ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

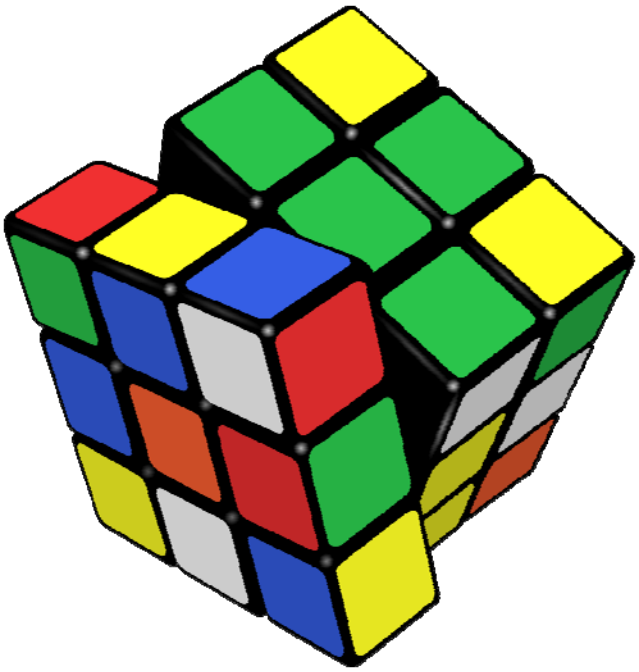
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

ΑΠΟ ΤΑ ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΩΣ ΤΗΝ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ SO(4)

Θάνος Πετρόπουλος



Διπλωματική Εργασία
Επιβλέπων Καθηγητής: Διονύσιος Λάππας

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Λάππας Διονύσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	.....
2) Ράπτης Ευάγγελος	Καθηγητής	.....
3) Βάρσος Δημήτριος	Καθηγητής	.....

Ευχαριστώ

τα μέλη της τριμελούς επιτροπής:

- Ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Δ. Λάππα, για την τιμή που μού έκανε να μού εμπιστευθεί την ανάπτυξη του συγκεκριμένου θέματος, τη μελέτη της Ορθογώνιας Ομάδας Ο(4), ωθώντας με σε περιοχή των μαθηματικών αρκετά απαιτητική και ταυτόχρονα πρωτόγνωρη για μένα. Η πρόκληση ήταν μεγάλη και η χαρά της γνώσης ανάλογη. Η ευρεία, σφαιρική και βαθειά αντίληψή του γύρω από τις βασικές έννοιες που μελετούσα γέννησαν συζητήσεις που κάθε φορά διεύρυναν τους μαθηματικούς και φιλοσοφικούς μου ορίζοντες.
- Τον καθηγητή κύριο Ευάγγελο Ράπτη. Οι διαλέξεις του στην άλγεβρα κατέστησαν την Αφηρημένη Άλγεβρα τον κλάδο της ιδιαίτερης προτίμησής μου, δείχνοντάς μου το δρόμο της επιστημονικής κατάκτησης ενός θέματος που με γοήτευε ανέκαθεν, εκείνο των πλατωνικών στερεών και της έννοιας της συμμετρίας. Τον ευχαριστώ ακόμα θερμά για τον πολύτιμο χρόνο του που πρόθυμα και αφειδώς αφιέρωσε, βοηθώντας στη επίλυση πολλών μου απορριών.
- Τον καθηγητή κύριο Δημήτρη Βάρσο, για την ευγενική του διαθεσιμότητα ως μέλους της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής.

τη σύζυγό μου Δήμητρα Σταυροπούλου. Επωμιζόμενη επί μήνες δυσανάλογα μεγάλο οικογενειακό βάρος, στήριξε με αγάπη την προσπάθεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Η εικόνα του εξωφύλλου: Ο κύβος του Rubik.
Υπάρχει στη διεύθυνση http://en.wikipedia.org/wiki/File:Rubik%27s_cube.svg

Αφιερώνεται στον πατέρα μου Παναγιώτη Πετρόπουλο.

Όταν στα παιδικά μου χρόνια μού δίδασκε τη «χαρά των μαθηματικών», ενστάλαζε μέσα μου μια αγάπη γι' αυτά, η οποία θα καθόριζε την υπόλοιπη ζωή μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 9

Στιγμές στην πορεία της έννοιας της Συμμετρίας 9

Κανονικότητα 14

Τετράνια και Ορθογώνιες ομάδες 16

Κεφάλαιο 1: Αλγεβρική υποδομή 18

Στοιχεία θεωρίας ομάδων 18

Έννοιες από τη γραμμική άλγεβρα 22

Διανυσματικοί χώροι 22

Γραμμικές απεικονίσεις – πίνακες 23

Αναλλοίωτοι υπόχωροι – ιδιοτιμές 25

Κεφάλαιο 2: Η Ορθογώνια Ομάδα $O(n)$ 26

Εσωτερικό γινόμενο 26

Η έννοια της γωνίας στον $\mathbb{R}^n$ 28

Ευκλείδεια μετρική και ισομετρίες 29

Η Γενική Γραμμική Ομάδα $GL(n)$ 31

Η Ειδική Γραμμική Ομάδα $SL(n)$ 32

Η Ορθογώνια Ομάδα $O(n)$ 33

Η $O(n)$ ως ομάδα (ορθογωνίων) πινάκων 37

Η απλοποιημένη αναπαράσταση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού 40

Η Ειδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(n)$ 47

Σχέσεις μεταξύ ισομετριών, μεταφορών και ορθογωνίων απεικονίσεων στον $\mathbb{R}^n$ 49

Κατοπτρισμοί στον $\mathbb{R}^n$ 53

Κεφάλαιο 3: Στροφές και κατοπτρισμοί στις 2 διαστάσεις 60

Αναπαραστάσεις των ορθογωνίων απεικονίσεων του $\mathbb{R}^2$ 61

$1^η$ εκδοχή: Μέσω μιγαδικών αριθμών 61

$2^η$ εκδοχή: Με χρήση πινάκων 71

Πεπερασμένες υποομάδες της O(2) 72

Στροφές και κατοπτρισμοί στο $\mathbb{R}^2$ 75

Αναπαραστάσεις όλων των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$ 77

Τα τέσσερα είδη ισομετριών στο επίπεδο 81

Κεφάλαιο 4: Κανονικότητα και συμμετρίες στο χώρο $\mathbb{R}^3$ 87

Τα Πλατωνικά στερεά 88

Η δυσκολία της έννοιας του κανονικού πολυέδρου 92

Περιγραφή και κατασκευή των πλατωνικών στερεών 98

Η μοναδικότητα των Πλατωνικών στερεών 109

Δυϊκότητα 116

Οι Ομάδες Συμμετριών των Πλατωνικών Στερεών 119

Πεπερασμένες υποομάδες της *SO*(3) 141

Κεφάλαιο 5: Τα Τετράνια (quaternions) 150

Η άλγεβρα των τετρανίων 150

Πώς το $\mathbb{R}$ περιέχεται στο $\mathbb{H}$. 151

Τετρανικές μονάδες 152

Συζυγή τετράνια 153

Εναλλακτικές αναπαραστάσεις των τετρανίων 154

Σχεδόν Σώμα 155

Τετράνια και περιστροφές του $\mathbb{R}^3$ 156

Γινόμενο καθαρών τετρανίων 157

Γινόμενο ενός μοναδιαίου τετρανίου με ένα κάθετο καθαρό τετράνιο 158

Στροφή τυχαίου καθαρού τετρανίου μέσω συζυγίας με μοναδιαίο τετράνιο 159

Η δράση της S^3 επί του $\mathbb{R}^3$ 161

Σχέση της S^3 με την Ειδική Ορθογώνια Ομάδα *SO*(3) 163

Κεφάλαιο 6: Η ιδιαιτερότητα της *SO*(4) 167

Απλότητα (simplicity) της SO(3) 167

Το κέντρο της ομάδας των ορθογωνίων απεικονίσεων 173

Η απλότητα της *SO*(*n*) για διαστάσεις ανώτερες του 4 174

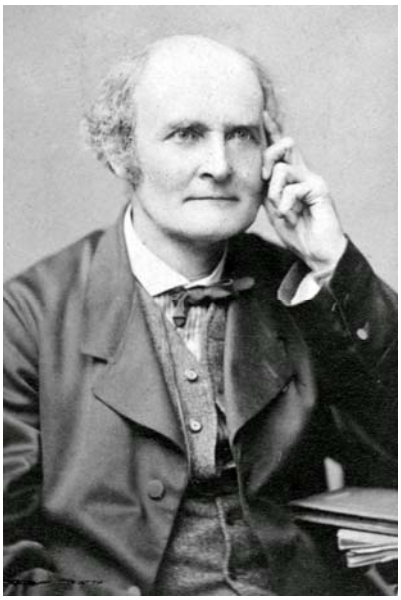
Η ιδιαιτερότητα της *SO*(4) 177

Ευρετήριο όρων 185

Ευρετήριο εικόνων 187

Οδηγός βιβλιογραφίας ανά κεφάλαιο 188

Βιβλιογραφία 190



Εικόνα 1. Arthur Cayley

As for everything else, so for a mathematical theory:

Beauty can be perceived but not explained.

Arthur Cayley

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

ΑΠΟ ΤΑ ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΩΣ ΤΗΝ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ SO(4)

Τι είναι η Ομάδα Ορθογωνίων Απεικονίσεων O(n);

Γιατί είναι κεντρικού ενδιαφέροντος μαθηματικό αντικείμενο;

Τι σχέση έχει με τις ισομετρίες του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$;

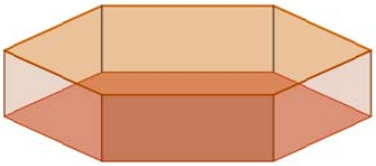
Ποια γεωμετρικά σχήματα λέγονται Κανονικά;

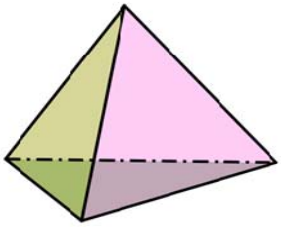
Πόσο ακριβής ήταν ο Ευκλείδης, όταν, στην τελευταία πρόταση (18η) τού τελευταίου βιβλίου (XIII) των *Στοιχείων*, δήλωνε:

«Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα [ενν. τα πλατωνικά στερεά] *οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.»*;

Πώς η Θεωρία Ομάδων αποκρυσταλλώνει την έννοια της Συμμετρίας;

Ποιο από τα παρακάτω σχήματα είναι περισσότερο συμμετρικό;



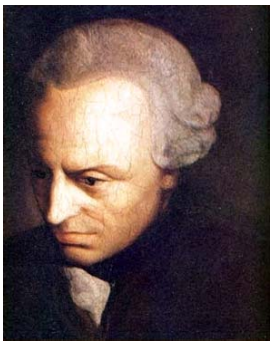


Τι είναι τα Τετράνια (*quaternions*);

Πώς οδηγούν στη μελέτη της εσωτερικής δομής της Ειδικής Ορθογώνιας Ομάδας του $\mathbb{R}^4$;

Εισαγωγή

"All human knowledge begins with intuitions,
thence passes to concepts
and ends with ideas."
Kant, Kritik der reinen Vernunft,
Element arlehre, Part 2, Sec. 2[1].



Εικόνα 2. Immanuel Kant

Στιγμές στην πορεία της έννοιας της Συμμετρίας

Στο τίτλο αυτής της εργασίας δύο λέξεις πρωταγωνιστούν: κανονικότητα και συμμετρία. Αρχίζοντας από τη δεύτερη, είναι συχνό να συνδέει κανείς την έννοια αυτή με την αίσθηση του ωραίου. Στο εισαγωγικό σημείωμα του κλασικού του βιβλίου «*Συμμετρία*» ο Herman Weyl επισημαίνει ότι γίνεται διττή χρήση της λέξης στην καθομιλούμενη:

Εικόνα 3. Herman Weyl

«Αν δεν κάνω λάθος η λέξη συμμετρία στην καθημερινή μας γλώσσα χρησιμοποιείται με δύο τρόπους. Κατά τη μία έννοια, συμμετρικό είναι κάτι που έχει καλές αναλογίες, κάτι που είναι καλά ισορροπημένο και η συμμετρία υποδηλώνει αυτό το είδος αρμονίας αρκετών μερών, μέσω της οποίας ενοποιούνται σε ένα όλο. Η ομορφιά είναι σύμφυτη με την συμμετρία.»

[1] Εντοπίστηκε στο: The Foundations of Geometry DAVID HILBERT; PH. D. PROFESSOR OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF GOTTINGEN AUTHORIZED TRANSLATION BY E. J. TOWNSEND. PH. D. UNIVERSITY OF ILLINOIS.

Με αυτή την έννοια χρησιμοποιεί τη συμμετρία ο σπουδαίος γλύπτης του πέμπτου π.Χ. αιώνα Πολύκλειτος και είναι ο πρώτος, απ' όσο γνωρίζουμε, που την συνδέει με τα μαθηματικά και τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος· μια προσέγγιση που θα αναπτύξει συστηματικά ο κατά γενική ομολογία μεγαλύτερος Γερμανός καλλιτέχνης της Αναγέννησης (ζωγράφος και χαράκτης) Albrecht Dürer, δίνοντας το 1528 ένα κανόνα για τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος στην πραγματεία του «*Τα τέσσερα βιβλία των ανθρώπινων αναλογιών*» (*Vier Bucher von menschlicher Proportion*).

Εικόνα 4. Albrecht Dürer

Τον τέταρτο π.Χ. αιώνα ο Αριστοτέλης στα "Ηθικά Νικομάχεια" μιλά για τη συμμετρία με την έννοια του «μέσου μέτρου», το μέσο προς το οποίο θα πρέπει οι ενάρετοι να στοχεύουν με τις πράξεις τους· κι ακόμα, ο φιλόσοφος Γαληνός της Περγάμου, γνωστός για τη μεγάλη του επιρροή στην Ιατρική επιστήμη της Ευρώπης, στο βιβλίο του «*Περί Κράσεων*» αναφέρει: "*σύμμετρον όπερ εκατέρου των άκρων απέχει*".

Η παραπάνω προσέγγιση μας φέρνει κοντά στη δεύτερη εκδοχή της έννοιας της συμμετρίας συνδέοντάς τη με την ιδέα της αμφίπλευρης συμμετρίας, της λεγόμενης κατοπτρικής κι αυτή με τη σειρά της συνδέεται με την προσπάθεια προσδιορισμού της έννοιας του προσανατολισμού ως σύμφυτης ιδιότητας του χώρου. Το 1768 ο Immanuel Kant εκδίδει το δοκίμιο «*Σχετικά με το έσχατο υπόβαθρο για τη διαφοροποίηση της κατεύθυνσης στο χώρο*», που θα αποτελούσε και σημείο καμπής της φιλοσοφικής ανάπτυξης των ιδεών του προς την κατεύθυνση του υπερβατικού ιδεαλισμού, καθώς προσπαθεί να υποσκάψει την σχετικιστική προσέγγιση του Leibniz για το χώρο, προπαγανδίζοντας τους ισχυρισμούς του Newton περί του απόλυτου χώρου. Στην εργασία αυτή ο Kant φτάνει πολύ κοντά στη σύγχρονη ιδέα περί συμμετρίας, ορίζοντας την έννοια του «μη συμπτώσιμου αντίγραφου» (για παράδειγμα, το αριστερό χέρι ενός ανθρώπου είναι μη συμπτώσιμο αντίγραφο του δεξιού του χεριού). Εντούτοις ο Kant φαίνεται να μην αντιλαμβάνεται τελικά την ιδέα του κατοπτρισμού ως ένα φαινόμενο συμμετρίας. Γι' αυτόν, η έννοια της συμμετρίας εμπεριέχει κάποια ιδέα ισορροπίας, ή ισότητας, σίγουρα όμως όχι τη σημερινή αντίληψη περί συμμετρίας, που σημαίνει επίθεση μέσω ενός μετασχηματισμού. Και πράγματι, στο δοκίμιο περί προσανατολισμού του χώρου, ο Kant χρησιμοποιεί τη λέξη συμμετρία, χωρίς ποτέ να τη συνδέει με την ιδέα του κατοπτρικού ειδώλου. Ένα παράδειγμα της διαφοροποίησης αυτής διαφαίνεται, όταν σ' ένα σημείο της εργασίας του γράφει:

«*Προκειμένου να επιδείξουμε την πιθανότητα ενός τέτοιου πράγματος [δηλαδή, ενός μη συμπτώσιμου αντιγράφου], ας θεωρήσουμε ένα σώμα, όχι που να αποτελείται από δύο μισά τα οποία είναι συμμετρικά τοποθετημένα σε σχέση με ένα μοναδικό τέμνον επίπεδο, αλλά μάλλον, ας πούμε, ένα ανθρώπινο χέρι.*»

Είναι αλήθεια ότι πριν το 1794, (άρα και τότε που ο Kant γράφει το δοκίμιό του), δεν έχει διατυπωθεί ακόμα η σύγχρονη (σημερινή) έννοια της συμμετρίας. Την εποχή αυτή η λέξη συμμετρία αποδίδει μόνο την ιδέα της ισορροπίας. Παράλληλα, από το δεύτερο μισό του 17^{ου} αιώνα έχουμε τον πρώτο σαφή ορισμό της συμμετρίας, στην μετάφραση που κάνει ο Claude Perrault στο έργο του Βιτρούβιου «*De Architectura*», το 1674:

Συμμετρία σημαίνει μόνο μια Σχέση Ισοτιμίας και Ισότητας (parité & égalité).

Είναι η πρώτη φορά που η έννοια δραπετεύει από την παραδοσιακή βιτρουβιανή αντίληψη που θεωρεί τη συμμετρία ως μια ειδική περίπτωση αναλογίας, δηλαδή τη σχέση μεταξύ δομικού στοιχείου και πλήρους οικοδομήματος. Εντούτοις, μέχρι σχεδόν το τέλος του 18^{ου} αιώνα, η συμμετρία φέρει την έννοια της ισορροπίας και της αναλογίας, δεν ενέχει όμως την κρίσιμη έννοια του μετασχηματισμού.

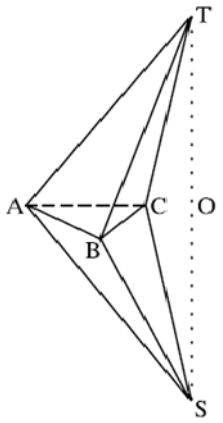
Η συγκυρία που θα δρομολογήσει τις εξελίξεις προς τη σύγχρονη έννοια της συμμετρίας συμβαίνει το 1794 με τον ορισμό που ο Adrien-Marie Legendre περιλαμβάνει σ' ένα σύγγραμμα στοιχείων γεωμετρίας, σχετικά με τις στερεές γωνίες:

Εικόνα 5. A. M. Legendre

«*Δυο ίσες στερεές γωνίες που σχηματίζονται (από τις ίδιες επίπεδες γωνίες), αλλά σε αντίστροφη σειρά θα καλούνται γωνίες ίσες μέσω συμμετρίας, ή απλά* ***συμμετρικές γωνίες****.*»

Ακολούθως, ορίζει την έννοια των συμμετρικών πολυέδρων:

«*Θα καλώ* ***συμμετρικά πολύεδρα*** *δυο πολύεδρα που έχοντας μια κοινή βάση, είναι κατασκευασμένα παρομοίως, έτσι ώστε το ένα να βρίσκεται πάνω από το επίπεδο αυτής της βάσης και το άλλο από κάτω, με τη συνθήκη ότι οι κορυφές των αντιστοίχων στερεών γωνιών βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από το επίπεδο της βάσης, πάνω στην ίδια κάθετη προς το επίπεδο ευθεία.*»



Εικόνα 6. Το σχήμα του Legendre που εικονογραφεί τα συμμετρικά πολύεδρα (Legendre [1794] 1813, Plate 9, fig. 202)

Με την προσέγγιση αυτή ο Legendre μαθηματικοποιεί και αναπλάθει το νόημα μιας λέξης που προηγουμένως είχε μια τελείως διαφορετική σημασία. Κατά τον καθηγητή φιλοσοφίας Giora Hon[2], η επιλογή του όρου *συμμετρία* από τον Legendre είναι αυθαίρετη. Ο όρος *Summetria* (σύμμετρα μεγέθη), ο οποίος στο Βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη περιγράφει την αμοιβαία σχέση δύο ομοειδών ποσοτήτων (ανεξάρτητα από τη χωρική τους τοποθέτηση) που έχουν κοινό μέτρο, έχει ήδη αντικατασταθεί από τη λέξη *commensurability*, κι έτσι ο όρος *Symmetry* είναι διαθέσιμος. Αν ο Legendre είχε χρησιμοποιήσει μια άλλη λέξη, ή έκφραση, για παράδειγμα τα καντιανά *μη συμπτώσιμα αντίγραφα*, ίσως σήμερα να τη χρησιμοποιούσαμε κι εμείς.

Εικόνα 7. Giora Hon

Κατά τις δεκαετίες που ακολουθούν μέσα στον 19^{ο} αιώνα και τις αρχές του 20^{ου}, τα μαθηματικά που θα υποστηρίξουν την έννοια της συμμετρίας αναπτύσσονται ραγδαία, για να φτάσει η συμμετρία να ορίζεται ως μια αυστηρά καθορισμένη σχέση ισορροπίας, ή αυτοομοιότητας, στα πλαίσια της γεωμετρίας, ή άλλων τυπικών συστημάτων, όπως η φυσική. Είναι γνωστό το «θεώρημα της Noether» στην κανονική ανάλυση:

«*Κάθε συμμετρία ισοδυναμεί με τη διατήρηση ενός φυσικού μεγέθους*»,

[2] Τμήμα Ανθρωπιστικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο της Χάιφα (τουλάχιστον κατά το ακαδημαϊκό έτος 2010-11).

σύμφωνα με το οποίο, όταν για παράδειγμα ένα σύστημα βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση του τελεστή Hamilton (τελεστή ενέργειας), τότε η ενέργεια του συστήματος είναι διατηρήσιμο μέγεθος, ή αλλιώς το σύστημα είναι συμμετρικό ως προς τον χρόνο, δηλαδή ανεξάρτητο του χρόνου. Αντίστοιχα, όταν το σύστημα είναι ανεξάρτητο ως προς τις μετατοπίσεις στο χώρο, διατηρήσιμο μέγεθος είναι η Ορμή, δηλαδή έχουμε συμμετρία χωρικής μετατόπισης (Translational Symmetry), ενώ, όταν το σύστημα είναι ανεξάρτητο ως προς τις περιστροφές, έχουμε Περιστροφική Συμμετρία (Rotational Symmetry) και τότε διατηρήσιμο μέγεθος είναι η στροφορμή.

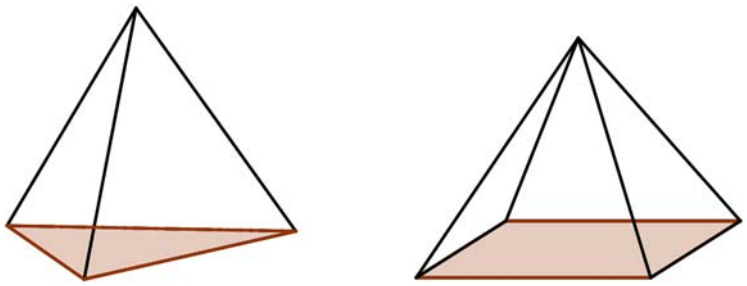
Εικόνα 8. Emmy Noether

Στο δεύτερο ήμισυ του 19^{ου} αιώνα οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες έχουν ήδη αναπτυχθεί, όταν το 1872 ο Felix Klein εκδίδει, για την εναρκτήρια διάλεξή του ως καθηγητή στο Ερλάνγκεν, ένα μανιφέστο υπό τον τίτλο «Συγκριτικές παρατηρήσεις πάνω σε νέες γεωμετρικές έρευνες» (*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*). Στη διακήρυξη αυτή, γνωστή ως **Πρόγραμμα Ερλάνγκεν**, προτείνει μια νέα κατηγοριοποίηση των γεωμετριών στη βάση της προβολικής γεωμετρίας και της θεωρίας ομάδων. Είναι εδώ, που η αφηρημένη άλγεβρα και η θεωρία ομάδων θα θεωρητικοποιήσουν την έννοια της συμμετρίας. Σε κάθε γεωμετρία ο Klein αντιστοιχίζει μια ομάδα συμμετριών, δηλαδή μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτα κάποια χαρακτηριστικά των γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ. γωνίες, εμβαδά, μήκη). Για την ευκλείδεια γεωμετρία, οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι οι ισομετρίες, που αποτελούν υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$.

Εικόνα 9. Felix Klein

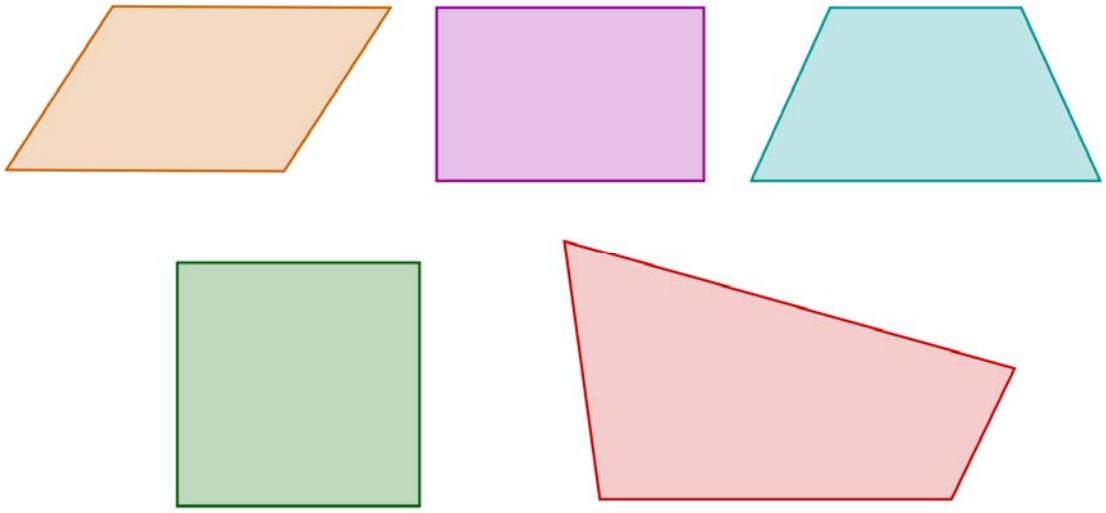
Στην παρούσα εργασία η συμμετρία προσεγγίζεται με αυτή τη σύγχρονή της έννοια, από τη σκοπιά των μαθηματικών: μέσω απεικονίσεων του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του, οι οποίες διατηρούν τις μορφές, τα σχήματα, τις σχετικές αποστάσεις και τις γωνίες.

Αν έπρεπε να χαρακτηρίσετε ένα από τα παρακάτω σχήματα ως «κανονικό», ποιο θα επιλέγατε;



Σχήμα 1

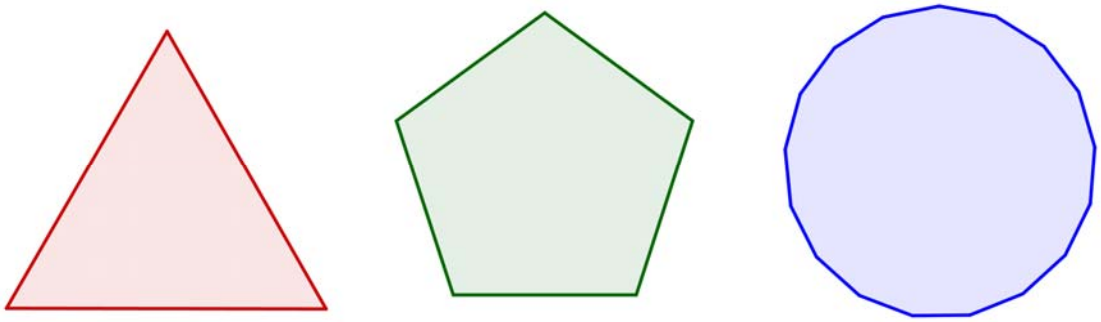
Αν πάλι σας ζητούσαν να ταξινομήσετε ως προς την κανονικότητά τους τα τετράπλευρα που φαίνονται στο Σχήμα 2, με ποια σειρά θα τα βάζατε;



Σχήμα 2

Η έννοια της κανονικότητας, αν και απλή στον ορισμό και τη διατύπωσή της, όταν πρόκειται για επίπεδα σχήματα του $\mathbb{R}^2$, γίνεται αρκετά δύσκολη και απαιτεί προσοχή, όταν περνάμε στον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$. Είναι γνωστός από τα σχολικά μαθηματικά ο ορισμός του κανονικού πολυγώνου:

ένα πολύγωνο που έχει ίσες όλες τις πλευρές του καθώς και όλες τις γωνίες του.



Σχήμα 3. Κανονικά πολύγωνα

Κανονικά, λοιπόν, σχήματα στο επίπεδο υπάρχουν άπειρα: ένα κανονικό *ν*-γωνο για κάθε τιμή του $\nu \in \mathbb{N}, \quad \nu \geq 3$. Το κορυφαίο σύγγραμμα του Ευκλείδη, τα *Στοιχεία*, αρχίζει με την κατασκευή του «πρώτου» κανονικού σχήματος στο επίπεδο, του ισοπλεύρου τριγώνου και τελειώνει με την απόδειξη ότι τα πέντε Πλατωνικά Στερεά είναι τα μόνα δυνατά κανονικά σχήματα στον τρισδιάστατο χώρο.

Τόσο η κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου, όσο εκείνη του τετραγώνου, του πενταγώνου και του εξαγώνου και γενικά, η κατασκευή κανονικού πολυγώνου με πλήθος πλευρών 2^n, $3 \cdot 2^n$, ή $5 \cdot 2^n$ με κανόνα και διαβήτη είναι εύκολη και γνωστή από την αρχαιότητα. Χρειάστηκε όμως να φτάσουμε στο τέλος του 18ου αιώνα, ώσπου, το 1796 ο Carl Friedrich Gauss να επινοήσει μια κατασκευή τού κανονικού 17-γώνου σε ηλικία μόλις 19 ετών (το τρίτο πολύγωνο στο Σχήμα 3). Ο ενθουσιασμός του γι' αυτό το επίτευγμα, θα αποτελέσει και το τελικό του κίνητρο, ώστε να αποφασίσει να ασχοληθεί με τα μαθηματικά, αντί με τη φιλοσοφία.

Εικόνα 10. C. F. Gauss

Ο ίδιος ο Gauss, πέντε χρόνια αργότερα διατύπωσε και απέδειξε μια ικανή συνθήκη κατασκευασιμότητας ενός κανονικού ν-γώνου:

Ικανή συνθήκη για να είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη ένα κανονικό ν-γωνο είναι το πλήθος *ν* των πλευρών του να είναι γινόμενο μιας δύναμης του 2 με οποιονδήποτε γινόμενο πρώτων αριθμών του Fermat[3].

[3] Αριθμοί του Fermat: θετικοί ακέραιοι της μορφής $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Τον ισχυρισμό του Gauss ότι η συνθήκη είναι και αναγκαία απέδειξε ο Pierre Wantzel[4] το 1837. Μέχρι σήμερα, μόνο πέντε πρώτοι αριθμοί του Fermat είναι γνωστοί:

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ και $F_4 = 65537$.

Το 1832, ο εικοσιτετράχρονος γερμανός μαθηματικός F. J. Richelot (1808-1875), μαθητής του Carl Gustav Jacob Jacobi, παρουσίασε με τη διατριβή του την κατασκευή του κανονικού 257-γώνου.

Το 1894 ο Johann Gustav Hermes, μετά από δεκαετή προσπάθεια, στο διακοσίων σελίδων χειρόγραφό έργο του με τίτλο «Σχετικά με τη διαίρεση του κύκλου σε 65537 ίσα κομμάτια» (*Über die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile*), κατάφερε να κατασκευάσει το κανονικό 65537-γωνο με αποκλειστική χρήση κανόνα και διαβήτη.

Περνώντας τώρα στον $\mathbb{R}^3$, ποια είναι τα κανονικά σχήματα και πώς ορίζονται;

Στο κεφάλαιο 4 της παρούσας εργασίας θα δώσουμε μερικούς ισοδύναμους ορισμούς για την έννοια του κανονικού πολυέδρου και θα καταλήξουμε σ' έναν εναλλακτικό ορισμό, μέσω του οποίου γενικεύεται η έννοια της κανονικότητας σε κάθε ευκλείδειο χώρο διάστασης *n*, χρησιμοποιώντας εργαλεία της θεωρίας ομάδων. Τέλος, θα δούμε ότι στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πολύεδρα, τα λεγόμενα πλατωνικά στερεά, γνωστά ως προς την ύπαρξη, την κατασκευή και τη μοναδικότητά τους από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

Τετράνια και Ορθογώνιες ομάδες

Αναφέραμε ήδη ότι η συμμετρία στους ευκλείδειους χώρους εκφράζεται με τη χρήση ισομετριών του $\mathbb{R}^n$. Δομικό συστατικό των ισομετριών είναι οι λεγόμενες ορθογώνιες απεικονίσεις. Πρόκειται για τους αυτομορφισμούς του $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν τις γωνίες (χάρη στη διατήρηση του εσωτερικού γινομένου). Στην παρούσα εργασία μελετάμε ενδελεχώς το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών, τη λεγόμενη Ορθογώνια Ομάδα $O(n)$, καθώς και την Ειδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(n)$, που είναι υποομάδα της $O(n)$.

[4] Ο Pierre Wantzel (1814-1848) υπήρξε γάλλος μαθηματικός, γνωστός για τις αποδείξεις του περί του αδυνάτου αφ' ενός της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας, και αφ' εταίρου του διπλασιασμού του κύβου.

Εικόνα 11. W. R. Hamilton

Ισχυρό εργαλείο στη διερεύνηση των ιδιοτήτων της $SO(n)$ αποτελεί αρχικά η άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών (κυρίως για τις περιστροφές του επιπέδου, δηλαδή τα στοιχεία της $SO(2)$) και ακολούθως η επέκταση των μιγαδικών με την επινόηση το 1843 από τον Ιρλανδό William Rowan Hamilton της (ρηξικέλευθης για την εποχή) μη αντιμεταθετικής άλγεβρας των τετρανίων (quaternions). Στα Κεφάλαια 5 και 6 παρουσιάζουμε τη δομή της άλγεβρας των τετρανίων και στη συνέχεια τη χρησιμοποιούμε με δύο στόχους:

- Αφ' ενός για τη μελέτη των περιστροφών του $\mathbb{R}^3$,
- αφ' ετέρου για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι ενώ η Ειδική Ορθογώνια Ομάδα του $\mathbb{R}^n$ είναι απλή για κάθε $n \geq 3$, ειδικά στον $\mathbb{R}^4$ εμφανίζεται μια αξιοσημείωτη ιδιαιτερότητα: η $SO(4)$ δεν είναι απλή.

Η έννοια της απλής ομάδας παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των πεπερασμένων ομάδων, αντίστοιχο κατά κάποιο τρόπο με εκείνον που διαδραματίζουν οι πρώτοι αριθμοί στη θεωρία αριθμών. Όπως οι αριθμοί αναλύονται σε γινόμενα πρώτων παραγόντων τα οποία και αποτελούν τα δομικά τους συστατικά, έτσι και οι ομάδες παριστάνονται ως γινόμενα κανονικών τους υποομάδων με ομάδες πηλίκα. Κατά συνέπεια, μια ομάδα μπορεί να δομηθεί από απλές ομάδες, εκείνες δηλαδή που δεν έχουν κανονικές υποομάδες εκτός από τις συνήθεις (την ίδια την ομάδα και την τετριμμένη, που περιλαμβάνει μόνο το ουδέτερο στοιχείο). Ενώ λοιπόν οι $SO(n)$ είναι «αδιαίρετες», η $SO(4)$ έχει το χαρακτήρα μιας «σύνθετης» ομάδας.

Κεφάλαιο 1: Αλγεβρική υποδομή

L' algèbre n'est qu' une géométrie écrite;

la géométrie n' est qu' une algèbre figurée.

Sophie Germain[5]

Εικόνα 12. S. Germain

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε εκείνα τα στοιχεία από τη θεωρία ομάδων και τη γραμμική άλγεβρα που είναι απαραίτητα για την κατανόηση όσων αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία (και μόνο αυτά). Με τον τρόπο αυτό ο αναγνώστης δεν θα χρειαστεί να αναζητήσει σε άλλα μαθηματικά συγγράμματα τις προαπαιτούμενες έννοιες και προτάσεις, αλλά και τη μαθηματική ορολογία που χρησιμοποιούμε στο κείμενο. Ο εξοικειωμένος με τις έννοιες αυτές αναγνώστης μπορεί να προσπεράσει το Κεφάλαιο 1 χωρίς καμία απώλεια.

Στοιχεία θεωρίας ομάδων

Ομάδα $\langle G,*\rangle$ ονομάζουμε ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη * η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. **Προσεταιριστικότητα**

   $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in G$

2. **Ουδέτερο στοιχείο**

   Υπάρχει στοιχείο $e \in G$, ώστε να ισχύει $\alpha * e = e * \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in G$. Το e λέγεται ταυτοτικό ή ουδέτερο στοιχείο.

3. **Συμμετρικά στοιχεία**

   Για κάθε στοιχείο $\alpha \in G$ υπάρχει $\alpha^{-1} \in G$, ώστε να ισχύει $\alpha * \alpha^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha = e$. Το α^{-1} λέγεται και αντίστροφο του α.

[5] Η φράση αυτή της Germain περιέχεται στο βιβλίο του Artin με τίτλο Algebra.

Το ταυτοτικό στοιχείο είναι μοναδικό, καθώς και το αντίστροφο κάθε στοιχείου της ομάδας.

Αν επιπλέον ισχύει και η αντιμεταθετική ιδιότητα $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in G$, τότε η ομάδα χαρακτηρίζεται **αβελιανή**.

Μια απεικόνιση $f:(G_1,*_1)\to(G_2,*_2)$ μεταξύ δύο ομάδων λέγεται **ομομορφισμός**, όταν για κάθε $a,b\in G_1$ ισχύει η σχέση $f(a*_1 b)=f(a)*_2 f(b)$. Αν επιπλέον ο ομομορφισμός είναι 1–1 και ΕΠΙ, λέγεται **ισομορφισμός**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι δυο ομάδες είναι **ισόμορφες** και γράφουμε συμβολικά $G_1 \cong G_2$. Ένας ισομορφισμός μιας ομάδας *G* επί του εαυτού της ονομάζεται **αυτομορφισμός** της *G*. Το σύνολο των αυτομορφισμών της *G* εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων είναι ομάδα· συμβολίζεται με $Aut(G)$.

Ευθύ γινόμενο δύο ομάδων $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ ονομάζουμε την ομάδα $(G_1\times G_2,*)$, όπου η πράξη $*$ ορίζεται από τη σχέση $(x,y)*(x',y')=(x*_1 x',\ y*_2 y')$.

Αν η *H* είναι μια υποομάδα μιας ομάδας *G*, τότε, για κάθε $a\in G$, το σύνολο $aH=\{ah,\ h\in H\}$ ονομάζεται **αριστερό σύμπλοκο** της *H* εντός της *G* (αντίστοιχα ορίζεται η έννοια του δεξιού συμπλόκου). Το σύνολο των συμπλόκων της *H* στη *G* συμβολίζεται με G/H.

Το πλήθος των αριστερών συμπλόκων της *H* στην *G* ονομάζεται **δείκτης** της *H* στην *G* και συμβολίζεται με $[G:H]$.

Τα αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) σύμπλοκα της *H* αποτελούν μια διαμέριση της *G*: Αν $a,b\in G$, τότε είτε $aH=bH$, είτε $aH\cap bH=\varnothing$. Τα σύμπλοκα μιας υποομάδας έχουν όλα την ίδια ισχύ (τον ίδιο πληθικό αριθμό).

Συχνά η πράξη της ομάδας θεωρείται πολλαπλασιαστική και σημειώνεται με μια τελεία ($\cdot$), ή παραλείπεται εντελώς.

Τάξη ενός στοιχείου μιας ομάδας *G* ονομάζουμε το μικρότερο θετικό ακέραιο για τον οποίο ισχύει $a^n = e$, όπου *e* το ουδέτερο στοιχείο της *G*. Ο ίδιος όρος, **τάξη**, χρησιμοποιείται και για το πλήθος των στοιχείων της ομάδας. Αν η ομάδα έχει τάξη *n* γράφουμε $|G| = n$.

Ένα υποσύνολο *A* μιας ομάδας *G* λέγεται **υποομάδα** της *G* είναι ομάδα, θεωρημένο με την πράξη της *G*. Συμβολικά γράφουμε $A \leq G$.

Ένα μη κενό υποσύνολο *H* μιας ομάδας *G* είναι υποομάδα της *G*, αν και μόνο αν ισχύει $xy^{-1} \in H$ για κάθε $x,\ y \in H$.

Μια υποομάδα *H* μιας ομάδας *G* ονομάζεται **κανονική**, αν και μόνο αν ισχύει $gHg^{-1} \subseteq H$ για κάθε $g \in G$. Ισοδύναμα, η *H* είναι κανονική υποομάδα της G αν και μόνο αν ισχύει $ghg^{-1} \in H$ για κάθε $g \in G$ και $h \in H$. Συμβολικά γράφουμε $H \lhd G$.

Αν η απεικόνιση $f:(G_1,*_1) \to (G_2,*_2)$ μεταξύ δύο ομάδων είναι ένας ομομορφισμός, τότε το σύνολο $Kerf = \{x \in G_1 :\ f(x) = e_2\}$ λέγεται **πυρήνας** της *f*. Ο πυρήνας του ομομορφισμού f είναι κανονική υποομάδα της G_1. Ακόμα ισχύει η ισοδυναμία $Kerf = \{e_1\}$ αν και μόνο αν η f είναι $1-1$. Η **εικόνα** του ομομορφισμού $\mathrm{Im}(f) = \{y \in G_2 :$ υπάρχει $x \in G_1$ με $f(x) = y\}$ είναι υποομάδα της G_2.

Αν $H \trianglelefteq G$, τότε το σύνολο G/H εφοδιασμένο με τη πράξη $(aH)(bH) = (ab)H$ αποτελεί ομάδα. Την ονομάζουμε **ομάδα πηλίκο**.

<u>1° θεώρημα Ισομορφισμών</u>: Αν η $f: G \to H$ είναι ένας ομομορφισμός δύο ομάδων, τότε οι ομάδες $G/Kerf$ και $\mathrm{Im}(f)$ είναι ισόμορφες:

$$G/Kerf \cong \mathrm{Im}(f)$$

Μια ομάδα *G* ονομάζεται **απλή**, όταν οι μόνες κανονικές υποομάδες της είναι η τετριμμένη $I=\{e\}$ και η ίδια η *G*.

Μια ομάδα *G* ονομάζεται **κυκλική**, όταν μπορεί να παραχθεί από ένα στοιχείο. Αν η *G* παράγεται από το *a*, θα γράφουμε $G=\langle a\rangle$.

Μια ομάδα D_n με $n\geq 3$ η οποία παράγεται από 2 στοιχεία *α* και *β*, για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\alpha^n=\beta^2=e$ και $\beta\alpha=\alpha^{-1}\beta$ ονομάζεται **διεδρική**. Είναι $|D_n|=2n$.

Έστω σύνολο $X\neq\varnothing$. **Μετάθεση** του *X* ονομάζουμε κάθε 1–1 και ΕΠΙ απεικόνιση του *X* στον εαυτό του. Το σύνολο των μεταθέσεων του *X* με τη σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί ομάδα.

Αν $X=\{1,2,\ldots,n\}$ τότε η ομάδα των μεταθέσεων του *X* ονομάζεται **συμμετρική ομάδα των *n* στοιχείων** και συμβολίζεται με S_n. Είναι $|S_n|=n!$

Μια μετάθεση $t\in S_n$ λέγεται **κύκλος μήκους *k*** (ή ***k*–κύκλος**) και γράφεται ως $(a_1\,a_2\,a_3\ldots a_k)$ αν υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k\in\{1,2,\ldots,n\}$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\begin{cases} t(a_1)=a_2,\ t(a_2)=a_3,\ldots,t(a_k)=a_1 \\ \text{και}\quad t(b)=b \quad \text{για κάθε b}\notin\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}\end{cases}$

Ένας 2–κύκλος λέγεται **αντιμετάθεση**.

Κάθε *μη* ταυτοτική μετάθεση μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση ανά δύο ξένων μεταξύ τους αντιμεταθέσεων. Μια μετάθεση που γράφεται ως σύνθεση άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων ονομάζεται **άρτια μετάθεση**. Κάθε μετάθεση που γράφεται ως σύνθεση περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων ονομάζεται **περιττή μετάθεση**.

Το σύνολο A_n των άρτιων μεταθέσεων των *n* στοιχείων είναι υποομάδα της S_n, ονομάζεται **εναλλάσσουσα ομάδα** των *n* στοιχείων και είναι τάξης $\frac{n!}{2}$.

Για $n \geq 3$, αν η κανονική ομάδα $N \trianglelefteq A_n$ περιέχει έναν 3–κύκλο, τότε περιέχει όλους τους 3–κύκλους και μάλιστα είναι $N = A_n$.

Οι μεταθέσεις e, $(12)(34)$, $(13)(24)$ και $(14)(23)$ αποτελούν κανονική υποομάδα της A_4. Ονομάζεται **4–ομάδα του Klein**.

Έννοιες από τη γραμμική άλγεβρα

Διανυσματικοί χώροι

Ένα σύνολο V ονομάζεται **γραμμικός ή διανυσματικός χώρος** (δ.χ.) επί ενός σώματος F, όταν είναι εφοδιασμένο με μια (συνήθως προσθετική) πράξη (+) ως προς την οποία είναι αβελιανή ομάδα και ταυτόχρονα έχει μια εξωτερική πράξη (αριθμητικός πολλαπλασιασμός): $(F,V) \to V$, όπου σε κάθε ζεύγος (λ, x) αντιστοιχεί ένα στοιχείο του V, συμβολιζόμενο με λx, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω τέσσερις ιδιότητες:

I. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

II. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

III. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ και

IV. $1x = x$

για κάθε $\lambda, \mu \in F$, $x, y \in V$.

Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου V λέγονται **διανύσματα**.

Υπόχωρος του δ.χ. V ονομάζεται κάθε υποσύνολό του W, για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα: $x+y \in W$ και $\lambda x \in W$, για κάθε $x, y \in W$, $\lambda \in F$. Ο W είναι κι αυτός ένας δ.χ.. Συμβολικά γράφουμε $W \leq V$.

Η τομή μιας οικογένειας υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου είναι διανυσματικός χώρος.

Αν $S \subseteq V$, όπου V ένας δ.χ., τότε η τομή όλων των υποχώρων που περιέχουν το S ονομάζεται **υπόχωρος παραγόμενος από το *S*** και συμβολίζεται με $\langle S \rangle$. Αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς οσωνδήποτε στοιχείων του *V*, δηλαδή αθροίσματα της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$, με $a_i \in F$ και $x_i \in V$.

Άθροισμα των υποχώρων $W_1, W_2, \ldots, W_k \leq V$ ονομάζεται ο υπόχωρος που παράγεται από αυτούς: $W_1 + W_2 + \ldots + W_k = \langle W_1, W_2, \ldots, W_k \rangle$.

Αν επί πλέον ισχύει $(W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_k) \cap W_i = \mathbb{O}$ για κάθε *i*, το άθροισμα ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** και συμβολίζεται με $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$.

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα**, αν η σχέση $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = \mathbb{O}$ δίνει αναγκαία $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

Βάση ενός δ.χ. *V* είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το χώρο. Το πλήθος των στοιχείων της βάσης λέγεται **διάσταση** του χώρου, $\dim V$. Κάθε βάση ενός υποχώρου $W \leq V$ επεκτείνεται σε βάση του χώρου *V*.

Υπερεπίπεδο ονομάζεται κάθε υπόχωρος *W* ενός δ.χ. *V*, με $\dim(W) = \dim(V) - 1$

Γραμμικές απεικονίσεις – πίνακες

Αν *V*, *W* είναι διανυσματικοί χώροι επί ενός σώματος *F*, τότε ονομάζουμε **γραμμική απεικόνιση** κάθε $f : V \to W$ για την οποία ισχύουν τα εξής δύο:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ και $f(ax) = af(x)$ για κάθε $x, y \in V$, $a \in F$.

Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ λέγεται **ισομορφισμός**, όταν είναι 1–1 και επί.

Σε κάθε γραμμική απεικόνιση $f:V\to W$ αντιστοιχεί ένας πίνακας με τον ακόλουθο τρόπο:

Αν $\dim V=n$, $\dim W=m$, $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ μια διατεταγμένη βάση του V και $(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ μια διατεταγμένη βάση του W, και επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} f(v_1)&=a_{11}w_1+a_{12}w_2+\ldots+a_{1m}w_m\\ f(v_2)&=a_{21}w_1+a_{22}w_2+\ldots+a_{2m}w_m\\ &\vdots\\ f(v_n)&=a_{n1}w_1+a_{n2}w_2+\ldots+a_{nm}w_m \end{aligned} \qquad (1)$$

τότε ο πίνακας που αντιστοιχεί με αποκλειστικό τρόπο στην f είναι ο ακόλουθος:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Φυσικά και σε κάθε $n\times m$ πίνακα της μορφής του A αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις (1).

Ανάστροφος ενός $\mu\times\nu$ πίνακα $A=(a_{ij})$ ονομάζεται ο $\nu\times\mu$ πίνακας $A^T=(a_{ji})$, ο οποίος έχει ως στήλες τις γραμμές του A και ως γραμμές τις στήλες του A.

Ισχύουν οι σχέσεις $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ και $(AB)^T=B^TA^T$.

Ορίζουσα είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε τετραγωνικό $n\times n$ πίνακα A ένα στοιχείο του σώματος F, το οποίο ονομάζουμε **ορίζουσα του πίνακα *A***, και το συμβολίζουμε με $\det(A)$, ή $|A|$. Η απεικόνιση αυτή ορίζεται από τις ιδιότητες:

Αν με $\underline{a}_i$ συμβολίσουμε τη i στήλη, τότε

i. Είναι γραμμική ως προς τις στήλες, δηλαδή ισχύουν
   a. $D_i(\underline{a}_i+\underline{a}_i')=D_i(\underline{a}_i)+D_i(\underline{a}_i')$
   b. $D_i(\lambda\underline{a}_i)=\lambda D_i(\underline{a}_i)$

ii. $D(\underline{a}_i,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n)=0$, αν $\underline{a}_k=\underline{a}_{k+1}$

iii. $D(I)=1$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Αν A, B τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες, ισχύουν οι ιδιότητες $|AB| = |A||B|$, $|A^T| = |A|$ και $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A ονομάζεται ο $n \times n$ πίνακας A^{-1} για τον οποίο ισχύει $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ισχύει $|A| \neq 0$. Οι γραμμικοί ισομορφισμοί έχουν αντιστρέψιμους πίνακες.

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται **ορθογώνιος**, όταν $A \cdot A^T = I$.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι – ιδιοτιμές

Έστω f μια γραμμική απεικόνιση του δ.χ. V στον εαυτό του και $W \leq V$. Ο υπόχωρος W χαρακτηρίζεται ως **αναλλοίωτος ως προς την *f***, αν ισχύει $f(W) \leq W$.

Αν το διάνυσμα $x \neq \mathbb{O}$ ανήκει στο χώρο V που ορίζεται πάνω σε σώμα F, τότε ο μονοδιάστατος υπόχωρος $\langle x \rangle$ είναι αναλλοίωτος ως προς μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$, αν κα μόνο αν υπάρχει $\lambda \in F$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x) = \lambda x$. Το λ ονομάζεται **ιδιοτιμή της *f***. Αντίστοιχα το x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα της *f***.

Αν A είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί σε μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$, τότε κάθε ιδιοτιμή λ της f ικανοποιεί τη λεγόμενη **χαρακτηριστική εξίσωση** $|\lambda I - A| = 0$.

Αναφέραμε ότι η γνωστή Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου, δεν είναι άλλη από την Γεωμετρία Klein $\left(I_{d_E}\left(\mathbb{R}^2\right),\mathbb{R}^2\right)$, δηλαδή τη γεωμετρία του μετρικού χώρου $\left(\mathbb{R}^2,d_E\right)$, όπου $I_{d_E}\left(\mathbb{R}^2\right)$ το σύνολο των 1-1 και ΕΠΙ απεικονίσεων του $\mathbb{R}^2$ που διατηρούν τα μήκη, ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική $d_E\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$.

Πώς όμως προκύπτει αυτή η μετρική; Ποια είναι η θεμελιώδης έννοια πάνω στην οποία χτίζεται γενικότερα η δομή της Γεωμετρία Klein $\left(I_{d_E}\left(\mathbb{R}^n\right),\mathbb{R}^n\right)$; Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή, εστιάζοντας την προσοχή μας στο γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$ πάνω στο $\mathbb{R}$.

Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 1: Ως ***εσωτερικό γινόμενο*** στο $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε μια συμμετρική, διγραμμική, θετική μορφή $\langle\ldots,\ldots\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Ερμηνεύοντας τους παραπάνω όρους, το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$
- $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$
- $\langle \lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$
- $\langle x,x\rangle\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=\mathbb{O}$

για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$, με $\mathbb{O}=\left(0,0,\ldots,0\right)\in\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε τώρα τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 2: Δυο διανύσματα $x,y\in\mathbb{R}^n$ χαρακτηρίζονται ως ***ορθογώνια*** (ή κάθετα) όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν:

$$x\perp y\Leftrightarrow\langle x,y\rangle=0$$

Ορισμός 3: Ονομάζουμε ***τετραγωνική μορφή*** την απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ με

$$\boxed{T\left(x\right)=\langle x,x\rangle \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^n}$$

Παρατήρηση: Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται με τη βοήθεια της τετραγωνικής μορφής με τη σχέση

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left[T(x+y) - T(x) - T(y)\right]$$

Πρόταση: *Η απεικόνιση* $\|\ldots\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *με* $\|x\| = \sqrt{T(x)}$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *είναι μια νόρμα στον* $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Αρκεί να ελέγξουμε αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι τρεις ιδιότητες της νόρμας:

1. $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ και
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Η (1) είναι προφανής, ενώ η (2) είναι άμεση συνέπεια των ορισμών, από τους οποίους εύκολα παίρνουμε

$$\|\lambda x\| = \sqrt{T(\lambda x)} = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{T(x)} = |\lambda| \|x\|$$

Για την απόδειξη της (3) θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα που ακολουθεί, γνωστό ως «**ανισότητα Cauchy-Schwarz**»:

Λήμμα: Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισωτική σχέση

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (*)$$

Απόδειξη: Για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= \langle \lambda x + y, \lambda x \rangle + \langle \lambda x + y, y \rangle \\ &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2 \end{aligned}$$

επομένως το δευτεροβάθμιο, ως προς λ, τριώνυμο στο οποίο καταλήξαμε έχει μη θετική διακρίνουσα, οπότε είναι

$$\left(2 \langle x, y \rangle\right)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow 4 \langle x, y \rangle^2 \leq 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad \square$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της πρότασης. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = T(x+y) = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= T(x) + 2\langle x,y\rangle + T(y) \overset{(*)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2\end{aligned}$$

άρα $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Η έννοια της γωνίας στον $\mathbb{R}^n$

Με τη δύσκολη έννοια της γωνίας στο επίπεδο είμαστε προφανώς εξοικειωμένοι αρχικά μέσω του Ευκλείδειου ορισμού της:

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ
ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων
καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων
πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Στοιχεία Εὐκλείδου α΄ [Βιβλίον Ι], Όρος η΄ [8].

Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο γραμμών σε ένα επίπεδο, οι οποίες συναντούν η μία την άλλη χωρίς να βρίσκονται πάνω σε ευθεία γραμμή.

Η σχέση $\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ που προέκυψε στην απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz (σελίδα 27) μας δίνει τη δυνατότητα, όχι μόνο να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό της γωνίας, αλλά και να γενικεύσουμε την έννοια αυτή, από το $\mathbb{R}^2$ στον Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$:

Για δυο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 &\Rightarrow -\|x\|\cdot\|y\| \leq \langle x,y\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\| \\ &\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει πραγματικός αριθμός $\theta \in [0,\pi]$ τέτοιος, ώστε συν$\theta = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Τον αριθμό αυτό τον καλούμε «**γωνία**» των διανυσμάτων $x,y \in \mathbb{R}^n$ και συμβολικά γράφουμε $\theta = \measuredangle(x,y)$.

Ευκλείδεια μετρική και ισομετρίες

Με βάση την Ευκλείδεια νόρμα, είμαστε σε θέση να ορίσουμε μια μετρική στο $\mathbb{R}^n$, ώστε να αποκτήσει πραγματικό νόημα το δεύτερο συνθετικό της «Γεω-μετρίας», πάνω στη *n*-διάστατη Ευκλείδεια γη μας.

Πρόταση: Η απεικόνιση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

για κάθε $x,y \in \mathbb{R}^n$ είναι μια μετρική επί του $\mathbb{R}^n$. Την ονομάζουμε **ευκλείδεια μετρική**.

Απόδειξη: Αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι για κάθε $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι τρεις ιδιότητες που απαιτεί ο ορισμός της μετρικής:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ και
3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

Οι (1) και (2) είναι προφανείς, ενώ για την (3) έχουμε

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y). \quad \square$$

Ερχόμαστε τώρα να δώσουμε τον ορισμό μιας κατηγορίας μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα, καθώς οι απεικονίσεις αυτής της μορφής συνδέονται στενά με την έννοια της συμμετρίας στους ευκλείδειους χώρους.

Ορισμός: Ονομάζουμε **ισομετρία** (ή αλλιώς **ευκλείδεια κίνηση**) κάθε απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η οποία διατηρεί τις αποστάσεις,

$$\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \text{ για κάθε } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Πρόταση: Το σύνολο των ισομετριών του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ $Is(\mathbb{R}^n) = \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ με } \mathrm{d}(f(x),f(y)) = d(x,y) \text{ για κάθε } x,y \in \mathbb{R}^n\}$, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, αποτελεί ομάδα.

Απόδειξη: Είναι $Is(\mathbb{R}^n) \neq \varnothing$, αφού η ταυτοτική απεικόνιση $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n$, προφανώς είναι ισομετρία. Ταυτόχρονα, είναι και το ουδέτερο στοιχείο για την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων. Καθώς η σύνθεση έχει και την προσεταιριστική ιδιότητα, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $f \in Is(\mathbb{R}^n)$ αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$.

Πράγματι, αν για κάποια $x,y \in \mathbb{R}^n$ είναι $f(x) = f(y)$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) = \mathbb{O} &\Rightarrow \|f(x)-f(y)\| = 0 \\ &\Rightarrow \|x-y\| = 0 && \text{αφού } f \in Is(\mathbb{R}^n) \\ &\Rightarrow x-y = \mathbb{O} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

άρα η f είναι 1–1, οπότε ορίζεται η f^{-1}.

Ακόμη ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} d\left(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\right) &= \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right\| \\ &= \left\|f\left(f^{-1}(x)\right) - f\left(f^{-1}(y)\right)\right\| && \text{αφού } f \in Is(\mathbb{R}^n) \\ &= \|x-y\| \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

άρα η f^{-1} είναι ισομετρία. □

Η Γενική Γραμμική Ομάδα *GL*(*n*)

Στα πλαίσια της θεώρησης του Klein για την έννοια της Γεωμετρίας, κεντρικό ζητούμενο είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων ενός συνόλου Χ, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες ως προς μια ομάδα μετασχηματισμών του Χ, τους οποίους «επιτρέπει» η θεωρούμενη γεωμετρία πάνω στο Χ.

Ένας εύκολος έλεγχος των απαιτήσεων του ορισμού μιας ομάδας δείχνει ότι το σύνολο $B\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\text{ όπου η } f \text{ είναι "1−1" και "επί"}\right\}$ με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων αποτελεί ομάδα. Κάθε υποομάδα G του συνόλου αυτού ορίζει ένα ζεύγος $\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ που αποτελεί μια Γεωμετρία Klein.

