ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΩΣ ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΤΕΥΞΗ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΠΟΥ ΘΕΤΕΙ ΣΤΙΣ ΜΕΡΕΣ ΜΑΣ Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΜΑΛΑΠΑΝΗ ΕΛΕΝΗ

Α.Μ:200932

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό– Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών

Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος (επιβλέπων καθηγητής)	Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ	……
2) Πόταρη Δέσποινα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ	……..
3) Αρχοντάκης Φραγκίσκος	Εκλ. Λέκτορας, International Hellenic University	……

Ευχαριστίες

Θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη καθώς και τον Λέκτορα Φραγκίσκο Αρχοντάκη για την καθοδήγηση και τη βοήθεια που μου προσέφεραν καθ᾽όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής αυτής εργασίας. Ευχαριστώ, επίσης, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δέσποινα Πόταρη που με τίμησε με τη συμμετοχή της στην εξεταστική επιτροπή.

Στους μαθητές μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ……09

ABSTRACT.....11

ΕΙΣΑΓΩΓΗ……....13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1.1 Εισαγωγή…….....17

1.2 Γιατί πρέπει να διδάσκεται η Στατιστική στα σχολεία;…….....18

1.3 Η ιστορική εξέλιξη της διδασκαλίας της Στατιστικής στην Ελλάδα...23

1.3.1 Τι διδάσκονται σήμερα στη Στατιστική στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση……...26

1.3.2 Η διδασκαλία της Στατιστικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε διάφορες χώρες του κόσμου……....34

1.4 Οι δυσκολίες κατανόησης των εννοιών της Στατιστικής.....37

1.4.1 Πως η σημερινή κατάσταση στην εκπαίδευση δυσκολεύει την κατανόηση της Στατιστικής…….....38

1.4.2 Πως οι καθηγητές διδάσκουν Στατιστική και δεν βοηθούν στην κατανόηση των στατιστικών εννοιών…….39

1.4.3 Οι εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών για τις στατιστικές έννοιες…….....40

1.5 Κατευθυντήριες γραμμές για τη διδασκαλία της Στατιστικής στις μέρες μας.....42

1.5.1 Ο ρόλος της μεταβλητότητας των δεδομένων……..44

1.5.2 Οι πιθανότητες ως βασικό εργαλείο της Στατιστικής……..45

1.5.3 Ο ρόλος των Μαθηματικών στη Στατιστική εκπαίδευση…46

1.5.4 Η διδασκαλία της Στατιστικής με τη βοήθεια των Υπολογιστών…….....46

1.5.5 Η αναγκαιότητα των πραγματικών δεδομένων (real data) στη διδασκαλία της Στατιστικής……...47

1.5.6 Το πλαίσιο διδασκαλίας της Στατιστική σύμφωνα με την έκθεση GAISE……....49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ

2.1 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης και διδακτικά μοντέλα.....59

2.1.1 Οι επικρατέστερες σύγχρονες θεωρίες για τη μάθηση……..59

2.1.2 Τα κυριότερα φαινόμενα που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας……67

2.1.3 Η πρακτική της τάξης……71

2.2 Το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης και διδασκαλίας με τη χρήση μικρών ομάδων (Small-Group Cooperative Learning).....77

2.2.1 Εισαγωγή…….....77

2.2.2 Τι είναι η ομαδοσυνεργατική μάθηση?.....77

2.2.3 Υποθέσεις του μοντέλου…….....81

2.2.4 Η 'ευαισθησία' του μοντέλου…….....82

2.2.5 Η αξία του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης……...84

2.3 Στατιστική και ομαδοσυνεργατική μάθηση.....87

2.2.1 Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ομαδοσυνεργατική μάθηση στα πλαίσια ενός μαθήματος Στατιστικής……88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΟΜΑΔΟΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

3.1 Περιγραφή της διδασκαλίας.....91

3.1.1 Ταυτότητα της διδασκαλίας……..91

3.1.2 Φύλλο εργασίας – Υποθετική Μαθησιακή Τροχιά……...95

3.2 Ανάλυση της διδασκαλίας. 105

3.2.1 Η πρακτική της τάξης…….....105

3.2.2 Παρουσίαση και ανάλυση διαλόγων…….....107

3.3 Συμπεράσματα…….....120

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Απομαγνητοφώνηση Διαλόγου…….....129

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…….....145

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική αποσκοπεί στο να αναδείξει την ανάγκη διδασκαλίας της Στατιστικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και να συμβάλλει στην όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της διδασκαλίας της. Η προσέγγιση της διδασκαλίας της γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης καθώς και τα πιο πρόσφατα συμπεράσματα των ερευνών στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών και ειδικότερα της Στατιστικής. Η διδακτική προσέγγιση που προτείνουμε εστιάζει στη χρήση πραγματικών δεδομένων από την καθημερινή ζωή καθώς και στην κατανόηση των βασικών στατιστικών εννοιών σε αντίθεση με την παραδοσιακή προσέγγιση που εστιάζεται σε φόρμουλες, διαδικασίες και ανιαρούς υπολογισμούς. Επίσης, για την αποδοτικότερη διδασκαλία της Στατιστικής και για την κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών της μετατοπίζουμε το ενδιαφέρον μας από το δασκαλοκεντρικό μοντέλο μάθησης στο ομαδοσυνεργατικό.

Λέξεις Κλειδιά: Διδασκαλία Στατιστικής, δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ομαδοσυνεργατική μάθηση, πραγματικά δεδομένα, σύγχρονες θεωρίες μάθησης

ABSTRACT

The aim of the present thesis is to highlight the need of teaching Statistics in secondary education and to contribute to the best approach of teaching Statistics. The approach of teaching Statistics is performed by taking under consideration the modern learning theories as well as the most recent research results in the field of Teaching Mathematics and especially Statistics. The teaching and methodology approach we suggest focuses on the use of real data from every day life, unlike the traditional approach which is based on formulas procedures and boring calculations. Moreover, in order to make the teaching of Statistics more efficient and to consolidate the concepts of Statistics, we shift our interest from the traditional model to the cooperative learning model.

Key Words: Teaching statistics, secondary school, cooperative learning, real data, learning theories

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γεγονός αδιαμφισβήτητο ότι ο 21ος αιώνας σηματοδοτήθηκε από την κυριαρχία της πληροφόρησης. Η πληροφορία υποκατέστησε σε μεγάλο βαθμό τα υλικά προϊόντα οδηγώντας σε μια νέα μορφή συγκέντρωσης δύναμης. Η Στατιστική κατέχει περίοπτη θέση σε αυτή την εποχή της πληροφόρησης. Είναι η επιστήμη που μπορεί να συγκεντρώσει, να αξιολογήσει, να επεξεργαστεί και να καταστήσει κατανοητό ένα τεράστιο εύρος πληροφοριών. Αυτό το τεράστιο εύρος πληροφοριών κατακλύζει συνεχώς την καθημερινότητα κάθε πολίτη. Έτσι η δυνατότητα για συλλογή, οργάνωση, περιγραφή και ερμηνεία δεδομένων είναι απαραίτητα προσόντα για τον πολίτη που θέλει να είναι σκεπτόμενος. Η δημιουργία σκεπτόμενων πολιτών όμως είναι ευθύνη (ή τουλάχιστον έτσι πρέπει να είναι) της εκπαίδευσης και του σχολείου γι' αυτό και η Στατιστική αποτελεί πλέον μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων των σχολείων της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε όλες τις χώρες του κόσμου. Η εισαγωγή της Στατιστικής στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (ως μέρος των Μαθηματικών) οδήγησε στην αναζήτηση μεθοδολογιών διδασκαλίας της. Ο αυξανόμενος ρόλος της σε όλους τους τομείς των δραστηριοτήτων του ανθρώπου αύξησε και το ενδιαφέρον για τις μεθόδους διδασκαλία της.

Η παρούσα διπλωματική αποσκοπεί στο να αναδείξει την ανάγκη διδασκαλίας της Στατιστικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και να συμβάλλει στην όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της διδασκαλίας της. Η προσέγγιση της διδασκαλίας της γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης καθώς και τα πιο πρόσφατα συμπεράσματα των ερευνών στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών και ειδικότερα της Στατιστικής. Η διδακτική προσέγγιση που προτείνουμε εστιάζει στη

χρήση πραγματικών δεδομένων από την καθημερινή ζωή καθώς και στην κατανόηση των βασικών στατιστικών εννοιών σε αντίθεση με την παραδοσιακή προσέγγιση που εστιάζεται σε φόρμουλες, διαδικασίες και ανιαρούς υπολογισμούς. Επίσης, για την αποδοτικότερη διδασκαλία της Στατιστικής και για την κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών της μετατοπίζουμε το ενδιαφέρον μας από το δασκαλοκεντρικό μοντέλο μάθησης στο ομαδοσυνεργατικό.

Συγκεκριμένα η δομή της εργασίας έχει ως εξής: Στο πρώτο κεφάλαιο αρχικά αναφερόμαστε στην αναγκαιότητα της Στατιστικής εκπαίδευσης στις μέρες μας. Στη συνέχεια εξηγούμε την υπάρχουσα κατάσταση για τη διδασκαλία της Στατιστικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αναλύουμε τις δυσκολίες των εννοιών της Στατιστικής και περιγράφουμε τις κατευθυντήριες γραμμές για τη διδασκαλία της όπως ορίζονται από την ASA (American Statistical Association) και το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύουμε τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης και εστιάζουμε στο ομαδοσυνεργατικό μοντέλο διδασκαλίας. Στη συνέχεια εξηγούμε τον τρόπο που το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία της Στατιστικής και αναλύουμε τα πλεονεκτήματα που έχει. Στο τρίτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια για να φτιάξουμε ένα συγκεκριμένο σενάριο μαθήματος Στατιστικής. Το μάθημα αναφέρεται στην απλή γραμμική παλινδρόμηση, βιντεοσκοπείται, αναλύεται και γίνεται ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

'Η στατιστική σκέψη θα γίνει μια μέρα τόσο αναγκαία και απαραίτητη για το μέσο πολίτη όσο και η ικανότητα γραφής και ανάγνωσης'

H.G Wells

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1.1 Εισαγωγή

Ο όρος "Στατιστική" προέρχεται από τη λατινική λέξη "status". Με την εμφάνιση της και στα πρώτα στάδια της ανάπτυξής της οι άνθρωποι ταύτισαν την έννοια της στατιστικής με την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα και αναρίθμητων μη κατανοητών διαγραμμάτων που προσπαθούν να περιγράψουν διάφορα οικονομικά, δημογραφικά, πολιτικά κ.τ.λ. φαινόμενα. Η στοιχειώδης συλλογή στατιστικών στοιχείων είναι αρκετά παλιά. Η αρχαιότερη ίσως γνωστή απογραφή πληθυσμού είναι αυτή που έγινε το 2238 π.Χ. στην Κίνα από τον αυτοκράτορα ΥΑΟ. Στην αρχαιότητα, η συγκέντρωση στατιστικών στοιχείων είχε σαν στόχο τον εντοπισμό των πολιτών που ήταν υποχρεωμένοι να υπηρετήσουν σαν πολεμιστές ή να υποβληθούν σε φορολογία. Μετά το Μεσαίωνα οι κυβερνήσεις της Δυτικής Ευρώπης ενδιαφερόντουσαν για στατιστικά στοιχεία λόγω του φόβου επιδημιών και της αντίληψης ότι το μέγεθος του πληθυσμού επηρέαζε σημαντικά την πολιτική και στρατιωτική τους δύναμη. Τέλος από τον 16^{ο} μέχρι τον 19^{ο} αιώνα, η ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου ώθησε τις πολιτειακές αρχές στη μελέτη οικονομικών δεδομένων όπως εξαγωγικό εμπόριο, πλήθος και δυναμικότητα βιομηχανιών κλπ.

Οι αρχές της Στατιστικής αναπτύχθηκαν κατά τον 18^{ο} αιώνα, ενώ η συγκρότησή της ως επιστήμη έγινε στα μέσα του 19^{ου} αιώνα μετά την ανάπτυξη από τους μαθηματικούς της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Η Στατιστική μπορεί να θεωρηθεί ως ο επιστημονικός κλάδος που έχει σαν

αντικείμενο τη συγκέντρωση, παρουσίαση και ανάλυση (επεξεργασία) ποσοτικών και ποιοτικών δεδομένων που αναφέρονται σε χαρακτηριστικά (ιδιότητες) πολυπληθών ομάδων. Ο C.R Rao πρόσφατα όρισε τη Στατιστική ως την επιστήμη, την τεχνολογία, και την τέχνη εξαγωγής-όρυξης (mining) πληροφορίας από παρατηρητικά δεδομένα για τη λύση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Ένας άλλος ορισμός της Στατιστικής είναι ότι αυτή αποτελεί τον επιστημονικό κλάδο που προσφέρει τη δυνατότητα να μελετηθούν εμπειρικά, δηλαδή με δεδομένα, πολλά και διάφορα προβλήματα ή φαινόμενα της κοινωνίας τα οποία υπόκεινται στους νόμους της τύχης.

Στο παρελθόν ήμασταν επηρεασμένοι από τον αυστηρό ντετερμινισμό (αιτιοκρατία): " η εμφάνιση ενός γεγονότος Α οδηγούσε πάντα στο αποτέλεσμα Β". Σήμερα επηρεασμένοι από τις νέες θεωρίες στο χώρο της Φυσικής και των Μαθηματικών έχουμε λιγότερο άκαμπτη αντίληψη. Ο αυστηρός ντετερμινισμός του χθες έγινε σήμερα στατιστικός ντετερμινισμός " η εμφάνιση του γεγονότος Α καταλήγει με πιθανότητα στο αποτέλεσμα Β ". Έτσι τη θέση του βέβαιου και του αναγκαίου στις περισσότερες περιπτώσεις έχει πάρει το πιθανό.

Αυτός λοιπόν ο επιστημονικός κλάδος, με τη ζωτική σπουδαιότητα για τη σύγχρονη ζωή μας, έχει συμπεριληφθεί βαθμιαία στα προγράμματα σπουδών πολλών χωρών σε όλο τον κόσμο, σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

1.2 Γιατί πρέπει να διδάσκεται η Στατιστική στα σχολεία;

Στο τέλος του 19ου αιώνα ο H.G.Wells ισχυρίστηκε ότι η στατιστική σκέψη θα γίνει μια μέρα τόσο αναγκαία και απαραίτητη για το μέσο πολίτη όσο και η ικανότητα γραφής και ανάγνωσης. Ο ισχυρισμός του Wells αποδείχθηκε προφητικός. Την ανάγκη διδασκαλίας της Στατιστικής

στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχουν επισημάνει, πολλά χρόνια πριν, πολλοί διεθνείς οργανισμοί όπως οι UNESCO (United Nations Educational, Scientific, and Cultural Organization), NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ICOTS (International Conference on Teaching Statistics) κ.α.

Οι βασικοί λόγοι εισαγωγής της Στατιστικής στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών αναπτύσσονται παρακάτω:

1. *Ο αυξανόμενος ρόλος της Στατιστικής σε όλους τους τομείς των δραστηριοτήτων του ανθρώπου είναι σήμερα γεγονός αδιαμφισβήτητο.* Η Στατιστική κατακλύζει την καθημερινότητά μας. Αν ανοίξουμε μία οποιαδήποτε εφημερίδα θα βρούμε διαγράμματα, γραφήματα και λέξεις όπως ''μέσος όρος'', ''τάσεις'', ''εκτιμήσεις'', ''συσχετίσεις'', ''απίθανο'', ''με πιθανότητα..'' κ.α. Όλες αυτές οι λέξεις ανήκουν στον τομέα της Στατιστικής επιστήμης. Οι αθλητικές εφημερίδες είναι γεμάτες από στατιστικούς πίνακες και διαγράμματα για τις βαθμολογίες των ομάδων καθώς και των επιδόσεων των παιχτών τους. Γραφήματα και διαγράμματα εμφανίζονται καθημερινά στα οικονομικά ένθετα για να μας δείξουν τα επιτόκια και τις διακυμάνσεις του Χρηματιστηρίου, για να εκτιμήσουν τον πληθωρισμό, τους χρηματιστηριακούς δείκτες, την ανάπτυξη των εταιρειών καθώς και τον όγκο των χρηματιστηριακών συναλλαγών. Επίσης, για την πρόγνωση του καιρού στα Μ.Μ.Ε χρησιμοποιούνται διαγράμματα και συγκριτικοί πίνακες για να μας εξηγήσουν την μεταβολή της θερμοκρασίας τους τελευταίους μήνες ή χρόνια καθώς και εκφράσεις όπως ' η πιθανότητα βροχής της επόμενες ημέρες είναι 70%'. Σε τακτά χρονικά διαστήματα ανακοινώνονται δημοσκοπήσεις για τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων, είτε για τη

δημοτικότητα κάποιου πολιτικού προσώπου, είτε για την άποψη των πολιτών για κάποια πολιτική απόφαση που πάρθηκε ή πρόκειται να παρθεί στο μέλλον. Δημοσκόπηση όμως μπορεί να γίνει και για άλλα ζητήματα της καθημερινότητας μας, όπως για το αν πρέπει να χτιστεί ένα καινούριο σχολείο ή αεροδρόμιο σε μια περιοχή, για το αν οι καπνιστές αντιλαμβάνονται τις παρενέργειες του καπνίσματος κ.α. Κατά πόσο όλες αυτές οι δημοσκοπήσεις έχουν στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα ή κατά πόσο μια ψηφοφορία είναι αμερόληπτη είναι κάτι που πρέπει να αποφασίσει ο αναγνώστης ή ακροατής ή τηλεθεατής από μόνος του. Αν αναλογιστούμε ότι πολλές από τις παραπάνω δημοσκοπήσεις, διαγράμματα ή γραφήματα παρουσιάζονται και ερμηνεύονται με τέτοιο τρόπο ώστε να παραπλανήσουν ή να χειραγωγήσουν τον κόσμο αντιλαμβανόμαστε πόσο σημαντικό είναι από μικρή ηλικία να μπορεί κάποιος να σταθεί κριτικά απέναντι σε όλο αυτό τον κατακλυσμό των πληροφοριών. Το σχολείο είναι εκείνο που οφείλει να 'εκπαιδεύσει' το παιδί να γίνει αύριο ένας ενημερωμένος και κριτικά σκεπτόμενος πολίτης που θα μπορεί να ξεχωρίσει τη στατιστικά ορθή πληροφορία. Θα μπορεί δηλαδή να καταλάβει ότι τα αποτελέσματα κάθε δημοσκόπησης ή γενικότερα στατιστικής έρευνας προκύπτουν από κάποιο δείγμα του πληθυσμού. Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων εξαρτάται από το πώς επιλέχθηκε το δείγμα αυτό. Η διδασκαλία της Στατιστικής στο σχολείο θα βοηθήσει το παιδί να γίνει στατιστικά εγγράμματος και να αποκτήσει έτσι την απαραίτητη αντίληψη για την προσέγγιση και κατανόηση των δεδομένων που παρουσιάζονται στην καθημερινή του ζωή.

2. *Ζούμε σε έναν κόσμο αβεβαιότητας, πολλές από τις αποφάσεις που έχουμε να πάρουμε στην καθημερινότητά μας περιέχουν ένα ρίσκο.* Αποφάσεις καθοριστικές για τη ζωή μας όπως η επιλογή της κατασκευής ενός πυρηνικού εργοστασίου στον τόπο μας που θα μας δίνει ενέργεια από τη μία αλλά θα υπάρχει και η πιθανότητα ραδιενεργού ατυχήματος από την άλλη. Αποφάσεις για τις παρενέργειες των διαφόρων φαρμάκων στον οργανισμό μας (πόσο πιθανές είναι να συμβούν), για το επιτρεπτό όριο ακτινοβολίας στη συντήρηση των τροφίμων ή το επιτρεπτό όριο των φυτοφαρμάκων και των ορμονών σε αυτά, για το ανώτατο όριο ταχύτητας σε έναν αυτοκινητόδρομο (το όριο που θα δώσει την μικρότερη πιθανότητα ατυχήματος) κ.ά. Για όλα αυτά θα πρέπει να διαθέτουμε στατιστική αντίληψη για να ισορροπήσουμε ανάμεσα στο φόβο και στα πλεονεκτήματα που μας δίνει κάθε μία από τις παραπάνω αποφάσεις μας. Ορίζουμε το ρίσκο ως την πιθανότητα να συμβεί κάτι κακό αλλά χωρίς κανέναν υπαινιγμό για την έκταση του κακού. Για παράδειγμα πως θα πρέπει να αντιδράσει κάποιος στην ακόλουθη πρόταση: ‘ Την τελευταία εικοσιπενταετία υπάρχει μία διαρκής ανησυχία για κάποιο πιθανό πυρηνικό ατύχημα. Η ανησυχία αυτή οδηγεί την κοινή γνώμη στο να είναι υπέρ του κλεισίματος πυρηνικών εργοστασίων. Κάθε χρόνο όμως στις Η.Π.Α πεθαίνουν 50.000 άτομα σε αυτοκινητιστικά δυστυχήματα, δηλαδή συνολικά 1.000.000 θάνατοι την τελευταία εικοσιπενταετία.’ Ο στατιστικά εγγράμματος πολίτης πρέπει να μπορεί να ξεχωρίσει ότι η πιθανότητα να συμβεί κάτι κακό σε δύο διαφορετικά γεγονότα μπορεί να είναι η ίδια αλλά η έκταση της καταστροφής στο ένα και το άλλο διαφορετική. Όλα τα παραπάνω συνηγορούν στο ότι κάθε άνθρωπος θα πρέπει να έχει ‘εκπαιδευτεί’ κατάλληλα για να ξεχωρίζει το μεγάλο από το μικρό ρίσκο και να μπορεί να πάρει τις

βέλτιστες αποφάσεις μέσα σε καταστάσεις αβεβαιότητας. Η διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων στο σχολείο μπορεί αναπτύξει αυτή την πολύ σημαντική ικανότητα.

3. *Η γνώση της Στατιστικής διαδραματίζει έναν κεντρικό και θεμελιώδη ρόλο για τις μελλοντικές σπουδές των μαθητών.* Είναι κοινή εκτίμηση ότι η Στατιστική είναι απαραίτητο εργαλείο σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους. Αν ρίξουμε μια ματιά στο πρόγραμμα σπουδών των Πανεπιστημίων και των ΤΕΙ στη χώρα μας θα δούμε ότι το συντριπτικό ποσοστό συμπεριλαμβάνει τουλάχιστον ένα μάθημα Στατιστικής. Οι Ιατρικές επιστήμες χρησιμοποιούν την Απαραμετρική Στατιστική για να εξάγουν συμπεράσματα για τις παρενέργειες κάποιου φαρμάκου, για να εξετάσουν πόσο επιζήμιοι είναι κάποιοι παράγοντες στην ανάπτυξη ή εξέλιξη κάποιας ασθένειας, για να συσχετίσουν δύο οι περισσότερους παράγοντες ή να βρουν την αλληλεπίδρασή τους. Οι κοινωνικές επιστήμες χρησιμοποιούν τη Στατιστική για να συγκεντρώσουν στοιχεία και να αναπτύξουν μοντέλα για την ανθρώπινη συμπεριφορά ενώ οι οικονομικές επιστήμες χρησιμοποιούν τεχνικές της Στατιστικής και της Θεωρίας Πιθανοτήτων για να κάνουν εκτιμήσεις κινδύνου μιας κατάστασης και για να καταστρώσουν σχέδια που θα τους αποφέρουν την καλύτερη λύση με το μικρότερο δυνατό κόστος.

4. *Το μάθημα της Στατιστικής δίνει την δυνατότητα στους διδάσκοντες να τη χρησιμοποιήσουν σε άλλα μαθήματα* που περιλαμβάνονται στα αναλυτικά προγράμματα και έτσι μέσω μιας διαθεματικής προσέγγισης της διδασκαλίας να προωθήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και την κατανόηση της Στατιστικής. Οι νόμοι της

κίνησης των αερίων ή της κίνησης των μορίων μιας διαλυμένης ουσίας σε ένα υγρό (κίνηση Brown) περιγράφονται με ικανοποιητική ακρίβεια από ένα στοχαστικό μοντέλο ' τυχαίου περιπάτου', ενώ οι νόμοι του Mendel για την κληρονομικότητα περιγράφονται από το μοντέλο της διωνυμικής κατανομής.

5. *Το μάθημα της Στατιστικής μπορεί να αποτελέσει το βασικό εργαλείο με το οποίο μπορούν να γίνουν έρευνες στο σχολικό χώρο με τη συμμετοχή των παιδιών.* Τους δίνει έτσι την δυνατότητα να δουν την εφαρμογή των Μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο και να ασχοληθούν με πραγματικά δεδομένα που τόσος λόγος γίνεται τελευταία για την χρησιμότητά τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η σύνδεση των μαθημάτων του σχολείου με πραγματικά προβλήματα της καθημερινότητάς μας αποτελεί το ζητούμενο των σύγχρονων θεωριών μάθησης και η Στατιστική μπορεί πιο εύκολα από οποιοδήποτε άλλο μάθημα να το κάνει αυτό.

Όλα τα παραπάνω δείχνουν ότι η στατιστική εκπαίδευση είναι απαραίτητη για να μπορούμε να αντεπεξέλθουμε στις ανάγκες της καθημερινότητα μας ως καταναλωτές, ως πολίτες και ως επαγγελματίες

1.3 Η ιστορική εξέλιξη της διδασκαλία της Στατιστικής στην Ελλάδα

Παρόλο που η μαθηματική επιστήμη από τις αρχές του 20ου αιώνα είχε γνωρίσει καταπληκτική ανάπτυξη, η ύλη των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών παρέμενε η ίδια ή μεταβλήθηκε ελάχιστα. Η διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων συμπεριελήφθη στα αναλυτικά προγράμματα της Μέσης Εκπαίδευσης με τη μεταρρύθμιση που είναι

γνωστή στη διεθνή και ελληνική βιβλιογραφία με το όνομα ''Νέα Μαθηματικά''(New Mathematics) ή ''Μοντέρνα Μαθηματικά''. Ανέλαβαν λοιπόν τα μοντέρνα Μαθηματικά τη σημαντική αποστολή να γεφυρώσουν το χάσμα ανάμεσα στα σχολικά και τα πανεπιστημιακά Μαθηματικά, προσαρμόζοντας τη μαθηματική παιδεία στις ανάγκες των καιρών. (Βαινάς 1998.)

Πραγματοποιήθηκαν για τον σκοπό αυτό ειδικά συνέδρια σε διάφορες χώρες (ανάμεσα σε άλλες και στην Ελλάδα) που σκοπό είχαν τον προγραμματισμό της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στα σχολεία της Μέσης Εκπαίδευσης κυρίως. Δηλαδή στην επιλογή της ύλης που έπρεπε να διδαχθεί, τους τρόπους και τις μεθόδους διδασκαλίας, τη μόρφωση και επιμόρφωση του διδακτικού προσωπικού και άλλα σχετικά με την διδακτική των Μαθηματικών. Οι πρώτες κατευθυντήριες γραμμές δόθηκαν κυρίως στο διεθνές συνέδριο του O.E.C.D (Ο.Ο.Σ.Α) στο 1ο και 2ο συνέδριο στη Γαλλία και τη Γιουγκοσλαβία τα έτη 1959-1960.

Ανάμεσα στα άλλα τονίσθηκε η ανάγκη εισαγωγής της διδασκαλίας Στατιστικής και των Πιθανοτήτων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η εσπευσμένη αυτή προσπάθεια για αλλαγή προγραμμάτων έγινε αρχικά στη Μέση Εκπαίδευση και όχι στη Στοιχειώδη όπως θα αναμενόταν. Οι μεταρρυθμίσεις στη Στοιχειώδη Εκπαίδευση άρχισαν αργότερα αφού είχε ολοκληρωθεί η μεταρρύθμιση στη Μέση Εκπαίδευση.

Η Στατιστική μπήκε ως αυτοτελής ενότητα για πρώτη φορά στο βιβλίο της πειραματικής διδασκαλίας των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου που γράφτηκε το 1964. Αργότερα στο βιβλίο του Η. Ντζιώρα <<Άλγεβρα>> της Ε' Τάξης του πρακτικού Γυμνασίου (σημερινή Β Λυκείου). Το ΚΕΜΕ (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο μέχρι το 2012 και τώρα Ινστιτούτο Εκαπιδευτικής Πολιτικής Ι.Ε.Π.) το 1976 ανέλαβε τη συγγραφή νέων διδακτικών βιβλίων Μαθηματικών για το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Στα βιβλία αυτά η συγγραφή ολοκληρώθηκε το 1983 και είχαν συμπεριληφθεί

ενότητες από τη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Συγκεκριμένα στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου των Παπαμιχαήλ Δ. κ.α. ΟΕΔΒ 1978 υπήρχαν δύο ανεξάρτητα κεφάλαια από τα οποία το ένα περιελάμβανε έννοιες Περιγραφικής Στατιστικής και το άλλο βασικές έννοιες θεωρίας Πιθανοτήτων. Επίσης το βιβλίο της Γ Λυκείου <<Μαθηματικά Ι>> που προοριζόταν για τους μαθητές της 1ης δέσμης του Βαρουχάκη Ν. κ.α. υπήρχαν τα κεφάλαια Συνδυαστικής, Στατιστικής και Πιθανότητες. Την ίδια ακριβώς ύλη είχε και το βιβλίο της Γ΄ Λυκείου <<Μαθηματικά ΙΙ>> που προοριζόταν για τους μαθητές της 2ης και 4ης δέσμης. Στη επόμενη σειρά διδακτικών βιβλίων που ακολούθησαν και ίσχυαν έως και το 2007 στα Γυμνάσια, η θέση της Στατιστικής και της Θεωρίας Πιθανοτήτων έχει αναβαθμιστεί σημαντικά. Συγκεκριμένα από την Α΄ Γυμνασίου γινόταν μια πρώτη μύηση στην ανάγνωση και την κατασκευή διαγραμμάτων. Η προσπάθεια αυτή συνεχιζόταν με πιο συστηματικό τρόπο στη Β Γυμνασίου όπου υπήρχε ξεχωριστό κεφάλαιο αφιερωμένο στη Στατιστική. Η διδασκαλία της Στατιστικής στο Γυμνάσιο ολοκληρωνόταν στη Γ Γυμνασίου. Στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου (διδασκόταν μέχρι και το 2010) συμπληρωνόταν η ύλη της Περιγραφικής Στατιστικής η οποία περιλαμβανόταν στα βιβλία του Γυμνασίου, ενώ στη Β Λυκείου (μέχρι και το 2010) εισάγονταν οι βασικές έννοιες της Συνδυαστικής και της θεωρίας των Πιθανοτήτων μέχρι την δεσμευμένη πιθανότητα. Τέλος στη Γ΄ Λυκείου (διδασκόταν μέχρι και το 1999) επαναλαμβανόταν η ύλη της Συνδυαστικής και των Πιθανοτήτων της Β Λυκείου και συμπληρωνόταν με τη δεσμευμένη πιθανότητα, την ανεξαρτησία ενδεχομένων και τη διωνυμική κατανομή. Να σημειωθεί ότι το βιβλίο αυτό της Γ Λυκείου αντικαταστάθηκε το 2000 με αυτό των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας που ισχύει μέχρι σήμερα και θα το περιγράψουμε παρακάτω. Με τα παραπάνω υλοποιούσαν έναν από τους βασικούς στόχους του νέου αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια

εκπαίδευση που είναι η γνωριμία των μαθητών με τις βασικές έννοιες της Στατιστικής και της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Πρέπει να τονισθεί όμως ότι η ύλη της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων <u>δε διδασκόταν</u> στα Γυμνάσια και Λύκεια όπως προβλεπόταν από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Ενώ τα κεφάλαια υπήρχαν σχεδόν κανείς δεν τα δίδασκε ή αν τα δίδασκε θα ήταν μέσα σε ένα δίωρο και σκοπός του μαθήματος ήταν να προσφέρει κάποιες εγκυκλοπαιδικές γνώσεις για τη Στατιστική στα παιδιά.

1.3.2 Τι διδάσκονται σήμερα στη Στατιστική στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Σύμφωνα με το διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης που έγινε το 2001 , τα νέα προγράμματα σπουδών για το μάθημα της Στατιστικής στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση προβλέπουν για την διδασκαλία της τα εξής:

- **<u>Στο Δημοτικό</u>**

Το τρέχων πρόγραμμα σπουδών στο Δημοτικό εισάγει τις πρώτες στατιστικές έννοιες στην Δ΄ Δημοτικού και τις συμπληρώνει στην Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού. Ο γενικός διδακτικός στόχος στις τάξεις αυτές του Δημοτικού είναι <u>*η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων*</u>.

Συγκεκριμένα, στην Δ΄ Δημοτικού :

Οι διδακτικοί στόχοι είναι:

- Να εξασκούνται στη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία ερευνητικών δεδομένων
- Να γνωρίσουν την έννοια της πιθανότητας

Στην Ε' Δημοτικού:

Οι διδακτικοί στόχοι είναι:

- Να εισαχθούν στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους
- Να εξασκηθούν στην ανάγνωση και κατασκευή ραβδογράμματος, εικονογράμματος και γραφικών παραστάσεων
- Να εξασκηθούν στην οργάνωση δεδομένων σε πίνακες
- Να εξοικειωθούν με την έννοια της πιθανότητας
- Να διατυπώνουν προβλέψεις και να υπολογίζουν το μέσο όρο

Στην ΣΤ' Δημοτικού:

Οι διδακτικοί στόχοι είναι:

- Να εξασκούνται στη συλλογή και καταγραφή των δεδομένων ενός προβλήματος
- Να κατασκευάζουν πίνακες δεδομένων και γραφικές παραστάσεις (ραβδογράμματα, ιστογράμματα)
- Να μετατρέπουν προφορικά ή γραπτά δεδομένα σε γραφικές παραστάσεις και αντιστρόφως
- Να διατυπώνουν προβλέψεις για την εξέλιξη ενός φαινομένου
- Να εξοικειωθούν με την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους και να υπολογίζουν το μέσο όρο

Το πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου διαρθρώνεται πάνω στην Επίλυση προβλήματος. Η επίλυση προβλήματος κατέχει κεντρική θέση και διαχέεται σε όλες τις επιμέρους ενότητες. Είναι μία από τις βασικές ικανότητες που επιδιώκεται να αποκτήσουν οι μαθητές σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης. Τα προβλήματα χρησιμοποιούνται τόσο για την καλύτερη κατανόηση εννοιών που έχουν διδαχθεί όσο και για την εισαγωγή νέων εννοιών και τεχνικών. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ανοιχτά προβλήματα που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να μην καθοδηγούνται προς μία στερεότυπη λύση. Στόχος της διδασκαλίας επίλυσης προβλήματος είναι κυρίως η γνωριμία με μεθόδους σκέψης, έρευνας, συλλογής και ανάλυσης πληροφοριών. Είναι απαραίτητο οι μαθητές να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία και συλλογικά να ανακαλύπτουν, να δημιουργούν, να κατασκευάζουν και να εφαρμόζουν τη νέα γνώση. Σύμφωνα όμως με την έρευνα που πραγματοποιήθηκε για τον τρόπο διδασκαλία της Στατιστικής στις τάξεις του Δημοτικού, από τους Χατζηπαντελή Θ., Γκίνη Δ., Κυρίτση Ι., (Απρίλιος 2001) ένα μικρό ποσοστό των δασκάλων 10-15% περίπου χρησιμοποιεί δραστηριότητες όπως αυτές που περιγράφονται πιο πάνω για τη διδακτική προσέγγιση της Στατιστικής.

