ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η μετάβαση από τη Γεωμετρία του Επιπέδου στη Γεωμετρία του Χώρου :

Στρατηγικές μαθητών με προβλήματα όρασης

ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΧΡΥΣΗ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια : ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΑΘΗΝΑ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Πόταρη Δέσποινα (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αν. Καθηγήτρια	.....
2) Ψυχάρης Γεώργιος	Λέκτορας	.....
3) Σπύρου Παναγιώτης	Αν. Καθηγητής	.....

Τη διπλωματική μου εργασία αφιερώνω στην οικογένεια μου
που βρίσκεται πάντα δίπλα μου, στηρίζοντας με και βοηθώντας με
να πραγματοποιώ κάθε νέο μου όνειρο.

Στο Γιάννη, τη Μαρία και την Αλεξάνδρα

Επίσης την αφιερώνω και στους μαθητές και τις μαθήτριες
που με βοήθησαν να την πραγματοποιήσω

Στον Μ, τον Β, την Α, τη Δ και την Τ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

- Την κα Δέσποινα Πόταρη, η οποία δέχτηκε με χαρά να είναι η επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας και με βοήθησε με την καθοδήγηση και τις συμβουλές της. Την ευχαριστώ επίσης για την ψυχολογική υποστήριξη που μου προσέφερε σε στιγμές άγχους και απόγνωσης που υπήρξαν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

- Τον Αν. Καθηγητή Σπύρου Παναγιώτη και τον Λέκτορα Ψυχάρη Γιώργο για την τιμή που μου έκαναν να αποτελέσουν μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

- Το σχολείο που με δέχθηκε για να πραγματοποιήσω την έρευνα μου, τους υπεύθυνους καθώς και τους υπέροχους μαθητές και μαθήτριες που μου αφιέρωσαν το χρόνο τους και με δέχτηκαν με χαμόγελο. Χωρίς τη βοήθεια τους η εργασία αυτή δε θα είχε πραγματοποιηθεί.

- Τους γονείς μου και την αδερφή μου για τη στήριξη και τη πολύτιμη βοήθεια τους

- Τους φίλους μου : Γιάννη, Ελένη, Αρετή, Σίσσυ, Βάσω, Εύη, Μαρίνα Μ. για τη ζεστή τους αγκαλιά που με βοηθούσε να θυμάμαι να απολαμβάνω τη διαδικασία της εκπόνησης της εργασίας, σαν έναν ακόμα στόχο που εκπληρώνεται.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Περίληψη – Abstract …… 9

Εισαγωγή …… 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Η φύση της Γεωμετρίας …… 12

1.1.1 Μοντέλο Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης κατά Van Hieles …… 14

1.1.2 Επίπεδα γεωμετρικής σκέψης Στερεών σωμάτων των Gutierrez et al…… 19

1.1.3 Επίπεδα πολυπλοκότητας του συλλογισμού των μαθητών όσον αφορά τη μέτρηση στερεών …… 22

1.1.4 Η φύση του Γεωμετρικού αντικειμένου …… 26

1.1.5 Το Γνωστικό Μοντέλο του Duval …… 28

1.2 Γεωμετρία και Απτική Αντίληψη

1.2.1 Ο Ρόλος της Γλώσσας …… 32

1.2.2 Οι Παρομοιώσεις στη Γεωμετρία …… 34

1.2.3 Απτική αντίληψη και αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων …… 35

1.3 Γεωμετρία και Χειρονομίες …… 39

1.4 Γεωμετρία και Οπτικοποίηση

1.4.1 Τα είδη των εικόνων …… 44

1.4.2 Ο ρόλος της οπτικοποίησης στα μαθηματικά …… 45

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Τα ερευνητικά μας ερωτήματα …… 50

2.2 Το είδος και το πλαίσιο της έρευνας …… 50

2.3 Σχολείο διεξαγωγής της έρευνας – Συμμετέχοντες ……51

2.4 Δραστηριότητες – Εργαλεία – Σκεπτικό …… 53

2.4.1 Εργαλεία …… 53

2.4.2 Δραστηριότητες …… 53

2.5 Διαδικασία Διεξαγωγής της Έρευνας και Συλλογής των Δεδομένων ……..58

2.6 Διαδικασία Ανάλυσης των Δεδομένων …… 60

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Σκεπτικό της διαδικασίας Εξαγωγής των Αποτελεσμάτων …… 61

3.2 Δραστηριότητα 1η : Περιστροφή Επίπεδων σχημάτων και δημιουργία Στερεών

3.2.1 Συλλογικές παρατηρήσεις …… 62

3.2.2 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 1 ανά ομάδες…64

3.2.2.α Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α …… 64

3.2.2.β Μαθητής Β …… 71

3.2.2.γ Ομάδα 2 : Μαθήτριες Δ και Τ …… 76

3.3 Δραστηριότητα 2η : Αναπτύγματα Στερεών
3.3.1 Συλλογικές παρατηρήσεις 78
3.3.2 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 2 ανά ομάδες 79
3.3.2.α Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α 79
3.3.2.β Ομάδα 2 : Μαθήτριες Δ και Τ 83
3.4 Δραστηριότητα 3η : Κυβάκια και Εμβαδόν
3.4.1 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 3 για την Ομάδα 1 (Μαθητής Μ και μαθήτρια Α) 87
3.5 Δραστηριότητα 4η : Τομές σε Στερεά – Δημιουργία επίπεδων σχημάτων
3.5.1 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 4 για το μαθητή Β 97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ
4.1 Βασικά Ευρήματα 101
4.2 Συζήτηση 112

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 116

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της έρευνας που έγινε, στα πλαίσια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής, ήταν να εξετάσει τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με αντικείμενο το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου (και αντίστροφα), καθώς και τη σχέση αυτών με τις έννοιες της οπτικοποίησης, της απτικής αντίληψης, των χειρονομιών και της γλώσσας. Πραγματοποιήθηκε μία πειραματική διδασκαλία σε ένα σχολείο για μαθητές με προβλήματα όρασης. Στην έρευνα συμμετείχαν 5 μαθητές και μαθήτριες διαφόρων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με διαφορετικά προβλήματα όρασης. Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό ότι οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές σχετίζονται έντονα με τις παραπάνω έννοιες και επίσης ότι διαφέρουν από εκείνες που συνηθίζουν να ακολουθούν οι βλέποντες μαθητές. Η χρήση της απτικής αντίληψης βοήθησε τους μαθητές να οπτικοποιήσουν τα γεωμετρικά σχήματα και τις κινήσεις τους στο χώρο, οδηγώντας τους στη δημιουργία κάποιων στρατηγικών προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους τίθεντο στις δραστηριότητες. Επίσης, μέσω της χρήσης χειρονομιών και παρομοιώσεων οι μαθητές ήταν σε θέση να περιγράψουν με μεγαλύτερη άνεση τα γεωμετρικά αντικείμενα και τις γεωμετρικές έννοιες που συναντούσαν.

Λέξεις κλειδιά : Οπτικοποίηση, Απτική αντίληψη, Στρατηγική, Χειρονομίες, Παρομοιώσεις, Προβλήματα όρασης

ABSTRACT

The aim of the study was to examine the strategies developed by visual impaired students, while facing tasks related to the transition from 2D geometry to 3D geometry and vice versa. These strategies where related to the concepts of visualization, Haptic perception, gestures and language. A teaching experiment was carried out, in a school for visual impaired students. The experiment involved five pupils of different classes of secondary education with different vision problems. From the results of this study it became apparent that the strategies developed by the students are closely connected with the above concepts and also that they are different from those followed by sighted students. The use of Haptic perception helped the students to visualize the geometrical shapes and their spatial movements, leading to the creation of some strategies that helped them to respond to the questions being raised in the activities. Also, with the use of gestures and similes the students were able to describe in greater comfort the geometrical objects and concepts they encountered.

Keywords: Visualization, Haptic perception, Strategy, gestures, similes, visual problems

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διαπραγματευόμαστε την ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα όρασης με τη Γεωμετρία. Τις τελευταίες δεκαετίες ορισμένοι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών άρχισαν να ασχολούνται με αυτή την ομάδα μαθητών. Στη δικιά μας εργασία σκοπός είναι να δούμε πώς οι μαθητές αυτοί αλληλεπιδρούν με το αντικείμενο της Γεωμετρίας και τι στρατηγικές αναπτύσσουν κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων που συνδέουν τη γεωμετρία του επιπέδου με τη γεωμετρία του χώρου.

Βασικές έννοιες γύρω από τις οποίες θα εξετάσουμε τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι : η οπτικοποίηση, οι χειρονομίες και η γλώσσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να περιγράψουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο και η απτική αντίληψη. Μέσα από το πρίσμα αυτών των εννοιών θα παρατηρήσουμε τους τρόπους συλλογισμού που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά το πέρασμα τους από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου και αντίστροφα, μέσα από τέσσερις δραστηριότητες.

Η εργασία είναι χωρισμένη σε τέσσερα κεφάλαια :

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μίας βιβλιογραφικής ανασκόπησης γύρω από το αντικείμενο της γεωμετρίας αλλά και τη σύνδεση της με τις έννοιες της οπτικοποίησης, της απτική αντίληψης καθώς και το ρόλο των χειρονομιών και της γλώσσας. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται λεπτομερώς η μεθοδολογία της έρευνας που πραγματοποιήθηκε. Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται η ανάλυση των αποτελεσμάτων μέσα από κάποια κρίσιμα συμβάντα που εκτυλίχθηκαν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής της έρευνας. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα συμπεράσματα μας για την έρευνα.

Κεφάλαιο 1 - ΘΕΩΡΗΤΙΚΌ ΠΛΑΊΣΙΟ

1.1 Η φύση της Γεωμετρίας

Η Γεωμετρία είναι ίσως ο κλάδος των μαθηματικών με την πιο προφανή σχέση με την πραγματικότητα στην οποία ζούμε. Όπως είχε επισημάνει και ο Bishop (1983) “η Γεωμετρία είναι τα μαθηματικά του χώρου”. Αυτός είναι και ο λόγος για την τόσο, ιστορικά, πρότερη ανάπτυξη της σε σύγκριση με τους άλλους κλάδους των μαθηματικών. Λόγω των άμεσων πρακτικών εφαρμογών της, τη γεωμετρία ανέπτυξαν εμπειρικά κάποιοι λαοί για πρακτικούς κυρίως λόγους, όπως οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι. Με τη γεωμετρία όμως ήρθαν σε επαφή και οι Έλληνες, κυρίως με το Θαλή το Μιλήσιο, ο οποίος είναι και ο πρώτος που εισάγει την έννοια της *"απόδειξης"* ως μέσον επαλήθευσης μιας γεωμετρικής πρότασης. Ο Πυθαγόρας θέτει τη Γεωμετρία σε πλήρως θεωρητικό και φιλοσοφικό επίπεδο, αλλά ολοκληρώνει και την έννοια και την πρακτική της αποδεικτικής διαδικασίας. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι ο Θαλής είναι ο ιδρυτής της θεωρητικής γεωμετρίας, ενώ ο Πυθαγόρας είναι ο θεμελιωτής της. Στην φιλοσοφία του Πλάτωνα οι αριθμητικές και οι γεωμετρικές έννοιες παρουσιάζονται ως ο ιδανικός κόσμος, «*ο κόσμος των Ιδεών*». Ο ίδιος υποστήριζε πως ο κόσμος είναι κατασκευασμένος από πέντε στερεά, τα οποία σήμερα ονομάζονται Πλατωνικά στερεά και είναι τα πέντε κυρτά κανονικά πολύεδρα: το τετράεδρο (ή τριγωνική πυραμίδα), το εξάεδρο (ή κύβος), το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο.

Σε αντίθεση όμως με τους υπόλοιπους λαούς που ασχολούνται με την Γεωμετρία, οι Έλληνες είναι εκείνοι που για πρώτη φορά θα δώσουν σε αυτήν, την έννοια της αποδεδειγμένης γνώσης και της επιστήμης. Οι Έλληνες γεωμέτρες προσεγγίζουν τη γεωμετρία σαν επιστήμη καθαρής γνώσης και συνεπώς πρέπει να βρουν αποδείξεις εφαρμοζόμενες με τον κανόνα και το διαβήτη, σύμφωνα με τις επιταγές που καθορίστηκαν από τον Ευκλείδη περίπου το 300 π.Χ. με το βιβλίο του "Στοιχεία", το οποίο αποτελείται από 13 τόμους. Δημιούργησαν έτσι την αποδεικτική θεωρητική γεωμετρία, σε αντίθεση με την εμπειρική γεωμετρία που επικρατούσε μέχρι τότε από τους υπόλοιπους λαούς. Η Γεωμετρία είναι ο πρώτος κλάδος των μαθηματικών που τοποθετήθηκε σε αξιωματική βάση από τον Ευκλείδη στα "Στοιχεία" του, και δικαιολογημένα ονομάζεται "Ευκλείδεια Γεωμετρία".

Η Γεωμετρία λοιπόν αποτελεί τον κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με χωρικές σχέσεις, με τη σύνθεση δηλαδή του χώρου στον οποίο ζούμε. (Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με την Ευκλείδεια Γεωμετρία και συνεπώς όποτε λέμε Γεωμετρία θα εννοούμε την Ευκλείδεια.) Σύμφωνα με τον Battista (2007, p. 843) "η Γεωμετρία είναι ένα πολύπλοκα συνδεδεμένο δίκτυο εννοιών, τρόπων συλλογισμού και αναπαραστασιακών συστημάτων, το οποίο χρησιμοποιείται για να δομήσει εννοιολογικά και να αναλύσει, φυσικά και φανταστικά χωρικά περιβάλλοντα". Συνεπώς, δε θα μπορούσε η γεωμετρική σκέψη να είναι ασυσχέτιστη με τον χωρικό συλλογισμό (spatial thinking). Ο Battista δίνει έναν ορισμό του χωρικού συλλογισμού, ως : "την ικανότητα να «βλέπουμε», να ερευνούμε και να αναστοχαζόμαστε πάνω σε χωρικά αντικείμενα, εικόνες, σχέσεις και μετασχηματισμούς. Ο χωρικός συλλογισμός περιλαμβάνει τη δημιουργία εικόνων, την παρατήρηση τους με στόχο να απαντήσουμε ερωτήσεις πάνω σε αυτές, το μετασχηματισμό και το χειρισμό τους και τη διάθεση τους στην υπηρεσία άλλων νοητικών διαδικασιών". Κατά συνέπεια, ο χωρικός συλλογισμός είναι ένα μέσο για να προχωρήσει κανείς σε βαθύτερη ανάλυση μιας γεωμετρικής έννοιας.

Οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το γεωμετρικό συλλογισμό είναι πολλοί (Battista, 2007; Clements, 1992; Presmeg, 1997, 2006; Van Hieles; Gutierrez and Jaime, 1998; Duval, 1995, 1998 και άλλοι). Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τις βασικότερες θεωρίες για την εξέλιξη του γεωμετρικού συλλογισμού, αλλά και άλλες έννοιες που συνδέονται με το γεωμετρικό συλλογισμό των παιδιών, όπως αυτή της χρήσης μεταφορών και παρομοιώσεων. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη φύση της γεωμετρικής συλλογιστικής και τον τρόπο με τον οποίο αυτή εξελίσσεται. Για τον λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια θεωρητικά πλαίσια σχετικά με τη μάθηση της γεωμετρικής συλλογιστικής : το μοντέλο των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των Van Hieles, το μοντέλο των επιπέδων κατανόησης στερεών σωμάτων των Gutierrez et al., τα επίπεδα πολυπλοκότητας (levels of sophistication) στο συλλογισμό των μαθητών όσον αφορά τη μέτρηση στερεών (Battista), τη θεωρία των σχηματοποιημένων εννοιών κατά Fischbein και το γνωστικό μοντέλο του Duval.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε μία βασική έννοια που σχετίζεται με το γεωμετρικό συλλογισμό, αυτή της Οπτικοποίησης. Η παρούσα εργασία όμως είναι αφιερωμένη σε κάθε άλλο παρά "mainstream" μαθητές. Είναι αφιερωμένη σε μαθητές με προβλήματα όρασης, οι οποίοι πολλές φορές έχουν μηδενική οπτική αντιληπτική ικανότητα. Για το λόγο αυτό, θα ασχοληθούμε και με τις έννοιες της Απτικής αντίληψης και των Χειρονομιών και τον τρόπο με τον οποίο αυτές σχετίζονται με τη Γεωμετρία.

1.1.1 Μοντέλο Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης κατά Van Hieles

Στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών και ιδίως όσον αφορά τη Γεωμετρία, έχει γίνει πολύ έρευνα αναφορικά με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Ο Ολλανδός μαθηματικός van Hiele είχε προτείνει μία αρκετά ακριβή περιγραφή της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (van Hiele, 1986). Το μοντέλο του van Hiele αποτελεί μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη σε επίπεδα σκέψης που αρχικά στόχευαν στη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας. Σύμφωνα όμως με άλλους ερευνητές (Pegg, 1992), τα επίπεδα αυτά μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Το μοντέλο των van Hieles αποτελείται από 5 επίπεδα (0-4), τα οποία άλλοι ερευνητές θεωρούν πως μπορούν να φτάσουν έως και τα 8 (Clements and Battista, 1992). Σύμφωνα με τη θεωρία van Hieles, οι μαθητές εξελίσσουν τη γεωμετρική τους σκέψη περνώντας από διακριτά και ποιοτικά διαφοροποιημένα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Τα επίπεδα αυτά είναι ιεραρχημένα και οι μαθητές τα ανεβαίνουν περνώντας από τα χαμηλότερα στα υψηλότερα. Η προσέγγιση του van Hiele υποστηρίζει την ιδέα ότι η πρώτη επαφή των παιδιών με τη γεωμετρία θα πρέπει να είναι “διαισθητικού και επεξηγηματικού τύπου” (van Hiele, 1986). Στη συνέχεια ο μαθητής προοδεύει μέσα από μία σειρά επιπέδων, τα οποία χαρακτηρίζονται από αυξανόμενη αφαιρετικότητα.

Σύμφωνα με τους van Hieles, δε μπορούμε να περιμένουμε από τους μαθητές να αποδεικνύουν γεωμετρικά θεωρήματα έως ότου έχουν κατανοήσει τα συστήματα των σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών ιδεών. Τα συστήματα αυτά δεν είναι δυνατό να μαθευτούν με παπαγαλία, αλλά αναπτύσσονται σιγά – σιγά μέσω της εξοικείωσης των μαθητών με πολλά παραδείγματα και μη-παραδείγματα, με τις διάφορες ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, και το πώς ταξινομούνται οι ιδιότητες αυτές. Τα πέντε επίπεδα του van Hiele περιγράφουν πώς οι μαθητές προοδεύουν μέσα από αυτή την κατανόηση.

Συχνά τα πέντε αυτά επίπεδα παρεξηγούνται, καθώς θεωρούνται ότι αποτελούν περιγραφές για το πώς οι μαθητές κατανοούν την ταξινόμηση των σχημάτων, ενώ στην πραγματικότητα αυτό που περιγράφουν είναι τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται για τα σχήματα και άλλες γεωμετρικά ιδέες. Ο Pierre van Hiele είχε παρατηρήσει ότι οι μαθητές του είχαν την τάση να σταθεροποιούνται σε ορισμένα σημεία στην κατανόηση της γεωμετρίας και ο ίδιος προσδιόρισε αυτά τα σημεία ως “επίπεδα”. Το σημαντικότερο είναι να τονίσουμε ότι η κατάκτηση των επιπέδων αυτών από τους μαθητές, είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας και της εκπαίδευσης και όχι της ηλικίας. Αυτό έρχεται σε

αντίθεση με τη θεωρία γνωστικής ανάπτυξης του Piaget, η οποία είναι εξαρτώμενη από την ηλικία. Αυτό σημαίνει ότι ένας μαθητής πρέπει να αποκτήσει αρκετή εμπειρία γύρω από τις γεωμετρικές ιδέες για να μετακινηθεί σε ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Μέσα από πλούσια εμπειρία, τα παιδιά μπορούν να φτάσουν στο 2^{ο} επίπεδο μέχρι το δημοτικό σχολείο. Χωρίς αυτές τις εμπειρίες όμως, πολλοί ενήλικες παραμένουν στο 1^{ο} επίπεδο σε όλη τους τη ζωή, ακόμη κι αν παρακολουθήσουν μάθημα γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hieles είναι τα εξής:

Επίπεδο 0 – Οπτικό Επίπεδο (Visual Level/Visualisation)

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως ολότητες, βάσει του πώς φαίνονται, χωρίς να αποδίδουν σε αυτά κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες.

Για παράδειγμα, στο επίπεδο αυτό ένας μαθητής μπορεί να χαρακτηρίσει ως «διαμάντι» ένα τετράγωνο το οποίο είναι στραμμένο κατά 45° σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα, ή να πει «αυτός είναι ένας κύκλος» χωρίς όμως να δώσει περαιτέρω εξηγήσεις. Εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν πολύ τις μεταφορές, για τις οποίες θα μιλήσουμε παρακάτω. Για παράδειγμα αναγνωρίζουν ότι κάτι είναι κύκλος γιατί μοιάζει με τον ήλιο, ή ότι κάτι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γιατί μοιάζει με πόρτα κ.λπ. Επιπλέον μπορεί να αναγνωρίσουν ένα σχήμα ως τρίγωνο, αλλά να πουν πως είναι ανάποδα αν αυτό έχει την οριζόντια βάση του προς τα πάνω και την κορυφή του προς τα κάτω.

Επίπεδο 1 – Περιγραφικό/Αναλυτικό Επίπεδο (Descriptive/Analytic Level)

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα βάσει των ιδιοτήτων τους. Μπορούν να αιτιολογήσουν π.χ. γιατί ένα σχήμα είναι τετράγωνο, επικαλούμενοι την ιδιότητα των 4 ίσων πλευρών ή των 4 ορθών γωνιών κ.λπ. Ωστόσο, δε μπορούν ακόμα να διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων και να τις συνδυάσουν. Η κάθε μία ιδιότητα εμφανίζεται μόνη της ως ξεχωριστή αλήθεια.

Επίπεδο 2 – Άτυπο/παραγωγικό Επίπεδο (Abstract/Relational Level)

Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές αντιλαμβάνονται το ρόλο του ορισμού, συνδέουν τις προηγούμενες ιδιότητες που έχουν οι ίδιοι ανακαλύψει και διακρίνουν τις συνθήκες που απαιτούνται για μία έννοια. Είναι σε θέση να δώσουν κάποιες εξηγήσεις για τους συλλογισμούς τους χωρίς ακόμα όμως να είναι τυπικά τα επιχειρήματα τους. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι σε θέση να πουν πως ένα ισόπλευρο τρίγωνο που έχει τρεις

ίσες πλευρές θα έχει και τρεις ίσες γωνίες. Στο επίπεδο αυτό λοιπόν, ο συμπερασματικός συλλογισμός κάνει την εμφάνιση του, κι έτσι μπορεί ένας μαθητής να βγάλει, για παράδειγμα, το συμπέρασμα ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές ή ότι ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος.

Επίπεδο 3 – Επίπεδο Τυπικής Επαγωγής (Formal Deduction)

Στο επίπεδο αυτό, ο μαθητής αντιλαμβάνεται πλέον το ρόλο των αξιωμάτων και των θεωρημάτων. Αντιλαμβάνεται την παραγωγική διαδικασία της απόδειξης και είναι σε θέση χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα θεωρήματα και αξιώματα να κάνει αποδείξεις. Είναι σε θέση να συνδυάζει λογικές σχέσεις και να εξάγει συμπεράσματα.

Το επίπεδο αυτό είναι ένα επίπεδο γεωμετρικής σκέψης, στο οποίο είναι πιθανό πολλοί (αν όχι οι περισσότεροι) ενήλικοι να μη φτάσουν ποτέ. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να πούμε ότι στο σχολείο, βάσει του αναλυτικού προγράμματος στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, το επίπεδο αυτό είναι απαιτούμενο ήδη από την Α' τάξη του Ενιαίου Λυκείου.

Επίπεδο 4 – Επίπεδο Μαθηματικής Αυστηρότητας (Mathematical Rigor)

Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό κατανοούν τη σχέση μεταξύ διαφόρων συστημάτων της γεωμετρίας. Είναι σε θέση να περιγράψουν τις επιδράσεις που θα έχει η προσθήκη ή η διαγραφή ενός αξιώματος σε ένα δεδομένο γεωμετρικό σύστημα. Μπορούν ακόμα να συγκρίνουν, να αναλύσουν, να δημιουργήσει τις αποδείξεις στο πλαίσιο διαφόρων γεωμετρικών συστημάτων, και να ανακαλύψουν διασυνδέσεις μεταξύ τομέων στα μαθηματικά, όπως η Αναλυτική Γεωμετρία.

Τα επίπεδα van Hiele χαρακτηρίζονται από πέντε ιδιότητες :

- Καθορισμένη σειρά (fixed sequence) : Τα επίπεδα γεωμετρικής κατανόησης χαρακτηρίζονται από τον επαγωγικό τους χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει ότι προκειμένου ένας μαθητής να περάσει από ένα επίπεδο συλλογισμού στο επόμενο, θα πρέπει πρώτα να έχει «κατακτήσει» το προηγούμενο. Δεν είναι δηλαδή δυνατό κάποιος να «πηδήξει» επίπεδο. Σύμφωνα με τους van Hieles, η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο επίπεδο της τυπικής Επαγωγής οφείλεται στο ότι δεν έχουν κατακτήσει προηγουμένως το επίπεδο της άτυπης Παραγωγικότητας.

- Διαδοχικότητα (Adjacency) : Οι ιδέες και έννοιες που δεν είναι ξεκάθαρες για τους μαθητές σε κάποιο επίπεδο, κατανοούνται πλήρως στο επόμενο επίπεδο.

- Διάκριση (Distinction) : Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και τα δικά του δίκτυα σχέσεων. Το νόημα του κάθε γλωσσικού συμβόλου είναι κάτι περισσότερο από τον προφανή του ορισμό, συμπεριλαμβάνει τις εμπειρίες με τις οποίες κάθε ομιλητής συνδέει το εκάστοτε σύμβολο. Κάτι που είναι σωστό σε ένα επίπεδο δεν είναι απαραίτητα σωστό και σε ένα άλλο. Για παράδειγμα, στο επίπεδο 0 το τετράγωνο είναι το σχήμα που μοιάζει με κουτί. Στο επίπεδο 2, είναι ένας πολύ συγκεκριμένος τύπος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τίποτα όμως από τα παραπάνω δεν έχει νόημα για τον ορισμό του τετραγώνου για κάποιον που είναι στο επίπεδο 1. Αν στο μαθητή απλά δίνεται ένας ορισμός και δεν τους δίνεται το περιθώριο να αναπτύξει ουσιαστικές εμπειρίες γύρω από την έννοια, τότε αυτός δε θα είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει τη γνώση αυτή πέρα από αυτά που κάνει μέσα στην τάξη.

- Διαχωρισμός (Separation) : Άτομα που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα δεν είναι εύκολα να αλληλοκατανοηθούν. Ένας δάσκαλος που ανήκει σε κάποιο επίπεδο γεωμετρική σκέψης μιλάει διαφορετική «γλώσσα» από κάποιον μαθητή του που ανήκει σε κάποιο χαμηλότερο επίπεδο. Όταν, για παράδειγμα, ένας δάσκαλος μιλάει για ένα τετράγωνο, εννοεί ένα συγκεκριμένο είδος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ένας μαθητής όμως που ανήκει σε επίπεδο 0 ή 1 δε θα κατανοεί τον όρο αυτό με τον ίδιο τρόπο. Το αποτέλεσμα είναι ο μαθητής να μην κατανοεί το δάσκαλο και ο δάσκαλος να μην καταλαβαίνει πώς σκέπτεται ο μαθητής, συχνά καταλήγοντας ότι απλά ο μαθητής απαντάει λάθος σε αυτό που τον έχει ρωτήσει. Οι van Hiele πίστευαν ότι η ιδιότητα αυτή ήταν ένας από τους βασικούς λόγους που οι μαθητές αποτυγχάνουν ή δυσκολεύονται στη γεωμετρία. Οι δάσκαλοι πιστεύουν ότι εκφράζονται ξεκάθαρα και λογικά, όμως ο συλλογισμός επιπέδου 3 ή 4 που έχουν, δε γίνεται κατανοητός από τους μαθητές οι οποίοι ανήκουν σε χαμηλότερο επίπεδο. Στην ιδανική περίπτωση, ο δάσκαλος και οι μαθητές χρειάζεται να έχουν κοινές εμπειρίες πίσω από τη «γλώσσα» τους, κάτι που φυσικά δεν είναι πάντα δυνατό.

- Επίτευξη (Attainment) : Οι van Hieles πρότειναν πέντε φάσεις μέσω των οποίων ένας μαθητής μπορεί να περάσει από ένα επίπεδο στο επόμενο. Η επίτευξη αναφέρεται στο

να καταφέρει ένας μαθητής μέσω των φάσεων αυτών να φτάσει τελικά στο επόμενο επίπεδο γεωμετρικού συλλογισμού.

Για περισσότερες λεπτομέρειες γύρω από τις πέντε αυτές φάσεις μπορεί κανείς να δει στο van Hiele (1986).

Στόχος των van Hieles ήταν να δημιουργήσουν ένα μοντέλο μέσα από το οποίο να περιγράφεται η πορεία και η εξέλιξη του τρόπου σκέψης των μαθητών. Το μοντέλο αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί τόσο στη διδασκαλία όσο και στη διαμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων. Ωστόσο, το μοντέλο αυτό δέχθηκε αρκετή κριτική για την αυστηρότητα που το διέτρεχε. Αμφισβητήθηκαν τόσο η διακριτότητα των επιπέδων του, όσο και το πλήθος αυτών. Τα επιχειρήματα στα οποία βασίστηκαν οι κριτικές αυτές ήταν ότι παρατηρήθηκε οι μαθητές να μπορούν να αναπτύσσουν ταυτόχρονα διαφορετικά επίπεδα συλλογισμού, όπως και ότι η πρόοδος τον μαθητών γίνεται με αργούς ρυθμούς και όχι με μεγάλες διαφοροποιήσεις από το ένα επίπεδο στο άλλο (Gutierrez and Jaime, 1998; Battista, 2007).

Παρόλα αυτά, ο παραπάνω διαχωρισμός σε επίπεδα ίσως να μην είναι τόσο αυστηρός όσο μπορεί να φαίνεται, αλλά ακολουθεί μία σειρά που είναι σύμφωνη με αυτή του αναλυτικού προγράμματος. Τα μαθηματικά όμως θεμελιώνονται με μία συγκεκριμένη λογική σειρά. Το πρόβλημα λοιπόν, όπως και οι ίδιοι οι van Hieles αναφέρουν, είναι το χάσμα στη συνεννόηση μεταξύ δασκάλου και μαθητή. Είναι λοιπόν σημαντικό να υπάρχει διάλογος μεταξύ του μαθητή και του δασκάλου, ώστε να δημιουργούνται κοινές εμπειρίες και συνεπώς τα δύο αυτά πρόσωπα να μιλούν πλέον πάνω στην ίδια βάση. Ειδικά στην περίπτωση των ατόμων με προβλήματα όρασης που η ταχύτητα εξέλιξης των μαθητών δεν είναι ίδια, η καλή επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητή έχει πάρα πολύ μεγάλη σημασία.

Μετά από τη θεμελίωση του μοντέλου των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης από τους van Hieles, ακολούθησαν εξελίξεις γύρω από τη θεωρία αυτή. Επανεξετάστηκε η φύση των επιπέδων, αναλύθηκαν φαινομενολογικά και ψυχολογικά και έγιναν προσπάθειες για να επεκταθούν και σε σχήματα πέραν των δύο διαστάσεων. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε εξίσου με τις γεωμετρικές έννοιες τόσο 2D, όσο και 3D σχημάτων. Για το λόγο αυτό, θα κάνουμε μία παρουσίαση της επέκτασης των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης στην περίπτωση των τρισδιάστατων σχημάτων, δηλαδή των στερεών σωμάτων.

1.1.2 Επίπεδα γεωμετρικής σκέψης Στερεών σωμάτων των Gutierrez et al.

Οι Angel Gutierrez, Adela Jaime και Jose M. Fortuny (1991), επέκτειναν τα επίπεδα van Hieles για την περίπτωση των τρισδιάστατων σχημάτων. Τα στάδια αυτά είναι τέσσερα και αφορούν τα επίπεδα σκέψης των μαθητών αναφορικά με τη Γεωμετρία των στερεών σωμάτων και τις ιδιότητες τους. Ο Gutierrez (1992) επέκτεινε κι άλλο τα επίπεδα αυτά, εξετάζοντας τα και από τη σκοπιά της οπτικοποίησης. Πριν παρουσιάσουμε τα επίπεδα αυτά θα μιλήσουμε λίγο για τη διαφορά μεταξύ των δύο αυτών οπτικών των επιπέδων.

Είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε τις διαδικασίες που αφορούν τη χωρική οπτικοποίηση, από αυτές που σχετίζονται με τα στερεά και τις ιδιότητες τους. Είναι βέβαια δύο αλληλένδετα αλλά διαφορετικά θέματα, το καθένα από τα οποία έχει τα δικά του χαρακτηριστικά. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να υπάρχουν δύο διαφορετικοί τομείς έρευνας : 1) Η χρήση του μοντέλου van Hieles με σκοπό την κατανόηση και την οργάνωση της μάθησης της γεωμετρίας του χώρου (Στερεομετρίας), και 2) η χρήση του μοντέλου van Hieles με σκοπό να κατανοηθεί και να οργανωθεί η κατάκτηση των ικανοτήτων της χωρικής οπτικοποίησης. Ο πρώτος τομέας έχει να κάνει με τα επίπεδα σκέψης των μαθητών αναφορικά με τα τρισδιάστατα σχήματα και τις ιδιότητες τους και σε αυτόν έγκειται η δουλειά που παρουσίασαν οι Gutierrez et al. (1991), ενώ ο δεύτερος τομέας σχετίζεται καθαρά με την οπτικοποίηση των σχημάτων αυτών και στον τομέα αυτό έγκειται η δουλειά του Gutierrez (1992).

Όταν αναφερόμαστε στη διδασκαλία ή στη μάθηση της 3D Γεωμετρίας ή αλλιώς Γεωμετρίας του χώρου, η έννοια της χωρικής οπτικοποίησης προκύπτει άμεσα ως ένα στοιχείο που δε θα πρέπει να βγαίνει από το μυαλό μας. Έχει αποδειχθεί ότι η ανάπτυξη τέτοιων ικανοτήτων από τους μαθητές επηρεάζει την επιτυχία τους στη στερεομετρία. Συνεπώς, η οπτικοποίηση είναι μία από τις βασικές συνιστώσες του τομέα της γεωμετρίας του χώρου. Ακριβώς γι’ αυτό το λόγο, όταν μελετούμε την περίπτωση των στερεών, είναι σημαντικός ο διαχωρισμός μεταξύ:

1) Η γνωστική κατάκτηση και η χρήση αυτού που είναι γνωστό ως γεωμετρία του χώρου: η γνώση και η ταξινόμηση των διαφόρων ειδών στερεών, η δομή τους, τα στοιχεία τους, οι γεωμετρικές και μετρικές τους ιδιότητες κ.λπ. προκειμένου να λύνουμε προβλήματα.

2) Η γνωστική κατάκτηση και η ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων που υπάρχουν στις δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται για τη μάθηση της γεωμετρίας αυτής.

Να επισημάνουμε εδώ ότι οι χωρικές ικανότητες αποτελούν ένα σύνολο δεξιοτήτων που σχετίζονται με την αναπαράσταση, το μετασχηματισμό, τη δημιουργία και τη χρήση μη-γλωσσικών πληροφοριών, οι οποίες καλλιεργούν τη χωρική οπτικοποίηση. Για να κατανοήσουμε τη μεγάλη σημασία της χωρικής οπτικοποίησης στη γεωμετρία, αρκεί να σκεφτούμε αυτό που αναφέρει ο Gutierrez (1992) : "Παρόλο που είναι αρκετά εύκολο να ασχοληθούμε με τη χωρική οπτικοποίηση αποφεύγοντας την όποια χρήση της γεωμετρίας του χώρου, είναι μάλλον αδύνατο να μπορέσουμε να ασχοληθούμε με τη γεωμετρία του χώρου χωρίς να χρησιμοποιήσουμε κάποιες πτυχές της οπτικοποίησης" (p.34) . Φαίνεται λοιπόν πως η ανάλυση των μαθησιακών διαδικασιών της γεωμετρίας του χώρου θα έπρεπε να εξαρτάται από την ανάλυση της απόκτησης των ικανοτήτων της χωρικής οπτικοποίησης.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα 4 επίπεδα van Hieles, που θεώρησε ο Gutierrez, επισημαίνοντας κάθε φορά και τις δύο πτυχές τους που αναφέρθηκαν παραπάνω (Gutierrez et al., 1991; Gutierrez, 1992).

Επίπεδο 1 – Αναγνώριση (Recognition)

- Γεωμετρική σκέψη των μαθητών : Τα στερεά αναγνωρίζονται ως ολότητες, βάσει της εμφάνισης τους. Οι μαθητές αναγνωρίζουν και ονομάζουν τα στερεά (π.χ. πρίσμα, κώνος, πυραμίδα κ.λπ.), ξεχωρίζουν σε οπτική βάση το ένα στερεό από το άλλο και δε χρησιμοποιούν τα στοιχεία ή τις ιδιότητες τους για να τα αναγνωρίσουν ή να τα ονομάσουν, αλλά αντίθετα επιχειρηματολογούν για την απάντηση τους με εκφράσεις όπως «μοιάζει με..», δηλαδή με μεταφορές.
- Χωρική οπτικοποίηση : Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές δεν είναι σε θέση να οπτικοποιήσουν στερεά που δε βλέπουν, που δεν έχουν μπροστά τους, αλλά ούτε και τις κινήσεις αυτών στο χώρο.

Επίπεδο 2 – Ανάλυση (Analysis)

- Γεωμετρική σκέψη των μαθητών : Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα στοιχεία των στερεών (έδρες, ακμές, κ.λπ.) και τις ιδιότητες τους (π.χ. παραλληλία). Περιγράφουν με μη αυστηρό τρόπο τα στερεά και τα συγκρίνουν βάσει των ιδιοτήτων τους. Ωστόσο, δε μπορούν να συσχετίσουν λογικά τις ιδιότητες μεταξύ τους, ούτε να κατηγοριοποιήσουν τα στερεά σε οικογένειες στερεών.

Ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των στερεών με πειραματισμό. Η παρατήρηση είναι η κύρια βάση για τις εξηγήσεις που δίνουν οι μαθητές.

- Χωρική οπτικοποίηση : Οι μαθητές είναι σε θέση να οπτικοποιήσουν απλές κινήσεις των στερεών στο χώρο, αλλά μόνο μεταξύ δύο σταθερών θέσεων. Η κίνηση που πρέπει να κάνει ένα στερεό για να βρεθεί από μία θέση σε μία άλλη δε γίνεται μαντεύοντας αλλά βάσει αυτών των αρχικών και τελικών θέσεων του. Δεν υπάρχει προσχεδιασμός των κινήσεων που πρέπει να κάνει το στερεό. Αντίθετα, ο μαθητής ξεκινά κάνοντας μία κίνηση στο στερεό στο μυαλό του. Αφού δει τη νέα θέση του στερεού (στον υπολογιστή ή μπροστά του, αν το στερεό είναι χειροπιαστό) και την επόμενη στην οποία πρέπει να το φέρει, αποφασίζει ποια θα είναι η επόμενη κίνηση.

