ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Γεωργία Πετροπούλου

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2010

Στην Έλενα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ……...3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ
1.1. Οπτικός εγγραμματισμός ...……5
1.2. Στοιχεία οπτικής προσέγγισης στην εξέλιξη των Μαθηματικών……..10
1.3. Οπτικός εγγραμματισμός και Μαθηματική Εκπαίδευση……..13
1.3.1. Η γνώση του οπτικού λεξιλογίου……19
1.3.2. Η γνώση των οπτικών συμβάσεων……..20
1.3.3. Η οπτική σκέψη……...23
1.3.4. Η οπτικοποίηση……...27
1.3.5. Ο οπτικός συλλογισμός……..33
1.3.6. Η οπτική διάκριση……..38
1.3.7. Η οπτική σύνδεση……...39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ……41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ……61
3.1. Θεωρητικό πλαίσιο……61
3.2. Μεθοδολογία……66
3.2.1. Ανάλυση των δεδομένων……67
3.3. Αποτελέσματα……...69
3.3.1. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται από το βιβλίο και ο σκοπός των οπτικών αναπαραστάσεων……...69
3.3.2. Η συμβολή των οπτικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση……76
3.4. Συμπεράσματα……..96

ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ……...100

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..103

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στον πρόλογο του βιβλίου του «Γεωμετρία και Διαίσθηση», ο Hilbert έγραψε: «Στα Μαθηματικά… παρουσιάζονται δύο τάσεις: Από το ένα μέρος, η τάση προς την αφαίρεση που επιζητεί να αποκρυσταλλώσει τις εγγενείς *λογικές* σχέσεις που ενυπάρχουν στο λαβύρινθο του προς μελέτη υλικού, και συσχετίζονται με αυτό με ένα συστηματικό και διατεταγμένο τρόπο. Από το άλλο μέρος, η τάση προς τη *διαισθητική κατανόηση* που προωθεί ένα πιο άμεσο έλεγχο των αντικειμένων μελέτης, μία ζωντανή επικοινωνία με αυτά, και δίνει έμφαση στο συγκεκριμένο νόημα των σχέσεων τους… Με τη βοήθεια της οπτικής φαντασίας, μπορούμε να διαφωτίσουμε τα πολλαπλά δεδομένα και προβλήματα της Γεωμετρίας, και πέρα από αυτό, είναι δυνατόν σε πολλές περιπτώσεις να απεικονίσουμε μία γεωμετρική σκιαγράφηση των μεθόδων της διερεύνησης και της απόδειξης» (απόσπασμα από την εισαγωγή του βιβλίου των Zimmermann & Cunningham, 1991).

Το εδάφιο αυτό συλλαμβάνει αποτελεσματικά το πνεύμα και το σκοπό της παρούσης εργασίας. Ο γενικός στόχος είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να διαφωτίσουν τις πολλαπλές όψεις και τα προβλήματα των Μαθηματικών, και ιδιαίτερα η σημασία τους στη διδασκαλία και τη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού. Για το σκοπό αυτό, ο όρος *οπτικοποίηση (visualization),* που στη βιβλιογραφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης περιγράφει τη διαδικασία παραγωγής και χρήσης οπτικών και γραφικών αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά, συνδυάζεται με τον όρο *οπτικός εγγραμματισμός (visual literacy),* που αποτελεί μία πρόσφατα εξελισσόμενη έννοια και ορίζει, κατά τη βιβλιογραφία, μία αντίστοιχη επιστημονική περιοχή. Ο συνδυασμός θεωρητικών πτυχών των δύο περιοχών, που πραγματοποιείται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση του 1^{ου} Κεφαλαίου, ίσως κάνει λίγο πιο προσεκτικό το διαχωρισμό των συστατικών της έννοιας *οπτικοποίηση*. Το πλεονέκτημα εδώ δεν είναι η ανάλυση σε βάθος, που έτσι κι αλλιώς υπάρχει στις θεωρητικές μελέτες της Μαθηματικής Εκπαίδευσης για την οπτικοποίηση, αλλά η άντληση στοιχείων από μια άλλη επιστημονική περιοχή με δική της έρευνα και βιβλιογραφία, δική της δραστηριότητα και αποτελέσματα.

Στο 2^{ο} Κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζεται ένα δείγμα από τη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στον Απειροστικό Λογισμό, προκειμένου να δειχθεί ο

ρόλος που αυτές είναι δυνατόν να διαδραματίσουν στη διδασκαλία και τη μάθηση αυτής της περιοχής, αλλά και οι περιορισμοί που συνδέονται με τη χρήση τους. Κατά τον Guzman (2002), θα μπορούσε εύκολα να παρουσιαστεί ένας ολοκληρωμένος κύκλος μαθημάτων πάνω στην εισαγωγική Πραγματική Ανάλυση, με συγκεκριμένο στόχο να δοθεί μία οπτική εκδοχή των κυριότερων εννοιών και αποτελεσμάτων του πεδίου. Στη συγκεκριμένη ενότητα, μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων, ανιχνεύονται οι δυνατότητες μιας οπτικής προσέγγισης του Απειροστικού Λογισμού.

Η διδασκαλία και η μάθηση του Απειροστικού Λογισμού έχει ως αφετηρία, σε ένα εισαγωγικό επίπεδο, την τελευταία βαθμίδα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, οι μαθητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, διδάσκονται για πρώτη φορά κάποιες από τις βασικές έννοιες αυτού του κλάδου. Επίσημα, κύρια εκπαιδευτική πηγή της διδασκαλίας αποτελεί το σχολικό εγχειρίδιο. Σε αυτό οι έννοιες του Απειροστικού Λογισμού αποτελούν περίπου το 90% της εξεταστέας ύλης για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Οι πρωτοετείς φοιτητές που εισάγονται στον Απειροστικό Λογισμό κατά συνέπεια, έχουν ήδη διαμορφωμένες αντιλήψεις για βασικές έννοιες του μαθήματος. Είναι έτσι εμφανές, ότι η σύσταση και το πνεύμα του σχολικού εγχειριδίου επηρεάζουν τη διδασκαλία και τη μάθηση της περιοχής αυτής των Μαθηματικών. Για το λόγο αυτό, στο 3^{ο} Κεφάλαιο της εργασίας αναλύεται το σχολικό εγχειρίδιο συνεισφέροντας στη δημιουργία μιας πιο ολοκληρωμένης αντίληψης των συνιστωσών της διδασκαλίας και της μάθησης του Απειροστικού Λογισμού. Η ανάλυση γίνεται με αναφορά στις οπτικές αναπαραστάσεις που περιλαμβάνονται στο εγχειρίδιο και συνάγονται κάποια συμπεράσματα.

Πέρα όμως από τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, η οπτικοποίηση σχετίζεται στενά με την ίδια τη φύση των Μαθηματικών. Η ανακάλυψή της δεν είναι πρόσφατη. Όπως σημειώνει ο Rival (1987): «Τα διαγράμματα είναι, φυσικά, όσο παλιά είναι τα ίδια τα Μαθηματικά. Η Γεωμετρία πάντα βασιζόταν σε εικόνες και κάποιο καιρό το ίδιο έκαναν και άλλοι κλάδοι των Μαθηματικών. Ακόμα και ο Isaac Newton… στην πραγματικότητα δεν απέδειξε τα θεμελιώδη θεωρήματά του. … Εάν κάποιος του ζητούσε να τα αιτιολογήσει, πιθανότατα θα παρουσίαζε ένα επιχείρημα που, αν και υποχρεωτικό, θα ήταν όχι τόσο αυστηρό και βασισμένο πολύ στις εικόνες».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1 Οπτικός εγγραμματισμός

Ο όρος «οπτικός εγγραμματισμός» δημιουργήθηκε το 1968 από τον John Debes για να ονοματοδοτήσει ένα θέμα με ποικίλες όψεις, ανεξερεύνητες παραμέτρους και με αυξανόμενη σημασία για την εκπαιδευτική πραγματικότητα. Η πρώτη απόπειρα δοκιμαστικού ορισμού από τον ίδιο τον Debes αναφέρεται στο

σύνολο των οπτικών ικανοτήτων που ένα άτομο μπορεί να αναπτύξει βλέποντας, ενώ ταυτόχρονα έχει και ενσωματώνει άλλες αισθητηριακές εμπειρίες.

Προφανώς πρόκειται για έναν μη ξεκάθαρο ορισμό, γεγονός που εντοπίστηκε και σχολιάστηκε από τους συγγραφείς, όπως σημειώνεται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση για την έννοια του οπτικού εγγραμματισμού των Avgerinou and Ericson (1997). Η κριτική αφορούσε ιδιαίτερα στην έμφαση που δίνει ο ορισμός του Debes στον τρόπο σύλληψης των ερεθισμάτων (αισθήσεις), χωρίς να αναφέρει οτιδήποτε για τη μορφή τους (συμβολική). Τα σύμβολα, ως μέσα που διευκολύνουν τη μετάδοση και την αποδοχή της πληροφορίας, είναι σημαντικά για όλες τις εκφράσεις της ανθρώπινης επικοινωνίας. Ο προβληματισμός που επικράτησε γύρω από τον αρχικό ορισμό του οπτικού εγγραμματισμού επιβεβαιώνει τη σημασία τους. Ειδικά τα οπτικά σύμβολα μπορεί να είναι αυθαίρετα ή μη, εικονικά ή ψηφιακά, αναπαραστατικά ή μη αναπαραστατικά. Ο διαχωρισμός λοιπόν των οπτικών συμβόλων σε αυτά που εμπίπτουν στο λεκτικό πεδίο και σε αυτά που εμπίπτουν στο πεδίο του οπτικού εγγραμματισμού έπρεπε να είναι σαφής.

Οι Ausburn and Ausburn έδωσαν τη δική τους εκδοχή για τον ορισμό του οπτικού εγγραμματισμού βασιζόμενοι στην έννοια της επί σκοπώ επικοινωνίας:

Ο οπτικός εγγραμματισμός μπορεί να οριστεί ως μία ομάδα δεξιοτήτων που καθιστά το άτομο ικανό να κατανοήσει και να χρησιμοποιήσει οπτικά υλικά με σκοπό να επικοινωνήσει με τους άλλους.

Ο ορισμός αυτός επηρέασε τον J Hortin, ο οποίος έδωσε το δικό του ορισμό για την έννοια, ενσωματώνοντας σε αυτόν τους κρίσιμους παράγοντες που καθορίζουν το πεδίο του οπτικού εγγραμματισμού:

Οπτικός εγγραμματισμός είναι η ικανότητα κάποιου να καταλαβαίνει (να διαβάζει) και να χρησιμοποιεί (να γράφει) νοητικές εικόνες, καθώς επίσης και να σκέφτεται και να μαθαίνει με όρους νοητικών εικόνων, δηλαδή να σκέφτεται οπτικά.

Η αποδοχή του τελευταίου ορισμού και πάλι δεν ήταν ευρεία αν και φαίνεται πληρέστερος από τους προηγούμενους. Η επιστημονική κοινότητα έκρινε ότι ο Hortin δεν εξέταζε με τον ορισμό του θέματα σχεδιασμού, δημιουργικότητας και αισθητικής που θα ήταν αναμενόμενο να αποτελούν μέρος της έννοιας. Ακολούθησαν έτσι και άλλες απόπειρες ορισμού που όμως δεν κατέληξαν σε μία κοινά αποδεκτή διατύπωση. Στη βιβλιογραφική ανασκόπηση της Suzanne Stokes (2002) παρουσιάζονται κάποιοι παραπλήσιοι ορισμοί:

Οπτικός εγγραμματισμός είναι η μέσω μάθησης ικανότητα ακριβούς ερμηνείας οπτικών μηνυμάτων, αλλά και δημιουργίας τέτοιων μηνυμάτων.

Οπτικός εγγραμματισμός είναι η ομάδα των ικανοτήτων που επιτρέπουν στο άτομο να διακρίνει και να ερμηνεύσει τις ορατές δράσεις, αντικείμενα, σύμβολα, φυσικά ή κατασκευασμένα που αντιμετωπίζει στο περιβάλλον του.

Η Anne Bamford (2003), χαρακτηριστικά αναφέρει:

Οπτικός εγγραμματισμός είναι ότι μπορεί κανείς να δει με τα μάτια και ότι μπορεί να «δει» με το μυαλό. Ένα άτομο οπτικά μορφωμένο θα πρέπει να είναι ικανό να διαβάζει και να γράφει την οπτική γλώσσα. Αυτό περιλαμβάνει την δυνατότητα να αποκωδικοποιεί και να ερμηνεύει, καθώς και να κωδικοποιεί και να συνθέτει οπτικά μηνύματα.

Παράλληλα αναπτύχθηκαν και αρνητικές αντιδράσεις σε σχέση με τη βιωσιμότητα της έννοιας και του όρου. Αυτές χαρακτήριζαν τον οπτικό εγγραμματισμό ως μία ευφυή ενορχήστρωση ιδεών μάλλον, παρά ως μία περιοχή μελέτης με συνοχή και ισχυρίζονταν ότι οι δεξιότητες που απαιτούνται για τον οπτικό εγγραμματισμό είναι έμφυτες σε όλους. Ο ισχυρισμός αυτός ίσως ισχύει σε κάποιο βαθμό μόνο για τις κατώτερης τάξης δεξιότητες σκέψης (Bamford, 2003), ενώ σε ότι αφορά στα Μαθηματικά, όπως θα δούμε, η εγκυρότητά του τίθεται υπό σοβαρή αμφισβήτηση. Η διάσταση των απόψεων σχετικά με τον ορισμό μιας ενιαίας και περιεκτικής κατασκευής αιτιολογείται ίσως από την ποικιλία των περιοχών που συνεισφέρουν σε θεωρητικά και πρακτικά συστατικά για τη δημιουργία της συνισταμένης έννοιας του οπτικού εγγραμματισμού. Κάποιες από αυτές τις περιοχές είναι οι τέχνες, η φιλοσοφία, η γλωσσολογία, η γνωστική ψυχολογία, η οφθαλμική ανατομία, η έρευνα για τη λειτουργία των εγκεφαλικών ημισφαιρίων, η κοινωνιολογία, η πολιτιστική ανθρωπολογία, η νευροφυσιολογία, η εκπαιδευτική τεχνολογία, ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός, η θεωρία της επικοινωνίας και η σημειωτική. Προφανώς, η συνύπαρξη τόσων περιοχών υπό την έννοια του οπτικού εγγραμματισμού καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την προσπάθεια ορισμού της. Εξάλλου, η θεώρηση μιας νέας έννοιας εμπεριέχει και ένα είδος προκατάληψης σχετικής με την περιοχή υπό την οποία εξετάζεται η έννοια. Κάποιος ειδικός στους υπολογιστές, για παράδειγμα, μπορεί να σκέφτεται τον οπτικό εγγραμματισμό με όρους λογισμικού και νέων τεχνολογιών, ένας καλλιτέχνης μπορεί να τον σκέφτεται ως πλεονέκτημα καλλιτεχνικής έκφρασης, ένας ακαδημαϊκός με όρους εκπαίδευσης, ενώ ένας ερευνητής μπορεί να αναζητά σε αυτόν ένα μέτρο αποτελεσματικότητας. Ανάλογα με το υπόβαθρο του εκάστοτε ερευνητή, οι ορισμοί του οπτικού εγγραμματισμού μπορεί να ποικίλουν, ωστόσο αποτελούν κομμάτια της ίδιας έννοιας (Bleed, 2008).

Η Avgerinou (2009) σε μία εκ νέου ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας σχετικά με την έννοια του οπτικού εγγραμματισμού προσδιορίζει τα κυριότερα σημεία σύγκλισης των σχετικών θεωριών στα εξής:

- Υπάρχει οπτική γλώσσα παράλληλα με την προφορική γλώσσα. Πράγματι η χρήση και η ερμηνεία των νοητικών εικόνων είναι μία συγκεκριμένη γλώσσα, υπό την έννοια ότι οι εικόνες χρησιμοποιούνται για την επικοινωνία μηνυμάτων και πρέπει να αποκωδικοποιηθούν για να προκύψει νόημα (Stokes, 2002).

- Ο οπτικός εγγραμματισμός είναι μία γνωστική δυνατότητα που σχετίζεται με το συναισθηματικό τομέα.
- Οι όροι «δυνατότητα», «δεξιότητα» και «ικανότητα», χρησιμοποιούνται σταθερά και εναλλακτικά για να περιγράψουν την έννοια.
- Οι δεξιότητες που αναφέρονται στον οπτικό εγγραμματισμό μπορούν α) να μαθευτούν, β) να διδαχθούν, γ) να αναπτυχθούν και να βελτιωθούν. Προσδιορίζονται δε στο να μπορεί κάποιος α) να διαβάζει / αποκωδικοποιεί / ερμηνεύει και β) να γράφει / κωδικοποιεί / δημιουργεί οπτικές δηλώσεις.
- Η οπτική επικοινωνία, η οπτική σκέψη και η οπτική μάθηση είναι συνδεδεμένες με την έννοια του οπτικού εγγραμματισμού. Υπάρχουν διάφορες μορφές οπτικής επικοινωνίας που περιλαμβάνουν χειρονομίες, αντικείμενα, σημεία (για παράδειγμα μια δραστηριότητα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή είναι ένα οπτικό σύστημα σημείων) και σύμβολα. Η σημασία των συμβόλων απορρέει από το συγκεκριμένο πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιούνται (Bamford, 2003).
- Η έννοια του οπτικού εγγραμματισμού εστιάζει στην επί σκοπώ επικοινωνία μέσα σε ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο.

Η ίδια ερευνήτρια, καθώς και η Bamford (2003), προσδιορίζουν περαιτέρω τις ικανότητες που αναφέρονται στην έννοια του οπτικού εγγραμματισμού και που η ανάπτυξή τους, μέσω της τυπικής εκπαίδευσης, καθιστά το άτομο οπτικά μορφωμένο:

- Η γνώση του οπτικού λεξιλογίου. Δηλαδή η γνώση των βασικών συστατικών της οπτικής γλώσσας όπως το σημείο, η γραμμή, το σχήμα, η μορφή.
- Η γνώση των οπτικών συμβάσεων. Δηλαδή η γνώση των οπτικών συμβόλων και της κοινωνικά συμφωνηθείσας σημασία τους.
- Η οπτική σκέψη. Δηλαδή η δυνατότητα μετατροπής οποιουδήποτε τύπου πληροφορίας σε εικόνα, γράφημα ή οποιαδήποτε οπτική μορφή που ενθαρρύνει την επικοινωνία αυτής της πληροφορίας.
- Η οπτικοποίηση. Δηλαδή η διαδικασία κατά την οποία μορφοποιείται μία οπτική νοητική εικόνα. Η διαδικασία εδώ, εμπεριέχει κυρίως την εγκεφαλική δραστηριότητα που λαμβάνει χώρα σε μια διανοητική αναπαράσταση.
- Ο οπτικός συλλογισμός. Δηλαδή η λογική σκέψη με συνοχή που πραγματοποιείται πρώτιστα μέσω νοητικών εικόνων.

- Η κριτική θεώρηση. Δηλαδή η εφαρμογή των δεξιοτήτων της κριτικής σκέψης στα οπτικά υλικά.
- Η οπτική διάκριση. Δηλαδή η δυνατότητα αντίληψης των διαφορών ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα οπτικά ερεθίσματα.
- Η οπτική αναδόμηση. Δηλαδή η δυνατότητα αναδόμησης ενός μερικώς αποφραγμένου οπτικού μηνύματος στην αρχική του μορφή.
- Η οπτική σύνδεση. Δηλαδή η δυνατότητα σύνδεσης οπτικών νοητικών εικόνων μεταξύ τους σε ένα ενοποιημένο θέμα, καθώς και προφορικών μηνυμάτων με τις οπτικές τους αναπαραστάσεις με σκοπό την ενίσχυση του νοήματος.
- Η ανακατασκευή του νοήματος. Δηλαδή η δυνατότητα, μέσω οπτικοποιήσης, προφορικής ή οπτικής αναδόμησης του νοήματος ενός οπτικού μηνύματος με βάση ατελείς πληροφορίες.
- Η κατασκευή νοήματος. Δηλαδή η δυνατότητα νοηματοδότησης δοθέντος οπτικού μηνύματος με βάση οποιαδήποτε οπτική ή προφορική πληροφορία.

Ο οπτικός εγγραμματισμός, στο πλαίσιο διαφορετικών γνωστικών περιοχών, ιστορικά υπήρξε ζωτικής σημασίας αφού περιελάμβανε για παράδειγμα την ανάγνωση χαρτών ή ακτινογραφιών. Οι άνθρωποι βασίστηκαν στις εικόνες προκειμένου να ερμηνεύσουν με νόημα και να κατανοήσουν περίπλοκες και σύνθετες ιδέες, όπως για παράδειγμα μαθηματικούς ή χημικούς τύπους και αρχιτεκτονικά σχέδια. Η μίξη γλωσσολογικών και εικονογραφικών στοιχείων θεωρήθηκε ως το καλύτερο μέσο για την επεξηγηματική αναπαράσταση πιο σύνθετων εννοιολογικών δομών. Ο Αριστοτέλης δήλωνε «χωρίς εικόνες, η σκέψη είναι αδύνατη», ενώ καθώς η ιστορία επαναλαμβάνεται μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι πολλές πληροφορίες παρουσιάζονται καλύτερα οπτικά παρά λεκτικά. Στη σημερινή εποχή της ψηφιακής πληροφορίας και των οπτικών μέσων, η έννοια του οπτικού εγγραμματισμού αντιμετωπίζεται με ανανεωμένο ενδιαφέρον από τους ερευνητές και επεκτείνεται ως προς τις απαιτούμενες δεξιότητες, θεωρείται δε ουσιώδης για τον 21^{ο} αιώνα (Avgerinou, 2009, Bleed, 2008, Bamford, 2003).

1.2 Στοιχεία οπτικής προσέγγισης στην εξέλιξη των Μαθηματικών

Η οπτική προσέγγιση διαδραμάτισε σημαντικό και ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη και εξέλιξη των Μαθηματικών. Η συνεισφορά αυτή είναι φυσική, αφού η δομή της ανθρώπινης γνώσης διέπεται ισχυρά από οπτικά, διαισθητικά, συμβολικά και αναπαραστατικά στοιχεία, ενώ ο προορισμός των Μαθηματικών είναι να αποκτήσουμε μία εικόνα, όσο ακριβέστερη γίνεται, του κόσμου γύρω μας (Bamford, 2003).

Οι πρώτοι Πυθαγόρειοι μελετούσαν τους αριθμούς και τις μεταξύ τους σχέσεις με τη βοήθεια ψηφίδων, δηλαδή μικρών χαλικιών (calculi στα Λατινικά). Η οπτικοποίηση για αυτούς ήταν σύμφυτη με την άσκηση των Μαθηματικών. Στον Πλάτωνα, τονίζεται ο ιδιαίτερος ρόλος της εικόνας σε μία μαθηματική κατασκευή. Η εικόνα προκαλεί την ιδέα όπως η σκιά επικαλείται την πραγματικότητα. Το σχέδιο ενός κύκλου δεν είναι η πραγματικότητα. Η πραγματικότητα είναι η ιδέα του κύκλου, αλλά η εικόνα παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο ως επικλητικό στοιχείο της ιδέας. Η μηχανική μέθοδος που εφάρμοζε ο Αρχιμήδης στους υπολογισμούς του, προκειμένου να υπολογίσει τον όγκο της σφαίρας, είναι ένα είδος οπτικοποίησης (Guzman, 2002).

Ο Καρτέσιος, υπογράμμιζε ιδιαίτερα τους διαφορετικούς ρόλους των εικόνων και των σχημάτων στη μαθηματική σκέψη. Η ιδέα που τον οδήγησε στην ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας προέκυψε ως μία προσπάθεια συνδυασμού των γεωμετρικών εικόνων των αρχαίων Ελλήνων και της άλγεβρας, που στις μέρες του είχε ήδη αποκτήσει τη δομή της. Ο Λογισμός του 17^{ου} αιώνα είχε έντονα οπτικά συστατικά, και κατά τη δημιουργία του, αλλά και στους πρώτους αιώνες της ανάπτυξης του. Βρισκόταν δε σε μια συνεχή αλληλεπίδραση με προβλήματα από τη Γεωμετρία και τη Φυσική. Κατά το 17^{ο} – 19^{ο} αιώνα η οπτικοποίηση απετέλεσε μία τεχνική γενικά χρησιμοποιούμενη από τους πιο δημιουργικούς μαθηματικούς όλων των εποχών.

Ο Λογισμός του 17^{ου} αιώνα εντούτοις, ανέγειρε αμφιβολίες και σύγχυση μέχρι την αριθμητικοποίηση της Ανάλυσης στα τέλη του 19^{ο} αιώνα. Ο Απειροστικός Λογισμός εκείνης της εποχής βασιζόταν στην έννοια της απειροστής ποσότητας, μια

έννοια που ήταν αιωρούμενη στα όρια της ύπαρξης και της ανυπαρξίας. Στο τέλος του 18ου αιώνα είχε σχηματιστεί ένας τεράστιος αριθμός από τύπους με αμφισβητούμενα θεωρήματα και εντελώς ασαφές πεδίο εφαρμογής. Άρχισε τότε να υποβόσκει η ανάγκη να υποβληθούν όλες οι έννοιες σε σκληρή κριτική. Μέσα από τα παράδοξα και τις αντιδικίες, έγινε φανερό ότι υπήρχαν κενά στις θεμελιώσεις. Η χρήση των σειρών, δίχως τη διερεύνηση της σύγκλισης ή της απόκλισής τους, και η αμφισβήτηση που υπήρχε για τις αναπαραστάσεις συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές, είχαν ως αποτέλεσμα την περαιτέρω σύγχυση. Επιπλέον υπήρχαν θεμελιώδεις έννοιες όπως αυτές της παραγώγου και του ολοκληρώματος, που εξακολουθούσαν να παραμένουν δίχως ένα κατάλληλο ορισμό. Όλες αυτές οι δυσκολίες προξένησαν τελικά μία δυσαρέσκεια και μια αμφισβήτηση για το λογικό υπόβαθρο του νέου λογισμού (Γιαννακούλιας, 2007).

Η ανακάλυψη των μη Ευκλειδείων γεωμετριών στα μέσα του 19ου αιώνα, έκανε πολλούς μαθηματικούς να είναι πολύ επιφυλακτικοί με τη διαίσθηση στα Μαθηματικά. Οι προσπάθειες προς την αυστηρότητα οδήγησαν σε γνωστικές συγκρούσεις παρόμοιου τύπου. Φαινόταν, για παράδειγμα, αυτονόητο ότι κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον σε ένα σημείο. Ο Weierstrass όμως έδειξε ότι δεν είναι έτσι, δίνοντας ένα παράδειγμα συνάρτησης που δε δέχεται καθόλου εφαπτόμενες σε κανένα από τα σημεία της. Ως το 19ο αιώνα η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν η αδιαμφισβήτητη γεωμετρία, βασισμένη στα θεμέλια των αυτονόητων αξιωμάτων. Οι Lobachevsky, Bolyai, Riemann έδειξαν ότι μπορεί και άλλες γεωμετρίες να είναι το ίδιο λογικά δυνατές. Αυτές οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες συγκρούονται με τη φυσιολογική, προφανή, αυτονόητη, νοητική εικόνα που έχουμε για τον πραγματικό κόσμο και τις χωρικές του ιδιότητες. Μέχρι το 19ο αιώνα η έννοια του πραγματικού απείρου είχε εξαιρεθεί από τα Μαθηματικά διότι κάποιος εύκολα θα μπορούσε να αποδείξει ότι οδηγεί σε αντιφάσεις. Ο Cantor με τα διαγώνια επιχειρήματά του έδειξε ότι το πραγματικό άπειρο θα πρέπει να γίνει δεκτό στα Μαθηματικά ως μη αντιφατική έννοια. Όμως αυτή η τυπικά μη αντιφατική έννοια του απείρου, συγκρούεται με τις φυσικές, αυθόρμητες ερμηνείες μας για παράδειγμα τη θεώρηση ότι το μέρος είναι μικρότερο του όλου. Η αρχική αντιπαράθεση στη συνολοθεωρία του Cantor σε συνδυασμό με την εμφάνιση των παραδόξων γύρω από τα θεμέλια των Μαθηματικών, οδήγησαν πολλούς μαθηματικούς στο να δίνουν έμφαση στην τυπική μορφή της δομής των

Μαθηματικών. Αποτελέσματα ψευδώς ή ημιτελώς αποδεδειγμένα (όπως το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων ή το θεώρημα κλειστών καμπύλων του Jordan) που βασίστηκαν σε διαισθητικά στοιχεία, συνεισέφεραν σε μια πιο αυστηρή στάση απέναντι στις διαισθητικές αποδείξεις (Fischbein, 1999).

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα οι Dedekind, Weierstrass και Bolzano συνειδητοποίησαν ότι οι αναφορές στη Γεωμετρία έπρεπε να εξαλειφθούν, καθώς ο Απειροστικός Λογισμός είχε υπερβεί το γεωμετρικό του ξεκίνημα. Οι πιο ενδιαφέρουσες ελλείψεις είχαν εντοπιστεί καταρχήν στην αναγκαιότητα ενός λογικού ορισμού του ορίου και κατόπιν στην επίτευξη κριτηρίων για τη σύγκλιση των σειρών. Πίσω όμως από όλα αυτά υπέβοσκε η ανάγκη της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών. Ο Dedekind προκειμένου να ορίσει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ανέλυσε την έννοια της συνέχειας (ή της πληρότητας) των πραγματικών αριθμών, έτσι ώστε αυτή να εκφραστεί αριθμητικά και να αποφευχθεί η παράκαμψη στη Γεωμετρία. Για να ορίσει τους άρρητους, χρειάστηκε να καταφύγει σε ένα διαισθητικό συλλογισμό. Φαντάστηκε την ευθεία των αριθμών σαν ένα στερεό σωλήνα απείρου μήκους γεμάτο με διατεταγμένους ρητούς αριθμούς. Κάθε τομή του σωλήνα δίνει δύο τμήματα Α, Β και μας αποκαλύπτει δύο διατομές στα άκρα των συνόλων Α και Β. Κοιτάζοντας τις εκτεθειμένες αυτές πλευρές μπορεί κανείς να διαβάσει τους αριθμούς που μας δείχνουν. Αν δε μας δείχνουν αριθμό, τότε η τομή έχει γίνει σε έναν άρρητο. Στη συνέχεια, όρισε το σύνολο των πραγματικών αριθμών σε αυστηρή, μαθηματική μορφή, καθιερώνοντας έτσι, μαζί με τον Weierstrass, την αριθμητική ως γλώσσα των αυστηρών Μαθηματικών και παραμερίζοντας τόσο τη Γεωμετρία, όσο και την Άλγεβρα (Γιαννακούλιας, 2007).

Η συστηματική προσπάθεια για συνέπεια και αυστηρότητα, ειδικά κατά το 19^{ο} και 20^{ο} αιώνα, ανέδειξε την αντίφαση μεταξύ των τυπικών Μαθηματικών και της διαίσθησης. Το πρόβλημα της διαισθητικής γνώσης, έγινε θεμελιώδης πτυχή κάθε επιστημονικής προσπάθειας. Οι επιστήμονες χρειάζονταν τη διαίσθηση στις προσπάθειές τους να ανακαλύψουν νέες στρατηγικές, νέα θεωρητικά και πειραματικά μοντέλα. Από την άλλη μεριά έπρεπε να είναι προσεκτικοί αφού η διαίσθηση δεν εγγυάται την αντικειμενική αλήθεια. Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg όμως, υπονοεί ότι τα δεδομένα μιας παρατήρησης δεν μπορεί να είναι ποτέ αντικειμενικά, αλλά επηρεάζονται από τη διαδικασία παρατήρησης (Guzman, 2002). Φαίνεται

δηλαδή, ότι τα αντικειμενικά γεγονότα και οι διαισθητικές ερμηνείες δεν είναι πάντοτε απολύτως διακριτά.

