ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

- ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
- ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ & ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
- ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

- ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
- ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«**Μετρητική Γεωμετρία: Μια διαδρομή στο έργο του Ήρωνα με σύγχρονες διδακτικές προεκτάσεις**»

Ήρων ο Αλεξανδρεύς (O' Connor 1999)

ΕΛΕΝΗ Σ. ΜΟΥΛΑΓΙΑΝΝΗ
Α.Μ. Δ 201034

Επιβλέπων Καθηγητής: Διονύσιος Λάππας

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……2014 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

α/α	**Ονοματεπώνυμο**		**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1.	Διονύσιος Λάππας	(Επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	
2.	Ευάγγελος Ράπτης		Καθηγητής	
3.	Παναγιώτης Σπύρου		Αν. Καθηγητής	

Στον σύζυγό μου Δημήτρη και στην κόρη μου Αλεξάνδρα,

αφιερώνεται

Ευχαριστίες

Στον Καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα, ο οποίος πρότεινε το θέμα της παρούσας διπλωματικής και ιδιαίτερα για το ενδιαφέρον και την καθοδήγησή του, καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησής της..

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική μελετούμε ζητήματα μέτρησης από καθαρά πρακτική άποψη. Αυτή η προσέγγιση δρούσε παράλληλα με τα αφηρημένα Μαθηματικά από την αρχαιότητα. Σημαντικός εκπρόσωπος αυτής της τάσης ήταν ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, μαθηματικός, μηχανικός και εφευρέτης. Στα έργα του «Μετρικά» και «Γεωμετρικά» με τα οποία θα ασχοληθούμε, περιέχονται πλήθος προβλημάτων με ενδιαφέρουσες διδακτικές προεκτάσεις, ακόμα και με τα σημερινά δεδομένα.

ABSTRACT

In this dissertation we are studying issues on metrics from a pure practical perspective. This approach was being done in parallel with abstract Mathematics of ancient times. An important representative of this attitude was Hero of Alexandria, a mathematician, engineer and inventor. In his works “Metrics” and “Geometrics”, in which we will be mainly focusing, someone can find many problems with many interesting educational extensions, even in the present years.

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1
1.1 ΠΡΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (έως το 600 π.Χ.) 1
1.2 ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (600 π.Χ. – 300 π.Χ.) 4
1.3 ΕΛΛΗΝΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (300 π.Χ. – 500 μ.Χ.) 7
1.4 ΜΕΣΑΙΩΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (500 μ.Χ. – 17ος Αιώνας μ.Χ.) . 9
1.5 ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (17ος Αιώνας μ.Χ. – σήμερα) 11
2.ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ 15
2.1 «ΗΡΩΝΕΙΟ ΖΗΤΗΜΑ» – ΠΟΤΕ ΕΖΗΣΕ Ο ΗΡΩΝ 15
2.2 ΠΟΙΟΣ ΗΤΑΝ Ο ΗΡΩΝ – ΧΑΡΑΚΤΗΡΑΣ ΤΩΝ ΕΡΓΩΝ ΤΟΥ 18
3. ΣΥΓΓΡΑΦΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ 21
3.1 «ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ» 25
3.2 «ΜΕΤΡΙΚΑ» 40
3.2.1 «ΜΕΤΡΙΚΑ» ΒΙΒΛΙΟ Ι 43
ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ 43
3.2.2 «ΜΕΤΡΙΚΑ» ΒΙΒΛΙΟ ΙΙ 65
ΜΕΤΡΗΣΗ ΟΓΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ 65
3.2.3 «ΜΕΤΡΙΚΑ» ΒΙΒΛΙΟ ΙΙΙ 83
ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ 83
4. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ 101
4.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ. 101
4.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΕΝΟΣ ΑΡΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ 105
4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ 107
4.4 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΗΡΩΝΑ 111
4.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ NEWTON – RAPHSON 125
4.5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ: 125
4.5.2 ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ NEWTON-RAPHSON ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 126
4.5.3 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 127
4.5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ 128
5. Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ 129

5.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ – ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΤΡΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ……129
5.2 Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ «ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΑΠΟ ΤΟΝ ΗΡΩΝΑ 134
5.2.1 ΤΟ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ» 134
5.2.2 Η «ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ» 137
5.2.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ «ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» (ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ) 142
5.2.4 Ο «ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΓΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ 144
5.2.5 Ο «ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΓΙΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ..... 150
5.2.6 ΜΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΟΥ «ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΓΙΑ n-SIMPLEX ΠΟΛΥΕΔΡΑ 158
6. ΗΡΩΝΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ή ΤΡΙΓΩΝΑ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ.....164
6.1 ΑΠΕΙΡΟ ΣΥΝΟΛΟ ΗΡΩΝΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΡΗΤΕΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥΣ 167
7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ 178

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο χρόνος εμφάνισης των Μαθηματικών στη Γη δεν έχει εξακριβωθεί, όμως όπως διαπιστώνεται κατά τη μελέτη της σταδιακής εξέλιξής τους, από την εμφάνιση του ανθρώπου μέχρι σήμερα, είναι σίγουρο ότι συνέβαλλαν στην ανάπτυξη πολλών άλλων επιστημών αλλά και του πολιτισμού.

Η ιστορία των Μαθηματικών χωρίζεται στις εξής περιόδους:

1. Προελληνικά Μαθηματικά (από την εμφάνιση του ανθρώπου έως το 600 π.Χ.)
2. Ελληνικά Μαθηματικά (600 π.Χ. – 300 π.Χ.)
3. Ελληνιστικά Μαθηματικά (300 π.Χ – 500 μ.Χ.)
4. Μεσαιωνικά και Αναγεννησιακά Μαθηματικά (500 μ.Χ – 17^{ος} αιώνας μ.Χ.)
5. Σύγχρονα Μαθηματικά (17^{ος} αιώνας μ.Χ. – σήμερα)

Η Γεωμετρία λόγω των άμεσων πρακτικών εφαρμογών της ήταν από τους πρώτους κλάδους των μαθηματικών που αναπτύχθηκαν. Σήμερα Γεωμετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη του χώρου και των σχημάτων επιπέδων και στερεών που υπάρχουν σε αυτόν, καθώς επίσης και με τη μελέτη των ιδιοτήτων τους, των σχέσεων τους και των μετρήσεων τους.

Μέσα από μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη της Γεωμετρίας θα διαπιστώσουμε πως η ανθρώπινη σκέψη οδηγήθηκε από την πρακτική μορφή της Γεωμετρίας στη θεωρητική της αντιμετώπιση.

1.1 ΠΡΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (έως το 600 π.Χ.)

Η ετυμολογία της λέξης Γεωμετρία δηλώνει την «τέχνη» της μέτρησης της γης, που γεννήθηκε από την ανάγκη μέτρησης σχημάτων και επίλυσης πρακτικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής του ανθρώπου.

Ο προϊστορικός άνθρωπος, αν και δεν έχουμε στοιχεία στα χέρια μας, πιθανόν να ενδιαφέρθηκε για το χώρο και τα σχήματα παρακινούμενος από αισθητικά κριτήρια και από την απόλαυση που προκαλεί η ομορφιά των σχημάτων, κίνητρα που συχνά ωθούν και τους σημερινούς μαθηματικούς. [9]

Οι νεολιθικοί λαοί μέσα από τα σχέδια τους στην αγγειοπλαστική, στην υφαντική, στην καλαθοποιία της εποχής τους, δίνουν τα πρώτα δείγματα ισότητας και συμμετρίας των σχημάτων, εκφράζοντας μια ανησυχία για τις σχέσεις στο χώρο, η οποία άνοιξε το δρόμο της Γεωμετρίας.

Οι ρίζες της Γεωμετρίας εντοπίζονται σε κάποιες ανεπτυγμένες κοινωνίες της Ανατολής την εποχή αυτή, όπως επιβεβαιώνεται από τη μελέτη σωζόμενων κειμένων και πηγών.

Οι Αιγύπτιοι είναι ο πρώτος λαός που αντιμετώπισε τα μαθηματικά ως επιστήμη. Ο Ηρόδοτος υποστήριζε ότι η γεωμετρία καταγόταν από την Αίγυπτο και εμφανίστηκε εκεί για πρώτη φορά λόγω της ανάγκης που προέκυψε για την εκτίμηση των ζημιών αλλά και για τον επανακαθορισμό των ορίων των αγροτεμαχίων τους μετά από τις πλημμύρες του ποταμού Νείλου, από ειδικούς που ονομάζονταν «αρπεδονάπτες».

Ο Αριστοτέλης υποστήριζε ότι η γεωμετρία προήλθε από μια αργόσχολη ιερατική τάξη της κοινωνίας της Αιγύπτου και ότι οι ιερείς ήταν οι αληθινοί φορείς της μαθηματικής προόδου, αφού τα θεωρητικά ενδιαφέροντα είναι αυτά που τους οδήγησαν να αφιερώνουν τον ελεύθερο χρόνο τους στα μαθηματικά. Εδώ έχουμε δύο αντιδιαμετρικά αντίθετες απόψεις για την καταγωγή των μαθηματικών, η μία υποστηρίζει ότι είναι προϊόν πρακτικών αναγκών και η άλλη προϊόν τελετουργιών και σχόλης. Σύμφωνα με τον Van der Waerden [13] ο Αριστοτέλης ξεκινά με μια εντελώς εσφαλμένη προϋπόθεση αφού η τάξη των ιερέων τότε δεν ήταν ακόμη πλήρως συγκροτημένη και το έργο των ιερέων το επιτελούσαν συνήθως οι λαϊκοί. Επίσης τα γεωμετρικά προβλήματα από κείμενα της εποχής αυτής που έχουν διασωθεί, είναι εξ' ολοκλήρου προσανατολισμένες εφαρμογές.

Τα κυριότερα ευρήματα από όπου αντλούμε πληροφορίες για τα αιγυπτιακά μαθηματικά είναι:

- Ο πάπυρος του Rhind (ή πάπυρος του Αχμή), μια συλλογή 84 προβλημάτων που αντιγράφηκε από τον Αχμή περί το 1650 π.Χ. από ένα πρωτότυπο του 1850 π.Χ.,
- Ο πάπυρος της Μόσχας, μια συλλογή εικοσιπέντε προβλημάτων που αντιγράφηκε από άγνωστο συγγραφέα περί στα 1890 π.Χ.
- Ο πάπυρος του Kahun (Λονδίνο), περί το 1850 π.Χ
- Ο πάπυρος του Βερολίνου περί το 1850 π.Χ. και τέλος
- Ένας δερμάτινος ρολός που περιέχει 26 λίστες κλασματικών μονάδων από τη μεταγενέστερη περίοδο των Υξώς, περί το 1650 π.Χ.

Τμήμα του Παπύρου του Rhind

Από τους σωζόμενους παπύρους φαίνεται ότι οι Αιγύπτιοι κατείχαν αξιόλογες γνώσεις κυρίως όμως πρακτικής φύσης και το κυριότερο στοιχείο των περισσότερων προβλημάτων αριθμητικής αλλά και γεωμετρίας ήταν οι υπολογισμοί (π.χ. όγκων). Ακόμη και η φημισμένη Αιγυπτιακή γεωμετρία ήταν τελικά ένας κλάδος εφαρμοσμένης αριθμητικής [9] που ασχολούταν με συγκεκριμένες περιπτώσεις αριθμητικών προβλημάτων, χωρίς να αναπτύσσουν γενικές μεθόδους επίλυσής τους, όπου οι κανόνες υπολογισμού σπάνια είχαν θεωρητικά κίνητρα. Υπάρχουν βέβαια και κάποιες γενικεύσεις και πρακτικές που επαναλαμβάνονται, αλλά δεν μπορούν να θεωρηθούν και θεωρητικές προσεγγίσεις της επιστήμης αφού απουσιάζουν θεωρήματα και αποδείξεις. [21]

Ένας άλλος λαός της Μέσης Ανατολής ήταν οι Βαβυλώνιοι που ανέπτυξαν πολιτισμό στη Μεσοποταμία, στους ποταμούς Τίγρη και Ευφράτη. Χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά ως εργαλείο, αφού ασχολούνταν με την κατασκευή μηχανών, οχυρωματικών και αρδευτικών έργων για να αντιμετωπίσουν τις πλημμύρες των ποταμών τους. Είχαν κάνει μεγάλες προόδους στην Αριθμητική, Γεωμετρία και Αστρονομία. Σ' αυτούς αποδίδεται το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης που παραμένει μέχρι και σήμερα όπως στη μέτρηση του χρόνου και των γωνιών. Στη Γεωμετρία διατύπωναν προβλήματα μηκών και εμβαδών και μέσα από τους υπολογισμούς τους φαίνεται ότι γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν ειδικές περιπτώσεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος, του θεωρήματος του Θαλή, χωρίς να υπάρχει πουθενά σαφής διατύπωση ή κάποια απόδειξή τους. Η Γεωμετρία ήταν γι αυτούς μια μορφή αριθμητικής σχέσης μεταξύ μεγεθών, μια μορφή εφαρμοσμένης άλγεβρας ή αριθμητικής που αντιστοιχεί αριθμούς σε σχήματα, αφού πολλές φορές χρησιμοποιούσαν τα σχήματα της Γεωμετρίας για να δώσουν υπόσταση σε αριθμούς.

Ευρήματα από τα οποία αντλούμε τις πληροφορίες μας για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά είναι πήλινες πλάκες όπου έγραφαν με γραφίδα και στη συνέχεια τις έψηναν στον ήλιο, οπότε ήταν μεγαλύτερης αντοχής από τους παπύρους της Αιγύπτου. Στις πλάκες αυτές καταγράφονται πίνακες που περιείχαν σημαντικά γεωμετρικά αποτελέσματα, όπως σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων, σύγκριση των εμβαδών με τα τετράγωνα των πλευρών κανονικών πολυγώνων με 3,4,5,6,7 πλευρές, εύρεση τετραγωνικών ριζών. Όλα αυτά τα προβλήματα επιλύονται αλγοριθμικά και εφαρμόζονται μόνο για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές, χωρίς την ύπαρξη πρότασης που αποδεικνύεται.

Παράλληλα με τους Αιγυπτίους και Βαβυλωνίους, ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά και άλλοι λαοί όπως οι Κρήτες, οι Κινέζοι, οι Ινδοί, που είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Οι μαθηματικές γνώσεις που ανέπτυξαν, αποτέλεσαν μια συλλογή εμπειρικών μεθόδων αναγκαίων για την εκτέλεση έργων και διαδικασιών που θα βοηθούσαν στην κοινωνική, πολιτικοοικονομική και

πολιτιστική ανάπτυξή τους, χωρίς να εμπεριέχεται κάποια λογική εξήγηση του τρόπου επίλυσης, ούτε η σχηματοποίηση της λύσης σε μορφή κανόνα.

Αυτό που σήμερα ονομάζουμε «απόδειξη», δεν το συναντάμε στη Γεωμετρία των Προελληνικών μαθηματικών και η Γεωμετρία που χρησιμοποίησαν αυτοί οι λαοί, δεν ήταν αυτό που θεωρούμε σήμερα ως Γεωμετρία. [19] Η στασιμότητα αυτή οφειλόταν στη δομή της κοινωνίας τους, στο απολυταρχικό καθεστώς, στον τρόπο ζωής τους, στο σεβασμό, στην παράδοση, καθώς και στο φόβο που ενέπνεε στους ανθρώπους το θεοκρατικό καθεστώς που επικρατούσε, το οποίο δεν έκανε αποδεκτές νέες θεωρίες και δεν άφηνε περιθώρια για κριτική σκέψη.

1.2 ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (600 π.Χ. – 300 π.Χ.)

Ένας νέος πολιτισμός, ο Ελληνικός, εμφανίζεται στο προσκήνιο και επικρατεί όλων των γειτονικών. Οι Έλληνες έμποροι και διανοούμενοι έρχονται σε επαφή με τα προελληνικά μαθηματικά φτάνοντας στην Αίγυπτο και στη Βαβυλωνία και δίνουν στις εμπειρικές μεθόδους των απλών υπολογισμών, μια τελείως διαφορετική μορφή. Θεμελιώνουν την Γεωμετρία εισάγοντας την «απόδειξη» και την παραγωγική συλλογιστική μέσα από την οποία πρέπει να προκύπτουν όλες οι μαθηματικές αλήθειες, καθιερώνοντας τη θεωρητική Γεωμετρία σε αποδεικτική Επιστήμη.

Όλα αυτά συνέβησαν σε μια εποχή που η φιλοσοφία και τα μαθηματικά βαδίζουν μαζί, αναπτύσσεται ιδιαίτερα στην Αθήνα η δημοκρατία και ο γόνιμος διάλογος, μέθοδοι διαλεκτικής στην αρχαία αγορά έτσι ώστε να κατακτήσουν την «αλήθεια». Έτσι απαιτείται και μια λογική βάση για τα μαθηματικά και τις άλλες επιστήμες.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (600 π.Χ.) ήταν ο πρώτος Έλληνας μαθηματικός που συνέλαβε τη δυνατότητα της «αφαίρεσης» στη Γεωμετρία. Θεωρείται ιδρυτής της Θεωρητικής Γεωμετρίας, αφού ανέπτυξε μια λογική δομή για τη Γεωμετρία και εισήγαγε την απόδειξη σε αυτήν. Διατύπωσε αλλά και απέδειξε πρώτος επαγωγικά γενικές προτάσεις – θεωρήματα που αφορούν τις ιδιότητες των σχημάτων. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο οποίος βασίστηκε στον Εύδημο, αποδίδονται στον Θαλή 5 προτάσεις – θεωρήματα:

1. Κάθε εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή.
2. Ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρό του.
3. Οι κατακόρυφες γωνίες είναι ίσες.
4. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
5. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Επίσης υπολόγισε το ύψος των πυραμίδων από τη σκιά τους και την απόσταση ενός πλοίου από τη στεριά χρησιμοποιώντας την αναλογία πλευρών ομοίων τριγώνων.

Δεν έχει διασωθεί κανένα κείμενό του και βασιζόμαστε για το έργο του στην παράδοση. Πολλοί υποστηρίζουν ότι ο Θαλής στα ταξίδια του σημείωσε ανακολουθίες στα Προελληνικά μαθηματικά και αυτό οδήγησε τόσο τον ίδιο όσο και τους επόμενους μαθηματικούς στην ανάγκη για αυστηρή μαθηματική απόδειξη και επομένως την ανάπτυξη της επαγωγής.

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (572 – 497 π.Χ.) ίδρυσε στον Κρότωνα της «Μεγάλης Ελλάδας» γύρω στο 540 μ.Χ. την «Πυθαγόρεια Σχολή» που είχε ως σύνθημα «Το παν είναι αριθμός». Μουσική, αρμονία και αριθμοί αποτελούσαν τα ουσιώδη στοιχεία της διδασκαλίας των Πυθαγορείων με σκοπό την ανύψωση της ψυχής. Ο Πυθαγόρας διαίρεσε τα Μαθηματικά σε 4 κλάδους: Αριθμητική, Μουσική, Γεωμετρία και Αστρονομία, οι οποίοι αποτελούν μέρος της φιλοσοφίας και θεολογίας του συστήματός του, ενώ όλες έχουν ενιαία θεωρητική βάση.

Ο Πυθαγόρας καθόρισε βασικές γεωμετρικές έννοιες, εισήγαγε νέες προτάσεις και βελτίωσε την αποδεικτική διαδικασία που είχε εισαγάγει ο Θαλής. Αναζήτησε την αλήθεια των θεωρημάτων με τρόπο θεωρητικό και καθόλου πρακτικό και γι αυτό θεωρείται ο θεμελιωτής της Γεωμετρίας. Απέδειξε το «Πυθαγόρειο Θεώρημα», το οποίο είναι ανυπολόγιστης αξίας για τη μαθηματική επιστήμη και αργότερα με την ανακάλυψη των άρρητων – ασύμμετρων αριθμών επήλθε μεγάλη κρίση στον κόσμο των μαθηματικών αφού συνέτριβε την πίστη των Πυθαγορείων στους ακέραιους αριθμούς και έδειχνε την ανεπάρκειά τους ή των λόγων τους, να περιγράψουν απλές ιδιότητες στη Γεωμετρία, να εκφράσουν την πραγματικότητα. Είχαν να αντιμετωπίσουν την ασυμμετρία της $\sqrt{2}$, του π, που οδήγησε στο «άλυτο» πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Ο Εύδοξος, γύρω στο 300 π.Χ., γνωστός για τις εργασίες του στη γεωμετρία, συνέβαλλε να ξεπεραστεί η κρίση αυτή. Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν μόνο τρία πολύεδρα, το τετράεδρο, τον κύβο και το 12έδρο και υιοθέτησαν μια γεωμετρική διαδικασία για τη λύση του προβλήματος της «χρυσής τομής».

Ένα ανταγωνιστικό φιλοσοφικό κίνημα ήταν οι γειτονικοί «Ελεάτες», που ίδρυσαν τη σχολή τους στην Ελέα (γύρω στο 450 π.Χ.), οι οποίοι επέκριναν την αποθέωση του αριθμού από τους Πυθαγόρειους και το βασικό τους δόγμα ήταν η ενότητα και η συνέχεια της ύπαρξης, άποψη που ερχόταν σε αντίθεση με την έννοια της πολλαπλότητας και αλλαγής των Πυθαγορείων και ως μέσο για να φτάσουν στην «απόδειξη» ήταν τα λογικά περίπλοκα επιχειρήματα. Ένας από τους κυρίους εκπροσώπους τους ήταν ο Ζήνων με τα «παράδοξά» του, προτάσεις που ενώ είναι λογικά θεμελιωμένες αντιφάσκουν με την κοινή αντίληψη. Ο Ζήνων ακολούθησε τη διαλεκτική

μέθοδο και ξεκινώντας από τις απόψεις του αντιπάλου κατέληγε σε άτοπο. Πολλοί υποστηρίζουν ότι το έργο του Ζήνωνα και του Ίππασου (400 π.Χ.), είναι μια από τις πιθανές αιτίες που προκάλεσαν τη μετάβαση από τις μαθηματικές συνταγές των προελληνικών λαών στην επαγωγική δομή που εμφανίζεται στην Ελλάδα, διότι οι αμφισβητήσεις και τα προβλήματα που δημιούργησαν τα επιχειρήματά τους έκαναν εύφορο το έδαφος για την ανάπτυξη της επαγωγής. [9]

Ο Πλάτωνας (429-347 π.Χ.), ήταν Έλληνας φιλόσοφος, που απέδιδε μεγάλη σπουδαιότητα στη Γεωμετρία, ώστε στην είσοδο της σχολής του την «Ακαδημία», είχε αναρτήσει την επιγραφή: «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω». Ανέπτυξε τη φιλοσοφία ότι τα σχήματα δεν είναι τίποτε άλλο από την ατελή εικόνα αφηρημένων μαθηματικών εννοιών που βρίσκονται σε έναν ιδεατό κόσμο και ότι η αποδεικτική σκέψη στη Γεωμετρία δεν αναφέρεται στα σχήματα, αλλά στις απόλυτες έννοιες που αντιπροσωπεύουν. Στη Γεωμετρία προέβαλε το θέμα των αφηρημένων μαθηματικών σε αντίθεση με τα υλιστικά προβλήματα των τεχνιτών και των βιοτεχνών. Κατά τον Πλάτωνα πρέπει να στηριζόμαστε σε λογικά επιχειρήματα για να εξάγουμε συμπεράσματα. Σε αυτόν αποδίδεται η «αναλυτική» μέθοδος απόδειξης, δηλαδή όταν η «ευθεία» απόδειξη δεν είναι προφανής, μπορούμε να ξεκινήσουμε από το ζητούμενο και από εκεί να καταλήξουμε σε συμπέρασμα που είναι γνωστό ότι ισχύει και στη συνέχεια να αντιστρέψουμε τα βήματα της λογικής αυτής αλυσίδας, οπότε έχουμε μια αποδεκτή απόδειξη της πρότασης.

Ο Αριστοτέλης (384–322 π.Χ.) ήταν κυρίως φιλόσοφος και βιολόγος που ασχολήθηκε και με τα μαθηματικά. Συνεισέφερε στην εξέλιξη των μαθηματικών αφού θεωρείται ο θεμελιωτής της Λογικής μέρος της οποίας είναι και η Μαθηματική Λογική, αλλά και λόγω των συνεχών αναφορών του σε μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα στο έργο του. Στη Μαθηματική Λογική ανέλυσε το ρόλο των ορισμών και των υποθέσεων. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη κάθε μαθηματική απόφανση που μπορεί να αποδειχθεί η ορθότητά της ονομάζεται θεώρημα. Οι αποφάνσεις που τις δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς να πρέπει να αποδειχθεί η ορθότητά τους, ονομάζονται αξιώματα ή αιτήματα. Η επιστήμη η οποία στηρίζεται σε τέτοιες αποδεικτικές μεθόδους ονομάζεται παραγωγική. Επίσης ασχολήθηκε με το πραγματικό και το δυνητικό άπειρο στην αριθμητική και στη γεωμετρία.

Ο Ευκλείδης (330-250 π.Χ.), εξαίρετος διδάσκαλος στο πανεπιστήμιο της Αλεξάνδρειας και συγγραφέας δώδεκα περίπου πραγματειών που αφορούσαν διαφορετικά θέματα από την οπτική, την αστρονομία, τη μουσική, τη μηχανική, τα μαθηματικά. Περισσότερα από τα μισά έργα του έχουν χαθεί, όπως η πολύ σημαντική πραγματεία του για τις κωνικές τομές. Ένα από τα πέντε έργα του που διασώθηκαν, είναι το έργο του «Στοιχεία», το πιο φημισμένο στην ιστορία των μαθηματικών, το οποίο εδραίωσε την αλλαγή που επέφερε η Ελληνική μαθηματική σκέψη από την εμπειρική Γεωμετρία που

επικρατούσε, στην αποδεικτική θεωρητική Γεωμετρία. Στο έργο του αυτό, το οποίο δεν αναφέρεται μόνο στη Γεωμετρία, ο Ευκλείδης συγκέντρωσε όλα τα γνωστά έργα προγενέστερων μαθηματικών, όπως του Θαλή, του Εύδοξου, του Δημόκριτου, του Ιπποκράτη του Χίου, του Αρχύτα και ταξινόμησε, βελτίωσε, συμπλήρωσε, όπου ήταν αναγκαίο, το υλικό τους. Συστηματοποίησε τα συμπεράσματά τους, ανασυνέταξε τις αποδείξεις των προτάσεών τους, στις οποίες περιέλαβε και ορισμένες δικές του, οργανώνοντας και παρουσιάζοντας με λογική σειρά, αυστηρότητα και σαφήνεια, τις βάσεις των στοιχειωδών μαθηματικών σε δεκατρία βιβλία, που όντας το 2^{ο} έργο παγκοσμίως σε πλήθος εκδόσεων μετά την Αγία Γραφή, χρησιμοποιείται έως και σήμερα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Με τα «Στοιχεία», η Γεωμετρία είναι ο πρώτος κλάδος των μαθηματικών που θεμελιώθηκε αξιωματικά από τον Ευκλείδη, όπου δεν μας ενδιαφέρει η ουσία των αντικειμένων που μελετάμε, αλλά οι μεταξύ τους σχέσεις τις οποίες αποδεικνύουμε ξεκινώντας από τους «ορισμούς» βασικών γεωμετρικών εννοιών και από προτάσεις των οποίων η αλήθεια γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη, τα «αιτήματα» που ισχύουν στη γεωμετρία και τις «κοινές έννοιες» που ισχύουν σε κάθε αποδεικτική επιστήμη. Στη συνέχεια προκύπτει από αυτές με τη βοήθεια της λογικής επαγωγής, η απόδειξη όλων των υπολοίπων «προτάσεων», που αντιστοιχούν σε σημερινά θεωρήματα, προτάσεις, λήμματα, πορίσματα. Τα «Στοιχεία» στηρίζονται σε 23 ορισμούς, 5 αιτήματα, 7 (ή 9) κοινές έννοιες και μέσω αυτών αποδεικνύονται συνολικά 465 προτάσεις. Το 5^{ο} αίτημα (αίτημα της παραλληλίας), είναι αυτό που απασχόλησε για πολλούς αιώνες τους μαθηματικούς και οδήγησε στην κατασκευή νέων γεωμετριών.

1.3 ΕΛΛΗΝΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (300 π.Χ. – 500 μ.Χ.)

Η Ελληνιστική περίοδος ή Αλεξανδρινή περίοδος (330 π.Χ. – 200 π.Χ.), ήταν μια εξίσου γόνιμη περίοδος για τα μαθηματικά με την Ελληνική, κατά την οποία μετά το θάνατο του Μ. Αλεξάνδρου (323 π.Χ.), η πόλη της Αλεξάνδρειας που ιδρύθηκε από αυτόν το μεγάλο κατακτητή, αντικατέστησε την Αθήνα, ως η νέα πολιτιστική πρωτεύουσα του κόσμου και ως το κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας.

Οι μαθηματικοί της εποχής αυτής επηρεασμένοι και εμπνευσμένοι από τον Ευκλείδη, οδηγούν τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά στην περίοδο της μεγαλύτερης άνθησής τους, όπου αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων, όπως η μέθοδος εξάντλησης του Αρχιμήδη, οι οποίες στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα

γεωμετρικά αντικείμενα, όπως η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλώνιου, που θα βρουν εφαρμογή πολλούς αιώνες μετά (17^{ο} μ.Χ. αιώνα).

Ο πιο σημαντικός εκπρόσωπος της περιόδου αυτής ήταν ο Αρχιμήδης (278-212 π.Χ.), μεγαλοφυής μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός. Στη Γεωμετρία έδωσε σπουδαία έργα όπως «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου», «Κύκλου Μέτρηση», στα οποία υπάρχει ένα μυστήριο γύρω από την αναλυτική μέθοδο που εφάρμοσε. Εξαίρεση αποτελεί η «Μέθοδος», που είναι έργο από το οποίο μπορούμε να καταλάβουμε το σκεπτικό που τον οδήγησε στις ανακαλύψεις του, όπως ο ίδιος εξηγεί και αποκαλύπτει. Έθεσε τις βάσεις του Ολοκληρωτικού Λογισμού με την «Μέθοδο της Εξάντλησης», υπολογίζοντας το εμβαδόν διάφορων χωρίων και τον όγκο διάφορων σωμάτων, κάνοντας κατάλληλες προσεγγίσεις με χρήση εμβαδών απλών σχημάτων.

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (260-221 π.Χ.), που ήκμασε γύρω στο 210 π.Χ., ήταν επίσης ένας σπουδαίος μαθηματικός της εποχής αυτής και θεωρείται ο τελευταίος μεγάλος γεωμέτρης της Ελληνιστικής περιόδου. Με το έργο του «Κωνικές Τομές» μελετά την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή ως τομές του κώνου με ένα επίπεδο κατάλληλης κλίσης, μια ιδέα που μπορεί να θεωρηθεί απαρχή της Προβολικής Γεωμετρίας.

Μετά την ιδιαίτερα δραστήρια περίοδο του 3^{ου} π.Χ. αιώνα, ακολουθεί μια εποχή παρακμής. Η κλασσική Γεωμετρία δεν βρήκε φανατικούς οπαδούς μετά το θάνατο του Απολλώνιου με μικρές ίσως εξαιρέσεις. Παρά τη σχετική κάμψη του Ελληνικού πνεύματος που ακολούθησε, υπήρξαν συνεχιστές της γεωμετρικής παράδοσης, όπως ο Μενέλαος, ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, ο Πτολεμαίος, ο Πάππος και ο Πρόκλος, που μέσω των σχολίων του τελευταίου διασώθηκαν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Τα κλασσικά έργα του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου δημιουργούν την εντύπωση ότι τα Ελληνικά μαθηματικά κινούνται αποκλειστικά στα πλαίσια των αυστηρών γεωμετρικών αποδεικτικών διαδικασιών. Όμως ο λαός, γενικότερα ασχολούνταν περισσότερο με αριθμητικούς υπολογισμούς παρά με την αυστηρή σκέψη, η δε Βαβυλωνιακή Αριθμητική και η Αλγεβρική Γεωμετρία ασκούσαν ακόμα σημαντική επιρροή στον ελληνιστικό κόσμο από την εποχή του Μ. Αλεξάνδρου ως το τέλος του κλασσικού κόσμου. Αυτή η πλευρά των μαθηματικών, κατά την οποία μελετούνται ζητήματα μέτρησης από πρακτική άποψη παράλληλα με τα αφηρημένα μαθηματικά, υπήρχε για καιρό στην Ελλάδα, αλλά δεν βρήκε πολλούς οπαδούς ανάμεσα στους μεγάλους μαθηματικούς. Σημαντικός εκπρόσωπος αυτής της τάσης ήταν ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, με το μαθηματικό έργο του οποίου θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία επικεντρώνοντας στα έργα του «Μετρικά» και «Γεωμετρικά». Ήταν ο πρώτος επιστήμονας της Αρχαίας Ελλάδας που πέτυχε να συνδυάσει συστηματικά τη θεωρία με την πράξη. Από την άλλη

μεριά, η Ελληνική επαγωγική Γεωμετρία δεν βρήκε πρόσφορο έδαφος στη Μεσοποταμία μέχρι την κατάκτησή της από τους Άραβες.

Οι μελέτες του Ήρωνα ήταν διαφορετικές από αυτές του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου και όπως αναφέρουν οι Drachmann και Mahoney (1970), φαίνεται ως ένας ευφυής εφαρμοσμένος μαθηματικός που αποτελεί μια ουσιώδη ζεύξη στη συνεχιζόμενη παράδοση των πρακτικών μαθηματικών από τους Βαβυλωνίους στους Άραβες και την Ευρώπη της Αναγέννησης. [15]

Από τον Ίππαρχο (180 π.Χ-125 π.Χ) ως τον Πτολεμαίο (138 μ.Χ-180 μ.Χ), έχουμε ως μια εφαρμογή μέτρησης στη στοιχειώδη Γεωμετρία την ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας που συνέβαλε στην εξέλιξη της Αστρονομίας και της Μηχανικής, με σημαντικούς εκπροσώπους της τον Αρίσταρχο τον Σάμιο, τον Ερατοσθένη, τον Ίππαρχο και τον Πτολεμαίο-Κλαύδιο. Από τον Πτολεμαίο-Κλαύδιο το 150 μ.Χ., ξεκινά μια σειρά αποτυχημένων προσπαθειών για την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη βάσει των προηγουμένων αιτημάτων. Ο βίαιος θάνατος της Υπατίας (400 μ.Χ.), που ήταν εξαίρετη μαθηματικός της Αλεξάνδρειας, σηματοδότησε το τέλος της Αλεξάνδρειας ως μαθηματικού κέντρου και επήλθε στασιμότητα.

Με την άνοδο της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, κλείνει ο κύκλος της Αρχαίας Ελληνικής περιόδου. Οι Ρωμαίοι δεν έδειχναν ενδιαφέρον για την έρευνα, τη λογική και τη μαθηματική γνώση, αλλά ικανοποιούνταν με στοιχειώδεις πρακτικούς κανόνες και διαδικασίες στα μαθηματικά για να εξυπηρετήσουν τις κατασκευές τους και το εμπόριο, με αποτέλεσμα τα μαθηματικά τους ήταν πολύ χαμηλότερου επιπέδου από αυτά της Ελλάδας.

1.4 ΜΕΣΑΙΩΝΙΚΑ ΚΑΙ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (500 μ.Χ. – 17ος Αιώνας μ.Χ.)

Η περίοδος που ακολουθεί δεν έχει να παρουσιάσει σημαντικές εξελίξεις στα μαθηματικά. Στο Βυζάντιο το 527 μ.Χ., ο Ιουστινιανός γίνεται αυτοκράτορας και το 529 μ.Χ. κλείνει όλες τις σχολές, όπως την Ακαδημία του Πλάτωνα και τις φιλοσοφικές, φοβούμενος ότι απειλείται ο ορθόδοξος χριστιανισμός από το ειδωλολατρικό τους ύφος και έτσι αρχίζει ο πνευματικός Μεσαίωνας. Οι δάσκαλοι και οι μελετητές στράφηκαν στην Ανατολή και έτσι μετά το 600 μ.Χ. τα συγγράμματα των Ελλήνων γίνονται γνωστά στους Άραβες και στους Πέρσες οι οποίοι τα μεταφράζουν και αργότερα αυτές οι μεταφράσεις θα μεταφερθούν και στην Ευρώπη.

Η Ινδία παρουσιάζει μια ασυνέχεια στην εξέλιξη των μαθηματικών με μεμονωμένα σημαντικά μαθηματικά έργα που αφορούν την Άλγεβρα και την Τριγωνομετρία (Brahmagupta, Bhaskara). Στη Γεωμετρία οι μετρήσεις ακολούθησαν τον Βαβυλωνιακό τρόπο σκέψης για την ανέγερση τέμπλων και

κατασκευή ναών. Από τους σημαντικότερους Ινδούς μαθηματικούς, ο Αριαμπάτα (Aryabhata), γράφει την «Αριαμπατίγια» που θυμίζει το ρόλο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Η «Αριαμπατίγια» είναι ένα σύντομο περιγραφικό έργο προηγούμενων επιτευγμάτων που περιλαμβάνει κανόνες υπολογισμού χρήσιμους στην Αστρονομία και στις μετρήσεις, χωρίς να υπάρχει η έννοια του θεωρήματος και της επαγωγικής αποδεικτικής μεθοδολογίας.

Αξιόλογες ήταν και οι προσπάθειες των Αράβων μαθηματικών ειδικά στην Άλγεβρα όπως ο Al-Khowarismi (Θεωρία Αριθμών), όμως η Γεωμετρία δεν γνώρισε σημαντική ανάπτυξη. Αναφέρουμε τον Omar Khayam που παρουσίασε και γεωμετρικές και αλγεβρικές λύσεις για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ενώ για τις κυβικές εξισώσεις έδωσε μόνο γεωμετρικές λύσεις. Τέλος ο Nasir-ed-din al Tusi προσπάθησε να αποδείξει όπως και ο Omar Khayam το 5^{ο} αίτημα του Ευκλείδη. Μια σημαντική προσφορά των Αράβων στην επιστήμη ήταν η διάσωση πολλών συγγραμμάτων της αρχαιότητας μέσω των μεταφράσεών τους, των οποίων τα πρωτότυπα έχουν χαθεί.

Τον 12^{ο} και τον 13^{ο} μ.Χ. αιώνα γίνεται κατακλυσμός μεταφράσεων, αρχικά μόνο από τα αραβικά στα λατινικά, αλλά στη συνέχεια ως τον 13^{ο} αιώνα από τα αραβικά στα ισπανικά και στα ελληνικά, ή από τα ελληνικά στα λατινικά. Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ήταν από τα πρώτα μαθηματικά έργα που μεταφράστηκαν στα λατινικά, ενώ το 1269 ο William Moerberke δημοσίευσε μια μετάφραση από τα ελληνικά στα λατινικά των κυριοτέρων μελετών του Αρχιμήδη. Στην Δυτική Ευρώπη στην Πίζα της Ιταλίας εμφανίστηκε ένας σπουδαίος αλγεβρίστας ο Fibonacci ή Leonardo Pisano, που το 1220 έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο “Practica Geometriae” βασισμένο πιθανότατα στην «Διαίρεση των Σχημάτων» του Ευκλείδη από αραβική μετάφραση και στα έργα του Ήρωνα που αναφέρονταν στη μέτρηση. Ο Fibonacci ακολουθώντας τη βαβυλωνιακή και αραβική παράδοση, χρησιμοποίησε αλγεβρικές μεθόδους για να λύσει γεωμετρικά προβλήματα.

Στα τέλη του 12^{ου} μ.Χ. αιώνα και αρχές του 13^{ου}, ιδρύθηκαν πολλά διάσημα Πανεπιστήμια στην Ευρώπη, όπως της Μπολόνια, του Παρισιού, της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ, όπου διδάσκεται η φιλοσοφία και επιστήμη του Αριστοτέλη καθώς επίσης και στις εκκλησιαστικές σχολές, προσαρμοσμένες στις δοξασίες τους. Τον 14^{ο} μ.Χ. αιώνα η Ευρώπη χτυπήθηκε από την πανώλη εξαιτίας της οποίας εκτιμάται ότι χάθηκε το 1/3 του πληθυσμού της, με αποτέλεσμα την πνευματική παρακμή.

Στα μέσα του 15^{ου} μ.Χ. αιώνα με την άλωση της Κωνσταντινούπολης το 1453 από τους Οθωμανούς, καταρρέει η Βυζαντινή αυτοκρατορία και πολλοί μελετητές κατέφυγαν στη Δύση πρόσφυγες μεταφέροντας πολύτιμα αρχαία ελληνικά χειρόγραφα, με αποτέλεσμα να έρθει σε επαφή ο δυτικός ευρωπαϊκός κόσμος με το πνεύμα και τα έργα των Αρχαίων Ελλήνων. Έτσι

ξεκινά στην Ευρώπη μια νέα μαθηματική δραστηριότητα και μια νέα εποχή, η Αναγέννηση.

Με την ταυτόχρονη ανακάλυψη της τυπογραφίας τα κλασσικά έργα έγιναν γνωστά, πολύ λίγα όμως από αυτά ήταν μαθηματικού περιεχομένου κάποια από τα οποία αφορούσαν λατινικές μελέτες του Μεσαίωνα για τη στοιχειώδη γεωμετρία, και άλλα ήταν αραβικά έργα που αναφέρονταν στις αριθμητικές πράξεις και τις αλγεβρικές μεθόδους που δεν ήταν τόσο δύσκολα σε κατανόηση όσο τα κλασικά ελληνικά γεωμετρικά έργα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Τα μαθηματικά κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης εφαρμόστηκαν στη Λογιστική, στη Μηχανική, στην Τοπογραφία, στην Τέχνη, στην Χαρτογραφία και στην Οπτική. Η αποδεικτική Γεωμετρία παρέμεινε σταθερή ενώ θα μπορούσε να αναπτυχθεί μέσω της εξέλιξης της τέχνης και της προοπτικής, πράγμα που δεν έγινε μέχρι την εμφάνιση της αλγεβρικής Γεωμετρίας. Σπουδαίοι μαθηματικοί αυτής της εποχής ήταν οι Pacioli, Cardano, Tartaglia, Ferrari, Viette, που έλυσαν αλγεβρικά εξισώσεις 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού, ο Κοπέρνικος (1473-1543) στην αστρονομία και τριγωνομετρία, ο Napier (1550-1617) με την ανακάλυψη των λογαρίθμων. Στη μετάβαση από την Αναγέννηση στο σύγχρονο κόσμο συμμετείχαν και έπαιξαν σημαντικό ρόλο, ο Γαλιλαίος (1564-1642) και ο Καβαλιέρι (1598-1647) οι οποίοι άνοιξαν το δρόμο για τον Απειροστικό Λογισμό.

1.5 ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (17ος Αιώνας μ.Χ. – σήμερα)

Τον 17^{ο} αιώνα στην Ευρώπη ανθίζουν οι επιστήμες και παρουσιάζονται νέες εξελίξεις στα μαθηματικά που οφείλονται σε νέους τρόπους μελέτης τους αλλά και στην χρήση νέων μεθόδων υπολογισμού. Αρχίζει η αναγέννηση της Γεωμετρίας με σημαντικές καινοτομίες.

Ο Descartes (1596-1650), καθιέρωσε ένα νέο κλάδο για τα Μαθηματικά, την Αναλυτική Γεωμετρία, με την «Αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας» κατά την οποία εφαρμόζεται η άλγεβρα σε γεωμετρικά προβλήματα με στόχο γενικά μια γεωμετρική κατασκευή και απελευθερώνεται η γεωμετρία από τη χρήση των σχημάτων με τη βοήθεια αλγεβρικών διαδικασιών. Έχουμε λοιπόν την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων που συνδεόταν όχι με πρακτικά θέματα όπως σήμερα. Το διάσημο έργο του “La Geometrie” δηλώνει τον θρίαμβο της θεωρίας, επιβεβαιώνοντας ότι η σύγχρονη Αναλυτική Γεωμετρία έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα (Κωνικά Απολλώνιου) και όχι στον Μεσαίωνα και κάνει την Αναλυτική Γεωμετρία γνωστή στους σύγχρονούς του.

Στην Αναλυτική Γεωμετρία συνέβαλε και ο Fermat (1601-1665), ο οποίος έδωσε έμφαση στο σχεδιασμό των λύσεων «αορίστων» εξισώσεων και όχι στη γεωμετρική κατασκευή των ριζών των «ορισμένων» αλγεβρικών εξισώσεων. Επίσης μαζί με τον Pascal (1623-1662), ασχολήθηκαν με την Ανάλυση που ήταν ακόμη στο στάδιο της γένεσής της και θεμελίωσαν την Θεωρία Πιθανοτήτων και την Θεωρία Αριθμών.

Την εποχή αυτή στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, αναπτύσσεται η Προβολική Γεωμετρία από τον Desargues (1591-1661), μια μη Μετρική Γεωμετρία που μελετά την απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο και είχε ένα μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με τις Μετρικές Γεωμετρίες, την γενικότητά της, αφού πολλές ειδικές περιπτώσεις ενός θεωρήματος περιέχονται σε μια γενικότερη πρόταση. Η νέα γεωμετρία δεν έγινε αποδεκτή και οι ιδέες της αποκηρύχθηκαν ως επικίνδυνες και λανθασμένες αφού η προσκόλληση στην άλγεβρα ήταν πολύ ισχυρή.

Στο μεταξύ ο Newton (1643-1727) και ο Leibniz (1646-1716) ανακαλύπτουν σχεδόν ταυτόχρονα τον Απειροστικό Λογισμό, ενώ οι Bernoulli διαπρέπουν στον τομέα της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού και επιδίδονται στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων. Τον 18^{ο} αιώνα, οι Mac Laurin και Taylor ασχολούνται με τις σειρές συναρτήσεων και δυναμοσειρές, ο d'Alembert προχωρά το Λογισμό και τις διαφορικές εξισώσεις, ο Lagrange τελειοποιεί την Ανάλυση και αναπτύσσει με μεγάλη αυστηρότητα την θεωρία των συναρτήσεων, ο Laplace τελειοποιεί την Θεωρία Πιθανοτήτων και προωθεί την Αστρονομία και την Ουράνια Μηχανική. Ο Euler (1707-1783) ο πιο σημαντικός μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα, ασχολήθηκε με την Τριγωνομετρία, την Θεωρία Αριθμών, ανακάλυψε το Λογισμό των Μεταβολών και τη Διαφορική Γεωμετρία. Μαζί με τον Euler, ο Monge (1746-1818), συνέβαλε στη διαμόρφωση της Διαφορικής Γεωμετρίας και ανακάλυψε την Περιγραφική Γεωμετρία που επιτρέπει την αναπαράσταση των τρισδιάστατων αντικειμένων σε δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο σύνολο διαδικασιών, η οποία προκάλεσε επανάσταση στο στρατιωτικό μηχανικό σχέδιο. Το διάστημα αυτό έγιναν επίσης πολλές αποτυχημένες προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη που οφείλονταν είτε στην προσπάθεια απόδειξής του ως συνέπεια των υπολοίπων αιτημάτων, είτε στην αντικατάστασή του από ισοδύναμη μορφή του που ήταν πιο εύκολο να αποδειχθεί. Μετά την χρήση των άμεσων μεθόδων για την απόδειξή του, ξεκινά μια προσπάθεια απόδειξης του με την μέθοδο της «απαγωγής σε άτοπο». Ο Saccheri (1667-1733) ξεκινώντας με την άρνηση του 5^{ου} αιτήματος, επιδιώκει να καταλήξει σε αντίφαση. Τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν ήταν ριζικά αντίθετα με αυτά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και επομένως τα απέρριψε, χάνοντας έτσι την ευκαιρία να θεωρηθεί πατέρας της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Ανάλογες μάταιες προσπάθειες έκαναν και οι Lambert (1728-1777) και Legendre (1752-1833), οι οποίοι δεν αξιολόγησαν

τις εναλλακτικές προτάσεις που προέκυψαν, γιατί βρίσκονταν σε ασυμφωνία με τη διαίσθηση.

Η δημιουργία ενός τόσο μεγάλου όγκου ανακαλύψεων και έργων στα Μαθηματικά κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα είχε ως επακόλουθο να μην συνοδεύονται πάντα από τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, αφού οι αποδείξεις βασίζονταν περισσότερο στη διαίσθηση και όχι στη λογική. Αποτέλεσμα ήταν να προκύψουν αντιφάσεις και παράδοξα που επηρέασαν θετικά τα μαθηματικά του επόμενου αιώνα. Το 19^{ο} αιώνα, τον αιώνα της βιομηχανικής επανάστασης, όπου συντελούνται καθοριστικές αλλαγές στα μαθηματικά.

Η Γεωμετρία που από τον 17^{ο} αιώνα παρέμεινε για δύο αιώνες στην σκιά των αναπτυσσόμενων κλάδων της Ανάλυσης, με εξαίρεση στα τέλη του 18^{ου} αιώνα την προσπάθεια προσέγγισης της Θεωρητικής Γεωμετρίας από τον Monge, τον 19^{ο} αιώνα εμφανίζει ένα νέο γεωμετρικό κίνημα.

Ο Poncelet (1788-1867), ιδρυτής της Προβολικής Γεωμετρίας επικεντρώνει τη μελέτη του στις ιδιότητες των επιπέδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από το ένα επίπεδο σε ένα άλλο και διεκδικεί την πατρότητα της ανακάλυψης της Αρχής του Δυϊσμού ανάμεσα στα σημεία και τις ευθείες των κωνικών τομών. Ήταν υποστηρικτής της Συνθετικής Γεωμετρίας και της ανωτερότητάς της απέναντι σε αυτήν των αναλυτικών μεθόδων που υποστήριζε ο Gergonne (1771-1859).

Έναν αιώνα μετά τον Saccheri, οι Lobachevsky (1793-1856) και Bolyai (1802-1860), ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ανακάλυψαν την μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία, την Υπερβολική Γεωμετρία, η οποία αποτελεί μια συνεπή θεωρία όπου δεχόμαστε την άρνηση του 5^{ου} αιτήματος και διατηρούμε τα υπόλοιπα 4 αιτήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επίσης και ο μεγάλος μαθηματικός Gauss (1775-1855), είχε ανακαλύψει την Υπερβολική Γεωμετρία πριν τις δημοσιεύσεις των παραπάνω δύο, αλλά δεν το είχε ανακοινώσει φοβούμενος τις αντιδράσεις για τη νέα Γεωμετρία.

Οι νέες ιδέες οδήγησαν τον Riemann (1826-1866) στη διατύπωση μιας άλλης μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Ελλειπτικής Γεωμετρίας καθώς και στη γενίκευση των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, συλλαμβάνοντας την έννοια της Πολλαπλότητας. Στη συνέχεια οι Poincare, Beltrani, και Klein δημιούργησαν μοντέλα και απέδειξαν και θεμελίωσαν τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Τα σύγχρονα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από απαιτήσεις αυστηρότητας, που μετά την ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών έγινε αναγκαία η τακτοποίηση του αξιωματικού συστήματος κάθε Γεωμετρίας, όπου τα αξιώματα δεν αποτελούν διαισθητικές αλήθειες αλλά ένα σύνολο κανόνων του συστήματος. Πάνω σε αυτό εργάστηκαν οι Dedekind (1831-

1916), ο Peano (1858-1932, καθώς και ο Hilbert (1862-1943), με τον οποίον ξεκινά ο 20ος αιώνας.

Ο Hilbert ήρθε να διορθώσει τις ελλείψεις που παρουσίασαν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, όπως μη διατυπωμένες υποθέσεις, ορισμούς χωρίς έννοια και λογικές ανεπάρκειες. Με το έργο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας» έγινε ουσιαστική προσπάθεια να αποκτήσει η Γεωμετρία καθαρά αυστηρό χαρακτήρα όπως είχε ήδη γίνει με την Άλγεβρα και την Ανάλυση. Έτσι θεμελίωσε αξιωματικά την Ευκλείδεια Γεωμετρία και ταυτόχρονα έθεσε τις βάσεις της «τυπικής αξιωματικής μεθόδου» που θεμελίωσε αυστηρά όλο το σύγχρονο μαθηματικό οικοδόμημα, επηρεάζοντας τη σύγχρονη αντιμετώπιση των μαθηματικών (Φορμαλισμός). Σύμφωνα με τον Hilbert, «πρέπει ανά πάσα στιγμή να είμαστε σε θέση να αντικαταστήσουμε τα σημεία, ευθείες, επίπεδα με τραπέζια, καρέκλες, μπύρες», δηλώνοντας έτσι την ανάγκη αφαίρεσης των γνωστών γεωμετρικών εννοιών, αγνοώντας τον διαισθητικό και εμπειρικό χαρακτήρα τους. [9]

Η προσπάθεια αυτή ανατρέπεται από τον Gödel το 1938, με την απόδειξη του θεωρήματος της μη-πληρότητας των αξιωματικών συστημάτων και δίνεται η αφορμή για την ανάπτυξη νέων μαθηματικών θεωριών. Την ίδια εποχή ο Poincare θεμελιώνει την Γενική Τοπολογία και θέτει τις βάσεις του Ιντουισιονισμού που αργότερα ιδρύεται από τον Brouwer. Ο Russel προσπαθεί να στηρίξει τα μαθηματικά στη λογική (Λογικισμός).

Σήμερα με την άνθηση της Πληροφορικής αλλά και με τα επιτεύγματα άλλων επιστημών όπως της Φυσικής και της Στατιστικής, όχι μόνο αναπτύσσονται οι βασικοί κλάδοι των μαθηματικών, αλλά δημιουργούνται και νέοι, καθώς κοινωνικές και οικονομικές πιέσεις ωθούν την διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας.

2.ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ

2.1 «ΗΡΩΝΕΙΟ ΖΗΤΗΜΑ» – ΠΟΤΕ ΕΖΗΣΕ Ο ΗΡΩΝ

Διεθνής ορολογία: "Die Heronische Frage"

Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς ήταν Έλληνας που γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια και έδρασε στην Αίγυπτο. Με το όνομά του έχει φτάσει σε εμάς ένας αριθμός έργων, όμως δεν είναι γνωστά πολλά πράγματα για τη ζωή του και έχει δημιουργηθεί μια διαμάχη σχετικά με το πότε έζησε. Ιστορικοί και μελετητές που έχουν ασχοληθεί με το ερώτημα αυτό, δίνουν διαφορετικές απαντήσεις. Η έρευνά τους βασίστηκε τόσο σε πρόσωπα που είχαν σχέση με τον Ήρωνα, όπως προέκυπτε μέσα από τα έργα του, όσο και στη μελέτη του υλικού αλλά και του γλωσσικού ύφους των έργων του.

Σε χειρόγραφο του έργου του Ήρωνα «Βελοποιικά», έχει δοθεί ο τίτλος «Ήρωνος Κτησιβίου Βελοποιικά». Επίσης ένας ανώνυμος Βυζαντινός συγγραφέας του 10^{ου} αιώνα, χρησιμοποιεί τη φράση: «Ο Ασκρηνός Κτησίβιος ο του Αλεξανδρέως Ήρωνος καθηγητής». Συνδυάζοντας τα παραπάνω προέκυψε το συμπέρασμα ότι ο Ήρων ήταν μαθητής του Κτησίβιου, για τον οποίον οι ιστορικοί δεν είχαν επίσης συγκεκριμένη χρονολογική τοποθέτηση. Ο T.H. Martin (1824), υποστηρίζει ότι ο Κτησίβιος ήταν ένας κουρέας που έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του VII, δηλαδή του Πτολεμαίου του Ευεργέτη του II ή «Φύσκων» (146-117 π.Χ.) και ο οποίος λέγεται ότι είχε κατασκευάσει μια βελτιωμένη ύδραυλι (υδραυλικό μουσικό όργανο). Αργότερα ο T.H. Martin (1854), τοποθετεί τον Ήρωνα στις αρχές του 1^{ου} π.Χ. αιώνα, δηλαδή περί το 126 έως 50 π.Χ. Σύμφωνα με άλλη εκδοχή ο Κτησίβιος ήταν μηχανικός που έζησε την εποχή του Πτολεμαίου II που επονομαζόταν «Φιλάδελφος» (285-247 π.Χ). Ο A.G. Drachmann (1951-1953) διαλύοντας τον μύθο των δύο Κτησιβίων, θεώρησε τον Κτησίβιο ως τον γιο ενός κουρέα, την εποχή του Πτολεμαίου του II, για τον οποίο κατασκεύασε ένα κομψό κύπελλο σε σχήμα κέρατος, το μελωδικό «Κέρας της Αμάλθειας» κατά το έτος 277 π.Χ., όπως αναφέρει ο Αθήναιος. [3][4]

Ο Ήρων το έργο του «Όροι», το αφιέρωσε σε κάποιον που τον αποκάλεσε «Διονύσιε λαμπρότατε». Η I. Hammer-Jensen (1913) υποστηρίζει ότι αναφέρεται στον συγκλητικό L. Helius Helvius Dionysius που διετέλεσε Δήμαρχος στη Ρώμη το 301-302 μ.Χ. [4] Ο T.L.Heath [10] υποστηρίζει ότι ο αυτός ο Διονύσιος διετέλεσε φροντιστής υδραγωγείου (*curator aquarum*) και φροντιστής δημόσιων λειτουργιών (*curator operum publicorum*), επομένως σχετιζόταν με μηχανικούς, αρχιτέκτονες και τεχνίτες για τους οποίους έγραφε ο Ήρων. Ο Arthur Stein (1914) αντικρούει τον ισχυρισμό της I.H. Jensen υποστηρίζοντας ότι ο λατινικός τίτλος "vir clarissimus" στον οποίον αντιστοιχεί η λέξη «λαμπρότατος» δεν χρησιμοποιούταν επί αυτοκρατορίας του

Διοκλητιανού (3^{ο} μ.Χ αιώνα) και επομένως ο Διονύσιος δεν ήταν αυτός που διετέλεσε Δήμαρχος της Ρώμης. Ο Stein υποστηρίζει ότι ήταν ο M. Aurelius Papirius Dionysius, νομάρχης της Αιγύπτου το έτος 188 μ.Χ. [4]

Σύμφωνα με τον T. L. Heath [10] η ανακάλυψη του ελληνικού κειμένου των «Μετρικών» από τον R. Schöne το 1896 έδωσε τη δυνατότητα του ασφαλούς καθορισμού ενός «άνω χρονικού ορίου» της ζωής του Ήρωνα. Στα «Μετρικά» υπάρχουν συνεχείς αναφορές στον Αρχιμήδη και στα έργα του, αλλά και αναφορές στον Απολλώνιο, όμως «Πίνακας Χορδών» που χρησιμοποίησε ο Ήρων δεν υπήρχε σε κανένα έργο πριν από εκείνον του Ίππαρχου (150 π.Χ).. Έτσι ο T.L. Heath καταλήγει ότι το όριο μετά το οποίο (*terminus post quem*) έζησε ο Ήρων, είναι το 150 π.Χ. Επίσης ο Πάππος στη «Συναγωγή» του αναφέρει και χρησιμοποιεί έργα του Ήρωνα. Γνωρίζοντας ότι ο Πάππος έγραψε την εποχή της αυτοκρατορίας του Διοκλητιανού (284-305 μ.Χ.), ο T.L. Heath καταλήγει για το όριο πριν από το οποίο (*terminus ante quem*) έζησε ο Ήρων, ότι δεν μπορεί να είναι πολύ μετά από το 250 μ.Χ. Συνεχίζοντας την έρευνά του και εξετάζοντας τη χρονική σχέση μεταξύ του Ήρωνα και των άλλων μαθηματικών (Φίλων ο Βυζαντινός, Ποσειδώνιος, Βιτρούβιος, Κολουμέλας, Πτολεμαίος), οι οποίοι εντάσσονται στα ίδια χρονικά όρια, τοποθέτησε τον Ήρωνα στον 3^{ο} αιώνα μ.Χ. και ίσως λίγο νωρίτερα από τον Πάππο.

Ο A.G. Drachmann [16] γράφει ότι το όνομα του Ήρωνα δεν αναφέρεται από καμία λογοτεχνική πηγή νωρίτερα από τον Πάππο (300 μ.Χ.), ο οποίος παραθέτει αποσπάσματα από την «Μηχανική» του και έχουμε το ένα χρονικό όριο για τη ζωή του Ήρωνα. Ο ίδιος ο Ήρων αναφέρει αποσπάσματα για τη ζωή του Αρχιμήδη που πέθανε το 212 π.Χ. και αυτό μας δίνει το άλλο χρονικό όριο. Επομένως οι μελετητές δίνουν διαφορετικές χρονολογίες για τη ζωή του Ήρωνα που κυμαίνονται από το 150 π.Χ. έως το 250 μ.Χ. Ο Drachmann θεωρεί ότι το ερώτημα λύθηκε από τον O. Neugebauer (1938) ο οποίος παρατήρησε ότι μια έκλειψη της σελήνης που περιέγραψε ο Ήρων στο έργο του «Διόπτρα» (κεφ. 35), κατά τον υπολογισμό της απόστασης Αλεξάνδρειας – Ρώμης, έγινε τη 10^{η} ημέρα πριν από την εαρινή ισημερία, ξεκινώντας στην Αλεξάνδρεια στις 05:00 τη νύκτα ενώ στη Ρώμη στις 03:00, η οποία αντιστοιχεί στην έκλειψη της 13^{ης} Μαρτίου του 62 μ.Χ. Το γεγονός ότι δεν υπήρξε άλλο τέτοιο φαινόμενο σε διάρκεια 500 ετών τοποθετεί τον Ήρωνα στο τέλος του 1^{ου} αιώνα μ.Χ. Ο A.G. Drachmann θεωρεί ότι μια «αστρονομική» χρονολογία είναι πιο αξιόπιστη από άλλες που βασίζονται σε παραδόσεις και γνώμες. Θεωρεί απίθανο και το έχει υποστηρίξει με έρευνά του, να έζησε ο Ήρων πολύ αργότερα από την παραπάνω χρονολογία και την όλη διαμάχη για αυτές τις χρονολογίες ως ιστορικού και μόνον ενδιαφέροντος.

Ο Tittel (1912), τοποθετεί τον Ήρωνα όχι πολύ μετά από το 100 π.Χ, δηλαδή στην αρχή του τελευταίου π.Χ. αιώνα, βασιζόμενος στη σχέση μεταξύ

Ήρωνα και Φίλωνα. Θεωρεί ότι ο Φίλωνας είναι μεταγενέστερος του Κτησίβιου (247 π.Χ.) όχι περισσότερο από μια γενιά, αφού οι καταπέλτες που κατασκεύασαν ήταν της ίδιας τεχνοτροπίας, οπότε ο Φίλων τοποθετείται το αργότερο μέχρι το τέλος του 2^{ου} αιώνα π.Χ. Στη συνέχεια ο Ήρων ήταν ένας νεώτερος σύγχρονος του Φίλωνα, όπως φαίνεται από μια θεατρική παράσταση της ιστορίας του Ναυπλίου από τον Φίλωνα, την οποία αναφέρει και σχολιάζει ο Ήρων σχετικά με τις διατάξεις των στάσιμων αυτόματων μηχανισμών που χρησιμοποιήθηκαν. Αλλά και ο Φίλων έχει ορισμένες επικρίσεις σχετικά με κατασκευαστικές λεπτομέρειες των καταπελτών του Ήρωνα, που σημαίνει ότι είχε μελετήσει το έργο του. [4] [10]

Ο E. Hoppe (1927) τοποθετεί τον Ήρωνα στο δεύτερο μισό του 2^{ου} π.Χ αιώνα, στηριζόμενος στη λειτουργία της διόπτρας του Ήρωνα στην οποία η διαίρεση του κύκλου γίνεται σε 360° και όχι σε μέρη της ορθής γωνίας, που ήταν ο τρόπος μέτρησης των γωνιών από τους αρχαίους Έλληνες και τους Αιγυπτίους. Επειδή ο πρώτος που έκανε τη διαίρεση σε μοίρες στην Ελλάδα ήταν ο Ίππαρχος, ενώ ο υπολογισμός των χορδών προστέθηκε γύρω στο 133 π.Χ, ο E. Hoppe υποστηρίζει ότι ο Ήρων έγραψε τα τελευταία έργα του, όπως την «Διόπτρα», μετά το 133 π.Χ. [4]

Ο W. Schmidt θεωρεί πιθανόν ο Ήρων να ζούσε στον 1° μ.Χ. αιώνα, στηριζόμενος στο ότι στο έργο του «Μηχανική» περιγράφει ένα μικρό βελτιωμένο πιεστήριο με ένα μόνο κοχλία (ελαιοτριβείο) που αντικατέστησε από το έτος 55 μ.Χ. το παλιό πιεστήριο, το οποίο λειτουργούσε με τη βοήθεια μοχλού με υπομόχλιο και ενός μεγάλου λίθου. [4]

Ο Heiberg (1925) στην Ιστορία των Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών της αρχαιότητας, τοποθετεί τον Ήρωνα γύρω στο 200 μ.Χ. (μετά τον Πτολεμαίο), βασιζόμενος στην εργασία της I. Hammer-Jensen καθώς και στις ελλείψεις των κειμένων του Ήρωνα αλλά και στη σημασία που δίνει στην πόλη της Ρώμης και τους λατινισμούς του. [4] Όμως στον Τόμο V των απάντων του Ήρωνα ο Heiberg αποδέχεται, όπως αναφέρει και ο T. L. Heath, την τοποθέτηση του Ήρωνα στον 3° μ.Χ. αιώνα. [10]

Ο Χρ. Κηπουρός (1995) [4] τοποθετεί την ακμή του Ήρωνα μεταξύ του 125 μ.Χ. έως 200 μ.Χ. Θεωρεί ότι ο Ήρων έζησε μετά το 125 μ.Χ. την εποχή του αυτοκράτορα Ανδριανού που ήκμασε ο Θέων ο Σμυρναίος. Ο Θέων ο Σμυρναίος επέκτεινε την έννοια του «γνώμονος», που μέχρι τότε είχε χρησιμοποιηθεί στη γεωμετρία και στους αριθμούς για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Ο Ήρων τοποθετείται μετά τον Θέωνα τον Σμυρναίο αφού στο έργο του «Όροι» δημιουργεί τον όρο 58 συγχωνεύοντας τον ορισμό του Θέωνα με τον αντίστοιχο γεωμετρικό, δίνοντας έτσι απάντηση στο «τι έστι γνώμων κοινώς;», καθώς επίσης μας πληροφορεί για την επέκταση αυτή. Επίσης τοποθετεί τον Ήρωνα πριν από τον Πάππο, που έζησε τον 3° μ.Χ. αιώνα, ο οποίος συγκαταλέγει τον Ήρωνα μεταξύ των

«παλαιών γεωμετρών» στο έργο του «Μαθηματικών Συναγωγών Βιβλία», χωρίς να αναφέρει πόσο «παλαιός» ήταν σε σχέση με αυτόν. Άλλα στοιχεία στα οποία βασίζεται ο Χρ. Κηπουρός [4] είναι οι μετρικοί πίνακες του Ήρωνα που τον τοποθετούν σε Ρωμαϊκή εποχή, ο Vitruvius στην Architectura (14 π.Χ) που δεν μνημονεύει καθόλου τον Ήρωνα ενώ αναφέρει τον Κτησίβιο και τον Φίλωνα τον Βυζαντινό. Ακόμα, η σίγουρη επίδραση του Ποσειδώνιου (135-51 π.Χ) στον Ήρωνα στον ορισμό των παραλλήλων και στη διαίρεση των τετραπλεύρων, καθώς και η κατάταξη των γραμμών και των επιφανειών του Ήρωνα που έχει την ίδια δομή της κατάταξης από τον Γεμίνο (1^{ος} π.Χ αιώνας), η χρησιμοποίηση από τον Ήρωνα του ίδιου τύπου υπολογισμού του εμβαδού κυκλικού τμήματος με τον Ρωμαίο μηχανικό Columella (62 μ.Χ), η αναφορά του Ήρωνα στους «Πίνακες των Χορδών» που αν δεν εννοεί του Ίππαρχου μπορεί να αναφέρεται στου Μενελάου ή του Πτολεμαίου (150 μ.Χ) και τέλος η άποψη του A. Stein ότι ο Διονύσιος ήταν νομάρχης της Αιγύπτου κατά το 188 μ.Χ.

