ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

Ο χαρακτηρισμός των ρητών μέσω της τροχιάς του Kronecker. Μια διδακτική προσέγγιση.

Μαρσέλλος Πέτρος-Στυλιανός
Α.Μ. Δ200923

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Β. Φαρμάκη

Αθήνα 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Β. Φαρμάκη (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Καθηγήτρια	……
2) Γ. Ψυχάρης	Λέκτορας	……
3) Ν. Παπαναστασίου	Αναπληρωτής Καθηγητής	…….

Περίληψη

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ορίζουμε ως ακέραιο μέρος το μεγαλύτερο ακέραιο k ώστε $k \leq x$ και συμβολίζεται $[x]$. Ως δεκαδικό μέρος του x ορίζουμε τη διαφορά του αριθμού από το ακέραιο μέρος του και συμβολίζουμε με $(x) \in [0,1)$. Επομένως, για κάθε x ορίζεται η τροχιά του Kronecker, δηλαδή το σύνολο $\{(nx)|n \in \mathbb{Z}\}$.

Μέσω της τροχιάς του Kronecker οι ρητοί χαρακτηρίζονται ως οι αριθμοί που η τροχιά τους είναι πεπερασμένο σύνολο, ενώ οι άρρητοι ως οι αριθμοί που η τροχιά τους είναι πυκνό σύνολο.

Χρησιμοποιώντας αυτό το θεμελιώδες θεωρητικό αποτέλεσμα και με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή κατασκευάστηκε μια διδακτική πρόταση αναφερόμενη αρχικά στον ορισμό των ρητών ως κλάσεις ισοδυναμίας κλασμάτων και βασικά στον διαχωρισμό των ρητών-αρρήτων. Στη διδακτική αυτή πρόταση ενσωματώνονται και στοιχεία ιστορίας των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Η πρόταση εφαρμόστηκε σε μαθητές και αξιολογήθηκε.

Ευχαριστίες

Στο τέλος αυτής της προσπάθειας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

- την επιβλέπουσά μου, Καθηγήτρια κ. Βασιλική Φαρμάκη για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου καθώς και την πολύτιμη βοήθεια για το θεωρητικό υπόβαθρο και την οργάνωση της δομής της εργασίας
- τον κ. Γεώργιο Ψυχάρη για την πολύτιμη βοήθεια στην κατασκευή του αρχείου geogebra που χρησιμοποιήθηκε καθώς και τις γενικότερες συμβουλές του
- τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ν. Παπαναστασίου που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή
- τη Διονυσία για την άψογη συνεργασία τώρα και τα προηγούμενα χρόνια
- τη συμφοιτήτρια μου Μαρία Τσαμαδιά και τους μαθητές μου Μιχαήλ και Μαριλένα

Στην οικογένειά μου

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 6

- Ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης της διαφοράς ρητών- αρρήτων και τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση
- Αναλυτικά προγράμματα σχετικά με ρητούς- αρρήτους και γενικοί στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.
- Ο ρόλος της τεχνολογίας στη διδασκαλία και την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Κεφάλαιο 2 21

- Η σύγχρονη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών
- Οι τομές Dedekind
- Χαρακτηρισμός ρητών- αρρήτων με ανθυφαίρεση
- Χαρακτηρισμός ρητών- αρρήτων με δεκαδικό ανάπτυγμα
- Χαρακτηρισμός ρητών- αρρήτων με την τροχιά του Kronecker

Κεφάλαιο 3 39

- Παρουσίαση του σεναρίου
- Συνέντευξη

Βιβλιογραφία 72

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, σχετικά με τις δυσκολίες κατανόησης της διαφοράς ρητών- αρρήτων και τη χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση.

Οι μαθητές συναντούν σημαντικά εμπόδια στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών και κυρίως στην έννοια των ρητών αριθμών (Smith et al., 2005). Τα προβλήματα αυτά συνεχίζουν να υπάρχουν και στους φοιτητές μαθηματικών σχολών (Hart, 1988; Fischebein et al., 1995) αλλά και σε καθηγητές μαθηματικών. Οι μαθητές δεν κατανοούν την έννοια των ρητών αριθμών και πιστεύουν ότι δεν έχουν σχέση με τους πραγματικούς αριθμούς (Moseley, 2005).

- Το πρόβλημα της κατανόησης των ρητών αριθμών

Οι ρητοί αριθμοί ως δημιούργημα της ανθρώπινης σκέψης είναι μια δύσκολη έννοια (Pitkethly & Hunting, 1996). Οι μαθητές έχοντας διαμορφώσει εικόνα για τους αριθμούς (διδασκόμενοι τους φυσικούς αριθμούς), δυσκολεύονται να κατανοήσουν τους ρητούς αριθμούς (Κολέζα, 2000; Ni & Zhou, 2005).

Ρητοί και φυσικοί αριθμοί παρουσιάζουν ομοιότητες οι οποίες είναι μόνον επιφανειακές. Το αποτέλεσμα είναι ο μαθητής να πιστεύει ότι οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών ισχύουν και για τους ρητούς αριθμούς (Vamvakousi & Vosniadou, 2004; Voskoglou & Kosyvas, 2012). Η δυσκολία αυτή των μαθητών ενισχύεται από το γεγονός ότι (οι μαθητές) για πρώτη φορά έρχονται σε επαφή με καινούργιους μαθηματικούς συμβολισμούς, τους οποίους πρέπει να κατανοήσουν αλλά και να μάθουν να χειρίζονται (Ni & Zhou, 2005).

Τα κλάσματα δυσκολεύουν ιδιαίτερα τους μαθητές οι οποίοι δεν μπορούν να κατανοήσουν ότι ένα κλάσμα είναι μία μαθηματική οντότητα και όχι δύο διαφορετικοί αριθμοί, διδάσκονται το κλάσμα κυρίως ως μέρος του όλου γι' αυτό στη συνέχεια των μαθηματικών τους γνώσεων δεν μπορούν να αντιληφθούν τις περαιτέρω σημασίες του.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών δρουν αρνητικά στην κατανόησή τους και οι μαθητές αδυνατούν να καταλάβουν ότι

διαφορετικές αναπαραστάσεις μπορούν να αντιπροσωπεύουν τον ίδιο αριθμό (Markowitz & Sowder, 1991). Παρ' όλα αυτά τα σχολικά βιβλία δεν δίνουν έμφαση στο θέμα αυτό (Voskoglou & Kosyvas, 2012).

Έρευνες οι οποίες έχουν διεξαχθεί σε μαθητές και φοιτητές (ηλικίας 18-19 ετών δηλ. φοιτητές οι οποίοι ως μαθηματική γνώση είχαν αυτή η οποία αποκτήθηκε από το σχολείο) έδειξαν ότι πολλοί από αυτούς πιστεύουν ότι ένας αριθμός μπορεί να είναι ρητός και άρρητος, ένας αριθμός μπορεί να μην είναι ρητός ούτε άρρητος, ένας αριθμός μπορεί να μην έχει δεκαδική αναπαράσταση, ένας αριθμός είναι πραγματικός αν έχει πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων (σε αντίθετη περίπτωση δεν είναι πραγματικός αριθμός) και ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν έχουν δεκαδική αναπαράσταση (Giannakoulias & Souyoul & Zachariades, 2007). Μαθητές οι οποίοι δεν έχουν κατανοήσει τους ρητούς δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τους άρρητους αριθμούς καθώς πιστεύουν ότι τα κλάσματα είναι ρητοί ενώ οι ρίζες είναι άρρητοι αριθμοί (Voskoglou & Kosyvas, 2012). Οι μελέτες αυτές έδειξαν γενική αδυναμία στις πολλαπλές αναπαραστάσεις και στην αναγνώριση πραγματικών, ρητών και άρρητων αριθμών (Giannakoulias & Souyoul & Zachariades, 2007; Voskoglou & Kosyvas, 2012). Επιπροσθέτως διαπιστώθηκε ότι η ηλικία μαζί με την ευρύτητα της μαθηματικής γνώσης επιρεάζουν την κατανόηση των δύσκολων αυτών εννοιών (Giannakoulias & Souyoul & Zachariades, 2007).

- Τρόποι αντιμετώπισης

Διάφορες απόψεις έχουν διατυπωθεί για τους τρόπους με τους οποίους μπορεί κάποιος να προσεγγίσει το δύσκολο αυτό θέμα της κατανόησης των αριθμών και κυρίως των ρητών αριθμών. Οι απόψεις αυτές στηρίζονται στα προβλήματα τα οποία έχουν παρατηρηθεί αλλά και στον τρόπο με τον οποίο το ανθρώπινο μυαλό αντιμετωπίζει αυτές τις μαθηματικές έννοιες. Για να μπορέσουν οι μαθητές να εισέλθουν στις καινούργιες αυτές έννοιες απαιτείται ριζική τροποποίηση της έννοιας του αριθμού (Carpetner et al., 1993). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη συμβολή του καθηγητή ο οποίος, συν τοις άλλοις, πρέπει να λάβει υπόψη του ότι απευθύνεται σε παιδιά και όχι σε ενήλικα άτομα και να ακολουθήσει ανάλογη διδακτική και παιδαγωγική προσέγγιση. Οι καθηγητές πρέπει να έχουν πλήρη γνώση των πραγματικών αριθμών, των υποσυνόλων τους και να είναι εξοπλισμένοι με επιμονή και υπομονή, δίνοντας έμφαση στη λύση των προβλημάτων των μαθητών. Επίσης, θετικό αντίκτυπο θα είχε η προσέγγιση αυτών των

εννοιών με παραδείγματα «χειροπιαστά», αναπαραστατικά τα οποία να συνδέονται με την πραγματικότητα.

Σύμφωνα με τον Keiren (1976) όταν οι ρητοί αριθμοί αναπαριστώνται πάνω στην ευθεία των αριθμών, τότε γίνεται ευκολότερα κατανοητό ότι οι ρητοί αριθμοί είναι υποκατηγορία των πραγματικών αριθμών. Επίσης ο μαθητής είναι σε θέση να καταλάβει ευκολότερα τους ρητούς αριθμούς, αν μάθει και εξοικειωθεί με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις (Kieren, 1980, 1993). Για αυτόν το λόγο ο καθηγητής μπορεί να δώσει βάρος στις πολλαπλές αναπαραστάσεις με πολλά παραδείγματα και ασκήσεις, ασκήσεις οι οποίες θα γίνονται την ώρα του μαθήματος από τους μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες, αλλά και ασκήσεις οι οποίες θα δίνονται στους μαθητές προς λύση, ώστε ο μαθητής να εξασκηθεί και σε ατομικό επίπεδο αντιλαμβανόμενος ο ίδιος τις δυσκολίες και τις απορίες του. Οι καθηγητές πρέπει να ενθαρρύνουν την ανοικτή συζήτηση για να εντοπίζονται τα προβλήματα των μαθητών και να προσαρμόζουν τη διδασκαλία τους σύμφωνα με τις ανάγκες της εκάστοτε τάξης τους (Voskoglou 2009).

Τέλος οφείλουμε να αναφερθούμε και σε αυτές τις απόψεις σύμφωνα με τις οποίες οι ρητοί αριθμοί πρέπει να διδάσκονται από πιο μικρή ηλικία πριν ακόμη οι μαθητές σχηματίσουν εικόνα για το τι είναι ένας αριθμός. Όταν μία άποψη έχει ολοκληρωθεί είναι πολύ δύσκολο το εγχείρημα να αλλαχτεί στο μέλλον (Vodskoglou & Kosyvas, 2012).

VOSKOGLOU 2012

Question: Why did you answer that - $\sqrt{5/2}$ is a rational number?
Answer: Because it is a fraction.

In this case we have a classical misinterpretation of the definition of rational numbers. The student focused her attention on the symbol of fraction without realizing that, in order to be a rational number, its terms must be integers, with non-zero denominator.

Question: Why did you answer that $-\sqrt{4}$ is an irrational number?
Answer: Because it has the root.

Here the student identifies the symbol of the root with an irrational number. He does not think that the given number is equal to -2, which is an integer. Distinction among several types of numbers remains muddy in general, each time depending on their semiotic representations.

Από αυτό φαίνεται μια πολύ συνηθισμένη άποψη των μαθητών: **ρητοί είναι τα κλάσματα και άρρητοι είναι οι ρίζες**.

- Συμπεράσματα

Πολλές έρευνες και μελέτες έχουν διεξαχθεί με θέμα τη δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Από αυτές τις έρευνες διαπιστώθηκε ελλιπής γνώση των πραγματικών αριθμών και των υποσυνόλων τους. Επίσης παρατηρείται αδυναμία στην αναγνώριση ρητών-άρρητων αριθμών και στο χειρισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων. Σ' αυτό ευθύνονται και τα σχολικά βιβλία που δεν εμβαθύνουν σε αυτές τις έννοιες και επομένως η συμβολή του καθηγητή είναι σημαντική στην αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών ο οποίος πρέπει να επιμείνει σε αυτά τα προβλήματα να «αφουγκραστεί» τους μαθητές του και να προάγει τη συζήτηση μέσα στην τάξη.

- Η απόδειξη

Η διδασκαλία των αποδείξεων είναι ένα δύσκολο κομμάτι των μαθηματικών. Οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν της αποδείξεις και πιστεύουν ότι δεν υπάρχει ουσιαστικός λόγος για τον οποίο πρέπει να τις διδαχτούν.

- Η συμβολή της τεχνολογίας

Η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αλλάξουν τη στάση τους απέναντι σε αυτά τα προβλήματα και κυρίως μπορούν να επαναπροσδιορίσουν τις απόψεις τους για τη γεωμετρία και τη γεωμετρική απόδειξη. Από το 1980 έχουν δημιουργηθεί λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας γνωστά ως DGS τα οποία έχουν ως στόχο την κατανόηση της Γεωμετρίας και των γεωμετρικών αποδείξεων. Τα προγράμματα αυτά μπορούν να βοηθήσουν το μαθητή στην κατανόηση των παραπάνω και στην αναγκαιότητα των αποδείξεων αλλά και να χρησιμοποιηθούν ως μια εναλλακτική πρόταση στην προσέγγιση αυτών.

Τα DGS είναι προγράμματα γεωμετρικής οπτικοποίησης (Cabri, Sketchpad, EukliDraw, κα.). Μέσω αυτών των λογισμικών οι μαθητές γίνονται ενεργά μέλη της γνώσης, κατανοούν καλύτερα τη γεωμετρία, οδηγούνται σε συμπεράσματα, διατυπώνουν απορίες και εικασίες.

Μελέτες έχουν δείξει ότι τα DGS μπορούν να βοηθήσουν το μαθητή να καταλάβει την ανάγκη της απόδειξης και να μεσολαβήσει στη μετάβαση του (μαθητή) από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο (Jones, 2000). Βέβαια υπάρχουν και οι επικριτές αυτών των προγραμμάτων, οι οποίοι

υποστηρίζουν πως υπάρχει η πιθανότητα να χαθεί ο ρόλος του καθηγητή λόγω των DGS.

Πολλοί είναι οι μαθητές οι οποίοι παρουσιάζουν δυσκολία στη χρήση κανόνα και διαβήτη, τα DGS λύνουν το πρόβλημα αυτό καθώς ο χρήστης μπορεί να κατασκευάσει με ευκολία γεωμετρικά σχήματα και να επιβεβαιώσει την ορθή ή εσφαλμένη κατασκευή τους.

Βασικά χαρακτηριστικά των DGS (Hattermann, 2009) είναι τα γεωμετρικά σχήματα, οι γεωμετρικές σχέσεις οι οποίες χαρακτηρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα και το σύρσιμο (dragging) ως μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των DGS (Cabri, Sketchpad). Μέσω του συρσίματος ο χρήστης, εφόσον δημιουργήσει μία κατασκευή, μπορεί να μετακινήσει ορισμένα στοιχεία του σχήματος και να παρατηρήσει το πως ανταποκρίνεται το σχήμα στις αλλαγές αυτές. Είναι μια παρατηρήσιμη δράση, η οποία μπορεί να οδηγήσει το μαθητή στη διατύπωση εικασιών αλλά και στην επαλήθευση τους (Smith, 1999). Στα DGS είναι δυνατή η μετακίνηση και ο μετασχηματισμός σχημάτων με διατήρηση των βασικών σχέσεων και ιδιοτήτων τους (Laborde et al., 2006).

Οι μαθητές δημιουργούν, τροποποιούν και παρατηρούν, παύουν να είναι παθητικοί δέκτες της γνώσης, γίνονται ενεργά μέλη και παραγωγοί αυτής. Οι δυνατότητες υπολογισμών και συρσίματος (dragging) παρέχουν αναλύσεις αλλά και ανακαλύψεις ιδιοτήτων (Christou et al., 2004). Ο μαθητής μέσω των DGS μπορεί να διατυπώνει και να επαληθεύει εικασίες με βάση τη μεταβολή της εικόνας, τη μεταβολή των αριθμητικών δεδομένων, μπορεί να επαληθεύει σχέσεις αλλά και να εργάζεται με κατασκευές οι οποίες αντιγράφουν πραγματικά προβλήματα της ζωής (Kordaki & Mastrogiannis, 2006).

- Συμπεράσματα

Η χρήση των DGS στη διδασκαλία της Γεωμετρίας και των γεωμετρικών αποδείξεων μπορεί να συμβάλει θετικά στην αλλαγή της στάσης του μαθητή απέναντι σε αυτά τα θέματα αλλά και να τον βοηθήσει στη διατύπωση εικασιών. Ο καθηγητής, ο οποίος θα συμπεριλάβει στο μάθημά του DGS, μπορεί να δημιουργήσει περιβάλλον ερευνητικού εργαστηρίου εντάσσοντας τους μαθητές σε ομάδες, δρώντας ως συνεργάτης των μαθητών, εξάπτοντας με αυτόν τον τρόπο το ενδιαφέρον των μαθητών του. Ο ίδιος θα δίνει την καθοδήγηση στους μαθητές και την επιστημονική εγκυρότητα των αποτελεσμάτων τους.

1.2 Αναλυτικά προγράμματα σχετικά με ρητούς- αρρήτους και γενικοί στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚ/ΤΩΝ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΩΝ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Κατά τη διατύπωση των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης μπορούμε να ορίσουμε 7 άξονες γενικών στόχων. Κάθε άξονας αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη θεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Δηλαδή τα θέματα της μαθηματικής εκπαίδευσης μπορούν να αναλυθούν και να μελετηθούν ως προς:
-τη μαθηματική διάσταση
-τη γλωσσική διάσταση
-την εφαρμοσιμότητα και πρακτική χρήση
-τη μαθηματική δομή
-τη μεθοδολογική διάσταση
-τη δυναμική διάσταση
-τη διάσταση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά

α) Μαθηματική διάσταση.
Στη διάρκεια της μαθηματικής εκπαίδευσης πρέπει να δοθεί ευκαιρία στους μαθητές:

- Να αποκτήσουν βασικές μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες (π.χ. αλγοριθμικές ικανότητες, ικανότητες σχεδίασης γεωμετρικών σχημάτων κτλ.), οι οποίες για κάθε βαθμίδα καθορίζονται λεπτομερώς από το αντίστοιχο πρόγραμμα σπουδών. Κατά τη

συγγραφή των εγχειριδίων που θα αποτελέσουν τον συνδετικό κρίκο μεταξύ προγράμματος σπουδών και διδακτικής υλοποίησης των επιδιωκόμενων στόχων, πρέπει να ληφθούν υπόψη όλες οι διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης και όχι απλά η ορθότητα του μαθηματικού περιεχομένου.

