ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η *Άλγεβρα* του Αλ-Χουαρίζμι

Στάθης Παπαδόπουλος

Α.Μ. Δ 200806

Επιβλέπων καθηγητής: Διονύσιος Λάππας

ΑΘΗΝΑ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την..6-7-2012..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο		Βαθμίδα	Υπογραφή
1)…Λάππας Διονύσιος……	(επιβλέπων Καθηγητής)	Αν.Καθηγητής	……
2)…Σπύρου Παναγιώτης	……	Επ.Καθηγητής	……
3)…Χριστιανίδης Γιάννης	……	Αν.Καθηγητής	……

Στη μνήμη των δικών μου

αφιερώνεται

Ευχαριστίες

Στον κ. Διονύσιο Λάππα για το ενδιαφέρον και την ανοχή που επέδειξε.

Στον κ. Γιάννη Χριστιανίδη, ο οποίος πρότεινε το θέμα της διπλωματικής, για την αμέριστη αρωγή και τον χρόνο που αφειδώς προσέφερε στη συνεργασία μας κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Αυτή η συνεργασία ήταν για μένα μια πρώτη μαθητεία στην ιστορική έρευνα, δίπλα σε έναν καταξιωμένο ερευνητή.

Στον κ. Παναγιώτη Σπύρου για την φιλική στάση του.

Στη φίλη μου Γεωργία Κολλινιάτη και στους φίλους μου Γιάννη Μιχελαράκη, Μιχάλη Κασκαντάμη και Θάνο Πετρόπουλο για την βοήθεια και συμπαράσταση που μου προσέφεραν.

Πίνακας περιεχομένων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ……..7

ABSTRACT……..8

ΕΣΑΓΩΓΗ ……9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 12

Η ΖΩΗ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ Al-Khwarizmi

1.1. Al–Khwarizmi: ΕΝΑΣ ΛΟΓΙΟΣ ΣΤΗ ΒΑΓΔΑΤΗ ΤΟΥ 9ου ΑΙΩΝΑ..... 12

1.2. ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ Al-Khwarizmi 15

1.3. Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ ΤΟΥ Al-Khwarizmi 20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 24

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΗΣ *Άλγεβρας*

2.1. Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ *Άλγεβρας* 26

2.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ *al-jabr wa'l-muqābala* 35

2.2.1. Κανόνες και διαδικασίες για υπολογισμό με *al-jabr* 35

2.2.2. Κανόνες πράξεων 55

2.2.3. Προβλήματα αριθμητικής 62

2.3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΠΟΡΙΟ ΚΑΙ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ..... 68

2.3.1. Προβλήματα εμπορικών συναλλαγών 69

2.3.2. Προβλήματα μετρητικής γεωμετρίας 70

2.4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΘΗΚΩΝ, ΚΛΗΡΟΝΟΜΙΩΝ ΚΑΙ ΔΩΡΕΩΝ 75

2.4.1. Προβλήματα περί διαθηκών 77

2.4.2. Υπολογισμός των επιστροφών 83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 87

ΑΝΑΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΩΝ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ

3.1. ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ..... 87

3.1.1. Mal, shay : πλαίσιο εκφώνησης - πλαίσιο επίλυσης. 87

3.1.2. Στάδια επίλυσης - πράξεις 97

3.2. ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ *Άλγεβρας*..... 105

3.2.1. Είδη αριθμών..... 105

3.2.2. Πολυώνυμα 107

3.2.3. Εξισώσεις 109

3.2.4. Αιτιολογήσεις 111
3.3. ΠΡΩΙΜΗ ΑΡΑΒΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: 116
τεχνική από μια προφορική παράδοση ή επιστήμη επινοημένη από τον Α-Χ;
3.3.1. Οι απόψεις του Roshdi Rashed 116
3.3.2. Οι απόψεις του Jeffrey Oaks 120
3.3.3. Συζήτηση και συμπεράσματα 122
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 129

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Θέμα του πρώτου κεφαλαίου της εργασίας αποτελεί η ζωή και το έργο του Αλ-Χουαρίζμι.Το περιεχόμενο της αλγεβρικής πραγματείας *Σύντομο βιβλίο άλγεβρας* (*Άλγεβρα*) του Αλ-Χουαρίζμι είναι το θέμα συζήτησης στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας. Παρουσιάζουμε το πρώτο μέρος της *Άλγεβρας*, το οποίο περιέχει, μεθόδους επίλυσης εξισώσεων και πράξεις με παραστάσεις, επιλέγοντας αποσπάσματα από τις πιο πρόσφατες και θεωρούμενες πιο αξιόπιστες μεταφράσεις του έργου. Από το δεύτερο μέρος του βιβλίου, το οποίο περιέχει λυμένα προβλήματα, επιλέξαμε αντιπροσωπευτικά προβλήματα από κάθε κεφάλαιο, ώστε να δοθεί μια σχετικά πλήρης εικόνα των περιεχομένων του.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας η συζήτηση έχει ως θέμα τις απόψεις - ερμηνείες των ιστορικών για το έργο. Οι ερμηνείες αφορούν αφ'ενός σε ερωτήματα για τη σημασία των όρων και των εννοιών που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας της *Άλγεβρας* και αφ'ετέρου σε ερωτήματα σχετικά με τις πηγές από τις οποίες, ο Αλ-Χουαρίζμι άντλησε μεθόδους και προβλήματα. Τέλος, επιπλέον θέμα συζήτησης αποτελούν οι απόψεις των ιστορικών αναφορικά, πρώτον με το ερώτημα της σημασίας του βιβλίου για την ιστορία της άλγεβρας και δεύτερον με το ερώτημα για το χαρακτήρα του έργου. Παρουσιάζονται πρόσφατες απόψεις οι οποίες ανατρέπουν καθιερωμένες ερμηνείες. Υποστηρίζεται ότι η *Άλγεβρα* είναι ένα πρακτικό βιβλίο, στο οποίο αποτυπώνεται κυρίως η προφορική παράδοση της αλγεβρικής τέχνης της εποχής του.

Λέξεις κλειδιά: al-jabr, al-muqabala, mal, shay, dirham, aggregation

ABSTRACT

The first chapter of this dissertation deals with the life and work of Al-Khwarizmi. The contents of Al-Khwarizmi's algebraic treatise *Brief Book on Calculation by Algebra (Algebra)* is discussed in the first part of our work. We present the first part of *Algebra*, which contains methods for solving two-and three-term equations and performing operations with algebraic expressions, by selecting excerpts from reliable translations of the work. From the second part of the book, which contains worked-out problems, we chose representative problems from each chapter to give a relatively complete picture of the contents.

In the third chapter we discuss viewpoints and interpretations of historians of mathematics regarding the project of al-Khwarizmi. The interpretations bear on questions about the importance of terms and concepts used by the author of *Algebra on* the one hand and questions about the sources from which Al-Khwarizmi derived methods and problems on the other. Finally, an additional issue is the discussion of the historians' views on the question of the importance of the book for the history of algebra and the question about the nature of the underlying project of its author.

We present recent views that compromise established interpretations, and it is argued that al-Khwarizmi's *Algebra* is a practical book, in which mainly the oral tradition of the algebraic art of his time is reflected.

Key words: al-jabr, al-muqabala, mal, shay, dirham, aggregation.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αλγεβρική πραγματεία του Αλ-Χουαρίσμι (Α-Χ)[1] αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα γραπτά κείμενα στην ιστορία της άλγεβρας και θεωρείται ένα από τα αρχαιότερα μαζί με τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου. Αν και δεν έχουμε ακριβή γνώση όλων των παραδόσεων, προφορικών ή γραπτών που πιθανόν να επηρέασαν τον Α-Χ, είναι βέβαιο ότι δέχτηκε επιδράσεις και από τις δύο. Συνδυάζοντας τα διάφορα νήματα των παραδόσεων που είχε κληρονομήσει κατάφερε να συνθέσει μερικά θεμελιώδη στοιχεία της άλγεβρας ώστε να παρουσιαστούν σε μία απλή και πρακτική δομή. Ο Α-Χ συνέγραψε ένα πρακτικό βιβλίο επίλυσης προβλημάτων με τη μέθοδο της άλγεβρας. Αν και το έργο δεν θεωρήθηκε μαθηματικά πρωτότυπο από αρκετούς μαθηματικούς και ιστορικούς στο παρελθόν αλλά και στην εποχή μας, ωστόσο ο συστηματικός τρόπος που ακολουθεί ο συγγραφέας στην παρουσίαση των κανόνων της τέχνης της άλγεβρας αλλά και η εφαρμογή τους σε προβλήματα, σφράγισαν την αντίληψη των μαθηματικών του μεσαίωνα για αυτήν την τέχνη. Το βιβλίο του Α-Χ λειτούργησε ως πρότυπο για πολλούς συγγραφείς βιβλίων άλγεβρας, κατ'αρχάς στον Ισλαμικό κόσμο και αργότερα στην Ευρώπη. Η επιρροή που άσκησε σε σημαντικούς μαθηματικούς του Ισλαμικού κόσμου αντανακλάται στα έργα τους. Μετά τον 12ο αιώνα, η διάδοση των μεταφράσεων της πραγματείας στους λόγιους της Δύσης, ήταν ένας παράγοντας, ο οποίος μαζί με τη μετάδοση της γνώσης λόγω των εμπορικών σχέσεων ανάμεσα στον Ισλαμικό κόσμο και τη Δύση, συνέβαλε στην κατοπινή δημιουργία της Ιταλικής μεσαιωνικής άλγεβρας. Η εξέλιξη αυτής της τελευταίας διαμόρφωσε τις προϋποθέσεις για την παραπέρα ανάπτυξη της άλγεβρας προς τη σύγχρονη μορφή της. Ένας από τους πιο δημιουργικούς μαθηματικούς του 16ου αιώνα, ο Vieta, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της Ιταλικής παράδοσης της τέχνης της άλγεβρας και εμπνεόμενος από την παράδοση των *Αριθμητικών* Διόφαντου, ανέπτυξε μέσα από το ιδιαίτερα πρωτότυπο έργο του, τον αλγεβρικό συμβολισμό. Η απόκτηση του συμβολικού της χαρακτήρα οδήγησε την άλγεβρα στην πλήρη έκφρασή της ως θεωρία εξισώσεων. Το εγχείρημα

[1] Για ευκολία θα γράφουμε Α-Χ αντί του Αλ-Χουαρίζμι.

που ανέλαβε ο Α-Χ, να συγγράψει μια πραγματεία περί άλγεβρας, καταγράφοντας τις αλγεβρικές παραδόσεις με τις οποίες ήρθε σε επαφή, αποτελεί ένα μεγάλο βήμα προς την κατεύθυνση η οποία οδήγησε την τέχνη της άλγεβρας σε επιστήμη. Ο ρόλος που έπαιξε η *Άλγεβρα* στην ιστορία των μαθηματικών, επιτρέπει να αναγνωριστεί η σπουδαία συμβολή του Α-Χ, στη μετεξέλιξη της πρακτικής αλγεβρικής τεχνικής μέσα από μια μακραίωνη πορεία στην επιστήμη της άλγεβρας.

Η εργασία αυτή σκοπεύει πρώτον να δώσει μία αντιπροσωπευτική εικόνα της *Άλγεβρας* του Α-Χ και δεύτερον, να παρουσιάσει κάποιες από τις απόψεις - ερμηνείες των ιστορικών. Μέρος της παρουσίασης αποτελεί η έκφραση της ιστοριογραφικής αντιπαράθεσης, μέσα από τις αντικρουόμενες απαντήσεις, δύο σύγχρονων ιστορικών των μαθηματικών, σε ερωτήματα που αφορούν στο αλγεβρικό έργο του Α-Χ.

Στο Κεφάλαιο 1, η προσπάθεια δημιουργίας ενός πορτραίτου του Α-Χ απέφερε πολύ φτωχά αποτελέσματα, αφού τα στοιχεία που αναφέρονται στη ζωή του είναι ελάχιστα. Ευτυχώς οι βιβλιογραφικές αναφορές και τα στοιχεία που υπάρχουν για το έργο του, δημιουργούν μια πιο περιεκτική εικόνα για τον λόγιο Α-Χ με τα ποικίλα ερευνητικά ενδιαφέροντα..

Στο Κεφάλαιο 2, περιγράφεται το περιεχόμενο της *Άλγεβρας*. Έγινε προσπάθεια η περιγραφή να είναι πλήρης αλλά και κοντά στο πνεύμα του κειμένου του βιβλίου. Επιμείναμε ιδιαίτερα στην παρουσίαση με σχετική λεπτομέρεια των έξι τύπων εξισώσεων, μαζί με τις διαδικασίες επίλυσής τους, που περιέχονται στην *Άλγεβρα*.

Στο Κεφάλαιο 3, ασχολούμαστε κατ'αρχάς με τις έννοιες και τους όρους που χρησιμοποιεί ο Α-Χ, αλλά και τη σχέση μεταξύ αυτών και της δομής των λύσεων. Η συζήτηση διεξάγεται στο πλαίσιο των σχετικά πρόσφατων ερμηνειών. Στη συνέχεια, γίνεται παρουσίαση των αντιθετικών, κατά μεγάλο μέρος, απόψεων των ιστορικών Roshdi Rashed και Jeffrey Oaks, πάνω σε ιστοριογραφικά ερωτήματα αναφορικά με την *Άλγεβρα*.

Προσπαθήσαμε να αποφύγουμε μια ανάγνωση του έργου του Α-Χ, η οποία απορρέει από την οπτική γωνία της σύγχρονης αλγεβρικής αντίληψης. Υιοθετήσαμε, γι' αυτό το λόγο, απόψεις οι οποίες σέβονται την παραπάνω μεθοδολογική παρατήρηση. Θελήσαμε

να αποσπάσουμε από τη μελέτη του θέματος, μια κατανόηση της *Άλγεβρας* και της μαθηματικής πρακτικής του Α-Χ, η οποία να είναι ενταγμένη στο ιστορικό πλαίσιο της εποχής του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΖΩΗ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ Al-Khwarizmi

Σε αυτό το σύντομο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, θα αναφέρουμε βιογραφικά στοιχεία για τον Αλ-Χουαρίσμι, θα γίνει επίσης μια περιληπτική αναφορά στο συνολικό συγγραφικό του έργο. Τέλος θα δοθούν στοιχεία για το αλγεβρικό του έργο το οποίο και αποτελεί αντικείμενο της συζήτησής μας στα επόμενα κεφάλαια.

1.1. Al–Khwarizmi: ΕΝΑΣ ΛΟΓΙΟΣ ΣΤΗ ΒΑΓΔΑΤΗ ΤΟΥ 9ου ΑΙΩΝΑ

Αν και το όνομα του Αλ-Χουαρίζμι (Al-Khwarizmi) αλλά και η φήμη του σαν σπουδαίου μαθηματικού είναι πλατειά διαδεδομένη από τον μεσαίωνα, ωστόσο τα στοιχεία που γνωρίζουμε για τη ζωή του είναι λιγοστά.[2] Το πλήρες όνομά του είναι Muhammad ibn Mūsā al–Khwarizmi. Μόνο κατά προσέγγιση τοποθετούμε το έτος γέννησης πριν το 800 μΧ και το θάνατό του μετά το έτος 847 μΧ. Στα Ισλαμικά βιβλιογραφικά έργα βρίσκουμε μόνο λίγες σύντομες αναφορές στον Α-Χ και στο έργο του. Επίσης κάποιες περιστασιακές αναφορές σε αυτόν βρίσκονται στα έργα κάποιων ιστορικών αλλά και γεωγράφων. Οι πληροφορίες, από τα έργα των μαθηματικών και αστρονόμων του καιρού του αλλά και μεταγενέστερων, είναι ελάχιστες.

Το όνομα του Α-Χ και οι τίτλοι κάποιων έργων του αναφέρονται από τους αλγεβριστές, Abū Kamil και Sinān ibn al-Fath αλλά και από αστρονόμους όπως ο al-Birūni και ο al-Hāshimi. Όμως στα έργα αυτών των επιστημόνων δεν βρίσκουμε κάποια σημαντική πληροφορία για την ζωή του. Ο βιοβιβλιογράφος al-Nadim γράφει για τον Α-Χ: “ Το όνομά του είναι Muhammad ibn Mūsā, η καταγωγή του είναι από την Khwarizm. Απασχολούνταν στη βιβλιοθήκη της σοφίας (*Khizanat al-hikma)* του αλ-Μαμούν. Αυτός ήταν αστρονόμος…”[3]

Γίνεται αντιληπτό ότι η έλλειψη γραπτών και αξιόπιστων μαρτυριών ευνοεί την

[2] Σαν κύρια πηγή πληροφοριών για τη ζωή και το έργο του Αλ-Χουαρίσμι, χρησιμοποιήσαμε το λήμμα του DSB [G..J. Toomer 1973, 358-365]

[3] [Rashed 2009, 3]

δημιουργία διαφόρων φανταστικών διηγήσεων και θρύλων σχετικά με τη ζωή του Α-Χ. Επαναλαμβάνουμε όμως, ότι τα πραγματικά αξιόπιστα στοιχεία για την ζωή του είναι ελάχιστα και αναφέρονται στην περίοδο της ηγεμονίας του χαλίφη αλ-Μαμούν και φτάνοντας μέχρι την ηγεμονία του χαλίφη αλ-Ουαθίκ.

Με βάση το επίθετο "al–Khwarizmi" σαν τόπος καταγωγής του θεωρείται συνήθως η Khwarizm η οποία βρισκόταν στην περιοχή της σύγχρονης πόλης Κίβα, νότια της λίμνης Αράλης στην κεντρική Ασία. Πάντως δεν είναι βέβαιο, ότι καταγόταν από την Khwarizm ο ίδιος ο Α-Χ και όχι κάποιος πρόγονός του,. Ο ιστορικός al-Tabari τον ονομάζει και "al-Majusi"[4] επίθετο το οποίο δείχνει ότι ο Α-Χ ήταν λάτρης της παλαιάς θρησκείας του Ζωροαστρισμού. Όμως αν κρίνουμε από τις επικλήσεις στον Αλλάχ που περιέχονται στην πραγματεία του περί άλγεβρας, αυτές ασφαλώς σκιαγραφούν το πορτραίτο ενός ευσεβούς Μουσουλμάνου. Δεν υπάρχουν πληροφορίες για τον τρόπο, τον τόπο, αλλά ούτε και το περιεχόμενο την εκπαίδευσης που έλαβε. Όταν η Βαγδάτη έγινε πρωτεύουσα του χαλιφάτου στα χρόνια των πρώτων Αββασιδών χαλίφηδων, σαν μια υπηρεσία η οποία αποτελούσε "τμήμα του διοικητικού και γραφειοκρατικού μηχανισμού του κράτους"[5], λειτουργούσε μια βιβλιοθήκη, πιθανόν μέσα στο παλάτι, με την ονομασία "*bayt al-hikma*" που σημαίνει "οίκος της σοφίας". Η περιγραφή του οίκου της σοφίας από διάφορους συγγραφείς δίνει πολλές και διαφορετικές εικόνες για του λόγιους που απασχολούνταν εκεί αλλά και για το είδος της δραστηριότητάς τους. Κάποιοι τον παρουσιάζουν σαν ένα ερευνητικό ίδρυμα, άλλοι μιλούν για σημαντικό μεταφραστικό κέντρο της αρχαίας γραμματείας και τέλος στον αντίποδα υπάρχει η άποψη που θεωρεί τον οίκο της σοφίας, μια ιδιωτική βιβλιοθήκη του χαλίφη στην οποία είχαν πρόσβαση μόνο διαπρεπείς λόγιοι που απολάμβαναν την εύνοια του χαλίφη.[6] Στην πραγματικότητα υπάρχουν ελάχιστες αξιόπιστες πληροφορίες για τον οίκο της σοφίας. Αξιόπιστη για παράδειγμα είναι η πληροφορία, ότι επί αλ-Μαμούν (813-833μΧ), ο αστρονόμος και μαθηματικός Α-Χ, "απασχολούνταν πλήρως στην εν λόγω βιβλιοθήκη, στην υπηρεσία του αλ-Μαμούν"[7]

Ο χαλίφης αλ-Μαμούν έχει θεωρηθεί υποστηρικτής των επιστημών. Είναι βέβαιο ότι ο

---

[4] [Toomer, DSB,358]

[5] [Γούτας 2001, 80]

[6] [Γούτας 2001, κεφάλαιο 4], [Γκουγκενέμ 2009, 144]

[7] [Γούτας 2001, 82]

Α-Χ ήταν στον κύκλο των λογίων[8] οι οποίοι ήταν ευνοούμενοι του χαλίφη και του προσέφεραν υπηρεσίες. Αυτό επιβεβαιώνεται, όπως θα δούμε στο δεύτερο κεφάλαιο και από το εγκώμιο που πλέκει ο Α-Χ για το χαλίφη, στην εισαγωγή της πραγματείας του περί της άλγεβρας.[9] Επιπλέον ο Α-Χ, σε αναγνώριση της ευεργεσίας που δέχτηκε από τον αλ-Μαμούν του αφιέρωσε δύο από τα έργα που συνέγραψε, την πραγματεία του περί αστρονομίας και την *Άλγεβρα* του.

Η χρήση της αστρολογίας για πρόβλεψη, τόσο σε ατομικό επίπεδο όσο και για κοινωνικά ενδεχόμενα ήταν της μόδας στην αυλή των περισσοτέρων χαλίφηδων. Έτσι φαίνεται πως αστρονόμοι και μαθηματικοί ήταν επιφορτισμένοι και με την παροχή αστρολογικών προβλέψεων στους πάτρωνες τους. Ο ιστορικός αλ-Ταμπαρί αναφέρει την ακόλουθη ιστορία για τον χαλίφη αλ-Ουαθίκ (842– 847μΧ). Κατά την διάρκεια σοβαρής ασθένειάς του, ο χαλίφης ζήτησε από τον Α-Χ να προβλέψει με βάση το ωροσκόπιό του αν θα ανάρρωνε ή όχι. Αν και ο Α-Χ προέβλεψε ακόμη πενήντα χρόνια ζωής, ο αλ-Ουαθίκ απεβίωσε σε δέκα ημέρες. Δεν είναι σαφές αν ο αλ-Ταμπαρί αναφέρει την ιστορία για το δίδαγμα της, ότι ακόμη και σπουδαίοι επιστήμονες κάνουν λάθη ή σαν παράδειγμα για την "πολιτική" ευστροφία του Α-Χ. Πάντως από αυτή την ιστορία, στο βαθμό που δεν αμφισβητείται, προκύπτει το ασφαλές συμπέρασμα ότι ο Α-Χ έζησε τουλάχιστον μέχρι το έτος 847 μΧ. Κάποιες βιογραφίες του Α-Χ αναφέρονται ότι συμμετείχε σε μια αποστολή εξερεύνησης στο έδαφος της Βυζαντινής αυτοκρατορίας κατόπιν εντολής του αλ-Ουαθίκ το έτος 842μΧ. Αυτή η πληροφορία δεν ανταποκρίνεται στα πραγματικά γεγονότα και οφείλεται στη συσχέτιση του ονόματος "Muhammad Ibn Mūsā, ο αστρονόμος" του λόγιου που συμμετείχε, με τον Α-Χ. Όμως είναι σχεδόν βέβαιο, ότι δεν πρόκειται για τον Α-Χ αλλά για τον ένα από τους τρείς αδελφούς Μπανού Μούσα, οι οποίοι απασχολούνταν επίσης στη βιβλιοθήκη της σοφίας. Ο αστρονόμος και μαθηματικός αλ-Μπιρούνι (973 – 1048μΧ) μας πληροφορεί ότι ο Α-Χ σε συνεργασία με τον αστρονόμο Γιαχία ιμπν Αμπί Μανσούρ ανέλαβε τη μέτρηση της λοξότητας της εκλειπτικής, με εντολή του χαλίφη αλ-Μαμούν.[10]

---

[8] Βέβαιο θεωρείται επίσης, ότι στον Οίκο της σοφίας εκτός από τον Α-Χ απασχολούνταν, ο αστρονόμος Γιαχία ιμπν Αμπί Μασούρ (Yahyā ibn Abi Mansūr), οι τρείς αδελφοί Μπανού Μούσα (Banū Mūsa ibn Sakir) και ο αλ-Χατζιάτζ ιμπν Ματάρ (al-Hajjaj ibn Matār) ο οποίος είχε μεταφράσει τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη στην Αραβική. [Rashed 2009, 31]

[9] Η πραγματεία περί άλγεβρας θα αναφέρεται στα επόμενα σαν *Άλγεβρα* του Α-Χ

[10] [Rashed 2009, 6]

1.2. ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ Al-Khwarizmi

Ο Α-Χ ήταν ένας λόγιος με ποικίλα ερευνητικά ενδιαφέροντα τα οποία αποτυπώθηκαν σε ένα αρκετά περιεκτικό σύνολο γραπτών έργων. Το σύνολο αυτών των έργων εκτείνεται από τα μαθηματικά και την αστρονομία μέχρι τον καθορισμό του ημερολογίου, την γεωγραφία καθώς και την ιστορία. Αμέσως παρακάτω θα συζητήσουμε εν συντομία για καθεμία χωριστά από αυτές τις διατριβές. Ασφαλώς υπάρχει ένα πρόβλημα με την ακριβή χρονολόγηση της συγγραφής καθενός από αυτά τα έργα, γιατί τα υπάρχοντα στοιχεία δεν επιτρέπουν στους ιστορικούς να αποφανθούν με βεβαιότητα. Όμως παρά την έλλειψη επαρκών στοιχείων έχει γίνει μία χονδρική εκτίμηση της περιόδου συγγραφής τους.

Θα αναφέρουμε πρώτα περιληπτικά την περίοδο και τη σειρά σύνθεσης[11] των έργων και μετά πιο λεπτομερή στοιχεία σχετικά με το περιεχόμενο τους για όσα από αυτά διαθέτουμε. Η διατριβή στην άλγεβρα (η *Άλγεβρα*) εκτιμάται ότι έχει συνταχθεί κατά τη διάρκεια της ηγεμονίας του χαλίφη αλ – Μαμούν, δηλαδή από το έτος 813 έως το 833. Την ίδια περίοδο συνέγραψε και το αστρονομικό του έργο, με τίτλο *Zij al –siddhind.* Θεωρείται ότι και τα δύο είναι έργα της πρώιμης φάσης της επιστημονικής του δραστηριότητας. Η διατριβή του για την Ινδική αριθμητική έχει αναφορές στην *Άλγεβρα*, πράγμα που σημαίνει ότι η συγγραφή της έγινε μετά από αυτήν. Μία διατριβή με θέμα το Εβραϊκό ημερολόγιο, αν ληφθούν υπ' όψιν τα στοιχεία που περιέχονται σε αυτήν, χρονολογείται γύρω στο έτος 823 ή ίσως το 824.

Η πραγματεία του περί γεωγραφίας (εν συντομία *Γεωγραφία*) έχει χρονολογηθεί, λίγο μετά το έτος 816 ή το 817. Αλλά αυτή η εκτίμηση ενδεχομένως περιέχει μεγάλη απόκλιση από το πραγματικό έτος συγγραφής της.

Τέλος το ιστορικό του έργο (εν συντομία *Χρονικό*) πρέπει να έχει γραφτεί μετά το έτος 826. Αυτή η εκτίμηση προκύπτει από το γεγονός ότι ο ιστορικός αλ–Ταμπάρι κάνει αναφορά σε αυτό το έργο για να επιβεβαιώσει ενός γεγονός που έγινε εκείνο το έτος. Εκτός από τα παραπάνω, ο Α – Χ έγραψε δύο ακόμη έργα με θέμα τον αστρολάβο. Το πρώτο έχει τίτλο *Kitab 'amal al – asturlab* δηλαδή «Βιβλίο περί της κατασκευής του Αστρολάβου» και το δεύτερο που ασχολείται με τη χρήση του οργάνου φέρει τον τίτλο *Kitab al – amal bi' asturlab*, «Βιβλίο περί της λειτουργίας του Αστρολάβου».

---

[11] [Toomer 1975 – 1990, 358 – 365]

Ας έλθουμε τώρα σε μία σύντομη γενική περιγραφή του περιεχομένου κάθε έργου αλλά και της σχέσης του με την Ελληνική ή την Ινδική[12] γραμματεία επί του θέματος. Το περιεχόμενο της *Άλγεβρας* θα συζητηθεί λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο, έτσι εδώ θα πούμε μόνο δύο λόγια για την γενική περιγραφή της διατριβής. Μπορεί κανείς να την χαρακτηρίσει σαν ένα πρακτικό εγχειρίδιο περί υπολογισμού. Σκοπός του συγγραφέα, με την έκδοση αυτού του έργου, είναι η διδασκαλία μεθόδων επίλυσης προβλημάτων και ο τρόπος εκτέλεσης του υπολογισμού κατά την εφαρμογή αυτών των μεθόδων. Το έργο διαιρείται σε τρία μέρη. Στο πρώτο ασχολείται με τους έξι τύπους ισοτήτων (εξισώσεων) και τις διαδικασίες επίλυσης. Στο δεύτερο ασχολείται με υπολογισμό στη μετρητική γεωμετρία. Τέλος στο τρίτο μέρος, το οποίο είναι και το μεγαλύτερο από τα άλλα δύο, ασχολείται με προβλήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του Ισλαμικού δικαίου περί κληρονομιών.

Το αστρονομικό έργο *Zij al – siddhind* του Α–Χ, βασίζεται κατά μεγάλο μέρος σε ένα Ινδικό αστρονομικό έργο. Αυτό το τελευταίο έργο, έφερε στη Βαγδάτη, ένα μέλος μιας Ινδικής πολιτικής αποστολής λίγο μετά το έτος 770, στην αυλή του αλ-Μανσούρ. Είναι πιθανό να πρόκειται για το έργο *Brahma-sphuta-siddhanta* που συνέγραψε το έτος 628 ο μαθηματικός και αστρονόμος *Brahmagupta.* Αυτό το Σανσκριτικό έργο μεταφράστηκε επί αλ-Μανσούρ στην Αραβική γλώσσα με τίτλο *Zij al – siddhind*. Η λέξη *Zij* σημαίνει «σύνολο αστρονομικών πινάκων» και η δεύτερη λέξη *siddhind* είναι σύντμηση των λέξεων siddhanta – Hindu δηλαδή Ινδική σιδχάντα, με τη σημασία: Ινδικό εγχειρίδιο αστρονομίας. Έτσι μία απόδοση του τίτλου θα ήταν: Βιβλίο πινάκων Ινδικής αστρονομίας. Με βάση την μετάφραση αυτού του έργου κάποιοι αστρονόμοι συνέγραψαν παρόμοια έργα και μάλιστα με τον ίδιο τίτλο. Μάλιστα το έργο του Α–Χ θεωρείται ότι δεν είναι κάτι περισσότερο από μια άλλη εκδοχή της μετάφρασης του Ινδικού έργου με κάποιες προσαρμογές. Η σπουδαιότητά του σήμερα οφείλεται κυρίως, στο γεγονός ότι είναι το πρώτο Ισλαμικό αστρονομικό έργο που έχει διασωθεί εξ' ολοκλήρου. Όμως δεν έχει διασωθεί κάποιο αντίγραφο του Αραβικού πρωτοτύπου, αλλά το έργο στη μορφή της Λατινικής μετάφρασης του, των αρχών του 12^{ου} αιώνα από τον

[12] Πολλοί ιστορικοί υποστηρίζουν την άποψη της επίδρασης της Ελληνικής αλλά και της Ινδικής γραμματείας στην ανάπτυξη της Ισλαμικής επιστήμης. Αυτό, όπως λένε, ισχύει ειδικά για τα μαθηματικά και αστρονομικά έργα. Αλλά συμπλήρωναν ιδιαίτερα στην περίπτωση της Ελληνικής επίδρασης επιπλέον τα φιλοσοφικά και ιατρικά έργα. [Lidberg 1997, 249]. [Berggren , J.L. 2007, 516]. Υπάρχουν όμως επιδράσεις και από την περσική γραμματεία, από την οποία είχαν μεταφραστεί ιστορικά και λογοτεχνικά έργα στην Αραβική. [Γούτας 2001, 70;78]

Αδελάρδο του Bath. Ακόμη όμως και αυτή η μετάφραση δεν έγινε από το πρωτότυπο έργο, αλλά από μια αναθεωρημένη εκδοχή του, την οποία συνέθεσε ο αστρονόμος αλ-Μαζρίτι (al–Majriti) στην Ισπανία. Ενδεχομένως δε αυτή η εκδοχή να είχε αναθεωρηθεί διπλά, δηλαδή και από τον Ιμπν αλ-Σαφάρ μαθητή του αλ-Μαζρίτι. Παρ' όλα αυτά σχολιαστές του πρωτότυπου έργου μας δίνουν κάποια στοιχεία. Όπως για παράδειγμα, ο Ibn al-Muthannā, τον $10^{ο}$ αιώνα, σε σχόλιό του αναφέρει ότι ο Α-Χ κατασκεύασε τους πίνακες ημιτόνων με βάση το 150. Γνωρίζουμε ότι αυτή τη βάση χρησιμοποιούσαν οι Ινδοί αστρονόμοι, ενώ στην Ισλαμική αστρονομία σαν βάση για τέτοιους πίνακες χρησιμοποιείται συνήθως το 60. Το έργο στη μορφή που έχει διασωθεί συνίσταται από οδηγίες για υπολογισμό και χρήση των πινάκων. Συμπληρώνεται από ένα σύνολο πινάκων, η μορφή των οποίων έχει μεγάλη ομοιότητα με εκείνους του Πτολεμαίου. Υπάρχει ένας πίνακας μέσης κίνησης και ένας πίνακας εξισώσεων για τον ήλιο, τη σελήνη και καθέναν από τους πέντε γνωστούς στην αρχαιότητα πλανήτες. Επιπλέον υπάρχουν διάφοροι τριγωνομετρικοί πίνακες καθώς και πίνακες για υπολογισμό εκλείψεων και ηλιακής απόκλισης. Η ομοιότητα, που μόλις ανέφερα, εξηγείται από το βέβαιο γεγονός ότι, οι πίνακες του Πτολεμαίου στη μορφή που αναθεωρήθηκαν από τον Θέωνα τον Αλεξανδρέα είχαν διαδοθεί σε αστρονόμους του Ισλαμικού κόσμου. Κατά συνέπεια είναι πολύ πιθανό να έχει επηρεαστεί ο Α-Χ, άμεσα ή έμμεσα στη δημιουργία των δικών του πινάκων.

Ασφαλώς οι βασικές παράμετροι των πινάκων στο αστρονομικό έργο του Α-Χ προέρχονται από την Ινδική αστρονομία. Μέσες κινήσεις των ουράνιων σωμάτων, μέσες θέσεις ανά εποχή, απόγειο και αφήλιο των πλανητών όλα συμφωνούν με ότι προκύπτει από το έργο του Brahmagupta. Υπάρχει επίσης επίδραση από το έργο *Zij al-shah* το οποίο ήταν μετάφραση ενός περσικού αστρονομικού έργου το οποίο είχε συνταχθεί περίπου το 550. Ο ιστορικός G.J.Toomer παρατηρεί "πουθενά σε αυτό το έργο [*Zij al-siddhind*] δεν υπάρχει ίχνος αυθεντικής παρατήρησης ή κάτι περισσότερο από τετριμμένο υπολογισμό του συγγραφέα." Η απουσία αυθεντικών παρατηρήσεων εκ μέρους του συγγραφέα φαίνεται παράξενη αφού κάποια στοιχεία δείχνουν ότι στην εισαγωγή του πρωτότυπου έργου ο Α-Χ αναφερόταν σε παρατηρήσεις που έγιναν στην Βαγδάτη για τη μέτρηση της λοξότητας της ελλειπτικής. Χωρίς εξήγηση παραμένει και το ερώτημα: γιατί ο Α-Χ προτίμησε να εργαστεί με τις λιγότερο ακριβείς παραμέτρους και τις ασαφείς μεθόδους των Ινδών αστρονόμων, αν και είναι σχεδόν βέβαιο, ότι διέθετε τους πίνακες του Πτολεμαίου;

Το αστρονομικό έργο του Α-Χ δεν είχε την επιτυχία της *Άλγεβρας* του αλλά συνέχισε να χρησιμοποιείται, να μελετάται και να σχολιάζεται για πολύ καιρό. Αν και άλλοι αστρονόμοι[13]συνέθεσαν σπουδαιότερα έργα, κατά τον 9^{ο} και 10^{ο} αιώνα, αυτό εξακολούθησε να χρησιμοποιείται ως διδακτικό εγχειρίδιο. Αυτό ήταν το πρώτο έργο μαθηματικής αστρονομίας το οποίο μεταφράστηκε στα Λατινικά περί τα μέσα τους 13^{ου} αιώνα από τον Αδελάρδο του Bath. Όμως οι αστρονομικοί πίνακες του Α-Χ διαδόθηκαν στου λόγιους της Δύσης κυρίως μέσω της μετάφρασης λίγο αργότερα ενός άλλου έργου. Οι *Τολεδιανοί πίνακες* αποτελούν μια συλλογή διαφόρων αστρονομικών πινάκων, η οποία δημιουργήθηκε τον 11^{ο} αιώνα, από έργα των Α-Χ, αλ-Μπατάνι και αλ-Ζαρκάλι . Αυτή η συλλογή στη Λατινική της μετάφραση, πιθανόν από τον Gerard της Cremona, παρά τις ελλείψεις της διαδόθηκε πλατειά σε όλη την Ευρώπη και χρησιμοποιήθηκε τουλάχιστον για έναν αιώνα.

Ας περάσουμε τώρα σε ένα άλλο έργο του Α-Χ, στο οποίο εξηγεί τη χρήση των Ινδικών ψηφίων των αριθμών. Το έργο δεν έχει διασωθεί σε κάποιο Αραβικό χειρόγραφο, αλλά μόνο στη μορφή μιας Λατινικής μετάφρασης, η οποία ενδέχεται να διαφέρει σημαντικά από το πρωτότυπο. Δεν γνωρίζουμε τον ακριβή τίτλο του πρωτότυπου έργου, αυτός ίσως ήταν “Kitab hisab al-adad al-hindi” δηλαδή “ πραγματεία περί υπολογισμού με τα Ινδικά ψηφία” ή ενδέχεται να έφερε τον τίτλο “Kitab al-jam wa’l-tafrig bi hisab al-hind” που σημαίνει “Βιβλίο της πρόσθεσης και αφαίρεσης με τη μέθοδο υπολογισμού των Ινδών.” [14] Η μετάφραση της πραγματείας εκθέτει τα Ινδικά ψηφία 1 έως 9 και το 0 καθώς και τις αρχές του θεσιακού συστήματος. Μετά παρουσιάζει κάποιες εφαρμογές με τις πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση καθώς και εξαγωγή τετραγωνικής[15]ρίζας. Εκτός των ακέραιων αριθμών ασχολείται με τα κοινά αλλά και τα εξηκονταδικά κλάσματα. Υπάρχουν στοιχεία που δείχνουν τη χρήση ενός Αραβικού αλφαβητικού συστήματος αρίθμησης, παρόμοιου με το Ελληνικό, πριν την εισαγωγή του Ινδικού θεσιακού

---

[13] Για παράδειγμα, ο αλ-Μπατάνι (al-Battani) συνέγραψε γύρω στο 900 το μεγάλο αστρονομικό έργο του, βασισμένο στην Μεγίστη, στους πίνακες του Πτολεμαίου, αλλά και σε δικές του παρατηρήσεις. Αυτό υπερτερεί από κάθε άποψη του έργου του Α-Χ. [Toomer DSB, 363]

[14] [Toomer DSB, 360]

[15] Το μοναδικό χειρόγραφο όπως το έχουμε δεν περιέχει ρίζες, αλλά υπάρχουν σε άλλα μεσαιωνικά έργα τα οποία προέρχονται από αυτό.

συστήματος. Επιπλέον, οι λόγιοι είχαν εξοικειωθεί με το εξηκονταδικό τροποποιημένο θεσιακό σύστημα της Ελληνικής αστρονομίας, αφού έργα όπως η *Αλμαγέστη* του Πτολεμαίου ήταν μεταφρασμένα πριν το 800 στα Αραβικά. Ωστόσο το δεκαδικό θεσιακό σύστημα των Ινδών, το οποίο είχαν αναπτύξει από τον 6^{ο} αιώνα, με την συστηματική πραγμάτευση του Α-Χ διαδόθηκε ευρέως και λόγω της απλότητας του συνέβαλε στην ανάπτυξη των μαθηματικών στον Ισλαμικό κόσμο και αργότερα στη Δύση. Το βιβλίο του Α-Χ είχε φτάσει ήδη από την 10^{ο} αιώνα στην Ισπανία και το δεκαδικό θεσιακό σύστημα ήταν σε χρήση αλλά μεμονωμένα. Η πραγματική διάδοσή του συντελέστηκε με τη Λατινική μετάφραση του έργου του Α-Χ στις αρχές του 12^{ου} αιώνα. Γρήγορα εμφανίστηκαν έργα τα οποία πραγματεύονταν το ίδιο θέμα του αριθμητικού συστήματος αλλά αποτελούσαν προσαρμογές ή αναθεωρήσεις του κειμένου του Α-Χ. Τα έργα αυτά, όπως για παράδειγμα, το *Liber alghoarismi* του Ιωάννη της Σεβίλλης (John of Seville περ. 1135) ή το *Algoarismus* του Ιωάννη του Sacrobosco (περ. 1250) συνέβαλαν ώστε να ταυτιστεί η Λατινική εκδοχή του ονόματος του Α-Χ, δηλαδή η λέξη *algoarismus,* με τη νέα αριθμητική των Ινδικών ψηφίων. Μάλιστα κάθε πραγματεία επί του θέματος έφερε στον τίτλο αυτή τη λέξη. Σταδιακά το "algorismus" συντομεύτηκε σε "algorism" και με παραφθορά έγινε "algorithm", λέξη που χρησιμοποιείται πλέον σαν επιστημονικός όρος σε διαδικασίες υπολογισμού.

Η γεωγραφική πραγματεία του Α-Χ με τίτλο *Kitab surat al-ard* το οποίο σημαίνει "Βιβλίο της μορφής της γης" περιέχονται κυρίως κατάλογοι με τον γεωγραφικό μήκος και πλάτος πόλεων και τοποθεσιών. Η πραγματεία διαιρείται σε έξι μέρη. Σε κάθε μέρος οι θέσεις είναι σε διάταξη σύμφωνα με τα "επτά κλίματα"[16] όπως συνήθως γινόταν στα αρχαία Ελληνικά γεωγραφικά έργα. Το πρώτο μέρος περιέχει καταλόγους πόλεων, το δεύτερο καταλόγους βουνών, το τρίτο θαλασσών, το τέταρτο νησιών, το πέμπτο καταλόγους κεντρικών σημείων διαφόρων γεωγραφικών περιοχών και το έκτο ποταμών.

Όπως αναφέρει ο Toomer, σαφώς υπάρχει σχέση ανάμεσα στην πραγματεία του Α-Χ και την *Γεωγραφία* του Πτολεμαίου. Η τελευταία αποτελεί "μια περιγραφεί του παγκόσμιου χάρτη και ένας κατάλογος συντεταγμένων των κύριων πόλεων σ' αυτόν, διατεταγμένων ανά περιοχές." Η σχέση όμως αυτή δεν μπορεί να ερμηνευτεί σαν να

[16] Ο γνωστός κόσμος εκείνης της εποχής είχε διαιρεθεί με βάση το γεωγραφικό πλάτος σε επτά ζώνες, οι οποίες ονομάζονταν "κλίματα" [Toomer DSB, 361]

είναι το έργο του Α-Χ, "απλή μετάφραση ή προσαρμογή" του έργου του Πτολεμαίου. Ο Toomer αναφέρει, ότι ο ιστορικός C.A. Nallino, είχε προτείνει την υπόθεση ότι η πραγματεία του Α-Χ βασίζεται στον παγκόσμιο χάρτη ο οποίος είχε κατασκευαστεί επί αλ-Μαμούν. Η δημιουργία του χάρτη είχε ως βάση τη *Γεωγραφία* του Πτολεμαίου, η οποία όμως είχε αναθεωρηθεί σημαντικά.

Ένα ακόμη έργο του Α-Χ, το οποίο έχει διασωθεί, είναι μια σύντομη πραγματεία περί του Εβραϊκού ημερολογίου. Ο τίτλος της είναι *Istikhraj ta'rikh al-yahūd* το οποίο σημαίνει "τρόπος υπολογισμού (εξαγωγή) της Εβραϊκής εποχής". Το ενδιαφέρον του Α-Χ για ένα τέτοιο θέμα εξηγείται λόγω της δραστηριότητας του σαν αστρονόμου. Το έργο θεωρείται ακριβές, καλά ενημερωμένο και αποτελεί σημαντικό στοιχείο για την αρχαιότητα του σύγχρονου Εβραϊκού ημερολογίου.

Δύο από τα έργα του Α-Χ έχουν ως θέμα τον αστρολάβο. Αν και οι πραγματείες αυτές δεν σώζονται γνωρίζουμε τους τίτλους τους. Ο τίτλος της πρώτης είναι *Kitab amal al-asturlab* δηλαδή "Βιβλίο περί κατασκευής του αστρολάβου", ενώ της δεύτερης *Kitab al-amal bi'l-asturlab* που σημαίνει "Βιβλίο για τη λειτουργία του αστρολάβου". Εικάζεται ότι ένα απόσπασμα από την τελευταία, περιέχεται σε έργο του 9^{ου} αιώνα του αστρονόμου αλ-Φαργκάνι (al-Farghani). Πάντως οτιδήποτε περιέχει αυτό το απόσπασμα υπάρχει σε προγενέστερα έργα τα οποία ο Α-Χ πιθανόν να χρησιμοποίησε. Υπάρχουν πραγματείες περί αστρολάβου, του 8^{ου} αιώνα στα Αραβικά αλλά και του 7^{ου} αιώνα στα Συριακά.[17] Επίσης υπάρχουν αρχαίες Ελληνικές πραγματείες περί του αστρολάβου, ο οποίος ονομαζόταν *Αράχνη* και θεωρείται επινόηση του Ευδόξου ή κατά άλλους του Απολλώνιου.