Ορισμός: Ονομάζουμε ***Γενική Γραμμική Ομάδα***, ή αλλιώς **ομάδα αυτομορφισμών** του $\mathbb{R}^n$, το σύνολο

$$\boxed{GL(n)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\text{ όπου η } f \text{ είναι γραμμικός ισομορφισμός}\right\}}.$$

για τη γενική γραμμική ομάδα ισχύει η

Πρόταση: *Η $GL(n)$ είναι μια υποομάδα της ομάδας μετασχηματισμών $B\left(\mathbb{R}^n\right)$. Συμβολικά,*

$$GL(n)\le B\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Απόδειξη: Είναι $GL(n)\subseteq B\left(\mathbb{R}^n\right)$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f,g\in GL(n)$ ισχύει $fg^{-1}\in GL(n)$.

Η fg^{-1} προφανώς είναι ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι είναι και γραμμική.

Με αυτό το σκοπό αποδεικνύουμε το

Λήμμα: για κάθε $f,g\in GL(n)$, $x,y\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$fg^{-1}(\lambda x+y)=\lambda fg^{-1}(x)+fg^{-1}(y) \qquad (*)$$

Απόδειξη: Οι f και g είναι γραμμικοί ισομορφισμοί, οπότε ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} fg^{-1}(\lambda x+y)=\lambda fg^{-1}(x)+fg^{-1}(y) &\Leftrightarrow f\left(g^{-1}(\lambda x+y)\right)=\lambda f\left(g^{-1}(x)\right)+f\left(g^{-1}(y)\right) \\ &\Leftrightarrow f\left(g^{-1}(\lambda x+y)\right)=f\left(\lambda g^{-1}(x)+g^{-1}(y)\right) \\ &\Leftrightarrow g^{-1}(\lambda x+y)=\lambda g^{-1}(x)+g^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \lambda x+y=g\left(\lambda g^{-1}(x)+g^{-1}(y)\right) \\ &\Leftrightarrow \lambda x+y=\lambda g\left(g^{-1}(x)\right)+g\left(g^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι αληθής, άρα ισχύει η (*).

Με λ=1, από την (*) παίρνουμε $fg^{-1}(x+y)=fg^{-1}(x)+fg^{-1}(y)$ και

με $y=\mathbb{O}$ προκύπτει $fg^{-1}(\lambda x)=\lambda fg^{-1}(x)$, άρα η fg^{-1} είναι γραμμική απεικόνιση. □

Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα, ότι σε κάθε γραμμικό μετασχηματισμό f αντιστοιχεί ένας μοναδικός (ως προς κάποια συγκεκριμένη βάση) $n\times n$ πίνακας A για τον οποίο ισχύει $\left[\left(f(x)\right)^T=Ax^T \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^n\right]$ (*) και αντίστροφα σε κάθε $n\times n$ πίνακα A αντιστοιχεί ένας μοναδικός γραμμικός μετασχηματισμός f ώστε να ισχύει η (*). Για το λόγο αυτό συχνά ταυτίζουμε το χώρο των γραμμικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ με το χώρο των αντιστρέψιμων τετραγωνικών $n\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Με τη σύμβαση αυτή, μπορούμε να θεωρούμε τη Γενική Γραμμική Ομάδα $GL(n)$ ως την ομάδα των $n\times n$ αντιστρέψιμων πινάκων:

$$\boxed{GL(n)=\left\{A\in M(n,\mathbb{R}),\ \text{με}\ \det(A)\neq 0\right\}}$$

Η μελέτη της Γεωμετρίας Klein $\left(GL(n),\mathbb{R}^n\right)$ αντιστοιχεί στη άλγεβρα των $n\times n$ αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Η Ειδική Γραμμική Ομάδα $SL(n)$

Ας θεωρήσουμε την πολλαπλασιαστική ομάδα των $n\times n$ αντιστρέψιμων πινάκων $GL(n)$. Η απεικόνιση ορίζουσα $D:GL(n)\to\mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή ισχύει $\det(AB)=(\det A)\cdot(\det B)$ για κάθε $A,B\in GL(n)$, επομένως ορίζει έναν ομομορφισμό ομάδων

$$\det : GL(n) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού, ο οποίος αποτελείται από όλους του πίνακες με ορίζουσα 1, ονομάζεται ***Ειδική Γραμμική Ομάδα*** και συμβολίζεται με $SL(n)$.

$$SL(n) = \left\{ f \in GL(n) \mid \text{ αν } \left(f(x)\right)^T = Ax^T \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ τότε } \det(A) = 1 \right\}$$

ή εναλλακτικά

$$SL(n) = \left\{ A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \right\}$$

Συγκεκριμένα υποσύνολα/υποομάδες της Γενικής Γραμμικής Ομάδας $GL(n)$ και της Ειδικής Γραμμικής Ομάδας $SL(n)$ θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία, καθώς συνδέονται, όπως θα δούμε, με τις ομάδες συμμετριών των Ευκλειδείων χώρων.

Η Ορθογώνια Ομάδα $O(n)$

Έχουμε φτάσει τώρα στο σημείο να παρουσιάσουμε ένα αντικείμενο κεντρικού ενδιαφέροντος για την εργασίας μας, ένα σύνολο μετασχηματισμών, οι οποίοι απεικονίζουν τα σημεία, τα σχήματα και τελικά ολόκληρο τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του, με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο και κατά συνέπεια τις αποστάσεις και τα μήκη. Με άλλα λόγια, το σύνολο που θα μας απασχολήσει αποτελείται από τους μετασχηματισμούς που επιτρέπει η Ευκλείδεια Γεωμετρία στο $\mathbb{R}^n$, υπό το πρίσμα των Γεωμετριών Klein.

Ορισμός: Ονομάζουμε ***ορθογώνια ομάδα*** $O(n)$ το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών που διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

$$O(n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } f\text{: γραμμική και } \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Το όνομα που χρησιμοποιήσαμε για το σύνολο $O(n)$ υποδηλώνει ότι πρόκειται περί μιας ομάδας (η απόδειξη ακολουθεί), ενώ ο επιθετικός προσδιορισμός «ορθογώνια» δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί του απεικονίζουν ζεύγη ορθογωνίων

διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ σε αντίστοιχα διανύσματα που διατηρούν την ιδιότητα της καθετότητας. Πράγματι, αν $f \in O(n)$, για δυο τυχαία στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x,y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) \perp f(y)$$

Οι μετασχηματισμοί που απαρτίζουν την $O(n)$ λέγονται ***ορθογώνιες απεικονίσεις***.

Όπως θα δούμε, η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ είναι ένα σύνολο ισομετριών. Κατά μία έννοια, μαζί με τις μεταφορές, που θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε παρακάτω, αποτελούν όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση: *Το σύνολο $O(n)$ εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων είναι ομάδα και μάλιστα υποομάδα της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n)$.*

Απόδειξη: Αρχικά θα δείξουμε ότι η $O(n)$ είναι ένα μη κενό [περιέχει τουλάχιστον την ταυτοτική απεικόνιση $I(x) = x$, με $x \in \mathbb{R}^n$] υποσύνολο της $GL(n)$, δηλαδή ότι κάθε $f \in O(n)$ είναι ισομορφισμός. Πράγματι, αν $f \in O(n)$, τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = \mathbb{O} \Leftrightarrow f(x-y) = \mathbb{O} \ &\Leftrightarrow \langle f(x-y), f(x-y) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x-y, x-y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = \mathbb{O} \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

άρα η f είναι 1–1.

Επιπλέον κάθε γραμμική και 1–1 συνάρτηση είναι και «επί», οπότε η f είναι γραμμικός ισομορφισμός, συνεπώς ισχύει $O(n) \subseteq GL(n)$.

Δεν μένει παρά να δείξουμε ότι για κάθε δύο τυχαίες $f, g \in O(n)$ ισχύει $fg^{-1} \in O(n)$. Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle fg^{-1}(x), fg^{-1}(x) \rangle &= \langle f(g^{-1}(x)), f(g^{-1}(y)) \rangle \\ &\overset{f \in O(n)}{=} \langle g^{-1}(x), g^{-1}(y) \rangle \\ &\overset{g \in O(n)}{=} \langle g(g^{-1}(x)), g(g^{-1}(y)) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

άρα $fg^{-1} \in O(n)$, οπότε τελικά είναι $O(n) \leq GL(n)$. $\square$

Πρόταση: *Κάθε ορθογώνια απεικόνιση είναι γραμμική και διατηρεί την τετραγωνική μορφή. Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση, που διατηρεί την τετραγωνική μορφή, είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη: Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Το ευθύ είναι άμεσο, αφού η f ως ορθογώνια είναι γραμμική και επιπλέον

$T(f(x)) = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x,x\rangle = T(x)$.

Για το αντίστροφο αρκεί να δείξουμε ότι η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}
T(f(x-y)) = T(x-y) &\Rightarrow T(f(x)-f(y)) = T(x-y)\\
&\Rightarrow \langle f(x)-f(y), f(x)-f(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle\\
&\Rightarrow \langle f(x), f(x)\rangle - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle\\
&\Rightarrow \cancel{T(f(x))} - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \cancel{T(f(y))} = \cancel{T(x)} - 2\langle x,y\rangle + \cancel{T(y)}\\
&\Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

άρα η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. $\square$

Από τον ορισμό της νόρμας $\|\ldots\|: x \mapsto \|x\| = \sqrt{T(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ συμπεραίνουμε άμεσα το

Πόρισμα: *Μια γραμμική απεικόνιση είναι ορθογώνια, αν και μόνο αν διατηρεί τη νόρμα:*

$$f:\ \textit{ορθογώνια} \Leftrightarrow f: \textit{γραμμική με } \|f(x)\| = \|x\| \textit{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Η γωνία δύο διανυσμάτων $x,y \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται με βάση το εσωτερικό γινόμενο και τις νόρμες τους (σελίδα 37), καθώς λοιπόν οι ορθογώνιες απεικονίσεις διατηρούν τα μεγέθη αυτά, έπεται ότι διατηρούν κα τις γωνίες. Ισχύει δηλαδή η

Πρόταση: Αν $f \in O(n)$ για οποιαδήποτε δύο μη μηδενικά διανύσματα $x,y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\sphericalangle(f(x), f(y)) = \sphericalangle(x,y).$$

Παρατήρηση: Ένας γραμμικός μετασχηματισμός είναι ισομετρία, αν και μόνο αν διατηρεί τη νόρμα. Πράγματι, αν η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική, τότε για κάθε $x,y \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y) \Leftrightarrow \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \Leftrightarrow \|f(x-y)\| = \|x-y\|$$

- Αν η f είναι ισομετρία, τότε οι παραπάνω ισοδύναμες σχέσεις αληθεύουν, οπότε, θέτοντας $y=\mathbb{O}$ στην τελευταία σχέση παίρνουμε $\|f(x)\|=\|x\|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, δηλαδή η f διατηρεί τη νόρμα. Αντίστροφα,
- αν η f διατηρεί τη νόρμα, τότε αληθεύει κατ' αρχήν η τελευταία σχέση, άρα και η αρχική ισοδύναμή της, δηλαδή η f είναι ισομετρία. $\square$

Πρόταση: *Κάθε ισομετρία $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ που αφήνει αμετάβλητο το $\mathbb{O}\in\mathbb{R}^n$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο και είναι γραμμική.*

Απόδειξη:

Αρχικά θα δείξουμε ότι η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Η f είναι ισομετρία, άρα ισχύει ότι $d\big(f(x),f(y)\big)=d(x,y)\Leftrightarrow\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$ (1)

Με $y=\mathbb{O}$ η (1) δίνει $\|f(x)-f(\mathbb{O})\|=\|x\|\Leftrightarrow\|f(x)\|=\|x\|$ (2), αφού $f(\mathbb{O})=\mathbb{O}$.

Ακόμα, από την (1) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\|f(x)-f(y)\|^2=\|x-y\|^2 &\Leftrightarrow T\big(f(x)-f(y)\big)=T(x-y)\\
&\Leftrightarrow\langle f(x)-f(y),f(x)-f(y)\rangle=\langle x-y,x-y\rangle\\
&\Leftrightarrow\langle f(x),f(x)\rangle-2\langle f(x),f(y)\rangle+\langle f(y),f(y)\rangle=\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\
&\Leftrightarrow\cancel{\|f(x)\|^2}-2\langle f(x),f(y)\rangle+\cancel{\|f(y)\|^2}=\cancel{\|x\|^2}-2\langle x,y\rangle+\cancel{\|y\|^2} \qquad \text{από τη } (2)\\
&\Leftrightarrow\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

επομένως η f διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη του ισχυρισμού ότι η f είναι γραμμική.

Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και $x,y\in\mathbb{R}^n$, χάρη στη συμμετρία και τη διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου, είναι

$$
\begin{aligned}
&\langle (f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y)),(f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y))\rangle \\
&\qquad =\langle f(\lambda x+y),f(\lambda x+y)\rangle-2\lambda\langle f(x),f(\lambda x+y)\rangle \\
&\qquad\quad -2\langle f(y),f(\lambda x+y)\rangle+\lambda^2\langle f(x),f(x)\rangle \\
&\qquad\quad +2\lambda\langle f(x),f(y)\rangle+\langle f(y),f(y)\rangle \\
&\qquad =\langle \lambda x+y,\lambda x+y\rangle-2\lambda\langle x,\lambda x+y\rangle-2\langle y,\lambda x+y\rangle \\
&\qquad\quad +\lambda^2\langle x,x\rangle+2\lambda\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle \qquad \text{αφού η } f \text{ διατηρεί το εσωτ. γινόμενο} \\
&\qquad =\lambda^2\langle x,x\rangle+2\lambda\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle-2\lambda^2\langle x,x\rangle-4\lambda\langle x,y\rangle-2\langle y,y\rangle \\
&\qquad\quad +\lambda^2\langle x,x\rangle+2\lambda\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle \\
&\qquad =0
\end{aligned}
$$

Άρα $f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y)=\mathbb{O}$, συνεπώς $f(\lambda x+y)=\lambda f(x)+f(y)$ (3)

Με λ=1, η (3) δίνει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ και

με $y=\mathbb{O}$ και πάλι από την (3) προκύπτει $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, άρα η f είναι γραμμική απεικόνιση. □

Πόρισμα: *Η $O(n)$ απαρτίζεται από τις ισομετρίες που διατηρούν το $\mathbb{O}$.*

Ακόμα, από το δεύτερο μέρος της απόδειξης που προηγήθηκε, γίνεται φανερό ότι η διατήρηση του εσωτερικού γινομένου εξασφαλίζει τη γραμμικότητα.

Η $O(n)$ ως ομάδα (ορθογωνίων) πινάκων

Ας θεωρήσουμε ότι το σύνολο $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$, οπότε δυο τυχαία διανύσματα $x,y\in\mathbb{R}^n$ γράφονται με τις μορφές $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ και $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$ με $x_i,y_i\in\mathbb{R}$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$. Για το εσωτερικό γινόμενο των x και y έχουμε:

$\langle x,y\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{i=1}^{n}Y_ie_i\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$, όπου $a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$.

Εκτελώντας τις πράξεις των πινάκων στο δεύτερο μέλος της σχέσης που ακολουθεί, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι για το παραπάνω άθροισμα ισχύει

$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, επομένως το εσωτερικό γινόμενο αναπαρίσταται με πίνακες ως εξής:

$$\langle x,y\rangle=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ με } a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle \text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n\,.$$

Αν επιπλέον η βάση $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ είναι ορθοκανονική[6], τότε $a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i\neq j\end{cases}$

οπότε ο πίνακας (a_{ij}) είναι ο μοναδιαίος. Στην περίπτωση αυτή η αναπαράσταση του εσωτερικού γινομένου παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\langle x,y\rangle=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ακόμα, χάριν απλότητας στις παραστάσεις, ταυτίζουμε το διάνυσμα x με τον πίνακα γραμμή που έχει ως στοιχεία του τις συντεταγμένες του x ως προς τη βάση B, δηλαδή θεωρούμε $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. Έτσι, για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y παίρνουμε τη σχέση

$$\langle x,y\rangle=x\cdot y^T$$

όπου, στο δεύτερο μέλος έχουμε το γινόμενο του πίνακα x με τον ανάστροφο τού y.

Ας έρθουμε τώρα στη μελέτη του πίνακα που αντιστοιχεί σε μια ορθογώνια απεικόνιση, καθώς θα διαπιστώσουμε ότι έχει μια χαρακτηριστική και χρήσιμη για τα παρακάτω ιδιότητα, που διατυπώνεται στην πρόταση που ακολουθεί, για την απόδειξη της οποίας θα χρειαστούμε το

Λήμμα: Αν για ένα $n\times n$ πίνακα $M=(\mu_{ij})$ ισχύει $xMy^T=xy^T$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$, τότε $M=\mathbb{I}$ όπου $\mathbb{I}$ ο μοναδιαίος $n\times n$ πίνακας.

Απόδειξη: Για κάθε $i,j=1,2,\ldots,n$ είναι

[6] Μια βάση λέγεται ορθοκανονική, αν τα στοιχεία της έχουν όλα νόρμα ίση με 1 και είναι ανά δύο ορθογώνια.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \underset{i\ \text{θέση}}{1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j\ \text{θέση} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \underset{i\ \text{θέση}}{1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j\ \text{θέση} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (\mu_{ij}) = \begin{cases} (1), & \text{αν } i = j \\ (0), & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \mathbb{I} \qquad \square$$

Πρόταση: *Ο πίνακας (ως προς μια ορθοκανονική βάση) ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού είναι ορθογώνιος.*

Απόδειξη: Έστω A ο πίνακας μιας ορθογώνιας απεικόνισης $f \in O(n)$ ως προς μια ορθοκανονική βάση. Τότε είναι $[f(x)]^T = Ax^T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ισοδύναμα $f(x) = [Ax^T]^T = (x^T)^T A^T = xA^T$.

Για δυο τυχαία διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = f(x)[f(y)]^T = (xA^T)(Ay^T) = xA^T Ay^T \quad (1)$$

Ταυτόχρονα, δεδομένου ότι η f είναι ορθογώνια απεικόνιση, ισχύει

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle = x \cdot y^T \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε $xA^T \cdot Ay^T = x \cdot y^T$. Η τελευταία ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ οπότε, με βάση το λήμμα που προηγήθηκε, προκύπτει ότι $A^T \cdot A = \mathbb{I}$, δηλαδή ο A είναι ορθογώνιος. $\square$

Χάρη στην τελευταία πρόταση και δεδομένου ότι η απεικόνιση $f \mapsto A$ είναι ισομορφισμός μεταξύ της ομάδας των ορθογωνίων απεικονίσεων και της ομάδας των ορθογωνίων

πινάκων μπορούμε στο εξής να ταυτίζουμε κάθε ορθογώνια απεικόνιση $f \in O(n)$ με τον αντίστοιχο πίνακά της A (ως προς μια ορθοκανονική βάση).

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των προτάσεων που αναφέραμε στις δυο προηγούμενες παραγράφους, βλέπουμε ότι η ορθογώνια ομάδα μπορεί να θεωρηθεί (ορισθεί) με αρκετούς εναλλακτικούς (ισοδύναμους) τρόπους:

$$\begin{aligned}
O(n) &= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } f\text{: γραμμική και } \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \text{ για κάθε } x,y \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } f\text{: γραμμική και } T(f(x)) = T(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } f\text{: γραμμική και } \|f(x)\| = \|x\| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } f\text{: γραμμική ισομετρία}\} \\
&= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } f\text{: ισομετρία με } f(\mathbb{O}) = \mathbb{O}\} \\
&= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε } \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \text{ για κάθε } x,y \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ ώστε αν } (f(x))^T = Ax^T \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n, \text{ τότε } A^T A = \mathbb{I}\} \\
&= \{A \in M(n,\mathbb{R}), \text{ ώστε } A^T A = \mathbb{I}\}
\end{aligned}$$

Η απλοποιημένη αναπαράσταση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού

Είναι γεγονός ότι η μορφή του πίνακα μιας ορθογώνιας απεικόνισης εξαρτάται από τη βάση του ευκλείδειου χώρου που χρησιμοποιούμε. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι για κάθε $f \in O(n)$ μπορούμε πάντα να βρούμε κατάλληλη βάση ως προς την οποία ο πίνακας της f να παίρνει μια απλοποιημένη μορφή, από την οποία άλλωστε αντλούνται γεωμετρικά συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η

Πρόταση: *Έστω μια ορθογώνια απεικόνιση $f \in O(n)$. Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι της μορφής*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & A(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\theta_m) \end{pmatrix}$$

με το ενδεχόμενο να λείπει η γραμμή και η στήλη του 1, ή του -1, *ή και των δυο, ενώ οι* $A(\theta_i)$ *είναι* 2×2 *πίνακες της μορφής* $A(\theta_i)=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$, $\theta_i\in[0,2\pi)$ *για κάθε* $i=1,2,\ldots,m$, *δηλαδή οι* $A(\theta_i)$ *εκφράζουν στροφές κατά γωνίες* θ_i.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι ο $A\in M(n,\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας της ορθογώνιας απεικόνισης $f\in O(n)$ ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$. Υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι $(f(x))^T=Ax^T$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Καθώς ο A είναι ορθογώνιος έχουμε

$$A^TA=\mathbb{I}\Rightarrow |A^TA|=|\mathbb{I}|\Rightarrow |A^T||A|=1\Rightarrow |A|^2=1\Rightarrow |A|=\pm 1 .$$

Στη ζητούμενη ορθοκανονική βάση θα οδηγηθούμε σταδιακά, προσδιορίζοντας κατάλληλες «ενδιάμεσες» βάσεις ως προς τις οποίες ο πίνακας της f βαθμιαία θα μετασχηματίζεται μέχρι να φτάσει τελικά στην επιθυμητή τελική μορφή τού A'.

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία ο A έχει κάποια πραγματική ιδιοτιμή (σε αντίθετη περίπτωση παρακάμπτουμε όσα από τα βήματα που ακολουθούν αναφέρονται σε πραγματικές ιδιοτιμές).

Έστω $\lambda_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ μια ιδιοτιμή του A. Τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $v_1\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbb{O}\}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $Av_1^T=\lambda_1 v_1^T$, δηλαδή $f(v_1)=\lambda_1 v_1$. Καθώς η f είναι ορθογώνια, ισχύει $\|f(v_1)\|=\|v_1\|$, απ' όπου παίρνουμε

$$\|\lambda_1 v_1\|=\|v_1\|\Rightarrow |\lambda_1|\|v_1\|=\|v_1\|\Rightarrow |\lambda_1|=1\Rightarrow \lambda_1=\pm 1$$

Θεωρώντας τον 1-διάστατο υπόχωρο $V_1=\{\mu v_1,\mu\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^n$ παρατηρούμε ότι αυτός παραμένει αναλλοίωτος ως προς την f, είναι δηλαδή $f(V_1)\subseteq V_1$, αφού

$$f(\mu v_1)=\mu f(v_1)=\mu(\lambda_1 v_1)=(\mu\lambda_1)v_1\in V_1 .$$

Ακόμα, f-αναλλοίωτο είναι και το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V_1, ο ισόμορφος του $\mathbb{R}^{n-1}$ υπόχωρος $V_1^{\perp}=\{u\in\mathbb{R}^n \mid u\perp v\}$, δεδομένου ότι για κάθε $u\in V_1^{\perp}$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} u\perp v_1\Rightarrow f(u)\perp f(v_1)\\ f(v_1)\parallel v_1\end{array}\right\}\Rightarrow f(u)\perp v_1\Rightarrow f(u)\in V_1^{\perp} .$$

Αν θέσουμε $v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, τότε το $\{v_1'\}$ αποτελεί κανονική βάση του V_1 $\left(\|v_1'\| = 1\right)$. Ακόμη είναι $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_1^{\perp}$, οπότε είναι γνωστό ότι ο πίνακας της f μπορεί να πάρει τη μορφή

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

ως προς την ορθοκανονικοποιημένη[7] βάση $\{v_1', {}^1e_2, \ldots, {}^1e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, όπου ο πίνακας $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ είναι ο περιορισμός του πίνακα της f στον $V_1^{\perp}$, ενώ το $\{{}^1e_2, \ldots, {}^1e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $V_1^{\perp} \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

Περιορίζουμε τώρα την f στον υπόχωρο $V_1^{\perp}$, θεωρούμε δηλαδή τον περιορισμό $f/_{V_1^{\perp}} \equiv f_1 : V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$ με πίνακα τον A_2. Για την f_1 επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω. Αν ο A_2 έχει κάποια πραγματική ιδιοτιμή λ_2 τότε αυτή θα είναι ιδιοτιμή και του πίνακα A_1, άρα και του A, συνεπώς θα ισούται με 1 ή -1, ενώ, ακολουθώντας τη διαδικασία που προηγήθηκε, μπορούμε να δημιουργήσουμε ορθοκανονική βάση $\{{}^1e_2, {}^2e_3, \ldots, {}^2e_n\}$ του $V_1^{\perp}$ ως προς την οποία ο πίνακας της f_1 θα έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

[7] Για τη δημιουργία της βάσης υπάρχει η λεγόμενη μέθοδος ορθοκανονικοποίησης ***Gram–Schmidt***.

Επομένως ο πίνακας της f θα είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\left\{v_1', {}^1e_2, {}^2e_3, \ldots, {}^2e_n\right\}$.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που προηγήθηκε μπορούμε να εξαντλήσουμε τις πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A της f, οπότε θα έχουμε δημιουργήσει μια ορθοκανονική βάση $\left\{v_1', {}^1e_2, {}^2e_3, \ldots, {}^{n-1}e_n\right\}$ ως προς την οποία ο πίνακας της f θα έχει τη μορφή $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_k & & & \\ & & & & \alpha_{k+1\,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1\,n} \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \alpha_{n\,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, όπου θα είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \{-1,1\}$, ενώ ο $(n-k)\times(n-k)$ υποπίνακας $A_{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1\,k+1} & \alpha_{k+1\,k+2} & \cdots & \alpha_{k+1\,n} \\ \alpha_{k+2\,k+1} & \alpha_{k+2\,k+2} & \cdots & \alpha_{k+2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n\,k+1} & \alpha_{n\,k+2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ δεν θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Ας εξετάσουμε λοιπόν τις μιγαδικές ιδιοτιμές του A_{k+1}.

Έστω ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ είναι μια ιδιοτιμή του A_{k+1}, άρα και του πίνακα της f. Τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $w_1 \in \mathbb{C}^{n-k} \setminus \{\mathbb{O}\}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $A_{k+1} w_1^T = z_1 w_1^T$, άρα

$$\left(A_{k+1} - z_1 \mathbb{I}\right) w_1^T = \mathbb{O}^T \quad (3)$$

Αφού $w_1 \in \mathbb{C}^{n-k}$, υπάρχουν $x_{1i}, y_{1i} \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,n-k$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(x_{11} + iy_{11},\ x_{12} + iy_{12},\ \ldots,\ x_{1\,n-k} + iy_{1\,n-k}\right) \\ &= \left(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1\,n-k}\right) + i\left(y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1\,n-k}\right) \in \mathbb{R}^{n-k} + i\mathbb{R}^{n-k} \end{aligned}$$

Θέτοντας $x_1=\left(x_{11},\, x_{12},\, \ldots,\, x_{1n-k}\right)\in\mathbb{R}^n$ και $y_1=\left(y_{11},\, y_{12},\, \ldots,\, y_{1n-k}\right)\in\mathbb{R}^{n-K}$ έχουμε $w_1=x_1+iy_1$ και με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left(A_{k+1}-z_1\mathbb{I}\right)\left(x_1+iy_1\right)^T=\mathbb{O}^T &\Rightarrow \left(A_{k+1}-\left(a_1+i\beta_1\right)\mathbb{I}\right)\left[\left(x_1\right)^T+i\left(y_1\right)^T\right]^T=\mathbb{O}^T\\
&\Rightarrow\left[\left(A_{k+1}-a_1\mathbb{I}\right)x_1^T+\beta_1\mathbb{I}y_1^T\right]+i\left[\left(A_{k+1}-a_1\mathbb{I}\right)y_1^T-\beta_1\mathbb{I}x_1^T\right]=\mathbb{O}^T\\
&\Rightarrow\left(A_{k+1}-a_1\mathbb{I}\right)x_1^T+\beta_1\mathbb{I}y_1^T=\mathbb{O}^T \text{ και } \left(A_{k+1}-a_1\mathbb{I}\right)y_1^T-\beta_1\mathbb{I}x_1^T=\mathbb{O}^T\\
&\Rightarrow A_{k+1}x_1^T=a_1\mathbb{I}x_1^T-\beta_1\mathbb{I}y_1^T \text{ και } A_{k+1}y_1^T=\beta_1\mathbb{I}x_1^T+\alpha_1\mathbb{I}y_1^T\\
&\Rightarrow A_{k+1}x_1^T=a_1x_1^T-\beta_1y_1^T \text{ και } A_{k+1}y_1^T=\beta_1x_1^T+\alpha_1y_1^T \quad (4)
\end{aligned}$$

Οι τελευταίες σχέσεις (4) εξασφαλίζουν ότι τα $x_1,y_1\in\mathbb{R}^{n-K}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν ήταν γραμμικά εξαρτημένα, θα υπήρχε $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $y_1=\lambda x_1$, οπότε

$$\begin{aligned}
(4)\Rightarrow A_{k+1}y_1^T&=\beta_1\left(\lambda y_1\right)^T+\alpha_1y_1^T\\
\Rightarrow A_{k+1}y_1^T&=\underbrace{\left(\beta_1\lambda+\alpha_1\right)}_{\mu}y_1^T\\
\Rightarrow A_{k+1}y_1^T&=\mu y_1^T,\ \mu\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

άτοπο, αφού ο A_{k+1} δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Καθώς τα $x_1,y_1\in\mathbb{R}^{n-K}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, παράγουν ένα υπόχωρο $W_1=\left\{\lambda x_1+\mu y_1,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$ του $\mathbb{R}^{n-k}$ διάστασης 2, με βάση $\left\{x_1,y_1\right\}$. Οι σχέσεις (4) δείχνουν ότι τα στοιχεία της βάσης αυτής απεικονίζονται μέσω του A_{k+1} σε στοιχεία του υπόχωρου W_1, επομένως ο W_1 είναι f-αναλλοίωτος, ενώ ταυτόχρονα ο πίνακας του περιορισμού της f στον W_1 είναι ο $\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1\\ \beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix}$. Η ορίζουσα του πίνακα αυτού είναι θετική $\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right)$ και ο περιορισμός της f στον $W_1=\mathbb{R}^2$ είναι ορθογώνια απεικόνιση. Στο κεφάλαιο 3, όπου μελετάμε αναλυτικά τις ορθογώνιες απεικονίσεις του $\mathbb{R}^2$, αποδεικνύεται ότι αν ο πίνακας μιας ορθογώνιας απεικόνισης στον $\mathbb{R}^2$ έχει θετική ορίζουσα, τότε είναι της μορφής $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ για κάποια γωνία $\theta\in\left[0,2\pi\right)$ ως προς κάποια ορθοκανονική βάση, δηλαδή πρόκειται για στροφή. Κατά συνέπεια, υπάρχει $\theta_1\in\left[0,2\pi\right)$ ώστε ο πίνακας του περιορισμού της f στον W_1 να είναι ο $A\left(\theta_1\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$.

Με τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram–Schmidt και με αφετηρία την ένωση μιας ορθοκανονικής βάσης του W_1 με μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του W_1 στον $\mathbb{R}^{n-k}$ δημιουργούμε μια ορθοκανονική βάση, ως προς την οποία ο πίνακας A_{k+1} έρχεται στη μορφή $\begin{pmatrix} A(\theta_1) & & & \\ & \alpha_{k+3\,k+3} & \cdots & \alpha_{k+3\,n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \alpha_{n\,k+3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Επαναλαμβάνοντας για τον $A_{k+3} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+3\,k+3} & \cdots & \alpha_{k+3\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n\,k+3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τον A_{k+1} παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο A_{k+3} είναι της μορφής $\begin{pmatrix} A(\theta_2) & & & \\ & \alpha_{k+5\,k+5} & \cdots & \alpha_{k+5\,n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \alpha_{n\,k+5} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ και άρα ο A_{k+1} γίνεται $\begin{pmatrix} A(\theta_1) & & & & & \\ & A(\theta_2) & & & & \\ & & \alpha_{k+5\,k+5} & \cdots & \alpha_{k+5\,n} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \alpha_{n\,k+5} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Το πλήθος $n-k$ των γραμμών/στηλών του A_{k+1} είναι άρτιο, αφού σε αντίθετη περίπτωση ο πίνακας θα είχε χαρακτηριστικό πολυώνυμο περιττού βαθμού, άρα και πραγματική ιδιοτιμή, κάτι που δεν ισχύει για τον A_{k+1}. Έτσι, μετά από πεπερασμένα επαναληπτικά βήματα θα καταλήξουμε σε ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο A_{k+1} θα έχει τη μορφή

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A(\theta_1) & & & \\ & A(\theta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(\theta_r) \end{pmatrix} \text{ με } r = \frac{n-k}{2}.$$

Με τον τρόπο αυτό, έχουμε μια ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο πίνακας της f έχει πάρει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_k & & & \\ & & & & A(\theta_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A(\theta_r) \end{pmatrix}$$

Απομένει ένα τελευταίο στάδιο για να πετύχουμε τον τελικό στόχο της ζητούμενης μορφής A' για τον πίνακα της f.

Είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \{-1,1\}$ οπότε με κατάλληλη αναδιάταξη των στοιχείων της βάσης του $\mathbb{R}^n$ που έχουμε δημιουργήσει, φέρνουμε στις πρώτες θέσεις τα στοιχεία που ισούνται με 1, αν υπάρχουν τέτοια, οπότε ο πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A(\theta_r) \end{pmatrix}$$

Αν υπάρχει κανένα, ή ένα μόνο 1, έχει καλώς. Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα 1, τότε για κάθε 2×2 υποπίνακα που περιέχει δυο διαδοχικά 1 ισχύει

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = A(0)$$

Αντίστοιχα για κάθε δύο διαδοχικά -1, για τον 2×2 υποπίνακα που τα περιέχει έχουμε $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = A(\pi)$.

Επομένως έχουμε τελικά κατασκευάσει μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ ως προς την οποία ο πίνακας της ορθογώνιας απεικόνισης f έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & A(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\theta_{n-2}) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & A(\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(\theta_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & A(\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(\theta_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} A(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & A(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

όπου οι $A(\theta_i)$ είναι 2×2 πίνακες της μορφής

$$A(\theta_i)=\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix},\ \theta_i \in [0,2\pi) \text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n. \quad \square$$

Η Ειδική Ορθογώνια Ομάδα *SO*(*n*)

Ένα αξιοσημείωτο υποσύνολο της $O(n)$ μας δίνει ο ακόλουθος

Ορισμός: Το σύνολο όλων των ορθογωνίων απεικονίσεων, των οποίων η ορίζουσα είναι 1, ονομάζεται ***Ειδική Ορθογώνια Ομάδα*** και συμβολίζεται με $SO(n)$. Με άλλα λόγια είναι

$$\boxed{SO(n)=O(n)\cap SL(n)}$$

Αργότερα θα δούμε ότι η $SO(n)$ εκφράζει τις «περιστροφές» του $\mathbb{R}^n$ περί την αρχή των αξόνων. Μια πρώτη όμως ιδιότητα της $SO(n)$ διατυπώνεται στην

Πρόταση: *Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n)$ είναι μια κανονική υποομάδα της $O(n)$.*

Συμβολικά, $SO(n)\triangleleft O(n)$

Απόδειξη: Αρχικά παρατηρούμε ότι $SO(n)\neq\varnothing$, αφού προφανώς περιέχει τουλάχιστον την ταυτοτική απεικόνιση $I(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $g\in O(n)$ και $h\in SO(n)$ η σύνθεση ghg^{-1} είναι στοιχείο της $SO(n)$.

Το ότι η ghg^{-1} ανήκει στην $O(n)$ προκύπτει εύκολα:

Ως σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων η ghg^{-1} είναι γραμμική απεικόνιση και επιπλέον

$$
\begin{aligned}
\left\|ghg^{-1}(x)\right\| &= \left\|g\left(hg^{-1}(x)\right)\right\| \\
&= \left\|hg^{-1}(x)\right\| && \text{επειδή } g \in O(n) \\
&= \left\|h\left(g^{-1}(x)\right)\right\| \\
&= \left\|g^{-1}(x)\right\| && \text{επειδή } h \in O(n) \\
&= \left\|g\left(g^{-1}(x)\right)\right\| && \text{επειδή } g \in O(n) \\
&= \|x\|
\end{aligned}
$$

άρα $ghg^{-1} \in O(n)$ (1)

Ας θεωρήσουμε ότι οι $n \times n$ πίνακες που αντιστοιχούν στις g, h και ghg^{-1} είναι οι A, B και Γ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι σχέσεις $\left(g(x)\right)^T = Ax^T$, $\left(h(x)\right)^T = Bx^T$ και $\left(ghg^{-1}(x)\right)^T = \Gamma x^T$.

Διαδοχικά έχουμε

$$
\left(ghg^{-1}(x)\right)^T = \left(g\left(hg^{-1}(x)\right)\right)^T = A\left(hg^{-1}(x)\right)^T = A\left(h\left(g^{-1}(x)\right)\right)^T = AB\left(g^{-1}(x)\right)^T = ABA^{-1}x^T
$$

επομένως

$$
\begin{aligned}
\Gamma = ABA^{-1} \text{ οπότε } \det\Gamma &= \det\left(ABA^{-1}\right) \\
&= (\det A)\cdot(\det B)\cdot\left(\det A^{-1}\right) \\
&= (\det A)\cdot\left(\det A^{-1}\right)\cdot(\det B) \\
&= \left(\det\left(AA^{-1}\right)\right)\cdot(\det B) \\
&= (\det I)\cdot(\det B) \\
&= 1\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

άρα $ghg^{-1} \in SO(n)$ (2)

από τις (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Έχουμε γνωρίσει μια κατηγορία ισομετριών στο $\mathbb{R}^n$, τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς που διατηρούν το $\mathbb{O}$, τα στοιχεία δηλαδή της $O(n)$. Μια ακόμα οικογένεια ισομετριών μας δίνει ο παρακάτω

Ορισμός: **Μεταφορά** ονομάζουμε κάθε απεικόνιση $t_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $t_a(x) = x + a$, $x \in \mathbb{R}^n$ για κάποιο συγκεκριμένο $a \in \mathbb{R}^n$.

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$d(t_a(x), t_a(y)) = \|t_a(x) - t_a(y)\| = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

επομένως κάθε μεταφορά είναι ισομετρία. Ακόμα πιο συγκεκριμένα, ισχύει η:

Πρόταση: *Το σύνολο **Trans** των μεταφορών του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ αποτελεί υποομάδα του συνόλου των ισομετριών του.*

Απόδειξη: Έστω, $t_a, t_b \in Trans \subseteq Is(\mathbb{R}^n)$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ είναι

$t_a t_b(x) = t_a(t_b(x)) = t_a(x+b) = (x+a) + b = x + (a+b) = t_{a+b}(x)$, άρα $t_a t_b = t_{a+b} \in Trans$.

Ακόμα

$$\begin{aligned} t_a t_{-a}(x) &= t_a(t_{-a}(x)) = t_a(x-a) = (x-a) + a = x \\ &= t_0(x) \\ &= (x+a) - a = t_{-a}(x+a) = t_{-a}(t_a(x)) = t_{-a} t_a(x) \end{aligned}$$

άρα είναι $t_a t_{-a} = t_0 = t_{-a} t_a$, όπου t_0 η ταυτοτική απεικόνιση στον $\mathbb{R}^n$, επομένως $(t_a)^{-1} = t_{-a} \in Trans$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Προφανώς μια μεταφορά t_a δεν είναι γραμμική, παρά μόνο αν $a = \mathbb{O}$.

Πράγματι,

Αν $a=\mathbb{O}$, τότε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι

$$t_a(x+y)=x+y=t_a(x)+t_a(y) \quad \text{και} \quad t_a(\lambda x)=\lambda x=\lambda t_a(x),$$

ενώ,

αν $a\neq\mathbb{O}$, τότε, με $\lambda=2$ για παράδειγμα, για $x\neq\mathbb{O}$ είναι $t_a(2x)=2x+a\neq 2x+2a=2(x+a)=2t_a(x)$.

Εντούτοις, υπάρχει μια σχέση που συνδέει το σύνολο των ισομετριών με τις μεταφορές και τις ορθογώνιες απεικονίσεις. Τη διατυπώνουμε στην ακόλουθη

Πρόταση: *Κάθε ισομετρία $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως σύνθεση μιας ορθογώνιας απεικόνισης με μια μεταφορά.*

Απόδειξη: Έστω f μια ισομετρία του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τη μεταφορά $t_{f(\mathbb{O})}=x+f(\mathbb{O})$. Για τη σύνθεση g της f με την αντίστροφη της $t_{f(\mathbb{O})}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ ισχύει $g(x)=t_{f(\mathbb{O})}^{-1}f(x)=t_{-f(\mathbb{O})}f(x)=t_{-f(\mathbb{O})}(f(x))=f(x)-f(\mathbb{O})$, άρα $g(\mathbb{O})=\mathbb{O}$. Ως σύνθεση ισομετριών, η g είναι ισομετρία και αφού διατηρεί το $\mathbb{O}$, σύμφωνα με το πόρισμα της σελίδας 37, η g είναι ορθογώνια απεικόνιση. Επιπλέον είναι $t_{f(\mathbb{O})}g=t_{f(\mathbb{O})}t_{f(\mathbb{O})}^{-1}f=f$, όπως ήταν ζητούμενο.

Για την απόδειξη της μοναδικότητας αυτής της ανάλυσης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $t_a,t_b\in Trans$ και $g,h\in O(n)$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $f=t_ag=t_bh$. Τότε είναι

$$t_b^{-1}t_a=hg^{-1} \qquad (1).$$

Από την (1) προκύπτει ότι η μεταφορά $t_b^{-1}t_a$ είναι ορθογώνια, άρα γραμμική. Η μόνη όμως γραμμική μεταφορά είναι η ταυτοτική απεικόνιση $I(x)=x$, $x\in\mathbb{R}^n$. Από την (1) λοιπόν παίρνουμε:

$$t_b^{-1}t_a=hg^{-1}=I\Rightarrow\begin{cases} t_a=t_b \\ \text{και} \\ h=g \end{cases}$$

που συμπληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα: *Η ομάδα των μεταφορών του $\mathbb{R}^n$ είναι κανονική υποομάδα της $Is(\mathbb{R}^n)$ και η ομάδα-πηλίκο που ορίζεται είναι ισόμορφη με την ορθογώνια ομάδα $O(n)$.*

Συμβολικά,

$$Trans \lhd Is(\mathbb{R}^n) \qquad \text{και} \qquad Is(\mathbb{R}^n)/Trans \cong O(n)$$

Απόδειξη: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $Trans$ είναι υποομάδα της $Is(\mathbb{R}^n)$, απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $t_a \in Trans$ και $f \in Is(\mathbb{R}^n)$ ισχύει $ft_af^{-1} \in Trans$.

Η f είναι ισομετρία, επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει ορθογώνια απεικόνιση $g \in O(n)$ και μεταφορά $t_b \in Trans$ ώστε να ισχύει $f = t_bg$, οπότε έχουμε

$$ft_af^{-1} = (t_bg)t_a(t_bg)^{-1} = (t_bg)t_a(g^{-1}t_b^{-1}) = t_b(gt_ag^{-1})t_b^{-1} \qquad (1)$$

Ακόμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\begin{aligned} gt_ag^{-1}(x) &= gt_a(g^{-1}(x)) \\ &= g(t_a(g^{-1}(x))) \\ &= g(g^{-1}(x)+a) \\ &= g(g^{-1}(x))+g(a) \qquad \text{αφού η } g \text{ είναι γραμμική} \\ &= x+g(a) \\ &= t_{g(a)} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $ft_af^{-1} = t_bt_{g(a)}t_b^{-1} \in Trans$, άρα τελικά η $Trans$ είναι κανονική υποομάδα της $Is(\mathbb{R}^n)$.

Για την απόδειξη του ισομορφισμού θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τρεις ισχυρισμούς, τους οποίους στη συνέχεια θα συνδυάσουμε με την εφαρμογή του θεμελιώδους (1ου) θεωρήματος ισομορφισμών.

Ορίζουμε μια απεικόνιση $\varphi : Is(\mathbb{R}^n) \to O(n)$ με τον ακόλουθο τρόπο:

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, για κάθε $f \in Is(\mathbb{R}^n)$ υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες απεικονίσεις $t_a \in Trans$ και $g \in O(n)$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $f = t_a g$. Ορίζουμε λοιπόν τη $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = g$.

Ισχυρισμός *I*1: Η φ είναι ομομορφισμός.

<u>Απόδειξη του *I*1</u>: Έστω $f_1, f_2 \in Is(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχουν $t_a, t_b \in Trans$, $g_1, g_2 \in O(n)$, ώστε να είναι $f_1 = t_a g_1$ και $f_2 = t_b g_2$, οπότε και $\varphi(f_1) = g_1$, $\varphi(f_2) = g_2$. Έτσι, για τη σύνθεση $f_1 f_2$ θα ισχύει

$$f_1 f_2 = (t_a g_1)(t_b g_2) = t_a (g_1 t_b) g_2 \qquad (1)$$

Ακόμα είναι $Trans \lhd Is(\mathbb{R}^n) \Rightarrow g_1 t_b g_1^{-1} \in Trans$, άρα υπάρχει $t_c \in Trans$ ώστε $g_1 t_b g_1^{-1} = t_c$, οπότε είναι $g_1 t_b = t_c g_1$. Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$f_1 f_2 = t_a (t_c g_1) g_2 = (t_a t_c)(g_1 g_2) = t_{a+c}(g_1 g_2)$$

άρα $\varphi(f_1 f_2) = g_1 g_2 = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$, συνεπώς η φ είναι ομομορφισμός.

Ισχυρισμός *I*2: Η φ είναι ΕΠΙ.

<u>Απόδειξη του *I*2</u>: Πράγματι, κάθε $g \in O(n)$ είναι ισομετρία και ισχύει $g = t_0 g$ (t_0 η ταυτοτική απεικόνιση), άρα $\varphi(g) = g$, συνεπώς η φ είναι ΕΠΙ.

Ισχυρισμός *I*3: $Ker\varphi = Trans$.

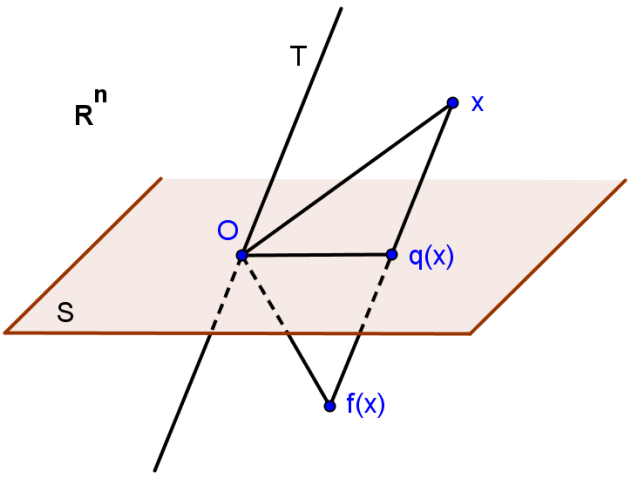
<u>Απόδειξη του *I*3</u>: Ισχύουν οι ισοδυναμίες $f \in Ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(f) = I \Leftrightarrow f = t_a I \Leftrightarrow f = t_a \in Trans$.

Οι δηλώσεις των δύο πρώτων ισχυρισμών αποτελούν τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή του 1ου θεωρήματος ισομορφισμών, με βάση το οποίο, αφού η απεικόνιση $\varphi : Is(\mathbb{R}^n) \to O(n)$ είναι ομομορφισμός επί του $O(n)$, ισχύει

$$Is(\mathbb{R}^n) / Ker\varphi \cong O(n)$$

Σε συνδυασμό με τον ισχυρισμό *I*3 παίρνουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός: Ας θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ ως ένα ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων $\mathbb{R}^n = S \oplus T$ και έστω $q:\mathbb{R}^n \to S$ η προβολή που συνδέεται μ' αυτό το ευθύ άθροισμα. **Κατοπτρισμός** ως προς τον υπόχωρο *S*, παράλληλα προς τον *T* ονομάζεται η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ για την οποία ισχύει $q(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Αν ειδικότερα το ευθύ άθροισμα είναι ορθογώνιο, τότε και η *f* χαρακτηρίζεται ως **ορθογώνιος κατοπτρισμός**.

Οι κατοπτρισμοί που είναι ορθογώνιοι δεν είναι άλλοι από τους κατοπτρισμούς που ανήκουν στην ορθογώνια ομάδα *O(n)*. Αληθεύει δηλαδή η

Πρόταση: *Αν* $\mathbb{R}^n = S \oplus T$ και *f o κατοπτρισμός* ως προς τον υπόχωρο *S*, παράλληλα προς τον *T, τότε*

$$f \in O(n) \Leftrightarrow T = S^{\perp}$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα των ορθογωνίων κατοπτρισμών είναι το γεγονός ότι πρόκειται για ενελίξεις[8], σύμφωνα με την ακόλουθη

[8] **Ενέλιξη** ονομάζεται κάθε απεικόνιση *f* που σε σύνθεση με τον εαυτό της αυτοαναιρείται δίνοντας την ταυτοτική, δηλαδή ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Πρόταση: *Η $f \in O(n)$ είναι ένας κατοπτρισμός, αν και μόνο αν είναι αντίστροφη του εαυτού της, αν δηλαδή ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη: Ενδεικτικά αποδεικνύουμε το ευθύ.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ ως ένα ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων $\mathbb{R}^n = S \oplus T$ και έστω $q: \mathbb{R}^n \to S$ η προβολή που συνδέεται μ' αυτό το ευθύ άθροισμα. Αν η f είναι ο κατοπτρισμός ως προς τον υπόχωρο *S*, παράλληλα προς τον *T*, τότε εξ' ορισμού ισχύει $q(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, οπότε έχουμε $f(x) = 2q(x) - x$, άρα

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= 2q(f(x)) - f(x) \\ &= 2q(2q(x) - x) - (2q(x) - x) \\ &= 4q(q(x)) - 2q(x) - 2q(x) + x \\ &= 4q(x) - 4q(x) + x, \qquad \text{αφού } q(x) \in S \\ &= x \end{aligned}$$

Αν έχουμε κατοπτρισμό ως προς ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$, τότε με χρήση του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να πάρουμε ένα τύπο γι' αυτόν:

Πρόταση: *Αν το H είναι ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$, το n είναι στοιχείο του μονοδιάστατου ορθογωνίου συμπληρώματος του H ($n \in H^{\perp}$) και η απεικόνιση $r_H \in O(n)$ είναι ο ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το H, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

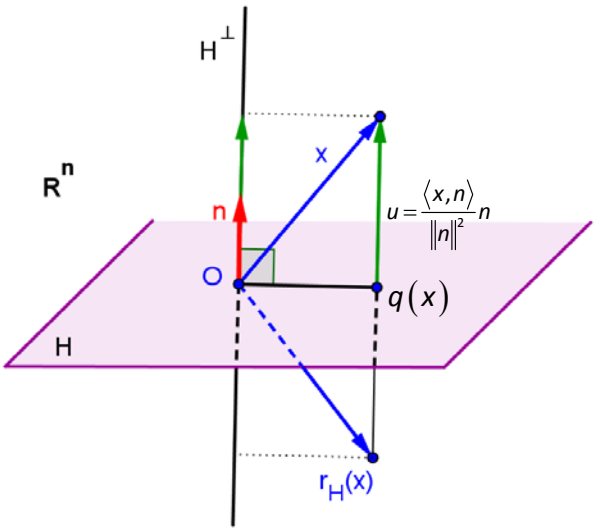
$$r_H(x) = x - 2\frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο $x \in \mathbb{R}^n$ (Σχήμα 5). Σύμφωνα με τον ορισμό του κατοπτρισμού, αν $q(x)$ είναι η ορθογώνια προβολή του *x* πάνω στο *H*, τότε ισχύει $q(x) = \dfrac{x + r_H(x)}{2}$, άρα $r_H(x) = 2q(x) - x = x - 2(x - q(x))$ και θέτοντας $u = x - q(x)$ έχουμε $r_H(x) = x - 2u$ (1).

Αφού για το *x* ισχύει $x = q(x) + u$, με $q(x) \in H$, είναι $q(x) \perp n$, το *u* ανήκει στο $H^{\perp}$, δηλαδή είναι $u \parallel n$, άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}: u = \lambda n$ (2).

Έτσι έχουμε τις συνεπαγωγές:

$$\begin{aligned}\langle x,n\rangle &= \langle q(x)+u,n\rangle \\ &= \langle q(x),n\rangle + \langle u,n\rangle \\ &= 0+\langle u,n\rangle \\ &= \langle u,n\rangle \\ &= \langle \lambda n,n\rangle \\ &= \lambda\langle n,n\rangle \\ &= \lambda\|n\|^2\end{aligned}$$



Σχήμα 5

Οπότε $\lambda = \dfrac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2}$, άρα $(2) \Rightarrow u = \dfrac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2} n$

και συνεπώς $(1) \Rightarrow r_H(x) = x - 2\dfrac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2} n$. □

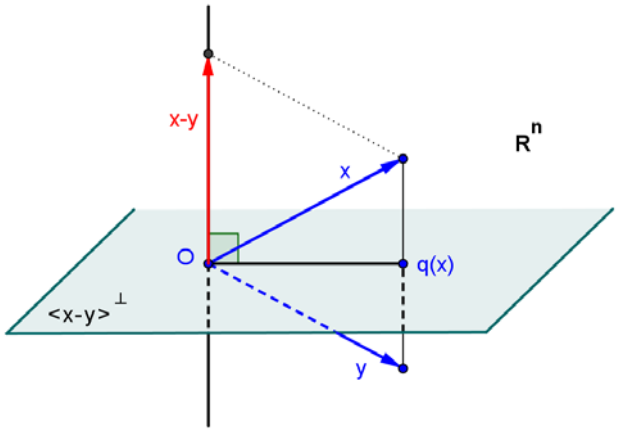
Είναι αλήθεια ότι για οποιαδήποτε δύο ισομήκη διανύσματα $x,y \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq y$ υπάρχει υπερεπίπεδο H, ώστε για τον ορθογώνιο κατοπτρισμό r_H να ισχύει $r_H(x) = y$. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι το κατάλληλο υπερεπίπεδο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου που παράγεται από το διάνυσμα $x - y$.

Πρόταση: *Έστω x, y δυο μη μηδενικά διανύσματα του* $\mathbb{R}^n$ *με* $\|x\| = \|y\|$. *Αν θεωρήσουμε το υπερεπίπεδο* $H = \langle x-y\rangle^{\perp}$, *τότε ο ορθογώνιος κατοπτρισμός* r_H *απεικονίζει το διάνυσμα x στο y, δηλαδή ισχύει*

$$r_H(x) = y$$

Απόδειξη: Προφανώς το διάνυσμα $n = x - y$ (Σχήμα 6) ανήκει στο $H^{\perp}$, επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, ο τύπος του κατοπτρισμού είναι

$$\begin{aligned} r_H(x) &= x - 2\frac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2} n \\ &= x - 2\frac{\langle x,x-y\rangle}{\|x-y\|^2}(x-y)\end{aligned}$$



Σχήμα 6

Ακόμα έχουμε

$$
\begin{aligned}
2\langle x, x-y\rangle &= 2\left(\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle\right) \\
&= 2\left(\|x\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\right) \\
&= 2\|x\|^2 - \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&= 4\|x\|^2 - \langle x+y, x+y\rangle && \text{αφού } \|x\| = \|y\| \\
&= 4\|x\|^2 - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle \\
&= 4\|x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle && \text{αφού } \|x\| = \|y\| \\
&= \|x-y\|^2
\end{aligned}
$$

Τελικά, ο κατοπτρισμός r_H δίνει $r_H(x) = x - 1\cdot(x-y) = y$, δηλαδή το y είναι η εικόνα του x μέσω του ορθογώνιου κατοπτρισμού ως προς το υπερεπίπεδο $\langle x-y\rangle^{\perp}$. $\square$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $x = y$, τότε το ρόλο του H μπορεί να πάρει οποιοδήποτε υπερεπίπεδο περιέχει το x.

Άμεσα, αφού οι ορθογώνιοι κατοπτρισμοί είναι ορθογώνιες απεικονίσεις, από την τελευταία πρόταση προκύπτει το

Πόρισμα: *Η ειδική ορθογώνια ομάδα SO(n) δρα μεταβατικά επί της μοναδιαίας σφαίρας* S^{n-1} *του* $\mathbb{R}^n$ *για* $n \geq 2$, *όπου* $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ με } \|x\| = 1\}$, *δηλαδή για κάθε* $x, y \in S^{n-1}$ *υπάρχει* $f \in SO(n)$: $f(x) = y$.

Αξίζει να επισημάνουμε ότι το υπερεπίπεδο $H = \langle x-y\rangle^{\perp}$ αποτελείται από το σημεία του $\mathbb{R}^n$ που ισαπέχουν από τα x και y, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση: *Έστω x, y δυο μη μηδενικά διανύσματα του* $\mathbb{R}^n$ *με* $\|x\| = \|y\|$. *Αν θεωρήσουμε το υπερεπίπεδο* $H = \langle x-y\rangle^{\perp}$, *τότε ισχύει*

$$H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid d(z,x) = d(z,y)\}$$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
d(z,x)=d(z,y) &\Leftrightarrow \|z-x\|=\|z-y\| \\
&\Leftrightarrow \|z-x\|^2=\|z-y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle z-x,z-x\rangle=\langle z-y,z-y\rangle \\
&\Leftrightarrow \cancel{\langle z,z\rangle}-2\langle z,x\rangle+\langle x,x\rangle=\cancel{\langle z,z\rangle}-2\langle z,y\rangle+\langle y,y\rangle \\
&\Leftrightarrow -2\langle z,x\rangle+\cancel{\|x\|^2}=-2\langle z,y\rangle+\cancel{\|y\|^2} \\
&\Leftrightarrow \langle z,x\rangle=\langle z,y\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle z,x\rangle-\langle z,y\rangle=0 \\
&\Leftrightarrow \langle z,x-y\rangle=0 \\
&\Leftrightarrow z\perp(x-y) \\
&\Leftrightarrow z\in H \qquad \square
\end{aligned}
$$

Το H ονομάζεται **μεσοκάθετο υπερεπίπεδο** των σημείων x και y.

Ερχόμαστε τώρα σε μια τελευταία πρόταση που αποτελεί προπομπό ενός σημαντικού θεωρήματος που συνδέει τους κατοπτρισμούς του $\mathbb{R}^n$ με την ορθογώνια ομάδα $O(n)$.

Πρόταση: *Κάθε ορθογώνια απεικόνιση $f\in O(n)$, η οποία είναι η ταυτοτική σε ένα υπόχωρο $A\le\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-k$, μπορεί να εκφρασθεί ως σύνθεση k το πολύ κατοπτρισμών ως προς υπερεπίπεδα που περιέχουν τον A.*

Απόδειξη: Επιλέγουμε $n-k$ ανεξάρτητα διανύσματα $a_1,a_2,\ldots,a_{n-k}\in A$ και τα επεκτείνουμε στο σύνολο $a_1,a_2,\ldots,a_n$, ώστε όλα να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Θέτουμε $b_i=f(a_i)$, οπότε, για $1\le i\le n-k$ είναι $b_i=a_i$, αφού η f είναι ταυτοτική στον A. Θεωρούμε το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο H_1 των a_{n-k+1} και b_{n-k+1}, δηλαδή το $H_1=\langle a_{n-k+1}-b_{n-k+1}\rangle^{\perp}$. Τότε όλα τα διανύσματα $a_1,a_2,\ldots,a_{n-k}$ ανήκουν στο H_1. Πράγματι, αφού η f είναι ισομετρία, για $i=1,2,\ldots,n-k$ έχουμε

$$d(a_i,a_{n-k+1})=d(f(a_i),f(a_{n-k+1}))=d(a_i,b_{n-k+1})$$

Δηλαδή, τα a_i ισαπέχουν από τα a_{n-k+1} και b_{n-k+1}, άρα, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, $a_i\in H_1$.

Θεωρούμε τώρα την σύνθεση $r_{H_1} f$, όπου r_{H_1} ο ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το H_1.

Για $i = 1,2,\ldots,n-k$ ισχύει $r_{H_1} f(a_i) = r_{H_1}(f(a_i)) = r_{H_1}(a_i) = a_i$, αφού $a_i \in H_1$.