- Να αποκτήσουν ένα επιστημονικό τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης πραγματικών καταστάσεων. Απόκτηση επιστημονικού τρόπου σκέψης σημαίνει κυρίως ταυτόχρονη ανάπτυξη της ικανότητας για εξερεύνηση και αξιολόγηση, για φαντασία και κριτική σκέψη. Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων προσφέρεται ως το πλέον κατάλληλο πεδίο για την καλλιέργεια αυτών των ικανοτήτων. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων και της προοδευτικής μάθησης της διαδικασίας απόδειξης, οι μαθητές συνειδητοποιούν σταδιακά ότι δουλεύω πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει κυρίως: προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα. Γι' αυτό το λόγο η επίλυση προβλημάτων πρέπει να αποτελεί το κέντρο του ενδιαφέροντος ενός Π.Σ. των Μαθηματικών, όχι απαραίτητα ως ανεξάρτητη θεματική περιοχή, αλλά ως βασικός άξονας γύρω από τον οποίο θα οργανωθεί η διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών. Στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης, η θεματολογία των προβλημάτων θα προκύπτει από τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών ενώ σταδιακά τα προβλήματα θα γίνονται πιο σύνθετα και θα σχετίζονται τόσο με πραγματικές καταστάσεις όσο και με καθαρά μαθηματικά θέματα.
- Με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές:

  -Ερευνούν και κατανοούν μαθηματικά περιεχόμενα (έννοιες, συλλογισμούς κτλ.)

  -Διατυπώνουν προβλήματα με αφορμή καθημερινές ή μαθηματικές καταστάσεις.

  -Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν ποικίλες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.

  -Επαληθεύουν και ερμηνεύουν αποτελέσματα σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα.

-Γενικεύουν λύσεις και στρατηγικές έτσι ώστε να βρίσκουν εφαρμογή σε νέες καταστάσεις.
-Αποκτούν εμπιστοσύνη ως προς τις μαθηματικές ικανότητές τους.
-Γίνονται ικανοί να εφαρμόζουν τη διαδικασία της μοντελοποίησης για την επεξεργασία πραγματικών καταστάσεων.

β) Γλωσσική διάσταση.

Τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος με τον οποίο περιγράφονται όψεις του περιβάλλοντος κόσμου. Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να προσανατολίζεται προς το να προσφέρει στους μαθητές ένα πλήρη έλεγχο της γλώσσας των Μαθηματικών ως ένα μέσο επικοινωνίας. Για τους μαθητές αυτό σημαίνει:

-Να έχουν ένα πλήρες λεξιλόγιο μαθηματικών όρων και συμβόλων υπό τον έλεγχό τους.
-Να κατανοούν τη σύνταξη της μαθηματικής γλώσσας και να κάνουν σωστή χρήση αυτής της γλώσσας όταν συζητούν, συνθέτουν λύσεις ή διατυπώνουν ερωτήσεις.
-Να είναι ικανοί να διαβάζουν και να ερμηνεύουν μαθηματικά κείμενα που είναι διατυπωμένα σε προφορική, διαγραμματική ή συμβολική μορφή.
-Να διαθέτουν ικανότητα για μετάφραση από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική γλώσσα.
-Να συσχετίζουν πραγματικά αντικείμενα και καταστάσεις, εικόνες και διαγράμματα με μαθηματικές έννοιες και ιδέες.

γ) Εφαρμοσιμότητα και πρακτική χρήση.

Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να στοχεύει τόσο στην απόκτηση εφαρμόσιμης γνώσης όσο και στην κατανόηση των πρακτικών εφαρμογών. Για παράδειγμα, πρέπει να γίνονται συνδέσεις μεταξύ καταστάσεων προβληματισμού (εντός και εκτός του μαθηματικού πλαισίου) και μεταξύ μαθηματικών εννοιών και δομών. Για τους μαθητές αυτό σημαίνει:

-Μάθηση του τρόπου επαναδόμησης και επαναδιατύπωσης ενός προβλήματος από μια εξωμαθηματική περιοχή , σε μαθηματικό πρόβλημα.
-Χρήση μαθηματικών εργαλείων (π.χ. μαθηματικών μοντέλων και μεθόδων) για τη λύση προβλημάτων, εντός και εκτός του μαθηματικού περιβάλλοντος.
-Σχεδιασμό και επεξεργασία μαθηματικών μοντέλων για την αντιμετώπιση προβλημάτων και ως εκ τούτου συνειδητοποίηση της δύναμης και των ορίων των Μαθηματικών.

-Ικανοποιητική αντιμετώπιση καταστάσεων στις οποίες μπορούν να εφαρμόσουν μαθηματικές διαδικασίες.
-Αναγνώριση σχέσεων μεταξύ διαφόρων περιοχών των Μαθηματικών και σχέσεων μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών του προγράμματος σπουδών.
-Δυνατότητα εφαρμογής των Μαθηματικών σε άλλες επιστημονικές περιοχές (π.χ. στη Φυσική, Βιολογία, Τεχνολογία, Κοινωνιολογία κτλ.) και σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής μέσω επίλυσης προβλημάτων.
-Μάθηση της χρήσης μέσων της νέας τεχνολογίας που έχουν σχέση με τα Μαθηματικά.
-Εξερεύνηση και αξιολόγηση στρατηγικών εκτίμησης προσεγγίσεων και αποτελεσμάτων.

δ) Δομή.

Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εντοπίζουν και να κατανοούν τον τρόπο σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών και να αναγνωρίζουν κάτω από ποικίλες εκφράσεις τους, κοινές αρχές. Για τους μαθητές αυτό σημαίνει:
-Ανακάλυψη κοινών αρχών και σχέσεων στις περιοχές των αριθμών, των σχημάτων των αλγεβρικών εκφράσεων κτλ. και χρησιμοποίηση αυτών των σχέσεων για την ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων.
-Ανακάλυψη κοινών ιδιοτήτων μαθηματικών αντικειμένων (π.χ. πράξεων, σχέσεων, δομών) για κάθε περιοχή του προγράμματος σπουδών.
-Αναζήτηση και διατύπωση νόμων και κανόνων.
-Ικανότητα σύνθεσης παραδειγμάτων, όταν δίνονται οι κανόνες.
-Αιτιολόγηση της πορείας επίλυσης ενός προβλήματος με βάση τη μαθηματική λογική για τις ανώτερες βαθμίδες και την άτυπη λογική για το επίπεδο του Δημοτικού.

ε) Μεθοδολογική διάσταση.

Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να προσανατολισθεί στη μάθηση μεθόδων εξερεύνησης και συλλογιστικών στρατηγικών όπως η διαίσθηση, η αναλογική-επαγωγική και η παραγωγική σκέψη. Για τους μαθητές αυτό σημαίνει:
-Εμπειρική προσέγγιση που χαρακτηρίζεται από εξερεύνηση, παρατήρηση, διατύπωση και έλεγχο υποθέσεων και ενδεχομένως παραγωγικό συλλογισμό.

-Μύηση στη λειτουργία της αποδεικτικής διαδικασίας και συνειδητοποίηση της δυνατότητας αυτονομίας που αυτή τους παρέχει στον έλεγχο της επιτυχίας ή αποτυχίας τους.
-Συνειδητοποίηση της σημασίας της αναλογικής σκέψης, της εκτίμησης, του τρόπου διατύπωσης μιας υπόθεσης, της απαγωγής και της παραγωγής.
-Μάθηση κάποιων συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων.

στ) Δυναμική διάσταση.

Τα Μαθηματικά βρίσκονται σε συνεχή ανάπτυξη και εξέλιξη. Η μαθηματική
εκπαίδευση πρέπει να βοηθήσει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν την ευρύτητα
και τη δυναμική των Μαθηματικών σε υποκειμενικό και αντικειμενικό επίπεδο.
Για τους μαθητές αυτό σημαίνει:
-Γνώση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών (π.χ. εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων).
-Γνώση της εξέλιξης και των σύγχρονων εναλλακτικών τρόπων χειρισμού των
αριθμητικών τεχνικών (π.χ. των διαφόρων αλγορίθμων) για τις βασικές πράξεις.

ζ) Διάσταση στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Για να επιτευχθούν οι προηγούμενοι στόχοι, οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν μια θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά. Για τη μαθηματική εκπαίδευση αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δώσει στους μαθητές την ευκαιρία:
-Να επισημάνουν, να αξιολογήσουν και να διορθώσουν τα λάθη τους, μέσα από ευρετικές δραστηριότητες.
-Να αξιολογήσουν μια μαθηματική μέθοδο.
-Να δουλέψουν σε ένα πλούσια δομημένο μαθηματικό περιβάλλον όπου θα υπάρχει χώρος για πρωτοβουλία, εφευρετικότητα και νοητική πρόκληση.
-Να έχουν απόλυτη ελευθερία ως προς την επιλογή των μοντέλων που θα χρησιμοποιήσουν για να αντιμετωπίσουν μια κατάσταση ή για να εξηγήσουν τη σκέψη τους. Η αυτονομία αυτή θα τους βοηθήσει να αποκτήσουν εμπιστοσύνη στην ικανότητά τους να σκέφτονται και να δημιουργούν σε ένα μαθηματικό περιβάλλον. Τώρα παραθέτουμε το μέρος του αναλυτικού προγράμματος που αφορά τους ρητούς στο σχολείο.

Αναλυτικά προγράμματα σχετικά με ρητούς- αρρήτους:

- Οι ρητοί εμφανίζονται για πρώτη φορά στη Β' γυμνασίου.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο χρόνος που δίνεται για τη γνωριμία με μια τόσο μεγάλη ενότητα δεν επαρκεί για να έχουμε κατανόηση της **έννοιας** των ρητών. Επίσης, ειδικά για το 2,101001000… χρειάζεται να αναλυθεί ο χαρακτηρισμός των ρητών μέσω δεκαδικού αναπτύγματος που ξεπερνά τις δυνατότητες της τάξης αυτής. Τέλος, για εισαγωγή ίσως θα ήταν ωραίο το παράδειγμα του Μένονα ως ιστορικό και πρακτικό.

2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: **2 ώρες**

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για την εισαγωγή στους άρρητους αριθμούς και τη θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
- Μία ώρα για τη γεωμετρική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών και την επίλυση ασκήσεων.

Β' Γυμνασιου — *Διδακτικοί Στόχοι*

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- να γνωρίζουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δε μπορούν να γραφούν με τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$,
- να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών,
- να παριστάνουν έναν αριθμό της μορφής $\sqrt{\alpha}$, όπου α θετικός ακέραιος, με σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών,
- να γνωρίζουν ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι θετικές ή οι αρνητικές ρίζες θετικών ακεραίων ή ρητών. Για παράδειγμα, άρρητοι αριθμοί είναι και οι:

  $1 + \sqrt{2},\ -3\sqrt{2},\ \frac{5}{\sqrt{3}},\ 2{,}101001000100001...,$
- να παριστάνουν γεωμετρικά ορισμένους άρρητους , όπως π .χ . $\sqrt{2},\ \sqrt{3}$.

- Γ' γυμνασίου Κεφάλαιο 1 παράγραφος 1

Στην Γ' γυμνασίου η μόνη αναφορά που γίνεται στην έννοια των ρητών είναι στην αρχή του βιβλίου. Μέσα σε λίγο χρόνο πάλι έχουν συσσωρευτεί πολλές έννοιες χωρίς να υπάρχει δυνατότητα εμβάθυνσης.

A Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους (2 διδακτικές ώρες)

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει με απλά παραδείγματα :

- Να θυμηθούν ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί και τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού.
- Να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών και τις βασικές ιδιότητές τους, ώστε να μπορούν να τις αξιοποιούν στο λογισμό.

Διδακτικές οδηγίες

- Να τονιστεί ότι όλες οι ρίζες δεν είναι άρρητοι αριθμοί π.χ. $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ και ότι υπάρχουν άρρητοι που δεν εκφράζονται υποχρεωτικά ως ρίζα πραγματικού αριθμού π.χ. ο αριθμός π. (ερωτ. κατ. 1).
- Η άσκηση 2 έχει σκοπό να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και ταυτόχρονα να ασχοληθούν με τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων.
- Με την άσκηση 3 επιδιώκεται να συνδέσουν οι μαθητές την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών με την απόσταση των σημείων με τα οποία παριστάνονται πάνω στον άξονα.
- Το παράδειγμα 2 και οι ασκήσεις 9, 10 αναδεικνύουν τη χρησιμότητα των ιδιοτήτων των πράξεων.
- Στην άσκηση 11 οι μαθητές αφού διαπιστώσουν ότι το άθροισμα όλων των αριθμών είναι μηδέν, θα πρέπει να προσδιορίσουν τρεις τριάδες αριθμών που κάθε μια τους θα έχει άθροισμα μηδέν (-7+2+5, -6-3+9, -5+1+4).
- Με το λογισμό και τη χρήση μεταβλητών οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί στις προηγούμενες τάξεις. Να δοθεί όμως ιδιαίτερη βαρύτητα στην **επιμεριστική ιδιότητα** που είναι βασική ιδιότητα του αλγεβρικού λογισμού. Αν και η ιδιότητα αυτή είναι ήδη γνωστή στους μαθητές, εμφανίζονται δυσκολίες στην εφαρμογή της ακόμα και στις πιο απλές περιπτώσεις (ερώτηση κατανόησης 3 - άσκηση 8).

- Για πρώτη φορά στο πρόγραμμα της Α’ λυκείου φαίνεται να γίνεται σαφής αναφορά και εξήγηση των ρητών. Παρατηρούμε ότι λέει και επαναλαμβάνει την έκφραση «συναντούν δυσκολίες» εξηγώντας παρανοήσεις που έχουν δημιουργηθεί στους μαθητές. Αυτές ίσως να υπήρχαν σε μικρότερο βαθμό αν η διδασκαλία των ρητών στο γυμνάσιο γινόταν σε βάθος και υπήρχε περισσότερος χρόνος για επαρκή εμπέδωση. Επίσης γίνεται αναφορά στην έννοια της πυκνότητας των ρητών, που αποτελεί αιτία πολλών παρανοήσεων που συνοδεύουν τους μαθητές ακόμα και στο πανεπιστήμιο. Π.χ. ποιος είναι ο προηγούμενος αριθμός του 3; Το 2,999… (Ζαχαριάδης, Χρίστου, Πίττα-Πανταζή)

Α' Λυκειου **Κεφάλαιο 2°**

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.λπ) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Ειδικότερα:

§2.1

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί $\frac{4}{3}$, 1.333…, 1,010101…, 1,1010010001…, καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως $\frac{4}{2}, \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\pi}{6}$, -1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

§2.2

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών

1.3 Ο ρόλος της τεχνολογίας στη διδασκαλία και την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Τα πλεονεκτήματα της χρήσης τεχνολογικών μεσών είναι πολλά τόσο για τους μαθητές όσο και για τους καθηγητές

Οι μαθητές:

- αποκτούν πρόσβαση σε πλήθος πηγών, πληροφοριών, γνώσεων από όλο τον κόσμο.
- οδηγούνται ευκολότερα σε δημιουργία εικασιών και συμμετέχουν ενεργά στην εξέλιξη του μαθήματος
- μπορούν να αυτό-αξιολογούνται
- δεν αισθάνονται ότι κρίνονται γιατί ο Η/Υ είναι απρόσωπος και έτσι παίρνουν πρωτοβουλίες και ελέγχουν τις γνώσεις τους
- μπορούν να έχουν εξ αποστάσεως βοήθεια

Οι καθηγητές

- μπορούν να παρουσιάσουν εικόνες και υλικό με μεγάλη ακρίβεια στα σχήματα ή να προσομοιώσουν πειράματα
- μπορούν εύκολα να έχουν πρόσβαση σε ποικιλία ετοίμων ασκήσεων όπως το http://digitalschool.minedu.gov.gr/.

Τέλος, και για τις δυο κατηγορίες το υπολογιστικό περιβάλλον είναι πιο ελκυστικό και εύχρηστο από το παραδοσιακό χαρτί- μολύβι.

Ωστόσο υπάρχουν και μειονεκτήματα. Το κυριότερο είναι ότι οι μαθητές τείνουν να θεωρούν απόδειξη την απάντηση του υπολογιστή. Επίσης, το υψηλό κόστος απόκτησης τους αποτελεί την κυριότερη αιτία ελλείψεων εξοπλισμού και λογισμικού στα σχολεία. Τέλος, μειονέκτημα συνιστά και το γεγονός ότι εντείνεται η αποξένωση λόγω της έλλειψης ανθρώπινης επικοινωνίας.