1.3. Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ ΤΟΥ Al-Khwarizmi

Το πιο φημισμένο από τα έργα του Α-Χ είναι αναμφισβήτητα η *Άλγεβρά* του. Έργο εμβληματικό της Ισλαμικής επιστήμης το οποίο έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών. Η συγγραφή του έργου έγινε κατά την περίοδο 813 έως 833 όταν χαλίφης με έδρα τη Βαγδάτη ήταν ο αλ-Μαμούν. Θεωρείται η πρώτη πραγματεία περί άλγεβρας στα Αραβικά. Το έργο διαδόθηκε ευρύτατα, κατ'αρχάς στον Ισλαμικό κόσμο και μετά την μετάφρασή του κατά του 12ο αιώνα στα Λατινικά, στους λόγιους ολόκληρης της Ευρώπης. Η επίδραση που άσκησε στους μαθηματικούς του Ισλαμικού

[17] Ο Σύριος επίσκοπος Σεβήρος Σεμπόκτ , είχε συγγράψει μια τέτοια πραγματεία. [Toomer DSB,365]

κόσμου αλλά και της Ευρώπης ήταν σημαντική. Πολλοί συγγραφείς έργων άλγεβρας κατά την περίοδο του μεσαίωνα μιμήθηκαν τον Α-Χ. Αυτό είχε ως συνέπεια να διατηρήσουν τον ρητορικό τρόπο γραφής του Α-Χ αλλά και μέρος του λεξιλογίου που χρησιμοποίησε στην *Άλγεβρα*. Για παράδειγμα η Αραβική λέξη *shay* που κυριολεκτικά σημαίνει *πράγμα* και χρησιμοποιείται για τον άγνωστο στο βιβλίο του Α-Χ, έχει το αντίστοιχό της *cosa* που σημαίνει επίσης *πράγμα* στα Ιταλικά βιβλία μεσαιωνικής άλγεβρας. Το γεγονός ότι το βιβλίο του Α-Χ λειτούργησε ως πρότυπο για τους μαθηματικούς του Ισλαμικού κόσμου, αντανακλάται στη δομή των αλγεβρικών έργων που κυκλοφόρησαν μετά την *Άλγεβρα*. Για παράδειγμα, το έργο με τίτλο *Βιβλίο άλγεβρας* που συνέγραψε ο μαθηματικός Abu Kamil, λίγες δεκαετίες μετά την έκδοση της *Άλγεβρας*, περιέχει παραδείγματα που βρίσκονται στο βιβλίο του Α-Χ, αλλά και παρόμοια δομή με αυτό. Το έργο του Α-Χ χρησιμοποιήθηκε για αιώνες ως διδακτικό εγχειρίδιο άλγεβρας. Αν και οι αλγεβρικές πραγματείες, του αλ-Καράτζι (αρχές ενδέκατου αιώνα) και του αλ- Καγιάμ (ενδέκατος προς δωδέκατο αιώνα), αποτελούσαν σημαντικά θεωρητικά έργα, ανώτερου μαθηματικού επιπέδου από την *Άλγεβρα*, η τελευταία διατήρησε τη θέση της ως ένα κλασσικό έργο.

Στα σωζόμενα χειρόγραφα το έργο δεν φέρει κανέναν τίτλο, ωστόσο ο εκδότης του τού 19^{ου} αιώνα F.Rosen, βασιζόμενος σε μια φράση που ο ίδιος ο al-Khwarizmi χρησιμοποιεί στον πρόλογο του έργου, υποστήριξε εύλογα ότι ο τίτλος θα έπρεπε να είναι «*Kitab mukhtasar fi hisab al-jabr wa-al-muqābala*», που σημαίνει «*Επίτομο βιβλίο για τον λογισμό με τη jabr και τη muqābala*». Την πρόταση του Rosen την αποδέχεται έκτοτε η κοινότητα των ιστορικών των μαθηματικών, με εξαίρεση τον R.Rashed και τους συνεργάτες του, οι οποίοι θεωρούν ότι η λέξη «mukhtasar» (επίτομο, συνοπτικό) δεν θα έπρεπε να περιλαμβάνεται στον τίτλο του έργου[18]. Το βιβλίο υπάρχει σε έξι Αραβικά χειρόγραφα. Από αυτά, το χειρόγραφο της Bodleian Library στην Οξφόρδη έχει χρησιμοποιηθεί στις περισσότερες μεταφράσεις. Τα υπόλοιπα πέντε Αραβικά χειρόγραφα βρίσκονται, από ένα, στην Αίγυπτο, στο Βερολίνο και στην Καμπούλ, και δύο στη Μεδίνα. Οι τυπωμένες εκδόσεις του Αραβικού κειμένου της *Άλγεβρας* είναι

[18] [Rashed 2009, 9]. Ο βασικός λόγος που ο Rashed επιθυμεί να απαλείψει από τον τίτλο τη λέξη «mukhtasar» είναι διότι η λέξη αυτή έρχεται σε καταφανή αντίθεση με τη βασική θέση του ότι η άλγεβρα επινοήθηκε για πρώτη φορά από τον al-Khwarizmi. Η λέξη «επίτομο», όπως είναι φανερό, μπορεί να χαρακτηρίζει μόνο ένα έργο που αναπαράγει κάτι ήδη γνωστό και σε χρήση, και όχι μια νέα «επιστήμη» η οποία «γεννιέται» με το έργο αυτό. Επομένως, η ύπαρξη ή όχι της λέξης «mukhtasar» δεν είναι ένα «αθώο» ερώτημα.

τρεις. Στις δύο από αυτές τις εκδόσεις έχει χρησιμοποιηθεί ένα και μοναδικό χειρόγραφο, αυτό της Οξφόρδης, Η πρώτη έγινε το έτος 1831 από τον Frederic Rosen και η δεύτερη το έτος 1939 από τους Ali Mustafa Musharrafa και Muhammad Mursi Ahmad.Η τρίτη και πιο πρόσφατη, από τις τυπωμένες εκδόσεις του Αραβικού κειμένου, οφείλεται στον Roshdi Rashed και κυκλοφόρησε το έτος 2007. Η διαφορά αυτής της έντυπης έκδοσης από τις δύο προηγούμενες είναι ότι ο Rashed χρησιμοποιεί όχι μόνο το χειρόγραφο της Οξφόρδης αλλά πέντε από τα έξι σωζόμενα χειρόγραφα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι όλα τα χειρόγραφα της *Άλγεβρας* που έχουν διασωθεί, είναι αντίγραφα τα οποία έχουν συνταχθεί αρκετούς αιώνες μετά τη συγγραφή του βιβλίου από τον Α-Χ. Για παράδειγμα το πιο παλιό, χρονολογείται από το έτος 1222, σχεδόν τέσσερις αιώνες μετά τη συγγραφή της *Άλγεβρας*, το δε χειρόγραφο της Οξφόρδης το έτος 1342.

Υπάρχουν μεσαιωνικές μεταφράσεις της *Άλγεβρας*, στα Λατινικά, Ιταλικά και Εβραϊκά. Έχουν διασωθεί τρείς Λατινικές μεσαιωνικές μεταφράσεις. Η πρώτη έγινε από τον Robert του Chester γύρω στο 1145 στην Segovia. Αυτή η μετάφραση εκδόθηκε (1915), από του Louis C. Karpinski και πιο πρόσφατα (1989) από τον Barnabas B. Hughes. Η δεύτερη Λατινική μετάφραση της *Άλγεβρας* έγινε από τον Gerard της Cremona, γύρω στο 1170 στο Toledo. Ο Gerard ο οποίος θεωρείται ο σπουδαιότερος μεταφραστής από τα Αραβικά στα Λατινικά, έκανε την πιο πλήρη και κυριολεκτική από τις τρείς μεταφράσεις. Αυτή εκδόθηκε με κριτικά σχόλια από τον Barnabas Hughes και το έτος 1986. Ο Jens Hoyrup υποστηρίζει, όπως αναφέρει ο Oaks, ότι η μετάφραση του Gerard είναι πιο κοντά στο Αραβικό πρωτότυπο του βιβλίου του Α-Χ, από το χειρόγραφο της Οξφόρδης. Τέλος η τρίτη Λατινική μετάφραση της *Άλγεβρας*, όπως πιστεύει ο Hughes, έγινε από τον Guglielmo de Lunis, πιθανόν μετά το 1250. Η έκδοσή της με κριτικά σχόλια, έγινε το 1986 από τον Wolfgang Kaunzner. Από αυτή την τελευταία μετάφραση της *Άλγεβρας* έγινε το 1313 μία Ιταλική μετάφρασή της. Όμως η μετάφραση είναι ανώνυμη και δεν γνωρίζουμε από ποιον έγινε.

Πρόσφατα, το έτος 2002, ανακοινώθηκε η ανακάλυψη ενός σύντομου Εβραϊκού μεσαιωνικού κειμένου, το οποίο θεωρείται διασκευή μέρους της Άλγεβρας του Α-Χ. Το Εβραϊκό κείμενο σε κάποια σημεία αποκλίνει από το Αραβικό κείμενο συντομεύοντας τη συζήτηση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι Λατινικές μεταφράσεις τη *Άλγεβρας* (και η Ιταλική) περιέχουν μόνο ένα μέρος από το βιβλίο του Α-Χ. Συγκεκριμένα περιέχουν τους κανόνες της άλγεβρας, μαζί με έναν αριθμό λυμένων προβλημάτων και τον κανόνα των

τριών (αναλογίες). Ο Oaks ονομάζει αυτά τα περιεχόμενα (εκτός από τον κανόνα των τριών), "παιδαγωγικό μέρος" της *Άλγεβρας*. Όμως ένα μεγάλο μέρος του βιβλίου του Α-Χ δεν μεταφράστηκε στα Λατινικά. Σε αυτό περιλαμβάνεται, η εισαγωγή του Α-Χ, αλλά και τα μέρη που αφορούν στην μετρική γεωμετρία και στα προβλήματα κληρονομιών. Το τελευταίο μέρος αποτελείται από προβλήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του Ισλαμικού δικαίου, τα οποία δεν ενδιέφεραν τους Ευρωπαίους, έτσι είναι προφανής ο λόγος της παράλειψης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΗΣ *Άλγεβρας*

Η περιγραφή της δομής και του περιεχομένου του αλγεβρικού έργου του Α-Χ είναι το θέμα του δεύτερου κεφαλαίου αυτής της εργασίας. Το έργο, όπως ανέφερα ήδη, φέρει τον τίτλο *Kitab al-jabr wa-al-muqābala* που σημαίνει Επίτομο βιβλίο περί υπολογισμού με *al-jabr* και *al-muqābala*. Το νόημα των όρων «al-jabr» και «al-muqābala» θα εξηγηθεί σε επόμενες ενότητες της εργασίας. Το περίφημο αυτό έργο, που στη συνέχεια θα το αναφέρω σαν *Άλγεβρα* του Α-Χ, θεωρείται σαν το αρχαιότερο που υπάρχει στα Αραβικά επί του θέματος. Εγκαινιάζει λοιπόν, σύμφωνα με τους ιστορικούς την γραπτή παράδοση της Αραβικής άλγεβρας. Η συγγραφή του χρονολογείται την περίοδο της δυναστείας των Αββασιδών με χαλίφη τον αλ-Μαμούν (813-833 μ.Χ.). Μετά από μια σύντομη εισαγωγή ο χωρισμός του έργου, σύμφωνα με τον Oaks[19] γίνεται σε τρία μέρη:

(i) Το αμιγώς αλγεβρικό, το οποίο διαιρείται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη, ο Α-Χ πραγματεύεται τους κανόνες της άλγεβρας και στην δεύτερη παραθέτει λυμένα προβλήματα. Η πρώτη ενότητα διαιρείται σε δύο υποενότητες. Στην πρώτη παρουσιάζει τις έξι περιπτώσεις ισοτήτων μεταξύ ειδών, οι οποίες αντιστοιχούν στις δικές μας πρωτοβάθμιες και δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις, μαζί με τις επιλύσεις τους και αιτιολογήσεις. Θέμα της δεύτερης υποενότητας είναι οι κανόνες των πράξεων επίσης με αιτιολογήσεις.

(ii) Το δεύτερο μέρος πραγματεύεται την «μέθοδο των τριών» και προβλήματα μέτρησης στη γεωμετρία.

(iii) Τέλος, το τρίτο μέρος περιλαμβάνει μια εκτεταμένη συλλογή από λυμένα προβλήματα κληρονομιών και δωρεών. Αυτό είναι σημαντικά μεγαλύτερο από τα άλλα δύο και καλύπτει περισσότερο από το μισό της έκτασης της πραγματείας.

[19] [Oaks 2009,171]

Ο Roshdi Rashed από την άλλη μεριά αν και δέχεται τη διαίρεση του έργου σε 4 μέρη[20]- μαζί με την εισαγωγή- όπως παραπάνω, εντούτοις θεωρεί ότι «το έργο αποτελείται από δύο βιβλία ίσου μήκους»[21]. Στο πρώτο βιβλίο καταχωρεί το πρώτο και δεύτερο από τα παραπάνω μέρη, ενώ στο δεύτερο βιβλίο, το οποίο θεωρεί ότι έχει τον τίτλο «Book on Wills» (βιβλίο περί διαθηκών) καταχωρεί το τρίτο μέρος. Το πρόβλημα με τη διαίρεση του έργου σε βιβλία είναι πως ο ίδιος ο Rashed καθώς και βιβλιογράφοι και μαθηματικοί από τον 9^{ο} αιώνα και μετέπειτα, αναφέρουν στον τίτλο του έργου την λέξη *kitāb* (βιβλίο)[22] και κατά συνέπεια, θεωρείται το ίδιο το έργο στο σύνολό του, σαν βιβλίο .

Ας έλθουμε όμως τώρα στην περιγραφή του περιεχομένου κάθε μέρους της *Άλγεβρας* με περισσότερες λεπτομέρειες. Στην εισαγωγή ο Α-Χ πληροφορεί τον αναγνώστη σχετικά με τις συνθήκες και τον σκοπό της συγγραφής. Διατυπώνει κάποιες σκέψεις σχετικά με το έργο των λόγιων-μελετητών και ευγνωμονεί τον χαλίφη αλ-Μαμούν για την υποστήριξη που του προσέφερε και την παρότρυνση για να συγγράψει το έργο.

Στο πρώτο μέρος το οποίο θεωρείται καθαρά αλγεβρικό, παρουσιάζει τους κανόνες της άλγεβρας μαζί με κάποιες εξηγήσεις. Οι κανόνες αυτοί αφορούν τους έξι τύπους αλγεβρικών εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού, μαζί με κανόνες για την εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού καθώς και πράξεις με τετραγωνικές ρίζες. Μετά από τους κανόνες της άλγεβρας παρουσιάζει μια συλλογή με σαράντα λυμένα προβλήματα. Αυτή η συλλογή προβλημάτων αποσκοπεί, όπως λέει ο ίδιος ο Α-Χ, να κάνει ευκολότερη την κατανόηση της αλγεβρικής μεθόδου επίλυσης[23].

Το περιεχόμενο του δεύτερου μέρους αρχίζει με μια σύντομη αναφορά στην μέθοδο των τριών και την εφαρμογή της σε λίγα προβλήματα από τον χώρο των εμπορικών συναλλαγών. Στη συνέχεια πραγματεύεται την επίλυση προβλημάτων υπολογισμού γεωμετρικών μεγεθών με την μέθοδο της άλγεβρας ή ορισμένα από αυτά με αριθμητική μέθοδο. Αυτοί οι υπολογισμοί αφορούν μήκη τμημάτων, περιμέτρους, εμβαδά και όγκους. Το γεωμετρικό υπόβαθρο που απαιτείται για να παρουσιαστεί το περιεχόμενο

---

[20] [Rashed 2009, 14-15]

[21] [Rashed 2009, 11]

[22] [Rashed 2009, 10]

[23] «…comprehension more accessible, effort lighter, and meaning easier…» («…ευκολότερη την κατανόηση, με λιγότερη προσπάθεια και το νόημα σαφέστερο…») [Rashed 2009, 144]

αυτού του μέρους είναι εντελώς στοιχειώδες.

Το τρίτο και τελευταίο μέρος της πραγματείας περιέχει λυμένα προβλήματα τα οποία προκύπτουν κατά την εφαρμογή του κληρονομικού δικαίου. Αυτό το μέρος είναι ιδιαίτερα εκτεταμένο και το στοιχείο αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένδειξη για την ιδιαίτερη αξία που αποδίδει ο Α-Χ στην τεχνική της άλγεβρας για την επίλυση ειδικά τέτοιου είδους προβλημάτων. Αυτή η ένδειξη ισχυροποιείται αν λάβουμε υπόψη τα όσα ευθύς εξ' αρχής στην εισαγωγή του έργου αναφέρει ο Α-Χ για τη χρησιμότητα και ευκολία που προσφέρει η άλγεβρα. Θεωρεί μάλιστα τις «περιπτώσεις κληρονομιών, κληροδοτημάτων» σαν έναν από τους σπουδαιότερους τομείς όπου η εφαρμογή της μεθόδου της άλγεβρας γίνεται απαραίτητη.[24] Η ιδιαιτερότητα και δυσκολία των προβλημάτων τα οποία προκύπτουν κατά των επιμερισμό των περιουσιών σε περιπτώσεις κληρονομιών και διαθηκών, οφείλεται στις περίπλοκες λεπτομέρειες του Ισλαμικού δικαίου. Η κάθε άλλο παρά απλή, αλλά μάλλον πολύπλοκη εφαρμογή του, λόγω και της εξέλιξής του κατά την περίοδο των πρώτων Αββασιδών χαλίφηδων [25], έκανε τις άλλες αριθμητικές τεχνικές ανεπαρκείς.

2.1. Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ *Άλγεβρας*

Χωρίς αμφιβολία το μέρος της *Άλγεβρας* του Α-Χ που έχει αναφερθεί συχνότερα από κάθε άλλο είναι η εισαγωγή της. Το ενδιαφέρον των ιστορικών και άλλων σχολιαστών επικεντρώνεται ιδιαίτερα σε αυτήν. Ο ίδιος ο Α-Χ αποκαλύπτει στην εισαγωγή, στοιχεία για τις συνθήκες υπό τις οποίες αποφάσισε να συγγράψει το έργο. Λόγω της αναφοράς του στον χαλίφη αλ-Μαμούν η συγγραφή του τοποθετείται κατά τη διάρκεια της εικοσαετίας από το έτος 813 έως το 833. Ακόμα αναφέρει σε τι αποσκοπεί η συγγραφή της *Άλγεβρας*, καθώς και τις ανάγκες που εξυπηρετεί το έργο.

Ο Α-Χ πλέκει το εγκώμιο του χαλίφη και στη συνέχεια εκφράζει συνοπτικά την άποψή του για τη χρησιμότητα της άλγεβρας. Η παρουσίαση λοιπόν του αποσπάσματος της εισαγωγής με την εν λόγω άποψη θα γίνει με την παράθεση τριών μεταφράσεων από το Αραβικό κείμενο.

Η πρώτη και συχνότερα αναφερόμενη Αγγλική μετάφραση είναι του Rosen και

---

[24] «…στα πολύ καλά και σημαντικά μέρη των υπολογισμών της [άλγεβρας], σαν και αυτά που χρειάζονται διαρκώς οι άνθρωποι σε περιπτώσεις κληρονομιών, κληροδοτημάτων, επιμερισμού περιουσιών, δικαστικών υποθέσεων και στο εμπόριο…» [Γούτας 2001, 159]

[25] [Γούτας 2001, 159]

τυπώθηκε το έτος 1831:

«…has encouraged me to compose a short work on Calculating by (the rules of) Completion and Reduction confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits and trade, and in all their dealing with one another or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation and other objects of various shorts and kinds are concerned…»[26]

«με ενθάρρυνε να συνθέσω ένα σύντομο έργο περί υπολογισμού με (τους κανόνες) της αποκατάστασης και της αντιπαραβολής. Περιορίζοντας το σε ότι είναι ευκολότερο και χρησιμότερο στην αριθμητική. Σαν και αυτά που οι άνθρωποι συνήθως χρειάζονται σε περιπτώσεις κληρονομιών, κληροδοτημάτων, διανομή περιουσιών, δικαστικών υποθέσεων, στο εμπόριο και σε όλες τις μεταξύ τους συναλλαγές. Είτε σε ό, τι αφορά τη μέτρηση της γης, τη διάνοιξη καναλιών, το γεωμετρικό υπολογισμό και άλλα αντικείμενα διαφόρων ειδών».

Το επόμενο απόσπασμα είναι από τη Γαλλική μετάφραση του Roshdi Rashed η οποία, όπως είπαμε, τυπώθηκε το έτος 2007:

«…m' ont exhorté à [I-16] composer dans le calcul de l'algèbre et d'al-muqābala un livre concis ; j'ai voulu qu'il enferme ce qui est subtil dans le calcul et ce qui en lui est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu'ils traitent [O-2r] les uns avec les autres lorsqu'il s' agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, [A-2r] de la mensuration, et d' autres choses relevant du calcul [H-2v] et de ses sortes – en y mettant avant tout la bonne volonté et en espérant que les hommes de lettres lui consentent la place qui est la sienne, grâce aux bienfaits de Dieu très haut, à ses dons majestueux, à la beauté de ses mises à l' épreuve, dont ils sont les dépositaires. »[27]

«…. με παρότρυνε να συνθέσω ένα συνοπτικό βιβλίο περί του είδους του υπολογισμού με al-jabr και al-muqābala, Σε αυτό ήθελα να συμπεριλάβω ό, τι πιο εξελιγμένο περιέχει ο υπολογισμός και ό, τι αξίζει περισσότερο από αυτόν. Καθώς και όσα οι άνθρωποι χρειάζονται πραγματικά σε θέματα κληρονομιών, κληροδοτημάτων, διανομή περιουσιών, δικαστικών υποθέσεων και εμπορικών συναλλαγών. Ακόμη [ό, τι οι

[26] [Rosen 1997, 3]

[27] [Rashed 2007]

άνθρωποι χρειάζονται] στις μεταξύ τους συναλλαγές με αντικείμενο την τοπογραφία, το σκάψιμο καναλιών, τη γεωμετρική μέτρηση και οτιδήποτε έχει να κάνει με υπολογισμό».

Τέλος το τρίτο απόσπασμα είναι από το βιβλίο *Η αρχαία ελληνική σκέψη στον Αραβικό πολιτισμό* του αραβολόγου Δημήτρη Γούτα :

«… με ενθάρρυνε [ο αλ-Μαμούν] να συνθέσω ένα επίτομο έργο με θέμα την άλγεβρα, περιορίζοντάς το στα πολύ καλά και σημαντικά μέρη των υπολογισμών της, σαν και αυτά που χρειάζονται διαρκώς οι άνθρωποι σε περιπτώσεις κληρονομιών, κληροδοτημάτων, επιμερισμού περιουσιών, δικαστικών υποθέσεων και στο εμπόριο και σε όλες τις μεταξύ τους συναλλαγές σε ό, τι σχετίζεται με την τοπογραφία, την διάνοιξη διωρύγων, τους γεωμετρικούς υπολογισμούς και άλλα αντικείμενα διαφόρων ειδών»[28]

Σύμφωνα με την περιγραφή του ίδιου του Α-Χ, όπως φαίνεται από το παραπάνω απόσπασμα, το έργο χαρακτηρίζεται από τα εξής:

Είναι μια ευσύνοπτη πραγματεία, το θέμα της οποίας αφορά τον υπολογισμό. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με την jabr και τη muqābala˙ εντάσσεται δε στον κλάδο της αριθμητικής. Πραγματεύεται το θέμα με επιλογή, των εύκολων τεχνικών και υπολογισμών που εφαρμόζονται με τη μέθοδο της άλγεβρας. Η επιλογή τους έγινε με ένα ακόμη κριτήριο-την χρησιμότητά τους. Από την άποψη της εφαρμογής αυτών των μεθόδων καλύπτονται πολλοί τομείς, όπως των συναλλαγών (κληρονομικά, δικαστικά, εμπόριο κ.α.), των μετρήσεων (τοπογραφία, μετρητική γεωμετρία) και των κατασκευών (διάνοιξη καναλιών). Με λίγα λόγια μπορεί κάποιος να πει για το έργο τρία πράγματα: Πρώτον, έγινε με υποστήριξη και προτροπή του χαλίφη. Δεύτερον, έχει ως αντικείμενο τον υπολογισμό με jabr και muqābala και τρίτον, περιλαμβάνει υπολογιστικές τεχνικές, τις οποίες ο Α-Χ θεωρεί σημαντικές αλλά και απαραίτητες σε δραστηριότητες της κοινωνικής και οικονομικής ζωής.

Είχε η συγγραφή του έργου, σκοπό τη δημιουργία ενός διδακτικού εγχειριδίου; Η εισαγωγή δε μας δίνει αρκετά στοιχεία για μια τεκμηριωμένη απάντηση στο ερώτημα. Όμως κάτι τέτοιο είναι πολύ πιθανό. Εξετάζοντας λεπτομερώς στη συνέχεια της εργασίας, το περιεχόμενο κάθε μέρους, θα συγκεντρώσουμε στοιχεία για μια καταφατική απάντηση. Αυτό που είναι αναμφισβήτητο, αφού περιγράφεται με απόλυτη σαφήνεια στην εισαγωγή του έργου, είναι ο προσανατολισμός του προς τις εφαρμογές.

---

[28] [Γούτας 2001, 159]

Αυτή άλλωστε η σύνδεση με τις εφαρμογές, δεν χαρακτηρίζει μόνο το συγκεκριμένο έργο, αλλά γενικότερα το σύνολο των έργων στα Ισλαμικά μαθηματικά[29], τα οποία διατηρούν στενή σχέση μεταξύ «θεωρίας» και εφαρμογών.

Όπως σημειώνει ο J.Lennart Berggren μια από τις τρεις κύριες παραδόσεις, από τις οποίες προήλθαν τα Ισλαμικά μαθηματικά ήταν «τα μαθηματικά των επαγγελματιών». Ανάμεσα σε αυτούς τους επαγγελματίες βρίσκονταν τοπογράφοι, αρχιτέκτονες, τεχνίτες της γεωμετρικής διακόσμησης, ειδικοί επί των φόρων και έμποροι. Η σύνδεση λοιπόν, την οποία μόλις προανέφερα, αποτελεί το κύριο συστατικό αυτού του ρεύματος της παράδοσης η οποία ήταν καθαρά προφορική και διαδιδόταν με ευκολία στον Ισλαμικό κόσμο.[30]

Πριν εξηγήσουμε τη σημασία των όρων al jabr και al-muqābala θα κάνουμε σε αυτό το σημείο, μια πρώτη σύντομη αναφορά στην αντίληψη του Α-Χ και γενικά των μαθηματικών του Ισλαμικού κόσμου κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα, σχετικά με την πρόσθεση και την αφαίρεση αλγεβρικών όρων. Στον Α-Χ υπάρχουν μόνο τρεις αλγεβρικοί όροι, τους οποίους ονομάζει «αριθμούς»: ο απλός αριθμός (*dirham, ‘adad*), ένα πλήθος από «πράγματα» ή «ρίζες» και τέλος ένα πλήθος από «τετράγωνα» (*mālS*). Κάθε «μονώνυμο» δηλώνει ένα **καθορισμένο** πλήθος ενός από τα είδη: αριθμός (*dirham*), πράγμα (*śhay)* ή ρίζα (*jidhr),* τετράγωνο (*māl*).[31] Χωρίς να ξεχνάμε ότι στην *Άλγεβρα* του Α-Χ δεν υπάρχουν σύμβολα, ας συμβολίσουμε για ευκολότερη κατανόηση, το είδος «πράγμα» ή «ρίζα» με x, το είδος «τετράγωνο» με x^2 και τον απλό αριθμό με c. Στην Αραβική άλγεβρα όταν αναφερόμαστε σε ένα είδος, εννοούμε πάντοτε ένα ορισμένο πλήθος από αυτό. Παραδείγματος χάριν διαβάζουμε στον Α-Χ «μία ρίζα», «δύο mal», «μισό mal», «ένα-τρίτο ντιράμ». Ποτέ δεν αναφέρονται, τα είδη-dirham, shay, mal -χωρίς έναν αριθμό που δηλώνει το πλήθος από το καθένα. Ακόμα και αν το mal είναι μόνο ένα, αυτό αναφέρεται, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στη σύγχρονη άλγεβρα, όπου μπορούμε να γράψουμε απλώς x^2 και ο συντελεστής υπονοείται. Εδώ πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός στα διαφορετικά νοήματα. Το 1x ή x, όπως το εννοούμε εμείς είναι ένας αριθμός, ενώ το «μια ρίζα» είναι ένα «είδος αριθμού» δηλαδή

---

[29] [Lennart Berggren 2007, 519] «A striking feature of Islamic mathematics, in contrast to Greek mathematics, is the close relation of theory and practice»

[30] [J. Lennart Berggren 2007, 516]

[31] [Rashed 2009, 15]

ένα ορισμένο πλήθος από το είδος «ρίζα». Έτσι, κάθε «μονώνυμο» από το είδος «ρίζα» αποτελεί μια συλλογή **ορισμένου** πλήθους από αυτό το είδος, για παράδειγμα «πέντε ρίζες». Ο αριθμός ο οποίος δηλώνει το πλήθος των αντικειμένων του είδους, που εμείς λέμε συντελεστή, ονομάζεται «αριθμός των ριζών» ή σε κάποιες περιπτώσεις ο Α-Χ τον αναφέρει λέγοντας απλώς «οι ρίζες». Με τον ίδιο τρόπο δημιουργούμε «μονώνυμα» από το είδος «τετράγωνο». Για την αποφυγή σύγχυσης όταν χρησιμοποιούμε σύγχρονο συμβολισμό ax^2, bx, c για τα τρία «είδη αριθμών» θα πρέπει να έχουμε κατά νου, πως οι συντελεστές είναι καθορισμένοι αριθμοί. Δεν υπάρχουν στον Α-Χ και τους μεταγενέστερους μαθηματικούς του μεσαίωνα μονώνυμα με αόριστους συντελεστές, δηλαδή συλλογή με αόριστο πλήθος ειδών.

Ας έλθουμε τώρα στην έννοια του «πολυώνυμου». Το μεσαιωνικό «πολυώνυμο» δημιουργείται από μια συλλογή η οποία περιέχει τουλάχιστον δύο «είδη»[32]. Για παράδειγμα το «πολυώνυμο» «3 māls και 2 ρίζες και 5 ντιράμς» είναι μια συλλογή 10 αντικειμένων, τριών διαφορετικών ειδών. Οι λέξεις «και» που υπάρχουν στην έκφραση του «πολυωνύμου» δεν έχουν τη σημασία του «συν» ούτε της «πρόσθεσης», είναι απλοί σύνδεσμοι. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συλλογές οι οποίες έχουν έλλειμμα από κάποιο είδος. Τέτοιες συλλογές είναι αναγκαίες για τον εμπλουτισμό της έννοιας της συλλογής, γιατί διαφορετικά το μεσαιωνικό «πολυώνυμο» θα ήταν πολύ απλό αλγεβρικό αντικείμενο για να είναι χρήσιμο στην τεχνική της άλγεβρας. Ένα παράδειγμα τέτοιας συλλογής βρίσκεται στο πρόβλημα <2>[33] της *Άλγεβρας*, από το οποίο, σε μετάφραση Rashed, είναι το απόσπασμα «…the remainder is one hundred minus twenty things equal to forty dirhams»[34]. Η λέξη «minus» αποδίδει το Αραβικό «illā» όμως, όπως έχει εξηγήσει ο Oaks[35], αυτή η μετάφραση διαστρεβλώνει την πραγματική σημασία της λέξης. Η σωστή μετάφραση, όπως προτείνει, είναι «μειωμένο, ελαττωμένο, λιγότερο».

Έτσι μία μετάφραση του αποσπάσματος πιο πιστή στο νόημα του Αραβικού κειμένου είναι «...το υπόλοιπο είναι 100 ελαττωμένο κατά 20 πράγματα, [το οποίο είναι] ίσον με 40 ντιράμς.»

---

[32] [Oaks 2009, 182]

[33] Από το κεφάλαιο «Τα 34 προβλήματα». Θα τα συμβολίζουμε Με <1>, <2>,…<34>.

[34] [Rashed 2009, 158]

[35] [Oaks 2009, 181]

Εδώ φυσικά έχουμε μία ισότητα, η αριστερή πλευρά της οποίας είναι «100 ελαττωμένο κατά 20 πράγματα». Αυτή η έκφραση περιέχει δύο από τα «είδη αριθμών», τα «100 ντιράμς» και τα «20 πράγματα», επομένως πρόκειται για μια συλλογή ή ένα μεσαιωνικό «πολυώνυμο». Όμως τα «20 πράγματα» δεν βρίσκονται στη συλλογή, είναι το έλλειμμα της συλλογής των 100 ντιράμς, έτσι λοιπόν σύμφωνα με την μεσαιωνική αντίληψη η συλλογή περιέχει ένα και μοναδικό «είδος αριθμών» δηλαδή τα ντιράμς. Αν μεταγράψουμε συμβολικά την παραπάνω ισότητα, παίρνουμε την εξίσωση, 100-20x=40, στην αριστερή πλευρά της οποίας υπάρχει το πολυώνυμο 100-20x. Φυσικά αυτό το πολυώνυμο όπως το αντιλαμβανόμαστε στο πλαίσιο της σύγχρονης στοιχειώδους άλγεβρας, είναι διαφορά δυο μονωνύμων και ο όρος 20x είναι γινόμενο του επί το x, το οποίο σημαίνει ότι στην έκφραση του πολυωνύμου υπάρχουν πράξεις. Από την άλλη, όπως ήδη αναφέραμε στη συλλογή η οποία αποτελεί το αραβικό «πολυώνυμο» δεν υπάρχουν πράξεις. Αυτή είναι μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στην σύγχρονη έννοια του πολυωνύμου και την έννοια της συλλογής, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν το μεσαιωνικό «πολυώνυμο».

Ας έλθουμε όμως τώρα στο ζήτημα της σημασίας των όρων al-jabr και al-muqābala όπως αυτοί ερμηνεύονται από τους Rashed, Rosen, και Oaks.

Πριν παρουσιάσουμε αυτές τις ερμηνείες για τη «jabr» θα πρέπει να τονιστεί ότι εφαρμόζεται σε συλλογές οι οποίες έχουν έλλειμμα, δηλαδή λείποντα «είδη αριθμών». Η «jabr» είναι αναγκαία για τον αλγεβρικό χειρισμό, ακριβώς αυτών των ελλειμματικών συλλογών.

Ο Rashed θεωρεί την «jabr» σαν μία **πράξη**[36] και μεταφράζει τον όρο με «restoration» το οποίο αποδίδεται «αποκατάσταση, συμπλήρωση». Αλλά στα εκτεταμένα σχόλια του για την *Άλγεβρα* του Α-Χ δεν λέει κάτι παραπάνω για τη χρήση της λέξης al-jabr στις ισότητες με είδη. Ας δούμε όμως στο παραπάνω παράδειγμα και τη συνέχεια του αποσπάσματος, σε μετάφραση του Rashed, στο οποίο έχουμε μεταγράψει συμβολικά τις εξισώσεις και τους αριθμούς

«...the remainder is 100-20x=40. Restore the 100 by the 20x and add them to 40; the result is 100=20x+40»[37]

Ο ρηματικός τύπος «restore» (αποκατάστησε) είναι μετάφραση του Αραβικού

[36] [Rashed 2009, 15]

[37] [Rashed 2009, 158]

«*ajbir*». Η πράξη λοιπόν εδώ είναι η αποκατάσταση του 100 από τα «20 πράγματα» και η πρόσθεσή τους στο 40. Με τον ίδιο τρόπο χειρίζεται ο Rashed τη jabr στο σύνολο των προβλημάτων όπου αυτή εφαρμόζεται.

Ο Rosen χειρίζεται τη jabr με διαφορετικό τρόπο. Στο ίδιο προηγούμενο απόσπασμα, μεταφράζει την Αραβική λέξη «ajbir» ως «separate» το οποίο σημαίνει «διαχώρισε, απομόνωσε».

«... 100-20x=40. Separate now the 20x from 100, and add them to the 40; then you have 100=20x+40»[38]

Έτσι με αυτή τη μεταφραστική επιλογή, αντί του 100 και την αποκατάστασή του, ο Rosen επικεντρώνει την προσοχή του στον λείποντα όρο 20x και την απομάκρυνσή του. Σε κάποια από τα προβλήματα[39] στην επίλυση των οποίων ο Α-Χ εφαρμόζει jabr, ο Rosen αντί του separate χρησιμοποιεί τη φράση «reduce this by removing» ή λιγότερο συχνά την «reduce this by adding».

Στη μελέτη του με θέμα την Αραβική άλγεβρα[40], ο Oaks θεωρεί τη «jabr» σαν μία τεχνική για απλοποίηση εξισώσεων. Την περιγράφει ως εξής: μεταφορά ενός είδους το οποίο είναι σε έλλειψη, από τη μία στην άλλη πλευρά μιας εξίσωσης. Στην εφαρμογή, της jabr, για την αλγεβρική απλοποίηση μιας ισότητας από έναν λείποντα όρο, αναγνωρίζει τρία χαρακτηριστικά: τον στόχο, την πράξη που υλοποιεί τον στόχο και το όνομα για την πραγμάτωση του στόχου. Στην jabr - απλοποίηση μιας εξίσωσης, ο στόχος είναι η μεταφορά μιας ποσότητας η οποία είναι ίση με το έλλειμμα της συλλογής του ενός μέλους στη συλλογή του άλλου μέλους. Απαιτούνται δύο βήματα για την υλοποίηση του στόχου. Ας δούμε το παράδειγμα, που μόλις πριν συζητήσαμε.

«100-20x=40. So restore (ajbir) the 100 by the 20x, and add it to the 40. So it yields 100=20x+40»[41] Έτσι στο πρώτο βήμα γίνεται η αποκατάσταση του 100 από το 20x και στο δεύτερο η πρόσθεση του 20x στο 40˙ για να διατηρηθεί η ισότητα. Η εφαρμογή της jabr έχει ολοκληρωθεί όταν δεν υπάρχουν λείποντες όροι σε καμιά πλευρά της ισότητας. Όπως σημειώνει ο Oaks, στην *Άλγεβρά* του ο Α-Χ χρησιμοποιεί τη jabr με αυτόν τον τρόπο 11 φορές. Επιπλέον συμπληρώνει ότι σε μεταγενέστερους Άραβες μαθηματικούς

---

[38] [Rosen 1997, 43]

[39] Για παράδειγμα στα προβλήματα <3>,<4> σελ. 44-45 και <1> έως <4> σελ. 104-109 [Rosen 1997].

[40] [Oaks – Alkhateed 2007]

[41] [Oaks 2007, 51]

η jabr δεν περιορίζεται μόνο σε ισότητες αλλά εφαρμόζεται επίσης σε αλγεβρικές εκφράσεις καθώς και στην αριθμητική και τη γεωμετρία.

Μετά την παρουσίαση των ερμηνειών για τη σημασία του όρου *al-jabr* στρεφόμαστε τώρα στις ερμηνείες για τον όρο al-muqābala. Το ρήμα με την ίδια ρίζα είναι «qabila» και σημαίνει «αντιπαραθέτω.»

Ο Rashed μεταφράζει το «qabil» ως «reduce» με τη σημασία «απλοποίησε, κάνε αναγωγή.» Το ακόλουθο απόσπασμα από την επίλυση ενός προβλήματος που περιέχεται στην *Άλγεβρα*. Ο A-X εφαρμόζει muqābala και η μετάφρασή του είναι του Rashed, στην οποία έχω μεταγράψει συμβολικά αριθμούς και ισότητες « ... $50+x^2=29+10x$. Reduce it by taking away from 50 and the remainder is $21+x^2=10x$»

Για τον Rashed «al-muqābala» είναι η πράξη της αναγωγής ομοίων όρων, της στοιχειώδους άλγεβρας και μεταφράζει τον όρο με «reduction»[42] Δηλαδή με αυτή την πράξη απαλείφονται ίσοι όροι στις δύο πλευρές της ισότητας. Ο Rosen από την άλλη μεριά, μεταφράζει το ίδιο απόσπασμα του Αραβικού κειμένου ως εξής:

"... $50+x^2=29+10x$.

Then reduce this by taking 29 from so; there remains

$21+x^2=10x$..."[43]

Συγκρίνοντας το μεταφρασμένο απόσπασμα με εκείνο του Rashed, φαίνεται ότι και οι δύο κάνουν την ίδια επιλογή, αποδίδοντας την muqābala σαν πράξη αναγωγής. Ασφαλώς αυτό δημιουργεί κάποιο πρόβλημα για την μετάφραση του Rosen ο οποίος όπως είδαμε παραπάνω χρησιμοποιεί και για την jabr το «reduce», δημιουργώντας έτσι σύγχυση για τη σημασία τους. Για να αποφύγει λοιπόν την επανάληψη σε προβλήματα που υπάρχουν μαζί και οι δύο όροι, για τη μετάφραση του «qabil» καταφεύγει σε φράσεις όπως «Go on balancing, and subtract» ή «remove square by square»[44]

Σύμφωνα με την άποψη του Oaks, όπως και η jabr, η muqābala είναι επίσης μία τεχνική για απλοποίηση ισοτήτων. Μεταφράζει τον όρο «al-muqābala» σαν confrontation (αντιπαραβολή, αντιστάθμιση), και ο στόχος της διαδικασίας αυτής είναι να αφήσει από δύο όμοιους όρους στις πλευρές μίας εξίσωσης, μόνο τη διαφορά τους στη μία από τις πλευρές.

---

[42] [Rashed 2009, 15]

[43] [Rosen 1997, 40]

[44] [Rosen 1997, 67] Παρόμοιες φράσεις χρησιμοποιεί και ο Rashed σε κάποιες περιπτώσεις.

Σημειώνει ότι ο Α-Χ στην *Άλγεβρά* του εφαρμόζει τη διαδικασία muqābala σε 12 προβλήματα, αν και δεν την ονομάζει πάντοτε, όπως κάνουν και άλλοι αλγεβριστές οι οποίοι παραλείπουν εντελώς την αναφορά στο όνομά της. Αφού εξηγήσει τέσσερις διαφορετικές χρήσεις της muqābala από τους αλγεβριστές του μεσαίωνα, βρίσκει επιχειρήματα που αναιρούν την υπόθεση που θεωρεί τη muqābala, τεχνικό όρο για μια πράξη. Παρόμοια αναίρεση κάνει και για τον όρο al-jabr με στοιχεία που αντλεί από το έργο του Α-Χ καθώς και άλλων μαθηματικών του μεσαίωνα.[45]

Σε αρκετές περιπτώσεις οι λέξεις jabr και muqābala βρίσκονται μαζί σαν μία φράση, *την al-jabr wa'l muqābala*. Ως φράση έχει δύο δυνατές ερμηνείες, με την πρώτη σημαίνει την «εφαρμογή της jabr και/ ή της muqābala για απλοποίηση της ισότητας» και με αυτή τη σημασία μερικές φορές συντομεύεται σε *al-muqābala*. Η δεύτερη ερμηνεία θεωρεί τη φράση, σαν το όνομα της τέχνης της άλγεβρας και με αυτή τη σημασία συντομεύεται απλώς σε al-jabr.[46]

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα, στην οποία συζητήσαμε την εισαγωγή της *Άλγεβρας*, με μία περιληπτική αναφορά στις ερμηνείες των όρων al-jabr και al-muqābala, από δύο ακόμη ιστορικούς, μαζί με την κριτική του Oaks γι' αυτές.

Ο Solomon Gandz[47] είχε την άποψη ότι οι Άραβες δεν γνώριζαν την προέλευση αυτών των δύο όρων. Αναζήτησε στην Ακκαδική γλώσσα κάποια λέξη από την οποία πιθανόν να προήλθε η jabr. Κατάληξη αυτής της αναζήτησης ήταν το συμπέρασμά του για το αρχικό Ακκαδικό όνομα της τέχνης της άλγεβρας, αυτό ήταν gabr. Σε αυτό το όνομα οι Άραβες συμπλήρωσαν το al-muqābala. Ο Oaks δεν θεωρεί ικανοποιητική αυτή την εξήγηση του Gandz και την αποδίδει στην έλλειψη κατανόησης της πραγματικής σημασίας που είχαν αποκτήσει οι δύο όροι στις διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων.

Η άποψη του George Saliba[48] για την jabr και την muqābala, βασίζεται σε αποσπάσματα από το έργο του μαθηματικού al-Karajī (αρχές 11^{ου} αιώνα). Υποστηρίζει ότι η ασυνέπεια στον τρόπο χρήσης των δύο όρων από τους Άραβες αλγεβριστές προκαλεί σύγχυση για το νόημά τους. Η επιστήμη της *al-jabr wa'l-muqābala*, όπως λέει, με την jabr εξαναγκάζει τον άγνωστο να αποκτήσει ορισμένες τιμές και με τη

---

[45] [Oaks – Alkhateed 2007]

[46] [Oaks – Alkhateed 2007, 55]

[47] {Gandz 1926]

[48] [Saliba 1972, 190]

muqābala ελέγχει την κατάλληλη τιμή συγκρίνοντάς την με τις συνθήκες που επιτάσσει το πρόβλημα. Ο Oaks εξηγεί[49] με ποιο τρόπο ο Saliba οδηγήθηκε σε παρερμηνεία των αποσπασμάτων από το αλγεβρικό έργο Kafī του al-Karajī. Κατά συνέπεια θεωρεί, ότι η άποψή που υποστηρίζει ο Saliba δεν έχει στέρεη βάση.

2.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ *al-jabr wa'l-muqābala*

Σε αυτό το πρώτο υποκεφάλαιο θα συζητήσουμε τη δομή και το περιεχόμενο του πρώτου βιβλίου της πραγματείας του Α-Χ. Όπως φανερώνει ο τίτλος του υποκεφαλαίου τον οποίο ο Rosen θεωρεί και ως τίτλο της πραγματείας[50] το βιβλίο αφορά τον υπολογισμό με την τεχνική της άλγεβρας. Θα επαναλάβουμε εδώ, ότι η έκφραση «Υπολογισμός με τη jabr και τη muqābala» συντομεύεται σε «Υπολογισμός με jabr» και έτσι θα την αναφέρουμε στη συνέχεια.

Η διάρθρωση του πρώτου βιβλίου είναι τριμερής. Το πρώτο μέρος εξηγεί τους κανόνες και τις διαδικασίες για τον υπολογισμό με al-jabr. Οι εξηγήσεις δίνονται με παραδείγματα. Ακολουθούν στο δεύτερο μέρος οι κανόνες, για την εκτέλεση των πράξεων, οι οποίες απαιτούνται κατά τον υπολογισμό με al-jabr. Πρόκειται για τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, οι οποίες όμως τώρα εφαρμόζονται και σε εκφράσεις που περιέχουν τον άγνωστο (*śhay, jidhr, māl*) προς υπολογισμό. Στο τρίτο μέρος λύνονται προβλήματα για την αποσαφήνιση και περαιτέρω εμπέδωση όσων έχουν εξηγηθεί στα δύο προηγούμενα μέρη.

Αυτά λόγω των διατυπώσεών τους με όρους της αριθμητικής είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως αριθμητικά προβλήματα· εδώ όμως επιλύονται με την τέχνη της al-jabr. Ας μην ξεχνάμε ότι η Αραβική άλγεβρα ήταν κλάδος της αριθμητικής[51].

2.2.1. Κανόνες και διαδικασίες για υπολογισμό με *al-jabr*

Η συζήτηση σε αυτή την ενότητα έχει ως θέμα το «καθαρά αλγεβρικό» πρώτο μέρος του πρώτου βιβλίου της πραγματείας. Μετά από μια γενική παρατήρηση περί αριθμών, ο Α-Χ ορίζει τα τρία «είδη αριθμών». Το «είδος αριθμών» είναι βασική έννοια στην *Άλγεβρά* του.

---

[49] [Oaks – Alkhateed 2007, 57-58]

[50] [Rosen 1997,5]

[51] [Oaks 2009, 173]

Στη συνέχεια εξηγεί πώς μια ισότητα μεταξύ δύο «ειδών», η οποία περιέχει άγνωστη ποσότητα, επιλύεται για να δώσει τον υπολογισμό της τιμής της ποσότητας. Η περίπτωση ισότητας η οποία περιέχει δύο είδη στη μια πλευρά της και ένα στην άλλη εξηγείται αμέσως μετά. Η ενότητα κλείνει με τις αιτιολογήσεις των διαδικασιών επίλυσης των ισοτήτων που περιέχουν και τα τρία «είδη αριθμών».