Ακόμα,

$$r_{H_1} f(a_{n-k+1}) = r_{H_1}(f(a_{n-k+1})) = r_{H_1}(b_{n-k+1}) = a_{n-k+1},$$

άρα η $r_{H_1} f$ είναι ταυτοτική στον υπόχωρο $A_1 = A \oplus \langle a_{n-k+1} \rangle$, διάστασης $n-k+1$.

Θέτουμε $c_i = r_{H_1} f(a_i)$, οπότε, για $1 \le i \le n-k+1$ είναι $c_i = a_i$, αφού η $r_{H_1} f$ είναι ταυτοτική στον A_1.

Θεωρούμε το μεσοκάθετο υπερεπίπεδο H_2 των a_{n-k+2} και c_{n-k+2}, δηλαδή το $H_2 = \langle a_{n-k+2} - c_{n-k+2} \rangle^{\perp}$. Τότε $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k+1} \in H_2$. Πράγματι, αφού η $r_{H_1} f$ είναι ισομετρία, ως σύνθεση ισομετριών, και για $i = 1,2,\ldots,n-k$ είναι

$$d(a_i, a_{n-k+1}) = d(r_{H_1} f(a_i), r_{H_1} f(a_{n-k+1})) = d(a_i, c_{n-k+1})$$

άρα, $a_i \in H_2$.

Θεωρούμε τώρα την $r_{H_2} r_{H_1} f$, όπου r_{H_2} ο ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το H_2.

Για $i = 1,2,\ldots,n-k+1$ ισχύει $r_{H_2} r_{H_1} f(a_i) = r_{H_2}(r_{H_1} f(a_i)) = r_{H_2}(c_i) = a_i$, αφού $a_i \in H_2$.

Ακόμα,

$$r_{H_2} r_{H_1} f(a_{n-k+2}) = r_{H_2}(r_{H_1} f(a_{n-k+2})) = r_{H_2}(c_{n-k+2}) = a_{n-k+2},$$

άρα η $r_{H_2} r_{H_1} f$ είναι ταυτοτική στον υπόχωρο $A_2 = A_1 \oplus \langle a_{n-k+2} \rangle = A \oplus \langle a_{n-k+1} \rangle \oplus \langle a_{n-k+2} \rangle$, διάστασης $n-k+2$.

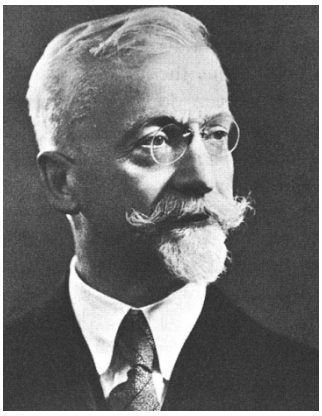
Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, φτάνουμε στη σύνθεση $r_{H_k} \cdots r_{H_2} r_{H_1} f$, να είναι ταυτοτική στον $A \oplus \langle a_{n-k+1} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_n \rangle = \mathbb{R}^n$, με r_{H_i} να είναι ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το υπερεπίπεδο $H_i = \langle a_{n-k+i} - r_{H_{i-1}} \cdots r_{H_1} f(a_{n-k+i}) \rangle^{\perp}$ που περιέχει τον A, για κάθε $i = 1,2,\ldots,k$.

Σύμφωνα με την πρόταση της σελίδας 54, οι κατοπτρισμοί είναι ενελίξεις, συνεπώς ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$
\begin{aligned}
r_{H_k} r_{H_{k-1}} \cdots r_{H_2} r_{H_1} f = I &\Rightarrow r_{H_k}{}^2 r_{H_{k-1}} \cdots r_{H_2} r_{H_1} f = r_{H_k} \\
&\Rightarrow r_{H_{k-1}} \cdots r_{H_2} r_{H_1} f = r_{H_k} \\
&\Rightarrow \ldots \\
&\Rightarrow f = r_{H_1} r_{H_2} \cdots r_{H_k}
\end{aligned}
$$

και η πρόταση έχει αποδειχθεί. □

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε, για την περίπτωση του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, ένα σπουδαίο θεώρημα που αποδίδεται σε δύο γάλλους μαθηματικούς, τον **Élie Cartan**, πατέρα του Henri Cartan (ιδρυτικό μέλος των Bourbaki) και τον **Jean Dieudonné**, το οποίο έχει γενικότερη ισχύ σε κάθε ν-διάστατο μη εκφυλισμένο συμμετρικό διγραμμικό χώρο πάνω από ένα σώμα με χαρακτηριστική διάφορη του 2.



Élie Cartan (1869–1951**)**

Jean Dieudonné (1906-1992)

Θεώρημα (Cartan- Dieudonné): *Κάθε ορθογώνια απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση το πολύ n κατοπτρισμών ως προς υπερεπίπεδα.*

Απόδειξη: Επιλέγουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^n$ και τον ορθογώνιο κατοπτρισμό r_H ως προς το μεσοκάθετο των a και $f(a)$ υπερεπίπεδο $H = \langle a - f(a) \rangle^{\perp}$. Για τη σύνθετη απεικόνιση $r_H f$ ισχύει $r_H f(a) = r_H(f(a)) = a$, άρα η $r_H f$ είναι ταυτοτική στον υπόχωρο $A = \langle a \rangle$, διάστασης 1.

Με βάση την προηγούμενη πρόταση, η $r_H f$ γράφεται ως σύνθεση $n-1$ κατοπτρισμών $r_{H_1}, r_{H_2}, \ldots, r_{H_{n-1}}$, οπότε έχουμε

$$
r_H f = r_{H_1} r_{H_2} \cdots r_{H_{n-1}} \Rightarrow r_H{}^2 f = r_H r_{H_1} r_{H_2} \cdots r_{H_{n-1}} \Rightarrow f = \underbrace{r_H r_{H_1} r_{H_2} \cdots r_{H_{n-1}}}_{n \text{ κατοπτρισμοί}}
$$

επομένως η f είναι σύνθεση n κατοπτρισμών ως προς υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$. □

Εικόνα 13.

Σούρουπο στο τέμενος του σουλτάνου Ομάρ Αλί Σαϊφουντίν

στο Μπρουνέι, την παραμονή του Ραμαζανιού.[9]

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις ορθογώνιες απεικονίσεις του επιπέδου, τις οποίες αναλύουμε αρχικά σε συνθέσεις περιστροφών και κατοπτρισμών του $\mathbb{R}^2$ και αργότερα αποδεικνύουμε ότι κάθε ισομετρία εκφράζεται ως σύνθεση τριών το πολύ κατοπτρισμών. Τα μέσα που χρησιμοποιούμε είναι στοιχειώδης ευκλείδεια επιπεδομετρία, καθώς και άλγεβρα πινάκων και μιγαδικών αριθμών. Τέλος, ταξινομούμε τις ισομετρίες του επιπέδου σε τέσσερις κατηγορίες:

Μεταφορές, στροφές, κατοπτρισμούς και ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς.

[9] Η εικόνα βρίσκεται στη διεύθυνση:

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sultan_Omar_Ali_Saifuddin_Mosque_02.jpg

1η εκδοχή: Μέσω μιγαδικών αριθμών

Στην ενότητα αυτή αρχικά προσδιορίζουμε το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{C}$ που διατηρούν το 0 και στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης αποτελεί μια ΜΗ ΑΒΕΛΙΑΝΗ ομάδα.

Πιο συγκεκριμένα θα διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για το σύνολο που αποτελείται από:

- τις στροφές του επιπέδου γύρω από το 0
- τον κατοπτρισμό του ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών και
- τις συνθέσεις των δυο προηγούμενων.

Αναζήτηση των ισομετριών του $\mathbb{C}$

Θεωρούμε το σύνολο

$$\boxed{S = \left\{ I, \xi, T_\varphi, \mu_\varphi \ \text{ με } \ -\pi \le \varphi \le \pi \right\}},$$

με στοιχεία μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής $\left(f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\right)$, και συγκεκριμένα:

- $I : z \to I\left(z\right) = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$

  (η ταυτοτική απεικόνιση στο $\mathbb{C}$)

- $\xi : z \to \xi\left(z\right) = \overline{z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

  (ανάκλαση του μιγαδικού επιπέδου ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών)

- $T_\varphi : z \to T_\varphi\left(z\right) = w_\varphi z, \ \forall z \in \mathbb{C}$ με $w_\varphi = e^{i\varphi} = \text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi, \quad -\pi \le \varphi \le \pi$.

  (στροφές του μιγαδικού επιπέδου γύρω από το 0 κατά γωνία $\hat{\varphi}$)

- $\mu_\varphi = T_\varphi \circ \xi, \quad$ δηλαδή

  $\mu_\varphi : z \to \mu_\varphi\left(z\right) = \left(T_\varphi \circ \xi\right)\left(z\right) = T_\varphi\left(\xi\left(z\right)\right) = T_\varphi\left(\overline{z}\right) = w_\varphi \overline{z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

Πρόκειται για τους μετασχηματισμούς που προκύπτουν από τις διαδοχικές δράσεις της ανάκλασης του μιγαδικού επιπέδου ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών και στη συνέχεια στροφής γύρω από το 0 κατά γωνία $\hat{\varphi}$.

Πρόταση 1: Τα στοιχεία του *S* είναι ισομετρίες, δηλαδή για κάθε $f \in S$, $u, v \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\left|f(u) - f(v)\right| = \left|u - v\right|.$$

Απόδειξη:

- Για την ταυτοτική είναι προφανές.
- Για την *ξ*:

  Για κάθε $u, v \in \mathbb{C}$ είναι $\left|\xi(u) - \xi(v)\right| = \left|\overline{u} - \overline{v}\right| = \left|\overline{u - v}\right| = \left|u - v\right|$
- Για την T_φ:

  Για κάθε $u, v \in \mathbb{C}$ είναι

  $$\left|T_\varphi(u) - T_\varphi(v)\right| = \left|w_\varphi u - w_\varphi v\right| = \left|w_\varphi(u - v)\right| = \left|w_\varphi\right|\left|u - v\right| = 1 \cdot \left|u - v\right| = \left|u - v\right|$$
- Για την μ_φ:

  Για κάθε $u, v \in \mathbb{C}$ είναι

  $$\left|\mu_\varphi(u) - \mu_\varphi(v)\right| = \left|T_\varphi(\xi(u)) - T_\varphi(\xi(v))\right| = \left|T_\varphi(\overline{u}) - T_\varphi(\overline{v})\right|$$
  $$= \left|w_\varphi \overline{u} - w_\varphi \overline{v}\right| = \left|w_\varphi(\overline{u} - \overline{v})\right| = \left|w_\varphi\right|\left|\overline{u - v}\right| = 1 \cdot \left|u - v\right| = \left|u - v\right|$$

Πρόταση 2 :Τα στοιχεία του *S* αφήνουν το 0 αναλλοίωτο, δηλαδή, για κάθε $f \in S$, ισχύει

$$f(0) = 0.$$

Απόδειξη:

- Προφανές για την ταυτοτική *I*.

  Ακόμα,
- $\xi(0) = \overline{0} = 0$
- $T_\varphi(0) = w \cdot 0 = 0$
- $\mu_\varphi(0) = T_\varphi(\xi(0)) = T_\varphi(0) = 0$

Πρόταση 3: Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ισομετρία με $f(0)=0$, τότε $f\in S$.
Με άλλα λόγια, το *S* περιέχει όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{C}$ που αφήνουν αναλλοίωτο το 0.

Για να τεκμηριώσουμε την πρόταση 3 θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη

Παρατήρηση:

Η εικόνα κάθε σημείου $z\neq 0$ του μιγαδικού επιπέδου μέσω μιας ισομετρίας που διατηρεί αναλλοίωτο το 0 βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα $\rho=|z|$.

Απόδειξη:

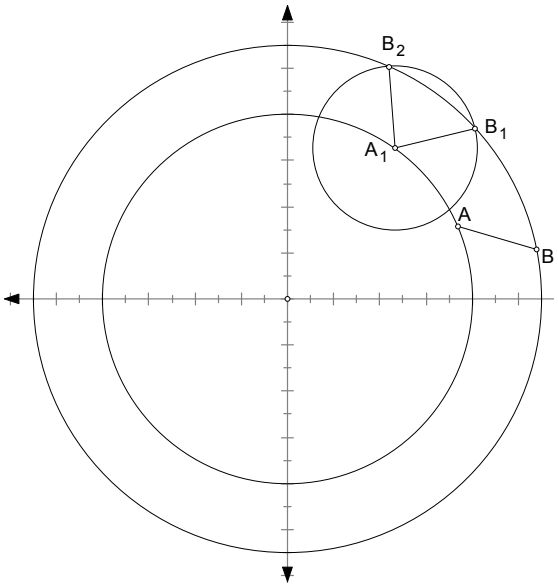
Έστω $z\in\mathbb{C}$, με $z\neq 0$ και $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ μια ισομετρία με $f(0)=0$.

Είναι $|f(z)|=|f(z)-0|=|f(z)-f(0)|=|z-0|=|z|=\rho$ ο.ε.δ.

Απόδειξη της πρότασης 3:

Θεωρούμε τα σημεία $A(z)$ και $A_1(z_1)$, όπου $z_1=f(z)$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, το A_1 βρίσκεται στον κύκλο κέντρου O(0) και ακτίνας $\rho_A=|z|$.

Έστω ακόμη $B(v)$ ένα άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Τότε, γεωμετρικά, για την εικόνα B_1 του B μέσω της f θα ισχύουν ταυτόχρονα τα εξής δύο:



Σχήμα 7

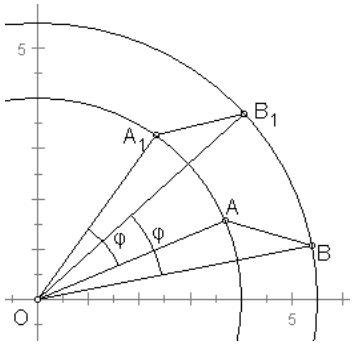
- $(OB_1)=|v|\equiv\rho_B$ και
- $(A_1B_1)=|f(v)-f(z)|=|v-z|=(AB)=\rho_1$

δηλαδή, η εικόνα του B θα βρίσκεται στην τομή του κύκλου κέντρου O και ακτίνας ρ_B με τον κύκλο κέντρου A_1 και ακτίνας ρ_1 (Σχήμα 7).

Υπάρχουν δυο δυνατές θέσεις για την εικόνα του B: τα σημεία B_1 και B_2.

Περίπτωση 1η

Αν η εικόνα του $B(v)$ είναι το $B_1(f(v))$ (Σχήμα 8).



Σχήμα 8

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το A_1 είναι το αποτέλεσμα στροφής του Α κατά γωνία $\hat{\varphi}$.

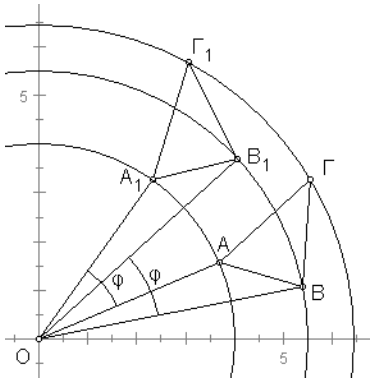
Καθώς τα τρίγωνα ΟΑΒ και OA_1B_1 είναι ίσα (3 πλευρές ίσες), είναι $\widehat{BOA} = \widehat{B_1OA_1}$, επομένως για τη γωνία $\widehat{BOB_1}$ ισχύει:

$$\widehat{BOB_1} = \widehat{BOA} + \widehat{AOB_1} = \widehat{B_1OA_1} + \widehat{AOB_1} = \widehat{AOA_1} = \hat{\varphi},$$

συνεπώς, μέσω της ισομετρίας f η εικόνα των Β και Α έχει προκύψει από στροφή του επιπέδου γύρω από το 0 κατά γωνία $\hat{\varphi}$, οπότε είναι $z_1 = w_\varphi \cdot z \Rightarrow f(z) = w_\varphi \cdot z$ και $f(v) = w_\varphi \cdot v$.

Ισχυρισμός

Αν, μέσω της f, δυο σημεία του επιπέδου στρέφονται κατά γωνία $\hat{\varphi}$, τότε η ισομετρία αυτή στρέφει ομοίως ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή, κάθε άλλο σημείο $\Gamma(z_\Gamma)$ υφίσταται τον ίδιο μετασχηματισμό μέσω της f: στροφή κατά γωνία $\hat{\varphi}$.



Σχήμα 9

Απόδειξη:

Η απόδειξη θα γίνει με αλγεβρικό τρόπο:

Είναι $(OA_1) = (OA) \Rightarrow |f(z)| = |z|$, $(OB_1) = (OB) \Rightarrow |f(v)| = |v|$ και $|f(z_\Gamma)| = |z_\Gamma|$.

Έστω ότι το $\Gamma_1(u)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού $u = f(z_\Gamma)$, με $z_\Gamma \in \mathbb{C}$ (Σχήμα 9).

Θα αποδείξουμε ότι είναι $u = w_\varphi \cdot z_\Gamma$.

Έχουμε

$(\Gamma_1B_1) = (\Gamma B) \Rightarrow |f(z_\Gamma) - f(v)| = |z_\Gamma - v| \Rightarrow |u - f(v)| = |z_\Gamma - v|$ (1) και

$$(\Gamma_1 A_1) = (\Gamma A) \Rightarrow |f(z_\Gamma) - f(z)| = |z_\Gamma - z| \Rightarrow |u - f(z)| = |z_\Gamma - z| \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow |u - w_\varphi \cdot v| = |z_\Gamma - v| \Rightarrow |u - w_\varphi \cdot v|^2 = |z_\Gamma - v|^2 \Rightarrow$$
$$(u - w_\varphi \cdot v) \cdot \left(\overline{u - w_\varphi \cdot v}\right) = (z_\Gamma - v) \cdot \left(\overline{z_\Gamma - v}\right) \Rightarrow$$
$$(u - w_\varphi \cdot v) \cdot \left(\overline{u} - \overline{w}_\varphi \cdot \overline{v}\right) = (z_\Gamma - v) \cdot \left(\overline{z}_\Gamma - \overline{v}\right) \Rightarrow$$
$$u \cdot \overline{u} - u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot \overline{v} - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot v + w_\varphi \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v \cdot \overline{v} = z_\Gamma \cdot \overline{z}_\Gamma - z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v + v \cdot \overline{v} \Rightarrow$$
$$|u|^2 - u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot \overline{v} - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot v + |w_\varphi|^2 \cdot |v|^2 = |z_\Gamma|^2 - z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v + |v|^2 \overset{|w_\varphi|=1}{\Rightarrow}$$
$$\cancel{(O\Gamma_1)^2} - u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot \overline{v} - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot v + \cancel{1 \cdot |v|^2} = \cancel{(O\Gamma)^2} - z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v + \cancel{|v|^2} \overset{(O\Gamma_1)=(O\Gamma)}{\Rightarrow}$$
$$-u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot \overline{v} - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot v = -z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v \Rightarrow$$
$$u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot v = z_\Gamma \cdot \overline{v} + \overline{z}_\Gamma \cdot v \quad (3)$$

Αντίστοιχα

$$(2) \Rightarrow u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot \overline{z} + \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot z = z_\Gamma \cdot \overline{z} + \overline{z}_\Gamma \cdot z \quad (4)$$

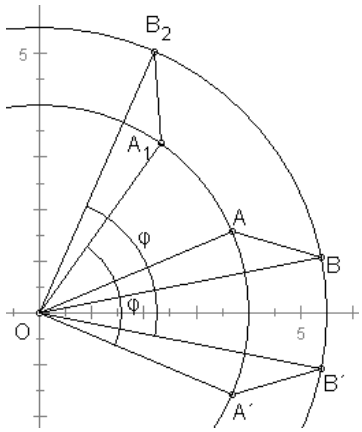
Λύνοντας το σύστημα των (3), (4) ως προς u, $\overline{u}$, παίρνουμε τελικά $u = w_\varphi \cdot z_\Gamma$, μ' άλλα λόγια το σημείο Γ στρέφεται κι αυτό κατά γωνία $\hat{\varphi}$.

Στην <u>περίπτωση 1</u> λοιπόν, που η εικόνα του Β είναι το B_1, η f δρα στρέφοντας συνολικά το μιγαδικό επίπεδο κατά γωνία $\hat{\varphi}$, συνεπώς είναι:

$$f = T_\varphi$$

<u>Περίπτωση 2η</u>

Αν η εικόνα του $B(v)$ είναι το $B_2(f(v))$ (Σχήμα 10), μπορούμε αυτή τη φορά να θεωρήσουμε ότι τα $A_1(z_1)$ και $B_2(f(v))$ είναι τα αποτελέσματα δυο διαδοχικών μετασχηματισμών των $A(z)$ και $B(v)$ αντίστοιχα:



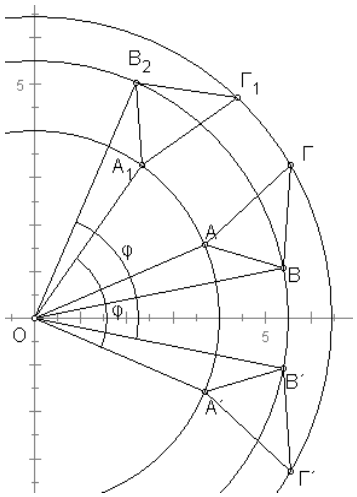
Σχήμα 10

- Πρώτα **ανάκλαση** ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών (τα αποτέλεσμα Α΄, Β΄ της ισομετρίας *ξ*) και
- στη συνέχεια **στροφή** γύρω από το 0 κατά γωνία $\hat{\varphi}$ (το αποτέλεσμα της ισομετρίας T_φ)

(Η απόδειξη γίνεται με στοιχειώδη γεωμετρία παρόμοια με της <u>περίπτωσης 1</u>.)

Επομένως θα είναι $z_1 = f(z) = T_\varphi(z) = \mu_\varphi(z) = w_\varphi \cdot \overline{z}$ και $f(v) = \mu(v) = w_\varphi \cdot \overline{v}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι και κάθε άλλο σημείο $\Gamma(z_\Gamma)$ (Σχήμα 11) του επιπέδου υφίσταται τον ίδιο μετασχηματισμό μέσω της f.



Σχήμα 11

Απόδειξη: (αλγεβρική)
Θα αποδείξουμε ότι είναι $u = w_\varphi \cdot \overline{z}_\Gamma$.

Όπως και στην <u>περίπτωση 1</u> έχουμε:

$(\Gamma_1 B_2) = (\Gamma B) \Rightarrow |u - f(v)| = |z_\Gamma - v|$ (1) και

$(\Gamma_1 A_1) = (\Gamma A) \Rightarrow |u - f(z)| = |z_\Gamma - z|$ (2)

$$(1) \Rightarrow |u - w_\varphi \cdot \overline{v}| = |z_\Gamma - v| \Rightarrow |u - w_\varphi \cdot \overline{v}|^2 = |z_\Gamma - v|^2 \Rightarrow$$
$$(u - w_\varphi \cdot \overline{v}) \cdot (\overline{u - w_\varphi \cdot \overline{v}}) = (z_\Gamma - v) \cdot (\overline{z_\Gamma - v}) \Rightarrow$$
$$(u - w_\varphi \cdot \overline{v}) \cdot (\overline{u} - \overline{w}_\varphi \cdot v) = (z_\Gamma - v) \cdot (\overline{z}_\Gamma - \overline{v}) \Rightarrow$$
$$u \cdot \overline{u} - u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot \overline{v} + w_\varphi \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v \cdot \overline{v} = z_\Gamma \cdot \overline{z}_\Gamma - z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v + v \cdot \overline{v} \Rightarrow$$
$$|u|^2 - u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot \overline{v} + |w_\varphi|^2 \cdot |v|^2 = |z_\Gamma|^2 - z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v + |v|^2 \overset{|w_\varphi|=1}{\Rightarrow}$$
$$\cancel{(O\Gamma_1)^2} - u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot \overline{v} + \cancel{1 \cdot |v|^2} = \cancel{(O\Gamma)^2} - z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v + \cancel{|v|^2} \overset{(O\Gamma_1)=(O\Gamma)}{\Rightarrow}$$
$$-u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v - \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot \overline{v} = -z_\Gamma \cdot \overline{v} - \overline{z}_\Gamma \cdot v \Rightarrow$$
$$u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot v + \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot \overline{v} = z_\Gamma \cdot \overline{v} + \overline{z}_\Gamma \cdot v \quad (3)$$

Αντίστοιχα

$$(2) \Rightarrow u \cdot \overline{w}_\varphi \cdot z + \overline{u} \cdot w_\varphi \cdot \overline{z} = z_\Gamma \cdot \overline{z} + \overline{z}_\Gamma \cdot z \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3), (4) ως προς u, $\overline{u}$, παίρνουμε τελικά $u = w \cdot \overline{z}_\Gamma$, δηλαδή το ζητούμενο.

Στην <u>περίπτωση 2</u> λοιπόν, (αν η εικόνα του B είναι το B_2), η f δρα συνολικά στο μιγαδικό επίπεδο με τον τρόπο της μ_φ, δηλαδή ισχύει:

$$f = \mu_\varphi$$

Με τη μελέτη των δυο περιπτώσεων που προηγήθηκαν ολοκληρώνεται η απόδειξη της **πρότασης 3**.

Έχουμε δηλαδή αποδείξει ότι:

Το σύνολο

$$S=\left\{I:z\to z,\ \xi:z\to\overline{z},\ T_\varphi:z\to w_\varphi\cdot z,\ \mu_\varphi:z\to w_\varphi\cdot\overline{z},\quad \text{με } w_\varphi=e^{i\varphi},\quad -\pi\le\varphi\le\pi\right\}$$

είναι το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{C}$ που αφήνουν αναλλοίωτο το 0

$$\left(f(0)=0,\ \forall f\in S\right)$$

Προχωράμε τώρα στον έλεγχο του S ως προς τη δομή ομάδας.

Πρόταση 4: Το *S* είναι μη κενό.

(προφανώς, αφού περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο, την ταυτοτική συνάρτηση)

Πρόταση 5: Το *S* είναι κλειστό ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.

Απόδειξη:

Προφανώς ισχύει $I\circ I=I$ (η ταυτοτική είναι το ουδέτερο στοιχείο).

Ακόμα, για κάθε $z\in\mathbb{C}$ είναι:

- $(I\circ T_\varphi)(z)=I(\xi(z))=\xi(z)$, δηλαδή $I\circ\xi=\xi$. Όμοια $\xi\circ I=\xi$.
- $(I\circ T_\varphi)(z)=I(T_\varphi(z))=T_\varphi(z)$, δηλαδή $I\circ T_\varphi=T_\varphi$. Όμοια $T_\varphi\circ I=T_\varphi$.
- $(I\circ\mu_\varphi)(z)=I(\mu_\varphi(z))=\mu_\varphi(z)$, δηλαδή $I\circ\mu_\varphi=\mu_\varphi$. Όμοια $\mu_\varphi\circ I=\mu_\varphi$.
- $(\xi\circ\xi)(z)=\xi(\xi(z))=\xi(\overline{z})=\overline{\overline{z}}=z=I(z)$, δηλαδή $\xi\circ\xi=I$.
- $(\xi\circ T_\varphi)(z)=\xi(T_\varphi(z))=\xi(w_\varphi z)=\overline{w_\varphi z}=\overline{w_\varphi}\cdot\overline{z}=w_{-\varphi}\cdot\overline{z}=\mu_{-\varphi}(z)$, δηλαδή $\xi\circ T_\varphi=\mu_{-\varphi}$.
- $T_\varphi\circ\xi=\mu_\varphi$ εξ ορισμού.

<u>Σημείωση 2:</u> Από τις δυο τελευταίες σχέσεις φαίνεται ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, αφού $\xi\circ T_\varphi=\mu_{-\varphi}\neq\mu_\varphi=T_\varphi\circ\xi$.

- $\xi \circ \mu_\varphi = \xi \circ \left(T_\varphi \circ \xi\right) = \left(\xi \circ T_\varphi\right) \circ \xi = \left(T_{-\varphi} \circ \xi\right) \circ \xi = T_{-\varphi} \circ \left(\xi \circ \xi\right) = T_{-\varphi} \circ I = T_{-\varphi}$, δηλαδή $\xi \circ \mu_\varphi = T_{-\varphi}$.

- $\mu_\varphi \circ \xi = \left(T_\varphi \circ \xi\right) \circ \xi = T_\varphi \circ \left(\xi \circ \xi\right) = T_\varphi \circ I = T_\varphi$, δηλαδή $\mu_\varphi \circ \xi = T_\varphi$.

  (η προσεταιριστικότητα που χρησιμοποιήθηκε στις δυο τελευταίες περιπτώσεις, θα αποδειχθεί στην επόμενη ενότητα)

Για $\varphi, \theta \in \left[-\pi, \pi\right]$ έχουμε:

- $\left(T_\varphi \circ T_\theta\right)(z) = T_\varphi\left(T_\theta(z)\right) = w_\varphi \cdot T_\theta(z) = w_\varphi \cdot w_\theta z = w_{\varphi+\theta} \cdot z =$

$$= \begin{cases} w_{\varphi+\theta+2\pi} \cdot z = T_{\varphi+\theta+2\pi}(z), & \text{αν } -2\pi \le \varphi+\theta < -\pi \\ w_{\varphi+\theta} \cdot z = T_{\varphi+\theta}(z), & \text{αν } -\pi \le \varphi+\theta \le \pi \\ w_{\varphi+\theta-2\pi} \cdot z = T_{\varphi+\theta-2\pi}(z), & \text{αν } \pi < \varphi+\theta \le 2\pi \end{cases}$$

- $T_\varphi \circ \mu_\theta = T_\varphi \circ \left(T_\theta \circ \xi\right) = \left(T_\varphi \circ T_\theta\right) \circ \xi$

$$= \begin{cases} T_{\varphi+\theta+2\pi} \circ \xi = \mu_{\varphi+\theta+2\pi}, & \text{αν } -2\pi \le \varphi+\theta < -\pi \\ T_{\varphi+\theta} \circ \xi = \mu_{\varphi+\theta}, & \text{αν } -\pi \le \varphi+\theta \le \pi \\ T_{\varphi+\theta-2\pi} \circ \xi = \mu_{\varphi+\theta-2\pi}, & \text{αν } \pi < \varphi+\theta \le 2\pi \end{cases}$$

- $\mu_\theta \circ T_\varphi = \left(T_\theta \circ \xi\right) \circ T_\varphi = T_\theta \circ \left(\xi \circ T_\varphi\right) = T_\theta \circ \mu_{-\varphi}$

$$= \begin{cases} T_{\varphi-\theta+2\pi} \circ \xi = \mu_{\varphi-\theta+2\pi}, & \text{αν } -2\pi \le \varphi-\theta < -\pi \\ T_{\varphi-\theta} \circ \xi = \mu_{\varphi-\theta}, & \text{αν } -\pi \le \varphi-\theta \le \pi \\ T_{\varphi-\theta-2\pi} \circ \xi = \mu_{\varphi-\theta-2\pi}, & \text{αν } \pi < \varphi-\theta \le 2\pi \end{cases}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της κλειστότητας της πράξης της σύνθεσης στο *S*.

Πρόταση 6: Οι συναρτήσεις του *S* είναι «1–1» και ΕΠΙ του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη:

- Για το «1–1»:

  Τα στοιχεία του *S* είναι ισομετρίες, συνεπώς είναι συναρτήσεις «1–1».

Πράγματι , αν η f είναι ισομετρία και $u,v \in \mathbb{C}$ με $f(u)=f(v)$ τότε $|u-v|=|f(u)-f(v)|=0$, απ' όπου παίρνουμε $u = v$.

- Για το «ΕΠΙ»:

Έστω $f \in S$ και $y \in \mathbb{C}$. Αναζητώ $z \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(z)=y$.

<u>Περίπτωση 1η</u>: $f=I$, Τετριμμένη ($z=y$).

<u>Περίπτωση 2η</u>: $f=\xi$

Είναι $f(z)=y \Leftrightarrow \xi(z)=y \Leftrightarrow \overline{z}=y \Leftrightarrow \overline{\overline{z}}=\overline{y} \Leftrightarrow z=\overline{y} \in \mathbb{C}$, άρα η ξ είναι «επί» του $\mathbb{C}$.

<u>Περίπτωση 3η</u>: $f=T_\varphi$

Είναι $f(z)=y \Leftrightarrow T_\varphi(z)=y \Leftrightarrow w_\varphi z=y \Leftrightarrow z=\dfrac{y}{w_\varphi} \in \mathbb{C}$, άρα η T_φ είναι «επί» του $\mathbb{C}$.

<u>Περίπτωση 4η</u>: $f=\mu_\varphi$

Είναι $f(z)=y \Leftrightarrow \mu_\varphi(z)=y \Leftrightarrow w_\varphi \cdot \overline{z}=y \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{y}{w_\varphi} \Leftrightarrow z=\dfrac{\overline{y}}{\overline{w}_\varphi} \in \mathbb{C}$,

άρα και η μ_φ είναι «επί» του $\mathbb{C}$, γεγονός που συμπληρώνει την απόδειξη της πρότασης 6.

Πρόταση 7: Για τη σύνθεση συναρτήσεων στο *S* ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

Απόδειξη:

Είναι γνωστό ότι η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική, όπου αυτή έχει νόημα. Καθώς λοιπόν (σύμφωνα με την πρόταση 6) για κάθε $f,g,h \in S$, $z \in \mathbb{C}$ οι παραστάσεις $(f \circ (g \circ h))(z)$ και $((f \circ g) \circ h)(z)$ ορίζονται, θα ισχύει:

$$(f \circ (g \circ h))(z) = ((f \circ g) \circ h)(z)$$

Πρόταση 8: Υπάρχει στο S το συμμετρικό f^{-1} κάθε στοιχείου f.

Απόδειξη:

Με απλό έλεγχο διαπιστώνουμε ότι:

- $I \circ I = I$, άρα $I^{-1} = I$
- $\xi \circ \xi = I$, άρα $\xi^{-1} = \xi$
- $T_\varphi \circ T_{-\varphi} = T_{-\varphi} \circ T_\varphi = I$, άρα $T_\varphi^{-1} = T_{-\varphi}$ και τέλος,
- $\mu_\varphi \circ \mu_\varphi = I$, άρα $\mu_\varphi^{-1} = \mu_\varphi$.

Πρόταση 9: *Το σύνολο S των ισομετριών του $\mathbb{C}$ που διατηρούν το 0 εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης αποτελεί μια ΜΗ ΑΒΕΛΙΑΝΗ ομάδα.*

Απόδειξη:

Άμεσα, από τις προτάσεις 4, 5, 7 και 8, μαζί με τις σημειώσεις 1 και 2 της πρότασης 5.

Ταυτίζοντας το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ με το ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, η πρόταση 3 μας λέει ότι το σύνολο S δεν είναι άλλο από την ορθογώνια ομάδα $O(2)$.

Παρουσιάζοντας τα στοιχεία του S, για λόγους έμφασης σημειώσαμε την ταυτοτική απεικόνιση $I: z \mapsto z$ και την $\xi: z \mapsto \bar{z}$ ξεχωριστά από τις T_φ και μ_φ. Φυσικά είναι $T_0 = I$ και $\mu_0 = \xi$, επομένως το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{C}$ μπορεί πιο συνεπτυγμένα να γραφτεί ως εξής:

$S = \left\{ T_\varphi : z \to w_\varphi \cdot z,\ \mu_\varphi : z \to w_\varphi \cdot \bar{z},\quad \text{με } w_\varphi = e^{i\varphi},\quad -\pi \le \varphi \le \pi \right\}$, ή, ακόμα πιο απλά

$$S = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \text{με} f(z) = a \cdot z,\ \text{ή}\ f(z) = a \cdot \bar{z},\ \text{όπου}\ a \in \mathbb{C}\ \text{με}\ |\alpha| = 1 \right\}$$

2η εκδοχή: Με χρήση πινάκων

Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση που στρέφει το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ γύρω από την αρχή των αξόνων Ο δίνεται από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Εξάλλου, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί σε κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των *x*, αφού

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Θα δείξουμε λοιπόν την

Πρόταση: *Κάθε στοιχείο της O(2) έχει πάντα μια από τις ακόλουθες μορφές:*

$$f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη: Η f είναι γραμμική ισομετρία, επομένως ορίζεται από ένα πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ με $\det A \neq 0$ και ταυτόχρονα ισχύει $\|f(u)\| = \|u\|$ για κάθε $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Είναι $[f(u)]^T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix} \Rightarrow f(u) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, οπότε διαδοχικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \|f(u)\| = \|u\| &\Rightarrow \sqrt{(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Rightarrow (\alpha^2 + \gamma^2) x^2 + (\beta^2 + \delta^2) y^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta) xy = x^2 + y^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 1 & (1) \\ \beta^2 + \delta^2 = 1 & (2) \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ τέτοια, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $\alpha = \cos\theta$, $\gamma = \sin\theta$ και $\beta = \cos\varphi$, $\delta = \sin\varphi$, οπότε

$$(3) \quad \Rightarrow \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \cos(\varphi - \theta) = 0$$
$$\Rightarrow \varphi - \theta = k\pi + \frac{\pi}{2},\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

Ακόμα είναι $\theta, \varphi \in [0, 2\pi) \Rightarrow \varphi - \theta \in (-2\pi, 2\pi)$, άρα το k περιορίζεται στις τιμές $-2,\ -1,\ 0,\ 1$.

- Αν $k = -2$, ή $k = 0$ τότε είναι $\varphi - \theta = -\frac{3\pi}{2}$, ή $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}$ οπότε $\varphi = \theta - \frac{3\pi}{2}$, ή $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$, επομένως $\beta = \cos\varphi = -\sin\theta$ και $\delta = \sin\varphi = \cos\theta$, άρα
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
- Αν $k = -1$, ή $k = 1$ τότε είναι $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \theta$ ή $\varphi = \frac{3\pi}{2} + \theta$, απ' όπου παίρνουμε $\beta = \cos\varphi = \sin\theta$, $\delta = \sin\varphi = -\cos\theta$, άρα τελικά
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$ συμπέρασμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πεπερασμένες υποομάδες της O(2)

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες που αντιστοιχούν στις ορθογώνιες απεικονίσεις, μπορούμε να ταξινομήσουμε τις πεπερασμένες υποομάδες της ορθογώνιας και της ειδικής ορθογώνιας ομάδας του $\mathbb{R}^2$. Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι εντάσσονται σε μια από τις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

- Κυκλικές
- Διεδρικές

Πρόταση: *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα της $SO(2)$ είναι κυκλική.*

Απόδειξη: Είδαμε ότι κάθε στοιχείο της $O(2)$ είναι απεικόνιση της οποίας ο πίνακας έχει μια από τις μορφές

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Δεδομένου ότι οι πίνακες των απεικονίσεων που περιέχονται στην $SO(2)$ έχουν ορίζουσα ίση με 1, προφανώς όλοι είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Έστω G μια πεπερασμένη, μη τετριμμένη υποομάδα της $SO(2)$. Θεωρώντας τους πίνακές $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ των στοιχείων f_θ της G, με $\theta \in [0, 2\pi)$, εντοπίζουμε τον πίνακα A_φ, με τη φ να είναι η ελάχιστη θετική γωνία. Σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης υπάρχουν $k, \upsilon \in \mathbb{Z}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\theta = k\varphi + \upsilon$, με $k, \upsilon \in \mathbb{Z}$ και $0 \le \upsilon < \varphi$, επομένως θα έχουμε

$A_\theta = A_{k\varphi+\upsilon} = (A_\varphi)^k A_\upsilon \Rightarrow A_\upsilon = (A_\varphi)^{-k} A_\theta \in G$. Καθώς η φ είναι η ελάχιστη θετική γωνία, συμπεραίνουμε ότι $\upsilon = 0$, επομένως παίρνουμε ότι $A_\theta = A_{k\varphi} = (A_\varphi)^k$, άρα $(f_\varphi)^k$. Επομένως η G είναι κυκλική, παραγόμενη από το στοιχείο f_φ.

Πρόταση: *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα της $O(2)$ είναι ή κυκλική, ή διεδρική.*

Απόδειξη: Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα της $O(2)$.

Αν $G \subseteq SO(2)$, τότε είναι κυκλική. Αν $G \not\subseteq SO(2)$, θεωρούμε την ομάδα $H = G \cap SO(2)$. Η H είναι υποομάδα τής G με δείκτη $[G:H] = 2$ και βάσει της προηγούμενης πρότασης είναι κυκλική, επομένως παράγεται από κάποιο στοιχείο f. Έστω ακόμα $g \in G \setminus H$. Ο πίνακας της g θα είναι της μορφής

$$A_g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

οπότε, για τον πίνακα της g^2 έχουμε:

$$A_{g^2} = \left(A_g\right)^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα, η g^2 είναι η ταυτοτική.

Στην περίπτωση που η f είναι η ταυτοτική, έχουμε $G = \{I, g\}$, κυκλική τάξης 2.

Αν $f \neq I$ και είναι τάξης *n*, τότε $G = \{I, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, g, fg, f^2g, \ldots, f^{n-1}g\}$,

αφού, με ευνόητους συμβολισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} A_g A_f &= \begin{pmatrix} \cos\theta_g & \sin\theta_g \\ \sin\theta_g & -\cos\theta_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_f & -\sin\theta_f \\ \sin\theta_f & \cos\theta_f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_g\cos\theta_f + \sin\theta_g\sin\theta_f & -\cos\theta_g\sin\theta_f + \sin\theta_g\cos\theta_f \\ \sin\theta_g\cos\theta_f - \cos\theta_g\sin\theta_f & -\sin\theta_g\sin\theta_f - \cos\theta_g\cos\theta_f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_g - \theta_f\right) & \sin\left(\theta_g - \theta_f\right) \\ \sin\left(\theta_g - \theta_f\right) & -\cos\left(\theta_g - \theta_f\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} A_{f^{-1}} A_g = \left(A_f\right)^{-1} A_g &= \begin{pmatrix} \cos\theta_f & \sin\theta_f \\ -\sin\theta_f & \cos\theta_f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_g & \sin\theta_g \\ \sin\theta_g & -\cos\theta_g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_f\cos\theta_g + \sin\theta_f\sin\theta_g & \cos\theta_f\sin\theta_g - \sin\theta_f\cos\theta_g \\ -\sin\theta_f\cos\theta_g + \cos\theta_f\sin\theta_g & -\sin\theta_f\sin\theta_g - \cos\theta_f\cos\theta_g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_g - \theta_f\right) & \sin\left(\theta_g - \theta_f\right) \\ \sin\left(\theta_g - \theta_f\right) & -\cos\left(\theta_g - \theta_f\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

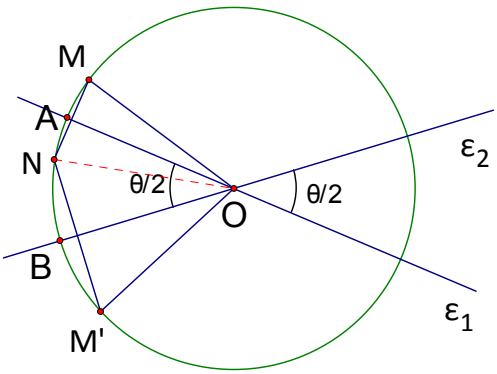
άρα, είναι $A_g A_f = A_{f^{-1}} A_g$ και κατά συνέπεια $gf = f^{-1}g$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή η G είναι η διεδρική D_n.

Στροφές και κατοπτρισμοί στο $\mathbb{R}^2$

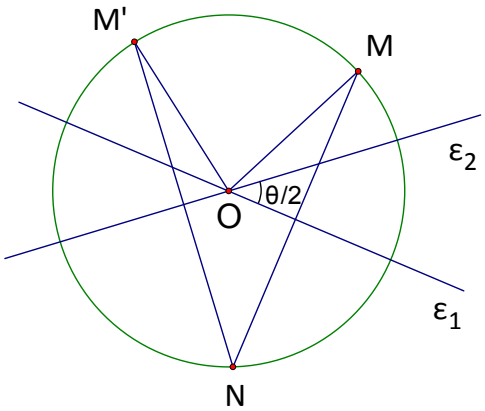
Στην ενότητα αυτή περιγράφεται η γεωμετρική αναπαράσταση των ορθογωνίων απεικονίσεων της O(2). Αποδεικνύεται με χρήση στοιχειωδών μέσων ότι κάθε ορθογώνια απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι μια στροφή, ή στροφή με κατοπτρισμό, ή, όπως θα φανεί τελικά, σύνθεση τριών το πολύ κατοπτρισμών[10].

Πρόταση: *Κάθε στροφή στο* $\mathbb{R}^2$ *είναι σύνθεση δύο κατοπτρισμών.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι μια στροφή κατά γωνία θ με κέντρο το σημείο O απεικονίζει το τυχαίο σημείο M του επιπέδου στο M΄. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με σύνθεση δυο κατοπτρισμών ως προς δύο ευθείες ε_1 και ε_2, οι οποίες τέμνονται στο O και σχηματίζουν γωνία $\theta/2$.



Σχήμα 12



Σχήμα 13

Η ευθεία ε_1 είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου κέντρου O και ακτίνας OM, επομένως η εικόνα N του σημείου M μέσω του πρώτου κατοπτρισμού (ως προς την ε_1) ανήκει στον

[10] Στην ενότητα αυτή με τον όρο «κατοπτρισμός» θα εννοούμε «ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς ευθεία διερχόμενη από το $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^2$ ».

κύκλο. Αντίστοιχα η εικόνα Μ΄ του Ν μέσω του δεύτερου κατοπτρισμού (ως προς την ε_2) βρίσκεται στον ίδιο κύκλο, συνεπώς το Μ΄ προκύπτει από στροφή του Μ με κέντρο το Ο κατά γωνία $M\hat{O}M'$. Το συμμετρικό Ν του σημείου Μ ή βρίσκεται μέσα στη γωνία $\theta/2$ των ε_1, ε_2, (Σχήμα 12), είτε βρίσκεται μέσα στην παραπληρωματική τους γωνία (Σχήμα 13).

Στην πρώτη περίπτωση είναι $M\hat{O}M' = M\hat{O}N + N\hat{O}M' = 2A\hat{O}N + 2N\hat{O}B = 2A\hat{O}B = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$

Στην δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 13), οι γωνίες $M\hat{N}M'$ και $\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες, άρα είναι ίσες, οπότε έχουμε $M\hat{O}M' = 2M\hat{N}M' = 2\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right) = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν το σημείο Μ΄ που προκύπτει από τους δυο διαδοχικούς κατοπτρισμούς, δεν είναι άλλο, παρά η εικόνα του Μ μέσω της στροφής γύρω από το Ο κατά γωνία θ. □

Με βάση όσα προηγήθηκαν στην ενότητα αυτή οδηγούμαστε συμπερασματικά στην

Πρόταση: *Η ομάδα $O(2)$ παράγεται από κατοπτρισμούς. Με άλλα λόγια κάθε ισομετρία $f \in O(2)$, η οποία διατηρεί την αρχή των αξόνων Ο, είναι σύνθεση κατοπτρισμών και μάλιστα το πολύ τριών.*

Πράγματι, αν έχει τη μορφή $f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, δηλαδή είναι απλά μια στροφή, τότε μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο κατοπτρισμών, ενώ αν είναι της μορφής $f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, τότε έχουμε σύνθεση ενός κατοπτρισμού με μια στροφή, επομένως η f μπορεί να προκύψει ως σύνθεση τριών κατοπτρισμών. □

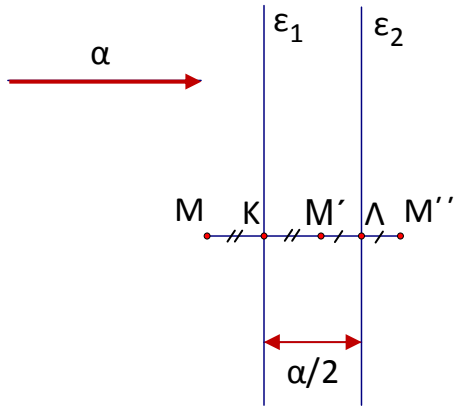
Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι δεν είναι μόνο οι ορθογώνιες απεικονίσεις (οι ισομετρίες εκείνες που διατηρούν την αρχή Ο) που μπορούν να παρασταθούν ως συνθέσεις τριών το πολύ κατοπτρισμών, αλλά, ακόμα περισσότερο, κάθε ισομετρία του επιπέδου έχει την ιδιότητα αυτή.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι κάθε ισομετρία $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση μιας μεταφοράς με μια ορθογώνια απεικόνιση.

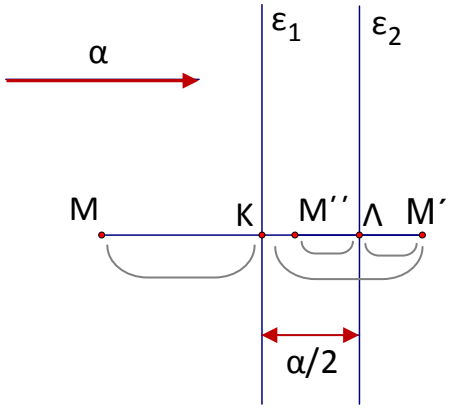
Πρόταση 1: *Κάθε μεταφορά στο $\mathbb{R}^2$ είναι σύνθεση δύο κατοπτρισμών.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι η $T_{\vec{a}}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι μια μεταφορά στο ευκλείδειο επίπεδο κατά ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Θα αποδείξουμε, με γεωμετρικό τρόπο, ότι η $T_{\vec{a}}$ προκύπτει από δυο διαδοχικές ανακλάσεις ως προς δύο ευθείες ε_1 και ε_2, αρκεί αυτές να είναι κάθετες στο φορέα του $\vec{\alpha}$ και η μεταξύ τους απόσταση να ισούται με $\frac{\|\vec{\alpha}\|}{2}$. Ας ονομάσουμε Μ΄ το συμμετρικό ενός τυχαίου σημείου Μ του επιπέδου ως προς την ευθεία ε_1 και Μ΄΄ το συμμετρικό του Μ΄ ως προς την ε_2. Για το Μ΄ θα ισχύει ένα από τα εξής δύο:

- είτε βρίσκεται μέσα στην λωρίδα των παραλλήλων ε_1 και ε_2 (Σχήμα 14),
- είτε είναι εκτός των ε_1 και ε_2 (Σχήμα 15).



Σχήμα 14



Σχήμα 15

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$MM'' = MM' + M'M = 2KM' + 2M'\Lambda = 2\left(KM' + M'\Lambda\right) = 2K\Lambda = 2\cdot\frac{\|\vec{\alpha}\|}{2} = \|\vec{\alpha}\|$$

Στην δεύτερη περίπτωση, με μικρή διαφοροποίηση στην πορεία, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Η σύνθεση λοιπόν των δύο κατοπτρισμών μεταφέρει το τυχαίο σημείο του επιπέδου κατά το διάνυσμα $\vec{\alpha}$, συνεπώς είναι η $T_{\vec{\alpha}}$. □

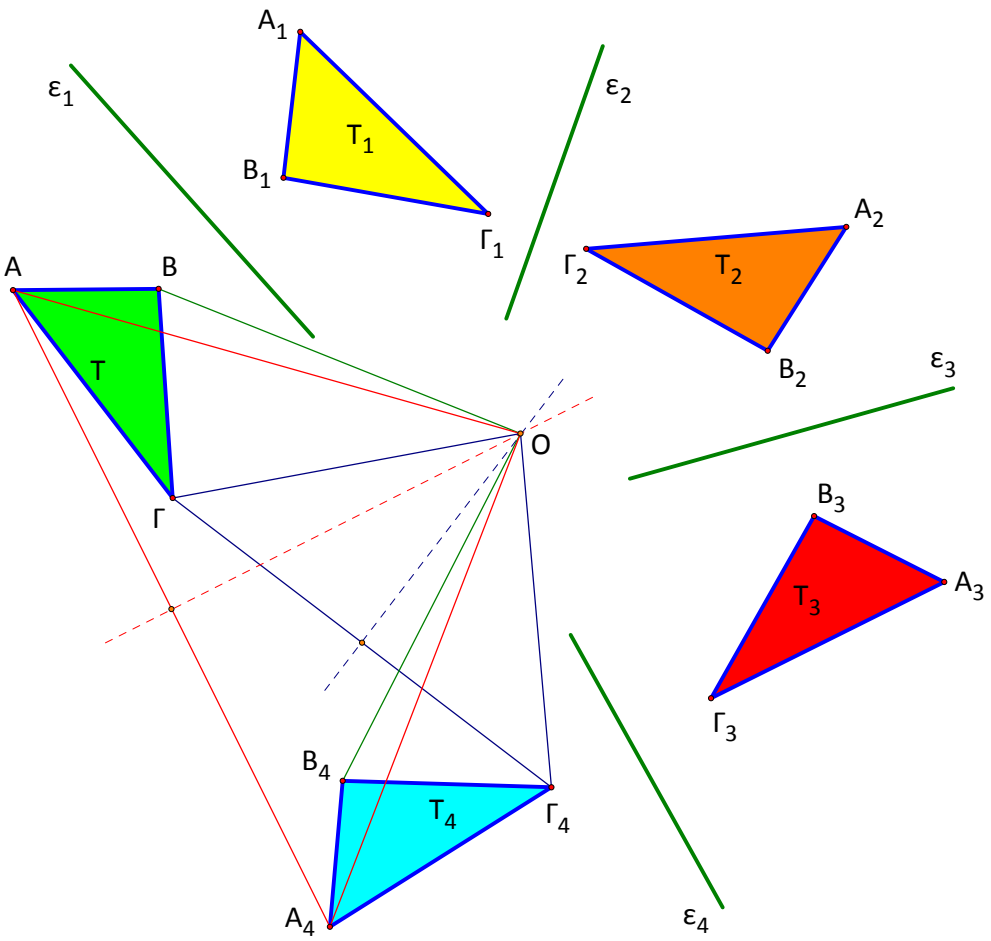
Ως εδώ έχουμε εξασφαλίσει την

Πρόταση 2: *Οι ισομετρίες στο επίπεδο, ως συνθέσεις στροφών και μεταφορών, είναι αποτελέσματα διαδοχικών κατοπτρισμών.*

Πόσοι κατοπτρισμοί είναι αναγκαίοι για να συνθέσουν μια τυχαία ισομετρία στο $\mathbb{R}^2$; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα αποδείξουμε αρχικά την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3: *Κάθε σύνθεση οσωνδήποτε κατοπτρισμών, ανάγεται πάντα σε σύνθεση το πολύ τριών κατοπτρισμών.*

Απόδειξη: Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ότι κάθε τετράδα διαδοχικών κατοπτρισμών είτε μπορεί να αντικατασταθεί από μια στροφή, η οποία με τη σειρά της – όπως είδαμε – ανάγεται σε σύνθεση δύο κατοπτρισμών, είτε από μια μεταφορά, άρα και πάλι σύνθεση δύο κατοπτρισμών. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να εξαντλήσουμε το πλήθος των αρχικών κατοπτρισμών με διαδοχικές αντικαταστάσεις-μειώσεις, μέχρι να φτάσουμε σε δύο, ή τρεις το πολύ κατοπτρισμούς. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό ότι τέσσερις κατοπτρισμοί δίνουν μια στροφή, με στοιχειώδη γεωμετρικό τρόπο, στηριγμένοι στο ενδεικτικό σχήμα που ακολουθεί. Τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3, T_4 είναι οι διαδοχικές ανακλάσεις του τριγώνου T μέσω των ευθειών ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.



Σχήμα 16

Ας εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στα τρίγωνα Τ και T_4, το αρχικό και το τελικό. Ποιο μπορεί να είναι το κέντρο μιας στροφής που θα φέρει το τρίγωνο Τ στη θέση του T_4; Έστω Ο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων (διακεκομμένες) των ευθυγράμμων τμημάτων AA_4 και $ΓΓ_4$[11]. Τα Α και A_4 προφανώς ισαπέχουν από το Ο, οπότε το A_4 προκύπτει από τη στροφή του Α κατά γωνία $A\hat{O}A_4 := \theta$. Αντίστοιχα το $Γ_4$ είναι το αποτέλεσμα της στροφής του Γ κατά γωνία $\Gamma\hat{O}\Gamma_4$. Είναι όμως $A\Gamma = A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = A_3\Gamma_3 = A_4\Gamma_4$, αφού οι κατοπτρισμοί είναι ισομετρίες, επομένως τα τρίγωνα ΑΟΓ και $A_4OΓ_4$ είναι ίσα (τρεις πλευρές ίσες), οπότε $A\hat{O}\Gamma = A_4\hat{O}\Gamma_4$, άρα $\Gamma\hat{O}\Gamma_4 = \Gamma\hat{O}A_4 + A_4\hat{O}\Gamma_4 = \Gamma\hat{O}A_4 + A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}A_4 = \theta$.

---

[11] Αν οι μεσοκάθετοι δεν τέμνονται, τότε προφανώς οι AA_4 και $ΓΓ_4$ είναι παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι οι πλευρές των τριγώνων Τ και T_4 είναι ανά δύο παράλληλες, οπότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το T_4 προκύπτει από μεταφορά του Τ κατά το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AA_4} = \overrightarrow{BB_4} = \overrightarrow{ΓΓ_4}$, συνεπώς, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, η σύνθεση των τεσσάρων κατοπτρισμών μπορεί να αντικατασταθεί από μια σύνθεση δύο κατοπτρισμών.

Κατά συνέπεια τα σημεία Α και Γ έχουν και τα δύο στραφεί κατά γωνία θ γύρω από το Ο.

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και με κάθε άλλο σημείο του επιπέδου. Ένα τέτοιο σημείο είναι η κορυφή Β του αρχικού τριγώνου Τ[12]. Θα δείξουμε αρχικά ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και OA_4B_4 είναι ίσα:

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A_4B_4Γ_4$ έχουν ίσες τις αντίστοιχες πλευρές τους καθώς οι κατοπτρισμοί διατηρούν τα μήκη, άρα $BA = B_4A_4$ (1) και $B\hat{A}Γ = B_4\hat{A}_4Γ_4$ (2).

Ακόμα $\tau\rho\iota\gamma AOΓ = \tau\rho\iota\gamma A_4OΓ_4$ (τρεις πλευρές ίσες), άρα $O\hat{A}Γ = O\hat{A}_4Γ_4$ (3).

Από (2) και (3) παίρνουμε $B\hat{A}O = B\hat{A}Γ - O\hat{A}Γ = B_4\hat{A}_4Γ_4 - O\hat{A}_4Γ_4 = B_4\hat{A}_4Γ_4$ (4).

Από τις (1) ,(4) και τη σχέση $OA = OA_4$ έχουμε ότι $\tau\rho\iota\gamma OAB = \tau\rho\iota\gamma OA_4B_4$ και απ΄ αυτό προκύπτει ότι

$$OB = OB_4 \quad (6) \quad \text{και} \quad B\hat{O}A = B_4\hat{O}A_4 \quad (7).$$

Με βάση τη σχέση (7) έχουμε:

$$B\hat{O}B_4 = B\hat{O}A + A\hat{O}B_4 \overset{(7)}{=} B_4\hat{O}A_4 + A\hat{O}B_4 = A\hat{O}A_4 = \theta \quad (8).$$

Από τις (6) και (8) έχουμε το ζητούμενο, ότι δηλαδή το τυχαίο σημείο Β του επιπέδου έχει στραφεί κατά γωνία θ περί το σημείο Ο. □

Στο σημείο αυτό έχουμε συγκεντρώσει όλα όσα χρειάζονται για να διατυπώσουμε την ακόλουθη

Πρόταση: *Κάθε ισομετρία $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι σύνθεση το πολύ τριών κατοπτρισμών.*

Απόδειξη: Άμεση, από τις προτάσεις 2 και 3.

[12] Η περίπτωση σημείων που είναι συνευθειακά με τα Α και Γ αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Τα τέσσερα είδη ισομετριών στο επίπεδο

Έχουμε δει ότι με αποκλειστική χρήση κατοπτρισμών μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε ισομετρία στο επίπεδο, αξίζει όμως να θεωρήσουμε μια ταξινόμηση που επιτρέπει τη διάκριση, αφενός μεταξύ ισομετριών που αφήνουν κάποιο σημείο του επιπέδου αμετάβλητο, ή όχι, αφ' ετέρου μεταξύ των ισομετριών που διατηρούν τον προσανατολισμό, ή τον αντιστρέφουν.