- **<u>Στο Γυμνάσιο</u>**

Στο Γυμνάσιο η διδασκαλία της Στατιστικής προβλέπεται μόνο στην Β' Γυμνασίου στο 4ο κεφάλαιο της Άλγεβρας (Α' μέρος), αναφέρεται ως Περιγραφική Στατιστική και έχει ως περιεχόμενο τα παρακάτω:

1.Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

2.Γραφικές Παραστάσεις

3. Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

4.Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

5. Μέση τιμή – Διάμεσος

Οι διδακτικοί στόχοι για κάθε ένα από τα 5 μαθήματα του κεφαλαίου είναι:

Στο 1ο μάθημα (προτεινόμενος χρόνος 2 ώρες) επιδιώκεται,

- Να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες του πληθυσμού και του δείγματος
- Να κατανοήσουν τη σπουδαιότητα του αντιπροσωπευτικού δείγματος

Στο 2ο μάθημα (προτεινόμενος χρόνος 3 ώρες) επιδιώκεται,

- Να κατανοήσουν τη χρησιμότητα των γραφικών παραστάσεων
- Να αντλούν πληροφορίες από τις γραφικές παραστάσεις
- Να κατασκευάζουν μια κατάλληλη γραφική παράσταση των δεδομένων ενός πίνακα
- Να παρουσιάζουν τα συμπεράσματα μιας έρευνας

Στο 3ο μάθημα (προτεινόμενος χρόνος 2 ώρες) επιδιώκεται,

- Να γνωρίζουν τις έννοιες συχνότητα-σχετική συχνότητα-κατανομή των συχνοτήτων
- Να συμπληρώνουν πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
- Να κατασκευάζουν μια συγκεκριμένη γραφική παράσταση μιας κατανομής συχνοτήτων

Στο 4ο μάθημα (προτεινόμενος χρόνος 3 ώρες) επιδιώκεται,

- Να ομαδοποιούν στατιστικά δεδομένα σε δεδομένο αριθμό κλάσεων ίσου πλάτους
- Να κατανοήσουν την έννοια του πλάτους των κλάσεων
- Να παριστάνουν μια ομαδοποιημένη κατανομή με ιστόγραμμα, στο οποίο το ύψος των ορθογωνίων του ισούται με τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης

Στο 5ο μάθημα (προτεινόμενος χρόνος 5 ώρες) επιδιώκεται,

- Να μπορούν να υπολογίσουν τη μέση τιμή μεμονωμένων παρατηρήσεων, κατανομής συχνοτήτων και ομαδοποιημένων παρατηρήσεων
- Να μπορούν να προσδιορίσουν τη διάμεσο άρτιου και περιττού πλήθους παρατηρήσεων

Οι οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πρώην Παιδαγωγικό Ινστιτούτο) για τους καθηγητές προβλέπουν 15 διδακτικές ώρες για το κεφάλαιο της Στατιστικής. Στο προηγούμενο πρόγραμμα σπουδών οι συνολικές ώρες ήταν 10. Προτείνονται κάποιοι τρόποι διδασκαλίας όπως:

- η χρήση 6 ιστοσελίδων που περιέχουν πραγματικά δεδομένα
- μία δραστηριότητα που βάζει τους μαθητές να κάνουν οι ίδιοι μια έρευνα, να συλλέξουν δεδομένα από το στενό τους περιβάλλον και να τα επεξεργαστούν
- μία δραστηριότητα (διδασκαλία με φύλο εργασίας) με πραγματικά στατιστικά δεδομένα από το Ευρωπαικό Πρωτάθλημα Ποδοσφαίρου το 2004 όπου τους δίνονται διάφορα στοιχεία για τους 20 ποδοσφαιριστές της εθνικής μας ομάδας. Οι μαθητές 'γίνονται' αθλητικογράφοι που πρέπει να βγάλουν κάποια συμπεράσματα από τον πίνακα με τα στοιχεία που τους δίνονται για τους ποδοσφαιριστές.

Να σημειώσουμε εδώ ότι η παραπάνω δραστηριότητα περιέχει πραγματικά δεδομένα, προσφέρεται για άμεση σύνδεση της Στατιστικής και των Μαθηματικών με την καθημερινότητα αλλά είναι η μοναδική που υπάρχει στο κεφάλαιο. Τα κορίτσια για παράδειγμα ίσως να βρουν το

θέμα βαρετό, επομένως θα μπορούσε να υπάρχει και κάποια εναλλακτική δραστηριότητα.

Επίσης, παροτρύνονται οι καθηγητές να χρησιμοποιήσουν και κάποιο λογιστικό πρόγραμμα και να εξηγήσουν στα παιδιά πως το χρησιμοποιούμε για την επεξεργασία των δεδομένων μας, αλλά δεν προβλέπεται ο χρόνος που θα το πραγματοποιήσουν αυτό.

Τι από όλα τα παραπάνω όμως γίνεται στην πραγματικότητα? Στην πράξη τα πράγματα ήταν και είναι διαφορετικά. Είναι γνωστό ότι στην πλειοψηφία των Γυμνασίων οι καθηγητές μόλις φθάσουν στο αντίστοιχο κεφάλαιο της Στατιστικής διδάσκουν κατά προτεραιότητα κάποιο από τα κεφάλαια της Γεωμετρίας που ίσως δεν έχουν διδάξει ή αν έχουν ολοκληρώσει την ύλη της Γεωμετρίας ασχολούνται με τη Στατιστική επιφανειακά και ανιαρά, υποβαθμίζοντας έτσι το κεφάλαιο.

Σε σχετικές έρευνες (Χατζηπαντελή Θ., Βογιατζή Κ., 1998) στους διδάσκοντες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για το αν οι εκπαιδευτικοί ακολουθούσαν τις οδηγίες του Π.Ι. για τη διδασκαλία των μαθηματικών προκύπτει: Οι εκπαιδευτικοί απαντούν ότι κατά βάση δεν ακολουθούν τις οδηγίες. Οι περισσότεροι αναφερόμενοι στο Γυμνάσιο απάντησαν ότι σε μεγάλο βαθμό τις αγνοούσαν. Οι περισσότεροι υποβάθμιζαν τη σημασία της Στατιστικής και ως προς τον τρόπο διδασκαλίας στην τάξη και την εφαρμογή ενεργητικών στρατηγικών μάθησης (μέθοδος προβλήματος, project, κ.λ.π.) οι περισσότεροι ανέφεραν ότι σπανίως διδάσκουν τρόπους λύσης προβλήματος και ανέφεραν την έλλειψη χρόνου για την εφαρμογή των μεθόδων αυτών.

- **<u>Στο Λύκειο</u>**

Από τη Γ' Γυμνασίου μέχρι και τη Β' Λυκείου τα βιβλία των Μαθηματικών δεν περιέχουν κεφάλαια Στατιστικής. Βέβαια τόσο στην Γ' Γυμνασίου όσο και στην Α' Λυκείου υπάρχει κεφάλαιο Πιθανοτήτων. Όπως θα τονίσουμε και παρακάτω η θεωρία Πιθανοτήτων είναι απαραίτητη για να μπορούν να εμβαθύνουν οι μαθητές σε Στατιστικές έννοιες πέραν αυτών της Περιγραφικής Στατιστικής.

Μετά τη Β' Γυμνασίου, λοιπόν, η Στατιστική εμφανίζεται στην Γ' Λυκείου ως μάθημα γενικής παιδείας και ως επιλεγόμενο μάθημα πανελληνίων εξετάσεων. Αποτελεί το 2ο κεφάλαιο του μαθήματος 'Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής' και έχει ως περιεχόμενο τα παρακάτω:

1. Βασικές έννοιες (Πληθυσμός – Δείγμα – Δεδομένα-Μεταβλητές – Κατανομές Συχνοτήτων)
2. Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων (Ραβδόγραμμα, Κυκλικό Διάγραμμα, Εικονόγραμμα, Ιστόγραμμα, Πολύγωνο Συχνοτήτων, Ομαδοποίηση Δεδομένων)
3. Μέτρα Θέσης και Διασποράς (Μέση τιμή, Διάμεσος, Επικρατούσα Τιμή, Ποσοστημόρια, Εύρος, Διακύμανση, Τυπική απόκλιση, Συντελεστής Μεταβολής)
4. Γραμμική Παλινδρόμηση (Απλή γραμμική παλινδρόμηση, διάγραμμα διασποράς, Ευθεία παλινδρόμησης, Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων)
5. Γραμμική Συσχέτιση (Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης, Συσχέτιση και Παλινδρόμηση)

Στην πράξη διδάσκονται μόνο οι ενότητες 1-3 που περιέχονται στην εξεταστέα ύλη για τις εισαγωγικές εξετάσεις. Δεν διδάσκονται οι κατανομές συχνοτήτων με κλάσεις άνισου πλάτους, τα ποσοστημόρια, η γραμμική παλινδρόμηση και η γραμμική συσχέτιση. Η παραπάνω ύλη διδάσκεται κανονικά από το 1999, χρονιά από την οποία η ύλη αυτή εξετάζεται για τις εισαγωγικές εξετάσεις.

Σύμφωνα με την έρευνα των Χατζηπαντελή Θ., Βογιατζή Κ., (1998) η άποψη των διδασκόντων στη Γ' Λυκείου είναι ότι αναγκαστικά πρέπει να συμμορφωθούν με τις οδηγίες του Π.Ι. Γενικότερα θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι οι ερωτώμενοι εκπαιδευτικοί έχουν μια λογική εξυπηρέτησης των εξεταστικών αναγκών και είναι δέσμιοι της πραγματικότητας ότι το λύκειο είναι προθάλαμος της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Όσον αναφορά τις οδηγίες του Π.Ι. για τους διδάσκοντες στην Γ'Λυκείου παρατηρήσαμε ότι <u>δεν προτείνονται τρόποι διδασκαλίας</u> (π.χ. με δραστηριότητες ή διαθεματική προσέγγιση). Κάποιες από τις ασκήσεις του βιβλίου αναφέρονται σε πραγματικά δεδομένα αλλά δεν είναι αρκετές και το πιο σημαντικό δεν είναι αρκετά ελκυστικές για τα παιδιά. Ακόμα όμως και αν υποθέταμε ότι το βιβλίο ήταν υποδειγματικό με πολλές δραστηριότητες που θα βοηθούσαν στην βαθύτερη κατανόηση των στατιστικών εννοιών τι θα συνέβαινε στην πράξη? Οι ίδιοι εκπαιδευτικοί που ρωτήθηκαν απάντησαν ότι είναι δέσμιοι των εξεταστικών αναγκών του μαθήματος. Τι νόημα θα είχε, λοιπόν, μια δραστηριότητα για τους μαθητές όταν τα θέματα των πανελληνίων εστιάζουν αποκλειστικά και μόνο στα αριθμητικά αποτελέσματα και όχι στην ουσία των στατιστικών εννοιών? Πώς να πείσεις ένα παιδί που έχει το άγχος να γράψει καλά ότι η Στατιστική δεν είναι απλά αριθμητικά αποτελέσματα και ανούσιοι πολύπλοκοι αλγεβρικοί χειρισμοί όταν στα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων τους ζητούνται ακριβώς αυτά.

1.3.2 Η διδασκαλία της Στατιστικής στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε διάφορες χώρες του κόσμου

Κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού του 20ου αιώνα παρατηρείται μία διαρκώς αυξανόμενη δυσαρέσκεια σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας των σχολικών Μαθηματικών. Από το τέλος του 1958 και τις αρχές του 1959 τα 21 κράτη μέλη του Οργανισμού Ευρωπαικής Οικονομικής Συνεργασίας (Ο.Ε.Ε.C) και στον οποίο είχε προσχωρήσει η Αμερική και ο Καναδάς αποφάσισαν να ασχοληθούν με την αναμόρφωση των Μαθηματικών που έπρεπε να διδάσκονται στη Γενική Εκπαίδευση.

Οι γενικές κατευθυντήριες γραμμές δόθηκαν κυρίως στο 1ο συνέδριο του Royaumont-Paris το Νοέμβριο του 1959. Το 2ο συνέδριο της Γιουγκοσλαβίας το Σεπτέμβριο του 1960 είχε κυρίως αντικείμενο τον καθορισμό της ύλης που έπρεπε να διδάσκεται και την προσαρμογή της στις σύγχρονες συνθήκες και απαιτήσεις.

Η διδασκαλία της Στατιστικής σε πολλές χώρες γίνεται από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού. Οι μαθητές από τις πρώτες τάξεις είναι ικανοί να κατασκευάσουν και να ερμηνεύσουν διάφορα είδη γραφικών παραστάσεων (Fuys & Tischler, 1979). Σε πολλές χώρες Μ. Βρετανία, Καναδά, Η.Π.Α. μετά από έρευνες για την διδασκαλία της Στατιστικής στην Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκριτική μελέτη αυτών (Barnett,1982) κατέληξαν σε κάποια συμπεράσματα που αναφέρουμε εν συντομία παρακάτω:

- Περισσότεροι από το 85% των μαθητών της Τρίτης και ακόμα από την Δευτέρα Δημοτικού έχουν εξοικειωθεί με τα διαγράμματα με εικόνες.

- Στην ηλικία των 12 ετών γνωρίζουν τους κοινούς τύπους των γραφικών παραστάσεων (Ραβδογράμματα, ιστογράμματα ή κυκλικά διαγράμματα)
- Η ικανότητα αναπαραστάσεων πληροφοριών μέσω πινάκων είναι δυνατή σε παιδιά από την Τετάρτη μέχρι την Έκτη Δημοτικού σε ποσοστά 66% στην Μ. Βρετανία, 67% στον Καναδά και 63% στις Η.Π.Α.
- Σε μεγάλα ποσοστό οι μαθητές από ηλικία 11 ετών είχαν εξοικειωθεί με την έννοια της μέσης τιμής σε ποσοστά 91% Μ. Βρετανία, 72% στον Καναδά και 89% στις Η.Π.Α.
- Η έννοια της διαμέσου και της επικρατούσας τιμής έχει εισαχθεί από τις τάξεις του Δημοτικού σε ποσοστό 50% Μ. Βρετανία, 60% στις Η.Π.Α.

Επίσης, το Ουγγρικό εκπαιδευτικό σύστημα ήταν πρωτοπόρο στην εισαγωγή της Στατιστικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση 150 χρόνια πριν. Τα τελευταία χρόνια διδάσκεται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού με τον τίτλο 'Στατιστική για τον καθένα'.

Στη Μεγάλη Βρετανία έννοιες της Στατιστικής περιέχονται στα σχολικά προγράμματα εδώ και 40 περίπου χρόνια. Η διδασκαλία ξεκινά από την ηλικία των 8 χρόνων και φτάνει μέχρι και την πανεπιστημιακή εκπαίδευση. Επίσης, στη Μ. Βρετανία θεσπίστηκε από το 1982 ετήσιος διαγωνισμός Στατιστικής με βραβεία για μαθητές ηλικίας 9-13, 13-16, και 16-19. Το ίδιο ισχύει και σε πολλές άλλες χώρες.

Στη Μεγάλη Βρετανία, στις Η.Π.Α, στην Ιταλία καθώς και σε άλλες χώρες τα παιδιά μπορούν να αναλύσουν και να διαχειριστούν πραγματικά δεδομένα μέσω του προγράμματος CENSUS at SCHOOL. Στο πρόγραμμα αυτό οι μαθητές (με τη βοήθεια των δασκάλων τους) συμμετέχουν σε μια δια δικτυακή έρευνα δίνοντας στοιχεία όπως το ύψος,

το βάρος, το νούμερο των παπουτσιών τους και πολλά άλλα. Τα στοιχεία αυτά είναι ελεύθερα προσβάσιμα από όλους (σελίδα για Η.Π.Α http://www.amstat.org/censusatschool/index.cfm και για Μεγάλη Βρετανία http://www.censusatschool.ntu.ac.uk.) Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της σελίδας, είναι ότι τα δεδομένα είναι πραγματικά και οι μαθητές αποτελούν μέρος της διαδικασίας κατασκευής της. Επίσης κατά την επίλυση ενός στατιστικού προβλήματος μπορούν να αντλήσουν στοιχεία από αυτή τη σελίδα.

Σε πολλές διεθνείς οργανώσεις π.χ. UNESCO, NCTM έχει εκφρασθεί ο προβληματισμός για τη διδασκαλία και τη διδακτική της Στατιστικής. Οι εργασίες του 2ου Διεθνούς συνεδρίου για την διδασκαλία και τη διδακτική της Στατιστικής κυκλοφόρησαν το 1994 από την UNESCO σε έναν τόμο με τίτλο <<Η διδασκαλία της Στατιστικής>>. Η επικρατούσα αντίληψη είναι ότι η <<Στατιστική δεν αποτελεί ένα σύνολο τεχνικών, είναι τοποθέτηση απέναντι στα πράγματα, ένας τρόπος αντίληψης που γνωρίζει μάλιστα την ύπαρξη της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας της πληροφορίας και της συλλογής δεδομένων. Επιτρέπει τη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας>>.Στην έκθεση συνίσταται η διδασκαλία της Στατιστικής στα σχολικά μαθηματικά. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στο γεγονός ότι οι μαθητές πρέπει να διδάσκονται τη Στατιστική με δεδομένα που έχουν συλλέξει οι ίδιοι.

Η παραπάνω αντίληψη υιοθετήθηκε από χώρες όπως η Μεγάλη Βρετανία, οι Η.Π.Α., η Ιταλία και η Ισπανία. Οι χώρες αυτές διαθέτουν εθνικά κέντρα για τη στατιστική εκπαίδευση στη χώρα τους. Κάθε κέντρο έχει σκοπό να ανταποκριθεί σε όποιες ανάγκες προκύψουν από τη διδασκαλία της Στατιστικής καθώς και να βελτιώσει τη στατιστική εκπαίδευση στη χώρα του (Holmes, 2002).

1.4 Οι δυσκολίες κατανόησης των εννοιών της Στατιστικής

Ένας από τους τομείς στους οποίους έχει επικεντρώσει το ενδιαφέρον της η διδακτική της Στατιστικής είναι και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών καθώς και στις εσφαλμένες αντιλήψεις που έχουν.

Σύμφωνα με τον Jacobsen (UNESCO, 1989) η βασική δυσκολία που παρουσιάζεται στη διδασκαλία της Στατιστικής είναι το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν συνηθίσει στη μαθηματική λογική η οποία διαφέρει από αυτή της Στατιστικής. Στα Μαθηματικά ξεκινάμε με υποθέσεις και με λογικά επιχειρήματα και καταλήγουμε σε κάποια συμπεράσματα. Στη Στατιστική όμως εργαζόμαστε με επαγωγικό τρόπο όπου από πολλές επιμέρους παρατηρήσεις καταλήγουμε σε κάποια συμπεράσματα, κάθε ένα από τα οποία έχει και μία πιθανότητα να πραγματοποιηθεί.

Επίσης, τα στατιστικά συμπεράσματα αποκτούν νόημα μέσα στο πλαίσιο αναφοράς των δεδομένων, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τα Μαθηματικά όπου τα πλαίσια συσκοτίζουν την καθαρότητα των εννοιών και τελικά πρέπει να απομακρυνθούμε από αυτά, (Moore&Cobb,1997). Στη Στατιστική όπως και στα Μαθηματικά ψάχνουμε για πρότυπα (patterns) αλλά η ερμηνεία των προτύπων αυτών εξαρτάται πάντα από το πλαίσιο στο οποίο δουλεύουμε. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χρονοδιάγραμμα που μας δείχνει την εξέλιξη την ανεργίας κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Στα Μαθηματικά θα μας ενδιέφερε να δούμε τα διαστήματα που το γράφημα είναι αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου αλλά στη Στατιστική κάνουμε και ένα βήμα παραπάνω. Μας ενδιαφέρει και τι συμβαίνει στον κόσμο όταν οι τιμές στο γράφημα αυξάνουν ή πέφτουν. Αν βγάλουμε από τον άξονα των x το χρόνο και από τον άξονα ψ την ανεργία το γράφημα θα εξακολουθεί να έχει

νόημα ως μαθηματικό αντικείμενο αλλά δεν θα έχει νόημα από την πλευρά της Στατιστικής.

Από έρευνες που έγιναν σχετικά με τη διδακτική της Στατιστικής (Noddings, Gilbert-MacMillan και Lutz, 1980) φαίνεται να υπάρχει μία τάση οι μαθητές να ανταποκρίνονται στα προβλήματα μαθηματικής φύσεως ανατρέχοντας στους υπολογισμούς βάσει τύπων ή μιας ακολουθίας διαδικασιών πριν ακόμα σχηματίσουν μια καθαρή εικόνα του προβλήματος. Είναι ικανοί να αποστηθίζουν τύπους και να ακολουθούν αλγοριθμικές διαδικασίες που ακολούθησαν σε παρόμοια προβλήματα που έχουν διδαχθεί, αλλά σπάνια ανταποκρίνονται με επιτυχία σε προβλήματα στα οποία υπεισέρχονται καινούριες καταστάσεις όπως συμβαίνει συχνά στο μάθημα της Στατιστικής (Garfield, 1981)

Ένας παράγοντας που επηρεάζει επιπλέον στην κατανόηση των εννοιών της Στατιστικής είναι η λεκτική αδυναμία των μαθητών να περιγράψουν ή και να κατανοήσουν ένα πρόβλημα Στατιστικής (Χατζηπαντελής Θ., Γκάσταρης Π., 1998). Οι γλωσσικές παρερμηνείες οδηγούν συνήθως σε λανθασμένες αναπαραστάσεις του προβλήματος που πρέπει να επιλύσουν.

Επίσης από έρευνες του D.R.Green (1983) στη Μ.Βρετανία επισημάνθηκε το γεγονός της έλλειψης κατανόησης από πολλούς μαθητές της έννοιας του λόγου και των αναλογιών που είναι απαραίτητες σε πολλές έννοιες της Στατιστικής.

1.4.1 Πως η σημερινή κατάσταση στην εκπαίδευση δυσκολεύει την κατανόηση της Στατιστικής.

Στη δυσκολία κατανόησης εννοιών της Στατιστικής βοηθάει και η κατάσταση που επικρατεί στην εκπαίδευση. Η διδασκαλία της Στατιστικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εντάσσεται στη λογική

της διδασκαλίας των Μαθηματικών, με αποτέλεσμα η προσοχή και το βάρος να εξαντλείται περισσότερο στους τύπους υπολογισμού παραμέτρων και πολύ λιγότερο στο τι αντιπροσωπεύουν οι στατιστικές έννοιες. Στην Ελλάδα αυτό ενισχύεται πολλές φορές και από τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων τα οποία κάνοντας ανύπαρκτες διασυνδέσεις μεταξύ Στατιστικής και Μαθηματικών του τύπου <<αν το μέγιστο της συνάρτησης είναι η μέση τιμή της κατανομής και το σημείο καμπής είναι η διάμεσος, να βρεθούν κ.τ.λ.>>, οδηγούν τη διδασκαλία της Στατιστικής εκτός των επιδιωκόμενων στόχων της. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα τα παιδιά να μην αντιλαμβάνονται την ουσιαστική ερμηνεία των στατιστικών εννοιών αφού για αυτούς η Στατιστική είναι ένα σύνολο αλγεβρικών χειρισμών, απομνημόνευση μεθόδων και διαδικασιών.

1.4.2 Πως οι καθηγητές διδάσκουν Στατιστική και δεν βοηθούν στην κατανόηση των στατιστικών εννοιών

Οι Stigler&Hiebert (1999) αναφέρουν ότι υπάρχει μία ισχυρή θετική συσχέτιση ανάμεσα στον τρόπο διδασκαλίας της Στατιστικής και στην κατανόησή της από τους μαθητές. Όσο βελτιώνονται οι τρόποι διδασκαλίας τόσο περισσότερο αντιλαμβάνονται τα παιδιά τις διάφορες στατιστικές έννοιες. Οι τρόποι διδασκαλίας που χρησιμοποιούν οι καθηγητές φαίνεται να δημιουργούν πολλά από τα προβλήματα κατανόησης των στατιστικών εννοιών.

Οι παλιότεροι καθηγητές ενδεχομένως να μην έχουν διδαχθεί καθόλου Στατιστική στο Πανεπιστήμιο ενώ οι πιο νέοι έχουν σίγουρα διδαχθεί (αφού η Στατιστική αποτελεί υποχρεωτικό μάθημα σε κάθε τμήμα Μαθηματικών) αλλά μέσα από μαθήματα τύπου διαλέξεων. Έτσι δεν έχουν γνωρίσει διδακτικά μοντέλα που βασίζονται στις δραστηριότητες και στη συλλογή δεδομένων. Την μη εξοικείωση με αυτού

του είδους τα μοντέλα διδασκαλίας την 'κουβαλάνε' και στην δική τους τάξη όταν πρόκειται να διδάξουν (Chadjipadelis, Meletiou, Paparistodemou, 2010). Έτσι δύσκολα θα σχεδιάσουν μαθήματα που βασίζονται σε δραστηριότητες και σε συλλογή πραγματικών δεδομένων.

Σύμφωνα με τους Makar&Confrey (2003) οι βαθιά ριζωμένες αντιλήψεις των καθηγητών για τα μαθηματικά ως η επιστήμη που προσφέρει ντετερμινιστική και ιεραρχικά δομημένη γνώση μεταφέρονται και στη Στατιστική όπου για τους περισσότερους αποτελεί απλά έναν κλάδο των μαθηματικών. Δίνετε έτσι έμφαση στους τύπους και στους αλγεβρικούς υπολογισμούς και όχι στην ουσία των στατιστικών εννοιών. Το αποτέλεσμα είναι να αποτυγχάνει η σύνδεση μεταξύ διαίσθησης και στατιστικού συλλογισμού καθώς και η σύνδεση των γνώσεων που αποκτούν στο μάθημα της Στατιστικής με τα ρεαλιστικά προβλήματα.

Συνοψίζοντας, η φορμαλιστική τύπου εκπαίδευση που έχουν λάβει οι περισσότεροι καθηγητές έχει αρνητική επιρροή στην διδασκαλία του στατιστικού συλλογισμού στους μαθητές τους. Οι μαθητές αποτυγχάνουν στο να αντιληφθούν το στατιστικό συλλογισμό επειδή οι καθηγητές τους δεν τους τον διδάσκουν.

1.4.3 Οι εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών για τις στατιστικές έννοιες

Παρακάτω παρουσιάζουμε αναλυτικά κάποιες εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών για τις Στατιστικές έννοιες όπως αναπτύχθηκαν από τον Γκίνη (2003). Θα εστιάσουμε στα μέτρα θέσης με τα οποία ασχολούνται κυρίως οι μαθητές στην Ελλάδα.

Οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να μην έχουν συνειδητοποιήσει τη χρήση του κατάλληλου μέτρου θέσης, αν η μεταβλητή είναι ποιοτική ή ποσοτική και πως επηρεάζεται η θέση της από τις παρατηρήσεις.

- **Επικρατούσα τιμή**

Οι περισσότεροι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι η επικρατούσα τιμή χρησιμοποιείται κυρίως για ποιοτικές μεταβλητές. Σε περίπτωση που τους έχει δοθεί μια λίστα στοιχείων δεν παρουσιάζεται πρόβλημα στο να βρουν την επικρατούσα τιμή, όπως και αν τους δοθεί ένα ραβδόγραμμα, Χατζηπαντελής Θ., Γκίνης Δ., (2000). Όταν όμως τους δοθεί ένας πίνακας συχνοτήτων το συνηθέστερο λάθος είναι ότι αναφέρουν ως επικρατούσα τιμή την τιμή της μεγαλύτερης συχνότητας (Barr G.V. 1980). Επίσης τους είναι δύσκολο να υπολογίζουν από το διάγραμμα συχνοτήτων σε περίπτωση που τα δεδομένα είναι ταξινομημένα σε κλάσεις.

- **Διάμεσος**

Σύμφωνα με τον Barr (1980) τα πιο συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές όσο αναφορά τη διάμεσο είναι:

α) Δεν ταξινομούν τα δεδομένα κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά, με αποτέλεσμα να δίνουν ως διάμεσο την τυχαία μεσαία παρατήρηση

β) Υπολογίζουν τη διάμεσο σαν το ημιάθροισμα του πρώτου και του τελευταίου αριθμού στα ταξινομημένα δεδομένα

γ) Δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι η διάμεσος δεν είναι απαραίτητα μία από τις τιμές των παρατηρήσεων

δ) Έχουν δυσκολία στο να εντοπίζουν τη μεσαία παρατήρηση ή το ημιάθροισμα των μεσαίων παρατηρήσεων, ανάλογα αν το πλήθος είναι περιττό ή άρτιο.

ε) Συγχέουν τη διάμεσο με το πλήθος των παρατηρήσεων με αποτέλεσμα να δίνουν σαν διάμεσο το μισό του πλήθους των παρατηρήσεων

- **Μέση Τιμή**

Σύμφωνα με τους Pollatsek, Lima, Well (1981) η μέση τιμή είναι για τους μαθητές περισσότερο μια υπολογιστική πράξη παρά μια εννοιολογική.

Υπολογίζουν τη μέση τιμή σε ποιοτικές μεταβλητές και αναζητούν ποσοτικές ιδιότητες στις τιμές τους. Συνήθως η γνώση της μέσης τιμής εξαντλείται στην αποστήθιση του τύπου υπολογισμού της. Στον υπολογισμό τα συνηθέστερα λάθη γίνονται όταν δίνεται πίνακας συχνοτήτων . Τότε συγχέουν τις τιμές της μεταβλητής με τη συχνότητα εμφάνισης των τιμών. Τα συνηθέστερα λάθη που γίνονται όπως προκύπτει από σχετική έρευνα (Χατζηπαντελής, Γκίνης, 2000) είναι:

α) Προσθέτουν τις τιμές που αναφέρονται στις παρατηρήσεις και διαιρούν με το πλήθος τους χωρίς να λάβουν υπόψη τους τις συχνότητες από τον πίνακα.

β) Βρίσκουν το άθροισμα των τιμών των παρατηρήσεων και το διαιρούν με το άθροισμα των συχνοτήτων

γ) Διαιρούν το άθροισμα των συχνοτήτων με το πλήθος τους.

1.5 Κατευθυντήριες γραμμές για τη διδασκαλία της Στατιστικής στις μέρες μας

Το 2005 η ASA (American Statistical Association) που αποτελεί τη μεγαλύτερη κοινότητα στατιστικολόγων στον κόσμο δημιούργησε μία έκθεση με την ονομασία GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education) στην οποία προτείνει ένα πλαίσιο όπου πρέπει να βασίζεται η διδακτέα ύλη της Στατιστικής τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το θεωρητικό πλαίσιο συνοδεύεται και από συγκεκριμένα παραδείγματα. Το πλαίσιο αυτό θα αναλύσουμε παρακάτω.

Πάνω από το μισό τέταρτο του τελευταίου αιώνα η Στατιστική έχει γίνει μία βασική συνιστώσα του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το 1989 το NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) συμπεριέλαβε στην έκθεσή του (Curriculum and Evaluation

Standards for School Mathematics) τη Στατιστική (data analysis and probability) ως μία από τις 5 συνιστώσες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το 2000 η έκθεση αντικαταστάθηκε από την Principles and Standards for School Mathematics και αποτέλεσε τη βάση για την αναβάθμιση της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών σε πολλές χώρες. Στην έκθεση αυτή η Στατιστική έχει περίοπτη θέση.

Σύμφωνα με το NCTM η διδακτέα ύλη της Στατιστικής πρέπει να βασίζεται και να ακολουθεί τις παρακάτω αρχές.

Όλοι οι μαθητές από το δημοτικό μέχρι και το Λύκειο θα πρέπει να είναι σε θέση:

- Να διατυπώνουν κατάλληλες ερωτήσεις σχετικά με τα δεδομένα που έχουν, να μπορούν να συλλέγουν τα δεδομένα που χρειάζονται κάθε φορά καθώς και να τα οργανώνουν .
- Να χρησιμοποιούν την κατάλληλη στατιστική μέθοδο για την ανάλυση των δεδομένων τους
- Να εξάγουν και να αξιολογούν συμπεράσματα από την ανάλυση των δεδομένων τους καθώς και να κάνουν προβλέψεις χρησιμοποιώντας τα δεδομένα αυτά
- Να αντιλαμβάνονται και να εφαρμόζουν βασικές έννοιες των Πιθανοτήτων

Το πλαίσιο που παρουσιάζεται στην έκθεση GAISE και θα αναπτύξουμε αναλυτικά παρακάτω (1.5.6) δεν ακυρώνει τις βασικές αρχές του NCTM αλλά τις συμπληρώνει έτσι ώστε ο δάσκαλος των Μαθηματικών που θα διδάξει Στατιστική να έχει μία συνολική εικόνα της ύλης που πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές του.

1.5.1 Ο ρόλος της μεταβλητότητας των δεδομένων

Ένα βασικό ζητούμενο της στατιστικής εκπαίδευσης είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν στατιστική σκέψη. Η στατιστική σκέψη στο μεγαλύτερο μέρος της έχει να κάνει με τη συνεχή παρουσία της μεταβλητότητας. Η επίλυση στατιστικών προβλημάτων εξαρτιέται από την κατανόηση, την ερμηνεία και την ποσοτικοποίηση της μεταβλητότητας των δεδομένων. Η εστίαση στη μεταβλητότητα των δεδομένων ουσιαστικά διαχωρίζει τη Στατιστική από τα Μαθηματικά.

Υπάρχουν διάφορες πηγές μεταβλητότητας των δεδομένων. Θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές.