Όλα αυτά τα γεγονότα δημιούργησαν μια φορμαλιστική τάση όχι μόνο σε ότι αφορά στα θεμέλια των Μαθηματικών, αλλά και σε ότι αφορά στην επικοινωνία εντός της μαθηματικής κοινότητας, καθώς και στη γενικότερη στάση απέναντι στη διδασκαλία και στη μάθηση των Μαθηματικών. Οι συνέπειες για την οπτικοποίηση ήταν σημαντικές. Περιβλήθηκε από μία ατμόσφαιρα δυσπιστίας, ενώ πολλοί μαθηματικοί πρότειναν να εγκαταλειφθεί. Η επιρροή του φορμαλισμού δεν περιορίστηκε μόνο στην παρουσίαση των νέων μαθηματικών αποτελεσμάτων κατά τη δημοσίευσή τους, όπου ήταν απαράβατος κανόνας, αλλά και στη δομή των πανεπιστημιακών εγχειριδίων. Με την κίνηση των «μοντέρνων μαθηματικών», ακόμα και τα εγχειρίδια της μέσης εκπαίδευσης, αλλά και η διδασκαλία έτειναν να προσαρμοστούν σε αυτά τα φορμαλιστικά πρότυπα.

Τα τελευταία χρόνια, αναδεικνύεται μια τάση ανανέωσης της επιρροής της οπτικοποίησης στη μαθηματική δραστηριότητα, διδασκαλία, μάθηση και έρευνα, προερχόμενη κυρίως από το χώρο των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το «σχεδίασε ένα σχήμα» είναι η κλασσική παιδαγωγική συμβουλή του Polya και η άποψη των Einstein και Poincare, ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιούμε την οπτική μας διαίσθηση, είναι πολύ γνωστή. Ο Paul Halmos μιλώντας για τον Solomon Lefschetz (εκδότη των Annals) δηλώνει: «Έβλεπε τα Μαθηματικά όχι ως λογική, αλλά ως εικόνες». Μιλώντας για το τι χρειάζεται για να γίνει κάποιος μαθηματικός σημειώνει: «Για να γίνεις ένας σοφός μαθηματικός πρέπει να έχεις την ικανότητα να οπτικοποιείς» και οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να αναπτύξουν την ικανότητα αυτή στους μαθητές τους (Nelsen, 1993).

1.3 Οπτικός εγγραμματισμός και Μαθηματική Εκπαίδευση

Η κουλτούρα της εποχής μας βασίζεται, ολοένα και περισσότερο, σε οπτικά στοιχεία, κυρίως λόγω της ιδιότητάς τους να επικοινωνούν άμεσα και σε διεθνές επίπεδο (Bamford, 2003). Η παρουσία οπτικών στοιχείων στη διδασκαλία και στη μάθηση αυξάνεται, καθώς διευρύνεται η ενσωμάτωση εικόνων και οπτικών παραστάσεων στα κείμενα των εκπαιδευτικών εγχειριδίων, στις πρακτικές της τάξης,

στην επιφάνεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών (Stokes 2002). Υπάρχει μία εκτενής βιβλιογραφία σχετικά με τις εφαρμογές των δεξιοτήτων του οπτικού εγγραμματισμού με σκοπό τη βελτίωση της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας (McLoughlin & Krakowski, 2001). Παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών αποτελούν η χαρτογράφηση εννοιών ως μαθησιακή στρατηγική ή η χρήση δυναμικού υποστηρικτικού περιβάλλοντος με τη βοήθεια ηλεκτρονικών πολυμέσων. Ο οπτικός εγγραμματισμός παρουσιάζεται ως μία στοχαστική και υποστηρικτική μορφή κατανόησης, θεωρείται δε αποφασιστικής σημασίας για την απόκτηση πληροφοριών, την κατασκευή γνώσης και την οικοδόμηση επιτυχών εκπαιδευτικών αποτελεσμάτων (Bamford, 2003).

Ο οπτικός εγγραμματισμός, όπως και ο γλωσσικός εγγραμματισμός, ως ένα νέο είδος γλώσσας, θεωρείται πολιτιστικά προσδιορισμένος (Stokes, 2002). Όπως και άλλες γνωστικές ικανότητες, ο σχηματισμός μιας νοητικής εικόνας και οι ερμηνευτικές δεξιότητες αναπτύσσονται γιατί ανταποκρίνονται σε μία αντίστοιχη ανάγκη στα πλαίσια ενός πολιτισμού (Ausburn & Ausburn, 1994) που μπορεί να είναι και ο πολιτισμός μιας σχολικής τάξης. Ένα οπτικά εγγράμματο άτομο θα πρέπει να είναι σε θέση να γράφει και να διαβάζει την οπτική γλώσσα, δηλαδή να αποκωδικοποιεί επιτυχώς και να ερμηνεύει οπτικά μηνύματα όπως και να κωδικοποιεί και να συνθέτει με νόημα, μορφές οπτικής επικοινωνίας (Bamford, 2003). Τέτοιες μορφές οπτικής επικοινωνίας είναι τα σημεία (στη βιβλιογραφία του οπτικού εγγραμματισμού δε γίνεται σαφής διάκριση των όρων σημείο, σημάδι και σήμα) και τα σύμβολα. Είναι γνωστή η έκφραση: «Μία εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις». Στις μελέτες που αναφέρονται στην οπτική μόρφωση όμως οι ερευνητές είναι πολύ προσεκτικοί. Τονίζουν ότι όταν τα οπτικά σύμβολα αντικαθιστούν τις λέξεις για να εκφράσουν μια ιδέα σε ένα οπτικό μήνυμα, είναι απαραίτητο αυτός που βλέπει το μήνυμα, να είναι σε θέση να το κατανοήσει.

Από την άλλη μεριά, η εξέλιξη της έρευνας και των μελετών στη Μαθηματική Εκπαίδευση αποτελεί πλούσια πηγή πληροφοριών τόσο για θεωρητικά όσο και για πρακτικά ζητήματα που σχετίζονται με την οπτική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών (Presmeg, 2006, Hoffmann, 2006, Dreyfus, 1991, Fischbein, 1999, Duval, 1999, Arcavi, 2003, Zimmermann & Cunningham, 1991, Davis, 1993, Dreyfus & Eisenberg, 1990, Guzman, 2002 και άλλοι). Στις μελέτες αυτές ερευνώνται ποιοτικά και αναπτύσσονται, με διάφορους θεωρητικούς φακούς,

αρκετές από τις πτυχές της έννοιας του οπτικού εγγραμματισμού, όπως είναι η γνώση του οπτικού λεξιλογίου και των οπτικών συμβάσεων, η οπτική σκέψη, ο οπτικός συλλογισμός, η οπτικοποίηση, η οπτική διάκριση, η οπτική σύνδεση. Οι έρευνες στην περιοχή αυτή είναι κατά κύριο λόγο ποιοτικές αφού, πως σημειώνει η Presmeg (2006) σε μία ανασκόπηση των ερευνών για την οπτικοποίηση στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, η ποιοτική έρευνα μπορεί να διερευνήσει το κατά τα άλλα απροσέγγιστο πεδίο των διανοητικών εικόνων και όλων των αντίστοιχων μορφών έκφρασης. Σημείο σύγκλισης των ερευνών είναι η κρίσιμη σημασία της οπτικής προσέγγισης στη μάθηση των Μαθηματικών μέσα από αυτές τις πτυχές. Επίσης, οι έρευνες διαπιστώνουν τις δυσκολίες κάθε μίας από τις πτυχές αλλά καταλήγουν ομόφωνα στην παραδοχή ότι οι δυσκολίες αυτές μπορούν να ξεπεραστούν με κατάλληλη εκπαίδευση των μαθητών και την προϋπόθεση ότι οι εκπαιδευτικοί είναι συνειδητοποιημένοι σε αυτά τα θέματα. Κάποιες μελέτες (Guzman, 2002), θεωρούν ότι πολλοί μαθηματικοί δεν είναι σε θέση να μεταδώσουν εκπαίδευση στους μαθητές στις πτυχές αυτές (ώστε να είναι οπτικά εγγράμματοι) διότι δεν έχουν επίγνωση των συμβάσεων και της οικειότητας με συγκεκριμένους κώδικες, που αυτή η εκπαίδευση απαιτεί. Άλλες έρευνες (Presmeg, 1986) προτείνουν, ένα πρόγραμμα εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών στην οπτική προσέγγιση και το ρόλο της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ο τρόπος σκέψης που προωθείται συστηματικά από την εκπαίδευση είναι αυτός που βασίζεται στη γραμμική, λογική σκέψη και στην ανάκληση πληροφοριών. Τα εκπαιδευτικά συστήματα, κατά τους McLoughlin & Krakowski (2001), τείνουν να δίνουν έμφαση στη λεκτική, συμβολική σκέψη. Ένας τέτοιος τρόπος σκέψης, αποτυγχάνει να αναδείξει τις πλήρεις δυνατότητες σημαντικών δεξιοτήτων όπως είναι η δημιουργική σκέψη και η επίλυση προβλήματος (Avgerinou, 2009). Οι Avgerinou and Ericson (1997), αναφέρονται σε έρευνες που καταδεικνύουν ότι οι άνθρωποι βασίζονται και αναπτύσσουν συνήθως τις λειτουργίες του αριστερού εγκεφαλικού ημισφαιρίου, που σχετίζεται με γλωσσικές, αναλυτικές, σειριακές, συμβολικές και λογικές διαδικασίες, όπως αυτές που καλλιεργούνται και αναπτύσσονται από τα εκπαιδευτικά συστήματα. Σημειώνουν, ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αποκτήσουν επίγνωση της σημασίας του δεξιού εγκεφαλικού ημισφαιρίου στη μαθησιακή διαδικασία. Το δεξιό εγκεφαλικό ημισφαίριο σχετίζεται με χωρικές και σχηματικές, συνθετικές, ταυτόχρονες, ολιστικές και διαισθητικές διαδικασίες που αποτελούν

κάποιες από τις θεωρητικές πτυχές της έννοιας του οπτικού εγγραμματισμού. Στη βιβλιογραφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης η ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των μαθητών συνδέεται κυρίως με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, ενώ η συνθετική σκέψη, ο ρόλος της διαίσθησης στα Μαθηματικά και η επίλυση προβλήματος αποτελούν αντικείμενα μελέτης και έρευνας. Η έννοια του οπτικού εγγραμματισμού περιλαμβάνει την επίλυση προβλήματος και την κριτική σκέψη που μπορούν να εφαρμοστούν σε όλες τις περιοχές της μάθησης (Bamford, 2003) και έχουν ιδιαίτερη βαρύτητα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση.

Η Bamford (2003), προτείνει τον οπτικό εγγραμματισμό ως κεντρικό σημείο των Αναλυτικών Προγραμμάτων για λόγους ισότητας, σημειώνοντας την ποικιλία των μαθησιακών στυλ των σπουδαστών, καθώς και την ανάγκη προσέγγισης εκείνων που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθηση μέσω των παραδοσιακών μεθόδων. Με τον όρο μαθησιακό ή γνωστικό στυλ ενός ατόμου η Stokes (2002) αναφέρεται στη συνεπή και χαρακτηριστική προδιάθεση του ατόμου να αντιλαμβάνεται, να θυμάται, να οργανώνει, να σκέφτεται και να επιλύει προβλήματα, σημειώνει δε ότι το μαθησιακό στυλ είναι ένας σημαντικός παράγοντας διαφοροποίησης των σπουδαστών. Στη βιβλιογραφία, επισημαίνεται επίσης η ανάγκη να ενσωματωθεί ο οπτικός εγγραμματισμός στα Αναλυτικά Προγράμματα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης με αναφορές στη σημασία της έννοιας στη σημερινή, κυριαρχούμενη από εικόνες, εποχή (Bleed, 2008).

Έρευνες (Bleed, 2008, Stokes, 2002) τονίζουν τη σημασία να ενσωματωθεί επίσης ο οπτικός εγγραμματισμός σε προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών, ειδικά αυτών που βρίσκονται στην αρχή της θητείας τους οπότε ακόμα αναπτύσσουν τις παιδαγωγικές τους μεθόδους. Από την πλευρά της Διδακτικής των Μαθηματικών, η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στην οπτική προσέγγιση των Μαθηματικών, μπορεί να αποτελέσει για αυτούς πολύτιμο εργαλείο στο σχεδιασμό και τη διεξαγωγή του μαθήματος ως πλούσια πηγή αντιπαραδειγμάτων και τρόπων παρουσίασης εννοιών σε διαισθητικό επίπεδο. Μπορεί επίσης να τους ενημερώσει, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των σχετικών ερευνών, τόσο για τις δυσκολίες που έχει μία οπτική προσέγγιση της διδασκαλίας για τους μαθητές, όσο και για τα σοβαρά πλεονεκτήματα μιας τέτοιας προσέγγισης. Μία σημαντική επίπτωση, για παράδειγμα, όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια, για τους μαθητές που τελειώνουν τη δευτεροβάθμια

εκπαίδευση και είναι οπτικά μορφωμένοι στα Μαθηματικά, είναι η ομαλή μετάβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Christou, Pitta-Pantazi, Souyoul & Zachariades, 2005).

Οι McLoughlin & Krakowski (2001), στην περιοχή του οπτικού εγγραμματισμού, εξετάζουν τις διαφορές ανάμεσα στις λεκτικές και οπτικές αναπαραστάσεις παρουσιάζοντας τον ακόλουθο πίνακα:

Λεκτική αναπαράσταση	**Οπτική αναπαράσταση**
Αντικατοπτρίζει χρονικές και λογικές σχέσεις μεταξύ συμβάντων και αντικειμένων	Απεικονίζει χωρικές, λογικές και τυπογραφικές σχέσεις μεταξύ συμβάντων και αντικειμένων
Αυθαίρετη και σειριακή, δηλαδή βασισμένη στη σημασιολογική συνοχή	Μη αυθαίρετη: μπορεί να προσομοιάσει πραγματικά αντικείμενα και συμβάντα
Γραμμική, μονοδιάστατη έκθεση των ιδεών	Δυναμική και συνεχής, μπορεί να χαρακτηρίσει πολλαπλές πτυχές των ιδεών και των εννοιών

Με βάση την διάκριση αυτή λεκτικών και οπτικών αναπαραστάσεων, οι McLoughlin & Krakowski, επιχειρηματολογούν για τη δυνατότητα των οπτικών αναπαραστάσεων να υποστηρίζουν τη μάθηση και την κατανόηση, επιδεικνύοντας πολλαπλές οπτικές και εμπλέκοντας τους σπουδαστές σε δυναμικούς, μη γραμμικούς τρόπους σκέψης. Στο ίδιο πνεύμα, η Avgerinou (2009) υπογραμμίζει την ανάγκη για μια περισσότερο ολιστική αντίληψη της μάθησης και προτρέπει τους εκπαιδευτικούς να αναγνωρίσουν ότι, όλες οι διδακτικές και μαθησιακές εμπειρίες εμπεριέχουν επικοινωνιακά στοιχεία και επομένως η επικοινωνία δεν μπορεί πλέον να περιορίζεται στο γραπτό και προφορικό λόγο.

Οι μαθηματικές ιδέες, έννοιες και μέθοδοι είναι πλούσιες σε οπτικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές αναπαρίστανται με ποικίλους τρόπους και η χρήση των αναπαραστάσεων επιφέρει πολλά πλεονεκτήματα όσον αφορά την παρουσίασή τους σε τρίτους, το χειρισμό τους στην επίλυση προβλημάτων, και τη διεξαγωγή έρευνας

στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τα Πρότυπα που θέτει το NCTM για τα σχολικά Μαθηματικά (NCTM, 2000), οι αναπαραστάσεις είναι απαραίτητες για να κατανοήσουν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, ενώ οι μαθητές στις τελευταίες βαθμίδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα πρέπει ήδη να είναι έμπειροι στο να οπτικοποιούν. Κάποιες μορφές αναπαραστάσεων όπως τα διαγράμματα, τα γραφήματα συναρτήσεων, διάφορες συμβολικές εκφράσεις, αποτελούσαν και στο παρελθόν και συνεχίζουν να αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των σχολικών Μαθηματικών. Η διδασκαλία όμως και η μάθηση αυτών καθώς και άλλων αναπαραστάσεων, δυστυχώς πραγματοποιείται ως αυτοσκοπός όπως σημειώνεται στη διακήρυξη των Αρχών του NCTM η οποία επισημαίνει ότι, αυτή η προσέγγιση περιορίζει τη δύναμη και τη χρησιμότητα των αναπαραστάσεων ως εργαλείων μάθησης και πράξης των Μαθηματικών. Τονίζει επίσης τη σημασία της ενθάρρυνσης των μαθητών να αναπαριστούν τις μαθηματικές τους ιδέες με τρόπους που έχουν νόημα για τους ίδιους, ακόμα και αν οι προκύπτουσες αναπαραστάσεις δεν εμπίπτουν στις συμβατικές μορφές αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να επιδιώκεται και η μάθηση των συμβατικών αυτών μορφών με τρόπους όμως που διευκολύνουν τους μαθητές στη μάθηση των Μαθηματικών και στην επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών με τους συμμαθητές τους. Τέλος, η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση ενισχύει την ανάγκη των μαθητών να έχουν άνεση με νέες μαθηματικές αναπαραστάσεις.

Τα Πρότυπα που τίθενται από έγκυρους διεθνείς οργανισμούς αποτελούν δηλώσεις σχετικά με το τι έχει αξία να διδαχθεί και είναι ανοιχτά σε προσωπικές ερμηνείες, η έρευνα δε, μπορεί να ενημερώσει το δημόσιο διάλογο στην αποτίμηση αυτή, αναφέρουν οι Sriraman & Pizzulli (2005). Οι ίδιοι ερευνητές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι ο σχεδιασμός ενός μαθήματος που εξισορροπεί Πρότυπα όπως αυτά του NCTM με την έρευνα στη Μαθηματική Εκπαίδευση δεν είναι εύκολος στόχος. Περιλαμβάνει εντατικό σχεδιασμό, αποτελεί μεγάλη δέσμευση για τον εκπαιδευτικό ενώ απαιτεί ταυτόχρονα από τον ίδιο συνεχή αναστοχασμό, και τέλος αντανακλά τις προσωπικές του πεποιθήσεις σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Οι Potari, Sakonidis, Philippou & Kynigos (2009), σε μία ανασκόπηση της έρευνας στη Μαθηματική Εκπαίδευση που έχει διεξαχθεί στην Ελλάδα και στην Κύπρο, προσδιορίζουν, στον ελληνικό εκπαιδευτικό χώρο, εμπόδια στην εφαρμογή διδακτικών πρακτικών ενημερωμένων από τις έρευνες. Είναι φανερό,

ότι η ενσωμάτωση των αποτελεσμάτων της έρευνας στην καθημερινή πρακτική της τάξης των Μαθηματικών είναι ένα διαρκές ζητούμενο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Στο ίδιο πνεύμα, ζητούμενο και αφετηρία ερευνητικού προβληματισμού θα μπορούσε να αποτελέσει ο τρόπος πρακτικής εφαρμογής των στοιχείων που προκύπτουν από το συνδυασμό πτυχών των θεωρητικών κατασκευών της περιοχής του οπτικού εγγραμματισμού και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και αναπτύσσονται στη βιβλιογραφία. Οι δεξιότητες που καθιστούν ένα άτομο οπτικά εγγράμματο και στις οποίες οι σχετικές έρευνες φαίνεται να συγκλίνουν περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων τη γνώση του οπτικού λεξιλογίου, τη γνώση των οπτικών συμβάσεων, την οπτική σκέψη, την οπτικοποίηση, τον οπτικό συλλογισμό, την οπτική διάκριση και την οπτική σύνδεση. Στη Μαθηματική Εκπαίδευση οι ίδιες δεξιότητες, όχι πάντοτε ορισμένες με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, έχουν μελετηθεί αναλυτικά, και κατέχουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση των Μαθηματικών. Ο ρόλος αυτός διευκρινίζεται στη συνέχεια με τη βοήθεια της βιβλιογραφίας.

1.3.1 Η γνώση του οπτικού λεξιλογίου

Στα Μαθηματικά υπάρχει σαφώς οπτική γλώσσα που συνίσταται από τις οπτικές εικόνες. Για το Fischbein (1977), τα διαγράμματα Venn, τα δενδροδιαγράμματα και οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων είναι οπτικές εικόνες που βασίζονται σε συγκεκριμένα εννοιολογικά δίκτυα. Κάθε μία από αυτές είναι εννοιολογικοποιημένη εικόνα που ελέγχεται από αφηρημένα νοήματα. Πρόκειται για εικονογραφικές αναπαραστάσεις εννοιολογικών οντοτήτων και λειτουργιών. Ο Fischbein υποστηρίζει ότι οι οπτικές εικόνες συνιστούν γλώσσα, διότι τα νοήματά τους είναι, περισσότερο ή λιγότερο, καθορισμένα μέσω συμβάσεων, καθώς και διότι έχουν τη δυνατότητα να εκφράζουν μία άπειρη ποικιλία ιδεών χρησιμοποιώντας περιορισμένο αριθμό στοιχείων και κανόνων συνδυασμού. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση και το γράφημά της. Αρχίζουμε παρατηρώντας μία φυσική εξάρτηση κάποιων τιμών. Καταγράφουμε τα ζεύγη των τιμών και ψάχνουμε για ένα γράφημα που να ταιριάζει καλύτερα στα αντίστοιχα σημεία. Τέλος, ψάχνουμε την εξίσωση του γραφήματος. Σε αυτή την περίπτωση η εικόνα, δηλαδή το γράφημα, έχει κατασκευαστεί σε μία πλήρη και σαφώς καθορισμένη εννοιολογική σύνθεση (η κατασκευή αυτή είναι παράδειγμα στο οποίο η οπτική εικόνα προηγείται της αναλυτικής έκφρασης). Τα σημεία, είναι τα σύμβολα των αριθμητικών ζευγών που

προέκυψαν από την αρχική εξάρτηση. Ο μαθητής τώρα θα πρέπει να μάθει τη γλώσσα της οπτικής εικόνας μέσω της γλώσσας των συντεταγμένων.

1.3.2 Η γνώση των οπτικών συμβάσεων

Η αυξανόμενη επίγνωση ότι ζούμε σε ένα κόσμο σημείων και τεχνουργημάτων, ότι ο τρόπος που εκφραζόμαστε, αντιλαμβανόμαστε και δρούμε σ' ένα τέτοιο κόσμο σχετίζεται βαθιά με μία εντυπωσιακή ποικιλία σημείων και σημειωτικών συστημάτων συμπεριλαμβανομένης και της γλώσσας, οδήγησε τα τελευταία χρόνια στην ανάπτυξη της σημειωτικής. Σημειωτική είναι η μελέτη της δραστηριότητας των σημείων (Presmeg, 2008) σε μία προσπάθεια να κατανοηθούν οι εκπληκτικά περίπλοκοι τρόποι με τους οποίους, μέσω σημειωτικών συστημάτων, τα άτομα σημαίνουν και σημαίνονται (Radford*, 2000, Schubring & Seeger, 2008). Σύγχρονες μελέτες σχετικά με τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, την οικονομία, την πολιτική, τη λογοτεχνία, τις τέχνες, την ιστορία, την ψυχολογία, την εκπαίδευση, προσφεύγουν διαρκώς στη σημειωτική (http://www.lulu.com/content/156896).

Η σημειωτική διάσταση είναι ιδιαιτέρως ουσιώδης για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στη μαθηματική εκπαίδευσή τους, τα παιδιά μαθαίνουν από την πρώτη στιγμή να λειτουργούν αποκλειστικά με σύμβολα. Μαθαίνουν επίσης, ότι ο κόσμος των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων και αντικειμένων μπορεί να αναπαρασταθεί και να κατανοηθεί με μαθηματικό τρόπο. Μαθαίνουν να αντιμετωπίζουν προβλήματα όπου υπάρχουν διαφορετικές δυνατότητες αναπαράστασης της ίδιας κατάστασης και ότι η εναλλαγή τέτοιων αναπαραστάσεων συχνά προσφέρει νέες βαθύτερες οπτικές.

---

*Σύμφωνα με τον Radford (2000) η ερώτηση «Τι αναπαριστά ένα σημείο;» αποτελεί κεντρικό προβληματισμό της σημειωτικής. Ο ίδιος, στην αναφερόμενη εργασία, καταλήγει σε μία θεωρητική μετατόπιση από το «τι αναπαριστούν τα σημεία» στο «τι μας επιτρέπουν να κάνουμε με αυτά». Η διαφορετική αυτή θεωρητική στάση αντιμετώπισης των σημείων (και των τεχνουργημάτων όπως ο άβακας), οδηγεί και σε πρακτικές επιπτώσεις κυρίως στις πιο στοιχειώδεις βαθμίδες της εκπαίδευσης, όπως το ότι δεν υφίσταται, με αυτή τη θεώρηση, η ανάγκη να εγκαταλειφθεί η χρήση χειρισμών και τεχνουργημάτων στο όνομα αποκλειστικά διανοητικών πρακτικών.

Το είδος της δημιουργικότητας που χαρακτηρίζει τα Μαθηματικά απορρέει από αυτό ακριβώς το γεγονός (Hoffmann, 2006). Η ανάγκη για σύμβολα και αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά προκύπτει από τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία είναι προσβάσιμα αποκλειστικά και μόνο μέσω σημειωτικών* αναπαραστάσεων (Duval, 1999). Με αυτή την έννοια τα Μαθηματικά, είναι μία γνήσια σημειωτική επιστήμη (Hoffmann, 2006) μία εγγενώς συμβολική δραστηριότητα (Radford et al., 2008).

Στη μαθηματική τους εκπαίδευση οι σπουδαστές μαθαίνουν από και με τα σημεία. Η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών διαμεσολαβείται απαραίτητα από σημεία (Hoffmann, 2006). Η σημειωτική, με τις έννοιες που διαθέτει, μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση των μαθηματικών διαδικασιών της σκέψης, του συμβολισμού και της επικοινωνίας που απασχολούν ουσιαστικά το πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Ο Radford (2000), βασίζει την έρευνά του στο δισυπόστατο ρόλο των σημείων ως εργαλεία που επιτρέπουν την εμπλοκή του ατόμου στη γνωστική πράξη και ως μέρη συστημάτων που υπερβαίνουν το άτομο και αντικειμενοποιούν την κοινωνική πραγματικότητα. Τα σημεία-εργαλεία με τα οποία το άτομο σκέφτεται είναι πλαισιωμένα από κοινωνικά νοήματα και κανόνες χρήσης που του παρέχουν τα κοινωνικά μέσα της σημειωτικής** αντικειμενοποίησης, με την έννοια της γνώσης που καθορίζεται από την κυρίαρχη γραμμή στην ιστορική εξέλιξη της επιστήμης (Hoffmann, 2006). Η οπτική του Radford έχει έντονα πολιτιστικά στοιχεία, όπου για τον ίδιο «πολιτισμός» είναι η μία και μοναδική ιστορία των Μαθηματικών που διδάσκονται.

---

* Στη συνέχεια στην ενότητα της οπτικοποίησης συζητάμε το νόημα που αποδίδει ο Duval στον όρο σημειωτικές αναπαραστάσεις. Στην παρούσα ενότητα η έμφαση δίνεται στον επιθετικό προσδιορισμό «σημειωτικές» και στη σημασία των αναπαραστάσεων ως μέσο πρόσβασης των μαθηματικών αντικειμένων που αιτιολογεί τη σημειωτική φύση των Μαθηματικών.

** Στην έρευνά του αυτή ο Radford δουλεύει μέσω pattern που έχουν σαν στόχο να οδηγήσουν τους μαθητές σε μαθηματικές γενικεύσεις. Ο προσδιορισμός σημειωτική είναι ισοδύναμος με τον προσδιορισμό συμβολική αφού, σε άλλο σημείο της εργασίας του σημειώνει την ισοδυναμία, για τον ίδιο, στη θεώρηση του σημείου και του συμβόλου.

Τέλος, η κοινωνική διάσταση της σημειωτικής διαδικασίας και ο κοινωνικός ρόλος των συμβόλων στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, εντοπίζεται και αναλύεται στην ανασκόπηση ερευνών του Hoffmann (2006) όπου η μαθησιακή διαδικασία στα Μαθηματικά δεν αντιμετωπίζεται μόνο ως γνωστική, αλλά και βασισμένη σε δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα στα πλαίσια κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Στην ίδια ανασκόπηση γίνεται εκτενής αναφορά στη σημειωτική του Peirce και τη συμβολή του σε επιστημολογικά προβλήματα μάθησης και επικοινωνίας των Μαθηματικών, καθώς και στην καθιέρωση ακριβούς ορολογίας με σκοπό τη συζήτηση προβλημάτων όπως το νόημα, η γνώση, η αλληλεπίδραση και η ερμηνεία στα Μαθηματικά. Οι σημειωτικές προσεγγίσεις που ασχολούνται με το ρόλο των σημείων στη Μαθηματική Εκπαίδευση, συνθέτουν έτσι ένα πλούσιο τοπίο θεωρητικών και ερευνητικών οπτικών αναφορικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Η γνώση των οπτικών συμβάσεων των μαθηματικών διαγραμμάτων και σχημάτων από τους μαθητές, είναι απαραίτητη για τη χρήση τους. Ο Dreyfus (1991), αναφέρει ότι τα διαγράμματα και τα σχήματα περιέχουν σχετικές μαθηματικές πληροφορίες σε μία μορφή καθορισμένη από συγκεκριμένους κανόνες και συμβάσεις ιδιαίτερες για κάθε τύπο διαγράμματος. Έτσι οι μαθητές που δεν είχαν την ευκαιρία να εξοικειωθούν με αυτούς τους κανόνες και τις συμβάσεις δεν έχουν πρόσβαση σε αυτά τα οπτικά μέσα. Οι Dreyfus & Eisenberg (1990), συμπεραίνουν ότι υπάρχουν πολλοί μαθητές που δε γνωρίζουν πώς να εκμεταλλευτούν ένα διάγραμμα για να λύσουν ένα πρόβλημα, ακόμα και αν το έχουν κατασκευάσει μόνοι τους. Αναφέρονται σε μελέτες που συγκρίνουν την πρόσβαση που έχει ένας μαθητής στην πληροφορία που του δίνεται για να επιλύσει ένα πρόβλημα, όταν η πληροφορία αυτή είναι σε διαγραμματική και σε προτασιακή μορφή. Το χαρακτηριστικό που διαχωρίζει τις δύο μορφές είναι ότι η διαγραμματική παρουσίαση διατηρεί ρητά τοπολογικές και γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των συστατικών του προβλήματος, σε αντίθεση με την προτασιακή μορφή, οπότε η πληροφορία είναι περισσότερο προσβάσιμη σε διαγραμματική μορφή. Όμως ένα διάγραμμα χρησιμοποιεί συμβάσεις, σύμβολα, γενικεύσεις και αφαιρέσεις σε συμπυκνωμένη μορφή. Σε μία διαγραμματική παρουσίαση τα στοιχεία και οι μεταξύ τους σχέσεις είναι ταυτόχρονα φανερά την ίδια στιγμή και για το λόγο αυτό μπορεί να είναι δύσκολο να διαβαστούν, να

απορροφηθούν και να ερμηνευτούν. Παρόλα αυτά, κατά τους Dreyfus & Eisenberg, η ικανότητα ανάγνωσης των διαγραμμάτων μαθαίνεται, αν διδαχθεί.