Επίπεδο 3 – Άτυπη Επαγωγή (Informal deduction)

- Γεωμετρική σκέψη των μαθητών : Οι μαθητές μπορούν πλέον να κατηγοριοποιήσουν λογικά τα στερεά σε οικογένειες στερεών (πρίσματα, κανονικά πολύεδρα, κ.λπ.). Οι ορισμοί (ικανές και αναγκαίες συνθήκες) έχουν πλέον νόημα για τους μαθητές και μπορούν οι απαντήσεις τους να περιλαμβάνουν άτυπες επιχειρηματολογίες που βασίζονται σε μεμονωμένες ιδιότητες των στερεών, που είτε τις εξάγουν με παρατήρηση του σχήματος, είτε τις γνωρίζουν εξ ορισμού. Επιπλέον οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν τυπικές αποδείξεις αλλά ακόμα όχι να αποδείξουν τυπικά κάτι από μόνοι τους.
- Χωρική οπτικοποίηση : Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές έχουν καλύτερη ικανότητα οπτικοποίησης, η οποία τους επιτρέπει να οπτικοποιούν κινήσεις από ή σε μη-ορατές θέσεις. Συνεπώς, όταν πρέπει να κινηθεί ένα στερεό, οι μαθητές αρχίζουν αναλύοντας την αρχική και την τελική θέση του στερεού και στη συνέχεια σχεδιάζουν τη σειρά των κινήσεων που πρέπει να γίνει. Οι εξηγήσεις τους για τις αποφάσεις τους βασίζονται κυρίως σε προφανείς μαθηματικές ιδιότητες ή σχέσεις μεταξύ των αρχικών και τελικών θέσεων των στοιχείων του (έδρες, ακμές, κορυφές).

Επίπεδο 4 – Τυπική Επαγωγή (Formal deduction)

- Γεωμετρική σκέψη των μαθητών : Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές κατανοούν τη σημασία των διαφορετικών στοιχείων ενός αξιωματικού συστήματος (αξιώματα, ορισμοί, θεωρήματα, απροσδιόριστους όρους) και είναι πλέον σε θέση να κάνουν τυπικές αποδείξεις. Η επιχειρηματολογία των μαθητών στο επίπεδο αυτό βασίζεται στη μαθηματική δομή των στερεών ή στα στοιχεία τους, συμπεριλαμβανομένων των ιδιοτήτων τους που δεν τις βλέπουν πλέον μέσω της παρατήρησης, αλλά τις εξάγουν τυπικά από ορισμούς ή άλλες ιδιότητες.
- Χωρική οπτικοποίηση : Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό έχουν πλέον ανεπτυγμένη την ικανότητα οπτικοποίησης σε υψηλό βαθμό. Μπορούν να προσχεδιάσουν τις κινήσεις που πρέπει να κάνει ένα στερεό και οι αποφάσεις τους για τις κινήσεις αυτές βασίζονται στη μαθηματική δομή και στις ιδιότητες των στερεών.

Ο Gutierrez και οι συνεργάτες του κατάφεραν, με την επέκταση που έκαναν στα επίπεδα van Hieles για την περίπτωση των 3D σχημάτων, να επισημάνουν τον τρόπο με τον οποίο η οπτικοποίηση και η γεωμετρική αντίληψη μπορούν να εξελιχθούν "χέρι-χέρι".

1.1.3 Επίπεδα πολυπλοκότητας του συλλογισμού των μαθητών όσον αφορά τη μέτρηση στερεών

Σύμφωνα με τον Battista (2007), πολλές ομάδες ερευνητών έχουν αποπειραθεί να περιγράψουν τα επίπεδα πολυπλοκότητας του συλλογισμού των μαθητών όσον αφορά την έννοια του μήκους και της μέτρησης του. Οι ομάδες αυτές στηρίζουν τις έρευνες τους σε διαφορετικές δραστηριότητες, μελετώντας διαφορετικές πτυχές της έννοιας του μήκους. Για το λόγο αυτό τα αποτελέσματα τους δεν είναι ίδια. Λόγω των δραστηριοτήτων με τις οποίες ο Battista επιλέγει να ασχοληθεί (δραστηριότητες με κυβάκια και δημιουργία στερεών, μέτρησης της επιφάνειας αυτών και του όγκου τους, ή μέτρησης του μήκους των πλευρών τους κ.α.), θα αναφέρουμε εδώ τα επίπεδα που ο ίδιος δημιούργησε.

Ο Battista έκανε μία προσπάθεια να ενοποιήσει προηγούμενες έρευνες και να αναπτύξει ένα ευρύτερο πλαίσιο χαρακτηρισμών για την κατασκευή της έννοιας του μήκους και της μέτρησης του από τους μαθητές. Κατέληξε λοιπόν στο ότι υπάρχουν δύο ριζικά διαφορετικοί τύποι συλλογισμού για το μήκος : ο συλλογισμός χωρίς μέτρηση

(Nonmeasurement Reasoning) και ο συλλογισμός με μέτρηση (Measurement Reasoning). Στον συλλογισμό χωρίς μέτρηση, δε χρησιμοποιούνται αριθμοί αλλά αντίθετα εμπλέκονται οπτικο-χωρικές τεκμηριώσεις βασιζόμενες σε άμεσες ή έμμεσες συγκρίσεις, φανταστικούς μετασχηματισμούς ή γεωμετρικές ιδιότητες. Από την άλλη μεριά, ο συλλογισμός με μέτρηση εμπλέκει επαναλήψεις κάποιων μονάδων μήκους, το οποίο σημαίνει τον προσδιορισμό του αριθμού των καθορισμένων μονάδων μήκους που χωράνε από άκρη σε άκρη κατά μήκος ενός αντικειμένου, χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Ο συλλογισμός με μέτρηση περιλαμβάνει τόσο τη διαδικασία της μέτρησης, όσο και τη συλλογιστική διαδικασία της αριθμητικής μέτρησης (όπως για παράδειγμα, αυτή της άθροισης των μηκών των πλευρών ενός σχήματος για τον υπολογισμό της περιμέτρου του). Ο Battista (2007) επισημαίνει ότι παρόλο που οι μαθητές αναπτύσσουν αρχικά στρατηγικές που δε χρησιμοποιούν μέτρηση, πριν από εκείνες που χρησιμοποιούν μέτρηση, ο συλλογισμός χωρίς μέτρηση συνεχίζει να αναπτύσσεται από άποψη πολυπλοκότητας ακόμα και μετά την εμφάνιση των συλλογισμών με μέτρηση. Τονίζει δε ότι προκειμένου να φτάσει κανείς στο πλέον υψηλό επίπεδο συλλογισμού για την έννοια του μήκους, θα πρέπει να καταφέρει να συνδυάσει το τα δύο είδη συλλογισμών.

Παρακάτω παραθέτουμε τα επίπεδα και για τους δύο τύπους συλλογισμού, όπως τα κατέγραψε ο Battista (2007) :

Συλλογισμός χωρίς μέτρηση

- Επίπεδο 0 : Στο επίπεδο αυτό, η συλλογιστική των μαθητών για το μήκος είναι ολιστική και βασίζεται στην εμφάνιση. Επικεντρώνονται στο «πως φαίνεται» κάτι και σε ολόκληρο το σχήμα κάθε φορά, χωρίς να εξετάζει ξεχωριστά τα κομμάτια του σχήματος. Επίσης εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν συχνά άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις.
- Επίπεδο 1 : Οι μαθητές χρησιμοποιούν τεχνικές αποσύνθεσης και ανασύνθεσης για να συγκρίνουν μήκη.
- Επίπεδο 2 : Οι μαθητές συγκρίνουν μήκη κομματιών, γυρνώντας και αλλάζοντας κομμάτια του σχήματος, με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορούν να συμπεράνουν (βασιζόμενοι στο σχήμα του και στις ιδιότητες της κίνησης του) ότι το μετασχηματισμένο σχήμα συμπίπτει με ένα άλλο.

Συλλογισμός με Μέτρηση

- Επίπεδο 0 : Οι μαθητές μετρούν προκειμένου να υπολογίσουν το μήκος. Ωστόσο, δεν έχουν καταλάβει την έννοια της μονάδας μήκους ενώ ταυτόχρονα μετρούν με ακανόνιστο ρυθμό καθώς κινούν τα δάχτυλα τους κατά μήκος ενός σχήματος, με αποτέλεσμα η μέτρηση τους να μην είναι σωστή.
- Επίπεδο 1 : Οι μαθητές προσπαθούν να καλύψουν το προς μέτρηση μήκος με αυτό που οι ίδιοι θεωρούν ως μονάδα μήκους. Ωστόσο, επειδή δεν κατανοούν πλήρως την έννοια της μονάδας μήκους ή επειδή δεν συντάσσουν σωστά τις επαναλαμβανόμενες μονάδες τη μία μετά την άλλη, οι προσεγγίσεις τους έχουν κενά, επικαλύψεις ή διαφορετικές μονάδες μήκους και συνεπώς δεν είναι σωστές.
- Επίπεδο 2 : Οι μαθητές πλέον κατανοούν την έννοια της μονάδας μήκους. Επιπλέον τις τοποθετούν με σωστό τρόπο κατά μήκος του σχήματος, με αποτέλεσμα κενά, επικαλύψεις και παραλλαγές στις μονάδες μήκους να εξαλείφονται.
- Επίπεδο 3 : Οι μαθητές προσδιορίζουν κάποια μήκη, χωρίς ρητή επανάληψη κάθε μονάδας μήκους. Δηλαδή, μετά την επανάληψη κάποιου αριθμού μονάδων μήκους, οι μαθητές χειρίζονται τα αποτελέσματα των επαναλήψεων τους αριθμητικά ή λογικά προκειμένου να βρουν άλλα μήκη.
- Επίπεδο 4 : Οι μαθητές χειρίζονται αριθμητικά και συμπερασματικά τις μετρήσεις μήκους, χωρίς τη χρήση μονάδων μήκους. Βγάζουν πολύπλοκα συμπεράσματα με οπτικό τρόπο, χρησιμοποιώντας των γεωμετρικών σχημάτων και μετασχηματισμούς. Σε αυτό το υψηλότερο επίπεδο μετρητικού συλλογισμού, οι μαθητές συνδυάζουν και εφαρμόζουν τις διαδικασίες του επιπέδου 2 του μη-μετρητικού συλλογισμού στον μετρητικό συλλογισμό.

Ο Battista (2007) προχώρησε πέρα από την καταμέτρηση του μήκους και στη συλλογιστική των μαθητών πάνω στη καταμέτρηση του εμβαδού και του όγκου ενός στερεού. Με τη λέξη «πίνακας» (array), ο Battista εννοεί μία παράταξη από τετράγωνα ή κύβους. Εδώ παρουσιάζουμε τα επίπεδα που έθεσε ο Battista για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δομούν και καταμετρούν το εμβαδό μιας τέτοιας παράταξης.

- **Επίπεδο 1** : Οι μαθητές εδώ μετρούν τα τετράγωνα ή τους κύβους με τυχαία σειρά. Για το λόγο αυτό οι μαθητές πολύ συχνά κάνουν το λάθος της διπλής καταμέτρησης κάποιων τετραγώνων ή κύβων.

- **<u>Επίπεδο 2</u>** : Οι μαθητές αρχίζουν να μετρούν με οργανωμένο τρόπο. Επιπλέον, αφού μετρήσουν τα τετράγωνα της μίας έδρας ενός στερεού, είναι σε θέση να συμπεράνουν τον αριθμό των τετραγώνων και για την απέναντι έδρα, χωρίς να την ξαναμετρήσουν.

- **<u>Επίπεδο 3</u>** : Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές προχωρούν ένα βήμα παραπέρα έχοντας μία πιο συστηματική μέτρηση από αυτή του επιπέδου 2, καταφέρνοντας να εξαλείψουν το σφάλμα της διπλής μέτρησης. Ωστόσο, δεν έχουν βρει ακόμα έναν νοητικό τρόπο υπολογισμού του εμβαδού, όπως π.χ. τον πολλαπλασιαστικό κανόνα.

- **<u>Επίπεδο 4</u>** : Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό υπολογίζουν το εμβαδό ανά στήλες ή γραμμές, και όχι μετρώντας ένα-ένα τα τετράγωνα. Π.χ. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων 4x3x2, προκειμένου να υπολογίσουν το εμβαδό της έδρας διαστάσεων 4x3 θα δουν 3 στήλες με 4 τετράγωνα η κάθε μια και θα σκεφτούν «4+4=8, 8+4=12, άρα το εμβαδό αυτής της έδρας είναι 12»

- **<u>Επίπεδο 5</u>** : Οι μαθητές ακολουθούν κάποιους κανόνες μέτρησης (όπως π.χ. ο πολλαπλασιαστικός κανόνας), αλλά δεν είναι ακόμα σε θέση να γενικεύσουν τις στρατηγικές τους, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη όταν πρέπει να υπολογίσουν το εμβαδό μεγαλύτερων σχημάτων.

- **<u>Επίπεδο 6</u>** : Οι μαθητές είναι σε θέση να χρησιμοποιούν νοητικούς κανόνες για να υπολογίζουν το εμβαδό στερεών σωμάτων, ακόμα και αν δε μπορούν να τα δουν. Δουλεύουν δηλαδή πλέον χωρίς υλικά, όντας σε θέση να συλλογίζονται για το εμβαδό σε ένα νοητικό επίπεδο.

- **<u>Επίπεδο 7</u>** : Οι μαθητές είναι πλέον σε θέση να υπολογίζουν το εμβαδό ενός στερεού χρησιμοποιώντας νοητικούς κανόνες χρησιμοποιώντας ακόμα και διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Π.χ. μπορεί να θεωρήσουν ως μονάδα μέτρησης δύο τετράγωνα μαζί και όχι ένα.

1.1.4 Η φύση του Γεωμετρικού αντικειμένου

Η έννοια του γεωμετρικού αντικειμένου είναι αμφιλεγόμενη για έναν μαθητή. Είναι έννοια; Είναι σχήμα; Είναι μια έννοια με συγκεκριμένο σχήμα; Ένα από τα πιο περίπλοκα κομμάτια της γεωμετρία είναι το να εξηγήσει ένας καθηγητής στο μαθητή του τη φύση του γεωμετρικού αντικειμένου.

Δεν είναι τυχαίο λοιπόν το ότι είναι πολλοί οι ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με το ζήτημα αυτό. Οι ίδιοι συνήθως διακρίνουν δύο είδη γεωμετρικών αντικειμένων. Σύμφωνα με την Laborde (1993, p.49, αναφορά στον Battista, 2007) : «Η λέξη *σχέδιο (drawing)* απευθύνεται στην υλική οντότητα, ενώ η λέξη *σχήμα (figure)* στο θεωρητικό αντικείμενο». Η σύγχυση λοιπόν δημιουργείται στους μαθητές όταν στη διδασκαλία δεν είναι ξεκάθαρη η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο αυτών γεωμετρικών αντικειμένων, όταν δηλαδή συγχέεται το σχέδιο με το θεωρητικό γεωμετρικό αντικείμενο που αυτό αντιπροσωπεύει.

Σύμφωνα με την Presmeg (1997), μια εικόνα ή ένα σχέδιο είναι από τη φύση τους στατικά αντικείμενα, ενώ ακόμα και στην πιο τετριμμένη μαθηματική σκέψη είναι απαραίτητη η αφαιρετική σκέψη και η γενίκευση. Το να συστήνουμε λοιπόν στους μαθητές μας τα γεωμετρικά σχήματα με στατικές εικόνες, είναι η πηγή πολλών «παρεξηγήσεων» και συνεπώς δυσκολιών στο μαθηματικό συλλογισμό που χρησιμοποιεί την οπτικοποίηση. Ο Battista (2007) θεωρεί τα γεωμετρικά αντικείμενα (objects) ως νοητικές οντότητες που εμπλέκονται στο γεωμετρικό και χωρικό συλλογισμό. Ο ίδιος διακρίνει πέντε τύπους γεωμετρικών αντικειμένων : α) το *φυσικό αντικείμενο (physical object)*, β) το *αισθητηριακό αντικείμενο (sensory object)*, γ) τη *νοητική εικόνα (perceptual object)*, δ) *το εννοιολογικό αντικείμενο (conceptual object)* και ε) *τον λεκτικό ορισμό της έννοιας (concept definition)*. Και ενώ λοιπόν το γεωμετρικό αντικείμενο αποτελεί νοητική οντότητα, η *αναπαράσταση* απλά αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό αντικείμενο.

Φυσικά το τί αντιλαμβάνεται κάποιος έχει άμεση σχέση με το τι γνωρίζει, τι εμπειρίες έχει. Σύμφωνα με τους Yerushalmy και Chazan (1993, p.25, αναφορά στον Battista, 2007) τα διαγράμματα (diagrams) θα πρέπει να τα αντιλαμβάνεται κανείς ως μοντέλα-αντιπροσώπους μιας κλάσης γεωμετρικών αντικειμένων, και όχι ως θεωρητικές γεωμετρικές οντότητες. Αυτό γιατί κάθε σχέδιο έχει τα δικά του χαρακτηριστικά τα οποία δε θα πρέπει να γενικεύονται για όλη την κλάση. Οι μαθητές όμως πολλές φορές κάνουν αυτό το λάθος, με αποτέλεσμα να αποδίδουν στα γεωμετρικά αντικείμενα ιδιότητες που έχει το σχέδιο που σε κάποια συγκεκριμένη περίπτωση τα αντιπροσωπεύει. Προκειμένου

ένας μαθητής να μην έχει την παρανόηση αυτή, θα πρέπει να έχει αναπτύξει την αφαιρετική μαθηματική του σκέψη. Ωστόσο, δεν έχουν πολλοί μαθητές την αφαιρετική αυτή σκοπιά και σκέψη στη γεωμετρία. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές συνδέουν πολύ έντονα μία γεωμετρική έννοια με το πρότυπο σχέδιο που δίνεται γι αυτό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μη μπορούν να αναγνωρίσουν π.χ. ένα ισοσκελές τρίγωνο ως τέτοιο αν αυτό δοθεί σχεδιασμένο με αλλαγμένο τον προσανατολισμό του, σε σχέση με τον προσανατολισμό που έχουν συνηθίσει να το βλέπουν. Ένα άλλο σύνηθες παράδειγμα τέτοιου είδους είναι με το τετράγωνο ή το παραλληλόγραμμο, τα οποία εύκολα θα αναγνωρίσουν ως ρόμβους αν αυτά είναι στραμμένα κατά 45° ως προς τον οριζόντιο άξονα. Σε τέτοιες περιπτώσεις μάλιστα, οι μαθητές προκειμένου να επιλύσουν μία άσκηση που τους δίνεται ή να αποφανθούν για το αν ισχύει μια συνθήκη, θα επιλέξουν να γυρίσουν το χαρτί τους με τέτοιο τρόπο ώστε να βλέπουν το σχέδιο με τον προσανατολισμό που έχουν συνηθίσει και άρα τους βολεύει γιατί καταλαβαίνουν καλύτερα τι μπορεί να ισχύει γι αυτό. Άλλες φορές πάλι μπορεί να θεωρήσουν ότι κάτι ισχύει, με το επιχείρημα ότι «φαίνεται από το σχήμα».). Η Mariotti (1995) αναφέρεται στη σχέση μεταξύ ενός γεωμετρικού σχήματος και μίας γεωμετρικής έννοιας, λέγοντας ότι η γεωμετρία είναι ο τομέας εκείνος στον οποίο είναι απαραίτητο οι εικόνες και οι έννοιες να αλληλεπιδρούν.

Η θεωρία των "Σχηματικών εννοιών" (figural concepts) του Fischbein

Όπως είπαμε παραπάνω πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την έννοια του γεωμετρικού αντικειμένου. Και ίσως ο τρόπος που διαχωρίζουν και ονομάζουν οι ερευνητές της διάφορες πτυχές του γεωμετρικού αντικειμένου να διαφέρει λίγο, ωστόσο όλοι τους συμφωνούν ότι το γεωμετρικό αντικείμενο έχει διττή φύση : την υλική του υπόσταση (αντιληπτική προσέγγιση) και την εννοιολογική-θεωρητική του υπόσταση (μαθηματική προσέγγιση).

Ο Fischbein (1993) αναφέρει πως ενώ ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να περιγραφεί από συγκεκριμένες εννοιολογικές ιδιότητες, ωστόσο δεν αποτελεί μόνο μια ιδέα αλλά και μία εικόνα. Ένα γεωμετρικό σχήμα δηλαδή, «περιλαμβάνει τη νοητική αναπαράσταση μιας χωρικής ιδιότητας». Συνεπώς ο Fischbein υποστηρίζει ότι όλα τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοητικές κατασκευές, οι οποίες έχουν εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες.

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον Fischbein, η έννοια του γεωμετρικού σχήματος συμπεριλαμβάνει τρεις κατηγορίες νοητικών οντοτήτων : α) την *εικόνα (image)*, β) τη *σχηματοποιημένη έννοια (figural concept)* και γ) τον *ορισμό (definition)*. Συνεπώς και κατά τον Fischbein, κάθε γεωμετρικό σχήμα δεν είναι απλά μία εικόνα αλλά και μια νοητική δομή με ιδιότητες του χώρου, που εμπλέκει και εννοιολογικές διαδικασίες (όπως η αφαιρετική σκέψη). Φυσικά, το να μπορέσει ένας μαθητής να αντιμετωπίσει με αυτό το σκεπτικό τις γεωμετρικές οντότητες δεν είναι κάτι εύκολο, ούτε και συνηθισμένο. Αποτελεί όμως το ύψιστο επίπεδο γεωμετρικού συλλογισμού.

1.1.5 Το Γνωστικό Μοντέλο του Duval

Ο Duval είναι Γάλλος ψυχολόγος που ασχολήθηκε με τη γεωμετρική σκέψη. Δεν ασχολήθηκε με αυτήν όμως όπως οι παραπάνω ερευνητές τους οποίους αναφέραμε, αλλά μίλησε για τη γεωμετρική σκέψη εξετάζοντας την από τη γνωστική και αντιληπτική της πλευρά. Ο Duval (1995) δημοσίευσε ένα αναλυτικό και λεπτομερές πλαίσιο για την ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων. Στο πλαίσιο αυτό προσδιόρισε τέσσερις τύπους "γνωστικής κατανόησης/αντίληψης" (cognitive apprehension) των γεωμετρικών σχημάτων :

1. *Αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension)*

Ο τύπος αυτός αναφέρεται σε ότι αναγνωρίζει κανείς "με την πρώτη ματιά". Ίσως για παράδειγμα στοιχείων του σχήματος, που δεν είναι απαραίτητα σχετικά με την κατασκευή του.

2. *Τμηματική/Συμπερασματική κατανόηση (sequential apprehension)*

Αυτός ο τύπος χρησιμοποιείται όταν κατασκευάζουμε ένα σχήμα ή όταν περιγράφουμε την κατασκευή του. Σε αυτή την περίπτωση, τα τμήματα του σχήματος δεν δημιουργούνται με βάση αισθητηριακά κριτήρια (δηλ. από το τι βλέπουν οι μαθητές), αλλά μαθηματικούς και τεχνικούς περιορισμούς (όπως π.χ. κανόνας και διαβήτης ή κάποιο κατάλληλο πρόγραμμα στον υπολογιστή).

3. *Λεκτική κατανόηση (discursive apprehension)*

Εδώ η αντιληπτική αναγνώριση βασίζεται σε λεκτικές δηλώσεις γιατί όταν οι μαθηματικές ιδιότητες αντιπροσωπεύονται σε ένα σχέδιο, δεν γίνεται να οριστούν μόνο

μέσω της αντιληπτικής κατανόησης. Κάποιες ιδιότητες πρέπει πρώτα να δίνονται λεκτικά.

4. *Λειτουργική κατανόηση (operative apprehension)*

Αυτός ο τύπος εμπλέκει το χειρισμό των σχημάτων (είτε νοητικά, είτε φυσικά), ο οποίος μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε σχέσεις που δεν είναι άμεσα και αντιληπτικά ορατές, αλλά και να επιλύσουμε δύσκολα γεωμετρικά προβλήματα.

Σύμφωνα με τον Duval (1995), υπάρχει πάντα η μία διαμάχη μεταξύ της αντιληπτικής κατανόησης και της μαθηματικής αντίληψης για ένα σχήμα.

"Η δυσκολία που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές φεύγοντας από τα αντιληπτικά χαρακτηριστικά ενός σχήματος μπορεί να τους παραπλανήσει όσον αφορά τις μαθηματικές ιδιότητες και τα γεωμετρικά αντικείμενα που αντιπροσωπεύονται από ένα σχέδιο και συνεπώς να κάνει τους μαθητές να υποτιμούν την ανάγκη για ανακάλυψη μιας απόδειξης." (1995, p. 155)

Επιπλέον, η λειτουργική κατανόηση δεν είναι ανεξάρτητη από τους άλλους τύπους κατανόησης. Από τη σκοπιά της διδασκαλίας, ο Duval υποστηρίζει ότι για να κατακτήσει ένας μαθητής το στάδιο της λειτουργικής κατανόησης, είναι απαραίτητο να έχει κατακτήσει πρώτα την αντιληπτική και τη λεκτική κατανόηση. Προτείνει δε ότι κάτι τέτοιο μπορεί να υποβοηθηθεί με τη χρήση Η/Υ, αρκεί το πρόγραμμα να έχει φτιαχτεί με σκοπό πέραν της αντιληπτικής κατανόησης να αναπτυχθεί και η λειτουργική κατανόηση. Ο Duval τονίζει επίσης ότι το να μπορεί κανείς να εποπτεύει ένα σχήμα από μαθηματική σκοπιά, είναι κάτι που μπορεί να προκύψει μόνο ως αποτέλεσμα της συνεργασίας διαφορετικών διαδικασιών κατανόησης για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Όλα όσα ειπώθηκαν παραπάνω σχετίζονται με γεωμετρικά σχέδια. Όμως ο Duval (1998) προχώρησε ακόμα παραπέρα, προτείνοντας ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός εμπλέκει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών, οι οποίες πληρούν ειδικές επιστημολογικές λειτουργίες. Αυτές οι γνωστικές διαδικασίες είναι :

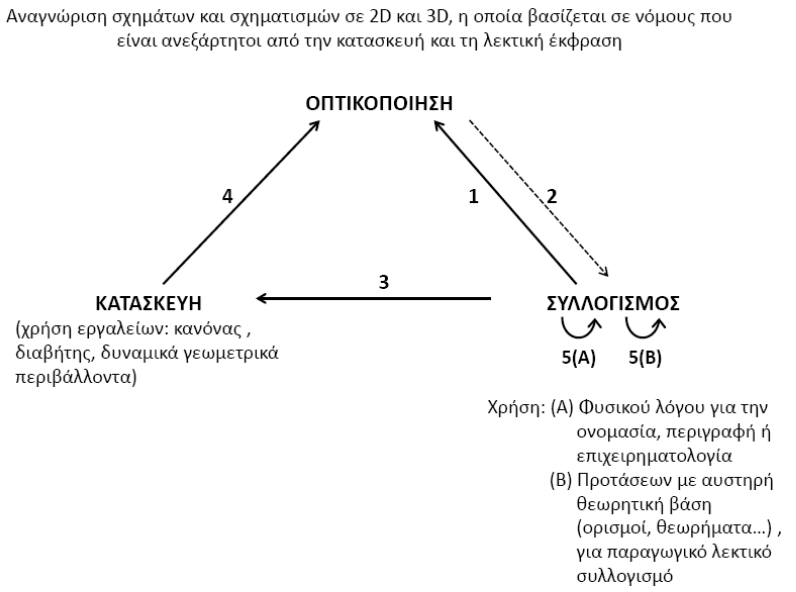
- **Διαδικασίες Οπτικοποίησης** (visualization processes) , όπως για παράδειγμα η οπτική αναπαράσταση μίας γεωμετρικής πρότασης ή η εξερεύνηση μίας περίπλοκης γεωμετρικής κατάστασης.

- **Διαδικασίες Κατασκευής** (construction processes), με τη χρήση εργαλείων όπως ο κανόνας και ο διαβήτης ή κάποιο πρόγραμμα στον υπολογιστή.

- **Διαδικασίες Συλλογισμών** (reasoning processes) Θεωρούνται οι λεκτικές διαδικασίες για την επέκταση της γνώσης, την επεξήγηση και την απόδειξη και οι οποίες ενεργοποιούνται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Ο Duval αναφέρει ότι οι τρεις αυτές διαδικασίες δεν είναι απαραίτητο να δρουν όλες μαζί, αλλά και ξεχωριστά. Ωστόσο, επισημαίνει ότι "τα τρία αυτά είδη γνωστικών διαδικασιών σχετίζονται στενά και η σύμπραξη τους είναι γνωστικά απαραίτητη για «κατάκτηση» της γεωμετρίας."

Παρακάτω φαίνεται ένα σχήμα του Duval που περιγράφει τις συνδέσεις μεταξύ των τριών ειδών των γνωστικών διαδικασιών στη Γεωμετρία.



Κάθε βέλος αναπαριστά τον τρόπο με τον οποίο ένα είδος γνωστικής διαδικασίας μπορεί να υποστηρίξει ένα άλλο, σε μία δραστηριότητα γεωμετρίας. Ο Duval έχει κάνει το βέλος #2 διακεκομμένο για να συμβολίσει το γεγονός ότι η Οπτικοποίηση δεν βοηθά πάντα τη Συλλογιστική. Τα βέλη 5Α και 5Β απεικονίζουν την εξέλιξη της συλλογιστικής διαδικασίας με έναν τρόπο ανεξάρτητο από τις διαδικασίες της κατασκευής και της οπτικοποίησης.

Επιπλέον, ο Duval (2011) κάνει μία παρατήρηση για το τι είναι απαραίτητο να γίνει προκειμένου οι μαθητές στο σχολείο να μπορέσουν να δουν αυτή τη συσχέτιση μεταξύ των τριών τύπων των γνωστικών διαδικασιών. Επισημαίνει λοιπόν ότι πρέπει :

Α) Οι τρεις τύποι των γνωστικών διαδικασιών να αναπτύσσονται ξεχωριστά.

Β) Στο αναλυτικό πρόγραμμα είναι απαραίτητο να πραγματεύονται, η διαφοροποίηση μεταξύ των διαφορετικών διαδικασιών οπτικοποίησης και μεταξύ των διαφορετικών διαδικασιών συλλογισμού.

Γ) Η σύνδεση των τριών αυτών διαφορετικών διεργασιών μπορεί να γίνει μόνο όταν έχει υπάρξει αρχικά η διαφοροποίηση τους.

Ο Duval (2011) όμως έγινε ακόμα πιο αναλυτικός όσον αφορά τις γνωστικές διαδικασίες οπτικής αναγνώρισης, συγκεκριμένα στην περίπτωση που εποπτεύουμε ένα σχήμα υπό μαθηματική σκοπιά. Αναλύει λοιπόν το μαθηματικό τρόπο με τον οποίο εξετάζουμε τα σχήματα ακολουθώντας δύο αρχές, οι οποίες στα περισσότερα εκπαιδευτικά πλαίσια δε λαμβάνονται υπόψη κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας :

1) Πρέπει να διαχωρίζουμε τα σχήματα από τα μεγέθη, διότι η οπτικοποίηση αφορά μόνο τα σχήματα και τους τοπολογικούς τους σχηματισμούς, ενώ τα μεγέθη εξαρτώνται από υποκειμενικές εκτιμήσεις, εμπειρικά μέτρα ή υπολογισμό.

2) Πρέπει να προσδιορίζουμε τις σχηματικές μονάδες (figural units) του σχήματος, οι οποίες είναι διακριτές σε κάθε σχήμα, ανάλογα με τις διαστάσεις του : 0D/2D, 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D, 1D/3D, 2D/3D κ.λπ. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να βλέπουμε το ίδιο σχήμα ως μία σύνθεση διαφορετικών κάθε φορά σχηματικών μονάδων. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούμε να διαλέγουμε κάθε φορά τη σύνθεση εκείνη που μας είναι χρήσιμη για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος.

1.2 Γεωμετρία και Απτική Αντίληψη

Σύμφωνα με τον Millar (1994, 1997), η απτική αντίληψη (tactual/Haptic/tactile apprehension) είναι ένα πολυδιάστατο θέμα, το οποίο δεν αφορά αποκλειστικά και μόνο την αίσθηση της Αφής. Αντίθετα η Απτική αντίληψη δομείται από δύο ειδών πηγές πληροφορίας :

- Κύριες Πηγές Πληροφορίας : Αφή
  Κίνηση
  Στάση
- Δευτερεύουσες Πηγές Πληροφορίας : Γλωσσικά Θέματα
  Προϋπάρχουσα γνώση
  Είδος Αντικειμένου/Σχήματος
  Συνθήκες (υπό τις οποίες εκτελείται μία δραστηριότητα)

Οι κύριες μαζί με τις δευτερεύουσες πηγές πληροφοριών δομούν την Απτική αντίληψη στο σύνολο της. Όμως και η αφή δεν είναι ένας απλός μηχανισμός. Είναι μία πολυσύνθετη και πολυεπίπεδη αίσθηση, η οποία αποτελεί ισχυρό μέσο συλλογής πληροφοριών από το περιβάλλον. Ειδικά για άτομα με προβλήματα όρασης ή τυφλά, η αφή έχει πολύ μεγαλύτερη βαρύτητα απ' ότι για τους βλέποντες. Στη μελέτη του "The World of Touch", ο Katz (1989) τονίζει ότι «η πολυπλοκότητα της απτικής αντίληψης λειτουργεί σαν μία συγκλίνουσα ακολουθία, της οποίας στόχος είναι η σύνθεση μιας σταθερής απτικής αντίληψης».

1.2.1 Ο Ρόλος της Γλώσσας

Η Απτική αντίληψη όμως έχει άμεση σχέση και με τη Γλώσσα. Πολλές φορές οι τυφλοί μαθητές χρησιμοποιούν κατά τη διάρκεια μιας εκπαιδευτικής διαδικασίας φράσεις όπως : «Το βλέπω» ή «Δεν το βλέπω ακόμη». Οι εκφράσεις αυτές είναι στην ουσία οι λεκτικές αποδόσεις της απτικής τους εμπειρίας. Όταν δηλαδή ένας τυφλός μαθητής λέει τις παραπάνω εκφράσεις, αυτό που εννοεί είναι αν το αισθάνθηκε, το κατάλαβε, το αναγνώρισε ή όχι. Το ρήμα «αισθάνομαι» δηλαδή, αποκτά και μία γνωστική διάσταση, πέραν της συναισθηματικής διάστασης που το χαρακτηρίζει εξ ορισμού.

Συχνό είναι επίσης το φαινόμενο, οι τυφλοί μαθητές να χρησιμοποιούν λέξεις, τη σημασία των οποίων δεν έχουν κατανοήσει απόλυτα, προκειμένου να επικοινωνούν και συνεπώς να γίνουν αποδεκτοί από το περιβάλλον κοινωνικό τους σύνολο, δηλαδή τους συμμαθητές τους. Το φαινόμενο αυτό του βερμπαλισμού είναι κάτι που ένας καθηγητής θα πρέπει να έχει στο μυαλό του όταν επικοινωνεί με έναν τυφλό μαθητή, διαφορετικά θα θεωρεί πως ο μαθητής έχει πλήρη κατανόηση των λέξεων που λέει και συνεπώς η επιτυχία της επικοινωνίας του με το μαθητή μπορεί να μειωθεί στο ελάχιστο. (Millar, 1983)

Ένα άλλο φαινόμενο στον τομέα της γλώσσας, είναι η μεγάλη επιρροή που έχει η καθημερινότητα στο λεξιλόγιο των μαθητών με προβλήματα όρασης, και στην οποία οφείλεται πολλές φορές η δυσκολία των μαθητών να περιγράψουν αυτά που κατανοούν με τους τυπικούς όρους της γεωμετρίας. Το φαινόμενο αυτό χωρίζεται σε δύο περιπτώσεις :

1) Στην περίπτωση που οι μαθητές με προβλήματα όρασης δημιουργούν ένα μη τυπικό λεξιλόγιο της γεωμετρίας, αντίστοιχο με το τυπικό, π.χ. (Αργυρόπουλος, 2008):

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ (τυπικό) ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ	**ΜΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΌ (μη τυπικό) ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ**
γωνία	Σημείο, κορυφή
Ίσες πλευρές/γωνίες	Ίδιες πλευρές/γωνίες
Καμπυλόγραμμη	Στραβή
Πλευρά	Άκρη

και

2) Στην περίπτωση της χρήσης των Παρομοιώσεων για την περιγραφή των γεωμετρικών αντικειμένων.

Φυσικά, τα φαινόμενα αυτά δεν παρουσιάζονται αποκλειστικά στην περίπτωση των μαθητών με προβλήματα όρασης, αλλά στο σύνολο του μαθητικού δυναμικού γενικότερα. Ωστόσο, ενώ τα φαινόμενα αυτά στους βλέποντες μαθητές μπορούν να μειωθούν ή και να εξαλειφθούν μετά από το πρώτο στάδιο γεωμετρικής σκέψης ("Επίπεδο 0 – Οπτικό επίπεδο" του van Hiele και στο "Επίπεδο 1 – Αναγνώριση" του Gutierrez.), στην περίπτωση των τυφλών μαθητών θα «επιμείνουν» περισσότερο.

Φαίνεται λοιπόν μέσα από τις προεκτάσεις της, ότι η γλώσσα αποτελεί καθοριστικό παράγοντα μετάβασης ενός μαθητή, από τα πιο απλά στα πιο σύνθετα επίπεδα κατανόησης.

1.2.2 Οι Παρομοιώσεις στη Γεωμετρία

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με μαθητές που έχουν κάποιο πρόβλημα όρασης. Οι μαθητές αυτοί λόγω της μειωμένης έως και μηδενικής ικανότητας οπτικής αντίληψης, αναπτύσσουν σε μεγάλο βαθμό την αίσθηση της αφής και συνεπώς την απτική τους ικανότητα και αντίληψη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αναγνωρίζουν τα πάντα από τον τρόπο που τα «βλέπουν» με τα χέρια τους. Ένα αντικείμενο αποκτά νόημα μέσα από την αφή. Και ο τρόπος που οι μαθητές αυτοί θυμούνται και αναγνωρίζουν τα αντικείμενα είναι από το υλικό, το σχήμα, την υφή που αυτά είχαν. Αυτό σημαίνει πως όταν βρεθεί στα χέρια τους ένα γεωμετρικό αντικείμενο με σχήμα παρόμοιο με αυτό που ίσως είχε κάποιο από τα αντικείμενα που γνωρίζουν από την καθημερινή τους ζωή, είναι πολύ φυσικό να πουν ότι «μοιάζει με βιβλίο» ή ότι «είναι κύλινδρος γιατί μοιάζει με κουτί γάλα και το κουτί αυτό θυμάμαι ότι έχει κυλινδρικό σχήμα».