Οι μαθητές συνήθως θεωρούν ότι όταν ο υπολογιστής εμφανίσει ένα γεωμετρικό τόπο σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα ή δώσει μια αριθμητική λύση σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα αυτόματα έχει αποδειχτεί. Αυτό πρέπει να το λάβουμε υπόψη μας και να εξηγήσουμε ότι η χρήση του υπολογιστή μας βοηθά να κάνουμε κάποια εικασία αλλά η απόδειξη γίνεται μόνο όταν την κάνουμε με μαθηματικές αρχές και διαδικασίες. Η δημιουργία εικασιών

και η ανάπτυξη της διαίσθησης είναι πολύ χρήσιμα εργαλεία στην προσπάθεια λύσης ενός προβλήματος. Πολλές φορές αν μέσω υπολογιστή ο μαθητής πάρει την απάντηση- λύση τότε μπορεί πιο εύκολα να βρει και την αυστηρή απόδειξη. Χαρακτηριστική είναι η φράση του καθηγητή Π. Σπύρου στο μάθημα του «η οπτικοποίηση της λύσης (σχήμα) είναι σαν τις βοηθητικές ρόδες του αεροπλάνου: ενώ δεν κάνουν τίποτα κατά την πτήση, είναι απαραίτητες για την απογείωση». Εκεί έρχεται η στιγμή που ο καθηγητής θα τονίσει ότι τα μαθηματικά βασίζονται στον παραγωγικό συλλογισμό και κτίζονται μόνο με αυστηρές αποδείξεις γιατί δεν είναι λίγες οι φορές που η διαίσθηση παραπλανάται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Η σύγχρονη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Στις μέρες μας το σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται ως ένα σύνολο $\mathbb{R}$ με δυο πράξεις $\mathbb{R}(+,\cdot)$ και μια σχέση διάταξης: $\mathbb{R}, \leq$ που πληροί τα ακόλουθα δεκατέσσερα αξιώματα:

Τα 9 πρώτα αφορούν τις δυο πράξεις

$1. \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$	$5. \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
$2. \alpha + \beta = \beta + \alpha$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$6. \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3.Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης το 0 και έχει την ιδιότητα $\alpha + 0 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$	7.Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού το 1≠0 και έχει την ιδιότητα $\alpha \cdot 1 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists -\alpha: \alpha + (-\alpha) = 0$	$8. \forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \exists \alpha^{-1}: \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$
9. Η επιμεριστική ιδιότητα που αφορά και τις δυο πράξεις και είναι $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$	

Τα επόμενα 4 αφορούν τη διάταξη

10. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\alpha < \beta$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta < \gamma$ $\tau o\tau\varepsilon$ $\alpha < \gamma$
11. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει μόνο ένα από τα εξής: α=β, α<β, α>β
12. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\alpha < \beta$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ $\forall \gamma \in \mathbb{R}$
13. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\alpha < \beta, 0 < \gamma$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

Τέλος, μένει το δεκατοτέταρτο αξίωμα, το λεγόμενο αξίωμα της πληρότητας. Για να το πούμε πρέπει πρώτα να ορίσουμε τις έννοιες:

- Λέμε ότι ένα A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο αν υπάρχει ένα άνω φράγμα β. Το β λέγεται άνω φράγμα αν για κάθε α στο Α ισχύει α≤β
- Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το α λέγεται supremum του Α αν το α είναι άνω φράγμα και α≤β για κάθε β άνω φράγμα του Α

14. Ιδιότητα της πληρότητας: αν το Α είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών τότε έχει **supremum**.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά τα βασικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ όπως το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών, το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το $\mathbb{Q}$ των ρητών. Ορίζουμε ως επαγωγικό ένα υποσύνολο Α του $\mathbb{R}$ αν $0 \in A$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha \in A$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\alpha + 1 \in A$. Τώρα ορίζουμε τους φυσικούς ως το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο. Για τους φυσικούς δεν ισχύουν τα αξιώματα αντιθέτου (4) και αντιστρόφου (8). Οι ακέραιοι είναι το σύνολο $\mathbb{N} \cup \{-\nu | \nu \in \mathbb{N}\}$. Οι ακέραιοι έχουν αντίθετο αλλά δεν ισχύει το αξίωμα αντιστρόφου (8). Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\mu}{\nu} \middle| \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}\right\}$ των ρητών για το οποίο ισχύουν όλα τα αξιώματα εκτός της πληρότητας. Γράφοντας $\frac{\mu}{\nu}$ εννοούμε $\mu \cdot \nu^{-1}$.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε δει κάποιο σύνολο που να ικανοποιεί και τα δεκατέσσερα αξιώματα, γι αυτό στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα τέτοιου συνόλου. [15]

2.2 <u>Οι τομές Dedekind</u>

Ορισμός: ένα υποσύνολο α του $\mathbb{Q}$ λέγεται τομή αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\alpha \neq \emptyset,\ \alpha \neq \mathbb{Q}$
- $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}$ $\kappa\alpha\iota$ $q < p$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $q \in \alpha$
- $\alpha\nu$ $p \in \alpha$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ $q \in \alpha$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $p < q$

Τώρα ορίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, την πράξη της πρόσθεσης και μια σχέση διάταξης ως εξής:

- $\mathbb{R} = \{\alpha \subseteq \mathbb{Q}: \tau o\ \alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\mu\acute{\eta}\}$
- α<β ανν α γνήσιο υποσύνολο του β, για α,β τομές
- Αν α, β $\in \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε $\alpha + \beta = \{x + y |\ x \in \alpha,\ y \in \beta\}$

Σημειώνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός θα οριστεί παρακάτω.

Μετά τους ορισμούς είμαστε ξεκινάμε να αποδείξουμε ότι αυτό το νέο σύνολο ικανοποιεί τα δεκατέσσερα αξιώματα που είδαμε παραπάνω.

Απόδειξη βασικών ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών από τον ορισμό τους (όχι απαραίτητα με τη σειρά που τα είδαμε πριν).

- Παρότι ήταν το τελευταίο αξίωμα (Α14) που συναντήσαμε πριν θα το αποδείξουμε πρώτο. Αν το Α είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών τότε έχει supremum. Θεωρούμε το σύνολο β={κ|κ ανήκει σε κάποιο α στο Α}.
  - Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι πραγματικός αριθμός.
    - Αφού Α μη κενό περιέχει ένα στοιχείο α. Το α ως πραγματικός αριθμός περιέχει ένα κ. Άρα αυτό το κ ανήκει και στο β, δηλαδή β μη κενό.
    - Έστω κ ένα στοιχείο το β και λ<κ. Άρα το κ ανήκει σε κάποιο α στο Α. Επειδή α πραγματικός αριθμός και λ<κ, έχω ότι το λ ανήκει στο α άρα και στο β
    - Από την υπόθεση υπάρχει γ άνω φράγμα του Α. Επειδή γ πραγματικός αριθμός υπάρχει ρητός κ που να μην ανήκει στο γ. Άρα αφού α<γ έχω ότι το κ δεν ανήκει στο α για κάθε α. άρα δεν ανήκει και στο β, δηλαδή το β δεν είναι όλοι οι ρητοί.
    - Έστω κ ανήκει στο β. τότε κ ανήκει σε κάποιο α. Το α δεν έχει μέγιστο στοιχείο οπότε υπάρχει λ στο α ώστε κ<λ. Αλλά αυτό το λ ανήκει και στο β οπότε ούτε το β έχει μέγιστο.
  - Τώρα θα δείξουμε ότι το β είναι supremum.
    Αν α ανήκει στο Α τότε περιέχεται στο β, συνεπώς α≤β δηλαδή β άνω φράγμα. Τώρα για ένα γ τυχαίο άνω φράγμα θα δείξω ότι γ≤β. Έχω ότι α≤γ για κάθε α στο Α. Άρα κάθε α περιέχεται στο γ και συνεπώς το β περιέχεται στο γ □

- Εφόσον $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu), \gamma\iota\alpha\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha\ \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{Q}$ τότε και κάθε στοιχείο του (α+β)+γ θα είναι και στοιχείου του α+(β+γ) και αντίστροφα. (Α1)
- Εφόσον $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa, \gamma\iota\alpha\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha\ \kappa,\lambda\in\mathbb{Q}$ τότε και κάθε στοιχείο του α+β θα είναι και στοιχείου του β+α και αντίστροφα. (Α2)
- Ορίζουμε το $0=\{\kappa\in\mathbb{Q}|\kappa<0\}$. Το μηδέν είναι πραγματικός αριθμός και θα δείξουμε ότι α+0=α. Έστω ότι κ ανήκει στο α και λ στο 0, δηλαδή κ<0. Τότε κ+λ<κ, δηλαδή κ+λ ανήκει στο α. Αντίστροφα έστω κ ανήκει α, τότε υπάρχει λ ρητός στο α ώστε λ>κ

αφού ως τομή το α δεν έχει μέγιστο. Άρα το κ-λ<0, δηλαδή ανήκει στο 0. Έτσι έχω κ=λ+(κ-λ) που ανήκει στο α+0. (Α3)

- Ορίζουμε το $-\alpha = \{\kappa \in \mathbb{Q} | -\kappa \notin a\}$ με την προϋπόθεση ότι ο κ δεν είναι ο ελάχιστος αριθμός που δεν ανήκει στο α. Το -α είναι πραγματικός αριθμός και θα δείξουμε ότι α+(-α)=0. Έστω ότι κ ανήκει στο α και λ ανήκει στο –α. Τότε το –λ δεν ανήκει στο α οπότε –λ>κ που γράφεται κ+λ<0. Άρα κ+λ ανήκει στο 0, δηλαδή κάθε στοιχείο του α+(-α) ανήκει στο 0. Η αντίστροφη κατεύθυνση δεν είναι τόσο άμεση γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα. Έστω ότι μ ανήκει στο 0, αρά –μ>0. Σύμφωνα με το λήμμα υπάρχει κ στο α και λ στο σύνολο $A' = \{x \in \mathbb{Q} | x \notin \alpha\}$ και λ να μην είναι το ελάχιστο του A' $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \lambda - \kappa = -\mu$. Άρα μ=κ+(–λ) με το κ να ανήκει στο α και το –λ στο –α. Άρα μ ανήκει στο α+(-α) (Α4)
- Μεταβατική ιδιότητα διάταξης. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε γνήσιο υποσύνολο, γνησίου υποσυνόλου είναι κι αυτό γνήσιο υποσύνολο. (Α10)

- Τώρα έφτασε η στιγμή να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό. Αν α,β>0 $\alpha \cdot \beta = \{z \leq 0 \text{ ή } z = x \cdot y : x \in \alpha,\ y \in \beta, x > 0, y > 0\}$. Αν α,β<0 τότε $\alpha \cdot \beta = (-\alpha)(-\beta)$, αν α<0, β>0 τότε $\alpha \cdot \beta = -[(-\alpha)\beta]$ και τέλος αν α>0, β<0 τότε ορίζουμε $\alpha \cdot \beta = -[\alpha(-\beta)]$.

- Εφόσον $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu), \gamma\iota\alpha\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha\ \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ τότε και κάθε στοιχείο του (αβ)γ θα είναι και στοιχείου του α(βγ) και αντίστροφα. (Α5)
- Εφόσον $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa, \gamma\iota\alpha\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}\alpha\ \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}$ τότε και κάθε στοιχείο του αβ θα είναι και στοιχείου του βα και αντίστροφα. (Α6)
- Ορίζουμε το $1 = \{\kappa \in \mathbb{Q} | \kappa < 1\}$. Το ένα είναι πραγματικός αριθμός και θα δείξουμε ότι α1=α. Έστω α>0. Για κάθε ρητό κ έχω ότι κ1=κ οπότε το α1 ανήκει στο α. Αντίστροφα έστω κάποιο κ ανήκει στο α. Αν κ≤0 τότε κ ανήκει στο α1. Αν κ>0 τότε υπάρχει ρητός λ στο α ώστε λ>κ. Άρα έχω $\kappa = \lambda \cdot \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)$ που ανήκει στο α1. Για α<0 το α1 γράφεται –[(–α)1] και αποδεικνύεται ανάλογα. Τέλος, για α=0 είναι προφανές. (Α7)
- Αντίστροφος. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που ο α>0. Έστω κ ένας θετικός ρητός που ανήκει στο α και λ ένας θετικός ρητός που

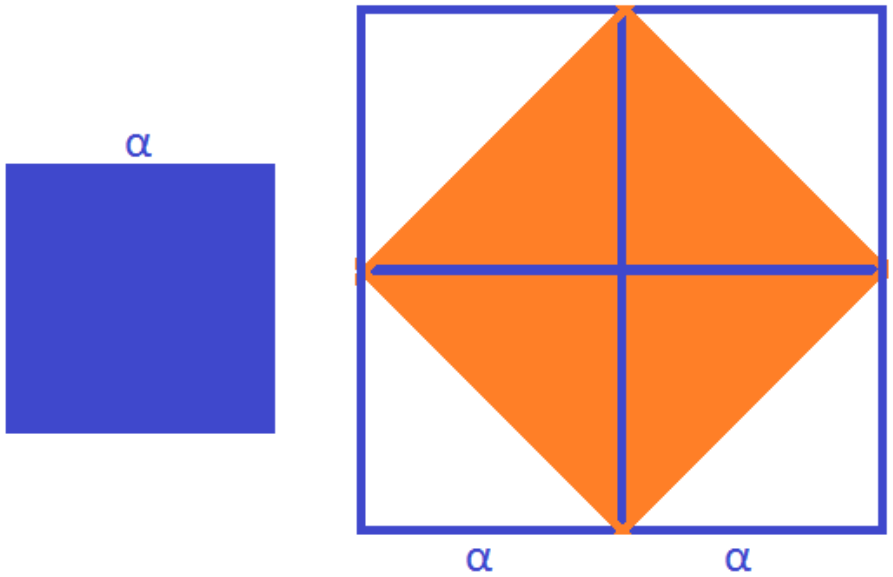
ανήκει στο α^{-1}. Τότε το 1/λ δεν ανήκει στο α άρα 1/λ>κ και έτσι κλ<1. Από εδώ συμπεραίνουμε ότι το κλ ανήκει στο 1. Επίσης οι αρνητικοί ρητοί ανήκουν στο 1 άρα κάθε στοιχείο του $\alpha\alpha^{-1}$ ανήκει στο 1. Αντιστρόφως έστω κ στο 1. Αν είναι αρνητικό τότε ανήκει στο $\alpha\alpha^{-1}$. Έστω ότι 0<κ<1. Αυτή η περίπτωση δεν είναι τόσο άμεση γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα. Σύμφωνα με το λήμμα υπάρχουν x στο α, και y όχι στο α, ώστε y/x=1/κ .Άρα το κ=x(1/y) όπου x ανήκει στο α και 1/y στο α^{-1}. (A8)

- Επιμεριστική. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά την περίπτωση α,β,γ>0. Οι δυο αριθμοί στην ισότητα περιέχουν όλους τους αρνητικούς ρητούς. Ένας θετικός ρητός στο α(β+γ) είναι της μορφής κ(λ+μ) για θετικά κ στο α λ στο β μ στο γ. αφού κ(λ+μ) =κλ+κμ όπου το κλ είναι θετικό στοιχείο το αβ και κμ είναι θετικό στοιχείο στο αγ. Αυτός ο αριθμός ανήκει και στο αβ+αγ. Άρα κάθε στοιχείο του α(β+γ) ανήκει και στο αβ+αγ.
  Αντίστροφα ένας θετικός ρητός στο αβ+αγ είναι της μορφής $\kappa_1\lambda + \kappa_2\mu$ για θετικους κ_1, κ_2 στο α, λ στο β και μ στο γ. Αν $\kappa_1 \leq \kappa_2$ κάνω το εξής τέχνασμα: $\kappa_1\lambda + \kappa_2\mu = \kappa_2\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\cdot\lambda + \mu\right)$. Τώρα έχω $\kappa_2\ \sigma\tau o\ \alpha, \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\cdot\lambda\ \sigma\tau o\ \beta\ \kappa\alpha\iota\ \mu\ \sigma\tau o\ \gamma$. Οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται ανάλογα. (A9)
- Αρχή της τριχοτομίας. Θα δείξω ότι «τουλάχιστον μια» και «το πολύ μια» από τις σχέσεις ισχύουν για κάθε α,β. Έστω ότι δεν ισχύει α<β ούτε α=β. Τότε υπάρχει κ στο α που δεν ανήκει στο β. Αν πάρω ένα τυχαίο λ στο β τότε λ<κ άρα θα ανήκει στο α, δηλαδή α>β. αντίστροφα, αν α>β τότε υπάρχει κ στο α που δεν ανήκει στο β άρα δε γίνεται α<β ούτε α=β. (A11)
- Έστω α>β. Αν α+γ=β+γ, τότε α=(α+γ)+(-γ)=(β+γ)+(-γ)=β που δεν ισχύει. Άρα α+γ>β+γ (A12).
- Έστω α>β και γ>0. Αν αγ=βγ, τότε α=(αγ)(γ^{-1})=(βγ)(γ^{-1})=β που δεν ισχύει. Άρα αγ>βγ A(13)

Έτσι δείξαμε ότι αυτό το νέο σύνολο ℝ πληροί τα 14 αξιώματα. [19]

2.3 Χαρακτηρισμός ρητών- αρρήτων με ανθυφαίρεση

Ο Σωκράτης στον Πλατωνικό διάλογο Μένων διηγείται μια ιστορία σύμφωνα με την οποία οι ψυχές είναι αθάνατες και έχουν μάθει τα πάντα πριν κατοικήσουν στο ανθρώπινο σώμα . Δεδομένου ότι η ψυχή είχε έρθει σε επαφή με την πραγματικότητα πριν από τη γέννηση, έχουμε μόνο να τη θυμηθούμε όταν έρθουμε στη ζωή. Μια τέτοια ανάμνηση απαιτεί Σωκρατική καθοδήγηση , η οποία κατά τον Σωκράτη δεν είναι η διδασκαλία. Ο Σωκράτης αποδεικνύει τη μέθοδο του καθοδηγώντας έναν σκλάβο που έχει πλήρη άγνοια της γεωμετρίας.
Ξεκινάει έναν από τους πλέον σημαίνοντες διαλόγους της δυτικής φιλοσοφίας όσον αφορά το επιχείρημα για την έμφυτη γνώση. Σχεδιάζει ένα τετράγωνο με πλευρές δύο πόδια και ζητά από το σκλάβο να διπλασιάσει την περιοχή του τετραγώνου. Οι εικασίες του σκλάβου ήταν πρώτα ότι η αρχική πλευρά πρέπει να διπλασιαστεί σε μήκος δηλαδή να γίνει τέσσερα πόδια. Όμως, αυτό αποδεικνύεται ότι δε δίνει λύση γιατί είναι μεγαλύτερο του διπλασίου εμβαδού. Στη συνέχεια προτείνει ο σκλάβος να γίνει η πλευρά τρία πόδια αλλά ούτε αυτό δίνει τη λύση. Ο δούλος βρίσκεται σε σύγχυση. Ο Σωκράτης λοιπόν προτείνει :



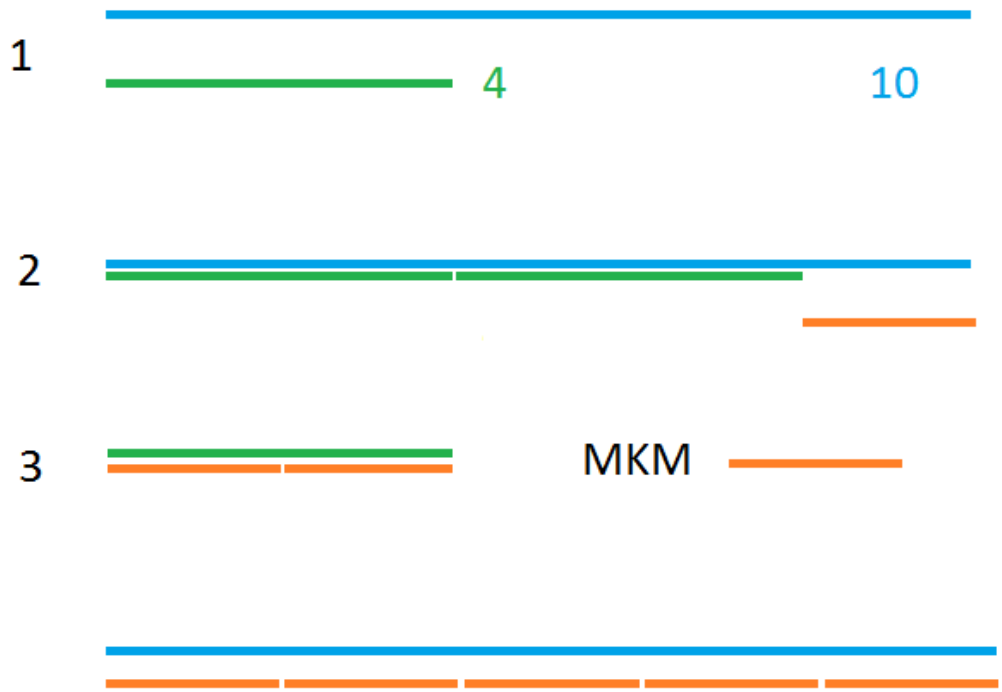
Σχ.1

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $2\alpha^2 = \beta^2$ σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. Θεωρούμε ένα τετράγωνο με πλευρά 2α και μέσα σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο με κορυφές τα μέσα των πλευρών του αρχικού τετραγώνου και φέρνουμε και τις διαμέτρους του. Σχηματίζονται τότε 4 μικρότερα τετράγωνα και τα μικρά τετράγωνα χωρίζονται από τη διάμετρο στη μέση. Άρα είναι: Εμβ$_{2\alpha.}$=$4\alpha^2 = \beta^2 + \frac{4\alpha^2}{2}$. Δηλαδή, $2\alpha^2 = \beta^2$ το ζητούμενο.