1.3.3. Η οπτική σκέψη

Στη βιβλιογραφία του οπτικού εγγραμματισμού (McLoughlin & Krakowski, 2001), η οπτική σκέψη είναι άμεσα συνδεδεμένη με την επίλυση προβλήματος και θεωρείται θεμελιώδες τμήμα των διαδικασιών με τις οποίες αντιλαμβανόμαστε. Σκεφτόμαστε οπτικά, για παράδειγμα, όταν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ένα διάγραμμα για να εξηγήσουμε, να τεκμηριώσουμε, να υπολογίσουμε ή να δείξουμε τα βήματα που εμπλέκονται στην πορεία εύρεσης της λύσης. Κατά τον Fischbein (1977), το ανθρώπινο μυαλό έχει τη φυσική κλίση να οπτικοποιεί τα γεγονότα. Πράγματι, σκεφτόμαστε πιο εύκολα με εικόνες γιατί είμαστε συνηθισμένοι στη σκέψη των υλικών αντικειμένων. Φαίνεται μάλιστα, να υπάρχει μία ιεράρχηση της οπτικής σκέψης και της αναλυτικής, σειριακού τύπου σκέψης με την οποία διδασκόμαστε τα Μαθηματικά στο σχολείο, με την οπτική σκέψη να βρίσκεται σε υψηλότερο γνωστικό επίπεδο από την αναλυτική σκέψη (Dreyfus & Eisenberg, 1990). Η ύπαρξη της πρώτης παρακινεί τη δεύτερη αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Παρόλα αυτά, οι Dreyfus & Eisenberg, παρατηρούν ότι οι μαθητές είναι απρόθυμοι να σκεφτούν μαθηματικές έννοιες με οπτικό τρόπο. Ο αναλυτικός, σειριακός τρόπος παρουσίασης της γνώσης στα πλαίσια του εκάστοτε εκπαιδευτικού συστήματος, ίσως έχει κάποια ευθύνη για το δισταγμό κάποιων μαθητών να σκεφτούν οπτικά.

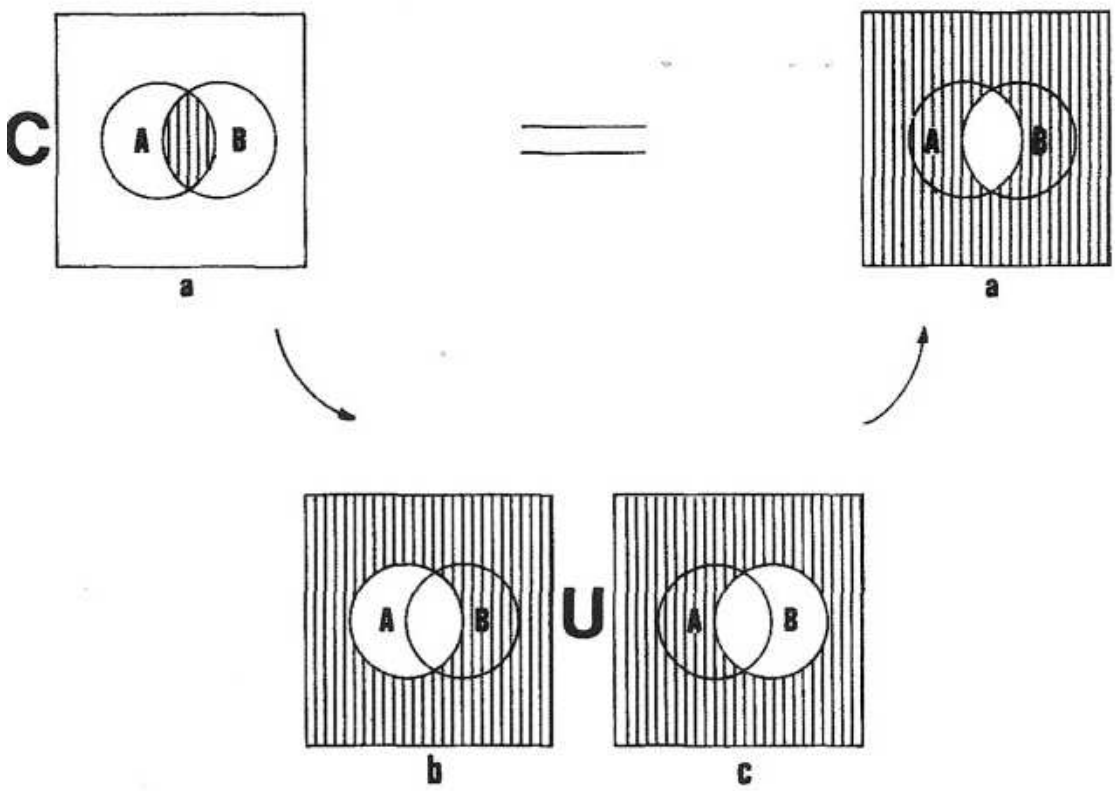
Σύμφωνα με τη θεωρία του Chevallard (1985), η γνώση υπόκειται σε μία θεμελιώδη αλλαγή όταν μετατρέπεται από ακαδημαϊκή γνώση όπως τη γνωρίζουν οι μαθηματικοί, σε εκπαιδευτική γνώση όπως διδάσκεται στο σχολείο. Η ακαδημαϊκή γνώση είναι πολύπλοκη και περιέχει πολλές συνδέσεις. Η σχολική γνώση παρουσιάζεται σειριακά, το ένα θέμα μετά το άλλο και με αυτή την αναλυτική παρουσίαση είναι πιο εύκολα απορροφήσιμη. Έτσι τα στοιχεία της ακαδημαϊκής γνώσης πρέπει να διαχωριστούν και να διαταχθούν σειριακά. Η διδακτική μετάδοση της γνώσης σημαίνει τη διαμόρφωση ενός γραμμικού κειμένου που δομεί τη γνώση δίνοντάς της μία αρχή και ένα τέλος. Ως συνέπεια, οι συνδέσεις μεταξύ εννοιών και διαδικασιών παραλείπονται ή καταστρέφονται. Σχέσεις, που αποτελούσαν τις σημαντικότερες πτυχές της μαθηματικής γνώσης, πρέπει να (ανα)κατασκευαστούν. Επιπρόσθετα, στο σχολείο, η γνώση διδάσκεται απαραίτητα αποκομμένη από το

πλαίσιό της. Όλοι αυτοί οι παράγοντες οδηγούν σε μία ισχυρή αποσματοποίηση της γνώσης: η μαθηματική γνώση διαχωρίζεται από το «σώμα της γνώσης» σε ένα μεγάλο αριθμό μεμονωμένων κομματιών γνώσης. Από τη θεωρία της διδακτικής μεταφοράς, ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της οποίας είναι η γραμμικότητα, προκύπτει μάλλον άμεσα ότι η σχολική γνώση παρουσιάζεται σειριακά. Τα Μαθηματικά γραμμικοποιούνται και αλγοριθμοποιούνται (Dreyfus & Eisenberg, 1990), έτσι παρουσιάζονται στους μαθητές, έτσι μαθαίνουν να τα προτιμούν και έτσι τα επεξεργάζονται. Δεν είναι περίεργο λοιπόν που οι μαθητές προτιμούν τον αναλυτικό τρόπο σκέψης από τον οπτικό αφού τα διαγράμματα περιέχουν πληροφορίες, ιδιαίτερα σχεσιακές, σε πολύ συμπυκνωμένη, εντοπισμένη και ισχυρά μη γραμμική μορφή.

Στα Μαθηματικά, ο Fischbein (1999), προτείνει τα διαισθητικά μοντέλα ευρετικής ικανότητας ως συστατικό της παραγωγικής σκέψης. Ένα μοντέλο με αυτό το νόημα είναι γενικά μία απλοποιημένη έκδοση του αρχικού (αρχικό ενός μοντέλου μπορεί να είναι στα Μαθηματικά, μεταξύ άλλων, μία έννοια ή ένα πρόβλημα), που επιτρέπει ένα ευκολότερο και πιο ολοκληρωμένο έλεγχο στο σύνολο των μεταβλητών. Ένα μοντέλο που είναι διαισθητικό προσφέρει στο ανθρώπινο μυαλό, που έχει την τάση να οπτικοποιεί τα γεγονότα, μία χωρική εκδοχή των σχέσεων, αλληλεπιδράσεων, κατανομών, χρονικών χαρακτηριστικών κ.λ.π. που έχουν τα γεγονότα. Ένα μοντέλο που είναι ευρετικό έχει την εξής ιδιότητα: αφού έχει μεταφραστεί ένα πρόβλημα σε συγκεκριμένους όρους του μοντέλου, μπορούμε να φθάσουμε στη λύση χρησιμοποιώντας μόνο στοιχεία και κανόνες από το μοντέλο καθαυτό. Το σύστημα των κανόνων που δίνουν τη δυνατότητα στο μοντέλο να εκφράζει δομικά και μονοσήμαντα το αρχικό αποτελούν το συντακτικό του μοντέλου. Τα στοιχεία του μοντέλου είναι ανάλογα των λέξεων και εκφράζουν καθορισμένα νοήματα μέσω σαφούς κώδικα. Οι ουσιώδεις ρόλοι ενός μοντέλου είναι α) να διευκολύνει την ερμηνεία συγκεκριμένων δεδομένων γεγονότων και β) να βοηθά στην επίλυση προβλημάτων σύμφωνα με τα αρχικά γεγονότα. Οι σχέσεις μεταξύ εικόνων και εννοιών στη χρήση των διαισθητικών μοντέλων είναι μάλλον περίπλοκες. Πρόκειται ουσιαστικά για μία μόνιμη αλληλεπίδραση. Ακόμα και το πιο πρωταρχικό μοντέλο έχει κάποια συμβολική λειτουργία, ενώ και η πιο περίπλοκη εξίσωση επάγει κάποιους διαισθητικούς συσχετισμούς. Ένα καλό ευρετικό μοντέλο είναι παραγωγικό, εσωτερικά συνεπές και εσωτερικά καλά δομημένο. Η εσωτερική

συνέπεια και δομή είναι χαρακτηριστικά απαραίτητα για την κατανόηση. Οι ιδιότητες αυτές θα αποσαφηνιστούν στη συνέχεια με συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ας θεωρήσουμε τα διαγράμματα Venn ως μοντέλο για δραστηριότητες με σύνολα. Ένας κύκλος αναπαριστά ένα σύνολο. Δύο κύκλοι μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε να τέμνονται, να μην έχουν κανένα κοινό σημείο ή ο ένας να περιέχεται στον άλλο. Έτσι λαμβάνουμε μία συνεπή τεχνική για να εκφράσουμε λειτουργίες με τα σύνολα. Πρόκειται για μία οπτική, παραγωγική τεχνική που χρησιμοποιεί σχηματική λογική. Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα A και B. Αναζητούμε το συμπληρωματικό του συνόλου A∩B (όσον αφορά ένα σύνολο M).



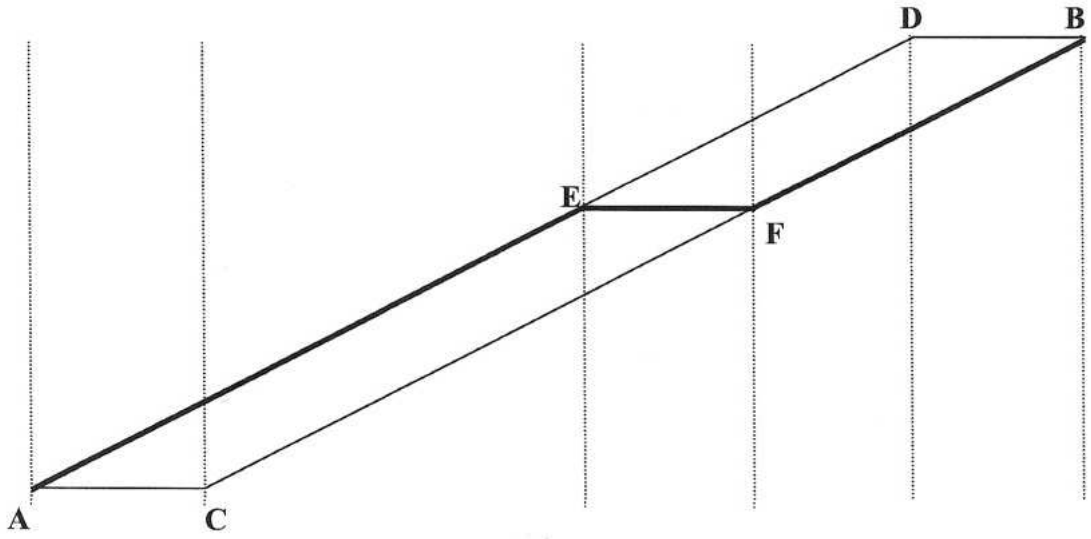
Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτει ότι το σύνολο που αναζητούμε είναι η ένωση των συμπληρωματικών των συνόλων A και B. Δηλαδή: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ που είναι ένας από τους νόμους του De Morgan. Το ουσιαστικό γεγονός είναι ότι η λύση αποκτήθηκε χρησιμοποιώντας μόνο τη σχηματική γλώσσα με ένα συνεπή τρόπο. Το μοντέλο, με ένα ελάχιστο αριθμό συμβάσεων, παρήγαγε τη λύση και όχι μόνο την περιέγραψε. Είναι δε συνεπές διότι, με τις ίδιες συμβάσεις μπορούμε να πάρουμε τη

σωστή λύση για όλες τις πιθανές ερωτήσεις της ίδιας τάξης. Το μοντέλο αυτό τέλος, μπορεί να εμπνεύσει την εφεύρεση νέων σχετικών μοντέλων προσαρμοσμένων σε νέου τύπου προβλήματα. Τι θα γίνει άραγε αν προσθέσουμε βέλη στα διαγράμματα Venn; Ένα παράδειγμα μοντέλου με εσωτερική δομή είναι η ομάδα του Klein.

Στη Μαθηματική εκπαίδευση, η Presmeg (2008), διερευνά τη δημιουργικότητα και τη λογική που προέρχεται από τη φαντασία, βασικά χαρακτηριστικά της οπτικής σκέψης και μάλιστα της οπτικής σκέψης ανώτερης τάξης (McLoughlin & Krakowski, 2001). Για την έρευνά της υιοθετεί σημειωτική θεωρητική προσέγγιση και συγκεκριμένα χρησιμοποιεί μία από τις σημειωτικές τριάδες του Peirce: την απαγωγή, την επαγωγή και το συμπέρασμα. Για τον Hadamard (1945), οι διαισθήσεις και οι εικασίες είναι κεντρικά χαρακτηριστικά της δημιουργικής σκέψης και ανιχνεύονται σε πολλές επιστημονικές εφευρέσεις. Αυτό το είδος σκέψης είναι ένα παράδειγμα απαγωγικής σκέψης. Η Presmeg αναφέρει ότι η απαγωγή είναι μία μορφή συμπεράσματος με την έννοια ότι υποδεικνύει ότι κάτι «θα μπορούσε» να συμβαίνει. Τονίζει όμως ότι η απαγωγή είναι μία μέθοδος διαμόρφωσης μιας γενικής πρόβλεψης χωρίς καμία ασφάλεια ότι η πρόβλεψη αυτή θα επαληθευθεί. Επίσης σημειώνει ότι η απαγωγική σκέψη μπορεί να προέλθει μόνο από μία στιγμή. Φαίνεται λοιπόν η απαγωγική λογική, να είναι ουσιαστικό συστατικό της δημιουργικής δουλειάς.

Το παράδειγμα από την έρευνα της Presmeg (2008) που ακολουθεί, διευκρινίζει τη σημασία της απαγωγής στην Επίλυση Προβλήματος στα Μαθηματικά. Δόθηκε ως ανοιχτό πρόβλημα σε μία τάξη η εύρεση της καλύτερης θέσης για να τοποθετηθεί μία γέφυρα, πάνω από ένα ποτάμι, ανάμεσα σε δύο πόλεις (Α και Β) , με τέτοιο τρόπο ώστε η απόσταση του δρόμου ανάμεσα στις δύο πόλεις να είναι η μικρότερη δυνατή. Πολλοί μαθητές προσάρμοσαν το πρόβλημα ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο πόλεις να είναι κάθετο στο ποτάμι, που όμως δεν αποτελεί γενική λύση. Πολλοί μαθητές ήξεραν ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των πόλεων θα έδινε τη μικρότερη απόσταση αλλά το πρόβλημα που παρέμενε ήταν ότι η γέφυρα θα έπρεπε να είναι κάθετη στις όχθες του ποταμιού. Κάποιοι μαθητές ήθελαν να την τοποθετήσουν στο μέσο της τομής αυτού του ευθυγράμμου τμήματος με τις όχθες του ποταμιού. Η ίδια η ερευνήτρια, που παρακολουθούσε, είχε την απαγωγική σκέψη ότι το σημείο τοποθέτησης θα έπρεπε να είναι όχι στη μέση, αλλά αναλογικά προς τις

αποστάσεις των πόλεων από το ποτάμι, οπότε στη συνέχεια έλυσε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα. Τότε ένας μαθητής είχε μία εξαιρετική ιδέα:



Να «μετακινήσει» το ποτάμι ώστε να είναι παρακείμενο ή στη μία ή στην άλλη πόλη, χωρίς να αλλάξει τη δομή του προβλήματος. Τα τμήματα AC και DB είναι το πλάτος του ποταμού, οι μεγάλες πλευρές του παραλληλογράμμου ACBD θα τέμνουν το ποτάμι στην τυχαία του θέση καθορίζοντας έτσι το σημείο τοποθέτησης της γέφυρας. Η απαγωγική αυτή σκέψη οδηγεί σε ακριβή γενική λύση, εντούτοις η απαγωγή χρειάζεται πάντοτε έλεγχο ως προς την εγκυρότητά της.

1.3.4 Οπτικοποίηση

Η οπτικοποίηση στα Μαθηματικά μπορεί να είναι περισσότερο ή λιγότερο συμβολική, φυσική, προσωπική ίσως και μη ανακοινώσιμη ανάλογα με το βαθμό αντιστοιχίας μεταξύ της μαθηματικής κατάστασης και της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Είναι λοιπόν λογικό να υπάρχουν διάφοροι τύποι οπτικοποίησης. Ο Guzman (2002), διακρίνει τέσσερα είδη οπτικοποίησης, με αναφορές και παραδείγματα κυρίως από την περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης. Ο κυριότερος τύπος οπτικοποίησης κατά τον Guzman είναι η ισομορφική οπτικοποίηση, όπου τα αντικείμενα έχουν μία ακριβή αντιστοιχία με τις αναπαραστάσεις τους. Αυτό σημαίνει ότι γενικά είναι δυνατόν να τεθεί ένα σύνολο κανόνων που μεταφράζουν τα στοιχεία της οπτικής μας αναπαράστασης και τις μαθηματικές σχέσεις των

αντικειμένων που αναπαριστούν. Με αυτό τον τρόπο οι οπτικοί χειρισμοί των αντικειμένων μπορούν να μετασχηματιστούν σε αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις. Το μεγαλύτερο μέρος των οπτικοποιήσεων στη Μαθηματική Ανάλυση είναι ισομορφικού τύπου και ίσως είναι αυτές που οι ειδικοί στα Μαθηματικά δέχονται και χρησιμοποιούν αφειδώς χωρίς αντιρρήσεις. Η οπτικοποίηση των πραγματικών αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή ή των μιγαδικών αριθμών με τη βοήθεια των σημείων του καρτεσιανού επιπέδου εισέβαλαν χωρίς αντίσταση στα Μαθηματικά. Στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών, ήταν το μέσο που εξασφάλισε τη γενική αποδοχή στην επέκταση του αριθμητικού συστήματος. Η μοντελοποίηση ενός μαθηματικού προβλήματος, όταν είναι δυνατή, μπορεί να είναι ισομορφική οπτικοποίηση. Άλλο παράδειγμα είναι το γράφημα μιας συνάρτησης. Η χρησιμότητα είναι προφανής αφού, ο χειρισμός των αντικειμένων που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις ή τη φαντασία μας είναι ευκολότερος και πιο άμεσος από το να χειριζόμαστε αφηρημένα αντικείμενα, συχνά περίπλοκης δομής. Η ισομορφική οπτικοποίηση με καλά καθορισμένους κανόνες κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης που κάνει ξεκάθαρο πως από την εικόνα μεταβαίνουμε στο τυπικό επιχείρημα λειτουργεί, κατά τον Guzman, πολλές φορές και ως απόδειξη.

Ο Duval (1999), θεωρεί τις αναπαραστάσεις και την οπτικοποίηση ως τον πυρήνα της κατανόησης στα Μαθηματικά δηλώνοντας: «δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς οπτικοποίηση». Αναφέρεται σε σημειωτικές αναπαραστάσεις και συστήματα αναπαραστάσεων. Τα συστήματα αναπαραστάσεων είναι σημειωτικά συστήματα που προσφέρουν συγκεκριμένα μέσα αναπαράστασης και επεξεργασίας. Για παράδειγμα η κατασκευή επίπεδων σχημάτων με γεωμετρικά όργανα, μετά σε προοπτική και μετά σε γράφημα για να «μεταφραστεί» η καμπύλη σε εξίσωση, χρησιμοποιεί κάθε φορά νέο σημειωτικό σύστημα με δικά του μέσα αναπαράστασης. Στους όρους αυτούς ο Duval αποδίδει την ευρεία έννοια των διαμεσολαβητικών δραστηριοτήτων. Τονίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα δεν πρέπει να συγχέονται με τις αναπαραστάσεις τους (για παράδειγμα τα γεωμετρικά σχήματα, ακόμα και όταν κατασκευάζονται με ακρίβεια, είναι μόνο αναπαραστάσεις με ιδιαίτερες τιμές άσχετες με το μαθηματικό αντικείμενο και δεν μπορούν να ληφθούν ως απόδειξη σε ένα ισχυρισμό). Σε αυτό το πλαίσιο, ο Duval αποσαφηνίζει ότι ο διαχωρισμός των αναπαραστάσεων σε νοητικές (εσωτερικές) και εξωτερικές αναφέρεται μόνο στον τρόπο με τον οποίο οι αναπαραστάσεις παράγονται και όχι στη φύση τους ή στη μορφή τους. Διαχωρίζει

επίσης δύο είδη γνωστικών αναπαραστάσεων: τις σκοπίμως παραγόμενες από τη χρήση σημειωτικών συστημάτων (προτάσεις, γραφήματα, διαγράμματα, σχέδια) που είναι νοητικές ή εξωτερικές, καθώς και εκείνες που παράγονται τυχαία ή αυτόματα από ένα οργανικό σύστημα ή με φυσικό τρόπο (όνειρα, φωτογραφίες, αντανακλάσεις). Τις πρώτες τις ονομάζει σημειωτικές αναπαραστάσεις, ενώ τις τελευταίες φυσικές/οργανικές αναπαραστάσεις. Επίσης διακρίνει δύο είδη μετασχηματισμών των αναπαραστάσεων. Το ένα είδος μετασχηματισμών το αποκαλεί «επεξεργασίες». Πρόκειται για τους μετασχηματισμούς που γίνονται μέσα στο ίδιο αναπαραστατικό σύστημα, όπως είναι οι αριθμητικοί και οι αλγεβρικοί υπολογισμοί. Ο όρος αυτός περιλαμβάνει και τη δημιουργία μιας νέας αναπαράστασης από μία δεδομένη. Το άλλο είδος μετασχηματισμών το αποκαλεί «μετατροπές» Πρόκειται για «μετάφραση» της αναπαράστασης ενός αντικειμένου μέσα σε ένα σύστημα, σε αναπαράσταση του ίδιου αντικειμένου μέσα σε ένα άλλο σύστημα, όπως η μετατροπή της εξίσωσης μιας συνάρτησης σε καρτεσιανό γράφημα. Ο Duval αναφέρει, ότι αν και κάποιοι μαθητές μπορούν να μάθουν κάποιες επεξεργασίες αναπαραστάσεων, πολύ λίγοι μπορούν να μετατρέπουν αναπαραστάσεις. Η μετατροπή αναπαραστάσεων μπορεί να είναι δυνατή μόνο προς τη μία κατεύθυνση, γεγονός που δημιουργεί παρανοήσεις στους μαθητές. Υπογραμμίζει ότι, από διδακτική άποψη μόνο οι μαθητές που μπορούν να μετατρέπουν αναπαραστάσεις είναι σε θέση να μη συγχέουν ένα μαθηματικό αντικείμενο με την αναπαράστασή του, καθώς και να μεταφέρουν τη μαθηματική τους γνώση σε διαφορετικά πλαίσια από αυτά που έχουν συναντήσει.

Στη βιβλιογραφία η οπτικοποίηση συνδέεται στενά με τη διαίσθηση. Ο Duval (1999), αναφέρεται στην οπτικοποίηση με την έννοια της έμφασης σε νοητικές εικόνες και της εμπειρικής διαίσθησης των φυσικών αντικειμένων και δραστηριοτήτων. Για τον όρο διαίσθηση (intuition) επικαλείται την παραδοχή της δυσκολίας του Piaget να κατανοήσει την έννοια που αποδίδουν οι μαθηματικοί στον όρο αυτό που συνδέεται στενά με τις αναπαραστάσεις και την οπτικοποίηση. Ο Fischbein (1999) αναφέρει, ότι ο όρος χρησιμοποιείται με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά πρωταρχικούς όρους όπως σημείο, γραμμή, σύνολο και ότι η κοινά αποδεκτή υπονοούμενη ιδιότητα της διαίσθησης έγκειται στο ότι αυτή είναι αυτονόητη σε αντιδιαστολή με οποιαδήποτε λογική-αναλυτική προσπάθεια. Οι Zimmermann & Cunningham (1991) στην εισαγωγή του βιβλίου τους

“Visualization in Teaching and Learning Mathematics” αναφέρουν ότι η μαθηματική οπτικοποίηση εμπεριέχει τη «διαίσθηση που μορφοποιείται μέσω των εικόνων στα μάτια του μυαλού» και ότι τα οπτικοποιημένα Μαθηματικά είναι επίσης διαισθητικά Μαθηματικά. Η μαθηματική οπτικοποίηση για τους συγγραφείς του βιβλίου επιδιώκει να κινητοποιήσει τη διαίσθηση, αλλά όχι ένα ασαφές είδος διαίσθησης, ένα επιφανειακό υποκατάστατο της κατανόησης, αλλά το είδος της διαίσθησης που «διαπερνά την καρδιά μιας ιδέας», δίνει βάθος και νόημα στην κατανόηση, αποτελεί αξιόπιστη βοήθεια στην επίλυση ενός προβλήματος και εμπνέει δημιουργικές ανακαλύψεις. Έτσι δηλώνουν, ότι ο όρος οπτικοποίηση (visualization), διαχωρίζεται από τον όρο ενόραση (vision) διότι η οπτικοποίηση υπαινίσσεται την ύπαρξη κατανόησης – και μάλιστα του είδους της κατανόησης που προέρχεται από τη «διαίσθηση που μορφοποιείται μέσω των εικόνων στα μάτια του μυαλού». Στα Μαθηματικά κάποιος μπορεί να οτικοποιήσει κάτι που δεν έχει δει και ούτε πρόκειται να δει ποτέ. Πολλοί μαθηματικοί, κατά τους Zimmermann & Cunningham, μπορούν να ανακαλέσουν την εμπειρία του να έχουν μια εικόνα που τους ήρθε αυθόρμητα στο μυαλό κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος και αυτή να είναι μια εικόνα ενός αντικειμένου ή ενός σχήματος που ποτέ δεν έχουν δει στην πραγματικότητα.

Οι ειδικοί σε συγκεκριμένα μαθηματικά πεδία κατέχουν μια ποικιλία οπτικών διανοητικών εικόνων και διαισθητικών τρόπων να αντιλαμβάνονται και να χειρίζονται τις συνηθέστερες έννοιες και μεθόδους του αντικειμένου τους. Μέσω αυτών, είναι ικανοί να συσχετίζουν με ευελιξία όλο το φάσμα των δεδομένων και αποτελεσμάτων της θεωρίας, που συχνά είναι εξαιρετικά πολύπλοκα για να τα χειριστεί κάποιος με περισσότερο αναλυτικό και λογικό τρόπο. Έτσι, εκεί που οι τρίτοι βλέπουν ένα περίπλοκο κυκεώνα δεδομένων, εκείνοι είναι σε θέση να επιλέξουν τους καταλληλότερους τρόπους αντιμετώπισης των δυσκολιών του θέματος με το οποίο ασχολούνται. Ακόμα και σε εκείνες τις μαθηματικές δραστηριότητες όπου η αφαίρεση απομακρύνει κάποιον από την άμεση οπτική αντίληψη, οι εμπειρογνώμονες μαθηματικοί πολύ συχνά χρησιμοποιούν στη δουλειά τους οπτικά διαγράμματα, συμβολικές διαδικασίες, καθώς και άλλες μορφές διαδικασιών που εμπλέκουν τη φαντασία (Guzman, 2002). Συμβαίνει όμως οι μαθηματικοί να είναι και επιφυλακτικοί στο να παρουσιάσουν τις οπτικοποιήσεις τους και τα επιχειρήματα που βασίζονται σε αυτές. Κατά τον Dreyfus (1991), κάτι τέτοιο μπορεί να συμβαίνει γιατί κάποιες φορές οι εικόνες που έχουν στο μυαλό τους

και βοηθούν τους ίδιους στη δουλειά τους δεν είναι αρκετά σαφείς ώστε να ανακοινωθούν και να απεικονιστούν στο χαρτί. Ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι τα πρότυπα για μία μαθηματική δημοσίευση που ιστορικά καθιερώθηκαν κατά τους δύο τελευταίους αιώνες και είναι βαθιά επηρεασμένα από το λογικισμό και το φορμαλισμό. Παρόλα αυτά, αν και υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθηματικοί βασίζουν τη σκέψη τους σε νοητικές εικόνες, εντούτοις χρησιμοποιούν εικόνες και οι εικόνες αυτές είναι κυρίως γεωμετρικής φύσης (Hadamard, 1945).

Το γεγονός ότι η οπτικοποίηση είναι πολύ σημαντική πτυχή των μαθηματικών είναι απολύτως φυσικό, αν λάβουμε υπόψη τη δομή του ανθρώπινου μυαλού σε συνδυασμό με το νόημα του όρου μαθηματική δραστηριότητα στα μαθηματικά. Κατά τον Guzman (2002), η μαθηματική δραστηριότητα είναι το μέσο που διαθέτει ο άνθρωπος προκειμένου να εξερευνήσει πολλές διαφορετικές δομές της πραγματικότητας που τον περιβάλει. Τις δομές αυτές μπορεί να χειριστεί δια μέσου της διαδικασίας της μαθηματικοποίησης κατά τον ακόλουθο τρόπο. Αρχικά, αντιλαμβάνεται βασικές ομοιότητες ανάμεσα σε πραγματικά αντικείμενα που τον οδηγούν στην αφαίρεση των κοινών τους στοιχείων. Τα κοινά αυτά στοιχεία που προέκυψαν μέσω αφαίρεσης, υπόκεινται στη συνέχεια σε μία ιδιαίτερη λογική και συμβολική επεξεργασία. Η επεξεργασία αυτή επιτρέπει την καλύτερη κατανόηση και τον αποτελεσματικό χειρισμό της δομής που κείται πίσω από την αρχική αντίληψη. Η αριθμητική, για παράδειγμα, προέκυψε με την πρόθεση να κυριαρχήσει λογικά ο άνθρωπος στην πολλαπλότητα όσων υπάρχουν στην πραγματικότητα. Η γεωμετρία προσπαθεί να εκλογικεύσει τις ιδιότητες της μορφής και της επέκτασης στο χώρο. Η άλγεβρα, σε μία δεύτερης τάξης αφαίρεση, εξερευνάει τις δομές πίσω από τους αριθμούς και τις σχέσεις τους και διαπραγματεύεται ένα είδος συμβόλων των συμβόλων. Η μαθηματική ανάλυση προέκυψε με σκοπό να εξερευνήσει τις δομές της αλλαγής πραγματικών μεγεθών στο χρόνο και στο χώρο. Από την άλλη μεριά, η ανθρώπινη αντίληψη είναι ισχυρά οπτική και αυτή η οπτική πτυχή εμπλέκεται σε πολλά έργα που σχετίζονται με τη μαθηματικοποίηση. Τα έργα αυτά δεν είναι μόνο τέτοια που σχετίζονται άμεσα και συγκεκριμένα με χωρικές πτυχές, όπως η γεωμετρία, αλλά και άλλα, όπως η μαθηματική ανάλυση, που προέκυψαν με σκοπό να εξερευνηθούν διαφορετικά είδη μεταβολών που εμφανίζονται στην πραγματικότητα.