2.2 ΠΟΙΟΣ ΗΤΑΝ Ο ΗΡΩΝ – ΧΑΡΑΚΤΗΡΑΣ ΤΩΝ ΕΡΓΩΝ ΤΟΥ

Διαμάχη επίσης έχει δημιουργηθεί και για το τι είδους άνθρωπος ήταν ο Ήρων. Προκειμένου να διακρίνεται από άλλα πρόσωπα με το ίδιο όνομα ο Πάππος τον αναφέρει ως «ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς», ο Πρόκλος και ο Δαμιανός ως «ο Ήρων ο Μηχανικός», ενώ από άλλους Έλληνες και από τους Άραβες αναφερόταν ως «Μαθηματικός» και «Φιλόσοφος». Ιστορικοί και μελετητές εκφράζουν διαφορετικές απόψεις σχετικά με το αν ο Ήρων υπήρξε ένας αξιόλογος επιστήμονας ως μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός ή ένας πρακτικός τεχνίτης και χωρομέτρης.

Ο ιστορικός H. Diels (1893), υποστηρίζει ότι «ο Ήρων ήταν ένας απλός χειρονάκτης και δεν ήταν άνθρωπος της επιστήμης αλλά πρακτικός τεχνικός χωρομέτρης». Κατά τον παραπάνω χαρακτηρισμό για τη λέξη «Χειρονάκτης» χρησιμοποίησε τη λέξη “Banause” που προέρχεται από την ελληνική λέξη «Βάναυσος» και σημαίνει άνθρωπος χωρίς καμία αντίληψη για την τέχνη, ενώ για τη λέξη «Χωρομέτρης» χρησιμοποίησε τη λέξη “Feldmesser” που σημαίνει «Μετρητής Αγροτεμαχίων». Την άποψή του αυτή ενίσχυσε και ο Heiberg με μια ανακοίνωσή του το 1925 στην Ιστορία των Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών. Την ίδια άποψη με τον H.Diels, εκφράζει και η I.Hammer-Jensen (1913) χαρακτηρίζοντας επιπλέον τον Ήρωνα ως «Ανθολόγο», χωρίς επιστημονική μόρφωση που δεν κατανοεί σαφώς τις πηγές του. [4]

Ο T.L. Heath (1931) [10] γράφει ότι ο Ήρων υπήρξε ένας σχεδόν εγκυκλοπαιδικού τύπου συγγραφέας έργων σχετικών με τα Μαθηματικά και τη Φυσική, ο οποίος είχε στόχο περισσότερο την πρακτική χρησιμότητα παρά τη θεωρητική πληρότητα, για το οποίο ευθύνεται σε μεγάλο βαθμό το

περιβάλλον του στην Αίγυπτο. Ο Ήρων διεκδικεί ελάχιστα ή και καθόλου την πρωτοτυπία των αποτελεσμάτων του. Συχνά παραθέτει τις πηγές που χρησιμοποιεί, όμως συχνότερα παραλείπει να τις αναφέρει χωρίς να έχει την παραμικρή πρόθεση να παραπλανήσει. Όταν πράξει οτιδήποτε κρίνει κατάλληλο ώστε να βελτιώσει έστω και λίγο μεθόδους των προκατόχων του, τότε αναφέρει το γεγονός, που δείχνει την πρόθεσή του να παρουσιάζει απλά τις καλύτερες παραδοσιακές μεθόδους στη μορφή που θεωρεί ευκολότερη προς κατανόηση και εφαρμογή.

Σύμφωνα με τον A.G Drachmann [16] μια τόσο δυσμενής κρίση για τον Ήρωνα βασίστηκε σε μια μελέτη του έργου του «Πνευματικά», όταν η «Μηχανική» και τα «Μετρικά» δεν ήταν ακόμα γνωστά. Τα «Πνευματικά» παρόλο που ήταν το πιο μεγάλο έργο του Ήρωνα, δεν ήταν ικανά να εμπνεύσουν εμπιστοσύνη σε έναν σοβαρό μελετητή, ούτε μέσα από το περιεχόμενό τους ούτε από τη μορφή τους. Στο περιεχόμενό τους, εκτός από την εισαγωγή, δεν υπάρχει κανένα θεωρητικό θέμα, αλλά αποτελείται από πρακτικές εφαρμογές που ήταν σχεδόν αποκλειστικά συσκευές για «διασκεδαστικά μαγικά του σαλονιού». Η μορφή του έργου δεν είχε κανένα εξωτερικό σχέδιο στην ταξινόμηση των κεφαλαίων. Τα «Πνευματικά» μπορεί να θεωρηθούν ως μια συλλογή σημειώσεων από τα οποία μόνο η εισαγωγή και τα πρώτα έξι κεφάλαια έχουν πάρει την τελική τους μορφή. Στην εισαγωγή του έργου «Πνευματικά» ο H. Diels βρήκε την παράθεση ενός αποσπάσματος από τον Στράτο της Λαμψάκου (288 π.Χ) και εκτίμησε ότι είχε παρθεί από τον Φίλωνα τον Βυζαντινό (250 π.Χ), ο οποίος πιθανώς το πήρε από τον Κτησίβιο (270 π.Χ). Η θεωρητική μορφή της εισαγωγής αυτής οδήγησε την I. Hammer-Jensen να υποθέσει ότι ο Ήρων ήταν ένας αμαθής που δεν καταλάβαινε τι αντέγραφε από τις διάφορες πηγές. Όμως όλα τα κεφάλαια είναι ομοιόμορφα σε ύφος, ακόμα και αυτά που πάρθηκαν από τον Φίλωνα και έξοχα σαφή και επομένως ο χαρακτηρισμός του Ήρωνα ως «αγράμματου, ανίδεου μεταφραστή» δεν μπορεί να στηριχθεί. Για τον Drachmann το ελεύθερα ρέον και μάλλον ασυνάρτητο ύφος του Ήρωνα υποδηλώνει έναν καλά πεπειραμένο στο αντικείμενό του άνθρωπο, που δίνει μια γρήγορη περίληψη σε ένα ακροατήριο που γνωρίζει ή αναμένεται να γνωρίζει πολλά γι αυτό. Επίσης ενώ δεν υπάρχει καμία τάξη γενικότερα στη διευθέτηση των κεφαλαίων, βρίσκεται εδώ και εκεί μια σειρά σχετικών μεταξύ τους κεφαλαίων στα οποία φαίνεται καθαρά ότι ο Ήρων ψάχνει για μια καλύτερη λύση σε ένα μηχανικό πρόβλημα που μελετά, γεγονός που δείχνει αλάνθαστα ότι ήταν ένας εφευρέτης. Ο Drachmann επισημαίνει ότι η εικόνα για τον Ήρωνα άλλαξε από τότε που το έργο του «Μηχανική» δημοσιεύτηκε στα Αραβικά και όταν επίσης ήρθε στο φως το χειρόγραφο που δίνει τα «Μετρικά» στην πρωτότυπη μορφή τους.

Η «Μηχανική» δεν παρουσιάζει τίποτα από την αταξία των «Πνευματικών», αφού αποτελείται από μια εισαγωγή, ένα θεωρητικό μέρος και ένα πρακτικό μέρος. Και εδώ επίσης συναντάται το ασυνάρτητο ύφος, που

είναι τόσο πολύ διαφορετικό από το συνοπτικό ύφος των τεχνικών περιγραφών του. Ο Ήρων επιλέγει και πάλι το καλύτερο, παρουσιάζοντας τη θεωρία του κέντρου βάρους όπως εξηγήθηκε από τον Αρχιμήδη και όχι αυτή από τον Ποσειδώνιο τον Στωικό, του οποίου ο ορισμός θεώρησε ότι δεν ήταν αρκετά καλός. Ο Drachmann τονίζει ότι εδώ πάλι υπάρχει μια δυνατή εισήγηση ενός δασκάλου που επαναλαμβάνει ταχύτατα ένα κομμάτι γνώσης το οποίο οι μαθητές του οφείλουν να γνωρίζουν. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο Ήρων δίδασκε στο «Μουσείο» της Αλεξάνδρειας, Μαθηματικά, Φυσική, Πνευματικά και Μηχανική, γράφοντας για τους μαθητές του και εγχειρίδια πάνω στα αντικείμενα αυτά, σε γλώσσα κατανοητή από αυτούς και αυτή ήταν η καθομιλουμένη γλώσσα του λαού, όπως φαίνεται στα έργα του. Πολλοί μελετητές θεωρούν ότι ο Ήρων όχι μόνο δίδασκε στο «Μουσείο», όπου βρισκόταν και η περίφημη Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, αλλά ήταν διορισμένος διευθυντής αυτής της Ανώτατης Τεχνικής Σχολής, που αποτέλεσε το πρώτο Πολυτεχνείο στον κόσμο και υποστηριζόταν από τους Πτολεμαίους.

Τα «Μετρικά» δείχνουν ότι ο Ήρων κατείχε όλη τη μαθηματική γνώση της εποχής του. Από το έργο του «Διόπτρα» φαίνεται ότι ήταν και γνώστης της Αστρονομίας, ενώ γενικότερα παραθέτει και αποσπάσματα από τον Αρχιμήδη.

3. ΣΥΓΓΡΑΦΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ

Τα έργα του Ήρωνα που διασώθηκαν και έφτασαν σε εμάς είτε ως γνήσια είτε ως μεταποιημένα από τους διάφορους αντιγραφείς ή μεταποιητές, εκδόθηκαν τελικά από το 1899-1914 από τον εκδοτικό οίκο B.G Teubner της Λειψίας σε 5 τόμους και είναι τα παρακάτω:

1. **«Μετρικά»:** Αποτελούνται από τρία βιβλία με γενικά προβλήματα μετρήσεων γεωμετρικών σχημάτων, επιπέδων και στερεών.
2. **«Όροι (ή Ορισμοί) Γεωμετρίας»:** Αποτελεί ένα είδος λεξικού γεωμετρικών όρων με 132 ορισμούς.
3. **«Γεωμετρικά»:** Περιέχουν εφαρμοσμένα γεωμετρικά προβλήματα, βασισμένα στο βιβλίο «Μετρικά Ι».
4. **«Στερεομετρικά»:** Αποτελούνται από δύο βιβλία με πρακτικά προβλήματα στερεομετρίας βασισμένα στο βιβλίο «Μετρικά ΙΙ».
5. **«Περί μέτρων»:** Περιέχουν πίνακες μέτρων μήκους και επιφάνειας αλλά και μέτρων χωρητικότητας, εργαλεία για υπολογισμούς μετρήσεων, βασισμένα στα «Μετρικά» και στα «Στερεομετρικά».
6. **«Γεωδαισία»:** Τοπογραφική ανάλυση που περιέχει αποσπάσματα από τους «Όρους» και τα «Γεωμετρικά».
7. **«Πνευματικά»:** Αποτελούνται από δύο βιβλία, εγχειρίδια για πνευματικά και υδραυλικά συστήματα, που περιγράφουν συσκευές οι οποίες λειτουργούν με την πίεση του αέρα, ή του ατμού, ή του νερού. Αναλυτικότερα, περιγράφονται η λειτουργία της πιο γνωστής κατασκευής του Ήρωνα, της «αιολόσφαιρας» ή της «Αιόλου Πύλης» που ήταν η πρώτη ατμομηχανή, σιφώνια, η αυτόματη πόρτα για ναούς κατά τη διάρκεια θυσίας με ταυτόχρονο σάλπισμα, αυτοματισμοί για το θέατρο όπως πολλαπλές εναλλασσόμενες σκηνές κινούμενων μορφών που συνοδεύονταν από οπτικά και ηχητικά εφέ με τη βοήθεια νερού ή αέρα, κατασκευή αυτορυθμιζόμενου λύχνου που συντηρεί τη φλόγα αυτόματα όσο περιέχει λάδι, η «κρήνη» του Ήρωνα δηλαδή σιντριβάνι που λειτουργούσε με πεπιεσμένο αέρα, το «δικαιόμετρο» δηλαδή αγγεία-τρυκ που διανέμουν κρασί ή νερό ισόποσα ή σε σταθερές αναλογίες, πουλιά που κελαηδούν και ηχούν τρομπέτες (υδραυλικός αυλός), κούκλες που κινούνται όταν ανάβει φωτιά σε έναν βωμό, ζώα που πίνουν νερό όταν τους προσφέρεται.
8. **«Περί Αυτοματοποιητικής»:** Περιγράφει αυτόματα μηχανικά συστήματα για κινήσεις σκηνικών στο θέατρο. Επίσης περιγράφει δύο ειδών θέατρα, ένα μεταβλητό – κινούμενο αυτόματα μπροστά από το κοινό εμφανίζοντας έναν ναό όπου στο βωμό ανάβει μια φωτιά και ο θεός Διόνυσος κάνει σπονδή ενώ γύρω του χορεύουν οι Βάκχες υπό τους ήχους τρομπετών και ταμπούρλων. Και ένα στατικό – μόνιμο θέατρο που ανοίγει και κλείνει αυτόματα τις πόρτες του κατά την παράσταση του μύθου του Ναυπλίου, με πλοία να διασχίζουν τη θάλασσα όπου δελφίνια πηδούν. Η οδηγήτρια δύναμη

και στις δύο περιπτώσεις για την κίνηση των αυτομάτων προκαλούνταν από την πτώση ενός μολύβδινου βάρους, που ήταν συνδεδεμένο στον άξονα του κινητήριου τροχού με ένα σχοινί και οι περιελίξεις του σχοινιού επάνω στον άξονα επέφεραν τις αυτόματες κινήσεις.

9. **«Μηχανική»:** Αποτελείται από τρία βιβλία και είναι ένα εγχειρίδιο για αρχιτέκτονες, μηχανικούς, χτίστες και εργολάβους, όπου περιέχεται η θεωρία της στατικής και κινηματικής των σωμάτων. Στο 1^{ο} βιβλίο και στο 1^{ο} κεφάλαιο έχει παρεμβληθεί και περιγράφεται μια ανυψωτική μηχανή για μεγάλα φορτία που χρησιμοποιεί οδοντωτούς τροχούς με δοθείσα δύναμη και ονομάζεται «βαρούλκος», δανεισμένο από το έργο «Βαρούλκος» για να καλυφθεί η απώλεια του πραγματικού 1^{ου} κεφαλαίου της «Μηχανικής». Στα επόμενα κεφάλαια περιγράφονται πως κατασκευάζονται επίπεδα και στερεά σχήματα με δοθέντα λόγο ομοιότητας με δοσμένο σχήμα, το κεκλιμένο επίπεδο και η κίνηση κυλίνδρου πάνω σε αυτό (θεωρία κίνησης), καθώς και η θεωρία του κέντρου βάρους και της ισορροπίας βασισμένη στον Αρχιμήδη. Στο 2^{ο} βιβλίο περιγράφονται οι πέντε απλές «δυνάμεις» (μηχανές), δηλαδή η σφήνα, ο μοχλός, ο κοχλίας, το πολύσπαστο (τροχαλία) και το βαρούλκο, καθώς και συνδυασμοί τους για την ανύψωση μεγάλων φορτίων, ακόμη απαντήσεις σε δεκαεπτά ερωτήσεις σχετικές με προβλήματα φυσικής εμπνευσμένα από τα «μηχανολογικά προβλήματα» του Αριστοτέλη. Επίσης περιγράφεται η εύρεση του κέντρου βάρους σε διάφορα επίπεδα σχήματα αλλά και η κατανομή του βάρους στα υποστηρίγματά τους. Στο 3^{ο} βιβλίο περιγράφονται μηχανές μεταφοράς φορτίων στο επίπεδο, ανυψωτικές μηχανές και τα εξαρτήματά τους όπως το «άγκιστρο», η «αρπάγη», άλλοι μηχανισμοί μεταφοράς όπως ο εναέριος σιδηρόδρομος για τη μεταφορά ογκόλιθων καθώς και πρέσες μοχλού ή με έναν ή με δύο κοχλίες όπως το πιεστήριο κρασιού.

10. **«Περί Διόπτρας»:** Το πρώτο τοπογραφικό σύγγραμμα που περιέχει στοιχεία τοπογραφικών μετρήσεων συνδυάζοντας τις μεθόδους πρακτικής γεωμετρίας με τη χρήση της διόπτρας. Αρχίζει με τη λεπτομερή περιγραφή της «διόπτρας» και των εξαρτημάτων της, ενός οργάνου μέτρησης και χάραξης γωνιών και αποστάσεων, ανάλογου με τον σημερινό «θεοδόλιχο» (που μετρά αζιμούθια, ύψη, μήκη και γωνιακές αποστάσεις) και τη χρησιμοποιούσαν τόσο στη γεωδαισία για επίγειες εφαρμογές όσο και για αστρονομικές παρατηρήσεις. Εξετάζει προβλήματα υπολογισμού υψών και υψομετρικής διαφοράς μεταξύ δύο μη προσιτών σημείων καθώς και επίγειων αποστάσεων οσοδήποτε μεγάλων με τη χρήση της διόπτρας. Για τη μέτρηση διαστημάτων επάνω στη γη χρησιμοποιεί και το «οδόμετρο» αυτόνομο όργανο που προσαρμόζεται σε οποιοδήποτε τροχοφόρο αποτελούμενο από ένα σύμπλεγμα οδοντωτών τροχών και ατέρμονων κοχλιών που μετέφεραν την κίνηση και τη μετέτρεπαν σε μονάδες μέτρησης μήκους, οι οποίες καταγράφονταν από ένα σύστημα δίσκων στο επάνω μέρος του οργάνου. Μια παραλλαγή του οδόμετρου είναι και το θαλάσσιο δρομόμετρο για χρήση σε πλοία. Ακόμη εξετάζει τεχνικά προβλήματα όπως τη διάνοιξη υπόγειας

ευθύγραμμης σήραγγας μεταξύ των άκρων ενός βουνού δουλεύοντας ταυτόχρονα και από τα δύο στόμιά της, τη διάνοιξη φρέατος σε ένα βουνό που να καταλήγει κάθετα σε μια διώρυγα κάτω από το βουνό ή σε δοσμένο σημείο της για την απομάκρυνση εμποδίου και την κατασκευή λιμανιού με την μορφή κυκλικού τμήματος με δοσμένα άκρα. Επίσης μελετά προβλήματα μέτρησης μιας ακανόνιστης επιφάνειας και ενός καμπυλόγραμμου χωρίου επηρεασμένος από τη μέθοδο του Αρχιμήδη, που ξεκίνησε από τη μέθοδο «εξάντλησης» του Ευδόξου και περιέχει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, καθώς και προτάσεις που συναντάμε στα «Μετρικά» και ειδικότερα την απόδειξη του τύπου του Ήρωνα. Επιπλέον δίνει τρόπο αποκατάστασης και προσδιορισμού της θέσης των χαμένων ορόσημων, εκτός από δύο ή τρία, μιας επιφάνειας με δοσμένο το σχέδιο της. Στις αστρονομικές παρατηρήσεις περιγράφει τον υπολογισμό γωνιακών αποστάσεων των διαφόρων ουράνιων σωμάτων με τη χρήση της διόπτρα καθώς δηλώνει και τη μέθοδο εύρεσης της απόστασης μεταξύ δύο πόλεων, της Αλεξάνδρειας και της Ρώμης, παρατηρώντας ταυτόχρονα την έκλειψη της σελήνης στις δύο πόλεις. Τέλος και στο έργο αυτό περιγράφεται ο βαρούλκος.

11. **«Βαρούλκος»:** Ένα δοκίμιο που περιγράφει μεθόδους έλξης και ανύψωσης μεγάλων φορτίων, όπως ένα βάρος χιλίων ταλάντων, εφαρμόζοντας μια δύναμη πέντε ταλάντων που είναι η δύναμη ενός άνδρα. Ο ανυψωτής αυτός αποτελείται από παράλληλους οδοντωτούς τροχούς. Το δοκίμιο αυτό πιθανόν να είναι το ίδιο με αυτό που έχει βρεθεί στη θέση του 1^{ου} κεφαλαίου του 1^{ου} βιβλίου της «Μηχανικής» αλλά και στη θέση του κεφαλαίου 37 της «Διόπτρας», από κάποιους αντιγραφείς.

12. **«Βελοποιικά»:** Περιέχει τα παλαιότερα χειρόγραφα σχήματα. Παρουσιάζει τη θεωρία της βολής και αναφέρεται στην κατασκευή πολεμικών μηχανών που βασίζονται στην τάση της χορδής τόξου ή σε συνδυασμό χορδών, ιμάντων και τροχών για την εκσφενδόνιση λίθων ή σιδερένιων αντικειμένων εναντίων του αντιπάλου, όπως οι «γαστραφέτες» (είδη τόξων) και δύο καταπέλτες που δούλευαν με βίντσια σαν αυτούς που περιγράφηκαν από τον Βιτρούβιο και τον Φίλωνα.

13. **«Χειροβαλίστρα»** ή **«Χειροβαλίστρας κατασκευή και συμμετρία»:** Απόσπασμα ενός λεξικού που πραγματεύεται την κατασκευή μικρών βλητικών μηχανών οι οποίες λειτουργούσαν με το χέρι. Ειδικότερα η χειροβαλίστρα είναι μια μηχανή που επινοήθηκε για να εκσφενδονίζει βέλη σε μεγάλες αποστάσεις.

14. **«Κατοπτρικά»:** Περιέχει στοιχεία οπτικής. Ερευνά και αναπτύσσει τους νόμους της ανάκλασης του φωτός και εφαρμόζει τα συμπεράσματά του σε προβλήματα σχετικά με τις ιδιότητες των κατόπτρων. Απέδειξε ότι οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι μεταξύ τους ίσες, είτε το κάτοπτρο είναι επίπεδο είτε καμπύλο. Πραγματεύεται την κατασκευή και χρήση επίπεδων και καμπύλων (κοίλων ή κυρτών) κατόπτρων, αλλά και συνδυασμού τους, ώστε να ανακλούν αντικείμενα με έναν ιδιαίτερο τρόπο και να δημιουργούν παραμορφώσεις. Τέτοια κάτοπτρα ήταν το «πολυθέωρον»

κάτοπτρο με πολλά είδωλα, το δεξιόστροφο κάτοπτρο που απεικονίζει τη δεξιά πλευρά ως δεξιά και την αριστερή ως αριστερή, ο «πνευματιστής» που είναι μια διάταξη κατόπτρων σε δοσμένη θέση ώστε κάποιος που πλησιάζει δεν μπορεί να δει τον εαυτό του αλλά όποιο είδωλο επιθυμεί. Εντοπίζεται η πρώτη νύξη για την άποψη ότι η φύση καθοδηγείται από αρχές ακροτάτων, αφού ο Ήρων βασίζει την απόδειξή του στην αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, δηλαδή ότι το φως ακολουθεί το συντομότερο γεωμετρικά μονοπάτι, που έχει αντικατασταθεί πλέον με την αρχή του ελαχίστου χρόνου.

Τα παραπάνω διασωθέντα έργα του Ήρωνα μπορούν να καταταχθούν σε δύο κατηγορίες τα Μαθηματικά-Γεωμετρικά (1 έως 6) και τα Μηχανικά-Φυσικά έργα (7 έως 14). Από τα μαθηματικά έργα του που αναφέρθηκαν, μόνο οι «Όροι» και τα «Μετρικά» είναι απευθείας από τον Ήρωνα, ενώ από τα μηχανικά έργα του φαίνονται να έχουν γραφεί όλα από τον Ήρωνα εκτός ίσως από τη «Χειροβαλίστρα». Τα υπόλοιπα σύμφωνα με τον J.L. Heiberg είναι βυζαντινά σχολικά βιβλία – εγχειρίδια με τόσες πολλές προσθήκες που είναι αδύνατο να γνωρίζεις πιο είναι το γνήσιο του Ήρωνα και ποιο όχι, αφού λόγω της μεγάλης πρακτικής χρησιμότητάς τους έχουν επανεκδοθεί, επαυξηθεί και αλλοιωθεί από μεταγενέστερους συγγραφείς.

Έργα του Ήρωνα που δεν διασώθηκαν θεωρούνται τα «Καμαρικά», «Περί Ζυγίων», «Αστρολάβον», «Περί υδρίων ωροσκοπείων» (ρολόγια που η λειτουργία τους βασίζεται στην υδροστατική πίεση), «Γεωπονικόν».

Στη συνέχεια της παρούσας διπλωματικής, θα ασχοληθούμε με τα έργα του Ήρωνα «Γεωμετρικά» και «Μετρικά», όπου περιέχονται πλήθος προβλημάτων μέτρησης.

3.1 «ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ»

Τα «Γεωμετρικά», είναι ένα από τα δύο έργα που αποτελούν τον IV τόμο των απάντων του Ήρωνα, που εκδόθηκε από τον J.L. Heiberg με τον τίτλο “Definitiones – Geometrica” σε συνεργασία με τον εκδοτικό οίκο B.G. Teubner της Λειψίας το 1912.

Το έργο του Ήρωνα «Γεωμετρικά» φαίνεται ότι έχει υποστεί επεξεργασία καθώς επίσης και το έργο του «Στερεομετρικά», που οφείλεται στον ίδιο επεξεργαστή τον Πατρίκιο. Αυτό φαίνεται στο κεφάλαιο 21 (πρόβλημα 26), στα «Γεωμετρικά», κατά την μέτρηση πολυγώνων που δεν είναι ισόπλευρα και ισογώνια, δηλαδή κανονικά, όπου γίνεται μια προσθήκη, η «Προσθήκη Θεωρήματος από τον εξοχότατο Πατρίκιο» και αφορά: «το εμβαδό χωρίου που έχει άνισα πλάτη και το οποίο σε μήκος εκτείνεται κατά πολύ». Η μέτρηση αρχικά γίνεται σε τρίγωνο και γενικεύεται για χωρία με περισσότερα τμήματα, διαστάσεις του χωρίου.

Επίσης στο κεφάλαιο 21 (πρόβλημα 3), στα «Στερεομετρικά Ι» δηλώνεται ότι κατά τη μέτρηση της επιφάνειας του κίονα «η έκθεση του προβλήματος είναι μια διόρθωση του ίδιου Πατρίκιου, επειδή οι παλιοί δεν πρόσθεταν τις δύο διαμέτρους», ενώ ο Πατρίκιος χρησιμοποιεί στον υπολογισμό το ημιάθροισμα των διαμέτρων των δύο κύκλων, που είναι οι βάσεις του κίονα. Δεν είναι απόλυτα εξακριβωμένο πότε έζησε ο Πατρίκιος, ο Tannery όμως τον ταυτίζει με τον καθηγητή Μαθηματικών του $10^{ου}$ αιώνα μΧ, τον Νικηφόρο Πατρίκιο.

Στο κεφάλαιο 21, (προβλήματα 28, 29), στα «Γεωμετρικά», αναφέρεται και άλλη προσθήκη, η «προσθήκη θεωρήματος από τον εξοχότατο Μακάριο» και αφορά τον υπολογισμό της πλευράς ισόπλευρου τριγώνου γνωρίζοντας το εμβαδόν του (πρόβλημα 28) και γνωρίζοντας το ύψος του (πρόβλημα 29). Και για τον Μακάριο επίσης δεν είναι εξακριβωμένο το πότε έζησε, πιθανώς όμως να είναι ο Μακρής ή Μάκρος ή Ασπρόφυς (1381-1431), σύμφωνα με τον Χ. Κηπουρό, [4] ο οποίος σπούδασε θεολογία, μαθηματικά, γεωμετρία, αστρονομία και διετέλεσε σύμβουλος των αυτοκρατόρων Μανουήλ Β’ και Ιωάννη Η’ των Παλαιολόγων.

Στο έργο αυτό του Ήρωνα υπάρχουν γεωμετρικές μετρήσεις που αφορούν πρακτικές εφαρμογές. Τα βήματα επίλυσης εκτελούνται δίνοντας λακωνικές οδηγίες και δεν δικαιολογούνται, οι κανόνες δεν εξηγούνται, απλώς εφαρμόζονται σε παραδείγματα χωρίς αποδείξεις, ενώ για κάθε σχήμα δίνεται ένα πλήθος αριθμητικών παραδειγμάτων.

Σε αντίθεση με το έργο «Μετρικά», στα «Γεωμετρικά», τα διάφορα γεωμετρικά μεγέθη δίνονται με την μονάδα μέτρησής τους και όχι μόνο με την αριθμητική τους τιμή. Τα μήκη και τα εμβαδά στα προβλήματα εκφράζονται σε

συνάρτηση «ειδικών μέτρων», διαφορετικών μονάδων, οπότε απαιτείται μεγάλος αριθμός μετατροπών από τη μία μονάδα στην άλλη που έχουν ως αποτέλεσμα μακροσκελείς υπολογισμούς. Στο κεφάλαιο 4 (πρόβλημα. 9), δηλώνεται ότι «και η μέτρηση των θεωρημάτων γίνεται σύμφωνα με αυτά που ταξινομήθηκαν από τον Ήρωνα και τα είδη της μέτρησης που ταξινομήθηκαν είναι τα εξής…», [4] αναφέροντας όχι μόνο τα ονόματα πλήθους μονάδων μήκους, εμβαδού και όγκου, αλλά και τη μεταξύ τους αντιστοιχία. Ένας άλλος λόγος για την εμφάνιση στο έργο κάποιων ασυνεπειών στην αντιστοιχία διαφόρων μονάδων είναι και ο πιθανός εμπλουτισμός των πινάκων με μεταγενέστερες μονάδες από επεξεργασίες των κειμένων.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των προβλημάτων στα «Γεωμετρικά» είναι η χρήση του αιγυπτιακού τρόπου γραφής των κλασμάτων, κατά τον οποίο ένα κλάσμα εκφράζεται ως άθροισμα κλασματικών μονάδων. Εξαιτίας του τρόπου αυτού της παράστασης των κλασμάτων, υπήρχε δυσκολία στην εκτέλεση των μεταξύ τους πράξεων, ιδιαίτερα του πολλαπλασιασμού και γι αυτόν τον λόγο παρατηρείται συχνή επανάληψη του τρόπου εκτέλεσής του, που απευθύνεται πιθανόν στους μαθητευόμενούς του κατά την επίλυση των προβλημάτων.

Στο έργο «Γεωμετρικά», μετρούνται σχεδόν στο σύνολό τους τα εμβαδά των ίδιων σχημάτων με εκείνα του Βιβλίου Ι των «Μετρικών».

Τα κεφάλαια 1 έως 4, αποτελούν μια εισαγωγή του έργου, η οποία συμπεριλαμβάνει την προσφορά της Γεωμετρίας στη ζωή μας και τον ορισμό της ως επιστήμη (κεφ. 1), την αρχή των γεωμετρούμενων του Ήρωνα (κεφ. 2) όπου για άλλη μια φορά αναφέρεται η ανάγκη για μέτρηση και διανομή της γης στην Αίγυπτο λόγω των πλημμυρών του Νείλου, την εισαγωγή στα γεωμετρούμενα του Ήρωνα (κεφ. 3), με συγκεκριμένους ορισμούς για «γραμμές», γωνίες, είδη μέτρησης, τα προς μέτρηση επίπεδα σχήματα δίνοντας και τον αριθμό των θεωρημάτων που αφορούν το καθένα, καθώς και τέσσερεις προτάσεις και τέλος έναν πίνακα μέτρων μήκους και εμβαδού και μεταξύ τους αντιστοιχίες (κεφ. 4).

Τα κεφάλαια 5 έως 20, σύμφωνα με τον T. Heath [10] αν και στο μεγαλύτερο μέρος τους αντιστοιχούν στο περιεχόμενο του Βιβλίου Ι των «Μετρικών», φαίνεται ότι έχουν βασισθεί σε μια διαφορετική συλλογή, ενώ τα κεφάλαια 21 (προβλήματα 1 έως 25) και 22 (προβλήματα 2 έως 24), έχουν σαφώς ως πρότυπο τα «Μετρικά» αφού στο κεφάλαιο 21, το πρόβλημα 3 φέρει τον τίτλο «Ορισμός κύκλου που βρέθηκε σε άλλο βιβλίο του Ήρωνος», εννοώντας τα «Μετρικά».

Έχουμε λοιπόν μετρήσεις: Περί ισόπλευρων τριγώνων και ορθογωνίων τετραπλεύρων δηλαδή τετραγώνων (κεφ. 5), περί τετραπλεύρων ορθογωνίων παραλληλογράμμων ή ετερομήκη (κεφ. 6), περί ορθογωνίων τριγώνων (κεφ. 7), Πυθαγόρειος μέθοδος για το ορθογώνιο τρίγωνο (κεφ. 8), μέθοδος

κατασκευής ορθογωνίου τριγώνου κατά Πλάτωνα (κεφ. 9), περί ισοπλεύρων τριγώνων (κεφ. 10), περί ισοσκελών τριγώνων (κεφ. 11), περί σκαληνών τριγώνων (κεφ. 12), περί ισόπλευρων μη-ορθογωνίων τετραπλεύρων δηλαδή ρόμβων (κεφ. 13), περί ορθογωνίων παραλληλογράμμων (κεφ. 14), περί ρομβοειδών παραλληλογράμμων δηλαδή πλαγίων παραλληλογράμμων (κεφ. 15), περί των άλλων τετραπλεύρων σχημάτων τα οποία ονομάζονται τραπέζια, ισοσκελή ή μη (κεφ.16), περί κυκλικών σχημάτων (κεφ. 18), περί τμημάτων μικρότερων του ημικυκλίου (κεφ. 20), περί δακτυλίου (κεφ. 21), ευθυμετρικές μονάδες κατά Ευκλείδη (κεφ. 22).

Επισημαίνουμε τα εξής:

Στο κεφάλαιο 10, το εμβαδό ενός ισοπλεύρου τριγώνου υπολογίζεται μέσω του τύπου $\mathrm{H}_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)a^2$, χωρίς βέβαια να αποδεικνύεται, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η προσέγγιση που χρησιμοποιεί ο Ήρων για το $\sqrt{3}$ είναι $\frac{26}{15}$.

Στο κεφάλαιο 19, δίνει οκτώ παραδείγματα υπολογισμού του εμβαδού κυκλικού τμήματος μικρότερου από ημικύκλιο και στο κεφάλαιο 20 δίνει 14 παραδείγματα υπολογισμού εμβαδού κυκλικού τμήματος μεγαλύτερου από ημικύκλιο, εφαρμόζοντας τους εμπειρικούς προσεγγιστικούς τύπους των προβλημάτων 30, 31, 32 και 33 των «Μετρικών Ι». Δηλαδή:

	Μετρικά Ι	**Εμπειρικός τύπος**	**Γεωμετρικά**
Κυκλικό τμήμα < ημικυκλίου	Πρόβλημα 30	$\mathrm{E}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} = \frac{1}{2}(\beta + \upsilon)\cdot\upsilon,$ για $\beta \le 3\upsilon$ και $\mathrm{E}_{\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda.} = \frac{1}{2}3r^2,$ με $\pi = 3$	Κεφάλαιο 19 (προβλ.5), Κεφάλαιο 20 (προβλ.11)
	Πρόβλημα 31	$\mathrm{E}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} = \frac{1}{2}(\beta + \upsilon)\times\upsilon + \frac{1}{14}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2,$ για $\beta \le 3\upsilon$ (καλύτερη προσέγγιση) και	Κεφάλαιο 19 (προβλ. 1, 3, 8)

		$\mathrm{E}_{\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda.} = \frac{1}{2}r^2\left(3+\frac{1}{7}\right)$, με $\pi = 3+\frac{1}{7}$	
	Πρόβλημα 32	$\mathrm{E}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} \simeq \frac{4}{3}$ εγγεγραμένου τριγώνου στο τμήμα για $\beta > 3\upsilon$ ή $\mathrm{E}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} = \frac{3}{2}\beta\cdot\upsilon$	
Κυκλικό τμήμα > ημικυκλίου	Πρόβλημα 33	$\mathrm{E}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} = \mathrm{E}_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} - \mathrm{E}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.\\ \mu\iota\kappa\rho o\acute{\upsilon}}}$	Κεφάλαιο 20

Από τα Γεωμετρικά βρίσκουμε επιπλέον για την περίπτωση κυκλικού τμήματος μικρότερου του ημικυκλίου, τους εμπειρικούς τύπους υπολογισμού της περιφέρειας του τμήματος, δηλαδή τους τύπους:

$$\text{Περιφέρεια}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} = \sqrt{\beta^2+4\upsilon^2} + \frac{\upsilon}{4}$$

όπως στο κεφάλαιο 19 προβλ. 2,4,7 και στο κεφάλαιο 20 προβλ. 13,

ή εναλλακτικά:

$$\text{Περιφέρεια}_{\substack{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.}} = \sqrt{\beta^2+4\upsilon^2} + \left\{\sqrt{\beta^2+4\upsilon^2} - \beta\right\}\frac{\upsilon}{\beta}$$

όπως στο κεφάλαιο 20 πρόβλημα 7.

Στο κεφάλαιο 21 <u>προβλήματα 14 έως 23</u> και κεφ. 22 <u>προβλήματα 7 έως 14</u>, υπολογίζονται εμβαδά κανονικών πολυγώνων από το πεντάγωνο έως και το δωδεκάγωνο, επίσης με τη μορφή αλγορίθμου. Αν συμβολίσουμε με H_ν το εμβαδό κανονικού ν-γώνου πλευράς α κατά τον Ήρωνα, ταξινομώντας έχουμε:

Κεφάλαιο 21	Τύπος Εμβαδού	Κεφάλαιο 22	Τύπος Εμβαδού
		Πρόβλημα 3	$H_3 = \frac{13}{30}\alpha^2$
Πρόβλημα 14	$H_5 = \frac{12}{7}\alpha^2$	Πρόβλημα 7	$H_5 = \frac{5}{3}\alpha^2$
Πρόβλημα 15	$H_5 = \frac{5}{3}\alpha^2$		
Πρόβλημα 16	$H_6 = \frac{13}{5}\alpha^2$	Πρόβλημα 8	$H_6 = 6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)\alpha^2$
Πρόβλημα 17	$H_6 = 6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)\alpha^2$		
Πρόβλημα 18	$H_7 = \frac{43}{12}\alpha^2$	Πρόβλημα 9	$H_7 = \frac{43}{12}\alpha^2$
Πρόβλημα 19	$H_8 = \frac{29}{6}\alpha^2$	Πρόβλημα 10	$H_8 = \frac{29}{6}\alpha^2$
Πρόβλημα 20	$H_9 = \frac{51}{8}\alpha^2$	Πρόβλημα 11	$H_9 = \frac{51}{8}\alpha^2$
Πρόβλημα 21	$H_{10} = \frac{15}{2}\alpha^2$	Πρόβλημα 12	$H_{10} = \frac{15}{5}\alpha^2 = 3\alpha^2$
Πρόβλημα 22	$H_{11} = \frac{66}{7}\alpha^2$	Πρόβλημα 13	$H_{11} = \frac{66}{7}\alpha^2$
Πρόβλημα 23	$H_{12} = \frac{45}{4}\alpha^2$	Πρόβλημα 14	$H_{12} = \frac{45}{4}\alpha^2$

Διαπιστώνουμε ότι:

- Για το εμβαδό του κανονικού πενταγώνου δίνονται δύο τύποι: $H_5 = \frac{12}{7}\alpha^2$ και $H_5 = \frac{5}{3}\alpha^2$. Ο πρώτος είναι πιο ακριβής από τον δεύτερο.

Στα «Μετρικά Ι», πρόβλημα 18, δίνεται επίσης ο δεύτερος τύπος $H_5 = \frac{5}{3}\alpha^2$ και ο Ήρων επισημαίνει ότι αν έχουμε μια καλύτερη προσέγγιση του $\sqrt{5}$ από $\frac{9}{4}$, θα πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση για το εμβαδό του κανονικού πενταγώνου.

- Για το εμβαδό του κανονικού εξαγώνου δίνονται οι τύποι $H_6 = \frac{13}{5}\alpha^2$ και $H_6 = 6\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)\alpha^2$ που ουσιαστικά είναι ίδιοι, ενώ ο Ήρων θεωρεί ότι ο δεύτερος αναπαριστά την πιο ακριβή διαδικασία. Στην πραγματικότητα ακριβέστερο υπολογισμό έχουμε στα «Μετρικά Ι» πρόβλημα 19, όπου το εμβαδό του κανονικού εξαγώνου υπολογίζεται από τη σχέση $H_6^{\,2} = \frac{27}{4}\alpha^4$ οπότε $H_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^2$.

- Για το εμβαδό του κανονικού δεκαγώνου επίσης δίνονται δύο τύποι $H_{10} = \frac{15}{2}\alpha^2$ και $H_{10} = \frac{15}{5}\alpha^2 = 3\alpha^2$, όπου ο πρώτος είναι ακριβής.
- Οι τύποι των εμβαδών των υπολοίπων κανονικών πολυγώνων είναι ίδιοι με αυτούς που δίνονται στα «Μετρικά Ι».

Οι C.B. Boyer και U.C. Merzbach, [9] επισημαίνουν ότι το κενό που χώριζε την κλασική Γεωμετρία από τις μετρήσεις του Ήρωνα φαίνεται καθαρά από ορισμένα προβλήματα που διατυπώνει και λύνει ο Ήρων στα «Γεωμετρικά». Επιλέγουν ως αντιπροσωπευτικό αυτών των προβλημάτων, από το κεφάλαιο 21, το πρόβλημα 9:

«Όταν έχει δοθεί ο αριθμός που εκφράζει το άθροισμα και των τριών, δηλαδή της διαμέτρου, της περιμέτρου και του εμβαδού του κύκλου, να κατακερματιστεί και να βρεθεί κάθε ένας αριθμός».

Η λύση που έδωσε ο Ήρων είναι αλγοριθμική:
«Πράξε τα εξής:

- Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι ο 212.

- Πολλαπλασίαζε πάντοτε αυτόν επί 154 και γίνεται 32648.

(212x154=32648)

- Πρόσθεσε σε αυτά γενικά το 841 και γίνεται 33489

(32648+841=33489)

- Η τετραγωνική ρίζα γίνεται 183

($\sqrt{33489} = 183$)

- Αφαιρούμε από αυτά τα 29 και μένουν 154

(183-29=154)

- Το μέρος 1/11 αυτών γίνεται 14.

$$\left(\frac{1}{11}\cdot 154 = 14\right)$$

- Τόση είναι η διάμετρος του κύκλου».

(δ=14)

Εδώ ο Ήρων υπονοεί το άθροισμα των μέτρων της διαμέτρου της περιμέτρου και του εμβαδού, και ενώ τα τρία μεγέθη δεν έχουν ίδιες διαστάσεις και η λύση φαίνεται να είναι η εξής:

$$\delta + \mathrm{L}+\mathrm{E} = 212 \Leftrightarrow \delta + \pi\delta + \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = 212 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta + \frac{22}{7}\delta + \frac{22}{7}\frac{\delta^2}{4} = 212 \Leftrightarrow \delta + \frac{22}{7}\delta + \frac{11}{4}\delta^2 = 212 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{29}{7}\delta + \frac{11}{14}\delta^2 = 212 \Leftrightarrow 2\cdot 29\delta + 11\delta^2 = 14\cdot 212 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 11\cdot 29\delta + 11^2\delta^2 = 11\cdot 14\cdot 212 \Leftrightarrow 2\cdot 11\cdot 29\delta + 11^2\delta^2 = 154\cdot 212 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 11\cdot 29\delta + (11\delta)^2 + 29^2 = 32648 + 29^2 \Leftrightarrow (11\delta + 29)^2 = 32648 + 841 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (11\delta + 29)^2 = 33489 \Leftrightarrow 11\delta + 29 = \sqrt{33489} \overset{\substack{\text{απορρίπτεται} \\ \text{η αρνητική}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 11\delta + 29 = 183 \Leftrightarrow 11\delta = 183 - 29 \Leftrightarrow 11\delta = 154 \Leftrightarrow \delta = \frac{154}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = 14$$

Οι C.B. Boyer και U.C. Merzbach [9] συνεχίζουν την κριτική τους λέγοντας ότι το αξίωμα του Ευδόξου θα απέκλειε ένα τέτοιο πρόβλημα από θεωρητική άποψη γιατί τα τρία μεγέθη δεν έχουν τις ίδιες διαστάσεις, αλλά από μια μη

κριτική αριθμητική άποψη το πρόβλημα έχει νόημα. Ο Ήρων δεν έλυσε γενικά το πρόβλημα, αλλά ακολουθώντας πάλι τις προελληνικές μεθόδους, επέλεξε τη συγκεκριμένη περίπτωση στην οποία το άθροισμα είναι 212. Η δε λύση του ακολουθεί την παλιά συνταγή σύμφωνα με την οποία δεν δικαιολογούνται καθόλου τα βήματα της επίλυσης. Βρίσκει εύκολα την τιμή 14 για τη διάμετρο χρησιμοποιώντας την αρχιμήδεια τιμή του π και τη βαβυλωνιακή μέθοδο συμπλήρωσης του τετραγώνου για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Ο Ήρων δίνει απλώς λακωνικές οδηγίες: «πολλαπλασίασε το 212 με το 154, πρόσθεσε 841, βρες την τετραγωνική ρίζα, αφαίρεσε 29 και διαίρεσε με το 11». Αυτό δεν είναι τρόπος να διδάξει κανείς Μαθηματικά, αλλά τα βιβλία του χρησιμοποιούνταν ως εργαλεία του πρακτικού τεχνίτη…

Το κεφάλαιο 23 φέρει τον τίτλο «Εισαγωγαί Ήρωνος» και η πρώτη ενότητα αναφέρεται για άλλη μια φορά στην καταγωγή της Γεωμετρίας από την Αίγυπτο και την ανάγκη για μέτρηση και διανομή της γης. Οι επόμενες ενότητες αφορούν περί μέτρων μήκους, περί της ονομασίας των μέτρων και των σταθμών (νομισματικές μονάδες), περί μέτρων όγκου (στερεών και υγρών).

Στο κεφάλαιο 24, τα προβλήματα 1 και 2, είναι δύο σημαντικά προβλήματα απροσδιόριστης ανάλυσης. Ο Heiberg προσθέτει επίσης από το χειρόγραφο της Κωνσταντινούπολης, τα προβλήματα 3 έως 13 που περιλαμβάνουν επίσης προβλήματα απροσδιόριστης ανάλυσης καθώς και τα προβλήματα 14 έως 30 και 37 έως 51, όπου μετρούνται σχήματα εγγεγραμμένα σε άλλα, ή σχήματα περιγεγραμμένα γύρω από τα άλλα, καθώς και προβλήματα όπου μετρούνται κύκλοι και κυκλικά τμήματα.

Κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε στα προβλήματα απροσδιόριστης ανάλυσης σε ορισμένα από τα οποία προστίθενται ανομοιογενή δεδομένα διαφορετικών διαστάσεων λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις αριθμητικές τιμές τους, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως και σε άλλα από αυτά. Ο τρόπος με τον οποίον επιλύονται, είναι αυθαίρετος ή ακατανόητος.

Πρόβλημα 24.1

«Να βρεθούν τα εμβαδά δύο ορθογωνίων έτσι ώστε το εμβαδόν του πρώτου να είναι τριπλάσιο από το εμβαδό του δεύτερου».

Λύση (κατά τον Ήρωνα)

«Πράττω τα εξής:

Κυβίζω το 3 και γίνεται 27.	(3^3=27)
Πολλαπλασιάζω αυτά επί 2 και γίνεται 54	(27x2=54)
Αφαιρώ τώρα μια μονάδα, το υπόλοιπο γίνεται 53	(54-1=53)

Έστω λοιπόν η μια πλευρά είναι 53 πόδες, η άλλη 54 πόδες.

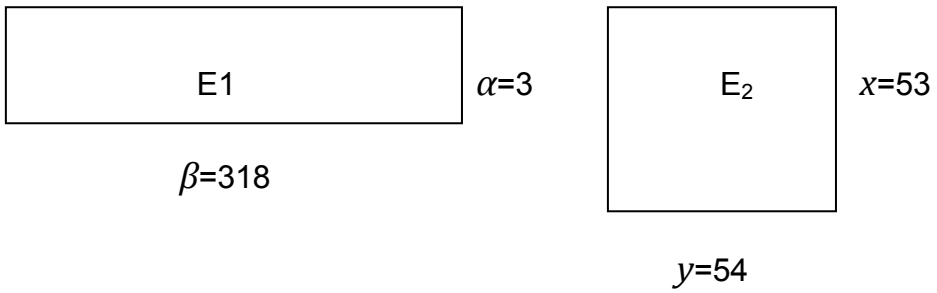
Και για το άλλο εμβαδό έτσι:
Πρόσθεσε τα 53 και τα 54 και γίνονται 107 πόδες (53+54=107)
Αυτά τα πολλαπλασιάζω επί 3 … (3x107=321)
… και γίνονται 318 πόδες (321-3=318)
Έστω λοιπόν η μια πλευρά 318 πόδες και η άλλη 3 πόδες
Το εμβαδό του ενός γίνεται 954 πόδες (τετραγωνικοί) (318x3=954)
και του άλλου 2862 πόδες (τετραγωνικοί) (53x54=2862)»

Ο τρόπος υπολογισμού των πλευρών από τον Ήρωνα φαίνεται ακατανόητος. Σύμφωνα με τον Χρ. Κηπουρό[1], το πρόβλημα παρουσιάζει απειρία λύσεων με τρεις παραμέτρους. Πράγματι, αν οι διαστάσεις των δύο ορθογωνίων είναι (α, β), του δοθέντος και (x, y) του ζητούμενου, τότε σε κάθε τριάδα φυσικών αριθμών (λ, μ, ν), αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα μια τετράδα διαστάσεων (x, α, β, y), που δίνονται από το σύστημα:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ \alpha = \mu \\ \beta = \lambda\nu \\ y = 3\mu\nu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{έτσι ώστε } xy = 3\lambda\mu\nu = 3\alpha\beta \\ \text{η μοναδική συνθήκη του προβλήματος} \end{array}$$

Η λύση του προβλήματος είναι η $(x,\alpha,\beta,y)=(\lambda,\mu,\lambda\nu,3\mu\nu)$, δηλαδή μια τριπαραμετρική απειρία λύσεων.

Η λύση που δίνει ο Ήρων στο πρόβλημα προκύπτει από την παραπάνω για $(\lambda,\mu,\nu)=(53,3,6)$ δηλαδή $(x,\alpha,\beta,y)=(53,3,318,54)$



με

$$\mathrm{E}_2 = xy = 54\cdot 53 = 2862 = 3\cdot 954 = 3\cdot(3\cdot 318) = 3\alpha\beta = 3\mathrm{E}_1$$

<u>Πρόβλημα 24.2</u>

«Να βρεθεί το εμβαδό χωρίου, του οποίου η περίμετρος να ισούται με την περίμετρο άλλου, ενώ το εμβαδόν του να είναι τετραπλάσιο αυτού».

<u>Λύση</u> (κατά τον Ήρωνα)

[1] [4] («Γεωμετρικά»)Υποσημείωση 1 σελ.417

«Πράττω τα εξής:
Κυβίζω το 4 και γίνεται 64 πόδες. (4^3=64)
Αφαιρώ τώρα μια μονάδα, το υπόλοιπο γίνεται 63 πόδες. (64-1=63)
Τόσο είναι η κάθε περίμετρος των δύο παραλλήλων πλευρών.
Για να υπολογίσουμε τις πλευρές, πράττω τα εξής:
Από τα 4 αφαίρεσε μια μονάδα και μένει 3 (4-1=3)
Η μία πλευρά λοιπόν είναι 3 πόδες.
Η άλλη πλευρά έτσι,
από τα 63 αφαίρεσε τα 3 και υπόλοιπο μένουν 60 πόδες. (63-3=60)
Για το άλλο χωρίο πράξε τα εξής:
Το 4 επί τον εαυτό του γίνονται 16 πόδες. (4x4=16)
Από αυτά αφαίρεσε μια μονάδα και γίνονται 15 πόδες. (16-1=15)
Τόσες πόδες είναι η πρώτη πλευρά, 15 πόδες.
Η άλλη πλευρά έτσι:
Αφαίρεσε τα 15 από τα 63, τα υπόλοιπα γίνονται 48 πόδες. (63-15=48)
Ώστε η άλλη πλευρά είναι 48 πόδες.
Το δε εμβαδό του ενός είναι 720 ποδών
και του άλλου 180 ποδών».

<u>Λύση</u> (με σημερινά μαθηματικά)

Έστω δύο ορθογώνια με διαστάσεις (α, β), του δοθέντος και (x, y) του ζητούμενου. Επίσης $\alpha+\beta=\kappa$ είναι η ημιπερίμετρος και $\alpha\cdot\beta=\lambda$ το εμβαδό E_1 του δοθέντος ορθογωνίου όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}^*$. Τότε τα α, β είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης :

$$\omega^2-(\alpha+\beta)\omega+\alpha\cdot\beta=0\Leftrightarrow\omega^2-\kappa\cdot\omega+\lambda=0 \quad (1)$$

Πρέπει:

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow\kappa^2-4\lambda\geq 0\Leftrightarrow\lambda\leq\frac{\kappa^2}{4}\ ,\ \text{δηλαδή}\ \mathrm{E}_1\leq\frac{\kappa^2}{4}.$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα πρέπει τα ορθογώνια να έχουν ίση περίμετρο και το εμβαδό E_2 του ζητούμενου ορθογωνίου να είναι τετραπλάσιο του εμβαδού E_1 του δοθέντος, δηλαδή $x+y=\kappa$ και $x\cdot y=4\lambda$. Τότε τα x,y είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $z^2-(x+y)z+x\cdot y=0\Leftrightarrow z^2-\kappa z+4\lambda=0 \quad (2)$
Πρέπει:

$$\Delta'\geq 0\Leftrightarrow\kappa^2-16\lambda\geq 0\Leftrightarrow\lambda\leq\frac{\kappa^2}{16}\ \text{δηλαδή}\ \mathrm{E}_1\leq\frac{\kappa^2}{16}.$$

Για να είναι τα x, y ρητοί αριθμοί πρέπει επίσης η $\Delta' = \kappa^2 - 16\lambda$ να είναι τετράγωνο ενός ρητού αριθμού.

Η λύση που δίνει ο Ήρων είναι μόνο η περίπτωση κατά την οποία κ=63, $E_1=\lambda=180$, $E_2=4\lambda=720$, οπότε οι εξισώσεις (1) και (2) γίνονται:

$\omega^2 - 63\omega + 180 = 0$ και $z^2 - 63z + 720 = 0$ με λύσεις τις: $(\alpha, \beta) = (3, 63)$ και $(x, y) = (48, 15)$ αντίστοιχα. Ο τρόπος όμως με τον οποίο τα υπολογίζει, φαίνεται ακατανόητος.

Σύμφωνα με τον Χρ. Κηπουρό[2], μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση του προβλήματος με διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήσαμε και στο πρόβλημα 24.1, ως εξής:

Έστω οι διαστάσεις των δύο ορθογωνίων (α,β), του δοθέντος και (x,y) του ζητούμενου, τότε σε κάθε τριάδα φυσικών αριθμών (λ,μ,ν) αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα μια τετράδα διαστάσεων (x,α,β,y) που δίνονται από το σύστημα:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ \alpha = \mu \\ \beta = \lambda\nu \\ y = 3\mu\nu \end{cases} \quad (3) \text{ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος.}$$

Δηλαδή: $E_2 = 4E_1 \Leftrightarrow xy = 4\alpha\beta$ και

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Leftrightarrow x + y = \alpha + \beta \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \lambda + 4\mu\nu = \mu + \lambda\nu \Leftrightarrow \lambda\nu - \lambda = 4\mu\nu - \mu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\nu - 1) = \mu(4\nu - 1) \overset{\nu \neq 1}{\Leftrightarrow} \lambda = \frac{\mu(4\nu - 1)}{\nu - 1} \Leftrightarrow \lambda = \mu\frac{4\nu - 4 + 3}{\nu - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu\left[\frac{4(\nu - 1)}{\nu - 1} + \frac{3}{\nu - 1}\right] \Leftrightarrow \lambda = \mu\left(4 + \frac{3}{\nu - 1}\right)$$

Για να είναι το λ φυσικός αριθμός πρέπει:

$g \qquad \nu = 2,$ επομένως $\lambda = 7\mu$ και τότε $(x, \alpha, \beta, y) = (7\mu, \mu, 14\mu, 8\mu)$

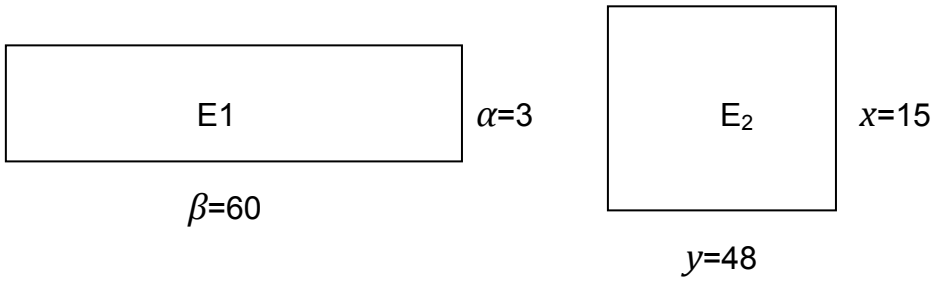
$g \qquad \nu = 4,$ επομένως $\lambda = 5\mu$ και τότε $(x, \alpha, \beta, y) = (5\mu, \mu, 20\mu, 16\mu)$

[2] [4] («Γεωμετρικά») Σχόλια σελ.471

Άρα το πρόβλημα έχει λύση δύο μονοπαραμετρικές οικογένειες διαστάσεων.

Η λύση που δίνει ο Ήρων στο πρόβλημα προκύπτει από την οικογένεια διαστάσεων:

$(\mathrm{x},\alpha,\beta,\mathrm{y})=(5\mu,\mu,20\mu,16\mu)$ για μ=3 δηλαδή η $(\mathrm{x},\alpha,\beta,\mathrm{y})=(15,3,60,48)$



με ημιπερίμετρο $x+y=15+48=63=3+60=\alpha+\beta$ και εμβαδά

$$\mathrm{E}_2=xy=15\cdot 48=720=4\cdot 180=4\cdot(3\cdot 60)=4\alpha\beta=4\mathrm{E}_1$$

<u>Πρόβλημα 24.10</u>

«Ενός ορθογωνίου τριγώνου το άθροισμα του εμβαδού και της περιμέτρου του είναι 280 πόδες. Να διαχωριστούν οι πλευρές και το εμβαδόν του».

<u>Λύση</u> (κατά τον Ήρωνα)

«Πράξε τα εξής:
Αναζήτησε τους παράγοντες που τον απαρτίζουν:
Απαρτίζει τον 280,
ο 2 φορές τον 140, ο 4 φορές τον 70, (280=2x140=4x70=
ο 5 φορές τον 56, ο 7 φορές τον 40, ο 8 φορές τον 35, =5x56=7x40=8x35=
ο 10 φορές τον 28, ο 14 φορές τον 20. =10x28=14x20)
Σκέφτομαι ότι ο 8 και ο 35 επαληθεύει την δοθείσα απαίτηση.
Το $\frac{1}{8}$ του 280 γίνεται 35 πόδες ($\frac{1}{8}$x280=35)
Λάμβανε πάντοτε 2 από τα 8 και μένουν 6 πόδες (8-2=6)
Πρόσθεσε τα 35 και το 6 και γίνονται 41 πόδες (35+6=41)
Αυτά πολλαπλασίασέ τα με τον εαυτόν τους
και γίνονται 1681 πόδες (41x41=1681)
Τα 35 επί τα 6 γίνονται 210 πόδες (τετραγωνικοί) (35x6=210)
Αυτά πάντα τα πολλαπλασιάζεις επί 8 και γίνονται
1680 πόδες (τετραγωνικοί) (8x210=1680)
Αυτά αφαίρεσέ τα από τα 1681 και μένει 1 (1681-1680=1)

Η τετραγωνική ρίζα αυτού είναι 1	$\sqrt{1}=1$
Αφαίρεσε από τα 41 το 1 και τότε μένουν 40	(41-1=40)
Το $\frac{1}{2}$ αυτών γίνεται 20	($\frac{1}{2}$x40=20)
Τόση είναι η κάθετη, 20 πόδες	
Και πάλι στο 41 πρόσθεσε 1 και γίνονται 42 πόδες	(41+1=42)
Το $\frac{1}{2}$ αυτών γίνεται 21 πόδες	($\frac{1}{2}$x42=21)
Η βάση θα είναι 21 πόδες	
Αφαίρεσε από τα 35 τα 6 και μένουν 29 πόδες	(35-6=29)
Πολλαπλασίασε την κάθετη επί την βάση	(20x21=420)
Το $\frac{1}{2}$ αυτών γίνεται 210 πόδες (τετραγωνικοί)	($\frac{1}{2}$x420=210)
Και οι τρεις πλευρές μετρούμενες, δίνουν άθροισμα 70 πόδες	(20+21+29=70)
Πρόσθεσέ τα στο εμβαδό και γίνονται 280 πόδες»	(70+210=280)

Ο Χ. Κηπουρός,[3] σημειώνει ότι είναι αδύνατο να κατανοήσει τον τρόπο εντόπισης των παραγόντων 35 και 8 του αριθμού 280 καθώς και την παραπέρα διαδικασία υπολογισμού των καθέτων πλευρών. Το ίδιο παρατηρείται και στα προβλήματα 21.11, 21.12, 21.13 και θέτονται τα δύο ερωτήματα:

i) Ποιος είναι ο τρόπος εντοπισμού των δύο παραγόντων του αθροίσματος των μέτρων του εμβαδού και της περιμέτρου και

ii) Ποια είναι η θεωρητική κάλυψη της διαδικασίας υπολογισμού των πλευρών;

Μια άποψη, κατά τον Χρ. Κηπουρό, είναι ότι ο Ήρων πρώτα κατασκεύασε τα τρίγωνα και στη συνέχεια αφού υπολόγισε τις πλευρές και το εμβαδό, έδωσε το άθροισμα περιμέτρου και εμβαδού. Η άποψη αυτή ενισχύεται και από το γεγονός ότι ο Ήρων, χρησιμοποίησε διαφορετικές οικογένειες ορθογωνίων τριγώνων, οι οποίες έχουν αντιπροσώπους τα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές: (20,21,29), (9,40,41), (8,15,17), (3,4,5) αντίστοιχα στο κάθε πρόβλημα.

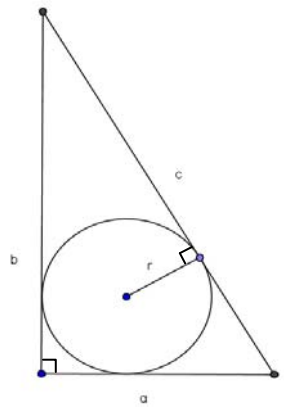
Οι C.B. Boyer και U.C. Merzbach [9] χαρακτηρίζουν το πρόβλημα 24.10 «αόριστο» πρόβλημα που ο Ήρων έδωσε μια μόνο λύση, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Αρχιμήδη για το εμβαδό ενός τριγώνου. Περιγράφοντας τη λύση με σύγχρονο συμβολισμό έχουμε:

[3] [4] («Γεωμετρικά») Υποσημειώσεις σελ.425

Έστω s η ημιπερίμετρος του τριγώνου και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου σ' αυτό κύκλου, τότε για το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:

$$\text{Εμβαδόν+περίμετρος} = 280 \Leftrightarrow r \cdot s + 2s = 280 \Leftrightarrow s(r+2) = 280$$

Ακολουθώντας τον δικό του πρακτικό κανόνα αναζήτησε τους παράγοντες του 280 και επέλεξε τους r+2=8 και s=35.



Τότε r=6 και επομένως το εμβαδό = $r \cdot s = 6 \cdot 35 = 210$

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, από τον τύπο

$\text{Εμβαδό} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ προκύπτει ότι :

$$\text{Εμβαδό} = s(s-c) \Leftrightarrow c = s - \frac{\text{Εμβαδό}}{s} = s - r = 35 - 6 \Leftrightarrow c = 29$$

Τότε $\alpha + b = 2s - c = 2s - s + r = s + r = 35 + 6 \Leftrightarrow \alpha + b = 41$

Επίσης $\text{Εμβαδό} = 210 \Leftrightarrow \frac{1}{2} a \cdot b = 210 \Leftrightarrow a \cdot b = 420$ και τότε α=20 και b=21

Ο Ήρων λοιπόν δεν αναφέρει τίποτε για τις υπόλοιπες παραγοντοποιήσεις του 280 που θα οδηγούσαν και σε άλλες λύσεις και δίνει μόνο μια λύση για το πρόβλημα.

Το άλλο έργο του τόμου IV, έχει τον τίτλο «Ορισμοί», ενώ η νεοελληνική έκδοσή του [4] έχει τίτλο «Ονόματα Γεωμετρικών Όρων», καθώς η λέξη «όρος» εκφράζει κάτι περισσότερο από τη λέξη «ορισμός». Η λέξη «όρος», εμπεριέχει επιπλέον ερμηνείες και διευκρινήσεις για την κατανόηση του ορισμού που εξετάζεται, που άλλωστε αυτός ήταν και ο σκοπός για τον οποίο ο Ήρων έγραψε το παραπάνω έργο κατά δήλωσή του στον Διονύσιο, δηλαδή την χρησιμότητά τους στην κατανόηση πολλών άλλων πεδίων της

Γεωμετρίας. Στον πρόλογο του έργου «Ορισμοί» ο Ήρων δηλώνει: «Εξοχότατε Διονύσιε, σου επισυνάπτω με συντομότατη περίληψη τα αξιόλογα προ της εκδόσεως των στοιχείων της Γεωμετρίας, ότι δε αφορά τη σύνταξη, τόσο στην εισαγωγή όσο και στο σύνολο, θα ακολουθήσω τη μέθοδο διδασκαλίας του Ευκλείδη, θεμελιωτή των στοιχείων της γεωμετρικής επιστήμης, διότι έτσι νομίζω, ότι όχι μόνον οι μελέτες εκείνου θα σου είναι εύληπτες, αλλά και πολλές άλλες, που ανήκουν στη Γεωμετρία. Αρχίζω λοιπόν από το σημείο». Κατόπιν ο Ήρων προχωρεί σε 132 ορισμούς και επεξηγήσεις γεωμετρικών εννοιών και γεωμετρικών σχημάτων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το έργο αποτελεί ένα είδος λεξικού γεωμετρικών όρων. [6]

Επίσης έχει μεγάλη αξία για τον ιστορικό των Μαθηματικών (T.Heath [10]), διότι δίνει διάφορους εναλλακτικούς ορισμούς θεμελιωδών εννοιών. Έτσι παράδειγμα, για τον ορισμό του ευθύγραμμου τμήματος, συναντάμε και τον ορισμό κατά τον Αρχιμήδη, αλλά και άλλους που οφείλονται στον Απολλώνιο, στον Ποσειδώνιο κλπ, σύμφωνα με τον Πρόκλο. Ο J.L. Heiberg κατά τη συγγραφή του τόμου IV, προσθέτει, όπως ο ίδιος αναφέρει στον πρόλογό του στη δική του αυτή έκδοση των «Ορισμών», αποσπάσματα από τη Γεωμετρία του Ήρωνα (όρος 133), αιτήματα και αξιώματα από τον Ευκλείδη (όρος 134), αποσπάσματα από τον Γεμίνο (όρος 135), αποσπάσματα από τα σχόλια του Πρόκλου στα «Στοιχεία του Ευκλείδη» (όροι 136-137) και τέλος αποσπάσματα από τον Ανατόλιο και τον Θέωνα τον Σμυρναίο, τα οποία όλα αυτά συγκεντρώθηκαν και ανθολογήθηκαν πιθανώς από κάποιον Βυζαντινό λόγιο. Επίσης ο J.L. Heiberg έλαβε υπόψη τους κώδικες που είχε συλλέξει ο Hultsch και επρόκειτο να εκδώσει ο W. Schmidt, (ο οποίος απεβίωσε πριν τελειώσει το έργο που είχε αρχίσει), καθώς και τον κώδικα της Κωνσταντινούπολης που εκδόθηκε από τον H. Schőne.