Οι Πυθαγόρειοι, όπως τεκμηριώνεται από έρευνες του καθηγητή Στ. Νεγρεπόντη, είχαν ανακαλύψει και την έννοια της ασυμμετρίας. Μέσω της διαδικασίας της ανθυφαίρεσης, είχαν βρει μια μέθοδο για να αποδείξουν ότι η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου είναι μεγέθη ασύμμετρα, κάτι που ισοδυναμεί με αυτό που θα λέγαμε σήμερα ότι «ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος». [1]

<u>Ορισμός ανθυφαίρεσης</u>

Η ανθυφαίρεση δυο τμημάτων είναι ένας συνεχής εναλλασσόμενος ευκλείδειος αλγόριθμος διαίρεσης και θα την ορίσουμε αυστηρά παρακάτω. Θα δώσουμε πρώτα τη γενική ιδέα με ένα παράδειγμα: Έχουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα μήκους 4 και 10.



Σχ.2

Παίρνουμε το μικρό τμήμα και βλέπουμε πόσες φορές χωράει στο μεγάλο. Χωράει δυο φορές και περισσεύει ένα κομμάτι μήκους 2 πιο μικρό απ το 4. Τώρα θα δούμε το νέο κομμάτι, το 2, πόσες φορές χωράει στο 4; Δυο ακριβώς. Εδώ τελειώνει η διαδικασία. Αυτό το τελευταίο κομμάτι μήκους δυο λέγεται μέγιστο κοινό μέτρο γιατί είναι το μεγαλύτερο κομμάτι που μπορεί να μετρήσει ακέραιες φορές και τα δυο αρχικά μας: 5 φορές το μεγάλο και 2 φορές το μικρό. Από αυτό φαίνεται ότι η ανθυφαίρεση είναι πεπερασμένη και άρα, όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, τα μεγέθη σύμμετρα.

Ορισμός ανθυφαίρεσης

Για δυο μεγέθη α,β με α>β ορίζουμε τη διαδικασία της ανθυφαίρεσης ως έξης: μια ακολουθία αμοιβαίων διαιρέσεων που μπορεί να είναι πεπερασμένη η άπειρη και περιγράφεται στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη.

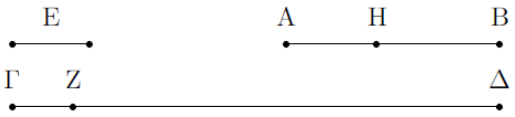
Υπάρχουν $I_\nu \in \mathbb{N}$ και e_ν είναι μέγεθος

$\alpha = I_0 \beta + e_1$, με $\beta > e_1$,
$\beta = I_1 e_1 + e_2$, με $e_1 > e_2$,
…
$e_{\nu-1} = I_\nu e_\nu + e_{\nu+1}$, με $e_\nu > e_{\nu+1}$,
$e_\nu = I_{\nu+1} e_{\nu+1} + e_{\nu+2}$, με $e_{\nu+2} > e_{\nu+1}$,
…
Η διαδικασία στάματα αν κάποιο e_ν γίνει μηδέν

Μέσω της ανθυφαίρεσης χαρακτηρίζονται οι ρητοί. Αν οι ανθυφαίρεση είναι πεπερασμένη τότε ο λόγος είναι ρητός ενώ αν είναι άπειρη, άρρητος. Αυτό αποδεικνύεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη με τις προτάσεις Χ.2 το ευθύ και Χ.3 το αντίστροφο.

<u>Πρόταση Χ.2</u>: Αν η ανθυφαίρεση δύο μεγεθών είναι άπειρη, τότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα. (Υπάρχουν δύο αποδείξεις της πρότασης αυτής.) Παραθέτουμε τη Χ.2 από τα στοιχεία

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη. Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Συμφώνα με τις σημειώσεις του Στ. Νεγρεπόντη υπήρχε και δεύτερη, προγενέστερη απόδειξη με χρήση της απαγωγής σε άτοπο:

Ας υποθέσουμε ότι α, β είναι σύμμετρα, άρα θα ∃ φυσικοί αριθμοί Μ, Ν και ένα γ τέτοιο ώστε: $\alpha = M\gamma$ και $\beta = N\gamma$. Εδώ με απλή παρατήρηση έχουμε ότι Μ, Ν φυσικοί αριθμοί, άρα η ανθυφαίρεση των Μ και Ν είναι πεπερασμένη.

Ανθ(Μ, Ν) = [$\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n$] πεπερασμένη, τότε η ανθυφαίρεση των α και β είναι ακριβώς ίδια.

Έστω: $M = \kappa_1 N + \gamma_1$

$N = \kappa_2 \gamma_1 + \gamma_2$

$\gamma_1 = \kappa_3 \gamma_2 + \gamma_3$

$\vdots \qquad \vdots$, τελειώνει σε n βήματα

πολλαπλασιάζουμε όλες τις σχέσεις γ. Από αριθμούς πάμε σε μεγέθη, αλλά έχει νόημα! Έτσι θα έχουμε:

$\gamma M = \gamma\kappa_1 N + \gamma\gamma_1$, όπου $M\gamma = \alpha$ και $N\gamma = \beta$

$\gamma N = \gamma\kappa_2\gamma_1 + \gamma\gamma_2$

$\gamma\gamma_1 = \gamma\kappa_3\gamma_2 + \gamma\gamma_3$

$\vdots \qquad \vdots$

Όμως $\gamma_1 < N$ άρα και $\gamma\gamma_1 < N$. Άρα Ανθ(α, β) =[$\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n$] , δηλαδή είναι πεπερασμένη, το οποίο είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης. Αυτή την απόδειξη την ήξεραν οι Αρχαίοι. Επίσης δε χρησιμοποιεί την

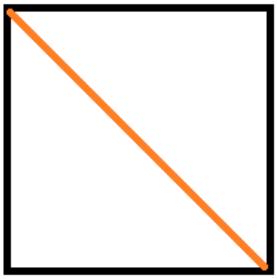
Χ.1 του Ευδόξου. Η απόδειξη δεν φαίνεται να βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου, αφού το μόνο που χρειάζεται είναι ότι οι φυσικοί αριθμοί έχουν πεπερασμένη ανθυφαίρεση, κάτι που οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν.

Παραδείγματα

1. Η αρρητότητα του $\sqrt{2}$

Απόδειξη ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$, από τους Πυθαγόρειους με ανθυφαίρεση:

$\alpha^2 = 2\beta^2$ (1)



- Είναι $\beta << \alpha$;;; (β απείρως μικρό ως προς το α;)

$\alpha^2 = 2\beta^2$

$\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2$

$\alpha^2 > \beta^2$

$\alpha > \beta$

Από Πρόταση Ι.3 έχουμε:

$\alpha = \beta + \gamma_1$

$\alpha^2 = (\beta + \gamma_1)^2$ (από ΙΙ.4)

$2\beta^2 = \beta^2 + 2\beta\gamma_1 + {\gamma_1}^2$

$\beta^2 = 2\beta\gamma_1 + {\gamma_1}^2$

$\beta^2 > 2\beta\gamma_1$

$\beta > \gamma_1$

Άρα δεν ισχύει $\beta << \alpha$ και έτσι αποδείχθηκε το 1° βήμα της Ανθυφαίρεσης:

$\alpha = 1 \cdot \beta + \gamma_1, \ \ \gamma_1 < \beta$

- $\beta > 2\gamma_1$

$\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2$ (δε γνωρίζουμε αν $\gamma_2 < \gamma_1$)

$\beta^2 = (2\gamma_1 + \gamma_2)^2$
Από γνώμονα:
$2\beta\gamma_1 + {\gamma_1}^2 = 4{\gamma_1}^2 + 4\gamma_1\gamma_2 + {\gamma_2}^2$
$2(2\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_1 + {\gamma_1}^2 = 4{\gamma_1}^2 + 4\gamma_1\gamma_2 + {\gamma_2}^2$
$4{\gamma_1}^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + {\gamma_1}^2 = 4{\gamma_1}^2 + 4\gamma_1\gamma_2 + {\gamma_2}^2$
${\gamma_1}^2 = 2\gamma_1\gamma_2 + {\gamma_2}^2$
${\gamma_1}^2 > 2\gamma_1\gamma_2$
$\gamma_1 > 2\gamma_2$
$\gamma_1 > \gamma_2$

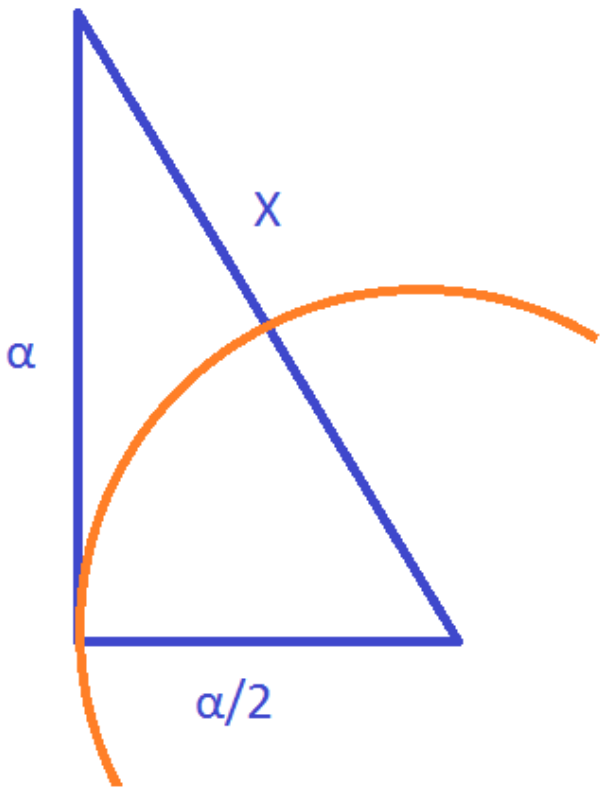
Άρα προκύπτει και η δεύτερη ανθυφαιρετική σχέση:
$\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2$
Από τα παραπάνω προκύπτουν άπειροι επάλληλοι γνώμονες, οπότε $Ανθ(\alpha, \beta) = [1, 2, 2, \dots]$

Έτσι τα α, β είναι ασύμμετρα αφού η ανθυφαίρεσή τους είναι άπειρη.

Τώρα θα παραθέσουμε μια μεταγενέστερη απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ με απαγωγή σε άτοπο:
Έστω ότι είναι ρητός, δηλαδή γράφεται σαν κλάσμα ακεραίων που είναι πρώτοι μεταξύ τους: $\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu}, (\mu, \nu) = 1 \rightarrow 2 = \frac{\mu^2}{\nu^2} \rightarrow \mu^2 = 2\nu^2 \rightarrow \mu^2 αρτιος \rightarrow \mu\ αρτιος \rightarrow \mu = 2\tau \rightarrow (2\tau)^2 = 2\nu^2 \rightarrow \nu^2 = 2\tau^2 \rightarrow \nu^2 αρτιος \rightarrow \nu\ αρτιος$: Άτοπο γιατί δε γίνεται μ, ν άρτιοι αφού υποτέθηκαν πρώτοι μεταξύ τους. Το άτοπο πρόεκυψε επειδή υποθέσαμε ότι $\sqrt{2}$ ρητός, άρα είναι άρρητος.

2. Η αρρητότητα του χρυσού λογού: ο αριθμός Φ

Η ενδεκάτη πρόταση του δευτέρου βιβλίου από τα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι η κατασκευή της Χρυσής Τομής. Στον Ευκλείδη εμφανίζεται στο σημείο αυτό. Στο VI Βιβλίο, το οποίο είναι πολύ μεταγενέστερο το $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{a-x}$, ονομάζεται 'Άκρος και Μέσος Λόγος' και στο XIII Βιβλίο οι πρώτες δέκα προτάσεις είναι όλες για τη χρυσή τομή. Η χρυσή τομή αφορά στην κατασκευή του Δωδεκάεδρου και του Εικοσάεδρου. Η κατασκευή είναι ως εξής:

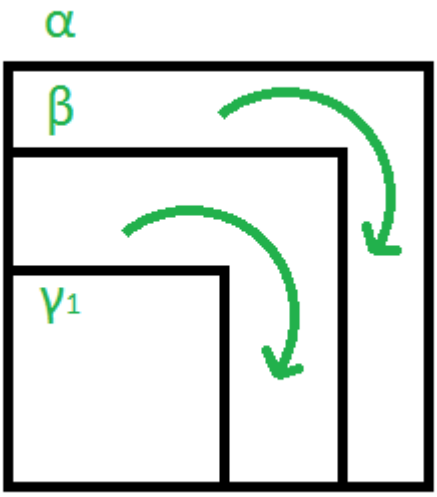


Η χρυσή τομή είναι ασύμμετρη. Δηλαδή ότι αν τα α, β ικανοποιούν τη σχέση της χρυσής τομής, τότε τα α και β είναι ασύμμετρα.
Αν α, β σε λόγο χρυσής τομής, δηλαδή $\alpha^2 = \alpha \cdot \beta + \beta^2$, τότε
Ανθ(α, β) = [1,1,1…] ,
Δηλαδή :

$$\alpha = \beta + \gamma_1$$
$$\beta = \gamma_1 + \gamma_2$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

<u>Απόδειξη</u>:

Είναι $\alpha^2 > \alpha\beta$ άρα $\alpha^2 > \beta$
όμως $\alpha = \beta + \gamma_1$ ή
$\alpha^2 = (\beta + \gamma_1)^2$ ή
$\alpha \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 + 2\beta\gamma_1 + {\gamma_1}^2$ ή
$\beta^2 = \beta\gamma_1 + {\gamma_1}^2$ $(\gamma_1 < \beta)$



Έχουμε διατήρηση γνωμόνων από το πρώτο βήμα, άρα β και γ_1 σε σχέση χρυσής τομής. Το ίδιο συνεχίζεται, άρα Ανθ(α, β) = [1,1,1…]

Στα σύγχρονα μαθηματικά ο αριθμός Φ είναι η θετική λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ δηλαδή του τριωνύμου $x^2 - x + 1 = 0$. Οι λύσεις του είναι $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ κι εμείς κρατάμε τη θετική ρίζα που είναι το $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.4 Χαρακτηρισμός ρητών- αρρήτων με δεκαδικό ανάπτυγμα

Θεώρημα

Για κάθε πραγματικό αριθμό x που ανήκει στο [0,1) υπάρχει μοναδική ακολουθία x_κ με τιμές στο {0,1,…,9} όπου $x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{x_\kappa}{10^\kappa}$ και $0 \leq \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} < \frac{1}{10^{\nu-1}}$ την απλοποιούμε ως $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$

Ορισμοί

- Την παραπάνω έκφραση την ονομάζουμε *δεκαδικό ανάπτυγμα*
- Αν υπάρχει κ φυσικός ώστε $x_\nu=0$ για κάθε ν>κ τότε λε με ότι x *τερματιζόμενος* και γραφούμε $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_\nu$.
- Αν υπάρχουν κ,λ φυσικοί ώστε $x_{\nu+\theta+\mu\xi}= x_{\nu+\theta}$ $1\leq\theta\leq\mu$ τότε λε με ότι x *τελικά περιοδικός* και γραφούμε $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_\nu \overline{x_{\nu+1} \ldots x_{\nu+\mu}}$. Αν η περίοδος ξεκινάει από την αρχή τότε λέγεται περιοδικός και γράφεται $x = 0, \overline{x_1 x_2 \ldots x_\nu}$

Απόδειξη Θεωρήματος

- Ύπαρξη
- Έστω $0 < x < 1$. Θεωρούμε τις εξής ακολουθίες: $\alpha_{\nu+1} = (\alpha_\nu), \alpha_1 = x$ και $x_\nu = [10\alpha_\nu]$ $\nu \in \mathbb{N}$. Αυτή η x_ν είναι η επιθυμητή ακολουθία. Ως κλασματικό μέρος το $0 \leq \alpha_\nu < 1$ άρα $0 \leq 10\alpha_\nu < 10$ δηλαδή το $x_\nu = [10\alpha_\nu] \in \{0,1,\ldots,9\}$.
- Επαγωγικά, από τον ορισμό των α_ν, x_ν βλέπω ότι $x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} + \frac{\alpha_{\nu+1}}{10^\nu}$. Αφού $0 \leq \frac{\alpha_{\nu+1}}{10^\nu} < \frac{1}{10^\nu}$ και $\frac{1}{10^\nu} \to 0$ τότε και $\frac{\alpha_{\nu+1}}{10^\nu} \to 0$. Αφού $x - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{10^\nu}$ τότε $x = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{x_\kappa}{10^\kappa}$.
- Τέλος θα δείξω ότι $\sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} < \frac{1}{10^{\nu-1}}$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \nu \in \mathbb{N}$. Για ν=1 έχω x<1. Για ν>1 $\sum_{\kappa=\mu}^{\infty} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} = x - \frac{x_1}{10^1} - \cdots - \frac{x_{\mu-1}}{10^{\mu-1}} = \frac{\alpha_\nu}{10^{\nu-1}} < \frac{1}{10^{\nu-1}}$.
- Μοναδικότητα

Έστω ότι υπάρχουν δυο δεκαδικά αναπτύγματα δηλαδή δυο ακολουθίες $x_\nu \neq y_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του ορισμού. Παρατηρώντας ότι $\sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \frac{9}{10^\kappa} = \frac{1}{10^{\nu-1}}$ αποκλειω να είναι τελικά όλοι οι όροι $x_\nu = 9$ ή $y_\nu = 9$. Έστω ξ ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $x_\xi \neq y_\xi$. Τότε $|x_\xi - y_\xi| \geq 1$ και

$$0 = \left|\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{x_\kappa - y_\kappa}{10^\kappa}\right| = \left|\frac{x_\mu - y_\mu}{10^\mu} + \sum_{\kappa=\mu+1}^{\infty} \frac{x_\kappa - y_\kappa}{10^\kappa}\right|$$

$$\geq \frac{1}{10^\mu} - \sum_{\kappa=\mu+1}^{\infty} \frac{|x_\kappa - y_\kappa|}{10^\kappa} \geq \frac{1}{10^\mu} - \sum_{\kappa=\mu+1}^{\infty} \frac{9}{10^\kappa} = 0$$

Απ αυτό προκύπτει ότι μια εκ των δυο x_ν ή y_ν είναι τελικά 9 για όλα τα ν από κάποιο φυσικό μ και μετά. Αυτό είναι άτοπο από τις υποθέσεις.

Χαρακτηρισμός ρητών

Με το δεκαδικό ανάπτυγμα μπορούμε να χαρακτηρίζουμε τους αριθμούς ως ρητούς ή άρρητους. Ο x είναι ρητός αν και μόνο αν το δεκαδικό ανάπτυγμα είναι πεπερασμένο ή τελικά περιοδικό, αλλιώς είναι άρρητος.

