί όχι μόνο μεγάλο εμπορικό, οικονομικό και ναυτιλιακό κέντρο, αλλά και πάρα πολύ σπουδαία πολιτιστική και επιστημονική εστία. Επί Πτολεμαίου Α' ιδρύθηκε το περίφημο «Μουσείο» ως κεντρική έδρα επιστημονικής εργασίας και επί Πτολεμαίου Β' η ξακουστή *«Αλεξανδρινή Βιβλιοθήκη»* (στην αρχή είχε περί τους 500.000 τόμους βιβλίων, οι οποίοι αυξανόμενοι βαθμιαία έφθασαν τους 700.000 κατά το 47 π.Χ.).Όλοι οι μεγάλοι επιστήμονες της ελληνιστικής εποχής είτε έζησαν και εργάσθηκαν στην Αλεξάνδρεια (άλλοι εφ' όρου ζωής και άλλοι για ορισμένο χρονικό διάστημα), είτε βρίσκονταν σε συνεργασία με τα επιστημονικά κέντρα της Αλεξάνδρειας. Υπάρχουν μελετητές, που, αναφερόμενοι σε αυτή την εποχή, την αποκαλούν «Αλεξανδρινή Αναγέννηση» (κατ' αναλογία προς την Ευρωπαϊκή Αναγέννηση των νεότερων χρόνων). Ο ελληνιστικός πολιτισμός είχε οικουμενικές διαστάσεις. Εδώ θα αναφερθούμε, πολύ γενικά και επιτροχάδην, μόνο για τις θετικές επιστήμες:

Τα Μαθηματικά γνώρισαν νέα μεγάλη άνθηση. Σημαντικές πρόοδοι έγιναν παντού και επιπλέον διανοίχθηκαν πολλοί καινούργιοι δρόμοι. Οι σπουδαιότεροι από τους πρωτεργάτες ήταν ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, ο Απολλώνιος ο Περγαίος κ.ά.Η κλασική εποχή διακρίνεται για τα επιτεύγματα της στις καλές τέχνες (αρχιτεκτονική, γλυπτική κ.λπ.), στη φιλοσοφία, στη Γεωμετρία. Κατά τους ελληνιστικούς χρόνους (διαφορετική νοοτροπία, κοσμοπολίτικη αντίληψη των πραγμάτων) δίνεται μεγάλη ώθηση και στις εφαρμοσμένες επιστήμες, όπως π.χ.: στην *Αστρονομία,* στη *Φυσική*, *Μηχανική, Υδροστατική* και *Υδροδυναμική*, *«Πνευματική», Ακουστική και Μουσική, Οπτική, στη Γεωλογία και Μετεωρολογία, στη* Γεωγραφία, *στην Ιατρική, στη Φαρμακολογία κ.λπ.* Θα φθάσει όμως και για την Αλεξάνδρεια «του φθινοπώρου η ώρα». Με την κατάκτηση της Αιγύπτου από τον Οκταβιανό Αύγουστο (30 π.Χ.), ολοκληρώθηκε η Ρωμαιοκρατία. Τα διάφορα ελληνιστικά κράτη έχασαν την πολιτική τους ελευθερία, πράγμα που είχε αρκετές και σημαντικές επιπτώσεις. Οι επιστήμες παρά ταύτα συνέχισαν αδιάλειπτα την ελληνιστική τους πορεία μέχρι και τους αρχικούς αιώνες της πρώτης χριστιανικής χιλιετίας. Ο πνευματικός φάρος της Αλεξάνδρειας θα συνεχίσει, παράλληλα προς τον ξακουστό ναυτιλιακό της Φάρο (ένα από τα 7 θαύματα του αρχαίου κόσμου), να ακτινοβολεί επί μερικές ακόμη εκατονταετίες. Το ίδιο ισχύει και με άλλα ελληνιστικά κέντρα, όπως π.χ. την Πέργαμο. Όλους αυτούς τους αιώνες η γενική επικράτηση και η χρήση από όλους της Κοινής Ελληνικής (ως οχήματος του πολιτιστικού βίου) είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της ελληνιστικής εποχής,

που συνεχίσθηκε και κατά τους χρόνους της Ρωμαιοκρατίας (τουλάχιστον στις χώρες της Ανατολής).

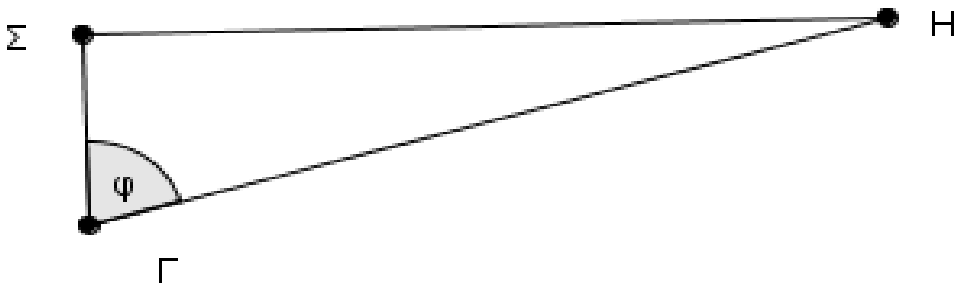
Αρίσταρχος ο Σάμιος

Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (310-230 π.Χ.) θεωρείται ο πρώτος μεγάλος αστρονόμος στην ιστορία. Ενώ οι περισσότεροι προκάτοχοι του στήριζαν την εικόνα τους για το Σύμπαν σε αισθητικές αρχές και μυθολογικά στοιχεία, αυτός χρησιμοποίησε όλα τα διαθέσιμα παρατηρησιακά δεδομένα για να καταλήξει στις θεωρίες του. Για παράδειγμα, επισήμανε ότι η κίνηση των πλανητών θα μπορούσε να ερμηνευθεί καλύτερα αν θεωρήσουμε ότι ο Ήλιος, και όχι η Γη, βρίσκεται στο κέντρο του Σύμπαντος. Αυτό περίπου 2.000 χρόνια πριν ο Κοπέρνικος προτείνει το ηλιοκεντρικό του σύστημα.

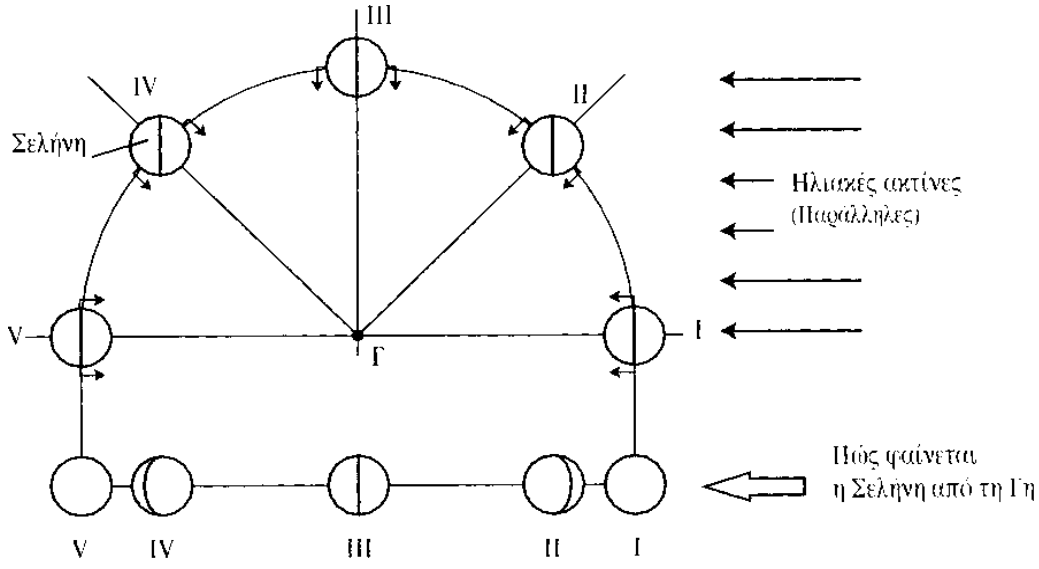
Ο Αρίσταρχος ήταν και μεγάλος μαθηματικός, οι αρχαίοι Έλληνες μάλιστα του είχαν δώσει την προσωνυμία «Αρίσταρχος ο Μαθηματικός», για να τον διακρίνουν από άλλους Αρίσταρχους. Πολλά επαινετικά επίσης σχόλια για τον Αρίσταρχο γράφει ο Βιτρούβιος (De Architectura I, 117). Ένα αστρονομικό, μαθηματικό έργο του Αρίσταρχου, το οποίο έχει διασωθεί, είναι το *«Περί μεγεθών και αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης»*. Στο βιβλίο αυτό (συγκεκριμένα στο Θεώρημα ζ') περιλαμβάνεται μια εργασία, που μπορεί να θεωρηθεί ως ένα από τα πρώτα βήματα προς την Τριγωνομετρία.(βλ.[59],[38])

Στην εργασία αυτή επιδιώκει να υπολογίσει την τιμή του λόγου:

$$\frac{\text{Απόσταση:Γης-Ηλίου}}{\text{Απόσταση:Γης-Σελήνης}}$$



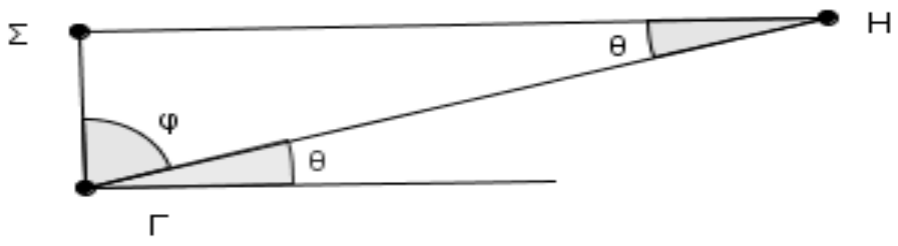
Έτσι επινοεί μια μέθοδο, όπου έχει να επιλύσει ένα τεράστιο (μέσα στο Διάστημα) «ορθογώνιο ευθύγραμμο τρίγωνο», του οποίου κορυφές είναι το κέντρο (Γ) της Γης, το κέντρο (Σ) της Σελήνης και το κέντρο (Η) του Ηλίου. Δεδομένο είναι, ότι κατά τη χρονική στιγμή όπου η γωνία ΓΣΗ γίνεται ίση προς μία ορθή, η γωνία ΣΓΗ =φ=87°. Στο σχήμα δείχνεται, πως φαίνεται από τη Γη η Σελήνη στις διάφορες φάσεις της, από τη Νέα Σελήνη μέχρι την Πανσέληνο. Στο «Πρώτο Τέταρτο» η Σελήνη φαίνεται από τη Γη ακριβώς διχοτομημένη. Με άλλα λόγια, στη Φάση αυτή, το επίπεδο του



I = *ΝΕΑ* ΣΕΛΗΝΗ (Η ΝΟΥΜΗΝΙΑ) Γ = ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΗΣ ΓΗΣ
III = ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ (Σημείωση: Η θέση του επί της επιφάνειας της Γης παρατηρητού μπορεί να ταυτιστεί,κατά προσέγγιση, με το Γ.)

μεγίστου κύκλου, που διαχωρίζει το φωτιζόμενο από το σκιερό ημισφαίριο της Σελήνης, διέρχεται διά του κέντρου της Γης. Επομένως η επιβατική ακτίνα, που ενώνει το κέντρο της Γης με το κέντρο της Σελήνης, θα είναι κάθετη προς τις ηλιακές ακτίνες (παράλληλες μεταξύ τους στη μικρή αυτή περιοχή).Τα ίδια, ως ανωτέρω, συμβαίνουν και όταν η Σελήνη βρίσκεται στο εκ διαμέτρου αντίθετο σημείο, δηλαδή στη Φάση του

Τελευταίου Τετάρτου. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται καλύτερα, πώς σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο, που απασχόλησε τον Αρίσταρχο.



Η = ΚΕΝΤΡΟ ΗΛΙΟΥ Σ= ΚΕΝΤΡΟ ΣΕΛΗΝΗΣ Γ = ΚΕΝΤΡΟ ΓΗΣ

Η επί της επιφάνειας της Γης θέση του Παρατηρητή μπορεί να ταυτισθεί κατά προσέγγιση με το κέντρο Γ της Γης. Ο Αρίσταρχος χειρίσθηκε το πρόβλημα σαν γεωμετρικό και μετά από αρκετούς υπολογισμούς κατέληξε στο αποτέλεσμα:

$$20 > \frac{ΓΗ}{ΓΣ} > 18$$

Η προηγούμενη σχέση γράφεται και ως εξής: $\frac{1}{20} < \frac{ΓΣ}{ΓΗ} < \frac{1}{18}$

Στη σημερινή τριγωνομετρική γλώσσα είναι $\frac{ΓΗ}{ΓΣ}$ = sinB = sin3°.

Άρα η ανωτέρω ανισότητα γράφεται:

0,05 <sin3°< 0,055555555...

Ως γνωστόν sin3° = 0,052335956. Ουσιαστικά δηλαδή ο Αρίσταρχος έκανε ένα πρώτο βήμα προς την Τριγωνομετρία και βρήκε μια αρκετά προσεγγιστική τιμή για τον τριγωνομετρικό αριθμό sin3° .

$$\left(\frac{1}{20} < \sin 3^0 < \frac{1}{18}\right)$$

Η μαθηματική, αστρονομική μέθοδος, που επινόησε ο Αρίσταρχος για τον προσδιορισμό του λόγου «Απόσταση Ηλίου-Γης προς απόσταση Σελήνης-Γης» είναι ορθή, ευφυής και αξιοθαύμαστη. Η αριθμητική τιμή του ανωτέρω λόγου όμως, που προέκυψε, απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Η γωνία ΣΓΗ (= Γωνιώδης απόσταση

των κέντρων Ηλίου και Σελήνης με τον παρατηρητή επί της Γης) ελήφθη ίση προς 87° (άρα θ = 90° - 87° = 3°) ενώ η πραγματική (ορθή) τιμή είναι 89° 51' (δηλαδή θ = 9΄)

Δεδομένου ότι: $\lambda = \frac{\text{Απόσταση:Γης-Ηλίου}}{\text{Απόσταση:Γης-Σελήνης}} = \frac{1}{\sin\theta}$

βλέπουμε αμέσως ότι:

λ (κατά Αρίσταρχο) $= \frac{1}{\sin 3^o}$ = 19,11 (δηλαδή 18 < λ < 20)

λ (πραγματικό) = $\frac{1}{\sin(9')^o}$ = 382

δηλαδή υπάρχει τεράστια διαφορά μεταξύ των δύο τιμών.

Το ερώτημα «γιατί ο Αρίσταρχος θεώρησε θ = 3°;» έχει απασχολήσει πολλούς μελετητές και έχουν εκφρασθεί διάφορες απόψεις.[βλ.61] Βλέποντας πάντως την ανωτέρω εργασία του Αρίσταρχου από καθαρά μαθηματική τριγωνομετρική άποψη έχουμε να πούμε τα εξής:

α) Η μαθηματική μέθοδος, που εφαρμόσθηκε, είναι απολύτως ορθή.

β) Την αδυναμία υπολογισμού της ακριβούς τιμής του λόγου $\lambda = \frac{1}{\sin\theta}$ την παρέκαμψε υπολογίζοντας το ανώτερο και το κατώτερο όριο του στενού διαστήματος μέσα στο οποίον κείται ο λόγος λ (18 < λ < 20). Αυτό αποτελεί σημαντικό βήμα προόδου στην περιοχή των εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

γ)Επειδή είναι το πρώτο παράδειγμα υπολογισμού της τιμής ενός τριγωνομετρικού αριθμού ,έστω και προσεγγιστικά, το κατατάσσουμε στις πρόδρομες τριγωνομετρικές εργασίες.(βλ.[59])

Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (285-212 π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης συγκαταλέγεται μεταξύ των διασημότερων μαθηματικών όχι μονάχα της αρχαιότητας, αλλά όλων των εποχών μέχρι σήμερα. Επιπροσθέτως υπήρξε περίφημος φυσικός (αρχή μοχλού, αρχή Αρχιμήδους για την άνωση κ.λπ.), καθώς και μηχανικός (κοχλίας Αρχιμήδη για άντληση νερού, βλητικές μηχανές κ.λπ). Διάνοιξε καινούργιους δρόμους στα Μαθηματικά με ορισμένες πρωτοποριακές εργασίες του σε κάποιες απ' αυτές θα βρούμε τα σπέρματα του μετέπειτα Απειροστικού Λογισμού. Τον Αρχιμήδη τον αναφέρουμε εδώ, επειδή με ορισμένες εργασίες του συνέβαλε εμμέσως στη διάνοιξη του δρόμου προς την Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία. Σαν τέτοιες εργασίες του θεωρούμε τις ακόλουθες:

α)Τη μέτρηση του κύκλου και τον υπολογισμό της τιμής του αριθμού π.

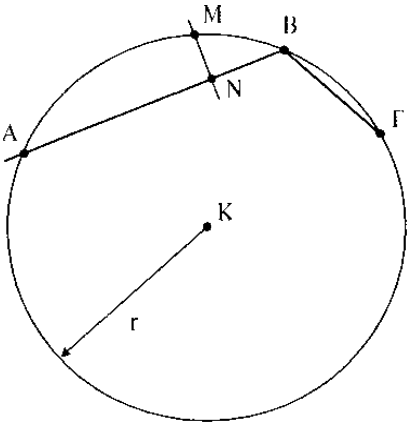
β) Το θεώρημα της τεθλασμένης χορδής.(βλ.[8],[59])

Ο Αρχιμήδης, για τη μέτρηση του κύκλου, θεωρούσε τον κύκλο σαν το κοινό όριο, προς το οποίον τείνουν ένα κανονικό εγγεγραμμένο ν-γωνο και ένα κανονικό περιγεγραμμένο ν-γωνο, όταν το ν συνεχώς διπλασιάζεται (ο Αρχιμήδης θεώρησε 6-γωνο, 12-γωνο, 24-γωνο, 48-γωνο και 96-γωνο). Για τον αριθμό π βρήκε:

$$3\frac{10}{70}<\pi<3\frac{10}{71}$$

Οι παραπάνω πλευρές κανονικών πολυγώνων αντιστοιχούν στις χορδές των τόξων 60°, 30°, 15°, 7° 30' και 3° 45'. Είναι ενδεχόμενο να χρησιμοποίησε τις τιμές αυτές ο Ίππαρχος κατά τη σύνταξη του Χορδομετρικού του Πίνακα .

Το θεώρημα της τεθλασμένης χορδής έχει ως εξής:



Σε ένα κύκλο (K, r) δίδονται δύο συνεχόμενες άνισες χορδές ΑΒ και ΒΓ (ΑΒ > ΒΓ) Τη δυάδα αυτή την αποκαλούμε «τεθλασμένη χορδή» ΑΒΓ. Έστω επιπλέον Μ το

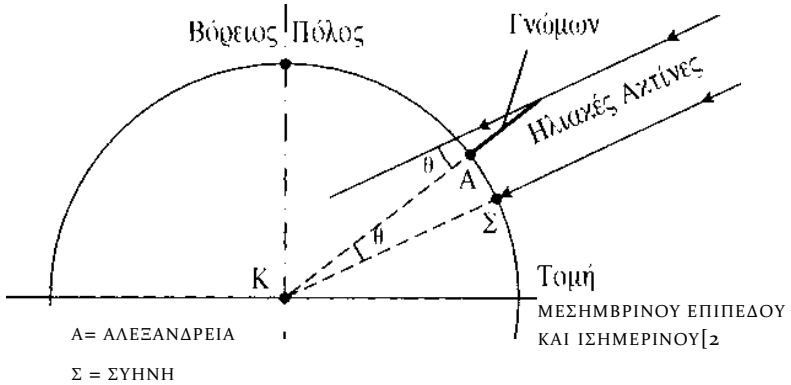
μέσον του συνολικού τόξου ΑΒΓ. Από το Μ φέρουμε την ΜΝ κάθετη προς τη μεγαλύτερη χορδή ΑΒ .Αποδεικνύεται, ότι είναι: ΑΝ = ΝΒ + ΒΓ δηλαδή το Ν είναι το μέσον της τεθλασμένης χορδής ΑΒΓ.

Παρατηρούμε, ότι το εν λόγω θεώρημα, χρησιμοποιούμενο σαν «λήμμα», μπορεί να μας οδηγήσει στον υπολογισμό της χορδής της διαφοράς ή του αθροίσματος δύο δεδομένων τόξων με γνωστές χορδές. Ο τρόπος αυτός υπολογισμού είναι προφανώς διάφορος αυτού που χρησιμοποιεί ο Πτολεμαίος στην Αλμαγέστη. Μας είναι άγνωστο (λόγω παντελούς ελλείψεως συναφών ιστορικών στοιχείων) αν είτε ο Αρχιμήδης, είτε άλλος μεταγενέστερος, χρησιμοποίησε το ανωτέρω θεώρημα για τριγωνομετρικούς σκοπούς. Στο βιβλίο *Carl Boyer:* A History of Mathematics (John Wiley and Sons - N. York 1968) (Chapter VIII - Archimedes of Syracuse - Σελ. 149 και 150) αναφέρεται το εξής (σε ελεύθερη απόδοση):

«Δεν γνωρίζουμε, αν ο Αρχιμήδης διείδε, ότι το θεώρημα αυτό σημαίνει κάτι για την Τριγωνομετρία, αλλά έχει διατυπωθεί η άποψη από τον Johannes Tropfke «Archimedes und die Trigonometrie» στο Archiv fur die Geschichte der Mathematik 10(1927-28), σελ. 432-463 ότι του χρησίμευσε σαν τύπος ανάλογος προς τον $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$ κατά την επίλυση αστρονομικών προβλημάτων».(βλ.[59])

Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (256-194 π.Χ.)

Ο Ερατοσθένης υπήρξε μεγάλος μαθηματικός, αστρονόμος, γεωγράφος κ.λπ. Χρημάτισε διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξανδρείας. Ο Αρχιμήδης πρέπει να έτρεφε μεγάλη εκτίμηση προς αυτόν αν λάβουμε υπόψη, ότι του αφιέρωσε δύο έργα όπως προκύπτει από τις εισαγωγές τους, τα εξής:



α)Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος και

β) Πρόβλημα βοεικόν

Από τις εργασίες του θα αναφέρουμε μονάχα μία και συγκεκριμένα αυτή που αφορά την εύρεση του μήκους του γήινου μεσημβρινού και η οποία μπορεί να θεωρηθεί, ότι εμπίπτει στις πρόδρομες τριγωνομετρικές εργασίες. Ο Ερατοσθένης γνώριζε ή εξακρίβωσε μόνος του, ότι:

- Η πόλη Αλεξάνδρεια όπου ζούσε και η Συήνη (Ανω Αίγυπτος - Σημερινό Ασουάν) βρίσκονταν στον ίδιο περίπου μεσημβρινό και η μεταξύ τους απόσταση ήταν l = 5000 στάδια.
- Κατά τη μεσημβρία της ημέρας του Θερινού Ηλιοστασίου (22Ιουνίου) ο Ήλιος βρισκόταν στο ζενίθ (επάνω στην κατακόρυφο) της Συήνης με αποτέλεσμα η σκιά ενός γνώμονα να είναι μηδενική (άλλως: να φωτίζεται ο πυθμένας ενός κατακόρυφου φρέατος με μεγάλο βάθος).

Επίσης ο Ερατοσθένης, με τη βοήθεια γνώμονα, ή κάποιας άλλης κατάλληλης συσκευής, μέτρησε, κατά τη μεσημβρία της ημέρας του θερινού ηλιοστασίου (22 Ιουνίου), τη γωνία, που σχηματιζόταν μεταξύ των ηλιακών ακτίνων και της

κατακόρυφου στην Αλεξάνδρεια. Η γωνία αυτή βρέθηκε ίση προς το 1/50 της όλης περιφέρειας, δηλαδή θ=360/50=7^0 12΄.

Βάσει των ανωτέρω προκύπτει υπολογιστικά το μήκος (L)του γήινου μεσημβρινού:

$$L = l\frac{360^o}{\theta} = 5000\frac{360^o}{7^o 12'} = 250000 \text{ στάδια.}$$

Η παραπάνω τιμή πλησιάζει με αρκετή προσέγγιση την πραγματική. Κρίνοντας αυστηρά, πρέπει να σημειώσουμε, ότι η ανωτέρω μεγαλοφυής μέθοδος, του Ερατοσθένους για τη μέτρηση του μήκους του γήινου μεσημβρινού βασίζεται σε μια απλή γεωμετρική σχέση (το μήκος τόξου κύκλου είναι ανάλογο προς το άνοιγμα της επίκεντρης γωνίας, που βαίνει σ' αυτό) και δεν χρησιμοποιείται κάποια (έστω και υποτυπώδης) τριγωνομετρική συνάρτηση. Κάποια ίχνη Τριγωνομετρίας ίσως να υπήρχαν στον προσδιορισμό της γωνίας θ = 7° 12' από τη σκιά του γνώμονα.(βλ[59])

ΚΥΡΙΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΤΕΣ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ως κύριοι θεμελιωτές της αρχαίας ελληνικής Τριγωνομετρίας θεωρούνται γενικά:

- *ο Ίππαρχος ο Ρόδιος ή Νικαεύς (2ος αιώνας π.Χ.)*
- *ο Μενέλαος (1ος αιώνας μ.Χ.)*
- *ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (2ος αιώνας μ.Χ.)*

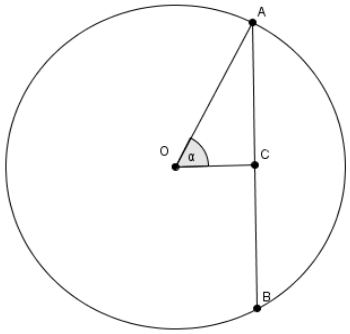
Ο Ίππαρχος (180-125 π.Χ.)

Ο Ίππαρχος υπήρξε μεγάλος αστρονόμος, μαθηματικός και γεωγράφος. Γεννήθηκε στη Νίκαια της Βηθυνίας στη Μικρά Ασία και εργάσθηκε επί πολύ στη Ρόδο. Θεωρείται ο πατέρας της Μαθηματικής Αστρονομίας. Εκτέλεσε πολλές και θεμελιώδεις εργασίες και γι' αυτό συγκαταλέγεται μεταξύ των διασημότερων αστρονόμων όλων των εποχών. Έγραψε πολλά και σπουδαία συγγράμματα, αλλά δυστυχώς σχεδόν όλα χάθηκαν αλλά διασώθηκαν μονάχα δύο και αυτά δευτερεύουσας σημασίας. Στα μαθηματικά μπορεί να θεωρηθεί σαν πατέρας της Τριγωνομετρίας, την οποία βρήκε ή διαμόρφωσε κατάλληλα, ώστε να κατορθώσει με τη βοήθεια της να επιλύσει τριγωνομετρικά προβλήματα, συνυφασμένα με τη Μαθηματική Αστρονομία. Ένας μεταγενέστερος συγγραφέας, ο Θέων ο Αλεξανδρεύς (τέλη 4ου μ.Χ. αιώνα), ο πατέρας της περίφημης Υπατίας, μάς παρέχει την πληροφορία, ότι ο Ίππαρχος είχε συγγράψει ένα έργο περί Τριγωνομετρίας, αποτελούμενο από 12 βιβλία και στο οποίο χρησιμοποιούσε ως τριγωνομετρική συνάρτηση τη χορδή κύκλου («την εν κύκλω ευθείαν»). Δυστυχώς το έργο αυτό δεν έχει διασωθεί και έτσι δεν γνωρίζουμε ποιά ακριβώς μορφή είχε η Τριγωνομετρία του. Πολλοί μελετητές διατυπώνουν εικασίες ότι η ανακάλυψη της μεταπτώσεως των Ισημεριών, η μέτρηση της Λόξωσης της Εκλειπτικής, η διαπίστωση της ανισότητας των εποχών του έτους, η εφαρμογή του συστήματος των επικύκλων και των έκκεντρων κύκλων στην ερμηνεία της κίνησης του Ήλιου και των πλανητών, ο υπολογισμός της εκκεντρότητας της φαινόμενης τροχιάς του Ήλιου, η σύνταξη του πρώτου ακριβούς καταλόγου 1020 απλανών αστέρων κλπ. περιέχονται στην Τριγωνομετρία του. Τα περισσότερα από αυτά που γνωρίζουμε προέρχονται από τον Πτολεμαίο, ο οποίος αποδίδει στον Ίππαρχο ένα πλήθος ιδεών για την τριγωνομετρία και την Αστρονομία. Του οφείλουμε πολλές αστρονομικές παρατηρήσεις και ανακαλύψεις, την σημαντικότερη αστρονομική θεωρία των αρχαίων χρόνων και εργασίες στην γεωγραφία. Μόνο μια εργασία του Ίππαρχου, τα ερμηνευτικά του σχόλια πάνω στα

«Φαινόμενα» του Ευδόξου και του Άρατου, διασώθηκε. «Φαινόμενα»: Επικό ποίημα από 1154 εξάμετρους στίχους όπου περιγράφονται ποιητικά οι αστερισμοί και ουράνια φαινόμενα με κατεσπαρμένους στο έργο ύμνους, θρύλους και μύθους. Το ποίημα έχει τρία μέρη: τη «καταστερέωση» όπου εξυμνούνται οι αστερισμοί, τους «συνανατέλλοντες και συνδύοντες» και τις «διοσημείες», δηλαδή τις μετεωρολογικές προγνώσεις. Ο Δίδυμος ο Ρόδιος έγραψε ένα έργο «Εισαγωγή στην Αστρονομία» , το οποίο διασώθηκε, και περιέχει μια περιγραφή της εργασίας του Ίππαρχου για τον Ήλιο.

Η μέθοδος προσέγγισης της τριγωνομετρίας του Ίππαρχου, όπως περιγράφεται από τον Πτολεμαίο, είναι η ακόλουθη. Η περιφέρεια ενός κύκλου διαιρείται σε 360^0 και η διάμετρος διαιρείται σε 120 τμήματα, όπως αναφέρει ο Υψικλής ο Αλεξανδρεύς ($2^{ος}$ αιώνας μ.Χ.)στο έργο του «Περί της ζωδίων αναφοράς – Αναφορικόν». Το σύγγραμμα είναι ιδιαίτερα σπουδαίο και πολύτιμο στην επιστήμη των μαθηματικών και της Αστρονομίας διότι αποτελεί το συνδετικό κρίκο της αστρονομικής παρατήρησης μεταξύ των Ελλήνων και Βαβυλωνίων αστρονόμων της εποχής. Κάθε τμήμα της περιφέρειας και της διαμέτρου διαιρείται επίσης σε 60 τμήματα και κάθε ένα από αυτά σε 60 επιπλέον και ούτω καθεξής σύμφωνα με το Βαβυλωνιακό σύστημα των δεκαεξαδικών κλασμάτων. Τότε δοθέντος ενός τόξου ΑΒ κάποιου αριθμού μοιρών, ο Ίππαρχος δίνει τον αριθμό των μονάδων που αντιστοιχούν στη χορδή ΑΒ.

Ο αριθμός των μερών μιας χορδής που αντιστοιχεί σε ένα τόξο δοθέντος αριθμού μοιρών είναι ισοδύναμος με τη σημερινή συνάρτηση sinx.



σχήμα.1

Εάν 2α είναι η επίκεντρη γωνία του τόξου ΑΒ (σχήμα.1), τότε για εμάς sinα=AC/OA, όπου , στη θέση του sinα, ο Ίππαρχος δίνει τον αριθμό των μερών της 2 AC όπου η ακτίνα OA περιέχει 60 μέρη. Για παράδειγμα, εάν η χορδή των 2α είναι 40 μέρη, τότε για εμάς sinα=20/60, ή γενικότερα

$$\sin\alpha=\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2}\ \text{χορδή } 2\alpha = \frac{1}{120}\ \text{χορδή } 2\alpha.$$

Ο Ίππαρχος είναι ο εφευρέτης του Αστρολάβου, (όργανο με τη βοήθεια του οποίου μέτρησε τις συντεταγμένες των αστέρων). Τελειοποίησε τη Διόπτρα, (όργανο που του επέτρεψε την εκτίμηση της φαινόμενης διαμέτρου Ηλίου και Σελήνης, την απόσταση και το πραγματικό μέγεθός τους). Επίσης τελειοποίησε παλαιότερα όργανα όπως ήταν ο Γνώμων, το Ηλιοτρόπιο ή «Σκιάθηρον», το Ηλιωρολόγιο, το Καθετίον, την Κλεψύδρα, τους "Κρίκους", τη Στερεά σφαίρα και το Υδρολόγιο.Και ενώ θεωρείται ο πρώτος που διαίρεσε τους κύκλους των παραπάνω αστρονομικών αυτών οργάνων σε 360 μοίρες είναι ο πρώτος που κατασκεύασε Υδρόγειο σφαίρα.Το 2006, ανακοινώθηκε από την Ομάδα Έρευνας του Μηχανισμού των Αντικυθήρων ότι ένα σύμπλεγμα οδοντωτών τροχών στο εσωτερικό του μηχανισμού αναπαριστούσε τη μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα της Σελήνης, σύμφωνα με τη θεωρία του Ιππάρχου. Η σχετικά κοντινή χρονική απόστατση ανάμεσα στον θάνατο του Ιππάρχου και την υποτιθέμενη περίοδο κατασκευής του μηχανισμού θα μπορούσε να σημαίνει ότι η σχολή του Ιππάρχου είχε κάποια ανάμειξη στον σχεδιασμό ή και την κατασκευή του μοναδικού αυτού οργάνου.

Ο Μενέλαος (100 μ.Χ.)

Ο Μενέλαος (100 μ.Χ.) υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός και αστρονόμος. Γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια και δίδαξε στο «Μουσείο». Έζησε επίσης στη Ρώμη, όπου έκανε αστρονομικές παρατηρήσεις. Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, στην Αλμαγέστη (βιβλίο έβδομο κεφ. 3), μνημονεύει κάποιες αστρονομικές παρατηρήσεις του Μενελάου κατά το έτος 98 μ.Χ. Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς μας πληροφορεί επίσης, ότι εκτός από τον Ίππαρχο, και ο Μενέλαος είχε συγγράψει έργο περί Τριγωνομετρίας αποτελούμενο από 6 βιβλία και στο οποίο εχρησιμοποιείτο επίσης ως τριγωνομετρική συνάρτηση η χορδή κύκλου *(«ή έν κύκλω ευθεία»).* Δυστυχώς πάλι, και το σύγγραμμα αυτό δεν έχει διασωθεί. Από το πλούσιο συγγραφικό έργο του Μενελάου «διασώθηκε» τελικώς μονάχα ένα, αλλά αρκετά σημαντικό, έργο του, το «Σφαιρικά» αποτελούμενο από τρία βιβλία. Το περιεχόμενο του εν λόγω συγγράμματος, πολύ συνοπτικά, έχει περίπου ως εξής:

Βιβλίο Ι: Ασχολείται με τη γεωμετρία του σφαιρικού τριγώνου (Ο Μενέλαος το αποκαλεί «τρίπλευρο»). Σημειώνεται ότι ο Μενέλαος χρησιμοποίησε επάνω στη σφαιρική επιφάνεια τόξα μεγίστων κύκλων, αντί τόξων παραλλήλων κύκλων (δηλαδή μικρών κύκλων). Αυτό απετέλεσε σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της

Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Εδώ ίσως έχουμε τη πρώτη προσπάθεια μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Βιβλίο ΙΙ: Δεν παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον από μαθηματικής άποψης. Διατυπώνονται μερικές προτάσεις αστρονομικού περιεχομένου, οι οποίες δεν σχετίζονται με την Τριγωνομετρία.

Βιβλίο ΙΙΙ: Το βιβλίο αυτό θεμελιώνει τη Σφαιρική τριγωνομετρία. παρουσιάζει σημαντικό τριγωνομετρικό ενδιαφέρον, δεδομένου ότι σ' αυτό αναπτύσσεται το θεώρημα για τις διατέμνουσες σφαιρικών τριγώνων το οποίο μας είναι και σήμερα γνωστό ως «Θεώρημα Μενελάου» .Το Θ.Μ. αποτελεί τη βάση για την επίλυση των σφαιρικών Τριγώνων στην Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία. Εκτός αυτού όμως του θεωρήματος, του οποίου το αντίστοιχο επίπεδο πιστεύεται ότι υπήρχε στα «Πορίσματα» του Ευκλείδη, ο σοφός μας δίνει τα σφαιρικά θεωρήματα των τόξων-διχοτόμων των τόξων-υψών και άλλα. Η συγκρότηση πινάκων χορδών κύκλου είναι επίσης μια προσφορά του, αν και προϋπήρχε ο αντίστοιχος πίνακας του Ιππάρχου. Οι πίνακες αυτοί περιέχονται στο χαμένο έργο του «Περί υπολογισμού των χορδών κύκλου» σε 6 βιβλία, από το οποίο μάλλον άντλησε αργότερα ο Πτολεμαίος.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (100-178 μ.Χ.)

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος έζησε στην Αλεξάνδρεια κατά τον 2^{ο} μ.Χ. αιώνα (100-178 μ.Χ.) και υπήρξε μια πολύ μεγάλη μορφή των θετικών επιστημών (αστρονόμος, μαθηματικός, γεωγράφος κ.α.). Πληροφορίες, σχετικά με το βίο και την πολιτεία του Πτολεμαίου έχουμε πολύ λίγα και αποσπασματικά (π.χ. Λεξικό Σούδα). Η περίοδος πάντως ακμής του συμπίπτει με τους χρόνους βασιλείας των Ρωμαίων Αυτοκρατόρων Αδριανού (117-138 μ.Χ.) και Αντωνίνου Πίου (138-161 μ.Χ.). Από τα συγγράμματα του προκύπτει, ότι ο Πτολεμαίος έκανε αστρονομικές παρατηρήσεις στην Αίγυπτο κατά το χρονικό διάστημα 127-151 μ.Χ. Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος ανέπτυξε δραστηριότητα σε πολλούς επιστημονικούς τομείς και υπήρξε πολυγραφότατος. Είμαστε τυχεροί που διασώθηκαν μέχρι των ημερών μας τα περισσότερα συγγράμματα του (ορισμένα βέβαια μονάχα σε αραβική μετάφραση). Από τα έργα του σπουδαιότερα είναι η *«Μαθηματική Σύνταξις»* και η *«Γεωγραφική Υφήγησις»*. Χάρις σ' αυτά τα δύο κυρίως συγγράμματα ο Κλαύδιος Πτολεμαίος κατέστη διάσημος, εθεωρείτο δε αυθεντία στους τομείς Αστρονομίας και Γεωγραφίας επί πολλούς αιώνες (από τον 2^{ο} μ.Χ. μέχρι και τον 16^{ο} μ.Χ. αιώνα). .(βλ.[43],[59])

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΣ ΤΟΥ ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

Η *«Μαθηματική Σύνταξις»* (Μ.Σ.) του Κλαύδιου Πτολεμαίου είναι μια περισπούδαστη πραγματεία Μαθηματικής Αστρονομίας. Με το σύγγραμμα αυτό ο Κλαύδιος Πτολεμαίος έκανε για την Αστρονομία, ότι ο Ευκλείδης με τα *«Στοιχεία»* (300 π.Χ.), για τη Γεωμετρία. Συγκέντρωσε δηλαδή τις διάσπαρτες αστρονομικές παρατηρήσεις και εργασίες των παλαιοτέρων, στηρίχθηκε πολύ στις ιδέες και στις εργασίες του Ίππαρχου, προσέθεσε τις δικές του παρατηρήσεις και θεωρίες, ακολούθως δε τις συναρμολόγησε όλες σε ένα ενιαίο και ομοιογενές σύνολο, ώστε στο σύγγραμμα του η αρχαία Αστρονομία να παρουσιάζεται με ενιαία και ολοκληρωμένη μορφή. Η *«Μαθηματική Σύνταξις»* υπήρξε το «ευαγγέλιο» όλων των μετέπειτα, μετά τον Πτολεμαίο αστρονόμων (Ελλήνων, Αράβων, Δυτικοευρωπαίων) από την έκδοση της (-150 μ.Χ.) μέχρι και τον 16ο μ.Χ. αιώνα, οπότε εκδόθηκε από τον Κοπέρνικο (1543 μ.Χ.) το σύγγραμα *«De revolutionibus orbium coelestium libri VI»* (Περί της περιστροφής των ουρανίων σωμάτων, βιβλία έξι). Η «Μαθηματική Σύνταξις» διασώθηκε ολόκληρη και σε διάφορες μορφές. Στην αρχαία ελληνική (24 χειρόγραφα διαφόρων εποχών μέχρι και τον 9ο μ.Χ. αιώνα), στην Αραβική (μεταφράσεις Βαγδάτης 9ου μ.Χ. αιώνα), σε λατινική μετάφραση από αρχαία ελληνικά (~1150 μ.Χ.) και τέλος σε λατινική μετάφραση από τα αραβικά (Gerardus CREMONA, 1180 μ.Χ.) Από τις εκδόσεις, κατά τους νεότερους χρόνους, του πρωτότυπου στην αρχαία ελληνική κειμένου της Μ.Σ. αναφέρουμε τις εξής τρεις:

i) ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ. Μεγάλης Συντάξεως βιβλ. ΙΓ - ΘΕΩΝΟΣ ΑΑΕΞΑΝΔΡΕΩΣ εις τα αυτά υπομνημάτων, βιβλ. ΙΑ'Basilae, 1538, Io. Walderus

ii) HALMA N. Composition Mathematique de Claude Ptolemee (αρχαίο κείμενο και γαλλική μετάφραση) 2 Vols – Paris 1813, 1816

iii) CLAUDII PTOLEMAEI. Opera quae extant omnia, Volumen I, Syntaxis Mathematica, Edidit: J.L. Heiberg.Έκδοση Teubner Λειψίας (1898) (βλ.[61])

Η «Μαθηματική Σύνταξις» του Κλαύδιου Πτολεμαίου απαρτίζεται από 13 βιβλία, το κάθε δε βιβλίο υποδιαιρείται σε κεφάλαια. Το βιβλίο Α', παραδείγματος χάριν, υποδιαιρείται σε 16 κεφάλαια.Η «Μαθηματική Σύνταξις» του Κλαύδιου Πτολεμαίου

άρχισε να αποκαλείται αργότερα «Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξις» ή και απλώς «Μεγάλη Σύνταξις», για τους εξής μάλλον λόγους:

- *Για διάκριση από άλλα παρεμφερή, αλλά μικροτέρας εκτάσεως συγγράμματα.*
- *Λόγω της μεγάλης αρτιότητας και σπουδαιότητας του έργου αυτού, θεωρουμένου ως μοναδικού.*

Βαθμηδόν το επίθετο της («Μεγάλη») μεταπήδησε στον υπερθετικό βαθμό και έγινε «Μεγίστη». Έτσι, όταν οι Άραβες κατά τον 9ο μ.Χ. αιώνα μετέφρασαν το έργο στην αραβική του έδωσαν τον τίτλο «Κιτάπ Αλ-μεγίστη». Κιτάπ: Αραβική λέξη, που σημαίνει Βίβλος, βιβλίο. Μεγίστη: Από τον πλήρη τίτλο *«Μεγίστη Μαθηματική Σύνταξις»* κράτησαν μόνον το «Μεγίστη», Αλ: Αραβικό άρθρο. Οι Άραβες έτρεφαν τόση εκτίμηση στην Μ.Σ., ώστε, όταν επί αυτοκράτορος Μιχαήλ Γ' (842-867 μ.Χ.) νίκησαν τους Βυζαντινούς, έθεσαν μεταξύ των όρων της Συνθήκης και την υποχρέωση παραδόσεως (από τους Βυζαντινούς) ενός χειρογράφου της Μ.Σ. στον χαλίφη Αλ-Μαμούν.

Κατά την Αναγέννηση οι Ευρωπαίοι Αραβιστές, που μετέφρασαν την Μ.Σ. από τα αραβικά στα λατινικά και της έδωσαν αρχικώς τον τίτλο «Βίβλος του Αλμαγέστου». Νόμιζαν, ότι το αραβικό κείμενο ήταν το πρωτότυπο. Σιγά-σιγά όμως ο τίτλος απλοποιήθηκε σε «Αλμαγέστη», ο οποίος και επικράτησε βαθμηδόν διεθνώς, μέχρι και σήμερα. Ο αραβικός τίτλος ήταν al-mjsty (σκελετός συμφώνων). Διαβάστηκε (λανθασμένα) al-majesti και μεταφράσθηκε στα λατινικά almagesti ή almagestum. Η πρώτη μετάφραση της Αλμαγέστης από τα αραβικά στα λατινικά, στη Δύση, έγινε από τον Ιταλό Γεράρδο εκ Κρεμώνης (Gerardus Cremonensis) την περίοδο 1175-1180 μ.Χ.

Η πρώτη έκδοση του αρχαίου ελληνικού κειμένου (από διάφορους διασωθέντας παπύρους) έγινε αρκετά αργότερα (1538 μ.Χ.) από τον Grynaeus στην Βασιλεία της Ελβετίας. Στο σχετικά πρόσφατο σύγγραμμα: *J. Evans.* The History and Practice of Ancient Astronomy (Oxford University Press, 1998) αναφέρεται (§1.2, σελ. 23) το ακόλουθο (σε μετάφραση): «Η Αλμαγέστη αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα συγγράμματα στην όλη ιστορία των επιστημών, που είναι συγκρίσιμο σε σημασία και σε επίδραση προς τα:

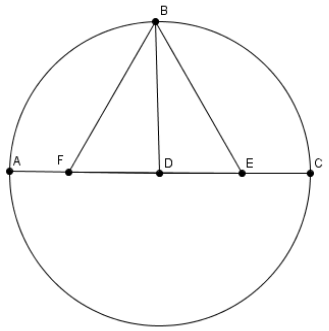
- Ευκλείδου: *Στοιχεία*
- Newton: *Principia*
- Darwin: *Origin of Species.*

Η όλη «Μαθηματική Σύνταξις» βασίζεται στο «Γεωκεντρικό (ή Πτολεμαϊκό) Σύστημα. Σύμφωνα με το Σύστημα αυτό η Γη θεωρείται ακίνητη στο κέντρο του Σύμπαντος, ή του «κόσμου» κατά Πυθαγόρα και γύρω της περιφέρονται τα

διάφορα ουράνια σώματα (πλανήτες και απλανείς αστέρες), δηλαδή τα ακόλουθα: Η Σελήνη, ο Ερμής, η Αφροδίτη, ο Ήλιος, ο Άρης, ο Ζευς (Δίας) και ο Κρόνος. Οι απλανείς αστέρες. Διευκρινίζεται, ότι η Αλμαγέστη ασχολείται μόνο με την Κινηματική των ουρανίων σωμάτων. Μελετώνται δηλαδή οι φαινομενικές για παρατηρητή επί της Γης, τροχιές των ουρανίων σωμάτων συναρτήσει του χρόνου, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη και οι δρώσες δυνάμεις (π.χ. παγκόσμια έλξη), οι μάζες κλπ.

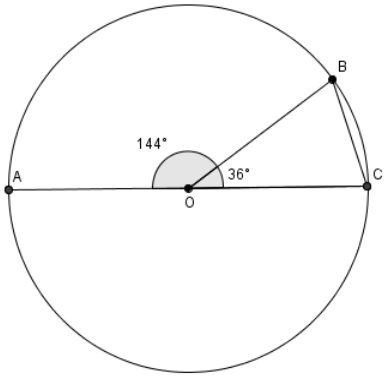
Στην Αλμαγέστη ο Πτολεμαίος:

Δεν προβαίνει σε εύρεση γενικών τύπων για την επίλυση των διαφόρων ειδών τριγώνων. Δεν συστηματοποιεί γενικές μεθόδους επιλύσεως. Πάντοτε επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα, που τον απασχολεί, με τον προσφορότερο κατά περίπτωση τρόπο ,βάσει των εκάστοτε δεδομένων. Η Αλμαγέστη του Πτολεμαίου είναι ολοκληρωτικά μαθηματική , εκτός όπου χρησιμοποιεί την Αριστοτελική Φυσική για να αντικρούσει την Ηλιοκεντρική υπόθεση, που ο Αρίσταρχος είχε προτείνει. Υποστηρίζει ότι αφού η μαθηματική γνώση , πλησιάζεται ερευνητικά , ώστε να δώσει στους ερευνητές γνώση άξια εμπιστοσύνης , οδηγήθηκε στο να καλλιεργήσει όσο περισσότερο μπορούσε αυτό το θεωρητικό εργαλείο. Ο Πτολεμαίος επίσης αναφέρει ότι εύχεται να βασίσει την αστρονομία «σε αναμφισβήτητες διαδικασίες της αριθμητικής και της γεωμετρίας». Στο ΙΧ κεφάλαιο του Ι βιβλίου ο Πτολεμαίος ξεκινά με τον υπολογισμό των χορδών των τόξων ενός κύκλου, επεκτείνοντας έτσι τις εργασίες του Ίππαρχου και του Μενέλαου. Όπως ήδη αναφέρθηκε , η περιφέρεια είναι χωρισμένη σε 360 τμήματα ή μονάδες (δεν χρησιμοποιούσαν τον όρο «μοίρες») και η διάμετρος σε 120 τμήματα. Κατόπιν προτείνει ότι, δοθέντος ενός τόξου που περιέχει ένα δοθέντα αριθμό από τα 360 τμήματα, βρίσκουμε το μήκος της χορδής που το εκφράζουμε στην ίδια μονάδα όπως η διάμετρος που είναι 120 μονάδες. Αρχίζει με τον υπολογισμό των χορδών των τόξων των 36^0 και των 72^0.Στο σχήμα2, ADC είναι η διάμετρος ενός κύκλου με κέντρο το και η BD είναι κάθετος στην ADC. Ε είναι το μέσον της DC και F είναι τέτοιο ώστε EF=BE .



Σχήμα2

Ο Πτολεμαίος αποδεικνύει γεωμετρικά ότι η FD ισούται με την πλευρά ενός κανονικού εγγεγραμμένου δεκαγώνου και η BF ισούται με την πλευρά ενός κανονικού εγγεγραμμένου πενταγώνου. Όμως η ED είναι 30 μονάδες και η BD είναι 60 μονάδες. Οπότε $EB^2=ED^2+BD^2 \Rightarrow EB^2=4500$ και EB=67 4΄ 55΄΄ (που σημαίνει 67+ 4/60 + $55/60^2$ μοίρες). Επίσης EF=BE οπότε και η EF γνωστή. Τότε FD=EF-DE=67 4΄ 55΄΄-30=37 4΄ 55΄΄.Επειδή η FD ισούται με την πλευρά του δεκαγώνου ,είναι χορδή τόξου 36^0. Έτσι γνωρίζει τη χορδή αυτού του τόξου. Χρησιμοποιώντας την FD και το ορθογώνιο τρίγωνο FDB μπορεί να υπολογίσει το BF. Είναι 70 32΄3΄΄ . Αλλά η BF είναι η πλευρά πενταγώνου. Έτσι έχει και τη χορδή του τόξου 72^0. Φυσικά για την πλευρά του κανονικού εξαγώνου , επειδή ισούται με την ακτίνα, έχει αμέσως ότι η χορδή μήκους 60 αντιστοιχεί σε τόξο 60 μερών. Επίσης, επειδή η πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου είναι άμεσα υπολογίσιμη σε σχέση με την ακτίνα, έχει τη χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 90^0. Αυτή είναι 84 51΄10΄΄ .Επίσης, επειδή η πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι επίσης άμεσα υπολογίσιμη σε σχέση με την ακτίνα, βρίσκει ότι η χορδή τόξου 120^0 είναι 103 55΄23΄΄.



Σχήμα3

Χρησιμοποιώντας το ορθογώνιο τρίγωνο ABC(Σχήμα 3) με διάμετρο AC μπορούμε άμεσα να βρούμε τη χορδή του παραπληρωματικού τόξου AB εάν γνωρίζουμε τη χορδή του τόξου BC. Έτσι, επειδή ο Πτολεμαίος γνωρίζει τη χορδή τόξου 36^0 μπορεί να βρει τη χορδή τόξου 144^0 που υπολογίζεται να είναι 114 7΄37΄΄. Η σχέση που αποδεικνύεται εδώ είναι ισοδύναμη με την $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$ όπου A είναι όποια οξεία γωνία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί όπως παρακάτω. Ο Πτολεμαίος είχε αποδείξει ότι αν S είναι κάποιο τόξο μικρότερο από 180^0 τότε:

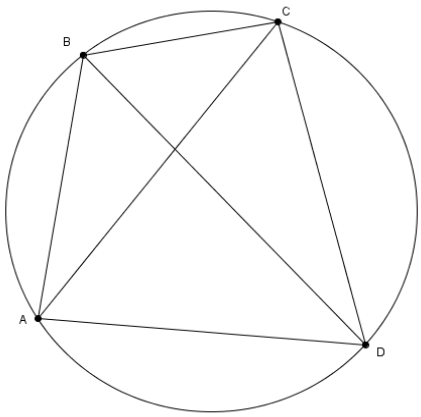
$(\text{χορδή } S)^2 + [(\text{χορδή } (180 - S)]^2 = (120)^2$

Όμως ισχύει (χορδή S)^2 = (120)^2 sin^2 $S/2$ οπότε

$$(120)^2 \sin^2 S/2 + (120)^2 \sin^2\left(\frac{180-s}{2}\right) = (120)^2 \quad \text{ή}$$

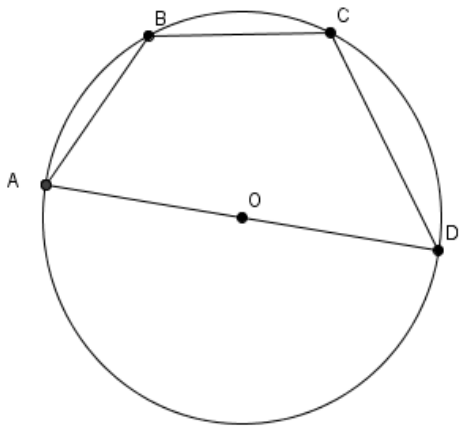
$$\sin^2 S/2 + \sin^2\left(\frac{180-s}{2}\right) = 1 \qquad \text{οπότε} \quad \sin^2 S/2 + \cos^2 S/2 = 1$$

Κατόπιν ο Πτολεμαίος υπολογίζει αυτό που ονομάζει λήμμα αλλά είναι γνωστό σήμερα ως θεώρημα του Πτολεμαίου. Δοθέντος ενός τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Σχήμα4) αποδεικνύει ότι AC·BD=AB·DC+AD·BC. Η απόδειξη είναι άμεση.



Σχήμα4

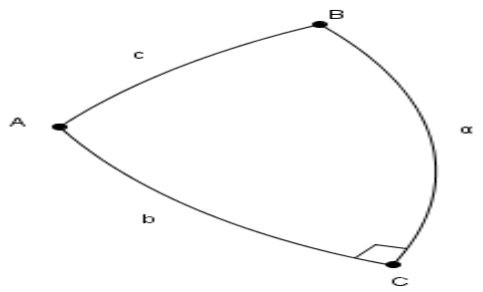
Κατόπιν παίρνει το ειδικό τετράπλευρο ABCD όπου η AD είναι διάμετρος (σχήμα5). Έστω ότι γνωρίζουμε την AB και AC.



Σχήμα 5

Ο Πτολεμαίος δείχνει πώς να βρούμε την BC. Η BD είναι η χορδή του συμπληρωματικού τόξου του BD και CD είναι η χορδή του συμπληρωματικού τόξου του AC. Εάν κάποιος εφαρμόσει το λήμμα παρατηρεί ότι πέντε από τα έξι μήκη που περιέχονται στη σχέση είναι γνωστά ,οπότε γνωρίζουμε και το έκτο που είναι το BC. Όμως τόξο BC=τόξο AC - τόξο AB. Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη χορδή της διαφοράς δύο τόξων εάν οι χορδές τους είναι γνωστές. Με σύγχρονη ορολογία αυτό σημαίνει ότι εάν γνωρίζουμε το sinA και το sinB μπορούμε να υπολογίσουμε το sin(A-B). Ο Πτολεμαίος αποδεικνύει ότι, αφού γνωρίζουμε τις χορδές των 72^0 και 60^0 μπορούμε να υπολογίσουμε τη χορδή των 12^0. Κατόπιν αποδεικνύει ότι , δοθέντος μιας χορδής σε κύκλο , μπορούμε τη χορδή που αντιστοιχεί στο μισό τόξο της δοθείσας χορδής. Με σύγχρονη ορολογία αυτό σημαίνει να βρούμε το sin A/2 από το sinA. Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό, όπως ισχυρίζεται ο Πτολεμαίος , διότι μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα τόξο του οποίου η χορδή είναι γνωστή και να βρούμε τις χορδές των διαδοχικών μισών αυτού του τόξου. Επίσης αποδεικνύει ότι εάν κάποιος γνωρίζει τις χορδές των τόξων AB και BC, τότε μπορεί να βρει τη χορδή του τόξου AC. Με σύγχρονη ορολογία αυτό το αποτέλεσμα είναι ο τύπος για το sin(A+B) . Σαν ειδική περίπτωση, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε , με σύγχρονους όρους, το sin2A από το sinA. Αφού ο Πτολεμαίος μπορεί να βρει τη χορδή των $¾^0$ από τη χορδή των 12^0 με διχοτόμηση, μπορεί να προσθέσει ή να το αφαιρέσει σε οποιοδήποτε τόξο του οποίου η χορδή είναι γνωστή και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θεωρήματα, μπορεί να υπολογίσει τις χορδές του αθροίσματος ή της διαφοράς δυο τόξων. Έτσι είναι σε θέση να υπολογίσει τις χορδές όλων των τόξων σε βήματα των $¾^0$. Αυτός όμως, θέλει να υπολογίσει τις χορδές των τόξων με βήματα του $½^0$. Εδώ σταμάτησε και αναγκάστηκε να καταφύγει σε έξυπνους συλλογισμούς με ανισότητες. Το προσεγγιστικό συμπέρασμα είναι ότι η χορδή του τόξου $1/ 2^0$ είναι ίσο με 0 31΄25΄΄. Βρίσκεται τώρα σε θέση να δημιουργήσει ένα πίνακα χορδών των τόξων, για τόξα που διαφέρουν κατά το $1/2^0$ από 0^0 έως 180^0 .Αυτός είναι ο πρώτος τριγωνομετρικός πίνακας. Κατόπιν ο Πτολεμαίος συνεχίζει (κεφάλαιο XI του $1^{ου}$ βιβλίου) να λύνει Αστρονομικά προβλήματα που περιέχουν εύρεση τόξων μεγίστων κύκλων σε μια σφαίρα. Αυτά τα τόξα είναι πλευρές σφαιρικών τριγώνων , μερικά τμήματα των οποίων είναι γνωστά από προηγούμενες παρατηρήσεις ή προηγούμενους υπολογισμούς. Για να καθορίσει τα άγνωστα τόξα ο Πτολεμαίος αποδεικνύει σχέσεις που αποτελούν θεωρήματα της σφαιρικής τριγωνομετρίας μερικά εκ των οποίων έχουν ήδη αποδειχθεί στο 8° βιβλίο των Σφαιρικών του Μενελάου .Η βασική μέθοδος του Πτολεμαίου είναι να εφαρμόζει το

θεώρημα του Μενελάου στα σφαιρικά τρίγωνα. Έτσι αποδεικνύει, με δική μας σημειογραφία , ότι στα σφαιρικά τρίγωνα με ορθή γωνία στο C(Σχήμα6) και με το τόξο α εξ ορισμού να βρίσκεται πάνω στην πλευράπου είναι απέναντι από τη γωνία Α, ότι:



Σχήμα 6

$$\sin \alpha = \sin c \sin A$$

$$\tan \alpha = \sin b \tan A$$

$$\cos c = \cos \alpha \cos b$$

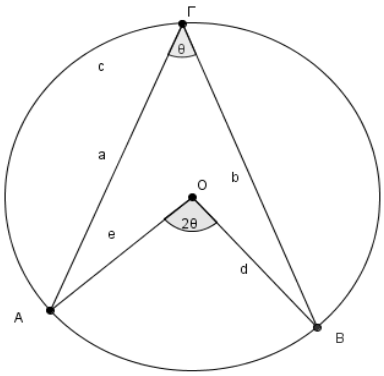
$$\tan b = \tan c \cos A$$

Φυσικά για τον Πτολεμαίο οι διάφορες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι χορδές τόξων. Για να χειριστεί λοξά σφαιρικά τρίγωνα , τα διασπά σε ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα . Δεν υπάρχει συστηματική αναπαράσταση της σφαιρικής τριγωνομετρίας, αποδεικνύει μόνο εκείνα τα θεωρήματα που χρειάζεται για να λύσει συγκεκριμένα αστρονομικά προβλήματα.

Η Almagest τοποθετεί την τριγωνομετρία σε μια ορισμένη μορφή όπου παρέμεινε για πάνω από χίλια χρόνια. Αναφέρουμε γενικά αυτή την τριγωνομετρία ως σφαιρική, αλλά η διάκριση μεταξύ επίπεδης και σφαιρικής τριγωνομετρίας είναι μικρής σημασίας σχετικά με το υλικό του Πτολεμαίου. Ο Πτολεμαίος βέβαια εργάζεται με σφαιρικά τρίγωνα , αλλά για να κάνει υπολογισμούς με τις χορδές των τόξων , δίνει τις θεωρητικές βάσεις για την επίπεδη τριγωνομετρία. Έτσι αν γνωρίζουμε το sinA και σαν αποτέλεσμα το cosA για κάθε Α από 0^0 έως 90^0 μπορούμε να λύσουμε επίπεδα τρίγωνα.(βλ.[59])

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ-ΔΥΟ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

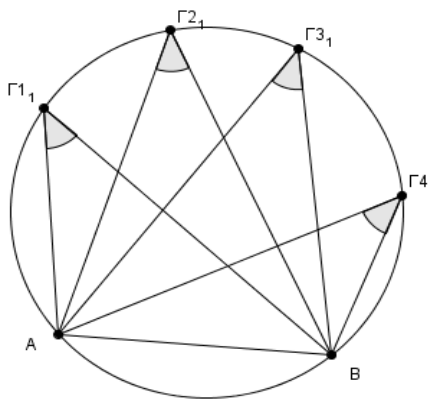
Μπορούμε να σημειώσουμε ότι η τριγωνομετρία δημιουργήθηκε για χρήση στην Αστρονομία και επειδή η σφαιρική τριγωνομετρία ήταν για αυτό το σκοπό περισσότερο χρήσιμο εργαλείο, ήταν η πρώτη που αναπτύχθηκε. Η χρήση της επίπεδης τριγωνομετρίας σε έμμεσες μετρήσεις και τη χαρτογραφία είναι ξένη για τους Έλληνες μαθηματικούς. Αυτό μπορεί να φαίνεται παράξενο σε εμάς, αλλά ιστορικά είναι εύκολα κατανοητό, επειδή η αστρονομία ήταν η πιο ενδιαφέρουσα ασχολία των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Η χαρτογράφηση ήρθε στην επικαιρότητα την Αλεξανδρινή περίοδο, από τον μαθηματικό Ήρωνα, ο οποίος ενδιαφερόταν για τη χαρτογράφηση και ήταν ικανός στην ανάπτυξη της επίπεδης τριγωνομετρίας, μένοντας ικανοποιημένος σε εφαρμογές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι μη εκπαιδευμένοι γεωγράφοι δεν ήταν σε θέση να δημιουργήσουν την απαραίτητη τριγωνομετρία. Η Πρόταση 20 του τρίτου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη λέει:Εν κύκλω ή προς τω κέντρω γωνία διπλασίων εστί της προς τη περιφέρεια, όταν την αυτήν περιφέρειαν βάσιν έχωσιν αι γωνίαι. [Σε έναν κύκλο, η γωνία προς το κέντρο είναι διπλάσια αυτής που βρίσκεται στην περιφέρεια όταν έχουν ως βάση την ίδια περιφέρεια.]



