ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΩΑΝΝΗ ΜΙΧΕΛΑΡΑΚΗ

Α.Μ Δ200905

ΘΕΜΑ : «ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ»

Αθήνα Ιούλιος 2012

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε σε συνεργασία με ερευνητικό πρόγραμμα που χρηματοδοτήθηκε από το Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας με τίτλο «Ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και γεωμετρίας - Η μετάβαση από το γυμνάσιο στο λύκειο» και κωδικό ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ/ΠΑΙΔΙ/0308 (ΒΕ)/03.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την … 5-7-2012……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)…Γαγάτσης Αθανάσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής- Αντιπρύτανης Παν/μίου Κύπρου	…….
2)…Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών	…….
3)…Πόταρη Δέσποινα	Αν. Καθηγήτρια Παν/μίου Αθηνών	…….

Αφιέρωση:

- Αντίδωρο αγάπης στην γυναίκα μου Ηλέκτρα
και τα παιδιά μας Μιχάλη, Χριστίνα, Αγγελική και Ευανθία.

- Στην Ελλάδα μας, που κατά το λόγο του Μακρυγιάννη «*όλα τα θεριά πολεμούν να μας φάνε και δεν μπορούνε, τρώνε από μας και μένει και μαγιά. Και οι ολίγοι αποφασίζουν να πεθάνουν. Κι όταν κάνουν αυτήνη την απόφασιν, λίγες φορές χάνουν και πολλές κερδαίνουν*».

Στο τέλος αυτής της έμπονης προσπάθειας ας μου επιτραπεί να ευχαριστήσω θερμά :

- Τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου καθηγητή κ. Γαγάτση για τη συνεργασία και την καθοδήγηση κατά τη διάρκεια τόσο των σπουδών μου όσο και της εκπόνησης της εργασίας μου, καθώς και τους συνεργάτες του.
- Τον καθηγητή κ. Ζαχαριάδη για την τιμητική για μένα συμμετοχή του στην επιτροπή κρίσης.
- Την Αν. καθηγήτρια κ. Πόταρη για το ενδιαφέρον και τη βοήθειά της στην οικοδόμηση των πρώτων θεμελίων της εργασίας μου.

Συνακόλουθα ευγνωμοσύνη κι ευχαριστίες προς

- Όλους ανεξαιρέτως τους καθηγητές μου στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών, για όσα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο μας δίδαξαν.
- Τους συναδέλφους καθηγητές και μαθητές που συνεργάστηκαν στην έρευνα.
- Τέλος, από καρδιάς για την αγάπη τους τούς συμφοιτητές μου στο πρόγραμμα, με τους οποίους ζήσαμε, σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα, ανείπωτες στιγμές που ζυγίζουν «αιωνιότητα».

« Διά της σπουδής των Μαθηματικών

θίγεται προς αρετήν η διάνοια

και δια των αριθμών κατανοείται η αλήθεια »

Άγιος Γρηγόριος Νύσσης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην έρευνα αυτή διερευνήθηκε ο ρόλος της αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, από 501 μαθητές Β' Λυκείου, 10 σχολείων της Ελλάδος.

Η παραγοντική ανάλυση και τα διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγικό όπως και οι συνεντεύξεις κατέδειξαν, αφ'ενός μεν συνέπεια αλλά και διαφορές στη συμπεριφορά των μαθητών και αφ'ετέρου την ανάγκη μιας πολυδιάστατης μελέτης της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης, με δράσεις που εστιάζουν και στις τέσσερις μορφές κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων.

ABSTRACT

In this study the role of perceptual, discursive, sequential and operative apprehension in geometrical figure understanding was researched among 501 second year students from 10 senior high schools in Greece.

The factor analysis, the similarity and implicative diagrams, as well as the interviews, revealed consistency but also differences in students' behaviour. Furthermore, the research showed the need for a multidisciplinary study of the development of geometric thinking, with actions that focus on all four types of geometrical figure apprehension.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: Εισαγωγή 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} Θεωρητικό πλαίσιο 15

2.1. Η Γεωμετρική κατανόηση κατά Piaget 15

2.2. Το μοντέλο των Van Hiele 16

2.3. Γεωμετρική θεώρηση των Houdement και Kuzniak 21

2.4. Εννοιολογικό Σχήμα κατά Fischbein 23

2.5. Η γνωστική θεώρηση του Duval 25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: Έρευνα 34

3.1 Εισαγωγή 34

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα 34

3.3 Δείγμα 35

3.4 Μεθοδολογία-Φάσεις της Έρευνας 36

3.5 Περιορισμοί της Έρευνας 37

3.6 Έργα του δοκιμίου 38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}: Αποτελέσματα 40

4.1 Διάγραμμα ομοιότητας-δενδρόγραμμα 41

4.2 Παραγοντική Ανάλυση 43

4.3 Συνεπαγωγικό διάγραμμα 49

4.4 Οι ερωτήσεις του Δοκιμίου 52

4.5 Ποιοτική Ανάλυση Αποτελεσμάτων 131

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}: Συμπεράσματα 154

5.1 Συμπεράσματα-Συζήτηση 154

5.2 Διδακτικές προτάσεις 157

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}: Βιβλιογραφικές αναφορές 161

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{ο}: Παράρτημα 170

7.1 Το Ερωτηματολόγιο 170

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προϊόντος του χρόνου οι παροικούντες τις σχολικές αίθουσες, αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα της Γεωμετρίας ως μοχλού ανάπτυξης σύνθετων και εύληπτων μοντέλων ερμηνείας και αναπαράστασης του βιωμένου χώρου. Η αντίληψη αυτή συνάδει με την εν γένει παρατηρούμενη υστέρηση ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές σε σχέση με τις αλγεβρικές έννοιες. (Mammana &Villani 1998)

Τα τελευταία χρόνια η εκπαιδευτική κοινότητα αποδίδει μεγαλύτερη σημασία στην ανάπτυξη τόσο της χωρικής όσο και γεωμετρικής σκέψης, αλλά και τη διερεύνηση των γνωστικών εμποδίων, αφού είναι αναγνωρίσιμο από όλους, ότι αφ' ενός μεν ο χώρος και αφ' ετέρου οι προσλαμβανόμενες εμπειρίες μέσω αυτού, υποβοηθούν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών και συμβάλλουν στην πολυεπίπεδη ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού. Εμφανή παραδείγματα αποτελούν τα επινοούμενα μοντέλα στη λύση προβλημάτων, που στηρίζονται σημαντικά στη δημιουργία σχημάτων, διαγραμμάτων, διατάξεων ή γραφικών παραστάσεων (Clements & Battista, 1989 και 1992, Hershkowits, R., Parzysz & Van Dormolen, 1996, Vander Walle, 2001).

Δεν είναι άλλωστε τυχαίο το γεγονός, ότι το National Council of Teachers of Mathematics (2000) χαρακτηρίζει γενικότερα τη Γεωμετρία και ειδικότερα την αντιληπτική πρόσληψη του χώρου, ως «θεμελιώδεις παράγοντες για τη μάθηση των μαθηματικών», λόγω του γεγονότος ότι παρέχουν δυνατότητες και τρόπους συλλογισμού αλλά και ερμηνείας του φυσικού κόσμου. Προς το σκοπό αυτό καθορίζει ότι πρέπει οι μαθητές να καταστούν ικανοί να αναγνωρίζουν, να διαπραγματεύονται και τελικά να αναλύουν τόσο τα χαρακτηριστικά όσο κυρίως τις ιδιότητες και τις παρατηρούμενες σχέσεις των γεωμετρικών σχημάτων, δισδιάστατων και τρισδιάστατων.

Προτρέπουν δε, να ακολουθούνται οι ενδεδειγμένες προσεγγίσεις τόσο από τους εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών, όσο και από τους εμπλεκόμενους με την εκπαιδευτική διαδικασία Ψυχολόγους, ώστε να καθίστανται οι μαθητές ικανοί, να εφαρμόζουν κατάλληλους μετασχηματισμούς, να κάνουν χρήση οπτικοποίησης και χωρικής ερμηνείας με απώτερο σκοπό «να δομήσουν εννοιολογικά και να αναλύσουν τα φυσικά και φανταστικά χωρικά περιβάλλοντα» (Battista, 2007).

Αυτή ακριβώς η ανάπτυξη της οπτικοποιημένης σκέψης, που σχετίζεται τόσο με την ύπαρξη αναπαραστατικών μέσων για την απόδοση χωρικών καταστάσεων, όσο και με την παρουσίαση γεωμετρικών εννοιών παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στην ανάπτυξη χωρικής και γεωμετρικής σκέψης (Brown & Presmeg, 1993). Μ’ αυτόν τον τρόπο, μέσω των «χωρικών ανακαλύψεων» δομούνται και οργανώνονται στην αρχή άτυπες και στη συνέχεια τυπικές έννοιες που οδηγούν τη δράση των μαθητών αρχικά πάνω στα αντικείμενα και τις σχέσεις τους και αργότερα στο σχηματισμό κατάλληλων μοντέλων, όπως είναι τα σχήματα ή οι αναπαραστάσεις του χώρου (Γερμανός, 2002, Herschkowitz et al. 1996, Bartolini Bussi & Boero,1998).
Εξ’ αυτού του γεγονότος εύστοχα η Γεωμετρία χαρακτηρίζεται ως «τα μαθηματικά του χώρου» και θεωρείται «τρόπος σύνδεσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο» (Bishop,1983; Clements, 1998).

Οι προκύπτουσες δυσκολίες στην κατανόηση της Γεωμετρίας ίσως εδράζονται στην αδυναμία των υποκειμένων, να αντιληφθούν τόσο τις αλληλεξαρτήσεις όσο και τη δυναμική σχέση μεταξύ θεωρητικού υπόβαθρου και χωρικών ολοτήτων δηλαδή των συνεχών αλληλεπιδράσεων μεταξύ θεωρίας και σχηματικών διαγραμμάτων.

Κινούμενος σ’αυτά τα πλαίσια ο Fischbein (1993),αναφερόμενος στα γεωμετρικά σχήματα, τα θεωρεί ότι αναπαριστούν νοερές κατασκευές που κατέχουν ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Είναι συνοπτικά αυτό που ο Fischbein αποκαλεί **εννοιολογικό σχήμα.** Η πτυχή των σχημάτων αφορά το γεγονός ότι οι έννοιες αναφέρονται στο χώρο ενώ εννοιολογική πτυχή αναφέρεται τόσο στη σύνοψη, όσο και στη θεωρητική

φύση που οι γεωμετρικές έννοιες μοιράζονται με τις άλλες μαθηματικές έννοιες.

Συνακόλουθα κατά την Mariotti (1995) στο γεωμετρικό πεδίο είναι απαραίτητη αυτή η αλληλεπίδραση εικόνων και εννοιών, που αποτελεί άλλωστε ζητούμενο των διδακτικών προσεγγίσεων, μαζί με την ανάπτυξη των σύνθετων εννοιολογικών σχημάτων που θα «ελέγχουν τα νοήματα, τις σχέσεις και τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων» (Mariotti, 2003).

Η συμβολή της ενασχόλησης με τη Γεωμετρία κρίνεται θετικά στο χώρο των ερευνητών, όπως και θεωρείται αναμφισβήτητη η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός προβλήματος , εξαιτίας της διαισθητικής παρουσίασης των συνιστωσών και των σχέσεων μιας κατάστασης (Duval, 1995).

Ωστόσο, από την άλλη πλευρά η Mesquita (1998), στο πλαίσιο διερεύνησης των γνωστικών εμποδίων που εμφανίζονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και τη σύνδεσή τους με τη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων, συσχετίζει την επιτυχία επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα, μέσα από τις έρευνές της για τη φύση των αναπαραστάσεων διακρίνει δύο μορφές, εκείνες που έχουν τη **φύση εικόνας**, όπου η λεκτική διατύπωση δε συμβαδίζει με τη σχηματική παράσταση, και εκείνες που έχουν τη **φύση αντικειμένου**, όπου υπάρχει ταύτιση λεκτικής διατύπωσης και σχηματικής παράστασης. Υποστηρίζει δε ότι συχνά η οπτική ενίσχυση της διαίσθησης ισχυροποιείται σε τέτοιο βαθμό, που να αποτελέσει «τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού» (Mesquita, 1998).

Η προσπάθεια κατανόησης, τόσο από πλευράς των ερευνητών της διδακτικής, όσο και των εκπαιδευτικών, του τρόπου οικοδόμησης των γεωμετρικών γνώσεων αποτελεί ζητούμενο της εκπαιδευτικής διαδικασίας και τονίζεται δεόντως στις έρευνες (Gray, Pinto, Pitta, &Tall, 1999), ωστόσο παραμένει αδιευκρίνιστος ο τρόπος και ο βαθμός που μαθηματικές γνώσεις αρχικά ασύνδετες μεταξύ τους (Hejny, 2002), συνδέονται μεταγενέστερα με την πάροδο της διδακτικής διαδικασίας σε δίκτυα (Hejny, 2003).

Η επισκόπηση τελικά της βιβλιογραφίας της τελευταίας δεκαετίας έφερε στο φως έρευνες που εξέτασαν συστηματικά και σε βάθος το όλο πλέγμα της προσέγγισης της γεωμετρικής γνώσης με ιδιαίτερη μάλιστα εστίαση στο ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη Γεωμετρία (Duval, 1998; Kurina, 2003). Η προσέγγιση βέβαια των ερευνητών ήταν διαφορετική, αφού εδραζόταν σε ποικίλες θεωρητικές προσεγγίσεις. Κατά γενική όμως ομολογία εντοπίζεται ερευνητικά «κενό» σχετικά με τον έλεγχο των γνωστικών διαδικασιών που χαρακτηρίζουν τη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος κατά την προσέγγιση του Duval.

Ερευνητικές προσπάθειες που πραγματοποιήθηκαν στην Κύπρο, υπό την καθοδήγηση του καθηγητή κ. Γαγάτση επεχείρησαν να επιβεβαιώσουν με έρευνες σε μεγάλα δείγματα μαθητών, κάποιες από τις γνωστικές διαδικασίες που προτάθηκαν για το γεωμετρικό σχήμα (Γαγάτσης, Α.,2008; Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou, & Panaoura,2009; Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Michael,2009; Γαγάτσης, Α., Χατζημηνά, Μ., & Καλογήρου, Π.,2009; Michael, S., Gagatsis, A., Elia, I., Deliyianni, E., & Monoyiou, A.,2009; Μιχαήλ, Π., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., Δεληγιάννη, Ε., Μονογυιού, Α., & Καλογήρου, Π. 2009; Michael, P., Elia, I., Gagatsis, A. & Kalogirou, P.,2010; Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., & Philippou, A.,2010; Gagatsis, A. 2011; Michael, P., Gagatsis, A, Avgerinos, E. & Kuzniak, A. 2011; Michael, P., Gagatsis, A., Lamprianou, I., Deliyianni, E. & Monoyiou, A. 2011; Deliyianni, E., Michael, P., Monoyiou, A., Gagatsis, A. & Elia, I. 2011; Michael, P. 2012; Μιχαήλ, Π., Γαγάτσης, Α., Κερκίδης, Β., & Σολομού-Κύζα, Μ.,2012; Σωτηριάδης, Α., Θεοδότου, Χ., Αυγερινός, Ε., Γαγάτσης, Α. & Μιχαήλ, Π.,2012).

Ειδικότερα οι Deliyianni κ.ά. (2009),επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ενός τρίτης τάξης μοντέλου της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος με συνιστώσες δεύτερης τάξης που αναφέρονται στην αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική κατανόηση, ενώ οι Elia κ.ά. (2009), επικέντρωσαν την προσοχή τους στις

γνωστικές διαδικασίες της λειτουργικής σύλληψης του σχήματος, όπως και οι Michael κ.ά. (2009),(2010),(2011),(2012) μελέτησαν τα 4 είδη σύλληψης.

Ο τρόπος σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος από μαθητές της Β΄ Λυκείου της Ελλάδας είναι το ζητούμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Στο **πρώτο κεφάλαιο** ως εισαγωγικό, επισκοπούνται οι κατατεθειμένες προσπάθειες κατανόησης του τρόπου οικοδόμησης των γεωμετρικών εννοιών αλλά και οι γενικότερες κατευθύνσεις πρόσληψης των χωρικών εννοιών μέσω εννοιολογικών δομήσεων και αλληλεπιδράσεων. Συνακόλουθα διερευνώνται τα γνωστικά εμπόδια κατά την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και η σύνδεσή τους με τη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων και παρουσιάζονται οι προσπάθειες που έγιναν προς επιβεβαίωση των γνωστικών διαδικασιών.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** ανασκοπείται η βιβλιογραφία και παρουσιάζονται εκτενώς οι συχνά αντικρουόμενες θέσεις των ερευνητών για τον τρόπο σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Από την Πιαζετιανή κατασκευή των γεωμετρικών εννοιών ως προϊόν αλληλεπίδρασης του ατόμου με το περιβάλλον του, οδηγούμαστε στην ιεραρχική αλληλουχία των επιπέδων κατανόησης των Van Hieles και μέσω σοβαρών αμφισβητήσεων καταλήγουμε στα τρία είδη Γεωμετρίας των Houdement και Kuzniak.

Ωστόσο η διττή υπόσταση του γεωμετρικού σχήματος, υλική και εννοιολογική, οδηγεί στην έννοια του «εννοιολογικού σχήματος» κατά Fischbein, ενώ οι εγγενείς δυσκολίες των μαθητών προσεγγίζονται πλέον «γνωστικά» από τη θεώρηση του Duval μέσω των τεσσάρων απαιτούμενων τύπων γνωστικής κατανόησης του σχήματος.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** η έρευνα αποπειράται να διαγνώσει πλέον «ερευνητικά» τη συσχέτιση των γνωστικών λειτουργιών με τα τέσσερα είδη κατανόησης κατά Duval. Τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα και οι αντίστοιχες υποθέσεις της έρευνας για το κατά πόσο επηρεάζεται η

κατανόηση απ’ τα εν λόγω είδη σύλληψης του σχήματος κι αν υπάρχει συνέπεια στον τρόπο επίλυσης έργων ή και διαφορές στην επίδοση των 501 μαθητών του δείγμα

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα μέσω των στατιστικών πακέτων και γίνεται λεπτομερής ανάλυση για κάθε μία από τις 23 ερωτήσεις του δοκιμίου. Εντοπίζονται τα έργα του δοκιμίου με χαμηλά ποσοστά και γίνεται απόπειρα αιτιολόγησής τους και συγκριτική μελέτη ανά ομάδες. Τέλος μέσω της ποιοτικής ανάλυσης (των συνεντεύξεων) γίνεται προσπάθεια διακρίβωσης των στρατηγικών των μαθητών και εξαγωγή προτύπων σκέψης.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εν λόγω έρευνας και επιχειρείται η παράθεση διδακτικών προτάσεων, ενώ

Το **έκτο κεφάλαιο** περιλαμβάνει τις βιβλιογραφικές αναφορές στις οποίες βασίστηκε η έρευνα.

Έχοντας υπ’όψιν όλα αυτά στην έρευνά μας επιχειρούμε να διερευνήσουμε στον Ελλαδικό χώρο, τη συμπεριφορά των μαθητών 10 Λυκείων της Ελλάδος, ως προς την ικανότητα σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και να εξάγουμε συμπεράσματα που ίσως φανούν χρήσιμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση έφερε στην επιφάνεια ποικίλες απόψεις και θεωρίες, σχετικά με την διαχρονική εξέλιξη αλλά και το ρόλο του γεωμετρικού συλλογισμού στη Γεωμετρία.

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια σχετικά αναλυτικά τις θεωρίες των ερευνητών και τις διαφορετικές τους προσεγγίσεις άλλοτε συγκλίνουσες και άλλοτε αποκλίνουσες.

2.1. Η Γεωμετρική κατανόηση κατά Piaget

Τα Μαθηματικά γενικότερα και η γεωμετρική σκέψη των παιδιών ειδικότερα, κατά τον Piaget, δεν είναι επινοήσεις του νου, αλλά αποτελούν προϊόν αλληλεπίδρασης και έχουν τόσο το στοιχείο της ανακάλυψης όσο και της δημιουργίας. Επομένως το είδος των γεωμετρικών εννοιών που κατασκευάζονται είναι προϊόν της αλληλεπίδρασης του ατόμου με το περιβάλλον του. Με προωθητικό όχημα τον αναστοχασμό πάνω στις ενέργειές του, το άτομο δημιουργεί μια γνωστική μονάδα, το «σχήμα» που διευρύνεται από τις εμπειρίες του υποκειμένου και τις αναστοχαστικές του προσεγγίσεις. Με αυτόν τον τρόπο οδηγείται στη δημιουργία αφαιρετικών δομών, τόσο χρήσιμων για την ανάπτυξη (ιδιαίτερα της χωρικής σκέψης και του αναστοχασμού). Η θέση του Piaget για το «τοπολογικό προηγούμενο» έπαιξε καθοριστικό ρόλο στις μετέπειτα έρευνες, αφού ο Piaget θεωρεί ότι το παιδί καθώς αναπτύσσεται διακρίνει πρώτα τις εντελώς απλές «ποιοτικές σχέσεις», όπως οι ανοικτές και κλειστές γραμμές, τα σύνορα, τις γειτνιάσεις,

δηλαδή τις λεγόμενες τοπολογικές σχέσεις και στη συνέχεια τις λεγόμενες προβολικές (σχέσεις ευθυγράμμισης, πλευρικότητας) και τελικά τις ευκλείδειες σχέσεις (τις αποστάσεις, τα μεγέθη και τις αναλογίες).

Είναι πασίγνωστη στην επιστημονική κοινότητα, η Πιαζετιανή προσέγγιση της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου μέσα από την προδιαγεγραμμένη πορεία των τεσσάρων σταδίων: του αισθησιοκινητικού, του προεννοιολογικού, του σταδίου των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών και του σταδίου των τυπικών λογικών ενεργειών. Ο δε γεωμετρικός συλλογισμός κατά τον Piaget, ακολουθεί διάφορα στάδια και ακολουθεί αναπτυξιακή πορεία προϊόντος του χρόνου, ενώ ταυτόχρονα συνδέεται άμεσα με τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης (Clements & Battista, 1992).

Σε αντιδιαστολή με τις απόψεις που υποστηρίζουν ότι οι ουσιαστικές πτυχές της χωρικής κατανόησης είναι έμφυτες στον άνθρωπο, η προσέγγιση του Piaget κλίνει υπέρ της άποψης ότι τα νήπια γεννιούνται χωρίς τη γνώση του χώρου, την οποία αποκτούν μόνο μέσω της εμπειρίας και του χειρισμού του περιβάλλοντός τους.

Η πιαζετιανή προσέγγιση αμφισβητήθηκε αρκετά νωρίς στον χώρο της έρευνας

2.2. Το μοντέλο των Van Hiele

Οι Ολλανδοί εκπαιδευτικοί Pierre Van Hiele και Dina Van Hiele-Geldof ερευνώντας τις αιτίες των δυσκολιών που εμφανίζουν οι μαθητές Γυμνασίου στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών, όταν διδάσκονταν με τον συμβατικό τρόπο διδασκαλίας, προσπάθησαν να εστιάσουν στην κατανόηση των νοητικών μηχανισμών αντίληψης του χώρου ειδικότερα και της γεωμετρίας γενικότερα. Στα πλαίσια δε της εκπόνησης των διδακτορικών τους διατριβών θεμελίωσαν ουσιαστικά τη θεωρία τους, τόσο για τα διαδοχικά επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης, όσο και για την εν γένει εκμάθηση της Γεωμετρίας. Υποστήριξαν στην έρευνά τους αυτή, ότι η μάθηση της γεωμετρίας ακολουθεί μια ιεραρχική αλληλουχία πέντε επιπέδων κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών.

Περιγράφουν, λοιπόν, και ειδικά η Dina van Hiele στην εργασία της, με λεπτομέρεια τόσο τον τρόπο όσο και τη διάταξη με την οποία πρέπει να παρουσιάζεται η ύλη της γεωμετρίας μέσω εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων ενσωματωμένων στο μάθημα.

Με άλλα λόγια υποστήριξαν ότι οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να κατανοήσουν το δάσκαλό τους, αφού οι τεθειμένοι γνωστικοί διδακτικοί στόχοι είναι σαφώς υψηλότερου επιπέδου σκέψης από αυτό στο οποίο βρίσκονταν οι μαθητές. Συνακόλουθα δε, η μετάβαση κάποιου μαθητή από ένα επίπεδο σκέψης σε ένα άλλο, δεν σχετίζεται απαραίτητα με την ηλικία του, αλλά με την ενασχόληση ή εμπειρία του ατόμου με τα γεωμετρικά αντικείμενα.

Ενώ η πρώτη διαπίστωση των απόψεών τους έγινε το 1957, χρειάστηκε να παρέλθουν 30 ολόκληρα χρόνια για να οδηγηθεί ο Pierre Van Hiele στη δημοσίευση του έργου του «Structure and Insight» όπου περιγράφονται τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης (Van Hiele, 1986).

Ειδικότερα τα πέντε επίπεδα είναι:

- **<u>Επίπεδο 1:</u> Επίπεδο αναγνώρισης ή οπτικοποίησης (Recognition level- Visualization).**

Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα διάφορα σχήματα σύμφωνα με την ομοιότητά τους με κάποια «σχηματικά πρότυπα», δηλαδή αναγνωρίζουν τα σχήματα ως οπτικές ολότητες και άρα τα αναπαριστούν νοηματικά ως οπτικές εικόνες, χωρίς να μπορούν να αντιληφθούν τις ιδιότητές τους.

Λείπει στους μαθητές αυτού του επιπέδου ο γεωμετρικός συλλογισμός και κυριαρχεί η αντίληψη. Για παράδειγμα κάποιος μαθητής ενδέχεται να μην αναγνωρίζει με ευκολία ένα αμβλυγώνιο ή ένα οξυγώνιο τρίγωνο, εάν στη σκέψη του κυριαρχεί ένα «πρότυπο τρίγωνο» που δεν είναι άλλο από ένα ορθογώνιο τρίγωνο και μάλιστα τοποθετημένο κατακόρυφα.

- **<u>Επίπεδο 2:</u> Περιγραφικό (Descriptive) ή ανάλυσης (Analysis)**

Βασικό χαρακτηριστικό του επιπέδου αυτού είναι η ικανότητα των μαθητών να ορίσουν ένα σχήμα με βάση τα χαρακτηριστικά του αλλά και τις ιδιότητές του. Πιο απλά, βλέπουν τα σχήματα ως συλλογές ιδιοτήτων, ενώ δηλαδή οι μαθητές είναι ικανοί να αναγνωρίσουν και να περιγράψουν τις ιδιότητες των σχημάτων, αδυνατούν να διακριβώσουν τις υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων.

Στο επίπεδο αυτό τα αντικείμενα της σκέψης είναι οι «τάξεις σχημάτων» παρά τα ατομικά σχήματα. Έτσι, ένα τρίγωνο δεν είναι ένα σχήμα που μοιάζει με κάποιο οπτικό πρότυπο, αλλά ένα σχήμα που περιλαμβάνει ένα κατάλογο από ιδιότητες.

Ωστόσο, στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αδυνατούν να προχωρήσουν σε συσχετισμούς με αποτέλεσμα συχνά να διατηρούν την πεποίθηση ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο σημείο αυτό επανέρχεται στο προσκήνιο πιαζετιανή έννοια της «συμπερίληψης κλάσης».

Η αδυναμία, στο δεύτερο επίπεδο, ενεργούς εμπλοκής της γλώσσας στην ορθή περιγραφή γεωμετρικών όρων είναι εμφανής, ιδιαίτερα στη λανθασμένη διατύπωση των ορισμών των σχημάτων.

- **<u>Επίπεδο 3:</u> Θεωρητικό (Theoretical level) ή άτυπο αναγωγικό (Informal deduction) ή Διάταξης (Order).**

Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό, είναι ικανοί να κατανοήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και να τις διατάξουν λογικά. Μπορούν επίσης να κάνουν τη διάκριση μεταξύ των αναγκαίων και των ικανών συνθηκών που συνθέτουν μια έννοια, με αποτέλεσμα να καθίστανται ικανοί στις διατυπώσεις του τύπου «εάν- τότε». Ορισμοί με νόημα και αιτιολογήσεις των συλλογισμών τους είναι χαρακτηριστικά αυτού του επιπέδου της άτυπης αφαίρεσης. Παραδείγματος χάριν, ο μαθητής που διέρχεται από το επίπεδο αυτό είναι ικανός να κρίνει και να αποφασίσει αν

ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος και να επιχειρηματολογήσει γιατί όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.

4. Επίπεδο 4 : Τυπικό αναγωγικό (Formal deduction) ή Τυπικής λογικής (Formal Logic).

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές καθίστανται ικανοί στη διερεύνηση σχέσεων, στην παραγωγή υποθέσεων αλλά και στη διατύπωση συλλογισμών για τον έλεγχο της ορθότητάς τους. Παρατηρείται δηλαδή, η εγκαθίδρυση μιας γεωμετρικής θεωρίας εντός ενός συστήματος αξιωμάτων. Εδραιώνεται η κατανόηση μιας μαθηματικής δομής ως συνόλου ορισμών αξιωμάτων και θεωρημάτων με διακριτό ρόλο που οδηγούν σε κατασκευή μαθηματικών αποδείξεων.

Σ'αυτό το στάδιο οι μαθητές υπερβαίνουν τη διαισθητική αντίληψη και οδηγούνται μέσω αφηρημένων εννοιών, στηριζόμενοι στη λογική, στην εξαγωγή ανάλογων συμπερασμάτων.

5. Επίπεδο 5: Ακριβείας ή αυστηρό (rigor)

Οι μαθητές σ' αυτό το επίπεδο είναι ικανοί να κατανοήσουν επαγωγικά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή μη – Ευκλείδεια συστήματα.

Για παράδειγμα μπορούν να κάνουν συγκρίσεις μεταξύ Ευκλείδειας και Υπερβολικής Γεωμετρίας ή να διερευνήσεων διαφορές μεταξύ Ελλειπτικής και Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Στο ερευνητικό πεδίο, το μοντέλο των Van Hiele αποτέλεσε όντως ένα δυναμικό εργαλείο τόσο για το σχεδιασμό και τη δημιουργία εκπαιδευτικών παρεμβάσεων, όσο και για την εν γένει έρευνα και μελέτη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Πληθώρα διδασκαλιών με υπόβαθρο ανατροφοδοτικό, καθοδηγούμενης εξερεύνησης των γεωμετρικών

σχημάτων και επαφής με καταστάσεις συνθετικών προβλημάτων, είδαν το φως της δημοσιότητας.

Έρευνες υποστηριζόμενες από μεγάλο αριθμό εμπειρικών δεδομένων (Clements & Battista, 1992, Clements et al., 1999) συνάντησαν ισχυρή αμφισβήτηση από ερευνητές, άλλοτε για την ανεπάρκεια κάλυψης των χωρικών και γεωμετρικών σχέσεων που συνδιαμορφώνουν μια συνολική θεωρία για το χώρο, και άλλοτε για την αδυναμία τους να βοηθήσουν τους ερευνητές στην κατάταξη ενός μαθητή σε ένα συγκεκριμένο στάδιο ή επίπεδο.

Θεωρούμε όμως ότι θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρουμε ότι κλινικές έρευνες με έργα ζωγραφιές μαθητών, περιγραφές ή άλλες μορφές δοκιμίων που στηρίχτηκαν στην ιεραρχική μελέτη των επιπέδων Van Hiele (Jaime & Gutierrez, 1994), έδειξαν ότι η ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης είναι πολύ περιορισμένη σε **όλες** τις ηλικίες και οφείλονται κυρίως σε ελλείμματα που έχουν σχέση με τη **διδακτική πρακτική**. Οι εν λόγω μάλιστα έρευνες, για τους μαθητές δημοτικής εκπαίδευσης, κατέταξαν τη μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών στο πρώτο επίπεδο, αν και ο διαχωρισμός ανάμεσα στα επίπεδα δεν είναι πλήρως ευδιάκριτος.

Άλλες έρευνες (Gutierrez, 1996) βασιζόμενες σε αξιολογήσεις των μαθητών πιο συστηματικές, ενισχύουν την άποψη ότι το μοντέλο των Van Hiele ίσως δεν είναι εξαντλητικό, ενώ από άλλες αμφισβητείται η σαφήνεια διάκρισης των επιπέδων και τεκμηριώνουν ασυνέχειες στο μοντέλο (Lawrie, 1999).

Αναφανδόν οι ερευνητές εστιάζουν στην αναγκαιότητα ενασχόλησης των μαθητών με κατάλληλες δραστηριότητες, προκειμένου φαινόμενα παράλειψης ιδιοτήτων των σχημάτων, χρήσης άσχετων προς το σχήμα χαρακτηριστικών ή και αδυναμίας σωστής χρήσης μαθηματικών όρων, να μην εδράζονται κυρίως σε ελλιπείς διδακτικές διαδικασίες (Feys & Liebov, 1992). Παρόμοια ευρήματα, που ενισχύουν την άποψη της εξέλιξης - ωρίμανσης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, όχι με βάση την ηλικία, αλλά τις παρεχόμενες ευκαιρίες μάθησης, κατέδειξε σχετική έρευνα (Elia, Gagatsis & Kyriakides, 2004).

Κλείνοντας τη θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής αντίληψης των Van Hiele να τονίσουμε την βαθιά επίδραση που άσκησε το έργο τους στον επιστημονικό χώρο, όπως κανείς εύκολα διαπιστώνει από τις εκατοντάδες των άρθρων σε επιστημονικά περιοδικά, βιβλία και πρακτικά συνεδρίων. Η διαδικτυακή μάλιστα αναζήτηση του Google Scholar μόνο στο λήμμα Dina Van Hiele εμφανίζει πάνω από 550 παραπομπές.

2.3. Γεωμετρική θεώρηση των Houdement και Kuzniak

Ωστόσο αυτή η προσέγγιση των Van Hiele, μέσω των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης, από την απλή αναγνώριση ενός σχήματος στην ικανότητα σύνθεσης μη τυπικής γεωμετρικής απόδειξης, θεωρήθηκε από τους Houdement και Kuzniak (2003) αφ' ενός μεν πολύ γραμμική, αφ' ετέρου δε ανεπαρκής για την κατανόηση και ερμηνεία των παρατηρούμενων δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στη Γεωμετρία. Οι εν λόγω ερευνητές στηριζόμενοι στην ιδέα των διαφορετικών παραδειγμάτων, όπως διατυπώθηκε από τον Kuhn (1970) εκπρόσωπο του πραγματιστικού ρεύματος στην Επιστημολογία, διακρίνουν τελικά τρία διαφορετικά παραδείγματα γεωμετρίας:

Γεωμετρία 1 (Εμπειρική Γεωμετρία)

Αυτή έχει άμεση συσχέτιση με τον πραγματικό φυσικό κόσμο, αφού έχει ως αντικείμενα προς εξέταση κυρίως «υλικά αντικείμενα» καθημερινής χρήσης, όπως οι γραμμές που ένας μαθητής χαράσσει σε ένα φύλλο χαρτί ή στην οθόνη του υπολογιστή του. Θεωρούν δε οι παραπάνω ερευνητές πως οτιδήποτε προκύπτει από τις αισθήσεις (μετρήσεις- συγκρίσεις) αποτελεί πηγή εγκυρότητας στην εν λόγω Γεωμετρία.

Γεωμετρία 2 (Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία)

Ενώ στην πρώτη Γεωμετρία πηγή ενασχόλησης είναι τα προϊόντα των αισθήσεων, στη Γεωμετρία αυτή τα αντικείμενά της είναι εντελώς θεωρητικά, δηλαδή η ύπαρξή τους απορρέει αφ' ενός μεν από τα αξιώματα και αφ' ετέρου από την ύπαρξη των ορισμών.

Στην Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία η πηγή εγκυρότητας στηρίζεται στους υποθετικούς παραγωγικούς νόμους που διέπουν το αξιωματικό σύστημα.

Γεωμετρία 3 (Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία)

Στην Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία τα τεθέντα αξιώματα δεν έχουν καμία απολύτως σχέση με το χώρο των αισθήσεων αλλά και δεν συναρτώνται με τον πραγματικό φυσικό κόσμο.

Η αξιωματική θεμελίωση μαζί με τους ορισμούς, τα θεωρήματα και τις προτάσεις προσδίδουν στην Τυπική αυτή Γεωμετρία πλήρη υπόσταση, αφού ικανοποιεί τις βασικές απαιτήσεις της συνέπειας (=απουσία αντιφάσεων μεταξύ αξιωμάτων), της ανεξαρτησίας (=κανένα αξίωμα να μην προκύπτει από άλλα αξιώματα) και της πληρότητας (=δυνατότητα απόφανσης για την ισχύ ή όχι μιας πρότασης).

Η σύγκριση μεταξύ επιπέδων γεωμετρικής αντίληψης των Van Hiele και της θεώρησης των Houdement και Kuzniak,εμπεριέχει ένα τύπο αντιστοίχισης, όπου η Γεωμετρία 1 αντιστοιχεί στα τρία πρώτα επίπεδα (διαίσθηση-πείραμα-συλλογισμός), η Γεωμετρία 2 εμπεριέχει το τυπικό αξιωματικό επίπεδο και εν τέλει η Γεωμετρία 3 ως κατακλείδα συγκροτεί το αυστηρό και απαλλαγμένο από τις αισθήσεις επίπεδο.

Η εν λόγω θεώρηση του Houdement και Kuzniak, καταδεικνύει εμφαντικά τις δυσκολίες μετάβασης από τον ένα τύπο Γεωμετρίας στον άλλο, αλλά παράλληλα παρέχει δυνατότητες ερμηνείας λύσης των γεωμετρικών έργων από μαθητές. Ωστόσο, το γεωμετρικό σχήμα ανήκει σε ένα «ειδικό σημειωτικό σύστημα, το οποίο συνδέεται με το αντιληπτικό οπτικό σύστημα, υπακούοντας σε εσωτερικούς κανόνες οργάνωσης» (Mesquita, 1998). Εξ'

αυτού του γεγονότος, το σχήμα σαν όρος ταυτίζεται με την εξωτερική (=υλική, δηλαδή καταγραφή στο χαρτί) και εικονική (=οπτική εικόνα) αναπαράσταση μιας γεωμετρικής έννοιας ή κατάστασης (Mesquita, 1998).

2.4. Εννοιολογικό Σχήμα κατά Fischbein

Η ύπαρξη του γεωμετρικού σχήματος αναμφίβολα νοηματοδοτεί εμφαντικά την εκπαιδευτική δραστηριότητα, αφού προσφέρει τη «διαισθητική βάση διερεύνησης τόσο των σχέσεων όσο και των ιδιοτήτων» (Duval, 1995).

Ωστόσο τα πράγματα δεν είναι τόσο ξεκάθαρα σε επίπεδο γεωμετρικού συλλογισμού των υποκειμένων, αφού κατά τη Mariotti το σχήμα δεν συνιστά «ως νοητικό αντικείμενο ούτε μια καθαρή εικόνα, αλλά και ούτε μια καθαρή έννοια» (Mariotti, 1997).

Αρκετά νωρίς, σημαντικοί ερευνητές τόνισαν τη διττή υπόσταση του γεωμετρικού σχήματος, αφ' ενός μεν την υλική και αφ' ετέρου την αντίστοιχη εννοιολογική. (Duval, 1988, Laborde, 1994,2003)

Ειδικά ο Fischbein (1993) αναφέρει ότι στο γεωμετρικό σχήμα ενυπάρχουν τρεις κατηγορίες νοερών οντοτήτων: **ο ορισμός** (definition), **η εικόνα** (image) και **το εννοιολογικό σχήμα** ή έννοια (figural concept). Συνακόλουθα, το γεωμετρικό σχήμα δεν αποτελεί μια γνήσια έννοια, αλλά υπερτερεί μιας απλής οπτικής εικόνας, αφού αποτελεί νοερή δομή και αναπαριστά νοερές κατασκευές που ταυτόχρονα εμπεριέχουν «εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες» (Fischbein & Nachlielli, 1998).

Συνεχίζοντας, οι εν λόγω ερευνητές, τονίζουν ότι οι νοερές οντότητες ή σχηματοποιημένες έννοιες, που υποδηλώνουν τη θέση, τις διαστάσεις και γενικότερα τις ιδιότητες του χώρου, αλλά και ευρύτερες διαδικασίες

εννοιολογικής φύσης, όπως γενίκευση και αφαίρεση, αποτελούν το υπόβαθρό του γεωμετρικού συλλογισμού των αντικειμένων.

Οι εννοιολογικές και σχηματικές αυτές ιδιότητες κάθε γεωμετρικού σχήματος, ενυπάρχουν τόσο υπό μορφή ενός σχήματος, όσο και μιας αναπαράστασης στο χώρο αλλά μιας έννοιας που υπάγεται σε τυπικούς περιορισμούς. Αποτελούν με άλλα λόγια το **«εννοιολογικό σχήμα»** κατά τον Fischbein, στο οποίο οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί υπαγορεύονται από τους ορισμούς, τα αξιώματα και τα θεωρήματα. Παράλληλα, όταν τα σχήματα και οι συνοδεύουσες αυτά έννοιες εναρμονίζονται καθολικά σε εννοιολογικό σχήμα, τότε επιτυγχάνεται «το υψηλότερο σημείο του γεωμετρικού συλλογισμού» (Fischbein & Nachlielli, 1998).

Διάγραμμα 1
Το Γεωμετρικό σχήμα κατά τον Fischbein

Ο Fischbein (1993) αναφερόμενος στη διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος, κάνει τη διακρίβωση ότι «έχει μια ιδιότητα που δεν έχουν οι άλλες μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα περιέχει την νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου» (σελ. 141). Επεκτείνοντας την άποψη αυτή, θεωρείται ότι η γεωμετρική σκέψη χαρακτηρίζεται από μια αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικού σχήματος (με την έννοια της γεωμετρικής φιγούρας-figure) και αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας.

2.5. Η γνωστική θεώρηση του Duval

Οι προαναφερθείσες έρευνες των τελευταίων δεκαετιών στο χώρο της Γεωμετρίας και ειδικότερα στο αντικείμενο της μελέτης κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος κατέδειξαν μια εμφανή δυσκολία των μαθητών στην επιτυχή αντιμετώπιση προβλημάτων που σχετίζονται με τέτοιου είδους χειριστικές λειτουργίες. Με άλλα λόγια, οι μαθητές παρουσιάζονται να μη βοηθούνται από την ύπαρξη ενός σχήματος, προς την κατεύθυνση της ορθής λύσης ενός προβλήματος.

Ο Duval μέσα από τη θεωρία του, σε αντιδιαστολή με τη θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής αντίληψης των Van Hieles, εισηγείται μια «γνωστική προσέγγιση» του θέματος. Επιχειρεί να διαγνώσει τις γνωστικές διαδικασίες που ενυπάρχουν πίσω από την εκφραζόμενη γεωμετρική σκέψη των υποκειμένων.

Ο Duval (2004) θεωρεί ότι δεν πρέπει η διδασκαλία της Γεωμετρίας να έχει αφετηρία την αναγνώριση των σχημάτων γιατί η διαδικασία αυτή «καθηλώνει τους μαθητές στην εικονική εξεικόνιση» και συνεχίζει λέγοντας «πως δεν μπορεί να μάθει και να κατανοήσει κανείς τη Γεωμετρία, όταν βλέπει τα σχήματα εικονικά». Η δεδηλωμένη διαφωνία του με την ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων (Van Hieles), εδράζεται στην υιοθέτηση ανάπτυξης γνωστικών γεωμετρικών λειτουργιών, που διαφαίνονται από τη νηπιακή κιόλας ηλικία. Σύμφωνα με τον Duval (1995), *«τα σχήματα κατά την επίλυση*

προβλημάτων ή την αναζήτηση απόδειξης επιτρέπουν αυτό που ο Peirce ονομάζει ***απαγωγή*** *(abduction) και έγκειται στον περιορισμό των υποθέσεων ή των δυνατών επιλογών. Το να μιλάμε για την ευρετική δύναμη του σχήματος ισοδυναμεί με μια απαγωγική σκέψη που οδηγεί στην παραγωγική σκέψη. Η δυνατότητα ενός τέτοιου χειρισμού ξεπερνάει τη γνώση μαθηματικών ορισμών και κανόνων. Η δυνατότητα επεξεργασίας ενός σχήματος συνδέεται με τη δυνατότητα αναδιοργάνωσης των στοιχείων του, την οπτική η θεσιακή αναδιοργάνωση, που μπορεί να εκτελεστεί φυσικά ή νοητικά ανεξάρτητα από οποιαδήποτε μαθηματική γνώση»* (Duval 1995).

Προχωρά λοιπόν, μέσω της γνωστικής και αντιληπτικής του προσέγγισης, στην υιοθέτηση ξεχωριστού πλαισίου ανάλυσης των γεωμετρικών εικόνων, που έχουν αυτοτελή οργάνωση και για την πλήρη σύλληψη τους απαιτούνται **τέσσερα είδη** ή τύποι γνωστικής κατανόησης : **αντιληπτική κατανόηση, διαδικαστική κατανόηση, λεκτική κατανόηση και τέλος λειτουργική κατανόηση.**

- **Η αντιληπτική κατανόηση** (perceptual apprehension), που σχετίζεται με την αναγνώριση ενός σχήματος με την πρώτη ματιά, τον προσανατολισμό του και συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος. Ταυτόχρονα στην διάκριση των μερών του (υποσχημάτων) με τρόπο όμως που ενδεχομένως δεν εξυπηρετεί την περαιτέρω επεξεργασία του στην περίπτωση που απαιτείται μια αιτιολόγηση, ή απόδειξη (με βάση το σχήμα) ή έστω μια διαδικασία κατασκευής.

- **Η σειριακή κατανόηση** (sequential apprehension) ή **διαδικαστική κατανόηση**, που συνίσταται στην αντίληψη του τρόπου δόμησης των επιμέρους στοιχείων του και η οποία είναι απαραίτητη όταν χρειάζεται να κατασκευάσουμε (με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων ή του υπολογιστή) ή να περιγράψουμε ένα σχήμα. Η κατανόηση αυτή δεν εμπίπτει σε αντιληπτικούς νόμους αλλά

στηρίζεται σε κατασκευαστικούς περιορισμούς και σε μαθηματικές ιδιότητες.

- **Η λεκτική κατανόηση** (discursive apprehension), που συνδέεται αναπόσπαστα με τις δύο προηγούμενες, ιδιαίτερα όταν η επεξεργασία του σχήματος εντάσσεται σε ένα γενικότερο πλαίσιο κατανόησης μιας εκφώνησης, παρακολούθησης ενός τυπικού μαθηματικού συλλογισμού στα πλαίσια μιας απόδειξης. Συναρτάται άμεσα με το γεγονός, ότι σε ένα σχήμα οι μαθηματικές σχέσεις δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν μόνο με την αντιληπτική-οπτική κατανόηση αλλά απαιτείται και ο έλεγχος των λεκτικών δηλώσεων (ονομασίες, ορισμοί ή διαδικασίες).

- **Η λειτουργική κατανόηση** (operative apprehension), η οποία στην ουσία εκφράζεται μέσω του απαγωγικού συλλογισμού και δημιουργεί συνθήκες πρόσβασης στη λύση του προβλήματος. Σχετίζεται άμεσα με τους διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος, με μετασχηματισμούς φυσικούς ή νοερούς που οδηγούν στην επιδιωκόμενη λύση .

Η λειτουργική κατανόηση ενός σχήματος κατά την Κολέζα (2003) είναι ένα «είδος ευφυούς οργάνωσης του σχήματος». Κατά δε τον Piaget (1969), η νοητική αντίληψη ενός αντικειμένου ή μιας διαδικασίας εμπεριέχει «ευφυΐα» (intelligence) η οποία οργανώνει τόσο τα αισθητηριακά όσο και τα αντιληπτικά δεδομένα. Κατ' αντιδιαστολή αρκετοί ερευνητές αναφέρονται στο ρόλο της ευφυΐας κατά την εμπειρική αφαίρεση, εισάγοντας τον όρο «φαντασία» ("imagery") (Krutetskii 1976, Presmeg 1992, Arnheim 1969, Hebb 1968).

Ενώ λοιπόν , η αντιληπτική κατανόηση αφορά αυτό που βλέπουμε με τη πρώτη ματιά σε ένα σχήμα, η λεκτική κατανόηση προϋποθέτει μια αλλαγή στην αντιληπτική κατανόηση, μια αλλαγή ενόρασης, για την κατανόηση του τρόπου σύνδεσης των επιμέρους στοιχείων του σχήματος. Τέλος η

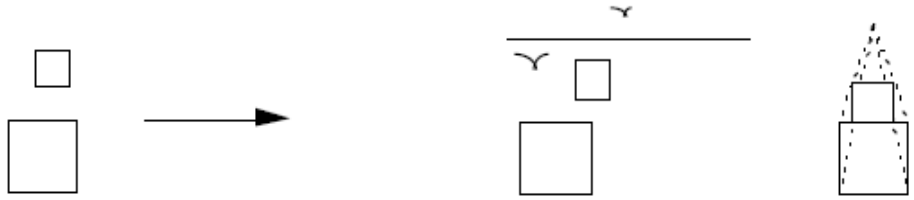
λειτουργική κατανόηση ενός σχήματος είναι μια νοητική αναδιοργάνωση του σχήματος ώστε να αναδυθούν σχέσεις που δεν είναι προφανείς στην αντιληπτική κατανόηση (Van Sommers 1984). Κατ' αντιστοιχία νεώτεροι ερευνητές αξιοποιώντας τα αποτελέσματα ερευνών σε προβληματικές καταστάσεις μάθησης (Gal 2005),υιοθετούν θεωρητικά μοντέλα που στηρίζονται αφ' ενός μεν στην αντιληπτική οργάνωση και την αναγνώριση μέσω διαδικασιών πάνω-κάτω και αντίστροφα και αφ' ετέρου στην λεκτική παρά στην εικονική αναπαράσταση και τις διαφαινόμενες νοητικές εικόνες (Gal & Linchevski 2010).

Συγκεφαλαιώνοντας ο Duval (1995), διακρίνει δύο επίπεδα κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος: Το πρώτο επίπεδο που το περιγράφει ως «perception» και αφορά μια μορφιστική (gestaltist) κατανόηση του σχήματος, στα πλαίσια της οποίας αναγνωρίζονται οι δομικές μονάδες του σχήματος . Αυτό το πρώτο επίπεδο, αναφέρει ότι αντιστοιχεί, στην αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension) και τη σειριακή κατανόηση (sequential apprehension), ενώ το δεύτερο επίπεδο αντιστοιχεί στη λειτουργική κατανόηση (operative apprehension) του σχήματος.

Ειδικά για την λειτουργική κατανόηση ο Duval αναφέρει τρία είδη δυνατών τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος:

- **Μερολογικές (mereologic)** που αφορούν στην ανάλυση ή διάσπαση του σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, τα οποία αντίστοιχα μπορούν να συνδυαστούν σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και να δημιουργήσουν ένα νέο σχήμα. Προκύπτει επομένως μια αλλαγή του μορφιστικού τρόπου ενόρασης του σχήματος (με την πρώτη ματιά) και συντελείται μια αναδιοργάνωση του σχήματος (reconfiguration).

- **Οπτικές (optic)** που αφορούν μετασχηματισμούς όπως μεγέθυνση ή σμίκρυνση ή λόξωση του σχήματος, σαν να γίνεται χρήση φακών. Έτσι τα σχήματα μπορούν να φαίνονται διαφορετικά, χωρίς στην ουσία να έχουν όμως υποστεί καμία αλλαγή. Επίπεδα σχήματα μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι τοποθετημένα σε ένα τρισδιάστατο χώρο, ενώ υπάρχει η δυνατότητα να παρουσιασθούν δύο όμοια σχήματα σε επικάλυψη, στο βάθος, ώστε το μικρότερο να φαίνεται σαν να ήταν μεγαλύτερο.



- **Αλλαγής θέσης (place way)** που αφορούν αλλαγή του προσανατολισμού ενός σχήματος (στροφή κατά κάποιες μοίρες). Ο μετασχηματισμός ωστόσο αυτός, θεωρείται ασθενέστερος και επηρεάζει περισσότερο την αναγνώριση των ορθών γωνιών, αφού τα υποκείμενα κυρίως θεωρούν τις πλευρές μιας ορθής γωνίας ως σχηματιζόμενες από κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες.

Στο γεωμετρικό σκέπτεσθαι, πέρα από τα προαναφερθέντα τέσσερα είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος, υπεισέρχονται κατά τον Duval (1998), και επιπλέον τρία είδη διαδικασιών, γνωστικής προέλευσης. Προτείνει λοιπόν ο Duval, προς διερεύνηση της γνωστικής πολυπλοκότητας των ενασχολούμενων υποκειμένων με τη Γεωμετρία, τα τρία είδη διαδικασιών δηλαδή, την εξεικόνιση, την κατασκευή και τον συλλογισμό.

- **Εξεικόνιση:** Πρόκειται για την γνωστική διαδικασία που συνδέεται με την αναπαράσταση του χώρου για επεξήγηση μιας δήλωσης, αλλά και για διερεύνηση πολύπλοκων καταστάσεων και συνοπτική περιγραφή του χώρου. Η χρησιμότητα της εξεικόνισης από πολλούς ερευνητές και από χρόνια έχει υποδηλωθεί μετ' επιτάσεως. Οι Zazkis, Dubinsky και Dantermann (1996) προσδιορίζουν την εξεικόνιση «ως μια πράξη κατά την οποία το άτομο δημιουργεί μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ μιας εσωτερικής δομής και κάτι στο οποίο η πρόσβαση πετυχαίνεται μέσω των αισθήσεων». Προχωρώντας περαιτέρω αναλύουν τους τρόπους σύνδεσης λέγοντας ότι μία πράξη εξεικόνισης «μπορεί να συνίσταται στην κατασκευή νοητικών αντικειμένων ή διαδικασιών ως προς εξωτερικά αντικείμενα, αλλά μπορεί επίσης η πράξη να συνίσταται στην κατασκευή εξωτερικών αντικειμένων μέσω του χαρτιού, του πίνακα ή του υπολογιστή, τα οποία αντικείμενα αναγνωρίζονται ως διαδικασίες ή αντικείμενα του νου».