3.2 «ΜΕΤΡΙΚΑ»

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Τα «Μετρικά» είναι ένα από τα έργα του Ήρωνα που διασώθηκαν στα Ελληνικά. Η ανακάλυψη του ελληνικού κειμένου των «Μετρικών» έγινε το 1896 από τον Robert Schőne σε ένα χειρόγραφο που χρονολογείται από το 1100, το οποίο βρισκόταν στη βιβλιοθήκη των παλαιών ανακτόρων της Κωνσταντινούπολης. Εκδόθηκε και επιμελήθηκε από τον Herman Schőne, τον υιό του Robert, το 1903 και αποτελεί μαζί με την πραγματεία «Περί διόπτρας» τον III^{ο} τόμο των απάντων του Ήρωνα των εκδόσεων Teubner (Λειψία 1903).

Τα «Μετρικά» απαρτίζονται από τρία βιβλία με τίτλους «Μετρικά I», «Μετρικά II» και «Μετρικά III», η ύπαρξη των οποίων πριν την ανακάλυψη του έργου από τον R. Schőne, ήταν γνωστή από μια αναφορά του Ευτόκιου, σχολιαστή του Αρχιμήδη, ο οποίος στο υπόμνημά του στο έργο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις», αναφέρει ότι ο τρόπος προσέγγισης της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετράγωνου αριθμού παρουσιάζεται από τον Ήρωνα στα «Μετρικά».

Μια άλλη πηγή που επιβεβαιώνει τη γνησιότητα του περιεχομένου των «Μετρικών», του χειρόγραφου της Κων/πολης, είναι ένα απόσπασμα των «Μετρικών» σχετικό με τον «Τύπο του Ήρωνα» για το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του και την απόδειξή του, το οποίο είχε ανακαλύψει και δημοσιεύσει ήδη το 1894 ο Tannery από Παρισινό χειρόγραφο του 12^{ου} – 13^{ου} αιώνα, που περιείχε προλεγόμενα στη «Σύνταξη» του Πτολεμαίου και πιθανώς ήταν συγκεντρωμένα από τα υπομνήματα του Πάππου και του Θέωνα. [10]

Τα «Μετρικά» σύμφωνα με τον Χ. Κηπουρό, [3] [4] παρουσιάζουν πολλά κενά και σφάλματα, ενώ περιέχουν ωραία σχήματα που αριθμούν τα 116. Βέβαια τα λάθη αυτά είναι λάθη προσοχής ή διόρθωσης από αντιγραφείς οι οποίοι πιθανώς δεν είχαν γνώση του αντικειμένου. Σύμφωνα με τον T. Heath, [10] η πρακτική χρησιμότητα των «εγχειριδίων» του Ήρωνα ήταν τόσο μεγάλη, που ήταν φυσικό τα έργα αυτά να είναι σε μεγάλη χρήση και το και το πιο δημοφιλές από αυτά, εννοώντας τα «Μετρικά», να επανεκδοθεί, να αλλοιωθεί και να επαυξηθεί από μεταγενέστερους συγγραφείς, αφού τέτοια βιβλία βρίσκονταν σε συνεχή χρήση στην Ελληνική, Ρωμαϊκή, Βυζαντινή και Αραβική εκπαίδευση για αιώνες.

Σύμφωνα με τον T. Heath, [10] τα «Μετρικά», είναι το πιο σημαντικό από τα έργα του Ήρωνα επειδή φαίνεται ότι έχει διατηρήσει την αρχική του μορφή περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο έργο του.

Οι C.J. Boyer και U.C. Merzbach, [9] υποστηρίζουν ότι τα «Μετρικά» περιλαμβάνουν και μερικές αποδείξεις αλλά το κύριο μέρος του έργου αναφέρεται σε αριθμητικά παραδείγματα μέτρησης μηκών εμβαδών και όγκων. Όμως ο T. Heath, [10] θεωρεί ότι τα «Μετρικά» είναι το πιο θεμελιώδες από τα έργα του Ήρωνα, διότι παρέχει τη θεωρητική βάση των τύπων που χρησιμοποιούνται και δεν είναι απλά μια εφαρμογή κανόνων σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Κατά την επίλυση των προβλημάτων του, είτε αποδεικνύει γεωμετρικά τους τύπους που χρησιμοποιεί και ονομάζει την μέθοδο αυτή «ανάλυση» ενώ στη συνέχεια εφαρμόζει με αριθμητικά δεδομένα τον κανόνα – τύπο που απέδειξε και αυτήν την μέθοδο την ονομάζει «σύνθεση», είτε χρησιμοποιεί και βασίζεται σε τύπους προγενέστερων των οποίων αναφέρει τα ονόματα καθώς και τα έργα τους από τα οποία τους αντλεί, πληροφορώντας μας έτσι για τις πηγές του. Τέτοιες αναφορές έχουμε για τον Διονυσόδωρο, τον Εύδοξο, τον Πλάτωνα και ιδιαίτερα για τον Αρχιμήδη.

Μια άλλη ένδειξη ότι το έργο «Μετρικά», συνδέεται περισσότερο με τη θεωρία κατά τον T. Heath, [10] είναι ότι ο Ήρων χρησιμοποιεί μονόμετρα μεγέθη και όχι συγκεκριμένα μέτρα, δηλαδή απλούς αριθμούς ή μονάδες που σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να είναι πόδια, πήχεις, ή οποιαδήποτε άλλη μονάδα μέτρησης. Από τα κεφάλαια των βιβλίων των «Μετρικών», οι μεταγενέστεροι γνώρισαν τις αρχαίες μονάδες μέτρησης και τις μεταξύ τους σχέσεις, καθώς δίνει ατελείωτη σειρά μονάδων που χρησιμοποίησαν οι διάφοροι λαοί, όπως αναφέρουν οι Β.Σπάνδαγος, Ρ. Σπανδάγου, Δ. Τραυλού. [6]

Σε αντίθεση με τα υπόλοιπα έργα του Ήρωνα, στα «Μετρικά», χρησιμοποιείται κυρίως ο ελληνικός τρόπος γραφής των κλασμάτων, δηλαδή αυτός που χρησιμοποιείται και σήμερα και πολύ σπάνια, ο αιγυπτιακός τρόπος γραφής τους, δηλαδή το κλάσμα ως άθροισμα κλασματικών μονάδων.

«Στο έργο του αυτό, ο Ήρων αποδεικνύεται άριστος γνώστης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, την οποία χρησιμοποιεί με δεξιοτεχνία για να επιλύσει δύσκολα προβλήματα μετρήσεων και άλλων εφαρμογών» , όπως αναφέρει ο Γ. Θωμαΐδης. [26]

Τέλος, τα βιβλία των «Μετρικών» αποτελούν το παλαιότερο μνημείο μετρικής Γεωμετρίας ύψιστης αξίας στην ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, ενώ παράλληλα θεωρούνται ως το πιο αντιπροσωπευτικό μαθηματικό έργο του Ήρωνα. [4]

Το περιεχόμενο αυτών των τριών βιβλίων που συνθέτουν ένα «Εγχειρίδιο Χωρομέτρησης» [4] και των οποίων τα σπουδαιότερα σημεία θα αναλύσουμε στη συνέχεια, είναι:

«Μετρικά Ι»: Μέτρηση εμβαδών επίπεδων σχημάτων, ευθύγραμμων ή και μερικών καμπυλόγραμμων, καθώς επίσης και υπολογισμός επιφανειών ορισμένων στερεών σωμάτων.

«Μετρικά ΙΙ»: Μέτρηση των όγκων διαφόρων στερεών σωμάτων.

«Μετρικά ΙΙΙ»: Διαιρέσεις επίπεδων σχημάτων και στερεών σωμάτων κατά δοθέντα λόγο.

3.2.1 «ΜΕΤΡΙΚΑ» ΒΙΒΛΙΟ Ι
ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Στην εισαγωγή του Βιβλίου Ι των «Μετρικών» ο Ήρων αναφέρει τον γνωστό μύθο, (τον παλαιό θρύλο κατά τον Heath), της παραδοσιακής καταγωγής της Γεωμετρίας από την Αίγυπτο, ο οποίος επαναλαμβάνεται και στα «Γεωμετρικά», όπως και στη «Διόπτρα». Εκεί συναντάμε ένα από τα κύρια προβλήματα τη λύση του οποίου επεδίωκε η Γεωμετρία, το πρόβλημα του επαναπροσδιορισμού των ορίων εδαφικών εκτάσεων μετά από τις πλημμύρες του Νείλου που κατέστρεφαν τα ορόσημα. «Όταν τα όρια μιας επιφάνειας έχουν εξαλειφτεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να έχουν απομείνει μόνο 2 ή 3 ορόσημα, εκτός από ένα σχέδιο της επιφάνειας , να προσδιοριστούν εκ νέου τα εναπομείναντα ορόσημα». [4] Στη συνέχεια παραθέτει τις ανακαλύψεις του Ευδόξου και του Αρχιμήδη και αναφερόμενος στη σπουδαιότητα των πραγματειών τους, δηλώνει για το έργο του αυτό. «Επειδή λοιπόν η ανωτέρω πραγματεία είναι απαραίτητη κρίναμε σκόπιμο να συγκεντρώσουμε όσα χρήσιμα έχουν συγγράψει οι προγενέστεροί μας και όσα εμείς έχουμε βρει μέχρι σήμερα». Κατόπιν μας πληροφορεί για το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού.

Στα «Μετρικά», για τα διάφορα γεωμετρικά μεγέθη δίνονται μόνο αριθμητικές τιμές τους δηλαδή απλοί αριθμοί και αφήνεται στον αναγνώστη η επιλογή της αντίστοιχης μονάδας, αφού πρώτα έχει αναφερθεί ότι οι μετρήσεις των επιφανειών γίνονται συγκρίνοντάς τες με τετράγωνα χωρία όπως ο «εμβαδός πήχυς» και ο «εμβαδός πους».

Από το πρόβλημα 1 έως το πρόβλημα 8, γίνεται μέτρηση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η εύρεση του εμβαδού τριγώνου ορθογωνίου, ισοσκελούς (πρόβλημα 3), οξυγωνίου (πρόβλημα 5) και αμβλυγωνίου συναρτήσει των πλευρών και του ύψους του.

Πιο συγκεκριμένα για την εύρεση του εμβαδού ενός σκαληνού τριγώνου, οξυγωνίου ή αμβλυγωνίου όταν δίνονται τα μήκη των πλευρών τους, ο Ήρων παρουσιάζει δύο μεθόδους.

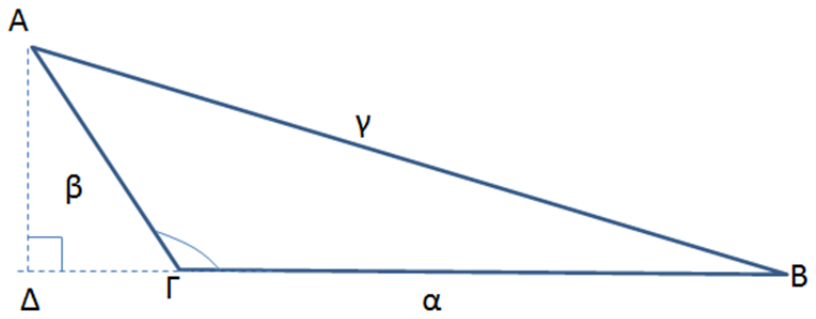
Η πρώτη μέθοδος που εφαρμόζει στα προβλήματα 5 και 6, προσδιορίζει αρχικά τα τμήματα στα οποία χωρίζεται κάθε πλευρά του τριγώνου από την κάθετη που άγεται από την απέναντι κορυφή, δηλαδή τις προβολές των δύο πλευρών του τριγώνου στην τρίτη πλευρά του και στη συνέχεια με τη βοήθεια των παραπάνω προσδιορίζει και το μήκος της κάθετης αυτής, δηλαδή του ύψους του τριγώνου.

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις παρακάτω προτάσεις του Ευκλείδη:

[4] [3] («Μετρικά-Διόπτρα») κεφ.25, σελ 268, 17-19

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.12: «Αν τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ώστε $\omega = \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ αμβλεία, τότε: $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ με $\mathrm{AB} = \gamma,\ \mathrm{B\Gamma} = \alpha,\ \mathrm{\Gamma A} = \beta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$ τότε από Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ = ορθογώνιο τρίγωνο έχω:

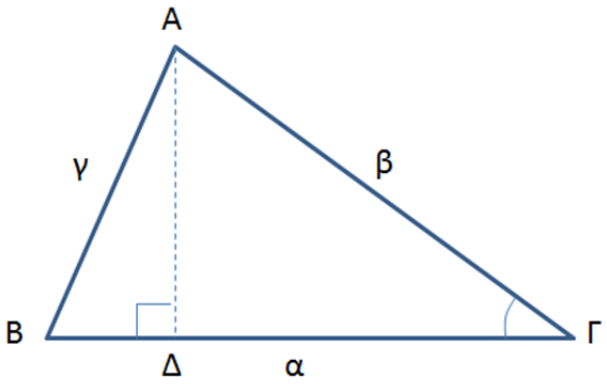


$$\gamma^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\mathrm{B}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + (\Delta\Gamma + \alpha)^2 \overset{\text{II.4}}{=}$$
$$= \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 + \alpha^2 + 2\Delta\Gamma \bullet \alpha =$$
$$= \mathrm{A\Gamma}^2 + \alpha^2 + 2\Delta\Gamma \bullet \alpha =$$
$$= \beta^2 + \alpha^2 + 2\Delta\Gamma \bullet \alpha > \beta^2 + \alpha^2$$

Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \bullet \Delta\Gamma$ και $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.13: «Αν τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ώστε $\omega = \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ οξεία, τότε: $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ με $\mathrm{AB} = \gamma,\ \mathrm{B\Gamma} = \alpha,\ \mathrm{\Gamma A} = \beta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$ τότε από Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}$ = ορθογώνιο τρίγωνο έχω:



$$\gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + (\alpha - \Delta\Gamma)^2 =$$
$$= A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 + \alpha^2 - 2\alpha \bullet \Delta\Gamma =$$
$$= \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \bullet \Delta\Gamma < \beta^2 + \alpha^2$$

Άρα $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \bullet \Delta\Gamma$ και $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$

Έτσι λοιπόν ο Ήρων στο πρόβλημα 4 κάνει χρήση του πορίσματος της επέκτασης του θεωρήματος του Πυθαγόρα σύμφωνα με το οποίο σε τρίγωνο ΑΒΓ, με πλευρές *α, β, γ* απέναντι από τις γωνίες Α, Β, Γ αντίστοιχα,

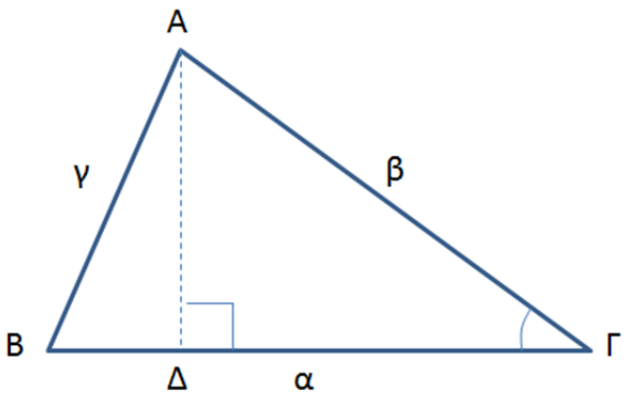
αν $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ τότε η $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία,

αν $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ τότε η $\hat{\Gamma}$ είναι οξεία

αν $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ τότε η $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή.

Με αυτό το κριτήριο, επιλέγεται :

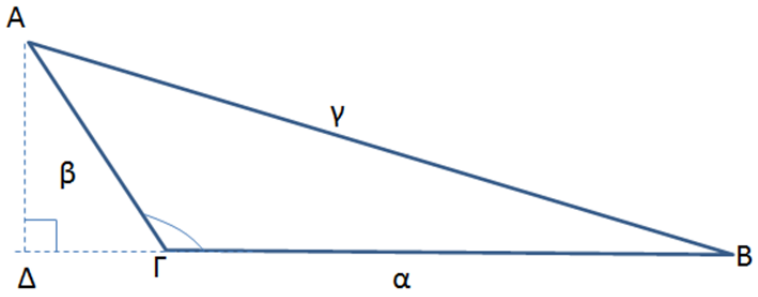
- Η εφαρμογή της πρότασης ΙΙ.12 του Ευκλείδη για οξυγώνιο τρίγωνο (πρόβλημα 5) και ο υπολογισμός του ύψους του ΑΔ μέσω της σχέσης:



$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \bullet \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha}$$

όπου ΓΔ είναι η προβολή της *β* στη ΒΓ=*α* και τότε από το Π.Θ. $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2$ υπολογίζεται το ύψος ΑΔ του τριγώνου και επομένως και το εμβαδόν του $(AB\Gamma) = \frac{\alpha \bullet A\Delta}{2}$, το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση ΒΓ και ύψος ΑΔ.

- Η εφαρμογή της πρότασης ΙΙ.13 του Ευκλείδη για αμβλυγώνιο τρίγωνο (πρόβλημα 6) και ο υπολογισμός του ύψους του ΑΔ μέσω της σχέσης:



$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \bullet \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \dfrac{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha}$ όπου ΓΔ η προβολή της *β* στη ΒΓ=*α* και τότε από το Π.Θ. $\Alpha\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2$ υπολογίζεται το ύψος ΑΔ του τριγώνου και επομένως και το εμβαδόν του $(\Alpha\Beta\Gamma) = \dfrac{\alpha \bullet \Alpha\Delta}{2}$, το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση ΒΓ και ύψος ΑΔ.

Κατά την επίλυση των διάφορων κατασκευών ο Ήρων ορίζει τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών και εκτελεί διάφορους αριθμητικούς συλλογισμούς οι οποίοι οδηγούν στον προσδιορισμό της αριθμητικής τιμής του μεγέθους που εξασφαλίζει την πορεία της εξεταζόμενης κατασκευής. Την μέθοδο αυτή προσδιορισμού την ονομάζει «ανάλυση» και αναφέρεται στη γεωμετρική απόδειξη. Τον υπολογισμό όμως του ζητούμενου μεγέθους τον ονομάζει «σύνθεση», εφαρμόζοντας την «ανάλυση» που έχει προηγηθεί. Έτσι στο πρόβλημα 6 αναφέρει: «Λοιπόν μέχρι τώρα πραγματοποιήσαμε τις μετρήσεις βασιζόμενοι σε γεωμετρικές αποδείξεις στη συνέχεια θα κάνουμε τις μετρήσεις εκτελώντας τις αριθμητικές πράξεις σύμφωνα με την ανάλυση».

Επίσης παρατηρείται ότι ο Ήρων επιλέγει τις αριθμητικές τιμές των δεδομένων μεγεθών έτσι ώστε για τα ζητούμενα μεγέθη να προκύπτουν ακέραιοι ή ρητοί αριθμοί, όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα 5, οι πλευρές του τριγώνου που δίνονται είναι (14, 15, 13) και στο πρόβλημα 6, δίνονται (11, 13, 20) και το ύψος ΑΔ που προκύπτει είναι ρητός αριθμός. Σε περιπτώσεις που δεν προκύπτει ρητός αριθμός (πρόβλημα 9) ο Ήρων δίνει προσεγγιστικές τιμές για τον άρρητο υπολογίζοντας την τετραγωνική ρίζα του με σαφή μέθοδο (για την οποία θα μιλήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια), ή εφαρμόζει αριθμητικές διαδικασίες για τον ακριβέστερο υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου πριν την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας του «άρρητου» ύψους όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα 9 όπου το τρίγωνο του οποίου ζητείται το εμβαδό έχει πλευρές (10, 8, 12) με βάση την πλευρά 10.

Στο πρόβλημα 7 αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ να δίνονται τα μέτρα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$(\Alpha\Beta\Gamma) = \sqrt{\Alpha\Beta^2 \times \Beta\Gamma^2}$$

που προφανώς είναι εσφαλμένος ή το πρόβλημα έμεινε κατά την επέμβαση κάποιου μεταποιητή ή αντιγραφέα.
Έτσι γίνεται αποκατάσταση και απόδειξη της πρότασης $2(\text{ΑΒΓ}) = \sqrt{\text{ΑΒ}^2 \text{ x } \text{ΒΓ}^2}$ στην παραπομπή και υποσημείωση του αρχαίου κειμένου.

Η δεύτερη μέθοδος που εφαρμόζει ο Ήρων στο πρόβλημα 8, για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε τυχαίου τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του α, β, γ, είναι μια μέθοδος «καθολική» όπως την αποκαλεί ο ίδιος και είναι ο τύπος

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ δηλαδή η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός μέχρι και σήμερα ως «Τύπος του Ήρωνα» η πατρότητα του οποίου τα τελευταία χρόνια αμφισβητήθηκε και αποδίδεται στον Αρχιμήδη, ενώ (σύμφωνα με τον Χρ. Κηπουρό [3]), «η γεωμετρική απόδειξή του προσφέρεται από τον Ήρωνα, με καταπληκτική σαφήνεια και κατά τη συνταγή του θεμελιωτή Ευκλείδη, τον οποίο έχει υποσχεθεί ότι θα ακολουθεί». Για τον «Τύπο του Ήρωνα» θα αναφερθούμε εκτενέστερα παρακάτω.

Στη συνέχεια στα προβλήματα 11 έως 16, ο Ήρων ασχολείται με την μέτρηση του εμβαδού και ύψους ισοσκελούς, αμβλυγωνίου, ορθογωνίου τραπεζίου, με δοσμένα τα μήκη των 4 πλευρών του. Επίσης με την μέτρηση ρόμβου ή ρομβοειδούς καθώς και τετραπλεύρου με δοσμένα όχι μόνο τα μήκη των 4 πλευρών τους, αλλά απαραίτητα και το μήκος μιας διαγωνίου τους. Τέλος ασχολείται με τη μέτρηση τετραπλεύρου με 1 ορθή γωνία με επίσης δοσμένο μήκος αυτό των 4 πλευρών του. Η μέτρηση του εμβαδού όλων των παραπάνω τετραπλεύρων ανάγεται στη μέτρηση ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου.

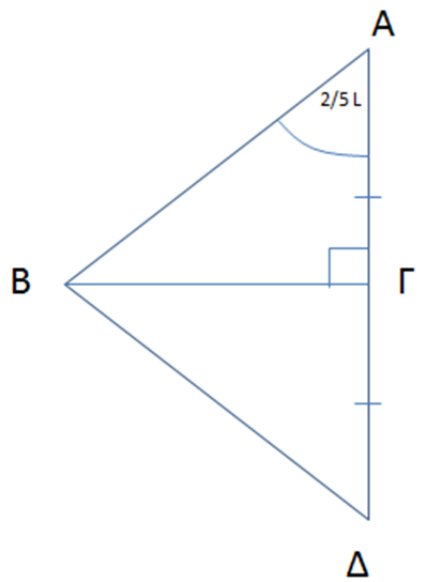
Ακολουθούν τα προβλήματα 17 έως 25 όπου γίνεται η μέτρηση των εμβαδών των κανονικών πολυγώνων από το ισόπλευρο τρίγωνο έως και το κανονικό δωδεκάγωνο. Η μέτρηση αυτή στα «Μετρικά», στηρίζεται στον υπολογισμό του εμβαδού του αντίστοιχου ισοσκελούς τριγώνου που έχει βάση την αντίστοιχη πλευρά του κανονικού πολυγώνου και κορυφή το κέντρο του περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου. Χρησιμοποιεί δε, τους λόγους των πλευρών των πολυγώνων προς τη διάμετρο των αντιστοίχων περιγεγραμμένων κύκλων τους οποίους παίρνει από τους πίνακες των χορδών που κυκλοφορούσαν από την εποχή του Ιππάρχου (150 π.Χ.)

Στο πρόβλημα 17 για τη μέτρηση του εμβαδού (ΑΒΓ) ισόπλευρου τριγώνου πλευράς *α*=10 μονάδες, φέρνοντας το ύψος του τριγώνου ο Ήρων αποδεικνύει ότι ο λόγος $\frac{\alpha^4}{(\text{ΑΒΓ})^2} = \frac{16}{3}$.

Επομένως $(\text{ΑΒΓ})^2 = \frac{3}{16}\alpha^4$ που για $\alpha = 10$ γίνεται $(\text{ΑΒΓ})^2 = 1875$ και κατά προσέγγιση $(\text{ΑΒΓ}) = 43\frac{1}{3}$ τετραγωνικές μονάδες. Το ίδιο αποτέλεσμα δίνει και η μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού που χρησιμοποιεί για το ισόπλευρο τρίγωνο στα «Γεωμετρικά» προβλ. 10 «περί ισόπλευρων τριγώνων» όπου $(\text{ΑΒΓ}) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)\alpha^2$ που για *α*=10, γίνεται $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{13}{30} \bullet 100 = \frac{1300}{30} = 43\frac{1}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

Πριν την μέτρηση του εμβαδού του κανονικού 5-γώνου (πρόβλημα 18), ο Ήρων προτάσσει και αποδεικνύει το λήμμα: «Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με την ορθή γωνία στο Γ, ενώ η γωνία Α ισούται με $\frac{2}{5}$ της ορθής. Να δειχθεί ότι $(\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ})^2 = 5\text{ΑΓ}^2$».

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Σύμφωνα με τον Ήρωνα, έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma}$ ορθή και $\hat{\text{Α}} = \frac{2}{5}$ ορθής.

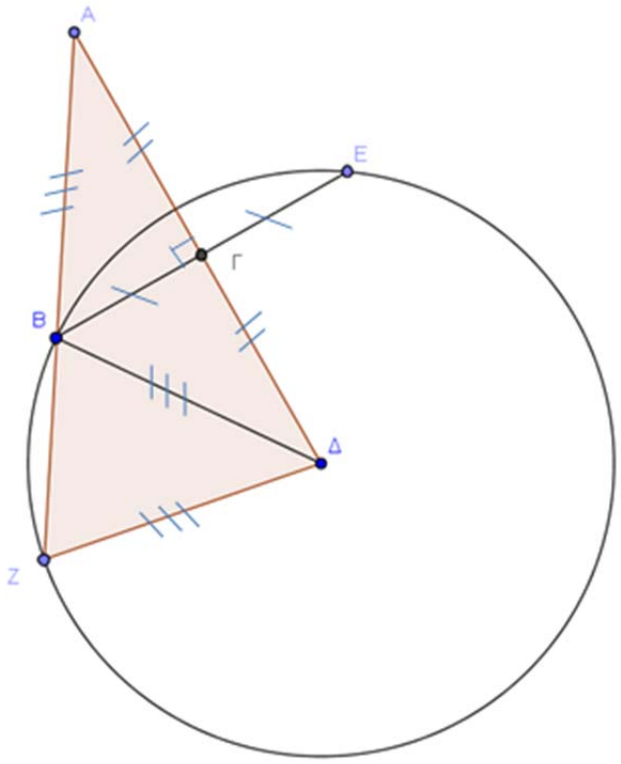


Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΓΔ=ΑΓ και φέρνουμε και τη ΒΔ. Τότε (αφού το τρίγωνο ΑΒΔ είναι προφανώς ισοσκελές) θα είναι: ΑΒ=ΒΔ και $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{AB\Gamma}$ = (1 ορθή - $\frac{2}{5}$ ορθής)= $\frac{3}{5}$ ορθής. Ώστε η $\hat{AB\Delta} = \frac{6}{5}$ ορθής (γιατί $\hat{AB\Delta} = \hat{AB\Gamma} + \hat{\Gamma B\Delta} = 2 \cdot \frac{3}{5}$ ορθής $= \frac{6}{5}$ ορθής).

Άρα η $\hat{AB\Delta}$ είναι γωνία κανονικού 5-γώνου. Τότε η ΑΒ είναι το μεγαλύτερο τμήμα της ΑΔ, χωρισμένης σε μέσο και άκρο λόγο (εννοείται στο Β). Αλλά η ΑΔ=2ΑΓ, άρα: $(BA + A\Gamma)^2 = 5A\Gamma^2$.

Σύμφωνα με Χρ. Κηπουρό, [3] η απόδειξη της τελευταίας είναι εύκολη αφού:

$$AB^2 = (A\Delta - AB) \bullet A\Delta \Leftrightarrow AB^2 = A\Delta^2 - A\Delta \bullet AB \Leftrightarrow$$
$$AB^2 = 4A\Gamma^2 - 2A\Gamma \bullet AB \Leftrightarrow AB^2 + 2A\Gamma \bullet AB + A\Gamma^2 = 4A\Gamma^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow$$
$$(AB + A\Gamma)^2 = 5A\Gamma^2$$

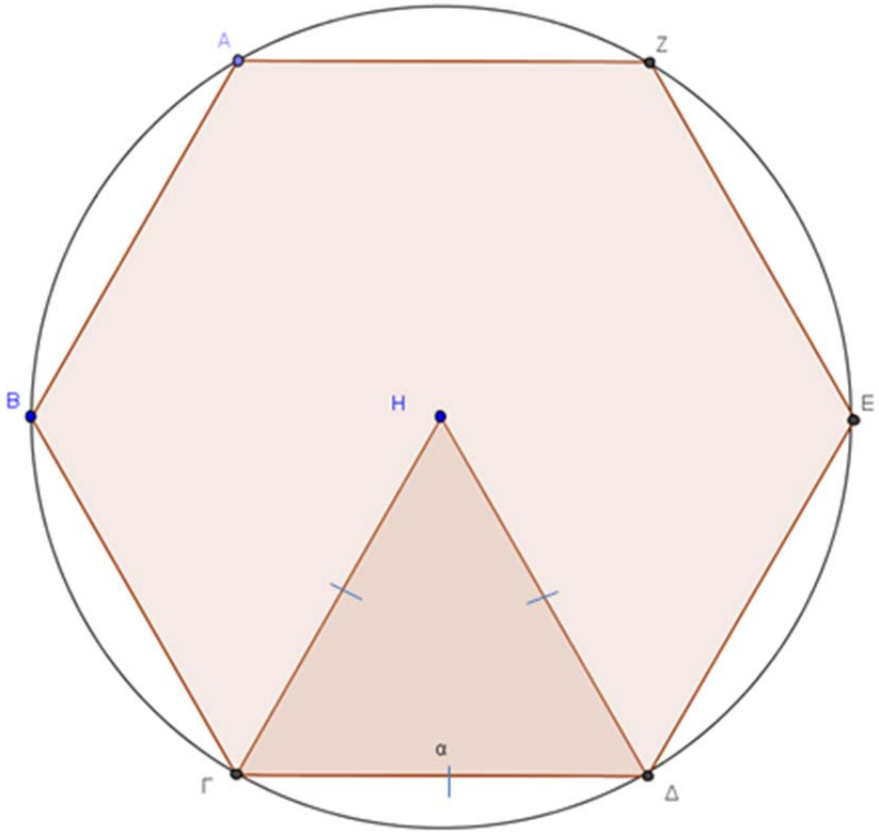


Στην παραπάνω απόδειξη ο T.Heath, [10] διευκρινίζει: Αν προεκτείνουμε την ΑΒ ως το Ζ έτσι ώστε ΑΖ=ΑΔ και φέρουμε την ΖΔ τότε αφού το τρίγωνο ΑΖΔ=ισοσκελές και $\hat{A} = \frac{2}{5}$ ορθής, θα έχουμε και

$A\hat{Z}\Delta = A\hat{\Delta}Z = \frac{4}{5}$ ορθής (2 ορθές - $\frac{2}{5}$ ορθής). Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΓΔ προκύπτει ότι $A\hat{\Delta}B = B\hat{A}\Delta = \frac{2}{5}$ ορθής. Επομένως το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΖ, είναι το ισοσκελές τρίγωνο που κατασκευάζεται στην πρόταση IV.10 του Ευκλείδη με γωνία βάσης διπλάσια από τη γωνία της κορυφής του, όπου η ΑΖ άρα και η ΑΔ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο στο σημείο Β. Τότε σύμφωνα με την πρόταση XIII.1 του Ευκλείδη: «Εάν ευθεία γραμμή άκρον και μέσον λόγον τμηθή, το μείζον τμήμα προσλαβόν την ημίσειαν της όλης πενταπλάσιον δύναται του από της ημισείας τετραγώνου»,.

Ο Ήρων καταλήγει ότι για το μεγαλύτερο τμήμα ΑΒ της ΑΔ που είναι χωρισμένη σε άκρο και μέσο λόγο από το Β με $A\Gamma = \frac{A\Delta}{2}$ ισχύει $\left(AB + A\Gamma\right)^2 = 5A\Gamma$.

Και τότε αν η ΒΓ προεκταθεί μέχρι το σημείο Ε έτσι ώστε ΓΕ=ΒΓ, αφού η $B\hat{\Gamma}\Delta = \frac{2}{5}$ ορθής, άρα η $B\hat{\Delta}E = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ ορθής και επομένως η ΒΕ είναι η πλευρά ενός κανονικού 5-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο το Δ και ακτίνα την ΒΔ (ο κύκλος αυτός διέρχεται επίσης και από το Ζ και η ΒΖ είναι πλευρά κανονικού δωδεκαγώνου εγγεγραμμένου επίσης στον κύκλο αυτό). Θέτοντας ΑΒ=ΒΔ=ρ την ακτίνα του περιγεγραμμένου στο κανονικό 5-γωνο κύκλου και ΑΓ=ΓΔ=κ το ύψος του ενός από τα 5 ίσα ισοσκελή τρίγωνα, με βάση ΒΕ=α, την πλευρά του κανονικού 5-γώνου και κορυφή το κέντρο του κύκλου Δ στο παραπάνω λήμμα έχουμε $\left(\rho + \kappa\right)^2 = 5\kappa^2$ $\Leftrightarrow \left(\frac{\rho + \kappa}{\kappa}\right)^2 = 5 \simeq \frac{81}{16}$ άρα $\frac{\rho + \kappa}{\kappa} = \sqrt{5} \simeq \frac{9}{4}$ απ' όπου ο Ήρωνας στο <u>πρόβλημα 18</u> υπολογίζει κατά προσέγγιση $\frac{\rho}{\kappa} = \frac{5}{4}$ και $\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \kappa} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2 \cdot (\Delta BE)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\Delta BE) = \frac{\alpha^2}{3}$ Επομένως το εμβαδό του κανονικού 5-γώνου $H_5 = 5 \bullet (\Delta BE) = \frac{5}{3}\alpha^2$ που για α=10 είναι $H_5 = 166\frac{2}{3}$ τετραγωνικές μονάδες κατά προσέγγιση και θα μπορούσε να ήταν ακριβέστερη η τιμή του κατά τον Ήρωνα αν είχαμε λάβει μεγαλύτερη προσέγγιση για τον αριθμό $\frac{\rho + \kappa}{\kappa} = \sqrt{5}$. Στα «Γεωμετρικά» ο τύπος του εμβαδού δίνεται ως $\frac{12}{7}\alpha^2$



Στο πρόβλημα 19 υπολογίζει το εμβαδό κανονικού εξαγώνου με πλευρά α=10 μονάδες, εξαπλασιάζοντας το εμβαδό του αντιστοίχου ισόπλευρου τριγώνου του ΟΑΒ με πλευρά την α που σύμφωνα με το πρόβλημα έχει υπολογίσει $(\text{ΗΓΔ})^2 = \frac{3}{16}\alpha^4$. Επομένως: $(\text{ΑΒΓΔΕΖ})^2 = 6^2(\text{ΗΓΔ})^2 = \frac{27}{4}\alpha^4$ που για α=10 γίνεται $(\text{ΑΒΓΔΕΖ})^2 = 67500$ και τότε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου είναι $\text{Η}_6 = (\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = 259$ τετραγωνικές μονάδες περίπου.

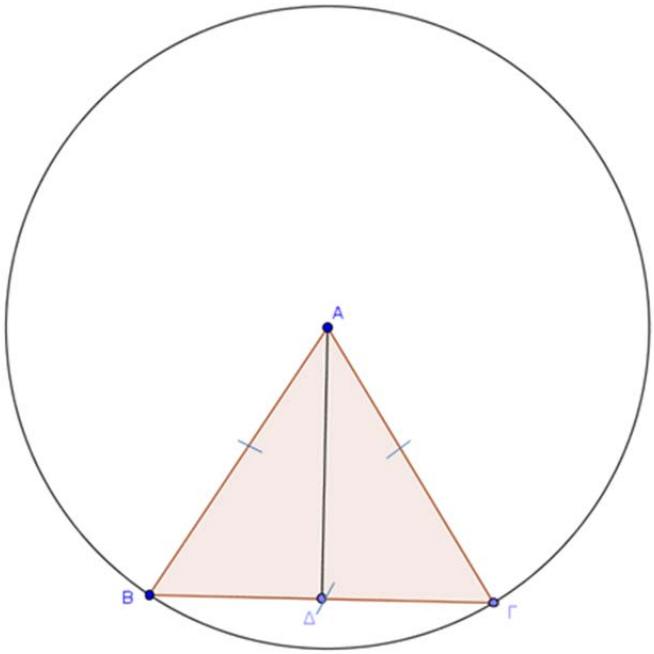
Στα «Γεωμετρικά», ο τύπος του εμβαδού δίνεται ως $\frac{13}{5}\alpha^2$. Επίσης «σε ένα άλλο βιβλίο» όπως αναφέρει ο ίδιος ο Ήρων το εμβαδό δίνεται από τον τύπο $(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = 6(\frac{1}{3} + \frac{1}{10})\alpha^2$, όμως στην πραγματικότητα μόνο τα «Μετρικά» δίνουν τον ακριβέστερο υπολογισμό του.

Πριν τη μέτρηση του εμβαδού του κανονικού 7-γώνου (πρόβλημα 20), ο Ήρωνας προτάσσει πάλι ένα λήμμα: «Σε εγγεγραμμένο σε κύκλο κανονικό

επτάγωνο ο λόγος του αποστήματος προς την πλευρά του επταγώνου είναι $\frac{8}{7}$ ».

Η πρόταση αυτή παρατίθεται από τον Jordanus Nemotarious (απεβ. 1237 μΧ), ως «Ινδικός Κανόνας» που πιθανόν την πήρε από τον άραβα Abu el Wafa (940-998), ο οποίος δεν αναφέρει την προέλευσή της. [10] Σύμφωνα με τους μελετητές επειδή απαντάται στα «Μετρικά» του Ήρωνα θα μπορούσε να είναι του ιδίου, όμως ο Αρχιμήδης έχει πράγματι γράψει την πραγματεία «περί του εγγεγραμμένου σε κύκλο επταγώνου», τότε η πρόταση μπορεί να οφείλεται σε αυτόν και ο Ήρωνας να την έχει αντλήσει από αυτό το χαμένο κείμενο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (προσεγγιστική)



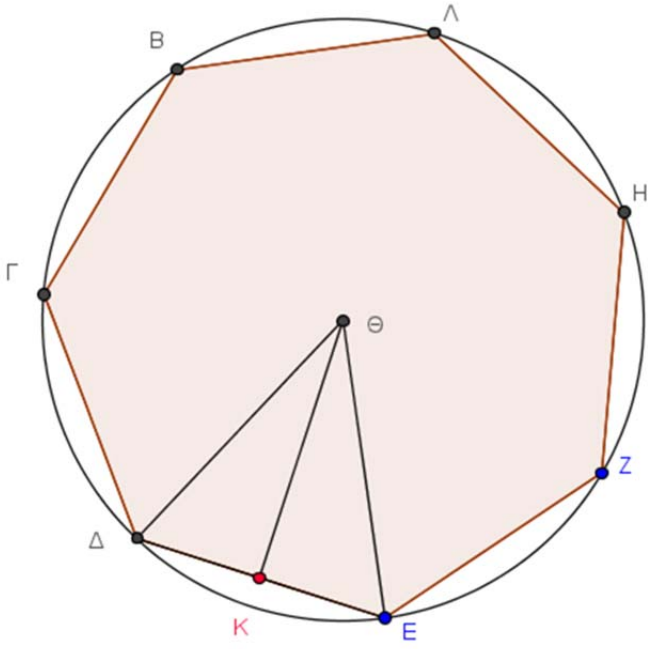
Σε κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ΒΓ, εγγράφεται κανονικό 6-γωνο με πλευρά τη ΒΓ. αν ΑΔ το απόστημα του κανονικού 6-γώνου τότε θα είναι κατά προσέγγιση η πλευρά του κανονικού 7-γώνου. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ=2ΒΔ και τότε

$$\mathrm{A\Delta}^2 = 4\mathrm{B\Delta}^2 - \mathrm{B\Delta}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}^2 = 3\mathrm{B\Delta}^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{A\Delta}^2}{\mathrm{B\Delta}^2} = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{B\Delta}}\right)^2 = 3 \simeq \frac{49}{16} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{7}{4}, \quad \text{άρα} \quad \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{2\mathrm{B\Delta}}{\frac{7}{4}\mathrm{B\Delta}} = \frac{8}{7}.$$

Έτσι στο πρόβλημα 20 υπολογίζει το εμβαδό του κανονικού 7-γώνου πλευράς α=10. Έστω ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο κανονικό 7-γωνο κύκλου και κ το απόστημά του, δηλαδή το ύψος του ενός από τα 7 ίσα ισοσκελή τρίγωνά του, με βάση α την πλευρά του κανονικού 7-γώνου και κορυφή το κέντρο του κύκλου, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα $\frac{\rho}{\alpha}=\frac{8}{7}$ και τότε προκύπτουν $\frac{\rho}{\kappa}=\frac{16}{7}$ και

$$\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{42}{43}-\frac{84}{86}\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\alpha\bullet\kappa}=\frac{84}{86}\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{2(\Delta\mathrm{KE})}=\frac{84}{86}\Leftrightarrow(\Delta\mathrm{KE})=\frac{43}{84}\alpha^2$$



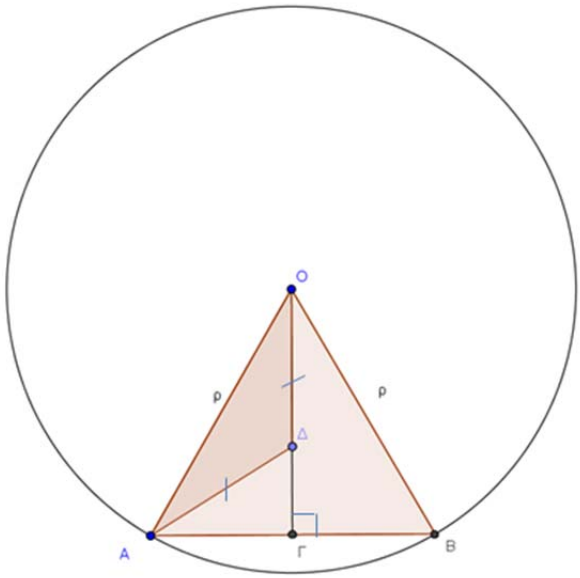
Επομένως το εμβαδό του κανονικού 7-γώνου είναι :

$\mathrm{H}_7=7(\Delta\mathrm{KE})=7\cdot\frac{43}{84}\alpha^2=\frac{43\alpha^2}{12}$ που για α=10 είναι $\mathrm{H}_7=358\frac{1}{3}$ τετρ. μονάδες.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού του κανονικού 8-γώνου (πρόβλημα 21), του εμβαδού του κανονικού 10-γώνου (πρόβλημα 23) και του εμβαδού του κανονικού 12-γώνου (πρόβλημα 25), ακολουθεί την ίδια μέθοδο.

Αν Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο κανονικό πολύγωνο και ΑΒ=α, η πλευρά του, τότε υπολογίζει το απόστημά του ΟΓ=κ και στη συνέχεια παίρνει $\mathrm{O\hat{A}\Delta}=\mathrm{A\hat{O}\Delta}$. Έτσι στο πρόβλημα 21 για τη μέτρηση του

εμβαδού κανονικού 8-γώνου πλευράς α=10, έχουμε $A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{1}{2}$ ορθής και τότε υπολογίζεται $\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{24}{29} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha \bullet \kappa} = \frac{24}{29} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2(OAB)} = \frac{24}{29} \Leftrightarrow (OAB) = \frac{29}{48}\alpha^2$



Επομένως $H_8 = 8(OAB) = 8 \cdot \frac{29}{48}\alpha^2 = \frac{29}{6}\alpha^2$ που για α=10 μονάδες γίνεται $H_8 = 483\frac{1}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

Όμοια στο <u>πρόβλημα 23</u> για τη μέτρηση εμβαδού του κανονικού 10-γώνου πλευράς α=10, έχουμε $A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{2}{5}$ ορθής και τότε υπολογίζεται $\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha \bullet \kappa} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{8(OAB)} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow (OAB) = \frac{3}{4}\alpha^2$

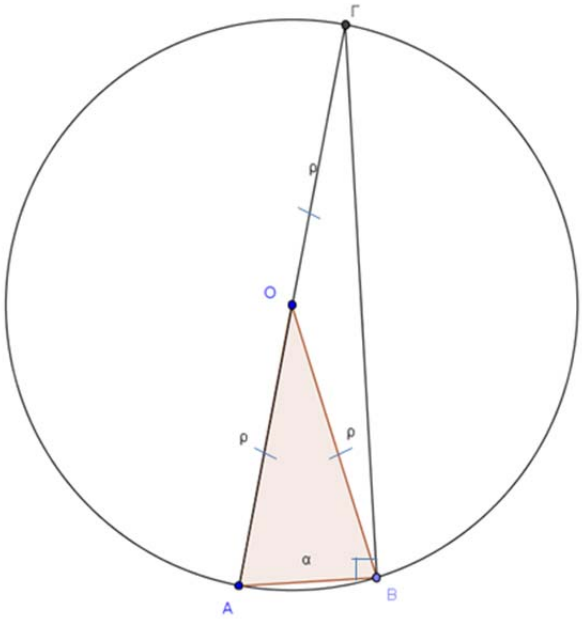
Επομένως $H_{10} = 10(OAB) = 10 \cdot \frac{3}{4}\alpha^2 = \frac{15}{2}\alpha^2$ που για α=10 μονάδες γίνεται $H_{10} = 750$ τετραγωνικές μονάδες.

Τέλος στο <u>πρόβλημα 25</u> για τη μέτρηση του εμβαδού του κανονικού 12-γώνου πλευράς α=10 μονάδες έχουμε $A\hat{\Delta}\Gamma = \frac{1}{3}$ ορθής και τότε υπολογίζεται $\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha \bullet \kappa} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2(OAB)} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow (OAB) = \frac{15}{16}\alpha^2$

Επομένως $H_{12} = 12(OAB) = 12 \cdot \frac{15}{16}\alpha^2 = \frac{45}{4}\alpha^2$ που για α=10 μονάδες γίνεται $H_{12} = 1125$ τετραγωνικές μονάδες.

Για τον υπολογισμό κανονικού 9-γώνου (πρόβλημα 22) και κανονικού 11-γώνου (πρόβλημα 24), ο Ήρων χρησιμοποιεί το λόγο της πλευράς α των κανονικών πολυγώνων προς την αντίστοιχη διάμετρο δ του περιγεγραμμένου τους κύκλου, ή και το αντίστροφο. η τιμή των λόγων αυτών είναι προσεγγιστική και λαμβάνεται από τους Πίνακες Χορδών που μπορεί να είναι του Ιππάρχου (150 π.Χ. – μια απόδειξη κατά τον Hoppe, ότι ο Ήρων δραστηριοποιήθηκε και το 2ο ήμισυ του 2ου π.Χ. αιώνα) ή του Μενελάου.

Κατά τον υπολογισμό του εμβαδού του κανονικού 9-γώνου πλευράς ΑΒ=α=10 μονάδες, εγγεγραμμένου σε κύκλο με διάμετρο ΑΓ=δ, χρησιμοποιεί την προσεγγιστική τιμή του λόγου $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{AB}{A\Gamma} \simeq \frac{1}{3} \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 9AB^2$ και τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma^2 = 8AB^2$, άρα $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{17} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AB \bullet B\Gamma} = \frac{6}{17} \Leftrightarrow \frac{AB^2}{2(AB\Gamma)} = \frac{6}{17} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{17}{12}\alpha^2$



Επομένως $H_9 = 9(OAB) = 9 \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{9}{2} \cdot \frac{17}{12}\alpha^2 = \frac{51}{8}\alpha^2$ που για α=10 μονάδες, γίνεται $H_9 = 637\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Όμοια κατά τον υπολογισμό του εμβαδού του κανονικού 11-γώνου πλευράς ΑΒ=α=10 μονάδες, χρησιμοποιεί την προσεγγιστική τιμή του λόγου

$\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}\simeq\frac{25}{7}$ και τότε

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{24}{7}\Leftrightarrow\frac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}^2}=\frac{24}{7}\Leftrightarrow\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\text{ΑΒ}^2}=\frac{24}{7}\Leftrightarrow(\text{ΑΒΓ})=\frac{24}{14}\alpha^2$$

Επομένως $\text{Η}_{11}=11(\text{ΟΑΒ})=11\cdot\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})=\frac{11}{2}\cdot\frac{24}{14}\alpha^2=\frac{66}{7}\alpha^2$ που για α=10 μονάδες, γίνεται $\text{Η}_{11}=942\frac{6}{9}$ τετραγωνικές μονάδες.

Με το επόμενο <u>πρόβλημα 26</u>, εξετάζει τη μέτρηση του κύκλου. Εδώ αναφέρει την πρόταση του Αρχιμήδη από την πραγματεία του «Κύκλου Μέτρηση», η οποία πρόταση επαναλαμβάνεται και στα «Γεωμετρικά» όπου αποδεικνύει ότι: «Ο λόγος του εμβαδού του κύκλου προς το τετράγωνο της διαμέτρου του, ισούται κατά προσέγγιση με το λόγο $\frac{11}{14}$ και τότε το εμβαδό του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση $\text{Ε}=\frac{11}{14}\delta^2$, όπου δ η διάμετρος του κύκλου».

Στη συνέχεια αναφέρεται και πάλι στον Αρχιμήδη, αυτήν τη φορά στην πραγματεία του «Περί Πλινθίδων και Κυλίνδρων» που έχει χαθεί, όπου αποδεικνύεται ότι ο λόγος της περιμέτρου παντός κύκλου προς τη διάμετρό του έχει μέγιστο λόγο $\frac{197888}{65351}$ και ελάχιστο λόγο $\frac{2118875}{67441}$. Και ο Ήρων δίνει τα πιο ακριβή όρια για το $\pi=\frac{L}{\delta}$ (L=περίμετρος κύκλου, δ=διάμετρος), αυτά του Αρχιμήδη δηλαδή $\frac{218875}{67441}<\pi<\frac{197888}{62351}$ $\left(3{,}14163<\pi<3{,}17377\right)$ που όμως λέει ότι οι αριθμοί αυτοί μας δυσκολεύουν στις μετρήσεις και γι αυτό χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς για το π, τον λόγο των μικρότερων αριθμών, δηλαδή το $\frac{22}{7}$. Τότε η διάμετρος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση $L=\frac{44}{7}\rho=\frac{22}{7}\delta$. Συγκρίνοντας το κάτω όριο 3,14163 με την πραγματική τιμή του π=3,14159, βλέπουμε πόσο καλή προσέγγιση του π έχουμε, που όμως με τη διόρθωση του Tannery, στην προσπάθειά του να αποδώσει τις πρωταρχικές τιμές από τη χαμένη πραγματεία του Αρχιμήδη, έχουμε ακόμα πιο ικανοποιητική προσέγγιση δηλαδή $\frac{211872}{67441}<\pi<\frac{195882}{62351}$ $\left(3{,}1415904<\pi<3{,}1416016\right)$.

Στηριζόμενος στα παραπάνω εξετάζει την περίπτωση κατασκευής ενός κύκλου ισοδύναμου με το εμβαδό ενός επίπεδου χωρίου, ευθύγραμμου ή όχι, με γνωστό εμβαδό αφού για την κατασκευή αυτή αρκεί η εύρεση της διαμέτρου του κύκλου.

Επίσης υπολογίζει το εμβαδό του χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ 2 ομόκεντρων κύκλων που καλείται «ίτυς», αυτό που σήμερα ονομάζουμε «κυκλικό δακτύλιο», αφαιρώντας από το εμβαδό του μεγαλύτερου κύκλου, αυτό του μικρότερου, αλλά και παρουσιάζοντας μια μέθοδο που δεν απαιτεί τη μέτρηση των κύκλων (δηλαδή των εμβαδών τους), παρά εφαρμόζοντας τη σχέση: $\mathrm{E}_{\delta\alpha\kappa\tau} = \frac{11}{14}\left(\mathrm{AB}^2 - \Gamma\Delta^2\right) = \frac{11}{14}\bullet 4\mathrm{B}\Gamma\bullet\mathrm{B}\Delta = \frac{22}{7}\mathrm{B}\Gamma\bullet\mathrm{B}\Delta$.

Στα <u>προβλήματα 27 έως 33</u> εξετάζεται η μέτρηση των κυκλικών τμημάτων. Για να μετρήσει τα κυκλικά τμήματα ο Ήρων αποδεικνύει στο <u>πρόβλημα 27</u> την πρόταση: «Θεωρούμε οσαδήποτε μεγέθη $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, ή περισσότερα, τοποθετημένα κατά σειρά μεγέθους, αρχίζοντας από το α, με τον περιορισμό κάθε ένα από αυτά να είναι τετραπλάσιο του διαδοχικού του (του επομένου του). Τότε ισχύει η ισότητα $\frac{\alpha}{3} = \beta + \gamma + \delta + \frac{\delta}{3}$».

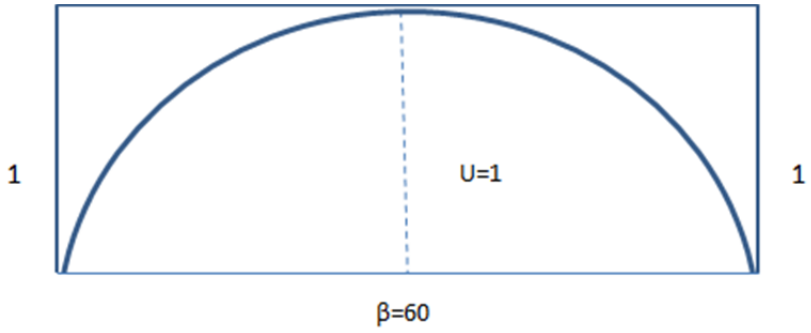
Η πρόταση αυτή είναι επίσης του Αρχιμήδη (πρόταση 23 – τετραγωνισμός παραβολής), και στο <u>πρόβλημα 27</u> ο Ήρων λέει ότι γενικεύεται για περισσότερα από τέσσερα μεγέθη: «Εάν δίνεται μια σειρά μεγεθών με λόγο 4, το άθροισμα των μεγεθών αυτών συν το 1/3 του μικρότερου, θα ισούται με τα 4/3 του μεγαλύτερου».

Στο <u>πρόβλημα 30</u> δίνει μια μέθοδο με την οποία οι Αρχαίοι μετρούσαν με μικρή ακρίβεια το εμβαδό ενός κυκλικού τμήματος που είναι μικρότερο από ημικύκλιο, έτσι «προσέθεταν τη βάση του με το ύψος του και το ημιάθροισμα, πολλαπλασίαζαν με το ύψος του και, το γινόμενο θεωρούσαν ότι εκφράζει το μέτρο του εμβαδού του τμήματος», δηλαδή $\mathrm{E}_{\substack{\text{ΚΥΚΛ}\\ \text{ΤΜΗΜ.}}} = \frac{1}{2}\left(\beta + \upsilon\right)\cdot\upsilon$ για τον οποίο τύπο ο Ήρων θεωρεί ότι «υποκαθιστούσαν το μήκος της περιφέρειας του κύκλου με το τριπλάσιο της διαμέτρου του», δηλαδή ότι $\pi = \frac{L}{\delta} = 3$. Από ότι φαίνεται και από την εφαρμογή του παραπάνω τύπου στο ημικύκλιο που δίνει αποτέλεσμα $\mathrm{E}_{\text{ΗΜΙΚ}} = \frac{1}{2}\left(2\rho + \rho\right)\rho = \frac{1}{2}3\rho^2$ που συμφωνεί με αυτό της «γνωστής» μεθόδου κατά την οποία το εμβαδόν του ημικυκλίου ισούται με το μισό του εμβαδού ορθογωνίου που έχει διαστάσεις την περιφέρεια και το ύψος του ημικυκλίου.

Στο <u>πρόβλημα 31</u>, δίνει μια 2^{η} μέθοδο για την μέτρηση του εμβαδού του κυκλικού τμήματος που είναι μικρότερο από ημικύκλιο, την οποία

εφάρμοζαν «αυτοί που επιζητούσαν μεγαλύτερη ακρίβεια» σύμφωνα με την οποία το εμβαδό δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}_{\substack{\text{ΚΥΚΛ.}\\ \text{ΤΜΗΜ.}}} = \frac{1}{2}(\beta+\upsilon)\cdot\upsilon + \frac{1}{14}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$. Για τον τύπο αυτό ο Ήρων θεωρεί ότι «εφάρμοζαν τη μέθοδο κατά την οποία το μήκος της περιφέρειας του κύκλου είναι τριπλάσιο της διαμέτρου του, αυξημένο κατά το $\frac{1}{7}$ αυτής», δηλαδή ότι $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ που χρησιμοποιεί και ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του «Έφοδος». Αυτό φαίνεται και από την εφαρμογή του παραπάνω τύπου στο ημικύκλιο που δίνει αποτέλεσμα $\mathrm{E}_{\text{ΗΜΙΚ.}} = \frac{1}{2}\left(3\rho^2 + \frac{1}{7}\rho^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{22}{7}\rho^2$ που συμφωνεί και πάλι με αυτό της «γνωστής» μεθόδου. Τονίζει όμως ο Ήρων ότι τόσο στο <u>πρόβλημα 30</u> όσο και στο <u>πρόβλημα 31</u>, οι τύποι πρέπει να εφαρμόζονται «όταν η βάση δεν είναι μεγαλύτερη από το τριπλάσιο του ύψους του», δηλαδή όταν $\beta \le 3\cdot\upsilon$

Ενισχύει την αναγκαιότητα ύπαρξης του παραπάνω περιορισμού, παραθέτοντας παράδειγμα κυκλικού τμήματος με βάση β=60 μονάδες και ύψους υ=1 μονάδα και επιβεβαιώνει την αδυναμία εφαρμογής της μεθόδου του <u>προβλήματος 31</u> όπου $\beta = 60 > 3\bullet 1 = 3 = 3\bullet\upsilon$ που οδηγεί σε αντίφαση.



Κατά την εφαρμογή του εμπειρικού τύπου $\mathrm{E} = \frac{1}{2}(\beta+\upsilon)\cdot\upsilon + \frac{1}{14}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$ για τον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού τμήματος, ο Ήρων παρατηρεί ότι «και μόνον το μέρος $\frac{1}{14}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{14}\left(\frac{60}{2}\right)^2 = \frac{1}{14}30^2 = \frac{1}{14}900 = 64\frac{2}{7}$ τετρ. μονάδες είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό του ορθογωνίου», αφού $\mathrm{E}_{\text{ΟΡΘΟΓ.}} = \beta\bullet\upsilon = 60\cdot 1 = 60$ τετρ. μονάδες.

Προχωρώντας στο <u>πρόβλημα 32</u>, ο Ήρων δίνει τη μέθοδο που πρέπει να ακολουθείται για τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού τμήματος μικρότερου του ημικυκλίου, όταν η βάση του τμήματος είναι μεγαλύτερη του τριπλάσιου του ύψους του, δηλαδή *β*>3*υ*. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή «το κυκλικό τμήμα με βάση την ΑΓ θα είναι, κατά μείζονα λόγο, μεγαλύτερο από

το $1\frac{1}{3}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Ώστε αν μετρήσουμε το εμβαδόν του τριγώνου και προσθέσουμε ακόμη το 1/3 αυτού, θα έχουμε κατά προσέγγιση, το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος». Αναφερόμενος δε ο Ήρωνας για άλλη μια φορά στο έργο του Αρχιμήδη «Έφοδος», θεωρεί το εμβαδό του κυκλικού τμήματος αυτού, ίσο με εκείνο του παραβολικού τμήματος της πρότασης 24 του Αρχιμήδη, δηλαδή ίσο με τα 4/3 του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με το τμήμα αυτό.

Ο Αρχιμήδης για την απόδειξη της πρότασης 24 χρησιμοποιεί την απαγωγή σε άτοπο.

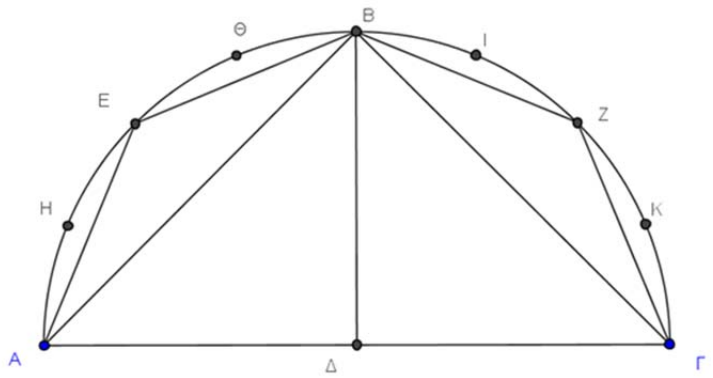
Πρόταση 24: «Κάθε τμήμα που περιέχεται μεταξύ ευθείας και παραβολής ισούται με τα 4/3 του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και ύψος ίσο με το τμήμα».

Ο Ήρων για την τεκμηρίωση και απόδειξη της μεθόδου που προτείνει στο πρόβλημα 32, χρησιμοποιεί την πρόταση του προβλήματος 29 : «Έστω κυκλικό τμήμα με βάση ΑΓ. Φέρνω την ΒΔ μεσοκάθετο της ΑΓ και λαμβάνω τα μέσα Ε και Ζ των τόξων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε τις ΑΒ, ΒΓ, ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ. Λέγω ότι: $\text{τριγ}\,\text{ΑΒΓ} < 4\cdot\text{τριγ}\,\text{ΑΕΒ} + 4\cdot\text{τριγ}\,\text{ΒΖΓ}$ » και συνεχίζει την απόδειξη με βάση τον τετραγωνισμό του παραβολικού τμήματος από τον Αρχιμήδη.

Έτσι λοιπόν ο Ήρων αποδεικνύει ότι αν ΑΒΓ ένα κυκλικό τμήμα και Β είναι το μέσο του τόξου του και επίσης τα τόξα ΑΒ και ΒΓ διχοτομούνται ομοίως στα σημεία Ε και Ζ, τότε:

$$\text{ΑΒΓ} < 4\left[\left(\text{ΑΕΒ}\right)+\left(\text{ΒΖΓ}\right)\right]$$

Εφαρμόζοντας την ίδια κατασκευή για τα κυκλικά τμήματα ΑΕΒ, ΒΖΓ καθένα από αυτά είναι μικρότερο από το 4πλάσιο του αθροίσματος των δύο μικρών τριγώνων ΑΗΕ, ΕΘΒ και ΒΙΖ, ΖΚΓ αντίστοιχα,



στα τμήματα που απομένουν, δηλαδή,

$(\text{ΑΕΒ}) < 4\left[(\text{ΑΗΕ}) + (\text{ΕΘΒ})\right]$ και $(\text{ΒΖΓ}) < 4\left[(\text{ΒΙΖ}) + (\text{ΖΚΓ})\right]$.

Τότε $(\text{ΑΒΓ}) < 4\left[(\text{ΑΕΒ}) + (\text{ΒΖΓ})\right] < 4^2\left[(\text{ΑΗΕ}) + (\text{ΕΒΘ}) + (\text{ΒΙΖ}) + (\text{ΖΚΓ})\right]$

Επομένως:

$$\underset{\substack{\text{ΤΜΗΜ.}\\ \text{ΑΔΒ}}}{\text{Ε}_{\text{ΚΥΚΛ}}} > (\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΑΕΒ}) + (\text{ΒΖΓ}) + (\text{ΑΗΕ}) + (\text{ΕΒΘ}) + (\text{ΒΙΖ}) + (\text{ΖΚΓ}) >$$

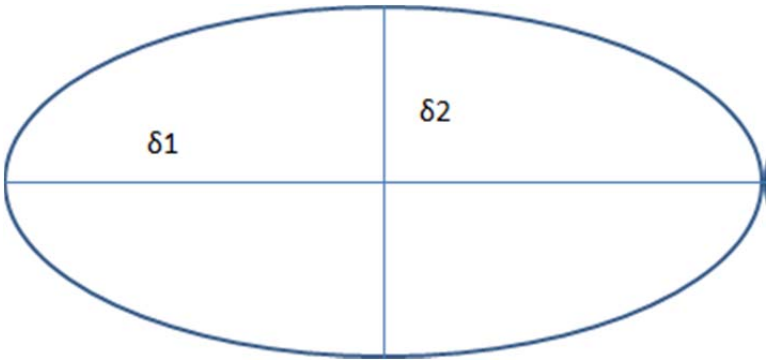
$$> (\text{ΑΒΓ}) + \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ}) + \frac{1}{4^2}(\text{ΑΒΓ}) + \ldots = (\text{ΑΒΓ})\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) =$$

$$= (\text{ΑΒΓ})\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(\text{ΑΒΓ})$$

Οι Αρχαίοι Έλληνες απέφευγαν να χρησιμοποιούν τις έννοιες του «απείρως μεγάλου» και του «απείρως μικρού» οι οποίες δεν ήταν αποδεκτές και δεν αναφέρονταν ρητά σε αυτές. Ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης, ασχολήθηκαν με τις έννοιες αυτές, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εξάντλησης, καταφεύγοντας σε αξιοθαύμαστες αλλά δύσκαμπτες μεθόδους – τεχνάσματα. Οι έννοιες αυτές δεν ήταν αποδεκτές σε αυστηρές αποδείξεις κατά το πρότυπο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. [23] Στη μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου βασίστηκε ο Αρχιμήδης, την τελειοποίησε και έλυσε πολλά προβλήματα εμβαδών καμπυλόγραμμων επίπεδων σχημάτων και όγκων και για αυτό το λόγο θεωρείται εμπνευστής του Απειροστικού Λογισμού.