Ο Duval (1999) σημειώνει ότι, η χρήση της οπτικοποίησης απαιτεί ειδική εκπαίδευση σχετικά με τον συγκεκριμένο τρόπο οπτικοποίησης κάθε αναπαραστασιακού συστήματος. Σε ότι όμως αφορά τα καρτεσιανά γραφήματα, η μάθησή τους δεν μπορεί να περιοριστεί στην εκπαίδευση αποκλειστικά της κατασκευής τους. Πράγματι, ο Duval διαχωρίζει τα γραφήματα αυτά από τις απλές εικονικές αναπαραστάσεις. Εικονικές αναπαραστάσεις θεωρεί κάποιες σημειωτικές αναπαραστάσεις όπως τα απλά σχέδια (ενός δένδρου, ενός αυτοκινήτου, ενός σπιτιού), στα οποία υπάρχει μία σχετική ομοιότητα ανάμεσα στο περιεχόμενο της αναπαράστασης και στο αναπαριστώμενο αντικείμενο, έτσι που κάποιος το αναγνωρίζει αμέσως χωρίς να χρειάζεται επιπλέον πληροφορίες. Οι εικονικές αναπαραστάσεις αναφέρονται σε μία πρότερη αντίληψη του αναπαριστώμενου αντικειμένου. Στα Μαθηματικά, η οπτικοποίηση δεν λειτουργεί με αυτόν τον τρόπο: το να κοιτάει κάποιος δεν είναι αρκετό για να δει, δηλαδή για να παρατηρήσει και να κατανοήσει τι πραγματικά αναπαρίσταται. Έτσι, ή κατασκευή ενός γραφήματος επικεντρώνεται διαδοχικά σε κάποιες ιδιότητες, ενώ η οπτικοποίηση συνίσταται στον έλεγχο ολόκληρου του σχηματισμού και στη διάκριση του τι είναι σχετικό με το εκάστοτε πρόβλημα.

Η οπτικοποίηση παρουσιάζει δυσκολίες που εντοπίζονται από τη βιβλιογραφία. Ο Arcavi (2003), στις γνωστικές δυσκολίες της οπτικοποίησης, σημειώνει ότι το να συλλογίζεται κάποιος με έννοιες σε μία οπτική σύνθεση συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν πάντα διαδικαστικά «ασφαλείς» τακτικές για να βασιστεί, όπως συμβαίνει στην περίπτωση πιο τυπικών συμβολικών προσεγγίσεων. Ο Guzman (2002), θίγει ένα θέμα πρακτικής φύσης που σχετίζεται με τα σχολικά βιβλία που διδάσκονται οι μαθητές. Η οπτικοποίηση είναι μία δυναμική διαδικασία, ενώ τα σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούν οι μαθητές βασίζονται κυρίως στο γραπτό λόγο που είναι στατικός. Ενώ στην άμεση προφορική επικοινωνία η εικόνα μορφοποιείται σταδιακά δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να σκεφτούν πάνω σε αυτή, στα βιβλία παρουσιάζεται στην τελική της μορφή, με όλα της τα στοιχεία και έτσι είναι πιο δύσκολο να ερμηνευθεί. Ο Dreyfus (1991), σε μία ανασκόπηση των μέχρι τότε μελετών αναφέρει την έλλειψη δεξιότητας των μαθητών να δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους, τη δυσκολία τους να αναγνωρίσουν τους μετασχηματισμούς που υπονοούνται σε ένα διάγραμμα, τις λανθασμένες ή ασύμβατες ερμηνείες της μεταβολής και της συμμεταβολής στα γραφήματα, την έλλειψη

διάκρισης μεταξύ ενός γεωμετρικού σχήματος και του σχεδίου που αναπαριστά το σχήμα αυτό και κυρίως την έλλειψη σύνδεσης μεταξύ οπτικοποίησης και αναλυτικής σκέψης. Οι Dreyfus & Eisenberg (1990), συμπεραίνουν ότι τα διαγράμματα είναι χρήσιμα μόνο σε εκείνους που γνωρίζουν τις κατάλληλες διαδικασίες για να επωφεληθούν από αυτά. Σε ένα διάγραμμα παρουσιάζονται ταυτόχρονα πολλές πληροφορίες. Για παράδειγμα από το γράφημα μιας συνάρτησης, μπορούμε να πάρουμε διάφορες πληροφορίες όπως για τη συνέχειά της, τη μονοτονία της, την κυρτότητά της, το εμβαδόν με τον άξονα χ΄χ. Κάποιες από αυτές τις πληροφορίες μπορεί να χρησιμεύσουν στη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος και κάποιες όχι. Έτσι, αν και ο μαθητής έχει πολλά στοιχεία στη διάθεσή του, μπορεί να είναι δύσκολο γι' αυτόν να εστιάσει γρήγορα στις πληροφορίες που είναι σχετικές με το πρόβλημα, αγνοώντας τις υπόλοιπες.

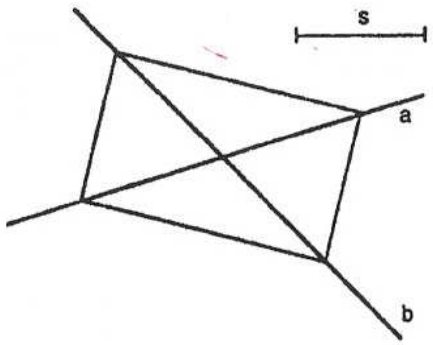
Η Presmeg (1986, 2006) βάζει και ένα άλλο θέμα: η οπτικοποίηση απαιτεί από τους μαθητές χρόνο. Στα πλαίσια ενός εκπαιδευτικού συστήματος εξεταστοκεντρικά προσανατολισμένου, όπου όλα τα προβλήματα έχουν χρονικό περιορισμό και η απομνημόνευση ενθαρρύνεται, οι μαθητές που έχουν την τάση να οπτικοποιούν τα προβλήματα προτιμούν να χρησιμοποιούν τελικά αναλυτικούς τρόπους επίλυσης, όπως διαπιστώνει και η ίδια στην έρευνά της (1986). Για τον Guzman (2002), η οπτικοποίηση διαφέρει από την άμεση όραση σχέσεων και συνίσταται κυρίως στην ερμηνεία αυτών που παρουσιάζονται στην ενατένισή μας. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε όμως, μόνο αν έχουμε μάθει να διαβάζουμε κατάλληλα ότι μας προσφέρει η οπτικοποίηση. Συντελείται ουσιαστικά μία διαδικασία αποκωδικοποίησης σε οποιαδήποτε οπτικοποίηση η οποία, ίσως είναι προφανής για έναν ειδικό στα Μαθηματικά αλλά όχι για ένα μαθητή. Η δήλωση «μία εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις» είναι αληθινή αλλά με μια σημαντική προϋπόθεση: η εικόνα θα έχει αποκωδικοποιηθεί και κατανοηθεί σωστά. Αλλιώς η εικόνα δεν έχει αξία.

1.3.5 Ο οπτικός συλλογισμός

Ποια είναι η σχέση μεταξύ οπτικοποίησης και συλλογισμού; Στη θεωρία του οπτικού εγγραμματισμού, οι μελέτες αναφέρονται στην ανάγκη να οπτικοποιήσουμε μια πληροφορία προκειμένου να συζητήσουμε λογικά και κριτικά περί αυτής, να την

επικοινωνήσουμε, να την τεκμηριώσουμε και να τη διατηρήσουμε (McLoughlin & Krakowski, 2001).

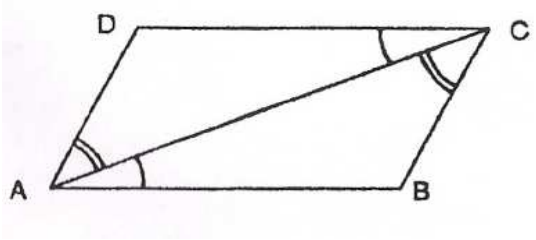
Στα Μαθηματικά, ο Dreyfus (1991), κάνει συγκεκριμένη την ιδέα του οπτικού συλλογισμού με το εξής πρόβλημα: Δεδομένων δύο τεμνόμενων ευθειών του επιπέδου, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις ευθείες αυτές ισούται με δεδομένο μήκος.



Το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί από πολλές γωνίες και με πολλούς τρόπους. Θα μπορούσαμε να αρχίσουμε επιχειρηματολογώντας ότι ο γεωμετρικός τόπος πρέπει να περιέχεται σε μία οριοθετημένη περιοχή του επιπέδου αφού κάθε σημείο που είναι πολύ μακριά θα είναι μακριά και από μία τουλάχιστον ευθεία. Αρχίζοντας με έναν πιο τοπικό τρόπο, θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε αν κάποια σημεία του ζητούμενου τόπου βρίσκονται πάνω στις δεδομένες ευθείες και να αρχίσουμε να ψάχνουμε κατά μήκος των ευθειών. Η έρευνα αυτή μπορεί να προσεγγιστεί δυναμικά με (νοητή) μετακίνηση πάνω στις δύο γραμμές αρχίζοντας από το σημείο τομής τους. Σε αυτή την περίπτωση, όταν «κινούμαστε» πάνω σε μία ευθεία, η απόσταση από την άλλη ευθεία μεγαλώνει από το μηδέν απεριόριστα. Οπότε κάποια στιγμή θα περάσουμε από ένα σημείο της ευθείας που ανήκει στο γεωμετρικό τόπο. Λόγω συμμετρίας υπάρχουν τέσσερα τέτοια σημεία και ο γεωμετρικός τόπος θα είναι το ορθογώνιο του οποίου οι κορυφές είναι τα σημεία αυτά. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από λεπτομερή αναλυτικό συλλογισμό που βασίζεται σε κατάλληλα όμοια τρίγωνα και τους αντίστοιχους λόγους.

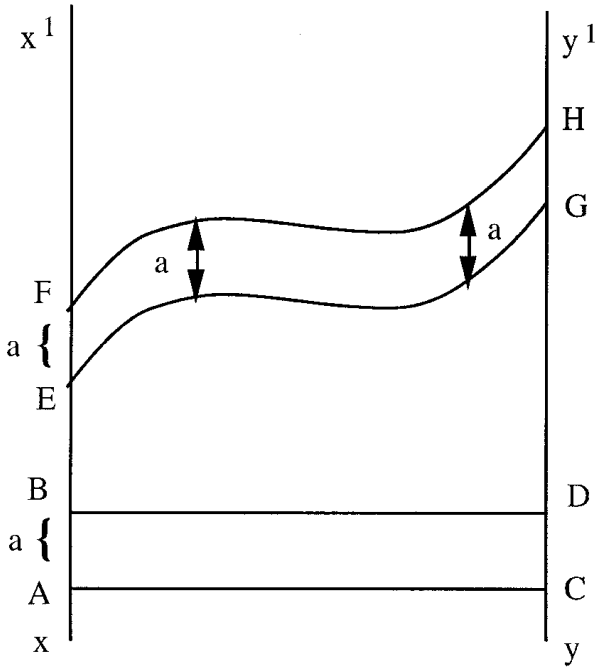
Ο Dreyfus (1991), δείχνει με χαρακτηριστικό τρόπο ότι σε πολλές αποδείξεις, το να προσφύγει κανείς στο σχήμα δηλαδή να επιχειρηματολογήσει οπτικά είναι αναπόφευκτο. Θεωρεί μία τροποποιημένη εκδοχή της Ευκλείδειας απόδειξης της

πρότασης «σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες», όπου φέρνοντας τη διαγώνιο AC και συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABC και CDA προκύπτει το αποτέλεσμα.



Πρόκειται για μία κλασσική, τυπική απόδειξη, χαρακτηριστική της τάξης των αποδείξεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο Dreyfus ισχυρίζεται ότι κανείς δε θα καταλάβαινε μία τέτοια απόδειξη, όσο λεπτομερώς και να αναπτυσσόταν λεκτικά, αν έστω και με τα μάτια του μυαλού του δεν έβλεπε ένα παραλληλόγραμμο. Πέρα από αυτό όμως αναπαραγάγει μία ερώτηση που είχε τεθεί από τον Stenius πάνω στην ίδια απόδειξη: Πως γνωρίζουμε ότι οι γωνίες BAC και DCA είναι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ευθειών; Δεν θα μπορούσε το σημείο D να βρίσκεται εντός του τριγώνου ABC; Το θέμα εδώ δεν είναι εάν μπορεί ή όχι, αλλά πως μπορούμε να το ξέρουμε χωρίς να προσφύγουμε στο σχήμα.

Στο μαθηματικό συλλογισμό, δεν είναι απαραίτητα αληθές κάθε τι που φαίνεται διαισθητικά προφανές. Θα πρέπει ο αντίστοιχος ισχυρισμός να αποδειχθεί με τυπικό τρόπο. Στο ακόλουθο παράδειγμα που τέθηκε σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από τον Fischbein (1999), εμφανίζεται σύγκρουση ανάμεσα στην αυθόρμητη διαισθητική λύση κάποιων μαθητών και στη σωστή λογική λύση. Ζητήθηκε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι οι περιοχές ACDB και EGHF είναι ισοδύναμες στο ακόλουθο σχήμα:

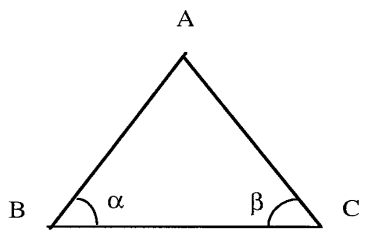


Η άμεση αντίδραση των μαθητών ήταν ότι οι δύο περιοχές προφανώς δεν είναι ισοδύναμες και επομένως δεν υπάρχει κάτι που πρέπει να αποδειχθεί. Αυτή ήταν η διαισθητική, άμεση, προφανώς αυτονόητη αντίδραση στο πρόβλημα. Στην πραγματικότητα, οι δύο περιοχές είναι ισοδύναμες και αυτό μπορεί να αποδειχθεί μόνο με έμμεση λογική ανάλυση, μέσω ολοκληρωμάτων αλλά και με πιο στοιχειώδη διαδικασία. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

- (ACGE) = (BDHF) αφού η δεύτερη περιοχή προκύπτει με μεταφορά της πρώτης κατά απόσταση α
- Άρα (ACGE) – (BDGE) = (BDHF) – (BDGE)
- Οπότε (ACDB) = (ECHF)

Η ισοδυναμία των θεωρούμενων περιοχών προκαλεί έκπληξη, αφού αυτές διαισθητικά εμφανίζονται μη ισοδύναμες αλλά η λογική ανάλυση αποδεικνύει ότι είναι. Αλλά, όπως αναφέρει και ο Guzman (2002), η πιθανότητα να οδηγήσει σε λάθη η οπτικοποίηση δε θα πρέπει να είναι ένα έγκυρο επιχείρημα ενάντια στην αποδοτικότητά της σε διαφορετικές διαδικασίες της μαθηματικής δραστηριότητας όπως είναι η δημιουργικότητα που αυτή συνεπάγεται αλλά και η μεταδοτικότητα και η επικοινωνία. Άλλωστε ακόμα και οι πιο φορμαλιστικές τεχνικές είναι ανοικτές σε λάθη, ατελή συλλογισμό και πλάνες.

Στην ευνοϊκή περίπτωση που η διαισθητική λύση συμπίπτει με τη λογική ανάλυση, υπάρχει ένα λεπτό σημείο το οποίο προκύπτει από τη διδακτική πραγματικότητα και επιβεβαιώνεται από την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών (Fischbein, 1999): οι μαθητές δε δέχονται ότι ένας διαισθητικά καταφανής ισχυρισμός θα πρέπει να αποδειχθεί με τυπικό τρόπο. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του ισοσκελούς τριγώνου με το νόμο των ίσων παρά τη βάση γωνιών.

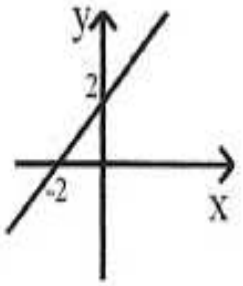


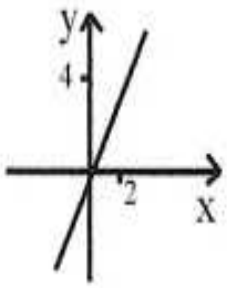
Γνωρίζοντας ότι AB = AC θα πρέπει κάποιος να αποδείξει ότι οι γωνίες α και β είναι ίσες. Ο Fischbein παραθέτει την άμεση αντίδραση των μαθητών: «Για ποιο λόγο;», «Γιατί θα πρέπει να αποδείξουμε κάτι που είναι ολοφάνερο;». Η απόδειξη φαίνεται περιττή στους μαθητές και η απαίτηση να αποδειχθεί ένας πασιφανής ισχυρισμός μπορεί να ενδυναμώσει το συναίσθημα πολλών μαθητών ότι τα Μαθηματικά είναι ένα αυθαίρετο, άχρηστο και ιδιότροπο παιχνίδι. Υπάρχουν όμως δύο θεμελιώδεις λόγοι για τους οποίους τέτοιοι τετριμμένοι ισχυρισμοί θα πρέπει στα Μαθηματικά να θεωρούνται ως νόμοι. Ο πρώτος είναι ότι τα Μαθηματικά είναι ένα τυπικό, παραγωγικό, αυστηρό σύστημα όπου η διαισθητική αλήθεια καθαυτή δεν αποτελεί αποδεκτή αιτιολόγηση. Κάθε ιδιότητα, κάθε αποδεκτός ισχυρισμός και έννοια θα πρέπει να προσδιορίζεται σαφώς ως αξίωμα, θεώρημα, ορισμός, νόμος, βασική ή παράγωγη έννοια. Κάτω όμως από όλη αυτή τη δομή ίσως βρίσκεται και η δύναμη των Μαθηματικών. Τα Ευκλείδεια αξιώματα, για παράδειγμα, παρά την καταπληκτική ωριμότητά τους, δεν απαλλάσσονται από κάποια πολύ λεπτά κενά που προέρχονται από τέτοιες γεωμετρικές καταστάσεις οι οποίες φαίνονταν πολύ προφανείς για να αποδειχθούν, γεγονός που διευθετήθηκε με τη συμβολή του Hilbert. Ο δεύτερος λόγος για τον οποίο τέτοιες τετριμμένες ιδιότητες θα πρέπει να εξετάζονται και να τονίζονται σαφώς είναι, ότι αυτές δεν είναι πάντοτε εφαρμόσιμες σε κάθε μαθηματική λειτουργία. Για παράδειγμα ο αντιμεταθετικός νόμος δεν ισχύει

για την αφαίρεση. Ο Fischbein δηλώνει σαφώς ότι στα Μαθηματικά η διαισθητική απόδειξη μιας ιδιότητας ή μιας λειτουργίας (που ενδέχεται να προκύψει κάποιες φορές μέσω εικόνων), δεν αναιρεί την ανάγκη να προσδώσουμε σε αυτές (τις διαισθητικά προφανείς ιδιότητες και λειτουργίες) μία αυστηρή, τυπική μορφή (ορισμό, απόδειξη κ.λ.π.) σύμφωνη με την αξιωματική, παραγωγική δομή των Μαθηματικών.

1.3.6. Η οπτική διάκριση

Ο Duval (1999), αναφέρει ερευνητικές παρατηρήσεις σε μαθητές 15-17 ετών, σχετικές με την οπτική διάκριση στα Μαθηματικά. Οι μαθητές, αν και μπορούσαν να κατασκευάσουν το γράφημα μιας συνάρτησης από την εξίσωσή της και να διαβάσουν τις συντεταγμένες ενός σημείου, εντούτοις δεν μπορούσαν να διακρίνουν σε ποιο γράφημα αντιστοιχούσε κάθε εξίσωση από τις εξισώσεις $y = x + 2$ και $y = 2x$ όταν κοίταζαν τα ακόλουθα γραφήματα:



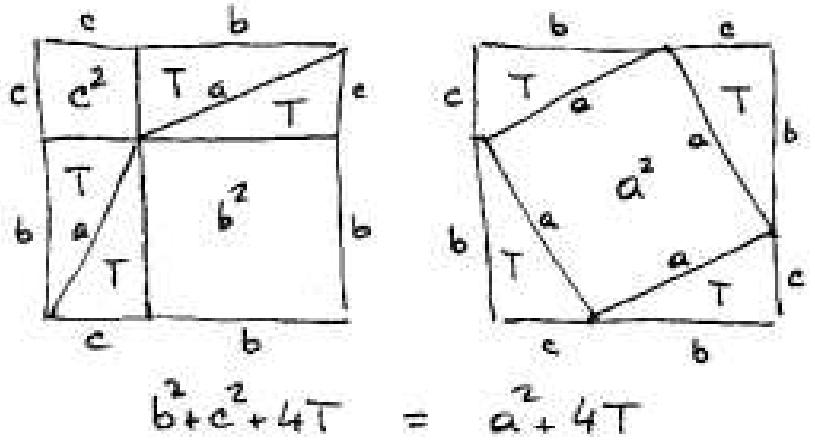


Αυτό το είδος της διάκρισης προϋποθέτει ότι οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν ποιοτικά τις δύο οπτικές μεταβλητές σε κάθε σχήμα, δηλαδή να συγκρίνουν την γωνία με τον οριζόντιο άξονα και αυτή που προκύπτει από τη διχοτόμηση της γωνίας του πρώτου τεταρτημόριου, καθώς και τη θέση του σημείου τομής με τον κατακόρυφο άξονα. Ο Duval σημειώνει επίσης, ότι συχνά οι μαθητές προσηλώνονται σε μία οπτική μεταβλητή που δεν έχει σχέση με το πρόβλημα: πόσο μακριά είναι κάποια σημεία πάνω από τον οριζόντιο άξονα.

1.3.7. Οπτική σύνδεση

Ο Duval (1999) θεωρεί τη σύνδεση ανάμεσα στα συστήματα αναπαραστάσεων ως βασικό στοιχείο της κατανόησης στα Μαθηματικά που έχει ως επίπτωση οι μαθητές να μπορούν να αναγνωρίζουν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο μέσω των διαφορετικών αναπαραστάσεών του. Δηλώνει ότι για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας απαιτείται ο συνδυασμός τουλάχιστον δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων, λόγω του ότι κάθε αναπαράσταση είναι μερική ως προς το τι αναπαριστά. Για παράδειγμα, οι πληροφορίες που παίρνουμε από την εξίσωση ψ = χ και το γράφημά της δεν είναι ίδιες. Το γράφημα επιτρέπει άμεσα σε κάποιον να δει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Ένα παράδειγμα οπτικής σύνδεσης στα Μαθηματικά παραθέτει ο Guzman (2002), όπου ο μαθητής θα πρέπει να συνδυάσει δύο εικόνες σε ένα ενοποιημένο θέμα, που στην προκειμένη περίπτωση είναι μία απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος:



Ίσως ένας μαθητής που θα κοιτάξει προσεκτικά τα σχήματα μπορέσει να δει δύο ίσα τετράγωνα που έχουν χωριστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ίσως επίσης μπορέσει να καταλάβει, με τη βοήθεια της ισότητας που ακολουθεί τα σχήματα, ότι η περιοχή του τετραγώνου πάνω από την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που εμφανίζεται στο δεύτερο σχήμα, είναι ίση με το άθροισμα των περιοχών των δύο

άλλων τετραγώνων που εμφανίζονται σε διαφορετικές θέσεις στο πρώτο σχήμα. Για να φθάσει όμως στο Πυθαγόρειο θεώρημα είναι απαραίτητο να αποδείξει ότι τα τρίγωνα Τ έχουν την ίδια περιοχή και ότι η ίδια κατάσταση εμφανίζεται σε οποιοδήποτε πιθανό ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή πρέπει να αντιληφθεί ότι έχει μπροστά στα μάτια του μια κατάσταση που μπορεί να οδηγήσει σε γενικεύσεις. Επίσης, αν και φαίνεται, με το αυτό το χωρισμό των σχημάτων, να προκύπτει εντελώς άμεσα το Πυθαγόρειο θεώρημα, εντούτοις η αποκωδικοποίηση που πρέπει να κάνει ο μαθητής δεν είναι σίγουρο ότι είναι προφανής γι' αυτόν.

Είναι εμφανές ότι υπάρχει σύνδεση της έννοιας του οπτικού εγγραμματισμού και βασικών, για τη μάθηση των Μαθηματικών, εννοιών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Η σύνδεση αυτή θέτει σε ισχύ και για τη Διδακτική των Μαθηματικών το συμπέρασμα στο οποίο, το σημαντικότερο ποσοστό των ερευνών στο πεδίο της οπτικής μόρφωσης φαίνεται να καταλήγει: Οι δεξιότητες που καθιστούν ένα άτομο οπτικά εγγράμματο μπορούν και πρέπει να διδαχθούν με τυπικό τρόπο. Η εκπαίδευση αυτή για το πεδίο του οπτικού εγγραμματισμού σημαίνει, σύμφωνα με την Avgerinou (2009), ότι οι εκπαιδευτές θα αντιμετωπίσουν με μεγαλύτερη αυστηρότητα και πιο αποφασιστικά βήματα την ανάγκη για οπτική μόρφωση. Για τη Μαθηματική Εκπαίδευση, θα μπορούσε να σημαίνει διερεύνηση, σχεδιασμό, ανάπτυξη και εφαρμογή συγκεκριμένων τρόπων εκπαίδευσης πάνω στις αντίστοιχες δεξιότητες, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των οποίων έχουν μελετηθεί και ερευνηθεί συστηματικά. Η ανατροφοδότηση από την εφαρμογή μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την επιβεβαίωση της αποτελεσματικότητας των τρόπων αυτών, καθώς και νέο πεδίο έρευνας. Επιπρόσθετη έρευνα, μπορεί να αναπτύξει μεθοδολογικά εργαλεία μέτρησης του βαθμού της οπτικής μόρφωσης ενός ατόμου και με βάση αυτά να αξιολογήσει το συνολικό βαθμό επίδρασης της οπτικής προσέγγισης στη μάθηση των σπουδαστών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

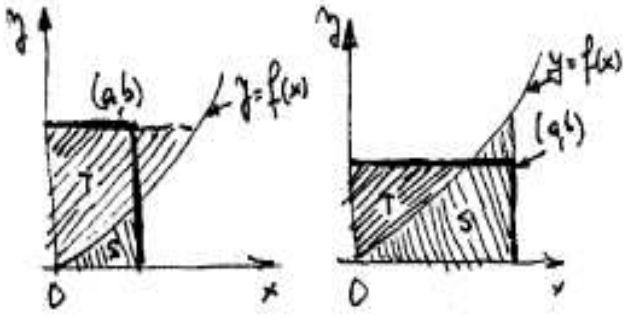
ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Ο Απειροστικός Λογισμός, λόγω των γεωμετρικών του καταβολών, είναι ίσως η κατεξοχήν περιοχή των Μαθηματικών που περιέχει κεντρικές έννοιες, οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν και να κατανοηθούν μέσω οπτικών αναπαραστάσεων. Για τον Guzman (2002), θα μπορούσε εύκολα να παρουσιαστεί ένας ολοκληρωμένος κύκλος εισαγωγικών μαθημάτων Απειροστικού Λογισμού, με συγκεκριμένο στόχο να δοθεί μία οπτική εκδοχή των κυριότερων εννοιών και αποτελεσμάτων του πεδίου. Για τους Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg (2009), η οπτικοποίηση και η οπτική σκέψη αποτελούν κεντρικά σημεία των μελετών και συντελούν στην αναμόρφωση του τρόπου διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού, ενώ ο Davis (1993), αποκαλεί «οπτικά» τα θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού που έχουν μία διαισθητική ή οπτική βάση, όπως για παράδειγμα το θεώρημα Bolzano. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία επιλογή από παραδείγματα της βιβλιογραφίας που αναδεικνύουν τη σημασία της χρήσης των οπτικών αναπαραστάσεων σε ορισμούς, προτάσεις και θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού, εντοπίζοντας τους περιορισμούς που συνοδεύουν μια τέτοια χρήση. Τα αρχικά παραδείγματα που αναλύονται, προέρχονται από τον Guzman (2002) και τα σχήματα παρατίθενται αυτούσια από το πρωτότυπο. Ο ίδιος αιτιολογεί γιατί οι εικόνες είναι κατασκευασμένες με το χέρι: για να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η οπτική βοήθεια που μπορεί κάποιος να αποκτήσει από τέτοιες οπτικές αναπαραστάσεις δεν εξαρτάται από την ακρίβεια της εικόνας.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ισομορφικής οπτικοποίησης (ο ορισμός της δίνεται στην παράγραφο 1.3.4). Έστω $y = f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$, συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$ και $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$. Έστω $y = g(x)$ η αντίστροφη συνάρτηση της f, δηλαδή $g(f(x)) = x$. Τότε, για κάθε ζευγάρι θετικών αριθμών a,b ισχύει:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx$$

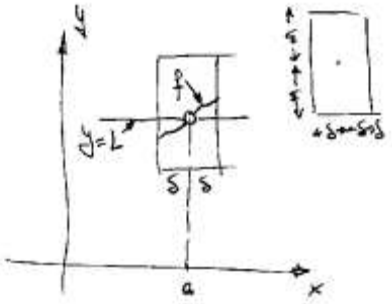
Η ερμηνεία αυτού του ενδιαφέροντος συμπεράσματος γίνεται εμφανής από το ακόλουθο σχήμα:



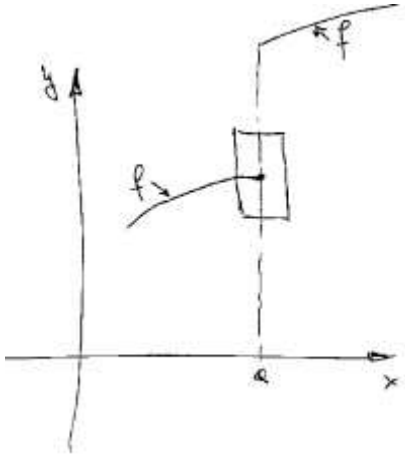
Η οπτική αναπαράσταση εδώ, υποστηρίζει την περιγραφή και την κατανόηση του μαθηματικού συμπεράσματος που διατυπώνεται στην προς απόδειξη ανισότητα σε καθαρά συμβολική μορφή. Μέσω της αναπαράστασης αυτής, κάποιος μπορεί να διακρίνει, πίσω από τη φορμαλιστική διατύπωση του συμπεράσματος, τον εξής ισχυρισμό: η περιοχή του ορθογωνίου με απέναντι κορυφές στα σημεία (0,0) και (a,b) είναι μικρότερη ή ίση από τα αθροίσματα των γραμμοσκιασμένων περιοχών S και T του σχήματος. Η ισότητα ισχύει όταν b=f(a), δηλαδή όταν το σημείο (a,b) είναι σημείο του γραφήματος της y=f(x).

Συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο

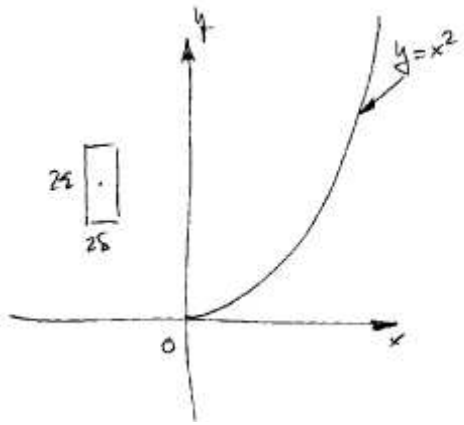
Κατά τον Guzman μία συνάρτηση μπορεί ισομορφικά να οπτικοποιηθεί από το γράφημά της. Για την κατανόηση του ορισμού της έννοιας της συνέχειας σε σημείο, εισάγονται ορθογώνια παράθυρα ύψους 2ε και πλάτους 2δ, με πλευρές παράλληλες στους άξονες, με κέντρο κάποιο σημείο του γραφήματος της f. Μία συνάρτηση f, ορισμένη στο $\Re$ είναι συνεχής στο σημείο $\alpha \in \Re$ όταν: χωρίς να μας ενδιαφέρει πόσο μικρό φτιάχνουμε το ύψος ενός παραθύρου με κέντρο το σημείο (α, f(α)), μπορούμε να διαλέξουμε το πλάτος του έτσι ώστε να μπορούμε να δούμε το γράφημα της f να πηγαίνει από την αριστερή στη δεξιά πλευρά του παραθύρου χωρίς να περνά από τις πλευρές του, που είναι παράλληλες στον άξονα χ΄χ.



Η συνάρτηση του επόμενου σχήματος είναι τότε, φανερά μη συνεχής στο σημείο α. Το σχήμα αυτό, βοηθά να κατανοήσουμε επίσης την άρνηση του ορισμού της συνέχειας.



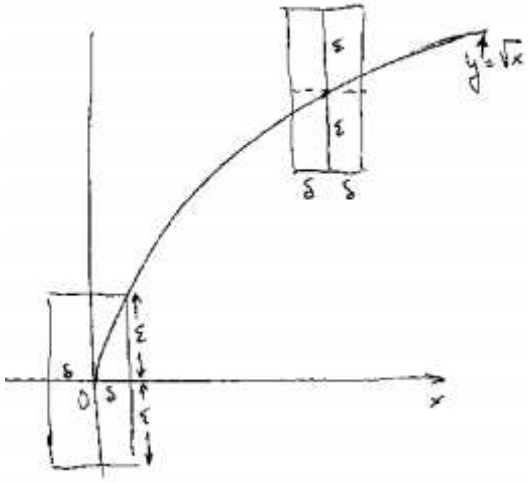
Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε ένα διαφορετικό σημείο ως κέντρο του παραθύρου, μπορεί να χρειαστεί για το ίδιο ύψος του παραθύρου, να διαλέξουμε ένα διαφορετικό πλάτος προκειμένου να δούμε το γράφημα της συνάρτησης μέσα στο παράθυρο αυτό. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $y = x^2$:



Είναι εμφανές από το σχήμα ότι αν πάρουμε ένα σημείο πολύ δεξιά, η κλίση γίνεται πολύ εντονότερη και ένα πλάτος παραθύρου που ήταν επαρκές για σημεία κοντά στο 0, δεν ταιριάζει εδώ. Με βάση αυτή την παρατήρηση θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα μία οπτική προσέγγιση για την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας. Ουσιαστικά, εδώ η οπτική αναπαράσταση συντελεί στη δημιουργία εικασίας για την ύπαρξη μιας ειδικής κλάσης συνεχών συναρτήσεων, αυτής των ομοιόμορφα συνεχών.

Ομοιόμορφη συνέχεια

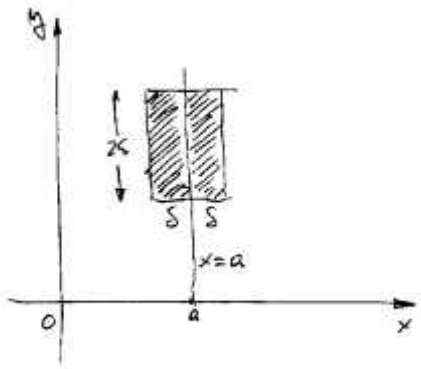
Η συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\Re$ όταν, με δεδομένο το ύψος ενός παραθύρου μπορούμε να διαλέξουμε ένα πλάτος τέτοιο ώστε, όταν το κέντρο αυτού του παραθύρου συμπίπτει με *οποιοδήποτε* σημείο της καμπύλης, μας επιτρέπει να δούμε την καμπύλη μέσα στο παράθυρο. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, για $x \geq 0$. Αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής.



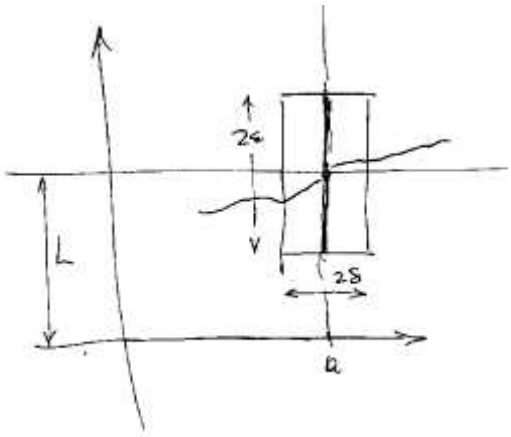
Πράγματι, το παράθυρο που έχει κέντρο το σημείο (0,0) και μας επιτρέπει να δούμε τη συνάρτηση μέσα από αυτό, κάνει το ίδιο και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο και να κεντραριστεί. Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη συνάρτηση η κλίση μειώνεται και αυτό είναι που κάνει το παράθυρο κατάλληλο σε κάθε περίπτωση. Αν η συνάρτηση είναι απλά ομοιόμορφα συνεχής, χωρίς η κλίση της να μειώνεται όπως της f(x) = $\sqrt{x}$, πάντα θα υπάρχει ένα παράθυρο που κεντραρισμένο σε οποιοδήποτε σημείο της συνάρτησης θα μας επιτρέπει να δούμε την καμπύλη μέσα σε αυτό με τον τρόπο που περιγράψαμε στη συνέχεια συνάρτησης, αλλά δεν θα μπορούν να το κάνουν αυτό όλα τα παράθυρα (με όλα τα δυνατά πλάτη). Έτσι, μετά από αυτό το παράδειγμα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: *εάν η απόλυτη τιμή της κλίσης μιας καμπύλης είναι πάντοτε μικρότερη μιας σταθερής πεπερασμένης τιμής κ, τότε η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.* Η οπτική αναπαράσταση εδώ μας βοήθησε να οδηγηθούμε στην διατύπωση μιας εικασίας. Πράγματι, για κάθε ύψος 2ε, μπορούμε να διαλέξουμε ένα πλάτος 2δ = 2ε / κ έτσι ώστε, όταν αυτό το παράθυρο έχει κέντρο οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος, να μπορούμε να δούμε την καμπύλη μέσα από αυτό. Με μεγαλύτερη ακρίβεια: εάν η f: $\Re \rightarrow \Re$ είναι παραγωγίσιμη και $|f'(x)| \leq$ κ σε κάθε x, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\Re$.

Όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο

Εδώ θα χρησιμοποιούνται παράθυρα όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, αλλά δε μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει κατά μήκος του κάθετου τμήματος που χωρίζει το παράθυρο σε δύο ίσα μέρη. Ενδιαφερόμαστε δηλαδή για το γραμμοσκιασμένο μέρος του παραθύρου του σχήματος που ακολουθεί:

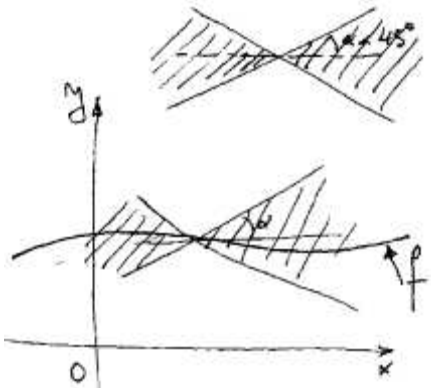


Μπορούμε τώρα να πούμε ότι μία συνάρτηση έχει όριο L στο σημείο α όταν, για κάθε ύψος παραθύρου κέντρου (α, L), μπορούμε να διαλέξουμε ένα πλάτος τέτοιο ώστε, το αντίστοιχο παράθυρο να μας επιτρέπει να δούμε την καμπύλη μέσα σε αυτό Η οπτική αναπαράσταση εδώ συντελεί στην κατανόηση του ορισμού του ορίου που έχει περίπλοκο συμβολισμό στην τυπική του διατύπωση. Με το ακόλουθο σχήμα ξεκαθαρίζεται επίσης, ότι δε μας ενδιαφέρει τι γίνεται στην ευθεία χ = α:



Συναρτήσεις συστολής

Η έννοια της συνάρτησης συστολής οπτικοποιείται με ένα πολύ ενδιαφέρον τρόπο μέσω των «γωνιακών παραθύρων». Ένα γωνιακό παράθυρο γωνίας α∈ [0, π/2) με κέντρο στο σημείο (a,b), είναι το μέρος του επιπέδου που εσωκλείεται μεταξύ δύο ευθειών που διέρχονται από το σημείο (a,b) και σχηματίζουν με τον άξονα χ΄χ γωνίες α και π – α. Το γωνιακό παράθυρο περιέχει επίσης και την ευθεία που διέρχεται από το σημείο (a,b) και είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ. Στο σχήμα που ακολουθεί το γωνιακό παράθυρο είναι η γραμμοσκιασμένη ζώνη και αντιστοιχεί σε γωνία α < 45°:



Μία συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$ είναι συνάρτηση Lipschitz σταθεράς $\kappa \geq 0$, όταν το γωνιακό παράθυρο γωνίας α = τοξεφ(κ) που έχει κέντρο σε οποιοδήποτε σημείο της f, περιέχει το γράφημα της f. Η μετάφραση αυτού του ορισμού με αναλυτικούς όρους είναι:

Μία συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$ είναι συνάρτηση Lipschitz σταθεράς $\kappa \geq 0$, αν για κάθε $a,b \in \Re$, $|f(a) - f(b)| \leq \kappa |a - b|$.

Όταν η σταθερά κ είναι μικρότερη του 1, δηλαδή όταν η γωνία είναι μικρότερη από 45°, τότε η συνάρτηση λέγεται *συνάρτηση συστολής*.

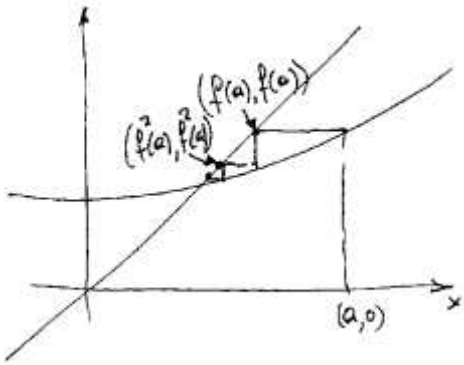
Από την οπτική αναπαράσταση του ορισμού μπορούμε να οδηγηθούμε στην εικασία ότι, κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής (για κάθε παράθυρο ύψους 2ε, διαλέγουμε πλάτος 2δ = 2ε / κ που αντιστοιχεί στο παράθυρο με αυτό το ύψος και του οποίου οι διαγώνιοι έχουν κλίσεις κ και π–κ).

Επαναληπτικές τιμές μιας συνάρτησης

Για μία δεδομένη συνάρτηση f: $\Re \rightarrow \Re$, οι επαναληπτικές τιμές της αρχίζοντας από το x = a, είναι οι f (a), $f^2(a) = f(f(a))$, $f^3(a) = f(f(f(a)))$, … Η οπτικοποίηση αυτών των τιμών έχει ενδιαφέρον:

- από το σημείο (a,0) φέρνουμε ένα κάθετο στον χ΄χ τμήμα προς την καμπύλη και έτσι παίρνουμε το σημείο (a, f (a))
- από το σημείο (a, f (a)) φέρνουμε ένα οριζόντιο τμήμα που τέμνει την ευθεία y = x στο σημείο (f (a), f (a))
- από αυτό το σημείο φέρνουμε ένα κάθετο τμήμα, προς την καμπύλη οπότε παίρνουμε το σημείο (f (a), $f^2(a)$).
- συνεχίζουμε τη διαδικασία οπότε παίρνουμε τις τιμές f (a), $f^2(a)$, $f^3(a)$, …

Τα επόμενο σχήμα ξεκαθαρίζει τη διαδικασία:



Με τη βοήθεια του σχήματος μπορούμε να εικάσουμε ότι, όταν μία συνάρτηση είναι συνάρτηση συστολής, η ακολουθία των σημείων της διχοτόμου, φαίνεται να συγκλίνει σε ένα σημείο που ανήκει και στην ευθεία και στην καμπύλη, δηλαδή σε ένα σημείο (ρ, f (ρ)) = (ρ, ρ). Αυτό σημαίνει ότι f (ρ) = ρ. Πράγματι, αυτό ισχύει και η οπτική αναπαράσταση συντελεί στην κατανόηση της βασικής ιδέας της τυπικής απόδειξης.

Σταθερά σημεία

Για μία δεδομένη συνάρτηση f: $\Re \to \Re$, λέμε ότι το $\rho \in \Re$ είναι σταθερό σημείο της f όταν f (ρ) = ρ.

Μεταφράζοντας οπτικά:

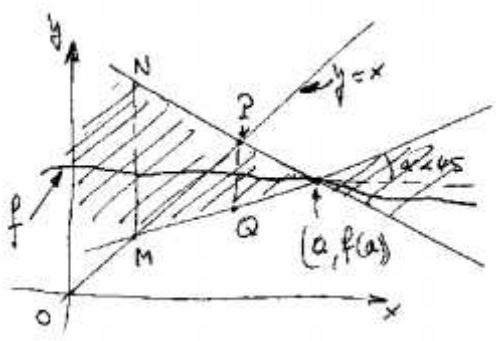
Σταθερό σημείο ρ μίας συνάρτησης f είναι οποιαδήποτε από τις τετμημένες των σημείων τομής, αν υπάρχουν, του γραφήματος της f με την ευθεία y = x.

Ισχύει το εξής θεώρημα:

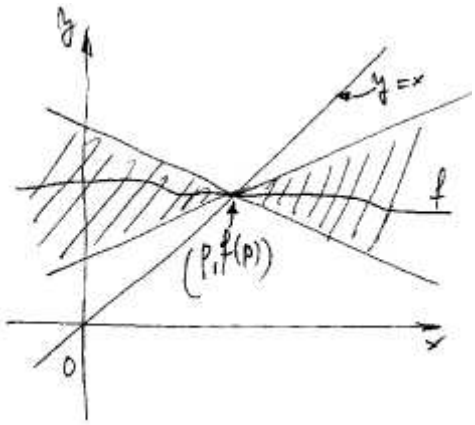
Εάν f: $\Re \to \Re$ είναι μία συνάρτηση συστολής, τότε υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο ρ για την f το οποίο παίρνουμε εκλέγοντας οποιοδήποτε $a \in \Re$ και ορίζοντας
$\rho = \lim_{\nu\to\infty} f^{\nu}(a)$.

Η ύπαρξη τουλάχιστον ενός σταθερού σημείου αιτιολογείται οπτικά ως εξής:

Εάν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο (a, f (a)) του γραφήματος της f και κεντράρουμε σε αυτό το αντίστοιχο γωνιακό παράθυρο, όπως στο σχήμα που ακολουθεί, γίνεται εμφανές ότι οι πλευρές του παραθύρου (αφού α < 45°) τέμνουν την ευθεία y = x σε δύο σημεία P, M (εκτός αν a = f (a), αλλά τότε σταθερό σημείο είναι το a). Τότε η συνεχής (είδαμε ότι οι συναρτήσεις Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχείς) καμπύλη της f έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με την ευθεία y = x, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.



Το γεγονός ότι το σημείο είναι μοναδικό προκύπτει οπτικά αν θεωρήσουμε το γωνιακό παράθυρο κεντραρισμένο στο σημείο (ρ, f(ρ)), όπως στο σχήμα που ακολουθεί:



Αφού α < 45° και το γράφημα της f βρίσκεται μέσα στο γωνιακό παράθυρο, δεν μπορεί να τέμνει την ευθεία y = x σε άλλο σημείο. Επομένως η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Από την αναλυτική έκφραση του ορισμού μιας συνάρτησης συστολής έχουμε:

$$| f^{\nu}(a) - \rho | = | f^{\nu}(a) - f^{\nu}(\rho) | \leq \kappa | f^{\nu-1}(a) - f^{\nu-1}(\rho) | \leq \kappa^{\nu} | \rho - a |$$

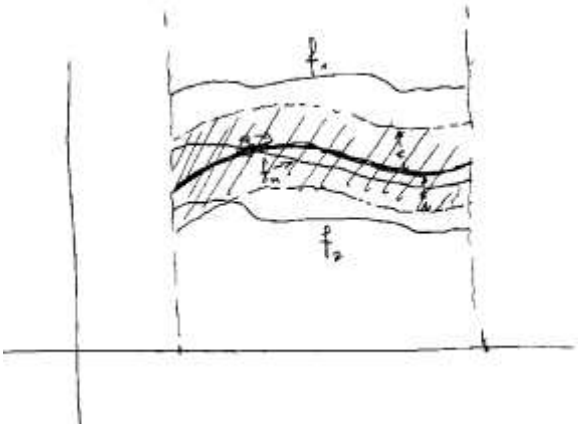
και αφού ισχύει ότι κ < 1, παίρνουμε $\rho = \lim_{\nu\to\infty} f^{\nu}(a)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Ακολουθίες συναρτήσεων και ομοιόμορφη σύγκλιση

Έστω f_n ακολουθία συναρτήσεων από το σύνολο $K \subset \Re$ στο K. Το ότι η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο K σε μία άλλη συνάρτηση g σημαίνει:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός m ώστε για κάθε $n \geq m$, $x \in K \Rightarrow | f_n(x) - g(x) | \leq \varepsilon$

Ο ορισμός αυτός μπορεί να ελεγχθεί ότι μεταφράζεται οπτικά ως εξής:
για κάθε ζώνη του επιπέδου πλάτους $\varepsilon > 0$ γύρω από την g, μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποδείκτη m τέτοιον ώστε για κάθε $n \geq m$ η συνάρτηση f_n βρίσκεται εντός της ζώνης όπως υποδεικνύει το ακόλουθο σχήμα:



Το προηγούμενο σχήμα αποτελεί ακόμα μία οπτική αναπαράσταση, της οποίας η χρήση, όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα, συντελεί στην κατανόηση του ορισμού.

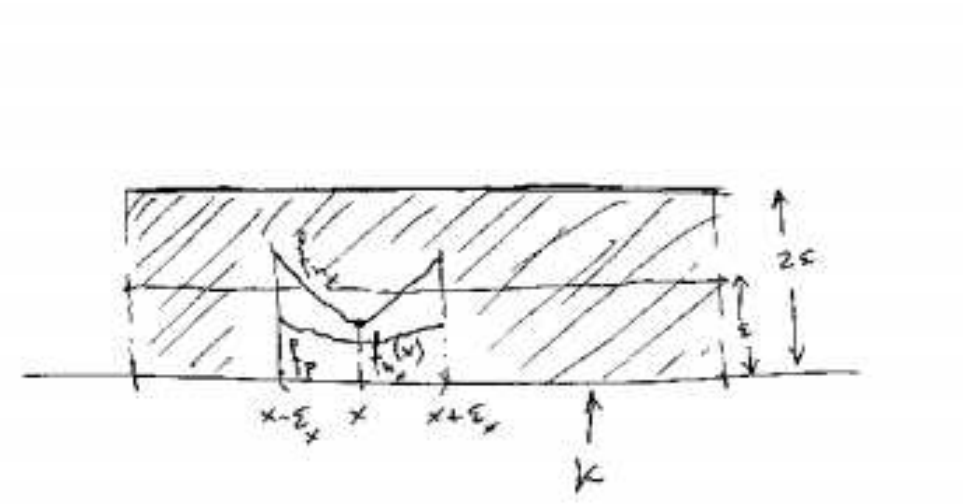
Το θεώρημα του Dini

Το θεώρημα αυτό ισχυρίζεται ότι:

Αν K είναι ένα συμπαγές σύνολο και f_n είναι μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει μονότονα σε κάθε σημείο $x \in K$ στη συνάρτηση g(x), όπου g είναι επίσης μία συνεχής συνάρτηση στο K, τότε η σύγκλιση της ακολουθίας f_n στην g είναι ομοιόμορφη στο

Κ. (Συμπαγής καλείται ένας μετρικός χώρος που για κάθε ανοιχτή κάλυψή του υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Παράδειγμα ενός συμπαγούς συνόλου αποτελεί κάθε κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών.)

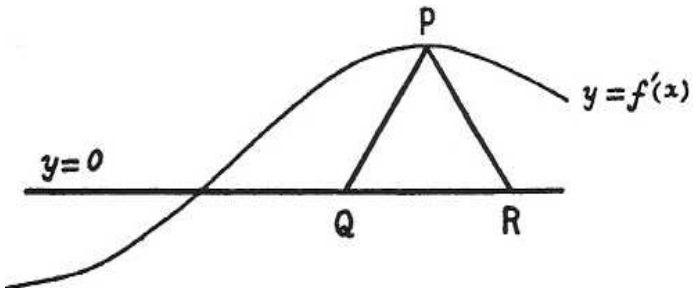
Ο οπτικός συλλογισμός με βάση το σχήμα που ακολουθεί είναι ενδιαφέρων. Αρχικά υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η ακολουθία f_n φθίνει στο Κ και ασχολούμαστε με την περίπτωση που η g είναι η μηδενική συνάρτηση στο Κ θεωρώντας την ακολουθία f_n – g, αντί της αρχικής f_n.



Αρχικά κατασκευάζουμε μία ζώνη πλάτους ε > 0 γύρω από τον άξονα χ΄χ. Για κάθε x ∈ Κ υπάρχει ένα n_x τέτοιο ώστε $p \geq n_x$ και είναι $0 \leq f_p(x) \leq f_{n_x}(x) \leq$ ε. Γι' αυτό, για κάθε x ∈ Κ υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα (x - ε_χ, x + ε_χ) τέτοιο ώστε, για κάθε σημείο $p \geq n_x$ και κάθε t στο διάστημα να προκύπτει $0 \leq f_p(t) \leq f_{n_x}(t) \leq 2$ε. Από τη στιγμή που το σύνολο Κ είναι συμπαγές, μπορούμε να διαλέξουμε πεπερασμένο αριθμό τέτοιων διαστημάτων που καλύπτουν το Κ. Εάν Ν είναι ο μεγαλύτερος των n_x που αντιστοιχούν σε αυτή την πεπερασμένη συλλογή διαστημάτων, βλέπουμε ότι για κάθε n ≥ N, οι f_n είναι μέσα στη ζώνη πλάτους 2ε γύρω από την g, οπότε ολοκληρώνεται ο συλλογισμός. Εδώ η χρήση της οπτικής αναπαράστασης θα μπορούσε να διευκολύνει και την κατανόηση της διαδικασίας της τυπικής απόδειξης

του θεωρήματος (όπως περιγράφεται στο Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1999).

Το επόμενο παράδειγμα είναι από το βιβλίο του Littlewood (1954), ο οποίος δηλώνει ότι τα εικονικά επιχειρήματα, αν και όχι αμιγώς συμβατικά είναι αρκετά θεμιτά. Θεωρεί μία συνάρτηση $f \xrightarrow{x\to\infty} 0$, με $f'' \xrightarrow{x\to\infty} 0$, οπότε συμπεραίνει ότι και $f' \xrightarrow{x\to\infty} 0$.



Ο οπτικός συλλογισμός του έχει ως εξής: Αν το όριο της f΄ στο άπειρο δε μηδενιζόταν, τότε το γράφημά της θα είχε «κορυφές» πάνω ή κάτω από τον οριζόντιο άξονα που περικλείουν τρίγωνα όπως το PQR, όπου το ύψος του P δεν είναι μικρό, οι κλίσεις των PQ, PR δεν είναι μεγάλες και έτσι η περιοχή PQR δεν είναι μικρή. Τότε η διαφορά f(Q)-f(R) δεν είναι μικρή, που διαψεύδει ότι $f \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Στη συνέχεια ισχυρίζεται ότι αυτός ο συλλογισμός είναι αυστηρός και δημοσιεύσιμος με την έννοια ότι μπορεί να μεταφραστεί σε σύμβολα ώστε κανένα προκύπτον βήμα να μην είναι αμφίσημο ή τετριμμένο. Πράγματι, εάν ο οπτικός αυτός συλλογισμός συνδυαστεί με αναλυτική σκέψη, η οποία μάλιστα όπως οι έρευνες δείχνουν, και ήδη αναφέραμε, υποκινείται από την οπτική σκέψη, θα έχουμε μία πλήρη απόδειξη: Αν το όριο της f΄ στο άπειρο δε μηδενιζόταν, από την άρνηση του ε-δ ορισμού του ορίου $\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall M > 0,\ \exists\ \chi > M$: $|f'(\chi)| \geq \varepsilon$ και γι' αυτό το ύψος του P δεν είναι μικρό. Οι κλίσεις των PQ, PR δεν είναι μεγάλες αφού $f'' \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Τότε η περιοχή PQR και επομένως και η περιοχή που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f΄ και τον χ΄χ δεν είναι μικρή. Παίρνοντας το ορισμένο ολοκλήρωμα έπεται ότι η διαφορά f(Q)-f(R) δεν είναι μικρή οπότε καταλήγουμε στο άτοπο. Οι βασικές ιδέες εδώ δεν θα μπορούσαν να προέλθουν από τα αναλυτικά επιχειρήματα που ολοκληρώνουν το συλλογισμό, αλλά

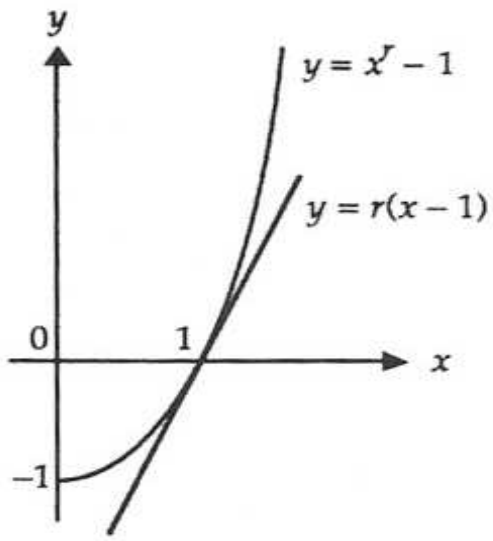
μόνο από το σχήμα. Ο Littlewood δηλώνει ότι ο ίδιος σκέφτεται κατά αυτό τον οπτικό τρόπο σε ένα πρόβλημα, όποτε το περιεχόμενο του προβλήματος το επιτρέπει.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι από το βιβλίο του Nelsen (1993). Πρόκειται, όπως αναφέρει και ο ίδιος, για εικόνες και διαγράμματα που βοηθούν τον παρατηρητή να καταλάβει γιατί ένας ισχυρισμός μπορεί να είναι αληθής και επίσης να διακρίνει την πορεία που μπορεί να ακολουθήσει για να αποδείξει ότι είναι αληθής.

- Η ανισότητα του Bernoulli:

$x > 0,\ x \neq 1,\ r > 1 \Rightarrow x^r - 1 > r(x - 1)$

μπορεί να κατανοηθεί οπτικά με βάση το σχήμα που ακολουθεί:

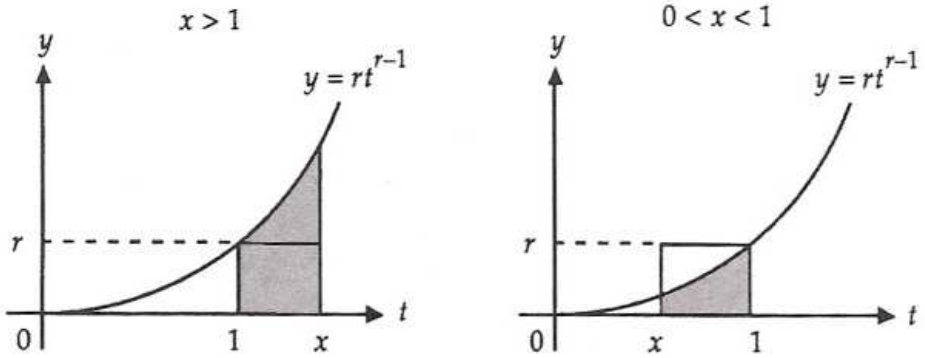


Αν θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με εξίσωση $y = x^r - 1$ η οποία για $x > 0$ και $r > 1$ είναι μία κυρτή καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία (0, -1) και (1,0), το δεύτερο μέλος της ανισότητας παριστάνει γραφικά την ευθεία με εξίσωση $y = r(x - 1)$, η οποία διέρχεται από το σημείο (1, 0) εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Τότε, αφού η καμπύλη είναι κυρτή θα είναι πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο για $x \neq 1$.

- Μία άλλη οπτική της ίδιας ανισότητας είναι να θεωρήσουμε τη διαφορά στο πρώτο μέλος της ανισότητας από το θεμελιώδες θεώρημα του

ολοκληρωτικού λογισμού ως εμβαδό που ορίζει η γραφική παράσταση μιας παράγουσας της συνάρτησης με εξίσωση $y = t^{r}-1$, με τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $t = 1$ και $t = x$ όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Μία τέτοια παράγουσα είναι η συνάρτηση $y = rt^{r-1} - 1$ και στην περίπτωση που ισχύει $x > 1$ θα έχουμε:

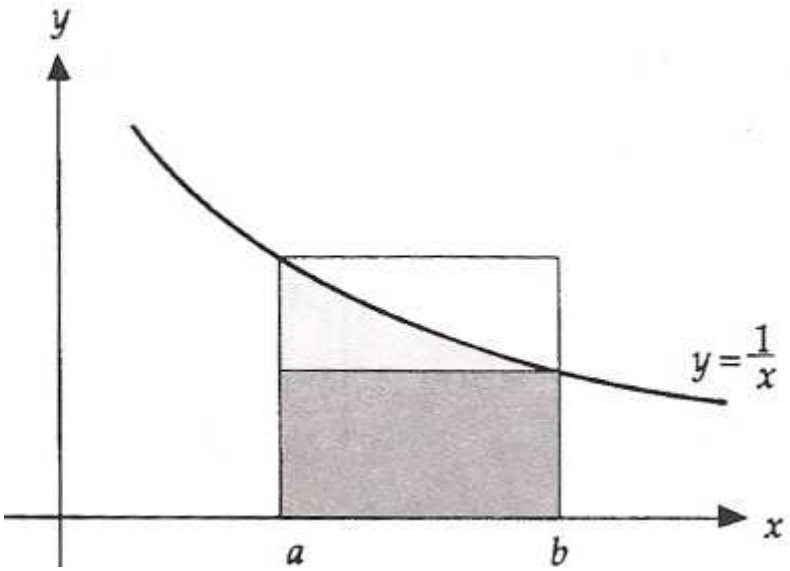
$$x^{r} - 1 = \int_{1}^{x} rt^{r-1}dt > r(x-1).$$



Τότε, όπως φαίνεται και στο προηγούμενο σχήμα, το εμβαδόν που ορίζει η καμπύλη (η οποία για $t>0$ θα είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα) με τον χ΄χ από 1 ως x, είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση $x - 1$ και ύψος r. Ομοίως μπορούμε να σκεφτούμε και στην περίπτωση που είναι $0 < x < 1$.