- Μεταβλητότητα μέτρησης (Measurement Variability). Συνεχείς μετρήσεις του ίδιου ατόμου ή αντικειμένου μπορούν να δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα. Αυτό μπορεί να οφείλεται είτε στο μηχανισμό μέτρησης (π.χ. μέτρηση μιας μεγάλης απόστασης με έναν μικρό χάρακα) είτε στην συνεχή αλλαγή του περιβάλλοντος μέτρησης (π.χ. μέτρηση της πίεσης του αίματος)
- Φυσική Μεταβλητότητα (Natural Variability). Η μέτρηση του ίδιου χαρακτηριστικού (ύψους, τάσεις ή συμπεριφορές, συναισθηματική ανταπόκριση σε ένα συμβάν) μεταξύ διαφορετικών ατόμων οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα. Έτσι παρουσιάζεται μία φυσική μεταβλητότητα των δεδομένων.
- Απροσδιόριστη Μεταβλητότητα (Indused Variability). Πολλές φορές η μεταβλητότητα μπορεί να προέρχεται από παράγοντες που δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν μας ή δεν γνωρίζουμε. Μία πιο προσεκτική ματιά των παραγόντων που επηρεάζουν τα δεδομένα μας μπορεί να βοηθήσει στον προσδιορισμό της πηγής της μεταβλητότητας.

  Η σύγκριση της φυσικής μεταβλητότητας και της απροσδιόριστης αποτελεί την καρδιά της μοντέρνας Στατιστικής. Έχει επιτρέψει

στην Ιατρική επιστήμη να συμπεράνει ότι κάποια χάπια είναι ασφαλή και αποτελεσματικά ενώ άλλα όχι κ.ά.

- Δειγματική Μεταβλητότητα (Sampling Variability). Η χρήση ενός δείγματος για την εξαγωγή συμπερασμάτων για τον πληθυσμό θα μας δώσει κάποια ποσοστά. Η επιλογή διαφορετικού δείγματος είναι σχεδόν βέβαιο ότι δεν θα μας δώσει τα ίδια ακριβώς ποσοστά. Η τιμή ενός δειγματικού ποσοστού θα μας βγει διαφορετική από δείγμα σε δείγμα. Αυτό καλείται δειγματική μεταβλητότητα.

1.5.2 Οι πιθανότητες ως βασικό εργαλείο της Στατιστικής

Οι πιθανότητες αποτελούν ένα βασικό εργαλείο της μαθηματικής εκπαίδευσης τόσο στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά όσο και στη Στατιστική. Γι' αυτό και αποτελεί βασικό προαπαιτούμενο μάθημα στα πλαίσια της στατιστικής εκπαίδευσης. Θα πρέπει όμως να γίνει μία διάκριση όσο αναφορά τη χρήση των πιθανοτήτων ως μαθηματικό εργαλείο και ως εργαλείο στην υπηρεσία της Στατιστικής. Τα δύο προβλήματα παρακάτω παρουσιάζουν με χαρακτηριστικό τρόπο τη διαφορά αυτή.

Πρόβλημα 1: Υποθέτουμε ότι ένα νόμισμα είναι 'δίκαιο'. Εάν ρίξουμε το νόμισμα 100 φορές, πόσες φορές περιμένουμε να έρθουν γράμματα?

Πρόβλημα 2: Διαλέγουμε ένα νόμισμα. Είναι το νόμισμα αυτό 'δίκαιο'?

Στο πρόβλημα1 έχουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα που θα επιλύσουμε με τη βοήθεια των πιθανοτήτων. Στο πρόβλημα2 έχουμε ένα πρόβλημα Στατιστικής στο οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιθανότητα που υπολογίσαμε στο πρόβλημα1 για να απαντήσουμε στο ερώτημα αν είναι δίκαιο. Κανένα από τα δύο προβλήματα δεν είναι ντετερμινιστικό, αλλά στο πρώτο ξεκινάμε με μια υπόθεση και

μέσω μιας διαδικασίας λογικών συλλογισμών καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα, σε μια πιθανότητα ενώ στο δεύτερο πειραματιζόμαστε για να βρούμε την απάντηση, ρίχνουμε το νόμισμα πολλές φορές και από τα αποτελέσματα των ρίψεων και την απάντηση του προβλήματος 1 απαντάμε στο αν είναι δίκαιο ή όχι. Δουλεύουμε δηλαδή επαγωγικά.

1.5.3 Ο ρόλος των Μαθηματικών στη Στατιστική εκπαίδευση

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η στατιστική σκέψη διαφέρει από τη μαθηματική. Το γεγονός αυτό όμως δεν αναιρεί την αξία των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία της Στατιστικής, ούτε τοποθετεί τη Στατιστική ξέχωρα από τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Αντιθέτως η Στατιστική πρέπει να είναι μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Καθώς πηγαίνουμε σε πιο προχωρημένες στατιστικές έννοιες τα Μαθηματικά γίνονται αναπόσπαστο κομμάτι της Στατιστικής. Σε εισαγωγικό επίπεδο όμως πρέπει να δίνουμε μεγαλύτερη βαρύτητα στο εννοιολογικό πλαίσιο και λιγότερο στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα στο εισαγωγικό επίπεδο πρέπει να δίνουμε έμφαση στο τρόπο που οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται στη στατιστική σκέψη και λιγότερο στις αλγεβρικές σχέσεις και στους τύπους. Μία διαισθητική κατανόηση της πιθανότητας σε αυτό το επίπεδο είναι επαρκής.

1.5.4 Η διδασκαλία της Στατιστικής με τη βοήθεια των υπολογιστών

Η εξέλιξη της τεχνολογίας έχει αλλάξει ριζικά και τα δεδομένα της στατιστικής εκπαίδευσης. Η επανάσταση των υπολογιστών έφερε επανάσταση στη στατιστική επιστήμη αλλά και στη στατιστική εκπαίδευση. Υπάρχουν πλέον πολλά στατιστικά λογισμικά, εύκολα στη

χρήση που με το πάτημα ενός κουμπιού μπορούν να αποθηκεύσουν και να επεξεργαστούν τεράστιο πλήθος δεδομένων, να δώσουν τα περισσότερα αριθμητικά περιγραφικά μέτρα, να φτιάξουν διαγράμματα διασποράς, διάφορα είδη γραφικών παραστάσεων, να κάνουν ανάλυση παλινδρόμησης, έλεγχο υποθέσεων, προσομοιώσεις και πολλά άλλα. Έτσι οι δυσκολίες που παρουσιάζονται δεν έχουν να κάνουν με τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων αλλά με την ερμηνεία τους. Σύμφωνα με τη (Swift,1984) η διδασκαλία της Στατιστικής πρέπει να ειδωθεί πλέον υπό το πρίσμα όλων αυτών των δυνατοτήτων που μας προσφέρουν οι υπολογιστές. Σίγουρα το να γνωρίζουν οι μαθητές πως προκύπτουν τα αριθμητικά μέτρα είναι αναγκαίο για την κατανόηση των διαφόρων εννοιών αλλά το να εξαντλούμε το μάθημα της Στατιστικής σε υπολογιστικά προβλήματα είναι ανούσιο όταν οι υπολογιστές μπορούν να το κάνουν αυτό για εμάς. Αφήνοντας τις αριθμητικές πράξεις στους υπολογιστές μπορούμε να εστιάσουμε στη συλλογή του δείγματος, στην κατανόηση των στατιστικών εννοιών και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Να σημειώσουμε εδώ ότι σε πολλές χώρες του εξωτερικού οι μαθητές κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος Στατιστικής έχουν μαζί τους έναν μικροϋπολογιστή για να φτιάχνουν τα βασικά στατιστικά διαγράμματα.

1.5.5 Η αναγκαιότητα των πραγματικών δεδομένων (real data) στη διδασκαλία της Στατιστικής.

Οι Davies,Barnett&Marriott (2010) αναφέρουν ότι ο μαθητής στις μέρες μας όταν περνάει την πόρτα του σχολείου δεν πρέπει να αισθάνεται ότι μπαίνει σε ένα αφιλόξενο περιβάλλον, αποστειρωμένο από τον έξω κόσμο όπου όλα είναι τεχνητά, ψεύτικα και ανούσια. Αντιθέτως, πρέπει (με την ενθάρρυνση των δασκάλων του) να έρχεται στο σχολείο φέρνοντας ιδέες στην τάξη από τον 'έξω' κόσμο όπου θα αναπτύσσονται

και θα αναλύονται. Έτσι θα αντιλαμβάνεται καλύτερα τον κόσμο γύρω του και το σχολείο θα βρίσκεται σε άμεση σύνδεση με τον κόσμο αυτό.

Η επίλυση προβλημάτων με τη χρήση πραγματικών δεδομένων (real data) αποτελεί πλέον ζητούμενο στην εκπαίδευση γενικότερα αλλά και στη Στατιστική ειδικότερα. Οι στατιστικές έννοιες αποκτούν νόημα μόνο μέσα από την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Η δύναμη, η κομψότητα ακόμη και η ομορφιά των στατιστικών συλλογισμών μπορεί να αποκαλυφθεί μέσα από την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Προβλημάτων που μπορεί να προέρχονται από διάφορους κλάδους και βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα. Έτσι μπορούν να πειστούν οι μαθητές για το ότι οι γνώσεις που παίρνουν δεν είναι άσκοπες αλλά μπορούν να εφαρμοστούν είτε σε προβλήματα ή καταστάσεις της καθημερινότητά τους είτε σε οποιοδήποτε δουλειά επιλέξουν να κάνουν στο μέλλον.

Σύμφωνα με τον Smith (1998) τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται σε ένα μάθημα Στατιστικής δεν πρέπει μόνο να βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα αλλά και οι ερωτήσεις που θέτονται να είναι εξίσου ρεαλιστικές. Όταν οι ερωτήσεις είναι μη-ρεαλιστικές οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για να απαντηθούν φαίνονται ανούσιες και συνήθως ξεχνιούνται από τους μαθητές. Αντίθετα θυμούνται πολύ εύκολα τρόπους και διαδικασίες που έχουν χρησιμοποιηθεί για να απαντηθούν ρεαλιστικές ερωτήσεις.

Ένα άλλο ερώτημα που προκύπτει από τη χρήση πραγματικών δεδομένων είναι με ποιο τρόπο πρέπει να γίνει η συλλογή τους. Σύμφωνα με τον Hogg (1991) δεν αρκεί τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε να είναι ρεαλιστικά. Αντί να ζητάμε από τα παιδιά να δουλέψουν με παλιά δεδομένα που έχουμε συλλέξει είναι προτιμότερο να ζητάμε από αυτά να βρουν ή να δημιουργήσουν τα δικά τους δεδομένα. Η αναζήτηση των δεδομένων μετατρέπει την τάξη σε ένα μικρό εργαστήριο που τους δίνει

την ευκαιρία να κάνουν ερωτήσεις για το πρόβλημα που τους έχει δοθεί, να διατυπώσουν υποθέσεις, να σχεδιάσουν τον τρόπο συλλογής των δεδομένων, να έρθουν αντιμέτωποι με λάθη που έχουν γίνει στις μετρήσεις και να συνοψίσουν τα δεδομένα τους. Ο Snee (1993) λέει χαρακτηριστικά ότι η συλλογή και η ανάλυση των δεδομένων βρίσκονται στην καρδιά της στατιστικής σκέψης.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η χρήση πραγματικών δεδομένων που τα ίδια τα παιδιά έχουν συλλέξει βοηθάει να μάθουν μέσα από τις εμπειρίες τους και να συνδέσουν τη διαδικασία της μάθησης με την πραγματικότητα. Επίσης η Στατιστική από μάθημα που ασχολείται με βαρετές τεχνικές και μεθόδους μετατρέπεται σε μάθημα που κινητοποιεί το ενδιαφέρον τους και βοηθάει στην αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινότητάς τους.

1.5.6 Το πλαίσιο διδασκαλία της Στατιστικής σύμφωνα με την έκθεση GAISE

Σύμφωνα με τους Garfield & Gal (1997), ένας στατιστικά εγγράμματος μαθητής πρέπει:

i) Να αντιλαμβάνεται το σκοπό και τη λογική των στατιστικών ερευνών
ii) Να αντιλαμβάνεται και να γνωρίζει τη διαδικασία μέσα από την οποία υλοποιούνται οι στατιστικές έρευνες.
iii) Να διαθέτει βασικές διαδικαστικές δεξιότητες
iv) Να αντιλαμβάνεται τις μαθηματικές σχέσεις που προκύπτουν
v) Να αντιλαμβάνεται την έννοια της πιθανότητας και του τυχαίου
vi) Να μπορεί να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα μιας στατιστικής έρευνας

vii) Να μπορεί να επικοινωνήσει χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της Στατιστικής

Η επίλυση ενός στατιστικού προβλήματος μέσα στην τάξη πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω **τέσσερις συνιστώσες**, (σύμφωνα με την έκθεση GAISE)

I.<u>Διατύπωση Ερωτήσεων</u>

- ✓ Αποσαφήνιση του προβλήματος
- ✓ Διατύπωση μίας ή περισσότερων ερωτήσεων που μπορούν να απαντηθούν με τη χρήση των δεδομένων

Η κατανόηση και αποσαφήνιση ενός στατιστικού προβλήματος μπορεί να γίνει μέσω κατάλληλων ερωτήσεων. Κατάλληλες ερωτήσεις σε αυτή την περίπτωση δεν είναι αυτές που δέχονται ντετερμινιστική απάντηση αλλά αυτές που εστιάζουν στη μεταβλητότητα των δεδομένων. Π.χ. η ερώτηση 'πόσο ψηλός είμαι?' μπορεί να απαντηθεί με ένα απλό αριθμό. Η ερώτηση όμως ' Πόσο ψηλοί είναι οι ενήλικες άντρες στην Ελλάδα?' υποδηλώνει ότι υπάρχει μία μεταβλητότητα στο ύψος των ενήλικων ανδρών και γι' αυτό αποτελεί μία στατιστική ερώτηση.

II.<u>Συλλογή Δεδομένων</u>

- ✓ Κατασκευή του κατάλληλου σχεδίου για τη συλλογή των δεδομένων
- ✓ Εφαρμογή του σχεδίου και συλλογή των δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων γίνεται με τη χρήση της κατάλληλης δειγματοληπτικής μεθόδου. Η κατάλληλη δειγματοληπτική μέθοδος είναι αυτή που θα μας δώσει τη μικρότερη δυνατή διαφορά μεταξύ των τιμών του πληθυσμού και του δείγματος.

III.<u>Ανάλυση Δεδομένων</u>

- ✓ Επιλογή της κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου και της κατάλληλης γραφικής παρουσίασης των δεδομένων
- ✓ Χρήση των παραπάνω μεθόδων για ανάλυση των δεδομένων

Ο κύριος σκοπός της ανάλυσης των δεδομένων είναι να μετρήσουμε τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα ενός exit poll που βασίστηκε στη Χ μέθοδο δίνουν 42% ποσοστό στην εκλογή του Α υποψηφίου με περιθώριο σφάλματος +/- 3% και επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Τα αποτελέσματα του exit poll επικεντρώνονται στη δειγματική διασπορά. Το περιθώριο σφάλματος δηλώνει πόσο μπορεί να διαφέρει το 42% από το πραγματικό ποσοστό και το επίπεδο σημαντικότητας μας δείχνει πόσο συχνά οι εκτιμήσεις που κάνουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Χ θα μας δώσουν ορθά αποτελέσματα.

IV.<u>Ερμηνεία Αποτελεσμάτων</u>

- ✓ Ερμηνεία από την ανάλυση των δεδομένων
- ✓ Σύνδεση ερμηνείας και αρχικής ερώτησης του προβλήματος

Η στατιστική ερμηνεία των αποτελεσμάτων θα πρέπει να γίνεται χωρίς να ξεχνάμε τη μεταβλητότητα των δεδομένων. Π.χ. σε ένα ιατρικό πείραμα πρέπει να συμπεριλάβουμε στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων μας ότι διαφορετικοί άνθρωποι αντιδρούν διαφορετικά στην ίδια θεραπεία.

Όλες οι παραπάνω στατιστικές έννοιες σίγουρα δεν μπορούν να αναπτυχθούν από τη μία μέρα στην άλλη. Πριν καταλήξουμε στον στατιστικά εγγράμματο μαθητή απαιτούνται χρόνια δουλειάς και πέρασμα από διαφορετικά επίπεδα κατανόησης. Σύμφωνα με την έκθεση GAISE οι στατιστικές έννοιες πρέπει να αναπτύσσονται σε 3 επίπεδα. Τα 3 αυτά επίπεδα έχουν δημιουργηθεί με βάση τη στατιστική παιδεία που πρέπει να διαθέτει ο μαθητής και όχι με βάση την ηλικία. Έτσι ένας μαθητής Λυκείου που δεν έχει προηγούμενη εμπειρία από Στατιστική πρέπει να ξεκινήσει από το επίπεδο Α πριν μεταπηδήσει στο επίπεδο Β. Τα τρία επίπεδα ανάπτυξης των στατιστικών εννοιών περιγράφονται στον επόμενο πίνακα.

	ΕΠΙΠΕΔΑ		
ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ	**Επίπεδο Α**	**Επίπεδο Β**	**Επίπεδο Γ**
Ι. Διατύπωση Ερωτήσεων	Ενημέρωση των μαθητών για τη διαφορά των στατιστικών ερωτήσεων από τις ερωτήσεις ντετερμινιστικού τύπου. Ο Δάσκαλος θέτει ερωτήσεις για να κινητοποιήσει το ενδιαφέρον.	Περισσότερη ενημέρωση για τη διάκριση των στατιστικών ερωτήσεων. Οι μαθητές αρχίζουν να θέτουν και τις δικές τους ερωτήσεις.	Οι μαθητές μπορούν να κάνουν τη διάκριση των στατιστικών ερωτήσεων. Οι μαθητές θέτουν τις δικές τους ερωτήσεις για την επίλυση του προβλήματος, τις οποίες μπορούν να γενικεύσουν.
ΙΙ. Συλλογή Δεδομένων	Ο σχεδιασμός της δειγματοληπτικής τεχνικής δεν πρέπει να βασίζεται ακόμα στη μεταβλητότητα και στις διαφορές των δεδομένων. Τα δεδομένα να προκύπτουν μέσα από την τάξη του μαθήματος. Απλά παραδείγματα.	Ενημέρωση για τη μεταβλητότητα των δεδομένων και πως αυτή επηρεάζει τη συλλογή τους. Εισαγωγή στη δειγματοληψία και στις δειγματοληπτικές τεχνικές. Συγκριτικά αποτελέσματα: Εισαγωγή στην τυχαία κατανομή.	Οι μαθητές σχεδιάζουν έρευνες βασισμένες στη μεταβλητότητα των δεδομένων. Χρήση δειγματοληπτικών τεχνικών Χρήση των τυχαίων κατανομών.

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ	Επίπεδο Α	Επίπεδο Β	Επίπεδο Γ
ΙΙΙ. Ανάλυση δεδομένων	Χρήση συγκεκριμένων ιδιοτήτων των κατανομών στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Παρουσίαση μεταβλητότητας μέσα στις ομάδες. Εύρεση συχνοτήτων και ποσοστών. Παρατήρηση σχέσεων μεταξύ 2 μεταβλητών.	Χρήση συγκεκριμένων ιδιοτήτων των κατανομών ως εργαλείο της ανάλυσης των δεδομένων. Ποσοτικοποίηση μεταβλητότητας μέσα στις ομάδες. Σύγκριση των δεδομένων των ομάδων με τη χρήση πινάκων ή γραφικών παραστάσεων. Γνώση του δειγματικού σφάλματος. Απλά μοντέλα συσχέτισης μεταβλητών.	Κατανόηση και χρήση των κατανομών στην ανάλυση των δεδομένων Μέτρηση μεταβλητότητας μέσα και μεταξύ των ομάδων. Χρήση αριθμητικών μέτρων μεταβλητότητας. Προσδιορισμός του δειγματικού σφάλματος. Ποσοτικοποίηση της συσχέτισης. Προσαρμογή μοντέλων συσχέτισης.
IV. Ερμηνεία αποτελεσμάτων	Οι μαθητές δεν 'κοιτάζουν' πίσω από τα δεδομένα για ερμηνεία αποτελεσμάτων. Όχι γενικεύσεις από το δείγμα στον πληθυσμό. Παρατήρηση συσχετίσεων.	Αρχίζουν να 'κοιτάζουν' πίσω από τα δεδομένα για ερμηνεία αποτελεσμάτων. Γνώση ότι ένα δείγμα μπορεί να μην είναι αντιπροσωπευτικό. Βασική ερμηνεία των μοντέλων συσχέτισης.	Είναι ικανοί να δώσουν ερμηνείες κοιτάζοντας και πίσω από τα δεδομένα. Γενίκευση από το δείγμα στον πληθυσμό. Ερμηνεία μέτρων συσχέτισης.

Οι τέσσερις συνιστώσες κατά την επίλυση ενός στατιστικού προβλήματος χρησιμοποιούνται και είναι ζητούμενο και στα τρία επίπεδα αλλάζει όμως το επίπεδο της κατανόησης.

Παρακάτω δίνουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε αν υπάρχει σχέση και τι είδους μεταξύ

ύψους και ανοίγματος των χεριών. Οι ερωτήσεις που μπορούν να γίνουν σε κάθε επίπεδο για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος περιγράφονται παρακάτω.

I Διατύπωση Ερωτήσεων

Επίπεδο Α: Είναι το ύψος και το άνοιγμα των χεριών των μαθητών της τάξης μας προσεγγιστικά το ίδιο?

Επίπεδο Β: Η σχέση μεταξύ ύψους και ανοίγματος χεριών των μαθητών της τάξης μας είναι η ίδια με αυτή των μαθητών μιας άλλης τάξης?

Επίπεδο Γ: Είναι το ύψος μια χρήσιμη εκτιμήτρια για το άνοιγμα των χεριών των μαθητών του σχολείου μας?

II Συλλογή Δεδομένων

Επίπεδο Α: Μετράμε το ύψος και το άνοιγμα των χεριών κάθε μαθητή της τάξης και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

Επίπεδο Β: Χρησιμοποιούμε ένα τυχαίο δείγμα μαθητών από κάθε τάξη.

Επίπεδο Γ: Χρησιμοποιούμε ένα τυχαίο δείγμα μαθητών από διάφορες τάξεις του σχολείου μας (Καταστρώνουν ένα σχέδιο για την επιλογή του πιο αντιπροσωπευτικού δείγματος)

III Ανάλυση Δεδομένων

Επίπεδο Α: Κατασκευάζουμε ένα Χ-Ψ διάγραμμα διασποράς όπου Χ=ύψος και όπου Ψ=άνοιγμα χεριών. Ζωγραφίζουμε την ευθεία ψ=x.

Επίπεδο Β: Κατασκευάζουμε ένα διάγραμμα διασποράς για κάθε τάξη. Δημιουργούμε με το μάτι την ευθεία παλινδρόμησης για κάθε διάγραμμα. Προσδιορίζουμε την εξίσωση αυτής της ευθείας.

Επίπεδο Γ: Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης

IV Ερμηνεία Αποτελεσμάτων

Επίπεδο Α: Από το διάγραμμα διασποράς γίνεται κατανοητό ότι το ύψος είναι περίπου το ίδιο με το άνοιγμα των χεριών για τους μαθητές της τάξης.

Επίπεδο Β: Οι μαθητές συγκρίνουν τα δύο διαγράμματα που βρήκαν καθώς και τις εξισώσεις τους.

Επίπεδο Γ: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι μπορούν να κάνουν πρόβλεψη του ανοίγματος των χεριών χρησιμοποιώντας το ύψος.

‘ Ακούω, ξεχνάω. Βλέπω, θυμάμαι. Κάνω, καταλαβαίνω’

Κινέζικη παροιμία, Snee (1993)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ

2.1 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης και διδακτικά μοντέλα

Μέχρι πριν από λίγα χρόνια η αντίληψη που επικρατούσε ήταν ότι η Μαθηματική γνώση είναι ένα αγαθό που έχει παραχθεί και καλούνται οι μαθητές να το καταναλώσουν αποστηθίζοντάς το. Ο δάσκαλος των μαθηματικών, υιοθετώντας την 'τραπεζική αντίληψη της παιδείας καταθέτει τις έτοιμες γνώσεις στα 'άδεια μυαλά' των μαθητών, όπως καταθέτει κανείς χρήματα σε μια τράπεζα (Freire P. 1977). 'Ταίζει τους μαθητές με την ύλη των ετοιμοπαράδοτων παραδόσεων, τις οποίες πλασάρει επιδέξια για να αποδείξει ότι έχει το χάρισμα της μεταδοτικότητας και απαιτεί την άκριτη και παθητική αποδοχή και την αποστήθισή τους. Έτσι αυτοματοποιείται η διδασκαλία, σταματά η ανθρώπινη επικοινωνία και εγκαθιδρύεται ένα μαθοφοβικό, μαθησιοκτόνο κλίμα άχαρης επανάληψης των ίδιων πραγμάτων (Papert S.1991). Η άποψη αυτή δεν είναι πλέον αποδεκτή. Η σύγχρονη άποψη που είναι πλέον και η επικρατούσα είναι ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν ένα μόνο σύστημα γνώσεων αλλά και μια διαδικασία (Tymoczko,1986). Παρακάτω αναπτύσσουμε τις βασικές σύγχρονες θεωρίες μάθησης.

2.1.1 Οι επικρατέστερες σύγχρονες θεωρίες για τη μάθηση

Ένας τυπικός ορισμός της μάθησης θεωρεί τη μάθηση ως μια διαδικασία η οποία οδηγεί σε μια διαρκή μεταβολή της συμπεριφοράς ενός ατόμου και η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα εμπειρίας ή άσκησης. Η μάθηση έτσι, ως αίτιο της μεταβολής της συμπεριφοράς ενός ατόμου, αντιδιαστέλλεται από άλλα αίτια όπως η βιολογική ωρίμανση, η κόπωση

κλπ. Η μάθηση μπορεί λοιπόν να είναι αποτέλεσμα μιας οργανωμένης διαδικασίας (διδασκαλίας, εκπαίδευσης), αλλά να προέρχεται επίσης και αποκλειστικά από την εν γένει εμπειρία του ατόμου.

Ο ορισμός αυτός της μάθησης υπονοεί ότι η μεταβολή της συμπεριφοράς όχι μόνο είναι διαρκής, αλλά έχει ένα σχετικά μόνιμο χαρακτήρα. Ο ορισμός αυτός επίσης υπονοεί έμμεσα ότι τα αποτελέσματα της μάθησης είναι παρατηρήσιμα. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλοι ορισμοί της μάθησης, ευρύτεροι, που θεωρούν τη μάθηση ως τη μεταβολή της κατανόησης, των στάσεων, των γνώσεων, των πληροφοριών, των δεξιοτήτων και των ικανοτήτων του ατόμου. Κατ' αυτόν τον τρόπο εντάσσονται στις διαδικασίες της μάθησης και μεταβολές, οι οποίες αναφέρονται στις γνώσεις, στις δεξιότητες , στις συνήθειες του ατόμου και γίνεται, κατά τον τρόπο αυτό, μια αναφορά και σε εσωτερικές διεργασίες του ατόμου, μη παρατηρήσιμες. Όπως θα αναφερθεί και στις επόμενες παραγράφους, οι ορισμοί αυτοί αντιστοιχούν σε ομόλογες θεωρίες για τη μάθηση. Ένας ορισμός πιο συμβατός με τις σύγχρονες αντιλήψεις είναι ο εξής:

Μάθηση είναι η απόκτηση και η μεταβολή γνώσεων, δεξιοτήτων, στρατηγικών, πεποιθήσεων, στάσεων και διαφόρων μορφών συμπεριφοράς, δηλ. η διαδικασία κατά την οποία αλλάζει το γνωστικό δυναμικό του ατόμου, ως αποτέλεσμα των ποικίλων εμπειριών τις οποίες το άτομο επεξεργάζεται.

Τα ρεύματα και οι θεωρίες για τη μάθηση είναι πολυπληθή. Μεταξύ αυτών, οι σχολές που θεωρούν τη μάθηση ως μία διαδικασία πρόσκτησης της γνώσης (θεωρίες που συνδέονται με το συμπεριφορισμό), εκείνες που θεωρούν την μάθηση ως διαδικασία δημιουργίας της γνώσης (και συνδέονται με τον κονστρουκτιβισμό) και τέλος εκείνες που θεωρούν τη μάθηση ως αποτέλεσμα της συμμετοχής σε κοινωνικές ομάδες (και συνδέονται με τις κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες) είναι από τις πλέον διαδεδομένες.

❖ ***<u>Συμπεριφοριστικές θεωρίες μάθησης, μάθηση μέσω ενίσχυσης</u>***

Κυριότεροι εκπρόσωποι των συμπεριφοριστικών θεωριών μάθησης είναι οι J. B. Watson, E. L. Thorndike, B. F. Skinner και ο γνωστός για τα πειράματά του I.Pavlov.

Οι θεωρίες του μπηχευβιορισμού (συμπεριφορισμού) λαμβάνουν υπόψη μόνο τις μεταβολές, τις μετατροπές της εξωτερικά παρατηρούμενης συμπεριφοράς. Καθώς οι εσωτερικές νοητικές διεργασίες του μανθάνοντος υποκειμένου δεν προσφέρονται στην παρατήρηση, δεν μπορούν να μελετηθούν άμεσα – πάντοτε σύμφωνα με τους μπηχευβιοριστές. Για το λόγο αυτό, οι συμπεριφοριστές μελετούν συστηματικά μόνο τις εξωτερικές αντιδράσεις των ατόμων και απορρίπτουν τις υποθέσεις ή τις ερμηνείες που στηρίζονται στις εσωτερικές νοητικές διεργασίες των ανθρώπων.

Κατά κάποιο τρόπο, το μανθάνον υποκείμενο, για το συμπεριφορισμό, είναι ένα <<μαύρο κουτί>> του οποίου αγνοούμε το περιεχόμενο. Αυτό που ενδιαφέρει είναι μόνο το εξωτερικό ερέθισμα από το περιβάλλον προς το άτομο και η ανταπόκριση του ατόμου στο δοσμένο ερέθισμα. Η μάθηση σημαίνει τη σύνδεση ερεθισμάτων-ανταπόκρισης. Οι επαναλήψεις ενισχύουν τις συνδέσεις και άρα τη μάθηση. Επίσης, οι θετικές ενισχύσεις (όπως οι ανταμοιβές) ενισχύουν μια συγκεκριμένη <<μάθηση>>, ενώ οι αρνητικές την αποδυναμώνουν. Κάθε είδος μάθησης, κατά τους συμπεριφοριστές, όσο πολύπλοκη και αν είναι, μπορεί πάντοτε να αναλυθεί σε στοιχειωδέστερα τμήματα, τα οποία με τη σειρά τους μπορούν να αναλυθούν σε ακόμη πιο απλά κ.ο.κ. μέχρις ότου η προς μετάδοση γνώση μπορεί να <<αποσυναρμολογηθεί>> σε τμήματα απλά, μικρά, τα οποία το άτομο μπορεί εύκολα να μάθει. Η γνώση λοιπόν είναι μια οντότητα η οποία μπορεί να μεταδοθεί.

Το μάθημα που βασίζεται στο συμπεριφορισμό, προυποθέτει βέβαια την ενεργή συμμετοχή του μαθητή. Η προς διδασκαλία ύλη αναλύεται σε

επιμέρους τμήματα, τα οποία διδάσκονται με βαθμιαία πρόοδο από τα πλέον απλά τμήματα της ύλης προς τα πλέον σύνθετα και δυσνόητα. Στα μαθήματα αυτά, στις απαντήσεις των μαθητών, πρέπει να υπάρχει ταχεία ανατροφοδότηση-θετική ή αρνητική, ανάλογα με την απάντησεις. Όσες ερωτήσεις δεν απαντώνται σωστά από τους μαθητές, τίθενται εκ νέου (ενδεχομένως με άλλη σειρά και διαφορετική διατύπωση) και ξανά, έως ότου ο μαθητής απαντήσει σωστά.

Βασισμένα πάνω στις θεωρίες αυτές έχουν αναπτυχθεί αρκετά μοντέλα διδασκαλίας από την προγραμματισμένη διδασκαλία (B. F. Skinner), ως το Διδακτικό Σχεδιασμό (Instrusctional Design, R. M. Gagne). Ο Διδακτικός Σχεδιασμός θεωρήθηκε επί μακρόν ως μία αξιόπιστη διαδικασία για την προετοιμασία προγραμμάτων και μαθημάτων κατάρτισης. Περιλαμβάνει 5 στάδια: Ανάλυση του στοχευόμενου κοινού και των αναγκών του, Σχεδίαση των μαθημάτων, Ανάπτυξη του διδακτικού υλικού, Εφαρμογή, Αξιολόγηση και επιστροφή στο πρώτο στάδιο (ADDIE = Analyze, Design, Develop, Implement, Evaluate).

Το μοντέλο αυτό ταιριάζει πολύ καλά με τη διαδικασία ανάπτυξης λογισμικού με διδακτικό χαρακτήρα (tutorials) και χρησιμοποιήθηκε εκτεταμένα κατά τη δημιουργία περιβαλλόντων αυτού του τύπου.

Ένα πολύ σημαντικό τμήμα του υφιστάμενου σήμερα εκπαιδευτικού λογισμικού έχει δημιουργηθεί με τις αρχές του συμπεριφορισμού (παρόλο που οι θεωρίες του συμπεριφορισμού είναι σε υποχώρηση) - ίσως γιατί οι θεωρίες αυτές διευκολύνουν πολύ το σχεδιασμό των εκπαιδευτικών λογισμικών. Τα λογισμικά καθοδήγησης, διδασκαλίας (tutorials) και πρακτικής και εξάσκησης (drill and practice), κατά κανόνα βασίζονται πάνω στις θεωρίες αυτές. Τα λογισμικά αυτά είναι κατάλληλα κυρίως για την εξάσκηση δεξιοτήτων χαμηλού επιπέδου (όπως είναι η εκτέλεση πράξεων, η απομνημόνευση κ.ά.) για την αξιολόγηση των μαθητών, για εποπτική διδασκαλία. Ωστόσο, ο συμπεριφορισμός επέδρασε με ένα

γενικότερο τρόπο στη σχεδίαση και τη χρήση των εφαρμογών των ΤΠΕ, καθώς έδωσε μεγάλη έμφαση στη διαρκή και ενεργό συμμετοχή του μαθητή, στην ενθάρρυνσή του, στην εξάσκηση, στο ρόλο της ταχείας ανάδρασης.