2.2.1.(i) Υπολογισμός – Είδη αριθμών

Όπως είδαμε στην εισαγωγή στόχος του Α-Χ είναι να παρουσιάσει ένα έργο πάνω στον υπολογισμό με al-jabr. Το εγχείρημά του αποσκοπεί στην πραγμάτευση της υπολογιστικής τεχνικής της al-jabr και την εφαρμογή της σε προβλήματα. Αποκαλύπτει μάλιστα, ότι το κίνητρό του προέρχεται από αναγκαιότητες που προκύπτουν από συναλλαγές σε διάφορους τομείς της καθημερινής ζωής στον ισλαμικό κόσμο του 9ου αιώνα.

Όμως ποιο είναι το ζητούμενο σε καθένα από μια τόσο ευρεία ποικιλία προβλημάτων στο οποίο ο υπολογισμός με al-jabr θα δώσει αποτελέσματα; Η απάντηση βρίσκεται στην πρώτη πρόταση της πραγματείας:

«Όταν συλλογίστηκα τι ζητούν γενικώς οι άνθρωποι κάνοντας κάποιο υπολογισμό, βρήκα ότι πάντοτε είναι ένας αριθμός»[27]

Έτσι για τον Α-Χ η κατάληξη ενός υπολογισμού είναι η εύρεση ενός άγνωστου αριθμού. Με άλλα λόγια υπολογισμός σύμφωνα με την αλγεβρική αντίληψη του Α-Χ σημαίνει προσδιορισμός της αριθμητικής τιμής ενός άγνωστου μεγέθους. Ο αναγνώστης της πραγματείας, είναι φυσικό να αναρωτηθεί: τι εννοεί ο Α-Χ με τη λέξη «αριθμός»;

Στην προσπάθεια κατανόησης και παρουσίασης του αλγεβρικού του έργου θα έχουμε την ευκαιρία, στις σελίδας που ακολουθούν, να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα. Θα αναφέρουμε όμως εδώ, χωρίς λεπτομέρειες, ποιους αριθμούς δέχεται ο Α-Χ ως απαντήσεις στους υπολογισμούς του. Αυτοί είναι συνήθως οι θετικοί ρητοί αριθμοί. Σε σπάνιες περιπτώσεις[52] υπολογισμών δέχεται ως ζητούμενη τιμή του αγνώστου τετραγωνική ρίζα ρητού αριθμού. Όμως πρέπει να σημειωθεί ότι ποτέ δεν χρησιμοποιεί άρρητους συντελεστές στις αλγεβρικές εκφράσεις[53]

Στην αρχή της πραγματείας, ο Α-Χ περιγράφει τις βασικές έννοιες οι οποίες

---

[52] [Rosen 1997, 54; 55; 56 και αλλού]

[53] [Oaks, 2009, 183]

χρειάζονται, όπως λέει, στον υπολογισμό με την τέχνη της al-jabr.Οι έννοιες που χρησιμοποιεί, είναι τα τρία είδη που αναφέραμε: «ρίζα» (*jidhr*), τετράγωνο (*māl*) και απλός αριθμός *(‘adad mufrad*). Ο Α-Χ γράφει:

«Βρήκα ότι οι αριθμοί οι οποίοι χρειάζονται στον υπολογισμό με al-jabr και al-muqābala είναι τριών τύπων (ειδών), δηλαδή: ρίζες, τετράγωνα και ο απλός αριθμός, ο οποίος δεν σχετίζεται ούτε με ρίζα ούτε με τετράγωνο.

Μεταξύ αυτών των τύπων (ειδών), η ρίζα είναι οτιδήποτε πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, από τη μονάδα έως τους μεγαλύτερους αριθμούς και τα κλάσματα τα μικρότερά της.

Το τετράγωνο είναι ό, τι προκύπτει όταν η ρίζα πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της.

Ο απλός αριθμός είναι οποιοσδήποτε αριθμός ο οποίος δεν σχετίζεται ούτε με τη ρίζα ούτε με το τετράγωνο».[54]

Ας δούμε λεπτομερώς τα τρία «είδη αριθμών»:

Ο «απλός αριθμός» (*ádad*) είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Το σύνολο των αριθμών, τον καιρό του Α-Χ, περιέχει μόνο θετικούς αριθμούς. Κάθε αριθμός γράφεται με το όνομά του χωρίς να χρησιμοποιείται κανένα σύμβολο. Συνήθως όμως συνοδεύεται με τη λέξη *dirham*, τη νομισματική μονάδα της εποχής. Έτσι σε μια ισότητα που περιέχει τον αριθμό 5, ο Α-Χ γράφει «πέντε ντιράμ».

Η «ρίζα» (*jidhr*) είναι το δεύτερο «είδος αριθμού». Στην Αραβική αριθμητική «*jidhr*» είναι η λέξη για την τετραγωνική ρίζα. Αλλά αυτή δεν είναι η σημασία της λέξης ως «είδος αριθμού». Όπως έχει δείξει ο Oaks[55] στις εκφωνήσεις των προβλημάτων η λέξη «*jidh**r***» σημαίνει «τετραγωνική ρίζα μιας ποσότητας» αλλά ως «είδος αριθμού» σημαίνει τον άγνωστο προς υπολογισμό σε μια ισότητα. Με την τελευταία του σημασία το *jidhr* είναι συνώνυμο του *śhay* το οποίο μεταφράζεται «πράγμα». Στις επιλύσεις λοιπόν των προβλημάτων η λέξη *jidhr* δηλώνει τον άγνωστο – το «πράγμα» - και συχνά αντικαθίσταται από το *śhay*.

Το «τετράγωνο» (*māl*) είναι το γινόμενο της «ρίζας» με τον εαυτό της, δηλαδή το τετράγωνο της άγνωστης ποσότητας. Με αυτή τη σημασία χρησιμοποιείται στις επιλύσεις των προβλημάτων. Όμως στις εκφωνήσεις των προβλημάτων το *māl* χρησιμοποιείται με διαφορετική σημασία. Εκεί ως κοινό ουσιαστικό έχει την έννοια

---

[54] [Rashed 2009,96]

[55] [Oaks-Alkhateed 2005, 413]

«ποσόν», «περιουσία». Αρκετοί μεταφραστές και ιστορικοί έχουν παρερμηνεύσει τη σημασία του *māl* και σε κάθε περίπτωση το αποδίδουν ως «τετράγωνο του αγνώστου», πράγμα που όπως ανέφερα, δεν θεωρείται ότι αποδίδει το πνεύμα του κειμένου.[56] Στη συνέχεια όταν φτάσουμε στην επισκόπηση των προβλημάτων θα δώσουμε παραδείγματα για τις διαφορετικές χρήσεις των *māl* και *jidhr*.

2.2.1.(ii) Επίλυση απλής ισότητας

Ο Α-Χ αμέσως μετά χρησιμοποιεί τα «είδη» που όρισε για να δημιουργήσει με αυτά ισότητες. Κατ'αρχάς εξετάζει τρεις περιπτώσεις απλής ισότητας, δηλαδή ισότητας ενός «είδους» με ένα «είδος». Συνεχίζει λοιπόν αναφέροντας τις τρεις αυτές περιπτώσεις.

«Ένας αριθμός ο οποίος ανήκει σε μια από αυτές, τις τρεις κλάσεις («είδη») μπορεί να είναι ίσος με έναν αριθμό μιας άλλης κλάσης, για παράδειγμα μπορείς να πεις «τετράγωνα είναι ίσα με ρίζες» ή «τετράγωνα είναι ίσα με αριθμούς» ή «ρίζες είναι ίσες με αριθμούς»[57]

Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση θα συμβολίσουμε με c έναν αριθμό που ανήκει στο «είδος» των «απλών αριθμών» (*dirham, ádad*)

Με bx έναν αριθμό που ανήκει στο «είδος» των «ριζών» (*jidhr, śhay*). Τέλος, θα συμβολίσουμε με ax^2 έναν αριθμό του «είδους» των «τετραγώνων» (*māl*). Φυσικά όλοι οι a, b, c είναι θετικοί αριθμοί. Έτσι, οι τρεις **περιπτώσεις απλής ισότητας** αντιστοιχούν στις δικές μας εξισώσεις

(1) «Māls είναι ίσα με ρίζες» $ax^2=bx$

(2) «Māls είναι ίσα με αριθμό» $ax^2=c$

(3) «Ρίζες είναι ίσες με αριθμό» $bx=c$

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε τη διαφορά στην αντίληψη του Α-Χ από τη σύγχρονη αλγεβρική αντίληψη.[58] Αυτό επιβάλλεται γιατί λόγω του συμβολισμού υπάρχει κίνδυνος να του αποδώσουμε μια αντίληψη η οποία είναι ξένη προς τον τρόπο σκέψης του.

Θα αποσαφηνίσουμε την εννοιολογική διαφορά με ένα παράδειγμα. Ο Α-Χ για την τρίτη περίπτωση απλής ισότητας μεταξύ ειδών «Ρίζες είναι ίσες με αριθμό» γράφει:

---

[56] [Oaks-Alkhateed 2005, 411]

[57] Η μετάφραση από [Rosen 1997 , 6]

[58] [Oaks 2009,179]

«μια ρίζα είναι ίση με τρία σε αριθμό» .[59] Στις δυο πλευρές της ισότητας υπάρχουν δυο διαφορετικά «είδη αριθμών». Μάλιστα αυτά τα δυο «είδη» όπως γράφει ο Α-Χ «δεν σχετίζονται».[60] Στη συμβολική μεταγραφή αυτής της ισότητας x=3 [61] τα «είδη» εξαφανίζονται, αφού και στις δύο πλευρές της ισότητας υπάρχουν απλώς αριθμοί. Ακόμη το x συμβολίζει μόνο το «είδος», δηλαδή «ρίζα». Ο Α-Χ όμως δεν γράφει «Η ρίζα είναι ίση με τρία σε αριθμό» αλλά «Μια ρίζα…», έτσι ώστε η αριστερή πλευρά της ισότητας περιέχει καθορισμένο πλήθος από αντικείμενα του «είδους» ρίζα. Αυτό στην Αραβική άλγεβρα δηλώνεται με τη φράση «ο αριθμός των ριζών»[62] που στην προκειμένη περίπτωση είναι «μία». Η γραφή που είναι πιο κοντά στην αντίληψη του Α-Χ είναι: 1x=3.

Όμως θα πρέπει να εννοούμε το 1x όχι ως αριθμό, όπως το εννοούμε σήμερα, αλλά ως συλλογή, η οποία, όπως είπαμε, περιέχει ακριβώς ένα αντικείμενο του είδους «ρίζα». Η διαδικασία επίλυσης της ισότητας, αποσκοπεί στον υπολογισμό της τιμής που πρέπει να δοθεί στη «ρίζα» ώστε οι δύο συλλογές, «ρίζες» και «απλός αριθμός» να γίνουν ίσες.

Ο Α-Χ πραγματεύεται χωριστά καθεμία από τις τρεις περιπτώσεις απλής ισότητας που αναφέραμε προηγουμένως. Για τον τρόπο επίλυσης αναφέρει παραδείγματα. Αμέσως μετά τα παραδείγματα της πρώτης περίπτωσης «Māls είναι ίσα με ρίζες» συνεχίζει με τον εξής κανόνα:

Με τον ίδιο τρόπο είτε τα τετράγωνα [Māls] είναι πολλά είτε λίγα (δηλαδή έχουν πολλαπλασιαστεί ή διαιρεθεί με κάποιον αριθμό)[63] ανάγονται σε ένα μόνο τετράγωνο [Māl] και το ίδιο γίνεται με τις ρίζες, τις ισοδύναμες με αυτά, δηλαδή αυτές ανάγονται αναλογικά το ίδιο όπως τα τετράγωνα.[64]

Ο τρόπος στον οποίο αναφέρεται ο Α-Χ είναι, πολλαπλασιασμός επί τον αντίστροφο του συντελεστή των Māls. Αυτή η διαδικασία η οποία αποτελεί ένα βήμα αλγεβρικής

---

[59] [Rashed 2009, 98]

[60] [Rashed 2009, 96]

[61] [Rosen 1997, 7], [Rashed 2009, 98]

[62] [Rashed 2009, 100]

[63] Η φράση στην παρένθεση δεν υπάρχει στις μεταφράσεις των Rashed [Rashed 2009] και Karpinski [Karpinski 1997]

[64] [Rosen 1997, 7]

απλοποίησης μιας ισότητας ειδών (εξίσωσης) ονομάζεται *al-ikmal* (συμπλήρωση) όταν ο συντελεστής είναι μικρότερος της μονάδας και *al-radd* (αναγωγή, μείωση) όταν ο συντελεστής είναι μεγαλύτερος[65]

Δεν πρέπει να παραγνωρίσουμε τη διπλή σημασία του κανόνα που μόλις ανέφερα. Αφενός, ο Α-Χ επισημαίνει το ουσιώδες του τρόπου επίλυσης της περίπτωσης και αφετέρου αποτελεί, λόγω και της θέσης του μετά τα παραδείγματα, ένα επιπλέον στοιχείο που μαρτυρεί για την συγγραφή της *Άλγεβρας* σαν διδακτικό εγχειρίδιο.

Παρόμοια όπως με την πρώτη περίπτωση, ο Α-Χ παραθέτει έναν κανόνα και για την δεύτερη «Māls ίσα με αριθμό» αμέσως μετά τα παραδείγματα:

Έτσι όλα τα τετράγωνα, πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια αυτού [του *Māl*] , ανάγονται σε ένα μόνο τετράγωνο [*Māl*]. Αν υπάρχει μέρος μόνο του τετραγώνου [*Māl*], προσθέτεις σε αυτό, μέχρι να γίνει ένα πλήρες τετράγωνο. Κάνεις το ίδιο με το ισοδύναμό [του] σε αριθμούς.[66]

Αυτός ο κανόνας αξίζει κάποιον σχολιασμό. Το παράδειγμα που προηγείται από αυτόν μεταγράφεται στην εξίσωση $\frac{x^2}{2}=18$ η οποία στη συνέχεια απλοποιείται σε $x^2=36$. Θα ανέμενε κάποιος την εφαρμογή του κανόνα της πρώτης περίπτωσης, δηλαδή πολλαπλασιασμό επί 2. Ωστόσο ο Α-Χ με τον κανόνα της δεύτερης περίπτωσης προτείνει έναν εναλλακτικό τρόπο απλοποίησης στον οποίο χρησιμοποιεί πρόσθεση αντί πολλαπλασιασμού. Προσθέτει λοιπόν σε κάθε μέλος της ισότητας $\frac{x^2}{2}=18$ το ταυτοτικά ίσο του δηλαδή στο πρώτο $\frac{x^2}{2}$ και στο δεύτερο 18 αυτή γίνεται: $x^2=36$. Αυτή η μέθοδος απλοποίησης, λέγεται *regula infusa* [67]και πραγματοποιεί το ίδιο βήμα απλοποίησης, όταν, όπως προτείνει ο κανόνας, ο συντελεστής του *Māl* είναι μικρότερος της μονάδας. Ο Α-Χ την εφαρμόζει στο πρόβλημα <26>[68] για την επίλυσή του οποίου αναφέρει (σε μεταγραφή): Συμπλήρωσε το [*Māl*], με το μισό του και πρόσθεσε στο 5 το

[65] [Oaks-Alkhateed 2007, 49-50]

[66] [Rosen 1997, 7]

[67] [Oaks-Alkhateed 2007, 49]

[68] Από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα»

μισό του. Θα πάρεις $x^2 = 7\frac{1}{2}$ [69]

Η τρίτη περίπτωση απλής ισότητας είναι «Ρίζες ίσες με αριθμό» η οποία αντιστοιχεί στη δική μας πρωτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση bx=c. Για αυτήν την περίπτωση, ένα από τα παραδείγματα είναι από «μια ρίζα είναι ίση με τρία σε αριθμό», δηλαδή συμβολικά την εξίσωση x=3. Η παρουσίαση ενός τόσο απλού παραδείγματος μοιάζει κάπως παράξενη επιλογή, αφού η τετριμμένη αυτή ισότητα δεν απαιτεί κανενός είδους χειρισμό. Έχει ήδη δώσει εξαρχής την τιμή της ρίζας. Αν προσέξουμε όμως τα παραδείγματα που επιλέγει ο Α-Χ για τις επιλύσεις των περιπτώσεων, θα παρατηρήσουμε τρεις επιλογές για κάθε μία από αυτές. Στο πρώτο παράδειγμα ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι 1 και στα υπόλοιπα, μεγαλύτερος της μονάδας στο ένα και μικρότερος στο άλλο. Καλύπτει λοιπόν με αυτά, κάθε περίπτωση για τον συντελεστή. Αναγνωρίζει κανείς ότι η συγγραφή του έργου έγινε με γνώμονα τη λεπτομερή συζήτηση κάθε περίπτωσης και εξήγησης των κανόνων. Γι' αυτό χρησιμοποιεί ακόμη και παραδείγματα των οποίων η επίλυση είναι εντελώς τετριμμένη. Ώστε από την αρχή της *Άλγεβρας*, βρίσκει κανείς διάσπαρτα στοιχεία με βάση τα οποία γίνεται καταφανής ο διδακτικός χαρακτήρας του έργου.

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα για την απλή ισότητα με μία παρατήρηση, η οποία αφορά τον τρόπο επίλυσης. Σε όλες τις περιπτώσεις εφαρμόζεται ένα προκαταρκτικό βήμα, δηλαδή η μετατροπή του μεγιστοβάθμιου συντελεστή σε μονάδα.

2.2.1.(iii) Επίλυση σύνθετης ισότητας

Συνεχίζοντας ο Α-Χ τη δημιουργία ισοτήτων με τα «είδη αριθμών», μετά τις απλές ισότητες οι οποίες περιέχουν μόνο δύο είδη, εξετάζει ισότητες που περιλαμβάνουν και τα τρία «είδη αριθμών». Στο απόσπασμα που ακολουθεί αναφέρει τους δυνατούς συνδυασμούς:

I found that these three kinds; namely, roots, squares, and numbers, may be combined together, and thus three compound species arise; that is, «squares [*Māls*] and roots equal to numbers;»

«squares [*Māls*] and numbers equal to roots», «roots and numbers equals to squares

[69] [Rashed 2009, 188]

[*Māls*]»[70]

Βρήκα ότι αυτά τα τρία είδη, δηλαδή ρίζες, *Māl*s και αριθμοί, μπορούν να συνδυαστούν και έτσι προκύπτουν τρία νέα είδη, δηλαδή, «*Māl*s και ρίζες ίσα με αριθμούς», «*Māl*s και αριθμοί ίσα με ρίζες», «ρίζες και αριθμοί ίσα με *Māl*s».

Με τον ίδιο συμβολισμό, όπως στις απλές περιπτώσεις, οι τρεις σύνθετες ισότητες, με τις αντίστοιχες εξισώσεις είναι:

(4) «*Māl*s και ρίζες ίσα με αριθμούς» $ax^2+bx=c$

(5) «*Māl*s και αριθμοί ίσα με ρίζες» $ax^2+c=bx$

(6) «ρίζες και αριθμοί ίσα με *Māl*s» $bx+c=ax^2$

Αυτή η μεταγραφή των ισοτήτων του Α-Χ, με τη βοήθεια των συμβόλων, σε εξισώσεις δεν φωτίζει, αλλά μάλλον συσκοτίζει τις έννοιες που χρησιμοποιούσε ο Α-Χ και γενικότερα οι Άραβες μαθηματικοί του μεσαίωνα. Αποτυγχάνει ακριβώς στο πιο ουσιώδες· Να αποκτήσουμε μια έννοια για την αντίληψη που είχαν πραγματικά οι μαθηματικοί του μεσαίωνα γι' αυτές τις ισότητες. Σε ένα παράδειγμα για την περίπτωση «*Māl*s και ρίζες ίσα με αριθμούς» ο Α-Χ γράφει[71] «one square, and ten roots of the same, amount to thirty-nine dirhams», την οποία ισότητα «ειδών» ο Rosen μεταγράφει στην εξίσωση $x^2+10x=39$.

Η έκφραση «one square, and ten roots» θεωρείται σαν πολυώνυμο x^2+10x. Όμως όπως έχει εξηγήσει ο Oaks[72] η λέξη «and» δεν σημαίνει την πράξη της πρόσθεσης αλλά είναι σύνδεσμος. Ακόμη έχει υποστηρίξει τεκμηριωμένα[73] ότι αυτή η έκφραση δηλώνει μία συλλογή αποτελούμενη από 11 αντικείμενα δύο διαφορετικών ειδών, 1 Māl (square) και 10 ρίζες. Αυτή η ερμηνεία για τέτοιου είδους εκφράσεις, δείχνει τη σημαντική διαφοροποίηση που υπάρχει ανάμεσα στη μεσαιωνική αντίληψη της συλλογής και τη σύγχρονη για πολυωνυμικές παραστάσεις. Από τη μια το πολυώνυμο με τη σύγχρονη έννοια, δηλαδή ένας γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων του x, ο οποίος εκφράζει κάποιον άγνωστο αριθμό, από την άλλη η συλλογή των αλγεβριστών του μεσαίωνα, ως συνάθροιση διαφορετικών ειδών από māls, ρίζες και ντιράμς.

---

[70] [Rosen 1997,8]

[71] [Rosen 1997, 8]

[72] [Oaks 2009, 181]

[73] [Oaks 2009, 182]

Στην ίδια γραμμή πλεύσης με τον Rosen κινείται και ο Rashed ο οποίος στο ίδιο παραπάνω παράδειγμα μεταφράζει «a square plus ten roots are equal to thirty-nine dirhams» και μεταγράφει την ισότητα στην ίδια εξίσωση. Σε όσα αναφέραμε πρέπει να συμπληρώσουμε την παρατήρηση του Oaks για την ανυπαρξία λέξεων με τη σημασία του «plus» και του «minus» κατά τους μεσαιωνικούς χρόνους[74].

Ας δούμε όμως τώρα τον τρόπο επίλυσης για κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις σύνθετης ισότητας

(Α) «Māls και ρίζες με αριθμό».

«*Squares* plus roots are equal to a number» as when you say: a square plus ten roots are equal to thirty-nine dirhams; namely, if you add to any *square* <a quantity> equal to ten of its roots, the total will be thirty-nine.

Procedure: you have the number of the roots which, in this problem, yields five; you multiply it by itself; the result is twenty-five; you add it to thirty-nine; the result is sixty-four; you take the root, that is eight, from which you subtract half of the number of the roots, which is five. The remainder is three, that is the root of the *square* you want, and the *square* is nine.[75]

«Τετράγωνα και ρίζες είναι ίσα με αριθμό» όπως όταν λες: ένα τετράγωνο [Māl] και 10 ρίζες είναι ίσα με 39 ντιράμς, δηλαδή αν προσθέσεις σε κάποιο τετράγωνο <μια ποσότητα> ίση με 10 ρίζες του, το σύνολο θα είναι 39.

Διαδικασία: Μοιράζεις στα δύο τον αριθμό των ριζών το οποίο σε αυτό το πρόβλημα δίνει 5. Πολλαπλασιάζεις αυτό με τον εαυτό του, το αποτέλεσμα είναι 25. Το προσθέτεις στο 39, το αποτέλεσμα είναι 64. Παίρνεις τη ρίζα του, δηλαδή 8, από την οποία αφαιρείς το μισό του αριθμού των ριζών, το οποίο είναι 5. Το υπόλοιπο είναι 3, το οποίο είναι η ρίζα του τετραγώνου [Māl] που ζητάς και το τετράγωνο είναι 9.»

Για ευκολότερη κατανόηση του τρόπου επίλυσης που εφαρμόζει ο Α-Χ, θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα b και c για τον αριθμό των ριζών και τον αριθμό των ντιράμς αντίστοιχα. Η διαδικασία επίλυσης της ισότητας «Ένα Māl και b ρίζες είναι ίσα με c ντιράμς» έχει τα ακόλουθα βήματα:

---

[74] [Oaks 2009, 181]

[75] [Rashed 2009, 100]

1. Πάρε το μισό των ριζών, είναι $\frac{b}{2}$
2. Πολλαπλασίασε το με τον εαυτό του, δίνει $\frac{b^2}{4}$
3. Πρόσθεσε σε αυτό το c, παίρνεις $\frac{b^2}{4}+c$
4. Πάρε την τετραγωνική ρίζα του, που είναι $\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$
5. Αφαίρεσε το $\frac{b}{2}$ από τη τετραγωνική ρίζα, παίρνεις $\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$ - $\frac{b}{2}$
6. Η διαφορά είναι η τιμή της ρίζας και το Māl (τετράγωνο) είναι $(\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}-\frac{b}{2})^2$

Αυτά είναι τα βήματα που ακολουθεί ο Α-Χ κατά τη διαδικασία επίλυσης κάθε ισότητας της μορφής «Māls και ρίζες ίσα με αριθμό». Είναι δηλαδή η γενική διαδικασία επίλυσης για τη μορφή αυτή. Όμως το παραπάνω παράδειγμα δεν καλύπτει κάθε τέτοια ισότητα, επειδή ο αριθμός των Māls σε αυτό είναι μονάδα. Για αυτό το λόγο ο Α-Χ παραθέτει, μετά το παράδειγμα, έναν κανόνα για ισότητες στις οποίες ο αριθμός των Māls είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας. Συμπληρώνει λοιπόν ένα ακόμη προκαταρκτικό βήμα με το οποίο όλοι οι αριθμοί (συντελεστές) των Māls, των ριζών και των ντιράμς πολλαπλασιάζονται επί τον αντίστροφο του αριθμού των Māls. Έτσι η ισότητα απλοποιείται και ο αριθμός των Māls γίνεται μονάδα. Οι Rosen και Rashed μεταφράζουν με «reduce» (ανάγω, μειώνω) το Αραβικό ρήμα «*radda*» που σημαίνει «φέρνω πίσω, στέλνω πίσω»[76] στην περίπτωση μεγαλύτερου της μονάδας αριθμού Māls. Ενώ στην περίπτωση αριθμού μικρότερου της μονάδας μεταφράζουν με το ρήμα «complete» (συμπληρώνω) το Αραβικό «*kamala*» με τη σημασία του «κάνω πλήρες, ολόκληρο». Αξίζει να σημειωθεί, πως ο Α-Χ παραθέτει τρία παραδείγματα με διαφορετικό αριθμό Māls για το καθένα, έτσι ώστε να καλύψει κάθε περίπτωση για μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με τη μονάδα. Αυτό που όπως είδαμε το κάνει και στις περιπτώσεις απλής ισότητας, αποτελεί ένα επιπλέον ενδεικτικό στοιχείο για τον διδακτικό χαρακτήρα του έργου.

---

[76] [Oaks – Alkhateed 2007, 55]

(B) «Māls και αριθμός ίσα με ρίζες»

«*Squares* plus a number are equal to roots»[77], occurs for instance when you say a square and twenty-one dirhams are **equal to** ten of its roots; namely, if you add twenty-one dirhams to any square, what you get will be equal to ten if the roots of this square.

Procedure: halve the number of the roots the result will be five; multiply it by itself, and you will get twenty-five; subtract from it twenty-one, which is what we have said to be with the square; the remainder is four; take its root, which is two subtract from it the half of the number of the roots, which is five. The remainder is three, that is the root of the square you want, and the square is nine.

And if you wish, add the root to half of the number of the roots; the result will be seven, which is the root of the *square* being sought; and the square is fourty-nine.

«Τετράγωνα και αριθμός είναι ίσα με ρίζες» για παράδειγμα συμβαίνει όταν λες: ένα τετράγωνο [Māl] και 21 ντιράμς είναι ίσα με 10 ρίζες του, δηλαδή αν προσθέσεις 21 ντιράμς σε κάποιο τετράγωνο, ό,τι πάρεις θα είναι ίσο με 10 ρίζες του τετραγώνου.

Διαδικασία: Διαιρείς δια δύο τον αριθμό των ριζών, το αποτέλεσμα θα είναι 5. Πολλαπλασιάζεις αυτό με τον εαυτό του και θα πάρεις 25. Αφαιρείς 21 από αυτό, το οποίο βρίσκεται μαζί με το τετράγωνο, το υπόλοιπο είναι 4. Πάρε την τετραγωνική του ρίζα, η οποία είναι 2. Αυτό το αφαιρείς από το μισό του αριθμού των ριζών, δηλαδή το 5. Το υπόλοιπο είναι 3, η οποία είναι η ρίζα του τετραγώνου που ζητάς και το τετράγωνο είναι 9.

Αν θέλεις, πρόσθεσε την [τετραγωνική] ρίζα στο μισό του αριθμού των ριζών, το αποτέλεσμα θα είναι 7. Αυτό είναι η ρίζα του τετραγώνου που ζητούσες και το τετράγωνο είναι 49.»

Η διαδικασία επίλυσης της ισότητας «Māls και αριθμός ίσα με ρίζες» όπου θεωρήθηκε b τον αριθμό των ριζών και c των αριθμό των ντιράμς δηλαδή της ισότητας. «Ένα Māl και c ντιράμς είναι ίσα με b ρίζες» έχει τα εξής βήματα:

1. Πάρε το μισό των ριζών, είναι $\frac{b}{2}$

[77] [Rashed 2009, 104]

2. Πολλαπλασίασε το με τον εαυτό του, δίνει $\frac{b^2}{4}$

3. Αφαίρεσε το c από αυτό, παίρνεις $\frac{b^2}{4} - c$

4. Πάρε την τετραγωνική ρίζα του, που είναι $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

5. Αφαίρεσε από το $\frac{b}{2}$, την τετραγωνική ρίζα, παίρνεις $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

6. Η διαφορά είναι η τιμή της ρίζας που ζητάς και το τετράγωνο είναι $(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} - \frac{b}{2})^2$

7. Αν θέλεις, πρόσθεσε το $\frac{b}{2}$ στην τετραγωνική ρίζα και παίρνεις $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} + \frac{b}{2}$, το άθροισμα είναι η τιμή της ρίζας που ζητάς και το τετράγωνο είναι $(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} + \frac{b}{2})^2$

Ο υπολογισμός λοιπόν με τα παραπάνω βήματα της διαδικασίας δίνει δυο τιμές για τη ρίζα. Η δεύτερη από αυτές τις τιμές, υπολογίζεται στο 7^{ο} βήμα. Αυτό όμως που προκαλεί απορία είναι ότι αυτό το βήμα αφήνεται ως επιλογή. Με ποιο τρόπο, όμως επιλέγει κανείς την μια ή την άλλη από τις δύο τιμές για τη ρίζα; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα βρίσκεται αμέσως μετά την περιγραφή της επίλυσης του τελευταίου παραδείγματος:

«If you encounter a problem which leads you to this procedure, verify its exactness by adding, otherwise, it will necessarily by subtracting. This procedure is done by adding and by subtracting at the same time, and this is not the case in any other of the three procedures, in which we need to halve the number of the roots.»[78]

Επομένως είναι σαφές ότι η επιλογή της τιμής της ρίζας γίνεται με βάση το πρόβλημα από το οποίο προέκυψε η ισότητα. Φαίνεται πως ο Α-Χ κάνει την παραδοχή ότι το ζητούμενο σε κάθε πρόβλημα υπολογισμού είναι ένας και μοναδικός αριθμός. Σε κανένα από τα προβλήματα της *Άλγεβρας* δεν παραβιάζει αυτή την αρχή. Οι δύο θετικές λύσεις της ισότητας «ειδών», με άλλα λόγια, οι δύο τιμές για τη ρίζα στο τέλος του

[78] [Rashed 2009, 104]

υπολογισμού ελέγχονται. Αποδεικτή γίνεται εκείνη που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Με αυτόν τον τρόπο επιλέγει τις λύσεις στα προβλήματα <3>, <5>, <6>, <19>, <25>[79] Ο Α-Χ δεν παραλείπει να δηλώσει την ιδιαιτερότητα αυτής της περίπτωσης, ως προς τις δύο τιμές για τη ρίζα και τονίζει πως χαρακτηρίζει αποκλειστικά και μόνο αυτή από τις τρεις της σύνθετης ισότητας.

Η περιγραφή της δεύτερης περίπτωσης τελειώνει με έναν κανόνα και μια υπενθύμιση. Ο κανόνας αυτός χαρακτηρίζει ένα πρόβλημα **αδύνατο** αν το τετράγωνο του μισού των ριζών $\frac{b^2}{4}$ είναι μικρότερο από τα ντιράμς c. Το **αδύνατο** προκύπτει επειδή η διαφορά στο υπόριζο δεν έχει νόημα, αφού για τους Άραβες μαθηματικούς του μεσαίωνα η έννοια του αρνητικού αριθμού είναι ανύπαρκτη. Ακόμη όταν το τετράγωνο του μισού των ριζών $\frac{b^2}{4}$ είναι ακριβώς ίσο με τα ντιράμς c, τότε η ρίζα είναι ακριβώς το μισό των ριζών χωρίς πλεόνασμα ή έλλειμμα. Το ενδιαφέρον σημείο σχετικά με αυτόν τον κανόνα είναι η απουσία οποιασδήποτε δικαιολόγησης, ενώ όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, για τις διαδικασίες επίλυσης δίνονται γεωμετρικές αιτιολογήσεις.

(Γ) Ρίζες και αριθμός ίσα με Māls»

«*Roots* plus a number are equal to squares»[80], occurs for instance when you say: three roots and four in number are equal to one square.

Procedure: halve the number of the roots, and the result is one and a half; multiply it by itself, and the result is two and one quarter; add it to four, and the result is six and one quarter; take its root, which is two and one half; add it to half of the number of the roots, which is one and a half; and the result is four; that is the root of the square, and the square is sixteen.»

«Ρίζες και αριθμός ίσα με Māls», για παράδειγμα συμβαίνει όταν λες 3 ρίζες και 4 σε αριθμό είναι ίσα με 1 τετράγωνο [Māl]

Διαδικασία: διαίρεσε δια δύο τον αριθμό των ριζών και παίρνει 1 ½. Πολλαπλασίασε το με τον εαυτό του και προκύπτει 2 ¼. Πρόσθεσε το στο 4 και παίρνει 6 ¼. Πάρε την τετραγωνική του ρίζα, η οποία είναι 2 ½. Πρόσθεσε αυτό στο μισό του αριθμού των ριζών το οποίο είναι 1 ½ και παίρνεις αποτέλεσμα 4. Αυτή είναι η ρίζα του τετραγώνου

[79] [Rashed 2009], chapter «On various problems» σελ. 156-194

[80] [Rashed 2009, 106]

και το τετράγωνο είναι 16.»

Τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης της ισότητας «b Ρίζες και αριθμός c είναι ίσα με Māls» είναι τα εξής:

1. Πάρε το μισό των ριζών, είναι $\frac{b}{2}$
2. Πολλαπλασίασε το με τον εαυτό του, δίνει $\frac{b^2}{4}$
3. Πρόσθεσε σε αυτό το c, παίρνεις $\frac{b^2}{4}+c$
4. Πάρε την τετραγωνική ρίζα του, που είναι $\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$
5. Πρόσθεσε το $\frac{b}{2}$ στην τετραγωνική ρίζα, παίρνεις $\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$
6. Το άθροισμα είναι η τιμή της ρίζας και το Māl (τετράγωνο) είναι $(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+c})^2$

Με το τελευταίο παράδειγμα τελειώνει η παρουσίαση των έξι περιπτώσεων ισότητας μεταξύ ειδών. Η εξήγηση της διαδικασίας επίλυσης κάθε ισότητας, όπως είδαμε, γίνεται με παραδείγματα και σχετικούς κανόνες οι οποίοι ακολουθούν μετά από αυτά. Σε αυτό το σημείο ο Α-Χ κλείνοντας αυτήν την ενότητα κάνει ένα σχόλιο:

«Αυτές είναι οι έξι περιπτώσεις τις οποίες ανέφερα στην εισαγωγή αυτού του βιβλίου. Η εξήγηση τους έχει ολοκληρωθεί» [81]

Η εξήγηση στην οποία αναφέρεται, αφορά τον τρόπο επίλυσης κάθε ισότητας. Για την ακρίβεια εξηγείται η πορεία κατά την επίλυση με τα συγκεκριμένα βήματα που πρέπει να ακολουθούνται ώστε να καταλήξουμε στον υπολογισμό της τιμής για τη ρίζα και το τετράγωνο (Māl).

Όμως αυτό που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον από τον επίλογο αυτής της ενότητας είναι η παρατήρηση του Α-Χ σχετικά με τις έξι περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις ισότητας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, αυτή τη φορά όχι με κριτήριο αν περιέχουν δύο ή τρία «είδη αριθμών» όπως έγινε στην αρχή, αλλά με βάση των τρόπο επίλυσης. Στην πρώτη κατηγορία δεν είναι αναγκαία η διαίρεση του αριθμού των ριζών, ενώ για την δεύτερη η διαδικασία επίλυσης απαιτεί τη διαίρεση του αριθμού αυτού σε δύο ίσα μέρη. Αξίζει

[81] Η απόδοση από το [Rosen 1997, 13]

νομίζω να παραθέσουμε, σε απόδοση στη γλώσσα μας, δύο από τις Αγγλικές μεταφράσεις του αποσπάσματος του Αραβικού κειμένου στο οποίο βρίσκεται η εν λόγω παρατήρηση, αν και πρέπει να σημειωθεί ότι οι δύο μεταφράσεις δεν έγιναν από τα ίδια Αραβικά χειρόγραφα.

Η παλαιότερη από τις δύο είναι του Rosen (1831):

«Έχω δείξει ότι τρεις μεταξύ αυτών [των έξι περιπτώσεων] δεν απαιτούν διαίρεση των ριζών σε δύο μισά και έχω διδάξει πώς πρέπει αυτές να επιλύονται. Όσο για τις άλλες τρεις, για τις οποίες είναι αναγκαία η διαίρεση στα δύο [του αριθμού] των ριζών, βρίσκω σκόπιμο να τις εξηγήσω ακριβέστερα σε χωριστά κεφάλαια στα οποία θα δοθεί ένα σχήμα για κάθε περίπτωση, ώστε να καταδειχθούν οι λόγοι για τη διαίρεση»[82]

Η πλέον πρόσφατη έγινε από τον Rashed (2009):

«… Έχω επιβεβαιώσει ότι σε τρεις από αυτούς τους τύπους [ισότητας] δεν κάνουμε διαίρεση του αριθμού των ριζών σε δύο ίσα μέρη και έδειξα τον τρόπο επίλυσης και την αναγκαιότητά τους. Όσον αφορά τους τρόπους επίλυσης των υπολοίπων τριών, στις οποίες χρειάζεται να διαιρούμε στα δύο τον αριθμό των ριζών, τους περιέγραψα μέσω μιας πραγματικής διαδικασίας και έχω σχηματίσει για κάθε μια από αυτές τις διαδικασίες ένα σχήμα με το οποίο μπορούμε να αποκαλύψουμε την αιτία (*'illa*) της διαίρεσης σε δύο μισά»[83]

Από τα παραπάνω αποσπάσματα φαίνεται πως ο Α-Χ με αυτή την παρατήρηση θέλει να πετύχει δύο πράγματα. Πρώτον, να επισημάνει μετά την παρουσίαση των τρόπων επίλυσης ισοτήτων, *τι είναι κοινό σε αυτούς* και, δεύτερον, να προετοιμάσει τον αναγνώστη για τις δικαιολογήσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, αναγνωρίζει σαν κοινό το πρώτο βήμα και των τριών περιπτώσεων επίλυσης, τη διαίρεση με το δύο του αριθμού (πλήθους) των ριζών. Με αυτό ταξινομεί στην ίδια κατηγορία τις περιπτώσεις σύνθετης ισότητας.

Αξίζει να σημειωθεί η διάκριση που γίνεται αφενός στην περιγραφή και εξήγηση του τρόπου επίλυσης και αφετέρου στη δικαιολόγησή του. Ο Α-Χ αναφέρει για τους τρόπους επίλυσης «τους περιέγραψα μέσω μιας πραγματικής (αληθινής) διαδικασίας». Θεωρούμε ότι με τη φράση «πραγματική διαδικασία» ο Α-Χ αναφέρεται στις επιλύσεις συγκεκριμένων αριθμητικών παραδειγμάτων. Δεν περιγράφει απλώς τα βήματα

[82] [Rosen 1997, 13]

[83] [Rashed 2009, 106]

αναφερόμενος σε «αριθμό Māls», «αριθμό ριζών και «ντιράμς» όπως λόγου χάριν κάνει όταν αναφέρεται σε πρόβλημα που είναι αδύνατο στην περίπτωση «Māls και αριθμός ίσα με ρίζες», αλλά εκτελεί σε κάθε βήμα υπολογισμούς με συγκεκριμένους αριθμούς έως ότου βρει την τιμή της ρίζας και του Māl.

Ως προς το δεύτερο σκέλος της διάκρισης, η δικαιολόγηση ή αιτιολόγηση του τρόπου επίλυσης θα γίνει με «ένα σχήμα». Αυτό το σχήμα, όπως αναφέρει, θα αποκαλύψει «το λόγο (αιτία) της διαίρεσης [του αριθμού των ριζών] σε δύο μισά». Όπως είδαμε στα παραδείγματα, η επίλυση κάθε τέτοιας περίπτωσης έχει ως πρώτο βήμα αυτή τη διαίρεση. Από τα αποσπάσματα γίνεται φανερό, ότι η αιτιολόγηση με την βοήθεια του σχήματος επικεντρώνεται σε αυτό το πρώτο βήμα. Έτσι λοιπόν, κατά την άποψη μας, δεν θα ήταν υπερβολή να υποθέσουμε ότι ο Α-Χ, θεωρεί αυτό το βήμα, σαν το πιο κρίσιμο της διαδικασίας επίλυσης. Με το κρίσιμο αυτό βήμα εφαρμόζεται η ιδέα-κλειδί για την επίλυση της ισότητας. Είναι ενδεικτικό ότι στο πρόβλημα <21> αφού καταστρώσει την εξίσωση δεν προχωράει στην επίλυση της, αλλά υποδεικνύει στον αναγνώστη να συνεχίσει «σύμφωνα με ότι σου περιέγραψα για τη διαίρεση σε δύο μισά [του αριθμού] των ριζών»[84] Μοιάζει σαν το πρώτο βήμα να χαρακτηρίζει την όλη διαδικασία επίλυσης, η οποία αναφέρεται συνοπτικά με τη φράση «διαίρεση των ριζών στα δύο».

2.2.1.(iv) Αιτιολόγηση της διαδικασίας επίλυσης

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ο Α-Χ εξηγεί με παραδείγματα τη διαδικασία επίλυσης κάθε ισότητας. Αυτό σημαίνει μία ακολουθία βημάτων σε καθένα από τα οποία εκτελούνται αριθμητικές πράξεις μέχρις ότου υπολογιστεί η τιμή της ρίζας. Επίσης ο Α-Χ κάνει διάκριση ανάμεσα στην εξήγηση με παραδείγματα των βημάτων για τον υπολογισμό και την δικαιολόγηση αυτής της ακολουθίας βημάτων με ένα σχήμα. Η λειτουργία λοιπόν του σχήματος είναι η εποπτική εξήγηση, του λόγου για τον οποίο ακολουθούμε τα συγκεκριμένα βήματα σε κάθε περίπτωση. Έτσι σε αυτή την ενότητα η συζήτηση μας περιστρέφεται γύρω από τις αιτιολογήσεις των διαδικασιών με γεωμετρικά σχήματα.

Δυο ιστορικοί των μαθηματικών και σχολιαστές της *Άλγεβρας* , ο Solomon Gandz και ο Roshdi Rashed, υποστηρίζουν ότι ο Α-Χ διακρίνει ανάμεσα σε δύο τύπους δικαιολογήσεων. Ο μεν πρώτος μιλάει για «αλγεβρική ανάλυση» σε αντιδιαστολή με

[84] [Rashed 2009, 182]

την «γεωμετρική δικαιολόγηση»[85], ο δε δεύτερος για «αλγεβρική απόδειξη» και «γεωμετρική δικαιολόγηση»[86]. Όπως ανάφεραν ο Α-Χ χρησιμοποιεί τη λέξη «*illa*» που σημαίνει αιτία, λόγος» και τη λέξη «*sura*», «το σχήμα» για τη γεωμετρική δικαιολόγηση.

Θα παραθέσουμε εδώ περιληπτικά τις γεωμετρικές δικαιολογήσεις για τις σύνθετες ισότητες, όπου αντί των λέξεων θα γράφουμε τους αριθμούς με σύμβολα.

Α. **«Mals και ρίζες ίσα με αριθμό»**

Η μετάφραση του αποσπάσματος που ακολουθεί είναι από την Αγγλική μετάφραση του Rashed:

«Η αιτία της <πρότασης>« το τετράγωνο [*Māl*] και 10 ρίζες είναι ίσα με 39 ντιράμς»: Το σχετικό σχήμα γι' αυτό είναι μιας τετραγωνικής επιφάνειας της οποίας οι πλευρές είναι άγνωστες, η οποία είναι το τετράγωνο [*Māl*] που ζητάς να μάθεις και του οποίου τη ρίζα ζητάς να μάθεις, αυτή είναι η επιφάνεια AB, κάθε μια από τις πλευρές της είναι η ρίζα της και αν πολλαπλασιάσεις κάθε μια από αυτές τις πλευρές με έναν αριθμό, τότε οι αριθμοί που παίρνεις είναι οι αριθμοί των ριζών. Κάθε ρίζα είναι ίση με τη ρίζα αυτής της επιφάνειας»[87]

Το σχήμα με το οποίο αρχίζει η γεωμετρική δικαιολόγηση είναι ένα τετράγωνο, με άγνωστες πλευρές. Η «τετραγωνική επιφάνεια» όπως λέει ο Α-Χ, «είναι το ζητούμενο *Māl*» (ο Rashed μεταφράζει τετράγωνο το *Māl*). Εδώ για πρώτη φορά στην *Άλγεβρα* ένα ζητούμενο «είδος», το *Māl* παριστάνεται από ένα γεωμετρικό αντικείμενο. Έχει μάλιστα ενδιαφέρον ο συμβολισμός του τετραγώνου σχήματος κατά τον Ευκλείδειο τρόπο με τα γράμματα των άκρων μιας διαγωνίου.

Όμως εκτός από το *Māl* υπάρχει και άλλο ζητούμενο «είδος» στην ισότητα, το οποίο είναι η ρίζα. Αυτή παριστάνεται με την πλευρά του τετραγώνου η οποία είναι, η ρίζα της επιφάνειας. Έτσι λοιπόν ο όρος «ρίζα» χρησιμοποιείται με δύο αναφορές. Στην πρώτη σε σχέση με το *Māl* όπου δηλώνεται σαν «ρίζα του *Māl*» όπως φαίνεται στις επιλυτικές διαδικασίες με τα παραδείγματα, ενώ στην δεύτερη σε σχέση με την τετράγωνη επιφάνεια η οποία παριστάνει το *Māl* και τότε δηλώνεται σαν «ρίζα της επιφάνειας»

---

[85] [Gandz 1997, 127]

[86] [Rashed 2009, 55]

[87] [Rashed 2009, 108]

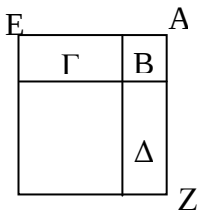
όπως παραπάνω.