Σχήμα1.

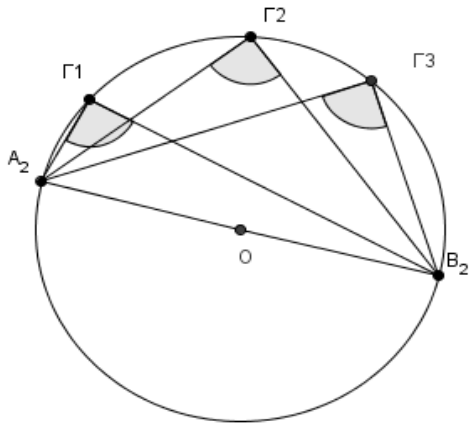
Σε πιο κοινή γλώσσα, η πρόταση λέει ότι μια γωνία εγγεγραμμένη σε κύκλο (δηλαδή μια γωνία της οποίας η κορυφή ανήκει στην περιφέρεια του κύκλου) ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο (Σχήμα 1). Δύο πορίσματα προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες αυτού του θεωρήματος:

(1) Σε κάθε κύκλο, όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες (Πρόταση 21 του Ευκλείδη,(Σχήμα 2)(βλ.[38])



Σχήμα2.

(2) Όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στη διάμετρο είναι ορθές(Σχήμα 3).

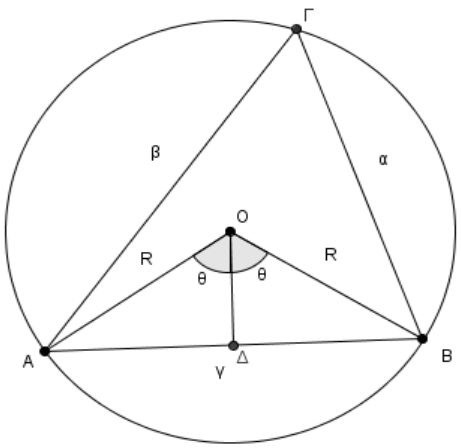


Σχήμα3.

Σύμφωνα με την παράδοση, η τελευταία πρόταση αποδείχθηκε από τον Θαλή (παρ' όλο που ήταν γνωστή στους Βαβυλώνιους χίλια χρόνια πριν από την εποχή του) και είναι ίσως ένα από τα πρώτα θεωρήματα που αποδείχθηκαν ποτέ. Αυτό το απλό θεώρημα με τα δύο πορίσματα του κρύβει ένα θησαυρό πληροφοριών τριγωνομετρικού χαρακτήρα. Εδώ θα μας χρησιμεύσει για να αποδείξουμε το νόμο των ημιτόνων.

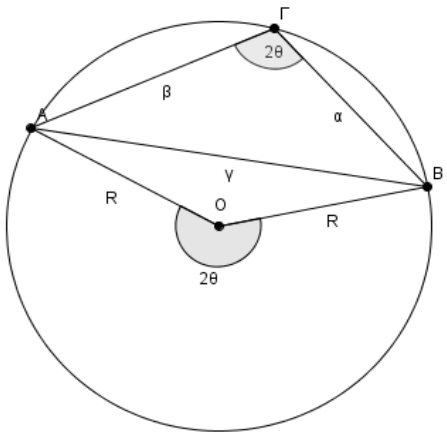
Στο Σχήμα 4 βλέπουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R. Έχουμε γωνία ΑΟΒ = 2γωνίες ΑΓΒ = 2Γ. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο του ΑΒ, η οποία προφανώς διέρχεται από το Ο. Ισχύει sinΓ = sin(ΑΟΒ/2) = (γ/2)/R συνεπώς, γ/sinΓ= *2R* = σταθερό. Από τη στιγμή που ο λόγος γ/sinΓ είναι σταθερός (έχει δηλαδή την ίδια τιμή ανεξαρτήτως των γ και Γ), προκύπτει ότι:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\sin \Gamma} = 2R. \qquad (1)$$



Σχήμα4

Αυτή η απόδειξη όχι μόνο αποτελεί υπόδειγμα απλότητας, αλλά επιπλέον δίνει το νόμο των ημίτονων στην πλήρη μορφή του. Η συνήθης απόδειξη, που στηρίζεται στο χωρισμό του τριγώνου σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, παραλείπει εντελώς το γεγονός ότι οι λόγοι είναι ίσοι και με τη διάμετρο, 2R. Στο Σχήμα 4, η γωνία *Γ* είναι οξεία, συνεπώς το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου.

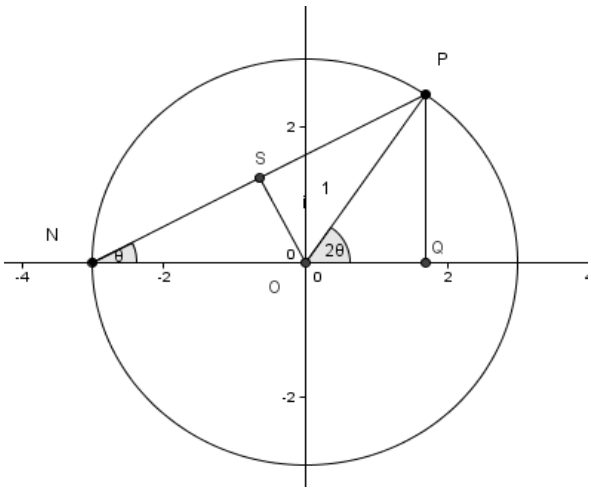


Σχήμα5

Αν η *Γ* είναι αμβλεία (Σχήμα 5.), το κέντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου, και το τόξο ΑΒ είναι μεγαλύτερο από ημικύκλιο. Επομένως, η εσωτερική γωνία *Ο* του τριγώνου *ΑΟΒ* ισούται με Γ' = 360° - 2Γ.

Φέρνουμε πάλι τη μεσοκάθετο του ΑΒ, η οποία διέρχεται από το *Ο*. Έχουμε: sin(Γ/2) = (γ/2)/R.

Όμως, sin(Γ'/2) = sin(180° - Γ) = sinΓ. Επομένως, όπωςκαι στην προηγούμενη περίπτωση, γ/sinΓ= 2R.



Σχήμα 6.Γεωμετρική απόδειξη των τύπων του διπλάσιου τόξου

Μπορούμε να πάρουμε ακόμη περισσότερες πληροφορίες από το θεώρημα μας. Στο Σχήμα 6 βλέπουμε τον μοναδιαίο κύκλο και ένα σημείο *του* P. Ονομάζουμε 2θ τη γωνία που σχηματίζει η OP με τον θετικό ημιάξονα Οχ. Τότε, γωνία ORP = θ, όπου N το σημείο με συντεταγμένες (-1, 0). Εφαρμόζοντας το νόμο των ημίτονων στο τρίγωνο ONP, έχουμε NP/sin(180° - 2θ) = OP/sinθ. Όμως, sin(180° - 2θ) = sin2θ και OP = 1 άρα, NP/sin2θ = l/sinθ, απ' όπου προκύπτει:

$\sin 2\theta = NP\sin\theta.$ (2)

Φέρνουμε τη μεσοκάθετο *OS* στο *NP*. Στο ορθογώνιο τρίγωνο *ONS* έχουμε: cosθ = NS/NO = (NP/2)/NO = NP/2. Συνεπώς, NP = 2cosθ. Αντικαθιστώντας στη (2), προκύπτει:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,$ (3)

δηλαδή ο τύπος του διπλάσιου τόξου για το ημίτονο. Φέρνοντας τώρα την κάθετο *PQ* από το *P* στον άξονα των *χ*, έχουμε:

$\cos 2\theta = OQ = NQ - NO = NP\cos\theta - 1 =$

$= (2\cos\theta)\cos\theta - 1 = 2\cos^2\theta - 1,$ (4)

δηλαδή τον τύπο του διπλάσιου τόξου για το συνημίτονο.

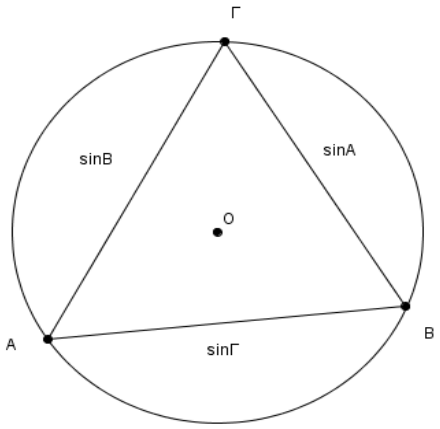
Τέλος, έχοντας αποδείξει τους τύπους του διπλάσιου τόξου, αφού αντικαταστήσουμε τη γωνία 2θ με *φ,* παίρνουμε τους τύπους του μισού.

Ας επιστρέψουμε για λίγο στην απόδειξη του νόμου των ημίτονων. Από τη στιγμή που τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζουν έναν και μόνο κύκλο, κάθε τρίγωνο

είναι εγγράψιμο σε έναν μοναδικό κύκλο. Έτσι, μπορούμε σε κάθε περίπτωση να θεωρούμε τις γωνίες ενός τριγώνου ως εγγεγραμμένες σε κύκλο, και τις πλευρές του ως χορδές αυτού του κύκλου.Επομένως, ο νόμος των ημίτονων είναι, σε τελική ανάλυση, ένα θεώρημα που αφορά κύκλους.

Αν επιλέξουμε τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου ως μονάδα μέτρησης (δηλαδή της αποδώσουμε μέτρο 1), ο νόμος των ημίτονων παίρνει τη μορφή:

$\alpha = \sin A$, $\beta = \sin B$, $\gamma = \sin \Gamma$



Σχήμα 7.Ο νόμος των ημίτονων στον κύκλο μοναδιαίας διαμέτρου.

δηλαδή κάθε πλευρά τριγώνου εγγεγραμμένου σε μοναδιαίο κύκλο ισούται με το ημίτονο της απέναντι γωνίας (Σχήμα7.). Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει το ημίτονο μιας γωνίας ως το μήκος της χορδής προς την οποία βαίνει όταν είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο μοναδιαίας διαμέτρου. Αυτός ο ορισμός θα ήταν το ίδιο έγκυρος με τον παραδοσιακό ορισμό του ημίτονου ως λόγου δύο πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου.Και μάλιστα θα πλεονεκτούσε απέναντι του, αφού θα έπρεπε στη γωνία να παίρνει τιμές από 0° μέχρι 180°, δηλαδή θα είχαμε το διπλάσιο πεδίο ορισμού απ' ότι στον ορισμό μέσω ορθογώνιου τριγώνου. Άλλωστε, αυτός είναι ουσιαστικά ο ορισμός του ημίτονου που χρησιμοποίησε ο Πτολεμαίος στον πίνακα χορδών του.

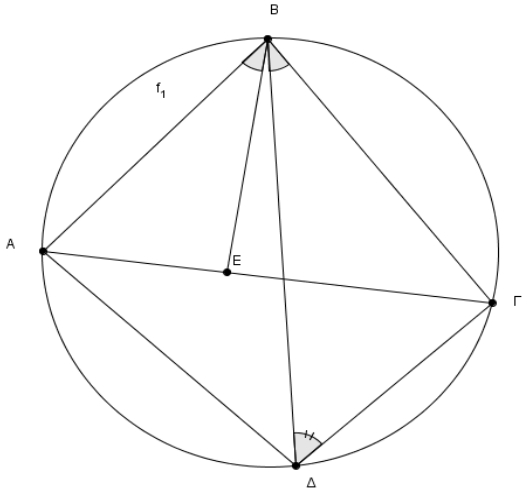
Στην *Αλμαγέστη* του Πτολεμαίου υπάρχει η ακόλουθη πρόταση, γνωστή ως θεώρημα του Πτολεμαίου:

Έστω γαρ κύκλος εγγεγραμμένον έχων τετράπλευρον τυχόν το ΑΒΓΔ, και επεζεύχθωσαν αι ΑΓ και ΒΔ. Δεικτέον, ότι το υπό των ΑΓ και ΒΔ περιεχόμενον ορθογώνιον ίσον εστί συναμφοτέροις τω τε υπό των ΑΒ, ΔΓ και τω υπό των ΑΔ, ΒΓ.[Πτολεμαίου, Μεγίστη Σύνταξις,Εκδόσεις Heiberg,τομ. 1,σελ.36-37]

[Το ορθογώνιο που περιέχεται από τις διαγώνιους οποιουδήποτε εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου ισούται με το άθροισμα των ορθογωνίων που περιέχονται από τα ζεύγη των απέναντι πλευρών.]

Τι μπορεί να σημαίνει αυτή η μυστηριώδης πρόταση; Πρώτα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες ερμήνευαν τους αριθμούς ως μήκη ευθύγραμμων τμημάτων και τα γινόμενα αριθμών ως εμβαδά ορθογωνίων με πλευρές τους παράγοντες του γινομένου. Επομένως, «το ορθογώνιο που περιέχεται από τις διαγώνιους» σημαίνει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει για πλευρές του τις διαγώνιους του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου. Ανάλογη ερμηνεία θα δώσουμε στο «ορθογώνια που περιέχονται από τα ζεύγη των απέναντι πλευρών». Με άλλα λόγια, «ορθογώνιο που περιέχεται από...» σημαίνει «γινόμενο των...». Το θεώρημα του Πτολεμαίου μπορεί λοιπόν να διατυπωθεί ως εξής: *Σε κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, το γινόμενο των διαγωνίων τον ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών*. Αναφορικά στο Σχήμα 8, έχουμε:

ΑΓ·ΒΔ=ΑΒ·ΓΔ+ΒΓ·ΔΑ (5)



Σχήμα *8*.. Το θεώρημα τον Πτολεμαίου

Καθώς αυτό το θεώρημα δεν είναι τόσο γνωστό όσο άλλα της στοιχειώδους γεωμετρίας, παραθέτουμε την απόδειξη του ίδιου του Πτολεμαίου: Αρχίζοντας από μια πλευρά, για παράδειγμα την ΑΒ, κατασκευάζουμε γωνία ΑΒΕ ίση με τη γωνία ΔΒΓ. Οι γωνίες ΓΑΒ και ΓΔΒ είναι επίσης ίσες, αφού βαίνουν στην κοινή χορδή ΒΓ. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο ζεύγη ίσων αντίστοιχων γωνιών. Άρα, ΑΕ/ΑΒ = ΔΓ/ΔΒ, απ' όπου προκύπτει ότι:

ΑΕ·ΔΒ=ΑΒ·ΔΓ (6)

Προσθέτοντας τώρα τη γωνία ΕΒΔ στα δύο μέλη της ισότητας γωνία ΑΒΕ = γωνία ΔΒΓ, έχουμε γωνία ΑΒΔ = γωνία ΕΒΓ. Όμως, οι γωνίες ΒΔΑ και ΒΓΕ είναι επίσης ίσες, αφού βαίνουν στη χορδή ΑΒ. Άρα και τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΓ είναι όμοια, και συνεπώς ΑΔ/ΔΒ = ΕΓ/ΓΒ, απ' όπου προκύπτει ότι:ΕΓ·ΔΒ=ΑΔ·ΓΔ (7)

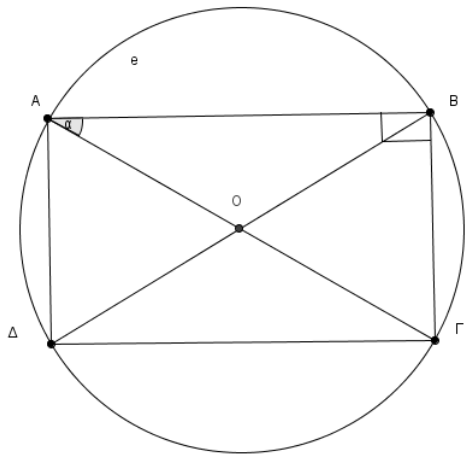
Τέλος, προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (6) και (7), παίρνουμε:

(ΑΕ + ΕΓ) · ΔΒ = ΑΒ · ΔΓ + ΑΔ · ΓΒ.

Επειδή ΑΕ + ΕΓ = ΑΓ, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.Στην ειδική περίπτωση που το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Σχήμα 9), όλες οι γωνίες είναι ορθές και επιπλέον

ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ=ΔΑ και ΑΓ = ΒΔ. Τότε η σχέση (5) γίνεται:

$(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2$ (8) δηλαδή το πυθαγόρειο θεώρημα!



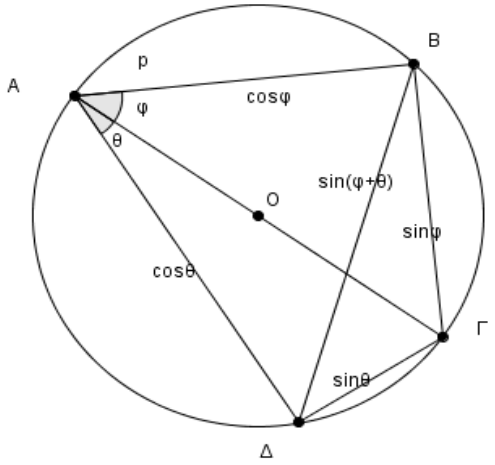
Σχήμα9.Το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Αυτή η απόδειξη του πιο διάσημου θεωρήματος στα μαθηματικά είναι η 66η από τις 256 που περιλαμβάνονται στο κλασικό βιβλίο «The Pythagorean Proposition» (Η πυθαγόρεια πρόταση) του Elisha Scott Loomis. (επανέκδοση 1940 Ουάσινγκτον, NCTM,1968,σελ.66)(βλ.[61]και[29])

Ποια είναι η σημασία του θεωρήματος του Πτολεμαίου στην τριγωνομετρία; Ας εξετάσουμε την περίπτωση που το *ΑΒΓΔ* είναι ορθογώνιο, η ΑΓ διάμετρος του κύκλου, και ισχύει ΑΓ = 1. Αν συμβολίσουμε τη γωνία ΒΑΓ με *θ,* έχουμε ΑΒ = cosθ και *ΒΓ* = sinθ. Έτσι, η σχέση (8) γίνεται:

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta,$$

που είναι το τριγωνομετρικό ισοδύναμο του πυθαγόρειου θεωρήματος. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα οποιοδήποτε εγγεγραμμένο τετράπλευρο στο οποίο μία διαγώνιος, έστω η ΑΓ, συμπίπτει με τη διάμετρο (Σχήμα 10), τότε οι γωνίες ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθές. Θέτουμε γωνία ΒΑΓ = φ, γωνία ΓΑΔ = θ. Έχουμε: ΒΓ = sinφ, ΑΒ = cosφ, ΓΔ = sinθ, ΑΔ =cosθ



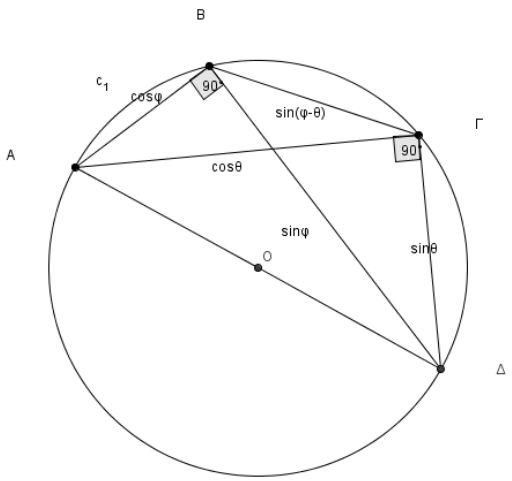
Σχήμα10. Γεωμετρική αποδειξη του τύπου sin(φ + *θ)* = sinφcosθ + cosφsinθ

και *ΒΔ* = sin(φ + *θ)*. Αντικαθιστώντας στο θεώρημα του Πτολεμαίου, έχουμε:

1 · sin(φ + *θ)* = sinφcosθ + cosφsinθ,

δηλαδή τον τύπο του αθροίσματος για το ημίτονο.

Ο τύπος της διαφοράς *sin(φ– θ)*= sinφcosθ – cosφsinθ προκύπτει με ανάλογο τρόπο αν θεωρήσουμε ένα τετράπλευρο στο οποίο μια πλευρά, για παράδειγμα η *ΑΔ,* συμπίπτει με τη διάμετρο —**βλ. Σχήμα 11.**



Σχήμα11... Γεωμετρική αποδειξη του τύπου sin(φ - *θ)* = sinφcosθ – cosφsinθ

Έτσι, ο σημαντικότερος ίσως τύπος της τριγωνομετρίας ήταν ήδη γνωστός από την εποχή του Πτολεμαίου, ο οποίος τον χρησιμοποίησε με μεγάλη αποτελεσματικότητα στον υπολογισμό του πίνακα χορδών του. Είναι δε πολύ πιθανόν να είχε ανακαλυφθεί από τον Ίππαρχο, δυόμισι αιώνες νωρίτερα. Άλλη μια φορά επαληθεύεται το παλιό ρητό «ουδέν καινόν υπό τον Ήλιον».(βλ.[38])

ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟ ΩΣ ΤΟΝ 5^{ο} Μ.Χ. ΑΙΩΝΑ

Η καλλιέργεια των Μαθηματικών συνεχίσθηκε στην Αλεξάνδρεια και σε άλλα ελληνιστικά κέντρα μέχρι περίπου το 500 μ.Χ. Σημειώθηκαν κάποιες αναλαμπές, αλλά γενικώς επικρατούσε μια προϊούσα παρακμή, μέχρις ότου με τον τραγικό θάνατο της Υπατίας (415 μ.Χ.) δόθηκε η χαριστική βολή. Το χρονικό διάστημα 250 μ.Χ.-350 μ.Χ. προσεγγιστικά έχει χαρακτηρισθεί από μερικούς μελετητές, όπως στο βιβλίο του Carl Boyer (A History of Mathematics Chapter XI)(βλ.[8]) ως «Ύστερη Αλεξανδρινή Εποχή» ή και «Αργυρή Εποχή» (Silver Age) των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Κατά την αρχή της περιόδου αυτής έζησε ο περίφημος μαθηματικός Διόφαντος, ο οποίος με το έργο του ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ (βιβλία 13) άνοιξε το δρόμο για την Άλγεβρα. Κατά το τέλος της ανωτέρω περιόδου θα ακμάσει ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς, ο τελευταίος ίσως Έλληνας γεωμέτρης. Περίφημο είναι το διασωθέν έργο του ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ (βιβλία 8). Στο λεξικό Σούδα αναφέρεται, ότι, εκτός άλλων, είχε γράψει και σχόλια επάνω στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου με τον τίτλο «Εις τα δ' βιβλία της Πτολεμαίου Μεγάλης Συντάξεως υπόμνημα». Το σύγγραμμα αυτό δεν έχει διασωθεί.

Ας έλθουμε τώρα ειδικά στην Τριγωνομετρία. Το σύγγραμμα του Πτολεμαίου «Μαθηματική Σύνταξις» θα επισκιάσει όλα τα προηγούμενα και θα επικρατήσει. Η Μαθηματική Σύνταξις θα παραμείνει επί πολλές εκατονταετίες (περίπου μέχρι τις αρχές του 16ου μ.Χ. αιώνα) το κύριο και πιο αυθεντικό βοήθημα για τους Έλληνες αστρονόμους και μαθηματικούς, μετέπειτα δε και για τους Άραβες. Σημειώνεται πάντως, ότι κατά την περίοδο αυτή (150 μ.Χ.-400 μ.Χ.) δεν σημειώθηκε καμιά μαθηματική εξέλιξη της Τριγωνομετρίας στον ελληνιστικό κόσμο. Η Τριγωνομετρία παρέμεινε γενικώς στο στάδιο και στη μορφή, που την άφησε ο Πτολεμαίος. Περί το τέλος της εξεταζόμενης περιόδου έζησε και ο Θέων ο Αλεξανδρεύς, ο οποίος χρημάτισε και διευθυντής του Μουσείου Αλεξανδρείας. Το διασωθέν σύγγραμμα του (βιβλίο 11) με σχόλια (υπομνήματα) στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου μας παρέχει αρκετές ιστορικές πληροφορίες, αλλά επιπροσθέτως και ορισμένα ενδιαφέροντα (λόγω μοναδικότητας) μαθηματικά στοιχεία, όπως π.χ.:

- *Εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με εξηκονταδικά κλάσματα*
- *Εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας*

Κόρη του Θέωνος του Αλεξανδρέως ήταν η Υπατία (Αλεξάνδρεια 370-415 μ.Χ.), η οποία υπήρξε διάσημη στα Μαθηματικά και στη Φιλοσοφία. Η Υπατία δολοφονήθηκε βάναυσα και κατακρεουργήθηκε (415 μ.Χ.) από το φανατισμένο όχλο. Μπορούμε να πούμε, ότι ο τραγικός θάνατος της Υπατίας ήταν η χαριστική βολή στην καλλιέργεια των Μαθηματικών και των άλλων επιστημών όχι μόνο στην Αλεξάνδρεια, αλλά και σε όλο τον ελληνιστικό κόσμο γενικότερα. Μετά το πέσιμο της αυλαίας της Αλεξανδρινής εποχής, η Τριγωνομετρία, συμπορευόμενη με τα Μαθηματικά, την Αστρονομία κ.λπ., θα μεταναστεύσει σε άλλες χώρες, θα γνωρίσει καινούργιους θεράποντες, θα μετεξελιχθεί, θα καταστεί σιγά-σιγά ιδιαίτερος κλάδος των Μαθηματικών και με συνεχείς βελτιώσεις και εμπλουτισμούς θα φθάσει να λάβει τη σημερινή της μορφή.(βλ.[43],[59])

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΙΣ ΙΝΔΙΕΣ

Η συμβολή των αρχαίων Ινδών στη διαχρονική εξέλιξη των Μαθηματικών υπήρξε σημαντική. Ένα σπουδαίο παράδειγμα της συμβολής αυτής είναι το δεκαδικό αριθμογραφικό σύστημα, το οποίον υιοθέτησαν αρχικώς οι Άραβες, μέσω δε αυτών διαδόθηκε στην Ευρώπη. Το εν λόγω σύστημα:

α) Περιλαμβάνει εννέα σύμβολα για τις μονάδες (δηλαδή τα σημερινά 1,2, 3,4,5, 6, 7, 8, 9) και ένα σύμβολο για το μηδέν (0).

β) Είναι «θεσιακό», δηλαδή η τιμή που αντιπροσωπεύει ένα ψηφίο εξαρτάται από τη θέση του μέσα στο αριθμογράφημα, όπως π.χ.:

8 = Οκτώ = Οκτώ μονάδες

80 = Ογδο(ήκο)ντα = Οκτώ δεκάδες = Ογδόντα μονάδες

800 = Οκτακόσια = Οκτώ εκατοντάδες = Ογδόντα δεκάδες = Οκτακόσιες μονάδες κ.ο.κ.

Τα σύμβολα 1,2,..., 9 δεν είχαν από την αρχή αυτή τη μορφή. Τα αρχικά, στις Ινδίες, είχαν άλλη μορφή. Ακολούθως στους Άραβες διαφοροποιήθηκαν και τελικά υιοθετήθηκε στην Ευρώπη η μορφή 1,2,..., 9.

β) Από τα αρχαία, ινδικά, μαθηματικά βιβλία, που πραγματεύονται και θέματα τριγωνομετρίας, σπουδαιότερα είναι τα ακόλουθα:

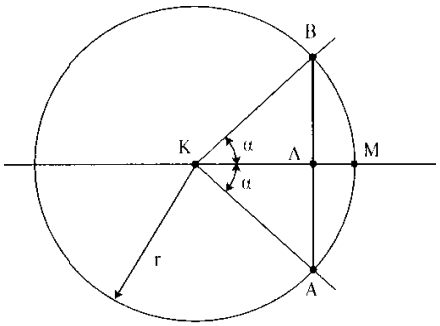
α) Surya Siddhanta (-400 μ.Χ.)

β) Aryabhatiyan (-500 μ.Χ.) γραμμένο από τον Aryabata

γ) Brahmagupta(~630μ.Χ.)(βλ.[59]

Περί ημιχορδής

Μια βασική ινδική καινοτομία είναι η εισαγωγή ενός άλλου γωνιομετρικού μεγέθους (τριγωνομετρικής συναρτήσεως), που αποτελεί ουσιαστικά τον πρόδρομο του σημερινού ημίτονου (sin).



Στην Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία(βλ.[59]) ως γωνιομετρικό μέγεθος λαμβάνεται το πηλίκο της χορδής ΑΒ συναρτήσει του αντίστοιχου τόξου ΑΒ = 2α · τ. Δηλαδή εννοούμε το σχετικό γραμμικό μήκος της χορδής ΑΒ, όταν ως μονάδα μήκους λαμβάνεται η p = r/60. Στις Ινδίες υιοθετείται μια ελαφρώς διαφορετική θεώρηση. Ως γωνιομετρικό μέγεθος λαμβάνεται το σχετικό μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος , με μονάδα μήκους κάποιο υποπολλαπλάσιο της ακτίνας r συναρτήσει κάποιας αντίστοιχης γωνίας.

Πιο συγκεκριμένα για τη γωνία ΜΚΒ = α · τ λαμβάνεται ως γωνιομετρικό μέγεθος το σχετικό μήκος, με μονάδα μήκους κάποιο σταθερό υποπολλαπλάσιο της r, του ευθυγράμμου τμήματος ΛΒ, το οποίον ισούται προς το ήμισυ του ΑΒ δηλαδή της χορδής του τόξου ΑΜΒ, που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία ΑΚΒ, διπλάσια της θεωρούμενης γωνίας ΜΚΒ=αγ. Ανακεφαλαιώνοντας, οι Ινδοί στη γωνία (ανεξάρτητη μεταβλητή) ΜΚΒ = α · γ αντιστοιχούν (ως γωνιομετρικό μέγεθος) το σχετικό μήκος της «ημιχορδής» της διπλάσιας γωνίας (ΛΒ = ΑΒ/2, όπου ΑΒ = χορδή του τόξου ΑΒ, που αντιστοιχεί στη διπλάσια γωνία ΑΚΒ = 2α · γ). Η ινδική ονομασία της «ημιχορδής» ήταν ardha-jya από τα σανσκριτικά:

ardha = μισή, jya = χορδή. Με τον καιρό η ονομασία αυτή μετέπεσε σε jya ή ji va. Η ημιχορδή μιας γωνίας α αντιστοιχεί προς το σημερινό ημίτονο.(Λατ.: sinus).

Οι Ινδοί κατάρτισαν πίνακα με τις τιμές της ημιχορδής (jya) για τόξα από 0° έως 90° ανά 3° 45', δηλαδή τα:

0° - (3° 45') - (7° 30') - (11° 15') -....- 90° (Πλήθος: 24)

Σαν μονάδα μήκους για τη μέτρηση του σχετικού μήκους της «ημιχορδής» λαμβάνεται η:

u=Γραμμικό μήκος του τόξου με εύρος

$$1' = \frac{\text{Απολ. γραμμικό μήκος όλης της γραμμής}}{360 \square 60}$$

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΥΣ ΑΡΑΒΕΣ

Μετά τη φυγή του Μωάμεθ από τη Μέκκα της Αραβίας (Έγιρα - 622 μ.Χ.) ο Μωαμεθανισμός και συγχρόνως η Αραβική ηγεμονία άρχισαν να επεκτείνονται κατ' αρχάς μεν στις χώρες της Μέσης Ανατολής (Συρία, Περσία κ.λπ.) και κατόπιν στη Βόρεια Αφρική (Αίγυπτος, Τριπολίτιδα κ.λπ.). Τελικά η Αραβική ηγεμονία εξαπλώθηκε και στην Ιβηρική χερσόνησο. Μετά το πέρας της κατακτητικής αυτής περιόδου (προσεγγιστικά 650 μ.Χ. - 750 μ.Χ.) άρχισε να αναπτύσσεται ταχύτατα ένας νέος πολιτισμός, ο Ισλαμικός. Κατά τα μέσα του 8ου μ.Χ. αιώνα έλαβε χώρα σχίσμα μεταξύ των Αράβων της Δύσεως (Μαρόκο) και των Αράβων της Ανατολής, οι οποίοι υπό τον χαλίφη al-Mansur ίδρυσαν την πρωτεύουσα τους στη Βαγδάτη. Τα επόμενα χρόνια, υπό την ηγεσία των Αββασιδών χαλίφηδων (al-Mansur, Haroun al-Raschid και Al-Mamun), η Βαγδάτη αναπτύχθηκε πολιτιστικά και έγινε μια νέα Αλεξάνδρεια. Στη Βαγδάτη ιδρύθηκαν η Μεγάλη Βιβλιοθήκη, όπου συγκεντρώθηκαν χειρόγραφα, προερχόμενα από διάφορα μέρη (Αθήνα, Αλεξάνδρεια κ.λπ.). Μεταξύ των χειρογράφων αυτών συγκαταλέγονται σπουδαία μαθηματικά, αστρονομικά, φιλοσοφικά και λοιπά έργα. Το Επιστημονικό Ερευνητικό Ινστιτούτο, το Bayt al-Hikma δηλαδή ο Οίκος της Σοφίας, το οποίο λειτούργησε πάνω από 200 χρόνια. Σ' αυτό προσκλήθηκαν λόγιοι και επιστήμονες από διάφορα μέρη, για να μεταφράσουν στην Αραβική αρχαία ελληνικά και ινδικά κείμενα, καθώς και για να διεξαγάγουν πρωτότυπες επιστημονικές έρευνες. Μέχρι το 900 μ.Χ. πολλά από τα έργα των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλώνιου, Διόφαντου, Πτολεμαίου κ.ά., είχαν μεταφρασθεί στα αραβικά και ήταν διαθέσιμα προς μελέτη στους ερευνητές του Οίκου της Σοφίας. Οι Αραβες επιστήμονες δεν περιορίσθηκαν μόνο στη μετάφραση και στο σχολιασμό των ανωτέρω έργων. Επιπροσθέτως υπήρξαν δραστήριοι και δημιουργικοί και πραγματοποίησαν προόδους σε πολλούς επιστημονικούς τομείς. Η

Αστρονομία καλλιεργήθηκε ιδιαιτέρως από τους Αραβες για πολλούς λόγους κυρίως συνυφασμένους με τη θρησκεία των, όπως π.χ.:

Για παρακολούθηση των φάσεων της Σελήνης κ.λπ., δεδομένου, ότι το ισλαμικό ημερολόγιο είναι καθαρώς σεληνιακό.

Για τον καθορισμό των ωρών προσευχής, που είναι συνάρτηση του λυκαυγούς, του λυκόφωτος, της χρονικής διάρκειας της ημέρας κ.τ.λ.

Για την εύρεση, σε ένα τόπο, της κατευθύνσεως, προς την οποίαν βρίσκεται η Μέκκα. Σε κάθε τόπο έπρεπε να προσδιορίζεται η κατεύθυνση, προς την οποία ήταν η Μέκκα (πρόβλημα «qibla»), προκειμένου να διαμορφώνονται καταλλήλως τα τζαμιά (θέση «κιχράμπ») και να καθορίζεται προς ποια διεύθυνση πρέπει να προσβλέπουν οι πιστοί κατά την προσευχή. Η επίλυση του προβλήματος qibla γίνεται με τη χρήση Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Σε συνδυασμό με την έντονη ενασχόληση με την Αστρονομία ήταν φυσικό να καλλιεργηθεί και να προωθηθεί και η Τριγωνομετρία, η οποία ήταν συνυφασμένη με την Αστρονομία· ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίαζε η επίλυση σφαιρικών τριγώνων.

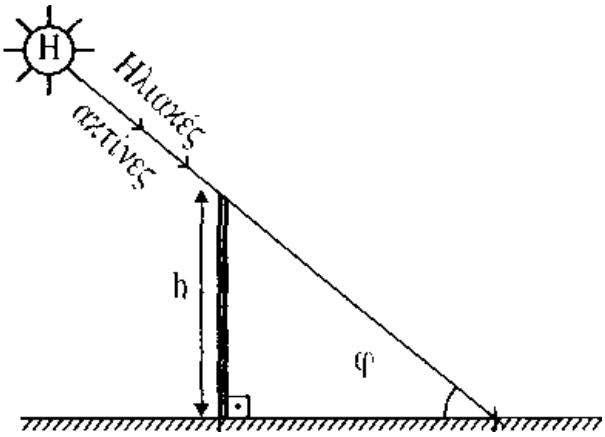
Η «Μαθηματική Σύνταξις» του Πτολεμαίου μεταφράσθηκε στα αραβικά και έλαβε τον τίτλο al-Majisti. Ο Αραβικός κόσμος, κατά την περίοδο της ακμής του, έχει να επιδείξει σωρεία σπουδαίων μαθηματικών. Μεταξύ αυτών εξέχουσα θέση έχει ο Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi , από το όνομα του οποίου πηγάζει ετυμολογικά ο σημερινός όρος «Αλγόριθμος». Έζησε κατά την περίοδο al-Mamun, υπήρξε περίφημος αστρονόμος και μαθηματικός και συγγραφέας συναφών έργων. Μας είναι περισσότερο γνωστός από το έργο του «ibn al-jabr wa'l muqabalah».Από το όνομα του οποίου πηγάζει ετυμολογικά ο σημερινός όρος «Αλγεβρα». Σαν γωνιομετρικό μέγεθος (τριγωνομετρική συνάρτηση) οι Αραβες χρησιμοποιούσαν αρχικώς και τη «χορδή» του Πτολεμαίου και την «ημιχορδή» των Ινδών, αργότερα όμως κατέληξαν να χρησιμοποιούν μονάχα την «ημιχορδή» (ινδικό ημίτονο). Ο περίφημος άραβας αστρονόμος al-Battani (855-925 μ.Χ.) χρησιμοποιούσε στους Πίνακες, που συνέταξε, σαν γωνιομετρικό μέγεθος την «ημιχορδή». Επιπλέον οι Αραβες αύξησαν σιγά-σιγά τον αριθμό των γωνιομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα ο al-Battani (γνωστός στη Δύση με το λατινικό όνομα Albategnius) χρησιμοποίησε, εκτός από το ινδικό ημίτονο (r·sinα°), και το ημίτονο της συμπληρωματικής γωνίας, ήτοι το r·sin(90° - α°), που αντιστοιχεί στο σημερινό r·cosα°. Έδωσε μάλιστα το μαθηματικό τύπο για το μήκος της σκιάς ενός γνώμονα:

$$l = h \cdot \frac{\sin(90 - \varphi^0)}{\sin \varphi^0}$$

Τα γωνιομετρικά μεγέθη «εφαπτομένη» (tan), «συνεφαπτομένη» (ctg), «τέμνουσα» (sec) και «συντέμνουσα» (cosec) εμφανίσθηκαν βαθμηδόν στις ισλαμικές εργασίες μετά το 900 μ.Χ. περίπου. Διεξοδική ανάλυση και χρήση αυτών συναντάμε σε μια πραγματεία για τις σκιές ενός γνώμονα, που έγραψε ο al-Biruni (973-1055 μ.Χ.). Ο al-Biruni κατάρτισε επίσης Πίνακα ημίτονων ανά 15'. Οι Άραβες μαθηματικοί βελτίωσαν επίσης τις μεθόδους επιλύσεως σφαιρικών τριγώνων (απλούστερες από τις Πτολεμαϊκές). Βρήκαν επίσης έξυπνες πρακτικές λύσεις για το προαναφερθέν πρόβλημα Qibla ή Kibla (Κιμπλά).Στη Σφαιρική Τριγωνομετρία επίσης ασχολήθηκαν με τα προβλήματα τεσσάρων και έξι μεγεθών. Ο Abu Ί Wefa (-980 μ.Χ.) ασχολήθηκε με την Αλμαγέστη και τη συστηματική διάταξη των τριγωνομετρικών θεωρημάτων και αποδείξεων. Ο Nasir ed-din al Tusi (-1250 μ.Χ.), Πέρσης αστρονόμος, έγραψε το έργο Shakl al-gatta (θεωρία των διατεμνουσών). Σε αυτό η Επίπεδη Τριγωνομετρία αρχίζει πια να εμφανίζεται ως ιδιαίτερος κλάδος.(βλ.[61],[59])

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ ΤΟΝ ΜΕΣΑΙΩΝΑ.

Μεσαίωνας είναι η εποχή της δυτικής ευρωπαϊκής ιστορίας, που περιλαμβάνεται μεταξύ της δύσης του αρχαίου κόσμου και της Αναγέννησης. Συμβατικά θεωρείται, ότι ο Μεσαίωνας εκτείνεται από το 476 μ.Χ. (κατάλυση του Δυτικού



Ρωμαϊκού Κράτους) μέχρι το 1453 μ.Χ. (άλωση της Κωνσταντινουπόλεως από τους Τούρκους).Παράλληλα στην ανατολική περιοχή της Μεσογείου έχουμε τη Βυζαντινή Αυτοκρατορία με πρωτεύουσα την Κωνσταντινούπολη. Η αρχή της Βυζαντινής

αυτοκρατορίας τοποθετείται (συμβατικά) στο 324 μ.Χ., δηλαδή στο έτος κατά το οποίο η Κωνσταντινούπολη κηρύχθηκε αυτοκρατορική πρωτεύουσα από τον Μεγάλο Κωνσταντίνο, το δε τέλος της το 1453 μ.Χ.

Αναγέννηση ονομάζουμε την πνευματική, κοινωνική και πολιτιστική κίνηση, που ξεκίνησε από την Ιταλία κατά τον 14^{ο} μ.Χ. αιώνα και ξαπλώθηκε σε ολόκληρη τη Δυτική Ευρώπη μέχρι τον 17^{ο} μ.Χ. αιώνα. Στο δρόμο προς τη νέα αυτή εποχή μπορούν να θεωρηθούν σαν πρωτοπόροι οι εξής:

- *Roger BACON (1215-1294 μ.Χ.) Άγγλος φιλόσοφος, θεολόγος κ.λπ.*
- *DANTE Alighieri (1265-1321 μ.Χ.), Ιταλός ποιητής.*
- *GIOTTO di Bondone (1266-1337 μ.Χ.), Ιταλός ζωγράφος (κυρίως), γλύπτης και αρχιτέκτονας.*

Η Συμβολή του Βυζαντίου

Πριν επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη Δυτική Ευρώπη, ας δούμε τι έγινε στο Βυζάντιο από απόψεως των θετικών επιστημών δηλαδή κυρίως των μαθηματικών και της αστρονομίας, κατά τη διάρκεια των έντεκα αιώνων (324 μ.Χ. έως 1453 μ.Χ.). Στο Βυζάντιο συνεχίσθηκε η καλλιέργεια των θετικών επιστημών, η μελέτη των αρχαίων ελληνικών κειμένων, καθώς και η συλλογή αρχαίων χειρογράφων. Επίσης αναφέρονται αρκετοί θετικοί επιστήμονες, μερικοί από τους οποίους υπήρξαν πολύ σημαντικοί.Στην Κωνσταντινούπολη ιδρύθηκε από τον Μεγάλο Κωνσταντίνο Πανεπιστήμιο, κατά το πρότυπο της Σχολής των Αθηνών. Το εν λόγω Πανεπιστήμιο γνώρισε περιόδους ακμής και διατηρήθηκε μέχρι την πτώση της Βασιλεύουσας (1453 μ.Χ.). Μερικές από τις κατά καιρούς ονομασίες του: Οικουμενικόν Διδασκαλείον, Πανδιδακτήριον, Βασιλικόν Μουσείο κ.λπ. Ανώτερες Σχολές λειτούργησαν και σε άλλες πόλεις της Αυτοκρατορίας, όπως η Ακαδημία Θετικών Επιστημών στην Τραπεζούντα, της οποίας η μεγάλη ανάπτυξη έλαβε χώρα κατά το διάστημα 1200-1450 μ.Χ.

Βάσει πάντως των υπαρχόντων στοιχείων δεν φαίνεται, ότι σημειώθηκε κάποια σημαντική άνθηση στον τομέα των Μαθηματικών, ή ότι εμφανίσθηκαν κάποιες καινούργιες ιδέες, ή ότι σημειώθηκαν κάποιες καινοτομίες. Σκόπιμο πάντως είναι να σημειώσουμε επιπρόσθετα και τα εξής:

Οι Βυζαντινοί διέσωσαν, μελέτησαν και σχολίασαν αρκετά έργα αρχαίων ελλήνων επιστημόνων, των οποίων θεωρούσαν οι ίδιοι τον εαυτό τους κληρονόμο. Επί πολλούς αιώνες η Αυτοκρατορία συνέβαλε στη διάδοση των ελληνικών επιστημών στη Δυτική

Ευρώπη, τόσο στη μεσαιωνική, όσον και στην της Αναγεννήσεως, στους Άραβες, στις Ινδίες, ακόμη και στην Άπω Ανατολή.

Η ελληνική γλώσσα έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανωτέρω διάδοση των ελληνικών επιστημών. Ας θυμηθούμε, ακόμη, ότι οι ευρωπαίοι ουμανιστές μπορούσαν να διαβάζουν ελληνικά κείμενα στο πρωτότυπο από τους Βυζαντινούς κώδικες. Προκειμένου να διαμορφώσει ο αναγνώστης κάποια γνώμη για τους Έλληνες επιστήμονες, που ασχολήθηκαν και με τα Μαθηματικά και την Αστρονομία, αναφέρονται κατωτέρω, πολύ συνοπτικά, ορισμένοι απ' αυτούς:

Πρόκλος ο Λύκειος ή ο Διάδοχος (410 ή 412-485 μ.Χ.)

Γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη, σπούδασε στην Ξάνθο της Λυκίας και στην Αλεξάνδρεια και κατόπιν ήλθε στην Αθήνα, όπου μαθήτευσε κοντά στον Πλούταρχο και εν συνεχεία κοντά στον Συριανό και τον οποίο ακολούθως διαδέχθηκε στη διεύθυνση της Ακαδημίας Αθηνών, μέχρι το θάνατο του. Έχει διασωθεί μεγάλο μέρος της συγγραφικής παράγωγης του. Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει για μας, από μαθηματική άποψη, το έργο του «Υπόμνημα εις το πρώτον [Βιβλίον] των Στοιχείων του Ευκλείδη».

Σιμπλίκιος (5/6ος μ.Χ. αι.)

Φιλόσοφος, μαθηματικός και σχολιαστής, από τους διασημότερους Αλεξανδρινούς σοφούς της εποχής του. Ήταν επίσης ένας από τους επτά φιλοσόφους, οι οποίοι, με την αναστολή της λειτουργίας της Ακαδημίας των Αθηνών, κατέφυγε στην Περσία. Αργότερα επέστρεψε από την Περσία στην Αλεξάνδρεια. Από αστρονομικής απόψεως ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σχόλια του στο έργο του Αριστοτέλους «Περί ουρανού».

Ανθέμιος ο Τραλλιανός (5/6ος μ.Χ. αι.)

Αρχιτέκτονας και γεωμέτρης, από τις Τράλλεις της Μ. Ασίας. Ο Ανθέμιος μαζί με τον Ισίδωρο ήταν οι δυο αρχιτέκτονες του περίφημου ναού της Αγ. Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη (έναρξη εργασιών 532 μ.Χ. και εγκαίνια το 537 μ.Χ.). Συνέγραψε και διάφορα μαθηματικά έργα.

Ισίδωρος ο Μιλήσιος(6ος μ.Χ. αι.)

Μαθηματικός και αρχιτέκτονας, από τη Μίλητο. Ο Ισίδωρος μαζί με τον Ανθέμιο ήταν οι δύο αρχιτέκτονες του ναού Αγ. Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη. Συνέγραψε και μαθηματικές εργασίες, σ' αυτόν μάλιστα αποδίδεται το αποκαλούμενο «XV Βιβλίο» των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Εντόπιος ο Ασκαλωνίτης (490-560 μ.Χ.)

Μαθηματικός και φιλόσοφος. Διετέλεσε μαθητής του Αμμωνίου στην Αλεξάνδρεια. Συνέγραψε πολύ ενδιαφέροντα σχόλια επάνω σε έργα του Αρχιμήδη (π.χ. «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» και «Κύκλου μέτρησις»), καθώς και σε έργα του Απολλώνιου.

Λέων ο Φιλόσοφος ή ο Μαθηματικός (9ος μ.Χ. αι.)

Υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός, καθώς επίσης και αστρονόμος, φιλόσοφος κ.ά. Γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη (τέλη 8ου μ.Χ. αι.) και πέθανε γύρω στο 869 μ.Χ. Στοιχειώδη εκπαίδευση έλαβε στην Κωνσταντινούπολη, ενώ στη συνέχεια μετέβη στην Άνδρο όπου απέκτησε από ένα δάσκαλο «τας αρχάς μόνον και τινας λόγους» της ρητορικής, της φιλοσοφίας και της αριθμητικής. Στα μοναστήρια της Άνδρου βρήκε χειρόγραφα με αρχαία κείμενα τα οποία έφερε στην Κωνσταντινούπολη. Ο Λέων, με τις σημαντικές γνώσεις φιλοσοφίας, αριθμητικής, γεωμετρίας, αστρονομίας, και μουσικής, εργάσθηκε στην Κωνσταντινούπολη επί 15-20 χρόνια (μέχρι -840 μ.Χ.) ως ιδιωτικός δάσκαλος. Αξιοσημείωτο είναι το μεγάλο ενδιαφέρον, που επέδειξαν οι Άραβες, για συνεργασία μετ' αυτού. Ένα σημαντικό επίσης επίτευγμα του Δέοντος είναι η τελειοποίηση που επέφερε στο σύστημα προειδοποιήσεως των Βυζαντινών για τις αραβικές εισβολές και που ήταν εγκατεστημένο στη Μ. Ασία. Το σύστημα αυτό ήταν βασικώς μια σειρά από «φρυκτωρία», εγκατεστημένα σε κορυφές βουνών, που ξεκινούσε από τη νότια Μ. Ασία (Ταρσός) και έφθανε μέχρι το Φάρο Παλατιού στην Κωνσταντινούπολη. Τα «φρυκτωρία», που ήταν σταθμοί για φρυκτωρίες, εκαλούντο από τους Βυζαντινούς «καμινοβίγλια».Η τελειοποίηση του Λέοντος συνίστατο στην προσθήκη δύο συγχρονισμένων «ωρολογίων» (το ένα στην Κιλικία και το άλλο στην Κωνσταντινούπολη) και στα οποία η καθεμιά από τις 12 ώρες συμβόλιζε και μια «υπόθεσιν» (επιδρομή, εμπρησμό κ.λπ.).

Ο Λέων, σύμφωνα με πληροφορίες από τις πηγές, κατείχε χειρόγραφα με αρχαία μαθηματικά και αστρονομικά κείμενα, όπως π.χ.:

Τα «Κωνικά» του Απολλώνιου

Τη «Μαθηματική Σύνταξιν» του Πτολεμαίου

Ένα κείμενο του Αρχιμήδη και ορισμένα του Ευκλείδη.

Ψελλός Μιχαήλ (1018-1096 μ.Χ.)

Φιλόσοφος, μαθηματικός, αστρονόμος κ.λπ.

Παχνμέρης Γεώργιος (1242-1310 μ.Χ.)

Μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος και ιστορικός.

Πλανούδης Μάξιμος (1255-1310 μ.Χ.)

Μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόλογος κ.λπ.

Μοσχόπουλος Μιχαήλ (14ος μ.Χ. αι.)

Λόγιος, συγγραφέας και μαθηματικός. Είναι περισσότερο γνωστός από μια μαθηματική εργασία του σχετική με τα μαγικά τετράγωνα.

ΟΙ ΚΥΡΙΕΣ ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΕΞΕΛΙΞΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Παρακάτω περιγράφονται πολύ συνοπτικά οι κυριότερες εξελίξεις στον κλάδο της Τριγωνομετρίας, που έλαβαν χώρα στη Δυτική Ευρώπη από το 1000 μ.Χ. και μετέπειτα.

Τα βασικά τοξο(γωνιο)μετρικά μεγέθη:

-Χορδή - Ημιχορδή

Στην Πτολεμαϊκή Τριγωνομετρία είχαμε ένα μονάχα βασικό τοξομετρικό μέγεθος, τη χορδή του τόξου κύκλου. Αργότερα εισήχθη από τους Ινδούς και εν συνεχεία υιοθετήθηκε και από τους Αραβες η «ημιχορδή του διπλάσιου τόξου». Η «ημιχορδή» αυτή μετεξελίχθηκε στη Δυτική Ευρώπη στο «ημίτονο» (sinus).

Πλήθυνση των βασικών τοξο(γωνιο)μετρικών μεγεθών

Οι Αραβες καλλιεργούντες την Τριγωνομετρία, έφθασαν περί το 1000 μ.Χ. να έχουν και πολλά άλλα ακόμη βασικά τοξο(γωνιο)μετρικά μεγέθη. Οι Ευρωπαίοι ορμώμενοι εξ' αυτού και λαμβάνοντες επιπλέον υπόψη και τις νέες ανάγκες, που ανέκυπταν στην πράξη από την επέκταση της χρήσεως της Τριγωνομετρίας και σε πρόσθετα πέραν της Αστρονομίας νέα πεδία (π.χ. Ναυτιλία, Γεωδαισία, Τοπογραφία κ.λπ.), κατέληξαν τελικώς στις ακόλουθες βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, με τη σημερινή ονομασία και με το σημερινό συμβολισμό:

- **Ημίτονο (sinus)** μιας γωνίας α°: sinα°
- **Συνημίτονο (cosinus**) μιας γωνίας α°: cos α°
- **Εφαπτομένη (tangens)** μιας γωνίας α°: tanα° (ή tgα°)
- **Συνεφαπτομένη (cotangens)** μιας γωνίας α°: cotα° (ή ctgα°)
- **Τέμνουσα (secans)** μιας γωνίας α°: secα°
- **Συντέμνουσα (cosecans)** μιας γωνίας α°: cosecα^0 (ή cscα°)

Οι ανωτέρω βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Όλες μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις μιας εξ αυτών,

π.χ. της sinα, οπότε $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a^0}$, $\tan a = \dfrac{\sin a^0}{\sqrt{1-\sin^2 a^0}}$ κ.ο.κ

Η πληθώρα αυτών οφείλεται κυρίως σε δύο λόγους:

- Απλοποίηση και σύμπτυξη των μαθηματικών τύπων

- Διευκόλυνση του χρήστη στην πράξη, με την ύπαρξη Πίνακα Τιμών για καθεμιά απ' αυτές.
- Από τα ευθύγραμμα τμήματα (Trigonometric lines) στους λόγους (Trigonometric ratios)

Από την αρχή δηλαδή την εποχή του Πτολεμαίου μέχρι ίσως και πέραν του 1000 μ.Χ. τα βασικά τοξο(γωνιο)μετρικά μεγέθη χορδή, ημιχορδή, sinus κ.λπ. ήταν ευθύγραμμα τμήματα (lines) με κάποιο μήκος, είχαν διάσταση μήκους. Σαν μονάδα (u) για τη μέτρηση του μήκους των ελαμβάνετο ένα υποπολλαπλάσιο της ακτίνας r του κύκλου, όπου ανήκε το θεωρούμενο τόξο.

Ήταν δηλαδή $u= r/\nu$, όπου $\nu > 1$

Ο Πτολεμαίος έλαβε $\nu = 60$. Μετά το 1000 μ.Χ., κατά την κατάρτιση τριγωνομετρικών πινάκων ελαμβάνοντο όλο και μεγαλύτερες τιμές ν (μέχρι ν = 100000 ή και μεγαλύτερες).

Όσο μεγαλύτερη ακρίβεια επιζητούσαν, τόσο μεγαλύτερη τιμή για το ν επέλεγαν. Σημειώνεται, ότι οι δεκαδικοί αριθμοί εμφανίσθηκαν αργότερα τον 16° μ.Χ. αιώνα.

Ένα από τα παλαιότερα ειδικά συγγράμματα Αστρονομίας, το Surya Siddhanda (περίπου 400 μ. Χ.) παραθέτει έναν πίνακα ημιχορδών, βασισμένο στον πίνακα του Πτολεμαίου. Ωστόσο το πρώτο έργο όπου το ημίτονο αναφέρεται σαφώς ως συνάρτηση μιας γωνίας είναι το Aryabhatiya του Αριαμπάτα (γύρω στο551 μ.Χ.), που θεωρείται και το παλαιότερο ινδικό εγχειρίδιο καθαρών μαθηματικών. Σε αυτό το έργο, ο Αραμπιάτα (γνωστός και ως Αραμπιάτα ο πρεσβύτερος γεννήθηκε το 476 και πέθανε γύρω στο 550 μ. Χ.) χρησιμοποιεί τη λέξη ardha-jya για την ημιχορδή . Η λέξη συχνά αναστρέφεται και γίνεται jya-ardha («χορδή-μισή»). Σταδιακά ο όρος απλοποιήθηκε σε jya η jiva.

Από εδώ ακριβώς αρχίζει μία ενδιαφέρουσα ετυμολογική εξέλιξη η οποία οδηγεί τελικά στο σημερινό όρο «sine». Όταν οι Άραβες μετέφρασαν στη γλώσσα τους το Aryabhatiya , διατήρησαν τη λέξη χωρίς να μεταφράσουν το νόημά της. Στα αραβικά όπως και στα εβραϊκά οι λέξεις αποτελούνται κυρίως από σύμφωνα και η προφορά των φωνηέντων που λείπουν εξαρτάται από την καθημερινή χρήση. Έτσι, το jiva μπορούσε ακόμη να προφερθεί ως jiba ή jaib. Στα αραβικά jaib σημαίνει στήθος, πτυχή, κόλπος. Όταν η αραβική έκδοση του κειμένου μεταφράσθηκε στα λατινικά το jaib αποδόθηκε με τη λέξη sinus που σημαίνει στήθος ,πτυχή, κόλπος, καμπύλη. Η λέξη sinus απαντά στα κείμενα του Γεράρδου της Κρεμώνας (περίπου 1114-1187), που μετέφρασε πολλά αρχαία ελληνικά κείμενα, συμπεριλαμβανομένης και της Αλμαγέστης, από τα αραβικά

στα λατινικά. Τον ακολούθησαν και άλλοι συγγραφείς, και σύντομα η λέξη sinus ή sine στην αγγλική της μορφή παγιώθηκε στα μαθηματικά κείμενα όλης της Ευρώπης Η συντομογραφία της sin χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Edmund Gunter(1581-16260) ένα Άγγλο πάστορα ο οποίος αργότερα έγινε καθηγητής Αστρονομίας στο κολέγιο Gersham του Λονδίνου. Το 1624 επινόησε μία μηχανική κατασκευή, την «κλίμακα Gunter», για να κάνει υπολογισμούς με λογαρίθμους, έναν πρόδρομο του γνωστού λογαριθμικού κανόνα, και η ένδειξη sin (καθώς και η tan) εμφανίσθηκαν σε κάποιο από τα σκαριφήματα που περιγράφουν την εφεύρεσή του. .(βλ.[43],[59])

Οι άλλες πέντε τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν πολύ πιο πρόσφατη ιστορία. Το συνημίτονο, το οποίο σήμερα θεωρείται εξίσου σημαντικό με το ημίτονο, δημιουργήθηκε αρχικά από την ανάγκη να υπολογισθεί το ημίτονο της συμπληρωματικής γωνίας. Ο Αριαμπάτα το ονόμαζε kotijya και το χειριζόταν όπως και οι σύγχρονοι τριγωνομετρικοί πίνακες , πριν αντικατασταθούν από τα κομπιουτεράκια, εμφανίζοντας στην ίδια στήλη τα ημίτονα των γωνιών από 0° έως 45^oκαι τα συνημίτονα των συμπληρωματικών τους. Ο όρος cosinus οφείλεται στον Edmund Gunter, ο οποίος έγραφε co.sinus.