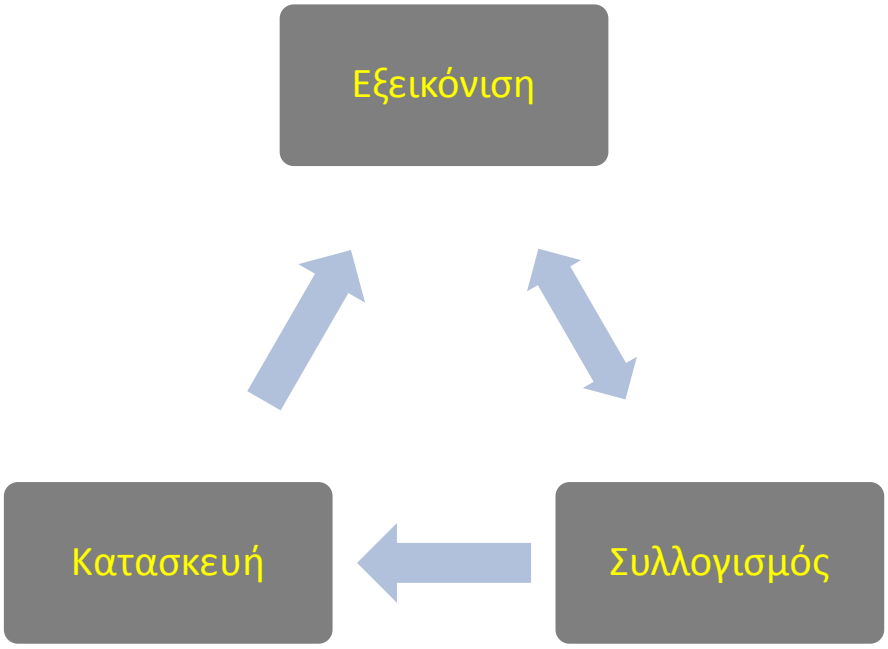
  Με την πάροδο των χρόνων ο Duval (2004) επαναπροσδιορίζει διττά την έννοια της εξεικόνισης, ως εικονικής ή μη εικονικής.

  - **Εικονική εξεικόνιση:** ορίζει αποκλειστικά την οπτική αντίληψη των σχημάτων όπου κυρίως αντιλαμβάνονται οι μαθητές ένα σχήμα διαισθητικά, μέσω του περιγράμματος του, σε σύγκριση πάντοτε με το διαμορφωθέν «πρωτοτυπικό σχήμα» που ενυπάρχει στο νου τους. Αδυνατούν ωστόσο στο επίπεδο αυτό να εντοπίσουν σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων του σχήματος.
  - **Μη εικονική εξεικόνιση:** θεωρεί την μέσω νοερών πράξεων σύλληψη του σχήματος και τον εντοπισμό των μεταξύ των ιδιοτήτων

σχέσεων. Οι εν λόγω νοερές πράξεις αφορούν διάσπαση-επανασύνδεση αλλά και μετασχηματισμό των σχημάτων.

- **Κατασκευή:** πρόκειται για την γνωστική διαδικασία, όπου μέσω χρήσης εργαλείων (χάρακας, διαβήτης, Η/Υ), η κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων ενδέχεται να λειτουργήσει ως «μοντέλο» για περαιτέρω δράσεις, μέσω ενεργειών που νοηματοδοτούνται από τα γεωμετρικά αντικείμενα.
- **Συλλογισμός:** πρόκειται για τη διαδικασία που εμφανίζεται κατά την επίλυση προβλημάτων κι μέσω αυτού του συλλογισμού ενεργοποιούνται γνωστικές διαδικασίες προς διερεύνηση των πληροφοριών ενός σχήματος. Η ενεργοποίηση αυτή μεταφράζεται λεκτικά σε διατύπωση επεξηγήσεων ή και αποδείξεων.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ εξεικόνισης- κατασκευής και συλλογισμού δηλώνεται μέσω του κύκλου ενεργειών του διαγράμματος:



Διάγραμμα 2
Τρία είδη γνωστικών διαδικασιών κατά τον Duval

Βέβαια στον εκπαιδευτικό στίβο οι παραπάνω αλληλεπιδράσεις είναι το ζητούμενο, αφού πολύ συχνά φαινόμενα στεγανοποίησης αποκλείουν τις αλληλεπιδράσεις εξαιτίας κυρίως του γεγονότος ότι παύει πλέον το σχήμα να διαδραματίζει **«ευρετικό ρόλο»**. Μια πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι, η μη ύπαρξη κατάλληλων δραστηριοτήτων σύνδεσης- αποσύνδεσης και μετασχηματισμού των σχημάτων, κατά την διαδικασία της εξεικόνισης. Στερείται λοιπόν ο μαθητής, ευρετικών διαδικασιών αναμόρφωσης και αναδιοργάνωσης των συστατικών μερών του σχήματος και εγκλωβίζεται στατικά σε οπτική μόνο αντίληψη του σχήματος, δηλαδή περιορίζεται αποκλειστικά στην εικονική εξεικόνιση. Όπως χαρακτηριστικά επιχειρηματολογεί ο Duval «η οπτική σύλληψη δεν μπορεί να οδηγήσει από μόνη της στη δημιουργία εννοιών» (Duval, 1998). Κάτω από το ίδιο πρίσμα η μέσω της λειτουργικής σύλληψης, δημιουργία εννοιών οδηγεί τους μαθητές «σε νοερούς ανασχηματισμούς των τμημάτων του» (Mesquita, 1998, αναφορά στο Laborde, 2003).

Προς επίρρωση των απόψεων του ο Duval (2004) τοποθετεί ένα ισοσκελές τρίγωνο με την κορυφή προς τα πάνω και αναφέρει ότι ο μαθητής που αντιμετωπίζει τα σχήματα μη εικονικά φέρνοντας το ύψος από την κορυφή μπορεί με κατάλληλη στροφή να το διασπάσει και να σχηματίσει δύο ορθογώνια τρίγωνα που μπορούν να συνενωθούν σε ένα νέο ορθογώνιο. Αντίθετα ο μαθητής που αντιμετωπίζει τα σχήματα εικονικά το ορθογώνιο που μπορεί να έχει μπροστά του, πάντα γι’ αυτόν θα είναι ορθογώνιο, και βέβαια δεν μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της ένωσης δύο ορθογωνίων τριγώνων.

Επιλογικά θα λέγαμε ότι εμφαντικά προτρέπει, να οδηγούνται από τους εκπαιδευτικούς οι μαθητές, από την εικονική στη μη εικονική εξεικόνιση, η οποία συν τω χρόνω θα τους οδηγήσει στην επιτυχή αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων.

Έχοντας υπ’ όψιν τα ερευνητικά ευρήματα των εν λόγω ερευνητών, κρίνουμε ότι η επιλογή ως θέματος της εργασίας μας, του τρόπου κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος, αποτελεί πρόκληση, αλλά και

πρόσκληση ταυτόχρονα προς νέες ερευνητικές προσπάθειες. Βασιζόμενοι λοιπόν στα αποτελέσματα των ερευνών, θεωρούμε ότι η μελέτη μας, αν εντοπίσει δυσκολίες και τρόπους υπέρβασής τους, μπορεί να συμβάλει θετικά προσφέροντας πρόσβαση σε γνωστικές περιοχές που αφορούν τον τρόπο σκέψης των μαθητών και την υπέρβαση των παρανοήσεων στα έργα κατανόησης γεωμετρικού σχήματος.

Το παρατηρούμενο «ερευνητικό κενό» ως προς τον έλεγχο των γνωστικών διαδικασιών που χαρακτηρίζουν τη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος κατά την προσέγγιση του Duval, αποτέλεσε αφ' ενός μεν το έναυσμα και αφ' ετέρου το εφαλτήριο της δικής μας ερευνητικής προσπάθειας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

3.1 Εισαγωγή

Βασικός στόχος της μελέτης αυτής ήταν η διερεύνηση των δυσκολιών κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος, αλλά και ο έλεγχος της ικανότητας σύλληψής του από τους μαθητές Β' Λυκείου που πήραν μέρος στην έρευνα, βάσει των θεωριών του Duval. Παράλληλα εξετάστηκαν οι αντιλήψεις τους για το γεωμετρικό σχήμα κατά τις διάφορες εκδοχές με τις οποίες αυτό μπορεί να παρουσιαστεί. Η έρευνά μας αποπειράται να διαγνώσει σε εμπειρικό πλέον επίπεδο, τυχούσα συσχέτιση των γνωστικών λειτουργιών αναφορικά με τα τέσσερα είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος από τον Duval (1995, 1998).

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται είναι τα εξής

1) Η αντιληπτική, λεκτική, ακολουθιακή και λειτουργική κατανόηση επηρεάζουν την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος σε μαθητές Β' Λυκείου της Ελλάδος;

2) Υπάρχει συνέπεια στον τρόπο επίλυσης έργων αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής κατανόησης από τους εν λόγω μαθητές;

3) Υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των μαθητών στα έργα αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος;

4) Ποια η επίδραση της φύσης του γεωμετρικού σχήματος στα προβλήματα Γεωμετρίας;

Υποθέσεις της έρευνας:

Στηριζόμενοι στο σκοπό και στα έργα της έρευνας διατυπώσαμε τελικά τις ακόλουθες υποθέσεις που χρήζουν διερεύνησης:

- Τα τέσσερα είδη κατανόησης που πρότεινε ο Duval έχουν σχέση με τη γενική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.
- Οι μαθητές παρουσιάζουν συνέπεια στον τρόπο επίλυσης των ως άνω έργων.
- Οι μαθητές παρουσιάζουν διαφορές στα έργα αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.
- Η φύση του γεωμετρικού σχήματος επιδρά στον τρόπο κατανόησης των γεωμετρικών προβλημάτων.

3.3 Δείγμα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά **501 μαθητές από 10 Λύκεια διαφόρων πόλεων, αστικών ή επαρχιακών της Ελλάδος**. Συγκεκριμένα το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν **μαθητές Β΄Λυκείου** (ηλικίας 16 ετών κατά μέσο όρο),από :

- Έξι Λύκεια της Αθήνας,
- Ένα Λύκειο της Θεσσαλονίκης,
- Ένα Λύκειο του Βόλου,
- Ένα Λύκειο της Φλώρινας,
- Ένα Λύκειο της Εύβοιας.

3.4 Μεθοδολογία-Φάσεις της Έρευνας

Της έρευνας προηγήθηκε πιλοτική εφαρμογή σε μαθητές Λυκείου των δυτικών προαστίων της Αθήνας, προκειμένου να διερευνηθούν γλωσσικές δυσκολίες κατανόησης και προβλήματα και να διορθωθούν τυχόν ατέλειες. Το ερωτηματολόγιο (Παράρτημα) είχε σχεδιασθεί από τον καθηγητή της Σχολής Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου της Κύπρου, κ. Αθανάσιο Γαγάτση, στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος ΙΠΕ στην Κύπρο .

Το ερωτηματολόγιο περιείχε δύο μέρη, το πρώτο δοκίμιο περιελάμβανε 12 ερωτήσεις και το δεύτερο δοκίμιο 11 ερωτήσεις. Για λόγους αντικειμενικής αντιμετώπισης της έρευνας τα μισά ερωτηματολόγια που δόθηκαν στους μαθητές περιείχαν στην αρχή το πρώτο δοκίμιο και ακολουθούσε το δεύτερο, ενώ τα άλλα μισά το αντίστροφο. Ο λόγος προφανής, αφ'ενός προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα ελλιπούς συμπλήρωσης των τελευταίων ερωτήσεων λόγω έλλειψης χρόνου ή κόπωσης και αφ'ετέρου λόγω ισότιμης αντιμετώπισης των δοκιμίων και περιορισμού της επίδρασης της σειράς εμφάνισης των έργων στην επίδοση των υποκειμένων σε αυτά. Τα ερωτηματολόγια παραδόθηκαν στην πλειονότητα των σχολείων αυτοπροσώπως από τον ερευνητή στους καθηγητές ή τον Διευθυντή, ώστε να λυθούν θέματα δεοντολογίας.

Η διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ήταν δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες, με δεδομένη τη φυσική παρουσία των καθηγητών των τμημάτων καθ'όλη τη διάρκεια της εξέτασης, οι δε οδηγίες προς αυτούς κατέτειναν στη δημιουργία ευχάριστου αλλά όχι χαλαρού κλίματος στην τάξη.

Η εν λόγω δειγματοληψία δεν ήταν μεν τυχαία, ωστόσο αποσκοπούσε στην όσο το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερη εκπροσώπηση σχολείων του κέντρου, των συνοικιών και της επαρχίας. Προς αυτή την κατεύθυνση

κινούμενοι, στα σχολεία που επιλέξαμε, πήραν μέρος όλοι οι μαθητές της Β΄Λυκείου χωρίς καμία εξαίρεση και όχι μόνο οι μαθητές κάποιων τμημάτων.

3.5 Περιορισμοί της Έρευνας

Το Ερωτηματολόγιο αναπτύχθηκε σε 10 σχολεία της Ελλάδος, όπως αναφέρονται στην ανάλυση του δείγματος.

Ωστόσο ο ερευνητής αντιμετώπισε δυσκολίες κατά την πραγματοποίηση και συμπλήρωσή του από τους μαθητές.

Το γεγονός ότι κάποια σχολεία επελέγησαν γιατί οι υπηρετούντες εκπαιδευτικοί ήταν γνώριμοι με τον ερευνητή, δεν θεωρούμε ότι αποτελεί αρνητικό στοιχείο της έρευνας. Παρ' όλα αυτά αρκετοί εκπαιδευτικοί αρνήθηκαν να βοηθήσουν στην συμπλήρωση των ερωτηματολογίων από τους μαθητές των τμημάτων τους, για διαφόρους λόγους.

Πρόσθετη δυσκολία απετέλεσε η άρνηση κάποιων μαθητών να αποδεχθούν να συμπληρώσουν το ονοματεπώνυμό τους και αρκέστηκαν να συμπληρώσουν μόνο το φύλο τους. Ωστόσο η παράκληση των συναδέλφων – επιτηρητών για πλήρη αναγραφή των στοιχείων τους τις πλείστες φορές πιστεύουμε ότι προσέδωσε και συνέπεια και εγκυρότητα στη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων, αφού συχνά παρατηρείται σε ένα ανώνυμο ερωτηματολόγιο έλλειμμα υπεύθυνης συμπλήρωσής του.

Επειδή δεν έγινε καμία απολύτως επιλογή μαθητών, θεωρούμε ότι οι όποιες χαμηλές επιδόσεις υπάρχουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις (π.χ. OPme2, OPop1), εμπερικλείουν την πιθανότητα να οφείλονται σε μη γνωστικούς παράγοντες ή έλλειψη κινήτρων και όχι κατ' ανάγκην σε γνωστικούς παράγοντες και μαθησιακές δυσκολίες. Επίσης, υπάρχει η πιθανότητα αλληλοβοήθειας μεταξύ των μαθητών, που κάθονταν στο ίδιο θρανίο.

Θετικό, τέλος, στοιχείο είναι το γεγονός ότι στα επιλεγέντα σχολεία πήραν μέρος όλοι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου, χωρίς κανέναν αποκλεισμό.

3.6 Έργα του δοκιμίου

Τα έργα του ερωτηματολογίου κωδικοποιήθηκαν με τα αρχικά **PE, OP, VE, SE,** τα οποία αντιστοιχούν στα έργα αντιληπτικής σύλληψης (perceptual), στα έργα λειτουργικής σύλληψης (operative), στα έργα λεκτικής (verbal) και τέλος στα ακολουθιακής σύλληψης (sequential). Μετά τα αρχικά ακολουθούν γράμματα που υποδηλώνουν τον τύπο του έργου και την αρίθμησή του. Ειδικότερα:

1. Η ομάδα των αντιληπτικών έργων **(PE)** περιλαμβάνει τα έργα **PEr1, PEr2, PEr3,** που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν υποσχήματα ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος, **PEn1,** που εξετάζει την ικανότητα ονομασίας των εν λόγω υποσχημάτων.
2. Η ομάδα των έργων λειτουργικής σύλληψης **(OP)** περιλαμβάνει τα έργα **OPpw1, OPpw2, OPpw3,** που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών αναγνώρισης, όταν απαιτείται, αλλαγή της θέσης (προσανατολισμού) σχημάτων. Τα έργα **OPop1, OPop2, OPop3,** που απαιτούν οπτική τροποποίηση (σμίκρυνση ή μεγέθυνση ή λοξότητα), ενώ τέλος, τα έργα **OPme1, OPme2, OPme3** που απαιτούν μερολογική τροποποίηση, δηλαδή διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε υποσχήματα και συνδυασμό τους για δημιουργία ενός άλλου σχήματος.
3. Η ομάδα των έργων λεκτικής σύλληψης **(VE)** περιλαμβάνει τα έργα **VEde1, VEde2,** που εξετάζουν αποδείξεις που βασίζονται σε ορισμό, τα έργα **VEpo1**, **VEpo2**, **VEp1m3**, **VEp2m3**, που εξετάζουν αποδείξεις που βασίζονται σε διαδικασία και τέλος, τα έργα **VEpi1, VEpi2** που απαιτούν λεκτική απόδειξη βασισμένη σε διαδικασία, όταν όμως η λεκτική διατύπωση δεν ταιριάζει με τη σχηματική παράσταση που δίνεται.

4. Τέλος, η ομάδα των έργων ακολουθιακής σύλληψης **(SE)** που πραγματεύεται κατασκευές περιλαμβάνει τα έργα **SEc1, SEc2, SEc3,** που εξετάζουν γεωμετρικές κατασκευές και τα έργα **SEd1, SEd2** που αφορούν περιγραφή κατασκευής γεωμετρικού σχήματος.

Ο τρόπος βαθμολόγησης των έργων των δοκιμίων ακολούθησε την πεπατημένη, δόθηκε βαθμός 1 για τις σωστές απαντήσεις και 0 για τις λανθασμένες. Ωστόσο, κατεγράφησαν και κωδικοποιήθηκαν τόσο οι λάθος απαντήσεις (mistake π.χ. m1, m2, m3) όσο και η λάθος αιτιολόγηση (justification, π.χ. mj1, mj2, mj3) ή ο τύπος αιτιολόγησης (π.χ. j1, j2, j3 κλπ). Τέλος, αν ο μαθητής σχεδίαζε πάνω στο σχήμα της αντίστοιχης ερώτησης του δοκιμίου, αυτό καταγραφόταν με την προσθήκη στο τέλος της αντίστοιχης μεταβλητής του dr1, dr2 κλπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Αποτελέσματα

Στατιστική Ανάλυση

Στα αποτελέσματα των 501 ερωτηματολογίων που έχουν συλλεγεί εφαρμόστηκε το στατιστικό πακέτο SPSS, προκειμένου να διακριβωθούν τόσο το πλήθος και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στο δείγμα όσο και να πραγματοποιηθεί διερευνητική παραγοντική ανάλυση των δηλώσεων του ερωτηματολογίου και ανάλυσης ομοιότητας τους. Τέλος έτρεξε το στατιστικό πρόγραμμα C.H.I.C. (Bodin, Coutourier, & Grass, 2000) προκειμένου να επιβεβαιωθούν οι σχέσεις ομοιότητος και να παραχθεί το συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών.

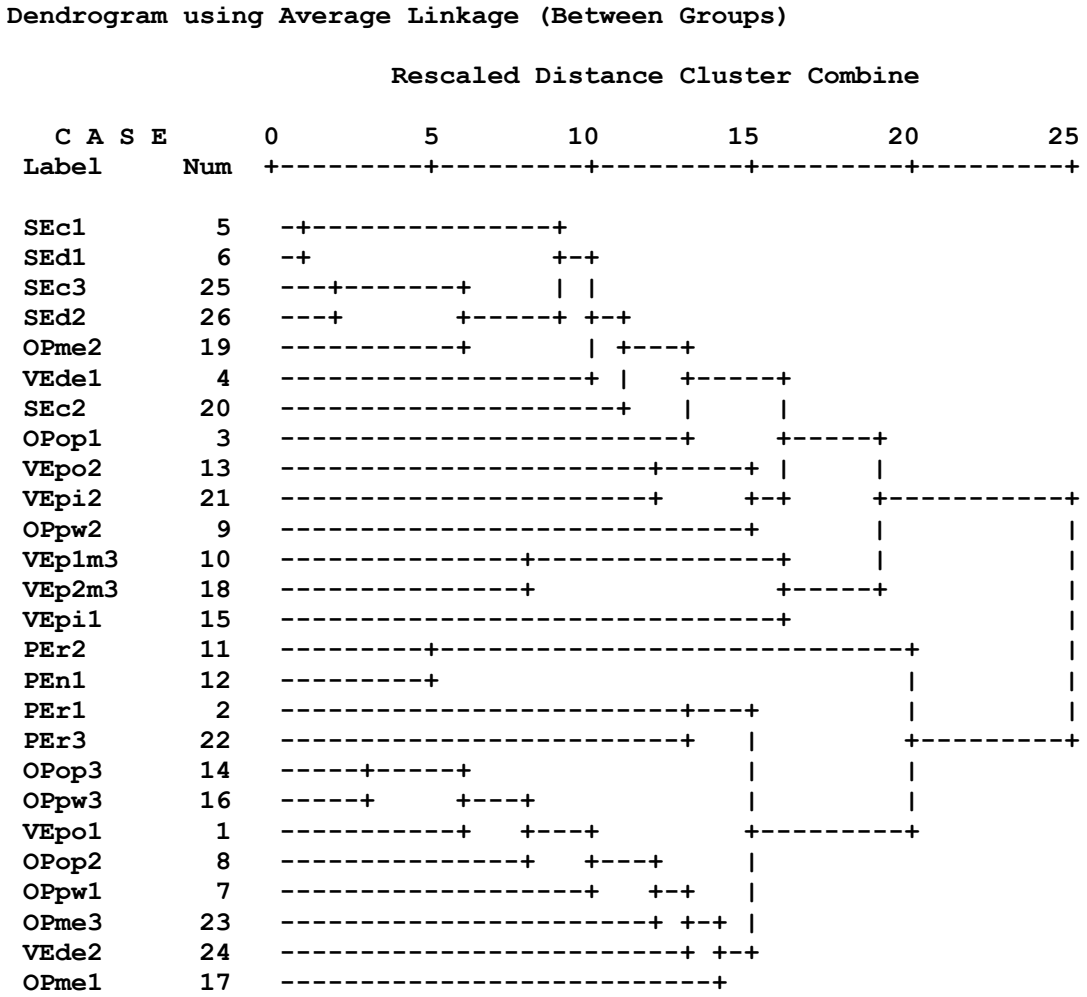
Να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι στο διάγραμμα ομοιότητος δημιουργούνται ομάδες έργων, τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο ενώ στο συνεπαγωγικό διάγραμμα παρουσιάζονται συνεπαγωγικές σχέσεις μεταξύ των έργων, που υποδεικνύουν κατά πόσο και σε ποιο βαθμό η επιτυχία σε ένα έργο ή ομάδων έργων του δοκιμίου συνεπάγεται την επιτυχία σε άλλο σχετικό έργο ή αντίστοιχα ομάδα έργων. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές στους διαφόρους τύπους έργων κωδικοποιήθηκαν και περιγράφονται επακριβώς (όπως στις OPpw1, OPme1, OPme3) και δηλώνεται ο τύπος προσέγγισης τους, π.χ. Δυναμική προσέγγιση, στατική προσέγγιση, στατική οπτική προσέγγιση, στατική αναλυτική προσέγγιση ή ο συνδυασμός τους.

Από τους 501 μαθητές του δείγματος που πήραν μέρος στην έρευνά μας τα 260 ήταν αγόρια (ποσοστό 51,9%) και τα 232 ήταν κορίτσια (ποσοστό 46,3%) . Υπάρχουν και 9 μαθητές (ποσοστό 1,8%) για τους οποίους δεν μπορεί να διευκρινισθεί το φύλο τους από τα στοιχεία των ερωτηματολογίων αφού αναφέρουν μόνο τα αρχικά τους.

4.1 Διάγραμμα ομοιότητας-δενδρόγραμμα

με το πρόγραμμα SPSS

Cluster Analysis με το SPSS



Σχήμα 1 Διάγραμμα Ομοιότητας-Δενδρόγραμμα

Κάναμε Cluster Analysis με το SPSS προκειμένου να διακριβώσουμε τυχόν ομαδοποιήσεις του δείγματος και από το προκύπτον διάγραμμα ομοιότητας-δενδρόγραμμα διαπιστώνουμε τα εξής:

Δημιουργούνται για τις απαντήσεις των μαθητών δύο βασικές κλάσεις ομοιότητας (σε επίπεδο απόστασης < 25).

1) Η **πρώτη κλάση ομοιότητας** αποτελείται από **14** έργα. Περιλαμβάνει :

α) όλα τα έργα **ακολουθιακής σύλληψης (SE)** που αφορούν είτε κατασκευές γεωμετρικού σχήματος (SEc1, SEc2, SEc3) είτε περιγραφή αντίστοιχων κατασκευών (SEd1, SEd2) .

β) 6 έργα **λεκτικής σύλληψης (VE)** που αφορούν αποδείξεις που βασίζονται στον ορισμό (VEde1), ή αποδείξεις που βασίζονται σε διαδικασίες (VEpo2, VEp1m3, VEp2m3, VEpi1, VEpi2) και

γ) 3 έργα **λειτουργικής σύλληψης (OP)** που αφορούν σε ένα έργο τροποποίησης αλλαγής θέσης (OPpw2), ένα έργο οπτικής τροποποίησης (OPop1) και ένα έργο μερολογικής τροποποίησης (OPme2).

2) Η **δεύτερη κλάση ομοιότητας** αποτελείται από **12** έργα. Συγκεκριμένα περιλαμβάνει:

α) όλα τα έργα **αντιληπτικής σύλληψης (PE)** που αφορούν αναγνώριση και ονομασία των υποσχημάτων ενός γεωμετρικού σχήματος δηλαδή τα (PEr1, PEr2, PEr3, PEn1).

β) 6 έργα **λειτουργικής σύλληψης (OP)** , που αφορούν την πλειοψηφία των έργων τροποποίησης θέσης (OPpw3, OPpw1),των έργων οπτικής τροποποίησης (OPop2, OPop3) καθώς και των έργων μερολογικής τροποποίησης (OPme1 και OPme3).

γ) 2 έργα **λεκτικής σύλληψης (VE)** που αφορούν αποδείξεις που βασίζονται στον ορισμό (VEde2), ή αποδείξεις που βασίζονται σε διαδικασίες (VEpo1).

Από τη μελέτη των παραπάνω κλάσεων διαπιστώνουμε ότι στα έργα που υπάγονται στην ακολουθιακή σύλληψη (SE) υφίστανται **πολύ ισχυρές σχέσεις**

μεταξύ εκείνων που ελέγχουν την ικανότητα κατασκευής σχημάτων (SEc1, SEc2 και SEc3) από τους μαθητές της Β' Λυκείου και αυτών που απαιτούν την περιγραφή των εν λόγω κατασκευών (SEd1, SEd2) (σε επίπεδο απόστασης <5).

Αντίστοιχες σχέσεις, λιγότερο όμως ισχυρές υφίστανται μεταξύ των έργων αντιληπτικής σύλληψης που απαιτούν τόσο αναγνώριση PEr1, PEr2, PEr3, όσο και ονομασία υποσχημάτων PEn1 (σε επίπεδο απόστασης <15).

Επιπροσθέτως στην πρώτη κλάση εμφανής είναι η ύπαρξη αρκετά ισχυρών σχέσεων ομοιότητας μεταξύ όλων των έργων ακολουθιακής σύλληψης (SE) και της πλειοψηφίας των έργων λεκτικής σύλληψης (VE) που αφορούν τη διάκριση των ειδών αποδείξεων (VEp1m3, VEp2m3), την απόδειξη που βασίζεται στον ορισμό (VEde1) καθώς και τις αποδείξεις που η λεκτική διατύπωση διαφέρει της ορθής κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος (VEpi1, VEpi2).

Τα έργα της λειτουργικής σύλληψης (OPop2, OPop3, OPpw1, OPpw3, OPme1 και OPme3) δημιουργούν αρκετά ισχυρές σχέσεις με τα λεκτικά έργα VEpo1 και VEde2 αντίστοιχα, που βασίζονται αφ΄ ενός μεν σε διαδικασίες απόδειξης και αφ΄ ετέρου σε αποδείξεις βάσει ορισμού.

Τέλος, αδιαμφισβήτητη είναι, **η συνέπεια** της συμπεριφοράς των μαθητών στη διαπραγμάτευση έργων ακολουθιακής σύλληψης (SE) αλλά και η δημιουργία **δεσμών ομοιότητας** μεταξύ έργων ακολουθιακής σύλληψης (SE) και λεκτικής σύλληψης (VE), που εξηγείται λόγω μη επάρκειας μόνο της αντίληψης των μαθητών, αλλά και της αναγκαιότητας ταυτόχρονης παρουσίας μαθηματικών περιορισμών.

4.2 Παραγοντική Ανάλυση

Στη συνέχεια επιχειρήσαμε να διακριβώσουμε αν υπάρχουν παράγοντες, μεταξύ των μεταβλητών που να ερμηνεύουν ικανοποιητικό ποσοστό της διακύμανσης. Προς το σκοπό αυτό τρέξαμε τη Factor Analysis του προγράμματος SPSS αρχικά για το σύνολο όλων των μεταβλητών (26). Προχωρήσαμε σε έλεγχο του **δείκτη ΚΜΟ** που ήταν **,753** καλός για τέτοιου είδους δεδομένα.

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		,753
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	2875,962
	Df	325
	Sig.	,000

Οι πολλαπλοί συνδυασμοί και οι αντίστοιχοι έλεγχοι που κάναμε μας οδήγησαν στα εξής:

1. Στα έργα **ακολουθιακής σύλληψης (SE)** δημιουργήθηκαν δύο παράγοντες:

   Ο **1ος** περιλαμβάνει τα έργα SEd1 με τιμή ,951
   και SEc1 με τιμή ,937 και
   Ο **2ος** περιλαμβάνει τα έργα SEc3 με τιμή ,924
   και SEd2 με τιμή ,909 .
   Η μεταβλητή SEc2 αφαιρείται λόγω χαμηλής τιμής στο Communality.

   Οι δύο αυτοί παράγοντες ερμηνεύουν το **88,661 %** της διακύμανσης πράγμα πολύ υψηλό, ενώ τα αποτελέσματα είναι πολύ αξιόπιστα αφού ο συντελεστής **Cronbach's Alpha είναι ,718.**

   * **(Συντελεστές της τάξης 0,7 αποτελούν ικανοποιητικό επίπεδο για κοινωνική-εκπαιδευτική έρευνα (Cohen,1998)).**

Συμπερασματικά λοιπόν, παρατηρούνται **ισχυρές σχέσεις** μεταξύ έργων **ακολουθιακής σύλληψης (SE)** και ως εκ τούτου διαπιστώνεται **συνέπεια** στη συμπεριφορά των μαθητών της Β΄Λυκείου ως προς αυτού του είδους τα έργα.

2. Στα έργα **αντιληπτικής σύλληψης (PE)** δημιουργήθηκαν δύο παράγοντες:

Ο **1ος** περιλαμβάνει τα έργα PEη1 με τιμή ,919
και PEr2 με τιμή ,904 και
Ο **2ος** περιλαμβάνει τα έργα PEr3 με τιμή ,835
και PEr1 με τιμή ,784 .

Οι δύο αυτοί παράγοντες ερμηνεύουν το **75,558 %** της διακύμανσης δηλαδή πολύ υψηλό ποσοστό, ενώ τα αποτελέσματα είναι αξιόπιστα, αφού ο συντελεστής **Cronbach's Alpha είναι ,712.**

Άρα και εδώ παρατηρούνται αρκετά ισχυρές σχέσεις μεταξύ των έργων **αντιληπτικής σύλληψης (PE)** και διακρίβωση της **συνέπειας** στη συμπεριφορά των μαθητών της Β΄Λυκείου στα εν λόγω έργα.

3. Στα έργα **λεκτικής σύλληψης (VE)** βγάζοντας τις μεταβλητές VEpi1 και VEde2 που έχουν πολύ χαμηλές τιμές στο Communality δημιουργήθηκαν δύο παράγοντες:

Ο **1ος** περιλαμβάνει τα έργα VEpo2 με τιμή ,795
VEpi2 με τιμή, 703, VEde1 με τιμή, 557
και VEpo1 με τιμή ,544 ενώ
Ο **2ος** περιλαμβάνει τα έργα VEp2m3 με τιμή ,885
και VEp1m3 με τιμή ,880.

Οι δύο αυτοί παράγοντες ερμηνεύουν το **56,542 %** της διακύμανσης, ενώ τα αποτελέσματα είναι αξιόπιστα, αφού ο συντελεστής **Cronbach's Alpha είναι ,653.**

Αν και λιγότερο ισχυρές οι σχέσεις, παρατηρούνται στο δεύτερο παράγοντα ισχυροί δεσμοί στις αποδείξεις που βασίζονται σε διαδικασία.

4. Στα έργα **λειτουργικής κατανόησης (OP)** παρατηρούνται ομαδοποιήσεις 2 παραγόντων σε κάθε είδος, δηλαδή στα έργα τροποποίησης θέσης, οπτικής και μερολογικής τροποποίησης. Συγκεκριμένα **στα μερολογικής** δημιουργήθηκαν δύο παράγοντες:

Ο **1ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα OPme3 με τιμή ,765
και OPme1 με τιμή ,734 και
Ο **2ος** περιλαμβάνει το έργο OPme2 με τιμή ,995, που ερμηνεύουν το **70,885 %** της διακύμανσης

Στα έργα **τροποποίησης θέσης**

Ο **1ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα OPpw1 με τιμή ,794

και OPpw2 με τιμή ,732 και
Ο **2ος** περιλαμβάνει το έργο OPpw3 με τιμή ,991, που ερμηνεύουν το **72,450 %** της διακύμανσης.

Τέλος στα έργα **οπτικής τροποποίησης** έχουμε :
Ο **1ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα OPop3 με τιμή ,765
και OPop1 με τιμή ,-708 και
Ο **2ος** περιλαμβάνει το έργο OPop2 με τιμή ,971, που ερμηνεύουν το **69,763 %** της διακύμανσης.

5. Προχωρήσαμε στη συνέχεια σε έλεγχο, με ζητούμενο τη διακρίβωση **σύνδεσης** και δημιουργίας παραγόντων μεταξύ έργων **ακολουθιακής σύλληψης (SE) και λεκτικής σύλληψης (VE).**

Πράγματι μετά την αφαίρεση των μεταβλητών **VEde2, SEc2** και **VEd1** που είχαν πολύ μικρές τιμές στο Communality, δημιουργήθηκαν 4 παράγοντες:

Ο **1ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα SEd1 με τιμή ,941

και SEc1 με τιμή ,924

Ο **2ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα SEc3 με τιμή ,921

και SEd2 με τιμή ,894

Ο **3ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα VEp1m3 με τιμή ,887

και VEp2m3 με τιμή ,886 και

Ο **4ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα VEpo1 με τιμή ,880 και

VEpo2 με τιμή ,646. (συντελεστής **Cronbach's Alpha είναι ,723).**

Αυτοί οι 4 παράγοντες ερμηνεύουν πολύ υψηλό ποσοστό, το **80,322%** της διακύμανσης.

Επιβεβαιώνεται λοιπόν **η σύνδεση** έργων **ακολουθιακής (SE)** και **λεκτικής σύλληψης (VE),** αφού τόσο η χρήση τύπων, όσο και οι παρατηρούμενες γεωμετρικές ιδιότητες, αποτελούν κοινό πεδίο αναφοράς, αφ' ενός μεν στις αποδείξεις, αφ' ετέρου δε στις γεωμετρικές κατασκευές.

6. Ό έλεγχος μεταξύ έργων **<u>αντιληπτικής</u> (PE)** και **<u>λεκτικής σύλληψης</u> (VE)** κατέδειξε την παρόμοια σύνδεση των εν λόγω έργων**.**

Μετά την αφαίρεση των μεταβλητών VEpi1,VEpi2 που είχαν πολύ μικρές τιμές στο Communality, δημιουργήθηκαν 4 παράγοντες:

Ο **1ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα PEr2 με τιμή ,887

και PEη1 με τιμή ,883

Ο **2ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα VEp2m3 με τιμή ,876

και VEp1m3 με τιμή ,875

Ο **3ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα PEr1με τιμή ,734

PEr3 με τιμή, 734 και VEd2 με τιμή , 579 και

Ο **4ος** παράγοντας περιλαμβάνει τα έργα VEpo1 με τιμή ,780

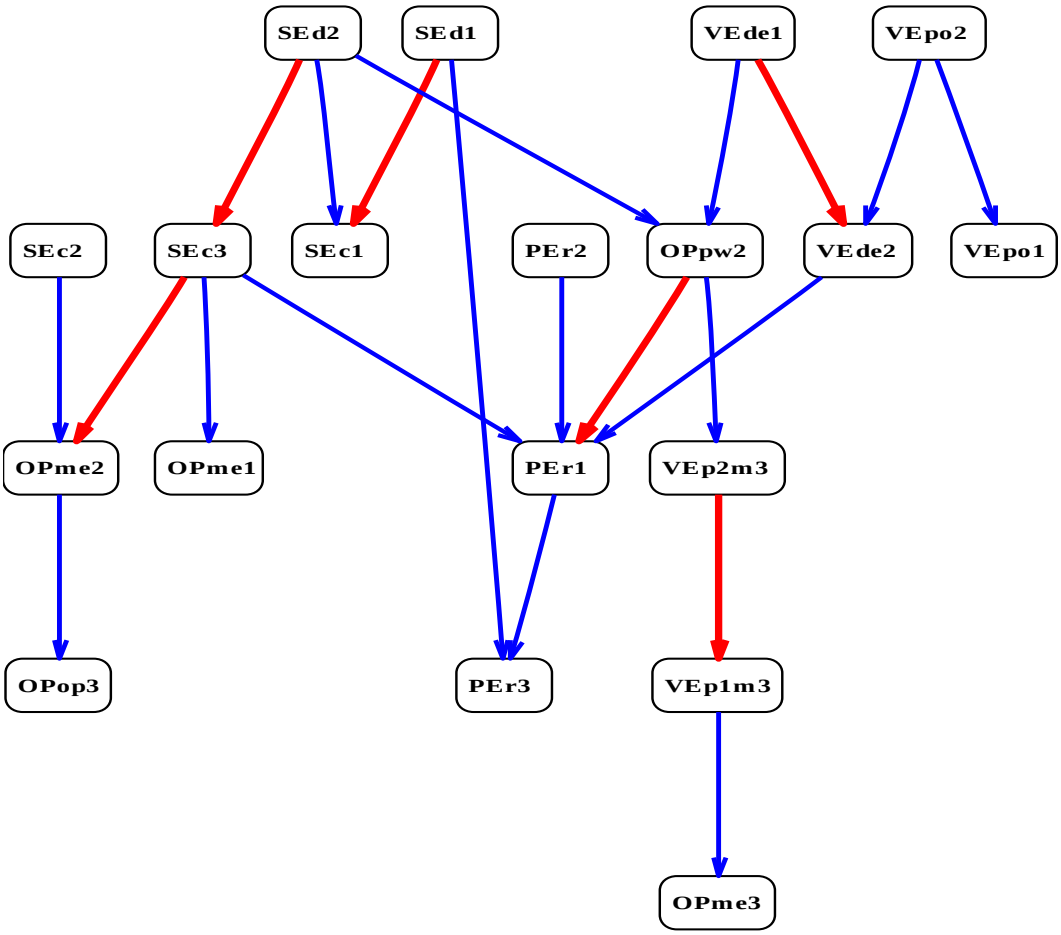
VEpo2 με τιμή, 657 και VEd1 με τιμή ,534 που ερμηνεύουν το **62,664 %** της διακύμανσης.

Αξιοσημείωτη είναι η εμφάνιση **σχέσεων** μεταξύ των έργων, που η επίλυσή τους στηρίζεται στη χρήση του ορισμού, όπως το έργο VEde1 και των έργων VEpo1 και VEpo2 που στηρίζονται σε διαδικασίες απόδειξης.

7. Ο πολλαπλός έλεγχος μεταξύ έργων **ακολουθιακής (SE), λεκτικής (VE) και λειτουργικής σύλληψης (OP) δεν** οδήγησε σε **αξιόπιστα** αποτελέσματα, αφού απαιτούσε την απόρριψη των μισών σχεδόν μεταβλητών και τη δημιουργία μεγάλου αριθμού παραγόντων.

4.3 Συνεπαγωγικό διάγραμμα

Ακολούθως τρέξαμε το στατιστικό πρόγραμμα C.H.I.C. (Bodin, Coutourier, & Grass, 2000) προκειμένου να επιβεβαιωθούν οι σχέσεις ομοιότητος και να παραχθεί το συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών. Από την ανάλυση προέκυψε το παρακάτω **συνεπαγωγικό διάγραμμα :**



Σχήμα 2 Συνεπαγωγικό διάγραμμα

Μέσω του συνεπαγωγικού διαγράμματος διακρίνονται ευκρινώς οι σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν. Στο διάγραμμα μάλιστα με ενάργεια μπορούμε να διακρίνουμε **δύο ομάδες έργων** ή διαφορετικά δύο συνεπαγωγικές αλυσίδες. Στην **πρώτη ομάδα** διακρίνουμε σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ έργων **ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης.** Στην κορυφή αυτής της αλυσίδας εντοπίζουμε έργα ακολουθιακής σύλληψης, τα οποία απαιτούν την περιγραφή της κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος (SEd1 και SEd2). Η επιτυχία στα έργα αυτά συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα ακολουθιακής σύλληψης που απαιτούν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος (SEc1, SEc2 και SEc3). Στο κάτω μέρος αυτής της αλυσίδας έργων βρίσκονται έργα λειτουργικής σύλληψης, τα οποία περιλαμβάνουν μερολογικές (OPme1 και OPme2) ή οπτικές τροποποιήσεις (OPop3) του γεωμετρικού σχήματος.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η περιγραφή της κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος είναι πιο δύσκολη από τη διαδικασία κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος. Από την πρώτη ομάδα έργων του συνεπαγωγικού διαγράμματος παρατηρούμε ακόμα **ότι τα έργα ακολουθιακής σύλληψης είναι πιο δύσκολα, σε σχέση με τα έργα λειτουργικής σύλληψης,** τα οποία τοποθετούνται στο κάτω μέρος της συνεπαγωγικής αλυσίδας. Οι συνεπαγωγικές σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ των έργων ακολουθιακής σύλληψης ενισχύουν το συμπέρασμα που προκύπτει από το διάγραμμα ομοιότητας, δηλαδή ότι οι μαθητές παρουσιάζουν μια συνέπεια στη συμπεριφορά τους ως προς την επίλυση έργων ακολουθιακής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Η **δεύτερη ομάδα** έργων του συνεπαγωγικού διαγράμματος περιλαμβάνει συνεπαγωγικές αλυσίδες μεταξύ έργων **λεκτικής, αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης.** Μια πρώτη συνεπαγωγική αλυσίδα που εντοπίζουμε στην ομάδα αυτή δημιουργείται από έργα αντιληπτικής κατανόησης (PEr1, PEr2 και PEr3), τα οποία απαιτούν την αναγνώριση υποσχημάτων σε ένα ενιαίο σχήμα. Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι μαθητές επιδεικνύουν **μια <u>συνέπεια</u> στον τρόπο απάντησης τους σε έργα αναγνώρισης.** Στο πάνω μέρος αυτής της ομάδας έργων εντοπίζουμε έργα λεκτικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να προσέξουμε τις συνεπαγωγικές σχέσεις που προκύπτουν μεταξύ των έργων που η

επίλυση τους βασίζεται στη χρήση ενός ορισμού (VEde1 και VEde2) και αυτών όπου απαιτείται μια διαδικασία απόδειξης (VEpo1 και VEpo2) αντίστοιχα. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν **ενδείξεις για το ότι οι μαθητές διαχειρίζονται με διακριτό τρόπο** τους δύο αυτούς τύπους έργων, τα οποία εμπίπτουν όμως στην ίδια κατηγορία. Αξίζει, επίσης, να αναφερθούμε στη συνεπαγωγική σχέση που συνδέει τα δύο αντίστοιχα έργα που αφορούν στη διάκριση της τυπικής απόδειξης από την εμπειρική και την ημιεμπειρική (VEp1m3 και VEp2m3). Και από αυτό το διάγραμμα, όπως και στο διάγραμμα ομοιότητας, φαίνεται να προκύπτει σταθερότητα στη συμπεριφορά των μαθητών στα δύο αυτά αντίστοιχα έργα. **Συνεπώς, οι μαθητές παρουσιάζονται να είναι σε θέση να διακρίνουν την τυπική απόδειξη ανάμεσα στις υπόλοιπες και να την αποδέχονται.** Στην ομάδα αυτή συναντούμε, ακόμη, και δύο έργα λειτουργικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Το ένα είναι έργο τροποποίησης αλλαγής θέσης (OPpw2) και το άλλο έργο μερολογικής τροποποίησης (OPme3).

Από τη **δεύτερη ομάδα συνεπαγωγικών αλυσίδων** μπορούμε, συνεπώς, γενικά να πούμε ότι διακρίνεται μια **συνέπεια** από τους μαθητές ως προς τα **έργα λεκτικής** σύλληψης, αλλά και τα **αντιληπτικής σύλληψης**. Παρόλα αυτά, οι μαθητές φαίνεται να διαφοροποιούν τη συμπεριφορά τους στους δύο διαφορετικούς τύπους έργων που εμπίπτουν στη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

Εν συνεχεία θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα κάθε άσκησης, τόσο ως προς τις σωστές απαντήσεις, όσο και ως προς τον τρόπο αιτιολόγησης αλλά και τα λάθη των μαθητών. Οι ασκήσεις Α1-Α12 αναφέρονται στο πρώτο δοκίμιο ενώ οι ασκήσεις Β1-Β11 στο δεύτερο δοκίμιο.

4.4 Οι ερωτήσεις του Δοκιμίου

Ερώτηση Α1

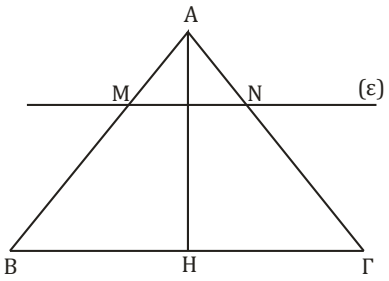
Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ, (ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.

α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα

β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ

γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

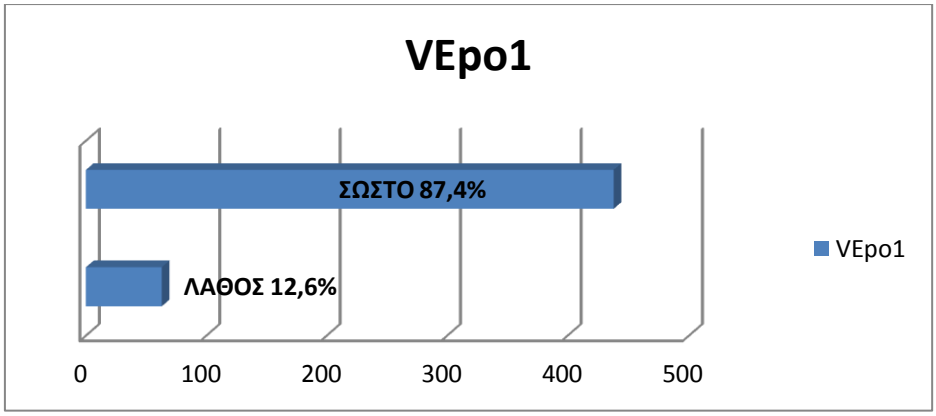
δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί



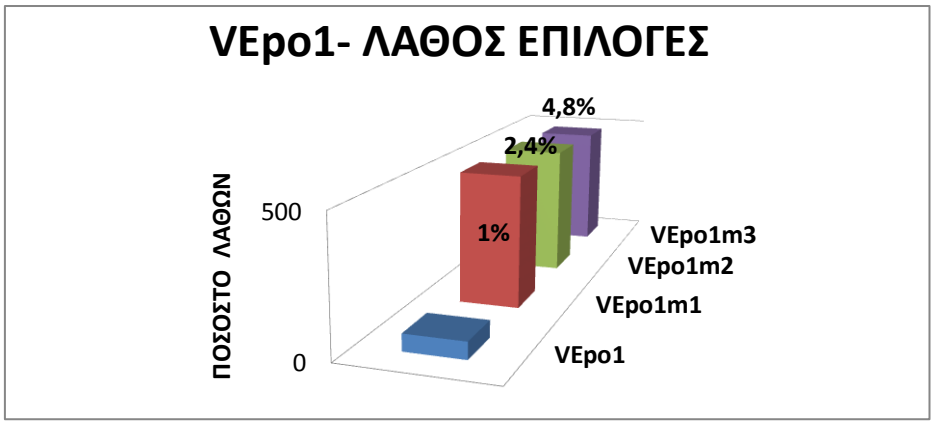
Αποτελέσματα

Αιτιολόγηση απάντησης		Ποσοστό (%)
Σωστή αιτιολόγηση		24
Λάθος αιτιολόγηση	Είναι ίσα: απόσταση σε παράλληλη ευθεία από κοινό σημείο Η	9,8
	Παράθεση σχέσεων ισότητας χωρίς αιτιολόγηση	11
	Σχηματισμός ισόπλευρου τριγώνου ΜΗΝ	2,2
	Σύγκριση τριγώνων ΜΟΗ και ΝΟΗ: Αναφέρουν ότι ΜΟ = ΟΝ χωρίς να το αιτιολογούν	3,8
	Η αιτιολόγηση βασίζεται στην επαναδιατύπωση των δεδομένων της άσκησης	2,2
	Δεν μπορεί να προσδιοριστεί, γιατί δεν υπάρχουν τα κατάλληλα δεδομένα (τα δεδομένα είναι ελλιπή) για σύγκριση των τμημάτων ΜΗ και ΝΗ	1
	Συγκρίνουν τα τρίγωνα ΒΜΗ και ΗΝΓ και χρησιμοποιούν για το κριτήριο γωνία την ορθή γωνία Η	0,2
	Άλλο λάθος	7,8
Δεν αιτιολόγησαν		38

Από τα άτομα που έλυσαν την άσκηση**, 279 (55,7%)** σχεδίασαν στο σχήμα.



Σχήμα 3 Σωστές Απαντήσεις VEpo1



Σχήμα 4 Λανθασμένες Απαντήσεις VEpo1

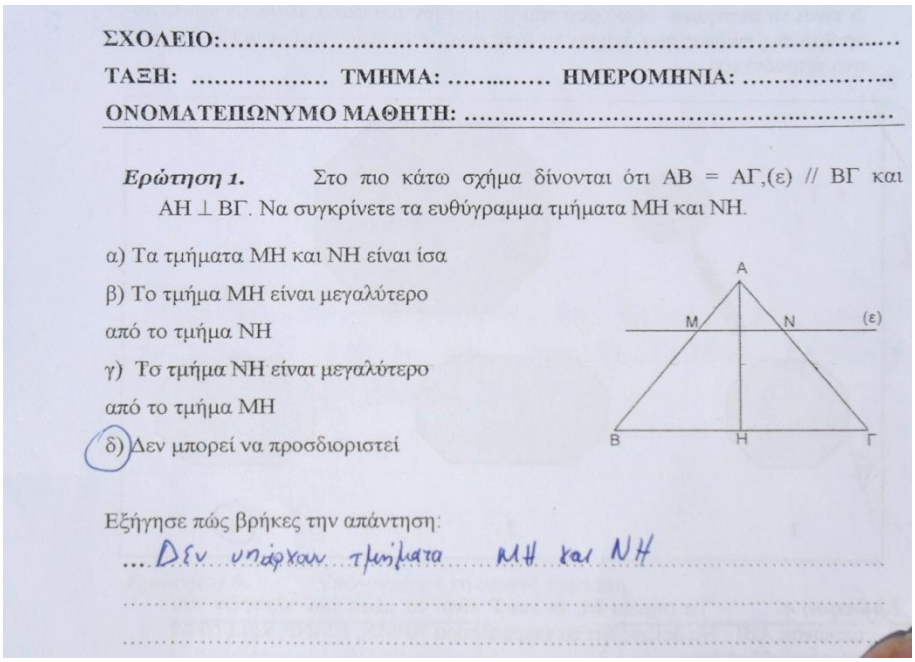
Στην εν λόγω ερώτηση η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών απαντά σωστά (87,4%) ωστόσο υψηλό ποσοστό απ' αυτούς το 38% δεν αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους και από το συνολικό πληθυσμό μόνο ένας στους τέσσερις έδωσε σωστή αιτιολόγηση (24%). Αναδεικνύεται μ' άλλα λόγια η εγγενής αδυναμία των συγκεκριμένων μαθητών για διατύπωση τεκμηριωμένου μαθηματικού λόγου. Ωστόσο ενδιαφέρον εύρημα αποτελεί το γεγονός ότι από τα άτομα που έλυσαν την άσκηση, 279, δηλαδή ποσοστό 55,7% κατά την διαδικασία επίλυσης, σχεδίασαν

πάνω στο σχήμα που σημαίνει ότι βοηθήθηκαν από κάποιες βοηθητικές γραμμές που έφεραν.