Κάθε ισομετρία στο επίπεδο εντάσσεται σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

- Μεταφορά (translation)
- Στροφή (rotation)
- Κατοπτρισμός (reflection)
- Ολισθαίνων κατοπτρισμός, (glide reflection)

Ως **ολισθαίνοντα κατοπτρισμό** ορίζουμε τη σύνθεση μιας μεταφοράς κατά ένα μη μηδενικό διάνυσμα, με τον κατοπτρισμό ως προς ευθεία παράλληλη προς το διάνυσμα αυτό.

Για να οργανώσουμε την κατηγοριοποίηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την αλγεβρική πλατφόρμα των μιγαδικών αριθμών.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το σύνολο των ισομετριών που αφήνουν αναλλοίωτο το 0 είναι το παρακάτω:

$$S = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \text{με}\ f(z) = a \cdot z,\ \text{ή}\ f(z) = a \cdot \overline{z},\ \text{όπου}\ a \in \mathbb{C}\ \text{με}\ |\alpha| = 1 \right\}$$

Στο κεφάλαιο 2 αποδείξαμε ότι κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ είναι σύνθεση μια ορθογώνιας απεικόνισης με μια μεταφορά. Το αντίκρισμα αυτής της πρότασης στο περιβάλλον του μιγαδικού επιπέδου, ώστε να περιγράψουμε το σύνολο όλων των ισομετριών του $\mathbb{C}$, διατυπώνεται στην ακόλουθη

Πρόταση: *Κάθε απεικόνιση* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *της μορφής* $f(z) = az + b$ *ή* $f(z) = a\overline{z} + b$, *με* $|a| = 1$ *είναι ισομετρία, και αντίστροφα, κάθε ισομετρία είναι μιας από τις δύο αυτές μορφές.*

Απόδειξη: Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η απεικόνιση $f: z \mapsto az+b$ είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ είναι

$$\left|f(z)-f(w)\right| = \left|(az+b)-(aw+b)\right| = \left|az-aw\right| = \left|a\right|\left|z-w\right| = \left|z-w\right|$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και η $f: z \mapsto a\overline{z}+b$ είναι ισομετρία.

Έστω τώρα ότι η *F* είναι μια ισομετρία του $\mathbb{C}$.

Με στόχο να αποδείξουμε ότι η *F* έχει οπωσδήποτε μια από τις δύο μορφές που αναφέρονται στην πρόταση, αρχικά θα αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

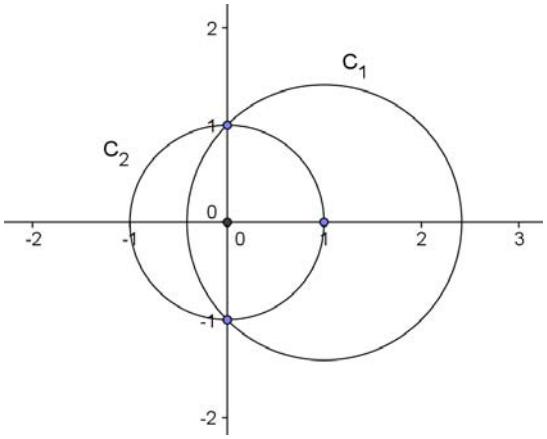
Λήμμα: Αν η f σταθεροποιεί το 0 και το 1, τότε $f(i)=i$, ή $f(i)=-i$. Στην πρώτη περίπτωση η f είναι η ταυτοτική, ενώ, αν απεικονίζει το *i* στο $-i$, τότε αντιστοιχίζει κάθε μιγαδικό στον συζυγή του, δηλαδή είναι η $f(z)=\overline{z}$.

Απόδειξη: Έστω ότι είναι $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Για το $f(i)$ έχουμε

$$\left|f(i)-f(1)\right| = \left|i-1\right| \Rightarrow \left|f(i)-1\right| = \sqrt{2},$$

άρα η εικόνα του $f(i)$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στον κύκλο C_1 με κέντρο το 1 και ακτίνα $\sqrt{2}$ (Σχήμα 17). Ταυτόχρονα,



Σχήμα 17

$$\left|f(i)-f(0)\right| = \left|i-0\right| \Rightarrow \left|f(i)\right| = 1,$$

άρα η εικόνα του $f(i)$ βρίσκεται στον κύκλο C_2 με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

Τα κοινά σημεία των C_1, C_2, είναι τα $(0,1)$ και $(0,-1)$, άρα είναι $f(i)=\pm i$.

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που ισχύει $f(i)=i$.

Θέτοντας $z=x+yi$ και $f(z)=u+vi$, αφού η f είναι ισομετρία έχουμε

$$\left|f(z)-f(0)\right| = \left|z-0\right| \Rightarrow \left|f(z)\right| = \left|z\right| \Rightarrow u^2+v^2 = x^2+y^2 \quad (1)$$

$$\left|f(z)-f(1)\right|=\left|z-1\right|\Rightarrow\left|(u-1)+vi\right|=\left|(x-1)+yi\right|\Rightarrow(u-1)^2+v^2=(x-1)^2+y^2 \quad (2)$$

$$\left|f(z)-f(i)\right|=\left|z-i\right|\Rightarrow\left|u+(v-1)i\right|=\left|x+(y-1)i\right|\Rightarrow u^2+(v-1)^2=x^2+(y-1)^2 \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $u=x$, ενώ από τις (1) και (3) παίρνουμε $v=y$, συνεπώς είναι $f(z)=z$.

Αν υποθέσουμε ότι $f(i)=-i$, τότε τη θέση της (3) παίρνει η $u^2+(v+1)^2=x^2+(y-1)^2$, η οποία σε συνδυασμό με την (1) δίνει $v=-y$, άρα $f(z)=\overline{z}$.

Επανερχόμαστε τώρα στην ισομετρία F, με τη βοήθεια της οποίας ορίζουμε την απεικόνιση

$$G(z)=\frac{F(z)-F(0)}{F(1)-F(0)},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Η G είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $z,w\in\mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|G(z)-G(w)\right|&=\left|\frac{F(z)-F(0)}{F(1)-F(0)}-\frac{F(w)-F(0)}{F(1)-F(0)}\right|\\&=\left|\frac{F(z)-F(w)}{F(1)-F(0)}\right|\\&=\frac{\left|F(z)-F(w)\right|}{\left|F(1)-F(0)\right|}\\&=\frac{\left|z-w\right|}{\left|1-0\right|}\\&=\left|z-w\right|\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει $G(1)=1$ και $G(0)=0$, σύμφωνα λοιπόν με το λήμμα, για κάθε $z\in\mathbb{C}$ είναι $G(z)=z$, ή $G(z)=\overline{z}$.

Αν $G(z)=z$, τότε

$$\frac{F(z)-F(0)}{F(1)-F(0)}=z\Rightarrow F(z)-F(0)=\left(F(1)-F(0)\right)\cdot z\Rightarrow F(z)=\left(F(1)-F(0)\right)\cdot z+F(0).$$

Θέτοντας $b=F(0)$ και $a=F(1)-F(0)$, οπότε $\left|a\right|=\left|F(1)-F(0)\right|=\left|1-0\right|=1$, παίρνουμε

$$F(z)=az+b, \quad \text{με } |a|=1 .$$

Αντίστοιχα, αν $G(z)=\overline{z}$, τότε καταλήγουμε ότι $F(z)=a\overline{z}+b$ και η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να παρουσιάσουμε τις τέσσερις κατηγορίες ισομετριών που διακρίνουμε στο επίπεδο, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας την ακόλουθη

Πρόταση:

i) Για την ισομετρία $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $f(z)=az+b$, $|a|=1$ ισχύει ότι:

αν $a=1$, είναι μεταφορά, ενώ

αν $a\neq 1$ είναι στροφή.

ii) Για την ισομετρία $f(z)=a\overline{z}+b$ ισχύει ότι:

αν $a\overline{b}+b=0$, είναι κατοπτρισμός ως προς κάποια ευθεία, ενώ

αν $a\overline{b}+b\neq 0$ είναι κατοπτρισμός με ολίσθηση.

Με αυτές τις περιπτώσεις εξαντλείται το σύνολο των ισομετριών του επιπέδου.

Απόδειξη:

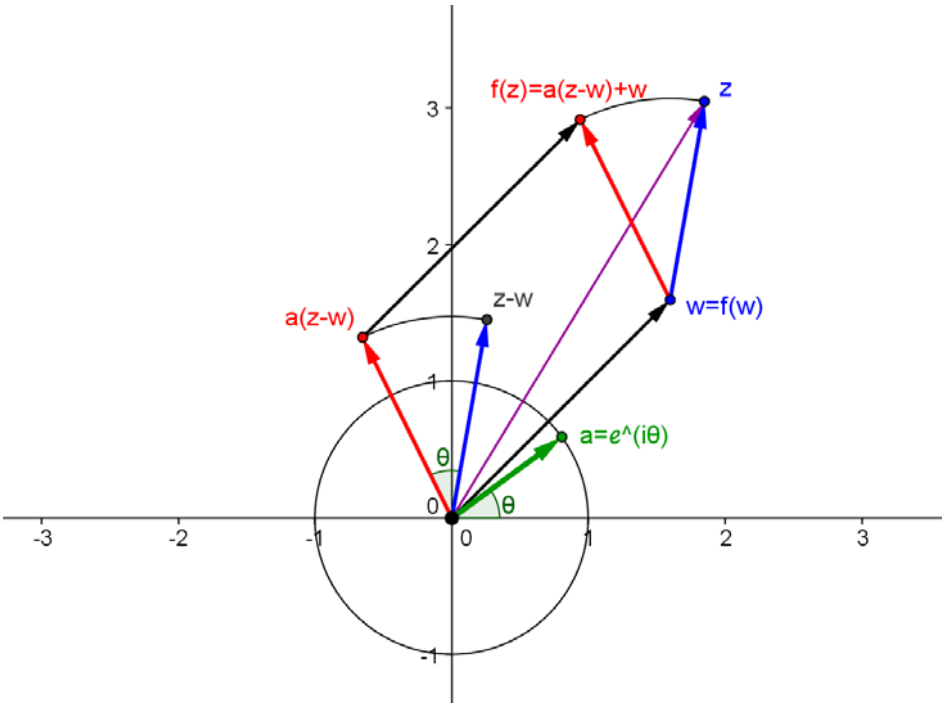
i) Αν $a=1$, τότε προφανώς η f είναι μεταφορά: $f(z)=z+b$.

Αν $a\neq 1$, τότε θεωρώντας το μιγαδικό $w=\dfrac{b}{1-a}$ έχουμε:

$f(w)=aw+b=a\cdot\dfrac{b}{1-a}+b=\dfrac{ab+b-ab}{1-a}=\dfrac{b}{1-a}$, δηλαδή $f(w)=w$,

άρα $f(z)-w=f(z)-f(w)=(az+b)-(aw+b)=a(z-w)$.

Οι σχέσεις $f(w)=w$ και $f(z)-w=a(z-w)$ δείχνουν ότι πρόκειται για στροφή γύρω από το w, κατά γωνία θ, όπου $a=e^{i\theta}$ (Σχήμα 18).



Σχήμα 18

ii) Αρκεί να προσδιορίσουμε ένα κατοπτρισμό *r* ως προς μια ευθεία *L* και μια μεταφορά *t* (πιθανά μηδενική) κατά ένα διάνυσμα παράλληλο προς την *L, που να συνθέτουν την* f. Θα δούμε ότι οι $t(z)=z+\frac{1}{2}(a\bar{b}+b)$ και $r(z)=a\bar{z}+\frac{1}{2}(b-a\bar{b})$ πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις.

Είναι προφανές ότι η *t* είναι μια μεταφορά κατά $c\equiv\frac{1}{2}(a\bar{b}+b)$. Είναι ακόμα $|a|=1\Rightarrow a=e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta\in\mathbb{R}$, οπότε $c=\frac{1}{2}(e^{i\theta}\bar{b}+b)=\frac{1}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\bar{b}+e^{-\frac{i\theta}{2}}b\right)$. Αλλά $e^{\frac{i\theta}{2}}\bar{b}+e^{-\frac{i\theta}{2}}b=e^{\frac{i\theta}{2}}\bar{b}+\overline{e^{\frac{i\theta}{2}}\bar{b}}\equiv 2x\in\mathbb{R}$, άρα $c=x\cdot e^{\frac{i\theta}{2}}$, επομένως η *t* είναι μια μεταφορά κατά τη διεύθυνση του $e^{\frac{i\theta}{2}}$.

Ακόμα ισχύει

$$r^2(z)=r(c)=a\cdot\overline{r(z)}+\frac{1}{2}\left(b-a\overline{b}\right)=a\cdot\overline{\left(a\overline{z}+\frac{1}{2}\left(b-a\overline{b}\right)\right)}+\frac{1}{2}\left(b-a\overline{b}\right)=\ldots=a\overline{a}z=|a|^2 z=z \quad ,$$

ενώ για $z=\frac{1}{2}b+\lambda e^{\frac{i\theta}{2}}$ παίρνουμε

$$r(z)=a\overline{\left(\frac{1}{2}b+\lambda e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}+\frac{1}{2}\left(b-a\overline{b}\right)=\frac{1}{2}b+\lambda a e^{-\frac{i\theta}{2}}=\frac{1}{2}b+\lambda e^{i\theta}e^{-\frac{i\theta}{2}}=\frac{1}{2}b+\lambda e^{\frac{i\theta}{2}}=z\,.$$

Οι σχέσεις $r^2(z)=z$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και $r(z)=z$ για $z=\frac{1}{2}b+\lambda e^{\frac{i\theta}{2}}$ σημαίνουν ότι η r, καθώς δεν είναι η ταυτοτική, είναι κατοπτρισμός ως προς την ευθεία

$$L=\left\{\frac{1}{2}b+\lambda e^{\frac{i\theta}{2}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Παρατηρείστε ότι η t είναι μια μεταφορά κατά τη διεύθυνση της L.

Τέλος, για κάθε $z\in\mathbb{C}$ έχουμε

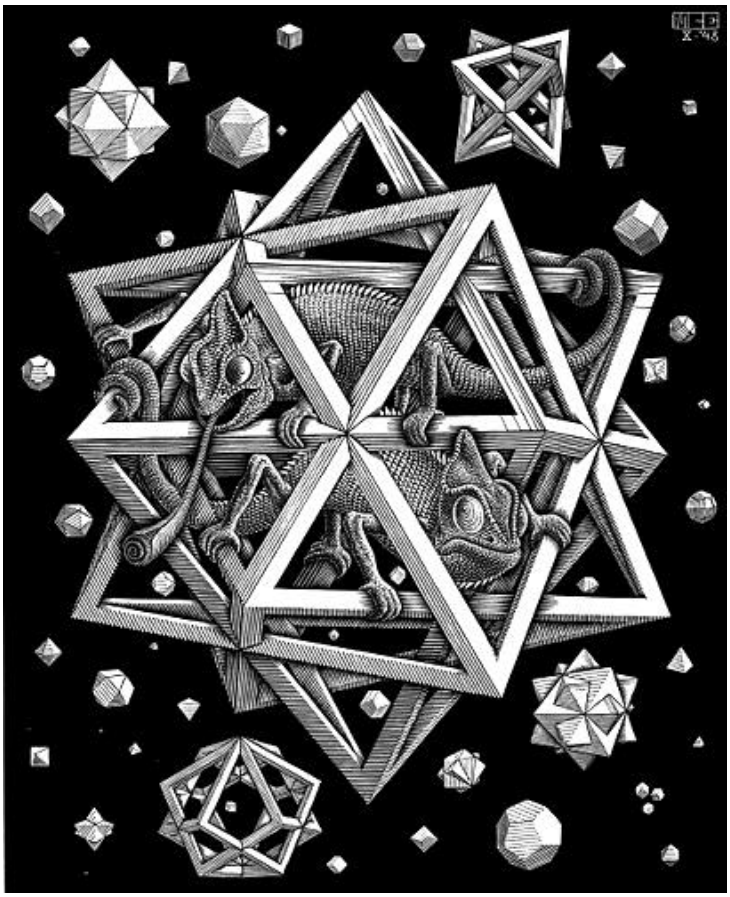
$$tr(z)=t\left(r(z)\right)=r(z)+\frac{1}{2}\left(a\overline{b}+b\right)=a\overline{z}+\frac{1}{2}\left(b-a\overline{b}\right)+\frac{1}{2}\left(a\overline{b}+b\right)=a\overline{z}+b=f(z)$$

και αντίστοιχα $rt(z)=f(z)$.

Προφανώς αν $a\overline{b}+b=0$, τότε η f είναι ένας κατοπτρισμός ως προς την L, ενώ, αν $a\overline{b}+b\neq 0$, τότε η f είναι ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός.

Σύμφωνα με την πρώτη πρόταση της ενότητας αυτής, κάθε ισομετρία έχει μια από τις μορφές $z\mapsto az+b$, ή $z\mapsto a\overline{z}+b$, με $|a|=1$, επομένως ανήκει σε μια από τις κατηγορίες που αναφέρονται στην παρούσα πρόταση. □

Κεφάλαιο 4: Κανονικότητα και συμμετρίες στο χώρο $\mathbb{R}^3$



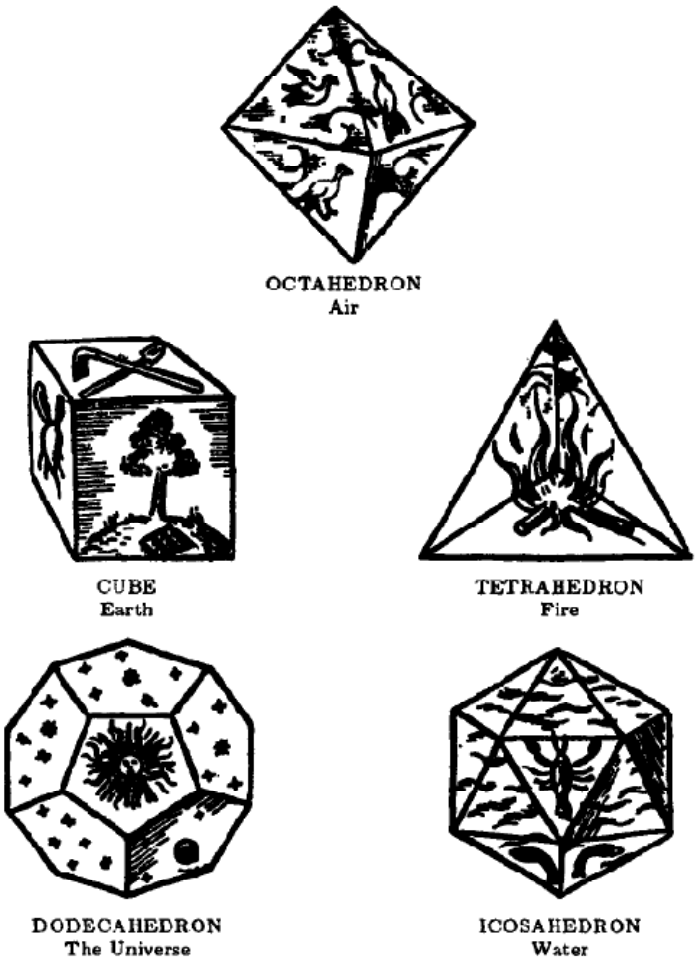
Εικόνα 14. ***Stars*** **M. C. Escher**

Στο κεφάλαιο αυτό εστιάζουμε την προσοχή μας στη μελέτη των $O(3)$ και $SO(3)$, τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$. Θα διαπιστώσουμε ότι κάθε πεπερασμένη υποομάδα της $SO(3)$ είναι ισόμορφη με μια κυκλική, μια διεδρική, ή μια από τις ομάδες συμμετριών των Πλατωνικών Στερεών. Στις ενότητες που ακολουθούν αναπτύσσονται διεξοδικά και σε αρκετό βάθος τα εξής:

- Η έννοια της κανονικότητας και εναλλακτικοί ορισμοί κανονικού πολυέδρου
- Περιγραφή και κατασκευή των πλατωνικών στερεών
- Η έννοια της δυϊκότητας στα πολύεδρα
- Οι συμμετρίες των πλατωνικών στερεών
- Οι πεπερασμένες ομάδες περιστροφών του $\mathbb{R}^3$.

Τα Πλατωνικά στερεά

Πλατωνικά Στερεά ονομάζουμε τα κανονικά πολύεδρα. Σε αντίθεση με τα κανονικά σχήματα του $\mathbb{R}^2$, που είναι άπειρα το πλήθος (τα κανονικά πολύγωνα με 3, 4, 5 κλπ κορυφές), είναι γνωστό ότι στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν μόνο πέντε: το (κανονικό) τετράεδρο, ο κύβος, το (κανονικό) οκτάεδρο, το (κανονικό) δωδεκάεδρο και το (κανονικό) εικοσάεδρο. Είναι σχήματα που ασκούν μεγάλη γοητεία, όχι μόνο στους μαθηματικούς, κυρίως εξαιτίας των πολλών συμμετριών που διαθέτουν και της αισθητικής απόλαυσης που προσφέρει η παρατήρησή τους. Ήταν γνωστά στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Οφείλουν το όνομά τους στο γεγονός ότι τα συναντάμε σ' έναν από τους Πλατωνικούς διαλόγους, τον *Τίμαιο*, όπου και γίνεται εκτενής αναφορά σ' αυτά.



Εικόνα 15. Από το βιβλίο του M. Berger, Geometry II, 1980

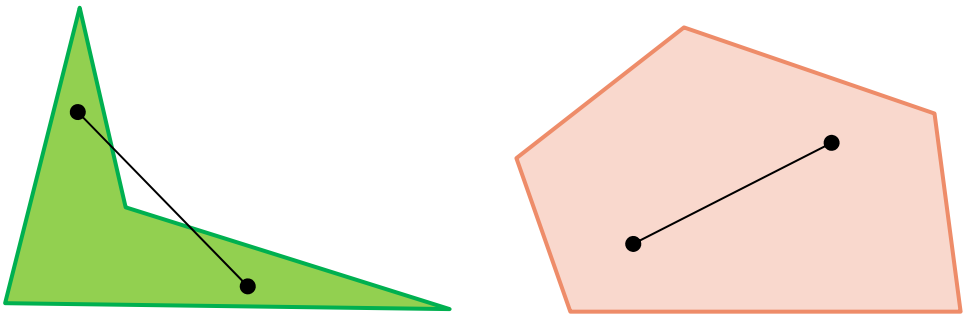
Πρόκειται για μια σειρά σχεδίων του Κέπλερ

στο έργο του *Harmonices Mundi* (Η Αρμονία του Κόσμου), 1619.

Αν και στην παρούσα εργασία θεωρούμε γνωστές τουλάχιστον τις έννοιες που συναντάμε στα σχολικά μαθηματικά, θα αγνοήσουμε προς στιγμήν αυτή την παραδοχή για να αποδώσουμε προσεκτικά τις έννοιες μερικών σημαντικών (από τη σκοπιά της συμμετρίας) σχημάτων, αρχίζοντας από τα πολύγωνα στο επίπεδο, κυρτά ή κανονικά, μέχρι να φτάσουμε στα κυρτά πολύεδρα και ειδικότερα στα κανονικά στερεά.

Ορισμός 1: Όπως ένα τρίγωνο στο επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή τριών ημιεπιπέδων με ακμές τις ευθείες που ορίζουν οι κορυφές του, έτσι γενικότερα ορίζουμε ως **κυρτό πολύγωνο** μια φραγμένη[13] περιοχή του επιπέδου που οριοθετείται από πεπερασμένο πλήθος ημιεπιπέδων.

Χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε κυρτού πολυγώνου είναι ότι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ως άκρα οποιαδήποτε δύο σημεία του περιέχεται στο πολύγωνο.

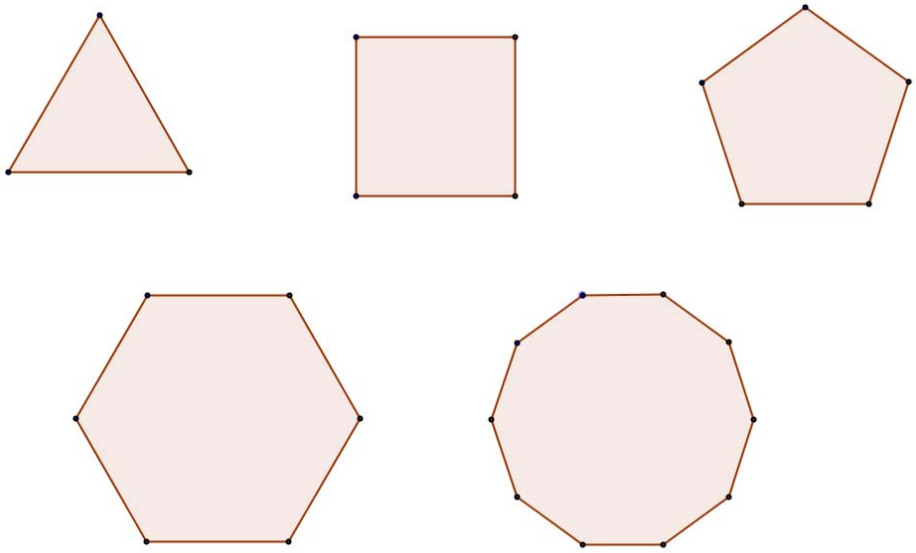


Μη κυρτό πολύγωνο **Κυρτό πολύγωνο**

Σχήμα 19

Ορισμός 2: Ονομάζουμε **κανονικό** πολύγωνο κάθε κυρτό πολύγωνο του οποίου όλες οι πλευρές είναι ίσες, αλλά και όλες οι γωνίες του.

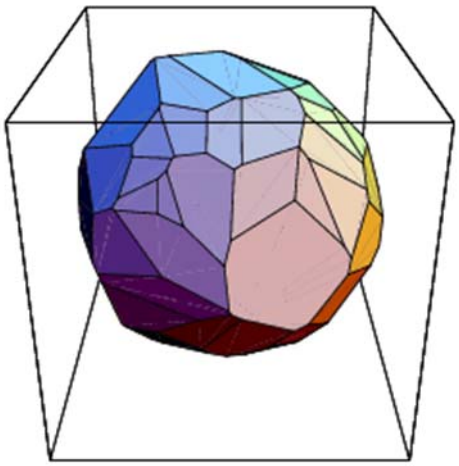
[13] Φραγμένη περιοχή στο επίπεδο ονομάζουμε εκείνο το σημειοσύνολο του επιπέδου για το οποίο υπάρχει καθορισμένος κύκλος, ο οποίος να το περιέχει.



Σχήμα 20 Κανονικά πολύγωνα

Ορισμός 3: Μεταφέροντας τη λογική του προηγούμενου ορισμού στο χώρο των τριών διαστάσεων, ονομάζουμε **κυρτό πολύεδρο** κάθε φραγμένη[14] περιοχή του χώρου που προκύπτει ως η τομή πεπερασμένου πλήθους ημιχώρων (Εικόνα 16. Κυρτό πολύεδρο[15]).

Κάθε ημίχωρος έχει ένα συνοριακό επίπεδο. Το μέρος κάθε συνοριακού επιπέδου που ανήκει στο κυρτό πολύεδρο (εκείνο που συμπεριλαμβάνεται στην τομή των ημιχώρων) ονομάζεται **έδρα** του πολυέδρου και είναι ένα κυρτό πολύγωνο. Οι πλευρές των εδρών λέγονται **ακμές** του πολυέδρου και τα άκρα των ακμών αποτελούν τις **κορυφές** του.



Εικόνα 16. Κυρτό πολύεδρο

[14] Φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ ονομάζουμε εκείνο για το οποίο υπάρχει σφαίρα με κέντρο την αρχή $O(0,0,0)$ και ακτίνα $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, η οποία να το περιέχει.

[15] Η εικόνα υπάρχει στην ιστοσελίδα http://mathworld.wolfram.com/ConvexPolyhedron.html

Η έννοια της κυρτότητας γενικεύεται στο n-διάστατο χώρο $\mathbb{R}^n$:

Ορισμός 4: Ονομάζουμε **κυρτό** κάθε υποσύνολο *X* του $\mathbb{R}^n$ αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο οποιαδήποτε σημεία του X ανήκει εξ ολοκλήρου στο *X*, δηλαδή:

Το X είναι κυρτό $\Leftrightarrow$ για κάθε x,y $\in X$ ισχύει $tx+(1-t)y \in X$, για κάθε t $\in \mathbb{R}$

Είναι γεγονός ότι εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε ως πολύεδρο μόνο το σύνολο των σημείων των εδρών, θεωρώντας το στερεό κούφιο, εξαιρώντας δηλαδή τα εσωτερικά του σημεία. Όπως θα δούμε αργότερα, η τάση αυτή αναπτύχθηκε μετά την ανακάλυψη του τύπου του Euler, όπου το ενδιαφέρον στρέφεται στα στοιχεία που βρίσκονται στην εξωτερική επιφάνεια του πολυέδρου[16]. Παραθέτουμε παρακάτω ένα τέτοιο περιγραφικό ορισμό, τον οποίο, με μικρές διαφοροποιήσεις, συναντάμε σε αρκετούς συγγραφείς (Coxeter, Cromwell, κ.ά.)[17]:

Ορισμός 5: **Πολύεδρο** είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους πολυγώνων, ώστε,

- Αν δύο πολύγωνα έχουν κοινά σημεία, τότε να πρόκειται για μια κορυφή, ή μια πλευρά.
- Κάθε πλευρά κάθε πολυγώνου να είναι πλευρά ακριβώς ενός άλλου πολυγώνου.
- Να μπορούμε να μεταβούμε από το εσωτερικό ενός πολυγώνου στο εσωτερικό οποιουδήποτε άλλου, παραμένοντας στο πολύεδρο.
- Αν κάποια πολύγωνα συντρέχουν σε μια κορυφή, να μπορούμε να μεταβούμε από το εσωτερικό ενός, στο εσωτερικό οποιουδήποτε άλλου από αυτά, παραμένοντας στο πολύεδρο, και χωρίς να περάσουμε από άλλα πολύγωνα, ούτε από την κορυφή.

---

[16] Ο ίδιος ο Euler αναφέρει:

«… Κατά συνέπεια, η θεώρηση των στερεών σωμάτων πρέπει να κατευθυνθεί στο σύνορό τους· γιατί όταν το σύνορο που περικλείει ένα στερεό σώμα από όλες τις πλευρές είναι γνωστό, το ίδιο το στερεό είναι γνωστό.»

[17] Πρόκειται για μια βελτιωμένη εκδοχή του ορισμού που έδωσε το 1865 ο Möbius, ο οποίος είχε παραλείψει την τέταρτη απαίτηση.

Εμείς υιοθετούμε τον **ορισμό 3** που προηγήθηκε, ακολουθώντας την οπτική που συναντάμε στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο XI οι δύο πρώτοι όροι (ορισμοί) αναφέρονται στα πολύεδρα:

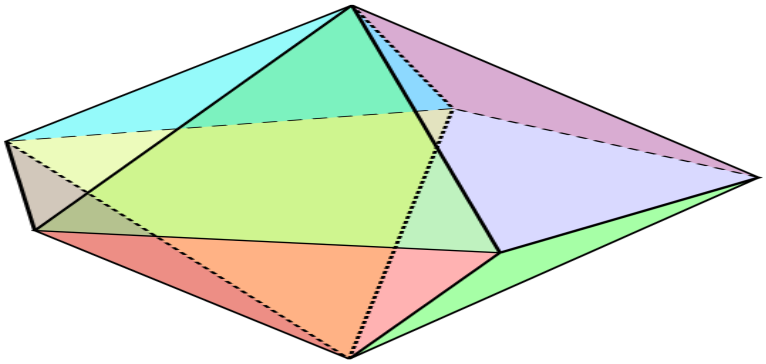
α΄ [1]. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.
β΄ [2]. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

Παρατηρούμε ότι στο δεύτερο όρο διαφοροποιείται σαφώς το στερεό (το πολύεδρο) από τις επιφάνειές του (τις έδρες του). Εντούτοις, είναι αλήθεια ότι στα Στοιχεία δεν συναντάμε έναν ορισμό για τα κανονικά πολύεδρα. Μελετώνται διεξοδικά και πλήρως τα πέντε μόνα δυνατά κανονικά πολύεδρα, τα οποία ορίζονται με τους όρους 12, 25, 26, 27 και 28 του ενδέκατου Βιβλίου:

*ιβ΄ [12]. **Πυραμίς** ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.*
*κε΄ [25]. **Κύβος** ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.*
*κς΄ [26]. **Ὀκτάεδρόν** ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.*
*κζ΄ [27]. **Εἰκοσάεδρόν** ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.*
*κη΄ [28]. **Δωδεκάεδρόν** ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.*

Η δυσκολία της έννοιας του κανονικού πολυέδρου.

Αν για τα κυρτά πολύγωνα στάθηκε εύκολη η περιγραφή των συνθηκών που απαιτούνται, ώστε να είναι κανονικά, δεν είναι εξ ίσου απλό το θέμα στην περίπτωση των κανονικών στερεών. Σίγουρα είναι αναγκαίο οι έδρες να είναι ίσα μεταξύ τους κανονικά πολύγωνα, αυτό όμως δεν είναι αρκετό. Πράγματι, το πολύεδρο του σχήματος που ακολουθεί πληροί τις προϋποθέσεις που αναφέραμε, συγκεκριμένα αποτελείται από 10 ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα, κατά τον Ευκλείδη όμως, δεν συμπεριλαμβάνεται στον κατάλογο των «κανονικών στερεών», μια έννοια που, όπως προαναφέραμε, ο ίδιος ο Ευκλείδης δεν έχει ορίσει.



Σχήμα 21 Πενταγωνική δι-πυραμίδα

Χαρακτηριστικά, στο τέλος του Βιβλίου XIII των Στοιχείων, αφού έχει περιγράψει, κατασκευάσει και συγκρίνει μεταξύ τους τα πέντε πλατωνικά στερεά, ο Ευκλείδης επισημαίνει ότι κανένα άλλο σχήμα δεν κατασκευάζεται, το οποίο να περιέχεται από ισόπλευρα και ισογώνια σχήματα, ίσα μεταξύ τους:

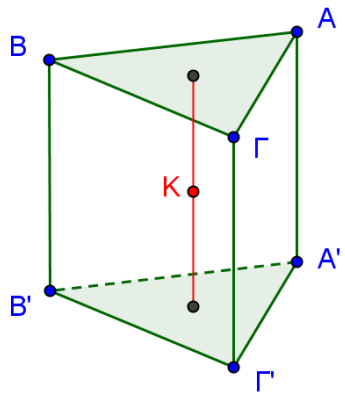
Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Προφανώς, στη φράση αυτή του Ευκλείδη πρέπει να προσθέσουμε εκείνη την ιδιότητα που θα κάνει τα πλατωνικά στερεά μοναδικά, άξιους διεκδικητές του χαρακτηρισμού «κανονικά στερεά». Ένα τέτοιο κοινό χαρακτηριστικό των πλατωνικών στερεών, με το οποίο άλλωστε κυρίως ασχολείται ο Ευκλείδης στο Βιβλίο XIII, είναι η εγγραψιμότητά τους σε σφαίρα. Πράγματι μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 6: Ένα κυρτό πολύεδρο λέγεται **κανονικό** όταν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:

- οι έδρες του είναι κανονικά πολύγωνα
- οι έδρες του είναι ίσες
- είναι εγγράψιμο σε σφαίρα.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται φανερή η ανάγκη να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του ορισμού, καθώς υπάρχουν πολύεδρα που πληρούν τις δύο από τις τρεις συνθήκες, αλλά δεν ανήκουν στην ομάδα των πέντε πλατωνικών στερεών του Ευκλείδη.

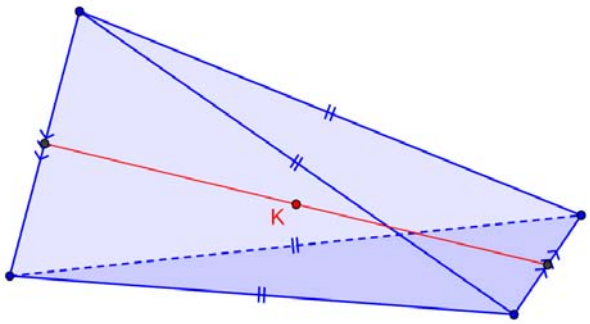


Σχήμα 22

Το τριγωνικό πρίσμα στο Σχήμα 22 αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα και τρία τετράγωνα, δηλαδή οι έδρες του είναι κανονικά πολύγωνα, εγγράφεται σε σφαίρα με κέντρο το μέσο Κ του τμήματος που συνδέει τα βαρύκεντρα των τριγωνικών εδρών, αλλά δεν είναι κανονικό.

Στο παράδειγμα της πενταγωνικής διπυραμίδας (Σχήμα 21) με έδρες ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα, έχουμε ένα πολύεδρο που δεν είναι κανονικό. Τι λείπει; Η τρίτη απαίτηση του ορισμού: δεν εγγράφεται σε σφαίρα.

Τέλος στο διπλανό Σχήμα 23 βλέπουμε ένα ακόμα μη κανονικό στερεό, με ίσες έδρες, οι οποίες όμως δεν είναι κανονικά πολύγωνα (πρόκειται για τέσσερα ισοσκελή μη ισόπλευρα τρίγωνα). Εντούτοις, το πολύεδρο είναι εγγράψιμο σε σφαίρα με κέντρο το μέσο του τμήματος που ορίζουν τα μέσα οποιονδήποτε δύο απέναντι ακμών.



Σχήμα 23

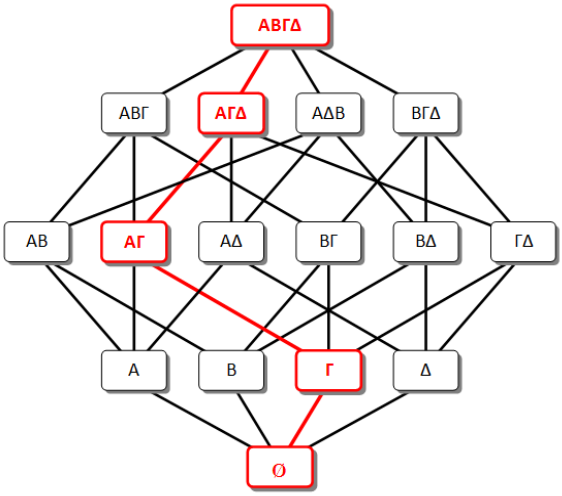
Στο βιβλίο *Polyhedra*, του Cromwell (1997) συναντάμε τρεις ακόμα συνθήκες που είναι ισοδύναμες με το κριτήριο εγγραψιμότητας σε σφαίρα:

Θεώρημα: *Έστω P ένα κυρτό πολύεδρο με έδρες ίσα μεταξύ τους κανονικά πολύγωνα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

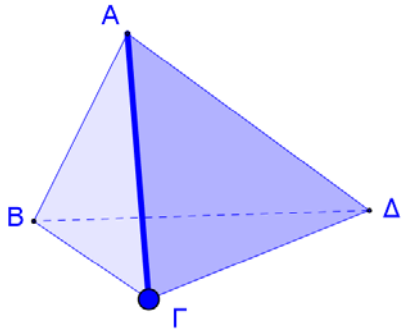
1. *Το P είναι εγγράψιμο σε σφαίρα.*
2. *Όλες οι δίεδρες γωνίες του P είναι μεταξύ τους ίσες.*
3. *Όλες οι στερεές γωνίες του P είναι μεταξύ τους ίσες (συμπτώσιμες).*
4. *Όλες οι κορυφές περιβάλλονται από τον ίδιο αριθμό εδρών.*

Παρακάμπτουμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, και δίνουμε στη συνέχεια έναν ορισμό της κανονικότητας των κυρτών πολυέδρων, ικανό να γενικευθεί σε πολύτοπα οποιουδήποτε ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, με $n \geq 2$, αξιοποιώντας τα εργαλεία της θεωρίας ομάδων και τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$.

Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ είναι φανερό ότι υπάρχουν ισομετρίες που αφήνουν αναλλοίωτο ένα κανονικό πολύγωνο, μεταφέροντας κάθε κορυφή του (και κάθε πλευρά) σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή (αντίστοιχα πλευρά). Μπορούμε να πετύχουμε αυτό το αποτέλεσμα με στροφές του επιπέδου γύρω από το κέντρο του πολυγώνου. Γενικεύοντας, με στόχο να περάσουμε την ιδέα αυτή στα κανονικά πολύεδρα, περιμένουμε να υπάρχουν ισομετρίες που να αντιστοιχίζουν οποιαδήποτε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη και το ίδιο να ισχύει για τις ακμές και τις έδρες ενός κανονικού πολυέδρου. Οι απαιτήσεις αυτές ενοποιούνται γύρω από τη βοηθητική έννοια της σημαίας (flag). Με τον όρο **σημαία** ενός πολυέδρου X εννοούμε κάθε πεντάδα $(\varnothing, \kappa, \alpha, \varepsilon, X)$, που αρχίζει με το κενό σύνολο, καταλήγει στο πολύεδρο X και παρεμβάλλονται διαδοχικά μια κορυφή κ, μία ακμή α και μία έδρα ε του X, ώστε να ισχύει $\kappa \in \alpha \in \varepsilon$.



Σχήμα 24



Στο διπλανό διάγραμμα όψεων[18] ενός τετραέδρου φαίνονται όλες οι σημαίες του. Ένα παράδειγμα σημαίας είναι τονισμένο με κόκκινο χρώμα.

$$\{\varnothing, \Gamma, \text{ΑΓ}, \text{ΑΓΔ}, \text{ΑΒΓΔ}\}$$

Περιλαμβάνει την κορυφή Γ, που ανήκει στην ακμή ΑΓ, η οποία περιέχεται στην έδρα ΑΓΔ.

[18] Όψη ενός πολυτόπου X ονομάζεται μια τομή του X με οποιοδήποτε υπερεπίπεδο στήριξης του X (supporting hyperplane).

Ορισμός 7: Ένα κυρτό πολύεδρο ονομάζεται **κανονικό**, αν μπορούμε να μεταφέρουμε οποιαδήποτε σημαία του σε οποιαδήποτε άλλη, μέσω μιας κατάλληλης ισομετρίας,

δηλαδή,

το κυρτό πολύεδρο X είναι κανονικό, αν για κάθε δύο σημαίες του $(\varnothing, \kappa_1, \alpha_1, \varepsilon_1, X)$ και $(\varnothing, \kappa_2, \alpha_2, \varepsilon_2, X)$, υπάρχει $f \in Is(\mathbb{R}^3)$ τέτοια, ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$f(\kappa_1) = \kappa_2$$

$$f(\alpha_1) = \alpha_2$$

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \quad \text{και} \quad f(X) = X.$$

Είναι γεγονός ότι ο παραπάνω ορισμός είναι συμβατός (ισοδύναμος) με τον ορισμό 6 που προηγήθηκε (σελίδα 93). Έτσι, υιοθετώντας το νέο ορισμό, τα κριτήρια που συναντήσαμε στον ορισμό 6 αποτελούν αποδείξιμες ιδιότητες. Ας δούμε ένα παράδειγμα, με μια αναλυτική απόδειξη:

Πρόταση: *Κάθε κανονικό πολύεδρο είναι εγγράψιμο σε σφαίρα.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό πολύεδρο X με κορυφές $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$. Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα σημείο τού X το οποίο μένει αναλλοίωτο από κάθε ισομετρία $f \in Is(\mathbb{R}^3)$ για την οποία ισχύει $f(X) = X$. Πρόκειται για το σημείο $c = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n}{n}$, το λεγόμενο **βαρύκεντρο** του πολυέδρου. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, με $h(x) = \sum_{j=1}^{n} \left\| x - \kappa_j \right\|^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο <u>μόνο</u> στο c:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \sum_{j=1}^{n} \left\| x - \kappa_j \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\|x\|^2 - 2x \cdot \kappa_j + \|\kappa_j\|^2 \right) \\
&= n\|x\|^2 - 2n\langle x, c\rangle + \sum_{j=1}^{n} \|\kappa_j\|^2 \\
&= n\langle x, x\rangle - 2n\langle x, c\rangle + n\langle c, c\rangle - n\langle c, c\rangle + \sum_{j=1}^{n} \|\kappa_j\|^2 \\
&= n\langle x - c, x - c\rangle - n\|c\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|\kappa_j\|^2 \\
&= n\|x - c\|^2 - n\|c\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|\kappa_j\|^2
\end{aligned}
$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι ανεξάρτητοι του *x*, άρα η τιμή $h(x)$, ελαχιστοποιείται όταν η μη αρνητική παράσταση $n\|x-c\|^2$ μηδενισθεί, και αυτό συμβαίνει μόνο για $x = c$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της κανονικότητας, η *f* μεταθέτει τις κορυφές του *X*, δηλαδή είναι $\{f(\kappa_1), f(\kappa_2), \ldots, f(\kappa_n)\} = \{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n\}$ και αυτό έχει ως συνέπεια ότι $h \circ f = h$ (1).

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(h \circ f)(x) &= h(f(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\| f(x) - \kappa_j \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\| f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(\kappa_j) \right\|^2 \qquad \text{αφού η } f \text{ είναι ισομετρία} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\| x - \kappa_j \right\|^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Από την (1), για $x = c$, παίρνουμε ότι $h(f(c)) = h(c) = h_{\min}$, άρα, λόγω της μοναδικότητας της θέσης του ελαχίστου της *h*, αναγκαστικά είναι $f(c) = c$.

Με άλλα λόγια, ισχύει η

Πρόταση: *Το βαρύκεντρο ενός κανονικού πολυέδρου είναι σταθερό σημείο κάθε ισομετρίας που διατηρεί το πολύεδρο.*

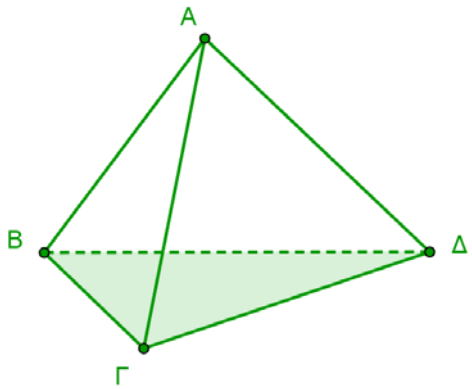
Ταυτόχρονα, τέτοιες ισομετρίες μεταφέρουν κάθε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή, οπότε όλες οι κορυφές ισαπέχουν από το βαρύκεντρο, που σημαίνει ότι το κανονικό πολύεδρο εγγράφεται σε σφαίρα με κέντρο το βαρύκεντρό του. □

Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε την ύπαρξη κανονικών πολυέδρων και θα περιγράψουμε την κατασκευή τους. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι τα πέντε πλατωνικά στερεά είναι τα μόνα δυνατά κανονικά πολύεδρα.

Περιγραφή και κατασκευή των πλατωνικών στερεών

Είναι σχετικά εύκολο να αναγνωρίσει κανείς την ύπαρξη του τετραέδρου, του κύβου και του οκταέδρου, ενώ συγκριτικά δεν είναι τόσο προφανής εκείνη του δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου. Θα δώσουμε μια σύντομη περιγραφή των τριών πρώτων στερεών, πριν περάσουμε σε αναλυτικότερη μελέτη του ζεύγους δωδεκάεδρο-εικοσάεδρο.

Το κανονικό τετράεδρο



Σχήμα 25

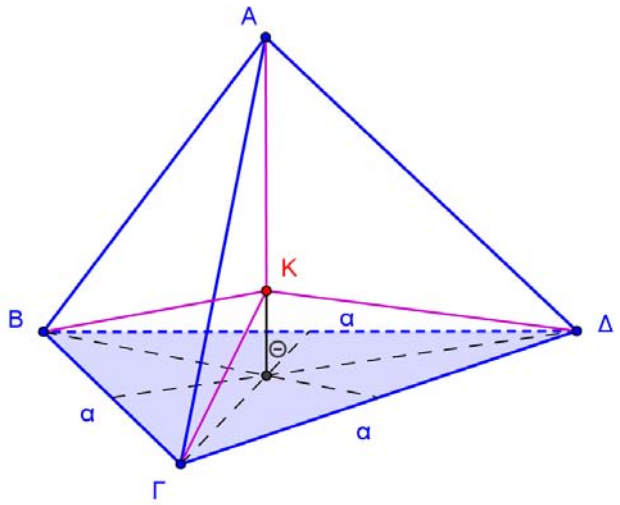
ΤΕΤΑΕΔΡΟ

- 4 έδρες ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ, ΒΓΔ
- 4 κορυφές Α, Β, Γ, Δ
- 6 ακμές ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ

Η κατασκευή και εγγραφή κανονικού τετραέδρου (Σχήμα 25) σε σφαίρα περιλαμβάνεται στο Βιβλίο XIII των Στοιχείων του Ευκλείδη, στην 13^{η} πρόταση:

Πρότασις ιγ΄. *Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.*	Πρόταση 13 Να κατασκευασθεί πυραμίδα (κανονικό τετράεδρο) και να εγγραφεί σε δοθείσα σφαίρα και να δειχθεί, ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τα τρία δεύτερα του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας..

Δεν θα παραθέσουμε την απόδειξη που κάνει ο Ευκλείδης για την πρόταση 13. Είναι άλλωστε γνωστή και εύκολα προσβάσιμη στη σχετική βιβλιογραφία. Θα δώσουμε όμως μια απλή κατασκευή που τεκμηριώνει την ύπαρξη του τετραέδρου[19].



Σχήμα 26

Ας θεωρήσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο *ΒΓΔ*, πλευράς *α* (Σχήμα 26). Στο βαρύκεντρο *Θ* του τριγώνου υψώνουμε μια κάθετο προς το επίπεδό του και παίρνουμε τμήμα $\Theta A = \alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$. Το τετράεδρο *ΑΒΓΔ* είναι το ζητούμενο. Πράγματι, το *ΔΘ* είναι τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου του ισοπλεύρου τριγώνου, άρα $\Delta\Theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, οπότε, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΘΔ* παίρνουμε $A\Delta^2 = \Delta\Theta^2 + \Theta A^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \alpha$. Όμοια είναι $AB = A\Gamma = \alpha$, άρα

- οι έδρες του τετραέδρου είναι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. (1)

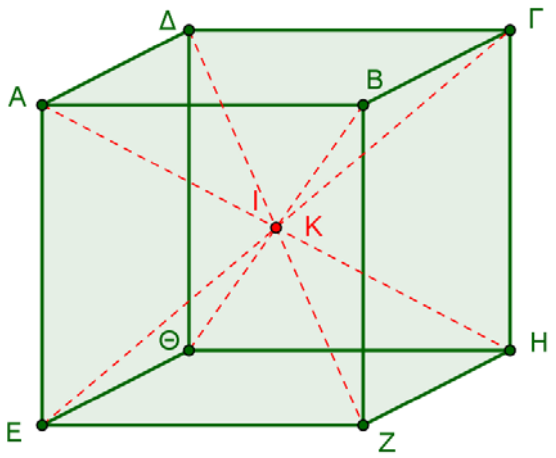
Επιλέγοντας σημείο *Κ* της *ΘΑ*, ώστε να είναι $AK = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$, απλοί υπολογισμοί, πάλι με χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος, δείχνουν ότι $KA = KB = K\Gamma = K\Delta = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$, επομένως

[19] Στο εξής, για τα πλατωνικά στερεά, θα γράφουμε το όνομά τους παραλείποντας τον χαρακτηρισμό κανονικό.

- το τετράεδρο εγγράφεται σε σφαίρα κέντρου *Κ* και ακτίνας $\rho = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το *ΑΒΓΔ* είναι κανονικό.

Ο κύβος



Σχήμα 27

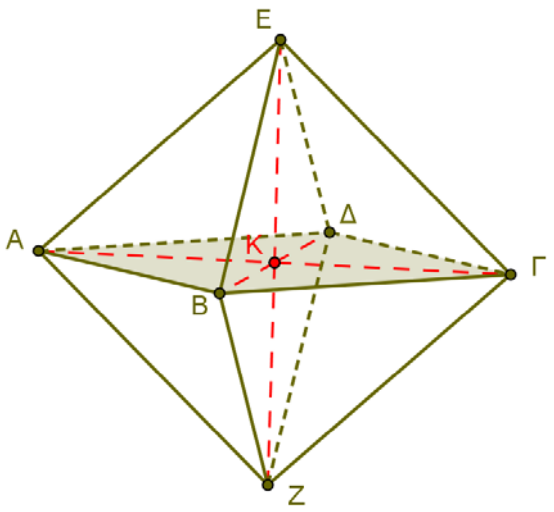
ΕΞΑΕΔΡΟ

- 6 έδρες
- 8 κορυφές
- 12 ακμές

Προφανώς, αν στις κορυφές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, πλευράς *α*, υψώσουμε τμήματα μήκους *α* κάθετα προς το επίπεδό του, δημιουργούμε στερεό με έξι έδρες ίσα τετράγωνα (Σχήμα 27). Το μέσο Κ των κυρίων διαγωνίων του ισαπέχει από τις οκτώ κορυφές κατά απόσταση $\rho = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, επομένως είναι το κέντρο της σφαίρας στην οποία εγγράφεται το στερεό, το οποίο κατά συνέπεια είναι το κανονικό εξάεδρο, ο κύβος.

Στο Βιβλίο XIII των Στοιχείων του Ευκλείδη, στην πρόταση 14, συναντάμε την κατασκευή και εγγραφή κύβου σε σφαίρα.

Πρότασις ιε΄. *Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.*	Πρόταση 15 Να κατασκευασθεί κύβος και να περιγραφεί από σφαίρα, όπως και η πυραμίδα, κα να δειχθεί, ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τριπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς του κύβου.



Σχήμα 28

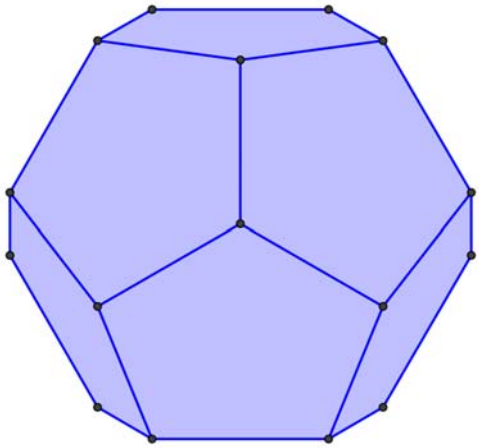
ΟΚΤΑΕΔΡΟ

- 8 έδρες
- 6 κορυφές
- 12 ακμές

Για την δημιουργία του οκταέδρου θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ, πλευράς *α*, με κέντρο Κ (Σχήμα 28). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, κάθετο προς το επίπεδο του τετραγώνου το οποίο να έχει ως μέσο το Κ και μήκος ίσο με της διαγωνίου ΑΓ. Τα έξι σημεία, Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ αποτελούν τις κορυφές ενός στερεού με έδρες τα οκτώ ίσα ισόπλευρα τρίγωνα ΕΑΒ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ΕΔΑ, ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ και ΖΔΑ. Το σημείο Κ είναι το κέντρο σφαίρας ακτίνας $\rho = \alpha\sqrt{2}$, στην οποία εγγράφεται το στερεό. Σύμφωνα με τον ορισμό, το στερεό είναι το κανονικό οκτάεδρο.

Η πρόταση 14 του Βιβλίου XIII των Στοιχείων, αποδεικνύει την ύπαρξη του κανονικού οκταέδρου, εγγράφοντάς το σε σφαίρα:

Πρότασις ιδ΄. *Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.*	Πρόταση 14 Να κατασκευασθεί οκτάεδρο και να περιγραφεί από σφαίρα, όπως και προηγουμένως, και να δειχθεί, ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς του οκταέδρου.



Σχήμα 29

ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ

- 12 έδρες
- 20 κορυφές
- 30 ακμές

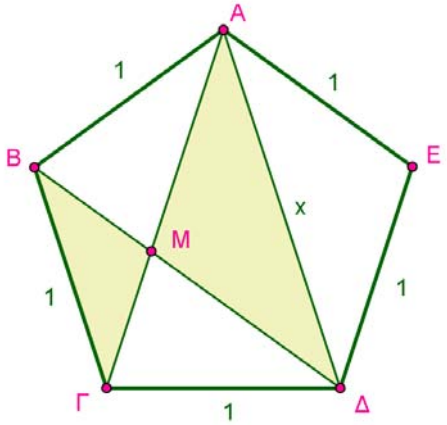
Το κανονικό δωδεκάεδρο (Σχήμα 29) είναι το μόνο κανονικό πολύεδρο με έδρες κανονικά πεντάγωνα. Σε κάθε κορυφή συντρέχουν τρεις ακμές και τρεις έδρες. Είναι χαρακτηριστικό ότι στο δωδεκάεδρο εγγράφονται πέντε κύβοι με τις κορυφές του καθενός να συμπίπτουν με οκτώ από τις κορυφές του δωδεκαέδρου. Στην ιδιότητα αυτή θα στηριχτούμε για την κατασκευή του στερεού.

Πρώτα, ας παρατηρήσουμε ότι στο πεντάγωνο περιέχεται ο «χρυσός» λόγος $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ο οποίος αποτελεί και λύση της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$.

Πράγματι, στο κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, πλευράς 1 (Σχήμα 30), είναι $\text{ΑΜ} \parallel \text{ΕΔ}$ και $\text{ΒΔ} \parallel \text{ΑΕ}$, άρα το τετράπλευρο ΑΕΔΜ είναι ρόμβος, οπότε ΜΔ=ΜΑ=1 και άρα $\text{ΜΒ} = \text{ΜΓ} = x - 1$. Από τα όμοια τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΓΒ παίρνουμε την αναλογία

$$\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΓ}} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Rightarrow x \cdot (x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

.

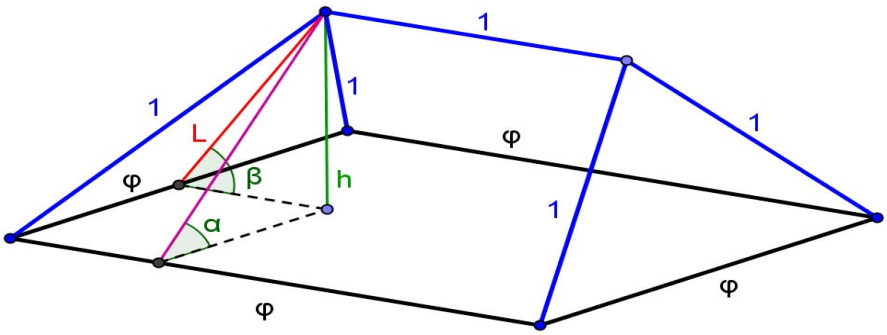


Σχήμα 30

Με άλλα λόγια, στο κανονικό πεντάγωνο, ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά είναι φ.

Προχωράμε τώρα στην κατασκευή του δωδεκαέδρου:

Αρχικά, με βάση μια από τις τετράγωνες έδρες ενός κύβου με ακμή φ κατασκευάζουμε μια «σκεπή», που αποτελείται από δύο ισοσκελή τρίγωνα με βάση μήκους φ και σκέλη μήκους 1 και δύο ισοσκελή τραπέζια με ίσα σκέλη και μικρή βάση μήκους 1 και μεγάλη βάση μήκους φ. Θα αποδείξουμε ότι οι γωνίες α και β (σχήμα) είναι συμπληρωματικές.