Την τελική γραφή cosinus εισήγαγε το 1658 ο John Newton (1622-1678) δάσκαλος και συγγραφέας μαθηματικών εγχειριδίων(δεν έχει καμία σχέση με τον Ισαάκ Νεύτωνα). Η συντομογραφία cos χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1674 από έναν άγγλο μαθηματικό και τοπογράφο, τον σερ Jonas Moore(1617-1679). Οι συναρτήσεις τέμνουσα και συντέμνουσα γεννήθηκαν ακόμα πιο αργά. Για πρώτη φορά αναφέρονται, χωρίς ειδικό όνομα, στα έργα του Άραβα λογίου Αμπούλ Βέφα (940-998), ενός από τους πρώτους που συνέταξαν πίνακες εφαπτομένων. Ωστόσο τον 15° αιώνα, όταν καταρτίστηκαν οι πίνακες ναυσιπλοίας, το χρησιμοποιούσαν ελάχιστα. Ο πρώτος τυπωμένος πίνακας τεμνουσών βρίσκεται στο έργο Canon doctrinae triangulorum (Κανών της θεωρίας των τριγώνων-Λειψία 1551) του George Joachim Rhaeticus (1514-1576) που σπούδασε κοντά στον Κοπέρνικο και υπήρξε ο πρώτος οπαδός του. Στο έργο του παρουσιάζονται για πρώτη φορά και οι έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μαζί. Ο όρος sec για την τέμνουσα προτάθηκε για πρώτη φορά το 1626 από τον γαλλικής καταγωγής μαθηματικό Albert Girard (1595-1632), ο οποίος πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Ολλανδία . Ο Girard υπήρξε ο πρώτος που κατανόησε τη σημασία των αρνητικών ριζών στα γεωμετρικά προβλήματα. Ήταν ακόμα αυτός που αντιλήφθηκε ότι ένα πολυώνυμο έχει τόσες ρίζες όσες και ο βαθμός του, και από τους

πρώτους που υποστήριξαν τη χρήση παρενθέσεων στην άλγεβρα. Αντί για το σημερινό secA έγραφε Asec. Για την εφαπτομένη χρησιμοποιούσε ανάλογο συμβολισμό, ενώ για τα sinA και cosA έγραφε A και α αντίστοιχα. Οι λόγοι που αντιστοιχούν στην εφαπτομένη και τη συνεφαπτομένη προέκυψαν από τη χρήση του γνώμονα και τη μέτρηση με τη βοήθεια της σκιάς. Ωστόσο , η αντιμετώπιση αυτών των λόγων ως συναρτήσεων γωνιών άρχισε με τους Άραβες. Ο πρώτος πίνακας εφαπτομένων και συνεφαπτομένων συντάχθηκε το 860μ.Χ. από τον Αχμέτ Ίμπν Αμπντάλλα αλ Μερβαζί, γνωστότερο ως Χαμπάς αλ Χασίμπ («ο υπολογιστής»), που έγραψε σχετικά με την αστρονομία και τα αστρονομικά όργανα. Ο αστρονόμος Αλ Μπαττάνι (γνωστός στην Ευρώπη ως Albategnius), γεννήθηκε στο Μπαττάν της Μεσοποταμίας γύρω στο 858 μ.Χ και πέθανε το 929 μ.Χ βρήκε ένα κανόνα για τον υπολογισμό του ύψους του ηλίου πάνω από τον ορίζοντα, ως συνάρτηση της σκιάς s που δημιουργεί ένας κατακόρυφος γνώμονας ύψους h. Ο κανόνας δίνεται από τον τύπο $s = \frac{h\sin(90^0 - \varphi)}{\sin\varphi}$ και είναι ισοδύναμος με τον τύπο $s = h\cot\varphi$. Ας σημειωθεί ότι, όταν τον διατύπωσε, χρησιμοποίησε αποκλειστικά τη συνάρτηση ημίτονο, διότι οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είχαν ακόμη αποκτήσει όνομα. (Μέσω του έργου του Αλ Μπαττάνι έγινε γνωστή στην Ευρώπη η συνάρτηση της ημιχορδής δηλαδή το σημερινό ημίτονο). Στηριζόμενοι σε αυτόν τον κανόνα, κατασκεύασε ένα «πίνακα σκιών» , ουσιαστικά ένα πίνακα συνεφαπτομένων για τις μοίρες 10° έως 900°. .(βλ.[43],[59])

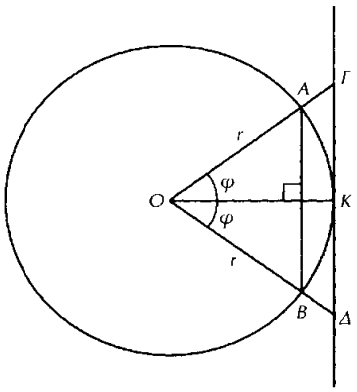
Ο σημερινός όρος «tangent» έκανε την είσοδό του το 1583, όταν ο Thomas Fincke (1561-1646), ένας Δανός μαθηματικός , τον πρωτοχρησιμοποίησε στο έργο του Geometria Rotundi (Γεωμετρία του κύκλου). Μέχρι τότε, οι περισσότεροι ευρωπαίοι συγγραφείς εξακολουθούσαν να χρησιμοποιούν όρους προερχόμενους από τη «μέτρηση σκιάς»: umbra recta (ορθή σκιά) για την οριζόντια σκιά που δημιουργεί ένας κατακόρυφος γνώμονας και umbra versa (ανάστροφη σκιά) για την κατακόρυφη σκιά που δημιουργεί ένας γνώμονας στερεωμένος σε τοίχο. Ο όρος «cotangens» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Edmund Gunter το 1620. Διάφορες συντομογραφίες προτάθηκαν γι' αυτές τις συναρτήσεις, μεταξύ των οποίων t και tco από τον William Oughtred (1657), T και t από τον John Wallis (1693). Εντούτοις, ο πρώτος που χρησιμοποίησε τέτοιες συντομογραφίες με συνέπεια ήταν ο Richard Norwood (1590-1665), Άγγλος μαθηματικός και τοπογράφος. Σ' ένα βιβλίο περί τριγωνομετρίας που κυκλοφόρησε το 1631 στο Λονδίνο, γράφει: «Σ' αυτά τα

παραδείγματα, το s αντιπροσωπεύει το ημίτονο Ο σημερινός όρος «tangent» έκανε την είσοδό του το 1583, όταν ο Thomas Fincke (1561-1646), ένας Δανός μαθηματικός , τον πρωτοχρησιμοποίησε στο έργο του Geometria Rotundi (Γεωμετρία του κύκλου). Μέχρι τότε, οι περισσότεροι ευρωπαίοι συγγραφείς εξακολουθούσαν να χρησιμοποιούν όρους προερχόμενους από τη «μέτρηση σκιάς»: umbra recta (ορθή σκιά) για την οριζόντια σκιά που δημιουργεί ένας κατακόρυφος γνώμονας και umbra versa (ανάστροφη σκιά) για την κατακόρυφη σκιά που δημιουργεί ένας γνώμονας στερεωμένος σε τοίχο. Ο όρος «cotangens» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Edmund Gunter το 1620. Διάφορες συντομογραφίες προτάθηκαν γι' αυτές τις συναρτήσεις, μεταξύ των οποίων t και tco από τον William Oughtred (1657), T και t από τον John Wallis (1693). Εντούτοις, ο πρώτος που χρησιμοποίησε τέτοιες συντομογραφίες με συνέπεια ήταν ο Richard Norwood (1590-1665), Άγγλος μαθηματικός και τοπογράφος. Σ' ένα βιβλίο περί τριγωνομετρίας που κυκλοφόρησε το 1631 στο (sine), το t την εφαπτομένη (tangent), το sc το συμπληρωματικό ημίτονο (sine complement, δηλαδή το συνημίτονο), το tc τη συμπληρωματική εφαπτομένη (tangent complement, δηλαδή τη συνεφαπτομένη), το sec την τέμνουσα (secant).» Ας σημειώσουμε πως, ακόμη και σήμερα, δεν επικρατεί απόλυτη συμφωνία για το συμβολισμό, και πολλά ευρωπαϊκά κείμενα χρησιμοποιούν τα «xg» και «ctg» για την εφαπτομένη και τη συνεφαπτομένη, αντίστοιχα.

Ο όρος «tangent» προέρχεται από το λατινικό tangere, που σημαίνει αγγίζω, εφάπτομαι. Η συσχέτιση του με την αντίστοιχη τριγωνομετρική συνάρτηση είναι πιθανόν να οφείλεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Σε έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας r (Σχήμα 1), θεωρούμε τη χορδή ΑΒ, την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία 2φ και τη διχοτόμο ΟΚ αυτής της γωνίας. Σχεδιάζουμε μια ευθεία παράλληλη στην ΑΒ και εφαπτόμενη του κύκλου στο Κ, και προεκτείνουμε τις ΟΑ και ΟΒ έτσι ώστε να συναντήσουν αυτή την εφαπτόμενη στα Γ και Δ, αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

$AB = 2r\sin\varphi$, $\Gamma\Delta = 2r\tan\varphi$,

πράγμα που συνδέει τη συνάρτηση «εφαπτομένη» με την εφαπτόμενη ευθεία όπως ακριβώς η συνάρτηση «ημίτονο» συνδέεται με τη χορδή. Άλλωστε, αυτή η κατασκευή αποτελεί τη βάση του σύγχρονου ορισμού των έξι τριγωνομετρικών συναρτήσεων με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.(βλ.[46],[29],[61])



Σχήμα 1. AB =2rsinφ ΓΔ = 2rtanφ

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΥΤΙΚΗ ΕΥΡΩΠΗ

Στη Δύση από τον 12ο μ.Χ. αιώνα και μετέπειτα έχουμε σημαντικές εξελίξεις στον τομέα της Τριγωνομετρίας. Οι αρχικές γνώσεις για τα Μαθηματικά και την Αστρονομία μέσα στην οποία συγκαταλέγεται και η Τριγωνομετρία, άρχισαν να διεισδύουν σιγά-σιγά στη Δυτική Ευρώπη από τον 10ο μ.Χ. αιώνα, προέρχονταν δε κυρίως από αραβικές πηγές.

Παράλληλα είχαμε μετάγγιση πληροφοριών (αρχαία χειρόγραφα κ.λπ.) και γνώσεων από το Βυζάντιο, ιδίως κατά τον 14ο και 15ο μ.Χ. αιώνα.

Κατά τον 12ο μ.Χ. αιώνα παρατηρείται στη Δύση οργασμός με τη μετάφραση μαθηματικών και αστρονομικών βιβλίων από την αραβική στη λατινική. Ο οργασμός αυτός είναι κάπως ανάλογος προς αυτόν, που παρατηρήθηκε στη Δαμασκό κατά τον 9ο μ.Χ. αιώνα (μετάφραση αρχαίων ελληνικών κειμένων στην αραβική). Έτσι η πρώτη προσέγγιση στα αρχαία ελληνικά κείμενα έγινε μέσω των αραβικών μεταφράσεων. Η προσπέλαση απευθείας σε αρχαία ελληνικά κείμενα άρχισε να γίνεται αργότερα.

Ξεκινώντας με αυτές τις βάσεις οι λόγιοι των διαφόρων χωρών της Δύσεως (Ιταλίας, Γαλλίας, Γερμανίας, Αγγλίας κ.λπ.) άρχισαν να ασχολούνται, εκτός των άλλων, και με την Τριγωνομετρία. Σιγά-σιγά απέκτησαν αυτοπεποίθηση και άρχισαν να ανοίγουν καινούργιους δρόμους. Έτσι η Τριγωνομετρία εξελίχθηκε βαθμηδόν και με γοργό ρυθμό και έλαβε τελικά τη σημερινή μορφή της. .(βλ.[43],[59])

ΤΟ ΙΝΔΟΑΡΑΒΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΝΕΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Μέσω των αραβικών μεταφράσεων των κλασικών ελληνικών και ινδικών έργων, η γνώση της άλγεβρας και της τριγωνομετρίας εξαπλώθηκε σταδιακά στην Ευρώπη. Κατά τον 8ο αιώνα, η Ευρώπη γνώρισε για πρώτη φορά τους ινδικούς αριθμούς, δηλαδή το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα, μέσα από τα κείμενα του Μοχάμετ ιμπν Μούσα αλ Κβαρίσμι(περίπου 780-840μ.Χ). Ο τίτλος του μεγαλειώδους έργου του «Ilm al-jabr wa'l mucabalah» (Η επιστήμη της αναγωγής και της απλοποίησης) μεταγράφηκε στον σύγχρονο όρο «άλγεβρα», ενώ το ίδιο του το όνομα μετεξελίχθηκε σε «αλγόριθμος».

Τα ινδικά ψηφία φαίνεται πως έφθασαν για πρώτη φορά στη Δύση το έτος 976, και συγκεκριμένα στην Ισπανία, τότε αραβική κτήση. Αργότερα, ο περίφημος Gerbert, ο μετέπειτα πάπας Συλβέστρος ο Β', προσπάθησε να διαδώσει το ινδοαραβικό σύστημα στην Ευρώπη. Το ίδιο το κείμενο του αλ Κβαρίσμι μεταφράσθηκε στα λατινικά από τον Robert of Chester (ή, κατ' άλλους, από τον Αβελάρδο) το 1120, με τίτλο Liber Algorismi de numero Indorum (Το βιβλίο του Algorismi για το ινδικό ψηφίο). Από το τελευταίο παρέμεινε στη μαθηματική ορολογία ο όρος «αλγόριθμος», παραφθορά του ονόματος αλ Κβαρίσμι. Περισσότερο από όλους συνέβαλε στην επικράτηση των νέων ψηφίων στη Δύση, καθώς και των μεθόδων εκτέλεσης πράξεων με αυτούς, ο Λεονάρδος της Πίζας, γνωστότερος ως Fibonacci, με το έργο του Liber Abaci. Ο Λεονάρδος της Πίζας είχε επισκεφθεί, για εμπορικούς λόγους, πολλά αραβικά λιμάνια και την Κωνσταντινούπολη, όπου ήρθε σε επαφή με εμπόρους και λογίους που γνώριζαν τα ινδοαραβικά ψηφία. Η εισαγωγή των ψηφίων αυτών στο Βυζάντιο ακολούθησε διαφορετικό δρόμο: Εμφανίσθηκαν στον περίφημο βυζαντινό κώδικα του 888 με το κείμενο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Επίσης, τα ψηφία χρησιμοποιήθηκαν από το μοναχό Νεόφυτο, του οποίου όμως η εποχή δεν είναι γνωστή με ακρίβεια. Αργότερα πάντως, συγκεκριμένα το 1252, κυκλοφόρησε μια αριθμητική με τίτλο Αρχή της μεγάλης και ινδικής ψηφιφορίας. Σ' αυτή βασίσθηκε ο Μάξιμος Πλανούδης (1255-1305) ο οποίος έγραψε μια αριθμητική για τα νέα ψηφία με τίτλο Ψηφιφορία κατ' Ινδούς. Το ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης δεν έγινε άμεσα αποδεκτό από το κοινό, που προτιμούσε να παραμείνει στο παλιό ρωμαϊκό σύστημα. Ωστόσο, οι λόγιοι διέκριναν τα πλεονεκτήματα του νέου συστήματος και το υποστήριξαν με ενθουσιασμό. Οι δημόσιοι διαγωνισμοί μεταξύ «αβακιστών», που υπολόγιζαν με τον παλιό καλό άβακα, και «αλγοριθμιστών», που έκαναν την ίδια

δουλειά με χαρτί και μολύβι, χρησιμοποιώντας τον νέο συμβολισμό, έγιναν ένα αρκετά συνηθισμένο θέαμα στη μεσαιωνική Ευρώπη.(βλ.[43],[59])

Τελικά, το δεκαδικό σύστημα επικράτησε κυρίως χάρη στην παρουσίαση των ινδοαραβικών αριθμών στο βιβλίο τού Leonardo Fibonacci «Liber Abaci» (Το βιβλίο του άβακα) (1202). Οι πρώτοι τριγωνομετρικοί πίνακες που εφάρμοσαν το νέο σύστημα συντάχθηκαν γύρω στο 1460 από τον Georg von Peurbach (1423-1461), ωστόσο το πρώτο αναλυτικό εγχειρίδιο τριγωνομετρίας γράφηκε από το μαθητή του Johan Muller (1436-1476), γνωστότερο ως Regiomontanus (επειδή γεννήθηκε στο Καίνιγκσμπεργκ, που στα γερμανικά σημαίνει «βασιλικό βουνό»). Στο έργο του «*De triangulis omnimodis libri quinque»* («Περί των κάθε είδους τριγώνων»), σε πέντε βιβλία (περίπου το 1464), αναπτύσσει το θέμα αρχίζοντας από τις βασικές γεωμετρικές έννοιες και καταλήγει στον ορισμό της συνάρτησης ημίτονο. Στη συνέχεια αναλύει την επίλυση του τυχαίου τριγώνου, επίπεδου ή σφαιρικού, χρησιμοποιώντας είτε το ημίτονο μιας γωνίας είτε το ημίτονο της συμπληρωματικής της (το συνημίτονο). Ο νόμος των ημιτόνων διατυπώνεται με λόγια, όπως και ο κανόνας υπολογισμού του εμβαδού,

$$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\sin\Gamma$$

Περιέργως, απουσιάζει παντελώς η συνάρτηση εφαπτομένη, ίσως επειδή ο κύριος στόχος του έργου είναι η σφαιρική τριγωνομετρία, όπου επικρατεί το ημίτονο. Το De triangulis υπήρξε το έργο με τη μεγαλύτερη επιρροή στην τριγωνομετρία της εποχής του. Ένα αντίγραφό του έφθασε ως τα χέρια του Κοπέρνικου, που το μελέτησε εις βάθος . Χρειάσθηκε ωστόσο να περάσει ακόμα ένας αιώνας μέχρις ότου ο όρος «τριγωνομετρία» να εμφανισθεί ως τίτλος βιβλίου. Τούτη η τιμή ανήκει στον Bartholomaus Pitiscus (1561-1613), έναν γερμανό κληρικό που ενδιαφεροταν κυρίως για τα μαθηματικά. Το βιβλίο του «Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque» («Περί της τριγωνομετρίας», ή σχετικά με τις ιδιότητες των τριγώνων, σε πέντε βιβλία) εκδόθηκε στη Φρανκφούρτη το 1595. Έτσι φθάνουμε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν η τριγωνομετρία άρχισε πια να αποκτά τον αναλυτικό της χαρακτήρα που διατηρεί μέχρι τις μέρες μας.

Κατωτέρω αναφέρουμε μερικούς από τους πιο σημαντικούς Ευρωπαίους μαθηματικούς και αστρονόμους, που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας:

Gerardus Cremoniensis (1114-1187μ.Χ.)

Έκανε πολλές μεταφράσεις τριγωνομετρικών και αστρονομικών έργων από τα αραβικά στα λατινικά.

Leonardo Pisano ή Fibonacci (1170-1250 μ.Χ.)

Ο Fibonacci, εκτός των άλλων, ήταν οικείος και με την Τριγωνομετρία των Αράβων, στο δε βιβλίο του «Practica Geometriae» τη χρησιμοποίησε σε θέματα χωρομετρήσεων.

Georg von Peuerbach (1423-1469 μ.Χ.)

Συνέταξε πίνακα ημίτονων για τόξα ανά 10'. Υπήρξε διδάσκαλος του Regiomontanus.

Johann Muller, γνωστός και ως Regiomontanus(1436-1476μ.Χ.)

Το γεγονός ότι η τριγωνομετρία, μέχρι τον 16ο αιώνα, αναπτύχθηκε κυρίως από αστρονόμους δεν είναι καθόλου τυχαίο. Ο Αρίσταρχος και ο Ίππαρχος, που κατέστησαν την τριγωνομετρία αυτόνομο κλάδο των μαθηματικών, ήταν αστρονόμοι, όπως άλλωστε και ο Πτολεμαίος, ο συγγραφέας της Αλμαγέστης. Κατά το Μεσαίωνα, οι άραβες και οι ινδοί αστρονόμοι, ειδικότερα ο Αμπούλ Βέφα, ο αλ Μπαττάνι, ο Αριαμπάτα και ο Ουλούγκ Μπεγκ από τη Σαμαρκάνδη (1393-1449), αφομοίωσαν την ελληνική μαθηματική κληρονομιά και τη διεύρυναν, ειδικότερα όσον αφορά τη σφαιρική τριγωνομετρία. Και όταν αυτή η μικτή κληρονομιά προωθήθηκε στην Ευρώπη, πάλι ένας αστρονόμος βρέθηκε στο προσκήνιο: ο Johann Muller . Ο Muller γεννήθηκε στο Ουνφίντεν, κοντά στο Καίνιγκσμπεργκ, στην Κάτω Φραγκονία το 1436. Σώζονται αρκετές διαφορετικές εκδοχές του ονόματος του: Johannes Germanus (επειδή ήταν γερμανός), Johannes Francus (επειδή η Φραγκονία ονομαζόταν και Ανατολική Γαλλία) και Johann von Kunsperk, από το όνομα της πόλης Καίνιγκσμπεργκ. Ακολουθώντας τη συνήθεια των λογίων της εποχής του, προτίμησε να υιοθετήσει λατινικό όνομα, το Regio Monte, που αποτελεί κατά λέξη μετάφραση της γερμανικής λέξης «Καίνιγκσμπεργκ» (βασιλικό βουνό), και σιγά σιγά έγινε γνωστός ως Regiomontanus. Ωστόσο, και αυτό ακόμη το όνομα σώζεται σε διάφορες εκδοχές: Ο γάλλος λόγιος Pierre Gassendi (Peter Gassendus, 1592-1665), που έγραψε την πρώτη ολοκληρωμένη βιογραφία του Regiomontanus, τον αναφέρει ως Joannes de Monte Regio, όνομα με χαρακτηριστική γαλλική

χροιά. Ο Regiomontanus πέρασε τα παιδικά του χρόνια σπουδάζοντας στο σπίτι. Σε ηλικία 12 ετών, οι γονείς του τον έστειλαν για τη βασική του εκπαίδευση στη Λειψία.

Σκίτσο
του Regiomontanus

Όταν αποφοίτησε, μετακόμισε στη Βιέννη, και πήρε το πτυχίο του από το εκεί πανεπιστήμιο σε ηλικία μόλις 15 ετών. Στη Βιέννη γνωρίστηκε με το μαθηματικό και αστρονόμο Georg von Peurbach (1423-1461), και έγιναν επιστήθιοι φίλοι. Ο Peurbach είχε σπουδάσει υπό την καθοδήγηση του καρδιναλίου Nicolaus Cusanus (1401-1464), αλλά απέρριπτε την εικασία του δασκάλου του πως η Γη περιφέρεται ενδεχομένως γύρω από τον Ήλιο. Θαύμαζε τον Πτολεμαίο και σχεδίαζε να εκδώσει μια διορθωμένη εκδοχή της Αλμαγέστης, στηριγμένη στις υπάρχουσες λατινικές μεταφράσεις. Επίσης, ανέλαβε τη σύνταξη ενός νέου και ακριβέστερου πίνακα ημίτονων χρησιμοποιώντας το ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο είχε πρόσφατα επικρατήσει. Ο Peurbach ασκούσε μεγάλη επιρροή στον νεαρό Regiomontanus, ο οποίος τον θεωρούσε σχεδόν πατέρα του. Αλλά εντελώς ξαφνικά, στα 38 του, ο Peurbach πέθανε. Ο πρόωρος θάνατος άφησε τα σχέδιά του ανεκπλήρωτα και βύθισε το μαθητή του στην απελπισία. Ετοιμοθάνατος, ο Peurbach ανέθεσε στον νεαρό μαθητή του να ολοκληρώσει τη μετάφραση της Αλμαγέστης. «Ο ορφανεμένος σπουδαστής θεώρησε τούτη την ανάθεση ως ιερή αποστολή», γράφει ο Gassendi στη βιογραφία του Regiomontanus. Πράγματι, αφιερώθηκε ολόψυχα σε αυτό το έργο. Έμαθε ελληνικά για να μπορέσει να διαβάσει το κείμενο του Πτολεμαίου από το πρωτότυπο. Στη διάρκεια των μελετών του, απέκτησε έντονο ενδιαφέρον για αρχαία ελληνικά και λατινικά χειρόγραφα, κι έσπευσε να αποκτήσει όσο περισσότερα μπορούσε. Μεταξύ των ευρημάτων του, περιλαμβάνεται και ένα ημιτελές αντίγραφο του Διόφαντου, που το ανακάλυψε το 1464. Συνδέθηκε με αρκετούς λογίους, μεταξύ των οποίων και ο κρητικός Γεώργιος Τραπεζούντιος (1396-1486), ο οποίος θεωρούνταν αυθεντία στο έργο του Πτολεμαίου και μετέφρασε την Αλμαγέστη

και τα Σχόλια του Θέωνος στα λατινικά. Ο Γεώργιος Τραπεζούντιος καταγόταν από την Τραπεζούντα και γεννήθηκε στον Χάνδακα της Κρήτης (το σημερινό Ηράκλειο). Σε ηλικία περίπου 30 ετών πήγε στη Βενετία, όπου εργάσθηκε ως αντιγραφέας και στη συνέχεια ως δάσκαλος των ελληνικών. Απέκτησε γρήγορα φήμη, και για ένα διάστημα υπηρέτησε ως σύμβουλος του πάπα Ευγένιου του Δ' και στη συνέχεια του Νικολάου του Ε', οι οποίοι του ανέθεσαν τη μετάφραση αρχαίων ελληνικών κειμένων στα λατινικά. Έλαβε μέρος στη σύνοδο της Φλωρεντίας (1439). Οι προσπάθειες του, μετά την Άλωση, να πείσει τον Μωάμεθ να ιδρύσει μια ελληνοθωμανική αυτοκρατορία είχαν ως αποτέλεσμα να πέσει σε δυσμένεια και να αποπεμφθεί από την Αυλή του Πάπα. Εκτός από τον Regiomontanus, ήρθε σε ρήξη και με άλλους σοφούς που επέκριναν την ποιότητα του έργου του. Ένας από αυτούς ήταν και ο Βησσαρίων. Η φιλία τους όμως διαταράχθηκε όταν ο Regiomontanus επέκρινε τον Τραπεζούντιο για κάποια σοβαρά λάθη στην ερμηνεία των Σχολίων, αποκαλώντας τον ως τον «πιο αδιάντροπο, διεστραμμένο φαφλατά». Σύμφωνα με ορισμένες μαρτυρίες, αυτά τα λόγια είχαν καταστροφικές συνέπειες για τον αποδέκτη τους.

Ταξίδεψε στην Ελλάδα και την Ιταλία, όπου επισκέφθηκε την Πάντοβα, τη Βενετία και τη Ρώμη. Στη Βενετία ολοκλήρωσε, το 1464, το πιο γνωστό του έργο, το De triangulis omnimodis . Επιπλέον των δραστηριοτήτων αυτών, ο Regiomontanus εργαζόταν και ως αστρολόγος, χωρίς να θεωρεί ότι έτσι έρχεται σε αντίθεση με το επιστημονικό του έργο (το ίδιο έκανε δύο αιώνες αργότερα και ο μεγάλος αστρονόμος Johannes Kepler). Γύρω στο 1467, προσκλήθηκε από το βασιλιά της Ουγγαρίας Mathias Huniades Corvinus για να διευθύνει τη νεότευκτη Βασιλική Βιβλιοθήκη της Βουδαπέστης. Ο βασιλιάς μόλις είχε επιστρέψει από έναν νικηφόρο πόλεμο με τους Τούρκους, και τα λάφυρα του περιείχαν αρκετά σπάνια χειρόγραφα. Ο Regiomontanus ήταν ο ιδανικός άνθρωπος για να αναλάβει τη φροντίδα αυτών των θησαυρών. Λίγο μετά την άφιξη του Regiomontanus στη Βουδαπέστη, ο βασιλιάς αρρώστησε, και οι αυλικοί προέβλεψαν τον επικείμενο θάνατο του. Αντίθετα, ο Regiomontanus, χρησιμοποιώντας την αστρολογική του τέχνη, διέγνωσε ότι η αρρώστια ήταν μια απλή αδυναμία της καρδιάς που είχε προκληθεί από κάποια πρόσφατη έκλειψη! Ω του θαύματος, ο βασιλιάς ανένηψε και αντάμειψε τον Regiomontanus με δώρα.

Το 1471, ο Regiomontanus επέστρεψε στην πατρίδα του και εγκαταστάθηκε στη Νυρεμβέργη, πολύ κοντά στη γενέτειρα του. Στη Νυρεμβέργη, πόλη με μακρά παράδοση στα γράμματα και στο εμπόριο, είχε μόλις αρχίσει να λειτουργεί ένα τυπογραφείο· ο Regiomontanus αντιλήφθηκε αμέσως πόσες ευκαιρίες προσφέρονταν για τη διάδοση των

επιστημονικών κειμένων. Μόλις μερικά χρόνια πριν, το 1454, ο Ιωάννης Γουτεμβέργιος είχε εφεύρει την τυπογραφία κινητών στοιχείων . Ίδρυσε δικό του τυπογραφείο και ήταν έτοιμος να ξεκινήσει ένα φιλόδοξο πρόγραμμα επιστημονικών εκδόσεων, όταν τα σχέδια του ματαιώθηκαν από τον πρόωρο θάνατο του. Ίδρυσε επίσης ένα αστεροσκοπείο, το οποίο εξόπλισε με τα τελειότερα όργανα που μπόρεσαν να παραγάγουν οι ξακουστοί τεχνίτες της Νυρεμβέργης. Ανάμεσα τους υπήρχαν πολλές κρικωτές σφαίρες καθώς και όργανα για τη μέτρηση της γωνιακής απόστασης μεταξύ ουράνιων σωμάτων.

Ο Regiomontanus ήταν ο πρώτος που εξέδωσε μαθηματικά και αστρονομικά βιβλία για εμπορικούς σκοπούς. Το 1474 εξέδωσε τις «Εφημερίδες», που περιείχαν πίνακες με τις θέσεις του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών για κάθε ημέρα, από το 1475 μέχρι το 1506. Το βιβλίο έτυχε ενθουσιώδους αποδοχής. Ο Χριστόφορος Κολόμβος πήρε μαζί του ένα αντίτυπο στο τέταρτο ταξίδι του προς τον Νέο Κόσμο και το χρησιμοποίησε για να προβλέψει την ονομαστή έκλειψη Σελήνης της 29ης Φεβρουαρίου 1504. Οι ιθαγενείς, που ήταν εχθρικά διακείμενοι επί αρκετό διάστημα, αρνούνταν να εφοδιάσουν τους άνδρες του Κολόμβου με τροφή και νερό. Αυτός τους προειδοποίησε ότι ο Θεός θα τους τιμωρούσε αφαιρώντας από το φεγγάρι το φως του. Οι προειδοποιήσεις του έγιναν αρχικά αντικείμενο κοροϊδίας· όταν όμως την προ-καθορισμένη ώρα άρχισε η έκλειψη, οι τρομοκρατημένοι ιθαγενείς έδειξαν αμέσως μεταμέλεια και δήλωσαν υποταγή.

Το 1475, ο πάπας Σέξτος ο Δ' κάλεσε τον Regiomontanus να επισκεφθεί τη Ρώμη για να λάβει μέρος στην αναθεώρηση του Ιουλιανού ημερολογίου, το οποίο χαρακτηριζόταν από μεγάλη αναντιστοιχία σε σχέση με τις εποχές. Χωρίς να το επιθυμεί ιδιαίτερα, ο Regiomontanus άφησε τις πολυπληθείς υποχρεώσεις του και ταξίδεψε στην αιώνια πόλη. Εκεί, στις 6 Ιουλίου 1476, πέθανε ξαφνικά, ένα μήνα μετά τα τεσσαρακοστά του γενέθλια. Η αιτία του θανάτου του παραμένει αδιευκρίνιστη. Άλλοι τον αποδίδουν στην πανούκλα, άλλοι σε έναν διερχόμενο κομήτη. Ωστόσο, κυκλοφόρησαν και έντονες φήμες πως δηλητηριάσθηκε από τους γιους του Τραπεζούντιου, οι οποίοι ουδέποτε του συγχώρησαν την αιχμηρή κριτική που είχε ασκήσει στη μετάφραση των Σχολίων του Θέωνος στο έργο του Πτολεμαίου. Όταν η είδηση του θανάτου του έφθασε στη Νυρεμβέργη, η πόλη κήρυξε δημόσιο πένθος.

Το σημαντικότερο έργο του Regiomontanus ήταν το *De triangulis omnimodis (Περί των πάσης φύσεως τριγώνων)*, μια εργασία σε πέντε μέρη («βιβλία»), γραμμένη κατά το πρότυπο των Στοιχείων του Ευκλείδη . Σε αυτό, οργανώνονται σε ένα ενιαίο μεθοδικό κείμενο οι γνώσεις τριγωνομετρίας που κληροδοτήθηκαν τόσο από τον

Πτολεμαίο όσο και από τους ινδούς και άραβες λογίους. Το Βιβλίο 1 αρχίζει με τον ορισμό των βασικών εννοιών: ποσότητα, λόγος, ισότητα, κύκλος, τόξο, χορδή. Για τη συνάρτηση ημίτονο, υιοθετείται ο ινδικός ορισμός: «Όταν διχοτομούμε ένα τόξο και τη χορδή του, ονομάζουμε αυτή την ημιχορδή ορθό ημίτονο του ημιτόξου.» Ακολουθεί ένας κατάλογος αξιωμάτων, και στη συνέχεια πενήντα έξι θεωρήματα που πραγματεύονται τη γεωμετρική επίλυση επίπεδων τριγώνων. Μεγάλο μέρος του βιβλίου ασχολείται περισσότερο με γεωμετρία παρά με τριγωνομετρία, ωστόσο το Θεώρημα 20 εισάγει τη χρήση του ημίτονου για την επίλυση ορθογώνιου τριγώνου.

Η κατεξοχήν τριγωνομετρία αρχίζει στο Βιβλίο 2, με τη διατύπωση του νόμου των ημίτονων. Όπως και όλοι οι άλλοι κανόνες, διατυπώνεται λεκτικά και όχι συμβολικά. Όμως η διατύπωση είναι το ίδιο σαφής με αυτήν που βρίσκει κανείς και στα σημερινά βιβλία. Στη συνέχεια, ο νόμος των ημίτονων χρησιμοποιείται για την επίλυση μη ορθογώνιου τριγώνου στις περιπτώσεις που δίνονται (α) μία πλευρά, μία προσκείμενη και η απέναντι γωνία, (β) δύο πλευρές και μία γωνία, που δεν είναι η περιεχόμενη στις πλευρές. Εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά, με έμμεσο τρόπο, ο τύπος για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου, από δύο πλευρές και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία: «Αν δοθεί το εμβαδόν του τριγώνου καθώς και το ορθογώνιο γινόμενο. Ο Regiomontanus, υπό την επίδραση του Ευκλείδη, δεν αντιλαμβάνεται το γινόμενο μηκών ως απλό αριθμητικό γινόμενο. Το θεωρεί πάντοτε ως εμβαδόν. Με τον όρο «ορθογώνιο γινόμενο» εννοεί, λοιπόν, το απλό γινόμενο των μηκών, το οποίο αντιλαμβάνεται ως εμβαδόν του ορθογωνίου που οι κάθετες πλευρές του έχουν τα δοθέντα μήκη δύο πλευρών του, τότε προκύπτει ή η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη βάση ή η εξωτερική της, που αμφότερες κάνουν δύο ορθές.»

Με σημερινή ορολογία, αυτό διατυπώνεται ως εξής: Από τον τύπο $E = (\beta\gamma \sin A)/2$, όταν είναι γνωστό το εμβαδόν E και το γινόμενο $\beta\gamma$, μπορούμε να βρούμε την A ή την παραπληρωματική της, 180°-A. Περιέργως, ο Regiomontanus δεν χρησιμοποιεί ποτέ την εφαπτομένη, αν και σίγουρα τη γνώριζε από τον σχετικό πίνακα που είχε δημοσιεύσει ο Peurbach το 1467 και, φυσικά, από τη χρήση της σε αραβικά κείμενα για τη μέτρηση με τη βοήθεια σκιών. Τα υπόλοιπα τρία βιβλία ασχολούνται με τη σφαιρική γεωμετρία και τη σφαιρική τριγωνομετρία, δύο απαραίτητα εργαλεία για την αστρονομία. Όπως αναφέρει και ο ίδιος στην εισαγωγή, ο κύριος στόχος του Regiomontanus στο De triangulis omnimodis ήταν να χρησιμεύσει αυτό το έργο ως μια μαθηματική εισαγωγή στην αστρονομία. Με λόγια που κάλλιστα θα μπορούσαν να προέρχονται από κάποιο σύγχρονο εγχειρίδιο, συμβουλεύει τους αναγνώστες του να μελετήσουν το βιβλίο

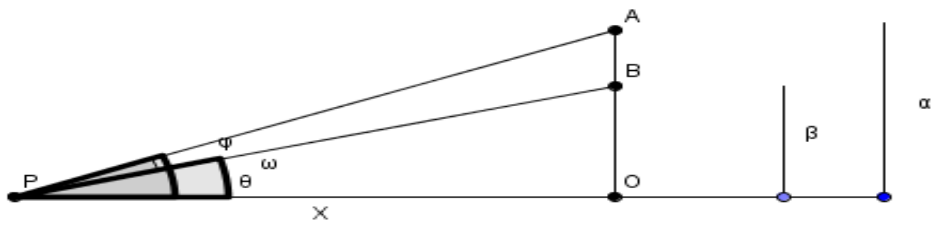
προσεκτικά, αφού το περιεχόμενο του αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για να κατανοήσει κανείς τους ουρανούς:

Εσείς που επιθυμείτε να μελετήσετε μεγάλα και θαυμαστά πράγματα, που αναρωτιέστε για την κίνηση των άστρων, οφείλετε να μελετήσετε τούτα τα θεωρήματα για τα τρίγωνα [...]. Γιατί κανένας δεν μπορεί να αποφύγει τη μελέτη των τριγώνων και να πετύχει ικανοποιητική γνώση των άστρων [...]. Ο νέος μελετητής δεν πρέπει ούτε να φοβάται ούτε να απελπίζεται [...]. Και όπου ένα θεώρημα τον δυσκολεύει, μπορεί πάντα να βοηθηθεί από τα αριθμητικά παραδείγματα που ακολουθούν.(σελ 27-29)(βλ.[43])

Ο Regiomontanus ολοκλήρωσε τη συγγραφή τού De triangulis το 1464. Ωστόσο, το έργο δεν εκδόθηκε παρά το 1533, περισσότερο από μισό αιώνα μετά το θάνατο του. Μέσω του κορυφαίου γερμανού μαθηματικού και αστρονόμου George Joachim Rhaeticus (1514-1576), έφθασε στα χέρια του Νικόλαου Κοπέρνικου (1473-1543). Ο Rhaeticus επισκέφθηκε τον Κοπέρνικο το 1539 και έγινε ο πρώτος μαθητής του. Παρ' όλο που ο Rhaeticus ήταν κατά 41 χρόνια νεότερος από τον Κοπέρνικο, μελετούσαν μαζί, και ο πρώτος δίδασκε στον δεύτερο μαθηματικά. Χάρη στην επιμονή του Rhaeticus, ο Κοπέρνικος πείσθηκε τελικά να εκδώσει το μνημειώδες έργο του *De Revolutionibus*, όπου αναπτύσσει το ηλιοκεντρικό του σύστημα. Χάρισε μάλιστα στον Κοπέρνικο ένα αντίγραφο του *De triangulis* με αφιέρωση, και ο μεγάλος δάσκαλος το μελέτησε με πολλή προσοχή. Το αντίτυπο σώζεται μέχρι σήμερα, και περιέχει αρκετές χειρόγραφες σημειώσεις στα περιθώρια, με τον γραφικό χαρακτήρα του Κοπέρνικου. Αργότερα, και ο Tycho Brahe (1546-1601), ο μεγάλος δανός παρατηρησιακός αστρονόμος, στηρίχθηκε στο βιβλίο αυτό για να υπολογίσει τη θέση του περίφημου nova (καινοφανούς αστέρα) στον αστερισμό της Κασσιόπης, τον οποίο είχε την τύχη να παρατηρήσει το 1572. Το έργο του Regiomontanus έθεσε τα θεμέλια που βοήθησαν τους αστρονόμους να διαμορφώσουν μια νέα θεώρηση του Σύμπαντος. Το 1471, ο Regiomontanus σε μια επιστολή του προς τον Christian Roder, καθηγητή του Πανεπιστημίου της Ερφούρτης, θέτει το ακόλουθο πρόβλημα: «Από ποιο σημείο του εδάφους φαίνεται μεγαλύτερη μια ράβδος ανηρτημένη κατακόρυφα [δηλαδή φαίνεται υπό τη μεγαλύτερη γωνία];» Πολλοί ισχυρίζονται ότι αυτό είναι το πρώτο πρόβλημα ακροτάτων στην ιστορία των μαθηματικών μετά την αρχαιότητα. Στο Σχήμα1, το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ παριστάνει τη ράβδο. Θέτουμε ΟΑ = α, ΟΒ = β και ΟΡ = χ, όπου Ρ το σημείο στο έδαφος για το οποίο η γωνία θ = ΒΡΑ είναι μέγιστη.(βλ.[43])

Θέτουμε ακόμη ω = ΟΡΑ και φ = ΟΡΒ**.** Τότε:

$$\cot\theta = \cot(\omega-\varphi) = \frac{\cot\omega\cot\varphi+1}{\cot\varphi-\cot\omega} = \frac{\frac{\chi}{\alpha}\frac{\chi}{\beta}+1}{\frac{\chi}{\beta}-\frac{\chi}{\alpha}} = \frac{\chi}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)\chi}$$



Ένας σημερινός μαθηματικός θα είχε την τάση να παραγωγίσει τη συνάρτηση για να προσδιορίσει την τιμή του χ που την ελαχιστοποιεί (αφού η συνεφαπτομένη είναι φθίνουσα συνάρτηση για 0° < θ < 90°, η θ γίνεται μέγιστη όταν η cotθ γίνεται ελάχιστη). Όμως ο Regiomontanus έζησε διακόσια χρόνια πριν από την επινόηση του διαφορικού λογισμού, οπότε αναγκαστικά θα περιορισθούμε σε πιο στοιχειώδεις μεθόδους. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα της άλγεβρας που λέει ότι: ο αριθμητικός μέσος δύο θετικών αριθμών u και v είναι πάντοτε μεγαλύτερος ή ίσος από τον γεωμετρικό τους μέσο, και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι ποσότητες u και v είναι ίσες. Συμβολικά: $\frac{u+v}{2} \geq 2\sqrt{uv}$

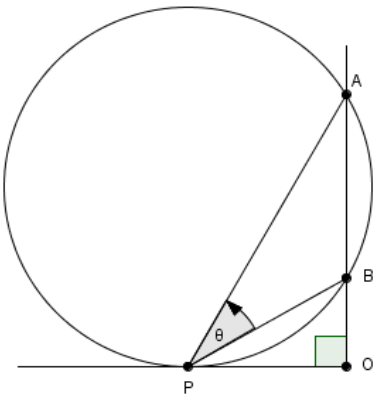
Με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν u=v, διότι $0 \leq \left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2 = u - 2\sqrt{uv} + v$.

Θέτοντας $u = \frac{\chi}{\alpha-\beta}$ *και* $v = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)\chi}$

έχουμε $\cot\theta = u + v \geq 2\sqrt{uv} = 2\sqrt{\frac{\chi}{\alpha-\beta}\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)\chi}} = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}$

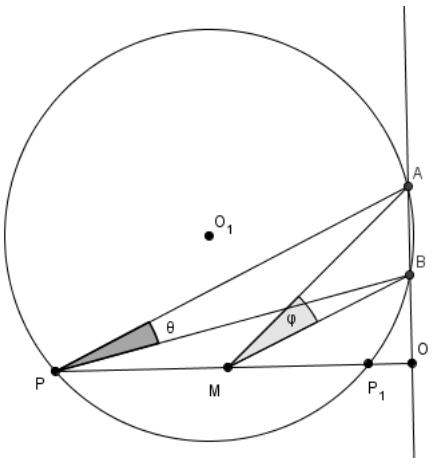
με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\frac{\chi}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)\chi}$.

δηλαδή αν και μόνο αν $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$. Επομένως, το ζητούμενο σημείο απέχει από το ίχνος Ο της ευθείας ΑΒ απόσταση ίση με τον γεωμετρικό μέσο των αποστάσεων του ανώτατου και του κατώτατου σημείου της ράβδου από το έδαφος. Αυτό το αποτέλεσμα επιδέχεται και μια πολύ ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία: Κατασκευάζουμε, με κανόνα και διαβήτη, τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και εφάπτεται



Σχήμα1.

στο έδαφος (Σχήμα 1.). Από ένα πολύ γνωστό θεώρημα, έχουμε: (OA)(OB) = $(OP)^2$, δηλαδή $\alpha\beta = \chi^2$, καιεπομένως $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$. Αντιστρόφως, είναι εύκολο να αποδείξουμε όχι ο κύκλος που διέρχεται από τα A, B και το ζητούμενο σημείο P πρέπει να εφάπτεται στο έδαφος. Πράγματι, αν έτεμνε την ευθεία του εδάφους σε δύο σημεία P και P_1, τότε η γωνία AMB για οποιοδήποτε σημείο M μεταξύ των P, P_1 θα ήταν μεγαλύτερη από τη γωνία APB ή τη γωνία AP_1B (αφού το M είναι εσωτερικό του κύκλου), αντίθετα με την υπόθεση η γωνία APB είναι η μέγιστη. (Σχήμα2)

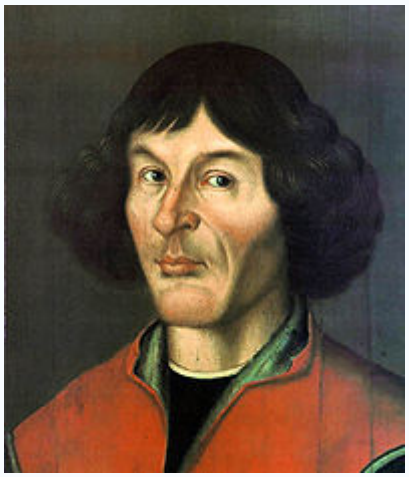


Σχήμα2.

Άρα, το πρόβλημα του Regiomontanus επιδέχεται και μία απλή γεωμετρική λύση. (A History of Mathematical Notations ,1928, επανέκδοση , Λα Σαλ: Open Court,1951, τομ.1,σελ.95).(βλ.[46] και [6]) Μόνο εικασίες μπορούμε να κάνουμε για τους λόγους που οδήγησαν τον Regiomontanus να ασχοληθεί με αυτό το θέμα. Μπορεί να ξεκίνησε από κάποιο πρόβλημα αρχιτεκτονικής ή προοπτικής. Για παράδειγμα: να βρεθεί το καλύτερο σημείο για την παρατήρηση του παραθύρου ενός ψηλού κτηρίου. Η προοπτική δηλαδή η τεχνική της σχεδίασης αντικειμένων σύμφωνα με την πραγματική εικόνα που δημιουργούν στο μάτι του παρατηρητή, ήταν τότε ένας σχετικά νέος τομέας, και είχε πρόσφατα εισαχθεί από τους ιταλούς αναγεννησιακούς καλλιτέχνες Filippo Brunelleschi

(1377-1446) και Leone Batista Alberti (1404-1472). Ο διάσημος καλλιτέχνης Albrecht Durer, από τους κυριότερους συγγραφείς στο θέμα της προοπτικής, γεννήθηκε στη Νυρεμβέργη τη χρονιά που εγκαταστάθηκε εκεί ο Regiomontanus. Σύντομα η προοπτική βρέθηκε στο επίκεντρο των μελετών για την τέχνη, και ο συνδυασμός δύο φαινομενικά άσχετων μεταξύ τους αντικειμένων —όπως η γεωμετρία και η τέχνη— ερχόταν σε απόλυτη συμφωνία με το αναγεννησιακό ιδεώδες του homo universalis. Δεν αποκλείεται ο Regiomontanus να ασχολήθηκε με αυτό το πρόβλημα ύστερα από παράκληση κάποιου καλλιτέχνη ή αρχιτέκτονα.(βλ.[46])

Νικόλαος Κοπέρνικος(1475-1543)



Νικόλαος Κοπέρνικος. Πορτραίτο των αρχών του 16ου αιώνα.

Ο **Νικόλαος Κοπέρνικος** (λατινικά: Nicolaus Copernicus, πολωνικά: Mikołaj Kopernik, 19 Φεβρουαρίου 1473 – 24 Μαΐου 1543) ήταν σημαντικός Πολωνός αστρονόμος. Γεννήθηκε στο Τόρουν της Βασιλικής Πρωσίας, επαρχίας του Βασιλείου της Πολωνίας, και πέρασε μεγάλο μέρος της ενήλικης ζωής στου στο Frombork της Βάρμιας (Πολωνία) όπου και πέθανε. Λίγο πριν το θανατό του ο Κοπέρνικος εξέδωσε το βιβλίο του «De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri VI» («Έξι Βιβλία για τις Περιστροφές των Ουράνιων Σφαιρών»), το οποίο αποτέλεσε τη βάση για την εξέλιξη της σύγχρονης Αστρονομίας. Ο Κοπέρνικος υποστήριξε την ηλιοκεντρική θεωρία, την άποψη δηλαδή ότι η Γη και τα άλλα σώματα του Ηλιακού Συστήματος περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο, σε αντίθεση με την τότε επίσημη γεωκεντρική θεωρία, που ήθελε τη Γη ακίνητη και κέντρο του κόσμου. Άνοιξε έτσι το δρόμο για τους αστρονόμους της επόμενης γενιάς (ειδικά τον Γιοχάνες Κέπλερ) αλλά και την Επιστημονική Επανάσταση

του 17ου αιώνα. Ο πατέρας του Νικόλαου Κοπέρνικου ήταν εύπορος έμπορος χαλκού και επιχειρηματίας, αλλά πέθανε όταν ο Νικόλαος ήταν μόλις δέκα ετών. Έτσι ο Νικόλαος και τα τρία αδέλφια του αναθράφηκαν από το θείο τους Λουκά Βατζενρόντε, που ήταν επίσκοπος. Μάλιστα ο αδελφός του Κοπέρνικου Ανδρέας έγινε ιερέας όταν μεγάλωσε και η αδελφή του Βαρβάρα Βενεδικτίνα μοναχή. Το 1491 ο Νικόλαος εγγράφεται στην περίφημη Ακαδημία της Κρακοβίας, το σημερινό Γιαγγελονιανό Πανεπιστήμιο, όπου γνωρίζει για πρώτη φορά την επιστήμη της Αστρονομίας και συναρπάζεται. Τέσσερα χρόνια αργότερα ωστόσο τον βρίσκουμε στην Ιταλία, να σπουδάζει Νομική και Ιατρική στα Πανεπιστήμια της Μπολόνια και της Πάδοβας, με έξοδα του θείου του, που ήθελε να τον δει και κείνον επίσκοπο. Στη Φερράρα όμως ο νεαρός Νικόλαος γνωρίζει τον αστρονόμο Ντομένικο Νοβάρα ντα Φερράρα και γίνεται μαθητής και βοηθός του. Οι πρώτες αστρονομικές παρατηρήσεις που έκανε ο Κοπέρνικος με το Νοβάρα μνημονεύονται στο «De Revolutionibus». Το 1497 ο Νικόλαος διορίζεται από το θείο του ιερέας στο Frombork, αλλά παραμένει στην Ιταλία (στη Ρώμη), παρατηρεί μία έκλειψη Σελήνης και δίνει τις πρώτες του διαλέξεις στην Αστρονομία ή στα Μαθηματικά. Το 1503 παίρνει το διδακτορικό του στο Κανονικό Δίκαιο από το Πανεπιστήμιο της Φερράρα. Φαίνεται ότι τότε ήρθε για πρώτη φορά σε επαφή με τις θεωρίες των αρχαίων περί κινήσεως της Γης, και απέκτησε τις πρώτες αμφιβολίες για το ότι η Γη ήταν ακίνητη στο κέντρο του Σύμπαντος. Το 1504 άρχισε να συγκεντρώνει παρατηρήσεις και ιδέες σχετικές με τις αμφιβολίες του αυτές.

Αφήνοντας την Ιταλία, ο Κοπέρνικος έρχεται να ζήσει στο Frombork. Επίσης είχε δεχθεί μία θέση στο ναό του Τιμίου Σταυρού, στο Βρότσλαβ της Σιλεσίας, από την οποία παραιτήθηκε μόλις λίγα χρόνια πριν από το θάνατό του. Γενικά, στο υπόλοιπο της ζωής του θα ασχολείτο με αστρονομικές παρατηρήσεις και υπολογισμούς, αλλά μόνο στον ελεύθερο χρόνο του. Συνεργάσθηκε επί χρόνια με τη Βασιλική Πρωσσική Δίαιτα επί της νομισματικής μεταρρυθμίσεως και δημοσίευσε μελέτες για την αξία του χρήματος. Ως μέλος της κυβερνήσεως της Warmia κατένεμε τους φόρους και απένεμε δικαιοσύνη. Επίσης ταξίδεψε πολύ σε κυβερνητικά ταξίδια και ως διπλωμάτης, εκπροσωπώντας το θείο του Λουκά, που είχε ανακηρυχθεί «Πρίγκηψ-Επίσκοπος» της Warmia.

Το έτος 1514 κυκλοφόρησε μεταξύ των φίλων του το Commentariolus («Μικρή Ερμηνευτική Πραγματεία»), εξασέλιδο χειρόγραφο κείμενο με τις ιδέες του για το Ηλιοκεντρικό Σύστημα που πρέπει να γράφηκε μεταξύ 1507 και 1514. Κατ' άλλους όμως

το έγραψε και το διέθεσε μεταγενέστερα, ίσως και το 1533. Συνέχισε κατόπιν τη συλλογή στοιχείων για ένα λεπτομερέστερο έργο. Κατά τον πόλεμο μεταξύ του Τευτονικού Τάγματος και του Βασιλείου της Πολωνίας (1519 - 1524) υπεράσπισε επιτυχώς το Olsztyn ως επικεφαλής των βασιλικών στρατευμάτων όταν αυτό πολιορκήθηκε από τις δυνάμεις του Αλβέρτου του Βραδεμβούργου.

Το 1533 ο Johann Albrecht Widmannstetter έδωσε μία σειρά διαλέξεων στη Ρώμη περιγράφοντας περιληπτικά την κοπερνίκειο θεωρία. Αυτές οι διαλέξεις προκάλεσαν το ενδιαφέρον αρκετών καρδιναλίων και του ίδιου του Πάπα Κλήμεντος Ζ΄. Το 1536 το έργο του Κοπέρνικου προσέγγιζε την οριστική μορφή του και διαδόσεις για τη θεωρία του είχαν φθάσει σε εγγράμματους ανθρώπους σε ολόκληρη την Ευρώπη. Με τη σειρά τους, οι διανοούμενοι από πολλές χώρες τον πίεζαν να δημοσιεύσει τις ιδέες του. Π.χ. σε ένα γράμμα με στοιχεία «Ρώμη, 1 Νοεμβρίου 1536» ο αρχιεπίσκοπος Καπύης Καρδινάλιος Νικόλαος ζητά από τον Κοπέρνικο να δημοσιοποιήσει ευρύτερα τις ιδέες του με τα λόγια:

> *«Ούτως, σοφολογιώτατε, χωρίς να επιθυμώ να είμαι άκαιρος, σας ικετεύω μετ' εμφάσεως να κοινωνήσετε την ανακάλυψή σας στον κόσμο των διανοουμένων, και να μου αποστείλετε το συντομότερο δυνατόν τις θεωρίες σας περί Σύμπαντος, μετά πινάκων και ό,τι άλλου έχετε σχετικού προς το αντικείμενο.»*

Παρά τις ποικίλες παροτρύνσεις, ο Κοπέρνικος καθυστερούσε τη δημοσίευση, μάλλον από το φόβο της κριτικής για τις επαναστατικές ιδέες του από το κατεστημένο, αλλά ίσως και επειδή δούλευε ακόμα πάνω στο κείμενο αυτού που θα γινόταν αργότερα το «De Revolutionibus». Τότε, στα 1539, ένας ξακουστός χαρτογράφος, ιατρός και μαθηματικός, ο Ραιτικός (Georg Joachim Rheticus), έφθασε στο Frombork. Ο μεταρρυθμιστής θεολόγος Φίλιππος Μελάγχθων είχε κανονίσει να επισκεφθεί ο Ραιτικός μερικούς αστρονόμους και να μελετήσει μαζί τους. Ο Ραιτικός έμεινε τελικά με τον Κοπέρνικο δύο χρόνια, κατά τα οποία συνέγραψε ένα βιβλίο, το Narratio prima, όπου σκιαγραφούσε την ουσία της κοπερνίκειας θεωρίας. Το 1542 ο Ραιτικός δημοσίευσε μία πραγματεία του Κοπέρνικου περί Τριγωνομετρίας, η οποία αργότερα συμπεριελήφθηκε στο δεύτερο βιβλίο του «De Revolutionibus». Υπό την ισχυρότατη πίεση του Ραιτικού, και έχοντας δει τη γενικώς ευνοϊκή πρώτη υποδοχή της δουλειάς του, ο Κοπέρνικος συμφώνησε τελικά να παραδώσει το βιβλίο στον πιστό του φίλο Tiedemann Giese, επίσκοπο του Chełmno, για να το αφήσει στον Ραιτικό προκειμένου αυτός να το στείλει

για εκτύπωση στου Johannes Petreius, στη Νυρεμβέργη. Σύμφωνα με τον παραδοσιακό θρύλο, ιππότης πάνω σε γρήγορο άλογο έτρεξε και παρέδωσε το πρώτο τυπωμένο αντίτυπο του βιβλίου στα χέρια του Κοπέρνικου την ημέρα του θανάτου του μεγάλου Πολωνού αστρονόμου.

Ο Νικόλαος Κοπέρνικος τάφηκε στον Καθεδρικό Ναό του Frombork. Αρκετοί είχαν ερευνήσει μάταια για τη σορό του, όταν στις 3 Νοεμβρίου 2005 ανακοινώθηκε πως τον Αύγουστο 2005 είχε ανακαλυφθεί το κρανίο του. Ωστόσο, τρία χρόνια μετά, το Νοέμβριο του 2008, ανακοινώθηκε ότι έπειτα από γενετικές έρευνες, επιβεβαιώθηκε ότι βρέθηκε ο τάφος του διάσημου αστρονόμου.

Το έργο ζωής του Κοπέρνικου, «De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri VI» («Έξι Βιβλία για τις Περιστροφές των Ουράνιων Σφαιρών») (Πρώτη έκδοση: Νυρεμβέργη 1543. Δεύτερη έκδοση: Βασιλεία 1566), υπήρξε το αποτέλεσμα δεκαετιών εργασίας. Ενσωματώνει περισσότερα από χίλια χρόνια αστρονομικών παρατηρήσεων με διάφορους βαθμούς ακρίβειας. Περιέχει εκατό σελίδες πινάκων με πάνω από 20.000 αριθμούς. Το έργο ξεκινούσε με πρόλογο, αρχικώς ανώνυμο, του Ανδρέα Οσιάνδρου, θεολόγου φίλου του Κοπέρνικου, ο οποίος προειδοποιούσε ότι η θεωρία, εννοούμενη ως ένα απλό εργαλείο που επέτρεπε απλούστερους και ακριβέστερους υπολογισμούς, δεν είχε οπωσδήποτε και συνέπειες εκτός του περιορισμένου χώρου της Αστρονομίας.

Το κυρίως έργο του Κοπέρνικου άρχιζε με το γράμμα του (νεκρού πλέον) αρχιεπισκόπου Καπύης Καρδιναλίου Νικολάου φον Σένμπεργκ (von Schönberg) που προαναφέρθηκε (βλ. προηγούμενη ενότητα). Στη συνέχεια, σε μία μακρά εισαγωγή, ο Κοπέρνικος αφιέρωνε το έργο στον Πάπα Παύλο ΙΙΙ, εξηγώντας το κίνητρό του για τη συγγραφή του έργου ως σχετιζόμενο με την αδυναμία των παλαιότερων αστρονόμων να συμφωνήσουν πάνω σε μία επαρκή θεωρία των πλανητικών κινήσεων. Σημείωνε ότι, εάν το δικό του σύστημα αύξανε την ακρίβεια των αστρονομικών προβλέψεων, τότε θα επέτρεπε στην Εκκλησία να αναπτύξει ένα ακριβέστερο ημερολόγιο. Την εποχή εκείνη, είχε θεωρηθεί αναγκαία μία τροποποίηση του Ιουλιανού Ημερολογίου, κάτι που αποτελούσε ένα από τους κύριους λόγους που η Εκκλησία χρηματοδοτούσε την αστρονομική έρευνα.

Τα 6 «βιβλία» του έργου ήταν τα εξής:

1. *Γενική εποπτεία της Ηλιοκεντρικής Θεωρίας και περίληψη της ιδέας του για το Σύμπαν.*
2. *Κυρίως θεωρητικό, παρουσιάζει τις αρχές της Σφαιρικής Αστρονομίας και ένα κατάλογο αστέρων (ως βάση για τα επιχειρήματα που αναπτύσσονται στα επόμενα βιβλία).*
3. *Αναφέρεται κυρίως στις φαινομενικές κινήσεις του Ηλίου και σε σχετικά φαινόμενα.*
4. *Περιγραφή της Σελήνης και των τροχιακών της κινήσεων.*
5. *Η κυρίως έκθεση του νέου συστήματος.*
6. *Η κυρίως έκθεση του νέου συστήματος (συνέχεια).*

Ουσιαστικά παρουσιάζει την τροποποίηση της θεωρίας του Πτολεμαίου για μια κινούμενη Γη. Στο μοντέλο που παρουσιάζεται, το Σύμπαν αποτελείται από 8 ομόκεντρες σφαίρες. Η εξώτατη, όγδοη σφαίρα, ήταν πάλι η σφαίρα των απλανών αστέρων, αλλά τώρα ο `Ηλιος είναι ακίνητος στο κέντρο. Οι 6 γνωστοί την εποχή του Κοπέρνικου πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον `Ηλιο με τη σειρά που γνωρίζουμε και σήμερα, ενώ η Σελήνη περιφέρεται περί τη Γη. Επιπλέον, η φαινομενική κίνηση του Ηλίου και των απλανών γύρω από τη Γη εξηγείται από την ημερήσια περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της. Σωστά όλα αυτά όπως τα γνωρίζουμε και σήμερα. Ο Κοπέρνικος ωστόσο, ακολουθώντας όπως φαίνεται και σε αυτό τον Αρίσταρχο, δεν τόλμησε να εγκαταλείψει τις κυκλικές τροχιές (οι αληθινές τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις), με αποτέλεσμα να αναγκασθεί να διατηρήσει τους επικύκλους του Πτολεμαίου για να του βγαίνουν σωστοί οι υπολογισμοί. Παρά το γεγονός αυτό, η μεταπήδηση από ένα γεωκεντρικό στο ηλιοκεντρικό σύστημα ήταν από μόνη της πολύ σημαντική, καθώς δημιουργούσε σοβαρό ζήτημα σχετικώς με την αξιοπιστία του Αριστοτέλους, τον οποίο η δυτική Εκκλησία είχε αναγάγει σε αλάθητο.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι διασώζεται το χειρόγραφο του έργου, γραμμένο με το χέρι του ίδιου του Κοπέρνικου, πράγμα σπάνιο για επιστημονικό έργο εκείνης της εποχής. Στο χειρόγραφο, ο Κοπέρνικος γράφει καθαρά ότι (ως άριστος γνώστης της αρχαίας ελληνικής γλώσσας που ήταν) είχε διαβάσει τις απόψεις του Αριστάρχου του Σαμίου, που έθετε τη Γη να περιφέρεται περί τον `Ηλιο, αλλά και των Πυθαγόρειων φιλοσόφων Φιλολάου και Ικέτα. Τον τελευταίο μάλιστα τον γράφει λανθασμένα ως «Νικέτα-Νικήτα», από προσθήκη του «ν» του άρθρου (το-ν-Ικέτα). Το απόσπασμα όμως που αναφέρει και τα ονόματα των αρχαίων σοφών αφαιρέθηκε (διαγράφηκε) από τον πιστό

φίλο του Κοπέρνικου, τον Tiedemann Giese, πριν αυτός το παραδώσει στον εκδοτικό οίκο, με αποτέλεσμα οι πρώτες εκδόσεις του «De Revolutionibus» να τυπωθούν χωρίς αυτό. Το απόσπασμα εμφανίσθηκε στις μεταγενέστερες εκδόσεις του έργου, όταν πλέον το ηλιοκεντρικό σύστημα είχε αποδοθεί στον Κοπέρνικο.Ο τίτλος του έργου είχε από μόνος του ιστορική επίδραση, αφού έδωσε το λατινικό όνομα revolutio (περιστροφή, περιφορά) σε κάθε αιφνίδια και θεμελιώδη μεταβολή στη σκέψη ή και στην κοινωνία (από όπου και το αγγλικό και γαλλικό revolution = επανάσταση).

John Napier ή Neper (1550-1617 μ.Χ.)