Επομένως, αν πολλαπλασιάσεις έναν αριθμό με μια πλευρά του τετραγώνου, παίρνεις τον «αριθμό των ριζών». Με αυτόν τον τρόπο ο Α-Χ, έχει δώσει σε κάθε ζητούμενο «είδος αριθμού» γεωμετρική ερμηνεία, ώστε να καταστεί δυνατή η γεωμετρική δικαιολόγηση.

Για τη γεωμετρική δικαιολόγηση της περίπτωσης που συζητάμε ο Α-Χ χρησιμοποιεί δύο σχήματα, που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικούς τρόπους. Όμως και στους δύο, αρχίζει με ένα τετράγωνο άγνωστης πλευράς και το συμπληρώνει έτσι ώστε να δημιουργήσει ένα μεγαλύτερο τετράγωνο. Αυτό που διαφέρει είναι ο τρόπος συμπλήρωσης. Ο ένας από αυτούς τους τρόπους περιγράφεται ως εξής[88]:

Έστω η τετραγωνική επιφάνεια ΑΒ, η οποία είναι το *Māl*. Θέλουμε να προσθέσουμε 10 ρίζες. Διαιρώ το 10 σε δύο μισά, δίνει 5 το οποίο κάνουμε δύο επιφάνειες στις δύο πλευρές της ΑΒ, έστω Γ και Δ. Κάθε μια από αυτές έχει μήκος 5 και πλάτος ίσο με την πλευρά της ΑΒ. Από το σχήμα λείπει ένα τετράγωνο 5x5 για να συμπληρωθεί σε ένα μεγαλύτερο τετράγωνο. Αλλά το αρχικό τετράγωνο μαζί με τα δύο ορθογώνια στις πλευρές του κάνουν συνολικά 39. Έτσι η μεγάλη τετράγωνη επιφάνεια ΕΖ είναι 64. Παίρνουμε τη ρίζα του, που δίνει 8.

Αυτή είναι η πλευρά της ΕΖ. Αν αφαιρέσουμε ό,τι προσθέσαμε, δηλαδή 5, απομένει 3. Αυτή είναι η πλευρά του ΑΒ, η οποία είναι η ρίζα του *Māl* και το *Māl* είναι 9. Εδώ είναι το σχήμα του:



Β. **«*Māls* και αριθμός ίσα με ρίζες»**

«Ένα *Māl* και 21 ντιράμς είναι ίσα με 10 ρίζες του».

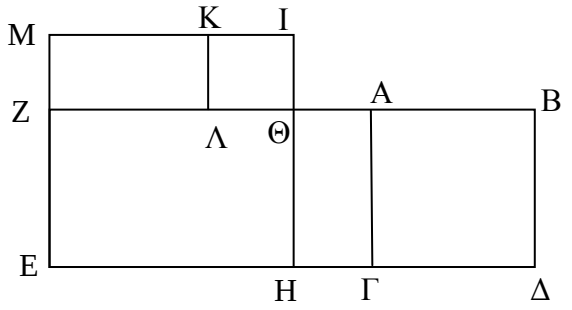
Η γεωμετρική δικαιολόγηση αρχίζει ως εξής:

«Υποθέτουμε ότι το Māl είναι μια τετράγωνη επιφάνεια αγνώστων πλευρών, έστω η

[88] [Rashed 2009, 112]

επιφάνεια ΑΔ»[89]

Σχεδιάζουμε τώρα ένα ορθογώνιο ΑΓΕΖ δίπλα σε αυτή με πλάτος όσο του τετραγώνου και μήκος έτσι ώστε μαζί με την πλευρά του τετραγώνου να είναι το τμήμα ΔΕ με μήκος 10. Διαιρούμε το ΒΖ με το σημείο Θ σε δύο μισά και όμοια το ΓΕ με το σημείο Θ. Προεκτείνουμε την ΗΘ κατά τμήμα ΘΙ ώστε να γίνει ΗΙ ίσο με ΗΔ, δηλαδή 5. Σχηματίζω τη μικρή τετράγωνη επιφάνεια ΘΚ. Έτσι η επιφάνεια ΘΕ μαζί με την ΖΚ είναι 21. Επομένως η τετράγωνη επιφάνεια ΘΚ είναι η διαφορά 25-21, δηλαδή 4. Άρα έχει πλευρά 2. Τελικά αν αφαιρέσουμε από την ΘΖ την ΘΛ που είναι 2 παίρνουμε τη ρίζα της πρώτης τετράγωνης επιφάνειας 3. Αυτή είναι η ρίζα του Māl. Αν προσθέσουμε το ΘΛ στη γραμμή ΒΘ παίρνουμε 7. Αυτό θα είναι η ρίζα ενός μεγαλύτερου τετραγώνου. Αν προσθέσεις σε αυτό 21, αυτό θα είναι ίσο με 10 ρίζες. Εδώ είναι το σχήμα:



Αυτό είναι ό,τι ζητούσαμε να αποδείξουμε.

Γ. **«Māls είναι ίσα με ρίζες και αριθμό»**

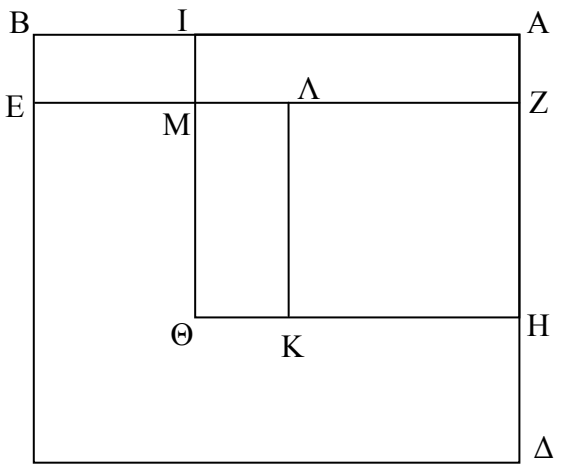
«3 ρίζες και 4 σε αριθμό είναι ίσα με ένα Māl».

Η γεωμετρική δικαιολόγηση αρχίζει κατά τα γνωστά με μία τετράγωνη επιφάνεια άγνωστης πλευράς, έστω η επιφάνεια ΑΓ. Αυτή αποτελείται από τις τρεις ρίζες και τον αριθμό 4. Διαιρούμε την ΑΓ με την γραμμή ΕΖ έτσι ώστε ΖΔ να είναι 3, το οποίο είναι ο αριθμός των ριζών. Επίσης και το ΕΓ είναι 3. Είναι φανερό ότι η επιφάνεια ΑΕ είναι 4. Διαιρούμε την ΖΔ με το σημείο Η σε δύο ίσα μέρη και παίρνουμε σημείο Ι στην ΑΒ ώστε ΑΙ ίσο με ΑΗ. Σχηματίζουμε τετράγωνη επιφάνεια ΗΛ. Επειδή η επιφάνεια ΜΚ

[89] [Rashed 2009,112]

είναι ίση με την ΒΜ, η επιφάνεια ΑΜ μαζί με την ΜΚ κάνουν 4, όσο και η ΑΕ. Επομένως η τετράγωνη επιφάνεια ΗΙ θα είναι η επιφάνεια ΗΛ και το 4, δηλαδή 2 ¼ +4 που δίνει 6 ¼

Άρα η πλευρά της είναι 2 ½. Αν προσθέσουμε τη γραμμή ΗΔ που είναι 2 ½ παίρνουμε την πλευρά ΑΔ, η οποία είναι η ρίζα του Māl, η οποία είναι 4. Αυτό είναι ό,τι ζητούσαμε να αποδείξουμε. Εδώ είναι το σχήμα:



Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι γεωμετρικές δικαιολογήσεις-ερμηνείες που παραθέτει ο Α-Χ, χρησιμοποιούν «διαιρέσεις και ανασυνθέσεις απλών γεωμετρικών σχημάτων» σε στοιχειώδες γεωμετρικό πλαίσιο. Μοιάζουν να απηχούν παλαιότατες Βαβυλωνιακές γεωμετρικές συλλογιστικές[90] παρά γεωμετρικές παραδόσεις που ακολούθησαν το Ευκλείδειο πρότυπο. Σχετικά με το θέμα, ο ιστορικός S.Gandz είχε τη γνώμη ότι " Από αλγεβρική άποψη ο Α-Χ βρίσκεται μπροστά από τον Ευκλείδη χίλια χρόνια, αλλά γεωμετρικά είναι χίλια χρόνια πίσω από αυτόν. Οι αποδείξεις του βασίζονται εξ ολοκλήρου πάνω στη διαίσθηση"[91]

Μετά τις γεωμετρικές δικαιολογήσεις ο Α-Χ κάνει μια παρατήρηση με την οποία κλείνει αυτή η ενότητα του πρώτου μέρους της *Άλγεβρας*, στην οποία το αντικείμενο συζήτησης ήταν οι επιλυτικές διαδικασίες για τις ισότητες ειδών αλλά και η γεωμετρική

[90] [Χριστιανίδης 2008*,51]

[91] [Gandz 1997,131]

ερμηνεία τους. «Έχουμε βρει πως οτιδήποτε γίνεται με υπολογισμό «*al-jabr*» και *al-muqābala*. σε οδηγεί αναγκαστικά σε κάποια από αυτές τις έξι διαδικασίες, τις οποίες περιέγραψα στην αρχή του βιβλίου μου. Συμπλήρωσα το σχολιασμό τους, έχε το κατά νου»[92]

Η επισήμανση που κάνει ο Α-Χ με αυτή την παρατήρηση αξίζει ιδιαίτερης προσοχής και θα συζητηθεί στη συνέχεια της εργασίας, αλλά ας πούμε δύο λόγια εδώ. Η παρατήρηση ουσιαστικά οριοθετεί το περιεχόμενο και την ανάπτυξη της τέχνης της άλγεβρας όπως την εννοεί ο ο Α-Χ. Εξηγεί με σαφήνεια, ότι ο υπολογισμός με άλγεβρα καταλήγει σε μια από τις έξι ισότητες που παρουσίασε· «οτιδήποτε γίνεται με υπολογισμό *al-jabr* και *al-muqābala* σε οδηγεί αναγκαστικά σε μία από αυτές». Η εξέλιξη των Ισλαμικών μαθηματικών μετά τον Α-Χ μοιάζει να διαψεύδει έναν τέτοιο ισχυρισμό, αφού στην *Άλγεβρα* του al-Khayyam χρησιμοποιεί πολύ περισσότερες από τις έξι διαδικασίες[93]. Όμως στην πραγματικότητα, ο ισχυρισμός του Α-Χ είναι εντελώς ορθός αν λάβουμε υπ' όψιν τα «είδη» που χρησιμοποιεί (αριθμός, ρίζα, Māl) και για τον υπολογισμό με αυτά προκύπτουν ακριβώς οι έξι ισότητες που είδαμε.

2.2.2. Κανόνες πράξεων

Θα συζητήσουμε τώρα τις πράξεις που σημειώνονται σε παραστάσεις οι οποίες προκύπτουν στον υπολογισμό με al-jabr. Στην *Άλγεβρά* του ο Α-Χ αφιερώνει στις πράξεις τρεις παραγράφους. Εκεί ασχολείται με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού, της πρόσθεσης και αφαίρεσης και τέλος της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού ριζών. Μετά την παρουσίαση κάποιων γενικών κανόνων και συγκεκριμένων παραδειγμάτων ολοκληρώνει την ενότητα περί πράξεων με γεωμετρικές δικαιολογήσεις κάποιων παραδειγμάτων. Όπως σημειώνει ο Oaks, οι πράξεις στην Αραβική άλγεβρα προέρχονται από την αριθμητική και στην περιγραφή μιας πράξης συνήθως χρησιμοποιούνται δύο ρήματα, το πρώτο εκφράζει την πράξη που θα εκτελεστεί και το δεύτερο δηλώνει το αποτέλεσμα.[94] Για παράδειγμα στο πρόβλημα <22> ο Α-Χ γράφει:

«πολλαπλασιάζεις το τρίτο του πράγματος [ρίζας] επί το τέταρτο του πράγματος.

---

[92] [Rashed 2009, 120]

[93] [Kasir 1998, 317]

[94] [Oaks 2009, 175]

Έτσι δίνει μισό του έκτου του *māl*»[95].

Σημειώνει επίσης, ότι στις εξισώσεις (ισότητες ειδών) η ισότητα δηλώνεται με το ρήμα «adala» (γίνομαι ίσος) ενώ αυτό το ρήμα ποτέ δε χρησιμοποιείται για να δηλώσει το αποτέλεσμα πράξης. Αξίζει να αναφέρουμε ότι στις επιλύσεις των προβλημάτων με την τέχνη της al-jabr(μέθοδος της άλγεβρας), όπως θα δούμε παρακάτω, όλες οι πράξεις που υπαγορεύονται από την εκφώνηση εκτελούνται προτού καταστρωθεί η εξίσωση (ισότητα ειδών).Οι μοναδικές «πράξεις» που εκτελούνται μετά την κατάστρωση της εξίσωσης είναι οι διαδικασίες απλοποίησής της, οι οποίες δεν θεωρούνται σαν πράξεις της αριθμητικής.

2.2.2.(i) Πολλαπλασιασμός

«Θα σε διδάξω πώς να πολλαπλασιάζεις πράγματα, τα οποία είναι οι ρίζες, μεταξύ τους, αν αυτά βρίσκονται μόνα ή αν αυτά είναι με έναν αριθμό ή αν αυτά έχουν ελαττωθεί κατά έναν αριθμό ή αν ένας αριθμός έχει ελαττωθεί όσο είναι αυτά και πώς να τα προσθέσεις μεταξύ τους και πώς να τα αφαιρείς»[96]

Έτσι αρχίζει το κεφάλαιο για τον πολλαπλασιασμό. Εδώ για πρώτη φορά, ο Α-Χ, εισάγει έναν ακόμη όρο, το «πράγμα», ο οποίος όπως εξηγεί σημαίνει «ρίζα». Στις επιλύσεις των προβλημάτων χρησιμοποιεί συστηματικά αυτόν τον όρο, αλλά μερικές φορές και τον όρο «ρίζα». Σκοπός του κεφαλαίου είναι η διδασκαλία των κανόνων για την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με συλλογές, οι οποίες περιέχουν ρίζες και αριθμούς, δηλαδή ό,τι ονομάσαμε πρωτοβάθμια Αραβικά «πολυώνυμα», τα οποία συμβολικά είναι οι παραστάσεις bx+c ή bx-c ή c-bx. Για αυτόν τον σκοπό παρουσιάζει ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα, όπως λόγου χάριν «δέκα με λείψη ένα πράγμα να πολλαπλασιαστεί επί δέκα με λείψη ένα πράγμα». Υπάρχουν όμως και κάποιοι γενικά διατυπωμένοι κανόνες, χωρίς αναφορά σε συγκεκριμένους αριθμούς, όπως «οποτεδήποτε ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με άλλον, ο πρώτος πρέπει να επαναληφθεί τόσες φορές όσες οι μονάδες του άλλου». Στη σειρά παράθεσης των παραδειγμάτων αναγνωρίζει κανείς μια διδακτική προσέγγιση. Αρχίζει με τα αριθμητικά και οδηγείται σε παραδείγματα που περιέχουν το «πράγμα», δηλαδή εκφράσεις οι οποίες περιέχουν τον άγνωστο. Επιλέγοντας παραδείγματα όπως «δέκα και ένα να πολλαπλασιαστεί επί δέκα και δύο» ή το «δέκα με λείψη ένα επί δέκα με λείψη ένα»

---

[95] [Oaks-Alkhateed 2005, 421]

[96] [Rashed 2009, 122]

διδάσκει λεπτομερώς την εφαρμογή του επιμεριστικού κανόνα. Η σκοπιμότητα αυτών των παραδειγμάτων φαίνεται να είναι η εμπέδωση του κανόνα με αριθμητικά παραδείγματα απλά, αλλά και οικεία στους διδασκόμενους από τη διδασκαλία της αριθμητικής. Τα παραδείγματά του περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμούς διωνυμικών παραστάσεων, τα οποία σε συμβολική μορφή είναι (10-x)10, (10+x)10, (10+x)(10+x), (10-x)(10-x), (10+x)(10-x), (10+x)(x-10), (10-x)x. Εξηγεί λεπτομερώς την κάθε περίπτωση τονίζοντας τη διαφορά με τα λείποντα ή πλεονάζοντα «είδη». Κατάληξη της παραγράφου είναι ένας κανόνας που θυμίζει έντονα τον Διοφαντικό κανόνα «λεῖψις δέ ἐπί ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν». Γράφει λοιπόν ο Α-Χ:

«Οποτεδήποτε πολλαπλασιάζουμε μια συλλογή με έλλειμμα επί μια συλλογή με πλεόνασμα, όπως όταν [στη μία] υπάρχει ένα πράγμα και [στην άλλη] λείπει ένα πράγμα, ο τελευταίος πολλαπλασιασμός δίνει πάντοτε ένα γινόμενο το οποίο είναι σε λείψη. Έχε το κατά νου»[97].

2.2.2.(ii) Πρόσθεση και αφαίρεση

Στο κεφάλαιο, περί αυτών των δύο πράξεων, ο Α-Χ ασχολείται με την πρόσθεση και αφαίρεση παραστάσεων οι οποίες περιέχουν τα είδη των αριθμών της άλγεβράς του.

Οι παραστάσεις, με τις οποίες ασχολείται στα παραδείγματά του, τα οποία χρησιμοποίει για να εξηγήσει τις πράξεις, σε συμβολική μορφή γράφονται ως εξής:

1. $(\sqrt{200}+10)+(20-\sqrt{200})$
2. $(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)$
3. $(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2)$
4. $(100+x^2-20x)-(50+10x-2x^2)$

Αυτό που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι, αναφέρει απλώς και μόνο τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτές τις δύο πράξεις, χωρίς να αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο τα υπολογίζει. Ούτε καν έπονται, όπως θα αναμέναμε, κάποια συμπεράσματα υπό μορφή κανόνα, ο οποίος να έχει εφαρμογή σε παρόμοιους υπολογισμούς. Έτσι λοιπόν, δημιουργείται το ερώτημα: γιατί ο Α-Χ, παραθέτει απλώς

[97] [Rosen 1997, 27] Ο Rosen στη μετάφρασή του γράφει "θετικός" και "αρνητικός" και ο Rashed μεταφράζει αντίστοιχα "προστιθέμενος" και "αφαιρούμενος". Θεωρούμε όμως ότι είναι πιο σωστό, αντί για αυτούς τους όρους να μιλάμε για "έλλειψη" ή "πλεόνασμα" κατά ένα πράγμα.

και μόνο το αποτέλεσμα μιας πράξης χωρίς καμία αναφορά στον τρόπο ή το σκεπτικό του υπολογισμού; Βεβαίως πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι αμέσως μετά ο Α-Χ αναφέρει:

«Θα σου εξηγήσω παρακάτω, το λόγο αυτού [του αποτελέσματος] με ένα σχήμα, το οποίο θα είναι συμπλήρωμα σε αυτό το κεφάλαιο».[98]

Έτσι λοιπόν αν και ο Α-Χ δεν αναφέρει τον τρόπο υπολογισμού ή το σκεπτικό για τα αποτελέσματά του, θεωρεί απαραίτητο να προχωρήσει σε γεωμετρικές δικαιολογήσεις αυτών των αποτελεσμάτων. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου, ασχολείται με υπολογισμό πολλαπλάσιων και υποπολλαπλάσιων της **ρίζας** ενός τετραγώνου. Ο πρώτος κανόνας που αναφέρει είναι: «Αν θέλεις να διπλασιάσεις τη ρίζα οποιουδήποτε γνωστού ή άγνωστου τετραγώνου (το νόημα του διπλασιασμού είναι να πολλαπλασιάσεις επί δύο), τότε αρκεί να πολλαπλασιάσεις δύο επί δύο και μετά επί το τετράγωνο. Η ρίζα του γινομένου είναι ίση με το διπλάσιο της ρίζας του αρχικού τετραγώνου». [99]

Αμέσως μετά αναφέρει παρόμοιο κανόνα για τον τριπλασιασμό της ρίζας και καταλήγει με την γενίκευση: «Υπολόγισε με αυτό τον τρόπο κάθε πολλαπλάσιο των ριζών είτε αυτό είναι μεγαλύτερο είτε μικρότερο από δύο».

Ακολουθούν οι αντίστοιχοι κανόνες για τα υποπολλαπλάσια, δηλαδή το ένα-δεύτερο και το ένα-τρίτο της ρίζας, καταλήγοντας σε ένα οποιοδήποτε κλάσμα της. Η μέθοδος υπολογισμού των πολλαπλάσιων και υποπολλαπλασίων της ρίζας βασίζεται στον κανόνα που συμβολικά θα γράφαμε $n \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{n^2 x^2}$.

Το σύντομο αυτό κεφάλαιο της πραγματείας, κλείνει με εφαρμογή των κανόνων σε τρία αριθμητικά παραδείγματα. Όπως στο κεφάλαιο που είχε ως θέμα τις μεθόδους επίλυσης των εξισώσεων, έτσι και εδώ σε αυτό το κεφάλαιο, ο Α-Χ για την παρουσίαση ενός κανόνα επιλέγει ένα σύνολο παραδειγμάτων. Όμως αυτό που παρατηρούμε είναι μία μικρή αλλά αξιοπρόσεκτη διαφορά. Στις εξισώσεις αρχίζει με αριθμητικά παραδείγματα και στη συνέχεια, σε κάποιες περιπτώσεις, θα διατυπώσει τον κανόνα. Αντίστροφα στις πράξεις, πρώτα διατυπώνει τον κανόνα και έπονται τα αριθμητικά

---

[98] [Rosen 1997,28]

[99] [Rosen 1997,27-28]

παραδείγματα με τα οποία κλείνει το κεφάλαιο. Έτσι λοιπόν η θέση του ειδικού και του γενικού, στην παρουσίαση αντιστρέφονται.

Ένα δεύτερο ερώτημα που σχετίζεται με την παρουσίαση των πράξεων αυτής της ενότητας, είναι το εξής: γιατί ο Α-Χ, ασχολείται με υπολογισμούς πολλαπλάσιων και υποπολλαπλασίων των ριζών, σε αυτό το κεφάλαιο το οποίο αφορά στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης;

2.2.2.(iii) Διαίρεση

Αν και στον τίτλο αυτού του κεφαλαίου αναφέρεται μόνο η διαίρεση, περιλαμβάνει και τον πολλαπλασιασμό. Οι δύο πράξεις αφορούν αποκλειστικά τετραγωνικές ρίζες ακεραίων και ρητών αριθμών. Ο τρόπος υπολογισμού είναι κοινός και για τις δύο πράξεις. Σχηματίζει το πηλίκο ή το γινόμενο των αριθμών στα υπόριζα των ριζών και μετά υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα του αποτελέσματος.

Είναι φανερό πως αυτό το κεφάλαιο αποτελεί συνέχεια του προηγούμενου, συμπληρώνοντας τους τρόπους για την εκτέλεση πράξεων με τετραγωνικές ρίζες. Το κεφάλαιο της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μαζί με το κεφάλαιο της διαίρεσης σχηματίζουν μία ενότητα. Με εξαίρεση δύο παραδείγματα που αφορούν πρόσθεση και αφαίρεση τριωνύμων, όλα τα υπόλοιπα παραδείγματα και οι κανόνες αφορούν εκτέλεση πράξεων με τετραγωνικές ρίζες. Στο κεφάλαιο της διαίρεσης, ο Α-Χ, αξιοποιεί στα αριθμητικά παραδείγματα, την εφαρμογή των δύο βασικών ιδιοτήτων, για το πηλίκο και το γινόμενο των ριζών στον υπολογισμό. Ας σημειωθεί ότι, δεν αναφέρει ρητά καμία από αυτές τις ιδιότητες για τις ρίζες, ως μια ισότητα παραστάσεων. Η μορφή της αναφοράς θα γίνει κατανοητή με το εξής παράδειγμα: «Έτσι αν θέλεις να πολλαπλασιάσεις τη ρίζα του πέντε επί τη ρίζα του δέκα, πολλαπλασίασε πέντε επί δέκα, η ρίζα του γινομένου θα είναι ότι ζητούσες».[100]

Παρατηρούμε ότι στο απόσπασμα αυτό, η μεν υπόθεση περιγράφει την παράσταση που πρέπει να υπολογιστεί, το δε συμπέρασμα περιγράφει τα βήματα της διαδικασίας υπολογισμού. Η παράσταση που αντιστοιχεί σε αυτή τη διαδικασία υπολογισμού είναι προφανώς ισοδύναμη με την πρώτη. Όμως αυτή η ισοδυναμία υπονοείται, δεν αναφέρεται ούτε δηλώνεται με κάποια λέξη.

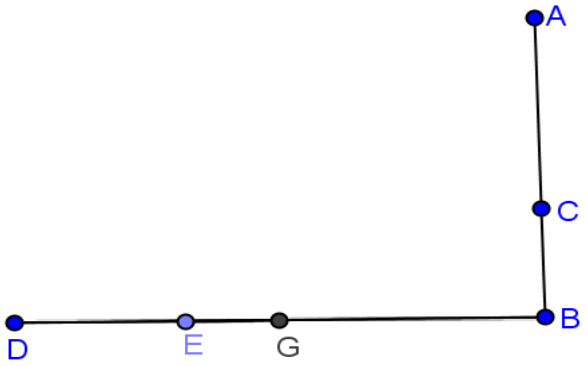
---

[100] [Rosen 1997, 30]

2.2.2.(iv) Αιτιολογήσεις

Μετά την παρουσίαση των πράξεων ο Α-Χ, προχωράει σε αιτιολογήσεις για τρία από τα παραδείγματα. Για τα δύο παραδείγματα χρησιμοποιεί γεωμετρικές, συγκεκριμένα δύο απλά σχήματα ευθειών, αλλά για το τρίτο παράδειγμα θεωρεί πώς δεν υπάρχει ένα κατάλληλο σχήμα. Όπως γράφει, "δεν δέχεται κανένα σχήμα", δηλαδή δεν υπάρχει γεωμετρικό σχήμα το οποίο θα έδινε κάποια επεξηγηματική γεωμετρική ερμηνεία του κανόνα.

Α) Πρώτο παράδειγμα με σύγχρονο συμβολισμό, είναι: $\sqrt{200}-10+20-\sqrt{200}=10$



Σχηματίζουμε τμήματα AB= $\sqrt{200}$, AC=10, έτσι CB= $\sqrt{200}$ -10

Σχηματίζουμε το τμήμα BD =20, διπλάσιο του AC.

Παίρνουμε BE=AB= $\sqrt{200}$, τότε ED=20- $\sqrt{200}$

Παίρνουμε GE=CB= $\sqrt{200}$ -10.

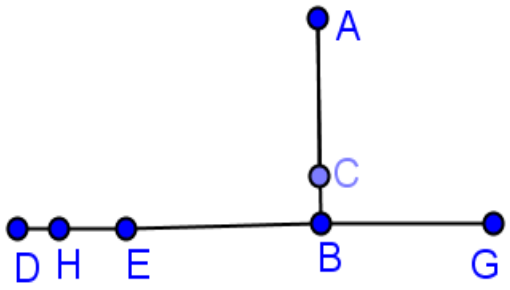
Έτσι θα είναι BG=AC=10

Οπότε GD= $\sqrt{200}$ -10+20- $\sqrt{200}$

Αλλά είναι GD=GB=10 το οποίο δικαιολογεί την αρχική ισότητα.

Ο Α-Χ κάνει μία εντελώς στοιχειώδη γεωμετρική κατασκευή. Η ουσία όμως της γεωμετρικής δικαιολόγησης βρίσκεται στο τμήμα DB με μήκος 20 και μέσο G. Επίσης το BE είναι μήκους $\sqrt{200}$ οπότε GE+ED=GD από το οποίο προκύπτει η ισότητα που ζητάμε.

Β) Το δεύτερο παράδειγμα, με σύγχρονο συμβολισμό, είναι: $20-\sqrt{200}-(\sqrt{200}-10)=30-2\sqrt{200}$



Είναι AB=BE=$\sqrt{200}$, AC=10, BD=20,EH=CB οπότε από τα μήκη των τμημάτων προκύπτει εύκολα, με απλή αριθμητική των τμημάτων, η ζητούμενη ισότητα.

Γ) Το τρίτο παράδειγμα, το οποίο περιέχει ρίζες και τετράγωνα χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(100+1x^2-20x)+(50+10x-2x^2)=150-10x-1x^2$$

Γι' αυτό το παράδειγμα ο Α-Χ γράφει: «Όσον αφορά το "εκατό και ένα mal με λείψη είκοσι ριζών και πενήντα και δέκα ρίζες με λείψη δύο τετραγώνων" κανένα σχήμα δεν ταιριάζει σε αυτό, επειδή αυτές [οι παραστάσεις-συλλογές] αποτελούνται από τρία διαφορετικά είδη: mal, ρίζες και αριθμό και αυτά δεν έχουν κάτι κοινό που να τους αντιστοιχεί για να αναπαρίστανται με ένα σχήμα. Μπορούμε να κάνουμε ένα σχήμα, γι' αυτά αλλά δεν είναι επεξηγηματικό. Όσο για την αναγκαιότητά του αυτή γίνεται φανερή από την περιγραφή».[101]

Από το παραπάνω απόσπασμα δημιουργείται άμεσα, το επόμενο ερώτημα: Γιατί ο Α-Χ δεν χρησιμοποιεί τη γεωμετρική ερμηνεία, η οποία θεωρεί τα "είδη" ως εμβαδά, όπως έκανε και στις γεωμετρικές δικαιολογήσεις των μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων; Η αποφυγή αυτής της εξήγησης, οφείλεται άραγε στο πολύπλοκο και όχι αρκετά επεξηγηματικό σχήμα που κατασκευάζεται με μια τέτοια γεωμετρική

[101] [Rashed 2009, 140]

ερμηνεία; Αξίζει να σημειωθεί πως με την τελευταία πρόταση, του αποσπάσματος, ουσιαστικά προτείνει ένα εναλλακτικό τρόπο εξήγησης για το αποτέλεσμα (της πρόσθεσης) ο οποίος αποφεύγει τη στοιχειώδη γεωμετρία, αλλά βασίζεται στη λογική των "ειδών". Στην συνέχεια περιγράφει ακριβώς αυτόν τον τρόπο. Με τη βοήθεια της διαδικασίας της αποκατάστασης (al-jabr) προκύπτει το αποτέλεσμά του. Στο παραπάνω απόσπασμα, ο Gandz μεταφράζει «λογική ή αλγεβρική αναγκαιότητα» αντί για «αναγκαιότητα» και στο σχόλιό του για τον τρόπο εξήγησης που προτείνει ο Α-Χ, γράφει: *«Αυτή η αλγεβρική ανάλυση ονομάζεται "αναγκαιότητα με λέξεις", επειδή ο αλγεβρικός συλλογισμός [γίνεται] "δια λόγου" δεδομένου ότι η άλγεβρα ήταν στη ρητορική φάση και ακόμη κάθε λογικός συλλογισμός εκφράζεται μέσω του λόγου»*.[102]

2.2.3. Προβλήματα αριθμητικής

Η επισκόπησή μας μέχρι εδώ έχει καλύψει την εξήγηση των κανόνων της άλγεβρας. Όπως αναφέραμε , στους κανόνες συμπεριλαμβάνονται οι διαδικασίες και οι πράξεις κατά τον υπολογισμό με al-jabr. Υπολείπονται δύο συλλογές λυμένων προβλημάτων ώστε να συμπληρωθεί το καθαρά αλγεβρικό μέρος της *Άλγεβρας* του Α-Χ. Η πρώτη από αυτές η οποία στις μεταφράσεις των Rosen και Rashed επιγράφεται «Κεφάλαιο των έξι προβλημάτων» περιλαμβάνει έξι προβλήματα τα οποία θα συμβολίζουμε με (Π_1), (Π_2), ..., (Π_6), ενώ η δεύτερη η οποία και στις δύο μεταφράσεις έχει τίτλο «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» είναι πιο εκτεταμένη και περιέχει 34 προβλήματα, τα οποία συμβολίζουμε με <1>, <2>, ..., <34>. Αυτά είναι αφηρημένα αριθμητικά προβλήματα χωρίς σύνδεση με πρακτικές ανάγκες, αντίθετα απ' ότι συμβαίνει με τα προβλήματα τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο δεύτερο ή το τρίτο μέρος της *Άλγεβρας*.

2.2.3.(i) Ένα πρόβλημα για κάθε ισότητα

Για την επίλυση κάθε προβλήματος από αυτά που περιέχει η συλλογή των έξι προβλημάτων, ο Α-Χ εφαρμόζει παραδειγματικά την τεχνική al-jabr. Τα προβλήματα έχουν επιλεγεί και διαταχθεί έτσι ώστε να αντιστοιχούν στις έξι περιπτώσεις ισότητας με

[102] [Gandz 1997, 516]

τη σειρά που αυτές παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Σε κάθε πρόβλημα η τεχνική al-jabr δημιουργεί μια «ισότητα ειδών» - εξίσωση – στην οποία εμφανίζονται, ανάλογα με την περίπτωση, οι διαδικασίες επίλυσης που είδαμε. Ο Α-Χ αρχίζει εξηγώντας τι εξυπηρετεί η παράθεση των έξι λυμένων προβλημάτων: «παρουσίασα προηγουμένως τις διαδικασίες υπολογισμού και οι τρόποι τους αποτελούν έξι προβλήματα τα οποία έχω θέσει σαν παραδείγματα για τις έξι διαδικασίες που παρουσίασα στην εισαγωγή του βιβλίου μου και έχω αναφέρει ότι ο υπολογισμός με al-jabr και al-muqābala θα σε οδηγήσει αναγκαστικά σε μία από τις διαδικασίες εκείνες. Επέλεξα τα ακόλουθα προβλήματα με ό,τι θα έκανε ευκολότερη την κατανόηση, την προσπάθεια λιγότερη και το νόημα σαφέστερο Θεού θέλοντος».[103]

Θα δούμε τώρα την εφαρμογή της τεχνικής al-jabr στην επίλυση του έκτου προβλήματος της συλλογής. Αν και η περιγραφή της λύσης του προβλήματος είναι μια ενιαία παράγραφος στο Αραβικό κείμενο θα το χωρίσουμε σε τέσσερις μικρότερες παραγράφους. Αυτός ο χωρισμός μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε μια δομή στις λύσεις των προβλημάτων, την οποία ο Α-Χ τηρεί συστηματικά. Οι τέσσερις παράγραφοι είναι κατά σειρά: εκφώνηση, κατάστρωση της ισότητας (εξίσωσης), απλοποίηση της ισότητας και εφαρμογή της κατάλληλης διαδικασίας για τη λύση της απλοποιημένης μορφής.[104]

Πρόβλημα ($Π_6$)

Εκφώνηση

Και το έκτο πρόβλημα είναι, *māl*: πολλαπλασίασες το τρίτο του επί το τέταρτό του, έτσι αυτό δίνει το *māl* στο οποίο έχουν προστεθεί είκοσι-τέσσερα ντιράμς.

Κατάστρωση της ισότητας «ειδών» - εξίσωσης

Ο κανόνας του είναι ότι κάνεις το *māl* ένα πράγμα. Μετά πολλαπλασιάζεις το τρίτο του πράγματος επί το τέταρτο του πράγματος, που δίνει το μισό του έκτου *māl*, το οποίο ισούται με ένα πράγμα και είκοσι-τέσσερα ντιράμς.

Απλοποίηση της ισότητας – εξίσωσης

Μετά πολλαπλασιάζεις το μισό του έκτου *māl* επί δώδεκα έτσι για να συμπληρώσεις

---

[103] [Rashed 2009, 144]

[104] [Oaks 2009, 174]

το *māl* σου. Επίσης πολλαπλασιάζεις το πράγμα επί δώδεκα για να πάρεις δώδεκα πράγματα. Μετά πολλαπλασιάζεις το είκοσι-τέσσερα επί δώδεκα, έτσι γίνεται διακόσια ογδόντα – οκτώ ντιράμς και δώδεκα ρίζες ίσα με ένα *māl*.

Εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης

Έτσι, διαίρεσε δια δύο τις ρίζες, το οποίο δίνει έξι. Πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του και πρόσθεσέ το στο διακόσια ογδόντα – οκτώ, έτσι αυτό δίνει τριακόσια είκοσι-τέσσερα. Πάρε τη ρίζα του, η οποία είναι δέκα – οκτώ. Πρόσθεσέ τη στο μισό [του αριθμού] των ριζών, το οποίο είναι έξι, έτσι δίνει είκοσι-τέσσερα, το οποίο είναι το *māl*.

Η δομή των λύσεων θα συζητηθεί σε επόμενη ενότητα, εδώ όμως θα κάνουμε ένα μικρό σχόλιο. Η διατύπωση του προβλήματος είναι με αριθμητικούς όρους. Το *māl* σε αυτό το πλαίσιο σημαίνει «ποσότητα», «μέγεθος». Από την άλλη, η λύση του προβλήματος γίνεται με την τεχνική al-jabr (μέθοδος της άλγεβρας), που σημαίνει ότι πρέπει να οριστούν «είδη», αφού ο αλγεβρικός υπολογισμός γίνεται αυτά. Σε αυτό το πλαίσιο το *māl* γίνεται πλέον «πράγμα» ή «ρίζα», δηλαδή ο άγνωστος με βάση τον οποίο θα καταστρωθεί η εξίσωση.

Έτσι θέτοντας το mal σαν «πράγμα» και λαμβάνοντας υπ'όψιν τη συνθήκη του προβλήματος, θα καταστρωθεί μια συγκεκριμένη ισότητα με «είδη» από την οποία θα προκύψει η τιμή του mal. Αυτή η ισότητα, η οποία μπορεί να μεταγραφεί συμβολικά στην $\frac{1}{12}x^2 = 1x + 24$, προφανώς δεν έχει λείποντες όρους σε καμία πλευρά της, ούτε υπάρχουν όμοιοι όροι(είδη) στις δύο πλευρές της. Έτσι δεν χρησιμοποιείται jabr-αποκατάσταση ούτε και muqābala–αντιστάθμιση, αλλά απαιτείται η αύξηση του συντελεστή του *māl* ώστε να γίνει μονάδα. Γενικά ένα τέτοιο βήμα αλγεβρικής απλοποίησης μιας ισότητας (εξίσωσης), γίνεται με πολλαπλασιασμό επί τον αντίστροφο του συντελεστή των *māls* ή του «πράγματος» και λέγεται **συμπλήρωση** του αντίστοιχου είδους. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι πράξεις που υπαγορεύονται από την εκφώνηση του προβλήματος εκτελούνται προτού η ισότητα (εξίσωση) καταστρωθεί. Αυτό δεν συμβαίνει μόνο στο παραπάνω πρόβλημα, αλλά είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό της μεσαιωνικής άλγεβρας.

Στο τέλος της λύσης, ο Α-Χ, γράφει την εξής πρόταση: «Έτσι αυτό το πρόβλημα σε οδήγησε σε έναν από τους έξι τύπους [εξίσωσης], δηλαδή «ρίζες και αριθμός είναι ίσα

με *māls*».[105]Ανάλογες προτάσεις συνοδεύουν την κατάληξη της λύσης καθενός από τα έξι αυτά προβλήματα. Προσπαθεί λοιπόν ο Α-Χ να υποδείξει την αντιστοίχιση ανάμεσα σε κάθε ένα από τα έξι προβλήματα και στη συγκεκριμένη διαδικασία επίλυσής του. Αυτό κατά την άποψή μας είναι ενδεικτικό του παιδαγωγικού χαρακτήρα του έργου αλλά ταυτόχρονα αποκαλύπτει το σκοπό του Α-Χ, ο οποίος είναι η κατάταξη των προβλημάτων σε έξι κατηγορίες, ανάλογα με τη διαδικασία.

Μία τέτοια ταξινόμηση είναι ακριβώς αυτό που ο Netz χαρακτηρίζει, σαν «συστηματοποίηση» και την θεωρεί σαν ένα από τα δύο κύρια χαρακτηριστικά του έργου[106], αλλά αυτό είναι θέμα συζήτησης του επόμενου κεφαλαίου.

2.2.3.(ii) Τα 34 προβλήματα

Η συλλογή των 34 λυμένων προβλημάτων αποτελεί την τελευταία ενότητα του πρώτου μέρους της *Άλγεβρας*. Τα περισσότερα, από αυτά τα προβλήματα είναι όμοια με τα έξι προβλήματα της προηγούμενης συλλογής. Με βάση τις εκφωνήσεις τους είναι δυνατόν η συλλογή να χωριστεί σε τρεις ομάδες[107]. Στην ομάδα του δέκα ένα πρόβλημα αρχίζει «διαιρείς το δέκα σε δύο μέρη...». Στην ομάδα του *māl* , στην οποία ένα πρόβλημα αρχίζει «Ένα māl... » Τέλος σε κάθε πρόβλημα της τρίτης ομάδας ένας αριθμός από ντιράμς μοιράζεται σε ένα αριθμό ατόμων. Το πρόβλημα <7> δεν υπάρχει σε ορισμένα χειρόγραφα και μάλλον είναι μεταγενέστερη προσθήκη.[108]

Επιλέξαμε δύο προβλήματα από τη συλλογή, τα οποία θα παρουσιάσουμε αμέσως παρακάτω στην μορφή τεσσάρων παραγράφων, οι οποίες αντιστοιχούν στη διατύπωση και στα τρία στάδια της λύσης του προβλήματος: εκφώνηση, κατάστρωση της εξίσωσης, απλοποίησή της και εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης. Το ένα από τα προβλήματα ανήκει στην «ομάδα του δέκα» και είναι το:

---

[105] [Oaks – Alkhateed 2005, 406]

[106] Το δεύτερο κύριο χαρακτηριστικό, σύμφωνα με την άποψη του Netz, είναι η συσχέτιση της γεωμετρίας με τους υπολογισμούς. Θεωρεί και τα δύο, τυπικά χαρακτηριστικά «δευτερογενούς» πρακτικής.[Netz 2004, 140]

[107] [Oaks – Alkhateed 2005, 402]

[108] [Oaks – Alkhateed 2005, 403]

Πρόβλημα <1>[109]

Εκφώνηση

Αν κάποιος κάνει ένα ερώτημα λέγοντας ότι: διαιρείς το δέκα σε δύο μέρη, μετά τα πολλαπλασιάζεις και το αποτέλεσμα είναι είκοσι-ένα ντιράμς.

Δημιουργία της εξίσωσης

Γνωρίζεις ότι ένα από τα δύο μέρη του δέκα είναι ένα πράγμα και το άλλο είναι δέκα ελαττωμένο κατά ένα πράγμα. Πολλαπλασιάζεις ένα πράγμα επί δέκα μείον ένα πράγμα, το αποτέλεσμα είναι δέκα πράγματα μείον ένα τετράγωνο (māl) ίσο με είκοσι-ένα.

Απλοποίηση της εξίσωσης

Αποκατάστησε τα δέκα πράγματα από το τετράγωνο (māl) και πρόσθεσε το στο είκοσι-ένα, το αποτέλεσμα είναι δέκα πράγματα ίσα με είκοσι-ένα ντιράμς και ένα τετράγωνο.

Διαδικασία επίλυσης

Αφαίρεσε το μισό του αριθμού των ριζών, το υπόλοιπο είναι πέντε. Πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του και παίρνεις είκοσι-πέντε. Αφαίρεσε από αυτό το είκοσι-ένα το οποίο είναι με το τετράγωνο, απομένει τέσσερα. Πάρε τη ρίζα του, είναι δύο και αφαίρεσέ τη από το μισό του αριθμού των ριζών, δηλαδή το πέντε. Το υπόλοιπο είναι τρία, και αυτό είναι ένα από τα δύο μέρη.

Αν θέλεις, πρόσθεσε τη ρίζα του τέσσερα στο μισό του αριθμού των ριζών, το αποτέλεσμα είναι επτά, το οποίο είναι ένα από τα δύο μέρη.

Ο Α-Χ δεν παραλείπει να υπενθυμίσει στο τέλος της επίλυσης την ιδιαιτερότητα αυτής της περίπτωσης. «Αυτό το πρόβλημα είναι ένα από εκείνα που γίνονται με πρόσθεση και αφαίρεση».

Όμως εδώ αξίζει να προσέξει κανείς, ότι και για τις δύο τιμές που προκύπτουν με πρόσθεση ή αφαίρεση, ο Α-Χ γράφει «είναι ένα από τα δύο μέρη». Κατά συνέπεια δεν θεωρεί τις δύο τιμές που ικανοποιούν την ισότητα, με άλλα λόγια τις δύο λύσεις της εξίσωσης, σαν τα δύο ζητούμενα μέρη του δέκα. Η υπόθεσή μας είναι, ότι ο Α-Χ θεωρεί την τιμή του «πράγματος» έναν συγκεκριμένο αριθμό, δηλαδή το ένα από τα δύο ζητούμενα μέρη. Ο υπολογισμός λοιπόν με την τεχνική al-jabr θα μας δώσει μέσω της εξίσωσης ένα και μόνο συγκεκριμένο αριθμό. Με την επιλογή του τρία ή του επτά σαν ένα από τα μέρη το άλλο θα βρεθεί με αφαίρεση από το δέκα του πρώτου.

---

[109] [Rashed 2009, 156]

Το δεύτερο πρόβλημα ανήκει στην «ομάδα māl» και είναι το:

Πρόβλημα <8> [110]

Εκφώνηση

Έτσι αν αυτός πει δύο *māls*: η διαφορά τους είναι δυο ντιράμς. Διαίρεσες το μικρότερο με το μεγαλύτερο έτσι που το πηλίκο ήταν μισό ντιράμ.

Δημιουργία της εξίσωσης

Έτσι κάνε ένα από τα δύο *māls* ένα πράγμα, και το άλλο ένα πράγμα και δύο ντιράμς. Έτσι όταν διαίρεσες το πράγμα με πράγμα και δύο ντιράμς το αποτέλεσμα της διαίρεσης ήταν μισό ντιράμ. Αλλά γνωρίζεις ήδη, πως κάθε φορά που πολλαπλασιάζεις το αποτέλεσμα της διαίρεσης [Το πηλίκο] με το διαιρέτη, ξαναβρίσκεις το *māl* [ποσό] που διαίρεσες, το οποίο [εδώ] είναι ένα πράγμα.

Έτσι [πολλαπλασίασες] ένα πράγμα και δύο ντιράμς επί το ένα-δεύτερο το οποίο είναι το πηλίκο. Επομένως αυτό δίνει μισό πράγμα και ένα ντιράμ το οποίο είναι ίσο με ένα πράγμα,

Απλοποίηση της εξίσωσης

Έτσι αφαιρείς μισό πράγμα από μισό πράγμα και απέμεινε ένα ντιράμ [το οποίο] είναι ίσο με μισό πράγμα.

Διαδικασία επίλυσης

Έτσι διπλασιάζεις: από το οποίο προκύπτει, το πράγμα είναι ίσο με δύο ντιράμς, και το άλλο είναι τέσσερα.