Στο σημείο αυτό λοιπόν, θεωρούμε απαραίτητο να αναφερθούμε στο κομμάτι της χρήσης των παρομοιώσεων ως κομμάτι της λεκτικής έκφρασης που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη γεωμετρία. Στα επίπεδα van Hieles για τη γεωμετρική σκέψη, αλλά και στην επέκταση τους στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης για τα στερεά σώματα από τον Gutierrez, αναφερθήκαμε σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές αναγνωρίζουν και περιγράφουν ένα δισδιάστατο ή ένα στερεό σώμα παρομοιάζοντας το με ένα αντικείμενο από την καθημερινή τους ζωή, το οποίο έχει το σχήμα αυτό ή τουλάχιστον ένα σχήμα που να μοιάζει με αυτό που τους ζητείται να αναγνωρίσουν. Το φαινόμενο αυτό, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, παρουσιάζεται κυρίως στο “Επίπεδο 0 – Οπτικό επίπεδο” των van Hieles και στο “Επίπεδο 1 – Αναγνώριση” του Gutierrez.

Σύμφωνα με τις Potari, Diakogiorgi & Zanni (2003) , η χρήση των παρομοιώσεων είναι ένας φυσικός τρόπος για να περιγράψουν τα σχήματα, μαθητές όλων των ηλικιών. Η ικανότητα του να μπορεί κάποιος να αντιλαμβάνεται ομοιότητες ή αναλογίες μεταξύ αντικειμένων είναι ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες για τις διαδικασίες της αναγνώρισης, της κατηγοριοποίησης και της μάθησης. Για τους μαθητές η έννοια του γεωμετρικού σχήματος είναι πολύπλοκη λόγω της πολυδιάστατης φύσης της. Ένα

γεωμετρικό σχήμα μπορεί να αναπαριστά ένα υλικό αντικείμενο ή να αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό αντικείμενο που έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο, ερευνητές όπως ο Duval (1995), ο Fischbein (1993), η Mariotti (1995) αλλά και οι Potari & Spiliotopoulou (1996), έχουν ασχοληθεί με τη σύγχυση που μπορεί να προκληθεί σε ένα μαθητή μεταξύ του «τι δείχνει» και του «τι αναπαριστά» μία γεωμετρική μορφή και κατά συνέπεια τη σύγχυση μεταξύ της έννοιας του γεωμετρικού αντικειμένου και του φυσικού αντικειμένου.

Η Presmeg (1992), αναφέρει ότι η χρήση των μεταφορών στη γεωμετρία είναι ένας τρόπος για να βοηθήσουμε τους μαθητές να δώσουν νόημα σε δύσκολες, και πολλές φορές ακατανόητες, μαθηματικές έννοιες. Αυτό συμβαίνει διότι η χρήση τους μπορεί να δημιουργήσει έναν αποσαφηνιστικό σύνδεσμο μεταξύ της καθημερινής εμπειρίας των παιδιών και των μαθηματικών εννοιών που βλέπουν στη γεωμετρία του σχολείου. Οι μαθητές δηλαδή, χρησιμοποιούν τις μεταφορές ως εργαλεία λεκτικής έκφρασης της κατανόησης τους για ένα γεωμετρικό αντικείμενο. Μάλιστα, κατά τους Pirie και Kieren (1994), η χρήση μεταφορών και παρομοιώσεων από τους μαθητές αντανακλά την κατανόηση τους για τα γεωμετρικά σχήματα.

Οι Potari, Diakogiorgi, Gioni & Zanni (2002) και Potari, Diakogiorgi & Zanni (2003), καταλήγουν ότι η αλληλεπίδραση των εμπειριών των μαθητών με τα φυσικά αντικείμενα, οι εμπειρίες τους με τα γεωμετρικά αντικείμενα και ο τρόπος που αντιλαμβάνονται τα σχήματα, προσδιορίζουν σε κάποιο βαθμό την επιλογή της παρομοίωσης που θα χρησιμοποιήσουν σε κάθε περίπτωση. Επιπλέον, τα αποτελέσματα τους έδειξαν ότι οι παρομοιώσεις είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την πρόσβαση των μαθητών σε γεωμετρικές έννοιες όπου, με τη χρήση της τυπικής ορολογίας, τους ήταν αδύνατη.

1.2.3 Απτική αντίληψη και αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων

Η χρήση της απτικής αντίληψης στη διδασκαλία της γεωμετρίας, μας παρέχει έναν χρήσιμο τρόπο για να καταφέρουμε να υπερπηδήσουμε τους οπτικούς περιορισμούς της συμβατικής διδασκαλίας. Σύμφωνα με τους Figueiras and Arcavi (2012), η απτική αντίληψη μας παρέχει πρόσβαση σε χωρικές λεπτομέρειες που δε θα ήταν εύκολο να τις παρατηρήσουμε με κάποιον άλλο τρόπο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η απτική εξερεύνηση συνδυάζει τη διαδικασία της οπτικοποίησης ενός αντικειμένου με την «ενεργό

δράση», αφού αποτελεί στην ουσία τη μετάφραση ενός απτικού ερεθίσματος σε μία νοητική αναπαράσταση, χωρίς καν την ύπαρξη οπτικού ερεθίσματος.

Σύμφωνα με τον Triantafillidis (1995), όταν εξερευνούμε ένα αντικείμενο με την αφή απαιτείται να γίνει μία σειρά βημάτων ώστε να αναγνωρίσουμε το σχήμα του. Αρχικά αναγνωρίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του σχήματος χωρίς όμως να ακολουθείται κάποια συγκεκριμένη στρατηγική. Στη συνέχεια αρχίζει η λεπτομερής εξερεύνηση του σχήματος, με βάση αυτή τη φορά κάποιες στρατηγικές που θα φανερώσουν σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά αλλά και τις ιδιότητες του σχήματος.

Για τους μαθητές με προβλήματα όρασης η απτική διερεύνηση των σχημάτων αποτελεί την όραση τους, τον τρόπο με τον οποίο εκείνοι μπορούν να «δουν» τα σχήματα (Klatzky et al., 1985). Σύμφωνα με τους Williams (1983) και Millar (1981), η τυφλοί μαθητές εξερευνούν ένα αντικείμενο με τέτοιο τρόπο που τους παρέχει μία συνολική οπτική για αυτό, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε πιο ακριβή νοητική αναπαράσταση του σχήματος του. Για το λόγο αυτό αναπτύσσουν στρατηγικές που τους βοηθούν να αντιλαμβάνονται με μεγαλύτερη ευκολία, σιγουριά και ταχύτητα τα σχήματα. Είτε πρόκειται για 2D είτε για 3D σχήματα, το πρώτο βήμα των μαθητών είναι συνήθως το να περιστρέφουν με τα χέρια τους το σχήμα, προκειμένου να εξερευνήσουν όλες τις πλευρές του.

Παρακάτω φαίνονται μερικές στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές με προβλήματα όρασης προκειμένου να αναγνωρίσουν γεωμετρικά σχήματα (Αργυρόπουλος, 2008).

<u>Τρόποι απτικής κατανόησης σχήματος - Στρατηγικές</u>

- Περιστροφή του σχήματος συνεχώς με το ένα χέρι
- Περιστροφή του σχήματος συνεχώς και με τα δύο χέρια
- Κρατώντας το σχήμα και με τα δύο χέρια
- Ψηλάφηση του σχήματος κατά μήκος των πλευρών του.
- Φέρνοντας το σχήμα πολύ κοντά στο πρόσωπο τους
- Τοποθετώντας το σχήμα σταθερά πάνω στο τραπέζι κρατώντας το με το ένα χέρι και μετρώντας με τον δείχτη του άλλου χεριού το μήκος των πλευρών ή το μέγεθος των γωνιών του.
- Τοποθετώντας εξολοκλήρου το σχήμα στην παλάμη του ενός χεριού
- Μεταφέροντας το σχήμα από το ένα χέρι στο άλλο

- Κρατώντας το σχήμα (π.χ. τετράγωνο) από τις δύο κορυφές του με τον αριστερό αντίχειρα και δείκτη και τις άλλες δύο κορυφές του με τον δεξιό αντίχειρα και δείκτη.
- Εξετάζοντας τις πλευρές των σχημάτων με τις άκρες των δακτύλων
- Πλησιάζοντας το γεωμετρικό σχήμα κοντά στο πρόσωπο και ακουμπώντας το στο μάγουλο τους
- Κάνοντας παλινδρομικές κινήσεις στο σχήμα στο διάστημα μεταξύ προσώπου και θρανίου
- Κρατώντας το σχήμα με το αριστερό χέρι και με το δεξί δείχτη να μετρά τον αριθμό των κορυφών ή των πλευρών ή εξερευνώντας το σχήμα γενικότερα

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που οι μαθητές έχουν τόσο καλά ανεπτυγμένη την απτική τους αντίληψη ώστε αναγνωρίζουν το σχήμα με το που το πιάσουν, χωρίς να χρειαστεί να το εξερευνήσουν, χωρίς για παράδειγμα να μετρήσουν τις πλευρές του ή τις γωνίες του. Αυτό οφείλεται στην εμπειρία τους, συνήθως από καθημερινά αντικείμενα με γνωστό γεωμετρικό σχήμα, όπως π.χ. ένα κουτί (κύβος ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), μία μπάλα κ.λπ.

Κατά τον Triantafillidis (1995),υπάρχει μία σχέση μεταξύ των στρατηγικών που επιλέγει ένας μαθητής να χρησιμοποιήσει και του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης του (επίπεδα van Hieles). Πιο συγκεκριμένα, μία ολιστική εξερεύνηση του σχήματος θα μαρτυρούσε ότι η γεωμετρική σκέψη του μαθητή βρίσκεται στο πρώτο ή στο δεύτερο επίπεδο van Hiele (level 0 ή 1). Αντίθετα, μία πιο λεπτομερής και μεθοδευμένη εξερεύνηση, όπου ο μαθητής κάνει χρήση στρατηγικών, θα μαρτυρούσε ότι και ο ίδιος αντιλαμβάνεται και ψάχνει τις σχέσεις που έχουν τα χαρακτηριστικά του σχήματος. Στην περίπτωση αυτή η γεωμετρική σκέψη του μαθητή φαίνεται να έχει αναπτυχθεί μέχρι το τρίτο επίπεδο (level 2). Όταν ο μαθητής φτάσει στο τέταρτο επίπεδο, αυτό της επαγωγικής σκέψης (level 3), είναι πλέον σε θέση ακόμα και να δημιουργήσει νέες βελτιωμένες στρατηγικές.

Μιλώντας για τον Duval, είδαμε ότι δίνει προτεραιότητα στην Οπτική αντίληψη. Ωστόσο, όπως αναφέραμε παραπάνω, η όραση δεν είναι η μόνη πηγή νοητικών εικόνων στα μαθηματικά. Το να «νιώσουμε» με τα χέρια μας κάποια φυσικά αντικείμενα, χωρίς να τα βλέπουμε με τα μάτια μας, είναι επίσης μία πηγή πλούσιας παραγωγής νοητικών εικόνων. Τέτοιες δυνατότητες φαίνονται και από την έρευνα του Triantafillidis (1995) που

αναφέραμε και προηγουμένως. Από την άλλη πλευρά υπάρχουν και ερευνητές που αμφισβητούν ακόμα και την ύπαρξη νοητικών εικόνων (“pictures in the mind”), όχι μόνο στην περίπτωση των μαθητών με προβλήματα όρασης αλλά και γενικότερα. Παρόλα αυτά, ένα ερώτημα που ακόμα δεν έχει απαντηθεί είναι αν η οπτικοποίηση χρειάζεται καν την όραση..; Το ερώτημα αυτό είναι πολύ σημαντικό αν παρατηρήσουμε τους διακεκριμένους τυφλούς μαθηματικούς.

Ο Leonhard Euler (1707-1783) είναι ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς που έχουν υπάρξει. Κι όμως ο Euler ήταν τελείως τυφλός τα δεκαεπτά τελευταία χρόνια της ζωής του. Τα προβλήματα με την όραση του ξεκίνησαν στα 31 του χρόνια λόγω της καταπόνησης των ματιών του κατά την περίοδο που δούλευε ως διευθυντής του τομέα γεωγραφίας στο St. Petersburg Academy of Science. Ωστόσο, ο Euler μέχρι το τέλος της ζωής του είχε περίπου 850 έργα, εκ των οποίων τα 335 τα εκπόνησε κατά τη διάρκεια των χρόνων που είχε τυφλωθεί!

Άλλα παραδείγματα γνωστών τυφλών μαθηματικών είναι :

Ο Άγγλος μαθηματικός Nicholas Saunderson (1682-1739) που τυφλώθηκε όταν προσβλήθηκε από ευλογιά σε ηλικία μόλις ενός έτους. Ο Saunderson επιτέλεσε καθηγητής στο τμήμα Μαθηματικών του Cambridge University στη θέση που πριν από αυτόν είχε και ο Isaac Newton, ενώ αργότερα κατέκτησαν ο Paul Dirac και ο διακεκριμένος φυσικός Stephen Hawking.

Ο Ρώσος Lev Pontryagin (1908-1988) που ασχολήθηκε και διέπρεψε στους τομείς της Τοπολογίας, της Ομοτοπικής θεωρίας και των εφαρμοσμένων μαθηματικών με έμφαση στη Θεωρία Ελέγχου.

Ο επίσης Ρώσος και εν ζωή A.G.Vitushkin, που ασχολείται με την Μιγαδική Ανάλυση στο Steklov Institute της Μόσχας.

Ο Emmanuel Giroux, σύγχρονος Γάλλος μαθηματικός που ασχολείται με τη Συμπλεκτική Γεωμετρία και την Τοπολογία. Ο Giroux είναι τυφλός από 11 ετών. Ο ίδιος συνηθίζει να είναι πάρα πολύ οργανωμένος και σαφής στις διαλέξεις του. Έχει δηλώσει ότι : «Είναι έτσι το στυλ μου. Θέλω όταν μιλάω να είμαι όσο πιο ξεκάθαρος γίνεται. Αλλά συχνά ενοχλούμαι πολύ, διότι οι άλλοι μαθηματικοί δεν εξηγούν αυτά που κάνουν στον πίνακα και αυτά που γράφουν..». Ο Giroux επισημαίνει ότι οι περισσότεροι μαθηματικοί ασχολήθηκαν ή ασχολούνται με τη Γεωμετρία. Γιατί όμως με τη Γεωμετρία; Ο Giroux απαντάει : «Είναι καθαρή σκέψη» και στη συνέχεια εξηγεί ότι, για παράδειγμα στην

Ανάλυση, πρέπει να κάνεις πάρα πολλούς υπολογισμούς και να παρακολουθείς γραμμή προς γραμμή το τι γίνεται. Κάτι τέτοιο όμως είναι δύσκολο με τη γραφή Braille, αφού για να γράψει κανείς πρέπει να τρυπάς το χαρτί με τη μηχανή και στη συνέχεια να γυρίζεις το χαρτί από την άλλη και να το «διαβάζεις», κάτι που κάνει δύσκολο το να θυμάσαι τι έχει γίνει στην προηγούμενη γραμμή κάθε φορά. Αντίθετα εξηγεί : «Στη γεωμετρία, οι πληροφορία είναι συγκεντρωμένη, είναι κάτι που μπορείς να το θυμάσαι με το μυαλό χωρίς να χρειάζεται να γράφεις». Ο Giroux επίσης λέει πως στο μυαλό του έχει εικόνες, οι οποίες είναι ένας τρόπος για να αναπαριστά κανείς μαθηματικά αντικείμενα, χωρίς ωστόσο να είναι και ένας τρόπος για να σκεφτεί κανείς γι αυτά.

Σαν συμπλήρωμα στα λόγια του Giroux για την επιλογή των περισσότερων τυφλών μαθηματικών να ασχοληθούν με τη γεωμετρία, μπορούμε να σκεφτούμε το εξής : ένας άνθρωπος τυφλός έχει μία απαραμόρφωτη και άμεση τρισδιάστατη διαίσθηση του χώρου, μέσω των υπόλοιπων αισθήσεων του. Αντίθετα, ένας βλέπον δεν αξιοποιεί αυτές τις ικανότητες του, ακριβώς επειδή βλέπει. Στην περίπτωση αυτή όμως ο εγκέφαλος επεξεργάζεται δισδιάστατες εικόνες ενός τρισδιάστατου κόσμου και όχι πληροφορίες που αφορούν και τις τρεις διαστάσεις, όπως γίνεται στην περίπτωση των τυφλών.

1.3 Γεωμετρία και Χειρονομίες

Καθημερινά όλοι μας κατά τη διάρκεια που μιλάμε με κάποιον, χρησιμοποιούμε χειρονομίες. Οι χειρονομίες αυτές, άλλες φορές είναι αυθόρμητες και χωρίς κάποιο ιδιαίτερο νόημα και άλλες φορές εσκεμμένες ή αυθόρμητες και σίγουρα ουσιώδεις. Ποίος είναι όμως ο ρόλος των χειρονομιών που χρησιμοποιούμε; Και τι μπορεί να μαρτυρούν οι χειρονομίες μας στην περίπτωση των μαθηματικών;

Ο γνωστός Ρώσος ψυχολόγος Vygotsky, ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με μαθητές με προβλήματα ακοής ή όρασης. Ο ίδιος έλεγε ότι τις περιπτώσεις μαθητών με τέτοιου είδους προβλήματα, θα πρέπει να τις αντιμετωπίζουμε σαν τίποτα περισσότερο από την απουσία ενός εκ των δυνατών τρόπων να αποκτήσουμε πρόσβαση στο φυσικό περιβάλλον. Επίσης τόνιζε ότι για να καταστεί δυνατή η ένταξη αυτών των ατόμων στην κοινωνία, θα πρέπει να ψάξουμε και να βρούμε άλλους τρόπους για να υποκαταστήσουμε το παραδοσιακό μέσο με κάποιο άλλο. Συνεπώς για ένα τυφλό άτομο, τα μάτια πρέπει να

υποκατασταθούν από κάποιο άλλο όργανο. Στην ουσία δηλαδή ο Vygotsky απέδιδε στα όργανα του σώματος, και πιο συγκεκριμένα στα μάτια, τα αυτιά και το δέρμα, το ρόλο του ψυχολογικού εργαλείου. Υποστήριζε ότι τα μάτια και η ομιλία είναι τα όργανα που χρησιμοποιούμε για να διαβάσουμε και να μιλήσουμε και ότι τα υπόλοιπα όργανα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να τα υποκαταστήσουν. Δηλαδή προτείνει, αντί να βλέπουμε τη διαφορά ως μια κατάσταση ανεπάρκειας, μπορούμε να την αντιμετωπίζουμε απλά ως αυτό που είναι, διαφορά. (Vygotsky, 1981)

Όταν άτομα με προβλήματα όρασης χρησιμοποιούν τα χέρια τους για να «δουν» κάτι, στην ουσία αυτό που κάνουν είναι να υποκαθιστούν με αυτά, τα μάτια τους. Εδώ τα χέρια αναλαμβάνουν να κάνουν τη δουλειά των ματιών και να παρατηρήσουν ένα αντικείμενο. Και ενώ η όραση είναι σύνθετη και ολιστική, η αφή μας επιτρέπει να κάνουμε σταδιακή ανάλυση παρατηρώντας κάτι σιγά-σιγά και προχωρώντας από το μέρος στο όλο.

Αν δεχτούμε λοιπόν ότι τα όργανα του σώματος μας είναι διαμεσολαβητικά εργαλεία, τότε καταλήγουμε στο ότι η σκέψη δε μπορεί να είναι μία δραστηριότητα εξαρτώμενη μόνο από τον εγκέφαλο, με την έννοια ότι η σκέψη δε συμβαίνει μόνο στο κεφάλι, αλλά επίσης και μέσα και μέσω του συντονισμού της ομιλίας, του σώματος, των χειρονομιών και των συμβόλων. Την άποψη αυτή συμμερίζεται και ο Radford (2009), ο οποίος υποστηρίζει ότι η μαθηματική νόηση δεν διαμεσολαβεί μόνο μέσω των γραπτών συμβόλων, αλλά και μέσω ενεργειών, χειρονομιών και άλλων ειδών νοημάτων.

Σύμφωνα με τις Iverson and Goldin-Meadow (1998), οι χειρονομίες είναι κομμάτι της ομιλίας μας, με την έννοια ότι μπορούν να τονίσουν κάτι που θέλουμε να πούμε ή να υποκαταστήσουν κάτι που δε λέμε με το λόγο μας. Πολλές φορές μπορεί μέσα από μία χειρονομία να φανεί κάτι που έχουμε στο μυαλό μας και που δεν το έχουμε πει. Στην ουσία δηλαδή οι χειρονομίες μπορεί να είναι η πρόσβαση του ομιλητή σε μη προσβάσιμα λεκτικά αντικείμενα, με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η διαδικασία της ομιλίας. Ο McNeill (1992) ωστόσο έχει άλλη άποψη. Υποστηρίζει ότι οι χειρονομίες και η ομιλία είναι κομμάτι της ίδιας γνωστικής πηγής. Θεωρεί ότι οι χειρονομίες αποκαλύπτουν πτυχές του νοητικού περιεχομένου εκείνου που μιλάει. Με αυτή την οπτική, οι χειρονομίες αποτελούν ένα παράθυρο πρόσβασης στη σκέψη. Από την άλλη η άποψη του Radford για τις χειρονομίες έρχεται και πάλι σε αντίθεση με αυτή του McNeill.

Ο Radford (2009) υποστηρίζει ότι η σκέψη δε συμβαίνει μόνο στο κεφάλι, αλλά και μέσω της γλώσσας, του σώματος και των εργαλείων που κανείς έχει στη διάθεση του. Συνεπώς οι

χειρονομίες, ως ένα είδος σωματικής δράσης, δε μπορούν να θεωρηθούν απλά ένα είδος παραθύρου που διαφωτίζει τα όσα συμβαίνουν μέσα σε ένα «μαύρο κουτί». Αντίθετα, οι χειρονομίες είναι γενεσιουργά συστατικά της σκέψης. Αυτό σημαίνει ότι δε μας δείχνουν απλώς τι σκέφτεται κάποιος αλλά στην ουσία είναι ένα αυτές που βοηθούν να γεννηθούν ιδέες, υποκινούν δηλαδή τη σκέψη. Εδώ ο Radford υποστηρίζει την άποψη του αυτή αναφέροντας το παράδειγμα ενός τυφλού μαθητή, ο οποίος ήθελε να εξηγήσει κάτι στους συμμαθητές του. Ο Radford παρατήρησε ότι ο μαθητής δεν είχε προσχεδιάσει τι θα έλεγε και πως θα παρουσίαζε τα όσα είχε σκεφτεί. Αντίθετα, δε σκέφτηκε όλες τις λεπτομέρειες από πριν αλλά τις παρατηρούσε να ξεδιπλώνονται την ίδια στιγμή που τις έβλεπαν και οι συμμαθητές του, την ώρα δηλαδή που τους εξηγούσε. Ο μαθητής αυτός σκεφτόταν μέσα από τις ίδιες του τις πράξεις (χειρονομίες) και τα λόγια. Βλέποντας, νιώθοντας τις πράξεις αυτές και ακούγοντας τα λόγια του αποκτούσε και ο ίδιος μία βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος, από μαθηματικής πλευράς. Ωστόσο, αυτό δε σημαίνει ότι όταν ξεκίνησε να μιλάει δεν είχε ιδέα για το τι θα έλεγε ή το που θα κατέληγε. Απλά η αρχική του ιδέα ήταν μόνο η αρχή του νήματος. Κατά τη διάρκεια που εξηγούσε όμως, οι χειρονομίες που έκανε δεν απευθύνονταν τελικά μόνο στους συμμαθητές του αλλά και στον ίδιο. Συνεπώς, οι χειρονομίες μπορούν να αποτελέσουν την πηγή της συγκρότησης της σκέψης.

Προκειμένου να μπορέσουμε όμως να κατανοήσουμε καλύτερα τις χειρονομίες που κάνουν οι μαθητές καλύτερα, θα χρησιμοποιήσουμε την κατηγοριοποίηση των χειρονομιών του McNeill (McNeill 1992, Healy L. And Fernandes S.H.A.A., 2011):

- *Εικονικές χειρονομίες (Iconic gestures)*

  Πρόκειται για χειρονομίες που αντιστοιχούν σε αυτά που λέμε, είτε συμπληρωματικά είτε επεξηγηματικά και αναφέρονται σε υλικά αντικείμενα, π.χ. το να νοηματίσουμε ένα σχήμα (περιγραφή με χρήση νοημάτων που κάνουμε με τα χέρια), ενώ το περιγράφουμε και λεκτικά.

- *Μεταφορικές χειρονομίες (Metaphoric gestures)*

  Εκφράζουν την εικονική αναπαράσταση μίας αφηρημένης ιδέας, όπως για παράδειγμα του ορίου μίας συνάρτησης στο μηδέν.

- *Δεικτικές Χειρονομίες (Deictic gestures)*

  Χρησιμοποιούνται για να υποδείξουν αντικείμενα (υλικά ή εικονικά), ανθρώπους ή θέσεις στο χώρο και δεν αποτελούν εικονικές αναπαραστάσεις όπως οι προηγούμενες δύο κατηγορίες.

- *Παλμικές χειρονομίες (Beat gestures)*

  Δεν αποτελούν εικονικές αναπαραστάσεις. Είναι μικρές, γρήγορες, διφασικές κινήσεις, συνήθως πάνω/κάτω, δεξιά/αριστερά, μέσα/έξω, οι οποίες συνοδεύουν το λόγο. Δεν αλλάζουν μορφή ανάλογα με το θέμα (δεν έχουν συναισθηματική διάσταση), χρησιμοποιούνται για να δώσουν έμφαση ή ένα ιδιαίτερο νόημα σε μία λέξη, όχι βάσει του τι αυτή συμβολίζει αλλά βάσει του ρόλου της στη συζήτηση (του πόσο σημαντική είναι δηλαδή σε αυτό που λέγεται). Επίσης μπορεί να σηματοδοτούν την αρχή ή το τέλος μιας συζήτησης ή ένα σημαντικό σημείο στη μέση μιας συζήτησης, όπως π.χ. μία απόφαση.

Η Healy (2012) είναι μία ακόμη από τους λίγους ερευνητές, της Διδακτικής των Μαθηματικών, που ασχολούνται με τυφλούς μαθητές. Σύμφωνα όμως με τις Goldin-Meadow (1993) και τις Iverson and Goldin-Meadow (1998), και οι βλέποντες χρησιμοποιούν τις χειρονομίες εξίσου με τους τυφλούς. Έτσι λοιπόν και η Healy (2012) υποστηρίζει ότι αν καταφέρουμε να κατανοήσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές στις πρακτικές που ακολουθούν οι τυφλοί μαθητές σε σχέση με τους βλέποντες, δηλαδή μαθητές που βιώνουν τον κόσμο με διαφορετικό τρόπο, θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε ακόμη καλύτερα τις σχέσεις μεταξύ της εμπειρίας και της νόησης γενικότερα.

1.4 Γεωμετρία και Οπτικοποίηση

Ένας δημοσιογράφος θα χαρακτήριζε την εποχή από τη δεκαετία του 1960 και μετά ως «εποχή της εικόνας», ενώ τη σημερινή εποχή ως «εποχή της ταχύτητας». Αυτό όμως που μας οδήγησε από τη μία εποχή στην άλλη είναι η τεχνολογία. Τηλεόραση και έπειτα Ηλεκτρονικός Υπολογιστής και Internet.. Και μετά ο άνθρωπος ήθελε να μπορεί να έχει την εικόνα του κόσμου γύρω του όπου κι αν πήγαινε. Και έτσι μετά ήρθαν τα Laptops και tablets, τα κινητά τηλέφωνα με ενσωματωμένη φωτογραφική μηχανή και πρόσβαση στο διαδίκτυο.. Και όσο η τεχνολογία προχωράει, οι εικόνες που μας φέρνει θα είναι όλο και πιο εύκολα προσβάσιμες. Γιατί όμως τόση «δίψα» για την εικόνα;

Ως κοινωνικά όντα ενθαρρυνόμαστε αλλά και φιλοδοξούμε όλο και περισσότερο, να βλέπουμε όχι μόνο όσα μπορεί κάποιος να δει, αλλά και όσα δε μπορεί να δει με οπτική επαφή. Όμως αυτό μάλλον είναι κάτι που συνέβαινε πάντα. Οι άνθρωποι δημιουργούσαν εικόνες ήδη από την εποχή των σπηλαίων. Αυτή ήταν η αρχή της οπτικοποίησης. Και δεν περιορίστηκε μόνο σε απλές κοινωνικές ή καλλιτεχνικές αναπαραστάσεις, αλλά πέρασε και στο χώρο της επιστήμης.

Η έννοια της οπτικοποίησης στον τομέα των Μαθηματικών δεν είναι καινούρια. Ο Rival (1987) αναφέρει πως έχει ρίζες τόσο παλιά στην ιστορία των μαθηματικών, όσο και τα ίδια τα μαθηματικά. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσουμε αν θυμηθούμε τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι αναπαριστούσαν με βότσαλα τους αριθμούς προκειμένου να μελετήσουν τις σχέσεις μεταξύ τους, αλλά και την περίπτωση του Αρχιμήδη με τη γνωστή φράση «Μη μου τους κύκλους τάραττε!», που αναφώνησε στο Ρωμαίο στρατιώτη που τον βρήκε την ώρα που μελετούσε κάποιο γεωμετρικό πρόβλημα, σχεδιάζοντας κύκλους στο έδαφος. Η οπτικοποίηση όμως στον τομέα των μαθηματικών δεν περιορίζεται μόνο στη γεωμετρία. Με τη γέννηση του Απειροστικού Λογισμού και τον Isaac Newton, η οπτικοποίηση κάνει την εμφάνιση της. Ο Newton δεν αποδείκνυε με μαθηματική αυστηρότητα τα θεωρήματα του, αλλά βασιζόταν στις εικόνες. Όπως αναφέρει ο Rival (1987), "Αν του ζητούσε κανείς (του Newton) να τεκμηριώσει τις αποδείξεις του, μάλλον θα παρουσίαζε κάποιο επιχείρημα το οποίο, αν και πειστικό, θα ήταν μάλλον αδύναμο και ισχυρά εξαρτώμενο από εικόνες." Ένας ακόμα μαθηματικός, ο Lagrange, πίστευε πως η ικανότητα της παρατήρησης είναι πολύ σημαντική για έναν μαθηματικό.

Συνεπώς, ένας τρόπος για να χαρακτηρίσουμε την οπτικοποίηση και τη μεγάλη σημασία της, τόσο ως ουσιαστικό (την οπτική εικόνα), όσο και ως διαδικασία είναι ότι «η οπτικοποίηση, μας παρέχει μία μέθοδο ώστε να μπορέσουμε να δούμε αυτά που δεν είναι ορατά» (McCormick et al. 1987, p.3, αναφορά στον Arcavi, 2003). Ωστόσο, στη συνέχεια, η οπτική προσέγγιση των μαθηματικών αμφισβητήθηκε ως μη μαθηματικώς αυστηρή και ανακριβής. Η άποψη αυτή επικράτησε ακόμα και στον τομέα της γεωμετρίας. Εκεί, το ερέθισμα που έδωσε το έναυσμα για τις αμφιβολίες ήταν το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Οι μαθηματικοί που προσπάθησαν να το αποδείξουν ήταν πολλοί και όλοι ακολούθησαν την ίδια λογική. Προσπαθούσαν να αποδείξουν μία πρόταση ισοδύναμη με το πέμπτο αίτημα, αντί για αυτό καθ' εαυτό, η οποία θα ήταν απλούστερη και πιο προφανής διαισθητικά. Για περίπου δύο χιλιάδες χρόνια δεν είχε καταφέρει κανείς να το αποδείξει. Όμως στο πρώτο μισό του 18 αι. οι Bolyai και Lobachevsky, δημιούργησαν την Υπερβολική

γεωμετρία, η οποία ήταν απαλλαγμένη από το 5^{ο} Αίτημα (Βασιλείου, σημειώσεις μαθήματος 2011).

Από τον επόμενο αιώνα και μετά η κατάσταση αλλάζει προς το άλλο άκρο. Τη θέση της διαίσθησης καταλαμβάνει ο μαθηματικός φορμαλισμός, γεγονός που επηρεάζει και την εκπαίδευση μέχρι και σήμερα. Αλλά ακόμα και στις περιπτώσεις που κάποιο είδος οπτικοποίησης κάνει την εμφάνιση του στα σχολικά βιβλία, αυτό αποτελείται από τόσο συνηθισμένες εικόνες ώστε στην ουσία επιτυγχάνεται το αντίθετο του επιθυμητού αποτελέσματος. Οι μαθητές συνδέουν τόσο στενά – σχεδόν ταυτίζουν – την έννοια με το τετριμμένο παράδειγμα εικόνας, ώστε αντί να αναπτύσσουν την ικανότητα οπτικοποίησης και αφαιρετικής σκέψης τους μάλλον τις καταρρακώνουν.

Το 1954 ο Hadamard επισημαίνει τη σημαντικότητα του ρόλου της οπτικοποίησης μιλώντας για τον Einstein και τον Poincare, οι οποίοι τόνιζαν τη χρήση της οπτικής αντίληψης. Αλλά και ο Polya (1973) στις ευρετικές στρατηγικές του για επιτυχημένη επίλυση προβλήματος, προτείνει επισταμένως «κάνε ένα σχέδιο» (draw a figure), μία φράση που έχει γίνει πλέον κλασσική παιδαγωγική συμβουλή.

Τι συμβαίνει όμως με τους τυφλούς μαθηματικούς; Συνεπάγεται η απουσία όρασης και απουσία ικανότητας για οπτικοποίηση; Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη παράγραφο, οι τυφλοί μαθηματικοί είναι πολλοί και το πρόβλημα όρασης που είχε ο καθένας από αυτούς, δε φάνηκε να αποτελεί εμπόδιο στο να γίνουν διακεκριμένοι επιστήμονες. Το πιο λαμπρό παράδειγμα μάλλον είναι αυτό του Euler, ο οποίος αν και τυφλός ήταν πολύ δραστήριος χάρη στην οπτική του φαντασία αλλά και στην εκπληκτική του μνήμη. Φαίνεται λοιπόν πως όπως περιγράφηκε με υπέροχο τρόπο από τον Jackson (2002, αναφορά στον Arcavi, 2003), η οπτικοποίηση μπορεί να προχωρήσει παραπέρα από την αίσθηση της όρασης.

1.4.1 Τα είδη των εικόνων

Η έννοια της οπτικοποίησης στα μαθηματικά έχει άμεση σχέση με αυτή της νοητικής εικόνας, της νοητικής αναπαράστασης δηλαδή μιας μαθηματικής έννοιας ή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Κατά την Presmeg (2006) η νοητική εικόνα (mental image) είναι ένα νοητικό σχήμα το οποίο απεικονίζει μια οπτική ή χωρική πληροφορία. Αυτού του είδους οι εικόνες αποτελούν τα αντικείμενα που μας οδηγούν στην οπτικοποίηση.

Η Presmeg διέκρινε πέντε είδη εικόνων :

- Στατικές εικόνες ("εικόνα στο μυαλό") – Concrete imagery ("picture in the mind") : Είναι στατικές και λεπτομερείς εικόνες φυσικών ή και αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων.
- Κιναισθητικές εικόνες – Kinaesthetic imagery : Είναι εικόνες που δημιουργούνται από φυσικές κινήσεις
- Δυναμικές εικόνες – Dynamic imagery : Στην περίπτωση αυτή, η εικόνα κινείται ή μετασχηματίζεται από μόνη της με αποτέλεσμα από στατική να μετατρέπεται σε δυναμική.
- Μνημονικές εικόνες – Memory images of formulae : Αποτελούν κάτι σα φωτογραφίες μέσα στο μυαλό, π.χ. ενός διαγράμματος στη σελίδα ενός βιβλίου.
- Πρότυπες εικόνες – Pattern imagery : Σε αυτή την περίπτωση οι εικόνες εκφράζουν καθαρές σχέσεις, απαλλαγμένες από πολλές λεπτομέρειες.

1.4.2 Ο ρόλος της οπτικοποίησης στα μαθηματικά

(Ι) Στο δρόμο προς τον ορισμό..

Η έννοια της οπτικοποίησης φυσικά δεν είναι περιορισμένη ούτε μόνο στα μαθηματικά, αλλά ούτε και μόνο στον τομέα της επιστήμης. Στην καθομιλουμένη ο όρος «οπτικοποίηση» έχει το νόημα του σχηματισμού μιας εικόνας στο μυαλό που μπορεί να είναι κάποιο φυσικό ή νοητικό αντικείμενο ή και κάποια κατάσταση. Στην περίπτωση των μαθηματικών όμως, η οπτικοποίηση δεν ερμηνεύεται όπως στην καθομιλουμένη ή στην ψυχολογία. Εδώ δε μιλάμε για οπτικοποίηση π.χ. ενός διαγράμματος, αλλά ενός προβλήματος. Έχουμε λοιπόν να κάνουμε με μία διαδικασία μετατροπής του προβλήματος σε εικόνες με μαθηματικό περιεχόμενο, όπως είναι κάποιο διάγραμμα ή μια οπτική εικόνα, με χαρτί και μολύβι ή με τη βοήθεια της τεχνολογίας. Παρόλα αυτά όμως αυτός στην παρούσα εργασία δε θα υιοθετήσουμε τον ορισμό αυτό, διότι όπως είναι προφανές ένα παιδί τυφλό δεν είναι σε θέσει να σχεδιάσει, με χαρτί και μολύβι, ένα διάγραμμα ή μία οπτική εικόνα. Και δυστυχώς η τεχνολογία δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα σε τέτοιο βαθμό ώστε να είναι προσβάσιμη για μαθητές με σοβαρά προβλήματα όρασης. Αλλά και στην κοινότητα τα έρευνας υπάρχουν πολλοί ορισμοί για την οπτικοποίηση που διαφέρουν μεταξύ τους ανάλογα με τον τομέα

των μαθηματικών που ασχολείται ένας ερευνητής, αλλά και τα στοιχεία της διαδικασίας στα οποία εστιάζει.

Η Presmeg (2006) δίνει έναν άλλο ορισμό για την οπτικοποίηση. Ακολουθεί την άποψη των Piaget και Inhelder (1971, αναφορά στην Presmeg, 2006), ότι όταν ένας άνθρωπος δημιουργεί μία χωρική διάταξη (συμπεριλαμβανομένης μίας μαθηματικής περιγραφής), υπάρχει μία οπτική εικόνα στο μυαλό του, η οποία καθοδηγεί τη δημιουργία αυτή. Συνεπώς λέει : «η οπτικοποίηση πρέπει να περιλαμβάνει διαδικασίες κατασκευής και μετασχηματισμού, τόσο οπτικών νοητικών εικόνων όσο και όλων των αναπαραστάσεων χωρικής φύσης που μπορεί να εμπλέκονται στα μαθηματικά».

Ο ορισμός που εμείς θα υιοθετήσουμε στην παρούσα εργασία είναι αυτός των Hershkowitz et al. (1989, p.75), Zimmermann and Cunningham (1991, p.3) και Arcavi (2003, p.217) :

"Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, ερμηνείας, χρήσης και αναστοχασμού πάνω σε σχέδια, εικόνες και διαγράμματα, στο μυαλό, το χαρτί ή σε δυναμικά περιβάλλοντα, με σκοπό την απεικόνιση και την επικοινωνία πληροφοριών, τη σκέψη πάνω σε νέες ιδέες και την ανάπτυξη τους και την πρόοδο της κατανόησης."