Σχήμα 31

Για το ύψος L του ισοσκελούς τριγώνου και το ύψος h της σκεπής, με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα, παίρνουμε τις σχέσεις

$$L^2+\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2=1 \quad \text{και} \quad L^2=\left(\frac{\varphi-1}{2}\right)^2+h^2$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$\left(\frac{\varphi-1}{2}\right)^2+h^2+\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2=1 \Rightarrow h^2+\frac{\varphi^2-\varphi}{2}+\frac{1}{4}=1$$

Αλλά $\varphi^2-\varphi=1$, οπότε προκύπτει ότι $h=\frac{1}{2}$, άρα

$$\tan\alpha=\frac{h}{\varphi/2}=\frac{1/2}{\varphi/2}=\frac{1}{\varphi} \quad \text{και} \quad \tan\beta=\frac{h}{\frac{\varphi-1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\varphi-1}{2}}=\frac{1}{\varphi-1}.$$

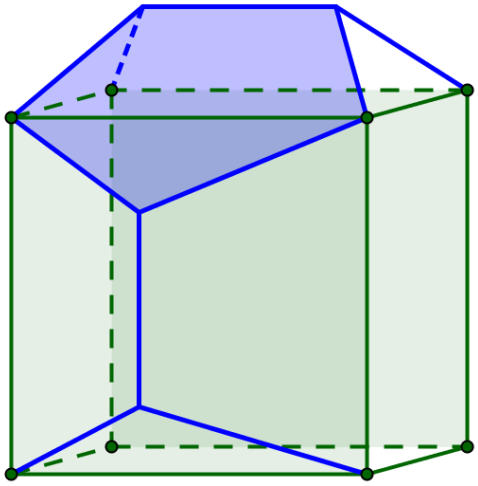
Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{\varphi\cdot(\varphi-1)}=\frac{1}{\varphi^2-\varphi}=\frac{1}{1}=1$$

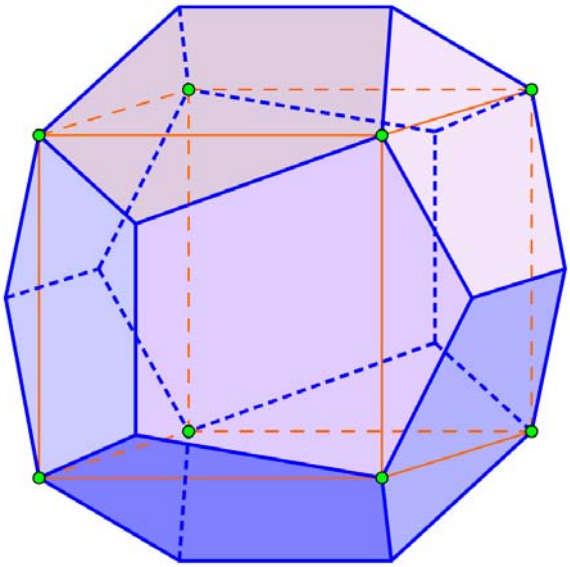
Οι γωνίες α και β είναι οξείες, οπότε από τη σχέση $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$ προκύπτει ότι

$$\alpha+\beta=90^\circ$$

Η συμπληρωματικότητα των γωνιών α και β μας εξασφαλίζει ότι αν τοποθετήσουμε δύο σκεπές σε δυο διαδοχικές έδρες του κύβου, με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 32, το πεντάγωνο που δημιουργείται είναι επίπεδο.

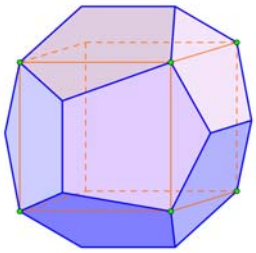


Σχήμα 32

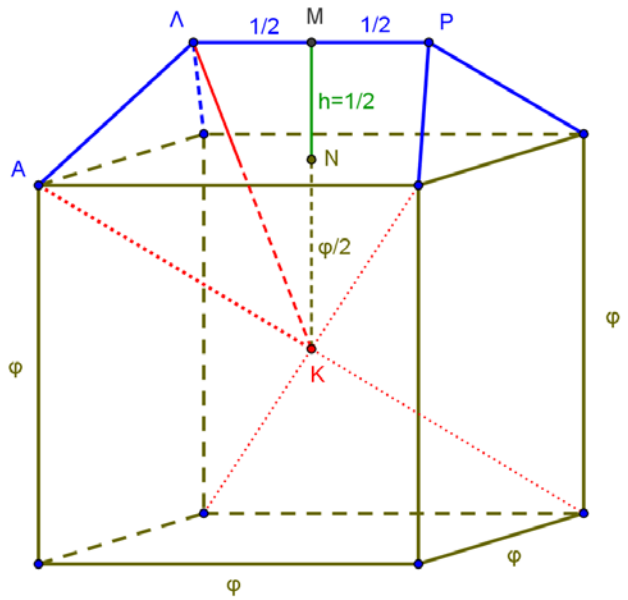


Σχήμα 33

Τοποθετώντας μια σκεπή σε κάθε έδρα του κύβου σχηματίζουμε το κανονικό δωδεκάεδρο (Σχήμα 33).



Βέβαια, για να αποδειχθεί πλήρως ότι το δωδεκάεδρο που κατασκευάσαμε είναι όντως κανονικό, απομένει να δείξουμε ότι εγγράφεται σε σφαίρα. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το κέντρο Κ του κύβου απέχει τόσο από τις κορυφές του κύβου όσο και από τις κορυφές των σκεπών, αρκεί δηλαδή να δειχθεί ότι ΚΑ=ΚΛ (Σχήμα 34).



Σχήμα 34

Οι κύριες διαγώνιοι του κύβου ακμής φ έχουν μήκος $\varphi\sqrt{3}$, άρα είναι $\text{ΚΑ}=\frac{\varphi\sqrt{3}}{2}$.

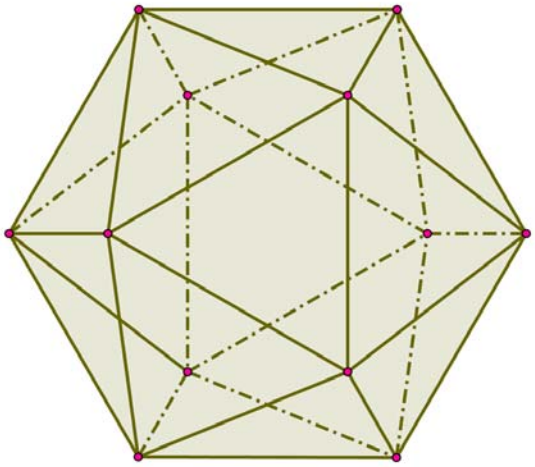
Είδαμε ότι το ύψος ΜΝ της σκεπής είναι $\text{ΜΝ}=h=\frac{1}{2}$ και καθώς η ακμή ΛΡ είναι μήκους 1, ισχύει $\text{ΛΜ}=\frac{1}{2}$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ το πυθαγόρειο θεώρημα δίνει:

$$\text{ΚΛ}^2=\text{ΚΜ}^2+\text{ΛΜ}^2=(\text{ΚΝ}+\text{ΝΜ})^2+\text{ΛΜ}^2=\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\varphi^2+2(\varphi+1)}{4}=\frac{\varphi^2+2\varphi^2}{4}=\frac{3\varphi^2}{4}$$

άρα $\text{ΚΛ}=\frac{\varphi\sqrt{3}}{2}$, συνεπώς το σημείο Λ ανήκει στη σφαίρα που περιγράφεται στον κύβο, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το δωδεκάεδρο είναι κανονικό.

Η κατασκευή και εγγραφή κανονικού δωδεκαέδρου σε σφαίρα απασχολεί τον Ευκλείδη στην πρόταση 17 του Βιβλίου XIII των Στοιχείων:

Πρότασις ιζ΄. *Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.*	Πρόταση 17 Να κατασκευασθεί δωδεκάεδρο και να περιγραφεί από σφαίρα, όπως και τα προηγούμενα σχήματα, και να δειχθεί, ότι η πλευρά του δωδεκαέδρου είναι άρρητος η καλούμενη αποτομή.

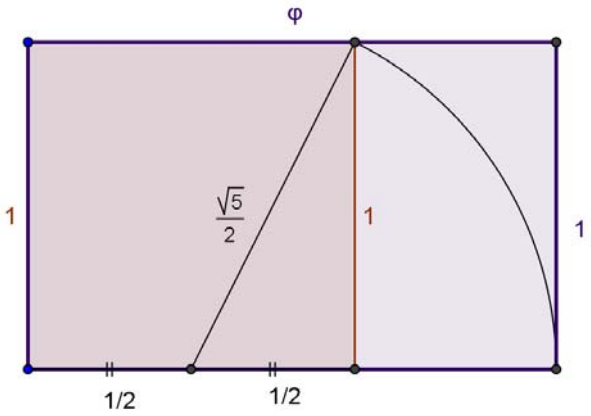


ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ

- 20 έδρες
- 12 κορυφές
- 30 ακμές

Σχήμα 35

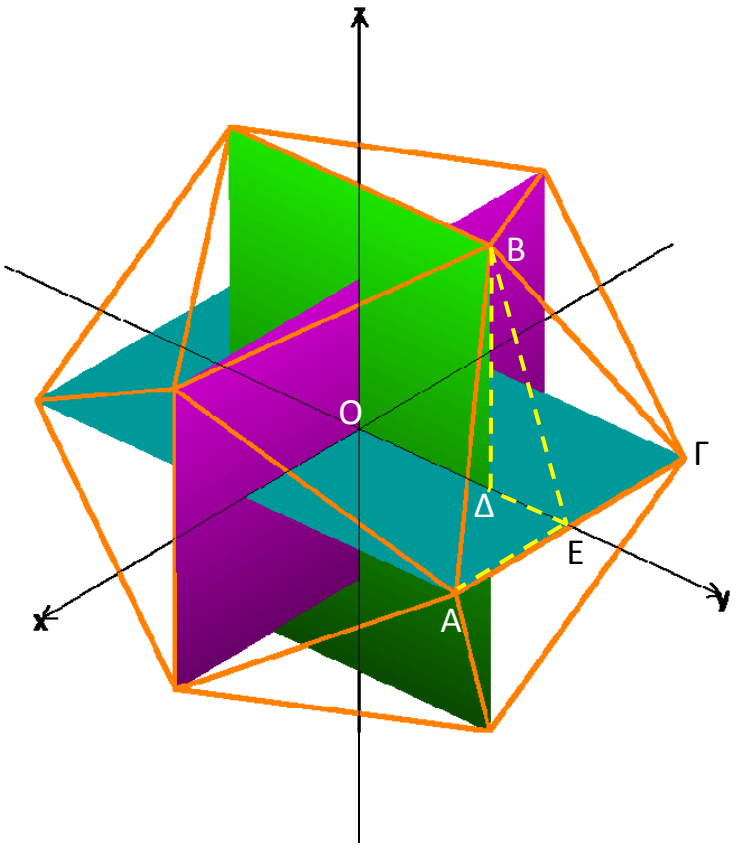
Το εικοσάεδρο (Σχήμα 35) αποτελείται από 20 ισόπλευρα τρίγωνα. Έχοντας 12 κορυφές, σε καθεμία από τις οποίες συναντιούνται 5 ακμές και 5 έδρες, είναι στενά συνδεδεμένο με το δωδεκάεδρο. Σε επόμενη παράγραφο, όπου θα ορίσουμε την έννοια της δυϊκότητας στα πλατωνικά στερεά, θα διαπιστώσουμε ότι το εικοσάεδρο είναι δυϊκό του δωδεκαέδρου. Δεν είναι λοιπόν περίεργο το γεγονός ότι ο χρυσός λόγος φ, που συναντήσαμε στο δωδεκάεδρο, εμφανίζεται και στο εικοσάεδρο και μάλιστα με ένα ιδιαίτερα κομψό τρόπο: υπάρχουν τρία «χρυσά» ορθογώνια, κάθετα ανά δύο, τα οποία εγγράφονται στο εικοσάεδρο.



Σχήμα 36

Το χαρακτηρισμό «χρυσό» δίνουμε στο ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν το λόγο της χρυσής τομής $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Στο διπλανό Σχήμα 36 φαίνεται η κατασκευή του, με αφετηρία ένα τετράγωνο πλευράς 1.

Ας θεωρήσουμε τρία χρυσά ορθογώνια πάνω στα επίπεδα xy, yz και zx στο κλασικό σύστημα αναφοράς Oxyz του τρισδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^3$, με το κέντρο τους στην αρχή των αξόνων O (Σχήμα 37).



Σχήμα 37 Τρία χρυσά ορθογώνια εγγεγραμμένα στο κανονικό εικοσάεδρο

Αν οι διαστάσεις των ορθογωνίων είναι 2 και 2φ, τότε οι κορυφές τους έχουν συντεταγμένες

$(\pm 1, \pm\varphi, 0)$

μπλε ορθογώνιο

$(\pm\varphi, 0, \pm 1)$

μωβ ορθογώνιο

$(0, \pm 1, \pm\varphi)$

πράσινο ορθογώνιο

Ταυτόχρονα, τα δώδεκα αυτά σημεία αποτελούν τις κορυφές κανονικού εικοσαέδρου. Το ότι είναι εικοσάεδρο μπορούμε εύκολα να το διαπιστώνουμε με παρατήρηση. Πρόκειται για ένα στερεό με 20 τριγωνικές έδρες, εγγράψιμο σε σφαίρα κέντρου O και ακτίνας $\rho = \text{OA} = \sqrt{\varphi^2 + 1}$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα.

Πράγματι, καθώς οι ακμές του εικοσαέδρου που συμπίπτουν με τις μικρές πλευρές των ορθογωνίων έχουν μήκος 2 (πχ. είναι ΑΓ=2), αρκεί να δείξουμε ότι και οι υπόλοιπες ακμές, εκείνες που συνδέουν κορυφές διαφορετικών ορθογωνίων (πχ. η ΑΒ), έχουν επίσης μήκος 2. Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΕΔ παίρνουμε:

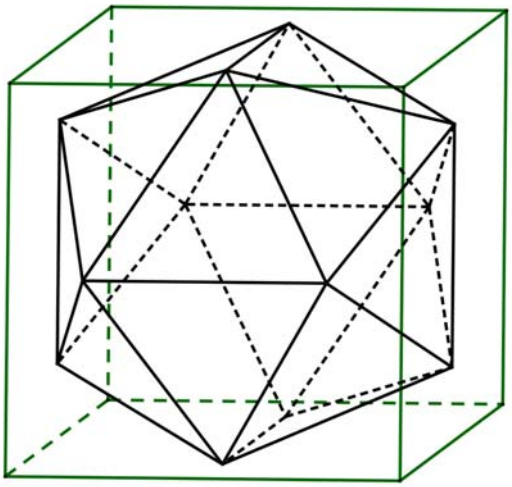
$$
\begin{aligned}
AB^2 = AE^2 + EB^2 &= AE^2 + E\Delta^2 + \Delta B^2 \\
&= 1 + (\varphi - 1)^2 + \varphi^2 \\
&= 2(\varphi^2 - \varphi + 1) \\
&= 2(1+1) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

άρα, AB=2. Προφανώς, με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι όλες οι ακμές είναι ίσες, συνεπώς το εικοσάεδρο είναι κανονικό[20].

Μια διαφορετική διαδικασία περιγράφεται στην πρόταση 16 του Βιβλίου XIII των Στοιχείων, όπου εντοπίζουμε τη σχετική κατασκευή:

Πρότασις ις΄. *Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.*	Πρόταση 16 Να κατασκευασθεί εικοσάεδρο και να περιγραφεί από σφαίρα, όπως και τα προηγούμενα σχήματα, και να δειχθεί, ότι η πλευρά του εικοσαέδρου είναι άρρητος η καλούμενη ελάσσων.

Μια εναλλακτική, ωραία απόδειξη της ύπαρξης του κανονικού εικοσαέδρου έχουμε στο Σχήμα 38. Ένα εικοσάεδρο (όχι κατ' ανάγκη κανονικό) είναι εγγεγραμμένο σε κύβο. Μεταβάλλοντας τις έξι ακμές που βρίσκονται πάνω στις έδρες του κύβου έτσι, ώστε να διατηρούν ίσα μήκη μεταξύ τους, να παραμένουν μεσοπαράλληλες των δύο πλευρών του αντίστοιχου τετραγώνου και με το μέσο τους στο κέντρο του, μπορούμε, χάρη στην ιδιότητα της συνέχειας, να δείξουμε ότι υπάρχει θέση όπου τα μήκη των όλων των ακμών του εικοσαέδρου εξισώνονται.



Σχήμα 38

[20] Εναλλακτικά, το μήκος της ακμής AB υπολογίζεται άμεσα από τις συντεταγμένες των σημείων A και B, οι οποίες είναι $(1,\varphi,0)$ και $(0,1,\varphi)$ αντίστοιχα, απ' όπου $(AB) = \sqrt{1^2 + (\varphi - 1)^2 + \varphi^2} = \ldots = 2$.

Η μοναδικότητα των Πλατωνικών στερεών

Στις προηγούμενες ενότητες, αφού ορίσαμε την έννοια της κανονικότητας για τα πολύεδρα, αποδείξαμε την ύπαρξη πέντε πολυέδρων που ανήκουν στην κατηγορία των κανονικών πολυέδρων· τα πλατωνικά στερεά. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς, αν τα πλατωνικά είναι τα μόνα κανονικά στερεά, ή αν υπάρχουν και άλλα. Αν και στον $\mathbb{R}^2$ συναντάμε ένα άπειρο πλήθος κανονικών πολυγώνων, με 3, 4, 5, 6, κλπ πλευρές, δεν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο και στον $\mathbb{R}^3$. Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε ότι όχι απλώς δεν υπάρχουν άπειρα κανονικά πολύεδρα, αλλά ακριβώς τα πλατωνικά είναι και τα μόνα κανονικά στερεά. Σημαντικό εργαλείο για την απόδειξη αποτελεί μια σχέση που παρατήρησε για πρώτη φορά και απέδειξε ο Euler (αν και αργότερα στην απόδειξη του εντοπίστηκε μια αδυναμία, μέχρι που ο Legendre χρησιμοποιώντας μια ευφυή διαφορετική προσέγγιση επιβεβαίωσε με αυστηρότητα την αλήθεια της πρότασης με μια αψεγάδιαστη απόδειξη)[21]. Παράλληλα, η αναζήτηση της απόδειξης, αλλά και η μελέτη των ορίων ισχύος της σχέσης του Euler, οδήγησε στη γέννηση μιας νέας γεωμετρίας που θα ονομαζόταν τοπολογία. Η σημασία του θεωρήματος του Euler μας «υποχρεώνει» να αφιερώσουμε λίγες σελίδες στο θεμελιώδη τύπο του.

Ο τύπος του Euler

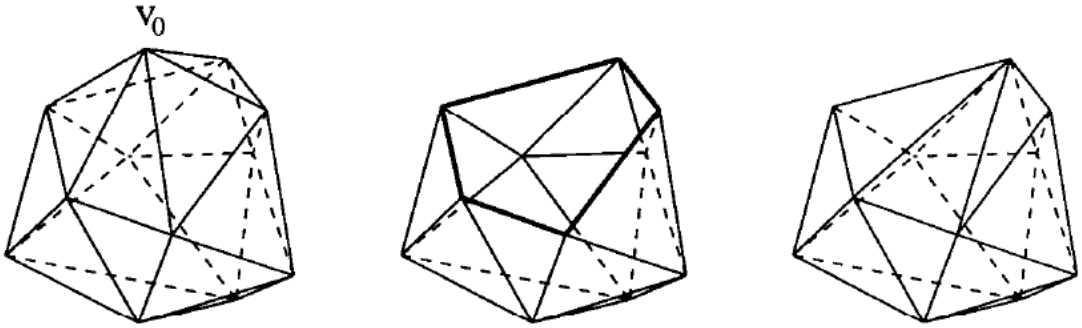
Θεώρημα: *Οι αριθμοί Κ, Α, Ε των κορυφών, ακμών και εδρών ενός κυρτού πολυέδρου ικανοποιούν τη σχέση*

$$K - A + E = 2$$

Ο Euler αναφέρει για πρώτη φορά τον περίφημο τύπο του σ' ένα γράμμα στον Goldbach το Νοέμβριο του 1750 και όταν, λίγες εβδομάδες αργότερα, ανακοινώνει στην Ακαδημία του Saint Petersburg τις νέες ανακαλύψεις του στην στερεομετρία, σχετικά με τα πολύεδρα, παραδέχεται ότι δεν είναι σε θέση να δώσει μια απόδειξη ότι ο τύπος του ισχύει στη γενική

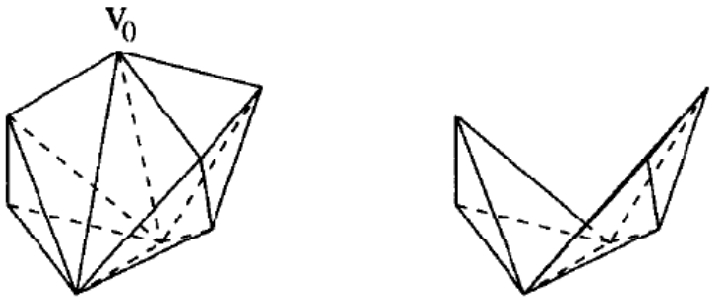
[21] Κατά τον Howard Eves, (*History of Mathematics* p. 89) ο Descartes είχε ήδη διατυπώσει τη σχέση περίπου 120 χρόνια πριν από τον Euler, γύρω στο 1635, γι' αυτό και πολλοί την αναφέρουν και ως τύπο των Euler-Descartes, ενώ εικάζεται ότι ήταν γνωστή και στον Αρχιμήδη. Στις απόψεις αυτές αντιτίθεται ο Cromwell (*Polyhedra* p. 190).

περίπτωση, μπορεί μόνο να τον επιβεβαιώσει σε ορισμένες οικογένειες στερεών. Θα χρειαστεί να περάσει ένας χρόνος, μέχρις ότου ο Euler επιστρέψει με μια δεύτερη εργασία, όπου και παρουσιάζει την απόδειξή του. Η απόδειξη αυτή στηρίζεται στο μετασχηματισμό του πολυέδρου με διαδοχικές αφαιρέσεις τμημάτων του πολυέδρου, μειώνοντας τον αριθμό των κορυφών, ώσπου να μείνουν μόνο 4, διατηρώντας αναλλοίωτη την ποσότητα $K-A+E$ (Σχήμα 39). Επιβεβαιώνοντας τέλος ότι στο τετράεδρο η σχέση $K-A+E=2$ αληθεύει, η απόδειξη είχε ολοκληρωθεί.



Σχήμα 39

Το αδύναμο σημείο της απόδειξης του Euler βρίσκεται στο γεγονός ότι κατά τη διαδικασία αφαίρεσης κορυφών ενδέχεται να προκύψουν εκφυλιστικά αποτελέσματα, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί (Σχήμα 40), όπου το σχήμα παύει να είναι πολύεδρο, καθώς μια ακμή ανήκει σε περισσότερες από δύο έδρες.



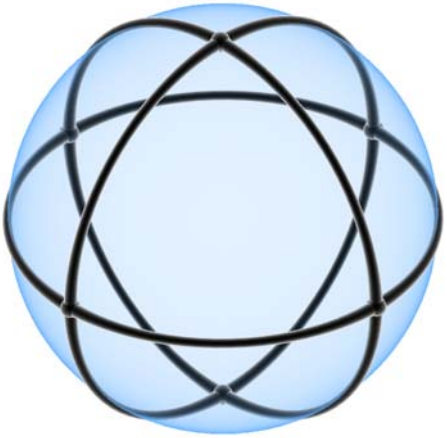
Σχήμα 40

Το 1794 ο **Legendre**, στο δημοφιλές βιβλίο του *Éléments de Géométrie*, παρουσιάζει μια νέα απόδειξη του τύπου του Euler. Χρησιμοποιεί το πλέγμα των σφαιρικών πολυγώνων που δημιουργεί η προβολή των κορυφών και των ακμών του πολυέδρου όταν, από ένα εσωτερικό του σημείο, προβάλλονται πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας που το περιβάλει (ακτινωτή προβολή). Στη συνέχεια, μια σειρά υπολογισμών των εμβαδών των σφαιρικών πολυγώνων οδηγεί στο αποτέλεσμα.

Εικόνα 17. Ακτινωτές προβολές των πλατωνικών στερεών

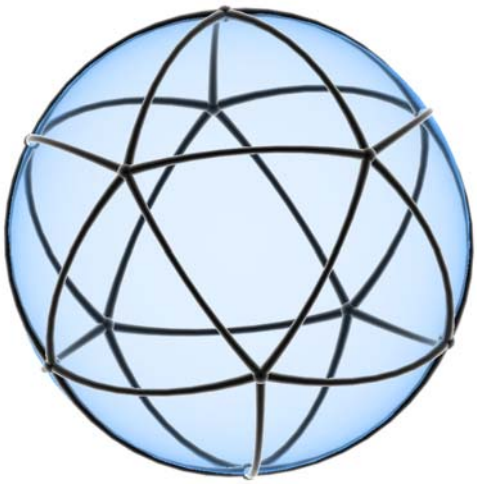
Τετραέδρου

Κύβου



Οκταέδρου

Δωδεκαέδρου



Εικοσαέδρου

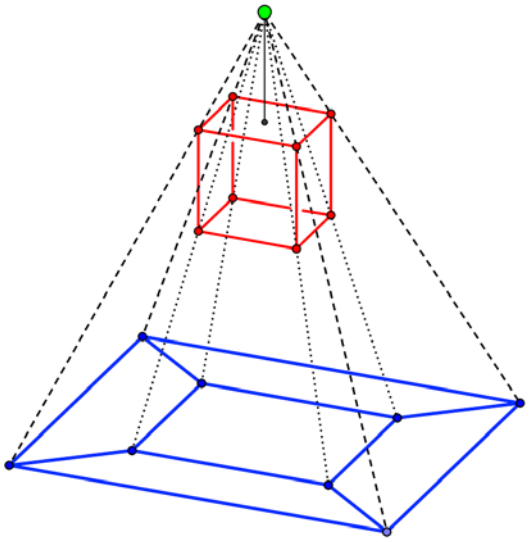
Για τα σχήματα χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό **Jenn3D** (www.lenn3d.org)

Περίπου 20 χρόνια αργότερα, το 1813, ο **Cauchy** συλλαμβάνοντας την έννοια της παραμορφωσιμότητας επανέρχεται με μια απόδειξη του τύπου του Euler, η οποία ταυτόχρονα επεκτείνει την ισχύ του σε κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα που αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ενωμένων με ευθύγραμμα τμήματα που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Ας δούμε αναλυτικά την προσέγγιση του Cauchy:

Αρχικά αφαιρούμε μια έδρα του πολυέδρου και στη συνέχεια, απομακρύνοντας μεταξύ τους τις κορυφές της έδρας που αφαιρέσαμε, τεντώνουμε το πολύεδρο, ώστε οι υπόλοιπες έδρες να βρεθούν πάνω σε ένα επίπεδο. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ένα διάγραμμα που έχει τον ίδιο αριθμό κορυφών και ακμών με το αρχικό πολύεδρο, ενώ τα πολύγωνα που έχουν σχηματισθεί και αντιστοιχούν στις έδρες του πολυέδρου είναι προφανώς κατά ένα λιγότερα από τον αριθμό των εδρών του, καθώς στην αρχή αφαιρέσαμε μια έδρα. Για να ισχύει ο τύπος του Euler, αρκεί να δειχθεί ότι στο επίπεδο σχήμα που έχει προκύψει ισχύει η σχέση $K-A+E=1$, για τις K κορυφές του, τις A ακμές και τις E έδρες (πολύγωνα) του.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, αξίζει να αναφέρουμε ότι το διάγραμμα που δημιούργησε με την παραπάνω διαδικασία ο Cauchy, είναι ένα παράδειγμα **διαγράμματος Schlegel** [22].

Ένας δεύτερος τρόπος κατασκευής του διαγράμματος είναι η στερεογραφική προβολή: τοποθετούμε το πολύεδρο έτσι, ώστε η πάνω έδρα του να είναι οριζόντια (παράλληλη προς το επίπεδο των αξόνων Oxy). Στεκόμαστε στη συνέχεια σε ένα σημείο πάνω από το κέντρο της έδρας αυτής και αρκετά κοντά της, ώστε, θεωρώντας το πολύεδρο διαφανές, να μπορούμε να δούμε το σκελετό των κορυφών και των ακμών του πολυέδρου μέσα από την πάνω έδρα του. Η εικόνα που παίρνουμε ως προβολή του

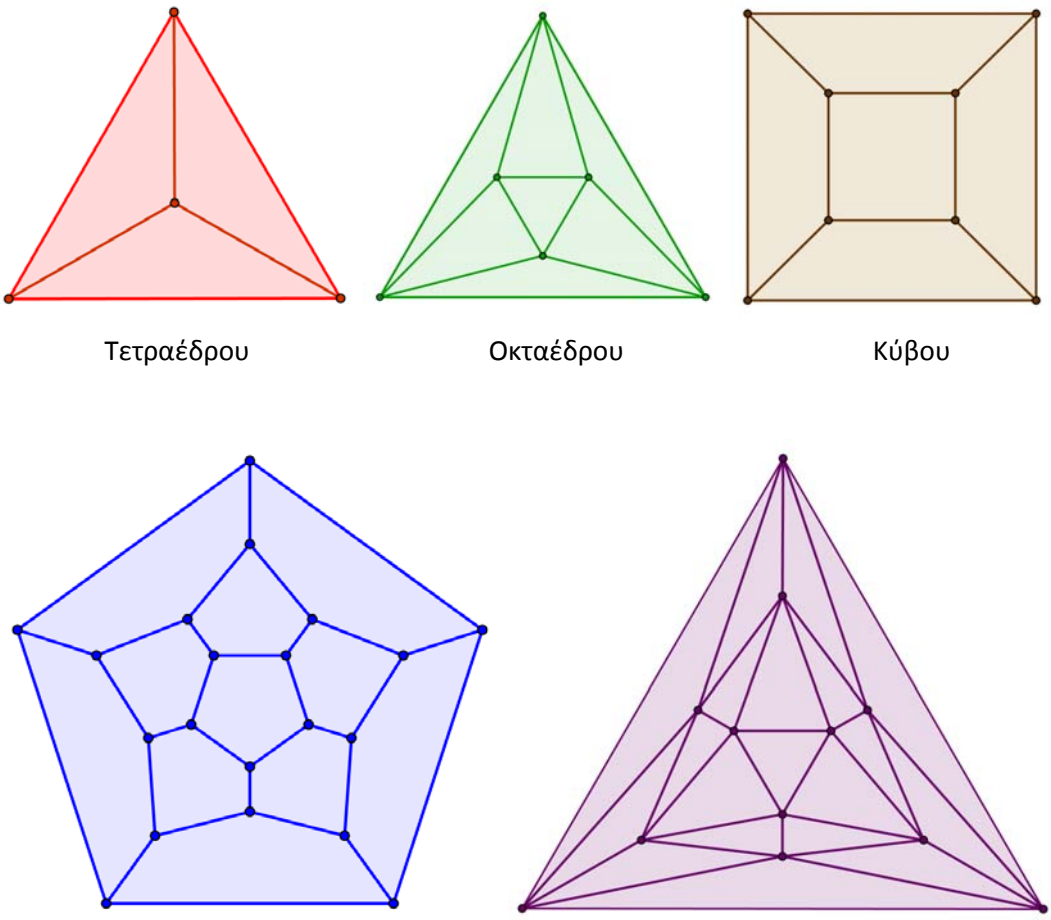


Σχήμα 41 Διάγραμμα Schlegel ενός κύβου με χρήση στερεογραφικής προβολής

[22] Είναι η προβολή ενός πολυτόπου από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^{n-1}$, από ένα σημείο πάνω από μια έδρα (διάστασης $n-1$), δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό μια πολυτοπική υποδιαίρεση της έδρας. Η προβολή που προκύπτει είναι συνδυαστικά ισοδύναμη με το αρχικό πολύτοπο.

σκελετικού στερεού πάνω στο επίπεδο Oxy είναι το διάγραμμα Schlegel.

Διαγράμματα Schlegel των πλατωνικών στερεών



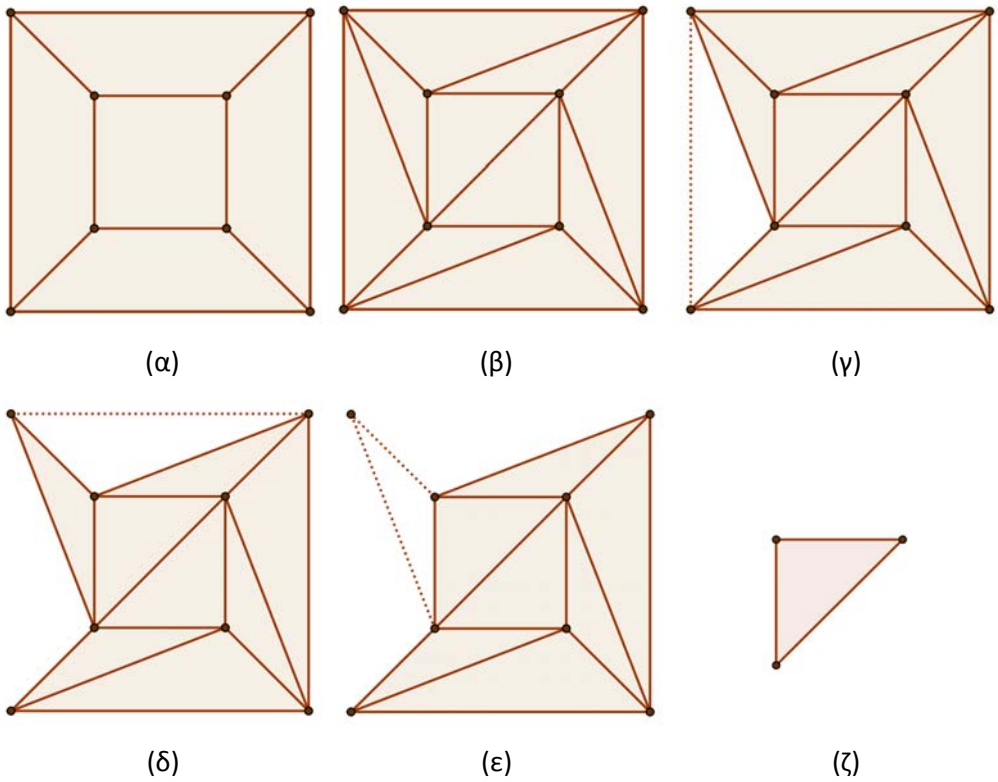
Σχήμα 42

Συνέχεια τώρα στην απόδειξη του τύπου του Euler:

Στην περίπτωση που υπάρχει έδρα με περισσότερες από 3 ακμές, σχεδιάζουμε μια ακμή που ενώνει δύο από τις κορυφές της έδρας, διαιρώντας την σε δύο πολύγωνα. Επαναλαμβάνουμε την κίνηση αυτή μέχρις ότου όλες οι έδρες γίνουν τριγωνικές (Σχήμα 43, β). Σε κάθε βήμα της διαδικασίας αυτής ο αριθμός των κορυφών παραμένει αμετάβλητος, ενώ οι ακμές αυξάνονται κατά μία και το ίδιο συμβαίνει με τις έδρες, οπότε η ποσότητα $K-A+E$ διατηρείται σταθερή.

Η αποδόμηση του διαγράμματος Schlegel κύβου

στην κατά Cauchy απόδειξη του τύπου του Euler



Σχήμα 43

Στην επόμενη φάση στόχος είναι να μειώσουμε τον αριθμό των τριγώνων και αυτό γίνεται εφαρμόζοντας ένα από τα εξής δύο:

1. Αφαιρούμε μια ακμή από το σύνορο του διαγράμματος, ώστε να διαγραφεί ένα τρίγωνο (Σχήμα 43, γ και δ).
2. Αφαιρούμε ένα τρίγωνο του οποίου δύο ακμές βρίσκονται στο σύνορο του διαγράμματος (Σχήμα 43, ε).

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ελάττωση των ακμών κατά μία και ταυτόχρονη ελάττωση των εδρών κατά μία, οπότε η ποσότητα $K-A+E$ παραμένει σταθερή.

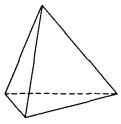
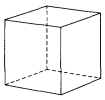
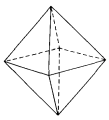
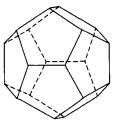
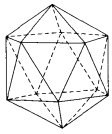
Στην δεύτερη περίπτωση διαγράφεται μια κορυφή, δύο ακμές και μια έδρα, οπότε και πάλι η ποσότητα $K-A+E$ δεν μεταβάλλεται.

Μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων των παραπάνω, καταλήγουμε σε ένα διάγραμμα που αποτελείται από ένα μόνο τρίγωνο (Σχήμα 43, ζ), χωρίς να έχει μεταβληθεί η ποσότητα $K-A+E$. Το τρίγωνο όμως έχει 3 κορυφές, 3 ακμές και 1 έδρα, άρα είναι $K-A+E=1$ και το θεώρημα του Euler έχει αποδειχθεί. □

Οι δυνατές εκδοχές κανονικών πολυέδρων

Εφοδιασμένοι με τον τύπο του Euler, μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη των δυνατών περιπτώσεων για τα κανονικά πολύεδρα.

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε κορυφή ενός κανονικού πολυέδρου συντρέχει το ίδιο πλήθος εδρών, που είναι όλες κανονικά πολύγωνα με κοινό αριθμό πλευρών. Αν κάθε έδρα έχει *a* πλευρές και το πλήθος των εδρών που συντρέχουν σε μια κορυφή είναι *b*, τότε το ζεύγος $\{a,b\}$ ονομάζεται **σύμβολο Schläfli** και καθορίζει πλήρως το κανονικό πολύεδρο. Για παράδειγμα, το σύμβολο Schläfli του κύβου είναι $\{4,3\}$, αφού σε κάθε κορυφή συναντιούνται 3 τετράγωνα. Στον Πίνακας 1 καταγράφονται τα σύμβολα Schläfli των πέντε πλατωνικών στερεών.

Τετράεδρο		$\{3,3\}$
Κύβος		$\{4,3\}$
Οκτάεδρο		$\{3,4\}$
Δωδεκάεδρο		$\{5,3\}$
Εικοσάεδρο		$\{3,5\}$

Πίνακας 1

Σύμβολα Schäfli των πλατωνικών στερεών

Σε λίγο θα διαπιστώσουμε ότι οι μόνες επιτρεπτές τιμές των *a* και *b* για κάποιο κανονικό πολύεδρο είναι ακριβώς εκείνες που αντιστοιχούν στα πλατωνικά στερεά, αποκλείοντας τη δυνατότητα ύπαρξης άλλων κανονικών πολυέδρων στον ευκλείδειο χώρα $\mathbb{R}^3$.

Έστω $\{a,b\}$ το σύμβολο Schläfli ενός κανονικού πολυέδρου που έχει *K* κορυφές, *A* ακμές και *E* έδρες. Παίρνοντας *K* φορές τις *b* ακμές που συντρέχουν σε κάθε κορυφή θα έχουμε διπλομετρήσει το σύνολο των κορυφών, αφού κάθε ακμή θα έχει μετρηθεί στις δύο κορυφές που αντιστοιχούν στα άκρα της. Είναι λοιπόν, $bK = 2A$. Αντίστοιχα παίρνουμε και τη σχέση $aE = 2A$. Μαζί με τη σχέση του Euler σχηματίζεται το σύστημα

$$\begin{cases} K - A + E = 2 & (1) \\ bK = 2A = aE & (2) \end{cases}$$

Αν από τη (2) εκφράσουμε τα *A* και *E* συναρτήσει των *a*, *b* και *K* και αντικαταστήσουμε στην (1) παίρνουμε τη σχέση $K - \frac{bK}{2} + \frac{bK}{a} = 2$. Λύνοντας ως προς *K* έχουμε

$$K = \frac{4a}{2a + 2b - ab}$$

Αντίστοιχα, για τις ακμές και τις έδρες προκύπτουν οι σχέσεις

$$A = \frac{2ab}{2a + 2b - ab} \qquad \text{και} \qquad E = \frac{4b}{2a + 2b - ab}$$

Ο παρονομαστής των παραπάνω σχέσεων μπορεί να πάρει τη μορφή $4 - (a-2)(b-2)$, οπότε είναι φανερό ότι πρέπει να ισχύει $(a-2)(b-2) < 4$. Καθώς οι αριθμοί a και b είναι ακέραιοι, μεγαλύτεροι του 2, οι μόνοι δυνατοί συνδυασμοί για το ζεύγος (a,b) είναι

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3) \text{ και } (3,5)$$

που αντιστοιχούν στο τετράεδρο, τον κύβο, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο. Η κανονικότητα των κυρτών πολυέδρων στον $\mathbb{R}^3$ εξαντλείται με τα πλατωνικά στερεά.

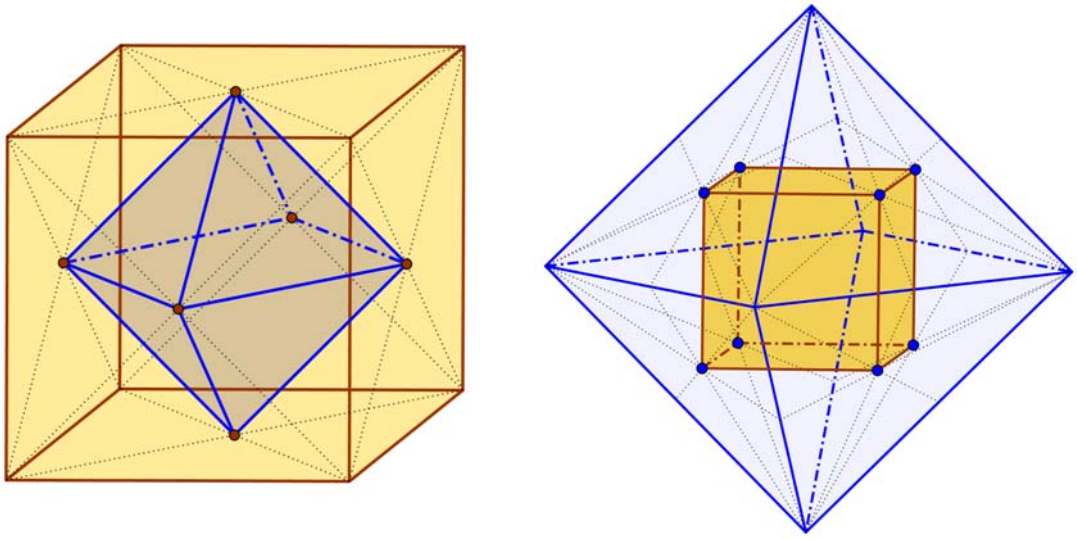
Δυϊκότητα

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα που παρουσιάζουν τα κανονικά πολύεδρα συνδέεται με την έννοια της δυϊκότητα. Γενικά, στον $\mathbb{R}^3$ συναντάμε ζεύγη πολυέδρων που χαρακτηρίζονται ως δυϊκά. Η δυϊκότητα μπορεί να αποδοθεί με διαφόρους ισοδύναμους τρόπους. Εστιάζοντας την προσοχή μας στα πλατωνικά στερεά θα δούμε ακολούθως εναλλακτικές προσεγγίσεις της έννοιας της δυϊκότητας.

Από τα βαρύκεντρα των εδρών

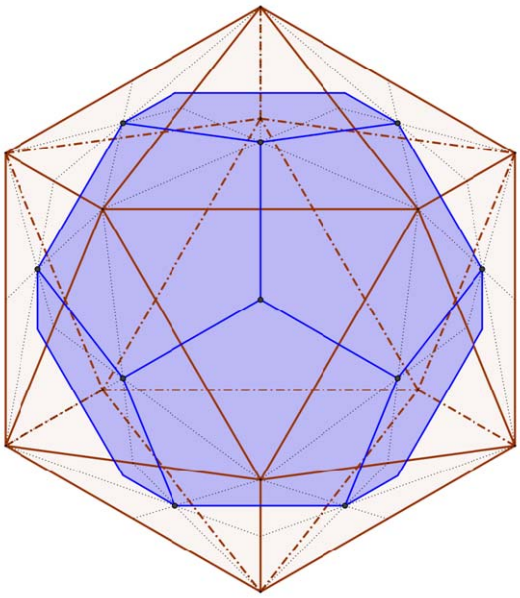
Συνδέοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα βαρύκεντρα εκείνων των εδρών ενός πολυέδρου που έχουν κοινή ακμή, ορίζουμε τις ακμές του δυϊκού του στερεού. Τα βαρύκεντρα του αρχικού αποτελούν τις κορυφές του δυϊκού του. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία στο δεύτερο πολύεδρο, ανακτούμε το αρχικό είδος πολυέδρου. Λέμε ότι έχουμε ένα **ζεύγος δυϊκών στερεών**.

Στο Σχήμα 44 γίνεται φανερό ότι ο κύβος και το οκτάεδρο είναι δυϊκά πολύεδρα.

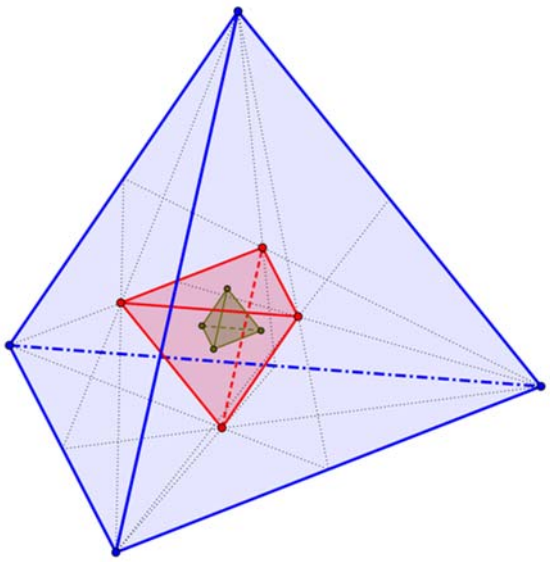


Σχήμα 44

Δυϊκό του εικοσαέδρου είναι το δωδεκάεδρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 45, ενώ το τετράεδρο είναι αυτοδυϊκό, δηλαδή το δυϊκό του πολύεδρο είναι πάλι τετράεδρο (Σχήμα 46). Είναι άλλωστε το μόνο στερεό με αυτή την ιδιότητα.



Σχήμα 45



Σχήμα 46

Από τα μέσα των ακμών

Ας θεωρήσουμε μια κορυφή ενός κανονικού πολυέδρου και τα μέσα των ακμών που συντρέχουν σ' αυτήν. Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα μέσα αυτά είναι σημεία συνεπίπεδα. Σε κάθε κορυφή του πολυέδρου αντιστοιχεί με τον τρόπο αυτό ένα επίπεδο. Το κυρτό

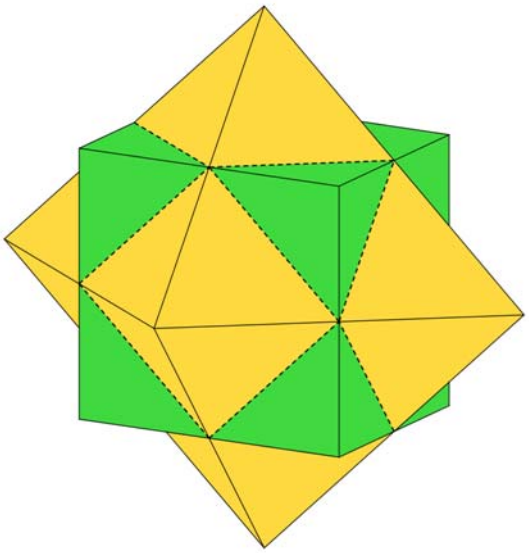
πολύεδρο που οριοθετούν τεμνόμενα τα επίπεδα αυτά των κορυφών είναι το δυϊκό του αρχικού στερεού.

Στα σχήματα που ακολουθούν βλέπουμε το ζεύγος κύβου-οκταέδρου (Σχήμα 47) και το δυϊκό ζεύγος δυο τετραέδρων[23], εγγεγραμμένων σε ένα κύβο (Σχήμα 48).

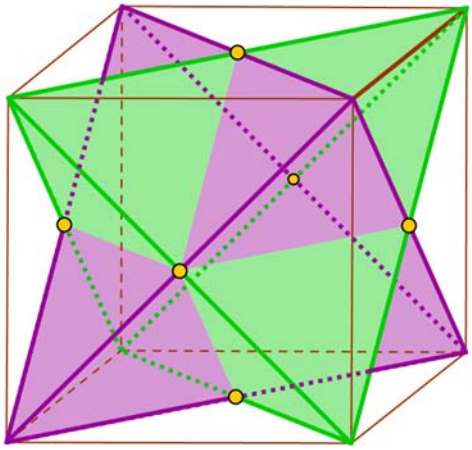
Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να οδηγηθούμε και με ένα ακόμα τρόπο:

Με την κατασκευή Dorman-Luke

Τα μέσα των ακμών που συντρέχουν σε μια κορυφή ορίζουν ένα πολύγωνο που είναι, όχι μόνο επίπεδο, αλλά και εγγράψιμο σε κύκλο. Το δυϊκό πολύεδρο μπορεί να προκύψει, θεωρώντας ως έδρες του τα πολύγωνα που είναι εφαπτομενικά των προηγουμένων. **Εφαπτομενικό** ενός εγγράψιμου πολυγώνου ονομάζουμε το πολύγωνο που είναι συνεπίπεδο με το αρχικό και οι πλευρές του εφάπτονται στον περιγεγραμμένο του κύκλο ακριβώς στις κορυφές του. Η προσέγγιση αυτή είναι εφαρμόσιμη, όχι μόνο στα κανονικά πολύεδρα, αλλά και σε κάθε άλλο ομοιόμορφο πολύεδρο[24].



Σχήμα 47

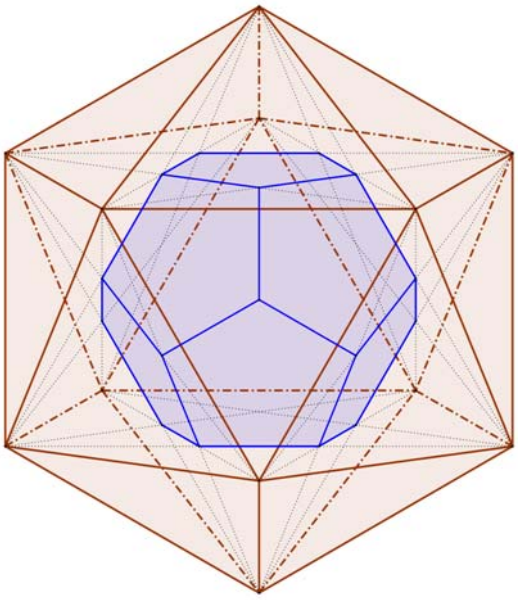


Σχήμα 48

[23] Ο Kepler ονόμαζε το σύστημα των δύο δυϊκών τετραέδρων Stella octangula.

[24] Ένα πολύεδρο ονομάζεται **ομοιόμορφο**, όταν οι έδρες του είναι κανονικά πολύγωνα και κάθε κορυφή του μπορεί να απεικονισθεί σε οποιαδήποτε άλλη, μέσω κάποιας ισομετρίας.

Ένα ακόμα εποπτικό αντίκρισμα της δυϊκότητας του δωδεκαέδρου με το εικοσάεδρο φαίνεται στο Σχήμα 49. Ανά πέντε, οι έδρες του εικοσαέδρου συντρέχουν με τις δυο πλευρές τους σε μια κορυφή. Οι τρίτες πλευρές των εδρών αυτών ορίζουν ένα επίπεδο. Τα δώδεκα επίπεδα που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό τεμνόμενα στο εσωτερικό του εικοσαέδρου ορίζουν τις ακμές και τις έδρες του δυϊκού δωδεκαέδρου.



Σχήμα 49

Οι Ομάδες Συμμετριών των Πλατωνικών Στερεών

Εικόνα 18. Hermann Weyl

> The universe is an enormous direct product of representations of symmetry groups.
>
> Hermann Weyl

Ορισμός: Αν το *X* είναι ένα πλατωνικό στερεό με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων O του κανονικού συστήματος αναφοράς Oxyz του $\mathbb{R}^3$, τότε η **Ομάδα Συμμετριών** του *X* αποτελείται από εκείνες τις ορθογώνιες απεικονίσεις που διατηρούν το *X*:

$$Symm(X)=\{f\in O(3): f(X)=X\}$$

Τα στοιχεία της $Symm(X)$ αποτελούν τις **συμμετρίες του *X***.

Ειδικότερα, ονομάζουμε **Ομάδα Περιστροφικών Συμμετριών** του στερεού τα στοιχεία της $Symm(X)$ που ανήκουν στην Ειδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(3)$:

$$Dir(X)=\{f\in SO(3): f(X)=X\}=Symm(X)\cap SO(3)$$

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των ομάδων συμμετριών των πλατωνικών στερεών, ας δούμε μερικές προτάσεις που αφορούν γενικά τις ισομετρίες των ευκλειδείων χώρων και ειδικότερα τις ορθογώνιες απεικονίσεις που περιέχονται στις $O(3)$ και $SO(3)$. Τα αποτελέσματα αυτά θα φανούν ακολούθως χρήσιμα στη σπουδή των ομάδων συμμετριών των κανονικών στερεών.

Ορισμός: Ένα σύνολο $u_0, u_1, \ldots, u_n$ σημείων του $\mathbb{R}^3$ λέμε ότι βρίσκονται σε **γενική θέση**, ή αλλιώς ότι είναι **αφινικά ανεξάρτητα**, αν τα διανύσματα $u_1 - u_0$, $u_2 - u_0$, …, $u_n - u_0$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση: *Αν τα διανύσματα $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ βρίσκονται σε γενική θέση και για μια ισομετρία f ισχύει $f(u_i) = u_i$ για κάθε i, τότε η f είναι η ταυτοτική απεικόνιση.*

Απόδειξη: Ας θυμηθούμε το θεώρημα της σελίδας 50. Σύμφωνα μ' αυτό, η f μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μιας ορθογώνιας απεικόνισης $g \in O(n)$ με μια μεταφορά $t_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $t_a(x) = x + a$, $x \in \mathbb{R}^n$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ θα είναι

$$f(x) = t_a g(x) = g(x) + a,$$

οπότε, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ προκύπτει

$$\begin{aligned} g(u_i - u_0) &= g(u_i) - g(u_0) \\ &= (g(u_i) + a) - (g(u_0) + a) \\ &= f(u_i) - f(u_0) \\ &= u_i - u_0 \end{aligned}$$

Τα $u_1 - u_0$, $u_2 - u_0$, …, $u_n - u_0$ όμως αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, άρα η g είναι η ταυτοτική απεικόνιση, επομένως είναι

$f(x) = g(x) + a = x + a$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δίνοντας στο x την τιμή u_0 (ή και οποιαδήποτε άλλη από τις u_i) παίρνουμε

$u_0 = f(u_0) = u_0 + a$, άρα $a = 0$, οπότε, τελικά, $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Πόρισμα: *Κάθε ισομετρία* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες που δίνει σε ένα πλήθος* $n+1$ *διανυσμάτων που βρίσκονται σε γενική θέση.*

Απόδειξη: Έστωσαν *f*, *g* δύο ισομετρίες με $f(u_i)=g(u_i)$ για $0 \le i \le n$, και με τα $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ να βρίσκονται σε γενική θέση. Τότε η $g^{-1}f$ είναι μια ισομετρία με $g^{-1}f(u_i)=u_i$ για κάθε $0 \le i \le n$. Σύμφωνα λοιπόν με την προηγούμενη πρόταση είναι $g^{-1}f=I$, δηλαδή $f=g$. □

Πρόταση: *Ας υποθέσουμε ότι η f ανήκει στην Ειδική Ορθογώνια Ομάδα* $SO(3)$ *και ότι για δυο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα* $x, y \in \mathbb{R}^3$ *ισχύει* $f(x)=x$ *και* $f(y)=y$. *Τότε η f είναι η ταυτοτική απεικόνιση.*

Απόδειξη: Αν η *f* δεν είναι η ταυτοτική, τότε θα είναι μια μη τετριμμένη περιστροφή γύρω από έναν άξονα *L*. Αυτό σημαίνει ότι η *f* σταθεροποιεί όλα τα σημεία του *L* και κινεί (περιστρέφει) όλα τα άλλα σημεία του $\mathbb{R}^3$. Με βάση τις δεδομένες σχέσεις $f(x)=x$ και $f(y)=y$, συμπεραίνουμε ότι τα *x* και *y* ανήκουν στον *L*. Αυτό είναι άτοπο, αφού τα διανύσματα *x* και *y* είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Πόρισμα: *Κάθε ορθογώνια απεικόνιση που ανήκει στην Ειδική Ορθογώνια Ομάδα* $SO(3)$ *ορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες που δίνει σε δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα* του $\mathbb{R}^3$.

Απόδειξη: Αν για τις $f, g \in SO(3)$ *ισχύει* $f(x)=g(x)$ και $f(y)=g(y)$, όπου *x*, *y* δυο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, τότε η $g^{-1}f$ είναι ένα στοιχείο της $SO(3)$ που διατηρεί τα *x* και *y*. Σύμφωνα λοιπόν με την προηγούμενη πρόταση είναι $g^{-1}f=I$, άρα $f=g$. □

Πρόταση: *Αν η G είναι μια υποομάδα της $O(3)$, περιλαμβάνει την κεντρική αντιστροφή (δηλαδή, $-I \in G$) και ακόμα $H = G \cap SO(3)$, τότε ισχύει $G \cong H \times \{\pm I\}$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση $\mu : H \times \{\pm I\} \to G$ με $\mu(f,t) = tf$ για $f \in H$, $t = \pm I$. Θα αποδείξουμε ότι η μ είναι ισομορφισμός.

- Καθώς οι I και $-I$ αντιμετατίθενται με κάθε στοιχείο της $O(3)$, έχουμε

$\mu(f,t)\mu(f',t') = (tf)(t'f') = (tt')(ff') = \mu(ff',tt')$, άρα η μ είναι ομομορφισμός.

- Αναζητώντας τον πυρήνα της μ θέτουμε $\mu(f,t) = I$. Τότε, ή $f = t = I$, είτε $f = t = -I$. Το δεύτερο όμως αποκλείεται, αφού $-I \notin SO(3)$. Αυτό σημαίνει ότι $\ker(\mu) = (I,I)$, οπότε η μ είναι 1–1.
- Ας θεωρήσουμε τώρα μια απεικόνιση $g \in G$ με πίνακα A (δηλαδή, $(g(x))^T = Ax^T$).
  - Αν $\det(A) = 1$, τότε $g \in H$ και είναι $g = \mu(g,I)$, δηλαδή η g ανήκει στην εικόνα της μ.
  - Αν $\det(A) = -1$, τότε $-g \in H$, αφού οι g και $-I$ ανήκουν και οι δύο στη G. Επιπλέον είναι $\det(-A) = 1$, άρα $-g \in H$. Είναι όμως $\mu(-g,-I) = -I(-g) = g$, άρα και πάλι η g ανήκει στην εικόνα της μ.

  Αυτό σημαίνει ότι η μ είναι ΕΠΙ της G.

Απ' όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι η μ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των G και $H \times \{\pm I\}$. □

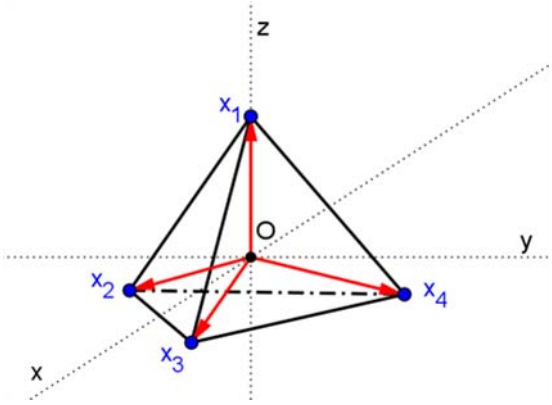
Άμεσα προκύπτει το

Πόρισμα: *Για τις $O(3)$ και $SO(3)$ ισχύει ο ισομορφισμός $O(3) \cong SO(3) \times \{\pm I\}$.*

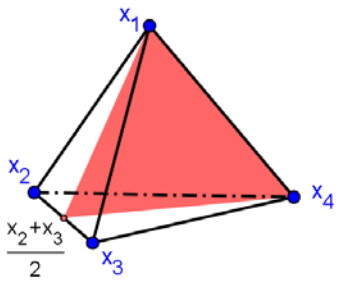
Είμαστε πλέον έτοιμοι να εντρυφήσουμε στις συμμετρίες των πλατωνικών στερεών.

Οι συμμετρίες του τετραέδρου

Ας θεωρήσουμε ένα τετράεδρο *Tet* με το βαρύκεντρό του στην αρχή των αξόνων με κορυφές τα διανύσματα $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^3$.



Σχήμα 50



Σχήμα 51

Η δράση της ομάδας συμμετριών του τετραέδρου $Symm(Tet)$ στο σύνολο των κορυφών του δημιουργεί έναν ομομορφισμό $\varphi : Symm(Tet) \to S_4$. Για παράδειγμα, η στροφή f γύρω από τον κατακόρυφο άξονα *Oz* κατά 1/3 της πλήρους περιστροφής με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού όταν κοιτάζουμε το τετράεδρο από πάνω, αφήνει αναλλοίωτο το x_1, ενώ αντιστοιχίζει το x_2 στο x_3, το x_3 στο x_4 και το x_4 στο x_2 (Σχήμα 50). Αριθμώντας με 1, 2, 3, 4 τις τέσσερις κορυφές του *Tet*, η εικόνα $\varphi(f)$ είναι ο κύκλος (234). Σε λίγο θα δούμε λεπτομερώς όλες τις μεταθέσεις των κορυφών του τετραέδρου, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο παράγονται. Πρώτα όμως ας διατυπώσουμε με ακρίβεια τη σχέση της $Symm(Tet)$ με την ομάδα μεταθέσεων S_4.