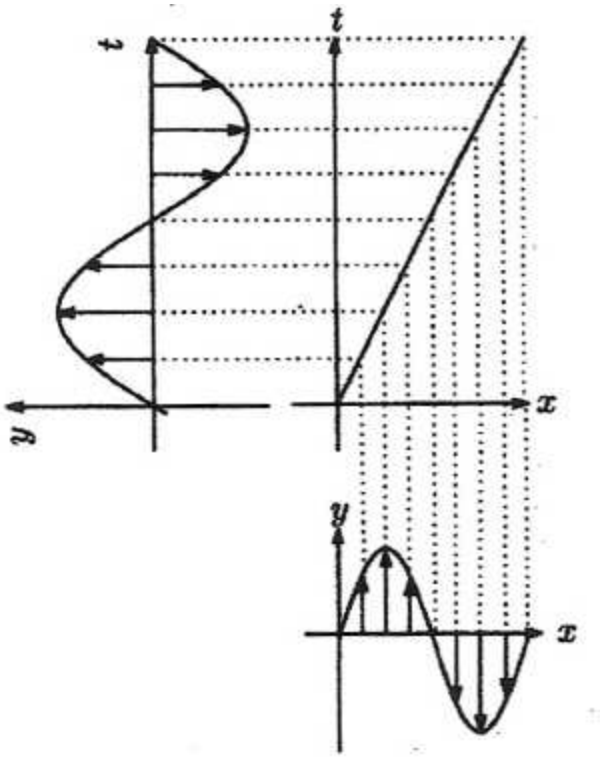
- Η ανισότητα του Napier $b > a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$

μπορεί να κατανοηθεί οπτικά με βάση το σχήμα που ακολουθεί:



Πράγματι ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση με εξίσωση $y=\frac{1}{x}$ (της οποίας μία παράγουσα είναι η συνάρτηση με εξίσωση $y=\ln x$), η οποία έχει τη γνωστή γραφική παράσταση που εμφανίζεται στο προηγούμενο σχήμα. Το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική της παράσταση, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x = a και x = b, είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση b – a και ύψος $\frac{1}{a}$ και μεγαλύτερο από αυτό του ορθογωνίου με βάση b – a και ύψος $\frac{1}{b}$.

Το επόμενο παράδειγμα (Aso, 2001) σχετίζεται με την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων, που παρουσιάζει δυσκολίες στην κατανόησή της από τους μαθητές. Συνήθως, το πρώτο παράδειγμα με το οποίο εισάγεται η σύνθεση συναρτήσεων είναι η παράλληλη μετατόπιση ενός γραφήματος. Με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι μαθητές μπορούν εύκολα να σχεδιάσουν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων $y = x^2$ και $y = (x - p)^2$ και να παρατηρήσουν τη μετατόπιση. Όμως η ευκολία της κατασκευής των γραφημάτων και η απλή παρατήρηση της μετατόπισης δεν οδηγούν απαραίτητα στην κατανόηση της έννοιας. Κατά τον Aso, για να κατανοήσουν την έννοια οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν το βαθμό της αλλαγής μεταξύ τριών μεταβλητών x, t και y σε ένα ζεύγος συναρτήσεων y = sint και t = 2x. Με το σχήμα που ακολουθεί, μπορεί να εξηγηθεί η αλλαγή της περιόδου της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

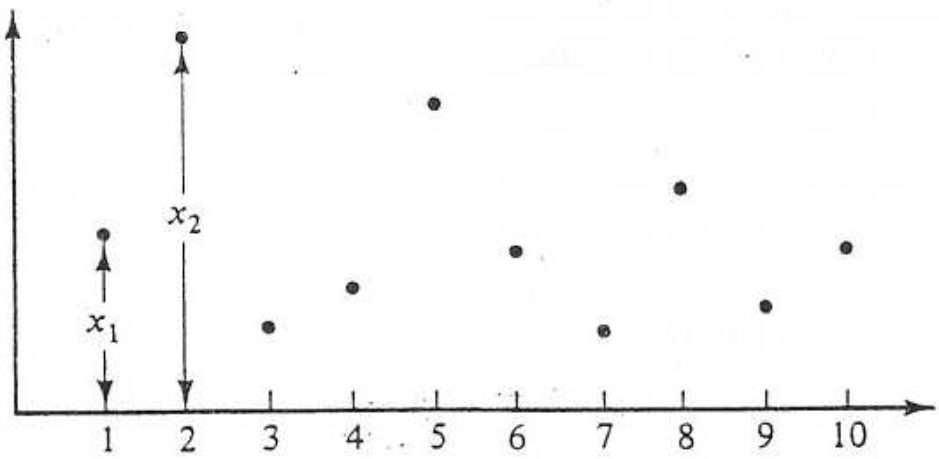


Ουσιαστικά εδώ, μέσω του συγκεκριμένου παραδείγματος και της οπτικής αναπαράστασης, υποστηρίζεται η κατανόηση του ορισμού της σύνθεσης συναρτήσεων.

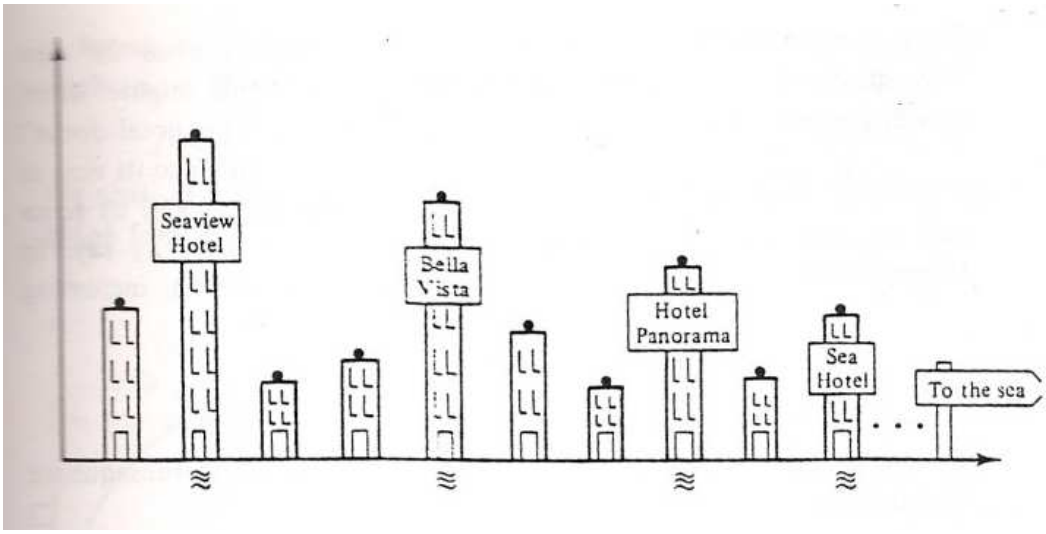
Το επόμενο παράδειγμα αφορά σε ένα κεντρικό θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία

και οι οπτικές αναπαραστάσεις με τις οποίες εξηγείται από τον Bryant (1990), συνεισφέρουν στην κατανόηση της τυπικής μαθηματικής του απόδειξης. Ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ακολουθία χ_1, χ_2, χ_3, … και ένα πιθανό γράφημά της. Για λόγους ευκολίας ας θεωρήσουμε επίσης ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί:

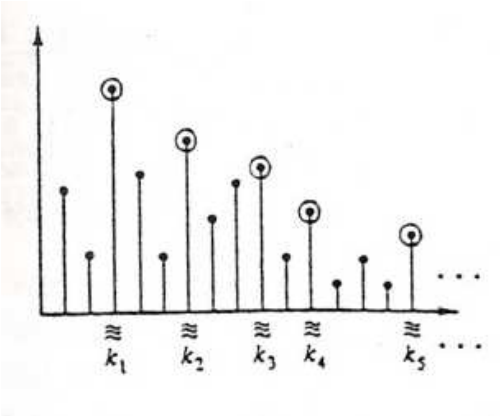
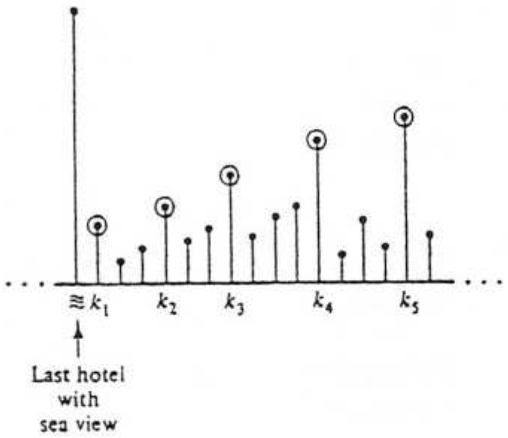


Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα σημεία στο προηγούμενο σχήμα παριστάνουν ανθρώπους στην οροφή των ξενοδοχείων που υπάρχουν στη σειρά σε μία παραλιακή πόλη. Τα ξενοδοχεία εκτείνονται κατά μήκος μιας μεγάλης γραμμής προς τη θάλασσα η οποία είναι κάπου στο βάθος δεξιά:



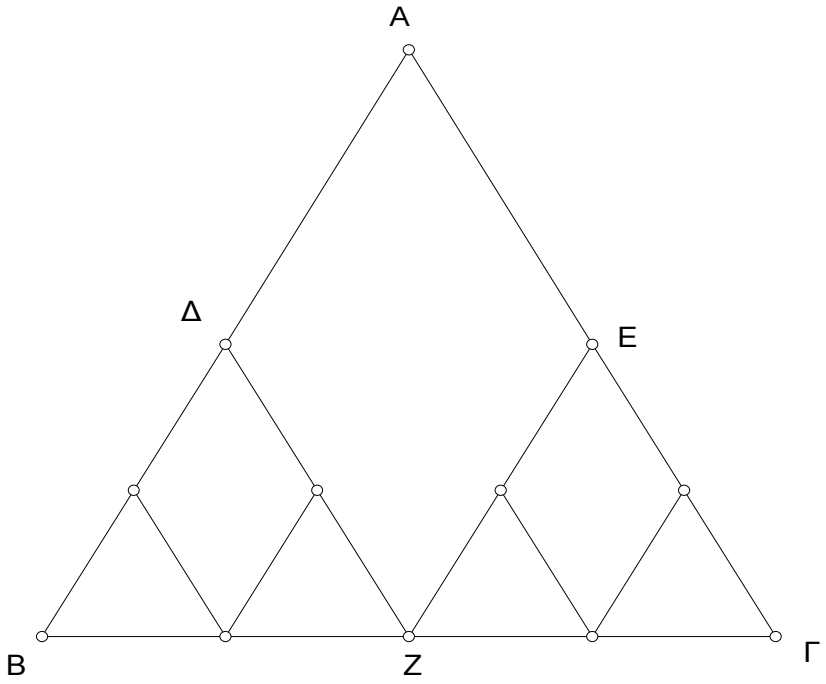
Ένας αντιπρόσωπος ταξιδιωτικού οδηγού, επισκέπτεται τα ξενοδοχεία και δίνει σε κάθε ξενοδοχείο που έχει θέα στη θάλασσα το ειδικό σήμα $\cong$ στον οδηγό. Έτσι ένα ξενοδοχείο παίρνει το σήμα $\cong$, αν κάποιος μπορεί να κάθεται στην οροφή του και να κοιτάζει τη θάλασσα χωρίς κάποιο ψηλότερο ξενοδοχείο που είναι πιο κοντά στη θάλασσα να του παρεμποδίζει τη θέα. Εκείνα τα ξενοδοχεία που κέρδισαν αυτό το

σήμα φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα. Για το θέρετρο τώρα αυτό ένα από τα εξής θα συμβαίνει:

Είτε θα υπάρχουν άπειρα ξενοδοχεία με το σήμα $\cong$. Σε αυτή την περίπτωση ας αριθμήσουμε τα ξενοδοχεία με το σήμα $\cong$ ως κ_1, κ_2, κ_3, …  Τότε, αφού κανένα ξενοδοχείο δεν έχει θέα που παρεμποδίζεται από κάποιο ψηλότερο ξενοδοχείο πλησιέστερο στη θάλασσα, προκύπτει για τα ύψη τους: $x_{k_1} > x_{k_2} > x_{k_{3<}} > \ldots$ Οπότε έχουμε βρει μία φθίνουσα υπακολουθία.	**Είτε** θα υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ξενοδοχείων με το σήμα $\cong$ Σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχει ένα τελευταίο ξενοδοχείο με το σήμα $\cong$: ας αριθμήσουμε το πρώτο ξενοδοχείο μετά από αυτό ως κ_1. (Αν δεν υπάρχει κανένα ξενοδοχείο με το σήμα $\cong$ τότε παίρνουμε ως κ_1 το πρώτο ξενοδοχείο).  Τότε, το ξενοδοχείο κ_1, έχει θέα που παρεμποδίζεται από κάποιο ψηλότερο ξενοδοχείο, έστω το κ_2. Το ξενοδοχείο κ_2 δεν έχει και αυτό θέα στη θάλασσα γιατί παρεμποδίζεται από κάποιο ψηλότερο ξενοδοχείο, έστω το κ_3. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει μία αύξουσα υπακολουθία για τα ύψη τους: $x_{k_1} \le x_{k_2} \le x_{k_{3<}} \le \ldots$

Έτσι σε κάθε περίπτωση λαμβάνουμε μια αύξουσα ή φθίνουσα υπακολουθία.

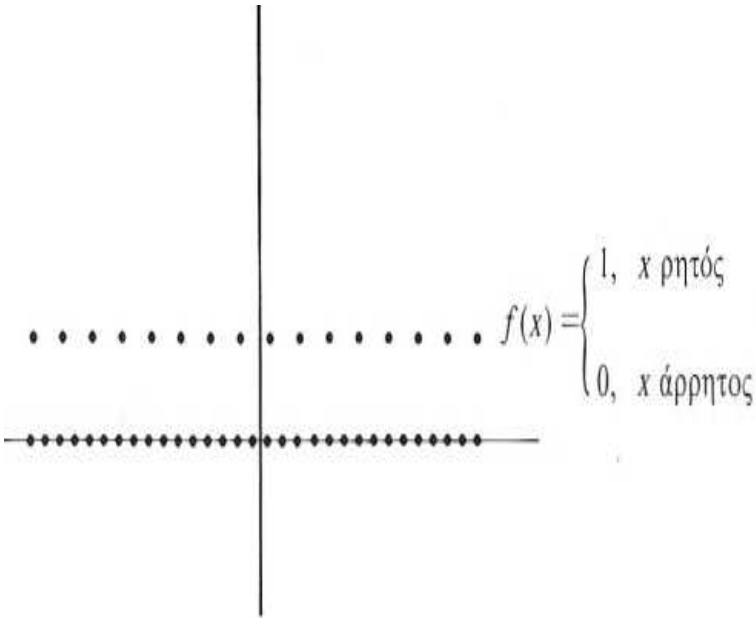
Συμπεράσματα που στηρίζονται αποκλειστικά στην εικόνα μπορεί να είναι και εσφαλμένα (Tall, 1991). Ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου σφάλματος είναι το επόμενο: Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του και κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ. Έστω α_1= ΒΔ+ΔΖ+ΖΕ+ΕΓ. Στα τρίγωνα ΒΔΖ και ΖΕΓ εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία, κατασκευάζουμε τέσσερα τρίγωνα και θέτουμε α_2 το άθροισμα των αντίστοιχων οκτώ πλευρών (βλ. Σχήμα 1). Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία α_n: n=1,2,....Η ερώτηση είναι που τείνει η ακολουθία α_n.



Η εικόνα εύκολα μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία α_n συγκλίνει στο μήκος του ΒΓ. Εύκολα όμως αποδεικνύεται ότι α_n= ΑΒ+ΑΓ για κάθε n=1,2,...., δηλαδή ότι η ακολουθία είναι σταθερή. Άρα συγκλίνει στη σταθερή τιμή της που δεν είναι ίση με αυτή που καταλήγουμε εποπτικά.

Επίσης, η συνάρτηση Dirichlet $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\notin Q\end{cases}$, συνιστά ακόμη ένα παράδειγμα για τους περιορισμούς του σχήματος αφού, δεν μπορεί να σχεδιαστεί

ούτε με το χέρι ούτε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, αν και ορισμένα βιβλία (Spivak, 1991) παραθέτουν ένα προσεγγιστικό γράφημά της που είναι περίπου στην ακόλουθη μορφή:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Η διδασκαλία και η μάθηση του Απειροστικού Λογισμού έχουν ως επίσημη αφετηρία, στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, την τελευταία τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Κοινή βάση για όλους τους μαθητές που εισάγονται στις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού αποτελεί το σχολικό εγχειρίδιο. Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύεται το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης ως προς τη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στην εισαγωγή και ανάπτυξη των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού και τη συνεισφορά τους στην κατανόηση των μαθητών.

3.1. Θεωρητικό πλαίσιο

Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, που αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη μάθηση των Μαθηματικών, διακρίνεται από την Artigue (1992) στις εξής διαστάσεις:

- Η *επιστημολογική* διάσταση που συνδέεται με τα χαρακτηριστικά της γνώσης
- Η *γνωστική* διάσταση που συνδέεται με τα γνωστικά χαρακτηριστικά εκείνων που πρόκειται να διδαχθούν τη γνώση
- Η *διδακτική* διάσταση που συνδέεται με τα χαρακτηριστικά της λειτουργίας του εκπαιδευτικού συστήματος

Η διδακτική διάσταση αναφέρεται στη γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος, των ιδιαιτέρων στόχων της διδασκαλίας σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης, καθώς και στη γνώση των εκπαιδευτικών πηγών δηλαδή των σχολικών εγχειριδίων, των σχετικών με το διδασκόμενο αντικείμενο δημοσιεύσεων και των σχετικών ιστοσελίδων του διαδικτύου. Οι κύριες πηγές της διδακτικής διάστασης κατά τους Gonzalez-Martin, Seffah & Nardi (2009), είναι τα επίσημα Προγράμματα Σπουδών, τα εγχειρίδια και οι

εκπαιδευτικές πρακτικές. Στην παρούσα μελέτη ερευνάται η διδακτική διάσταση της κατανόησης των εννοιών του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος, αναλύοντας τον τρόπο εισαγωγής και ανάπτυξής τους στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών, και διερευνάται το αν ο τρόπος αυτός συμβάλλει στην σωστή κατανόηση των εννοιών.

Αναφορικά με την κατανόηση υιοθετείται η οπτική του Duval (1999) για τα σημειωτικά αναπαραστατικά συστήματα που παρατίθεται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση του Α΄ μέρους. Ο Duval θεωρεί τις αναπαραστάσεις και την οπτικοποίηση ως τον πυρήνα της κατανόησης στα Μαθηματικά δηλώνοντας: «δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς οπτικοποίηση». Η διάκριση ενός αντικειμένου και της αναπαράστασής του είναι θεμελιώδης για τη μαθηματική κατανόηση. Για να είναι σε θέση ο μαθητής να κάνει αυτή τη διάκριση είναι αναγκαίο να μπορεί να κάνει συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου. Το γεγονός αυτό κάνει απολύτως απαραίτητη τη χρήση διαφορετικών σημειωτικών αναπαραστατικών συστημάτων ενός μαθηματικού αντικειμένου. Ο Duval δηλώνει ότι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας απαιτεί τη χρήση δύο τουλάχιστον σημειωτικών αναπαραστατικών συστημάτων, αφού κάθε αναπαράσταση δείχνει διαφορετικές πτυχές του μαθηματικού αντικειμένου που αναπαριστά. Έτσι στην ανάλυση περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου που ακολουθεί, το ενδιαφέρον εστιάζεται στο συνδυασμό αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων για την εισαγωγή και ανάπτυξη των εννοιών του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος, με εστίαση στις γραφικές αναπαραστάσεις. Η επιλογή των δύο αναπαραστατικών συστημάτων στηρίζεται στη βιβλιογραφική ανασκόπηση του Α΄ μέρους η οποία αναδεικνύει την επίδραση της οπτικής προσέγγισης στη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Στηρίζεται επίσης σε αποτελέσματα ερευνών όπως η έρευνα των Iliada, Gagatsis, Panaoura, Zachariades, Zoulinaki, (2009) που πραγματοποιήθηκε σε 222 μαθητές της Γ΄ Λυκείου στην Ελλάδα. Η έρευνα αυτή έδειξε ότι οι μαθητές που είχαν δομήσει με εννοιολογική κατανόηση την έννοια του ορίου ήταν αυτοί που κατά κύριο λόγο μπορούσαν να μετατρέπουν τις αλγεβρικές αναπαραστάσεις της έννοιας σε γεωμετρικές και αντίστροφα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αυτοί, ήταν σε θέση να σχεδιάζουν γραφήματα συναρτήσεων με δεδομένες προϋποθέσεις που περιείχαν όρια, καθώς και να υπολογίζουν όρια βασισμένα σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις.

Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στην μαθησιακή διαδικασία, άρχισε να παρουσιάζει ενδιαφέρον μόλις την δεκαετία του ’90. Το ενδιαφέρον αυτό ισχυροποιήθηκε από τις έρευνες που έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στα σχολικά εγχειρίδια προκειμένου να σχεδιάσουν την διδασκαλία τους (Freeman & Porter 1989, Stodlosky 1989) ή τα χρησιμοποιούν ακόμα και ως τη μοναδική πηγή -κυρίως οι αρχάριοι (Ball & Feiman-Nemser, 1988), τόσο για την οργάνωση της διδασκαλίας τους, όσο και για την ανάθεση εργασιών στους μαθητές τους (Burstein, 1993 στο Κολέζα, 2006). Γίνεται λοιπόν φανερό ότι τα σχολικά εγχειρίδια και η χρήση τους από τους εκπαιδευτικούς είναι σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνα για το τι μαθαίνουν οι μαθητές. Ένα θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών παρουσιάζεται από την Κολέζα (2006). Στη μελέτη της παρουσιάζει μία ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας από την οποία προκύπτει ένα ισχυρό ενδιαφέρον από την επιστημονική κοινότητα για τα σχολικά εγχειρίδια, τις τελευταίες δεκαετίες. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο καταλήγει η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, η ανάλυση ενός σχολικού εγχειριδίου μπορεί να γίνει ως προς δύο βασικούς άξονες:

- τον άξονα της δομής και του περιεχομένου του
- τον άξονα που σχετίζεται με τον τρόπο εφαρμογής τους στις τάξεις.

Ο άξονας του περιεχομένου που θα ακολουθήσουμε στην ανάλυση, έχει μια τετραπλή διάσταση και αφορά:

- στη μαθηματική διάσταση (τα Μαθηματικά που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια, οι πεποιθήσεις που προωθούνται για τη φύση των Μαθηματικών και τον τρόπο συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης)
- στη γνωστική διάσταση της μάθησης
- στη διδακτική διάσταση του περιεχομένου (τρόποι με τους οποίους ενισχύεται ο μαθητής στην κατανόηση του περιεχομένου και ο εκπαιδευτικός στη διδασκαλία του)
- στην παιδαγωγική διάσταση.

Θα ασχοληθούμε με κάποιες συνιστώσες της μαθηματικής και της διδακτικής διάστασης του περιεχομένου του εγχειριδίου που θα αναλυθεί.

Η μαθηματική διάσταση μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω ως προς τρεις βασικούς άξονες:

- την επιλογή και οργάνωση του περιεχομένου
- τις υπονοούμενες πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών και
- τον τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης: Γλώσσα και αναγνωσιμότητα, λεξιλόγιο, αναπαραστασιακά συστήματα..

Θα ασχοληθούμε με τον άξονα που σχετίζεται με τον τρόπο παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης και συγκεκριμένα με τα επιλεγόμενα από το εγχειρίδιο αναπαραστασιακά συστήματα.

Η διδακτική διάσταση αναφέρεται στη διερεύνηση των διδακτικών αρχών που διέπουν το περιεχόμενο και τη μορφή του κειμένου στο σχολικό εγχειρίδιο και μπορεί να διερευνηθεί επίσης ως προς τρεις άξονες σε σχέση με το πώς το εγχειρίδιο βοηθά τον μαθητή:

- μέσα από το περιεχόμενο κειμένου
- μέσα από τις μεθόδους που περιλαμβάνονται στο κείμενο (για παράδειγμα δραστηριότητες σε ποικίλα επίπεδα δυσκολίας, χρήση εικόνων) και
- μέσω των ρητορικών εργαλείων του κειμένου.

Θα ασχοληθούμε με τον άξονα που σχετίζεται με τις μεθόδους που περιλαμβάνονται στο κείμενο και συγκεκριμένα με τη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων.

Τη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων τη συνδέουμε με τη θεωρία του D. Tall που αφορά στους «τρεις κόσμους» προσέγγισης των Μαθηματικών (Tall, 1981). Πρόκειται για τρεις κόσμους μαθηματικής σκέψης: *τον ενσαρκωμένο (embodied) , το διαδικασιοεννοιολογικό (proceptual)* και *τον αξιωματικό (axiomatic).* Ο ενσαρκωμένος κόσμος βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση και αποτελεί τον αρχικό μαθηματικό τρόπο σκέψης. Στα πλαίσια αυτού του κόσμου αρχίζει ο μαθητής να μαθαίνει και να σκέπτεται Μαθηματικά. Ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος είναι ο κόσμος των διαδικασιών. Είναι ο κόσμος όπου ο μαθητής ταυτίζει τη διαδικασία με την έννοια και αποτελεί το δεύτερο στάδιο της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Ο αξιωματικός κόσμος είναι το τρίτο στάδιο. Είναι ο κόσμος στον οποίο τα Μαθηματικά αποτελούν ένα οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα και

πρωταρχικές έννοιες. Με τη χρήση αυτών, ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι πρώτες μαθηματικές προτάσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τις αποδειχθείσες προτάσεις αποδεικνύονται νέες προτάσεις και ούτω καθεξής. Έτσι οικοδομείται ο αξιωματικός κόσμος, που αποτελεί και το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης. Οι δύο πρώτοι κόσμοι, ο ενσαρκωμένος και ο διαδικασιοεννοιολογικός, είναι οι κόσμοι που κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Το πέρασμα από τον ενσαρκωμένο τρόπο σκέψης στον διαδικασιοεννοιολογικό γίνεται σταδιακά. Οι δύο κόσμοι συνυπάρχουν μέχρις ότου να φτάσει ο μαθητής να κατακτήσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης σε τέτοιο βαθμό, ώστε να θεωρείται ότι δεν του χρειάζεται ο προηγούμενος. Έτσι ο ενσαρκωμένος τρόπος σκέψης παύει να χρησιμοποιείται, σταδιακά εξασθενεί και ουσιαστικά εξαφανίζεται. Ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να δημιουργείται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο.

Ο ενσαρκωμένος κόσμος σκέψης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση. Ο μαθητής σκέφτεται Μαθηματικά, ενεργώντας σε κάτι που μπορεί να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του. Οι εικονικές αναπαραστάσεις, οπτικές ή νοερές, αποτελούν σημαντικά εργαλεία στα πλαίσια αυτού του κόσμου. Ο ενσαρκωμένος τρόπος σκέψης στη σχολική εκπαίδευση χρησιμοποιείται κυρίως για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών στο Δημοτικό σχολείο. Στο Γυμνάσιο χρησιμοποιείται ελάχιστα, κυρίως μέσα από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χωρίς να παίζει σημαντικό ρόλο. Ελάχιστες φορές ζητείται από τον μαθητή να λύσει προβλήματα στηριζόμενος σε γραφικές παραστάσεις και ακόμη λιγότερες να συνδυάσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης που κυρίως χρησιμοποιεί με τον ενσαρκωμένο, δουλεύοντας πάνω στο ίδιο θέμα. Η αντίληψη που κυριαρχεί είναι ότι ο μαθητής πρέπει να μάθει να σκέφτεται χρησιμοποιώντας μόνο τις συμβολικές αναπαραστάσεις, δηλαδή μόνο τα τυπικά μαθηματικά. Έτσι, όπως προαναφέρθηκε, σταδιακά εξασθενεί στους μαθητές η δυνατότητα σκέψης στα πλαίσια του ενσαρκωμένου κόσμου και πρακτικά εξαφανίζεται. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του Λυκείου δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό τον τρόπο σκέψης. Έχει περάσει πλήρως στον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης και δεν έχει την ικανότητα να τον συνδέσει με τον ενσαρκωμένο. Οι Tall & Pinto (2002), συμπεραίνουν όμως, ότι ένας μαθητής μπορεί να δώσει νόημα σε ένα ορισμό χρησιμοποιώντας τις εικόνες που έχει στο νου

του και δομώντας μία νέα τελειοποιημένη εικόνα η οποία υποστηρίζει σε επόμενο στάδιο την ανάπτυξη τυπικών επιχειρημάτων. Οι Christou, Pitta-Pantazi, Souyoul & Zachariades (2005) συμπεραίνουν, μετά από έρευνα για την κατανόηση των συναρτήσεων σε 236 πρωτοετείς φοιτητές Μαθηματικών, ότι το πέρασμα στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη επιτυγχάνεται μέσω της ενσαρκωμένης κατανόησης η οποία ακολουθεί και υποστηρίζεται από, τους διαδικασιοεννοιολογικούς χειρισμούς.

Για τη χρήση των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση υιοθετήθηκε η διάκριση στις εξής γενικές περιπτώσεις:

- χρήση των αναπαραστάσεων για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών
- για τη δημιουργία εικασιών
- για την περιγραφή μαθηματικών συμπερασμάτων και
- για την περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων.

Η δυνατότητα ενσάρκωσης των ορισμών των μαθηματικών εννοιών δηλαδή η δυνατότητα αναπαράστασής τους ώστε να γίνουν κατανοητοί μέσω των αισθήσεων, η δημιουργία εικασίας με σημαίνοντα ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, η ενσάρκωση μιας μαθηματικής πρότασης δηλαδή η περιγραφή της με εικονική αναπαράσταση και τέλος η περιγραφή αποδείξεων με αναπαραστάσεις ώστε να εμφανιστεί η μαθηματική ιδέα που υπάρχει πίσω από τη φορμαλιστική διατύπωση, οδηγούν στην πλήρη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας.