- ***<u>Γνωστικές θεωρίες μάθησης – Κονστρουκτιβισμός</u>***

Οι γνωστικές θεωρίες και ιδιαίτερα ο κονστρουκτιβισμός αποδίδουν πολύ μεγάλη σημασία στις εσωτερικές, νοητικές διεργασίες του ατόμου. Η μάθηση στις θεωρίες αυτές δεν μεταδίδεται, αλλά είναι μια διαδικασία προσωπικής κατασκευής της γνώσης, η οποία εδράζεται πάνω σε προγενέστερες γνώσεις (οι οποίες φυσικά τροποποιούνται κατάλληλα ώστε να συζευχθούν με τη νέα γνώση). Η μάθηση απαιτεί δηλαδή την αναδιάταξη και αναδόμηση των νοητικών δομών του ατόμου, έτσι ώστε αυτές να προσαρμοστούν με τη νέα γνώση, αλλά και να 'προσαρμόσουν' τη νέα γνώση στις υφιστάμενες νοητικές δομές.

Ο εποικοδομισμός του J. Piaget, θεωρεί ότι η ανάπτυξη της λογικής και επιστημονικής σκέψης του παιδιού είναι μια εξελικτική διαδικασία με διάφορα στάδια. Η θεωρία του J. Piaget είναι ουσιαστικά στον αντίποδα του συμπεριφορισμού, καθώς ξεκινά με την υπόθεση ότι ο κάθε μαθητής κατασκευάζει τη γνώση με το δικό του τρόπο, ενεργητικά και δεν αποτελεί απλά έναν παθητικό υποδοχέα πληροφοριών και <<γνώσεων>>. Άρα ο μαθητής πρέπει να μαθαίνει σε ένα περιβάλλον πλούσιο σε ποικίλα εξωτερικά ερεθίσματα, το οποίο να δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να αλληλεπιδρά μαζί του.

Ο J. Bruner πρότεινε ως βασική θεωρία για τη μάθηση, την *ανακαλυπτική μάθηση*. Οι μαθητές ανακαλύπτουν τη γνώση(κανόνες, αρχές ,ανάπτυξη δεξιοτήτων) μέσα από ανακαλυπτικές διαδικασίες – με το πείραμα, τη δοκιμή, την επαλήθευση ή τη διάψευση. Η σταδιακή ανακάλυψη των εσωτερικών δομών, αρχών και νόμων που διέπουν ένα φαινόμενο

συντελούν στη βαθύτερη κατανόησή του από το μαθητή. Αυτό, η ιδέα της σταδιακής ανακάλυψης της γνώσης, μπορεί να αποτελέσει ένα ιδιαίτερα σημαντικό κίνητρο για το μαθητή, τον οποίο ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει ή και να καθοδηγήσει ακόμη(*καθοδηγούμενη ανακάλυψη*). Σύμφωνα με τις θεωρίες του Bruner, ο εκπαιδευτικός έχει το ρόλο του εμψυχωτή, του διευκολυντή, του καθοδηγητή στη διαδικασία της ανακάλυψης: ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με προβλήματα τα οποία καλείται να επιλύσει και ο εκπαιδευτικός τον υποστηρίζει στην προσπάθειά του αυτή, την οποία ο μαθητής όμως πραγματοποιεί με το δικό του ρυθμό και με βάση τις δικές του αποφάσεις και επιλογές. Ο J. Bruner, με νεότερες θεωρίες του, έδωσε ιδιαίτερη βαρύτητα στον κοινωνιοπολιτισμικό παράγοντα, πλησιάζοντας έτσι τη σχολή των κοινωνιοπολιτισμικών θεωριών μάθησης.

Στην ίδια σχολή (των γνωστικών θεωριών μάθησης) εντάσσονται και άλλες θεωρίες, όπως η θεωρία της επεξεργασίας της πληροφορίας και γενικότερα όλες οι νεότερες απόψεις που στηρίζονται στις σύγχρονες προόδους της Βιολογίας και της νευροφυσιολογίας.

- ***<u>Κοινωνιοπολιτισμικές θεωρήσεις για τη μάθηση – Η έννοια της πλαισιοθετημένης μάθησης</u>***

Οι κοινωνιοπολιτισμικές θεωρήσεις της μάθησης (με βασικό εκφραστή τον Vygotsky) αναπτύχθηκαν σημαντικά τα τελευταία χρόνια. Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές η μάθηση γίνεται κατανοητή ως μια διαδικασία συμμετοχής σε κοινότητες πρακτικής. Είναι μια δραστηριότητα που τοποθετείται μέσα σε συγκεκριμένα πολιτιστικά και κοινωνικά πλαίσια, είναι δηλαδή η διαδικασία και το αποτέλεσμα του συγκερασμού της δραστηριότητας, του περιβάλλοντος-πλαισίου και της κουλτούρας μέσα στην οποία πραγματοποιείται. Η γνώση απαιτεί κοινωνική διάδραση και

συνεργασία, μεταβάλλεται ανάμεσα σε πλαίσια και καταστάσεις, δεν βρίσκεται μέσα σε κάθε άτομο ξεχωριστά αλλά στο σύνολο.

Οι κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες της μάθησης οδήγησαν τους Lave (1988) και Lave & Wenger (1991) να θέσουν βασικά ερωτήματα σχετικά με τις πρακτικές μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών μέσα και έξω από το σχολείο. Τα ερωτήματα αυτά οδήγησαν στην ανάπτυξη του μοντέλου της πλαισιοθετημένης μάθησης. Στο μοντέλο της πλαισιοθετημένης μάθησης η οικοδόμηση των εννοιών δεν μπορεί να είναι μια αποκομμένη δραστηριότητα, αλλά εμφανίζεται στο πλαίσιο μιας κοινότητας ατόμων που μαθαίνουν.

Ο Wenger διατυπώνει δύο έννοιες κλειδιά για την διαδικασία συμμετοχής σε κοινότητες πρακτικής: Την *συμμετοχή* (participation) και την *συμπύκνωση* (reification). Η συμμετοχή αναφέρεται στην διαδικασία 'του λαμβάνω μέρος'. Είναι μια σύνθετη διαδικασία προσωπική και κοινωνική η οποία συνδυάζει το πράττω, ομιλώ, σκέφτομαι, αισθάνομαι, ανήκω, συζητώ, επιλύω κλπ. Συμπεριλαμβάνει ολόκληρη την προσωπικότητα μαζί με το σώμα, τον νου, τα αισθήματα και τις κοινωνικές σχέσεις και έτσι αποτελεί μια *πηγή ταυτότητας*. Η συμπύκνωση αναφέρεται στην διαδικασία 'του μετασχηματίζω τις εμπειρίες μου σε αντικείμενο', σχετίζεται με τις αφαιρετικές διαδικασίες, τα εργαλεία, τα σύμβολα, τους όρους και έννοιες που παράγει μια κοινότητα πρακτικής. Έτσι, ένας μαθηματικός τύπος, ένα συμπέρασμα διατυπωμένο σε κατάλληλη γλώσσα ή όχι, ακόμα και ένα σχέδιο μαθήματος είτε το έχουμε στον νου μας είτε το διατυπώνουμε γραπτά π.χ. σε φύλλο εργασίας, αποτελεί μια συμπύκνωση. Οι δύο αυτές έννοιες είναι συμπληρωματικές και παρουσιάζονται ως ζεύγη. Η συμμετοχή οδηγεί σε συμπύκνωση και η συμπύκνωση οδηγεί σε περαιτέρω συμμετοχή. Σε κάθε τρόπο συμμετοχής επανα-οργανώνεται η γνώση, αλλά και η ίδια η δραστηριότητα, και καταλήγει σε μια συμπύκνωση η

οποία μπορεί να είναι προσωρινή, εφήμερη, δοκιμαστική δηλαδή εικασία-υπόθεση, με την οποία επανα-οργανώνω την συμμετοχή μου στο έργο.

Η συμμετοχή και η συμπύκνωση μαζί χρησιμεύουν στην διαδικασία διαπραγμάτευσης του νοήματος, δηλαδή στο να ζούμε σε έναν κόσμο στον οποίο η συμμετοχή μας είναι πλήρης νοήματος.

Κατά κάποιο τρόπο, ο κοινωνικός εποικοδομισμός δεν είναι ασύμβατος με τις γνωστικές θεωρίες, όπως είναι ο συμπεριφορισμός, αλλά λειτουργεί, σε ορισμένο επίπεδο, ακόμη και συμπληρωματικά με τις θεωρίες αυτές.

Οι θεωρίες του Vygotsky και άλλων ψυχολόγων της Σοβιετικής σχολής Ψυχολογίας, ιδιαίτερα σημαντικές για τις κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες μάθησης, αποδίδουν πολύ μεγάλη σημασία στη γλώσσα, ως παράγοντα για τη μάθηση και στηρίζονται στην υπόθεση της ζώνης εγγύτερης (ή επικείμενης) ανάπτυξης: η ζώνη αυτή αποτελεί ένα σύνολο γνώσεων τις οποίες ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει με τη βοήθεια του περιβάλλοντος – αλλά όχι ακόμη μόνος. Έτσι, ο ρόλος του εκπαιδευτικού και γενικότερα του σχολείου και του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο ζει και μαθαίνει ο μαθητής, είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

Οι θεωρίες της δραστηριότητας (activity theory) και οι θεωρίες της εγκαθιδρυμένης μάθησης και της κατανεμημένης νόησης (situated cognition, distributed cognition) είναι νεώτερες θεωρίες, οι οποίες επίσης εντάσσονται στη γενικότερη ομάδα των κοινωνιοπολιτισμικών και κοινωνιογνωστικών θεωριών.

Είναι σαφές ότι οι κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες υποστηρίζουν τη συνεργατική μάθηση σε όλες τις μορφές της και επομένως ένα μάθημα οργανωμένο έτσι ώστε να λαμβάνει υπόψη του τις θεωρίες αυτές, πρέπει να είναι προσεκτικά σχεδιασμένο, έτσι ώστε να ενθαρρύνει τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών και γενικότερα την κοινωνική αλληλεπίδραση.

Οι κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες μάθησης είναι συμβατές με όλη την νέα γενιά εκπαιδευτικών περιβαλλόντων, τα οποία ενσωματώνουν ένα πλήθος δυνατοτήτων αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας των μαθητών και επιπλέον παρέχουν ένα πολύ συγκροτημένο θεωρητικό πλαίσιο για τη διδακτική εκμετάλλευση των δυνατοτήτων που προσφέρει το λεγόμενο web2.0 και η κοινωνική δικτύωση

Παρακάτω θα εξετάσουμε πρώτα ποια είναι τα κυριότερα φαινόμενα που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, με ποιο τρόπο μπορούμε να τα αναγνωρίσουμε και ποιες είναι εκείνες οι πρακτικές της τάξης που μπορούμε να ακολουθήσουμε για να τα αντιμετωπίσουμε .

2.1.2 Τα κυριότερα φαινόμενα που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας

Η τάξη είναι ένα σύνθετο σκηνικό όπου κατά την διάρκεια της διδασκαλίας συμβαίνουν συνεχώς μαθησιακές καταστάσεις με διάρκεια μόλις λίγων στιγμών. Το στοίχημα τόσο των δασκάλων που κάνουν το μάθημα όσο και αυτών που το παρακολουθούν ως ερευνητές, είναι να μπορούν να *αναγνωρίζουν πλήρως* και να *αντιλαμβάνονται εγκαίρως* όλες αυτές τις μαθησιακές καταστάσεις. Για να μπορέσει, λοιπόν, να επιτευχθεί αυτό χρειαζόμαστε ένα σύστημα 'αποτύπωσης' της πολύ-σύνθετης πραγματικότητας της τάξης, των 'φευγαλέων' στιγμών της διδασκαλίας στις οποίες κερδίζεται ή χάνεται το νόημα, των πολλών 'νοημάτων' με τα οποία συνδέονται και αλληλοεπιδρούν ο δάσκαλος με τους μαθητές του αλλά και οι μαθητές μεταξύ τους, τα κίνητρα που δρούν 'κάτω' και έξω από τα επιφαινόμενα που παρατηρούμε και οδηγούν τόσο το δάσκαλο όσο και τους μαθητές του σε συγκεκριμένα μοντέλα αλληλεπίδρασης και διαμορφώνουν μια συγκεκριμένη πρακτική στην

τάξη. Παρακάτω θα αναπτύξουμε τα κυριότερα φαινόμενα που μπορούμε να συναντήσουμε κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας.

❖ ***Αβεβαιότητα***

Ο όρος αβεβαιότητα αντιπροσωπεύει τους όρους δισταγμός, ασάφεια, σύγχυση, αμφιβολία, νοητική δυσκολία κ.τ.λ. Στη μαθηματική εκπαίδευση η αβεβαιότητα συναντάται σχεδόν σε όλες τις εκδοχές της διδασκαλίας και της μάθησης.

Σύμφωνα με την Zaslavsky (2005), έχουμε τους παρακάτω τύπους αβεβαιότητας:

- Αντιθετικοί – ανταγωνιστικοί ισχυρισμοί:

Εδώ έχουμε δύο ή περισσότερους ανεξάρτητους συλλογισμούς, λογικά τεκμηριωμένους οι οποίοι οδηγούν σε διαφορετικές οπτικές του ίδιου θέματος επομένως και σε αβεβαιότητα.

- Άγνωστος τρόπος επίλυσης ή αμφίβολο αποτέλεσμα:

Αυτό το είδος αβεβαιότητας αντιστοιχεί στην αναζήτηση, σε διερευνητικά έργα και σε προβλήματα ανοιχτού τύπου.

- Μη επαληθεύσιμα αποτελέσματα:

Αυτός ο τύπος αβεβαιότητας δημιουργείται από την έλλειψη εμπιστοσύνης της εγκυρότητας του αποτελέσματος. Η έλλειψη εμπιστοσύνης μπορεί να προκύψει από την απουσία μεθόδων ελέγχου και επιβεβαίωσης του αποτελέσματος.

Οι παραπάνω τύποι αβεβαιότητας του μαθητή συνδέονται μεταξύ τους. Η αβεβαιότητα ως προς ένα αποτέλεσμα που αφήνει ερωτηματικά ($2^{ος}$ τύπος) μπορεί να μετασχηματιστεί σε αβεβαιότητα ως προς την έλλειψη τρόπων επιβεβαίωσης ($3^{ος}$ τύπος). Ή μια αβεβαιότητα $2^{ου}$ τύπου μπορεί να προέρχεται από αντιθετικά επιχειρήματα ($1^{ος}$ τύπος).

❖ ***<u>Αβεβαιότητα, διαπραγμάτευση, διυποκειμενικότητα</u>***

Η αβεβαιότητα αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για την αρχή της μαθησιακής διαδικασίας. Προκαλεί μια ανισορροπία (disequilibrium, κατά τον Piaget) η οποία πρέπει να αποκατασταθεί, επειδή η αναζήτηση της βεβαιότητας είναι μια ψυχολογική δύναμη που καθοδηγεί τη μάθηση. Έτσι οδηγούμαστε στο φαινόμενο της διαπραγμάτευσης των προσωπικών νοημάτων. Η διαπραγμάτευση όμως διαμεσολαβείται από την γλώσσα η οποία με τη σειρά της προϋποθέτει την διυποκειμενικότητα. Η διυποκειμενικότητα δηλαδή αποτελεί έναν διαμεσολαβητικό μηχανισμό που διευκολύνει την διαπραγμάτευση και οδηγεί τελικά στο νόημα του έργου επομένως και στην επίλυση της αβεβαιότητας. Η επίλυση – αναίρεση της αβεβαιότητας οδηγεί στην κατασκευή της νέας γνώσης.

Οι όροι αβεβαιότητα – διαπραγμάτευση - διυποκειμενικότητα αλληλοδιαπλέκονται σε τέτοιο βαθμό που είναι σχεδόν αδύνατον να διαχωριστούν. Για παράδειγμα η διυποκειμενικότητα είναι αποτέλεσμα μιας διαπραγματευτικής διαδικασίας αλλά ταυτόγχρονα και προϋπόθεση για την διαπραγμάτευση. Πράγματι, προκειμένου να αρχίσει η διαπραγματευτική διαδικασία απαιτείται να έχει εγκατασταθεί ήδη μια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών που θα υποστηρίξει τη διαδικασία αυτή. Το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης θα είναι μια πιο 'πλούσια' μορφή διυποκειμενικότητας.

Η διαπραγμάτευση, όμως, των νοημάτων στην τάξη ποτέ δεν εξασφαλίζει ότι όλοι οι μαθητές θα κατασκευάσουν ακριβώς το ίδιο νόημα και μεταξύ τους και με τον καθηγητή τους. Ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για τα κενά ή τις παρανοήσεις στις γνώσεις που έχει κάποιος. Έτσι κατά τη διαδικασία της διαπραγμάτευσης παράγονται νοήματα που φαίνεται να συμμερίζονται όλοι, ο καθένας όμως τα εσωτερικεύει διαφορετικά.

Να σημειώσουμε εδώ ότι ενώ η διαπραγμάτευση αποτελεί, όπως αναφέραμε παραπάνω, αναγκαία συνθήκη για την αρχή της μαθησιακής διαδικασίας δεν αποτελεί και επαρκή συνθήκη. Αυτό συμβαίνει γιατί ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει την αβεβαιότητα που υπάρχει σε ένα ζήτημα αλλά να επιλέξει να την αποδεχθεί και να μην επιδιώξει την επίλυσή της.

❖ ***<u>Επίλυση της αβεβαιότητας</u>***

Η επίλυση της αβεβαιότητας από τον μαθητή μπορεί να γίνει με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Όπως για παράδειγμα με την αναφορά ή την επίκληση: Σε εμπειρικά δεδομένα, στη γνώμη κάποιου άλλου μαθητή ή καθηγητή, στο διδακτικό βιβλίο ή σε άλλο βιβλίο, σε λογικά επιχειρήματα.

Το σημαντικό εδώ είναι ότι καθένας από τους τρόπους επίλυσης της αβεβαιότητας οδηγεί σε διαφορετικό είδος γνώσης. Άλλο είδος γνώσης προσφέρει η επίλυση της αβεβαιότητας με επίκληση της εμπειρίας και άλλο με επίκληση λογικών επιχειρημάτων. Προφανώς η επίλυση της αβεβαιότητας με λογικά επιχειρήματα είναι ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών αλλά ο διδάσκων θα πρέπει να είναι έτοιμος να αναγνωρίσει τον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής αποφασίζει κάθε φορά ότι η επίλυση έχει πραγματοποιηθεί.

Συνοψίζοντας περιγράψαμε τα κυριότερα φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας, τα οποία είναι η αβεβαιότητα, η διαπραγμάτευση και η διυποκειμενικότητα. Παρακάτω έχοντας υπόψη μας αυτά τα φαινόμενα θα αναλύσουμε τρόπους διδασκαλίας και μάθησης.

2.1.3 *Η πρακτική της τάξης*

Με τον όρο πρακτική της τάξης εννοούμε την διδασκαλία και τη μάθηση μαζί, ως συνιστώσες του ίδιου σώματος. Παρόλο που έχουμε συνηθίσει να αναφερόμαστε στη διδασκαλία και στη μάθηση ως δύο διαφορετικές δραστηριότητες, σύμφωνα με τον Clarke (2003) ο διαχωρισμός είναι ατυχής. Οι μέθοδοι διδασκαλίας δεν είναι μόνο εργαλεία ανάπτυξης δεξιοτήτων, είναι και πρακτικές με τις οποίες οι μαθητές μαθαίνουν, ή όχι, να συμμετέχουν στην διαπραγμάτευση του νοήματος. Αλλά η συμμετοχή στην διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση του νοήματος δεν είναι το μέσον με το οποίο επιτυγχάνεται η μάθηση, είναι η ίδια η μάθηση. Επομένως, τα μοντέλα συμμετοχής αποκτούν μεγάλη σημασία ως εγκατεστημένες μορφές πρακτικής. Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι σε διαφορετικές πρακτικές αντιστοιχούν διαφορετικά είδη γνώσης που αντιστοιχούν στις διαφορετικές περιπτώσεις επίλυσης της αβεβαιότητας.

Κάθε διδακτικό μοντέλο ορίζει ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης, δηλαδή διαμορφώνει μια πρακτική της τάξης. Η αλληλεπίδραση μπορεί να είναι είτε μεταξύ δασκάλου μαθητή, είτε μεταξύ μαθητών. Στην πρώτη περίπτωση η αλληλεπίδραση είναι μιας κατεύθυνσης αφού ο καθηγητής θέλει δεν θέλει αξιολογεί τον μαθητή και ο μαθητής το γνωρίζει αυτό. Στην δεύτερη περίπτωση η αλληλεπίδραση είναι διπλής κατεύθυνσης και το άγχος των μαθητών επιμερίζεται. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η συνεργασία μεταξύ των μαθητών αποκτά σημαντική θέση στην πρακτική της τάξης.

Στην πρακτική της τάξης σημαντικό ρόλο παίζει ο τύπος διδασκαλίας που θα επιλέξει ο δάσκαλος να ακολουθήσει. Η επιλογή πρέπει να γίνεται ανάλογα με το τι στόχους έχει θέσει κάθε φορά. Παρακάτω αναλύουμε 4 τύπους διδακτικών προσεγγίσεων οι οποίοι

έχουν κατηγοριοποιηθεί ανάλογα με το είδος μάθησης που θέλουμε να αναπτύξουν οι μαθητές μας (Κλαουδάτος, 2010)

❖ ***<u>Τύποι διδακτικών προσεγγίσεων</u>***

i) **Τύπος Α:**

- *<u>Έμφαση στην εφαρμογή των γνώσεων των μαθητών</u>*
- *<u>Ο στόχος</u>* με αυτό τον τύπο μαθήματος είναι να παγιώσουμε (να εσωτερικεύσουν δηλαδή τα παιδιά τις έννοιες έτσι ώστε να καθοδηγούν τη συμπεριφορά τους) και να εμπλουτίσουμε (μέσα σε ένα γνωστικό σχήμα προσθέτουμε και άλλα) τις υπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών σε ένα μαθηματικό θέμα που έχουν διδαχθεί πρόσφατα.
- *<u>Αυτό μπορεί να γίνει</u>*, κυρίως, με ασκήσεις αλλά και προβλήματα.

ii) **Τύπος Β:**

- *<u>Έμφαση στην κατανόηση της προβληματικής κατάστασης</u>*
- *<u>Ο στόχος</u>* είναι να παρουσιάσουμε προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες οι μαθητές θα αναζητήσουν νέες πληροφορίες ή οι οποίες θα τους οδηγήσουν σε νέες ενδιαφέρουσες πληροφορίες ή απροσδόκητα αποτελέσματα
- *<u>Αυτό μπορεί να γίνει,</u>* με την χρησιμοποίηση των μαθηματικών τους γνώσεων, ενδεχομένως και με την χρήση artefacts π.χ. υπολογιστή.

iii) **Τύπος Γ:**

- *<u>Έμφαση</u>* σε νέες μαθηματικές μεθόδους ή ιδέες. Ο τύπος αυτός της διδασκαλίας ονομάζεται και 'διερευνητική προσέγγιση' (investigative approach).
- *<u>Ο στόχος</u>* είναι να επιλέξουμε κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις οι οποίες έχουν ενσωματώσει τα σημαντικά σημεία ενός

μαθηματικού θέματος το οποίο θέλουμε να διδάξουμε. Κατά την διδασκαλία αυτή αναμένουμε από τους μαθητές μας να αναπτύξουν την βασική ή τις βασικές ιδέες του νέου θέματος ως μια λογική απάντηση στα ερωτήματα του προβλήματος.

- Την προσέγγιση αυτή την χρησιμοποιούμε όταν εισάγουμε νέες μαθηματικές ιδέες, στην αρχή μιας διδακτικής ενότητας, και συνοδεύεται από προσεγγίσεις τύπου Α, όπου η νέα γνώση, διαμέσου των ασκήσεων, θα αναγνωριστεί σε διάφορες καταστάσεις, και τύπου Β, όπου οι μαθητές θα κατανοήσουν καταστάσεις με την χρησιμοποίηση της νέας γνώσης.

iv) **Τύπος Δ:**

- *Έμφαση στην διδασκαλία της Λύσης Προβλήματος.*
- *Ο στόχος* είναι οι μαθητές να αναπτύξουν συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και ενεργειών όταν επιχειρούν να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα διαμέσου συγκεκριμένων διαδικασιών, π.χ. όταν ακολουθούν τα τέσσερα βήματα της μεθόδου του Polya (τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω). Η διδασκαλία αυτή θεωρεί ότι τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος σκέψης, μια διαδικασία αναζήτησης ή έρευνας για επισήμανση κανόνων συμπεριφοράς ή προτύπων (patterns) προκειμένου να λυθούν προβλήματα.

❖ ***Πλαίσιο στήριξης***

Στην πρακτική της τάξης, επομένως και στη διαδικασία της μάθησης μία πολύ βασική συνιστώσα που θα αναλύσουμε παρακάτω είναι το πλαίσιο στήριξης (scaffolding) που προσφέρουμε στο μαθητή. Το πλαίσιο στήριξης αρχικά όπως ορίστηκε από τους Wood (1976) αποτελεί μια κοινωνική διαδικασία στην οποία βασικός διαμεσολαβητής είναι ο δάσκαλος και έχει ως σκοπό να υποστηρίξει τη δραστηριότητα

κατασκευής της γνώσης από τον μαθητή. Είναι ένας τύπος συνομιλίας δηλαδή ανάμεσα στον δάσκαλο και στον μαθητή. Αντίστοιχα ο Bruner (1976) αναφέρει ότι το πλαίσιο στήριξης προσφέρει μία υποκατάστατη μορφή συνειδητότητας/επίγνωσης και ελέγχου. Δηλαδή αφού ο μαθητής δεν μπορεί να συνειδητοποιήσει τι κάνει, την συνείδηση του την προσφέρει ο δάσκαλος. Έτσι ώστε να μπορέσει το παιδί να εσωτερικεύσει την εξωτερική γνώση και να την μετατρέψει σε εργαλείο για συνειδητό έλεγχο.

Σύμφωνα, όμως, με τους Holton & Clarke (2004) η ιδέα του πλαισίου στήριξης μπορεί να διευρυνθεί έτσι ώστε να ενδυναμώσουμε ακόμη περισσότερο το μαθητή. Η διεύρυνση γίνεται έχοντας ως στόχο τη βαθμιαία μετατόπιση του ρόλου του διαμεσολαβητή του πλαισίου στήριξης προς την πλευρά του μαθητή, έτσι ώστε μακροπρόθεσμα ο μαθητής να αποκτήσει τα εφόδια να ελέγχει τη δική του μάθηση.

Στο διευρυμένο πλαίσιο στήριξης που προτείνουν οι Holton & Clarke , οι διαμεσολαβητές είναι πολλαπλοί. Μπορεί να είναι ο δάσκαλος ή κάποιος έμπειρος που έχει συγκεκριμένη ευθύνη για την μάθηση άλλων, μπορεί να είναι η ομάδα στην οποία συμμετέχει ο μαθητής κατά τη διάρκεια μιας ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας (αμοιβαίο πλαίσιο στήριξης) και τελικά, αυτό που είναι και ο απώτερος στόχος, μπορεί να είναι ο ίδιος ο μαθητής (πλαίσιο αυτοστήριξης).

Το ερώτημα βέβαια που τίθεται εδώ είναι πως μπορεί να αναπτυχθεί αυτό το πλαίσιο στήριξης. Σύμφωνα με τους Holton & Clarke (2004) οι ενέργειες του πλαισίου στήριξης είναι ανάλογες με τις μεταγνωστικές διαδικασίες και το πλαίσιο αυτοστήριξης είναι ταυτόσημο με τη μεταγνώση. Έτσι ένας τρόπος με τον οποίο αυτό το πλαίσιο μπορεί να αναπτυχθεί είναι για παράδειγμα μία σειρά από ανοικτές ερωτήσεις που αναγκάζουν το μαθητή να σκεφτεί για το πρόβλημα ή την δραστηριότητα που έχει να επιλύσει. Ερωτήσεις τέτοιου τύπου είναι:

-Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες εδώ;

-Μπορείς να περιγράψεις το πρόβλημα με τον δικό σου τρόπο;

-Γιατί το κάνεις αυτό; (έναν υπολογισμό, έναν αλγόριθμο, μια συγκεκριμένη ενέργεια)

-Είσαι βέβαιος ότι αυτό είναι σωστό; κτλ.

Στους τρόπους ανάπτυξης του πλαισίου στήριξης για την επίλυση ενός προβλήματος δεν θα μπορούσαμε να παραλείψουμε το πλαίσιο ανάπτυξης διδακτικών ενοτήτων του Polya, όπως επίσης και τις στρατηγικές (ευρετικές) .

Επαγωγική συλλογιστική:

- Παρατήρηση – Πειραματισμός
- Επισήμανση ενός Pattern
- Ανάπτυξη μιας εικασίας

Παραγωγική συλλογιστική:

- Έλεγχος της εικασίας

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ (ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ)

Αν δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα:

i) Λύσε ένα απλούστερο πρόβλημα

Δοκίμασε:

- Συγκεκριμένους αριθμούς
- Ειδικές περιπτώσεις → ελάττωση της πολυπλοκότητας
- Συγκεκριμένες περιπτώσεις

ii) Λύσε ένα σχετικό πρόβλημα

- Μείωσε τις προϋποθέσεις → Γενίκευση του προβλήματος

iii) Λύσε ένα ισοδύναμο πρόβλημα

Ένας συνήθης τρόπος δημιουργίας ισοδυνάμου προβλήματος είναι:

- Επαναδιατύπωση του προβλήματος, με:
  - Αλλαγή 'οπτικής γωνίας'
  - Χρήση της εις άτοπον απαγωγής ή της αντιθετοαντιστροφής
  - Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί…'

iv) Λύσε ένα ανάλογο πρόβλημα

- Αντιστοιχία συγκεκριμένων συνθηκών

v) Κάνε ένα σχήμα

- Σχεδίασε ένα γράφημα, μια γραφική παράσταση, ένα διάγραμμα κτλ.
- Ακόμα και αν έχεις λύσει ένα πρόβλημα διαφορετικά π.χ. με αλγεβρικό τρόπο, κάνε ένα σχήμα αν αυτό είναι δυνατόν. Θα αποκτήσεις μια καλύτερη κατανόηση του προβλήμα

Παρακάτω θα αναλύσουμε πως η πλαισιοθετημένη μάθηση εφαρμόζεται – υλοποιείται στη διδασκαλία της Στατιστικής μέσα από το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας και μάθησης (cooperative learning).

2.2 Το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης και διδασκαλίας με τη χρήση μικρών ομάδων (Small-Group Cooperative Learning)

2.2.1 Εισαγωγή

Όλες οι πρόσφατες αναφορές στη διδακτική των μαθηματικών καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα (National Council of Mathematics,1983,1991, National Research Council 1989): Υπάρχει ανάγκη αλλαγής του τρόπου διδασκαλίας. Αντί των παραδοσιακών διαλέξεων οι δάσκαλοι πρέπει να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες στο μάθημά τους με τη δημιουργία μικρών ομάδων εργασίας. Σύμφωνα με τον Johnson et al., 1991 πάνω από 375 έρευνες έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια για την αποτελεσματικότητα των ομαδοσυνεργατικών μεθόδων διδασκαλίας. Η πλειοψηφία των δημοσιευμένων ερευνών εξετάζει την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ένα μεγάλο μέρος αυτών αναφέρεται στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Αν μπορούσαμε να τοποθετήσουμε τα διάφορα είδη των διδακτικών μοντέλων σε μία υποθετική κλίμακα, τότε στη μία άκρη της κλίμακας θα ήταν το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο και στην άλλη άκρη το μοντέλο που θα αναπτύξουμε παρακάτω, αυτό της ομαδοσυνεργατικής μάθησης και διδασκαλίας (Garfield,J. 1993).

2.2.2 Τι είναι η ομαδοσυνεργατική μάθηση?

Οι πιο πρόσφατοι ορισμοί για το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης είναι οι εξής:

- 'Μία δραστηριότητα στην οποία συμμετέχουν μικρές ομάδες μαθητών, που δουλεύουν μαζί για να λύσουν ένα πρόβλημα, να συμπληρώσουν μια εργασία, ή γενικότερα να πετύχουν έναν κοινό στόχο' (Artz and Newman, 1990)

- ‘Μια εργασία που συζητείται και επιλύεται (αν είναι εφικτό) από μία ομάδα μαθητών. Η εργασία αυτή απαιτεί αλληλεπίδραση πρόσωπο με πρόσωπο, μία ατμόσφαιρα συνεργασίας, αμοιβαίας βοήθειας και ατομικής ευθύνης’ (Davidson, 1990)
- ‘Η ομαδοσυνεργατική μάθηση μπορεί να περιγραφεί ως η εργασία σε ομάδες των δύο ή και περισσότερων ατόμων για την κατανόηση και την εύρεση ερμηνείας και λύσης ενός προβλήματος’ (Goodsell, Maher, and Tinto 1992)
- ‘ Ομαδοσυνεργατική μάθηση δεν σημαίνει να τοποθετήσουμε τους μαθητές τον ένα πλάι στον άλλο στο ίδιο θρανίο να μιλάνε μεταξύ τους αλλά ο καθένας να κάνει μια ατομική εργασία. Δεν σημαίνει ότι δουλεύει ο καθένας ατομικά και αυτός που θα τελειώσει πρώτος βοηθάει αυτόν που είναι πιο <<αργός>> να συμπληρώσει την εργασία του ή δεν σημαίνει αναθέτω μία εργασία σε μια ομάδα στην οποία όλη τη δουλειά την κάνει ένα άτομο και οι υπόλοιποι βάζουν απλά το όνομά τους.’ (Johnson et al., 1991)

Περιγραφή του μοντέλου

Το μοντέλο χωρίζεται σε δύο φάσεις.

Στην ***α’ φάση*** :

- Ο δάσκαλος εισάγει - προτείνει μία δραστηριότητα, η οποία μπορεί να είναι είτε ο στόχος του μαθήματος, είτε ένας ενδιάμεσος στόχος.
- Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες προσπαθώντας να λύσουν τις αβεβαιότητες που προκύπτουν από την προτεινόμενη δραστηριότητα. Η αβεβαιότητα οδηγεί στην διαπραγμάτευση των προσωπικών νοημάτων έως ότου υπάρξει συμφωνία ως προς το νόημα του συζητούμενου

θέματος. Το νόημα αναπτύσσεται πρώτα διαπροσωπικά και μετά εσωτερικεύεται από τον καθένα διαφορετικά. Έτσι οι μαθητές έχουν ενεργητικό ρόλο στην μαθησιακή διαδικασία, κατασκευάζουν οι ίδιοι τη γνώση τους.