(ΙΙ) Τι λέει η έρευνα για το ρόλο της οπτικοποίησης στα μαθηματικά;

Πέρα όμως από το ζήτημα του ορισμού, οι περιορισμοί και οι δυσκολίες γύρω από την οπτικοποίηση αλλά ακόμα και η απροθυμία για οπτικοποίηση, έχουν επίσης συζητηθεί πολύ στο χώρο της έρευνας (Arcavi, 2003; Dreyfus, 1991; Love, 1995). Ο Love υποστηρίζει ότι στη γεωμετρία η σχέση μεταξύ νοητικών αντικειμένων και φυσικών εικόνων είναι πολύ δύσκολη. Κι ο Dreyfus όμως, υπογραμμίζει ότι στο σχολείο το επίπεδο της οπτικοποίησης των μαθητών είναι χαμηλό. Επιπλέον, οι οπτικές τεχνικές, οι οποίες δε βασίζονται πάντα σε ασφαλείς διαδικασίες θεωρούνται πιο απαιτητικές – από γνωστικής πλευράς – σε σχέση με τις αναλυτικές τεχνικές. Ωστόσο, ο Duval (1998) επιμένει στην έννοια της οπτικοποίησης, προτείνοντας να εμπλουτισθεί το αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων με πολλές διαφορετικές διαδικασίες οπτικοποίησης.

Ο ρόλος όμως της οπτικοποίησης στη διδασκαλία και τη μάθηση δεν είναι απλός. Γι' αυτό το λόγο, πολύ έρευνα έχει γίνει και γύρω από την αξία της οπτικοποίησης και των

εικόνων με την έννοια της προοπτικής της ενίσχυσης του διαισθητικού τρόπου κατανόησης στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τους Tall and Vinner (1981) η οπτικοποίηση είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι των «εννοιολογικών εικόνων» (concept images). Η εννοιολογική εικόνα συμπεριλαμβάνει οπτικές εικόνες, ιδιότητες και εμπειρίες που αφορούν μία συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Προκειμένου να κατανοήσουμε μία μαθηματική έννοια χρειάζεται να δημιουργήσουμε πρώτα μία εννοιολογική εικόνα γι 'αυτήν. Παρ' όλα αυτά, ο Vinner (1997) επισημαίνει ότι «σε μερικές περιπτώσεις ο διαισθητικός τρόπος σκέψης μπορεί να μας παραπλανήσει». Όμως ο Fischbein (1987) υποστηρίζει ότι μία οπτική εικόνα όχι μόνο οργανώνει τα δεδομένα που έχουμε σε μία ουσιαστική δομή, αλλά επιπλέον είναι και ένας σημαντικός παράγοντας για την αναλυτική ανάπτυξη μίας λύσης. Την ίδια άποψη εκφράζει και η Hershkowitz (1989), λέγοντας ότι η απεικόνιση των στοιχείων μιας έννοιας και των σχέσεων τους μπορούν να διευκολύνουν κάποιον στη γεωμετρία, αφού του παρέχουν μια κάποια υποστήριξη για τον επαγωγικό συλλογισμό. Αλλά και ο Bishop (1989) επισημαίνει ότι η ικανότητα οπτικοποίησης περιλαμβάνει τη μετάφραση αφηρημένων σχέσεων και μη σχηματοποιημένων πληροφοριών, σε οπτικές αναπαραστάσεις και συλλογές εικόνων και ότι "υπάρχει λόγος να δίνεται έμφαση στις οπτικές αναπαραστάσεις σε όλες τις πτυχές της τάξη των μαθηματικών". Προς την κατεύθυνση αυτή κινείται και η Presmeg (2006), η οποία σε μία έρευνα που έκανε με 13 καθηγητές προκειμένου να ερευνήσει σε τι βαθμό χρησιμοποιούν διαδικασίες οπτικοποίησης στην διδασκαλία τους, παρατήρησε ότι αυτό συνδέεται με τη δημιουργικότητα του. Φάνηκε ότι οι καθηγητές που χρησιμοποιούσαν περισσότερο τις διαδικασίες οπτικοποίησης ήταν πιο δημιουργικοί στο μάθημα τους, με αυτογνωσία αλλά και χιούμορ.

(III) Αν δε μπορείς να δείς, πως μπορείς να οπτικοποιείς ;

Μία τέτοια ερώτηση ίσως χαρακτηριζόταν τουλάχιστον άτοπη, δίχως νόημα από έναν μαθητή με πρόβλημα όρασης ή ακόμα και τυφλό. Κι αυτό γιατί το ότι κάποιος είναι τυφλός, δε σημαίνει ότι δε μπορεί και να «δει». Έχοντας στο μυαλό τα λόγια του Vygotsky, αλλά και όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο της απτικής αντίληψης, μπορούμε να πούμε ότι τα μάτια είναι ένα όργανο του σώματος, το οποίο αν δε λειτουργεί μπορεί απλά να υποκατασταθεί από κάποιο ή κάποια άλλα. Η Αφή και η φαντασία. Αυτή είναι η όραση όσων στερούνται την κανονική λειτουργία των ματιών τους.

Δανειζόμενοι μια φράση του Miller (1987) οι Zimmermann and Cunningham (1991), αναφέρουν ότι η μαθηματική οπτικοποίηση εμπλέκει και τη «διαίσθηση μέσω εικόνων που δημιουργούνται με τα μάτια του μυαλού». Συνεπώς, η οπτικοποιήσιμη γεωμετρία είναι και διαισθητική γεωμετρία. Η οπτικοποίηση συνεπώς δεν έχει να κάνει μόνο με την όραση. Ο Miller παρατηρεί ότι «η οπτική αντίληψη είναι ανώτερη από το να βλέπεις μόνο με τις αισθήσεις». Αυτό σημαίνει ότι η οπτικοποίηση είναι ανώτερη από την όραση, γιατί οπτικοποίηση, συνεπάγεται την κατανόηση, το είδος αυτό της κατανόησης που προέρχεται από τη διαίσθηση που περιέγραψε ο Miller. Η ισχυρή σχέση της οπτικοποίησης με τη διαίσθηση φαίνεται όμως και από τις θεωρίες που υπάρχουν για την ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού, όπως του Duval, του Fischbein, των van Hieles και του Gutierrez (αυτές που αναφέραμε στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου).

Στην περίπτωση των μαθηματικών, κανείς μπορεί να οπτικοποιήσει κάτι που δεν έχει δει ποτέ ή κάτι που δε γίνεται να δει ποτέ. Ίσως λοιπόν, η οπτικοποίηση να είναι η γνώση που δημιουργήθηκε από τον συνδυασμό ιδεών που ήδη υπήρχαν στο μυαλό. Όλοι όσοι ασχολούμαστε με τα μαθηματικά μπορούμε να θυμηθούμε κάποια περίπτωση που μία εικόνα μας ήρθε στο μυαλό, κατά την επίλυση ενός προβλήματος, την οποία μπορεί ποτέ να μην είχαμε δει στην πραγματικότητα.

Η μαθηματική οπτικοποίηση δεν πρέπει να νοείται ως εκτίμηση των μαθηματικών μέσω εικόνων, καθώς η διαίσθηση που επιζητά δεν είναι ένα αόριστο και ασαφές είδος διαίσθησης, ένα επιφανειακό υποκατάστατο της κατανόησης, αλλά το είδος εκείνο της διαίσθησης που εισχωρεί στην καρδιά μιας ιδέας. Δίνει βάθος και νόημα στην κατανόηση και εμπνέει δημιουργικές ανακαλύψεις. Για να επιτύχουμε όμως αυτό το είδος της κατανόησης, δε θα πρέπει να απομονώνουμε την οπτικοποίηση από τα υπόλοιπα μαθηματικά, αλλά να την συνδέουμε και με τους άλλους τρόπους συλλογισμού.

Η οπτικοποίηση, όπως και η γεωμετρία, σχετίζεται με τους πιο πολύπλοκους κλάδους των μαθηματικών. Είναι πολύπλευρη. Με τις ρίζες της στα μαθηματικά, η οπτικοποίηση έχει σημαντικές ιστορικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές και τεχνολογικές όψεις. Αν δούμε λίγο τις σύγχρονες τάσεις της έρευνας, τότε μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε ότι καθώς τα μαθηματικά εξελίσσονται η οπτικοποίηση θα είναι στο μέλλον ακόμη πιο σημαντική απ' ότι είναι σήμερα. Κι αυτό γιατί η εξέλιξη της τεχνολογίας μας προμηθεύει συνεχώς με όλο και πιο εξελιγμένα και ισχυρά εργαλεία οπτικοποίησης.

Τα τελευταία χρόνια μάλιστα έχουν γίνει σημαντικά βήματα όσον αφορά την τεχνολογία που απευθύνεται σε άτομα με προβλήματα όρασης, όπως για παράδειγμα η δημιουργία μίας εφαρμογής (application) για tablet από τη μεταπτυχιακή φοιτήτρια Μηχανολογίας Jenna Gorlewicz (Medical and Electromechanical Design Laboratory, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee). Η εφαρμογή αυτή χρησιμοποιεί την απτική τεχνολογία και προορίζεται για μαθητές με προβλήματα όρασης, ως βοήθεια για μαθήματα όπως η άλγεβρα και η γεωμετρία. Λειτουργεί με μικροδονήσεις που παράγονται στην οθόνη του tablet καθώς ο μαθητής εξερευνά, για παράδειγμα, ένα σχήμα ή μία συνάρτηση που απεικονίζεται σε αυτήν. (Πηγή πληροφοριών : http://news.cnet.com/8301-27083_3-57392568-247/haptic-app-helps-visually-impaired-learn-math/)

Κεφάλαιο 2 – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΊΑ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ

2.1 Τα ερευνητικά μας ερωτήματα

Στην παρούσα έρευνα ασχολούμαστε με την έννοια της οπτικοποίησης των γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους από μαθητές με προβλήματα όρασης. Φυσικά, η οπτικοποίηση δεν είναι αποτέλεσμα μίας μονομερούς διαδικασίας, αλλά μίας πολύπλευρης διερεύνησης από μέρους των μαθητών. Για το λόγο αυτό, ασχολούμαστε με έννοιες όπως η ικανότητα οπτικοποίησης, η απτική διερεύνηση σχημάτων και η απτική αντίληψη των μαθητών, οι χειρονομίες και οι χρήση των παρομοιώσεων στην λεκτική περιγραφή ενός σχήματος, καθώς και με το ρόλο τους στη Γεωμετρία. Σκοπός της έρευνας μας είναι να δούμε πως οι παραπάνω έννοιες «συνεργάζονται» και συνδυάζονται από τους μαθητές όταν αντιμετωπίζουν γεωμετρικά προβλήματα που διαπραγματεύονται το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου (δισδιάστατη γεωμετρία) στη γεωμετρία του χώρου (τρισδιάστατη γεωμετρία), και αντίστροφα.

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι :

1) Τι είδους στρατηγικές υιοθετούν οι μαθητές προκειμένου να διερευνήσουν ένα σχήμα και τις ιδιότητες του, με τη βοήθεια της αφής ;

2) Τι είδους στρατηγικές και διαδικασίες ακολουθούν οι μαθητές κατά το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου (2D) στη γεωμετρία του χώρου (3D) και αντίστροφα ;

3) Ποια είναι η συμβολή των χειρονομιών, της χρήσης των παρομοιώσεων και της οπτικοποίησης στις παραπάνω διαδικασίες ;

2.2 Το είδος και το πλαίσιο της έρευνας

Η έρευνας που έγινε ήταν ένα πείραμα διδασκαλίας (Cobb & Steffee, 1983 ; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003) σε ένα σχολείο επιπρόσθετης στήριξης σε παιδιά με προβλήματα όρασης. Ασφαλώς, τα πειράματα διδασκαλίας χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερη διάρκεια έρευνας, ωστόσο στα πλαίσια της εκπόνησης μιας διπλωματικής εργασίας κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατό. Λόγω της ιδιαιτερότητας του σχολείου αυτού, αλλά και της περιόδου διεξαγωγής της έρευνας – προεξεταστική περίοδος των μαθητών –

σκεφτήκαμε ότι θα ήταν απαραίτητο η συμμετοχή των παιδιών να είναι και δική τους επιλογή. Αρχικά επιλέχθηκαν από εμάς 6 μαθητές, οι οποίοι πληρούσαν της ανάγκες της έρευνας (διαφορετικά προβλήματα όρασης, διαφορετικός βαθμός οπτικής ικανότητας, ηλικιακές διαφοροποιήσεις, καθώς και διαφορά στην προτίμηση του κάθε μαθητή απέναντι στα μαθηματικά). Στη συνέχεια, για τον παραπάνω λόγο, μοιράστηκαν στους μαθητές έντυπες δηλώσεις συμμετοχής καθώς και ένα εκτυπωμένο κείμενο με τη διαδικασία και το στόχο της έρευνας στην οποία, αν επιθυμούσαν, θα συμμετείχαν. Επιπλέον, έγινε σαφές στους συμμετέχοντες και τους γονείς τους ότι τα ονόματα των μαθητών δε θα γίνουν γνωστά, ούτε και θα χρησιμοποιηθούν στην πρωτότυπη μορφή τους στη διπλωματική εργασία, για λόγους που προστάζει το πλαίσιο ηθικής και δεοντολογίας μίας έρευνας. Τέλος, στους γονείς μοιράστηκε και ένα έντυπο όπου καλούνταν να σημειώσουν αν είχαν ή όχι αντίρρηση για χρήση φωτογραφικής μηχανής, τη μαγνητοσκόπηση και τη μαγνητοφώνηση κατά τη διάρκεια των συναντήσεων με τους μαθητές.

Φυσικά, κάναμε και πάλι σαφές στους γονείς των μαθητών ότι τόσο οι φωτογραφίες όσο και τα βίντεο των συναντήσεων θα είναι για την προσωπική χρήση της ερευνήτριας, για την διαδικασία της έρευνας. Επιπλέον, τους ενημερώσαμε ότι στις φωτογραφίες δε θα φαίνονται τα πρόσωπα των παιδιών και ότι το βίντεο δε θα προβληθεί μπροστά σε τρίτους.

Ανάμεσα στους μαθητές που είχαν επιλεγεί ήταν και δύο ενήλικοι μαθητές. Στην περίπτωση αυτή συμπλήρωσαν οι ίδιοι τα έντυπα και δε χρειάστηκε να ζητηθεί άδεια από τους γονείς.

Τελικά στην έρευνα συμμετείχαν πέντε από τους έξι μαθητές που είχαμε αρχικά επιλέξει, οι δύο ενήλικοι και τρείς ανήλικοι μαθητές.

2.3 Σχολείο διεξαγωγής της έρευνας – Συμμετέχοντες

Η παρούσα έρευνα έγινε σε ένα σχολείο για μαθητές με προβλήματα όρασης. Το σχολείο αυτό είναι ιδιαίτερο, αφού δεν αποτελεί κλασσική περίπτωση σχολείου, αλλά μια μονάδα υποστήριξης τέτοιων μαθητών. Η υποστήριξη αυτή είναι πολύπλευρη :

- εκπαιδευτική : με τμήματα ενισχυτικής διδασκαλίας ανά τάξη και ειδικότητα, σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου

- αθλητική : το σχολείο διαθέτει αθλητικές εγκαταστάσεις με στόχο τη βελτίωση της αυτονομίας των μαθητών, την αποδοχή τους από τους άλλους μαθητές και την καλλιέργεια των κινητικών κλίσεων και δυνατοτήτων τους
- ηθική – κοινωνική : μέσα από μαθήματα κινητικότητας, προσανατολισμού αλλά και διαχείρισης καθημερινών αναγκών για την απόκτηση αυτονομίας και ανεξαρτησίας από τους μαθητές και την ομαλότερη ένταξη τους στο ευρύτερο κοινωνικό σύνολο.

Το σχολείο αυτό επιλέχθηκε λόγω της ευελιξίας του στο πρόγραμμα των μαθητών καθώς δε θέλαμε να επιβαρύνουμε το πρόγραμμα των μαθητών με αίσθημα της πίεσης του χρόνου. Επίσης τόσο οι υπεύθυνοι του σχολείου, όσο και οι ίδιοι οι μαθητές έδειξαν μεγάλη προθυμία για συμμετοχή στην έρευνα.

Στην έρευνα συμμετείχαν πέντε (5) μαθητές και μαθήτριες (2 αγόρια και 3 κορίτσια), της Γ' Λυκείου (2, θετική κατεύθυνση), της Β' Λυκείου (1, θεωρητική κατεύθυνση), της Β' Γυμνασίου (1) και της Α' Γυμνασίου (1).

Παρακάτω φαίνεται το προφίλ του/της κάθε μαθητή/μαθήτριας :

ΜΑΘΗΤΕΣ	Μ	Α	Β	Δ	Τ
ΦΥΛΛΟ	Αγόρι	Κορίτσι	Αγόρι	Κορίτσι	Κορίτσι
ΗΛΙΚΙΑ	18	16	19	14	17
ΤΑΞΗ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ	Γ' Λυκείου – Θετική	Γ' Γυμνασίου	Γ' Λυκείου – Θετική	Α' Γυμνασίου	Β' Λυκείου – Θεωρητική
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΟΡΑΣΗΣ	Μειωμένη όραση	Τυφλή εκ γενετής	Μειωμένη όραση	Τυφλή εκ γενετής	Τυφλή εκ γενετής

Η παρούσα έρευνα σε καμία περίπτωση δεν εστιάζει στη σύγκριση των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών ανάλογα με το πρόβλημα οράσεως που έχουν. Για το λόγο αυτό, επιλέξαμε να μη μπούμε στη διαδικασία λεπτομερούς ερώτησης του προβλήματος του κάθε μαθητή.

Αυτό που μπορούμε να πούμε επιπλέον για τους δύο μαθητές με τη μειωμένη όραση είναι το εξής :

Ο μαθητής Μ έχει ένα πρόβλημα που του επιτρέπει να βλέπει σε κοντινή απόσταση με τη βοήθεια γυαλιών οράσεως. Είναι σε θέση να διαβάσει βιβλία σε κοντινή πάντα απόσταση και να γράψει με στυλό και χαρτί κάνοντας τα γράμματα του μεγαλύτερα απ' ότι

συνηθίζεται ή χρησιμοποιώντας μαρκαδόρο, προκειμένου να του είναι εύκολο να ξαναδιαβάσει ότι γράφει.

Ο μαθητής Β έχει κάποιο πρόβλημα όρασης το οποίο του επιτρέπει να βλέπει σε κοντινή απόσταση από το δεξί του μάτι, ενώ από το αριστερό δεν βλέπει καθόλου.

2.4 Δραστηριότητες – Εργαλεία – Σκεπτικό

2.4.1 Εργαλεία

Στην έρευνα μας είχε μεγάλη σημασία να παρατηρήσουμε και να ερμηνεύσουμε τις χειρονομίες των μαθητών/τριών κατά τη διάρκεια που σκέφτονταν, επιχειρηματολογούσαν ή απαντούσαν σε κάποια ερώτηση αλλά και ο τρόπος με τον οποίο εξερευνούσαν τα σχήματα με την αφή τους. Για τους λόγους αυτούς θέλαμε να έχουμε στη διάθεση μας κάθε είδους πηγή πληροφορίας. Τα υλικά εργαλεία λοιπόν που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα ήταν :

- MP3 για ηχογράφηση
- Κάμερα για μαγνητοσκόπηση
- Φωτογραφική Μηχανή
- Μπλοκάκι για σημειώσεις την ώρα των συνεντεύξεων
- Εργαλεία της κάθε δραστηριότητας

Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας μας, ήταν η παρατήρηση των μαθητών κατά τη διάρκεια που δούλευαν στις δραστηριότητες και η καταγραφή της με τα υλικά εργαλεία που αναφέρθηκαν παραπάνω, καθώς και συζητήσεις που κάναμε με τους μαθητές προκειμένου να διερευνήσουμε τα ερευνητικά μας ερωτήματα.

2.4.2 Δραστηριότητες

Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις δραστηριότητες, οι οποίες έγιναν με τους μαθητές και είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Όλες σχετίζονταν με το πέρασμα από 2D σε 3D σχήματα ή το αντίστροφο. Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τις δραστηριότητες μία –

μία. Πριν τη λεπτομερή παρουσίαση τους, παρακάτω υπάρχει ένας πίνακας όπου φαίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε δραστηριότητας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	Περιστροφή Επίπεδων Σχημάτων	Αναπτύγματα Στερεών	Κυβάκια και Εμβαδόν	Τομές σε Στερεά
ΕΡΓΑΛΕΙΑ	Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, Ορθογώνιο τρίγωνο, Κύκλος	τετράγωνα, ισοσκελή τρίγωνα, ισόπλευρα τρίγωνα, ρόμβοι	Κυβάκια τύπου Lego	Πλάκες πηλού πλαστικό μαχαίρι
ΠΕΡΑΣΜΑ	2D –> 3D	2D –> 3D	3D –> 2D	3D –> 2D
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	Δημιουργία στερεών σχημάτων από την περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από σταθερό άξονα	Αναγνώριση και δημιουργία αναπτυγμάτων γνωστών στερεών σχημάτων	Δημιουργία πολλών διαφορετικών ορθογωνίων παραλ/δων και κύβων με το ίδιο πλήθος μικρών κύβων	Ερευνούμε τα σχήματα των τομών που μπορούν να γίνουν σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
ΣΤΟΧΟΣ	• Ενασχόληση με ιδιότητες των επιμέρους διαστάσεων του στερεού (0D/3D, 1D/3D, 2D/3D) • Ιδιαίτερα έντονη η παρουσία της οπτικοποίησης	Ενασχόληση με ιδιότητες των επιμέρους διαστάσεων του στερεού (0D/3D, 1D/3D, 2D/3D)	• Κατασκευή στερεού από επιμέρους μονάδες (μικρά κυβάκια) • Ενασχόληση με ιδιότητες των επιμέρους διαστάσεων του στερεού (0D/3D, 1D/3D, 2D/3D) • Εμβαδό επίπεδου σχήματος και επιφάνειας στερεού σχήματος	Ενασχόληση με ιδιότητες των επιμέρους διαστάσεων του στερεού (0D/3D, 1D/3D, 2D/3D)
ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, Παραλληλόγραμμο, Ορθογώνιο τρίγωνο, Κύκλος, Κύλινδρος, Κώνος, Σφαίρα	ορθογώνιο παραλ/μο, τετράγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, ρόμβος, κύβος, πυραμίδα με τρίγωνη βάση, πυραμίδα με τετράγωνη βάση	ορθογώνιο παραλ/μο, τετράγωνο, ορθογώνιο παραλ/δο, κύβος	ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τρίγωνο, τετράγωνο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύβος, σφαίρα

1) Περιστροφή Επίπεδων σχημάτων και δημιουργία Στερεών

Εργαλεία : Επίπεδα σχήματα φτιαγμένα από σκληρό μη ελαστικό υλικό (Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, Παραλληλόγραμμο, Ορθογώνιο τρίγωνο, Κύκλος)

Διαδικασία – Στόχος : Ζητούμε από τους μαθητές να σκεφτούν τι είδους στερεά θα δημιουργηθούν από τη στρέψη των παραπάνω επίπεδων σχημάτων, γύρω από κάποιον κατακόρυφο άξονα τους, τον οποίο θα επιλέξουν οι ίδιοι.

Γεωμετρικές έννοιες που διαχειριζόμαστε : Βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, Παραλληλόγραμμο, Ορθογώνιο τρίγωνο, Κύκλος) και βασικά στερεά (Κύλινδρος, Κώνος, Σφαίρα).

Ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου προς το μαθητή :

1. Με ποιον τρόπο επιλέγεις τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής του επίπεδου σχήματος; Με ποιο κριτήριο;
2. Ποιες είναι οι ιδιότητες τόσο του επίπεδου όσο και του στερεού σχήματος που σε κάνουν να τα συνδέσεις και να πεις ότι το δεύτερο είναι παραγωγή της περιστροφής του πρώτου;
3. Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η περιστροφή του επίπεδου σχήματος ώστε να δημιουργηθεί ολόκληρο το στερεό;
4. Αν το επίπεδο σχήμα δεν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αλλά απλά ένα παραλληλόγραμμο τι θα γινόταν; Θα δημιουργούνταν και πάλι κάποιο στερεό κατά την περιστροφή του; Και ποιος θα είναι τώρα ο άξονας περιστροφής;
5. Τι θα γινόταν αν δεν περιέστρεφα το επίπεδο σχήμα σε κατακόρυφο άξονα, αλλά σε οριζόντιο; Θα δημιουργούνταν και πάλι κάποιο γνωστό στερεό;
6. Πώς θα επιλέξεις τον άξονα περιστροφής του κύκλου;
7. Με τι ταυτίζεται ο άξονας περιστροφής στον κύκλο;
8. Πόσους τέτοιους άξονες περιστροφής έχει ένας κύκλος, που να δημιουργούν σφαίρα κατά την περιστροφή του;

2) Αναπτύγματα Στερεών

Εργαλεία : Πλαστικά κομμάτια επίπεδων σχημάτων που ενώνονται μεταξύ τους (τετράγωνα, ισοσκελή τρίγωνα, ισόπλευρα τρίγωνα, ρόμβοι)

Διαδικασία – Στόχος : Ζητάμε από το μαθητή να αναγνωρίσει ένα ανάπτυγμα που του δίνουμε. Το ανάπτυγμα αυτό είναι ενός κύβου. Στη συνέχεια του ζητάμε να κατασκευάσει όσο περισσότερα διαφορετικά αναπτύγματα μπορεί, τα οποία να δημιουργούν κύβο. Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο και για τα εξής στερεά : Πυραμίδα με τρίγωνη βάση, πυραμίδα με τετράγωνη βάση.

Στόχος είναι, μέσα από τα αναπτύγματα των στερεών να δούμε τι γνωρίζουν οι μαθητές για τις ιδιότητες των στερεών αυτών, αλλά και αν μπορούν να αναγνωρίζουν ένα στερεό από το ανάπτυγμα του και τις ιδιότητες του στερεού που αυτό «προδίδει» (0D/3D, 1D/3D, 2D/3D). Στόχος είναι ακόμα και η αντίστροφη διαδικασία.

Γεωμετρικές έννοιες που διαχειριζόμαστε : Βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, ρόμβος – για τις έδρες των στερεών που θα φτιάξει) και βασικά στερεά (κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, παραλληλεπίπεδο, Πυραμίδα με τρίγωνη βάση, πυραμίδα με τετράγωνη βάση)

Ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου προς το μαθητή :

1. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά εκείνα του στερεού που σε βοηθούν να φτιάξεις το ανάπτυγμα του;
2. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά εκείνα του αναπτύγματος που σε βοηθούν να αναγνωρίσεις το στερεό στο οποίο αντιστοιχεί;
3. Πώς αλλιώς θα μπορούσε να διαμορφωθεί το ανάπτυγμα και να δημιουργεί ακόμα κύβο;
4. Πυραμίδα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Είναι ανάγκη και οι άλλες 3 έδρες να είναι ισόπλευρα τρίγωνα ίσα με αυτό της βάσης;

3) Κυβάκια και εμβαδόν

Εργαλεία : Κυβάκια τύπου Lego

Διαδικασία – Στόχος : Λέμε στο μαθητή να πάρει κάποιο πλήθος κύβων και να δημιουργήσει, ενώνοντας τους, έναν κύβο ή ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Στη

συνέχεια του θέλουμε να υπολογίσει το εμβαδό του χαρτιού που θα χρειαζόμασταν αν θέλαμε να τυλίξουμε το στερεό. Μετά τον παροτρύνουμε με τα ίδια κυβάκια να φτιάξει όσα περισσότερα στερεά μπορεί υπολογίζοντας και πάλι το εμβαδόν τους. Τελικά, του ζητούμε να μας εξηγήσει σε ποια περίπτωση θα χρειαζόμασταν το λιγότερο χαρτί για να τυλίξουμε το στερεό.

Γεωμετρικές έννοιες που διαχειριζόμαστε : Βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο – για τις έδρες των στερεών που θα φτιάξει) και βασικά στερεά (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύβος – για τον υπολογισμό του εμβαδού του χαρτιού περιτυλίγματος)

Ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου προς το μαθητή :

1) Πόσα διαφορετικά στερεά μπορείς να φτιάξεις με τον ίδιο αριθμό κύβων;
2) Θα είναι διαφορετικό το εμβαδό κάθε στερεού ανάλογα με το σχήμα του, αν χρησιμοποιείς τον ίδιο αριθμό κύβων για την κατασκευή τους;
3) Ποιο πιστεύεις ότι θα είναι το πιο «οικονομικό» στερεό – με βάση το εμβαδό του χαρτιού που χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε;

4) Τομές σε στερεά – Δημιουργία επίπεδων σχημάτων

Εργαλεία : Πλάκες πηλού, πλαστικό μαχαίρι

Διαδικασία – Στόχος : Δίνουμε στον μαθητή την πλάκα πηλού που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Του ζητάμε να σκεφτεί πόσα διαφορετικά επίπεδα σχήματα μπορεί να έχει μία τομή που θα κάνει στον πηλό. Αυτό φυσικά εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής θα επιλέξει να κάνει την τομή. Η τομή πρέπει πάντα να μη δημιουργεί καμπύλη και να είναι σαν ένα νοητό ευκλείδειο επίπεδο που κόβει το στερεό. Οι τομές που μπορούν να δημιουργηθούν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τρίγωνο, τετράγωνο..

Στη συνέχεια δημιουργούμε με τον πηλό μία σφαίρα και ζητάμε από το μαθητή να απαντήσει στην ίδια ερώτηση με πριν, αυτή τη φορά για τη σφαίρα. Εδώ ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει άπειρους κύκλους διαφορετικών μεγεθών ανάλογα με το που θα διαλέξει να κόψει τον κύκλο.

Γεωμετρικές έννοιες που διαχειριζόμαστε : Βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τρίγωνο, τετράγωνο) και βασικά στερεά (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύβος, σφαίρα)

Ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου προς το μαθητή :

1) Τι τομές μπορείς να κάνεις στο στερεό;
2) Ποίες ιδιότητες του στερεού αυτού είναι που σε κάνουν να πιστεύεις ότι θα δημιουργηθούν τα συγκεκριμένα επίπεδα σχήματα;
3) Ο τρόπος που θα κάνεις την τομή έχει κάποια σχέση με το σχήμα της;
4) Πόσα διαφορετικά σχήματα λοιπόν θεωρείς ότι μπορείς να δημιουργήσεις με τις τομές;
5) Πώς μπορεί να αλλάξει το μέγεθος του σχήματος που δημιούργησες κάνοντας την τομή;
6) Αν κάνεις μία τομή στον πηλό όπως θα έκοβες και το ψωμί, αλλά βάζοντας το μαχαίρι σου να έχει μία πλάγια κλίση, τι σχήμα θα είχε η τομή που θα δημιουργούσες; Παραλληλόγραμμο ή Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; Και γιατί;

Εκτός από τις ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου προς το μαθητή, κατά τη διάρκεια της συζήτησης μας και ανάλογα με την κατάσταση, κάναμε στο μαθητή και ερωτήσεις σχετικές με την απτική εξερεύνηση των σχημάτων και την διαδικασία με την οποία οπτικοποιούσε ένα σχήμα. Φυσικά, οι ερωτήσεις αυτές εξαρτώνται από τη στιγμή εκείνη και από τα όσα συμβαίνουν, συνεπώς δεν ήταν προσχεδιασμένες.

2.5 Διαδικασία Διεξαγωγής της Έρευνας και Συλλογής των Δεδομένων

Η διεξαγωγή της έρευνας, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, έγινε σε ένα σχολείο υποστήριξης μαθητών με προβλήματα όρασης. Αρχικά έγινε μία συνάντηση με την υπεύθυνη του εκπαιδευτικού προσωπικού, την κοινωνική λειτουργό και τους καθηγητές των Μαθηματικών προκειμένου να ενημερωθούμε για τους μαθητές.

Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν κάποιοι μαθητές με κριτήρια την ηλικία και την τάξη στην οποία βρίσκονται καθώς και το πρόβλημα όρασης που αντιμετωπίζουν. Ακολούθησε μία

συνάντηση με τους έξι μαθητές και μαθήτριες που επιλέχθηκαν με σκοπό να τους ενημερώσουμε για τη φύση, το στόχο και τη διαδικασία της έρευνας. Επιπλέον, δώθηκαν στους υπεύθυνους οι δηλώσεις για τους γονείς των μαθητών ώστε αυτές να μοιραστούν και να συμπληρωθούν. Με το τέλος των τυπικών διαδικασιών που έπρεπε να γίνουν ξεκίνησε η έρευνα.

Έγινε και πάλι μία συνάντηση με τους μαθητές που μπορούσαν τελικά να λάβουν μέρος στην έρευνα ώστε να χωριστούν σε ομάδες ή και μονάδες, και να κανονιστεί η ώρα που θα γίνονταν οι συναντήσεις για τις συνεντεύξεις. Η δημιουργία των ομάδων εξαρτιόταν άμεσα από τον ελεύθερο χρόνο των μαθητών, ο οποίος ήταν συγκεκριμένος λόγω των υποχρεώσεων τους. Έτσι τελικά δημιουργήθηκαν δύο ομάδες : η μία αποτελούνταν από τον μαθητή Μ μαζί με τη μαθήτρια Α και η άλλη από τις μαθήτριες Τ και Δ, ενώ ο μαθητής Β ήταν μόνος του. Πραγματοποιήθηκαν δύο συνεντεύξεις με την ομάδα των Μ και Α, μία με την ομάδα των Τ και Δ και μία ακόμη με τον μαθητή Β, σε ξεχωριστές ημέρες. Η όλη διαδικασία της έρευνας ολοκληρώθηκε σε δύο εβδομάδες.

Πριν τη συνέντευξη έγινε με κάθε μαθητή/τρια μία κουβέντα γνωριμίας (5’-10’), όπου η ερευνήτρια συστήθηκε και μίλησε λίγο για τα προσωπικά της ενδιαφέροντα και για το λόγο της έρευνας της, ενώ οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να μιλήσουν για οτιδήποτε τους απασχολούσε και να ρωτήσουν ότι ήθελαν να μάθουν. Κάθε συνέντευξη διήρκησε περίπου 30’ και σε αυτήν οι μαθητές ασχολήθηκαν με το πολύ δύο δραστηριότητες.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται αναλυτικά οι δραστηριότητες με τις οποίες ασχολήθηκε κάθε ομάδα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ	**ΟΜΑΔΕΣ/ΜΑΘΗΤΕΣ**		
1η : Περιστροφή Επίπεδων σχημάτων και δημιουργία Στερεών	Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α	Μαθητής Β	Ομάδα 2 : Μαθήτριες Δ και Τ
2η : Αναπτύγματα Στερεών	Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α		Ομάδα 2 : Μαθήτριες Δ και Τ
3η : Κυβάκια και εμβαδόν	Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α		
4η : Τομές σε Στερεά – Δημιουργία επίπεδων σχημάτων		Μαθητής Β	

Όλες οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και τραβήχτηκαν κάποιες φωτογραφίες. Μαγνητοσκόπηση έγινε μόνο στη συνέντευξη της ομάδας των μαθητριών Δ και Τ.

2.6 Διαδικασία Ανάλυσης των Δεδομένων

Μετά το πέρας της διεξαγωγής της έρευνας ξεκίνησε η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν. Αρχικά απομαγνητοφωνήθηκαν οι συζητήσεις με τους μαθητές, ανά ομάδα. Στη συνέχεια εντοπίστηκαν τα κρίσιμα συμβάντα κάθε ομάδας για κάθε δραστηριότητα και στη συνέχεια αυτά ομαδοποιήθηκαν και συσχετίσθηκαν, αυτή τη φορά, ανά δραστηριότητα.

Τα κρίσιμα συμβάντα χαρακτηρίσθηκαν ως τέτοια με βάση τα εξής κριτήρια – αντικείμενα της έρευνας :

- Απτική εξερεύνηση των σχημάτων και απτική αντίληψη των μαθητών για τα σχήματα
- Γεωμετρική αντίληψη και σκέψη των μαθητών αναφορικά με τις δραστηριότητες που έκαναν, τα σχήματα που αυτές περιελάμβαναν και τις ιδιότητες τους
- Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές φαίνεται να οπτικοποιούν τα σχήματα και τις ιδιότητες τους μέσα από την απτική εξερεύνηση και το γεωμετρικό στοχασμό
- Οι χειρονομίες που κάνουν οι μαθητές στην προσπάθεια να εξηγήσουν αυτό που σκέφτονται ή κάνουν ή στην προσπάθεια να επιχειρηματολογήσουν για μια απάντηση τους
- Το σκεπτικό των μαθητών προκειμένου να κάνουν το πέρασμα από τις δύο στις τρεις διαστάσεις ή αντίστροφα

Κεφάλαιο 3 – ΑΠΟΤΕΛΈΣΜΑΤΑ

3.1 Σκεπτικό της διαδικασίας Εξαγωγής των Αποτελεσμάτων

Η ανάλυση των δεδομένων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να πλησιάσουμε τις απαντήσεις που ψάχνουμε μέσω των ερευνητικών μας ερωτημάτων. Τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε στην παράγραφο 2.1 εμπλέκουν τις έννοιες της οπτικοποίησης, της απτικής διερεύνησης, της απτικής αντίληψης, των χειρονομιών αλλά και των γεωμετρικών εννοιών του επιπέδου και του χώρου.

Προκειμένου να απαντήσουμε στα ερευνητικά μας ερωτήματα θα εξετάσουμε τη διαλεκτική σχέση μεταξύ των απτικών στρατηγικών επίλυσης και των ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού σχήματος, καθώς και το ρόλο που έχει γι' αυτές η διαδικασία της οπτικοποίησης. Επιπλέον, θα εξετάσουμε το ρόλο των χειρονομιών και της γλώσσας που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη επιχειρηματολογία τους.

Η ανάλυση των δεδομένων καθώς και η παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα γίνουν ανά δραστηριότητα. Σε κάθε μία από αυτές, θα παραθέτουμε αποτελέσματα – συμπεράσματα για κάθε μαθητή/ομάδα μαθητών. Προκειμένου να διασαφηνίζονται πλήρως τα αποτελέσματα μας, θα παραθέτουμε και κάποια "κρίσιμα συμβάντα" από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές μέσα από τις απομαγνητοφωνήσεις που κάναμε.

3.2 Δραστηριότητα 1η : Περιστροφή Επίπεδων σχημάτων και δημιουργία Στερεών

Η δραστηριότητα αυτή, σχετίζεται με το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου (2D) στη γεωμετρία του χώρου (3D). Ξεκινάμε την ανάλυση μας με παρατηρήσεις που κάναμε και οι οποίες αφορούν όλους τους μαθητές. Αργότερα, στην παράγραφο 3.2.2, θα ακολουθήσει πιο λεπτομερής περιγραφή και ανάλυση με αναφορά κρίσιμων συμβάντων από τις συνεντεύξεις.