Οι τρόποι πρόσβασης στη λύση ακολουθούν 2 διαφορετικές προσεγγίσεις, κυρίως μέσω ισότητας τριγώνων που ακολουθείται από τη συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών κι δευτερευόντως μέσω εφαρμογής του θεωρήματος του Θαλή στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Παρατήρηση

Εντύπωση προκαλεί η προσέγγιση 2 μαθητών που αδυνατώντας να συγκρίνουν τα τμήματα ΜΗ και ΗΝ δηλώνουν ότι δεν μπορούν να προσδιορισθούν οι σχέσεις αφού δεν υπάρχουν στο σχήμα σχηματισμένα τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.


ΣΧΟΛΕΙΟ:.....

ΤΑΞΗ: ..... ΤΜΗΜΑ: ..... ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: .....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ: .....

Ερώτηση 1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ,(ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.

α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα

β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ

γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί

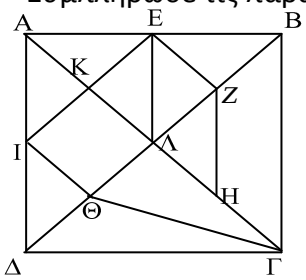
Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

...Δεν υπάρχουν τμήματα ΜΗ και ΝΗ.....

Σχήμα 5 Αδυναμία σύγκρισης τμημάτων

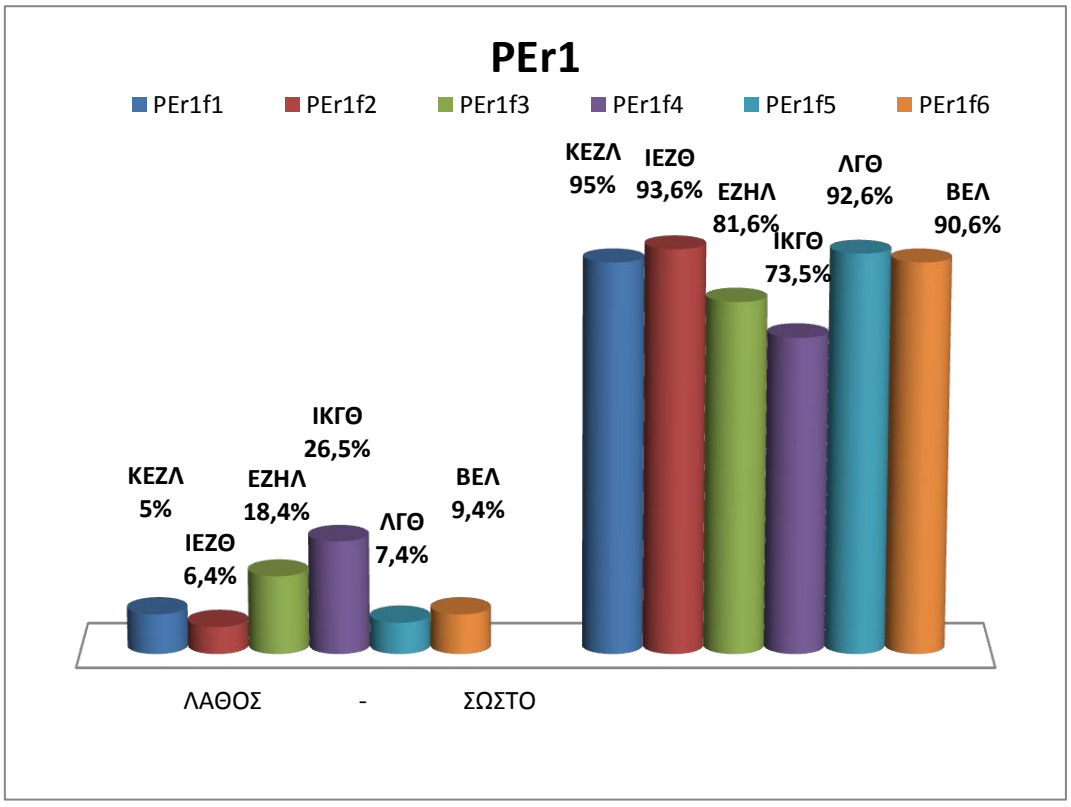
Ερώτηση Α2

Συμπλήρωσε τις παρακάτω φράσεις. Χρησιμοποίησε τις λέξεις που νομίζεις ότι ταιριάζουν καλύτερα.



Το σχήμα ΚΕΖΛ είναι **τετράγωνο ή ρόμβος ή τετράπλευρο ή ορθογώνιο.**
Το σχήμα ΙΕΖΘ είναι **ορθογώνιο ή τετράπλευρο.**
Το σχήμα ΕΖΗΛ είναι **παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο ή τετράπλευρο.**
Το σχήμα ΙΚΓΘ είναι **(ορθογώνιο) τραπέζιο ή τετράπλευρο.**
Το σχήμα ΛΓΘ είναι **(ορθογώνιο, σκαληνό) τρίγωνο.**
Το σχήμα ΒΕΛ είναι **(ισοσκελές, ορθογώνιο) τρίγωνο.**

Αποτελέσματα



Σχήμα 6 Απαντήσεις PEr1

Από τα άτομα που έλυσαν την άσκηση, 300 (59,9%) ονόμασαν σωστά και τα 6 σχήματα. Επίσης, 84 (16,8%) σχεδίασαν στο σχήμα .

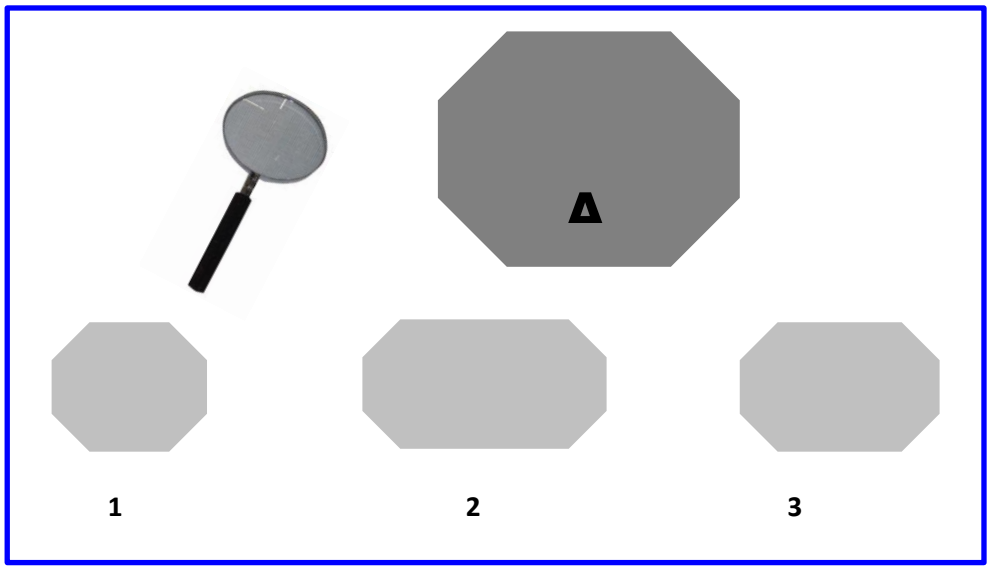
Λάθη

Από τα 501 άτομα, 1 άτομο ανέφερε ότι το ΙΚΓΘ δεν είναι τίποτα, 21 ανέφεραν ότι είναι τρίγωνο πάνω σε τετράγωνο, 5 ανέφεραν ότι το ΙΚΓΘ είναι πεντάπλευρο ή πεντάγωνο .

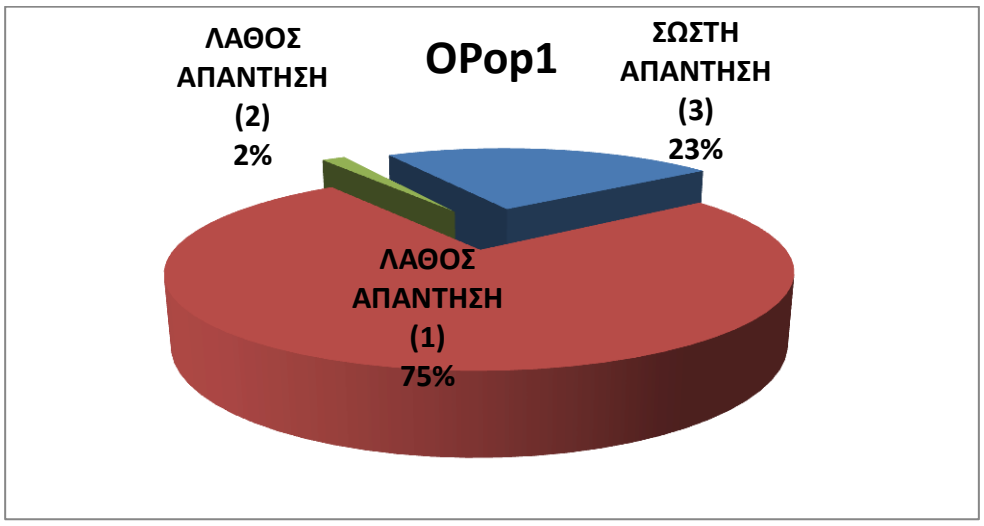
Υψηλό ποσοστό (60%) ονόμασε, όπως προείπαμε σωστά και τα 6 σχήματα, ενώ 16,8% σχεδίασαν στο σχήμα φτιάχνοντας τα περιγράμματα των ζητούμενων σχημάτων. Αξιοσημείωτο είναι επίσης το γεγονός ότι ένας στους τέσσερις μαθητές (26,5%) δεν αναγνωρίζει το ΙΚΓΘ ως τραπέζιο ή τετράπλευρο γενικά, ενώ 5 μαθητές θεωρούν το ΙΚΓΘ ως πεντάπλευρο ή πεντάγωνο. Γενικά το ΙΚΓΘ μπέρδεψε περισσότερο από τα υπόλοιπα τους μαθητές, αφού άλλοι λένε ότι δεν είναι τίποτα ή ότι είναι 2 σχήματα ή πεντάπλευρο.

Ερώτηση Α3

Ο Γιώργος έφτιαξε ένα οκτάγωνο στο τετράδιο του. Το σχήμα Δ είναι το οκτάγωνο όπως φαίνεται με μεγεθυντικό φακό. Βάλε σε κύκλο τον αριθμό της εικόνας που δείχνει το οκτάγωνο, έτσι όπως το έφτιαξε ο Γιώργος στο τετράδιό του.



Αποτελέσματα

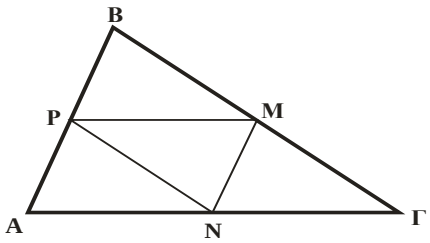


Σχήμα 7 Απαντήσεις OPop1

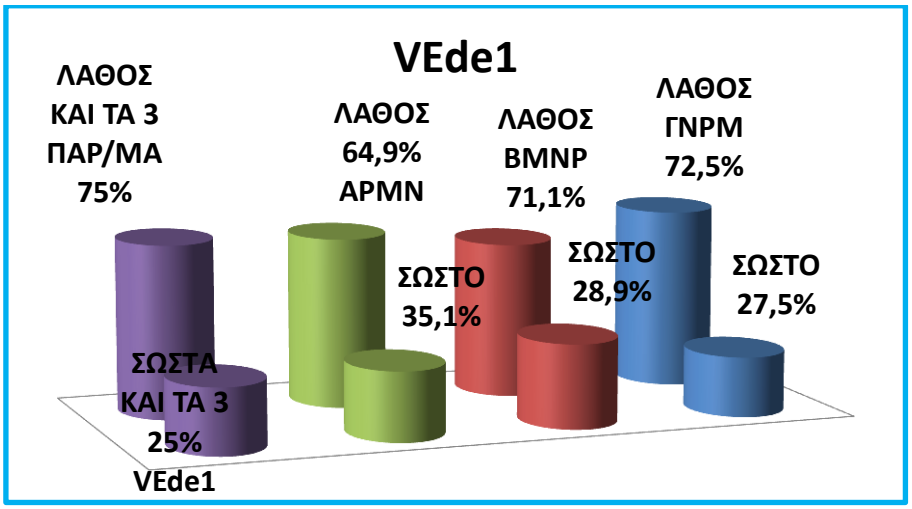
Αξιοπρόσεκτο στο εν λόγω έργο οπτικής τροποποίησης είναι ότι πολύ μεγάλος αριθμός μαθητών (77%) έκανε λάθος επιλογή. Η ερμηνεία που δίνουμε είναι βασικά η τάση των μαθητών να κοιτάζουν τη συνολική μορφή του σχήματος και όχι τις αντίστοιχες πλευρές του. Προφανώς το αποτέλεσμα δεν ανταποκρίνεται στη δυσκολία της άσκησης ωστόσο αποτελεί ισχυρή ένδειξη για το πώς υπεισέρχεται στην διαδικασία κατανόησης η αντιληπτική σύλληψη ενός σχήματος που εμφανώς περιπλέκει τα πράγματα.

Ερώτηση Α4

Τα σημεία Μ, Ν και Ρ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξεις ότι τα τετράπλευρα ΑΡΜΝ, ΒΜΝΡ, και ΓΝΡΜ είναι παραλληλόγραμμα.



Αποτελέσματα



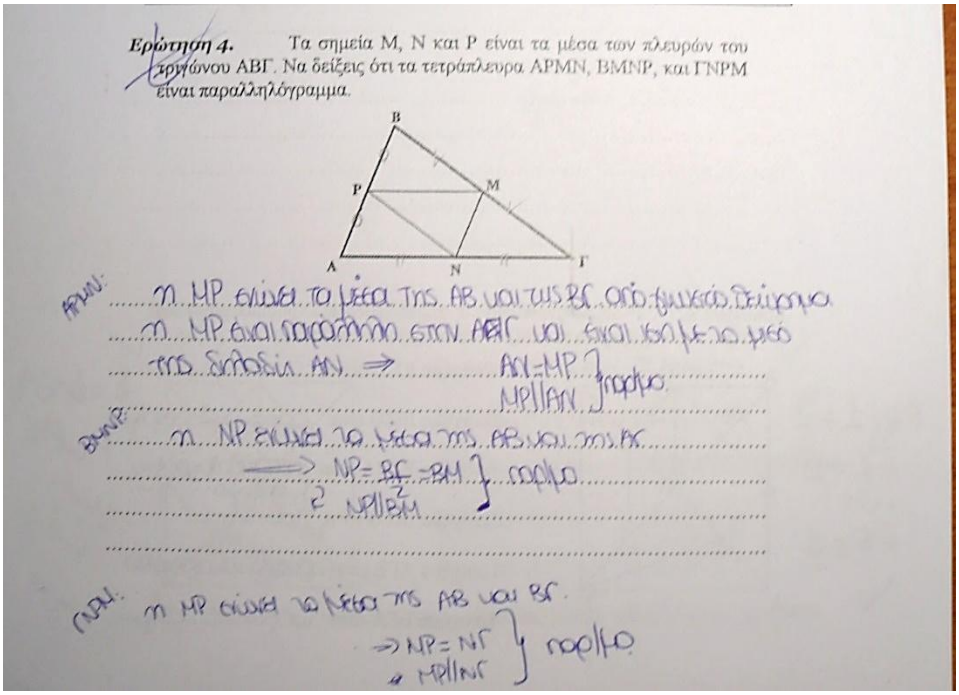
Σχήμα 8 Απαντήσεις VEde1

Λάθη	Ποσοστό (%)*
Χρησιμοποιούν ως κριτήριο ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών	22,4
Δεν δικαιολογούν την ισότητα των πλευρών και την παραλληλία με βάση το θεώρημα για τα μέσα των πλευρών	35,6
Θεωρούν ότι οι διάμεσοι είναι και ύψη	3,6
Έχει τρία τραπέζια που είναι παραλληλόγραμμα	3,8
Λάθος χρήση θεωρήματος	17,9
Φαίνεται από το σχήμα	0
Άλλο λάθος	16,7

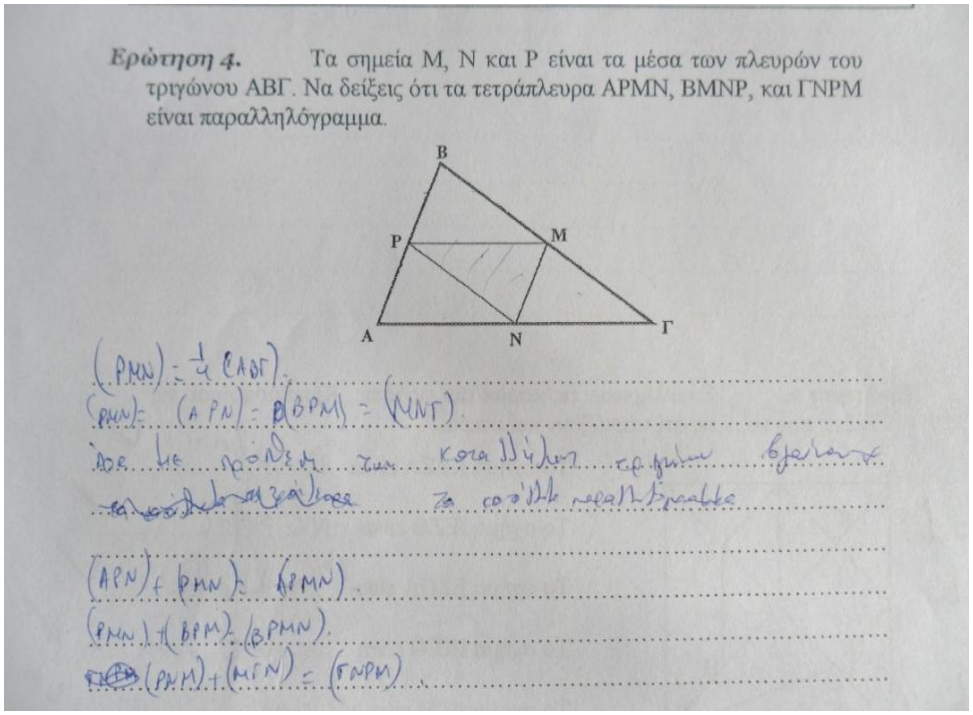
* Ποσοστό επί του συνόλου των λανθασμένων απαντήσεων.

Στο **«Άλλο λάθος»** περιλαμβάνονται ποικιλία λαθών όπως «φαίνεται από το σχήμα», «μη ολοκληρωμένη άσκηση», «σύγχυση εμβαδού-ισότητας», «κριτήριο ένα ζεύγος ίσων πλευρών», «λάθος ισότητα τριγώνων», «έτσι μου φαίνεται», «λόγω των διαγωνίων», «αναφέρει αλλά δεν εφαρμόζει το θεώρημα», τα οποία εμφανίζονται στο σύνολο των 376 λανθασμένων απαντήσεων.

Στην ερώτηση αυτή, που γενικά θεωρείται οικεία στους μαθητές, μόνο ένας στους 4 μαθητές (25%) ανακαλεί στη μνήμη του και εφαρμόζει σωστά το θεώρημα της Α΄ Λυκείου ότι το **«ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της».** Ωστόσο υπάρχει σχετική δυσκολία στους μαθητές (35,6%) να εφαρμόσουν σωστά το θεώρημα για τα μέσα των πλευρών τριγώνου, ενώ περισσότερο από δύο στους δέκα μαθητές (22,4%) θεωρούν ότι είναι αρκετό για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο να υπάρχει μόνο ένα ζεύγος παραλλήλων ευθειών.



Σχήμα 9 Σωστή επίλυση και για τα 3 παρ/μα



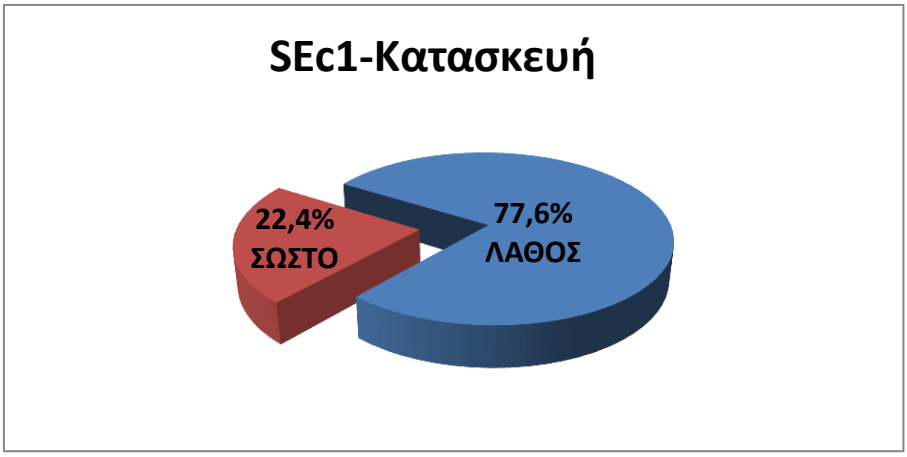
Σχήμα 10 Λάθος επίλυση συγχέει ομοιότητα με ισότητα

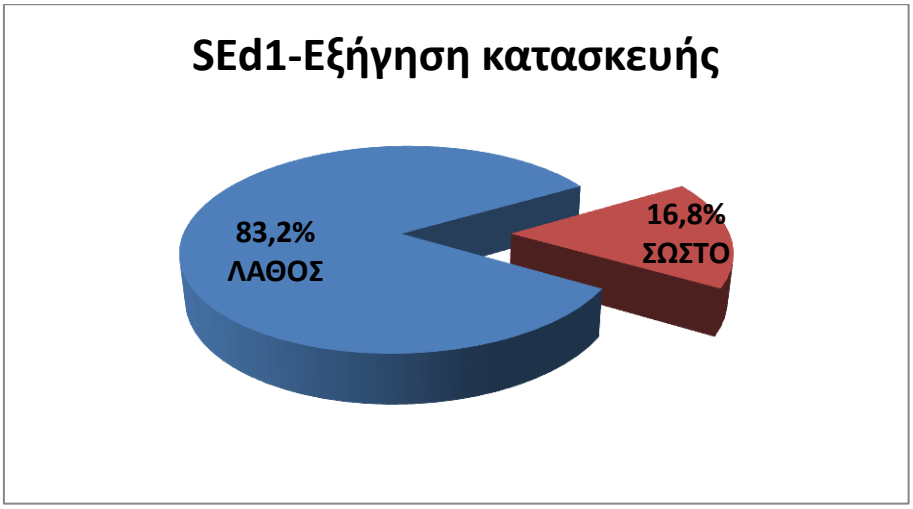
Ερώτηση Α5

Σχεδίασε τόξο ΑΒ με κέντρο Γ, ίσο με το τόξο ΜΝ με κέντρο το Ο.

Εξήγησε την κατασκευή σου.

Αποτελέσματα



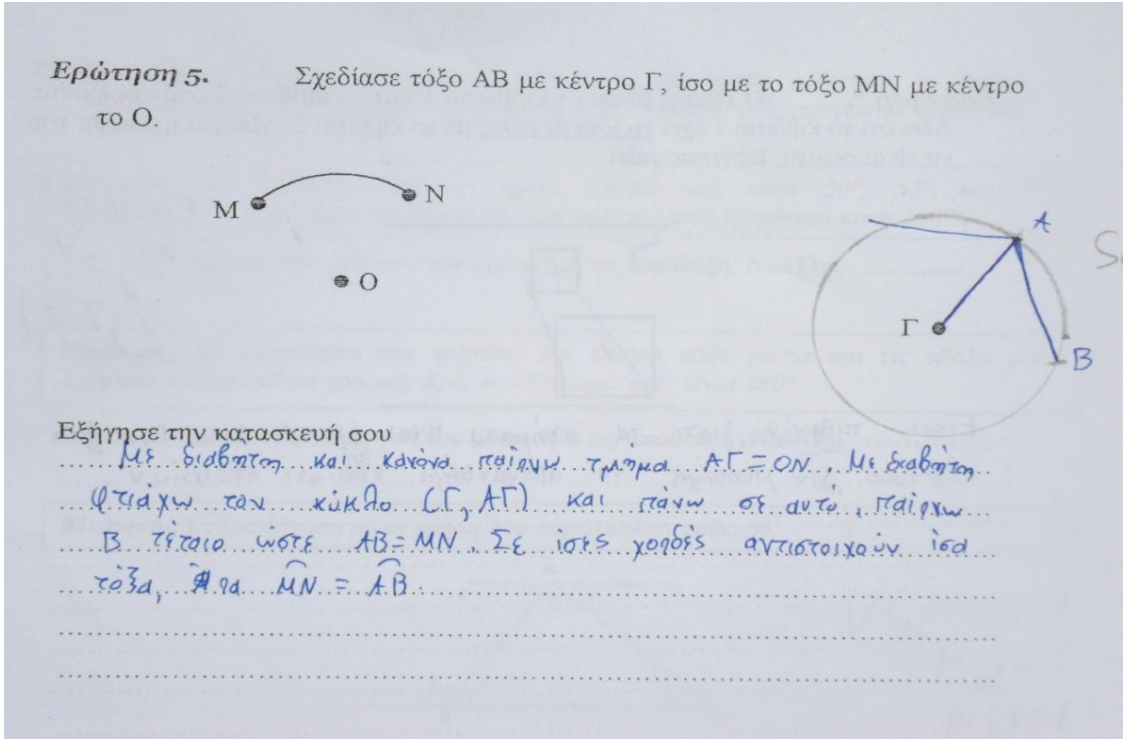


Σχήμα 11 Απαντήσεις SEc1-SEd1

Λάθη	Ποσοστό (%)*
Δεν αναφέρουν το θεώρημα	12,2
Σχεδιάζουν ακτίνα με τυχαίο μήκος και όχι ίση με την ακτίνα ΟΜ ή ΟΝ	13
Κατασκευή τυχαίου τόξου	49,9
Κατασκευή με εμπειρική μέτρηση (με κλωστή)	1,7
Μετρούν και σχηματίζουν τις δύο ακτίνες, διατηρώντας την κλίση της ρίγας και ακολούθως φέρνουν καμπύλη για να σχηματιστεί το τόξο (ενώνουν τα σημεία Α και Β)	13,4
Βασίζονται στο μέσο του τόξου (πχ. φέρνουν και μετρούν την ακτίνα που καταλήγει στο μέσο του τόξου ΜΝ και κάνουν την ίδια διαδικασία και για το τόξο ΑΒ.)	6,5
Σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ίσο με το τρίγωνο ΟΜΝ, φέρνουν κάθετη στην ΜΝ από το ψηλότερο σημείο του τόξου ΜΝ και κάνουν το αντίστοιχο και για το τόξο ΑΒ.	1,2
Άλλο λάθος	2,1

*Ποσοστό επί του συνόλου των λανθασμένων απαντήσεων.

Οι γεωμετρικές κατασκευές ανέκαθεν ήταν ένα από τα δυσκολότερα αντικείμενα της Γεωμετρίας. Οι περισσότεροι μαθητές, όπως αναμενόταν, δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή αυτή.



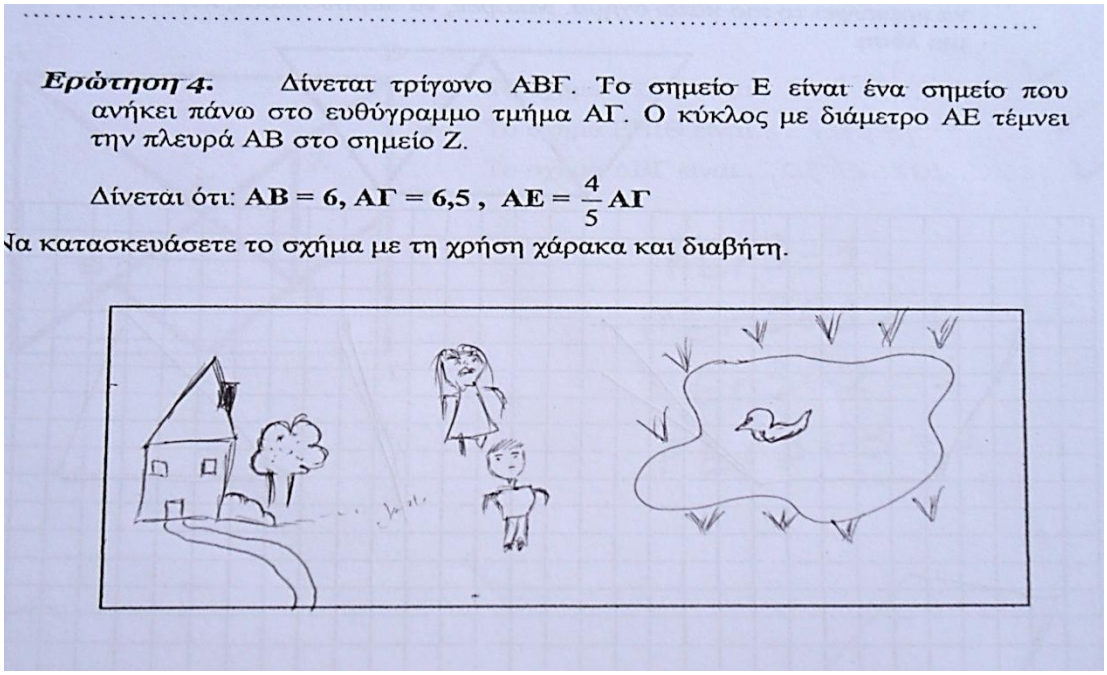
Σχήμα 12 Σωστή επίλυση-κατασκευή

Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στο δοκίμιο αντιμετώπισαν δυσκολία στην κατασκευή νέου κύκλου με κέντρο το σημείο Γ αλλά με ίση ακτίνα ΑΓ=ΜΟ και ακολουθούν τις εξής δύο προσεγγίσεις:

α) Κατασκευάζουν (ποσοστό 13 %) ακτίνα με τυχαίο μήκος και όχι ίση με την ΟΜ ή την ΟΝ, **ή**

β) Κατασκευάζουν (ποσοστό 49,9 %) τυχαίο τόξο ΑΒ άσχετο με τα τόξο ΜΝ χωρίς να μετρήσουν τις αντίστοιχες χορδές. Σε κάποιες περιπτώσεις αναφέρουν ότι εφαρμόζουν το θεώρημα ότι «σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές» με αποτέλεσμα, ναι μεν να γίνεται δεκτή η εξήγηση της κατασκευής τους, ωστόσο αποδεικτικά να υπάρχουν κενά.

Από την εν λόγω ερώτηση και τις ληφθείσες απαντήσεις είναι εμφανής η απουσία συγκροτημένου **«μαθηματικού λόγου»** που να σχετίζεται με την κατασκευή.

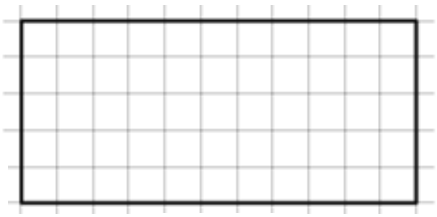


Σχήμα 13 «Πρωτότυπες κατασκευές»

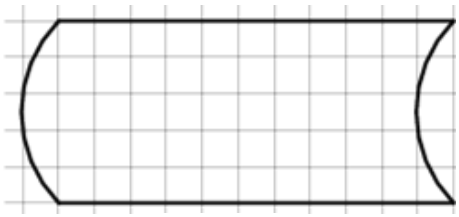
Βέβαια να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι στο Λύκειο, εδώ και χρόνια, **σταμάτησαν** να γίνονται **γεωμετρικές κατασκευές**, έστω και στοιχειώδεις, με αποτέλεσμα να μην είναι οικείο το αντικείμενο αυτό στους μαθητές.

Ερώτηση Α6

Υπογράμμιση τη σωστή πρόταση.



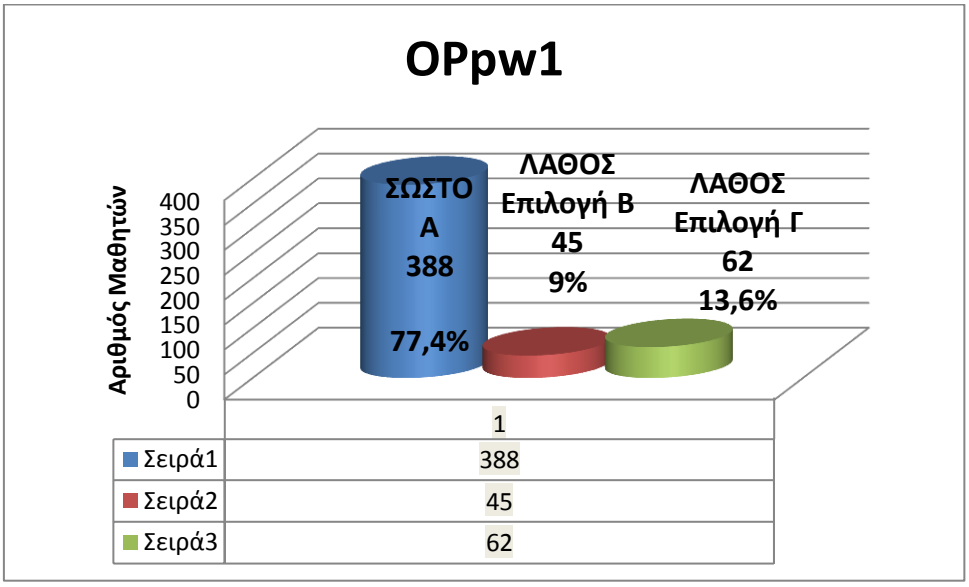
Σχήμα 1



Σχήμα 2

α) Το Σχήμα 1 έχει ίσο εμβαδόν με το Σχήμα 2.
β) Το Σχήμα 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το Σχήμα 2.
γ) Το Σχήμα 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το Σχήμα 2.
Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.

Αποτελέσματα

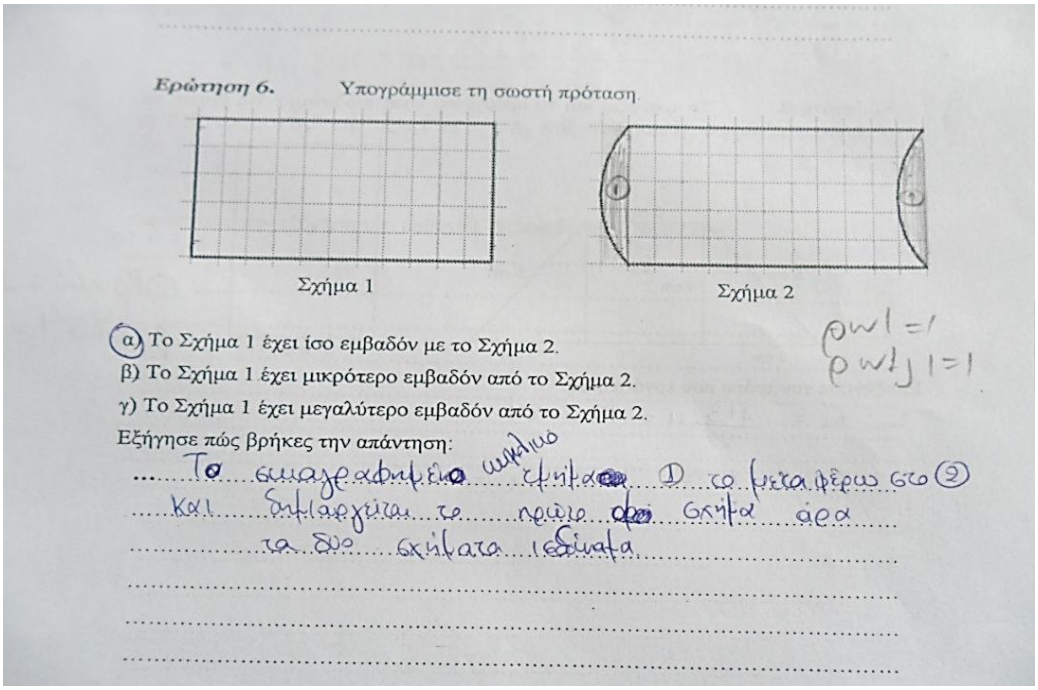


Σχήμα 14 Απαντήσεις OPpw1

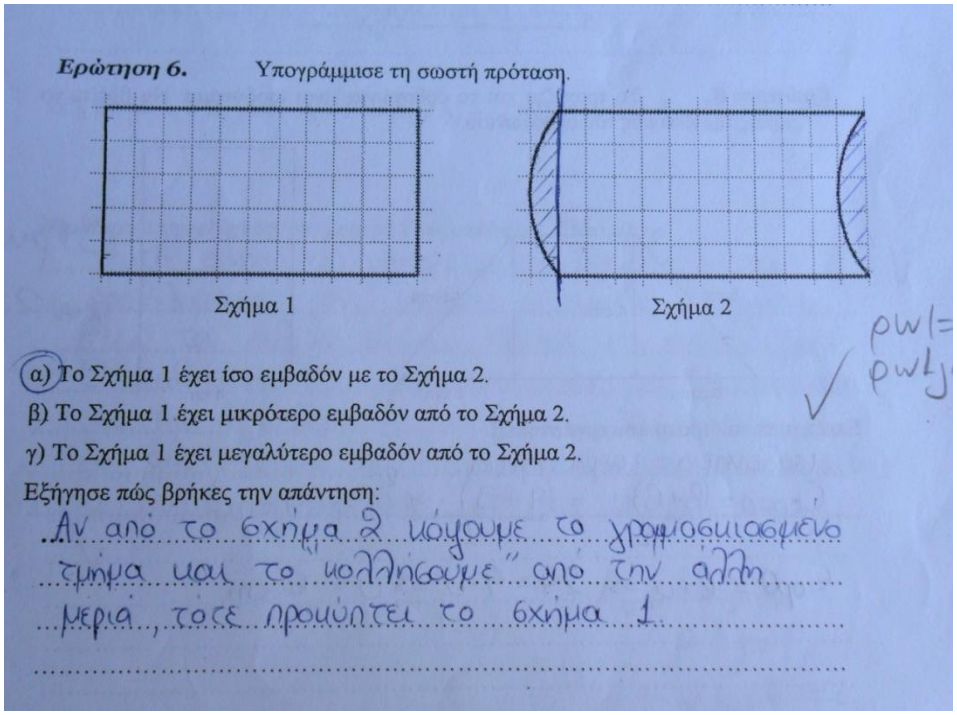
Τύπος αιτιολόγησης	Ποσοστό (%)
Δυναμική προσέγγιση	39,5
Στατική οπτική προσέγγιση	28,6
Στατική ολική ή σφαιρική οπτική προσέγγιση	12,4
Στατική αναλυτική προσέγγιση	6,4
Συνδυασμός Στατικής οπτικής και Δυναμικής προσέγγισης	1,8
Συνδυασμός Δυναμικής και Αναλυτικής προσέγγισης	2,1
Σύγχυση περιμέτρου – εμβαδού	2
Άλλη προσέγγιση	7,2

Από την επεξεργασία των δοκιμίων προέκυψε ότι 3 στους 4 δίνουν σωστή απάντηση(ποσοστό 77,4%),οι δε αποκρίσεις τους ακολουθούν 6 διαφορετικές προσεγγίσεις στη λύση της άσκησης:

1) **<u>Η Δυναμική προσέγγιση</u>** (ποσοστό 39,5%) όπου οι μαθητές προχωρούν στη λύση μέσω μετακίνησης τμημάτων του σχήματος, οδηγούμενοι τελικά σε μία ριζική **ΑΝΑΔΙΟΡΓΑΝΩΣΗ** του σχήματος.

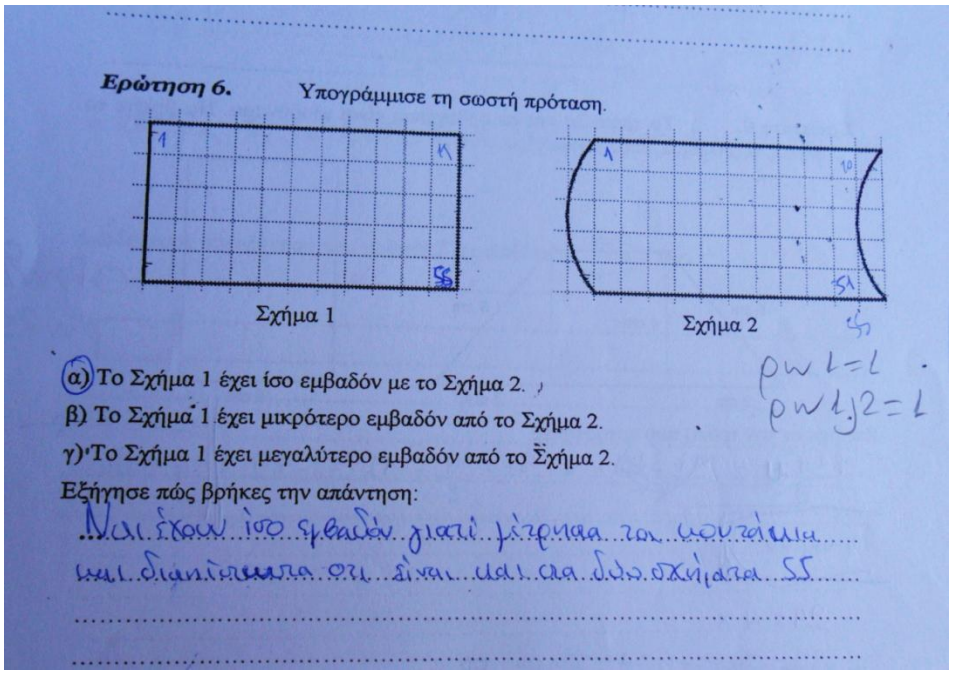


Σχήμα 15α Δυναμική προσέγγιση λύσης



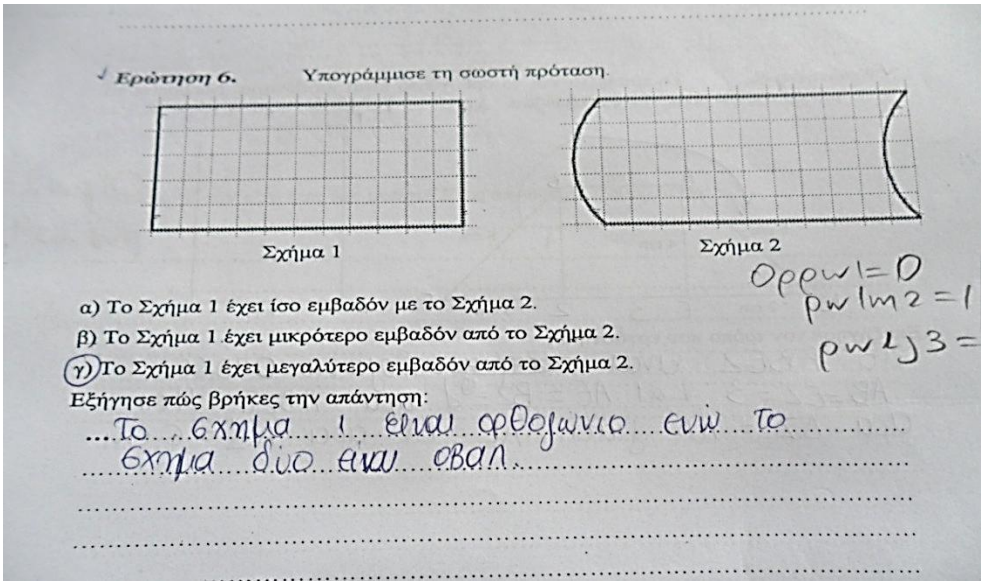
Σχήμα 15β Δυναμική προσέγγιση λύσης

2) **<u>Η Στατική οπτική προσέγγιση</u>** (ποσοστό 28,6%) όπου οδηγούνται στη λύση «μετρώντας» ένα-ένα τα κουτάκια του σχήματος.



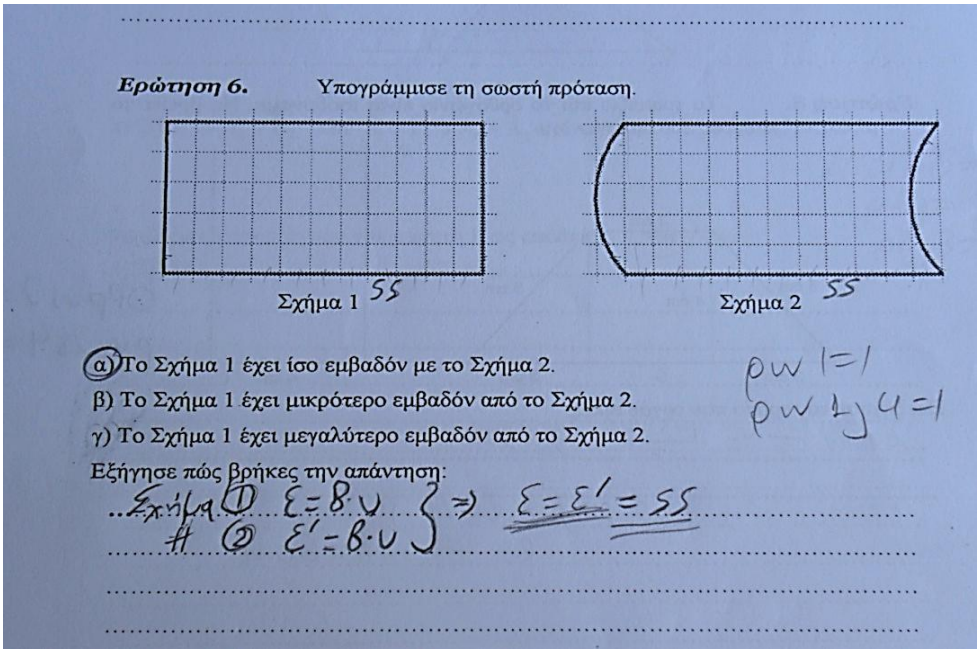
Σχήμα 16 Στατική οπτική προσέγγιση λύσης

3) **<u>Η Στατική ολική ή σφαιρική οπτική προσέγγιση</u>** (ποσοστό 12,4%) όπου οδηγούμενοι από το περίγραμμα του σχήματος αναφέρουν ότι το ένα σχήμα είναι ορθογώνιο, ενώ το άλλο όχι, δηλαδή το ένα έχει καμπύλες, ενώ το άλλο έχει ευθείες γραμμές.



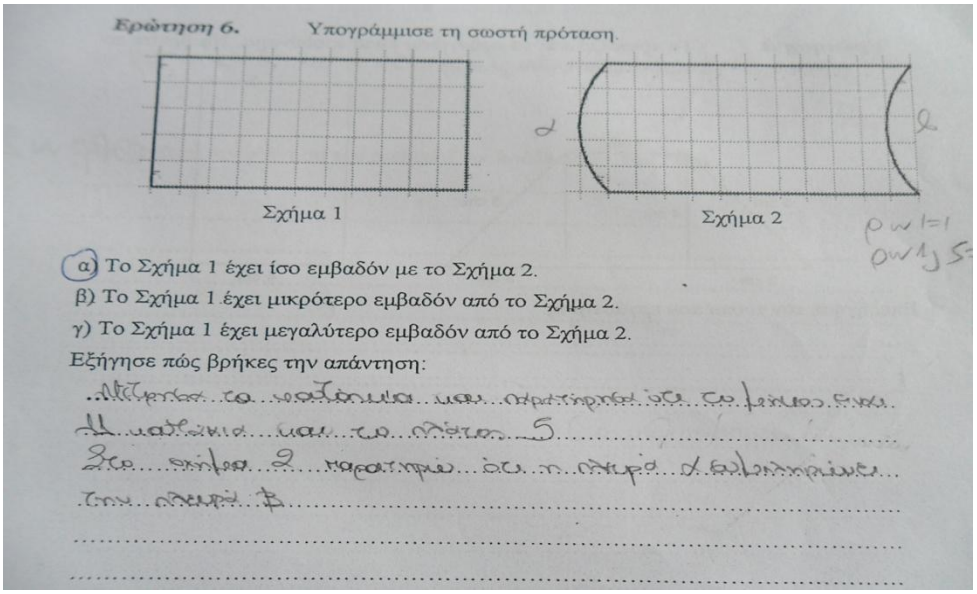
Σχήμα 17 Στατική ολική ή σφαιρική οπτική προσέγγιση

4) **<u>Η Στατική αναλυτική προσέγγιση</u>** (ποσοστό 6,4%) όπου χρησιμοποιούν τον **<u>τύπο</u>** του Εμβαδού για να προσεγγίσουν τη λύση.



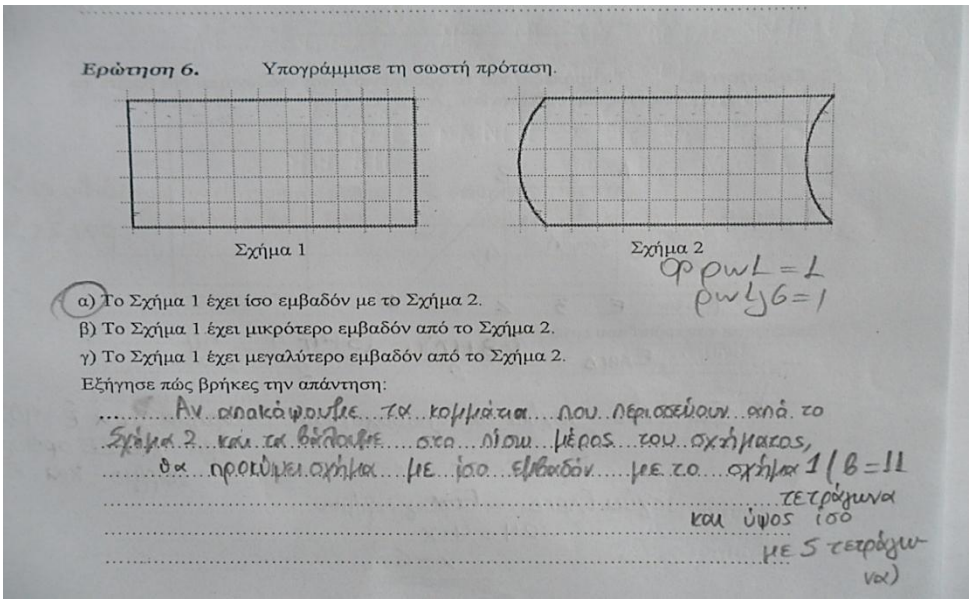
Σχήμα 18 Στατική αναλυτική προσέγγιση

5) **<u>Ο Συνδυασμός Στατικής οπτικής και Δυναμικής προσέγγισης</u>** (ποσοστό 1,8%) όπου προβαίνουν σε αναδιοργάνωση του σχήματος αλλά ταυτόχρονα προχωρούν σε εύρεση του εμβαδού μετρώντας τα κουτάκια του σχήματος



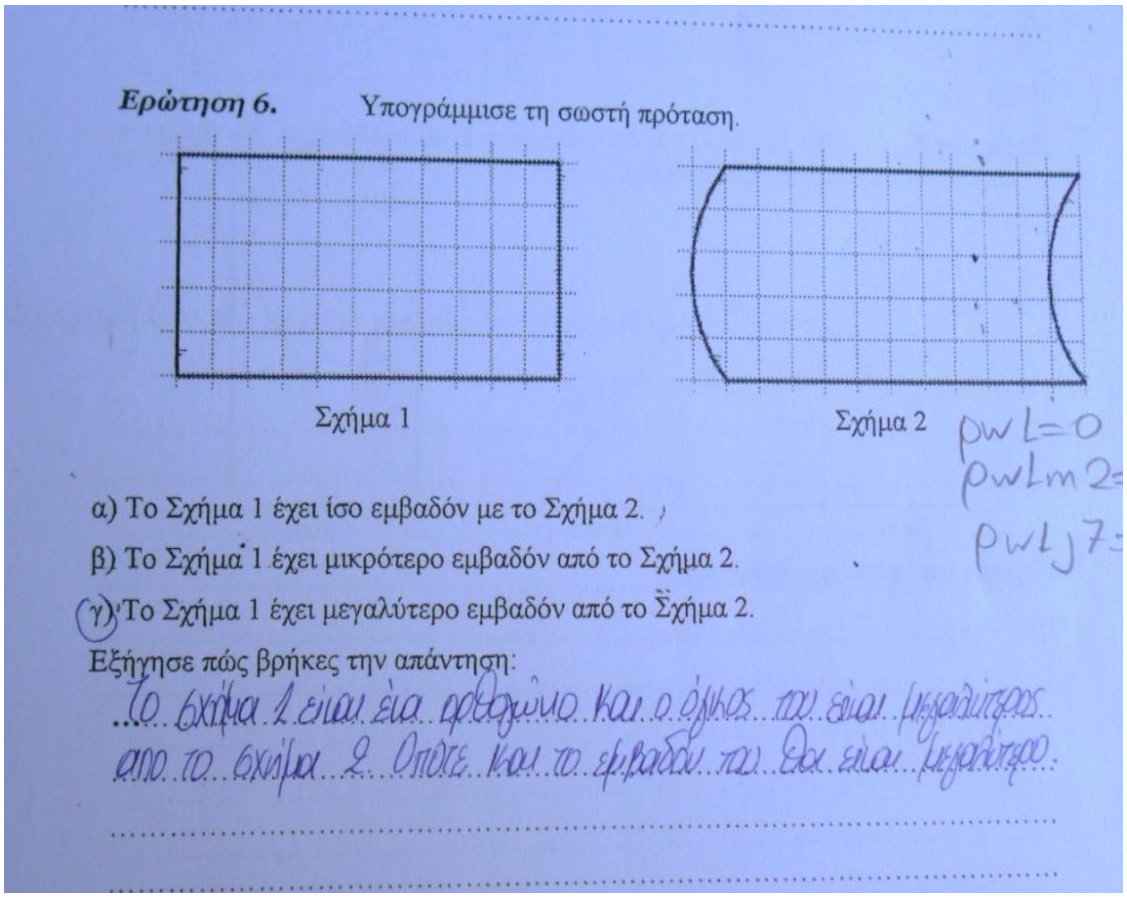
Σχήμα 19 Συνδυασμός Στατικής οπτικής και Δυναμικής προσέγγιση

6) **<u>Ο Συνδυασμός Δυναμικής και Αναλυτικής προσέγγισης</u>** (ποσοστό 2,2%) όπου πάλι προβαίνουν σε αναδιοργάνωση του σχήματος αλλά ταυτόχρονα χρησιμοποιούν τον τύπο του εμβαδού.