- Ο δάσκαλος συζητά με τα μέλη των ομάδων. Η συζήτηση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

  i) Ο δάσκαλος δίνει πληροφορίες στους μαθητές της κάθε ομάδας. Με τον τρόπο αυτό βέβαια γνωρίζει ότι αφαιρεί ευκαιρίες από τους μαθητές να εργαστούν μόνοι τους και να κατανοήσουν το μαθησιακό στόχο.

  ii) Ο δάσκαλος με κατάλληλες ερωτήσεις (όπως αυτές στη σελ.64, στρατηγικές Polya) διαμορφώνει ένα πλαίσιο στήριξης (scaffolding) μέσα στο οποίο οι μαθητές θα μπορέσουν να εργαστούν.

Το ερώτημα βέβαια που τίθεται εδώ είναι ποιον από τους δύο τρόπους πρέπει να επιλέγει κάθε φορά. Αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Όπως ο χρόνος που έχει αποφασίσει να διαθέσει στην συγκεκριμένη δραστηριότητα, η θέση που έχει ο μαθητής (κατά τον καθηγητή) στην μαθητική κοινότητα ή το πώς διαμορφώνονται τα γραπτά των μαθητών κατά τη διάρκεια της επαφής του δασκάλου με τις ομάδες.

Να σημειώσουμε ότι γυρίζοντας ο καθηγητής ανάμεσα στα θρανία διαπιστώνει σε ποιο βαθμό οι μαθητές έχουν αποδεχθεί τη μεταβίβαση της υπευθυνότητάς του. Έτσι αν διαπιστώσει π.χ. ότι οι μαθητές συνεχίζουν να εργάζονται και να συζητούν μεταξύ τους χωρίς την άμεση παρουσία του μπορεί να συμπεράνει ότι έχουν αποδεχθεί αυτή την υπευθυνότητα.

Στην ***β' φάση*** :

Όταν ο δάσκαλος κρίνει ότι η εργασία των μαθητών έχει ολοκληρωθεί ή ότι έχουν φτάσει σε ένα σημείο που δεν μπορούν να συνεχίσουν μόνοι τους, σταματά την εργασία των ομάδων και ξεκινάει μια συζήτηση ανάμεσα στον δάσκαλο και όλη την τάξη. Η συζήτηση αυτή μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

i) Ο δάσκαλος αναφέρει τις ιδέες των μαθητών που έχει δει και συζητάει για το αν είναι σωστές ή όχι χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα.

ii) Ο δάσκαλος χρησιμοποιεί τον τρόπο της επαναφώνησης (re-voicing). Η επαναφώνηση είναι ένα ιδιαίτερο είδος επανέκφρασης κάποιου άλλου σε μια συζήτηση. Για παράδειγμα κάποιος μαθητής εκφράζει τη σκέψη του για το πώς μπορεί να λυθεί ένα πρόβλημα και ο δάσκαλος λέει: Όπως μας είπε ο Γιάννης (αναφέρει την έκφραση του μαθητή, ενδεχομένως τροποποιημένη). Τι λες Γιώργο, ποια είναι η άποψή σου;

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης θα πρέπει να συζητούνται τόσο οι γνωστικές διαστάσεις του έργου όσο και οι μεταγνωστικές.

Συνοψίζοντας την περιγραφή του μοντέλου, ο καθηγητής εισάγει - προτείνει ένα έργο, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, ίσως και μόνοι τους, ο δάσκαλος βαδίζει ανάμεσα στα θρανία και συζητεί με τους μαθητές, επακολουθεί συζήτηση με όλη την τάξη. Ο 'κύκλος' αυτός μπορεί να επαναληφθεί.

<u>Η σύνθεση των ομάδων</u>

Ο τρόπος επιλογής των ομάδων μπορεί κάθε φορά να διαφέρει ανάλογα με το μάθημα. Έτσι ο καθηγητής μπορεί να διαλέξει ο ίδιος τις ομάδες ομοιογενείς ή μη ομοιογενείς με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά

(όπως βαθμός επίδοσης στο τελευταίο τεστ, η συμπεριφορά τους μέσα στην τάξη κ.ά.) είτε να επιτρέψει στους μαθητές να διαλέξουν οι ίδιοι τα άτομα της ομάδας τους.

Ο Johnson et al. (1991) περιγράφει πολλούς διαφορετικούς τύπους ομάδων συμπεριλαμβάνοντας <<σταθερές>> (formal) ή <<μη σταθερές>> (informal)ομάδες. Οι <<μη σταθερές>> ομάδες χρησιμοποιούνται συνήθως σε διαλέξεις με μεγάλο αριθμό μαθητών και έχουν διαφορετική σύνθεση κάθε φορά. Για παράδειγμα ο καθηγητής μπορεί να προτείνει στους μαθητές να φτιάξουν ομάδες με τους διπλανούς τους. Οι <<σταθερές>> ομάδες έχουν την ίδια σύνθεση για μεγάλο χρονικό διάστημα (ακόμη και όλη τη σχολική χρονιά).

Σύμφωνα με τον Johnson et al. (1991) οι μαθητές στις ομάδες μπορούν να παίρνουν κάθε φορά συγκεκριμένους ρόλους. Για παράδειγμα να υπάρχει αυτός που θα οργανώνει την ομάδα, αυτός που θα ανακεφαλαιώνει τις απαντήσεις που έχουν δοθεί και αυτός που θα καταγράφει τις απαντήσεις.

2.2.3 Υποθέσεις του μοντέλου

Κάθε διδακτική επιλογή που κάνουμε, επομένως και κάθε διδακτικό μοντέλο έχει υποθέσεις και συνέπειες. Είναι πολύ σημαντικό για το δάσκαλο να γνωρίζει καλά τις υποθέσεις του κάθε μοντέλου αφού μόνο τότε ξέρει που και πότε πρέπει να το χρησιμοποιήσει.

Βασική υπόθεση του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης είναι η μεταβίβαση μέρους της υπευθυνότητας του δασκάλου για την ανάπτυξη της γνώσης στους μαθητές. Ταυτόχρονα, όμως, παρατηρούμε σε ποιο βαθμό οι μαθητές αποδέχονται αυτή την υπευθυνότητα.

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ότι αν έχουν ερωτήσεις-απορίες για την δραστηριότητα που έχουν να κάνουν αρχικά ρωτάνε τα μέλη της

ομάδας τους και απευθύνονται στον καθηγητή τους μόνο αν δεν μπορεί κανένα μέλος να απαντήσει. Όλα τα μέλη της ομάδας πρέπει να συμμετέχουν, κανένα δεν πρέπει να είναι απομονωμένο. Οι απαντήσεις που θα δίνονται πρέπει να είναι απαντήσεις της ομάδας και όχι του κάθε μαθητή ξεχωριστά. Είναι σημαντικό να υπάρχει αλληλοσεβασμός και αλληλουποστήριξη μέσα στην ομάδα. Αυτό θα προκύψει μόνο αν οι μαθητές έχουν μάθει να δέχονται τη διαφορετικότητα του άλλου καθώς και ότι για ένα πρόβλημα μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από μία σωστή λύση.

Ο καθηγητής οφείλει να έχει διατυπώσει τα ερωτήματα της δραστηριότητας με σαφήνεια έτσι ώστε να μην χάνουν χρόνο στο να κατανοήσουν τι πρέπει να κάνουν και να μην υπάρχουν παρανοήσεις.

2.2.4 Η 'ευαισθησία' του μοντέλου

Κατά τη διάρκεια εφαρμογής της ομαδοσυνεργατικής μάθησης ο δάσκαλος έχει φτιάξει μια Υποθετική Μαθησιακή Τροχιά (Υ.Μ.Τ) η οποία όμως μπορεί να αλλάξει αν παρατηρηθούν φαινόμενα όπως:

- Ο δάσκαλος ενώ συζητά με τους μαθητές ενός θρανίου και είναι έτοιμος να προχωρήσει στο αμέσως επόμενο, ένας μαθητής από άλλο θρανίο ρωτά κάτι. Τότε ο δάσκαλος αλλάζει το σχέδιο της κίνησής του και βαδίζει προς τον μαθητή αυτόν. Η αλλαγή αυτή μπορεί να έχει σοβαρά αποτελέσματα, αν για παράδειγμα είχε σκοπό να συζητήσει με κάποιους μαθητές που προέβλεπε ότι θα έχουν δυσκολία να συμμετάσχουν στην δραστηριότητα της τάξης, και λόγω αυτής της αλλαγής παραλείψει να το κάνει.
- Ο δάσκαλος έχει ένα σχέδιο, αλλά κατά τη διάρκεια της συζήτησης πιθανόν να παρουσιαστεί μια ιδέα ενός μαθητή η οποία να του ανατρέψει το σχέδιο και να εκτρέψει την συζήτηση σε διαφορετικό πεδίο.

- Οι μαθητές αρνούνται να συμμετάσχουν σε ομάδες. Θεωρούν χάσιμο χρόνου το συγκεκριμένο μάθημα, γι' αυτούς μάθημα σημαίνει διάλεξη. Δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι η συζήτηση με τους συμμαθητές τους μπορεί να τους βοηθήσει στην κατανόηση διαφόρων εννοιών. Επίσης κάποιοι μπορεί να ενοχλούνται που θα πρέπει να μοιραστούν την προσπάθειά τους άρα και το βαθμό τους με άλλους ή κάποιοι άλλοι να ενοχλούνται που βγαίνουν από την οκνηρία που τους προσφέρει μία διάλεξη. Σύμφωνα με Goodsell et al. (1992) αυτά είναι φαινόμενα που παρατηρούνται όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με την ομαδοσυνεργατική μάθηση. Αφού εξοικειωθούν όμως με το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης, μαθαίνουν να συνεργάζονται και τότε τα παραπάνω προβλήματα εξαλείφονται.

Στις περιπτώσεις όπου η Υ.Μ.Τ αλλάξει ενδεχομένως ο δάσκαλος να βρεθεί σε αβεβαιότητα. Σύμφωνα με τους Holton & Thomas όμως η αβεβαιότητα αυτή δεν είναι απαραίτητα κακή. Για την ακρίβεια έχει παρατηρηθεί ότι ο καθηγητής κάνει τις πιο παραγωγικές του ερωτήσεις όταν βρίσκεται σε αβεβαιότητα.

Η ομαδοσυνεργατική μάθηση αποτελεί ένα βασικό διδακτικό μοντέλο γι' αυτό και υπάρχουν διάφορες παραλλαγές του. Κάποιες από αυτές τις παραλλαγές είναι ανεπιτυχής και δεν οδηγούν στα αποτελέσματα που θέλουμε να έχουμε. Για παράδειγμα, ένας δάσκαλος προτείνει μία δραστηριότητα, ζητά από τους μαθητές του να εργαστούν σε ομάδες ή μόνοι τους αλλά δεν αφήνει τον απαραίτητο χρόνο για να εργαστούν. Δηλαδή ή αναλαμβάνει να την επιλύσει ο ίδιος ή σηκώνει έναν μαθητή στον πίνακα να λύσει την άσκηση. Η πρακτική αυτή οδηγεί στην μη συμμετοχή των μαθητών στη λύση του προβλήματος, αφού αναμένουν να δουν τη λύση στον πίνακα, με αποτέλεσμα να αναιρείται η

βασική υπόθεση του μοντέλου, δηλαδή η μεταβίβαση της υπευθυνότητας στους μαθητές για να αναπτυχθεί η γνώση.

Επίσης να σημειώσουμε εδώ ότι πολλοί από τους καθηγητές αισθάνονται άβολα όταν πρωτογνωρίζουν το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης. Σύμφωνα με τον Garfield (Garfield, 1993) αυτό οφείλεται στο ότι χάνουν τον παραδοσιακό τους ρόλο ο οποίος τους τοποθετεί στο 'κέντρο της σκηνής'. Με την ομαδοσυνεργατική μάθηση ο ρόλος του δασκάλου τοποθετείται περισσότερο στο 'παρασκήνιο' από το οποίο παρατηρεί, ακούει και βοηθάει μόνο αν χρειάζεται. Αντί να επιλύει μόνος του με κομψό τρόπο τα προβλήματα στον πίνακα στέκεται ένα βήμα πίσω από τους μαθητές και αφήνει τους ίδιους να λύσουν τα προβλήματα που βάζει.

2.2.5 Η αξία του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης

Το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης εναρμονίζεται πλήρως με τη θεωρία της πλαισιοθετημένης μάθησης. Η γνώση δημιουργείται από την κοινωνική διάδραση και συνεργασία, μεταβάλλεται ανάμεσα σε πλαίσια και καταστάσεις, δεν βρίσκεται μέσα σε κάθε άτομο ξεχωριστά αλλά στο σύνολο. Η οικοδόμηση των εννοιών δεν είναι μια αποκομμένη δραστηριότητα, αλλά εμφανίζεται στο πλαίσιο μιας κοινότητας ατόμων που μαθαίνουν.

Οι μικρές ομάδες εργασίας φαίνεται να βοηθούν τους μαθητές να μάθουν με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι ότι μπαίνουν στην θέση του δασκάλου. Στην προσπάθεια τους να εξηγήσουν στον συμμαθητή τους τις ιδέες τους ή να τους πείσουν για κάποιο επιχείρημά τους κατανοούν και οι ίδιοι περισσότερα πάνω στις διάφορες έννοιες που διαπραγματεύονται (McKeachie, Pintrich, Yi-Guang, and Smith 1986).

Στις μικρές ομάδες οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κάνουν περισσότερες ερωτήσεις από ότι σε μια παραδοσιακή διάλεξη που

συνήθως μονοπωλούν τη συζήτηση λίγοι μαθητές. Επίσης, τους δίνεται η δυνατότητα να εκφράσουν αυτά που έχουν μάθει και πάνω σε αυτά να ανταλλάξουν απόψεις με τα άλλα μέλη της ομάδας. Τέλος, πολλοί μαθητές αισθάνονται πιο άνετα να συζητήσουν έναν προβληματισμό τους με τα μέλη της ομάδας, που είναι συμμαθητές τους, από ότι με τον δάσκαλο ο οποίος γνωρίζουν τους αξιολογεί.

Στην ομαδοσυνεργατική μάθηση ο ρόλος του δασκάλου αλλάζει και ενώ ήταν απλά 'η πηγή πληροφοριών' γίνεται αυτός που διευκολύνει την διαδικασία της μάθησης. Επίσης, περπατώντας ανάμεσα στα θρανία έχει τη δυνατότητα να ακούσει τις απόψεις των μαθητών πάνω σε αυτά που έχουν μάθει και έτσι να καταλάβει τυχόν παρανοήσεις τους.

Ένα επιπλέον επιχείρημα για την αναγκαιότητα και αξία του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης έχει να κάνει με το ότι πλέον η αγορά εργασίας ενδιαφέρεται για άτομα που μπορούν να λειτουργήσουν και να αποδώσουν στα πλαίσια μιας ομάδας. Επομένως είναι σημαντικό να εφοδιάσουμε τους μαθητές μας με προσόντα όπως ο σεβασμός στη δουλειά και στην οπτική του άλλου.

❖ <u>Είναι το μόνο 'επιτρεπτό' διδακτικό μοντέλο?</u>

Η ομαδοσυνεργατική μάθηση αποτελεί μία διδακτική επιλογή με επιβεβαιωμένη αξία και υπεροχή έναντι των υπολοίπων μοντέλων, χωρίς όμως να αποτελεί πανάκεια. Αν και ριζικά αντίθετο από το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο δεν το αντικαθιστά αλλά το συμπληρώνει. Παρόλο που η έρευνα παρουσιάζει το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο ως την πιο ανεπιτυχή διδακτική επιλογή δεν το απορρίπτουμε για τον εξής λόγο: Όταν ο διδάσκων μιλάει, μεταφέρει πληροφορίες στους μαθητές του. Στην περίπτωση που οι πληροφορίες αυτές στοχεύουν στην σύνδεση δύο περιοχών γνώσεων που μέχρι εκείνη την στιγμή και για διάφορους

λόγους, ήταν ασύνδετες μεταξύ τους στον νου των μαθητών, τότε η διάλεξη μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη της γνώσης, όπου εδώ η γνώση είναι ακριβώς αυτή η διασύνδεση των επιμέρους γνώσεων. Όπως και σε κάθε διδακτικό μοντέλο, όμως, έτσι και εδώ ο δάσκαλος θα πρέπει να είναι ενημερωμένος για τις υποθέσεις του μοντέλου. Να γνωρίζει δηλαδή ότι κάνοντας διάλεξη δεν μεταφέρει γνώσεις αλλά πληροφορίες. Έτσι όταν για παράδειγμα ο σκοπός του είναι να εισάγει καινούριες μαθηματικές έννοιες, θα πρέπει να ξέρει ότι το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο θεωρείται ακατάλληλο.

Συνοψίζοντας, δεν υπάρχει αμιγές ιδανικό διδακτικό μοντέλο. Ο δάσκαλος θα πρέπει να δουλεύει ανάμεσα στα δύο μοντέλα της υποθετικής κλίμακας που αναφέραμε στην αρχή, ανάλογα με το τι θέλει να επιτύχει κάθε φορά με τη διδασκαλία του. Για να το καταφέρει βέβαια αυτό οφείλει να είναι ενημερωμένος.

2.3 Στατιστική και ομαδοσυνεργατική μάθηση.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες έχει ξεχωριστή σημασία για το μάθημα της Στατιστικής. Θα λέγαμε ότι αποτελεί βασικό εργαλείο για την επίτευξη επικοινωνίας στο μάθημα αυτό. Σύμφωνα με τον Shaughnessy (1977) η χρήση μικρών ομάδων στο μάθημα της Στατιστικής φαίνεται να βοηθάει τους μαθητές να άρουν παρανοήσεις σχετικά με τις πιθανότητες και να τους ενισχύει στην προσπάθειά τους να αντιληφθούν τις διάφορες στατιστικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα ο Dietz (1993) βρήκε ότι η ομαδοσυνεργατική μάθηση στα πλαίσια ενός μαθήματος δειγματοληψίας βοήθησε τους μαθητές να 'ανακαλύψουν' μόνοι τους βασικές δειγματοληπτικές τεχνικές με αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση των τεχνικών αυτών. Ο Jones (1991) πρότεινε την ομαδοσυνεργατική μάθηση σε πολλά κεφάλαια της Στατιστικής στο Πανεπιστήμιο και παρατήρησε δραματική αύξηση παρουσιών στο μάθημα, συμμετοχής και επισκέψεων στο γραφείο. Ενώ η συνολική συμπεριφορά απέναντι στο μάθημα της Στατιστικής άλλαξε εντυπωσιακά. Επίσης σύμφωνα με τον Garfield (1993) η εργασία σε ομάδες βοηθάει στη σύγκριση διαφορετικών λύσεων στα διάφορα στατιστικά προβλήματα και επιτρέπει έτσι στους μαθητές να αντιληφθούν από πρώτο χέρι ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντος τρόπος επίλυσης στα περισσότερα στατιστικά προβλήματα.

Η Στατιστική είναι το μάθημα που κατεξοχήν ενδείκνυται ως συντονιστής δράσης σε ένα πλήθος δραστηριοτήτων στο σχολείο, με διαφορετικές στρατηγικές μάθησης. Συγχρόνως οι δραστηριότητες αυτές είναι ίσως ο καταλληλότερος τρόπος για τη διδακτική προσέγγιση της Στατιστικής μέσω άλλων γνωστικών αντικειμένων. Η χρήση πραγματικών δεδομένων προσφέρεται στη Στατιστική περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα. Σχεδόν όλα τα προβλήματα-ασκήσεις δύναται να

προέρχονται από τον 'πραγματικό κόσμο' δίνοντας έτσι νόημα στο έργο που διαδραματίζεται στην τάξη και προσελκύοντας περισσότερους μαθητές.

Η διδασκαλία της Στατιστικής μέσω της ομαδοσυνεργατικής μάθησης προωθεί την αυτενεργό μάθηση η οποία απαιτεί χειραφέτηση του μαθητή από την αυθεντία του δασκάλου. Με τον τρόπο αυτό χρησιμοποιούμε τη Στατιστική ως μέσο προσέγγισης μιας άλλης αντίληψης για το σχολείο. Ο δάσκαλος δεν είναι μονάρχης της τάξης αλλά βοηθός στην προώθηση της συνεργατικής μάθησης. Έτσι το σχολείο γίνεται χώρος χαράς και ζωής και όχι μόνο χώρος παθητικής αποδοχής αποσπασματικών γνώσεων

2.3.1 Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ομαδοσυνεργατική μάθηση στα πλαίσια ενός μαθήματος Στατιστικής

Η εφαρμογή του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης στα πλαίσια ενός μαθήματος Στατιστικής μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση των παρακάτω δραστηριοτήτων (Garfield, (1993)).

- Ένα σενάριο ή μια διαδικασία δίνεται προς συζήτηση σε κάθε ομάδα. Π.χ. τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης των μέτρων θέσης στην εξαγωγή συνοπτικών συμπερασμάτων για τα δεδομένα μας ή τα βήματα που ακολουθούμε κάθε φορά για να κάνουμε έναν έλεγχο υποθέσεων.
- Ένα σύνολο δεδομένων δίνεται σε κάθε ομάδα προς ανάλυση και συζήτηση. Στο τέλος ζητείται μια γραπτή αναφορά από κάθε ομάδα για το τι συμπεραίνει για τα δεδομένα. Το σύνολο δεδομένων μπορεί να προέρχεται είτε από πραγματικά δεδομένα που τα παιδιά έχουν βρει για παράδειγμα στο internet, είτε από δεδομένα που έχουν προκύψει από δική τους έρευνα όπως οι μουσικές προτιμήσεις των συμμαθητών τους στο σχολείο όπου

φοιτούν, είτε από δεδομένα που έχουν 'δημιουργηθεί' κατά την διάρκεια του μαθήματος όπως η εκτίμηση της κατανομής του αριθμού των βόλων που υπάρχουν μέσα σε ένα κουτί. Αφού κάθε ομάδα ολοκληρώσει την εργασία της συγκρίνει τα αποτελέσματά της με τις υπόλοιπες ομάδες.

- Κάθε ομάδα συζητάει πάνω στα πειράματα τύχης, δημιουργεί ή προσομοιώνει (με τη χρήση του Η/Υ) δεδομένα για να επαληθεύσει ή όχι τα συμπεράσματα της συζήτησης που έκανε και συγκρίνει τα αποτελέσματά της με αυτά των άλλων ομάδων. Π.χ. η πιθανότητα να εμφανιστεί κορώνα στη ρίψη ενός νομίσματος 100 φορές.
- Δίνετε ένα θέμα – πρόβλημα από κάποιο άλλο μάθημα (π.χ. δεδομένα προς ανάλυση από Βιολογία ή Φυσική ή Ψυχολογία κ.ά.) και κάθε ομάδα προσπαθεί να το αντιμετωπίσει με τη χρήση στατιστικών μεθόδων. Έτσι προσεγγίζεται η Στατιστική μέσω άλλων γνωστικών αντικειμένων αλλά και προβλήματα από άλλα γνωστικά αντικείμενα αποκτούν νόημα με τη βοήθεια της Στατιστικής.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η Στατιστική αποτελεί ίσως ιδανικό μάθημα για την εφαρμογή του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης αλλά και αντίστροφα η ομαδοσυνεργατική μάθηση φαίνεται αναγκαία για την κατανόηση βασικών εννοιών Στατιστικής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΟΜΑΔΟΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

3.1 Περιγραφή της διδασκαλίας

Το μοντέλο της ομαδοσυνεργατικής μάθησης είδαμε ότι κατέχει πολύ σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία της Στατιστικής. Παρακάτω περιγράφουμε και αναλύουμε τη διδασκαλία ενός μαθήματος γραμμικής παλινδρόμησης με τη χρήση του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης.

3.1.1 Ταυτότητα της διδασκαλίας

Η διδασκαλία που θα περιγράψουμε παρακάτω πραγματοποιήθηκε σε τάξη της Β΄ Λυκείου (σε μαθητές τεχνολογικής και θετικής κατεύθυνσης) στο φροντιστήριο Διακαιουλάκος στην Καλαμάτα. Το τμήμα είχε 12 παιδιά διαφόρων επιπέδων από πολύ χαμηλό επίπεδο έως και πολύ καλό. Το μάθημα πραγματοποιήθηκε τον Ιούνιο του 2013 αφού τα παιδιά είχαν ολοκληρώσει τις προαγωγικές εξετάσεις τους.

Κανένα από τα παιδιά που συμμετείχαν στο μάθημα δεν είχαν ξανακάνει Στατιστική στο σχολείο (παρόλο που προβλέπεται στη Γ΄ Γυμνασίου). Για το λόγο αυτό προηγήθηκαν δύο δίωρα μαθήματα για να γνωρίσουν τα παιδιά βασικές έννοιες Στατιστικής. Έννοιες όπως πληθυσμός, μεταβλητή, ποιοτική- ποσοτική- διακριτή- συνεχής μεταβλητή, απογραφή, δείγμα, μέση τιμή, διασπορά, πειραματικές και μη πειραματικές μελέτες. Ένα επιπλέον μάθημα μιας ώρας έγινε για να εξοικειωθούν τα παιδιά με τις βασικές λειτουργίες του στατιστικού πακέτου SPSS και για να εξηγήσουμε τι είναι το διάγραμμα διασποράς.

Το μάθημα που έγινε ήταν το πρώτο μάθημα επάνω στη γραμμική παλινδρόμηση. Σκοπός της διδασκαλίας ήταν να γίνει μία εισαγωγή στην

έννοια της απλής γραμμικής παλινδρόμησης. Συγκεκριμένα οι διδακτικοί στόχοι ήταν:

- Να κατασκευάζουν και να ερμηνεύουν ένα διάγραμμα διασποράς που αφορά σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών. Να αναζητούν πρότυπα μεταξύ των σχέσεων δύο μεταβλητών και να μπορούν να περιγράφουν τα πρότυπα αυτά. Π.χ. γραμμική ή μη γραμμική σχέση, αρνητική ή θετική συσχέτιση κ.ά.
- Να μάθουν ότι οι ευθείες γραμμές (γραμμικές σχέσεις) χρησιμοποιούνται πολύ συχνά σε πραγματικά προβλήματα για να περιγράψουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών.
- Να αναγνωρίζουν πότε ένα διάγραμμα διασποράς περιγράφει γραμμικές και πότε μη γραμμικές χέσεις.
- Να μπορούν να προσαρμόσουν εμπειρικά μία ευθεία παλινδρόμησης σε δεδομένα που περιγράφονται από γραμμικές σχέσεις. Να αναζητήσουν την καλύτερη δυνατή θέση αυτής της ευθεία πάνω στο διάγραμμα.
- Να χρησιμοποιούν τη μαθηματική εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης για να κάνουν προβλέψεις. Να μπορούν να ερμηνεύσουν την κλίση της ευθείας με βάση το πλαίσιο του προβλήματος

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- Εξίσωση ευθείας, κατασκευή και γνώση των ιδιοτήτων της
- Να κατασκευάζουν ένα διάγραμμα διασποράς
- Απλές γνώσεις κάποιου στατιστικού προγράμματος ή του excel για τη δημιουργία γραφημάτων

Διάρκεια μαθήματος: 1,5 διδακτική ώρα

❖ ***<u>Γιατί η απλή γραμμική παλινδρόμηση?</u>***

Η απλή γραμμική παλινδρόμηση αν και υπάρχει στο βιβλίο της Γ' Λυκείου δε συμπεριλαμβάνετε στη διδακτέα και εξεταστέα ύλη. Την επιλέξαμε όμως για τους παρακάτω λόγους:

- Εφαρμογή του μοντέλου της απλής γραμμικής παλινδρόμησης μπορούμε να βρούμε σχεδόν σε οποιαδήποτε επιστήμη. Π.χ. στην Ιατρική το μοντέλο της Γ.Π. μπορεί να περιγράψει τη σχέση μεταξύ των δόσεων ενός φαρμάκου σε πειραματόζωα και των αντιδράσεών τους (π.χ. Αναισθητικό-Χρόνος Λιποθυμίας), στη Βιολογία μπορεί να περιγράψει την αρνητική εξάρτηση των ζώντων οργανισμών μιας περιοχής με αυτή της μόλυνσης των υδάτων της περιοχής, στη Γεωργία μπορεί να περιγράψει τη σχέση της παραγωγής καλαμποκιού και της ποσότητας λιπάσματος ενός χωραφιού, στην Ανθρωπολογία μπορεί να περιγράψει το ύψος των παιδιών σε σχέση με αυτό των γονιών τους, στην Οικονομία τη σχέση μεταξύ των τιμών ενός προϊόντος και των πωλήσεών του κ.ά. Εκτός από την περιγραφή των σχέσεων βέβαια μεταξύ των δύο μεταβλητών η γραμμική παλινδρόμηση μας επιτρέπει να κάνουμε και μελλοντικές προβλέψεις για τη σχέση των μεταβλητών αυτών. Έτσι η διδασκαλία της γραμμικής παλινδρόμησης μας επιτρέπει από τη μία να χρησιμοποιήσουμε πληθώρα πραγματικών δεδομένων (real data) που είτε θα αναζητήσουν τα παιδιά από το διαδίκτυο είτε θα τα συλλέξουν και από την άλλη κάθε πρόβλημα προκύπτει από μία ρεαλιστική κατάσταση που μπορούν να συναντήσουν στην καθημερινότητά τους. Επιτυγχάνουμε έτσι δύο βασικούς μαθησιακούς στόχους για τη διδασκαλία της Στατιστικής που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 1.5.5.
- Η διδασκαλία της απλής γραμμικής παλινδρόμησης (όπως και της ανάλυσης παλινδρόμησης γενικότερα) μας δίνει τη δυνατότητα να

συζητήσουμε με τα παιδιά και να ξεκαθαρίσουμε τη διαφορά των ντετερμινιστικών σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και των στοχαστικών-στατιστικών σχέσεων.

- Η ανάλυση παλινδρόμησης ικανοποιεί μία από τις βασικές αρχές της Στατιστικής: Την εύρεση σχέσεων μεταξύ των φυσικών ποσοτήτων που υπάρχουν στον κόσμο γύρω μας και τη χρήση των σχέσεων αυτών για μελλοντικές προβλέψεις. Όταν αυτή η σχέση μπορεί να περιγραφεί και από μία μαθηματική εξίσωση ακόμη καλύτερα.
- Η μελέτη της ευθείας της γραμμικής παλινδρόμησης απαιτεί μαθηματικές γνώσεις γύρω από τις ευθείες. Η ευθεία στα Μαθηματικά διδάσκεται από την Α' Γυμνασίου μέχρι και τη Β' Λυκείου. Έτσι η ευθεία ως μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να αποκτήσει ιδιαίτερο νόημα στα πλαίσια ενός μαθήματος γραμμικής παλινδρόμησης αλλά και το αντίστροφο ένα μάθημα γραμμικής παλινδρόμησης να 'υποστηρίξει' τη διδασκαλία της ευθείας στα Μαθηματικά σχεδόν σε όλες τις τάξεις.

❖ ***<u>Μοντέλο διδασκαλίας</u>***

Το μοντέλο διδασκαλίας που ακολουθήσαμε είναι αυτό της ομαδοσυνεργατικής μάθησης όπως το περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2.2 και 2.3.

Συνοπτικά:

- Τα παιδιά χωρίστηκαν σε 4 ομάδες των 3 ατόμων. Για τη σύνθεση των ομάδων λάβαμε υπ' όψιν μας δύο χαρακτηριστικά. Τις επιδόσεις τους στα Μαθηματικά, έτσι κάθε ομάδα διέθετε έναν καλό και έναν αδύναμο μαθητή, καθώς και τις σχέσεις που είχαν αναπτυχθεί μεταξύ τους όλη τη χρονιά έτσι ώστε να αισθάνονται πιο άνετα.

- Το μάθημα ξεκινάει με τον καθηγητή να εισάγει μία καινούρια έννοια στον πίνακα και μετά μέσω ενός φύλλου εργασίας αφήνει τα παιδιά να εργαστούν μέσα στις ομάδες τους για να καταλήξουν σε συμπεράσματα σχετικά με το πρόβλημα που τους έχει τεθεί. Ο Δάσκαλος τριγυρίζει πάνω από τις ομάδες για να δει την πρόοδο των μαθητών και όπου κρίνει απαραίτητο συμμετέχει στη συζήτηση της ομάδας παρέχοντας το απαραίτητο πλαίσιο στήριξης για να μπορούν να εργαστούν οι μαθητές. Επίσης κάποιες φορές διακόπτει την εργασία των ομάδων για να συνοψίσει τα αποτελέσματά τους στον πίνακα και για να τα συζητήσει με όλες τους μαθητές.
- Ο τύπος διδασκαλίας που χρησιμοποιήσαμε είναι ο τύπος Γ όπως τον περιγράψαμε στο Κεφ.2.1.3
- Τα παιδιά δεν έχουν ξανά δουλέψει σε ομάδες αλλά η καθηγήτρια τους τόνισε τους κανονισμούς πριν ξεκινήσει το μάθημα
- Το μάθημα βιντεοσκοπήθηκε και έγινε απομαγνητοφώνησή του (παράρτημα)

3.1.2 Φύλλο εργασίας – Υποθετική Μαθησιακή Τροχιά

❖ ***<u>Υποθετική Μαθησιακή Τροχιά (Υ.Μ.Τ)</u>***

Το φύλλο εργασίας εισάγει τα παιδιά στο εξής πρόβλημα: Μία μαθήτρια τρίτης δημοτικού σε σχολείο των Η.Π.Α θέλει να προβλέψει πόσο ψηλή θα γίνει όταν φτάσει στην Α΄ Λυκείου. Η πρόβλεψη πρέπει να γίνει μέσω του διαγράμματος διασποράς και της ευθείας παλινδρόμησης.
Το μάθημα εξελίσσεται σε δύο φάσεις:

Στην <u>α΄φάση</u> τα παιδιά πρέπει να συλλέξουν τα δεδομένα τους χρησιμοποιώντας το διαδίκτυο. Τα δεδομένα τα αναζητούν από τη σελίδα

http://www.amstat.org/censusatschool/index.cfm. Πρόκειται για τη σελίδα Cencus at School η οποία έχει δημιουργηθεί στην Αμερική και περιέχει δεδομένα-χαρακτηριστικά (ύψος, βάρος, άνοιγμα χεριών, νούμερο παπουτσιών κ.ά) από μαθητές των σχολείων των Η.Π.Α. και όχι μόνο. Οι ίδιοι οι μαθητές μπορούν να κατοχυρώσουν τα χαρακτηριστικά τους στο πρόγραμμα ή το κάνουν οι δάσκαλοί τους για αυτούς. Σκοπός αυτού του προγράμματος είναι οι μαθητές από όλο τον κόσμο να έχουν ελεύθερη πρόσβαση σε πραγματικά στατιστικά στοιχεία και να δουλεύουν με αυτά. Αφού ο Δάσκαλος εξηγεί στα παιδιά για το παραπάνω πρόγραμμα τους ζητάει να επιλέξουν ένα δείγμα 24 ατόμων. Κάθε ομάδα διαθέτει έναν φορητό υπολογιστή (ένα παιδί από κάθε ομάδα έφερε μαζί του έναν φορητό Η/Υ) και σύνδεση στο διαδίκτυο.