Στο πρόβλημα 33 μας δίνει τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού κυκλικού τμήματος στην περίπτωση που είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου. Το εμβαδόν αυτό προκύπτει από την αφαίρεση του εμβαδού του συμπληρωματικού του τμήματος που είναι μικρότερο του ημικυκλίου από το εμβαδό του κύκλου.

Στο πρόβλημα 34 μετρά το εμβαδό έλλειψης που έχει μεγάλο άξονα δ_1=16 μονάδες και μικρό δ_2=12 μονάδες. Ανάγει τη μέτρηση της παραπάνω έλλειψης στην μέτρηση ισοδύναμου κύκλου με διάμετρο δ, τέτοια ώστε $\delta_1 \bullet \delta_2 = \delta^2$. Αναφέρει λοιπόν τον Αρχιμήδη ο οποίος «στην πραγματεία του περί «Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων» αποδεικνύει ότι το ορθογώνιο των αξόνων είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της διαμέτρου ενός κύκλου που είναι ισοδύναμος με την έλλειψη».



Τότε υπολογίζει:

$E_{\text{ελλειψης}} \simeq E_{\text{κύκλου}} = \frac{\pi}{4}\delta^2 = \frac{\pi}{4}\delta_1 \cdot \delta_2 = \frac{11}{14} \cdot 16 \cdot 12 = 146\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Σύμφωνα με τον Χ. Κηπουρό [5], στο αρχαίο κείμενο, το παραπάνω εξαγόμενο είναι $150\frac{6}{7}$ τετραγωνικές μονάδες, σφάλμα το οποίο οφείλεται πιθανόν σε επεξεργαστή ή αντιγραφέα του κειμένου.

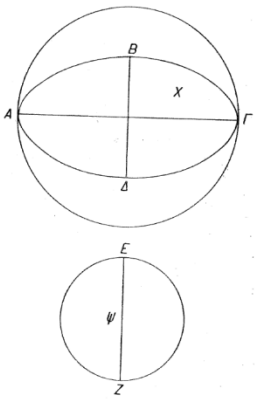
Η παραπάνω πρόταση του Αρχιμήδη στην οποία αναφέρεται και χρησιμοποιεί ο Ήρωνας είναι η πρόταση 5 (κείμενο από Ε. Σταμάτη «Αρχιμήδους Άπαντα Τόμος Α' μέρος Β). [7]

5

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ἐλλείψεως πρὸς πάντα κύκλον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Διότι ἔστω χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ἐλλείψεως, ὅπου τὸ γράμμα Χ, διάμετροι δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΑΓ, καὶ ἔστω κύκλος, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΕΖ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ χωρίον Χ πρὸς τὸν κύκλον Ψ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΓ, ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

Ἂς περιγραφῇ λοιπὸν κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ· τὸ χωρίον λοιπὸν Χ πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΓ, ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· διότι ἔχει δειχθῆ, ἔχον τὸν λόγον τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 4). Ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ, τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι λοιπόν φανερόν, ὅτι τὸ χωρίον Χ πρὸς τὸν κύκλον Ψ

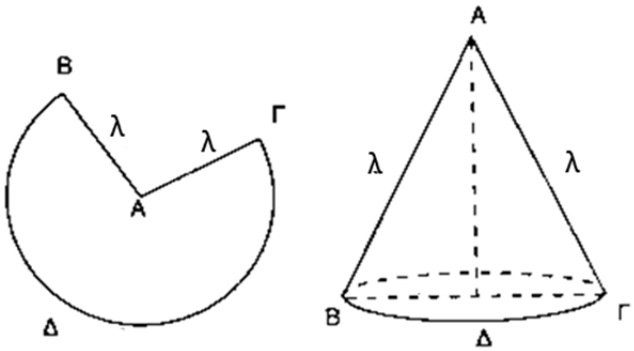


ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον.

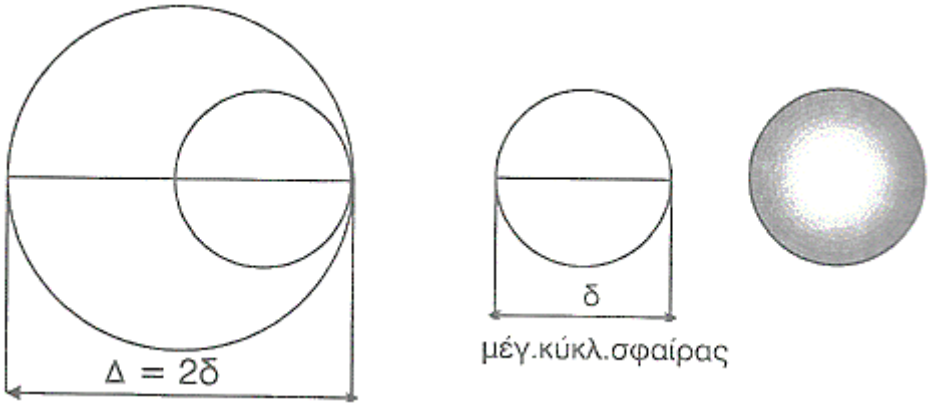
[5] [3] («Μετρικά») σελ.75

Στο πρόβλημα 35 ο Ήρων μετρά την παραβολή κάνοντας χρήση και πάλι της πρότασης 24 του Αρχιμήδη από το «Εφοδικόν» στην οποία αναφερθήκαμε προηγούμενα. Στο πρόβλημα 36 μετρά την κυρτή επιφάνεια ενός κυλίνδρου εκτυλίσσοντας την σε ένα επίπεδο, οπότε μετρά το ανάπτυγμά της που είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος την περιφέρεια της βάσης του κυλίνδρου και πλάτος το ύψος του κυλίνδρου .

Στο πρόβλημα 37 μετρά την κυρτή επιφάνεια ενός ισοσκελούς κώνου εκτυλίσσοντας την σε ένα επίπεδο, οπότε μετρά το ανάπτυγμά της που είναι ένας κυκλικός τομέας με πλευρά ίση με τη γενέτειρα του κώνου και τόξο του τομέα ίσο με την περιφέρεια της βάσης του κώνου. Για τον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού τομέα αναφέρεται στον Αρχιμήδη ο οποίος στην πραγματεία του «Κύκλου Μέτρηση» έχει αποδείξει ότι: «κάθε κυκλικός τομέας έχει εμβαδό ίσο με το $\frac{1}{2}$ του γινομένου του κυκλικού τόξου που ορίζει ο τομέας επί την ακτίνα του κύκλου στον οποίον ανήκει ο τομέας.

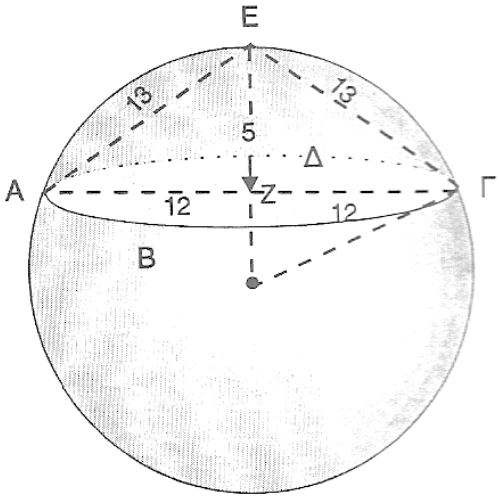


Στο πρόβλημα 38 δίνει τρόπους υπολογισμού της επιφάνειας μιας σφαίρας. Ως πρώτο τρόπο δίνει το Θεώρημα 33 του Αρχιμήδη στο οποίο στην πραγματεία του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου» έχει αποδείξει ότι «η επιφάνεια της σφαίρας είναι 4πλάσια από την επιφάνεια κάθε μέγιστου κύκλου της»



Δεύτερο τρόπο υπολογισμού της επιφάνειας της σφαίρας δίνει επίσης αποδεδειγμένο από τον Αρχιμήδη ότι η «επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την επιφάνεια του κυλίνδρου, χωρίς τις βάσεις του, ο οποίος έχει τη διάμετρο της βάσης του, ίση με τη διάμετρο της σφαίρας και ύψος ίσο».

Στο πρόβλημα 39 μετρά την επιφάνεια σφαιρικού τμήματος βασιζόμενος όπως αναφέρει στο θεώρημα 42 του Αρχιμήδη στην πραγματεία του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου», στο οποίο έχει αποδείξει ότι: «η επιφάνεια σφαιρικού τμήματος, μικρότερου ημισφαιρίου είναι ίση προς κύκλο, του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του τμήματος μέχρι την περιφέρεια του κύκλου, ο οποίος είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος».



Δηλαδή $E_{\substack{\sigma\varphi \\ \tau\mu\eta\mu.}} = \pi \cdot AE^2$, όπου το ΑΕ υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ με Πυθαγόρειο Θεώρημα, γνωρίζοντας την ακτίνα ΑΖ της βάσης του και το ύψος του ΕΖ.

Τέλος το Βιβλίο Ι των «Μετρικών» ολοκληρώνεται με μια υπόδειξη για την μέτρηση σχημάτων που δεν έχουν «καθορισμένες επιφάνειες» αλλά «ανώμαλες επιφάνειες», θα λέγαμε ακανόνιστων σχημάτων, επίπεδων ή όχι.

Για την μέτρηση επίπεδης επιφάνειας που «το περίβλημά της είναι μια τυχαία γραμμή» δηλαδή μια ακανόνιστη καμπύλη, πρέπει να λάβουμε γειτονικά σημεία πάνω σε αυτήν έτσι ώστε, αν τα συνδέσουμε κατά σειρά με ευθύγραμμα τμήματα, το περίγραμμα του πολυγώνου που σχηματίζεται να μην διαφέρει πολύ από την καμπύλη. Τότε με τον τρόπο αυτό μετράμε το πολύγωνο αφού το έχουμε κατατμήσει σε τρίγωνα και επομένως το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας.

Για τη μέτρηση της επιφάνειας ενός ακανόνιστου στερεού σχήματος, για παράδειγμα επιφάνειας που καλύπτει τον όγκο ενός ανδριάντα, όπως αναφέρει, το περιτυλίγουμε με ένα λεπτό χαρτί ή σεντόνι έτσι ώστε να καλυφθεί ολόκληρο και στη συνέχεια αφού τα ξετυλίξουμε να μετρήσουμε την επίπεδη ακανόνιστη επιφάνεια που προκύπτει, όπως περιγράφηκε προηγουμένως.

3.2.2 «ΜΕΤΡΙΚΑ» ΒΙΒΛΙΟ ΙΙ
ΜΕΤΡΗΣΗ ΟΓΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

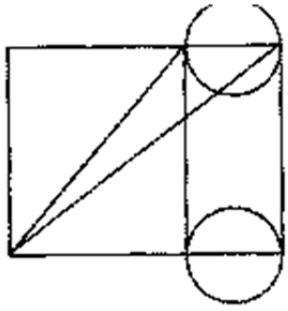
Στο βιβλίο αυτό μετρούνται οι όγκοι των στερεών σωμάτων των οποίων οι επιφάνειες έχουν μετρηθεί στο Βιβλίο Ι.

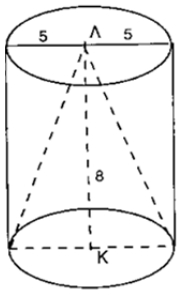
Στην εισαγωγή του Βιβλίου ΙΙ των Μετρικών, ο Ήρων αναφέρει: «Μετά από τη μέτρηση των ευθύγραμμων και μη ευθύγραμμων επιφανειών, σειρά να μετρηθούν έχουν τα στερεά σώματα των οποίων τις επιφάνειές τους επίπεδες ή μη επίπεδες μετρήσαμε στο προηγούμενο βιβλίο, ακόμα και κωνικές και κυλινδρικές και, εκτός από αυτές και τις ανώμαλες (ακανόνιστες), τις οποίες μερικοί κατά καιρούς ιστορικοί, επειδή ακριβώς είναι παράδοξες (ιδιόρρυθμες), θεωρούν ως γεννήτορά τους τον Αρχιμήδη. Αλλά είτε ο Αρχιμήδης είτε κάποιος άλλος είναι ο εφευρέτης τους πρέπει και αυτές να περιγραφούν ώστε η πραγματεία να είναι πλήρης και χρήσιμη σε αυτούς που θα θελήσουν να την χρησιμοποιήσουν». [3]

Στη συνέχεια ακολουθούν γενικά παραδείγματα υπολογισμού όγκου στερεών των οποίων όλες οι τομές παράλληλες προς τη βάση, είναι ίσες με τη βάση και ομοίως τοποθετημένες. Τα κέντρα αυτών των τομών ανήκουν σε μια σταθερή ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της βάσης και η ευθεία αυτή μπορεί να είναι κάθετη στη βάση ή κεκλιμένη και αποτελεί τον «άξονα» του στερεού. «Ύψος» του στερεού θεωρείται η κάθετη απόσταση της «κορυφής» (δηλαδή της άνω έδρας) από τη βάση του. Είτε λοιπόν ο «άξονας» του στερεού είναι ευθεία κάθετη στη βάση είτε κεκλιμένη, ο Ήρων καταλήγει ότι «πρέπει, αφού υπολογίσουμε το εμβαδό της βάσης του (δηλαδή του στερεού), να το πολλαπλασιάσουμε επί την κάθετο που προαναφέραμε (δηλαδή το ύψος του) και έτσι θα γνωρίσουμε πόσος είναι ο όγκος του στερεού αυτού του σώματος».

Στο <u>πρόβλημα 1</u>, μετράει τον όγκο κώνου, ανεξάρτητα να είναι ορθός ή πλάγιος, με δοσμένα τη διάμετρο βάσης 10 μονάδες και το ύψος 8. Ο Ήρων βασίζεται στο ήδη γνωστό: «ο όγκος κάθε κώνου είναι το τρίτον του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με αυτόν» και τότε υπολογίζει:

$V_{\text{κώνου}} = \frac{1}{3} V_{\text{κυλίνδρου}} = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot \upsilon = 209\frac{11}{21}$ μονάδες (κυβικές)





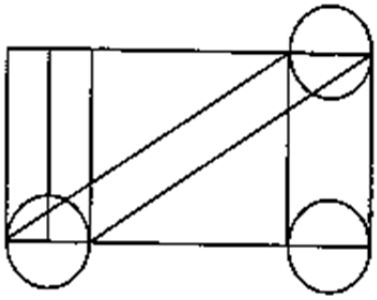
** Παρατήρηση: Οι Αρχαίοι με τον όρο «Αρχιμήδειο πρόβλημα», εννοούσαν κάθε πρόβλημα του οποίου η λύση επιτυγχάνεται κατόπιν σκληρής προσπάθειας και χρονοβόρας διαδικασίας η οποία απαιτούσε πολύπλοκους υπολογισμούς και εξειδικευμένες γνώσεις.*

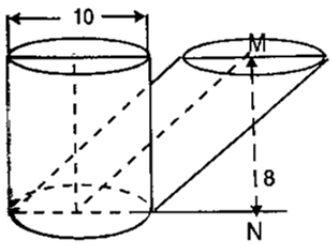
Όμοια και για τον όγκο της πυραμίδας της οποίας έχει δοθεί η βάση και το ύψος, λέει ότι: «ο όγκος κάθε πυραμίδας είναι το τρίτον πρίσματος που έχει την ίδια βάση και ύψος με αυτήν» και τότε υπολογίζει:

$$V_{\text{πυραμίδας}} = \frac{1}{3} V_{\text{πρίσματος}} = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot \upsilon$$

Στο <u>πρόβλημα 2</u>, μετράει τον όγκο ενός πλάγιου κυλίνδρου με δοσμένα την διάμετρο της βάσης 10 μονάδες και ύψος 8 μονάδες. Θεωρεί έναν ορθό ισοϋψή κύλινδρο που έχει την ίδια βάση με το δοσμένο πλάγιο και στη συνέχεια αναφέρει ότι χρησιμοποιεί το ήδη γνωστό: «οι όγκοι των ισοϋψών κώνων ή κυλίνδρων είναι ανάλογοι των βάσεών τους και επειδή οι κύλινδροι αυτοί έχουν την ίδια βάση και είναι ισοϋψείς, προκύπτει ότι ο όγκος του ορθού κυλίνδρου είναι ίσος με τον όγκο του πλαγίου». Τότε:

$$V_{\substack{\text{πλάγιου}\\ \text{κυλίνδρου}}} = V_{\substack{\text{ορθού}\\ \text{κυλίνδρου}}} = E_{\beta} \cdot \upsilon = 628\frac{4}{7}$$ κυβικές μονάδες.



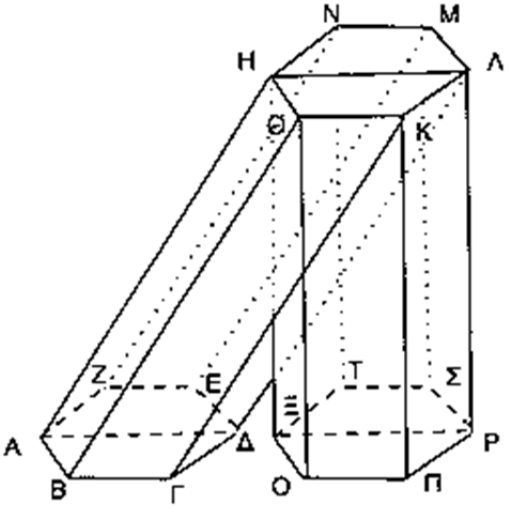


Στο <u>πρόβλημα 3</u>, μετράει τον όγκο ενός πλάγιου παραλληλεπιπέδου με βάση κανονικό 6-γωνο ΑΒΓΔΕΖ, με πλευρά ΑΒ=10 μονάδες και απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων βάσεων, δηλαδή το ύψος του παραλληλεπιπέδου, 8 μονάδες. Κατασκευάζει το αντίστοιχο ορθό ισοϋψές παραλληλεπίπεδο (πρίσμα), που έχει την ίδια βάση με το πλάγιο και

γνωρίζοντας ήδη ότι: «όλα τα ισοϋψή παραλληλεπίπεδα που έχουν ίδια βάση, έχουν και ίσους όγκους», τότε:

$$V_{\substack{\text{πλάγιου}\\ \text{παρ/δου}}} = V_{\substack{\text{ορθού}\\ \text{παρ/δου}}} = E_{\beta} \cdot \upsilon = E_{\substack{\text{κανονικού}\\ \text{εξαγώνου}}} \cdot \upsilon$$

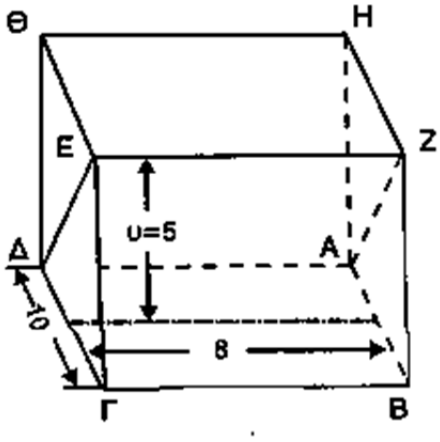
Επισημαίνει τέλος ότι: «η ίδια μέτρηση γίνεται και για το στερεό που η βάση του είναι τυχόν πολύγωνο».



Στο <u>πρόβλημα 4</u>, μετράει τον όγκο πρίσματος με βάση (ορθογώνιο) παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και κορυφή την ευθεία ΕΖ, με δοσμένα την ΑΒ=10 μονάδες την ΒΓ=8 μονάδες και το ύψος του πρίσματος 5 μονάδες.

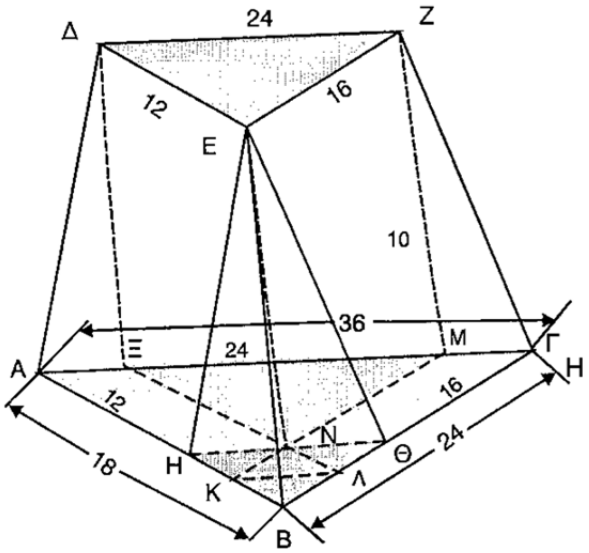
Ο Ήρων συμπληρώνει το δοθέν πρίσμα σε παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΕΖΗΘ και γνωρίζοντας ότι: «ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΕΖΗΘ είναι διπλάσιος του πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ», τότε υπολογίζει:

$$V_{\text{πρίσματος}} = \frac{1}{2} V_{\text{παραλληλεπιπέδου}} = \frac{1}{2} E_{\beta} \cdot \upsilon = 200 \text{ (κυβικές) μονάδες}$$



Στο πρόβλημα 5, θέλοντας να μετρήσει τον όγκο πυραμίδας με τυχαία βάση, μετρά για παράδειγμα τον όγκο πυραμίδας με βάση κανονικό πεντάγωνο με πλευρά 10 μονάδες και ύψος πυραμίδας 8 μονάδες, εργαζόμενος με τρόπο που έχουμε αναφέρει προηγούμενα.

Στο πρόβλημα 6, μετράει τον όγκο μιας «κολοβής» (κόλουρης) πυραμίδας με βάση τρίγωνο και με «κορυφή», δηλαδή πάνω έδρα, όμοιο τρίγωνο προς εκείνο της βάσης, χωρίς αριθμητικά δεδομένα. Η μέθοδος που ακολουθεί είναι ανάλογη με εκείνη που θα εφαρμόσει και στο Πρόβλημα 8, για τον υπολογισμό του όγκου του «βωμίσκου». Σύμφωνα με αυτήν, χωρίζει τη βάση της πυραμίδας σε επιμέρους σχήματα, δηλαδή σ' ένα τρίγωνο ίσο με της άνω έδρας, δύο παραλληλόγραμμα ίσα μεταξύ τους και ένα ακόμα τρίγωνο που αποτελείται από 4 μικρότερα ίσα μεταξύ τους, φέρνοντας κατάλληλες παράλληλες αλλά και κάνοντας χρήση κριτηρίων ισότητας τριγώνων. Τότε και η κολοβή πυραμίδα αποτελείται από επιμέρους στερεά όπως από ένα πρίσμα με βάση τρίγωνο, δύο πρίσματα με βάση παραλληλόγραμμα και κορυφή ευθεία και μια πυραμίδα με βάση τρίγωνο. Τότε ο όγκος της κολοβής πυραμίδας, ισούται με το άθροισμα των όγκων των στερεών αυτών.

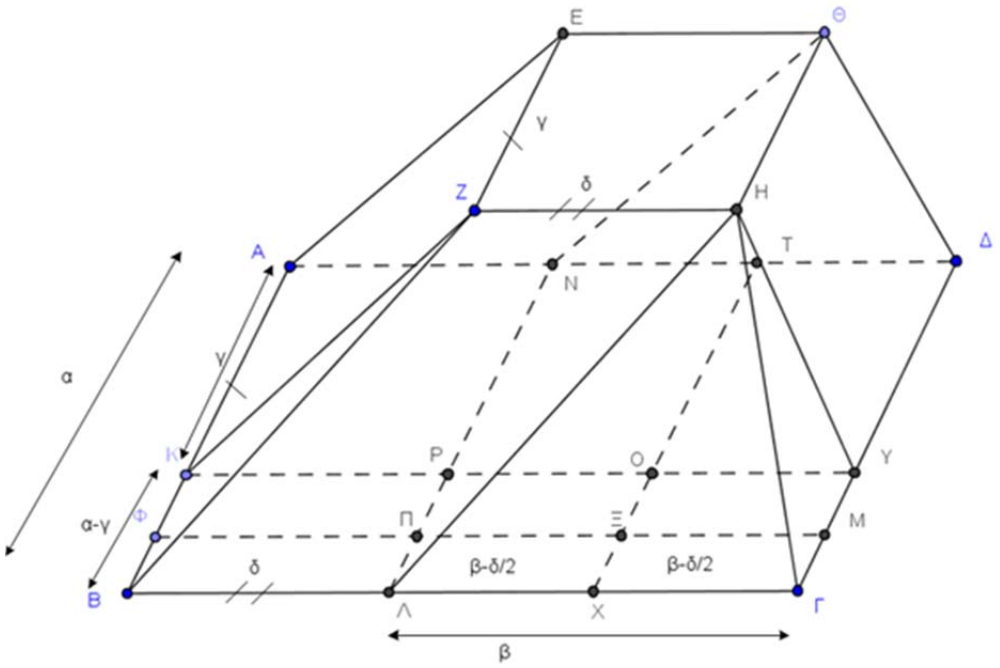


Στο πρόβλημα 7, μετράει τον όγκο ενός στερεού που περικλείεται από επίπεδες επιφάνειες και έχει τριγωνικές βάσεις, δηλαδή τον όγκο μιας επίσης κόλουρης πυραμίδας με βάση τρίγωνο, (χωρίς αριθμητικά δεδομένα), δίνοντας έτσι ένα δεύτερο τρόπο υπολογισμού του όγκου, αποδεικνύοντας ότι: «Κάθε κολοβή πυραμίδα με οποιαδήποτε βάση, με τον ίδιο τρόπο μετρείται. Και αλήθεια, εκ του λόγου δύο ομόλογων πλευρών των τριγώνων της βάσης και της άνω έδρας, υπολογίζεται το ύψος της μεγάλης πυραμίδας,

της οποίας ένα τμήμα είναι η κολοβή πυραμίδα, καθώς επίσης και το ύψος της ανωτέρας πυραμίδας. Γνωρίζοντας, τώρα, τον όγκο και της μικρής πυραμίδας, θα έχουμε δια αφαιρέσεως τον όγκο του αποτεμνομένου στερεού».

Στο πρόβλημα 8, μετράει τον όγκο ενός στερεού που περικλείεται από επίπεδες επιφάνειες και έχει βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και άνω βάση το ορθογώνιο ΕΖΗΘ όμοιο ή όχι προς το ΑΒΓΔ, δηλαδή με πλευρές αντίστοιχα παράλληλες αλλά όχι κατ' ανάγκη ανάλογες προς εκείνες του ΑΒΓΔ.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ΑΚ=ΕΖ και ΒΛ=ΖΗ. Διχοτομούμε τις ΒΚ, ΓΛ στα σημεία Φ και Χ και φέρνουμε τις ΚΥ, ΦΜ//ΑΔ και ΧΤ, ΛΝ//ΑΒ και γράφουμε τα τμήματα ΖΚ, ΗΡ, ΛΗ, ΗΥ,ΘΝ. Έτσι λοιπόν το στερεό χωρίζεται:

(i) στο παραλληλεπίπεδο με βάση το ορθογώνιο ΑΡ (δηλαδή ΑΚΡΝ) και άνω έδρα το ορθογώνιο ΕΗ (δηλ. ΕΖΗΘ)

(ii) στο πρίσμα με βάση το ορθογώνιο ΚΛ και κορυφή την ευθεία ΖΗ (εκφυλισμένη κατάσταση της άνω έδρας)

(iii) στο πρίσμα με βάση το ορθογώνιο ΝΥ και κορυφή την ευθεία ΘΗ και

(iv) στην πυραμίδα με βάση το ορθογώνιο ΡΓ και κορυφή το σημείο Η.

Έστω *υ* το ύψος του στερεού, τότε για τους όγκους έχουμε:

- Το παραλληλεπίπεδο της (i), έχει βάση το ορθογώνιο ΑΡ και ύψος *υ*.
- Το πρίσμα της (ii), είναι ίσο με παραλληλεπίπεδο με βάση το ορθογώνιο ΚΠ και ύψος *υ*.
- Το πρίσμα της (iii), είναι ίσο με παραλληλεπίπεδο με βάση το ορθογώνιο ΝΟ και ύψος *υ*.
- Η πυραμίδα της (iv), είναι ίση με παραλληλεπίπεδο με βάση το 1/3 του ορθογωνίου ΡΓ δηλαδή το $1\frac{1}{3}$ του ορθογωνίου ΡΞ και ύψος *υ*.

Συνεπώς ο όγκος ολόκληρου του στερεού είναι ίσος με τον όγκο παρ/δου με βάση το ορθογώνιο ΑΞ, αυξημένο κατά το 1/3 του ορθογωνίου ΡΞ και ύψος υ.

Δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{στερεού}} &= \left[(\text{ΑΚΡΝ}) + \frac{1}{2}(\text{ΚΒΛΡ}) + \frac{1}{2}(\text{ΝΡΥΔ}) + \frac{1}{3}(\text{ΡΛΓΥ})\right]\cdot\upsilon = \\
&= \left[(\text{ΑΚΡΝ}) + \frac{1}{2}\cdot 2(\text{ΚΦΠΡ}) + \frac{1}{2}\cdot 2(\text{ΝΡΟΤ}) + \frac{1}{3}\cdot 4(\text{ΡΠΞΟ})\right]\cdot\upsilon = \\
&= \left[(\text{ΑΚΡΝ}) + (\text{ΚΦΠΡ}) + (\text{ΝΡΟΤ}) + \frac{4}{3}(\text{ΡΠΞΟ})\right]\cdot\upsilon = \\
&= \left[(\text{ΑΚΡΝ}) + (\text{ΚΦΠΡ}) + (\text{ΝΡΟΤ}) + (\text{ΡΠΞΟ}) + \frac{1}{3}(\text{ΡΠΞΟ})\right]\cdot\upsilon = \\
&= \left[(\text{ΑΦΞΤ}) + \frac{1}{3}(\text{ΡΠΞΟ})\right]\cdot\upsilon = \\
&= \left[\text{ΑΦ}\cdot\text{ΑΤ} + \frac{1}{3}\text{ΡΠ}\cdot\text{ΡΟ}\right]\cdot\upsilon
\end{aligned}
$$

Έχοντας ολοκληρώσει την γεωμετρική απόδειξη για τον υπολογισμό του ζητούμενου όγκου, δηλαδή σύμφωνα με την ανάλυση όπως ο ίδιος λέει, δίνει αριθμητικά δεδομένα ΑΒ=20 μονάδες, ΒΓ=12, ΕΖ=16, ΖΗ=3 και *υ*=10 και προχωρά στη σύνθεση, στην εκτέλεση των πράξεων, έτσι ώστε καταλήγει:

$V_{\text{στερεού}} = 1380$ (κυβικές) μονάδες.

Αν εμείς θέσουμε ΑΒ=*α*, ΒΓ=*β*, ΕΖ=*γ*, ΖΗ=*δ*, [6] τότε, μπορούμε να δώσουμε τον τύπο που ουσιαστικά κατέληξε ο Ήρων. Δηλαδή:

[6] [10] («Τ.Heath Τόμος ΙΙ Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» σελ.393)

$$V_{\text{στερεού}} = \left(\text{ΑΦ} \cdot \text{ΑΤ} + \frac{1}{3}\text{ΡΠ} \cdot \text{ΡΟ} \right) \cdot \upsilon =$$

$$= \left[\left(\gamma + \frac{\alpha - \gamma}{2} \right) \cdot \left(\delta + \frac{\delta - \beta}{2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{2} \cdot \frac{\beta - \delta}{2} \right] \cdot \upsilon =$$

$$= \left[\frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \frac{\beta + \delta}{2} + \frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{12} \right] \cdot \upsilon =$$

$$= \left[\frac{(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)}{4} + \frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{12} \right] \cdot \upsilon$$

Σύμφωνα με τον T.Heath, [7] το παραπάνω στερεό είναι ο «βωμίσκος», ο όγκος του οποίου υπολογίζεται με τον ίδιο τύπο στα «Στερεομετρικά ΙΙ.40» (68, εκδ. Heiberg), αλλά και ο «σφηνίσκος» στα «Στερεομετρικά Ι.26» (25, εκδ. Heiberg) με τη διαφορά ότι εκεί ο δεύτερος όρος του τύπου, (δηλ. ο $\frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{12}$), στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι αμελητέος κατά τον υπολογισμό με τα αριθμητικά δεδομένα, πολύ μικρός σε σύγκριση με τον $\frac{(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)}{4}$ και γι αυτό παραλείπεται.

Ο Χρ. Κηπουρός, [5] στην εισαγωγή του έργου «Στερεομετρικά» (Εισαγωγή, σελ. ν), υποστηρίζει ότι δεν αποκλείεται η παράλειψη αυτή να οφείλεται σε μεταποιητή. Συμπεραίνεται δε, ότι τα στερεά αυτά πήραν το όνομά τους γιατί θα χρησίμευαν στην Αρχιτεκτονική ως σφήνες για την κατασκευή ειδικών έργων, π.χ. θολωτών στοών ή αψίδων. Επίσης γράφει ότι: «Ο Ήρων στα Μετρικά υπολογίζει με την απαράμιλλη δεξιοτεχνία που τον χαρακτηρίζει ένα στερεό με επίπεδες επιφάνειες», καθώς επίσης ότι, «το πρόβλημα 8 των Μετρικών ΙΙ, επιλύεται με άψογο γεωμετρικό τρόπο», όπως και το ανάλογό του πρόβλημα 38 στα «Στερεομετρικά Ι», για το οποίο λέει: «Αξίζει τον κόπο να μελετήσει ο αναγνώστης προσεκτικά, για να θαυμάσει τη δεξιοτεχνία με την οποία υπολογίζεται το ύψος της πυραμίδας. Οι «άψυχες» αριθμητικές πράξεις, επενδυμένες με τη γεωμετρική τους οντότητα που τους έχουμε δώσει, αποκαλύπτουν τη νοητική διαδικασία που ακολούθησε ο συγγραφέας αυτού του προβλήματος και αποστομώνουν τους διάφορους «ιστορικούς» που ισχυρίζονται ότι ο Ήρων ήταν ένας «πρακτικός χωρομέτρης»».

Ένας ειδικός «σφηνίσκος» ήταν το στερεό που ονομαζόταν «όνυξ» για το οποίο, είτε *γ=α*, είτε *δ=β* και τότε ο παράγοντας $\frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{12}$ επίσης μηδενίζεται. Τότε ο όγκος του δίνεται από τον τύπο:

[7] [10] («T.Heath Τόμος ΙΙ Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» σελ.394)

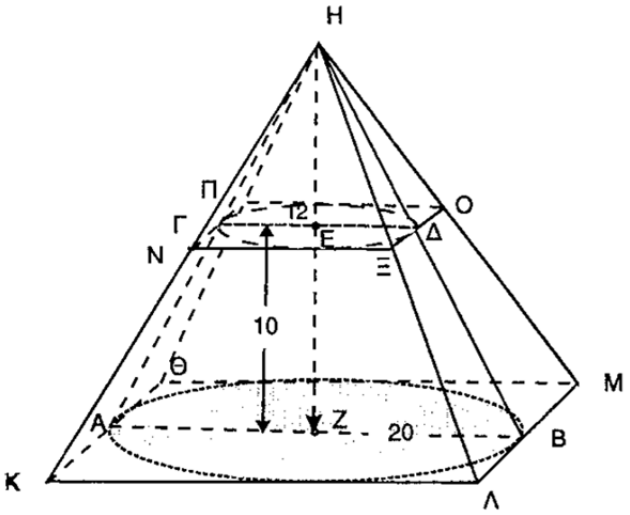
$$V_{\text{ονυχ.}} = \frac{(\beta+\gamma)(\alpha+\alpha)}{4}\cdot\upsilon = \frac{(\beta+\delta)\cdot\alpha\cdot\upsilon}{2}$$

Ένας άλλος «βωμίσκος» μετράται επίσης στα «Στερεομετρικά Ι.35» (34, εκδ. Heiberg).

Στο πρόβλημα 9, δίνει έναν πρώτο τρόπο για τη μέτρηση κόλουρου κώνου με δοσμένα τη διάμετρο βάσης του ΑΒ=20 μονάδες, τη διάμετρο κορυφής ΓΔ=12 μονάδες και ύψος ΕΖ=10. Για τη μέτρηση του όγκου του, κατασκευάζεται η αντίστοιχη περιγεγραμμένη κόλουρη πυραμίδα, δηλαδή πυραμίδα που έχει βάση τετράγωνο ΘΚΛΜ περιγεγραμμένο στον κύκλο της βάσης του κώνου και με κορυφή Η. Για τον υπολογισμό του όγκου της πυραμίδας αυτής, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του προβλήματος 8 και υπολογίσθηκε ο όγκος της.

$$\begin{aligned}
V_{\substack{\text{κόλουρης}\\ \text{πυραμίδας}}} &= \left[\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\right\}^2 + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\right\}^2\right]\cdot\upsilon = \\
&= \left[\left\{\frac{1}{4}\left(\alpha^2+2\alpha\alpha'+\alpha'^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\alpha^2-2\alpha\alpha'+\alpha'^2\right)\right\}\right]\cdot\upsilon = \\
&= \frac{3\alpha^2+6\alpha\alpha'+3\alpha'^2+\alpha^2-2\alpha\alpha'+\alpha'^2}{12}\cdot\upsilon = \\
&= \frac{4\alpha^2+4\alpha\alpha'+4\alpha'^2}{12}\cdot\upsilon = \frac{1}{3}\left(\alpha^2+\alpha\alpha'+\alpha'^2\right)\cdot\upsilon
\end{aligned}$$

όπου *α, α'* οι πλευρές της μεγαλύτερης και της μικρότερης βάσης αντίστοιχα της κόλουρης πυραμίδας.



Επειδή ο λόγος του όγκου της περιγεγραμμένης κόλουρης πυραμίδας προς τον όγκο του κόλουρου κώνου ισούται με τον λόγο του εμβαδού των αντίστοιχων βάσεών τους, τότε:

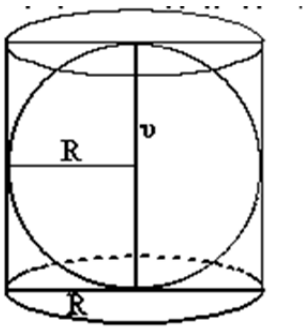
$$\frac{V_{\substack{\text{κόλουρης}\\ \text{πυραμίδας}}}}{V_{\substack{\text{κόλουρου}\\ \text{κώνου}}}} = \frac{E_{\text{τετρ.}}}{E_{\text{κύκλ.}}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow V_{\substack{\text{κόλουρου}\\ \text{κώνου}}} = \frac{\pi}{4} \times V_{\substack{\text{κόλουρης}\\ \text{πυραμίδας}}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2\right) \cdot \upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\substack{\text{κόλουρου}\\ \text{κώνου}}} = \frac{\pi}{12} \cdot \left(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2\right) \cdot \upsilon$$

όπου *α, α'* οι διάμετροι της μεγαλύτερης και μικρότερης βάσης αντίστοιχα του κόλουρου κώνου.

Στο πρόβλημα 10, δίνει τον δεύτερο τρόπο για τη μέτρηση του κόλουρου κώνου, απλούστερου όπως τον χαρακτηρίζει ο ίδιος ο Ήρων, αλλά η διαδικασία υπολογισμού είναι δυσχερέστερη από αυτήν του προβλήματος 9. Θεωρεί ότι δίνονται τα κέντρα, οι διάμετροι των βάσεων, καθώς επίσης και ο άξονάς του, χωρίς αριθμητικές τιμές. Αφού υπολογίσει γεωμετρικά το ύψος του μικρού κώνου, τότε ο όγκος του κόλουρου κώνου μετράται απευθείας ως διαφορά των όγκων του μικρού από τον μεγάλο κώνο.

Στο πρόβλημα 11, μετρά σφαίρα με διάμετρο 10 μονάδες. Ο Ήρων χρησιμοποιεί ως πρώτο τρόπο μέτρησης το πόρισμα της πρότασης 34 του Αρχιμήδη από το έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α'» και αναφέρει ότι εκεί ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι: «ο κύλινδρος που έχει βάση έναν μέγιστο κύκλο σφαίρας και ύψος τη διάμετρο της σφαίρας, είναι ίσος με το $1\frac{1}{2}$ της σφαίρας».

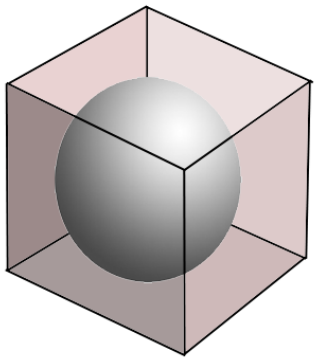


Δηλαδή ο περιγεγραμμένος κύλινδρος στη σφαίρα έχει όγκο 3/2 φορές τον όγκο της σφαίρας. Τότε εφαρμόζοντας το παραπάνω, ο υπολογισμός του όγκου της σφαίρας γίνεται ως εξής:

$$V_{\substack{\text{περιγεγρ.}\\ \text{κυλίνδρου}}} = 1\frac{1}{2}V_{\text{σφαίρας}} = \frac{3}{2}V_{\text{σφαίρας}} \Rightarrow V_{\text{σφαίρας}} = \frac{2}{3}V_{\substack{\text{περιγεγρ.}\\ \text{κυλίνδρου}}} = \frac{2}{3}E_{\beta}\cdot\upsilon =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot\frac{\delta^2}{4}\cdot\delta = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\delta^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{11}{14}\cdot\delta^3 \Rightarrow V_{\text{σφαίρας}} = \frac{11}{21}\cdot\delta^3 = 523\frac{17}{21}$$ κυβ. μονάδες

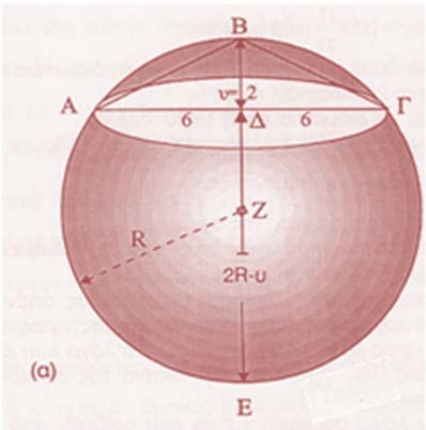
Επίσης δίνει και ένα δεύτερο τρόπο μέτρησης του όγκου της σφαίρας που προκύπτει από το ίδιο το θεώρημα του Αρχιμήδη, όπου αποδεικνύεται ότι: «11 κύβοι με ακμή τη διάμετρο της σφαίρας έχουν όγκο ίσο με τον όγκο 21 σφαιρών».



Δηλαδή:

$$11\cdot V_{\substack{\text{περιγεγρ.}\\ \text{κύβου}}} = 21\cdot V_{\text{σφαίρας}} \Rightarrow V_{\text{σφαίρας}} = \frac{11}{21}\cdot V_{\substack{\text{περιγεγρ.}\\ \text{κύβου}}} = \frac{11}{21}\cdot\delta^3 = 523\frac{17}{21}$$ κυβ. μονάδες

Στο <u>πρόβλημα 12</u>, μετρά τον όγκο σφαιρικού τμήματος με διάμετρο 12 μονάδες και ύψος 2 μονάδες. Αναφέρεται και πάλι στον Αρχιμήδη και στο έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου Β'», όπου αποδεικνύεται ότι: «ο λόγος κάθε σφαιρικού τμήματος προς τον κώνο που έχει την ίδια βάση και ύψος με αυτό, είναι ίσος με το λόγο που έχει το ύψος του υπολοίπου τμήματος αυξημένο κατά την ακτίνα της σφαίρας, προς το αυτό ύψος». Σύμφωνα με τον τύπο του Αρχιμήδη, ο Ήρων υπολογίζει τον όγκο του σφαιρικού τμήματος.



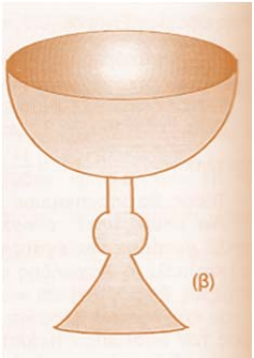
Δηλαδή:

$$\frac{V_{\substack{\text{σφαιρικού}\\ \text{τμήματος}}}}{V_{\text{κώνου}}} = \frac{\upsilon' + R}{\upsilon'} = \frac{2R - \upsilon + R}{2R - \upsilon} = \frac{3R - \upsilon}{2R - \upsilon} \Rightarrow$$

$$V_{\substack{\text{σφαιρικού}\\ \text{τμήματος}}} = \frac{3R - \upsilon}{2R - \upsilon} V_{\text{κώνου}} = \frac{3R - \upsilon}{2R - \upsilon} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{\text{κυλίνδρου}} = 117\frac{1}{3} \text{ κυβ.μονάδες}$$

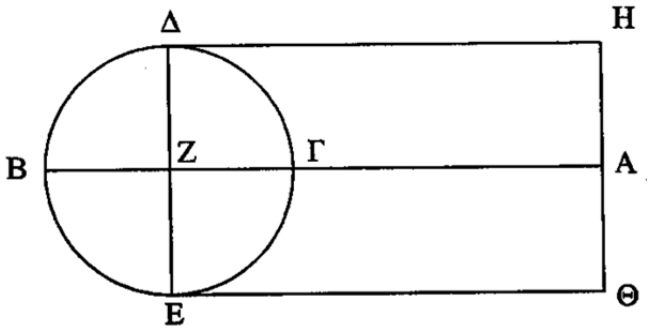
Επισημαίνει στο τέλος του προβλήματος ότι με τη μέτρηση του σφαιρικού τμήματος, μπορούμε να μετρήσουμε την χωρητικότητα ενός λουτήρα και την χωρητικότητα ενός κοχυλιού.

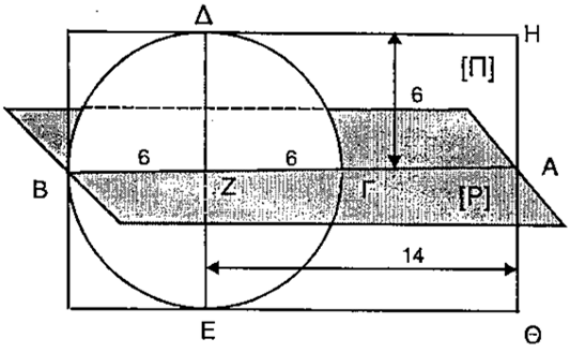
Η χωρητικότητα του λουτήρα που αποτελείται από τη διαφορά δύο σφαιρικών τμημάτων, υπολογίζεται αφαιρώντας από τον όγκο του μεγαλύτερου τμήματος τον όγκο του μικρότερου.



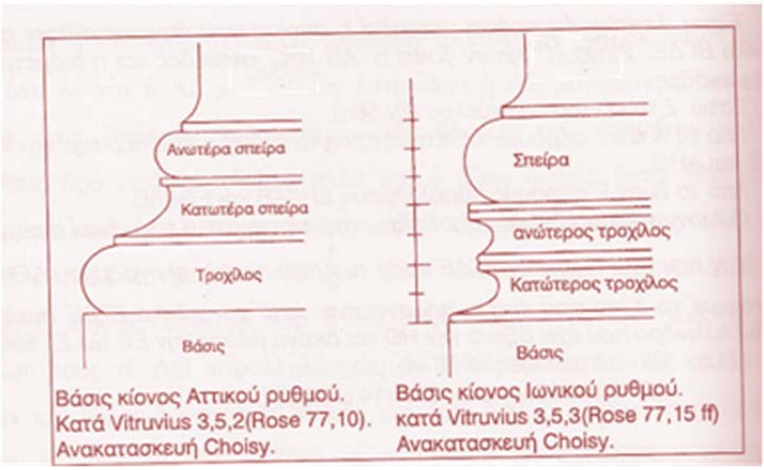
Η χωρητικότητα του κοχυλιού υπολογίζεται ως το μισό ημισφαιρίου ή σφαιρικού τμήματος.

Στο πρόβλημα 13, προτού ο Ήρων μετρήσει μια σπείρα, εκθέτει τον τρόπο δημιουργίας της «σπειρικής» επιφάνειας όπως ονομαζόταν. Σύμφωνα με τον Ήρωνα, έστω ευθεία ΑΒ ενός επιπέδου (οριζόντιου) και τα δύο τυχαία σημεία της Α, Β. Κατασκευάζεται κύκλος ΒΓΔΕ του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο προς αυτό της ευθείας ΑΒ. Το σημείο Α παραμένει σταθερό και περιστρέφεται η ΑΒ στο επίπεδο της, μέχρις ότου επανέλθει στην αρχική της θέση, συμπεριστρεφόμενου όμως και του κύκλου ΒΓΔΕ του οποίου το επίπεδο παραμένει κάθετο προς αυτό της ευθείας κατά τη διάρκεια της περιστροφής. Κατά την περιστροφή αυτή, η «σπειρική» επιφάνεια παράγεται από την περιφέρεια ΒΓΔΕ.





Ο Ήρων εδώ αναφέρει και την κατασκευή και άλλου είδους σπειρών όπως αυτών που παράγονται από την περιστροφή όχι πλήρους περιφέρειας κύκλου, αλλά από την περιστροφή κυκλικών τμημάτων που ονομάζονται «τροχίλοι» [8] και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή βάσεων κιόνων ώστε να τους προσδίδουν μεγαλοπρεπή εμφάνιση.



Για τη μέτρηση του όγκου της σπείρας με δοσμένα ΑΒ=20 μονάδες και ΒΓ=12 μονάδες, ο Ήρων χρησιμοποιεί ως πρώτο τρόπο μια πρόταση του

[8] [3] («Μετρικά-Διόπτρα»), Εισαγωγή Ι, σελ. xxvii

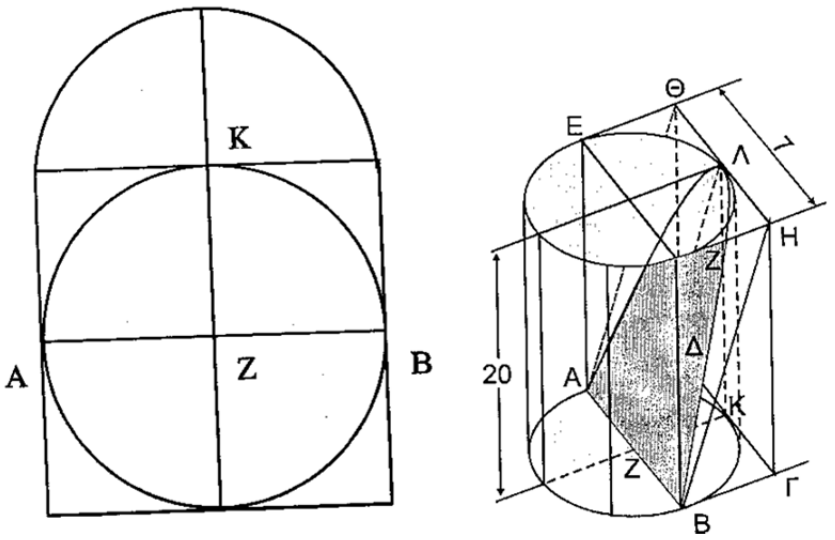
Διονυσόδωρου την οποία έχει αποδείξει στην πραγματεία του «Περί Σπείρας», σύμφωνα με την οποία: «Ο λόγος που έχει ο κύκλος ΒΓΔΕ προς το 1/2 του παραλληλογράμμου ΔΕΘΗ, είναι ίσος με το λόγο που έχει η παραγόμενη από τον κύκλο ΒΓΔΕ σπείρα, προς τον κύλινδρο που έχει άξονα την ΗΘ και ακτίνα βάσης την ΕΘ». Τότε ο υπολογισμός του όγκου της σπείρας γίνεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{E_{\substack{\text{κύκλου}\\ \text{ΒΓΔΕ}}}}{\frac{1}{2}(\Delta\text{ΕΘΗ})} = \frac{V_{\text{σπείρας}}}{V_{\text{κυλίνδρου}}} \Rightarrow V_{\text{σπείρας}} = \frac{V_{\text{κυλίνδρου}} \cdot E_{\substack{\text{κύκλου}\\ \text{ΒΓΔΕ}}}}{(\Delta\text{ΖΑΗ})} = 9956\frac{4}{7} \text{ κυβ. μονάδες}$$

Ως δεύτερο τρόπο, προτείνει η σπείρα να απλωθεί και να γίνει όπως ένας κύλινδρος του οποίου τον όγκο γνωρίζει να υπολογίσει ως γινόμενο του εμβαδού του κύκλου ΒΓΔΕ επί το μήκος της διαδρομής του κέντρου του. [10]

Στα <u>προβλήματα 14 και 15</u>, δίνεται η μέτρηση δύο αξιοσημείωτων στερεών της «Μεθόδου» του Αρχιμήδη και ο Ήρων χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα του Αρχιμήδη.

Στο <u>πρόβλημα 14</u>, μετράται κυλινδρικό τμήμα που έχει αποκοπεί με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μιας των βάσεών του. Δίνονται η διάμετρος της βάσης ΑΒ=7 μονάδες και το ύψος του τμήματος 20 μονάδες.



Στο πρόβλημα αυτό, ο Ήρων πραγματοποιεί μια αριθμητική εφαρμογή επί ενός σπουδαίου θεωρήματος, της μέτρησης του όγκου κυλινδρικού τμήματος το οποίο αποκόπτεται από τον κύλινδρο με επίπεδο διερχόμενο δια

του κέντρου μιας των βάσεών του, που ανακάλυψε ο Αρχιμήδης και περιέχεται στο έργο του «Εφοδικόν». [9]

Αναφέρεται από τον Ήρωνα, ότι ο Αρχιμήδης έχει αποδείξει στο «Εφοδικόν» ότι: «αυτό το τμήμα είναι ίσο με το 1/6 του όγκου του παραλληλεπιπέδου που έχει βάση το περιγεγραμμένο τετράπλευρο περί τον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου και ύψος ίσο με το ύψος του τμήματος». Δηλαδή:

$$V_{\substack{\text{κυκλικού}\\ \text{τμήματος}}} = \frac{1}{6}\cdot V_{\text{παραλληλεπιπέδου}} = \frac{1}{6}E_{\beta}\cdot\upsilon = \frac{1}{2}\delta^2\cdot\upsilon = 163\frac{1}{3}\ \text{κυβ. μονάδες}$$

όπου *δ*= διάμετρος ΑΒ.

Ο Χ. Κηπουρός [10] αναφέρει: «Σ' αυτό το έργο του Αρχιμήδη, (το «Εφοδικόν»), έχει αναφερθεί πολλές φορές ο Ήρων και όπως φαίνεται ήταν γνώστης του περιεχομένου του, αφού χρησιμοποιούσε τα Αρχιμήδεια συμπεράσματα με καταπληκτική ευχέρεια και οδηγείτο προς το αποτέλεσμα εφευρίσκοντας «ατραπούς» που φέρουν την προσωπική του σφραγίδα».

Για το πρόβλημα 14, σχολιάζει: «Δεν ήταν δυνατόν, λοιπόν, να περιγράψει όλη την Αρχιμήδειο απόδειξη αυτού του σπουδαίου και δύσκολου προβλήματος σ' ένα έργο το οποίον, γράφτηκε κυρίως, για τους μαθητές της σχολής του. Υποθέτω ότι για να δείξει ο Ήρων στους μαθητές του την ύπαρξη τέτοιων προβλημάτων, καθώς και την πορεία της επίλυσής τους, αποδέχεται τη λύση του Αρχιμήδη που περιέχεται στο «Εφοδικόν» και φθάνει αμέσως στην τελική διαδικασία».

Ομοίως και στο πρόβλημα 15, αναφέρει ένα θεώρημα του Αρχιμήδη (που το αποδεικνύει στο «Εφοδικόν»), σύμφωνα με το οποίο: «Αν σε έναν κύβο εισχωρήσουν δύο κύλινδροι ούτως ώστε οι βάσεις τους να εφάπτονται των εδρών του κύβου, το κοινόν στερεόν τμήμα των κυλίνδρων είναι ίσον με τα 2/3 του κύβου».

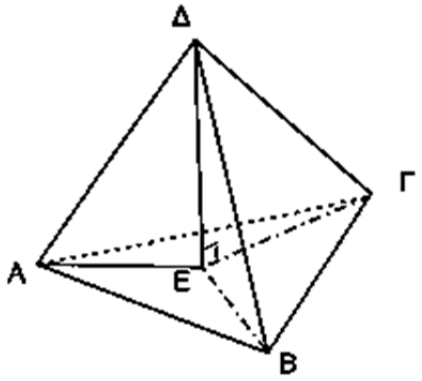
Συμπληρώνει δε ο Ήρων, ότι το θεώρημα αυτό είναι χρήσιμο για τις κατασκευές των καμαρών, που συνήθως γίνονται στις πηγές και στα λουτρά, όταν υπάρχουν είσοδοι ή παράθυρα και από τα τέσσερα μέρη και όπου δεν είναι κατάλληλοι οι χώροι για να στεγαστούν με ξύλινες κατασκευές.

Στα προβλήματα 16, 17, 18, 19, ο Ήρων μετρά τους όγκους των πέντε κανονικών στερεών που ονομάζονται Πλατωνικά, εκτός αυτόν του κύβου για τον οποίο γράφει: «η μέτρηση αυτή είναι προφανής, γιατί πρέπει να κυβίσουμε τον αριθμό που εκφράζει σε μονάδες, το μήκος της πλευράς του». Για τις μετρήσεις των παραπάνω στερεών πρέπει σε κάθε περίπτωση να

[9] [3] («Μετρικά-Διόπτρα»), Εισαγωγή Ι, σελ. xxvii
[10] [3] («Μετρικά-Διόπτρα»), Εισαγωγή Ι, σελ. xxvii

υπολογίζει το λόγο της καθέτου *κ* από το κέντρο της περιγεγραμμένης σφαίρας προς τυχαία έδρα του *α*.

Στο πρόβλημα 16, έχουμε την περίπτωση του κανονικού τετραέδρου όπου μετράται πυραμίδα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και κορυφή το σημείο Δ, της οποίας κάθε ακμή είναι 12 μονάδες.



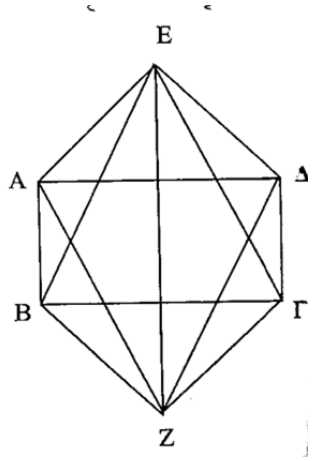
Τότε από τα σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα είναι:

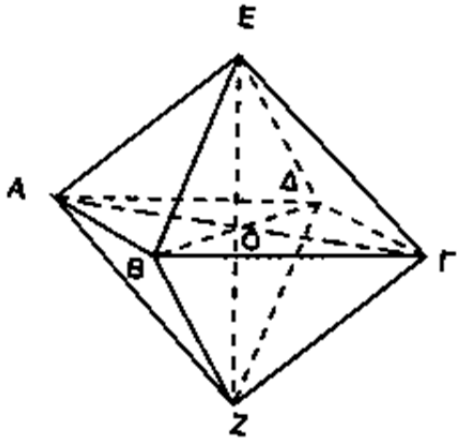
$$\alpha^2 = 3\rho^2 \quad \text{και} \quad \kappa^2 = \alpha^2 - \rho^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3} = \frac{2\alpha^2}{3}$$

οπότε:

$$V_{\text{τετραέδρου}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{παραλληλεπιπέδου}} = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\alpha\sqrt{6}}{3} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$$

Στο πρόβλημα 17, μετράται το κανονικό οκτάεδρο του οποίου κάθε ακμή είναι 7 μονάδες. Το οκτάεδρο αποτελείται από δύο ίσες τετραγωνικές πυραμίδες με κοινή βάση το τετράγωνο ΑΒΓΔ και ίσα ύψη ΕΟ=ΟΖ= $\frac{1}{2}$ ΕΖ.



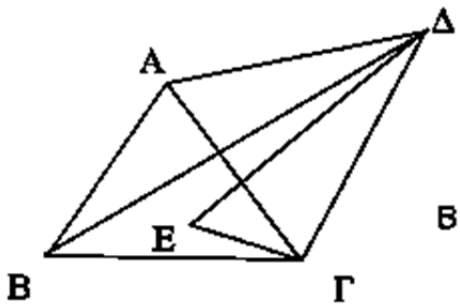


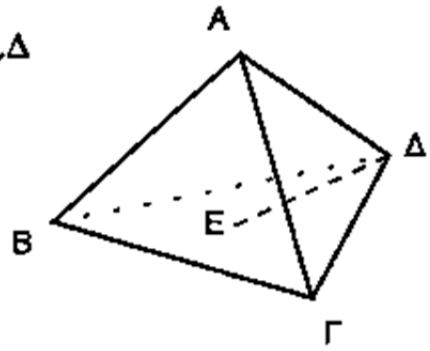
Κάθε μια από τις παραπάνω πυραμίδες έχει όγκο ίσο με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του αντίστοιχου παραλληλεπίπεδου της και επομένως το οκτάεδρο έχει όγκο ίσο με το $\frac{1}{3}$ του παραλληλεπιπέδου με βάση το τετράγωνο ΑΒΓΔ και ύψος το ΕΖ. Επομένως:

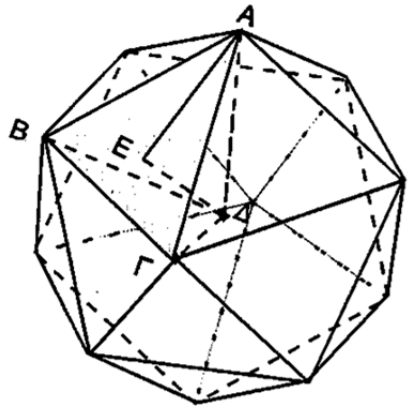
$$V_{\text{οκταέδρου}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{παρ/δου}} = \frac{1}{3} \cdot E_{\beta} \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot \alpha^2 \sqrt{2\alpha^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\alpha^3 = 163\frac{1}{3} \quad \text{(κυβ.)}$$

μονάδες.

Στο <u>πρόβλημα 18</u>, μετράται το εικοσάεδρο με ακμή 10 μονάδες. Το εικοσάεδρο, αποτελείται από 20 ίσες πυραμίδες με βάσεις τις έδρες του στερεού, που είναι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και κοινή κορυφή το κέντρο της σφαίρας Δ, άρα και ίσα ύψη *κ*.







Εδώ δίνει το λόγο $\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{127}{93}$ και αφού *α*=10, τότε υπολογίζεται το ύψος της πυραμίδας $\kappa=\Delta\mathrm{E}=7\frac{41}{127}$ μονάδες.

Η πραγματική τιμή του λόγου $\frac{\kappa}{\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$, οπότε: $\kappa=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\cdot\alpha$. [10]

Επομένως ο όγκος κάθε πυραμίδας είναι ίσος με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου της και τότε:

$$\mathrm{V}_{\text{εικοσάεδρου}}=20\cdot\mathrm{V}_{\text{πυραμίδας}}=20\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathrm{V}_{\text{παραλληλεπιπέδου}}=20\cdot\frac{1}{3}\mathrm{E}_{\beta}\cdot\upsilon=\frac{20}{3}\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\cdot\alpha=$$
$$=\frac{5}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\cdot\alpha^3=\frac{5\alpha^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$$

Στο <u>πρόβλημα 19</u>, μετράται το κανονικό δωδεκάεδρο με ακμή 10 μονάδες. Το δωδεκάεδρο αποτελείται από 12 ίσες πυραμίδες με βάσεις τις έδρες του στερεού που είναι ίσα κανονικά πεντάγωνα και κοινή κορυφή το κέντρο της σφαίρας, άρα και ίσα ύψη *κ*.

Εδώ δίνει το λόγο $\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{8}{9}$ και αφού *α*=10 τότε $\kappa=11\frac{1}{4}$ μονάδες. Η πραγματική τιμή του λόγου $\frac{\kappa}{\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$, οπότε $\kappa=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\cdot\alpha$ που αν τεθεί $\sqrt{5}\cong\frac{9}{4}$ τότε προκύπτει ο λόγος του Ήρωνα. [10]

Επομένως:

$$V_{\text{δωδεκάεδρου}} = 12 \cdot V_{\text{πυραμίδας}} = 12 \cdot \frac{1}{3} V_{\text{παραλληλεπιπέδου}} = 4 \cdot E_{\beta} \cdot \upsilon =$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} \cdot \alpha = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)\alpha^3}{4}$$

Το Βιβλίο ΙΙ των «Μετρικών» τελειώνει με το πρόβλημα 20 με την μέτρηση στερεών ακαθόριστου σχήματος. Παραπέμπει για άλλη μια φορά στη μέθοδο μέτρησης που έχει επινοηθεί από τον Αρχιμήδη κατά την οποία βυθίζονται τα σώματα που θέλουμε να μετρήσουμε σε δεξαμενή με νερό και τότε ο όγκος τους ισούται με τον όγκο του νερού που εκτοπίζεται, (ή με την ελάττωση του όγκου της δεξαμενής).

Επίσης δίνει και έναν άλλο τρόπο μέτρησης, την μέθοδο του περιπλάσματος, για σώματα που δεν είναι εύκολο να μεταφερθούν. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, περιβάλλουμε το σώμα με κερί ή πηλό έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα «τέλειο» παραλληλεπίπεδο που περιέχει το στερεό και μετρούμε τον όγκο του. Στη συνέχεια αφαιρούμε τον πηλό και μ' αυτόν σχηματίζουμε ένα άλλο παραλληλεπίπεδο μετρώντας επίσης τον όγκο του. Αφαιρώντας τους όγκους των δύο παραλληλεπιπέδων, προκύπτει ο όγκος του σώματος που θέλουμε να μετρήσουμε.

3.2.3 «ΜΕΤΡΙΚΑ» ΒΙΒΛΙΟ ΙΙΙ
ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Στο βιβλίο αυτό εξετάζεται η διαίρεση των εμβαδών διαφόρων επιπέδων σχημάτων καθώς επίσης και των όγκων στερεών σωμάτων από μια ευθεία ή ένα επίπεδο σε μέρη με δοθέντα λόγο. Όπως αναφέρει και ο T. Heath, [10] το βιβλίο αυτό έχει πολλά κοινά με το βιβλίο του Ευκλείδη «Περί Διαιρέσεων (σχημάτων)», την οποία ο Ήρων φαίνεται να έχει λάβει υπόψη του αφού τα προβλήματα των διαιρέσεων των επιφανειών του είναι εν μέρει τα ίδια (Tittel R.E. 1016). Επίσης τρία από τα προβλήματα που περιέχονται στο Βιβλίο ΙΙΙ, ανάγονται σε προβλήματα που έχει λύσει ο Απολλώνιος στην πραγματεία του «Περί Χωρίου Αποτομής».

Στην εισαγωγή του Βιβλίου ΙΙΙ, ο Ήρων εξηγεί τους λόγους για τους οποίους προβαίνει σε διαιρέσεις γεωμετρικών σχημάτων καθώς και την χρησιμότητα και αναγκαιότητα στη ζωή των ανθρώπων, αναφέροντας:

«Έχουμε τη γνώμη ότι δεν θα ήταν περιττολογία αν προβούμε και σε διαιρέσεις των γεωμετρικών σχημάτων που μελετήσαμε μέχρι τώρα.