Παραθέτουμε τώρα και τη συμβολική μεταγραφή των δύο προβλημάτων:

Πρόβλημα <1>

Εκφώνηση

Διαιρείς το 10 σε δύο ίσα μέρη, έστω Α, Β. Το γινόμενό τους κάνει 21

Κατάστρωση εξίσωσης

Θέσε 1x το Α, τότε το Β είναι 10-1x

Πολλαπλασίασε 1x επί 10-1x, παίρνεις $10x-1x^2$, το οποίο είναι ίσο με 21

[$10x-1x^2-21$]

Απλοποίηση εξίσωσης

---

[110] [Oaks - Alkhateed 2005, 421]

Αποκατάστησε το 10x με το $1x^2$ που του λείπει και πρόσθεσέ το στο 21, παίρνεις $10x=21+1x^2$

Επίλυση

$$10-\frac{10}{2}=5\rightarrow 5\cdot 5=25\rightarrow 25-21=4\rightarrow \sqrt{4}=2$$

Αφαίρεσε το 2 από το μισό των ριζών 5, παίρνεις 3, αυτό είναι το ένα από τα δύο μέρη.

Αν θέλεις πρόσθεσε το 2 στο μισό των ριζών 5, παίρνεις 7, αυτό είναι το ένα από τα δύο μέρη.

Πρόβλημα <8>

Εκφώνηση

Η διαφορά δύο ποσών Α και Β είναι 2 ντιράμς. Διαίρεσες το μικρότερο Α με το μεγαλύτερο Β και πήρες μισό ντιράμ.

Κατάστρωση εξίσωσης

Θέσε 1x το Α, τότε το Β είναι 1x+2. Έτσι, με τη διαίρεση $\frac{1x}{1x+2}$ δίνει πηλίκο $\frac{1}{2}$

Πολλαπλασίασε 1x+2 επί $\frac{1}{2}$, παίρνεις $\frac{1}{2}x+1$ το οποίο είναι ίσο με 1x

[$\frac{1}{2}x+1=1x$]

Απλοποίηση εξίσωσης

Αφαιρείς $\frac{1}{2}x$ από κάθε πλευρά της. Απομένει $1=\frac{1}{2}x$

Διαδικασία επίλυσης

Διπλασιάζεις όλους τους όρους και προκύπτει 1x=2 [το ένα ποσό] και το άλλο είναι 4.

2.3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΠΟΡΙΟ ΚΑΙ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Το δεύτερο μέρος της *Άλγεβρας* περιέχει λυμένα προβλήματα από το εμπόριο και τη γεωμετρία. Διαιρείται σε δύο ενότητες, μια πολύ σύντομη στην οποία ασχολείται με τις εμπορικές συναλλαγές και μια άλλη μεγαλύτερης έκτασης στην οποία αναπτύσσει το θέμα του υπολογισμού στη γεωμετρία. Στην ενότητα που αφιερώνει στις εμπορικές συναλλαγές, ασχολείται με τον «κανόνα των τριών», δηλαδή τον υπολογισμό ενός

ζητούμενου αριθμού με τη βοήθεια αναλογίας. Θέμα της δεύτερης ενότητας είναι η μέτρηση επιφάνειας επίπεδων σχημάτων, αν και υπάρχουν κάποιοι υπολογισμοί όγκων και μήκους τμημάτων. Οι κανόνες που δίνονται για το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τριγώνου και κύκλου και τον όγκο πυραμίδας, δεν συνοδεύονται από αποδείξεις. Εξαίρεση αποτελεί το Πυθαγόρειο θεώρημα, για το οποίο παραθέτει μια εντελώς στοιχειώδη «απόδειξη» και μόνο για μια ειδική περίπτωση. Αυτή είναι γραμμένη στο πνεύμα των αιτιολογήσεων, με βάση εμβαδά απλών σχημάτων, τις οποίες χρησιμοποίησε στις διαδικασίες επίλυσης. Με βάση τους κανόνες που αναφέρει, λύνονται παραδειγματικά, προβλήματα υπολογισμού, μερικά από τα οποία είναι βέβαιο ότι προέρχονται από παλαιότερες συλλογές προβλημάτων.[111]Για παράδειγμα υπάρχουν προβλήματα τα οποία περιέχονται στα *Γεωμετρικά* του Ήρωνος του Αλεξανδρέα.

2.3.1. Προβλήματα εμπορικών συναλλαγών

Η συζήτηση σε αυτήν την ενότητα περιστρέφεται γύρω από τον υπολογισμό της τιμής ενός άγνωστου μεγέθους με βάση μια αναλογία. Οι αντίστοιχοι όροι της αναλογίας αποτελούν τιμές δύο μεγεθών: της ποσότητας και της χρηματικής αξίας. Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο τέταρτος όρος μιας αναλογίας στην οποία, οι τρεις άλλοι όροι είναι γνωστοί αριθμοί. Ο υπολογισμός γίνεται με πολλαπλασιασμό των δύο οι οποίοι δεν ανήκουν στον ίδιο λόγο και μετά διαίρεση του γινομένου με τον τρίτο γνωστό αριθμό.[112] Φυσικά ένας τέτοιος υπολογισμός γίνεται με αριθμητικό συλλογισμό και δεν γίνεται καμία χρήση της τεχνικής al-jabr. Ο Α-Χ αρχίζει με τις εφαρμογές του υπολογισμού με ανάλογα μεγέθη και τα ονόματα των όρων της αναλογίας:

«Να γνωρίζεις ότι όλες οι συναλλαγές μεταξύ των ανθρώπων, όπως είναι οι πωλήσεις, οι αγορές και η μίσθωση ή οποιεσδήποτε άλλες γίνονται σύμφωνα με δύο τρόπους και τέσσερις αριθμούς, οι οποίοι εκφράζονται με το ερώτημα: την μονάδα μέτρησης της ποσότητας, την τιμή μοναδιαίας ποσότητας, την τιμή[113] και την ποσότητα»[114].

Οι δύο τρόποι για τους οποίους αναφέρει το απόσπασμα έχουν την ίδια διαδικασία

---

[111] [Rashed 2009, 57]

[112] [Rashed 2009. 196]

[113] Τιμή εδώ σημαίνει, χρηματική αξία για ορισμένη ποσότητα.

[114] [Rashed 2009. 196]

υπολογισμού. Όμως στον πρώτο ο ζητούμενος όρος ανήκει στο μέγεθος ποσότητα, ενώ στο δεύτερο ανήκει στο μέγεθος τιμή, τα οποία φυσικά είναι ανάλογα. Για την εξήγηση του υπολογιστικού κανόνα δίνονται τρία λυμένα παραδείγματα, τα δυο πρώτα αντιστοιχούν στους δύο τρόπους.

Στο πρώτο παράδειγμα αναφέρεται:

«αν κάποιος σου πει "δέκα για έξι", πόσα θα πάρεις για τέσσερα;»[115]

Στη συνέχεια ο Α-Χ εξηγεί με λεπτομέρεια τους όρους της αναλογίας, δέκα είναι η μοναδιαία ποσότητα, έξι είναι η τιμή της μοναδιαίας ποσότητας, με τη φράση «πόσα θα έχεις» δηλώνει τον ζητούμενο (άγνωστο) αριθμό για την ποσότητα και τέσσερα είναι η τιμή της ποσότητας. Με πολλαπλασιασμό και μετά διαίρεση υπολογίζει τον ζητούμενο αριθμό, ο οποίος είναι $6\frac{2}{3}$.

Στο δεύτερο παράδειγμα ο ζητούμενος αριθμός είναι η τιμή. Ο υπολογισμός φυσικά γίνεται και πάλι σε δύο βήματα: πρώτα πολλαπλασιασμός και μετά διαίρεση. Ο Α-Χ κλείνει αυτή την ενότητα με ένα τρίτο παράδειγμα, το οποίο αφορά πληρωμή εργασίας.

Σε αυτή την ενότητα αξίζει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή σε δύο σημεία. Πρώτον ο τρόπος λύσης των παραδειγμάτων είναι καθαρά αριθμητικός, το οποίο μας επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό ότι η τεχνική al-jabr είναι μια μέθοδος, δίπλα σε άλλες αριθμητικές μεθόδους για επίλυση προβλημάτων. Δεύτερον, ο Α-Χ προσπαθεί να παρουσιάσει μια τυποποιημένη διαδικασία για τον υπολογισμό με τον «κανόνα των τριών». Αυτό το στοιχείο είναι ενδεικτικό ότι η Άλγεβρα είναι ένα έργο στο οποίο δίνεται έμφαση στη συστηματική κατάταξη των προβλημάτων με βάση τον τρόπο επίλυσή τους.[116]

2.3.2. Προβλήματα μετρητικής γεωμετρίας

Κύριο θέμα αυτής της ενότητας είναι η μέτρηση επιφάνειας γεωμετρικών σχημάτων. Συμπληρωματικά ασχολείται με υπολογισμό μήκους ευθύγραμμου τμήματος, τόξου κύκλου αλλά και όγκου. Τα επίπεδα σχήματά του είναι τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ρόμβος και κύκλος, ενώ από τα στερεά αναφέρει το παραλληλεπίπεδο, τον κώνο και την πυραμίδα. Ευθύς εξ' αρχής ορίζει την μονάδα

[115] [Rashed 2009, 198]

[116] [Netz 2004, 140]

επιφανείας.

«Να γνωρίζεις ότι η έννοια ένα επί ένα είναι μέτρηση και το νόημά της είναι ένα κύβιτο επί ένα κύβιτο. Έτσι ολόκληρη η επιφάνεια – για κάθε επιφάνεια ίσων πλευρών και γωνιών, τέτοια που κάθε πλευρά της είναι ένα – είναι ένα.»[117]

Η μονάδα επιφανείας, είναι λοιπόν εξ' ορισμού ένα τετράγωνο πλευράς ένα. Αμέσως μετά εξηγεί ότι το τετράγωνο με πλευρά δύο είναι τετραπλάσιο του μοναδιαίου, ενώ θα είναι το ένα – τέταρτο αν η πλευρά του είναι μισό κύβιτο. Αλλά και γενικότερα εξηγεί πώς υπολογίζεται το εμβαδόν για κάθε τετράγωνο ή ορθογώνιο με πλευρές των οποίων τα μήκη είναι ρητοί αριθμοί. Λίγο παρακάτω, στο κείμενό του, εξηγεί και γεωμετρικά τον όρο «ρίζα» τον οποίο είχε χρησιμοποιήσει με αυτή την έννοια στις γεωμετρικές δικαιολογήσεις των εξισώσεων.

«Για κάθε τετράγωνη επιφάνεια ίσων πλευρών, μία από τις πλευρές επί ένα είναι η ρίζα της και επί δύο [είναι] δύο ρίζες της, είτε η επιφάνεια είναι μικρή είτε μεγάλη.»[118]

Ακολουθούν μία σειρά κανόνες για τον υπολογισμό εμβαδού διαφόρων επίπεδων σχημάτων – τριγώνου, ορθογωνίου, ρόμβου, κύκλου – και για τον υπολογισμό της περιμέτρου κύκλου. Ας σταθούμε σε έναν από αυτούς για τον υπολογισμό του μήκους της περιφέρειας.

«Για κάθε κύκλο ο πολλαπλασιασμός της διαμέτρου [d] επί τρία και ένα-έβδομο είναι η περίμετρός του, αυτό είναι σύμβαση μεταξύ των ανθρώπων χωρίς αναγκαιότητα. Οι Ινδοί έχουν δύο διαφορετικές προτάσεις γι' αυτό. Η μία είναι ότι πολλαπλασιάζεις τη διάμετρο με τον εαυτό της και μετά επί δέκα, παίρνεις την [τετραγωνική] ρίζα του γινομένου και το αποτέλεσμα είναι η περιφέρεια. Η δεύτερη πρόταση οφείλεται στους αστρονόμους, πολλαπλασιάζεις τη διάμετρο επί εξήντα δύο χιλιάδες οκτακόσια τριάντα δύο και όταν το διαιρείς με είκοσι χιλιάδες, παίρνεις την περιφέρεια. Όλες αυτές [οι τιμές] είναι κοντά η μία στην άλλη.»[119]

Οι τρεις τύποι της περιμέτρου *P,* κύκλου διαμέτρου d, που προκύπτουν από αυτούς τους κανόνες είναι:

---

[117] [Rashed 2009, 202]

[118] [Rashed 2009, 202]

[119] [Rashed 2009, 204]

$$P = 3\frac{1}{7}d\ , \qquad P = \sqrt{10d^2}, \qquad P = \frac{62832}{20000}d$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι σημαντικό για δύο λόγους. Ο πρώτος, επειδή περιέχει τρεις διαφορετικές τιμές για τον αριθμό *π* , δηλαδή τις $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$, και $\frac{62832}{20000}$.

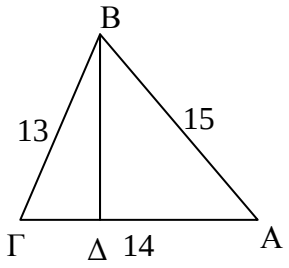
Ως προς το θέμα πόσο ακριβής είναι η πρώτη από αυτές, ο *A-X* αναφέρει «αυτή είναι μία σύμβαση μεταξύ των ανθρώπων χωρίς αναγκαιότητα». Αυτό είναι πιθανόν να σημαίνει, ότι την θεωρεί μία προσέγγιση του *π*, αλλά ίσως όχι την καλύτερη δυνατή. Ο δεύτερος λόγος , ο οποίος κατά τη γνώμη μας είναι και σημαντικότερος, είναι η αναφορά στους Ινδούς μαθηματικούς. Αυτή είναι η μοναδική αναφορά που γίνεται σε εκπροσώπους κάποιας μαθηματικής παράδοσης στην *Άλγεβρα* του. Πιο συγκεκριμένα ο Α-Χ, αναγνωρίζει ότι η τιμή $\frac{62832}{20000}$ για το π οφείλεται σε αυτούς μεταξύ των Ινδών μαθηματικών οι οποίοι είναι αστρονόμοι.

Μεταξύ των κανόνων για υπολογισμό εμβαδών ή όγκου για τους οποίους όμως δεν δίνεται καμία αιτιολόγηση, βρίσκεται το Πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο συνοδεύεται και με «απόδειξη». Όμως αν και η διατύπωσή του είναι γενική, η «απόδειξη» αφορά μόνο την ειδική περίπτωση για ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο.

Ταξινομεί τα τετράπλευρα σε πέντε είδη και τα τρίγωνα σε οξυγώνια, ορθογώνια και αμβλυγώνια. Για ένα τρίγωνο αυτό γίνεται συγκρίνοντας το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών με το τετράγωνο της τρίτης. Στα παραδείγματα για ο εμβαδόν και τον όγκο, ο υπολογισμός γίνεται με αριθμητικές πράξεις βάσει των κανόνων. Πρόκειται δηλαδή για αριθμητικό υπολογισμό με βάση απλούς κανόνες. Υπάρχουν όμως και δύο παραδείγματα στα οποία εφαρμόζεται υπολογισμός με την τεχνική al-jabr (μέθοδος της άλγεβρας). Αυτά τα παραδείγματα βρίσκονται και τα δύο στο έργο του Ήρωνος του Αλεξανδρέα[120], όμως ο τρόπος λύσης που ακολουθείται εκεί διαφέρει από αυτόν του Α-Χ.

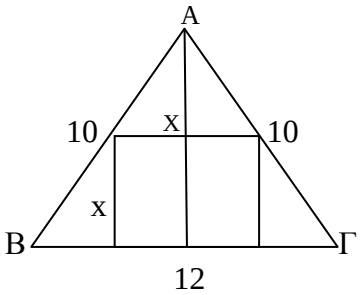
Στο πρώτο, με δεδομένα τα μήκη α = 13, β =14, γ =15 των τριών πλευρών τριγώνου, ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν του.

[120] [Rashed 2009, 58-59]



Ο Α-Χ υπολογίζει πρώτα το ύψος ΒΔ του τριγώνου και μετά το εμβαδόν, σαν ημιγινόμενο της βάσης β = 14 επί το ύψος. Ο υπολογισμός του ύψους γίνεται με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος[121] στα δύο ορθογώνια τρίγωνα με πλευρά το ύψος. Θέτει το τμήμα ΓΔ της πλευράς ΑΓ ένα «πράγμα», δηλαδή 1x=ΓΔ και υπολογίζει το ύψος σαν τετραγωνική ρίζα του 225-(196+x^2-28x) δηλαδή του 29+28x-x^2. Αμέσως μετά, εξισώνει τις δύο αυτές εκφράσεις και καταλήγει στην ισότητα 140=28x από την οποία παίρνει 1x=5. Επομένως το ύψος έχει μήκος 12 και το εμβαδόν είναι 84.

Στο δεύτερο παράδειγμα παίρνει ως δεδομένο ένα ισοσκελές τρίγωνο με κάθε μία από τις ίσες πλευρές μήκους 10 και βάση μήκους 12. Ζητούμενο είναι το μήκος της πλευράς του εγγεγραμμένου τετραγώνου, του οποίου η μία πλευρά είναι στη βάση του τριγώνου.



Υπολογίζει πρώτα το ύψος στη βάση του τριγώνου, το οποίο είναι μήκους 8. Μετά βρίσκει το εμβαδόν του τριγώνου, το οποίο είναι 42. Θέτει το μήκος της πλευράς του τετραγώνου ένα πράγμα, δηλαδή 1x. Με άθροισμα των εμβαδών των τριών μικρών τριγώνων και του τετραγώνου καταλήγει στην ισότητα 10x=42, από την οποία $1x = 4\frac{4}{5}$.

[121] Να σημειωθεί ότι ο Α-Χ δεν διατυπώνει το Θεώρημα, αλλά ούτε και το ονομάζει, απλώς το εφαρμόζει. [Rashed 2009, 220]

Η μελέτη του γεωμετρικού μέρους της *Άλγεβρας,* οδηγεί κάποιον να το χαρακτηρίσει σαν «μία εργασία χωρίς ιδιαίτερες φιλοδοξίες.»[122] Με την εξαίρεση των δύο παραδειγμάτων στα οποία υπολογίζει μήκη με εξίσωση, το υπόλοιπο μέρος είναι απλοί αριθμητικοί υπολογισμοί εμβαδών και όγκων. Οι κανόνες και τα θεωρήματα που διατυπώνονται εξυπηρετούν αποκλειστικά και μόνο τον υπολογισμό. Δεν υπάρχουν τα χαρακτηριστικά των κλασικών γεωμετρικών πραγματειών που βρίσκουμε στην αρχαία Ελληνική παράδοση. Απουσιάζουν τα αξιώματα, οι αποδείξεις – με μοναδική εξαίρεση, μια υποτυπώδη απόδειξη – και οι κατασκευές, με δύο λόγια ό,τι χαρακτηρίζει το αντικείμενο της θεωρητικής γεωμετρίας. Έτσι λοιπόν ο πιο σωστός χαρακτηρισμός αυτού του μέρους ταιριάζει να είναι: ένα σύντομο πρακτικό εγχειρίδιο[123] υπολογισμού στη μετρητική γεωμετρία.

[122] [Netz 2010, 209] Βέβαια ο Netz αποδίδει τον χαρακτηρισμό σε ολόκληρο το έργο.

[123] [Oaks 2010.2]

2.4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΔΙΑΘΗΚΩΝ, ΚΛΗΡΟΝΟΜΙΩΝ ΚΑΙ ΔΩΡΕΩΝ ΕΔΩ

Αυτό το μέρος της πραγματείας περιλαμβάνει προβλήματα σχετικά με κληρονομικά και ζητήματα δωρεών. Είναι το μεγαλύτερο από τα τρία μέρη και αποτελεί περισσότερο από το μισό της έκτασης ολόκληρου του έργου. Χωρίζεται σε δύο ενότητες, οι οποίες φέρουν τους τίτλους *Περί Διαθηκών* και *Υπολογισμός των επιστροφών*. Η πρώτη από αυτές ασχολείται με προβλήματα τα οποία αφορούν την κατανομή μεριδίων κληρονομιάς, ενώ η δεύτερη πραγματεύεται προβλήματα σχετικά με την επιστροφή κληρονομιών και μεριδίων τα οποία αρχικά είχαν δοθεί υπό μορφή δωρεάς ή άλλου είδους συναλλαγής. Τα προβλήματα επιλύονται με την μέθοδο al-jabr (μέθοδος της άλγεβρας) αλλά υπάρχουν και αρκετά προβλήματα στα οποία η διαδικασία της επίλυσης δεν είναι παρά απλός αριθμητικός συλλογισμός. Στα προβλήματα που εφαρμόζεται η μέθοδος της άλγεβρας, οι εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν είναι αποκλειστικά και μόνο γραμμικές, δεν υπάρχουν τετραγωνικές εξισώσεις. Είναι ευνόητο ότι το πλαίσιο στο οποίο τοποθετούνται τα προβλήματα καθορίζεται από το σύνολο των νόμων περί κληρονομιών στο Ισλαμικό δίκαιο της πρώιμης περιόδου των Αββασιδών. Σαν αποτέλεσμα της στενής σύνδεσης των προβλημάτων με τους κανόνες του Ισλαμικού δικαίου, η κατανόηση αυτού του μέρους της πραγματείας δυσκολεύει τον αναγνώστη ο οποίος δεν είναι εξοικειωμένος με αυτούς. Όμως κάτι τέτοιο δεν αποτελούσε πρόβλημα για τους εκπαιδευόμενους με την *Άλγεβρα* στον μεσαιωνικό Ισλαμικό κόσμο.

Ο Frederic Rosen, ο οποίος όπως προαναφέραμε, έχει επιμεληθεί την πρώτη μετάφραση της πραγματείας του Α-Χ στην Αγγλική γλώσσα, έκανε κάποιες κριτικές παρατηρήσεις για τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων περί κληρονομιών. Σε μία από αυτές αναφέρει:

Οι λύσεις που ο συγγραφέας (ο Α-Χ) έχει δώσει στα υπόλοιπα προβλήματα, αυτής της πραγματείας, είναι από μαθηματική άποψη, εν πολλοίς μη ορθές. Αυτό δεν σημαίνει λανθασμένη επίλυση των εξισώσεων που αντιστοιχούν στα προβλήματα, αλλά ότι κατά την αναγωγή των προβλημάτων σε εξισώσεις, γίνονται αυθαίρετες υποθέσεις, οι οποίες είναι ξένες ή αντιφατικές με τα δεδομένα του προβλήματος. Με σκοπό όπως φαίνεται, την αναγκαιότητα της συμφωνίας των λύσεων με τους παγιωμένους κανόνες περί κληρονομιών, όπως αυτοί εξηγούνται από τους Άραβες νομικούς.[124]

---

[124] [Rosen 1997,133]

Η ουσία της παρατήρησης για αυθαιρεσία υποθέσεων που αντιφάσκουν στα δεδομένα, με σκοπό την προσαρμογή των λύσεων στο νομικό πλαίσιο, είναι κατά τον Gandz χωρίς βάση. Θεωρεί μάλιστα ότι η υιοθέτηση της κριτικής του Rosen, συνεχίζει μια παράδοση για περισσότερο από έναν αιώνα. Σε υπεράσπιση της ορθότητας των λύσεων του Α-Χ και γενικότερα της φήμης του ως μαθηματικού, προχωρεί στην συνέχεια του άρθρου του *Η άλγεβρα των κληρονομιών*[125] σε επανεξέταση όλων των λύσεων. Σύμφωνα με τον Gandz[126] το βιβλίο περί κληρονομιών, χαρακτηρίζεται από τα εξής:

I. Δεν ασχολείται με τα γενικά περί κληρονομιών αλλά ειδικά με περιπτώσεις μεριδίων που κληρονομούνται σε ξένους προς την οικογένεια (legacies to strangers).
II. Ασχολείται, όχι με "απλές περιπτώσεις" αλλά με πιο πολύπλοκες, οι οποίες απαιτούν αλγεβρικές πράξεις με άγνωστες ποσότητες και όχι απλώς αριθμητική.
III. Δεν αναλύει το "νομικό μέρος των προβλημάτων δηλαδή το νόμο περί κληρονομιών" αλλά το υπολογιστικό, αλγεβρικό μέρος.

Ο Gandz[127] επιχειρηματολογεί υπέρ της άποψης ότι αυτοί είχαν διδαχθεί στοιχειώδη μαθήματα δικαίου και ήταν εξοικειωμένοι με τους σχετικούς νόμους και τον αριθμητικό υπολογισμό νόμιμων μεριδίων κληρονομιών.

Αυτό το μέρος της *Άλγεβρας*, όπως θα φανεί και στα προβλήματα που ακολουθούν, επιβεβαιώνει με τον καλύτερο τρόπο τον ισχυρισμό για τη στενή σχέση των κανόνων υπολογισμού, αλλά και γενικά της «θεωρίας» με τις εφαρμογές της, στα Ισλαμικά μαθηματικά[128]. Όπως παρατηρεί ο Rashed,[129] ο ίδιος ο συγγραφέας της *Άλγεβρας* αναφέρει πως υπήρχε μια παράδοση στη χρήση αλγεβρικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων σχετικών με το δίκαιο κληρονομιών και κληροδοτημάτων. Επομένως ο Α-Χ συνεχίζει και προάγει μια παράδοση εφαρμογής της αλγεβρικής και

---

[125] [Gandz 1997,171-243]

[126] [Gandz 1997,180]

[127] [Gandz 1997, 328]

[128] [J. Lennart Berggren 2007, 519]

[129] [Rashed 2009, 26]

της αριθμητικής μεθόδου για την επίλυση προβλημάτων τέτοιου είδους. Η αρκετά μεγάλη έκταση του τρίτου μέρους σε σχέση με τα δύο πρώτα -στην Αγγλική μετάφραση του Rosen εκτείνεται από την σελίδα 86 έως την σελίδα 174- θέτει ένα βασικό ερώτημα: γιατί ο Α-Χ,συμπεριέλαβε μία τόσο μεγάλη συλλογή λυμένων προβλημάτων που αφορούν θέματα κληρονομιών; Μία εύλογη απάντηση που αναφέρει ο Γούτας, υποστηρίζει:

Κατά τα πρώτα χρόνια των Αββασιδών, όμως το ισλαμικό δίκαιο εξελισσόταν το ίδιο, ραγδαία και έτσι η άλγεβρα έγινε το αναγκαίο εργαλείο για την επίλυση όλων των περίπλοκων λεπτομερειών του κληρονομικού δικαίου.[130]

Άλλωστε πρέπει να επισημανθεί ότι τα προβλήματα αυτού του μέρους, αφορούν σε «περιπτώσεις κληρονομιών, κληροδοτημάτων, επιμερισμού περιουσιών», δηλαδή σε ζητήματα, τα οποία λόγω της πολυπλοκότητάς τους, όπως θεωρεί και ο ίδιος ο Α-Χ στην εισαγωγή του βιβλίου, αναδεικνύουν με τον καλύτερο τρόπο την σημαντικότητα των υπολογισμών με τη μέθοδο της άλγεβρας. Γίνεται λοιπόν φανερό από τα παραπάνω, γιατί ο Α-Χ αναπτύσσει, με κάθε λεπτομέρεια και σε τέτοια έκταση, τους υπολογισμούς σε προβλήματα που απορρέουν από την εφαρμογή του Ισλαμικού κληρονομικού δικαίου.

2.4.1. Προβλήματα περί διαθηκών

Τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου αφορούν στη διαμοίραση και κατανομή των μεριδίων ιδιοκτησίας σύμφωνα με το Ισλαμικό δίκαιο περί κληρονομιών. Διακεκριμένοι νομικοί της εποχής είχαν ασχοληθεί με προβλήματα που σχετίζονται με το κληρονομικό δίκαιο. Είχαν μάλιστα συγγράψει έργα σχετικά με αυτό το θέμα, τα οποία επηρέασαν τον Α-Χ: Όπως αναφέρει ο Rashed[131], ο συγγραφέας της *Άλγεβρας* έχει δανειστεί ακόμη και τίτλους από τέτοια έργα για το «βιβλίο» του «Περί κληρονομιών».

Επιπλέον αναφέρει, για τη δημιουργία και χρήση από τους νομικούς, ενός λογισμού περί διαθηκών, ο οποίος αναπτύχθηκε περαιτέρω και βελτιώθηκε από τους μαθηματικούς. Ο λόγος για τον οποίο προβλήματα που απορρέουν από το κληρονομικό

---

[130] [Γούτας 2001,159]

[131] [Rashed 2009, 26]

δίκαιο γίνονται τόσο σημαντικά και απασχολούν, ως προς την μαθηματική-υπολογιστική πλευρά τους, καταρχάς τους νομικούς και αργότερα τους μαθηματικούς, είναι όπως υποστηρίζει ο Γούτας:

«Κατά τα πρώτα χρόνια των Αββασιδών, όμως το ισλαμικό δίκαιο εξελισσόταν το ίδιο, ραγδαία και έτσι η άλγεβρα έγινε το αναγκαίο εργαλείο για την επίλυση όλων των περίπλοκων λεπτομερειών του κληρονομικού δικαίου.»[132]

Για να κατανοηθεί το περιεχόμενο των προβλημάτων αλλά και ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου al-jabr σε αυτά, επιλέξαμε να παρουσιάσουμε το πρώτο πρόβλημα αυτής της ενότητας μαζί με τη λύση του.

Πρόβλημα <Δ_1>[133]

«Ένας άντρας απεβίωσε, αφήνοντας δύο γιούς. Κληροδοτεί το ένα-τρίτο της περιουσίας του σε έναν ξένο και αφήνει ιδιοκτησία αξίας δέκα ντιράμς και ένα σύνολο δέκα ντιράμς οφειλόμενο σε αυτόν από τον έναν γιό».

Το πραγματεύεσαι ως εξής: Κάνε ό, τι αφαιρείται από το χρέος, ένα πράγμα και πρόσθεσέ το στην περιουσία η οποία είναι δέκα ντιράμς, το αποτέλεσμα είναι δέκα και ένα πράγμα. Μετά αφαίρεσε το ένα-τρίτο της περιουσίας, δηλαδή τρία ντιράμς και ένα-τρίτο του ντιράμ και ένα-τρίτο του πράγματος. Απομένουν έξι ντιράμς και δύο-τρίτα του ντιράμ και δύο-τρίτα του πράγματος. Διαίρεσέ το δια δύο για τους δύο γιούς και καθένας θα πάρει, τρία ντιράμς και ένα τρίτο του ντιράμ και ένα τρίτο του πράγματος το οποίο είναι ίσο με το πράγμα που αφαιρέθηκε. Επομένως, αποκατέστησέ το· αφαιρείς ένα-τρίτο του πράγματος για ένα τρίτο του πράγματος και απομένουν, δύο τρίτα του πράγματος ίσα με τρία ντιράμς και ένα-τρίτο. Μετά χρειάζεται να συμπληρώσεις το πράγμα. Γι' αυτό προσθέτεις στα δύο-τρίτα του πράγματος το μισό τους και στα τρία και ένα-τρίτο το μισό τους. Το αποτέλεσμα τότε είναι πέντε ντιράμς, το οποίο είναι η τιμή του πράγματος που αφαιρέθηκε από το χρέος».

Η μεταγραφή της "ρητορικής" λύσης του Α-Χ, με τη βοήθεια των συμβόλων έχει ως εξής:

Έστω x ντιράμς το ποσό που δικαιούται κατά το νόμο ο γιος με την οφειλή στον

---

[132] [Γούτας 2001, 159]

[133] < Δ_1> Δεν υπάρχει αρίθμηση των προβλημάτων στο κείμενο της Άλγεβρας, το σύμβολο Δ_ν σημαίνει ν-οστό πρόβλημα, με τη σειρά παρουσίασης του βιβλίου, από το «Κεφάλαιο περί διαθηκών»

πατέρα. Το ποσό λοιπόν που θα διαμοιραστεί είναι 10+*x*. Ο ξένος κληρονομεί το $\frac{1}{3}$ αυτού του ποσού, δηλαδή $3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$. Απομένει ποσό $6\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x$, το οποίο μοιράζεται εξίσου στους δύο αδερφούς. Επομένως ο καθένας λαμβάνει $3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$, το οποίο θα πρέπει να είναι ίσο με *x*. Δηλαδή ισχύει η εξίσωση $3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x=x$. Με αναγωγή, προκύπτει $3\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x$.

Συμπληρώνεις το $\frac{2}{3}x$ ώστε να γίνει $1x$. Αυτό θα γίνει προσθέτοντας στο $\frac{2}{3}x$ του μισό του που είναι $\frac{1}{3}x$ και στο $3\frac{1}{3}$ το μισό του που είναι $1\frac{2}{3}$.

Το αποτέλεσμα είναι 1*x*=5.

Υποθετικά μπορεί κανείς να σκεφτεί, ότι αφού η συνολική αξία της κληρονομιάς, μαζί με την οφειλή του γιου είναι 20 ντιράμς και μοιράζεται εξίσου στους δύο γιους και στον ξένο, ο καθένας δικαιούται να λάβει $6\frac{2}{3}$ ντιράμς. Επομένως ο γιος που έχει την οφειλή πρέπει να επιστρέψει στον αδερφό του και στον ξένο, το υπόλοιπο ποσό των $3\frac{1}{3}$ ντιράμς από τα 10 ντιράμς που έχει δανειστεί.

Η παραπάνω υπόθεση δεν ευσταθεί, αφού σύμφωνα με το Ισλαμικό δίκαιο, των αρχών του 9^{ου} αιώνα, όταν ο Α-Χ συνέγραψε την πραγματεία, υπάρχουν κάποιοι κανόνες που θέτουν περιορισμούς στον τρόπο διαμοίρασης της κληρονομιάς. Ένας εκ των πλέον βασικών υπαγορεύει[134], ότι δεν επιτρέπεται σε κάποιον να αφήσει, μέσω διαθήκης, κληροδότημα σε ξένον, μερίδιο μεγαλύτερο του ενός-τρίτου της περιουσίας του. Όσον αφορά τον τρόπο υπολογισμού που προτείνει ο Α-Χ στο παραπάνω πρόβλημα, αυτός υπαγορεύεται από ένα δεύτερο κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο: Αν ένας πατέρας έχει δανείσει κάποιο ποσό σε έναν από τους γιους του και του οποίου το νόμιμο μερίδιο είναι μικρότερο από το εν λόγω ποσό, η διαφορά δεν επιστρέφεται στους

[134] [Gandz 1997, 332]

άλλους κληρονόμους αλλά θεωρείται ως δώρο του πατέρα στο γιο. [135]

Έτσι λοιπόν στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αν δεχτούμε ότι ο γιος με την οφειλή λαμβάνει ως νόμιμο μερίδιο *x* ντιράμς, τότε αυτό το ποσό είναι προφανώς μικρότερο των 10 ντιράμς. Η διαφορά 10-*x* θεωρείται δώρο του πατέρα προς αυτόν. Επομένως η συνολική προσφορά είναι 10+*x*. Ένα – τρίτο αυτής είναι το μερίδιο του ξένου και το υπόλοιπο $\frac{2}{3}(10+x)$ διαμοιράζεται εξίσου στους δύο γιους. Ώστε το μερίδιο καθενός είναι $x=\frac{1}{3}(10+x)$. Τελικά ο ξένος και ο ένας γιος παίρνουν μερίδια 5 ντιράμς ο καθένας. Ο γιος λόγω της οφειλής δεν παίρνει κανένα μέρος της περιουσίας, αλλά κρατάει ως δώρο από τον πατέρα και δεν επιστρέφει στους υπόλοιπους τα 5 ντιράμς

Ας δούμε όμως τώρα και ένα δεύτερο πρόβλημα, η λύση του οποίου προκύπτει όχι με εφαρμογή της τεχνικής al-jabr (μέθοδος της άλγεβρας), αλλά με απλό αριθμητικό συλλογισμό.

Πρόβλημα <Δ_4>

«Ένας άντρας απεβίωσε και αφήνει εν ζωή την μητέρα του, την σύζυγό του, τον αδελφό του και τις δύο αδελφές του, από τον ίδιο πατέρα και μητέρα. Επιπλέον κληροδοτεί το ένα-ένατο της περιουσίας του σε έναν ξένο.

Το πραγματεύεσαι έτσι: Διαμοιράζεις σύμφωνα με τα νόμιμα δικαιώματά τους και βρίσκεις ότι προκύπτουν σαράντα-οκτώ μερίδια.[136] Γνωρίζεις ότι αν διαχωρίσεις ένα-ένατο από ένα ποσό, το υπόλοιπο είναι οκτώ-ένατα και αυτό που διαχώρισες είναι ίσο με ένα-όγδοο του υπολοίπου. Πρόσθεσε στα οκτώ-ένατα το όγδοό τους και στα σαράντα-οκτώ το όγδοό τους, έτσι το ποσό γίνεται ακέραιος δηλαδή έξι, το αποτέλεσμα είναι πενήντα-τέσσερα. Το άτομο το οποίο λαμβάνει το κληροδότημα ίσο με το ένα-

---

[135] [Gandz 1997, 334]

[136] Σύμφωνα με τον Ισλαμικό κληρονομικό δίκαιο, αφαιρείται πρώτα το $\frac{1}{9}$ της περιουσίας για το μερίδιο του ξένου. Απομένουν τα $\frac{8}{9}$ της περιουσίας από τα οποία η σύζυγος παίρνει το $\frac{1}{4}$ και η μητέρα το $\frac{1}{6}$. Το $\frac{1}{2}$ του υπολοίπου πάει στον αδελφό και το $\frac{1}{4}$ αυτού σε κάθε μια από τις αδελφές. [Rashed 2009, 335]

ένατο αυτού [θα πάρει] έξι, το οποίο είναι το ένα-ένατο όλου του ποσού. Ό, τι απομένει είναι σαράντα-οκτώ [μερίδια], πρέπει να διαιρεθεί μεταξύ των συγγενών σύμφωνα με τα [νόμιμα] μερίδιά τους.»[137]

Ο Rashed σχολιάζει τη λύση ως εξής: Έστω C η αξία της περιουσίας (κεφάλαιο), τότε ο ξένος παίρνει το $\frac{1}{9}C$. Τα υπόλοιπο $\frac{8}{9}C$, διαμοιράζεται σύμφωνα με τον νόμο. Η σύζυγος παίρνει το $\frac{1}{4}$ και η μητέρα το $\frac{1}{6}$, δηλαδή συνολικά παίρνουν $\frac{5}{12}$ του υπολοίπου. Απομένουν $\frac{7}{12}$ από τα οποία ο αδελφός παίρνει $\frac{7}{24}$ και κάθε αδελφή $\frac{7}{48}$ [138]

Ώστε η απλή αριθμητική των μεριδίων, απαιτεί τη διαμοίραση του μέρους της περιουσίας που παίρνουν οι συγγενείς σε 48 μερίδια. Αλλά όπως εξήγησε στη λύση ο Α-Χ, ο ξένος παίρνει το $\frac{1}{8}$ του μέρους των συγγενών άρα 6 μερίδια, το οποίο σημαίνει διαμοίραση της περιουσίας σε 54 μερίδια συνολικά.

Όπως είναι σαφές από την λύση του τελευταίου προβλήματος, ο Α-Χ θεωρεί ότι οι αναγνώστες της *Άλγεβρας* κατέχουν κάποιου είδους γνώση του κληρονομικού δικαίου. Γιατί διαφορετικά θα εξηγούσε ό,τι είναι αναγκαίο, δηλαδή κάποιες βασικές αρχές, για να γίνει κατανοητός ο τρόπος διανομής των μεριδίων. Σε αυτά τα προβλήματα η προσοχή του αναγνώστη εστιάζεται κυρίως στους νομικούς κανόνες αντί για το μαθηματικό υπολογισμό. Όπως σχολιάζει ο Rosen, «Τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ανήκουν μάλλον στο δίκαιο παρά στην άλγεβρα».[139]

Από την άλλη ο Gandz ,όπως είδαμε παραπάνω, δεν θεωρεί σαν σκοπό του Α-Χ να αναλύσει το νομικό μέρος των προβλημάτων αλλά ενδιαφέρεται αποκλειστικά και μόνο να εξηγήσει την διαδικασία υπολογισμού με δεδομένη τη γνώση των νομικών πτυχών τους.[140]

Στο επόμενο πρόβλημα όπως και σε άλλα από το τρίτο μέρος της Άλγεβρας χρησιμοποιούνται αλγεβρικές διαδικασίες στη λύση του αλλά χωρίς να ονομάζεται

---

[137] [Rashed 2009, 236]

[138] [Rashed 2009, 335]

[139] [Rosen 1997, 91]

[140] [Gandz 1997, 328]

κάποιος από τους ζητούμενους αριθμούς ως «πράγμα» (άγνωστος).

Πρόβλημα <Σ_1>[141]

«Μια γυναίκα απεβίωσε και άφησε εν ζωή, οκτώ θυγατέρες, τη μητέρα και το σύζυγό της. Κληροδοτεί σε ένα άτομο το συμπλήρωμα του μεριδίου μιας θυγατέρας έως το ένα-πέμπτο της περιουσίας. Επίσης κληροδοτεί σε ένα άλλο άτομο το συμπλήρωμα του μεριδίου της μητέρας μέχρι το ένα-τέταρτο της περιουσίας.

Το πραγματευόμαστε ως εξής: Διαμοιράζεις σύμφωνα με το νόμο. Υπάρχουν δέκα-τρία μερίδια. Πάρε την περιουσία [*māl*] και αφαίρεσε από αυτήν το ένα-πέμπτο [της] μείον ένα μερίδιο – δηλαδή το μερίδιο της κληρονομιάς μιας θυγατέρας – και αυτό είναι το πρώτο κληροδότημα. Μετά αφαίρεσε [από αυτήν] ένα τέταρτο της μείον δύο μερίδια – δηλαδή το μερίδιο κληρονομιάς της μητέρας – και αυτό είναι το δεύτερο κληροδότημα. Απομένουν έντεκα – εικοστά της περιουσίας [*māl*] και τρία μερίδια, [το οποίο είναι] ίσο με δέκα-τρία μερίδια. Αφαίρεσε από τα δέκα-τρία μερίδια τα τρία μερίδια, τότε θα πάρεις έντεκα-εικοστά της περιουσίας [*māl*] ίσα με δέκα μερίδια. Συμπλήρωσε την περιουσία, προσθέτοντας στα δέκα μερίδια, εννέα-ενδέκατα αυτής. Θα πάρεις την περιουσία [*māl*] ίση με δέκα-οκτώ μερίδια και δύο- ενδέκατα του μεριδίου. Υπόθεσε ότι το μερίδιο είναι έντεκα, τότε το ποσό θα είναι διακόσια και [επομένως] ένα μερίδιο κληρονομιάς θα είναι έντεκα. Το πρώτο κληροδότημα [θα είναι] είκοσι-εννέα και το δεύτερο είκοσι-οκτώ.»

Με σύμβολα το πρόβλημα μεταγράφεται ως εξής:

[Έστω Π η περιουσία] Σύμφωνα με το νόμο, χωρίζεται σε δεκατρία μερίδια [ίσα με 1Μ].

Αφαίρεσε από το περιουσία Π, [το μερίδιο της μιας κόρης] $\frac{1}{5}\Pi - 1\text{M}$.

Μετά αφαίρεσε από την περιουσία [το μερίδιο της μητέρας] $\frac{1}{4}\Pi - 2\text{M}$.

Απομένουν $[\,\Pi - (\frac{1}{5}\Pi - 1\text{M}) - (\frac{1}{4}\Pi - 2\text{M})\,]$ δηλαδή $\frac{11}{20}\Pi + 3\text{M}$.

Ότι απέμεινε συμπληρώνει ποσό 13Μ.

[Δηλαδή ισχύει η ισότητα: $\frac{11}{20}\Pi + 3\text{M} = 13\text{M}$].

---

[141] <Σ_1> είναι το πρώτο πρόβλημα από το «Κεφάλαιο περί συμπλήρωσης»[Rashed 2009, 282]

Επομένως με αναγωγή: $\frac{11}{20}\Pi = 10M$.

Συμπλήρωσε την περιουσία προσθέτοντας $\frac{9}{20}\Pi$. Παίρνεις $\Pi = (18 + \frac{2}{11})M$.

Αν υποθέσεις M=11 τότε Π=200.

Τότε το κάθε μερίδιο είναι M=11 το κληροδότημα του ενός είναι 29 και του άλλου 28. Αξίζει να σχολιάσουμε τη λύση του παραπάνω προβλήματος. Τα δεδομένα του προβλήματος δεν επαρκούν για να προσδιοριστεί το ποσό των μεριδίων για κάθε κληρονόμο. Αυτό που προσδιορίζεται είναι η σχέση της συνολικής αξίας της κληρονομιάς με την αξία ενός μεριδίου. Με βάση το Ισλαμικό κληρονομικό δίκαιο εκείνης της εποχής, η κάθε θυγατέρα δικαιούται ένα μερίδιο, η μητέρα δύο και ο σύζυγος τρία. Ο υπολογισμός οδηγεί στη σχέση ανάμεσα στην αξία Π της περιουσίας και στην αξία M ενός μεριδίου, η οποία είναι:

$$\Pi = 18M + \frac{2}{11}M$$

Για να υπολογιστούν ακέραιες τιμές για την αξία των μεριδίων καθενός, ο Α–Χ παίρνει την αξία ενός μεριδίου M = 11. Όπως γίνεται φανερό από την διαδικασία, ο υπολογισμός δεν χρησιμοποιεί το «πράγμα» (*shay*) και το τετράγωνό του, αλλά αντί αυτών το «μερίδιο» (*sahm* ή *nasib*) και το mal όχι με την αλγεβρική του σημασία – τετράγωνο του αγνώστου – αλλά σαν « αξία της περιουσίας».

2.4.2. Υπολογισμός των επιστροφών

Αυτή είναι η δεύτερη ενότητα του τρίτου μέρους και τελευταία της *Άλγεβρας* του Α-Χ. Η συζήτηση και τα προβλήματα που πραγματεύεται σε αυτή την ενότητα αφορούν την επιστροφή περιουσιών και μεριδίων τα οποία αρχικώς είχαν δοθεί υπό μορφή δωρεάς ή κάποιας άλλης συναλλαγής. Πιο συγκεκριμένα τα προβλήματα αναφέρονται σε θέματα όπως: η προίκα που γίνεται κληροδότημα, η απελευθέρωση ενός σκλάβου, η τιμή της συμβίωσης με μία σκλάβα η οποία προσφέρθηκε σαν δώρο και μετά έγινε κληροδότημα. Για να εξηγήσει την σημασία της «επιστροφής», ο Gandz αναφέρει σαν παράδειγμα:

Η κληρονομιά διαγράφει κύκλο. Η προίκα του συζύγου σε μια γυναίκα, γίνεται κληροδότημα. Μετά τον θάνατο της γυναίκας ένα μέρος της κληρονομιάς επιστρέφει

στο σύζυγο. Μετά τον θάνατο του συζύγου ένα μέρος αυτής επιστρέφει πάλι στην γυναίκα και στους κληρονόμους της, οι οποίοι επωφελούνται από αυτή.[142]

Επιλέξαμε δύο προβλήματα από την εκτεταμένη συλλογή προβλημάτων της τελευταίας ενότητας της *Άλγεβρας*, για να παρουσιάσουμε το περιεχόμενό τους αλλά και τον τρόπο λύσης τον οποίο ακολουθεί ο Α-Χ .