Σχήμα 20 Συνδυασμός Αναλυτικής και Δυναμικής προσέγγισης

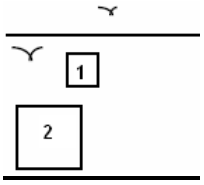
Από τις παραπάνω προσεγγίσεις φαίνεται πως η «Δυναμική προσέγγιση» συγκινεί περισσότερο τους εν λόγω μαθητές (39,5%) και ακολουθούν με σημαντική διαφορά η «Στατική Οπτική» (28,6%) και η «Στατική ολική ή σφαιρική οπτική προσέγγιση». Θα ήταν όμως παράλειψη στο σημείο αυτό να μην αναφέρουμε μια μικρή αλλά χρήζουσα βοηθείας **μειοψηφία** μαθητών, οι οποίοι **συγχέουν την έννοια της περιμέτρου με το εμβαδόν ενός σχήματος**, όπως και τις έννοιες **όγκου και εμβαδού**, με αποτέλεσμα να οδηγούνται με μαθηματική ακρίβεια σε λάθος αποτελέσματα.



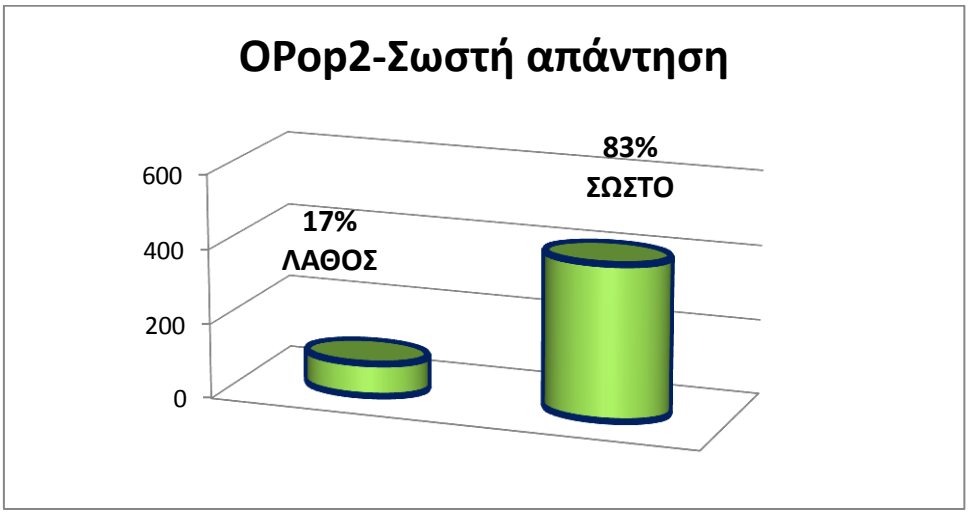
Σχήμα 21 Σύγχυση περιμέτρου με το εμβαδό – όγκο ενός σχήματος

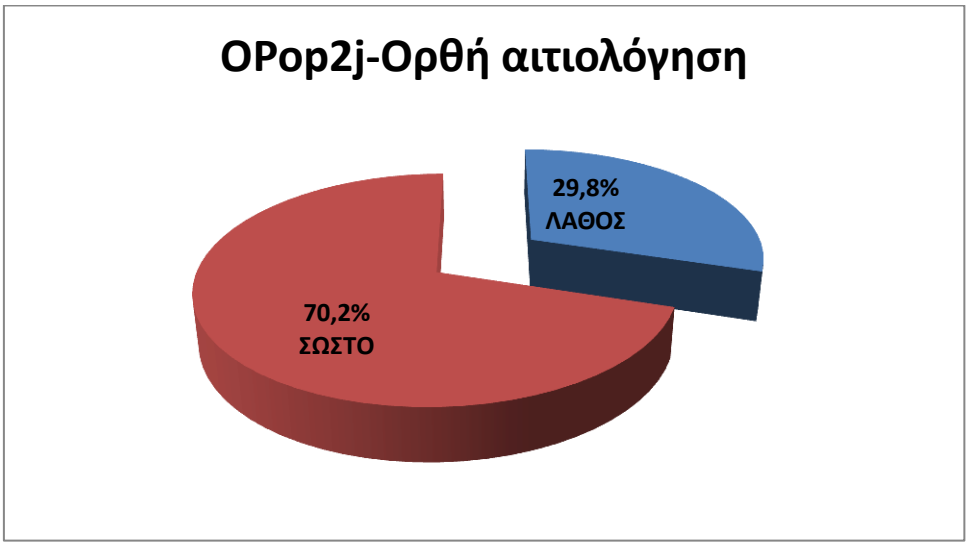
Ερώτηση Α7

Ο Πάρης βλέπει το κιβώτιο 1 και το κιβώτιο 2 στον ορίζοντα. Λέει ότι το κιβώτιο 1 έχει το ίδιο μέγεθος με το κιβώτιο 2. Μπορεί η άποψη του να είναι σωστή; Εξήγησε γιατί.



Αποτελέσματα



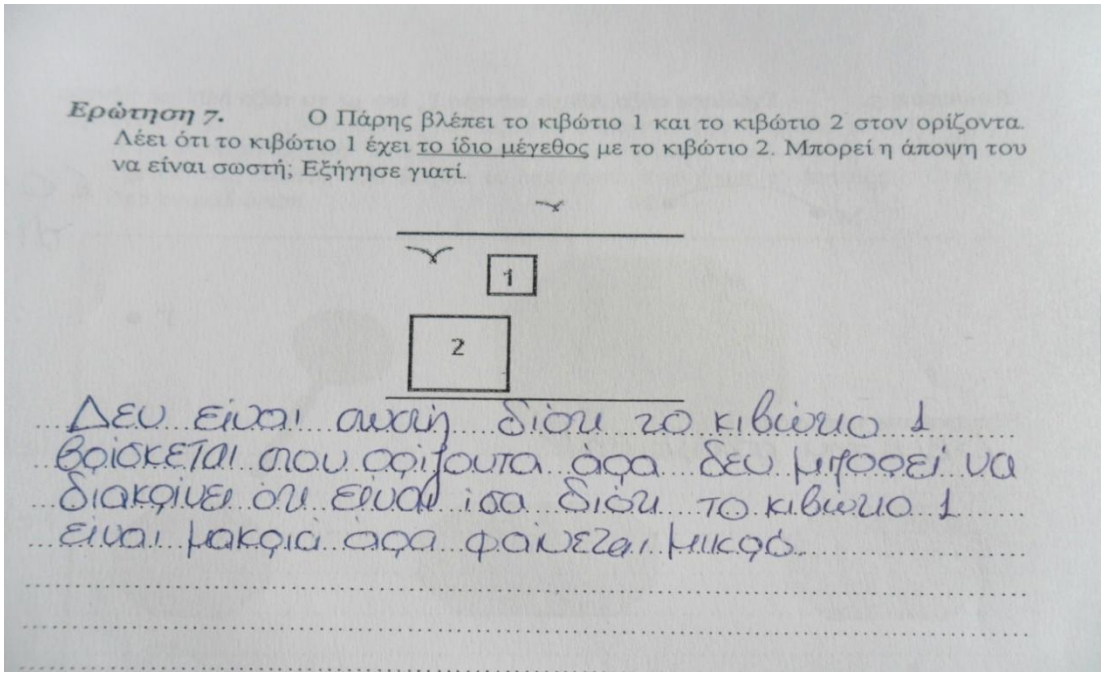


Σχήμα 22 Απαντήσεις OPop2

Τύπος αιτιολόγησης	Ποσοστό (%)
Το αντικείμενο που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τον παρατηρητή φαίνεται πιο μικρό. Στην πραγματικότητα το κιβώτιο 1 μπορεί να έχει το ίδιο μέγεθος με το κιβώτιο 2.	57,7
Με ομοιοθεσία	1,23
Όσο πιο ψηλά από το έδαφος βρίσκεται ένα αντικείμενο τόσο πιο μικρό φαίνεται.	6,17
Αναφορά στα πουλιά της εικόνας – «Αν και φαίνεται το ένα μικρότερο, στην πραγματικότητα μάλλον είναι ίσα».	2,47

Λάθη	Ποσοστό (%)
Δεν είμαστε σίγουροι για την άποψή του, γιατί όσο πιο μακριά βρίσκεται τόσο πιο μικρό φαίνεται και το αντίθετο.	15,79
Γίνεται προσπάθεια να ενώσουν τις πλευρές και περιμένουν να είναι παράλληλες.	0,00
Μετατόπιση των σχημάτων στην ίδια ευθεία του ορίζοντα	0,00
Βασίζονται στην ομοιότητα των σχημάτων (είναι και τα δύο τετράγωνα)	15,79
Άλλο λάθος.	68,42

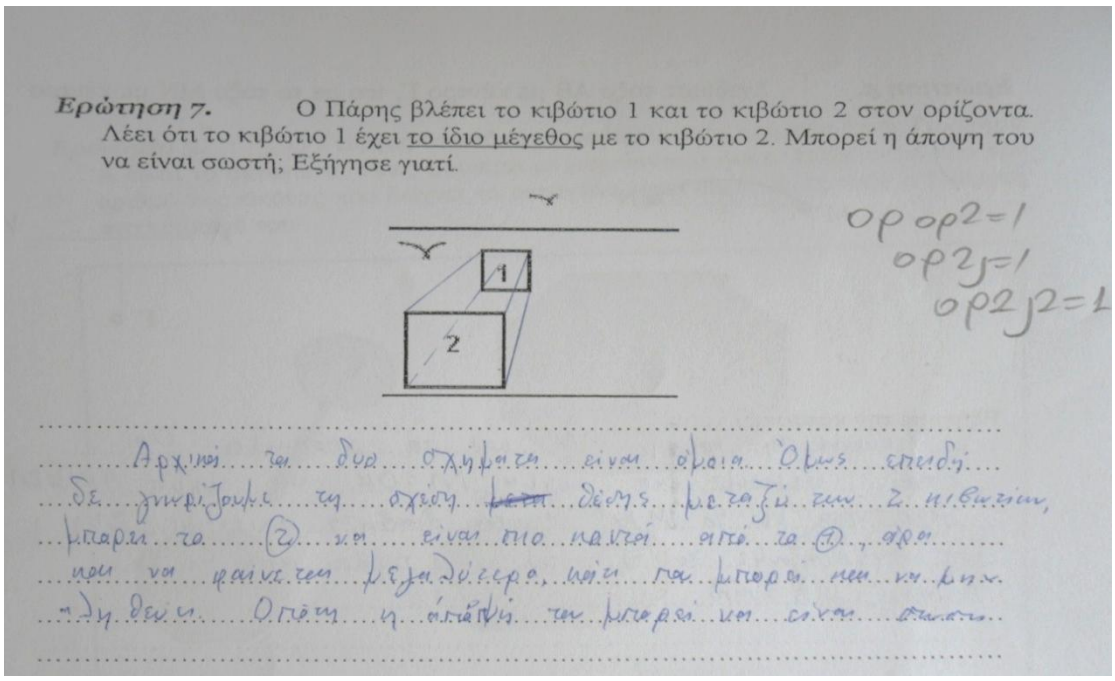
Στην ερώτηση αυτή που εδράζεται στη λειτουργική προσέγγιση και ειδικότερα εστιάζει στην οπτική προσέγγιση επικρατεί (ποσοστό 57,7 %) ο τύπος αιτιολόγησης που θεωρεί ότι όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τον παρατηρητή φαίνεται πιο μικρό, όμως μπορεί το κιβώτιο 1 να έχει στην πραγματικότητα ίδιο μέγεθος με το κιβώτιο 2.



Σχήμα 23 Λανθασμένη αιτιολόγηση

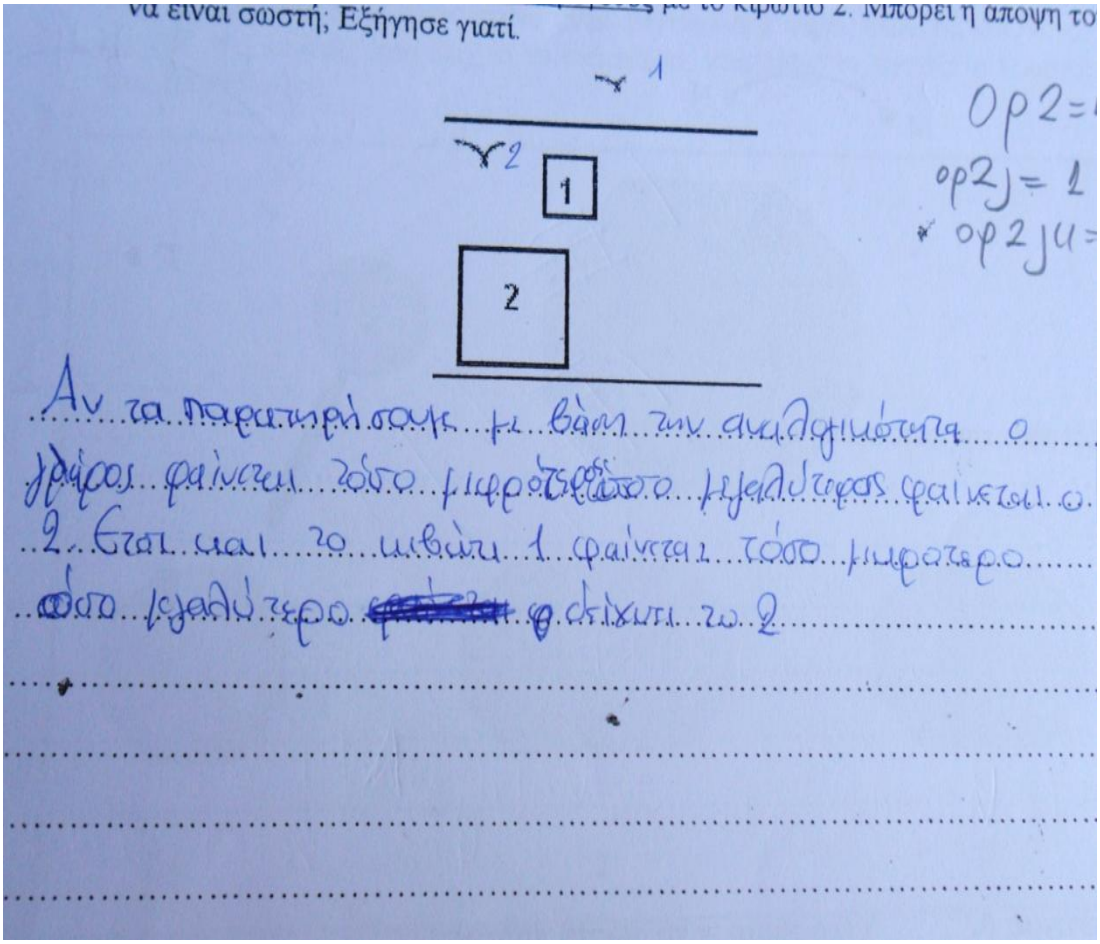
Ωστόσο αρκετά μεγάλο ποσοστό των ερωτωμένων (ποσοστό 17,4 %), προχωρούν σε λάθος λύση. Αμφισβητούν την ορθότητα της άποψης του Πάρη, λέγοντας ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται το αντικείμενο τόσο πιο μικρό φαίνεται και το αντίθετο.

Εκ παραλλήλου, η λάθος προσέγγιση της ομοιότητας των δύο σχημάτων (ποσοστό 1,2 %) (δηλ. ότι και τα δύο είναι τετράγωνα) οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα.



Σχήμα 24 Προσέγγιση που στηρίζεται στην ομοιότητα

Θεωρούμε ωστόσο άξιο αναφοράς το γεγονός ότι **σπανίως** οι ερωτώμενοι μαθητές (ποσοστό 1,4%), δηλαδή **7 στους 501** μαθητές, έδωσαν απάντηση που να έχει αναφορά είτε στη θέση, είτε και στο μέγεθος **των πουλιών** που υπάρχουν στην εικόνα.

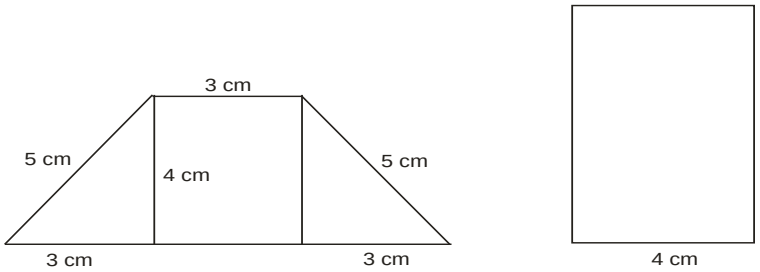


Σχήμα 25 Προσέγγιση που αναφέρεται στην ύπαρξη «πουλιών»

Φαίνεται βλέπουν τα πουλιά απλά σαν **«διακοσμητική εικόνα»** των κιβωτίων και όχι ως ενεργό μέρος της εικόνας. Πράγματι στην βιβλιογραφία ο ρόλος των διακοσμητικών εικόνων, όπως έδειξαν πρόσφατες έρευνες (Γαγάτσης,Α.,Ηλία,Ι.,2003), αφήνει ανεπηρέαστη τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

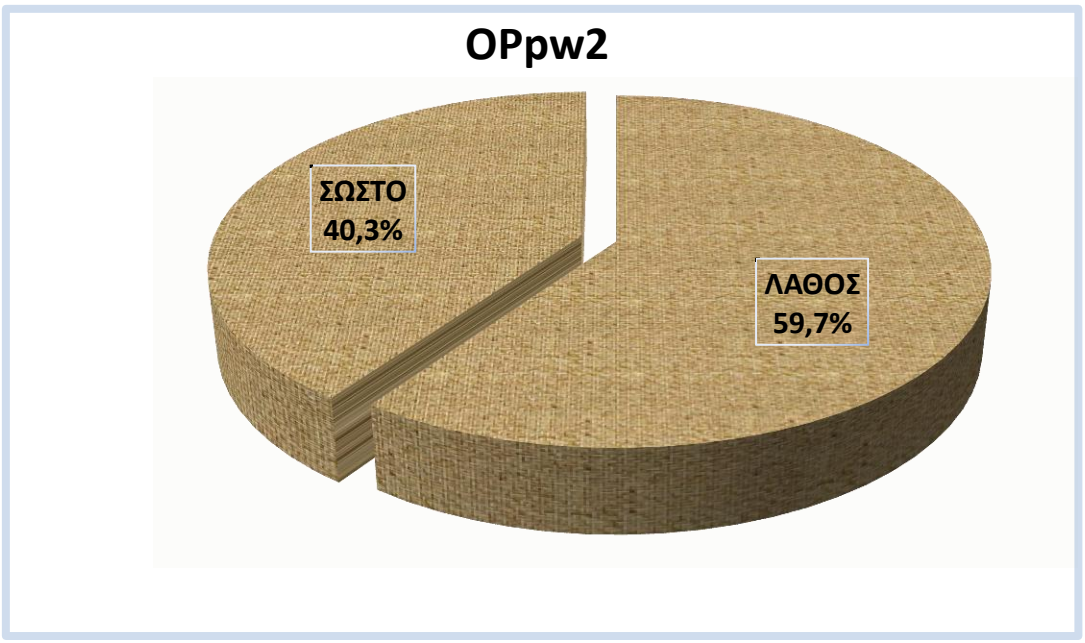
Ερώτηση Α8

Το τραπέζιο και το ορθογώνιο είναι ισοδύναμα. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ορθογωνίου.



Επεξήγησε τον τρόπο που εργάστηκες.

Αποτελέσματα



Σχήμα 26 Απαντήσεις OPpw2

Τρόποι λύσης	Ποσοστό (%)
Αναδιοργάνωση σχήματος	2,8
Μετακίνηση τριγώνου	11,6
Χωρισμός του ορθογωνίου στα υποσχήματα του τραπεζίου	0,2
Ε τραπεζίου ή υποσχημάτων ή σχηματισμός ορθογωνίου	85,4

Λάθη τρόπου λύσης	Ποσοστό (%)
Λάθος μετακίνηση τριγώνου	3,0
Ε τραπεζίου ή υποσχημάτων ή σχηματισμός ορθογωνίου με λάθος υπολογισμό	52,2
Διπλάσιο πλάτους	0,2
Μέτρηση με ρίγα	1,0
Άσχετος συσχετισμός δεδομένων π.χ. 4 Χ 7 = 28, 4 +7 +4+7 = 22	31,6
Με υπολογισμό της περιμέτρου του τραπεζίου και ακολούθως του ορθογωνίου	4,7
Με υπολογισμό της μεγάλης βάσης του τραπεζίου (3+3+3=9)	5,2
Άλλο λάθος	2,1

Η παραπάνω ερώτηση που έχει πεδίο αναφοράς τον τρόπο λειτουργικής σύλληψης και συγκεκριμένα την αλλαγή θέσης του σχήματος αντιμετωπίστηκε από σημαντικά μικρό αριθμό μαθητών (ποσοστό 40,3%) με σωστό τρόπο. Οι περισσότεροι μαθητές που αντιμετώπισαν με ορθότητα το πρόβλημα έκαναν χρήση του τύπου του εμβαδού τραπεζίου ή των υποσχημάτων του (ποσοστό 85,4%). Αξιοπρόσεκτο και το γεγονός ότι οι άλλοι ορθοί τρόποι λύσης έχουν μικρά ποσοστά προτίμησης από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, τόσο η αναδιοργάνωση του σχήματος, δηλαδή η μετακίνηση του αριστερού τριγώνου του τραπεζίου, ώστε προσαρμοζόμενο στο δεξιό τρίγωνο αντίστοιχα να σχηματίσει το ζητούμενο ορθογώνιο (ποσοστό 2,8%), όσο και ο χωρισμός του ορθογωνίου στα υποσχήματα του τραπεζίου (ποσοστό 0,2%) δεν είναι προσιτές εκδοχές λύσεων για τους μαθητές του δείγματος. Από την πλευρά των λανθασμένων λύσεων επικρατεί ο λάθος τρόπος υπολογισμού του εμβαδού τραπεζίου ή των υποσχημάτων του σε ποσοστό 52,2%.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1^{η} : Η λάθος χρήση του τύπου του εμβαδού τραπεζίου ίσως αποτελεί έναυσμα προς τους διδάσκοντες για περισσότερη επιμονή στην εκμάθηση των τύπων εύρεσης εμβαδού για τα βασικά γεωμετρικά σχήματα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2^{η} : Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, όπως επιβεβαιώθηκε και από τα παραπάνω αποτελέσματα, συνήθως επικρατεί ο μέσω τύπων και πράξεων τρόπος, παρά η μετακίνηση κομματιών του σχήματος (αναδιοργάνωση). Βιβλιογραφικά αυτό εδράζεται στο **διδακτικό συμβόλαιο** του **Brousseau (Brousseau**,G.,1997) όπου μέσω ενός συνόλου έμμεσων κανόνων θεωρούν οι μαθητές, ότι όταν δίνονται νούμερα σε άσκηση, πρέπει **υποχρεωτικά** να κάνουν πράξεις.

Ερώτηση Α9

Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες.

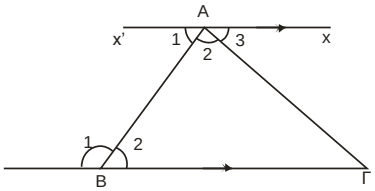
Μαθητής Α: *Μέτρησα και τις τρεις γωνιές και είναι 50°, 53° και 77°. 50°+53°+77°=180°. Άρα, το άθροισμα (των γωνιών ενός τριγώνου) είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα κάθε γωνία και τις έβαλα μαζί. Σχημάτιζαν μια ευθεία γραμμή. Άρα, το άθροισμα τους είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι …….**

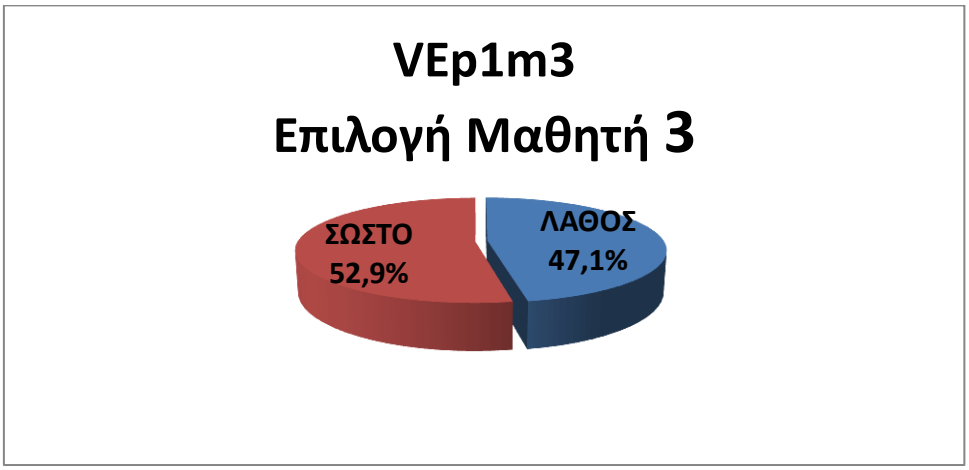
Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



$xx' \parallel B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180° \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 180°$

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι**

Αποτελέσματα



Σχήμα 27 Απαντήσεις VEp1m3 (Σωστή Επιλογή)

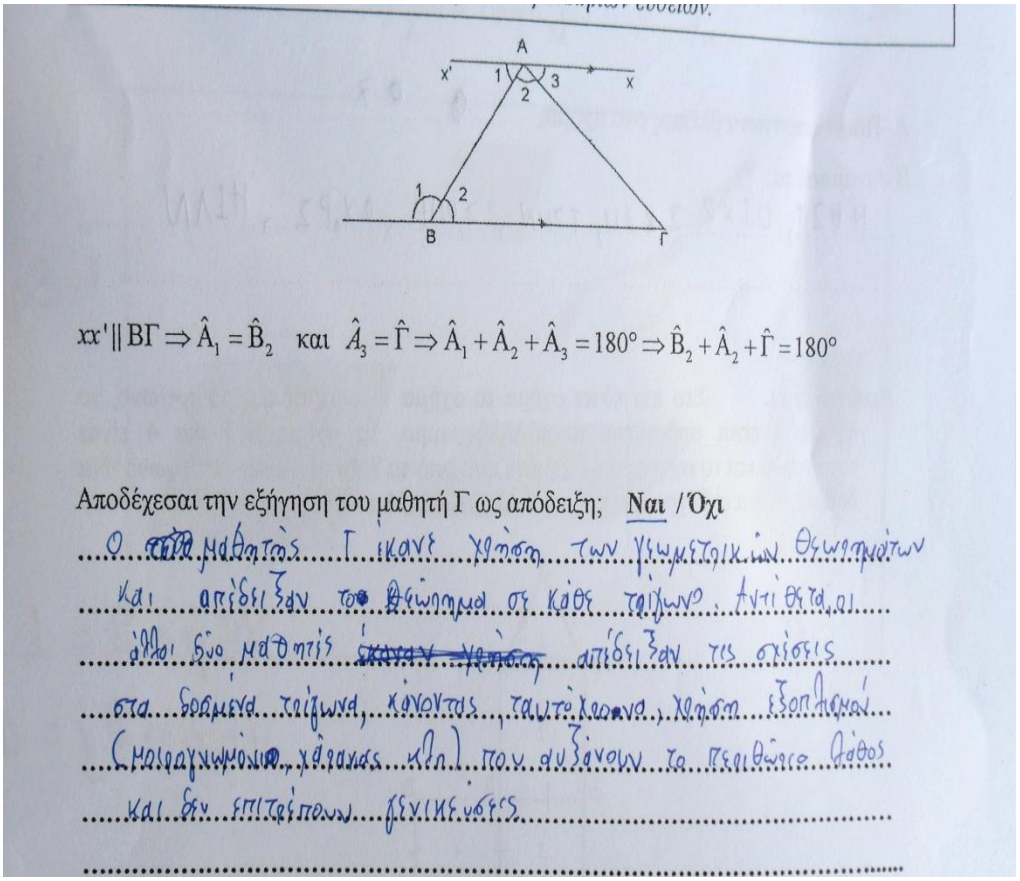
ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ
Επιλογή μαθητή 1,2 και 3	10,7 %
Επιλογή μαθητή 2 και 3	7,4%
Επιλογή μαθητή 1 και 3	17,4%
Επιλογή μαθητή 1 και 2	3,2%
Επιλογή μαθητή 3	52,9%
Επιλογή μαθητή 2	2,2%
Επιλογή μαθητή 1	6,2%

Σχήμα 28 Συνολικές Απαντήσεις

Αιτιολογήσεις για το μαθητή Γ	Ποσοστό (%)
Εργάστηκε με περισσότερη ακρίβεια και με άλλα θεωρήματα.	37,4
Η επεξήγηση του είναι πιο ολοκληρωμένη και σωστή . Οι πράξεις έγιναν βάσει κάποιου μαθηματικού τύπου.	27
Είναι πιο γενικεύσιμη	20,8
Άλλη αιτιολόγηση	14,8

Το 8,8% του δείγματος αιτιολογεί σωστά και για τις τρεις αποδείξεις.

Απρόσμενα ίσως, την ερώτηση αυτή μόνο οι μισοί μαθητές έχουν σωστά προσεγγίσει, επιλέγοντας την απάντηση του Μαθητή Γ σε ποσοστό 52,9%. Θα ανέμενε κανείς μεγαλύτερα ποσοστά ορθών απαντήσεων, ωστόσο, επειδή το υπόβαθρο της ερώτησης έχει άμεση αναφορά στην έννοια της απόδειξης, το πρόβλημα είναι από γνωστικής άποψης συνθετότερο και χρήζει μελέτης σε βάθος.

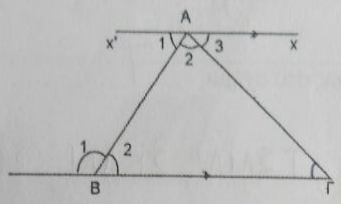


Σχήμα 29 Σωστή αιτιολόγηση

Σαφέστατα, θεωρούμε ότι η προϋπάρχουσα γνώση επηρεάζει **μη συνειδητά** την ορθότητα των απαντήσεων, αφού τόσο από το Δημοτικό, όσο και το Γυμνάσιο πολλές φορές οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με το γεγονός ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{o}.

Οι διχασμένες ορθές απαντήσεις εμπεριέχουν και άλλα προβλήματα που χρήζουν διδακτικής προσέγγισης, όπως η σωστή χρήση των γεωμετρικών αποδείξεων, η καθολικότητα της μαθηματικής απόδειξης και η εμπλοκή της υποκειμενικότητας της μέτρησης, και άρα η εισαγωγή λαθών κατά τη μετρητική διαδικασία. Εμφανής η αδυναμία σωστής αιτιολόγησης και των τριών τύπων αποδείξεων (ποσοστό 8,8%), ενώ όσοι επιλέγουν το μαθητή Γ αιτιολογούν αναφέροντας κυρίως ότι εργάστηκε με περισσότερη ακρίβεια βάσει θεωρημάτων (ποσοστό 37,4%) και δευτερευόντως ότι χρησιμοποίησε κάποιο μαθηματικό τύπο(27%).

Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



$xx' \| B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180° \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 180°$

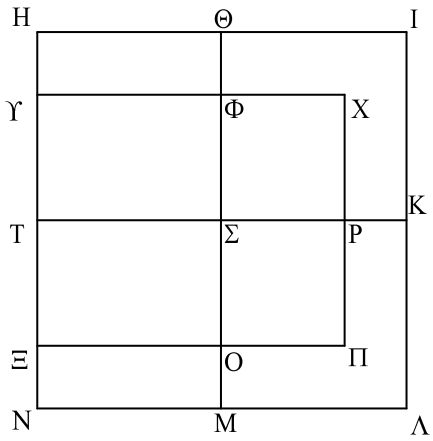
Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; (**Ναι**) / **Όχι**

Αυτη είναι η γεωμετρικη αποδειξη του προβληματος και ισχυει σε καθε τριγωνο. Ενω τα αλλα ειναι πρακτικες αποδειξεις. Ο μαθητης Γ χρησιμοποιησε τα θεωρηματα για την εξωτερικη γωνια του τριγωνου με αποτελεσμα η απόδειξη του να ειναι αμεσης σε αντιθεση με τους μαθητες Α και Β

Σχήμα 30 Σωστή αιτιολόγηση

Ερώτηση Α10

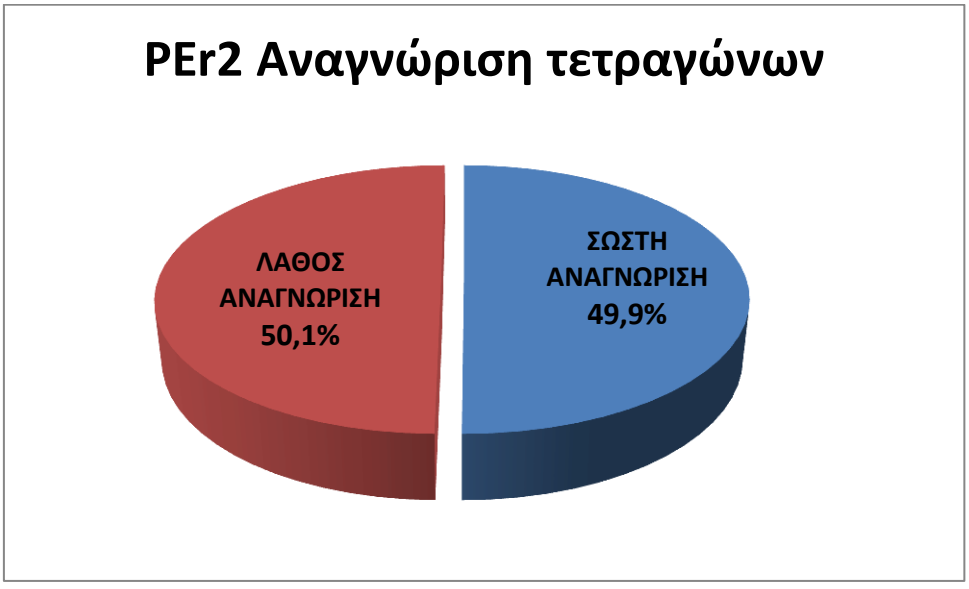
Μελέτησε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα.



Α. Πόσα τετράγωνα βλέπεις στο σχήμα;

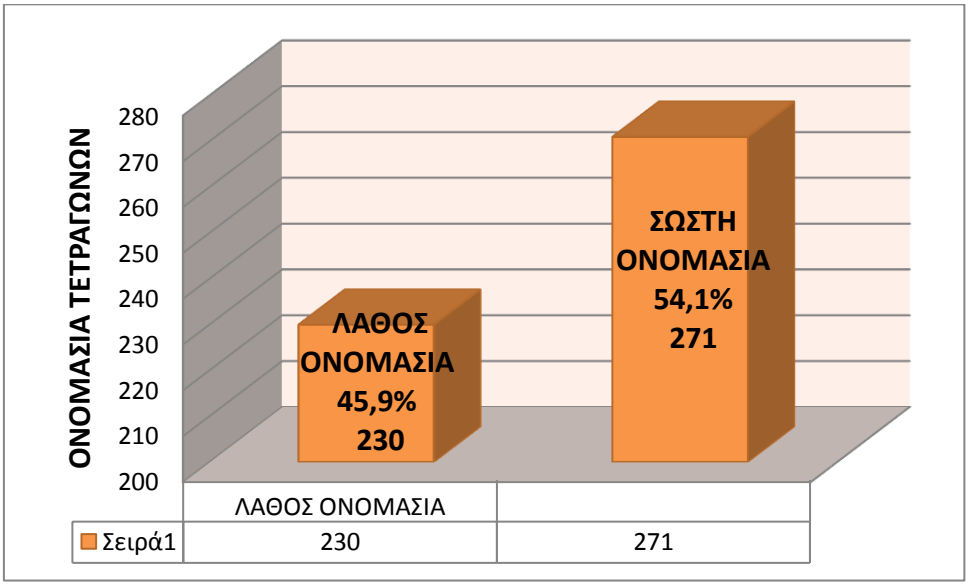
Β. Ονόμασέ τα.

Αποτελέσματα



Σχήμα 31 Απαντήσεις PEr2 -Αναγνώριση Τετραγώνων

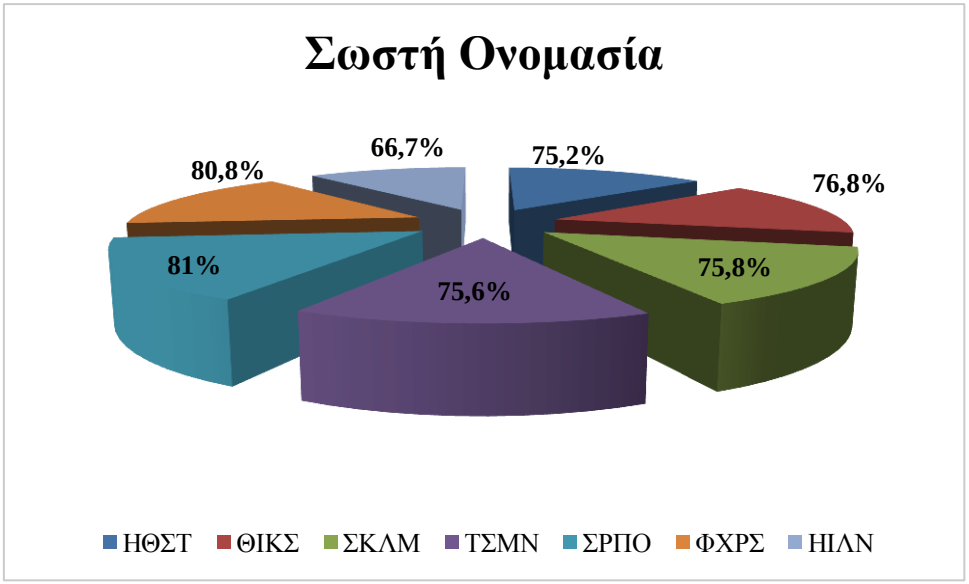
Ονομασία τετραγώνων



Σχήμα 32 Απαντήσεις PEη1 -Ονομασία Τετραγώνων

Σωστή αναγνώριση: Αναγνώριση και των 7 τετραγώνων

Σωστή ονομασία: Ονομασία και των 7 τετραγώνων



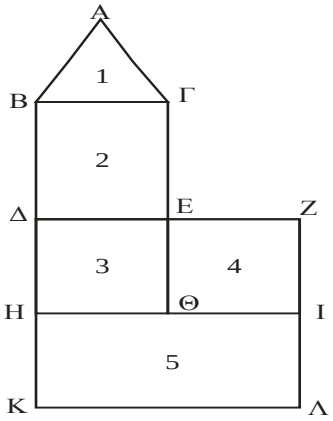
Σχήμα 33 Απαντήσεις PEη1f1 – PEη1f7 Ονομασία Τετραγώνων

Λάθη	Ποσοστό (%)
Αναγνωρίζουν μόνο 4 τετράγωνα (ΣΡΠΟ, ΦΧΡΣ, ΘΙΚΣ, ΣΚΛΜ)	0,2
Αναγνωρίζουν μόνο 2 τετράγωνα (ΣΡΠΟ, ΦΧΡΣ)	6,6
ΥΧΠΞ	27,6
ΥΦΣΤ	22,2
ΤΣΞΟ	22,8
ΗΥΦΘ	9,2
ΞΟΜΝ	4,6
ΘΙΛΜ	0,4
ΗΘΜΝ	0,6
ΥΦΟΞ	2,0
ΦΧΠΟ	0,6
ΗΙΚΤ	0,4
ΤΚΛΝ	0,4
ΨΧΡΤ	1,4
ΤΡΠΞ	1,0

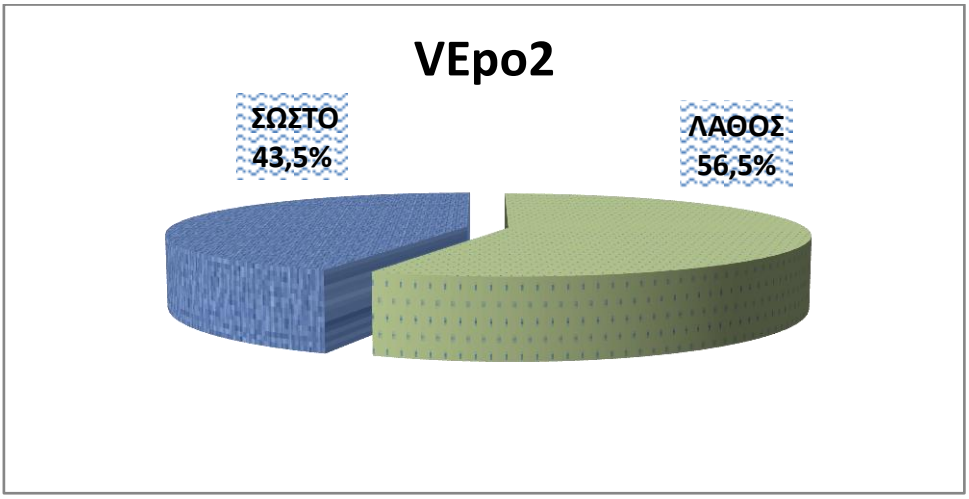
Η αντιληπτική αναγνώριση και ονομασία των υποσχημάτων αποτελεί το αντικείμενο της ερώτησης αυτής. Κι εδώ διχάζονται οι προτιμήσεις των μαθητών ως προς τη σωστή αναγνώριση του αριθμού των υπαρχόντων τετραγώνων (ποσοστό 49,9%), αλλά και ως προς τη σωστή ονομασία των εν λόγω υποσχημάτων (ποσοστό 54,1%). Το μεγάλο τετράγωνο ΗΙΛΝ αναγνωρίζεται ως τετράγωνο από το 66,7% των μαθητών που είναι το μικρότερο ποσοστό συγκριτικά με τα άλλα τετράγωνα. Επιβεβαιώνεται, με άλλα λόγια, η σύγχυση που συχνά δημιουργεί στη σύλληψη ενός σχήματος το εξωτερικό του περίγραμμα.

Ερώτηση Α11

Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα. Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.



Αποτελέσματα

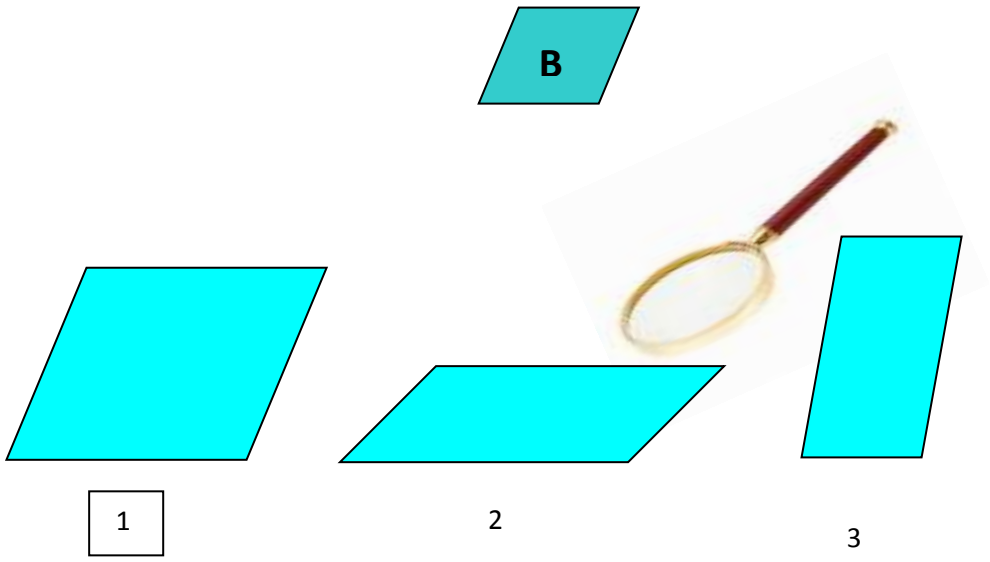


Σχήμα 34 Απαντήσεις VEpo2

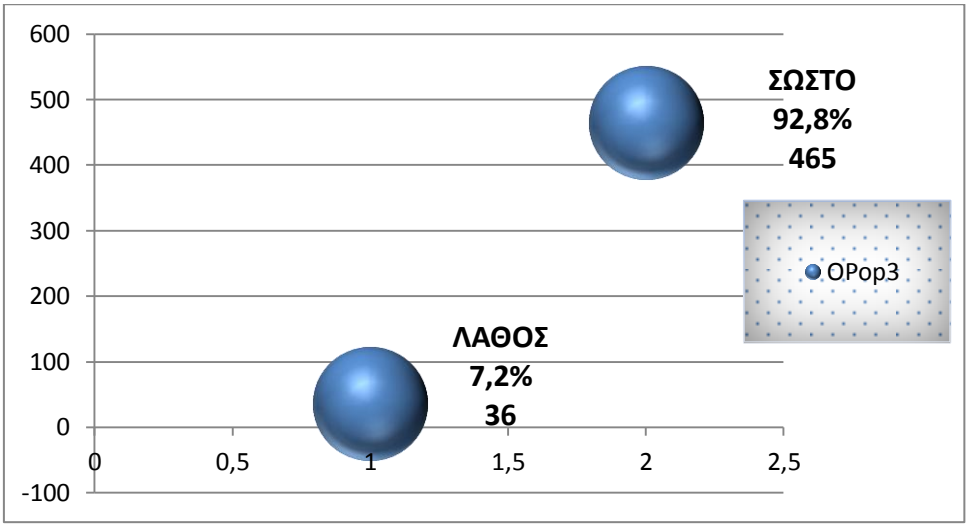
Η μέσω διαδικασίας ζητούμενη λεκτική απόδειξη προσεγγίζεται ορθά από λιγότερους από τους μισούς μαθητές του δείγματος (ποσοστό 43,5%),ενώ περίπου το ίδιο ποσοστό (41,3%) επιτυγχάνουν στην προσπάθειά τους να εκφέρουν σωστή αιτιολόγηση. Από τα 501 άτομα του δείγματος 13 μαθητές αποδεικνύουν μόνο το ΘΙ=ΙΛ, 17 μαθητές μόνο το ΑΓ=ΘΙ και κανείς μαθητής μόνο το ΑΓ=ΙΛ. Παράλληλα, 32 μόνο μαθητές (ποσοστό 6,4%)θεωρούν Ο το μέσο της ΚΛ και σχεδιάζουν τμήμα ΘΟ.

Ερώτηση Α12

Η Άννα έφτιαξε το παραλληλόγραμμο Β στο τετράδιό της. Βάλε σε κύκλο τον αριθμό της εικόνας που δείχνει το παραλληλόγραμμο, έτσι όπως θα φαίνεται με μεγεθυντικό φακό.



Αποτελέσματα



Σχήμα 35 Απαντήσεις OPop3

Αποτελεί την πλέον εύκολη για τους μαθητές ερώτηση, σχετική με τη λειτουργική σύλληψη του σχήματος με αντικείμενο την οπτική τροποποίηση, αφού οι σωστές απαντήσεις (επιλογή 1) προσεγγίζουν το 93% (ποσοστό 92,8%). Η επιλογή 2 ακολουθείται από το 5,2% των μαθητών, ενώ η επιλογή από το 2%.

Ερώτηση Β1

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ, (ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.

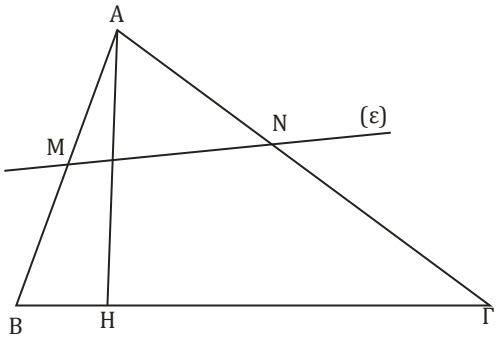
α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα

β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ

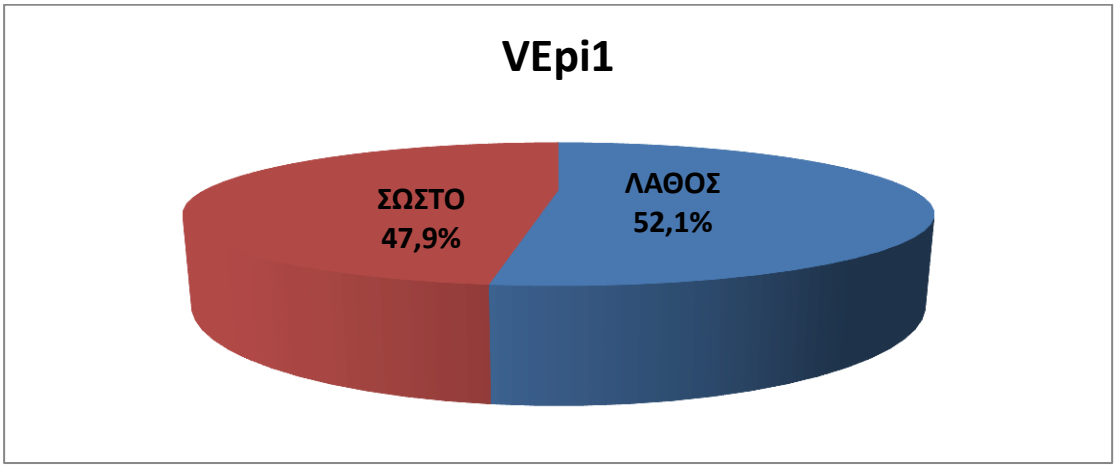
γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί

Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.



Αποτελέσματα



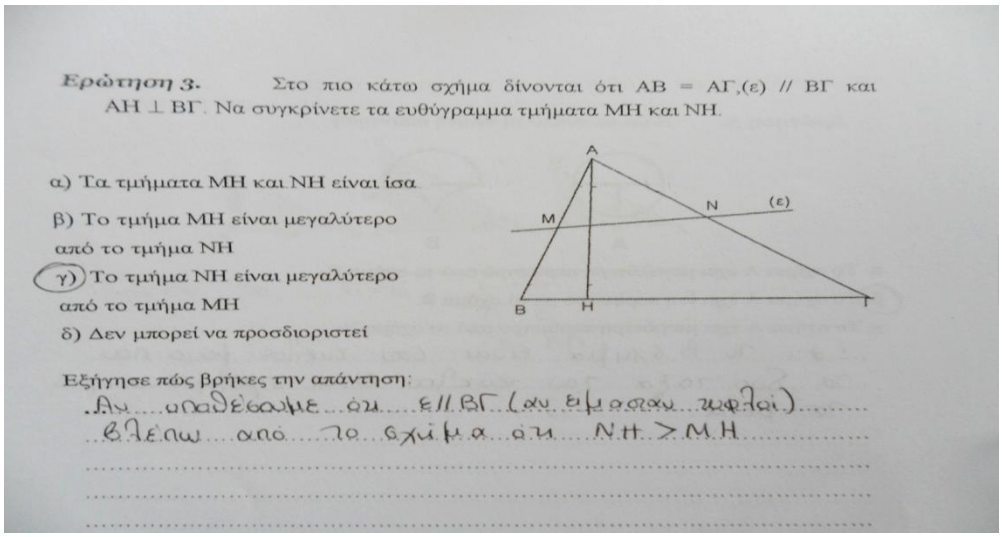
Σχήμα 36 Απαντήσεις VEpi1

Αιτιολόγηση απάντησης		Ποσοστό (%)
Σωστή αιτιολόγηση		22
Λάθος αιτιολόγηση	Το ΝΗ φαίνεται μεγαλύτερο από το σχήμα	7
	Μέτρηση με το χάρακα	1,6
	Δεν μπορεί να προσδιοριστεί, γιατί δεν έχουμε στοιχεία για το τρίγωνο ΜΗΝ	4,5
	Επανάληψη δεδομένων	-
	Άλλη αιτιολόγηση	23,6
Δεν αιτιολόγησαν		41,3

Αποτελεί την πρώτη από τις δύο ερωτήσεις του δοκιμίου(VEpi1, VEpi2) που έχουν αναφορά στη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

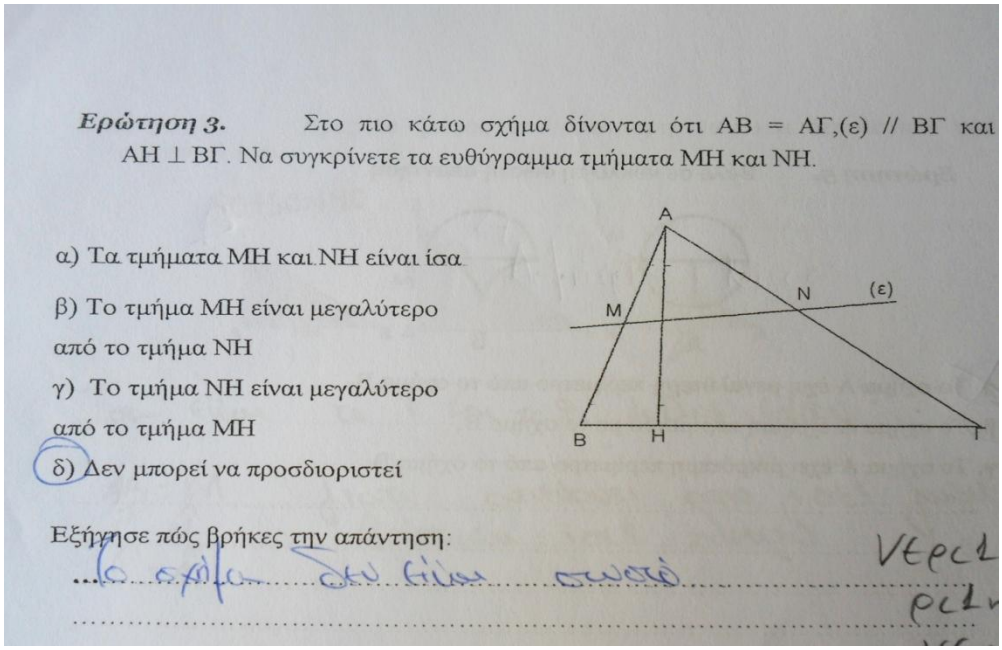
Οι εν λόγω ερωτήσεις παρουσιάζουν στα σχήματα τη λεγόμενη **«φύση εικόνας»,** όπου δηλαδή η λεκτική διατύπωση του προβλήματος **δεν** ταιριάζει με τη σχηματική αναπαράστασή του. Η συγκεκριμένη ερώτηση αναζητεί μέσα από το «λάθος δοσμένο σχήμα» σύγκριση των τμημάτων ΜΗ και ΝΗ, που είναι «σχηματικά άνισα». Λιγότεροι από τους μισούς μαθητές (ποσοστό 47,9%) έδωσαν σωστή απάντηση, ενώ μόνο το 22% κατάφερε στην αποδεικτική διαδικασία να παρουσιάσει σωστή αιτιολόγηση. Τρία αξιοπρόσεκτα σημεία παρουσίασε η επεξεργασία των απαντήσεων των μαθητών:

- Πρώτο ότι περίπου ένας στους τρεις μαθητές (30,9%) παρασυρόμενος από μια **μορφιστική (gestaltist)** κατανόηση του σχήματος, αβίαστα αποδέχεται την επιλογή Γ που θεωρεί ότι το τμήμα ΝΗ>ΜΗ.