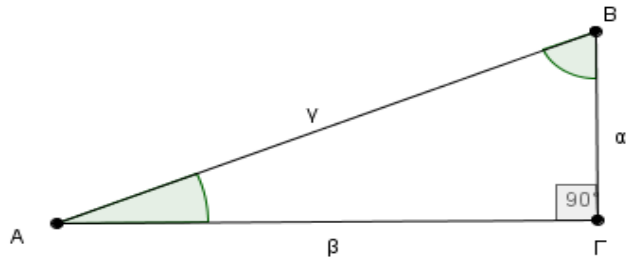
Είχε σημαντική συμβολή στη Σφαιρική Τριγωνομετρία (Αναλογικοί τύποι Napier - Πρακτικοί κανόνες για την επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων). Επινόησε επίσης τους λογάριθμους.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

Από τον 16ο μ.Χ. αιώνα (Rhaeticus) και κατόπιν άρχισαν τα τοξο(γωνιο)μετρικά μεγέθη να θεωρούνται συναρτήσεις της γωνίας (αντί του τόξου) και να ορίζονται ως λόγοι (ratios) δύο ευθυγράμμων τμημάτων (βλέπε σχήμα παραπλεύρως, όπου θεωρείται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ):

$\sin A = \frac{a}{\gamma}$ $\cos A = \frac{\beta}{\gamma}$ $\tan A = \frac{\alpha}{\beta}$ $\cot A = \frac{\beta}{\alpha}$ $\sec A = \frac{\gamma}{\beta}$ $\sec A = \frac{\gamma}{\beta}$

$\cos ecA = \frac{\gamma}{\alpha}$



Ονομασία και σύμβολα

Στην ιστορική διαδρομή του κάθε τοξο(γωνιο)μετρικού μεγέθους συναντάμε μεγάλη ποικιλία ονομασιών που ο κάθε συγγραφέας προτείνει ή χρησιμοποιούσε με την κατάλληλη, κατά την κρίση του, ονομασία. Το ίδιο συνέβη και με τα σύμβολα των εν λόγω μεγεθών. Σημειώνεται ότι η χρήση συμβόλων ξεκίνησε στην αρχή δειλά και από τον 16^{ο} μ.Χ. αι. άρχισε να γενικεύεται. Οι ονομασίες και τα σύμβολα των διαφόρων τοξο(γωνιο)μετρικών μεγεθών μπορούμε να πούμε, ότι παγιώθηκαν κατά την εποχή του Euler (18ος μ.Χ. αι.).

Τριγωνομετρικοί Πίνακες

Στον τομέα της έκδοσης τριγωνομετρικών βιβλίων και πινάκων παρουσιάζεται μια συνεχής εξέλιξη, δεδομένου ότι η Τριγωνομετρία διανύει ένα αναπτυξιακό στάδιο. Οι τριγωνομετρικές απαιτήσεις συνεχώς αυξάνονται, δεδομένου ότι η Τριγωνομετρία καλείται να ικανοποιήσει ολοένα και περισσότερες ανάγκες στην Αστρονομία, στη Ναυτιλία, στη Γεωδαισία κ.λπ. Περί τα μέσα του 15ου μ.Χ. αιώνα η

εφεύρεση της Τυπογραφίας θα βοηθήσει στην έκδοση καλύτερων και περισσότερων βιβλίων. Οι Τριγωνομετρικοί Πίνακες συνεχώς βελτιώνονται με περισσότερες γωνίες και μεγαλύτερη ακρίβεια.Κατά το διάστημα 1550-1600 μ.Χ. η επινόηση των λογαρίθμων (Napier, Briggs κ.λπ) θα βοηθήσει την Τριγωνομετρία να κάνει ένα ακόμη σημαντικό άλμα. Θα συνταχθούν Πίνακες με τους λογαρίθμους των τιμών των διαφόρων γωνιομετρικών μεγεθών και αυτό θα βοηθήσει αφάνταστα τους αστρονόμους, τους ναυτιλλομένους κ.λπ. Οι χρονοβόροι και κοπιαστικοί πολλαπλασιασμοί ή διαιρέσεις πολυψήφιων αριθμών αντικαθίστανται με απλές προσθέσεις ή αφαιρέσεις λογαρίθμων. Ομοίως απλοποιούνται σημαντικά και οι εξαγωγές ριζών.

Είναι φαίνεται τόση η ανακούφιση, που έφερε η χρήση των λογαρίθμων στους Τριγωνομετρικούς Πίνακες, ώστε ο πολύς Laplace θα πεί, ότι οι λογάριθμοι, μειώνοντας την κόπωση, διπλασιάζουν τη ζωή των αστρονόμων. Τέλος, με την υιοθέτηση των δεκαδικών κλασμάτων, πρώτος εισηγητής ο Stevin - 1585 μ.Χ. στο βιβλίο του De Thiende, από τον 17ο μ.Χ. αιώνα και κατόπιν οι Τριγωνομετρικοί Πίνακες διαμορφώθηκαν σύμφωνα με το σύστημα των δεκαδικών αριθμών.(βλ[43,[38])

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η ανάπτυξη της συμβολικής Αλγεβρας (Viete - 16ος μ.Χ. αιώνας και μετέπειτα) και του Απειροστικού Λογισμού (Leibnitz, Newton κ.λπ.) είχε μεγάλο αντίκτυπο και στην Τριγωνομετρία. Η Τριγωνομετρία λοιπόν, από τον 17ο μ.Χ. αιώνα και μετά, άρχισε να εισδύει σιγά-σιγά στο χώρο της Ανάλυσης και να αποκτά και αναλυτικό κλάδο· με άλλα λόγια άρχισε να μπαίνει και στο χώρο των Ανώτερων Μαθηματικών. Αρκετοί μαθηματικοί όπως οι Jean Bernoulli, Abraham de Moivre κ.λπ. εργάσθηκαν προς την κατεύθυνση αυτή. Η τελική πάντως διαμόρφωση και το τελικό χρίσμα οφείλονται στον Leonard Euler.(βλ[43],[38])

Η τριγωνομετρία του Viete

Με το μεγάλο γάλλο μαθηματικά Franqois Viete(1540-1603), γνωστό και με το λατινικό του όνομα Franciscus Vieta, , η τριγωνομετρία αρχίζει να αποκτά το μοντέρνο αναλυτικό της χαρακτήρα. Δύο εξελίξεις διευκόλυναν αυτή τη διαδικασία: η ανάπτυξη της συμβολικής άλγεβρας, στην οποία η συμβολή του Viete υπήρξε καθοριστική και η επινόηση της αναλυτικής γεωμετρίας από τον Fermat και τον Καρτέσιο κατά το πρώτο μισό του 17ου αιώνα. Η σταδιακή αντικατάσταση της δύσχρηστης ρηματικής άλγεβρας των μεσαιωνικών μαθηματικών από σύντομες συμβολικές διατυπώσεις, εγγράμματη άλγεβρα, διευκόλυνε σε μεγάλο βαθμό τη γραφή και την ανάγνωση μαθηματικών κειμένων. Και, κάτι ακόμα πιο σημαντικό, επέτρεψε στους μαθηματικούς να εφαρμόσουν αλγεβρικές μεθόδους σε προβλήματα που μέχρι τότε αντιμετωπίζονταν με καθαρά γεωμετρικούς τρόπους. Ο Viete επέβαλε στην τριγωνομετρία και μια δεύτερη σημαντική αλλαγή. Εισήγαγε στις τάξεις της τις μεθόδους του απείρου. Το 1593 ανακάλυψε το περίφημο άπειρο γινόμενο

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

Για πρώτη φορά μια άπειρη διαδικασία γραφόταν σαφώς ως μαθηματικός τύπος, προαναγγέλλοντας την έναρξη της σύγχρονης ανάλυσης. Ο Fransois Viete γεννήθηκε το 1540 στο Φοντενέ λε Κοντ, μια μικρή πόλη στη δυτική Γαλλία. Αρχικά ασχολήθηκε με τα νομικά, αλλά στη συνέχεια αναμείχθηκε στην πολιτική, ως μέλος του κοινοβουλίου της Βρετάνης. Όπως συνήθιζαν οι περισσότεροι λόγιοι της εποχής του, εκλατίνισε το όνομα του, μετατρέποντας το σε Franciscus Vieta. Αντίθετα όμως απ' ότι συνέβη με τους

άλλους, μεταξύ των οποίων και ο Regiomontanus, η λατινική εκδοχή του ονόματος του δεν υιοθετήθηκε ευρέως. Έτσι, και εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το γαλλικό Viete. Σε όλη του τη ζωή, ο Viete ασχολήθηκε με τα μαθηματικά μόνο κατά τον ελεύθερο χρόνο του, θεωρώντας τα περισσότερο μια μορφή πνευματικής ψυχαγωγίας παρά επάγγελμα. Και δεν ήταν ο μόνος. Ο Pierre Fermat, ο Blaise Pascal και ο Καρτέσιος συνέβαλαν όλοι τους σημαντικά στην ανάπτυξη των μαθηματικών ασχολούμενοι με αυτά μόνο κατά τον ελεύθερο χρόνο τους, ενώ επισήμως κατείχαν ποικίλες πολιτικές, διπλωματικές και — στην περίπτωση του Καρτέσιου— στρατιωτικές θέσεις. Ο Viete άρχισε την καριέρα του ως δάσκαλος της Catherine de Phartenay, κόρης ενός σημαντικού στρατιωτικού, για λογαριασμό της οποίας έγραψε διάφορα εγχειρίδια. Καθώς η φήμη του μεγάλωνε, κλήθηκε να υπηρετήσει τον βασιλιά Ερρίκο τον Δ' στον πόλεμο κατά της Ισπανίας. Ο Viete αποδείχθηκε αυθεντία στο σπάσιμο των κωδίκων του εχθρού: ένα μυστικό μήνυμα που το μετέφερε στον ισπανό βασιλιά Φίλιππο τον Β' κάποιος αξιωματικός-σύνδεσμος έπεσε στα χέρια των Γάλλων και παραδόθηκε στον Viete, ο οποίος πέτυχε να το αποκρυπτογραφήσει. Οι Ισπανοί, έκπληκτοι που έσπασε ο κώδικας τους, κατηγόρησαν τους Γάλλους ότι χρησιμοποιούσαν μαγεία, «σε αντίθεση με τις επιταγές της χριστιανικής πίστης».

Το σημαντικότερο έργο του Viete, το *In artem analyticam isagoge* (Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη) (Τουρ, 1591), θεωρείται το πρώτο βιβλίο συμβολικής άλγεβρας. Στο εν λόγω έργο, παρουσιάζει ένα σύστημα συμβολισμών που προσεγγίζει αρκετά το σημερινό: συμβολίζει τις γνωστές ποσότητες με σύμφωνα και τις άγνωστες με φωνήεντα. (Η σημερινή πρακτική να συμβολίζονται οι σταθερές με α, β, γ και οι άγνωστοι με χ, y, ζ εισήχθη από τον Καρτέσιο το 1637.) Όρισε την εξίσωση ως «τη σύγκριση μιας άγνωστης ποσότητας με μια προσδιορισμένη» και διατύπωσε τους βασικούς κανόνες επίλυσης των εξισώσεων, μετακίνηση ενός όρου από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο, διαίρεση και των δύο μελών μιας εξίσωσης με έναν κοινό παράγοντα, και ούτω καθ' εξής. Ονόμασε τη μέθοδο του *ars analytice* (αναλυτική τέχνη) και τη νέα άλγεβρα *logistica speciosa* (σε κατά λέξη μετάφραση: «λογιστική των ειδών», δηλαδή υπολογιστική τέχνη των γενικευμένων ποσοτήτων), για να τη διακρίνει από την παλιά *logistica numerosa* (λογιστική των αριθμών). Αυτή η μετάβαση από την περιγραφική στη συμβολική άλγεβρα θεωρείται ως μια από τις σημαντικότερες εξελίξεις στην ιστορία των μαθηματικών. Ο Viete εφάρμοσε τους κανόνες της άλγεβρας σε οποιαδήποτε ποσότητα, αριθμητική ή γεωμετρική, βάζοντας τέλος στην παλιά διάκριση μεταξύ καθαρών αριθμών και γεωμετρικών οντοτήτων. Σε άλλους τομείς, όμως, φάνηκε μάλλον

συντηρητικός. Για παράδειγμα, επέμενε πάντοτε να είναι μια εξίσωση ομοιογενής ως προς τη διάσταση: Αντί για τον σημερινό συμβολισμό $mx = b^2$, θα έγραφε *«M in A aequatur B quadratus»*, δηλαδή «μια δεδομένη ποσότητα M (σύμφωνο) πολλαπλασιασμένη με μια άγνωστη ποσότητα A (φωνήεν) ισούται με το τετράγωνο ενός δεδομένου αριθμού B». Αυτό δείχνει την προσήλωση του στην παλιά ελληνική άποψη ότι οι πράξεις μεταξύ αριθμών είχαν γεωμετρική φύση. Αφού το γινόμενο δύο αριθμών παριστάνει το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου που έχει ως πλευρές του τους εν λόγω αριθμούς, πρέπει να εξισώσουμε ένα τέτοιο γινόμενο με το εμβαδόν κάποιου τετραγώνου με γνωστή πλευρά. Σήμερα, βεβαίως, θεωρούμε τις αλγεβρικές ποσότητες ως καθαρούς αριθμούς χωρίς διαστάσεις. Αξίζει ακόμη να παρατηρήσουμε ότι ο Viete χρησιμοποιούσε τα μοντέρνα σύμβολα + και - για την πρόσθεση και την αφαίρεση, αλλά για την ισότητα χρησιμοποιούσε τη φραστική περιγραφή «aequatur». Το A^2 το έγραφε ως A quadrates και το A^3 ως A cubus (αργότερα υιοθέτησε τη συντομογραφία Aq και Ac). Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι ο Viete δεν μπορούσε να απελευθερωθεί πλήρως από τα δεσμά της παλιάς περιγραφικής άλγεβρας. Το έργο του αντικατοπτρίζει την εποχή του, μια περίοδο μετάβασης από τον παλιό στον καινούργιο κόσμο. Θα ενδιαφερθούμε ιδιαίτερα για τη συμβολή του Viete στην τριγωνομετρία. Το πρώτο του σχετικό έργο κυκλοφόρησε το 1571 με τίτλο Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus (Μαθηματικός κανόνας, ή κανόνας περί τριγώνων, με παραρτήματα). Εδώ βρίσκουμε την πρώτη στον δυτικό κόσμο συστηματική παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης επίπεδων και σφαιρικών τριγώνων, με χρήση και των έξι τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αναπτύσσει τους τρεις τύπους μετασχηματισμού αθροίσματος σε γινόμενο δηλαδή $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ και τους αντίστοιχους τύπους για τα sinA + cosB και cosA + cosB. Δεν αποκλείεται ο Napier να εμπνεύσθηκε από εδώ την ιδέα των λογαρίθμων, αφού, εάν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους αυτούς αντίστροφα, μπορούμε να αναγάγουμε το γινόμενο δύο αριθμών σε άθροισμα δύο άλλων αριθμών. Ήταν επίσης ο πρώτος που διατύπωσε το νόμο των εφαπτόμενων στη σύγχρονη μορφή του:

$$\frac{a+\beta}{a-\beta} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

όπου α, β δύο πλευρές τριγώνου και A, B οι απέναντι γωνίες .

Ο Viete υπήρξε ο πρώτος μαθηματικός που εφάρμοσε συστηματικά αλγεβρικές μεθόδους στην τριγωνομετρία. Για παράδειγμα, θέτοντας x= 2cosθ και y_n=cosnθ, έφθασε στον αναδρομικό τύπο $y_n = xy_{n-1} - y_{n-2}$
ο οποίος, αν ξαναγραφεί τριγωνομετρικά, δίνει τη σχέση
cosnθ = 2cosθcos(n - 1)θ - cos(n - 2)θ.

Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε τα cos(n - 1)θ και cos(n - 2)θ ως συνάρτηση ακόμη μικρότερων πολλαπλασίων του θ και, συνεχίζοντας όσες φορές χρειάζεται αυτή τη διαδικασία, να καταλήξουμε σε τύπους για το cosnθ ως συνάρτηση των cosθ και sinθ. Ο Viete το έκανε για όλους τους ακεραίους n μέχρι το 10. Ήταν τόσο υπερήφανος για το επίτευγμα του που δήλωσε: «Συνεπώς, η ανάλυση των κυκλικών τομέων περιελάμβανε γεωμετρικά και αριθμητικά μυστικά που μέχρι σήμερα δεν είχαν ανακαλυφθεί από κανέναν». Για να καταλάβουμε και εμείς την αξία του επιτεύγματος του, ας αναφέρουμε μόνο ότι οι γενικοί τύποι που εκφράζουν το cosnθ και το sinnθ ως συνάρτηση των cosθ και sinθ ανακαλύφθηκαν από τον Jakob Bernoulli το 1702, δηλαδή εκατό τουλάχιστον χρόνια μετά το έργο του Viete.

Αυτοί οι τύποι είναι:

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1!}\cos^{n-1}\varphi \cdot \sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi + \ldots$$

και

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi + \ldots$$

Η ικανότητα του Viete να εφαρμόζει αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στην τριγωνομετρία του φάνηκε ιδιαίτερα χρήσιμη σε μια ιστορική συνάντηση με τον βασιλιά Ερρίκο τον Δ' και τον ολλανδό πρέσβη στη Γαλλία. Ο Adriaen van Roomen (1561-1615), καθηγητής μαθηματικών και ιατρικής στο Πανεπιστήμιο της Λουβέν στο Βέλγιο, δημοσίευσε το 1593 ένα έργο με τίτλο Ideae mathematicae (Μαθηματικές ιδέες), το οποίο περιείχε μια παρουσίαση των κορυφαίων μαθηματικών της εποχής του. Το έργο δεν ανέφερε ούτε έναν γάλλο μαθηματικό, κάτι που έκανε τον ολλανδό πρέσβη να μιλήσει με περιφρόνηση για τα επιστημονικά επιτεύγματα των Γάλλων. Για να στηρίξει την άποψη του, παρουσίασε στον Ερρίκο τον Δ' ένα πρόβλημα που περιλαμβανόταν στο Ideae , για το οποίο μάλιστα προσφερόταν και αμοιβή σε όποιον θα κατάφερνε να το

λύσει, και ισχυρίσθηκε υπεροπτικά ότι κανένας γάλλος μαθηματικός δεν θα μπορούσε να το λύσει. Το πρόβλημα αφορούσε μια εξίσωση $45^{ου}$ βαθμού:

$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12.300x^{39} + ... + 95.634x^5 - 3.795x^3 + 45x = c$,

όπου c σταθερά.

Ο Ερρίκος κάλεσε τον Viete, ο οποίος βρήκε αμέσως μια λύση, και την επομένη επέστρεψε φέρνοντας μαζί του ακόμη είκοσι δύο λύσεις. Ο Florian Cajori στο A History of Mathematics περιγράφει το περιστατικό:

Ο Viete, που είχε ήδη ασχοληθεί με παρόμοια προβλήματα, κατάλαβε αμέσως ότι αυτό το τρομερό πρόβλημα ήταν απλώς η εξίσωση μέσω της οποίας το c=2sinφ εκφράζεται ως συνάρτηση του x =2sin(φ/45). Αφού 45 = 3·3·5, ήταν αρκετό μια γωνία να διαιρεθεί μία φορά σε πέντε ίσα μέρη και στη συνέχεια δύο φορές σε τρία ίσα μέρη —διαίρεση που μπορούσε να πραγματοποιηθεί με αντίστοιχες εξισώσεις πέμπτου και τρίτου βαθμού.(Cajori Florian, A History of Mathematics , σελ. 138).

Για να παρακολουθήσουμε το συλλογισμό του Viete, ας ασχοληθούμε πρώτα μ' ένα ευκολότερο πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$x^3 - 3x + 1 = 0$.

Την ξαναγράφουμε ως $1 = 3x - x^3$ και κάνουμε την αντικατάσταση

$x = 2y$:

Τότε $\frac{1}{2} = 3y - 4y^3$

Ένα έμπειρο μάτι θα αναγνωρίσει αμέσως την ομοιότητα ανάμεσα σε αυτή την εξίσωση και την ταυτότητα $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$. Στην πραγματικότητα, αν θέσουμε $\frac{1}{2} = \sin 3\varphi$ και $y = \sin\varphi$, οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται. Στη νέα του μορφή, το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του sinφ , με δεδομένο ότι $\sin 3\varphi = 1/2$. Όμως, αν $\sin 3\varphi = 1/2$, τότε $3\varphi = 30° + 360°\kappa$, όπου $\kappa = 0, \pm1, \pm2, ...$, και επομένως $\varphi = 10° + 120°\kappa$. Άρα, $y = \sin(10° + 120°\kappa)$, και τελικά $x = 2y = 2\sin(10° + 120°\kappa)$. Ωστόσο, αφού η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 360°, μπορούμε να περιορισθούμε μόνο στις τιμές κ = 0, 1, 2. Έτσι, έχουμε τρεις λύσεις:

$x_0 = 2\sin 10° = 0,347...$,

$x_1 = 2\sin 130° = 1,532...$,

$x_2 = 2\sin 250° = -1,879...$.

Με τη βοήθεια του υπολογιστή, μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι πράγματι αυτές είναι οι τρεις λύσεις: Έτσι, χρησιμοποιώντας μια τριγωνομετρική ταυτότητα, λύσαμε ένα καθαρά αλγεβρικό πρόβλημα.

Βέβαια, άλλο πράγμα είναι η λύση μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης και άλλο η λύση μιας εξίσωσης $45^{ου}$ βαθμού. Πώς εργάσθηκε, λοιπόν, ο Viete; Στο έργο του Responsum (Απόκρισις) (1595) δίνει το περίγραμμα της μεθόδου του, το οποίο παραθέτουμε εδώ διατυπωμένο με σύγχρονη ορολογία: Έστω

$c = 2\sin 45\theta$, $y = 2\sin 15\theta$, $z = 2\sin 5\theta$, $x = 2\sin\theta$.

Θέλουμε να βρούμε το $x = 2\sin\theta$, με δεδομένο ότι $c = 2\sin 45\theta$. Θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία σε τρία στάδια. Αρχίζουμε και πάλι από την ταυτότητα $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$. Πολλαπλασιάζοντας επί 2 και αντικαθιστώντας το φ με 15θ, έχουμε:

$c = 3y - y^3$. (1)

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το φ με 5θ και έχουμε:

$y = 3z - z^3$. (2)

Χρησιμοποιούμε τώρα την ταυτότητα

$\sin^5\varphi = \frac{5}{8}\sin\varphi - \frac{5}{16}\sin 3\varphi + \frac{1}{16}\sin 5\varphi$.

Αυτή η ταυτότητα προκύπτει από τον τύπο $\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$ αν αντικαταστήσουμε το $\sin^3\varphi$ με $(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)/4$ και λύσουμε ως προς $\sin^5\varphi$.

Πολλαπλασιάζοντας με το 32, αντικαθιστώντας το φ με θ και εκφράζοντας το $2\sin 3\theta$ ως συνάρτηση του $x = 2\sin\theta$, έχουμε:

$x^5 = 10x - 5(3x - x^3) + z$,

που μετά τις αναγωγές γίνεται:

$z = 5x - 5x^3 + x^5$. (3)

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την ισότητα (3) στη (2) και κατόπιν τη (2) στην (1) θα έχουμε, μετά από τις πράξεις, ακριβώς την εξίσωση του van Roomen!

Με τον τρόπο αυτό, ο Viete κατάφερε να αναγάγει το αρχικό πρόβλημα σε τρία πολύ πιο απλά. Γιατί όμως βρήκε μόνο 23 λύσεις, ενώ γνωρίζουμε ότι η αρχική εξίσωση επιδέχεται 45 λύσεις (και μάλιστα όλες πραγματικές, όπως προκύπτει από τη γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος: Να χωριστεί μια τυχαία γωνία σε 45 ίσα μέρη); Ο λόγος είναι ότι την εποχή του Viete εξακολουθούσαν ακόμη να θεωρούν το μήκος της χορδής και όχι το ημίτονο ως τη βασική τριγωνομετρική συνάρτηση. Και αφού το μήκος είναι μη αρνητικό, αναγκάσθηκε να απορρίψει όλες τις αρνητικές λύσεις ως στερούμενες νοήματος. Το πλήρες σύνολο λύσεων δίνεται από τον τύπο

$$x_k = 2\sin\left(\theta + \frac{360^0 k}{45^0}\right). \qquad \text{με } \kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots, 44.$$

Με την προϋπόθεση ότι 45θ < 180° ειδάλλως, το ίδιο το sin45θ θα ήταν αρνητικό, από τις πιο πάνω λύσεις μόνο οι πρώτες είκοσι τρεις είναι θετικές, διότι αντιστοιχούν σε γωνίες του πρώτου και του δεύτερου τεταρτημορίου.

Από τις πάμπολλες άλλες συνεισφορές του Viete στην επιστήμη, οπωσδήποτε θα πρέπει να αναφέρουμε:

• Την ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ και των συντελεστών της ($\chi_1 + \chi_2 = -\beta/\alpha$, $\chi_1 \chi_2 = \gamma/\alpha$) παρ' όλο που η τάση του να απορρίπτει τις αρνητικές ρίζες δεν του επέτρεψε να διατυπώσει αυτές τις σχέσεις ως γενικό κανόνα.

• Την επινόηση μιας αριθμητικής μεθόδου για την προσέγγιση των ριζών των αλγεβρικών εξισώσεων.

• Τέλος, την ανακάλυψη του γνωστού άπειρου γινομένου σε σχέση με το π

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Τα περισσότερα έργα του τυπώθηκαν αρχικά μόνο για ιδιωτική κυκλοφορία. Ο ολλανδός μαθηματικός Frans van Schooten (1615-1660) τα συγκέντρωσε, τα επιμελήθηκε και τα εξέδωσε το 1646, σαράντα και πλέον χρόνια μετά το θάνατο του Viete.

Στα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Viete ενεπλάκη σε μια σκληρή αντιπαράθεση με τον γερμανό μαθηματικό Christopher Clavius (1537-1612) σχετικά με την αναθεώρηση του ημερολογίου που είχε πραγγείλει το 1582 ο πάπας Γρηγόριος ο ΙΓ'. Οι αιχμηρές επιθέσεις του Viete εναντίον του Clavius, που ήταν ο βασικός σύμβουλος του πάπα πάνω σε αυτό το θέμα, του δημιούργησαν πολλούς εχθρούς και οδήγησαν τους αντιπάλους του στην απόρριψη της άλγεβρας του. Αξίζει ακόμη να σημειώσουμε ότι ο Viete αντιτάχθηκε σθεναρά στο Κοπερνίκειο σύστημα, προσπαθώντας από τη μεριά του να βελτιώσει το παλιό γεωκεντρικό σύστημα του Πτολεμαίου. Βλέπει κανείς εδώ τις εσωτερικές αντιφάσεις ενός ανθρώπου που υπήρξε ταυτόχρονα πρώτης τάξεως καινοτόμος και συνάμα ένας συντηρητικός ριζωμένος βαθιά στο παρελθόν. Ο Viete πέθανε στο Παρίσι στις 13 Δεκεμβρίου 1603, σε ηλικία 63 ετών. Με το έργο του, η άλγεβρα και η τριγωνομετρία άρχισαν να αποκτούν τη σημερινή μορφή τους. (βλ.[43])

Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΗΝΩΜΕΝΟ ΒΑΣΙΛΕΙΟ

Στην Αγγλία, τρεις άνθρωποι συνέβαλαν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της τριγωνομετρίας, στο πρώτο μισό του 17ου αιώνα. Ο John Napier (1550-1617) επινοώντας τους λογαρίθμους διευκόλυνε σε μεγάλο βαθμό τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ειδικότερα στην τριγωνομετρία. Ο William Oughtred (1574-1660) ήταν ο πρώτος που επιχείρησε μια συστηματική χρήση τριγωνομετρικών συμβόλων: Στο έργο του Trigonometrie, or The manner of Calculating the Sides and Angles of Triangles, by the Mathematical Canon, demonstrated (Τριγωνομετρία, ή περί της του υπολογισμού πλευρών και γωνιών τριγώνων, με χρήση του μαθηματικού κανόνα, αποδεδειγμένης μεθόδου) (Λονδίνο, 1657), χρησιμοποιεί τις συντομογραφίες s, t, se, s co, t co και se co για το ημίτονο, την εφαπτομένη, την τέμνουσα, το συνημίτονο («συμπλήρωμα ημίτονου»), τη συνεφαπτομένη και τη συντέμνουσα, αντίστοιχα. Σε αντίθεση με τον μακροσκελή τίτλο του, το ίδιο το έργο περιέχει, εκτός από τους πίνακες, μόλις 36 σελίδες κειμένου. Τέλος, ο John Wallis (1616-1703), με την εργασία του για τις άπειρες σειρές, υπήρξε ο άμεσος προάγγελος των ανακαλύψεων του Νεύτωνα στο ίδιο πεδίο. Περισσότερο από οποιονδήποτε άλλο στην εποχή του, ο Wallis συνειδητοποίησε ότι οι συνθετικές μέθοδοι στα μαθηματικά θα έπρεπε να παραχωρήσουν τη θέση τους στις αναλυτικές μεθόδους: υπήρξε ο πρώτος που χειρίσθηκε τις κωνικές τομές περισσότερο ως δευτεροβάθμιες εξισώσεις παρά ως γεωμετρικά αντικείμενα, όπως είχαν κάνει οι Έλληνες. (Ο Wallis υπήρξε επίσης ο πρώτος κορυφαίος μαθηματικός που συνέγραψε ιστορία των μαθηματικών καθώς επίσης και αυτός που εισήγαγε το σύμβολο ∞ για το άπειρο). Ο πιο ονομαστός τύπος του είναι το άπειρο γινόμενο

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

που μαζί με τον τύπο του Viete κατατάσσεται μεταξύ των ομορφότερων τύπων στα μαθηματικά. Ο Wallis κατέληξε σ' αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας την τολμηρή του διαίσθηση και μια σύνθετη μέθοδο παρεμβολής, που θα εξωθούσε την υπομονή του σύγχρονου αναγνώστη στα έσχατα όριά της.

Η ανάπτυξη της αναλυτικής τριγωνομετρίας στις αρχές του 17ου αιώνα οφείλεται και σε έναν ακόμη λόγο: στον διαρκώς ενισχυόμενο ρόλο των μαθηματικών κατά την περιγραφή του φυσικού κόσμου. Ενώ οι δημιουργοί της κλασικής τριγωνομετρίας ενδιαφέρονταν κυρίως να την εφαρμόσουν στον ουρανό (σ' αυτό οφείλεται και το αρχικό προβάδισμα της σφαιρικής τριγωνομετρίας έναντι της επίπεδης), η νέα εποχή είχε τα

πόδια της βαθιά ριζωμένα στον μηχανικό κόσμο της καθημερινής ζωής. Η ανακάλυψη του Γαλιλαίου ότι κάθε κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, και ότι η μελέτη αυτών των δύο συνιστωσών μπορεί να γίνει ανεξάρτητα, κατέστησε αυτόματα την τριγωνομετρία απαραίτητη για τη μελέτη της κίνησης. Η επιστήμη της βλητικής, κατά τον 17ο αιώνα θεωρούνταν επιστήμη, είχε ως κύριο αντικείμενο τον προσδιορισμό του βεληνεκούς ενός βλήματος που βάλλεται από κανόνι. Αν δεν υπολογίσουμε την αντίσταση του αέρα, αυτό το βεληνεκές δίνεται από τον τύπο

$$R = \frac{u_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

όπου u_0 η ταχύτητα του βλήματος τη στιγμή που εξέρχεται από το κανόνι, η ταχύτητα βολής, θ η γωνία βολής ως προς το έδαφος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας (περίπου 9,81 m/s^2). Από τον τύπο προκύπτει ότι, με δεδομένη αρχική ταχύτητα, το βεληνεκές εξαρτάται αποκλειστικά από τη γωνία θ: γίνεται μέγιστο όταν θ = 45° και φθίνει συμμετρικά εκατέρωθεν των 45°. Αυτά τα στοιχεία, φυσικά, ήταν γνωστά με εμπειρικό τρόπο προ πολλού, αλλά τέθηκαν σε νέα θεωρητική βάση την εποχή του Γαλιλαίου.(βλ.[43])

Ένας άλλος κλάδος της μηχανικής που μελετήθηκε επισταμένως κατά τον 17ο και 18ο αιώνα ήταν αυτός των ταλαντώσεων. Τα μεγάλα θαλασσινά ταξίδια εκείνης της εποχής απαιτούσαν όλο και πιο ακριβείς τεχνικές πλοήγησης, κι αυτές με τη σειρά τους εξαρτώνταν από την ύπαρξη ρολογιών μεγάλης ακριβείας. Τούτο οδήγησε τους επιστήμονες να μελετήσουν τις ταλαντώσεις διάφορων ειδών ελατηρίων και εκκρεμών. Μερικά από τα πιο τρανταχτά ονόματα της εποχής διεξήγαγαν τέτοιες έρευνες: μεταξύ άλλων, ο Christian Huygens (1629-1695) και ο Robert Hooke (1635-1703). Ο Huygens ανακάλυψε το κυκλοειδές εκκρεμές, του οποίου η περίοδος ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος, ενώ το έργο του Hooke σχετικά με το ελατήριο έθεσε τις βάσεις για το σύγχρονο ρολόι ελατηρίου. Από μια άλλη σκοπιά, οι ολοένα εξελισσόμενες σε τεχνογνωσία και επιτήδευση τεχνικές κατασκευής μουσικών οργάνων, από τα χάλκινα και ξύλινα πνευστά μέχρι τα διάφορα αρμόνια και κλειδοκύμβαλα, ώθησαν τους επιστήμονες να μελετήσουν τις παλμικές κινήσεις των μέσων που προκαλούν ήχους, όπως οι χορδές, οι μεμβράνες, οι καμπάνες και οι αεραγωγοί. Όλα αυτά ανέδειξαν το ρόλο της τριγωνομετρίας στην περιγραφή περιοδικών φαινομένων και είχαν ως αποτέλεσμα τη μεταστροφή του ενδιαφέροντος από τη «λογιστική» τριγωνομετρία δηλαδή τη σύνταξη πινάκων στις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δηλαδή την ουσία της αναλυτικής τριγωνομετρίας.

Στο έργο του Harmonia mensurarum (Η αρμονία της μέτρησης), που δημοσιεύθηκε το 1722, μετά το θάνατο του, ο άγγλος μαθηματικός Roger Cotes (1682-1716) διατύπωσε ένα θεώρημα ισοδύναμο (με σύγχρονο συμβολισμό) του τύπου:

$$\varphi i = \ln(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

όπου i η φανταστική μονάδα (η τετραγωνική ρίζα του -1) και ln ο φυσικός λογάριθμος (λογάριθμος με βάση e = 2,718...).

Αυτός ο τύπος είναι, προφανώς, ισοδύναμος με τον περίφημο τύπο του Leonard Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, που δημοσιεύθηκε το 1748 στο μνημειώδες έργο του Introductio in analysin infinitorum (Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση). Το 1722 επίσης, ο Abraham De Moivre (1667-1754) απέδειξε εμμέσως τον τύπο:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

βάσει του οποίου υπολογίζουμε τις n-οστές ρίζες όλων των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών. Παρ' όλα αυτά, απαιτήθηκε το κύρος του Euler και του Introductio για να ενσωματωθούν πλήρως οι μιγαδικοί αριθμοί στην τριγωνομετρία.Στα χέρια του, το αντικείμενο έγινε πλήρως αναλυτικό.

Αυτές οι εξελίξεις απομάκρυναν ακόμη περισσότερο την τριγωνομετρία από την αρχική της σχέση με το τρίγωνο. Ο πρώτος που όρισε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως καθαρούς αριθμούς, και όχι ως λόγους σε ένα τρίγωνο, ήταν ο γερμανός Abraham Gotthelf Kastner (1719-1800). Έγραφε γύρω στο 1759: «Αν το x συμβολίζει μια γωνία εκπεφρασμένη σε μοίρες, τότε τα sinx, cosx, tangx κ.λπ. παριστάνουν αριθμούς που αντιστοιχούν σε κάθε γωνία.» Φυσικά, σήμερα προχωρούμε ακόμη περισσότερο και θεωρούμε και την ανεξάρτητη μεταβλητή x ως αριθμό, και όχι αναγκαστικά ως γωνία. Από την πρώτη σχεδόν στιγμή της δημιουργίας του, ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός άρχισε να εφαρμόζεται σε διάφορα προβλήματα μηχανικής, αρχικά σε προβλήματα ασυνεχούς μηχανικής (κίνηση ενός σωματιδίου ή ενός πεπερασμένου συστήματος σωματιδίων) και αργότερα σε προβλήματα συνεχούς μηχανικής. Μεταξύ των τελευταίων, εξέχουσα θέση κατείχε κατά το δεύτερο μισό του 18ου αιώνα το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής. Το πρόβλημα είχε κινήσει από πολύ παλιά το ενδιαφέρον των μαθηματικών, λόγω της στενής σχέσης του με τη μουσική. Ήδη ο Πυθαγόρας, από τον 6ο αιώνα π.Χ., είχε ανακαλύψει κάποιους νόμους σχετικά με την ταλάντωση της χορδής. Αυτό τον οδήγησε στην κατασκευή της μουσικής κλίμακας με βάση τα μθηματικά. Ωστόσο, η πλήρης διερεύνηση του προβλήματος απαιτούσε εργαλεία που δεν ήταν διαθέσιμα ούτε καν στον Νεύτωνα και τον Leibniz, και πιο

συγκεκριμένα τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (εξισώσεις στις οποίες η ζητούμενη συνάρτηση και οι παράγωγοι της εξαρτώνται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές). Για την παλλόμενη χορδή, η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

όπου u = u(x, t) η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ενός σημείου που απέχει απόσταση x από το ένα άκρο της χορδής κατά τη χρονική στιγμή t, και c μια σταθερά που εξαρτάται από φυσικές παραμέτρους της χορδής (την τάση και τη γραμμική πυκνότητα της). Για την επίλυση αυτής της εξίσωσης, που έγινε γνωστή ως η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση, κινητοποιήθηκαν τα καλύτερα μαθηματικά μυαλά της εποχής μεταξύ άλλων, η οικογένεια Bernoulli, ο Euler, ο D' Alembert και ο Lagrange. Ο Euler και ο D' Alembert πρότειναν τη λύση τους χρησιμοποιώντας δύο αυθαίρετες συναρτήσεις που παρίσταναν δύο κύματα, το ένα κινούμενο κατά μήκος της χορδής προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά, με ταχύτητα ίση προς τη σταθερά c. Η λύση του Daniel Bernoulli, από την άλλη, χρησιμοποιούσε μια άπειρη σειρά τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αφού αυτοί οι δύο τύποι λύσεων για το ίδιο πρόβλημα έμοιαζαν τόσο διαφορετικοί μεταξύ τους, γεννήθηκε το ερώτημα αν θα μπορούσαν να συμβιβασθούν, και αν όχι, να βρεθεί ο γενικότερος. Αυτό το ερώτημα απαντήθηκε από τον γάλλο μαθηματικό *Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).* Στο σημαντικότατο έργο του *Theorie analytique de la chaleur* (Αναλυτική θεωρία της θερμότητας) (1822), ο Fourier έδειξε ότι όλες σχεδόν οι συναρτήσεις που είναι περιοδικές σε ένα δεδομένο διάστημα μπορούν να παρασταθούν ως τριγωνομετρικές σειρές με τη μορφή

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

όπου οι συντελεστές a_i και b_i μπορούν να υπολογισθούν από την f(x) με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων. Αυτές οι σειρές Fourier είναι υπό μια έννοια γενικότερες από το γνωστό ανάπτυγμα Taylor ως δυναμοσειρά. Για παράδειγμα, ενώ οι σειρές Taylor βρίσκουν εφαρμογή μόνο σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς παραγώγους, οι σειρές Fourier ορίζονται ακόμα και αν η f(x) είναι ασυνεχής. (βλ.[43],[62])

Το θεώρημα του Fourier θεωρείται ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανάλυσης του 19ου αιώνα. Δείχνει ότι το ημίτονο και το συνημίτονο παίζουν ουσιαστικό ρόλο στη μελέτη όλων των περιοδικών φαινομένων, απλών ή σύνθετων. Στην ουσία, αποτελούν τους δομικούς λίθους όλων των φαινομένων αυτού του τύπου, με τον ίδιο τρόπο που οι

πρώτοι αριθμοί είναι οι δομικοί λίθοι όλων των ακεραίων. Το θεώρημα του Fourier γενικεύθηκε αργότερα και στις μη περιοδικές συναρτήσεις, σ' αυτή την περίπτωση, η άπειρη σειρά γίνεται ολοκλήρωμα, καθώς και σε αναπτύγματα σε σειρές ως προς συναρτήσεις οι οποίες είναι μη τριγωνομετρικές. Τούτες οι εξελίξεις αποδείχθηκαν ζωτικής σημασίας σε πολυάριθμους κλάδους της επιστήμης, από την οπτική και την ακουστική μέχρι τη θεωρία της πληροφορίας και την κβαντική μηχανική. (βλ.[43])

Abraham de Moivre

Ο Abraham de Moivre γεννήθηκε στις 26 Μαίου 1667 στο Βιτρύ, στη γαλλική επαρχία της Καμπανίας, από προτεσταντική οικογένεια. Από νωρίς ενδιαφέρθηκε για τα μαθηματικά και τα μελέτησε, κρυφά, στα διάφορα θρησκευτικά σχολεία που φοίτησε. Το 1685, ο Λουδοβίκος ο ΙΔ' ανακάλεσε το έδικτο της Νάντης, ένα διάταγμα που είχε εκδοθεί το 1598 και παραχωρούσε στους γάλλους προτεστάντες θρησκευτικές ελευθερίες. Ακολούθησε μια περίοδος διωγμών. Σύμφωνα με κάποια μαρτυρία, ο De Moivre έμεινε στη φυλακή για δυο χρόνια πριν αναχωρήσει για το Λονδίνο, όπου πέρασε την υπόλοιπη ζωή του. Σπούδασε μόνος του μαθηματικά και απέκτησε βαθιές γνώσεις πάνω στο αντικείμενο. Από καθαρή τύχη, βρέθηκε στο σπίτι του κόμη του Ντέβονσαϊρ, όπου εργαζόταν ως διδάσκαλος των παιδιών, τη στιγμή ακριβώς που ο Ισαάκ Νεύτων πέρασε από εκεί έχοντας μαζί του ένα αντίτυπο των *Principia,* του μεγάλου έργου του πάνω στη θεωρία της βαρύτητας. Ο De Moivre πήρε το βιβλίο και το μελέτησε προσεκτικά. Το βρήκε πολύ πιο δύσκολο απ' ότι περίμενε (πρόκειται για ένα κείμενο που δυσκολεύει ακόμα και τον σύγχρονο αναγνώστη). Με συστηματική όμως μελέτη, έκοβε σελίδες από τον τεράστιο τόμο για να μπορεί να τις μελετά μεταξύ των ιδιαίτερων μαθημάτων που παρέδιδε, όχι μόνο κατανόησε το κείμενο αλλά έγινε και ειδικός πάνω σ' αυτό, τόσο μάλιστα που ο Νεύτων, μερικά χρόνια αργότερα, παρέπεμπε στον De Moivre τις ερωτήσεις που του έθεταν. «Πηγαίνετε στον κύριο De Moivre», συνήθιζε να λέει. «Γνωρίζει αυτά τα θέματα καλύτερα από εμένα».Το 1692 συνάντησε τον Edmond Halley, διάσημο από τον φερώνυμο κομήτη, ο οποίος εντυπωσιάσθηκε τόσο πολύ από τις μαθηματικές του ικανότητες ώστε ανέλαβε να παρουσιάσει στη Βασιλική Εταιρεία το πρώτο άρθρο του De Moivre σχετικά με τη «μέθοδο των ροών» *του* Νεύτωνα δηλαδή τον διαφορικό λογισμό. Μέσω του Halley, ο De Moivre έγινε δεκτός στον κύκλο των φίλων του Νεύτωνα που συμπεριλάμβανε τον John Wallis καθώς και τον Roger Cotes. Το 1697

εκλέχθηκε μέλος της Βασιλικής Εταιρείας και το 1712 διορίσθηκε μέλος μιας επιτροπής που είχε συσταθεί από την Εταιρεία για να διευθετήσει την έντονη διαμάχη μεταξύ Νεύτωνα και Leibniz ως προς την πατρότητα του διαφορικού λογισμού. Εξελέγη ακόμη μέλος των Ακαδημιών των Παρισίων και του Βερολίνου.

Ο De Moivre στο έργο του *Miscellanea Analytica* (Διάφορα θέματα αναλύσεως) (Λονδίνο, 1730), ασχολείται, εκτός από τις πιθανότητες, με την άλγεβρα και την αναλυτική τριγωνομετρία. Ένα από τα κύρια προβλήματα εκείνης της εποχής ήταν και η ανάλυση πολυωνύμων της μορφής $x^{2n}+px^n+1$ ως γινόμενο δευτεροβάθμιων παραγόντων. Το πρόβλημα ανέκυψε σε σχέση με το έργο του Cotes για την ανάλυση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων σε απλά κλάσματα (τα οποία τότε ήταν γνωστά με το όνομα «αναδρομικές σειρές»). Ο De Moivre ολοκλήρωσε το έργο που άφησε ημιτελές ο Cotes λόγω του πρόωρου θανάτου του (βλ.[46]) . Ανάμεσα στα άλλα συμπεράσματα του, βρίσκουμε και τον ακόλουθο τύπο —γνωστό ως «η ιδιότητα Cotes του κύκλου»:

$$x^{2n}+1=\left[x^2-2x\cos\frac{\pi}{2n}+1\right]\left[x^2-2x\cos\frac{3\pi}{2n}+1\right]\ldots$$

$$\ldots\left[x^2-2x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+1\right].$$

Για να αποδείξουμε αυτή την ισότητα, αρκεί να βρούμε —χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Moivre— τις *2n* διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $x^{2n} + 1 = 0$, δηλαδή τις *2n* μιγαδικές ρίζες τάξεως *2n* του -1, $\sqrt[2n]{-1}$,και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσουμε ανά δύο τους γραμμικούς παράγοντες που αντιστοιχούν στις συζυγείς ρίζες. Το γεγονός ότι σε μια καθαρά αλγεβρική εξίσωση, όπως η $x^{2n} + 1 = 0$, υπεισέρχονται τριγωνομετρικοί αριθμοί προκαλεί συχνά έκπληξη στο σπουδαστή που αντιμετωπίζει αυτό τον τύπο για πρώτη φορά. Την εποχή του De Moivre προκαλούσε έκπληξη ακόμη και στους επαγγελματίες μαθηματικούς.

Το περίφημο θεώρημα του De Moivre,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi,$$

διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον ίδιο το 1722, αλλά πουθενά στο έργο του δεν αναφέρεται ευθέως. Ωστόσο, οπωσδήποτε το γνώριζε, αφού ήδη από το 1707 είχε δημοσιεύσει τον τύπο

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{1/n}+\frac{1}{2}\ (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{1/n}$$

ο οποίος σχετίζεται άμεσα με το θεώρημα. Ο De Moivre απέδειξε αυτό τον τύπο για θετικές ακέραιες τιμές τού *n*. Ο Euler, το 1749, τον απέδειξε για κάθε πραγματική τιμή τού *n*. Τον χρησιμοποίησε σε αρκετά σημεία τού *Miscellanea Analytica* και σε πολυάριθμες εργασίες που δημοσίευσε στο επίσημο περιοδικό της Βασιλικής Εταιρείας, το *Philosophical Transactions.* Επί παραδείγματι, σε ένα άρθρο δημοσιευμένο το 1739, έδειξε τον τρόπο υπολογισμού των ριζών οποιουδήποτε διωνύμου της μορφής $\alpha+\sqrt{b}$ ή $\alpha-\sqrt{b}$ (το δεύτερο το αποκαλούσε «αδύνατο διώνυμο»). Ειδικότερα, δείχνει τον τρόπο προσδιορισμού των τριών κυβικών ριζών τού $81+\sqrt{-2700}$ (σε σύγχρονη ορολογία, $81+30\sqrt{3}\,i$). Η επεξεργασία είναι περισσότερο λεκτική παρά συμβολική, ακολουθείται όμως η ίδια ακριβώς μέθοδος που βρίσκουμε σήμερα σε οποιοδήποτε βιβλίο τριγωνομετρίας: Γράφουμε το $81+30\sqrt{3}\,i$ σε τριγωνομετρική μορφή ως

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου

$$r=\sqrt{81^2+(30\sqrt{3})^2}=\sqrt{9261}=21\sqrt{21}$$ και

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{30\sqrt{3}}{81}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right)=32,68^o.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράσταση

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta+360^o\kappa}{3}+i\cdot\sin\frac{\theta+360^o\kappa}{3}\right)$$

για $\kappa = 0, 1, 2$. Έχουμε:

$$\sqrt[3]{21\sqrt{21}}=\left(21^{3/2}\right)^{1/3}=21^{1/2}=\sqrt{21}.$$

και $\theta/3 \simeq 10{,}89°$. Επομένως, οι ρίζες είναι

$\sqrt{21}\ [\cos(10{,}89°+120°k)+\sin(10{,}89°+120°k)]$.

Από τους πίνακες, ή με τη βοήθεια του υπολογιστή, βρίσκουμε τις τιμές των ημιτόνων και συνημιτόνων, και έχουμε τις τρείς ρίζες:

$$\frac{9+\left(\sqrt{3}\right)i}{2},\quad -3+\left(2\sqrt{3}\right)i \quad \text{και} \quad \frac{-3-\left(5\sqrt{3}\right)i}{2}.$$

Σίγουρα ο De Moivre θα αναρωτήθηκε γιατί οι τρεις ρίζες τυχαίνει να είναι «στρογγυλοί» άρρητοι μιγαδικοί αριθμοί παρ' όλο που η γωνία θ δεν είναι κάποια «ειδική» γωνία όπως οι 15°, 30°, 45°. Λέει ότι είναι «μύθευμα» (δηλαδή αδύνατο) να υπολογισθούν οι κυβικές ρίζες μιγαδικών αριθμών χωρίς τη χρήση του πίνακα των ημίτονων. Και προς αποφυγήν πάσης παρεξηγήσεως, επαναλαμβάνει τη θέση του προς το τέλος: «Το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί απευθείας, χωρίς χρήση του πίνακα των ημίτονων, ιδίως όταν οι ρίζες είναι άρρητες.» Και φυσικά, στη γενική περίπτωση έχει δίκιο: Για να υπολογίσουμε τις τρεις κυβικές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$, πρέπει να τον γράψουμε πρώτα σε τριγωνομετρική μορφή, δηλαδή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. Μετά υπολογίζουμε την πραγματική κυβική ρίζα τού r και το θ/3, και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον πίνακα των ημίτονων βρίσκουμε το συνημίτονο και το ημίτονο του θ/3. Τέλος, υπολογίζουμε το $\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta + 360^o\kappa}{3} + i\cdot\sin\frac{\theta + 360^o\kappa}{3}\right)$ για $\kappa = 0, 1, 2$.

Από ειρωνεία της τύχης, το συγκεκριμένο παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο De Moivre για να εξηγήσει τη μέθοδο του θα μπορούσε να λυθεί χωρίς τη βοήθεια των πινάκων! Ας δούμε πώς: Ζητάμε τις τρεις κυβικές ρίζες του $\mathbf{z}=x+iy=81+30\sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου $r = 21\sqrt{21}$ και $\tan\theta = \frac{10\sqrt{3}}{27}$. Από την τελευταία ισότητα (ή και υπολογίζοντας απευθείας το x/r), προκύπτει ότι $\cos\theta = \frac{81}{21\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{49}$.

Χρησιμοποιώντας τώρα την ταυτότητα $\cos\theta=4\cos^3(\theta/3)-3\cos(\theta/3)$, βρίσκουμε την τιμή τού $\cos(\theta/3)$. Θέτουμε $u=\cos(\theta/3)$ και έχουμε:

$\frac{9\sqrt{21}}{49}=4u^3-3u,$ (1) ή

$196u^3-147u-9\sqrt{21}=0$ (2)

Με την αντικατάσταση $v=u/9\sqrt{21}$, η εξίσωση γίνεται:

$333.396v^3-147v-1=0$ (3)

Αυτή η τελευταία εξίσωση δεν περιέχει μεν ριζικά, αλλά το μέγεθος του συντελεστή v^3 είναι αποθαρρυντικό. Ωστόσο, το 147 διαιρείται διά 21, ενώ το 333.396 διά 213. Θέτουμε λοιπόν w = 21v, και έχουμε:

$36w^3 - 7w - 1 = 0,$ (4)

δηλαδή μια πολύ απλή εξίσωση, με ρίζες 1/2, -1/3 και -1/6, οι οποίες είναι όλες ρητοί αριθμοί! Αντικαθιστώντας στις προηγούμενες εξισώσεις, έχουμε διαδοχικά v = w/21 = 1/42 ή -1/63 ή -1/126, και τελικά

$u=\cos(\theta/3)=9\sqrt{21}v=\frac{3\sqrt{21}}{14}$ ή $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ ή $-\frac{\sqrt{21}}{14}$. Για καθεμιά από τις παραπάνω τιμές, υπολογίζουμε αντίστοιχα το sin(θ/3)

χρησιμοποιώντας την

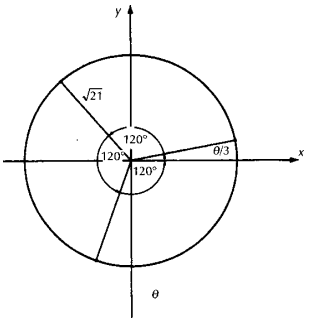
ταυτότητα $\sin(\theta/3) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\theta/3)}$.

Άρα, $\sin(\theta/3) = \frac{\sqrt{7}}{14}$ ή $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ή $-\frac{5\sqrt{7}}{14}$ (η τελευταία τιμή είναι αρνητική, διότι το αντίστοιχο σημείο ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου). Ακόμη έχουμε: $\sqrt[3]{r} = \left(21\sqrt{21}\right)^{1/3} = \sqrt{21}$. Συνεπώς, οι τρεις ρίζες είναι:

$\sqrt{21}\left[\frac{3\sqrt{21}}{14}+\frac{\sqrt{7}}{14}i\right]=\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{3}\ i\right)$, όπως παριστάνονται στο παρακάτω σχήμα:

$\sqrt{21}\left[-\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{2\sqrt{7}}{7}i\right]=\left(-3+\sqrt{3}\ i\right),$

$\sqrt{21}\left[-\frac{\sqrt{21}}{14}-\frac{5\sqrt{7}}{14}i\right]=\frac{1}{2}\left(-3-5\sqrt{3}\ i\right).$ **Σχήμα:Οι τρείς κυβικές ρίζες του 81 +$\sqrt{-2700}$**



Βέβαια, ο «φυσικός» τρόπος επίλυσης θα ήταν να λύσουμε κατευθείαν την (1), χρησιμοποιώντας έναν τύπο που φέρει μεν το όνομα του Ιταλού Girolamo Cardano (γνωστού και ως Jerome Cardan, 1501-1576) αλλά δημιουργήθηκε ανεξάρτητα από δύο άλλους Ιταλούς, τον Scipione del Ferro (1465-1526 περίπου) και τον Nicolo Tartaglia (περίπου 1506-1557).[βλ.(13),(27),(13) και (46)]. Ο «τύπος του Cardano» είναι ανάλογος του γνωστού μας τύπου για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης αλλά πολύ πιο περίπλοκος. Στηρίζεται στο γεγονός ότι μια τριτοβάθμια εξίσωση στην κανονική της μορφή, $y^3 + \alpha y^2 + by + c = 0$ (με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1), μπορεί να μετασχηματισθεί στην ανηγμένη μορφή $\chi^3 + p\chi + q = 0$ (χωρίς δευτεροβάθμιο όρο) μέσω της αντικατάστασης $y= \chi-\alpha/3$, όπου $p = b - \alpha^2/3$ και $q = 2\alpha^3/21 - \alpha b/3 + c$. Αφού η εξίσωση (1) δεν περιέχει δευτεροβάθμιο όρο, αρκεί να τη διαιρέσουμε με το συντελεστή τού χ^3 για να καταλήξουμε στη $\chi^3 + p\chi + q =0$, όπου $p =-\frac{3}{4}$ και $q =-\frac{9\sqrt{21}}{196}$. Σύμφωνα με τον τύπο του Cardano, πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα

$$P=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad \text{και} \qquad Q=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των p και q και απλοποιώντας, έχουμε:

$$P,Q=\frac{1}{14}\sqrt[3]{-63\sqrt{21}\pm 70\sqrt{7}i}.$$

Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε τις κυβικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών $-63\sqrt{21} \pm (70\sqrt{7})i$ αφού πρώτα τους γράψουμε στην τριγωνομετρική μορφή $R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$R=\sqrt{\left(-63\sqrt{21}\right)^2 + (70\sqrt{7})^2}=343$$

και

$$\varphi = \pm\tan^{-1}\frac{70\sqrt{7}}{63\sqrt{21}} = \pm\tan^{-1}\frac{10\sqrt{3}}{27},$$

πρόκειται δηλαδή για την ίδια γωνία που είχαμε βρει από την αρχή! Αυτό ακριβώς εννοεί ο De Moivre με την αινιγματική φράση του «με όποιον τρόπο και αν προσεγγίσουμε το πρόβλημα, επιστρέφουμε συνεχώς πίσω στην αρχική ερώτηση». (βλ.[43],[38])

ΧΑΡΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΓΗΣ .

Ο περίπλους της Γης (1519-1522) από τον Φερδινάνδο Μαγγελάνο μάς έδωσε την πρώτη άμεση απόδειξη ότι η Γη έχει περίπου σφαιρικό σχήμα. Αμέσως μετά, όμως, οι επιστήμονες άρχισαν να υποπτεύονται ότι ίσως είναι πεπλατυσμένη. Συγκεκριμένα, τέθηκε το ερώτημα αν είναι πεπλατυσμένη στους πόλους (πεπλατυσμένο σφαιροειδές) ή στον ισημερινό (επίμηκες σφαιροειδές). Το πρόβλημα δεν ήταν απλώς ακαδημαϊκό: Η εποχή των μεγάλων εξερευνήσεων είχε αρχίσει για τα καλά, και είχε μεγάλη σημασία για τους ναυτικούς να μπορούν να προσδιορίζουν τη θέση τους στη θάλασσα —το γεωγραφικό τους μήκος και πλάτος—, με αρκετή μάλιστα ακρίβεια. Αυτό, με τη σειρά του, σήμαινε ότι έπρεπε να γνωρίζουν το μήκος τόξου 1° κατά μήκος ενός μεσημβρινού ,τη «μεσημβρινή μοίρα». Αν η Γη ήταν τέλεια σφαίρα, η μοίρα θα είχε παντού το ίδιο μήκος, ανεξάρτητα από το γεωγραφικό πλάτος. Αν όμως ήταν πεπλατυσμένη στους πόλους, το μήκος της μοίρας θα ήταν ελαφρώς μεγαλύτερο κοντά σ' αυτούς, ενώ αν ήταν πεπλατυσμένη στον ισημερινό, τότε αυτό θα ήταν μικρότερο στους πόλους. Ο προσδιορισμός του ακριβούς σχήματος της Γης —αλλά και γενικότερα οποιασδήποτε καμπύλης επιφάνειας— εξελίχθηκε στην επιστήμη της γεωδαισίας. Μερικοί από τους σημαντικότερους επιστήμονες του 18ου και 19ου αιώνα ασχολήθηκαν με το πρόβλημα, ανάμεσα τους ο Νεύτων, ο Euler και ο Gauss.

Το πρώτο βήμα σε μια γεωδαιτική τοπογράφηση είναι η επιλογή μιας γραμμής βάσης γνωστού μήκους, και στη συνέχεια η μέτρηση των γωνιών μεταξύ αυτής της γραμμής και των οπτικών ευθειών που συνδέουν τα άκρα της με ένα απομακρυσμένο ορόσημο. Για σχετικά μικρές περιοχές —μια πόλη ή μια επαρχία—, μπορούμε να αγνοήσουμε την καμπυλότητα της Γης και να θεωρήσουμε την περιοχή ως επίπεδη. Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις των δύο άκρων της γραμμής βάσης από το ορόσημο χρησιμοποιώντας το νόμο των ημίτονων (πρόκειται για την περίπτωση όπου δίνεται μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες). Αυτές οι αποστάσεις μπορούν, με τη σειρά τους, να χρησιμοποιηθούν ως νέες γραμμές βάσης και να επαναληφθεί η διαδικασία, έως ότου ολόκληρη η περιοχή καλυφθεί από ένα πλέγμα τριγώνων. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως γεωδαιτικός τριγωνισμός, και το αντίστοιχο πλέγμα τριγώνων καλείται τριγωνομετρικό δίκτυο. Μας παρέχει ένα σκελετό επί του οποίου θα συμπληρώσουμε στη συνέχεια τις τοπογραφικές λεπτομέρειες του εδάφους —λόφους, ποτάμια, λίμνες, πόλεις, δρόμους—, ώστε να δημιουργήσουμε έναν ολοκληρωμένο χάρτη. Η μέθοδος του γεωδαιτικού τριγωνισμού προτάθηκε για πρώτη φορά το 1533 από

τον ολλανδό μαθηματικό Gemma Frisius (1508-1555). Εφαρμόσθηκε σε ευρεία κλίμακα από έναν άλλο Ολλανδό, τον Willebrord van Roijen Snell (1581-1626), ο οποίος το 1615 μέτρησε μια λωρίδα γης 130 χιλιομέτρων, χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα 33 τριγώνων. Ωστόσο, η πρώτη συστηματική και κρατικά επιχορηγούμενη προσπάθεια γεωδαιτικού τριγωνισμού άρχισε το 1668, υπό την επίβλεψη του αββά Jean Picard (1620-1682), ενός από τους ιδρυτές του Αστεροσκοπείου των Παρισίων. Ως γραμμή βάσης επέλεξε μια λωρίδα 11 χιλιομέτρων κατά μήκος του δρόμου που συνέδεε το Παρίσι με το Φοντενεμπλό. Ξεκινώντας με αυτή τη γραμμή βάσης, σχεδίαζε να χαράξει το τοπογραφικό διάγραμμα ολόκληρης της Γαλλίας. Για να βελτιώσει την ακρίβεια των παρατηρήσεων του, ο Picard χρησιμοποίησε έναν νέο τύπο τετραγωνιομέτρου (όργανο για τη μέτρηση υψομετρικών γωνιών), στο οποίο ένα τηλεσκόπιο με στόχαστρο αντικαθιστούσε τις απλές τρύπες για τη σκόπευση. Συνδυάζοντας τις γήινες μετρήσεις με τον αστρονομικό προσδιορισμό του γεωγραφικού πλάτους στα άκρα της γραμμής βάσης του, ο Picard κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, στο γεωγραφικό πλάτος του Παρισιού, η μοίρα είχε μήκος 110.480 μέτρα. Στη συνέχεια επεξέτεινε τις μετρήσεις του στη γαλλική ακτογραμμή, όπου τον περίμενε μια δυσάρεστη έκπληξη: Με βάση τις μετρήσεις του, η ανατολική ακτή της χώρας έπρεπε να μετακινηθεί ως προς το μεσημβρινό του Παρισιού κατά 1,5° ανατολικά. Αυτό οδήγησε το βασιλιά Λουδοβίκο τον ΙΔ' να αναφωνήσει: «Το ταξίδι σας μου στοίχισε ένα σημαντικό μέρος του βασιλείου μου!»(βλ.[8])

Το τετραγωνιόμετρο, ή τετράς ή σκιοτετράγωνο, λατινικά quadrant, είναι αστρονομικό όργανο που αποτελείται από ξύλινο ή μεταλλικό τετράγωνο πλαίσιο, στη μία κορυφή του οποίου υπάρχει κινητός κανόνας ίσος με τη διαγώνιο του τετραγώνου, ενώ από ένα σημείο του κρέμεται ένα νήμα της στάθμης. Στο ίδιο το πλαίσιο είναι χαραγμένες αριθμητικές υποδιαιρέσεις για την ανάγνωση των αποτελεσμάτων των μετρήσεων. Το τετραγωνιόμετρο επινοήθηκε το 1450 από τον Peuerbach και αποτελεί εξέλιξη του «τεταρτοκυκλίου» και του «τριγώνου» του Πτολεμαίου. Εξέλιξη του τεταρτοκυκλίου είναι η «μετροτράπεζα», η οποία αποτελείται από διαβαθμισμένο ορθογώνιο το οποίο στηρίζεται οριζόντια σε τρίποδα.