Πρόβλημα <$E_{1.1}$>[143]

«Κατά τη διάρκεια ασθενείας που οδήγησε στο θάνατό του ένας άντρας νυμφεύεται. Η ιδιοκτησία του είναι αξίας 100 ντιράμς. Η νόμιμη προίκα μιας γυναίκας αυτής της κοινωνικής θέσης είναι 10 ντιράμς. Μετά η γυναίκα πεθαίνει και κληροδοτεί το $\frac{1}{3}$ της περιουσίας της. Στην συνέχεια και ο άντρας πεθαίνει.

Το πραγματεύεσαι έτσι: Αφαιρείς από τα 100 ντιράμς, την προίκα την οποία δικαιούται η γυναίκα, δηλαδή 10 ντιράμς και απομένουν 90 ντιράμς, από τα οποία ένα μέρος κληροδοτείται σε αυτήν. Υπόθεσε ότι το μερίδιο που κληρονομεί ένα πράγμα, απομένουν ενενήντα μείον ένα πράγμα. Έτσι αυτή διαθέτει δέκα ντιράμς και ένα πράγμα. Κληροδοτεί το $\frac{1}{3}$ της ιδιοκτησίας της, δηλαδή τρία και ένα-τρίτο και ένα-τρίτο του πράγματος, οπότε απομένουν έξι και δύο-τρίτα και δύο-τρίτα του πράγματος. Ο σύζυγος λαμβάνει το μισό αυτού του ποσού ως κληρονομιά του, δηλαδή τρία και ένα-τρίτο και ένα-τρίτο του πράγματος. Οι κληρονόμοι του συζύγου θα έχουν επομένως ενενήντα τρία και ένα-τρίτο μείον δύο-τρίτα του πράγματος, το οποίο είναι διπλάσιο από το κληροδότημα του συζύγου το οποίο είναι ένα πράγμα. Αυτό συμβαίνει επειδή η σύζυγος μπορεί να έχει από κληροδότημα μερίδιο ενός τρίτου επί οποιασδήποτε περιουσίας αφήνει ο σύζυγος. Επομένως το διπλάσιο του κληροδοτήματός της είναι δύο φορές το πράγμα. Αποκατέστησε το ενενήντα τρία και ένα-τρίτο από τα δύο-τρίτα του πράγματος και πρόσθεσε αυτά (τα δύο-τρίτα του πράγματος)στα δύο πράγματα το αποτέλεσμα είναι ενενήντα τρία και ένα –τρίτο, ίσο με δύο πράγματα και δύο-τρίτα του πράγματος.

Έτσι το ένα πράγμα είναι τα τρία-όγδοα αυτού και ισούται με τρία-όγδοα του

---

[142] [Gandz 1997, 363]

[143] <$E_{1.1}$> πρώτο πρόβλημα από το «Κεφάλαιο περί Επιστροφών» [Rashed 2009, 292]

ενενήντα τρία και ένα τρίτο, δηλαδή τριάντα πέντε ντιράμς.»

Η μεταγραφή του προβλήματος με σύμβολα έχει ως εξής:

Αφαιρείς από τα 100 ντιράμς, την προίκα την οποία δικαιούται η γυναίκα, δηλαδή 10 ντιράμς και απομένουν 90 ντιράμς. Υπόθεσε το κληροδότημά της ένα πράγμα *x*, απομένουν 90-*x*. Έτσι αυτή διαθέτει 10+*x* κληροδοτεί το $\frac{1}{3}$ της ιδιοκτησίας της δηλαδή $3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$ και απομένουν $6\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x$. Ο σύζυγος παίρνει ως κληρονομιά το μισό αυτού του ποσού δηλαδή, $3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$. Οι κληρονόμοι του συζύγου θα έχουν, επομένως, $93\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$ το οποίο είναι διπλάσιο από το κληροδότημα της συζύγου, δηλαδή το ένα πράγμα *x*. Επειδή η σύζυγος μπορεί να έχει από κληροδότημα, μερίδιο $\frac{1}{3}$ επί της ιδιοκτησίας του συζύγου . Έτσι το κληροδότημά της είναι 2*x*. Αποκατέστησε το $93\frac{1}{3}$ από τα $\frac{2}{3}x$ και πρόσθεσέ τα (τα $\frac{2}{3}x$) στο 2*x*. Το αποτέλεσμα είναι η ισότητα $93\frac{1}{3}=2x+\frac{2}{3}x$. Έτσι το *x* είναι $\frac{3}{8}$ του $93\frac{1}{3}$ δηλαδή *x*=35 ντιράμς.

Θα τελειώσουμε την παρουσίαση των προβλημάτων της *Άλγεβρας* με το ακόλουθο από την ενότητα «Περί επιστροφών».

Πρόβλημα < $\mathbf{E_{3.3}}$ >[144]

Αν το πρόβλημα παραμένει ίδιο[145] και η σκλάβα είχε συζήσει με τον δωρητή [αλλά] και τον δωρεοδόχο, το πραγματεύεσαι έτσι: Υπόθεσε ότι το κληροδότημα είναι ένα πράγμα και η διαφορά είναι τριακόσια μειωμένη κατά ένα πράγμα. Ο δωρητής πρέπει να δώσει στο δωρεοδόχο ένα – τρίτο του πράγματος σαν προίκα για την

[144] <$\mathbf{E_{3.3}}$> συμβολίζει το τρίτο πρόβλημα από το τρίτο μέρος του «Κεφαλαίου περί Επιστροφών».

[145] Το πρόβλημα στο οποίο αναφέρεται εδώ είναι το εξής: *Αν ειπωθεί*, ότι κατά την διάρκεια της ασθένειάς του αυτός [ένας άνδρας] δώρισε [σε έναν άλλον] μία σκλάβα της οποίας η τιμή είναι τριακόσια [ντιράμς] και η προίκα εκατό [ντιράμς] και ο δωρητής είχε συζήσει με αυτήν και μετά απεβίωσε. [Rashed 2009, 320].

συμβίωση και ο δωρεοδόχος πρέπει να δώσει ένα – τρίτο της διαφοράς, δηλαδή εκατό ελαττωμένο κατά ένα τρίτο του πράγματος. Έτσι οι κληρονόμοι του δωρητή θα πάρουν τετρακόσια ελαττωμένα κατά ένα πράγμα και δύο τρίτα του πράγματος. Αυτό είναι ίσο με δύο φορές το κληροδότημα. Αποκατάστησε το τετρακόσια από το ένα πράγμα και δύο τρίτα και πρόσθεσέ το στα δύο πράγματα. Το αποτέλεσμα είναι τετρακόσια ίσον με τρία πράγματα και δύο τρίτα του πράγματος. Έτσι το πράγμα είναι τρία - ενδέκατα του τετρακόσια, δηλαδή εκατόν εννιά και ένα ενδέκατο ντιράμς αυτό είναι το κληροδότημα. Η διαφορά είναι εκατόν ενενήντα και δέκα ενδέκατα ντιράμς.

Η μεταγραφή με σύμβολα, αν το κληροδότημα είναι Χ, δίνει τη διαφορά 300-Χ. Ο δωρητής δίνει $\frac{1}{3}X$ και ο δωρεοδόχος $100-\frac{1}{3}X$. Οι κληρονόμοι του δωρητή θα πάρουν $400-1X-\frac{2}{3}X$. Αυτό το ποσό θα είναι διπλάσιο του κληροδοτήματος, δηλαδή $2X$. Έτσι προκύπτει η ισότητα: $400-1X-\frac{2}{3}X=2X$ η οποία με αποκατάσταση γίνεται:

$400=\frac{2}{3}X+3X$. Το πράγμα Χ είναι $109+\frac{1}{11}$ και η διαφορά $190+\frac{1}{11}$

Όμως το πιο ενδιαφέρον σημείο για αυτό το πρόβλημα είναι η παρατήρηση μετά τη λύση του Α –Χ: « Σύμφωνα με τον Abu Hanifa, υποθέτουμε ότι το πράγμα είναι κληροδότημα, [αλλά] και ό,τι αυτός δικαιούται μέσω της προίκας είναι επίσης κληροδότημα»[146].

Παρατηρούμε ότι στη λύση αυτού του προβλήματος αλλά και στο πρόβλημα που βρίσκεται μετά από αυτό ,στο βιβλίο του Α-Χ, ο ίδιος ο συγγραφέας της *Άλγεβρας* δίνει ένα αδιαμφισβήτητο στοιχείο, ότι ο διαπρεπής νομικός της εποχής Abu Hanifa[147] χρησιμοποιεί al-jabr τεχνική(μέθοδο της άλγεβρας) για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων.

---

[146] [Rashed 2009, 322]

[147] Ο Abu Hanifa (699-767) ήταν διαπρεπής νομομαθής και ιδρυτής μιας από τις τέσσερις σχολές του Ισλαμικού δικαίου. Από τις αναφορές που κάνει στο «Κεφάλαιο περί κληρονομιών και δωρεών», ο Α-Χ γίνεται σαφές ότι, έχει δανειστεί προβλήματα και μεθόδους υπολογισμού από τους νομικούς και ειδικά από τον Abu Hanifa,τον οποίο αναφέρει αρκετές φορές στο τρίτο μέρος της *Άλγεβρας*.[Rashed 2009,25-26]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΩΝ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ

Αυτό το κεφάλαιο διαιρείται σε τρία υποκεφάλαια. Στο πρώτο θα γίνει ανάλυση της δομής των αλγεβρικών λύσεων των προβλημάτων της πραγματείας. Θα καταδειχθεί ότι η λύση αποτελείται από τρία σαφώς καθορισμένα και διατεταγμένα στάδια. Από αυτά, το πρώτο αποσκοπεί στην δημιουργία της εξίσωσης, το δεύτερο στην απλοποίησή της και το τρίτο στην εφαρμογή της κατάλληλης διαδικασίας για την επίλυσή της. Αντικείμενο του δεύτερου υποκεφαλαίου είναι οι εννοιολογικές προϋποθέσεις της *Άλγεβρας* του Α-Χ. Πέραν όσων έχουν ήδη αναφερθεί στο δεύτερο κεφάλαιο αυτής της εργασίας θα διερευνηθεί περαιτέρω το περιεχόμενο των αλγεβρικών εννοιών. Τέλος στο τρίτο και τελευταίο υποκεφάλαιο θα εξεταστούν, συνοπτικά, θέματα της σύγχρονης ιστοριογραφίας περί του αλγεβρικού έργου του Α-Χ.

3.1. ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Θα ασχοληθούμε πρώτα με τη βασική διάκριση, ανάμεσα στο πλαίσιο εκφώνησης και στο πλαίσιο επίλυσης, ενός προβλήματος. Θα εξετάσουμε επίσης τη σχέση της ορολογίας της *Άλγεβρας*, με αυτή τη διάκριση των πλαισίων.

3.1.1. Mal, shay : πλαίσιο εκφώνησης - πλαίσιο επίλυσης.

Σύμφωνα με τον Oaks[148], η Αραβική άλγεβρα ήταν κλάδος της αριθμητικής. Ακόμη η άλγεβρα ήταν μία μεταξύ πολλών άλλων μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων. Η εκφώνηση των προβλημάτων συνήθως διατυπώνεται με όρους της αριθμητικής:

Η εκφώνηση ενός λυμένου προβλήματος, συνήθως εκφράζει μία ακολουθία πράξεων, οι οποίες πρέπει να εφαρμοστούν σε άγνωστες ποσότητες και δίνουν κάποιο αποτέλεσμα.[149]

Η εκφώνηση του προβλήματος <9> από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» της

[148] [Oaks 2009]

[149] [Oaks 2009, 173]

πραγματείας, μας δίνει ένα παράδειγμα:

Αν κάποιος πει: διαιρείς το δέκα σε δύο μέρη και πολλαπλασιάζεις το ένα από αυτά με το δέκα και το άλλο με τον εαυτό του, έτσι ώστε τα γινόμενα να είναι ίσα.[150]

Έχει ήδη αναφερθεί ότι, βασικό χαρακτηριστικό μιας αλγεβρικής λύσης είναι η μετατροπή του προβλήματος σε εξίσωση. Το πρώτο βήμα σε αυτή τη μετατροπή είναι η ονοματοδοσία. Ένας από τους ζητούμενους αριθμούς του προβλήματος ονομάζεται από τον Α-Χ «***shay***» το οποίο σημαίνει «πράγμα», ή σε ορισμένα προβλήματα τον ονομάζει με τη λέξη «***jidhr***» που σημαίνει «ρίζα». Το «πράγμα» αποτελεί τον άγνωστο της εξίσωσης, δηλαδή είναι ό,τι εμείς συμβολίζουμε με x. Η δεύτερη δύναμη του "πράγματος" δηλαδή το x^2, ονομάζεται «***māl***». Με το shay' για τον άγνωστο (x) το māl για το τετράγωνό του (x^2) και το dirham[151] για τους αριθμούς έχουμε τα τρία «είδη αριθμών» που όπως αναφέρει ο Α-Χ απαιτούνται για τον υπολογισμό με al-jabr και al-muqabala. Όμως η φράση «υπολογισμός με al-jabr και al-muqabala» είναι ένας άλλος τρόπος έκφρασης για την επίλυση ενός προβλήματος με τη μέθοδο της άλγεβρας.

Όλα τα προβλήματα για τα οποία ο Α-Χ χρησιμοποιεί μέθοδο επίλυσης με αλγεβρική εξίσωση, οδηγούν σε πρωτοβάθμιες ή δευτεροβάθμιες εξισώσεις με εξαίρεση τρία. Επομένως αρκούν οι δύο πρώτες δυνάμεις x και x^2 του αγνώστου για την επίλυση με αλγεβρική εξίσωση αυτών των προβλημάτων.

Τα εξαιρούμενα προβλήματα που αριθμούνται με <16>, <30>, <31> περιέχονται και τα τρία στο «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα». Η αλγεβρική επίλυσή τους οδηγεί σε εξισώσεις, οι οποίες με σύγχρονο συμβολισμό γράφονται ως εξής:

<16> $$x^2 \cdot x = 3x$$

<30> $$x^2 \cdot 3x = 5x^2$$

<31> $$\frac{2}{3}x^2 \cdot 3x = 1x^2$$

Η παραπάνω συμβολική μεταγραφή των εξισώσεων μπορεί να υποβάλλει την ιδέα της χρήσης κυβικών δυνάμεων από τον Α-Χ.

Ο σύγχρονος συμβολισμός συνδέεται στενά με την σύγχρονη αντίληψη της άλγεβρας. Σε αυτή την οπτική ένα γινόμενο του αγνώστου επί το τετράγωνό του αυτομάτως καταγράφεται ως κύβος. Είναι όμως δυνατόν χωρίς να διολισθήσει κανείς

---

[150] [Rashed 2009, 170]

[151] Νομισματική μονάδα της εποχής στον Ισλαμικό κόσμο.

στο έδαφος της αναχρονιστικής ιστορίας να ισχυριστεί ότι η πραγματεία του Α-Χ περιέχει κυβικές εξισώσεις;

Κατά την άποψή μας, αν κάποιος θέλει να παραμείνει πιστός στον τρόπο σκέψης του Α-Χ κάτι τέτοιο πρέπει να αποκλειστεί. Ας δούμε γιατί.

Στις ανωτέρω εξισώσεις υπάρχουν τα δύο από τα τρία είδη, δηλαδή το shay' (x) και το *māl* (x^2). Ακόμη υπάρχει το γινόμενο των δύο αυτών ειδών αριθμών. Σε κανένα όμως σημείο δεν θα βρεθεί σε όλη την έκταση της πραγματείας έστω και μία κυβική δύναμη. Φυσικά η κυβική δύναμη θα αποτελούσε ένα ακόμη είδος αριθμών[152].

Γιατί άραγε ο Α-Χ δεν χρησιμοποιεί κυβικές δυνάμεις; Η απάντηση που έχουμε την δυνατότητα να δώσουμε, δεν είναι παρά μόνο μία ευλογοφανής εικασία.

Η εικασία λοιπόν που προτείνουμε είναι η εξής: Ο Α-Χ διέθετε έναν αποτελεσματικό τρόπο επίλυσης προβλημάτων υπολογισμού τα οποία οδηγούν σε τετραγωνικές εξισώσεις,[153] τελικό προϊόν μιας συστηματικής ενασχόλησης μαθηματικών παραδόσεων που προηγήθηκαν. Αντίθετα, για προβλήματα που οδηγούν σε κυβικές εξισώσεις, όχι μόνο δεν διέθετε κάτι ανάλογο, αλλά αρκετές μορφές κυβικών εξισώσεων δεν είχαν επιλυθεί ούτε καν γεωμετρικά, μέχρι την εποχή που ο Al-Khayyam ασχολήθηκε με αυτές και τις παρουσίασε στην Άλγεβρά του. Επομένως δεν είχε στα χέρια του ανάλογα εργαλεία για κυβικά προβλήματα, τα οποία θα του επέτρεπαν να συμπεριλάβει τέτοιου είδους προβλήματα στην Άλγεβρα του.

Ας επανέλθουμε όμως στο κεντρικό θέμα που μας απασχολεί εδώ, το οποίο είναι η διόρθωση της αλγεβρικής επίλυσης των προβλημάτων. Στο θέμα αυτό αναδεικνύεται το εξής βασικό ερώτημα: ποια είναι η δομή της αλγεβρικής επίλυσης ενός προβλήματος, στην πραγματεία του Α-Χ;

Η επίλυση ενός προβλήματος έχει φάσεις ή στάδια, στο χρόνο. Συγκεκριμένα εξελίσσεται χρονικά και ολοκληρώνεται σε τρία στάδια. Στο πρώτο δημιουργείται η εξίσωση. Αυτή περιέχει αποκλειστικά και μόνο πολλαπλάσια του αγνώστου (δηλαδή μονώνυμα mx), του τετραγώνου του (δηλαδή μονώνυμα nx^2) και αριθμούς.

Ακολουθεί το δεύτερο στάδιο της απλοποίησης. Σε αυτό η εξίσωση

---

[152] Παρεμπιπτόντως ας σημειωθεί εδώ, ότι ο Διόφαντος στα Αριθμητικά του, έργο που προηγήθηκε πέντε περίπου αιώνες του έργου του Α-Χ, ασχολείται με κυβικές εξισώσεις

[153] Η άποψη του Rashed είναι ότι πρόκειται για μια «θεωρία εξισώσεων» [Rashed 2009, 11]. Ο Netz από την άλλη μεριά αντιμετωπίζει με σκεπτικισμό και αμφισβητεί ότι ο Α-Χ προτείνει μια θεωρία εξισώσεων.[Netz 2004, 143]

μετασχηματίζεται έτσι ώστε να λάβει μία από τις έξι πρότυπες μορφές που χρησιμοποιεί ο Α-Χ. Κατάληξη του σταδίου αυτού είναι μια εξίσωση η οποία είτε περιέχει τρεις όρους *shay'*(ή *jidhr), māl* και *dirham* στην πλήρη δευτεροβάθμια είτε μόνο δύο από αυτούς. Στην τελευταία περίπτωση πρόκειται για ελλειπή δευτεροβάθμια ή πρωτοβάθμια εξίσωση. Απομένει το τελευταίο στάδιο, αυτό της εφαρμογής. Η κατάλληλη διαδικασία εφαρμόζεται ανάλογα με την πρότυπη μορφή στην οποία υπάγεται η εξίσωση, για να υπολογιστεί η τιμή του αγνώστου.

Πριν παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα για να γίνουν ευκρινή τα όρια και η σύνδεση των παραπάνω σταδίων θα ασχοληθούμε με τις διαφορετικές χρήσεις του māl καθώς και με την χρήση της λέξης shay'. Η λέξη māl έχει διάφορες σημασίες. Ας πάρουμε κατ' αρχάς τη μη μαθηματική σημασία της λέξης την οποία χρησιμοποιεί ο Α-Χ στα προβλήματα περί κληρονομιών. Το māl σε αυτό το πλαίσιο αποκτά την έννοια «αξία περιουσίας» ενός αποθανόντος ατόμου και το ζητούμενο σε τέτοια προβλήματα είναι ο υπολογισμός των νόμιμων μεριδίων για τους κληρονόμους[154]

Ακόμη πιο σημαντικό για την αποφυγή παρερμηνειών του πνεύματος της πραγματείας είναι το γεγονός ότι η θέση του māl, δηλαδή αν είναι στην εκφώνηση ή την επίλυση ενός προβλήματος αλλάζει την σημασία της λέξης. Ώστε η ίδια λέξη έχει διαφορετική σημασία σε καθένα από τα δύο πλαίσια.

Ας προσέξουμε τη διαφορά στην χρήση αυτής της αραβικής λέξης από τον Α-Χ. Όπως επισήμανε και ανέλυσε ο Oaks[155] το «māl» στην εκφώνηση αποτελεί κοινό ουσιαστικό και σημαίνει «ποσότητα» ενώ το «māl» στην επίλυση του προβλήματος είναι γνήσιο ουσιαστικό και τεχνικός όρος για το τετράγωνο του αλγεβρικού αγνώστου x^2. Ως παράδειγμα για τους δύο τρόπους χρήσης του «māl» ας δούμε ένα απόσπασμα από την εκφώνηση και την επίλυση του τελευταίου προβλήματος από το «Κεφάλαιο με τα έξι προβλήματα»:

…Ένα *māl*: πολλαπλασιάζεις το ένα-τρίτο του επί το ένα-τέταρτό του και φέρνει πίσω το «māl» στο οποίο έχουν προστεθεί είκοσι τέσσερα ντιράμς. *Έτσι ο κανόνας του* είναι ότι εσύ κάνεις το *māl* σου ένα πράγμα. Μετά πολλαπλασιάζεις ένα-τρίτο του πράγματος επί ένα-τέταρτο του πράγματος και δίνει [αποτέλεσμα] μισό του ενός-έκτου

[154] [Oaks 2009, 408]

[155] [Oaks-Alkhateed 2005]

του *māl*, το οποίο ισούται με ένα πράγμα και είκοσι τέσσερα ντιράμς.[156]

Η σημαντική παρατήρηση που πρέπει να γίνει σε αυτό το σημείο, είναι ότι στην γλώσσα της εκφώνησης δεν υπάρχουν αλγεβρικοί ή τεχνικοί όροι. Η λέξη «māl» σημαίνει απλώς ποσότητα. Έτσι η εκφώνηση μεταγράφεται ως εξής:

Πολλαπλασιάζεις το ένα-τρίτο μιας ποσότητας επί το ένα-τέταρτο της ίδιας και παίρνεις την ποσότητα αυξημένη κατά είκοσι τέσσερα.

Αντιθέτως, η γλώσσα της επίλυσης περιέχει τεχνικούς, δηλαδή αλγεβρικούς όρους. Ως πρώτο βήμα ο Α-Χ προτείνει:

...Κάνεις το «māl» σου ένα πράγμα.

Το «māl» εδώ προέρχεται από την εκφώνηση και διατηρεί τη σημασία της «ποσότητας». Όμως μετά την ονοματοδοσία και αφού τεθεί το «māl» ένα «πράγμα» δεν το ξαναβρίσκουμε στο υπόλοιπο της διαδικασίας επίλυσης, με την αρχική σημασία. Γι' αυτό ο Oaks το ονομάζει «māl της εκφώνησης» ή «αρχικό māl». Η αμέσως επόμενη πρόταση στην επίλυση του προβλήματος αποκαλύπτει την δεύτερη σημασία του «māl»:

...Πολλαπλασιάζεις ένα-τρίτο του πράγματος επί ένα-τέταρτο του πράγματος και δίνει ένα-δεύτερο του ενός-έκτου του «māl».

Το «māl» εδώ προκύπτει ως γινόμενο του πράγματος με τον εαυτό του, είναι δηλαδή αλγεβρικός όρος για το τετράγωνο του πράγματος. Αυτός είναι και ο λόγος που ο Oaks το ονομάζει «αλγεβρικό māl».

Από τα παραπάνω έχει ήδη γίνει σαφές ότι η άλλη σημαντική έννοια της πραγματείας εκτός του «māl» είναι η αλγεβρική έννοια που δηλώνεται με τον όρο **«*shay*»** και μεταφράζεται ως **«πράγμα»**. Υπάρχουν δύο κατηγορίες προβλημάτων στην επίλυση των οποίων ο Α-Χ χρησιμοποιεί αυτόν τον όρο. Στην πρώτη, μετά την εκφώνηση κάθε προβλήματος δηλώνει ρητά ότι το māl ορίζεται να είναι ένα «πράγμα», δηλαδή ο αλγεβρικός άγνωστος. Το πρόβλημα <8> από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» είναι ένα παράδειγμα της πρώτης κατηγορίας:

Αν κάποιος πει, δύο *māls*: η διαφορά τους είναι δύο ντιράμς. Διαιρείς το μικρότερο με το μεγαλύτερο έτσι που το πηλίκο ήταν ένα ντιράμ. Έτσι κάνε ένα από τα δύο *māls*, ένα πράγμα και το άλλο ένα πράγμα και δύο ντιράμς.[157]

Στην δεύτερη κατηγορία αν και χρησιμοποιείται ο όρος «πράγμα» αυτός εισάγεται

---

[156] [Oaks-Alkhateed 2005, 406]

[157] [Oaks-Alkhateed 2005, 421]

χωρίς να έχει δηλωθεί ρητά. Το πέρασμα από το māl της εκφώνησης στο shay' της επίλυσης γίνεται χωρίς κάποια δήλωση ορισμού. Αυτό γίνεται σε αρκετά προβλήματα της πραγματείας και διαφοροποιεί τον A-X από τους συνεχιστές του έργου του Abu Kamil και Ibn Badr οι οποίοι ονομάζουν αναλυτικά τον άγνωστο.[158]

Το πρόβλημα <22> και πάλι από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» ανήκει σε αυτή την κατηγορία:

Αν κάποιος πει, ένα māl: πολλαπλασιάζεις το ένα-τρίτο του επί το ένα-τέταρτό του, έτσι παίρνεις πίσω το māl. *Ο κανόνας του είναι,* ότι εσύ πολλαπλασιάζεις το ένα-τρίτο του πράγματος επί ένα-τέταρτο του πράγματος. Έτσι αυτό δίνει το μισό του ενός-έκτου του māl, το οποίο είναι ίσο με ένα πράγμα. Ώστε το māl ισούται με δώδεκα πράγματα, [έτσι το επιθυμητό māl] είναι η ρίζα του εκατόν σαράντα τέσσερα.[159]

Ώστε οι δύο κατηγορίες συγκροτούν μια πρώτη ομάδα προβλημάτων στην λύση των οποίων περιέχεται ο όρος «πράγμα». Εκτός όμως από αυτήν την ομάδα, υπάρχει και μία δεύτερη η οποία περιλαμβάνει τα προβλήματα της πραγματείας τα οποία λύνονται χωρίς εισαγωγή του αλγεβρικού όρου «πράγμα». Σχεδόν στα μισά προβλήματα από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» δεν υπάρχει ο όρος shay' αλλά οι όροι māl και jidhr οι οποίοι χρησιμοποιούνται στην εκφώνηση αλλά και στην επίλυση.[160]

Ας δούμε για παράδειγμα το πρόβλημα <17>:

Έτσι αν κάποιος πει, ένα māl: πολλαπλασιάζεις τέσσερις από τις ρίζες του με τρεις από τις ρίζες του, έτσι παίρνεις πίσω το māl αυξημένο κατά σαράντα τέσσερα ντιράμς. *Έτσι ο κανόνας του είναι, ό*τι πολλαπλασιάζεις τέσσερις ρίζες επί τρεις ρίζες και αυτό δίνει δώδεκα māls το οποίο ισούται με ένα māl και σαράντα τέσσερα ντιράμς. Έτσι αφαίρεσε από τα δώδεκα māls ένα māl [και από το] ένα māl ένα māl. Απομένουν έντεκα māls ίσα με σαράντα τέσσερα ντιράμς. Έτσι διαίρεσέ το με αυτό [έντεκα] για να πάρεις τέσσερα, το οποίο είναι το māl.[161]

Η λύση είναι σαφώς αλγεβρική, μολονότι δεν υπάρχει ο όρος «πράγμα». Διαπιστώνουμε από αυτό αλλά και από άλλα παρόμοια παραδείγματα, ότι η αλγεβρική μέθοδος επίλυσης δεν είναι συνυφασμένη με την αναγκαστική χρήση του όρου

---

[158] [Oaks-Alkhateed 2005, 414]

[159] [Oaks-Alkhateed 2005, 421]

[160] [Oaks-Alkhateed 2005, 421]

[161] [Oaks-Alkhateed 2005, 421]

«πράγμα».

Ανατρέχοντας σε μεσαιωνικές μεταφράσεις της πραγματείας ο Oaks μας πληροφορεί ότι οι πρώτες Λατινικές μεταφράσεις της πραγματείας του Α-Χ από τον Gerard της Cremona στο Toledo και τον Robert του Chester στη Segovia,οι οποίες έγιναν τον 12^{ο} αιώνα, απέδωσαν το *māl* ως census-ιδιοκτησία, πλούτος, περιουσία- και substancia -πλούτος- αντίστοιχα.

Επίσης η Λατινική μετάφραση του Guglielmo, γύρω στο 1300 μΧ. αποδίδει το māl ως census αλλά και quantitas. Όσον αφορά ειδικά τη διάκριση «αρχικού māl» και «αλγεβρικού māl» γράφει:

Σε όλα αυτά τα βιβλία το αλγεβρικό māl συνέχισε να εκφράζεται ως census /censo.[162]

Γίνεται φανερό πως οι μεταφραστές αυτοί δεν αναγνώρισαν τη διαφορά στη γλώσσα της εκφώνησης από τη γλώσσα της επίλυσης. Κανένας από τους τρείς όπως δείχνουν οι μεταφράσεις τους δεν φαίνεται να αποδίδει την παραμικρή σημασία σε αυτή τη διαφορά. Αλλά δεν ήταν και οι μόνοι. Εξετάζοντας όχι μόνο την πραγματεία του Α-Χ αλλά και αρκετά έργα άλλων Αράβων μαθηματικών του μεσαίωνα, οι οποίοι κατά βάση έχουν υιοθετήσει την παραπάνω διάκριση και την γλώσσα που την εκφράζει, ο Oaks επισημαίνει ότι αυτή η κρίσιμη διαφορά διέφυγε της προσοχής των περισσοτέρων μελετητών οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη μετάφραση και το σχολιασμό τους.[163]

Ας εξετάσουμε τώρα πώς μετέφρασαν το *māl* δύο από τους σύγχρονους μελετητές. Επιλέγω ως παραδείγματα προβλήματα κατά την επίλυση των οποίων ο Α-Χ ονομάζει **shay'** δηλαδή «πράγμα» το māl της εκφώνησης ή «αρχικό māl». Αυτά είναι τα αριθμημένα με <4> και <6> από το «Κεφάλαιο των έξι προβλημάτων» και <21>, <22>, <23>, <25> και <26> από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα».

Η μετάφραση του Rosen για την εκφώνηση και την αρχή της επίλυσης του προβλήματος <4> έχει ως εξής:

I have multiplied one-third of thing and one dirhem by one–fourth of thing and one dirhem, and the product was twenty.

Computation: You multiply one-third of thing by one–fourth of thing: it is one-half of a sixth of a square.[164]

---

[162] [Oaks-Alkhateed 2005, 410]

[163] [Oaks-Alkhateed 2005, 411]

[164] [Rosen 1997, 38]

Πολλαπλασίασα το ένα-τρίτο του πράγματος και ένα ντιράμ επί ένα-τέταρτο του πράγματος και ένα ντιράμ και το γινόμενο ήταν είκοσι.

Υπολογισμός: Πολλαπλασιάζεις ένα-τρίτο του πράγματος επί ένα-τέταρτο του πράγματος αυτό είναι μισό του ενός-έκτου του τετραγώνου.

Ας προσέξουμε ότι ο Rosen μεταφράζει το αρχικό māl, δηλαδή το māl στην εκφώνηση του προβλήματος ως «thing» (πράγμα). Με αυτή όμως τη μετάφραση η διάκριση των δύο πλαισίων που κάνει ο A-X, δηλαδή του πλαισίου εκφώνησης από το πλαίσιο επίλυσης γίνεται τουλάχιστον ασαφής. Αυτή η ασάφεια προκύπτει από την παρουσία στην αριθμητική γλώσσα της εκφώνησης ενός αλγεβρικού όρου, εν προκειμένω της λέξης «πράγματος» προερχόμενου από το δεύτερο πλαίσιο, της επίλυσης. Επομένως μεταφράζοντας έτσι το māl, το αλγεβρικό πλαίσιο φαίνεται να επικρατεί και να διαχέεται μέσα στο αριθμητικό. Πάντως στα περισσότερα προβλήματα ο Rosen μεταφράζει το māl ως «τετράγωνο». Ως προς αυτή την επιλογή ο Oaks παρατηρεί:

Ο Rosen προτιμούσε να μεταφράζει το αρχικό *māl* του A-X ως «square», αλλά σε αρκετά προβλήματα αισθάνεται εξαναγκασμένος να χρησιμοποιήσει «number» ή «quantity», σημειώνοντας, ότι στο πρωτότυπο είναι «square».[165]

Ο Rashed από την άλλη, αποδίδει το māl της εκφώνησης άλλοτε ως «quantity» και άλλοτε ως «square».Για παράδειγμα η μετάφρασή του για το ανωτέρω απόσπασμα είναι:

You have multiplied one- third of an amount plus one dirham by its quarter plus one dirham; the result is twenty.

We thus infer that: you multiply one-third of a thing by one–quarter of a thing; the result is half of one–sixth of a *square*.[166]

Όπως εύκολα παρατηρεί κανείς στο παραπάνω απόσπασμα ο Rashed μεταφράζει το māl της εκφώνησης ως «quantity» και το māl της επίλυσης ως «square». Αυτή η διάκριση είναι σύμφωνη με τη θέση που υποστηρίζει δύο διαφορετικές σημασίες του māl οι οποίες αντιστοιχούν σε εκφώνηση και επίλυση.

Μάλιστα δεν θα είχαμε αντίρρηση να πιστώσουμε στον Rashed την άποψη της διάκρισης των δύο σημασιών, αλλά το μοναδικό και σοβαρό εμπόδιο για κάτι τέτοιο

---

[165] [Oaks 2005, 411]

[166] [Rashed 2009, 150]

είναι, ότι δεν εφαρμόζει αυτή τη διάκριση με συνέπεια.

Πράγματι, σε αρκετά προβλήματα, όπως τα <11>, <12>, <16>, <17>, <18>, <19>, <20>, <30>, <31>, <32>, <33>, <34> από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» του Α-Χ, αποδίδει το māl της εκφώνησης ως «square». Επομένως με αυτό τον τρόπο καταργεί ουσιαστικά την διάκριση. Με προσεκτική ανάγνωση των παραπάνω προβλημάτων βλέπουμε ότι εκτός του «square» (μετάφραση του όρου «māl») υπάρχει και ο όρος «root» μετάφραση του Αραβικού «jidhr» στην εκφώνηση. Ως παράδειγμα η εκφώνηση του προβλήματος <12> έχει μεταφραστεί ως εξής:

If someone says: a *square*, three quarters of its fifty are equal to four–fifths of its root.[167]

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, με ποιο κριτήριο ο Rashed επιλέγει τη μία ή την άλλη από τις λέξεις «amount» ή «square» για το «αρχικό māl». Νομίζω ότι για να δοθεί απάντηση πρέπει να εξετάσουμε μαζί και τα προβλήματα <13>, <14>, <15>, <21>, <22>, <25>, <26>, <27>, <29> από το ίδιο όπως προηγουμένως κεφάλαιο της πραγματείας του Α-Χ στα οποία ο Rashed μεταφράζει ως «amount» το «αρχικό māl». Η διαπίστωση είναι πως σε κανένα από αυτά δεν υπάρχει ο όρος «root». Επομένως είναι κατά την άποψη μου αρκετά ασφαλές συμπέρασμα, ότι ο Rashed μεταφράζει το māl της εκφώνησης ως «square» ακριβώς λόγω της ύπαρξης του όρου «jidhr».

Αν αυτό το συμπέρασμα είναι σωστό, τότε αυτός δεν υιοθετεί τη διάκριση του αριθμητικού πλαισίου – εκφώνησης από το αλγεβρικό πλαίσιο-επίλυσης και ό,τι αυτή συνεπάγεται για την ορολογία .

Ένα δεύτερο παράδειγμα, της κατάργησης αυτού του διαχωρισμού από τον Rosen, εντοπίζεται στο πρόβλημα <20> από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα» Εκεί το «māl» της εκφώνησης έχει μεταφραστεί ως «τετράγωνο», αντί της λέξης «ποσότητα» η οποία συμφωνεί με την αριθμητική γλώσσα της εκφώνησης. Ένα μέρος από την διατύπωση του προβλήματος και της λύσης του έχει ως εξής:

If the instance be: «A square, which when added to twenty dirhems, is equal to twelve of its roots» then the solution is this: You say, one square and twenty dirhems are equal to twelve roots.[168]

Αν το παράδειγμα είναι: «Ένα τετράγωνο, το οποίο όταν προστεθεί σε είκοσι ντιράμς

---

[167] [Rashed 2009, 176]

[168] [Rosen [1831], 1997, 56]

ισούται με δώδεκα ρίζες του» τότε η λύση είναι αυτή: ένα τετράγωνο και είκοσι ντιράμς είναι ίσα με δώδεκα ρίζες.

Η αντιπαραβολή με τη μετάφραση του Oaks του ίδιου αποσπάσματος θα κάνει πιο κατανοητό και συγκεκριμένο το παραπάνω σχόλιο:

So if he said a mal: you add to it twenty dirhams, so it yields twelve of its roots.

So its rule is that you say a mal and twenty dirhams equals twelve roots.[169]

Έτσι αν κάποιος πει, ένα māl: προσθέτεις σε αυτό είκοσι ντιράμς, έτσι αυτό δίνει δώδεκα ρίζες του. *Έτσι ο κανόνας του* είναι ότι λες ένα māl και είκοσι ντιράμς ίσα με δώδεκα ρίζες.

Στο πλαίσιο της διατύπωσης του προβλήματος «ένα māl: προσθέτεις σε αυτό είκοσι ντιράμς, έτσι αυτό δίνει δώδεκα ρίζες του», η λέξη māl έχει την έννοια της ποσότητας και η λέξη ρίζα έχει την έννοια της τετραγωνικής ρίζας της ποσότητας, όπως δείχνει η κτητική αντωνυμία που την συνοδεύει.

Ας περάσουμε στο πλαίσιο της επίλυσης του προβλήματος «*Έτσι ο κανόνας του* είναι ότι λες ένα māl και είκοσι ντιράμς ίσα με δώδεκα ρίζες». Εδώ η λέξη ρίζα δεν έχει την έννοια τετραγωνικής ρίζας αλλά του αλγεβρικού αγνώστου του οποίου η τιμή πρέπει να προσδιοριστεί, δηλαδή είναι ένα από τα τρία είδη αριθμών με τα οποία συγκροτείται η ισότητα. Η αραβική λέξη «jidhr» η οποία μεταφράζεται «ρίζα», όταν χρησιμοποιείται στην επίλυση του προβλήματος είναι συνώνυμη με το shay' και δηλώνει τον άγνωστο ο οποίος θα υπολογιστεί μέσω εξίσωσης. Η λέξη māl, από την άλλη, δηλώνει το τετράγωνο του αγνώστου δηλαδή στην εν λόγω πρόταση της ρίζας.

Η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος ακολουθεί ορισμένα στάδια. Στην επόμενη ενότητα θα συζητήσουμε το θέμα των σταδίων, εξετάζοντας παράλληλα και τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε αυτά και την εκτέλεση των πράξεων οι οποίες υπαγορεύονται από τη διατύπωση του προβλήματος. Όπως θα γίνει φανερό μετά την κατάστρωση της εξίσωσης δεν εκτελούνται πράξεις. Αυτό είναι ένα από τα πιο βασικά χαρακτηριστικά της αραβικής άλγεβρας. Πρέπει πρώτα να εκτελεστούν όλες οι πράξεις που αναφέρονται στην εκφώνηση του προβλήματος, για να φτάσουμε στη δημιουργία της εξίσωσης.

[169] [Oaks-Alkhateed 2005, 413]

3.1.2. Στάδια επίλυσης - πράξεις

Ας περάσουμε τώρα σε κάποια παραδείγματα με τα οποία θα αποσαφηνιστεί ο τρόπος που παρουσιάζεται στην *Άλγεβρα* ένα πρόβλημα με τη λύση του. Επιπλέον θα φανεί καθαρά η διάρθρωση των τεσσάρων μερών τα οποία αποτελούν την διατύπωση και την επίλυση ενός προβλήματος: εκφώνηση, δημιουργία της εξίσωσης, απλοποίησή της και τέλος εφαρμογή της διαδικασίας αριθμητικού υπολογισμού. Το πρώτο παράδειγμα είναι το πέμπτο πρόβλημα από τη συλλογή των 34 προβλημάτων. Στην ακόλουθη παρουσίαση του προβλήματος, έχουμε κάνει, αφενός χωρισμό σε τμήματα του ενιαίου κειμένου της Άλγεβρας και αφετέρου προσθήκη σε αντιπαραβολή με το κείμενο της συμβολικής μεταγραφής του. [170]

Πρόβλημα <5> [171]

ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΕΚΦΩΝΗΣΗ	
Έτσι αν κάποιος πει: διαιρείς το δέκα σε δύο μέρη και πολλαπλασιάζεις το ένα επί πέντε και αυτό [που παίρνεις] το διαιρείς με το άλλο. Μετά αφαιρείς μισό από το αποτέλεσμα και [ότι μένει] το προσθέτεις στο πενταπλάσιο του μέρους που πολλαπλασίασες, έτσι παίρνεις πενήντα ντιράμς.	$\mathrm{A}+\mathrm{B} \rightarrow = 10$ $\frac{\mathrm{A}\cdot 5}{\mathrm{B}}\frac{1}{2}+\mathrm{A}\cdot 5 \rightarrow = 50$
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
Ο κανόνας λοιπόν γι' αυτό είναι ότι παίρνεις ένα πράγμα από το δέκα, μετά το πολλαπλασιάζεις επί πέντε: Έτσι παίρνεις πέντε πράγματα, τα οποία διαιρείς με το υπόλοιπο από το	Θέτεις $1X := A$ $1X \cdot 5 \rightarrow = 5X$ Διαιρείς $5X$ με $10 - 1X := B$

[170] Αυτός ο τρόπος παρουσίασης του προβλήματος προτάθηκε από τον κ. Χριστιανίδη με βάση το σκεπτικό των τριών σταδίων του Oaks.

[171] [Oaks-Alkhateed 2005, 420]

δέκα, δηλαδή το δέκα μείον ένα πράγμα από το οποίο κρατάς το μισό.	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5X}{10-1X}$
Είναι γνωστό ότι αν διαιρέσεις τα πέντε πράγματα με δέκα μείον ένα πράγμα και πάρεις μισό από το πηλίκο, είναι το ίδιο σαν να διαιρείς μισό των πέντε πραγμάτων με δέκα μείον ένα πράγμα.	Αλλά $\frac{1}{2}\cdot\frac{5X}{10-1X}=\frac{\frac{1}{2}5X}{10-1X}$
Έτσι αν πάρεις μισό των πέντε πραγμάτων, το οποίο είναι, δύο πράγματα και μισό, αυτό θα το διαιρέσεις με δέκα μείον ένα πράγμα. Το αποτέλεσμα είναι ίσο με πενήντα μείον πέντε πράγματα, αφού αυτός είπε: προσθέτεις το πενταπλάσιο του ενός μέρους, έτσι που όλο αυτό δίνει πενήντα.	$\frac{2\frac{1}{2}X}{10-1X}\rightarrow=50-5X$
Αλλά γνωρίζεις ήδη, ότι όποτε πολλαπλασιάζεις το πηλίκο με το διαιρέτη, ξαναπαίρνεις το ποσό [*māl*] και το *māl* σου είναι δύο πράγματα και μισό.	
Έτσι πολλαπλασιάζεις, δέκα μείον πράγμα επί πενήντα μείον πέντε πράγματα, έτσι αυτό δίνει πεντακόσια ντιράμς και πέντε *māls* μείον εκατό πράγματα,	$(10-1X)(50-5X)\rightarrow=500+5X^2-100X$
το οποίο είναι ίσο με δύο πράγματα και μισό.	$500+5X^2-100X=2\frac{1}{2}X$
ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
Μειώνεις αυτό σε ένα *māl*. Έτσι παίρνεις εκατό ντιράμς και ένα *māl*	$100+1X^2-20X=\frac{1}{2}X$

μείον είκοσι πράγματα ίσα με μισό πράγμα.	
Μετά αποκαθιστάς το εκατό και προσθέτεις τα είκοσι πράγματα στο μισό πράγμα. Παίρνεις λοιπόν, εκατό ντιράμς και ένα *māl* ίσα με είκοσι πράγματα και μισό πράγμα.	$100+1X^2=20\frac{1}{2}X$
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ	
Τώρα διαιρείς δια δύο τα πράγματα [172]και πολλαπλασιάζεις αυτό [το μισό των πραγμάτων] με τον εαυτό του.	$\frac{20\frac{1}{2}}{2}\rightarrow=10\frac{1}{4}$ $10\frac{1}{4}\cdot 10\frac{1}{4}$
Αφαιρείς από αυτό που πήρες το εκατό.	$\left(10\frac{1}{4}\right)^2-100$
Παίρνεις την τετραγωνική ρίζα της διαφοράς	$\sqrt{\left(10\frac{1}{4}\right)^2-100}$
Και την αφαιρείς από το μισό των ριζών, το οποίο είναι δέκα και ένα – τέταρτο.	$10\frac{1}{4}-\sqrt{\left(10\frac{1}{4}\right)^2-100}$
Έτσι απομένει οκτώ, το οποίο είναι ένα από τα δύο μέρη.	$1X=8$

Το δεύτερο πρόβλημα είναι, το δέκατο στη σειρά, επίσης από τη συλλογή των 34 προβλημάτων. Αυτό το πρόβλημα, είναι αντιπροσωπευτικό παράδειγμα ενός συνόλου προβλημάτων, για τα οποία ο Α-Χ δεν παρουσιάζει ολοκληρωμένη τη λύση τους δηλαδή τον υπολογισμό της αριθμητικής των ζητούμενων αριθμών, αλλά φτάνει μόνο έως την απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης του προβλήματος. Οι ανολοκλήρωτες λύσεις αρκετών προβλημάτων στην Άλγεβρα, είναι ενδεικτικό στοιχείο, ότι για τους Άραβες αλγεβριστές, αντίθετα από ότι συμβαίνει στη σύγχρονη στοιχειώδη άλγεβρα, η

[172] Με «πράγματα» εδώ εννοεί τον συντελεστή $20\frac{1}{2}$ Σε άλλα προβλήματα ονομάζει το συντελεστή «αριθμός των ριζών» ή απλώς «ρίζες».

δυσκολία στην επίλυση των προβλημάτων εντοπιζόταν, ακριβώς στην δημιουργία της εξίσωσης και όχι στην επίλυσή της.