3.2. Μεθοδολογία

Η έρευνα που ακολουθεί είναι μία μορφή Ανάλυσης Περιεχομένου του σχολικού εγχειριδίου της Γ΄ τάξης του Ελληνικού Ενιαίου Λυκείου. Το εγχειρίδιο αυτό και μόνο χρησιμοποιείται υποχρεωτικά από τους Έλληνες μαθητές που έχουν επιλέξει τη θεωρητική και τεχνολογική κατεύθυνση σπουδών (από τις τρεις υπάρχουσες κατευθύνσεις). Οι μαθητές εξετάζονται σε εθνικό επίπεδο στην αντίστοιχη ύλη προκειμένου να εισαχθούν σε σχολές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η εξεταζόμενη ύλη του σχολικού εγχειριδίου αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια, τρία κεφάλαια Ανάλυσης και ένα κεφάλαιο Άλγεβρας. Τα κεφάλαια της Ανάλυσης διαπραγματεύονται έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, με τις οποίες οι μαθητές

έρχονται πρώτη φορά σε επαφή σε αυτό το επίπεδο της εκπαίδευσης. Οι έννοιες αυτές είναι: η έννοια του ορίου, η έννοια της συνέχειας, η έννοια της παραγώγου και η έννοια του ολοκληρώματος, καλύπτουν δε το 90% της εξεταστέας ύλης. Ο Απειροστικός Λογισμός αποτελεί ένα από τα βασικότερα υποχρεωτικά μαθήματα των μαθηματικών πανεπιστημιακών τμημάτων που εκπαιδεύουν τους μελλοντικούς καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για αυτούς τους λόγους, αλλά και γιατί η συνοχή των αναπτυσσόμενων εννοιών, επιτρέπει μια πιο ξεκάθαρη ανάλυση της ανάπτυξής τους, επιλέχθηκε να ερευνηθούν τα κεφάλαια της Ανάλυσης. Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο, ερευνάται ο τρόπος με τον οποίο εισάγονται και αναπτύσσονται οι παραπάνω έννοιες, καθώς και το αν οι γραφικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται ενθαρρύνουν την κατανόηση των μαθητών. Τα ερευνητικά ερωτήματα συγκεκριμένα είναι:

1) Με ποιες αναπαραστάσεις το σχολικό εγχειρίδιο εισάγει και αναπτύσσει τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος; Για ποιο σκοπό χρησιμοποιεί τις οπτικές αναπαραστάσεις σε σχέση με τις έννοιες αυτές;

2) Η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων, όπως συντελείται από το σχολικό εγχειρίδιο, βοηθά στην κατανόηση των παραπάνω εννοιών ή επιφέρει παρανοήσεις στους μαθητές;

3.2.1. Ανάλυση των δεδομένων

Για την έρευνα κατασκευάστηκε και πραγματοποιήθηκε ανάλυση βασισμένη σε εκείνη που χρησιμοποιείται από τους Giraldo, Gonzalez-Martin & Santos (2009), καθώς από τους Gonzalez-Martin, Seffah, Nardi (2009). Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν δείκτες μέτρησης των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο. Η εισαγωγή και η ανάπτυξη των εννοιών ερευνήθηκε μέσω των ορισμών των ίδιων των εννοιών ή ορισμών απαραίτητων για την ανάπτυξη της κεντρικής έννοιας (όπως για παράδειγμα ο ορισμός του τοπικού ακροτάτου για την έννοια της παραγώγου) και των τρόπων με τους οποίους αποδίδονται οι προτάσεις και τα θεωρήματα με τα οποία συνδέεται η κάθε έννοια. Μελετήθηκαν επίσης οι τύποι των παραδειγμάτων που δίνονται για την κάθε έννοια, οι λυμένες εφαρμογές του σχολικού βιβλίου, καθώς και οι ασκήσεις που προτείνονται. Η ανάλυση των παραδειγμάτων και των λυμένων εφαρμογών έχει ιδιαίτερη σημασία, αφού αναδεικνύει το είδος του αναπαραστατικού συστήματος και τις μετατροπές μεταξύ αναπαραστατικών συστημάτων που κυριαρχούν στο σχολικό

βιβλίο. Για το λόγο αυτό καταγράφηκε ο ακριβής αριθμός δειγμάτων που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο από κάθε κατηγορία. Η χρήση των αναπαραστάσεων από το σχολικό βιβλίο διερευνήθηκε σε σχέση με τους σκοπούς που αυτές εξυπηρετούν: για την κατανόηση του ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας, για τη δημιουργία εικασιών, για την περιγραφή μαθηματικών συμπερασμάτων, για την περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων. Κάθε γραφική αναπαράσταση που παρατίθεται στο σχολικό εγχειρίδιο αναλύθηκε επίσης ως προς τη συνεισφορά της στην κατανόηση της αντίστοιχης έννοιας, με βάση το θεωρητικό πλαίσιο, καθώς και ειδικά προβλήματα με τις έννοιες που επισημαίνονται από τη βιβλιογραφία, όπως η εικόνα του γραφήματος μιας συνεχούς συνάρτησης ως η γραμμή που σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί (Tall, 1991), η αντίληψη της μονότονης σύγκλισης (Cornu, 1991) ή προβλήματα με την εφαπτομένη μιας καμπύλης (Biza, Christou & Zachariades, 2008). Επίσης εντοπίστηκαν σημεία όπου συγκεκριμένες γραφικές αναπαραστάσεις θα μπορούσαν να συνεισφέρουν στην κατανόηση της υπό διαπραγμάτευση έννοιας, ενώ δεν υπάρχουν αντίστοιχες σε κανένα σημείο στο εγχειρίδιο.

Οι κατηγορίες και οι δείκτες ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των ορισμών, των παραδειγμάτων, των αποδείξεων, των λυμένων εφαρμογών και των ασκήσεων του βιβλίου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΑΠΟΔΟΣΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
(Τ) Χρησιμοποιεί μόνο τυπικούς ορισμούς (συμβολικούς ή εν μέρει συμβολικούς)	**(Α)** Χρησιμοποιεί αλγεβρικά παραδείγματα	**(Α)** Παρουσιάζει αλγεβρικές αποδείξεις	**(Α)** Επιλύει εφαρμογές αλγεβρικά	**(Α)** Προτείνει αλγεβρικές ασκήσεις
(Δ) Άτυπες ή διαισθητικές εξηγήσεις χωρίς τυπικό ορισμό	**(Γ)** Χρησιμοποιεί γραφικά παραδείγματα	**(Γ)** Παρουσιάζει γραφική ερμηνεία χωρίς τυπική απόδειξη	**(Γ)** Επιλύει εφαρμογές γραφικά	**(Γ)** Προτείνει ασκήσεις που απαιτούν γραφικές αναπαραστάσεις
(ΤΔ) Διαισθητική αρχική προσέγγιση η οποία ακολουθείται από τον τυπικό ορισμό	**(ΑΓ)** Χρησιμοποιεί παραδείγματα που συνδέουν αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις	**(ΑΓ)** Συνδυάζει την τυπική απόδειξη με σχήμα	**(ΑΓ)** Επιλύει εφαρμογές συνδυάζοντας αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστά σεις	**(ΑΓ)** Προτείνει ασκήσεις που απαιτούν τη σύνδεση αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων

(ΤΑ) Αλγεβρική αρχική προσέγγιση η οποία ακολουθείται από τον τυπικό ορισμό	**(Κ)** Δεν παρουσιάζει παραδείγματα	**(ΣΑ)**ή/και**(ΣΓ)** Δίνει συγκεκριμένο αλγεβρικό ή/και γραφικό παράδειγμα και μετά γενικεύει χωρίς τυπική απόδειξη	**(Κ)** Δεν παρουσιάζει κάποια λυμένη εφαρμογή	**(Α∨Γ)** Προτείνει ασκήσεις που επιλύονται αλγεβρικά ή γραφικά ή με συνδυασμό
		(Κ) Δεν παρουσιάζει καμία αιτιολόγηση ή ερμηνεία		**(Κ)** Δεν προτείνει ασκήσεις

3.3. Αποτελέσματα

3.3.1. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται από το βιβλίο και ο σκοπός των οπτικών αναπαραστάσεων

Σύμφωνα με τις κατηγορίες και τους δείκτες που εμφανίζονται στον πίνακα 1 προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα σε σχέση με τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί το σχολικό εγχειρίδιο:

ΕΝΝΟΙΕΣ	ΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	ΑΠΟΔΟΣΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Όριο	3 (ΤΔ) 2 (Δ) 1 (Τ)	11 (Α) 10 (Γ)	9 (Κ) 8 (Γ) 3 (Α) 2 (ΑΓ) 2 (ΣΑ) 1 (ΣΓ)	(Α) Όλες	26 (Α) 5 (Γ)
Συνέχεια	2 (ΤΔ)	6 (Α) 3 (ΑΓ) 1 (Γ)	4 (Κ) 4 (Γ) 1 (ΑΓ)	(Α) Όλες	13 (Α) 3 (Γ) 2 (Α∨Γ) 1 (ΑΓ)

Παράγωγος	9 (ΤΔ) 2 (Τ)	19 (ΑΓ) 12 (Γ) 11 (Α)	9 (Κ) 8 (Α) 3 (ΑΓ) 2 (Γ) 1 (ΣΑ) & (ΣΓ)	13 (Α) 11 (ΑΓ)	104 (Α) 26 (ΑΓ) 11 (Α∨Γ) 5 (Γ)
Ολοκλήρωμα	4 (ΤΑ) 2 (ΤΔ) 1 (Τ)	13 (Α) 6 (ΑΓ) 5 (Γ)	5 (Κ) 4 (Α) 2 (ΑΓ) 2 (Γ)	10 (Α) 5 (ΑΓ)	69 (Α) 14 (ΑΓ) 8 (Α∨Γ)

Συγκεκριμένα για την κάθε έννοια, από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα εξής:

Όριο: Η έννοια του ορίου σε ένα $\chi_o \in \Re$ προσεγγίζεται αρχικά διαισθητικά με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων γνωστών συναρτήσεων. Στη συνέχεια ακολουθεί ο τυπικός ε-δ ορισμός του ορίου, ο οποίος όμως υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μάλλον για λόγους πληρότητας, αφού πρακτικά δεν διδάσκεται. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζονται και τα μη πεπερασμένα όρια. Τα αντίστοιχα πλευρικά όρια προσεγγίζονται διαισθητικά, μέσω γραφικών παραστάσεων, ενώ στην περίπτωση του ορίου σε $\chi_o \in \Re$ δίνεται και ο τυπικός ορισμός τους. Διαισθητική, μέσω γραφικών παραστάσεων, είναι η προσέγγιση και για το όριο συνάρτησης στο άπειρο. Ο μόνος τυπικός ορισμός που δίνεται εδώ και δεν προσεγγίζεται διαισθητικά είναι ο ορισμός του ορίου ακολουθίας. Ο ορισμός αυτός αφενός ακολουθεί τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, αφετέρου δεν υποστηρίζεται από κανενός είδους εφαρμογές ή ασκήσεις. Φαίνεται απομονωμένος και χρησιμοποιείται από το βιβλίο μόνο στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Ο ρόλος των οπτικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των ορισμών που συνδέονται με την έννοια του ορίου είναι σημαντικός, αφού οι ορισμοί αυτοί διακρίνονται για τον περίπλοκο συμβολισμό τους.

Τα παραδείγματα που δίνονται για την έννοια του ορίου είναι εξίσου αλγεβρικά και γραφικά. Τα γραφικά παραδείγματα που δίνονται, προηγούνται ή ακολουθούν τους ορισμούς του ορίου. Αλγεβρικά παραδείγματα δίνονται για τα όρια γνωστών συναρτήσεων (πολυωνυμική, ρητή), για τις ιδιότητες των ορίων, τις απροσδιόριστες μορφές και τις πράξεις με όρια. Με συγκεκριμένο αλγεβρικό

παράδειγμα και στη συνέχεια σε γενική μορφή χωρίς τυπική απόδειξη παρουσιάζεται η πρόταση για το όριο στο άπειρο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης. Συγκεκριμένο γραφικό παράδειγμα και μετά η πρόταση στη γενική της μορφή χωρίς τυπική απόδειξη, δίνεται στα βασικά μη πεπερασμένα όρια.

Αποδείξεις εδώ υπάρχουν για τα όρια στο χ_0 πολυωνυμικής, ρητής συνάρτησης και της συνάρτησης ημίτονο, είναι δε καθαρά αλγεβρικές. Αλγεβρικές αποδείξεις που συνοδεύονται όμως και με σχήμα που υποστηρίζει την κατανόησή τους , υπάρχουν στα βασικό τριγωνομετρικό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ και στην τριγωνομετρική ανισότητα $|\eta\mu\chi| \le |\chi|$. Στα βασικά μη πεπερασμένα όρια το σχολικό βιβλίο, δίνει συγκεκριμένο γραφικό παράδειγμα και, γενικεύοντας στη συνέχεα, δίνει τα όρια χωρίς τυπική απόδειξη. Όμοια, αλλά με αλγεβρικό παράδειγμα εισάγει και τα όρια πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο άπειρο. Γραφική προσέγγιση υιοθετεί στις ανισότητες με όρια χωρίς να προχωρά σε τυπικές αποδείξεις. Σε αυτή την περίπτωση οι οπτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται για να βοηθήσουν το μαθητή να επιβεβαιώσει ένα ισχυρισμό. Αιτιολόγηση ή ερμηνεία δεν παρουσιάζεται στις άμεσες συνέπειες των ορισμών, στις ιδιότητες των ορίων και στις πράξεις με όρια.

Οι εφαρμογές είναι όλες αλγεβρικού τύπου, όπως και οι ασκήσεις στην πλειονότητά τους, ενώ οι γραφικές ασκήσεις είναι κυρίως σχετικές με τη διαισθητική έννοια του ορίου αφού, όπως αναφέρθηκε, ο ε-δ ορισμός δε διδάσκεται.

Συνέχεια: Γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται και εδώ για τη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της συνέχειας, πριν τους τυπικούς ορισμούς της συνέχειας σε σημείο και σε διάστημα, και οι οπτικές αναπαραστάσεις στηρίζουν αυτή τη διαισθητική προσέγγιση.

Τα περισσότερα παραδείγματα εδώ είναι αλγεβρικού τύπου: στον ορισμό της συνέχειας, στις πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, στο πρόσημο συνεχούς συνάρτησης στα διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών (αν υπάρχουν τέτοιες) ριζών της. Υπάρχουν επίσης παραδείγματα που αναπτύσσονται αλγεβρικά αλλά υποστηρίζονται και από γραφικές αναπαραστάσεις όπως στην εύρεση του συνόλου τιμών γνωστής συνάρτησης. Ένα μικρό βοηθητικό διάγραμμα παρατίθεται σε παράδειγμα που αφορά

στη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Γραφικό παράδειγμα συνοδεύει σχόλιο του βιβλίου ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει για συνάρτηση που δεν είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα.

Χωρίς αιτιολόγηση δίνεται η συνέχεια της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, η πρόταση για τις πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, το θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής και το πεδίο τιμών συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα. Γραφικά προσεγγίζονται, το θεώρημα Bolzano, το θεώρημα διατήρησης προσήμου, η πρόταση για το σύνολο τιμών συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης και η πρόταση για την εικόνα διαστήματος. Εδώ οι γραφικές αναπαραστάσεις έχουν ως στόχο να βοηθήσουν το μαθητή να κατανοήσει ένα μαθηματικό συμπέρασμα που διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η γεωμετρική ερμηνεία για παράδειγμα του θεωρήματος Bolzano, αλλά και του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών συντελούν στο να κατανοήσει ο μαθητής τι εννοεί η διατύπωση του θεωρήματος πίσω από τον τυπικό συμβολισμό της. Ειδικά το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, αποδεικνύεται στο σχολικό βιβλίο και αλγεβρικά. Η γραφική αναπαράσταση που συνοδεύει την αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, ερμηνεύει το μαθηματικό συμπέρασμα που διατυπώνεται στο θεώρημα σε συμβολική μορφή, δεν αποκαλύπτει όμως τη μαθηματική ιδέα που βρίσκεται πίσω από την τυπική απόδειξη. Μία άλλη χρήση των γραφημάτων που εμφανίζεται εδώ: σχολιάζεται με τη βοήθειά τους τι επιπτώσεις θα είχε στο συμπέρασμα ενός θεωρήματος η έλλειψη μίας από τις προϋποθέσεις του.

Οι εφαρμογές και η πλειονότητα των ασκήσεων είναι και εδώ αλγεβρικού τύπου. Υπάρχουν κάποιες ασκήσεις που απαιτούν από το μαθητή να σκεφτεί πάνω σε μια γραφική παράσταση, μία μόνο άσκηση που συνδυάζει αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις και δύο ασκήσεις που προτείνονται με αλγεβρικό τρόπο αλλά η επίλυσή τους μπορεί να βοηθηθεί σημαντικά από μια γραφική παράσταση.

Παράγωγος: Οι ορισμοί γίνεται προσπάθεια να γίνουν πρώτα αντιληπτοί διαισθητικά μέσω γραφικής αναπαράστασης μόνο (στους ορισμούς τοπικών ακροτάτων, κυρτότητας και σημείων καμπής) ή συνδυάζοντας αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις (ορισμός παραγώγου σε σημείο, ρυθμού μεταβολής, κατακόρυφης εφαπτομένης, ορισμός ασύμπτωτων) και στη συνέχεια ακολουθεί η

τυπική τους μορφή. Σε τυπική μορφή, χωρίς διαισθητική προσέγγιση, δίνονται οι ορισμοί της παραγωγίσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο, σε ένα διάστημα και της παραγώγου συνάρτησης. Όπου υπάρχουν γραφικές αναπαραστάσεις, αυτές έχουν ως στόχο να υποστηρίξουν σημαντικά την κατανόηση του αντίστοιχου ορισμού, ειδικά στην περίπτωση του ορισμού της εφαπτομένης μιας καμπύλης και του ορισμού του σημείου καμπής.

Αλγεβρικά παραδείγματα ακολουθούν τον ορισμό της παραγώγου σε σημείο, τους κανόνες παραγώγισης, τη μονοτονία, δίνονται για την εύρεση ακροτάτων και ως εφαρμογή στους κανόνες de L' Hospital. Γραφικά παραδείγματα δίνονται κυρίως πριν την εισαγωγή των ορισμών με στόχο την κατανόησή τους. Τα περισσότερα παραδείγματα εδώ συνδυάζουν αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις. Οι γραφικές αναπαραστάσεις που παρατίθενται σε αυτά τα παραδείγματα έχουν ρόλο μάλλον επικουρικό. Απεικονίζουν συνήθως τις συγκεκριμένες συναρτήσεις οι οποίες αναφέρονται στα παραδείγματα με στόχο να οπτικοποιήσουν τις περισσότερες φορές τον αναλυτικό τους τύπο. Εξαίρεση αποτελούν γραφικές αναπαραστάσεις σε σχέση με τα τοπικά ακρότατα με τη βοήθεια των οποίων, σχολιάζονται από το σχολικό βιβλίο και ξεκαθαρίζονται τυχόν παρανοήσεις όπως, ότι ένα τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Οι προτάσεις και τα θεωρήματα του σχολικού εγχειριδίου που συνδέονται με την έννοια της παραγώγου είναι αρκετές. Λίγες από αυτές όμως αποδίδονται με γραφικές αναπαραστάσεις. Ο κύριος σκοπός των οπτικών αναπαραστάσεων που υπάρχουν είναι, να ερμηνεύσουν γεωμετρικά ένα θεώρημα, όπως το θεώρημα Rolle ή το θεώρημα μέσης τιμής, και να κάνουν περισσότερο κατανοητή μία απόδειξη. Αποδείξεις που συνδυάζουν αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις παρουσιάζονται στο θεώρημα για τις συναρτήσεις με ίσες παραγώγους, στο θεώρημα Fermat, στο θεώρημα που πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία είναι θέσεις ακροτάτων. Πολλές αποδείξεις είναι αλγεβρικές όπως, στο θεώρημα για τη συνέχεια μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης και στις παραγώγους βασικών συναρτήσεων. Αλγεβρική απόδειξη έχει επίσης, η παράγωγος αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων, το θεώρημα για τις σταθερές συναρτήσεις, το θεώρημα για τη μονοτονία συνάρτησης Σε άλλα θεωρήματα δεν υπάρχει καθόλου αιτιολόγηση όπως στο θεώρημα της παραγώγου πηλίκου και σύνθεσης συναρτήσεων, των πλάγιων

ασύμπτωτων, το θεώρημα για το μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου στην τετμημένη του σημείου καμπής ή στο θεώρημα για την κυρτότητα συνάρτησης με γνωστό πρόσημο της δεύτερης παραγώγου και στους κανόνες de L' Hospital. Αλγεβρικά και γραφικά μέσω συγκεκριμένου παραδείγματος προσεγγίζεται τέλος, το θεώρημα που πληροφορεί ποιο από τα πιθανά σημεία καμπής είναι σημείο καμπής του γραφήματος μιας συνάρτησης, χωρίς να δίνεται η τυπική του απόδειξη.

Οι εφαρμογές εδώ είναι αλγεβρικές ή συνδυάζουν αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις, περίπου στο ίδιο ποσοστό. Από τις τελευταίες, μόνο δύο βασίζονται στο σχήμα. Στις υπόλοιπες το σχήμα είναι επικουρικό, απεικονίζει απλώς τη συνάρτηση του προβλήματος και θα μπορούσε και να μην υπάρχει. Στην περίπτωση των ασκήσεων, οι ασκήσεις με γραφικές αναπαραστάσεις (πέντε σε ολόκληρο το κεφάλαιο) είναι οι μόνες που ζητούν μετατροπή μιας γραφικής αναπαράστασης σε μια άλλη (από το γράφημα της συνάρτησης στο γράφημα της παραγώγου και αντίστροφα), ενώ οι αλγεβρικές ασκήσεις υπερκαλύπτουν τις υπόλοιπες (104 αλγεβρικές ασκήσεις σε σύνολο 146 ασκήσεων που υπάρχουν στο κεφάλαιο). Στο βιβλίο των Zimmermann & Cunningham (1991), ο Zimmermann σε άρθρο του με τίτλο "Visual thinking in Calculus", θεωρεί ότι η γραφική κατανόηση της παραγώγισης, είναι θεμελιώδης για την οπτική σκέψη στον Απειροστικό Λογισμό και δηλώνει ότι οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν το γράφημα της παραγώγου, της δεύτερης παραγώγου και της παράγουσας μιας συνάρτησης f, όταν δίνεται το γράφημα της f. Οι Berry & Nyman (2003), συμπεραίνουν ότι οι δυνατότητα των μαθητών να σχεδιάζουν γραφήματα συναρτήσεων από τα γραφήματα των παραγουσών τους, ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση της παράγωγου και των συνδέσεών της με την έννοια του ολοκληρώματος. Σε ολόκληρο το κεφάλαιο των παραγώγων το σχολικό εγχειρίδιο όμως, έχει μόνο μία άσκηση όπου ζητείται ο σχεδιασμός του γραφήματος της παραγώγου με βάση το γράφημα μιας συνάρτησης και μόνο μία άσκηση όπου ζητείται το αντίστροφο.

Ολοκλήρωμα: Τυπικός ορισμός (εν μέρει συμβολικός) δίνεται για το αόριστο ολοκλήρωμα. Προσεγγίζονται καταρχήν αλγεβρικά, και στη συνέχεια ακολουθεί ο τυπικός ορισμός, η παράγουσα συνάρτησης και οι διαφορικές εξισώσεις (διαφορική εξίσωση γενικά, με χωριζόμενες μεταβλητές και γραμμική $1^{ης}$ τάξης). Προσεγγίζονται διαισθητικά μέσω αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων πριν τον τυπικό

ορισμό, το εμβαδόν επιπέδου χωρίου και το ορισμένο ολοκλήρωμα. Ο ρόλος των γραφημάτων, όπου υπάρχουν, στην κατανόηση των οριζόμενων εννοιών είναι ουσιαστικός.

Τα παραδείγματα που παρατίθενται από το σχολικό βιβλίο πριν τον ορισμό μιας έννοιας είναι γραφικά, ενώ στην περίπτωση του εμβαδού επιπέδου χωρίου συνδυάζουν και αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Ο ρόλος του σχήματος στην περίπτωση του εμβαδού είναι καθοριστικός. Παρόλα αυτά και σε αυτή την έννοια τα παραδείγματα που παρατίθενται στο σύνολό τους είναι κατά κύριο λόγο αλγεβρικά.

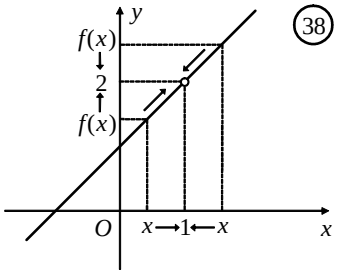
Απόδειξη ή αιτιολόγηση δεν παρατίθεται στις μεθόδους ολοκλήρωσης του ορισμένου ολοκληρώματος, στην ολοκλήρωση με αντικατάσταση στο αόριστο ολοκλήρωμα, στη γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων και στην πρόταση για το πρόσημο του ορισμένου ολοκληρώματος μιας μη αρνητικής, συνεχούς και όχι παντού μηδενικής συνάρτησης. Αλγεβρική είναι η απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού, της πρότασης για τις παράγουσες συνάρτησης και του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Στο τελευταίο θεώρημα δίνεται και η γεωμετρική ερμηνεία της μέσης τιμής μιας συνάρτησης. Συνδυασμός αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων γίνεται στην απόδειξη της πρότασης για τη μη αρνητικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης, καθώς και στην πρόταση για το εμβαδόν επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Γραφική αιτιολόγηση γίνεται στην ύπαρξη παράγουσας συνεχούς συνάρτησης, καθώς και στη διάσπαση ορισμένου ολοκληρώματος. Και εδώ ο σκοπός της οπτικής αναπαράστασης είναι να κάνει κατανοητή την τυπική διατύπωση της πρότασης.

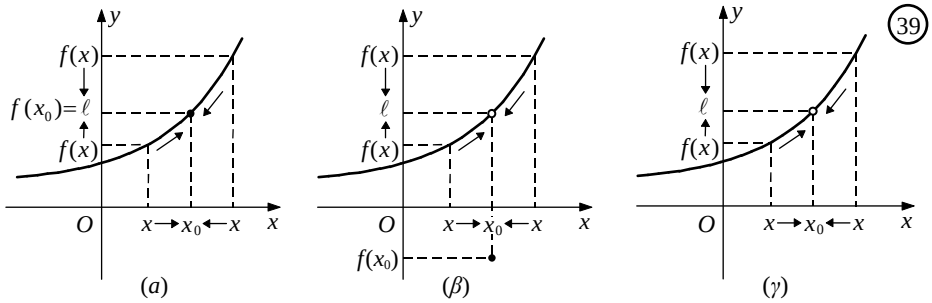
Εφαρμογές με συνδυασμό αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων υπάρχουν στο εμβαδόν επιπέδου χωρίου με το σχήμα να υποστηρίζει κάποιες φορές ουσιαστικά την επίλυση και κάποιες φορές σε πιο επικουρικό ρόλο. Οι υπόλοιπες εφαρμογές και η πλειοψηφία των ασκήσεων (αν εξαιρεθούν κάποιες ασκήσεις στα εμβαδά) είναι αλγεβρικού τύπου.

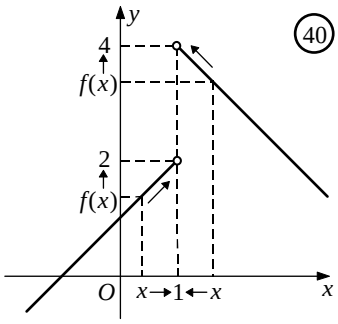
3.3.2. Η συμβολή των οπτικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση

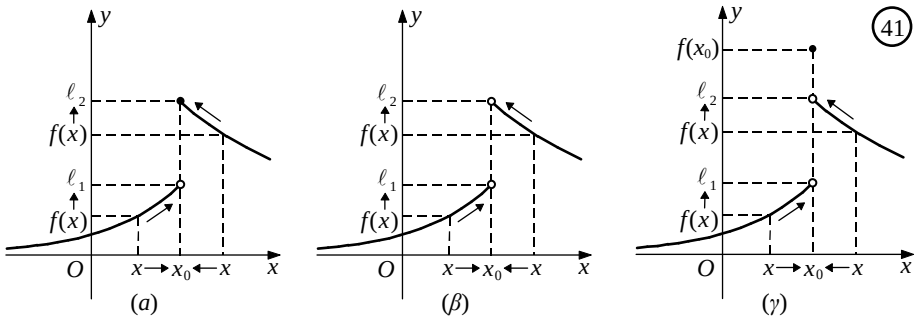
Όριο

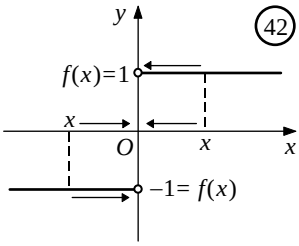
Οι γραφικές αναπαραστάσεις που υπάρχουν στο σχολικό εγχειρίδιο προκειμένου να εισαχθεί διαισθητικά η έννοια του ορίου σε ένα σημείο χ_o **στην παράγραφο 1.4** «Όριο συνάρτησης στο $\chi_o \in \Re$», είναι (με τη σειρά που παρατίθενται) οι εξής:

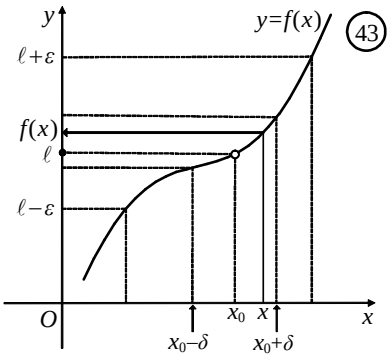


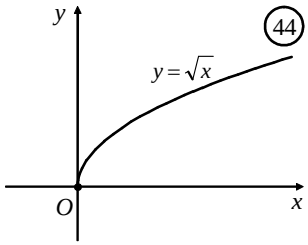


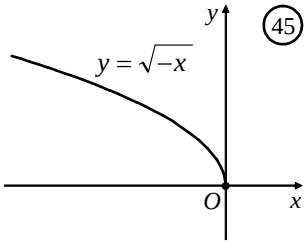


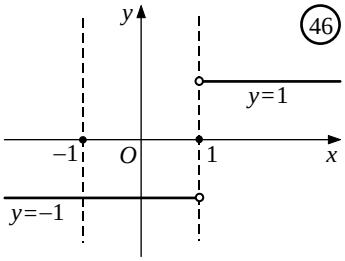












Πρόκειται για τα γραφήματα συγκεκριμένων ή τυχαίων συναρτήσεων, με τη βοήθεια των οποίων το βιβλίο εκτός από τη διαισθητική έννοια του ορίου περιγράφει και την έννοια του πλευρικού ορίου μιας συνάρτησης. Επίσης με βάση τα σχήματα 41, συμπεραίνει:

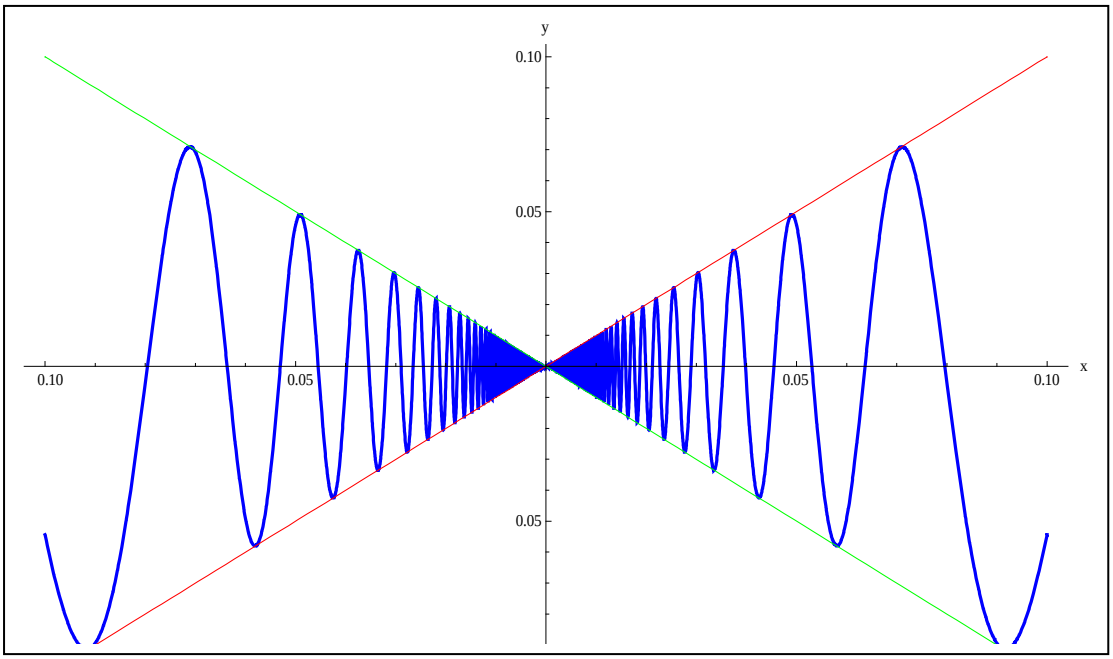
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\,, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell}$$

Στη συνέχεια φέρνει παράδειγμα συνάρτησης της οποίας το όριο δεν υπάρχει τη συνάρτηση του σχήματος 42.