Στη β' φάση αφού έχουν συλλέξει τα δεδομένα τους καλούνται να εξετάσουν κατά πόσο υπάρχει κάποιου είδους σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα διασποράς, να χαράξουν την ευθεία παλινδρόμησης προσεγγιστικά πάνω στο διάγραμμα που έχουν φτιάξει, να υπολογίσουν την εξίσωσή της και να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με αυτά των υπόλοιπων ομάδων.

Το πρόβλημα που θέσαμε (ο προσδιορισμός δηλαδή του ύψους της Melissa) είναι ένα ρεαλιστικό πρόβλημα και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι πραγματικά. Αναλυτικά οι στόχοι που θέσαμε με κάθε ερώτηση είναι:

Ερώτηση 1: '*Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος επιλογής του δείγματος? Τι περιορισμούς πρέπει να βάλουμε ώστε να πάρουμε όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα;*'

Στην ερώτηση αυτή στόχος είναι να γίνει συζήτηση σχετικά με τη συλλογή του δείγματος, τα παιδιά να αναγνωρίσουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων και τη μεταβλητότητα αυτή να τη συμπεριλάβουν στον

τρόπο συλλογής του δείγματός τους. Έτσι να καταστρώσουν μόνοι τους μία τεχνική δειγματοληψίας.

Ερώτηση 2 και 4: *'Ποιο πιστεύετε ότι είναι το ελάχιστο και πιο το μέγιστο ύψος που μπορεί να παρατηρηθεί στο δείγμα μας;'*, *'Αν υποθέσουμε ότι τα στοιχεία τα πήραμε από σχολεία της Κίνας, θα μπορούσαμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να προβλέψουμε το ύψος ενός παιδιού α΄ Λυκείου στην Ρωσία;'*

Οι ερωτήσεις 2,4 λειτουργούν συμπληρωματικά ως προς την ερώτηση 1. Στόχος αυτών των ερωτήσεων είναι να βοηθήσουν τα παιδιά να σκεφτούν (σε περίπτωση που δεν το έχουν κάνει μόνοι τους στην ερώτηση 1) τις πιθανές ακραίες τιμές στο δείγμα τους καθώς και τον περιορισμό του 'τόπου' συλλογής των δεδομένων.

Ερώτηση 3: *'Πιστεύετε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους; Αν υπάρχει σχέση, πως θα μπορούσε να είναι;'*

Στόχος αυτής της ερώτησης είναι να αρχίσουν τα παιδιά να σκέφτονται την πιθανή σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους και να τη συζητήσουν μεταξύ τους.

Ερώτηση 5: *'Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τα 24 τυχαία εκλεγμένα κορίτσια από σχολεία των Η.Π..Α. που συλλέξατε. Στη μία στήλη θα καταγράψετε την ηλικία και στην άλλη το ύψος σε cm. Ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή η ηλικία ή το ύψος και γιατί;'*

Η συλλογή του δείγματος γίνεται μέσω της σελίδας census at school αφού σκοπός μας είναι τα παιδιά να συλλέξουν πραγματικά δεδομένα και να τα συλλέξουν μόνοι τους. Στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης μας ενδιαφέρει να μάθουν να ξεχωρίζουν την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή σε ένα μάθημα παλινδρόμησης.

Ερώτηση 6: *'Φτιάξτε ένα διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα ύψους και ηλικίας που βρήκατε παραπάνω'*

Οι άξονες που δίνονται για την κατασκευή του διαγράμματος διασποράς δεν έχουν κλίμακα. Στόχος είναι τα παιδιά να επιλέξουν μόνοι τους την κατάλληλη κλίμακα για να τοποθετήσουν όλα τα δεδομένα τους επάνω στο διάγραμμα.

Ερώτηση 7:

'α)Φαίνεται να υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους; Αν ναι, θετική ή αρνητική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Πως θα περιγράφατε την σχέση (γραμμική ή μη-γραμμική);'

Στόχος της ερώτησης αυτής είναι να αναζητήσουν πρότυπα μεταξύ της σχέσης των 2 μεταβλητών χρησιμοποιώντας το διάγραμμα διασποράς και να περιγράψουν τα πρότυπα αυτά. Εδώ το πρότυπο της γραμμικότητας.

Ερώτηση 8: *'Ζωγραφίστε την ευθεία παλινδρόμησης της Υ (ύψος) πάνω στη Χ (ηλικία) χρησιμοποιώντας το μολύβι σας ή ένα χάρακα. Περιγράψτε γιατί χαράξατε με αυτό τον τρόπο την ευθεία. Συγκρίνετε μετά με την ευθεία που θα υπολογίσει ο Η/Υ για σας.'*

Στην ερώτηση 8 τους ζητείται να κατασκευάσουν με το μολύβι τους την ευθεία παλινδρόμησης (αφού έχουν καταλήξει σε γραμμική σχέση). Στόχος είναι να δημιουργηθεί μία αβεβαιότητα σχετικά με την καλύτερη ευθεία και πάνω σε αυτό να γίνει μία συζήτηση για το πώς θα κατασκευάσουν την καλύτερη δυνατή ευθεία. Η αβεβαιότητα αυτή θα οδηγήσει στη διαπραγμάτευση των προσωπικών τους νοημάτων έως ότου υπάρξει συμφωνία για τη θέση της ευθείας από τα μέλη της ομάδας. Στη συνέχεια πρέπει να κάνουν το ίδιο με τη χρήση του Η/Υ και να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους. Μέσα από τη συζήτηση της ομάδας θέλουμε τα παιδιά να δημιουργήσουν τελικά μόνοι τους ένα 'καλό' κριτήριο για τη χάραξη της ευθείας παλινδρόμησης.

Ερώτηση 9: *'Ποια είναι η εξίσωση της παραπάνω ευθείας που βρήκατε; Ερμηνεύστε (με βάση το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχετε) την κλίση της ευθείας.'*

Στην ερώτηση 9 ζητάμε να βρουν την εξίσωση της ευθείας που χάραξαν στο προηγούμενο ερώτημα χρησιμοποιώντας γνώσεις για την εύρεση εξίσωσης ευθείας από προηγούμενες τάξεις. Τα παιδιά γνωρίζουν την κλίση μιας ευθείας ως μαθηματικό αντικείμενο, εδώ στόχος είναι να δώσουν νόημα στο μαθηματικό αυτό αντικείμενο με βάση το πλαίσιο του προβλήματος που έχουν.

Ερώτηση 10: *'Χρησιμοποιήστε την ευθεία που βρήκατε για να προβλέψετε το ύψος της Melissa όταν γίνει 15 ετών. Θα ήταν ασφαλές να κάνουμε πρόβλεψη για όταν η Melissa γίνει 20 χρόνων;'*

Στην ερώτηση 10 τα παιδιά καλούνται να απαντήσουν στην αρχική ερώτηση του προβλήματος.. Να προβλέψουν δηλαδή το ύψος που θα έχει η Melissa όταν γίνει 15 ετών. Στόχος είναι να χρησιμοποιήσουν τη μαθηματική εξίσωση του ερωτήματος 9 για να κάνουν πρόβλεψη.

Ερώτηση 11 και 12: '**.** *Περιμένετε όλες οι ομάδες να βρουν την ίδια εξίσωση ευθείας που βρήκατε εσείς; Γιατί ναι ή γιατί όχι;*

Περιμένετε να βγάλετε τα ίδια αποτελέσματα αν επιλέγατε από την αρχή ένα καινούριο δείγμα; Γιατί ναι ή γιατί όχι;'

Στις ερωτήσεις 11 και 12 στόχος είναι να αντιληφθούν τη δειγματική μεταβλητότητα (sampling variability) μέσα από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με τα αποτελέσματα των άλλων ομάδων.

Συνιστώσες GAISE

Το φύλλο εργασίας διαμορφώθηκε έτσι ώστε να τηρηθούν οι τέσσερις συνιστώσες της έκθεσης GAISE κατά την επίλυση ενός στατιστικού προβλήματος όπως περιγράφονται στο κεφάλαιο 1.5. Δηλαδή, **διατύπωσε ερωτήσεις** (ερωτήσεις 1-4 στο φύλλο εργασίας), **φτιάξε ένα σχέδιο**

συλλογής των δεδομένων (ερώτηση 5 στο φύλλο εργασίας), **ανέλυσε τα δεδομένα μέσω αριθμητικών μέτρων και γραφημάτων** (ερωτήσεις 6-8 στο φύλλο εργασίας), **ερμήνευσε τα αποτελέσματά σου με βάση το πλαίσιο του προβλήματος** (ερωτήσεις 9-12 στο φύλλο εργασίας),. Η δραστηριότητα είναι επιπέδου Β στις ερωτήσεις 1-5 ($1^η$ και $2^η$ συνιστώσα) και επιπέδου Α στις υπόλοιπες ερωτήσεις. Τα επίπεδα επιλέχθηκαν με βάση τις προηγούμενες γνώσεις Στατιστικής των μαθητών.

Παρακάτω παραθέτουμε το φύλλο εργασίας

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΠΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Η Melissa είναι μαθήτρια τρίτης δημοτικού σε σχολείο των Η.Π.Α και θέλει να μάθει πόσο ψηλή θα γίνει όταν φτάσει στην α' Λυκείου. Χρησιμοποιήστε στοιχεία από το internet για να την βοηθήσετε να προβλέψει το ύψος της. Επιλέξτε ένα δείγμα 24 ατόμων από τη σελίδα http://www.amstat.org/censusatschool/index.cfm

1. Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος επιλογής του δείγματος; Τι περιορισμούς πρέπει να βάλουμε ώστε να πάρουμε όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα;

2. Ποιο πιστεύετε ότι είναι το ελάχιστο και πιο το μέγιστο ύψος που μπορεί να παρατηρηθεί στο δείγμα μας;

3. Πιστεύετε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους; Αν υπάρχει σχέση, πως θα μπορούσε να είναι;

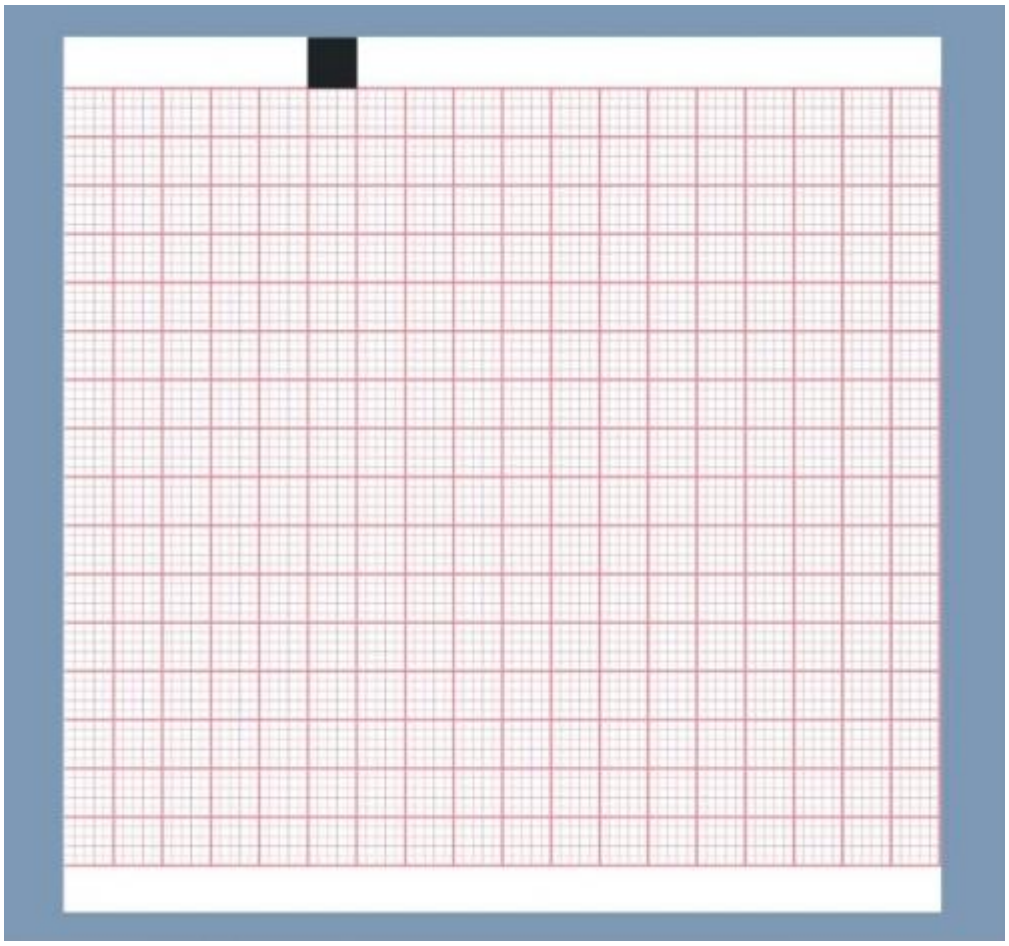
4. Αν υποθέσουμε ότι τα στοιχεία τα πήραμε από σχολεία της Κίνας, θα μπορούσαμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να προβλέψουμε το ύψος ενός παιδιού α΄ Λυκείου στην Ρωσία;

5. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τα 24 τυχαία εκλεγμένα κορίτσια από σχολεία των Η.Π..Α. που συλλέξατε. Στη μία στήλη θα καταγράψετε την ηλικία και στην άλλη το ύψος σε cm.

ΎΨΟΣ	ΗΛΙΚΙΑ

Ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή η ηλικία ή το ύψος και γιατί;

6. Φτιάξτε ένα διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα ύψους και ηλικίας που βρήκατε παραπάνω



7. α)Φαίνεται να υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους; Αν ναι, θετική ή αρνητική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

β) Πως θα περιγράφατε την σχέση (γραμμική ή μη-γραμμική);

8. Ζωγραφίστε την ευθεία παλινδρόμησης της Υ (ύψος) πάνω στη Χ (ηλικία) χρησιμοποιώντας το μολύβι σας ή ένα χάρακα. Περιγράψτε γιατί χαράξατε με αυτό τον τρόπο την ευθεία. Συγκρίνετε μετά με την ευθεία που θα υπολογίσει ο Η/Υ για σας.

9. Ποια είναι η εξίσωση της παραπάνω ευθείας που βρήκατε; Ερμηνεύστε (με βάση το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχετε) την κλίση της ευθείας.

10. Χρησιμοποιήστε την ευθεία που βρήκατε για να προβλέψετε το ύψος της Melissa όταν γίνει 15 ετών. Θα ήταν ασφαλές να κάνουμε πρόβλεψη για όταν η Melissa γίνει 20 χρόνων;

11. Περιμένετε όλες οι ομάδες να βρουν την ίδια εξίσωση ευθείας που βρήκατε εσείς? Γιατί ναι ή γιατί όχι;

12. Περιμένετε να βγάλετε τα ίδια αποτελέσματα αν επιλέγατε από την αρχή ένα καινούριο δείγμα; Γιατί ναι ή γιατί όχι

3.2 Ανάλυση της διδασκαλίας

3.2.1 Η πρακτική της τάξης

Παραπάνω αναπτύξαμε τους στόχους που θέλαμε να επιτύχουμε φτιάχνοντας κάθε δραστηριότητα του φύλλου εργασίας, αναπτύξαμε δηλαδή μια Υποθετική Μαθησιακή Τροχιά. Τώρα θα αναλύσουμε πως διαμορφώθηκε τελικά το μάθημα ποια ήταν δηλαδή η πρακτική της τάξης.

Καταρχήν από το φύλλο εργασίας έγιναν όλες οι ερωτήσεις. Στην ερώτηση 8 τα παιδιά έπρεπε να φτιάξουν το διάγραμμα διασποράς με το χέρι και με τη χρήση Η/Υ. Η καθηγήτρια βλέποντας ότι έχει περάσει αρκετός χρόνος και δεν θα προλάβουν να ολοκληρώσουν το φύλλο εργασίας επέλεξε να κάνει αυτή το διάγραμμα διασποράς μέσω Η/Υ και με τη χρήση ενός προτζέκτορα να το παρουσιάσει στα παιδιά. Τα παιδιά κατασκεύασαν το διάγραμμα με το χέρι και σύγκριναν τα αποτελέσματά τους με το διάγραμμα του Η/Υ. Έτσι ο χρόνος κατανεμήθηκε αρκετά καλά ώστε να απαντηθούν όλα τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας.

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος προσπαθήσαμε να ακολουθήσουμε τα βασικά βήματα του μοντέλου της ομαδοσυνεργατικής μάθησης. Δηλαδή, ξεκινούσαμε με μια συζήτηση με όλη την τάξη, προτείναμε μετά μια δραστηριότητα αφήνοντας τα παιδιά να δουλέψουν σε ομάδες. Η καθηγήτρια τριγύριζε πάνω από τις ομάδες για να ελέγξει την πρόοδο των εργασιών τους αλλά και να προσφέρει το απαραίτητο πλαίσιο στήριξης όπου χρειαζόταν. Αφού βεβαιωνόταν ότι οι περισσότερες ομάδες είχαν ολοκληρώσει την εργασία τους η ίδια έκανε συζήτηση με όλη την τάξη. Ο κύκλος αυτός πραγματοποιήθηκε περίπου τέσσερις φορές. Κάθε κύκλος αντιστοιχούσε και σε μία συνιστώσα της έκθεσης GAISE. Πρώτος κύκλος: <u>Διατύπωση ερωτήσεων</u> (ερ.1-ερ.4 σελ.1 στο φύλλο εργασίας και

χρόνος 7:03-27:00). Δεύτερος κύκλος: Συλλογή δεδομένων (ερ.5 σελ.2 στο φύλλο εργασίας και χρόνος 27:00-30:00). Τρίτος κύκλος: Ανάλυση Δεδομένων (ερ. 6-8 σελ.3 και 4 στο φύλλο εργασίας). Τέταρτος κύκλος: Ερμηνεία αποτελεσμάτων (ερ. 9-12 σελ.4 και 5 στο φύλλο εργασίας)

Συγκεκριμένα ο περισσότερος χρόνος αφιερώθηκε στα εξής δύο κομμάτια. Στη συλλογή του δείγματος και στη χάραξη της καλύτερης δυνατής ευθείας παλινδρόμησης. Στη συλλογή του δείγματος έγινε μία μεγάλη κουβέντα ανάμεσα στις ομάδες, όπως περιμέναμε άλλωστε, ώστε να γίνει η συλλογή με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Εκεί προέκυψε η έννοια της μεταβλητότητας του δείγματος όπου διατυπώθηκαν πολλές ερωτήσεις, έγιναν πολλές εικασίες για να καταλήξουν στο τελικό σχέδιο συλλογής του δείγματος. Στη χάραξη της ευθείας παλινδρόμησης έγινε κουβέντα για το τι σημαίνει καλύτερη ευθεία, προσπάθεια εύρεσης ενός κριτηρίου ώστε να χαράξουν την καλύτερη ευθεία και σύγκριση των ευθειών τους με αυτές των άλλων ομάδων.

Η συλλογή του δείγματος και η χάραξη της ευθείας παλινδρόμησης ήταν τα δύο σημεία στο φύλλο εργασίας που δημιουργήθηκαν οι μεγαλύτερες αβεβαιότητες. Οι αβεβαιότητες αυτές ξεπεράστηκαν είτε μέσα από τη συζήτηση με τα μέλη της ομάδας είτε με τη βοήθεια της καθηγήτριας.

Η καθηγήτρια στην αλληλεπίδραση που είχε με τις ομάδες, προσπαθούσε να προσφέρει το κατάλληλο πλαίσιο στήριξης για να φέρουν τα παιδιά σε πέρας την εργασία που είχαν. Στο σύνολό τους, οι μαθητές δούλεψαν πολύ καλά σαν ομάδα παρόλο που δεν είχαν ξανά δουλέψει με αυτό τον τρόπο. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι αποδέχθηκαν την μεταβίβαση της υπευθυνότητας της καθηγήτριας προς αυτούς. Η καθηγήτρια τους τόνισε από την αρχή ότι τα αποτελέσματα των εργασιών τους πρέπει να τα δίνουν σαν ομάδες και κατά ένα μεγάλο μέρος το τήρησαν. Σε αυτό βέβαια βοήθησε και το γεγονός ότι

μοιράστηκε ένα φύλλο εργασίας σε κάθε ομάδα, οπότε τους εξανάγκασε να δουλέψουν μαζί. Η συμμετοχή στην πρακτική της τάξης ήταν ολική, δεν υπήρχαν ομάδες που δεν εργάζονταν ή δεν συμμετείχαν. Σε κάθε ομάδα είχαμε συμμετοχή και των τριών ατόμων, αν και σε κάποιες περιπτώσεις ο πιο αδύναμος μαθητής συμμετείχε σπάνια, όπως στην ομάδα 1 η Ανθούλα και στην ομάδα 2 ο Νίκος. Η σύνθεση κάθε ομάδας έγινε με βάσει τις επιδόσεις τους στα Μαθηματικά (τουλάχιστον ένας καλός και τουλάχιστον ένας αδύναμος μαθητής) και με βάση τις φιλικές σχέσεις που είχαν αναπτύξει. Ο διαχωρισμός με βάσει τις φιλικές σχέσεις που είχαν αναπτύξει λειτούργησε πολύ θετικά. Τα παιδιά αισθάνονταν πιο άνετα να διατυπώσουν τις απόψεις τους. Ο διαχωρισμός όμως με βάση το επίπεδο δεν φάνηκε να βοήθησε σε όλες τις ομάδες το ίδιο τους πιο αδύναμους μαθητές. Για παράδειγμα στη μία ομάδα (ομάδα 1) ο καλός μαθητής με τον μέτριου επιπέδου συνεργάζονταν εξαιρετικά, ο αδύναμος συμμετείχε σπάνια και όσο περνούσε ο χρόνος όλο και λιγότερο. Στην ομάδα 2 όμως οι δύο πιο καλές μαθήτριες στήριξαν και βοήθησαν τον πιο αδύναμο μαθητή.

Γενικά θεωρούμε ότι ακολουθήθηκε η Υ.Μ.Τ που είχαμε περιγράψει στην αρχή. Να σημειώσουμε όμως ότι οι δύο (περίπου) συνεχόμενες διδακτικές ώρες που χρειάστηκαν για να ολοκληρωθεί το μάθημα κούρασε λίγο τα παιδιά.

3.2.2 Παρουσίαση και ανάλυση διαλόγων

Παρακάτω παρουσιάζουμε και αναλύουμε τρεις διαλόγους που επιλέξαμε από την απομαγνητοφώνηση του μαθήματος. Επιλέξαμε έναν διάλογο όπου τα παιδιά μιας ομάδας συζητάνε μεταξύ τους, έναν διάλογο όπου η καθηγήτρια συζητάει με μια ομάδα και έναν διάλογο όπου η καθηγήτρια συζητάει με όλη την τάξη

Ταυτότητα της ομάδας 1

Η ομάδα 1 είναι μία από τις 2 (μαζί με την ομάδα 2) ομάδες που συμμετείχαν στο μάθημα με αμείωτο ενδιαφέρον από την αρχή μέχρι και το τέλος. Αποτελείται από τρία άτομα. Την Αθηνά που είναι μία πολύ καλή μαθήτρια στα Μαθηματικά, με υψηλές επιδόσεις, την Πηνελόπη που έχει μέτριες επιδόσεις και την Ανθούλα που είναι πολύ αδύναμη και πολύ αδιάφορη για τα Μαθηματικά. Η Πηνελόπη με την Αθηνά έχουν αναπτύξει και πιο στενές φιλικές σχέσεις κατά τη διάρκεια της χρονιάς. Στους διαλόγους που γίνονται η Αθηνά με την Πηνελόπη συνεργάζονται σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος αλληλοσυμπληρώνοντας η μία την άλλη, η Ανθούλα όμως παραγκωνίζεται τις περισσότερες φορές. Παρακολουθεί τη συζήτηση αλλά όταν προσπαθεί να συμμετάσχει σε αυτή τα άλλα δύο μέλη της ομάδας την αγνοούν.

❖ ***Ανάλυση του διαλόγου 1-Συζήτηση μελών ομάδας***

7:03-48:49 Η ομάδα 1 βρίσκεται στην επίλυση των ερωτήσεων 1-3 του φύλλου εργασίας, προσπαθεί να βάλει τους περιορισμούς που πρέπει για να συλλέξει το δείγμα. Η συζήτηση αυτή γίνεται αμέσως μετά την εισαγωγή της καθηγήτριας για τη γραμμική παλινδρόμηση (χρόνος 00:00-07:02)

	Μαθητής - Ομιλία	**Ανάλυση**
1	**7:03- 14:02** (*Συζητάνε την Ερ.1: 'Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος επιλογής του δείγματος και ποιους περιορισμούς πρέπει να πάρουμε'*)	Παίρνει την πρωτοβουλία να βάλει τον πρώτο περιορισμό

	Αθηνά:Από διαφορετικές ηλικίες….Άτομα από διαφορετικές ηλικίες έτσι ώστε….Για να βρούμε την α' Λυκείου. Ωραία, άρα να πάρουμε από διαφορετικές ηλικίες… **Πηνελόπη:** (την διακόπτει) Γιατί να μην πάρουμε από την Α΄ Δημοτικού και από την Α΄ Λυκείου μόνο **Αθηνά:**Από όλες τις τάξεις **Πηνελόπη:** Ναι από όλες **Ανθούλα:** Όχι από όλες μόνο από την Α Λυκείου **Πηνελόπη:** Πρέπει όμως να πάρουμε 24 άτομα (απαντάει στην Αθηνά) **Αθηνά:** Από Γ Δημοτικού μέχρι Α Λυκείου είναι 7 χρόνια **Πηνελόπη:** Ωραία να πάρουμε τέσσερα άτομα από κάθε ηλικία **Αθηνά:** Εντάξει τέσσερα από κάθε ηλικία **Πηνελόπη:** Ναι, 4 κορίτσια από κάθε ηλικία **Αθηνά:** Τι, κορίτσια μόνο; **Πηνελόπη:** Ναι, μόνο κορίτσια αφού κορίτσι είναι **Αθηνά:** Εντάξει…σωστά, συμφωνώ **Ανθούλα:** Τι περιορισμούς πρέπει να πάρουμε όμως; (ξαναδιαβάζει την	Η Πηνελόπη μπαίνει αμέσως στη συζήτηση και εκφράζει την αβεβαιότητά της. Η Αθηνά επιμένει σε έντονο ύφος και η Πηνελόπη φαίνεται να συμφωνεί. Η Ανθούλα συμμετέχει στη συζήτηση μη θέλοντας να δεχτεί το όλες τις ηλικίες που σχεδόν επέβαλε η Αθηνά. Παρόλο αυτά τα άλλα δυο κορίτσια την αγνοούν. Η Πηνελόπη θέτει εδώ έναν επιπλέον περιορισμό που φαίνεται ότι η Αθηνά δεν έχει σκεφτεί. Για αυτό και αντιδρά στην αρχή αλλά μέτα καταλαβαίνει ότι ο περιορισμός είναι σωστός. Η Ανθούλα κάνει μια προσπάθεια να ξαναμπεί στην κουβέντα και δείχνοντας ότι δεν έχει καταλάβει

	ερώτηση) **Πηνελόπη:** Αυτά! Αυτά που είπαμε. Να είναι κορίτσια…και βασικά…μήπως να έχουν και το ίδιο ύψος **Ανθούλα:** Δεν παίζει ρόλο αυτό. Θα βγει ο μέσος όρος περίπου των παιδιών **Πην.+Αθην.:** Ναι όντως, σωστά **Πηνελόπη:** Μήπως να τα γράψουμε;(Αρχίζει να γράφει..' Περιορισμοί:Παιδιά από τις τάξεις από την Γ Δημοτικού μέχρι την Α Λυκείου. Να είναι κορίτσια). Τι άλλο; **Αθηνά:** Αυτό που λέγαμε (εννοεί στο προηγούμενο μάθημα), να μην υπάρχουν ακραίες τιμές… **Πηνελόπη:** Ναι, δηλαδή τα 4 κορίτσια που θα πάρουμε από την Γ Δημοτικού να έχουν παρόμοιο ύψος με τη Μελίσα **Αθηνά:** Το κλίμα; Μήπως επηρεάζει και το κλίμα; **Πηνελόπη:** Ναι επηρεάζει την ανάπτυξη. Άρα να πάρουμε παιδιά από την ίδια περιοχή. Τι άλλο; **Ανθούλα:** Τα γονίδια? **Πηνελόπη:** Τα γονίδια, τι? Πως θα βρούμε πληροφορίες για τα γονίδια? (γέλια…) **Αθηνά:** Εντάξει πάμε στην επόμενη	ακόμη το περιεχόμενο της συζήτησης των άλλων δύο κοριτσιών. Η Πηνελόπη απορημένη για την ερώτηση της απαντάει σε έντονο ύφος και συνεχίζει εκφράζοντας και άλλη μία αβεβαιότητά της. Η Ανθούλα βρίσκει την ευκαιρία να απαντήσει. Τα άλλα δύο κορίτσια αρχικά συμφωνούν αλλά οι εκφράσεις τους δείχνουν να μην έχουν καταλάβει την αιτιολόγηση της Ανθούλας. Η παρατήρηση της Πηνελόπης για το ίδιο ύψος οδηγεί την Αθηνά να σκεφτεί τις ακραίες τιμές και ότι πρέπει να τις αφαιρέσουμε για να μην αλλοιωθεί το τελικό αποτέλεσμα Η Αθηνά βάζει και άλλο περιορισμό, όπου η Πηνελόπη τον δέχεται και τον αιτιολογεί Η Ανθούλα επιμένει και ξαναβάζει περιορισμό, η αντίδραση των άλλων δύο όμως την αποθαρρύνει

	16:29-19:03 (Συζητάνε την ερώτηση 3 αν υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους και αν ναι πως θα μπορούσε να είναι) **Αθηνά:**(Διαβάζει την ερώτηση) Πιστεύετε ότι υπάρχει σχέση ηλικία και ύψους; **Πηνελόπη:** Υπάρχει, σίγουρα υπάρχει. Αλλά ανάλογα…. Βασικά όσο μεγαλώνεις θα ψηλώνεις. Αλλά….. όχι πάντα. Μέχρι ένα σημείο. **Αθηνά:** Όταν θα είσαι 80 δεν θα ψηλώνεις **Πηνελόπη:** Ναι αλλά εδώ ρωτάει γενικά ή μόνο για την Α Λυκείου; **Αθηνά:** Όχι, εδώ ρωτάει γενικά…εεεε….ή μόνο για τα συγκεκριμένα παιδιά; **Ανθούλα:** Γενικά πρέπει να μιλάει. Μπορεί να είναι Γ Δημοτικού 1 μ. ή Γ Δημοτικού 1,5 μ. **Πηνελόπη:** Δεν έχει σημασία αυτό. (παύση..) Βασικά εγώ πιστεύω ότι η σχέση είναι μία γραμμή **Αθηνά:** Όσο μεγαλώνεις από κάποια ηλικία και μετά…Για παράδειγμα μέχρι τα 20 θα ψηλώνεις…Τέλος πάντων, υπάρχει σχέση **Καθηγήτρια:** (Παρεμβαίνει και διακόπτει τη συζήτηση) Τι κάνουν τα κορίτσια εδώ;	Η ομάδα αναγνωρίζει από την αρχή ότι υπάρχει σχέση. Πολύ γρήγορα πέρα από τη σχέση βάζει και όριο στη σχέση, βάζει και περιορισμό. Αντιλαμβάνονται δηλαδή ότι η σχέση που θα βρουν ισχύσει μέχρι την ηλικία που σταματάει η ανάπτυξη. Η Πηνελόπη θέτει και την έννοια της γραμμικότητας, ενώ η Αθηνά επιμένει στο ανώτατο όριο

	Για να δω τις απαντήσεις σας; Ωραία, για να τα μαζέψουμε λίγο τις απαντήσεις σας (απευθύνεται σε όλη την τάξη)	Η καθηγήτρια παρεμβαίνει σε μια 'ακατάλληλη' στιγμή που θα μπορούσε να προχωρήσει και άλλο η συζήτηση μεταξύ της ομάδας. Διακόπτει τη συζήτηση κοιτάζοντας τις απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα και αφού θεωρεί ικανοποιητικές τις απαντήσεις απευθύνεται σε όλη την τάξη και συζητάει τα ερωτήματα.
	19:40-20:50 (*Η καθηγήτρια βλέποντας ότι οι ομάδες έχουν ολοκληρώσει τις ερωτήσεις 1-4 κάνει μια συζήτηση με όλη την τάξη για την ερώτηση 3, έτσι ώστε να δώσει στις ομάδες τη δυνατότητα να συγκρίνουν τις απαντήσεις τους.*) **Καθηγήτρια:** Στην ερώτηση 3 τώρα. Πιστεύετε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους; **Μαριλένα:** Ναι υπάρχει. Όσο μεγαλώνεις, τόσο μεγαλύτερο το ύψος. Υπάρχει θετική σχέση **Πηνελόπη:** Ότι είναι ανάλογα μέχρι ένα σημείο, μέχρι μια ηλικία και μετά μένει το ίδιο. (Δείχνει με το χέρι της, μία ευθεία που αυξάνει και μετά γίνεται σταθερή) **Καθηγήτρια:** Προφανώς από ένα σημείο και μετά παραμένει η ίδια	Η καθηγήτρια κάνει συζήτηση με όλη την τάξη για το αν υπάρχει σχέση ύψους – ηλικίας; Η Πηνελόπη μέσα από τη συζήτηση της ομάδας της έχει οπτικοποιήσει σχέση ηλικίας ύψους. Η Πηνελόπη χρησιμοποιεί τη λέξη 'ανάλογα' θέλοντας να δηλώσει τη θετική συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ ηλικίας και ύψους. Για αυτό και η καθηγήτρια δεν επιμένει στο ανάλογα.