Πρόβλημα <10>[173]

ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	**ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**
ΕΚΦΩΝΗΣΗ	
Ομοίως, αν λεχθεί: διαιρείς το δέκα σε δύο μέρη, στη συνέχεια πολλαπλασιάζεις το ένα με το άλλο, κατόπιν διαιρείς το γινόμενο με τη διαφορά των δύο μερών –πριν τα πολλαπλασιάσεις μεταξύ τους– για να λάβεις πέντε και ένα τέταρτο	Διαιρείς το 10 σε δύο μέρη Α και Β 10 ⇉ A + B διαιρείς το γινόμενο των Α και Β με τη διαφορά τους και προκύπτει 5 ¼ , δηλαδή AB : (A – B) ⇉ 5 ¼
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
Το πραγματεύεσαι ως εξής:	Το πραγματεύεσαι ως εξής:
Παίρνεις από το δέκα ‘ένα πράγμα’,	Θέτεις το ένα μέρος του 10 ως τον άγνωστο 1x:=A
αυτό που απομένει είναι ‘δέκα μείον ένα πράγμα’.	Το μέρος του 10 που απομένει θα τεθεί 10 – 1x:=B
Πολλαπλασίασε το ένα με το άλλο, προκύπτουν ‘δέκα ρίζες μείον ένα māl’. Αυτό είναι το γινόμενο του ενός μέρους με το άλλο.	Ο πολλαπλασιασμός (1x)(10 – 1x) δίνει αποτέλεσμα $10x – 1x^2$
Διαίρεσε κατόπιν αυτό με τη διαφορά μεταξύ των δύο μερών, δηλαδή με ‘δέκα μείον δύο πράγματα’. Το πηλίκο είναι πέντε και ένα τέταρτο.	Διαίρεσε κατόπιν αυτό (το $10x – 1x^2$) με τη διαφορά των δύο μερών (10 – 1x) – (1x) η οποία είναι 10 – 2x. Το πηλίκο είναι 5 ¼
Αλλά όταν πολλαπλασιάσεις πέντε και ένα τέταρτο με ‘δέκα μείον δύο πράγματα’, θα έχεις το ποσό που ήταν ένα γινόμενο,	Αλλά όταν πολλαπλασιάσεις (5 ¼)(10 – 2x) θα έχεις το ποσό , το οποίο ήταν ένα

[173] [Rashed 2009,172]

που είναι ‘δέκα ρίζες μείον ένα māl’.	γινόμενο (δηλαδή το AB) και είναι $10x - 1x^2$
Πολλαπλασίασε πέντε και ένα τέταρτο επί ‘δέκα μείον δύο πράγματα’, το αποτέλεσμα είναι ‘πενήντα δύο ντιράμ και μισό μείον δέκα ρίζες μείον μισή ρίζα’,	Πολλαπλασίασε $(5\ ¼)(10 - 2x)$ το αποτέλεσμα είναι $52 + ½ - 10x - ½\ x$
ίσα με ‘δέκα ρίζες μείον ένα māl’.	(Το οποίο πρέπει να τεθεί) ίσο με $10x - 1x^2$ (Δηλαδή ισχύει η ισότητα $\mathbf{52 + ½ - 10x - ½\ x = 10x - 1x^2}$)
ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
Συμπλήρωσε τα πενήντα δύο και μισό με τις δέκα ρίζες και μισή ρίζα, και πρόσθεσέ τις στις δέκα ρίζες μείον ένα māl.	Πρόσθεσε $10x + ½\ x$ στο $52 + ½$ και κάνε το ίδιο στο $10x - 1x^2$
Συμπλήρωσε κατόπιν αυτές <τις δέκα ρίζες μείον ένα māl> με το māl και πρόσθεσε το māl στα πενήντα δύο ντιράμ και μισό.	Πρόσθεσε κατόπιν σε αυτό (στο $10x$) το $1x^2$ και κάνε το ίδιο με το $52 + ½$
Θα έχεις είκοσι ρίζες και μισή ρίζα ίσα με πενήντα δύο ντιράμ και μισό και ένα māl	Θα έχεις $(20 + ½)x = (52 + ½) + 1x^2$
Συνέχισε στη διαδικασία υπολογισμού για αυτό, όπως έχουμε εξηγήσει στην αρχή του βιβλίου	Εφάρμοσε τον αλγόριθμο που εξηγήσαμε στην αρχή του βιβλίου για την περίπτωση $x^2 + b = ax$

Θα παραθέσουμε ένα τελευταίο πρόβλημα, το οποίο οδηγεί, αυτή τη φορά σε επίλυση πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

Πρόβλημα <8>[174]

[174] Η Αγγλική μετάφραση είναι από το [Oaks-Alkhatteeb 2005,421]

ΡΗΤΟΡΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
<A: ΕΚΦΩΝΗΣΗ-ENUNCIATION>	
So if he said two *mals*: their difference is two dirhams. You divided the smaller into the larger, so the quotient was half a dirham. Αν κάποιος πει, δύο *mals*: η διαφορά τους είναι δύο ντιράμς. Διαίρεσες το μικρότερο με το μεγαλύτερο και πήρες πηλίκο μισό ντιράμ.	$A - B \rightarrow = 2$ $\frac{B}{A} \rightarrow = \frac{1}{2}$
<B: ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ-SET UP OF THE EQUATION>	
So make one of the two *māl*s a **thing,** Θέσε το ένα από τα δύο *mals*, ένα **πράγμα**	$1X := B$
and the other a thing and two dirhams. και το άλλο, ένα πράγμα και δύο ντιράμς	$A \rightarrow = 1X + 2$
So when you divided a thing into a thing and two dirhams, the result from the division is half a dirham. Έτσι όταν διαίρεσες ένα πράγμα με ένα πράγμα και δύο ντιράμς, το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι μισό ντιράμ.	$\frac{1X}{1X+2} \rightarrow = \frac{1}{2}$
And you already knew that whenever you multiplied your result from the division by the divisor, you recovered your *māl* that you divided, which is a thing. Γνωρίζεις ήδη ότι αν πολλαπλασιάσεις το αποτέλεσμα της διαίρεσης με το διαιρέτη, παίρνεις το mal το οποίο διαίρεσες και το οποίο [εδώ] είναι ένα πράγμα.	

So say [you multiply] a thing and two dirhams by the half which is the quotient. Γι' αυτό πολλαπλασιάζεις ένα πράγμα και δύο ντιράμς επί το μισό που είναι το πηλίκο.	$\frac{1}{2}(1X+2)$
So it yields half a thing and a dirham, which **equals** a thing. Αυτό δίνει μισό πράγμα και ένα ντιράμ, το οποίο ισούται με ένα πράγμα.	$\frac{1}{2}X+1=1X$
<Γ: ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ- SIMPLIFICATION OF THE EQUATION>	
So you took away a half thing by a half thing, and there remained a dirham, which equals a half thing. Αφαιρείς μισό πράγμα από μισό πράγμα και απομένει ένα ντιράμ, το οποίο ισούται με μισό πράγμα.	$1=\frac{1}{2}X$
<Δ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ-APPLICATION THE PROCEDURE>	
So double it: it yields the thing equals two dirhams, Το διπλασιάζεις: και δίνει το πράγμα ίσο με δύο ντιράμς	$1X=2$
and the other is four. και το άλλο είναι τέσσερα.	$1X+2=4$

Τα βασικά χαρακτηριστικά του χειρισμού ενός προβλήματος με την τεχνική al-jabr, δηλαδή τη μέθοδο της άλγεβρας, εμφανίζονται ήδη στα παραπάνω παραδείγματα. Κατ'αρχάς το πρόβλημα διατυπώνεται με αριθμητικούς όρους, δηλαδή μία σειρά πράξεων μεταξύ των μη ονομαζόμενων, ζητούμενων ποσοτήτων οι οποίες οδηγούν σε

κάποιο αποτέλεσμα[175]. Ο μετασχηματισμός του σε αλγεβρική εξίσωση, δηλαδή μία ισότητα η οποία περιέχει τα τρία «είδη αριθμών», αποτελεί το δυσκολότερο στάδιο της επίλυσης. Σε αυτό το στάδιο εκτελούνται πράξεις, κατάληξη των οποίων είναι η δημιουργία της εξίσωσης του προβλήματος. Μόνο αφού έχουν εκτελεστεί όλες οι πράξεις φτάνουμε στην κατάστρωση της εξίσωσης. Αμέσως μετά εφαρμόζονται τα βήματα απλοποίησης της εξίσωσης: πρώτον *al-ikmāl* (συμπλήρωση) ή *al-radd* (μείωση) του συντελεστή των *māls* ώστε να γίνει μονάδα, δεύτερον *al-jabr* για την απαλοιφή αφαιρούμενων όρων από τις δύο πλευρές της εξίσωσης και τρίτον *al-muqābala* για τη διαγραφή ομοίων όρων. Το στάδιο της απλοποίησης ολοκληρώνεται όταν η εξίσωση παίρνει μία από τις έξι πρότυπες μορφές. Απομένει το τελευταίο στάδιο στο οποίο γίνονται αριθμητικοί υπολογισμοί με εφαρμογή της διαδικασίας ανάλογα με την μορφή της εξίσωσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο πρώτο, αλλά και στο τρίτο από τα παραπάνω παραδείγματα η διατύπωση του προβλήματος περιέχει την πράξη της διαίρεσης εκφράσεων των ζητούμενων ποσοτήτων. Ο χειρισμός μιας τέτοιας παράστασης η οποία είναι σε μορφή πηλίκου γίνεται με αριθμητικό συλλογισμό. Ο Α-Χ σε κάθε ανάλογη περίπτωση, επικαλείται τον κανόνα του πηλίκου, «Αλλά γνωρίζεις ήδη, ότι όποτε πολλαπλασιάσεις το πηλίκο με τον διαιρέτη, ξαναπαίρνεις το ποσό [*māl*]»[176]. Με αυτόν τον κανόνα αποφεύγει την διαίρεση, σε κάθε παρόμοια περίπτωση, κάνοντας πολλαπλασιασμό. Όπως γίνεται σαφές από την φράση «γνωρίζεις ήδη», ο κανόνας θεωρείται ήδη γνωστός στους διδασκόμενους, δηλαδή πριν τη διδασκαλία της άλγεβρας. Κατά συνέπεια ο κανόνας είναι σχεδόν βέβαιο ότι αποτελούσε αντικείμενο διδασκαλίας στα μαθήματα αριθμητικής. Αυτό το αριθμητικό γνωστικό υπόβαθρο, το οποίο θεωρείται από τον συγγραφέα της *Άλγεβρας* ότι κατέχουν οι εκπαιδευόμενοι, αξιοποιείται από αυτόν κατά δύο τρόπους, αφενός στη κατάστρωση της εξίσωσης με βάση τα αριθμητικά δεδομένα της εκφώνησης και αφετέρου στην επίλυση ορισμένων απλών προβλημάτων με αριθμητικό συλλογισμό.[177]

---

[175] [Oaks 2009, 173]

[176] [Rashed 2009,166]

[177] [Oaks-Alkhateed 2005, 410]

3.2. ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ *Άλγεβρας*

Θέμα συζήτησης σε αυτή την ενότητα είναι το πλαίσιο των εννοιών οι οποίες χαρακτηρίζουν την αλγεβρική σκέψη του Α-Χ. Ειδικότερα η συζήτηση εστιάζεται στην αντίληψη του περί: ειδών αριθμών, πολυωνύμου, εξίσωσης και απόδειξης. Ασφαλώς η περιγραφή την αντίληψής του για κάθε μία από αυτές τις έννοιες θα βασιστεί σε στοιχεία που αντλούνται από το έργο του. Καταβάλαμε προσπάθεια στην κατανόηση του κειμένου της *Άλγεβρας* "ιστορικά", δηλαδή με τέτοιον τρόπο ώστε να ληφθεί υπ' όψιν "το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο" στο οποίο εντάσσεται[178] και την αποφυγή ανάγνωσης του από την οπτική γωνία της σύγχρονης άλγεβρας : Ο J.A. Oaks σε μελέτη της Ιταλικής άλγεβρας υποστηρίζει την άποψη της διατήρησης, σε αυτήν, "ουσιαστικά αμετάβλητων" των βασικών εννοιών της Αραβικής άλγεβρας.[179] Ένα ενδιαφέρον ιστορικό ερώτημα είναι η πιθανή ύπαρξη συναφών εννοιών, αλλά και η μορφή με την οποία αυτές εκφράστηκαν σε προηγούμενες παραδόσεις : Όμως η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι πέρα από τα όρια της μελέτης μας. Η πιο σημαντική από τις θεμελιώδεις έννοιες της *Άλγεβρας* είναι το "είδος αριθμού". Όπως ο ίδιος ο Α-Χ γράφει, τα "είδη αριθμών" είναι "απαραίτητα στον υπολογισμό με al-jabr και al- muqābala".

3.2.1. Είδη αριθμών

Η σύγχρονη έννοια του μονωνύμου μιας μεταβλητής αποτελεί δομική μονάδα για τη δημιουργία της έννοιας του πολυωνύμου. Στα μαθηματικά του μεσαιωνικού Ισλαμικού κόσμου αντίστοιχο ρόλο, με αυτόν του μονωνύμου, παίζει η έννοια του "είδους αριθμού". Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, τα τρία "είδη αριθμών" – "*jidhr*", "*māl*", "*dirham*" - αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες. Χρησιμοποιούνται για την κατασκευή κάθε πολυωνύμου που υπάρχει στην *Άλγεβρα*, αλλά και οποιασδήποτε αλγεβρικής εξίσωσης. Η ταξινόμηση όλων των πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων οδηγεί σε έξι διαφορετικούς τύπους ή μορφές. Αυτοί οι έξι τύποι προκύπτουν βάσει των επιτρεπτών[180] συνδυασμών με τα τρία είδη αριθμών. Οι τρείς από τους τύπους περιέχουν μόνο από ένα "είδος αριθμού" σε κάθε πλευρά της

---

[178] [Χριστιανίδης – Διαλέτης 2004, 10]

[179] [Oaks 2010, 1]

[180] Οι περιορισμοί είναι δύο και αφορούν, ο μεν πρώτος τους συντελεστές οι οποίοι είναι θετικοί αριθμοί, ο δε δεύτερος την ύπαρξη τουλάχιστον ενός είδους αριθμού, σε κάθε πλευρά της ισότητας (εξίσωσης), αφού δεν χρησιμοποιείται ο αριθμός μηδέν.

εξίσωσης. Ο Α-Χ γράφει για τον τρόπο σχηματισμού τους με βάση τα είδη:

"Among these three forms[181], some are equal to one another; for instance, as when you say: *squares* [māls] are equal to roots, or that *squares* [māls] are equal to a number or roots are equal to a number."[182]

Οι υπόλοιποι τρεις τύποι εξισώσεων περιέχουν ένα "είδος αριθμού" στη μια πλευρά της ισότητας και δύο στην άλλη. Αυτές αποτελούν τις τρείς πλήρεις δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

"I have found that these three types – roots, *squares* and a number – combine with one another, and we have the three kinds of combination…"[183]

Αντί της λέξης "jidhr" συχνά χρησιμοποιείται, ειδικά στις επιλύσεις των προβλημάτων, η συνώνυμη λέξη "*shay*" που σημαίνει "πράγμα". Αν και η τελευταία ανήκει στο λεξιλόγιο της καθημερινής ζωής, ο Α-Χ τη χρησιμοποιεί στην πραγματεία σαν αλγεβρικό όρο. Σχετικά με την επιλογή της λέξης "*shay*" για την ονομασία του αλγεβρικού αγνώστου, ο Rashed αναφέρει και μια θρησκευτική πτυχή, στοιχείο ενδεικτικό της πολιτισμικής επίδρασης.

"In theology, the term refers to an entity that certainly exists, but of which our knowledge is as yet undetermined"[184]

Η πραγματεία του Α-Χ άσκησε τεράστια επίδραση στα έργα μεταγενέστερων μαθηματικών στον Ισλαμικό κόσμο. Η αλγεβρική γλώσσα και οι έννοιες παρέμειναν αμετάβλητες, όμως τα "είδη αριθμών" επεκτάθηκαν, πέρα από το *māl*. Έτσι στο έργο *Άλγεβρα* του al-Khayyam (περ. 1100) προστίθεται στα τρία "είδη αριθμών" ακόμη ένα το "ka΄b" δηλαδή ο "κύβος". Άλλοι δε μαθηματικοί χρησιμοποίησαν ακόμη μεγαλύτερες δυνάμεις του αγνώστου χωρίς περιορισμό.[185]

Ο λόγος που ο al-Khayyam σταμάτησε στον κύβο και δεν προχώρησε σε ανώτερες δυνάμεις οφείλεται στην αδυναμία γεωμετρικής ερμηνείας των δυνάμεων πάνω από τον κύβο.[186] Ας σημειωθεί εδώ, ότι η έννοια του "είδους" δεν έχει μόνο αλγεβρικό νόημα

---

[181] Με τη λέξη "forms" ονομάζει το "είδη"

[182] Η Αγγλική μετάφραση από το [Rashed 2009, 96]

[183] [Rashed 2009, 100]

[184] [Rashed 2009, 15]

[185] [J.L. Berggren 1986, 112]

[186] [Netz 2004, 145]

αλλά και γεωμετρικό. Μάλιστα είναι το γεωμετρικό νόημα για κάθε "είδος αριθμού" που, όπως είδαμε, επιτρέπει στον Α-Χ να αιτιολογήσει την εγκυρότητα των διαδικασιών επίλυσης.

3.2.2. Πολυώνυμα

Τα είδη αριθμών, αποτελούν τις βασικές μονάδες για τη δημιουργία αλγεβρικών εκφράσεων. Οι εκφράσεις – παραστάσεις – οι οποίες κυριαρχούν στην μεσαιωνική άλγεβρα είναι πολυώνυμες ή πηλίκα πολυωνύμων. Όμως με ποια έννοια είναι δυνατόν να μιλάμε για "πολυώνυμο" στην "Αραβική" άλγεβρα; Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σύμφωνα με τον Oaks,[187] υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ της μεσαιωνικής και της σύγχρονης αντίληψης για το πολυώνυμο. Σύμφωνα λοιπόν με αυτήν την ερμηνεία, την οποία θα επαναλάβουμε εδώ συνοπτικά, η διαφορά αυτή μπορεί να περιγραφεί ως εξής. Από τη μια πλευρά, η σύγχρονη αντίληψη θεωρεί το πολυώνυμο σαν γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του αγνώστου x.[188] Αυτό σημαίνει την ύπαρξη πράξεων πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης/αφαίρεσης σε μια πολυωνυμική παράσταση. Από την άλλη πλευρά, στην "Αραβική" άλγεβρα μια έκφραση όπως "εκατό και ένα *māl* μειωμένο κατά είκοσι πράγματα", αν και με τη σύγχρονη αλγεβρική οπτική είναι δυνατόν να θεωρηθεί ισοδύναμη, με την $100+x^2-20x$ στην πραγματικότητα είναι ένα διαφορετικό αλγεβρικό αντικείμενο. Είναι μια **συλλογή** 101 αντικειμένων, δύο διαφορετικών "ειδών", 100 "ντιράμς" και 1 "mal" η οποία έχει έλλειμμα 20 "πραγμάτων". Αυτή η ερμηνεία θεωρεί σαν την ουσία της διαφοράς, το γεγονός ότι στο 20x το 20 πολλαπλασιάζεται επί το x, ενώ το "είκοσι" στο "είκοσι πράγματα" της ρητορικής άλγεβρας απλώς δηλώνει πόσα πολλά "πράγματα" υπάρχουν. Η ερμηνεία μιας έκφρασης όπως "εκατό και ένα *māl* μειωμένο κατά είκοσι πράγματα" σαν συλλογή, κατά την άποψή μου, μοιάζει να σχετίζεται με την αντίληψη του Διόφαντου. Στα *Αριθμητικά* αναφέρει "είδη" αλλά και παραστάσεις με "είδη" για το χειρισμό των οποίων, στην εισαγωγή του έργου, διατυπώνει κανόνες που αφορούν την " ὕπαρξιν" ή "λεῖψιν" αυτών των "ειδών" δηλαδή των δυνάμεων του αγνώστου.

Θα πρέπει να έχουμε κατά νου, ότι ο Α-Χ δεν χρησιμοποιεί αρνητικούς αριθμούς, αλλά ούτε και τον αριθμό μηδέν. Αφού αυτοί οι αριθμοί δεν είναι διαθέσιμοι, προκύπτουν αναπόφευκτοι περιορισμοί στον τρόπο γραφής ενός μεσαιωνικού

---

[187] [Oaks 2009, 182]

[188] [Ορθότερο είναι να μιλάμε για απροσδιόριστη x και όχι για μεταβλητή ή άγνωστο x]

“πολυωνύμου”. Για να κάνουμε συγκεκριμένη τη δήλωση και να δείξουμε τους περιορισμούς θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα. Το πρώτο αφορά το πολυώνυμο -20x+100, το οποίο μπορεί να εκφράζεται συμβολικά ή λεκτικά. Είτε λεκτικά είτε συμβολικά η έκφραση με τη συγκεκριμένη σειρά μονωνύμων είναι επιτρεπτή μόνο μετά την εισαγωγή και χρήση των αρνητικών αριθμών στην άλγεβρα. Μέχρι τότε το πολυώνυμο θα γράφεται με κάποιο λεκτικό ή σπανιότερα συμβολικά ισοδύναμο της έκφρασης 100-20x. Γενικά, ο κανόνας που ακολουθείται είναι να γράφονται πρώτα τα υπάρχοντα και μετά τα λείποντα είδη. Το δεύτερο παράδειγμα είναι από την επίλυση του προβλήματος <4>, από το «Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα». Η απλοποιημένη εξίσωση, στην οποία καταλήγει ο Α-Χ, είναι “είκοσι- τέσσερα και ένα *māl* είναι ίσα με δέκα ρίζες”, στην οποία εφαρμόζει τη διαδικασία επίλυσης για να υπολογίσει την αριθμητική τιμή του πράγματος, η οποία είναι 4. Ο Roshdi Rashed σε υποσημείωση μεταγράφει συμβολικά την επίλυση του προβλήματος. Όμως ο τρόπος που μεταχειρίζεται την απλοποιημένη εξίσωση δημιουργεί πρόβλημα στην ερμηνεία του κειμένου της Άλγεβρας. Συγκεκριμένα μετασχηματίζει την απλοποιημένη εξίσωση σε μια ισοδύναμη με αυτήν, η οποία οδηγεί μεν στη λύση, αλλά δεν έχει καμία σχέση με την επιλυτική διαδικασία που παρουσιάζει το κείμενο του Α-Χ. Ο Rashed γράφει:

we obtain

$$24+x^2=10x \iff (x-5)^2=35-24=1$$

hence x=4.[189]

Αυτός ο τρόπος μεταγραφής, κατά τη γνώμη μας, εισάγει έναν αναχρονισμό. Η βάση x-5 του τετραγώνου είναι πολυώνυμο, το οποίο ο Α-Χ θα έγραφε σαν “ένα πράγμα μειωμένο κατά πέντε ντιράμς”. Αφού όμως η τιμή του “πράγματος” είναι 4 είναι αδύνατον να μειωθεί αυτό κατά 5. Όμως ακόμη και αν δεχτούμε ότι αυτό δεν αποτελούσε πρόβλημα για την αλγεβρική αντίληψη του Α-Χ,το δεύτερο σκέλος της παραπάνω ισοδυναμίας είναι μια προσθήκη. Μάλιστα εκφράζει μια εντελώς σύγχρονη αντίληψη για το χειρισμό της απλοποιημένης εξίσωσης, την οποία σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να αποδώσουμε στον Α-Χ. Ο Rashed οδηγείται σε αυτή την αντίφαση, στην προσπάθεια του να κάνει αλγεβρική συμπλήρωση τετραγώνου, η οποία όμως δεν αντιστοιχεί με τα βήματα της επίλυσης που ακολουθεί ο Α-Χ.

[189] [Rashed 2009, 162]

3.2.3. Εξισώσεις

Η έννοια της εξίσωσης στον Α-Χ, αλλά και γενικότερα στη μεσαιωνική άλγεβρα διαφέρει από τη σύγχρονη έννοια της αλγεβρικής εξίσωσης. Το γεγονός αυτό είναι φυσική συνέπεια της στενής σύνδεσης της έννοιας με εκείνη του "πολυώνυμου", που χαρακτηρίζει την πρώιμη άλγεβρα. Μια εξίσωση στα Ισλαμικά μαθηματικά είναι ισότητα δύο "πολυωνύμων". Όμως, όπως αναφέραμε στη συζήτηση για το πολυώνυμο, το μεσαιωνικό "πολυώνυμο" είναι συλλογή ειδών. Επομένως μια εξίσωση εξασφαλίζει "την ισοδυναμία δυο συλλογών μαθηματικών αντικειμένων".[190] Αλλά έγινε σαφές, ότι στις συλλογές δεν υπάρχουν πράξεις, έτσι στις δύο πλευρές μιας εξίσωσης δεν σημειώνονται πράξεις. Αναγνωρίζει λοιπόν κανείς δύο θεμελιώδη χαρακτηριστικά της εξίσωσης στην άλγεβρα του μεσαίωνα: πρώτον αποτελεί ισοδυναμία δύο συλλογών και δεύτερον δεν περιέχει πράξεις. Αυτά τα δύο είναι που κάνουν την αντίληψη της έννοιας από τους μαθηματικούς του 9^{ου} αιώνα στον Ισλαμικό κόσμο, σχεδόν απρόσιτη για τους Ευρωπαίους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα. Θα μπορούσαμε δεχόμενοι την προσέγγιση του Jakob Klein, να μιλήσουμε για διαφορές σε αυτά καθ' αυτά τα μαθηματικά αντικείμενα.[191] Αυτή η διαφοροποίηση στη σύλληψη της έννοιας μπορεί θεωρηθεί προϊόν καλλιέργειας της αλγεβρικής σκέψης τους ενδιάμεσους αιώνες.

Ας εξετάσουμε όμως πιο σφαιρικά την έννοια της εξίσωσης στην πρώιμη Ισλαμική άλγεβρα. Ο Α-Χ δεν αναφέρει κάποιον ορισμό για την εξίσωση, στην *Άλγεβρα* του. Όμως αμέσως μετά τους ορισμούς των τριών "ειδών" – ρίζα, *māl*, ντιράμ – καταγράφει τις ισότητες οι οποίες δημιουργούνται με αυτά. Προκύπτουν ακριβώς έξι μορφές ισότητας, τρεις από τις οποίες περιέχουν ακριβώς δύο από τα "είδη", ενώ οι υπόλοιπες και τα τρία. Οποιαδήποτε ισότητα στις δύο πλευρές της οποίας υπάρχουν συλλογές ειδών – πολυώνυμα – μετά την απλοποίηση της καταλήγει σε μια από τις έξι μορφές. Η πραγματεία του Α-Χ περιέχει προβλήματα και σκοπός του ήταν η συγγραφή ενός πρακτικού διδακτικού εγχειριδίου για την επίλυση προβλημάτων. Όπως έχουμε δει στα παραδείγματα που παρέθεσα, σε κάθε πρόβλημα που επιλύεται με εξίσωση, εκτελούνται κατ' αρχάς πράξεις που καταλήγουν σε μια ισότητα η οποία περιέχει αποκλειστικά και μόνο "είδη". Σχετικά με αυτόν το μετασχηματισμό ο Oaks γράφει:

« In an algebraic solution the problem is transformed into an equation, which is

---

[190] [Oaks 2009, 197]

[191] [Klein 1968]

expressed in terms of the algebraic "numbers", or powers ». [192]

Ώστε για τον Α-Χ και την μεσαιωνική άλγεβρα, ο μετασχηματισμός του προβλήματος σε εξίσωση, δεν έχει συντελεστεί ή για να το εκφράσω διαφορετικά, η εξίσωση του προβλήματος δεν έχει υπόσταση παρά μόνο από τη στιγμή που οι δύο πλευρές της ισότητας είναι συλλογές από "είδη", δηλαδή πολυώνυμα. Αυτή η αντίληψη της έννοιας εξίσωση – ισότητα δύο συλλογών με "είδη" – διατηρήθηκε στους επόμενους αιώνες. Ο Πέρσης ποιητής και μαθηματικός al-Khayyam στην *Άλγεβρα* του (ενδέκατος προς δωδέκατο αιώνα), αυτό το σημαντικό έργο των Ισλαμικών μαθηματικών, χαρακτηρίζει την άλγεβρα ως εξής:

"Algebraic solutions are accomplished by the aid of equations; that is to say, by the well-known method of equating these degrees one with the other."[193]

Ακόμη παραπέρα, αυτή η αντίληψη – της εξίσωσης – χαρακτηρίζει την Ιταλική άλγεβρα κατά τον 14^{ο} αιώνα αλλά και τον 15^{ο} αιώνα.[194]

"Οι αλγεβρικές λύσεις πραγματοποιούνται με τη βοήθεια εξισώσεων, δηλαδή με τη γνωστή μέθοδο εξίσωσης των βαθμών μεταξύ τους". Οι "βαθμοί" του al-Khayyam δεν είναι παρά τα "είδη" του Α-Χ, στα οποία έχει προστεθεί ακόμη ένα "είδος", ο "κύβος". Έτσι αυτός χρησιμοποιεί και κυβικές δυνάμεις του αγνώστου. Υπάρχουν λοιπόν τέσσερις βαθμοί : dirham, shay/jidhr, *māl*, ka'b. Αυτό το έργο είναι η πρώτη συστηματική μελέτη της κυβικής εξίσωσης. Ο γεωμετρικός υπολογισμός των θετικών λύσεων γίνεται με τη μέθοδο των κωνικών τομών, η οποία είχε ήδη χρησιμοποιηθεί από Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς γι' αυτό το σκοπό.

Ας έλθουμε όμως τώρα στο δεύτερο χαρακτηριστικό της εξίσωσης στα μεσαιωνικά μαθηματικά: την ανυπαρξία πράξεων στην εξίσωση. Όλες οι πράξεις που υπαγορεύονται από την εκφώνηση ενός προβλήματος εκτελούνται κατά το στάδιο της κατάστρωσης της εξίσωσης. Η εξίσωση δημιουργείται αφού εκτελεστούν οι πράξεις, έτσι ώστε αυτή είναι απαλλαγμένη από πράξεις. Αυτό γίνεται, όπως φάνηκε και από τα παραδείγματα, με την ολοκλήρωση του πρώτου σταδίου επίλυσης ενός προβλήματος. Η διάκριση εξισώσεων κα πράξεων αντανακλάται και στην περιγραφή τους στο κείμενο της *Άλγεβρας*. Η εξίσωση δηλώνεται με τη χρήση ενός μόνο ρήματος, "*adala*" (κάνω

---

[192] Με αλγεβρικούς "αριθμούς" ή δυνάμεις εννοεί τα "είδη αριθμών" [Oaks 2009, 173]

[193] [Kasir 1998, 314]

[194] [Oaks 2010, 7]

ίσο). Από την άλλη μία πράξη εκφράζεται με δύο ρήματα και «εκτελείται στο χρόνο με ένα καθορισμένο αποτέλεσμα» : "Έτσι πολλαπλασιάζεις το πράγμα επί τον εαυτό του και αυτό δίνει ένα māl".[195]

Το ένα ρήμα, "πολλαπλασιάζω" δηλώνει την πράξη και το άλλο ρήμα, δηλαδή το "δίνω", ανακοινώνει το αποτέλεσμά της.

3.2.4. Αιτιολογήσεις

Συζητήσαμε ήδη στο πρώτο κεφάλαιο τις τρείς απλές και τις τρείς σύνθετες ισότητες με "είδη" (εξισώσεις). Για κάθε μια από τις έξι περιπτώσεις ο Α-Χ, δίνει παραδείγματα και συγκεκριμένες λύσεις. Όμως μέχρι να ολοκληρωθεί η παρουσίαση των έξι περιπτώσεων ισότητας δεν δίνεται στην *Άλγεβρα* οποιαδήποτε εξήγηση η οποία να δικαιολογεί τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης. Αμέσως μετά την επισκόπηση των έξι ισοτήτων (εξισώσεων), ο Α-Χ κάνει ένα σχόλιο σχετικά με τις τρείς σύνθετες ισότητες, για την επίλυση των οποίων γίνεται διαίρεση με το δύο, του αριθμού των ριζών: « As for the other three, in which halving the roots is necessary, I think it expedient, more accurately, to explain them by separate chapters, in which a figure will be given for each case, to point out the reasons for halving»[196]

Προετοιμάζει λοιπόν τον αναγνώστη για τις αιτιολογήσεις που ακολουθούν και έχουν σκοπό να καταδείξουν (point out) τους "λόγους για τη διαίρεση των ριζών". Το μέσο που χρησιμοποιεί για την κατάδειξη είναι ένα γεωμετρικό σχήμα. Είναι σαφές ότι ο Α-Χ με αυτόν τον τρόπο αξιοποιεί τη γεωμετρική εποπτεία για να εξηγήσει την διαδικασία της επίλυσης. Ο Rashed στη μετάφραση του, χρησιμοποιεί τη φράση "να αποκαλύψουμε την αιτία της διαίρεσης": «I have shaped for each of these procedures a figure by which we can uncover the cause (*ʿilla*) of the division into two halves.»[197]

Η προσφυγή του Α-Χ στο γεωμετρικό σχήμα για να εξηγήσει τα βήματα της επιλυτικής διαδικασίας αποτελεί ένα από τα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της *Άλγεβρας*. Οι ιστορικοί έχουν επισημάνει αυτή τη σύνδεση της γεωμετρίας με τον αλγεβρικό υπολογισμό και έχουν δοθεί αρκετές ερμηνείες για τη σημασία της. Δύο από τις πτυχές της σύνδεσης που έχουν τονιστεί ιδιαίτερα είναι: πρώτον, η επιλυτική

---

[195] [Oaks 2009, 177]

[196] [Rosen 1831, 13]

[197] [Rashed 2009, 106]

διαδικασία εξηγείται με στοιχειώδεις γεωμετρικές έννοιες και δεύτερον η σχέση αυτών των εξηγήσεων με δύο προτάσεις από τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη.[198] Ας δούμε όμως τώρα τις απόψεις των ιστορικών για το ρόλο και τη σημασία των γεωμετρικών δικαιολογήσεων.

Ο Netz[199] έχει την άποψη, ότι η συσχέτιση της γεωμετρίας με τον υπολογισμό αποτελεί ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του έργου. Στο ερώτημα γιατί ο Α-Χ καταφεύγει στο γεωμετρικό σχήμα, ο Van der Waerden μιλάει για μια παράδοση. «Το σχήμα από την *Άλγεβρα* του Α-Χ είναι αντιπροσωπευτικό μιας γενικής τάσης που μπορούμε να παρατηρήσουμε τόσο στην Ελληνική αριθμητική όσο και στη Βαβυλωνιακή και στην Αραβική άλγεβρα. Δηλαδή την τάση οι αλγεβρικές έννοιες και μέθοδοι να επεξηγούνται με τη βοήθεια διαγραμμάτων.»[200]

Οι Basmakova και Smirnova δίνοντας έμφαση στη συμβολική λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος, διατείνονται ότι το σχήμα λειτουργεί σαν υποκατάστατο των αλγεβρικών συμβόλων, τα οποία απουσιάζουν. «…..ο μοναδικός λόγος που ο Α-Χ κατέφυγε σε γεωμετρική ερμηνεία για την απόδειξη της γενικότητας της μεθόδου του, ήταν ότι δεν διέθετε αλγεβρικό συμβολισμό για να το κάνει χωρίς τη γεωμετρία.»[201]

Το σχήμα, σύμφωνα με τον Rashed, αποτελεί "τη βάση για την ύπαρξη του αλγόριθμου" και δεν είναι απλώς μια διαγραμματική του αναπαράσταση. Επιπλέον θεωρεί, ότι ο Α-Χ, "αναγνωρίζει την προτεραιότητα της γεωμετρίας" η οποία παρέχει τη λογική βεβαιότητα ότι τα αποτελέσματα του αλγόριθμου είναι σε κάθε περίπτωση ορθά.[202]

Ο Α-Χ, όπως υποστηρίζει ο J.L. Berggren, "άντλησε από τις διαδεδομένες μεθόδους επίλυσης εξισώσεων των επαγγελματιών" αλλά και τις "εξίσου διαδεδομένες «διαίρεσε και ανασύνθεσε» (cut-and-paste) μεθόδους, για να δείξει την εγκυρότητα των λύσεων".[203]

---

[198] Πρόκειται για τις προτάσεις 5 και 6 του δεύτερου βιβλίου των "Στοιχείων". [Rashed 2009, 33-43] Αλλά και την πρόταση 4 του ίδιου βιβλίου. [Van der Waerden 2006, 87]

[199] [Netz 2004, 140]

[200] [Van der Waerden 2006, 83]

[201] [Bashmakova & Smirnova 2000, 51]

[202] [Rashed 2009, 51]

[203] [J.L. Berggren 2007, 517]

Για να ερμηνεύσει κάποιος σωστά το ρόλο των γεωμετρικών δικαιολογήσεων στην *Άλγεβρα* του Α-Χ και πιο συγκεκριμένα τη σχέση των γεωμετρικών σχημάτων με τις διαδικασίες επίλυσης πρέπει να λάβει υπ'όψιν το σκοπό της συγγραφής του έργου. Είδαμε στην εισαγωγή αλλά και στο κυρίως κείμενο αρκετά στοιχεία τα οποία άμεσα ή έμμεσα υποστηρίζουν την άποψη, ότι η συγγραφή του έργου αποσκοπούσε στη δημιουργία ενός διδακτικού εγχειριδίου. Η πραγματεία του Α-Χ έχει χαρακτηριστεί σαν "πρακτικό εγχειρίδιο"[204] και είναι το πρώτο του είδους, γραμμένο στην Αραβική γλώσσα. Αυτό που κυρίως στοχεύει ο Α-Χ με το έργο είναι να αναδείξει την ευκολία που προσφέρει η αλγεβρική μέθοδος αλλά και την ευρύτητά της για την επίλυση προβλημάτων διαφόρων ειδών. Εφαρμόζει λοιπόν, αυτήν ακριβώς τη μέθοδο al-jabr σε προβλήματα, η δυσκολία των οποίων συνήθως ξεπερνάει τα όρια της αριθμητικής. Η προσωπική μου άποψη είναι ότι οι γεωμετρικές ερμηνείες είναι μεν σημαντικές από την μαθηματική σκοπιά του θέματος, αλλά δεν προσθέτουν κάτι ουσιαστικό στην πρακτική υπολογιστική πλευρά του. Όπως παρατηρεί ο Oaks η πλειονότητα των πρακτικών βιβλίων άλγεβρας κατά τον μεσαίωνα δεν περιέχουν γεωμετρικές αιτιολογήσεις. Θεωρεί πιθανό οι διαδικασίες επίλυσης των τριών σύνθετων εξισώσεων να προέρχονται από τη γεωμετρία, αν και αυτές πλέον "ανήκουν στη μέθοδο της άλγεβρας". Η αλγεβρική μέθοδος σταδιακά ωρίμασε και έγινε ανεξάρτητη από τη γεωμετρική ερμηνεία.

"Μια κατανόηση της γεωμετρίας δεν ήταν πλέον αναγκαία για την επίλυση τετραγωνικών προβλημάτων, καθώς το μόνο που χρειαζόταν ήταν η σωστή αριθμητική συνταγή." [205] Παρ' όλα αυτά ο Α-Χ συμπεριέλαβε γεωμετρικές επιλύσεις των εξισώσεων στην *Άλγεβρα* είτε ως κατάλοιπο κάποιας παράδοσης είτε για να προσδώσει εγκυρότητα στις αλγεβρικές διαδικασίες. Αλλά αν κρίνουμε από την θέση της γεωμετρικής πραγμάτευσης των εξισώσεων στο βιβλίο του, φαίνεται να την θεωρεί σαν προσθήκη στο αλγεβρικό σώμα της έκθεσης.

Ο Α-Χ, όπως είδαμε, χρησιμοποιεί γεωμετρικές δικαιολογήσεις όχι μόνο για τις διαδικασίες επίλυσης των προβλημάτων αλλά και για κανόνες οι οποίοι αφορούν τις πράξεις. Έτσι για την δικαιολόγηση της ισότητας

$$\sqrt{200} - 10 + 20 - \sqrt{200} = 10$$

---

[204] [Oaks – Alkhateed 2005, 406], [G.. J. Toomer, 358]

[205] [Oaks – Alkhateed 2005, 417]

χρησιμοποιεί ευθύγραμμα τμήματα με μήκη αντίστοιχα των αριθμών. Βάσει απλών ιδιοτήτων πρόσθεσης και αφαίρεσης ευθύγραμμων τμημάτων καταλήγει στην αριθμητική ισότητα**:** Όμως η εμβέλεια των γεωμετρικών δικαιολογήσεων είναι περιορισμένη, όπως στο επόμενο παράδειγμα. Σε αυτό η ιδιότητα αφορά την πρόσθεση τριωνύμων και το παράδειγμα μεταγράφεται συμβολικά ως

$$100 + x^2 - 20x + 50 + 10x - 2x^2 = 150 - 10x - x^2$$

Σχολιάσαμε ήδη, ότι ο συγγραφέας της *Άλγεβρας* θεωρεί αδύνατη την γεωμετρική δικαιολόγηση της ισότητας με ένα εύλογο σχήμα.[206]

Για να σχηματίσουμε μια πληρέστερη εικόνα για τα χαρακτηριστικά της διατριβής του Α-Χ δεν αρκεί η μάλλον περιληπτική αναφορά που κάναμε στις αιτιολογήσεις. Είναι επιπλέον απαραίτητο να εντοπίσει κανείς σημεία στα οποία ο συγγραφέας της *Άλγεβρας* δεν κρίνει σκόπιμο να συμπληρώσει τη διατύπωση ενός κανόνα με οποιουδήποτε είδους αιτιολόγηση. Έτσι η ύπαρξη ή έλλειψη αιτιολογήσεων επιτρέπει την ανίχνευση στοιχείων τα οποία προσδίδουν μια αποδεικτική χροιά σε ένα έργο που πραγματεύεται τεχνικές υπολογισμού. Θα αναφέρουμε εδώ, δύο τέτοια σημεία. Στο πρώτο, ο Α-Χ, διατυπώνει έναν ισχυρισμό όπως συνήθως υπό μορφή κανόνα. Αυτός ο κανόνας αφορά την ισότητα "*māls* και αριθμός ίσα με ρίζες". Αφού πρώτα δείξει τον τρόπο υπολογισμού της τιμής της "ρίζας" ("πράγματος") με παράδειγμα, στη συνέχεια διατυπώνει τον κανόνα για την περίπτωση που το τετράγωνο του μισού "αριθμού των ριζών" είναι μικρότερο από τα "ντιράμς" ή ίσο με αυτά. Απουσιάζει όμως από το κείμενο οποιαδήποτε δικαιολόγηση του κανόνα. Μια εξήγηση που, κατά τη γνώμη μας, φαίνεται εύλογη σχετικά με την έλλειψη δικαιολόγησης έχει να κάνει με τον χαρακτήρα του έργου. Ο Oaks χαρακτηρίζει την *Άλγεβρα*, αλλά και μεταγενέστερα μεσαιωνικά έργα του είδους για τα οποία αυτή υπήρξε πρότυπο, «πρακτικά μεσαιωνικά βιβλία άλγεβρας» και συμπληρώνει ότι στην πλειονότητά τους «δεν περιέχουν γεωμετρικές αιτιολογήσεις» [207]

Έτσι λοιπόν η έλλειψη αιτιολογήσεων η οποία θα αποτελούσε σημαντικό μειονέκτημα για ένα θεωρητικό μαθηματικό έργο, όπως για παράδειγμα τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, δεν μοιάζει να μειώνει την αξία ενός πρακτικού (διδακτικού) εγχειριδίου για τον υπολογισμό.

---

[206] [Rashed 2009, 140]

[207] [Oaks – Alkhateed 2005, 418]

Ένα δεύτερο σημείο στο οποίο η διατύπωση ενός κανόνα δεν συνοδεύεται από κάποιου είδους αιτιολόγηση εντοπίζεται στην επίλυση του προβλήματος <8> από το "Κεφάλαιο με διάφορα προβλήματα". Ο κανόνας αυτός – κανόνας διαίρεσης – χρησιμοποιείται σε αρκετά προβλήματα όπως τα <5>, <10> από το ίδιο κεφάλαιο και άλλα. Στην επίλυση του <8> διατυπώνεται ως εξής**:** "Και γνωρίζεις ήδη, ότι οποτεδήποτε πολλαπλασιάσεις το αποτέλεσμα από τη διαίρεση [το πηλίκο] με το διαιρέτη, ξαναπαίρνεις το συνολικό ποσό (*māl*) το οποίο διαίρεσες…».[208] Το γεγονός ότι ο κανόνας δεν εξηγείται σε συνδυασμό με τη φράση "και γνωρίζεις ήδη" ή κάποια παραλλαγή της που τον συνοδεύει κάνει πολύ εύλογη την υπόθεση ότι**:** η διδασκαλία της τέχνης al-jabr γινόταν μετά την εκμάθηση άλλων μεθόδων υπολογισμού – αναλογίας, αυθαίρετης παραδοχής, αριθμητικός συλλογισμός - και πάντοτε σαν συμπλήρωμα στις αριθμητικές μεθόδους.

Μια τέτοια υπόθεση ενισχύεται και από τον χειρισμό των πράξεων της εκφώνησης ενός προβλήματος. Οι αλγεβριστές αξιοποιούν τον αριθμητικό συλλογισμό, στην αρχή της επίλυσης ενός προβλήματος. Αυτός υποβοηθάει στην μετατροπή του προβλήματος, σε εξίσωση, μέσω των πράξεων οι οποίες υπαγορεύονται από την εκφώνηση. Έτσι ο αριθμητικός συλλογισμός προσφέρει την λογική βάση της σύνδεσης του πλαισίου της εκφώνησης (αριθμητικό) με το πλαίσιο της επίλυσης (αλγεβρικό).

Θα τελειώσουμε αυτή την ενότητα θέτοντας ένα ερώτημα**:** με ποια έννοια είναι δυνατόν να αναφερθεί κανείς σε αποδείξεις στο αλγεβρικό έργο του Α-Χ;

Οι απαντήσεις των ιστορικών διαφέρουν. Στη μια άκρη του φάσματος βρίσκεται η άποψη ότι οι αιτιολογήσεις δεν θεωρούνται σαν αποδείξεις, σύμφωνα με την κοινώς αποδεκτή άποψη περί απόδειξης από την κλασσική περίοδο της αρχαίας Ελληνικής γεωμετρίας.[209]Στην άλλη άκρη, αντίθετα, υποστηρίζεται η άποψη[210] ότι οι αιτιολογήσεις έχουν τα χαρακτηριστικά της αυστηρής απόδειξης και πρέπει να θεωρούνται σαν τέτοιες.