Απόδειξη:

- Έστω ένας αριθμός Χ που το δεκαδικό του ανάπτυγμα είναι πεπερασμένο ή τελικά περιοδικό. Θα δείξω ότι είναι ρητός δηλαδή ότι γράφεται ως κλάσμα ακεραίων.

  -πεπερασμένο: έστω ν δεκαδικά ψηφία άρα $x = 0, x_1 x_2 \dots x_\nu$. Αν πολλαπλασιάσω το x με 10^ν τότε $y = x \cdot 10^\nu \in \mathbb{Z}$ άρα $x = \frac{y}{10^\nu}$ δηλαδή ρητός.

  -τελικά περιοδικό: x= $0, x_1 x_2 \dots x_\nu \overline{x_{\nu+1} \dots x_{\nu+\mu}}$. Τότε ο αριθμός

$$x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} + \frac{x_{\nu+1}}{10^{\nu+1}}\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\mu\kappa}}\right) + \dots + \frac{x_{\nu+\mu}}{10^{\nu+\mu}}\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\mu\kappa}}\right) =$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} + \left(\frac{x_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} + \dots + \frac{x_{\nu+\mu}}{10^{\nu+\mu}}\right)\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\mu\kappa}}\right) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{x_\kappa}{10^\kappa} + \left(\frac{x_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} + \dots + \frac{x_{\nu+\mu}}{10^{\nu+\mu}}\right)\left(\frac{10^\mu}{10^\mu - 1}\right) =$$

$$= \frac{x_1 x_2 \dots x_\nu}{10^\nu} + \frac{x_{\nu+1} \dots x_{\nu+\mu}}{10^\nu}\left(\frac{10^\mu}{10^\mu - 1}\right) \in \mathbb{Q}$$

- Έστω ένας ρητός αριθμός $x = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in \{0,1, \dots, \beta - 1\}$. Θα δείξω ότι το δεκαδικό του ανάπτυγμα είναι πεπερασμένο ή τελικά περιοδικό. Παρατηρούμε ότι το $0 \leq (10x) = 10x - [10x] = \frac{\alpha_1}{\beta} <$

$1, \alpha_1 \in \{0,1, \dots, \beta - 1\}$. Με βάση αυτήν την παρατήρηση μπορώ τώρα να βρω το δεκαδικό ανάπτυγμα του x.

Το πρώτο ψηφίο του $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_0}{\beta}$ το βρίσκω κάνοντας $\left[10\frac{\alpha_0}{\beta}\right] = X_1$.

Τώρα παίρνω το υπόλοιπο $10\frac{\alpha_0}{\beta} - \left[10\frac{\alpha_0}{\beta}\right] = \left(10\frac{\alpha_0}{\beta}\right) = \frac{\alpha_1}{\beta}$.

Το δεύτερο ψηφίο το βρίσκω ανάλογα $\left[10\frac{\alpha_1}{\beta}\right] = X_2$ και μενει το υπολοιπο $10\frac{\alpha_1}{\beta} - \left[10\frac{\alpha_1}{\beta}\right] = \left(10\frac{\alpha_1}{\beta}\right) = \frac{\alpha_2}{\beta}$

Γενικά ανάλογα το ν+1 ψηφίο $\left[10\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right] = X_{\nu+1}$ και μενει το υπολοιπο $10\frac{\alpha_\nu}{\beta} - \left[10\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right] = \left(10\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right) = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta}$.

Επειδή όλα τα $\alpha_\nu \in \{0,1, \dots, \beta - 1\}$ $\kappa\alpha\iota$ $\nu \in \mathbb{N}$ έπεται από την αρχή του περιστερεώνα ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο δείκτες $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}, \kappa < \lambda$ ώστε $\alpha_\kappa = \alpha_\lambda$. Θεωρώ το σύνολο $A = \{\nu \in \mathbb{N}: \alpha_\nu = \alpha_\mu,\ \nu > \mu \in \mathbb{N}\}$. Το A από την αρχή του ελαχίστου έχει minA=ξ. Τότε $\alpha_\xi = \alpha_\mu$ και τ=ξ-μ

διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

-το $\alpha_\mu=0$ τότε ο $x = 0, x_1 x_2 \dots x_\xi$ δηλαδή τερματιζόμενος

-το $\alpha_\mu \neq 0$ και μ=0 τότε $x = 0, \overline{x_1 x_2 \dots x_\tau}$

-το $\alpha_\mu \neq 0$ και $\mu \neq 0$ τότε $x = 0, x_1 x_2 \dots x_\mu \overline{x_{\mu+1} \dots x_{\xi+\mu}}$. [5]

2.5 <u>Χαρακτηρισμός ρητών- αρρήτων με την τροχιά του Kronecker</u>

Ορισμός Έστω $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο $O_x = \{(nx) | n \in \mathbb{Z}\}$ οπου $(x) = x - [x]$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του αριθμού.

Πρόταση 1

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow O_x$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του [0,1)

Απόδειξη

- Έστω $x = \frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{N}, (\kappa, \lambda) = 1$. Τότε $(\kappa x) = (0) = 0$, άρα $O_x = \{0, (x), \dots (\kappa x)\}$ είναι πεπερασμένο.

- Αντίστροφα αν O_x είναι πεπερασμένο τότε $\exists \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \mu < \nu$: $(\mu x) = (\nu x)$. Άρα $\nu x - \mu x = \kappa \in \mathbb{Z}$ οπότε $x = \frac{\kappa}{\nu - \mu} \in \mathbb{Q}$

Πρόταση 2

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε x $\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma \Leftrightarrow O_x$ είναι πυκνό υποσύνολο του [0,1)

Απόδειξη

- Αν O_x είναι πυκνό υποσύνολο του [0,1) τότε είναι άπειρο, άρα από την προηγούμενη πρόταση x $\alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma$

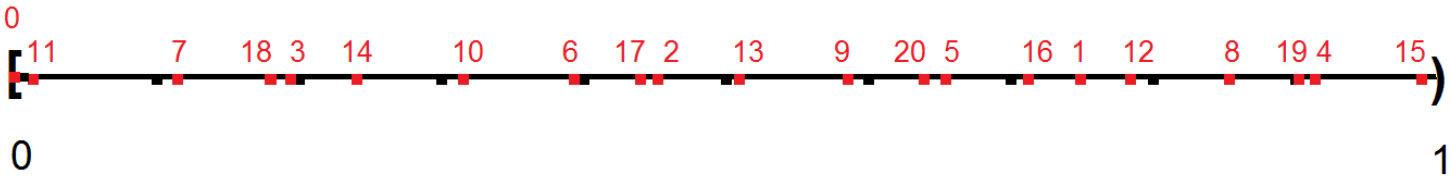
- Αντίστροφα έστω x $\alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma$. Θα δείξω ότι για οποιοδήποτε ψ του [0,1) υπάρχει ένα στοιχείο του O_x που βρίσκεται οσοδήποτε κοντά στο ψ. Δηλαδή για $\psi \in [0,1)$, $0 < \varepsilon < \frac{1-\psi}{2}$ $\exists$ $\nu \in \mathbb{Z}$ $\mu\varepsilon$ $(\nu x) \in O_x$ $\omega\sigma\tau\varepsilon$ $|(\nu x) - \psi| < \varepsilon$. Διαλέγω $M = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$. Χωριζω το [0,1) σε M ίσα διαστήματα και παίρνω τα πρώτα M+1 στοιχεία του O_X από το 0, δηλαδή 0, $(x), \dots, (Mx)$. Από την αρχή του περιστερεώνα αφού έχω M+1 στοιχεία και M διαστήματα σημαίνει ότι τουλάχιστον δυο στοιχεία $(\kappa x), (\lambda x)$ με 0<κ<λ<M ανήκουν στο ίδιο διάστημα άρα απέχουν λιγότερο από $\frac{1}{M}$: $|(\kappa x) - (\lambda x)| < \frac{1}{M}$. Αφού x άρρητος, τότε τα $(\kappa x) \neq (\lambda x)$ και θετω $0 < \rho = \lambda - \kappa \leq \lambda \leq M$ $\kappa\alpha\iota$ $\xi = [\lambda x] - [\kappa x]$. Εχουμε $|\rho x - \xi| = |(\kappa x) - (\lambda x)| < \frac{1}{M} < \varepsilon, \xi \in \mathbb{Z}$. Άρα $[\rho x] = \xi$ ή $[-\rho x] = -\xi$ και $(\rho x) < \varepsilon$ ή $(-\rho x) < \varepsilon$. Οπότε υπάρχει γενικά ένα $\tau \in \mathbb{Z}$ ώστε $0 < (\tau x) < \varepsilon$. Άρα υπαρχει ένα $\sigma \in \mathbb{N}$: $(\sigma\tau x) \leq \psi < \big((\sigma + 1)\tau x\big)$. Άρα $|(\sigma\tau x) - \psi| < \varepsilon$.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα εύρεσης τροχιών, ένα για ρητό κι ένα για άρρητο για τα πρώτα 20 βήματα. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες με τη βοήθεια του προγράμματος που έχουμε δημιουργήσει στο Κεφάλαιο 3.

0.0 **n=0**

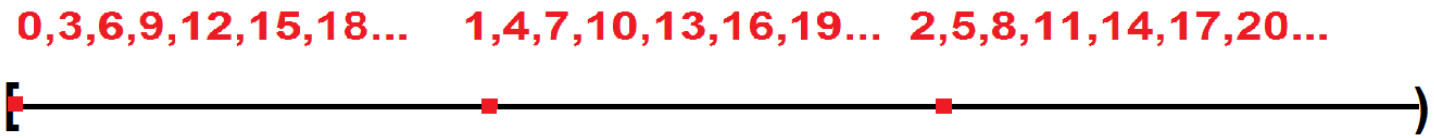
.73205081
.46410162
.19615243
.92820324
.66025405
.39230486
.12435567
.85640648
.58845729
.3205081
.05255891
.78460972
.51666053
.24871134
.98076215
.71281296
.44486377
.17691458
.90896539
.6410162

$\{(n \cdot \sqrt{3}) \text{ for } n=0,1, \ldots ,20\}$



.0
.33333
.66666
.0
.33333
.66666
.0
.33333
.66666
.0
.33333
.66666
.0

$\{(n \cdot \frac{1}{3}) \text{ for } n=0,1, \ldots ,20\}$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Παρουσίαση του σεναρίου

Στόχος μας είναι, βασιζόμενοι στην ιστορία και στα προβλήματα που αναφέραμε προηγουμένως στη βιβλιογραφία, να φτιάξουμε ένα εναλλακτικό σενάριο που με χρήση υπολογιστή θα δίνει μια νέα οπτική στο ζήτημα των ρητών.

Ανάλυση της δραστηριότητας

Μέρος πρώτο: υπενθυμίσεις-συμπληρώσεις

Προαπαιτούμενα:

Σε πρώτη φάση θα γίνει συζήτηση για το κλασματικό μέρος. Εδώ θα θυμηθούμε την ευκλείδεια διαίρεση και θα ορίσουμε το ακέραιο και δεκαδικό ή κλασματικό μέρος συσχετίζοντας τους με τους μεικτούς αριθμούς που οι μαθητές έμαθαν στο δημοτικό. Με συγκεκριμένα παραδείγματα οι μαθητές εξασκούνται μόνοι τους στην εύρεση των κλασματικών μέρων των αριθμών. Σ' αυτή τη δραστηριότητα ο καθένας θα δουλέψει μόνος του στο τετράδιο του για περίπου 15 λεπτά.

Μετά θα γίνει Συζήτηση για την παράσταση αριθμών στην ευθεία. Το θέμα το έχουν διδαχτεί ήδη, αλλά θα κάνουμε παραδείγματα για να είμαστε σίγουροι ότι δε θα έχουμε λάθη που οφείλονται σε αυτό στα ερωτήματα του φύλλου 2. Η συμπλήρωση θα γίνει σε ζευγάρια με την επίβλεψη του διδάσκοντα. Δεν περιμένουμε οι μαθητές να συναντήσουν ιδιαίτερα προβλήματα.

Στη συνέχεια θα συμπληρώσουμε τον πινάκα 1. Η πρώτη στήλη έχει τους αριθμούς «α». στη δεύτερη «2α» γραφούμε το διπλάσιο του αριθμού α και στην τρίτη «(2α)» γράφουμε το κλασματικό μέρος του 2α όπως είναι ήδη συμπληρωμένα ως παράδειγμα.

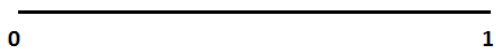
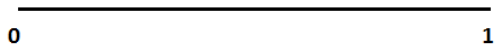
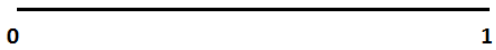
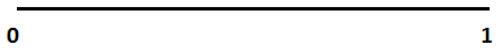
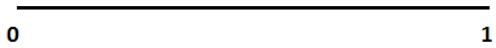
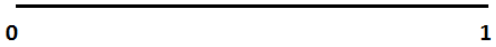
Συμπλήρωση του πίνακα 1

a	2a	(2a)	3a	(3α)	4a	(4a)	5a	(5a)	6a	(6a)	7a	(7a)	8a	(8a)	(9a)	(10a)
1/2	2/2	0	3/2													
1/3	2/3															
3/4														0		
1/5						4/5										
2/3																
2											14					
3/6																

Πινάκας 1

Μέρος δεύτερο: η έννοια της τροχιάς

Έχοντας τον πινάκα συμπληρωμένο ζητάμε από τους μαθητές να κυκλώσουν τα κλασματικά μέρη στο φύλλο. «Υπάρχει κάποιο μοτίβο που ακολουθούν; Πως πιστεύετε ότι θα συνεχίζονταν αν κάναμε κι άλλα πολλαπλάσια;» Εδώ περιμένουμε να βρουν ότι τα κλασματικά μέρη επαναλαμβάνονται. Εκεί θα δώσουμε το όνομα τροχιά. Θα θυμίσουμε, αν χρειαστεί, ότι στο σύνολο γραφούμε μόνο μια φορά κάθε στοιχείο. «Ποια είναι η τροχιά για κάθε αριθμό του πινάκα;» Αυτή η ερώτηση μας πηγαίνει στο Φύλλο 2. Εδώ η τροχιά αναπαριστάται στο ευθύγραμμο τμήμα αφού καθορίστηκε ως σύνολο.

κλασμα	τροχια	παρασταση στο [0,1)
$\frac{1}{2}$	$\{0, \frac{1}{2}\}$	
$\frac{1}{3}$	{ }	
$\frac{3}{4}$	{ }	
$\frac{1}{5}$	{ }	
$\frac{2}{3}$	{ }	
$\frac{2}{1}$	{ }	
$\frac{3}{6}$	{ }	

Φύλλο 2

Αρχίζουμε τη συμπλήρωση των στοιχείων της τροχιάς, δηλαδή τη δεύτερη στήλη. Το πρώτο είναι ήδη συμπληρωμένο ως παράδειγμα. Πάλι οι μαθητές δουλεύουν σε ζευγάρια. Από δω ξεκινάμε τα βήματα για το χαρακτηρισμό των ρητών. Ρωτώ «Από πόσα στοιχεία αποτελείται το σύνολο; Γράψτε το πλήθος των στοιχείων δίπλα απ' το κάθε σύνολο. Τι παρατηρείτε;» Εδώ θέλω να γίνει η συσχέτιση του πλήθους με τον παρανομαστή. Αν δε γίνει αντιληπτό τότε κάνω το εξής: ρωτώ «πείτε μου το κλάσμα της πρώτης στήλης» και αμέσως μετά «πόσα στοιχεία έχει η τροχιά» και το επαναλαμβάνω σε όλα τα στοιχεία χωρίς το τελευταίο.

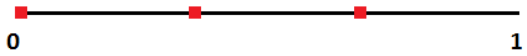
Εκεί με το άκουσμα των αριθμών αμέσως γίνεται η σύνδεση. Είναι λίγο καθοδηγητικό αλλά μπορεί να χρειαστεί. «Οπότε που καταλήγουμε; Με τι σχετίζεται το πλήθος αυτό για κάθε αριθμό? Κάντε μια εικασία». Εδώ περιμένω να μου πουν ότι όσος είναι ο παρανομαστής τόσο είναι και το πλήθος της τροχιάς. Τότε φέρω την τελευταία τροχιά του 3/6 και τους ρωτώ αν ισχύει κι εδώ. Μπορείτε να βρείτε την ιδιαιτερότητα αυτού του κλάσματος σε σχέση με τα αλλά; Να δουν, δηλαδή, ότι δεν είναι ανάγωγο. «Μετατρέψτε το σε ανάγωγο. Τώρα ισχύει η προηγούμενη εικασία;» Τότε ζητώ να τροποποιήσουν την εικασία τους κατάλληλα ώστε να περιλαμβάνει όλες τις περιπτώσεις. Συζητάμε λίγο για την ισοδυναμία κλασμάτων. Είναι φανερό ότι τα ισοδύναμα κλάσματα θα έχουν ίδια τροχιά. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό θέλω να το διαπιστώσουν γι αυτό έχω βάλει το 1/3 και τα 2/3 που έχουν τα ίδια σύνολα ως τροχιά. Καταλήγουμε στην τελική εικασία: «Αν έχουμε ένα ανάγωγο κλάσμα κ/λ τότε η τροχιά αποτελείται από λ στοιχεία». Τους ζητώ να τη γράψουν. «Η εικασία σας είναι σωστή και μάλιστα είναι διπλή η συνεπαγωγή αλλά για να γίνει πρόταση χρειάζεται απόδειξη. Αυτή μπορεί να γίνει αργότερα για να μη χαλάσουμε τη ροη του μαθήματος τώρα. Προς το παρόν τη δέχεστε γιατί σας λέω ότι την έχω αποδείξει». Η απόδειξη δεν έχει δυσκολία αλλά κατά τη γνώμη μου απαιτεί μια οικειότητα με τις έννοιες που μάθαμε μόλις και ίσως δημιουργήσει αναστάτωση αν αναφερθούν όλα μαζί. Η αναφορά ότι η απόδειξη υπάρχει είναι απαραίτητη.

Μετά ακολουθεί η γραφική παράσταση των στοιχείων του πινάκα στην τρίτη στήλη του φύλλου. Εκεί μπορεί να γίνει και με χωρισμό το [0,1) σε τόσα ίσα μέρη όσα στοιχεία έχει το σύνολο ή με την παραδοσιακή αναπαράσταση.

Προχωρούμε στο Φύλλο 3 που είναι αντιστοίχιση. Ο ορισμός των ρητών είναι: «οι αριθμοί που **μπορούν** να γραφούν ως κλάσματα ακέραιων» αυτό το «μπορούν» είναι ο κύριος στόχος του φύλλου 3.