Ταυτότητα της ομάδας 2

Η ομάδα 2 είναι μία από τις 2 (μαζί με την ομάδα 1) ομάδες που συμμετείχαν στο μάθημα με αμείωτο ενδιαφέρον από την αρχή μέχρι και το τέλος. Αποτελείται από τρία άτομα. Την Αφροδίτη που είναι μία πολύ καλή μαθήτρια στα Μαθηματικά, με υψηλές επιδόσεις, την Μαριλένα που έχει μέτριες επιδόσεις αλλά ανήσυχο πνεύμα που πείθεται πολύ δύσκολα για αυτά που θα της πεις και το Νίκο που είναι πολύ αδύναμος αλλά όχι αδιάφορος για τα Μαθηματικά. Οι τρεις τους είναι πολύ καλοί φίλοι. Η επικοινωνία που έχουν είναι πολύ καλή. Η Αφροδίτη με τη Μαριλένα συμμετέχουν πιο πολύ στη συζήτηση, ο Νίκος συμμετέχει αρκετά (πιο πολύ την πρώτη μισή ώρα) και δεν σταματάει να ρωτάει μέχρι να ξεκαθαρίσει κάποιες έννοιες στο μυαλό του. Τα άλλα δύο κορίτσια τον στηρίζουν όσο μπορούν (σε αντίθεση με την ομάδα 1 που η συμπεριφορά των δύο κοριτσιών σχεδόν απομόνωσε την τρίτη) να καταλάβει τις διάφορες έννοιες

Ανάλυση του διαλόγου 2-Συζήτηση καθηγήτριας με ομάδα

40:06-48:49 Τα παιδιά συζητάνε τις ερωτήσεις 7 και 8. Αν υπάρχει σχέση, τι είδους και προσπαθούν να φτιάξουν την ευθεία παλινδρόμησης. Η θέση της ευθείας παλινδρόμησης δημιουργεί μια έντονη αβεβαιότητα στα παιδιά. Η αβεβαιότητα αυτή οδηγεί στην διαπραγμάτευση των προσωπικών νοημάτων (διάφορες ιδέες τίθενται για τη σωστή κατασκευή της ευθείας) έως ότου υπάρξει συμφωνία ως προς το νόημα του συζητούμενου θέματος. Η συμφωνία είναι 'να περνάει κοντά από τα περισσότερα σημεία'. Για την επίλυση της αβεβαιότητάς τους η καθηγήτρια προσφέρει αρχικά το απαραίτητο πλαίσιο στήριξης. Το πλαίσιο αυτό στήριξης του δασκάλου προς τους μαθητές γίνεται τελικά αμοιβαίο πλαίσιο στήριξης. Τα ίδια τα παιδιά δηλαδή αναλαμβάνουν το ρόλο του δασκάλου και βοηθάνε όπου χρειάζεται τα μέλη της ομάδας τους.

	Μαθητής - Ομιλία	Ανάλυση
	40:06-48:49 **Αφροδίτη:** Θεωρώ ότι αν αφαιρέσουμε κάποιες ακραίες τιμές που μας χαλάνε, υπάρχει σχέση **Νίκος:** Συμφωνώ **Μαριλένα:** Θετική ή αρνητική? Θετική εντάξει φαίνεται. **Αφροδίτη:** Μα είναι και λογικό. Αυξάνει η ηλικία αυξάνει το ύψος. **Νίκος:** Γραμμική ή μη Γραμμική? **Αφροδίτη:** Μη γραμμική **Νίκος:** Γιατί? **Αφροδίτη:** (γέλια) έτσι το είπα…δεν ξέρω, δεν μπορώ να καταλάβω, να ρωτήσουμε την κυρία, ε? (φωνάζουν την καθηγήτρια) **Καθηγήτρια:** Για πείτε μου **Μαριλένα:** Δεν καταλαβαίνουμε πώς να βρούμε αν είναι γραμμική ή όχι. **Καθηγήτρια:** Θυμάστε τι είπαμε στην αρχή? Γραμμικές είναι οι σχέσεις που μπορούν να προσεγγιστούν αρκετά καλά από μία ευθεία. Μπορείτε εδώ να φτιάξετε μία ευθεία που να το κάνει αυτό? **Νίκος:** όχι **Μαριλένα:** Μπορούμε…(δείχνει με το χέρι της πως είναι η ευθεία)	Αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να αφαιρέσουμε τις ακραίες τιμές από το σχήμα μας Ο Νίκος δεν αποδέχεται την άποψη της Αφροδίτης χωρίς αιτιολόγηση Η Αφροδίτη όπως και η υπόλοιπη ομάδα βρίσκετε σε μια αβεβαιότητα για την επίλυση της οποίας καλεί (αφού ρωτήσει την υπόλοιπη ομάδα αν συμφωνούν) την καθηγήτρια

	Καθηγήτρια: Πάρε το μολύβι σου και ζωγράφισέ τη. (Η Μαριλένα φτιάχνει την ευθεία) Νίκο κατάλαβες τώρα? **Νίκος:** Μα κυρία δεν περνάει από όλα τα σημεία **Αφροδίτη:** Μα προσεγγιστικά είπε η κυρία, δεν χρειάζεται να περνάει από όλα **Μαριλένα:** Καλή είναι, περνάει αρκετά κοντά από τα περισσότερα σημεία. **Καθηγήτρια:** Αυτό θέλουμε. Να περνάει αρκετά κοντά από τα περισσότερα σημεία. Νίκο κοίταξε εδώ.(Η καθηγήτρια φτιάχνει δύο διαγράμματα διασποράς με το μολύβι της πάνω στο φύλλο εργασίας. Στο ένα δεν υπάρχει γραμμική σχέση και στο άλλο υπάρχει) Μπορείς να μου πεις σε ποιο από τα δύο βλέπεις γραμμική σχέση? **Νίκος:** Ναι, στο πρώτο **Καθηγήτρια:** Γιατί όχι στο δεύτερο? **Νίκος:** Είναι πολύ ανακατεμένα. Κατάλαβα… **Μαριλένα:** Δηλαδή κυρία τι να απαντήσουμε στην 8? **Καθηγήτρια:** Για να δούμε. Αν φτιάξω τώρα μία τέτοια ευθεία στο διάγραμμά σας (φτιάχνει μία ευθεία που να ξεκινάει από το 1,70 παράλληλη στον x'x) είναι καλή ευθεία? **Αφροδίτη:** Όχι δεν είναι σε καμία περίπτωση **Μαριλένα:** Η δική μας είναι καλύτερη	Τα παιδιά όμως ξαναπαίρνουν το ρόλο του δασκάλου. Ο δάσκαλος έχει απλά βοηθητικό ρόλο στη συζήτηση Ο Νίκος φαίνεται από τις εκφράσεις του ότι δεν πείθεται από τις συμμαθήτριες του, έτσι η καθηγήτρια του προσφέρει το απαραίτητο πλαίσιο στήριξης για να οπτικοποιήσει τις γραμμικές σχέσεις Ο Νίκος καταφέρνει να ξεπεράσει την αβεβαιότητά του

	Καθηγήτρια: Γιατί? **Αφροδίτη:** Περνάει από όλα τα σημεία **Νίκος:** Πως περνάει από όλα, είπαμε ότι δεν περνάει… **Αφροδίτη:** Λάθος, περνάει κοντά ήθελα να πω. Περνάει κοντά από τα περισσότερα σημεία. Είναι στο μέσο. Ενώ η δικιά σας…. Είναι στο μέσο των πολλών κυρία (δείχνει έντονα με το χέρι της) **Μαριλένα**: Ναι αυτό, στο μέσο των πολλών **Καθηγήτρια:** Ωραία, αυτό είναι ένα καλό επιχείρημα για να με πείσετε ότι η δική σας είναι καλύτερη. Ισοδύναμα με το μέσο των πολλών θα μπορούσαμε να πούμε ότι αφήνει αριστερά της τόσα σημεία όσο και δεξιά της. ε? **Μαριλένα:** Ο Η/Υ όμως θα την φτιάξει ακριβώς (επιμένει για τον Η/Υ) **Καθηγήτρια:** Εντάξει θα το κάνω στον Η.Υ να το δείτε. (Απευθύνεται σε όλη την τάξη). Λοιπόν παιδιά θα φτιάξω την ευθεία στο διάγραμμά χρησιμοποιώντας τον Η/Υ. (Φτιάχνει την ευθεία ενώ τα παιδιά παρακολουθούν) **Πηνελόπη:** Ο Η/Υ την έφτιαξε ωραία **Ανθούλα:** Η δική μας δεν μοιάζει με αυτή **Καθηγήτρια**: Συζητήστε το λίγο μεταξύ σας γιατί δεν μοιάζει, είναι η ερωτήση 11	Η καθηγήτρια προσπαθεί να τους βοηθήσει να θέσουν τα κριτήρια μιας καλής ευθείας παλινδρόμησης. Η μεταξύ τους πάλι συζήτηση τους βοηθάει να θέσουν ένα κριτήριο για την 'καλή' αυτή ευθεία Η έκφραση από το μέσο των πολλών ικανοποιεί την Μαριλένα. Η αβεβαιότητα που είχαν αρχικά τα παιδιά για την καλύτερη ευθεία επιλύεται Η καθηγήτρια ξαναδιατυπώνει το κριτήριό τους

<u>Ανάλυση του διαλόγου 3-Συζήτηση της καθηγήτριας με όλη την τάξη</u>

55:25-56:26 Η καθηγήτρια περνώντας από όλες τις ομάδες παρατηρεί ότι κανείς δεν έχει απαντήσει το υποερώτημα του ερωτήματος 9, να ερμηνεύσουν με βάση το πρόβλημα που έχουν την κλίση της ευθείας. Απευθύνεται λοιπόν σε όλη την τάξη για να συζητήσουν μαζί το υποερώτημα αυτό.

Η έννοια της κλίσης μιας ευθείας είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Από τη Β' Γυμνασίου μέχρι και τη Β' Λυκείου η έννοια της κλίσης μιας ευθείας εμφανίζεται συνέχεια στην ύλη τους. Στο διάλογο μάλιστα 48:50-53:43 υπολογίζουν την κλίση (σχεδόν όλες οι ομάδες) χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Φαίνεται όμως ότι τα παιδιά δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της κλίσης και δυσκολεύονται να την ερμηνεύσουν με βάση το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουν.

	Μαθητής - Ομιλία	**Ανάλυση**
	55:25-56:26 **Καθηγήτρια:** Τελειώσατε το ερωτηματολόγιο? **Ιωάννα:** Ναι **Καθηγήτρια:** Δεν βλέπω να έχετε σχολιάσει κάτι για την κλίση. Τι εκφράζει η κλίση? **Ιωάννα:** Δεν εκφράζει τίποτα … Εεεε, όχι εννοώ εκφράζει μεταβολή του ύψους με βάση την ηλικία **Μπάμπης:** Μήπως θα είναι το πόσο αυξάνει κάθε φορά … εεε, δεν μπορώ να το ολοκληρώσω	Η Ιωάννα και ο Μπάμπης προσπαθούν να εξηγήσουν την κλίση αλλά φαίνεται ότι δεν έχουν ξεκάθαρη εικόνα της έννοιας.

	Καθηγήτρια: Δεν πειράζει θα σας βοηθήσω εγώ. (Απευθύνεται σε όλη την τάξη) Βλέπω ότι έχετε τελειώσει, ας πούμε κάποια πράγματα στον πίνακα.	
	56:27-60:26 (Η καθηγήτρια εξηγεί την έννοια της κλίσης στον πίνακα) **Καθηγήτρια:** Δίνω δύο τιμές στην εξίσωση $y=\alpha x+\beta$. Ας υποθέσουμε την τιμή x_1 και την τιμή $x_2=x_1+1$. Άρα θα έχω $y_1=\alpha x_1+\beta$ και $y_2=\alpha x_1+\alpha+\beta$. Τις αφαιρώ κατά μέλη, τι θα έχω? **Αφροδίτη:** Θα βγει α **Καθηγήτρια:** Μπορείτε να μου πείτε τώρα τι εκφράζει η κλίση? (Δεν απαντάει κανείς και η καθηγήτρια ξαναδιατυπώνει την ερώτηση) Πόσο διέφεραν οι τιμές του x που βρήκαμε? **Όλοι:** Κατά ένα **Καθηγήτρια:** Για αυτές τις τιμές του x πόσο διέφεραν οι τιμές του y? **Όλοι:** άλφα **Καθηγήτρια:** Άρα μεταβάλλοντας το x κατά μία μονάδα το y μεταβάλλεται (αυξάνεται ή μειώνεται) κατά α. Εντάξει? Τώρα μπορεί κάποιος να μου ερμηνεύσει την κλίση που βρήκε με βάση το	Η καθηγήτρια επιλέγει έναν αλγεβρικό τρόπο για να τους βοηθήσει να καταλάβουν τι εκφράζει η κλίση στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Διατυπώνοντας την αρχική ερώτηση (τι εκφράζει η κλίση) με διαφορετικό τρόπο βοηθάει τα παιδιά να ξεκαθαρίσουν την έννοια.

	συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε? **Πηνελόπη:** Εμείς βρήκαμε 3,33. Άρα…(μια μικρή παύση) Αν η ηλικία αυξηθεί κατά μία μονάδα το ύψος αυξάνεται κατά 3,33 cm **Καθηγήτρια:** Πολύ ωραία. Ερωτήσεις? Εντάξει ας ολοκληρώσουμε εδώ. Ευχαριστώ πολύ για την υπομονή σας στη ζέστη. Αφήστε τα ερωτηματολόγια και μπορείτε να φύγετε	

3.3 Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των διαλόγων των μαθητών προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα.

Ερώτηση 1:

Οι μαθητές έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον τρόπο επιλογής του δείγματος. Έθεσαν πολλές ερωτήσεις και περιορισμούς αντιλαμβανόμενοι την μεταβλητότητα των δεδομένων τους. Επίσης η μία ομάδα (ομάδα 1) αποφάσισε να αφαιρέσει τις πιθανές ακραίες τιμές που θα παρουσιαστούν. Οι περιορισμοί που έθεσαν ήταν:

'Να πάρουμε άτομα από διαφορετικές ηλικίες. Από Γ΄ Δημοτικού μέχρι Α΄Λυκείου….'

'Να είναι κορίτσια….'

'Να είναι από την ίδια περιοχή, γιατί το κλίμα επηρεάζει την ανάπτυξη….'

'Να μην υπάρχουν ακραίες τιμές….'

Ερώτηση 2:

Η ερώτηση 2 είχε στόχο να βοηθήσει τα παιδιά να σκεφτούν τις πιθανές ακραίες τιμές που μπορούν να βρουν στο δείγμα τους. Η μία από τις ομάδες (ομάδα 1) είχε ήδη σκεφτεί τις ακραίες τιμές πριν διαβάσει την ερώτηση. Οι υπόλοιπες ομάδες συνειδητοποιούν μέσα από την ερώτηση ότι μπορούν να υπάρξουν ακραίες τιμές και αποφασίζουν ότι πρέπει να τις αφαιρέσουν από το δείγμα τους

Ερώτηση 3:

Οι μαθητές καταλήγουν εύκολα (όπως περιμέναμε) ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ ύψους και ηλικίας. Σχεδόν όλες οι ομάδες απάντησαν ότι η ηλικία και το ύψος είναι ανάλογα. Μέσα από τις ερωτήσεις της καθηγήτριας φάνηκε ότι τα παιδιά με τη λέξη 'ανάλογα' εννοούν τη

θετική σχέση των 2 μεταβλητών. Αξιοσημείωτο είναι ότι όλες οι ομάδες έβαλαν περιορισμό στη σχέση ύψους-ηλικίας μέχρι τα 18. Μία μαθήτρια (Πηνελόπη, διάλογος 19:04-27:00) είπε χαρακτηριστικά: '…ότι είναι ανάλογα μέχρι ένα σημείο και μετά μένει το ίδιο…' (δείχνει με το χέρι της μια ευθεία που αυξάνει και μετά γίνεται σταθερή).

Ερώτηση 4:

Η ερώτηση 4 όπως και η ερώτηση 2 είχαν βοηθητικό ρόλο ως προς την ερώτηση 1. Στόχος δηλαδή ήταν να βρουν τα παιδιά κάποιους περιορισμούς που πιθανόν να μην είχαν σκεφτεί. Όλες οι ομάδες όμως είχαν σκεφτεί και είχαν πάρει ως περιορισμό τον τόπο συλλογής των δεδομένων. Δηλαδή είχαν σκεφτεί από την αρχή ότι παιδιά από διαφορετικούς τόπους θα είχαν διαφορετική ανάπτυξη είτε λόγο του κλίματος, είτε λόγω των γονιδίων όπως ανέφεραν. Έτσι η ερώτηση 4 τους φάνηκε προφανής.

Ερώτηση 5:

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν το διαδίκτυο για να συλλέξουν τα δεδομένα με ιδιαίτερη ευκολία. Όλες οι ομάδες αποφασίζουν (ύστερα από συζήτηση) ότι η ανεξάρτητη είναι η ηλικία και η εξαρτημένη το ύψος. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ενώ κάποια παιδιά μέσα στις ομάδες μπέρδεψαν την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη, με τη βοήθεια των συμμαθητών τους εύκολα αντιλήφθηκαν το σωστό. Για παράδειγμα στην ομάδα 2 (27:00-30:01):

'Αφροδίτη:..άλλωστε αν το ύψος είναι ανεξάρτητη σημαίνει… σκέψου τι είπε η κυρία στην αρχή. Οι τιμές της ανεξάρτητης επηρεάζουν την εξαρτημένη.

Μαριλένα: Σωστά, κατάλαβα. Οι αλλαγές στο ύψος δεν επηρεάζουν την ηλικία… σωστά… άρα ανεξάρτητη η ηλικία και εξαρτημένη το ύψος.'

Ερώτηση 6:

Κατά την κατασκευή του διαγράμματος διασποράς παρουσιάσθηκε το θέμα της κλίμακας που θα χρησιμοποιήσουν σε κάθε άξονα για να χωρέσουν όλα τα δεδομένα τους. Το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε εύκολα από όλες τις ομάδες. Αξιοσημείωτη είναι η σκέψη της ομάδας 3 (χρόνος 30:01-40:05) για το πώς θα τοποθετήσουν γρήγορα τα σημεία στους άξονες. Μία μαθήτρια της ομάδας σκέφτηκε να βρουν το μέσο ύψος από κάθε ηλικία και να τοποθετήσουν στον άξονα μόνο αυτό και όχι όλες τις τιμές. Δηλαδή αν για παράδειγμα είχαν τρία παιδιά στο δείγμα τους ηλικίας 10 ετών με ύψος 1.55, 1.56, 1.57 να έβαζαν στο διάγραμμα το σημείο (10, (1.55 + 1.56 + 1.57)/3). Τελικά όμως αποφάσισαν να μην το κάνουν γιατί τότε δεν θα ήταν διάγραμμα διασποράς.

Ερώτηση 7:

Στόχος της ερώτησης αυτής είναι να αναζητήσουν πρότυπα μεταξύ της σχέσης των δύο μεταβλητών και να περιγράψουν τα πρότυπα αυτά. Όλες οι ομάδες αναγνωρίζουν ότι υπάρχει κάποιο πρότυπο μεταξύ της ηλικίας και του ύψους και συγκεκριμένα μια θετική σχέση. Για παράδειγμα στην ομάδα 2 (χρόνος 40:06-48:49): ‘ Αφροδίτη:….θεωρώ ότι αν αφαιρέσουμε κάποιες ακραίες τιμές που μας χαλάνε υπάρχει σχέση.

Μαριλένα: Θετική ή αρνητική? Θετική, εντάξει φαίνεται.’

Οι περισσότερες ομάδες δυσκολεύονται να αποφανθούν για τη γραμμικότητα ή μη της σχέσης. Μετά από συζήτηση με την καθηγήτρια αντιλαμβάνονται τη γραμμικότητα (σελ.100, ανάλυση διαλόγου 2). Ένας μαθητής λέει χαρακτηριστικά ‘..αν είναι πολύ ανακατεμένα (τα σημεία), τότε δεν έχουμε γραμμικότητα’ προσπαθώντας έτσι να θέσει ένα κριτήριο.

Ερώτηση 8:

Η αναζήτηση της ευθείας παλινδρόμησης δημιούργησε πολύ συζήτηση μέσα στις ομάδες. Μετά από πολλές δοκιμές και με τη βοήθεια της καθηγήτριας, αποφάσισαν ότι η καλύτερη ευθεία είναι αυτή που αφήνει τόσα σημεία από τη μία πλευρά όσα (σχεδόν) και από την άλλη. Κάποιες εκφράσεις που χρησιμοποίησαν τα παιδιά ήταν:

'Να περνάει κοντά από τα περισσότερα σημεία…'

'Να βρίσκεται στο μέσο των πολλών…'

Να σημειώσουμε εδώ ότι στη συγκεκριμένη ερώτηση τα παιδιά επικαλούνται τον Η/Υ λέγοντας ότι ο Η/Υ θα μπορούσε να φτιάξει την ευθεία καλύτερα από αυτούς.

Ερώτηση 9:

Η εύρεση της εξίσωσης της ευθείας έγινε χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία από όλες τις ομάδες. Οι τρεις ομάδες χρησιμοποίησαν δύο σημεία, έφτιαξαν ένα σύστημα 2*2 και βρήκαν τα α,β της ευθείας y=αx+β. Μία ομάδα βρήκε το β εντοπίζοντας το σημείο όπου η ευθεία κόβει τον y'y και το α (αφού αναγνώρισαν ότι είναι η κλίση) χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη γωνίας (απέναντι κάθετη προς προσκείμενη κάθετη) ορθογωνίου τριγώνου. Να σημειώσουμε εδώ ότι στην ομάδα 1 ενώ αρχικά σκέφτηκαν να υπολογίσουν το β βάζοντας όπου x = 0, μια μαθήτρια έδωσε έμφαση στο πλαίσιο αναφοράς του προβλήματος και λέει χαρακτηριστικά (χρόνος 48:50-53:43): ' Πηνελόπη: Δεν έχει νόημα να βάλουμε όπου x = 0, δεν υπάρχει ηλικία μηδέν'.

Επίσης, ενώ οι μαθητές βρίσκουν εύκολα την εξίσωση της ευθείας (αφού είναι εξοικειωμένοι από προηγούμενες τάξεις σε τέτοιου είδους αλγεβρικούς χειρισμούς) δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν την κλίση της με βάση το πρόβλημα που έχουν. Καμία ομάδα και κανένας μαθητής δεν ερμηνεύει την κλίση. Η ερμηνεία δίνεται μόνο μετά από συζήτηση της καθηγήτριας με όλη την τάξη (σελ.104, ανάλυση διαλόγου3)

Ερώτηση 10:

Στην ερώτηση 10 τρεις ομάδες χρησιμοποιούν την εξίσωση της ευθείας που βρήκαν για να προβλέψουν το ύψος της Melissa στην ηλικία των 15 χρόνων, βάζοντας όπου x =15. Μία ομάδα (ομάδα 1, χρόνος 53:44-55:25) χρησιμοποιεί το διάγραμμα διασποράς και την ευθεία παλινδρόμησης (στο σχήμα) για να βρει το ύψος. Όλες οι ομάδες απαντούν ότι δεν μπορούμε να προβλέψουμε το ύψος της Melissa όταν γίνει 20 αφού το δείγμα μας είναι μέχρι 15 (θεωρώντας ότι η Melisa θα ψηλώσει και μετά τα 15)

Ερωτήσεις 11 και 12:

Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις 11 και 12 δείχνουν να έχουν κατανοήσει πλήρως τη μεταβλητότητα των δεδομένων τους. Οι ομάδες αποδίδουν τις διαφορετικές ευθείες που βρήκαν: α) Στο διαφορετικό δείγμα που πήρε κάθε ομάδα

β) Στην προσεγγιστικά χαραγμένη ευθεία παλινδρόμησης (με το χέρι).

Ο παρακάτω διάλογος είναι χαρακτηριστικός (χρόνος 48:50-53:43):

‘ Καθηγήτρια: Κάθε μία ομάδα βρήκε και διαφορετική εξίσωση, γιατί?

Πηνελόπη: Λογικό αφού η ευθεία μας έγινε με το χέρι. Αν την έφτιαχνε ο Η/Υ θα είχαμε όλοι την ίδια εξίσωση.

Γιώργος: Και πάλι δεν θα είχαμε την ίδια εξίσωση….

Καθηγήτρια: Γιατί Γιώργο?

Γιώργος: Γιατί κάθε ομάδα πήρε διαφορετικό δείγμα ‘

<u>Συνοψίζοντας τα συμπεράσματά μας:</u>

- Οι ομάδες χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία:
    - ✓ Έβαλαν περιορισμούς στην επιλογή του δείγματος
    - ✓ Κατασκεύασαν το διάγραμμα διασποράς
    - ✓ Ξεχώρισαν την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή

- ✓ Προσάρμοσαν εμπειρικά μία ευθεία παλινδρόμησης στα δεδομένα τους
- ✓ Αναγνώρισαν τη θετική σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους και υπολόγισαν τη μαθηματική εξίσωση της σχέσης αυτής.

- Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν
  - ✓ Να αναγνωρίσουν τη γραμμικότητα στο διάγραμμα διασποράς
  - ✓ Να ερμηνεύσουν την κλίση της ευθείας παλινδρόμησης με βάση το συγκεκριμένο πρόβλημα που είχαν
- Οι μαθητές (σχεδόν όλοι) έδειξαν αμείωτο ενδιαφέρον από την αρχή έως το τέλος του μαθήματος παρά το γεγονός ότι το μάθημα κράτησε δύο διδακτικές ώρες και παρά το γεγονός ότι γνώριζαν πως το μάθημα είναι εκτός διδακτέας και εξεταστέας ύλης στη Γ΄Λυκείου
- Το ενδιαφέρον των παιδιών πιστεύουμε ότι οφείλεται:
  - ✓ Στο ρεαλιστικό πρόβλημα που διατυπώθηκε στην αρχή
  - ✓ Στα πραγματικά δεδομένα του προβλήματος
  - ✓ Στο ομαδοσυνεργατικό μοντέλο διδασκαλίας που χρησιμοποιήθηκε. Η συζήτηση με τους συμμαθητές τους και η ενεργή και ουσιαστική συμμετοχή τους στην εξέλιξη του μαθήματος βοήθησε να μην βαρεθούν, κάτι που πιθανόν να συνέβαινε αν ο καθηγητής έκανε απλά μία δίωρη διάλεξη στον πίνακα.
  - ✓ Στο πέρας του μαθήματος τα ίδια τα παιδιά εξέφρασαν την άποψη ότι τελικά η Στατιστική είναι εύκολη και ενδιαφέρουσα καθώς και την επιθυμία τους να ξαναδουλέψουν σε ομάδες. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι μία βασική έννοια της Στατιστικής όπως η έννοια της γραμμικής παλινδρόμησης ‘πέρασε’ εύκολα στα παιδιά με τη βοήθεια του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου διδασκαλίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΟΜΑΓΝΗΤΟΦΩΝΗΣΗ (Συνολικός χρόνος 53:00)

- **00:00– 07:02** (*Εισαγωγή* στην απλή γραμμική παλινδρόμηση-Συζήτηση με όλη την τάξη)

Καθηγήτρια:

Στα διάφορα προβλήματα που εξετάσαμε έως τώρα στη Στατιστική ασχοληθήκαμε κάθε φορά με μία μόνο μεταβλητή, π.χ. με το βάρος, με το ύψος, με την επίδοση μαθητών κτλ. Για καθεμιά μεμονωμένη μεταβλητή αρκεστήκαμε, στον υπολογισμό διάφορων μέτρων όπως μέση τιμή, διακύμανση κτλ. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις εξίσου ενδιαφέρουσα είναι και η ταυτόχρονη μελέτη δύο ή περισσότερων μεταβλητών, για να προσδιορίσουμε με ποιο τρόπο οι μεταβλητές αυτές σχετίζονται μεταξύ τους. Για παράδειγμα:
Η ηλικία και το βάρος ενός παιδιού έχουν κάποια θετική εξάρτηση - συσχέτιση μεταξύ τους με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο είναι το παιδί τόσο μεγαλύτερο βάρος θα έχει. Ένα άλλο παράδειγμα, η διάρκεια ζωής των ζώντων οργανισμών σε μια περιοχή και το ποσοστό μόλυνσης της περιοχής έχουν αρνητική εξάρτηση μεταξύ τους, με την έννοια ότι όσο πιο μεγάλο είναι το ποσοστό μόλυνσης της περιοχής τόσο μικρότερη είναι η διάρκεια ζωής των οργανισμών που ζουν στην περιοχή.

Έτσι λοιπόν είναι ενδιαφέρον να εξεταστούν οι επιδράσεις που κάποιες μεταβλητές ασκούν σε κάποιες άλλες μεταβλητές. Η ύπαρξη τώρα μιας συναρτησιακής σχέσης εξίσωσης μεταξύ των μεταβλητών μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύτιμη για την πρόβλεψη των τιμών μιας μεταβλητής από τις γνώσεις που διαθέτουμε για τις άλλες μεταβλητές. Γενικά είμαστε ευτυχισμένοι όταν μία σχέση μπορούμε να την περιγράψουμε Μαθηματικά. Το πρώτο βήμα δηλαδή είναι να

κατασκευάσουμε μια μαθηματική εξίσωση, ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει τη φύση της σχέσης των δύο μεταβλητών. Ο κλάδος της Στατιστικής που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών με απώτερο σκοπό την πρόβλεψη μιας από αυτές μέσω των άλλων χαρακτηρίζεται ως ανάλυση παλινδρόμησης.

Η απλούστερη περίπτωση παλινδρόμησης είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση κατά την οποία υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή *X*, και η εξαρτημένη μεταβλητή *Y*, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από μία γραμμική εξίσωση του Χ. Γραμμική δηλαδή υπάρχει μία σχέση της μορφής y=αx+β (γράφει στον πίνακα) που περιγράφει τη σχέση τους. Επομένως σκεφτείτε ότι αν φτιάχναμε ένα διάγραμμα διασποράς και τοποθετούσαμε τις τιμές των Χ και Υ επάνω, θα είχαμε μία ευθεία. Μία τέλεια ευθεία? Στην πράξη τα πράγματα δεν είναι τόσο ιδεώδη. Σχεδόν απίθανο να υπάρχει τέλεια γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών.

Μαριλένα: Τι κάνουμε κυρία σε αυτή την περίπτωση? Πως θα περιγράψουμε τη σχέση?

Καθηγήτρια: Η λογική είναι: Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο που να προσεγγίζει αρκετά καλά τη σχέση που θέλουμε να μελετήσουμε. Για αρχή μας αρκεί αυτό. Μετά προσθέτουμε στη σχέση μας κάποιες ποσότητες που αντιστοιχούν στα λάθη, στις αποκλίσεις του μοντέλου μας από τις πραγματικές τιμές. Αλλά ας ξεκινήσουμε με μία καλή προσέγγιση και σιγά σιγά προχωράμε. Εντάξει?

Θέλω να ξεκαθαρίσουμε όμως την έννοια ενεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.

Ανεξάρτητη είναι εκείνη που μπορούμε να ελέγξουμε, να καθορίσουμε τις τιμές της π.χ. το λίπασμα που θα ρίξουμε σε μια καλλιέργεια, ενώ εξαρτημένη είναι εκείνη στην οποία αντανακλάται το αποτέλεσμα

των μεταβολών της ανεξάρτητης μεταβλητής π.χ. η απόδοση μιας καλλιέργειας

Στις πειραματικές μελέτες (θυμάστε είχαμε μιλήσει στο προηγούμενο μάθημα για πειραματικές και μη πειραματικές μελέτες) είναι εύκολη η διάκριση εξαρτημένης από ανεξάρτητη στις μη πειραματικές όχι πάντα. Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα δείγμα 10 μαθητών στους οποίους μετράμε το βάρος και το ύψος τους. Η διάκριση εδώ μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής είναι δύσκολη. Αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το "τι συμβαίνει με το βάρος των παιδιών όταν αλλάζει το ύψος τους", τότε θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή Χ το ύψος και ως εξαρτημένη μεταβλητή Υ το βάρος. Οπότε, ενδιαφερόμαστε για την παλινδρόμηση του βάρους (Υ) πάνω στο ύψος (Χ). Αντίθετα, αν μας ενδιαφέρει το "τι συμβαίνει με το ύψος των παιδιών όταν αλλάζει το βάρος τους", τότε θεωρούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή Χ το βάρος και ως εξαρτημένη μεταβλητή Υ το ύψος. Τότε έχουμε παλινδρόμηση του ύψους (Υ) πάνω στο βάρος (Χ). Έχουμε κάποια ερώτηση έως εδώ? Ωραία, ας δούμε λίγο το φύλλο εργασίας

Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθείτε αφορά μία μαθήτρια τρίτης δημοτικού σε σχολείο των Η.Π.Α. Η μαθήτρια θέλει να προβλέψει το ύψος της όταν φτάσει στην Α' Λυκείου. Αφού απαντήσετε τις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις επιλέξτε ένα δείγμα 24 ατόμων από τη σελίδα του Cencus at School.

- **07:03-14:02** (Συζήτηση μεταξύ των ομάδων για να απαντήσουν τα ερωτήματα 1-4 για τον τρόπο συλλογής του δείγματος. Παρακάτω συζητάνε την ερώτηση 1, σχετικά με τους περιορισμούς του δείγματος)

ΟΜΑΔΑ 1 (Αθηνά – Πηνελόπη – Ανθούλα)

Αθηνά:Από διαφορετικές ηλικίες….Άτομα από διαφορετικές ηλικίες έτσι ώστε….Για να βρούμε την α' Λυκείου. Ωραία, άρα να πάρουμε από διαφορετικές ηλικίες…

Πηνελόπη: (την διακόπτει) Γιατί να μην πάρουμε από την Α΄ Δημοτικού και από την Α΄ Λυκείου μόνο

Αθηνά:Από όλες τις τάξεις

Πηνελόπη: Ναι από όλες

Ανθούλα: Όχι από όλες μόνο από την Α Λυκείου

Πηνελόπη: Πρέπει όμως να πάρουμε 24 άτομα (απαντάει στην Αθηνά)

Αθηνά: Από Γ Δημοτικού μέχρι Α Λυκείου είναι 7 χρόνια

Πηνελόπη: Ωραία να πάρουμε τέσσερα άτομα από κάθε ηλικία

Αθηνά: Εντάξει τέσσερα από κάθε ηλικία

Πηνελόπη: Ναι, 4 κορίτσια από κάθε ηλικία

Αθηνά: Τι, κορίτσια μόνο?

Πηνελόπη: Ναι, μόνο κορίτσια αφού κορίτσι είναι

Αθηνά: Εντάξει…σωστά, συμφωνώ

Ανθούλα: Τι περιορισμούς πρέπει να πάρουμε όμως? (ξαναδιαβάζει την ερώτηση)

Πηνελόπη: Αυτά! Αυτά που είπαμε. Να είναι κορίτσια…και βασικά…μήπως να έχουν και το ίδιο ύψος

Ανθούλα: Δεν παίζει ρόλο αυτό. Θα βγει ο μέσος όρος περίπου των παιδιών

Πην.+Αθην.: Ναι όντως, σωστά

Πηνελόπη: Μήπως να τα γράψουμε?(Αρχίζει να γράφει..' Περιορισμοί:Παιδιά από τις τάξεις από την Γ Δημοτικού μέχρι την Α Λυκείου. Να είναι κορίτσια). Τι άλλο?