Σχήμα 37 Λάθος επίλυση (μορφιστική)

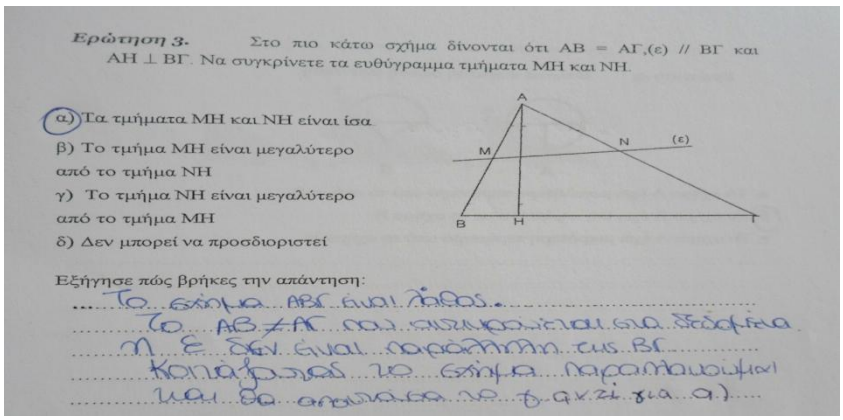
- Δεύτερο ότι το 17,4% των μαθητών υιοθετεί την άποψη ότι δεν μπορούν να συγκριθούν τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ του εν λόγω σχήματος και εγκαταλείπουν κάθε προσπάθεια απόδειξης ή αιτιολόγησης.



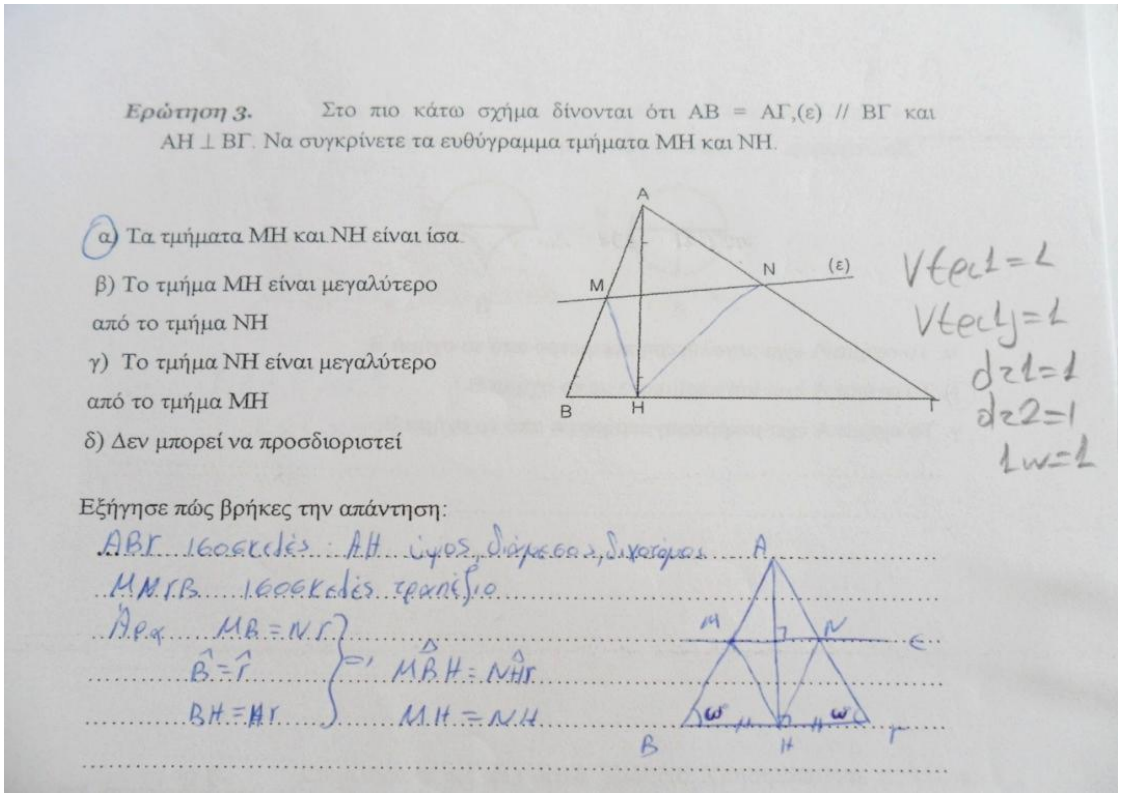
Σχήμα 38 Λάθος επίλυση

- Τρίτο ότι 4 στους 10 μαθητές (41,3%) αδυνατούν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

Επιλογικά να αναφέρουμε ότι ενώ από τους 501 μαθητές το ένα τρίτο (31,9%) αναγνώρισε το σχήμα ως λανθασμένο, μόνο το 12,6% προχώρησε σε σχεδίαση ενός σωστού σχήματος και το 56,3% σχεδίασε βοηθητικές γραμμές στο σχήμα.

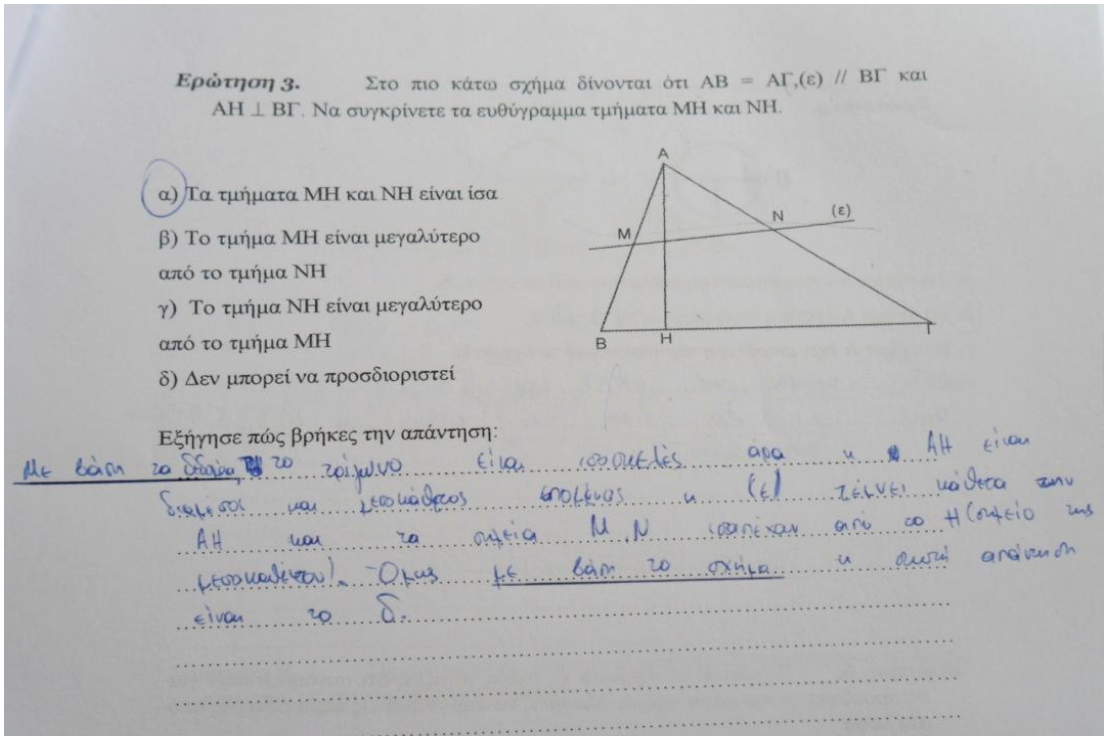


Σχήμα 39 Αναγνώριση Λανθασμένου σχήματος



Σχήμα 40 Επίλυση με κατασκευή σωστού σχήματος

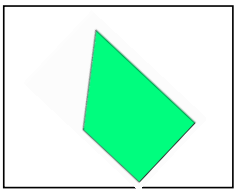
Επισυνάπτουμε χαρακτηριστική περίπτωση μαθητού που λύνει την άσκηση πρώτα βάσει των δεδομένων και μετά βάσει του σχήματος:

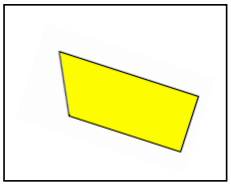


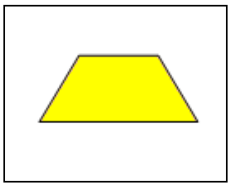
Σχήμα 41 Επίλυση και με τις …. δύο προσεγγίσεις

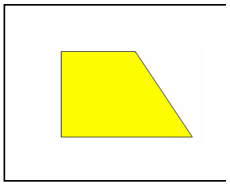
Ερώτηση Β2

Η Μαρία πρέπει να ταιριάξει τις κάρτες που δείχνουν ίδια σχήματα. Βάλε σε κύκλο τον αριθμό της κάρτας που δείχνει ακριβώς το ίδιο σχήμα με την κάρτα της Μαρίας.



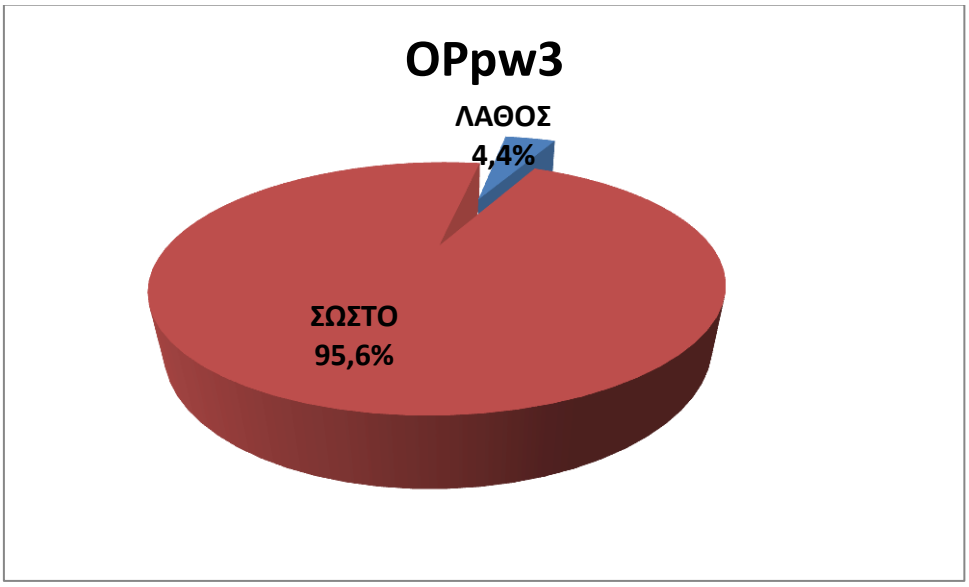






1 **2** **3**

Αποτελέσματα



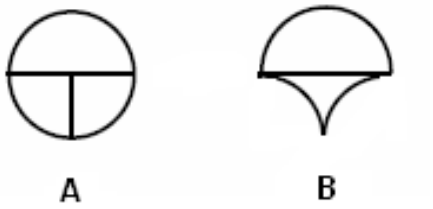
Σχήμα 42 Απαντήσεις OPpw3

Η ερώτηση αυτή (OPpw3) ανήκει στα έργα λειτουργικής σύλληψης που εξετάζει την ικανότητα αναγνώρισης όταν απαιτείται αλλαγή της θέσης των υποσχημάτων.

Δε δυσκόλεψε τους μαθητές, στο να επιλέξουν σωστά (ποσοστό 95,6%), αφού η αλλαγή προσανατολισμού αποδείχτηκε σαφώς ευκολότερη τόσο ως προς την οπτική τροποποίηση, όσο και ως προς την αντίστοιχη μερολογική. Η επιλογή 1 ακολουθήθηκε από το 2% των μαθητών ενώ η επιλογή 2 από το 2,4%.

Ερώτηση Β3

Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

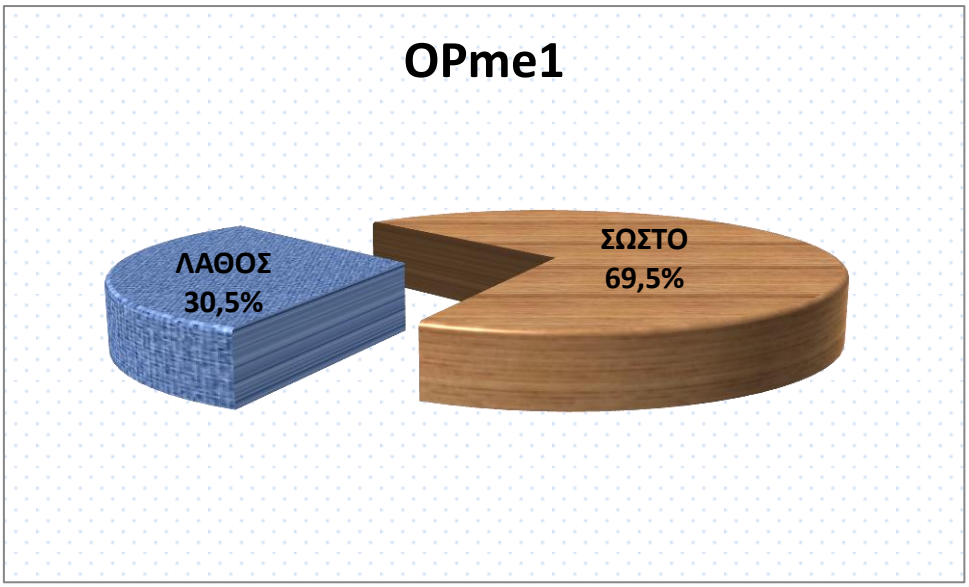


α. Το σχήμα Α έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το σχήμα Β.

β. Το σχήμα Α έχει ίση περίμετρο με το σχήμα Β.

γ. Το σχήμα Α έχει μικρότερη περίμετρο από το σχήμα Β.

Αποτελέσματα



Σχήμα 43 Απαντήσεις OPme1

Τύπος αιτιολόγησης (ανεξάρτητα αν η αιτιολόγηση είναι ορθή ή όχι)	Ποσοστό (%) *
Δυναμική προσέγγιση με περίμετρο	42,6
Στατική προσέγγιση με περίμετρο	18,1
Προσέγγιση που φανερώνει σύγχυση περιμέτρου/εμβαδού	9,4
Ολική στατική προσέγγιση	14,3
Παρανόηση έννοιας περιμέτρου (π.χ. αναφέρουν την εσωτερική γραμμή του σχήματος)	4,8
Άλλη προσέγγιση	10,8

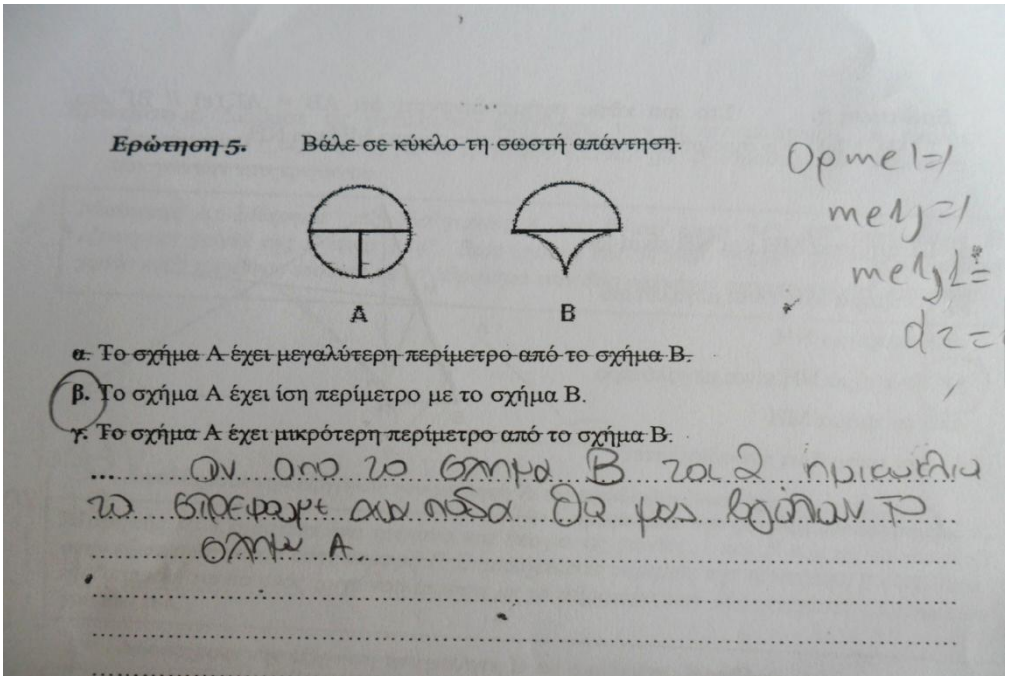
*Ποσοστό επί του αριθμού των ατόμων που αιτιολόγησαν.

Το συγκεκριμένο έργο (OPme1) εντάσσεται σ' αυτά που απαιτούν μερολογική τροποποίηση, δηλαδή διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε υποσχήματα και συνδυασμό τους για δημιουργία νέου σχήματος.

Ενώ οι σωστές επιλογές αγγίζουν το 70% (69,5%), αναγνωρίζουν δηλαδή οι συγκεκριμένοι μαθητές ότι το σχήμα Α έχει ίση περίμετρο με το σχήμα Β, η επιλογή Α ότι το σχήμα Α έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το σχήμα Β συγκεντρώνει όχι ευκαταφρόνητο ποσοστό (27,7%) και η επιλογή Γ ποσοστό (2,8%).

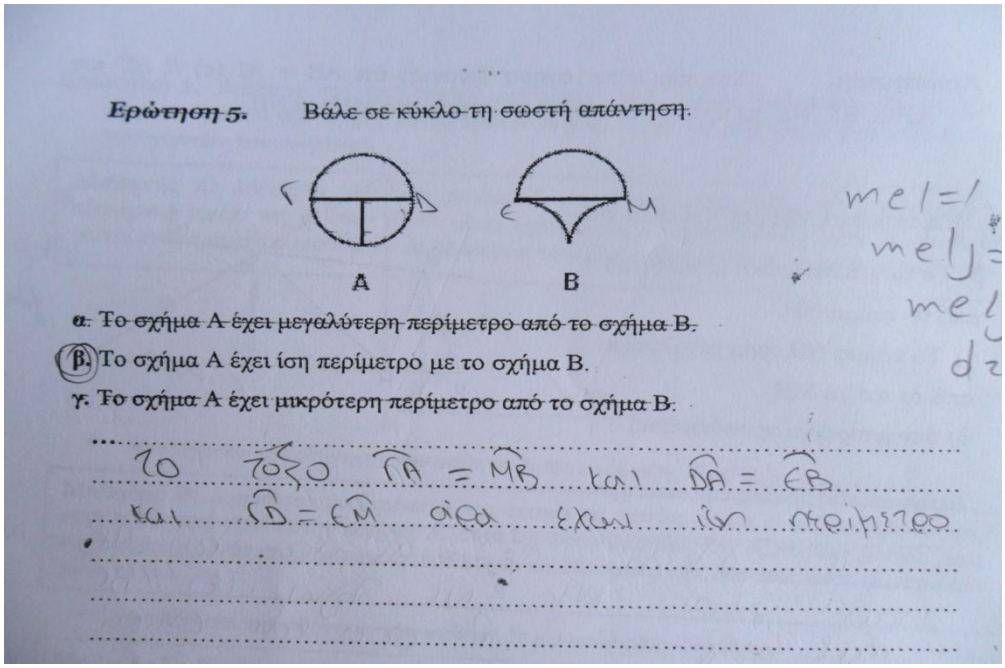
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διάφοροι τύποι αιτιολόγησης που είναι σωστοί σε ποσοστό μόνο 36,5%. Όπως και στην ερώτηση OPpw1, έτσι και εδώ καταγράφονται 6 τύποι αιτιολόγησης:

1. Η **Δυναμική προσέγγιση** με περίμετρο (ποσοστό 42,6%), όπου οι μαθητές προχωρούν στη λύση μέσω μετακίνησης τμημάτων του σχήματος και οδηγούνται σε αναδιοργάνωση του σχήματος.



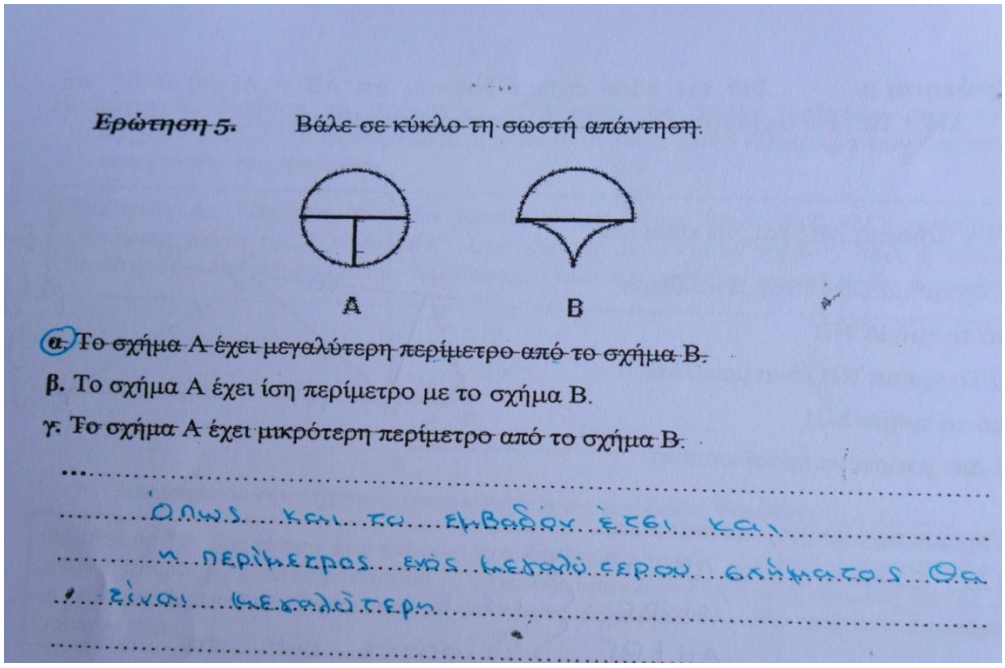
Σχήμα 44 Δυναμική προσέγγιση λύσης

2. Η **Στατική προσέγγιση** με περίμετρο (ποσοστό 18,1%), όπου οι μαθητές οδηγούνται στη λύση μετρώντας τα μήκη των τόξων.



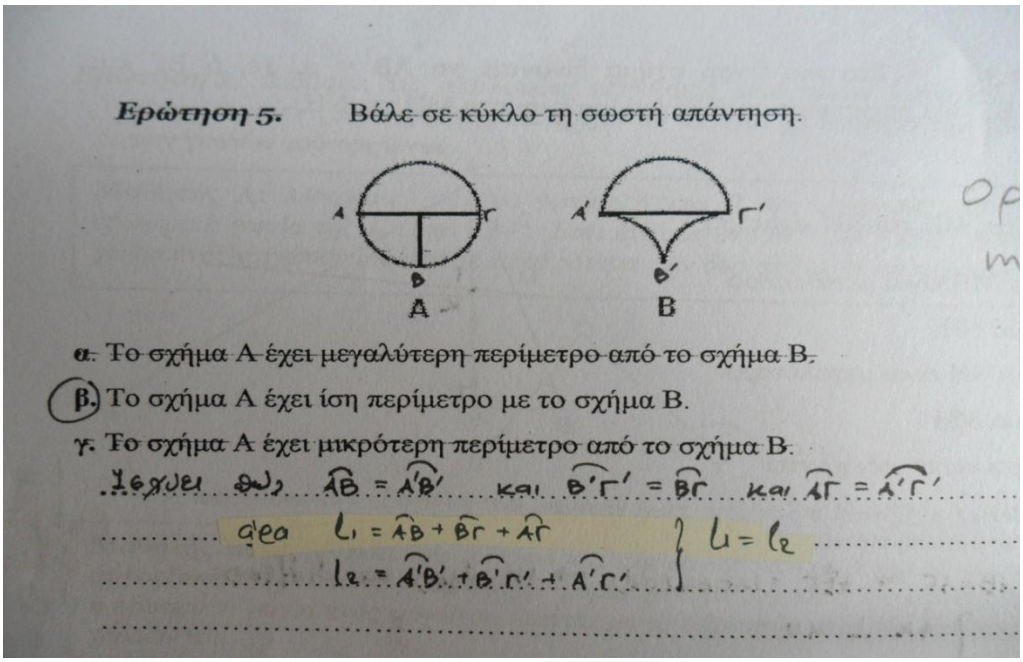
Σχήμα 45 Στατική προσέγγιση λύσης

3. Η προσέγγιση που φανερώνει **σύγχυση περιμέτρου και εμβαδού** (ποσοστό 9,4%), όπου καταγράφεται σύγχυση διάκρισης μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού του σχήματος.



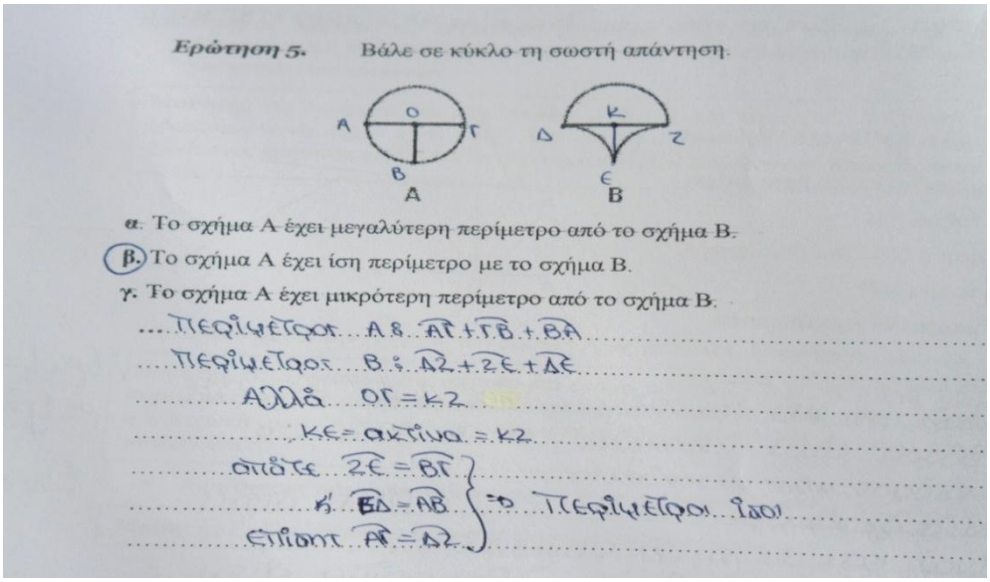
Σχήμα 46 Σύγχυση περιμέτρου και εμβαδού

4. Η **ολική στατική προσέγγιση** (ποσοστό 14,3%), όπου κινητήριος μοχλός αποτελεί το περίγραμμα του σχήματος.



Σχήμα 47 ολική στατική προσέγγιση

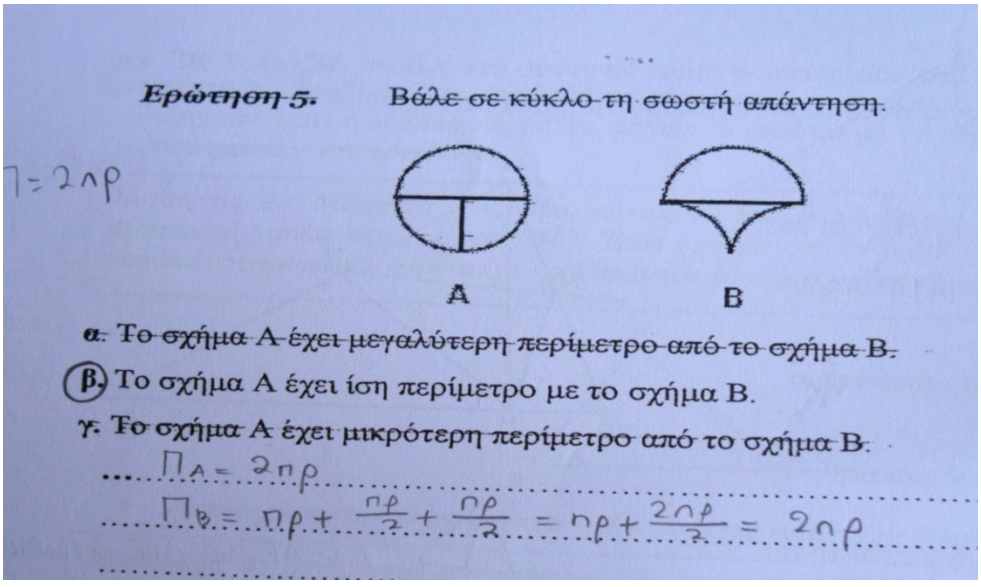
5. Η προσέγγιση που εμπεριέχει **παρανοήσεις** ως προς την έννοια μόνο της περιμέτρου (ποσοστό 4,8%). Στην περίπτωση αυτή καθοριστικό ρόλο στη λάθος διαπραγμάτευση παίζει η υπάρχουσα εσωτερική γραμμή στο σχήμα Α που θεωρείται από τους μαθητές τμήμα της περιμέτρου του.



Σχήμα 48 Παρανοήσεις περιμέτρου

(Εδώ θεωρεί τις διαμέτρους ΑΓ και ΔΖ ως στοιχεία περιμέτρου)

6. Η **Στατική Αναλυτική προσέγγιση** κάνοντας χρήση του τύπου του μήκους τόξου ή εμβαδού (ποσοστό 1,8%).

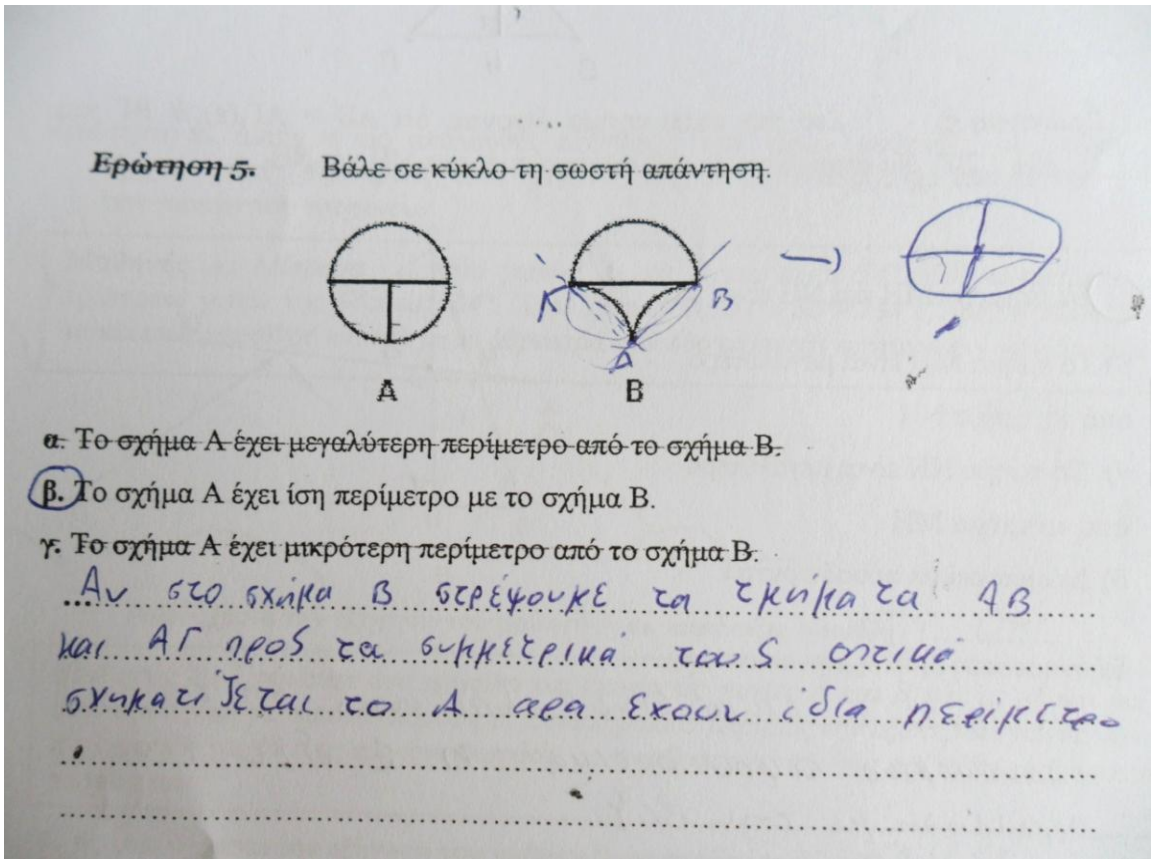


Σχήμα 49 Στατική Αναλυτική προσέγγιση

Η Δυναμική προσέγγιση ήταν η διαδικασία που ακολούθησε ένας στους τέσσερις μαθητές. Απ' αυτούς άλλοι μεν έκαναν μετακινήσεις των τόξων που συναποτελούν την περίμετρο ώστε να συμπέσουν τα σχήματα Α και Β και άλλοι προέβησαν σε γωνιακή αναδιοργάνωση του σχήματος (δηλαδή στροφή κατά 180^{o})

Ενδιαφέρον πάντως παρουσιάζει το γεγονός ότι ένας στους δέκα μαθητές (9,4%) συγχέει τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού με αποτέλεσμα να οδηγείται σε λάθος συμπέρασμα, υποστηρίζοντας ότι η περίμετρος του σχήματος Α είναι μεγαλύτερη απ' αυτήν του Β.

Τέλος 132 άτομα σχεδίασαν πάνω στο σχήμα τους (ποσοστό 26,3%).

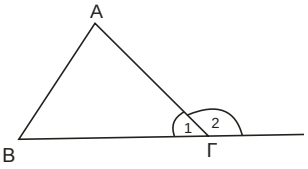


Σχήμα 50 Λύση με σχεδίαση στο σχήμα

Ερώτηση Β4

Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί η εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των απέναντι των γωνιών του τριγώνου.

Μαθητής Α: *Μέτρησα και τις τρεις γωνιές Α και Β και είναι 54°, 80° αντίστοιχα. Η εξωτερική γωνία της Γ είναι 134°. Έτσι έχουμε ότι 54°+80°=134°. Άρα, η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.*

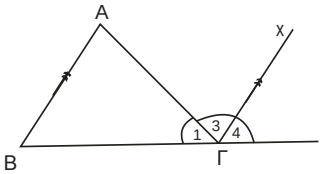


- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα τις γωνίες Α και Β και τις έβαλα μαζί στην εξωτερική γωνία στην κορυφή Γ. Συμπλήρωσαν ακριβώς την εξωτερική γωνία. Άρα, η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……..**

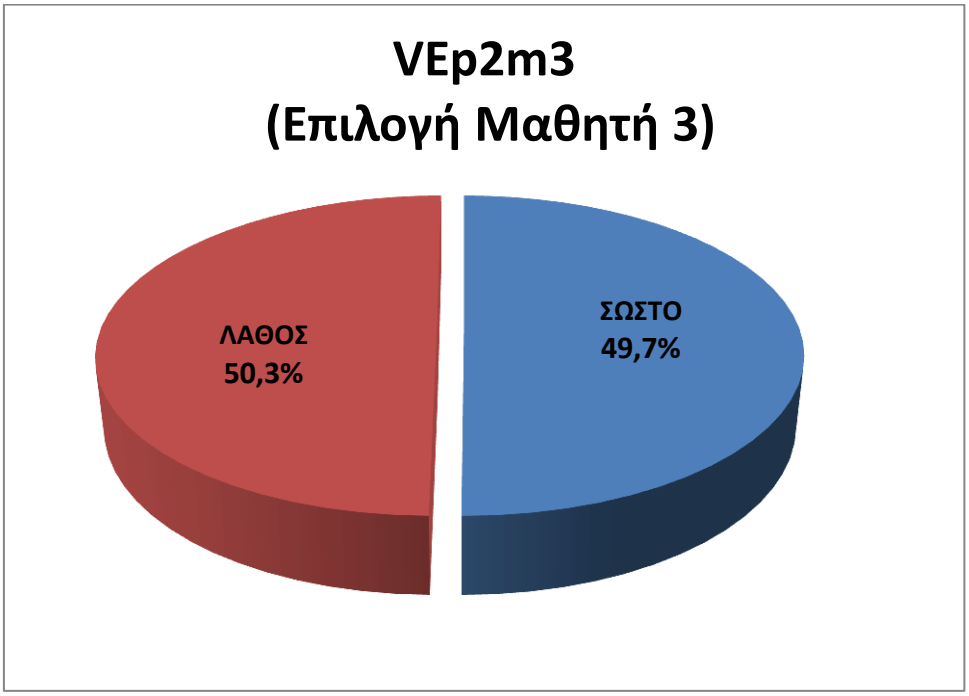
Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



Φέρνουμε την $\Gamma\chi//AB \Rightarrow A=\Gamma_3$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}_4 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{\Gamma}_3+\hat{\Gamma}_4 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi.}$

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι**

Αποτελέσματα



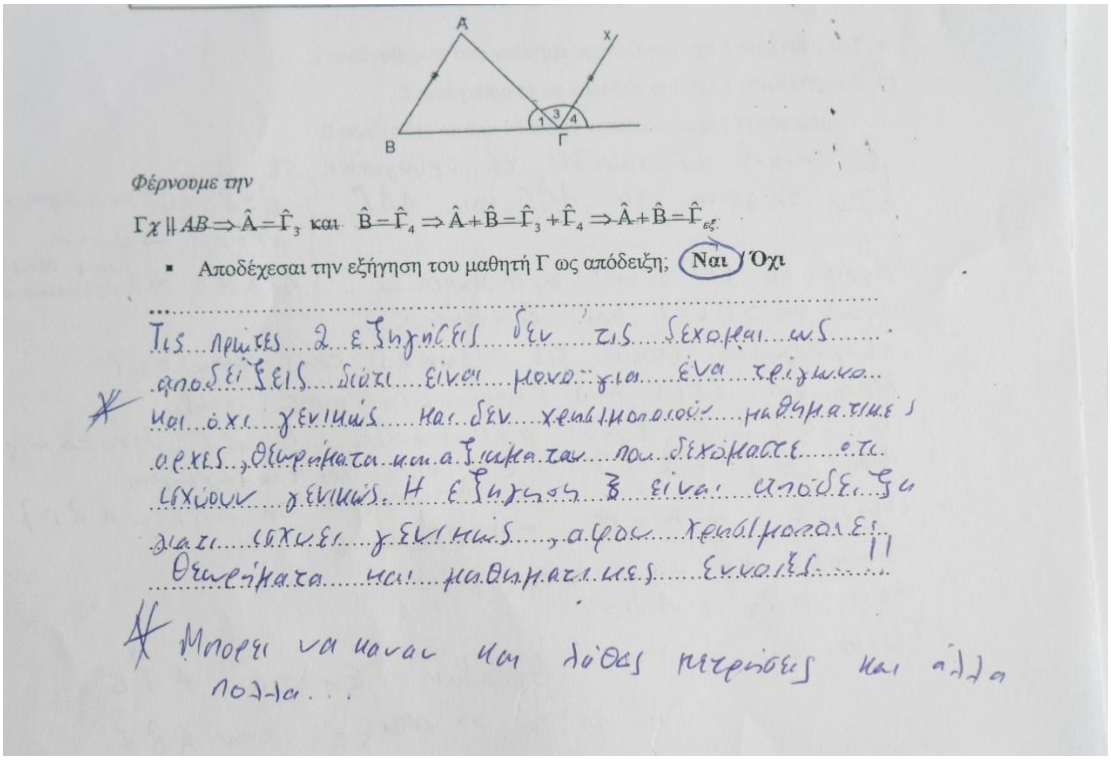
Σχήμα 51 Απαντήσεις VEp2m3

ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ
Επιλογή μαθητή 1,2 και 3	9,2 %
Επιλογή μαθητή 2 και 3	7,8%
Επιλογή μαθητή 1 και 3	19,2%
Επιλογή μαθητή 1 και 2	3,6%
Επιλογή μαθητή 3	49,7%
Επιλογή μαθητή 2	3,7%
Επιλογή μαθητή 1	6,8%

Σχήμα 52 Συνολικές Απαντήσεις

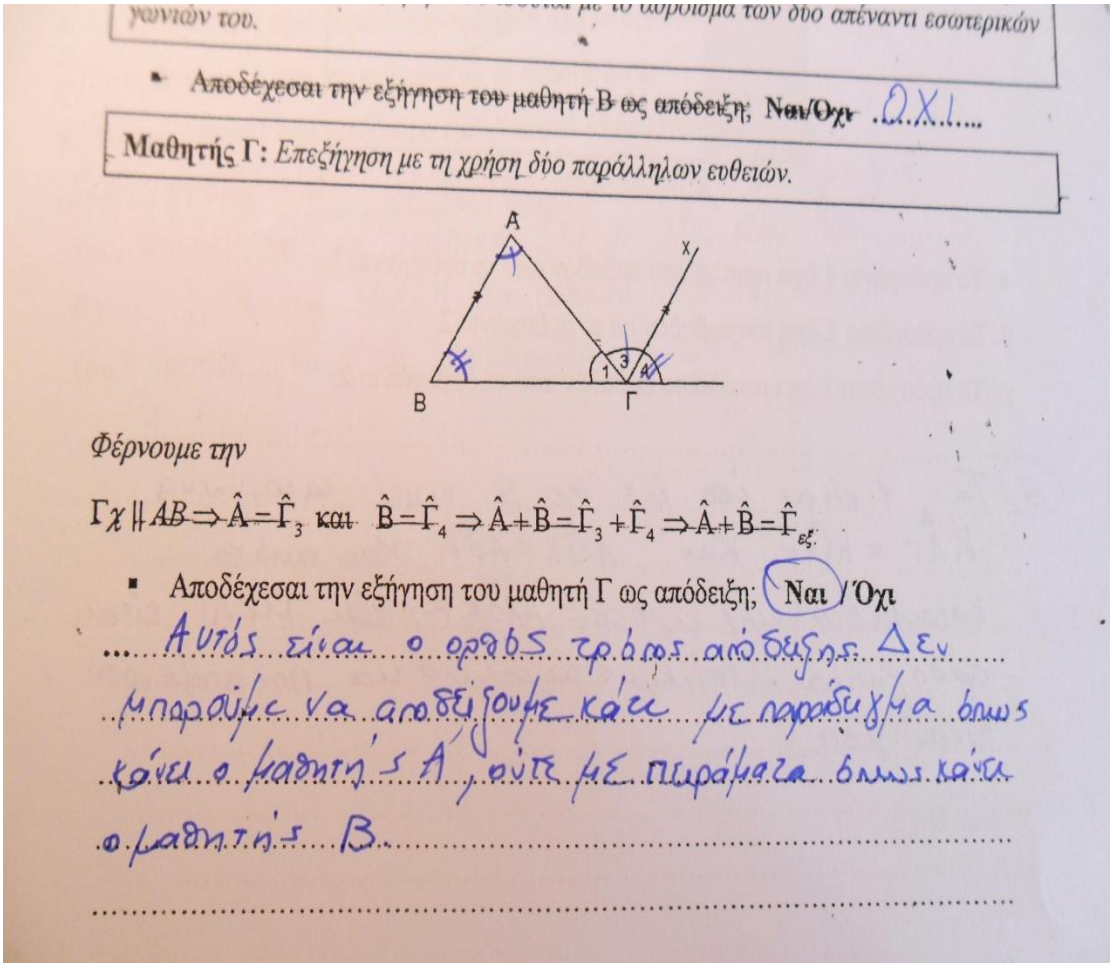
Αιτιολογήσεις για το μαθητή Γ	Ποσοστό (%)
Εργάστηκε με περισσότερη ακρίβεια και με άλλα θεωρήματα.	38,2
Η επεξήγηση του είναι πιο ολοκληρωμένη και σωστή . Οι πράξεις έγιναν βάσει κάποιου μαθηματικού τύπου.	16,8
Είναι πιο γενικεύσιμη	27,9
Επανάληψη δεδομένων	-
Άλλη αιτιολόγηση	17,1

Η εν λόγω ερώτηση VEp2m3 εξετάζει την απόδειξη της ιδιότητας ότι σε κάθε τρίγωνο η εξωτερική γωνία μιας γωνίας του ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών. Εξετάζει δηλαδή τη δυνατότητα των μαθητών να ανταποκριθούν στη συγκεκριμένη απόδειξη, η οποία βασίζεται σε διαδικασία.

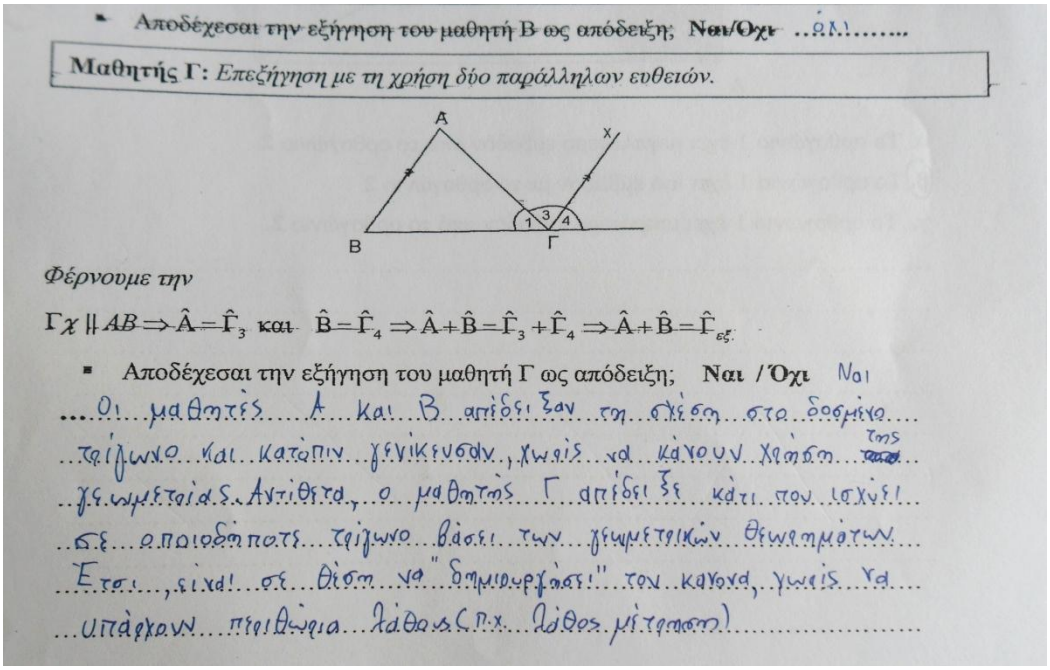


Σχήμα 53 Σωστή αιτιολόγηση απόδειξης

Όπως και στην αντίστοιχη ερώτηση VEp1m3 οι σωστές απαντήσεις (μαθητής Γ) μοιράζονται (ποσοστό 49,7%) δηλαδή μόνο οι μισοί μαθητές επιλέγουν τη σωστή απάντηση. Από δε πλευράς αιτιολόγησης για το Μαθητή Γ επικρατεί η αιτιολόγηση ότι ο παραπάνω μαθητής εργάστηκε κυρίως με περισσότερη ακρίβεια κάνοντας χρήση των σχετικών θεωρημάτων (ποσοστό 38,2%) και δευτερευόντως ότι χρησιμοποίησε κάποιο μαθηματικό τύπο (ποσοστό 16,8%) ή λόγω του γεγονότος ότι η απόδειξή του είναι πιο γενικεύσιμη (ποσοστό 27,9%).

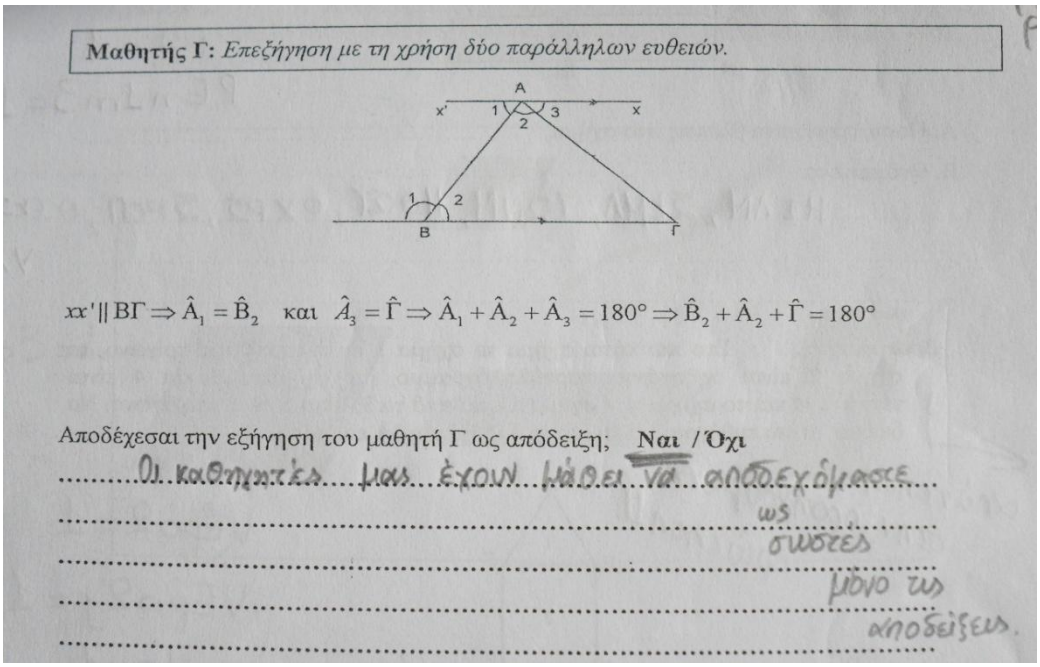


Σχήμα 54 Σωστή αιτιολόγηση - απόδειξη



Σχήμα 55 Σωστή αιτιολόγηση - απόδειξη γενικεύσιμη

Επειδή κανένα καλό δεν πάει χαμένο……



Σχήμα 56 « Θετική συμβολή καθηγητών »

Και στην ερώτηση αυτή ισχύουν οι γενικές παρατηρήσεις για την έννοια της απόδειξης που αναφέρουμε στην ερώτηση Α9.

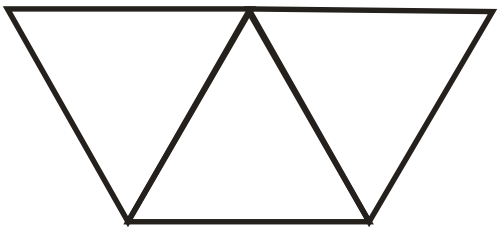
Παρατηρήσεις:

1) Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των **Α9** και **Β4** ΣΥΝΟΛΙΚΑ αλλά και των επιμέρους απαντήσεων των μαθητών, **ΔΕΝ** παρατηρούνται σοβαρές αποκλίσεις στους ΜΕΣΟΥΣ ΟΡΟΥΣ των επιλογών τους, ωστόσο παρατηρείται στο **ΙΔΙΟ ΔΟΚΙΜΙΟ** και από τον **ΙΔΙΟ ΜΑΘΗΤΗ**, να έχουν εντελώς διαφορετική προσέγγιση του ίδιου τρόπου στο Α' Δοκίμιο με το Β' Δοκίμιο. Πιο συγκεκριμένα, ενώ π.χ. στο πρώτο ερωτηματολόγιο γράφουν ότι δεν αποδέχονται την εξήγηση του Μαθητή Α δηλαδή ότι «μέτρησα τις γωνίες Α και Β και είναι»… , στο άλλο ερωτηματολόγιο αποδέχονται ακριβώς την αντίστοιχη ενέργεια του Μαθητή Α, δηλαδή «ότι μέτρησα τις γωνίες Α,Β,Γ…» Διαφαίνεται δηλαδή μια **όχι σταθερή** αντιμετώπιση κάποιων ερωτήσεων, αλλά μάλλον **«παρορμητική προσέγγιση».**

2) Στις δυο παραπάνω ερωτήσεις πολλοί μαθητές αφενός δεν δικαιολογούν τις απαντήσεις τους για διάφορους λόγους, και αφετέρου τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων και για τις 3 αποδείξεις είναι πολύ χαμηλά (ποσοστό Α 8,8%, ποσοστό Β 12% αντίστοιχα).