Πρόταση: *Ο ομομορφισμός* $\varphi : Symm(Tet) \to S_4$ *είναι ισομορφισμός, ενώ παράλληλα η* $Dir(Tet)$ *είναι ισόμορφη με την εναλλάσσουσα ομάδα* A_4.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών *i*, *j* και ας είναι *k*, *l* οι δύο κορυφές που απομένουν. Θεωρούμε τώρα το επίπεδο *H* που διέρχεται από τις κορυφές x_k, x_l και το διάνυσμα $\frac{x_i + x_j}{2}$ (Σχήμα 51). Ο κατοπτρισμός r_H ως προς το *H* αφήνει προφανώς

αναλλοίωτα τα x_k, x_l, ενώ αντιμεταθέτει τα x_i, x_j: $r_H(x_i) = x_j$ και $r_H(x_j) = x_i$, συνεπώς είναι $\varphi(r_H) = (i\,j)$. Αντίστοιχα υπάρχουν κατοπτρισμοί που απεικονίζονται σε οποιαδήποτε αντιμετάθεση των τεσσάρων στοιχείων, άρα η $\varphi(Symm(Tet))$ είναι μια υποομάδα της S_4 η οποία περιέχει όλες τις αντιμεταθέσεις. Κάθε μετάθεση, όμως, μπορεί να παραχθεί από ένα γινόμενο αντιμεταθέσεων, επομένως η φ είναι ΕΠΙ της S_4.

Σύμφωνα με το θεώρημα της σελίδας 121, κάθε ισομετρία στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες τεσσάρων αφινικά ανεξάρτητων σημείων του, άρα ο ομομορφισμός φ είναι και 1-1, άρα η φ, ως 1-1 και ΕΠΙ, είναι ισομορφισμός.

Είδαμε ότι η φ απεικονίζει κάθε κατοπτρισμό σε μια αντιμετάθεση, και το αντίστροφο κάνει η φ^{-1}, επομένως κάθε σύνθεση n κατοπτρισμών αντιστοιχίζεται σε γινόμενο n αντιμεταθέσεων και αντίστροφα. Αν λοιπόν ο Α είναι ο πίνακας της συμμετρίας f $(f \in Symm(Tet))$, τότε $Det(A) = \operatorname{sgn}(\varphi(f))$, οπότε ισχύει η ισοδυναμία

$$Det(A) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\varphi(f)) = 1$$

Με άλλα λόγια, η $\varphi(Dir(Tet)) = A_4$ και $Dir(Tet) = \varphi^{-1}(A_4)$, επομένως $Dir(Tet) \cong A_4$. $\square$

Με βάση την παραπάνω πρόταση, υπάρχουν συνολικά 24 συμμετρίες του τετραέδρου (όσα τα στοιχεία της S_4), 12 από τις οποίες είναι οι περιστροφικές συμμετρίες του. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε αναλυτικά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτών των συμμετριών, θα δούμε δηλαδή τους άξονες και τις γωνίες περιστροφής καθεμιάς από τις 12 συμμετρίες που περιλαμβάνει η $Dir(Tet)$.

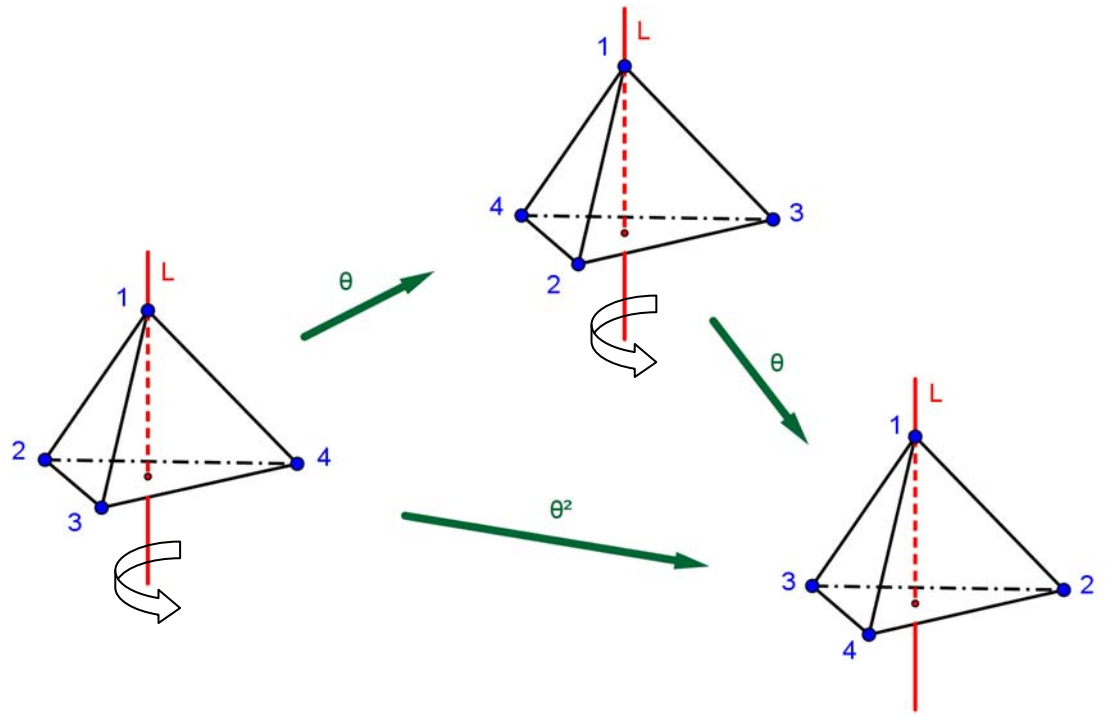
Άξονες συμμετρίας του τετραέδρου

- ***Από μια κορυφή***

Παρατηρούμε ότι μια ευθεία που διέρχεται από μια κορυφή του τετραέδρου και το βαρύκεντρο της απέναντι έδρας αποτελεί έναν άξονα συμμετρίας, γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστραφεί το τετράεδρο κατά $\frac{2\pi}{3}$, ή κατά $\frac{4\pi}{3}$, δίνοντας με τον τρόπο αυτό 2 από τις 12 ισομετρίες του τετραέδρου (Σχήμα 52). Αν συμβολίσουμε με ϑ τη στροφή κατά

τη «θετική» φορά (δηλαδή την αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού) κατά γωνία $\frac{2\pi}{3}$ γύρω από τον άξονα L που διέρχεται από την κορυφή 1, τότε, όπως αναφέραμε νωρίτερα, η ϑ είναι ένας 3-κύκλος: $\theta = (234)$.

Η στροφή κατά $\frac{4\pi}{3}$ δεν είναι άλλη από τη σύνθεση της ϑ με τον εαυτό της και οδηγεί στη μετάθεση $\theta^2 = (243)$.



Σχήμα 52

Υπάρχουν συνολικά 4 άξονες αυτού του τύπου, καθένας διερχόμενος από μια κορυφή του τετραέδρου, την οποία και αφήνει αναλλοίωτη κατά τις περιστροφές, επομένως έχουμε ακόμα τις παρακάτω 6 μεταθέσεις:

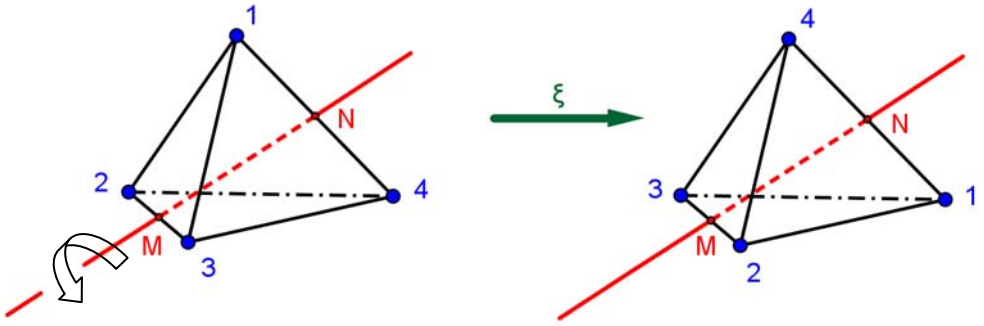
Στρέφοντας τον άξονα που διέρχεται από την κορυφή 2 παίρνουμε τις (143) και (134).

Γύρω από την κορυφή 3 έχουμε τις (124) και (142), ενώ με άξονα διερχόμενο από την κορυφή 4 τις μεταθέσεις (132) και (123).

- ***Από τα μέσα απέναντι ακμών***

Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα δυο απέναντι ασύμβατων ακμών του τετραέδρου αποτελεί άξονα μιας συμμετρίας, καθώς, με περιστροφή κατά γωνία π, το τετράεδρο

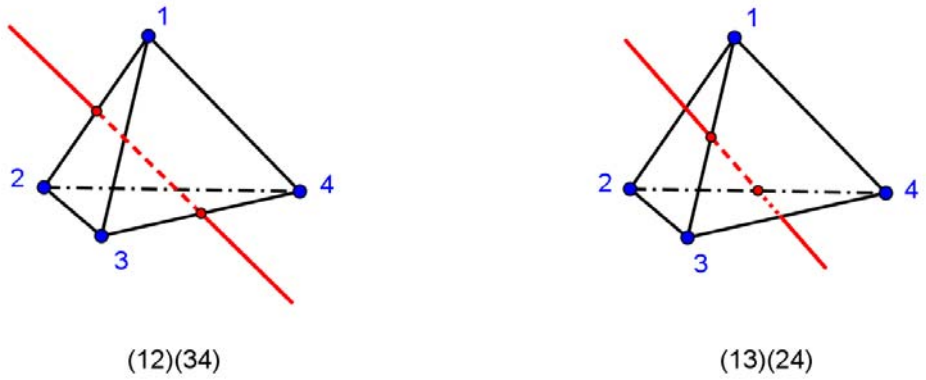
συμπίπτει με την αρχική του θέση, οπότε παράγεται μια ακόμα μετάθεση των κορυφών του.



Σχήμα 53

Η περιστροφή 180° γύρω από την ευθεία που διέρχεται από τα μέσα M, N των ακμών 2-3 και 1-4 (Σχήμα 53), δημιουργεί τη μετάθεση $(23)(14)$.

Στο Σχήμα 54 που ακολουθεί φαίνονται δυο ακόμα άξονες αυτού του τύπου και οι μεταθέσεις που παράγουν.



Σχήμα 54

Μαζί με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό *I*, έχουμε συνολικά 12 μεταθέσεις οι οποίες (μέχρις ισομορφισμού) αποτελούν την ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του τετραέδρου:

$$Dir(Tet) \simeq \{I,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (23)(14),$$
$$(123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243)\},$$

δηλαδή την **εναλλάσσουσα ομάδα A_4**, των άρτιων μεταθέσεων τεσσάρων στοιχείων.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $Dir(Tet)$ παράγεται από τις συνθέσεις των ϑ και ξ, από διαδοχικές δηλαδή περιστροφές γύρω από τους άξονες L (Σχήμα 52), και MN (Σχήμα 53).

Αναλυτικά είναι:

$\theta = (234)$, $\theta^2 = (243)$, $\xi = (23)(14)$ και ακόμη,

$$\xi\theta: \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 1 & \to & 4 \\ 2 & \to & 3 & \to & 2 \\ 3 & \to & 4 & \to & 1 \\ 4 & \to & 2 & \to & 3 \end{array} \Rightarrow \xi\theta = (143)$$

$$\xi\theta^2: \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 1 & \to & 4 \\ 2 & \to & 4 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 & \to & 3 \\ 4 & \to & 3 & \to & 2 \end{array} \Rightarrow \xi\theta^2 = (142)$$

$$(\xi\theta)\xi: \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 4 & \to & 3 \\ 2 & \to & 3 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 & \to & 2 \\ 4 & \to & 1 & \to & 4 \end{array} \Rightarrow \xi\theta\xi = (132)$$

$$\theta(\xi\theta): \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 4 & \to & 2 \\ 2 & \to & 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 & \to & 1 \\ 4 & \to & 3 & \to & 4 \end{array} \Rightarrow \theta\xi\theta = (123)$$

$$\theta\xi: \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 4 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 & \to & 4 \\ 3 & \to & 2 & \to & 3 \\ 4 & \to & 1 & \to & 1 \end{array} \Rightarrow \theta\xi = (124)$$

$$\theta^2\xi: \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 4 & \to & 3 \\ 2 & \to & 3 & \to & 2 \\ 3 & \to & 2 & \to & 4 \\ 4 & \to & 1 & \to & 1 \end{array} \Rightarrow \theta^2\xi = (134)$$

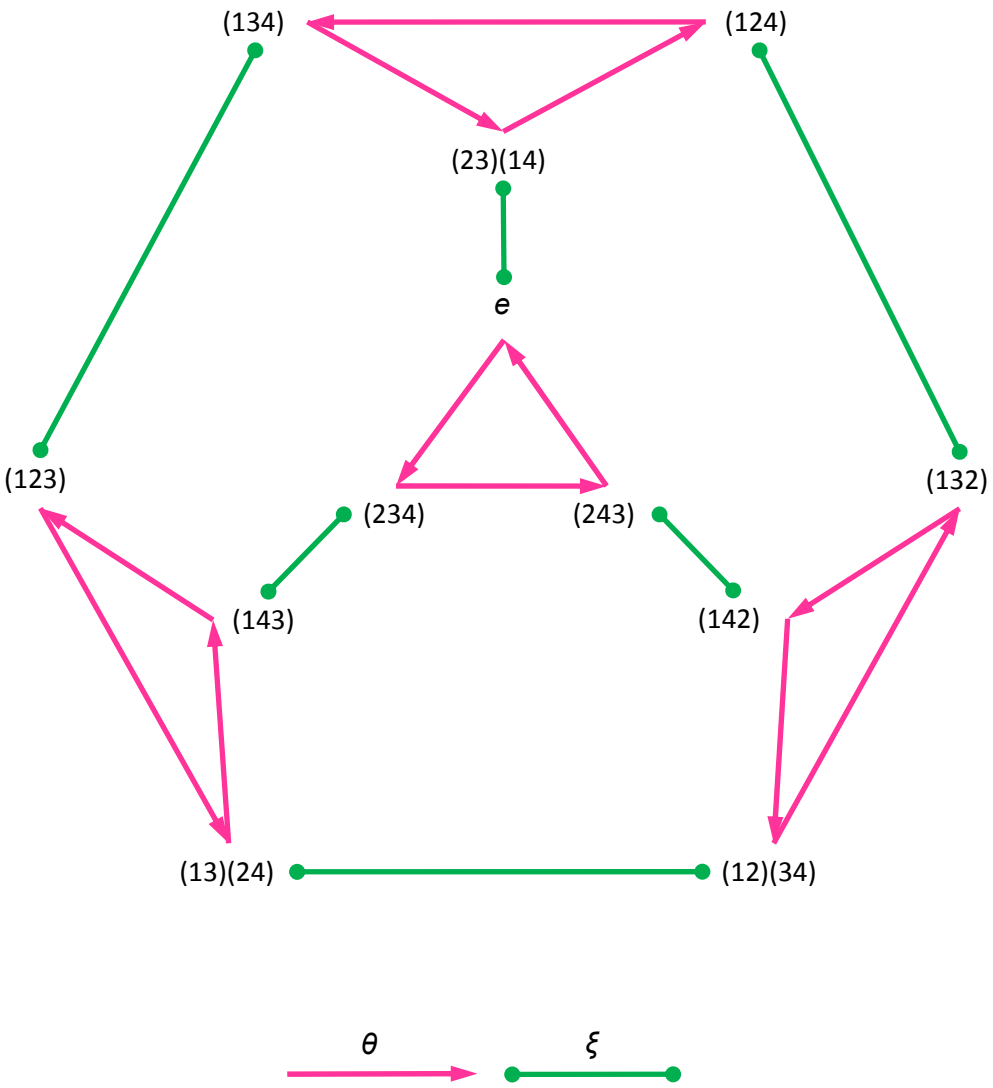
$$\theta(\xi\theta^2): \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 4 & \to & 2 \\ 2 & \to & 1 & \to & 1 \\ 3 & \to & 3 & \to & 4 \\ 4 & \to & 2 & \to & 3 \end{array} \Rightarrow \theta\xi\theta^2 = (12)(34)$$

$$\left(\theta^2\xi\right)\theta: \begin{array}{ccccc} 1 & \to & 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 3 & \to & 4 \\ 3 & \to & 4 & \to & 1 \\ 4 & \to & 2 & \to & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \theta^2\xi\theta = (13)(24)$$

Μ' άλλα λόγια ισχύει:

$$Dir(Tet) \cong A_4 \cong \left\langle \theta, \xi \,\middle|\, \theta^3 = \xi^2 = (\theta\xi)^3 = I \right\rangle$$

Στο σχήμα έχουμε το λεγόμενο διάγραμμα Cayley της $Dir(Tet)$, όπου φαίνεται πώς οι συνθέσεις των γεννητόρων θ και ξ παράγουν τις 12 συμμετρίες του τετραέδρου.



Σχήμα 55. διάγραμμα Cayley της $Dir(Tet)$

Μελέτη των υποομάδων της *Dir*(*Tet*)

Είναι $\left|Dir\left(Tet\right)\right| = 12 = 3\cdot 2^2$, επομένως υπάρχουν Sylow υποομάδες τάξης 3 και τάξης 4.

- Σχετικά με το πλήθος α_3 των 3-υποομάδων Sylow ισχύει:

$\alpha_3 = 1+3\lambda \mid \left|Dir\left(Tet\right)\right| \Rightarrow 1+3\lambda \mid 12 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, άρα είναι $\alpha_3 = 1$ ή $\alpha_3 = 4$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν <u>4 υποομάδες τάξης 3</u>, οι εξής:

- $\mathrm{K}_1 = \left\{I,\ (234),\ (243)\right\} = \left\{I,\ \theta\xi\theta,\ \xi\theta\xi\right\}$ που εκφράζουν τις περιστροφές γύρω από τον άξονα L (σχήματα 4,5) που διέρχεται από τη κορυφή 1.
- $\mathrm{K}_2 = \left\{I,\ (134),\ (143)\right\} = \left\{I,\ \theta^2\xi,\ \xi\theta\right\}$ που εκφράζουν τις περιστροφές γύρω από τον άξονα που διέρχεται από τη κορυφή 2.
- $\mathrm{K}_3 = \left\{I,\ (124),\ (142)\right\} = \left\{I,\ \theta\xi,\ \xi\theta^2\right\}$ που εκφράζουν τις περιστροφές γύρω από τον άξονα που διέρχεται από τη κορυφή 3.
- $\mathrm{K}_4 = \left\{I,\ (123),\ (132)\right\} = \left\{I,\ \theta,\ \theta^2\right\}$ που εκφράζουν τις περιστροφές γύρω από τον άξονα που διέρχεται από τη κορυφή 4.

- Σχετικά με το πλήθος α_2 των 2-υποομάδων Sylow τάξης 4 ισχύει:

$\alpha_2 = 1+2\lambda \mid \left|Dir\left(Tet\right)\right| \Rightarrow 1+2\lambda \mid 12 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, άρα είναι $\alpha_3 = 1$ ή $\alpha_3 = 3$.

Η υποομάδα $\mathrm{K} = \left\{I,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (23)(14)\right\}$ που αποτελείται από τις περιστροφές γύρω από τους άξονες που διέρχονται από τα μέσα των ανά δύο απέναντι ακμών (σχήματα 6,7,8) είναι **ομάδα του Klein**, καθώς κάθε στοιχείο της είναι αντίστροφο του εαυτού του, ενώ το γινόμενο κάθε δυο στοιχείων διάφορων του ουδετέρου δίνει το τρίτο (μη ουδέτερο) στοιχείο της K.

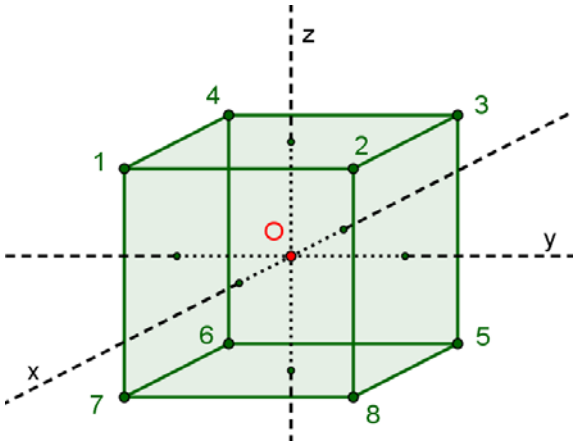
Αν υπήρχε και άλλη υποομάδα Λ τάξης 4, εκτός της K θα περιείχε ένα τουλάχιστον στοιχείο από τις K_1, K_2, K_3, ή K_4, έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ήταν στοιχείο της K_1. Τότε όμως θα έπρεπε να περιέχει και το αντίστροφό του που είναι το άλλο μη ουδέτερο στοιχείο της K_1. Δηλαδή η K_1 θα ήταν υποομάδα της Λ, άτοπο , αφού $\left|\mathrm{K}_1\right| = 3 \nmid 4 = \left|\Lambda\right|$. Συνεπώς η K είναι η μοναδική 2-υποομάδα Sylow της $Dir\left(Tet\right)$.

Η K είναι λοιπόν μια αβελιανή κανονική υποομάδα της $Dir\left(Tet\right)$, οπότε έχουμε τη σειρά:

$\left\{I\right\} \lhd \mathrm{K} \lhd Dir\left(Tet\right)$ και $\left|\dfrac{Dir\left(Tet\right)}{\mathrm{K}}\right| = \dfrac{\left|Dir\left(Tet\right)\right|}{\left|\mathrm{K}\right|} = \dfrac{12}{4} = 3$, άρα η $\dfrac{Dir\left(Tet\right)}{\mathrm{K}}$ είναι αβελιανή, επομένως η $Dir\left(Tet\right)$ είναι επιλύσιμη.

Οι συμμετρίες του κύβου

Ας θεωρήσουμε ένα κύβο (*Cube*) με το βαρύκεντρό του στην αρχή των αξόνων και κορυφές τα διανύσματα $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$, τα οποία ονομάζουμε $x_1, x_2, \ldots, x_8$ και τα αριθμούμε έτσι, ώστε απέναντι από την κορυφή *i* να βρίσκεται η κορυφή *i* +4, για $1 \le i \le 4$ (Σχήμα 56).



Σχήμα 56

Είναι φανερό ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$(x,y,z) \in Cube \Leftrightarrow (-x,-y,-z) \in Cube$$

Επομένως η απεικόνιση $-I$ (αντίθετη της ταυτοτικής) ανήκει στην ομάδα συμμετριών του κύβου $Symm(Cube)$. Εφαρμόζοντας την πρόταση της σελίδας 122 έχουμε ότι

$$Symm(Cube) \cong Dir(Cube) \times \{\pm I\}$$

Δεν μένει λοιπόν παρά να μελετήσουμε την ομάδα $Dir(Cube)$.

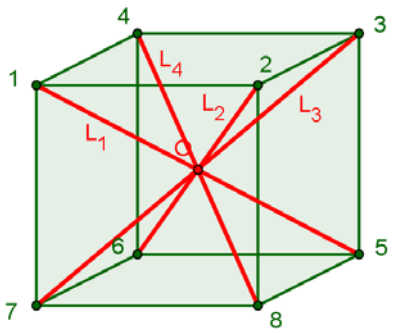
Οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου

Προφανώς, η $Dir(Cube)$ δρα στο σύνολο των οκτώ κορυφών του κύβου, δίνοντας έναν 1-1 ομομορφισμό $Dir(Cube) \to S_8$. Ο ομομορφισμός αυτός, όμως, απέχει πολύ από το να είναι και ΕΠΙ: είναι $|S_8| = 8! = 40320$, ενώ, όπως θα αποδείξουμε, οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου είναι μόνο 24, επομένως η $Dir(Cube)$ είναι ισόμορφη με μια μικρή υποομάδα της συμμετρικής ομάδας των οκτώ στοιχείων. Ακριβέστερα ισχύει η

Πρόταση: *Η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του κύβου είναι ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα των τεσσάρων στοιχείων.*

$$Dir(Cube) \cong S_4$$

Απόδειξη: Υπάρχουν τέσσερα γεωμετρικά στοιχεία του κύβου, τα οποία μετατίθενται με κάθε περιστροφή του. Αναφερόμαστε στις 4 κύριες διαγώνιες L_1, L_2, L_3, L_4, όπου L_i η διαγώνιος που συνδέει τις κορυφές με αριθμούς i και i+4 (Σχήμα 57).



Σχήμα 57

Η $Dir(Cube)$ δρα επί του συνόλου των διαγωνίων $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$, επομένως έχουμε έναν ομομορφισμό $\varphi : Dir(Cube) \to S_4$ τέτοιο, ώστε $g(L_i) = L_{\varphi(g)(i)}$.

Ισχυρισμός Ι1: Η φ είναι 1-1.

<u>Απόδειξη του *Ι*1</u>: Έστω $g \in Dir(Cube)$ με $\varphi(g) = I$, η ταυτοτική μετάθεση των τεσσάρων στοιχείων. Θα δείξουμε ότι $g = I$. Πράγματι, αφού $\varphi(g) = I$, είναι $g(L_i) = L_i$ για κάθε $1 \le i \le 4$, οπότε για την κορυφή $x_1 \in L_1$ ισχύει $g(x_1) = x_1$, ή $g(x_1) = x_5 = -x_1$, ή αλλιώς, $g(x_1) = c_1 x_1$ για κάποιο $c_1 \in \{1, -1\}$. Αντίστοιχα, για $i = 2,3,4$ έχουμε $g(x_i) = c_i x_i$, για κάποιο $c_i \in \{1, -1\}$.

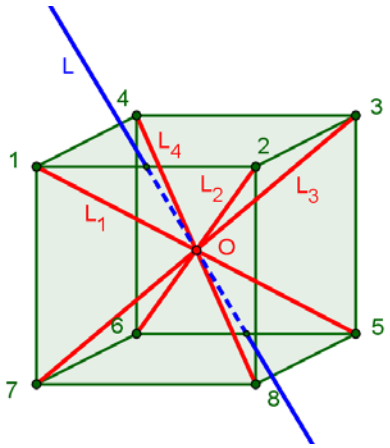
Καθώς τα x_1, x_2, x_3, x_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οποιαδήποτε τρία από αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Αν λοιπόν για τρία από τα διανύσματα αυτά, για παράδειγμα τα x_1, x_2, x_3, ίσχυε $g(x_i) = -x_i$, τότε προφανώς θα ήταν $g(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, δηλαδή θα ήταν $g = -I$. Το τελευταίο όμως είναι άτοπο, αφού $g \in Dir(Cube) \subseteq SO(3)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το πολύ δύο από τα c_i ισούνται με -1, άρα τουλάχιστον δύο ισούνται με 1, έστω τα c_k, c_l, με $k \ne l$, οπότε έχουμε $g(x_k) = x_k$ και $g(x_l) = x_l$.

Προς απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι η g δεν είναι η ταυτοτική. Τότε πρόκειται για μια μη τετριμμένη περιστροφή, της οποίας τα σταθερά σημεία βρίσκονται όλα πάνω στην

ευθεία που αποτελεί τον άξονα περιστροφής, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα x_k, x_l είναι συγγραμμικά, άτοπο, αφού τα x_k, x_l είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως ισχύει $g = I$, άρα η φ είναι 1-1.

Ισχυρισμός I2: Η φ είναι ΕΠΙ.

<u>Απόδειξη του *I2*</u>: Ας θεωρήσουμε την περιστροφική συμμετρία $\xi \in Dir(Cube)$, η οποία στρέφει τον κύβο κατά γωνία π γύρω από την ευθεία L που διέρχεται από τα μέσα των απέναντι ακμών του κύβου που ορίζονται από τα ζεύγη κορυφών x_1, x_2 και x_5, x_6 (Σχήμα 58). Παρατηρούμε ότι η ξ αντιμεταθέτει τις διαγωνίους L_1, L_2, ενώ διατηρεί τις L_3 και L_4, δηλαδή είναι $\xi(L_1) = L_2$, $\xi(L_2) = L_1$, $j(L_3) = L_3$ και $\xi(L_4) = L_4$. Αυτό σημαίνει ότι $\varphi(\xi) = (12)$. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι στην εικόνα της φ ανήκουν και οι αντιμεταθέσεις (23) και (34). Οι αντιμεταθέσεις (12), (23) και (34) παράγουν ολόκληρη τη συμμετρική ομάδα S_4, συνεπώς η φ είναι ΕΠΙ της S_4.



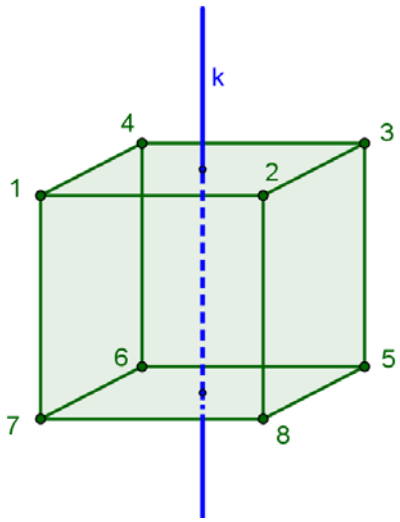
Σχήμα 58

Ως αποτέλεσμα των ισχυρισμών *I1* και *I2* παίρνουμε το ζητούμενο ισομορφισμό: $Dir(Cube) \cong S_4$. □

Συνοψίζοντας, είναι $Dir(Cube) \cong S_4$, άρα υπάρχουν συνολικά 24 περιστροφικές συμμετρίες του κύβου (όσα τα στοιχεία της S_4), ενώ για την πλήρη ομάδα συμμετριών του ισχύει $Symm(Cube) \cong Dir(Cube) \times \{\pm I\}$, δηλαδή περιλαμβάνει συνολικά 48 στοιχεία: τις 24 περιστροφικές συμμετρίες του κύβου και άλλες τόσες που προκύπτουν από τις συνθέσεις της κεντρικής αντιστροφής $-I$ με αυτές.

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι τρεις τύποι αξόνων και καταγράφονται οι γωνίες περιστροφής γύρω απ' αυτούς, που αντιστοιχούν στις 24 συμμετρίες που περιλαμβάνει η $Dir(Cube)$.

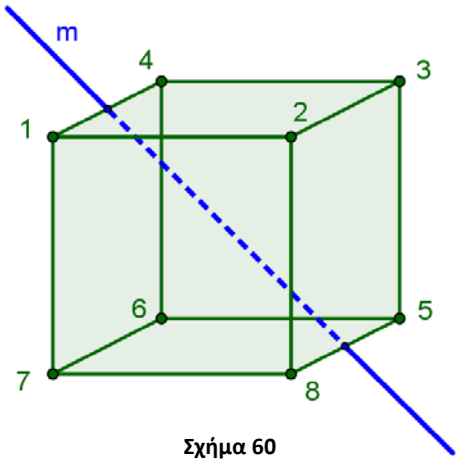
Άξονες συμμετρίας του κύβου



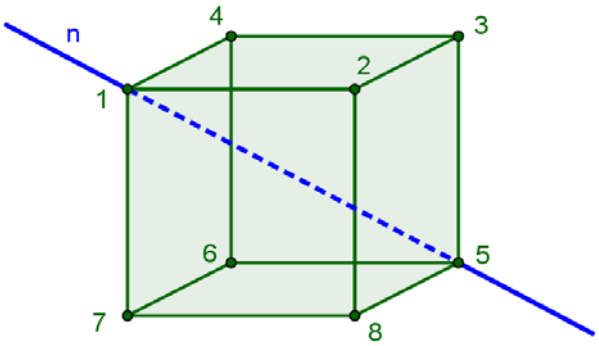
Σχήμα 59

Ο άξονας περιστροφής k διέρχεται από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών. Με στροφές κατά $\frac{\pi}{2}$, π, ή $\frac{3\pi}{2}$ δημιουργούνται 3 συμμετρίες. Υπάρχουν 3 άξονες αυτού του τύπου, επομένως προκύπτουν $3\cdot 3=9$ από τις 24 περιστροφικές συμμετρίες του κύβου. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 59 η αριστερόστροφη κίνηση γύρω από την ευθεία k κατά $\frac{\pi}{2}$ δίνει τον κύκλο (1234), στροφή κατά γωνία π αντιστοιχεί στη μετάθεση $(13)(24)$, ενώ η στροφή κατά $\frac{3\pi}{2}$ δίνει τον κύκλο (1432).

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, στροφή κατά π γύρω από ευθεία που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών του κύβου δίνει σε μια συμμετρία τάξης 2. Στο Σχήμα 60 η στροφή γύρω από τον άξονα m αντιστοιχεί στην αντιμετάθεση (14). Υπάρχουν 6 άξονες που συνδέουν τα μέσα των ζευγών απέναντι ακμών. Οι στροφές γύρω απ' αυτούς δίνουν 6 ακόμα συμμετρίες του κύβου.



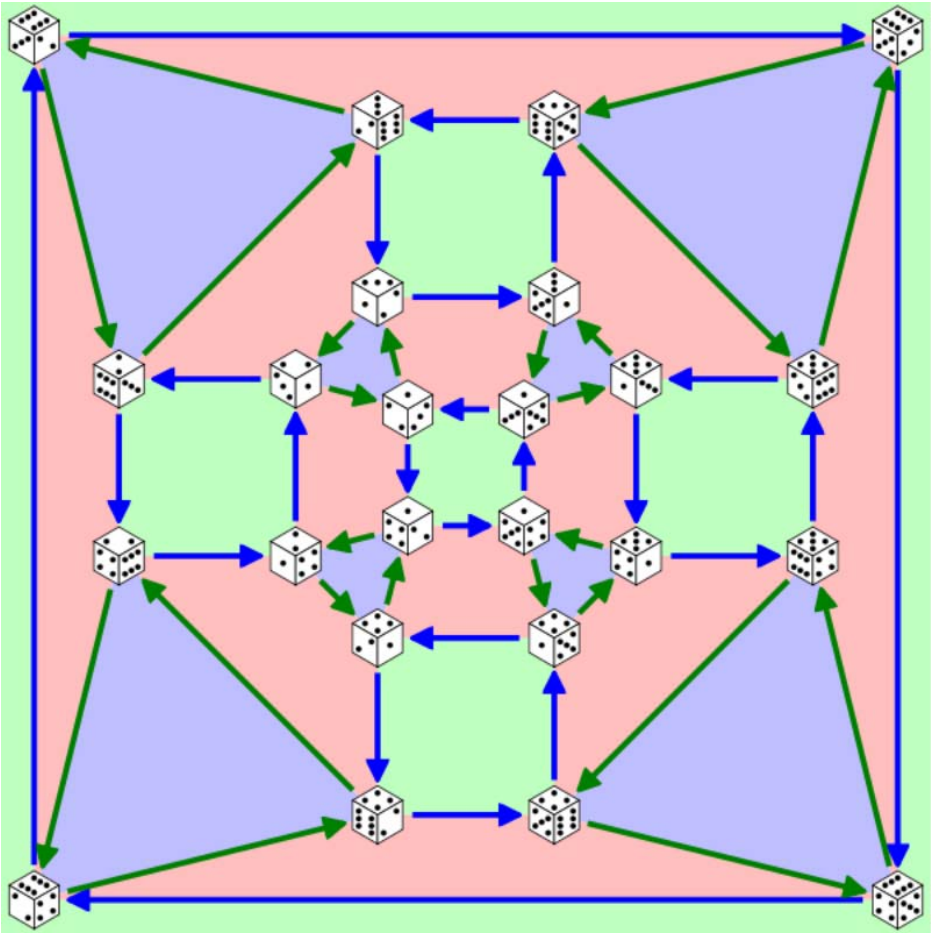
Σχήμα 60



Σχήμα 61

Στο Σχήμα 61 έχουμε τον τρίτο τύπο άξονα περιστροφής του κύβου: ευθεία που διέρχεται από δύο απέναντι (αντίθετες) κορυφές. Με στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ γύρω από τον άξονα n προκύπτει ο κύκλος (243). Οι 4 άξονες αυτού του τύπου δίνουν 8 ακόμα συμμετρίες. Μαζί με την τετριμμένη ταυτοτική συμμετρία συμπληρώνουμε τις $9+6+8+1=24$ συμμετρίες της $Dir(Cube)$.

Στην Εικόνα 19 φαίνεται το διάγραμμα Cayley της ομάδας περιστροφικών συμμετριών του κύβου με γεννήτορες τη στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ γύρω από τον άξονα *n* που διέρχεται από δύο απέναντι (αντίθετες) κορυφές και τη στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα *k* που διέρχεται από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών[25].



Εικόνα 19. Διάγραμμα Cayley της *Dir*(*Cube*)

[25] Η εικόνα βρίσκεται στη διεύθυνση: http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_group

Οι συμμετρίες του εικοσαέδρου

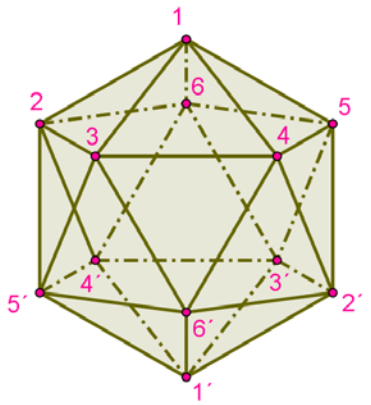
Στην περιγραφή της κατασκευής του εικοσαέδρου (σελίδα 107) είδαμε ότι το εικοσάεδρο $(Icosa)$ μπορεί να τοποθετηθεί με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων έτσι, ώστε οι κορυφές του να έχουν συντεταγμένες $(\pm 1, \pm\varphi, 0)$, $(\pm\varphi, 0, \pm 1)$ και $(0, \pm 1, \pm\varphi)$, επομένως είναι φανερό ότι, όπως στην περίπτωση του κύβου, έτσι και για το εικοσάεδρο ισχύει η ισοδυναμία $(x,y,z) \in I\cos a \Leftrightarrow (-x,-y,-z) \in I\cos a$, άρα η κεντρική αντιστροφή (η απεικόνιση $-I$) ανήκει στην ομάδα συμμετριών του εικοσαέδρου $Symm(Icosa)$. Χάρη σ' αυτό και με βάση την πρόταση της σελίδας 122 προκύπτει ότι

$$Symm(Icosa) \cong Dir(Icosa) \times \{\pm I\}$$

Περνάμε λοιπόν στη μελέτη της ομάδας $Dir(Icosa)$ των περιστροφικών συμμετριών του εικοσαέδρου.

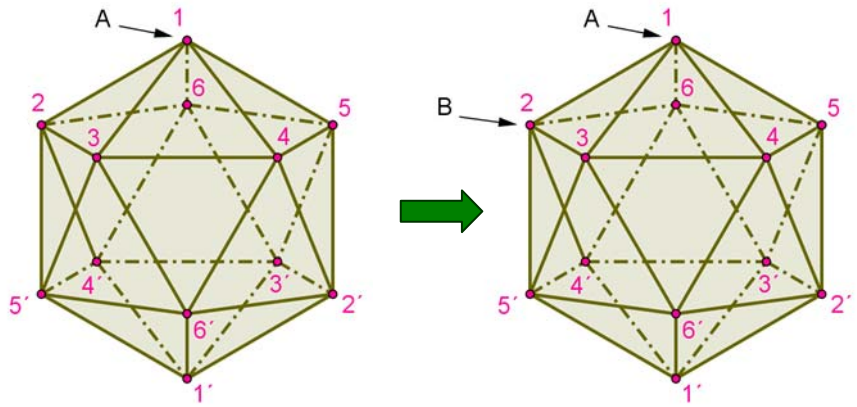
Οι περιστροφικές συμμετρίες του εικοσαέδρου

Αναζητώντας το πλήθος των στοιχείων που αποτελούν την ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του κανονικού εικοσαέδρου (*Icosa*) δεν έχουμε παρά να καταμετρήσουμε τους τρόπους με τους οποίους το *Icosa* μπορεί να απεικονισθεί πάνω στον εαυτό του, ή αλλιώς το πλήθος των τρόπων με τους οποίους οι 12 διαδοχικές κορυφές του Α, Β, Γ, … μπορούν να καταλάβουν τις θέσεις 1, 2, 3, …, 2΄, 1΄, (Σχήμα 62) διατηρώντας τις σχετικές τους αποστάσεις.



Σχήμα 62

- Αρχικά έχουμε **12** επιλογές για την κορυφή Α. Ας επιλέξουμε για παράδειγμα τη θέση 1 (Σχήμα 63).
- Για την κορυφή Β υπάρχουν τώρα **5** επιλογές, οι γειτονικές θέσεις 2, 3, 4, 5, 6. Έστω ότι τοποθετούμε το Β στη θέση 2 (Σχήμα 63).



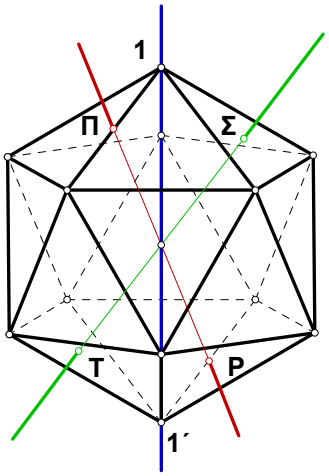
Σχήμα 63

Παρατηρούμε ότι από τη στιγμή που έχουμε τοποθετήσει δυο κορυφές του εικοσαέδρου, οι υπόλοιπες 10 έχουν ένα μόνο τρόπο να καταλάβουν τις θέσεις που απομένουν, αφού με βάση το πόρισμα της σελίδας 121 υπάρχει μοναδική ορθογώνια απεικόνιση $f \in SO(3)$ η οποία να αντιστοιχίζει δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα (αυτά που υποδηλώνονται με τα σημεία Α και Β) σε δυο καθορισμένα διανύσματα (στην προκειμένη περίπτωση, εκείνα που αντιστοιχούν στις θέσεις 1 και 2). Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν συνολικά 12·5=**60** δυνατές περιστροφές για το *Icosa*, δηλαδή η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του $Dir(Icosa)$ είναι τάξης:

$$|Dir(Icosa)| = 60$$

Προφανώς οι 60 αυτές περιστροφικές συμμετρίες του *Icosa* μεταθέτουν τις 12 κορυφές του, επομένως, με αρίθμηση των κορυφών, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό της $Dir(Icosa)$ με κάποια υποομάδα της ομάδας μεταθέσεων S_{12}. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η $Dir(Icosa)$ είναι ισόμορφη με την εναλλάσσουσα ομάδα A_5, η οποία άλλωστε είναι επίσης τάξη 60.

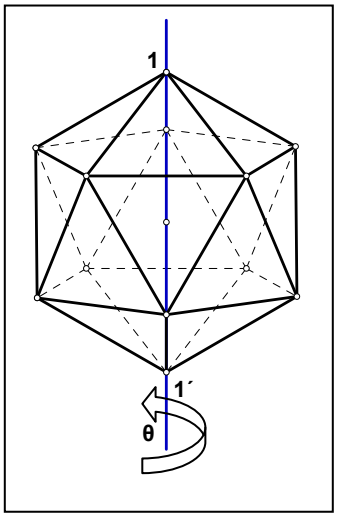
Ένας τρόπος να αναγνωρίσουμε τις 60 αυτές περιστροφικές συμμετρίες του *Icosa* είναι να εντοπίσουμε τους άξονες γύρω από τους οποίους μπορεί να περιστραφεί, ώστε να συμπέσει με τον εαυτό του. (Σχήμα 64)



Σχήμα 64

- ***Από απέναντι κορυφές***

Η ευθεία που διέρχεται από δυο απέναντι κορυφές του εικοσαέδρου αποτελεί άξονα συμμετρίας, καθώς, με «θετική» περιστροφή κατά $\frac{2\pi}{5}$, το εικοσάεδρο συμπίπτει με την αρχική του θέση. Αν συμβολίσουμε με ϑ την ισομετρία αυτή, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι θ^2, θ^3, θ^4 παράγουν τρεις ακόμα ισομετρίες του *Icosa*, τις στροφές κατά $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ και $\frac{8\pi}{5}$ αντίστοιχα. Οι 4 αυτές μεταθέσεις αφήνουν προφανώς αναλλοίωτες τις κορυφές από τις οποίες διέρχεται ο άξονας. Στο Σχήμα 65 φαίνεται το παράδειγμα του άξονα που περνάει από τις κορυφές 1 και 1΄, οι οποίες και δεν μετακινούνται κατά την περιστροφή γύρω απ' αυτόν.

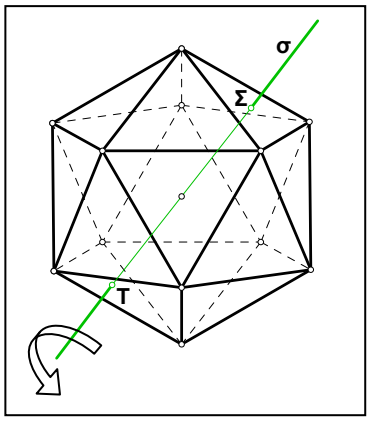


Σχήμα 65

Το εικοσάεδρο έχει 12 κορυφές, επομένως υπάρχουν 6 ζεύγη απέναντι κορυφών, δηλαδή 6 άξονες με τη βοήθεια των οποίων παράγονται 6·4=**24** διαφορετικές περιστροφές. Είναι $\theta^5 = I$ (περιστροφή κατά 2π), δηλαδή **τα 24 αυτά στοιχεία της *Dir*(*Icosa*) είναι τάξης 5**.

- ***Από τα βαρύκεντρα απέναντι εδρών***

Αν θεωρήσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα βαρύκεντρα δυο απέναντι εδρών του εικοσαέδρου (Σχήμα 66), εντοπίζουμε μια περιστροφική συμμετρία με γωνία $\frac{2\pi}{3}$, την οποία συμβολίζουμε με σ, ενώ η σ^2 είναι μια ακόμα ισομετρία του *Icosa* με στροφή κατά $\frac{4\pi}{3}$. Προφανώς υπάρχουν 10 ζεύγη απέναντι εδρών, δηλαδή 10 άξονες γύρω από τους οποίους παράγονται 10·2=**20** νέες διαφορετικές μεταξύ τους περιστροφές.

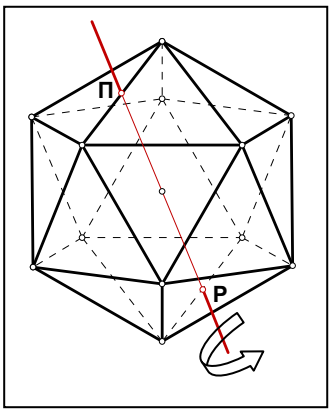


Σχήμα 66

Με τις περιστροφές αυτές μετατίθενται κυκλικά οι κορυφές των εδρών από τις οποίες διέρχεται ο άξονας περιστροφής, χωρίς να διατηρεί τη θέση της καμία από τις κορυφές του *Icosa*, επομένως οι νέες μεταθέσεις είναι όλες διαφορετικές από εκείνες της προηγούμενης κατηγορίας. Άλλωστε είναι $\sigma^3 = I$ (περιστροφή κατά 2π), επομένως **η *Dir*(*Icosa*) περιέχει 20 στοιχεία τάξης 3**.

- ***Από τα μέσα απέναντι ακμών***

Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα δυο απέναντι (παραλλήλων) ακμών του εικοσαέδρου αποτελεί άξονα συμμετρίας, με γωνία περιστροφής π (Σχήμα 67). Αν συμβολίσουμε με μ την ισομετρία αυτή, προφανώς είναι $\mu^2 = I$. Το εικοσάεδρο έχει 30 ακμές, άρα υπάρχουν 15 τέτοιοι άξονες που αντιστοιχούν σε 15 περιστροφικές συμμετρίες, δηλαδή 15 νέα στοιχεία της $Dir(Icosa)$. Το ότι καμία από τις τελευταίες μεταθέσεις των κορυφών δεν ταυτίζεται με κάποια από τις προηγούμενες γίνεται φανερό, αν παρατηρήσουμε ότι με τις τελευταίες έχουμε αντιμεταθέσεις των κορυφών που είναι άκρα των ακμών από τα μέσα των οποίων διέρχεται κάθε φορά ο άξονας περιστροφής, κάτι που δεν συμβαίνει στις προηγούμενες κατηγορίες.



Σχήμα 67

Τα 15 νέα στοιχεία της $Dir(Icosa)$ είναι τάξης 2.

Μαζί με την ταυτοτική συμμετρία *I*, έχουμε συνολικά 24+20+15+1=60, δηλαδή έχουμε προσδιορίσει τα στοιχεία της ομάδας συμμετριών του εικοσαέδρου.

Πρόταση: *Η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του εικοσαέδρου είναι ισόμορφη με τη εναλλάσσουσα ομάδα A_5 των άρτιων μεταθέσεων πέντε στοιχείων.*

$$Dir(Icosa) \cong A_5$$

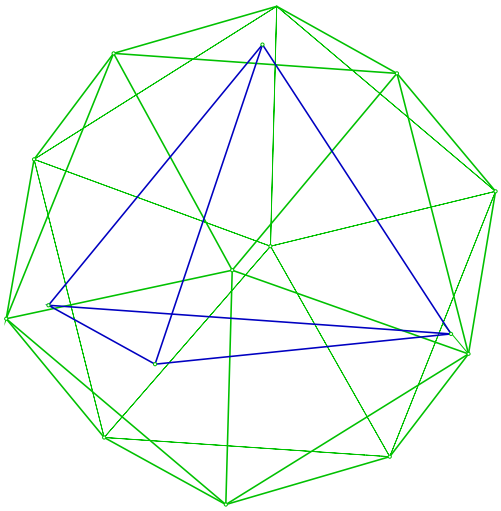
Απόδειξη: Η απόδειξη θα ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα:

- Πρώτα θα δείξουμε ότι κάθε περιστροφή του εικοσαέδρου (*Icosa*) δίνει ένα στοιχείο της ομάδας μεταθέσεων S_5, ότι δηλαδή η $Dir(Icosa)$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της S_5.
- Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε 3-κύκλος της S_5 προκύπτει από μια περιστροφή του *Icosa* γύρω από έναν από τους άξονες συμμετρίας που εντοπίσαμε νωρίτερα, συγκεκριμένα τους άξονες που διέρχονται από τα βαρύκεντρα των ανά δυο απέναντι εδρών.

- Τέλος, στηριγμένοι στο ότι η A_5 παράγεται από κύκλους μήκους 3 και σε συνδυασμό με το ότι $\left|Dir\left(Icosa\right)\right| = \left|A_5\right| = 60$, θα οδηγηθούμε στο επιθυμητό συμπέρασμα, ότι $Dir\left(Icosa\right) \cong A_5$.

<u>Βήμα 1</u>

Στο Σχήμα 68 βλέπουμε ένα κανονικό τετράεδρο εγγεγραμμένο στο κανονικό εικοσάεδρο *Icosa*. Κάθε μια από τις 4 κορυφές του τετραέδρου βρίσκεται στο βαρύκεντρο μιας από τις έδρες του *Icosa*. Καθώς το *Icosa* έχει 20 έδρες, υπάρχουν ακόμα 4 εγγεγραμμένα τετράεδρα με τις κορυφές του καθενός να καταλαμβάνουν τα βαρύκεντρα των υπολοίπων εδρών του. Ας αριθμήσουμε τα τετράεδρα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5. Με καθεμία περιστροφή του *Icosa*, τα 5 αυτά εγγεγραμμένα κανονικά τετράεδρα μετατίθενται αντιστοιχίζοντας με το φυσικό αυτό τρόπο τις ισομετρίες του εικοσαέδρου σε στοιχεία της S_5. Έτσι δημιουργείται μια υποομάδα της S_5 ισόμορφη με τη $Dir\left(Icosa\right)$, δηλαδή, μέχρις ισομορφισμού, έχουμε $Dir\left(Icosa\right) \le S_5$.

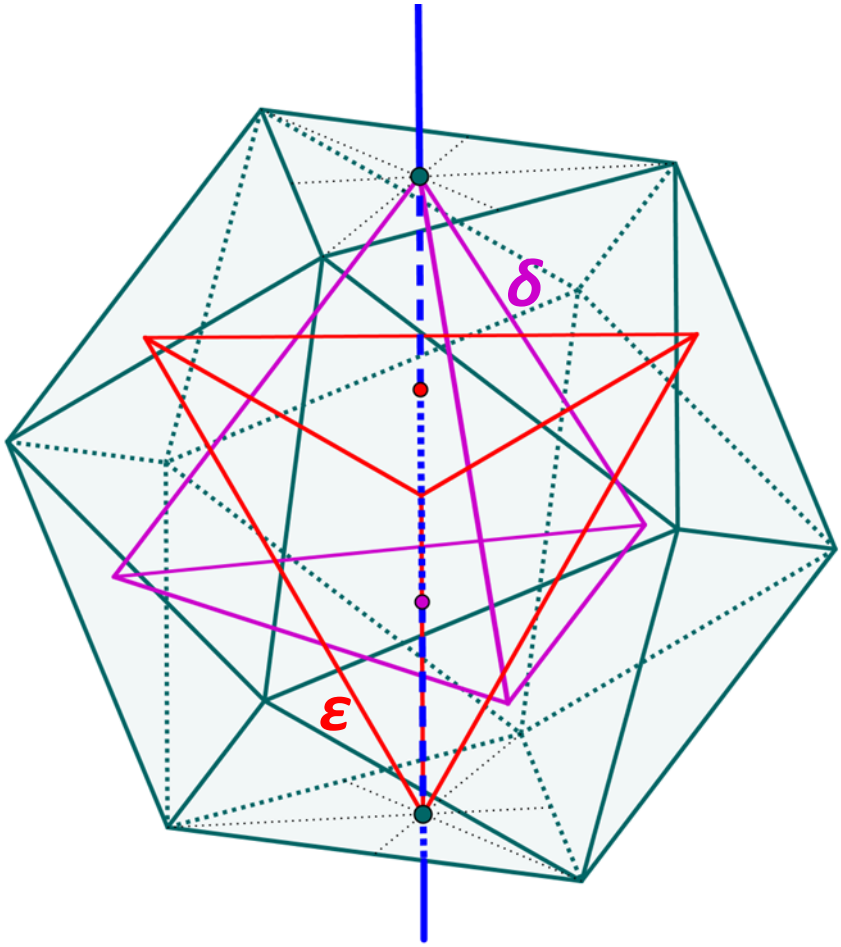


Σχήμα 68

<u>Βήμα 2</u>

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε εκείνη την περιστροφή του εικοσαέδρου που παράγει τον τυχαίο 3-κύκλο $\left(\alpha\beta\gamma\right)$ της S_5, δηλαδή $\alpha, \beta, \gamma \in K = \left\{1,2,3,4,5\right\}$. Παρατηρούμε, με επισκόπηση ενός μοντέλου, ότι αν *δ* και *ε* είναι τα υπόλοιπα δυο στοιχεία του *K*, υπάρχει πάντα ένας ακριβώς άξονας συμμετρίας του *Icosa*, ο οποίος διέρχεται από μια κορυφή του τετραέδρου με αριθμό *δ* και μια κορυφή του τετραέδρου *ε* (Σχήμα 69). Κατά την περιστροφή του εικοσαέδρου κατά γωνία $\frac{2\pi}{3}$, ή $\frac{4\pi}{3}$ γύρω από αυτόν τον άξονα, εφαρμόζοντας δηλαδή μια από τις ισομετρίες σ, σ^2 τα τετράεδρα *δ* και *ε* αντιστοιχίζονται στον εαυτό τους, ενώ τα α, β και γ μετατίθενται δίνοντας τους 3-κύκλους $\left(\alpha\beta\gamma\right)$ και $\left(\alpha\gamma\beta\right)$

.



Σχήμα 69

Επομένως κάθε 3-κύκλος της S_5 προκύπτει από μια περιστροφή του *Icosa*, δηλαδή, όλοι οι κύκλοι μήκους 3 ανήκουν στη $Dir(Icosa)$.

<u>Βήμα 3</u>

Είναι γνωστό ότι η εναλλάσσουσα ομάδα των αρτίων μεταθέσεων A_5 παράγεται από κύκλους μήκους 3, επομένως ισχύει $A_5 \leq Dir(Icosa)$. Έχουμε δείξει παραπάνω ότι $|Dir(Icosa)| = |A_5| = 60$, άρα τελικά είναι $Dir(Icosa) = A_5$ (μέχρις ισομορφισμού).

Πιο συγκεκριμένα η $Dir(Icosa)$ παράγεται από τις ισομετρίες μ και σ:

$$Dir(Icosa) = A_5 = \langle \mu, \sigma \rangle, \quad \mu^2 = \sigma^3 = (\mu\sigma)^5 = I$$

Οι συμμετρίες του οκταέδρου και του δωδεκαέδρου

Είναι αλήθεια ότι αν δυο πολύεδρα είναι δυϊκά, τότε έχουν την ίδια ομάδα συμμετριών. Θα επιβεβαιώσουμε τον ισχυρισμό αυτό στην περίπτωση του ζεύγους κύβος-οκτάεδρο, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα που εφαρμόζονται σε κάθε ζεύγος δυϊκών στερεών. Καθώς το εικοσάεδρο με το δωδεκάεδρο αποτελούν επίσης ένα ζεύγος δυϊκών πολυέδρων, θα συμπεράνουμε ότι η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του δωδεκαέδρου είναι η $Dir(Icosa)$ και αντίστοιχα η πλήρης ομάδα συμμετριών του είναι η $Symm(Icosa)$.

Πρόταση: *Η ομάδα $Symm(Oct)$ των συμμετριών του κανονικού οκταέδρου είναι η ίδια με την $Symm(Cube)$ και κατά συνέπεια είναι ισόμορφη με την $S_4 \times \{\pm I\}$.*

Απόδειξη: Είναι Ας θεωρήσουμε ένα κύβο με βαρύκεντρό του το $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε ότι τα βαρύκεντρα των εδρών του κύβου αποτελούν τις κορυφές ενός οκταέδρου. Καθώς κάθε συμμετρία του κύβου απεικονίζει κάθε έδρα του σε μια έδρα του ίδιου κύβου, απεικονίζει ταυτόχρονα τα βαρύκεντρα των εδρών σε βαρύκεντρα αντίστοιχων εδρών, συνεπώς αντιστοιχίζει τις κορυφές του οκταέδρου σε κορυφές του, άρα απεικονίζει το οκτάεδρο στον εαυτό του. Προκύπτει λοιπόν ότι $Symm(Cube) \subseteq Symm(Oct)$.

Με το ίδιο σκεπτικό, κάθε συμμετρία του οκταέδρου απεικονίζει τον δυϊκό του κύβο (του οποίου οι κορυφές είναι τα βαρύκεντρα των εδρών του οκταέδρου) στον εαυτό του, άρα

$Symm(Oct) \subseteq Symm(Cube)$, επομένως τελικά ισχύει

$$Symm(Oct) = Symm(Cube). \quad \square$$

Πεπερασμένες υποομάδες της *SO*(3)

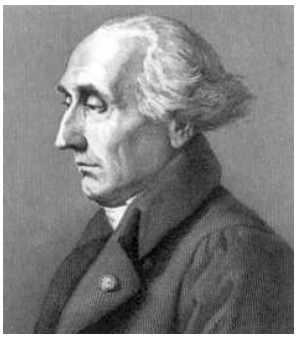
Με στόχο τη μελέτη των πεπερασμένων υποομάδων του $\mathbb{R}^3$ θα χρειαστεί να εισαγάγουμε ορισμένες ακόμα έννοιες και θεωρήματα από τη Θεωρία Ομάδων. Θα αποτελέσουν απαραίτητα εργαλεία για την απόδειξη του καταληκτικού θεωρήματος της ενότητας, το οποίο έρχεται να καταδείξει τον πρωταγωνιστικό ρόλο που παίζουν οι ομάδες συμμετριών των πλατωνικών στερεών: είναι αυτές που εκπροσωπούν σχεδόν το σύνολο των πεπερασμένων υποομάδων της Ειδικής Ορθογώνιας Ομάδας του $\mathbb{R}^3$.