---

[208] [Oaks – Alkhateed 2005, 421]

[209] [J.L.Berggren 2007,517]

[210] [Rashed 2009, 49]

3.3. ΠΡΩΙΜΗ ΑΡΑΒΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ:

τεχνική από μια προφορική παράδοση ή επιστήμη επινοημένη από τον Α-Χ;

Η *Άλγεβρα* του Α-Χ δεν αποτελεί μόνο ένα έργο το οποίο διαμόρφωσε σε σημαντικό βαθμό την ιστορία της άλγεβρας, αλλά υπήρξε ανέκαθεν αντικείμενο διαμάχης μεταξύ των ιστορικών. Οι κύριοι άξονες της διαμάχης αφορούν αφενός το ερώτημα σχετικά με της πηγές από τις οποίες είναι πιθανό να άντλησε τα προβλήματα και τις μεθόδους του ο Α-Χ και αφετέρου το ερώτημα αν το έργο εγκαινιάζει έναν νέο κλάδο της μαθηματικής επιστήμης ή αποτελεί συνέχεια παραδόσεων και πρακτικών που προϋπήρχαν. Η συζήτηση κυρίως επί αυτών των δύο ερωτημάτων αλλά και άλλων συναφών, όπως για παράδειγμα αυτό που αφορά τον χαρακτήρα του έργου, έχει πρόσφατα αναζωπυρωθεί λόγω της κριτικής έκδοσής[211] του από τον ιστορικό των μαθηματικών Roshdi Rashed. Αντικείμενο της συζήτησης μας σε αυτή την ενότητα αποτελούν οι απαντήσεις στα ερωτήματα που μόλις ανέφερα. Επικεντρώνεται κυρίως στις διιστάμενες απόψεις δυο σύγχρονων ιστορικών των μαθηματικών του Roshdi Rashed και του Jeffrey Oaks. Οι έρευνες αυτών των ιστορικών έχουν φέρει στο φώς σημαντικά κείμενα για την ιστορία των Ισλαμικών μαθηματικών τα οποία συνέβαλαν στην κατανόηση του χαρακτήρα καθώς και του εννοιολογικού πλαισίου της Αραβικής άλγεβρας και πιο ειδικά της *Άλγεβρας* του Α-Χ. Θα παρουσιάσουμε περιληπτικά, καταρχάς τις απόψεις και τις ερμηνείες, τις οποίες έχει υποστηρίξει ο Roshdi Rashed, αμέσως μετά θα ακολουθήσουν οι αντίστοιχες απόψεις του Jeffrey Oaks, σχετικά με τα ερωτήματα που προανέφερα.

3.3.1. Οι απόψεις του Roshdi Rashed

Ο ιστορικός Roshdi Rashed με πλούσιο ιστοριογραφικό έργο σε θέματα των Ισλαμικών μαθηματικών είναι, σήμερα, ένας από τους κύριους εκφραστές της άποψης η οποία με δύο λόγια θα μπορούσε να διατυπωθεί σαν: η άλγεβρα αρχίζει με τον Α-Χ. Η επιχειρηματολογία του βασίζεται στην "ισχυρή" θέση ότι το αλγεβρικό έργο του Α-Χ αποτελεί μια τομή στην μακραίωνη παράδοση υπολογισμού και μεθόδων επίλυσης προβλημάτων. Θεωρεί, ότι μια διαχωριστική γραμμή οριοθετεί τα έργα προηγούμενων μαθηματικών παραδόσεων στις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, από την *Άλγεβρα* του

[211] Πρόκειται για τη Γαλλική μετάφραση και τον σχολιασμό της *Άλγεβρας* [Rashed 2007] από τον ίδιο τον Roshdi Rashed αλλά και την Αγγλική μετάφραση [Rashed 2009] της Γαλλικής έκδοσης.

Α-Χ και μεταγενέστερων αλγεβρικών παραδόσεων. Ο Α-Χ με την συγγραφή και έκδοση της αλγεβρικής διατριβής του, σύμφωνα πάντοτε με τους ισχυρισμούς του Rashed, εγκαινιάζει μια εντελώς νέα παράδοση χωρίς προηγούμενο στις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων. Όπως χαρακτηριστικά γράφει "ό,τι αυτός [ο Α-Χ] κάνει δεν είναι δυνατόν να αναχθεί σε οτιδήποτε βρίσκεται σε άλλες παραδόσεις".[212] Σχολιάζοντας την προσπάθεια των ιστορικών για την καταγραφή και ερμηνεία των στοιχείων τα οποία προσδιορίζουν την "απαρχή" του κλάδου της άλγεβρας ισχυρίζεται ότι αυτοί έχουν "παρασυρθεί από την προφανή απλότητα των τεχνικών" που χρησιμοποιεί ο Α-Χ.Θεωρεί μάλιστα ότι η "καινοτομία του μαθηματικού εγχειρήματος" το οποίο υλοποίησε με την έκδοση της *Άλγεβράς* του φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με την "τεχνική απλότητα" του βιβλίου. Συγκρίνοντας την *Άλγεβρα* του Α-Χ με τα Ευκλείδεια *Στοιχεία* ή τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου διαπιστώνει ότι η πρώτη "φαίνεται πολύ στοιχειώδης σε τεχνικό επίπεδο". Παρ' όλα αυτά, όπως λέει, είναι "εδώ που η σύλληψη για πρώτη φορά" ενός θεωρητικού προγράμματος υλοποιείται. Ποιο είναι όμως αυτό το θεωρητικό πρόγραμμα; Εδώ είναι που η επιχειρηματολογία του Rashed επιστρατεύει μια δεύτερη "ισχυρή" θέση. Το πρόγραμμα του Α-Χ είναι δημιουργία ενός "λογισμού των αγνώστων και να θέσει έτσι τα θεμέλια μιας θεωρίας εξισώσεων".[213]

Αξίζει να παρατεθεί ένα απόσπασμα από το εισαγωγικό σχόλιο του Rashed για την *Άλγεβρα*, στο οποίο οι δύο διακριτές θέσεις, δηλαδή η "θέση περί της δημιουργίας του κλάδου της άλγεβρας" και η "θέση περί θεωρητικού προγράμματος" συσχετίζονται. Αυτό θα μας επιτρέψει να σχηματίσουμε μια σαφέστερη συνολική εικόνα των απόψεων του ιστορικού για το αλγεβρικό έργο του Α-Χ. "Από δύο απόψεις ό,τι αυτός [ο Α-Χ] κάνει δεν είναι δυνατόν να αναχθεί σε οτιδήποτε βρίσκεται σε άλλες παραδόσεις όπως αυτές των Βαβυλωνίων, του Διόφαντου, του Ήρωνος του Αλεξανδρέως, του Αρυαμπάτα ή του Μπραχμαγκούπτα. Ο Α-Χ δεν βρίσκει αυτές τις εξισώσεις [έξι πρότυπες μορφές] στην πορεία επίλυσης των προβλημάτων. Στην πραγματικότητα η ταξινόμηση προηγείται των προβλημάτων. Αυτή εισάγεται σκοπίμως σαν το αναγκαίο πρώτο βήμα στην κατασκευή μιας θεωρίας εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού και αυτή η θεωρία θα γίνει ο πυρήνας ενός μαθηματικού κλάδου."[214]

---

[212] [Rashed 2009, 24]

[213] [Rashed 2009, 62]

[214] [Rashed 2009, 24]

Σε αυτό το απόσπασμα ο Rashed δηλώνει ρητά και με απόλυτη σαφήνεια, ότι ο σκοπός του Α-Χ είναι η δημιουργία ενός **θεωρητικού** έργου. Η πραγματοποίηση αυτού του σκοπού έγινε με την κατάλληλη επιλογή και διάρθρωση του υλικού το οποίο περιέχεται στην *Άλγεβρα*. Οι εξισώσεις ταξινομούνται πριν από τα προβλήματα και με αυτόν τον τρόπο έχει γίνει το πρώτο βήμα για τη δημιουργία μιας θεωρίας εξισώσεων. Αυτή ακριβώς η θεωρία εξισώσεων, σύμφωνα πάντοτε με την κατά Rashed ανάγνωση του βιβλίου του Α-Χ, αποτελεί τον "πυρήνα ενός μαθηματικού κλάδου", του κλάδου της άλγεβρας. Συμπληρώνει επίσης, ότι ορισμένα χαρακτηριστικά του κλάδου είναι εντελώς νέα και γι' αυτό το λόγο μιλάει για «ένα νέο μαθηματικό κλάδο» στη δημιουργία του οποίου αποσκοπεί το πρόγραμμα του Α-Χ. Ένα πρόγραμμα για το οποίο δεν ανευρίσκεται ούτε ίχνος σε προηγούμενες μαθηματικές παραδόσεις. Όπως λέει ο ιστορικός, τρείς βασικές, στενά συνδεόμενες ιδέες[215] του Α-Χ, συνέβαλαν ώστε να αποκτήσει η άλγεβρα υπόσταση μαθηματικού κλάδου. Η πρώτη είναι η *a priori* ταξινόμηση των εξισώσεων, η δεύτερη ότι οι αλγόριθμοι είναι γενικοί, δηλαδή οδηγούν πάντοτε σε αποτέλεσμα και τέλος, η τρίτη βασική ιδέα, είναι ότι οι αλγόριθμοι αποδεικνύονται.

Αν και στο παραπάνω απόσπασμα δίνεται μια γενική περιγραφή της απάντησης του Rashed στο ερώτημα περί των πηγών από τις οποίες άντλησε ο Α-Χ, ωστόσο θα συμπληρώσουμε μερικά επιπλέον στοιχεία, ώστε να διασαφηνιστεί πλήρως η άποψή του. Στο εκτεταμένο κριτικό σχόλιο, μερικές δεκάδες σελίδων, που περιέχεται στην έκδοση της *Άλγεβρας* την οποία επιμελήθηκε, ο Rashed εξετάζει τις πιθανές επιδράσεις από τα έργα των Ευκλείδη, Ήρωνος, Διόφαντου αλλά και των Αρυαμπάτα και Μπραχμαγκούπτα. Όσον αφορά την επίδραση του έργου του Ευκλείδη, ο Rashed πιθανολογεί ότι, αν ο Α-Χ υιοθετούσε κάτι από τα *Στοιχεία* αυτό δεν θα ήταν τίποτε άλλο παρά επιστημολογικές ιδέες. Σχετικά με την επίδραση του έργου του Ήρωνος, σημειώνει: ο Α-Χ είχε ήδη αναπτύξει τις δικές του "έννοιες και μεθόδους" οι οποίες διέφεραν από την άποψη περί άλγεβρας του Ήρωνος, όταν ήλθε σε επαφή και γνώρισε το έργο του τελευταίου. Όπως πιστεύει ο Α-Χ απλώς επέλεξε κάποια από τα παραδείγματα του Ήρωνος για το βιβλίο του, χωρίς όμως να ακολουθήσει τις μεθόδους του. Χαρακτηρίζει την διαδικασία επίλυσης την οποία ακολουθεί ο Ήρων «γεωμετρικό - αριθμητική», ενώ τη διαδικασία την οποία εφαρμόζει ο Α-Χ την ονομάζει «αλγεβρικό -

[215] [Rashed 2009, 49-51]

γεωμετρική»[216]

Γενικά, θεωρεί ότι η παράδοση την οποία δημιούργησαν τα έργα του Ήρωνος δεν είναι δυνατόν να έχει επηρεάσει τον Α-Χ στη σύλληψη της ιδέας της «νέας άλγεβρας». Απορρίπτει τη συσχέτιση της απαρχής της άλγεβρας με το έργο *Αριθμητικά* του Διόφαντου και την χαρακτηρίζει σαν μια «γενικά αποδεκτή γνώμη». Η επιχειρηματολογία του εστιάζεται στην κατάρριψη της ιδέας ότι τα *Αριθμητικά* είναι ένα βιβλίο άλγεβρας. Κάνει την παρατήρηση της εφαρμογής εκ μέρους του Διόφαντου ορισμένων "τεχνικών οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν μεταγενέστερα στην άλγεβρα" ωστόσο καταλήγει με τη φράση "ασφαλώς [τα Αριθμητικά] δεν είναι ένα βιβλίο άλγεβρας".[217] Φυσικό επακόλουθο αυτής της τελευταίας θέσης του είναι το συμπέρασμα ότι τα δύο βιβλία, δηλαδή τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου και η *Άλγεβρα* του Α-Χ, "δεν ανήκουν στην ίδια παράδοση". Σύμφωνα με τον Rashed, αφενός ο Διόφαντος έχει σκοπό τη δημιουργία μια "αριθμητικής θεωρίας", αφετέρου ο Α-Χ σκοπεύει σε κάτι εντελώς διαφορετικό, στη δημιουργία μιας "θεωρίας εξισώσεων".

Στη συζήτηση με θέμα την άντληση στοιχείων από Ινδικές πηγές για την συγγραφή της *Άλγεβρας* αλλά και την επίδραση που δέχτηκε ο Α-Χ από την Ινδική παράδοση των Αρυαμπάτα και Μπραχμαγκούπτα, ο Rashed αντικρούει την άποψη για την ύπαρξη τέτοιων στοιχείων αλλά και αυτή περί ενδεχόμενης επίδρασης. Αναγνωρίζει ότι στο βιβλίο *Αρυαμπατίγια* του Αρυαμπάτα[218] βρίσκουμε την ιδέα της "εξίσωσης με έναν άγνωστο" αλλά και διαδικασίες οι οποίες "περιλαμβάνουν αλγεβρικό υπολογισμό" ωστόσο υποστηρίζει ότι "δεν βρίσκουμε μια θεωρία τετραγωνικών εξισώσεων και ακόμη λιγότερο την ιδέα ενός μαθηματικού κλάδου"[219]

Όπως συμπληρώνει με έμφαση, γενικά "δεν βρίσκεται το παραμικρό ίχνος" στοιχείων προερχομένων από το βιβλίο του Αρυαμπάτα στην *Άλγεβρα* του Α-Χ. Όσον αφορά το ζήτημα της σχέσης του έργου του Μπραχμαγκούπτα με το έργο του Α-Χ, θεωρεί ότι στο βιβλίο του πρώτου, η τετραγωνική εξίσωση αποτελεί απλώς και μόνο κατάληξη "στην πορεία επίλυσης ενός προβλήματος αστρονομίας." Κατά συνέπεια ο

---

[216] [Rashed 2009, 61]

[217] [Rashed 2009, 63]

[218] Ο Αρυαμπάτα γεννήθηκε το 476 μΧ, το βιβλίο του *Αρυαμπατίγια* είναι μια από τις σπουδαιότερες πηγές για τα Ινδικά μαθηματικά και την αστρονομία

[219] [Rashed 2009, 75]

Ινδός μαθηματικός στο έργο του δεν μελετάει αυτή καθαυτή την εξίσωση με σκοπό τη λύση της, μία προσέγγιση η οποία, σύμφωνα με την άποψη του Rashed βρίσκεται στον αντίποδα εκείνης του Α-Χ. Συνοψίζοντας ο Rashed την περιγραφή της σχέσης του έργου του Α-Χ με την παράδοση των Ινδών μαθηματικών, υπογραμμίζει τις αποκλίσεις, όπως λέει, οι οποίες υπάρχουν ανάμεσα στα έργα τους. Επιπλέον δηλώνει με έμφαση, ότι ακόμη και αν ο Α-Χ είχε μελετήσει τα δύο βιβλία αυτό το γεγονός "δεν επηρέασε την αντίληψη του της άλγεβρας και δεν άσκησε καμία επίδραση στις τεχνικές που χρησιμοποίησε" Τέλος εκφράζει τη γνώμη, ότι ο μαθηματικός συλλογισμός, ο οποίος αναπτύσσεται στην *Άλγεβρα,* κατά την γνώμη του δεν έχει καμία σχέση με οτιδήποτε συναντάμε στο έργο προγενέστερων.

Θα τελειώσουμε εδώ αυτή την υποενότητα. Εν ολίγοις, το πλαίσιο των απόψεων του Rashed στηρίζεται σε τρείς βασικές παραδοχές. Η πρώτη παραδοχή του, είναι ότι ο Α-Χ συνέλαβε εξαρχής την άλγεβρα ως έναν θεωρητικό κλάδο. Σκοπός του έργου του είναι η δημιουργία ενός νέου κλάδου των μαθηματικών. Η συγγραφή της *Άλγεβρας* του Α-Χ αποτελεί την ιδρυτική πράξη αυτού του νέου κλάδου. Στον πυρήνα του βρίσκεται η θεωρία εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού, δημιούργημα του Α-Χ . Αυτή είναι η δεύτερη παραδοχή που κάνει. Τέλος με την τρίτη παραδοχή, απορρίπτει πιθανές επιδράσεις προγενέστερων μαθηματικών παραδόσεων, σε αυτό που ονομάζει, «θεωρητικό πρόγραμμα» του Α-Χ. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τον Rashed, αυτός είναι ο πρώτος μαθηματικός που συνέλαβε ένα τέτοιο πρόγραμμα, το οποίο είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία της άλγεβρας. Αν και ο Rashed επικαλείται στοιχεία από τη ίδια την *Άλγεβρα*, αλλά και πιο γενικά προερχόμενα από την Αραβική γραμματεία για την επικύρωση αυτών των υποθέσεων, εν τούτοις όπως θα δούμε στη συνέχεια δεν έχει καταφέρει να πείσει τους ιστορικούς με την αποδεικτική αξία των στοιχείων που έχει προσκομίσει.

3.3.2. Οι απόψεις του Jeffrey Oaks

Οι απόψεις του Roshdi Rashed που μόλις σκιαγραφήσαμε έχουν γνωρίζει ευρεία διάδοση για σχεδόν δύο δεκαετίες. Φαίνεται όμως, πως υπάρχουν ιστορικοί των μαθηματικών οι οποίοι δεν έχουν πειστεί για την ερμηνευτική του αξία. Ιστορικοί όπως για παράδειγμα, οι Jeffrey Oaks, Reviel Nets, J.Lennart Berggren και Jens Hoyrup οι οποίοι με τις τοποθετήσεις τους αναιρούν σε κάποιο βαθμό ή συνολικά βασικές θέσεις του Rashed. Θα ασχοληθούμε με το έργο του Oaks επειδή αυτός έχει κάνει την πλέον

πρόσφατη έρευνα, η οποία στο σύνολο της έχει πραγματοποιηθεί την περασμένη δεκαετία, φωτίζοντας άγνωστες πτυχές της Αραβικής αλλά κα γενικότερα της μεσαιωνικής άλγεβρας. Για την σκιαγράφηση των απόψεων του αντλούμε στοιχεία από μία σειρά άρθρων σε έγκυρα περιοδικά, τη βιβλιοκρισία του για την Αγγλική έκδοση της *Άλγεβρας* με επιμέλεια του Rashed αλλά και ανακοινώσεις του σε συνέδρια. Θα περιοριστούμε μόνο στις απόψεις του, οι οποίες σχετίζονται με τα ερωτήματα που θέσαμε εξαρχής, δηλαδή πρώτον περί των πηγών του Α-Χ, δεύτερον εκείνο της δημιουργίας νέου κλάδου και τρίτον το ερώτημα που αφορά τον θεωρητικό χαρακτήρα της *Άλγεβρας*. Ο Oaks τεκμηριώνει την απάντησή του στο πρώτο από τα ερωτήματα, εξετάζοντας ποικιλία στοιχείων τα οποία προέρχονται αφενός από το περιεχόμενο του βιβλίου του Α-Χ και αφετέρου από την ευρύτερη Αραβική γραμματεία, όπως έργα μαθηματικών, αστρονόμων αλλά και σχολιαστών.

Υποστηρίζει μια ερμηνεία την οποία θα ονομάζουμε ¨θέση της προφορικότητας¨. Η θέση αυτή προσεγγίζει την απάντηση στο ερώτημα των πηγών από τις οποίες άντλησε τεχνικές και προβλήματα ο Α-Χ, αναζητώντας προφορικές μαθηματικές παραδόσεις. Σύμφωνα με την ¨θέση της προφορικότητας¨ υπάρχει στον Ισλαμικό κόσμο της εποχής εκείνης, ευρεία διάδοση χρήσιμων μαθηματικών γνώσεων υπό μορφή πρακτικών τεχνικών οι οποίες ασκούνται από επαγγελματίες. Αυτές οι απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις οι οποίες είναι ενσωματωμένες σε τεχνικές των επαγγελματιών, όπως των πρακτικών γεωμετρών, των λαϊκών αστρονόμων, αλλά και επαγγελματικών που εφαρμόζουν αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού στο εμπόριο, μεταδίδονται με την προφορική παράδοση. Οι μαθηματικές μέθοδοι που μεταδίδονται με αυτόν τον τρόπο εστιάζονται στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Έχουν διαμορφωθεί σε τεχνικές αριθμητικής – αλγεβρικής επίλυσης προβλημάτων, αλλά και πρακτική γεωμετρία. Εξυπηρετούν λοιπόν, σχεδόν αποκλειστικά τις ανάγκες των επαγγελματιών οι οποίοι τις χρησιμοποιούν. Κατά συνέπεια αυτού του είδους η καλλιέργεια των μαθηματικών, στα πλαίσια αυτής της προφορικής παράδοσης δεν έχει ως αυτοσκοπό τα ίδια τα μαθηματικά. Οι μαθηματικές τεχνικές οι οποίες εφαρμόζονται είναι: άλγεβρα, απλή αυθαίρετη παραδοχή, διπλή αυθαίρετη παραδοχή, αναλογία και άλλες.

Η ¨θέση της προφορικότητας¨ συμπληρώνεται με την προσέγγιση του Oaks στην απάντηση του δεύτερου ερωτήματος, που όπως είπαμε, αφορά τη δημιουργία ή μη από τον Α-Χ ενός νέου μαθηματικού κλάδου. Ο Oaks αντικρούει την άποψη ότι ο Α-Χ επινόησε την άλγεβρα και δημιούργησε ένα νέο κλάδο. Απεναντίας θεωρεί ότι η

προφορική παράδοση της άλγεβρας των επαγγελματιών, η οποία ήταν διάχυτη στον Ισλαμικό κόσμο, με το βιβλίο του Α-Χ απέκτησε γραπτή μορφή. Επιπλέον έχει την πεποίθηση ότι η καταγραφή της προφορικής γνώσης των επαγγελματικών σε γραπτά έργα συντελέστηκε στα πλαίσια του ¨μεταφραστικού κινήματος¨, αρχαιότερων έργων από άλλες γλώσσες – Ελληνικά, Ινδικά, Περσικά – στα Αραβικά. Έτσι λοιπόν, άρχισε μια μακρά διαδικασία επεξεργασίας της προφορικής άλγεβρας σε μια επιστημονική κατεύθυνση. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία την οποία ονομάζουμε ¨θέση της καταγραφής¨ το περιεχόμενο της *Άλγεβρας* αντικατοπτρίζει στοιχεία και γνώσεις της προφορικής παράδοσης. Επιπλέον, όπως σημειώνει ο Oaks, η συγγραφή κειμένων για την άλγεβρα, είναι ένα σημαντικό βήμα για να γίνει αυτή, σταδιακά επιστημονική.

Ας έλθουμε τώρα στο τρίτο και τελευταίο από τα ερωτήματα που θέσαμε. Βρίσκουμε στην *Άλγεβρα* μια θεωρία εξισώσεων; ή θέτοντας το ερώτημα πιο γενικά: υπάρχουν μέρη του έργου τα οποία είναι δυνατόν να χαρακτηριστούν ως θεωρία άλγεβρας; Η απάντηση του Oaks έχει δυο σκέλη. Στο πρώτο επιχειρηματολογεί υπέρ της άποψης, ότι το βιβλίο αφιερώνεται στον πρακτικό υπολογισμό και συγκεκριμένα στον υπολογισμό με τη μέθοδο της άλγεβρας, σημειώνει επίσης, ότι ο Α-Χ δεν χρησιμοποιεί τον όρο ¨εξίσωση¨ στην *Άλγεβρα* του αλλά αντ' αυτού αναφέρεται στο ¨πρόβλημα¨. Στο δεύτερο σκέλος εστιάζει την επιχειρηματολογία του στους κανόνες της άλγεβρας, δηλαδή τις εξισώσεις μαζί με τις διαδικασίες επίλυσης, τις πράξεις και τις αποδείξεις. Όπως υποστηρίζει, οι ¨κανόνες¨ λειτουργούν στο βιβλίο, σαν τα αναγκαία μέσα για την επίλυση – προβλήματος.

Η παράθεση τους έχει πρακτική σκοπιμότητα και χρησιμοποιούνται σαν τεχνικά εργαλεία υπολογισμού. Κατά την άποψη του δεν υπάρχει στην *Άλγεβρα* ότι θα μπορούσαμε να ονομάσουμε ¨θεωρεία εξισώσεων¨. Οι αποδείξεις, κατά τη γνώμη του, φαίνεται να είναι ¨το μόνο ¨επιστημονικό¨ στοιχείο¨, δηλαδή θεωρητικό στοιχείο στο βιβλίο του Α-Χ. όμως, όπως λέει, ο Α-Χ ενδεχομένως πήρε τις αποδείξεις ή επηρεάστηκε από τις μεθόδους των πρακτικών γεωμετρών.

3.3.3. Συζήτηση και συμπεράσματα

Η σκιαγράφηση των απόψεων των δύο ιστορικών αποκαλύπτει το χάσμα που υπάρχει ανάμεσα σε αυτές. Ουσιαστικά μέσω των απόψεών τους εκφράζονται δύο διαφορετικές αναγνώσεις της πρώιμης Αραβικής άλγεβρας, αλλά και πιο ειδικά της *Άλγεβρας* του Α-Χ. Όμως οι αναγνώσεις αυτές, κατά τη γνώμη μου, είναι σε μεγάλο

βαθμό ασυμβίβαστες ή μάλλον αντικρουόμενες. Το πλαίσιο της συζήτησής μας εδώ, έχει ως βάση αυτή την αντίθεση των απόψεων. Σκοπός μας στα πλαίσια αυτής της εργασίας είναι η διατύπωση κάποιων παρατηρήσεων έτσι ώστε το αλγεβρικό έργο του Α-Χ να κατανοηθεί και να ερμηνευθεί με έναν τρόπο, πιο κοντά στο πνεύμα και πιο συνεπή με τη μαθηματική πρακτική του δημιουργού του.

Η άποψη ότι ο Α-Χ χρησιμοποίησε προγενέστερες μαθηματικές παραδόσεις τις οποίες αξιοποίησε στη συγγραφή της *Άλγεβρας* έχει απασχολήσει σοβαρά τους ιστορικούς των μαθηματικών για τουλάχιστον δύο αιώνες μέχρι σήμερα. Από αυτούς, κάποιοι προτείνουν Ινδικές πηγές (Αρυαμπάτα, Μπραχμαγκούπτα) κάποιοι άλλοι πιθανολογούν επίδραση από Ελληνικές πηγές (Ήρων, Διόφαντος), τέλος μια μερίδα ιστορικών έχει την πεποίθηση ότι ο Α-Χ άντλησε από αρχαιότερες πηγές συνδεόμενες με τη Βαβυλωνιακή παράδοση.

Ο R. Rashed ασχολείται επιμελώς με την ανασκευή των επιχειρημάτων των ιστορικών. Εξετάζοντας κάθε μια από τις παραπάνω εκδοχές, οδηγείται τελικά στην απόρριψη οποιασδήποτε πιθανής επίδρασης από τις προτεινόμενες γραπτές πηγές. Αξίζει να σταθούμε ιδιαίτερα στα σχόλιά του για τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, ένα έργο το οποίο έχει χαρακτηριστεί από ιστορικούς και μαθηματικούς, ήδη από τον 16ο αιώνα, ως "βιβλίο άλγεβρας". Στην περίπτωση αυτή, η επιχειρηματολογία του Rashed έχει πρώτο στόχο την αναίρεση του παραπάνω χαρακτηρισμού για το βιβλίο του Διόφαντου και μόνο δευτερεύοντος στοχεύει να καταρρίψει την άποψη περί πιθανής επίδρασης των *Αριθμητικών* στο έργο του Α-Χ. Ένα από τα κύρια επιχειρήματά του αναγνωρίζει σαν σκοπό του Διόφαντου τη δημιουργία μιας αριθμητικής θεωρίας, ενώ, όπως λέει, ο Α-Χ με τη *Άλγεβρα* αποσκοπεί σε κάτι "εντελώς διαφορετικό" , τη δημιουργία μιας θεωρίας εξισώσεων. Αυτό το επιχείρημα έχει δύο συνέπειες. Η πρώτη τον οδηγεί στον αποχαρακτηρισμό των *Αριθμητικών,* για τον Rashed το βιβλίο του Διόφαντου "δεν είναι βιβλίο άλγεβρας". Η δεύτερη εκφράζεται με την απόλυτη αντίθεση του, στη "γνώμη" των ιστορικών, σύμφωνα με την οποία αυτά τα δύο έργα - τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου και η *Άλγεβρα* του Α-Χ - ανήκουν στην ίδια παράδοση της άλγεβρας.

Ο J. Oaks ασκεί κριτική στις παραπάνω απόψεις και τα επιχειρήματα του Rashed, σημειώνοντας ότι στην πραγματικότητα εξετάζει "επιφανειακές διαφορές" μεταξύ των δύο έργων. Επιπλέον όπως προτείνει στην κριτική του, τα επιχειρήματα του Rashed προκείμενου να δείξει ότι τα *Αριθμητικά* δεν είναι βιβλίο άλγεβρας, θα έπρεπε να

επικεντρωθούν στη μέθοδο του βιβλίου και όχι, όπως αυτός κάνει, στο σκοπό για τον οποίο ο Διόφαντος αποφάσισε να συγγράψει το έργο.

Μια εναλλακτική άποψη που έχει προταθεί, σχετικά με τις πιθανές μαθηματικές παραδόσεις από τις οποίες ο Α-Χ άντλησε στοιχεία για τη συγγραφή της *Άλγεβρας* του, θεωρεί ως πιθανότερη πηγή την προφορική μαθηματική παράδοση. Δύο σύγχρονοι ιστορικοί των Ισλαμικών μαθηματικών, οι J.L.Berggren και ο J.Oaks υποστηρίζουν ότι οι μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων που περιέχονται στην *Άλγεβρα* προέρχονται από τα μαθηματικά των επαγγελματιών. Αυτά τα μαθηματικά εξυπηρετούσαν την επίλυση προβλημάτων τα οποία παρουσιάζονταν στην επαγγελματική δραστηριότητα κάποιων ατόμων. Αποτελούσαν μέρος μιας προφορικής παράδοσης η οποία ήταν ενεργή σε όλο τον Ισλαμικό κόσμο την περίοδο του μεσαίωνα. Σύμφωνα με τους ιστορικούς ο Α-Χ, αφού πρώτα αφομοίωσε τη μαθηματική παράδοση των επαγγελματιών, στη συνέχεια έδωσε γραπτή μορφή σε κάποια από τα μέρη της, με την *Άλγεβρα.* Ποια είναι η θέση του Rashed απέναντι σε αυτή την εναλλακτική άποψη; Όπως και στην περίπτωση των γραπτών παραδόσεων, ο Rashed αρνείται να δεχτεί την πιθανή επίδραση της προφορικής άλγεβρας στο έργο του Α-Χ. Δεν φαίνεται να λαμβάνει σοβαρά υπ'όψιν, έναν τέτοιο τρόπο μετάδοσης της παράδοσης. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει "όσον αφορά στα μαθηματικά το επιχείρημα της μετάδοσης χωρίς γραφή είναι εύθραυστο."

Τελειώνοντας αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε κάποιες σκέψεις σχετικές με τα ερωτήματα της συζήτησής μας. Οι βασικές παραδοχές του Rashed μπορούν να διατυπωθούν περιληπτικά με τις ακόλουθες τρείς προτάσεις: Στην *Άλγεβρα* του Α-Χ υπάρχει μια θεωρία εξισώσεων, η οποία προέκυψε από το θεωρητικό πρόγραμμα που ο ίδιος συνέλαβε. Το βιβλίο "θέτει τα θεμέλια ενός μαθηματικού κλάδου", της άλγεβρας. Ο νέος αυτός κλάδος, δεν αποτελεί συνέχεια οποιαδήποτε παράδοσης υπολογισμού.

Ας δούμε όμως από πιο κοντά κάθε μια από τις τρείς αυτές παραδοχές. Η πρώτη παραδοχή, δηλαδή ο ισχυρισμός του Rashed ότι ο Α-Χ κάνει την "κατασκευή μιας θεωρίας εξισώσεων" [220] έχει ως άμεση συνέπεια να τοποθετεί κανείς το βιβλίο στο επίπεδο ενός θεωρητικού έργου. Υπάρχει πράγματι μια θεωρία εξισώσεων στο βιβλίο του Α-Χ; Είναι το βιβλίο, ένα θεωρητικό έργο; Υπάρχουν κάποιοι ιστορικοί, οι οποίοι είναι αντίθετοι με την παραδοχή του Rashed και η απάντηση που δίνουν στα δύο ερωτήματα είναι σαφώς αρνητική. Για παράδειγμα ο Gandz έχει την άποψη ότι το

[220] [Rashed 2009,24]

βιβλίο δεν περιέχει "αλγεβρική θεωρία" αλλά μόνο κανόνες και οδηγίες για τις επιλυτικές διαδικασίες. Παρόμοια είναι και η θέση του Netz , σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει κάτι στο βιβλίο που να "μοιάζει με θεωρία εξισώσεων". Ας δούμε όμως και το ίδιο το βιβλίο. Μια προσεκτική ανάγνωσή του αποκαλύπτει ότι δεν υπάρχει σε αυτό ούτε η λέξη "εξίσωση", αλλά ούτε καν η λέξη "θεωρία". Είμαστε λοιπόν εντός του εννοιολογικού πλαισίου του Α-Χ, όταν μιλάμε για μία θεωρία εξισώσεων;

Μια δεύτερη παρατήρηση που σχετίζεται με το ερώτημα αν το βιβλίο του Α-Χ είναι ένα θεωρητικό έργο, αφορά στην εξήγηση των όρων jabr και muqabala. Ο Rashed δεν κάνει καμία συζήτηση για τη σημασία των όρων "jabr" και "muqabala". Όμως αυτός διατείνεται, ότι ο Α-Χ συνέθεσε ένα θεωρητικό έργο στον "υπολογισμό με al-jabr και al-muqabala",αν αυτό ήταν αλήθεια για το βιβλίο του Α-Χ το πρώτο πράγμα που θα ανέμενε κανείς από τον συγγραφέα θα ήταν να εξηγεί τη σημασία, ακριβώς αυτών των δύο όρων. Ποιος λοιπόν είναι ο λόγος για τον οποίο ο Α-Χ δεν δίνει μια τέτοια εξήγηση ,για δύο τόσο βασικούς όρους της *Άλγεβρας* του, η οποία θα ήταν απαίτηση από ένα θεωρητικό έργο;

Η τρίτη παρατήρηση, η οποία επίσης σχετίζεται με το ερώτημα περί θεωρητικού έργου, αφορά στις "αποδείξεις" των διαδικασιών επίλυσης αλλά και των κανόνων, τις οποίες παραθέτει ο Α-Χ στο βιβλίο. Οι "αποδείξεις" έχουν χαρακτηριστεί από τους ιστορικούς ως ''το πιο θεωρητικό στοιχείο" του βιβλίου του Α-Χ. Πρέπει όμως εδώ να πούμε ότι ορισμένοι ιστορικοί, θεωρούν τις γεωμετρικές αποδείξεις σαν προσθήκες, στο κανονικό σώμα του κειμένου. Για τον Rashed οι αποδείξεις αποτελούν ακλόνητο τεκμήριο ότι ο Α-Χ δημιούργησε ένα θεωρητικό έργο με βάση ένα "θεωρητικό "πρόγραμμα". Όμως τίθεται το ερώτημα: χρησιμοποιείται στις αποδείξεις του Α-Χ, αλγεβρικός συλλογισμός; Φυσικά η απάντηση είναι αρνητική. Συνεπώς δεν μπορεί κανείς να συμμεριστεί τη θέση του Rashed, ότι ένα έργο "αλγεβρικής θεωρίας" αποκτά θεωρητικό χαρακτήρα μέσω των γεωμετρικών αποδείξεων.

Η δεύτερη βασική παραδοχή του Rashed είναι ο ισχυρισμός του ότι με το βιβλίο του ο Α-Χ βάζει τα θεμέλια της άλγεβρας. Άμεση απόρροια μιας τέτοιας δήλωσης είναι τα ακόλουθα ερωτήματα. Θέτει πράγματι το βιβλίο του Α-Χ τα θεμέλια της άλγεβρας; Υπάρχει κάποια παράδοση άλγεβρας πριν από το έργο του Α-Χ; Οι απαντήσεις των ιστορικών, σε αυτά τα ερωτήματα, διαφοροποιούνται σημαντικά. Η θέση του Rashed είναι σαφής: η άλγεβρα αρχίζει με τον Α-Χ. Η υποστήριξη όμως αυτής της θέσης είναι

βαρύ φορτίο για τον ιστορικό. Η θέση αυτή ή κάποια παραλλαγή της δεν φαίνεται να έχουν κερδίσει την αποδοχή της κοινότητας των ιστορικών των μαθηματικών. Πράγματι, σύμφωνα με τις απόψεις πολλών ιστορικών, εδώ και δύο αιώνες, τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου θεωρούνται ως ένα έργο το οποίο δημιούργησε μια παράδοση στην αλγεβρική σκέψη, σχεδόν έξι αιώνες πριν την εμφάνιση της *Άλγεβρας* του Α-Χ. Ιστορικοί όπως οι G.H.F.Nesselman, P.Tannery, T.L.Health, S.Gandz, J.Klein αλλά και πιο σύγχρονοι όπως οι I.G.Bashmakova, V.d.Waerden, Γ.Χριστιανίδης, J.Oaks συμμερίζονται την άποψη ότι το έργο του Διόφαντου έχει αλγεβρικά χαρακτηριστικά. Από την άλλη μεριά ο Rashed όχι μόνο εξαιρεί τα *Αριθμητικά* από την αλγεβρική παράδοση, αλλά υποβαθμίζει και την εγκυρότητα των επιχειρηματιών όλων των ιστορικών που είναι υπέρ της παραπάνω άποψης, χαρακτηρίζοντάς την, απλώς "μια γενικά αποδεκτή γνώμη".

Επιπροσθέτως η θέση που υποστηρίζει ο Rashed, δηλαδή ότι η απαρχή της άλγεβρας έγινε με τον Α-Χ και το έργο του, φαίνεται να αναιρείται, εκτός των άλλων, και από στοιχεία προερχόμενα από την Ινδική μαθηματική παράδοση. Για παράδειγμα στο έργο του Μπραχμαγκούπτα βρίσκουμε κανόνες για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης[221], οι οποίοι έχουν μεγάλη ομοιότητα με εκείνους που χρησιμοποιεί ο Α-Χ στην *Άλγεβρα*. Επιπλέον γνωρίζουμε από ιστορικές μελέτες, ότι υπήρξε διάδοση των Ινδικών μαθηματικών ήδη από το δεύτερο μισό του 8ου αιώνα στον Ισλαμικό κόσμο. Μάλιστα, ο ίδιος ο Α-Χ αναφέρει στο βιβλίο του δύο προσεγγίσεις του **π** τις οποίες, όπως γράφει, χρησιμοποιούν οι Ινδοί μαθηματικοί.

Ας έλθουμε όμως τώρα, στην τρίτη παραδοχή του Rashed. Όπως υποστηρίζει, ο νέος κλάδος της άλγεβρας που θεμελιώνει το βιβλίο του Α-Χ, αποτελεί μια νέα παράδοση υπολογισμού η οποία δεν έχει σχέση με τις προηγούμενες. Το ερώτημα που προκύπτει από αυτή την παράδοση είναι: υπάρχουν μέθοδοι υπολογισμού σε παραδόσεις προγενέστερες του Α-Χ, οι οποίες σχετίζονται με ανάλογες μεθόδους που περιέχονταν στην *Άλγεβρα*; ή με άλλα λόγια, αποτελεί η *Άλγεβρα* συνέχεια κάποιας παράδοσης στις μεθόδους υπολογισμού; Όπως ήδη αναφέραμε ο Α-Χ ασχολείται με τις πρακτικές μεθόδους υπολογισμού. Το βιβλίο του παρουσιάζει την εφαρμογή των μεθόδων στην επίλυση προβλημάτων. Αρκετοί ιστορικοί έχουν επισημάνει την ομοιότητα ανάμεσα στις μεθόδους του Α-Χ και σε ανάλογες μεθόδους προηγούμενων μαθηματικών

[221] [Rashed 2009,77]

παραδόσεων. Παραδείγματος χάριν, ο Oaks υπογραμμίζει την ομοιότητα στην δομή της αλγεβρικής επίλυσης προβλήματος που υπάρχει ανάμεσα στο βιβλίο του Α-Χ και τα *Αριθμητικά*. Πολλοί ιστορικοί σημειώνουν το στοιχειώδες μαθηματικό επίπεδο του βιβλίου του Α-Χ. Ο ίδιος ο Rashed παρατηρεί "μοιάζει πολύ στοιχειώδες σε τεχνικό επίπεδο". Όμως η μοναδική ερμηνεία που έχει τη δυνατότητα να δώσει είναι, "η απλότητα χαρακτηρίζει τα μεγάλα θεωρήματα εγχειρήματα". Υπάρχει μια εναλλακτική ερμηνεία; Όπως έχουν υποστηρίξει οι J. Oaks και J. L. Berggren, την εποχή του Α-Χ υπήρχε μια προφορική παράδοση άλγεβρας. Ο υπολογισμός με άλγεβρα εμφανιζόταν σε πρακτικά προβλήματα. Ο Α-Χ στην *Άλγεβρα* αποτύπωσε γραπτά αυτή την παράδοση. Κατά συνέπεια το ίδιο το στοιχειώδες επίπεδο του βιβλίου προκύπτει ως αποτέλεσμα δύο παραγόντων. Ο πρώτος παράγοντας είναι η στενή σύνδεση του με την προφορική παράδοση από την οποία προέρχεται. Η ίδια η παράδοση εξυπηρετεί τις ανάγκες των επαγγελμάτων, το επίπεδό της λοιπόν δεν μπορεί παρά να είναι στοιχειώδες. Ο δεύτερος παράγοντας προκύπτει από την επιλογή του ίδιου του Α-Χ. Όπως αναφέρει στην εισαγωγή του, σκοπεύει να γράψει ένα βιβλίο σύντομο και χρήσιμο για τις ανάγκες των επαγγελματιών. Επομένως η απάντηση στο ερώτημα που αφορά στις παραδόσεις υπολογισμού, είναι καταφατική. Πράγματι ο Α-Χ με το βιβλίο του συνεχίζει τις προγενέστερες παραδόσεις στον υπολογισμό με άλγεβρα. Όπως εύστοχα παρατηρεί ο Netz, ο Α-Χ κατάφερε "να συνδυάσει τα διάφορα νήματα της παράδοσης που είχε κληρονομήσει".

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Al- Khwarizmi, (1831)1997. *The algebra of Mohammed ben Musa,* translated and edited by Frederic Rosen. London.Reprinted in: Islamic Mathematics and Astronomy. Vol.1.

Al-Khwarizmi, 2007. *Al-Khwarizmi: Le Commencement de l' Algebre*. Texte etabli traduit et commente par Roshdi Rashed.Paris: Blanchard.

Bashmakova, I.G. and Smirnova, G., 2000. *The Beginnings and Evolution of Algebra*. Translated from the Russian. The Mathematical Association of America.

Berggren, J.L., 1986. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York: Springer – Verlag

Berggren, Lennart, J., 2007. *Mathematics in Medieval Islam*. Ed. Victor Katz. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A Sourcebook. Princeton University Press.

Heath,Thomas.,1981.*A History of Greek Mathematics*. Vol.II. Dover Publications, Inc. New York.

Høyrup, J., 2002. *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin*. Springer Verlag, New York.

Hughes, B.(Ed.)1989.*Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khwarizmi's al-Jabr*. A new Critical Edition. Franz Steiner, Stuttgart.

Gandz, S.,1997. "*The sources of al-Khwarizmi's algebra*" Osiris1,1936.pp.263-277.
……. "*The origin and development of quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra*." Osiris 3
…… "*The algebra of inheritance: A rehabilitation of al-Khwarizmi*."Osiris *5*, 319-391. Reprinted in: Islamic Mathematics and Astronomy. Vol.6.

Karpinski, L.C.(Ed.)(1915)1997. *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarismi*. New York.

Kasir, David S.,1931. *The Algebra of Omar Khayyam.* New York: Teachers College, Columbia University.(Reprinted 1998 in IM & A volume 45.)

Klein, J., 1968. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge, MA. MIT Press.

Klein, J.,1998. Ο κόσμος της φυσικής και ο «φυσικός» κόσμος. *Νευσις*,41-74.

Lindberg, D.C., 1997. *Οι απαρχές της δυτικής επιστήμης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Netz, Reviel, 2004. *The transformation of Mathematics in the Early Mediterranean World: From Problems to Equations*. Cambridge University Press.

Oaks, Jeffrey A. and Alkhateed, Haitham M., 2005"*Māl* enunciations, and the prehistory of Arabic algebra". *Historia Mathematica* 32, 400 – 425.

Oaks, Jeffrey A., 2007 " Arabic algebra as an artificial Language". *Journal of Indian Philosophy* 35, 543 – 575.

Oaks, Jeffrey A., 2009. "Polynomials and equations in Arabic algebra". *Archive for History of Exact Sciences* 63, 169 – 203.

Oaks, J.A., 2010. "Polynomials and equations in medieval Italian algebra".*Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche* ,30,(1),23-60

Rashed, R. ,1996. "Algebra". *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, vol.2, pp. 349-375. London/New York.

Rashed, Roshdi.,2007.*Al-Khwārizmi: Le Commencement de l'Algebre.*(Paris: Blanchard)

Rashed, Roshdi, 2009. *Al-Khwārizmi: The Beginings of Algebra* (London: SAQI)
Sabila, G., 1972. “The meaning of al-jabr wa’l-muqabalah”. *Centaurus* 17, 189-204.

Toomer, G.J., 1970-1990. “Al-Khwarismi”. *Dictionary of Scientific Biography*. (Ed. Gillispie, C.C., Scriber, New York.)

Van der Waerden, B.L., 2006. *Υπεράσπιση μιας “σκανδαλώδους” άποψης*. Στο: Διαμάχες για την Ιστορία των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

Van der Waerden, B.L,2003. *Η αφύπνιση της επιστήμης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

Γκουγκενέμ, Συλβαίν,.2009. *Ο Αριστοτέλης στο Μον-Σαιν-Μισέλ*. Εκδόσεις Ολκός. Αθήνα.

Γούτας, Δημ.,2001. *Η αρχαία Ελληνική σκέψη στον Αραβικό πολιτισμό.*. Εκδόσεις Περίπλους.

Νετς, Ρέβιελ,2010.*Η μετεξέλιξη των Μαθηματικών στον πρώιμο Μεσογειακό κόσμο.* Εκδόσεις Ενάλιος. Αθήνα.

Σταμάτης, Ε., 1963. (επιμ.) *Διοφάντου Αριθμητικά. Η Άλγεβρα των Αρχαίων Ελλήνων*. Έκδοση: ΟΕΔΒ. Αθήνα.

Χριστιανίδης,Γιάννης.,1994. Η Αραβική συμβολή στην αναγέννηση του Διόφαντου. *Νεύσις*, 1,121-134

Χριστιανίδης,Γιάννης.,2008. “Η μέθοδος του Διόφαντου για την επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων και η ρήξη με την παλαιά λογιστική παράδοση” *Νεύσις* 17, 183-234.

Χριστιανίδης,Γιάννης.,2008*. *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

Χριστιανίδης, Γ., Διαλέτης, Δ.,2004. *Εισαγωγή* από τη συλλογή άρθρων: *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.