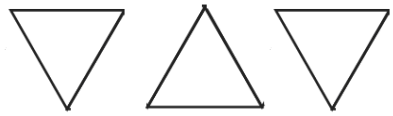
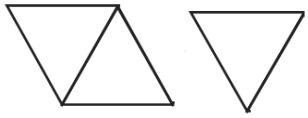
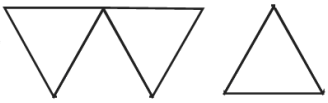
Ερώτηση Β5

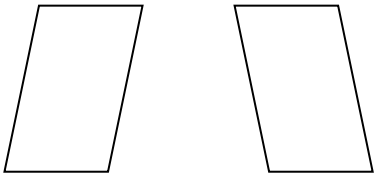
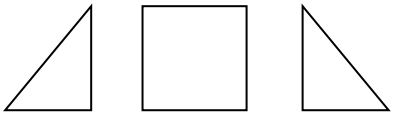
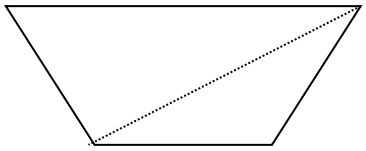
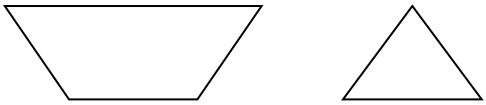
Σχεδίασε τα σχήματα τα οποία νομίζεις ότι συνδυάστηκαν για να προκύψει το πιο κάτω σχήμα. Μπορείς να παρουσιάσεις περισσότερες από μια λύση.



Αποτελέσματα

Πρόκειται για άσκηση μερολογικής τροποποίησης. Από τα 501 άτομα που συμπλήρωσαν την άσκηση 8 άτομα(1,6%) βρήκαν και τους 4 τρόπους λύσης. Ο πρώτος τρόπος επίλυσης χρησιμοποιήθηκε από το 75% των ατόμων, ο δεύτερος από το 32,5%, ο τρίτος τρόπος από το 24,2% και ο τέταρτος από το 3,2%.

Τρόποι λύσης	Ποσοστό (%)
	**75**
	**32,5**
	24,2
	**3,2**

Λάθη	Ποσοστό (%)
Σχεδιάζουν δύο παραλληλόγραμμα 	8,8
Δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα τετράγωνο 	1,4
2 σκαληνά τρίγωνα 	0,8
Σχήματα με επικάλυψη 	26,1
Τραπέζιο	–
Ανοικτά σχήματα	0,6
Άλλο λάθος	15,8

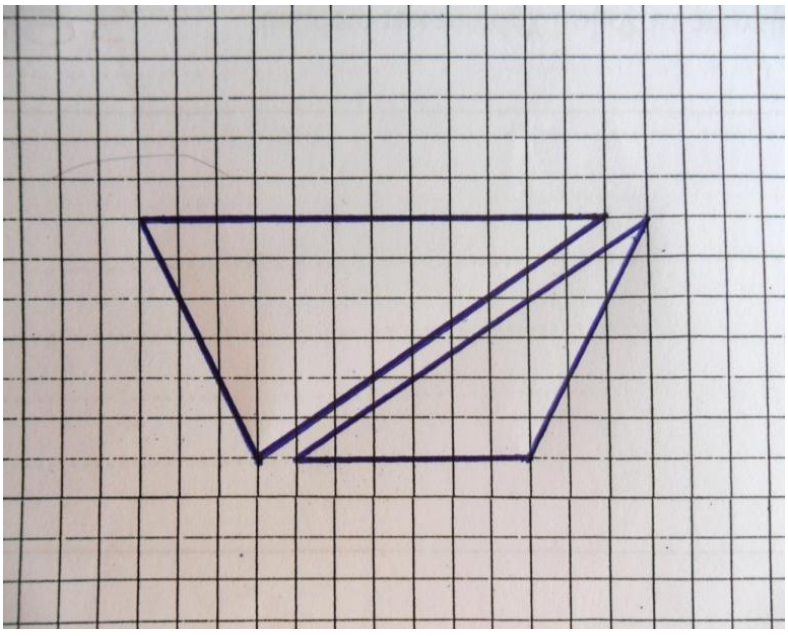
Σχήμα 57 Απαντήσεις OPme2

Η σχεδίαση των σχημάτων που συναποτελούν το πιο πάνω σχήμα ήταν το αντικείμενο της ερώτησης λειτουργικής σύλληψης που απαιτούσε μερολογική τροποποίηση, δηλαδή διάσπαση του «όλου» σχήματος σε υποσχήματα και συνδυασμός αυτών για δημιουργία νέου σχήματος.

Και τους 4 τρόπους ανασύστασης του σχήματος διεξήλθαν επιτυχώς μόνο 8 μαθητές (ποσοστό 1,6%). Ωστόσο η μεγάλη πλειοψηφία τους έδωσαν την πρώτη λύση OPme2s1 (ποσοστό 75%). Ο συνδυασμός ενός παραλληλογράμμου και ενός τριγώνου επιλέχτηκε από 32,5% και 24,2% των μαθητών, οι οποίοι έλυσαν το πρόβλημα μέσω της $2^{ης}$ και $3^{ης}$ λύσης αντίστοιχα.

Συχνό λάθος των μαθητών η δημιουργία σχημάτων με επικάλυψη (ποσοστό 26,1%) όπως και η απ' ευθείας κατασκευή ενός τραπεζίου (ποσοστό 15,8%).

Θεωρούμε αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι μόνο **ένας στους εκατό** μαθητές υιοθετεί λύση κατασκευής φέρνοντας τη **διαγώνιο** του τραπεζίου και δημιουργώντας 2 αμβλυγώνια τρίγωνα. Ενώ συνήθως οι μαθητές στηρίζονται στις υπάρχουσες διαχωριστικές γραμμές του σχήματος της εκφώνησης, θεωρούμε ότι αποτελεί **ΥΠΕΡΒΑΣΗ** η περίπτωση αυτή (OPme2m3),(παρακάτω σχήμα) μέσω κατασκευής της διαγωνίου.



Σχήμα 58 Διάσπαση σχήματος μέσω διαγωνίου

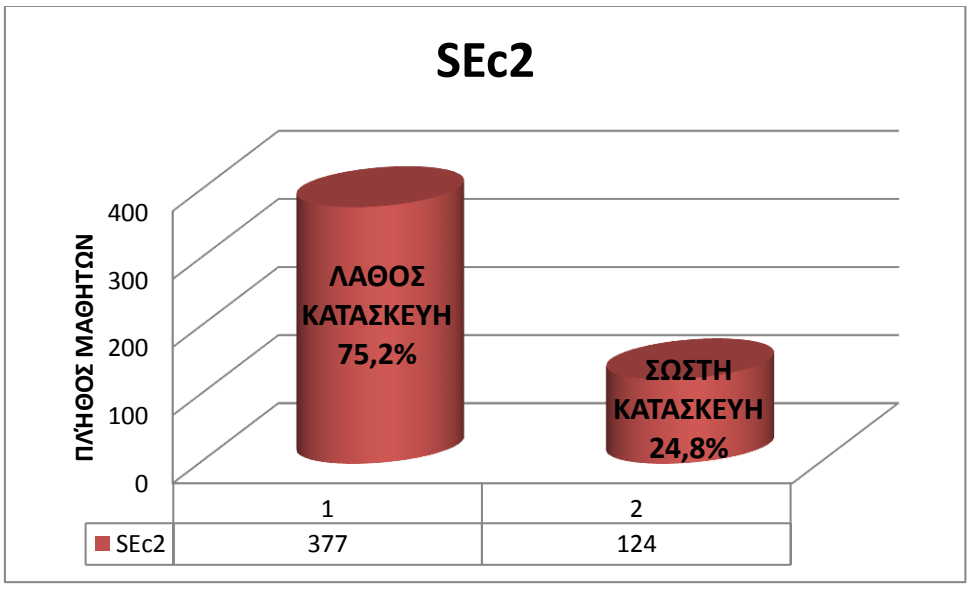
Ερώτηση Β6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Το σημείο Ε είναι ένα σημείο που ανήκει πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Ο κύκλος με διάμετρο ΑΕ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ.

Δίνεται ότι: **ΑΒ = 6, ΑΓ = 6,5 , ΑΕ =** $\frac{4}{5}$ **ΑΓ**

Να κατασκευάσετε το σχήμα με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.

Αποτελέσματα



Σχήμα 59 Απαντήσεις SEc2

Διαδικασία κατασκευής		Ποσοστό (%)*
Σωστή διαδικασία κατασκευής		25.5
Λάθος διαδικασία κατασκευής	Λάθος σχεδίαση της διαμέτρου ΑΕ (τη σχεδιάζουν ως ακτίνα).	39.2
	Σχεδιάζουν κύκλο με ακτίνα ΒΓ	3.3
	Σχεδιάζουν ΑΒ > ΑΓ	3.1
	Σχεδιάζουν ΑΒ=ΑΓ	9.9
	Σχεδιάζουν τυχαίο σημείο Ζ	36.5
	Άλλο λάθος	8.0

*Ποσοστό επί του συνόλου των ατόμων που έλυσαν την άσκηση.

Η κατασκευή, μέσω κανόνα και διαβήτη του σχήματος που απαιτούσε η ερώτηση αυτή δημιούργησε αρκετά προβλήματα στους μαθητές και είχε ως αποτέλεσμα μόνο ένας στους τέσσερις μαθητές (ποσοστό 24,8%) να προβεί σε ορθή κατασκευή.

Απ' αυτούς που έλυσαν την άσκηση μόνο το ένα τέταρτο (ποσοστό 25,5%) προχώρησε σε σωστή διαδικασία κατασκευής. Τα περισσότερα λάθη εντοπίζονται είτε στη λάθος σχεδίαση της διαμέτρου ΑΕ που τη σχεδιάζουν ως ακτίνα (ποσοστό 39.2%) είτε στο σχεδιασμό του Ζ ως τυχαίου σημείου (ποσοστό 36,5%).

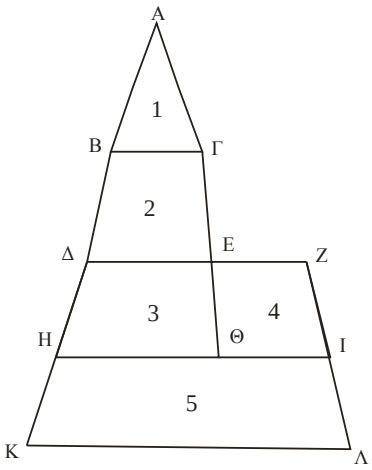
Δύο βασικές δυσκολίες διαφαίνονται από τα δοκίμια:

Η **πρώτη δυσκολία** η αδυναμία εύρεσης του τμήματος ΑΕ=4/5(ΑΓ), αφού δυσκολεύονται να βρουν το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 4/5 · 6,5 ή το πηλίκο 26/5.

Η **δεύτερη** έγκειται στο ότι όσοι **δεν** κατασκευάζουν οξυγώνιο τρίγωνο, αλλά ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο, δυσκολεύονται να κατασκευάσουν το σημείο Ζ ως τομή του κύκλου με διάμετρο ΑΕ και της πλευράς ΑΒ.

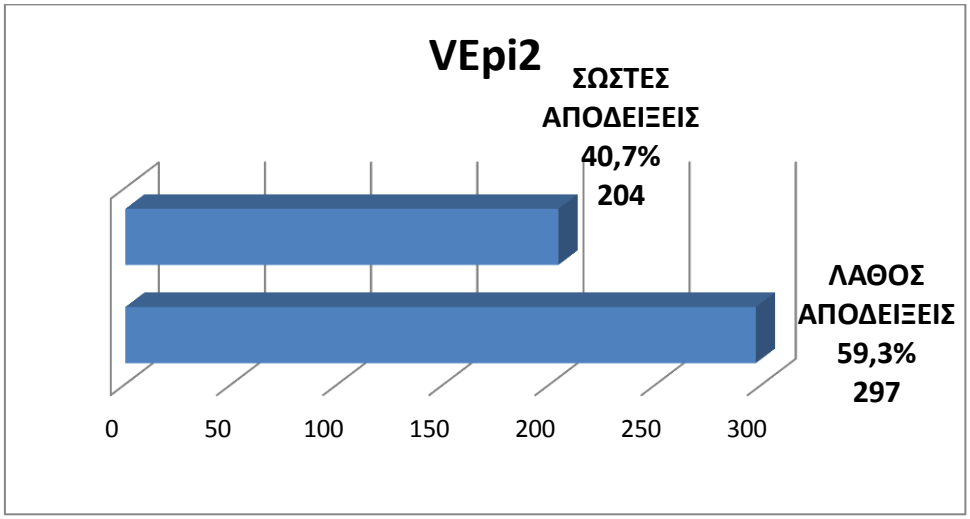
Ερώτηση Β7

Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα.



Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

Αποτελέσματα



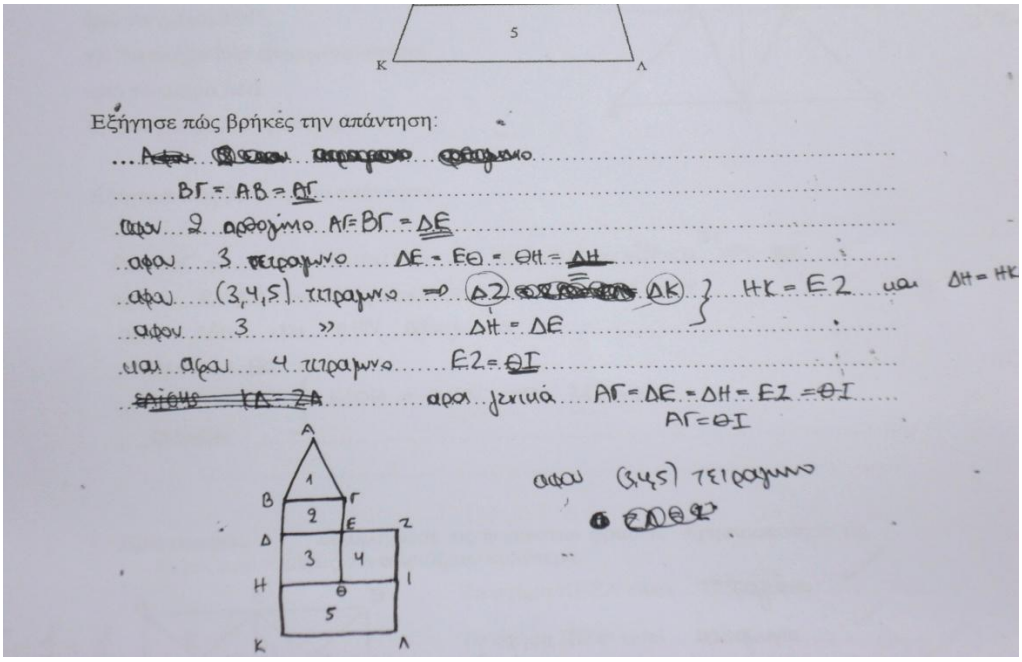
Σχήμα 60 Απαντήσεις VEpi2

Αποτελεί τη δεύτερη από τις δύο ερωτήσεις (VEpi1, VEpi2) που έχουν αναφορά στη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος.

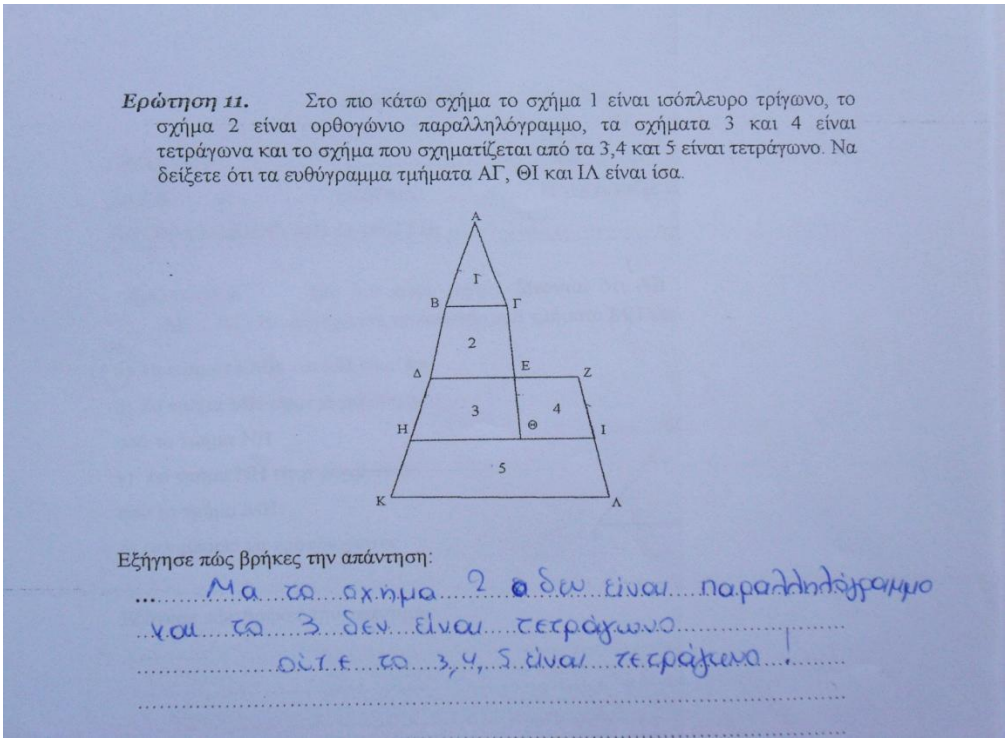
Οι εν λόγω ερωτήσεις παρουσιάζουν στα σχήματα τη λεγόμενη **«φύση εικόνας»**, όπου δηλαδή η λεκτική διατύπωση του προβλήματος **δεν** ταιριάζει με την σχηματική αναπαράσταση του.

Καλούνται οι μαθητές μέσα από το «λάθος δοσμένο σχήμα» να συγκρίνουν τρία τμήματα εμφανώς «σχηματικά άνισα» και να τα βγάλουν ΙΣΑ.

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι τέσσερις στους δέκα μαθητές (ποσοστό 40%) αποδεικνύουν σωστά ότι ΑΓ=ΘΙ=ΙΛ και απ' αυτούς ένας στους τρεις περίπου (ποσοστό 35,1%) προβαίνουν σε σωστή αιτιολόγηση. Μόνο 8 μαθητές αποδεικνύουν το ΘΙ=ΙΛ και 18 μαθητές το ΑΓ=ΘΙ. Από τους 501 μαθητές, μόνο 86 (ποσοστό 17,2%) αναγνωρίζουν το σχήμα ως λανθασμένο και οι μισοί απ' αυτούς (ποσοστό 8,6%) προχωρούν στο σχεδιασμό νέου, ορθού σχήματος.



Σχήμα 61 Επίλυση με κατασκευή σωστού σχήματος

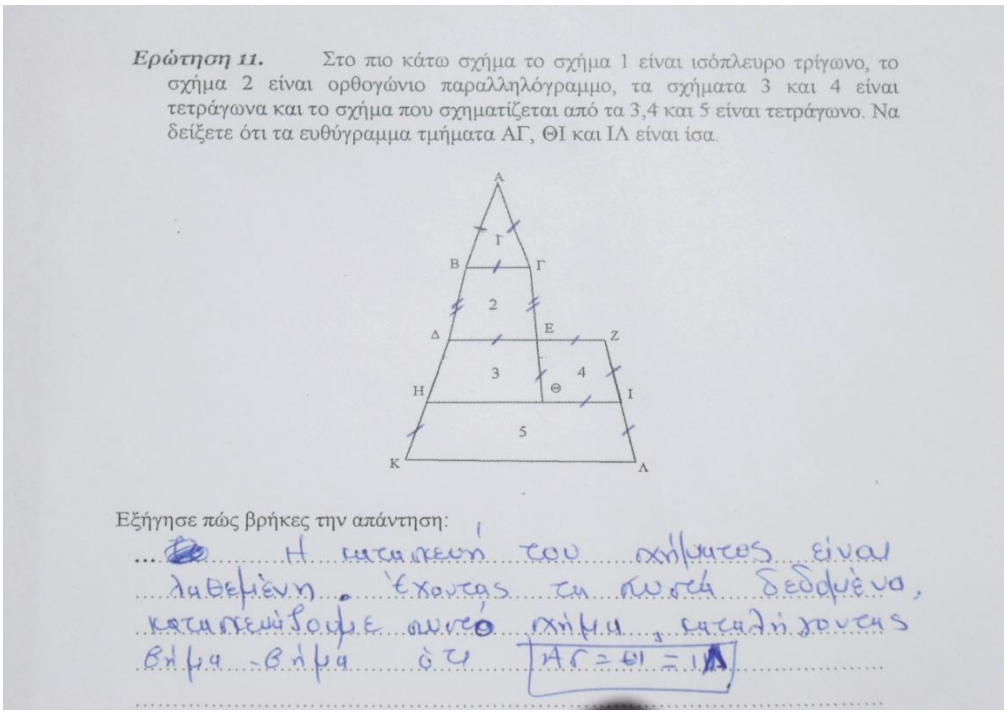


Ερώτηση 11. Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα.

Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

...Μα το σχημα 2 δεν είναι παραλληλόγραμμο
και το 3 δεν είναι τετράγωνο
ούτε τα 3,4,5 είναι τετράγωνα!

Σχήμα 62 Αδυναμία επίλυσης « μετά θαυμασμού »



Ερώτηση 11. Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα.

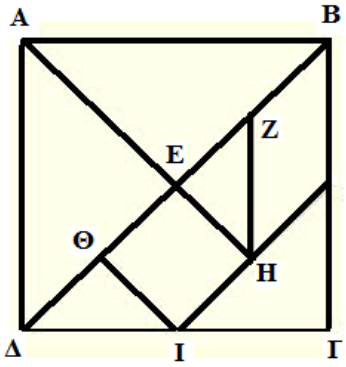
Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

...Η κατασκευή του σχήματος είναι
λανθασμένη. Έχοντας τη δοσμένα,
κατασκευάσαμε σωστό σχήμα, μετρώντας
βήμα-βήμα ότι ΑΓ = ΘΙ = ΙΛ

Σχήμα 63 Αναγνώριση λανθασμένου σχήματος

Ερώτηση Β8

Συμπλήρωσε τις παρακάτω φράσεις. Χρησιμοποίησε τις λέξεις που νομίζεις ότι ταιριάζουν καλύτερα.

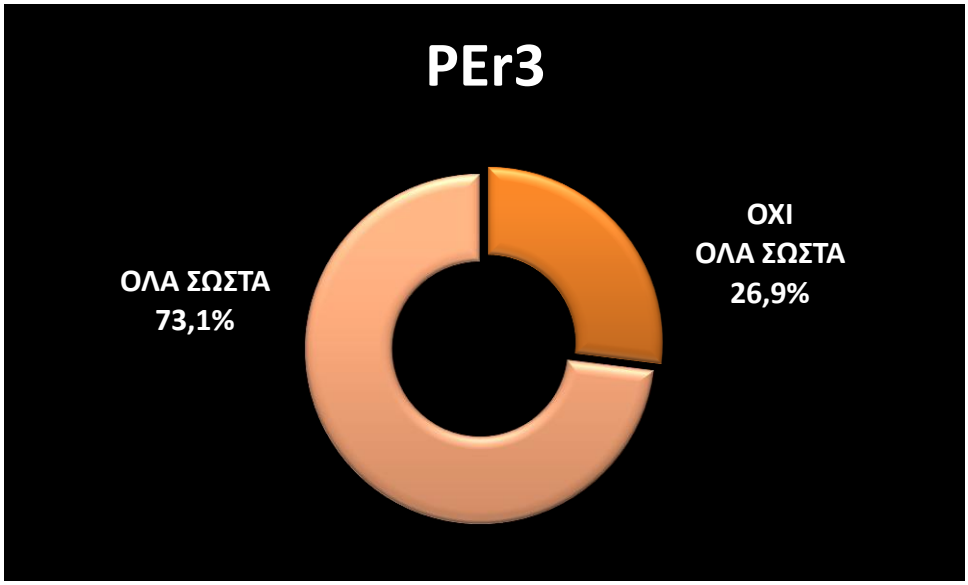


Το σχήμα ΘΖΗΙ είναι **(ορθογώνιο) τραπέζιο.**

Το σχήμα ΕΗΙΘ είναι **τετράγωνο ή ορθογώνιο ή παραλληλόγραμμο**

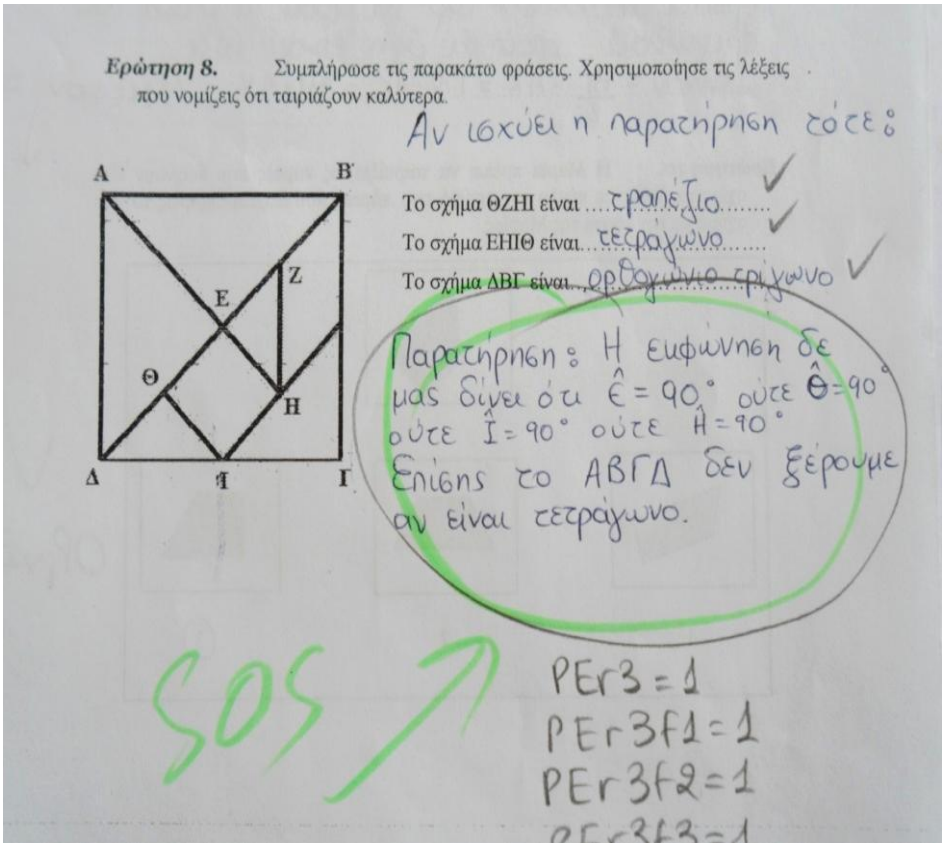
Το σχήμα ΔΒΓ είναι **(ορθογώνιο ισοσκελές) τρίγωνο**

Αποτελέσματα



Σχήμα 64 Απαντήσεις PEr3

Η ερώτηση αυτή (PEr3) ανήκει στην ομάδα των αντιληπτικών έργων που εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν υποσχήματα ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν σωστά **όλα** τα σχήματα σε ποσοστό 73,1%. Το ΔΒΓ αναγνωρίζει επιτυχώς το 92,2% των μαθητών, το ΕΗΙΘ το 93% των μαθητών ενώ το ΘΖΗΙ το 78,6% των μαθητών. Γενικά, θεωρήθηκε από τους μαθητές άσκηση χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες.

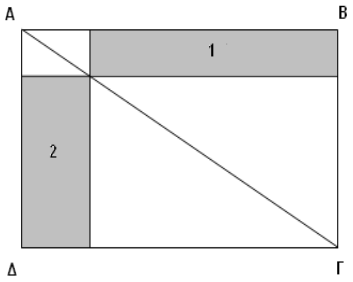


Σχήμα 65 « Έξυπνη παρατήρηση μαθήτριας »

Από τα 501 άτομα 18 (ποσοστό 3,6%) χαρακτηρίζει το ΘΖΗΙ ως ορθογώνιο παρ/μο, ενώ 66 μαθητές σχεδίασαν πάνω στο σχήμα (ποσοστό 13,2%).

Ερώτηση Β9

Στην πιο κάτω εικόνα, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Παρατήρησε τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Βάλε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και αιτιολόγησε την απάντησή σου.

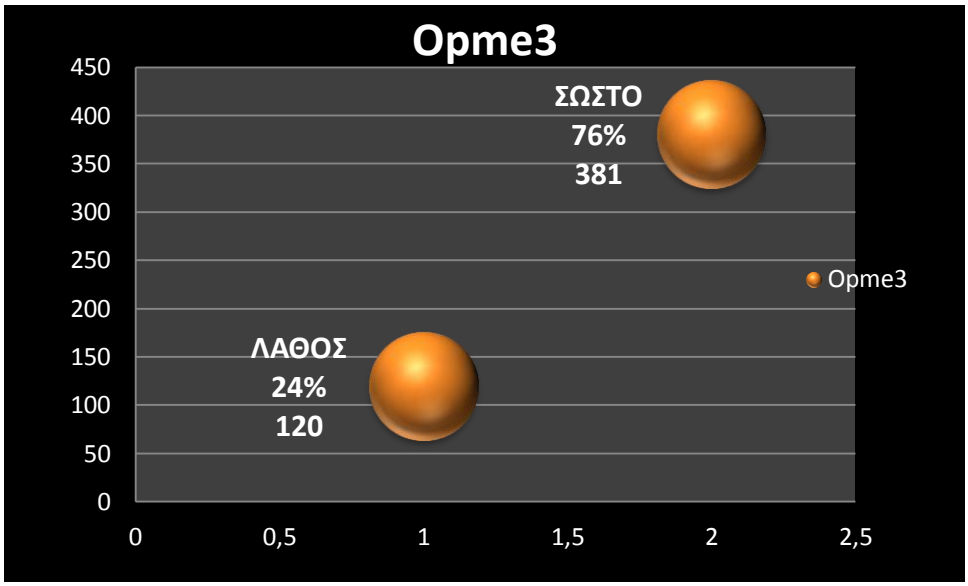


Α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.

Β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2.

Γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.

Αποτελέσματα



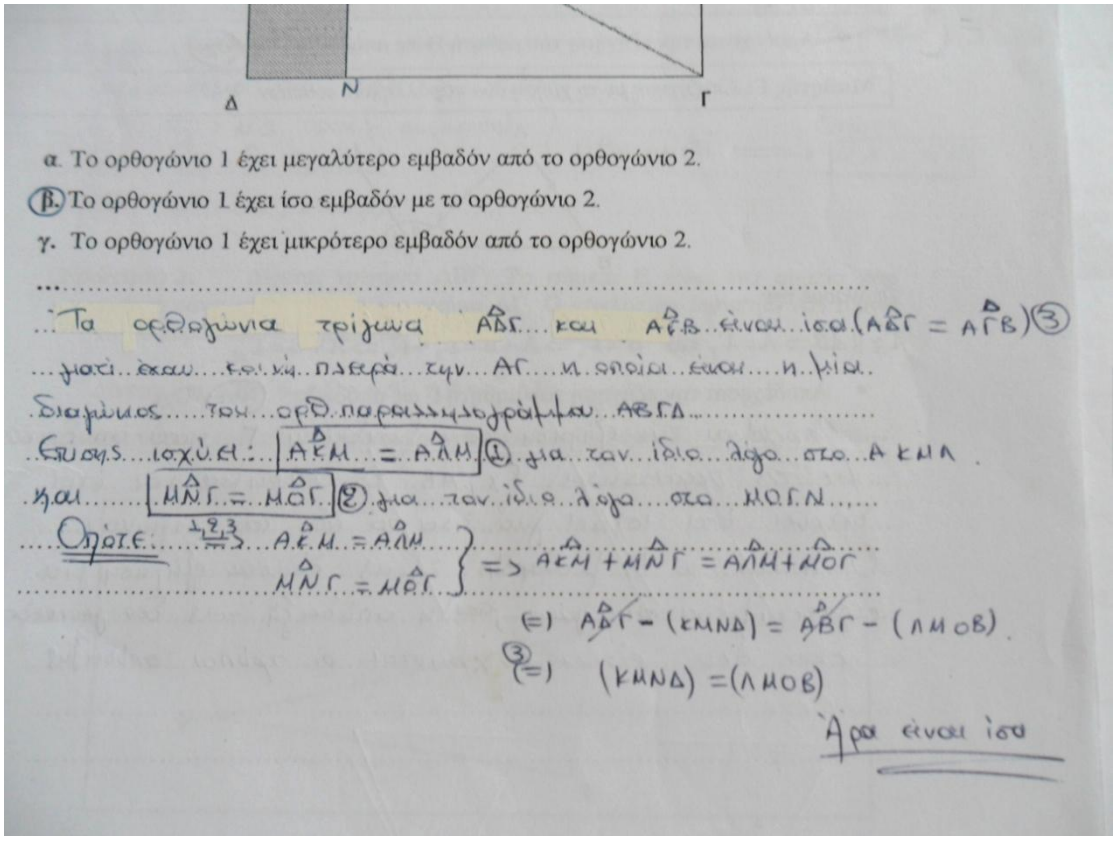
Σχήμα 66 Απαντήσεις OPme3

Τρόποι Λύσης (ανεξάρτητα από την ορθότητα της απάντησης)	Ποσοστό (%) *
Δυναμική προσέγγιση	39,7
Αναλογία ανάμεσα στο μήκος και στο πλάτος του σχήματος 1 με αυτά του σχήματος 2 (π.χ. «το 1 πιο μακρύ και πιο στενό, το 2 πιο κοντό και πιο πλατύ»).	8,6
Είναι ίσα γιατί ΑΓ = ΑΒ	0,9
Μέτρηση με τη ρίγα (και εύρεση εμβαδού)	18,2
Γιατί έτσι φαίνεται από το σχήμα.	9,6
Το ορθογώνιο 1 αν το μοιράσουμε στα δύο και το ενώσουμε θα σχηματίσει το ορθογώνιο 2.	3,8
Άλλος τρόπος	19,2

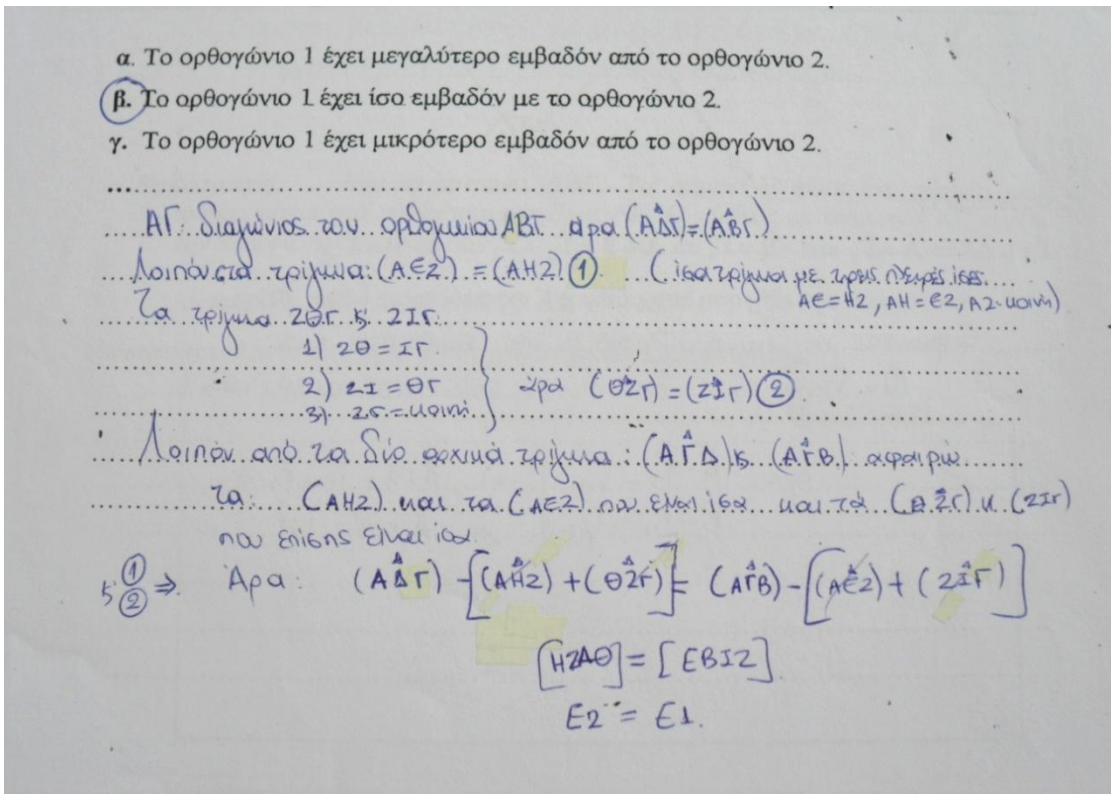
*Ποσοστό επί των ατόμων που αιτιολόγησαν την απάντηση τους.

Εντάσσεται το παρόν έργο σ’ αυτά που απαιτούν μερολογική τροποποίηση του δοσμένου σχήματος σε υποσχήματα. Η **σωστή απάντηση Β** επιλέγεται από 3 στους 4 μαθητές (ποσοστό 76%), ενώ οι άλλες δύο επιλογές Α και Γ ισομοιράζονται τα υπόλοιπα ποσοστά(12.2% και 11,8% αντίστοιχα). Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν πρόβλημα με την αιτιολόγηση των απαντήσεών τους και μόνο ένας στους τρεις περίπου καταλήγει σε ορθή μαθηματικά διατύπωση (ποσοστό 28,3%).

Ανεξάρτητα από την ορθότητα της απάντησής τους ένας στους τέσσερις μαθητές (ποσοστό 39,7%) επιλέγει τη **δυναμική προσέγγιση** λύσης (OPme3s1), δηλαδή συγκρίνουν στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ τα επιμέρους **λευκά** τρίγωνα.

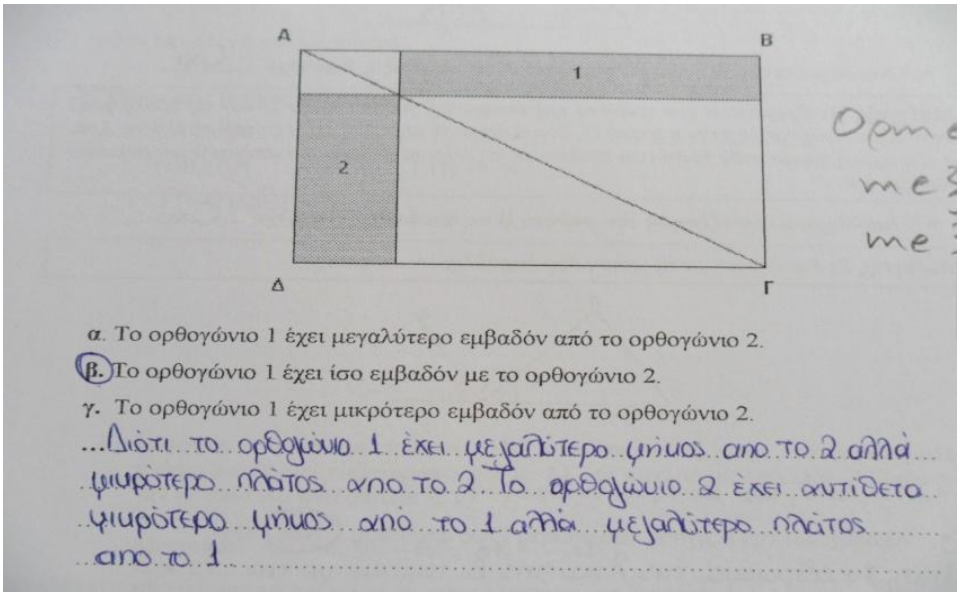


Σχήμα 67 Δυναμική προσέγγιση λύσης



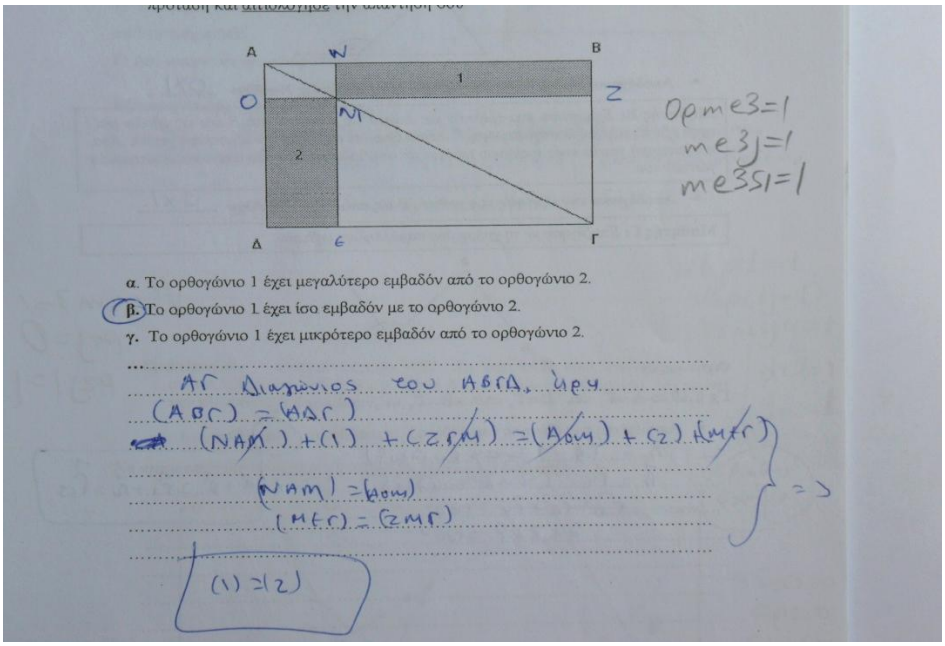
Σχήμα 68 Δυναμική προσέγγιση λύσης

Άλλη λύση που επιλέγουν οι μαθητές είναι η **αναλογική** (OPme3s2),όπου κυριαρχούν οι απόψεις του τύπου «το σχήμα 1 είναι πιο μακρύ και πιο στενό, ενώ το σχήμα 2 είναι πιο κοντό και πιο πλατύ».



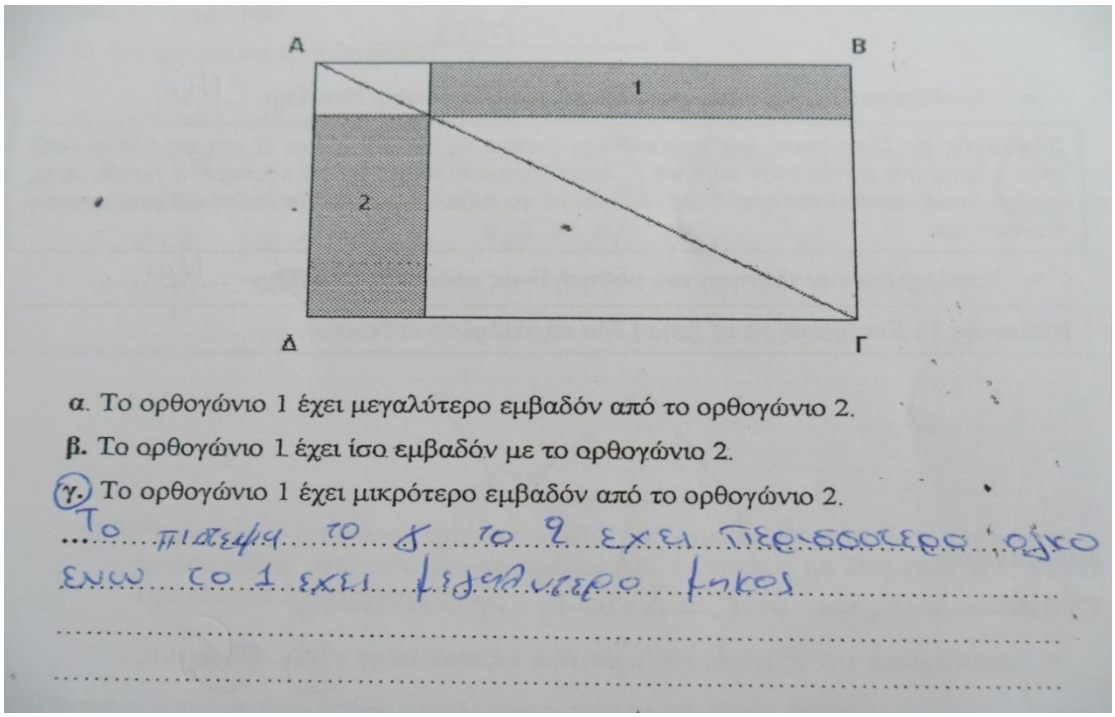
Σχήμα 69 Αναλογικός τρόπος λύσης

Αρκετοί μαθητές λύνουν σωστά το πρόβλημα σχηματικά, χωρίς λεκτικές περιγραφές και τις απαιτούμενες αιτιολογήσεις.



Σχήμα 70 Μη λεκτικός τρόπος λύσης

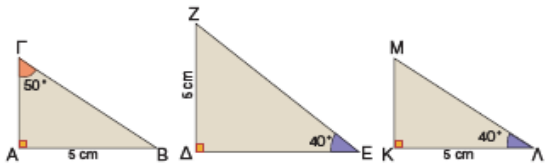
Από την επεξεργασία των δοκιμίων είναι εμφανής η τάση των μαθητών να επικεντρώνονται **μ ό ν ο** στα γραμμοσκιασμένα ορθογώνια, χωρίς να προσέχουν **ο λ ό κ λ η ρ ο** το σχήμα. Η αντιληπτική δηλαδή κατανόηση λειτουργεί ως ανασχετικός παράγοντας στην σύλληψη του σχήματος. Ένας στους δέκα μαθητές προσπαθεί να εντοπίσει αναλογικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων και διπλάσιο περίπου ποσοστό επιχειρεί να απαντήσει στο πρόβλημα εφαρμόζοντας αρχικά μετρήσεις των τμημάτων και στη συνέχεια υπολογισμό του εμβαδού των γραμμοσκιασμένων ορθογωνίων.



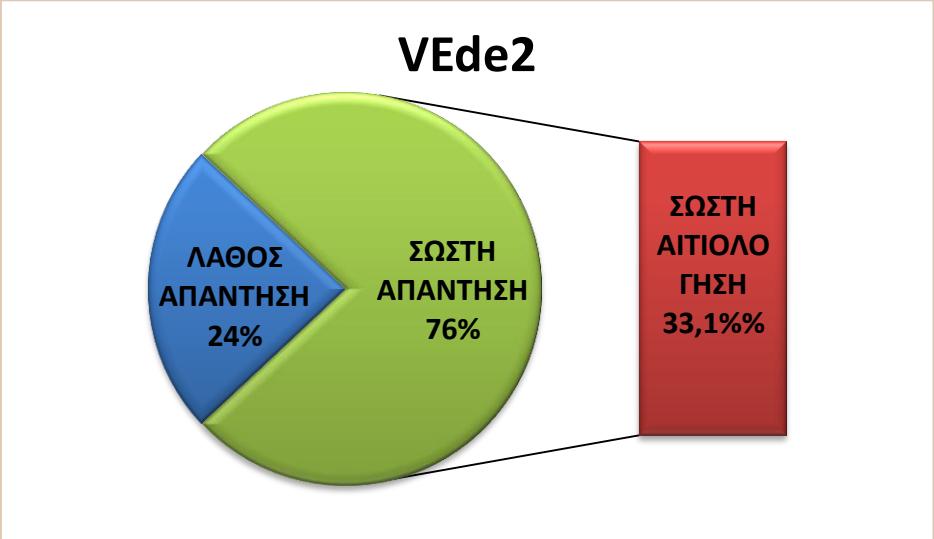
Σχήμα 71 Προσεγγίσεις που υποδηλώνουν συγχύσεις

Ερώτηση Β10

Βρες το ζεύγος των ίσων τριγώνων και αιτιολόγησε την απάντησή σου.



Αποτελέσματα



Σχήμα 72 Απαντήσεις VEde2

Λάθη	Ποσοστό (%)*
Αναφορά μόνο σε ισότητα πλευράς	7.6
Αναφορά στις σχέσεις, χωρίς αναφορά στα κριτήρια ισότητας τριγώνων (Γ – Π – Γ)	34.4
ΖΔΕ = ΜΚΛ (π.χ. γιατί έχουν ίδιες γωνίες, επικεντρώνονται μόνο στην ισότητα των γωνιών Ε και Λ)	12.7
Χρήση 4 κριτηρίων για την ισότητα των τριγώνων (Γ – Γ – Γ – Π).	8.6
Βασίζονται στην οπτική αντίληψη – «Μοιάζουν».	4.2
Και τα τρία τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι και τα τρία ορθογώνια, έχουν τις άλλες γωνίες 40 και 50 μοίρες και ίσες πλευρές (αυτή των 5 εκ.)	8.9
Χρήση τύπου εμβαδού	6.3
ΑΓΒ = ΔΕΖ	4.9
Άλλο λάθος	12.4

Η ερώτηση υπάγεται στην κατηγορία λεκτικής σύλληψης, όπου ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν μια ισότητα ορθογωνίων τριγώνων, βάσει του ορισμού. Κι εδώ 3 στους 4 μαθητές ανταποκρίνονται ορθά στις απαντήσεις τους (ποσοστό 76 %) όταν όμως έρχεται η ώρα της αιτιολόγησης μόνο 1 στους 3 επιτυγχάνουν πλήρως (ποσοστό 33,1%).

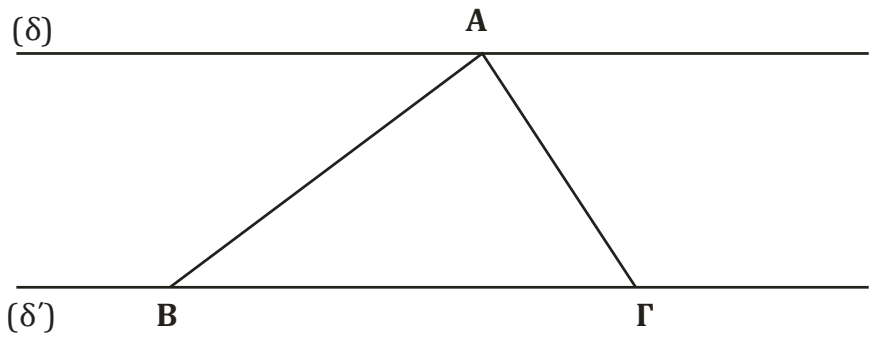
Από τις λανθασμένες απαντήσεις επικρατούν αφ' ενός μεν η αδυναμία εκφοράς γεωμετρικού αποδεικτικού λόγου που να στηρίζεται στα κριτήρια ισότητας τριγώνων (34,4%) και αφ' ετέρου η θεώρηση ισότητας τριγώνων με δύο μόνο αντίστοιχες γωνίες ίσες χωρίς την ύπαρξη πλευράς (ποσοστό 12.7%).

Πρωτότυπος επίσης ο «μαθηματικός νεολογισμός» περί (Γ-Γ-Γ-Π) (ποσοστό 8,6%).

Ερώτηση Β11

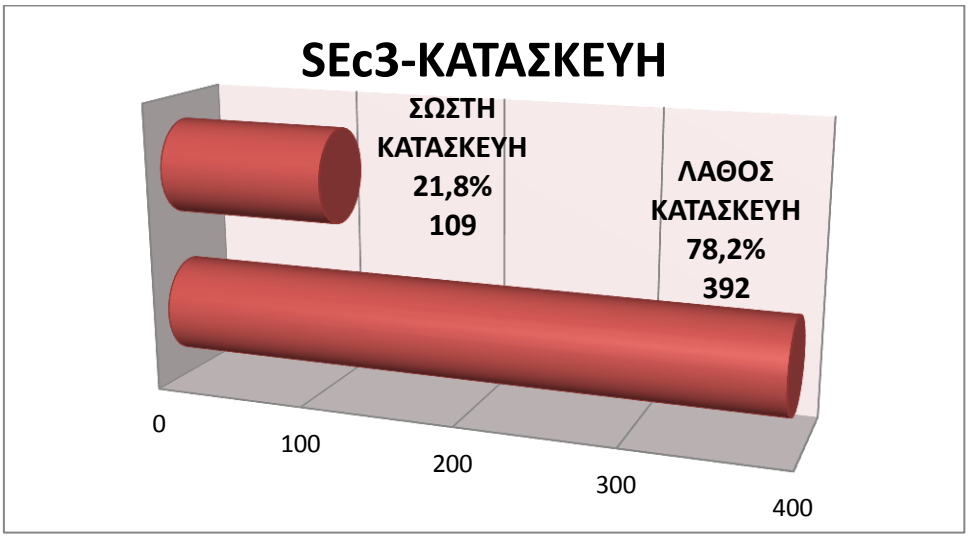
Οι ευθείες (δ) και (δ΄) είναι παράλληλες

Α) Να κατασκευάσετε δύο σημεία Μ και Ν έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΜΓΝ να είναι ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.



Β) Να αιτιολογήστε την κατασκευή σας.