3.2.1 Συλλογικές παρατηρήσεις

- Αναφορικά με τις Γεωμετρικές έννοιες

Ξεκινώντας από τις γεωμετρικές έννοιες και τις ορολογίες τους, αυτό που παρατηρήσαμε στην περίπτωση και των πέντε μαθητών είναι ότι υπάρχουν κάποιες ασάφειες για τις γεωμετρικές ορολογίες ή ακόμα και έλλειψη γνώσεων γύρω από αυτές. Οι τρεις από τους πέντε μαθητές (Μ, Β, Τ) δεν ήταν σίγουροι για το τι ακριβώς είναι ένα στερεό σώμα. Οι Β και Τ δε μπορούν να θυμηθούν ποιο είναι το γεωμετρικό αντικείμενο που ονομάζεται στερεό, ενώ δεν συνδέουν την έννοια αυτή με κάποια έννοια από την καθημερινότητα. Από την άλλη, ο Μ φαίνεται να συνδέει τη γεωμετρική με την καθημερινή έννοια της λέξης «στερεό». Αυτό όμως, έχει σαν αποτέλεσμα να συγχέει τη γεωμετρική έννοια, αυτή του τρισδιάστατου γεωμετρικού αντικειμένου, με τη λέξη «στ**έ**ρεο» δηλαδή κάτι το οποίο είναι σταθερό και αμετάβλητο, την οποία χρησιμοποιεί στην καθημερινότητα του. Το γεγονός αυτό τον μπερδεύει ακόμα περισσότερο μιας και στ**έ**ρεο (με την έννοια που ο μαθητής χρησιμοποιεί τη λέξη αυτή) μπορεί να είναι και ένα επίπεδο γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο δεν κατατάσσεται στην κατηγορία των στερεών σωμάτων, όπως για παράδειγμα τα επίπεδα σχήματα που τους έδωσα να αναγνωρίσουν τα οποία ήταν φτιαγμένα από σκληρό πλαστικό. Αυτή είναι μία από τις περιπτώσεις που η σύνδεση με την καθημερινότητα αποτελεί περισσότερο παράγοντα σύγχυσης παρά βοήθειας για έναν μαθητή. Επιπλέον, τέσσερις από τους πέντε μαθητές ενώ έχουν αναγνωρίσει σωστά τη δημιουργία του κώνου κατά την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου, ωστόσο τον αναφέρουν ως πυραμίδα με κυκλική βάση.

Τέλος, φάνηκε ότι οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη έννοια του άξονα περιστροφής, κάτι που ωστόσο θεωρείται αναμενόμενο μιας και οι μαθητές δεν έχει χρειαστεί να χρησιμοποιήσουν τον όρο αυτό στα μαθηματικά. Φυσικά από την άλλη, είναι κάτι που έχουν σίγουρα ακούσει σε άλλα μαθήματα, ήδη από το Δημοτικό (άξονας περιστροφής της Γης), όπως η Γεωγραφία ή η Φυσική. Απ' ότι φάνηκε όμως οι μαθητές, αρχικά τουλάχιστον, δεν έκαναν κάποια σύνδεση αυτών τους των γνώσεων.

- Χρήση χειρονομιών και ρόλος της γλώσσας

Ένα σημαντικό στοιχείο κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων ήταν η χρήση, από τους μαθητές, χειρονομιών κατά τη διάρκεια που μιλούσαν ή ιδιαιτεροτήτων της γλώσσας που

χρησιμοποιούσαν, όπως π.χ. μεταφορές ή παρομοιώσεις. Το ενδιαφέρον στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η μεγάλη διαφοροποίηση μεταξύ των μαθητών. Η ομάδα 1 (μαθητής Μ και μαθήτρια Α) χρησιμοποιούσε συνεχώς παρομοιώσεις για να εκφράσει το σχήμα των γεωμετρικών στερεών, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δε μπορούσε να θυμηθεί τις ονομασίες τους. Φυσικά οι παρομοιώσεις αυτές είχαν να κάνουν με αντικείμενα από την καθημερινότητα των μαθητών, τα οποία είχαν το ίδιο σχήμα με τα γεωμετρικά στερεά που διερευνούσαν. Αντίθετα, ο μαθητής Β και οι μαθήτριες της ομάδας 2 (Δ και Τ), δε χρησιμοποίησαν παρομοιώσεις. Στην περίπτωση της μαθήτριας Δ αυτό ίσως οφείλεται το γεγονός ότι η ίδια θυμόταν σωστά όλες τις ονομασίες των γεωμετρικών στερεών, με αποτέλεσμα να μην της είναι απαραίτητη η χρήση παρομοιώσεων. Από την άλλη μεριά, ο Β και η Τ, οι οποίοι δε θυμόντουσαν πάντα τις ονομασίες δεν κατέφυγαν στη βοηθητική λύση της χρήσης παρομοιώσεων, αλλά προτίμησαν να περιγράφουν το στερεό με δικά τους λόγια.

Η χρήση παρομοιώσεων όμως από τους μαθητές τους ήταν ιδιαίτερα διαφωτιστική για τους ίδιους μιας και φάνηκε ότι τους βοηθούσε να αναγνωρίσουν επιπλέον ιδιότητες του γεωμετρικού στερεού.

Η χρήση των χειρονομιών ήταν ιδιαίτερα έντονη από όλους τους μαθητές, ειδικά κατά την περιγραφή του τρόπου περιστροφής του επίπεδου γεωμετρικού σχήματος και της δημιουργίας του στερεού. Το πώς και πότε χρησιμοποιήθηκαν οι χειρονομίες αυτές παρουσιάζεται ξεχωριστά σε κάθε ένα από τα κρίσιμα συμβάντα που θα αναλύσουμε παρακάτω.

- <u>Απτικές Στρατηγικές Επίλυσης – Οπτικοποίηση – Ιδιότητες και Σχήμα</u>

Η αλληλεπίδραση της απτικής διερεύνησης και της οπτικοποίησης, είναι αυτή που φαίνεται να οδηγεί στην αναγνώριση των βασικών ιδιοτήτων του σχήματος και τελικά στην αναγνώριση του ίδιου του σχήματος. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία όμως έπαιξε και η χρήση των παρομοιώσεων και των χειρονομιών ,που αναφέραμε παραπάνω.

Οι μαθητές φαίνεται να διερευνούν τα σχήματα προχωρώντας από το μέρος στο όλο, εξετάζοντας ένα–ένα τα χαρακτηριστικά των στερεών που δημιουργούνται. Συνήθως, ξεκινούν από τη βάση του επίπεδου σχήματος (1D/2D) και προχωρούν στη βάση του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της (2D/3D). Πιο συγκεκριμένα, οι

μαθητές Μ και Β και η μαθήτρια Τ αναγνωρίσουν βήμα – βήμα τον κώνο που δημιουργείται από την περιστροφή του ορθογωνίου τριγώνου ξεκινώντας από την κυκλική του βάση. Μάλιστα, ο μαθητής Β περιστρέφει ασταμάτητα το τρίγωνο προκειμένου να αναγνωρίσει τη δημιουργία της κυκλικής βάσης του κώνου. Όμως και οι μαθήτριες Δ και Α ακολουθούν την ίδια διαδικασία. Ωστόσο οι μαθήτριες αυτές διαθέτουν δυνατότερη ικανότητα οπτικοποίησης, με αποτέλεσμα να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του στερεού πριν καλά – καλά «δουν» την πλήρη περιστροφή του ορθογωνίου τριγώνου και συνεπώς και ολόκληρο τον κώνο. Φυσικά, ο κάθε μαθητής έχει το δικό του τρόπο σκέψης και συνεπώς έχει και διαφορετικές ανάγκες όσον αφορά τον τρόπο διερεύνησης και φαντασίας – οπτικοποίησης του στερεού που δημιουργείται. Γι αυτά θα μιλήσουμε αναλυτικότερα παρακάτω, όπου παρουσιάζουμε κάποια κρίσιμα συμβάντα από τις συνεντεύξεις που είχαμε με τους μαθητές.

3.2.2 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 1 ανά ομάδες

3.2.2.α Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α

Αυτό που αρχικά παρατηρούμε στους μαθητές Μ και Α είναι ότι αναγνωρίσουν πολύ εύκολα τα επίπεδα σχήματα που τους δίνονται. Η Α αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα με το ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό που λέει εδώ η Α είναι πολύ σημαντικό προκειμένου να κατανοήσει κανείς την ευαισθησία που έχει η αίσθηση της αφής στους τυφλούς μαθητές, αλλά και τα εμπόδια που μπορεί να δημιουργηθούν, τα οποία δεν υπάρχουν στην περίπτωση των βλεπόντων μαθητών.

Α : Μμμ.. Αυτή εδώ η γωνία δεν είναι ορθή.

Η Α ψάχνει λίγο ακόμη.

Α : Βασικά.. δεν έχει καμία ορθή γωνία.

Μ : Να το δω λίγο

Α : Εκτός κι αν είναι αυτή εδώ.

Ε (Ερευνήτρια) : Θες να το δώσεις και στο Μ να μας πει μια δεύτερη γνώμη;

Μ : Ε ορθογώνιο τρίγωνο είναι!

Ε : Που βρίσκεις την ορθή γωνία;

Μ : Να τη.. εδώ αυτή.

Ε : Οκ. Για δείξε την και στην Α

Α : Που είναι ρε Μ;

Ο Μ πιάνει το δάχτυλο της Α και το βάζει πάνω στη μία κάθετη πλευρά του τριγώνου. Το τραβάει κατά μήκος αυτής και το στρίβει στην ορθή γωνία και έπειτα στην άλλη κάθετη πλευρά.

Μ : Αν υποθέσεις ότι αυτή είναι η μία κάθετη πλευρά, στρίψε, ε να 90 μοίρες.

Α : Ναι, ναι όντως!

Ε : Τη νιώθεις τώρα την ορθή γωνία Α;

Α : Ναι, ναι ξεκάθαρα. Με μπέρδευε λίγο το σχήμα που είναι κομμένο εδώ.

Το τρίγωνο που κρατούσε η Α ήταν ένα σκληρό πλαστικό ορθογώνιο τρίγωνο από αυτά που έχουν οι μαθητές στο σχολείο. Για τον καλύτερο και πιο εύκολο σχεδιασμό, το τρίγωνο αυτό είχε κομμένες τις πλευρές με τρόπο τέτοιο ώστε στη μία όψη του το πλαστικό να δημιουργεί μία πολύ μικρή κλίση στο τελείωμα του, ώστε οι πλευρές να γίνονται πιο λεπτές και να είναι λεπτομερέστερη η σχεδίαση. Για τους βλέποντες αυτό μπορεί να αποτελεί λεπτομέρεια και να μην είναι σημαντικό. Ωστόσο, για την ευαίσθητη αφή της Α αυτό το γεγονός αποτέλεσε εμπόδιο στο να της είναι σαφές το σχήμα, αφού προσέθετε κάποιες παραπλανητικές πληροφορίες γι αυτό.

Προχωρώντας παρακάτω, οι μαθητές αρχικά δυσκολεύονται με την έννοια του άξονα περιστροφής, τον οποίο τελικά κατανοούν μέσω της αφής, ακουμπώντας τον κατά την περιστροφή του επίπεδου σχήματος και παρατηρώντας ότι αυτός παραμένει ακίνητος κατά την περιστροφή του ορθογωνίου τριγώνου. Η δυσκολία των μαθητών με την έννοια αυτή γίνεται αφορμή για να γίνει φανερή η σημασία της απτικής διερεύνησης στην κατανόηση των ιδιοτήτων ενός σχήματος :

Ε : Παρατηρείστε λίγο την πλευρά που επέλεξα ως άξονα περιστροφής.

Α : Είναι ακίνητη! Αααα αυτό;; Τώρα κατάλαβα!!

Στο παρακάτω απόσπασμα, ο μαθητής Μ επηρεασμένος από την καθημερινή χρήση του όρου στερεό, που μπορεί να σημαίνει κάτι στέρεο, σταθερό, μπερδεύεται όσον αφορά τη γεωμετρική έννοια του στερεού :

Ε : Ωραία. Ξεκινάμε λοιπόν με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Πείτε ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα στερεό..

Μ : Ε, στερεό δεν είναι το ορθογώνιο; Αα, άλλο στερεό..;

Ε : Σκέψου ότι δεν έχει καθόλου..

Α : Ναι, ότι είναι σαν χαρτί.

Παρατηρούμε ότι η Α τον βοηθά να καταλάβει ότι το ορθογώνιο τρίγωνο δεν είναι στερεό αλλά επίπεδο σχήμα, με τη χρήση μίας παρομοίωσης («σαν χαρτί»). Εδώ η Α με την παρομοίωση αυτή ήθελε να τονίσει το βασικό χαρακτηριστικό που διαχωρίζει τα επίπεδα από τα στερεά σχήματα : τον όγκο. Με τον τρόπο αυτό διασαφηνίζεται μία ιδιότητα του στερεού σώματος μέσα από μία παρομοίωση για τα επίπεδα σχήματα.

Στο παρακάτω απόσπασμα, φαίνεται ο ρόλος της γλώσσας καθώς και η σημασία που έχει η παρατήρηση των ιδιοτήτων ανά μονάδες του σχήματος για τη διαδικασία οπτικοποίησης ενός στερεού, φυσικά με τη χρήση της αφής :

Μ : Αυτό που σχηματίζεται είναι σα κύκλος.

Α : Ααα ένας κύκλος.

Εδώ τα παιδιά μιλούν για τη βάση του στερεού, παρατηρώντας την πορεία που διαγράφει η κάτω οριζόντια πλευρά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μ : Βασικά είναι σα το διαβήτη. Που το κρατάς από πάνω και καρφώνεις αυτό το μεσαίο κάθετα και το γυρνάς γύρω – γύρω.

Ε : Ααα να μια πάρα πολύ ωραία σκέψη! Εδώ ο κύκλος πως φτιάχνεται;

Α : Από αυτό το εσωτερικό κομμάτι του παραλληλογράμμου.

Εδώ η Α εννοεί ότι ο κύκλος χαράσσεται από το ακραίο σημείο της βάσης του ορθογωνίου, αλλά «γεμίζει» από τα εσωτερικά της σημεία. Αυτό φάνηκε από τη χειρονομία έκανε δείχνοντας την ώρα που απαντούσε, τα εσωτερικά σημεία της βάσης του ορθ. παραλ/μου.

Ε : Πολύ ωραία.. Και η πάνω πλευρά; Τι σχήμα φτιάχνει;

Α , Μ μαζί: Πάλι ένα κύκλο

Α : Άρα φτιάχνει έναν κύλινδρο!!!!

Ε : Για εξήγησε μας λίγο καλύτερα γιατί φτιάχνεται κύλινδρος..;

Α : Γιατί υποτίθεται ότι από εδώ υπάρχει και η άλλη πλευρά, έτσι.. και όπως γυρνάει γύρω γύρω έτσι..

Εδώ η Α δείχνει την κατακόρυφη κινούμενη πλευρά του ορθογωνίου και εξηγεί ότι καθώς γυρίζει σχηματίζεται ο φλοιός του στερεού.

Μ : Α τώρα το κατάλαβα!! Σα τα κουτιά αυτά για το γάλα που είναι κυλινδρικά!

Ε : Τα αλουμινένια κουτιά με το γάλα λες ε;

Μ : Ναι!

Ε : Εύστοχη παρατήρηση!

Το παραπάνω απόσπασμα είναι πολύ πλούσιο σε πληροφορίες. Σε αυτό φαίνεται αρχικά ότι οι μαθητές προχωρούν στην αναγνώριση του στερεού «χτίζοντας» το βήμα – βήμα, προχωρώντας από το μέρος στο όλο, δηλαδή από τη βάση σε ολόκληρο το στερεό. Αναγνωρίζουν δηλαδή το στερεό ανά μονάδες και μετά το συνθέτουν στην ολότητα του. Βέβαια, η χρήση της αφής παίζει σημαντικό ρόλο για την αναγνώριση των χαρακτηριστικών των μονάδων του στερεού (πχ. Κυκλική βάση) και τελικά ολόκληρού του στερεού. Τέλος, παρατηρούμε ότι ο μαθητής Μ μπορεί αρχικά να μην αποκαλεί το στερεό που σχηματίζεται με την τυπική του ονομασία, ωστόσο φαίνεται ότι έχει καταλάβει πιο στερεό δημιουργείται από την παρομοίωση που χρησιμοποιεί, από την καθημερινή του εμπειρία, για να περιγράψει το σχήμα του. Αυτό όμως δεν είναι κάτι που κάνει μόνο εδώ. Και στην περίπτωση του κώνου, αναγνωρίζει το σχήμα του παρομοιάζοντας το με τους πορτοκαλί κώνους που χρησιμοποιεί στις προπονήσεις που κάνει στο ποδόσφαιρο.

Η σύνδεση όμως των ιδιοτήτων του σχήματος με την οπτικοποίηση του φαίνεται έντονα και στα παρακάτω αποσπάσματα :

- Για τον κώνο

Ε : Α, εσύ πως κατάλαβες ότι δημιουργεί κώνο; Για παράδειγμα, γιατί δε δημιουργεί κύλινδρο;

Α : Γιατί έτσι όπως το γυρνάμε, δε θα μπορούσε..

Μ : Αν αυτό εδώ ήταν τετράγωνο, δε θα δημιουργούσε κύλινδρο;

Ε : Ναι. Άρα τώρα, τί είναι αυτό που το κάνει να μη φτιάχνει κύλινδρο, αλλά κώνο;

Μ : Αυτή εδώ η γωνία. (Μου δείχνει την πάνω γωνία)

Α : Η γωνία πάνω.

Μ : Και η υποτείνουσα

Ε : Τι εννοείς με αυτό Μ; Τι είναι δηλαδή αυτό που συμβαίνει κατά μήκος της υποτείνουσας όσο την ανεβαίνουμε;

Μ : Ε το τρίγωνο στενεύει

Ε : Και;

Μ : Ε, δε θα γινόταν να κάνει κύλινδρο.

Α : Δε ξέρω πώς να σου το εξηγήσω..

- Για τη σφαίρα

Ε : Α, τώρα ο Μ περιστρέφει τον κύκλο σαν ρόδα αυτοκινήτου.

Μ : Σαν αυτοκινήτου. Ακριβώς!

Α : Αα οκ. Μα..δώσ' του καμιά κλίση.

Η παρατήρηση αυτή της Α, μας οδηγεί στο να σκεφτούμε ότι η Α έχει εξαρχής σκεφτεί πως αν ο κύκλος κινείται με άξονα περιστροφής κάποιον παράλληλο προς το γραφείο δεν είναι δυνατό να δημιουργηθεί κάποιο στερεό. Φυσικά η Α μπορεί να μην έκανε αυτό το συνειρμό αλλά η παρότρυνση της προς το Μ, μαρτυρά μια τέτοια διαισθητική αντίληψη. Στην ουσία, ο μόνος τρόπος να δημιουργηθεί γνωστό στερεό από κύκλο, δηλαδή σφαίρα,

όταν αυτός είναι τοποθετημένος κατακόρυφα στο γραφείο, είναι να θεωρήσουμε άξονα περιστροφής επίσης κατακόρυφο σε σχέση με το γραφείο και συγκεκριμένα την κατακόρυφη διάμετρο του κύκλου. Η παρατήρηση λοιπόν που έκανε η Α είναι ένα πρώτο βήμα προς αυτή τη συνειδητοποίηση.

Α : Κάνε το γύρω – γύρω. Γύρω από τον εαυτό του.

Η δεύτερη αυτή παρατήρηση της Α είναι δείχνει μια πιο ολκληρωμένη αντίληψη του τρόπου περιστροφής που θα δημιουργήσει στερεό. Η Α κατάφερε να περάσει άμεσα και χωρίς βοήθεια από το ένα βήμα στο άλλο. Μάλιστα, είναι σημαντικό να πούμε ότι όλα αυτά που λέει η Α, τα λέει χωρίς να έχει απτική επαφή με το σχήμα. Το γεγονός αυτό μας δίνει το δικαίωμα να υποστηρίξουμε ότι η Α έχει έντονα ανεπτυγμένη τη μέθοδο της οπτικοποίησης. Αν σκεφτούμε ότι είναι ένα παιδί χωρίς καθόλου οπτικά ερεθίσματα (μιας και είναι εκ γενετής τυφλή), για μας φαντάζει σχεδόν αδύνατο το να μπορεί όχι μόνο να δημιουργεί με τη φαντασία του εικόνες που γεννιούνται μέσα από άλλες (όπως η εικόνα της σφαίρας που γεννιέται μέσα από την περιστροφή της εικόνας του κύκλου) , αλλά ακόμα και το γεγονός ότι μπορεί και αντιλαμβάνεται με τόση ευκολία τους άξονες περιστροφής των σχημάτων ή την κατεύθυνση περιστροφής τους! Οι περισσότεροι από εμάς έχουν παίξει με γιο-γιο, σβούρες, παιχνίδια που αποτελούνται από περιστρεφόμενα σχήματα, τα οποία γυρνούν γύρω από τον κατακόρυφο άξονα τους με μεγάλη ταχύτητα δημιουργώντας στο μάτι την ψευδαίσθηση της δημιουργίας ενός στερεού σώματος, λόγω της αδυναμίας του ματιού να αντιληφθεί ως διαφορετικές, εικόνες που εναλλάσσονται με τόσο μεγάλη ταχύτητα (κάτι σαν αυτό που συμβαίνει με τα σκίτσα των κινούμενων σχεδίων που παρακολουθούν τα παιδιά στην τηλεόραση). Για όλους όσους έχουν τέτοιου είδους οπτικά ερεθίσματα, η δημιουργία 3D σχημάτων από την περιστροφή 2D σχημάτων, ίσως ήταν ένα δύσκολο ερώτημα, αλλά με σκέψη και ενασχόληση αρκετοί θα μπορούσαν να το απαντήσουν χωρίς τρομερή δυσκολία. Κάποιοι άλλοι μάλιστα ίσως και να το απαντούσαν αμέσως. Τι είναι όμως αυτό που κάνει ένα παιδί που δεν έχει δει ποτέ κάτι τέτοιο να μπορεί με τόση ευκολία να αντιλαμβάνεται καταστάσεις που ακόμα και ένας βλέπων θα δυσκολευόταν να αναγνωρίσει; Για τους παραπάνω λόγους, θεωρούμε πως αυτό που δίνει στην Α αυτή τη δυνατότητα είναι η πολύ καλά ανεπτυγμένη απτική της αντίληψη, αλλά και η ανέλπιστη ικανότητα της να οπτικοποιεί τα αντικείμενα που πιάνει, τις ιδιότητες τους αλλά και τις δυνατότητες που αυτά έχουν κινούμενα στο χώρο.

.....

Α : Αν το περιστρέψεις έτσι γύρω – γύρω αυτό το σημείο δημιουργεί έναν κύκλο.

Εδώ η Α μου δείχνει ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου το οποίο είναι λίγο πιο κάτω από ένα από τα δύο άκρα της οριζόντιας διαμέτρου.

Ε : Πούντος ο κύκλος; Για δείξε μου με το χέρι σου.

Η Α μου δείχνει τον κύκλο που δημιουργείται από την κίνηση του προαναφερθέντος σημείου, περιστρέφοντας το σχήμα. Στη συνέχεια πιάνω το χέρι της και της δείχνω ένα άλλο σημείο, λίγο πιο πάνω από αυτό που είχε επιλέξει εκείνη.

Ε : Μάλιστα. Το σημείο αυτό που είναι λίγο πιο πάνω, π.χ. εδώ που κρατάς, στη μέση;

Α : Κι αυτό φτιάχνει έναν κύκλο

Ε : Και αυτό το σημείο εδώ που είναι πιο πάνω ακόμα;

Α : Πάλι έναν κύκλο.

Μ : Πολλοί κύκλοι μαζί, ο ένας πάνω απ τον άλλο..;

Α : Λες να δημιουργεί κώνο; Όχι κώνο δεν κάνει.

Μ : Όχι δεν είναι κώνος. Υπάρχει κάποιο σχήμα που να μοιάζει με κυκλάκια;

Α : Δε ξέρω παιδιά…

Ε : Ωραία, ας σκεφτούμε το εξής. Αρχίζοντας από κάτω – κάτω, μου λες κύκλος και από πάνω άλλος κύκλος και κύκλος και κύκλος και κύκλος και κάποια στιγμή φτάνουμε και στο άκρο της οριζόντιας διαμέτρου του κύκλου. Εκεί τι γίνεται;

Α , Μ : Πάλι κύκλος!

Ε : Και όσο προχωράμε σε σημεία πάνω από το σημείο της διαμέτρου τι συμβαίνει με τους κύκλους;

Α : Στενεύουν!

Ε : Και αν προχωρήσουμε κάτω από αυτό;

Μ : Πάλι στενεύουν.. Στο κέντρο είναι ο πιο μεγάλος. Είναι σαν τη Γη!!!

Α : Αυτό σκέφτηκα κι εγώ. Σαν τη Γη!

Εδώ παρατηρούμε δύο ακόμα πολύ ενδιαφέροντα σημεία. Οι μαθητές «χτίζουν» και πάλι τη σφαίρα χρησιμοποιώντας 2D/3D μονάδες, δηλαδή άπειρους οριζόντιους κύκλους αυξομειούμενης διαμέτρου που τελικά δημιουργούν τη σφαίρα. Αυτή είναι μία παραγωγική σκέψη που δημιουργείται μέσω της διαδικασίας οπτικοποίησης της σφαίρας και η οποία δεν είναι συνηθισμένη στους βλέποντες μαθητές. Μάλιστα, το σημαντικό είναι ότι και ο μαθητής Β, όπως θα δούμε παρακάτω κάνει έναν παρόμοιο συλλογισμό, χρησιμοποιώντας κατακόρυφους κύκλους και ημικύκλια. Επιπλέον, στις δύο τελευταίες γραμμές του διαλόγου, παρουσιάζεται για μία ακόμη φορά το φαινόμενο της χρήσης παρομοιώσεων για την περιγραφή ενός σχήματος.

Από τα παραπάνω, γίνεται φανερή η αλληλεπίδραση των απτικών στρατηγικών επίλυσης και της γλώσσας, με την αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων και τελικά της οπτικοποίησης αυτών.

3.2.2.β Μαθητής Β

Ο μαθητής Β, όπως έγινε και με την ομάδα 1, περνάει από το μέρος στο όλο, του γεωμετρικού σχήματος. Ωστόσο, τα χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν το μαθητή αυτό από τα δύο προηγούμενα παιδιά είναι ότι δε χρησιμοποιεί τόσο έντονα τις χειρονομίες και σχεδόν καθόλου παρομοιώσεις στο λόγο του και κυρίως ο τρόπος με τον οποίο οπτικοποιεί τα στερεά. Ο Β συνηθίζει να περιστρέφει συνέχεια το επίπεδο σχήμα, χωρίς να σταματάει, κάτι που δεν έκαναν σε τόσο έντονο βαθμό οι μαθητές Μ και Α. Φαίνεται πως η συνεχής επανάληψη της περιστροφής τον βοηθάει να αντιληφθεί καλύτερα το τι συμβαίνει τόσο με το σχήμα που κρατά όσο και με το άλλο, που δημιουργείται καθώς το πρώτο περιστρέφεται.

Παραθέτουμε τα παρακάτω αποσπάσματα στα οποία φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο ο Β οπτικοποιεί τα τρία στερεά που δημιουργούνται και στη συνέχεια τα αναλύουμε :

- <u>Για τον κύλινδρο</u>

Β : Όταν είναι όρθιο, μπορείς να φτιάξεις ένα στερεό σχήμα.

Ε : Πώς;

Β : Άμα είναι κι άλλο ορθογώνιο από δω, κι άλλο από δω, κι άλλο από δω..

Εδώ ο Β μου δείχνει πώς θα μπορούσαν να υπάρχουν πανομοιότυπα ορθογώνια το ένα πίσω από το άλλο με κοινή τη μία πλευρά τους, δηλαδή σε κυκλική σειρά.

Ε : Πολύ ωραία ιδέα. Περιστρέφοντας το λοιπόν εσύ φτιάχνεις μια τέτοια εικόνα; Τι είναι αυτό που κρατάς σταθερό καθώς το γυρίζεις και που σε κάνει να φτιάχνεις την εικόνα αυτή;

Β : Κρατάς σταθερή αυτή την πλευρά..

Εδώ ο Β μου δείχνει ότι θα κρατήσει σταθερή την πλευρά που πριν θεωρούσε κοινή για τα πολλά παραλληλόγραμμα που ήταν το ένα πίσω από το άλλο σε κυκλική σειρά. Δηλαδή τη μία από τις δύο κατακόρυφες πλευρές του ορθ. παραλληλογράμμου.

Β : Και στρίβεις την άλλη..έτσι..

Β : Κάνει..σαν κύκλο. Όχι κύκλο.. Εεεμμ.

Ε : Είπες για κύκλο.. Που τον είδες τον κύκλο;

Β : Όπως το στρίβεις γύρω γύρω, σχηματίζεται ένας κύκλος.

Ε : Πού; Μπορείς να μου δείξεις με το χέρι σου;

Β : Ναι.. Εδώ

Ο Β μου δείχνει με το χέρι του ότι ο κύκλος σχηματίζεται πάνω στο τραπέζι από την περιστροφή της βάσης του παραλληλογράμμου.

Ε : Α πάνω στο τραπέζι.

Β : Ναι

Ε : Άρα αυτό τι σημαίνει για τη βάση του στερεού σου;

Β : Είναι κυκλική.. Άρα είναι ένας.. Πώς το λένε αυτό το σχήμα..

Ε : Μπορείς να μου το περιγράψεις;

Β : Η βάση κύκλος και γύρω-γύρω.. ορθογώνιο.

Ε : Μου μιλάς για το ανάπτυγμα του τώρα.. Ότι αν το ανοίξεις θα είναι ορθογώνιο. Ε;

Β : Ναι. Και από πάνω άλλος ένας κύκλος.

Ο Β βρήκε μόνος του τον άξονα περιστροφής του σχήματος, και αναγνώρισε με μεγάλη ευκολία το σχήμα. Τα βασικά χαρακτηριστικά του Β είναι τα εξής 3 :

1) Περιέστρεφε το σχήμα καθ όλη τη διάρκεια της διαδικασίας χωρίς να σταματά.
2) Ξεκίνησε και εκείνος, όπως και οι Α και Μ , από την αναγνώριση του σχήματος της βάσης του στερεού και μετά πέρασε στο υπόλοιπο σώμα του. Αυτός ο τρόπος ίσως βοηθάει τους μαθητές γιατί είναι σχετικά εύκολο να περιορίσεις τις επιλογές σου ξεκινώντας από τη βάση του στερεού. Επίσης, η βάση είναι πάντα ένα επίπεδο σχήμα, εύκολα αναγνωρίσιμο. Αντίθετα το υπόλοιπο σώμα του στερεού (το «γύρω γύρω» όπως το έλεγαν τα παιδιά) έχει ύψος, κάτι που ίσως δυσκολεύει τους μαθητές.
3) Οπτικοποιεί τον κύλινδρο ως μία σειρά από άπειρα πανομοιότυπα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, σε μια κυκλική σειρά με κοινή πλευρά τον άξονα περιστροφής, δηλαδή τη μία κατακόρυφη πλευρά του περιστρεφόμενου σχήματος. Φαίνεται πως για τον Β αυτός είναι ο τρόπος ώστε να μπορεί να φτιάχνει την εικόνα του 3D σχήματος. Φαντάζεται άπειρα ίδια σχήματα, το ένα πίσω από το άλλο σε κυκλική σειρά. Η εικόνα αυτή θα μπορούσε να του δημιουργείται λόγω του τρόπου με τον οποίο συνηθίζει να συμπεριφέρεται στο εκάστοτε επίπεδο σχήμα που του δίνεται˙ το περιστρέφει συνεχώς, χωρίς να σταματάει. Μία τέτοια διαδικασία βοηθάει στο να δει κάποιος το σχήμα κατά τη δημιουργία του πολλές φορές και τελικά στο να συνειδητοποιήσει ότι αν είχαμε άπειρα τέτοια σχήματα το ένα πίσω από το άλλο σε κυκλική σειρά, θα μπορούσαμε τελικά να δημιουργήσουμε ένα συμπαγές στερεό. Αυτό θυμίζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές Μ και Α «έχτισαν» τη σφαίρα. Τελικά, αναγνώρισε το στερεό χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του. Η αναγνώριση του αναπτύγματος ενός στερεού συμβαίνει συνήθως αφού έχουμε την εικόνα του στερεού αυτού. Το να μιλήσει κανείς για ανάπτυγμα και στη συνέχεια να φανταστεί το σχήμα στο οποίο ανήκει είναι η αντίστροφη διαδικασία και πιο απαιτητική για τους βλέποντες μαθητές.

- <u>Για τον κώνο</u>

Β : Τότε σχηματίζεται πάλι ένας κύκλος στο δάπεδο.

…

Ε : Και τι συμβαίνει με το σχήμα σου καθώς το κοιτάς από πάνω προς τα κάτω;

Β : Εεε ανοίγει κάπως.. Είναι σα να είναι πολλά τρίγωνα στη σειρά. Το ένα πίσω από το άλλο.

Εδώ ο Β, όπως και στην περίπτωση του ορθ. παραλληλογράμμου δημιουργεί την εικόνα του στερεού φανταζόμενος πολλά τρίγωνα το ένα πίσω από το άλλο, σε κυκλική σειρά.

……

Ε : Μπράβο! Πολύ σωστά. Τι είναι αυτό που τελικά σε έκανε να πεις ότι δεν είναι κύλινδρος. Κάτι που είχες σκεφτεί στην αρχή.

Β: Γιατί έκανε «μύτη» πάνω – πάνω. Δεν ήταν κύκλος. Ενώ ο κύλινδρος έκανε κύκλο.

- <u>Για τη σφαίρα</u>

Β : Μμμ, τώρα δεν είναι εύκολο να βρεις άξονα γιατί είναι και συμμετρικός ο κύκλος.

Εδώ ο Β λέει κάτι πολύ ενδιαφέρον. Παρατηρεί ότι ο άξονας περιστροφής δε μπορεί να βρεθεί τόσο εύκολα όσο στην περίπτωση των δύο άλλων σχημάτων γιατί ο κύκλος είναι συμμετρικός. Κάθε κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας, τις διαμέτρους του. Φυσικά μπορεί το ορθ. τρίγωνο να μην ήταν συμμετρικό ενώ το ορθ. παραλληλόγραμμο ήταν. Όμως, στην περίπτωση του κύκλου η συμμετρία είναι τόσο προφανής και σημαντική, σε σημείο που δε μας επιτρέπει τη δημιουργία κάποιου γνωστού στερεού με άξονα περιστροφής που περνά από κάποια «άκρη» του σχήματος, όπως συμβαίνει π.χ. με το ορθ. παραλ/μο , όπου ως άξονα περιστροφής θεωρήσαμε τη μία κατακόρυφη πλευρά του – η οποία κατά κάποιο τρόπο αποτελεί ένα άκρο/όριο του σχήματος. Αυτός ίσως είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται, να βρουν το στερεό που σχηματίζει η περιστροφή ενός κύκλου, πολύ περισσότερο απ ότι στην περίπτωση του ορθ. παραλ/μου ή του ορθ. τριγώνου.

…..

Ε : Οκ. Όπως το γυρίζεις γύρω – γύρω..;

Β : Ένα.. Για ημικύκλιο μου κάνει.. Κάπως. Όχι ακριβώς κύκλος.

Εδώ ο Β αρχίζει να αντιλαμβάνεται το σχήμα που δημιουργείται. Το πρώτο που σκέφτεται είναι ότι δημιουργούνται ημικύκλια. Αυτή είναι μία πολύ φυσιολογική σκέψη, αν

παρατηρήσει κανείς ότι, από τη στιγμή που ο άξονας περιστροφής είναι η κατακόρυφη διάμετρος, περιστρέφοντας τον κύκλο γύρω από αυτήν θα δημιουργούνται εκατέρωθεν της αντιδιαμετρικά ημικύκλια, τα οποία αν τα δει κανείς ενωμένα όντως αποτελούν κύκλους τον έναν πίσω από τον άλλον σε κυκλική σειρά τεμνόμενους στη διάμετρο τους.

Β : Εμφανίζονται πολλοί κύκλοι μαζί..

Για ακόμη μία φορά λοιπόν, ο μαθητής Β μιλάει για αλληλουχία ίδιων σχημάτων σε σειρά με στόχο τη δημιουργία ενός στερεού.

Ε : Τι εννοείς; Όπως ήταν πριν τα τρίγωνα; Που ήταν σε μια κυκλική σειρά το ένα πίσω απ το άλλο;

Β : Όχι ακριβώς.. Γιατί ο ένας πέφτει πάνω στον άλλον άμα το κάνουμε όπως ήταν στα τρίγωνα. Αα, ημικύκλια!

….

Ε : Οκ. Ο κύκλος είναι επίπεδο σχήμα. Το στερεό που μοιάζει με κύκλο, δε το λέμε κύκλο. Θυμάσαι πώς το λένε;

Β : Δε θυμάμαι..

Ε : Ωραία ας το δούμε με ένα παράδειγμα. Στην καθημερινή σου ζωή τι έχει τέτοιο σχήμα;

Β : Ένα μήλο..Αυγό. Όχι αυγό.. Αυτό είναι λίγο πατικωμένο.

Ε : Οκ.. Άλλο;

Β : Μμμ.. μια μπάλα!!

Ε : Πολύ σωστά! Η Γη;

Β : Και βέβαια!

Ε : Πολύ καλά! Η εικόνα που έχεις φτιάξει για το στερεό που δημιουργείται είναι πολύ σωστή. Δε θυμάσαι ακόμα το όνομα;

Β : Χαχαχαχα όχι!

Ε : Εντάξει. Δε πειράζει.

Β : Α! Σφαίρα!! Χαχαχαχα

Τέλος, στις τελευταίες γραμμές φαίνεται και πάλι ο βοηθητικός ρόλος που μπορούν να παίξουν οι παρομοιώσεις στη λεκτική έκφραση ενός μαθητή στον τομέα της γεωμετρίας.

3.2.2.γ Ομάδα 2 : Μαθήτριες Δ και Τ

Οι μαθήτριες Δ και Τ ξεκινούν με την περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Όπως και στις προηγούμενες δύο περιπτώσεις, έτσι κι εδώ οι μαθήτριες ξεκινούν αναγνωρίζοντας τη βάση του κυλίνδρου (2D/3D) και στη συνέχεια περνούν από την αναγνώριση του μέρους στην αναγνώριση ολόκληρου του στερεού. Σε γενικές γραμμές ο τρόπος σκέψης τους μοιάζει με αυτόν του μαθητή Β. Τα διαφορετικά στοιχεία, από την άποψη της στρατηγικής που ακολουθήθηκε, που προέκυψαν από τις δύο αυτές μαθήτριες φαίνονται μέσα από τα παρακάτω αποσπάσματα στην περίπτωση του κυλίνδρου :

Τ : Άρα αφού οι δύο πλευρές είναι ίσες

Δ : Και παράλληλες!

Τ : Ναι. Και κάνουν την ίδια κίνηση, θα φτιάχνουν και οι δύο κύκλο.

Ε : Ακριβώς.

Τ : Ναι το ξέρω. Αυτό είχα σκεφτεί και γω, αλλά όπως είπα μου φαίνεται κουφό..

Σε αυτό το κομμάτι του διαλόγου παρατηρούμε τη δυσκολία των κοριτσιών να καταλάβουν τι σχήμα θα είναι το πάνω μέρος του σχήματος. Αυτό ίσως να οφείλεται στην έλλειψη «άνω φράγματος» στο σχήμα. Με τον όρο αυτό εννοώ ότι είναι πιθανό τα κορίτσια να δυσκολεύονται επειδή το σχήμα δεν ακουμπάει κάπου στην πάνω του πλευρά. Ίσως το γεγονός ότι το σχήμα δεν περιορίζεται από – ας πούμε – ένα είδος «ταβανιού» να της δυσκολεύει στο να δημιουργήσουν την εικόνα που με τόση ευκολία δημιούργησαν για το σχηματισμό της κάτω βάσης του στερεού.