Αρχίζουμε με μια πολύ σημαντική αρχή απαρίθμησης:

Θεώρημα (Lagrange):

Αν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και $H \subset G$ μια γνήσια υποομάδα της G, τότε η τάξη της H διαιρεί την τάξη της G. Ακριβέστερα, το πηλίκο των τάξεων των G και H ισούται με το πλήθος των συμπλόκων της H στη G, ή αλλιώς, το δείκτη της H στην G:

$$[G:H] = |G| / |H|.$$



Εικόνα 20.
Joseph-Louis Lagrange

Απόδειξη: Η ένωση των $[G:H]$ ξένων μεταξύ τους συμπλόκων είναι προφανώς ολόκληρη η ομάδα *G*. Ταυτόχρονα, έχουμε μια 1–1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων της *H* και των στοιχείων κάθε συμπλόκου *aH* (εκείνη που απεικονίζει το στοιχείο *h* της *H* στο $ah \in aH$), επομένως κάθε σύμπλοκο έχει $|H|$ στοιχεία. Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι υπάρχουν $[G:H] \cdot |H|$ στοιχεία συνολικά στην *G*, συνεπώς είναι $[G:H] = |G| / |H|$. □

Ορισμός: Θεωρούμε μια ομάδα *G* και ένα σύνολο *S*. Ως **δράση** της *G* επί του *S*, ορίζουμε κάθε ομομορφισμό *φ* από την *G* στην ομάδα S_x των μεταθέσεων του *S*. Συνήθως, χάριν απλότητας, θέτουμε $g \cdot s \equiv \varphi(g)(s)$, για κάθε $g \in G$, $s \in S$.

Καθώς η *φ* είναι ομομορφισμός, για το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ ισχύει $\varphi(e) = I$, όπου $I \in S_x$ ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, άρα $e \cdot s = s$ για κάθε $s \in S$.

Ακόμα, $g \cdot (h \cdot s) = (gh) \cdot s$, για κάθε $g, h \in G$, $s \in S$.

Ορισμοί: Έστω ότι μια ομάδα *G* δρα επί ενός συνόλου *S*. Ονομάζουμε:

- **τροχιά** του *s* το σύνολο $Orb(s) = \{g \cdot s \mid g \in G\}$.
- **σταθεροποιούσα** του *s* (ή αλλιώς **ομάδα ισοτροπίας** του s) το σύνολο των στοιχείων της *G* που αφήνουν αναλλοίωτο το *s*: $Stab(s) = \{g \in G \mid g \cdot s = s\}$.

Φανερά, είναι $Orb(s) \subseteq S$ και $Stab(s) \subseteq G$.

Μια δράση ονομάζεται **μεταβατική**, όταν υπάρχει μία μόνο τροχιά, δηλαδή, όταν για κάθε $x, y \in S$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο, ώστε $g \cdot x = y$.

Πρόταση: *Η σταθεροποιούσα του s, $Stab(s)$, είναι μια υποομάδα της G.*

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι το ουδέτερο στοιχείο *e* της *G* ανήκει στη σταθεροποιούσα $Stab(s)$. Ακόμα, αν $g, g' \in Stab(s)$, τότε

αφ' ενός $(gg')\cdot s = g\cdot(g'\cdot s) = g\cdot s = s$, άρα $gg' \in Stab(s)$,

αφ' ετέρου $g^{-1}\cdot s = g^{-1}\cdot(g\cdot s) = (g^{-1}g)\cdot s = e\cdot s = s$, άρα $g^{-1} \in Stab(s)$. □

Πρόταση: *Αν μια ομάδα G δρα επί ενός συνόλου S και $s \in S$, τότε υπάρχει μια 1–1 απεικόνιση $G/Stab(s) \to Orb(s)$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $f: G/Stab(s) \to Orb(s)$ με $f(gStab(s)) = g\cdot s$, $g \in G$.

Η *f* είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $g\cdot s \neq g'\cdot s$ τότε για κάθε $h \in Stab(s)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g\cdot s \neq g'\cdot(h\cdot s) &\Rightarrow g\cdot s \neq (g'h)\cdot s \\ &\Rightarrow g \neq g'h \\ &\Rightarrow gStab(s) \neq g'Stab(s) \end{aligned}$$

Ακόμα, βάσει του ορισμού της τροχιάς του *s*, η *f* είναι ΕΠΙ της $Orb(s)$, αφού για κάθε $s' \in Orb(s)$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο, ώστε $g\cdot s = s'$ και άρα το σύμπλοκο $gStab(s)$ απεικονίζεται μέσω της *f* στο $f(gStab(s)) = g\cdot s = s'$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η f είναι και 1–1:

Ας υποθέσουμε ότι είναι $f(gStab(s)) = f(g'Stab(s))$, δηλαδή $g\cdot s = g'\cdot s$. Τότε έχουμε $s = g^{-1}\cdot(g'\cdot s) = (g^{-1}g')\cdot s$, άρα $h \equiv g^{-1}g' \in Stab(s) \Rightarrow g' = gh$. Αυτό σημαίνει ότι $gStab(s) = g'Stab(s)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Με βάση την πρόταση που προηγήθηκε παίρνουμε ότι (πληθάριθμος της $Orb(s)) = |G/Stab(s)|$, οπότε σε συνδυασμό με το θεώρημα Lagrange (σελίδα 142) προκύπτει άμεσα ότι (πληθάριθμος της $Orb(s)) = |G|/|Stab(s)|$, ή αλλιώς το

Πόρισμα: *Αν μια ομάδα G δρα επί ενός συνόλου S, τότε για κάθε $s \in S$ ισχύει*

$$|G| = \#(Orb(s))\cdot|Stab(s)|$$

Με το πόρισμα αυτό στο οπλοστάσιό μας, είμαστε πλέον έτοιμοι να διαπραγματευτούμε το κεντρικό θεώρημα σχετικά με τις πεπερασμένες ομάδες περιστροφών του $\mathbb{R}^3$. Είναι μια πρόταση που ταξινομεί τις πεπερασμένες υποομάδες της Ειδικής Ορθογώνιας Ομάδας του $\mathbb{R}^3$ και την οφείλουμε στον Felix Klein:

Πρόταση: *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα της $SO(3)$ είναι ισόμορφη με μια από τις ακόλουθες πέντε ομάδες:*

- *C_N : κυκλική ομάδα τάξης N (η ομάδα περιστροφών ενός κανονικού N-γώνου)*
- *D_N : διεδρική ομάδα τάξης 2N (η πλήρης ομάδα συμμετριών ενός κανονικού N-γώνου)*
- *$Dir(Tet)$: η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του κανονικού τετραέδρου*
- *$Dir(Cube)$: η ομάδα περιστροφών ενός κύβου ή ενός κανονικού οκταέδρου*
- *$Dir(Icosa)$: η ομάδα περιστροφών ενός κανονικού εικοσαέδρου, ή δωδεκαέδρου.*

Απόδειξη: Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα της $SO(3)$. Για να απλουστεύσουμε τις παραστάσεις θέτουμε $|G| = N$. Γνωρίζουμε ότι κάθε μη τετριμμένο στοιχείο $g \in SO(3)$ είναι μια περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα L και συνεπώς σταθεροποιεί ακριβώς δύο σημεία της μοναδιαίας σφαίρας $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \text{ με } \|x\| = 1\}$, τα σημεία τομής της L με την S^2. Αν το ένα είναι το v, τότε προφανώς το δεύτερο είναι το $-v$. Ονομάζουμε τα δυο αυτά σταθερά σημεία **πόλους** της g. Ας συμβολίσουμε με P το σύνολο των πόλων των στοιχείων της $G \setminus \{I\}$.

Ισχυρισμός: Η G απεικονίζει το P στον εαυτό του, επομένως δρα επί του P.

Απόδειξη: Αν το $p \in P$ είναι ένας πόλος της $g \in G$, τότε για κάθε $h \in G$ έχουμε

$$hgh^{-1} \cdot (h \cdot p) = (hgh^{-1}h) \cdot (p) = (hg) \cdot (p) = h(g \cdot p) = h \cdot p,$$

άρα και το $h \cdot p$ είναι ένας πόλος.

Ας θεωρήσουμε τώρα το P ως την ένωση ξένων μεταξύ τους τροχιών και έστω $p_1, p_2, \ldots, p_r$ αντιπροσωπευτικοί πόλοι, ένας από κάθε τροχιά. Θέτοντας $n_j = \#(Orb(p_j))$ και $q_j = |Stab(p_j)|$, για $1 \le j \le r$, το πόρισμα της σελίδας 143 μας δίνει στη σχέση

$$|G| = N = n_j q_j, \quad \text{για } 1 \le j \le r$$

Το σύνολο των στοιχείων της G που έχουν ως πόλο το διάνυσμα p_j δεν είναι άλλο από τη σταθεροποιούσα $Stab(p_j)$ του p_j εξαιρουμένου του ταυτοτικού στοιχείου I, συνεπώς υπάρχουν $q_j - 1$ στοιχεία της G με έναν πόλο το p_j. Από την άλλη μεριά, καθένα από τα $N-1$ στοιχεία της $G \setminus \{I\}$ έχει δύο πόλους. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στη σχέση

$$\sum_{p \in P} \left(|Stab(p)| - 1 \right) = 2(N-1) \qquad (1)$$

Σε περίπτωση που δύο πόλοι p και p' ανήκουν στην ίδια τροχιά, οι σταθεροποιούσες τους έχουν την ίδια τάξη. Πράγματι, αν $Orb(p) = Orb(p')$, τότε έχουμε τις συνεπαγωγές

$$\#(Orb(p))|Stab(p)| = |G| = \#(Orb(p'))|Stab(p')| \Rightarrow |Stab(p)| = |Stab(p')|$$

Μπορούμε λοιπόν να ομαδοποιήσουμε τους όρους του αριστερού μέλους της σχέσης (1), οπότε παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{r} n_j (q_j - 1) = 2(N-1)$$

Δεδομένου ότι $n_j q_j = N$ η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται στο διάσημο τύπο

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{q_j} \right) \qquad (*)$$

Παρατηρώντας ότι το αριστερό μέλος της (*) είναι αριθμός μικρότερος του 2 και τουλάχιστον 1 (θεωρώντας ότι η G δεν είναι η τετριμμένη), ενώ κάθε όρος του δεξιού μέλους είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $\frac{1}{2}$, συμπεραίνουμε ότι είναι $r = 2$ ή 3, δηλαδή υπάρχουν 2, ή 3 τροχιές.

Στη συνέχεια θα εξαντλήσουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις.

<u>Δύο τροχιές:</u> Τότε η (*) γίνεται

$$2-\frac{2}{N}=\left(1-\frac{1}{q_1}\right)+\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\Leftrightarrow\frac{2}{N}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$$
$$\Leftrightarrow 2=\frac{N}{q_1}+\frac{N}{q_2}$$
$$\Leftrightarrow 2=\frac{n_1q_1}{q_1}+\frac{n_2q_2}{q_2}$$
$$\Leftrightarrow 2=n_1+n_2$$
$$\Leftrightarrow n_1=n_2=1$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο πόλοι p, $p'=-p$ που σταθεροποιούνται από κάθε στοιχείο της G.

Προφανώς η G είναι η κυκλική ομάδα C_N των περιστροφών του $\mathbb{R}^3$ γύρω από τον άξονα L που διέρχεται από τους πόλους p, και $-p$.

<u>Τρεις τροχιές:</u> Στην περίπτωση αυτή η (*) παίρνει τη μορφή

$$\frac{2}{N}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}-1 \qquad (2)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι $q_1\le q_2\le q_3$. Είναι φυσικά $q_1\ge 2$, αλλά ταυτόχρονα ισχύει $q_1<3$, καθώς, αν ήταν $q_1\ge 3$, το δεύτερο μέλος της (2) θα ήταν ≤ 0. Είναι λοιπόν $q_1=2$. Διακρίνουμε τώρα για το q_2 τις περιπτώσεις $q_2=2$, ή $q_2\ge 3$

<u>Περίπτωση 1</u>: $q_2=2$

Τότε η (2) γίνεται $\frac{2}{N}=\frac{1}{q_3}$, άρα $N=2q_3$ που σημαίνει ότι $n_3=2$. Υπάρχει δηλαδή ένα ζεύγος πόλων p και p' που αποτελούν την τρίτη τροχιά. Κάθε στοιχείο της G είτε σταθεροποιεί τους δυο αυτούς πόλους, ή τους αντιμεταθέτει.

Αν τους σταθεροποιεί, είναι μια περιστροφή γύρω από άξονα L που διέρχεται από τους πόλους p και p'.

Αν εναλλάσσει τους δύο πόλους, είναι μια στροφή κατά γωνία π γύρω από άξονα L' κάθετο στον L.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η G είναι μια ομάδα περιστροφών οι οποίες διατηρούν ένα κανονικό πολύγωνο με $\frac{N}{2}$ πλευρές, κάθετο στον άξονα L, με το βαρύκεντρό του να είναι το

$\mathbb{O}$, ενώ οι κορυφές και τα μέσα των πλευρών του αντιστοιχούν στους υπόλοιπους πόλους (οι κατοπτρισμοί του πολυγώνου στον $\mathbb{R}^2$ είναι οι στροφές κατά γωνία *π* στον $\mathbb{R}^3$).

<u>Περίπτωση 2</u>: $q_2 \geq 3$

Δεδομένου ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1=0$ και $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1=0$, για το q_2 η μόνη δυνατή τιμή είναι το 3, ενώ το q_3 μπορεί να πάρει τις τιμές 3, 4, ή 5. Οδηγούμαστε λοιπόν σε τρεις δυνατές εκδοχές:

	q_1	q_2	q_3	N	n_1	n_2	n_3
(2*i*)	2	3	3	**12**	6	4	4
(2*ii*)	2	3	4	**24**	12	8	6
(2*iii*)	2	3	5	**60**	30	20	12

Δεν είναι τυχαίο το ότι οι τάξη της *G* σε κάθε μια από τις τρεις αυτές περιπτώσεις συμπίπτει με την τάξη της ομάδας περιστροφικών συμμετριών ενός κανονικού πολυέδρου. 12 είναι η τάξη της ομάδας του κανονικού τετραέδρου, 24 του κύβου, ενώ 60 είναι η τάξη της ομάδας του κανονικού εικοσαέδρου. Μελετώντας τες προσεκτικά, θα δούμε ότι τελικά και οι τρεις περιπτώσεις αντιστοιχούν στις ομάδες περιστροφικών συμμετριών των πλατωνικών στερεών.

<u>Περίπτωση 2*i*</u>:

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη τροχιά αποτελείται από $n_2=4$ πόλους. Ας θεωρήσουμε ότι είναι τα σημεία p_1, p_2, p_3, p_4. Η σταθεροποιούσα $Stab(p_1)$ του πόλου p_1 περιέχει $q_2=3$ στοιχεία, δηλαδή τρεις απεικονίσεις που μεταθέτουν τα p_2, p_3 και p_4, επομένως τα σημεία αυτά ισαπέχουν από το p_1. Καθώς το ίδιο συμβαίνει και με τις σταθεροποιούσες των υπολοίπων πόλων, προκύπτει ότι και οι τέσσερις πόλοι ισαπέχουν μεταξύ τους, επομένως αποτελούν κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου. Η *G* μεταθέτει τους πόλους επομένως είναι μια υποομάδα της $Dir(Tet)$. Ταυτόχρονα όμως, έχουμε $|G|=N=12=|Dir(Tet)|$, άρα τελικά είναι $G=Dir(Tet)$. Οι 6 πόλοι της πρώτης τροχιάς αντιστοιχούν στα μέσα των ακμών του τετραέδρου, ενώ οι 4 πόλοι της τρίτης τροχιάς αντιστοιχούν στα βαρύκεντρα των τεσσάρων εδρών του.

Περίπτωση 2*ii*:

Έστω O_3 η τρίτη που περιέχει 6 πόλους. Αν $p_1 \in O_3$, τότε είναι πόλος τεσσάρων στοιχείων της G ($\left|Stab(p_1)\right| = q_3 = 4$) και το ίδιο πρέπει να ισχύει για το $-p_1$. Οι τάξεις των σταθεροποιουσών των άλλων δύο τροχιών είναι $q_1 = 2$ και $q_2 = 3$, επομένως ο πόλος $-p_1$ ανήκει στην O_3. Με αυτό το σκεπτικό συμπεραίνουμε ότι η τρίτη τροχιά είναι της μορφής $O_3 = \{p_1, p_2, p_3, -p_1, -p_2, -p_3\}$. Όπως είπαμε υπάρχουν 4 στοιχεία της G που έχουν ως πόλο το p_1, άρα είναι στροφές γύρω από τον άξονα L που είναι φορέας του p_1, γεγονός που σημαίνει ότι η σταθεροποιούσα των p_1 και $-p_1$ είναι κυκλική ομάδα με ένα γεννήτορα τη στροφή g κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα L. Η g διατηρεί τα p_1 και $-p_1$ και μεταθέτει τους πόλους $p_2, p_3, -p_2$, και $-p_3$. Ο μόνος τρόπος ώστε μια στροφή κατά ορθή γωνία να μεταθέτει τα τέσσερα αυτά σημεία είναι όταν αυτά αποτελούν κορυφές τετραγώνου, σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα L. Ως αποτέλεσμα έχουμε τις ίσες αποστάσεις

$$d(p_1, p_2) = d(p_1, -p_2) = d(p_1, p_3) = d(p_1, -p_3) \equiv a$$

Ακόμα έχουμε

$$d(-p_1, p_2) = \|-p_1 - p_2\| = \|p_1 + p_2\| = \|p_1 - (-p_2)\| = d(p_1, -p_2) = a$$

Και με την ίδια μέθοδο βρίσκουμε ότι

$$d(-p_1, -p_2) = d(-p_1, p_3) = d(-p_1, -p_3) = a$$

Χρησιμοποιώντας τις στροφές γύρω από τους άξονες των p_2, και p_3 καταλήγουμε συγκεντρωτικά στις ισότητες

$$d(\pm p_1, \pm p_2) = d(\pm p_1, \pm p_3) = d(\pm p_2, \pm p_3) = a,$$

επομένως, οι 6 αυτοί πόλοι ορίζουν πάνω στη μοναδιαία σφαίρα τις κορυφές ενός κανονικού οκταέδρου, άρα η G είναι υποομάδα της ομάδας περιστροφικών συμμετριών του οκταέδρου, ή ισοδύναμα της $Dir(Cube)$.

Σε συνδυασμό με το ότι $|G| = N = 24 = \left|Dir(Cube)\right|$, τελικά έχουμε

$$G \simeq Dir(Cube).$$

Οι τρεις τροχιές αποτελούνται από τις ακμές τις κορυφές και τις έδρες του κύβου, ή του οκταέδρου αντίστοιχα, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Τροχιά	Πόλοι	Κύβος	Οκτάεδρο
$1^{η}$	**12**	μέσα ακμών	μέσα ακμών
$2^{η}$	**8**	κορυφές	βαρύκεντρα εδρών
$3^{η}$	**6**	βαρύκεντρα εδρών	κορυφές

<u>Περίπτωση 2*iii*</u>:

Έστω p ένας από τους 12 πόλους της τρίτης τροχιάς και έστω q ένας από τους πλησιέστερους στον p πόλους της δεύτερης τροχιάς. Η σταθεροποιούσα $Stab(p)$ είναι τάξης 5 και δρα επί της $Orb(p)$, επομένως το σύνολο των εικόνων του q μέσω των στοιχείων του $Stab(p)$ αποτελούν ένα κανονικό πεντάγωνο. Τα 12 πεντάγωνα που ορίζονται με τον τρόπο αυτό σχηματίζουν ένα κανονικό δωδεκάεδρο. Η G έχοντας την τάξη της ομάδας περιστροφικών συμμετριών του δωδεκαέδρου $|G| = 60$, ταυτίζεται, μέχρι ισομορφισμού, με η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου $Dir(Icosa)$. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η αντιστοιχία των πόλων κάθε τροχιάς με τα γεωμετρικά στοιχεία του κανονικού δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου.

Τροχιά	Πόλοι	Δωδεκάεδρο	Εικοσάεδρο
$1^{η}$	**30**	μέσα ακμών	μέσα ακμών
$2^{η}$	**20**	κορυφές	βαρύκεντρα εδρών
$3^{η}$	**12**	βαρύκεντρα εδρών	κορυφές

Κεφάλαιο 5: Τα Τετράνια (quaternions)

Αν η απελευθέρωση της Γεωμετρίας συντελέστηκε με την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας από τους Lobachevski και Bolyai στα 1829 και 1832, μια αντίστοιχα «μεγάλη στιγμή» για την Άλγεβρα, κατά τον Howard Eves, είναι η επινόηση της Μη Αντιμεταθετικής Άλγεβρας, δηλαδή μιας άλγεβρας δομικά διαφορετικής από την ως τότε γνωστή άλγεβρα της Αριθμητικής. Πατέρας αυτής της καινοτομίας είναι ο Ιρλανδός William Rowan Hamilton, ο ίδιος που έδωσε υπόσταση στους μιγαδικούς αριθμούς παριστάνοντάς τους ως ζεύγη πραγματικών.

Εικόνα 21. W. R. Hamilton

Είναι γνωστό ότι οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν ένα χρήσιμο και βολικό εργαλείο για τη μελέτη των διανυσμάτων και των περιστροφών στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Εκείνο που προσπάθησε ο Hamilton ήταν να επινοήσει μια αντίστοιχη αλγεβρική δομή κατάλληλη για τη μελέτη των περιστροφών στον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Η αναζήτηση αυτή τον έφερε το 1843 στην ανάγκη της αποδοχής και της αναγνώρισης της αξίας μιας άλγεβρας που είχε την ιδιαιτερότητα να μην είναι αντιμεταθετική.

Η άλγεβρα των τετρανίων

Το σύνολο πάνω στο οποίο ο Hamilton όρισε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ήταν όλες οι διατεταγμένες τετράδες πραγματικών αριθμών:

$$\mathbb{H} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta),\ \text{με}\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Η πρόσθεση ορίσθηκε με τον «φυσικό» τρόπο

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = (\alpha + \alpha',\ \beta + \beta',\ \gamma + \gamma',\ \delta + \delta')$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός πιο αναπάντεχα:

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot(\alpha',\beta',\gamma',\delta') = (&\alpha\alpha'-\beta\beta'-\gamma\gamma'-\delta\delta',\\
&\alpha\beta'+\beta\alpha'+\gamma\delta'-\delta\gamma',\\
&\alpha\gamma'+\gamma\alpha'+\delta\beta'-\beta\delta',\\
&\alpha\delta'+\delta\alpha'+\beta\gamma'-\gamma\beta')
\end{aligned}
$$

Το γιατί μιας τέτοιας επιλογής θα φανεί στις επόμενες παραγράφους, καθώς και μια εναλλακτική (περισσότερο αξιωματική) προσέγγιση του ορισμού τω τετρανίων.

Τα στοιχεία του $\mathbb{H}$ ονομάζονται ***τετράνια*** (quaternions), και αποτελούν ένα είδος *υπερμιγαδικών αριθμών*[26]. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι αντιμεταθετικός. Για παράδειγμα, είναι

$(0,1,0,0)\cdot(0,0,1,0)=(0,0,0,1)$, ενώ

$(0,0,1,0)\cdot(0,1,0,0)=(0,0,0,-1)$

Πώς το $\mathbb{R}$ περιέχεται στο $\mathbb{H}$.

Μπορούμε να εμφυτεύσουμε το σύστημα των πραγματικών αριθμών στο σύστημα $\mathbb{H}$ των τετρανίων ταυτίζοντας κάθε τετράδα $(x,0,0,0)$ με τον πραγματικό αριθμό *x*, καθώς η απεικόνιση $x\mapsto(x,0,0,0)$ είναι προφανώς 1-1, ενώ παράλληλα οι πράξεις των τετρανίων «σέβονται» τις αντίστοιχες πράξεις των πραγματικών αριθμών. Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης έχουμε:

$(x,0,0,0)+(y,0,0,0)=(x+y,0,0,0)$

δηλαδή, οι αντίστοιχοι των πραγματικών x και y έχουν ως άθροισμα το τετράνιο που αντιστοιχεί στον πραγματικό x+y. Με ανάλογο τρόπο διατηρείται και ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών, αφού $(x,0,0,0)\cdot(y,0,0,0)=(xy,0,0,0)$.

[26] Κατά τον van der Waerden υπερμιγαδικοί είναι αριθμοί που κατασκευάζονται από πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς και αντλούν τις ιδιότητές τους απ' αυτούς. Άλλα παραδείγματα υπερμιγαδικών αριθμών είναι τα διτετράνια, τα οκτάνια, οι πίνακες, άλγεβρες ομάδων, ή άλγεβρες εξωτερικών γινομένων.

Θέτοντας $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$ και $k=(0,0,0,1)$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$i^2=j^2=k^2=(-1,0,0,0)=-1$ με βάση την ταύτιση που συζητήθηκε παραπάνω. Ακόμη

$$ij=k \quad jk=i \quad ki=j$$
$$ji=-k \quad kj=-i \quad ik=-j$$

αποτελέσματα που συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα πολλαπλασιασμού[27]

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Εικόνα 22.

Αναμνηστική πλάκα στη γέφυρα Brougham στο Βασιλικό Κανάλι του Δουβλίνου, όπου ο Sir William Rowan Hamilton ένα βράδυ συνέλαβε τη βασική ιδέα της αλγεβρικής δομής των τετρανίων.

Ακόμη είναι

$$x\cdot(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(x,0,0,0)\cdot(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(x\alpha,x\beta,x\gamma,x\delta)$$

και

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot x=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot(x,0,0,0)=(x\alpha,x\beta,x\gamma,x\delta).$$

Όσα προηγήθηκαν μας επιτρέπουν να γράφουμε κάθε τετράνιο ως γραμμικό συνδυασμό των τετρανικών μονάδων 1, *i*, *j*, *k*:

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)&=(\alpha,0,0,0)+(0,\beta,0,0)+(0,0,\gamma,0)+(0,0,0,\delta)\\&=\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,0,0)+\gamma(0,0,1,0)+\delta(0,0,0,1)\\&=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\end{aligned}$$

---

[27] Το κείμενο της πέτρινης πλάκας:

Εδώ καθώς περπατούσε στις 16 Οκτωβρίου του 1843 ο Σερ Ουίλλιαμ Ρόουαν Χάμιλτον σε μια έκλαμψη μεγαλοφυΐας ανακάλυψε το θεμελιώδη τύπο για τον πολλαπλασιασμό των τετρανίων $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ *και τον χάραξε σε μια πέτρα αυτής της γέφυρας.*

Συζυγή τετράνια

Κάθε τετράνιο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημείο του $\mathbb{R}^4$ και αντίστροφα:

Χάρη στη σχέση $x\cdot(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(x\alpha,x\beta,x\gamma,x\delta)$ και σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των πράξεων στο $\mathbb{H}$ (παρακάτω θα δούμε ότι η $\mathbb{H}$ είναι αβελιανή προσθετική ομάδα), μπορούμε να θεωρήσουμε τα τετράνια ως στοιχεία του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$. Οι τετρανικές μονάδες 1, i, j, k απαρτίζουν τότε τα μοναδιαία διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^4$.

Όπως ταυτίζουμε τον υπόχωρο $\mathbb{R}\cdot(1,0,0,0)=\{(\alpha,0,0,0),\alpha\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{H}$ με το $\mathbb{R}$, αντίστοιχα ταυτίζουμε τον υπόχωρο $\mathbb{R}\cdot i+\mathbb{R}\cdot j+\mathbb{R}\cdot k=\{(0,\beta,\gamma,\delta)$, με $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{H}$ με τον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συμβάσεις μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, κατ' αντιστοιχία με τους μιγαδικούς αριθμούς, με τη μορφή $q=R(q)+P(q)$, όπου $R(q)=\alpha\in\mathbb{R}$, το λεγόμενο πραγματικό μέρος του q και $P(q)=\beta i+\gamma j+\delta k\in\mathbb{R}^3$. Ο υπόχωρος $\mathbb{R}\cdot i+\mathbb{R}\cdot j+\mathbb{R}\cdot k$ των τετρανίων με μηδενικό πραγματικό μέρος ονομάζεται ***σύνολο των καθαρών τετρανίων***.

Ως ***συζυγές*** του $q=R(q)+P(q)$ ορίζουμε το τετράνιο $\overline{q}=R(q)-P(q)$, δηλαδή αν $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, τότε $\overline{q}=\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$.

Σχετικά με την έννοια των συζυγών τετρανίων ισχύουν τα ακόλουθα (αποδείξεις τετριμμένες):

1. $\overline{\overline{q}}=q$, $\qquad \overline{p+q}=\overline{p}+\overline{q}$ $\qquad \overline{p\cdot q}=\overline{q}\cdot\overline{p}$
2. $q=\overline{q}\Leftrightarrow q\in\mathbb{R}\Leftrightarrow q^2\in\mathbb{R}_+$
3. $q=-\overline{q}\Leftrightarrow q\in\mathbb{R}^3\Leftrightarrow q^2\in\mathbb{R}_-$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν $p=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ και $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$, τότε

$$\overline{p}q+p\overline{q}=\left(2\sum_{r=1}^{4}(p_rq_r),0,0,0\right)=2\sum_{r=1}^{4}(p_rq_r)=2<p,q>$$

Επομένως το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^4$ δίνεται από τον τύπο

$$<p,q>=\frac{1}{2}\left(\bar{p}q+p\bar{q}\right)$$

Ειδικότερα $\quad p\bar{p}=<p,p>=p_1^{\ 2}+p_2^{\ 2}+p_3^{\ 2}+p_4^{\ 2}$,

απ' όπου προκύπτει η νόρμα του τετρανίου *p*:

$\|p\|=\sqrt{p_1^{\ 2}+p_2^{\ 2}+p_3^{\ 2}+p_4^{\ 2}}=\sqrt{p\bar{p}}\geq 0$ ή αλλιώς

$$\|p\|^2=p\bar{p}$$

που είναι έκφραση εντελώς ανάλογη με τον τύπο του μέτρου μιγαδικού αριθμού. Ποια βαθύτερη σχέση όμως μπορούν να έχουν τα τετράνια με τους μιγαδικούς αριθμούς;

Εναλλακτικές αναπαραστάσεις των τετρανίων

Ένας χρήσιμος τρόπος να παρουσιάσουμε τα τετράνια είναι με τη μορφή πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς:

Θεωρούμε το σύνολο $M_{\mathbb{H}}$ των 2x2 πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς της μορφής $\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$.

Η απεικόνιση $\varphi:\mathbb{H}\to M_{\mathbb{H}}$ η οποία αντιστοιχίζει κάθε τετράνιο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ σε ένα πίνακα με τον κανόνα

$$\mathbb{H}\ni q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k\mapsto\begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}\in M_{\mathbb{H}}$$

είναι ένας ισομορφισμός.

(η απόδειξη είναι μια απλή επαλήθευση των απαιτήσεων ενός ισομορφισμού: 1-1, ΕΠΙ, $\varphi(p+q)=\varphi(p)+\varphi(q)$ και $\varphi(pq)=\varphi(p)\cdot\varphi(q)$ για κάθε $p,q\in\mathbb{H}$)

Επιπλέον, αν ο *A* είναι ο πίνακας που αναπαριστά το τετράνιο *q*, αν δηλαδή είναι $\varphi(q)=A$, τότε για τη νόρμα του τετρανίου ισχύει $\|q\|^2=\det A$. Με βάση αυτή την ιδιότητα προκύπτει εύκολα ότι $\|pq\|=\|p\|\|q\|$ για κάθε $p,q\in\mathbb{H}$.

Σύντομα θα κάνουμε χρήση της αναπαράστασης των τετρανίων με τη μορφή μιγαδικών 2x2 πινάκων για να αντλήσουμε μια σημαντική πρόταση που θα συνδέσει τα τετράνια με

τις περιστροφές του $\mathbb{R}^3$, προς το παρόν όμως αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι το ίδιο το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι (μέχρι ισομορφισμό) υποσύνολο του $\mathbb{H}$, ταυτίζοντας τον μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$ με το τετράνιο $q_z=\alpha+\beta i+0j+0k$.

Αν $z,w\in\mathbb{C}$ τότε για το άθροισμα και το γινόμενο των αντίστοιχων τετρανίων έχουμε

$$q_z+q_w=\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z+w & 0 \\ 0 & \overline{z}+\overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z+w & 0 \\ 0 & \overline{z+w} \end{bmatrix}=q_{z+w} \quad \text{και}$$

$$q_z\cdot q_w=\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z\cdot w & 0 \\ 0 & \overline{z}\cdot\overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} zw & 0 \\ 0 & \overline{zw} \end{bmatrix}=q_{zw},$$

επομένως το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{C}$ αποτελούν υποσύνολα του $\mathbb{H}$, γεγονός που δικαιώνει το χαρακτηρισμό του $\mathbb{H}$ ως συνόλου υπερμιγαδικών αριθμών.

Σχεδόν Σώμα

Με απλό έλεγχο των πράξεων (και λίγη υπομονή) μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το σύνολο $\mathbb{H}$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις αποτελεί ένα *διαιρετικό δακτύλιο* (division ring), ή αλλιώς *στρεβλό σώμα* (skew field), δηλαδή πληρούνται όλες οι ιδιότητες των πράξεων ενός σώματος, με εξαίρεση την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού. Αναλυτικότερα:

Η δομή $(\mathbb{H},+)$ είναι αβελιανή ομάδα, με

ουδέτερο στοιχείο το $0=(0,0,0,0)$ και

αντίθετο του $q=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ το $-q=(-\alpha,-\beta,-\gamma,-\delta)$.

Η δομή $(\mathbb{H}-\{0\},\cdot)$ είναι ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το 1=$(1,0,0,0)$, ενώ κάθε στοιχείο $q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, με $q\neq 0$ έχει αντίστροφο το $q^{-1}=\dfrac{\overline{q}}{\|q\|^2}$. Πράγματι, με αφετηρία τη σχέση $\|q\|^2=q\overline{q}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\|q\|^2}q\bar{q}=1\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} q\left(\frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}\right)=1 \\ \overline{\left(\frac{1}{\|q\|^2}q\bar{q}\right)}=1\Rightarrow\frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}q=1\Rightarrow\left(\frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}\right)q=1 \end{array}\right\}\Rightarrow q^{-1}=\frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}$$

Ακόμα, καθώς τρία οποιαδήποτε τετράνια p, q, r ταυτίζονται με αντίστοιχους πίνακες $P,Q,R\in M_{\mathbb{H}}$, χάρη στις ιδιότητες των τελευταίων έχουμε

$p(q+r)=P(Q+R)=PQ+PR=pq+pr$ και

$(p+q)r=(P+Q)R=PR+QR=pr+qr$, επομένως το σύνολο $\mathbb{H}$ των τετρανίων πράγματι αποτελεί ένα διαιρετικό δακτύλιο.

Τετράνια και περιστροφές του $\mathbb{R}^3$

Ας εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας σ' ένα υποσύνολο του Η που αποτελεί ομάδα θεωρημένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού, υποομάδα της $(\mathbb{H}-\{0\},\cdot)$:

την 3-διάστατη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$

$$S^3=\{q\in\mathbb{H},\ \text{με}\ \|q\|=1\}$$

την οποία ονομάζουμε **ομάδα των μοναδιαίων τετρανίων**.

Μια ιδιότητα των μοναδιαίων τετρανίων, η οποία θα φανεί πολύ χρήσιμη παρακάτω, είναι η ακόλουθη

Πρόταση: *Κάθε μοναδιαίο τετράνιο $q\in S^3$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή*

$$q=\cos\varphi+v_q\sin\varphi,\quad \varphi\in[0,\pi]$$

όπου το v_q είναι ένα μοναδιαίο καθαρό τετράνιο, παράλληλο στο $P(q)$, το διανυσματικό (καθαρό) μέρος του q.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε το μοναδιαίο τετράνιο $q = x + \alpha i + \beta j + \gamma k$ με $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\sqrt{x^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$. Τότε είναι $x^2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}^2 = 1$, επομένως υπάρχει γωνία $\varphi \in [0, \pi]$ τέτοια, ώστε $\cos\varphi = x$ και $\sin\varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} q &= x + \alpha i + \beta j + \gamma k \\ &= \cos\varphi + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}(\alpha i + \beta j + \gamma k) \\ &= \cos\varphi + \sin\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}(\alpha i + \beta j + \gamma k) \right] \end{aligned}$$

Θέτοντας $v_q = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}(\alpha i + \beta j + \gamma k)$, παίρνουμε $q = \cos\varphi + v_p \sin\varphi$, ενώ προφανώς $v_q \parallel P(q)$ και $\|v_q\| = 1$. $\square$

Σύμβαση: Θα χαρακτηρίζουμε δυο τετράνια *p*, *q* ως παράλληλα (κάθετα), αν και μόνο αν τα διανυσματικά (καθαρά) τους μέρη είναι παράλληλα (αντίστοιχα, κάθετα) διανύσματα. Συμβολικά

$$\begin{aligned} p \parallel q &\Leftrightarrow P(p) \parallel P(q) \\ p \perp q &\Leftrightarrow P(p) \perp P(q) \end{aligned}$$

Γινόμενο καθαρών τετρανίων

Ας θεωρήσουμε δύο καθαρά τετράνια $p = \alpha i + \beta j + \gamma k$, $q = \alpha' i + \beta' j + \gamma' k$. Για το γινόμενο των *p*, *q* έχουμε:

$$\begin{aligned} pq &= (\alpha i + \beta j + \gamma k)(\alpha' i + \beta' j + \gamma' k) \\ &= -\alpha\alpha' + \alpha\beta' ij + \alpha\gamma' ik + \alpha'\beta ji - \beta\beta' + \beta\gamma' jk + \alpha'\gamma ki + \beta'\gamma kj - \gamma\gamma' \\ &= -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + \alpha\beta' k - \alpha\gamma' j - \alpha'\beta k + \beta\gamma' i + \alpha'\gamma j - \beta'\gamma i \\ &= -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + (\beta\gamma' - \beta'\gamma) i - (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) j + (\alpha\beta' - \alpha'\beta) k \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει η σχέση

$$pq = -\langle p, q \rangle + p \times q \quad (1)$$

δηλαδή το γινόμενο των *p*, *q* εκφράζεται με το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $p, q \in \mathbb{R}^3$. Από την (1) προκύπτει ότι, στην περίπτωση που τα *p* και *q* είναι κάθετα, το *pq* είναι καθαρό τετράνιο και μάλιστα $pq = p \times q$, άρα το *pq* είναι κάθετο στα *p* και *q*.

Γινόμενο ενός μοναδιαίου τετρανίου με ένα κάθετο καθαρό τετράνιο

Έστω $q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ένα καθαρό τετράνιο και $u \in S^3$, ένα μοναδιαίο τετράνιο με $u \perp q$. Σύμφωνα με πρόταση που προηγήθηκε το u μπορεί να έχει τη μορφή $u = \cos\varphi + v_u \sin\varphi$, με $\varphi \in [0, \pi]$, $v_u \| u$ και $\|v_u\| = 1$.

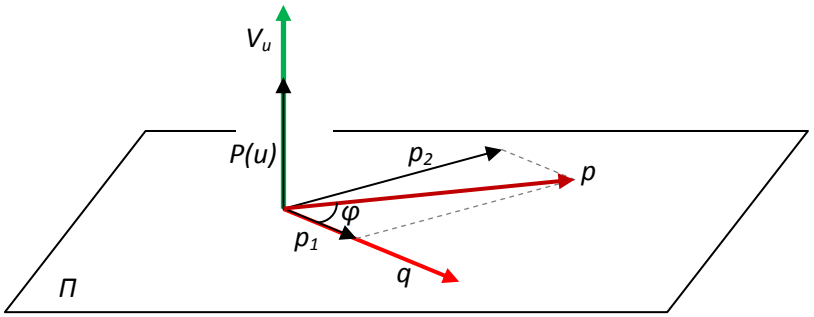
Αρχικά, θα ασχοληθούμε με το γινόμενο p των u και q:

$$p = uq = (\cos\varphi + v_u \sin\varphi)q = (\cos\varphi)q + (v_u \sin\varphi)q = (\cos\varphi)q + (\sin\varphi)v_u q$$

Θέτοντας $p_1 = (\cos\varphi)q$ και $p_2 = (\sin\varphi)v_u q$ έχουμε

$$p = p_1 + p_2$$

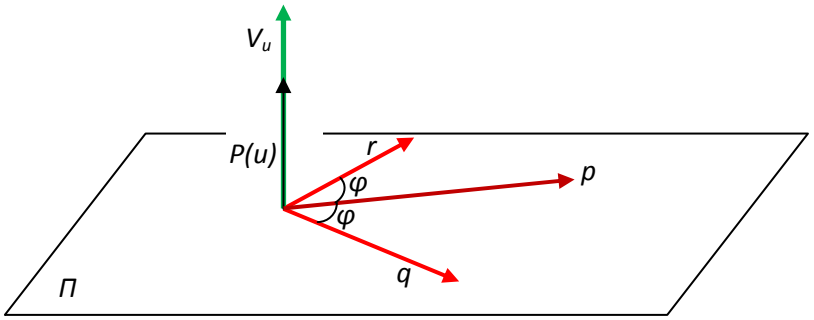
Το p_1 είναι προφανώς διάνυσμα παράλληλο στο q, άρα κάθετο στο u, ενώ για το p_2 έχουμε $p_2 = (\sin\varphi)(v_u q) = (\sin\varphi)(v_u \times q)$, αφού $v_u \| u \perp q$, οπότε και το p_2 είναι κάθετο στο u, επομένως το p ανήκει σε επίπεδο Π κάθετο στο u, το οποίο άλλωστε περιέχει το q (Σχήμα 70). Τέλος, για το μέτρο του p ισχύει $\|p\| = \|uq\| = \|u\|\|q\| = \|q\|$, συνεπώς το p γεωμετρικά εκφράζει το αποτέλεσμα της στροφής του q κατά γωνία φ, πάνω στο επίπεδο Π.



Σχήμα 70

Στη συνέχεια, ας δούμε το γινόμενο $r = uqu^{-1}$ των $p = uq$ και u^{-1}:

$$\begin{aligned} r = pu^{-1} = p\bar{u} = p(\cos\varphi - v_u \sin\varphi) &= (\cos\varphi)p - (\sin\varphi)(pv_u) \\ &= (\cos\varphi)p - (\sin\varphi)(p \times v_u) \quad (\text{αφού } p \perp v_u) \\ &= (\cos\varphi)p + (\sin\varphi)(v_u \times p) \\ &= (\cos\varphi)p + (\sin\varphi)(v_u p) \\ &= (\cos\varphi + v_u \sin\varphi)p \\ &= up \end{aligned}$$



Σχήμα 71

Επομένως και το r με τη σειρά του προκύπτει από τη στροφή του p κατά γωνία φ, πάνω στο επίπεδο Π (Σχήμα 71). Καθώς οι δύο στροφές έχουν την ίδια φορά, το r τελικά είναι το προϊόν της στροφής του q κατά γωνία 2φ, έχουμε δηλαδή αποδείξει την

Πρόταση: Αν το $u=\cos\varphi+v_u\sin\varphi$ είναι μοναδιαίο τετράνιο κάθετο στο καθαρό τετράνιο $q\neq 0$, τότε το γινόμενο $r=uqu^{-1}$, είναι το αποτέλεσμα της στροφής του q κατά γωνία 2φ, γύρω από το u.

Στροφή τυχαίου καθαρού τετρανίου μέσω συζυγίας με μοναδιαίο τετράνιο

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πώς η συζυγία $q\mapsto uqu^{-1}$ στρέφει ένα κάθετο στο μοναδιαίο u τετράνιο q. Τώρα, θα δούμε ότι η ίδια στροφή προκύπτει και στη γενική περίπτωση, όπου το q δεν είναι κατ' ανάγκην κάθετο στο u.

Πρόταση: *Αν το $q\neq 0$ είναι ένα καθαρό τετράνιο και το $u\in S^3$, ένα μοναδιαίο τετράνιο μη παράλληλο προς το q, τότε το γινόμενο $r=uqu^{-1}$ είναι το καθαρό τετράνιο που προκύπτει από τη στροφή του q γύρω από το u κατά γωνία $\theta\in[0,2\pi]$, με $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\|P(u)\|}{R(u)}$, αν $R(u)\neq 0$, ενώ είναι $\theta=\pi$, αν $R(u)=0$.*

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι το μοναδιαίο τετράνιο u γράφεται με τη μορφή $u=\cos\varphi+v_u\sin\varphi$, με $\varphi\in[0,\pi]$, $v_u\parallel u$ και $\|v_u\|=1$.

Για να αξιοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, αναλύουμε το q σε δύο συνιστώσες, $q = q_1 + q_2$, ώστε να είναι $q_1 \| u$ και $q_2 \perp u$, οπότε είναι $r = uqu^{-1} = u(q_1 + q_2)u^{-1} = uq_1u^{-1} + uq_2u^{-1}$. Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τους όρους αυτού του αθροίσματος.

- Για το uq_1u^{-1}:

Παρατηρούμε ότι $q_1 \| u \Rightarrow q_1 \| v_u$, άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $q_1 = \lambda v_u$, οπότε

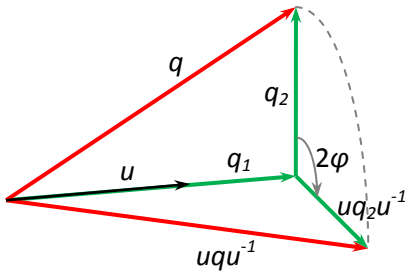
$$uv_u = (\cos\varphi + v_u \sin\varphi)v_u = (\cos\varphi)v_u + (\sin\varphi)v_u^2 = v_u(\cos\varphi + v_u \sin\varphi) = v_u u,$$

δηλαδή τα u και v_u αντιμετατίθενται, γεγονός που επιτρέπει τον παρακάτω υπολογισμό:

$$uq_1u^{-1} = u(\lambda v_u)u^{-1} = \lambda(uv_u)u^{-1} = \lambda(v_u u)u^{-1} = \lambda v_u(uu^{-1}) = \lambda v_u = q_1.$$

- Για το uq_2u^{-1}:

Καθώς το q_2 είναι κάθετο στο u, σύμφωνα με την πρόταση της προηγούμενης παραγράφου, το $q_2' = uq_2u^{-1}$ είναι στροφή του q_2 κατά γωνία 2φ, γύρω από το u.



Σχήμα 72

Συνοψίζοντας (Σχήμα 72), είναι:

$$q = q_1 + q_2, \quad q_1 \| u, \quad q_2 \perp u,$$

$$r = uqu^{-1} = q_1 + q_2'$$

με το q_2' να είναι στροφή του q_2 κατά γωνία 2φ, γύρω από το u. Η γεωμετρική ερμηνεία των σχέσεων αυτών είναι ακριβώς ότι το uqu^{-1} είναι τα αποτέλεσμα στροφής του q κατά γωνία $\theta = 2\varphi$, γύρω από το u. Για τη γωνία φ θυμίζουμε ότι είναι

$\varphi \in [0,\pi]$, $\cos\varphi = x = R(u)$ και $\sin\varphi = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \|P(u)\|$, αν $u = x+\alpha i+\beta j+\gamma k$, άρα $\theta \in [0,2\pi]$, $\cos\frac{\theta}{2} = R(u)$, $\sin\frac{\theta}{2} = \|P(u)\|$.

Στην περίπτωση που είναι $R(u) \neq 0$, παίρνουμε $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\|P(u)\|}{R(u)}$, ενώ αν $R(u) = 0$ τότε είναι $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi$. $\square$

Η δράση της S^3 επί του $\mathbb{R}^3$

Είδαμε ότι ένα μοναδιαίο τετράνιο u, με τη συζυγία στρέφει κάθε καθαρό τετράνιο (ισοδύναμα κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$) κατά συγκεκριμένη γωνία, επομένως είναι αναμενόμενο η συζυγία να διατηρεί και την ορθογωνιότητα στον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή η απεικόνιση $\rho_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\rho_u(q) = uqu^{-1}$ να είναι στοιχείο της $O(3)$. Πράγματι, ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση: *Η ομάδα S^3 των μοναδιαίων τετρανίων δρα ορθογώνια επί του $\mathbb{R}^3$ μέσω της συζυγίας.*

Απόδειξη:

Στην προηγούμενη πρόταση φάνηκε ότι αν $u \in S^3$ και $\mathbb{O} \neq q \in \mathbb{R}^3$ με $q \not\parallel u$, τότε το uqu^{-1} είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^3$. Κατά την απόδειξη της πρότασης άλλωστε, είδαμε ότι το τελευταίο ισχύει και στην περίπτωση που το q είναι παράλληλο στο u, αφού $q \| u \Rightarrow uqu^{-1} = q \in \mathbb{R}^3$. Βλέπει λοιπόν κανείς ότι για κάθε $u \in S^3$ ορίζεται η απεικόνιση $\rho_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\rho_u(q) = uqu^{-1}$.

Η ρ_u είναι προφανώς γραμμική (1):

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $p,q \in \mathbb{R}^3$ είναι

$$\rho_u(\lambda p+q) = u(\lambda p+q)u^{-1} = \lambda upu^{-1} + uqu^{-1} = \lambda\rho_u(p) + \rho_u(q).$$

Επιπλέον η ρ_u διατηρεί τη νόρμα (2):

$$\|\rho_u(q)\| = \|uqu^{-1}\| = \|u\|\|q\|\|u^{-1}\| = \|q\| \text{ για κάθε } q \in \mathbb{R}^3.$$

Από τις (1) και (2) και με βάση το πόρισμα της σελίδας 35 προκύπτει ότι η ρ_u είναι ορθογώνια.

Θεωρώντας την απεικόνιση $\rho : S^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $(u,q) \mapsto \rho(u,q) \equiv u \cdot q = \rho_u(q)$ έχουμε

$$\begin{aligned} u_1 \cdot (u_2 \cdot q) &= u_1 \cdot \rho_{u_2}(q) \\ &= \rho_{u_1}\left(\rho_{u_2}(q)\right) \\ &= u_1\left(u_2 q u_2^{-1}\right)u_1^{-1} \\ &= (u_1 u_2) q \left(u_2^{-1} u_1^{-1}\right) \\ &= (u_1 u_2) q (u_1 u_2)^{-1} \\ &= \rho_{u_1 u_2}(q) \\ &= (u_1 u_2) \cdot q \end{aligned}$$

για κάθε $u_1, u_2 \in S^3$ και $q \in \mathbb{R}^3$.

Ακόμα ισχύει προφανώς $1 \cdot q = q$, για κάθε $q \in \mathbb{R}^3$, συνεπώς η ρ είναι όντως μια δράση της S^3 επί του $\mathbb{R}^3$. □

Ο πίνακας της ρ_u

Ας δούμε τώρα τον πίνακα της $\rho_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\rho_u(q) = uqu^{-1}$, $q \in \mathbb{R}^3$ αν $u = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, με $\|u\| = 1$.

Κατ' αρχήν ας παρατηρήσουμε ότι είναι $u^{-1} = \dfrac{\bar{u}}{\|u\|^2} = \bar{u}$, άρα $\rho_u(q) = uq\bar{u}$ για κάθε $q \in \mathbb{R}^3$.

Θέτοντας $q = xi + yj + zk$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\rho_u(q) = uq\bar{u} = (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(xi + yj + zk)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k)$$

Εκτελώντας τις πράξεις φτάνουμε στο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \rho_u(q) = &\left(\left(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2\right)x + (2\beta\gamma - 2\alpha\delta)y + (2\alpha\gamma + 2\beta\delta)z\right)i \\ &+ \left((2\alpha\delta + 2\beta\gamma)x + \left(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2\right)y + (2\gamma\delta - 2\alpha\beta)z\right)j \\ &+ \left((2\beta\delta - 2\alpha\gamma)x + (2\alpha\beta + 2\gamma\delta)y + \left(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2\right)z\right)k \end{aligned}$$

άρα,

$$\left[\rho_u(q)\right]^T = \begin{pmatrix} \left(\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2\right)x+\left(2\beta\gamma-2\alpha\delta\right)y+\left(2\alpha\gamma+2\beta\delta\right)z\right) \\ \left(\left(2\alpha\delta+2\beta\gamma\right)x+\left(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2\right)y+\left(2\gamma\delta-2\alpha\beta\right)z\right) \\ \left(\left(2\beta\delta-2\alpha\gamma\right)x+\left(2\alpha\beta+2\gamma\delta\right)y+\left(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2\right)z\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma-2\alpha\delta & 2\alpha\gamma+2\beta\delta \\ 2\alpha\delta+2\beta\gamma & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2\gamma\delta-2\alpha\beta \\ 2\beta\delta-2\alpha\gamma & 2\alpha\beta+2\gamma\delta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma-2\alpha\delta & 2\alpha\gamma+2\beta\delta \\ 2\alpha\delta+2\beta\gamma & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2\gamma\delta-2\alpha\beta \\ 2\beta\delta-2\alpha\gamma & 2\alpha\beta+2\gamma\delta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix} q^T$$

Επομένως ο πίνακας της $\rho_u(q)=uqu^{-1}$, όπου $u=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, με $\|u\|=1$ είναι ο

$$A=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma-2\alpha\delta & 2\alpha\gamma+2\beta\delta \\ 2\alpha\delta+2\beta\gamma & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2\gamma\delta-2\alpha\beta \\ 2\beta\delta-2\alpha\gamma & 2\alpha\beta+2\gamma\delta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Σχέση της S^3 με την Ειδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(3)$

Θεώρημα:

Η συζυγία των τετρανίων εισάγει έναν ισομορφισμό για την ειδική ορθογώνια ομάδα:

$$S^3/\{\pm 1\} \cong SO(3)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho: S^3 \to O(3)$ που αντιστοιχίζει κάθε μοναδιαίο τετράνιο $u\in S^3$ στη συνάρτηση $\rho_u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με $\rho_u(q)=uqu^{-1}$, $q\in\mathbb{R}^3$.

Ισχυρισμός *I*1: Η ρ είναι ομομορφισμός.

<u>Απόδειξη του *I*1</u>: Έστω $u_1,u_2\in S^3$. Τότε είναι $\rho(u_1)=\rho_{u_1}$, $\rho(u_2)=\rho_{u_2}$ και $\rho(u_1u_2)=\rho_{u_1u_2}$.

Ακόμα, για κάθε $q\in\mathbb{R}^3$ είναι

$$\begin{aligned}\rho_{u_1u_2}(q) &= (u_1u_2)q(u_1u_2)^{-1}\\ &= (u_1u_2)q\left(u_2^{-1}u_1^{-1}\right)\\ &= u_1\left(u_2qu_2^{-1}\right)u_1^{-1}\\ &= u_1\rho_{u_2}(q)u_1^{-1}\\ &= \rho_{u_1}\left(\rho_{u_2}(q)\right)\\ &= \left(\rho_{u_1}\rho_{u_2}\right)(q)\end{aligned}$$

άρα $\rho_{u_1u_2} = \rho_{u_1}\rho_{u_2}$, οπότε $\rho(u_1u_2) = \rho_{u_1}\rho_{u_2}$.

Ισχυρισμός *I*2: $Ker\rho = \{\pm 1\}$.

<u>Απόδειξη του *I* 2</u>: Προφανώς ισχύει $\rho(1) = \rho(-1) = I$. Θα δείξουμε ότι αν για κάποιο $u \in S^3$ ισχύει $\rho(u) = I$, όπου I η ταυτοτική απεικόνιση, τότε $u \in \{1,-1\}$ και για να πετύχουμε το στόχο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση των τετρανίων με τη μορφή πίνακα. Θυμίζουμε, (σελίδα 154) ότι το τετράνιο $u = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ αναπαρίσταται με τον πίνακα $\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ -\gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{bmatrix}$.

Από την υπόθεσή μας είναι $\rho(u) = I$, άρα για κάθε $q \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

$$\rho_u(q) = q \Rightarrow uqu^{-1} = q \Rightarrow uq = qu \Rightarrow \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} q = q \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Με $q = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}\\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} iz & -iw \\ -i\overline{w} & -i\overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iz & iw \\ i\overline{w} & -i\overline{z} \end{bmatrix}\\ &\Rightarrow -iw = iw\\ &\Rightarrow 2iw = 0\\ &\Rightarrow w = 0\end{aligned}$$

άρα $\gamma = \delta = 0$ (2).

Με $q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$(1)\Rightarrow\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix} w & z \\ \overline{z} & -\overline{w} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\overline{w} & \overline{z} \\ z & w \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow z=\overline{z}$$
$$\Rightarrow z\in\mathbb{R}$$

άρα $\alpha\in\mathbb{R},\beta=0$ (3).

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $u=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k=\alpha\in\mathbb{R}$. Οι μόνοι όμως πραγματικοί που ανήκουν στην S^3 είναι οι 1 και -1, συνεπώς τελικά $u\in\{1,-1\}$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού *I*2.

Ισχυρισμός *I*3: Η εικόνα της ρ είναι υποσύνολο της $SO(3)$.

<u>Απόδειξη του *I*3</u>: Ο χώρος S^3 είναι συνεκτικός και η ρ συνεχής, επομένως η εικόνα της ρ είναι συνεκτική. Η ομάδα $O(3)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, την $SO(3)$ και το συμπλήρωμά της $O(3)\setminus SO(3)$. Η ταυτοτική απεικόνιση $I(q)=q$, η οποία, όπως επισημάναμε ήδη, είναι μια από τις εικόνες της ρ, ανήκει στην $SO(3)$, επομένως είναι $\rho(S^3)\subseteq SO(3)$.

Ισχυρισμός *I*4: Η απεικόνιση ρ είναι ΕΠΙ της $SO(3)$.

<u>Απόδειξη του *I*4</u>: Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε στοιχείο f της $SO(3)$ υπάρχει $u\in S^3$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\rho(u)=f$. Έχουμε δει (πρόταση σελίδας 40) ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ ως προς την οποία ο πίνακας της f είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, όπου θ είναι η γωνία της περιστροφής γύρω από κάποια ευθεία του χώρου. Είναι λοιπόν, $\det A=\pm1$, καθώς όμως η f ανήκει στην ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(3)$, είναι $\det A=1$, άρα ο πίνακας της f είναι τελικά $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Θεωρούμε το τετράνιο $u=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}$ το οποίο προφανώς ανήκει στην S^3, αφού $\|u\|=1$ και συνεπώς είναι $u^{-1}=\overline{u}=\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}$. Σύμφωνα με την παράγραφο που προηγήθηκε, για τη συνάρτηση $\rho_u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με $\rho_u(q)=uqu^{-1}$, $q\in\mathbb{R}^3$, ο πίνακας που της αντιστοιχεί, με $\alpha=\cos\frac{\theta}{2}$, $\beta=\sin\frac{\theta}{2}$ και $\gamma=\delta=0$, είναι:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2\beta\gamma-2\alpha\delta & 2\alpha\gamma+2\beta\delta \\ 2\alpha\delta+2\beta\gamma & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2\gamma\delta-2\alpha\beta \\ 2\beta\delta-2\alpha\gamma & 2\alpha\beta+2\gamma\delta & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} & -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 0 & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=A$$

Επομένως είναι $\rho_u=f$, δηλαδή $\rho(u)=f$.

Στηριγμένοι στους ισχυρισμούς *I1* και *I3* εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα ισομορφισμών:

Αφού η απεικόνιση $\rho:S^3\to SO(3)$ είναι ομομορφισμός επί της $SO(3)$, ισχύει

$$S^3/Ker\,\rho\cong SO(3)$$

Κατά τον ισχυρισμό *I2* είναι $Ker\,\rho=\{\pm1\}$, άρα τελικά ισχύει $S^3/\{\pm1\}\cong SO(3)$. □

Κεφάλαιο 6: Η ιδιαιτερότητα της *SO*(4)

Η απλότητα της Ειδικής Ορθογώνιας Ομάδας $SO(n)$ είναι το θέμα που θα μας απασχολήσει στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο της εργασίας μας. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η $SO(3)$ είναι απλή. Κατόπιν θα δούμε ότι η ιδιότητα αυτή της απλότητας δεν είναι κάτι που ισχύει αποκλειστικά στην περίπτωση του χώρου των τριών διαστάσεων $\mathbb{R}^3$. Στην πραγματικότητα πρόκειται για ιδιότητα που αληθεύει σε όλους τους ευκλείδειους χώρους μεγαλύτερης διάστασης, με μία και μοναδική εξαίρεση: την ομάδα $SO(4)$. Στο τρέχον κεφάλαιο, αφού αποδείξουμε ότι η $SO(n)$ είναι απλή για $n \geq 5$, θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των τετρανίων, επικυρώνεται η ιδιαιτερότητα της $SO(4)$.