Αποτελέσματα



Σχήμα 73 Απαντήσεις SEc3

Σχήμα 74 Απαντήσεις SEd2

Λάθη	Ποσοστό (%) *
Κατασκευή τυχαίου παραλληλογράμμου	48.3
Κατασκευή διπλάσιου παραλληλόγραμμου	19.8
Κατασκευή τραπεζίου (ενώνουν τα άκρα της ευθείας (δ) με τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα)	18.1
Μέτρηση με τη ρίγα	0.2
Ε # = $\frac{\beta 1+\beta 2}{2}$	0.2
Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμο ΑΜΝΓ	5.3
Σχεδιάζουν κάθετες	2.7
Άλλο λάθος	5.4

*Ποσοστό επί του συνόλου των λαθών.

Η τελευταία ερώτηση του 2ου δοκιμίου υπάγεται στα έργα ακολουθιακής σύλληψης και πραγματεύεται την κατασκευή τετραπλεύρου ΑΜΓΝ ισοδύναμου (=ισεμβαδικού) με το αρχικό δοσμένο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο τέλος ζητείται από τους μαθητές και η ακριβής περιγραφή της κατασκευής τους.

Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων επικρατεί η Λύση 2 (ποσοστό 18,8%), όπου οι μαθητές φέρνουν αρχικά τη διάμεσο ΑΜ και στη συνέχεια από την κορυφή Γ την ΓΝ//ΑΜ. Δημιουργείται έτσι το ΑΜΓΝ δεξιά της κορυφής Α. Αντίστοιχα αριστερά του Α το ΑΜΓΝ επιλέγεται από το (2,2%) . 4 μαθητές (ποσοστό 0,8%) κατασκευάζουν ισοδύναμο παραλληλόγραμμο, αλλά με βάσεις όχι πάνω στις παράλληλες (ε) και (ε’).

Αποτελεί δύσκολα προσβάσιμη άσκηση για τους μαθητές, όπως άλλωστε όλες οι γεωμετρικές κατασκευές, οι οποίες εδώ και χρόνια δεν αποτελούν διδακτέα ύλη για τους μαθητές του Λυκείου. Έτσι, ίσως δικαιολογείται αφ’ ενός μεν το υψηλό ποσοστό μαθητών (περίπου ένας στους δύο) που κατασκευάζουν ΤΥΧΑΙΟ παραλληλόγραμμο που δεν πληροί τις προϋποθέσεις της εκφώνησης, και αφ’ ετέρου το χαμηλό ποσοστό σωστής περιγραφής της κατασκευής (ποσοστό 13%).

Ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου

Έργα	Ποσοστά επιτυχίας
1) Αντιληπτικά έργα (PE)	
α) Ονομασίας	
PEn1	54,1%
β) Αναγνώρισης	
PEr1	59,9%
Per2	49,9%
Per3	73,1%
2) Λειτουργικά έργα (OP)	
α) Μερολογικής τροποποίησης	
OPme1	69,5%
OPme2	1,6%
OPme3	76%
β) Οπτικής τροποποίησης	
OPop1	23%
OPop2	82,6%
OPop3	92,8%
γ) Αλλαγής θέσης	
OPpw1	77,4%
OPpw2	40,3%
OPpw3	95,6%
3) Λεκτικά προβλήματα (VE)	
α) Αποδείξεις βάσει ορισμού	
VEde1	25%
VEde2	76%
β) Αποδείξεις βάσει διαδικασίας	
VEpo1	87,4%
VEpo2	43,5%
VEp1m3	52,9%
VEp2m3	49,7%
VEpi1	47,9%
VEpi2	40,7%
4) Ακολουθιακά έργα (SE)	
α) Κατασκευές γεωμ. σχημάτων	
SEc1	22,4%
SEc2	24,8%
SEc3	21,8%
β) Περιγραφή κατασκευών	
SEd1	16,8%
SEd2	13%

Πίνακας 1 με ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου

Έργα του δοκιμίου με χαμηλά ποσοστά επιτυχίας

1) Ακολουθιακά Έργα (= Κατασκευές) (SE)	Ποσοστά Επιτυχίας
SEc1	22,4%
SEc2	24,8%
SEc3	21,8%
SEd1	16,8%
SEd2	13%
2) Λειτουργικά Έργα (OP)	
OPme2 (μερολογική τροποποίηση)	1,6%
OPop1 (οπτική τροποποίηση)	23%
OPpw2 (αλλαγής θέσης)	40,3%
3) Λεκτικά Έργα (= Αποδείξεις) (VE)	
VEde1 (απόδειξη με ορισμό)	25%
VEpi2 (απόδειξη με διαδικασία)	40,7%

Πίνακας 2 με χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου

Έργα «φύσης εικόνας ή αντικειμένου»

Έργα του δοκιμίου	Φύση αντικειμένου	Φύση εικόνας	Ποσοστά σωστών απαντήσεων
VEpo1	✓		**87,4%**
VEpo2	✓		**43,5%**
VEpi1		✓	**47,9%**
VEpi2		✓	**40,7%**

Πίνακας 3 με ποσοστά επιτυχίας στα έργα «φύσης εικόνας ή αντικειμένου»

Από τον παραπάνω πίνακα 3, που αναφέρεται στα έργα που έχουν **φύση εικόνας** (δηλαδή η λεκτική διατύπωση **δε** συμβαδίζει με τη σχηματική παράσταση) ή **φύση αντικειμένου (**δηλαδή υπάρχει ταύτιση λεκτικής διατύπωσης και σχηματικής παράστασης),διαπιστώνουμε σοβαρή απόκλιση μεταξύ των απαντήσεων στα ομοειδή έργα VEpo1 (ποσοστό 87,4%) και VEpi1 (ποσοστό 47,9%) ενώ μικρότερη είναι μεταξύ των έργων VEpo2 (ποσοστό 43,5%) και VEpi2 (ποσοστό 40,7%) που πάλι αφορούσαν απόδειξη βασισμένη σε διαδικασία, η οποία όμως ήταν σαφώς ευκολότερη.

<u>Παρατηρήσεις</u> :

- Ως προς τα έργα Ακολουθιακής σύλληψης (SE), που αφορούν κατασκευές και περιγραφές κατασκευών, υπάρχει η δικαιολογία για την χαμηλή επίδοση των

ερωτωμένων, όπως αναπτύξαμε στις επιμέρους ερωτήσεις, ότι οι κατασκευές είναι εκτός ύλης για τους μαθητές του Λυκείου.

- Αναφορικά με τα Λειτουργικά έργα (ΟΡ) 3 έργα παρουσιάζουν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας:
  - **α.** Το έργο μερολογικής τροποποίησης (OPme2) εμφανίζει πολύ χαμηλό ποσοστό, αφού υπήρχαν 4 τρόποι λύσης που είχαν κοινές αναφορές. Δεν θεωρούμε, όμως, ότι απέτυχαν οι μαθητές μιας και οι 3 τρόποι συγκεντρώνουν αρκετά μεγάλα ποσοστά, ιδίως ο πρώτος με ποσοστό (75%). Μόνο ο τέταρτος τρόπος λύσης έχει μόνο 3,2% ποσοστό επιτυχίας.
  - **β.** Το έργο οπτικής τροποποίησης (OPop1) επιλύεται σωστά μόνο από το 1/4 των μαθητών περίπου (ποσοστό 23%) λόγω τάσης των μαθητών να κοιτάζουν τη **συνολική μορφή** και όχι τις αντίστοιχες πλευρές.
  - **γ.** Το τρίτο έργο αλλαγής θέσης (OPpw2) αντιμετωπίζεται ορθά από το 40,3% των μαθητών, κυρίως λόγω επίδρασης της ύπαρξης αριθμών και ενεργοποίησης του **διδακτικού συμβολαίου** (όπως αναλυτικά περιγράψαμε στην οικεία ερώτηση).
- Τέλος, ως προς τα Λεκτικά έργα (=αποδείξεις) το έργο VEde1 που εδράζεται σε απόδειξη βάσει ορισμού έχει χαμηλό ποσοστό επιτυχίας 25%, αφού απαιτεί 3 πανομοιότυπες αποδείξεις για ύπαρξη παραλληλογράμμων και η πλειοψηφία αναφέρει τη μία ή και τη δεύτερη παρασιωπώντας την τρίτη.

  Ως προς το έργο VEpi2 με το «λάθος σχήμα» (ποσοστό επιτυχίας 40,7%) εμφανώς αποσυντονίζονται οι μαθητές με τα σχήματα που έχουν τη «φύση εικόνας» και συχνά αποτυγχάνουν σ' αυτά.

Ακολούθως προχωρήσαμε, ανά κατηγορία έργου και συγκεντρωτικά, στον υπολογισμό των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων των έργων, προκειμένου να διαφανούν οι μεταξύ τους διαφορές.

Μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων λεκτικής σύλληψης

	VEpo1	VEde1	VEp1m3	VEpo2	VEpi1	VEp2m3	VEpi2	VEde2
Μέση Τιμή	0,87	0,25	0,53	0,44	0,48	0,50	0,41	0,76
Τυπική Απόκλιση	0,332	0,433	0,500	0,496	0,500	0,500	0,492	0,427

Πίνακας 4 με μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων λεκτικής σύλληψης

Μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων ακολουθιακής σύλληψης

	SEc1	SEd1	SEc2	SEc3	SEd2
Μέση Τιμή	0,22	0,17	0,25	0,22	0,13
Τυπική Απόκλιση	0,417	0,374	0,432	0,413	0,336

Πίνακας 5 με μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων ακολουθιακής σύλληψης

Μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων λειτουργικής σύλληψης

	OPop1	OPpw1	OPop2	OPpw2	OPop3	OPpw3	OPme1	OPme2	OPme3
Μέση Τιμή	0,23	0,77	0,83	0,40	0,93	0,96	0,69	0,02	0,76
Τυπική Απόκλιση	0,421	0,418	0,379	0,491	0,259	0,205	0,461	0,125	0,427

Πίνακας 6 με μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων λειτουργικής σύλληψης

Μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων αντιληπτικής σύλληψης

	PEr1	PEr2	PEn1	PEr3
Μέση Τιμή	0,60	0,50	0,54	0,73
Τυπική Απόκλιση	0,491	0,500	0,499	0,444

Πίνακας 7 με μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις έργων αντιληπτικής σύλληψης

Συγκεντρωτικός πίνακας με μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις ανά κατηγορία έργων

VE		SE		OP		PE	
Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση
0,53	0,460	0,19	0,394	0,62	0,354	0,61	0,483

Πίνακας 8 με μέσες τιμές-τυπικές αποκλίσεις ανά κατηγορία έργων

Από τους παραπάνω πίνακες είναι εμφανής η αδυναμία των μαθητών στα έργα ακολουθιακής κατανόησης (SE), για τους λόγους που προαναφέραμε. Τα λεκτικά έργα (οι αποδείξεις VE) ακολουθούν κατ' αύξουσα σειρά, ενώ τα έργα λειτουργικής και αντιληπτικής σύλληψης έχουν παρόμοιες μέσες τιμές.

Παρατήρηση Από τους παραπάνω πίνακες και συγκρίνοντας τα αποτελέσματά μας με αυτά των αντίστοιχων ερευνών στην Κύπρο διαπιστώνουμε ότι, ενώ τα έργα αντιληπτικής σύλληψης στις κυπριακές έρευνες έχουν καλύτερες συνήθως επιδόσεις από τα έργα λειτουργικής σύλληψης, στην παρούσα έρευνα δεν φαίνεται οι μαθητές να ακολουθούν παρόμοιες επιλογές. Ίσως οι συνδέσεις με τις αναπαραστάσεις των βιβλίων, το περιεχόμενο της διδασκαλίας αλλά και οι διδακτικές προσεγγίσεις να αποτελούν πιθανές ερμηνείες των υφιστάμενων διαφορών.

4.5 Ποιοτική Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Η Διαδικασία των Συνεντεύξεων

Μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με 24 μαθητές διαφόρων σχολείων, προκειμένου αφ' ενός μεν να διακριβωθεί η εσωτερική εγκυρότητα του ερωτηματολογίου, με τη σύγκριση των προφορικών συνεντεύξεων με τα γραπτά δοκίμια και αφ' ετέρου να διακριβωθούν σε βάθος τόσο ο τρόπος σκέψης συγκεκριμένων μαθητών όσο και η εξαγωγή προτύπων-μοντέλων σκέψης (patterns). Παράλληλα μας ενδιέφερε μέσω των συνεντεύξεων ο εντοπισμός των διαφορών στις ακολουθούμενες στρατηγικές επίλυσης και ο εντοπισμός εκείνων των στοιχείων της γεωμετρικής γνώσης που ενδεχομένως επιδράσουν στις στρατηγικές των μαθητών. Τέλος στόχος ήταν η αναζήτηση ενδεχόμενων παρεξηγήσεων στον τρόπο σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος και η εύρεση τρόπων υπέρβασης τους.

Πήραμε συνεντεύξεις τόσο από άτομα υψηλής όσο και από άτομα χαμηλής ικανότητας προκειμένου να συγκρίνουμε στρατηγικές προσέγγισης του σχήματος.

Χρησιμοποιήσαμε κατά τη διάρκεια της συνέντευξης ως βάση τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών και μέσω ατομικών ημιδομημένων συνεντεύξεων επεκταθήκαμε σε βάθος. Η όλη διαδικασία ηχογραφήθηκε, έγινε απομαγνητοφώνηση και μεταγραφή σε μορφή κειμένου διαλόγων.

Ο ρόλος του ερευνητή ήταν άλλοτε ουδέτερος, άλλοτε βοηθητικός, άλλοτε καθοδηγητικός και ενίοτε υποστηρικτικός, κατά τις ανάγκες και το γνωστικό επίπεδο των μαθητών.

Το πρωτόκολλο της συνέντευξης, μέσα σε φιλικό και ευχάριστο κλίμα, βασιζόταν τόσο στο αρχικό- διερευνητικό στάδιο όσο κυρίως στο στάδιο επιχειρηματολογίας και ανάπτυξης εικασιών σε μια σειρά ερωτήσεων:

- Πώς κατέληξες σε αυτή την απάντηση;

- Πώς είσαι σίγουρος γι’ αυτό;
- Η διαπίστωση σου αυτή προέρχεται από το σχήμα που έκανες ή είναι κάποια γνώση που την γνώριζες από τη θεωρία;
- Μπορείς να επιβεβαιώσεις τον ισχυρισμό σου ότι ισχύει σε κάθε περίπτωση;
- Τι παρατηρείς; Μπορείς να αναφέρεις κάποιο δικό σου παράδειγμα;
- Μπορείς να μου περιγράψεις τι παρατηρείς στο συγκεκριμένο σχήμα και με ποιο τρόπο εργάστηκες;

Σε περίπτωση που δεν είχαμε σαφείς απαντήσεις ο ερευνητής επανερχόταν με ερωτήσεις του τύπου:

- Μπορείς να περιγράψεις με όσο γίνεται μεγαλύτερη ακρίβεια τις σκέψεις σου που σε οδήγησαν στην επιλογή αυτή;
- Ποιες στρατηγικές ακολούθησες και πώς είσαι σίγουρος ότι εξέτασες όλες τις περιπτώσεις;
- Υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στη σχηματική μορφή κι τη λεκτική διατύπωση;
- Σε ποια μορφή έδωσες μεγαλύτερη βαρύτητα και γιατί; Ακολουθείς δηλαδή κάποια συγκεκριμένη στρατηγική σε παρόμοιες περιπτώσεις;

Απώτερος στόχος μας ήταν η διεύρυνση της συζήτησης που δεν θα περιοριζόταν αποκλειστικά στη γεωμετρική- σχηματική προσέγγιση αλλά θα επεκτεινόταν σε γενικότερες γνώσεις και στάσεις που αφορούν τη σχολική γεωμετρική παιδεία τους.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια **μερικά μόνο αποσπάσματα**, για συγκεκριμένες ερωτήσεις, από μακροσκελείς συνεντεύξεις με τους μαθητές.

1. Ερώτηση 1 Δεύτερου Ερωτηματολογίου (VEpi1)

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ, (ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.

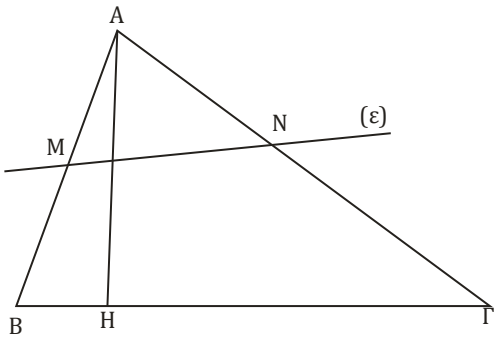
α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα

β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ

γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί

Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.



*** Διευκρίνιση:** Όπου στους διαλόγους αναφέρεται Ε = Ερευνητής ,

Μ1 = Μαθητής 1, Μ2 = Μαθητής 2 κλπ.

Ε: - Το ότι η ΜΝ είναι παράλληλη στη ΒΓ σου θυμίζει κάτι;

(1) Μ1: - Μας λέει κάτι, αλλά δεν μας χρειάζεται αυτό που μας λέει.

Ε: - Πώς είσαι σίγουρος γι'αυτό;

Μ1: - (Σκέφτεται)……

(2) Ε: - Δηλαδή θεωρείς ότι δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση αυτό το δεδομένο; Περιττό στοιχείο στην εκφώνηση; Υπάρχει περίπτωση να έχει μια εκφώνηση κάτι που να μη χρειαστεί στη λύση της άσκησης;

Μ1: - Καταρχάς, βλέπω στο σχήμα ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη με τη ΒΓ, άρα δεν μπορεί να προσδιοριστεί (εννοεί ποιό από τα ΜΗ,ΗΝ είναι μεγαλύτερο)

Ε: - Υπάρχει κάποιο πρόβλημα στην άσκηση; Πως κατέληξες σ' αυτήν την απάντηση;

Μ1: - Εγώ βλέπω στο σχήμα ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη στη ΒΓ, κατά πρώτο και κύριο. Μετά βλέπω ότι λείπουν στοιχεία, άρα δεν μπορούμε να λύσουμε την άσκηση.

Ε: - Και τί κάνουμε τότε;

(3) Μ1: - Απλά σταματάμε.

Άλλη μαθήτρια παρατηρεί:

Ε: - Τί απάντηση επιλέγεις;

Μ2: - Ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί.

Ε: - Πώς κατέληξες σ' αυτό, εξήγησε μου το σκεπτικό σου.

Μ2: - Το σχήμα, απλά είναι λάθος.

Ε: - Ως προς τι είναι λάθος;

Μ2: - Ως προς την εκφώνηση της άσκησης.

Ε: - Και λοιπόν τί θα κάνουμε τώρα;

(4) Μ2: - Δεν μπορούμε να προχωρήσουμε παρακάτω. Σας παρακαλώ πρώτα να διορθώσετε το σχήμα γιατί έχετε κάνει λάθος σχήμα.

Άλλος μαθητής συμπληρώνει:

(5) Μ3: - Βλέπω ότι το σχήμα δεν ταιριάζει με την εκφώνηση της άσκησης.

Ε: - Αυτό σου δημιουργεί πρόβλημα;

(6) Μ3: - Λιγάκι, γιατί με μπερδεύει.

Ε: - Πώς δηλαδή δούλεψες στην άσκηση; Μπορείς να μου περιγράψεις τι παρατηρείς και τι έκανες;

(7) Μ3: - Αυτό που σας είπα, ότι αφού δεν ταιριάζουν τα λόγια με το σχήμα δίνω σημασία μόνο στα λόγια.

Ε: - Δεν έφτιαξες όμως νέο σχήμα, γιατί;

(8) Μ3: - Δεν χρειάζεται γιατί έκανα στο λάθος σχήμα τους υπολογισμούς, δηλαδή ότι οι ΜΗ και ΝΗ ισαπέχουν από την κορυφή Η και από την Α ισαπέχουν οι ΑΜ και ΑΝ, αφού ΑΒ=ΑΓ και ΑΗ μεσοκάθετη της ΒΓ.

(9) Ε: - Τελικά πού δίνεις βαρύτητα στο σχήμα ή στη λεκτική διατύπωση μιας άσκησης;

(10) Μ3: - Δεν δίνω βάση στο σχήμα αλλά στα λόγια.

Μαθητής που δήλωσε ότι δεν μπορεί να προσδιορισθεί η απάντηση προσθέτει:

Μ4: - Φίλε το σχήμα σου είναι λάθος εκτός κι αν εγώ δεν βλέπω καλά!!

Σε άλλη περίπτωση μαθητής που επίσης δηλώνει ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί η απάντηση λέει:

Ε: - Βλέπω έχεις φέρει τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ στο σχήμα γιατί;

Μ5: - Μήπως και μπορέσω να συγκρίνω τα τμήματα.

Ε: - Τελικά πού καταλήγεις;

(11) Μ5: - Δύο πράγματα βλέπω, πρώτο ότι έχει γίνει λάθος στο σχήμα και δεύτερο ότι λείπουν στοιχεία, άρα δεν μπορεί να προσδιοριστεί.

Μαθήτρια της Τεχνολογικής αιτιολογεί:

Ε: - Βλέπω στο γραπτό σου στην ερώτηση 3 έχεις επιλέξει ότι ΜΗ=ΝΗ. Μπορείς να μου περιγράψεις με ακρίβεια τις σκέψεις που σε οδήγησαν στην επιλογή αυτή;

(12) Μ6: - (Με έμφαση) Μα το σχήμα είναι λάθος!!

Ε: - Γιατί;

Μ6: - Αφού δεν ταιριάζουν τα λόγια με την εικόνα.

Ε: - Και πώς σκέφτηκες να προχωρήσεις; Ή μήπως πρέπει να σταματήσουμε.

(13) Μ6: - Όχι, παρατηρώ ότι ενώ το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, στο σχήμα το έχει κάνει σκαληνό και ενώ (ε) παράλληλη στη ΒΓ στο σχήμα δεν είναι παράλληλες. Κάνω ένα σωστό σχήμα και…

Ε: - Γιατί κάνεις νέο σχήμα σωστό;

(14) Μ6: - Για να το βλέπω γιατί μπερδεύομαι αλλιώς.

Ε: - Οπότε;

Μ6: - Οπότε το Η ισαπέχει από τα Μ,Ν αφού το τρίγωνο ΒΜΗ= τρίγωνο ΗΝΓ.

Ε: - Ακολουθείς δηλαδή κάποια συγκεκριμένη στρατηγική σε παρόμοιες περιπτώσεις;

(15) Μ6: - Πάντοτε, γιατί δίνω περισσότερο βαρύτητα στη διατύπωση και όχι στο λάθος σχήμα.

Μαθητής που δήλωσε ότι το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο του ΜΗ λέει:

Ε: - Πώς το αιτιολογείς αυτό;

Μ7: - Κοιτώντας επεξεργάστηκα το σχήμα που μας δίνετε, αν και δεν είναι πολύ σωστό το σχήμα.

Ε: - Δηλαδή;

(16) Μ7: - Απλά δεν ταιριάζουν τα λόγια με το σχήμα.

Ε: - Ποιό απ’ αυτά τα δύο σε επηρεάζει περισσότερο, πού δίνεις μεγαλύτερη βάση;

(17) Μ7: - Δίνω περισσότερη βάση στα λόγια παρά στο σχήμα, αλλά καμιά φορά το σχήμα επηρεάζει τη λύση μου.

Σημείωση: Ο εν λόγω μαθητής αν και δηλώνει ότι δίνει περισσότερη βάση στα λόγια παρά στο σχήμα, στην πράξη επέλεξε ότι ΝΗ>ΜΗ (επιλογή γ), προφανώς επηρεασμένος από τη σχηματική παράσταση.

Μαθήτρια και μαθητής περιφερειακού Λυκείου παρατηρούν:

Ε: - Παιδιά εξηγείστε μου γιατί επιλέξατε ότι τα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα;

(18) Μ8: - Κύριε, δεν πετύχατε το σχήμα αλλά τέλος πάντων….

Ε: - (Χαριτολογώντας) Λες να μου ξέφυγε;

(19) Μ8: - Εγώ πάνω στο λάθος σχήμα, έφτιαξα ένα άλλο σωστό σχήμα με ΑΒ=ΑΓ και ΑΗ μεσοκάθετη.

Ε: - Οπότε τί γίνεται;

Μ8: - Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΒΗ και ΛΓΗ και είναι ίσα άρα και οι αντίστοιχες πλευρές ίσες (εννοεί ότι ΜΗ=ΗΛ, όπου Λ έχει τη θέση του Ν στο σωστό σχήμα).

Ε: - (απευθυνόμενος στον άλλο μαθητή) Βλέπω ότι εσύ έφτιαξες ένα νέο σωστό σχήμα δίπλα στο λάθος σχήμα της άσκησης.

(20) Μ9: - Δεν μου άρεσε το σχήμα σας, εξάλλου είναι λάθος, άρα η ΑΗ που είναι ύψος στο ισοσκελές ΑΒΓ είναι και διάμεσος…. (περιγράφει τη λύση).

Ε: - Πού δώσατε μεγαλύτερη βαρύτητα στο σχήμα ή στην λεκτική διατύπωση;

(21) Μ9: - Εγώ δίνω περισσότερη βαρύτητα στην εκφώνηση και όχι στο σχήμα.

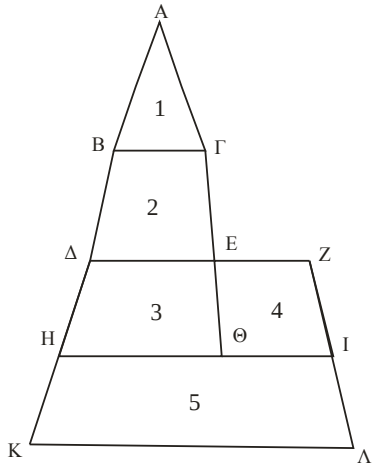
Ε: - Κι εσύ; (Απευθυνόμενος στη μαθήτρια)

(22) Μ8: - Πρώτα κοιτάζω αν τα λόγια είναι ευθυγραμμισμένα (εννοεί ταιριάζουν) με το σχήμα κι αν είναι λύνω την άσκηση με το σωστό σχήμα.

Θα κάνουμε παρατηρήσεις και σχόλια μετά το τέλος της ερώτησης 11 αφού και οι δύο αυτές ερωτήσεις εδράζονται σε κοινό υπόβαθρο, έχουν τη φύση εικόνας, παρουσιάζονται δηλαδή με λάθος σχήμα.

2. Ερώτηση 7 Δεύτερου Ερωτηματολογίου (VEpi2)

Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα.



Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

Μαθητής που διαπιστώνει ότι το σχήμα που δίνουμε είναι λάθος λέει κάπως θυμωμένα:

Μ10 : - Εδώ λέει ότι το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο, καλά αυτό καμία σχέση δεν φαίνεται να έχει…

Ε: - Εννοείς δεν φαίνεται να είναι ορθογώνιο;

Μ10 : - Τα σχήματα ποιός τα έκανε;

Ε: - Εμείς, σε μπέρδεψαν;

(23) Μ10 : - Λίγο μόνο;

Ε: - Τί σε μπέρδεψε δηλαδή πάλι;

Μ10 : - Ότι δεν ταιριάζουν αυτά που λέει.

Ε: - Επομένως τί θα κάνουμε;

Μ10 : - Δεν ξέρω τι κάνουμε τώρα, άλλα αντ' άλλων λέει.

Ε: - Τί θα προτιμούσες τελικά να μη λέει για να σε διευκολύνει;

(24) Μ10 : - Να μην έδινε το σχήμα.

Ε: - Γιατί το σχήμα σου δημιουργεί κάποιο πρόβλημα;

(25) Μ10 : - Ε βέβαια, γιατί το σχήμα δεν στέκει με την εκφώνηση.

Ε: - Εννοείς δεν συμβαδίζει με την εκφώνηση. Εσύ που δίνεις περισσότερη βαρύτητα;

(26) Μ10 : - Κανονικά αφού το σχήμα είναι μέρος της εκφώνησης πρέπει να συμβαδίζουν!

Ε: - Κι αν δεν συμβαδίζουν; Πώς θα ενεργούσες σ' αυτήν την περίπτωση;

Μ10: - Από τη στιγμή που δεν συμβαδίζει το σχήμα με την εκφώνηση τότε κάτι από τα δύο πάει λάθος.

Ε: - Άρα;

(27) Μ10: - Απ' ότι βλέπω με το λάθος σχήμα δεν μπορούμε να αποδείξουμε κάτι απ' αυτά που ζητάει η εκφώνηση, αλλά κι αν η εκφώνηση έχει κάνει λάθος δεν μπορούμε… , μπορεί να μην βγει το σχήμα.

Ε: - Συμπερασματικά λοιπόν τι απαντάμε;

(28) Μ10: - Ότι για να προχωρήσουμε πρέπει να γίνει ή καλύτερο σχήμα ή καλύτερη εκφώνηση, αλλιώς σταματάμε.

Άλλος μαθητής παρατηρώντας το σχήμα αναφέρει:

(29) Μ11: - Αυτά που λέει στην υπόθεση δεν τα δείχνει στο σχήμα.

Ε: - Εσύ ότι δεν δείχνει το σχήμα, δεν το βλέπεις;

Μ11: - Τα ευκόλως εννοούμενα δεν παραλείπονται.

Ε: - Μάλιστα, τα ευκόλως εννοούμενα δεν παραλείπονται όπως λες, όμως σε τι έδωσες περισσότερη βαρύτητα;

(30) Μ11: - Στο σχήμα.

(31) Ε: - Λες στο σχήμα, πάντοτε δίνεις περισσότερη βαρύτητα στο σχήμα παρά στα λόγια;

(32) Μ11: - Όταν υπάρχει σχήμα σίγουρα τα λόγια βοηθάνε για την επεξήγηση του σχήματος, αλλά όταν δεν δίνει σχήμα….

Ε: - Τότε;

(33) Μ11: - Τότε θα το έφτιαχνα μόνος μου.

Ε: - Και θα σε διευκόλυνε αυτή η κατασκευή σου;

Μ11: - Λογικά ναι.

Μαθήτρια συμπληρώνει:

Ε: - Πώς κατέληξες ότι ΑΓ=ΘΙ=ΙΛ;

(34) Μ12: - Όπως βλέπετε επειδή το σχήμα δεν είναι σωστό, φτιάχνω νέο σχήμα που είναι σωστό.

Ε: - Και αγνοείς το δοσμένο σχήμα;

Μ12: - Ε, τι να κάνουμε, αφού δεν το πετύχατε το σχήμα. Σημειώνω μετά τις ίσες πλευρές στο δεύτερο σχήμα που έφτιαξα δίπλα και βάζω καθεμία ίση με α οπότε τελικά ΑΓ= ΘΙ= ΙΛ= α.

(35) Ε: - Αυτή η πρακτική που ακολούθησες φτιάχνοντας το νέο σωστό σχήμα, είναι για σένα σταθερή επιλογή σε παρόμοιες περιπτώσεις;

(36) Μ12: - Πάντοτε δίνω βαρύτητα στα λόγια και μ' αυτά λύνω την άσκηση, με το σωστό σχήμα.

Απορημένος μαθητής προσθέτει:

(37) Μ13: - Πώς το έχετε κάνει έτσι το σχήμα;

Ε: - Τί έχει το σχήμα;

Μ13: - Μα το σχήμα 2 δεν είναι παραλληλόγραμμο και το 3 δεν είναι τετράγωνο όπως λέτε, ούτε και τα 3,4,5 είναι τετράγωνα!!

Ε: - Τί θα κάνεις τώρα για να λύσεις την άσκηση;

(38) Μ13: - Δεν ξέρω, μπερδεύτηκα.

Παρόμοια αντιμετώπιση έχει και η παρακάτω μαθήτρια η οποία απαντά ως εξής στην ερώτηση μας:

Ε: - Πώς βρήκες την απάντηση;

(39) Μ14: - Το σχήμα σας δεν είναι σωστό!

Ε: - Τι σκέφτεσαι να κάνεις γιατί βλέπω ότι δεν απάντησες.

(40) Μ14: - Ναι, σύμφωνα με την εκφώνηση λύνεται, αλλά το πρόβλημα είναι ότι το σχήμα δεν αντιστοιχεί στην εκφώνηση.

Ε: - (Απευθυνόμενος σε μαθητή που παρευρίσκεται) Συμφωνείς με τα λεγόμενα της συμμαθήτριας σου; Πώς προσεγγίζεις τη λύση της άσκησης;

(41) Μ15: - Η κατασκευή του σχήματος είναι λαθεμένη….. (Σιγή)

Ε: - Και τί κάνεις παρακάτω; Εσύ, βλέπω είπες, ότι είναι ίσα και τα 3 τμήματα;

(42) Μ15: - Έχοντας τα σωστά δεδομένα κατασκευάζουμε σωστό σχήμα και όπως έχω σημειώσει πάνω στο σχήμα, καταλήγουμε βήμα-βήμα ότι ΑΓ=ΘΙ=ΙΛ.

Μαθήτρια της θετικής παρατηρεί:

(43) Μ16: - Καταρχάς το σχήμα της άσκησης είναι λάθος.

Ε: - Γιατί είναι λάθος;

(44) Μ16: - Γιατί άλλα είναι τα δεδομένα του προβλήματος και το σχήμα δεν τα τηρεί!!

Ε: - Δεν τα τηρεί, τί εννοείς;

(45) Μ16: - Επειδή δεν ταιριάζουν τα λόγια με το σχήμα, για να τη λύσω την άσκηση έκανα ένα σωστό σχήμα.

Ε: - Και απαντάς;

Μ16: - Και απαντάω.

(46) Ε: - Τί παίζει για σένα μεγαλύτερο ρόλο στην εκφώνηση αυτή, το σχήμα που σου δίνει ή η λεκτική διατύπωση, δηλαδή τα λόγια;

(47) Μ16: - Η λεκτική διατύπωση.

Ε: - Αυτό το τηρείς γενικώς; Δηλαδή όταν κάνεις Γεωμετρία δίνεις περισσότερη βαρύτητα στο σχήμα που σου δίνει ή στα λόγια;

(48) Μ16: - Το πρώτο που παρατηρώ είναι το σχήμα, αλλά μετά κοιτάζω και τα λόγια και αν συμβαδίζουν τότε δίνω περισσότερη βαρύτητα στο σχήμα.

(49) Ε: - Αν όμως δεν συμβαδίζουν τα λόγια, η λεκτική διατύπωση δηλαδή με το σχήμα, τι κάνεις;

(50) Μ16: - Κάνω ένα δικό μου σχήμα για να βασιστώ στο σχήμα μου.

Ε: - Δηλαδή φοβάσαι μήπως τυχόν ο καθηγητής σου, έχει κάνει λάθος στο σχήμα; Έκανε εδώ λάθος;

Μ16: - Ναι

Ε: - Επιτρέπεται να κάνει ο καθηγητής λάθος σ'ένα σχήμα, σε μια εκφώνηση;

(51) Μ16: - Όχι αλλά μπορεί να θέλει να σε μπερδέψει.

Ε: - Δηλαδή δεν του το συγχωρείς να κάνει λάθος;

(52) Μ16: - Πίσω απ' αυτό μπορεί να κρύβονται άλλα……

Ε: - Τί υπονοείς, τί μπορεί να κρύβεται;

(53) Μ16: - Κανονικά τα λόγια με το σχήμα πρέπει να συμβαδίζουν, μπορεί όμως να θέλει να σε μπερδέψει ο καθηγητής, για να δει τι κοιτάζει πρώτα ο μαθητής, το σχήμα ή την εκφώνηση.

Παρατηρήσεις από τις συνεντεύξεις

Η επεξεργασία των συνεντεύξεων των μαθητών στις δύο ερωτήσεις, που εδράζονται σε λεκτικές αποδείξεις μέσω διαδικασίας και παρουσιάζουν τη φύση εικόνας (δηλαδή λάθος σχήμα),έφερε στο προσκήνιο δύο βασικές τάσεις-στρατηγικές προσέγγισης των προβλημάτων, οι οποίες συνάδουν πλήρως με τις απαντήσεις των γραπτών δοκιμίων.

Η πρώτη τάση εκφράζεται από τους μαθητές οι οποίοι φαίνεται να επηρεάζονται από το σχήμα παρά από τη λεκτική διατύπωση (**βλέπε περιπτώσεις (3), (4), (11), (28), (38) των διαλόγων**). Είναι οι λεγόμενοι **«οπτικοί τύποι»**, οι οποίοι λόγω της αντιληπτικής προσκόλλησής τους στο σχήμα, οδηγούνται σε λάθος συμπεράσματα ή συχνά εγκαταλείπουν την προσπάθεια εύρεσης λύσης.

Η δεύτερη τάση εκφράζεται από τους μαθητές οι οποίοι **ΔΕΝ** φαίνεται να επηρεάζονται από το σχήμα (**βλέπε περιπτώσεις (7), (10), (15), (17), (19) (21), (22), (47), (50),των διαλόγων**),αλλά τηρούν επακριβώς τη λεκτική διατύπωση του προβλήματος (είναι οι λεγόμενοι **«λεκτικοί τύποι»).**

Όπως φάνηκε από τις απαντήσεις τους χωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες με τις αντίστοιχες στρατηγικές.

α) Σε εκείνους οι οποίοι φτιάχνουν ένα σωστό σχήμα και προχωρούν βάσει αυτού σε σωστή προσέγγιση της λύσης (βλέπε περιπτώσεις (13), (19), (20), (34), (42) των διαλόγων και

β) Σε εκείνους οι οποίοι δεν φτιάχνουν καθόλου νέο σχήμα, κι όμως νοερά οδηγούνται σε σωστή λύση του προβλήματος (βλέπε (8), (16), (33)).

Η δεύτερη υποκατηγορία είναι σαφώς μικρότερη σε πληθυσμό από την πρώτη υποκατηγορία. Να θυμίσουμε ότι στα γραπτά δοκίμια στην ερώτηση VEpi1 το 15,4% υιοθετεί την άποψη ότι δεν μπορούν να συγκριθούν τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ και εγκαταλείπει κάθε προσπάθεια απόδειξης, ενώ ένας στους τρεις μαθητές (31,9%) αναγνωρίζει το σχήμα ως λανθασμένο και απ' αυτούς το 12,6% προχωρά σε σχεδίαση ενός σωστού σχήματος.

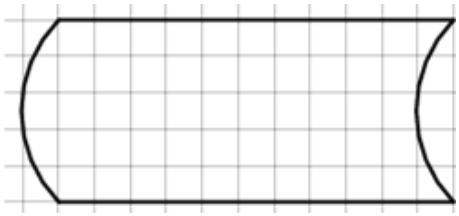
Από τις προφορικές απαντήσεις των μαθητών διαφαίνεται έντονη η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου, αφού θεωρούν ότι πρέπει να συμβαδίζει η λεκτική και η σχηματική διατύπωση (βλέπε (26) των διαλόγων: «αφού το σχήμα είναι μέρος της εκφώνησης πρέπει να συμβαδίζουν», ή (53): «κανονικά συμβαδίζουν μπορεί όμως ο καθηγητής να θέλει να σε μπερδέψει, για να δει τι κοιτάει ο μαθητής πρώτα, το σχήμα ή την εκφώνηση».

Από την τοποθέτηση ωστόσο του μαθητή (βλέπε (1), (2) των διαλόγων για το αν υπάρχουν «περιττά στοιχεία στην εκφώνηση») γεννάται ένα ερώτημα. Μήπως προκύπτει η αναγκαιότητα διδακτικής παρέμβασης, όπου οι διδάσκοντες θα καταστήσουν σαφές στους μαθητές, ότι τίποτε απολύτως στην εκφώνηση μιας άσκησης δεν είναι περιττό;

3. Ερώτηση 6 Πρώτου Ερωτηματολογίου (OPpw1)

Υπογράμμιση τη σωστή πρόταση.

Σχήμα 1



Σχήμα 2

α) Το Σχήμα 1 έχει ίσο εμβαδόν με το Σχήμα 2.

β) Το Σχήμα 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το Σχήμα 2.

γ) Το Σχήμα 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το Σχήμα 2.

Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.

(Εδώ ο Μ17 είναι μαθητής θεωρητικής και ο Μ18 μαθητής θετικής κατεύθυνσης).

Ε: - Κοιτώντας τις απαντήσεις σας παρατηρώ ότι ισχυρίζεστε ότι το σχήμα 1 έχει ίσο εμβαδόν με το σχήμα 2. Μπορείτε να μου περιγράψετε τις σκέψεις σας που σας οδήγησαν στην επιλογή αυτή;

(54) Μ17: - Έχουν ίσο εμβαδόν, γιατί αυτά τα κομματάκια που είναι έξω (δείχνει στο σχήμα με το χέρι του) είναι ίσα με αυτά που είναι μέσα. Εμένα μου φαίνονται ίδια, και επειδή το μέσα ορθογώνιο είναι ίδιο με το άλλο, άρα έχουν ίσα εμβαδά.

Ε: - Όμως εδώ στο δεύτερο σχήμα μόνο οι οριζόντιες γραμμές είναι ευθείες, οι άλλες δύο είναι καμπύλες. Πώς πιστεύεις ότι μπορούμε να συγκρίνουμε αυτά τα δύο σχήματα;

Μ17: - Φέρνω το ύψος, την κάθετη στο 2ο σχήμα από την αρχή κάθε καμπύλης οπότε όλο αυτό το καμπύλο τμήμα είναι ίσο με όλο το άλλο καμπύλο.

Ε: - Πώς το λέμε αυτό το «καμπύλο τμήμα» στη Γεωμετρία;

Μ17: - … (Σιγή)

Ε (Απευθυνόμενος στο 2ο μαθητή Μ18): - Θυμάσαι πώς το λέμε;

Μ18: - … (Σιγή)

Ε: - Κυκλικό τμήμα.

Μ18: - Εντάξει, έχουμε σχηματίσει ένα εμβαδόν και τα δύο κυκλικά τμήματα είναι ίσα.

Ε: - Πώς είσαι σίγουρος γι' αυτό;

(55) Μ18: - Είναι όλα 11 (εννοεί 11 στήλες με τετραγωνάκια), είναι ίδια.

Ε: - Κάνεις δηλαδή κατά κάποιο τρόπο μια μεταφορά μετρώντας;

Παρεμβαίνει ο Μ17.

(56) Μ17: - Εδώ έχουμε το πρώτο ορθογώνιο οπότε το εμβαδόν είναι β · υ=55, στο δεύτερο σχήμα που οι δυο πλευρές του δεν είναι ευθείες έχουμε 2 κομμάτια τόξα.

Ε: - Αυτό μας δημιουργεί στη διαδικασία εύρεσης κάποιο πρόβλημα;

Μ17: - Στο ότι δεν μπορούμε βάσει τύπου να βρούμε το εμβαδόν του.

Ε: - Τότε πού θα στηριχθείς για να τεκμηριώσεις τον ισχυρισμό σου;

(57) Μ17: - Εμπειρικά. Στηριζόμενοι στο ότι το εμβαδόν αυτό εδώ που περικλείει το κυκλικό τμήμα είναι ίσο με το εμβαδόν του δεύτερου κυκλικού τμήματος που λείπει. Δηλαδή ό,τι λείπει από δεξιά στο σχήμα, το συμπληρώνει απ' αριστερά.

Ε (Απευθυνόμενος στο Μ18): - Πώς κρίνεις την άποψη του συμμαθητή σου, μπορείς να τη σχολιάσεις;

(58) Μ18: - Θα μπορούσαμε να το σκεφτούμε πολύ πιο πρακτικά, χωρίς μετρήσεις, αν κόψουμε ουσιαστικά το αριστερό κομμάτι του δεύτερου σχήματος και το κολλήσουμε στην άλλη μεριά, βλέπουμε ότι σχηματίζεται ένα νέο σχήμα που έχει ίσο εμβαδόν με το πρώτο.

Στην ίδια ερώτηση αδύνατος μαθητής Μ19 της Τεχνολογικής κατεύθυνσης και μαθήτρια Μ20 της Θετικής παρατηρούν:

(59) Μ19: - Εγώ πιστεύω ότι τα δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, αφού παίρνοντας τον τύπο Ε = β · υ η βάση είναι ίδια και το ύψος είναι ίδιο.

Ε: - Η βάση είναι ίδια; Ποια βάση;

Μ19 (Βάζει γράμματα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ στα 2 σχήματα αντίστοιχα): - Το ΔΓ είναι ίσο με το Δ΄Γ΄.

Ε: - Ισχύει το ίδιο και για τα «ύψη»;

Μ19: - Και το ύψος ΑΔ είναι ίσο με το Α΄Δ΄. Άρα τα εμβαδά είναι ίσα.

Ε: - Τί σχήμα είναι το σχήμα 1;

Μ19: - Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ε: - Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο; Κοίταξέ το λίγο καλύτερα πάλι το σχήμα.

Μ20: - Είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μ19: - Α, Ναι…

Ε: - Και το σχήμα 2;

Μ19: - Τί σχήμα είναι;… Είναι λίγο μπερδεμένο σχήμα. (Σκέφτεται).

Ε: - Είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; Σε άκουσα προηγουμένως και είπες ότι Ε= β · υ.

Μ19: - Όχι, δεν είναι ακριβώς ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ε: - Τότε πώς χρησιμοποιείς αυτόν τον τύπο;

Μ19: - Έτσι θα το λύσουμε, αυτό το σχήμα μοιάζει πιο πολύ, λίγο με σφαίρα, δεν ξέρω ακριβώς με τι μοιάζει. Έχει ένα τόξο το Α΄Δ΄, όπου αυτό το τόξο είναι ίσο με αυτό που λείπει από το άλλο Β΄Γ΄. Οπότε αν το τόξο Α΄Δ΄ πάμε και το προσθέσουμε στο Β΄Γ΄ μας κάνει το παραλληλόγραμμο Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Ε: - Τελικά πώς αιτιολογείς ότι ολόκληρο το πρώτο σχήμα έχει ίσο εμβαδό με το δεύτερο σχήμα;

Μ19: - Αφού είναι τα δύο τμήματα ίσα. (εννοεί τα 2 κυκλικά τμήματα ισεμβαδικά)

Ε: - Το γεγονός ότι όπως ισχυρίζεσαι τα κυκλικά τμήματα είναι ίσα, σε πείθει ότι έχουν ίσα εμβαδά; Φθάνει μόνο τα κυκλικά τμήματα να είναι ίσα;

(60) Μ19: - Το κυκλικό τμήμα αυτό που είναι προς τα έξω έρχεται και ισορροπεί με το κυκλικό τμήμα που είναι προς τα μέσα οπότε το σχήμα που φτιάχνεται αν κολλήσουν το αριστερό στο δεξί τμήμα θα έχει ίδιο εμβαδό με το σχήμα 1.

Μ19: - Σειρά σου τώρα… (απευθύνεται προς τη μαθήτρια Μ20) …….

Ε: - Πώς προσεγγίζεις εσύ το πρόβλημα που έχουμε;

(61) Μ20: - Εγώ μέτρησα στο πρώτο σχήμα τα κουτάκια και βρήκα ότι το μήκος είναι 11 κουτάκια και το ύψος 5 κουτάκια. Άρα 55 κουτάκια συνολικά.

Ε: - Και στο δεύτερο σχήμα;

Μ20: - Στο δεύτερο σχήμα το μήκος είναι πάλι 11 κουτάκια, ενώ το πλάτος 5 κουτάκια, οπότε 55 κουτάκια πάλι.

Ε: - Πώς το εξηγείς, ότι το πλάτος είναι τόσο που λες;

(62) Μ20: - Γιατί αν το γραμμοσκιασμένο κομμάτι (δείχνει το αριστερό κυκλικό τμήμα) το κολλήσουμε στο άλλο γραμμοσκιασμένο (δείχνει το αντίστοιχο δεξιά) θα παρατηρήσουμε ότι φτιάχνονται 5 ολόκληρα κουτάκια, αφού παρουσιάζουν τα δυο γραμμοσκιασμένα κυκλικά τμήματα κατά κάποιο τρόπο συμμετρία. Άρα και τα δύο σχήματα θα είναι ισεμβαδικά.

Παρατηρήσεις από τις συνεντεύξεις

Συγκρίνοντας τα γραπτά δοκίμια και τις προφορικές απαντήσεις των μαθητών (όσες παραθέτουμε αλλά και τις υπόλοιπες) στην εν λόγω ερώτηση διαπιστώνουμε αφ' ενός εσωτερική εγκυρότητα και αφ' ετέρου ότι φαίνεται πως επικρατούν κυρίως δύο τύποι προσέγγισης της λύσης.

Ο πρώτος που κυριαρχεί είναι της **Δυναμικής προσέγγισης**, (**βλέπε περιπτώσεις (54) (57), (58), (60), (62),των διαλόγων**), όπου οι μαθητές προχωρούν στη λύση, μέσω μετακίνησης τμημάτων του σχήματος, οδηγούμενοι τελικά σε ριζική αναδιοργάνωση του.

Ο δεύτερος τύπος ακολουθεί την **Στατική Οπτική προσέγγιση**, (**βλέπε περιπτώσεις (56), (59), (61),των διαλόγων**), όπου οι μαθητές οδηγούνται στη λύση «μετρώντας» ένα-ένα τα κουτάκια του σχήματος.

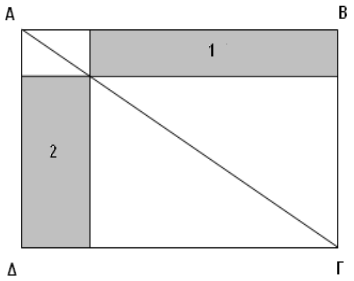
Διαφάνηκαν και ελάχιστες περιπτώσεις όπου επιχειρούσαν συνδυασμό Στατικής Οπτικής και Δυναμικής προσέγγισης, (**βλέπε περίπτωση (61-62),των διαλόγων**), όπου προβαίνουν σε αναδιοργάνωση του σχήματος και ταυτόχρονα προχωρούν σε εύρεση του εμβαδού μετρώντας τα κουτάκια.

Παρατήρηση :

Από τις προσεγγίσεις-στρατηγικές που οι μαθητές αναλύουν την εν λόγω ερώτηση φαίνεται η επίδραση του **Διδακτικού Συμβολαίου**, γιατί δεν αρκούνται στο να απαντήσουν **οπτικά**, αισθάνονται την ανάγκη προς επίρρωση της άποψής τους, να κάνουν και **πράξεις** ταυτόχρονα.

4. Ερώτηση 9 Δεύτερου Ερωτηματολογίου (OPme3)

Στην πιο κάτω εικόνα, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Παρατήρησε τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Βάλε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και αιτιολόγησε την απάντησή σου.



Α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.

Β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2.

Γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.

Το συγκεκριμένο έργο απαιτεί, για να δοθεί απάντηση, να προβεί ο μαθητής σε μερολογική τροποποίηση του σχήματος και στη συνέχεια, σε σύγκριση των υποσχημάτων που θα δημιουργηθούν.

Μαθητής αναφέρει:

Μ21: - Εγώ κύκλωσα ότι είναι ίσα.

Ε: - Πώς έφτασες σε αυτή την επιλογή;

(63) Μ21: - Είναι ίσα, γιατί φαίνονται ίσα.

Ε: - Πώς αιτιολογείς αυτό, εξήγησέ μου.

Μ21: - (προβληματισμένος) Δεν φαίνονται ίσα, μου κάνει ότι είναι ίσα. Βλέπω και τη διάμεσο ΑΓ…

Ε: - Διάμεσος είναι η ΑΓ;

Μ21: - Διαγώνιος.

Ε: - Άρα;

Μ21: - Η διαγώνιος το χωρίζει το μεγάλο (εννοεί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) σε δύο ίσα μέρη.

Ε: - Έχουν και ίσα εμβαδά αυτά τα δύο μέρη;

Μ21: - Εννοείται πως έχουν και ίδιο εμβαδόν!

Ε: - Πώς είσαι σίγουρος γι' αυτό;

(64) Μ21: - Αφού η ΑΕ είναι ίση με την ΗΖ και η ΑΗ είναι ίση με την ΕΖ, τότε σίγουρα έχουν το ίδιο εμβαδό και άρα και τα μικρά τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδό, οπότε, αν προσθέσουμε τα ίσα εμβαδά, θα βγάλουμε ότι όλα αυτά (δείχνει τα τρίγωνα) θα είναι ίσα με όλα αυτά, άρα αν τα αφαιρέσουμε από το μεγάλο τρίγωνο, τότε το εμβαδόν του (1) θα είναι ίσο με το εμβαδόν του (2).

Μαθήτρια προσθέτει:

Ε: - Είδα επέλεξες το (γ) γιατί;

(65) Μ22: - Εγώ πιστεύω ότι είναι σωστό το (γ) γιατί παρ' όλο που το ορθογώνιο (1) έχει μεγαλύτερο μήκος, το ορθογώνιο (2) καταλαμβάνει περισσότερο χώρο.

Ε: - Τί εννοείς καταλαμβάνει περισσότερο χώρο;

(66) Μ22: - Είναι μεγαλύτερο και πιο συμπαγές.

Μαθητής επαρχιακού λυκείου δηλώνει με ιδιότυπο τρόπο στην ερώτησή μας:

Ε: - Γιατί επέλεξες την επιλογή (γ);

(67) Μ23: - Το πίστεψα το (γ), γιατί το (2) έχει περισσότερο όγκο ενώ το (1) έχει μεγαλύτερο μήκος.

Ε: - Πώς συνδυάζεις τον όγκο ενός σχήματος με το εμβαδόν του; Εξήγησε μου.

(68) Μ23: - Ότι πιάνει περισσότερο χώρο το (2) από το (1) αν και το (1) είναι πιο μακρύ.

Αρνητικός εμφανίζεται ο παρακάτω μαθητής στην όποια από τις τρεις επιλογές δηλώνοντας κατηγορηματικά:

Ε: - Εξήγησε μου γιατί δεν επέλεξες καμία από τις τρείς επιλογές;

(69) Μ24: - Επειδή δεν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών.