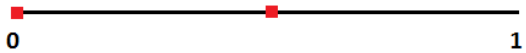
αντιστοιχιση

$\frac{4}{5}$



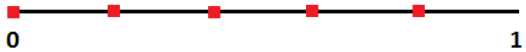
$\frac{111}{222}$

$\frac{1}{4}$



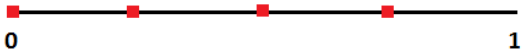
$\frac{2}{4}$

$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = ___$



$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = ___$

0,4= ___



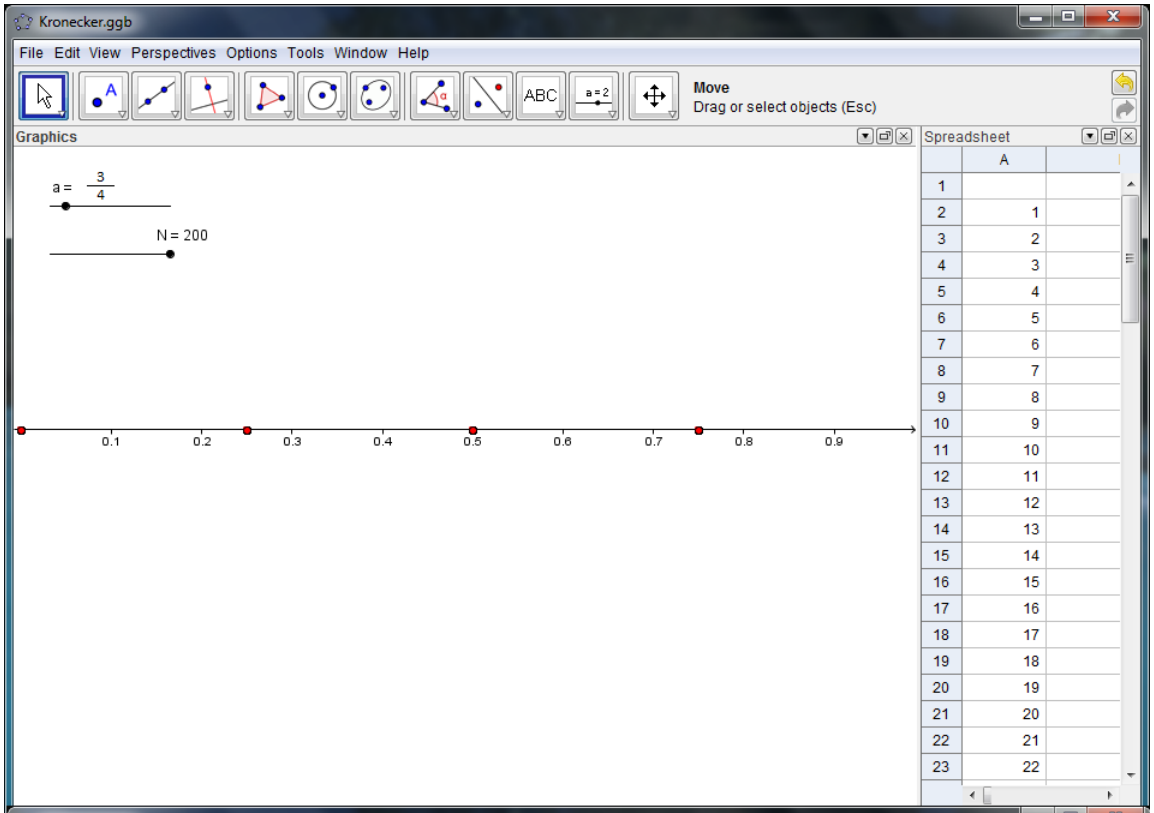
0,33333...= ___

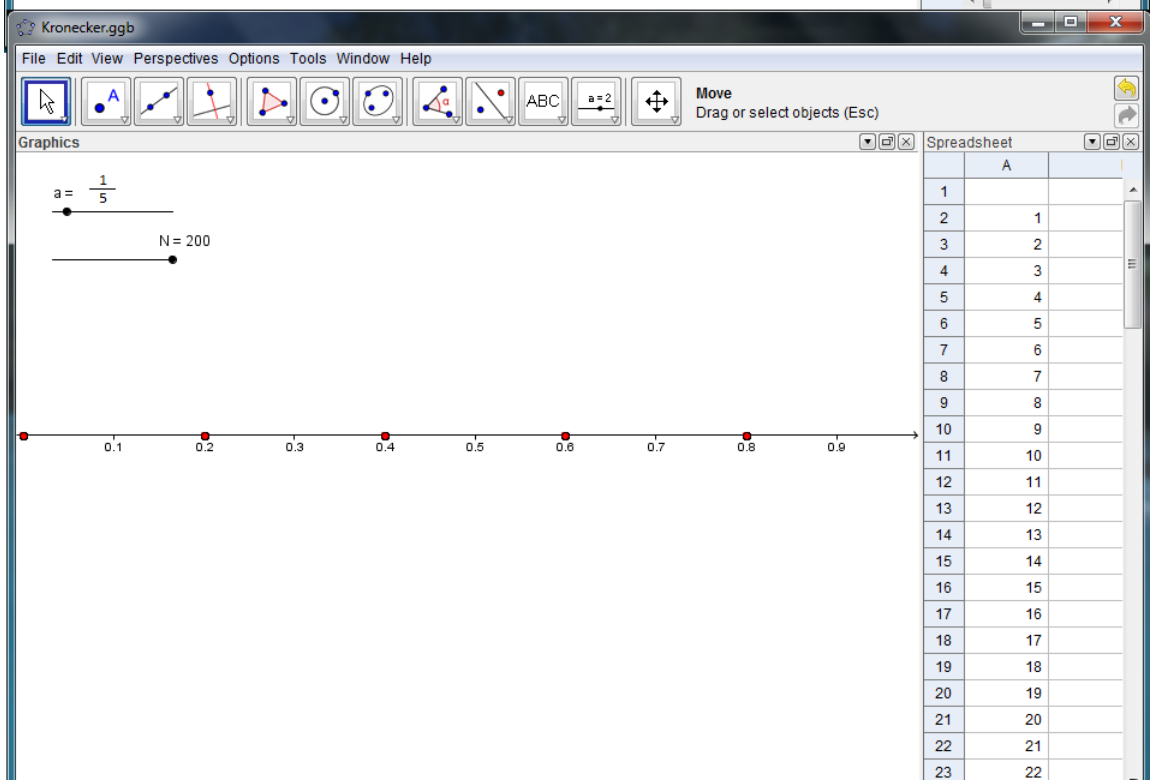
Φύλλο 3

Αυτό φαίνεται από την επιλογή μορφών που δεν είναι κλάσματα ακέραιων και δίπλα υπάρχει το =----- . Αυτό ζητά να συμπληρωθεί με την κατάλληλη μορφή που θα τους επιτρέψει να εφαρμόσουν την πρόταση που ανακάλυψαν. Φυσικά με αυτό το φυλλάδιο θέλω και να ελέγξω ότι μπορούν να εφαρμόσουν σωστά την πρόταση (πχ στα ισοδύναμα κλάσματα) και να βγάλουν τις αντιστοιχίες χωρίς να κάνουν πράξεις με κλασματικά μέρη. (Πάντα σε ζευγάρια)

Μέρος τρίτο: ο Η/Υ

Τώρα τους εξηγώ ότι μέσω ενός προγράμματος μπορούμε να βλέπουμε τις τροχιές για όλους τους αριθμούς. (παραθέτω εικόνες)

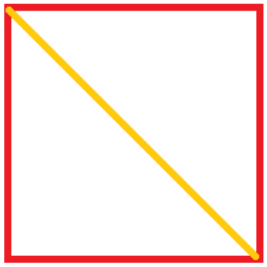




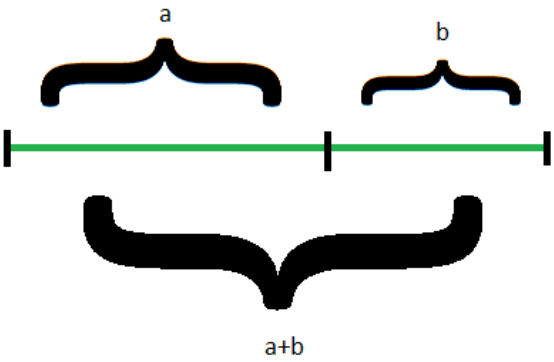
«Τώρα ανοίγουμε τον Η/Υ. Για να δούμε τι κάνατε… Πρώτα θα επιβεβαιώσουμε μερικά από τα δικά σας αποτελέσματα.» Αφού διαπιστώσουμε τη συμφωνία των δικών τους αποτελεσμάτων με του προγράμματος προχωρούμε στο επόμενο βήμα.

Εδώ θα περάσουμε σε άπειρες τροχιές για τους αριθμούς που αναφέραμε πριν ως άρρητους $\sqrt{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Η χρυσή τομή, ο λόγος περιφέρειας κύκλου με τη διάμετρο και πλευράς με διαγώνιο τετραγώνου. «Έχουμε μάθει από το γυμνάσιο ότι ο λόγος περιφέρειας κύκλου με τη διάμετρο μας δίνει το;;;» το π=3,14159… «με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχω ότι ο λόγος διαγωνίου με πλευρά τετραγώνου μας κάνει 1,414…» και με ένα τριώνυμο όπως έχει το σχολικό στη Γ' γυμνασίου έχω ότι για τη χρυσή τομή προκύπτει ο λόγος 1,618…

Τώρα δίνουμε το Φύλλο 4 που φαίνεται η γεωμετρική κατασκευή των αριθμών και θα ελέγξουμε τις τροχιές τους.

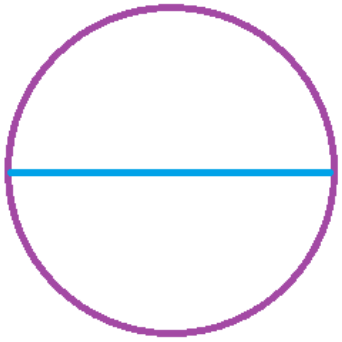


$$\frac{\text{διαγωνιος}}{\text{πλευρα}} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

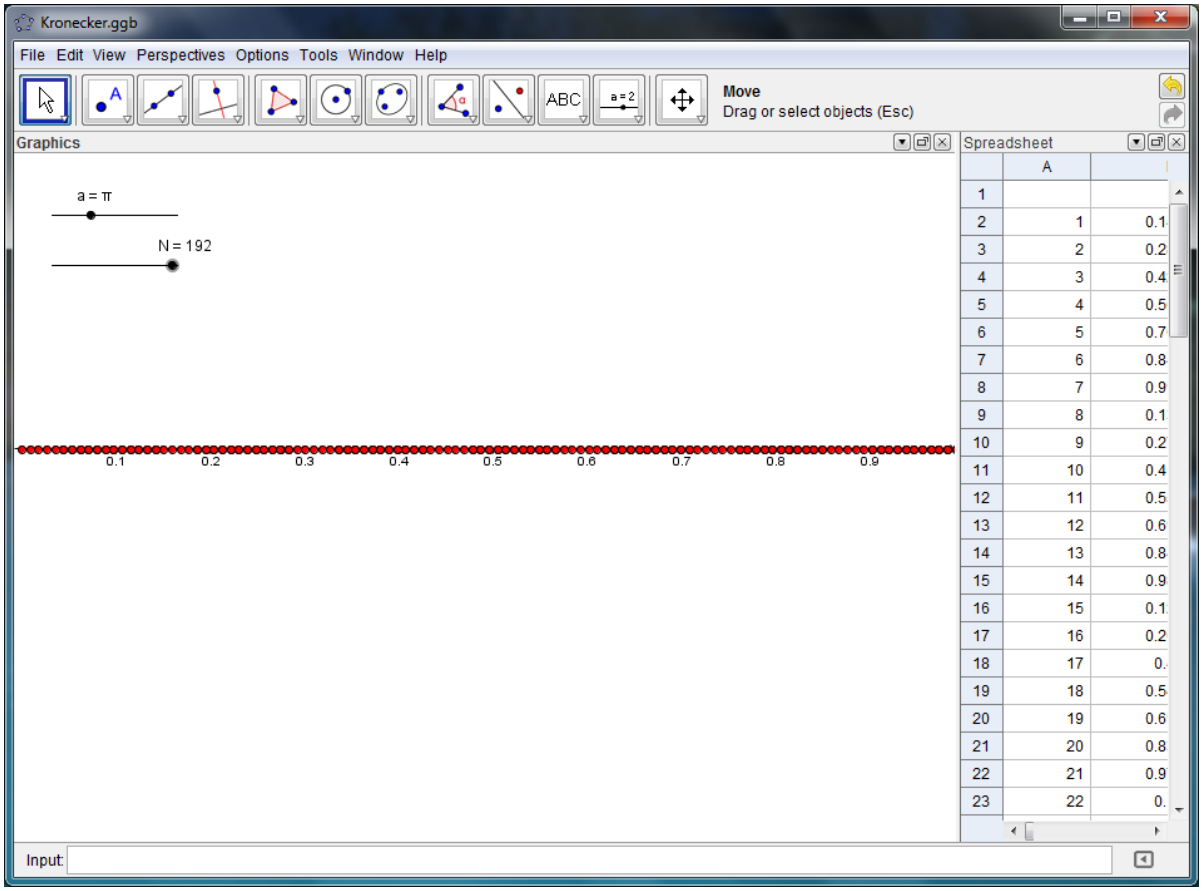
$$\phi = 1{,}618\ldots$$



$$\frac{\text{περιμετρος}}{\text{διαμετρος}} = \pi = 3{,}1415926\ldots$$

«Αν θέλαμε να δούμε την τροχιά αυτών των αριθμών θα ήταν αδύνατο με χαρτί και μολύβι. Εδώ έρχεται να μας βοηθήσει το πρόγραμμα που είδαμε πριν για παράσταση στο [0,1) της τροχιάς αυτών των αριθμών. Για να δούμε»

Παραθέτω ενδεικτικά την εικόνα για το π



Μηδενίζω το δρομέα και ξεκινάω να ανεβάζω τα πολλαπλάσια μέχρι το 200 που είναι υπεραρκετά και στις τρεις περιπτώσεις να γεμίσουν πυκνές κουκίδες το [0,1).

Μέρος τέταρτο: οι άρρητοι

«Εδώ πόσα στοιχεία έχει η τροχιά;» ∞ άπειρα

«Ας θυμηθούμε την πρόταση που βρήκαμε πριν. Βρείτε την εκεί που τη γράψαμε να τη βλέπουμε». Αν έχουμε ένα ανάγωγο κλάσμα κ/λ τότε η τροχιά αποτελείται από λ στοιχεία και αντίστροφα αν η τροχιά του αριθμού αποτελείται από λ στοιχεία τότε ο αριθμός γράφεται ως ανάγωγο κλάσμα με παρανομαστή λ. Κι εδώ τίθεται το μεγάλο ερώτημα:

«Θα μπορούσαν αυτοί να γραφούν ως κλάσμα κι αν ναι με τι παρανομαστή;»

Αναμένω μέσω κουβέντας με όλη την ομάδα πλέον να καταλήξουμε πως όχι δε γίνεται. Άρα να βγάλουμε τον ορισμό και έναν επιπλέον χαρακτηρισμό των ρητών. Ακολουθεί η τυπική απόδειξη

Ορισμός

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο $O_x = \{(nx) | n \in \mathbb{Z}\}$ οπου $(x) = x - [x]$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του αριθμού, λέγεται η τροχιά του Kronecker.

Πρόταση (χαρακτηρισμός ρητών)

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow O_x$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του [0,1)

Απόδειξη

- Έστω $x = \frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{N}, (\kappa, \lambda) = 1$. Τότε $(\lambda x) = (0) = 0$, άρα $O_x = \{0, (x), \dots (\kappa x)\}$ είναι πεπερασμένο.
- Αντίστροφα αν O_x είναι πεπερασμένο τότε $\exists \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \mu < \nu :$ $(\mu x) = (\nu x)$. Άρα $\nu x - \mu x = \kappa \in \mathbb{Z}$ οπότε $x = \frac{\kappa}{\nu - \mu} \in \mathbb{Q}$. [5]

<u>Επέκταση</u>

Συζήτηση για την ασυμμετρία, δηλαδή τη μη ύπαρξη κοινού μέτρου. Είναι πολύ σημαντικό μέσω των προβλημάτων της αρχαιότητας να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της ασυμμετρίας ποιοτικά κι όχι άπλα μέσω ορισμών.

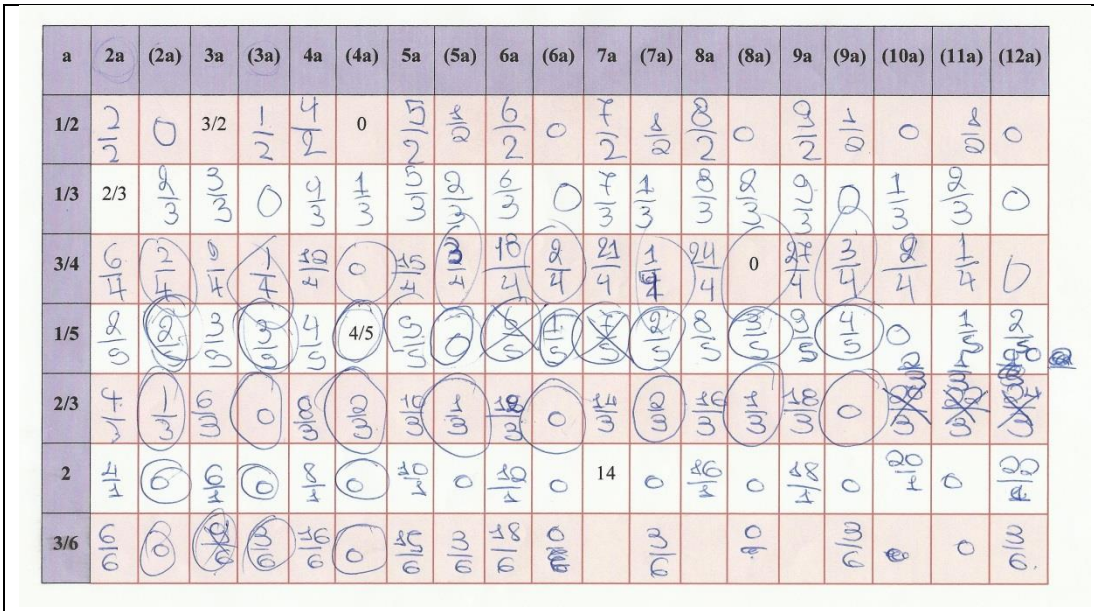
3.2 Συνέντευξη

Μαθητές: δυο μαθητές Α λυκείου
Ηλικία: 16 ετών
Φύλο: ένα αγόρι - ένα κορίτσι
Βαθμολογίες: 17 και 16 αντίστοιχα
Χώρος: σε σπίτι
Χρόνος: 2 διδακτικές ώρες

Απομαγνητοφώνηση

Καθηγητής	Μαθητής	Μαθήτρια
Είμαστε έτοιμοι. Ξεκινάμε! Πρώτα θα Κάνουμε μία εισαγωγή για δύο επαναληπτικές έννοιες και μετά θα μπούμε στο ψητό. Θέλετε να έρθετε πιο κοντά.		
		Θέλετε να καθίσετε στην μέση;
Όχι, θέλω να είστε δίπλα δίπλα.		
Λοιπόν είναι πολύ απλό αυτό που θα πούμε, δεν έχει καμία δυσκολία. Ας πούμε ότι έχουμε έναν αριθμό π.χ. το 1,27. Αυτό που είναι πριν την υποδιαστολή το λέμε ακέραιο μέρος και αυτό που είναι μετά την υποδιαστολή το λέμε δεκαδικό μέρος. Ωραία;		
Δεν έχουμε δυσκολία σε αυτό;		
	Όχι	Όχι
Αντίστοιχα εάν έχουμε ένα κλάσμα το 5/3 θέλουμε να βρούμε και εδώ το ακέραιο μέρος και το δεκαδικό-κλασματικό μέρος. Πώς θα		