Απλότητα (simplicity) της SO(3)

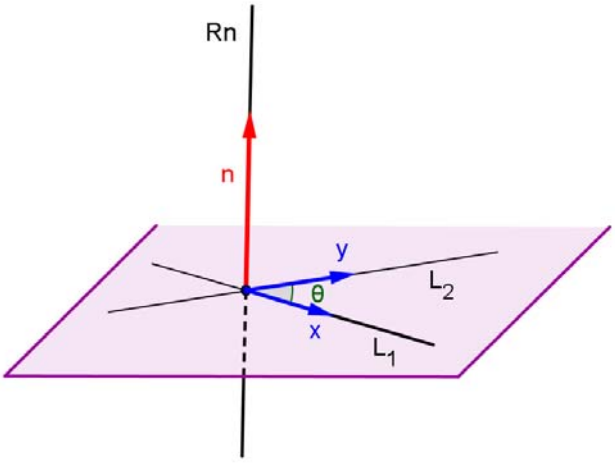
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την ειδική ορθογώνια ομάδα του $\mathbb{R}^3$ για να διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για μια απλή ομάδα. Θυμίζουμε:

Ορισμός: Μια ομάδα *G* ονομάζεται **απλή**, όταν οι μόνες κανονικές υποομάδες της είναι οι συνήθεις, δηλαδή η τετριμμένη $I = \{e\}$ και η ίδια η *G*.

Αρχικά αποδεικνύουμε δύο προτάσεις, τις οποίες στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος της ενότητας αυτής.

Πρόταση: *Η* $SO(3)$ *δρα μεταβατικά στο σύνολο των ευθειών του* $\mathbb{R}^3$*, οι οποίες διέρχονται από το* $\mathbb{O}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο ευθείες $L_1 : \mathbb{R}x$ και $L_2 : \mathbb{R}y$, με $L_1 \neq L_2$ και έστω θ η μεταξύ τους γωνία (Σχήμα 73). Θα δείξουμε ότι υπάρχει μετασχηματισμός $f \in SO(3)$ τέτοιος, ώστε $f(L_1) = L_2$.



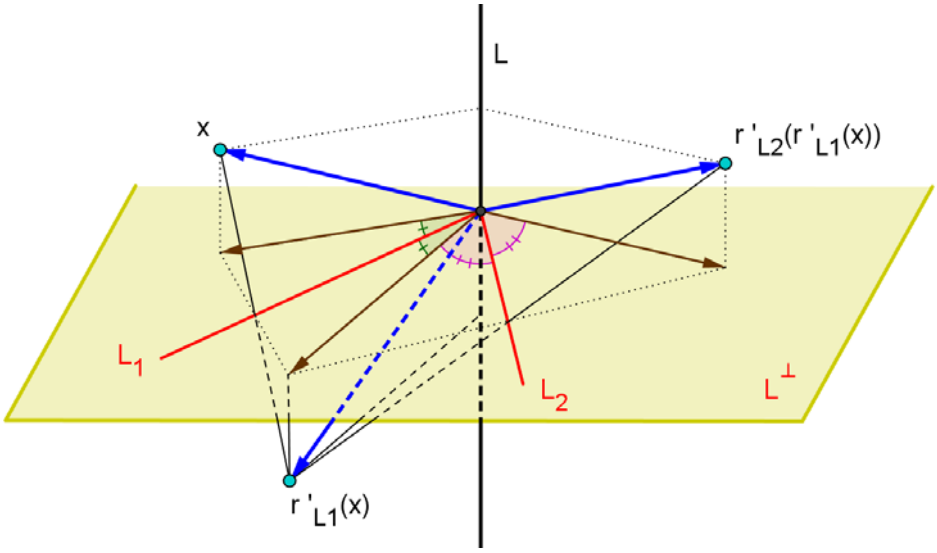
Σχήμα 73

Πράγματι, θεωρώντας το διάνυσμα $n = x \times y$ μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ορθοκανονική βάση (e_1, e_2, e_3) του $\mathbb{R}^3$ με $e_1 = \frac{1}{|n|} n$. Στην περίπτωση αυτή ο ορθογώνιος μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ είναι στροφή γύρω από τον άξονα $\mathbb{R}n$ κατά γωνία θ, επομένως απεικονίζει την ευθεία L_1 στην L_2. Έχουμε, λοιπόν, εντοπίσει μια $f \in SO(3)$ με την ιδιότητα $f(\mathbb{R}x) = \mathbb{R}y$. $\square$

Πρόταση: *Κάθε στοιχείο της $SO(3)$ μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση κατοπτρισμών ως προς μονοδιάστατους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή ευθείες που διέρχονται από το $\mathbb{O}$.*

Απόδειξη: Στην απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 163 είδαμε ότι για κάθε $f \in SO(3)$ υπάρχει ορθοκανονική βάση (e_1, e_2, e_3) ως προς την οποία ο πίνακας της f έχει τη μορφή $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, επομένως η f είναι στροφή κατά γωνία θ γύρω από την ευθεία $L : \mathbb{R}e_1$. Συνηθίζουμε να ονομάζουμε την L **άξονα περιστροφής**. Στην πραγματικότητα, ο περιορισμός $f|_L$ της f στον υπόχωρο $\mathbb{R}e_1$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, ενώ ο περιορισμός $f|_{L^\perp}$ στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του άξονα L είναι στροφή κατά γωνία θ στον $\mathbb{R}^2$, αφού ο υπόχωρος $L^\perp$ είναι ένα επίπεδο. Γνωρίζουμε όμως ότι μπορούμε να

εκφράσουμε κάθε στροφή του $\mathbb{R}^2$ ως σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς δύο ευθείες L_1, L_2 (Σχήμα 74), οι οποίες διέρχονται από το $\mathbb{O}$ (πρόταση σελίδας 75).



Σχήμα 74

Αν r_{L_1} και r_{L_2} είναι οι δύο αυτοί κατοπτρισμοί με πίνακες $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα, τότε θα είναι $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$.

Επεκτείνοντας στον $\mathbb{R}^3$ τις r_{L_1} και r_{L_2} στις r'_{L_1} και r'_{L_2}, με αντίστοιχους πίνακες $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, ώστε οι περιορισμοί τους στον υπόχωρο $L : \mathbb{R}e_1$ να συμπίπτουν με την αντίθετη της ταυτοτικής στον L, για τον πίνακα της f ισχύει

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή, καταφέρνουμε να πάρουμε την f ως σύνθεση αυτών των επεκτάσεων, που αποτελούν κατοπτρισμούς ως προς τους άξονες L_1 και L_2 του $\mathbb{R}^3$. $\square$

Θεώρημα: *Η Ειδική Ορθογώνια Ομάδα $SO(3)$ είναι απλή.*

Απόδειξη: Με στόχο να φανεί ότι η $SO(3)$ είναι απλή, θα θεωρήσουμε ότι μια υποομάδα $G \leq SO(3)$, με $G \neq \{I\}$, είναι κανονική και θα δείξουμε ότι $G = SO(3)$. Σύμφωνα με την πρόταση που προηγήθηκε, η $SO(3)$ παράγεται από το σύνολο των ορθογωνίων κατοπτρισμών ως προς υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 1. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η G περιέχει τους κατοπτρισμούς ως προς όλες τις ευθείες που διέρχονται από το $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^3$.

Τα βήματα:

- **1ο Βήμα**: Δείχνουμε ότι η G περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον κατοπτρισμό αυτού του τύπου.
- **2ο Βήμα**: Δείχνουμε ότι, αν η G περιέχει ένα κατοπτρισμό ως προς υπόχωρο διάστασης 1, τότε τους περιέχει όλους. Ο συνδυασμός των δύο ισχυρισμών ολοκληρώνει την απόδειξη.

1ο Βήμα:

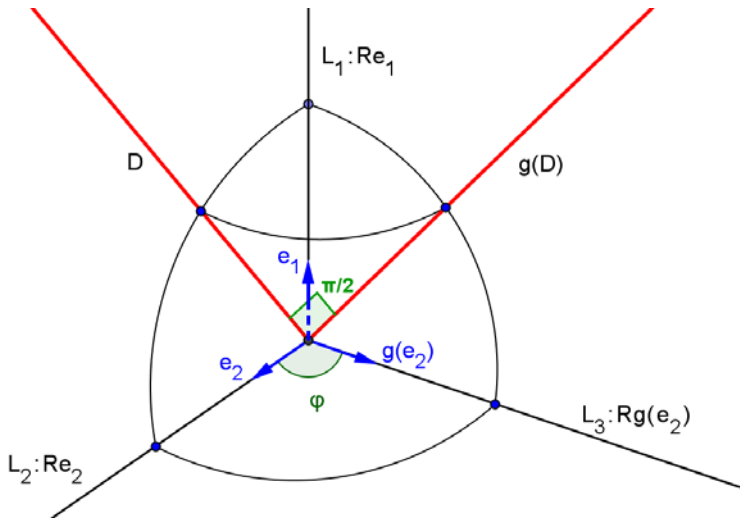
Έστω $f \in G$, με $f \neq I$.

Όπως είναι γνωστό η f είναι στροφή κατά γωνία $a \in (0, 2\pi)$ γύρω από έναν άξονα $L_1 : \mathbb{R}x$, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq \mathbb{O}$. Αφού είναι $a > 0$, σύμφωνα με το αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\varphi \equiv n_0 a > \frac{\pi}{2}$. Η $g = f^{n_0}$ προφανώς ανήκει στη G και είναι στροφή κατά γωνία φ γύρω από την ευθεία L_1.

Ισχυρισμός: Υπάρχει ευθεία D τέτοια, ώστε $D \perp g(D)$.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u>: Θεωρούμε μια βάση (e_1, e_2, e_3) του $\mathbb{R}^3$, με $e_1 = \frac{1}{|x|}x$, το e_2 να είναι τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο e_1, και $e_3 = g(e_2)$.

Είναι $e_3 \perp e_1$, αφού ισχύουν οι συνεπαγωγές $e_1 \perp e_2 \Rightarrow g(e_1) \perp g(e_2) \Rightarrow e_1 \perp e_3$.



Σχήμα 75

Η g στρέφει το επίπεδο $\Pi_1 : \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ κατά γωνία φ γύρω από την L_1 και το απεικονίζει στο $\Pi_2 : \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}f(e_2)$ (Σχήμα 75). Αντίστοιχα, μια ευθεία $D \in \Pi_1$ απεικονίζεται στην $g(D) \in \Pi_2$. Αν αφήσουμε τη D να κινείται από την L_2 προς την L_1 παίρνοντας όλες τις ενδιάμεσες θέσεις, η $g(D)$ κινείται αντίστοιχα από την L_3 προς την L_1, οπότε η γωνία μεταξύ των D και $g(D)$ μεταβάλλεται από $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ως 0, παίρνοντας όλες τις ενδιάμεσες τιμές του διαστήματος $(0, \varphi)$, επομένως υπάρχει θέση για την D, όπου $\sphericalangle(D, g(D)) = \frac{\pi}{2}$.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $h = r_D g r_D^{-1} g^{-1}$, όπου r_D ο κατοπτρισμός ως προς την ευθεία D. Η h ανήκει στην G ως σύνθεση της $g^{-1} \in G$ με την $r_D g r_D^{-1}$, η οποία επίσης ανήκει στην G λόγω κανονικότητας της G. Ακόμα, για κάθε $x \in g(D)$ έχουμε

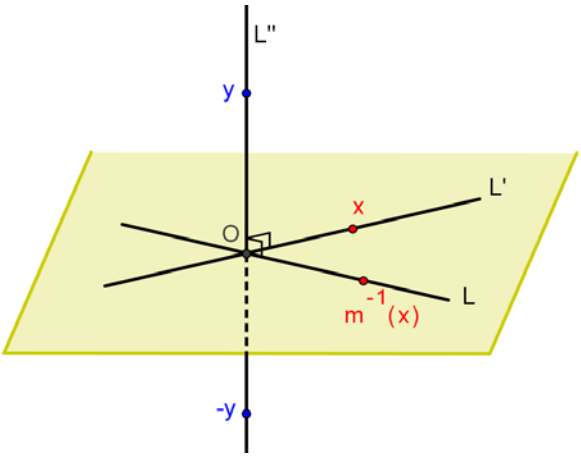
$$\begin{aligned}
h(x) &= r_D g r_D^{-1} g^{-1}(x) \\
&= r_D g r_D g^{-1}(x), && \text{αφού } r_D^{-1} = r_D \\
&= r_D g g^{-1}(x), && \text{αφού } g^{-1}(x) \in D, \text{ οπότε } r_D\left(g^{-1}(x)\right) = g^{-1}(x) \\
&= r_D(x) \\
&= -x, && \text{αφού } x \in g(D) \perp D.
\end{aligned}$$

Η h λοιπόν στρέφει την $g(D)$ κατά γωνία π γύρω από κάποια ευθεία L κάθετη στην $g(D)$, είναι δηλαδή κατοπτρισμός ως προς την L. Με την κατασκευή της h έχουμε εξασφαλίσει ότι η G περιέχει έναν τουλάχιστον κατοπτρισμό ως προς ευθεία του $\mathbb{R}^3$.

2° Βήμα:

Έστω τυχαία ευθεία L' (Σχήμα 76).

Σύμφωνα με την πρώτη πρόταση της παρούσας ενότητας (σελίδα 167), υπάρχει $m \in SO(3)$ τέτοια, ώστε $L' = m(L)$. Χάρη στην κανονικότητα της G, η απεικόνιση $p = mhm^{-1}$ ανήκει στην G και για κάθε $x \in L'$ ισχύει $m^{-1}(x) \in L$, άρα $h(m^{-1}(x)) = m^{-1}(x)$, αφού η h είναι κατοπτρισμός ως προς την L, οπότε $m(h(m^{-1}(x))) = m(m^{-1}(x)) = x$, δηλαδή $p(x) = x$. Το τελευταίο σημαίνει ότι η p είναι στροφή με άξονα την L'.



Σχήμα 76

Έστω L'' ευθεία κάθετη στο επίπεδο των L και L'. Η m απεικονίζει την L στην L', άρα είναι στροφή γύρω από την L'' (είναι $L'' \perp L$ και $L'' \perp L'$). Η L'' ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα της L', το επίπεδο $(L')^{\perp}$. Θα δείξουμε ότι κάθε σημείο της L'' στρέφεται μέσω της p κατά γωνία $\theta = \pi$, που θα σημαίνει ότι η p είναι κατοπτρισμός ως προς την ευθεία L'.

Έστω $y \in L'' \subseteq (L')^{\perp}$.

Η $p = mhm^{-1}$ δρα στο y με τον ακόλουθο τρόπο:

$$L'' \ni y \overset{m^{-1}}{\mapsto} y \overset{h}{\mapsto} -y \overset{m}{\mapsto} -y$$

άρα το y στρέφεται κατά γωνία π, επομένως η p στρέφει τον $\mathbb{R}^3$ κατά γωνία π γύρω από την L'. Με άλλα λόγια, η p είναι ένας κατοπτρισμός ως προς την ευθεία L'.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε ευθεία, υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, υπάρχει στοιχείο της G που είναι κατοπτρισμός ως προς την ευθεία αυτή, δηλαδή η G περιλαμβάνει όλους τους κατοπτρισμούς ως προς οποιαδήποτε ευθεία, υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. $\square$

Το κέντρο της ομάδας των ορθογωνίων απεικονίσεων

Ορισμός: **Κέντρο** $Z(G)$ μιας ομάδας G ονομάζεται η υποομάδα που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία της G που αντιμετατίθενται με κάθε στοιχείο της G.

$$Z(G)=\{x\in G \mid xg=gx, \forall g\in G\}$$

Αναζητώντας το κέντρο των ομάδων $O(n)$ και $SO(n)$, για $n\geq 3$, θεωρούμε μια ορθογώνια απεικόνιση $f\in O(n)$ η οποία να αντιμετατίθεται με κάθε $g\in SO(n)$. Θεωρούμε ακόμα τον ορθογώνιο κατοπτρισμό r_V, ως προς ένα υπόχωρο V διάστασης 2. Εφόσον η f ανήκει στο κέντρο της $O(n)$, θα ισχύει $fr_V=r_Vf$, απ' όπου $f=r_Vfr_V$ και $f^{-1}r_Vf=r_V \Rightarrow f^{-1}r_V=r_Vf^{-1}$.

Έστω $x\in V$. Τότε $f(x)=r_Vfr_V(x)=r_Vf(x)=r_V(f(x))$, άρα $f(x)\in V$, αφού τα σταθερά σημεία ενός κατοπτρισμού είναι ακριβώς τα διανύσματα του υπόχωρου ως προς τον οποίο γίνεται ο κατοπτρισμός. Επομένως ισχύει $f(V)\subseteq V$ (1).

Έστω τώρα $y\in f(V)$. Τότε $r_Vf^{-1}(y)=f^{-1}r_V(y)=f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(y)\in V$, οπότε υπάρχει $x\in V$ τέτοιο, ώστε $f^{-1}(y)=x$, άρα και $y=f(x)$, συνεπώς ο περιορισμός της f στον V είναι επί του V (2).

Από (1) και (2) παίρνουμε $f(V)=V$.

Καθώς η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε επίπεδο V (υπόχωρο διάστασης 2), συμπεραίνουμε ότι κάθε ευθεία D (εννοούμε κάθε υπόχωρος διάστασης 1 του $\mathbb{R}^n$), ως τομή δύο επιπέδων, μένει αμετάβλητη από την f, δηλαδή είναι $f(D)=D$. Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ είναι $x\in D$ για κάποια ευθεία D, άρα $f(x)\in D$, συνεπώς είναι $f(x)=\lambda x$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Η f, ως ισομετρία, διατηρεί τη νόρμα, άρα

$$\|f(x)\|=\|x\|\Rightarrow\|\lambda x\|=\|x\|\Rightarrow|\lambda|\|x\|=\|x\|\overset{x\neq\mathbb{O}}{\Rightarrow}|\lambda|=1\Rightarrow\lambda=\pm1.$$

Επιπλέον, η τιμή του λ είναι κοινή για όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι, αν για $x_1\neq\mathbb{O}\neq x_2$ είναι $f(x_1)=x_1$ και $f(x_2)=-x_2$, τότε

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+x_2 \Rightarrow f(x_1-x_2)=x_1+x_2$$
$$\Rightarrow (x_1-x_2=x_1+x_2 \quad \text{ή} \quad -(x_1-x_2)=x_1+x_2)$$
$$\Rightarrow (x_2=\mathbb{O} \quad \text{ή} \quad x_1=\mathbb{O}), \quad \text{άτοπο.}$$

Επομένως ισχύει $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$, ή $f(x)=-x \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$,

δηλαδή είναι $f=I$, ή $f=-I$.

Φυσικά, οι I και $-I$ αντιμετατίθενται με κάθε στοιχείο της $O(n)$, συνεπώς αποτελούν το κέντρο της. Αν η διάσταση n είναι άρτιος αριθμός, τότε προφανώς οι I και $-I$ ανήκουν και οι δύο στην $SO(n)$ και αποτελούν και δικό της κέντρο, ενώ αν το n είναι περιττός, τότε $\det(-I)=-1$, άρα η $-I$ δεν ανήκει στην $SO(n)$, οπότε το κέντρο της $SO(n)$ περιέχει μόνο την ταυτοτική απεικόνιση.

Συνοψίζοντας, ισχύει η

Πρόταση:

- *Το κέντρο της* $O(n)$ *είναι* $Z(O(n))=\{I,-I\}$.
- *Το κέντρο της* $SO(n)$ *είναι* $Z(O(n))=\begin{cases}\{I,-I\}, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ \{I\}, & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases}$

Η απλότητα της *SO*(*n*) για διαστάσεις ανώτερες του 4

Θεώρημα: *Η Ειδική Ορθογώνια Ομάδα* $SO(n)$, εξαιρουμένου του κέντρου της, *είναι απλή, για κάθε* $n\geq 5$.

Απόδειξη: Έστω μια κανονική υποομάδα $G\trianglelefteq SO(n)$ και έστω $f\in G$ εκτός του κέντρου της G (συμβολικά θα γράφουμε $f\in G\setminus center$).

Στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είδαμε ότι, αν για κάθε επίπεδο P ίσχυε $f(P)=P$, τότε θα ήταν $f=\pm I$, άρα η f θα ανήκε στο κέντρο της G, επομένως υπάρχει επίπεδο P τέτοιο, ώστε $f(P)\neq P$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $S = P + f(P)$ ο οποίος παράγεται από τα επίπεδα P και $f(P)$. Αφού η διάσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι $n \geq 5$, ενώ $\dim(P) = \dim(f(P)) = 2$, είναι $\dim(S) \leq 4$, άρα $S^{\perp} \neq \{\mathbb{O}\}$.

Θεωρούμε ακόμα τον κατοπτρισμό $h = r_{P^{\perp}}$, ως προς τον υπόχωρο $P^{\perp}$. Αρχικά, ας παρατηρήσουμε ότι η h είναι στοιχείο της $SO(n)$. Πράγματι, ο περιορισμός της $h = r_{P^{\perp}}$ στον υπόχωρο $P^{\perp}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, ενώ μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, με τα δύο πρώτα μοναδιαία διανύσματα να αποτελούν βάση του υπόχωρου P, οπότε ο πίνακας του ορθογώνιου κατοπτρισμού $r_{P^{\perp}}$ θα είναι

$$A_h = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right),$$

επομένως, $\det(A_h) = 1$, άρα $h \in SO(n)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι κάθε ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς έναν υπόχωρο διάστασης 2 ανήκει στην ειδική ορθογώνια ομάδα.

Χρησιμοποιώντας την h, κατασκευάζουμε το μετασχηματισμό $k = hfh^{-1}f^{-1}$.

Είναι $fh^{-1}f^{-1} = fhf^{-1} = fr_{P^{\perp}}f^{-1} = r_{f(P^{\perp})}$, οπότε

$$k = r_{P^{\perp}} r_{f(P^{\perp})} \in SO(n).$$

<u>*Ισχυρισμός*</u>: Ο περιορισμός της k στον $S^{\perp}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση: $k|_{S^{\perp}} = I|_{S^{\perp}}$.

<u>*Απόδειξη*</u>: Ο κατοπτρισμός $r_{f(P^{\perp})}$ αφήνει αναλλοίωτο τον υπόχωρο $f(P^{\perp})$, ενώ αντίστοιχα, ο $r_{P^{\perp}}$ διατηρεί τον $P^{\perp}$, συνεπώς η k περιορισμένη στο $P^{\perp} \cap f(P^{\perp})$ είναι προφανώς η ταυτοτική. Θα αποδείξουμε ότι $S^{\perp} \subseteq P^{\perp} \cap f(P^{\perp})$.

Αφενός έχουμε τις συνεπαγωγές

$$P \subseteq P + f(P) \Rightarrow (P + f(P))^{\perp} \subseteq P^{\perp} \quad (1)$$

Αφετέρου

$$x \in \left(P + f(P)\right)^{\perp} \Rightarrow x \notin f(P) \Rightarrow x \in f\left(P^{\perp}\right), \text{ άρα } \left(P + f(P)\right)^{\perp} \subseteq f\left(P^{\perp}\right) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$\left(P + f(P)\right)^{\perp} \subseteq P^{\perp} \cap f\left(P^{\perp}\right), \text{ δηλαδή } S^{\perp} \subseteq P^{\perp} \cap f\left(P^{\perp}\right).$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι η *k* ανήκει στη *G*, χωρίς μάλιστα να περιέχεται στο κέντρο της. Πράγματι,

$$\left.\begin{array}{l} f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G \\ \left.\begin{array}{l} f \in G, \quad h \in SO(n) \\ G \trianglelefteq SO(n) \end{array}\right\} \Rightarrow hfh^{-1} \in G \end{array}\right\} \Rightarrow k = hfh^{-1}f^{-1} \in G$$

Ταυτόχρονα, έχουμε $P \neq f(P) \Rightarrow P^{\perp} \neq f\left(P^{\perp}\right) \Rightarrow r_{P^{\perp}} \neq r_{f\left(P^{\perp}\right)} \Rightarrow r_{P^{\perp}}^{2} \neq r_{P^{\perp}} r_{f\left(P^{\perp}\right)} \Rightarrow I \neq k$. Είναι όμως και $h \neq -I$, αφού, σύμφωνα με τον προηγούμενο ισχυρισμό, η *k*, τουλάχιστον στο $S^{\perp}$, δρα ως ταυτοτική, άρα είναι $k \notin Z(G)$. Συνοψίζοντας έχουμε $k \in G \setminus center$.

Θεωρούμε τώρα και σταθεροποιούμε ένα $x \in S^{\perp} \setminus \{\mathbb{O}\}$ και ένα $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο, ώστε $z \equiv k(y) \neq y$. Τέτοιο *y* υπάρχει, αφού η *k* δεν ανήκει στο κέντρο της *G*, οπότε $k \neq I$. Αν $t_u = r_{\langle u \rangle^{\perp}}$ είναι ο ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το υπερεπίπεδο $\langle u \rangle^{\perp}$, τότε για την $l = t_y t_x$ έχουμε $l \in SO(n)$, ως σύνθεση ορθογωνίων κατοπτρισμών ως προς υπερεπίπεδα.

Τέλος, με χρήση των *k* και *l* κατασκευάζουμε τη $g = klk^{-1}l^{-1}$. Η *g* ανήκει στη *G*, αφού

$$\left.\begin{array}{l} k \in G \Rightarrow k^{-1} \in G \\ \left.\begin{array}{l} k \in G, \quad l \in SO(n) \\ G \trianglelefteq SO(n) \end{array}\right\} \Rightarrow lkl^{-1} \in G \end{array}\right\} \Rightarrow g = klk^{-1}l^{-1} \in G$$

Ακόμα, έχουμε $x \in S^{\perp} \Rightarrow k(x) = x$, άρα $kt_x k^{-1} = t_{k(x)} = t_x$, οπότε $t_x k^{-1} = k^{-1} t_x$. Αξιοποιώντας το τελευταίο παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
g &= kt_y t_x k^{-1}\left(t_y t_x\right)^{-1} \\
&= kt_y t_x k^{-1} t_x t_y \\
&= kt_y k^{-1} t_x t_x t_y \\
&= kt_y k^{-1} I t_y \\
&= t_{k(y)} t_y \\
&= t_z t_y
\end{aligned}
$$

Η g, ως σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς τα διαφορετικά υπερεπίπεδα t_y και t_z, είναι η ταυτοτική στον υπόχωρο $V = \langle y \rangle^{\perp} \cap \langle z \rangle^{\perp}$, διάστασης $n-2$. Ακριβέστερα πρόκειται για κατοπτρισμό του $\mathbb{R}^n$ ως προς τον V. Από τη στιγμή που βεβαιώνεται ότι η G περιέχει ένα κατοπτρισμό ως προς υπόχωρο διάστασης $n-2$ ($\operatorname{codim} 2$), μπορούμε να αποδείξουμε ότι τους περιέχει όλους:

Πράγματι, αν η m είναι στοιχείο της $SO(n)$, τότε η mgm^{-1} ανήκει στην G και είναι ο κατοπτρισμός ως προς τον υπόχωρο $m(V)$ (ο οποίος είναι επίσης $\operatorname{codim} 2$). Καθώς η $SO(n)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των υποχώρων $\operatorname{codim} 2$, συμπεραίνουμε ότι η G τελικά περιέχει όλους τους κατοπτρισμούς αυτού του τύπου. Είναι όμως γνωστό[28] ότι κάθε στοιχείο της $SO(n)$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση κατοπτρισμών $\operatorname{codim} 2$, δηλαδή όλα τα στοιχεία της $SO(n)$ παράγονται από στοιχεία της G, συνεπώς είναι $G = SO(n)$. Το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Η ιδιαιτερότητα της *SO*(4)

Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε πώς η ομάδα S^3 των μοναδιαίων τετρανίων συνδέεται με την Ειδική Ορθογώνια Ομάδα του $\mathbb{R}^3$, μέσω του ισομορφισμού της συζυγίας. Η συμβολή των τετρανίων όμως δεν εξαντλείται στη μελέτη των περιστροφών του τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου. Στις ενότητες που ακολουθούν θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο

[28] **Berger**: *Geometry I*, παράγραφος 8.4.6, σελίδα 166.

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σφαίρα S^3 των μοναδιαίων τετρανίων ώστε να μελετήσουμε την εσωτερική δομή της ειδικής ορθογώνιας ομάδας απεικονίσεων του $\mathbb{R}^4$.

Αρχικά διατυπώνουμε ένα θεώρημα ομομορφισμού της $S^3 \times S^3$ επί της $SO(4)$. Εντούτοις η συσχέτιση αυτή δεν είναι αυτοσκοπός. Το θεώρημα αυτό θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να εξετάσουμε κατά πόσον η $SO(4)$ είναι απλή, ή όχι.

Θεώρημα:

Η απεικόνιση $\tau : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ με $(s,r) \mapsto \{q \mapsto sq\overline{r}\}$ είναι ένας συνεχής και ΕΠΙ ομομορφισμός. Ο πυρήνας της αποτελείται από τα ζεύγη $(1,1)$ και $(-1,-1)$.

Απόδειξη: Προφανώς, η ομάδα $S^3 \times S^3$ νοείται με τη δομή της ομάδας ευθέως γινομένου. Θεωρούμε την απεικόνιση $\tau : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ που αντιστοιχίζει κάθε ζεύγος μοναδιαίων τετρανίων $(s,r) \in S^3 \times S^3$ στη συνάρτηση $\tau_{s,r} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με $\tau_{s,r}(q) = sq\overline{r}$, $q \in \mathbb{R}^4$.

Αρχικά ας βεβαιώσουμε ότι η $\tau_{s,r}$ ανήκει πράγματι στην $SO(4)$, αποδεικνύοντας τους ακόλουθους δύο ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός *I*1: Η $\tau_{s,r}$ είναι ορθογώνια.

<u>Απόδειξη του *I*1</u>: Είναι φανερό ότι για κάθε $q \in \mathbb{R}^4$ ισχύει $\tau_{s,r}(q) \in \mathbb{R}^4$, αφού το $\tau_{s,r}(q)$ είναι αποτέλεσμα πράξεων τετρανίων.

Για να είναι η $\tau_{s,r}$ ορθογώνια, αρκεί να δείξουμε ότι είναι γραμμική και διατηρεί τη νόρμα.

Πράγματι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $p,q \in \mathbb{R}^4$ είναι

$$\tau_{s,r}(\lambda p + q) = s(\lambda p + q)\overline{r} = \lambda sp\overline{r} + sq\overline{r} = \lambda \tau_{s,r}(p) + \tau_{s,r}(q)$$

δηλαδή η $\tau_{s,r}$ είναι γραμμική.

Ακόμα η $\tau_{s,r}$ διατηρεί τη νόρμα:

$$\|\tau_{r,s}(q)\| = \|sq\overline{r}\| = \|s\|\|q\|\|\overline{r}\| = \|q\| \quad \text{για κάθε } q \in \mathbb{R}^4.$$

Σύμφωνα με το πόρισμα της σελίδας 35, $\tau_{s,r} \in O(4)$.

Ισχυρισμός *I*2: Η εικόνες της τ είναι στοιχεία της $SO(4)$.

<u>Απόδειξη του *I*2</u>: Ο χώρος $S^3 \times S^3$ είναι συνεκτικός και η τ συνεχής, επομένως η εικόνα της τ είναι συνεκτική. Η ομάδα $O(4)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, την $SO(4)$ και το συμπλήρωμά της $O(4) \setminus SO(4)$. Η $\tau_{1,1}$ είναι προφανώς η ταυτοτική απεικόνιση και περιέχεται στην $SO(4)$, συνεπώς ολόκληρη η εικόνα της τ περιέχεται σ' αυτή τη συνιστώσα, δηλαδή ισχύει

$$\mathrm{Im}(\tau) \subseteq SO(4)$$

Προχωρούμε τώρα στον κύριο κορμό της απόδειξης του θεωρήματος.

Ισχυρισμός *I*3: Η τ είναι ομομορφισμός.

<u>Απόδειξη του *I*3</u>: Για κάθε $(s,r),(s',r') \in S^3 \times S^3$ και $q \in \mathbb{R}^4$ έχουμε:

$$\tau_{ss',rr'}(q) = ss'q\overline{rr'} = ss'q\overline{r'}\,\overline{r} = s \cdot \tau_{s',r'}(q) \cdot \overline{r} = \tau_{s,r}\left(\tau_{s',r'}(q)\right) = \left(\tau_{s,r} \circ \tau_{s',r'}\right)(q),$$

άρα

$$\tau\left((s,r)\cdot(s',r')\right) = \tau\left((s,r)\right) \circ \tau\left((s',r')\right)$$

με άλλα λόγια έχουμε έναν ομομορφισμό.

Ισχυρισμός *I*4: Η τ είναι ΕΠΙ της $SO(4)$.

<u>Απόδειξη του *I*4</u>: Ας θεωρήσουμε μια ορθογώνια απεικόνιση $f \in SO(4)$. Σύμφωνα με την πρόταση της σελίδας 40, για κάθε ορθογώνια απεικόνιση στον $\mathbb{R}^4$ υπάρχει ορθοκανονική βάση, ως προς την οποία, ο πίνακας θα έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta \\ & & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta \\ & & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ με } \varphi,\theta \in [0,2\pi).$$

Καθώς όμως η f ανήκει στην ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(4)$, η ορίζουσα του πίνακά της ισούται με 1, επομένως η πρώτη εκδοχή απορρίπτεται και κατά συνέπεια ο πίνακας A της f θα είναι της μορφής

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta \\ & & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ με } \varphi,\theta\in[0,2\pi).$$

Ταυτίζοντας το τυχαίο στοιχείο $(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$ με το τετράνιο $q=x+yi+zj+kw\in\mathbb{H}$ έχουμε $\left[f(q)\right]^T=Aq^T$ (1).

Θεωρούμε τώρα τα τετράνια

$$s=\cos\frac{\varphi+\theta}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi+\theta}{2},\ r=\cos\frac{\varphi-\theta}{2}-i\cdot\sin\frac{\varphi-\theta}{2}$$

και την αντίστοιχη απεικόνιση $\tau((s,r))=\tau_{s,r}:q\mapsto sq\overline{r}$.

Για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς θέτουμε $\frac{\varphi+\theta}{2}=\alpha$ και $\frac{\varphi-\theta}{2}=\beta$, οπότε έχουμε:

$$\tau_{s,r}(q)=sq\overline{r}=\left(\cos\frac{\varphi+\theta}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\right)(x+yi+zj+wk)\left(\cos\frac{\varphi-\theta}{2}-i\cdot\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right)$$

$$=(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)(x+yi+zj+wk)(\cos\beta-i\cdot\sin\beta)$$

$$\begin{aligned}=&(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)x-(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)y\\ &+\left[(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)x+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)y\right]\cdot i\\ &+\left[(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)z-(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)w\right]\cdot j\\ &+\left[(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)z+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)w\right]\cdot k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\left[\cos(\alpha+\beta)\cdot x-\sin(\alpha+\beta)\cdot y\right]\\ &+\left[\sin(\alpha+\beta)\cdot x+\cos(\alpha+\beta)\cdot y\right]\cdot i\\ &+\left[\cos(\alpha-\beta)\cdot z-\sin(\alpha-\beta)\cdot w\right]\cdot j\\ &+\left[\sin(\alpha-\beta)\cdot z+\cos(\alpha-\beta)\cdot w\right]\cdot k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\cos\varphi\cdot x-\sin\varphi\cdot y\right]\\
&\quad+\left[\sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y\right]\cdot i\\
&\quad+\left[\cos\theta\cdot z-\sin\theta\cdot w\right]\cdot j\\
&\quad+\left[\sin\theta\cdot z+\cos\theta\cdot w\right]\cdot k
\end{aligned}
$$

άρα $\left[\tau_{s,r}(q)\right]^T=\left[sq\overline{r}\right]^T=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot x-\sin\varphi\cdot y+0\cdot z+0\cdot w\\ \sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y+0\cdot z+0\cdot w\\ 0\cdot x+0\cdot y+\cos\theta\cdot z-\sin\theta\cdot w\\ 0\cdot x+0\cdot y+\sin\theta\cdot z+\cos\theta\cdot w\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta\\ & & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=A\cdot q^T \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$\left[\tau_{s,r}(q)\right]^T=\left[f(q)\right]^T$, άρα $\tau_{s,r}(q)=f(q)$ για κάθε $q\in\mathbb{R}^4$, επομένως $\tau\left((s,r)\right)=\tau_{s,r}=f$, δηλαδή η τ είναι επί της $SO(4)$.

Ισχυρισμός *I*5: Ο πυρήνας της τ είναι το δισύνολο $\left\{(1,1),(-1,-1)\right\}$.

<u>Απόδειξη του *I*5</u>: Κατ' αρχήν είναι φανερό ότι $\tau\left((1,1)\right)=\tau\left((-1,-1)\right)=I$, όπου $I\in SO(4)$ η ταυτοτική απεικόνιση.

Ας θεωρήσουμε τώρα ζεύγος $(s,r)\in S^3\times S^3$ τέτοιο, ώστε $\tau\left((s,r)\right)=I$. Τότε για κάθε $q\in S^3$ είναι

$$\tau_{s,r}(q)=q\Rightarrow sq\overline{r}=q \quad (1)$$

Με $q=1$ από την (1) παίρνουμε

$$s\overline{r}=1\Rightarrow\overline{r}=s^{-1},$$

οπότε $(1)\Rightarrow sqs^{-1}=q$ για κάθε $q\in S^3$.

Στην απόδειξη όμως του Θεωρήματος της σελίδας 163 (στον Ισχυρισμό *I*2) είδαμε ότι αν για κάθε $q \in S^3$ ισχύει $sqs^{-1} = q$, τότε τελικά $s = \pm 1$, γεγονός που οδηγεί και στο ότι $r = \pm 1$ αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν το συμπέρασμα ότι

$$Ker\,\tau = \{(1,1),(-1,-1)\} \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση τ του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε τώρα να εντοπίσουμε μια κανονική υποομάδα της $SO(4)$:

Πρόταση: *H* $H = \tau(\{1\} \times S^3)$ *είναι μια κανονική υποομάδα της* $SO(4)$.

Απόδειξη:

Αρχικά ας επιβεβαιώσουμε ότι η $H = \tau(\{1\} \times S^3)$ είναι όντως υποομάδα της $SO(4)$.

Προφανώς η ταυτοτική απεικόνιση $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ανήκει στην *H*, άρα $H \neq \varnothing$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $h_1, h_2 \in H$ τότε $h_1 h_2^{-1} \in H$. Πράγματι, για τις $h_1, h_2 \in H$ υπάρχουν $(s_1, r_1), (s_2, r_2) \in S^3 \times S^3$ ώστε για κάθε $q \in \mathbb{R}^4$ να ισχύει

$$h_1(q) = \tau_{s_1, r_1}(q) = s_1 q \overline{r_1} \text{ και } h_2(q) = \tau_{s_2, r_2}(q) = s_2 q \overline{r_2}.$$

Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη της h_2 είναι η απεικόνιση $h_2^{-1}(q) = \tau_{\overline{s_2}, \overline{r_2}}(q) = \overline{s_2} q r_2$, $q \in \mathbb{R}^4$, αφού $(\tau_{\overline{s_2}, \overline{r_2}} \circ \tau_{s_2, r_2})(q) = \tau_{\overline{s_2}, \overline{r_2}}(\tau_{s_2, r_2}(q)) = \overline{s_2} \tau_{s_2, r_2}(q) r_2 = \overline{s_2} s q \overline{r_2} r_2 = \|s\|^2 q \|r\|^2 = q$ και ομοίως $(\tau_{s_2, r_2} \circ \tau_{\overline{s_2}, \overline{r_2}})(q) = q$.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$h_1 h_2^{-1}(q) = h_1(h_2^{-1}(q)) = s_1 h_2^{-1}(q) \overline{r_1} = s_1 \overline{s_2} q r_2 \overline{r_1} = s_1 \overline{s_2} \cdot q \cdot \overline{r_1 \overline{r_2}} = s_3 q \overline{r_3}$, με $s_3 = s_1 \overline{s_2} \in S^3$ και $r_3 = r_1 \overline{r_2} \in S^3$, άρα $h_1 h_2^{-1} \in H$, επομένως $\tau(\{1\} \times S^3) \leq SO(4)$.

Για να αποδείξουμε ότι η υποομάδα *H* είναι κανονική αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in SO(4)$ και $g \in H$ ισχύει $fgf^{-1} \in H$.

Στο σημείο αυτό έρχεται η συνεισφορά του προηγουμένου θεωρήματος:

Σύμφωνα ακριβώς με το θεώρημα αυτό, η τ είναι επί της $SO(4)$, άρα υπάρχει $(s,r)\in S^3\times S^3$ ώστε $f=\tau((s,r))=\tau_{s,r}$, δηλαδή $f(q)=sq\overline{r}$, $q\in\mathbb{R}^4$. Η g είναι στοιχείο της H, άρα είναι της μορφής $g(q)=1\cdot q\cdot\overline{t}$, $q\in\mathbb{R}^4$, για κάποιο $t\in S^3$, οπότε έχουμε:

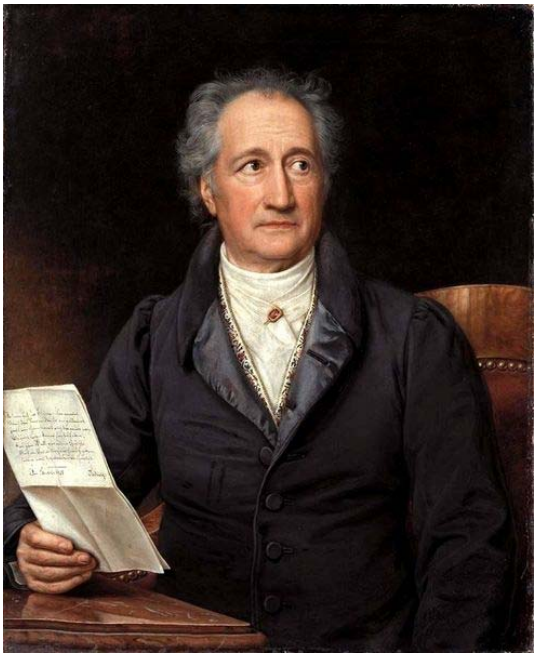
$$\begin{aligned}(fgf^{-1})(q)&=f\left((gf^{-1})(q)\right)\\&=s\cdot g\left(f^{-1}(q)\right)\cdot\overline{r}\\&=sf^{-1}(q)\overline{t}\,\overline{r}\\&=s\overline{s}qr\overline{t}\,\overline{r}\\&=\|s\|^2qr\overline{t}\,\overline{r}\\&=1\cdot qr\overline{t}\,\overline{r}\\&=1\cdot q\cdot\overline{u}\end{aligned}$$

με $u=\overline{r\overline{t}\,\overline{r}}\in S^3$, άρα $fgf^{-1}=\tau_{1,u}\in H$ $\square$

Τα τετράνια λοιπόν μας έδωσαν τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε μια μη συνήθη κανονική υποομάδα της $SO(4)$, δηλαδή διάφορη από την $\{I\}$ και την ίδια την $SO(4)$. Το γεγονός αυτό αποτελεί απόδειξη της ακόλουθης πρότασης που περιγράφει μια αξιοσημείωτη ιδιότητα της $SO(4)$:

Πρόταση: *Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(4)$ ΔΕΝ είναι απλή.*

Το ότι η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(4)$ δεν είναι απλή συνιστά πραγματικά μια ιδιαιτερότητα της $SO(4)$ αφού, όπως θα είδαμε, σε κάθε ευκλείδειο χώρο με διάσταση $n\geq 3$, $n\neq 4$ η αντίστοιχη $SO(n)$ είναι απλή.



Εικόνα 23. Johann Wolfgang Goethe

Mathematicians are a species of Frenchmen:
if you say something to them they translate
it into their own language and presto!
It is something entirely different.

Johann Wolfgang Goethe

Ευρετήριο όρων

Trans, 49
ανάστροφος ενός πίνακα, 24
ανισότητα Cauchy-Schwarz, 27
αντιμετάθεση, 21
αντίστροφος, 25
άξονας περιστροφής, 168
απεικόνιση
  ορθογώνια, 34
αυτομορφισμός, 19
βαρύκεντρο, 96
βάση
  ορθοκανονική, 38
βάση διανυσματικού χώρου, 23
γενική θέση διανυσμάτων, 120
Γεωμετρία Klein, 31
γραμμική απεικόνιση, 23
δείκτης υποομάδας, 19
διάγραμμα Schlegel, 113
διάνυσμα, 22
διανύσματα
  αφινικά ανεξάρτητα, 120
  γραμμικά ανεξάρτητα, 23
  ορθογώνια, 26
διανυσματικός χώρος, 22
διάσταση
  διανυσματικού χώρου, 23
δράση, 142
  μεταβατική, 142
δυϊκά στερεά, 116
δωδεκάεδρον, 92
εικόνα ομομορφισμού, 20
εικοσάεδρον, 92
ενέλιξη, 53
εσωτερικό γινόμενο, 26
ευθύ
  άθροισμα υποχώρων, 23
  γινόμενο ομάδων, 19
ευκλείδεια
  κίνηση, 30
  μετρική, 29
ιδιοδιάνυσμα, 25
ιδιοτιμή, 25
ισομετρία, 30, 49
ισόμορφες ομάδες, 19
ισομορφισμός, 19
ισομορφισμός γραμμικών χώρων, 23
κατασκευή Dorman-Luke, 118
κατοπτρισμός, 53, 54
  ορθογώνιος, 53
κέντρο ομάδας, 173
κύβος, 92
κύκλος μήκους k, 21
μεσοκάθετο υπερεπίπεδο, 57
μετάθεση, 21
  άρτια, 21
  περιττή, 21
μεταφορά, 49
οκτάεδρον, 92
ολισθαίνων κατοπτρισμός, 81
ομάδα, 18
  απλή, 21, 167
  γενική γραμμική, 31
  διεδρική, 21
  ειδική γραμμική, 33
  ειδική ορθογώνια, 47
  εναλλάσσουσα, 21
  κυκλική, 21
  ορθογώνια, 33, 40
  περιστροφικών συμμετριών, 119
  πηλίκο, 20
  συμμετρική των *n* στοιχείων, 21
  συμμετριών, 119
  του Klein, 22
  των μοναδιαίων τετρανίων, 156
ομομορφισμός, 19
ορθογώνιο συμπλήρωμα υποχώρου, 41
ορθογώνιος πίνακας, 25
ορίζουσα, 24

Πλατωνικά στερεά, 88
πόλος, 144
πολύγωνο
εφαπτομενικό, 118
κανονικό, 89
κυρτό, 89
ομοιόμορφο, 118
πολύεδρο, 91
κανονικό, 93, 96
κυρτό, 90
πολυέδρου
ακμή, 90
έδρα, 90
κορυφή, 90
πυραμίς, 92
πυρήνας ομομορφισμού, 20
σημαία, 95
σταθεροποιούσα, 142
στερεόν, 92
σύμβολο Schläfli, 115
συμμετρίες συνόλου, 119
σύμπλοκο, 19
σύνολο
καθαρών τερανίων, 153
κυρτό, 91
τάξη
ομάδας, 20
στοιχείου ομάδας, 20
τετραγωνική μορφή, 26, 35
τετράνια, 151
κάθετα, 157
παράλληλα, 157
συζυγή, 153
τροχιά, 142
υπερεπίπεδο, 23
υπερμιγαδικοί αριθμοί, 151
υποομάδα, 20
κανονική, 20
υπόχωρος, 22
f-αναλλοίωτος, 25
παραγόμενος από σύνολο, 23
χαρακτηριστική εξίσωση, 25

Ευρετήριο εικόνων

Εικόνα 1. Arthur Cayley 7

Εικόνα 2. Immanuel Kant 9

Εικόνα 3. Herman Weyl 9

Εικόνα 4. Albrecht Dürer 10

Εικόνα 5. A. M. Legendre 11

Εικόνα 6. Το σχήμα του Legendre 12

Εικόνα 7. Giora Hon 12

Εικόνα 8. Emmy Noether 13

Εικόνα 9. Felix Klein 13

Εικόνα 10. C. F. Gauss 15

Εικόνα 11. W. R. Hamilton 17

Εικόνα 12. S. Germain 18

Εικόνα 13. Σούρουπο στο τέμενος του σουλτάνου Ομάρ Αλί Σαϊφουντίν 60

Εικόνα 14. *Stars* M. C. Escher 87

Εικόνα 15. Από το βιβλίο του M. Berger, Geometry II, 1980 88

Εικόνα 16. Κυρτό πολύεδρο 90

Εικόνα 17. Ακτινωτές προβολές των πλατωνικών στερεών 111

Εικόνα 18. Hermann Weyl 119

Εικόνα 19. Διάγραμμα Cayley της *Dir*(*Cube*) 134

Εικόνα 20. Joseph-Louis Lagrange 142

Εικόνα 21. W. R. Hamilton 150

Εικόνα 22. Αναμνηστική πλάκα στη γέφυρα Brougham 152

Εικόνα 23. Johann Wolfgang Goethe 184

Οδηγός βιβλιογραφίας ανά κεφάλαιο

Εισαγωγή:

(Borovik, 2009), (Borovik & Borovik, 2009), (Coxeter H. S., 1973), (Cromwell, 1997), (Davis & Hersh, 1981), (Eves, 3rd ed. 1969), (Hon, 2005), (Hon & Goldstein, 2008), (Klein, 2004), (Legendre, [1794] 1813), (Rotman, 1995), (Weyl, 1952).

Κεφάλαιο 1:

(Ανδρεαδάκης, Ανατύπωση 1978), (Ανδρεαδάκης, 1976), (Στράντζαλος, 1989), (Shifrin, 1995), (Toth, 2002), (Βάρσος Δ. , Δεριζιώτης, Μαλιάκας, Παπασταυρίδης, Ράπτης, & Ταλλέλη, 2003), (Fraleigh, 2002), (Itô, 1985), (Πάμφιλος, 2000).

Κεφάλαιο 2: (Artin, 1991), (Beardon, 2005), (Berger, Geomery I, Corrected Fourth Printing 2009), (Berger, Geometry II, Corrected Fourth Printing 2009), (Borovik & Borovik, 2009), (Fraleigh, 2002), (Rees, 2004), (Rotman, 1995), (Rotman, 2002), (Shifrin, 1995), (Στράντζαλος, 1989).

Κεφάλαιο 3: (Προσωπικές_σημειώσεις, Από τις παραδόσεις του Αναπλ. Καθηγητή Διονυσίου Λάππα για το μάθημα Ιστορία Νεώτερων Μαθηματικών, κατά το ακαδ. έτος 2007-08), (Beardon, 2005), (Nikulin & Shafarevich, 1987), (Polites, 1968), (Rees, 2004), (Shifrin, 1995), (Strickland, 1999).

Κεφάλαιο 4:

(Artin, 1991), (Beardon, 2005), (Borovik & Borovik, Mirrors and Reflections. The Geometry of Finite Reflection Groups, 2009), (Borovik, Mathematics under the microscope, 2009), (Coxeter H. S., 1969), (Coxeter H. S., 1973), (Coxeter & Greitzer, 1967), (Coxeter H. , 2nd ed. 1991), (Cromwell, 1997), (Eves, 3rd ed. 1969), (Farmer, 1996), (Fraleigh, 2002), (Rees, 2004), (Shifrin, 1995), (Strickland, 1999), (Toth, 2002), (Yaglom & Boltyanskii, 1961), (Yale, Holden-

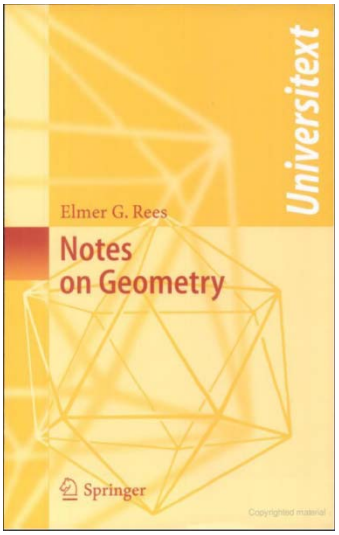
Day), (Προσωπικές_σημειώσεις, Από τις παραδόσεις του καθηγητή Ευάγγελου Ράπτη για το μάθημα Άλγεβρα για τη Διδακτική, κατά το ακαδ. έτος 2007-08), (Προσωπικές_σημειώσεις, Από τις παραδόσεις του Αναπλ. Καθηγητή Διονυσίου Λάππα για το μάθημα Ιστορία Νεώτερων Μαθηματικών, κατά το ακαδ. έτος 2007-08), (Σταμάτης, 1957).

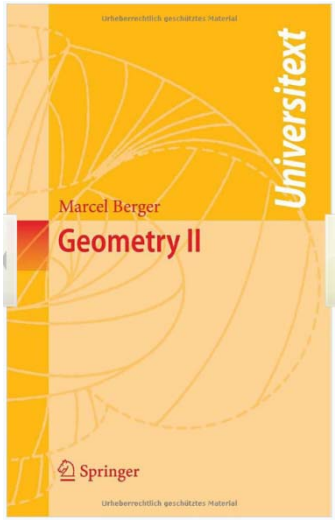
Κεφάλαιο 5:

(Fraleigh, 2002), (Hamilton, third edition, 1969. The original was published in 1866), (Mebius, 2005), (Mebius, 2007), (Rees, 2004), (Vicci, 2001).

Κεφάλαιο 6:

(Berger, Geomery I, Corrected Fourth Printing 2009), (Berger, Geometry II, Corrected Fourth Printing 2009), (Rees, 2004).





Βιβλιογραφία

Artin, M. (1991). *Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall.

Beardon, A. F. (2005). *Algebra and geometry.* New York: Cambridge Unoversity Press.

Berger, M. (Corrected Fourth Printing 2009). Geomery I. Springer.

Berger, M. (Corrected Fourth Printing 2009). Geometry II. Springer.

Borovik, A. V. (2009). *Mathematics under the microscope.* American Mathematical Society.

Borovik, A. V., & **Borovik**, A. (2009). Mirrors and Reflections. The Geometry of Finite Reflection Groups. United Kingdom: Springer.

Coxeter, H. (2nd ed. 1991). *Regular Complex Polytopes.* Cambridge University Press.

Coxeter, H. S. (1969). *Introduction to Geometry, 2nd edition.* John Wiley & Sons, inc.

Coxeter, H. S. (1973). *Regular Polytopes.* Dover Publications, Inc.

Coxeter, H. S., & **Greitzer**, S. L. (1967). *Geometry Revisited.* Toronto and New York: The Mathematical Association of America.

Cromwell, P. R. (1997). *Polyhedra.* United Kingdom: Cambridge University Press.

Curtis, C. W., & **Reiner**, I. (1962). *Representation theory of finite groups and associative algebras.* New York: Interscience Publishers.

Davis, P. J., & **Hersh**, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία.* Τροχαλία.

Eves, H. (3rd ed. 1969). *An Introduction to the History of Mathematics.* Holt, Rinehart and Winston.

Farmer, D. W. (1996). *Groups and Symmetry. A guide to discovering mathematics (Mathematical World Volume 5).* American Mathematical Sociiety.

Fraleigh, J. B. (2002). *A First Course in Abstract Algebra.* Addison Wesley; 7 edition.

Hamilton, W. (third edition, 1969. The original was published in 1866). *Elements of Quaternions, volume I.* Chelsea Publishing Company.

Hon, G. (2005). Kant vs. Legendre on Symmetry: Mirror Images in Philosophy and Mathematics. *Centaurus* , Vol. 47: 283-297.

Hon, G., & **Goldstein**, B. R. (2008). *From Summetria to Symmetry: The Making of a Revolutionary Scientific Concept (Archimedes 20).* Springer.

Itô, K. (1985). *Dictionary of Mathematics Second Edition by the Mathematical Society of Japan.* Cambrige, Massachusetts, London, England: The MIT Press.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint GEOMETRY.* Dover Publications, inc.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen.* Erlangen: A. Deichert. See Haskell 1892–1893.

Legendre, A.-M. ([1794] 1813). *Elements de geometrie, avec des notes.* Paris: Didot.

Mebius, J. E. (2005, January 16). *A matrix-based proof of the quaternion representation theorem for four-dimensional rotations.* Ανάκτηση από arxiv.org: Cornell University Library: http://arxiv.org/abs/math/0501249v1

Mebius, J. E. (2007, January 26). *Derivation of the Euler-Rodrigues formula for three-dimensional rotations from the general formula for four-dimensional rotations.* Ανάκτηση από arXiv.org: Cornell University Library: http://arxiv.org/abs/math/0701759v1

Nikulin, V. V., & **Shafarevich**, I. R. (1987). *Geometry and Groups.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Polites, G. W. (1968). *An Introduction to the Theory of Groups.* Scranton, Pennsylvania: INTERNATIONAL TEXTBOOK COMPANY.

Rees, E. G. (2004). *Notes on Geometry.* Berlin Heidelberg New York: Springer.

Rotman, J. J. (2002). *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall.

Rotman, J. J. (1995). *An Introduction to the theory of groups.* Springer-Verlag.

Shifrin, T. (1995). *Abstract Algebra: A Geometric Approach.* Prentice Hall.

Strickland, N. P. (1999). Groups and Symmetry. Notes on a course taught by Neil Strickland in 1999 at the University of Sheffild.

Toth, G. (2002). *Glimpses of algebra and geometry.* New York: Springer.

Vicci, L. (2001, April 27). Quaternions and Rotations in 3-Space: The Algebra and its Geometric Interpretation. University of North Carolina: UNC Chapel Hill, Department of Computer Science.

Weyl, H. (1952). *Symmetry.* Princeton N. J.: Princeton University Press.

Yaglom, I. M., & **Boltyanskii**, V. G. (1961). *Convex Figures.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Yale, P. B. (Holden-Day). *Geometry and Symmetry.* Holden-Day.

Ανδρεαδάκης, Σ. (Ανατύπωση 1978). Μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας.

Ανδρεαδάκης, Σ. (1976). Μαθήματα επί της Θεωρίας Ομάδων.

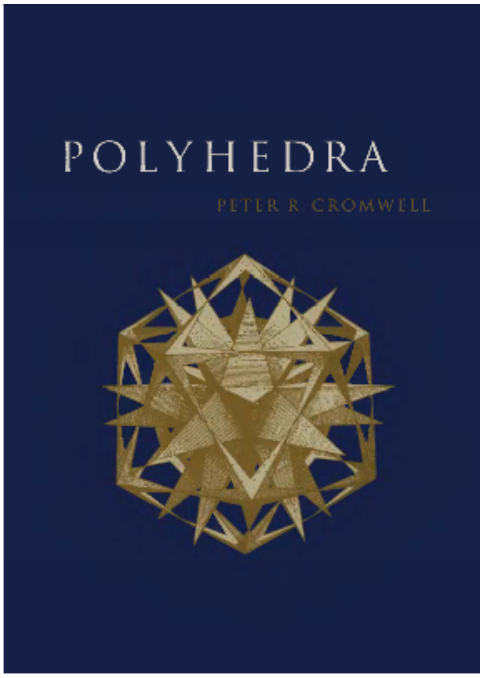
Βάρσος, Δ., **Δεριζιώτης**, Δ., **Μαλιάκας**, Μ., & **Ταλλέλη**, Ο. *Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα, τόμος Β΄.*

Βάρσος, Δ., **Δεριζιώτης**, Δ., **Μαλιάκας**, Μ., **Παπασταυρίδης**, Γ. Σ., **Ράπτης**, Ε., & **Ταλλέλη**, Ο. (2003). *Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα, τόμος Α΄.* Αθήνα.

Πάμφιλος, Π. (2000). *Εισαγωγή στη Γεωμετρία.*

Προσωπικές_σημειώσεις. (n.d.). Από τις παραδόσεις του καθηγητή **Ευάγγελου Ράπτη** για το μάθημα Άλγεβρα για τη Διδακτική, κατά το ακαδ. έτος 2007-08.

Προσωπικές_σημειώσεις. (n.d.). Από τις παραδόσεις του Αναπλ. Καθηγητή **Διονυσίου Λάππα** για το μάθημα Ιστορία Νεώτερων Μαθηματικών, κατά το ακαδ. έτος 2007-08.

Σταμάτης, Ε. (1957). *Ευκλείδου Στερεομετρία (Στοιχείων Βιβλία XI, XII, XIII).* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Στράντζαλος, Χ. (1989). Εισαγωγή στις Ευκλείδειες και Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Αθήνα: σημειώσεις παραδόσεων στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.