Ε: - Κρίνεις ότι ήταν απαραίτητο να ξέραμε τα μήκη των πλευρών των ορθογωνίων;

(70) Μ24: - Ναι, γιατί τώρα δεν υπάρχει κάποια σχέση που να τα συνδέει.

Ε: - Τί κάνεις τότε;

Μ24: - Αυτό που είπα, ότι δεν μπορούμε να βρούμε κάποια σχέση μεταξύ του (1) και του (2).

Μαθήτρια που επέλεξε ότι τα (1) και (2) είναι ισεμβαδικά επιχειρηματολογεί:

Μ25: - Έχουν ίσα εμβαδά.

Ε: - Πώς το τεκμηριώνεις;

(71) Μ25: - Διότι το ορθογώνιο (1) έχει μεγαλύτερο μήκος από το (2) αλλά μικρότερο πλάτος από το (2). Το ορθογώνιο (2) έχει αντίθετα μικρότερο μήκος από το (1) αλλά μεγαλύτερο πλάτος από το (1).

Ε: - Κι αυτό τί αποδεικνύει για τα εμβαδά;

(72) Μ25: - Ότι είναι ίσα λόγω αναλογίας.

Αναλυτική και συγκροτημένη μαθηματικά λύση δίνει μαθήτρια η οποία λέει:

Μ6: - Όπως έγραψα και στην κόλλα μου βάζω γράμματα ΗΖΘΔ στο ορθογώνιο (2) και ΕΖΙΒ στο (1), οπότε η διαγώνιος χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισεμβαδικά τρίγωνα, δηλαδή (ΑΕΖ)=(ΑΗΖ). Όμοια τα (ΖΘΓ)=(ΖΙΓ) και αφαιρούμε από τα ΑΔΓ και ΑΒΓ.
Ε: - Έσπασες δηλαδή το σχήμα σε επιμέρους υποσχήματα;

(73) Μ6: - Ναι γιατί δεν έχει άλλο τρόπο να συγκρίνουμε τα ορθογώνια που ζητάει.

Ε: - Μπορείς να μου περιγράψεις το σκεπτικό σου, που σε οδήγησε στη λύση της άσκησης;

(74) Μ6: - Σκέφτηκα ότι αντί να συγκρίνω τα μαύρα ορθογώνια (εννοεί τα γραμμοσκιασμένα) είναι το ίδιο να συγκρίνω τα άσπρα ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο οπότε βγαίνουν ίσα εμβαδά.

Στο ίδιο πλαίσιο κινούμενη, καλή μαθήτρια της θετικής, εργάζεται με ίδιο τρόπο και αποδεικνύει ότι είναι ισεμβαδικά τα ορθογώνια (1) και(2).

(75) Μ16: - Επειδή ΑΒ=ΔΓ και ΑΔ=ΒΓ σύμφωνα με την εκφώνηση, η ΑΓ είναι διαγώνιος στο ΑΒΓΔ άρα το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.

Ε: - Τα ίσα τρίγωνα έχουν και ίσα εμβαδά;

(76) Μ16: - Ναι έχουν.

Ε: - Το αντίστροφο ισχύει;

Μ16: - Όχι γιατί μπορεί να έχουν ίσα εμβαδά και να μην είναι ίσα τα τρίγωνα.

Ε: - Εδώ ποιό ισχύει απ' αυτά;

Μ16: - Τα τρίγωνα είναι ίσα ανά δύο, άρα έχουν και ίσα εμβαδά. Δηλαδή (ΑΚΟ)=(ΑΡΟ) και (ΛΟΓ)=(ΟΖΓ). (Εδώ έφερε η μαθήτρια ΚΛ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΒ και ονόμασε Ο το σημείο τομής των ΚΛ και ΡΖ).

Παρατηρήσεις από ερώτηση

Αν και η εν λόγω ερώτηση, που εδράζεται στη μερολογική τροποποίηση του σχήματος, απαντήθηκε σωστά σε ποσοστό 76% από τους ερωτώμενους, επιβεβαιώθηκε και από την ποιοτική έρευνα μέσω των συνεντεύξεων, ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν σοβαρό πρόβλημα στην αιτιολόγησή των απαντήσεών τους. Όπως φαίνεται από τις συνεντεύξεις, οι μαθητές έχουν την τάση να απαντούν με δύο κυρίως στρατηγικές- προσεγγίσεις:

α) Η Δυναμική προσέγγιση (βλέπε περιπτώσεις (64), (73), (75) των διαλόγων), όπου οι μαθητές συγκρίνουν στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ τα επιμέρους «λευκά τρίγωνα»,

επιχειρώντας πράγματι «μερολογική κατάτμηση» σε υποσχήματα και σύγκριση αυτών. Η συνειδητή αυτή επιλογή τους («δεν έχει άλλο τρόπο να συγκρίνουμε τα ορθογώνια» (73) και «σκέφτηκα ότι αντί να συγκρίνω τα μαύρα ορθογώνια, είναι το ίδιο να συγκρίνω τα άσπρα» (74), καθώς και η δήλωση ότι τα «ίσα τρίγωνα είναι ισεμβαδικά, ενώ το αντίστροφο όχι» (76)), υποδηλώνει εφαρμογή στην πράξη της λειτουργικής διαδικασίας σύλληψης του σχήματος.

β) Η Αναλογική προσέγγιση (βλέπε περιπτώσεις (65), (66), (67), (71) των διαλόγων), όπου «πρωτοστατούν» οι χωρικές έννοιες «περισσότερος χώρος», «πιο μακρύ», «μεγαλύτερο μήκος», «μικρότερο πλάτος», «περισσότερο εμβαδό και όγκος». Η στρατηγική αυτή άλλοτε οδηγεί τους μαθητές σε σωστή και άλλοτε σε λανθασμένη λύση. Απόψεις του τύπου: «το πίστεψα το (γ), γιατί το (1) έχει μεγαλύτερο μήκος» (67), «το ορθογώνιο (1) έχει μεγαλύτερο μήκος από το (2), αλλά μικρότερο πλάτος, ενώ το (2) έχει αντίθετα μικρότερο μήκος, αλλά μεγαλύτερο πλάτος από το (1)» (71) δεν υποδηλώνουν σταθερή και τεκμηριωμένη λειτουργική κατανόηση, τουναντίον μας εμβάλλουν σε υποψίες ότι κυρίως επιδρά η αντιληπτική σε βάρος της λειτουργικής κατανόησης.

Η υπόνοιά μας αυτή εδράζεται κυρίως στην προσπάθεια των μαθητών να «δουν αναλογικές σχέσεις» (βλέπε (72) και (68) των διαλόγων), μεταξύ των πλευρών των δύο ορθογωνίων (1) και (2). Ενισχύεται δε από τη γενικευμένη διαπίστωσή μας, μέσω των δοκιμίων, ότι **φαίνεται να επικεντρώνονται μόνο στα γραμμοσκιασμένα ορθογώνια (1) και (2) και να «χάνουν» την σύνολη σχηματική παράσταση.** Τέλος, συναντήσαμε περιπτώσεις (δεν επισυνάπτονται στις συνεντεύξεις), όπου οι μαθητές αποφαίνονται ότι είναι ίσα τα (1) και (2) γιατί όπως αναφέρουν: **α)** « μέτρησα το μήκος του (1) και το βρήκα 6 εκατοστά και το πλάτος 0,9 εκατοστά, άρα το εμβαδόν είναι Ε=5,4 τ. εκ » ή **β)** «επειδή η διαγώνιος του (1) είναι μεγαλύτερη της διαγωνίου του (2)». Οι αιτιολογήσεις αυτές φαίνεται να ακυρώνουν στην πράξη την «μερολογική αναδιοργάνωση», να επαναφέρουν την κυριαρχία της αντιληπτικής σε βάρος της λειτουργικής σύλληψης και να επιβεβαιώνουν κατά τον πιο έντονο τρόπο την **«προσκόλληση»** των μαθητών μας στην αντιληπτική κατανόηση του σχήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Συμπεράσματα-Συζήτηση

Η σκοποθεσία της παρούσης έρευνας ήταν η διερεύνηση της δομής της κατανόησης γεωμετρικού σχήματος δύο διαστάσεων, με βάση τις τέσσερις διαστάσεις που προτάθηκαν από τον Duval (1995), δηλαδή της αντιληπτικής κατανόησης, λειτουργικής κατανόησης, λεκτικής και ακολουθιακής κατανόησης. Από τη στατιστική επεξεργασία των δοκιμίων των 501 μαθητών, που αναφέρθηκε στο οικείο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, προκύπτει η αναγκαιότητα, η διδακτική διαδικασία να λειτουργεί εμφαντικά, προς όλες τις διαστάσεις της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος. Παρατηρείται μέσω των εν λόγω απαντήσεων, ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία στα έργα λειτουργικής σύλληψης (μερολογικής τροποποίησης, οπτικής τροποποίησης και αλλαγής θέσης) όπως και στα έργα ακολουθιακής προσέγγισης (κυρίως λόγω του γεγονότος ότι οι κατασκευές είναι πλέον εκτός ύλης).

Από τα διαγράμματα (ομοιότητας και συνεπαγωγικό) και την παραγοντική ανάλυση που ακολούθησε καταγράφεται η συνέπεια της συμπεριφοράς των μαθητών στη διαπραγμάτευση έργων ακολουθιακής σύλληψης (SE), λεκτικής (VE) και αντιληπτικής σύλληψης (PE) λόγω των υφιστάμενων σχέσεων μεταξύ τους. Αδιαμφισβήτητη παραμένει η δημιουργία δεσμών ομοιότητας μεταξύ έργων ακολουθιακής (SE) σύλληψης και λεκτικής σύλληψης (VE), που εξηγείται λόγω μη επάρκειας μόνο της αντίληψης των μαθητών, αλλά και της αναγκαιότητας ταυτόχρονης παρουσίας μαθηματικών περιορισμών.

Ως προς τα Λειτουργικά έργα (OP) υφίσταται μικρότερη συνέπεια και υπάρχει μια ετεροβαρής κατανομή τους (σχέση 1:3) στις δύο κλάσεις ομοιότητος του διαγράμματος. Αναλύοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα εννέα έργα

Λειτουργικής κατανόησης που περιελήφθησαν στην έρευνα, προκύπτει ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές βλέπουν κυρίως **«εικονικά»** τα σχήματα και ρέπουν προς μια **«αντιληπτικού τύπου»** προσέγγιση των γεωμετρικών σχημάτων. Σαφέστατα τα έργα μερολογικής τροποποίησης ανακηρύσσονται «πρωτοπόρα» στην εν γένει δυσκολία των μαθητών να προβούν στην αναδιοργάνωση ενός σχήματος με κύριο «υπαίτιο» τη δράση της αντιληπτικής κατανόησης που συχνά-πυκνά τα επισκιάζει.

Καταλήγουμε συνεπώς ότι αφ' ενός μεν ο τύπος σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος επηρεάζει την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και αφ' ετέρου υπάρχει συνέπεια στον τρόπο επίλυσης έργων αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής κατανόησης από τους μαθητές της Β' Λυκείου της Ελλάδας. Επιβεβαιώνονται με αυτόν τον τρόπο οι δύο πρώτες υποθέσεις της έρευνας.

Από την άλλη πλευρά, η ενδελεχής μελέτη των διαγραμμάτων καθώς και των στατιστικών πινάκων καταδεικνύει την τάση των μαθητών του δείγματος να αντιμετωπίζουν με διαφορετικό, συχνά τρόπο, τα έργα αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Στους εν λόγω πίνακες αποτυπώνονται οι διαφορές στην επίδοση των μαθητών της Β' Λυκείου στα συγκεκριμένα έργα. Τα ακολουθιακά έργα (SE), δηλαδή οι κατασκευές, για τους λόγους που αναλύσαμε παραπάνω, αποτελούν «σκοπέλους» στην πορεία της σχηματικής σύλληψης, ενώ τα λειτουργικά έργα (OP) στον αντίποδα, επέχουν θέση «αχαρτογράφητων υφάλων» στο γεωμετρικό πλου.

Επιλογικά θα λέγαμε ότι τα διαφορετικά ποσοστά επιτυχίας στους επισυναπτόμενους πίνακες και στα 4 είδη κατανόησης του σχήματος δηλώνουν μετ' επιτάσεως ότι υπάρχουν διαφορές στην επίδοση των μαθητών στα έργα αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης. Επιβεβαιώνεται, λοιπόν, και η τρίτη υπόθεση της έρευνάς μας.

Στο πλαίσιο της διερεύνησης των γνωστικών εμποδίων που εμφανίζονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και τη σύνδεση της με τη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων, εστιάσαμε την προσοχή μας μέσω συγκεκριμένων ερωτήσεων (VEpi1, VEpi2, VEpo1, VEpo2) σε μορφές που έχουν τη φύση εικόνας ή τη φύση αντικειμένου.

Σ’ αυτές που έχουν τη φύση εικόνας, η λεκτική διατύπωση δε συμβαδίζει με τη σχηματική παράσταση, ενώ σ’ όσες έχουν τη φύση αντικειμένου, υπάρχει ταύτιση λεκτικής διατύπωσης και σχηματικής παράστασης.

Από τον αντίστοιχο πίνακα των αποτελεσμάτων διαπιστώνουμε σοβαρή απόκλιση μεταξύ των απαντήσεων στα ομοειδή έργα VEpo1 (87,4%) και VEpi1 (47,9%) ενώ μικρότερη μεταξύ των έργων VEpo2 (43,5%) και VEpi2 (40,7%) που αφορούσαν ευκολότερη απόδειξη βάσει διαδικασίας.

Όπως δε φάνηκε και από τις προφορικές συνεντεύξεις, το γνωστικό στυλ των μαθητών επηρεάζει την προσέγγιση τους και συνακόλουθα προκύπτουν δύο καθαρές ομάδες. Αυτοί που επηρεάζονται από το σχήμα και όχι από τη λεκτική διατύπωση, με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν και αυτοί που δεν εστιάζουν στο σχήμα, αλλά τηρούν επακριβώς τη λεκτική διατύπωση και συνήθως οδηγούνται σε σωστές λύσεις.

Ταυτοποιήθηκε επομένως η **«συμμετοχή»** της φύσης του σχήματος στην ορθή ή λανθασμένη προσέγγιση γεωμετρικών προβλημάτων από τους μαθητές του δείγματος μας. Προσεγγίζεται μ’ αυτόν τον τρόπο και η τέταρτη υπόθεση της έρευνας μας.

5.2 Διδακτικές προτάσεις

Στην εργασία μας αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τον τρόπο κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές της Β΄ Λυκείου 10 σχολείων της Ελλάδος. Τα ευρήματά μας θεωρούμε ότι δίνουν ενδείξεις ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των 4 ειδών σύλληψης γεωμετρικού σχήματος και της κατανόησής του από τους μαθητές του δείγματος.

Σαφέστατα το δείγμα μας (501 άτομα) δεν μας επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι έχουμε δείξει γενικευμένη αιτιώδη σχέση μεταξύ τρόπου γεωμετρικής σύλληψης και προσεγγίσεων των μαθητών. Ωστόσο ο συνδυασμός των δικών μας ευρημάτων με τα ευρήματα ερευνών της Κύπρου σε μεγαλύτερα δείγματα παρέχουν ενδείξεις για προσφορότερες διδακτικές προσεγγίσεις. Προφανώς και δεν μπορούμε να κάνουμε **γενικεύσεις** από τα αποτελέσματα της έρευνας μας. Θέλαμε ωστόσο να διερευνήσουμε τις τάσεις μεταξύ των ερωτηθέντων μαθητών και να φέρουμε στο προσκήνιο, ιδίως μέσω των ποιοτικών αναλύσεων, υποδείγματα- μοντέλα σκέψης και να τα κατηγοριοποιήσουμε με απώτερο σκοπό υλοποίηση κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων.

Ας μας επιτραπούν λοιπόν κάποιες προτάσεις:

1) Από τον τρόπο που οι μαθητές προσέγγισαν τις ερωτήσεις Α9 και Β4 που αναφέρονται στα είδη αποδείξεων ίσως προκύπτει η αναγκαιότητα αναθεώρησης του τρόπου προσέγγισης της έννοιας της απόδειξης. Φαίνεται πως οι μαθητές (μέσα από τα συγκεκριμένα δοκίμια), δεν έχουν σταθεροποιήσει τόσο την έννοια, όσο και τη σημασία της απόδειξης και απαιτείται εμβριθέστερη προσέγγιση του ζητήματος. Η παράλληλη αναφορά στην αξία των αντιπαραδειγμάτων, τη γενίκευση και την καθολικότητα της απόδειξης, τη χρήση μετρητικών μεθόδων σ' αυτήν, σε συνδυασμό με διδακτικές δράσεις που προκύπτουν από βιβλιογραφικές αναφορές, μπορεί να λειτουργήσουν επί τα βελτίω.

Σε πρακτικότερο επίπεδο καθίσταται επιτακτική η ανάγκη συζήτησης και όχι ξερής απομνημόνευσης των αποδείξεων των σχολικών εγχειριδίων.

Ίσως η μετ' επιτάσεως διατύπωση μαθητού στην οικεία ερώτηση του δοκιμίου, ότι « Η απόδειξη είναι η μόνη αυθεντία», επιβάλλει τη λήψη διδακτικών δράσεων.

2) Πληθώρα ερωτήσεων του δείγματος έφερε στο φως, μέσω των απαντήσεων των μαθητών, την προσκόλλησή τους στο να προσέχουν το περίγραμμα συνολικά και να αδυνατούν να προσεγγίσουν χωριστά κάθε τμήμα του σχήματος.

Κατάλληλες παρεμβατικές διδακτικές προτάσεις των διδασκόντων, ίσως βοηθήσουν στην πάταξη της «κυριαρχίας» της αντιληπτικής προσέγγισης και στην επαύξηση της δράσης των λειτουργικών προσεγγίσεων μέσω μερολογικών κατατμήσεων ή οπτικών μεταλλαγών. Θετικό πιστεύουμε ότι θα είναι να αναπτύξουν οι διδάσκοντες κατάλληλες τεχνικές, όπου οι μαθητές να μπορούν να αντιμετωπίζουν ένα σχήμα ως ενιαία οντότητα ανεξάρτητα από τα υποσχήματα που το αποτελούν.

3) Αναγκαία παρέμβαση των διδασκόντων, θεωρούμε πως θα πρέπει να είναι αυτή που θα σχετίζεται με έργα που αναφέρονται στη «φύση» του σχήματος.

Σκόπιμη προσέγγιση προβλημάτων, που η λεκτική διατύπωσή τους δεν εναρμονίζεται με την σχηματική τους παράσταση, μέσω ελέγχου συμφωνίας σχήματος και λεκτικής εκφοράς, είναι επιβεβλημένη στο σχολικό πεδίο.

Προτροπή των διδασκόντων για κατασκευή ενός νέου σωστού ευμεγέθους και ευδιάκριτου σχήματος, σε ασκήσεις που έχουν τη φύση εικόνας, ίσως βοηθήσει στη βελτίωση της προσέγγισης των μαθητών σε ορθές λύσεις. Ρήξεις του διδακτικού συμβολαίου σε περιπτώσεις που δίνονται αριθμητικά δεδομένα σε παρόμοια προβλήματα, κρίνονται

επιβεβλημένες, αφού είναι γνωστό ότι η ρήξη του διδακτικού συμβολαίου οδηγεί σε επιτυχείς διαδικασίες μάθησης και όχι η στείρα τήρησή του.

4) Αναγκαίες είναι οι διδακτικές προσεγγίσεις των διδασκόντων που θα αναφέρονται στις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου ενός γεωμετρικού σχήματος. Επικρατεί σύγχυση των εν λόγω εννοιών στο μυαλό των μαθητών. Ταυτόσημες παρανοήσεις ξεπροβάλλουν και ως προς τις έννοιες του όγκου ενός γεωμετρικού στερεού και του εμβαδού της επιφάνειας του. Προβλήματα με τρισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα, ακόμη και υπό μορφή «παιχνιδιού», μπορούν να οδηγήσουν σε ευχάριστες και ωφέλιμες συνάμα προσεγγίσεις.

5) Η αδυναμία σωστής αιτιολόγησης της ισότητας δύο τριγώνων που καταγράφηκε στην ερώτηση Β10, μας οδηγεί στην ακόλουθη παρατήρηση: επειδή το θέμα της ισότητας τριγώνων είναι κεφαλαιώδες για τη Γεωμετρία και η ενασχόληση των μαθητών αρχίζει από τις πρώτες ήδη τάξεις του Γυμνασίου, θεωρούμε πως αξίζει τον κόπο οι διδάσκοντες να αφιερώσουν χρόνο για εμπέδωση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων και κυρίως για εκφορά από πλευράς μαθητών **ορθού** και **συγκροτημένου** αποδεικτικού λόγου που αφορά την ισότητα.

6) Τα παρόντα αποτελέσματα θεωρούμε ότι μας επιτρέπουν «συναδελφικά» να προτείνουμε την ανάγκη ενασχόλησης των διδασκόντων, μέσω κατάλληλων προβλημάτων, με δράσεις που εστιάζουν **και στις 4 μορφές** κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων, προκειμένου να αποκτήσουν οι μαθητές μας ολιστική προσέγγιση της γεωμετρικής σύλληψης ενός σχήματος.

Αδήριτα προβάλλει η αναγκαιότητα μελλοντικών ερευνών επί του θέματος και η μεταανάλυση των αποτελεσμάτων τους.

Αξιοποιώντας τα ευρήματα της εργασίας μας, περαιτέρω έρευνες σε μεγαλύτερα δείγματα μαθητών μπορούν να προχωρήσουν σε μεγαλύτερο γνωστικό βάθος.

Ως προέκταση της παρούσας μελέτης, θα μπορούσε να διερευνηθεί η δομή της ικανότητας χειρισμού τρισδιάστατων σχημάτων ή αναπτυγμάτων στερεών.

Παρεμβατικά προγράμματα που τυχόν εφαρμοσθούν, τόσο σε μαθητές Λυκείου όσο και σε μαθητές Δημοτικού-Γυμνασίου, θα μπορούσαν να καταδείξουν ασφαλέστερα τον τρόπο σύλληψης και χειρισμού του γεωμετρικού σχήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

Βιβλιογραφικές αναφορές

Arnheim, R.: 1969, *Visual Thinking*, University of California Press: Berkeley and Los Angeles.

Bartolini, Bussi., M. G. & Boero, P. (1998). Teaching and Learning Geometry in contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* An ICMI Study, 71-77. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Battista, M. T. (2007). The development of Geometrical and Spatial Thinking. In NCTM Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, vol. 2, pp.843-908.

Bishop, A. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematical concepts and processes, 173-203, Academic Press.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*. Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Brousseau, G.(1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. Dordrecht: The Netherlands, Kluwer.

Brown, D.L. & Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematics reasoning. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 137-145), Tsukyba, Japan.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning. In D. A.*

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 192-212.

Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children.* Arlington, V.A.: National Science Foundation (ERIC Document Reproduction Service No ED436232).

Cohen, J. (1988). Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Deliyianni E., Elia I., Gagatsis A., Monoyiou A., & Panaoura A. (2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. In V. Durand-Guerrier, S. Soury- Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705). Lyon, France.

Deliyianni, E., Michael, P., Monoyiou, A., Gagatsis, A. & Elia, I. **(**2011). A composite model of students' geometrical figure understanding. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2* (pp. 257 – 264). Turkey: PME.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Duval, R.: 1998, Geometry from a Cognitive Point of View, In C. Mammana & V. Villani (eds*), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2004). *Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings*. Notes from Lecture.

Elia, I., Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2004). Young Children's Understanding of Geometric Shapes: The role of Geometric Models. In M. JOHNSEN HOINES & A. B. FUGLESTAD (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2 349-357). Bergen, Norway: Bergen University College.*

Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: Vol.3 (pp.18). Thessaloniki, Greece: PME.

Feys, D. J., & Liebov, A. K. (1992). Geometry and Spatial Sense. In R. J. Jensen (Ed.), Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics, pp. 195 - 222. N.Y.: Macmillan Publishing Company.

Fischbein, E.: 1993, The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193- 1211.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., & Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. Στο Α. Γαγάτσης, *Ικανότητα Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων Συναρτήσεων και Γεωμετρίας: η Μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας.

Gagatsis, A. (2011). How can we evaluate the apprehension of a geometrical figure? In S. Sbaragli (Ed.), *La mathematica e la sua didattica, quarant' anni di impegno (Mathematics and its didactics, forty years of commitment)* (pp. 97-100). Bologna: Pitagora Editrice Bologna.

Γαγάτσης, Α. (2008). Η ικανότητα χειρισμού και κατανόησης των γεωμετρικών σχημάτων. Πρακτικά Η Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής και ανθρωπιστικών Επιστημών (σσ. 330-344). Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών και Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ .

Γαγάτσης, Α & Ηλία, Ι. (2003). *Οι αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ.* Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Χατζημηνά, Μ., & Καλογήρου, Π. (2009). Μελέτη της λειτουργικής κατανόησης γεωμετρικού σχήματος σε μαθητές Α' και Β' Λυκείου. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, Π. Δαμιανού, & Ε. Αυγερινός (Εκδ.), *Πρακτικά 11^{ου} Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 389-402). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Gal, H. (2005). Identifying problematic learning situations in geometry instruction, and handling them within the framework of teacher training. Thesis for a Doctor of Philosophy degree. Jerusalem: Hebrew University of Jerusalem (Hebrew).

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception Educ Stud Math 74:163–183.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D.: 1999, 'Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advance Mathematics', *Educational Studies in Mathematics 38*, pp.11-133. *Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420-464). New York: Macmillan.*

Gutiérrez, A. (1996): Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceedings of the 20th PME Conference* 1, pp. 3-19.

Hebb, D. O.: 1968, Concerning Imagery, *Psychological Review*, 75(6), 466-477.

Hejny, M. :(2002): Creating mathematical structure. In: J. Novotna (ed.) *Proceedings of CERME 2(*pp.14-24).Prague, Czech Republic.

Hejny, M.: (2003), 'Understanding and structure'. *Proceedings of the European Research in mathematics Education III.*

Hershkowitz, R., Parzysz, B. and von Dormolen, J. (1996), Space and Shape, in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, C. Laborde (eds.) *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy, [On line] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Jaime, A., Gutiérrez, A. (1994): *A model of test design to assess the Van Hiele levels, Proceedings of the 18th PME Conference* 3, pp. 41-48.

Κολέζα Ευγενία (2003) Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Krutetskii, V. A.: 1976, *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, J. Kilpatrick & I. Wirszup (eds), Chicago: University of Chicago Press.

Kuhn T. S. (1970) The Structure of Scientific Revolutions. Chicago: Chicago University Press.

Kurina, F. (2003). Geometry - The resource of opportunities. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3.* Retrieved on 15 January, 2007 from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/ draft/ proceedings_draft.

Laborde, C., (2003) New technologies as a means of observing students' conceptions and making them develop: the specific case of dynamic geometry.

Lawrie, C. (1999): Exploring Van Hiele levels of understanding using a Rasch analysis, Proceedings of the 23th PME Conference 3, pp. 209-216.

Mammana, C. and Villani, V. (eds.) (1998) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, An ICMI Study*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti, A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education(* pp. 97-116). Berlin: Springer.

Mariotti, M.A, Bartolini Bussi M, Boero P, Ferri F, Garuti R (1997) Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. In: Erkki Pehkonen (ed) Proceedings of the 21st PME conference, vol 1. University of Helsinki, Helsinki, Finland, pp 180–195

Mariotti, M. A., Laborde, C., & Falcade, R. (2003). Function and graph in DGS environment, Proceedings of the 27 PME conference, Hawaii, III- 112-120.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*,17(2), 183-195.

Michael, S., Gagatsis, A., Elia, I., Deliyianni, E., & Monoyiou, A. (2009). Operative Apprehension of Geometrical Figures of Primary and Secondary School Students'. In A. Gagatsis & S. Grozdev (Eds.), *Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp.67-78). Plovdiv, Bulgaria: University of Plovdiv, Cyprus Mathematical Society.

Michael, P., Elia, I., Gagatsis, A. & Kalogirou, P. (2010). Primary school students' operative apprehension of geometrical figures. In J.C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras (Eds.), *Proceedings of the fifth international conference S.I.A* (pp. 47-62) . Palermo, Italy: A.S.I.

Michael, P., Gagatsis, A, Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and High school students' operative apprehension of geometrical figures. Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 11, 45 –55.

Michael, P., Gagatsis, A., Lamprianou, I., Deliyianni, E. & Monoyiou, A. (2011). Construct validity of a developmental assesment on geometrical figure understanding: a Rasch model analysis. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2* (pp. 233 – 240). Turkey: PME.

Michael, P. (2012). The Operative Apprehension of a Geometrical Figure through Students' Transition to a Next Educational Level. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 11 (1-2), 147 – 165.

Μιχαήλ, Π., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., Δεληγιάννη, Ε., Μονογυιού, Α., & Καλογήρου, Π. (2009). Η λειτουργική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος από μαθητές Στ' Δημοτικού. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Φιλίππου, Π. Δαμιανού, & Ε. Αυγερινός (Εκδ.), *Πρακτικά 11ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 19-32). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Μιχαήλ, Π., Γαγάτσης, Α., Κερκίδης, Β., & Σολομού-Κύζα, Μ. (2012). Εννοιολογική Σύλληψη Γεωμετρικού Σχήματος από Μαθητές Λυκείου. *Πρακτικά 14ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 95-106). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va: NCTM.

Piaget, J.: 1969, *The mechanisms of perception*, New York, Basic Books.

Pinto, M. & Tall, D.: 1999, Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning, *Proceedings of PME 23.*

Presmeg, N. C.: 1992, Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.

Σωτηριάδης, Α., Θεοδότου, Χ., Αυγερινός, Ε., Γαγάτσης, Α. & Μιχαήλ, Π. (2012). Η Αναγνώριση του Γεωμετρικού Σχήματος στο Λύκειο. *Πρακτικά 14ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης* (σσ. 43-55). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Tall, D. O. (1999). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Proceedings of the 23rd Conference of PME* (pp.111-118). Haifa, Israel.

Van de Walle, J. A. (2001). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο:* Μια εξελικτική διδασκαλία, Αθήνα: Τυπωθήτω- Γιώργος Δαρδανός.

Van Hiele, P.: 1986*, Structure and Insight*, Orlando: Academic Press.

Van Sommers, P.: 1984, *Drawing and Cognition*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Zazkis, R., Dubinsky, E. and Dautermann, J. (1996) Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4*. Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7.1 Το Ερωτηματολόγιο*

ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α1

ΣΧΟΛΕΙΟ:……..

ΤΑΞΗ: …… ΤΜΗΜΑ: …… ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ……..

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ: ……

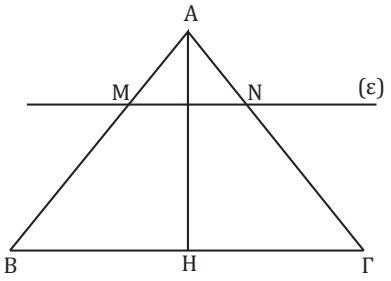
Ερώτηση 1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ,(ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.

α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα

β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ

γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί



Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

…….

……

……

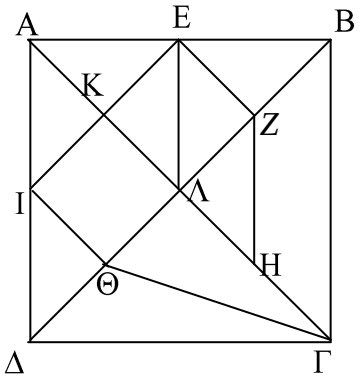
……

……

……

*Το ερευνητικό αυτό εργαλείο προέρχεται από το ερευνητικό πρόγραμμα που χρηματοδοτήθηκε από το Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας με τίτλο «Ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και γεωμετρίας - Η μετάβαση από το γυμνάσιο στο λύκειο» και κωδικό ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ/ΠΑΙΔΙ/0308 (ΒΕ)/03.

Ερώτηση 2. Συμπλήρωσε τις παρακάτω φράσεις. Χρησιμοποίησε τις λέξεις που νομίζεις ότι ταιριάζουν καλύτερα.



Το σχήμα ΚΕΖΛ είναι ……

Το σχήμα ΙΕΖΘ είναι ……

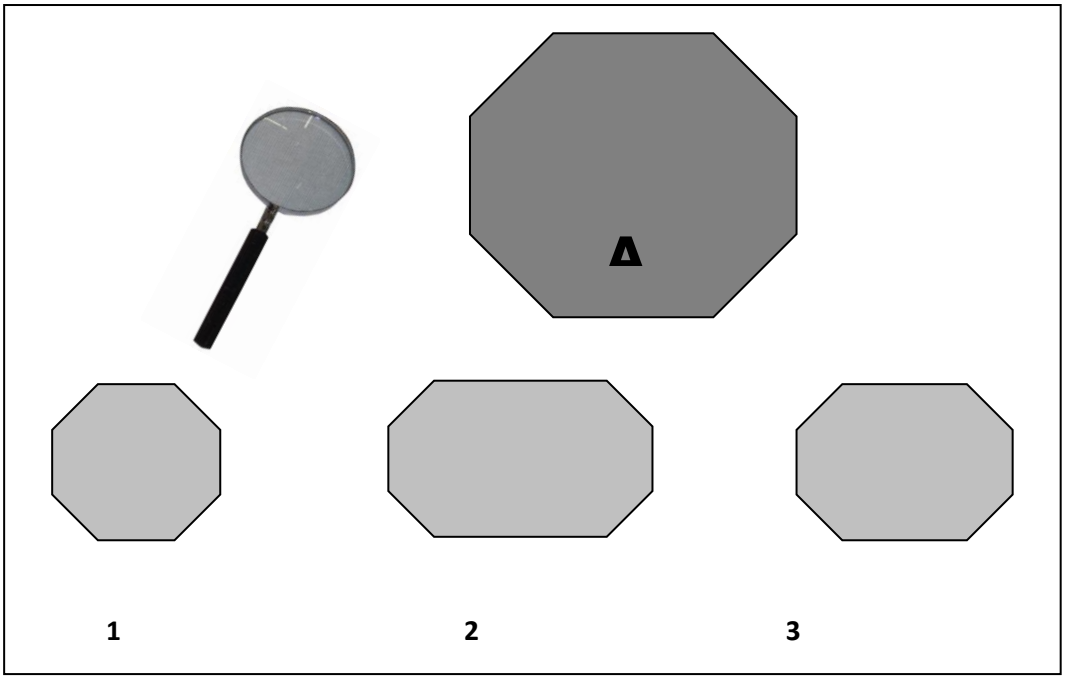
Το σχήμα ΕΖΗΛ είναι ……

Το σχήμα ΙΚΓΘ είναι ……..

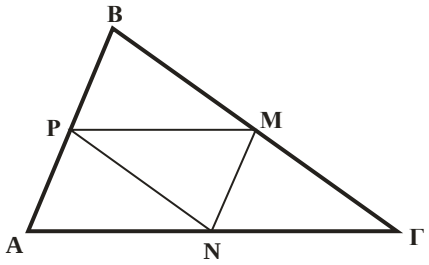
Το σχήμα ΛΓΘ είναι ……..

Το σχήμα ΒΕΛ είναι ……..

Ερώτηση 3. Ο Γιώργος έφτιαξε ένα οκτάγωνο στο τετράδιο του. Το σχήμα Δ είναι το οκτάγωνο όπως φαίνεται με μεγεθυντικό φακό. Βάλε σε κύκλο τον αριθμό της εικόνας που δείχνει το οκτάγωνο, έτσι όπως το έφτιαξε ο Γιώργος στο τετράδιό του.



Ερώτηση 4. Τα σημεία Μ, Ν και Ρ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξεις ότι τα τετράπλευρα ΑΡΜΝ, ΒΜΝΡ, και ΓΝΡΜ είναι παραλληλόγραμμα.



……

……

……

……

……

……

……

……

Ερώτηση 5. Σχεδίασε τόξο ΑΒ με κέντρο Γ, ίσο με το τόξο ΜΝ με κέντρο το Ο.

Εξήγησε την κατασκευή σου

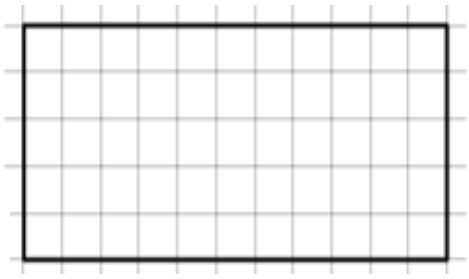
……

……

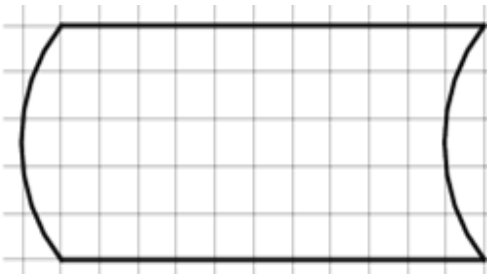
……

……

Ερώτηση 6. Υπογράμμισε τη σωστή πρόταση.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

α) Το Σχήμα 1 έχει ίσο εμβαδόν με το Σχήμα 2.

β) Το Σχήμα 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το Σχήμα 2.

γ) Το Σχήμα 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το Σχήμα 2.

Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

…….

……

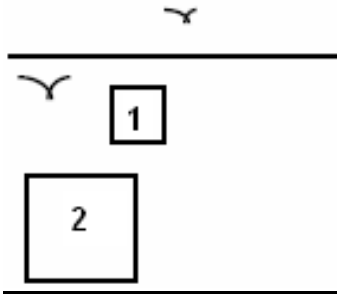
……

……

……

……

Ερώτηση 7. Ο Πάρης βλέπει το κιβώτιο 1 και το κιβώτιο 2 στον ορίζοντα. Λέει ότι το κιβώτιο 1 έχει <u>το ίδιο μέγεθος</u> με το κιβώτιο 2. Μπορεί η άποψη του να είναι σωστή; Εξήγησε γιατί.



……

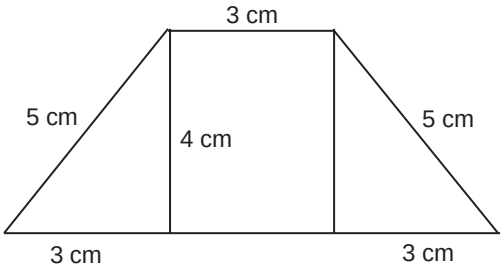
……

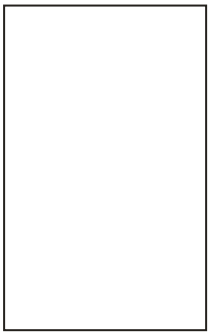
……

……

……

Ερώτηση 8. Το τραπέζιο και το ορθογώνιο είναι ισοδύναμα. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ορθογωνίου.





Επεξήγησε τον τρόπο που εργάστηκες.

…

…

…

…

…

Ερώτηση 9. Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες.

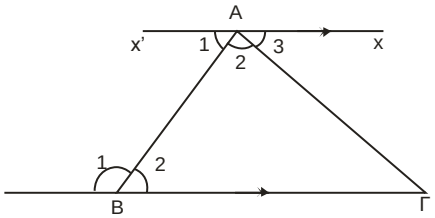
Μαθητής Α: *Μέτρησα και τις τρεις γωνιές και είναι 50°, 53° και 77°. 50°+53°+77°=180°. Άρα, το άθροισμα (των γωνιών ενός τριγώνου) είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα κάθε γωνία και τις έβαλα μαζί. Σχημάτιζαν μια ευθεία γραμμή. Άρα, το άθροισμα τους είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……..**

Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



$xx' \square B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180° \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 180°$

Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι**

……

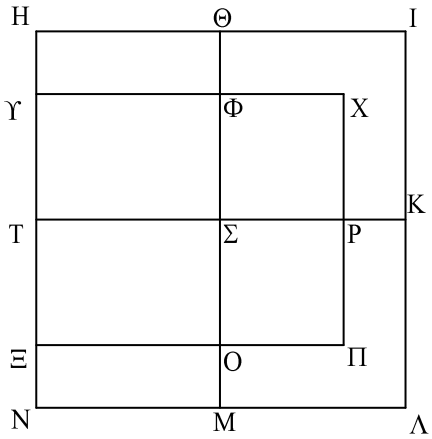
……

……

……

……

Ερώτηση 10. Μελέτησε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα.



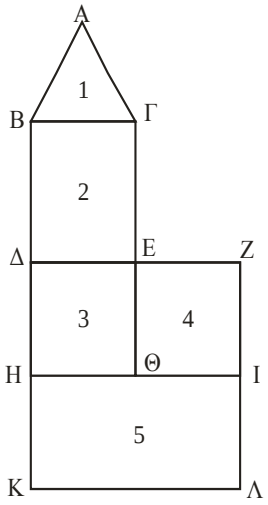
Α. Πόσα τετράγωνα βλέπεις στο σχήμα; .....

Β. Ονόμασέ τα:

……

……

Ερώτηση 11. Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα.



Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

…….

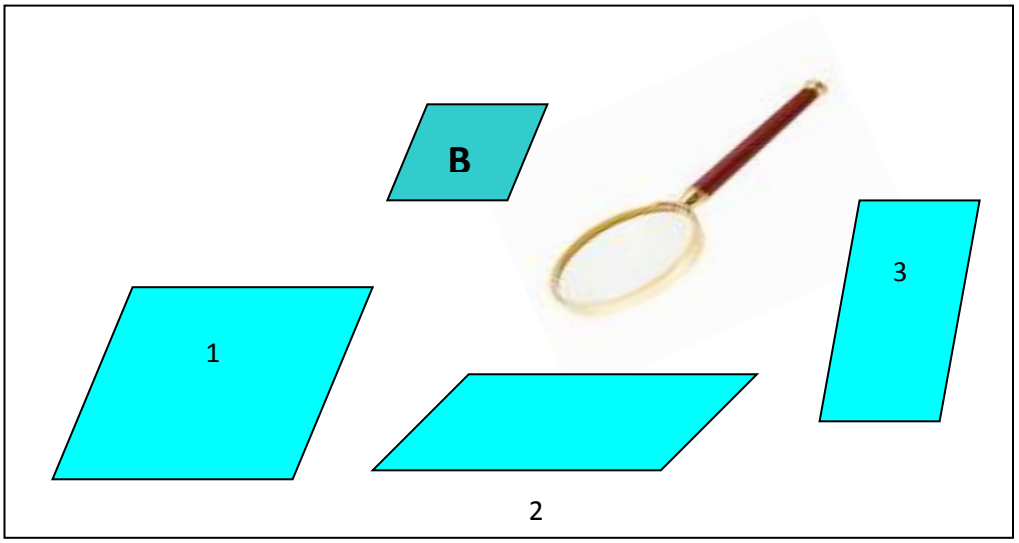
……

……

……

……

Ερώτηση 12. Η Άννα έφτιαξε το παραλληλόγραμμο Β στο τετράδιό της. Βάλε σε κύκλο τον αριθμό της εικόνας που δείχνει το παραλληλόγραμμο, έτσι όπως θα φαίνεται με μεγεθυντικό φακό.



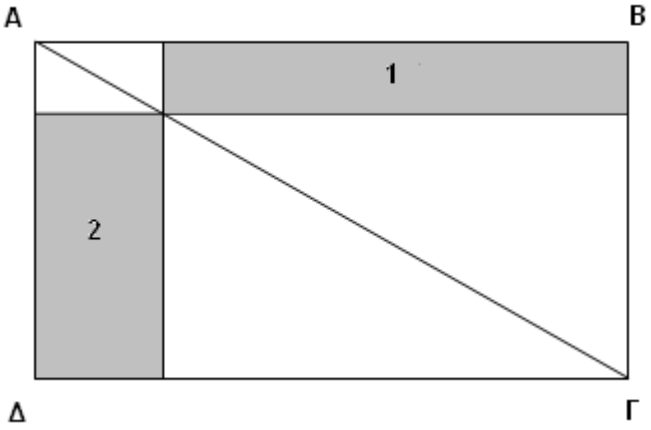
ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α2

ΣΧΟΛΕΙΟ:……..…

ΤΑΞΗ: …… ΤΜΗΜΑ: ……..…… ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ……...

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ: ……..……

Ερώτηση 1. Στην πιο κάτω εικόνα, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Παρατήρησε τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Βάλε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και αιτιολόγησε την απάντησή σου



α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.

β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2.

γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.

………

……

……

……

……

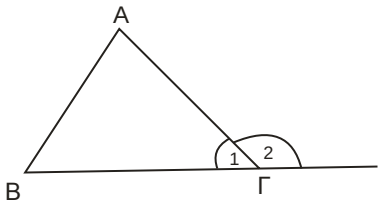
……

……

……

Ερώτηση 2. Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί η εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των απέναντι των γωνιών του τριγώνου.

Μαθητής Α: *Μέτρησα τις γωνίες Α και Β και είναι 54°, 80° αντίστοιχα .Η εξωτερική γωνία της Γ είναι 134°. Έτσι έχουμε ότι 54°+80°=134°. Άρα, η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.*

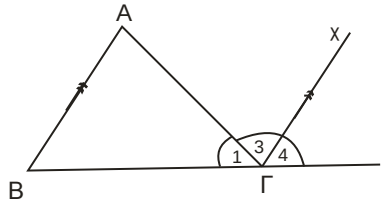


- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Όχι .....**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα τις γωνίες Α και Β και τις έβαλα μαζί στην εξωτερική γωνία στην κορυφή Γ. Συμπλήρωσαν ακριβώς την εξωτερική γωνία. Άρα, η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι .....**

Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



Φέρνουμε την $\Gamma\chi // AB \Rightarrow A=\Gamma_3$

και $\hat{B}=\hat{\Gamma}_4 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{\Gamma}_3+\hat{\Gamma}_4 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi.}$

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι**

....

.....

.....

.....

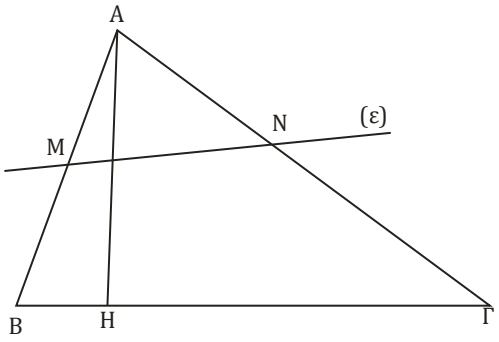
.....

.....

.....

.....

Ερώτηση 3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ,(ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.



α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα

β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ

γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί

Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

…….

……

……

……

……

……

……

……

Ερώτηση 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Το σημείο Ε είναι ένα σημείο που ανήκει πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Ο κύκλος με διάμετρο ΑΕ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ.

Δίνεται ότι: **ΑΒ = 6, ΑΓ = 6,5 , ΑΕ =** $\frac{4}{5}$ **ΑΓ**

Να κατασκευάσετε το σχήμα με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.

Ερώτηση 5. Βάλε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

Α

Β

α. Το σχήμα Α έχει μεγαλύτερη περίμετρο από το σχήμα Β.

β. Το σχήμα Α έχει ίση περίμετρο με το σχήμα Β.

γ. Το σχήμα Α έχει μικρότερη περίμετρο από το σχήμα Β.

………

……

……

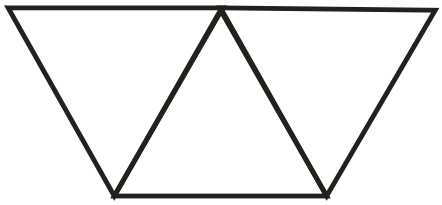
……

……

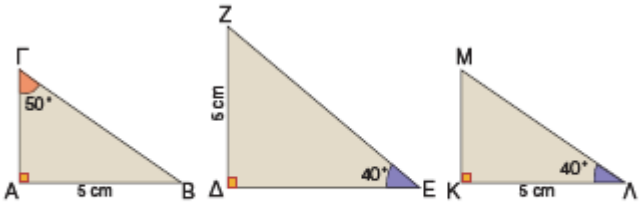
……

……

Ερώτηση 6. Σχεδίασε τα σχήματα τα οποία νομίζεις ότι συνδυάστηκαν για να προκύψει το πιο κάτω σχήμα. Μπορείς να παρουσιάσεις περισσότερες από μια λύση.



Ερώτηση 7. Βρες το ζεύγος των ίσων τριγώνων και αιτιολόγησε την απάντησή σου.



…….

……

……

……

……

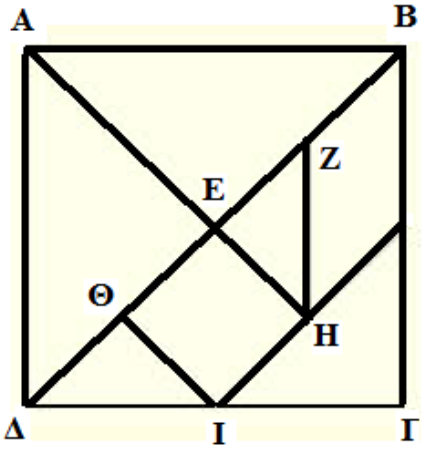
……

……

……

……

Ερώτηση 8. Συμπλήρωσε τις παρακάτω φράσεις. Χρησιμοποίησε τις λέξεις που νομίζεις ότι ταιριάζουν καλύτερα.



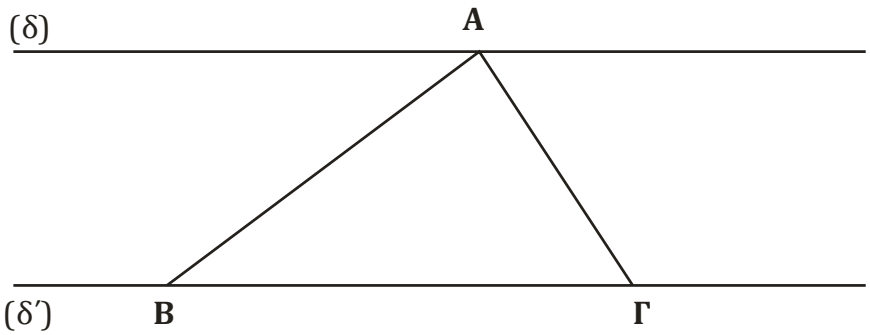
Το σχήμα ΘΖΗΙ είναι ……

Το σχήμα ΕΗΙΘ είναι……

Το σχήμα ΔΒΓ είναι……

Ερώτηση 9. Οι ευθείες (δ) και (δ΄) είναι παράλληλες

Α) Να κατασκευάσετε δύο σημεία Μ και Ν έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΜΓΝ να είναι ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.



Β) Να αιτιολογήστε την κατασκευή σας.

…….

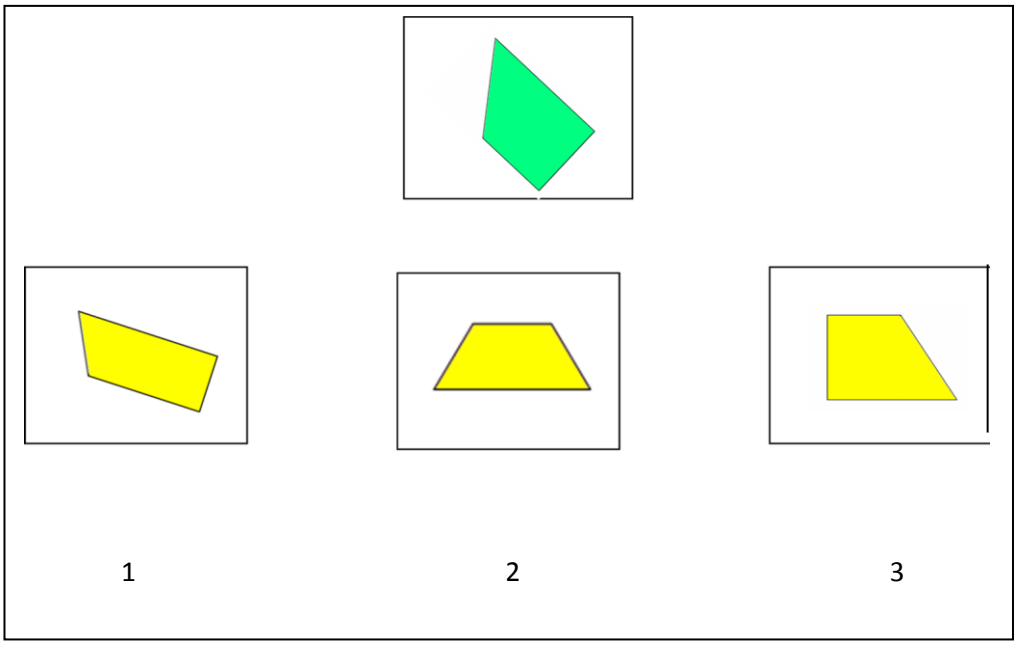
……

……

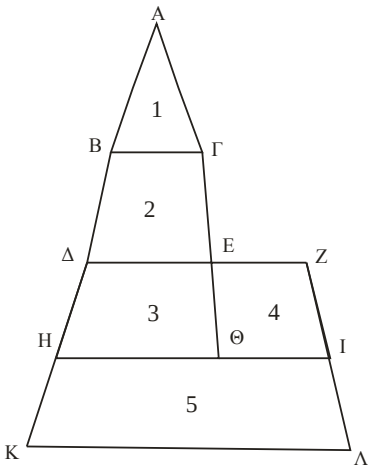
……

……

Ερώτηση 10. Η Μαρία πρέπει να ταιριάξει τις κάρτες που δείχνουν ίδια σχήματα. Βάλε σε κύκλο τον αριθμό της κάρτας που δείχνει ακριβώς το ίδιο σχήμα με την κάρτα της Μαρίας.



Ερώτηση 11. Στο πιο κάτω σχήμα το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα.



Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση:

…….

……

……

……

……

……

……

……