το κάνουμε αυτό; Με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο. Βρίσκουμε πόσες φορές χωράει.		
	Γιατί δεν κάνουμε την διαίρεση;	
Αυτό είναι περίπου. 5=3*1+2 Άρα το 5/3=1+ 2/3		
Αυτό (δείχνοντας το 1) είναι το ακέραιο μέρος και αυτό (δείχνοντας το 2/3) είναι το κλασματικό μέρος. Τα ξέρετε αυτά ή να τα κάνουμε πιο αναλυτικά;		
	Τα ξέρουμε.	(Γελάει)
Εσύ γελάς, θα κάνουμε μερικά παραδείγματα. 7/2 ας πούμε. Αυτό πως θα γίνει;		
		Τρία συν (…)
	Δεύτερα πρέπει να έχει.	
		Που;
Κάνουμε την ευκλείδεια διαίρεση 7 δια 2 πόσες φορές χωράει , 3 και περισσεύει 1 άρα αυτό (δείχνουμε το 3) θα γίνει το ακέραιο μέρος και το 1 με τον αρχικό παρονομαστή θα γίνει το κλασματικό μέρος. Θα δούμε κατά πόσον το καταλάβατε τώρα που θα συμπληρώσετε αυτό εδώ το φυλλάδιο που είναι πολύ ευχάριστο γεμάτο πράξεις.		
Δίνεται ο πίνακας 1		



a	2a	(2a)	3a	(3a)	4a	(4a)	5a	(5a)	6a	(6a)	7a	(7a)	8a	(8a)	9a	(9a)	(10a)	(11a)	(12a)
1/2	2/2	0	3/2	1/2	4/2	0	5/2	1/2	6/2	0	7/2	1/2	8/2	0	9/2	1/2	0	1/2	0
1/3	2/3	2/3	3/3	0	4/3	1/3	5/3	2/3	6/3	0	7/3	1/3	8/3	2/3	9/3	0	1/3	2/3	0
3/4	6/4	2/4	3/4	1/4	12/4	0	15/4	3/4	18/4	2/4	21/4	1/4	24/4	0	27/4	3/4	2/4	1/4	0
1/5	2/5	2/5	3/5	3/5	4/5	4/5	5/5	0	6/5	1/5	7/5	2/5	8/5	3/5	9/5	4/5	0	1/5	2/5
2/3	4/3	1/3	6/3	0	8/3	2/3	10/3	1/3	12/3	0	14/3	2/3	16/3	1/3	18/3	0	2/3	1/3	2/3
2	4/1	0	6/1	0	8/1	0	10/1	0	12/1	0	14	0	16/1	0	18/1	0	20/1	0	22/1
3/6	6/6	0	9/6	3/6	16/6	0	15/6	3/6	18/6	0		3/6		0		3/6		0	3/6

Για να δούμε λίγο μαζί τι θέλει. Εδωπέρα έχεις κάποιους αριθμούς σε κάθε γραμμή. Είναι συνεργατικό		
		Γιατί είναι μόνο ένα;
Επίτηδες είναι ένα φύλλο γιατί πρέπει να συνεργαστείτε χωρίς να τσακωθείτε		
Εδώ τι έχουμε; ½ σου λέει να το κάνεις επί 2 επί 3, 4, 5 κλπ Η παρένθεση (2α) εννοεί το κλασματικό μέρος. Θα ξεκινήσουμε την πρώτη γραμμή μαζί σαν παράδειγμα. Το ½ το κάνω επί 2 και γίνεται 2/2=1. Δεν έχει κλασματικό μέρος είναι όλος ακέραιος, άρα στην θέση του κλασματικού μέρους θα βάλω 0. Τώρα το κάνω επί 3 και γίνεται 3/2		
	Αυτό δεν κατάλαβα	
Το ½ το έκανα επί 3 και		

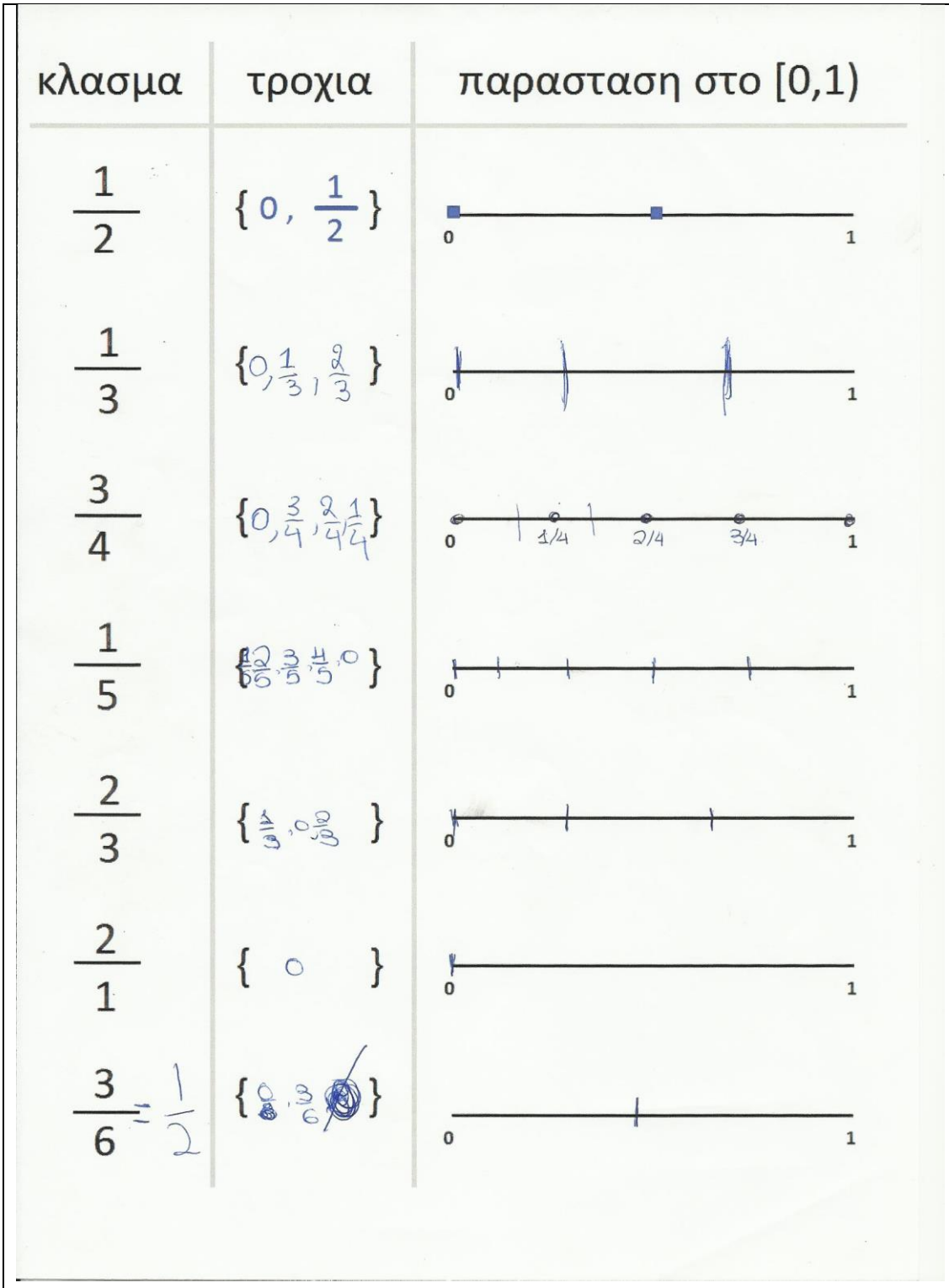
έγινε 3/2 και τώρα κάνουμε αυτό που μάθαμε πριν, 3=1*2+ 1, άρα βγαίνει 1 ½ . Άρα συμπληρώνω σε αυτή την θέση το κλασματικό μέρος δηλαδή το ½.		
	Όχι, άλλη μία.	
Στη θέση (3α) βάζουμε το κλασματικό μέρος του αριθμού αφού έχει πολλαπλασιαστεί επί 3. ΟΚ;		
	ΟΚ	ΟΚ
Ο αριθμός είναι 3/2 = 1 ½		
	Να το δούμε και σε ένα άλλο παράδειγμα;	
		Θα μπορούσαν τα 2α και (2α) να είναι μια στήλη και τα 3α (3α) κλπ.
Ναι, θα μπορούσε να έχει άλλο χρώμα στις στήλες αυτές για να ξεχωρίζουν αλλά εντάξει το καταλαβαίνετε και έτσι, είστε έξυπνα παιδιά.		
		Το λέω για να το φανταστεί.
Για να το φανταστεί πρέπει να ξυπνήσει πρώτα!		
	Έχω ξυπνήσει από τις 8 και έχω κάνει δύο προπονήσεις πόλο.	
Για να δούμε …. Έχουμε το ¾ το κάνουμε επί 2 όλοι μαζί, δηλαδή;		
	6/4	6/4
Και παίρνουμε το κλασματικό μέρος το οποίο είναι;		
	2/4	
Ωραία το κάνουμε τώρα επί		

3		
	9/4	9/4
Και το κλασματικό μέρος το οποίο είναι; Από ’κει… (δείχνοντας τη μαθήτρια)		
		Λοιπόν,(…) έχουμε το ¾ το κάνουμε επί 3 (…)
Όπως πριν		
		Α ναι το θυμήθηκα ¼ ! Είμαι πανέξυπνη
Για πάμε άλλο ένα να είμαστε σίγουροι. Το 2/3		
		4/3 1/3
Νομίζω είμαστε έτοιμοι να τον συμπληρώσετε μόνοι σας.		
		Α, πρέπει όλα;
	Αυτό είναι μόνο;	
Αυτό είναι μόνο η αρχή!		
Συμπληρώνεται ο πίνακας		
		(στην πρώτη γραμμή) όλα ½ είναι;
Δεν είναι μόνο το ½ και τι άλλο υπάρχει;		
		μηδέν
Στο τέλος που έχει μόνο κλασματικά μέρη να συμπληρώσεις πως πιστεύετε ότι θα συνεχιστεί;		
		0 ½
Ναι αστέρι είσαι. Εξήγησε το στον Μ.		
	Γιατί είναι 0;	Αφού σε αυτά χωράει ακριβώς
Το ’χουμε;		
	Μην τα κάνεις όλα	
Έχει αρκετά και για τους δύο.		

2’ (…)		
		Ποιο είναι το νόημα αυτής της άσκησης;
Είναι εισαγωγική θα φανεί σε λίγο.		
2’ (…)		
	Εδώ πως τα βρίσκουμε;	
Στα τελευταία βήματα δεν χρειάζεται να κάνεις τις πράξεις άμα έχεις βρει πως προχωράει η ιστορία		
	Πώς;	
Κύκλωσε τα κλασματικά μέρη		
	οκ	
Για παρατήρησε πως είναι το μοτίβο;		
	(Τα συμπληρώνει σωστά)	
Εσύ συμφωνείς; (προς τη μαθήτρια)		
		Μμμμμμ
Για κάνε το επόμενο		
		(Στην αρχή μπερδεύτηκε και κύκλωσε τα ακέραια μέρη αλλά μετά τα διόρθωσε και τα συμπλήρωσε σωστά)
Μην τα κάνεις όλα μόνο σου (προς το μαθητή)		
	Μία γραμμή ο καθένας.	
2’ (…)		
	Στο 2/3 που είναι πιο μικρό από το 1 τι κάνουμε;	
Πολύ ωραία ερώτηση		

		Εγώ το ξέρω!
Για δείξε μας εσύ που το ξέρεις		
		Θα βάλεις το 3 στο 20 και θα γίνει 0, άρα 0
Αυτό είναι το κλασματικό ή το ακέραιο μέρος;		
		Αααα! Το ακέραιο
Και τι μένει στο κλασματικό;		
		2/3;
Ναι		
		Γιατί κάνει τόση φασαρία; (δείχνει το κασετόφωνο)
	Υπάρχουν ακόμη τέτοια πράγματα; (γελάει)	
Συνεχίζουμε! Για να δούμε τώρα είσαι έτοιμη να βγάλεις …		[σηκώνει το χέρι εννοώντας να περιμένω]
		(…) να δω πως πάει τώρα
Θα σε βοηθήσει Για να τα ξεχωρίζεις να κυκλώνεις τα κλασματικά μέρη		
		Εγώ είμαι έτοιμη. Τα ξέρω.
(μετά από λίγο αφού δεν έχει απαντήσει) Κύκλωσε τα κλασματικά μέρη		
		Αυτό, αυτό, αυτό…
		(διαβάζει δυνατά τα κλασματικά μέρη για το 2/3) 1/3, 0, 2/3, 1/3, 0, 2/3, 1/3, 0, 2/3
Ωραία! Μπράβο!		
		Συμπληρώνει (9α) (10α) (11α) (12 α)

		Και γιατί τα κάνουμε όλα αυτά;
Έρχονται ενδιαφέρουσες ασκήσεις και προβλήματα από την αρχαιότητα		
(2’ συμπλήρωση πίνακα)		
	Έκανα δύο, τώρα η σειρά σου	
Τυχερή τα πιο εύκολα σου άφησε		
		(συμπληρώνει την τροχιά για το 2 που είναι όλα 0) Αυτό το βοηθητικό (το 14) είναι επειδή είναι πολύ δύσκολο ε; (γελάει)
		0/1;
Πόσο κάνει 0/1		
		0 σκέτο
(τελειώνουν τον πίνακα) Σωστά είναι , ο σκοπός ήταν να πιάσετε το μοτίβο		
Φέρνω το φύλλο 2		



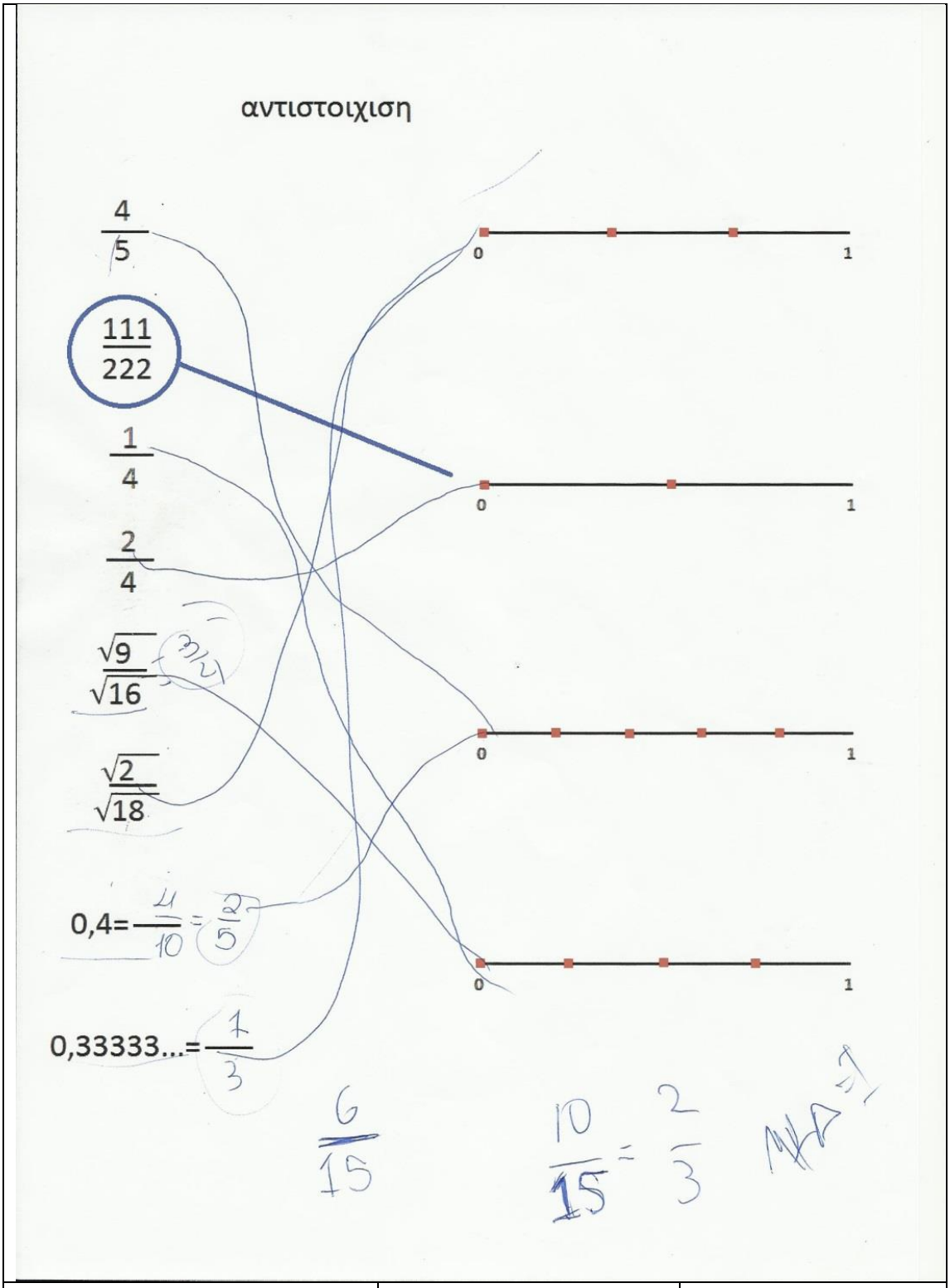
κλασμα	τροχια	παρασταση στο [0,1)
$\frac{1}{2}$	$\{0, \frac{1}{2}\}$	0 1
$\frac{1}{3}$	$\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$	0 1
$\frac{3}{4}$	$\{0, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\}$	0 1/4 2/4 3/4 1
$\frac{1}{5}$	$\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\}$	0 1
$\frac{2}{3}$	$\{\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\}$	0 1
$\frac{2}{1}$	$\{0\}$	0 1
$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\{0, \frac{3}{6}\}$	0 1

Στην μεσαία στήλη συμπληρώνουμε ποια είναι τα κλασματικά μέρη που εμφανίζονται συνολικά σε κάθε γραμμή πχ. Στο πρώτο είναι συμπληρωμένο {0, ½}		

	Αρχίζω! (συμπληρώνει τα δύο πρώτα) Να κάνω και την άλλη στήλη;	
Όχι ακόμη		
		2/5, 3/5, 4/5, 5/5,
Αυτό είναι κυκλωμένο;		
		Α, όχι. 0 ,1/5 .
Συμφωνείς;		
	Ναι	
Τώρα έχω το εξής ερώτημα: Πόσα στοιχεία έχει αυτό το σύνολο;		
	Δυο	
Αυτό; (τους τα έδειχνα με τη σειρά)		
	Τρία	
Αυτό;		
		Τέσσερα
Αυτό;		
		Πέντε
Αυτό;		
	Τρία	
Αυτό;		
		Ένα
Και αυτό;		
	Δυο	
Ωραία , με τι σχετίζεται αυτός ο αριθμός;		
	(δείχνει την τρίτη στήλη) Εδώ που έχουμε δύο το χωρίζουμε σε δύο ίσα μέρη.	
Με την τρίτη στήλη θα ασχοληθούμε σε λίγο. Θέλω να διαβάσεις δυνατά τον αριθμό της πρώτης στήλης και το πλήθος των στοιχείων της αντίστοιχης τροχιάς .		
	½ - 2 , 1/3 – 3,	1/5 – 5