Γιατί θεωρούμε ότι είναι όχι μόνο χρήσιμο αλλά και αναγκαίο να γνωρίζει κανείς να απονέμει ίσα μερίδια γης σε ισάξιους, ενώ στους έντιμους κατ' αναλογίαν περισσότερα. Αφού και η ίδια η Φύση έχει διαιρέσει τη Γη σε περιοχές διαφορετικής αξίας.

Και αλήθεια, τα μεγάλα έθνη κατέχουν με τη βία μεγάλη έκταση, ενώ τα μικρά μικρή έκταση. Ακόμα και κάθε πόλη έχει διαιρεθεί σε συνοικίες σύμφωνα με την αξία τους.

Στους ηγεμόνες και σ' αυτούς που μπορούν να διοικούν, δόθηκε ανάλογα περισσότερος τόπος, ενώ σε αυτούς που δεν μπορούν να διοικήσουν αφέθηκε λίγος τόπος. Στους μικρόψυχους συνοικίες, αγροτικές κατοικίες και τα παρόμοια, ωστόσο έχει εκ των προτέρων καθοριστεί η αναλογία των ευφοροτέρων προς τα πιο άγονα κτήματα.

Αν όμως επιθυμούσε κάποιος να κάνει «αναδασμό» διατηρώντας την αναλογία, ώστε καθόλου να μη μεταβληθεί αυτή, τότε το μόνο που χρειάζεται είναι η Γεωμετρία. Αυτή εφαρμόζεται παντού, κατά τον ίδιο τρόπο και βρίσκει αξιόπιστα την αναλογία, ενώ η απόδειξη για αυτά είναι αναμφισβήτητη, πράγμα που καμία από τις άλλες τέχνες ή επιστήμες υπόσχεται». [3]

Στα προβλήματα των διαιρέσεων ο Ήρων αφού προσδιορίσει κάποιο μέγεθος που δίνει τη λύση για τον τρόπο της διαίρεσης του σχήματος, στη συνέχεια προβαίνει στον υπολογισμό αυτού του μεγέθους χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές τιμές των δεδομένων. Αυτήν την εργασία ονομάζει «ανάλυση» όπως έχουμε αναφέρει και προηγούμενα και διαφέρει από του Ευκλείδη. Όταν τα δεδομένα δεν εκφράζονται με συγκεκριμένους αριθμούς τότε οι λύσεις αναπτύσσονται κατά γεωμετρικό τρόπο.

Αρχικά ο Ήρων εξετάζει τον τρόπο διαίρεσης τριγώνου σε δύο μέρη με δοσμένο λόγο από ευθεία.

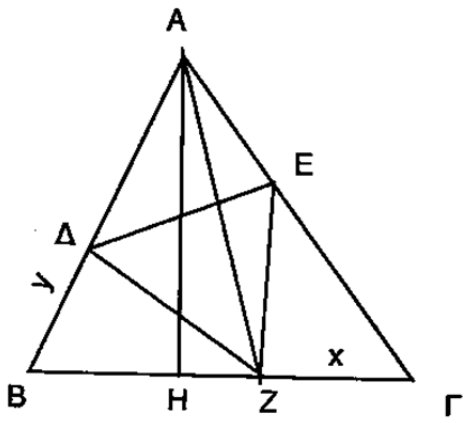
Στο πρόβλημα 1, η ευθεία που διαιρεί το τρίγωνο διέρχεται από μια κορυφή του, δηλαδή εξετάζεται: «Να διαιρεθεί τριγωνικό χωρίο σε τριγωνικά χωρία τα οποία να έχουν κοινή κορυφή, ενώ τα εμβαδά τους, δοθέντα λόγο» και δίνονται αριθμητικά δεδομένα για τις πλευρές ΑΒ=13 μονάδες, ΒΓ=14, ΑΓ=15, καθώς και λόγος των εμβαδών τους $\frac{5}{3}$.

Στο πρόβλημα 2, η ευθεία που διαιρεί το τρίγωνο είναι παράλληλη προς μια πλευρά του, δηλαδή εξετάζεται: «Το ως άνω τρίγωνο, να διαιρεθεί κατά δοθέντα λόγο με ευθεία παράλληλη προς τη βάση με αριθμητικά δεδομένα τις πλευρές ΑΒ=13 μονάδες, ΒΓ=14, ΑΓ=15 και με δοθέντα λόγο τέτοιο ώστε το προς την κορυφή τρίγωνο, να είναι τριπλάσιο του υπολοίπου τραπεζίου».

Στο πρόβλημα 3, η ευθεία διέρχεται από τυχαίο σημείο μιας πλευράς του, και εξετάζεται: «Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=13 μονάδες, ΒΓ=14, ΑΓ=15. Έστω ότι η ΑΔ=12 μονάδες. Πρέπει τώρα να αχθεί από το Δ η ΔΕ η οποία διαιρεί το τρίγωνο ΑΒΓ κατά ένα δεδομένο λόγο και έστω ότι αυτός ο λόγος είναι $\frac{3}{2}$».

Διαφοροποιείται το πρόβλημα 4, στο οποίο ζητείται: «Να αφαιρεθεί από το δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ, το δοθέν κατά μέγεθος τρίγωνο ΔΕΖ, ώστε τα απομένοντα τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΖ και ΓΕΖ να είναι ίσα μεταξύ τους» και εννοεί να είναι ισεμβαδικά τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΖ και ΓΕΖ.

Σύμφωνα με τον Ήρωνα αν λάβουμε σημεία Δ, Ζ, Ε επί των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν οι αναλογίες: $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΓ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}$, τότε τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΖ και ΖΓΕ θα είναι ισεμβαδικά.



Εδώ δίνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη που σύμφωνα με τον Χ.Κηπουρό [11] δεν είναι «ξεκρέμαστη», αλλά για κάποιο λόγο ο Ήρων παρέλειψε να δώσει και την απόδειξη της ισότητας αυτών των λόγων.

Στη συνέχεια φέρνουμε την ΑΖ.

Επειδή $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΓ}}=\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΒΖ}+\text{ΖΓ}}{\text{ΖΓ}}=\frac{\text{ΓΕ}+\text{ΕΑ}}{\text{ΕΑ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΖΓ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}$ και τότε:

$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΖΓ}}=\frac{\text{ΑΖΓ}}{\text{ΑΖΕ}}$, αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ είναι ισοϋψή, καθώς επίσης και τα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΖΕ ισοϋψή.

Επομένως:

$$\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΒΓ}-\text{ΑΖΓ}}=\frac{\text{ΑΖΓ}}{\text{ΑΖΓ}-\text{ΑΖΕ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΑΒΖ}}=\frac{\text{ΑΖΓ}}{\text{ΕΖΓ}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \text{ΑΒΖ}\cdot\text{ΑΖΓ}==\text{ΑΒΓ}\cdot\text{ΕΖΓ}=$ γνωστό,

αφού τα ΑΒΓ και ΔΕΖ δεδομένα και τότε και το $\text{ΕΖΓ}=\frac{\text{ΑΒΓ}-\Delta\text{ΕΖ}}{3}$ γνωστό.

Φέρουμε $\text{ΑΗ}\perp\text{ΒΓ}$ τότε $\text{ΑΒΖ}\cdot\text{ΑΖΓ}=$ γνωστό $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\text{ΒΖ}\cdot\text{ΑΗ}\cdot\frac{1}{2}\text{ΖΓ}\cdot\text{ΑΗ}=$ γνωστό, $\Leftrightarrow \text{ΑΗ}^2\cdot\text{ΒΖ}\cdot\text{ΖΓ}=$ γνωστό, $\Leftrightarrow \text{ΒΖ}\cdot\text{ΖΓ}=$ γνωστό, αφού ΑΗ υπολογίζεται εύκολα. Όμως αφού ΒΓ δεδομένη, τότε και η θέση του Ζ θα είναι δεδομένη. Και αυτό γιατί είναι ΒΖ+ΖΓ=ΒΓ δεδομένο και σταθερό, επίσης $\text{ΒΖ}\cdot\text{ΖΓ}$ = γνωστό και τότε τα ΒΖ, ΖΓ υπολογίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης: $x^2-\left(\underbrace{\text{ΒΖ}+\text{ΖΓ}}_{\text{ΒΓ}}\right)x+\text{ΒΖ}\bullet\text{ΖΓ}=0$. Βάζοντας τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος, γίνεται: $x^2-14x+46=0$ και ο Ήρων δίνει τη λύση της κατευθείαν χωρίς να παρουσιάζει τη διαδικασία επίλυσής της όπως σε κάποια προβλήματα που συναντάμε στα «Γεωμετρικά». Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει από την κατασκευή ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση τη ΒΓ και ύψος x, του οποίου το $\text{ΒΖ}\cdot\text{ΖΓ}$ υπολείπεται κατά ένα τετράγωνο δηλαδή $\text{ΒΓ}\cdot x=\text{ΒΔ}\cdot\Delta\text{Γ}+x^2$. Αφού ορίζεται η θέση του Ζ επί της ΒΓ τότε ορίζεται και ο λόγος $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΖ}}$ και τότε αφού

[11] [3] («Μετρικά – Διόπτρα»), σελ. 135

$\frac{BZ}{Z\Gamma}=\frac{\Gamma E}{EA}\Leftrightarrow\frac{BZ+Z\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{\Gamma E+EA}{EA}\Leftrightarrow\frac{B\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{A\Gamma}{EA}=$ γνωστός, όμως η ΑΓ δεδομένη και τότε ορίζεται η θέση του Ε επί της ΑΓ.

Όμοια ορίζεται και το Δ επί της ΑΒ και επομένως τα μήκη ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ είναι γνωστά κατά θέση.

Από την πρόταση – Πρόβλημα 4, υποδηλώνεται το παρακάτω λήμμα:

«Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{BZ}{Z\Gamma}=\frac{\Gamma E}{EA}=\frac{\mu}{\nu}$ τότε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{(B\Delta Z)}{(AB\Gamma)}=\frac{(\Gamma ZE)}{(AB\Gamma)}=\frac{\mu\cdot\nu}{(\mu+\nu)^2}$».

Στη συνέχεια ο Ήρων εξετάζει τον τρόπο διαίρεσης τραπεζίων σε δύο μέρη με δοσμένο λόγο από μια ευθεία.

Στο πρόβλημα 5, η ευθεία που διαιρεί το τραπέζιο διέρχεται από το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών του, δηλαδή εξετάζεται το: «Δίδεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ//ΒΓ και ζητείται να διαιρεθεί δια ευθείας ΕΖ, ούτως ώστε ο λόγος του ΑΒΖΕ προς το ΕΖΓΔ να είναι ένας δεδομένος λόγος και οι πλευρές ΕΖ και ΓΔ να συντρέχουν στο ίδιο σημείο Η».

Στο πρόβλημα 6, η ευθεία που διαιρεί το τραπέζιο, διέρχεται από δοσμένο σημείο μιας από τις παράλληλες πλευρές και εξετάζεται: «Με τα δεδομένα του Προβλήματος 5, ας λάβουμε τμήμα ΑΗ=5 μονάδες (επί της ΑΔ) και ας θελήσουμε να φέρουμε από το Η, ευθεία ΗΘ, η οποία διαιρεί το τετράπλευρο κατά δοθέντα λόγο».

Στο πρόβλημα 7, η ευθεία που διαιρεί το τραπέζιο, είναι παράλληλη προς τις παράλληλες πλευρές του, δηλαδή τις βάσεις του και εξετάζεται: «Δίδεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ. Να γραφεί ευθεία ΕΖ//ΑΒ η οποία να το διαιρεί κατά δοθέντα λόγο».

Στο πρόβλημα 8, η ευθεία που διαιρεί το τραπέζιο, διέρχεται από ένα σημείο μιας από τις μη παράλληλες πλευρές του και εξετάζεται: «Αναφερόμενοι στο προηγούμενο πρόβλημα (7°), ας ληφθεί ΑΗ=2 μονάδες (επί της ΑΓ). Ζητείται να γραφεί ευθεία ΗΘ ώστε να διαιρεθεί το τετράπλευρο κατά τον αυτόν λόγον».

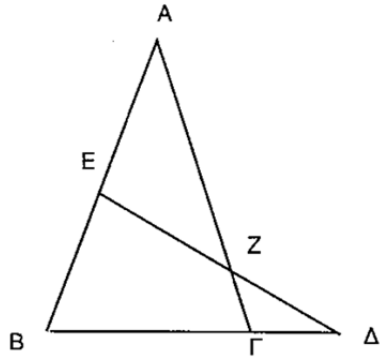
Στο πρόβλημα 9, μελετά τη διαίρεση της επιφάνειας ενός κύκλου σε μέρη που έχουν δοσμένο λόγο από ένα εσωτερικό του ομόκεντρο κύκλο, δηλαδή εξετάζεται: «Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Να γραφεί ένας ομόκεντρος κύκλος διαμέτρου ΓΔ ο οποίος διαιρεί τον αρχικό κατά δοθέντα λόγο».

Στο σημείο αυτό ο Ήρων επισημαίνει ότι: «μέχρι τώρα περιγράψαμε προβλήματα διαίρεσης επιπέδων σχημάτων όπου ο λόγος ήταν ένας

συγκεκριμένος αριθμός» και προετοιμάζει για τα προβλήματα που ακολουθούν αναφέροντας: «στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να διαιρέσουμε σχήματα κατά γενικό τρόπο, τότε οι λύσεις τους θα αναπτύσσονται, γενικώς, κατά γεωμετρικό τρόπο».

Το πρόβλημα 10, είναι το πρώτο από τα τρία προβλήματα του Βιβλίου ΙΙΙ που εξετάζουμε, το οποίο ανάγεται σε πρόβλημα που έχει λύσει ο Απολλώνιος στο 2ο βιβλίο του «Περί της του χωρίου αποτομής», όπως αναφέρει ο ίδιος ο Ήρων. Το πρόβλημα του Ήρωνα είναι: «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στην προέκταση της βάσης του ΒΓ. Να αχθεί από το σημείο Δ μια ευθεία ΔΕ, η οποία να διαιρεί το τρίγωνο κατά δοθέντα λόγο» και αφού υπολογίσει το $\mathrm{AZE} = \frac{\mu}{\mu+\nu} \cdot \mathrm{AB\Gamma}$, συνεχίζει: «Επειδή το Δ έχει δοθεί επί της ΒΓ, το πρόβλημα ανάγεται στην παρακάτω κατασκευή:

Δίνονται θέσει μεγέθει, δύο ευθείες που καταλήγουν στο σημείο Α. Ζητείται να αχθεί από δοθέν σημειο Δ, μια ευθεία από τέμνουσα από αυτές χωρίον δοθέντος εμβαδού.



Έτσι ορίζονται τα σημεία Ε, Ζ. Αυτό όμως το πρόβλημα έχει αποδειχθεί στο 2ο βιβλίο «Περί του Χωρίου Αποτομής». Έτσι το πρόβλημα έχει επιλυθεί».

Ο Ήρων συνεχίζει εξετάζοντας τον τρόπο διαίρεσης τυχαίου τετραπλεύρου σε μέρη με δοσμένο λόγο, από ευθεία. Σύμφωνα με τον Τ. Heath, [12] οι προτάσεις αυτές είναι «εφευρετικές και ενδιαφέρουσες».

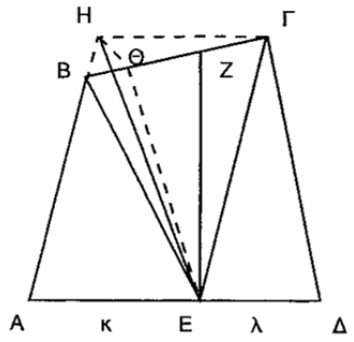
Στο πρόβλημα 11, η ευθεία που διαιρεί το τετράπλευρο, διέρχεται από ένα σημείο που ανήκει σε μια πλευρά του, δηλαδή εξετάζεται: «Δίδεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ε επί της πλευράς ΑΔ αυτού. Να αχθεί από το Ε η ευθεία ΕΖ, με τρόπο ώστε να διαιρεθεί το τετράπλευρο σε δύο

[12] [10] («Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών») Τόμος ΙΙ σελ.399

μέρη που έχουν λόγο $\frac{AE}{\Delta E}$», χωρίς στο πρόβλημα τα δεδομένα να δίνονται αριθμητικά.

ΛΥΣΗ

Έστω ΕΖ η ζητούμενη ευθεία.



Φέρουμε ΓΗ//ΑΔ (τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Η).

Φέρουμε την ΒΕ και ΗΘ//ΒΕ (τέμνει την ΒΓ στο Θ).

Φέρουμε τις ΓΕ, ΕΘ, ΕΗ. Τότε τα τρίγωνα ΗΒΕ, ΘΒΕ έχουν κοινή βάση την ΒΕ και ίσα ύψη ως αποστάσεις των ΗΘ//ΒΕ, άρα:

$$(HBE)=(\Theta BE)\Leftrightarrow(HBE)+(ABE)=(\Theta BE)+(ABE)\Leftrightarrow(HAE)=(AB\Theta E)$$

Επίσης τα τρίγωνα ΗΑΕ, ΕΓΔ, έχουν ίσα ύψη ως αποστάσεις των ΓΗ//ΑΔ και τότε:

$$\frac{(HAE)}{(E\Gamma\Delta)}=\frac{AE}{E\Delta}\Leftrightarrow\frac{(AB\Theta E)}{(E\Gamma\Delta)}=\frac{AE}{E\Delta}$$

Επειδή όμως το τετράπλευρο ΑΒΘΕ και το τρίγωνο ΕΓΔ είναι μέρη του τετράπλευρου ΑΒΓΔ, αρκεί να διαιρεθεί το τρίγωνο ΕΓΘ που απομένει από αυτό, σε λόγο $\frac{AE}{E\Delta}$ από την ευθεία ΕΖ και επομένως αρκεί να διαιρεθεί η ΘΓ από το σημείο Ζ σε λόγο $\frac{AE}{E\Delta}$.

Έτσι τα τρίγωνα ΕΘΖ, ΕΓΖ έχουν κοινό ύψος και το σημείο Ζ χωρίζει την ΓΘ σε λόγο $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΔ}}$ και τότε: $\frac{(\text{ΕΘΖ})}{(\text{ΕΓΖ})}=\frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΓ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΔ}}$.

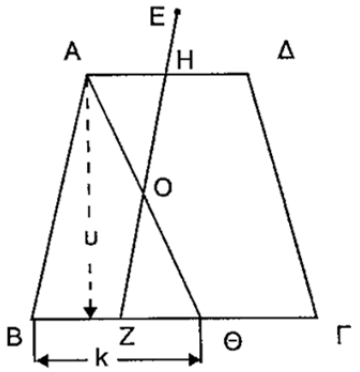
Επομένως:

$$\frac{(\text{ΑΒΘΕ})}{(\text{ΕΓΔ})}=\frac{(\text{ΕΘΖ})}{(\text{ΕΓΖ})}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{(\text{ΑΒΘΕ})+(\text{ΕΘΖ})}{(\text{ΕΓΔ})+(\text{ΕΓΖ})}=\frac{(\text{ΑΒΖΕ})}{(\text{ΕΖΓΔ})}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΑΒΖΕ})}{(\text{ΕΖΓΔ})}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΔ}}$$

Στο πρόβλημα 12, η ευθεία που διαιρεί το τετράπλευρο σε μέρη με δοσμένο λόγο μέσω μιας ευθείας από ένα σημείο που ανήκει σε μια πλευρά ου και δεν τη διαιρεί στο λόγο αυτό, δηλαδή εξετάζεται: «Με τις ίδιες προϋποθέσεις (του Προβλήματος 11), να αχθεί από τυχόν σημείο Ε (της ΑΔ), η ΕΖ η οποία να διαιρεί το τετράπλευρο κατά δοθέντα λόγο». Η λύση αυτού του προβλήματος ανάγεται εύκολα στο Πρόβλημα 11.

Στο πρόβλημα 13, η ευθεία που διαιρεί το τετράπλευρο σε μέρη με δοσμένο λόγο, διέρχεται από ένα σημείο που δεν ανήκει σε καμία πλευρά του και ο Ήρωνας εξετάζει δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση το τετράπλευρο να έχει δύο πλευρές του παράλληλες, δηλαδή να είναι τραπέζιο και στη δεύτερη περίπτωση να μη συμβαίνει αυτό. Το πρόβλημα 13, είναι το δεύτερο πρόβλημα των «ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΙΙΙ» το οποίο ανάγεται σε πρόβλημα αποτομής που έχει λυθεί από τον Απολλώνιο στην πραγματεία του «Περί της του Χωρίου Αποτομής».

Στην πρώτη περίπτωση το πρόβλημα ανάγεται σ' αυτό του Απολλώνιου σύμφωνα με το οποίο ζητείται: «Να αχθεί από δοθέν σημείο Ε, εκτός του τετραπλεύρου κειμένου, μια ευθεία τέμνουσα τις παράλληλες πλευρές στα Η και Ζ, ούτως ώστε το άθροισμα ΑΗ+ΒΖ να ισούται με δοσμένο μήκος».



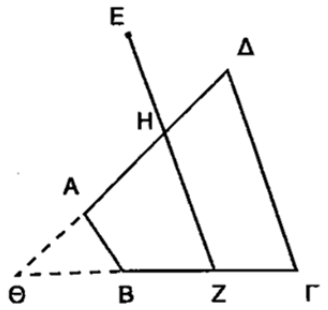
Στην περίπτωση αυτή η κατασκευή είναι εύκολη. Επί της ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΒΘ ίσο με το δοσμένο μήκος, οπότε ΖΘ=ΑΗ. Φέρνουμε την ΑΘ και τη

διχοτομούμε στο Ο, που είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΗΘΖ, άρα και το μέσο της γνωστής διαγωνίου ΑΘ. Τέλος φέρνουμε την ΕΟ και ορίζουμε το σημείο Ζ επί της ΒΓ.[13]

Επίσης σύμφωνα με τον Τ. Heath, [14][10] η πρώτη περίπτωση του προβλήματος 13, λύνεται εύκολα στο πρόβλημα ΙΙΙ.16, όπου: «Δίδονται, κατά θέση, δύο παράλληλες ευθείες ΑΔ και ΒΓ και ένα σημείο Ε. Να αχθεί από το Ε μια ευθεία ΕΗΖ, ούτως ώστε το άθροισμα ΑΗ+ΒΖ να έχει δοθέν μήκος».

Μετράμε λοιπόν τμήμα ΒΘ ίσο με το δοσμένο μήκος. Φέρουμε την ΑΘ και τη διχοτομούμε στο Ο. Τότε η ΕΟ τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ σε σημεία Η και Ε τέτοια ώστε το ΑΗ+ΒΖ να ισούται με δοσμένο μήκος, γιατί από την ισότητα των τριγώνων ΒΜΗ και ΖΜΘ έχουμε ΑΗ=ΘΖ.

Στην δεύτερη περίπτωση του προβλήματος 13 ο Ήρων θεωρεί ότι οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται σ' ένα σημείο Θ, οπότε δίνεται η γωνία Θ και το εμβαδό του τριγώνου ΘΗΖ είναι γνωστό.



Επομένως το πρόβλημα ανάγεται και πάλι σε πρόβλημα αποτομής του Απολλώνιου δηλαδή στην κατασκευή μιας ευθείας η οποία άγεται από το σημείο Ε και αποκόπτει από ένα τρίγωνο με κορυφή το Θ, ένα τρίγωνο γνωστού εμβαδού ΘΖΗ.

Τα προβλήματα 14 και 15 είναι αντίστοιχα προβλήματα για την περίπτωση τυχαίου πολυγώνου.

Στο πρόβλημα 14, εξετάζεται: «Πως από σημείου κειμένου επί μιας πλευράς ευθυγράμμου πολυπλεύρου σχήματος μπορούμε να φέρουμε ευθεία η οποία να διαιρεί το εμβαδόν του κατά δοθέντα λόγο».

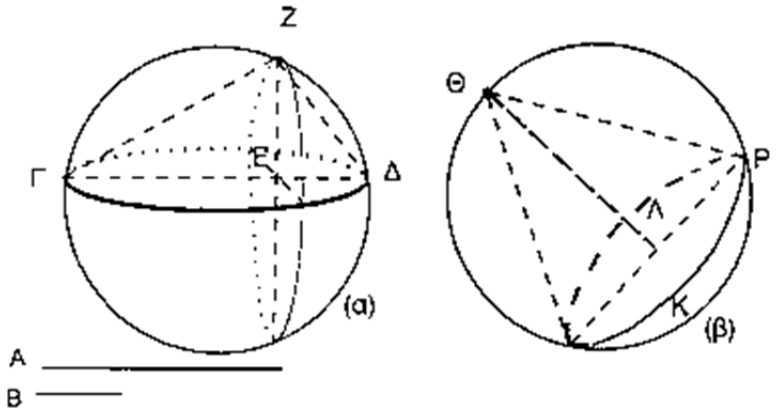
Στο πρόβλημα 15, εξετάζεται: «Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα όταν το δοθέν σημείο δεν κείται επί της περιμέτρου του πολυγώνου», δηλαδή δεν ανήκει σε μια πλευρά του και μελετά δύο περιπτώσεις. Στη πρώτη περίπτωση δύο από τις πλευρές του να είναι παράλληλες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση να μη συμβαίνει αυτό. Η δεύτερη περίπτωση είναι το τρίτο πρόβλημα του

[13] [3] («Μετρικά – Διόπτρα») σελ. 157
[14] [3] («Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών ») Τόμος ΙΙ σελ. 400

Βιβλίου ΙΙΙ που ανάγεται σε πρόβλημα αποτομής του Απολλώνιου που έχει λυθεί στην πραγματεία του «Περί της του Χωρίου Αποτομής».

Στο πρόβλημα 17, ο Ήρων εξετάζει τη διαίρεση μιας σφαίρας σε τμήματα ώστε οι επιφάνειές τους να έχουν δοσμένο λόγο, δηλαδή εξετάζεται: «Να τμηθεί μια δοθείσα σφαίρα από ένα επίπεδο εις τρόπον ώστε, ο λόγος των επιφανειών των δύο τμημάτων της να είναι ίσος προς τα δοθέντα».

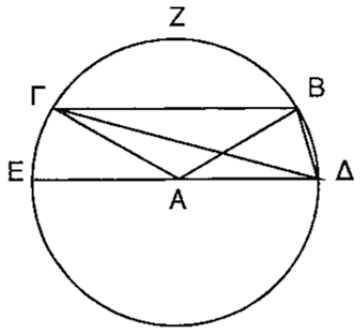
Η επίλυση του προβλήματος γίνεται μέσω της πρότασης 3 του Αρχιμήδη από το έργο του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου Β'», όπου διατυπώνεται ακριβώς το ίδιο πρόβλημα. Ο Ήρων ακολουθεί την ίδια διαδικασία επίλυσης με αυτήν του Αρχιμήδη και για επιβεβαίωση της ορθότητας της λύσης που δίνει αναφέρει ότι «Και αλήθεια, αυτά έχουν αποδειχθεί στο Β' βιβλίο «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου» του Αρχιμήδη». Για τον ίδιο λόγο πιθανόν παραλείπει να δώσει και τη σύνθεση του προβλήματος.



Στο πρόβλημα 18 εξετάζεται: «Να γραφούν δύο ευθείες οι οποίες να διαιρούν δοθέντα κύκλο σε τρία ίσα μέρη». Όπως αναφέρει ο T. Heath [15] : «Η πρόταση αυτή παρουσιάζει ενδιαφέρον επειδή μας υπενθυμίζει μια ευφυή πρόταση που περιλαμβάνεται στο βιβλίο του Ευκλείδη «Περί διαιρέσεων»». Στην πρόταση αυτή του Ευκλείδη εξετάζεται να αποκοπεί ένα τρίτο ενός κύκλου μεταξύ δύο παραλλήλων χορδών.

Στην αρχή της επίλυσης του προβλήματος ο Ήρων επισημαίνει ότι «το πρόβλημα αυτό δεν επιδέχεται ρητή λύση. Επειδή όμως έχει πολλές εφαρμογές θα τον διαιρέσουμε με την παρακάτω προσεγγιστική λύση».

[15] [10] («Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών») Τόμος ΙΙ σελ.401



Σε δοθέντα κύκλο κέντρου Α εγγράφουμε την πλευρά ΒΓ ενός ισόπλευρου τριγώνου το οποίο εγγράφεται σ' αυτόν.

Φέρουμε τη διάμετρο ΔΑΕ//ΒΓ και τις χορδές ΒΔ και ΔΓ. Θα δείξουμε ότι το κυκλικό τμήμα ΔΒΓ είναι κατά προσέγγιση ίσο με το ένα τρίτο του εμβαδού του κύκλου. Φέρουμε τις ακτίνες ΑΒ και ΑΓ και τότε ο τομέας ΑΒΖΓ είναι ίσος με το ένα τρίτο του κύκλου. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και ίσα ύψη (αποστάσεις μεταξύ παραλλήλων) άρα είναι ισεμβαδικά, δηλαδή (ΑΒΓ)=(ΒΓΔ). Τότε:

$$\text{τομέας } \mathrm{ΑΒΖΓ} = \frac{1}{3}\text{κύκλου} \Leftrightarrow \text{κυκλικό τμήμα } \mathrm{ΓΖΒ} + \text{τρίγωνο } \mathrm{ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\text{ κύκλου} \Leftrightarrow$$

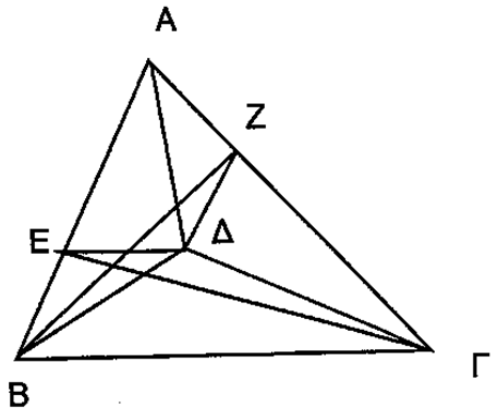
$$\Leftrightarrow \text{κυκλικότμήμα } \mathrm{ΓΖΒ} + \text{τρίγωνο } \mathrm{ΒΓΔ} = \frac{1}{3}\text{κύκλου} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{κυκλικότμήμα}\mathrm{ΓΖΒ} + \text{τομέας } \mathrm{ΑΒΔ} = \frac{1}{3}\text{κύκλου} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{μεικτόγραμμο } \mathrm{ΓΖΒΔ} = \frac{1}{3}\text{κύκλου}$$

Το κυκλικό τμήμα ΒΔ που λείπει από το μεικτόγραμμο σχήμα μπορεί να αγνοηθεί θεωρούμενο ως αμελητέο συγκρινόμενο με το εμβαδό ολοκλήρου του κύκλου. Με τον ίδιο τρόπο, αφού εγγράψουμε και άλλη πλευρά ισόπλευρου τριγώνου , θα αφαιρέσουμε και άλλο ένα τρίτο ολόκληρο του κύκλου, ώστε το εναπομένον μέρος θα έχει εμβαδό ίσο με το ένα τρίτο ολοκλήρου του κύκλου.

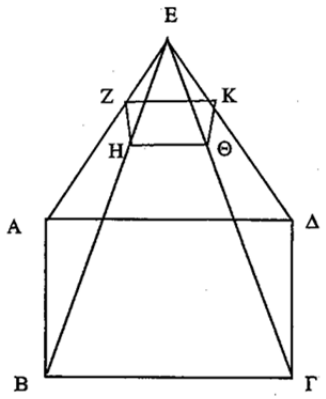
Στο <u>πρόβλημα 19</u> εξετάζεται: «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να ορισθεί το σημείο Δ, ούτως ώστε όταν φέρουμε τις ευθείες ΔΑ, ΔΒ και ΔΓ, τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΔΒΓ και ΓΑΔ να είναι ισοδύναμα».

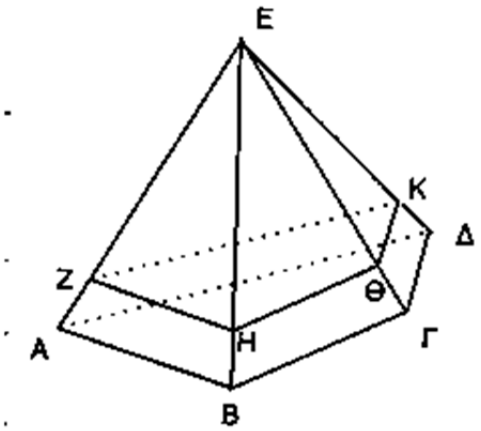


Στη συνέχεια ο Ήρων προχωρά στη διαίρεση στερεών σωμάτων και διευκρινίζει: «Όσα από αυτά είναι ισοπαχή, όπως π.χ. οι κύλινδροι και τα παραλληλεπίπεδα και όσα έχουν απλώς τις ίδιες βάσεις και τις ίδιες άνω βάσεις, εύκολα διαιρούνται στους δοθέντες λόγους. Διότι ο λόγος εις τον οποίον διαιρείται ένα γραμμικό τους στοιχείο, ισούται με τον λόγο των όγκων των δύο τμημάτων του στερεού. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τις διαιρέσεις των κολοβών στερεών όπως: πυραμίδων, κώνων και παρομοίων. Γι αυτό λοιπόν, θα τις εξετάσουμε».

Η διαίρεση των στερεών σωμάτων σε δοσμένο λόγο γίνεται με επίπεδα παράλληλα προς τη βάση τους.

Στο <u>πρόβλημα 20</u> εξετάζει την τομή πυραμίδας από επίπεδο παράλληλο προς τη βάση της, δηλαδή εξετάζει: «Έστω τυχαία πυραμίδα με βάση το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και κορυφή το σημείο Ε. Έστω ακόμη, ότι μας έχει δοθεί το μήκος ΑΕ=5 μονάδες μιας ακμής της. Ζητείται να τμηθεί αυτή με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση, ούτως ώστε το προς την κορυφή της τμήμα, να είναι τετραπλάσιο του υπολοίπου».





Στο πρόβλημα αυτό, όπως και στα επόμενα προβλήματα διαίρεσης στερεών σωμάτων συμπεριλαμβάνεται και η εξαγωγή της κυβικής ρίζας ενός αριθμού ο οποίος γενικά δεν είναι κύβος αριθμός. Στο <u>πρόβλημα 20</u> μάλιστα, ο Ήρων υποδεικνύει μια μέθοδο, έναν κατά προσέγγιση τρόπο υπολογισμού

της κυβικής ρίζας όταν αυτή εκφράζεται από ασύμμετρο αριθμό. Συγκεκριμένα δείχνει τον τρόπο υπολογισμού της $\sqrt[3]{100}$, ως εξής:

«Λάβε τον πλησιέστερο κύβο προς τον 100 καθ' υπεροχή και κατ' έλλειψη. Αυτοί είναι ο 125 και ο 64», δηλαδή οι αριθμοί $5^3 = 125 > 100$ και $4^3 = 64 < 100$.

«Ο 125 υπερέχει του 100 κατά 25 και ο 64 υπολείπεται του 100 κατά 36», δηλαδή 125-100=25 και 100-64=36.

«Πολλαπλασίασε το 5 επί το 36 και γίνεται 180», δηλαδή 5x36=180.

«Πρόσθεσε και το 100 και γίνεται 280», δηλαδή 180+100=280.

«Διαίρεσε το 180 δια του 280 και γίνεται $\frac{9}{14}$», δηλαδή $\frac{180}{280} = \frac{9}{14}$.

«Προσθέτουμε αυτόν στην πλευρά του μικρότερου κύβου που είναι το 4 και γίνεται 4 και $\frac{9}{14}$», δηλαδή $4 + \frac{9}{14} = 4\frac{9}{14}$.

«Αυτή θα είναι κατά προσέγγιση η κυβική πλευρά των 100 μονάδων», δηλαδή αυτή είναι η ακριβέστερη δυνατή τιμή της κυβικής ρίζας του 100, άρα

$$\sqrt[3]{100} = 4\frac{9}{14}.$$

Σύμφωνα με τον T. Heath, [16] στην προσπάθειά μας να εικάσουμε από το παράδειγμα αυτό, ποιος ήταν ο τύπος που χρησιμοποίησε ο Ήρων για την προσέγγιση της κυβικής ρίζας ενός «μη-κύβου» αριθμού Α, η καλύτερη πρόταση είναι εκείνη του Wertheim (*Zeitschr. f. Math u. Physik xliv, 1899, hist.-lit. abt.*, σελ 1-3), κατά την οποία: $\sqrt[3]{\mathrm{A}} = \alpha + \frac{(\alpha+1)\cdot\delta_1}{(\alpha+1)\cdot\delta_1 + \alpha\delta_2}$,

όπου: αν $\alpha^3 < \mathrm{A} < (\alpha+1)^3$ τότε $\delta_1 = A - a^3$ και $\delta_2 = (a+1)^3 - A$.

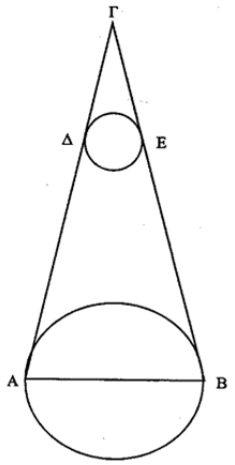
Η εικασία αυτή του Wertheim είναι η πλέον ικανοποιητική επειδή μπορεί να συναχθεί από εντελώς στοιχειώδεις θεωρήσεις. Εφαρμόζοντας τον τύπο για Α=100 προκύπτει:

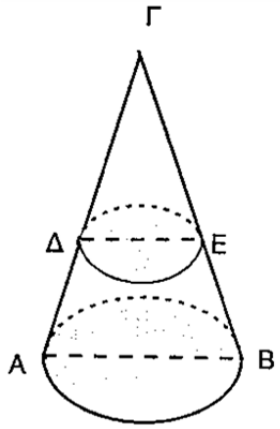
$$\sqrt[3]{100} = 4 + \frac{5\cdot 36}{5\cdot 36 + 4\cdot 25} = 4 + \frac{180}{180+100} = 4 + \frac{180}{280} = 4 + \frac{9}{14} = 4\frac{9}{14}$$

[16] [10] («Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών») Τόμος ΙΙ σελ.402

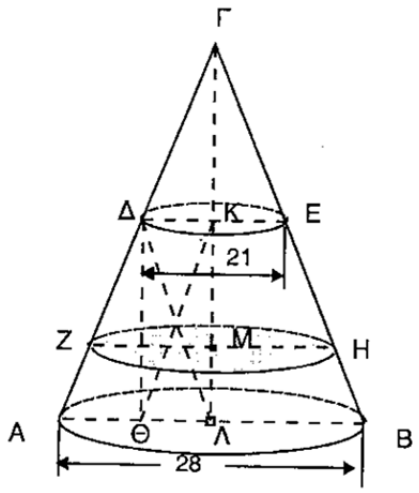
Ο τύπος αυτός έχει επίσης αποδειχθεί και από τον G. Enestrőm (Bibliotheka Mathematica, viii, 1907-8 σελ. 412-413), χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό και κάνοντας και κάποιες επιπλέον υποθέσεις.

Στο πρόβλημα 21 εξετάζει την τομή κώνου από επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του, δηλαδή εξετάζεται: «Να διαιρεθεί κατά δοθέντα λόγο ένας κώνος με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του», όπου ο Ήρων εφαρμόζει αυτά που έχουν ήδη αναφερθεί και στις πυραμίδες. Δίνεται επίσης κατευθείαν η προσεγγιστική τιμή για την $\sqrt[3]{100} = 4\frac{9}{14}$ βάσει του υπολογισμού της στο πρόβλημα 20.





Στο πρόβλημα 22 εξετάζει την τομή ενός κόλουρου κώνου σε δοσμένο λόγο από επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις του, δηλαδή εξετάζεται: «Να διαιρεθεί κόλουρος κώνος κατά δοθέντα λόγο. Έστω ότι έχει βάση τον κύκλο ΑΒ και άνω βάση τον κύκλο ΔΕ. Ζητείται, λοιπόν, να διαιρεθεί με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του, ούτως ώστε το τμήμα που περιέχει την άνω βάση του να είναι τετραπλάσιο του υπολοίπου». Δίνονται και αριθμητικά δεδομένα, η διάμετρος του κύκλου της κάτω βάσης ΑΒ=28 μονάδες και του άνω ΔΕ=21 μονάδες, καθώς και το ύψος του ΚΛ=12 μονάδες και θέλουμε να διαιρεθεί κατά κύκλο με διάμετρο ΖΗ, έτσι ώστε ο κόλουρος κώνος ΔΕΖΗ να είναι τετραπλάσιος του κόλουρου κώνου ΖΗΑΒ. Η επίλυση του προβλήματος γίνεται από τον Ήρωνα με τη χρήση των παραπάνω αριθμητικών δεδομένων, μπορούμε όμως να την περιγράψουμε δίνοντας γενικούς τύπους.



Έστω:

$$\frac{V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EHZ}}{V_{\text{κόλουρου}\,ZHBA}}=\frac{\mu}{\nu}\Leftrightarrow\frac{V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EHZ}+V_{\text{κόλουρου}\,ZHBA}}{V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EHZ}}=\frac{\mu+\nu}{\mu}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EBA}}{V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EHZ}}=\frac{\mu+\nu}{\mu}\Leftrightarrow V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EHZ}=\frac{\mu}{\mu+\nu}V_{\text{κόλουρου}\,\Delta EBA}=$$

$$=\frac{\mu}{\mu+\nu}\cdot\frac{1}{12}\pi\upsilon\left(\alpha^2+\alpha\alpha'+\alpha'^2\right)=$$

$$=4558\frac{2}{5}$$

όπου *α*= ΑΒ διάμετρος, *α'*= ΔΕ διάμετρος, *υ*=ΛΚ ύψος κόλουρου και $\frac{\mu}{\nu}=\frac{4}{1}$

.

Στη συνέχεια άγεται το ύψος ΔΘ=ΚΛ του κόλουρου κώνου και συμπληρώνεται ο κόλουρος κώνος σε κώνο ΓΑΒ προεκτείνοντας ΑΔ, ΒΕ έτσι ώστε να τέμνονται στο Γ, που είναι η κορυφή του με άξονα ΓΛ. Τότε είναι γνωστοί και οι λόγοι $\frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΑΘ}}=\frac{\text{ΓΛ}}{\text{ΔΘ}}\Leftrightarrow\frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha-\alpha'}{2}}=\frac{x+\upsilon}{\upsilon}\Leftrightarrow x=\frac{\alpha\cdot\upsilon}{\alpha-\alpha'}-\upsilon=36$

όπου x=ΓΚ=36.

Άρα

$$V_{\text{κώνου}\,\Gamma\Delta E}=\frac{1}{3}\frac{\pi\alpha'^2}{4}x=\frac{1}{12}\pi\alpha'^2x=4158$$

Τότε

$$V_{\text{κώνουΓΑΒ}} = V_{\text{κώνουΓΔΕ}} + V_{\text{κόλουρουΔΕΒΑ}} = \frac{1}{12}\pi\alpha'^2 x + \frac{1}{12}\pi\upsilon\left(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2\right) = 9856$$

επίσης

$$V_{\text{κώνουΓΖΗ}} = V_{\text{κώνουΓΔΕ}} + V_{\text{κόλουρουΔΕΗΖ}} = \frac{1}{12}\pi\alpha'^2 x + \frac{\mu}{\mu+\nu}\cdot\frac{1}{12}\pi\upsilon\left(\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2\right) = 8716\frac{2}{5}$$

Όμως οι κώνοι είναι μεταξύ τους όπως οι κύβοι των ομόλογων πλευρών, δηλαδή:

$$\frac{V_{\text{κώνουΓΑΒ}} + V_{\text{κώνουΓΔΕ}}}{V_{\text{κώνουΓΖΗ}}} = \frac{(x+\upsilon)^3 + x^3}{y^3} \Leftrightarrow y^3 = \frac{V_{\text{κώνουΓΖΗ}}\left[(x+\upsilon)^3 + x^3\right]}{V_{\text{κώνουΓΑΒ}} + V_{\text{κώνουΓΔΕ}}} = 97805$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{V_{\text{κώνουΓΖΗ}}\left[(x+\upsilon)^3 + x^3\right]}{V_{\text{κώνουΓΑΒ}} + V_{\text{κώνουΓΔΕ}}}} = \sqrt[3]{97805} \simeq 46, \text{ όπου } y = \Gamma\text{Μ} \simeq 46$$

Άρα $\text{ΚΜ} = y - x = 10$.

Επίσης $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΘ}^2 + \Delta\Theta^2 = \left[\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')\right]^2 + \upsilon^2 = 156\frac{1}{4}$ με Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΘΑ.

$$\Leftrightarrow \text{ΑΔ} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')\right]^2 + \upsilon^2} = 12\frac{1}{2}$$

τότε είναι γνωστοί οι λόγοι :

$$\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΛΜ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΖ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΚΛ} - \text{ΛΜ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΔ} - \text{ΑΖ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΚΜ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\Delta\text{Ζ}} \Leftrightarrow \frac{\upsilon}{y - x} = \frac{\text{ΑΔ}}{\Delta\text{Ζ}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\text{Ζ} = \frac{y - x}{\upsilon}\text{ΑΔ} = 10\frac{5}{12}.$$

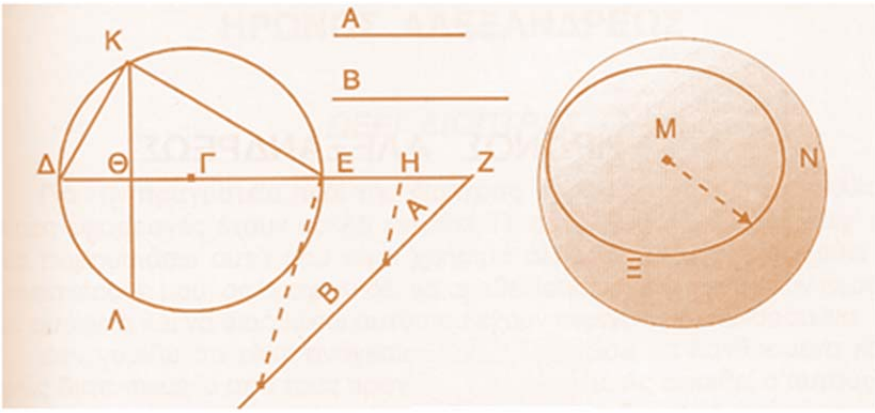
Έτσι ορίζεται επί της ΑΔ το ζητούμενο σημείο Ζ.

Τέλος στο πρόβλημα 23, εξετάζει τη διαίρεση μιας σφαίρας σε τμήματα των οποίων οι όγκοι έχουν δοσμένο λόγο, δηλαδή εξετάζει: «Να τμηθεί μια δοθείσα σφαίρα από ένα επίπεδο, εις τρόπον ώστε, τα δύο σφαιρικά τμήματα να έχουν δοθέντα λόγο».

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού ο Ήρων χρησιμοποιεί μια παραλλαγή του σχήματος του Αρχιμήδη, ο οποίος επιλύει και αποδεικνύει το παραπάνω πρόβλημα στην πρόταση 4 στην πραγματεία του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου Β'» (με τη βοήθεια της πρότασης 2 του ίδιου έργου του).

Η πρόταση 2 του Αρχιμήδη αναφέρει; «Κάθε σφαιρικό τμήμα είναι ισοδύναμο με κώνο που έχει βάση, την αυτήν με το τμήμα και ύψος το ευθύγραμμο τμήμα που έχει, ως προς το ύψος του τμήματος, τον ίδιο λόγο που έχει το άθροισμα της ακτίνας της σφαίρας και του ύψους του άλλου τμήματος προς το ύψος του άλλου τμήματος».

Και τα δύο παραπάνω προβλήματα του Αρχιμήδη είναι πολύπλοκα και μακροσκελή. Στην προσπάθειά του ο Ήρων να απλοποιήσει τη λύση του <u>προβλήματος 23,</u> χρησιμοποιώντας τα σχήματα



οδηγήθηκε σε λανθασμένη λύση, [17] ενώ χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Αρχιμήδη.

Κατά την απόδειξη του Ήρωνα, έχουμε:

Θεωρούμε επί επιπέδου έναν κύκλο ίσο με τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας που έχει κέντρο το σημείο Γ και διάμετρο ΔΕ. Στην προέκταση της ΓΕ, λαμβάνουμε τμήμα ΕΖ=ΓΕ και την χωρίζουμε με το σημείο Η, έτσι ώστε $\frac{ZH}{HE}=\frac{A}{B}$ (1) , που είναι ο δεδομένος λόγος και ίσος με το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων Α και Β. Επί της ΔΕ λαμβάνουμε σημείο Θ τέτοιο ώστε $\frac{EZ}{ZH}=\frac{E\Delta^2}{\Delta\Theta^2}$ (2). Φέρουμε και την $\Theta K\Lambda \perp \Delta E$ και την ΚΔ. Ας λάβουμε επί της επιφάνειας σφαίρας τυχαίο σημείο Μ και με πόλο (κέντρο) το Μ και ακτίνα ίση με την ΚΔ, γράφουμε επί της επιφάνειας, τον κύκλο ΝΞ. Τότε τα δύο σφαιρικά τμήματα στα οποία ο κύκλος χώρισε την επιφάνεια της σφαίρας,

[17] [3] («Μετρικά – Διόπτρα») Εισαγωγή Ι σελ. xxviii και υποσημείωση σελ179

έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με $\frac{A}{B}$. Στο σημείο αυτό παραπέμπει στον Αρχιμήδη από τον οποίον έχουν αυτά αποδειχθεί.

Όμως κατά τον Χ. Κηπουρό,[18] η μέθοδος του Ήρωνα δεν είναι ορθή, διότι από το σχήμα του και από τις αναλογίες (1) και (2), έχουμε:

$\frac{ZH}{HE} = \frac{A}{B} \Leftrightarrow \frac{EZ}{ZH} = \frac{A+B}{A}$ και

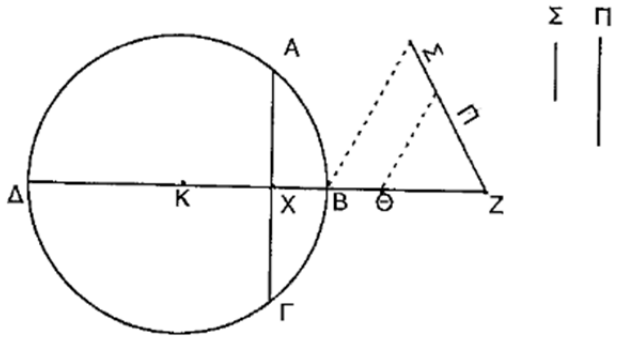
$$\frac{EZ}{ZH} = \frac{E\Delta^2}{\Delta\Theta^2} \Leftrightarrow \Delta\Theta = E\Delta\sqrt{\frac{ZH}{EZ}} \Leftrightarrow \Delta\Theta = E\Delta\sqrt{\frac{A}{A+B}}\ .$$

Αν ο λόγος $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$, τότε $\Delta\Theta = E\Delta\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \Delta\Theta = \frac{E\Delta}{2} = R_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}$.

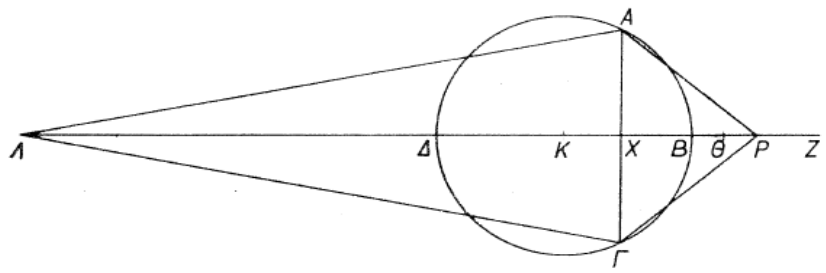
Τότε το ζητούμενο επίπεδο διέρχεται από το κέντρο και ο λόγος είναι 1 και όχι 1/3.

Τέλος θέλοντας να σκιαγραφήσουμε και να σχολιάσουμε το παραπάνω πρόβλημα και την κατασκευή του κατά τον Αρχιμήδη, διαπιστώνουμε [19] ότι αυτό ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω προβλήματος:

«Δίνονται δύο ευθείες ΔΒ και ΒΖ όπου $\Delta B = 2 \cdot BZ$ και ένα σημείο Θ, επί της ΒΖ και ζητείται να τμηθεί η ΔΒ στο σημείο Χ, έτσι ώστε: $\frac{B\Delta^2}{\Delta X^2} = \frac{XZ}{Z\Theta}$ ».



[18] [3] («Μετρικά – Διόπτρα») ΜΕΤΡΙΚΑ Γ' υποσημείωση σελ.179
[19] [3] («Μετρικά – Διόπτρα») Εισαγωγή Ι σελ. xxviii



Αν $\frac{\Pi}{\Sigma}$ ο δοσμένος λόγος με Π>Σ και ΑΒΓΔ ένας μέγιστος κύκλος της σφαίρας κέντρου Κ, τότε στην προέκταση της ΔΒ διαμέτρου, παίρνουμε το σημείο Ζ, έτσι ώστε $\frac{\Theta Z}{\Theta B} = \frac{\Pi}{\Sigma}$.

Έστω η ΔΒ τέμνεται στο Χ, έτσι ώστε να ισχύει: $\frac{XZ}{\Theta Z} = \frac{B\Delta^2}{\Delta X^2}$ και άγεται το κάθετο επίπεδο στην ΒΔ, στο σημείο Χ. Ο Αρχιμήδης τότε λέει ότι: «το επίπεδο αυτό θα τμήσει τη σφαίρα σε δύο τμήματα, τέτοια ώστε ο λόγος του μεγαλυτέρου προς το μικρότερο να είναι ως ο Π προς τον Σ». Εδώ εμπλέκει στη λύση και το πρόβλημα 2, όπως διατυπώθηκε παραπάνω, για να καταλήξει στο ζητούμενο αποτέλεσμα, χωρίς «διορισμό». Με τη λέξη «διορισμό», ο Αρχιμήδης εννοεί τη διερεύνηση που απαιτεί ένα πρόβλημα, όταν εξετάζεται στη γενική του μορφή. Με την προσθήκη όμως επιπλέον περιορισμών στο πρόβλημα, η διερεύνηση είναι περιττή. Στο πρόβλημα που εξετάστηκε οι περιορισμοί που τέθηκαν είναι: ΔΒ=2ΒΖ και ΖΘ>ΘΒ, ώστε κατά την επίλυσή του δεν απαιτήθηκε διερεύνηση.

Ένα άλλο θέμα που θίγεται κατά την επίλυση του προβλήματος αυτού και πρέπει να σχολιαστεί είναι ότι, για την κατασκευή του τμήματος ΔΧ και τον ορισμό του σημείου Χ επί της ΔΒ, απαιτείται η επίλυση της εξίσωσης 3ου βαθμού που προέκυψε, δηλαδή της $2\omega^3 - 3\omega^2 + \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} = 0$ όπου $\omega = \frac{\Delta X}{\Delta B}$. Αυτό επιβεβαιώνει ότι ο Αρχιμήδης γνώριζε τη λύση των τριτοβάθμιων εξισώσεων όπως αναφέρει και ο Τ. Heath [20] και μάλιστα εξισώσεων της μορφής $x^3 \pm ax^2 \mp b^2c = 0$ με πραγματικές ρίζες. Μαρτυρίες επίσης έχουμε και από τον Ευτόκιο (σχολιαστής του Αρχιμήδη), τον Διονυσόδωρο και τον Διοκλή, ότι ο Αρχιμήδης είχε υποσχεθεί ότι θα έστελνε επεξηγήσεις για το λήμμα στο οποίο ανάγεται η λύση αυτού του προβλήματος, αλλά δεν βρέθηκε κάποιο αντίγραφο.

[20] [10] «Αρχιμήδης» εκδ. 1912, σελ.cxxic

4. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

4.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ.

Υπολογισμοί τετραγωνικών ριζών συναντάμε σε σωζόμενες Βαβυλωνιακές πινακίδες του 2.000 π.Χ. Μία τέτοια πινακίδα της αρχαίας Βαβυλωνίας που βρίσκεται σήμερα στη συλλογή του Παν/μιου Yale (Nr. 7289), περιέχει τον υπολογισμό της $\sqrt{2}$ με ακρίβεια τριών εξηνταδικών ψηφίων. Η τιμή που δίνουν στη $\sqrt{2}$ είναι περίπου ίση με 1,414222 και διαφέρει από τη σωστή κατά 0,000008.

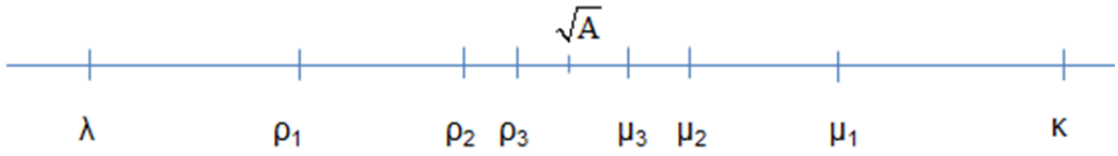
Οι Πυθαγόρειοι στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν με το Πυθαγόρειο θεώρημα τη διαγώνιο του τετραγώνου, οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη των ασύμμετρων αριθμών. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα διαπίστωσαν ότι $\delta^2 = 2\alpha^2$, δηλαδή ότι $\frac{\delta^2}{\alpha^2} = 2$ (όπου δ η διαγώνιος και α η πλευρά του τετραγώνου) και τότε τέθηκε το πρόβλημα του προσδιορισμού της «πλευράς» του 2, όρος που χρησιμοποιούσαν για αυτό που συμβολίζουμε σήμερα με $\sqrt{2}$ και εκφράζει το λόγο $\frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$. Σε αντίθεση με τα «σύμμετρα» μεγέθη που μετρούνται με το ίδιο μέτρο, δηλαδή έχουν κοινό μέτρο, οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι η διαγώνιος του τετραγώνου είναι ασύμμετρη με την πλευρά του, δεν έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή ο λόγος που σχηματίζουν $\frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$ δεν ισούται με λόγο φυσικών και επομένως δεν είναι ρητός. Αυτό παραβίαζε την γενική αρχή των Πυθαγορείων που πίστευαν ότι στο σύμπαν τα πάντα εκφράζονται ως αναλογίες και σε κάθε ον αντιστοιχεί ένας αριθμός, που μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα δύο ακεραίων. Για το λόγο αυτό αποφάσισαν να το κρατήσουν μυστικό, αναγκάστηκαν να δεχτούν ότι υπάρχουν και «άρρητα» ή «άλογα» μεγέθη και ονόμασαν αυτούς τους αριθμούς «άρρητους», δηλαδή «αυτοί που δεν λέγονται», σε αντιδιαστολή με τα «ρητά» μεγέθη και τους «ρητούς» αριθμούς, ακεραίους και κλασματικούς, δηλαδή «αυτοί που λέγονται». Αυτός που αποκάλυψε τη «μη-ρητότητα» πνίγηκε στη θάλασσα. Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν πολύ καλά ότι ο υπολογισμός της ακριβούς τιμής του $\sqrt{2}$ δεν είναι δυνατός παρά μόνο προσεγγιστικά. Σύμφωνα με τον Δ. Τσιμπουράκη, [8] το πρόβλημα αυτό λύθηκε κατά αριστουργηματικό τρόπο με μεθόδους που αποτελούν την πρώτη θεμελίωση της θεωρίας ορίων, δηλαδή τη βάση του σημερινού διαφορικού λογισμού.

Μία από τις μεθόδους αυτές είναι και η μέθοδος υπολογισμού του Αρχύτα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετραγώνου αριθμού και συγκεκριμένα της $\sqrt{720}$ όπως διασώθηκε από τον Ήρωνα (σε αριθμητικό παράδειγμα). Εκφράζει τον μη τετράγωνο αριθμό 720 ως γινόμενο $720 = 26 \cdot \frac{720}{26}$ ή $720 = 27 \cdot \frac{720}{27}$ χρησιμοποιώντας τον πλησιέστερο του τετράγωνο αριθμό κατ' έλλειψη (26^2=676) και κατ' υπεροχή (27^2=729) αντίστοιχα. Στη συνέχεια προσπαθεί να εξισώσει προσεγγιστικά τους αριθμούς 26 και $\frac{720}{26}$ ή τους 27 και $\frac{720}{27}$, θεωρώντας το μέσο αριθμητικό τους μ_1 και το μέσο αρμονικό τους ρ_1, στη συνέχεια το μέσο αριθμητικό μ_2 και το μέσο αρμονικό ρ_2 των μ_1 και ρ_1 κ.ο.κ. μέχρι να πετύχει την εξίσωση προσεγγιστικά κάποιων μέσων μ_v, ρ_v με όση ακρίβεια θέλει. Για την παραπάνω περίπτωση έχουμε τη διαδικασία προσέγγισης:

26	$\frac{720}{26} \simeq 27,692...$	ή	27	$\frac{720}{27} = 26,666...$
μ_1=26,846…	ρ_1=26,819…		μ_1=26,833…	ρ_1=26,832…
μ_2=26,832…	ρ_2=26,832…		μ_2=26,832…	ρ_2=26,832…

Τότε μέσα στο ριζικό θα προκύψει τετράγωνος αριθμός και έτσι θα βρεθεί η ζητούμενη ρίζα $\sqrt{720} \simeq \sqrt{\mu_2 \bullet \rho_2} \simeq 26,832...$ (Δ. Τσιμπουράκης [8]).

Προφανώς ο Αρχύτας γνώριζε ότι $\lambda < \frac{2\kappa\lambda}{\kappa+\lambda} < \sqrt{\kappa \cdot \lambda} = \sqrt{\mathrm{A}} < \frac{\kappa+\lambda}{2} < \kappa$ δηλαδή ότι ο μέσος γεωμετρικός $\sqrt{\kappa \cdot \lambda}$ δύο αριθμών *κ, λ,* με *κ*>*λ*>0 περιέχεται ανάμεσα στον μέσο αριθμητικό τους $\frac{\kappa+\lambda}{2}$ και στον μέσο αρμονικό τους $\frac{2\kappa\lambda}{\kappa+\lambda}$. Έτσι για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετράγωνου αριθμού Α με $\mathrm{A} = \kappa \cdot \lambda$ και *κ*>*λ*>0, πλησίασε με όση ακρίβεια ήθελε την $\sqrt{\mathrm{A}} = \sqrt{\kappa \cdot \lambda}$ με διαδοχικούς προσδιορισμούς των αριθμητικών και αρμονικών μέσων των κ, λ, ξεκινώντας με $\lambda < \sqrt{\kappa \cdot \lambda} = \sqrt{\mathrm{A}} < \kappa$ με τον σχηματισμό δύο ακολουθιών, μιας φθίνουσας και μιας αύξουσας με κοινό όριο την $\sqrt{\mathrm{A}}$.



Άλλη μέθοδος είναι η μέθοδος των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών που επινόησαν οι Πυθαγόρειοι για να προσεγγίσουν τον λόγο $\frac{\delta}{\alpha}=\sqrt{2}$. Με ψευδή παραδοχή ότι α=1 και δ=1, που βρίσκεται στο χώρο του απειροστού κατασκεύαζαν διαδοχικά τετράγωνα με προσεγγιστικές τιμές πλευρών και διαγωνίων, δημιουργώντας δύο ακολουθίες. Η μία ακολουθία των λόγων περιττής τάξης που είναι αύξουσα και η άλλη ακολουθία των λόγων άρτιας τάξης που είναι φθίνουσα και που οι δύο συγκλίνουν στον λόγο $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}=\sqrt{2}$ που είναι το κοινό τους όριο, βρίσκοντας $\frac{8119}{5741}<\sqrt{2}<\frac{19601}{13860}$, δηλαδή $\sqrt{2}\simeq 1,4142135$. Σύμφωνα με τον Δ. Τσιμπουράκη, «στην προκειμένη περίπτωση η επινόηση των αριθμών αυτών, η παραδοχή *α*=1, *δ*=1 και ο προσδιορισμός με προσεγγίσεις της $\sqrt{2}$ πρέπει να θεωρούνται μεγαλειώδεις συλλήψεις των τότε μαθηματικών, αφού περιέχουν μέσα τους την έννοια της συνέχειας που τόσο άψογα αντιλαμβάνονται στα έργα τους οι Ιπποκράτης, Εύδοξος και Αρχιμήδης και την έννοια του «δυνάμει απείρου», όπως μας το καθόρισε ο Αριστοτέλης».

Επίσης ο Αρχιμήδης, ο οποίος πρώτος υπολόγισε τον λόγο της περιφέρειας Γ του κύκλου προς τη διάμετρό του δ, δηλαδή το λόγο $\frac{\Gamma}{\delta}=\pi$, γράφει στην πρόταση 3 της πραγματείας του «Κύκλου Μέτρηση» ότι: «ο λόγος της περιφέρειας κάθε κύκλου προς τη διάμετρό του είναι μικρότερη του $3\frac{1}{7}$ και μεγαλύτερη του $3\frac{10}{71}$». Δίνει την προσεγγιστική τιμή του π που εκφράζεται με τη σχέση $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.

Για τον παραπάνω υπολογισμό, ο Αρχιμήδης θεώρησε ότι το μήκος Γ του κύκλου βρίσκεται μεταξύ των μηκών των περιμέτρων Π και Π' ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου αντίστοιχα. Όταν το πλήθος ν των πλευρών τους διπλασιάζεται συνεχώς, τότε το κοινό όριο των περιμέτρων τους Π_ν και Π_ν' αντίστοιχα είναι το μήκος Γ της

περιφέρειας του κύκλου. Τότε και ο λόγος $\frac{\Gamma}{\delta}=\pi$ είναι το κοινό όριο δύο ακολουθιών με $\frac{\Pi_\nu}{\delta}<\frac{\Gamma}{\delta}<\frac{\Pi_\nu'}{\delta}$ μιας αύξουσας και μιας φθίνουσας. Κατά τον υπολογισμό αυτό, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί για την προσεγγιστική τιμή της $\sqrt{3}$ τη σχέση $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$ ή $1,7320261<\sqrt{3}<1,7320512$ που τη θεωρεί γνωστή και χωρίς κανένα σχόλιο. Η πραγματική τιμή είναι $\sqrt{3}=1,7320508$ γεγονός που κάνει αυτόν τον υπολογισμό πολύ ακριβή.

Σύμφωνα με τον Ε. Σταμάτη, [21] [7], στα σχόλιά του ο Ευτόκιος σημειώνει ότι σε αυτή την 3η πρόταση είμαστε συνεχώς υποχρεωμένοι να βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα ενός δοθέντος αριθμού, αλλά είναι αδύνατο να βρούμε μια ακριβή τιμή αυτού του μεγέθους για ένα μη τετραγωνικό αριθμό. Παραπέμπει σχετικά με τις μεθόδους για την εύρεση των προσεγγιστικών τιμών της τετραγωνικής ρίζας ενός δοθέντος αριθμού στα Μετρικά του Ήρωνα, στον Πάππο, στον Θέωνα και σε άλλους σχολιαστές. Επίσης ο Δ. Τσιμπουράκης, [8] γράφει ότι: «Οι σχέσεις αυτές και κυρίως αυτή που δίνει την $\sqrt{3}$, πρέπει να ήταν επίτευγμα αρχαιότερων μαθηματικών, γιατί ο Αρχιμήδης την χρησιμοποιεί χωρίς απόδειξη, πράγμα που δεν κάνει για τις δικές του επινοήσεις. Πιστεύεται ότι αυτή πρέπει να ήταν γνωστή στους Πυθαγόρειους και ίσως στο Θεόδωρο τον Κυρηναίο τον οποίο αναφέρει ο Πλάτωνας, που υπήρξε μαθητής του, στο διάλογο «Θεαίτητος», να αποδεικνύει το ασύμμετρο των $\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{17}$ ».