Δ : Δηλαδή δημιουργείται κύλινδρος.

Ε : Σωστά Δ! Πώς το σκέφτηκες;

Δ : Βασικά είναι αυτονόητο ότι από δύο κύκλους θα φτιαχτεί ένας κύλινδρος.

Εδώ γίνεται εμφανής η σημαντικότητα που έχει για τους μαθητές με προβλήματα όρασης, το να έρχονται σε επαφή με πολλά ερεθίσματα. Για ένα παιδί με απώλεια όρασης, είναι πιθανό (όπως συνέβη και εδώ) η μόνη εικόνα στερεού με κυκλικές βάσεις να είναι ο κύλινδρος. Φυσικά και για ένα παιδί με πλήρη όραση είναι αναμενόμενο η απάντηση του να είναι παρόμοια με αυτή της Δ. Αν λοιπόν είναι σημαντική η ύπαρξη πολλών ερεθισμάτων για τους βλέποντες μαθητές, οι οποίοι συλλέγουν ερεθίσματα ακόμα και απλά περπατώντας στο δρόμο, μπορούμε να φανταστούμε πόσο ουσιώδους σημασίας είναι κάτι τέτοιο για έναν μαθητή με προβλήματα όρασης.

Ε : Μμμ..όχι απαραίτητα. Αν το σχήμα που περιστρέφαμε δεν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αλλά ένα σχήμα με καμπύλες τις κατακόρυφες πλευρές, θα είχαμε πάλι κύλινδρο;

Δ : Όχι. Αλλά εδώ είναι σαν δύο κύκλοι με διαφορά ύψους.

Ε : Δηλαδή;

Δ : Δηλαδή.. σαν δύο κύκλου που τους ενώνουν άπειρες γραμμές

Ε : Εννοείς δύο οριζόντιοι κύκλοι, ο ένας πάνω από τον άλλο..

Δ : Ναι και κάθετες γραμμές που τους ενώνουν.

Ε : Ααα αυτή είναι μια πολύ ωραία σκέψη.

Η σκέψη αυτή της Δ είναι ένας διαφορετικός τρόπος να οπτικοποιήσει κάποιος την περιστροφή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ο Β κατά την περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου «έβλεπε» τη δημιουργία ενός στερεού που ήταν σαν άπειρα ορθογώνια παραλληλόγραμμα το ένα πίσω από το άλλο, σε κυκλική σειρά με κοινή τη μία κατακόρυφη πλευρά. Εδώ η Δ φαντάζεται ότι η περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου δημιουργεί δύο κύκλους ως βάσεις οι οποίοι ενώνονται από άπειρα κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους, τα οποία μάλλον είναι δημιούργημα της μη σταθερής κατακόρυφης πλευράς του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, και που τελικά δημιουργούν τον εξωτερικό φλοιό του στερεού, το οποίο είναι κυλινδρικός. Εδώ φαίνεται πόσο σημαντική είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος και της οπτικοποίησης του.

Οι μαθήτριες αναγνώρισαν και τη δημιουργία του κώνου. Ωστόσο, δεν παρουσιάστηκαν κάποιες στρατηγικές διαφορετικές από αυτές που έχουμε ήδη δει μέσα από τα

προηγούμενα κρίσιμα συμβάντα. Για το λόγο αυτό δε θα αναφέρουμε κάποιο απόσπασμα από την ενασχόληση των μαθητριών με τον κώνο. Τέλος, οι μαθήτριες δεν κατάφεραν να αναγνωρίσουν τη δημιουργία της σφαίρας. Τις δυσκόλεψε πολύ το γεγονός της έλλειψης πλευρών στον κύκλο. Η δυσκολία αυτή όμως, όπως ειπώθηκε και παραπάνω στην ανάλυση για το μαθητή Β, είναι αναμενόμενη λόγω της φύσης του σχήματος του κύκλου.

3.3 Δραστηριότητα $2^{η}$: Αναπτύγματα Στερεών

Η $2^{η}$ δραστηριότητα ασχολείται, όπως και η πρώτη, με το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου. Η δομή της παρουσίασης που θα ακολουθήσουμε θα είναι όμοια με αυτή που ακολουθήσαμε και στην προηγούμενη δραστηριότητα.

3.3.1 Συλλογικές παρατηρήσεις

- <u>Αναφορικά με τις Γεωμετρικές έννοιες</u>

Στην δραστηριότητα αυτή εμφανίστηκε και πάλι η δυσκολία με την έννοια του στερεού. Ο μαθητής Μ και η μαθήτρια Α ανέφεραν και πάλι επίπεδα σχήματα ως στερεά, όπως π.χ. ρόμβο ή τετράγωνο.

Επίσης, και στις δύο ομάδες οι μαθητές/μαθήτριες αρχικά υποστηρίζουν ότι το ανάπτυγμα του κύβου είναι μοναδικό και ότι όπως και να διαμορφώσουμε το ανάπτυγμα δε θα δημιουργηθεί και πάλι κύβος. Στη συνέχεια όμως μέσα από μία πειραματική – κατασκευαστική διαδικασία θα δούμε ότι αυτή τους η εικασία τίθεται υπό αμφισβήτηση. Αυτό όμως θα το αναλύσουμε παρακάτω, μέσα από τα αποσπάσματα που θα παραθέσουμε.

- <u>Χρήση χειρονομιών και ο ρόλος της γλώσσας</u>

Στην παρούσα εργασία δεν παρατηρήθηκε κάποια ιδιαίτερη χρήση της γλώσσας, όπως π.χ. οι παρομοιώσεις που είδαμε στη Δραστηριότητα 1. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν έντονα τις χειρονομίες προκειμένου να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο φαντάζονταν τη

σύνθεση των στερεών, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο θα δημιουργηθεί το στερεό διπλώνοντας το ανάπτυγμα. Με τις χειρονομίες αυτές εξηγούσαν την εικασία τους για το στερεό που θα φτιαχτεί. Οι χειρονομίες όμως ήταν σε άμεση συσχέτιση με την οπτικοποίηση που έκαναν για το στερεό.

- Απτικές Στρατηγικές Επίλυσης – Οπτικοποίηση – Ιδιότητες και Σχήμα

Λόγω της φύσης της δραστηριότητας όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν έντονα την αίσθηση της αφής. Εξερεύνησαν απτικά τα αναπτύγματα σε λεπτομέρεια, εξετάζοντας κυρίως τις πλευρές των εδρών, αλλά και το εμβαδό και το σχήμα των εδρών του αναπτύγματος, καθώς και τις γωνίες του. Στη δραστηριότητα 1 η διαδικασία της οπτικοποίησης βασιζόταν κυρίως στις ιδιότητες τόσο του επίπεδου σχήματος που περιστρεφόταν, όσο και του στερεού που «γεννιόταν» από την περιστροφή και με το οποίο φυσικά δε θα μπορούσαν να έχουν απτική επαφή. Εδώ όμως η διαδικασία της οπτικοποίησης βασίζεται απόλυτα στην απτική αντίληψη των μαθητών. Αγγίζουν τα κομμάτια του αναπτύγματος, τα εξερευνούν, αναγνωρίζουν το σχήμα τους και μέσω της αφής τους δημιουργούν οπτικές εικόνες στο μυαλό τους, οι οποίες τους επιτρέπουν να φανταστούν το στερεό που δημιουργείται από το δίπλωμα του αναπτύγματος.

Στα αποσπάσματα που παραθέτουμε παρακάτω θα αναλυθούν περισσότερο τα όσα αναφέρθηκαν.

3.3.2 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 2 ανά ομάδες

3.3.2.α Ομάδα 1 : Μαθητής Μ και μαθήτρια Α

Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται οι μαθητές εξερευνούν απτικά τα αναπτύγματα :

Ε : Τι σχήματα είναι αυτά που έχει το ανάπτυγμα σου;

Μ : Τετράγωνα είναι.

Ε : Όλα είναι τετράγωνα;

Μ : Όλα. Όλα τετράγωνα είναι. 1,2,3,4,5,6.

Ε : Μάλιστα.

…

Ε (προς τη μαθήτρια Α) : Α, σκέφτηκες κάτι;

Α : Ναι. Ότι έτσι όπως το βλέπω εγώ εδώ μπροστά μου, χωρίς να το διπλώσω καθόλου, μοιάζει ένα τετράγωνο εδώ και εδώ.. υπάρχουνε κάτι τριγωνάκια!!

Ε : Ωραία, κι αν το διπλώσεις τι πιστεύεις ότι θα γίνει;

Α : Θα βγουν ένα τρίγωνο από δω, ένα από δω, ένα από δω και ένα από εδώ. *(μου δείχνει από κάθε πλευρά του τετραγώνου να υψώνεται προς τα πάνω κι από ένα τρίγωνο)*

Ε : Και τι θα δημιουργηθεί;

Α : Μμμ.. Δε μπορώ να σκεφτώ.

Εδώ ο μαθητής Μ αναγνώρισε εύκολα το σχήμα των εδρών του αναπτύγματος με την αφή. Ωστόσο, έχει μια δυσκολία στο να σκεφτεί σε τι στερεό μπορεί να αντιστοιχεί το εν λόγω ανάπτυγμα. Δεν του είναι εύκολο να το «διπλώσει» με τη φαντασία του.

Και η μαθήτρια Α αναγνωρίζει με μεγάλη ευκολία τα επιμέρους κομμάτια του αναπτύγματος. Για την Α όμως, είναι πιο εύκολο να δημιουργήσει μια εικόνα στο μυαλό της για το πώς θα είναι περίπου το δίπλωμα του αναπτύγματος. Χρησιμοποιώντας την αφή έχει δημιουργήσει μία εικόνα στο μυαλό της η οποία είναι δυναμική και της επιτρέπει να χειρίζεται το σχήμα. Έτσι, με χρήση χειρονομιών δείχνει το πώς περίπου θα γίνει το σχήμα αν αρχίσουμε να το διπλώνουμε. Παρόλα αυτά δεν καταφέρνει τελικά να καταλήξει στο σχήμα του στερεού χωρίς να το διπλώσει.

Ε : Λοιπόν εσύ Μ μου είπες πως έχεις ένα ανάπτυγμα με 6 τετράγωνα. Τίνος ανάπτυγμα θα μπορούσε να είναι αυτό;

Μ : Να το διπλώσω μία στην τύχη να φτιάξω κάτι που θα μου βγει;

Α (προς τον Μ) : Δε βγαίνει κάτι άλλο. Ένα θα βγει.

Ο μαθητής Μ δε μπορεί να αναγνωρίσει το στερεό χωρίς να το διπλώσει και ρωτάει αν μπορεί να το διπλώσει με κάποιον τυχαίο τρόπο, μήπως και καταλήξει κάπου. Εδώ η Α κάνει μία πολύ σημαντική παρατήρηση, απευθυνόμενη στην ερώτηση του Μ, λέγοντας του ότι το ανάπτυγμα θα δώσει ένα μοναδικό και συγκεκριμένο στερεό. Στην ουσία δηλαδή λέει

πως το στερεό που θα δημιουργηθεί δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο θα διπλωθεί το ανάπτυγμα, αλλά αντίθετα ότι υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος για να διπλωθεί το ανάπτυγμα παράγοντας ένα στερεό σώμα. Αυτό δείχνει ότι η Α γνωρίζει πως κάθε ανάπτυγμα αντιστοιχεί σε ένα και μόνο στερεό. Τελικά η Α αναγνωρίζει το στερεό που δημιουργείται μόνο αφού το έχει διπλώσει κανονικά, ενώ ο Μ καταφέρνει να το αναγνωρίσει πριν το διπλώσει, όχι όμως διπλώνοντας το νοερά, αλλά βασιζόμενος στην ιδιότητα του κύβου ότι έχει έξι ισεμβαδικές τετράγωνες έδρες.

Στη συνέχεια η ομάδα ασχολείται με το ανάπτυγμα του κύβου. Κάνουμε μία αλλαγή στο ανάπτυγμα, η οποία επιτρέπει και πάλι τη δημιουργία κύβου. Ρωτάω τα παιδιά αν πιστεύουν ότι και τώρα μπορεί να δημιουργηθεί κύβος ή όχι.

Ε : Ωραία. Μ δώσε και στην Α τον κύβο να τον δει. Όταν έκλεισες εσύ το ανάπτυγμα Μ, πώς ήταν περίπου αυτό;

Μ : Σαν ένας σταυρός.

Ε : Ωραία. Τώρα Α θέλω εσύ να ανοίξεις τον κύβο και να δούμε ποιο θα είναι το ανάπτυγμα του.

Α : Όπως θέλω ε;

Ε : Ναι.

Α : Το ξεδίπλωσα. Είναι ο σταυρός που έλεγε ο Μ.

Ε : Ωραία, αν εγώ τώρα κάνω αυτό.. Αλλάξω θέση σε μία έδρα..Α δες το και μετά δώσ' το και στο Μ να το δει. Τη βλέπετε την αλλαγή;

Α, Μ : Ναι

Μ : Δεν είναι πια σταυρός.

Α : Ναι, αυτό μετακινήθηκε εκεί.

Ε : Αν το διπλώσουμε ξανά θα φτιάχνει πάλι κύβο ή όχι;

Α : Όχι..

Μ : Όχι. Θα πρέπει για να κάνει κύβο να είναι απέναντι αυτά τα τετράγωνα.

Ε : Οκ. Για δίπλωσε το να δούμε.

Μ : Ωχ !!!! Φτιάχνει κύβο!!!

Α : Αλήθεια!;; Να το δω!

Μ : Δε μπορώ να καταλάβω!!! Χαχαχαχα πώς γίνεται;

Στη συνέχεια τους δίνω και πάλι ένα διαφορετικό ανάπτυγμα του κύβου και τους ρωτώ αν και πάλι θα σχηματίζεται κύβος.

Ε : Αυτό εδώ το ανάπτυγμα θα φτιάξει κύβο;

Α : Για φέρτε να το δω εγώ. Αν σηκώσουμε αυτές τις 5 πλευρές. Μμμ.. Νομίζω θα βγει και πάλι κύβος.

Μ : Για φέρε να δω κι εγώ. Να τα διπλώσω ή όχι;

Ε : Όχι ακόμα

Μ : Να φανταστώ δηλαδή. Έχω σκεφτεί έναν τρόπο. Αν διπλώσω αυτό εδώ, αυτό εδώ και αυτά εδώ.. Αλλά μένει ένα κενό..

Ε : Α, μένει ένα κενό..;

Μ : Να το δοκιμάσω;

Ε : Ναι

Α : Μπορώ να το κάνω εγώ.

Ε : Θες να το κάνεις εσύ;

Μ : Ναι κάντο.

Η Άννα διπλώνει το σχήμα.

Α : Είχε δίκιο..!!!

Ε : Είχε δίκιο ο Μ; Μένει κάποιο κενό;

Α : Ναι.. Είχε δίκιο!!

Ε : Γιατί κάποια βγαίνουν και κάποια δε βγαίνουν;

Α : Δε ξέρω..

Μ : Γιατί δεν έχει τετράγωνα απ' όλες τις πλευρές και κάποιο μένει κενό. Ενώ αν ήταν αυτό *(το τετράγωνο)* εδώ δίπλα *(εννοεί από την άλλη πλευρά του αναπτύγματος, απέναντι από εκεί που είναι το άλλο μονό τετράγωνο)* θα έβγαινε κύβος. Και άρα τώρα δεν καπακώνει από πάνω.

Από τον παραπάνω διάλογο φαίνεται ότι για τους μαθητές είναι πιο εύκολο να διπλώσουν νοερά το ανάπτυγμα μετά από την πρώτη φορά. Το σημαντικότερο όμως είναι τα δεδομένα που παίρνουμε σχετικά με τα αναπτύγματα. Αρχικά και τα δύο παιδιά είναι σίγουρα ότι δε μπορεί να δημιουργηθεί και πάλι κύβος μετά από την αλλαγή που υπέστη το ανάπτυγμα, χωρίς καν να το εξετάσουν διπλώνοντας νοερά το νέο ανάπτυγμα. Αφού το διπλώνουν ενθουσιάζονται που και πάλι δημιουργείται κύβος. Δεν το περίμεναν και αναρωτιούνται πως είναι δυνατό να συμβαίνει κάτι τέτοιο. Η αρχική τους εικασία καταρρίπτεται και η απάντηση στην απορία τους δίνεται από τους ίδιους, όταν ο Μ εξηγεί ότι δεν φτιάχνουν όλα τα αναπτύγματα που έχουν έξι τετράγωνα κύβο, αλλά μόνο αυτά που δεν αφήνουν «κενά» κάπου στο στερεό. Παρατηρούμε μάλιστα ότι στη δεύτερη αλλαγή του αναπτύγματος οι μαθητές δε βιάζονται να απαντήσουν, αλλά πρώτα σκέφτονται και προσπαθούν να διπλώσουν νοερά το ανάπτυγμα. Αυτό δείχνει ότι μέσα από μία διαδικασία δοκιμής και πειραματισμού, με τη βοήθεια μη τυπικών εργαλείων, όπως είναι οι χειρονομίες (τις οποίες έκαναν καθ' όλη τη διάρκεια που δίπλωναν νοερά τα αναπτύγματα), οδηγεί στη δημιουργία κάποιας εικασίας που αν και αποδείχθηκε, λάθος στη συνέχεια οι μαθητές την επεξεργάστηκαν και την άλλαξαν καταλήγοντας τελικά στο ερώτημα που τους απασχολούσε.

3.3.2.β Ομάδα 2 : Μαθήτριες Δ και Τ

Στο παρακάτω απόσπασμα, οι μαθήτριες έχουν διάφορα πλαστικά κομμάτια (τετράγωνα, ισόπλευρα τρίγωνα, ισοσκελή τρίγωνα, ρόμβους) τα οποία ενώνοντας θα μπορούσαν να φτιάξουν αναπτύγματα στερεών.

Ε : Λοιπόν αυτά είναι επίπεδα σχήματα, με τα οποία συναρμολογώντας τα μπορούμε να φτιάξουμε στερεά.

Δ : Εδώ εγώ κρατάω κάτι τετράγωνα. Είναι 1,2,4,6..Άρα με αυτά εύκολα θα μπορούσα να φτιάξω έναν κύβο!!

Ε : Με εντυπωσιάζεις..

Δ : Μα γιατί κυρία; Είναι αυτονόητο ότι άμα τα ενώσεις θα φτιάξεις κύβο!

Εδώ βλέπουμε τη μαθήτρια Δ, η οποία αναγνωρίζει με την αφή τα τετράγωνα που βρίσκονται μπροστά της. Χωρίς καν να προλάβουμε να τη ρωτήσουμε αν γίνεται να φτιάξουμε κάποια αναπτύγματα στερεών και τίνος στερεών θα είναι αυτά, εκείνη έχει κάνει δύο, τρεις συλλογισμούς που απαντούν με απόλυτη σαφήνεια και με σωστή μαθηματική συλλογιστική στο ερώτημα

Στη συνέχεια, οι δύο μαθήτριες επιχειρούν να κατασκευάσουν το ανάπτυγμα ενός κύβου, ξεχωριστά. Η μαθήτρια Τ, δεν τα καταφέρνει και γι' αυτό φτιάχνει πρώτα τον κύβο, τον οποίο στη συνέχεια ανοίγει. Η Δ φτιάχνει πρώτα το ανάπτυγμα, το οποίο όντως δημιουργεί κύβο. Στη συνέχεια τις βάζω να δει η μία το ανάπτυγμα που έφτιαξε η άλλη :

Ε : Δ, δες λίγο το ανάπτυγμα που έφτιαξε η Τ για τον κύβο. Δεν είναι τελείως διαφορετικό από αυτό που έφτιαξες εσύ;

Δ : Ωχ, τι είναι αυτό; Διαφέρει πολύ.

Ε : Καμία σχέση με το δικό σου, ε;

Τ : Τι είχε φτιάξει η Δ;

Ε : Αυτό.

Τ : Σταυρό ε;

Ε : Ναι.

Τ : Μμμ..

Δ : Άρα δεν υπάρχει ένας τρόπος μόνο να φτιάξεις έναν κύβο…;

Ε : Πολύ ωραία.

Τ : Υπάρχουν 6 τρόποι.

Ε : Γιατί έξι;

Δ : Επειδή είναι 6 οι έδρες..

Τ : Ναι. Προς το παρόν έχουμε βρει 2

Δ : Τρεις

Ε : Τέσσερις..

Τ : Τέσσερις;

Ε : Και δύο πριν

Τ : Αααα ναι, ναι. Πάντως πιστεύω θα είναι 6. Γιατί αν μετακινήσεις αυτές *(τις έδρες)* έξι φορές..

Στη συνέχεια κάνουμε ακόμα μερικές αλλαγές στο ανάπτυγμα, οι οποίες δημιουργούν και πάλι κύβους. Έτσι ξεπερνάμε το πλήθος των έξι αναπτυγμάτων για τα οποία μιλούσαν τα κορίτσια.

Τ : Άρα είναι πάνω από 6..

Ε : Και δε τους βρήκαμε και όλους..

Κάνοντας δοκιμές βρίσκουμε άλλους 3 ακόμη διαφορετικούς τρόπους. Τα κορίτσια σκέφτονται ότι επειδή ο κύβος έχει έξι έδρες, αυτό σημαίνει ότι και τα διαφορετικά αναπτύγματα που θα δημιουργούν κύβο, θα είναι και αυτά 6. Το επιχείρημα τους ήταν πως αν μετακινήσεις τη μία έδρα 6 φορές θα έχεις όλα τα πιθανά αναπτύγματα κύβου. Δεν σκέφτηκαν συνδυαστικές αλλαγές 2 ή και 3 εδρών ταυτόχρονα, ούτε ότι κάποιες αλλαγές μπορεί να μην παρήγαγαν καν ανάπτυγμα κύβου. Ακόμη δε σκέφτηκαν τις περιπτώσεις που μία αλλαγή μπορεί να δημιουργήσει ίδιο ανάπτυγμα με κάποιο προηγούμενο, στο οποίο η μόνη αλλαγή είναι ο προσανατολισμός. Η απάντηση αυτή όμως είναι η συνηθισμένη και αναμενόμενη αυθόρμητη απάντηση που θα δώσει ο μαθητής, προτού κάτσει να σκεφτεί τι όντως πιστεύει πως θα συμβεί. Προς το τέλος της διαδικασίας τα κορίτσια – αν και είχαν πολύ όρεξη για την όλη διαδικασία – κουράστηκαν. Δε θέλαμε να τις κουράσουμε άλλο, θέλαμε όμως να δούνε ότι, το ότι ο κύβος έχει 6 έδρες δε σημαίνει ότι και τα διαφορετικά του αναπτύγματα θα είναι τόσα. Γι’ αυτό τους ζητήσαμε να κάνουν δοκιμές. Βρήκαμε 3 ακόμη διαφορετικούς τρόπους – οι οποίοι κατέρριψαν το επιχείρημα των 6 εδρών για το πλήθος των αναπτυγμάτων – και ακόμα 2,3 τρόπους που ήταν ίδιοι με προηγούμενες φορές. Αυτό έκανε τα κορίτσια να δουν ότι δεν είναι τόσο απλό το να μετακινείς αυθαίρετα συνδυασμό εδρών.

Στο παρακάτω απόσπασμα, τα κορίτσια ασχολούνται με τα αναπτύγματα δύο πυραμίδων. Η Τ έχει το ανάπτυγμα μιας πυραμίδας με τρίγωνη βάση και η Δ μία πυραμίδα με τετράγωνη βάση. Μιλάω με την κάθε μία τους ξεχωριστά και χαμηλόφωνα προκειμένου μετά να ανταλλάξουν αναπτύγματα και να βρουν η μία της άλλης.

Ε : Μπορείτε να σκεφτείτε ποιών στερεών αναπτύγματα είναι αυτά εδώ;

Δ : Εμένα μου φαίνεται τετράγωνο

Ε : Δηλαδή αν το κλείσουμε θα φτιάξει κύβο;

Δ : Σίγουρα όχι! Έχει τριγωνάκια.

Τ : Αυτό είναι..πυραμίδα.

Ε : Τι βάση έχει η πυραμίδα αυτή;

Τ : Με τρίγωνη βάση.

Ε : Πολύ ωραία..

Δ : Α! Το βρήκα!

Ε : Για πες μου.

Δ : Πυραμίδα είναι.

Ε : Με τι βάση;

Δ : Τετράγωνη!!

Ε : Πολύ σωστά

Τα κορίτσια ανταλλάσουν αναπτύγματα και βρίσκουν με ευκολία και τα καινούρια.

Ε : Ωραία. Πώς τα καταλαβαίνετε κορίτσια; Δηλαδή, πως καταλαβαίνετε τίνος σχήματος είναι ένα ανάπτυγμα, χωρίς να το διπλώσετε;

Τ : Επειδή είχε τριγωνάκια.

Ε : Δηλαδή το ότι έχει τριγωνάκια σας βοηθάει να καταλάβετε ότι είναι πυραμίδες;

Δ : Ε ναι. Είναι τα μόνα σχήματα που έχουν στο ανάπτυγμα τους τριγωνάκια.

Στο σημείο αυτό έχει σημασία να προσέξουμε λίγο τα τελευταία σχόλια και των δύο κοριτσιών. Εδώ η Δ λέει κάτι πολύ σημαντικό για τον τρόπο που δουλεύει. «Είναι το μόνο στερεό που έχει στο ανάπτυγμα του τριγωνάκια». Και στην ουσία το ίδιο πράγμα υπονοεί και η Τ με τα λόγια της. Φαίνεται λοιπόν, ότι η ύπαρξη των τριγώνων στο ανάπτυγμα αποτελεί για τις μαθήτριες τη χαρακτηριστική ιδιότητα των αναπτυγμάτων των πυραμίδων.

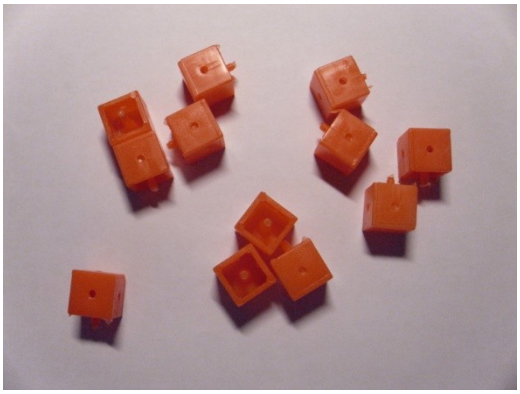
Έτσι, οι μαθήτριες δε χρειάζεται να διπλώσουν νοερά το ανάπτυγμα για να αναγνωρίσουν σε ποιο στερεό ανήκει, αλλά βασίζονται αποκλειστικά σε δύο ιδιότητες : στην ύπαρξη των τριγωνικών εδρών και στο σχήμα της βάσης (τρίγωνο, τετράγωνο). Η διαδικασία αυτή είναι διαφορετική από τη διαδικασία που είχε ακολουθήσει η μαθήτρια Α για αναγνωρίσει το ανάπτυγμα της πυραμίδας με τετράγωνη βάση. Η Α δεν είχε καταφέρει να αναγνωρίσει ότι πρόκειται για πυραμίδα, πριν διπλώσει κανονικά το ανάπτυγμα. Το γεγονός αυτό ίσως δείχνει ότι δεν έχουν όλοι οι μαθητές τον ίδιο τρόπο να αντιλαμβάνονται τα σχήματα. Και οι τρεις μαθήτριες αναγνώριζαν ιδιότητες του σχήματος που αφορούσαν επιμέρους στοιχεία του (τις έδρες, 2D/3D), ωστόσο ενώ για τις Δ και Τ αυτές αποτελούσαν καθοριστικό παράγοντα για το στερεό, κάτι που δεν συνέβαινε για την Α.

3.4 Δραστηριότητα 3η : Κυβάκια και Εμβαδόν

Η 3η δραστηριότητα σχετίζεται με το πέρασμα από τη γεωμετρία του χώρου (3D) στη γεωμετρία του επιπέδου (2D). Με τη δραστηριότητα αυτή ασχολήθηκε μόνο η ομάδα 1 (δηλαδή ο μαθητής Μ και η μαθήτρια Α). Για το λόγο αυτό η δομή της ανάλυσης δε θα είναι όπως στις δραστηριότητες 1 και 2, αλλά θα γίνει μέσω της ανάλυσης των κρίσιμων συμβάντων.

3.4.1 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 3 για την Ομάδα 1 (Μαθητής Μ και μαθήτρια Α)

Ξεκινώντας τη δραστηριότητα αυτή με την ομάδα 1, δόθηκαν στους μαθητές κυβάκια και τους ζητήθηκε να τα αναγνωρίσουν :



Ε : Αρχικά παιδιά θέλω να μου πείτε τι σχήμα είναι αυτά; *(τα αντικείμενα πάνω στο τραπέζι)* Από τη μία τους πλευρά έχουν μία τρύπα με ένα καρφάκι, για να μπορούν να καρφώνονται. Αλλά;..

Μ : Αυτά είναι όλα σα ζάρια..Τι σχήμα είναι αυτό…;

Ε : Μμμ.. Τι σχήμα έχει ένα ζάρι;

Α : Να το πω;

Μ : Πες το!

Ε : Για πες μας..

Α : Τετράγωνο

Ε : Ωραία.. Το τετράγωνο είναι..

Α : Ναι, βασικά δεν είναι τετράγωνο..

Μ : Εξάγωνο!!

Α : Όχι ρε..

Ε : Κατ' αρχάς, το ζάρι τι είναι; Είναι επίπεδο σχήμα ή στερεό;

Μ,Α : Στερεό

Ε : Άρα, ένα στερεό που «μοιάζει» με τετράγωνο, δε το λέμε τετράγωνο..

Α : Ναι..! το λέμε κύβο!

Ε : Αχα.. Και τι ιδιότητες έχει ο κύβος; Πώς καταλάβατε δηλαδή ότι είναι κύβος;

Α : Γιατί είναι στερεό και έχει… *(σκέφτεται για 2-3 δευτερόλεπτα)* …έξι μμμμ…

Ε : Έδρες;

Α : Μμμ..

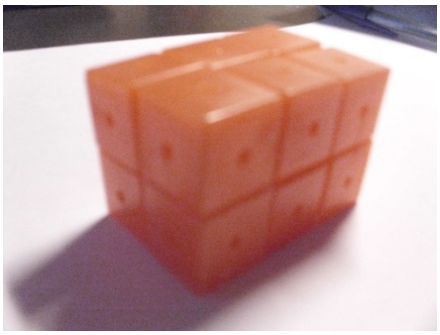
Ε : Πλευρές;

Α : Έδρες, έδρες!! Και αυτή, αυτή, αυτή και αυτή είναι ίσες και αυτή με αυτή ίσες.. Αλλά τότε.. όχι. Όλες είναι ίσες!

Παρατηρούμε ότι και πάλι οι μαθητές χρησιμοποιούν μία παρομοίωση προκειμένου να περιγράψουν το σχήμα των αντικειμένων που τους έχουν δοθεί. Παρομοιάζουν τα κυβάκια με ζάρια, ένα αντικείμενο γνωστό από την καθημερινότητα τους. Αυτό τους βοηθάει να δείξουν ότι έχουν καταλάβει το σχήμα του στερεού παρόλο που δε θυμούνται την τυπική του ονομασία. Τελικά, μέσω της παρομοίωσης αυτής καταφέρνουν να φτάσουν και στην τυπική μαθηματική ονομασία του στερεού.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό πρόβλημα που εμφανίζεται και εδώ είναι αυτό της σύγχυσης των μαθητών μεταξύ επίπεδων και στερεών σωμάτων. Οι μαθητές εδώ μπερδεύουν την ονομασία του στερεού σχήματος, με αυτήν του σχήματος της έδρας του. Το ίδιο συμβαίνει όμως ακόμα και με τα στοιχεία του στερεού. Παρόλο που μιλούν για έδρες μπερδεύονται και τις αναφέρουν ως πλευρές.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να πάρουν 12 κυβάκια και να φτιάξουν με αυτά ένα στερεό γνωστού σχήματος. Η Α φτιάχνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 3, πλάτος 2 και ύψος 2 μονάδες.



Τώρα τους ζητείται να σκεφτούν ότι τα κυβάκια που έχουν είναι γλυκά και ότι θέλουμε να τα δομήσουμε με έναν τέτοιο τρόπο ώστε αν θέλουμε να τα τυλίξουμε σαν δώρο, να χρησιμοποιήσουμε το ελάχιστο χαρτί περιτυλίγματος που μπορούμε. Οι μαθητές καταλήγουν ότι πρέπει να μετρήσουν το εμβαδό της επιφάνειας του στερεού και όσο πιο μικρή είναι η επιφάνεια, τόσο λιγότερο χαρτί θα χρειαζόμαστε.

> Ε : Ωραία.. Σκεφτείτε ότι αυτό *(το στερεό)* είναι ένα δώρο. Πες τε ότι τα κυβάκια του στερεού είναι γλυκά. Ωραία;
>
> Μ : Ναι
>
> Ε : Τα βάζουμε λοιπόν το ένα πάνω στο άλλο με κάποιον τρόπο, όπως κάνατε και σεις εδώ τώρα, και θέλουμε να τα τυλίξουμε. Αλλά επειδή δεν έχουμε πολύ χαρτί

περιτυλίγματος, θέλουμε να τα βάλουμε με έναν τέτοιο τρόπο ώστε να τα τυλίξουμε με το λιγότερο δυνατό χαρτί.

Σιωπή για μερικά δευτερόλεπτα.

Ε : Τι σημαίνει να χρησιμοποιήσω το λιγότερο δυνατό χαρτί;

Μ : Σε χαρτί, τι χαρτί δηλαδή;

Ε : Σε χαρτί περιτυλίγματος. Σκέψου ότι θέλεις να το τυλίξεις τύπου δώρο.

Μ : Ωραία.. Είναι εύκολο, το βρήκα! Εγώ άμα ήθελα να τα τυλίξω και να χάλαγα όσο δυνατό χαρτί λιγότερο, θα έβαζα το ένα πάνω στο άλλο. Γιατί άμα είναι απλωμένα πιάνουν περισσότερο χώρο. Ενώ άμα είναι το ένα πάνω στο άλλο συμφέρει περισσότερο.

Εδώ φαίνεται μία εικασία που κάνει ο μαθητής Β. Αυτό που διακρίνεται από την εικασία αυτή είναι ότι μάλλον αυτό που έχει στο μυαλό του ο Μ δεν είναι το εμβαδό τη επιφάνειας όλου του σχήματος, αλλά μόνο της βάσης του. Παρόλα αυτά δε του έγινε κάποια επεξήγηση, γιατί σκοπός ήταν αν είναι δυνατό, να το αντιληφθεί μόνος του μέσα από τη διαδικασία που ακολουθούσε.

Ε : Πολύ ωραία. Ας μετρήσουμε λοιπόν την επιφάνεια αυτού του σχήματος.

Α : 1,2,3,..,6. *(Μετράει το εμβαδόν της πάνω έδρας του στερεού)*

Μ : 12.

Α : Κάτσε ρε συ. Όχι.

Μ : Κάτσε. Είναι από 1 το καθένα και είναι 12 κυβάκια.

Α : Όχι. Είναι 6..9..10..11..ναι 12.. *(Μετράει το εμβαδό μόνο της πάνω έδρας και της βάσης του στερεού)*

Ε : Για δείξε μου ξανά πως τα μέτρησες.

Η Α τα ξαναμετράει, αλλά με κάπως άτακτη σειρά με αποτέλεσμα να μη μπορεί να συνειδητοποιήσει τι έχει μετρήσει και τι όχι.

Μ : Κάτσετε ρε παιδιά. Αν υποθέσουμε ότι το κάθε κυβάκι έχει 1 *(εννοεί το εμβαδό της βάσης του)* , τότε όλα μαζί έχουν 12.

Ε : Δεν τα έχεις όμως όλα στη σειρά. Επίσης, το εμβαδόν είναι μόνο αυτό της μιας έδρας;

Η Α συνεχίζει να προσπαθεί και να μετράει. Τώρα όμως μετράει οργανωμένα. Μια μία τις έδρες.

Μ : 48;

Α : Όχι. Εμμ.. Μισό λεπτό. 32.

Ε : 32.. Γιατί; Για εξήγησε το.

Α : Λοιπόν! Αν μετρήσουμε από κάθε κυβάκι τη κάθε μεριά, το γύρω γύρω, βγαίνει 10 κάτω, 10 πάνω, και αν μετρήσουμε και το άλλο βγαίνει και το πάνω 6 και το κάτω 6.

Εδώ η Α όταν λέει πάνω και κάτω στο γύρω-γύρω εννοεί τις πλαϊνές έδρες του στερεού , η κάθε μία εκ των οποίων αποτελείται από 2 σειρές κύβων, την πάνω και την κάτω. Όταν λέει πάνω και κάτω, εννοεί την πάνω έδρα του στερεού και τη βάση του.

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε τα εξής :

- Ο Μ δεν έχει ακόμη κατανοήσει τη διαδικασία της μέτρησης του εμβαδού. Αντί να μετράει την εξωτερική επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μετρά την εξωτερική επιφάνεια των 12 μικρών κύβων που το απαρτίζουν (Ολική επιφάνεια του ενός μικρού κύβου: 6. Οι κύβοι που απαρτίζουν το στερεό είναι 12. Άρα: 12x6=72).
- Η Α έχει κατανοήσει τη διαδικασία και αυτό που κάνει είναι να μετρά την επιφάνεια του στερεού. Ξεκινάει κάπως ανοργάνωτα, μετρώντας τα κυβάκια με τυχαία σειρά. Ωστόσο μετά από λίγο η μέθοδος της οργανώνεται και πλέον μετράει το εμβαδό της κάθε έδρας ξεχωριστά. Η Α καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας καταφέρνει να περάσει μέσα από διάφορα επίπεδα συλλογισμού μέτρησης του εμβαδού ενός στερεού, όπως τα έχει ορίσει ο Battista (2007). Ξεκινάει από το Επίπεδο 1 μετρώντας με τυχαία σειρά τα τετράγωνα που απαρτίζουν την επιφάνεια του στερεού, αλά σιγά-σιγά οργανώνει τη μέθοδο της μετρώντας με συγκεκριμένη

σειρά (επίπεδο 2). Καταφέρνει να φτάσει μέχρι και το επίπεδο 4, έχοντας πια διαμορφώσει τη στρατηγική που ακολουθεί για τη μέτρηση του εμβαδού.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να πάνε ένα βήμα παραπέρα δημιουργώντας άλλα στερεά και υπολογίζοντας τα εμβαδά τους, προκειμένου να δούμε πιο είναι αυτό με τη μικρότερη επιφάνεια.

Ε : Μάλιστα. Άρα σα σύνολο, 32. Το σημειώνω εδώ για να το θυμόμαστε. Για φτιάξε τώρα Μ ένα άλλο στερεό όπως εσύ υποστηρίζεις ότι θα έχει το μικρότερο εμβαδό. Αυτό που μου πες πριν, ότι θα τα έβαζες το ένα πάνω στο άλλο.

Μ : Ναι.. Το μικρότερο εμβαδό;

Ε : Ναι

Μ : Κατάλαβα

Ο Μ παίρνει κάποιο χρόνο για να φτιάξει το στερεό.