Μετά το θάνατο του Picard, οι μετρήσεις συνεχίσθηκαν για έναν ακόμη αιώνα από τέσσερεις γενιές μιας φημισμένης οικογένειας αστρονόμων, τους Cassini. Ο Giovanni Dominico Cassini (1625-1712) γεννήθηκε στην Ιταλία και δίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια. Το 1688, ύστερα από συστηματικές προσπάθειες του Picard, εγκατέλειψε τη θέση του και ανέλαβε τη διεύθυνση του νεοϊδρυθέντος Αστεροσκοπείου των Παρισίων, αλλάζοντας συγχρόνως το όνομα του σε Jean Dominique. Συνέβαλε σημαντικά στην

αστρονομία: Προσδιόρισε την περίοδο περιστροφής του Άρη και του Δία, εκπόνησε την πρώτη μελέτη περί ζωδιακού φωτός δηλαδή μιας αχνής λάμψης που παρουσιάζεται στο ανατολικό τμήμα του ουρανού λίγο πριν την ανατολή, και στο δυτικό του τμήμα μετά τη δύση, ανακάλυψε τέσσερεις δορυφόρους του Κρόνου και ένα σκοτεινό χάσμα ανάμεσα στους δακτυλίους του (γνωστό ως διαίρεση του Cassini). Τον Μάρτιο του 1672 μέτρησε την παράλλαξη του Άρη, και έτσι μπόρεσε να υπολογίσει χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kepler για την κίνηση των πλανητών την απόσταση της Γης από τον Ήλιο. Το αποτέλεσμα του, 140 εκατομμύρια χιλιόμετρα, είναι το πρώτο που πλησιάζει την πραγματική τιμή των 148 εκατομμυρίων χιλιομέτρων. Κατά παράξενο τρόπο, υπήρξε ένας από τους τελευταίους επαγγελματίες αστρονόμους που αντιτάχθηκαν στην ηλιοκεντρική θεωρία του Κοπέρνικου και επέμενε ότι η Γη ήταν πεπλατυσμένη στον ισημερινό, παρά τα συνεχώς αυξανόμενα στοιχεία περί του αντιθέτου. (βλ.[43],[38])

Προς το τέλος της ζωής του, ο Cassini ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για τη γεωδαισία και τη χαρτογραφία, όπου αξιοποίησε στο έπακρο την αστρονομική του κατάρτιση. Το 1679 συνέταξε έναν νέο χάρτη του κόσμου, το planisphdre terrestre, χρησιμοποιώντας μια προβολή στην οποία όλες οι διευθύνσεις και οι αποστάσεις από τον Βόρειο Πόλο εμφανίζονται σωστά. Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή . Ο τεράστιος χάρτης του Cassini, που είχε διάμετρο 7 μέτρα, σχεδιάσθηκε στον τρίτο όροφο του Αστεροσκοπείου των Παρισίων. Χρησίμευσε ως πρότυπο για τους μελλοντικούς χαρτογράφους, ενώ αναπαράχθηκε και εκδόθηκε το 1696. Ο Cassini όμως δεν επαναπαύθηκε στις δάφνες του. Στα 70 του ανέλαβε με ανανεωμένη ενεργητικότητα να συνεχίσει την τοπογράφηση της Γαλλίας, με τη βοήθεια του γιου του Jacques (1677-1756). Στόχος τους ήταν να επεκτείνουν την τοπογράφηση νότια προς τα Πυρηναία, και ενδεχομένως σε ολόκληρη την Ευρώπη, με ένα δίκτυο τριγώνων. Ως συμπληρωματικό αποτέλεσμα, ήλπιζαν να ανακαλύψουν πού τελικά η Γη είναι πεπλατυσμένη, στους πόλους ή στον ισημερινό. Ο πατέρας Cassini πέθανε το 1712 σε ηλικία 87 ετών. Ο γιος του, συνειδητοποιώντας ότι το πρόβλημα μπορούσε να λυθεί μόνο με τη σύγκριση του μήκους της μοίρας σε δύο πολύ απομακρυσμένα γεωγραφικά πλάτη, πρότεινε να οργανωθούν αποστολές στον ισημερινό και στην αρκτική περιοχή, έτσι ώστε να δοθεί μια οριστική απάντηση. Δεν ήταν μόνο το θεωρητικό ενδιαφέρον για το σχήμα της Γης που προκάλεσε όλη αυτή την κινητικότητα. Το ίδιο το κύρος της Γαλλίας άρχισε να αμφισβητείται. Ο Νεύτων είχε γνωματεύσει ότι η Γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους, στηρίζοντας την άποψη του στην αλληλεπίδραση μεταξύ της βαρυτικής έλξης που η Γη ασκεί στον εαυτό της και τις φυγόκεντρες δυνάμεις που

οφείλονται στην περιστροφή γύρω από τον άξονα της. Αλλά στη Γαλλία οι ιδέες του Νεύτωνα σχετικά με τη βαρύτητα και ειδικότερα η έννοια της «δράσης εξ αποστάσεως» δεν ήταν ιδιαίτερα αποδεκτές. Οι Γάλλοι προτιμούσαν τη θεωρία των στροβιλισμών του Καρτέσιου, σύμφωνα με την οποία η βαρυτική έλξη οφείλεται σε τεράστιες δίνες που αναπτύσσονται σε ένα ρευστό το οποίο γεμίζει πλήρως το χώρο. «Το σχήμα της Γης είχε γίνει μια cause celebre, θρυλική αντιπαράθεση, το πιο πολυσυζητημένο επιστημονικό πρόβλημα της επικαιρότητας, με τη γαλλική και την αγγλική εθνική υπερηφάνεια να είναι το πραγματικό αντικείμενο της αμφισβήτησης». (βλ.[46],[29])

Τα αποδεικτικά στοιχεία, έστω και εμμέσως, έτειναν να δικαιώσουν τον Νεύτωνα. Αφενός ο πλανήτης Δίας, όπως φαινόταν ακόμη και από ένα μικρό τηλεσκόπιο, έδειχνε έντονα πεπλατυσμένος στους πόλους. Αφετέρου εδώ, στη Γη, οι μετρήσεις της επιτάχυνσης της βαρύτητας όπως προέκυπταν από την περίοδο της ταλάντωσης ενός εκκρεμούς, έδιναν ελαφρώς μικρότερη τιμή στον ισημερινό απ' ότι στους πόλους. Αυτό συνιστούσε σοβαρή ένδειξη ότι ο ισημερινός απέχει από το κέντρο της Γης λίγο περισσότερο από όσο οι πόλοι. Ακολουθώντας την υπόδειξη του Jacques Cassini και με την ευλογία του νέου μονάρχη Λουδοβίκου του ΙΕ', η Βασιλική Ακαδημία Επιστημών το γαλλικό αντίστοιχο της αγγλικής Βασιλικής Εταιρείας, ενέκρινε το 1734 δύο αποστολές: μία για τη Λαπωνία, στα σύνορα Σουηδίας-Φιλανδίας, και μία για το Περού, κοντά στον ισημερινό, με σκοπό να πραγματοποιήσουν έναν πλήρη γεωδαιτικό τριγωνισμό των αντίστοιχων περιοχών και να προσδιορίσουν το μήκος της μοίρας στην κάθε τοποθεσία.

Η πρώτη αποστολή είχε επικεφαλής τον Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), ο οποίος άρχισε την καριέρα του στον γαλλικό στρατό και αργότερα έγινε μαθηματικός και φυσικός (διατύπωσε πρώτος την αρχή της ελάχιστης ενέργειας, την οποία χρησιμοποίησε αργότερα για να «αποδείξει» την ύπαρξη του Θεού). Ήταν ένας μοναχικός υποστηρικτής και θαυμαστής του Νεύτωνα στην ηπειρωτική Ευρώπη ο οποίος έδειξε ιδιαίτερη προθυμία να λάβει μέρος σε μια προσπάθεια που ήλπιζε ότι θα αποδείκνυε πως ο μέντορας του είχε δίκιο. Μαζί του πήγε και άλλος ένας γάλλος μαθηματικός, ο Alexis Claude Clairaut (1713-1765), ένα «παιδί-θαύμα» που είχε μελετήσει διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό σε ηλικία 10 χρονών και στα 18 του δημοσίευσε το πρώτο του βιβλίο. Η διαφορική εξίσωση $xy' - y = f(y')$, όπου f μια γνωστή συνάρτηση της παραγώγου y', φέρει το όνομα του. Επικεφαλής της αποστολής στο Περού τέθηκε ένας γεωγράφος, ο Charles Marie de la Condamine (1701-1774), ενώ σε αυτή συμπεριελήφθη και άλλος ένας μαθηματικός, ο Pierre Bouger (1698-1758). Η

συμμετοχή τόσων κορυφαίων μαθηματικών σε εξερευνητικές αποστολές σε μακρινές χώρες ήταν εναρμονισμένη με μια μακρόχρονη παράδοση που ήθελε τη Γαλλία να γεννά διαπρεπείς επιστήμονες οι οποίοι υπηρετούσαν την πατρίδα τους ταυτόχρονα σε στρατιωτικές και πολιτικές αποστολές.(βλ.[43],[38]).

Οι δύο αποστολές συνάντησαν πολλές δυσκολίες. Η ομάδα της Λαπωνίας αντιμετώπισε εκτυφλωτικές χιονοθύελλες και χρειάσθηκε να προχωρήσει διασχίζοντας παγωμένα έλη που μετατράπηκαν σε λάσπη όταν ήρθε η άνοιξη. Κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, ο χειρότερος εχθρός ήταν τα τσιμπήματα των κουνουπιών. Η ομάδα του Περού αντιμετώπισε ακόμα μεγαλύτερα εμπόδια. Εκτός από τη δυσκολία προσαρμογής στα μεγάλα υψόμετρα των Άνδεων, μια σειρά από επιδημίες και ατυχήματα προκάλεσαν το θάνατο αρκετών μελών της. Και σαν να μην έφθαναν όλα αυτά, η ομάδα διχάσθηκε από μια έντονη αντιπαράθεση μεταξύ των επικεφαλής της αποστολής, που είχε ως αποτέλεσμα να επιστρέψουν στην πατρίδα χωριστά. Παρ' όλα αυτά, οι δύο αποστολές ολοκλήρωσαν το έργο τους: Το μήκος τόξου 1° υπολογίσθηκε σε 111,11 χιλιόμετρα στη Λαπωνία και σε 109,95 στο Περού . Σε συνδυασμό με τα 110,48 χιλιόμετρα που είχε μετρήσει ο Picard στο Παρίσι, αυτά τα αποτελέσματα αποδείκνυαν πέρα από κάθε αμφισβήτηση ότι η Γη ήταν ένα σφαιροειδές πεπλατυσμένο στους πόλους. Για άλλη μία φορά, ο Νεύτων είχε δίκιο.

Και τότε μπήκαν στο προσκήνιο οι Cassini. Ενώ οι δύο αποστολές συνέχιζαν το έργο τους στο εξωτερικό, ο Jacques Cassini μαζί με το γιο του Cesar Francois (1714-1784) ολοκλήρωναν τον γεωδαιτικό τριγωνισμό της Γαλλίας, χρησιμοποιώντας ένα δίκτυο από 18 γραμμές βάσης και 400 τρίγωνα. Απέμενε τώρα να μετατραπεί το πλέγμα σε πραγματικό χάρτη. Αυτό το έργο ανέλαβε να το ολοκληρώσει ο Jean Dominique Cassini ο Δ' (1748-1845), δισέγγονος του ιδρυτή της δυναστείας. Ο τεράστιος χάρτης του, διαστάσεων 11x11 μέτρα, τυπώθηκε σε 182 φύλλα χαρτιού και σε κλίμακα 1 - 86.400. Περιείχε, εκτός από τοπογραφικά χαρακτηριστικά, τη θέση κάστρων, ανεμόμυλων, αμπελώνων και καθώς διανύουμε πια την περίοδο της Γαλλικής Επανάστασης λαιμητόμων. Ο τέταρτος Cassini επαινέθηκε πολύ για το έργο του, αλλά στη συνέχεια συνελήφθη και δικάσθηκε από ένα επαναστατικό δικαστήριο, όπου παραλίγο να χάσει τη ζωή του. Η τιμή του αποκαταστάθηκε την εποχή του Ναπολέοντα Βοναπάρτη, και πέθανε το 1845 σε ηλικία 97 ετών.

Το γεωδαιτικό προβάδισμα της Γαλλίας ακολούθησε σύντομα και η υπόλοιπη Ευρώπη, και περί τα μέσα του 19ου αιώνα το μεγαλύτερο μέρος της ηπείρου είχε αποτυπωθεί τριγωνομετρικά και χαρτογραφηθεί αναλυτικά. Στη συνέχεια, η

προσπάθεια μεταφέρθηκε στην Ινδία, το πιο λαμπρό κόσμημα του Βρετανικού Στέμματος. Ένα μεγαλεπήβολο πρόγραμμα γεωδαιτικού τριγωνισμού, γνωστό με το όνομα Μεγάλος γεωδαιτικός τριγωνισμός, εκτελέστηκε από το 1800 μέχρι το 1913. Το έργο χρηματοδοτήθηκε από την East India Company, μια κολοσσιαία εμπορική επιχείρηση που ουσιαστικά κυβερνούσε την Ινδία από τα γραφεία της στο Λονδίνο. Η αποτύπωση ξεκίνησε κοντά στο Μάντρας, στη νοτιοδυτική όχθη του κόλπου της Βεγγάλης, και όταν ολοκληρώθηκε είχε φθάσει ως τα Ιμαλάια, στο βορειότερο τμήμα της χώρας. Ο λοχαγός William Lambton (1753-1823), που ηγήθηκε της τοπογράφησης από το 1802 μέχρι το θάνατο του, ήταν αποφασισμένος να ολοκληρώσει το έργο του με πρωτοφανή ακρίβεια. Ο τεράστιος θεοδόλιχος που χρησιμοποιούσε ζύγιζε μισό τόνο. Κατασκευάσθηκε στο Λονδίνο σύμφωνα με τις αυστηρές προδιαγραφές που έθεσε ο ίδιος. Το πλοίο που τον μετέφερε στην Ινδία αναχαιτίσθηκε καθ' οδόν από μια γαλλική κορβέτα. Τελικά, το θηριώδες όργανο ανυψώθηκε με τροχαλίες στη στέγη του μεγάλου ναού της Τανζόρ (Τανζαβούρ), για να μπορούν να έχουν οι τοπογράφοι απεριόριστη ορατότητα. Κατά την ανύψωση, όμως, ένα από τα σχοινιά κόπηκε, και το όργανο έπεσε στο έδαφος και έσπασε. Αμετακίνητος από το στόχο του, ο Lambton κλείστηκε στη σκηνή του για έξι εβδομάδες και στο τέλος κατάφερε να το επιδιορθώσει μόνος του. Το 1806, ο Lambton έθεσε έναν ακόμη πιο φιλόδοξο στόχο από την τοπογράφηση της Ινδίας. Αποφάσισε να προσδιορίσει το σχήμα της Γης. Για το σκοπό αυτό, ακολούθησε μια γραμμή κατά μήκος του 78ου μεσημβρινού από το ακρωτήριο Κομόριν, στο νοτιότερο άκρο της ινδικής χερσονήσου, μέχρι την περιοχή του Κασμίρ, στο βορρά, διατρέχοντας απόσταση 2.900 χιλιομέτρων. Οι άνδρες του αντιμετώπισαν πολυάριθμους κινδύνους: την αφόρητη ζέστη της κεντρικής Ινδίας, την πυκνή βλάστηση όπου ενέδρευαν τίγρεις, τη μόνιμη απειλή της ελονοσίας, καθώς και τους οργισμένους ιθαγενείς που πίστευαν ότι οι τοπογράφοι κατασκόπευαν τις γυναίκες τους. Μετά το θάνατο του Lambton, η τοπογράφηση συνεχίσθηκε από το βοηθό του George Everest (1790-1866) που διορίσθηκε γενικός τοπογράφος των Ινδιών. Ο Everest διατήρησε και, σε ορισμένες περιπτώσεις, ξεπέρασε τις υψηλές προδιαγραφές που είχε θέσει ο προκάτοχος του. Για να αντιμετωπίσει την έλλειψη φυσικών ορόσημων στις απέραντες πεδιάδες της κεντρικής Ινδίας, έκτισε μια σειρά από πύργους, ορατούς από μεγάλη απόσταση. Αρκετοί από αυτούς σώζονται ακόμα και σήμερα. Για να αποφύγει τη ζέστη και την ομίχλη της ενδοχώρας, έδωσε εντολή στους άνδρες του να εργάζονται τη νύχτα υπό το φως μεγάλων πυρσών τους οποίους άναβε στην κορυφή των πύργων του. Κατά τη διάρκεια της ημέρας χρησιμοποιούσε έναν ηλιογράφο —ειδικά σχεδιασμένο κάτοπτρο

που αντανακλούσε το ηλιακό φως σε απόσταση 80 χιλιομέτρων. Η σχολαστική προσοχή τού Everest στις λεπτομέρειες απέδωσε. Όταν οι τοπογράφοι έφθασαν στους πρόποδες των Ιμαλαΐων, η πραγματική τους θέση διέφερε από αυτήν που είχε υπολογιστεί με το τριγωνομετρικό δίκτυο λιγότερο από 18 εκατοστά σε μια απόσταση 800 χιλιομέτρων!

Κατά τη διάρκεια της τοπογράφησης, ο Everest έκανε μια ανακάλυψη που εξακολουθεί να συζητείται μέχρι σήμερα. Διαπίστωσε ότι η τεράστια μάζα των Ιμαλαΐων άλλαζε τη διεύθυνση του νήματος της στάθμης. Τούτες οι βαρυτικές ανωμαλίες ήταν η πρώτη ένδειξη αυτών που σήμερα ονομάζονται mascons (συγκεντρώσεις μάζας) όρος που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά αναφορικά με τη Σελήνη, των οποίων η φύση και η κατανομή χαρτογραφείται πια από τους δορυφόρους. Όταν ο Everest αποσύρθηκε, το 1843, η τοπογράφηση συνεχίσθηκε υπό τη διεύθυνση του βοηθού του, του λοχαγού Andrew Waugh. Έκτοτε, η δύναμη της τριγωνομετρίας να μετρά απομακρυσμένα αντικείμενα έφθασε, κυριολεκτικά, στα ύψη. Η παράδοση λέει ότι μια μέρα του 1852, ο Radhanath Sikdar, μαθηματικός και επικεφαλής των υπολογισμών της τοπογραφικής ομάδας, εισέβαλε στο γραφείο του Waugh φωνάζοντας «Κύριε, ανακάλυψα το ψηλότερο βουνό του κόσμου». Η επίσημη ανακοίνωση καθυστέρησε μέχρι το 1856, προκειμένου να ελεγχθεί επισταμένως το ύψος της κορυφής XV, όπως είχε προσωρινά ονομασθεί το όρος Έβερεστ, γνωστό επίσης με το θιβετιανό του όνομα Chomolungma, δηλαδή «θεά-μητέρα του κόσμου». Υπολογίζοντας τον μέσο όρο διάφορων μετρήσεων που έγιναν από απόσταση 100 μιλίων, το ύψος του βουνού προσδιορίσθηκε σε 29.000 πόδια ακριβώς. Φοβούμενος όμως ότι ένας τόσο στρογγυλός αριθμός θα έμοιαζε προαποφασισμένος, ο τοπογράφος προσέθεσε αυθαίρετα 2 πόδια, και έτσι μέχρι το 1954 το επίσημο ύψος του ψηλότερου βουνού στον κόσμο ήταν 29.002 πόδια. Σύμφωνα με νεότερους υπολογισμούς, ανέρχεται στα 29.028 πόδια (8.850 μέτρα). (βλ.[46])

Και ενώ οι Γάλλοι ήταν απασχολημένοι με τον γεωδαιτικό τριγωνισμό της Ευρώπης και οι Βρετανοί με την τοπογράφηση της αυτοκρατορίας τους, ο Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) στη Γερμανία προσπαθούσε να καταρτίσει ένα τριγωνομετρικό δίκτυο του ουρανού. Ξεκίνησε την καριέρα του ως λογιστής, μελέτησε μόνος του μαθηματικά και αστρονομία, και σε ηλικία 20 ετών υπολόγισε εκ νέου την τροχιά του κομήτη του Halley, λαμβάνοντας υπόψη του και τις διαταράξεις που οφείλονται στους πλανήτες Δία και Κρόνο. Τα επιτεύγματα του Bessel κίνησαν το ενδιαφέρον του Heinrich Olbers, κορυφαίου γερμανού αστρονόμου εκείνης της εποχής, που του εξασφάλισε μια θέση στο Αστεροσκοπείο του Λιλίενταλ. Η φήμη του ως ταλαντούχου παρατηρησιακού αστρονόμου, αλλά και ως πρώτης γραμμής θεωρητικού,

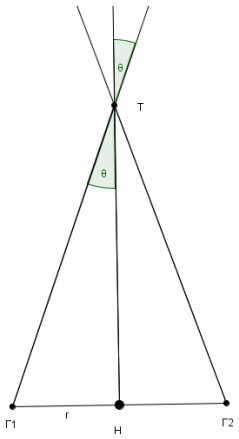
οδήγησε στο διορισμό του, το 1809, στη θέση του διευθυντή του Βασιλικού Αστεροσκοπείου της Πρωσίας, στο Καίνιγκσμπεργκ το σημερινό Καλίνινγκραντ της Ρωσίας, θέση την οποία διατήρησε μέχρι το θάνατο του.

Περί το 1800, οι διαστάσεις τού μέχρι τότε γνωστού ηλιακού συστήματος ήταν αρκετά καλά καθορισμένες παρ' όλο που έμενε ακόμη να ανακαλυφθούν οι πλανήτες Ποσειδώνας και Πλούτωνας. Ωστόσο, οι διαστάσεις του υπόλοιπου Σύμπαντος αποτελούσαν ένα άλυτο ζήτημα. Κανείς δεν είχε την παραμικρή ιδέα για το πόσο μακριά βρίσκονταν οι απλανείς αστέρες. Η μέθοδος της παράλλαξης, που είχε αποδειχθεί τόσο αποτελεσματική για τον προσδιορισμό των αποστάσεων μεταξύ των σωμάτων του ηλιακού συστήματος, είχε μέχρι εκείνη τη στιγμή αποτύχει στην περίπτωση των απλανών. Κανένα άστρο δεν παρουσίαζε κάποια μετρήσιμη αλλαγή θέσης, ακόμα και όταν επιστρατευόταν η μεγαλύτερη διαθέσιμη γραμμή βάσης —η διάμετρος της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο. Στην ουσία, η απουσία παράλλαξης ήταν το ισχυρότερο «αποδεικτικό στοιχείο» των αρχαίων Ελλήνων για την ορθότητα της εικόνας που είχαν σχηματίσει για το Σύμπαν, με τη Γη ακίνητη και μόνιμα εγκατεστημένη στο κέντρο του. Ο Κοπέρνικος όμως έδινε διαφορετική ερμηνεία στο γεγονός: γι' αυτόν, η απουσία οποιασδήποτε παρατηρήσιμης παράλλαξης ήταν μια ένδειξη ότι τα άστρα βρίσκονται τόσο μακριά από εμάς ώστε κάθε φαινόμενη μεταβολή στη θέση τους λόγω της περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι πάρα πολύ μικρή για να διακρίνεται με το μάτι.(βλ[8])

Όταν εφευρέθηκε το τηλεσκόπιο, το 1609, θεωρητικά έγινε εφικτή η μέτρηση της παράλλαξης μερικών κοντινών άστρων. Ωστόσο, κάθε πρακτική εφαρμογή απέτυχε. Ένας λόγος ήταν ότι οι αστρονόμοι επικέντρωναν την προσοχή τους μόνο στα λαμπρότερα άστρα του ουρανού, θεωρώντας ότι η λαμπρότητα τους συνιστούσε ένδειξη της σχετικής εγγύτητας τους στη Γη. Αυτό θα ίσχυε αν όλα τα άστρα είχαν την ίδια απόλυτη λαμπρότητα (αν εξέπεμπαν την ίδια ποσότητα φωτός), όπως συμβαίνει με τις λάμπες φωτισμού κατά μήκος μιας λεωφόρου. Εντούτοις, μετά το 1800 οι αστρονόμοι γνώριζαν πια ότι τα άστρα διαφέρουν σημαντικά ως προς την απόλυτη λαμπρότητα τους, και επομένως η φαινόμενη λαμπρότητα τους δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ως ένδειξη της σχετικής απόστασης τους από τη Γη. Αντίθετα, η έρευνα στράφηκε σε άστρα που διέθεταν μεγάλη ίδια κίνηση δηλαδή τη πραγματική κίνηση του άστρου ως προς τον ουράνιο θόλο σε αντίθεση με τη φαινόμενη κίνηση του που οφείλεται απλώς στην κίνηση του παρατηρητή. Διατυπώθηκε ορθά η υπόθεση ότι ένα άστρο με μεγάλη ίδια κίνηση βρίσκεται σχετικά κοντά στη Γη.

Ο κατάλληλος υποψήφιος είχε βρεθεί: ο αστέρας Κύκνος 61 στον αστερισμό του Κύκνου. Επρόκειτο για άστρο πέμπτου μεγέθους, μετά βίας ορατό διά γυμνού οφθαλμού· ήταν όμως γνωστό ότι εκτελούσε αρκετά μεγάλη ίδια κίνηση 5,2 δεύτερα λεπτά τόξου ανά έτος, διένυε δηλαδή γωνία ίση με τη γωνία που φαίνεται η διάμετρος της Σελήνης κάθε 350 χρόνια. Ο Bessel έστρεψε τότε όλες του τις προσπάθειες προς αυτό το αστέρι. Μετά από συστηματική παρατήρηση 18 μηνών, ανακοίνωσε, το 1838, ότι ο Κύκνος 61 παρουσίαζε παράλλαξη 0,314 δευτερολέπτων τόξου. Χάριν συγκρίσεως, αναφέρουμε ότι η φαινόμενη διάμετρος της Σελήνης είναι περίπου μισή μοίρα τόξου, ή 1.800 δευτερόλεπτα τόξου. Κι όμως, αυτός ο μικροσκοπικός αριθμός ήταν αρκετός για να επιτρέψει στον Bessel να βρει την απόσταση από το άστρο, χρησιμοποιώντας απλούς τριγωνομετρικούς υπολογισμούς. Επειδή τούτο το περιστατικό αποτελεί σταθμό στην ιστορία της αστρονομίας, θα παραθέσουμε εδώ όλες τις λεπτομέρειες.

Στο σχήμα 1, το Η παριστάνει τον Ήλιο, τα $Γ_1$ και $Γ_2$ τις δύο αντιδιαμετρικές θέσεις της Γης κατά την τροχιά της γύρω από τον Ήλιο και το Τ το άστρο που μελετάμε. Ονομάζουμε ετήσια παράλλαξη το μισό της γωνιακής μετατόπισης του άστρου που οφείλεται στην κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή τη γωνία $θ = Γ_1ΤΗ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $Γ_1ΤΗ$. Ονομάζουμε d την απόσταση του άστρου και r την ακτίνα της τροχιάς της Γης, και έχουμε sinθ = r/d, ή $d = \frac{r}{\sin\theta}$.



Σχήμα 1

Αντικαθιστώντας το r = 150.000.000 km = 1,5 x $1O^8$ km και τη θ = 0,314" = (0,314/3.600)°, έχουμε d = 9,85 x $1O^{13}$ km. Ωστόσο, συνηθίζεται οι αποστάσεις στο Διάστημα να εκφράζονται σε έτη φωτός. Ως εκ τούτου, πρέπει να διαιρέσουμε την

παραπάνω τιμή με την ταχύτητα του φωτός ($3 \times 1O^5$ km/s) και να πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό των δευτερολέπτων που περιλαμβάνει ένα έτος ($3.600 \times 24 \times 365$). Αυτό μας δίνει

$$d = 10,1 \text{ έτη φωτός.}$$

Με τούτο τον τρόπο έγιναν γνωστές οι διαστάσεις του Σύμπαντος πέραν του ηλιακού μας συστήματος. Από τότε μέχρι σήμερα, η παράλλαξη του Κύκνου 61 υπολογίσθηκε με μεγαλύτερη ακρίβεια σε 0,294", η οποία αντιστοιχεί σε απόσταση 11,1 ετών φωτός. Στα αμέσως επόμενα χρόνια μετρήθηκαν επιτυχώς και άλλες αστρικές παραλλάξεις, μεταξύ των οποίων και αυτή του Άλφα Κενταύρου, του πλησιέστερου ουράνιου γείτονα μας πέρα από τον Ήλιο, σε απόσταση 4,3 ετών φωτός. Αυτή η μέθοδος εφαρμόσθηκε σε άστρα που απέχουν μέχρι και 100 έτη φωτός. Σε μεγαλύτερες αποστάσεις, η ακρίβεια ελαττώνεται σημαντικά. Εν τω μεταξύ, στα πλαίσια της προσπάθειας να καταλήξουμε σε μια αξιόπιστη κλίμακα αστρικών αποστάσεων, αναπτύχθηκαν εναλλακτικές μέθοδοι υπολογισμού βασιζόμενες σε φυσικά χαρακτηριστικά των άστρων. (βλ.[43],[8])

Το 1844, ο Bessel έκανε άλλη μια ιστορική ανακάλυψη. Κατευθύνοντας το τηλεσκόπιο του προς τον Σείριο, το λαμπρότερο άστρο του ουρανού, βρήκε ότι η ίδια κίνηση του δημιουργεί μια ανεπαίσθητα κυματοειδή τροχιά. Ορθά απέδωσε το φαινόμενο στη βαρυτική επίδραση κάποιου αόρατου άστρου που περιφέρεται γύρω από τον Σείριο. Αυτό το άστρο, ο Σείριος Β, ανακαλύφθηκε το 1862 από τον αμερικανό κατασκευαστή τηλεσκοπίων Alvan Graham Clark (1832-1897). Οι βαρυτικές διαταραχές απασχόλησαν τη σκέψη του Bessel επί πολλά χρόνια. Το θέμα σχετιζόταν με ένα από τα πιο σοβαρά προβλήματα της ουράνιας μηχανικής, και για να το αντιμετωπίσει εισήγαγε μια συγκεκριμένη κατηγορία νέων συναρτήσεων, που προς τιμήν του ονομάσθηκαν συναρτήσεις Bessel. Πρόκειται για τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $x^2y'' + xy' + (\chi^2 - n^2)y = 0$, όπου $n \geq 0$ ένας σταθερός αριθμός (όχι υποχρεωτικά ακέραιος). Η φύση των λύσεων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το n **.** Για n = 1/2, 3/2, 5/2, ..., μπορούν να εκφρασθούν σε κλειστή μορφή ως συνάρτηση των **x,** sinx, cosx. Για άλλες τιμές τού n**,** μπορούν να εκφρασθούν μόνο με τη μορφή σειράς, και επομένως θεωρούνται «ανώτερες» ή «μη στοιχειώδεις» συναρτήσεις. Η εξίσωση Bessel βρίσκει αρκετές εφαρμογές. Για παράδειγμα, η παλμική κίνηση μιας στρογγυλής μεμβράνης —όπως αυτή του τύμπανου— περιγράφεται από την εξίσωση Bessel με n = 0.

Προς το τέλος της ζωής του, ο Bessel στράφηκε και πάλι στο θέμα των βαρυτικών διαταραχών. Μια από τις σημαντικότερες αστρονομικές σπαζοκεφαλιές της

εποχής ήταν οι ανωμαλίες στην κίνηση του πλανήτη Ουρανού. Όλες οι προσπάθειες να εξηγηθούν οι ανωμαλίες αυτές εξαιτίας της ύπαρξης των γνωστών πλανητών και κυρίως του Δία και του Κρόνου είχαν αποτύχει. Ορθά ο Bessel τις απέδωσε στην ύπαρξη κάποιου άγνωστου πλανήτη πέρα από τον Ουρανό. Πέθανε όμως μερικούς μήνες πριν ανακαλυφθεί ο συγκεκριμένος πλανήτης, ο Ποσειδώνας.

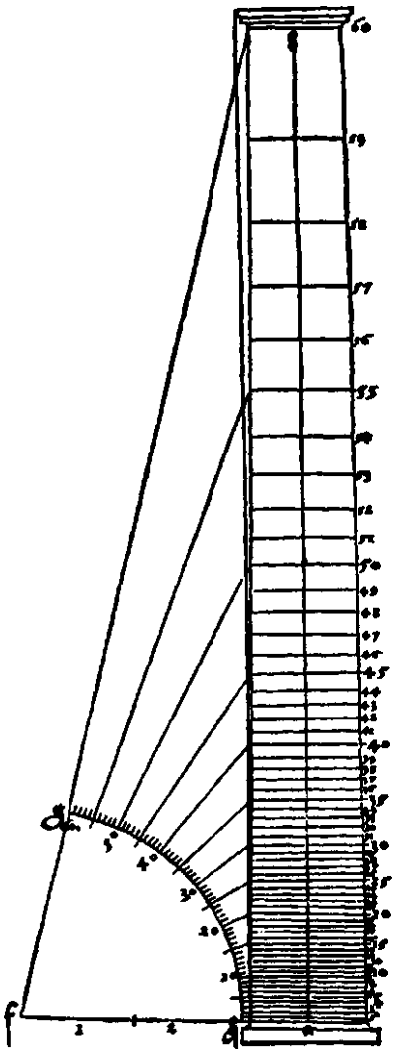
Ο Bessel υπήρξε ένας από τους τελευταίους επιστήμονες που αισθανόταν το ίδιο άνετα τόσο στη θεωρητική όσο και στην πειραματική έρευνα, στην περίπτωση του στις παρατηρησιακές μεθόδους. Οι μαθηματικοί θα τον θυμούνται για τις συναρτήσεις Bessel, ωστόσο το κορυφαίο του επίτευγμα ήταν ότι μας έδωσε την πρώτη απτή ένδειξη του πραγματικού μεγέθους του Διαστήματος. Χάρις σε αυτόν, το ενδιαφέρον των αστρονόμων άρχισε να μετατοπίζεται από το ηλιακό σύστημα στο ευρύτερο Διάστημα. (βλ.[43,[38],[6])

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Από τις πολυάριθμες συναρτήσεις που συναντά κανείς στα στοιχειώδη μαθηματικά, η πιο αξιοπρόσεκτη ίσως είναι η εφαπτομένη. Τα βασικά της χαρακτηριστικά είναι γνωστά: Η $f(x) = \tan x$ έχει ρίζες για $x = n\pi$ ($n = 0, \pm1, \pm2, ...$), έχει ασυνέχειες άπειρου τύπου για $x= (2n + 1)\pi/2$, και είναι περιοδική με περίοδο π. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση λέγεται περιοδική με περίοδο T αν T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο $f(x + T) = f(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f. Αυτό το τελευταίο σημείο φαίνεται αρκετά ενδιαφέρον: Οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο έχουν κοινή περίοδο 2π, αλλά το πηλίκο τους, η εφαπτομένη, έχει περίοδο π. Βέβαια, για την περιοδικότητα δεν υπάρχει λόγος να τηρούνται οι συνήθεις κανόνες της άλγεβρας των συναρτήσεων: Το γεγονός ότι δύο συναρτήσεις *f* και *g* έχουν κοινή περίοδο T δεν σημαίνει ότι η f+g ή η f.g θα έχει την ίδια περίοδο. Όπως είδαμε στα προηγούμενα, η συνάρτηση εφαπτομένη ανάγεται στην αρχαιότητα, και ειδικότερα στη μέτρηση με τη βοήθεια της σκιάς. Κατά την Αναγέννηση, η εφαπτομένη επανήλθε στο προσκήνιο χωρίς ωστόσο να έχει αυτό το όνομα, παράλληλα με την τεχνική της προοπτικής που εκείνη την εποχή βρισκόταν σε πλήρη άνθηση. Αποτελεί κοινή εμπειρία ότι, όταν ένα αντικείμενο απομακρύνεται από τον παρατηρητή, φαίνεται όλο και μικρότερο. Το φαινόμενο γίνεται ιδιαίτερα έντονο όταν παρατηρούμε ένα ψηλό οικοδόμημα από το έδαφος. Καθώς η γωνία ύψους αυξάνει, αντικείμενα που έχουν σταθερή κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τους, όπως οι όροφοι ενός κτηρίου, φαίνονται σταδιακά να πλησιάζουν. Αντίστροφα, ίσες αυξήσεις στη γωνία ύψους «αποκόπτουν» από το οικοδόμημα συνεχώς αυξανόμενα τμήματα. Ο διάσημος καλλιτέχνης από τη Νυρεμβέργη Albrecht Durer (1471-1528), ένας από τους θεμελιωτές της θεωρίας της προοπτικής, περιέγραψε με σαφήνεια το φαινόμενο .

Ο Durer και οι σύγχρονοι του προβληματίσθηκαν ιδιαίτερα με την ακραία περίπτωση του φαινομένου, όταν η γωνία ύψους πλησιάζει τις 90° και το ύψος φαίνεται να μεγαλώνει απεριόριστα. Ακόμη πιο ενδιαφέρουσα είναι η συμπεριφορά των παράλληλων γραμμών στο επίπεδο. Καθώς απομακρύνονται από τον παρατηρητή μοιάζουν να πλησιάζουν όλο και περισσότερο, έως ότου τελικά συγκλίνουν σε ένα σημείο του ορίζοντα που ονομάζεται «σημείο φυγής». Όλα αυτά τα φαινόμενα μπορούν να ερμηνευθούν από τη συμπεριφορά της εφαπτομένης κοντά στις 90°. Σήμερα λέμε ότι η tanx τείνει στο άπειρο καθώς η γωνία x πλησιάζει από κάτω τις 90°, ενώ στις 90° δεν ορίζεται. Ωστόσο, τέτοιες λεπτές εννοιολογικές διαφορές ήταν άγνωστες στις

περασμένες γενιές. Μέχρι αρκετά πρόσφατα, η πρόταση «tan90°=∞» χρησιμοποιούνταν σε αρκετά εγχειρίδια τριγωνομετρίας. (βλ.[43])



.

Μια μελέτη, του Albrecht Durer.

Γύρω στο 1580, ο Viete διατύπωσε ένα όμορφο θεώρημα , το νόμο των εφαπτόμενων. Σύμφωνα με αυτόν, σε κάθε τρίγωνο ισχύει:

$$\frac{a+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}. \qquad (1)$$

Το θεώρημα αυτό αποτελεί συνέπεια των ταυτοτήτων sinA ± sinB = 2sin[(A ± B)/2]·cos[A ∓ B)/2] και του νόμου των ημιτόνων (α/sinA = β/sinB = y/sinΓ). Την εποχή

όμως του Viete, θεωρούνταν αυτόνομο θεώρημα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση τριγώνου όταν είναι γνωστές δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία. Κανονικά, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των συνημίτονων ($\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos\Gamma$) για να υπολογίσουμε την άγνωστη πλευρά, και στη συνέχεια το νόμο των ημίτονων για να βρούμε τη μία από τις δύο άγνωστες γωνίες. Ωστόσο, επειδή ο νόμος των συνημιτόνων χρησιμοποιεί πρόσθεση και αφαίρεση, δεν προσφέρεται για εύκολους υπολογισμούς με τη βοήθεια των λογαρίθμων —που ήταν, στην ουσία, ο μόνος εφικτός τρόπος επίλυσης τριγώνων αλλά και οποιουδήποτε άλλου υπολογισμού πριν από την εποχή των υπολογιστικών μηχανών. Ο νόμος των εφαπτόμενων βοηθά να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία. Από τη στιγμή που δίνεται μια γωνία, έστω η *Γ,* μπορούμε να βρούμε την (Α + Β)/2 και, με τη βοήθεια της ισότητας (1) και ενός πίνακα εφαπτόμενων, να υπολογίσουμε την (Α - Β)/2. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις γωνίες Α και *Β* και, τέλος, με το νόμο των ημιτόνων, την τρίτη πλευρά. Φυσικά, αυτή η τεχνική δεν είναι πια απαραίτητη αφού διαθέτουμε υπολογιστικές μηχανές, πράγμα που εξηγεί γιατί ο νόμος των εφαπτόμενων δεν θεωρείται πια τόσο ελκυστικός. Ο νόμος των εφαπτόμενων προσφέρεται και για όσους συμπαθούν τις λανθασμένες αποδείξεις —σωστά συμπεράσματα που συνάγονται με λανθασμένο τρόπο (όπως το 10/64 = 1/4): αρχίζουμε από το δεύτερο μέλος της ισότητας (1), «απλοποιούμε» το 1/2 και το «tan», τρέπουμε τα κεφαλαία σε πεζά και καταλήγουμε στο πρώτο μέλος.

Υπάρχουν και άλλοι τύποι, εξίσου κομψοί, που σχετίζονται με την εφαπτομένη. Για παράδειγμα, αν Α, Β, Γ οι τρεις γωνίες ενός τριγώνου, ισχύει:

$$\tan A + \tan B + \tan\Gamma = \tan A \tan B \tan\Gamma. \qquad (2)$$

Για να αποδείξουμε τον τύπο, γράφουμε Γ = 180° - (Α + Β) και χρησιμοποιούμε τον τύπο του αθροίσματος γωνιών. Το ενδιαφέρον αυτού του τύπου δεν έγκειται μόνο στη θαυμαστή του συμμετρία αλλά και σε μερικές απροσδόκητες συνέπειες του. Ένα γνωστό θεώρημα της άλγεβρας λέει ότι, αν $\chi_1\ \chi_2, \ldots, \chi_v$,, είναι οποιοιδήποτε η θετικοί αριθμοί, τότε ο αριθμητικός τους μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον γεωμετρικό τους μέσο. Δηλαδή:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

Επιπλέον, η ισότητα των δύο μέσων ισχύει αν και μόνο αν $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_n$. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο, έτσι ώστε και οι τρεις γωνίες του να έχουν θετικές εφαπτόμενες. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα:

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan \Gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma}$$

Όμως, με βάση τη σχέση (2), η ισότητα γίνεται:

$$\frac{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma}$$

Υψώνοντας τα δύο μέλη στον κύβο και απλοποιώντας, έχουμε:

$$\tan A \cdot \tan B \cdot \tan T \geq 3\sqrt{3}.$$

Έτσι, σε οποιοδήποτε οξυγώνιο τρίγωνο, το γινόμενο αλλά και το άθροισμα των εφαπτομένων των τριών γωνιών του είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του $3\sqrt{3}$ $\cong$5,196. Η ελάχιστη αυτή τιμή λαμβάνεται αν και μόνο αν Α = Β = Γ =60°, δηλαδή αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, τότε μία γωνία έχει αρνητική εφαπτομένη, και το θεώρημα δεν ισχύει. Ωστόσο, από τη στιγμή που μια αμβλεία γωνία παίρνει τιμές στο ανοικτό διάστημα από 90° έως 180°, η εφαπτομένη της παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα (-∞, 0), ενώ οι δύο άλλες εφαπτόμενες είναι θετικές. Από αυτό αποδεικνύεται ότι το γινόμενο των τριών εφαπτόμενων μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αρνητική τιμή. Συνοψίζοντας, σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma > 3\sqrt{3}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ισχύει

$$-\infty < \tan A \cdot \tan B \cdot \tan \Gamma < 0.$$

Οι τύποι για την εφαπτομένη του πολλαπλασίου γωνίας παρουσιάζουν ανάλογο ενδιαφέρον. Ασφαλώς, θα θέλαμε έναν τύπο που να εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας na ως συνάρτηση της εφαπτομένης της γωνίας α και μόνο της α, όχι των πολλαπλασίων της. Ευτυχώς, αυτό είναι εφικτό. Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο του αθροίσματος,

$$\tan(a+\beta) = \frac{\tan a + \tan \beta}{1 - \tan a \cdot \tan \beta},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a},$$

$$\tan 3a = \tan(2a+a) = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a \cdot \tan a} = \frac{2\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a},$$

και ούτω καθ' εξής. Μετά από μερικά βήματα, αναφαίνεται μια κανονικότητα. Ανακαλύπτουμε ότι όλοι οι συντελεστές είναι οι ίδιοι με αυτούς του αναπτύγματος $(1 + x)^n$ σε άθροισμα δυνάμεων του x , οι συνηθισμένοι *διωνυμικοί συντελεστές*, με τη διαφορά άτι εναλλάσσονται μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή ακολουθώντας διαδρομή ζιγκ-ζαγκ αρχίζοντας από τον παρονομαστή, και τα πρόσημα τους εναλλάσσονται κατά ζεύγη. Για να προκύπτουν τα σωστά πρόσημα, μπορούμε να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα του $(1 + ix)^n$, όπου i η φανταστική μονάδα. Αν λάβουμε υπόψη μας και τα πρόσημα, μπορούμε να διατάξουμε τους συντελεστές σε ένα «τρίγωνο του Pascal για την εφαπτομένη»:

1

1 1

1 2 -1

1 3 -3 -1

1 4 -6 -4 1

1 5 -10 -10 5 1

(Η ένδειξη της πρώτης γραμμής είναι 1, διότι tan(0α) = 0 = 0/1).

Παρατηρούμε ότι όλες οι ενδείξεις στις δύο πρώτες διαγώνιους μετρώντας από αριστερά προς τα δεξιά και κατεβαίνοντας από πάνω δεξιά προς τα κάτω αριστερά) είναι θετικές, στις δύο επόμενες αρνητικές, κ.ο.κ. Η παρουσία διωνυμικών συντελεστών σε έναν τύπο που εκ πρώτης όψεως δεν έχει καμιά σχέση με το ανάπτυγμα $(1 + x)^n$ οφείλεται στον τύπο του De Moivre:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na, \qquad (3)$$

όπου $i^2 = -1$. Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος της ισότητας (3) με βάση το θεώρημα του διωνύμου και εξισώνοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος με τα αντίστοιχα του δεξιού μέλους, έχουμε τύπους για το cosna και το sinna ως συνάρτηση των $\cos^{n-k}\alpha \cdot \sin^k\alpha$, όπου k=0,1,2, ..., *n*. Ο τύπος για την εφαπτομένη προκύπτει άμεσα:

$$\tan na = \frac{n\tan a - \binom{n}{3}\tan^3 a + \binom{n}{5}\tan^5 a - \cdots}{1 - \binom{n}{2}\tan^2 a + \binom{n}{4}\tan^4 a - \cdots}, \qquad (4)$$

Έτσι, οι διωνυμικοί συντελεστές είναι συμμετρικοί , δεν αλλάζουν δηλαδή αν αναπτύξουμε το $(1 + x)^n$ κατά τις κατιούσες ή κατά τις ανιούσες δυνάμεις του x.

Από τη στιγμή που το ανάπτυγμα του $(1 + x)^n$ έχει n + 1 όρους όταν ο n είναι θετικός ακέραιος, οι σειρές που εμφανίζονται στον αριθμητή και τον παρονομαστή της ισότητας (4) είναι πεπερασμένες. Ωστόσο, υπάρχουν άπειρα αναπτύγματα για τις έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, και πιο συγκεκριμένα, δυναμοσειρές και άπειρα γινόμενα. Οι δυναμοσειρές για το ημίτονο και το συνημίτονο είναι:

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$$

και

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots .$$

Αυτές οι σειρές ήταν ήδη γνωστές στον Νεύτωνα, όμως στα χέρια του ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler (1707-1783) μεταμορφώθηκαν σε έναν πακτωλό νέων αποτελεσμάτων. Ο Euler αντιμετώπιζε τις δυναμοσειρές ως «άπειρα πολυώνυμα» που ακολουθούν τους ίδιους αλγεβρικούς νόμους με τα συνηθισμένα, πεπερασμένα πολυώνυμα. Έτσι, ισχυριζόταν ότι, όπως ένα πολυώνυμο βαθμού n μπορεί να γραφεί ως γινόμενο n (όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους) παραγόντων της μορφής $(1 - x/x_i)$, όπου x_i οι ρίζες του πολυωνύμου, έτσι και η συνάρτηση ημίτονο μπορεί να γραφεί ως άπειρο γινόμενο:

$$\sin x = x(1 - x^2/\pi^2)(1 - x^2/4\pi^2)(1 - x^2/9\pi^2)\ldots . \qquad (6)$$

Κάθε δευτεροβάθμιος παράγοντας της μορφής $(1 - x^2/n^2\pi^2)$ είναι το γινόμενο των δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων $(1 - x/n\pi)$ και $(1 + x/n\pi)$ που προέρχονται από τις ρίζες του ημίτονου, $\pm n\pi$, ενώ ο παράγοντας x οφείλεται στη ρίζα x = 0. Μια απροσδόκητη συνέπεια της ισότητας (6) είναι ότι, αντικαθιστώντας όπου x το π/2, έχουμε:

$$1 = (\pi/2) \cdot (1 - 1/4) \cdot (1 - 1/16) \cdot (1 - 1/36) \cdot \ldots .$$

Εκτελώντας την πράξη σε κάθε παρένθεση και λύνοντας ως προς π/2, προκύπτει το άπειρο γινόμενο:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots \qquad (7)$$

Πρόκειται για τον γνωστό τύπο που ανακάλυψε το 1655 ο John Wallis χρησιμοποιώντας μια τολμηρή μέθοδο παρεμβολής. Από τον τύπο (6) μπορούν να προκύψουν και άλλα απειρογινόμενα που σχετίζονται με το *π*. Για παράδειγμα, θέτοντας $x = \pi/6$, έχουμε:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(6n)^2}{(6n)^2 - 1},$$

που συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα από το γινόμενο του Wallis (αρκούν 55 όροι για την προσέγγιση του π με δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ με τον τύπο του Wallis απαιτούνται 493 όροι).

Το αντίστοιχο άπειρο γινόμενο για το συνημίτονο είναι:

$$\cos x = (1 - 4x^2/\pi^2)(1 - 4x^2/9\pi^2)(1 - 4x^2/25\pi^2)\ldots , \qquad (8)$$

όπου $x_i = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ οι ρίζες του συνημίτονου (και πάλι κάθε δευτεροβάθμιος παράγοντας είναι γινόμενο δυο πρωτοβάθμιων παραγόντων). Διαιρώντας τώρα κατά μέλη τις ισότητες (6) και (8), έχουμε αναλυτική έκφραση για την εφαπτομένη:

$$\tan x = \frac{x(1-x^2/\pi^2)(1-x^2/4\pi^2)(1-x^2/9\pi^2)\ldots}{(1-4x^2/\pi^2)(1-4x^2/9\pi^2)(1-4x^2/25\pi^2)\ldots}, \qquad (9)$$

Ωστόσο, αυτή η μορφή είναι αρκετά δύσχρηστη. Για να την απλοποιήσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε μια τεχνική αρκετά γνωστή από τον ολοκληρωτικό λογισμό, την ανάλυση σε *απλά κλάσματα.* Εκφράζουμε το δεξιό μέλος της ισότητας (9) ως άπειρο άθροισμα κλασμάτων που το καθένα έχει ως παρονομαστή έναν και μόνο πρωτοβάθμιο παράγοντα από αυτούς που εμφανίζονται στον παρονομαστή της ισότητας (9):

$$\tan x = \frac{A_1}{1-2x/\pi} + \frac{B_1}{1+2x/\pi} + \frac{A_2}{1-2x/3\pi} + \frac{B_2}{1+2x/3\pi} + \ldots, \qquad (10)$$

Για να βρούμε τους συντελεστές, κάνουμε, τρόπος του λέγειν, «απαλοιφή παρονομαστών», πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας με το γινόμενο όλων των παρονομαστών (δηλαδή στην ουσία με cosx) και εξισώνουμε με τον αριθμητή της ισότητας (9) (δηλαδή με sinx):

$$\begin{aligned} x(1 - x/\pi)(1 + x/\pi)(1 - x/2\pi)(1 + x/2\pi)\ldots = \\ = A_1(1+2x/\pi)(1-2x/3\pi)(1+2x/3\pi)\ldots + \\ + B_1(1-2x/\pi)(1-2x/3\pi)(1+2x/3\pi)\ldots + \\ + \ldots \end{aligned} \qquad (11)$$

Σημειώστε ότι από κάθε όρο του δεξιού μέλους της ισότητας (11) λείπει ακριβώς ένας παράγοντας, ο παρονομαστής του αντίστοιχου συντελεστή στην ισότητα (10) (όπως ακριβώς συμβαίνει όταν κάνουμε συνηθισμένα κλάσματα ομώνυμα).

Τώρα, η (11) είναι μια ταυτότητα που ισχύει για κάθε x. Για να βρούμε το A_1, θέτουμε $x = \pi/2$. Έτσι «εξαφανίζουμε» όλους τους όρους εκτός από τον πρώτο, και έχουμε:

$$(\pi/2) \cdot (1/2) \cdot (3/2) \cdot (3/4) \cdot (5/4) \cdot \ldots =$$
$$= A_1 \cdot 2 \cdot (2/3) \cdot (4/3) \cdot (4/5) \cdot (6/5) \cdot \ldots .$$

Λύνοντας ως προς A_1 έχουμε:

$$A_1 = (\pi/2) \cdot (1/2)^2 \cdot (3/2)^2 \cdot (3/4)^2 \cdot (5/4)^2 \cdot \ldots =$$
$$= (\pi/2) \cdot [(1/2) \cdot (3/2) \cdot (3/4) \cdot (5/4) \cdot \ldots]^2.$$

Η ποσότητα μέσα στην αγκύλη, όμως, είναι ακριβώς το αντίστροφο του γινομένου του Wallis, δηλαδή ισούται με $2/\pi$. Έτσι:

$$A_1 = (\pi/2) \cdot (2/\pi)^2 = 2/\pi.$$

Για να βρούμε το B_1 ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία, μόνο που τώρα θέτουμε $x = -\pi/2$ στην ισότητα (11). Έτσι, $B_1 = -2/\pi = -A_1$.Οι υπόλοιποι συντελεστές προκύπτουν με ανάλογο τρόπο. Έχουμε λοιπόν: $A_2 = 2/(3\pi) = -B_2$, $A_3 = 2/(5\pi) = -B_3$, και γενικότερα:

$$A_i = \frac{2}{(2i-1)\pi} = -B_i, \text{ για } \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα (10) και συνδυάζοντας τους όρους ανά δύο, κατακτούμε επιτέλους το μεγάλο έπαθλο, την ανάλυση της εφαπτομένης x σε απλά κλάσματα:

$$\tan x = 8x\left[\frac{1}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{1}{25\pi^2 - 4x^2} + \ldots\right]. \qquad (12)$$

Τούτος ο ενδιαφέρων τύπος μάς δείχνει σαφέστατα ότι η εφαπτομένη δεν ορίζεται για $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Αυτές ακριβώς οι ισότητες είναι και οι εξισώσεις των κατακόρυφων ασύμπτωτων στη γραφική παράσταση της εφαπτομένης.

Αφού η ισότητα ισχύει για κάθε x εκτός από τα $(2n + 1)\pi/2$, όπου n θετικός ή αρνητικός ακέραιος, ας δώσουμε στο x μερικές ειδικές τιμές. Αρχίζουμε με $x = \pi/4$:

$$\tan(\pi/4) = 1 = 8(\pi/4)[1/(\pi^2 - \pi^2/4) + 1/(9\pi^2 - \pi^2/4) +$$
$$+ 1/(25\pi^2 - \pi^2/4) + \ldots].$$

Ο κάθε όρος μέσα στην αγκύλη είναι της μορφής $4/[4(2n - 1)^2 - 1] = 1/(4n - 3)(4n - 1) = (1/2)[1/(4n - 3) - l/(4n - 1)]$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$. Έτσι, $1 = (4/\pi)[1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots]$, απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots. \qquad (13)$$

Αυτός ο τύπος ανακαλύφθηκε από τον σκωτσέζο μαθηματικό James Gregory (1638-1675), ο οποίος τον συνήγαγε από τη δυναμοσειρά της αντίστροφης εφαπτομένης, $\tan^{-1}x = x - x^3/3 + x^5/5 - \ldots$, απ' όπου προκύπτει η (13) αντικαθιστώντας το x με 1. Το 1674, ο

Leibniz ανακάλυψε την ίδια δυναμοσειρά με ανεξάρτητο τρόπο. Συχνά αυτή αναφέρεται ως «τύπος του Leibniz». Υπήρξε ένα από τα πρώτα αποτελέσματα του νεογέννητου τότε διαφορικού λογισμού, και λέγεται ότι η ανακάλυψη του χαροποίησε ιδιαίτερα τον Leibniz. Το ενδιαφέρον στοιχείο στη σειρά Gregory-Leibniz, όπως και στο γινόμενο του Wallis, είναι η απροσδόκητη σύνδεση μεταξύ του π και των ακεραίων. Ωστόσο, λόγω του αργού ρυθμού σύγκλισης, αυτή η σειρά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί πρακτικά. Απαιτούνται 628 όροι για να προσεγγισθεί το *π* με δύο δεκαδικά ψηφία, ακρίβεια πολύ χειρότερη από αυτή που πέτυχε ο Αρχιμήδης 2.000 χρόνια νωρίτερα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης. Ωστόσο, η σειρά Gregory-Leibniz αποτελεί ορόσημο στην ιστορία των μαθηματικών, αφού υπήρξε η πρώτη μιας πολυάριθμης συλλογής από απειροσειρές σχετιζόμενες με το *π,* που ανακαλύφθηκαν τα επόμενα χρόνια. Στη συνέχεια, ας θέσουμε $x = \pi$ στην ισότητα (12):

$$\tan\pi = 0 = 8\pi[1/(-3\pi^2) + 1/(5\pi^2) + 1/(21\pi^2) + \ldots].$$

Απλοποιώντας το 8/π και μεταφέροντας τον μοναδικό αρνητικό όρο στο άλλο μέλος της ισότητας, παίρνουμε:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\frac{1}{45}+\ldots=\frac{1}{3}$$

Διαπιστώνουμε, ότι καταλήξαμε σε μια σειρά που δεν έχει καμία σχέση με το π . Ωστόσο, η αντικατάσταση $x = 0$ θα μας αποζημιώσει. Σε πρώτη φάση, καταλήγουμε απλώς στην αόριστη ισότητα 0 = 0. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, διαιρούμε κατά μέλη με x και παίρνουμε το *όριο όταν το x τείνει στο* 0. Στο αριστερό μέλος έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1.$$

Έτσι η ισότητα (12) γίνεται: $$1=\frac{8}{\pi^2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots\right],$$

Οπότε

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots, \qquad (14)$$

Αυτός ο τελευταίος τύπος είναι το ίδιο αξιοπρόσεκτος με τη σειρά Gregory-Leibniz. Ωστόσο, μπορεί να μας οδηγήσει σε ένα ακόμη πιο σημαντικό αποτέλεσμα. Θα εργασθούμε και πάλι με «χαλαρό» και όχι αυστηρά μαθηματικό τρόπο, στο πνεύμα των τολμηρών επιδρομών του Euler στη χώρα των άπειρων σειρών. (Μια απόλυτα έγκυρη

αυστηρή απόδειξη μπορεί να δοθεί με τις σειρές Fourier.)[βλ. (7)]. Τελικός μας στόχος θα είναι να υπολογίσουμε το άθροισμα των αντίστροφων των τετραγώνων όλων των θετικών ακεραίων, άρτιων και περιττών μαζί. Ας ονομάσουμε S αυτό το άθροισμα, φυσικά, με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει. Αποδεικνύεται στα εγχειρίδια διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, όπου k πραγματικός αριθμός, συγκλίνει για k > 1 και αποκλίνει για k < 1. Στην περίπτωση μας, k = 2, άρα η σειρά συγκλίνει.