Ο John Wallis για την έλλειψη εξήγησης από τη μεριά του Αρχιμήδη για την προσέγγιση της $\sqrt{3}$, δήλωσε: «πιθανώς να κάλυψε τα ίχνη της έρευνάς του σκόπιμα επειδή ένιωθε ότι δίνει στους μεταγενέστερους το μυστικό της συλλογής πληροφοριών του, ενώ ταυτόχρονα ήθελε να αποσπάσει από αυτούς απαντήσεις για δικά του ευρήματα».

Σύμφωνα με τον Τ. Heath[22], η μέθοδος προσέγγισης της τιμής ενός άρρητου αριθμού ήταν αντικείμενο πολυάριθμων εικασιών σχετικά με το ερώτημα για τον τρόπο με τον οποίο ο Αρχιμήδης οδηγήθηκε στις προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{3}$, μέχρι την ανακάλυψη του αποσπάσματος των «Μετρικών». Εκεί ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς δίνει τη σημαντική διατύπωση της μεθόδου του για την προσέγγιση της τιμής ενός άρρητου αριθμού.

[21] [7](τόμος Α μέρος Β σελ.223)
[22] [10](«Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών») Τόμος Α, σελ. 380

4.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΕΝΟΣ ΑΡΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας κατά την αρχαιότητα ήταν μια επίπονη διαδικασία όταν υπολογιστικά εργαλεία όπως οι λογαριθμικοί πίνακες ή οι μικροϋπολογιστές ήταν άγνωστοι.

Ο Ήρων όπως ήδη έχουμε αναφέρει προηγούμενα επιλέγει προσεκτικά τις αριθμητικές τιμές των δεδομένων μεγεθών να είναι ακέραιοι στα προβλήματα που μελετά, έτσι ώστε όταν εμφανίζεται τετραγωνική ρίζα στο εξαγόμενα των ζητούμενων μεγεθών, να είναι ακέραιος ή ρητός αριθμός. Σε κάποιες περιπτώσεις όπου το εξαγόμενο δεν είναι ρητός, τότε το προσεγγίζει εφαρμόζοντας κάποιες αριθμητικές διαδικασίες. Η μέθοδος αυτή προσέγγισης είναι αλγεβρική και δίνεται από τον Ήρωνα επίσης στο πρόβλημα 8 των «Μετρικών Ι» υπό την μορφή αλγόριθμου, κατά την αριθμητική εφαρμογή του «Τύπου του Ήρωνα» για τη μέτρηση του εμβαδού τριγώνου με πλευρές μήκους 7, 8, 9 μονάδες. Έχει υπολογίσει μέσω του τύπου $\mathrm{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ότι $E=\sqrt{720}$ και προχωρά στην προσέγγισή της αριθμητικά.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μετάφραση	Αριθμητικά	Γενίκευση
Επειδή η τετραγωνική ρίζα του 720 δεν είναι ρητός αριθμός	$\sqrt{720}$ άρρητος	$\sqrt{\mathrm{A}}$
Θα την προσεγγίσουμε με μικρή διαφορά. Επειδή ο πλησιέστερος τετράγωνος αριθμός προς το 720 είναι ο 729,	$27^2=729$	$\alpha^2>\mathrm{A}$
με τετραγωνική ρίζα το 27,	$\sqrt{729}=27$	$\sqrt{\alpha^2}=\alpha>0$
διαίρεσε τον 720 με τον 27 και γίνεται 26 και 2/3	$\frac{720}{27}=26\frac{2}{3}$	$\frac{\mathrm{A}}{\alpha}$
Πρόσθεσε σε αυτά τα 27 και γίνονται 53 και 2/3	$26\frac{2}{3}+27=53\frac{2}{3}$	$\frac{\mathrm{A}}{\alpha}+\alpha$

Μετάφραση	Αριθμητικά	Γενίκευση
Πάρε από αυτά το μισό και γίνεται 26 και 1/2 και 1/3	$\frac{1}{2}\bullet 53\frac{2}{3}=26\frac{5}{6}=$ $=26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{A}}{\alpha}+\alpha\right)$
Άρα η τετραγωνική ρίζα του 720 είναι κατά προσέγγιση $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$,	$\sqrt{720}\simeq 26\frac{5}{6}=$ $=26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$	$\sqrt{\mathrm{A}}\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{A}}{\alpha}+\alpha\right)=\alpha_1$
γιατί το $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ επί τον εαυτόν τους (στο τετράγωνο) γίνεται 720 και 1/36 ,	$\left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)^2=720\frac{1}{36}$	$\alpha_1{}^2>\mathrm{A}$
ώστε η διαφορά είναι το 1/36 της μονάδας	$720\frac{1}{36}-720=\frac{1}{36}$	$\alpha_1{}^2-\mathrm{A}=\beta>0$
Αν θέλουμε όμως η διαφορά να γίνει ακόμη μικρότερη από το 1/36, τότε αντί του 729, θα θεωρήσουμε την τιμή 720 και 1/36 που βρήκαμε και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία θα βρούμε τη διαφορά ακόμα μικρότερη του 1/36		$\sqrt{\mathrm{A}}\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{A}}{\alpha_1}+\alpha_1\right)=\alpha_2$

4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Έστω Α ένας μη-τετράγωνος αριθμός, με τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\mathrm{A}}$ που δεν είναι ρητός αλλά άρρητος αριθμός, την οποία και θέλουμε να προσεγγίσουμε.

Παίρνουμε έναν θετικό ρητό αριθμό α, τέτοιον ώστε το τετράγωνό του α^2 να προσεγγίζει αρκετά τον Α, δηλαδή να είναι ο πλησιέστερος στον Α τετράγωνος αριθμός και τότε

$$\mathrm{A} = \alpha^2 \pm \beta, \quad \beta > 0 \quad (1)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το λόγο $\frac{\mathrm{A}}{\alpha}$ και ορίζουμε ως πρώτη προσεγγιστική τιμή της $\sqrt{\mathrm{A}}$, τον αριθμητικό μέσο (μέσο όρο), των αριθμών $\alpha, \frac{\mathrm{A}}{\alpha}$ δηλαδή:

1η προσέγγιση $\sqrt{\mathrm{A}} : \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\mathrm{A}}{\alpha}\right)$ (2)

Αν θέλουμε μεγαλύτερη προσέγγιση, θέτουμε στη θέση του α το α_1 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και η δεύτερη προσεγγιστική τιμή της $\sqrt{\mathrm{A}}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών α_1 και $\frac{\mathrm{A}}{\alpha_1}$, δηλαδή:

2η προσέγγιση $\sqrt{\mathrm{A}} : \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{\mathrm{A}}{\alpha_1}\right)$ όμοια

3η προσέγγιση $\sqrt{\mathrm{A}} : \alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \frac{\mathrm{A}}{\alpha_2}\right)$

.
.
.

νη προσέγγιση $\sqrt{\mathrm{A}} : \alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu-1} + \frac{\mathrm{A}}{\alpha_{\nu-1}}\right)$

Επομένως η προσεγγιστική μέθοδος του Ήρωνα είναι η εφαρμογή της ακολουθίας με αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu}+\frac{\mathrm{A}}{\alpha_{\nu}}\right)$ με πρώτο όρο $\alpha_1=\alpha>0$ τυχαίο θετικό αριθμό, η οποία είναι γνησίως μονότονη και φραγμένη και συγκλίνει ταχύτατα στην $\sqrt{\mathrm{A}}$.

<u>Εφαρμόζουμε τη μέθοδο για A=720</u>, όπως ο Ήρωνας τη δίνει στο πρόβλημα Ι.8 των Μετρικών.

Θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή της $\sqrt{720}$ με πολύ μικρή απόκλιση.

Βήμα 1^{ο} : Βρίσκω τον πλησιέστερο τετράγωνο αριθμό του 720, τον 729=27^2 .

Βήμα 2^{ο} : Διαιρώ τον 720 με το 27 και παίρνω $\frac{720}{27}=26\frac{18}{27}=26\frac{2}{3}$

Βήμα 3^{ο} : Προσθέτω τους: $26\frac{2}{3}+27=53\frac{2}{3}$

Βήμα 4^{ο} : Βρίσκω το ημιάθροισμά τους (τον αριθμητικό τους μέσο):

$$53\frac{2}{3}:2=26\frac{5}{6}$$

Άρα $\sqrt{720}=26\frac{5}{6}\simeq 26{,}833...$ όπως υπολόγισε ο Ήρων, ενώ η τιμή που παίρνουμε σήμερα με χρήση υπολογιστή είναι $\sqrt{720}\simeq 26{,}83281573...$

Ο Ήρων επισημαίνει ότι αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε καλύτερη προσέγγιση. Πράγματι μπορούμε να επαναλάβουμε τον αλγόριθμο ξεκινώντας με το $26\frac{5}{6}$.

Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας $a_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu}+\frac{720}{\alpha_{\nu}}\right)$ με:

$\alpha_1 = 27$ παίρνουμε:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{720}{\alpha_1}\right) = \frac{1}{2}\left(27 + \frac{720}{27}\right) = \frac{1}{2}\left(27 + 26\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot 53\frac{2}{3} = 26\frac{5}{6} \simeq 26,8333...$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \frac{720}{\alpha_2}\right) = \frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6} + \frac{720}{26\frac{5}{6}}\right) = \frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6} + 26\frac{134}{161}\right) = \frac{1}{2}\cdot 53\frac{643}{966} =$$

$$= 26\frac{1609}{1932} \simeq 26,83281573...$$

Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι ταχύτατη και έχουμε ταύτιση σε 8 δεκαδικά ψηφία της προσεγγιστικής τιμής που προκύπτει με τον αλγόριθμο του Ήρωνα με τη σημερινή τιμή της ρίζας. Με την τρίτη μόλις προσπάθεια, δηλαδή εφαρμογή, έχουμε τέλεια προσέγγιση του άρρητου $\sqrt{720}$. Τέλος αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (2) της μεθόδου του Ήρωνα τη σχέση (1), προκύπτει:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\mathrm{A}}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\alpha^2 \pm \beta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^2 + \alpha^2 \pm \beta}{2\alpha} = \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{με } \alpha, \beta > 0 \quad (3)$$

Επομένως:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\beta}{2\alpha} = \alpha + \frac{\mathrm{A} - \alpha^2}{2\alpha} \qquad (3\alpha) \quad \text{όταν } \alpha^2 < \mathrm{A} \ \text{ δηλ. } \alpha < \sqrt{\mathrm{A}}$$

και

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\beta}{2\alpha} = \alpha - \frac{\alpha^2 - \mathrm{A}}{2\alpha} \qquad (3\beta) \quad \text{όταν } \alpha^2 > \mathrm{A} \ \text{ δηλ. } \alpha > \sqrt{\mathrm{A}}$$

Όμως ο τύπος (2) πρακτικά είναι πολύ πιο εύκολος στην εφαρμογή του επειδή δεν περιλαμβάνει κανέναν υπολογισμό διαφορών. Είναι ο πιο γρήγορος τρόπος για να πάρουμε όπως είδαμε καλές προσεγγίσεις.

Ο Ήρων δεν φαίνεται να χρησιμοποιεί τον τύπο με το αρνητικό πρόσημο. Μια εφαρμογή του έχουμε στο έργο του «Στερεομετρικά Ι» στο πρόβλημα 33, όπου υπολογίζει την $\sqrt{63} \simeq 8 - \frac{1}{16}$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3β) έχουμε:

$\sqrt{63} \simeq \alpha_1 = 8 - \frac{8^2 - 63}{2 \cdot 8} = 8 - \frac{64 - 63}{16} = 8 - \frac{1}{16}$ αφού $8^2 > 63$ δηλαδή $8 > \sqrt{63}$

Την ίδια ρίζα χρησιμοποιεί στο έργο του «Μετρικά Ι» στο πρόβλημα 9, όπου δίνει την τιμή $\sqrt{63} \simeq 7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16} = 7\frac{15}{16}$ η οποία φαίνεται ότι έχει υπολογιστεί από τον τύπο (2), δηλαδή για α=8.

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\mathrm{A}}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{63}{8}\right) = \frac{1}{2} \bullet 15\frac{7}{8} = 7\frac{15}{16}$$

Σύμφωνα με τον T. Heath, [10] η μέθοδος του Ήρωνα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετράγωνου αριθμού, φαίνεται να είναι ο μοναδικός «κλασικός» κανόνας που δόθηκε για την εύρεση της δεύτερης και ανωτέρων προσεγγίσεων της τιμής της ρίζας ενός αριθμού. Ο ίδιος ο Ήρων δεν φαίνεται στα έργα του να κάνει άμεση χρήση της μεθόδου αυτής για την εύρεση μιας δεύτερης προσέγγισης ακριβέστερης της πρώτης και δημιουργεί ερωτηματικά για τον τρόπο υπολογισμού τους.

4.4 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΗΡΩΝΑ

Η παραπάνω, δεν είναι η μόνη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τον Ήρωνα στα «Μετρικά». Σύμφωνα με τον Smyly J.G. (1944) [32] :

Στη σελ. 58 το $\frac{17}{12}$ δίνεται για το $\sqrt{2}$ επειδή $2 \cdot 12^2 + 1 = 17^2$.

Στη σελ. 54 το $\frac{7}{4}$ δίνεται για το $\sqrt{3}$ επειδή $3 \cdot 4^2 + 1 = 7^2$ και η πιο συχνή τιμή για το $\sqrt{3}$ η $\frac{26}{15}$, δεν βρίσκονται από την μέθοδο, αλλά είναι και οι δύο λύσεις της $3x^2 + 1 = y^2$.

Στη σελ. 50 το $\frac{9}{4}$ δίνεται για το $\sqrt{5}$ επειδή $5 \cdot 4^2 + 1 = 9^2$, στο οποίο προσθέτει ότι μπορούμε να έχουμε ένα πιο ακριβές αποτέλεσμα αν πάρουμε ένα άλλο τετράγωνο το οποίο είναι περίπου πενταπλάσιο ενός άλλου τετραγώνου, δείχνοντας ότι ήξερε τις λύσεις της $5x^2 \pm 1 = y^2$.

Παρόμοια στην σελ. 60, το $\frac{17}{6}$ δίνεται για το $\sqrt{8}$ επειδή $8 \cdot 6^2 + 1 = 17^2$.

Το πόσο πολύ οι Έλληνες μαθηματικοί μπορούσαν να αντιμετωπίσουν την επονομαζόμενη εξίσωση του Pell: $n \cdot x^2 \pm 1 = y^2$, είναι αμφισβητήσιμο. Ο Θέων ο Σμυρναίος δίνει την πλήρη λύση της $2 \cdot x^2 \pm 1 = y^2$ και την ίδια λύση δίνει και ο Πρόκλος στο σχολιασμό του στη «Δημοκρατία» του Πλάτωνα. Ο Πρόκλος αποδίδει αυτήν τη λύση στους Πυθαγόρειους, κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι ο Πλάτων στο Rep. 546c, ήξερε ότι $2 \cdot 5^2 - 1 = 7^2$. Οι Πυθαγόρειοι έχοντας χρησιμοποιήσει αυτό για προσεγγίσεις της $\sqrt{2}$, θα είχαν φυσικά οδηγηθεί να βρουν παρόμοιες λύσεις για τις κατά προσέγγιση ρίζες και άλλων αριθμών. Το ότι πράγματι το έκαναν, φαίνεται από το παράδειγμα του $5 \cdot 4^2 + 1 = 9^2$ που δίνει ο Πρόκλος. Ο Διόφαντος σε λήμμα στο VI.15, δηλώνει ότι εάν είναι γνωστή μια λύση της $a \cdot x^2 - b = y^2$, μπορεί να ληφθεί μια άλλη καλύτερη λύση της.

Η πλήρης λύση της εξίσωσης $n \cdot x^2 \pm 1 = y^2$ περιλαμβάνει δύο διακριτά προβλήματα. Πρώτα να βρεθεί μια λύση και αυτό είναι μερικές φορές πολύ

δύσκολο. Η Ινδοί είχαν μια μέθοδο επίλυσης, η οποία ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τον Laplace, ο Fermat εκτίμησε ότι θα μπορούσε να τη λύσει οποτεδήποτε υπήρχε λύση για αυτήν και ο Euler την έλυσε με τη μέθοδο των συνεχών κλασμάτων. Το δεύτερο πρόβλημα είναι, όταν είναι γνωστή μια λύση, να βρεθούν και άλλες λύσεις, κάτι το οποίο είναι εύκολο.

Δηλαδή αν (a,b) είναι μια λύση της $n \cdot x^2 + 1 = y^2$, έτσι ώστε $n \cdot a^2 + 1 = b^2$ και έστω ότι $x = pa + qb$, τότε:

$$nx^2 + 1 = n(pa + qb)^2 + 1 = n(pa + qb)^2 + b^2 - na^2 =$$
$$= n\left(p^2a^2 + 2paqb + q^2b^2\right) + b^2 - na^2 =$$
$$= n\left(p^2 - 1\right)a^2 + 2npqab + \left(nq^2 + 1\right)b^2$$

και αν θέσουμε $nq^2 + 1 = p^2$, αυτό γίνεται:

$$n^2q^2a^2 + 2npqab + p^2b^2 = (nqa + pb)^2 = y^2 \ .$$

Έτσι αν τα a και b είναι μια γνωστή λύση, τότε τα $x = pa + qb$ και $y = nqa + pb$ είναι μια ακόμα λύση.

Αν τα εφαρμόσουμε αυτά για τη $\sqrt{3}$, έχουμε: $3 \cdot 1^2 + 1 = 2^2$, $p = 2$ και $q = 1$, $x = 2a + b$, $y = 3a + 2b$.

Οι ακόλουθες προσεγγίσεις του $\sqrt{3}$ είναι: $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$ κ.ο.κ.

Στις σχετικά σπάνιες περιπτώσεις όπου μια λύση της $n \cdot x^2 - 1 = y^2$ είναι δυνατή, παίρνουμε την μικρότερη λύση της $nq^2 - 1 = p^2$, μετά αν a και b είναι μια γνωστή λύση της $nx^2 \pm 1 = y^2$, $x = pa + qb$, $y = nqa + pb$ θα είναι μια λύση της $nx^2 \mp 1 = y^2$.

Αν εφαρμόσουμε αυτό στο 2, εφόσον $2 \cdot 1^2 - 1 = 1^2$, $p = 1$ και $q = 1$, $x = a + b$, $y = 2a + b$. Αυτή είναι η λύση που δόθηκε από τον Θέων και τον Πρόκλο και οι ανάλογες προσεγγίσεις στο $\sqrt{2}$ είναι $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$ κλπ.

Αν το εφαρμόσουμε στο 5, εφόσον $5\cdot 1^2-1=2^2$ $p=2$ και $q=1$ και $x=2a+b,\ y=5a+2b$ και οι προσεγγίσεις στο $\sqrt{5}$ είναι $\frac{2}{1},\frac{9}{4},\frac{38}{17}$, κλπ.

Οι παρακάτω προσεγγίσεις τετραγωνικών ριζών έχουν ληφθεί από τις εκδόσεις του Schöne των «Μετρικά» και «Διόπτρα» και του Heiberg των «Γεωμετρικά» και «Στερεομετρικά».

Στερ/κα Σελ.154 $\sqrt{50}\simeq 7\frac{1}{14}=\frac{1}{2}\left(7+\frac{50}{7}\right)$

Στερ/κα Σελ.35 $\sqrt{63}\simeq 8-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\left(8+\frac{63}{8}\right)$

Μετρικά Σελ.26

Διόπτρα Σελ.280 $\sqrt{68\frac{1}{2}\frac{1}{14}}\simeq 8\frac{2}{7}=\frac{1}{2}\left(8+\frac{480}{56}\right)=\frac{1}{2}\left(8+\frac{60}{7}\right)$

Στερ/κα Σελ.142 $\sqrt{72}\simeq 8\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(8+\frac{72}{8}\right)$

Στερ/κα Σελ.156 $\sqrt{75}\simeq 8\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\left(8+\frac{75}{8}\right)$

Το $\frac{1}{2}\left(9+\frac{75}{9}\right)=8\frac{2}{3}$ θα ήταν μια καλύτερη προσέγγιση

Μετρικά Σελ.132 $\sqrt{96}\simeq 9\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(9+\frac{96}{9}\right)$

Το $\frac{1}{2}\left(10+\frac{96}{10}\right)=9\frac{2}{5}$ θα ήταν μια καλύτερη προσέγγιση

Στερ/κα Σελ.152 $\sqrt{108} \simeq 10\frac{1}{3}\frac{1}{15} = \frac{1}{2}\left(10+\frac{108}{10}\right)$

Στερ/κα Σελ.146 $\sqrt{128} \simeq 11\frac{1}{4}\frac{1}{22}\frac{1}{44} = \frac{1}{2}\left(11+\frac{128}{11}\right)$

Στερ/κα Σελ.27 $\sqrt{150} \simeq 12\frac{1}{14} = \frac{1}{2}\left(12+\frac{150}{12}\right)$

Μετρικά Σελ.160 $\sqrt{250} \simeq 15\frac{13}{16} = \frac{1}{2}\left(16+\frac{250}{16}\right)$

Μετρικά Σελ.18 $\sqrt{720} \simeq 26\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(27+\frac{720}{27}\right)$

Στερ/κα Σελ.152 $\sqrt{1081} \simeq 32\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{64} = \frac{1}{2}\left(32+\frac{1081}{32}\right)$

Στερ/κα Σελ.150 $\sqrt{1125} \simeq 33\frac{1}{2}\frac{1}{22} = \frac{1}{2}\left(33+\frac{1125}{33}\right)$

Όταν ο αριθμός έχει έναν τετράγωνο παράγοντα, μερικές φορές φέρεται έξω από τη ρίζα.

Γεωμετρ. Σελ.290 $\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}} \simeq 6\frac{1}{2}\frac{1}{13}\frac{1}{26}$, από το $\frac{1}{2}\sqrt{175}$

με $\sqrt{175} \simeq \frac{1}{2}\left(13+\frac{175}{13}\right) = 13\frac{3}{13}$,άρα $13\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{13}\frac{1}{26}$

Γεωμετρ. Σελ.372 $\sqrt{444\frac{4}{9}} \simeq 21\frac{1}{12}$, από το $\frac{2}{3}\sqrt{1000}$

με $\sqrt{1000} \simeq \frac{1}{2}\left(32+\frac{1000}{32}\right) = 31\frac{5}{8}$, άρα $31\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3} = 21\frac{1}{12}$

Στερ/κα Σελ.142 $\sqrt{512} \simeq 22\frac{2}{3}$, από το $8\sqrt{8}$

με $\sqrt{8} \simeq \frac{1}{2}\left(3+\frac{8}{3}\right)=\frac{17}{6}$, άρα $\frac{17}{6}\cdot\ 8=22\frac{2}{3}$

Στερ/κα Σελ.26 $\sqrt{1575} \simeq 39\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, από το $5\sqrt{63}$

με $\sqrt{63} \simeq \frac{1}{2}\left(8+\frac{63}{8}\right) \simeq 8-\frac{1}{16}$, άρα $5\cdot\left(8-\frac{1}{16}\right)=39\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$

Μετρικά Σελ.48 $\sqrt{1875} \simeq 43\frac{1}{3}$, από το $25\sqrt{3}$, παίρνοντας $\sqrt{3} \simeq \frac{26}{15}$

επειδή $3\cdot 15^2+1=26^2$

Γεωμετρ. Σελ.208 $\sqrt{3400} \simeq 58\frac{1}{3}$, από το $10\sqrt{34}$

με $\sqrt{34} \simeq \frac{1}{2}\left(6+\frac{34}{6}\right)=5\frac{5}{6}$, άρα $5\frac{5}{6}\cdot 10=58\frac{1}{3}$

Μερικές φορές ένα μικρό κλάσμα αγνοείται:

Μετρικά Σελ.144 $\sqrt{126\frac{3}{4}} \simeq 11\frac{1}{4}$, από το $\frac{1}{2}\sqrt{507}$

με $\sqrt{507} \simeq \frac{1}{2}\left(22+\frac{507}{22}\right)=22\frac{1}{2}\frac{1}{44}$,

εδώ το $\frac{1}{88}$ παραλείπεται.

Στερ/κα Σελ.64 $\sqrt{356} \simeq 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$, με $\sqrt{356} \simeq \frac{1}{2}\left(19+\frac{356}{19}\right)=18\frac{1}{2}\frac{17}{19}=$

$=18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}-\frac{1}{152}$

εδώ το $\frac{1}{152}$ παραλείπεται.

Στερ/κα Σελ.146 $\sqrt{593} \simeq 24\frac{1}{4}\frac{1}{8}$,με $\sqrt{593} \simeq \frac{1}{2}\left(24+\frac{593}{24}\right) = 24\frac{17}{48} =$

$= 24\frac{1}{4}\frac{1}{8} - \frac{1}{48}$

εδώ το $\frac{1}{48}$ παραλείπεται

Γεωμετρ. Σελ.202 $\sqrt{5000} \simeq 70\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ από το $10\sqrt{50}$

με $\sqrt{50} \simeq \frac{1}{2}\left(7+\frac{50}{7}\right) = 7\frac{1}{14}$, άρα $7\frac{1}{14}\cdot 10 = 70\frac{10}{14} = 70\frac{1}{2}\frac{1}{4} - \frac{1}{28}$

εδώ το $\frac{1}{28}$ παραλείπεται

Στερ/κα Σελ.50 $\sqrt{75600} = 275$ με $\sqrt{75600} \simeq \frac{1}{2}\left(275+\frac{75600}{275}\right) = 275 - \frac{1}{22}$

εδώ το $\frac{1}{22}$ παραλείπεται

Μερικές φορές ένα «μη βολικό» κλάσμα αντικαθίσταται από κάποιο πιο «βολικό»:

Γεωμετρ. Σελ.288 $\sqrt{8\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} \simeq 2\frac{2}{3}\frac{1}{4}$,αυτό το χειρίζεται ως $\frac{1}{4}\sqrt{135}$

με $\sqrt{135} \simeq \frac{1}{2}\left(11+\frac{135}{11}\right) = 11\frac{7}{11}$, το $\frac{7}{11}$ αντικαθίσταται με

$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, το οποίο δίνει $11\frac{2}{3}$, άρα $11\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = 2\frac{11}{12} = 2\frac{2}{3}\frac{1}{4}$

Σε μια άλλη επίλυση του ίδιου προβλήματος $\sqrt{135} \simeq 11\frac{1}{2}\frac{1}{14}\frac{1}{21}$, το οποίο πιθανότατα προέρχεται από το $135\cdot 21^2 + 1 = 244^2$, ο Ήρων αναγνωρίζει ότι αυτή η προσέγγιση είναι πιο ακριβής.

Στερ/κα Σελ.154 $\sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}} \simeq 6\frac{1}{2}\frac{1}{9}$,αυτό το χειρίζεται ως $\frac{1}{6}\sqrt{1548}$

με $\sqrt{1548} \simeq \frac{1}{2}\left(39+\frac{1548}{39}\right) = 39\frac{27}{39}$, το $\frac{27}{39}$ αντικαθίσταται με,

$\frac{26}{39}=\frac{2}{3}$, το οποίο δίνει $39\frac{2}{3}$, άρα $\frac{1}{6}\cdot 39\frac{2}{3}=6\frac{1}{2}\frac{1}{9}$

Στερ/κα Σελ.154 $\sqrt{54}\simeq 7\frac{1}{3}$, με $\sqrt{54}\simeq\frac{1}{2}\left(7+\frac{54}{7}\right)=7\frac{5}{14}$, το $\frac{5}{14}$ αντικαθίσταται με $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, το οποίο δίνει $7\frac{1}{3}$

Γεωμετρ. Σελ.326 $\sqrt{58\frac{7}{16}}\simeq 7\frac{2}{3}$, από το $\frac{1}{4}\sqrt{935}$,

με $\sqrt{935}\simeq\frac{1}{2}\left(30+\frac{935}{30}\right)=30\frac{7}{12}$, άρα $30\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{4}=7\frac{31}{48}$, το $\frac{31}{48}$ αντικαθίσταται με $\frac{32}{48}$, το οποίο δίνει $7\frac{2}{3}$

Μετρικά Σελ.56 $\sqrt{207}\simeq 14\frac{1}{3}$, αυτή είναι μια κακή προσέγγιση και πιθανότατα προήρθε από το $3\sqrt{23}$,

με $\sqrt{23}\simeq\frac{1}{2}\left(5+\frac{23}{5}\right)=4\frac{4}{5}$, άρα $4\frac{4}{5}\cdot 3=14\frac{2}{5}$, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σαν $14\frac{2}{6}$

Στερ/κα Σελ.156 $\sqrt{356\frac{1}{18}}\simeq 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}\left(18+\frac{356}{18}\right)=18\frac{8}{9}=18\frac{32}{36}$ επειδή αυτό είναι πολύ μεγάλο, αλλάζει σε $18\frac{31}{36}=18\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}$

Μετρικά Σελ.150 Το πρόβλημα εξαρτάται από τη λύση της εξίσωσης

$x^2-14x+46\frac{2}{3}=0$ δηλαδή την

$x=7\pm\sqrt{2\frac{1}{3}}$, με $\sqrt{2\frac{1}{3}}\simeq\frac{1}{2}\left(2+\frac{7}{6}\right)=1\frac{7}{12}$,

όπου το $\frac{7}{12}$ αντικαθίσταται με το $\frac{6}{12}$ το οποίο δίνει $1\frac{1}{2}$.

Τότε παίρνουμε για το x τις τιμές $8\frac{1}{2}$ και $6\frac{1}{2}$

Γεωμετρ. Σελ.294 $\sqrt{2460\frac{15}{16}} \simeq 49\frac{1}{2}\frac{1}{17}\frac{1}{34}\frac{1}{51}$

Γεωμετρ. Σελ.296 $\sqrt{615\frac{15}{64}} \simeq 24\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{51}\frac{1}{51}\frac{1}{68}$

Ο Tannery αναφερόμενος σε αυτές τις προσεγγίσεις λέει ότι: «δεν διστάζω να σκεφτώ ότι αυτές δεν έχουν υπολογιστεί ποτέ κατευθείαν», ο Günther τις περιγράφει ως «πλήρως αδιευκρίνιστοι προσεγγιστικοί τύποι» και λέει ότι οποιοσδήποτε κάνει τον κόπο να τις δοκιμάσει, με όλες τις διαφορετικές μεθόδους που είχε περιγράψει για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας, θα συμφωνήσει με τον Tannery. Η προσέγγιση που είναι πολύ κοντά και είναι σωστή μέχρι το 5^{ο} δεκαδικό στοιχείο μπορεί να ληφθεί έτσι:

$$\sqrt{2460} \simeq \frac{1}{2}\left(50+\frac{2460}{50}\right) = 50-\frac{20}{50},$$

εφόσον αυτή αναγνωρίστηκε σαν πολύ μικρή, άλλαξε στη

$$50-\frac{20}{51} = 49\frac{31}{51} = 49\frac{1}{2}\frac{1}{17}\frac{1}{34}\frac{1}{51}$$

Σε δύο περιπτώσεις, οι προσεγγίσεις είναι τόσο κακές, που υπάρχει υποψία λάθους στο κείμενο:

Μετρικά Σελ.54 $\sqrt{67500} \simeq 259$.

Εδώ μάλλον ένα κλάσμα θα πρέπει να μην έχει ληφθεί υπόψη και θα έπρεπε να διαβάζουμε $259\frac{3}{4}$ ή $259\frac{5}{6}$

Γεωμετρ. Σελ.428 $\sqrt{32} \simeq 5\frac{1}{2}\frac{1}{14}$ ενώ θα έπρεπε να είναι $5\frac{1}{2}\frac{1}{6}$

Μερικά αποτελέσματα, φαίνεται να έχουν υπολογισθεί με τη συνηθισμένη μέθοδο εύρεσης τετραγωνικής ρίζας :

Γεωμετρ. Σελ.294 $\sqrt{886-\frac{1}{16}} \simeq 29\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{68}$

Γεωμετρ. Σελ.322 $\sqrt{216} \simeq 14\frac{2}{3}\frac{1}{33}$

Αυτό φαίνεται να προέρχεται από το

$$6x^2+1=y^2$$
$$6\cdot 198^2+1=485^2$$

από όπου:

$216\cdot 33^2+1=485^2$ δηλαδή $\sqrt{216}=6\sqrt{6}\simeq 14\frac{2}{3}\frac{1}{33}$

Γεωμετρ. Σελ.292 $\sqrt{6300} \simeq 79\frac{1}{3}\frac{1}{34}\frac{1}{102}$

Παρατηρείται ότι ενώ στα «Μετρικά», ο Ήρων δίνει αποδείξεις των προβλημάτων του και γενικά ένα αριθμητικό παράδειγμα, στα «Γεωμετρικά» και «Στερεομετρικά» δεν υπάρχουν αποδείξεις και συχνά υπάρχουν πολλά παραδείγματα του ίδιου προβλήματος που έχουν «δουλευτεί» με διαφορετικούς αριθμούς.

Η μέθοδος του Ήρωνα για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετραγώνου αριθμού ήταν γνωστή και χρησιμοποιήθηκε τόσο στον Μεσαίωνα, όσο και στην Αναγέννηση, αλλά και στη σύγχρονη εποχή κατά τις προσπάθειες εξήγησης της Αρχιμήδειας προσέγγισης του $\sqrt{3}$, φτάνοντας στις μέρες μας να είναι η μέθοδος προσέγγισης των άρρητων που εφαρμόζουν οι σύγχρονοι υπολογιστές.

Τον 14^{ο} αιώνα η μέθοδος ήταν γνωστή στους Βαρλαάμ Καλαβρό και Νικόλαο Αρταβάσδο τον επονομαζόμενο Ραβδά.

Ο Βαρλαάμ Καλαβρός (1290-1348), ήταν Έλληνας φιλόσοφος, αστρονόμος, μαθηματικός και ένας από τους ιδρυτές της σύγχρονης άλγεβρας. Ήταν καθηγητής Μαθηματικών και Αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο της Κων/πολης. Ίδρυσε μαθηματική και αστρονομική σχολή στην Θεσ/νικη. Ήταν συγγραφέας μεταξύ άλλων έργων, των έργων: «Αριθμητική απόδειξις των γραμμικώς εν τω δευτέρω στοιχείων αποδειχθέντων», «Λογιστική» 6 βιβλίων που αναφέρονται στον αριθμητικό λογισμό με ακεραίους αριθμούς και κλάσματα συνήθη ή εξηκονταδικά και «Περί ορθογωνίων τριγώνων».

Γνώριζε τη μέθοδο του Ήρωνα και ο ίδιος υποστήριζε ότι η διαδικασία προσεγγίσεων μπορούσε να συνεχιστεί εφαρμόζοντας τον τύπο $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\mathrm{N}}{x_n}\right)$ με n=0,1,2,3,... , όπου N είναι ο αριθμός του οποίου την τετραγωνική ρίζα θέλουμε να προσεγγίσουμε. [24]

Ο Νικόλαος Ραβδάς (14^{ος} αιώνας), ήταν λόγιος και μαθηματικός, καταγόταν από τη Σμύρνη αλλά έζησε στην Κων/πολη και ασχολήθηκε με Αριθμητική και Γεωμετρία. Σε έργα του όπως το «Παράδοσις σύντομος και σαφέστατη της Ψηφοφορικής (αριθμητικής) επιστήμης» αναφέρεται σε κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς και στο «Πολιτικών (πρακτικών) λογαριασμών μέθοδος», αναφέρεται στη γνωστή μέθοδο των τριών. Χρησιμοποιούσε και αυτός την μέθοδο του Ήρωνα και επιπλέον θεωρούσε ότι: $\sqrt{N} = a + \frac{\tau}{2\alpha}$ (όπως τύπος (3α)). Επίσης κατά τον Ραβδά, αν το α ήταν κατ' υπεροχή προσέγγιση της ρίζας του N, τότε το $\alpha_1 = \frac{\mathrm{N}}{\alpha}$ ήταν κατ' έλλειψη προσέγγιση και η τιμή $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1)$ θεωρείται ως η καλύτερη από αυτές. [24]

Τον 15°-16° αιώνα , το ισοδύναμο της μεθόδου του Ήρωνα τύπος (3) ήταν γνωστό σε Ιταλούς αλγεβριστές και χρησιμοποιήθηκε από τον Luca Pacioli ή Paciolo. Ο Luca Pacioli (1445-1514), ήταν Ιταλός μοναχός συγγραφέας του έργου "Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita" [9] γνωστό και ως "Summa", που ολοκληρώθηκε η συγγραφή του το 1487 και θεωρείται σήμερα η πρώτη τυπωμένη μελέτη για την Άλγεβρα. Χωρίς να αναφέρονται οι πηγές του συγγραφέα, γραμμένο στην καθομιλουμένη, είναι μια εντυπωσιακή συλλογή υλικού που αφορά την Αριθμητική, την Άλγεβρα, πολύ στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία και την Λογιστική διπλής εισόδου. Ο τομέας που αναφέρεται στην Αριθμητική μιλά κυρίως για μεθόδους πολλαπλασιασμού και εύρεσης τετραγωνικών ριζών.

Έτσι ο L. Pacioli δίνει ως διαδοχικές προσεγγίσεις του $\sqrt{6}$ [10] τους αριθμούς $2\frac{1}{2}, 2\frac{9}{20}, 2\frac{881}{1960}$ από τον ισοδύναμο τύπο (3), της μεθόδου του Ήρωνα ως εξής:

Προσέγγιση με $\sqrt{A} \simeq \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha}$ (3)	Προσέγγιση με μέθοδο Ήρωνα : $\sqrt{A} \simeq \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right)$ (2)
Για α=2 με $\alpha^2=4<6=A$ τότε:	Για α=2 (πλησιέστερος τετράγωνος στον 6 αφού $\alpha^2=4$ τότε:
1η προσέγγιση	
$\alpha_1 = \alpha + \frac{\beta}{2\alpha} = \alpha + \frac{A-\alpha^2}{2\alpha} = 2 + \frac{6-4}{2\cdot 2} =$ $= 2 + \frac{2}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ αφού: $\alpha_1 = 2\frac{1}{2}$ με $\alpha_1^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > 6 = A$ τότε:	$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{6}{2}\right) =$ $= \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
2η προσέγγιση	
$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\beta_1}{2\alpha_1} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1^2 - A}{2\alpha_1} = \frac{5}{2} - \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}{2\cdot\frac{5}{2}} =$ $= \frac{5}{2} - \frac{\frac{25}{4} - 6}{5} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20} = 2\frac{9}{20}$ αφού: $\alpha_2 = 2\frac{9}{20}$ με $\alpha_2^2 = \frac{2401}{400} > 6 = A$ τότε:	$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{A}{\alpha_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{6}{\frac{5}{2}}\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{12}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{10} = \frac{49}{20} =$ $= 2\frac{9}{20}$
3η προσέγγιση	
$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{\beta_2}{2\alpha_2} = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^2 - A}{2\alpha_2} = \frac{49}{20} - \frac{\left(\frac{49}{20}\right)^2 - 6}{2\cdot\frac{49}{20}} =$ $= \frac{49}{20} - \frac{\frac{2401}{400} - 6}{\frac{49}{10}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = 2\frac{881}{1960}$	$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \frac{A}{\alpha_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{20} + \frac{6}{\frac{49}{20}}\right)$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{4801}{980} = \frac{4801}{1960} =$ $= 2\frac{881}{1960}$

Παρατηρούμε, όπως έχουμε αναφέρει και προηγούμενα, ότι παίρνουμε και από τους δύο τύπους εξίσου καλές προσεγγίσεις, όμως του Ήρωνα είναι πιο εύκολος τύπος στην εφαρμογή του γιατί δεν γίνονται υπολογισμοί διαφορών.

Σύμφωνα με τον T. Heath [10] στη σύγχρονη εποχή ο Buzengeiger (1771-1835) χωρίς να γνωρίζει την ιστορία του τύπου (2) της μεθόδου του Ήρωνα, τον παρουσίασε εκ νέου κατά την εξήγηση της προσέγγισης του $\sqrt{3}$ από τον Αρχιμήδη.

Ο Bertrand (1822-1900), σε μια πραγματεία περί Αριθμητικής (1851), διετύπωσε τον τύπο του Ήρωνα.

Οι Opperman και Alexeieff στην προσπάθειά τους και αυτοί να εξηγήσουν την Αρχιμήδεια προσέγγιση χρησιμοποίησαν μια μέθοδο που στην πραγματικότητα είναι ίδια με τη μέθοδο του Ήρωνα. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αναλογία $\dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{\sqrt{ab}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{\frac{2ab}{a+b}}$.

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή εκφράζουμε τον μη τετράγωνο αριθμό A σε γινόμενο δύο παραγόντων a_0, b_0, δηλαδή $A= a_0 \cdot b_0$ με $a_0>b_0>0$.

Τότε η $\sqrt{A} = \sqrt{a_0 b_0}$ που είναι ο γεωμετρικός μέσος των a_0, b_0 βρίσκεται ανάμεσα στον αρμονικό μέσο τους $\dfrac{2a_0 \cdot b_0}{a_0+b_0}$ και στον αριθμητικό μέσο τους $\frac{1}{2}(a_0+b_0)$ και ισχύει η σχέση:

$$b_0 < \frac{2a_0 \cdot b_0}{a_0+b_0} < \sqrt{a_0 \cdot b_0} < \frac{1}{2}(a_0+b_0) < a_0$$

Ξεκινώντας λοιπόν από την $b_0 < \sqrt{A} < a_0$ τότε:

1η προσέγγιση: $$\frac{2a_0 \cdot b_0}{a_0+b_0} < \sqrt{A} < \frac{1}{2}(a_0+b_0)$$

2η προσέγγιση: $$\frac{2a_1 \cdot b_1}{a_1+b_1} < \sqrt{A} < \frac{1}{2}(a_1+b_1) \quad \text{με} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0) \\ b_1 = \frac{2a_0 \cdot b_0}{a_0+b_0} \end{cases}$$

3η προσέγγιση $\frac{2a_2 \cdot b_2}{a_2 + b_2} < \sqrt{A} < \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ με $\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \\ b_2 = \frac{2a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} \end{cases}$

κ.ο.κ.

Έτσι σχηματίζονται δύο ακολουθίες, μια αύξουσα των αρμονικών μέσων των ορίων μέσα στα οποία περιορίζεται η $\sqrt{A}$ και μια φθίνουσα των αριθμητικών μέσων των ορίων μέσα στα οποία περιορίζεται η $\sqrt{A}$, που έχουν και οι δύο όριο τη $\sqrt{A}$ και με αυτόν τον τρόπο γίνεται δυνατός ο υπολογισμός της.

[Η μέθοδος αυτή είναι ίδια με τη μέθοδο που παρουσιάζει στο βιβλίο του «Η Γεωμετρία στην Αρχαία Ελλάδα» ο Δ. Τσιμπουράκης, [8] ως την μέθοδο στην οποία βασίζεται η αντίστοιχη μέθοδος του Αρχύτα για τον υπολογισμό της $\sqrt{720}$].

Αν θέσουμε στους τύπους του Ήρωνα όπου:

$$\begin{cases} a = X_0 \quad \text{και} \quad \frac{A}{\alpha} = x_0 \\ a_1 = X_1 \quad \text{και} \quad \frac{A}{\alpha_1} = x_1 \\ \ldots\ldots\ldots \text{κλπ} \end{cases}$$

τότε έχουμε:

$$X_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}(X_0 + x_0) \text{ και}$$

$$x_1 = \frac{A}{\alpha_1} = \frac{A}{X_1} = \frac{A}{\frac{1}{2}(X_0 + x_0)} = \frac{2A}{X_0 + x_0} = \frac{2X_0 \cdot x_0}{X_0 + x_0} \text{ δηλαδή:}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}\left(X_0 + x_0\right) \qquad \text{και } x_1 = \frac{2X_0 \cdot x_0}{X_0 + x_0} \\ X_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + x_1\right) \qquad \text{και } x_2 = \frac{2X_1 \cdot x_1}{X_1 + x_1} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{κλπ} \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι οι X_1, x_1 είναι αντίστοιχα ο αριθμητικός και ο αρμονικός μέσος των X_0 και x_0, οι X_2, x_2 είναι αντίστοιχα ο αριθμητικός και ο αρμονικός μέσος των X_1 και x_1 … κλπ όπως στους τύπους της μεθόδου του Alexeieff.

Σήμερα η μέθοδος που χρησιμοποιούσε ο Ήρων για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού Α, θεμελιώνεται θεωρητικά από την μέθοδο – αλγόριθμο των Newton – Raphson που εφαρμόζουν οι σύγχρονοι υπολογιστές για την εύρεση ριζών πραγματικών αριθμών. Σύμφωνα με τον Σ. Γαλάνη, [2] χρειάστηκαν δεκαοκτώ περίπου αιώνες για τη θεωρητική αυτή θεμελίωση.

4.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ NEWTON – RAPHSON [2]

4.5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ:

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ (1), όπου f γνωστή συνάρτηση συνεχής με πραγματικούς συντελεστές, γνήσια μονότονη και x η ανεξάρτητη μεταβλητή. Θέλουμε να βρούμε τη ρίζα ξ της εξίσωσης σε ένα διάστημα όπου η ρίζα είναι απλή.

Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$f(\xi)=f(\mathrm{x_n})+(\xi-\mathrm{x_n})f'(\mathrm{x_n})+\frac{1}{2}(\xi-x_n)f''(h) \quad (2)$$, όπου

$$h\in\left(\min\{\xi,x_n\},\ \max\{\xi,\mathrm{x_1}\}\right)$$

Αφού το ξ είναι ρίζα της (1), τότε $f(\xi)=0$, επίσης υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\xi$ και κρατώντας από την (2) τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος έχουμε:

$$0=f(\mathrm{x_n})+(x_{n+1}-x_n)f'(\mathrm{x_n}) \qquad (3) \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(\mathrm{x_n})}{f'(\mathrm{x_n})} \qquad (4) \qquad \text{για } n=1,2,...$$

Κατασκευάστηκε ένας προσεγγιστικός επαναληπτικός αλγόριθμος που αποτελεί τον αλγόριθμο των Newton-Raphson.

Πράγματι αν $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$ το σφάλμα ε_n στην n-επανάληψη της εφαρμογής του αλγορίθμου Newton Raphson είναι: $\varepsilon_\mathrm{n}=x_n-\xi$ (5)

Αφαιρώντας τη σχέση (2) από την (3) έχουμε:

$$f(\mathrm{x_n})+(x_{n+1}-x_n)f'(\mathrm{x_n})-f(\mathrm{x_n})-(\xi-\mathrm{x_n})f'(\mathrm{x_n})-\frac{1}{2}(\xi-x_n)^2f''(h)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x_{n+1}-\xi)f'(\mathrm{x_n})-\frac{1}{2}(x_n-\xi)^2f''(h)=0\overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon_{n+1}\cdot f'(\mathrm{x_n})-\frac{1}{2}\varepsilon_n{}^2f''(h)=0\Leftrightarrow\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{2}\varepsilon_n{}^2\frac{f''(h)}{f'(\mathrm{x_n})} \qquad (6)$$

Επομένως το σφάλμα στην n+1 επανάληψη του αλγορίθμου είναι ανάλογο με το τετράγωνο του σφάλματος της προηγούμενης επανάληψης δηλαδή της n-επανάληψης εφαρμογής του αλγορίθμου. Αυτό σημαίνει ότι η

σύγκλιση της μεθόδου είναι τετραγωνική και επομένως το πλήθος των σωστών δεκαδικών ψηφίων κατά την προσέγγιση της λύσης ξ της εξίσωσης διπλασιάζεται σε κάθε επανάληψη εφαρμογής του αλγορίθμου.

«Η μεγάλη ταχύτητα της μεθόδου Newton – Raphson δείχνει ότι χρειάζεται μια λογική εκτίμηση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(\mathrm{x})=0$ για αρχική τιμή και ότι ο ρόλος της μεθόδου είναι να κάνει αυτή τη λογική εκτίμηση «άριστη». Αυτό κάνει πολύ δημοφιλή τη μέθοδο Newton – Raphson. Ένας άλλος λόγος που κάνει αυτήν τη μέθοδο δημοφιλή, είναι ότι προγραμματίζεται εύκολα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή». [2]

4.5.2 ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ NEWTON-RAPHSON ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΡΙΖΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έστω η εξίσωση $x^{\nu}=\mathrm{A}$ (7), όπου Α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός αριθμός και θέλουμε να υπολογίσουμε τη ρίζα της εξίσωσης αυτής, δηλαδή την $\sqrt[\nu]{\mathrm{A}}$ ν-ιοστή ρίζα του Α.

Παίρνουμε την εξίσωση: $f(x)=x^{\nu}-\mathrm{A}=0$ (8)

Υπολογίζουμε την $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ (9)

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (8) και (9) στον τύπο (4) του αλγορίθμου Newton – Raphson και έχουμε:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^{\nu}-\mathrm{A}}{\nu\cdot x_n^{\nu-1}}=\frac{\nu x_n^{\nu}-x_n^{\nu}+\mathrm{A}}{\nu\cdot x_n^{\nu-1}}=\frac{1}{\nu}\left(\frac{(\nu-1)x_n^{\nu}+\mathrm{A}}{x_n^{\nu-1}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{\nu}\left[(\nu-1)x_n+\frac{\mathrm{A}}{x_n^{\nu-1}}\right]\quad(10)\quad \text{για } n=0,1,2,\ldots$$

Ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί τον αλγόριθμο των Newton – Raphson για την εύρεση της ν-ιοστής ρίζας του $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$, με x_0 κατάλληλη αρχική προσέγγιση.

Ειδικά για ν=2, έχουμε να υπολογίσουμε τη ρίζα της εξίσωσης $x^2=\mathrm{A}$, δηλαδή την $\sqrt{\mathrm{A}}$ τετραγωνική ρίζα του Α και για την $f(x)=x^2-\mathrm{A}=0$, ο αλγόριθμος των Newton-Raphson παίρνει τη μορφή:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\mathrm{A}}{x_n}\right)\quad(11)\quad \text{για } n=0,1,2,\ldots$$ όπου x_0 κατάλληλη αρχική προσέγγιση.

Ο αναδρομικός τύπος (11) που προκύπτει από τον αλγόριθμο Newton-Raphson είναι ο τύπος που προέκυψε από τη μέθοδο που υπέδειξε ο Ήρων στο πρόβλημα 8 των «Μετρικών Ι» για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετράγωνου αριθμού.

4.5.3 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Αν εκλέξουμε την αρχική προσέγγιση x_0 από την περιοχή που θα περιέχει στο εσωτερικό της την $\sqrt{\mathrm{A}}$, τότε ο αλγόριθμος θα συγκλίνει σε αυτήν. Γενικότερα:

Ο αλγόριθμος $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\mathrm{A}}{x_n}\right)$ των Newton – Raphson με A θετικό αριθμό και για κάθε αρχική προσέγγιση $x_0 > 0$ παράγει ακολουθία που συγκλίνει στη $\sqrt{\mathrm{A}}$.

Απόδειξη

Αφού $x_0 > 0$ τότε από την (11) και $x_n > 0$ για n=1,2,3,…

Επίσης:

$$x_{n+1} - \sqrt{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\mathrm{A}}{x_n}\right) - \sqrt{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(x_n - 2\sqrt{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \geq 0$$

Άρα $x_n \geq \sqrt{\mathrm{A}}$ για n=0,1,2,…

Ακόμα $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\mathrm{A}}{x_n}\right) = \frac{2x_n^{\ 2} - x_n^{\ 2} - \mathrm{A}}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^{\ 2} - \mathrm{A}}{x_n}\right) \geq 0$

Άρα $x_n \geq x_{n+1}$ για n=1,2,3,…

Επομένως η ακολουθία των προσεγγίσεων $\{x_n\}$ για n=1,2,3,… που παράγεται κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου (11) των Newton – Raphson, έχει θετικούς όρους, είναι μονότονη και συγκεκριμένα φθίνουσα και κάτω φραγμένη από την τετραγωνική ρίζα του A, δηλαδή από το $\sqrt{\mathrm{A}}$. Σύμφωνα με την Μαθηματική Ανάλυση η ακολουθία αυτή συγκλίνει και αφού $x_n \geq 0$ για n=1,2,3,…, τότε συγκλίνει στην $\sqrt{\mathrm{A}}$.

Εφόσον τουλάχιστο στην κοντινή περιοχή μιας ρίζας, ο αλγόριθμος Newton – Raphson συγκλίνει ταχύτατα, αυτός ο αλγόριθμος χρησιμοποιείται

ευρέως για την επίλυση αλγεβρικών και υπερβατικών εξισώσεων, όπως και μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν οι ρίζες είναι μιγαδικές.

4.5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του 2 με τη μέθοδο των Newton – Raphson με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη $\sqrt{2}$ και τότε ο αλγόριθμος των Newton-Raphson από τον τύπο (11) γίνεται:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad n = 0,1,2,3,...$$

Ξεκινώντας με $x_0 = 1$ (x_0 = οποιοσδήποτε θετικός αριθμός)

παίρνουμε:

$$x_1 = 1,5$$
$$x_2 = 1,41667$$
$$x_3 = 1,41422$$
$$x_4 = 1,41421$$

Όμως :

$$|\varepsilon_4| = |x_4 - x_3| = |1,41421 - 1,41422| = 0,00001 < 0,00005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = \varepsilon$$

αφού θέλουμε ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.[23]

Επομένως: $\sqrt{2} \simeq 1,4142$.

[23] Αν θέλουμε σύγκλιση στην εύρεση της ρίζας ξ με ακρίβεια (προσέγγιση) κ-δεκαδικών ψηφίων τότε πρέπει: $|\varepsilon_n| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-\kappa}$.

5. Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ

5.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ – ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΤΡΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Μια μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού Ε ενός τυχαίου τριγώνου, συναρτήσει των μέτρων των πλευρών του *α,β,γ*, είναι μέσω του τύπου:

$$\mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **«Τύπος του Ήρωνα»** όμως τα τελευταία χρόνια έχει αμφισβητηθεί η πατρότητά του και αποδίδεται στον Αρχιμήδη. Επίσης διάφορες απόψεις και σχόλια έχουν διατυπωθεί όχι μόνο για την πατρότητα, αλλά και για την απόδειξή του, μερικές από τις οποίες θα αναφέρουμε στη συνέχεια. [3][4][5]

Έχουμε αναφερθεί προηγουμένως στον H. Diels (1893) ο οποίος χαρακτήριζε τον Ήρωνα ως τίποτε άλλο από έναν τεχνίτη, άποψη την οποία ενισχύει αργότερα και ο Heiberg (1927), καθώς και η I. Hammer-Jensen (1913) που τον χαρακτήριζε ως έναν αδαή, ανίδεο που αντέγραφε έργα χωρίς να κατανοεί τις πηγές του. Ο Heiberg επίσης, βασιζόμενος στις εισαγωγικές λέξεις του Ήρωνα: «εστί δε καθολική μέθοδος», πριν την απόδειξη του τύπου του στα «Μετρικά», ισχυρίζεται ότι αυτές δείχνουν ότι ο Ήρων αναφέρει τον τύπο αυτόν του εμβαδού σαν κάτι παραδοσιακό, κάτι που ήταν γνωστό από όλους τους προγενέστερους, δίνοντας στο ρήμα «εστί» παρελθοντική σημασία. Επακόλουθο είναι να αμφισβητούν τόσο την πατρότητα όσο και την απόδειξη του «Τύπου του Ήρωνα».

Ο ιστορικός E. Hoppe αντικρούει τις παραπάνω απόψεις σε ένα άρθρο του, [24] γράφοντας ότι στερούνται κάθε «επιστημονικής σοβαρότητας». Θεωρεί αβάσιμο τον ισχυρισμό του Heiberg σχετικά με τον «Τύπο του Ήρωνα» ως κάτι παραδοσιακό και γράφει: «Πρέπει τώρα το «εστί» των «Μετρικών», να σημαίνει ότι ο Ήρων αναφέρει μια γενικά γνωστή μέθοδο; Δεν είναι δυνατόν». Αιτιολογεί τον ισχυρισμό του, γράφοντας ότι ο Ήρων διευκρινίζει ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου χρειάζεται απαραίτητα ένα ύψος και δείχνει τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού ενός οξυγωνίου και ενός αμβλυγωνίου τριγώνου σε προηγούμενα προβλήματα. Οπότε είναι φυσικό, χρησιμοποιώντας μια έκφραση που χρησιμοποιούμε και εμείς σήμερα, να γράφει ότι «υπάρχει όμως μια γενική μέθοδος να βρεθεί το εμβαδόν ενός τριγώνου χωρίς να έχει δοθεί το ύψος». Σύμφωνα με τον E. Hoppe, ο Ήρων άλλωστε μπορεί να εκφράζεται έτσι, καθώς ο τρόπος που χειρίζεται και τις προηγούμενες ασκήσεις είναι δικός του. Ενισχύει την άποψή του

[24] "Heron von Alexandrien", Hermes τόμος 62, 1927

γράφοντας ότι ο τύπος αυτός δεν συναντάται πουθενά πριν τον Ήρωνα και ότι η διαδικασία της απόδειξής του είναι με βεβαιότητα γνήσια και ταιριάζει περίφημα στον τρόπο που συνηθίζει να αποδεικνύει ο Ήρων στα «Μετρικά». Επίσης στα μεταγενέστερα συγγράμματα, ο τύπος αυτός εμφανίζεται σταθερά ως «Τύπος του Ήρωνα». Αντικρούοντας τόσο την άποψη του Heiberg όσο και των υπολοίπων γράφει: «Αν βέβαια ο Ήρων ήταν ένας άσχετος (banause), όπως τον παρουσιάζει ο Heiberg, θα ήταν πολύ απίθανο να είχε κατορθώσει να αποδείξει έναν τέτοιο τύπο, ο οποίος και γι αυτόν τον ίδιο τον Ευκλείδη, θα ήταν τιμή. Αλλά και αν ήταν έτσι, προξενεί πολύ μεγάλη εντύπωση η εξαφάνιση, χωρίς κανένα ίχνος, του πραγματικού επινοητή σε σημείο, ώστε κανείς από τους πολλούς σχολιαστές να μη μας δίνει κάποιο όνομα στο οποίο να μπορούμε να εμπιστευθούμε μια τόσο μεγάλη και σημαντική ανακάλυψη».

Ο Tannery επίσης υποπτεύεται ότι ο τύπος δεν ανήκει στον Ήρωνα, όμως υποστηρίζει ότι η απόδειξη η οποία εμφανίζεται και στη «Διόπτρα» φέρει την προσωπική του σφραγίδα.

Ο T. Heath αναφέρει ότι η απόδειξη του τύπου αυτού δίνεται και στα «Μετρικά» και στη «Διόπτρα», όμως τώρα είναι γνωστό ότι η πρόταση αυτή οφείλεται στον Αρχιμήδη, εννοώντας προφανώς Αραβικές πηγές.

Ο Tittel δηλώνει ότι είναι δύσκολο να έχει πλουτίσει ο ίδιος ο Ήρων την επιστήμη με αυτήν την ανακάλυψη και να μας έχει δώσει αυτή τη σαφή και όμορφη απόδειξη την οποία αποδίδει λεπτομερώς. Επίσης αναφέρει ότι ο Ρωμαίος γεωδαίτης M.Iunius Nipsus (180 μ.Χ.), χρησιμοποιεί τον ίδιο τύπο για το εμβαδό τριγώνου και ότι τον τύπο αυτόν τον γνώριζαν και οι Άραβες και οι Ινδοί.

Ο Ε. Σταμάτης στον πρόλογο και στην εισαγωγή των «Απάντων του Αρχιμήδη» (Γ' Τόμος), [7] αναφέρει ότι πολλά έργα του Αρχιμήδη που θεωρούνταν χαμένα, βρέθηκαν σε αραβικές μεταφράσεις. Το θεώρημα του Αρχιμήδη «Περί της εις τον κύκλον τεθλασμένης γραμμής» είναι η $14^{η}$ πρόταση από τις 14 που περιέχονται στην πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί των Επιψαυόντων Κύκλων» δηλαδή «Περί Εφαπτόμενων Κύκλων», που διασώθηκαν στα αραβικά από τον Ibn Qurra (900 μ.Χ.). Επίσης δύο προτάσεις της πραγματείας «Περί Ευρέσεως του Ύψους και του Εμβαδού Τριγώνου εκ των Πλευρών Αυτού» που διασώθηκαν στο βιβλίο του Πέρση αστρονόμου Al-Biruni (973-1048 μ.Χ.) «Περί της Ευρέσεως των Χορδών εν τω Κύκλω» και θεωρείται πιθανόν ότι αυτές ανήκουν στην χαμένη πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί Τριγώνων». Έτσι ο Ε. Σταμάτης από το βιβλίο του Al-Biruni συμπεραίνει ότι ενώ μέχρι σήμερα θεωρούσαμε ότι οι δύο αυτές προτάσεις είναι επινόηση του Ήρωνα, τώρα οι προτάσεις αυτές φαίνεται ότι είναι ανακαλύψεις του Αρχιμήδη. Το έργο του al Biruni «Περί της Ευρέσεως των Χορδών εν τω Κύκλω» εκδόθηκε από τον H. Suter στα γερμανικά και έχει συμπεριληφθεί στο βιβλίο του Carl Schoy (1927).

Η πρώτη πρόταση στην έκδοση του Suter είναι το θεώρημα του Αρχιμήδη «Περί της εις τον κύκλον τεθλασμένης γραμμής» ή αλλιώς «Θεώρημα της σπασμένης χορδής», που συνοδεύεται από τρεις αποδείξεις και λέει: «Αν σε τυχαίο τόξο κύκλου εναρμοστεί (εγγραφεί) τεθλασμένη γραμμή αποτελούμενη από δύο άνισα τμήματα και από το μέσο του τόξου αχθεί κάθετος επ' αυτήν, τότε τα τμήματα στα οποία διαιρέθηκε η τεθλασμένη είναι ίσα».

Οι δύο προτάσεις (πρόταση 6 και 7) του βιβλίου του Al-Biruni «Περί Ευρέσεως του Ύψους και του Εμβαδού Τριγώνου εκ των Πλευρών Αυτού», αποδεικνύονται με χρήση του θεωρήματος της τεθλασμένης γραμμής που αναφέραμε παραπάνω.

Η πρόταση 6 αφορά την απόδειξη της μεθόδου του Αρχιμήδη για την εύρεση του ύψους των τριγώνων των οποίων δίνονται οι πλευρές και τα μήκη των τμημάτων που ορίζουν επί των πλευρών τα ύψη, την οποία απόδειξη αποδίδει ο Al-Biruni στον εαυτόν του. Σύμφωνα με τον Al-Biruni στην πρόταση 6 ο Αρχιμήδης λέγει: «*Αφαιρούμε το τετράγωνο μιας πλευράς από το τετράγωνο της άλλης και διαιρούμε το υπόλοιπο με τη βάση, προσθέτουμε το πηλίκο στη βάση και λαμβάνουμε το ήμισυ του αθροίσματος, οπότε έχουμε το μεγαλύτερο τμήμα της βάσης*». Η απόδειξή της είναι μια πολύπλοκη απόδειξη, όπου γίνεται και χρήση του γνώμονος.

Η πρόταση 7 αφορά την απόδειξη της μεθόδου του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου από τη διαφορά των πλευρών του, όπως γράφει ο Al-Biruni, δηλαδή την απόδειξη του τύπου του Ήρωνα την οποία αποδίδει στον Abu Abdallah el Shanni (990 μ.Χ.). Σύμφωνα με τον Al-Biruni, στην πρόταση 7 ο Αρχιμήδης λέει: «Αν θέλουμε να μάθουμε το εμβαδό παντός τριγώνου λαμβάνουμε τη διαφορά έκαστης πλευράς από το ημιάθροισμα των τριών πλευρών, σχηματίζουμε το γινόμενο των τριών τούτων διαφορών και το γινόμενο τούτο το πολλαπλασιάζουμε επί το ημιάθροισμα των τριών πλευρών και του γινομένου τούτου εξάγουμε την τετραγωνική ρίζα, οπότε έχουμε το εμβαδόν του τριγώνου».

Παρόμοια εκφώνηση δίνεται και από τον Ήρωνα στο έργο του «Γεωδαισία» συγγραφέας του οποίου είναι ο Βυζαντινός μοναχός Ισαακ Αργυρός, αστρονόμος και μαθηματικός του 14^{ου} αιώνα. Το όνομά του συναντάται σε όλους σχεδόν τους κώδικες που αναφέρει ο Heiberg στα προλεγόμενα του για τη Γεωδαισία, λόγω του μεγάλου αριθμού αντιγραφέων της εποχής. Όπως γράφει ο Χ. Κηπουρός [25], η προσεκτική εργασία του, στο κείμενο του Ήρωνα στη «Γεωδαισία», αποδεικνύει την μαθηματική σοβαρότητα και συνέπεια που τον διακρίνει. Στο πρόβλημα 12 «Μέθοδος επί παντός τριγώνου ευρίσκειν το εμβαδόν», ο Ήρων λέει: «Παντός τριγώνου ευρίσκειν το εμβαδόν ποίει ούτως· συντίθει τον αριθμόν των τριών πλευρών ομού και των συναγομένων λάμβανε το ½ και από τούτων πάλιν αφαίρει εκάστης πλευράς αριθμόν και των υπολιμπανομένων του μεν της μιας πλευράς πολλαπλασίαζε επί το ½ του από της συνθέσεως των πλευρών, τον δε της ετέρας επί τον γεγονότα από του προτέρου πολλαπλασιασμού και αύθις τον της λοιπής πλευράς επί τον γεγονότα από

[25] [5] («Στερεομετρικά»), Εισαγωγή σελ. xxxvi

του δευτέρου πολλαπλασιασμού· και του γεγονότος λάβε την τετραγωνική πλευράν και τούτο έσται το εμβαδόν».

Ο Ισαάκ Αργυρός χαρακτηρίζει τη μέθοδο αυτή ασφαλέστατη, που εφαρμόζεται για όλα τα τρίγωνα και έχει ληφθεί από τη Γεωμετρία του Ήρωνα, δεν αναφέρει τίποτα όμως για την πατρότητα του τύπου.

Η απόδειξη του τύπου που κάνει ο Ήρων στο πρόβλημα 8 των «Μετρικών Ι» καθώς και στο πρόβλημα 30 της «Διόπτρας» είναι τελείως διαφορετική από αυτήν του Shanni, ο οποίος χρησιμοποιεί το θεώρημα του Αρχιμήδη της εγγεγραμμένης σε κύκλο τεθλασμένης γραμμής, ενώ ο Ήρων τον εγγεγραμμένο κύκλο σε τρίγωνο. [3]

Σύμφωνα με τον Ε. Σταμάτη, [7] η απόδειξη του el-Shanni είναι περισσότερο πολύπλοκη από αυτή του Ήρωνα. Τα τεχνάσματα που περιέχει, έχουν Αρχιμήδεια προέλευση, όμως υπάρχουν πολλά σφάλματα και ανακρίβειες που δεν συναντάμε στον Συρακούσιο σοφό.