Αθηνά: Αυτό που λέγαμε (εννοεί στο προηγούμενο μάθημα), να μην υπάρχουν ακραίες τιμές…

Πηνελόπη: Ναι, δηλαδή τα 4 κορίτσια που θα πάρουμε από την Γ Δημοτικού να έχουν παρόμοιο ύψος με τη Μελίσα

Αθηνά: Το κλίμα? Μήπως επηρεάζει και το κλίμα?

Αθηνά: Ναι επηρεάζει την ανάπτυξη. Άρα να πάρουμε παιδιά από την ίδια περιοχή. Τι άλλο?

Ανθούλα: Τα γονίδια?

Πηνελόπη: Τα γονίδια, τι? Πως θα βρούμε πληροφορίες για τα γονίδια? (γέλια…)

Αθηνά: Εντάξει πάμε στην επόμενη

14:03-16:28 (Συζητάνε την ερώτηση 2, για το ελάχιστο και μέγιστο ύψος που πρέπει να πάρουν)

ΟΜΑΔΑ 1

Αθηνά: Πόσο μπορεί να είναι ένα παιδί του Δημοτικού?

Ανθούλα: Από 1 μέτρο – 1.50 μ.

Αθηνά: 1 μ.? Τόσο λίγο? Πόσο ήμασταν εμείς στην Γ Δημοτικού?

Πηνελόπη: Εντάξει άλλο εμείς, κάποιος μπορεί να μην έχει ψηλώσει στην Γ Δημοτικού

Αθηνά: Ναι αλλά έχουμε ήδη αφαιρέσει τις ακραίες τιμές

Πηνελόπη: Αααα! Άρα να πάρουμε το μέσο όρο. Να βάλουμε 1,4 περίπου

Αθηνά: Εντάξει το γράφω 1,4. Το μέγιστο ύψος?

Πηνελόπη: Εεεε, 2 μέτρα?

Αθηνά: Ναι 2 μέτρα είναι καλά

16:29-19:03 (Συζητάνε την ερώτηση 3 αν υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους και αν ναι πως θα μπορούσε να είναι)

ΟΜΑΔΑ 1

Αθηνά:(Διαβάζει την ερώτηση) Πιστεύετε ότι υπάρχει σχέση ηλικία και ύψους?

Πηνελόπη: Υπάρχει, σίγουρα υπάρχει. Αλλά ανάλογα….

Βασικά όσο μεγαλώνεις θα ψηλώνεις. Αλλά όχι πάντα. Μέχρι ένα σημείο.

Αθηνά: Όταν θα είσαι 80 δεν θα ψηλώνεις

Πηνελόπη: Ναι αλλά εδώ ρωτάει γενικά ή μόνο για την Α Λυκείου?

Αθηνά: Όχι, εδώ ρωτάει γενικά…εεεε….ή μόνο για τα συγκεκριμένα παιδιά?

Ανθούλα: Γενικά πρέπει να μιλάει. Μπορεί να είναι Γ Δημοτικού 1 μ. ή Γ Δημοτικού 1,5 μ.

Πηνελόπη: Δεν έχει σημασία αυτό. (παύση..) Βασικά εγώ πιστεύω ότι η σχέση είναι μία γραμμή

Αθηνά: Όσο μεγαλώνεις από κάποια ηλικία και μετά…Για παράδειγμα μέχρι τα 20 θα ψηλώνεις…Τέλος πάντων, υπάρχει σχέση

Καθηγήτρια: (Παρεμβαίνει και διακόπτει τη συζήτηση) Τι κάνουν τα κορίτσια εδώ? Για να δω τις απαντήσεις σας? Ωραία, για να τα μαζέψουμε λίγο τις απαντήσεις σας (απευθύνεται σε όλη την τάξη)

19:04-27:00 (Η καθηγήτρια αφού βλέπει ότι οι ομάδες έχουν κάνει τα ερωτήματα 1-3 συζητάει τα αποτελέσματά τους με όλη την τάξη και στο τέλος τους ρωτάει και για το ερώτημα 4)

ΟΜΑΔΑ 2 (Αφροδίτη – Μαριλένα - Νίκος)

Καθηγήτρια: Από ότι είδα από τις απαντήσεις σας συμφωνούμε να είναι κορίτσια καταρχήν γιατί ο τρόπος ανάπτυξης των αγοριών και των κοριτσιών διαφέρει. Το δείγμα μας να είναι από διάφορα σχολεία…

Νίκος: (Διακόπτει την καθηγήτρια) Αλλά από την ίδια περιοχή

Καθηγήτρια: Όταν λες ίδια περιοχή?

Μαριλένα: Να είναι από την ίδια περιοχή κυρία γιατί επηρεάζει το κλίμα

Καθηγήτρια: Πιστεύετε ότι υπάρχει τόση μεγάλη διαφορά στο κλίμα μεταξύ των περιοχών της Αμερικής ώστε να επηρεάζει την ανάπτυξη?

Αφροδίτη: Ναι κυρία. Σκεφτείτε ένα παιδί που μεγαλώνει στην Καλαμάτα και ένα που μεγαλώνει στη Θεσσαλονική.

Καθηγήτρια: Πιστεύεις ότι υπάρχει τόση μεγάλη διαφορά στο κλίμα?

Μαριλένα: Ναι αλλά σκεφτείτε ότι η Ελλάδα είναι μία πολιτεία των Η.Π.Α

Καθηγήτρια: Εντάξει θα μπορούσαμε να βάλουμε και έναν τέτοιο περιορισμό λοιπόν. Παρατηρήστε όμως ότι δεν σας λέω από ποια πολιτεία είναι η Μελίσα. Άρα εδώ δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε. Ας συνοψίσουμε τους περιορισμούς: Θέλουμε κορίτσια. Από Γ Δημοτικού μέχρι Α Λυκείου από διάφορες περιοχές των Η.Π.Α. Ωραία, το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος?

Πηνελόπη: Από 1 μ. – 2 μ.

Μαριλένα: 1 μ.? Από 1,4 μ – 2 μ. έχουμε βάλει εμείς

Καθηγήτρια: Σίγουρα μπορούμε να βρούμε και ακραίες τιμές όπως το 1 μ. Αν αφαιρέσουμε όμως τις ακραίες τιμές όπως είχαμε πει στο προηγούμενο μάθημα?

Πηνελόπη: Τότε από 1,5 – 1,8.

Αφροδίτη: Να ρωτήσω? Μιλάμε για το μέγιστο και ελάχιστο ύψος στην Α Λυκείου ή στην εξέλιξη?

Καθηγήτρια: Στην εξέλιξη. Με ενδιαφέρει να δω πως εξελίσσεται η σχέση ύψους – ηλικία από την Γ Δημοτικού μέχρι την Α Λυκείου

Αφροδίτη: Εμείς που βάλαμε 1,40?

Καθηγήτρια: Δεν πειράζει, κρατήστε το. Δεν μας πειράζει μια απόκλιση 10 cm

Καθηγήτρια: Στην ερώτηση 3 τώρα. Πιστεύετε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ ηλικίας και ύψους?

Μαριλένα: Ναι υπάρχει. Όσο μεγαλώνεις, τόσο μεγαλύτερο το ύψος. Υπάρχει θετική σχέση

Πηνελόπη: Ότι είναι ανάλογα μέχρι ένα σημείο, μέχρι μια ηλικία και μετά μένει το ίδιο. (Δείχνει με το χέρι της, μία ευθεία που αυξάνει και μετά γίνεται σταθερή)

Καθηγήτρια: Προφανώς από ένα σημείο και μετά παραμένει η ίδια

Αφροδίτη: Ναι κυρία, αλλά δεν μας πειράζει. Μέχρι την Α' Λυκείου τουλάχιστον υπάρχει ανάπτυξη.

Καθηγήτρια: Ωραία, μέχρι την Α Λυκείου υπάρχει μία θετική σχέση και μετά σταθεροποιείται. Για πάμε να απαντήσουμε μαζί τώρα το ερώτημα 4. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία που πήραμε από σχολεία της Κίνας για να κάνουμε πρόβλεψη για παιδιά στην Ρωσία?

Μαριλένα: Σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία από σχολεία της Κίνας για να προβλέψουμε το ύψος των παιδιών στη Ρωσία

Αφροδίτη: Αφού το είπαμε πριν. Το κλίμα επηρεάζει την ανάπτυξη. Στην Κίνα είναι πολύ κοντοί.

Καθηγήτρια: Ωραία, σωστά. Πάμε παρακάτω στη σελίδα 2. Χρησιμοποιήστε το internet και επιλέξτε το δείγμα σας και συζητείστε μεταξύ σας πως θα συνεχίσετε

27:00-30:01 (Τα παιδιά χρησιμοποιούν το internet στο laptop που έχει κάθε ομάδα μπροστά της και επιλέγουν τα 24 άτομα που χρειάζονται για

το δείγμα τους. Η διαδικασία είναι πολύ απλή, μπαίνουν στη σελίδα του cencus at school επιλέγουν αριθμό δείγματος 24, και στους περιορισμούς βάζουν κορίτσια και ηλικία από 9-16. Αφού καταγράψουν τα αποτελέσματά τους αποφασίζουν για το ποια μεταβλητή είναι ανεξάρτητη)

ΟΜΑΔΑ 2

Αφροδίτη: Η ηλικία δεν είναι ανεξάρτητη και το ύψος η εξαρτημένη? Αφού η ηλικία εξαρτάται από το ύψος…

Μαριλένα: Ναι αλλά ξέρεις κάτι μπορεί κάποιος να είναι πολύ ψηλός για να πηγαίνει στην 6η ή να είναι πολύ κοντός και να πηγαίνει Α Λυκείου

Αφροδίτη: Ε, και? Δεν είπαμε πριν να μην πάρουμε τις ακραίες τιμές? ε? Άλλωστε αν το ύψος είναι η ανεξάρτητη σημαίνει…σκέψου τι είπε η κυρία στην αρχή…Οι τιμές της ανεξάρτητης επηρεάζουν την εξαρτημένη

Νίκος: Δηλαδή το x είναι η ηλικία και το y το ύψος?

Μαριλένα: Σωστά, κατάλαβα. Οι αλλαγές στο ύψος δεν επηρεάζουν την ηλικία… σωστά….Άρα ανεξάρτητη ηλικία και εξαρτημένη ύψος. (φωνάζει την καθηγήτρια)

Καθηγήτρια: Για πείτε μου ποιο είναι το πρόβλημα

Αφροδίτη: Κυρία βάλαμε την ηλικία να είναι ανεξάρτητη αφού η αλλαγή της επηρεάζει τις τιμές του ύψους.

Καθηγήτρια: Πολύ ωραία. (απευθύνεται σε όλη την τάξη). Παιδιά καταλήξατε από ότι είδα ότι ανεξάρτητη είναι η ηλικία και εξαρτημένη το ύψος. Συνεχίστε στη σελ.3

ΟΜΑΔΑ 3 (Έλενα – Γιώργος – Σωτηρία)

30:01-40:05 (Τα παιδιά συνεχίζουν στην ερώτηση 6, φτιάχνουν το διάγραμμα διασποράς, χρησιμοποιώντας τα ζευγάρια τιμών που βρήκαν από τη συλλογή του δείγματος)

Έλενα: Που να βάλουμε το 9? (εννοεί στον άξονα των x). Μήπως να αριθμήσουμε λίγο καλύτερα τους άξονες για να χωρέσουν όλα τα δεδομένα μας?

Γιώργος: Ναι σωστά. Στα x ξεκινάει από 8 χρονών και στα y από 1.30 ή 1.40

Έλενα: Καλύτερα 1.30

Σωτηρία: Ναι, 1:30

Έλενα: Εγώ θα έλεγα να μην πάρουμε κάθε τιμή. Να πάρουμε για παράδειγμα όλες τις τιμές των 10 να τις διαιρέσουμε με το πλήθος τους και να βρούμε το μέσο όρο. Έτσι δεν θα καθίσουμε να βάλουμε και τις 24 τιμές στο διάγραμμα

Γιώργος: Δεν γίνεται αυτό, είναι διάγραμμα διασποράς και έχουμε πει ότι βάζουμε κάθε τιμή. Έτσι είπαμε στο προηγούμενο μάθημα. Δεν μπορούμε να βάλουμε το μέσο όρο

Σωτηρία: Αν βάλουμε το μέσο όρο θα το έχουμε κάνει στο περίπου

Έλενα: Εντάξει, θα τα βάλουμε όλα

(Κατά τη δημιουργία του διαγράμματος έχουν χωρίσει τους ρόλους. Οι δύο λένε τις τιμές και ο ένας της τοποθετεί επάνω στο διάγραμμα. Παράλληλα η καθηγήτρια χρησιμοποιεί το δικό της Η/Υ και τον προτζέκτορα για να περάσει τα δικά της δεδομένα στο στατιστικό πακέτο SPSS και να φτιάξει το διάγραμμα διασποράς. Το αρχικό πλάνο του

μαθήματος ήταν να περάσουν τα παιδιά τα δεδομένα τους στον Η/Υ αλλά η καθηγήτρια βλέποντας ότι έχει ήδη περάσει πολύς χρόνος και τα παιδιά κουράζονται αποφασίζει το κομμάτι αυτό να το κάνει η ίδια για αυτούς)

Καθηγήτρια: (απευθύνεται σε όλη την τάξη) Θα φτιάξω το δικό μου διάγραμμα διασποράς στον Η/Υ.

Μαριλένα: Το δικό σας θα βγει πιο σωστό….

Καθηγήτρια: όσοι συμπληρώσετε το διάγραμμα διασποράς πηγαίνετε στις επόμενες ερωτήσεις

40:06-48:49 (Τα παιδιά συζητάνε τις ερωτήσεις 7 και 8. Αν υπάρχει σχέση, τι είδους και προσπαθούν να φτιάξουν την ευθεία παλινδρόμησης)

ΟΜΑΔΑ 2

Αφροδίτη: Θεωρώ ότι αν αφαιρέσουμε κάποιες ακραίε τιμές που μας χαλάνε, υπάρχει σχέση

Νίκος: Συμφωνώ

Μαριλένα: Θετική ή αρνητική? Θετική εντάξει φαίνεται.

Αφροδίτη: Μα είναι και λογικό. Αυξάνει η ηλικία αυξάνει το ύψος.

Νίκος: Γραμμική ή μη Γραμμική?

Αφροδίτη: Μη γραμμική

Νίκος: Γιατί?

Αφροδίτη: (γέλια) έτσι το είπα…δεν ξέρω, δεν μπορώ να καταλάβω, να ρωτήσουμε την κυρία, ε? (φωνάζουν την καθηγήτρια)

Καθηγήτρια: Για πείτε μου

Μαριλένα: Δεν καταλαβαίνουμε πώς να βρούμε αν είναι γραμμική ή όχι.

Καθηγήτρια: Θυμάστε τι είπαμε στην αρχή? Γραμμικές είναι οι σχέσεις που μπορούν να προσεγγιστούν αρκετά καλά από μία ευθεία. Μπορείτε εδώ να φτιάξετε μία ευθεία που να το κάνει αυτό?

Νίκος: όχι

Μαριλένα: Μπορούμε…(δείχνει με το χέρι της πως είναι η ευθεία)

Καθηγήτρια: Πάρε το μολύβι σου και ζωγράφισέ τη. (Η Μαριλένα φτιάχνει την ευθεία) Νίκο κατάλαβες τώρα?

Νίκος: Μα κυρία δεν περνάει από όλα τα σημεία

Αφροδίτη: Μα προσεγγιστικά είπε η κυρία, δεν χρειάζεται να περνάει από όλα

Μαριλένα: Καλή είναι, περνάει αρκετά κοντά από τα περισσότερα σημεία.

Καθηγήτρια: Αυτό θέλουμε. Να περνάει αρκετά κοντά από τα περισσότερα σημεία. Νίκο κοίταξε εδώ.(Η καθηγήτρια φτιάχνει δύο διαγράμματα διασποράς με το μολύβι της πάνω στο φύλλο εργασίας. Στο ένα δεν υπάρχει γραμμική σχέση και στο άλλο υπάρχει) Μπορείς να μου πεις σε ποιο από τα δύο βλέπεις γραμμική σχέση?

Νίκος: Ναι, στο πρώτο

Καθηγήτρια: Γιατί όχι στο δεύτερο?

Νίκος: Είναι πολύ ανακατεμένα. Κατάλαβα…

Μαριλένα: Δηλαδή κυρία τι να απαντήσουμε στην 8?

Καθηγήτρια: Για να δούμε. Αν φτιάξω τώρα μία τέτοια ευθεία στο διάγραμμά σας (φτιάχνει μία ευθεία που να ξεκινάει από το 1,70 παράλληλη στον x΄x) είναι καλή ευθεία?

Αφροδίτη: Όχι δεν είναι σε καμία περίπτωση

Μαριλένα: Η δική μας είναι καλύτερη

Καθηγήτρια: Γιατί?

Αφροδίτη: Περνάει από όλα τα σημεία

Νίκος: Πως περνάει από όλα, είπαμε ότι δεν περνάει…

Αφροδίτη: Λάθος, περνάει κοντά ήθελα να πω. Περνάει κοντά από τα περισσότερα σημεία. Είναι στο μέσο. Ενώ η δικιά σας….Είναι στο μέσο των πολλών κυρία (δείχνει έντονα με το χέρι της)

Μαριλένα: Ναι αυτό, στο μέσο των πολλών

Καθηγήτρια: Ωραία, αυτό είναι ένα καλό επιχείρημα για να με πείσετε ότι η δική σας είναι καλύτερη. Ισοδύναμα με το μέσο των πολλών θα μπορούσαμε να πούμε ότι αφήνει αριστερά της τόσα σημεία όσο και δεξιά της. ε?

Μαριλένα: Ο Η/Υ όμως θα την φτιάξει ακριβώς (επιμένει για τον Η/Υ)

Καθηγήτρια: Εντάξει θα το κάνω στον Η.Υ να το δείτε. (Απευθύνεται σε όλη την τάξη). Λοιπόν παιδιά θα φτιάξω την ευθεία στο διάγραμμά χρησιμοποιώντας τον Η/Υ. (Φτιάχνει την ευθεία ενώ τα παιδιά παρακολουθούν)

Πηνελόπη: Ο Η/Υ την έφτιαξε ωραία

Ανθούλα: Η δική μας δεν μοιάζει με αυτή

Καθηγήτρια: Συζητήστε το λίγο μεταξύ σας γιατί δεν μοιάζει, είναι η ερωτήση 11

Αφροδίτη: Πως ακριβώς την φτιάχνει κυρία ο Η/Υ? Στην τύχη?

Καθηγήτρια: Όχι στην τύχη. Βασίζεται σε κάποιο πρόγραμμα. Το πρόγραμμα με τη σειρά του εκτελεί κάποιες πράξεις. Οι πράξεις προκύπτουν από κάποιες μαθηματικές σχέσεις. Οι μαθηματικές αυτές σχέσεις μας δίνουν την καλύτερη δυνατή ευθεία. Αυτό όμως είναι ένα άλλο μάθημα. Μπορούμε αν θέλετε να το συζητήσουμε σο τέλος. Ωραία ερώτηση όμως. Καλό είναι τα ψάχνετε αυτά. Ας προχωρήσουμε στο ερώτημα 9

48:50-53:43 (Τα παιδιά συζητάνε την ερώτηση 9 για την εύρεση της εξίσωσης της ευθείας)

ΟΜΑΔΑ 2:

Μαριλένα: Πως θα την βρούμε? (αναφέρεται στην εξίσωση της ευθείας)

Αφροδίτη: Να βρούμε τα α, β

Μαριλένα: Εγώ λέω το β να το βρούμε από εκεί που ξεκινάει για x = 0 και για το α να βρούμε την κλίση της, να βρούμε την εφαπτομένη

(φτιάχνουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και υπολογίζουν την εφαπτομένη ως απέναντι κάθετη προς προσκείμενη. Υπολογίζουν και γράφουν την εξίσωση y = 6.25x+1139)

(σε άλλη ομάδα προσπαθούν να βρουν την εξίσωση)

ΟΜΑΔΑ 1:

Αθηνά: Να βάλουμε όπου x=0

Πηνελόπη: Δεν έχει νόημα, δεν υπάρχει ηλικία 0.

Αθηνά: Σωστά να πάρουμε 2 άλλα σημεία της και να κάνουμε αντικατάσταση για να βρούμε την εξίσωση. Όπως κάνουμε συνήθως για να βρούμε μια ευθεία.

Πηνελόπη: Να λύσουμε το σύστημα

(Κάνουν πράξεις και βρίσκουν y=3.33x+112)

(Η καθηγήτρια έχει περάσει πάνω από όλες τις ομάδες και έχει ελέγξει τα αποτελέσματά τους, απευθύνεται σε όλους)

Καθηγήτρια: Κάθε μία ομάδα βρήκε και διαφορετική εξίσωση, γιατί?

Πηνελόπη: Λογικό αφού η ευθεία μας έγινε με το χέρι. Αν την έφτιαχνε ο Η/Υ θα είχαμε όλοι την ίδια εξίσωση.

Γιώργος: Και πάλι δεν θα είχαμε την ίδια εξίσωση….

Καθηγήτρια: Γιατί Γιώργο?

Γιώργος: Γιατί κάθε ομάδα πήρε διαφορετικό δείγμα

Καθηγήτρια: Πολύ ωραία. Άρα το διαφορετικό δείγμα και η χαραγμένη στο περίπου ευθεία μας έδωσαν τα διαφορετικά αποτελέσματα. Ουσιαστικά απαντήσαμε στις ερωτήσεις 11 και 12

Για δείτε τώρα την ερώτηση 10.

53:44-55:25 (συζητάνε την ερώτηση 10, για να προβλέψουν το ύψος της Melisa)

ΟΜΑΔΑ 1

Καθηγήτρια: Πως βρήκατε το 1,63?

Αθηνά: Εντοπίσαμε το 15 στον άξονα των x και φέραμε την κάθετη μέχρι εκεί που κόβει την ευθεία (δείχνει με το χέρι της). Μετά με κάθετη (δείχνει τον y'y) βρήκαμε ότι είναι 1,63

Καθηγήτρια: Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε και την εξίσωση της ευθείας?

Πηνελόπη: Ναι, σωστά …όπου x = 15

Αθηνά: Σωστά… Δεν το σκεφτήκαμε…

Καθηγήτρια: Θα ήταν ασφαλές να κάνουμε πρόβλεψη για όταν η Melisa γίνει 20 χρονών?

Αθηνά: Όχι, δεν πήραμε δείγματα για εκείνη την ηλικία. Τα δείγμα μας είναι μέχρι 16

Ανθούλα: Ναι, άρα δεν μπορούμε να προβλέψουμε

Καθηγήτρια: Ωραία (πηγαίνει σε άλλη ομάδα)

55:25-56:26

ΟΜΑΔΑ 4 (Ιωάννα – Μπάμπης – Μαρίνα)

Καθηγήτρια: Τελειώσατε το ερωτηματολόγιο?

Ιωάννα: Ναι

Καθηγήτρια: Δεν βλέπω να έχετε σχολιάσει κάτι για την κλίση. Τι εκφράζει η κλίση?

Ιωάννα: Δεν εκφράζει τίποτα … Εεεε, όχι εννοώ εκφράζει μεταβολή του ύψους με βάση την ηλικία

Μπάμπης: Μήπως θα είναι το πόσο αυξάνει κάθε φορά … εεε, δεν μπορώ να το ολοκληρώσω

Καθηγήτρια: Δεν πειράζει θα σας βοηθήσω εγώ. (Απευθύνεται σε όλη την τάξη) Βλέπω ότι έχετε τελειώσει, ας πούμε κάποια πράγματα στον πίνακα.

56:27-60:26 (Η καθηγήτρια εξηγεί την έννοια της κλίσης στον πίνακα)

Καθηγήτρια: Δίνω δύο τιμές στην εξίσωση $y=\alpha x+\beta$. Ας υποθέσουμε την τιμή x_1 και την τιμή $x_2=x_1+1$. Άρα θα έχω $y_1=\alpha x_1+\beta$ και $y_2=\alpha x_1+\alpha+\beta$. Τις αφαιρώ κατά μέλη, τι θα έχω?

Αφροδίτη: Θα βγει α

Καθηγήτρια: Μπορείτε να μου πείτε τώρα τι εκφράζει η κλίση? (Δεν απαντάει κανείς και η καθηγήτρια ξαναδιατυπώνει την ερώτηση) Πόσο διέφεραν οι τιμές του x που βρήκαμε?

Όλοι: Κατά ένα

Καθηγήτρια: Για αυτές τις τιμές του x πόσο διέφεραν οι τιμές του y?

Όλοι: άλφα

Καθηγήτρια: Άρα μεταβάλλοντας το x κατά μία μονάδα το y μεταβάλλεται (αυξάνεται ή μειώνεται) κατά α. Εντάξει? Τώρα μπορεί κάποιος να μου ερμηνεύσει την κλίση που βρήκε με βάση το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε?

Πηνελόπη: Εμείς βρήκαμε 3,33. Άρα…(μια μικρή παύση) Αν η ηλικία αυξηθεί κατά μία μονάδα το ύψος αυξάνεται κατά 3,33 cm

Καθηγήτρια: Πολύ ωραία. Ερωτήσεις? Εντάξει ας ολοκληρώσουμε εδώ. Ευχαριστώ πολύ για την υπομονή σας στη ζέστη. Αφήστε τα ερωτηματολόγια και μπορείτε να φύγετε

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αδαμόπουλος Λ., (1993). '*Η διδασκαλία της Στατιστικής και της θεωρίας Πιθανοτήτων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*', 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Καλαμάτα

Βαρουφάκης Ν., (1983). '*Μαθηματικά Ι Γ' Λυκείου*', ΟΕΔΒ

Γκίνης, Δ., 2003. '*Η Διδασκαλία της Στατιστικής με Κατευθυνόμενες Εργασίες*', Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

Δαμιανού, Χ., Κούτρας, Μ., (2000). '*Εισαγωγή στη Στατιστική*', Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

Δαμιανού, Χ., κ.ά (1999). '*Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής, Γ΄Γενικού Λυκείου*', ΟΕΔΒ. Αθήνα

Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών ΕΑΙΤΥ, (2007). '*Σύγχρονες θεωρήσεις για τη μάθηση*' Τεύχος 1 (Γενικό Μέρος), Τομέας Επιμόρφωσης και Κατάρτισης

Κλαουδάτος, Ν. (2010) Σημειώσεις Εαρινού Εξαμήνου*: «Εισαγωγή στην Θεωρία της Διδασκαλίας»*

Κλαουδάτος, Ν. (2010) Σημειώσεις Χειμερινού εξαμήνου*: « Συμπληρωματικές Σημειώσεις»*

Ντζιώρας, Η., 1976. '*Μαθηματικά Ε΄Γυμνασίου*' ΟΕΔΒ

Παπαιωάννου, Τ., (2007)' *Στατιστική και Κοινωνία'* Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο Πρακτικά 20ου Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής, σελ 529-533

Παπαμιχαήλ, Δ. κ.ά. (1978). 'Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου', ΟΕΔΒ

Χατζηπαντελής Θ. και Γκάσταρης, Π (1998): ' *Εννοιολογικές δυσκολίες και εσφαλμένες αντιλήψεις στις Πιθανότητες και στην Στατιστική'* Ευκλείδης Γ' 43 ΣΕΛ 35-68

Χατζηπαντελής Θ, Γκίνης Δ., Κυρίτσης Ι., '*Οι γνώσεις των μαθητών του Δημοτικού σε έννοιες της Στατιστικής και η διαφοροποίησή τους ύστερα από διδακτική προσέγγιση μέσω δραστηριοτήτων*' Πρακτικά 18ου Πανελλήνιου

Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας με θέμα Μαθηματικός Αναλφαβητισμός, Ρόδος 2001.

Χατζηπαντελής Θ, Βογιατζή Κ., (1998). '
Σβέρκος Ανδρέας, (2012). '*Η πρόταση Αναλυτικού Προγράμματος της ΕΜΕ Γυμνασίου-Λυκείου για τη Γεωμετρία και τη Στατιστική'*, Στρογγυλό Τραπέζι, 29ο Συνέδριο Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Καλαμάτα, 9-11 Νοεμβρίου

Artzt, A. and Newman, C. (1990), '*How to use Cooperative Learning in the Mathematics Class*', Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Barr G.V, 1980, '*Some students ideas on the median and mode*', Teaching Statistics, Vol.12, 38-41

Chadjipadelis, T., Meletiou, M., Paparistodemou, E., 2010. '*Statistics Teacher of a new Era: Another Specialized Mathematician or a Totally Different Person?'*, ICOTS8

Clarke, D,(2003). '*Practice, role and position: Whole class patterns of participation'*, paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, April 21-25.

Davidson, N.(ed.) (1990), '*Cooperative Learning in Mathematics: A Handbook for Teachers*', Menlo Park: Addison Wesley

Davies, N., Baernett, V., Marriott, J., 2010. '*One hundred years of progress-Teaching statistics 1910-2010: What have we learned? Part I: Its not Mathematics but real data in context'*, ICOTS8

Dietz, E.J. (1993), '*A Cooperative Learning Activity on Methods of Selecting a Sample*', The American Statistician, 47, 104-108

Even, R., & Schwarz, B., (2003), '*Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education'*, in Educational Studies in Mathematics, 54, p. 283-313.

Floden, R.E., (1988). '*Preparing teachers for uncertainty'*, in Teachers Record, Summer1988.

GAISE, 2005. '*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*', American Statistical Association

Garfield, J., (1981). '*An investigation of factors influencing student attainment of statistical competence (Doctoral disseration)*', University of Minnesota.

Garfield, J., (1993). '*Teaching Statistics Using Small-Group Cooperative Learning*', Journal of Statistics Education v.1, n.1

Garfield, J., & Gal, I. (1997). '*The Assessment Challenge in Statistics Education: Curricular Goals and Assessment Challenges in Statistics Education*', IOS Press, ISI

Gary Smith, (1998). '*Learning Staistics By Doing Statistics'*, Journal of Statistics Education v.6, n.3

Goodsell, A., Maher, M., and Tinto, V. (1992), '*Collaborative Learning: A sourcebook for Higher Education*', University Park, PA: National Center on Postsecondary Teaching, Learning and Assessment.

Green, D.R., (1983), '*A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years in R.Grey, P.Holmes, V.Barnett & G.M. Constable (Eds*): Procedings of the first International Conference on Teaching Statistics, Teaching Statistics Trust, Sheffield, U.K.

Hogg, R.V., (1991). '*Statistical Education: Improvements Are Badly Needed'*, The American Statistician, 45, 342-343

Holmes,P.,(2002). '*Some lessons to be learned from curriculum developments in statistics'*, ICOTS6

Holton, D, και Clarke, D, (2004). '*Scaffolding and metacognition'*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37Q2, 127-143.

Jacobsen, E., (1989).'*Why in the world should we teach statsistics?*', UNESCO, Teaching Statistics

Johnson, D., Johnson, R., and Smith, K. (1991), '*Cooperative Learning: Increasing College Faculty Instructional Produstivity*', ASHE-ERIC Education Report NO.4, Washington, DC: The George Washington University.
Jones, L. (1991), '*Using Cooperative Learning to Teach Statistics*', Research Report Number 91-2. The L.L Thurstone Psychometric Laboratory, University of North Carolin.

Lave, J. και Wenger, E. 1991. *Situated learning: legitimate peripheral participation*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Lori V., Renate G., (2010). '*Teaching statistics at high school: An alternative aproach*', ICOTS8

Makar, K., & Confrey, J. (2003). 'Chunks, Clumps, and Spread out: Secondary Preservice Teachers. Informal Notions of Variation and Distribution. In C. Lee (Ed.), *Reasoning about Variability: A Collection of current Research Studies.* Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

McKeachie, W., Pintrich, P., Yi-Guang, L., and Smith, D. (1986), '*Teaching and Learning in the College Classroom: A Review of the Research Literature*', Ann Arbor: Regents of the University of Michigan.

Moore, D. and Cobb, G. (1997). "Mathematics, Statistics, and Teaching," American Mathematical Monthly, 104, 801–823.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). '*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*', Reston, VA: Author

National Council of Teachers of Mathematics (1991). '*Professional Standards for Teaching Mathematics*', Reston, VA: Author

National Research Council (1989). '*Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Efucation',* Washington, DC: National Academy Press.

Neville Davies, Vic Barnett & John Marriott, (2010). '*One hundred years of progress-Teaching Statistics 1910-2010: What have we learned? Part I: It's not Mathematics but real data in context*', ICOTS8

Noddings, N., Gilbert-MacMillan, K.&Lutz, S. (1980), '*What does an individual gain in small group mathematical problem solving*?' Paper presented at the meeting of the American Educational Research Assosiation, Montreal.

Pollatsek, Lima, Well (1981), '*Concept or computation: Students understanding of the mean*', Educational Studies in Mathematics, 12, 191-204

Polya, G., (1957). '*How to Solve It?*', Princeton University Press

UNESCO**,** (1989). **'***Studies in mathematics education: The teaching of statistics'*, Volume 7

Reeve, R., & Reynolds, F., (2001), *'The role of gesture in co-constructing mathematical understanding'*, in Clarke (ed), p. 231-253.

Sfard, A., (2001), *'There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning'*, in Educational Studies in Mathematics, 46, p. 13-57.

Shaughnessy, J.M. (1977), '*Misconceptions of Probability: An Experiment With a Small-Group Activity-Based Model Building Approach to Introductory Probability at the College Level'*, Educational Studies in Mathematics, 8, 285-316

Snee, R.D. (1993), '*Whats Missing in Statistical Education?'*, The American Statistician,47, 149-154

Swift, J.(1983). The vitality of Statistics. In: M.Zweng et al. (eds), '*Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education*', Berkeley, Calif., 1980, pp. 198-200. Boston, Mass., Birkhauser

Tymoczko, T. (1986). '*New directions in the philoshophy of mathematics'*. Boston: Birkhauser

Vygotsky, L. S. (1978). '*Mind in society: The development of higher psychological processes'*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). '*The role of tutoring in problem solving'*. Journal of Child Psychology and Child Psychiatry, 17, 89−100.

Wood, D., & Middleton, D. (1975). A study of assisted problem-solving. *British Journal of Psychology*, 66(2), 181−191.

Zaslavsky, O., (2005). '*Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics'*, in Educational Studies in Mathematics, 60, p. 297-321.