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....=\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...\right]+\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...\right]=$$
$$=\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\right]=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $3S/4 = \pi^2/8$, και τελικά:

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....=\frac{\pi^2}{6} \qquad (15)$$

Η ισότητα (15) θεωρείται από τις πιο ονομαστές σε ολόκληρη την ιστορία των μαθηματικών. Ανακαλύφθηκε από τον Euler το 1734 μέσα σε μια από τις πιο λαμπρές αναλαμπές της ιδιοφυΐας του, αν και με τρόπο του καταπατούσε κάθε κοινώς αποδεκτή μαθηματική αυστηρότητα. Παρ' όλα αυτά, η ανακάλυψη του ήρθε να λύσει ένα από τα μεγαλύτερα μυστήρια των μαθηματικών του 18ου αιώνα: Ήταν ήδη γνωστό ότι η σειρά συγκλίνει, όμως οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί της εποχής, συμπεριλαμβανομένων και των αδελφών Bernoulli, δεν κατόρθωσαν να βρουν την τιμή του ορίου. Θα ασχοληθούμε τώρα με μια ακόμη σειρά που ανακάλυψε ο Euler. Αρχίζουμε με τον τύπο του διπλάσιου τόξου για τη συνεφαπτομένη:

$$\cot 2x=\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}=\frac{\cot x-\tan x}{2}.$$

Αρχίζοντας με μια τυχαία γωνία $x\neq n\pi/2$ και εφαρμόζοντας τον τύπο επαναληπτικά, έχουμε:

$$\cot 2x=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right]=\frac{1}{4}\left[\cot\frac{x}{4}-\tan\frac{x}{4}\right]-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}=$$
$$=\frac{1}{8}\left[\cot\frac{x}{8}-\tan\frac{x}{8}\right]-\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}=...=$$
$$=\frac{1}{2^n}\left[\cot\frac{x}{2^n}-\tan\frac{x}{2^n}\right]-\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^{n-1}}-...-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}.$$

Όταν $n\to\infty$, τότε $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}\to\frac{1}{x}$, και έτσι προκύπτει ότι:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n},$$

ή ακόμη $$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \tan \frac{x}{8} + \ldots, \qquad (16)$$

Αυτή η όχι ευρέως γνωστή ισότητα είναι μια ακόμη από τις εκατοντάδες που αναφέρονται σε άπειρες διαδικασίες και τις οποίες παρήγαγε το γόνιμο μυαλό του Euler. Πίσω της μάλιστα κρύβεται μια έκπληξη: εάν θέσουμε $x = \pi/4$, θα έχουμε:

$$\frac{4}{\pi - 1} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{16} + \ldots,$$

Αν αντικαταστήσουμε το 1 του αριστερού μέλους με $\tan(\pi/4)$, το μεταφέρουμε δεξιά και διαιρέσουμε διά 4, θα έχουμε:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \tan \frac{x}{8} + \frac{1}{16} \tan \frac{x}{16} + \ldots, \qquad (17)$$

Αυτή η καινούργια ισότητα θεωρείται δίκαια ως μία από τις ωραιότερες των μαθηματικών. Και όμως, σπανίως τη συναντά κανείς στα βιβλία, παρ' όλο που η σειρά στα δεξιά συγκλίνει με εξαιρετική ταχύτητα (αφού τόσο οι συντελεστές όσο *και* οι γωνίες υποδιπλασιάζονται σε κάθε βήμα) και, , μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί ως αποτελεσματικό μέσο για την προσέγγιση του π. Αρκούν μόλις 12 όροι για να υπολογισθεί το π με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων δηλαδή με προσέγγιση εκατομμυριοστού. Αν χρησιμοποιήσουμε 4 ακόμη όρους, η προσέγγιση φθάνει την ακρίβεια δισεκατομμυριοστού. Ακολουθώντας το πνεύμα του Euler, χειρισθήκαμε ισότητες όπως η (6) και η (9) σαν να ήταν πεπερασμένες, εφαρμόζοντας τους κανόνες της συνηθισμένης άλγεβρας. Ο Euler έζησε σε μια εποχή ανέμελων μαθηματικών αναζητήσεων, όταν ο αβασάνιστος χειρισμός των απειροσειρών σαν πεπερασμένα αθροίσματα ήταν η συνηθισμένη πρακτική. Τα προβλήματα της σύγκλισης και του ορίου δεν ήταν ακόμη απολύτως σαφή, και έτσι οι μαθηματικοί συχνά τα αγνοούσαν. Σήμερα γνωρίζουμε ότι αυτά τα θέματα είναι κρίσιμα για όλες τις άπειρες διαδικασίες και ότι η παράβλεψη τους μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα. Αντιγράφοντας από το εξαιρετικό βιβλίο απειροστικού χαρακτηριστικές της μοναδικής ιδιοφυΐας του Euler, ελπίζουμε όμως ότι λογισμού του George F. Simmons, «αυτές οι τολμηρές αναζητήσεις είναι κανένας μελετητής δεν θα θεωρήσει ότι έχουν τη δύναμη μιας αυστηρής απόδειξης»(George Simmons,Calculus,σελ. 723)(βλ.[48],[43])

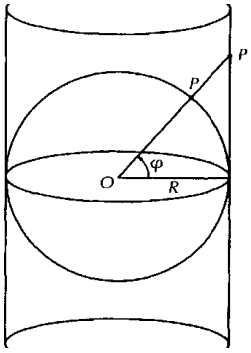
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ

Από την ουράνια ομορφιά των τύπων του Euler, ας στραφούμε τώρα σε ένα πιο γήινο θέμα: στην επιστήμη της χαρτογραφίας. Όπως όλοι γνωρίζουμε, δεν είναι δυνατόν να πιέσουμε φλούδες πορτοκαλιού πάνω σ' ένα τραπέζι χωρίς να τις σπάσουμε. Όσο κι αν προσπαθήσουμε, κάποιας μορφής παραμόρφωση θεωρείται αναπόφευκτη. Περιέργως, μόλις στα μέσα του 18ου αιώνα αυτό το γεγονός αποδείχθηκε μαθηματικά, και χρειάσθηκε η ιδιοφυΐα του Euler για να επιτευχθεί η απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα του, είναι αδύνατο να απεικονίσουμε μια σφαίρα σε ένα επίπεδο χαρτί χωρίς παραμόρφωση. Αν η Γη ήταν κύλινδρος ή κώνος, το έργο του χαρτογράφου θα γινόταν ευκολότερο. Αυτές οι επιφάνειες είναι αναπτύξιμες δηλαδή μπορούν να παρασταθούν στο επίπεδο χωρίς να υποστούν κάποια συρρίκνωση ή διαστολή, διότι, αν και καμπύλες, έχουν κατά βάση τη γεωμετρική δομή του επιπέδου. Ωστόσο, η γεωμετρική δομή της σφαίρας διαφέρει θεμελιωδώς από αυτή του επιπέδου. Συνεπώς, αδυνατούμε να σχεδιάσουμε έναν επίπεδο χάρτη της Γης που να αναπαριστά πιστά όλα της τα χαρακτηριστικά. Για να αντιμετωπίσουν τούτο το πρόβλημα, οι χαρτογράφοι επινόησαν μια μεγάλη ποικιλία χαρτογραφικών προβολών, συναρτήσεων δηλαδή με τη μαθηματική έννοια του όρου που αντιστοιχίζουν σε κάθε σημείο της σφαίρας ένα σημείο-«εικόνα» στον επίπεδο χάρτη. Η επιλογή ενός συγκεκριμένου τύπου προβολής εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε το χάρτη. Ένας χάρτης μπορεί να δείχνει τις σωστές αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων της σφαίρας (υπό κλίμακα φυσικά), άλλος να διατηρεί τις σχετικές επιφάνειες των χωρών και άλλος τη σωστή διεύθυνση ανάμεσα σε δύο σημεία. Για να διατηρήσουμε οποιοδήποτε από αυτά τα χαρακτηριστικά, πρέπει αναγκαστικά να θυσιάσουμε κάποιο άλλο. Κάθε χαρτογραφική προβολή είναι ένας συμβιβασμός μεταξύ αντικρουόμενων απαιτήσεων. (βλ.[43],[8])

Η πιο απλή απ' όλες είναι η κυλινδρική προβολή: Φανταζόμαστε τη Γη, που θεωρείται τέλεια σφαίρα ακτίνας R, να περιβάλλεται από έναν κύλινδρο εφαπτόμενο αυτής στον ισημερινό (Σχήμα 1). Φανταζόμαστε επιπλέον φωτεινές ακτίνες να εκπέμπονται από το κέντρο της προς όλες τις κατευθύνσεις. Έτσι, κάθε σημείο P της σφαίρας προβάλλεται στη «σκιά» του, P', πάνω στον κύλινδρο. Όταν ξετυλίγουμε τον κύλινδρο, έχουμε έναν επίπεδο χάρτη ολόκληρης της Γης ή μάλλον σχεδόν ολόκληρης της Γης: ο Βόρειος και ο Νότιος Πόλος, που κείνται στον άξονα του κυλίνδρου, έχουν τις εικόνες τους στο άπειρο. Είναι σαφές ότι στην κυλινδρική προβολή όλοι οι μεσημβρινοί (οι κύκλοι που ορίζουν το γεωγραφικό μήκος) αποδίδονται ως κατακόρυφες ευθείες γραμμές με ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. Οι παράλληλοι (οι κύκλοι που ορίζουν το γεωγραφικό πλάτος)

αντιστοιχίζονται σε οριζόντιες γραμμές των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις αυξάνουν με το γεωγραφικό πλάτος. Για να βρούμε τη σχέση ανάμεσα στο P και την εικόνα του P', θα εκφράσουμε τη θέση τού P με το γεωγραφικό του μήκος (το μετράμε ανατολικά ή δυτικά κατά μήκος του ισημερινού ξεκινώντας από τον πρώτο μεσημβρινό, ο οποίος διέρχεται από το Γκρήνουιτς της Αγγλίας) και το γεωγραφικό του πλάτος (το μετράμε από τον ισημερινό, προς τα βόρεια ή προς τα νότια, κατά μήκος οποιουδήποτε μεσημβρινού). Αν συμβολίσουμε το γεωγραφικό μήκος τού P με A, το γεωγραφικό πλάτος με φ και τις συντεταγμένες τού P' με x και y, θα έχουμε:

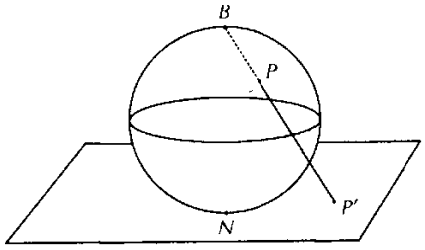
$x = R\lambda,\ y = R \tan\varphi.$ (1)



Σχήμα 1. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ, ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΗΣ ΥΔΡΟΓΕΙΟΥ.

Η κυλινδρική προβολή συγχέεται συχνά με την προβολή Mercator, με την οποία απλώς μοιάζει επιφανειακά. Ωστόσο, με εξαίρεση το γεγονός ότι χρησιμοποιούν και οι δύο ορθογώνιο πλέγμα, οι δύο προβολές στηρίζονται σε ριζικά διαφορετικές αρχές.

Μια δεύτερη προβολή, ήδη γνωστή στον Ίππαρχο τον 2ο αιώνα π.Χ., είναι η ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ. Τοποθετούμε τη σφαίρα πάνω σε ένα επίπεδο φύλλο χαρτιού, έτσι ώστε το σημείο επαφής N να είναι ο Νότιος Πόλος. Συνδέουμε κατόπιν κάθε σημείο P της σφαίρας με τον Βόρειο Πόλο, B, και προεκτείνουμε την ευθεία μέχρι να συναντήσει το επίπεδο του χάρτη στο σημείο P'. Το P' αποτελεί την εικόνα τού P πάνω στη στερεογραφική προβολή (Σχήμα 2).



Σχήμα 2 .ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΑΠΟ ΤΟΝ ΒΟΡΕΙΟ ΠΟΛΟ

Η στερεογραφική προβολή εμφανίζει όλους τους μεσημβρινούς ως ευθείες διερχόμενες από τον Νότιο Πόλο, N, ενώ οι κύκλοι που αντιστοιχούν στα γεωγραφικά πλάτη εμφανίζονται ως ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το N. Ο ισημερινός προβάλλεται σε έναν κύκλο E, τον οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε μοναδιαίο. Ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο προβάλλεται στο εξωτερικό αυτού του κύκλου, και το νότιο στο εσωτερικό του. Όσο πιο κοντά βρίσκεται ένα σημείο στον Βόρειο Πόλο τόσο πιο απομακρυσμένη είναι η εικόνα του στο χάρτη. Ένα μόνο σημείο της σφαίρας δεν απεικονίζεται στο χάρτη. Πρόκειται για τον ίδιο τον Βόρειο Πόλο: η εικόνα του βρίσκεται στο άπειρο.

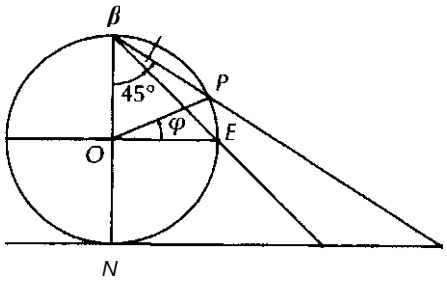
Έστω ότι η σφαίρα έχει μοναδιαία διάμετρο. Αυτό εξασφαλίζει ότι ο κύκλος e (η εικόνα του ισημερινού στο χάρτη) θα έχει μοναδιαία ακτίνα. Ας θεωρήσουμε, τώρα, ένα σημείο P πάνω στη σφαίρα, με γεωγραφικό πλάτος φ. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση της εικόνας του P' πάνω στο χάρτη. Στο Σχήμα 3 βλέπουμε μια διατομή της σφαίρας, και το E αντιπροσωπεύει ένα σημείο στον ισημερινό. Έχουμε BN = 1, γωνία OBE = 45°, γωνία EOP = φ και γωνία EBP = φ/2. Έτσι, γωνία OBP = (45° + φ/2). Άρα το P' βρίσκεται σε απόσταση NP΄=tan(45+φ/2) (2) από το σημείο N, δηλαδή από τον νότιο πόλο του χάρτη. Η ισότητα (2) μάς οδηγεί σε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Ας θεωρήσουμε δύο σημεία P και Q της σφαίρας, με το ίδιο γεωγραφικό μήκος και αντίθετο γεωγραφικό πλάτος. Για να βρούμε τη σχετική θέση των εικόνων τους στο χάρτη, αντικαθιστούμε στην ισότητα (2) το φ με -φ, και έχουμε:

$$NQ' = \tan(45^0 - \varphi/2) = \frac{1-\tan(45^0-\varphi/2)}{1+\tan(45^0-\varphi/2)} = \frac{1}{\tan(45^0+\varphi/2)} = \frac{1}{NP'}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι NP'·NQ' = 1. Δύο σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν μια τέτοια σχέση λέγονται αντίστροφα σημεία ως προς τον μοναδιαίο κύκλο. Συνεπώς, στη στερεογραφική προβολή, δύο σημεία της γήινης σφαίρας με αντίθετα γεωγραφικά πλάτη αντιστοιχούν σε δύο αντίστροφα μεταξύ τους σημεία χου χάρτη. Αυτό μας επιτρέπει να συναγάγουμε όλες τις ιδιότητες της στερεογραφικής προβολής από τη θεωρία της αντιστροφής. Για παράδειγμα, ένα από τα θεωρήματα της αντιστροφής λέει ότι η γωνία τομής δύο καμπυλών παραμένει αμετάβλητη, όταν καθεμιά από τις καμπύλεςυποστεί αντιστροφή. Από αυτό προκύπτει ότι η στερεογραφική προβολή διατηρεί τις διευθύνσεις είναι δηλαδή *σύμμορφη*. Αυτό σημαίνει ότι μικρές περιοχές της σφαίρας διατηρούν τη μορφή τους και στον επίπεδο χάρτη (από εδώ προέρχεται ο όρος σύμμορφη). Στο Σχήμα 3 βλέπουμε τη στερεογραφική προβολή του βόρειου

ημισφαιρίου. Η γήινη σφαίρα εφάπτεται του χάρτη στον Βόρειο (αντί στον Νότιο) Πόλο. Είναι φανερό ότι οι ήπειροι έχουν σχήμα παραπλήσιο με το πραγματικό τους σχήμα πάνω στην υδρόγειο.

Στα προηγούμενα ασχοληθήκαμε με τους χάρτες που έχουν κατασκευαστεί με βάση την αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή, όπου καταγράφεται η πραγματική απόσταση και διεύθυνση από ένα σταθερό σημείο προς ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της σφαίρας. Ωστόσο, οι αποστάσεις και οι διευθύνσεις μεταξύ δύο οποιονδήποτε άλλων σημείων του χάρτη δεν διατηρούνται. Επομένως, η χρησιμότητα του για τη ναυσιπλοΐα είναι περιορισμένη. Ως εκ τούτου, χρειαζόμαστε ένα χάρτη που να δείχνει τη σωστή διεύθυνση, μια διεύθυνση δηλαδή συμβιβαστή με την ένδειξη της πυξίδας, από οποιοδήποτε σημείο της γήινης σφαίρας προς οποιοδήποτε άλλο. Έως τα μέσα του 16ου αιώνα, τέτοιος χάρτης δεν υπήρχε.



ΣΧΗΜΑ 3.ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΜΕΣΩ ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗ

Φαντασθείτε ότι είστε ο κυβερνήτης ενός σκάφους που ετοιμάζεται να αποπλεύσει προς συγκεκριμένο προορισμό. Ρυθμίζετε την πυξίδα σας στην επιθυμητή κατεύθυνση, ας πούμε 45° βορειοανατολικά, και στη συνέχεια ακολουθείτε απαρέγκλιτα αυτή την ένδειξη, αγνοώντας, χάριν της συζητήσεως, οποιεσδήποτε γήινες μάζες θα μπορούσαν ενδεχομένως να βρεθούν στο δρόμο σας. Τι διαδρομή θα ακολουθήσετε; Επί χρόνια πιστευόταν ότι μια πλεύση υπό σταθερή ένδειξη της πυξίδας , γνωστή ως λοξοδρομική πλεύση ή λοξοδρομία, διαγράφει τόξο μέγιστου κύκλου . Εντούτοις, ο Πορτογάλος Pedro Nunes (ή Nonius, 1502-1578) απέδειξε ότι η λοξοδρομική πλεύση είναι στην πραγματικότητα μια ελικοειδής καμπύλη που πλησιάζει όλο και περισσότερο έναν από τους δύο πόλους, περιτυλίγεται επ' άπειρον γύρω τους, αλλά δεν τους φθάνει ποτέ.

Το πρόβλημα λοιπόν για τους χαρτογράφους του 16ου αιώνα ήταν να επινοήσουν μια χαρτογραφική προβολή στην οποία όλες οι λοξοδρομικές πλεύσεις θα αντιστοιχούσαν σε ευθείες. Ένας τέτοιος χάρτης θα έδινε στον ναυτικό τη δυνατότητα να συνδέει το σημείο εκκίνησης και το σημείο προορισμού με μια ευθεία γραμμή, να

διοπτεύει δηλαδή να μετρά τη γωνία αυτής της ευθείας με τη γραμμή του βορρά, και με τη βοήθεια της πυξίδας να ακολουθεί τούτη την πορεία στη θάλασσα. Ωστόσο, σε όλους τους χάρτες εκείνης της εποχής, μια πορεία χαραγμένη ως ευθεία στο χάρτη δεν αντιστοιχούσε στη λοξοδρομική πλεύση στη θάλασσα. Έτσι, η ναυσιπλοΐα ήταν μια εξαιρετικά περίπλοκη υπόθεση και εξαιρετικά επικίνδυνη, αφού πολύ συχνά τα πλοία δεν κατάφερναν να φθάσουν στον προορισμό τους και χάνονταν πολλές ζωές. Ένας ολλανδός χαρτογράφος έμελλε να δώσει τη λύση και να λύσει το πρόβλημα των ναυτικών.

Ο Gerardus Mercator, κατά γενική ομολογία ο πιο διάσημος χαρτογράφος στην ιστορία, γεννήθηκε με το όνομα Gerhard Kremer στο Ρουπελμόντε της Φλάνδρας (σήμερα ανήκει στο Βέλγιο, εκείνη την εποχή όμως αποτελούσε τμήμα της Ολλανδίας) στις 5 Μαρτίου 1512. Είκοσι χρόνια νωρίτερα, ο Χριστόφορος Κολόμβος είχε πραγματοποιήσει το ιστορικό του ταξίδι στον Νέο Κόσμο, και οι νέες γεωγραφικές ανακαλύψεις είχαν εξάψει τη φαντασία του νεαρού Kremer. Γράφηκε στο Πανεπιστήμιο της Λουβέν το 1530, και αμέσως μετά την αποφοίτηση του έγινε ένας από τους κορυφαίους ευρωπαίους χαρτογράφους και κατασκευαστές οργάνων. Όπως συνήθιζαν οι διανοούμενοι της εποχής, εκλατίνισε το όνομα του σε Mercator («έμπορος», μετάφραση της ολλανδικής λέξης kramer). Από τότε έμεινε γνωστός με αυτό το όνομα. Η πολλά υποσχόμενη σταδιοδρομία του Mercator κινδύνεψε κατά το 1544, όταν συνελήφθη ως αιρετικός επειδή ακολουθούσε τον προτεσταντισμό μέσα σε μια καθολική χώρα. Λίγο έλειψε μάλιστα να χάσει τη ζωή του. Κατόπιν μετανάστευσε στο γειτονικό Ντούισμπουργκ (σήμερα στη Γερμανία), όπου εγκαταστάθηκε το 1552. Παρέμεινε εκεί μέχρι το τέλος της ζωής του.

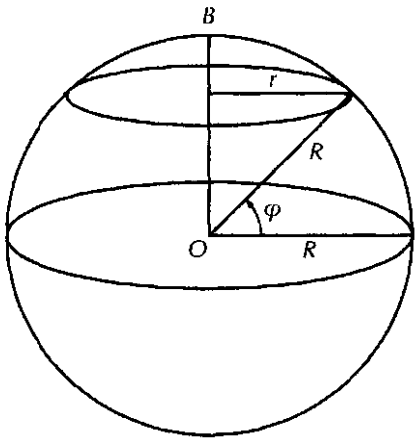
Πριν από τον Mercator, οι χαρτογράφοι διακοσμούσαν τους χάρτες τους με εντυπωσιακές μυθολογικές φιγούρες και φανταστικές χώρες. Επρόκειτο περισσότερο για έργα τέχνης παρά για αληθινές αναπαραστάσεις της Γης. Ο Mercator υπήρξε ο πρώτος που στήριξε τους χάρτες του αποκλειστικά στις πρόσφατες πληροφορίες των εξερευνητών, και με αυτό τον τρόπο μετέτρεψε τη χαρτογραφία από τέχνη σε επιστήμη. Ήταν ακόμη ο πρώτος που συμπεριέλαβε στον ίδιο τόμο μια συλλογή από διαφορετικούς χάρτες, την οποία ονόμασε «άτλαντα» προς τιμήν του μυθικού ήρωα που βαστούσε στους ώμους του τη Γη και του οποίου η εικόνα διακοσμούσε το εξώφυλλο του βιβλίου του. Αυτό το έργο δημοσιεύθηκε σε τρία μέρη· το τελευταίο κυκλοφόρησε το 1595, ένα χρόνο μετά το θάνατο του. (βλ.[43],[38])

Το 1568, ο Mercator επινόησε μια νέα χαρτογραφική προβολή που θα κάλυπτε τις ανάγκες των ναυτικών και θα μετέτρεπε τη ναυσιπλοΐα από τυχοδιωκτική και επικίνδυνη περιπέτεια σε σοβαρή επιστήμη. Ξεκινώντας, έθεσε ως οδηγούς του δύο αρχές: Πρώτον, ο χάρτης έπρεπε να αναπτυχθεί πάνω σε ορθογώνιο πλέγμα με όλους τους κύκλους του γεωγραφικού πλάτους να παριστάνονται από ισομήκη οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα στον ισημερινό, και με όλους τους μεσημβρινούς να παριστάνονται από κατακόρυφες γραμμές, κάθετες στον ισημερινό. Δεύτερον, ο χάρτης όφειλε να είναι σύμμορφος, διότι μόνο ένας τέτοιος χάρτης μπορούσε να διατηρεί την πραγματική διεύθυνση μεταξύ δύο σημείων της γήινης σφαίρας.

Πάνω στη γήινη σφαίρα, το μήκος των παράλληλων κύκλων μειώνεται καθώς μεγαλώνει το γεωγραφικό πλάτος, μέχρις ότου συρρικνωθούν σε ένα μοναδικό σημείο στους πόλους. Αντίθετα, στους χάρτες του Mercator, οι παράλληλοι κύκλοι εμφανίζονται ως οριζόντιες γραμμές ίσου μήκους. Επομένως, κάθε παράλληλος της γήινης σφαίρας παραμορφώνεται οριζόντια πάνω στο χάρτη (κατά μήκος της διεύθυνσης ανατολής-δύσης), κατά έναν παράγοντα που εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του παραλλήλου. Στο Σχήμα 4 βλέπουμε έναν κύκλο γεωγραφικού πλάτους φ. Η πραγματική περίμετρος του πάνω στη γήινη σφαίρα είναι $2\pi r=2\pi R\cos\varphi$ **,** ενώ στο χάρτη έχει μήκος $2\pi R$. Συνεπώς, ο συντελεστής παραμόρφωσης είναι $2\pi R/2\pi R\cos\varphi = \sec\varphi$. Ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής παραμόρφωσης είναι συνάρτηση του φ. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1, όσο μεγαλύτερο είναι το γεωγραφικό πλάτος τόσο μεγαλύτερος γίνεται και ο συντελεστής παραμόρφωσης. Και τώρα ο Mercator μπορούσε να αξιοποιήσει το ισχυρότερο πλεονέκτημά του:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Η sec<p για επιλεγμένα γεωγραφικά πλάτη

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	85°	87°	89°	90°
secφ	1,00	1,04	1,15	1,41	2,00	3,86	5,76	11,47	19,11	57,30	∞



Σχήμα 4.

Για να είναι ο χάρτης σύμμορφος, η παραμόρφωση των παραλλήλων στη διεύθυνση ανατολής-δύσης πρέπει να συνοδεύεται από μια ανάλογη παραμόρφωση της απόστασης ανάμεσα στους παραλλήλους. Αυτή η παραμόρφωση στη διεύθυνση βορρά-νότου θα πρέπει να αυξάνει καθώς κινούμαστε προς μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη. Με άλλα λόγια, οι μοίρες του γεωγραφικού πλάτους, που στη γήινη σφαίρα είναι ομαλά κατανεμημένες κατά μήκος κάθε μεσημβρινού, στο χάρτη θα πρέπει να αυξάνουν σταδιακά . Σε αυτή ακριβώς τη διαπίστωση στηρίζεται η κατασκευή του χάρτη. Ωστόσο, για να μπορέσει να υλοποιήσει το σχέδιο του, ο Mercator όφειλε πρώτα να προσδιορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να παραμορφώνονται οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών παραλλήλων. Η ακριβής μέθοδος του για τον υπολογισμό της παραμόρφωσης δεν είναι γνωστή και αποτελεί ακόμη και σήμερα αντικείμενο έρευνας μεταξύ των ιστορικών της χαρτογραφίας. Δεν έχει αφήσει καθόλου γραπτά αρχεία της μεθόδου του, με εξαίρεση την ακόλουθη σύντομη επεξήγηση που τυπώθηκε πάνω στο χάρτη του:

Για την κατασκευή αυτής της αναπαράστασης του κόσμου, χρειάσθηκε να απλώσουμε σε ένα επίπεδο την επιφάνεια της σφαίρας, κατά τρόπο ώστε οι θέσεις που αντιστοιχούν στις διάφορες τοποθεσίες να έχουν τις σωστές αναλογίες μεταξύ τους, τόσο ως προς την πραγματική διεύθυνση όσο και ως προς την απόσταση. Σύντομα ο Mercator συνειδητοποίησε άτι δεν μπορούσε να ανταποκριθεί και στις δύο αυτές απαιτήσεις: ο χάρτης του δεν μπορούσε να διατηρεί και τη διεύθυνση και τις αποστάσεις. Έτσι, παραιτήθηκε από τις αποστάσεις. Γι' αυτό το σκοπό, χρειάσθηκε να χρησιμοποιήσουμε νέες αναλογίες και νέα διάταξη των μεσημβρινών σε σχέση με τους παραλλήλους . Για τους λόγους αυτούς αυξήσαμε σταδιακά τις μοίρες του γεωγραφικού πλάτους όσο πλησιάζαμε προς τους πόλους κατά τρόπο ανάλογο προς την επιμήκυνση των

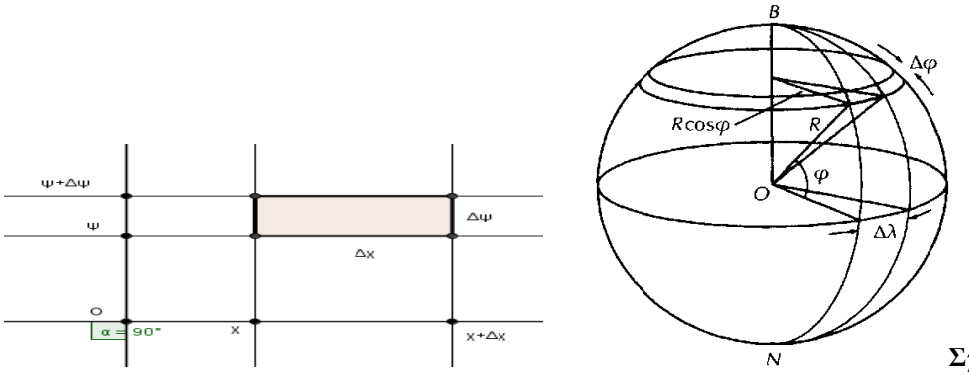
παραλλήλων σε σχέση με τον ισημερινό. Ακόμα και αυτή η ασαφής εξήγηση καθιστά απολύτως σαφές ότι ο Mercator είχε πλήρη αντίληψη των μαθηματικών αρχών που αποτελούσαν το θεωρητικό υπόβαθρο της κατασκευής του χάρτη του. Έχοντας κατασκευάσει το κατάλληλο πλέγμα, του απέμενε τώρα να το αποπληρώσει, δηλαδή να τοποθετήσει πάνω στο πλέγμα τα περιγράμματα των ηπείρων, όπως ήταν γνωστές στην εποχή του. Δημοσίευσε τον παγκόσμιο χάρτη του το 1569 με τίτλο Νέα βελτιωμένη περιγραφή των χωρών τον κόσμου, τροποποιημένη και προοριζόμενη για χρήση των ναυτιλομένων. Ήταν ένας τεράστιος χάρτης χωρισμένος σε 21 τμήματα με διαστάσεις 137×211 εκατοστά. Θεωρείται ένα από τα πιο πολύτιμα χαρτογραφικά αριστουργήματα όλων των εποχών: Σήμερα σώζονται μόνο τρία αντίγραφα του πρωτότυπου χάρτη. Ο Mercator πέθανε πλήρης ημερών στο Ντούισμπουργκ στις 2 Δεκεμβρίου 1594, έχοντας ζήσει μια ζωή που του προσέφερε φήμη και πλούτο. Ωστόσο, το πιο σημαντικό επίτευγμα του, ο ομώνυμος χάρτης του, άργησε αρκετά να γίνει αποδεκτός από τη ναυτική κοινότητα, που δεν μπορούσε να κατανοήσει την υπερβολική παραμόρφωση στο σχήμα των ηπείρων. Το γεγονός ότι ο Mercator δεν είχε εξηγήσει αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο είχε «σταδιακά αυξήσει» την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων συνέβαλε σημαντικά στη δημιουργία σύγχυσης. Ο Edward Wright (περίπου 1560-1615), άγγλος μαθηματικός και κατασκευαστής οργάνων, υπήρξε ο πρώτος ο οποίος έδωσε μια ακριβή αναφορά σχετικά με τις αρχές που αποτελούν το υπόβαθρο του χάρτη του Mercator. Σε ένα έργο με τίτλο Certaine Errors in Navigation (Ορισμένα λάθη στην πλοήγηση), που εκδόθηκε στο Λονδίνο το 1599, έγραψε:

Τα τμήματα των μεσημβρινών σε κάθε σημείο δεδομένου γεωγραφικού πλάτους πρέπει να αυξάνουν με την ίδια αναλογία που αυξάνουν και οι τέμνουσες. Προσθέτοντας συνεχώς τις τέμνουσες που αναλογούν στο γεωγραφικό πλάτος κάθε παραλλήλου στο ήδη συσσωρευμένο άθροισμα όλων των προηγούμενων τεμνουσών [...] μπορούμε να καταρτίσουμε έναν πίνακα ο οποίος θα δείχνει πραγματικά τα σημεία γεωγραφικού πλάτους στους μεσημβρινούς του ναυτικού χάρτη.Με άλλα λόγια, ο Wright χρησιμοποίησε αριθμητική μέθοδο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\varphi} \sec\theta d\theta.$$

Ας παρακολουθήσουμε τον τρόπο εργασίας του, χρησιμοποιώντας σύγχρονους συμβολισμούς. Στο Σχήμα 5 βλέπουμε ένα μικρό σφαιρικό ορθογώνιο που ορίζεται από τους κύκλους γεωγραφικού μήκους λ και λ + Δλ και τους κύκλους γεωγραφικού πλάτους

φ και φ + Δφ, όπου τα λ και φ μετρώνται σε ακτίνια. (Επειδή η επιλογή του πρώτου μεσημβρινού είναι αυθαίρετη, στο σχήμα σημειώνουμε μόνο τη διαφορά Δλ.) Οι πλευρές του ορθογωνίου έχουν μήκη (Rcosφ) και RΔφ, αντίστοιχα. Έστω ότι το σημείο P(λ, φ) της σφαίρας αντιστοιχεί στο σημείο P'(χ, y) χου χάρτη (όπου η y = 0 αντιστοιχεί στον ισημερινό).



Σχήμα 5.

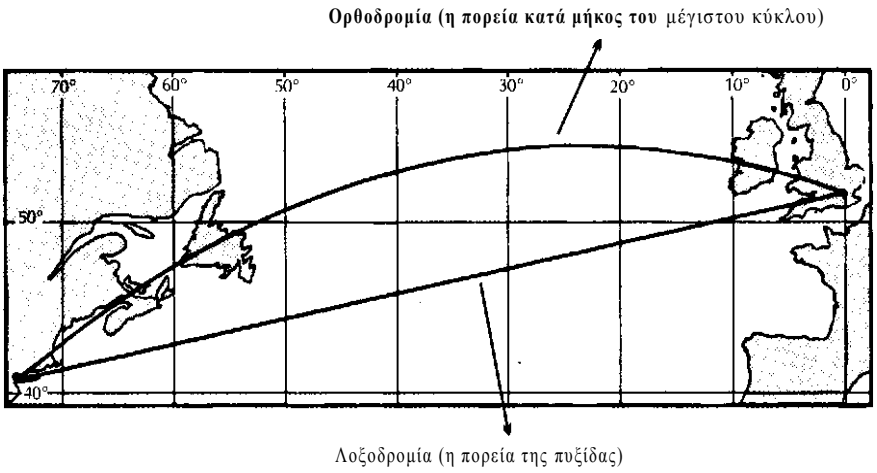
Τότε, το σφαιρικό ορθογώνιο θα απεικονισθεί σε ένα επίπεδο ορθογώνιο που καθορίζεται από παράλληλες στον άξονα των y με τετμημένες χ και χ + Δχ και από παράλληλες στον άξονα των χ με τεταγμένες y και y+ Δy, όπου Δχ = R Δλ. Τώρα, για να ικανοποιήσουμε την απαίτηση να είναι ο χάρτης σύμμορφος, θα πρέπει τα δύο ορθογώνια να είναι όμοια (γεγονός το οποίο, εν προκειμένω, σημαίνει ότι η διεύθυνση από το P(λ, φ) προς το γειτονικό σημείο Q(λ + Δλ, φ + Δφ) πρέπει να είναι η ίδια με τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τις εικόνες τους στο χάρτη). Έτσι, οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\frac{\Delta y}{R\Delta\lambda} = \frac{R\Delta\varphi}{R\cos\varphi\Delta\lambda},$$

Δηλαδή $$\Delta y = (R\sec\varphi)\Delta\varphi. \qquad (3)$$

Με σημερινή ορολογία, η ισότητα (3) είναι μια εξίσωση πεπερασμένων διαφορών. Μπορεί να λυθεί αριθμητικά με μια βήμα προς βήμα διαδικασία: Θέτουμε $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ για i= 1, 2, 3, ..., και επιλέγουμε μια σταθερή αύξηση Δφ . Αρχίζοντας από τον ισημερινό (y_0=0), αυξάνουμε το φ κατά Δφ, υπολογίζουμε το Δy_1 από την ισότητα (3), και μετά βρίσκουμε το $y_1 = y_0 + \Delta y_1$.Κατόπιν αυξάνουμε και πάλι το φ κατά Δφ και βρίσκουμε το $y_2 = y_1 + \Delta y_2$ Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο μέχρι να καλύψουμε όλο το φάσμα των γεωγραφικών πλατών που επιθυμούμε. Αυτή η αριθμητική ολοκλήρωση είναι και

επίπονη και χρονοβόρα, εκτός αν έχει κάποιος στη διάθεση του έναν ειδικά προγραμματισμένο υπολογιστή, κάτι που φυσικά δεν συνέβαινε με τον Wright. Παρ' όλα αυτά, κατόρθωσε να ολοκληρώσει το σχέδιο του, προσθέτοντας διαδοχικά τις τέμνουσες κατά διαστήματα ενός λεπτού της μοίρας. Δημοσίευσε τα αποτελέσματα του σε έναν πίνακα «μεσημβρινών μερών» για γεωγραφικά πλάτη από 0° μέχρι 75°. Έτσι, επιτέλους, η μέθοδος κατασκευής του χάρτη του Mercator έγινε γνωστή. Βέβαια, σήμερα θα γράφαμε την εξίσωση (3) ως διαφορική εξίσωση:



ΣΧΗΜΑ 6.
ΝΕΑ ΥΟΡΚΗ-ΛΟΝΔΙΝΟ: ΛΟΞΟΔΡΟΜΙΑ ΚΑΙ ΤΟΞΟ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΣΤΟ ΧΑΡΤΗ, ΤΟΥ MERCATOR

Θεωρούμε ότι τόσο το Δφ όσο και το Δy γίνονται απειροστά, και οριακά έχουμε:

$$\frac{dy}{d\varphi} = R\sec\varphi, \qquad (4)$$

της οποίας η λύση είναι:

$$y = R\int_0^{\varphi} \sec\theta d\theta \qquad (5)$$

(χρησιμοποιήσαμε το θ αντί του φ για να διακρίνουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από το άνω όριο ολοκλήρωσης). Ωστόσο, το βιβλίο του Wright εκδόθηκε κάπου εβδομήντα χρόνια πριν ο Νεύτων και ο Leibniz ανακαλύψουν το λογισμό.

Έτσι, ο Wright δεν είχε άλλη επιλογή πέρα από την αριθμητική ολοκλήρωση. Ως λόγιος, ο Wright έγραψε ένα βιβλίο που απευθυνόταν σε αναγνώστες με μαθηματική κατάρτιση. Ωστόσο, για τον απλό ναυτικό, αυτές οι θεωρητικές εξηγήσεις ήταν ελάχιστα

χρήσιμες. Γι' αυτό το λόγο, ο Wright επινόησε ένα απλό φυσικό μοντέλο που ήλπιζε ότι θα έδινε στον αμύητο αναγνώστη τη δυνατότητα να κατανοήσει την αρχή του χάρτη του

Mercator: Ας φαντασθούμε ότι τυλίγουμε τη γήινη σφαίρα μ' έναν κύλινδρο που εφάπτεται αυτής κατά μήκος του ισημερινού. Στη συνέχεια, ας φαντασθούμε τη σφαίρα να «φουσκώνει σαν ασκός», έτσι που κάθε σημείο της επιφάνειας της να κολλήσει στον κύλινδρο. Όταν ξετυλίξουμε τον κύλινδρο, έχουμε το χάρτη του Mercator.Δυστυχώς για τους μελλοντικούς ιστορικούς, χωρίς να ευθύνεται ο Wright, αυτό το περιγραφικό μοντέλο έγινε η αιτία μιας επίμονης παρανόησης: ότι ο χάρτης του Mercator προκύπτει προβάλλοντας φωτεινές ακτίνες από το κέντρο της σφαίρας προς τον κύλινδρο (στην πραγματικότητα, έτσι προκύπτει η κυλινδρική προβολή που συζητήσαμε νωρίτερα). Από τεχνικής απόψεως, η «προβολή» του Mercator δεν είναι καν προβολή, τουλάχιστον με τη γεωμετρική έννοια του όρου. Μπορεί να προκύψει μόνο από μαθηματικούς υπολογισμούς, που στη βάση τους χρησιμοποιούν απειροστικές μεθόδους και, επομένως, απειροστικό λογισμό. Ο ίδιος ο Mercator δεν χρησιμοποίησε ποτέ κύλινδρο, και η «προβολή» του , με εξαίρεση κάποιες επιφανειακές ομοιότητες, δεν έχει απολύτως καμία σχέση με την κυλινδρική προβολή. Οι μύθοι, όμως, από τη στιγμή που θα γεννηθούν είναι πολύ δύσκολο να πεθάνουν, και έτσι ακόμη και σήμερα βρίσκει κανείς λανθασμένες πληροφορίες σχετικά με το θέμα σε πολλά εγχειρίδια γεωγραφίας.

Περαιτέρω παρεξηγήσεις προκλήθηκαν από την υπερβολική παραμόρφωση των περιοχών που βρίσκονται σε μεγάλα γεωγραφικά πλάτη. Για παράδειγμα, η Γροιλανδία μοιάζει μεγαλύτερη από τη Νότια Αμερική, παρ' όλο που στην πραγματικότητα η έκταση της πρώτης είναι ίση μόλις με το ένα ένατο της έκτασης της δεύτερης. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του χάρτη δεν παριστάνει τη συντομότερη μεταξύ τους διαδρομή πάνω στη γήινη σφαίρα (εκτός αν τα σημεία βρίσκονται και τα δύο στον ισημερινό ή στον ίδιο μεσημβρινό) (βλ. Σχήμα 6). Αυτές οι «ατέλειες» έγιναν συχνά αφορμή αρνητικής κριτικής για το χάρτη του Mercator. Ο Mercator είχε συνειδητοποιήσει ότι στον ίδιο χάρτη δεν είναι δυνατόν να διατηρούνται συγχρόνως απόσταση, μορφή και διεύθυνση. Έχοντας κατά νου τις ανάγκες των πλοηγών, επέλεξε να θυσιάσει την απόσταση και τη μορφή για να διατηρήσει τη διεύθυνση.

Το βιβλίο του Wright κυκλοφόρησε το 1599, τριάντα χρόνια μετά τη δημοσίευση του νέου παγκόσμιου χάρτη από τον Mercator. Σταδιακά, η ναυτική οικογένεια άρχισε να εκτιμά τη μεγάλη χρησιμότητα του για τους πλοηγούς, και τελικά έγινε ο επίσημος χάρτης της ναυσιπλοΐας, μια θέση που κρατά μέχρι σήμερα. Όταν η NASA άρχισε το

πρόγραμμα εξερεύνησης του Διαστήματος, κατά τη δεκαετία του 1960, ένας γιγάντιος μερκατορικός χάρτης, πάνω στον οποίο σημειώνονταν οι τροχιές των δορυφόρων, τοποθετήθηκε στο κέντρο επιχειρήσεων, στο Χιούστον του Τέξας. Εξάλλου, οι πρώτοι χάρτες των δορυφόρων του Δία και του Κρόνου, βασισμένοι στις κοντινές φωτογραφίες που έστειλαν τα διαστημόπλοια PIONEER και VOYAGER, σχεδιάσθηκαν σύμφωνα με τη δική του μέθοδο.

Ας επιστρέψουμε όμως στον 17ο αιώνα, όταν το ενδιαφέρον στράφηκε προς τα μαθηματικά. Το 1614, ο Σκώτος John Napier (1550-1617) δημοσιοποίησε τους λογαρίθμους που είχε επινοήσει. Επρόκειτο για τη σημαντικότερη συμβολή στα υπολογιστικά μαθηματικά από την εποχή του Μεσαίωνα, όταν εισήχθη στην Ευρώπη το ινδοαραβικό σύστημα αρίθμησης. Λίγο αργότερα, ο Edmund Gunter (1581-1626), άγγλος μαθηματικός και κληρικός, δημοσίευσε έναν πίνακα με λογαριθμικές εφαπτόμενες (1620). Γύρω στα 1645, ο Henry Bond, καθηγητής μαθηματικών και αυθεντία στην πλοήγηση, συνέκρινε αυτό τον πίνακα με τον πίνακα των μεσημβρινών μερών του Wright και με έκπληξη διαπίστωσε ότι οι δύο πίνακες ταίριαζαν απόλυτα, εφ' όσον οι ενδείξεις στον πίνακα του Gunter γράφονταν με τη μορφή $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$. Διατύπωσε λοιπόν την εικασία ότι το $\int_0^{\varphi}\sec t dt$ είναι ίσο με $\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$ δεν ήταν όμως σε θέση να το αποδείξει. Σύντομα, το πρόβλημα του έγινε ένα από τα πιο διάσημα προβλήματα της εποχής του. Προσπάθησαν να το λύσουν ανεπιτυχώς ο John Collins, ο Nicolaus Mercator (καμιά σχέση με τον Gerhard), ο Edmond Halley (γνωστός από τον φερώνυμο κομήτη) και πολλοί άλλοι, όλοι σύγχρονοι του Νεύτωνα και βασικοί συντελεστές των εξελίξεων που οδήγησαν στην ανακάλυψη του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Τελικά, το 1668, ο James Gregory κατάφερε να αποδείξει την εικασία τού Bond. Ωστόσο, η απόδειξη του ήταν τόσο επίπονη, που ο Halley τη χαρακτήρισε γεμάτη «περιπλοκές». Έτσι, ο κλήρος έπεσε στον Isaac Barrow (1630-1677), προκάτοχο του Νεύτωνα στη λουκασιανή έδρα μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, ο οποίος έδωσε τελικά μια «κατανοητή» απόδειξη της εικασίας τού Bond (1670). Οι προσπάθειες του δείχνουν ότι εφάρμοσε πρώτος την τεχνική της διάσπασης σε απλά κλάσματα που είναι τόσο αποτελεσματική για τον υπολογισμό των αόριστων ολοκληρωμάτων.

Είμαστε πια σε θέση να γράψουμε τις συντεταγμένες (χ, y) ενός σημείου P' στο χάρτη του Mercator ως συνάρτηση του γεωγραφικού μήκους χ και του γεωγραφικού πλάτους φ

του αντίστοιχου σημείου P της γήινης σφαίρας. Η εξίσωση των διαφορών Δχ = RΔλ, που είδαμε πιο πάνω, έχει την προφανή λύση χ = Rλ, και το ολοκλήρωμα στην ισότητα (5) ισούται με $\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$.

άρα:

$$x = R\lambda, y = R\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right] \qquad (6)$$

Ωστόσο, η ιστορία μας δεν τελειώνει εδώ.Ίσως παρατηρήσατε ότι η παράσταση $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ μέσα στο λογάριθμο της ισότητας (6) είναι η ίδια με αυτή της ισότητας (2) που σχετίζεται με τη στερεογραφική προβολή. Αυτό δεν συμβαίνει τυχαία. Ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα των μαθηματικών του 18ου αιώνα ήταν η επέκταση των συνηθισμένων συναρτήσεων sinx, lnx, e^x στο σύνολο των φανταστικών, ή ακόμη και των μιγαδικών, αριθμών. Αυτή η εξέλιξη άρχισε με τον Euler και έφθασε στην αποκορύφωση της κατά τον 19ο αιώνα με την ανάπτυξη της θεωρίας συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής. Αυτή η επέκταση μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε την προβολή του Mercator ως μια σύμμορφη απεικόνιση (τόσο από μαθηματική όσο και από γεωγραφική σκοπιά) της στερεογραφικής προβολής μέσω της συνάρτησης w = lnz, όπου z και w μιγαδικές μεταβλητές. .(βλ.[43],[38])

ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. (EULER ΚΑΙ COTES)

Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη από απόπειρες υπέρβασης του φράγματος του «αδυνάτου». Πολλές τέτοιες προσπάθειες κατέληξαν σε αποτυχία: για περισσότερα από 2.000 χρόνια, οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να βρουν μια κατασκευή, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη, για να τριχοτομήσουν μια αυθαίρετη γωνία μέχρι που γύρω στα μέσα του 19ου αιώνα αποδείχθηκε ότι αυτό ήταν αδύνατο. Οι αμέτρητες προσπάθειες «τετραγωνισμού του κύκλου» της κατασκευής δηλαδή, πάλι με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου που έχει ίσο εμβαδόν με δεδομένο κύκλο αποδείχθηκαν το ίδιο μάταιες (πράγμα που δεν εμποδίζει τους ερασιτέχνες να υποβάλλουν εκατοντάδες προτεινόμενες «λύσεις» για δημοσίευση, προς απελπισία των εκδοτών μαθηματικών περιοδικών).

Ωστόσο, σημειώθηκαν και λαμπρές επιτυχίες: η είσοδος των αρνητικών αριθμών στα μαθηματικά απελευθέρωσε την αριθμητική από την ερμηνεία της αφαίρεσης ως μια ενέργεια του τύπου «βγάζω», και είχε ως συνέπεια την ενσωμάτωση στην αριθμητική μιας ολόκληρης σειράς νέων προβλημάτων από τα οικονομικά προβλήματα (πίστωση και χρέωση) μέχρι την επίλυση γραμμικών εξισώσεων στη γενική τους μορφή. Και όταν πια έπεσε το ταμπού του χειρισμού τετραγωνικών ριζών αρνητικών αριθμών τόσο βαθιά ριζωμένο στο μαθηματικό ένστικτο, άνοιξε ο δρόμος για την άλγεβρα των φανταστικών και μιγαδικών αριθμών, η οποία κορυφώθηκε με την πανίσχυρη θεωρία συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής. Η ιστορία όλων αυτών των επεκτάσεων του αριθμητικού μας συστήματος, με τα πολυπληθή στραβοπατήματα τους και τον τελικό θρίαμβο τους, έχει γραφεί αλλού. Εδώ θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την επίδραση τους στην τριγωνομετρία.(βλ.[46])

Ένα από τα πρώτα πράγματα που μαθαίνει κανείς στην τριγωνομετρία είναι ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = \sin x$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα [-1, 1]. Συνεπώς, αν προσπαθήσουμε να βρούμε μια γωνία που το ημίτονο της να είναι, ας πούμε, 2, ο υπολογιστής μας, αφού πατήσουμε το πλήκτρο ARCSIN (ή SIN"1 ή INV SIN), θα μας βγάλει ένδειξη λάθους όπως ακριβώς κάνουν οι περισσότεροι υπολογιστές αν αποπειραθούμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα τού -1. Ωστόσο, στις αρχές του 18ου αιώνα, έγιναν προσπάθειες να επεκταθεί η έννοια της συνάρτησης για φανταστικές ή ακόμα και μιγαδικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι προσπάθειες αυτές στέφθηκαν με απόλυτη επιτυχία. Μεταξύ άλλων, μας δίνουν τη δυνατότητα να λύσουμε την εξίσωση $\sin x = y$, όπου y *οποιοσδήποτε* αριθμός, πραγματικός, φανταστικός ή μιγαδικός.

Ένας από τους πρωτοπόρους σε αυτή την κατεύθυνση ήταν ο Roger Cotes (1682-1716). Το 1714 δημοσίευσε την ισότητα

$$i\varphi = \ln(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

όπου i η φανταστική μονάδα, δηλαδή η τετραγωνική ρίζα τού -1, και In ο φυσικός λογάριθμος με βάση το e. Ο τύπος περιλαμβάνεται στο μοναδικό μεγάλο έργο του, το *Harmonia mensurarum,* ένα συμπίλημα άρθρων του που κυκλοφόρησε το 1722, μετά το θάνατο του. Ο Cotes ασχολήθηκε με ευρύ φάσμα μαθηματικών και αστρονομικών προβλημάτων και επιμελήθηκε τη δεύτερη έκδοση των *Principia* του Νεύτωνα. Ο αιφνίδιος θάνατος του, σε ηλικία 34 ετών, διέκοψε πρόωρα μια πολλά υποσχόμενη

σταδιοδρομία. Ο ίδιος ο Νεύτων είχε πει γι' αυτόν ότι «Αν ο Cotes είχε ζήσει, ίσως κάτι να μαθαίναμε».

Αναμφίβολα λόγω του πρόωρου θανάτου του, δεν αποδόθηκε ποτέ στον Cotes η δέουσα τιμή για την ανακάλυψη αυτής της πρωτοποριακής ισότητας. Αντί για το δικό του, φέρει το όνομα του Euler, ο οποίος τη διατύπωσε στην εκθετική μορφή

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1)$$

Με αυτή τη μορφή περιέχεται στο κορυφαίο έργο τού Euler, το *Analysin Infinitorum* (1748), μαζί με τη συμπληρωματική ισότητα

$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi.$

Με προσθαφαίρεση των δύο παραπάνω τύπων, ο Euler κατέληξε στις εξής ισότητες για το ημίτονο και το συνημίτονο:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad (2)$$

Αυτές οι ισότητες αποτελούν τη βάση της σύγχρονης αναλυτικής τριγωνομετρίας.

Η τιμή που αποδίδεται στον Euler για την «επανανακάλυψη» του τύπου του Cotes δεν είναι αδικαιολόγητη. Ενώ ο Cotes, όπως και ο σύγχρονος του De Moivre συνέχιζαν να θεωρούν τους μιγαδικούς αριθμούς ως έναν βολικό, παρότι μυστηριώδη, τρόπο να συντομεύουν τους αλγεβρικούς υπολογισμούς, ο Euler ήταν ο πρώτος που ενσωμάτωσε πλήρως αυτούς τους αριθμούς στην άλγεβρα των συναρτήσεων. Αντιλήφθηκε ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή μιας συνάρτησης, με την προϋπόθεση ότι η εικόνα του είναι και αυτή, μιγαδικός αριθμός. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $w = \sin z$, όπου τόσο το *w* όσο και το *z* είναι μιγαδικές μεταβλητές. Αν γράψουμε $z = x + iy$, $w = u + iv$ και εργασθούμε με την υπόθεση ότι οι νόμοι της κλασικής τριγωνομετρίας εξακολουθούν να ισχύουν, θα έχουμε:

$$w = u + iv = \sin(x + iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy). \qquad (3)$$

Τι είναι όμως τα $\sin(iy)$ και $\cos(iy)$; Εργαζόμενοι και πάλι τυπικά (εφαρμόζοντας δηλαδή τους τύπους χωρίς να ασχολούμασθε με το περιεχόμενο τους), ας αντικαταστήσουμε το φ με iy στους τύπους (2):

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \quad ,$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{i(e^{y} - e^{-y})}{2i}.$$

Οι παραστάσεις $y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ και $y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$ έχουν πολλές τυπικές ομοιότητες με τις συναρτήσεις cosy και siny. Γι' αυτό και ονομάσθηκαν *υπερβολικό συνημίτονο* και *υπερβολικό ημίτονο* του y, αντίστοιχα (coshy και sinhy):

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \quad \text{και} \quad \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \qquad (4)$$

Για παράδειγμα, αν τετραγωνίσουμε και αφαιρέσουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες, θα προκύψει η ταυτότητα

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1, \qquad (5)$$

που είναι ανάλογη με τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ (παρατηρήστε, όμως, ότι τώρα έχουμε αφαίρεση αντί για πρόσθεση). Επιπλέον:

$$\cosh 0 = 1, \ \sinh 0 = 0,$$

$$\cosh(-y) = \cosh y, \ \sinh(-y) = -\sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$d(\cosh y)/dy = \sinh y, \qquad d(\sinh y)/dy = \cosh y.$$

Δηλαδή, οι πιο γνωστοί τριγωνομετρικοί τύποι έχουν το υπερβολικό τους ανάλογο, με μια ενδεχόμενη αλλαγή πρόσημου σε ορισμένες περιπτώσεις. Ένας πρακτικός κανόνας για την απομνημόνευση τύπων που αφορούν υπερβολικές συναρτήσεις, και έχουν τον ανάλογο τους στις τριγωνομετρικές, είναι ο λεγόμενος κανόνας του Osborn: Όπου σε έναν τριγωνομετρικό τύπο υπάρχει γινόμενο από άρτιο πλήθος ημίτονων, τότε στον αντίστοιχο υπερβολικό αλλάζουμε το πρόσημο μπροστά από το γινόμενο. Ο κανόνας επεκτείνεται και στην περίπτωση που το ημίτονο είναι «κρυμμένο», όπως όταν υπάρχει εφαπτομένη (ημίτονο διά συνημίτονο), συντέμνουσα (1 διά ημίτονο), κ.λπ. Έτσι, από τον τύπο $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ παίρνουμε τον $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$, και από τον $\tan 2x = 2\tan x/(1 - \tan^2 x)$ παίρνουμε τον $\tanh 2x = 2\tanh x/(1 + \tanh^2 x)$.

Γράφουμε τώρα την ισότητα (3) με τη μορφή

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \qquad (6)$$

όπου και πάλι $z = x + iy$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να βρούμε έναν τύπο για το cosz:

$$\cos z = \cos x \cosh y + i \cos x \sinh y, \qquad (7)$$

Ας υπολογίσουμε, για παράδειγμα, το ημίτονο του μιγαδικού αριθμού z= 3 + 4i. Θεωρούμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι εκφρασμένοι σε ακτίνια, και έχουμε: sin3≃ 0,141, cosh4≃27,308, cos3≃-0,990 και sinh4≃27,290 (όλοι οι αριθμοί με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων). Επομένως, sinz=sin3cosh4 + icos3sinh4 ≃3,854 - 27,017i.

Φυσικά, υπάρχει ακόμη ένα σοβαρό σημείο που παραμένει αδιευκρίνιστο: το αν οι συνηθισμένοι κανόνες της άλγεβρας και της τριγωνομετρίας των πραγματικών αριθμών εξακολουθούν να ισχύουν για τους μιγαδικούς. Δεν υπάρχει καμιά εκ των προτέρων εγγύηση πως ισχύει κάτι τέτοιο. Συχνά οι μαθηματικοί κανόνες παύουν να ισχύουν όταν επεκτείνουμε το πεδίο εφαρμογής τους: Επί παραδείγματι, ο τύπος $\sqrt{a}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ δεν γενικεύεται για α , β αρνητικούς. Ειδάλλως θα είχαμε $i^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$, αντί του σωστού -1. Ωστόσο, αυτές οι «λεπτομέρειες» δεν εμπόδισαν τον Euler να συλλάβει την πρωτότυπη ιδέα του: Ζούσε σε μια εποχή όπου ο αυθόρμητος χειρισμός των παραστάσεων ήταν ακόμη αποδεκτός, και το εκμεταλλεύθηκε στο έπακρο. Έδειχνε απλώς εμπιστοσύνη στους τύπους, και τις περισσότερες φορές είχε δίκιο. Οι τολμηρές και επινοητικές εξερευνήσεις του κατέληξαν σε πολυάριθμες νέες σχέσεις, των οποίων η αυστηρή απόδειξη θα χρειαζόταν να περιμένει μερικές ακόμη γενιές.

Φυσικά, η εκδήλωση πίστης δεν είναι πάντοτε αξιόπιστος οδηγός στην επιστήμη και ιδιαίτερα στα μαθηματικά. Η θεωρία συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, γνωστή απλώς ως *Θεωρία συναρτήσεων,* δημιουργήθηκε εν μέρει με στόχο να θεμελιώσει αυστηρά τις ιδέες του Euler. Το επιτυγχάνει βασικά «αντιστρέφοντας τους ρόλους». Ορίζουμε μια συνάρτηση w = f(z) με τέτοιον τρόπο ώστε οι ιδιότητες της αντίστοιχης πραγματικής συνάρτησης y = f(x) να διατηρούνται όταν αντικαταστήσουμε τις πραγματικές μεταβλητές x και y με τις αντίστοιχες μιγαδικές z και w**.** Επιπλέον, φροντίζουμε να έχουμε πάντοτε τη δυνατότητα να ανακτήσουμε την αρχική συνάρτηση f(x) ως ειδική περίπτωση της «νέας» συνάρτησης όταν ο μιγαδικός z ισούται με τον πραγματικό x (δηλαδή όταν z= x + 0i).

Ας χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για να εξηγήσουμε τις συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες (6) και (7) ως ορισμούς για το sinz και το cosz, αντίστοιχα, εύκολα δείχνουμε ότι $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, ότι είναι και οι δύο περιοδικές με περίοδο 2π (δηλαδή sin(z + 2π) = sinz για κάθε $z \in C$, και το ίδιο για το cosz) και ότι οι συνηθισμένοι τύποι του αθροίσματος εξακολουθούν να ισχύουν. Υπό

ορισμένες προϋποθέσεις, μπορούμε ακόμη και να παραγωγίσουμε μια μιγαδική συνάρτηση f(z) και να βρούμε την ίδια παράγωγο που θα βρίσκαμε αν είχαμε παραγωγίσει την αντίστοιχη πραγματική συνάρτηση y=f(x)**.** Στην περίπτωση μας, έχουμε d(sinz)/dz = cosz και d(cosz)/dz = -sinz, ακριβώς όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων. Ωστόσο, θα αναρωτηθεί κανείς, αν η επέκταση μιας πραγματικής συνάρτησης στο σύνολο των μιγαδικών απλώς αναπαράγει τις παλιές ιδιότητες, γιατί να μπούμε σ' αυτό τον κόπο; Πράγματι, κάτι τέτοιο θα ήταν ανώφελο αν η επέκταση δεν προίκιζε τη συνάρτηση με μερικές νέες ιδιότητες που ισχύουν αποκλειστικά στο σύνολο των μιγαδικών, η σημαντικότερη από τις οποίες είναι η έννοια της *απεικόνισης* από το ένα επίπεδο στο άλλο. Πρώτα, όμως, πρέπει να επανεξετάσουμε την έννοια της συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής. Μια πραγματική συνάρτηση $y = f(x)$ αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό x του πεδίου ορισμού της (το «αρχέτυπο» ή «ανεξάρτητη μεταβλητή») σε έναν και μόνο πραγματικό αριθμό y (την «εικόνα» ή «εξαρτημένη μεταβλητή») στο πεδίο τιμών της. Πρόκειται, λοιπόν, για μια «απεικόνιση» από τον άξονα των x στον άξονα των y. Μια κατάλληλη μέθοδος «εικονογράφησης» αυτής της συνάρτησης είναι η γραφική της παράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο μια «εικονογράφηση» που μας επιτρέπει, κυριολεκτικά, να δούμε τον τρόπο με τον οποίο οι δύο μεταβλητές εξαρτώνται η μία από την άλλη. Ωστόσο, αν προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε αυτή την ιδέα στις μιγαδικές μεταβλητές δηλαδή να αντικαταστήσουμε την πραγματική συνάρτηση $y = f(x)$ με τη μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$, συναντάμε αμέσως δυσκολίες. Η γραφική παράσταση ενός μιγαδικού αριθμού z=x+iy απαιτεί ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων μία συντεταγμένη για το πραγματικό μέρος x και μία για το φανταστικό μέρος y. Τώρα όμως έχουμε *δυο* μιγαδικές μεταβλητές, το z και το w, και η καθεμιά απαιτεί το δικό της δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της $w = f(z)$ με τον ίδιο τρόπο που σχεδιάζουμε την $y = f(x)$. Για να την περιγράψουμε γεωμετρικά, καταφεύγουμε στο να τη θεωρήσουμε ως απεικόνιση από το ένα επίπεδο στο άλλο.Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη συνάρτηση $w=z^2$, όπου $z= x+iy$ και $w=u+ iv$. Θα έχουμε:

$$w = u + iv = (x+ iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i.$$

Εξισώνοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος, έχουμε:

$$u = x^2 - y^2 \text{ και } v = 2xy. \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (8) φαίνεται ότι τόσο το u όσο και το v είναι συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών, x και y. Ας ονομάσουμε το επίπεδο των x, y ως «επίπεδο z»

και, αντίστοιχα, το επίπεδο των u, v ως «επίπεδο w». Η συνάρτηση $w=z^2$ αντιστοιχίζει το κάθε σημείο P(x, y) του επιπέδου z στο αντίστοιχο σημείο P'(u, v), εικόνα τού P στο επίπεδο w. Για παράδειγμα, το P(3, 4) αντιστοιχίζεται στο P'(-7, 24), όπως προκύπτει από την ισότητα $(3 + 4i)^2 = -7 + 24i$. Ας φαντασθούμε τώρα ότι το P διαγράφει κάποια καμπύλη του επιπέδου *z*. Τότε το P' θα διαγράφει την εικόνα της καμπύλης στο επίπεδο w. Για παράδειγμα, αν το P κινείται κατά μήκος της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = \kappa$ (σταθερό), το P' θα κινείται κατά μήκος της καμπύλης $u = \kappa$, η οποία είναι μια κατακόρυφη (παράλληλη στον άξονα των v) ευθεία του επιπέδου w . Ομοίως, αν το P κινείται κατά μήκος της ισοσκελούς υπερβολής $2xy = \lambda$ (σταθερό), το P' θα διαγράφει την οριζόντια (παράλληλη στον άξονα των u) ευθεία $v = \lambda$. Δίνοντας στις σταθερές κ και λ διάφορες τιμές, δημιουργούμε δύο οικογένειες υπερβολών του επιπέδου *z*. Οι εικόνες τους δημιουργούν ένα ορθογώνιο πλέγμα στο επίπεδο w (Σχήμα 6).