Ε : Εσύ πριν τι μου είπες Μ; Ότι αν τα βάλουμε το ένα πάνω στο άλλο, γιατί θα έχει μικρότερο εμβαδό;

Μ : Γιατί δε θα έχει ούτε γύρω γύρω..θα ναι το ένα πάνω στο άλλο.

Α : Ναι ε..;

Μ : Εκτός αν πάρουμε το κάθε ένα ξεχωριστά. Αλλά αυτό δε θα χει νόημα.

Ο Μ συνεχίζει να συναρμολογεί το στερεό του.

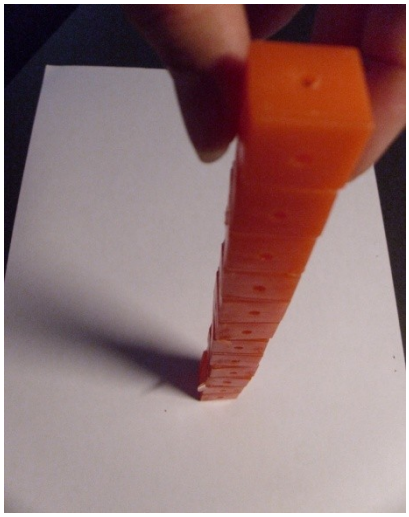
Α : Θέλουμε δηλαδή τώρα κάτι μικρότερο από 32 έτσι;

Ε : Ναι.. Αφού θέλουμε να βρούμε το μικρότερο εμβαδό.

Μετά από μερικά δευτερόλεπτα το στερεό είναι έτοιμο.

Μ : Έτοιμο.

(Το στερεό που έφτιαξε ο Μ φαίνεται στην επόμενη σελίδα)



Ε : Ωραία, μπορείς να βρεις το εμβαδόν. Α πιάσε κι εσύ να δεις τι έφτιαξε.

Α : Ναι.. Να μετρήσω εγώ το εμβαδόν;

Μ : Ναι

Α : 1,2,3,4,…,12 εντάξει;

12 κι από δώ. 24.

12 κι από δώ, 36.

Κι από δω 12, 48. Εντάξει;

Κι από δω 1..49.

Και κάτω 1.. 50!!!

Ε : Μ, γιατί πίστευες ότι θα έχει μικρότερο εμβαδόν αυτό το στερεό; Επειδή είναι το ένα πάνω το άλλο;

Μ : Ναι.

Ε : Γιατί; Όντως αυτό το στερεό έχει μικρότερο εμβαδό σε σχέση με το προηγούμενο, πού όμως;

Ο μαθητής Μ έχει μπερδευτεί και δε μπορεί να απαντήσει. Τον διευκολύνουμε κάνοντας του κάποιες επιπλέον ερωτήσεις, χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από την καθημερινή του ζωή. Αυτό το κάνουμε διότι ο Μ είναι ένας μαθητής που χρησιμοποιεί έντονα τις παρομοιώσεις στη Γεωμετρία. Συνεπώς κάτι τέτοιο μάλλον θα τον βοηθούσε, κάτι που όντως συνέβη.

Ε : Δηλαδή αν το στερεό αυτό ήταν ένα κτίριο που ήθελες να κτίσεις, τι θα κέρδιζες σε εμβαδό στο δεύτερο σχήμα σε σχέση με το πρώτο;

Μ : Θα έπιανες λιγότερο χώρο..στο πάτωμα. Και γύρω-γύρω δηλαδή. Θα τανε μακρόστενο.

Ε : Θα ήθελες δηλαδή μικρότερο οικόπεδο ας πούμε.

Μ : Ακριβώς!

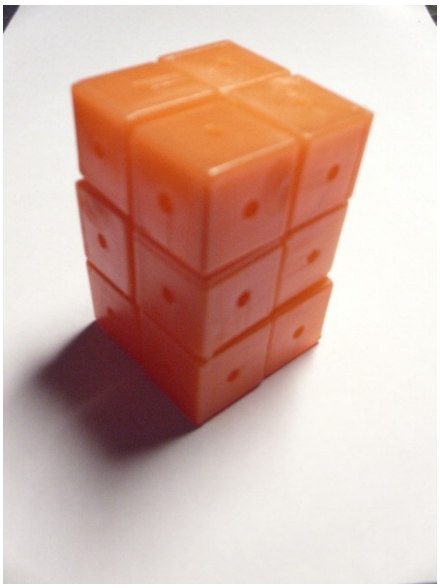
Συνεχίζοντας με τη δραστηριότητα, οι μαθητές προσπαθούν να βρουν άλλα στερεά που να έχουν εμβαδό μικρότερο από 32. Τελικά καταλήγουν ότι δεν υπάρχει τέτοιο στερεό, μέσα από δοκιμές που κάνουν. Το σημαντικό στο σημείο αυτό είναι ότι και οι δύο μαθητές φαίνεται να θεωρούν διαφορετικό ένα στερεό το οποίο στην πραγματικότητα είναι ίδιο με το προηγούμενο που είχαν φτιάξει, απλά με αλλαγμένο προσανατολισμό. Στη συνέχεια όμως καταφέρνουν να ξεπεράσουν το εμπόδιο αυτό χρησιμοποιώντας κάποιες ιδιότητες του στερεού (μήκος, πλάτος, ύψος).

Α : Δε γίνεται να είναι μικρότερο από 32..

Ε : Γιατί το λες αυτό;

Α : Μισό να δω.. Έφτιαξα αυτό..Αλλά δε νομίζω να βγαίνει.

Εδώ η Α έχει φτιάξει ένα στερεό ίδιο ακριβώς με το πρώτο που είχε φτιάξει, απλά με διαφορετικό προσανατολισμό.



Ε : Για να δούμε.

Α : 1,2,3,4,5,6,7,8, και άλλα 8, 16, κι άλλα 8, 24 δε κάνει;

Ε : Ναι

Α : Και 4..28 και 4..32. Όχι, δε βγαίνει λιγότερο.

Ε : Για να σκεφτούμε λίγο. Αυτό το σχήμα που έφτιαξες τώρα τι σχέση έχει με το πρώτο που έφτιαξες;

Α : Είναι διαφορετικό!

Ε : Γιατί είναι διαφορετικό;

Α : Μμμ…

Ε : Για να δούμε τις διαστάσεις του.

Α : Μμμ.. Είναι ίδιο.

Ε : Είναι ίδιο που απλά του έκανες μια τούμπα ε;

Α : Χαχαχαχαχα ναι. Το ύψος του είναι 3, το μήκος 2 και το πλάτος πάλι το ίδιο *(εννοεί πως και το πλάτος είναι 2)*

Μ : Να δοκιμάσω κάτι κι εγώ;

Ε : Αμέ, να δοκιμάσεις

Α : Δε βγαίνει με λιγότερο.

Μ : Τώρα δε θυμάμαι… Μπορεί να βγει και περισσότερο. Αν τα βάλουμε όλα έτσι *(Φαίνεται να εννοεί οριζόντια, το ένα δίπλα στο άλλο σε μία σειρά)* στη σειρά τι θα βγει;

Ε : Αν τα βάλεις όλα έτσι, είναι διαφορετικό από αυτό που έκανες πριν;

Μ : Όχι, όχι δεν εννοώ το ένα δίπλα στο άλλο όλα μαζί σε μια οριζόντια γραμμή. Αυτά τα 3 δίπλα και τα άλλα 3 δίπλα..

Ε : Δεν καταλαβαίνω. Για φτιάξ' το..

Μ : Ανά τρία..

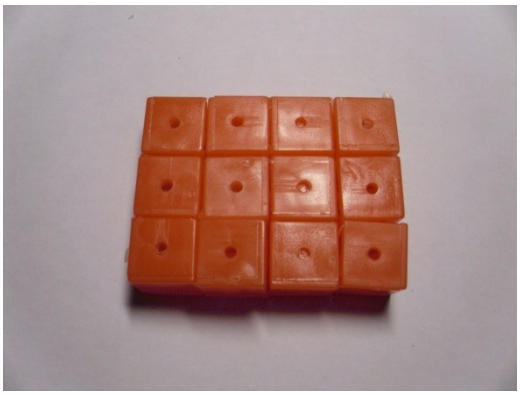
Α : Μα αυτό δε κάναμε και πριν;

Ε : Ναι αλλά..

Μ : χωρίς να υψώσω από πάνω. Όλα στο ίδιο επίπεδο. Όχι από πάνω.

Α : Πάλι το ίδιο δε θα βγει; *(εννοεί το εμβαδό)* Και νομίζω μπορεί να βγει και παραπάνω.

Ε : Για να δούμε αν βγαίνει το ίδιο.



Α : Λοιπόν, είναι 1,2,3,4,5,6,…11,12, εντάξει;

Ε, Μ : Ναι

Α : 13,14,….,37,38!

Μ : Αν το κάναμε με τέσσερα – τρία. *(εννοεί να φτιάχναμε το σχήμα με 3 τετράδες αντί για 4 τριάδες)*

Α, Μ : Το ίδιο θα βγει..

Ανακεφαλαιώνοντας με τους μαθητές, κατέληξαν στα εξής συμπεράσματα :

Ε : Άρα με 12 κυβάκια πόσα στερεά είδαμε ότι μπορούμε να φτιάξουμε;

Α : 3,4.. Ναι, και το μικρότερο που μπορούμε να βγάλουμε είναι 32..

Ε : Και εκείνο που είχες πει Μ ότι μικρότερο εμβαδό έχει όταν τα βάλουμε το ένα πάνω στο άλλο;

Μ : Χαχαχα.. Αυτό μάλλον ισχύει όταν θέλω να χτίσω ένα σπίτι αλλά είμαι άτυχος και έχω μικρό οικόπεδο!!! Χαχαχαχαχα Μπερδεύτηκα γιατί συνήθως όταν λέμε εμβαδό εννοούμε τον τόπο που πιάνει κάτω.

Όσον αφορά τον τρόπο μέτρησης του εμβαδού της επιφάνειας των στερεών, όταν τους ρωτήσαμε γιατί δε χρησιμοποίησαν τη μέθοδο που έχουν μάθει στο σχολείο (πολλαπλασιαστικό και αθροιστικό κανόνα), μας είπαν πώς δε το σκέφτηκαν αλλά ότι τελικά η μέθοδος εκείνη θα ήταν μάλλον πιο χρήσιμη και βολική αν είχαμε να μετρήσουμε στερεά που αποτελούνταν από πάρα πολλά κυβάκια διότι διαφορετικά, αν ακολουθούσαν τη μέθοδο που ακολούθησαν τώρα, μάλλον θα έχαναν το μέτρημα.

3.5 Δραστηριότητα 4^{η} : Τομές σε Στερεά – Δημιουργία επίπεδων σχημάτων

Η 4^{η} αυτή δραστηριότητα σχετίζεται με το πέρασμα από τη γεωμετρία του χώρου (3D) στη γεωμετρία του επιπέδου (2D), όπως συνέβαινε και με την 3^{η} δραστηριότητα. Με τη δραστηριότητα αυτή ασχολήθηκε μόνο ο μαθητής Β. Για το λόγο αυτό η δομή της ανάλυσης δε θα είναι όπως στις δραστηριότητες 1 και 2, αλλά θα γίνει μέσω της ανάλυσης των κρίσιμων συμβάντων. Ο μαθητής Β είναι από τους μαθητές που δε χρησιμοποιούν έντονα τις χειρονομίες ή τη τις παρομοιώσεις για να περιγράψουν αυτό που θέλουν να πουν. Αυτό φάνηκε και στην παρούσα δραστηριότητα, αφού τέτοιου είδους εκφράσεις εμφανίστηκαν σε πολύ μικρό βαθμό και αφορούσαν κυρίως χειρονομίες που περιορίστηκαν μόνο στην περιγραφή του τρόπου κοπής του πυλού.

Η απτική εξερεύνηση χρησιμοποιήθηκε από το μαθητή για την κατανόηση του σχήματος του πυλού και για των τομών, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των σχημάτων αυτών.

Η δομή της ανάλυσης της δραστηριότητας αυτής, θα γίνει μέσω της ανάλυσης των κρίσιμων συμβάντων.

3.5.1 Ανάλυση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας 4 για το μαθητή Β

Στο παρακάτω απόσπασμα ο μαθητής Β, με την βοήθεια της ερευνήτριας, δημιουργεί τομές στον πυλό, αφού αρχικά έχει αναγνωρίσει ότι έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ε : Λοιπόν, κόψε τον πυλό όπως θες εσύ.

Ο Β βάζει το μαχαίρι στον πυλό με τον τρόπο που έχει σκεφτεί. Ωστόσο, ο πυλός είναι αρκετά σκληρός για να κοπεί με πλαστικό μαχαιράκι. Γι αυτό η ερευνήτρια του ζητάει να περιγράψει πως θέλει να το κόψει προκειμένου να τον βοηθήσει.

Ε : Οκ. Έτσι το θες; Εντάξει.. Δως μου το χέρι σου. Αυτή εδώ είναι η τομή που διάλεξες να κάνουμε. Τι σχήμα έχει;

Β : Παραλληλόγραμμο;

Ε : Αχα.. Τι παραλληλόγραμμο;

Β : Ορθογώνιο.

Ε : Γιατί; Γιατί δηλαδή να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και όχι παραλληλόγραμμο σκέτο;

Β : Γιατί η μία του πλευρά με την άλλη είναι ίση *(μου δείχνει τις δύο απέναντι παράλληλες πλευρές της τομής)*

Ε : Ααα οκ. Αλλά αυτό κάνει στο σχήμα σου παραλληλόγραμμο..

Β : Γιατί οι γωνίες σχηματίζουν 90 μοίρες

Ε : Γιατί;

Β : Γιατί όπως κόψαμε εδώ αυτή τη τομή, δημιουργήθηκε αυτή η γωνία.. *(μου δείχνει τη μία από τις ορθές γωνίες της τομής)*

Ε : Δηλαδή θα μπορούσαμε να κάνουμε την τομή με κάποιον διαφορετικό τρόπο δημιουργώντας πάλι παραλληλόγραμμο αλλά που δε θα είναι ορθογώνιο;

Β : *(Με δισταγμό)* Νομίζω πως όχι.

Ε : Γιατί;

Β : Γιατί ήδη ο πυλός ήτανε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Όπως και να το κόψεις θα έχει πάντα το ίδιο σχήμα *(ορθ. παραλ/μο),* απλά σε μικρότερη μορφή.

Εδώ ο Β λέει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αλλά αυτό που εννοεί είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Εδώ για ακόμα μία φορά φαίνεται ένα από τα βασικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι τυφλοί μαθητές στο μάθημα της Γεωμετρίας, η διαφορά μεταξύ

επίπεδων και στερεών σχημάτων και οι ονομασίες τους. Βέβαια, η σύγχυση αυτή δε συναντάται μόνο στην περίπτωση των μαθητών με προβλήματα όρασης, αλλά και στην περίπτωση των βλεπόντων μαθητών.

Ε : Μάλιστα.. Αν τώρα κόψω τον πυλό έτσι, τι σχήμα έχει η τομή;

Επειδή για έναν τυφλό μαθητή είναι δύσκολο να κόψει τον πυλό όπως το φαντάζεται λόγω της σκληρότητας του πυλού και της ευκαμψίας των πλαστικών μαχαιριών, η ερευνήτρια αλλάζει τακτική και αποφασίζει να κάνει εκείνη τις τομές.

Β : Τρίγωνο!

Ε : Τί άλλη τομή θα μπορούσα να κάνω σε ένα ορθ. παραλληλόγραμμο; Θα μπορούσα να του κάνω άλλο σχήμα τομή;

Β : Μμμ.. Τρίγωνο κάναμε. Τετράγωνο!

Ε : Πώς θα μπορούσα να δημιουργήσω τετράγωνη τομή;

Β : Θα κόψουμε έτσι..

Ε : Οκ. Έτσι θα κόψεις πάλι ένα ολόκληρο κομμάτι – τύπου ψωμί – όπως στην αρχή.

Β : Όχι τότε. Θα βγει παραλ/μο.

Ε : Τότε πώς;

Β : Θα πάμε εδώ και θα κόψουμε ένα τετράγωνο!

Ε : Πώς θα το κάνουμε αυτό; Επειδή έτσι μας αρέσει; Το πρόβλημα μας είναι ότι πρέπει να το κάνουμε με μόνο μια μαχαιριά.

Β : Χαχαχαχαχα μμμ ναι..

Ε : Ωραία. Ας το σκεφτούμε ανάποδα. Το τετράγωνο..τί ιδιότητες έχει;

Β : Έχει όλες του τις πλευρές ίσες.

Ε : Πολύ σωστά. Άρα αυτό που πρέπει να κάνουμε, είναι μία τομή με 4 πλευρές ίσες.

Β : Ναι..

Όμως ο Β δυσκολεύεται αρκετά με την περίπτωση της τετράγωνης τομής και για το λόγο αυτό σταματάμε τη διαδικασία. Δεν υπήρχε λόγος να τη συνεχίσω με αυστηρή καθοδήγηση.

Στο απόσπασμα αυτό βλέπουμε κάτι πολύ ενδιαφέρον : Το συλλογιστικό πέρασμα του μαθητή Β από ένα σχήμα τριών διαστάσεων σε ένα σχήμα δύο διαστάσεων. Αυτό συμβαίνει πολύ έντονα εκεί που ο μαθητής εξηγεί για ποιο λόγο η τομή που έχει δημιουργήσει δεν είναι ένα απλό παραλληλόγραμμο, αλλά ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο σημείο αυτό ο μαθητής μεταφέρει την ιδιότητα του στερεού σε αντίστοιχη ιδιότητα του επίπεδου σχήματος. Εξηγεί ότι από τη στιγμή που το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει κάθετες έδρες, αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε παραλληλόγραμμη τομή και να πάρουμε αυτή θα είναι και ορθογώνια. Φυσικά, ο μαθητής δεν αιτιολογεί τόσο αναλυτικά και τεκμηριωμένα την απάντηση του και μπορεί ακόμα και να εκφράζεται με λάθος λέξεις καμιά φορά. Ωστόσο, αυτό που θέλει να πει είναι αυτό που γράψαμε παραπάνω και είναι ιδιαίτερα σημαντικό.

Κεφάλαιο 4 – ΣΥΜΠΕΡΆΣΜΑΤΑ

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε μια σύνοψη των αποτελεσμάτων σε σχέση με τα ερευνητικά μας ερωτήματα. Αρχικά θα παρουσιάσουμε κάποια συμπεράσματα ανά δραστηριότητα και εν συνεχεία γενικότερα συμπεράσματα που συσχετίζουν τις πτυχές όλων των δραστηριοτήτων μεταξύ τους.

4.1 Βασικά ευρήματα

Στην 1η Δραστηριότητα οι μαθητές/μαθήτριες ασχολήθηκαν με το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου. Μέσα από την περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από σταθερό άξονα, διερεύνησαν τη δημιουργία νοητών στερεών σωμάτων. Μέσα από τη διαδικασία αυτή φάνηκαν κάποιες στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές.

Πριν αναφερθούμε στις παρατηρήσεις που κάναμε σε αυτή καθεαυτή τη διαδικασία της δραστηριότητας, θα μιλήσουμε λίγο τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές/τριες αναγνώρισαν τα επίπεδα σχήματα που τους δώθηκαν, μέσω της αφής. Η μαθήτρια Τ, όπως και η Α, αναγνωρίζει εύκολα ότι το σχήμα το οποίο έχει στα χέρια της είναι ένα τρίγωνο. Ωστόσο, δυσκολεύεται να αναγνωρίσει ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο. Προσπαθούν να καταλήξει στο τι τρίγωνο είναι αυτό που της έχει δοθεί, όχι αναγνωρίζοντας το άμεσα, αλλά έμμεσα μέσω μιας διαδικασίας αποκλίσεως κάποιων πιο εύκολα αναγνωρίσιμων επιλογών (όπως οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς ή του ισόπλευρου τριγώνου). Τελικά καταλήγει ότι το τρίγωνο μάλλον θα είναι ορθογώνιο. Παρόλα αυτά, δεν έχει αναγνωρίσει κάποια ορθή γωνία στο τρίγωνο. Απλά είναι η μόνη επιλογή γνωστού τριγώνου με συγκεκριμένες ιδιότητες, η οποία της έχει απομείνει αφού έχει αποκλείσει αυτό να είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο. Από τα περιστατικά αυτά φαίνεται να είναι για τους μαθητές πιο εύκολο να αναγνωρίσουν ιδιότητες των πλευρών παρά των γωνιών ενός τριγώνου. Φαίνεται δηλαδή να είναι πιο εύκολο να αναγνωρίσουν ίσες πλευρές απ' ότι μια ορθή γωνία. Αυτό για έναν βλέποντα δεν είναι τόσο αυτονόητο. Το μήκος μιας πλευράς είναι ένα μέγεθος εύκολα μετρήσιμο για έναν τυφλό μαθητή, π.χ. το μήκος μιας πλευράς μπορεί να μετρηθεί με τα δάχτυλα. Αντίθετα, η γωνία δεν είναι δυνατό να μετρηθεί. Το μόνο που μπορεί να οδηγήσει έναν τυφλό μαθητή στο να αντιληφθεί ότι μία γωνία είναι ορθή, είναι

να καταλάβει πρώτα ότι οι πλευρές στις οποίες περιέχεται τέμνονται κάθετα στην κορυφή της γωνίας. Κάτι τέτοιο όμως απαιτεί έντονα ανεπτυγμένη αίσθηση της αφής και της απτικής αντίληψης, αλλά ίσως και κάποια πείρα/εξοικείωση με γεωμετρικά σχήματα.

Η Α είναι μία μαθήτρια της Β' Γυμνασίου με ανεπτυγμένη την αίσθηση της αφής ενώ η Τ είναι μία μαθήτρια της Β' Λυκείου στη Θεωρητική κατεύθυνση, η οποία ποτέ δεν είχε – όπως η ίδια είπε – καλή σχέση με τα μαθηματικά. Αντίθετα, ο Μ και ο Β που κατάφεραν αμέσως να αναγνωρίσουν το ορθογώνιο τρίγωνο εντοπίζοντας εξ αρχής την ορθή του γωνία, είναι μαθητές της Γ' Λυκείου που έχουν ακολουθήσει τη Θετική κατεύθυνση. Ίσως λοιπόν σε κάποιο ποσοστό η διαφορά αυτή στη δυσκολία αναγνώρισης του ορθογωνίου τριγώνου, μεταξύ των Α, Τ και Μ, Β, να οφείλεται στο ότι η απτική εμπειρία των δεύτερων σε σχέση με τις πρώτες είναι μεγαλύτερη και συνεπώς και η εξοικείωση τους με τέτοια σχήματα επίσης μεγαλύτερη. Φυσικά δύο μόνο περιπτώσεις δε μπορούν να μας οδηγήσουν σε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα. Η παραπάνω σκέψη είναι απλώς μια εικασία προς διερεύνηση. Επίσης, ας μην ξεχνάμε ότι οι Α και Τ στερούνται πλήρως οράσεως ενώ οι Μ και Β μπορούν να δουν σε κοντινή απόσταση σε κάποιο αρκετά σημαντικό ποσοστό. Μήπως λοιπόν οι μαθητές αυτοί βοηθήθηκαν και από την κάποια όραση τους, στην αναγνώριση του σχήματος; Όλα τα παραπάνω ερωτήματα φυσικά δεν είναι δυνατό να απαντηθούν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αυτό συμβαίνει κυρίως λόγω του μικρού αριθμού μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή. Αποτελούν όμως έναυσμα για περαιτέρω μελλοντική έρευνα επί του θέματος.

Η Δ είναι μία μαθήτρια της Α' Γυμνασίου. Είναι ένα χαρισματικό και ταλαντούχο παιδί στα μαθηματικά, με έντονα ανεπτυγμένη την αίσθηση της αφής αλλά και απτική αντίληψη. Δυστυχώς, δεν είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα μαθητή της Α' Γυμνασίου με προβλήματα όρασης, αλλά μια έκπληξη για τις δυνατότητες που μπορεί να έχει ένας τέτοιος άνθρωπος παρόλο που στερείται της βασικής αίσθησης (όραση) που κρατά τις απαντήσεις σε ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου, όπως οι δικές μου. Παρόλα αυτά, το να συζητάει κανείς με μία τέτοια μαθήτρια αποτελεί μία μοναδική ευκαιρία για να δει κανείς τους τρόπους με τους οποίους σκέφτονται και δρουν τυφλοί μαθητές. Και φυσικά αυτό είναι κάτι πολύ σημαντικό και ενδιαφέρον, αφού η χρήση τους μπορεί να βοηθήσει κι άλλους μαθητές να εξοικειωθούν περισσότερο και πιο εύκολα με τη Γεωμετρία. Βέβαια, η συζήτηση με ένα παιδί τόσο χαρισματικό, παρόλο το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, προκαλεί από μόνη της ευχαρίστηση και ενθουσιασμό πέρα από τα μαθηματικά.

Όσον αφορά τη διαδικασία της περιστροφής των σχημάτων, παρατηρήσαμε τον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο οι μαθητές τη διαχειρίζονταν. Κάποιοι από αυτούς

επέλεγαν να περιστρέψουν για λίγο το σχήμα και στη συνέχεια να σταματήσουν την περιστροφή και να οραματιστούν το στερεό που δημιουργούνταν, κάνοντας την περιστροφή του μία εικόνα στο μυαλό τους. Ένας άλλος μαθητής επέλεξε να περιστρέφει ενδελεχώς το σχήμα μέχρι να βρει το στερεό που δημιουργούνταν. Για το μαθητή αυτό, το σταμάτημα της περιστροφής θα τον εμπόδιζε να δημιουργήσει την εικόνα που αναφέραμε παραπάνω. Το κοινό στοιχείο σε όλες τις περιπτώσεις ήταν η απτική εξερεύνηση του νοητού στερεού που δημιουργούνταν. Όλοι οι μαθητές έπιαναν το σχήμα κατά την περιστροφή του, καθώς και το ίχνος που εκείνο άφηνε νοητά πάνω στο γραφείο σχηματίζοντας τη βάση του στερεού. Μάλλον αυτός είναι και ο λόγος που όλοι οι μαθητές ξεκίνησαν από τη βάση του στερεού. Ο διαφορετικός όμως τρόπος περιστροφής που διάλεγαν οι μαθητές είχε σαν αποτέλεσμα να οπτικοποιούν το στερεό με διαφορετικό τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι πιθανότατα ο διαφορετικός τρόπος περιστροφής ήταν που οδήγησε τους μαθητές σε διαφορετικές στρατηγικές οπτικοποίησης του στερεού, οι οποίες ήταν οι εξής :

- Κύλινδρος
    - Αναγνώριση της βάσης του στερεού. Στη συνέχεια, αναγνώριση ολόκληρου του στερεού από τη μορφή του αναπτύγματος του.
    - Άπειρα πανομοιότυπα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που βρίσκονται σε κυκλική σειρά με κοινή πλευρά, την πλευρά που χρησιμοποιούνταν ως άξονας περιστροφής.
    - Δύο οριζόντιοι κύκλοι, που ενώνονται με άπειρες κατακόρυφες γραμμές ή αλλιώς ως δύο οριζόντιοι κύκλοι με διαφορά ύψους.
- Κώνος
    - Άπειρα πανομοιότυπα ορθογώνια τρίγωνα που βρίσκονται σε κυκλική σειρά με κοινή πλευρά, την πλευρά που χρησιμοποιούνταν ως άξονας περιστροφής.
    - Σαν κύλινδρος που στενεύει προς τα πάνω και αντί για βάση έχει «μύτη».
- Σφαίρα
    - Άπειρα πανομοιότυπα κατακόρυφα ημικύκλια που βρίσκονται σε κυκλική σειρά με κοινό τμήμα, την κατακόρυφη διάμετρο που χρησιμοποιούνταν ως άξονας περιστροφής.
    - Άπειροι οριζόντιοι κύκλοι διαφορετικής διαμέτρου, ο ένας πάνω από τον άλλο. Ο κύκλος με τη μεγαλύτερη διάμετρο βρίσκεται στη «μέση», ενώ

κάτω και πάνω από αυτόν οι κύκλοι συνεχίζουν με ελαττούμενη διάμετρο.

Η κοινή συνιστώσα όλων των μαθητών/τριών στη δραστηριότητα αυτή ήταν ότι αναγνώριζαν τα στερεά που δημιουργούνταν προχωρώντας από το μέρος στο όλο. Η αίσθηση της όρασης είναι συνθετική και σφαιρική. Αυτό σημαίνει ότι κοιτώντας ένα αντικείμενο δε συνηθίζουμε να κοιτάμε ένα – ένα τα επιμέρους χαρακτηριστικά του, αλλά να το εξετάζουμε σαν ολότητα. Αντίθετα, η αίσθηση της αφής εκτελεί σταδιακή ανάλυση των όσων αισθάνεται και προχωρά από το μέρος στο όλο. Με την αφή παρατηρούμε ένα – ένα τα χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου, τα οποία μετά συνθέτουμε δημιουργώντας μία ολική εικόνα του αντικειμένου. Το φαινόμενο αυτό έγινε έντονα αντιληπτό και στη δική μας διαδικασία έρευνας. Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές ακολουθούσαν μία σταδιακή απτική διερεύνηση η οποία ακολουθούσε τη θεωρία του Duval (2011) για την αναγνώριση του σχήματος από τις μονάδες του (figural units, βλ. παράγραφο 1.1.5).

Όπως είδαμε, οι μαθητές/τριες σε κάθε στερεό αναγνώριζαν αρχικά τη βάση του και στη συνέχεια προχωρούσαν στα υπόλοιπα τμήματα του. Ακόμα και στην περίπτωση της σφαίρας, οι μαθητές/τριες ξεκίνησαν διαπιστώνοντας ότι θα δημιουργηθεί ένα στερεό με βάση ένα και μοναδικό σημείο. Η διαδικασία αυτή συμφωνεί με την άποψη του Duval, ο οποίος υποστηρίζει την τμηματική αναγνώριση ενός στερεού από τις σχηματικές του μονάδες (figural units), ενώ έρχεται σε αντίθεση με τη συνήθη διαδικασία αναγνώρισης των στερεών από μαθητές χωρίς προβλήματα όρασης, η οποία είναι περισσότερο ολιστική. Οι βλέποντες μαθητές, ακολουθούν μία ολιστική αντιληπτική προσέγγιση όταν πρόκειται να αναγνωρίσουν ένα σχήμα, εξετάζοντας το στην ολότητα του και όχι τμηματικά βασιζόμενοι στα επιμέρους στοιχεία του. Ωστόσο, σύμφωνα και με τον Duval (2011) μία μη ολιστική προσέγγιση θα βοηθούσε τους μαθητές όχι μόνο να αντιληφθούν τις ιδιότητες του εκάστοτε στερεού, αλλά και τις ιδιότητες που συνδέουν τις διαφορετικές του σχηματικές μονάδες. Φαίνεται λοιπόν ότι οι μαθητές με προβλήματα όρασης ακολουθούν μία διαδικασία αναγνώρισης ενός στερεού, μάλλον αντίστροφη από εκείνη που ακολουθούν οι βλέποντες μαθητές, και η οποία όμως μπορεί να προσφέρει στο μαθητή βαθύτερη κατανόηση και πλουσιότερη γνώση όσον αφορά τη φύση ενός γεωμετρικού σχήματος.

Τέλος, στη δραστηριότητα αυτή οι περισσότεροι χρησιμοποίησαν κάποιου είδους παρομοιώσεις με αντικείμενα της καθημερινής τους ζωής προκειμένου να περιγράψουν τα σχήματα ή κάποιες χειρονομίες, όπως αυτές που περιγράφει ο McNeill (1992). Αυτό δε συνέβη τόσο με τα επίπεδα σχήματα, όσο με τα στερεά. Ο κώνος περιγράφηκε ως χωνί,

πορτοκαλί κώνος που χρησιμοποιείται στις προπονήσεις του ποδοσφαίρου ή καπελάκι γενεθλίων. Ο κύλινδρος παρομοιάστηκε ως κουτί με γάλα και η σφαίρα ως μπάλα, γη ή στρογγυλό αυγό. Επιπλέον, οι μαθητές καθώς μιλούν για τα στερεά κάνουν κάποιες χειρονομίες οι οποίες άλλοτε περιγράφουν αυτά που λένε (*εικονικές χειρονομίες,* κατά McNeil 1992) και άλλοτε επισημαίνουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τους (*δεικτικές χειρονομίες,* κατά McNeill 1992), π.χ. μία κορυφή, ή μία ακμή. Το γεγονός αυτό, αλλά και η δυσκολία των μαθητών να επικαλεστούν με τις τυπικές ονομασίες τους αυτά τα βασικά στερεά είναι ένα έντονο πρόβλημα για τους μαθητές αυτούς, το οποίο ωστόσο δεν περιορίζεται εδώ. Το φαινόμενο αυτό είναι έντονο ακόμα και στις περιπτώσεις μαθητών χωρίς κάποιο πρόβλημα όρασης. Ο προβληματισμός που εγείρεται εδώ είναι, γιατί να επιμένουμε να μάθουν οι μαθητές τις τυπικές ονομασίες των στερεών και να μην εκμεταλλευτούμε την ευρηματικότητα τους γι' αυτές, ως ένα εργαλείο περαιτέρω ανάλυσης των βασικών ιδιοτήτων τους; Απ' ότι φάνηκε, οι μαθητές μπορεί να μην ήταν σε θέση να ονομάσουν τα στερεά με τις τυπικές μαθηματικές τους ονομασίες, ωστόσο παρομοίαζαν το σχήμα τους με γνωστά τους αντικείμενα, ίδιου σχήματος εξετάζοντας και παραλληλίζοντας τις ιδιότητες τους ή τα περιγράφοντας τες με χειρονομίες. Η αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων και των ιδιοτήτων ενός στερεού δεν είναι πρωτεύουσας σημασίας, σε σχέση με την τυπική μαθηματική τους ονομασία; Θεωρούμε, πως είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να αναγνωρίζουν τα στερεά σχήματα μέσω των ιδιοτήτων τους. Και οι μαθητές εδώ μέσω των παρομοιώσεων και των χειρονομιών που χρησιμοποίησαν κατάφεραν να περιγράψουν τα γεωμετρικά στερεά με ένα πιο φυσικό τρόπο. Το γεγονός αυτό (όσον αφορά τις παρομοιώσεις) παρατήρησαν και οι Potari, Diakogiorgi, Zanni (2003), στη περίπτωση μαθητών μικρότερης ηλικίας, οι οποίοι κατάφευγαν στην παρομοίωση επίπεδων σχημάτων με καθημερινά αντικείμενα, προκειμένου να περιγράψουν τη μορφή τους.

Στη 2^{η} δραστηριότητα, όπως και στην 1^{η}, οι μαθητές ασχολήθηκαν με το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου. Μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων, φάνηκαν οι βασικές στρατηγικές που ακολούθησαν για την αναγνώριση του στερεού στο οποίο αντιστοιχούσε ένα δοθέν ανάπτυγμα. Οι μαθητές/τριες ξεκίνησαν αναγνωρίζοντας απτικά τις σχηματικές μονάδες των αναπτυγμάτων, δηλαδή τα επίπεδα σχήματα από τα οποία αποτελούνταν τα

αναπτύγματα (αναγνώριση 2D/3D). Παρατηρήθηκαν οι εξής στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές :

- Αναγνώριση του στερεού στο οποίο αντιστοιχεί το ανάπτυγμα μέσω των ιδιοτήτων των επιμέρους σχηματικών του μονάδων.

  Οι μαθητές/τριες αρχικά διερευνούσαν τις επιμέρους σχηματικές μονάδες του αναπτύγματος και αναγνώριζαν το στερεό μέσω αυτών, χωρίς να αναδιπλώνουν, νοητά ή πραγματικά, το ανάπτυγμα. Έτσι, τα έξι τετράγωνα σήμαιναν ότι μάλλον έχουμε να κάνουμε με το ανάπτυγμα ενός κύβου, ενώ η παρουσία τριγώνων στο ανάπτυγμα σηματοδοτούσε τη δημιουργία πυραμίδας.
- Αναγνώριση του στερεού στο οποίο αντιστοιχεί το ανάπτυγμα μέσω νοητής αναδίπλωσης του.

  Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές/τριες αρχικά αναγνώριζαν τις επιμέρους σχηματικές μονάδες του αναπτύγματος, αλλά αυτό δεν αποτελούσε «οδηγό» για την εύρεση του στερεού στο οποίο αντιστοιχούσε το ανάπτυγμα. Προκειμένου να καταλήξουν στο στερεό αναδίπλωναν νοητά το ανάπτυγμα.

Οι δύο παραπάνω στρατηγικές διαφέρουν αρκετά. Ωστόσο, και οι δύο είναι εξαιρετικά σημαντικές αφού η κάθε μία αναδεικνύει μία διαφορετική πτυχή του περάσματος από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου. Στην πρώτη περίπτωση, οι μαθητές/τριες καταφεύγουν στις ιδιότητες που γνωρίζουν ότι έχει τόσο το εκάστοτε στερεό, όσο και οι επιμέρους σχηματικές του μονάδες, προκειμένου να το αναγνωρίσουν. Το γεγονός αυτό τονίζει τη βαρύτητα που έχει η γνώση των ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού σχήματος, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν ένα μαθητή όχι μόνο να κατανοήσει τη φύση του ίδιου του σχήματος αλλά και να περάσει από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου, ή και το ανάποδο. Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής είναι σε θέση να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ γεωμετριών διαφορετικών διαστάσεων, εξελίσσοντας τη γεωμετρική του σκέψη όχι μόνο στο επίπεδο της γεωμετρίας μόνο του επιπέδου ή μόνο του χώρου, αλλά και μεταξύ αυτών.

Στη δεύτερη περίπτωση, τονίζεται η συμβολή της διαδικασίας της χωρικής οπτικοποίησης στη γεωμετρία. Για τη σημασία της διαδικασίας αυτής αναφερθήκαμε στο κεφάλαιο 1, μέσα από την παρουσίαση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης στερεών σωμάτων των Gutierrez et al. (1991, 1992). Εδώ φαίνεται ο καθοριστικός χαρακτήρας της ικανότητας ενός μαθητή να οπτικοποιεί με δυναμικό τρόπο γεωμετρικά σχήματα. Οι μαθητές καταφέρνουν να δημιουργήσουν στο μυαλό τους δυναμικές εικόνες του

αναπτύγματος, το οποίο μπορούν πλέον να χειριστούν και να αναδιπλώσουν νοητά, καταλήγοντας έτσι στην αναγνώριση του στερεού που σχηματίζεται. Αυτή είναι μία πολύπλοκη διαδικασία που απαιτεί από το μαθητή να γνωρίζει καλά τις ιδιότητες των σχημάτων καθώς και να είναι εξοικειωμένος με το χειρισμό τους ακόμα και όταν δεν έχει οπτική επαφή με το αντικείμενο. Το γεγονός αυτό κάνει τη δυσκολία ακόμη μεγαλύτερη για μαθητές με προβλήματα όρασης, οι οποίοι δεν έχουν έρθει ποτέ σε οπτική επαφή με τα αντικείμενα αυτά. Στη δική μας περίπτωση, μόνο ένας μαθητής κατάφερε να χειριστεί νοητά και με δυναμικό τρόπο το αντικείμενο που του δόθηκε. Συγκεκριμένα, μπόρεσε να εξετάσει αν ένα ανάπτυγμα που αποτελούνταν από έξι τετράγωνα θα δημιουργούσε όντως κύβο. Ο μαθητής διπλώνοντας νοητά το ανάπτυγμα μπόρεσε να «δει» ότι αυτό δε δημιουργούσε κύβο. Παρόλα αυτά, ο μαθητής έφτασε στο επίπεδο αυτό αφού πρώτα είχε αναγνωρίσει ότι ένα άλλο αρχικό ανάπτυγμα αποτελούμενο από έξι τετράγωνα αντιστοιχούσε σε κύβο, μέσω των ιδιοτήτων του.