Σύμφωνα με τον Χ. Κηπουρό,[26] επιβεβαιώνεται ότι τόσο η εκφώνηση όσο και η απόδειξη είναι του Αρχιμήδη. Τα σημεία στα οποία έχει επέμβει ο el-Shanni αναγνωρίζονται εύκολα λόγω της διαφορετικής μεθόδου από αυτή που ακολουθεί ο Αρχιμήδης. (Ο el-Shanni ισχυρίζεται ότι απέδειξε και την πρόταση της τεθλασμένης γραμμής, που είναι ψευδές αφού η απόδειξη ανήκει στον Αρχιμήδη).

Συμπέρασμα, ότι στο βιβλίο του al-Biruni οι προτάσεις δεν είναι όλες δικές του, είναι μια συλλογή Ελληνικών προτάσεων, μερικές από τις οποίες είναι διασκευασμένες από τους Άραβες και άλλες αποδίδονται από τον al-Biruni στον εαυτόν του ενώ άλλες σε Άραβες ή και σε Ινδούς.

Ο Χ. Κηπουρός [4] συμπεραίνει ότι πολλοί Άραβες μεταφραστές αποσιώπησαν την πατρότητα πολλών ελληνικών έργων, παραποιώντας τις αποδείξεις προς το χειρότερο, για να τις παρουσιάσουν ως δικές τους, μειώνοντας έτσι την αξιοπιστία τους. Η αναξιοπιστία των Αράβων ενισχύεται από το γεγονός ότι κανένας από τους αξιόπιστους ιστορικούς, όπως ο Ευτόκιος, ο Πάππος, ο Πρόκλος δεν αμφισβήτησαν την πατρότητα του τύπου.

Ο διαπρεπής ιστορικός G.Loria στο βιβλίο του «Ιστορία των Μαθηματικών» [27], γράφει: «Εις μίαν όμως περίπτωσην θίγει ένα ζήτημα, του οποίου ουδέν ίχνος απαντάται εις τα Στοιχεία. Πρόκειται περί του υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου του οποίου γνωρίζομεν τα μήκη των πλευρών. Προβαίνει δε, εις τη λύσιν του προβλήματος τούτου με ένα καθαρώς γεωμετρικόν τέχνασμα τόσο κομψόν κατά τη μορφήν και τόσο σημαντικόν κατά την ουσίαν, ώστε ο ίδιος ο Ευκλείδης δεν θα εδίσταζεν ασφαλώς να το επικυρώσει δια της υπογραφής του. Πρόκειται για τον τύπο $\mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (όπου τ η ημιπερίμετρος), ο οποίος δικαιούται

[26] [5] («Μετρικά-Διόπτρα»), Εισαγωγή Ι, σελ. ix
[27] Ελληνική μετάφραση από ΕΜΕ, Τόμος Ι, παρ. 74 σελ.129

αναμφιβόλως να φέρει το όνομα «Τύπος του Ήρωνος» αντί άλλων που του εδόθησαν προτού έλθει εις φως το αρχαιότερο έργον, εντός του οποίου αναφέρεται». [4]

Συνοψίζοντας την αναφορά μας στις διάφορες απόψεις και σχόλια, τόσο για την πατρότητα, όσο και για την απόδειξη του «Τύπου του Ήρωνα», διαπιστώνουμε ότι οι περισσότεροι ιστορικοί σήμερα, παραδέχονται την άποψη του al--Biruni και αποδίδουν την πατρότητα της διατύπωσης του τύπου στον Αρχιμήδη. Ο Ήρων άλλωστε πουθενά δεν ισχυρίστηκε ότι το θεώρημα είναι δικό του, όμως αν και η απόδειξη δεν ήταν δική του και ήταν του Αρχιμήδη, θα μας είχε πληροφορήσει για αυτό, όπως έκανε πολλές φορές στα έργα του, όποτε χρειάστηκε, ως μεγάλος θαυμαστής του Αρχιμήδη.

Κλείνοντας αναφερόμαστε στον Χρ. Κηπουρό, ο οποίος έχοντας μελετήσει σε βάθος αυτό το ζήτημα, εκφράζοντας σοβαρό σκεπτικισμό, διατηρεί μια επιφύλαξη ως προς την άποψη των πολλών, σχετικά με την πατρότητα του τύπου και την εκφράζει λέγοντας: «Μέχρις ότου ανακαλυφθεί γνήσιο Ελληνικό κείμενο που να επιβεβαιώνει όσα ισχυρίζονται οι δύο Άραβες μεταφραστές, θα εξακολουθεί να πλανάται η αμφιβολία της πατρότητας του τύπου». [4] Είναι μια επιφύλαξη που πολύ συχνά τη δηλώνει σε όλα τα έργα του σχετικά με τον Ήρωνα. Όσο για την απόδειξη, γράφει: «Η γεωμετρική απόδειξη προσφέρεται από τον Ήρωνα με καταπληκτική σαφήνεια και κατά συνταγή του θεμελιωτή Ευκλείδη, τον οποίο είχε υποσχεθεί ότι θα ακολουθεί».

5.2 Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ «ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΑΠΟ ΤΟΝ ΗΡΩΝΑ

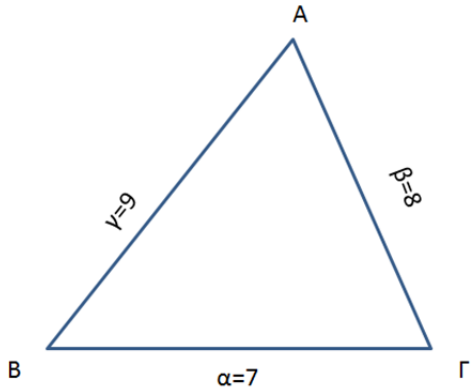
Η γεωμετρική απόδειξη του «Τύπου του Ήρωνα» αποδίδεται από τον ίδιο τον Ήρωνα στα έργα του «Μετρικά Ι» πρόβλημα 8 και «Διόπτρα» πρόβλημα 30, ενώ στα έργα του «Γεωμετρικά» προβλήματα 30, 31 και «Γεωδαισία» πρόβλημα 12, βρίσκουμε την περιγραφή του τύπου ως αλγοριθμική διαδικασία και εφαρμογή του με αριθμητικά δεδομένα, δηλαδή ως αριθμητικά παραδείγματα υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου από τα μήκη των πλευρών του.

Θα παρουσιάσουμε την αυθεντική απόδειξη του Ήρωνα μέσα από το πρόβλημα 8 των «Μετρικών Ι», θέτοντας μέσα σε αγκύλες προσθήκες ή σχόλια όπου είναι αναγκαίο. Το πρόβλημα 8 αποτελείται από δύο μέρη, το πρώτο μέρος, το πρακτικό όπου ο Ήρων δίνει μια αριθμητική εφαρμογή του τύπου, ένα αριθμητικό παράδειγμα μέτρησης του εμβαδού ενός τριγώνου όταν δοθούν οι τρεις πλευρές του (7, 8, 9 μονάδες) και το δεύτερο μέρος, το θεωρητικό όπου ο Ήρων δίνει την γεωμετρική απόδειξη της «καθολικής», όπως ο ίδιος την χαρακτηρίζει, μεθόδου υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου χωρίς να γνωρίζουμε το ύψος του.

5.2.1 ΤΟ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ»

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8 – «ΜΕΤΡΙΚΑ Ι»

«Υπάρχει μια γενική μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού τυχαίου τριγώνου όταν δοθούν οι τρεις πλευρές του, χωρίς να δοθεί το ύψος του».



Μετάφραση	Αριθμητικά	Γενίκευση
Έστω 7,8,9 μονάδες τα μέτρα των πλευρών του τριγώνου	$\alpha = 7,\ \beta = 8,\ \gamma = 9$	α,β,γ
Υπολόγισε το άθροισμα τους που γίνεται 24	$7+8+9=24$	$\alpha+\beta+\gamma=2\tau$

Μετάφραση	Αριθμητικά	Γενίκευση
Λάβε το ημιάθροισμά τους που γίνεται 12	$\frac{1}{2}\cdot 24 = 12$	$\frac{1}{2}\cdot 2\tau = \tau$
Αφαίρεσε τις 7 μονάδες και μένουν 5	$12-7=5$	$\tau-\alpha$
Αφαίρεσε πάλι από τα 12 τις 8 και μένουν 4	$12-8=4$	$\tau-\beta$
Αφαίρεσε πάλι από τα 12 τις 9 και μένουν 3	$12-9=3$	$\tau-\gamma$
Πολλαπλασίασε τα 12 επί τα 5 και γίνονται 60	$12\cdot 5=60$	$\tau(\tau-\alpha)$
Αυτά επί το 4 και γίνονται 240	$60\cdot 4=240$	$\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)$
Αυτά επί το 3 και γίνεται 720	$240\cdot 3=720$	$\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$
Η τετραγωνική ρίζα αυτού είναι το Εμβαδόν του τριγώνου	$\sqrt{720}$	$\mathrm{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma}$
Επειδή η τετραγωνική ρίζα του 720 δεν είναι ρητός αριθμός	$\sqrt{720}$ άρρητος	
Θα την προσεγγίσουμε με μικρή διαφορά κατ' έλλειψη. Επειδή ο πλησιέστερος τετράγωνος αριθμός προς το 720 είναι ο 729,	$27^2 = 729$	
με τετραγωνική ρίζα το 27,	$\sqrt{729}=27$	
διαίρεσε τον 720 με τον 27 και γίνεται 26 και 2/3	$\frac{720}{27}=26\frac{2}{3}$	
Πρόσθεσε σε αυτά τα 27 και γίνονται 53 και 2/3	$26\frac{2}{3}+27=53\frac{2}{3}$	

Μετάφραση	Αριθμητικά	Γενίκευση
Πάρε από αυτά το μισό και γίνεται 26 και 1/2 και 1/3	$\frac{1}{2}\cdot 53\frac{2}{3}=26\frac{5}{6}=$ $=26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$	
Άρα η τετραγωνική ρίζα του 720 είναι κατά προσέγγιση $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$,	$\sqrt{720}\simeq 26\frac{5}{6}=$ $=26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$	
γιατί το $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ επί τον εαυτόν τους (στο τετράγωνο) γίνεται 720 και 1/36 ,	$\left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)^2=720\frac{1}{36}$	
ώστε η διαφορά είναι το 1/36 της μονάδας	$720\frac{1}{36}-720=\frac{1}{36}$	
Αν θέλουμε όμως η διαφορά να γίνει ακόμη μικρότερη από το 1/36, τότε αντί του 729, θα θεωρήσουμε την τιμή 720 και 1/36 που βρήκαμε και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία θα βρούμε τη διαφορά ακόμα μικρότερη του 1/36		

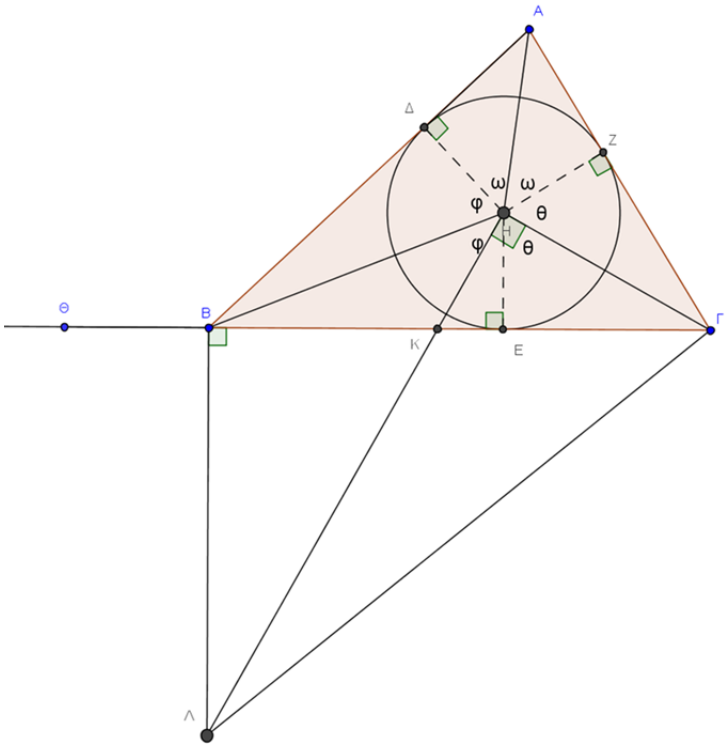
5.2.2 Η «ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ»

«Να υπολογιστεί το εμβαδό τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του»

Είναι βέβαια δυνατόν αφού φέρουμε και υπολογίσουμε ένα ύψος του να βρούμε το εμβαδό του τριγώνου. Έστω βέβαια ότι πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδό χωρίς να γνωρίζουμε το ύψος.

«Έστω το δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ με δεδομένες τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Να βρεθεί το εμβαδόν του»

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]



Ας εγγραφεί ο κύκλος ΔΕΖ στο τρίγωνο και έστω Η το κέντρο του.	
Φέρουμε τις ευθείες ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ	Τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ σημεία επαφής
Τότε το γινόμενο των ΒΓ, ΕΗ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΒΗΓ	$\left[\text{ΒΓ}\bullet\text{ΕΗ}=2\left(\text{ΒΗΓ}\right)\right]$
Το γινόμενο των ΓΑ, ΖΗ είναι διπλάσιο του ΑΓΗ	$\left[\text{ΓΑ}\bullet\text{ΖΗ}=2\left(\text{ΑΓΗ}\right)\right]$
και το γινόμενο των ΑΒ, ΔΗ διπλάσιο του ΑΒΗ	$\left[\text{ΑΒ}\bullet\text{ΔΗ}=2\left(\text{ΑΒΗ}\right)\right]$

[προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες]	
Άρα το γινόμενο της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ και της ΕΗ που είναι από το κέντρο του ΔΕΖ κύκλου (δηλαδή η ακτίνα ρ), είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ	$\left[\begin{array}{l}(\text{περίμετρος})\cdot \text{ΕΗ} = 2(\text{ΑΒΓ}) \\ \text{δηλ.}\, 2\tau\bullet\rho = 2\text{Ε}\end{array}\right]$
Προεκτείνουμε τη ΓΒ κατά τμήμα ΒΘ ίσο με το ΑΔ	$[\text{ΒΘ} = \text{ΑΔ}]$
Άρα η ΓΒΘ είναι ίση με την ημιπερίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ,	$[\text{ΓΘ} = \tau = (\text{ΓΕ} + \text{ΕΒ} + \text{ΒΘ})]$
διότι η ΑΔ είναι ίση με την ΑΖ, η ΔΒ ίση με την ΒΕ, η ΖΓ με την ΓΕ	$[\text{ΑΔ} = \text{ΑΖ}, \text{ΔΒ} = \text{ΒΕ}, \text{ΖΓ} = \text{ΓΕ}]$
Άρα το γινόμενο των ΓΘ, ΕΗ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ	$\left[\begin{array}{l}\text{ΓΘ}\bullet\text{ΕΗ} = (\text{ΑΒΓ}) \\ \text{δηλ.}\ \tau\bullet\rho = \text{Ε}\end{array}\right]$
Αλλά το γινόμενο των ΓΘ, ΕΗ είναι η τετραγωνική ρίζα του τετραγώνου του ΓΘ επί το τετράγωνο του ΕΗ.	$\text{ΓΘ}\bullet\text{ΕΗ} = \sqrt{\text{ΓΘ}^2\bullet\text{ΕΗ}^2}$
Άρα το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ επί τον εαυτόν του (το τετράγωνό του), θα είναι ίσο με το τετράγωνο του ΓΘ επί το τετράγωνο του ΕΗ	$(\text{ΑΒΓ})^2 = \text{ΓΘ}^2\bullet\text{ΕΗ}^2$
Φέρνουμε την κάθετη στην ΓΗ την ΗΛ και την κάθετη στην ΓΒ την ΒΛ,	$\text{ΗΛ} \perp \text{ΓΗ},\ \text{ΒΛ} \perp \text{ΓΒ}$
καθώς και την ΓΛ.	
Επειδή οι γωνίες ΓΗΛ και ΓΒΛ είναι ορθές, τότε	$\widehat{\text{ΓΗΛ}} = \widehat{\text{ΓΒΛ}} = 1\text{ΟΡΘΗ}$
το τετράπλευρο ΓΗΒΛ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και	
άρα οι γωνίες ΓΗΒ και ΓΛΒ είναι (έχουν άθροισμα) δύο ορθές	$\widehat{\text{ΓΗΒ}} + \widehat{\text{ΓΛΒ}} = 2\text{ΟΡΘΕΣ}$
Αλλά και οι γωνίες ΓΗΒ και ΑΗΔ είναι δύο ορθές, διότι:	$\widehat{\text{ΓΗΒ}} + \widehat{\text{ΑΗΔ}} = 2\text{ΟΡΘΕΣ}$

οι ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ διχοτομούν τις γωνίες με κορυφή το Η και	$A\hat{H}\Delta = A\hat{H}Z = \frac{\Delta\hat{H}Z}{2}$ $B\hat{H}\Delta = B\hat{H}E = \frac{E\hat{H}\Delta}{2}$ $\Gamma\hat{H}E = \Gamma\hat{H}Z = \frac{Z\hat{H}E}{2}$
οι γωνίες ΓΗΒ, ΑΗΔ μαζί είναι όσο και οι ΑΗΓ, ΔΗΒ μαζί και	$\Gamma\hat{H}B + A\hat{H}\Delta = A\hat{H}\Gamma + \Delta\hat{H}B$
όλες μαζί οι γωνίες (γύρω από το Η) είναι 4 ορθές	$\Delta\hat{H}Z + Z\hat{H}E + E\hat{H}\Delta = 4\ \text{ΟΡΘΕΣ}$ $2\left(A\hat{H}\Delta + \Gamma\hat{H}E + E\hat{H}B\right) = 4\ \text{ΟΡΘΕΣ}$ $A\hat{H}\Delta + \Gamma\hat{H}B = 2\ \text{ΟΡΘΕΣ}$
Άρα η γωνία ΑΗΔ είναι ίση με τη γωνία ΓΛΒ	$A\hat{H}\Delta = \Gamma\hat{\Lambda}B$
Είναι όμως οι γωνίες ΑΔΗ και ΓΒΛ ίσες με μια ορθή	$A\hat{\Delta}H = \Gamma\hat{B}\Lambda = 1\ \text{ΟΡΘΗ}$
Άρα το τρίγωνο ΑΗΔ είναι όμοιο με το ΓΒΛ,	$A\overset{\triangle}{H}\Delta \approx \Gamma\overset{\triangle}{B}\Lambda$ (και ορθογώνια)
ώστε θα είναι η ΒΓ προς τη ΒΛ, όπως η ΑΔ προς τη ΔΗ δηλαδή όπως η ΒΘ προς την ΕΗ και	Ισχύουν οι αναλογίες: $\frac{B\Gamma}{B\Lambda} = \frac{A\Delta}{\Delta H} = \frac{B\Theta}{EH}$ (αφού ΑΔ=ΒΘ και ΔΗ=ΕΗ=ρ)
με εναλλαγή [των μέσων όρων] όπως είναι η ΓΒ προς τη ΒΘ, έτσι θα είναι και η ΒΛ προς την ΕΗ, δηλαδή,	$\frac{\Gamma B}{B\Theta} = \frac{B\Lambda}{EH}$
όπως η ΒΚ προς την ΚΕ, επειδή	$\frac{\Gamma B}{B\Theta} = \frac{B\Lambda}{EH} = \frac{BK}{KE}$
η ΒΛ είναι παράλληλη στην ΕΗ και	$B\Lambda \parallel EH$ τότε $B\overset{\triangle}{K}\Lambda \approx E\overset{\triangle}{H}K$

με σύνθεση λόγου όπως είναι η ΓΘ προς τη ΒΘ, έτσι θα είναι η ΒΕ προς την ΕΚ	$\frac{ΓΒ}{ΒΘ}=\frac{ΒΚ}{ΚΕ}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{ΓΒ+ΒΘ}{ΒΘ}=\frac{ΒΚ+ΚΕ}{ΚΕ}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{ΓΘ}{ΒΘ}=\frac{ΒΕ}{ΚΕ}$
Ώστε και όπως είναι το τετράγωνο της ΓΘ προς το γινόμενο των ΓΘ, ΘΒ, έτσι είναι το γινόμενο των ΒΕ, ΕΓ προς το γινόμενο των ΓΕ, ΕΚ δηλαδή	$\frac{ΓΘ^2}{ΓΘ\bullet ΘΒ}=\frac{ΒΕ\bullet ΕΓ}{ΓΕ\bullet ΕΚ}$ (πολ/μος των όρων του κλάσματος επί τον ίδιο αριθμό)
προς το τετράγωνο της ΕΗ, επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο [ΚΗΓ] η ΕΗ είναι η κάθετη από την ορθή γωνία προς τη βάση (δηλαδή ύψος στην υποτείνουσα)	$\frac{ΓΘ^2}{ΓΘ\bullet ΘΒ}=\frac{ΒΕ\bullet ΕΓ}{ΓΕ\bullet ΕΚ}=\frac{ΒΕ\bullet ΕΓ}{ΕΗ^2}$ (αφού $ΕΗ^2=ΓΕ\bullet ΕΚ$)
Ώστε το τετράγωνο της ΓΘ επί το τετράγωνο της ΕΗ, του οποίου η τετραγωνική ρίζα είναι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ίσο με το γινόμενο των ΓΘ, ΘΒ επί το γινόμενο των ΒΕ, ΕΓ.	$\sqrt{ΓΘ^2\bullet ΕΗ^2}=(ΑΒΓ)$ και $ΓΘ^2\bullet ΕΗ^2=ΓΘ\bullet ΘΒ\bullet ΒΕ\bullet ΕΓ$
Και έχει δοθεί κάθε μια από τις ΓΘ, ΘΒ, ΒΕ, ΓΕ. Η ΓΘ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ, η ΒΘ είναι η υπεροχή (διαφορά) της ημιπεριμέτρου από τη ΓΒ, η ΒΕ είναι η υπεροχή της ημιπεριμέτρου από την ΑΓ, η δε ΕΓ είναι η υπεροχή της ημιπεριμέτρου από την ΑΒ.	$ΓΘ=\tau$ $ΒΘ=ΓΘ-ΓΒ=\tau-\alpha$ $ΒΕ=ΓΘ-ΑΓ=\tau-\beta$ $ΕΓ=ΓΘ-ΑΒ=\tau-\gamma$
Επειδή όμως είναι η ΕΓ ίση με την ΓΖ, η ΒΘ ίση με την ΑΖ και με την ΑΔ	$ΕΓ=ΓΖ,\ ΒΘ=ΑΖ=ΑΔ$
Άρα έτσι και το Εμβαδόν του τριγώνου είναι γνωστό (υπολογίζεται)	$(ΑΒΓ)=\sqrt{ΓΘ\bullet ΘΒ\bullet ΒΕ\bullet ΕΓ}$ $(ΑΒΓ)=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Ο [αριθμητικός] λογισμός γίνεται ως εξής:

Έστω ότι η ΑΒ είναι 13 μονάδες, η ΒΓ 14 μονάδες και η ΑΓ 15 μονάδες	ΑΒ=13, ΒΓ=14, ΑΓ=15	γ,α,β
Πρόσθεσε τα 13, 14, 15 και γίνονται 42	13+14+15=42	γ+α+β=2τ
Πάρε το μισό και γίνεται 21	$\frac{1}{2}\bullet 42 = 21$	$\frac{1}{2}\bullet(\gamma+\alpha+\beta)=\tau$
Αφαίρεσε τα 13 και μένουν 8	21-13=8	$\tau-\gamma$
Μετά αφαίρεσε από τα 21 τα 14 και μένουν 7	21-14=7	$\tau-\alpha$
Τέλος αφαίρεσε από τα 21 τα 15 και μένουν 6	21-15=6	$\tau-\beta$
Πολλαπλασίασε τα 21 επί τα 8 και το γινόμενο επί τον 7 και το γινόμενο επί τον 6 και προκύπτει 7056	$21\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 7056$	$\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)(\tau-\beta)$
Η τετραγωνική ρίζα αυτών είναι 84	$\sqrt{7056}=84$	$\sqrt{\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$
Τόσο είναι και το εμβαδό του τριγώνου.	Ε=84	$\mathrm{E}=\sqrt{\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$

5.2.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ «ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» (ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ)

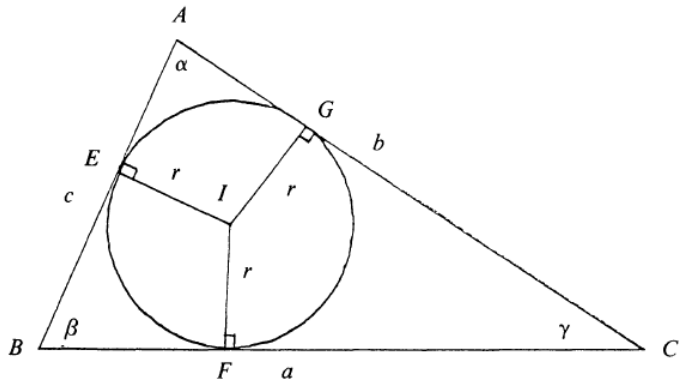
Ο «Τύπος του Ήρωνα» υπολογισμού του εμβαδού *E*, ενός τριγώνου *ABC* με πλευρές *α, b, c*, είναι:

$$(ABC)=\sqrt{s(s-\alpha)(s-b)(s-c)} \qquad \left(s=\frac{\alpha+b+c}{2}\right) \quad (1)$$

Ενώ όπως είδαμε προηγουμένως, ο Ήρωνας έχει αποδείξει γεωμετρικά τον παραπάνω τύπο, είναι δυνατή η απόδειξή του και τριγωνομετρικά. Θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του οποίου το κέντρο είναι στο *I* και η ακτίνα του είναι *r*. Προφανώς:

$$(ABC)=(IBC)+(IAC)+(IAB)=\frac{r\alpha}{2}+\frac{rb}{2}+\frac{rc}{2}=r\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)=r\bullet s$$

$$(ABC)=r\bullet s \qquad (2)$$



Εφόσον οι εφαπτόμενες σε έναν κύκλο από ένα σημείο είναι ίσες, έχουμε:

$$EB=s-b,\ \ CG=s-c,\ \kappa\alpha\iota\ \ AE=s-\alpha \quad (3)$$

Καθώς το *I*, είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των (εσωτερικών) γωνιών του τριγώνου *ABC*, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3), για να πάρουμε:

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{r}{s-b},\quad \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{s-c} \quad \text{και} \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{s-\alpha} \qquad (4)$$

Από το $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ και δεδομένου ότι, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x=\frac{1}{\tan x}$

, ακολουθεί ότι:

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right\}=\cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{1-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (5), παίρνουμε:

$$\frac{r}{s-c}=\frac{(s-\alpha)(s-b)-r^2}{r\left[(s-b)+(s-\alpha)\right]} \quad (6)$$

Αυτό ξαναγράφεται ως:

$$r^2(s-b+s-\alpha)=(s-\alpha)(s-\beta)(s-c)-r^2(s-c) \qquad (7)$$

Ομοίως για:

$\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right\}$ προκύπτει:

$$r^2(s-c+s-b)=(s-\alpha)(s-b)(s-c)-r^2(s-\alpha) \qquad (8)$$

και για

$\tan\frac{\beta}{2}=\tan\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right\}$ προκύπτει:

$$r^2(s-\alpha+s-c)=(s-\alpha)(s-b)(s-c)-r^2(s-b) \qquad (9)$$

Προσθέτοντας τις (7), (8) και (9) και επειδή $2s=\alpha+b+c$, βρίσκουμε:

$$r^2=\frac{(s-\alpha)(s-b)(s-c)}{s} \quad (10)$$

και έτσι αντικαθιστώντας την (10) στην (2), παίρνουμε την (1), δηλαδή:

$$(ABC)=s\cdot r=s\cdot\sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-b)(s-c)}{s}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

5.2.4 Ο «ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΓΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ – ΤΥΠΟΣ ΒΡΑΧΜΑΓΚΟΥΠΤΑ

Ο Βραχμαγκούπτα (Brahmagupta) ήταν Ινδός μαθηματικός – αστρονόμος του 7^{ου} μΧ αιώνα,

Γενίκευσε τον «Τύπο του Ήρωνα» για την εύρεση του εμβαδού ενός τετραπλεύρου δίνοντας τον τύπο:

$$\mathrm{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad \text{όπου:}$$

$s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ η ημιπερίμετρος του τετραπλεύρου με μήκη πλευρών a,b,c,d ,

παραλείποντας όμως να σημειώσει ότι ο τύπος είναι σωστός μόνο στην περίπτωση ενός κυκλικού τετραπλεύρου. Ο παραπάνω τύπος ακόμα και σήμερα φέρει το όνομά του. Ο Βραχμαγκούπτα δεν έδωσε μια τυπική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος και στα αντίγραφα που σώζονται, δεν αναφέρεται ότι αυτό βρίσκει εφαρμογή μόνο σε εγγεγραμμένα τετράπλευρα. Είναι πιθανόν, ότι απλά φαντάστηκε αυτήν την εξίσωση βασιζόμενος μόνον στην τυπική συμμετρία. Φυσικά κάθε τρίγωνο είναι κυκλικό, δηλαδή μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο και τότε ένα τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί τετράπλευρο με μια πλευρά του ίση με μηδέν.

Ο Βραχμαγκούπτα επεσήμανε ότι έχουμε ένα συμμετρικό γινόμενο τεσσάρων παραγόντων μέσα στη τετραγωνική ρίζα του Τύπου του Ήρωνα για τρίγωνα:

$$\mathrm{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

το οποίο αποτελείται από τις ποσότητες:

$$a+b+c \qquad a+b-c \qquad a-b+c \qquad -a+b+c$$

δηλαδή: $$\mathrm{A} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Με κάποιο τρόπο μπορούμε να «γεμίσουμε» τη συμμετρία, κάνοντας καθένα από τους τέσσερεις παράγοντες συμμετρικό με τους άλλους, με το να φανταστούμε μια τέταρτη «πλευρά» μήκους *d*=0, το οποίο να αφαιρείται από τον πρώτο παράγοντα και να προστίθεται στους υπολοίπους τρεις, έτσι

$$a+b+c-d \qquad a+b-c+d \qquad a-b+c+d \qquad -a+b+c+d$$

Είναι προφανές ότι εφόσον *d*=0 αυτό το σύνολο παραγόντων είναι ίδιο με το προηγούμενο, αλλά έχει μεγαλύτερη τυπική συμμετρία και έτσι φαίνεται ότι η ποσότητα:

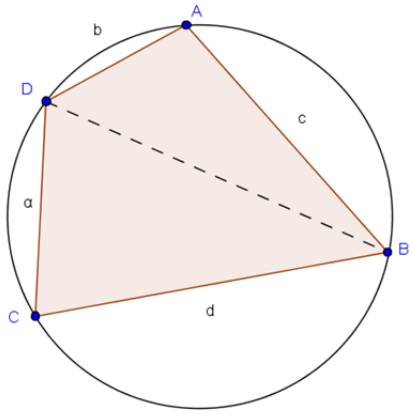
$$\mathrm{A}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}$$

αναπαριστά το εμβαδόν ενός τετράπλευρου με πλευρές a,b,c,d , εγγεγραμμένου σε έναν κύκλο, δηλαδή ενός κυκλικού τετραπλεύρου. Και αυτό είναι:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{4}\sqrt{2(s-d)\bullet 2(s-c)\bullet 2(s-b)\bullet 2(s-a)}=$$
$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ] (Σύγχρονη)

Το εμβαδό του τετραπλεύρου ABCD είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ABD και BCD, δηλαδή:



$$\mathrm{A}=(ABCD)=(ABD)+(BCD)=$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin A+\frac{1}{2}ad\sin C$$

Επειδή στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο *ABCD* είναι

$\hat{A}+\hat{C}=180^{\circ}$, τότε $\sin C=\sin A.$

Επομένως $\mathrm{A}=\frac{1}{2}bc\sin A+\frac{1}{2}ad\sin A=\frac{1}{2}\sin A(bc+ad)$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο:

$\mathrm{A}^2=\frac{1}{4}\sin^2 A(bc+ad)^2=\frac{1}{4}(1-\cos^2 A)(bc+ad)^2,$ αφού $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί 4 και έχουμε:

$$4\mathrm{A}^2=(1-\cos^2 A)(bc+ad)^2$$
$$4\mathrm{A}^2=(bc+ad)^2-\cos^2 A(bc+ad)^2 \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων γράφουμε τη διαγώνιο DB^2 με δύο τρόπους από τα τρίγωνα ABD και BCD αντίστοιχα:

$$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2+d^2-2ad\cos C$$

$$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2+d^2-2ad(-\cos A)$$

(αφού $\cos C = -\cos A$ επειδή $\hat{A} + \hat{C} = 180^{\circ}$)

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2 + d^2 + 2ad\cos A$$

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2bc\cos A + 2ad\cos A$$

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2\cos A(ad + bc)$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(ad + bc)} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1), είναι:

$$4\mathrm{A}^2 = (bc + ad)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(ad + bc)}\right)^2 (bc + ad)^2$$

$$4\mathrm{A}^2 = (bc + ad)^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right)^2}{4(ad + bc)^2}(bc + ad)^2$$

$$16\mathrm{A}^2 = 4(bc + ad)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right)^2$$

$$16\mathrm{A}^2 = \left(2bc + 2ad + b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right)\left(2bc + 2ad - b^2 - c^2 + a^2 + d^2\right)$$

$$16\mathrm{A}^2 = \left[(b + c)^2 - (a - d)^2\right]\left[(a + d)^2 - (b - c)^2\right]$$

$$16\mathrm{A}^2 = (b + c + d - a)(b + c + a - d)(a + d + c - b)(a + d + b - c)$$

$$16\mathrm{A}^2 = (b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d) \quad (3)$$

Επειδή η ημιπερίμετρος του τετραπλεύρου είναι $s = \frac{a + b + c + d}{2} \Leftrightarrow 2s = a + b + c + d$

τότε ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} 2(s - a) &= b + c + d - a \\ 2(s - b) &= a + c + d - b \\ 2(s - c) &= a + b + d - c \\ 2(s - d) &= a + b + c - d \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (4) στην (3) προκύπτει:

$$16\mathrm{A}^2 = 2(s - a)2(s - b)2(s - c)2(s - d)$$

$$\mathrm{A}^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

$$\mathrm{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

και έτσι αποδείχθηκε ο τύπος του Βραχμαγκούπτα.

Ο παραπάνω τύπος του εμβαδού του τετραπλεύρου χρησιμοποιήθηκε από τον ίδιο συγχρόνως με τους τύπους:

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \quad \text{και} \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

για τις διαγωνίους, για την εύρεση τετραπλεύρων των οποίων οι πλευρές οι διαγώνιοι και τα εμβαδά είναι ρητοί αριθμοί.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ – ΤΥΠΟΣ BRETSCHNEIDER

Η επέκταση του τύπου του Βραχμαγκούπτα για ένα τυχαίο τετράπλευρο είναι γνωστή ως τύπος του Bretschneider (Γερμανός μαθηματικός που ανακάλυψε τον τύπο το 1842):

$$\mathrm{A} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \bullet \cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$ όπου:

$s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ η ημιπερίμετρος του τετραπλεύρου με μήκη πλευρών a,b,c,d .

και $\hat{A}, \hat{C}$ δύο απέναντι εσωτερικές γωνίες του.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]

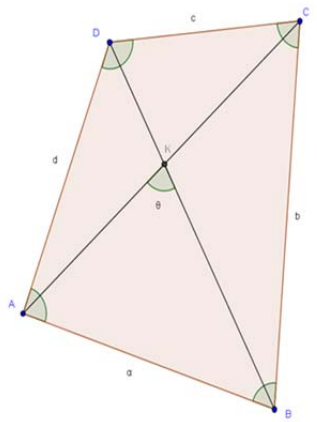
$$\mathrm{A} = (ABCD) = (ABD) + (BCD) =$$

$$= \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C$$

$$2\mathrm{A} = ad \sin A + bc \sin C$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο

$$(2\mathrm{A})^2 = (ad \sin A + bc \sin C)^2$$



$$4\mathrm{A}^2=(ad)^2\sin^2 A+(bc)^2\sin^2 C+2abcd\sin A\sin C \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων γράφουμε τη διαγώνιο DB^2 με δύο τρόπους από τα τρίγωνα ABD και BCD αντίστοιχα:

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$$
$$a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos A-2bc\cos C$$
$$\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}=ad\cos A-bc\cos C$$
$$\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=(ad\cos A-bc\cos C)^2$$
$$\frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4}=(ad)^2\cos^2 A+(bc)^2\cos^2 C-2abcd\cos A\cos C \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, προκύπτει:

$$4\mathrm{A}^2+\frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4}=(ad)^2\sin^2 A+(bc)^2\sin^2 C+2abcd\sin A\sin C+$$
$$+(ad)^2\cos^2 A+(bc)^2\cos^2 C-2abcd\cos A\cos C=$$
$$=(ad)^2\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)+(bc)^2\left(\sin^2 C+\cos^2 C\right)-2abcd\left(\cos A\cos C-\sin A\sin C\right)=$$
$$=(ad)^2+(bc)^2-2abcd\cos(A+C)=$$
$$=(ad+bc)^2-2abcd-2abcd\cos(A+C)=$$
$$=(ad+bc)^2-2abcd\left[1+\cos(A+C)\right]=$$
$$=(ad+bc)^2-2abcd\bullet 2\cos^2\frac{A+C}{2}\Leftrightarrow$$

$$4\mathrm{A}^2+\frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4}=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$16\mathrm{A}^2+\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2=4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$16\mathrm{A}^2=4(ad+bc)^2-\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$16\mathrm{A}^2=\left(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2\right)\left(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2\right)-$$
$$-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$16\mathrm{A}^2=\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right]\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

$$16\mathrm{A}^2=(b+c+a-d)(b+c-a+d)(a+d+b-c)(a+d-b+c)-$$
$$-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$16\mathrm{A}^2=(b+c-a+d)(a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c+a-d)-$$
$$-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$16\mathrm{A}^2=(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(+a+b+c-d)-$$
$$-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\quad(3)$$

τότε ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{l}2(s-a)=b+c+d-a\\2(s-b)=a+c+d-b\\2(s-c)=a+b+d-c\\2(s-d)=a+b+c-d\end{array}\right\}(4)$$

Αντικαθιστώντας τις (4) στην (3) προκύπτει:

$$16\mathrm{A}^2=2(s-a)2(s-b)2(s-c)2(s-d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

$$\mathrm{A}^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

$$\mathrm{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

ή

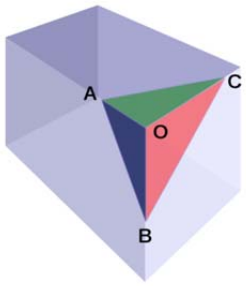
$$\mathrm{A}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{1}{2}abcd\left(1+\cos(A+C)\right)}$$

5.2.5 Ο «ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΓΙΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο τύπος του Ήρωνα για τρίγωνα είναι κατ' ουσία ισοδύναμος με το θεώρημα του Πυθαγόρα για ορθά τετράεδρα, ένα ανάλογο του πυθαγορείου θεωρήματος στον τρισδιάστατο χώρο, που συχνά αναφέρεται σαν θεώρημα του De Gua (Γάλλος μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα) .

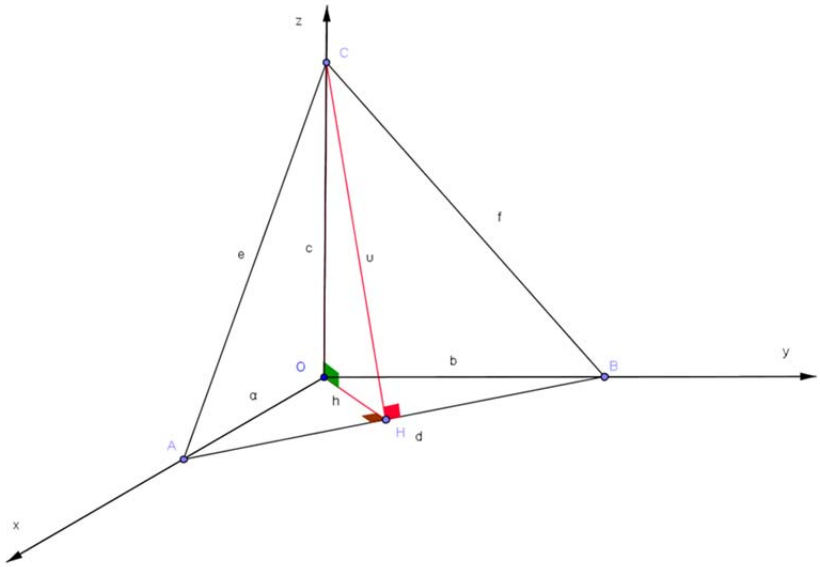
ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένα τετράεδρο που έχει μια τριεδρική γωνία, της οποίας οι γωνίες όλων των εδρών είναι ορθές, λέγεται τρισορθογώνιο τετράεδρο και η τριεδρική γωνία λέγεται ορθή γωνία του τετραέδρου.
- Η έδρα που βρίσκεται, απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται βάση του τετραέδρου.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ DE GUA:

Το τετράγωνο του εμβαδού της βάσης ενός τρισορθογώνιου τετραέδρου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των εμβαδών των άλλων τριών εδρών του.



Για ένα ορθό τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0),(a,0,0),(0,b,0)$ και $(0,0,c)$ η βάση d και το ύψος υ της «έδρας της υποτείνουσας» δηλαδή της βάσης του τετραέδρου είναι:

$$d=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \upsilon=\sqrt{c^2+h^2}$$

από τα όμοια τρίγωνα ΑΟΒ, ΟΑΗ έχουμε: $\frac{h}{a}=\frac{b}{d}\Rightarrow h=\frac{ab}{d}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ που είναι η απόσταση ΟΗ και έτσι έχουμε:

$$\left(\mathrm{E}_{\substack{\text{βάσης}\\ \text{τετραέδρου}}}\right)^2=(ABC)^2=\left(\frac{d\cdot\upsilon}{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{\alpha^2+b^2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{c^2+h^2}\right)^2}{4}=\frac{\left(\alpha^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+h^2\right)}{4}=$$

$$=\frac{\alpha^2c^2+b^2c^2+h^2\left(\alpha^2+b^2\right)}{4}=\frac{\alpha^2c^2+b^2c^2+\frac{\alpha^2b^2}{\alpha^2+b^2}\left(\alpha^2+b^2\right)}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\mathrm{E}_{\substack{\text{βάσης}\\ \text{τετραέδρου}}}\right)^2=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{ac}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2$$

Έτσι αν ορίσουμε $A_{xyz}=(ABC)$ το εμβαδό της βάσης του τετραέδρου και τα $A_{xoy}=(OAB)$, $A_{xoz}=(AOC)$ και $A_{yoz}=(BOC)$ τα εμβαδά των τριών ορθογώνιων εδρών ενός ορθού τετράεδρου με ορθογώνια μήκη πλευρών a,b,c και, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mathrm{A}_{xyz}^2=\mathrm{A}_{xoy}^2+\mathrm{A}_{xoz}^2+\mathrm{A}_{yoz}^2 \qquad (1)$$

όπου $\mathrm{A}_{xoy}=ab/2,\ \mathrm{A}_{xoz}=ac/2\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}_{yoz}=bc/2$.

<u>Αυτός είναι ουσιαστικά ο Τύπος του Ήρωνα</u>. Για να το κάνουμε σαφές, παρατηρούμε ότι οι πλευρές της βάσης του τετραέδρου *d,e,f* σχετίζονται άμεσα με τα *α, b, c* σύμφωνα με τις Πυθαγόρειες σχέσεις:

$$\begin{aligned} d^2&=a^2+b^2 && (i)\\ e^2&=a^2+c^2 && (ii) \quad (2)\\ f^2&=b^2+c^2 && (iii)\end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τα εμβαδά $\mathrm{A}_{xoy}, \mathrm{A}_{xoz}, \mathrm{A}_{yoz}$ στην εξίσωση (1), με όρους όπως d^2, e^2 και f^2 για να δώσουμε σαφήνεια στον Τύπο του Ήρωνα.

Θα φαινόταν ότι αυτό που προκύπτει δεν ισχύει σε αμβλυγώνια τρίγωνα, επειδή η βάση ενός ορθού τετραέδρου είναι απαραίτητα οξυγώνιο τρίγωνο. Παρόλα αυτά, οποιοδήποτε τρίγωνο μπορεί να είναι η βάση ενός ορθού τετράεδρου, υπό την προϋπόθεση ότι τα μήκη των ορθογώνιων πλευρών και τα εμβαδά να επιτρέπεται να είναι φανταστικά. Έτσι για οποιαδήποτε τιμή των *d,e,f* μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις (2) για τις ορθογώνιες πλευρές του ορθού τετράεδρου του οποίου η βάση του, είναι τρίγωνο με μήκη πλευρών *d,e,f.* Δηλαδή:

$$d^2+e^2+f^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow\frac{d^2+e^2+f^2}{2}=a^2+b^2+c^2 \qquad (\mathrm{I}')$$

$$\text{Τότε: } (\mathrm{I}')\text{-}(2\mathrm{i}) \qquad \Rightarrow c^2=\frac{d^2+e^2+f^2}{2}-d^2\Rightarrow c^2=\frac{-d^2+e^2+f^2}{2}$$

$$(\mathrm{I}')\text{-}(2\mathrm{ii}) \qquad \Rightarrow b^2=\frac{d^2+e^2+f^2}{2}-e^2\Rightarrow b^2=\frac{d^2-e^2+f^2}{2}$$

$$(\mathrm{I}')\text{-}(2\mathrm{iii}) \qquad \Rightarrow a^2=\frac{d^2+e^2+f^2}{2}-f^2\Rightarrow a^2=\frac{d^2+e^2-f^2}{2}$$

$$\text{Άρα} \qquad a^2=\frac{d^2+e^2-f^2}{2} \qquad b^2=\frac{d^2-e^2+f^2}{2} \qquad c^2=\frac{-d^2+e^2+f^2}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (1) (Τύπος του Ήρωνα), έχουμε:

$$\mathrm{A}_{xyz}^2=\frac{\left(d^2+e^2-f^2\right)\left(d^2-e^2+f^2\right)}{16}+\frac{\left(d^2+e^2-f^2\right)\left(-d^2+e^2+f^2\right)}{16}+$$
$$+\frac{\left(d^2-e^2+f^2\right)\left(-d^2+e^2+f^2\right)}{16} \qquad (\mathrm{I})$$

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε το εμβαδό ενός τριγώνου με μήκη πλευρών *d*=8, *e*=5 και *f*=5, το οποίο είναι ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Αντικαθιστώντας αυτά στις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$a=\sqrt{32} \quad b=\sqrt{32} \quad c=\sqrt{-7}$$

έτσι η «c» πλευρά έχει φανταστικό μήκος. Συνεπώς 2 από τις 3 ορθογώνιες έδρες (αυτές που δίνονται από τις $ac/2$ και $bc/2$) είναι επίσης φανταστικές. Όμως, αυτά τα εμβαδά είναι υψωμένα στο τετράγωνο στον τύπο του Πυθαγόρειου θεωρήματος για ορθά τετράεδρα (1) και έτσι εξασφαλίζουμε να έχουμε ένα πραγματικό εμβαδό για τη βάση του τετραέδρου.

Πιθανότατα οι Αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν τη σύνδεση μεταξύ του γενικευμένου Πυθαγόρειου θεωρήματος και του Τύπου του Ήρωνα, αλλά απέφευγαν να το παρουσιάζουν με αυτήν τη μορφή λόγω των δυσκολιών ερμηνείας των περιπτώσεων αμβλείας γωνίας. Ο Descartes πίστευε ότι οι Αρχαίοι Έλληνες είχαν ανακαλύψει τα περισσότερα από τα θεωρήματά τους αναλυτικά μέσω συνδυασμού γεωμετρίας και άλγεβρας, αλλά έκρυβαν τις μεθόδους τους, παρουσιάζοντας αυτές σε συνθετική μορφή, έτσι ώστε να κάνουν τα αποτελέσματα να φαίνονται πιο αποθαρρυντικά και εντυπωσιακά στους μη γνώστες. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ένα καλό παράδειγμα του πως οι φανταστικοί αριθμοί μπορούν να εμφανιστούν φυσικά, όταν πραγματευόμαστε περιπτώσεις που αφορούν καθαρά πραγματικές ποσότητες.

Όσον αφορά τα υψηλότερης διάστασης simplex δεν υπάρχει καμία πλήρη γενίκευση του Τύπου του Ήρωνα που να δίνει τον όγκο ενός γενικού τετραέδρου με χρήση των εμβαδών των εδρών του, επειδή τα εμβαδά των εδρών του δεν προσδιορίζουν μοναδικά τον όγκο, (σε αντίθεση με τα τρίγωνα όπου τα τρία μήκη πλευρών προσδιορίζουν το εμβαδό). Παρόλα αυτά, είναι δυνατό να δημιουργήσουμε έναν «Τύπο Ήρωνα» για τετράεδρα, αν περιοριστούμε μόνο σε τέτοια που θα ταίριαζαν ως βάσεις ενός ορθού τετραδιάστατου στερεού. (Παρατηρούμε ότι κάθε τρίγωνο είναι πράγματι η έδρα ενός ορθού τετραέδρου, το οποίο εξηγεί γιατί ο Τύπος του Ήρωνα είναι πλήρης για τρίγωνα).

Για να ανακεφαλαιώσουμε, ο «Τύπος του Ήρωνα» για τρίγωνα είναι βασικά ισοδύναμος με το θεώρημα του Πυθαγόρα για ορθά τετράεδρα. Έστω ότι ορίζουμε $\mathrm{A}_{xyo}, \mathrm{A}_{xoz}, \mathrm{A}_{oyz}$ τα εμβαδά των τριών ορθογωνίων εδρών ενός ορθού τετραέδρου και A_{xyz} το εμβαδό της βάσης του. Έτσι θα έχουμε:

$$\mathrm{A}^2_{\mathrm{xyz}} = \mathrm{A}^2_{\mathrm{xoy}} + \mathrm{A}^2_{\mathrm{xoz}} + \mathrm{A}^2_{\mathrm{yoz}} \qquad (1)$$

Τώρα, έστω ότι L_x, L_y, L_z τα τρία μήκη των πλευρών των ορθογωνίων εδρών του τετραέδρου, τότε τα εμβαδά των ορθογωνίων εδρών είναι:

$$\mathrm{A}_{xoy} = \frac{L_x L_y}{2}, \ \mathrm{A}_{xoz} \frac{L_x L_z}{2}, \ \mathrm{A}_{yoz} \frac{L_y L_z}{2}$$

και έτσι η (1) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$4\mathrm{A}^2_{xyz} = \left(L_x L_y\right)^2 + \left(L_x L_z\right)^2 + \left(L_y L_z\right)^2 \qquad (3)$$

Ακόμα, οι τρεις πλευρές L_1, L_2, L_3 της βάσης του τετραέδρου συνδέονται απευθείας με τις L_x, L_y, L_z μέσω του δισδιάστατου Πυθαγόρειου θεωρήματος

$$L_1^{\,2} = L_x^{\,2} + L_y^{\,2}$$
$$L_2^{\,2} = L_x^{\,2} + L_z^{\,2} \quad (4)$$
$$L_3^{\,2} = L_y^{\,2} + L_z^{\,2}$$

Οι εξισώσεις (4), είναι τρεις γραμμικές εξισώσεις ως προς τα τετράγωνα των μηκών των τριών πλευρών L_x, L_y, L_z. Μπορούμε να επιλύσουμε αυτά ως συνάρτηση των L_1, L_2, L_3 και μετά να αντικαταστήσουμε τις σχέσεις αυτές στην (3) και να δώσουμε τον «Τύπο του Ήρωνα» (Ι), δηλαδή

$$\mathrm{A}_{xyz}^2 = \frac{\left(L_1^{\,2} + L_2^{\,2} - L_3^{\,2}\right)\left(L_1^{\,2} - L_2^{\,2} + L_3^{\,2}\right)}{16} + \frac{\left(L_1^{\,2} + L_2^{\,2} - L_3^{\,2}\right)\left(-L_1^{\,2} + L_2^{\,2} + L_3^{\,2}\right)}{16} +$$
$$+ \frac{\left(L_1^{\,2} - L_2^{\,2} + L_3^{\,2}\right)\left(-L_1^{\,2} + L_2^{\,2} + L_3^{\,2}\right)}{16}$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε το ίδιο πράγμα για τα τετράεδρα βασιζόμενοι στο γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για όγκους των ορθών τετραδιάστατων στερεών:

$$\mathrm{V}_{wxyz}^2 = \mathrm{V}_{wxyo}^2 + \mathrm{V}_{wxoz}^2 + \mathrm{V}_{woyz}^2 + \mathrm{V}_{oxyz}^2 \quad (1')$$

Έστω ότι L_w, L_x, L_y, L_z τα μήκη των πλευρών των ορθογώνιων εδρών του τετραδιάστατου στερεού, τότε οι όγκοι των τεσσάρων ορθογώνιων «εδρών» (τετραέδρων) είναι αντίστοιχα:

$$\mathrm{V}_{wxyo} = \frac{L_w L_x L_y}{6} \qquad \mathrm{V}_{wxoz} = \frac{L_w L_x L_z}{6}$$
$$\mathrm{V}_{woyz} = \frac{L_w L_y L_z}{6} \qquad \mathrm{V}_{oxyz} = \frac{L_x L_y L_z}{6}$$

Έτσι η (1') γίνεται:

$$36\mathrm{V}_{wxyz}^2 = \left(L_w L_x L_y\right)^2 + \left(L_w L_x L_z\right)^2 + \left(L_w L_y L_z\right)^2 + \left(L_x L_y L_z\right)^2 \quad (3')$$

Ακόμα, τα τέσσερα εμβαδά $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ της βάσης του τετραδιάστατου στερεού συνδέονται απευθείας με τα L_x, L_y, L_z από το τρισδιάστατο Πυθαγόρειο θεώρημα (3) όπως παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
4\mathrm{A}_1{}^2 &= \left(L_w L_x\right)^2 + \left(L_w L_y\right)^2 + \left(L_x L_y\right)^2 \\
4\mathrm{A}_2{}^2 &= \left(L_w L_x\right)^2 + \left(L_w L_z\right)^2 + \left(L_x L_z\right)^2 \\
4\mathrm{A}_3{}^2 &= \left(L_w L_y\right)^2 + \left(L_w L_z\right)^2 + \left(L_y L_z\right)^2 \\
4\mathrm{A}_4{}^2 &= \left(L_x L_y\right)^2 + \left(L_x L_z\right)^2 + \left(L_y L_z\right)^2
\end{aligned}
\qquad (4')
$$

Έτσι γνωρίζοντας τα τέσσερα εμβαδά $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ έχουμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους L_w, L_x, L_y, L_z άρα μπορούμε να επιλύσουμε για αυτές τις τιμές και μετά να υπολογίσουμε τον όγκο του τετραέδρου χρησιμοποιώντας την (3').

Σε αυτό το σημείο συνήθως πολλοί αποφεύγουν αυτήν την προσέγγιση για δύο λόγους. Πρώτα γιατί ότι κάνουμε περιορίζεται για «ειδικά» τετράεδρα, τα οποία λειτουργούν σαν τη βάση ενός ορθού τετραδιάστατου simplex, έτσι σίγουρα δεν θα καταλήξουμε με έναν τύπο που βρίσκει εφαρμογή σε κάθε τετράεδρο, (όπως είναι προφανές από το γεγονός ότι εδώ έχουμε μόνο τέσσερα ανεξάρτητα μήκη πλευρών ενώ κάθε τετράεδρο έχει έξι). Γενικοί τύποι που δίνουν τον όγκο σε συνάρτηση με τα μήκη πλευρών πράγματι υπάρχουν, όπως αυτός του Ιταλού ζωγράφου Piero della Fransesca. Όλοι αυτοί οι τύποι ανάγονται σε υπολογισμούς όγκων με χρήση οριζουσών.

Ο δεύτερος λόγος που συνήθως δεν χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (4'), είναι επειδή επιλύονται κάπως δύσκολα, καθόσον δεν είναι γραμμικές ως προς τα μήκη. Εάν αποφασίσουμε να επιμείνουμε, καταλήγουμε μετά από εκτενή αλγεβρική επίλυση, ότι μπορούμε να μειώσουμε τις εξισώσεις (4'), σε μια τεταρτοβάθμια με άγνωστο το τετράγωνο οποιουδήποτε ενός από τα τέσσερα μήκη L_w, L_x, L_y, L_z.

Αν επιλέξουμε αυθαίρετα L_y και έστω $\mathrm{A} = 4\mathrm{A}_1{}^2$, $B = 4\mathrm{A}_2{}^2$, $C = 4\mathrm{A}_3{}^2$, $D = 4\mathrm{A}_4{}^2$, μπορούμε, να εκφράσουμε την τεταρτοβάθμια με άγνωστο $x = L_y{}^2$, με συντελεστές που είναι συναρτήσεις του B και των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων των A, C, D με

$$r = A + C + D, \qquad s = AC + AD + CD\ , \quad t = ACD.$$

Με αυτούς τους όρους η τεταρτοβάθμια για $x = L_y{}^2$ είναι:

$$
\begin{aligned}
&\left[12B\right]x^4 + \left[3r^2 - 12s + 14Br - B^2\right]x^3 + \\
&+\left[2B\left(r^2 + 6s\right) - rB^2 - r^3 + 4rs - 36t\right]x^2 + \\
&+\left[2B\left(rs + 6t\right) - sB^2 + 4s^2 - sr^2 - 12rt\right]x - \left[t\left(r - B\right)^2\right] = 0
\end{aligned}
$$

Βέβαια, οι ανάλογες τεταρτοβάθμιες μπορούν να δοθούν για τα $L_w{}^2, L_x{}^2, L_z{}^2$, αλλά εάν έχουμε ένα από αυτά, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τα άλλα. Για παράδειγμα, εάν μας δοθεί το L_y μπορούμε να υπολογίσουμε το L_x από τη σχέση:

$$L_x = -L_y \pm \sqrt{\frac{\left(L_y{}^2 + A\right)\left(L_y{}^2 + D\right)}{\left(L_y{}^2 + C\right)}}$$

και οι τιμές των $L_w,\ L_z$ ακολουθούν εύκολα, επιτρέποντάς μας να υπολογίσουμε τον όγκο χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3'). Θα ήταν καλά, αν μπορούσαμε να εκφράσουμε τον όγκο σαν μια σαφή συνάρτηση των εμβαδών των εδρών, αλλά δεν είναι γνωστό εάν υπάρχει τέτοιος τύπος.

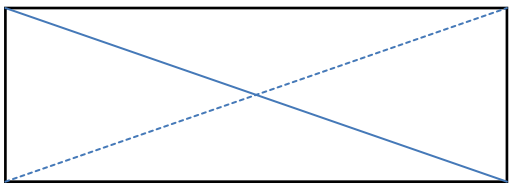
Στα παραπάνω, αναπτύχθηκε μια **τετράεδρη εκδοχή για τον «Τύπο του Ήρωνα» για μια περιορισμένη κλάση τετραέδρων**, δηλαδή γι αυτά τα οποία μπορούν να λειτουργήσουν σαν βάση ενός ορθού τετραδιάστατου simplex, αλλά υπάρχουν και άλλες ειδικές κλάσεις τετραέδρων τα οποία έχουν ενδιαφέροντες τύπους υπολογισμού όγκων. Αυτή που δίνει το πιο κοντινό ανάλογο στον «Τύπο του Ήρωνα», είναι η κλάση των τετραέδρων των οποίων τα μήκη των απέναντι πλευρών είναι ίσα. Έτσι υπάρχουν μόνο τρία ανεξάρτητα μήκη πλευρών και τότε όλες οι έδρες του τετραέδρου συμπίπτουν. Έστω $(a,f),(b,e),(c,d)$ τα ζεύγη των μηκών των απέναντι πλευρών, μπορούμε να θέσουμε $a=f, b=e, c=d$ στις βασικές εκφράσεις υπολογισμού όγκων με ορίζουσες, βρίσκουμε ότι η τελική έκφραση του τετραγώνου του όγκου παραγοντοποιείται ως εξής:

$$72\mathrm{V}^2 = \left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right) \quad (5)$$

που σίγουρα θυμίζει τον «Τύπο του Ήρωνα» για το εμβαδό της κάθε έδρας:

$$16\mathrm{A}^2 = \left(a+b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)$$

Αυτό επίσης δείχνει ότι εάν κάθε έδρα είναι ένα ίσο ορθογώνιο τρίγωνο, ο όγκος είναι μηδέν, όπως πρέπει και να είναι, καθώς τέσσερα τέτοια τρίγωνα που ενώνονται στις πλευρές τους για να σχηματίσουν ένα τετράεδρο, βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο:



Προφανώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό τετράεδρο με ισόπλευρα τρίγωνα του ίδιου εμβαδού όπως αυτά τα ορθογώνια τρίγωνα, δηλαδή $a^2 = b^2 = c^2$ και ο όγκος υπολογίζεται από τη σχέση (5) :

$72\mathrm{V}^2 = \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{V}^2 = \frac{\left(\alpha^2\right)^3}{72} \Leftrightarrow V = \frac{\alpha^3}{\sqrt{72}}$ το οποίο δείχνει το γεγονός ότι τα εμβαδά των εδρών ενός τετράεδρου, γενικότερα δεν καθορίζουν τον όγκο του.

5.2.6 ΜΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΟΥ «ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ» ΓΙΑ n-SIMPLEX ΠΟΛΥΕΔΡΑ [31]

Σύμφωνα με τον «Τύπο του Ήρωνα για τρίγωνα», το τετράγωνο του εμβαδού ενός τριγώνου είναι ένα πολυώνυμο των μηκών των πλευρών του.

$$A^2(T) = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Γενικότερα έστω ότι T είναι ένα simplex στον $\mathbb{R}^n$ με κορυφές $x_0, x_1, \ldots, x_n$, όπου $x_0 = 0$, η αρχή. Έστω ότι A ο πίνακας $n \times n$ του οποίου οι στήλες δίνονται από τις κορυφές $x_1, \ldots, x_n$, και έστω ότι τα x_i διατάσσονται έτσι ώστε ο A να έχει θετική ορίζουσα. Ο όγκος του T δίνεται τότε από τη σχέση

$$\det(A) = n!V(T) \Leftrightarrow V(T) = \frac{\det(A)}{n!},$$

τότε

$$V^2(T) = \frac{1}{(n!)^2}\det(A^t A) \qquad (1)$$

όπου A^t είναι ο ανάστροφος του πίνακα A. Τα στοιχεία του πίνακα $A^t A$ είναι εσωτερικά γινόμενα του τύπου $x_i \cdot x_j$. Από την ταυτότητα

$$x_i \cdot x_j = \frac{1}{2}\left(|x_i|^2 + |x_j|^2 - |x_i - x_j|^2\right) \qquad (2)$$

προκύπτει ότι η τιμή του $V^2(T)$ είναι ένα πολυώνυμο των τετραγώνων των μηκών των πλευρών του T. Με διαφορετική διατύπωση, αν το T έχει μήκη πλευρών $a_{ij} = |x_i - x_j|$, τότε το $V^2(T)$ είναι ένα πολυώνυμο με μεταβλητές τις $b_{ij} = a_{ij}^2$ όσο και τις a_{ij}.

Εφόσον η ορίζουσα ενός πίνακα $n \times n$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο n -βαθμού ως προς τα στοιχεία του πίνακα, το πολυώνυμο $V^2(T) = f(a_{ij})$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $2n$. Αυτό το πολυώνυμο μερικές φορές τυποποιείται σε όρους γραμμικών αλγεβρικών εκφράσεων όπως οι ορίζουσες Cayley – Menger. Σε μερικές περιπτώσεις, παρόλα αυτά, το πολυώνυμο *f*, δέχεται παραγοντοποίηση σε γραμμικούς ή δευτεροβάθμιους πρώτους παράγοντες.

Ο «Τύπος του Ήρωνα», είναι η περίπτωση των δύο διαστάσεων, δηλαδή ο τύπος για το εμβαδόν $A(T)$ ενός τριγώνου T. Σε αυτήν την περίπτωση $A^2(T) = f(a,b,c)$, που είναι ένα ομογενές πολυώνυμο τέταρτου βαθμού ως προς

τα μήκη των πλευρών a,b,c με πραγματικούς συντελεστές που πρέπει να παραγοντοποιηθεί.

Μια παρατήρηση κλειδί στη δεύτερη διάσταση, είναι ότι το εμβαδό ενός τριγώνου είναι αμετάβλητο στις περιστροφές και ανακλάσεις. Η σειρά των πλευρών a,b,c δεν παίζει ρόλο όταν υπολογίζουμε το εμβαδό. Πιο συγκεκριμένα, προσανατολίζουμε το τρίγωνο *T* έτσι ώστε η πλευρά του μήκους *α* να είναι παράλληλη με τον άξονα των x, ενώ τα a,b,c είναι οι πλευρές του *T* που ονομάζονται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Αν ανακλάσουμε το *T* ως προς τον άξονα των *y*, οι ονομασίες των πλευρών *b* και *c* αλλάζουν μεταξύ τους, ενώ το τετράγωνο του εμβαδού του $A^2(T) = f(a,b,c)$ παραμένει το ίδιο. Εφόσον αυτό ισχύει για όλες τις τιμές των a,b,c, το πολυώνυμο $f(a,b,c)$ πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς τις παραμέτρους b και c. Ένα παρόμοιο επιχείρημα, χρησιμοποιώντας περιστροφή, δείχνει ότι το πολυώνυμο $f(a,b,c)$ είναι συμμετρικό και ως προς τις τρεις μεταβλητές του a,b,c, μια ιδιότητα που δεν είναι προφανής από τις (1) και (2). (Πράγματι αυτό δεν είναι αληθές για τον όγκο ενός γενικού *n*-simplex εάν $n \geq 3$).

Για να βρούμε μια παραγοντοποίηση του f σε πρώτα πολυώνυμα, επιχειρούμε να ανακαλύψουμε τις ρίζες τους. Δηλαδή να προσδιορίσουμε που μηδενίζεται το πολυώνυμο. Για το πολυώνυμο f, αυτό προσδιορίζεται μερικώς από την τριγωνική ανισότητα. Ειδικά, εάν ένα τρίγωνο έχει πλευρές a,b,c τότε $a+b \geq c$. Η ισότητα ισχύει όταν το τρίγωνο μετατρέπεται σε ευθύγραμμο τμήμα (δηλαδή σε ένα εκφυλισμένο τρίγωνο με εμβαδό μηδέν), τότε το γραμμικό πολυώνυμο $a+b-c$ προτείνεται ως πιθανός παράγοντας του f.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι $a+b-c$ είναι πράγματι ένας παράγοντας, βλέπουμε το f σαν ένα πολυώνυμο στο δακτύλιο $\mathbb{R}[b,c][a]$, δηλαδή σαν ένα πολυώνυμο με μεταβλητή *α*, που έχει συντελεστές στο $\mathbb{R}[b,c]$. Η διαίρεση με το υπόλοιπο δίνει:

$$f(a,b,c) = \left(a+b-c\right)g(a,b,c) + r(b,c) \qquad (3)$$

για κάποιο g στο $\mathbb{R}[a,b,c]$ και r στο $\mathbb{R}[b,c]$.