Ένα από τα κομψότερα αποτελέσματα της θεωρίας συναρτήσεων λέει ότι η απεικόνιση που ορίζεται από μια συνάρτηση w = f(z) είναι *σύμμορφη* (διατηρεί τις διευθύνσεις) σε όλα τα σημεία z όπου η παράγωγος της δεν είναι 0. Αυτό σημαίνει ότι, αν δύο καμπύλες του επιπέδου ζ τέμνονται υπό κάποια γωνία (τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες τους στο σημείο επαφής), οι εικόνες τους στο επίπεδο w θα τέμνονται υπό την ίδια γωνία, με την προϋπόθεση ότι η παράγωγος της f(z) υπάρχει και δεν ισούται με μηδέν στο σημείο τομής. Αυτό καθίσταται σαφές στην περίπτωση της $w = z^2$. Οι δύο οικογένειες των υπερβολών, $x^2 - y^2 = \kappa$ και $2xy = \lambda$, είναι *ορθογώνιες* δηλαδή κάθε υπερβολή της μιας οικογένειας τέμνεται με κάθε υπερβολή της άλλης κατά ορθή γωνία όπως ακριβώς και οι εικόνες τους στο επίπεδο *w,* που είναι κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες, αντίστοιχα. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, παραγωγίζοντας πεπλεγμένα, για τις υπερβολές της πρώτης οικογένειας ισχύει y' = x/y, ενώ για της δεύτερης ισχύει y = -y/x, οπότε οι συντελεστές διευθύνσεως έχουν γινόμενο -1. Η απεικόνιση που ορίζεται από τη συνάρτηση *w* = sinz μπορεί να διερευνηθεί με τον ίδιο τρόπο. Αρχίζουμε με τις οριζόντιες γραμμές y = c (σταθερό) του επιπέδου *z*. Από τις ισότητες (6), έχουμε:

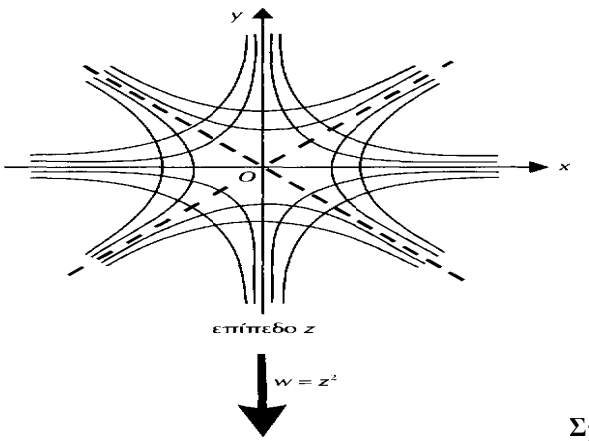
$$u = \sin x \cosh c, \quad v = \cos x \sinh c. \qquad (9)$$

Οι σχέσεις (9) μπορούν να θεωρηθούν ως ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων μιας καμπύλης του επιπέδου w, με παράμετρο το x. Για να δημιουργήσουμε την καρτεσιανή εξίσωση αυτής της καμπύλης, πρέπει να απαλείψουμε το *x* μεταξύ των δύο εξισώσεων. Αυτό μπορεί να γίνει αν διαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση με coshc, και τη δεύτερη με

sinhc, τετραγωνίσουμε και προσθέσουμε κατά μέλη. Χρησιμοποιώντας και την ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, παίρνουμε:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \qquad (10)$$

που είναι της μορφής $u^2/\alpha^2+v^2/\beta^2=1$, παριστάνει δηλαδή μια έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων του επιπέδου *w,* κύριο ημιάξονα μήκους α = coshc και δευτερεύοντα ημιάξονα μήκους β = |sinhc| (από τις ισότητες (4) προκύπτει ότι coshy > sinhy για κάθε y, επομένως ο κύριος άξονας της έλλειψης θα είναι πάντοτε ο άξονας των u).(βλ.[46])



Σχήμα 6.

	v				
			0		u

Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι απαιτούνται δύο ευθείες, οι $y=\pm c$, για να παραγάγουν ολόκληρη την έλλειψη: το άνω ήμισυ αντιστοιχεί στο $y = c$ (όπου c > 0), και το κάτω στο $y = -c$ (ο ευκολότερος τρόπος να το διαπιστώσει κανείς είναι από τις παραμετρικές εξισώσεις (9)). Από την αναλυτική γεωμετρία, γνωρίζουμε ότι οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στα σημεία $(\pm f, 0)$, όπου $f^2 = \alpha^2-\beta^2$. Στην περίπτωση μας, όμως, $\alpha^2-\beta^2 = \cosh^2 c - \sinh^2 c = 1$. Επομένως, f = ±1. Άρα, για τις διάφορες τιμές του c, έχουμε μια οικογένεια ελλείψεων με κοινές εστίες τα σημεία (±1, 0), ανεξαρτήτως της τιμής τού c. Καθώς το c → 0, έχουμε coshc → 1 και sinhc → 0. Συνεπώς, οι ελλείψεις «στενεύουν» σταδιακά έως την εκφυλισμένη μορφή του ευθύγραμμου τμήματος $-1 < u < 1$ κατά μήκος του άξονα των *u*. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 7.

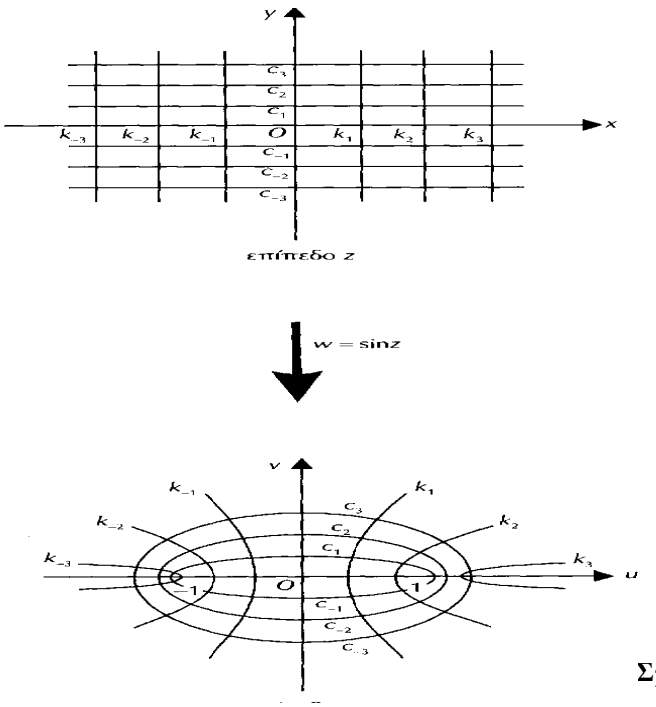
Ας ασχοληθούμε τώρα με τις κατακόρυφες γραμμές $x = k$ (σταθερό) του επιπέδου *z*. Οι σχέσεις (9) μας δίνουν:

u = sinkcoshy, v= cosksinhy. (11)

Θα απαλείψουμε τώρα την παράμετρο y διαιρώντας την πρώτη εξίσωση με *sink*, τη δεύτερη με *cosk*, τετραγωνίζοντας και αφαιρώντας. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, παίρνουμε:

$$\frac{u^2}{\sin^2 k} - \frac{v^2}{\cos^2 k} = 1 \ , \qquad (12)$$

που είναι της μορφής $u^2/\alpha^2 - v^2/\beta^2 = 1$, παριστάνει δηλαδή μια υπερβολή με κέντρο την αρχή των αξόνων του επιπέδου w, κύριο ημιάξονα μήκους α = |sink| και συζυγή ημιάξονα μήκουςβ = |cosk|. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες y = ±[(cosk)/(sink)lx = ±(cotk)x**.** Σημειώστε ότι, όπως στις ελλείψεις, απαιτείται ένα *ζεύγος* ευθειών, οι $x = \pm k$**,** για να παραχθεί ολόκληρη η υπερβολή. Ο αριστερός κλάδος αντιστοιχεί στη $x = -k$ $(k > 0)$ και ο δεξιός στη $x = k$. Οι εστίες είναι τα σημεία $(\pm f, 0)$, όπου $f^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sin^2 k + \cos^2 k = 1$. Επομένως, για τις διάφορες τιμές τού k παράγεται μια οικογένεια υπερβολών, που όλες τους έχουν εστίες στα σημεία (±1, 0) (Σχήμα 7). Όταν το $k \to 0$, οι υπερβολές «ανοίγουν», και για k=0 (που αντιστοιχεί στον άξονα των x του επιπέδου z*)* έχουμε την εκφυλισμένη μορφή $u = 0$ (που αντιστοιχεί στον άξονα των υ του επιπέδου w*).* Από την άλλη, όταν το $|k|$ *αυξάνει,* οι υπερβολές «στενεύουν» και καταλήγουν στις δύο ημιευθείες $u > 1$ και $u < -1$, με $v = 0$, για $k = \pm\pi/2$. Παρατηρούμε ακόμη ότι οι τιμές k και $k + \pi$ δίνουν την ίδια τιμή στο $\sin^2 k$ και το $\cos^2 k$, άρα την ίδια υπερβολή. Αυτό απλώς υποδηλώνει ότι η απεικόνιση δεν είναι 1-1, πράγμα που ήδη γνωρίζουμε λόγω της περιοδικότητας του sinz. Τέλος, οι ελλείψεις και οι υπερβολές σχηματίζουν ορθογώνιες οικογένειες, όπως προκύπτει από τη σύμμορφη ιδιότητα των μιγαδικών συναρτήσεων. (βλ.[46])



Σχήμα 7.

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $w = e^z$. Βεβαίως, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε με σαφήνεια τι σημαίνει e^z. Ξεκινάμε λοιπόν γράφοντας $z=x+iy$ και εργαζόμασθε εφαρμόζοντας τους κανόνες της άλγεβρας, όπως αυτοί ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Όμως $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, άρα:

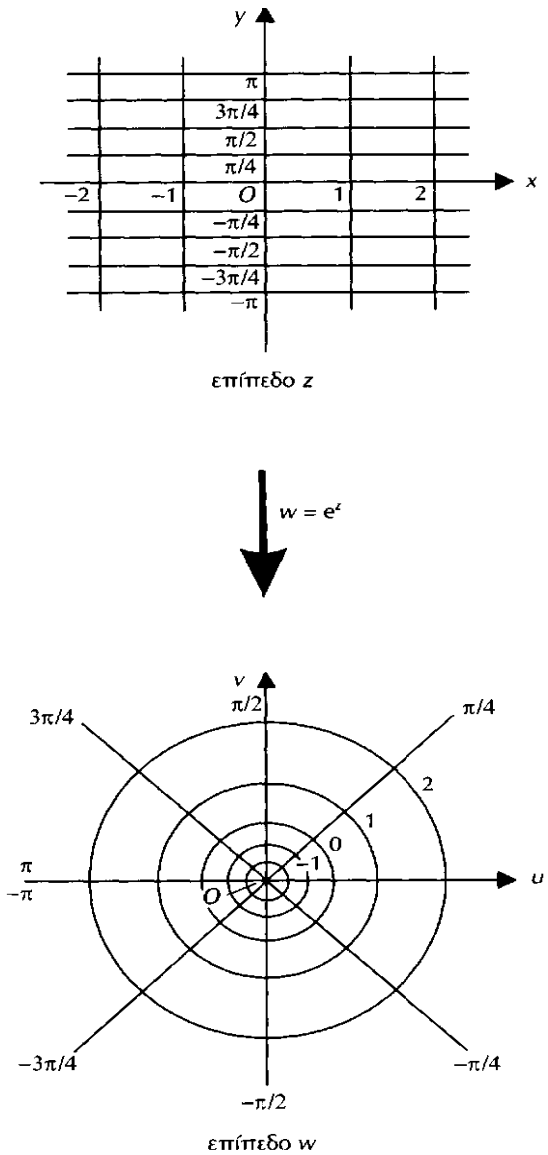
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (13)$$

Θεωρούμε τώρα την ισότητα (13) ως ορισμό του e^z. Ας σημειώσουμε πρώτα πρώτα ότι η συνάρτηση δεν είναι 1-1: Όταν αυξάνουμε το y κατά 2π, η τιμή τού e^z δεν επηρεάζεται. Δηλαδή, $e^{z+2\pi i} = e^z$. Έτσι έχουμε μια φανταστική περίοδο $2\pi i$. Αυτό φυσικά αποτελεί μια σημαντική διαφοροποίηση από την πραγματική συνάρτηση e^x.

Θέτοντας $w = e^z = u + iv$, από την ισότητα (13) προκύπτει ότι

$$u = e^x\cos y, \quad v = e^x\sin y. \qquad (14)$$

Θέτοντας $y=c$ (σταθερό) σ' αυτές τις εξισώσεις και απαλείφοντας την παράμετρο x, έχουμε $v=(\tan c)u$, που είναι η εξίσωση μιας ημιευθείας του επιπέδου w με αρχή το O και κλίση $\tan c$. Θέτοντας $x=k$ (σταθερό) και απαλείφοντας το y, έχουμε $u^2 + v^2 = e^2k$, που παριστάνει τον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα e^k .



Σχήμα 8.

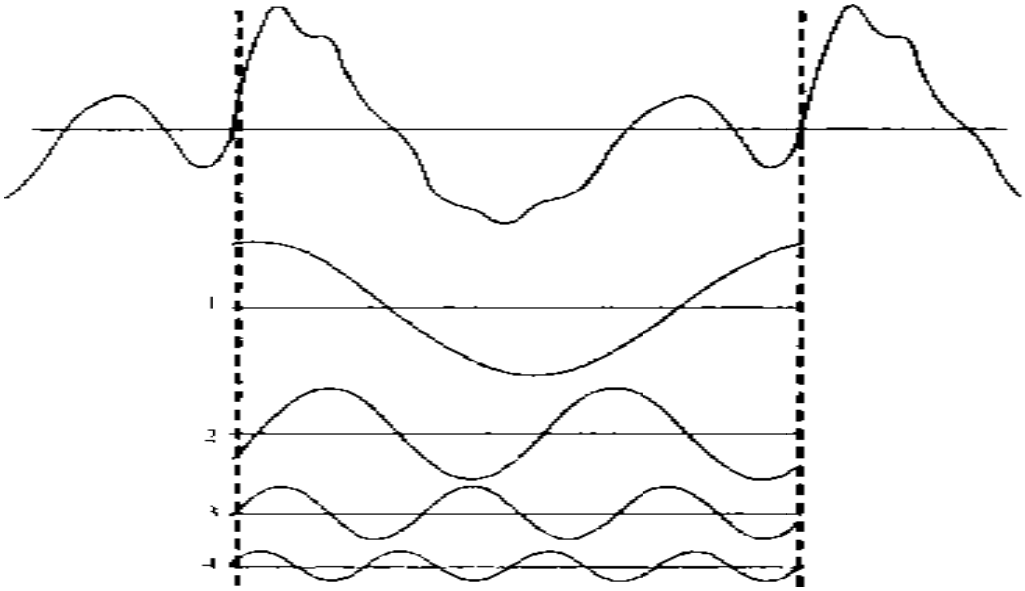
Καθώς μάλιστα όλες οι απεικονίσεις που χρησιμοποιούνται είναι σύμμορφες, το ίδιο θα συμβαίνει και με τη σύνθεση τους. Ας θυμηθούμε ότι αυτός ήταν και ο αρχικός στόχος που οδήγησε τον Mercator στην ονομαστή προβολή του, να επιτύχει έναν σύμμορφο (δηλαδή που να διατηρεί τις διευθύνσεις) παγκόσμιο χάρτη. .(βλ.[43],[38])

Ο FOURIER ΚΑΙ Η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Μια πρόσθετη, πολύ σημαντική, συνδρομή της Αναλυτικής Τριγωνομετρίας είναι οι τριγωνομετρικές σειρές Fourier (1822 μ.Χ.). Υπο κάποιες συνθήκες (βλέπε Παράρτημα), μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε μια σειρά ημίτονων και συνημίτονων, δηλαδή :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \sin(\nu x)$$

όπου οι συντελεστές α_0, α_ν και β_ν προκύπτουν από κάποια ολοκληρώματα της f(x).



Σχήμα1.

Στο άνω μέρος έχουμε την καμπύλη μιας συναρτήσεως, που μεταβάλλεται περιοδικώς (με κυκλική συχνότητα ω). Η συνάρτηση αυτή αναλύεται σε άθροισμα απλών ημιτονοειδών συναρτήσεων (1,2,3 κ.λπ. στο κάτω μέρος), που έχουν αντιστοίχως συχνότητες ω, 2ω, 3ω κ.λπ.

Η τριγωνομετρία έχει διανύσει πολύ δρόμο από την εποχή που πρωτοεπινοήθηκε, εδώ και περισσότερα από 2.000 χρόνια. Ωστόσο, τρία είναι τα σημαντικότερα ορόσημα τα οποία καθόρισαν θεμελιωδώς την πορεία του αντικειμένου: Ο *πίνακας χορδών* του Πτολεμαίου, που ανήγαγε την τριγωνομετρία σε μια πρακτική, υπολογιστική επιστήμη το *θεώρημα του De Moivre* και ο *τύπος του Euler,* $e^{ix}=\cos x + i\sin x$, που ενσωμάτωσε την τριγωνομετρία στην άλγεβρα και την ανάλυση και τέλος, το θεώρημα του Fourier.(βλ.[61],[46])

Ο Jean Baptiste Joseph Fourier γεννήθηκε στην Ωσέρ της κεντρικής Γαλλίας στις 21 Μαρτίου 1768. Σε ηλικία 9 ετών έχασε και τους δύο γονείς του. Με τη μεσολάβηση κάποιων οικογενειακών φίλων, ο Fourier έγινε δεκτός σε μια στρατιωτική σχολή η οποία ανήκε στους μοναχούς του τάγματος των Βενεδικτίνων. Εκεί, από πολύ νωρίς φάνηκε το

ταλέντο του στα μαθηματικά. Η Γαλλία άλλωστε έχει μακρά παράδοση κορυφαίων επιστημόνων που υπηρετούσαν στο στρατό: Ο Καρτέσιος (Rene Descartes)(1596-1650), ο στρατιώτης-φιλόσοφος ο οποίος ανακάλυψε την αναλυτική γεωμετρία. Ο Gaspard Monge (1746-1818), ο πατέρας της παραστατικής γεωμετρίας, που το 1792 έγινε υπουργός ναυτικών. Ο Jean Victor Poncelet (1788-1867), ο οποίος έγραψε τη μεγάλη του πραγματεία περί προβολικής γεωμετρίας ενόσω ήταν αιχμάλωτος πολέμου μετά την υποχώρηση του Ναπολέοντα από τη Μόσχα, το 1812. Και οι δύο Carnot, ο γεωμέτρης Lazar Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), που έγινε ένας από τους στρατιωτικούς η-γέτες της Γαλλίας, και ο γιος του, ο φυσικός Nicolas Leonard Sadi Carnot (1796-1832), ο οποίος άρχισε την καριέρα του ως στρατιωτικός μηχανικός και συνέχισε θέτοντας τα θεμέλια της θερμοδυναμικής. Ο νεαρός Fourier ήθελε να ακολουθήσει την παράδοση και να γίνει αξιωματικός του πυροβολικού. Δεν ανήκε όμως στην κατάλληλη κοινωνική τάξη (ο πατέρας του ήταν ράφτης), και έτσι το μόνο που κατάφερε να κερδίσει ήταν μια θέση καθηγητή μαθηματικών στην τοπική στρατιωτική σχολή. Αυτό, ωστόσο, δεν τον εμπόδισε από το να αναμειχθεί στη δημόσια ζωή. Υποστήριξε ενεργά τη Γαλλική Επανάσταση του 1789. Αργότερα συνελήφθη επειδή υπερασπίσθηκε τα θύματα της περιόδου της τρομοκρατίας, γλυτώνοντας από την γκιλοτίνα την τελευταία στιγμή. Τέλος, ο Fourier ανταμείφθηκε για τις δραστηριότητες του, όταν το 1795 του δόθηκε έδρα στην περίφημη Ecole Polytechnique των Παρισίων, όπου δίδασκαν ακόμη ο Lagrange και ο Monge. Το 1798, ο μετέπειτα αυτοκράτορας Ναπολέων Βοναπάρτης ξεκίνησε τη μεγάλη του στρατιωτική εκστρατεία στην Αίγυπτο. Άνθρωπος με ευρύτατα ενδιαφέροντα για οτιδήποτε σχετιζόταν με τις επιστήμες και τις τέχνες, ο Ναπολέων κάλεσε αρκετούς διαπρεπείς λογίους να τον συνοδεύσουν μεταξύ άλλων, τον Monge και τον Fourier. Ο Fourier διορίσθηκε διοικητής της νότιας Αιγύπτου, και με αυτή την ιδιότητα οργάνωσε τα εργαστήρια των γαλλικών δυνάμεων κατοχής. Μετά την ήττα των Γάλλων από τα αγγλικά στρατεύματα το 1801, επέστρεψε στη Γαλλία και έγινε νομάρχης στην περιοχή της Γκρενόμπλ. Μεταξύ άλλων διοικητικών καθηκόντων, ανέλαβε και την επιστασία της οδοποιίας και των αποστραγγιστικών έργων, καθήκοντα στα οποία ανταποκρίθηκε επιτυχώς. Και σαν να μην είχε αρκετές ασχολίες, διορίσθηκε επιπλέον και γραμματέας του Ινστιτούτου της Αιγύπτου. Το 1809 ολοκλήρωσε ένα σημαντικό έργο σχετικό με την αρχαία Αίγυπτο, το Preface Historique (Ιστορικός πρόλογος*)*. Πιο συγκεκριμένα, υπό την εποπτεία του Fourier εκδόθηκε από το Ινστιτούτο της Αιγύπτου το έργο Description de Egypte (Περιγραφή της Αιγύπτου) όπου δημοσιεύθηκε το υλικό που είχε συγκεντρωθεί

κατά τη διάρκεια της αιγυπτιακής εκστρατείας. Ο ίδιος έγραψε τον ιστορικό πρόλογο του έργου.

Ο Fourier, παράλληλα με τα διοικητικά του καθήκοντα, καταγινόταν και με τη μαθηματική έρευνα. Εργαζόταν πάνω σε δύο φαινομενικά άσχετα μεταξύ τους πεδία: τη θεωρία των εξισώσεων και τη μαθηματική φυσική. Σε ηλικία μόλις 16 ετών, ανακάλυψε μια νέα απόδειξη του κανόνα των πρόσημων του Καρτέσιου για τον προσδιορισμό του πλήθους θετικών και αρνητικών ριζών ενός πολυωνύμου. Η δική του απόδειξη είναι αυτή που συναντάμε στα σύγχρονα εγχειρίδια άλγεβρας. Επιπλέον, υπήρξε πρωτοπόρος στην ανάλυση διαστάσεων δηλαδή τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ φυσικών μεγεθών με βάση τις διαστάσεις τους. Τέλος, άρχισε να γράφει ένα βιβλίο με τίτλο *Analyse des equations determinees* (Ανάλυση προσδιορισμένων εξισώσεων), που αποτελούσε τον προάγγελο του γραμμικού προγραμματισμού. Δυστυχώς, ο Fourier πέθανε πριν ολοκληρώσει το έργο (εκδόθηκε τελικά το 1831, με επιμέλεια του φίλου του Louis Marie Henri Navier).

Ωστόσο, η μεγαλύτερη προσφορά του Fourier εντοπίζεται στον τομέα της μαθηματικής φυσικής. Ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για τον τρόπο με τον οποίο η θερμότητα ρέει από μια περιοχή υψηλής θερμοκρασίας σε περιοχή χαμηλότερης θερμοκρασίας. Ο Νεύτων είχε ήδη ασχοληθεί με το θέμα και είχε βρει ότι ο ρυθμός πτώσης της θερμοκρασίας ενός αντικειμένου είναι ανάλογος της διαφοράς μεταξύ της θερμοκρασίας του και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος. Εντούτοις, ο νόμος της ψύξεως του Νεύτωνα περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας μόνο ως προς το χρόνο και όχι ως προς το χώρο, δηλαδή την κλίση. Αυτή η τελευταία ποσότητα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες: τη θερμική αγωγιμότητα του αντικειμένου, το γεωμετρικό του σχήμα και την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στο σύνορο του. Για να μελετηθεί, πρέπει να καταφύγουμε στα αναλυτικά εργαλεία του συνεχούς, και ειδικότερα στις μερικές διαφορικές εξισώσεις . Ο Fourier απέδειξε ότι, για να λυθεί μια τέτοια εξίσωση, πρέπει να εκφράσουμε την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας ως άθροισμα άπειρων ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών προσθετέων δηλαδή ως τριγωνομετρική σειρά ή σειρά Fourier. Ο Fourier άρχισε να εργάζεται πάνω στο θέμα από το 1807, και αργότερα γενίκευσε τη θεωρία του στο σημαντικότερο έργο του, το *Theorie analytique de la chaleur* (Αναλυτική θεωρία της θερμότητας-1822), που έγινε πρότυπο για τις περισσότερες πραγματείες μαθηματικής φυσικής του 19ου αιώνα.

Ο Fourier πέθανε με τραγικό τρόπο, πέφτοντας από μια σκάλα, στις 16 Μαΐου 1830. Σώζονται ελάχιστες προσωπογραφίες του. Μια προτομή του, που

κατασκευάσθηκε το 1831, καταστράφηκε κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Οι Γερμανοί κατακτητές έλιωσαν μια δεύτερη προτομή του, που είχε τοποθετηθεί στη γενέτειρα του το 1849, για να χρησιμοποιήσουν το μέταλλο στην πολεμική τους βιομηχανία. Ευτυχώς, ο δήμαρχος της Ωσέρ αντιλήφθηκε εγκαίρως την επερχόμενη καταστροφή και κατόρθωσε να διασώσει δύο ανάγλυφα της προτομής, τα οποία ευτυχώς υπάρχουν μέχρι σήμερα. Το 1844, ο αρχαιολόγος Jacques Joseph Champollion-Figaec έγραψε τη βιογραφία του Fourier με τίτλο Fourier, Napoleon et les Cent Jours (Ο Fourier, ο Ναπολέων και οι εκατό ημέρες). Η βιογραφία του Fourier που περιέχεται στο παρόν στηρίζεται εν μέρει στο άρθρο για τον Fourier των Jerome R. Ravetz & I. Gratten-Guiness στο DSB.

Στο έργο του, ο Fourier εμπνεύσθηκε τόσο από τη βαθιά του γνώση των φυσικών αρχών όσο και από αμιγώς μαθηματικές θεωρήσεις. Η αγαπημένη του φράση ήταν: «Η βαθιά μελέτη της φύσης αποτελεί την πιο γόνιμη πηγή μαθηματικών ανακαλύψεων.» Αυτή η θέση δέχθηκε αυστηρή κριτική από τους «puristes», όπως ο Lagrange, ο Poisson και ο Biot, οι οποίοι κατηγορούσαν την έλλειψη αυστηρότητας στις αποδείξεις του. Πάντως, δικαιολογημένα θα υποπτευόταν κανείς ότι πίσω από τις διαφωνίες κρύβονταν πολιτικά κίνητρα αλλά και προσωπικές αντιπαλότητες. Κατά ειρωνεία της τύχης, οι εργασίες του Fourier στη μαθηματική φυσική οδήγησαν αργότερα σε μια από τις πιο καθαρές μαθηματικές δημιουργίες τη θεωρία συνόλων του Cantor.

Η βασική ιδέα που κρύβεται πίσω από το θεώρημα του Fourier είναι απλή. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις cosx και sinx έχουν περίοδο 2π, οι συναρτήσεις cos2x και sin2x έχουν περίοδο 2π/2 = π, και γενικότερα οι συναρτήσεις cosnx και sinnx έχουν περίοδο 2π/n. Αν όμως κάνουμε έναν γραμμικό συνδυασμό όλων αυτών των συναρτήσεων δηλαδή αν πολλαπλασιάσουμε καθεμιά ξεχωριστά με κάποια σταθερά και προσθέσουμε τα γινόμενα, η τελική συνάρτηση θα έχει επίσης περίοδο 2π . Αυτό μας οδηγεί στην ακόλουθη παρατήρηση:

Έστω f μια συνάρτηση που «συμπεριφέρεται καλά», και η οποία έχει περίοδο 2π, δηλαδή τέτοια ώστε f(x + 2π) = f(x), για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.Γράφουμε το πεπερασμένο άθροισμα:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ... + a_n \cos nx +$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + ... + b_n \sin nx =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

όπου οι συντελεστές α_m και b_m είναι πραγματικοί αριθμοί. Ο δείκτης n του $S_n(x)$ δείχνει ότι το άθροισμα εξαρτάται από το πλήθος των ημίτονων και συνημίτονων που περιλαμβάνει. Αφού το $S_n(x)$ είναι άθροισμα όρων της μορφής cosmx και sinmx για m = 1, 2, 3,..., πρόκειται για περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο 2π. Βέβαια, η φύση αυτής της συνάρτησης εξαρτάται από τους συντελεστές α_m και b_m (καθώς και από το n). Τίθεται τώρα το ερώτημα: Είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε αυτούς τους συντελεστές έτσι ώστε, για κατάλληλα μεγάλη τιμή τού n, το άθροισμα να προσεγγίζει τη δεδομένη συνάρτηση f στο διάστημα -π < x < π; Με άλλα λόγια, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα α_m και b_m έτσι ώστε

$F(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{m-1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$ (2) για κάθε σημείο στο διάστημα -π < x < π; Ασφαλώς, έχουμε την απαίτηση η προσέγγιση να βελτιώνεται καθώς αυξάνει το *n,* και να εξελίσσεται σε ισότητα όταν n→∞. Αν αυτό είναι πράγματι εφικτό, λέμε ότι η σειρά (2) συγκλίνει στην f(x) και γράφουμε

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{m-1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \qquad (3)$$

Με την υπόθεση ότι η σειρά (2) συγκλίνει προς την f(x) στο διάστημα

-π < x < π, και υπολογίζονται οι συντελεστές α_m ,b_m έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = \begin{matrix} 0 \ \alpha\nu \ \ m \neq n \\ \pi \ \alpha\nu \ \ m = n \neq 0 \end{matrix}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \begin{matrix} 0 \ \alpha\nu \ \ m \neq n \\ \pi \ \alpha\nu \ \ m = n \neq 0 \end{matrix}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx = 0 \qquad \text{για κάθε m και n.}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως σχέσεις *ορθογωνιότητας* για το ημίτονο και το συνημίτονο. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις παραπάνω ισότητες χρησιμοποιώντας τους τύπους μετατροπής τριγωνομετρικού γινομένου σε άθροισμα και ολοκληρώνοντας στη συνέχεια κάθε όρο χωριστά. Ας σημειωθεί ότι, όταν τα *m και n* είναι και τα δύο ίσα με 0, η συνάρτηση προς ολοκλήρωση στη δεύτερη ισότητα ισούται με 1, και επομένως $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές α_m, m = 1, 2, 3..., πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ισότητας (3) με cosmx και ολοκληρώνουμε τον κάθε όρο χωριστά στο

διάστημα -π < χ < π. Λόγω των σχέσεων ορθογωνιότητας, όλοι οι όροι του δεξιού μέλους της ισότητας μηδενίζονται, εκτός του όρου ($\alpha_m$cosmx)cosmx = $\alpha_m$cos^{2}mx = α_m(1 + cos2mx)/2, που το ολοκλήρωμα του στο διάστημα [-π, π] είναι πα_m. Έτσι, έχουμε:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \qquad \text{m=1,2,3,.....} \qquad (4)$$

Για να υπολογίσουμε το α_0, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Όμως τώρα *m=0*, και έτσι ο πολλαπλασιασμός επί cos0x = 1 δεν επηρεάζει καθόλου την ισότητα (3), οπότε απλώς ολοκληρώνουμε από το-π στο π. Όλοι οι όροι μηδενίζονται, με εξαίρεση τον όρο

(α_0/2) $\int_{-\pi}^{\pi} dx$=(α_0/2)(2π)=πα_0.

Έτσι έχουμε: $\alpha_0=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (5)

Ας σημειωθεί ότι η ισότητα (5) αποτελεί απλώς μια ειδική περίπτωση της (4) για m = 0. Αυτός είναι και ο λόγος που επιλέξαμε ως σταθερό όρο στην ισότητα (3) το α_0/2. Αν, αντί τούτου, είχαμε επιλέξει το α_0, θα έπρεπε να διαιρέσουμε το δεξιό μέρος της ισότητας (5) δια 2. Τέλος, για να υπολογίσουμε τα b_m, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα (3) με sinmx και ολοκληρώνουμε πάλι από -π ως π. Το αποτέλεσμα είναι:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad \text{m=0 , 1 , 2 ,...} \qquad (6)$$

Οι ισότητες (4) έως (6) είναι γνωστές με το όνομα «τύποι του Euler» και μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier. Φυσικά, ανάλογα με τη φύση της συνάρτησης f(x), η ολοκλήρωση μπορεί να είναι ή όχι εφικτή με τη βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων. Στη δεύτερη περίπτωση, είμαστε υποχρεωμένοι να ανατρέξουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση.

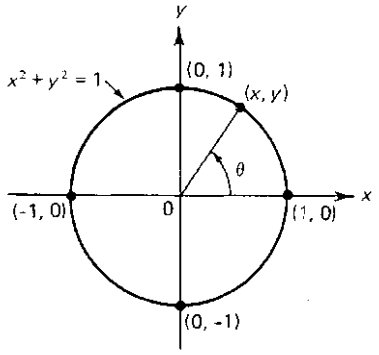
Το θεώρημα του Fourier για περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π, εύκολα προσαρμόζεται σε συναρτήσεις με οποιαδήποτε περίοδο P αν τότε το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί πιο εύκολα με χρήση της κυκλικής συχνότητας ω, η οποία ορίζεται ως ω = 2π/P. Το θεώρημα του Fourier λέει ότι κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα άπειρων ημίτονων και συνημίτονων με κυκλικές συχνότητες ω, 2ω, 3ω, κ.λπ. Η μικρότερη από αυτές τις συχνότητες (δηλαδή το ω) λέγεται θεμελιώδης, και τα πολλαπλάσια της αρμονικές.(βλ.[43],[38])

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ .

Οι τριγωνομετρικές ή κυκλικές συναρτήσεις μπορούν να εισαχθούν με διάφορους τρόπους. Οι συνήθεις ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τη μορφή των λόγων των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι προφανώς βασισμένοι στη γεωμετρική διαίσθηση. Ιδιαιτέρως , αυτοί είναι βασισμένοι πάνω στην έννοια της γωνίας , που είναι μια έννοια πολύ δύσκολη να ορισθεί.

1.Ορισμός με τη βοήθεια Τριγωνομετρικού κύκλου.

Αρχίζουμε σχεδιάζοντας τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή τον κύκλο με ακτίνα τη μονάδα και κέντρο την αρχή των αξόνων. Η μέτρηση των γωνιών ξεκινά από τον θετικό ημιάξονα των x. Μία γωνία είναι θετική αν έχει μετρηθεί κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου, και αρνητική , αν έχει μετρηθεί κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου.

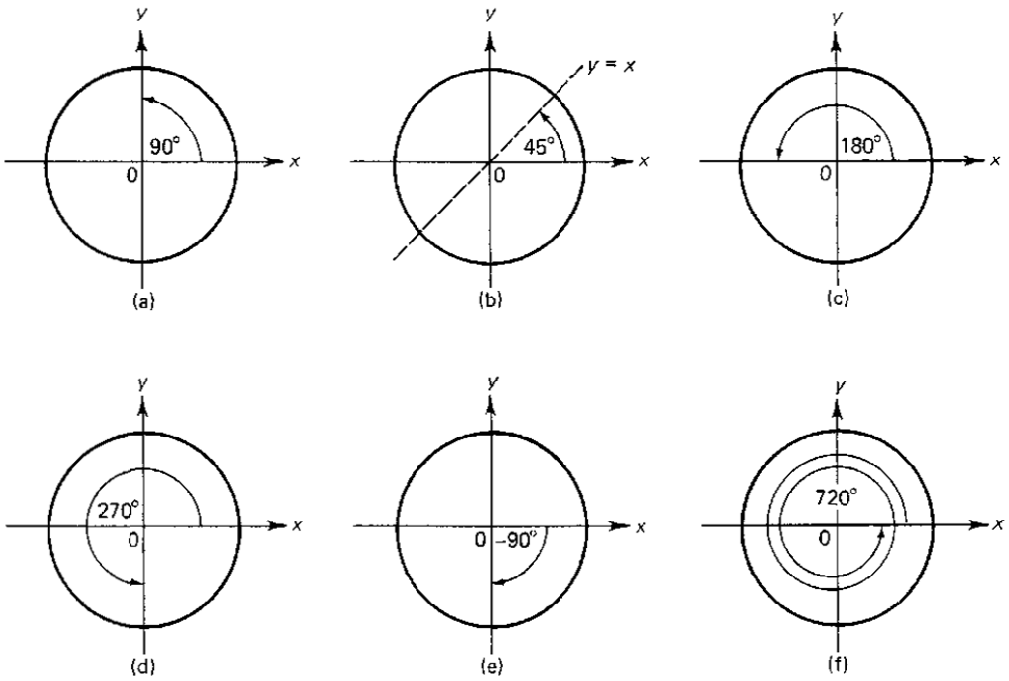


Σχήμα1.

Η μέτρηση των γωνιών γίνεται σε μοίρες δεδομένου ότι η περιφέρεια του κύκλου έχει 360°. Έτσι μπορούμε να μετρήσουμε κάθε γωνία συγκρίνοντας το μέτρο της με την περιφέρεια του κύκλου. Μερικές γωνίες απεικονίζονται στο σχήμα 2. Στο σχήμα 2e έχουμε γωνία -90° κινούμενοι κατά την αρνητική κατεύθυνση. Στο σχήμα 2f σχηματίζουμε γωνία 720° διατρέχοντας την περιφέρεια δυο φορές με αρνητική φορά.

Στο σχήμα 2 φαίνεται το μεγάλο πλεονέκτημα της χρήσης του κύκλου σε σχέση με τα τρίγωνα στη διαδικασία μέτρησης γωνιών. Στο τρίγωνο κάθε γωνία πρέπει να είναι μεταξύ 0° και 180°.Στον κύκλο δεν υπάρχει αυτός ο περιορισμός. Υπάρχει βεβαίως και ένας άλλος τρόπος μέτρησης γωνιών, που σε πολλά παραδείγματα, είναι πιο χρήσιμος από τη μέτρηση σε μοίρες. Έστω θ μια γωνία ενός κύκλου που έχει πλευρές τον θετικό ημιάξονα των x και την ακτίνα R του κύκλου, όπως στο σχήμα 3. Έστω (x,y) το σημείο στο οποίο αυτή η ακτίνα τέμνει το μοναδιαίο κύκλο. Τότε το ακτίνιο ως μέτρο της υπόψη

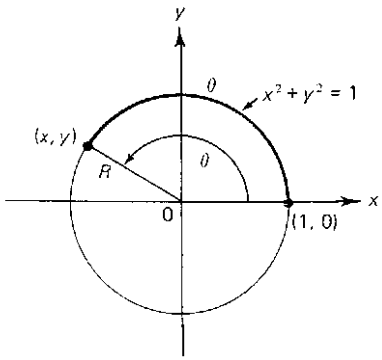
γωνίας είναι το μήκος του τόξου του μοναδιαίου κύκλου από το σημείο (1,0) στο σημείο (x,y).



Σχήμα 2

Δεδομένου ότι η περιφέρεια ενός κύκλου είναι 2πr όπου r η ακτίνα, η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου είναι 2π. Άρα $360^o=2\pi$ ακτίνια. Επίσης $180^0=\frac{1}{2}\left(360^0\right)$, $180^0=\frac{1}{2}\left(2\pi\right)=\pi$ ακτίνια. Γενικά ισχύει (θ/360)[σε μοίρες]=(θ/2π)[σε ακτίνια] ή

$$\theta(\mu o\acute{\iota}\rho\varepsilon\varsigma)=\frac{180}{\pi}\theta(\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\iota\alpha) \qquad \text{και} \qquad \theta(\alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\iota\alpha)=\frac{\pi}{180}\theta(\mu o\acute{\iota}\rho\varepsilon\varsigma)$$



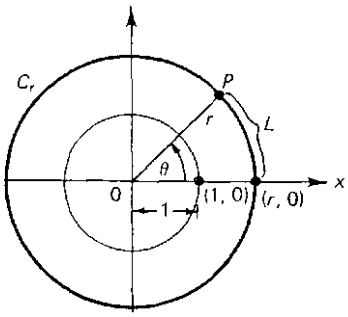
Σχήμα 3

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι 1 ακτίνιο=$180/\pi \approx 57.3^0$ και $1^0=\pi/180 \approx 0.0175$ ακτίνια.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

θ(μοίρες)	0	90	180	270	360	45	30	60	-90	135	120	720
θ(ακτίνια)	0	π/2	π	3π/2	2π	π/4	π/6	π/3	-π/2	3π/4	2π/3	4π

Η μέτρηση μιας γωνίας με ακτίνια δεν αναφέρεται σε «μοίρες», αλλά αντίθετα αναφέρεται σε μήκος που μετρήθηκε κατά μήκος του τόξου του μοναδιαίου κύκλου. Αυτό είναι ένα πλεονέκτημα όταν χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε εφαρμογές που δεν περιέχουν γωνίες.



Σχήμα4

Θεωρούμε C_r ένα κύκλο με ακτίνα r και κέντρο την αρχή των αξόνων (σχήμα 4) .Αν OP είναι η επιβατική ακτίνα όπως παρουσιάζεται στο σχήμα , τότε η OP αποκόπτει ένα τόξο του κύκλου C_r, μήκους L. Έστω θ η θετική γωνία μεταξύ του OP και του θετικού ημιάξονα των x. Αν $\theta=360^o$, τότε $L=2\pi r$. Αν $\theta=180^o$, τότε $L=\pi r$.Πράγματι είναι προφανές από τα προηγούμενα ότι $\frac{\theta}{360}=\frac{L}{2\pi r}$ (4) ή $\theta^0=360^0\frac{L}{2\pi r}$ (5)

Εάν μετρούσαμε τη θ σε ακτίνια , τότε η (4) γίνεται

$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{L}{2\pi r}$ (6) ή $\theta=\frac{2\pi L}{2\pi r}=\frac{L}{r}$ (7) . Τελικά $L=r\theta$ (8)

Αυτό σημαίνει ότι αν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια, τότε η γωνία θ «κόπτει» από τον κύκλο ακτίνας r με κέντρο την αρχή των αξόνων ένα τόξο μήκους rθ. Σημειώστε ότι αν r=1, η (8) γίνεται L=θ δηλαδή ο ορισμός του ακτινίου ως μέτρο μέτρησης μιας γωνίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Το μήκος ενός τόξου που «κόβεται» από κύκλο ακτίνας 4 με κέντρο την αρχή των αξόνων μιας γωνίας,

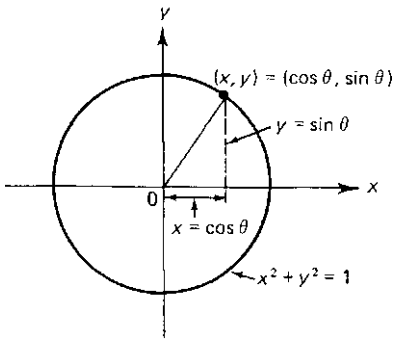
(α)45^0 (β) 60^0 (γ) 270^0 είναι αντίστοιχα:

(α) $L=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$ (β) $L=4\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ (γ) $L=4\cdot\frac{3\pi}{2}=6\pi$

όπως προκύπτει από τον τύπο (8)

Βασικές ιδιότητες

Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο (σχήμα5). Μια γωνία θ αντιστοιχίζεται μοναδικά σε ένα σημείο (x,y) όπου η ακτίνα τέμνει το κύκλο. Ορίζουμε cosθ=x και sinθ= y (1) .



Σχήμα5

Υπάρχουν δυο βασικές τριγωνομετρικές(κυκλικές) συναρτήσεις, που συνήθως συμβολίζονται με cosθ και sinθ. Επειδή η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 1$, έπεται ότι τα cosθ και sinθ ικανοποιούν την εξίσωση $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (2)

Τονίζεται ότι cosθ είναι η τετμημένη του σημείου (x,y) και sinθ είναι η τεταγμένη. Καθώς η θ μεταβάλλεται τα cosθ και sinθ παλινδρομούν μεταξύ των -1 και 1. Για παράδειγμα αν $\theta=0^0$ τότε η τελική ακτίνα τέμνει τον κύκλο στο σημείο (1,0) και έτσι έχουμε cos0= 1 και sin0=0. Αν $\theta=90^0$ τότε η τελική ακτίνα τέμνει τον κύκλο στο σημείο (0,1) και έτσι έχουμε $\cos 90^0 = \cos(\pi/2)=0$ και $\sin 90^0=\sin(\pi/2)=1$. Αν $\theta=45^0$ τότε η τελική ακτίνα είναι η ευθεία y=x. Τότε $x^2 + y^2 = 1$ και y=x στο σημείο τομής, έτσι έχουμε $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$ ή $y=x=1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Έτσι $\cos 45^0=\cos(\pi/4)= \sqrt{2}/2$ και $\sin 45^0=\sin(\pi/4)= \sqrt{2}/2$. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι $\cos 30^0=\cos(\pi/6)= \sqrt{3}/2$, $\sin 30^0=\sin(\pi/6)= 1/2$, $\cos 60^0=\cos(\pi/3)= 1/2$, $\sin 60^0=\sin(\pi/3)= \sqrt{3}/2$.Οι περισσότερο συχνά χρησιμοποιούμενες τιμές δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
cosθ	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
sinθ	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0

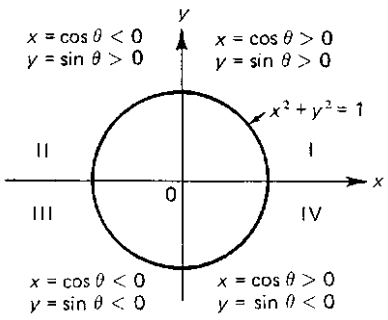
Μερικές βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων cosθ και sinθ μπορούν να συναχθούν άμεσα από τον πίνακα για τον μοναδιαίο κύκλο. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε 360^0 στη γωνία θ στο σχήμα 1, καταλήγουμε στο ίδιο σημείο (x,y) του κύκλου. Άρα ισχύει

$$\cos(\theta + 360^0) = \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad (3)$$

και

$$\sin(\theta + 360^0) = \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad (4)$$

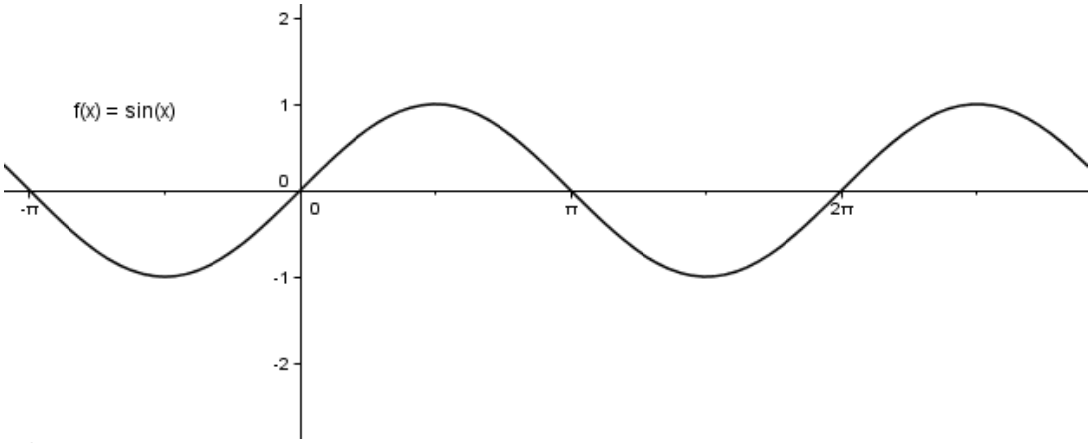
Γενικά, αν α είναι η μικρότερη θετική τιμή ώστε $f(x+a) = f(x)$, τότε λέμε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο α. Επομένως, από τις (3) και (4), παρατηρούμε ότι και οι συναρτήσεις cosθ και sinθ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.



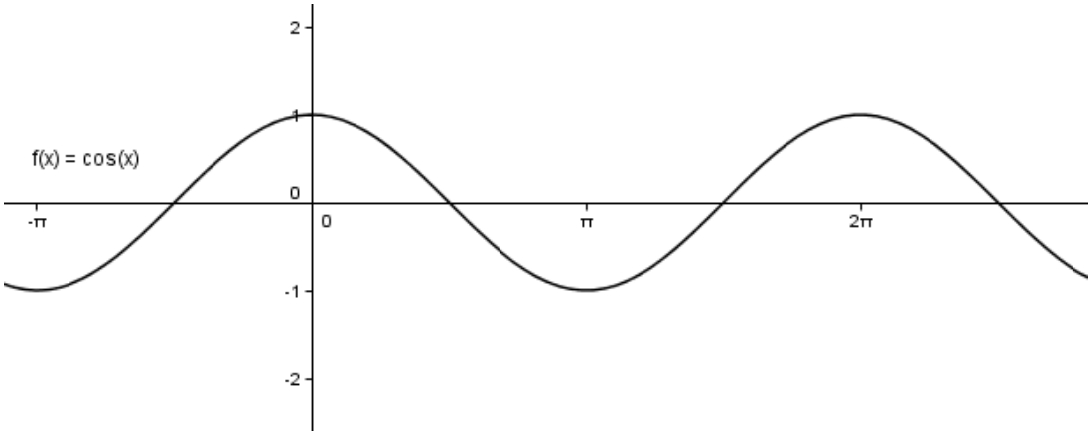
Σχήμα6.

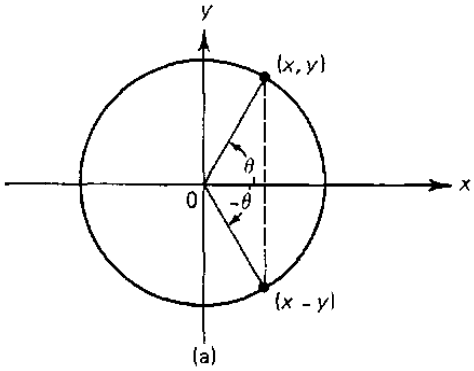
Παρατηρώντας το σχήμα 6 βρίσκουμε το πρόσημο των δυο βασικών συναρτήσεων. Με όλες αυτές τις ιδιότητες μπορούμε να προχωρήσουμε στη κατασκευή της γραφικής παράστασης των $y = \cos\theta$ και $y = \sin\theta$. Αυτό παρουσιάζεται στα σχήματα 7 και 8 .

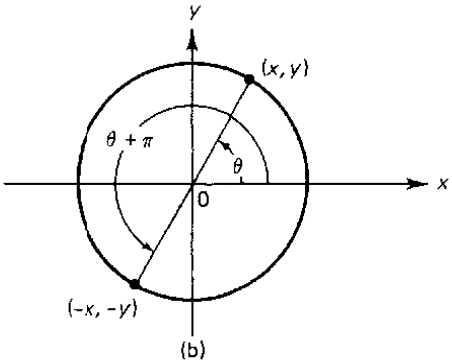
Σχήμα7



Σχήμα8







Σχήμα9 **Σχήμα10**

Στο σχήμα 9 συγκρίνοντας θ και –θ, οι τιμές στον άξονα x είναι ίσες ενώ στον άξονα y είναι αντίθετες. Αυτό δείχνει ότι

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ (5) και $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (6)

Προσθέτουμε $180^0 = \pi$ στη γωνία θ.(σχήμα 10). Τότε οι x και y συντεταγμένες της θ+π γωνίας έχουν αντίθετα πρόσημα από τις x και y συντεταγμένες της θ γωνίας. Επομένως

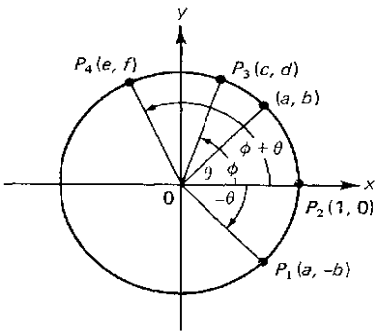
$$\cos(\theta + 180^0) = \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta \qquad (7)$$

$$\text{και } \sin(\theta + 180^0) = \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \qquad (8)$$

Αρκετές ακόμη ταυτότητες είναι προφανείς, με τη βοήθεια του γραφήματος του μοναδιαίου κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Ισχύει $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αποδεικνύουμε αρχικά, το θεώρημα όταν θ και φ είναι μεταξύ των 0 και π/2.



Σχήμα11.

Στο σχήμα 11 παρατηρούμε ότι το τόξο P_1P_3 έχει το ίδιο μήκος με το τόξο P_2P_4. (είναι επίσης αμφότερα ίσα με το μέτρο της γωνίας θ+φ σε ακτίνια). Η απόσταση P_1 ως το P_3 είναι ίση με την απόσταση P_2 ως το P_4 . Χρημοποιώντας τον τύπο της απόστασης έχουμε:

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{(c-a)^2 + (d+b)^2} = \sqrt{(e-1)^2 + f^2} = 2\overline{P_2P_4} \qquad (9)$$

Αλλά αν ορίσουμε τα παρακάτω:

$$\cos\theta=\alpha, \quad \cos\varphi=c, \quad \cos(\theta+\varphi)=\varepsilon$$

$$\sin\theta=b, \quad \sin\varphi=d, \quad \sin(\theta+\varphi)=f \qquad (10)$$

Αν τετραγωνίσουμε και τα δύο μέλη της (9) έχουμε :

$c^2 - 2ac + a^2 + d^2 + 2bd + b^2 = e^2 - 2e + 1 + f^2.$

Αφού $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2 = 1$ έπεται $-2ac + 2bd + 2 = -2e + 2$ ή $e = ac - bd.$ (11)

Με αντικατάσταση της (10) στην (11) έπεται το θεώρημα.

Άλλες Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Εκτός από τις δύο συναρτήσεις που ήδη θεωρήσαμε, υπάρχουν άλλες τέσσερις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που ορίζονται συναρτήσει των sinx και cosx:

1. Εφαπτομένη x=tanx=sinx/cosx, αν cosx $\neq 0$
2. Συνεφαπτομένη x=cotx= cosx/sinx=1/tanx , αν sinx $\neq 0$
3. Τέμνουσα x=secx=1/cosx , αν cosx $\neq 0$
4. Συντέμνουσα x=cosecx=1/sinx, αν sinx $\neq 0$

Καμμία από τις συναρτήσεις αυτές δεν είναι φραγμένη στο R. Όταν $x \to 0^+$, cotx και cosecx τείνουν στο $+\infty$ και όταν $x \to 0^-$ cotx και cosecx τείνουν στο $-\infty$. Αυτό είναι αληθές διότι $\sin x$>0 για x κοντά στο 0,αλλά θετικό και $\sin x$<0 για x κοντά στο 0,αλλά αρνητικό. Επίσης, $\cos x$=1 όταν x=0. Ομοίως ισχύουν:

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \sec x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi/2^+} \sec x = -\infty.$$

Πράγματι αυτά ισχύουν διότι $\cos x$>0 για x<π/2 και το x τείνει στο π/2 και $\cos x$ <0 για x>π/2 και το x τείνει στο π/2.

Επίσης ισχύουν,

$$\tan 0 = \frac{\eta\mu 0}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{και} \quad \cot n \frac{\pi}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi/2)}{\eta\mu(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Σημειώνουμε ότι επειδή $-1 \le \sin x \le 1$ και $-1 \le \cos x \le 1,$ και δεδομένου ότι $|\sec x| \ge 1$ και $|\cos ecx| \ge 1$.Αυτό σημαίνει ότι secx και cosecx δεν παίρνουν τιμές στο ανοικτό διάστημα (-1,1). Τελικά ,

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x.$$

Έτσι η tanx είναι περιοδική με περίοδο π. Όμοια η $\cot x$ είναι περιοδική με περίοδο π. Επίσης ισχύουν,

$$\sec(x+2\pi)=\frac{1}{\cos(x+2\pi)}=\frac{1}{\cos x}=\sec x,$$

Έτσι ώστε secx και cosecx είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Υπάρχουν πολλές ταυτότητες που περιέχουν τις τέσσερεις συναρτήσεις που ορίσαμε παραπάνω. Όμως για τους δικούς μας σκοπούς ,είναι μόνο δύο, αυτές που θα αποδειχθούν εξαιρετικά χρήσιμες:

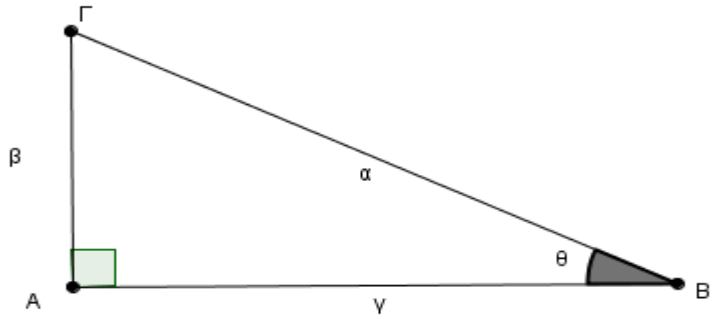
$$1+\tan^2 x=\sec^2 x, \qquad (1)$$

$$1+\cot^2 x=\mathrm{cosec}^2 x. \qquad (2)$$

Αμφότερες αποδεικνύονται με χρήση της ταυτότητας $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, και στη συνέχεια διαιρούμε αμφότερα τα μέλη με $\cos^2 x$ για να αποδείξουμε την (1) και με $\sin^2 x$ για να αποδείξουμε την (2).

Τρίγωνα

Σε πολλά στοιχειώδη βιβλία της τριγωνομετρίας, οι έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εισάγονται ως λόγοι πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Θεωρούμε τη γωνία φ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 1.



Σχήμα1

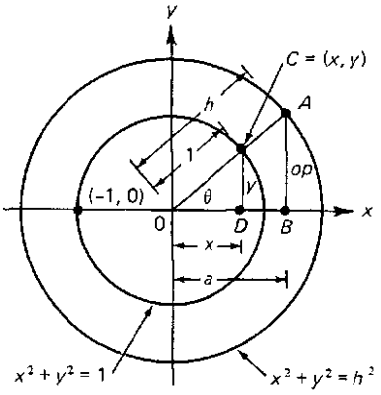
Η πλευρά η απέναντι της θ συμβολίζεται με «β», η προσκείμενη της θ(που δεν είναι υποτείνουσα) συμβολίζεται με «γ» και η υποτείνουσα(η απέναντι της ορθής γωνίας πλευρά) συμβολίζεται με «α». Ορίζουμε:

$$\sin\theta = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \cos\theta = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

$$\tan\theta = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota}{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta} = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad \cot\theta = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta}{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota} = \frac{\gamma}{\beta},$$

$$\sec x = \frac{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta} = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Αυτοί οι ορισμοί, φυσικά περιορίζονται για γωνίες μεταξύ 0° και 90° (αφού το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180° και η ορθή γωνία είναι 90°). Αποδεικνύουμε ότι αυτοί οι «τριγωνικοί» ορισμοί καταλήγουν στα ίδια αποτελέσματα με τους «κυκλικούς» ορισμούς που δόθηκαν προηγούμενα.



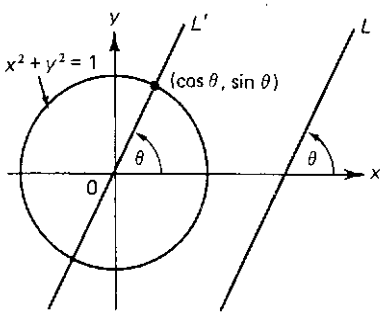
Σχήμα2.

Θα το αποδείξουμε ,μόνο για τις συναρτήσεις sinx και cosx, γιατί οι άλλες τέσσερις συναρτήσεις ορίζονται με τη βοήθειά τους. Παρατηρούμε το τρίγωνο που σχηματίζεται στο σχήμα 2. Φέρουμε τον κύκλο με ακτίνα h που έχει το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, καθώς και τον μοναδιαίο κύκλο. Τα τρίγωνα OAB και OCD είναι όμοια(διότι έχουν ίσες γωνίες). Άρα, οι λόγοι των αντιστοίχων πλευρών είναι ίσοι. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{AB}{h} = \frac{y}{1} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{a}{h} = \frac{x}{1}.$$

Τότε AB/h είναι ο «τριγωνικός» ορισμός του $\sin\theta$ ενώ y/1=y είναι ο «κυκλικός» ορισμός του $\sin\theta$. Άρα οι δυο ορισμοί οδηγούν στην ίδια συνάρτηση. Με μια παρόμοια τακτική θα διαπιστώσουμε ότι οι δύο ορισμοί του $\cos\theta$ οδηγούν στην ίδια συνάρτηση.

Έστω L μια τυχαία ευθεία. Η κλίση της είναι η εφαπτομένη της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα xx΄. Για να το αποδείξουμε φέρνουμε ευθεία παράλληλη της δοθείσης που περνά από την αρχή των αξόνων, και γράφουμε τον μοναδιαίο κύκλο (όπως στο σχήμα 3). Τότε η κλίση της νέας ευθείας (της παράλληλης προς την L) στην οποία ανήκουν τα σημεία (0,0) και (cosθ, sinθ) είναι:

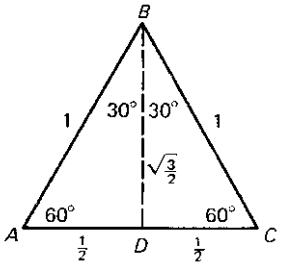


Σχήμα 3

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - 0} = \tan\theta.$$

Τα τρίγωνα είναι συνήθως χρήσιμα για υπολογισμούς τιμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τρίγωνο για να αποδείξουμε ότι $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο στο σχήμα 4. Έστω ότι οι πλευρές του τριγώνου έχουν μήκος μια μονάδα και έστω BD η διχοτόμος της γωνίας B η οποία είναι επίσης ύψος και διάμεσος του τριγώνου(διότι τα τρίγωνα ABD και



Σχήμα 4

DBC είναι ίσα). Το μήκος της BD, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, υπολογίζεται ίσο με $\sqrt{3}/2$. Τότε

$$\sin 30^0 = \frac{AD}{h} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^0 = \frac{\alpha}{h} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{κλπ}$$

(βλ[17],[24],[25],[43])

2.Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με Δυναμοσειρές.

Πρόθεσή μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αναπτύξουμε τη θεωρία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σχεδόν ανεξάρτητα από τη σχέση τους με τα τρίγωνα , ή αληθινά , χωρίς τις γωνίες εντελώς. Οι συναρτήσεις που θα ορίσουμε είναι προφανές ότι θα έχουν τις γνωστές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις οποίες ο αναγνώστης είναι συνηθισμένος.