Και στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές χρησιμοποίησαν έντονα τις χειρονομίες. Κατά τη διάρκεια που σκέφτονταν και οπτικοποιούσαν την αναδίπλωση των αναπτυγμάτων, τη σκέψη τους συνόδευαν εικονικές και παλμικές χειρονομίες (McNeill, 1992) που περιέγραφαν τον τρόπο με τον οποίο θα αναδιπλωθεί το ανάπτυγμα. Οι χειρονομίες αυτές τους βοηθούσαν να κατανοούν καλύτερα το τελικό σχήμα του στερεού που δημιουργούνταν.

Στην 3η δραστηριότητα, το αντικείμενο ενασχόλησης μας ήταν το πέρασμα από τις τρεις διαστάσεις στις δύο, δηλαδή από τη γεωμετρία του χώρου στη γεωμετρία του επιπέδου. Μέσα από ένα πρόβλημα ελαχίστου εμβαδού επιφάνειας ενός στερεού, οι μαθητές ασχολήθηκαν με την έννοια του ολικού εμβαδού της επιφάνειας ενός σώματος, τη μέτρηση του και μεθόδους με τις οποίες θα μπορούσαν να το ελαχιστοποιήσουν.

Αρχικά, είναι σημαντικό να πούμε ότι οι μαθητές/τριες δεν χρησιμοποίησαν τη μέθοδο που έχουν μάθει στο σχολείο για τη μέτρηση του ολικού εμβαδού ενός στερεού, δηλαδή τον υπολογισμό του εμβαδού της κάθε έδρας με τον πολλαπλασιαστικό τύπο “β·υ”. Αντίθετα, σε κάθε περίπτωση υπολόγιζαν το εμβαδό με διαδικασίες καταμέτρησης. Αρχικά, ο ένας μαθητής έκανε μία εικασία. Υποστήριξε ότι μικρότερο εμβαδό θα έχει το στερεό εκείνο στο οποίο τα κυβάκια θα είναι ενωμένα σε μία κατακόρυφη σειρά (το ένα πάνω από το άλλο). Βέβαια, αυτή την εικασία ο μαθητής την έκανε θεωρώντας ότι το εμβαδό που του ζητούνταν ήταν μόνο αυτό της βάσης και όχι ολόκληρης της επιφάνειας του στερεού. Στη

συνέχεια ο μαθητής και η μαθήτρια συνέχισαν να ψάχνουν το στερεό που θα αποτελούνταν από 12 κυβάκια και θα είχε το μικρότερο εμβαδό, κάνοντας δοκιμές. Οι μαθητές δεν είχαν κάποια αρχική εικασία για το ποιο θα είναι το στερεό αυτό.

Το πιο ουσιώδες κομμάτι της διαδικασίας που ακολούθησαν οι μαθητές, ήταν αυτό του υπολογισμού του εμβαδού. Κάθε φορά, αφού κατασκεύαζαν το στερεό, οι μαθητές/τριες καταμετρούσαν το εμβαδόν του χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το εμβαδό της επιφάνειας της έδρας του ενός κύβου. Οι στρατηγικές με τις οποίες οι μαθητές υπολόγιζαν το εμβαδόν εξελίσσονταν κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης τους, εισάγοντας κάθε φορά στο σκεπτικό τους και κάποιες ιδιότητες του στερεού που τους επέτρεπαν να μετρούν το εμβαδό πιο γρήγορα και με λιγότερο κόπο. Ο Battista (2007), όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου, ασχολήθηκε με τις στρατηγικές μέτρησης μήκους, εμβαδού και όγκου, που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Οι στρατηγικές αυτές αναφέρονται στους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές μετρούν το μήκος ενός αντικειμένου (π.χ. μίας σειράς κύβων), του εμβαδού του ή του όγκου του, αντίστοιχα. Στη δική μας περίπτωση, οι μαθητές μετρούσαν το εμβαδό όλης της επιφάνειας του εκάστοτε στερεού, χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης την επιφάνεια της έδρας ενός κύβου. Αυτό δηλαδή που στην ουσία έκαναν οι μαθητές ήταν να μετρούν τα κυβάκια του απάρτιζαν την κάθε έδρα του στερεού και στη συνέχεια να προσθέτουν το πλήθος τους. Έτσι για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο μπορεί να είχε εμβαδό 32. Αυτό θα σήμαινε ότι την επιφάνεια του καλύπτουν 32 έδρες μικρών κύβων (32 τετράγωνα), τις οποίες χρησιμοποιούσαν ως μονάδα μέτρησης. Οι κύριες στρατηγικές μέτρησης που είδαμε φαίνονται παρακάτω :

- Καταμέτρηση των τετραγώνων που αποτελούν την επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τυχαία και ανοργάνωτα. (Επίπεδο 1 για μέτρηση εμβαδού, Battista 2007)
- Μέτρηση του εμβαδού και των έξι εδρών του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ξεχωριστά, είτε μετρώντας τα τετραγωνάκια ένα-ένα (Επίπεδο 3 για μέτρηση εμβαδού, Battista 2007), είτε μετρώντας τα ανά στήλες ή γραμμές (Επίπεδο 4 για μέτρηση εμβαδού, Battista 2007) και άθροιση των εμβαδών τους για την εύρεση του συνολικού εμβαδού του στερεού.
- Μέτρηση του εμβαδού μόνο των τριών διαφορετικών εδρών του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αυτόματος υπολογισμός και των υπόλοιπων αντίστοιχων τριών και άθροιση για την εύρεση του συνολικού εμβαδού του στερεού. (Επίπεδο 3 για μέτρηση εμβαδού, Battista 2007)

Οι παραπάνω στρατηγικές ακολουθήθηκαν από τους μαθητές με τη σειρά που παρουσιάστηκαν. Μέσα από το γεγονός αυτό φαίνεται η γρήγορη εξέλιξη στη συλλογιστική πορεία που ακολούθησαν από τη μέτρηση του εμβαδού ενός στερεού ως το αμέσως επόμενο.

Και σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές χρησιμοποίησαν χειρονομίες προκειμένου να σκαφτούν αρχικά, αλλά και να περιγράψουν μετέπειτα τον προσανατολισμό και τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που θα δημιουργούσαν.

Με την 4η δραστηριότητα, δυστυχώς λόγω έλλειψης χρόνου, ασχολήθηκε μόνο ένας μαθητής. Η δραστηριότητα αυτή αφορούσε και πάλι το πέρασμα από τη γεωμετρία του χώρου στη γεωμετρία του επιπέδου, και ιδιαίτερα το πέρασμα των ιδιοτήτων ενός στερεού στις επιμέρους σχηματικές δισδιάστατες μονάδες του. Στη δραστηριότητα αυτή ο μαθητής έπρεπε να δημιουργήσει τομές σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κόβοντας κάθε φορά το στερεό με μία μόνο μαχαιριά. Από τη διαδικασία που ακολουθήθηκε φάνηκαν δύο δυσκολίες. Η μία ήταν καθαρά πρακτική. Ο μαθητής δυσκολευόταν να κόψει το στερεό με τον τρόπο που το είχε σκεφτεί. Η δυσκολία αυτή ξεπεράστηκε με τη βοήθεια της ερευνήτριας. Ο μαθητής περιέγραφε με χειρονομίες τον τρόπο που έπρεπε να γίνει η τομή και η ερευνήτρια έκοβε το στερεό. Εδώ οι χειρονομίες έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο, αφού μέσω αυτών η σκέψη του μαθητή μεταφερόταν στην ερευνήτρια, ο ρόλος της οποίας ήταν στην ουσία να αποτελέσει «τα χέρια του μαθητή», κάνοντας τη σκέψη του πράξη. Η δεύτερη δυσκολία αφορούσε το γνωστικό κομμάτι της δραστηριότητας. Προκειμένου ο μαθητής να πάρει μία απόφαση για τον τρόπο με τον οποίο θα έκοβε το στερεό, θα έπρεπε να είναι σε θέση να φανταστεί τι είδους σχήμα θα είχε η τομή που σκεφτόταν να κάνει πριν καν αυτή πραγματοποιηθεί. Η διαδικασία αυτή απαιτεί από το μαθητή την ικανότητα να οπτικοποιήσει την εικόνα της τομής πριν τη «δει», κάτι το οποίο είναι απαιτητικό ακόμα και για μαθητές χωρίς προβλήματα όρασης.

Ωστόσο, για αυτούς ακριβώς τους λόγους, ο βασικός στόχος της δραστηριότητας εξαρχής, δεν ήταν να δούμε τις τομές που θα επέλεγε να κάνει ο μαθητής, αλλά ο τρόπος με τον οποίο θα αιτιολογούσε το λόγο για τον οποίο οι τομές αυτές είχαν τα συγκεκριμένα σχήματα. Στόχος ήταν δηλαδή να δούμε αν ο μαθητής θα μπορέσει να περάσει από ιδιότητες του στερεού σε ιδιότητες των τομών του. Για το λόγο αυτό, μετά από την πρώτη τομή που ήταν απόφαση του μαθητή, οι επόμενες έγιναν από την ερευνήτρια. Στη συνέχεια, ο μαθητής ρωτήθηκε να αιτιολογήσει το λόγο για τον οποίο οι τομές είχαν τα συγκεκριμένα σχήματα (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τρίγωνο, τραπέζιο, τετράγωνο). Στο

σημείο αυτό, ο μαθητής έκανε μία πολύ σημαντική παρατήρηση. Αιτιολόγησε τα σχήματα των τομών βάση των ιδιοτήτων τους, οι οποίες ήταν αποτέλεσμα της προβολής των ιδιοτήτων του στερεού σώματος (ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) στις δισδιάστατες σχηματικές του μονάδες. Έτσι για παράδειγμα, όταν ρωτήθηκε γιατί θεωρούσε πως μία τομή που είχε γίνει ήταν σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου και όχι απλώς παραλληλογράμμου, εκείνος εξήγησε πως από τη στιγμή που το στερεό είναι ορθογώνιο, η τομή δε θα μπορούσε, παρά να έχει κι εκείνη την ιδιότητα των ορθών γωνιών που έχει και το στερεό. Σε μία άλλη περίπτωση, όπου το σχήμα της τομής ήταν τρίγωνο, ο μαθητής εξήγησε αυτό οφείλεται στο ότι η τομή ξεκίνησε κόβοντας τη μία έδρα του στερεού αλλά δεν κατέληξε στην απέναντι έδρα αλλά σε μία γωνία αυτής.

Το σημαντικό συμπέρασμα λοιπόν της 4^{ης} δραστηριότητας είναι ότι ο μαθητής κατάφερε να μεταφέρει τις ιδιότητες ενός στερεού σώματος σε αντίστοιχες ιδιότητες των σχηματικών του μονάδων και έτσι να κάνει ένα πέρασμα από τη τρισδιάστατη γεωμετρία του χώρου στη δισδιάστατη γεωμετρία του επιπέδου.

Ένας βασικός προβληματισμός μας, αφορά στη σύγχυση των μαθητών μεταξύ επίπεδων και στερεών σχημάτων. Το φαινόμενο αυτό εμφανίστηκε και στις τέσσερις δραστηριότητες, σε όλους σχεδόν τους μαθητές. Σχεδόν πάντα, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αναφέρεται ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η σφαίρα ως κύκλος, ο κύβος ως τετράγωνο και το πολύεδρο ως πολύγωνο. Το φαινόμενο αυτό δεν εμφανίζεται σε περιπτώσεις όπως ορθογώνιο τρίγωνο – κώνος. Θα μπορούσε η αιτία της σύγχυσης ζευγαριών σχημάτων όπως τα παραπάνω οφείλεται στο ότι μία δυσδιάστατη αποτύπωση ενός 3D σχήματος συνήθως καταλήγει να παίρνει την εικόνα του επίπεδου σχήματος με το οποίο τα παιδιά τελικά μπερδεύουν το εκάστοτε στερεό; Πόσες φορές δεν έχουμε δει τέτοιες απεικονίσεις, ακόμα και σε εκπαιδευτικά συγγράμματα; Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση των ατόμων με προβλήματα όρασης; Τα άτομα αυτά δεν έχουν οπτική επαφή με τα αντικείμενα, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι δε θα μπορούσαμε να καταλογίσουμε σε μία ατυχή απεικόνιση την αιτία της εν λόγω σύγχυσης. Ας παρατηρήσουμε λίγο τα παραπάνω στερεά, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τη σφαίρα και το πολύεδρο. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ως έδρες ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Στην ουσία δηλαδή θα μπορούσε κανείς να πει πως είναι σαν ένα «φουσκωμένο» ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση τόσο της σφαίρας, όσο και του κύβου και του πολυέδρου. Μήπως μια τέτοια ιδέα, είναι που μπερδεύει τους μαθητές; Ή μήπως η αιτία είναι απλούστερη;

Επιφανειακή ενασχόληση με τη Γεωμετρία και σχεδόν ανύπαρκτη ενασχόληση με τη Στερεομετρία, όπως συνήθως συμβαίνει και στην περίπτωση των βλεπόντων μαθητών; Σπάνια στο σχολείο δίνεται έμφαση σε βασικές έννοιες της Γεωμετρίας και της Στερεομετρίας, όπως «τι διαφοροποιεί ένα στερεό από ένα επίπεδο σχήμα; Τι παραπάνω έχει το ένα από το άλλο;». Τα παραπάνω ερωτήματα είναι σημαντικά και όπως είναι αναμενόμενο, δεν είναι δυνατό να απαντηθούν μέσα στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής εργασίας. Ωστόσο, θεωρούμε σημαντικό το να υπάρξει περαιτέρω προβληματισμός γύρω από αυτό το θέμα.

Τα πράγματα στη γεωμετρία είναι ήδη αρκετά περίπλοκα για μαθητές με προβλήματα όρασης και ιδιαίτερα για μαθητές τυφλούς. Ίσως θα ήταν καλό να τους βοηθούμε στο σχολείο να μαθαίνουν επαρκώς τα βασικότερα στοιχεία της Γεωμετρίας που θα τα χρειαστούν και στην καθημερινή τους ζωή. Άλλωστε ο δρόμος που μετά το σχολείο θα ακολουθήσει κάθε παιδί είναι διαφορετικός. Το να γνωρίζει ο μαθητής και να μπορεί να χειρίζεται με ευκολία βασικές έννοιες, είναι κάτι που θα του είναι χρήσιμο στην ανάπτυξη της γεωμετρικής του σκέψης και θα αποτελέσει τη βάση για περαιτέρω ενασχόληση με τη γεωμετρία.

Ένα άλλο γεγονός που μας τράβηξε την προσοχή και αξίζει σχολιασμό, είναι η διαδικασία αναγνώρισης των γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές. Στην 1η δραστηριότητα, η μαθήτρια Τ, όπως και η Α, αναγνωρίζει εύκολα ότι το σχήμα το οποίο έχει στα χέρια της είναι ένα τρίγωνο. Ωστόσο, δυσκολεύεται να αναγνωρίσει ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο. Προσπαθούν να καταλήξει στο τι τρίγωνο είναι αυτό που της έχει δοθεί, όχι αναγνωρίζοντας το άμεσα, αλλά έμμεσα μέσω μιας διαδικασίας αποκλίσεως κάποιων πιο εύκολα αναγνωρίσιμων επιλογών (όπως οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς ή του ισόπλευρου τριγώνου). Τελικά καταλήγει ότι το τρίγωνο μάλλον θα είναι ορθογώνιο. Παρόλα αυτά, δεν έχει αναγνωρίσει κάποια ορθή γωνία στο τρίγωνο. Απλά είναι η μόνη επιλογή γνωστού τριγώνου με συγκεκριμένες ιδιότητες, η οποία της έχει απομείνει αφού έχει αποκλείσει αυτό να είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο. Από τα περιστατικά αυτά φαίνεται να είναι για τους μαθητές πιο εύκολο να αναγνωρίσουν ιδιότητες των πλευρών παρά των γωνιών ενός τριγώνου. Φαίνεται δηλαδή να είναι πιο εύκολο να αναγνωρίσουν ίσες πλευρές απ' ότι μια ορθή γωνία. Αυτό για έναν βλέποντα δεν είναι τόσο αυτονόητο. Το μήκος μιας πλευράς είναι ένα μέγεθος εύκολα μετρήσιμο για έναν τυφλό μαθητή, π.χ. το μήκος μιας πλευράς μπορεί να μετρηθεί με τα δάχτυλα. Αντίθετα, η γωνία δεν είναι δυνατό να μετρηθεί. Το μόνο που μπορεί να οδηγήσει έναν τυφλό μαθητή στο να αντιληφθεί ότι μία γωνία είναι

ορθή, είναι να καταλάβει πρώτα ότι η πλευρές στις οποίες περιέχεται τέμνονται κάθετα στην κορυφή της γωνίας. Κάτι τέτοιο όμως απαιτεί έντονα ανεπτυγμένη αίσθηση της αφής και της απτικής αντίληψης, αλλά ίσως και κάποια πείρα/εξοικείωση με γεωμετρικά σχήματα.

Η Α είναι μία μαθήτρια της Β' Γυμνασίου με ανεπτυγμένη την αίσθηση της αφής ενώ η Τ είναι μία μαθήτρια της Β' Λυκείου στη Θεωρητική κατεύθυνση, η οποία ποτέ δεν είχε – όπως η ίδια είπε – καλή σχέση με τα μαθηματικά. Αντίθετα, ο Μ και ο Β που κατάφεραν αμέσως να αναγνωρίσουν το ορθογώνιο τρίγωνο εντοπίζοντας εξ αρχής την ορθή του γωνία, είναι μαθητές της Γ' Λυκείου που έχουν ακολουθήσει τη Θετική κατεύθυνση. Ίσως λοιπόν σε κάποιο ποσοστό η διαφορά αυτή στη δυσκολία αναγνώρισης του ορθογωνίου τριγώνου, μεταξύ των Α, Τ και Μ, Β, να οφείλεται στο ότι η απτική εμπειρία των δεύτερων σε σχέση με τις πρώτες είναι μεγαλύτερη και συνεπώς και η εξοικείωση τους με τέτοια σχήματα επίσης μεγαλύτερη. Φυσικά, δύο μόνο περιπτώσεις δε μπορούν να μας οδηγήσουν σε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα. Η παραπάνω σκέψη είναι απλώς μια εικασία προς διερεύνηση. Επίσης, ας μην ξεχνάμε ότι οι Α και Τ στερούνται πλήρως οράσεως ενώ οι Μ και Β μπορούν να δουν σε κοντινή απόσταση σε κάποιο αρκετά σημαντικό ποσοστό. Μήπως λοιπόν οι μαθητές αυτοί βοηθήθηκαν και από την κάποια όραση τους, στην αναγνώριση του σχήματος; Όλα τα παραπάνω ερωτήματα φυσικά δεν είναι δυνατό να απαντηθούν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αυτό συμβαίνει κυρίως λόγω του μικρού αριθμού μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή. Αποτελούν όμως έναυσμα για περαιτέρω μελλοντική έρευνα επί του θέματος.

Παρόλα αυτά, το να συζητάει κανείς με αυτούς τους μαθητές αποτελεί μία μοναδική ευκαιρία για να δει κανείς τους τρόπους με τους οποίους σκέφτονται και δρουν τυφλοί μαθητές. Και φυσικά αυτό είναι κάτι πολύ σημαντικό και ενδιαφέρον, αφού η χρήση τους μπορεί να βοηθήσει κι άλλους μαθητές να εξοικειωθούν περισσότερο και πιο εύκολα με τη Γεωμετρία. Βέβαια, η συζήτηση με τους μαθητές αυτούς προκαλεί από μόνη της ευχαρίστηση και ενθουσιασμό πέρα από τα μαθηματικά.

4.2 Συζήτηση

Εν κατακλείδι, θεωρούμε πως είναι απαραίτητο στο σημείο αυτό να κάνουμε μία συζήτηση γύρω από όλα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, δίνοντας κάποιες απαντήσεις γύρω από τα αρχικά μας ερευνητικά ερωτήματα.

Υπενθυμίζουμε ότι αυτά ήταν τα εξής :

1) Τι είδους στρατηγικές υιοθετούν οι μαθητές προκειμένου να διερευνήσουν ένα σχήμα και τις ιδιότητες του, με τη βοήθεια της αφής ;

2)Τι είδους στρατηγικές και διαδικασίες ακολουθούν οι μαθητές κατά το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου (2D) στη γεωμετρία του χώρου (3D) και αντίστροφα ;

3) Ποια είναι η συμβολή των χειρονομιών, της χρήσης των παρομοιώσεων και της οπτικοποίησης στις παραπάνω διαδικασίες;

Παραπάνω αναφερθήκαμε στις διαδικασίες και τις στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές σε κάθε δραστηριότητα με την οποία ασχολήθηκαν. Στο κεφάλαιο του Θεωρητικού πλαισίου είχαμε αναφερθεί στις απτικές τεχνικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές με προβλήματα όρασης προκειμένου να αναγνωρίσουν γεωμετρικά σχήματα και αντικείμενα (Αργυρόπουλος, 2008). Με τη βοήθεια των τεχνικών αυτών, οι μαθητές διερευνούν τα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητες τους, ωστόσο προκειμένου να το κάνουν αυτό αναπτύσσουν κάποιες στρατηγικές. Εδώ οι στρατηγικές επίλυσης που ανέπτυξαν οι μαθητές έρχονται σε συμφωνία με τη θεωρία του Duval. Σε όλες τις δραστηριότητες ήταν φανερό ότι οι μαθητές βασίζονταν στις ιδιότητες του σχήματος προκειμένου να ασχοληθούν με τα ερωτήματα που τους είχαν τεθεί. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές εξέταζαν ένα γεωμετρικό σχήμα βάσει των ιδιοτήτων τόσο του ίδιου, όσο και των επιμέρους σχηματικών του μονάδων. Σε ένα στερεό (3D) πάντα εξέταζαν τις δισδιάστατες σχηματικές του μονάδες, (έδρες), τις μονοδιάστατες (ακμές) αλλά ακόμα και αυτές που ήταν μηδενικής διάστασης (κορυφές). Είναι φανερό λοιπόν ότι είδαν και ασχολήθηκαν με τις σχέσεις 0D/3D, 1D/3D, 2D/3D που περιγράφει ο Duval (2011). Αλλά και στην περίπτωση των επίπεδων σχημάτων (2D), ιδιαίτερα όπως φάνηκε στην 1^{η} δραστηριότητα, οι μαθητές στρέφονταν σε ιδιότητες των επιμέρους σχηματικών τους μονάδων προκειμένου να προσδιορίσουν τι είδους σχήματα ήταν αυτά.

Το σημαντικότερο όμως αποτέλεσμα αυτών ακριβώς των στρατηγικών, είναι ότι μέσω αυτών οι μαθητές κατάφερναν να πραγματοποιούν με επιτυχία περάσματα από τη γεωμετρία των τριών διαστάσεων (του χώρου) στη γεωμετρία των δύο διαστάσεων (του επιπέδου), και αντίστροφα. Όπως αναφέραμε τόσο στο παρόν κεφάλαιο, όσο και στο προηγούμενο, οι μαθητές αναγνώριζαν τα γεωμετρικά αντικείμενα περνώντας πάντα «από το μέρος στο όλον». Με τη φράση αυτή εννοούμε ότι οι μαθητές δεν ακολουθούσαν μία

ολιστική αντιληπτική προσέγγιση για τα γεωμετρικά αντικείμενα. Αντίθετα, ξεκινώντας πάντα από τα επιμέρους χαρακτηριστικά τους διαμόρφωναν τελικά μία ολική εικόνα του αντικειμένου. Μέσα από τη διαδικασία αυτή η εικόνα του αντικειμένου «χτιζόταν» σταδιακά και τελικά ήταν το αποτέλεσμα της σύνθεσης των εικόνων των επιμέρους κομματιών του αντικειμένου. Και το γεγονός αυτό δεν περιοριζόταν στη μεμονωμένη σύνθεση της εικόνας ενός επίπεδου σχήματος ή ενός στερεού, αλλά και στη σύνθεση του ενός μέσα από το χειρισμού του άλλου. Αυτό συνέβη στις δραστηριότητες 1 και 2, τη σύνθεση στερεών σωμάτων μέσω χειρισμού επίπεδων σχημάτων με πέρασμα από τις δύο στις τρεις διαστάσεις του χώρου (2D –> 3D), καθώς και στις δραστηριότητες 3 και 4 με τη σύνθεση επίπεδων σχημάτων μέσω κατάλληλων χειρισμών των στερεών σωμάτων με πέρασμα από τις τρεις στις δύο διαστάσεις του χώρου (3D –> 2D).

Αυτή η διαδικασία αντιμετώπισης των γεωμετρικών στερεών από τους μαθητές με προβλήματα όρασης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η αντίστροφη από εκείνη που χρησιμοποιούν οι βλέποντες μαθητές. Λόγω της ολιστικής φύσης της όρασης, οι βλέποντες μαθητές τείνουν να αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά αντικείμενα ως ολότητες, χωρίς να επικεντρώνονται στα επιμέρους στοιχεία τους και στις ιδιότητες που αυτά έχουν. Η διαδικασία αυτή όμως δεν επιτρέπει στους μαθητές να διερευνήσουν και να κατανοήσουν σε βάθος τη φύση του εκάστοτε γεωμετρικού αντικειμένου, με αποτέλεσμα η ενασχόληση τους με αυτά να είναι πολλές φορές επιφανειακή και διαδικαστική, περιορισμένη μόνο στην ταυτοποίηση τους και όχι στο χειρισμό τους ως αντικείμενα με συγκεκριμένο «χαρακτήρα».

Τέλος, θα θέλαμε να αναφερθούμε στο ρόλο που τελικά είχαν οι χειρονομίες και οι χρήση παρομοιώσεων από μέρους των μαθητών και φυσικά η οπτικοποίηση, τόσο στη διερεύνηση των γεωμετρικών αντικειμένων, όσο και στο πέρασμα που έκαναν οι μαθητές μεταξύ γεωμετριών διαφορετικών διαστάσεων. Ξεκινώντας με τις χειρονομίες που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια των συζητήσεων, παρατηρήσαμε ότι αυτές ήταν στα πλαίσια που τις είχε περιγράψει ο McNeill (1992). Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές χρησιμοποιούσαν χειρονομίες προκειμένου να περιγράψουν με αυτές κάτι το οποίο δε μπορούσαν να εκφράσουν εύκολα με το λόγο και τις τυπικές μαθηματικές ορολογίες. Αντίστοιχος ήταν και ο ρόλος των παρομοιώσεων που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές. Φάνηκε ότι πολλές φορές οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά το συλλογισμό τους με την τυπική μαθηματική ορολογία. Έτσι, κατέφευγαν σε παρομοιώσεις από την καθημερινή τους ζωή προκειμένου να περιγράψουν το σχήμα ή τη μορφή ενός γεωμετρικού αντικειμένου ή ακόμα και κάποιες ιδιότητες του. Το γεγονός αυτό

εγείρει τα εξής ερωτήματα : Είναι τελικά τόσο σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να εκφράζονται και να κάνουν γεωμετρικούς συλλογισμούς χρησιμοποιώντας εξ αρχής την τυπική μαθηματική ορολογία; Τι γεωμετρία θέλουμε να μάθουν τελικά οι μαθητές μας; Βερμπαλιστική και φορμαλιστική ή ουσιώδη, λειτουργική και δημιουργική; Αν η απάντηση βαραίνει στην ουσία και όχι στο φαίνεσθε, τότε ίσως θα πρέπει να επανεξετάσουμε τις πτυχές της γεωμετρίας στις οποίες δίνουμε βαρύτητα στο σχολείο. Ίσως είναι πιο σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν αρχικά το γεωμετρικό τους συλλογισμό, ακόμα κι αν δε μπορούν να τον εντάξουν λεκτικά μέσα στα στενά πλαίσια της τυπικής μαθηματικής ορολογίας, αντί να παιδεύονται με αυτή και τελικά να μιλούν χωρίς και οι ίδιοι πολλές φορές να κατανοούν αυτά που λένε. Στη συνέχεια και αφού οι μαθητές έχουν αποδώσει νόημα στα γεωμετρικά αντικείμενα, μπορούμε να ασχοληθούμε περισσότερο και με την τυπική μαθηματική ορολογία, την οποία θα πρέπει να χρησιμοποιούν γι' αυτά. Η L.Healy (2012) υποστηρίζει ότι αν καταφέρουμε να κατανοήσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές στις πρακτικές που ακολουθούν οι τυφλοί μαθητές σε σχέση με τους βλέποντες, δηλαδή μαθητές που βιώνουν τον κόσμο με διαφορετικό τρόπο, θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε ακόμη καλύτερα τις σχέσεις μεταξύ της εμπειρίας και της νόησης γενικότερα. Μάλιστα, η ίδια κλείνει πολύ χαρακτηριστικά το άρθρο της λέγοντας : "Ίσως ακόμα θα μπορούσαμε να προτείνουμε, ότι ως καθηγητές Μαθηματικών θα πρέπει να προσπαθούμε να κάνουμε ακριβώς αυτό: να επιτρέπουμε και στους άλλους να αισθάνονται τα μαθηματικά όπως εμείς, και ταυτόχρονα να προσπαθούμε να οικειοποιηθούμε τα συναισθήματά τους." Αυτό όμως δεν είναι κάτι που θα πρέπει να περιοριστεί στην περίπτωση των μαθητών με προβλήματα όρασης. Σαν καθηγητές των μαθηματικών θα πρέπει να προσπαθούμε πάντα να δημιουργούμε τον κατάλληλο κώδικα επικοινωνίας με τους μαθητές μας, ισορροπώντας και συνδυάζοντας τις δικές τους αντιλήψεις για τις μαθηματικές ιδέες, με τις δικές μας.

Κατά τη διάρκεια όλων των δραστηριοτήτων παρατηρήθηκε έντονα η διαδικασία της οπτικοποίησης των γεωμετρικών αντικειμένων και των χειρισμών τους από τους μαθητές. Οι μαθητές φάνηκε να δημιουργούν εικόνες όπως αυτές που είχε περιγράψει η Presmeg (2006), αποκαλώντας τες «νοητικές εικόνες». Εικόνες που ήταν άλλοτε στατικές και άλλοτε οι μαθητές τους προσέδιδαν έναν δυναμικό χαρακτήρα, όντας σε θέση να τις κινήσουν νοητά, δημιουργώντας νέες εικόνες. Με τον τρόπο αυτό, η συμβολή της οπτικοποίησης ήταν ιδιαιτέρως σημαντική, τόσο στο χειρισμό και την αναγνώριση των γεωμετρικών αντικειμένων, όσο και για το πέρασμα του γεωμετρικού συλλογισμού μεταξύ γεωμετριών διαφορετικών διαστάσεων. Παρόλα αυτά, στο σημείο αυτό η άποψη μας συμφωνεί με τη θεώρηση του Duval (1998), ότι ο γεωμετρικός συλλογισμός εμπλέκει διαφορετικά είδη

γνωστικών διαδικασιών που “σχετίζονται στενά μεταξύ τους και η σύμπραξη τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την «κατάκτηση» της γεωμετρίας.” Αυτό σημαίνει ότι μόνο η οπτικοποίηση, χωρίς το μαθηματικό συλλογισμό δεν μπορεί να συντελέσει στην πλήρη ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, ακριβώς όπως δε μπορεί να συμβεί και το αντίθετο. Η αμφίδρομη σχέση μεταξύ οπτικοποίησης και μαθηματικού συλλογισμού είναι εκείνη που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν σε βάθος τη γεωμετρία και να αναπτύξουν τη γεωμετρική τους σκέψη. Για το λόγο αυτό θεωρούμε πως θα ήταν εξαιρετικά βοηθητικό, όχι μόνο για τους μαθητές με προβλήματα όρασης αλλά και για όλους τους μαθητές γενικότερα, το παράδειγμα αντιμετώπισης των γεωμετρικών αντικειμένων που μας έδωσαν οι μαθητές μέσα από την έρευνα αυτή να βρει το ρόλο του μέσα στο χώρο της διδακτικής της γεωμετρίας και να μην μείνει ανεκμετάλλευτο. Φυσικά, αναγνωρίζοντας τους περιορισμούς της μικρού βεληνεκούς έρευνας που πραγματοποιήσαμε κατανοούμε ότι αυτή δε μας δίνει το δικαίωμα για γενικευμένα συμπεράσματα και ολοκληρωμένες διδακτικές προτάσεις. Ωστόσο, θεωρούμε σημαντικό να γίνει περισσότερη έρευνα προς την κατεύθυνση αυτή. Ίσως αυτό να έχει σαν αποτέλεσμα τελικά η γεωμετρία να μην αποτελεί πια ένα επιφανειακό και διαδικαστικό μάθημα για τους μαθητές, αλλά ένα μάθημα που θα τους προσφέρει το συναίσθημα της ανακάλυψης, της σύνθεσης ιδεών και της δημιουργίας, όπως αυτό που φανταζόμαστε ότι συνήθιζε να τη διέπει όταν ασχολήθηκαν με αυτή οι πρώτοι μαθηματικοί της ιστορίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΊΑ

Αργυρόπουλος, Β. (2008). Σημειώσεις για την εκπαίδευση του παιδιού με σοβαρά προβλήματα όρασης – Διδακτικές προσεγγίσεις. Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος

Βασιλείου, Ε. (2011). Σημειώσεις μαθήματος Δ.27 Γεωμετρία. ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, pp.215-241, Kluwer, the Netherlands.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *NCTM Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, vol.2, pp.843-908.

Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.*), Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, New York, pp.175-203.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), pp.7-16.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp.420-464), New York : Macmillan Publishing Co.

Cobb, P., & Steffee L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol.14, No.2, pp.95-101

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32, No. 1, pp. 9–13

Dreyfus, T. (1995). Imagery for Diagrams. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures : kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & L. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Berlin : Springer.

Duval, R. (1998). Geometry for a cognitive point of view. In C. Mammanna & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century : an ICMI study*. Dordrecht : Kluwer

Duval, R. (2011). What kind of activity is required for understanding and solving problem in geometry? A M.R.I. of geometrical activity. Paper presented in the Seminar 12-17 march 2011, Department of education, University of Cyprus

Duval, R. (2011). Why figures cannot help students to see and understand in geometry? Analysis of the role and the cognitive functioning of visualization. Paper presented in the Symposium

Mathematics Education research at the University of Cyprus and Tel Aviv University, 23-24 october 2011

Figueiras, L., & Arcavi, A. (2012). Learning to see : the viewpoint of the blind. 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics, Dordrecht : Kluwer

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), pp.139-162

Goldin-Meadow, S. (2003). Hearing gestures: How our hands help us think. Cambridge: Harvard University Press.

Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), pp. 237-251.

Gutierrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. Structural Topology, 18, 31-48.

Gutierrez, A., & Jaime A. (1998). On the assessment of van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, Volume 20, Numbers 2 and 3.

Hadamard, J. (1954). The psychology of invention in the mathematical field, New York : Dover Publication

Healy, L., & Fernandes, S.H.A.A. (2011). The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 157–174.

Healy, L. (2012). Hands that see, Hands that speak : Investigating relationships between sensory activity, forms of communicating and mathematical cognition. 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Hershkowitz, R. (1989). Visualisation in geometry - Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11(1), 61-76.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., & Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition. (ICMI Study Series)*, University Press, Cambridge, pp. 70–95.

Iverson, J. M., & Goldin-Meadow, S. (1998). Why people gesture when they speak. vol. 396 (p. 228). London: Macmillan Publishers Ltd. Nature.

Katz, D. (1989). The World of Touch. Hillsdale N.J. : Lawrence Erlbaum Associates

Klatzky, R.L., Lederman, S.J., & Metzger, V.A. (1985). Identifying objects by touch: An “expert system”. *Perception & Psycho*physics, 37 (4), 299-302.

Love, E. (1995). The functions of visualisation in learning geometry. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.

Mariotti, M.A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*. Berlin : Springer.

McNeill, D. (1992). Hand and mind: What gestures reveal about thought. Chicago: University of Chicago Press.

Millar, S. (1981). 'Crossmodal and intersensory perception and the blind'. In R.D. Walk & H.L. Pick, Jr. (Eds.), *Intersensory Perception and Sensory Integration,* Plenum Press. New York, pp. 281-314.

Millar, S. (1983). Language and Active Touch. In Mills A.E. (Ed.) *Language and Communication in the Blind Child*. Beckenham, Kent : Croom Helm

Millar, S. (1994). Understanding and Representing Space. Theory and Evidence from Studies with Blind and Sighted Children. Oxford : Clarendon Press

Millar, S. (1997). Reading by touch. London : Roughtledge

Miller, A.I. (1987). Imagery in scientific thought. MIT Press

Pegg, J. (1992). Students' Understanding of Geometry : Theoretical perspectives. In : B. Southwell, B. Perry & Owens K., *Space : the first and final frontier*. Proceedings of the 15th conference of the Mathematics Education Research Group of Australia, Sydney : MERGA

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Beyond Metaphor: Formalising in Mathematical Understanding within Constructivist Environments. *For the learning of Mathematics*, *14*, 39-43.

Polya, G. (1973). How to solve it. Princeton, NJ : University Press

Potari, D., Diakogiorgi, K., Gioni, H. & Zanni, H. (2002). The concept of geometrical shape in the children and the role of language. Proceedings of the fifth Greek Conference in Mathematics Education-Informatics in Education.

Potari, D., Diakogiorgi, K., & Zanni, H., (2003). Similes as a tool for exploring children's thinking about geometrical shapes, University of Patras. CERME 3, Italy.

Potari, D. & Spiliotopoulou, V. (1996). Children's Common-Sense Understanding of Shape. *Proceedings of CIEAEM 47*, Freie Universitat Berlin, Germany, 416-422.

Presmeg, N.C. (1992). Prototypes, Metaphors, Metonymies and Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595-610.

Presmeg, N.C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N.C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 205-235.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111–126.

Rival, I. (1987). Picture Puzzling: Mathematicians are discovering the Power of Pictorial Reasoning. *The Sciences*, 27, pp. 41-46.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), pp.159-169

Triantafillidis, T.A. (1995). Circumventing Visual Limitations in Teaching the Geometry of Shapes. *Educational Studies of Mathematics* , 29 : 225-235, Kluwer

Van Hiele, P.M. (1986). Structure and Insight : a theory of mathematics education. Orlando Fl.: Academic Press

Vinner, S. (1997). From intuition to inhibition – Mathematics, education and other endangered species. In E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp.63-78), Helsinki, Finland, PME.

Vygotsky, L.S. (1981). The instrumental method in psychology. In J.V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. (pp. 134-143). Armonk, NY: M.E. Sharpe,

Williams, H.G. (1983). Perceptual and Motor Development. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Editor's* Introduction: What is Mathematical Visualization?. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp.1-8). Mathematical Association of America.