Παρατηρούμε ότι το *α* δεν εμφανίζεται στη πολυωνυμική έκφραση για το *r*. Έστω ότι $c \geq b \geq 0$, και θέτουμε $a = c - b$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι τιμές των a, b, c είναι τα μήκη πλευρών ενός εκφυλισμένου τριγώνου, έτσι ώστε $f\left(a,b,c\right) = A^2\left(T\right) = 0$. Προκύπτει από την (3) ότι $r\left(b,c\right) = 0$ οποτεδήποτε $c \geq b \geq 0$. Με άλλα λόγια, το $r\left(b,c\right)$ μηδενίζεται σε ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Εφόσον το *r* είναι ένα πολυώνυμο, τότε το *r* είναι ταυτοτικά μηδέν, το οποίο σημαίνει ότι:

$$f(a,b,c)=\left(a+b-c\right)g(a,b,c)$$

Έτσι, το $a+b-c$ διαιρεί το f στο $\mathbb{R}[a,b,c]$.

Σύμφωνα με ένα παρόμοιο (και συμμετρικό) επιχείρημα, καθένα από τα γραμμικά πολυώνυμα $a-b+c$ και $-a+b+c$, επίσης διαιρεί το f στο $\mathbb{R}[a,b,c]$. Αυτοί οι γραμμικοί πολυωνυμικοί παράγοντες του f είναι ο καθένας πρώτος και έτσι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους ανά ζεύγος. Στη συνέχεια, από παραγοντοποίηση στο $\mathbb{R}[a,b,c]$:

$$f(a,b,c)=\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right)h(a,b,c)$$

για κάποιο *h* στο $\mathbb{R}[a,b,c]$.

Εφόσον το συμμετρικό πολυώνυμο f είναι ομογενές τέταρτου βαθμού, το πολυώνυμο *h* πρέπει να είναι συμμετρικό και ομογενές πρώτου βαθμού, έτσι $h=\left(a+b+c\right)k$ για κάποια πραγματική σταθερή *k*. Άρα παρόμοια,

$$f(a,b,c)=\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right)k$$

όπου η σταθερή *k*, είναι ανεξάρτητη του τριγώνου *T*.

Υπολογίζοντας για $f\left(3,4,5\right)=A^2\left(T\right)=36$, για την εύκολη περίπτωση ενός (3, 4, 5) ορθογωνίου τριγώνου, συνεπάγεται *k*=1/16, έτσι ώστε:

$$f(a,b,c)=\frac{1}{16}\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right) \qquad (4)$$

Ορίζουμε την ημιπερίμετρο $s\left(T\right)$ ενός τριγώνου *T* με $s(T)=\left(a+b+c\right)/2$. Τότε η εξίσωση (4), δίνει τον **«Τύπο του Ήρωνα» για τρίγωνα**:

«Αν ένα τρίγωνο T έχει μήκη πλευρών a, b, c και ημιπερίμετρο s, τότε

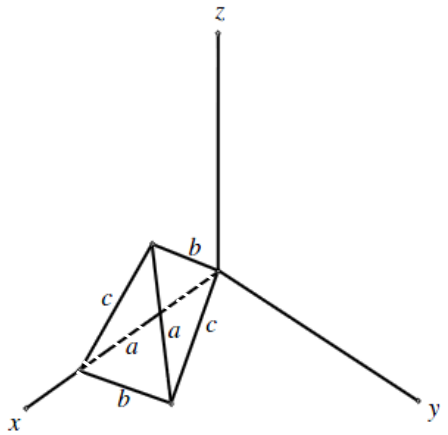
$$A^2(T)=s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\text{»}$$

Πιο γενικά συνάγεται από τις (1) και (2) ότι το τετράγωνο $V^2(T)$ του όγκου ενός *n*-simplex *T,* όπου $n\geq 3$, είναι επίσης πολυώνυμο, των τετραγώνων των μηκών των πλευρών του *T*. Δυστυχώς το $V^2(T)$ δεν είναι τυπικά συμμετρικό ως προς όλες τις μεταβλητές του, καθώς μερικά ζεύγη πλευρών του *T* τέμνονται, ενώ άλλα όχι.

Παρόλα αυτά, υπάρχουν μη τετριμμένες παραγοντοποιήσεις του $V^2(T)$ όταν ένα simplex *T*, ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες γεωμετρικής συμμετρίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα τρισδιάστατο τετράεδρο *T* λέγεται ισοσκελές, εάν οι τέσσερεις τριγωνικές έδρες του είναι όλες ίσες η μια με την άλλη, δηλαδή είναι όλες ίσες με ένα τρίγωνο πλευρών a,b,c. Ισοδύναμα, κάποιος μπορεί να ορίσει ένα τετράεδρο *T* ως ισοσκελές, εάν τα τρία ζεύγη των απέναντι (μη τεμνόμενων) πλευρών στο *T*, έχουν κοινά μήκη έστω a,b,c .



Σχήμα 1. Ένα ισοσκελές τετράεδρο.

Η επέκταση του **«Τύπου του Ήρωνα» για τετράεδρα**, γίνεται με τον υπολογισμό του όγκου ισοσκελούς τετραέδρου σύμφωνα με το:

«Αν T ένα ισοσκελές τετράεδρο με συμπίπτοντα ζεύγη απέναντι πλευρών μήκους a, b και c, τότε:

$$V^2(T)=\frac{1}{72}\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)» \qquad (5)$$

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ] (αλγεβρική)

Το τετράγωνο του όγκου $V^2(T)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο ως προς τα τετράγωνα των μηκών των πλευρών του *T*. Εφόσον το *T* είναι ισοσκελές, αυτό σημαίνει ότι

$$V^2(T)=f\left(a^2,b^2,c^2\right).$$

Οι συμμετρίες ενός ισοσκελούς τετράεδρου συνεπάγονται πάλι ότι το f είναι ένα συμμετρικό πολυώνυμο. Για να το δούμε αυτό, τοποθετούμε το *T* να δείχνει προς τα επάνω, με μια έδρα στο *xy* – επίπεδο, με μια πλευρά, έστω την *α*, παράλληλη στον άξονα των x και τις πλευρές *α, b* και *c* της κάτω έδρας να ονομάζονται αντίστροφα με τους δείκτες του ρολογιού όπως φαίνεται από επάνω, (Σχήμα 1). Πάλι μια ανάκλαση του *T* θα αλλάξει τους ρόλους των *b* και *c*, ενώ θα αφήνει αμετάβλητο τον όγκο $V(T)$ και την τιμή του f. Παρόμοια, περιστροφές και ανακλάσεις χωρίς μεταβολή όγκου θα μεταθέσουν τους ρόλους των *α, b* και *c* με κάθε πιθανό τρόπο, χωρίς να επηρεάσουν την τιμή του πολυωνύμου f. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος στο $\mathbb{R}^3$ είναι ομογενές πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς τα μήκη πλευρών, έτσι η συνάρτηση f είναι επίσης ένα ομογενές πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς τις μεταβλητές a^2, b^2 και c^2.

Οι παράγοντες του f μπορούν τώρα να καθοριστούν μελετώντας τις περιπτώσεις στις οποίες ο όγκος του *T* είναι μηδέν, δηλαδή όταν το τετράεδρο *T* είναι επίπεδο, δηλαδή εκφυλισμένο. Όταν το *T* είναι ισοσκελές, μπορεί να εκφυλιστεί μόνο εάν το *T* είναι ένα ορθογώνιο. Αν οι τριγωνικές έδρες του T είναι ισοδύναμες με ένα τρίγωνο *F* έχοντας μήκη πλευρών που ικανοποιούν $c \geq b \geq a$, τότε το *T* είναι εκφυλισμένο (έχει μηδενικό όγκο) εάν και μόνο αν το *T* είναι ένα ορθογώνιο με μήκη πλευρών *α* και *b* και μήκος διαγωνίου *c*. Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα, ότι $c^2 = a^2 + b^2$. Αυτό δείχνει ότι ο $a^2 + b^2 - c^2$ μπορεί να είναι ένας παράγοντας του πολυώνυμου f.

Για να το επιβεβαιώσουμε αυτό, θέτουμε $A = a^2, B = b^2$ και $C = c^2$. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις συνεπάγονται ότι το f είναι ένα ομογενές πολυώνυμο ως προς τις μεταβλητές *A, B, C*.

Η διαίρεση δίνει $f(A,B,C) = (A+B-C)g(A,B,C) + r(B,C)$ για κάποιο g στο $\mathbb{R}[A,B,C]$ και *r* στο $\mathbb{R}[B,C]$.

Η μεταβλητή *A* δεν εμφανίζεται στην πολυωνυμική έκφραση για το *r*. Ακόμα, προκύπτει από τις προηγούμενες παρατηρήσεις ότι εάν $A+B-C=0$, τότε $f(A,B,C) = V^2 = 0$ (απλώς θέτουμε $A = C - B$). Έτσι $r(B,C) = 0$ όταν $C \geq B \geq 0$. Εφόσον το *r* είναι ένα πολυώνυμο, προκύπτει ότι το *r* είναι ταυτοτικά μηδέν, το οποίο μας δίνει:

$$f(A,B,C) = (A+B-C)g(A,B,C)$$

Με άλλα λόγια, το $A+B-C$ διαιρεί το *f* στο $\mathbb{R}[A,B,C]$. Από τη συμμετρία παίρνουμε ότι $A-B+C$ και $-A+B+C$ επίσης διαιρούν το f , έτσι ώστε:

$$f\left(A,B,C\right)=\left(A+B-C\right)\left(A-B+C\right)\left(-A+B+C\right)h\left(A,B,C\right) \quad (6)$$

για κάποια *h* στο $\mathbb{R}[A,B,C]$.

Εφόσον το f είναι ένα ομογενές πολυώνυμο τρίτου βαθμού ως προς τις μεταβλητές *A, B, C,* συνεπάγεται ότι η *h* είναι μια σταθερά.

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του κανονικού τετράεδρου πλευράς *α*, δίνεται από τον τύπο $V_{\substack{\text{κανονικού}\\ \text{τετραέδρου}}}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ και επομένως ο όγκος του κανονικού τετραέδρου με πλευρά μοναδιαίου μήκους $a=b=c=1$ είναι $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$ και τότε $h=f\left(1,1,1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2=\frac{1}{72}$

τότε από την (6)

$$V^2(T)=f\left(A,B,C\right)=\frac{1}{72}\left(A+B-C\right)\left(A-B+C\right)\left(-A+B+C\right)$$

Αντικαθιστώντας $A=a^2$, $B=b^2$, και $C=c^2$ παίρνουμε την

$V^2(T)=\frac{1}{72}\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)$ και αποδείχθηκε.

6. ΗΡΩΝΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ή ΤΡΙΓΩΝΑ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ

«Ηρώνειο Τρίγωνο» ή **«Τρίγωνο του Ήρωνα»** ορίζεται ένα τρίγωνο που έχει ρητά μήκη πλευρών και ρητό εμβαδό. Τα τρίγωνα αυτά ονομάζονται έτσι, επειδή σχετίζονται με τον «Τύπο του Ήρωνα» $\Delta = \sqrt{s(s-\alpha)(s-b)(s-c)}$ όπου $s = (a+b+c)/2$ είναι η ημιπερίμετρος και a,b,c τα μήκη των πλευρών τους.

«Ρητό τρίγωνο» ορίζεται ένα τρίγωνο με ρητά μήκη πλευρών. Κάθε τρίγωνο όμοιο με ένα ρητό τρίγωνο είναι επίσης ρητό.

Το απλούστερο ρητό τρίγωνο είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α, το οποίο δεν είναι Ηρώνειο γιατί το εμβαδό του $\Delta_{\text{ισοπλ}} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ δεν είναι ρητό ως προς το τετράγωνο της πλευράς του.

Το επόμενο απλούστερο τρίγωνο είναι ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές b και υποτείνουσα α, έχει εμβαδό $\Delta_{\text{ορθ.ισοσκ}} = \frac{1}{2}b^2$, αλλά η υποτείνουσά του $\alpha = b\sqrt{2}$ δεν είναι ρητή ως προς την κάθετη πλευρά και έτσι το τρίγωνο δεν είναι Ηρώνειο.

Το απλούστερο παράδειγμα ενός Ηρώνειου τριγώνου, είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με αναλογία πλευρών 3:4:5. Στην πραγματικότητα, οποιοδήποτε ρητό ορθογώνιο τρίγωνο, είναι ένα Ηρώνειο τρίγωνο.

«Ηρώνεια γωνία» ενός τριγώνου, είναι η γωνία της οποίας η εφαπτομένη του μισού της, είναι ρητός αριθμός. Επομένως είναι δυνατή η χρήση του όρου «Ηρώνειο τρίγωνο» για τα τρίγωνα που έχουν τρεις «Ηρώνειες γωνίες». Παρόλα αυτά, είναι ικανή συνθήκη να χρειαζόμαστε δύο Ηρώνειες γωνίες για τον παρακάτω λόγο. Το εμβαδό $\Delta = \frac{1}{2}\beta \bullet \upsilon$ και τότε όλα τα ύψη σε ένα Ηρώνειο τρίγωνο είναι ρητά ως προς τις πλευρές. Κάθε ύψος ενός Ηρώνειου τριγώνου το διαιρεί σε δύο Ηρώνεια ορθογώνια τρίγωνα. Το αρχικό τρίγωνο είναι άθροισμα ή διαφορά δύο ορθογωνίων τριγώνων ανάλογα με το αν το ύψος είναι εσωτερικό ή εξωτερικό του.

Πολλοί ερευνητές περιορίζουν τον όρο «Ηρώνειο τρίγωνο», αναφερόμενοι σε τρίγωνα με ακέραια μήκη πλευρών και ακέραιο εμβαδό, αφού τα μήκη των τριών πλευρών και το εμβαδό ενός ρητού τριγώνου, μπορούν να πολλαπλασιαστούν με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους και να καταστούν όλα ακέραια.

Η εύρεση ενός Ηρώνειου τριγώνου ισοδυναμεί με την λύση της Διοφαντικής εξίσωσης:

$$\Delta^2 = s(s-\alpha)(s-b)(s-c)$$

η οποία μπορεί να γραφεί με μορφή πινάκων όπως παρακάτω:

$$(4\Delta)^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{bmatrix}$$

Η πλήρης ακέραια λύση αυτής της Διοφαντικής εξίσωσης πρώτα βρέθηκε από τον Euler.

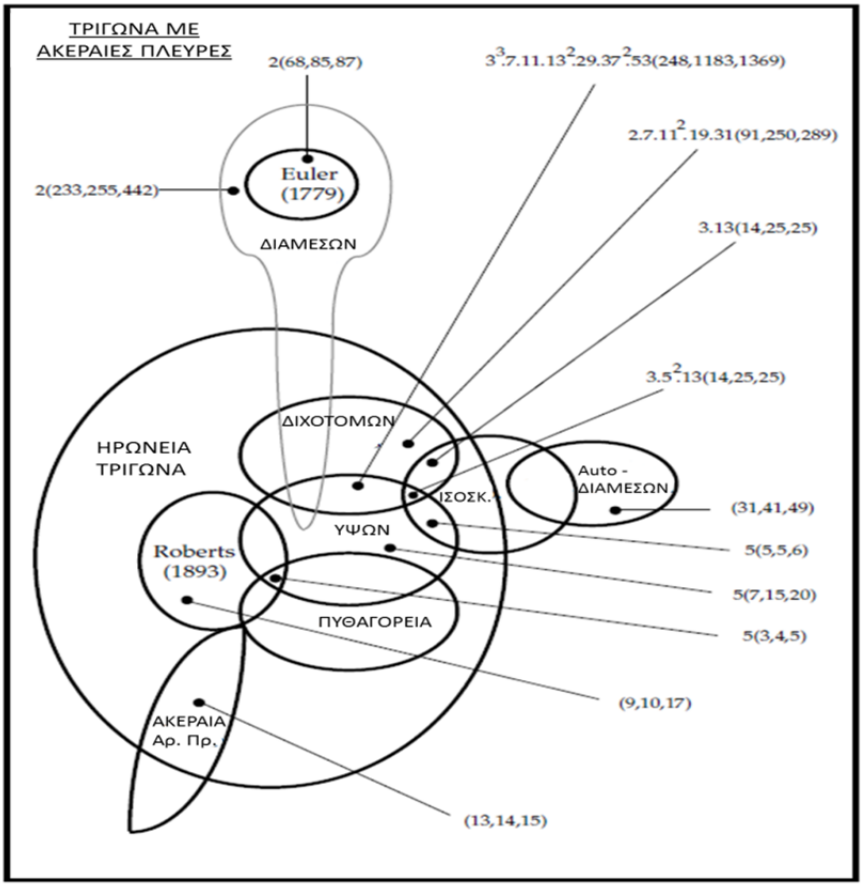
Μια παραμετρική έκδοσή της από τον Carmichael είναι:

$$\begin{aligned} \alpha &= n\left(m^2 + k^2\right) \\ b &= m\left(n^2 + k^2\right) \\ c &= (m+n)\left(mn - k^2\right) \\ \Delta &= kmn(m+n)\left(mn - k^2\right) \end{aligned}$$

η οποία παράγει ένα μέλος της κάθε κλάσης ομοιότητας Ηρώνειων τριγώνων για οποιουσδήποτε ακεραίους *m, n, k*, έτσι ώστε:

$$\text{ΜΚΔ}(m,n,k) = 1, \quad mn > k^2 > \left(m^2 n\right) / (2m+n) \text{ και } m \geq n \geq 1$$

Ο Ralph Bucholz για να μελετήσει τα Ηρώνεια τρίγωνα [29] (θεωρεί ως τέτοια, τα τρίγωνα με ακέραιες πλευρές και ακέραια εμβαδά) σε σχέση με ακέραια τρίγωνα που έχουν ακέραια μήκη υψών, διχοτόμων και διαμέσων, τα ταξινόμησε όπως στο παρακάτω σχήμα:



Τα ακέραια τρίγωνα που περιλαμβάνονται στο παραπάνω σχήμα είναι:

- Τρίγωνα «Υψών»: Κάθε τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές και τρία ακέραια ύψη. Κάθε τέτοιο τρίγωνο έχει ακέραιο εμβαδό.
- Τρίγωνα «Διχοτόμων»: Κάθε τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές και τρεις ακέραιες διχοτόμους των γωνιών του. Κάθε τέτοιο τρίγωνο έχει ακέραιο εμβαδό.
- Τρίγωνα "Roberts": Κάθε τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές οι οποίες δίνονται από τη σχέση $(\alpha,b,c)=\left(x^2+2y^2,x^2+4y^2,2x^2+2y^2\right)$. Κάθε τέτοιο τρίγωνο έχει ακέραιο εμβαδό.
- Τρίγωνα «Πυθαγόρεια»: Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές, οι οποίες δίνονται από τη σχέση: $(\alpha,b,c)=\left(u^2-\upsilon^2,2u\upsilon,u^2+\upsilon^2\right)$ με $\alpha^2+b^2=c^2$
- Τρίγωνα «Ακέραια – Αριθμητικής Προόδου» : Κάθε τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- Τρίγωνα «Ισοσκελή» : Ισοσκελή τρίγωνα με τρεις ακέραιες πλευρές.
- Τρίγωνα «Διαμέσων» : Κάθε τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές και τρεις ακέραιες διαμέσους οι οποίες διχοτομούν τις απέναντι πλευρές

σε ακέραια μήκη. Επομένως τα τρίγωνα αυτά έχουν μήκη πλευρών άρτιους ακέραιους.

- Τρίγωνα «Αυτοδιαμέσων» : Κάθε τρίγωνο με τρεις ακέραιες πλευρές που οι διάμεσοί του είναι πολλαπλάσιοι των πλευρών.
- Τρίγωνα παραμετροποίησης "Euler": Τα τρίγωνα των οποίων τα μισά των πλευρών τους δίνονται από τις εκφράσεις:

$$2a = 2\alpha(e-f)$$
$$2b = \alpha(d+e)+\beta(d-e)$$
$$2c = \alpha(d+e)-\beta(d-e)$$

όπου $d = 16\alpha^2\beta^2,\ e = (\alpha^2+\beta^2)(9\alpha^2+\beta^2)$ και $f = 2(9\alpha^4-\beta^4)$ για *α, β* ακεραίους, έχουν ακέραιες διαμέσους.

Μια ισοδύναμη παραμετροποίηση είναι η :

$$a = (m+n)p-(m-n)q$$
$$b = (m-n)p+(m+n)q$$
$$c = 2mp-2nq$$

όπου $p = (m^2+n^2)(9m^2-n^2)$ και $q = 2mn(9m^2+n^2)$ για m,n,ακεραίους.

6.1 ΑΠΕΙΡΟ ΣΥΝΟΛΟ ΗΡΩΝΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΡΗΤΕΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥΣ

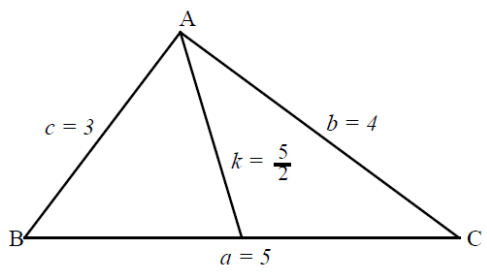
Μια παρουσίαση της ερευνητικής προσέγγισης των Ralph Bucholz και Randall Rathbun [28]

Ερώτημα: «Μπορεί κάθε Ηρώνειο Τρίγωνο να έχει δύο ρητές διαμέσους;»

Η διερεύνηση περιορίζεται σε τρίγωνα με ρητές πλευρές. Ακόμα και με πλευρές με ρητά μήκη, ο Τύπος του Ήρωνα,

$$\Delta = \sqrt{s(s-\alpha)(s-b)(s-c)} \quad (1)$$

όπου $s = (a+b+c)/2$ είναι η ημιπερίμετρος, δείχνει ότι το εμβαδόν δεν είναι απαραίτητο να είναι ρητό. Το μικρότερο Ηρώνειο τρίγωνο με ακέραιες πλευρές είναι το γνωστό (5, 4, 3) ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό 6, που φαίνεται στο Σχήμα 6.1



Σχήμα 6.1

Έστω (*k, l, m*), οι διάμεσοι των πλευρών (*a, b, c*) αντίστοιχα, οποίες μπορούν να εκφραστούν ως προς τις πλευρές:

$$k=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\ ,\ l=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}\ ,\ m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} \qquad (2)$$

Οι διάμεσοι του μικρότερου Ηρώνειου τριγώνου (5, 4, 3) είναι (*k, l, m*)= $\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{73}}{2}\right)$. Αυτό το τρίγωνο έχει ρητό εμβαδόν 6 και μια ρητή διάμεσο 5/2 από το μέσο της υποτείνουσας προς την κορυφή της ορθής γωνίας.

Γενικά τα ακέραια ορθογώνια τρίγωνα έχουν ακριβώς μια ρητή διάμεσο, τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά τους.

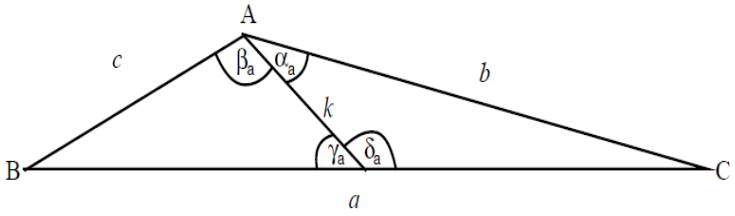
Το 1905, ο Schubert ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί να υπάρχει Ηρώνειο τρίγωνο με δύο ρητές διαμέσους. Ο Dickson επισημαίνει ότι η απόδειξη του Schubert, ήταν εσφαλμένη, αλλά δεν ήταν αναμενόμενη η ύπαρξη τέτοιων τριγώνων. Όμως η παραμετροποίηση που χρησιμοποιήθηκε από τον Schubert, αποδείχθηκε πολύ χρήσιμη στην παρακάτω διερεύνηση.

Οι παράμετροι Schubert.

Έστω το τρίγωνο του Σχήματος 6.2, που δείχνει μια από τις διαμέσους του με τις προσκείμενες γωνίες της. Αν εφαρμόσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

για τη γωνία α_a, τότε είναι σαφές ότι η αντίστοιχη συνεφαπτομένη του μισού της γωνίας είναι ρητή μόνο εάν τα $\sin\alpha_a$ και $\cos\alpha_a$ είναι ρητά.



Σχήμα 6.2

Εφόσον : $(\mathrm{ACD}) = \frac{1}{2} bk \cdot \sin\alpha_a \Leftrightarrow \sin\alpha_a = \frac{2\Delta}{bk}$

και από το νόμο των συνημιτόνων στο $\overset{\Delta}{\mathrm{ADC}}$ είναι: $\cos\alpha_a = \frac{b^2 + k^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2bk}$,

Βλέπουμε ότι τα $\sin\alpha_a$, $\cos\alpha_a$ και επομένως και η $\cot\left(\frac{\alpha_a}{2}\right)$ είναι ρητά για κάθε Ηρώνειο Τρίγωνο με μια ρητή διάμεσο *k*. Ο ίδιος ισχυρισμός βρίσκει εφαρμογή σε όλες τις γωνίες $\alpha_a,\beta_a,\gamma_a,\delta_a$ που είναι προσκείμενες στην διάμεσο *k*, έτσι όλες οι συνεφαπτομένες του μισού των γωνιών αυτών είναι ρητές. Για να εξασφαλίσουμε ένα αναμφισβήτητο όνομα για αυτές τις παραμέτρους υιοθετούμε έναν προσανατολισμό αντίθετης φοράς με τους δείκτες του ρολογιού για το τρίγωνο γύρω από το κέντρο του. Τότε οι γωνίες που δημιουργεί η διάμεσος της πλευράς α με το τρίγωνο, ξεκινώντας με τις δύο στην κορυφή, ορίζονται ως $\alpha_a,\beta_a,\gamma_a,\delta_a$ όπως στο Σχήμα 2. Οι αντίστοιχες συνεφαπτομένες των μισών αυτών των γωνιών, ορίζονται ως M_α , P_α , X_α , Y_α (Πίνακας 1.) Ονομάζουμε το σύνολο των ρητών αριθμών (*M, P, X, Y*), παραμέτρους Schubert. Είναι αντιληπτό ότι εάν δεν υπάρχει δείκτης τότε όλοι οι παράμετροι παίρνονται από την ίδια διάμεσο. Για το Ηρώνειο Τρίγωνο (5, 4, 3), παίρνουμε:

$$(M_\alpha, P_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha) = \left(\cot\frac{\alpha_a}{2}, \cot\frac{\beta_a}{2}, \cot\frac{\gamma_a}{2}, \cot\frac{\delta_a}{2}\right) = \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

$\mathrm{M}_\alpha = \frac{4\Delta}{4bk + \alpha^2 - 3b^2 - c^2}$	$P_\alpha = \frac{4\Delta}{4ck + \alpha^2 - b^2 - 3c^2}$
$X_\alpha = \frac{4\Delta}{2\alpha k - b^2 + c^2}$	$Y_\alpha = \frac{4\Delta}{2\alpha k + b^2 - c^2}$

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ 1</u>. Παράμετροι Schubert για ένα τρίγωνο με πλευρές: (*a, b, c*)

Οι συνεφαπτομένες *X, Y* του μισού των γωνιών, ικανοποιούν τη σχέση *XY*=1 ενώ οι τρεις συνεφαπτόμενες *M, P* και *X* του μισού των γωνιών ικανοποιούν μια σημαντική σχέση που πρώτα αποδείχθηκε από τον Schubert:

$$\left(M - \frac{1}{M}\right) - \left(P - \frac{1}{P}\right) = 2\left(X - \frac{1}{X}\right) \quad (3)$$

Παρόλο που μόνο 2 παράμετροι είναι αρκετοί να περιγράψουμε οποιοδήποτε τρίγωνο, συνήθως θεωρούμε τρεις παραμέτρους (*M, P, X*). Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι εάν το (*M, P, X*) ικανοποιεί την εξίσωση (3), τότε το ίδιο συμβαίνει για τριάντα δύο σχετικές τριάδες. Αυτές προκύπτουν διότι η εξίσωση (3) είναι αμετάβλητη κατά τις παρακάτω λειτουργίες:

(i) Αντικατάσταση οποιασδήποτε παραμέτρου με την αρνητική αντίστροφο, ή
(ii) Αμοιβαία ανταλλαγή του M και P ενώ επίσης αντιστρέφουμε το X, ή
(iii) Ταυτόχρονη αντιστροφή και των τριών παραμέτρων.

Αντίστροφα, αν ξέρουμε οποιοδήποτε σύνολο παραμέτρων Schubert, έστω (M, P, X), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο των πλευρών (*α, b, c*) από:

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{2(X + X^{-1})}{P + P^{-1}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{M + M^{-1}}{P + P^{-1}} \qquad (4)$$

Αυτό καθορίζει το τρίγωνο στην ομοιοθεσία (ένας μετασχηματισμός ομοιότητας).

Κατά τη διαδικασία της προσπάθειας να περιγραφούν όλα τα τρίγωνα με ρητές πλευρές, με τρεις ρητές διαμέσους, ανακαλύφθηκε ότι οποιοδήποτε τέτοιο τρίγωνο με ρητές πλευρές *(α, b, c*), με δύο ρητές διαμέσους, δίνεται από την παραμετροποίηση :

$$\alpha = \tau\left\{\left(-2\varphi\theta^2 - \varphi^2\theta\right) + \left(2\varphi\theta - \varphi^2\right) + \theta + 1\right\}$$

$$b = \tau\left\{\left(\varphi\theta^2 + 2\varphi^2\theta\right) + \left(2\varphi\theta - \theta^2\right) - \varphi + 1\right\} \qquad (5)$$

$$c = \tau\left\{\left(\varphi\theta^2 - \varphi^2\theta\right) + \left(\theta^2 + 2\theta\varphi + \varphi^2\right) + \theta - \varphi\right\}$$

για (τ, φ, θ), με περιορισμούς: $\tau > 0$, $0<\theta,\varphi<1$ και $\varphi+2\theta>1$.

Σε αυτήν την περίπτωση, αν οι παράμετροι (τ, φ, θ), είναι ρητοί, τότε το τρίγωνο που αντιστοιχεί, πρέπει να έχει ρητές πλευρές και δύο ρητές διαμέσους, τις *k* και *l*, αλλά όχι απαραίτητα ρητό εμβαδόν.

Ο λόγος ομοιότητας τ, συνήθως παίρνει τιμή 1. Λύνοντας ως προς θ και φ, παίρνουμε:

$$\theta = \frac{c - \alpha \pm \sqrt{2c^2 + 2\alpha^2 - b^2}}{\alpha + b + c} \quad \text{και} \quad \varphi = \frac{b - c \pm \sqrt{2b^2 + 2c^2 - \alpha^2}}{\alpha + b + c} \qquad (6)$$

Οποιοδήποτε τρίγωνο που προέρχεται από μια ρητή τριάδα, (*M, P, X*), έχει ρητές πλευρές, ρητό εμβαδόν και μια ρητή διάμεσο, ενώ ένα τρίγωνο που προέρχεται από ένα ρητό ζεύγος (θ, φ), έχει ρητές πλευρές και δύο ρητές διαμέσους. Η αλληλεπίδραση αυτών των δύο παραμέτρων του τριγώνου, είναι σημαντική για τη περαιτέρω διερεύνηση.

Αποτελέσματα της Έρευνας.

Το 1986 οι Bucholz και Rathbun, χωρίς να γνωρίζουν ο ένας για τη δουλειά του άλλου, άρχισαν να ψάχνουν για Ηρώνεια Τρίγωνα με δύο ρητές διαμέσους. Μια ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδος ήταν να δοθούν αριθμητικές τιμές στις ρητές

παραμέτρους (θ,φ) των εξισώσεων (5), και μετά να ελεγχθεί αν τα εμβαδά που αντιστοιχούν σε αυτές, είναι και αυτά ρητά. Αυτή η τεχνική, επέτρεψε να προκύψουν τα τελευταία δύο τρίγωνα του Πίνακα 2.

Έτσι, Ηρώνεια Τρίγωνα με δύο ρητές διαμέσους πράγματι υπάρχουν. Φυσικά αναρωτήθηκαν πως θα βρεθούν ή ακόμα καλύτερα, θα πως θα παραχθούν περισσότερα τέτοια τρίγωνα. Ο Bucholz επεσήμανε στο πρώτο, δεύτερο, πέμπτο και έκτο τρίγωνο του Πίνακα 2., ότι έχουν σχετικές εσωτερικές γωνίες και αναρωτήθηκε πως θα μπορούσε να το εκμεταλλευθεί.

	Sides			*Medians*	*Area*
a	b	c	k	l	
73	51	26	$\frac{35}{2}$	$\frac{97}{2}$	420
626	875	291	572	$\frac{433}{2}$	55440
4368	1241	3673	1657	$\frac{7975}{2}$	2042040
14791	14384	11257	$\frac{21177}{2}$	11001	75698280
28779	13816	15155	$\frac{3589}{2}$	21937	23931600
1823675	185629	1930456	$\frac{2048523}{2}$	$\frac{3751059}{2}$	142334216640

ΠΙΝΑΚΑΣ 2. Πλευρές, Διάμεσοι, Εμβαδά Ηρώνειων Τριγώνων

Ανακάλυψη της ακολουθίας τετραγώνων.

Τον Οκτώβριο του 1989 ο Rathbun ανακάλυψε μια σημαντική σχέση μεταξύ των παραμέτρων X_a και X_b σχετιζόμενων τριγώνων. Διαλέγοντας την «κατάλληλη» παράμετρο Schubert και αντιστρέφοντας όπου ήταν απαραίτητο, (σημειώνεται με αστερίσκο), κατέστη δυνατό να τοποθετήσουμε τα τέσσερα τρίγωνα σε μια λογική αλυσίδα τέτοια ώστε η M_b παράμετρος από το ένα τρίγωνο να είναι ίση με την P_α παράμετρο του επόμενου τριγώνου. Ορίζουμε αυτά τα πρώτα τέσσερα τρίγωνα της αλυσίδας (Πίνακας 3.) αντίστοιχα με τα επίπεδα 1, 2, 3, 4 και εισάγουμε το εκφυλισμένο τρίγωνο (2, 1, 1), με ρητό εμβαδό και διαμέσους, στο επίπεδο 0, για να αρχικοποιήσουμε την αλυσίδα.

level i	Triangle	$M_a(i)$	$P_a(i)$	$X_a(i)$	$M_b(i)$	$P_b(i)$	$X_b(i)$
0	$(2,1,1)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
1	$1st$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{84}{5}$	$\frac{7}{40}$
2	$2nd$	$\frac{18}{1}$	$\frac{35}{6}$	$\frac{63}{10}$	$\frac{176}{105}$ *	$\frac{77}{360}$ *	$\frac{99}{32}$ *
3	$5th$	$\frac{75}{98}$	$\frac{176}{105}$	$\frac{539}{800}$	$\frac{3080}{111}$	$\frac{14504}{275}$	$\frac{147}{1850}$
4	$6th$	$\frac{1344}{605}$	$\frac{3080}{111}$	$\frac{363}{4736}$	$\frac{3256}{165585}$ *	$\frac{5312}{255189}$ *	$\frac{36480}{70301}$ *

ΠΙΝΑΚΑΣ 3. Τρίγωνα με κοινό λόγο $\{M_b(i), P_\alpha(i+1)\}$

Η κρίσιμη παρατήρηση προέκυψε συγκρίνοντας τους λόγους $X_b\ (i)$ και τα $X_\alpha(i+1)$ συνεχόμενων τριγώνων. Από τα επίπεδα 1 και 2 παρατηρήσαμε ότι $(40\bullet 7)/(63\bullet 10)=\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Παρόμοια, τα επίπεδα 2,3 και 3,4 δίνουν ότι $(99\bullet 32)/(800\bullet 539)=\left(\frac{3}{35}\right)^2$ και $(147\bullet 1850)/(363\bullet 4736)=\left(\frac{35}{88}\right)^2$. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα διακριτό μοτίβο των ρητών τετραγώνων στα πρώτα γινόμενα των αριθμητών και των παρονομαστών των παραμέτρων $X_b\ (i)$ και $X_\alpha(i+1)$.

Στη συνέχεια, ο παρονομαστής του ενός τετραγώνου, γίνεται αριθμητής του επόμενου τετραγώνου. Τώρα το μόνο που χρειάζεται κανείς για να καθορίσει το επόμενο τρίγωνο στην αλυσίδα, είναι ο παρονομαστής του λόγου του «Χ-γινομένου», αφού αυτό θα καθόριζε τα $P(i+1)$, $X(i+1)$ και έτσι και τα $M(i+1)$ μέσω της εξισώσεως Schubert. Για παράδειγμα θέτουμε $P_\alpha(5)=M_b(4)$. Τότε επειδή:

$$\frac{36480\bullet 70301}{\text{αριθμητής }(\mathrm{X}_\alpha(5))\bullet\text{παρονομαστής }(\mathrm{X}_\alpha(5))}=\left(\frac{88}{k}\right)^2$$

και καθόσον $P_\alpha(5)$ και $X_\alpha(5)$ πρέπει να οδηγήσουν σε μια ρητή τιμή του $M_\alpha(5)$ στην εξίσωση Schubert (3), βρίσκουμε ότι k=37 και έτσι $X_\alpha(5)=\left(\frac{780330}{581}\right)$. Τώρα υπολογίζουμε τις παραμέτρους Schubert που αντιστοιχούν στην άλλη ρητή διάμεσο σε αυτό το τρίγωνο και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Αυτό οδηγεί στην παρακάτω ακολουθία λόγων:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{3}{35}\right)^2,\left(\frac{35}{88}\right)^2,\left(\frac{88}{37}\right)^2,\left(\frac{37}{4731}\right)^2,\left(\frac{4731}{107134}\right)^2\ldots$$

Αυτό επέτρεψε να δημιουργηθούν τα επόμενα τρίγωνα. Για παράδειγμα, το 5^{ο} Ηρώνειο Τρίγωνο με δύο ρητές διαμέσους, έχει πλευρές:

$(2442655864,\ 2396456547,\ 46563061)$.

Σχέση με τις ακολουθίες SOMOS

Ένα ερώτημα για τους Bucholz και Rathbun ήταν το πώς καθοριζόταν η ακολουθία ρητών τετραγώνων και μήπως μπορούσε να βρεθεί κάποιος τύπος για αυτό.

Το πρόβλημα με την μέθοδο που περιγράφηκε προηγούμενα είναι ότι χρειάζεται παραγοντοποίηση αριθμών που μεγαλώνουν πολύ γρήγορα. Επιπλέον υπάρχει κάποια ασάφεια για την αντιστροφή ορισμένων παραμέτρων και όχι κάποιων άλλων. Βρέθηκε ότι όλες οι (M, P, X) παράμετροι, μπορούσαν να τυποποιηθούν σαν ένας συνδυασμός δύο σειρών. Σημειώνεται ότι ο αριθμητής της

X_b παραμέτρου στον Πίνακα 4., είναι το γινόμενο $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4$ και ο παρονομαστής είναι το γινόμενο $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4$

	Numerator Factors				Denominator Factors				Parameter
i	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	$X_b(i)$
0	$2 \cdot 1$	-1	-1	1	$1 \cdot 1$	1	3	1	$\frac{2}{3}$
1	$1 \cdot 1$	1	1	-7	$2 \cdot 2$	2	5	-1	$\frac{7}{40}$
2	$2 \cdot 2$	1	1	8	$1 \cdot 3$	3	11	1	$\frac{32}{99}$
3	$1 \cdot 3$	-7	-7	-1	$2 \cdot 5$	5	37	1	$-\frac{147}{1850}$
4	$2 \cdot 5$	8	8	-57	$1 \cdot 11$	11	83	-7	$\frac{36480}{70301}$
5	$1 \cdot 11$	-1	-1	391	$2 \cdot 37$	37	274	8	$\frac{4301}{6001696}$
6	$2 \cdot 37$	-57	-57	-455	$1 \cdot 83$	83	1217	-1	$\frac{109393830}{8383913}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4. Ανάλυση της παραμέτρου $X_b(i)$

όπου κάθε ένα από τα α_i και b_i είναι εναλλαγές της μιας ή της άλλης από δύο ειδικές σειρές. Υπάρχουν παρόμοιες σχέσεις με όρους των δύο αυτών σειρών για όλες τις παραμέτρους Schubert για το σύνολο των τριγώνων που εξετάζουμε, τις οποίες σειρές αυτές δηλώνουμε με *S* και *T*.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	1	1	2	3	5	11	37	83	274	1217
T_i	1	-1	1	1	-7	8	-1	-57	391	-455

ΠΙΝΑΚΑΣ 5. Οι ακολουθίες *S* και *T*

Παρατηρήσαμε ότι κάθε μια σειρά (Πίνακας 5) φαίνεται να ικανοποιεί έναν αναδρομικό τύπο 8ης τάξης, δηλαδή:

$$S_i = \frac{2^{x(i)} \cdot 3^{x(i+1)} \cdot S_{i-7} \cdot S_{i-1} \cdot S_{i-4}^2}{S_{i-8}} \quad \text{και}$$

$$T_i = \frac{6^{x(i+1)} \cdot T_{i-7} \cdot T_{i-1} + T_{i-4}^2}{T_{i-8}} \quad \text{όπου}$$

$$x(i) = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \text{ είναι άρτιος} \\ 1 & \text{αν } i \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Σύμφωνα με την On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, οι πρώτες S σειρές είναι μια ακολουθία SOMOS 5 [28]

η οποία δίνει την αναδρομική σχέση

$$A_i = \frac{A_{i-1} \cdot A_{i-4} + A_{i-2} \cdot A_{i-3}}{A_{i-5}} \qquad (7)$$

Βλέπουμε ότι οι σειρές T, ικανοποιούν την ίδια αναδρομική σχέση με διαφορετικούς αρχικούς όρους. Ο αναδρομικός τύπος 5ης τάξης είναι:

$$S_i = \begin{cases} 1,1,2,3,5 & \text{για } i = 1,\ldots,5 \\ A_i & \text{για } i \geq 6, \end{cases} \qquad T_i = \begin{cases} 1,-1,1,1,-7 & \text{για } i = 1,\ldots,5 \\ A_i & \text{για } i \geq 6. \end{cases} \qquad (8)$$

Οι συνεφαπτόμενες του μισού των γωνιών της αλυσίδας Ηρώνειων Τριγώνων με δύο ρητές διαμέσους δίνονται με όρους των σειρών *S* και *T* από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} M_\alpha(i) &= -\frac{S_{i+1} \cdot S_{i+2}^2 \cdot T_i}{S_i \bullet T_{i+1} \bullet T_{i+2}^2} & M_b(i) &= \frac{S_{i+1} \cdot S_{i+4} \cdot T_{i+1} \cdot T_{i+4}}{S_{i+2} \cdot S_{i+3} \cdot T_{i+2} \cdot T_{i+3}} \\ P_\alpha(i) &= -\frac{S_{i+1} \cdot S_{i+2} \bullet T_{i+1} \cdot T_{i+2}}{S_i \bullet S_{i+3} \bullet T_i \bullet T_{i+3}} & P_b(i) &= -\frac{S_{i+2}^2 \cdot S_{i+3} \cdot T_{i+4}}{S_{i+4} \cdot T_{i+2}^2 \cdot T_{i+3}} \qquad (9) \\ X_\alpha(i) &= 2^{(-1)} \frac{S_i \cdot S_{i+2}^2 \cdot T_{i+3}}{S_{i+3} \cdot T_i \cdot T_{i+2}^2} & X_b(i) &= 2^{(-1)} \frac{S_{i+1} \cdot T_{i+2}^2 \cdot T_{i+4}}{S_{i+2}^2 \cdot S_{i+4} \cdot T_{i+1}^2} \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (9), επέτρεψαν να συγκριθούν γρήγορα πολλά αντίστοιχα τρίγωνα χρησιμοποιώντας πακέτα υπολογισμών ακριβείας (όπως το MAPLE) και κάθε τέτοιο τρίγωνο από αυτά είχε πάντα αμετάβλητα ρητό εμβαδό και δύο ρητές διαμέσους.

Τρίγωνα στο $\theta\phi$ επίπεδο οδηγούν σε 5 ελλειπτικές καμπύλες.

Σε αυτό το στάδιο χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (9), (4) και (6) για να δημιουργηθούν οι τιμές των θ και ϕ που αντιστοιχούν στους πρώτους 100 όρους των δύο ακολουθιών Somos S_i και T_i. Αυτές οι παράμετροι θεωρήθηκαν σαν σημεία που αντιστοιχούν σε διακριτά Ηρώνεια Τρίγωνα με δύο ρητές διαμέσους και σχεδιάστηκαν στο $\theta\phi$ επίπεδο (Σχήμα 3).

Αντί τα σημεία να είναι τυχαία κατανεμημένα στην περιοχή, αυτά φαίνονταν να βρίσκονται επάνω σε πέντε διακριτές καμπύλες. Κατά τη διάρκεια της

[28] Η **SOMOS 5** ακολουθία αριθμών (ανακαλύφθηκε από τον μαθηματικό Michael Somos), ορίζεται από την αναδρομική σχέση **:** (a(n) = (a(n-1) * a(n-4) + a(n-2) * a(n-3)) / a(n-5), a(0) = a(1) = a(2) = a(3) = 1) δηλαδή είναι η : (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 11, 37, 83, 274, 1217, 6161, 22833, 165713, 1249441, 9434290, 68570323, 1013908933, 11548470571, 142844426789, 2279343327171, 57760865728994, 979023970244321, 23510036246274433, 771025645214210753)

διαδικασίας, φάνηκε ότι τα σημεία ήταν κατανεμημένα στις πέντε καμπύλες με έναν περιοδικό τρόπο με μήκος κύκλου 7. Τα σημεία που δημιουργήθηκαν από το σύνολο παραμέτρων $(M_\alpha(i), P_\alpha(i), X_\alpha(i))$, βρισκόταν επάνω στις καμπύλες με τη σειρά: {1,2,3,4,1,2,5}. Παρόμοια, τα σημεία που δημιουργήθηκαν από το σύνολο $(M_b(i), P_b(i), X_b(i))$ βρίσκονταν με τη σειρά {2,1,4,3,2,1,5}. Σαν αποτέλεσμα ήταν εύκολο να απομονωθούν οι ρητές συντεταγμένες αρκετών σημείων σε κάθε καμπύλη για να καθοριστούν οι αντίστοιχες εξισώσεις:

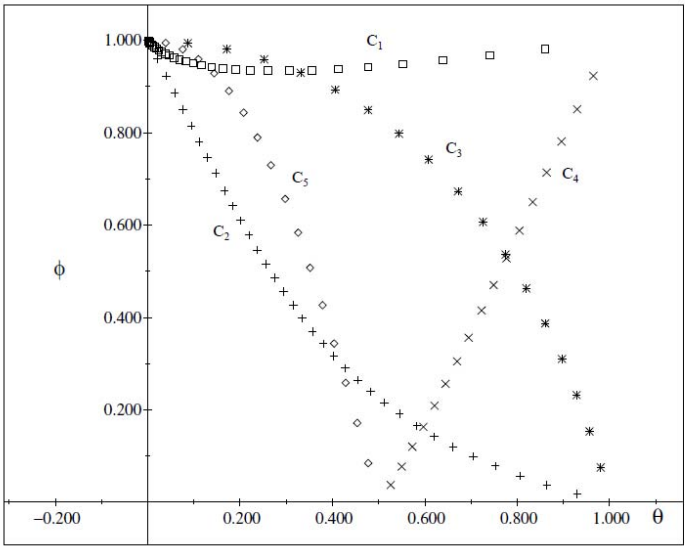
$$C_1: \quad 27\theta^3\phi^3 - \theta\phi(\theta-\phi)(8\theta^2+11\theta\phi+8\phi^2) - 3\theta\phi(5\theta^2-\theta\phi+5\phi^2) - (\theta-\phi)(\theta^2+4\theta\phi+\phi^2) - (3\theta^2-7\theta\phi+3\phi^2) - 3(\theta-\phi) - 1 = 0$$

$$C_2: \quad 3\theta^2\phi^2 - 2\theta\phi(\theta-\phi) - (\theta^2+6\theta\phi+\phi^2) + 1 = 0$$

$$C_3: \quad \theta\phi(\theta-\phi)^3 - (\theta^4+11\theta^3\phi+3\theta^2\phi^2+11\theta\phi^3+\phi^4) - 2(\theta^3-\phi^3) + 10\theta\phi + 2(\theta-\phi) + 1 = 0$$

$$C_4: \quad \theta\phi(\theta-\phi) + \theta\phi + 2(\theta-\phi) + 1 = 0$$

$$C_5: \quad (\theta-1)^3\phi^2 + 2(\theta+1)(\theta^3+2\theta^2-2\theta+1)\phi + (2\theta-1)(\theta+1)^3 = 0$$



Σχήμα 3. Ηρώνεια Τρίγωνα με 2 ρητές διαμέσους στο επίπεδο $\theta\phi$

Εικάστηκε ότι όλα αυτά τα ρητά σημεία σε αυτές τις πέντε καμπύλες παράγουν τρίγωνα με ρητά εμβαδά. Εφόσον το τρίγωνο έχει δύο ρητές διαμέσους, κάποιος μπορεί να ορίσει τις παραμέτρους (θ,ϕ) για την κάθε μια. Ονομάζουμε αυτά, *δυικά* σύνολα παραμέτρων για το τρίγωνο. Ο μετασχηματισμός που οδηγεί τις (θ,ϕ) στο δυικό σημείο (θ',ϕ') δίνεται από τις:

$$\theta' = \frac{2\theta^2+\theta\phi+\theta+\phi-1}{3\theta\phi+\theta-\phi+1}, \quad \phi' = \frac{-\theta\phi-2\phi^2+\theta+\phi+1}{3\theta\phi+\theta-\phi+1}$$

Σύμφωνα με αυτό το σχεδιασμό οι καμπύλες C_1 και C_2 είναι δυικές όπως είναι και οι C_3 και C_4, ενώ η C_5 είναι η ίδια και δυική. Έτσι είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι όλα τα ρητά σημεία στις καμπύλες C_2, C_4, και C_5 αντιστοιχούν σε Ηρώνεια Τρίγωνα με δύο ρητές διαμέσους. Στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι οι C_2, C_4, και C_5 είναι όλες δίρρητα ισοδύναμες στην ίδια ελλειπτική καμπύλη και έτσι αρκεί να αποδείξουμε την υπόθεση έστω μόνο για την C_4.

Αυτές οι τρεις καμπύλες είναι δεύτερου βαθμού ως προς την ϕ και οι αντίστοιχες διακρίνουσες είναι:

$$\begin{aligned} Disc C_2 &= 4(4\theta^4 + 8\theta^3 + 5\theta^2 - 2\theta + 1) \\ Disc C_4 &= \theta^4 + 2\theta^3 + 5\theta^2 - 8\theta + 4 \qquad \text{και} \\ Disc C_5 &= 4\theta^2(\theta+1)^2(\theta^4 + 2\theta^3 + 5\theta^2 - 8\theta + 4) \end{aligned}$$

καθόσον αναζητούμε ρητά σημεία σε κάθε μια από αυτές, απαιτούμε η διακρίνουσα της κάθε μίας να είναι τετράγωνο ενός ρητού. Όλα τα ρητά σημεία που το υλοποιούν, αντιστοιχούν σε ρητά σημεία της ελλειπτικής καμπύλης:

$$Y^2 = X^4 + 2X^3 + 5X^2 - 8X + 4$$

Για το C_2 απεικονίζουμε το X στο $-1/\theta$, ενώ για το C_4 και το C_5 απλά απεικονίζουμε το X στο θ. Τελικά μπορέσαμε να αποδείξουμε το παρακάτω:

ΘΕΩΡΗΜΑ*:*

Κάθε ρητό σημείο στην καμπύλη

C_4 : $\quad \theta^2\phi - \theta\phi^2 + \theta\phi + 2\theta - 2\phi - 1 = 0$

τέτοιο ώστε $0 < \theta,\ \phi < 1$ και $2\theta + \phi > 1$ *αντιστοιχεί σε ένα τρίγωνο με ρητές πλευρές, ρητό εμβαδό και δύο ρητές διαμέσους.*

Η απόδειξη απαιτεί αρκετά τεχνικά λήμματα, που κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν εδώ και δίνεται μόνο μια μικρή περιγραφή:

(i) Οι ανισότητες των θ, ϕ προέρχονται από τις ανισότητες των τριγώνων.

(ii) Μειώνουμε τον ελεύθερο δυνάμεων μέρος του τετραγώνου του εμβαδού από τον 11° βαθμό σε 8° βαθμό, εφαρμόζοντας την καμπύλη C_4 στον τύπο του Ήρωνα (1).

(iii) Μετασχηματίζουμε την καμπύλη C_4 σε τύπο εξίσωσης Weierstraß ελάχιστου ακεραίου για να πάρουμε την ελλειπτική καμπύλη E (βρέθηκε από τον ερευνητή Elkies).

Τέλος χρησιμοποιούμε επαγωγή στην ομάδα $E(\mathbb{Q})$ για να δείξουμε ότι οποιοδήποτε σημείο που αντιστοιχεί σε τρίγωνο με ρητό εμβαδό, οδηγεί με όλους

τους δυνατούς τρόπους σε ένα άλλο σημείο που αντιστοιχεί σε ένα τρίγωνο με ρητό εμβαδό.

Δύο μεμονωμένα τρίγωνα.

Δύο από τα τρίγωνα που βρίσκονται με υπολογιστική έρευνα (το τρίτο και το τέταρτο του Πίνακα 2), δεν βρίσκονται επάνω σε καμία από τις πέντε ελλειπτικές καμπύλες. Αν και τα δύο αυτά τρίγωνα βρέθηκαν χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5), πιθανώς δεν παραμετροποιούνται από τις εξισώσεις (9) καθόσον οι πέντε καμπύλες ελήφθησαν αριθμητικά από τις τελευταίες. Καθένα από αυτά τα μεμονωμένα τρίγωνα έχει συσχετιζόμενα με αυτό, έξι τρίγωνα καθένα από τα οποία έχει μια ρητή διάμεσο και ρητό εμβαδό και μοιράζονται έναν κοινό λόγο παραμέτρου Schubert. Το τι ακριβώς ρόλο παίζουν αυτοί οι λόγοι, δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα.

Η έρευνα σε αυτά τα δύο τρίγωνα συνεχίζεται, καθόσον εικάζεται ότι όλα τα Ηρώνεια Τρίγωνα με δύο ρητές διαμέσους προκύπτουν από παρόμοιους τύπους με αυτούς που παρουσιάστηκαν. Παρόλα αυτά, το να βρεθούν περισσότερα παραδείγματα σαν αυτά τα δύο, τελικά φαίνεται να είναι δύσκολο.

7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τα έργα των μαθηματικών της Αρχαίας Ελλάδας και ιδιαίτερα του Ήρωνα του Αλεξανδρινού, μερικά από τα οποία μελετήσαμε στην παρούσα διπλωματική, αποτελούν κατά την άποψή μου, Φάρο των θετικών επιστημών παγκόσμιας και αέναης ακτινοβολίας.

Στη σχέση που υφίσταται ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και τη διαδικασία της μάθησής τους στη σημερινή εποχή, προτεραιότητα πρέπει να έχει η συνθετική γεωμετρική σκέψη που σε συνδυασμό με το σύγχρονο αλγεβρικό λογισμό που δίνει στη μαθηματική σκέψη μεγάλη ευελιξία και εκφραστικότητα, να έχει ως αποτέλεσμα την αποφυγή κατά τη διδασκαλία σήμερα, της πρώιμης εισαγωγής αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών σε βάρος των πρωταρχικών γεωμετρικών προτύπων σκέψης και έκφρασης. [26]

Μέσω ιστορικών γεωμετρικών προβλημάτων τα οποία αποκαλύπτουν τον τρόπο σκέψης και τις προσεγγίσεις των Αρχαίων δημιουργών, ο διδάσκων τα μαθηματικά θα πρέπει, να εμπλουτίζει τη διδασκαλία του και να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, ανάλογα πάντα με το επίπεδο της τάξης, ώστε να υπάρξει μεγιστοποίηση του επιθυμητού εκπαιδευτικού αποτελέσματος. [29]

Ένα τέτοιο γεωμετρικό πρόβλημα, αποτελεί η απόδειξη του «Τύπου του Ήρωνα» που δείχνει ότι στα αρχαιοελληνικά μαθηματικά εκτός από την Ευκλείδεια παράδοση της «καθαρής» Γεωμετρίας που απέφευγε οποιαδήποτε διαδικασία μέτρησης με ανάμειξη γεωμετρικών εννοιών και αριθμών, υπήρχε και μια ισχυρή παράδοση «μετρητικής» Γεωμετρίας, στην οποία η ανάμειξη αυτή ήταν ελεύθερη και νομιμοποιούσε τον πολλαπλασιασμό δύο ορθογωνίων, δηλαδή τεσσάρων ευθυγράμμων τμημάτων. Καταλαβαίνουμε καλύτερα τη διαφορά λαμβάνοντας υπόψη ότι στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη δεν δίνεται κανένας τύπος για τον υπολογισμό ενός τριγώνου, με τον τρόπο που ο Ήρωνας εκθέτει αποδεικνύει και εφαρμόζει τη δική του μέθοδο. Στα «Στοιχεία» διατυπώνονται και αποδεικνύονται με καθαρά γεωμετρικό τρόπο μόνο σχέσεις ισοδυναμίας των σχημάτων. [26]

Όπως έχει αναφερθεί, ο Ήρων στα έργα του στα διάφορα προβλήματα μέτρησης εμβαδών, επέλεγε συνήθως οι διαστάσεις τα στοιχεία και τα εμβαδά να είναι ακέραιοι αριθμοί για πρακτικούς αλλά και παιδαγωγικούς λόγους και τα οποία είναι δυνατό να αξιοποιηθούν ακόμα και σήμερα στη διδασκαλία μας. Μπορούμε επίσης με τη διδασκαλία της αυθεντικής απόδειξης του «Τύπου του Ήρωνα» να κατευθύνουμε τους μαθητές στην «ανακάλυψη» της εφαρμογής της έννοιας της ομοιότητας σχημάτων και ειδικότερα στον υπολογισμό του εμβαδού ενός σχήματος

[29] Μαλλιάκας Κ. – Σωτηράκης Τ. «Μελέτη Αρχαίων Μαθηματικών Κειμένων και η Ένταξη τους στη Διδασκαλία της Γεωμετρίας»

που είναι όμοιο με ένα άλλο του οποίου είναι γνωστό το εμβαδό και ο λόγος ομοιότητάς τους.

Η τεχνική υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας με μέθοδο που μοιάζει με μια διαίρεση, δεν παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές καθώς είναι μια «τυποποιημένη» μέθοδος υπολογισμού, όμως εμφανίζεται σαν μια συλλογή αυθαιρέτων κανόνων και συνταγών στην οποία δεν εμφανίζεται η λογική πάνω στην οποία στηρίζεται. Η μέθοδος και οι αρχές υπολογισμού της τετραγωνικής ρίζας ενός άρρητου αριθμού όμως, μπορεί να παρουσιαστεί στους μαθητές με τη μέθοδο του Ήρωνα με σχετικά απλό και σύντομο τρόπο, αφού οι πράξεις που απαιτούνται (πρόσθεση και αφαίρεση) είναι οικείες στους μαθητές. Μπορεί να δοθεί και η αλγεβρική ερμηνεία της μεθόδου με χρήση της ταυτότητας $(a+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ αλλά και μια απλή γεωμετρική ερμηνεία της με χρήση εμβαδών (τετραγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων) αξιοποιώντας έτσι και προηγούμενες γνώσεις των μαθητών σε διαφορετικό επίπεδο. Το σπουδαιότερο πλεονέκτημα που συνηγορεί για τη χρησιμοποίηση της μεθόδου αυτής των διαδοχικών προσεγγίσεων μιας τετραγωνικής ρίζας στη διδασκαλία, είναι ότι με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές έρχονται σε μια ενορατική επαφή με την έννοια της ακολουθίας του ορίου και γενικότερα μιας συνάρτησης. [30]

Σήμερα οι σύγχρονες υπολογιστικές μέθοδοι και η εκτενή χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών για την κατασκευή από τους μαθητές σχημάτων αλλά και προγραμμάτων υπολογισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με πολλά από τα προβλήματα που κατέγραψε ο Ήρων στα έργα του. Μένει στους μαθητές να μπορέσουν να «ανακαλύψουν» και αυτοί μέσα από την κατασκευή δυναμικών σχημάτων και τη συγγραφή προγραμματιστικών αλγορίθμων τα δικά τους «Ηρώνεια Τρίγωνα» και τις δικές τους προσεγγίσεις ριζών μη τετράγωνων αριθμών. Όλα αυτά υπό την προϋπόθεση ότι οι «δάσκαλοί» τους κατέχουν ή μπορούν να αποκτήσουν σχετικές ικανότητες διδασκαλίας μετά από κατάλληλη εκπαίδευση, προετοιμασία, συνεχή συνεργασία με τη διδακτική κοινότητα της ειδικότητάς τους και την πρόβλεψη από τα αναλυτικά προγράμματα χρονικών δεσμεύσεων για τα παραπάνω.

Στη σύγχρονη εποχή, ερευνητές συνεχίζουν την έρευνα επάνω στη θεματολογία που πρώτος ανέδειξε ο Ήρωνας, του οποίου το όνομα αναφέρεται διεθνώς στα Πανεπιστήμια όλου του κόσμου μαζί με τους άλλους γνωστούς Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Μια κληρονομιά που θα συνεχίσει να απασχολεί τη μαθηματική κοινότητα για πολλά χρόνια ακόμα.

[30] Θωμαΐδης Γ. «Μια άλλη προσέγγιση στις τετραγωνικές ρίζες» Περιοδικό «Ευκλείδης» Γ' τ.7/1985

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Βασιλείου Ε. «Γεωμετρία για τη Διδακτική» Σημειώσεις Παν/μιο Αθηνών 2011

[2] Γαλάνης Σ. «Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση» Παν/μιο Ιωαννίνων 2010

[3] Κηπουρός Χ. «Ήρωνος Αλεξανδρέως Μετρικά – Διόπτρα» Ε.Μ.Ε. 2000

[4] Κηπουρός Χ. «Ήρωνος Αλεξανδρέως Ονόματα Γεωμετρικών Όρων – Γεωμετρικά» Ε.Μ.Ε. 1995

[5] Κηπουρός Χ. «Ήρωνος Αλεξανδρέως Στερεομετρικά» Ε.Μ.Ε. 2004

[6] Σπανδάγος Β. – Σπανδάγου Ρ. – Τραυλού Δ. «Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδος» Αίθρα 1997

[7] Σταμάτης Ε. «Αρχιμήδους Άπαντα» Τ.Ε.Ε. 1973

[8] Τσιμπουράκης Δ. «Η Γεωμετρία στην Αρχαία Ελλάδα» Ατραπός 2004

[9] Boyer Carl B. – Merzbach Uta C. «Η Ιστορία των Μαθηματικών» Εκδόσεις Πνευματικού, 2η Έκδοση, 1997

[10] Heath T. «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» ΚΕ.Ε.ΠΕ.Κ. 2001

[11] Smith D. “History of Mathematics” Dover Publications NY 1951

[12] Tikhomirov V.M. «Ιστορίες για Μέγιστα και Ελάχιστα» Κάτοπτρο 1999

[13] Van Der Waerden B.L. «Η Αφύπνιση της Επιστήμης» Απόδοση στα Ελληνικά Γ. Χριστιανίδης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2010

[14] Ευκλείδεια Γεωμετρία Α’ και Β’ Γενικού Λυκείου ΟΕΔΒ 2009

[15] Papadopoulos E. “Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science – Heron of Alexandria” Springer 2007

[16] Drachmann A.G. “Hero of Alexandria – Complete Dictionary of Scientific Biography” C. Scribner’s Sons 2008

[17] Thomas I. “Selections Illustrating the History of Greek Mathematics vol. I&II” Heinemann Ltd – Harvard University Press 1939

[18] Αδαμάκος Π. «Οι Άρρητοι στην Αρχαιότητα» Αθήνα 2000

[19] Ανδρεσάκης Δ. «Η Περιπέτεια της Γεωμετρίας» 2013

[20] Ανδρεσάκης Δ. «Ιστορική Εξέλιξη και Αντιλήψεις για τη Φύση των Μαθηματικών» 2013

[21] Κουστένης Ν. «Επισκόπηση της Ιστορικής και Φιλοσοφικής Εξέλιξης των Μαθηματικών με Έμφαση στην Περίπτωση της Γεωμετρίας» 2010-11

[22] Ντριάνκος Σ. «Άρρητοι Αριθμοί και Συνεχή Κλάσματα: Παραστάσεις, Προσεγγίσεις, Εξισώσεις και Διδακτικές Εφαρμογές» Διπλωματική Εργασία στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ΕΚΠΑ 2011

[23] Στεργίου Β. «Ιστορική Εξέλιξη, Ερμηνείες και Διδακτικές Προσεγγίσεις της Έννοιας του Απειροστού» Διπλωματική Διδακτορική Εργασία Μαθηματικού Τμήματος Παν/μιου Πατρών 2009

[24] Χάλκου Μ. «Μελέτη του μαθηματικού περιεχομένου του Βιενναίου Ελληνικού φιλ. Κώδικα 65 του 15ου αιώνα». Διπλωματική Διδακτορική Εργασία Μαθηματικού Τμήματος ΕΚΠΑ 2004

[25] Κηπουρός Χ. «Γύρω από μια Αμφισβήτηση» Περιοδικό «Ευκλείδης» Β' τ.4/1991

[26] Θωμαΐδης Γ. «Ο Μαθηματικός Ήρων από την Αλεξάνδρεια Διδάσκει την Απόδειξη και Χρήση μιας Νέας Μεθόδου Υπολογισμού του Εμβαδού ενός Τριγώνου» Περιοδικό «Ευκλείδης» Β' τ.35/2000

[27] Χατζηχρόνης Ε.Ε. «Η Εξέλιξη των Ιδεών στη Γεωμετρία» (1995)

[28] Buchholz R.H. & Rathbun R.L. "An infinite set of Heron Triangles with two rational medians" Amer. Math. Monthly 104 (1997)

[29] Buchholz R.H. "On triangles with rational altitudes, angle bisectors or medians" (Doctoral Dissertation) Newcastle Australia Newcastle University (1989)

[30] Buchholz, R. H. "Perfect Pyramids" Bulletin Australian Math. Soc. 45 (1992)

[31] Klain A. Daniel "An Intuitive Derivation of Heron's Formula" Amer. Math. Monthly 111 (2004)

[32] Smyly J. G., "Square roots in Heron of Alexandria", Hermathena 63 (1944)

[33] Johnson K. Kristin "Heron, Brahmagupta, Pythagoras and the Law of Cosines" University of Nebraska-Lincoln (2006)

[34] www.Google.com

[35] http://grail.cba.csuohio.edu/~somos/rattri.html

[36] http://www.hellenicaworld.com/Greece/Technology/en/HeronAlexandria.html (Lachanas Michael)

[37] www.mathpages.com/home/kmath196/kmath196.htm

[38] www.mathpages.com/home/kmath226/kmath226.htm

[39] http://mathworld.wolfram.com/HeronianTriangle.html

[40] http://mathworld.wolfram.com/HeronsFormula.html

[41] http://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html

[42] http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasFormula.html

[43] http://mathworld.wolfram.com/deGuasTheorem.html

[44] www.scholar.google.com

[45] http://www.tmth.edu.gr/aet/3d_reconstructions/index.html

[46] www.wikipedia.org