Θέτουμε

$$sin\ x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

και

$$cos\ x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Η ακτίνα σύγκλισης και των δύο σειρών είναι άπειρη, άρα sinx και cosx ορίζονται για όλες τις πραγματικές τιμές του x. Παρατηρούμε αμέσως ότι sin0=0 και cos0=1. Θα γράφουμε $\cos^2 x$ για το $(\cos x)^2$, $\sin^4 x$ για το $(\sin x)^4$ και ούτω καθεξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Εάν f(x)= sinx και g(x)= cosx , τότε οι f και g παραγωγίζονται στο R και ισχύει f΄(x)= cosx και g΄(x)= -sinx

Απόδειξη: (i)

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Τότε , υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ και

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$$

(ii) $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Τότε, η g είναι παραγωγίζεται και θέτοντας s=n-1

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n)x^{2n-1}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1} x^{2s+1}}{(2s+1)!}=-\sin x$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Ισχύουν $\begin{matrix}(i)\cos^2 x+\sin^2 x=1\\(ii)|\sin x|\le 1,|\cos x|\le 1\end{matrix}$ *για* $x\in R$

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x$

Τότε $f'(x)=2\sin x\cos x+2\cos x(-\sin x)=0$

Οπότε η f είναι σταθερή. Τότε για κάθε $x\in R$, ισχύει $\cos^2 0+\sin^2 0=1$ και $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

(ii) Έπεται άμεσα από την (i).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Ισχύει $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y.$

Απόδειξη.
Θέτουμε α = x + y και ορίζουμε τη συνάρτηση f με
f(x)= sinx cos(α-x) + cosx sin(α-x).
Τότε f΄(x)= cosx cos(α-x) + sinx sin(α-x) - sinx sin(α-x) –cosx cos(α-x) = 0.
Οπότε η f είναι σταθερή. Έτσι , για κάθε $x\in R$, ισχύει f(x)= sin0 cosα + cos0 sinα = sinα . Τότε sinx cos(α-x) + cosx sin(α-x)=sinα
ή sinx cosy + cosx siny = sin(x+y).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Ισχύει cos(x+y)= cosx cosy - sinx siny.

Απόδειξη.

Αποδεικνύεται άμεσα με όμοιο τρόπο όπως το προηγούμενο θεώρημα θέτοντας

f(x)= cosx cos(α-x) - sinx sin(α-x).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

Ισχύει cosx=cos(-x) , sinx= - sin(-x)

Απόδειξη.

Η απόδειξη έπεται άμεσα από τους ορισμούς του sinx και cosx.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

(i). Υπάρχει ένας πραγματικός θετικός αριθμός u τέτοιος ώστε cosu=0.

(ii). Υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός ν τέτοιος ώστε cosν=0.

Απόδειξη.

(i) cos 0=1

$$\sigma\upsilon\nu 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots - \frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{2^4}{(4n)!} \ldots$$

$$= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{56}\right) - \ldots - \frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1 - \frac{2^2}{(4n-1)4n}\right)$$

$$< 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} \quad = -\frac{1}{3} \qquad \textit{οπότε} \quad \cos 2 < 0$$

Θέτουμε f(x)=cosx. Η f είναι συνεχής σύμφωνα απο το Θεώρημα 1. Τότε , σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής , υπάρχει ένα σημείο u στο (0,2) τέτοιο ώστε cosu=0.

(ii).Θέτουμε A={u: cosu=0, u> 0}.Θα αποδείξουμε ότι το A έχει ένα ελάχιστο στοιχείο ν.Πράγματι το A είναι κάτω φραγμένο από το μηδέν και μη κενό οπότε έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα έστω ν. Θέτω f(x)=cosx.Επειδή η f είναι συνεχής , $\cos\nu = \lim_{x\to u}\cos x$. Εφόσον ν είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A, υπάρχει ένα σημείο u ,που ή συμπίπτει με το ν ή είναι όσο κοντά θέλουμε με το ν ,τέτοιο ώστε cosu = 0.Συνεπώς το ν ανήκει στο A και είναι το ελάχιστο στοιχείο του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν ν είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε cosν=0. (ο ν υπάρχει από το προηγούμενο θεώρημα), τότε ορίζουμε π=2ν . Έτσι συν(π/2)=0, αλλά συνx >0 όταν 0≤x≤ π/2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.

Ισχύουν sin(π/2)=1. cosπ=-1. sinπ=0. cos(2π)=1. sin(2π)=0.

Απόδειξη. Εάν f(x)=sinx, τότε f΄(x)=cosx . Τότε η f΄ είναι θετική στο (0,π/2). Έτσι η f είναι αύξουσα στο $[0,\pi/2]$ και επειδή sin0=0 έχουμε sin(π/2)>0. Όμως

$\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2}=1$ και $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Οπότε $\sin\frac{\pi}{2}=1$

Από το θεώρημα 4, $\cos\pi=\cos\pi/2\cos\pi/2-\sin\pi/2\sin\pi/2=-1$.

Από το θεώρημα 3, $\sin\pi=\sin\pi/2\cos\pi/2+\cos\pi/2\sin\pi/2=0$.

Από το θεώρημα 4, $\cos2\pi=\cos\pi\cos\pi-\sin\pi\sin\pi=1$.

Από το θεώρημα 3, $\sin2\pi=\sin\pi\cos\pi+\cos\pi\sin\pi=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.

Οι sinx και cosx είναι περιοδικές με περίοδο 2π, δηλαδή sin(x+2π)=sinx και cos(x+2π)= cosx για όλες τις πραγματικές τιμές του x.

Απόδειξη. Από τα θεωρήματα 3 και 4,

$\sin(x+2\pi)=\sin x\cos2\pi+\cos x\sin2\pi=\sin x$

$\cos(x+2\pi)=\cos x\cos2\pi-\sin x\sin2\pi=\cos x$

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν cosx≠*0,* τότε θέτουμε tanx = sinx / cosx.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν cosx≠0, τότε θέτουμε secx = 1 / cosx.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν sinx≠0, τότε θέτουμε cotx = cosx / sinx.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Εάν sinx≠0, τότε θέτουμε cosecx = 1 / sinx.

Άλλες στοιχειώδεις ταυτότητες που εμπεριέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποδεικνύονται με συνήθεις τρόπους χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και τα θεωρήματα 1.-8.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Εάν $f(x)=\sin x$ και η f ορίζεται στο διάστημα $[-\pi/2,\pi/2]$, δηλαδή $f: [-\pi/2,\pi/2]\rightarrow[-1,1]$ τότε η f είναι μια συνάρτηση 1-1 μεταξύ των διαστημάτων $[-\pi/2,\pi/2]$ και $[-1,1]$ και άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και πεδίο τιμών το $[-\pi/2,\pi/2]$.

Θέτουμε $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$=τοξημx. Εάν το x ανήκει στο διάστημα $[-1,1]$, τότε υπάρχει μια απειρία πραγματικών αριθμών y τέτοιων ώστε $\sin y=x$, αλλά από τον ορισμό του $\sin^{-1}x$ μπορούμε να έχουμε ένα πραγματικό αριθμό που να ανήκει στο $(-\pi/2,\pi/2)$.

Επίσης, εάν $g(x)=\cos x$ και εάν το πεδίο ορισμού της g είναι το διάστημα $[0,\pi]$, τότε η g είναι μια 1-1 απεικόνιση μεταξύ των διαστημάτων $[0,\pi]$ και $[-1,1]$ και άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση

$g^{-1} : [-1,1] \rightarrow[-1,1]$

Θέτουμε $g^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$=τοξσυνx.

Εάν x ανήκει στο διάστημα $[-1,1]$, τότε υπάρχει μια απειρία πραγματικών αριθμών y τέτοιων ώστε $\cos y =x$, αλλά από τον ορισμό του $\cos^{-1}x$ μπορούμε να έχουμε ένα πραγματικό αριθμό που να ανήκει στο $(0,\pi)$.Τέλος εάν $F(x)= \tan x$ και ως πεδίο ορισμού της F θεωρήσουμε το διάστημα$(-\pi/2,\pi/2)$, τότε η F είναι μια 1-1 απεικόνιση μεταξύ των διαστημάτων $(-\pi/2,\pi/2)$ και του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση F^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και σύνολο τιμών το $(-\pi/2,\pi/2)$.

Θέτουμε $F^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$.

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε υπάρχει μια απειρία πραγματικών αριθμών y τέτοιων ώστε $\tan y =x$, και από τον ορισμό της $\tan^{-1}x$, μπορούμε να έχουμε ένα πραγματικό αριθμό που να ανήκει στο διάστημα $(-\pi/2,\pi/2)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.

(i) Εάν f(x)=sin^{-1}x, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (-1,1) και

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

(ii) Εάν f(x)=cos^{-1}x, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (-1,1) και

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

(iii) Εάν f(x)=tan^{-1}x, τότε η f είναι παραγωγίσιμη παντού και

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Απόδειξη.

(i) Θέτουμε g(x)=sinx. Τότε f = g^{-1} . Έστω y= sin^{-1}x. Τότε ,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\cos y} > 0, \quad \text{εφόσον} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Έτσι} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

(ii) Θέτουμε g(x)=cosx. Τότε f = g^{-1} . Έστω y= cos^{-1}x. Τότε ,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} < 0, \quad \text{εφόσον} \quad 0 < y < \pi$$

$$\text{Έτσι} \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-\cos^2 y)}} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

(iii) Θέτουμε g(x)=tanx. Τότε f = g^{-1} . Έστω y=tan^{-1} x. Τότε ,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις παρουσιάζουν σημαντικό ενδιαφέρον διότι μας επιτρέπουν να βρίσκουμε αντιπαραγώγους για κάποιες συναρτήσεις και με αυτό τον τρόπο είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε τα ορισμένα ολοκληρώματα αυτών των συναρτήσεων). Για παράδειγμα , η αντιπαράγωγος της συναρτήσεως

$\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)}}$ είναι $\sin^{-1}\frac{x}{\alpha}$

και της $\frac{1}{\alpha^2+\chi^2}$ είναι $\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\frac{x}{\alpha}$.

(βλ[17],[24],[25],[43])

3.Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τη βοήθεια του ολοκληρώματος $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dt$.

Λήμμα: *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dt$ συγκλίνει.*

Αποδειξη: Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο εφόσον το $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ δεν είναι φραγμένη συνάρτηση στο[0,1]. Έστω 0<ε<1.

Τότε $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dt = 2-2\sqrt{\varepsilon}$ και $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dt = 2$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dt$ συγκλίνει απόλυτα (αφου $\sqrt{1-x}\geq 0$). Όμως για 0≤x<1 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.\frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dt$ συγκλίνει απόλυτα.

Θέτουμε $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dt$. Έτσι αν ορίσουμε τη συνάρτηση

u :[-1,1]→ℝ με $u(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, τότε u(1)=π/2 , u(-1)=-π/2

και η u είναι συνεχής στο [-1,1].

Τότε $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, -1<x<1. Έτσι u΄(x)>0, -1<x<1 και άρα η u είναι 1-1 συνάρτηση στο [-1,1].

Έτσι η u είναι ομοιομορφισμός του [-1,1] επι του [-π/2,π/2].

Εύκολα προκύπτει u(x)=-u(-x) , -1<x<1.

Θέτουμε s: [-π/2,π/2] → [-1,1] την αντίστροφη συνάρτηση της u, με s(-π/2)=-1, s(π/2)=1. Εφόσον u(0)=0 έχουμε επίσης ότι s(0)=0.

Απο το γεγονός ότι u(-y)=-u(y), για -1≤y≤1 συνεπάγεται ότι s(-x)=-s(x), για -π/2≤x≤π/2.

Αν -π/2≤x≤π/2 και s(x)=y , τότε -1<y<1 και u(y)=x.

Τότε $s'(x)=\frac{1}{u'(y)}=\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-s^2(x)}$

δηλαδή $s'(x)=\sqrt{1-s^2(x)}$, -π/2<x< π/2 (1)

και άρα $\lim_{x\to\pi/2-} s'(x)=\lim_{x\to\pi/2-}\sqrt{1-s^2(x)}=\sqrt{1-s^2(\pi/2)}=0$.

Εφόσον $\frac{s(\pi/2)-s(x)}{\pi/2-x}=s'(\xi)$ για κάποιο ξ τέτοιο ώστε x<ξ<π/2.

Τότε $s'(\pi/2)=\lim_{x\to\pi/2-}\frac{s(\pi/2)-s(x)}{\pi/2-x}=\lim_{x\to\pi/2-}s'(\xi)=0$

(όπου $s'(\pi/2)$ είναι η αριστερή παράγωγος της s στο π/2.

Παρόμοια , αποδεικνύεται ότι $s'(-\pi/2)=0$.

(όπου στην περίπτωση αυτή δηλώνει τη δεξιά παράγωγο).

Άρα η (1) ισχύει και για x=π/2, και x=-π/2 , δηλαδή

$s'(x)=\sqrt{1-s^2(x)}$, -π/2<x< π/2 (2)

Επεκτείνουμε τώρα την s ορίζοντας την s(y) για π/2<y< 3π/2

με την εξίσωση $s(x+\pi)=-s(x)$, $-\pi/2<x<\pi/2$.

(Σημειώνουμε ότι αν $-\pi/2<x<\pi/2$, τότε $\pi/2<x+\pi<3\pi/2$).

$s'(-\pi/2)=0=s'(\pi/2)$ και συνεπώς η s επεκτείνεται στο $[-\pi/2,3\pi/2]$

και $s'(\pi/2)=0$.

Επεκτείνουμε τώρα την s: $(-\infty,+\infty)\to[-1,1]$

απαιτώντας $s(x+\pi)=-s(x)$, $-\infty<x<+\infty$ (3)

Η επεκτεταμένη συνάρτηση s θα έχει παράγωγο σε κάθε $x\square\mathbb{R}$.

(όπως προκύπτει με παρόμοιο επιχείρημα, όπως παραπάνω).

Από την (3) και το γεγονός ότι $s(-x)=-s(x)$ για $-\pi/2<x<\pi/2$, εύκολα προκύπτει ότι $s(-x)=-s(x)$ για κάθε $x\square\mathbb{R}$.

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση τ: $[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}$ με $\tau(x)=\sqrt{1-s^2(x)}$, τότε $\tau(0)=\sqrt{1-0^2}=1$ και $\tau(\pi/2)=0=\tau(-\pi/2)$.

Από την (1) έχουμε ότι $\tau(x)=s'(x)$, για $-\pi/2<x<\pi/2$. Επεκτείνουμε την τ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ορίζοντας $\tau(x)=s'(x)$, για κάθε $x\square\mathbb{R}$. (4)

Εφόσον $s(-x)=-s(x)$ έχουμε ότι $-s'(-x)=-s'(x)$, δηλαδή $\tau(-x)=\tau(x)$ για κάθε $x\square\mathbb{R}$.

Από την (3) έχουμε ότι $s'(x+\pi)=-s'(x)$, για κάθε $x\square\mathbb{R}$ και άρα $\tau(x+\pi)=-\tau(x)$, για κάθε $x\square\mathbb{R}$.

Από την (2) έχουμε ότι $s''(x)=\dfrac{-s(x)s'(x)}{\sqrt{1-s^2(x)}}=-s(x)$, για $-\pi/2<x<\pi/2$.

Με παρόμοιες μεθόδους που ήδη χρησιμοποιήσαμε έχουμε ότι $s''(x)=-s(x)$, $-\infty<x<+\infty$ (4)΄ και άρα από την (4)

$\tau'(x)=-s(x)$, $-\infty<x<+\infty$ και άρα $\tau''(x)=-\tau(x)$, $-\infty<x<+\infty$ (4)΄΄

Από την (3) έχουμε ότι $\tau^2(x)+s^2(x)=1$, $-\pi/2<x<\pi/2$. (5)

Όμως, τότε για κάθε $n\in\mathbb{R}$, έχουμε $y+k\pi \in [-\pi/2,\pi/2]$ για κάποιο ακέραιο k. Έτσι $s(y+k\pi)=-s(y+(k-1)\pi)=\ldots=(-1)^k s(y)$.

Παρόμοια, $\tau(y+k\pi)=(-1)^k\tau(y)$

και άρα $\tau^2(y)+s^2(y)=[\, s(y+k\pi)]^2+[\, \tau(y+k\pi)]^2 \;=1$ (από την (5)).

Έτσι $\tau^2(y)+s^2(y) = 1,\ -\infty<y<+\infty$ (5)΄

<u>Ισχυρισμός:</u>

$s(x+\alpha)=s(x)\tau(\alpha)+ s(\alpha)\tau(x),\quad \alpha,x \in\mathbb{R}.$ (6)

Πράγματι, θεωρούμε $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σταθεροποιούμε και θέτουμε

$F(x)= s(x+\alpha)-s(x)\tau(\alpha)- s(\alpha)\tau(x)$, τότε από τις (4)΄,(4)΄΄ έχουμε

$F''(x)+ F(x)= 0,\ -\infty<x<+\infty$ και άρα $2 F(x)' F''(x)+ 2F(x) F(x)'=0$,

$-\infty<x<+\infty$, ή $\frac{d}{dx}\left[\left(F'\right)^2+F^2\right]=0$, $-\infty<x<+\infty$ και άρα

$\left[\left(F'(x)\right)^2+F^2(x)\right]=$σταθερή$=\left[\left(F'(0)\right)^2+F^2(0)\right]$, $-\infty<x<+\infty$.

Εφόσον $s(0)=0$, $\tau(0)=1$, εύκολα προκύπτει ότι $F(0)=0$.

Παρόμοια $F'(0) =0$ και άρα $\left[\left(F'(x)\right)^2+F^2(x)\right]=0$ όπου $-\infty<x<+\infty$. Τότε $F(x)= F'(x) =0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εφόσον $F(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ο ισχυρισμός (6) αποδείχθηκε.

Ενώ $F'(x) =0$ για κάθε $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\tau(x+\alpha)=\tau(x)\tau(\alpha)-s(\alpha)s(x),\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<x<+\infty$. (7)

Για $\alpha=x$ έχουμε $s(2x)=2s(x)\tau(x)$ και $\tau(2x)= \tau^2(x)- s^2(x)$ (8)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η s είναι η συνάρτηση ημίτονο, sinx ενώ η τ είναι η συνάρτηση συνημίτονο, cosx. Κάθε άλλη τριγωνομετρική ταυτότητα μπορεί ναπροκύψει από αυτές που ήδη έχουμε αποδείξει.

Για παράδειγμα, από την (8) έχουμε $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$

Χρησιμοποιώντας την (5)΄ έχουμε $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

Θέτοντας $2x=\theta$, έχουμε $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\left[\frac{(1+\cos\theta)}{2}\right]^{1/2}$

Από την (7) έχουμε $\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$.

Θέτοντας όπου α το –α , έχουμε τότε $\cos(x-\alpha)=\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha$.

(Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ και $\sin(-\alpha)=\sin\alpha$.)

Έτσι, $\cos(x+\alpha)-\cos(x-\alpha)=-2\sin x\sin\alpha$.

Για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ και κάθε $\kappa\in\mathbb{N}$, θέτουμε $x=\kappa\theta$, $\alpha=\frac{1}{2}\theta$. Τότε

$\cos(\kappa+\frac{1}{2})\theta-\cos(\kappa-\frac{1}{2})\theta=-2\sin\kappa\theta\sin\frac{1}{2}\theta$.

Για $\kappa=1,2,\ldots,n$ έχουμε τότε

$\cos\frac{3}{2}\theta-\cos\frac{1}{2}\theta=-2\sin\theta\sin\frac{1}{2}\theta$. ($\kappa=1$)

$\cos\frac{5}{2}\theta-\cos\frac{3}{2}\theta=-2\sin 2\theta\sin\frac{1}{2}\theta$. ($\kappa=2$)

……

$\cos(n+\frac{1}{2})\theta-\cos(n-\frac{1}{2})\theta=-2\sin n\theta\sin\frac{1}{2}\theta$. ($\kappa=n$)

Προσθέτοντας έχουμε

$\cos(n+\frac{1}{2})\theta-\cos\frac{1}{2}\theta=-2\sin\frac{1}{2}\theta[\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta]$

και άρα $\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$

(όπου θ δεν είναι πολλαπλάσιο του 2π).

Μια παρόμοια ταυτότητα ζωτική για τη μελέτη των σειρών Fourier προκύπτει από την (6).

Έχουμε τότε $\sin(x+\alpha)=\sin x \cos\alpha+\sin\alpha \cos x$,

θέτουμε όπου α το –α και έχουμε $\sin(x-\alpha)=\sin x \cos\alpha-\sin\alpha \cos x$.

Έτσι, $\sin(x+\alpha)- \sin(x-\alpha)=2 \sin\alpha \cos x$.

Για $x=\kappa\theta$, $\alpha=\frac{1}{2}\theta$ έχουμε

$\sin(\kappa+\frac{1}{2})\theta- \sin(\kappa-\frac{1}{2})\theta=-2\sin\frac{1}{2}\theta \cos\kappa\theta$.

Εφαρμόζουμε για $\kappa=0,1,\ldots,n$ και προσθέτουμε.

Τότε

$\sin(n+\frac{1}{2})\theta- \sin(-\frac{1}{2}\theta)=2 \sin\frac{1}{2}\theta[\cos0\theta+\cos\theta+\ldots+\sin n\theta]$,

$\sin(n+\frac{1}{2})\theta+ \sin(\frac{1}{2}\theta)=2 \sin\frac{1}{2}\theta[1+\cos\theta+\ldots+\sin n\theta]$,

$\sin(n+\frac{1}{2})\theta=2 \sin\frac{1}{2}\theta[\frac{1}{2}+\cos\theta+\ldots+\sin n\theta]$,

και άρα

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

(όπου θ δεν είναι πολλαπλάσιο του 2π). (βλ[17],[24],[25],[43])

4.Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τη βοήθεια της αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης τοξεφx =tan^{-1}x.

Η εργασία μας με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συμπεριλαμβάνει , όχι σε μικρό βαθμό την έννοια της κυκλικής λογικής εναλλαγής. Θα θεωρήσουμε τώρα κατ΄ευθείαν τις έννοιες αυτές δίνοντας καθαρά αναλυτικούς ορισμούς για τις αυτές τις συναρτήσεις. Αρχίζουμε δίνοντας ένα ορισμό για το τόξο εφαπτομένης.

Ορισμός 1. *Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ορίζουμε:*

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, $d(\tan^{-1} x)/dx = 1/(1+x^2)$. Επειδή η τελευταία έκφραση είναι παντού θετική, η συνάρτηση $\tan^{-1} x$ είναι γνήσια αύξουσα. Το γεγονός ότι η $\tan^{-1} 0 = 0$ ενώ η παράγωγος της $\tan^{-1} x$ είναι άρτια συνεπάγεται ότι η $\tan^{-1} x$ είναι περιττή συνάρτηση. Επίσης, η $\tan^{-1} x$ δίνει συνεχείς παραγώγους, όλων των τάξεων.

Πρόταση 2. *Για κάθε x>0,*

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x) = 2\tan^{-1} 1.$$

Αποδ:

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\frac{1}{x}) = \frac{1}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Έπεται άμεσα αφού η συνάρτηση

$\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ είναι σταθερή για x>0, θέτοντας x=1.

Ορισμός 3. $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = \tau o\xi\varepsilon\varphi 1.$

Η παραπάνω ταυτότητα γράφεται $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x) = \frac{\pi}{2}$ (x>0).

Ακολούθως ισχύει ότι $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \lim_{x\to\infty}(\pi/2 - \tan^{-1} 1/x) = \pi/2.$

Κατόπιν ορίζουμε τη συνάρτηση εφαπτομένη στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ ως την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $\tan^{-1} x$. Από τα γενικά θεωρήματα των αντιστρόφων συναρτήσεων έπεται ότι η συνάρτηση εφαπτομένη παραγωγίζεται, είναι γνήσια αύξουσα και περιττή. Επίσης ισχύει ότι $\lim_{x\to\pi/2-} \tan x = +\infty.$

Ορισμός 4. *Ορίζουμε τις συναρτήσεις sin και cos στο διάστημα* $(-\pi, \pi)$ *όπως παρακάτω:*

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \text{όπου} \quad u = \varepsilon\varphi(x/2).$$

Πρόταση 5. *Εάν* $-\pi < x < \pi$, *τότε*

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

Αποδ:

Όπως αναφέρεται στον ορισμό θέτουμε $u = \tan(x/2)$. Τότε $x = 2\tan^{-1} u$, οπότε

$1 = \frac{2}{1+u^2}\frac{du}{dx}$ και $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+u^2).$

Έτσι $\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{du}\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{dx} = \frac{-4u}{(1+u^2)^2}\cdot\frac{1}{2}(1+u^2) = \frac{-2u}{1+u^2} = -\sin x.$

Όμοια παραγωγίζεται και η άλλη σχέση.

Όταν x→π− , tan(x/2)→+∞ , έχουμε

$\lim_{x\to\pi-} \cos x = \lim_{u\to+\infty} \frac{1-u^2}{1+u^2} = -1,$ και $\lim_{x\to\pi-} \sin x = \lim_{u\to+\infty} \frac{2u}{1+u^2} = 0.$

Όμοια $\lim_{x\to-\pi+} \cos x = -1,$ και $\lim_{x\to-\pi+} \sin x = 0.$

Εάν επεκτείνουμε τώρα τους ορισμούς του sin και του cos σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών αριθμών απαιτώντας ,

sinπ=0, sin(x+2π)=sinx, cosπ=-1, cos(x+2π)=cosx, τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι προκύπτουσες συναρτήσεις είναι παντού συνεχείς. Για παράδειγμα η συνέχεια της cosx στο π, προκύπτει ως εξής:

$$\lim_{x\to\pi-}\cos x=-1=\cos\pi.$$

και $\lim_{x\to\pi+}\cos x=\lim_{x\to-\pi+}\cos(t+2\pi)=\lim_{x\to-\pi+}\cos t=-1=\cos\pi.$

Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις έχουν παντού συνεχή παράγωγο και συγκεκριμένα ισχύουν $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ και $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ για κάθε x□R. (Συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης τιμής: Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και το $\lim_{x\to x_o} f'(x_0)$ υπάρχει, τότε η f έχει συνεχή παράγωγο στο x_0.)

Πρόταση 6. *Πυθαγόρειο θεώρημα. Για κάθε $x\in R$,*

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Αποδ:

$\frac{d}{dx}(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\sin x\cos x+2\cos x(-\sin x)=0$. Άρα η $\sin^2 x+\cos^2 x$ είναι σταθερή και θέτοντας x=π, παρατηρούμε ότι η σταθερά είναι ίση με 1.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν y=sinx ή y=cosx, τότε

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0. \qquad (*)$$

Γενικότερα, αυτή η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από κάθε γραμμικό συνδυασμό του ημx και του συνx , δηλαδή αν y=Acosx +Bsinx, όπου A και B είναι σταθερές , τότε η (*) ισχύει. Ισχύει όμως και το αντίστροφο όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7. *Έστω f μια συνάρτηση με την ιδιότητα $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in R$. Τότε υπάρχουν A,B τέτοια ώστε $f(x)=A\cos x+B\sin x$.*

Αποδ: Θέτουμε $g(x) = f(x) - f(0)\sigma\upsilon\nu x - f'(0)\eta\mu x$. Εύκολα προκύπτει ότι $g''(x) + g(x) = 0$, και $g(0) = g'(0) = 0$.

Τότε $\frac{d}{dx}\left\{\left[g'(x)\right]^2 + \left[g(x)\right]^2\right\} = 2g'(x)\left[g''(x) + g(x)\right] = 0$.

Η έκφραση $\left[g'(x)\right]^2 + \left[g(x)\right]^2$ πρέπει να είναι σταθερή και θέτοντας x=0 η σταθερά ισούται με μηδέν. Αμφότερα τα $g'(x)$ και $g(x)$ πρέπει να είναι ίσα με μηδέν και ιδιαιτέρως ισχύει $f(x) = f(0)\sigma\upsilon\nu x + f'(0)\eta\mu x$.

Πόρισμα 8. *Για κάθε δυο πραγματικούς αριθμούς x,α έχουμε:*

$\cos(\alpha + x) = \cos\alpha \cdot \cos x - \sin\alpha \cdot \sin x$,

$\sin(\alpha + x) = \sin\alpha \cdot \cos x + \cos\alpha \cdot \sin x$.

Αποδ: Θέτουμε $f(x) = \sin(\alpha + x)$, τότε $f''(x) = -\sin(\alpha + x) = -f(x)$. και άρα από το προηγούμενο θεώρημα,

$\sin(\alpha + x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$, όπου A και B σταθερές. Παραγωγίζοντας , έχουμε $\cos(\alpha + x) = -A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$.

Τότε για x=0 έχουμε $\sin\alpha = \mathrm{A}$, και $\cos\alpha = \mathrm{B}$.

Πόρισμα 9. *Η συνάρτηση cosx είναι άρτια και η συνάρτηση sinx είναι περιττή.*

Αποδ: Έστω $f(x) = \sin(-x)$. Τότε $f'(x) = -\cos(-x)$ και $f''(x) = -\sin(-x) = f(x)$. Τότε από την απόδειξη του θεωρήματος $f(x) = f(0) \cdot \cos x + f'(x) \cdot \sin x$.

Όμως $f(0) = 0$ και $f'(0) = -1$. Έτσι $\sin(-x) = f(x) = -\sin x$. Με παραγώγιση έχουμε $-\cos(-x) = -\cos x$.

Αν x=$\pi/2$, τότε $u = \varepsilon\varphi(x/2) = 1$, και άρα $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1-1^2}{1+1^2} = 0$ και $\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1+1^2} = 1$,

Τα παραπάνω πορίσματα οδηγούν στις σχέσεις $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$, κλπ.

Οι περισσότερες από τις πιο ενδιαφέρουσες τριγωνομετρικές σχέσεις προκύπτουν κατά φυσιολογικό τρόπο(τύποι του διπλάσιου και του μισού τόξου για ημx). Υπάρχει, όμως μια ακόμη ταυτότητα που θα πρέπει να αποδείξουμε, ώστε και η αναλυτική Τριγωνομετρία να είναι πλήρης, δηλαδή θα πρέπει να δείξουμε ότι tanx=sinx/cosx. $-\pi/2<x<\pi/2$. Χρησιμοποιούμε γι΄αυτό την ταυτότητα $2\tan^{-1}u=\tan^{-1}\frac{2u}{1-u^2}$ με $|u|<1$.

[Αυτή προκύπτει εύκολα αφού και τα δυο μέλη μηδενίζονται όταν u=0, και τα δυο μέλη έχουν την ίδια παράγωγο, συγκεκριμένα $2/(1+u^2)$]. Αν θέσουμε x= $2\tan^{-1}u$, τότε $-\pi/2<x<\pi/2$, $u=\tan x/2$ και $\tan x=2u/1-u^2=\sin x/\cos x$.

Επεκτείνουμε τη συνάρτηση της εφαπτομένης εκτός του διαστήματος ($-\pi/2<x<\pi/2$) θέτοντας tanx=$\sin x/\cos x$.

Ορίζουμε επίσης secx=1/(cosec x),……

Έως το σημείο αυτό η ανάπτυξη ήταν καθαρά αναλυτική. Πρέπει τώρα να δείξουμε πως οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συσχετίζονται με τη γεωμετρία.

Πρόταση 10. *Για κάθε πραγματικό αριθμό θ το σημείο $P_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$. Αντίστροφα κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου είναι της μορφής P_θ .Επιπλέον $P_\theta= P_{\theta'}$ αν και μόνο αν θ και θ΄ διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.*

Αποδ: Το ότι το σημείο P_θ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$ προκύπτει από την Πυθαγόρεια ταυτότηταμα $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Επειδή οι συναρτήσεις sinx και cosx έχουν περίοδο 2π, ισχύει $P_\theta= P_{\theta'}$, αν τα θ και θ΄ διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.Αν (x,y) είναι κάποιο σημείο του μοναδιαίου κύκλου εκτός του (-1,0), θέτουμε $\theta=2\tan^{-1}\frac{y}{x+1}$. Τότε $-\pi<\theta<\pi$,

$u = \cos\frac{\theta}{2} = \frac{y}{x+1}$, *και άρα*

$$\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\frac{y^2}{(x+1)^2}}{1+\frac{y^2}{(x+1)^2}} = \frac{x^2+2x+1-y^2}{x^2+2x+1+y^2} = \frac{2(x^2+x)}{2(x+1)} = x$$ *, και όμοια*

$\sin\theta = y$ *.Το σημείο (-1,0) είναι ασφαλώς το* P_π

	$-\pi<\theta<-\pi/2$	$-\pi/2<\theta<0$	$0<\theta<\pi/2$	$\pi/2<\theta<\pi$
συνθ	-	+	+	-
ημθ	-	-	+	+

Έχουμε δείξει ότι κάθε σημείο (x,y) στον μοναδιαίο κύκλο είναι της μορφής P_θ , όπου $-\pi<\theta\leq\pi$. Για την πλήρη απόδειξη, αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός θ είναι μοναδικός. Σημειώνουμε αρχικά το πρόσημο των cosθ και sinθ(σχήμα 1). [Αν $0<\theta<\pi/2$, τότε $0<u=\tan(u/2)<1$, και άρα $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} > 0$ και $\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2} > 0$.

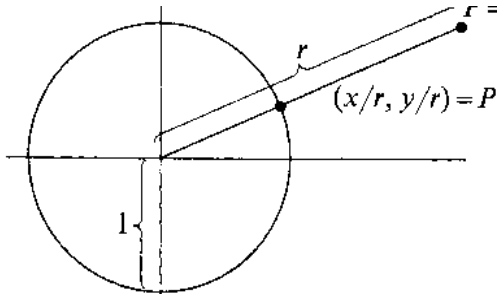
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις του πίνακα έπονται από τις ιδιότητες $\sin(x+\pi/2)=\cos x$ και $\cos(x+\pi/2)=-\sin x$.] Αν $y\geq 0$, τότε το θ είναι μη αρνητικός. Επειδή η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi]$, υπάρχει μόνο μια τιμή του θ τέτοια ώστε $x=\cos\theta$. Όμοια , παίρνουμε την μοναδικότητα αν $y<0$.

Αν P=(x,y) είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου διάφορο της αρχής των αξόνων, θέτουμε $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Τότε το (x/r,y/r) ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο , και σύμφωνα με το θεώρημα υπάρχει αριθμός θ μοναδικός ως προς τα ακέραια πολλαπλάσια του 2π τέτοιος ώστε (x/r,y/r)= P_θ ή ισοδύναμα,

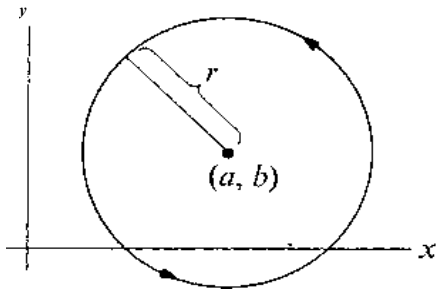
x=r cosθ και y=r sinθ.

Κάθε τέτοιο θ λέγεται πολική γωνία (ή όρισμα) του P. Αν $-\pi<\theta\leq\pi$, τότε το θ (που είναι μοναδικό) καλείται βασική τιμή της πολικής γωνίας.Η πολική γωνία είναι προφανώς σταθερή κατά μήκος της ακτίνος που αρχίζει από την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο P.

Ορίζουμε τώρα το π από την ισότητα $\pi = 4\int_0^1 (1+x^2)^{-1}dx.$ και θα δούμε τον συνηθισμένο χαρακτηρισμό, ότι δηλαδή είναι ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου.Θεωρούμε προς τούτο κύκλο C ακτίνας r. Εάν (α,β) είναι το κέντρο του , τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα , ο



Σχήμα 1



Σχήμα 2

C έχει τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις:

$x = a + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$ και $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Καθώς το θ αυξάνει από $-\pi$ σε 0, το σημείο κινείται πάνω στο κάτω ημικύκλιο από αριστερά προς τα δεξιά, και καθώς το θ αυξάνει από 0 ως το π, το σημείο κινείται στο πάνω ημικύκλιο από δεξιά προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Έτσι καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ τα σημεία του C διαγράφοντας ακριβώς μια φορά με κατεύθυνση αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου. Υπολογίζουμε τότε ότι το μήκος της περιφέρειας είναι:

$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(dx/d\theta)^2+(dy/d\theta)^2}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} r d\theta = 2\pi r.$ (βλ.[36])

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

1.Έστω μια τριγωνομετρική σειρά της μορφής

(1) $$\frac{a_o}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...,x\in R$$

Αν υποθέσουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομαλά στο R και ότι το άθροισμα είναι η συνάρτηση f(x), $x\in R$ *δηλαδή*

(2) $$\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin x)=f(x),x\in R$$

Είναι φανερό ότι τότε η συνάρτηση f *είναι συνεχής και ισχύει επιπλέον η σχέση* $f(x)=f(x+2\pi)\forall x\in R$ *, δηλαδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) επί α) cosnx , n=0,1,2,..... και β) sinnx , n=0,1,2,..... και ολοκληρώνουμε στο [α,α+2π], όπου α □ R, τα μέλη της προκύπτουσας σχέσης και στις δύο περιπτώσεις α) και β). Σύμφωνα με το θεώρημα ολοκλήρωσης ομαλά συγκλινουσών σειρών συναρτήσεων η ολοκλήρωση γίνεται κατά όρους και έτσι προκύπτουν αντίστοιχα οι τύποι:*

(3) $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx,n=0,1,2,.....$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nx,n=0,1,2,.....$$

Για την εξαγωγή των παραπάνω τύπων χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω σχέσεις:

(4) $\int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos mxdx=0$ *, αν n≠m,* $\int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos mxdx=\pi$ *, αν n=m*

$\int_a^{a+2\pi}\sin nx\sin mxdx=0$ *, αν n≠m ,* $\int_a^{a+2\pi}\sin nx\sin mxdx=\pi$ *, αν n=m και*

$\int_a^{a+2\pi}\cos nx\sin mxdx=0\forall n,m\in N$.

1.1 <u>Θεώρημα</u>:

Εάν μια τριγωνομετρική σειρά

$\frac{a_o}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...,x\in R$ *συγκλίνει ομαλά προς μια συνάρτηση* f *,τότε 1) η* f *είναι συνεχής 2) περιοδική με περίοδο 2π και 3) οι συντελεστές της σειράς εκφράζονται μέσω της* f *από τους τύπους:*

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx, n = 0,1,2,.....$ *και* $b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx, n = 0,1,2,.....$

2.Έστω τώρα μια συνάρτηση $f(x), x \in R$ *περιοδική με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε ένα διάστημα [α,α+2π] ώστε να έχουν νόημα οι τύποι (3), ορίζεται δε μια τριγωνομετρική σειρά όπως η (1) με συντελεστές οριζόμενους από τους τύπους (3). Έχουμε τότε το παρακάτω,*

<u>Πρόβλημα</u>: α) Η ούτως οριζόμενη σειρά συγκλίνει όταν $x \in R$*;*
β) αν συγκλίνει, τότε συγκλίνει προς τη συνάρτηση f*;*
Το παρόν κεφάλαιο απαντά μερικώς επί του προβλήματος, μάλιστα δε με γενικότερη μορφή, υπό την οποία τίθεται παρακάτω.

3.Ορθογώνια συστήματα συναρτήσεων

Έστω $R_{[a,b]}$ *το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων, οι οποίες είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμες στο [α,b] και δυο συναρτήσεις* $f \in R_{[a,b]}$ *και* $g \in R_{[a,b]}$.
Γνωρίζουμε τότε ότι ισχύει και $f \cdot g \in R_{[a,b]}$.
Δίνουμε τώρα τους παρακάτω ορισμούς:

3.1.Ορισμός: Καλούμε εσωτερικό γινόμενο της συνάρτησης $f \in R_{[a,b]}$ *επί την* $g \in R_{[a,b]}$*, και το συμβολίζουμε με* (f,g) *το ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)g(x)dx$*, δηλαδή :*

(5) $$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

Βάσει αυτού του ορισμού αποδεικνύονται άμεσα οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

I. $(f,g) = (g,f)$ (μεταθετική)

II. $(cf,g) = c(f,g)$ (γραμμική) III. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ (επιμεριστική)

3.2. *Ορισμός: Καλούμε norm της* $f \in R_{[a,b]}$ *και τη συμβολίζουμε με* $\|f\|$ *τον πραγματικό αριθμό* $(\int_a^b f^2(x)dx)^{1/2} \equiv (f,f)^{1/2}$*, δηλαδή*

(6) $$\|f\| = (\int_a^b f^2(x)dx)^{1/2} \equiv (f,f)^{1/2}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της norm:

I. $|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|$ (ανισότης Cauchy-Schwarz)

II. $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ (ανισότης Minkowski)

III. $\|f+g\|^2 = (f,f) + 2(f,g) + (f,g) = \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2$.

Εκ της ΙΙΙ. Συνάγεται ότι αν είναι $(f,g)=0$ τότε ισχύει

$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

3.3. *Ορισμός: Δύο συναρτήσεις* $f \in R_{[a,b]}$ *και* $g \in R_{[a,b]}$, *λέγονται ορθογώνιες όταν ισχύει ότι* $(f,g)=0$.

Έτσι οι συναρτήσεις cosnx, cosmx, με m≠n είναι ορθογώνιες σε κάθε διάστημα [α,α+2π], καθώς επίσης και οι συναρτήσεις sinnx, sinmx, με m≠n όπως και οι cosnx, sinmx, είναι ορθογώνιες σε κάθε διάστημα [α,α+2π].

3.4. *Ορισμός: Ένα σύνολο συναρτήσεων* $S=\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}$ *με* $\varphi_n \in R_{[a,b]}$, *n=0,1,... καλείται ένα ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων επί του [α,b] όταν ισχύει η σχέση :* $(\varphi_m,\varphi_n)=0$ $\forall m,n$ *με m≠n.*

Έτσι το σύνολο $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...,\cos nx,\sin nx,...\}$ *είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων πάνω σε κάθε διάστημα [α,α+2π].*

3.5. *Ορισμός: Ένα ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων* $S=\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}$ *επί του [α,b] καλείται ορθοκανονικό ισχύει η σχέση* $\|\varphi_n\|=1$, *n=0,1,...*

Έτσι το ορθογώνιο σύστημα $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...,\cos nx,\sin nx,...\}$ *δεν είναι ορθοκανονικό , ενώ το* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},...,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},...\right\}$ *είναι ορθοκανονικό επί κάθε διαστήματος [α,α+2π].*

Είναι φανερό ότι αν $S=\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}$ *είναι ορθογώνιο και ισχύει* $\|\varphi_n\|\neq 0,\ \forall n=0,1,...$ *επί του [α,b], τότε το* $S^*=\{\varphi_0^*,\varphi_1^*,...,\varphi_n^*,...\}$ *με* $\varphi_n^*=\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ *είναι ορθοκανονικό επί του [α,b],διότι* $\|\varphi_n^*\|=\left\|\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\|=\dfrac{\|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}=1,\ n=0,1,...$

3.6. *Ορισμός: Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων* $S=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}, x\in[\alpha,b]$.

α)Θα λέμε ότι το S *είναι γραμμικώς εξηρτημένο επί του [α,b]* $\Leftrightarrow\exists$ *σταθερές* $c_i,\ i=0,1,...,n$ *με* $\sum_{i=0}^{n}|c_i|\succ 0$ *και* $\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)=0\ \forall x\in[\alpha,b]$.

β) Θα λέμε ότι το S *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο* $\Leftrightarrow$ *δεν είναι γραμμικώς εξηρτημένο.*

3.7. *Ορισμός: Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων* $S=\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}, x\in[\alpha,b]$ *μη πεπερασμένο.*

α)Θα λέμε ότι το S *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο* $\Leftrightarrow$ *κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο*

β)Θα λέμε ότι το S *είναι γραμμικώς εξηρτημένο* $\Leftrightarrow$ *δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Αποδεικνύεται ότι κάθε ορθοκανονικό σύστημα $S=\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}$ $,x\in[\alpha,b]$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

4.Έστω $S=\{\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n,...\}$ $,x\in[\alpha,b]$ *ένα τυχαίο ορθοκανονικό σύστημα με* $S\subseteq R_{[\alpha,\beta]}$. *Θεωρούμε μια τυχαία σειρά της μορφής:* $\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(x)$, *έστω δε ότι αυτή συγκλίνει ομαλά προς μια συνάρτηση* $f(x)$, $x\in[\alpha,b]$.*Τότε αποδεικνύεται ότι : 1)η* $f\in R_{[\alpha,\beta]}$ *και 2) ισχύει*

(7) $c_n=\int_a^{\beta}f(x)\varphi_n(x)dx=(f,\varphi_n),\ n=0,1,...$

Οι τύποι αυτοί είναι ανάλογοι προς τους (3) του εδ.1

Ας υποτεθεί τώρα ότι δίδεται μια συνάρτηση $f \in R_{[a,\beta]}$ *και ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων* S *όπως το παραπάνω ,τότε ορίζεται εκ των τύπων (7) η ακολουθία* c_n, *n=0,1,…, συνεπώς ορίζεται η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, *x∈[α,b] η οποία λέγεται : η σειρά Fourier της* f *η αντίστοιχη προς το ορθοκανονικό σύστημα* S *συμβολίζεται δε με :*

(8) $$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Οι συντελεστές c_n, *n=0,1,… καλούνται: οι συντελεστές Fourier της* f *.*

Τίθεται τώρα το γενικότερο του εδαφίου 1 πρόβλημα.

Πρόβλημα: α) Η σειρά Fourier της f *, η αντίστοιχη προς το ορθοκανονικό σύστημα* S *συγκλίνει; β) αν συγκλίνει, τότε συγκλίνει προς την συνάρτηση* f *;*

5.Μέση σύγκλιση ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων. Έστω $\sigma_n(x)$, *,x∈[α,b], n=0,1,… μια ακολουθία συναρτήσεων με* $\sigma_n \in R_{[a,b]}$ *n=0,1,… και επιπλέον μια συνάρτηση* $f \in R_{[a,b]}$.

5.1. Ορισμός: Θα λέμε ότι η ακολουθία $\sigma_n(x)$, *n=0,1,… συγκλίνει κατά μέσον προς τη συνάρτηση* f *, και θα το συμβολίζουμε με* $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = f$ *~ισχύει :* $\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n - f\| = 0$. *Αποδεικνύεται εύκολα ότι η ομαλή σύγκλιση συνεπάγεται την μέση σύγκλιση, ενώ το αντίστροφο δεν είναι αληθές.*

Ισχύουν επίσης τα κάτωθι θεωρήματα:

5.2. <u>Θεώρημα</u>:

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα $S = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subseteq R_{[a,b]}$, *μια πραγματική συνάρτηση* $f \in R_{[a,b]}$*και τυχούσα σειρά της μορφής* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \varphi_n$. *Έστω επιπλέον* $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \varphi_i$ *ένα τυχαίο μερικό άθροισμα της σειράς αυτής ,* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *η σειρά*

Fourier της f, *δηλαδή έστω* $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, *και* $s_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i$ *το αντίστοιχο του* σ_n *μερικό άθροισμα της σειράς αυτής. Τότε ισχύει η σχέση:*

$\|f - \sigma_n\| \geq \|f - s_n\|$, *x∈[α,b], όπου το =~ είναι* $\gamma_i = c_i$, *i=0,1,...*

Το συμπέρασμα αυτό δηλώνει ότι η norm $\|f - \sigma_n\|$ *γίνεται ελάχιστη ~οι συντελεστές* γ_i, *i=0,1,...,n εκλέγονται ίσοι προς τους συντελεστές Fourier* c_i, *i=0,1,...,n της* f.

Απόδειξη. Κατά τον ορισμό της norm και λόγω των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου έχουμε :

(9) $$\|f - \sigma_n\|^2 = \|f\|^2 - 2(f, \sigma_n) + \|\sigma_n\|^2$$

Είναι όμως :

(10α) $$\|\sigma_n\|^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} \gamma_i \varphi_i, \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \varphi_i \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \gamma_i \gamma_j (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \|\varphi_i\|^2$$

Διότι το S *είναι ορθοκανονικό. Εξ άλλου είναι :*

$(f, \sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i (f, \varphi_i) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i c_i$, *όπου ετέθη*

(10β) $$c_i = (f, \varphi_i), i=0,1,...,n.$$

Λόγω των (10α),(10β) η (9) γίνεται:

(11) $$\|f - \sigma_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{i=0}^{n} \gamma_i c_i + \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2 + \sum_{i=0}^{n} (\gamma_i - c_i)^2,$$

Οπότε ισχύει:

$\|f - \sigma_n\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \equiv \|f - s_n\|$ *και το =~ είναι* $\gamma_i = c_i$, *i=0,1,... ο.ε.δ.*

5.3. <u>*Θεώρημα*</u>*(ανισότης του Bessel):Εάν* $f \in R_{[a,\beta]}$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *είναι η σειρά Fourier της* f *ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα* $S = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subseteq R_{[a,b]}$,*τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ *συγκλίνει και ισχύει:*

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2,$$

(συνεπώς ισχύει και $c_n \to 0$*, δηλαδή η ακολουθία των συντελεστών Fourier της* f *είναι μηδενική).*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε: $\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2$*, είναι δε* $\|f - s_n\|^2 \geq 0$*, οπότε ισχύει:* $\sum_{i=0}^{n} c_i^2 \leq \|f\|^2$*, άρα η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$*, συγκλίνει και ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος.*

5.4. <u>*Θεώρημα*</u>*(τύπος του Parseval): Εάν* $f \in R_{[a,\beta]}$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ *είναι η σειρά Fourier της* f *ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα* $S = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subseteq R_{[a,b]}$*, τότε για τη σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ *ισχύει:* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|f\|^2 \sim$ *ισχύει* $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ *.*

Απόδειξη. Από την (11) για $\gamma_i = c_i$*, i=0,1,... έχουμε* $\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2$*, οπότε* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|f\|^2 \sim$ *ισχύει* $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$ *δηλαδή* $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ *.*

5.5. Παρατήρηση: Αν $f(x), x \in R$ *είναι πραγματική περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π και ο περιορισμός της* f *στο [α,α+2π] ανήκει στο* $R_{[a,a+2\pi]}$*, τότε το σε παρένθεση συμπέρασμα του θεωρήματος 5.3 διατυπώνεται ως εξής:*

(14) $$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx \to 0 \quad \text{και} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin nx dx \to 0.$$

6.Αποδεικνύεται ότι ισχύει το χρήσιμο θεώρημα

6.1. <u>*Θεώρημα*</u>*: Αν* $f(x), x \in R$ *είναι συνεχής, περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π και* $\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin x)$ *είναι η αντίστοιχη προς αυτή σειρά Fourier τότε α)η ακολουθία* $\sigma_n = \frac{a_o}{2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos ix + b_i \sin i)$ *των μερκών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει κατά μέσον προς την* f *σε κάθε κλειστό διάστημα [α,b], δηλαδή*

$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = f \forall [a,b]$ *β)ισχύει η σχέση :* $\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ *(τύπος του Parseval) και γ) ισχύει η σχέση :* $\int_0^x f(u)du = \frac{a_o}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα μπορούμε να γράφουμε:

i) $\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin x) = f(x), x \in R$ *(μέση σύγκλιση σειράς), και*

ii) με τη βοήθεια του γ) συμπεράσματος ισχύει ότι: η σειρά των ολοκληρωμάτων σε κάθε διάστημα [0,x] των όρων της σειράς, ισούται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο [0,x] .

Παρατήρηση: Ενδέχεται η σειρά Fourier μιας συνάρτησης f όπως η παραπάνω να μην συγκλίνει , αλλά πάντα η σειρά στο δεύτερο μέρος του γ) συμπεράσματος συγκλίνει, μάλιστα σχεδόν ομαλά στο R.

7.1. <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f(x), x \in R$ μια πραγματική περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π τέτοια ώστε το διάστημα [-π, π] να μπορεί να χωρισθεί σε πεπερασμένου πλήθους υποδιαστήματα τέτοια ώστε στο εσωτερικό καθενός η f να έχει συνεχή δευτέρα παράγωγο και πεπερασμένα πλευρικά όρια στα άκρα αυτών των διαστημάτων. Τότε η σειρά Fourier της f η αντίστοιχη προς το ορθοκανονικό , σύστημα $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, ...\right\}$ *συγκλίνει προς τη συνάρτηση*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\lim_{t\to -0} f(t) + \lim_{t\to +0} f(t)), x \in R.$$

Το παραπάνω θεώρημα σημαίνει ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει προς την f στο εσωτερικό των παραπάνω υποδιαστημάτων του [-π, π] , όπου προφανώς η f είναι συνεχής . Στα άκρα των παραπάνω διαστημάτων (τα οποία δεν αποκλείεται να είναι σημεία ασυνεχείας για την f) συγκλίνει προς τη μέση τιμή των πλευρικών οριακών τιμών της f στα εν λόγω σημεία.

Έτσι για μια συνάρτηση f όπως η παραπάνω και για τη σειρά Fourier αυτής , την αντίστοιχη προς το θεωρηθέν ορθοκανονικό σύστημα S μπορούμε να γράψουμε:

$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin x),\forall x$ *που ανήκει στο εσωτερικό οιουδήποτε από τα υποδιαστήματα του [-π, π].*

Παρατηρούμε επιπλέον ότι αν η f είναι και συνεχής τότε ισχύει:

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin x),\forall x\in R.$$

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση της σειράς είναι και ομαλή στο R. Επιπλέον το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και γενικότερα , αν το ορθοκανονικό σύστημα S είναι τυχαίο και η περίοδος είναι τυχαία.(βλ.[62])

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ

1. Aaboe, Asger. Episodes from the Early History of Mathematics. Νέα Υόρκη: Random House, 1964.

2. Ball, W.W. Rouse. A Short Account of the History of Mathematics. 1908. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1960.

3. Beckmann, Petr. A History of π. Μπούλντερ, Κολοράντο: Golem Press, 1977.

4. Bell, Eric Temple. Men of Mathematics. 2 τόμ. 1937. Επανέκδ, Αγγλία: Penguin Books, 1965. [Ελληνική έκδοση: Οι μαθηματικοί, Ηράκλειο, 1992, ΠΕΚ.]

5. Bell, Eric Temple The Development of Mathematics. 1945. 2η έκδ. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1992.

6. Berthon, Simon, and Andrew Robinson. The Shape of the World: The Mapping and Discovery of the Earth. Σικάγο: Rand McNally, 1991.

7. Bond, John David. "The Development of Trigonometric Methods down to the Close of the XVth Century," Isis 4 (Οκτώβριος 1921), σελ. 295-323.

8. Boyer, Carl B. A History of Mathematics. 1968. Αναθ. έκδ. Νέα Υόρκη: John Wiley, 1989. [Ελληνική έκδοση: Η ιστορία των μαθηματικών, Αθήνα, 1997, Εκδόσεις Πνευματικός.]

9. Braunmuhl, Anton von. Vorlesungen iiber die Geschichte der Trigonometric. 2 τόμ. Λειψία: Teubner, 1900-1903.

10. Brown, Lloyd A. The Story of Maps. 1949. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1979.

11. Burton, David M. The History of Mathematics: An Introduction. Βοστόνη: Allyn and Bacon, 1985.

12. Cajori, Florian. A History of Mathematics. 1893. 2η έκδ.Νέα Υόρκη: Macmillan, 1919.

13. Cajori, Florian. A History of Mathematical Notations. 2 τόμ.: Higher Mathematics. 1929. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1993

14. Chase, Arnold Buffum. The Rhind Mathematical Papyrus. 1927-1929. Επανέκδ. Ρέστον, Βιρτζίνια: NCTM, 1979.

15. Courant, Richard. Differential and Integral Calculus. 2 τόμ. 1934. Επανέκδ. Λονδίνο: Blackie & Son, 1956.

16. Dantzig, Tobias. The Bequest of the Greeks. Νέα Υόρκη: Charles Scribner's Sons, 1955.

17. Derek Ball, An Introduction to Real Analysis, Pergamon Press, Oxford 1973

18. Dorrie, Heinrich. 100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. Μτφ. David Antin. 1958. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1965.

19. Dunham, William. Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics. Νέα Υόρκη: John Wiley, 1990.

20. Euclid. The Thirteen Books of Euclid's Elements. 3 τόμ. Μτφ. από το κείμενο του Heiberg με εισαγωγή και σχόλια από τον σερ Thomas Heath. Νέα Υόρκη, 1956. (Ανατύπωση, Εκδόσεις Dover).

21. Eves, Howard. An Introduction to the History of Mathematics. 1964. Επανέκδ. Φιλαδέλφεια: Saunders College Publishing, 1983.

22. Gillings, Richard J. Mathematics in the Time of the Pharaohs. 1972. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1982.

23. Gillispie, Charles Coulston, επιμ. Dictionary of Scientific Biography. 16 τόμ. Νέα Υόρκη: Charles Scribner's Sons, 1970-1980

24. Giles J., Real Analysis, John Willey, New York, 1972 Goldberg Richard, Methods of Real Analysis Blaisbell publishing Company , New York, 1964

25. Goldberg Richard, Methods of Real Analysis . Blaisbell publishing Company, New YORK, 1964.

26. Gow J. ,A short History of Greek Mathematics (Chapter V)-CHELSEA PUBLISHING COMPANY (New York,1968)

27. HEATH Th.. A History of Greek Mathematics(Vol.I-Chapter IV)-DOVER PUBLICATIONS(New York, 1981)

28. Helden, Albert van. Measuring the Universe: Cosmic Dimensions from Aristarchus to Halley. Σικάγο: University of Chicago Press, 1985.

29. Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von. Sensations of Tone. 1885. Μτφ. από τα γερμανικά Alexander J. Ellis. Νέα Υόρκη: Dover, 1954.

30. Hollingdale, Stuart. Makers of Mathematics. Χάρμοντσγουόρθ, Αγγλία: Penguin Books, 1989.

31. Jolley, L.B.W. Summation of Series. 1925. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1961.

32. Joseph, George Gheverghese. The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics. Χάρμοντσγουόρθ, Αγγλία: Penguin Books, 1991.

33. Karpinski, Louis C. "Bibliographical Check List of All Works on Trigonometry Published up to 1700 A.D.," Scripta Mathematica 12 (1946), σελ. 267-283.

34. Katz, Victor J. A History of Mathematics: An Introduction. Νέα Υόρκη: Harper Collins, 1993.

35. Keay, John. The Great Arc: The Dramatic Tale of How India was Mapped and Everest was Named. Νέα Υόρκη: Harper Collins, 2000.

36. Kitchen W. Joseph. Calculus of one variable, Addison-Wesley Publishing Company, London ,1968.

37. Klein, Felix. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Τόμ. 1: Arithmetic, Algebra, Analysis. 1924. Μτφ. από τα γερμανικά E.R. Hedrick and C.A. Noble. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover.

38. Kline, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modem Times. 3 τόμ. Νέα Υόρκη: Oxford University Press, 1990.

39. Knopp, Konrad. Elements of the Theory of Functions. Μτφ. από τα γερμανικά Frederick Bagemihi. Νέα Υόρκη: Dover, 1952.

40. Kramer, Edna E. The Nature and Growth of Modem Mathematics. 1970. Επανέκδ. Πρίνστον, Νιου Τζέρσυ: Princeton University Press, 1981.

41. Loomis, Elisha Scott. The Pythagorean Proposition. 1940. Επανέκδ. Ουάσιγκτον: NCTM, 1972.

42. Maor Eli. e: The Story of a Number. Πρίνστον, Νιου Τζέρσυ: Princeton Univeristy Press, 1994.

43. Maor Eli, Trigonometric Delights, Princeton University Press,1998.[Ελληνική έκδοση: Τριγωνομετρικά Λουκούμια , Αθήνα 2002, Μτφ.Τεύκρος Μιχαηλίδης ,Εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ.]

44. Jan Minkusinski-Piotr Minkusinski , An Introduction to Analysis, John Willey, New York, 1993

45. Muller, Johann (Regiomontanus). De triangulis omnimondis. Μτφ. Barnabas Hughes με εισαγωγή και σημειώσεις. Μάντισον, Ουισκόνσιν: University of Wisconsin Press, 1967.

46. Oughtred William: A Great Seventeenth-Century Teacher of Mathematics. Σικάγο: Open Court, 1916.

47. Osserman Robert. Poetry of the Universe: A Mathematical Exploration of the Cosmos. Νέα Υόρκη: Anchor Books/Doubleday, 1995. [Ελληνική έκδοση, Η ποίηση τον Σύμπαντος, Αθήνα, 1998, Εκδόσεις Κάτοπτρο.]

48. Pedoe, Dan. Geometry and the Liberal Arts. Νέα Υόρκη: St. Martin's, 1976.

49. Simmons, George F. Calculus with Analytic Geometry. Νέα Υόρκη: McGraw-Hill, 1985.

50. Smith, David Eugene. History of Mathematics. Τόμ. 1: General Survey of the History of Elementary Mathematics. Τόμ. 2: Special Topics of Elementary Mathematics. 1923-1925. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: Dover, 1958.

51. Snyder, John P. Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections. Σικάγο: University of Chicago Press, 1993.

52. Struik, D.J., επιμ. A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Καί-μπριτζ, Μασαχουσέτη: Harvard University Press, 1969.

53. Taylor, C.A. The Physics of Musical Sounds. Λονδίνο: English Universities Press, 1965.

54. Van der Werden, Bartel L. Science Awakening: Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics. 1954. Μτφ. Arnold Dresden. 1961. Επανέκδ. Νέα Υόρκη: John Wiley, 1963. [Ελληνική έκδοση: Η αφύπνιση της επιστήμης, Ηράκλειο, 2000, ΠΕΚ.]

55. Wilford, John Noble. The Mapmakers. Νέα Υόρκη: Alfred A. Knopf, 1981.

56. Yates, Robert C. Curves and Their Properties. 1952. Επανέκδ. Ρέστον: NCTM, 1974.

57. Zeller, Mary Claudia. The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus. Αν Άρμπορ, Μίσιγκαν: Edwards Bros., 1944

58. Zygmund Antoni.Trigonometrical Series ,second edition 1955 by DOVER publications,[ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ-1995 Π.Ε.Κ]

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗ

59. Βρατσάνος Γιαννούλης. Αρχαία Ελληνική Τριγωνομετρία, Αθήνα 2006,Εκδόσεις ΔΙΑΥΛΟΣ .

60. Γιαννακούλιας Ευστάθιος.Απειροστικός Λογισμός.Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΑΠΟ ΤΟΝ 5^{ο} ΕΩΣ ΚΑΙ ΤΟΝ 19^{ο} ΑΙΩΝΑ .Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ,2007.

61. Εξαρχάκος Θ.Ιστορία των Μαθηματικών, Τόμος Α΄-Αθήνα 1997, Τόμος Β΄-Αθήνα 1999

62. Κάππος Δ.Α, Απειροστικός Λογισμός,(Τεύχος Β΄) ΑΘΗΝΑ 1965

63. Νεγρεπόντης Σ,Γιωτόπουλος Σ, Γιαννακούλιας Ε,Απειροστικός Λογισμός, Τόμοι Ι, ΙΙ, ΙΙΙ. Αθήνα 1999, Εκδ. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ.

64. Σταμάτης Ευάγγελος , Ευκλείδου Γεωμετρία(Στοιχεία)-Τόμοι 2-Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα 1975

65. Σταμάτης Ευάγγελος , Αρχιμήδους Άπαντα-Τόμοι 2-Έκδοση Τ.Ε.Ε. Αθήνα 1970