	¾ - 4	
	Οι παρονομαστές .	
Δηλαδή η συσχέτιση είναι… Πέστο σαν μία πρόταση ολόκληρη		
	Ο αριθμός του παρονομαστή είναι ίσος με τον αριθμό στοιχείων	
		Εγώ ήθελα να το πω
Πολύ ωραία ως εδώ. εδώ {0, 3/6} πόσα στοιχεία έχει;		
	τρία στοιχεία	
Αυτό δεν είναι στοιχείο είναι η μουτζούρα σου		
	(γελάει) Δεν είναι δικιά μου! Δύο στοιχεία.	
Ποιος είναι ο παρονομαστής;		
		6
Και πόσα στοιχεία έχει το σύνολο;		
		Δυο
Είπατε πριν ότι όσα στοιχεία έχει ο παρονομαστής τόσο είναι και το πλήθος του συνόλου. τώρα ισχύει αυτό;		
	Όχι	Όχι
Γιατί;		
	(…)	(…)
Ποιος αριθμός θα είχε στην τροχιά του 2 στοιχεία;		
		Το ½
	Όχι, μόνο το ½.	
Και ποιο άλλο ;		
	Τα 2/2 όχι ,όχι, τα 3/2	
Πολύ ωραία!		
Ας επανέλθουμε στην προηγούμενη ερώτηση		

	Εγώ το βρήκα!	
Για πες…		
	Αν απλοποιήσω αυτό το κλάσμα (3/6) τότε παίρνω ½ . πρέπει να είναι απλοποιημένο .	
Αυτό το κλάσμα δεν είναι ανάγωγο. Η λέξη ανάγωγο σημαίνει ότι δεν μπορεί να απλοποιηθεί		
Άρα η υπόθεσή σας ισχύει για όλα τα κλάσματα;		
	Όχι. Μόνο για ανάγωγα.	
Πάρα πολύ ωραία, φθάσαμε σε ένα κομβικό σημείο.		
Συζήτηση για την παράσταση αριθμού στον άξονα		
Στη στήλη 3 πρέπει να τοποθετήσουμε τους αριθμούς της κάθε τροχιάς πάνω στον αντίστοιχο άξονα. Τα ξέρετε αυτά;		
	Ναι	Ναι
Μπορείτε να το κάνετε και με τη δεκαδική μορφή		
	Δεν χρειάζεται. Το χωρίζουμε σε 3 μέρη (για το 1/3)	
		Σε 4 μέρη για το ¾
Για βάλε μου αριθμούς κάτω από κάθε τελίτσα		
	(συνεχίζουν χωρίς πρόβλημα τη συμπλήρωση της τρίτης στήλης) 1’	
(εισαγωγή φύλλου 3) Τώρα έχουμε να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία		



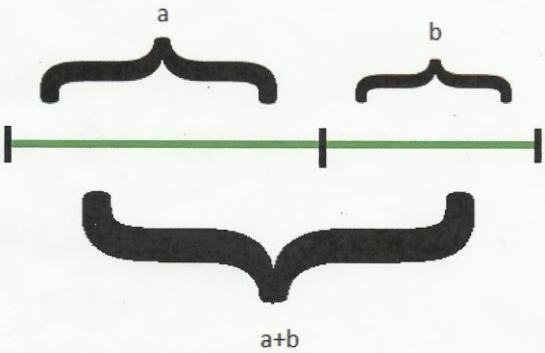
	Αυτό είναι εύκολο	

Για να δούμε… Αφού έχετε κάνει αυτή την διαδικασία , έχετε βρει πως δουλεύει δεν χρειάζεται να κάνουμε όλη την διαδικασία από την αρχή για κάθε κλάσμα, θα μπορείτε να κάνετε τις υποθέσεις για το ποια θα είναι η τροχιά χωρίς να κάτσουμε να γράψουμε όλες τις πράξεις όπως πριν.		
	(τραβά κατευθείαν γραμμή από το $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$ στην αντίστοιχη τροχιά του)	
Ώπα! Τι έγινε;		
	Αφού είναι το 3/4	
Μπράβο! Γράψε δίπλα ίσο με 3/4		
		Κι εγώ! Τι ακριβώς κάνουμε;
(Της δείχνω ξανά το προηγούμενο φύλλο) Όπως εδώ στο 1/3 αντιστοιχίζουμε αυτή την παράσταση στο 1/5 αυτή κλπ… Το ίδιο θέλουμε να κάνουμε και εδώ.		
Προτού το συμπληρώσουμε θέλω και οι δύο να επαναλάβετε την εικασία που βγάλατε πριν. Γράψτε το σε ένα χαρτί.		
	(Γράφουν ο αριθμός του παρονομαστή είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων της τροχιάς όταν τα κλάσματα είναι ανάγωγα και χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τόσα ίσα μέρη.)	
		(Αντιστοιχίζει το 4/5 στην

		παράστασή του)
	Πώς έγινε αυτό ;	
Τι σε μπερδεύει;		
	Πρώτα πρέπει να το κάνουμε ανάγωγο.	
Το 4/5 απλοποιείται παραπάνω;		
	Όχι	
Άρα;		
	Πέντε ,τώρα εγώ θα κάνω τα δύσκολα	
	(αντιστοιχίζουν το $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ στην παράσταση του)	
Αυτό πως το κάνατε;		
		Απλοποιούμε δια 2 δια 2 μέσα στη ρίζα και μένει ρίζα 1/9 δηλαδή 1/3
Τι αστέρια είναι αυτά!		
(Αντιστοιχίζουν το 2/4 σωστά)		
Το 0,4 είναι κλάσμα;		
	Όχι	
Θα μπορούσε να γίνει;		
	4/10	
		4/10 = 2/5
Μπράβο! Για να δούμε το τελευταίο ποιος θα μπορέσει;		
	Μισό ,θα το βρω.	
		Εγώ δεν θυμάμαι πως κάνουμε τους περιοδικούς .
		Είναι το πρώτο γιατί έχει τα λιγότερα (γελάει)
Δεν είναι απάντηση αυτή		
Θα σας κάνω ένα παράδειγμα: το 0,252525 = 25/99		
	Βρήκα ποιο είναι, είναι το 1/3	

Πολύ ωραία, τώρα θα χρειαστούμε την βοήθεια του υπολογιστή.		
		Ααα geogebra ! Μας κάνουν και στο σχολείο
	Ο δικός σας. Εμείς όχι	
Για πάμε να επιβεβαιώσουμε τις αντιστοιχίσεις να δούμε ότι τις έχετε κάνει σωστά		
		Ωραία το ξέρουμε ότι είναι σωστά διότι τα έκανα εγώ
Βάζουμε το 4/5 μία, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε τελίτσες είναι αυτές εδώ όπως το κάνατε.		
(τους δείχνω το 2/3 και το ¾)		
	Σωστό είναι	
Τα ξέρετε καλά! Στην αρχαιότητα οι Έλληνες είχαν μελετήσει κάποια προβλήματα λόγων όπως η σχέση πλευράς-διαγωνίου στο τετράγωνο, η χρυσή τομή, η σχέση της περιμέτρου προς την διάμετρο του κύκλου		
		Η χρυσή τομή είναι ο τύπος με τα χέρια;
Ναι, το σχέδιο του Da Vinci εννοεις…		
Εισαγωγή φύλλου 4		

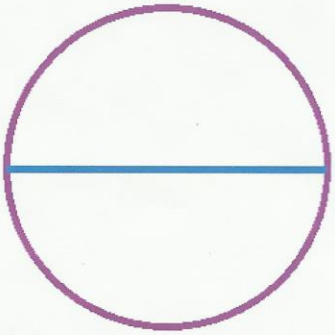
$$\frac{\text{διαγωνιος}}{\text{πλευρα}} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\phi = 1{,}618\ldots$$

$\infty^0 = 1$ $\quad \frac{\infty}{\infty} \neq 1$ $\quad \frac{a}{a} = 1$



$3^0 = 1$

$$\frac{\text{περιμετρος}}{\text{διαμετρος}} = \pi = 3{,}1415926\ldots$$

ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Ο χρυσός λόγος είχε άλλες ιδιότητες μαθηματικές γι αυτό είχε τέτοια απήχηση στην αρχαιότητα. Η περίμετρος του κύκλου προς την διάμετρο σίγουρα ξέρετε πόσο κάνει…		

	Το 3,14 ;	
Το π που είναι περίπου 3,14		
	Αυτό δεν τελειώνει ποτέ!	
		Γιατί αλλάζετε κασέτα;
Γιατί τελείωσε η άλλη		
		Άρα τελείωσε και το μάθημα!
Για να δούμε λίγο τι είναι η χρυσή τομή: είναι ένας τρόπος να χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη ώστε το όλον προς το μεγάλο να είναι ίσο με το μεγάλο προς το μικρό . αυτό καταλήγει σε ένα τριώνυμο και επειδή είναι πρόβλημα γεωμετρίας δεχόμαστε μόνο την θετική λύση φ=1,618… που και αυτός δεν τελειώνει ποτέ. Με ένα απλό πυθαγόρειο εύκολα υπολογίζουμε το λόγο διαγωνίου προς πλευρά το γνωστό μας ρίζα 2. Με την βοήθεια του προγράμματος θα δούμε ποια θα είναι η τροχιά για τους παραπάνω αριθμούς δηλαδή αυτά που κάναμε για τα 1/5, ¾, κλπ θα τα κάνουμε τώρα για τους καινούργιους μας αριθμούς .		
	Το ‘χουμε.	
Ποιο να βάλω πρώτο;		
	Το π.	
		Γράψατε pi και βγαίνει π;
Για να δούμε, κάνουμε την		

διαδικασία όπως πριν x2, x3, x10, x122 κλπ και τι βλέπετε ότι έγινε;		
		Τι;
Να δούμε και τα άλλα;		
	Καλύτερα ναι	μμμ
Το μηδενίζουμε και πάμε για την ρίζα δύο sqrt απ το square root και πάμε να κάνουμε ξανά x2, x3, x15, x77 κλπ		
	Πυκνό φαίνεται!	
Πυκνό! Πολύ ωραία λέξη! Πάμε να δούμε το φ.		
	Βάλτε 1,618…	
Όχι δε γίνεται έτσι! (…) Να το βγήκε 1,6 κλπ		
(το βλέπουμε)		
Και στις τρεις περιπτώσεις τι παρατηρήσαμε ότι έγινε;		
	Πολλές πυκνές τελίτσες	
		Παντού, σε λίγο γίνονται εκατομμύρια.
	Πιο πολύ ,είναι πυκνά , απλώνονται ενώ πριν είχαν ένα μοτίβο	
Πιστεύεις ότι είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός στο πλήθος;		
	Όχι	
Πόσα θα μπορούσαν να είναι;		
		Αυτό ∞ (γράφει στο χαρτί το σύμβολο του απείρου)
Τι είναι αυτό που συμβολίσατε στο χαρτί; Πρέπει να το πείτε δυνατά για να γράψει η κασέτα.		
	Το άπειρο	

Έχουμε φθάσει σε πολύ καλό σημείο και τώρα έρχεται η ερώτηση κλειδί. Πρώτα να θυμηθούμε την εικασία μας		
	Ο αριθμός του παρονομαστή είναι ίσος με τον αριθμό των στοιχείων της τροχιάς όταν τα κλάσματα είναι ανάγωγα και χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα σε τόσα ίσα μέρη.	
Τώρα το πλήθος των στοιχείων τι μας βγήκε; Θα μπορούσαν να γραφτούν ως κλάσματα και εάν ναι με τι παρονομαστή		
	Κλάσμα με παρονομαστή το άπειρο ;	
Ξέρεις να υπάρχει κάτι τέτοιο;		
	Το άπειρο προς άπειρο που κάνει 1.	
Ωχ αυτό θέλει πολλή συζήτηση! Καταρχήν ένα πράγμα πρέπει να ξέρετε για το άπειρο , θα σας το πω τώρα μία για πάντα. Το άπειρο ΔΕΝ είναι πραγματικός αριθμός κατά συνέπεια όλα τα αξιώματα και οι ιδιότητες που ξέρετε για τους πραγματικούς αριθμούς δεν ισχύουν απαραίτητα για το άπειρο. Ξέρουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α εκτός από το 0 ισχύει α/α=1 για το άπειρο όμως που δεν είναι πραγματικός αριθμός δεν ισχύει αυτή η ιδιότητα.		
		Ούτε άπειρο στη μηδενική δεν κάνει 1;
Όχι, και αυτό δεν θα το		

μάθετε ούτε στην Γ' Λυκείου. Το άπειρο δια άπειρο λέγεται απροσδιόριστη μορφή και θα το συζητήσετε τότε στην κατεύθυνση.		
		Το άπειρο τι είναι;
	Περισσότερα θα μάθουμε στην Γ' Λυκείου.	
Ας επανέλθουμε στο φυλλάδιό μας τώρα. Πόσα στοιχεία έχει αυτό εδώ;		
	Άπειρα	
Με τι σχετίζεται το πλήθος των στοιχείων ;		
	Με τον παρονομαστή ενός ανάγωγου κλάσματος	
Αν το γράψουμε ως κλάσμα φυσικών , τι παρονομαστή θα έχει αυτό;		
	Άπειρο.	
Ωραία , άρα ;		
	Δεν μπορεί να γραφτεί σε κλάσμα	
Τι κλάσμα;		
	Φυσικών.	
		Ακεραίων.
Αυτός λοιπόν είναι και ο ορισμός των ρητών. Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα ακεραίων. Άρα αυτοί οι αριθμοί π, φ τι είναι;		
	Άρρητοι.	
Εμείς χρησιμοποιήσαμε ένα διαφορετικό τρόπο να προσεγγίσουμε την έννοια των ρητών και αρρήτων. Εκτός λοιπόν από τον		

ορισμό μπορείτε με αυτή τη νέα μέθοδο να χαρακτηρίσετε ρητούς και άρρητους;		
	Όλοι οι άρρητοι έχουν άπειρα στοιχεία στο διάστημα εδώ.	
Και οι ρητοί;		
	Όχι άπειρα.	
		Πεπερασμένα.
Και πόσα ακριβώς; Δηλαδή εάν θέλαμε μία παράσταση με 15 σημεία ποιο ή ποια κλάσματα θα μας έκαναν;		
	Το 15 για παρονομαστή	
Και αριθμητή;		
	Το 1	
Μόνο;		
	Το 7, το 10	
		2/3 είναι
Θέλουμε ένα με 6 στοιχεία. Πες μου μερικά κλάσματα. Εσύ (προς τη μαθήτρια)		
		1/6, 5/6, 7/6,
Κι ένα μη ανάγωγο κλάσμα που μπορεί να δώσει τα ίδια στοιχεία;		
	2/12=1/6	
Τα ισοδύναμα κλάσματα δηλαδή τι έχουν;		
	Ίδια παράσταση	
Αλλά προσοχή δεν ισχύει και το αντίστροφο όπως είδαμε και το 5/6 έχει την ίδια παράσταση. Αυτά!	Καλή Ανάσταση	Καλό Πάσχα

Συζήτηση

Παρόλο που το δείγμα μας είναι πολύ μικρό, μπορούμε να αναφέρουμε κάποιες παρατηρήσεις από την πρώτη αυτή παρέμβαση. Καταρχήν, για πρώτη φορά οι μαθητές αποκτούν μια εικόνα για την έννοια της αρρητότητας μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων. Αυτό πιστεύουμε ότι θα βοηθήσει τους μαθητές στην πιο βαθειά κατανόηση των ρητών και αρρήτων. Επίσης, πολύ ενθαρρυντικό είναι το ότι οι μαθητές κατάφεραν να κάνουν *εικασίες* που είναι το πρώτο βήμα στη μάθηση μιας νέας εννοίας. Τέλος, θα θέλαμε να αναφέρουμε ένα απρόσμενο συμβάν της συνέντευξης. Οι μαθητές προσπάθησαν να κάνουν πράξεις με το άπειρο σαν να ήταν πραγματικός αριθμός. Αυτό φαίνεται να είναι ένα ακόμη λεπτό σημείο που πρέπει να αποσαφηνιστεί στους μαθητές και θα το εντάξουμε στις προαπαιτούμενες γνώσεις στις επόμενες συνεντεύξεις μας. Θα συνεχίσουμε την έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα μιας τάξης για να μπορέσουμε να εξάγουμε ασφαλέστερα συμπεράσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Σημειώσεις του μαθήματος Δ14 Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών - Στοιχεία Ευκλείδη. Στ. Νεγρεπόντης

[2] Σημειώσεις του μαθήματος Δ26 Μαθηματική Ανάλυση Β. Φαρμάκη

[3] Σημειώσεις του μαθήματος Δ8 Ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδακτική ων μαθηματικών. Γ. Ψυχάρης

[4] Σημειώσεις του μαθήματος Δ3 Διδακτική Απειροστικού Λογισμού. Θ. Ζαχαριάδης

[5] Β.Φαρμάκη
PIGEONHOLE PRINCIPLE AND IRRATIONAL NUMBERS

[6] Maria Alessandra Marrioti, 2000
INTRODUCTION TO PROOF: THE MEDIATION OF A DYNAMIC SOFTWARE ENVIRONMENT

[7] Anna Baccaglini-Frank, Maria Alessandra Marrioti, 2010
GENERATING CONJECTURES IN DYNAMIC GEOMETRY: THE MAINTAINING DRAGGING MODEL

[8] Eustathios Giannakoulias, Alkeos Souyoul, Theodosios Zachariades, 2007
STUDENT'S THINKING ABOUT FUNDAMENTAL REAL NUMBERS PROPERTIES

[9] Merlyn J. Behr, Richard Lesh, Thomas R. Post, Edward A. Silver
RATIONAL-NUMBER CONSEPTS, Chapter 4

[10] Michael Gr. Voskoglou, Georgios D. Kosyvas, 2012
ANALYZING STUDENT'S DIFFICULTIES IN UNDERSTANDING REAL NUMBERS

[11] Yujing Ni, Yong-Di Zhou, 2005
TEACHING AND LEARNING FRACTION AND RATIONAL NUMBERS: THE ORIGINS AND IMPLICATIONS OF WHOLE NUMBER BIAS

[12] National Middle School Association
TEACHING FRACTIONS IN MIDDLE GRADES MATHEMATICS

[13] Θ. Ζαχαριάδης, Κ. Χρίστου, Δ. Πίττα-Πανταζή
ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

[14] Α. Γαγάτσης, Κ. Ιωάννου, Α. Σιημητρά-Κωνσταντίνου, Ο. Χριστοδουλίδου
ΓΙΑΤΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΥΣΚΟΛΕΥΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

[15] Στ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι ,ΙΙ

[16] Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών
ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

[17] Walter Rudin
PRINCIPAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS

[18] Γκαγκάρη Νικολαϊα
Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΣΘΗΣΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

[19] Spivak Michael
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