Στον τρόπο που εισάγεται η έννοια του ορίου από το εγχειρίδιο, και αναφορικά με τις οπτικές αναπαραστάσεις και τη συμβολή τους στην κατανόηση της έννοιας παρατηρούμε ότι:

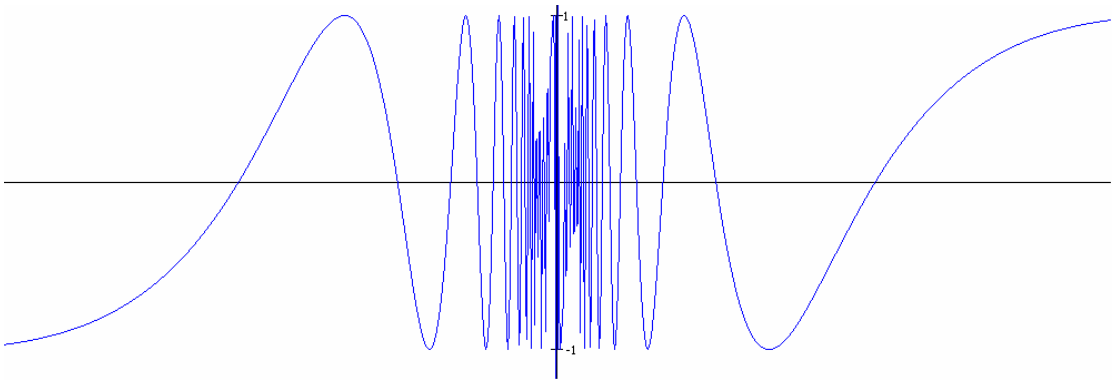
- Παράδειγμα συνάρτησης που δε συγκλίνει μονότονα στο όριό της δεν υπάρχει πουθενά στο σχολικό βιβλίο. Η αντίληψη της μονότονης σύγκλισης, ή της τοπικά μονότονης σύγκλισης αριστερά και δεξιά του χ_o, όπως διαπιστώνεται από τη βιβλιογραφία (Cornu, 1991), αποτελεί συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών. Είναι σημαντικό λοιπόν, για την αποφυγή τυχόν παρανοήσεων, οι μαθητές να έχουν και την εικόνα του γραφήματος μιας τέτοιας συνάρτησης Η $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$, αποτελεί ένα τέτοιο παράδειγμα συνάρτησης που το όριό της στο $\chi_o = 0$ είναι 0, αλλά δε συγκλίνει μονότονα στο όριό της. Το γράφημά της φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



- Δεν υπάρχει πουθενά στο σχολικό βιβλίο γραφικό παράδειγμα συνάρτησης της οποίας τα πλευρικά όρια δεν υπάρχουν. Το γράφημα μιας τέτοιας συνάρτησης ίσως βοηθήσει τους μαθητές να αποσαφηνίσουν ότι μία συνάρτηση που ορίζεται εκατέρωθεν ενός χ_o μπορεί να μην έχει όριο στο σημείο αυτό, όχι μόνο γιατί τα

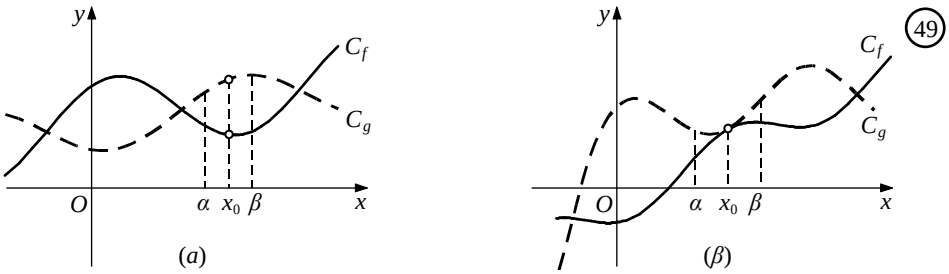
πλευρικά της όρια υπάρχουν και είναι άνισα, αλλά και γιατί δεν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια.

Μία τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Στην ενότητα «Όριο και διάταξη» **της παραγράφου 1.5**, παρατίθεται το ακόλουθο θεώρημα μαζί με τα σχήματα που υποστηρίζουν την κατανόηση του παραγόμενου μαθηματικού συμπεράσματος:

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

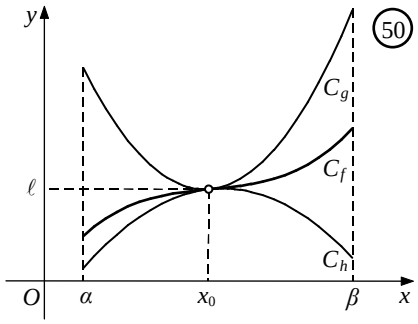


49

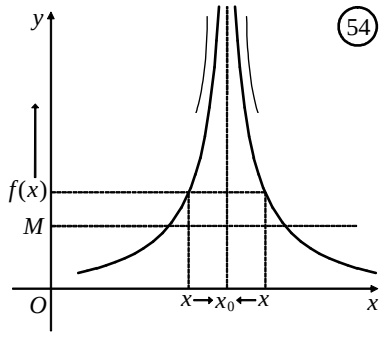
Το σχήμα 49β βοηθά τους μαθητές να παρατηρήσουν ίσως, άλλο ένα στοιχείο: αν για τις συναρτήσεις ισχύει $f(x) < g(x)$, τότε και πάλι θα έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

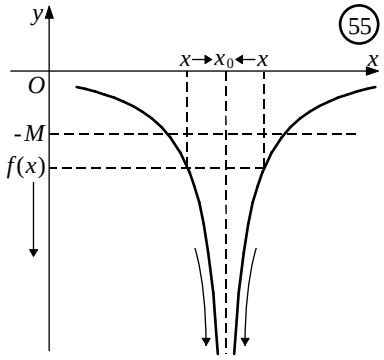
Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για το κριτήριο παρεμβολής που διατυπώνεται

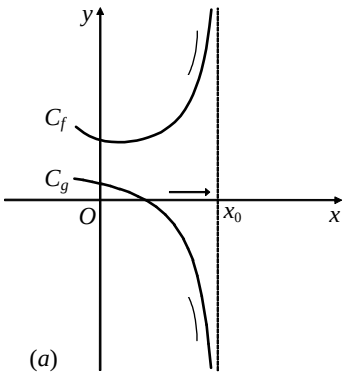
αλγεβρικά στην ίδια παράγραφο και αποδίδεται οπτικά από το ακόλουθο σχήμα:

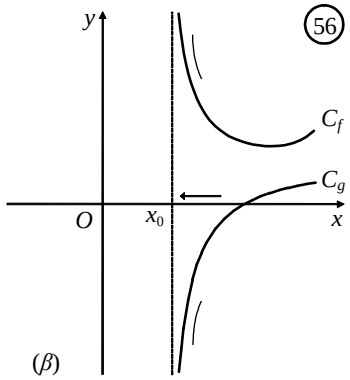


Στην παράγραφο 1.6 «Μη πεπερασμένο όριο στο $\chi_o \in \Re$», η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου εισάγεται διαισθητικά με τη βοήθεια των εξής οπτικών αναπαραστάσεων:

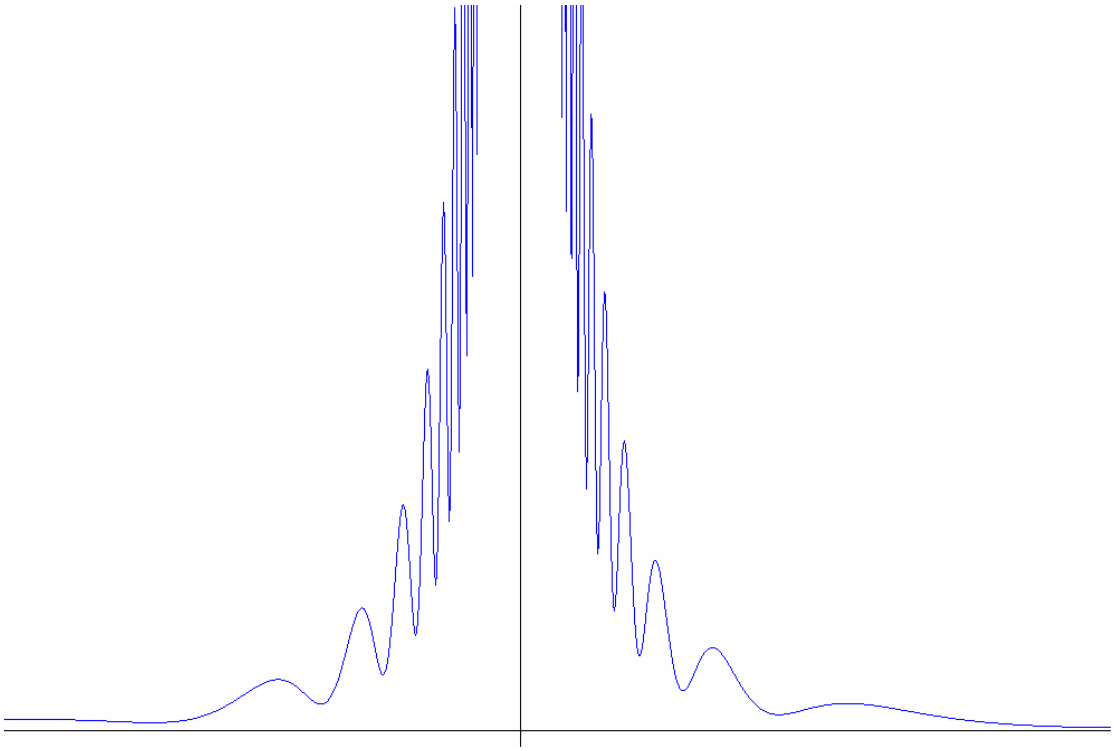






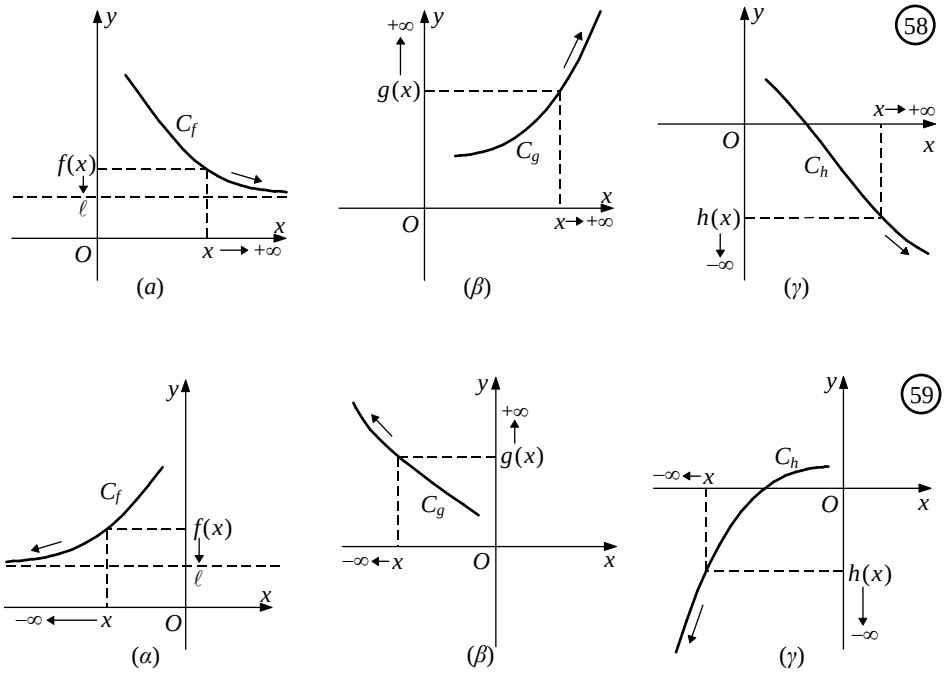


Παρατηρούμε ότι γραφικές αναπαραστάσεις που παρατίθενται στο σχολικό εγχειρίδιο παρουσιάζουν και σε αυτή την παράγραφο, όπως και στην 1.4 «όριο συνάρτησης στο $\chi_0 \in \Re$», συναρτήσεις που συγκλίνουν μονότονα στο όριό τους, ή συγκλίνουν μονότονα αριστερά και δεξιά του χ_0. Ελλοχεύει συνεπώς και εδώ η ενδεχόμενη παρανόηση της μονότονης σύγκλισης. Η παρανόηση αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που το όριό της σε ένα σημείο είναι μη πεπερασμένο και η σύγκλιση της δεν είναι μονότονη. Μία τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι για παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x^2}(\sin\frac{1}{x} + 2)$. Το όριο αυτής της συνάρτησης στο 0 είναι $+\infty$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

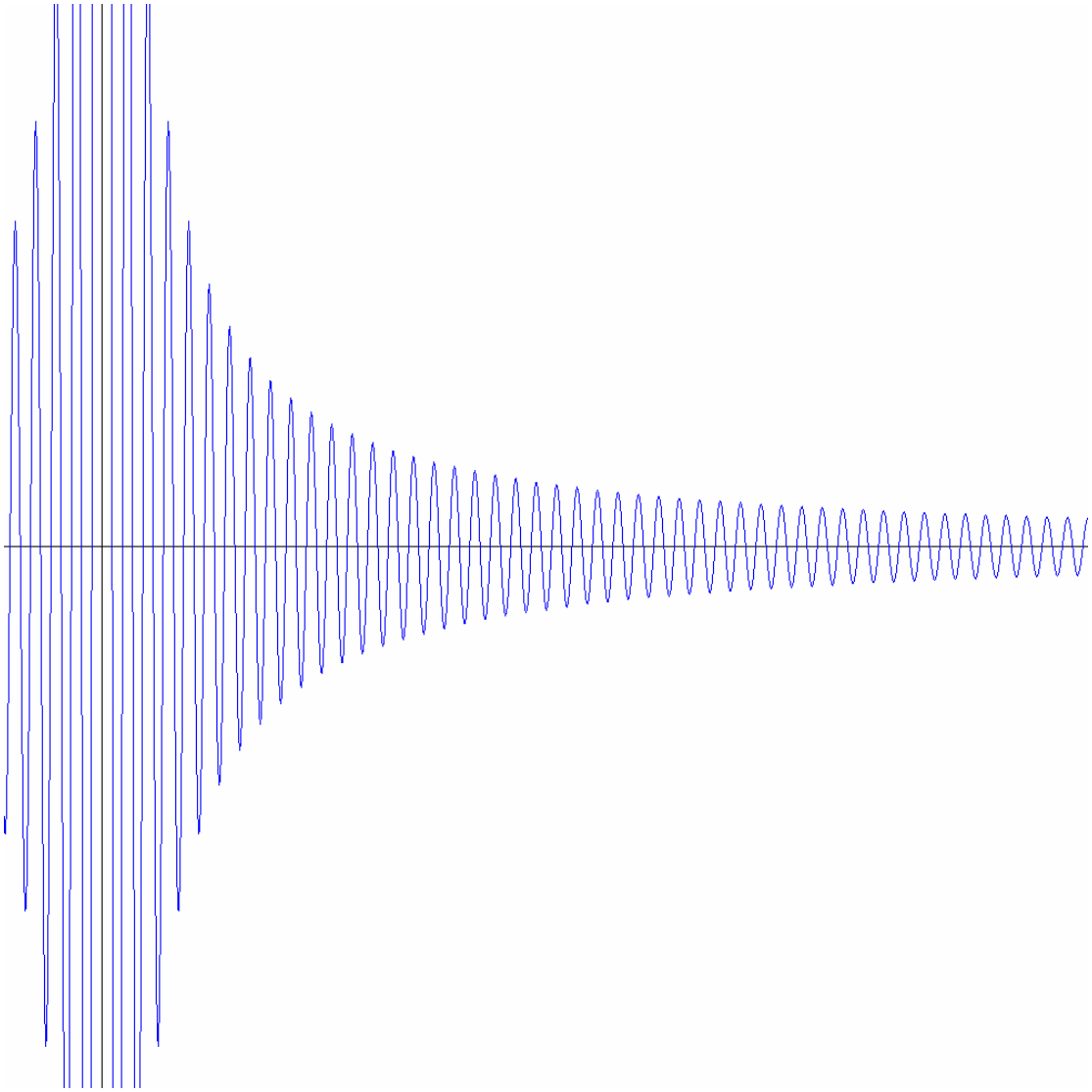


Σχήμα Ι

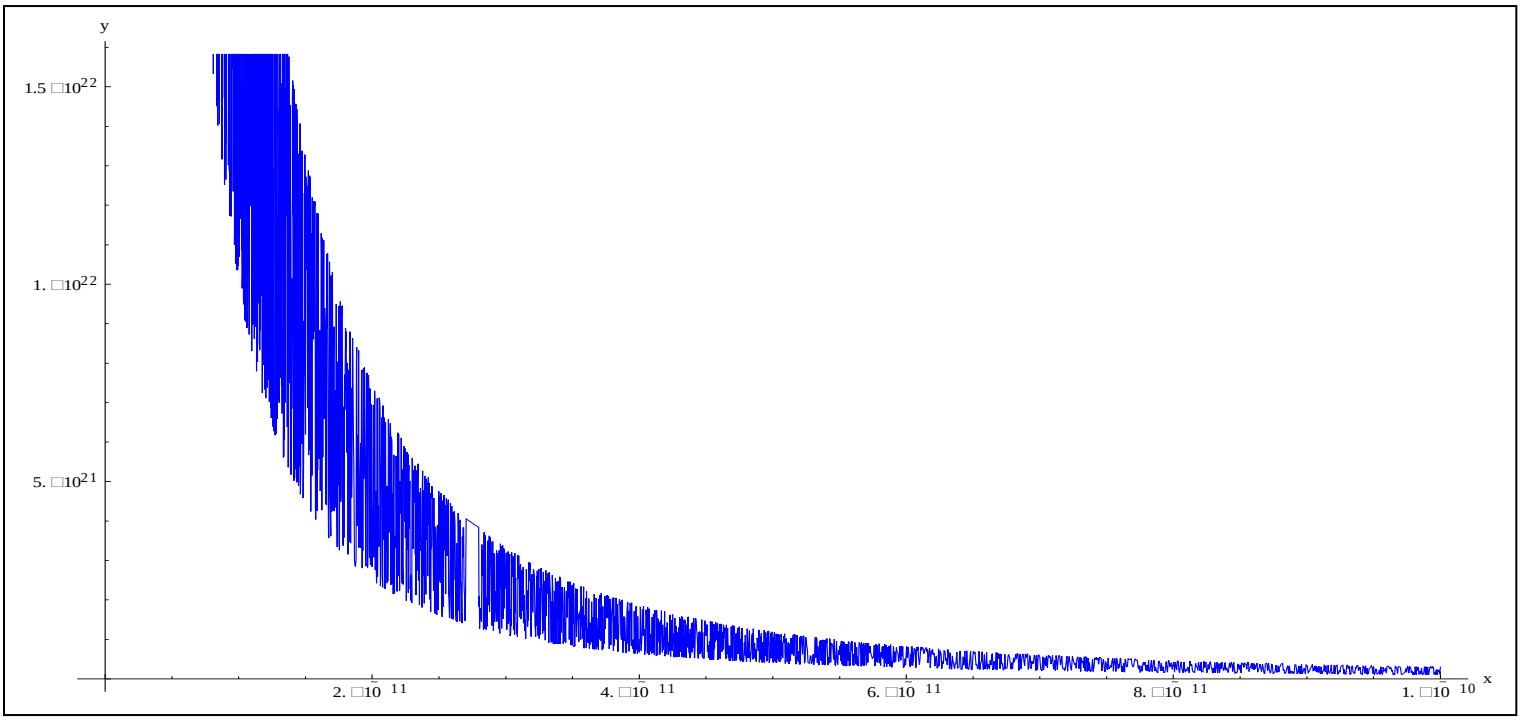
Στην παράγραφο 1.7 «Όρια συνάρτησης στο άπειρο», η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης στο άπειρο εισάγεται διαισθητικά με τη βοήθεια των ακόλουθων γραφικών αναπαραστάσεων:



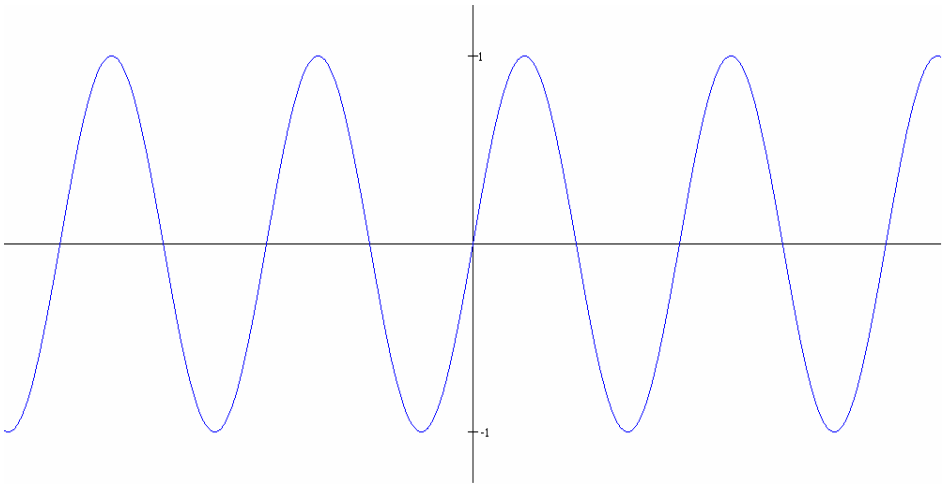
Και σε αυτή την παράγραφο οι συναρτήσεις που αναπαρίστανται γραφικά, ώστε να υποστηριχθεί η εισαγωγή της έννοιας του ορίου μιας συνάρτησης στο άπειρο με διαισθητικό τρόπο, συγκλίνουν μονότονα στο όριό τους. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που στο άπειρο δε συγκλίνει μονότονα στο όριό της, θα μπορούσε να συνεισφέρει προκειμένου να αποφευχθεί η ενδεχόμενη παρανόηση της μονότονης σύγκλισης μιας συνάρτησης, που εντοπίστηκε και στις προηγούμενες παραγράφους. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$. Η συνάρτηση αυτή στο άπειρο έχει όριο το 0 χωρίς να συγκλίνει μονότονα σε αυτό. Η γραφική της παράσταση (με πολύ μεγάλη ανάλυση) φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Άλλο ένα παράδειγμα είναι ο δεξιός κλάδος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}(\sin\frac{1}{x} + 2)$ του σχήματος Ι (παράγραφος 1.6) του σχολικού βιβλίου (με διαφορετική ανάλυση), που συγκλίνει μη μονότονα στο 0 καθώς το χ τείνει στο άπειρο όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα:



Από τις γραφικές αναπαραστάσεις που παρατίθενται στο σχολικό εγχειρίδιο διαπιστώνουμε επίσης ότι, δεν υπάρχει ανάμεσα σε αυτές γραφική αναπαράσταση συνάρτησης της οποίας το όριο στο άπειρο να μην υπάρχει. Ένα τέτοιο παράδειγμα συνάρτησης θα μπορούσε να είναι η $f(x) = \eta\mu x$ με τη γνωστή γραφική παράσταση:



Τέλος στην ίδια παράγραφο 1.7, μετά τη διαισθητική εισαγωγή των ορίων στο άπειρο, δίνονται απευθείας τα βασικά όρια και ακολουθεί αλγεβρικό παράδειγμα εφαρμογής τους. Συγκεκριμένα, στο σχολικό εγχειρίδιο, αναγράφεται:

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu \in \mathrm{N}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu \in \mathrm{N}.$$

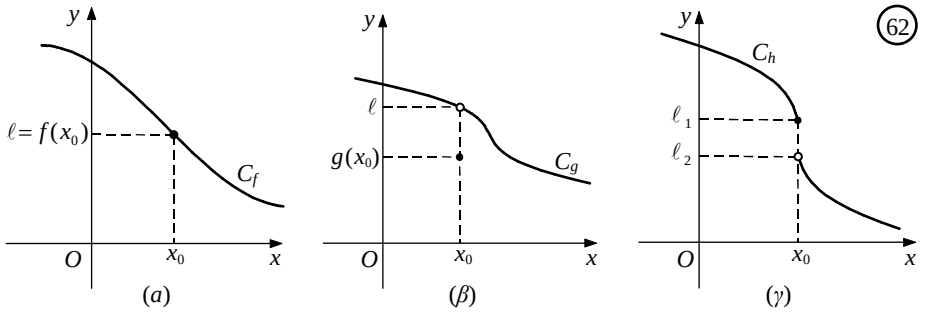
Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Σε αυτό το σημείο οι γραφικές παραστάσεις των γνωστών πολυωνυμικών συναρτήσεων που αναφέρονται στο παράδειγμα μαζί με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^3}$, αν δίνονταν, ίσως θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους μαθητές να επιβεβαιώσουν διαισθητικά ότι πράγματι αυτές έχουν τα αντίστοιχα όρια, ώστε στη συνέχεια γενικεύοντας να ακολουθήσουν τα βασικά όρια.

Συνέχεια

Στην παράγραφο 1.8 «Συνέχεια συνάρτησης», και πριν δώσει τον τυπικό ορισμό της συνέχειας, σε μία προσπάθεια διαισθητικής εισαγωγής της έννοιας, το σχολικό βιβλίο αναφέρει:



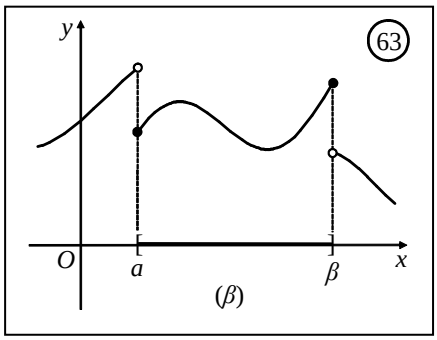
Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f.

Η διαίσθηση που πιθανόν δημιουργείται στους μαθητές για τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης, από τα παραπάνω σχήματα και την ακόλουθη λεκτική αναφορά, είναι ότι οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν γράφημα που δεν διακόπτεται. Η διαίσθηση αυτή, που συσχετίζει το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης με ένα συνεκτικό γράφημα, εντοπίζεται από τη βιβλιογραφία (Tall & Vinner, 1981, Pinto & Tall, 2002) ως συνήθης παρανόηση πολλών μαθητών. Το σχολικό εγχειρίδιο απεικονίζει σε όλα τα γραφήματα που παραθέτει στη θεωρία αυτής της παραγράφου, μόνο συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα, γεγονός που ίσως ευνοεί την ανάπτυξη αυτής της παρανόησης. Το γράφημα μιας συνάρτησης που διακόπτεται σε κάποιο σημείο ενώ η συνάρτηση είναι συνεχής, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, πιθανότατα θα συνεισέφερε στην σωστή εικόνα της έννοιας της συνέχειας (Tall & Vinner, 1981).

Στην ίδια παράγραφο 1.8, στην ενότητα «Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα», ο ορισμός της συνέχειας σε κλειστό διάστημα συνοδεύεται από το παρακάτω σχήμα:

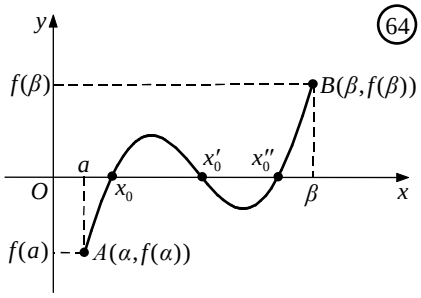
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

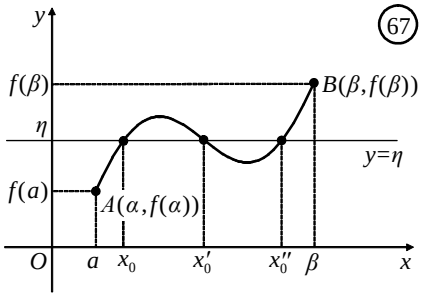
$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\text{Σχ. 63β})$$



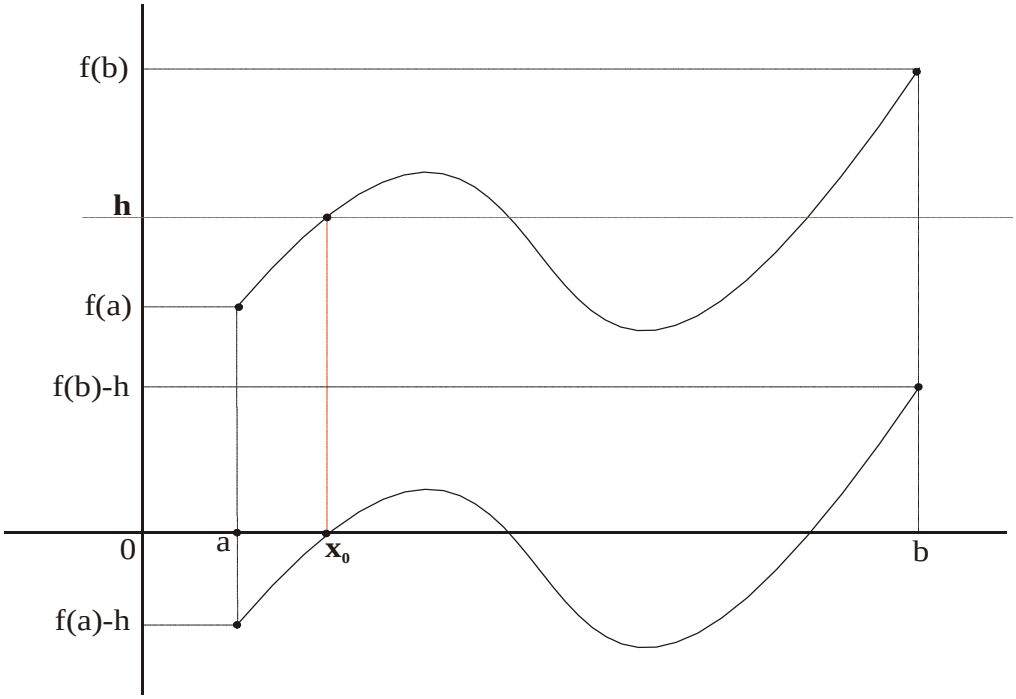
Το σχήμα αυτό είναι δυνατόν να επιφέρει σύγχυση στους μαθητές, αφού η συνάρτηση που ορίζεται ως συνεχής στο [α, β], στο σχήμα φαίνεται ασυνεχής και στο α και στο β. Ο ορισμός βέβαια αναφέρεται στη συνέχεια του περιορισμού της συνάρτησης στο κλειστό διάστημα, αλλά ο περιορισμός μιας συνάρτησης δεν είναι γνωστή συνάρτηση για τους μαθητές.

Στην ίδια παράγραφο και στην ίδια ενότητα, στο σχολικό βιβλίο, εισάγεται ως γενίκευση του θεωρήματος Bolzano το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Οι γραφικές αναπαραστάσεις που το σχολικό εγχειρίδιο χρησιμοποιεί για τη γεωμετρική ερμηνεία των δύο θεωρημάτων φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα:





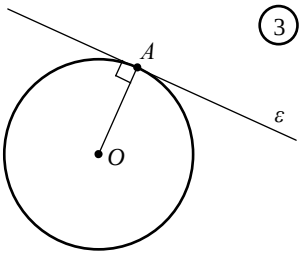
Ίσως η επισήμανση ότι το ένα σχήμα προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση του άλλου κατά η, διευκόλυνε περισσότερο στη σύνδεση των δύο θεωρημάτων από τον όρο γενίκευση και βοηθούσε στην πραγματική κατανόηση της διαδικασίας της απόδειξής του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών. Ένα σχήμα με το οποίο περιγράφεται η απόδειξη του θεωρήματος και ενσαρκώνεται η ιδέα της μεταφοράς της συνάρτησης είναι:

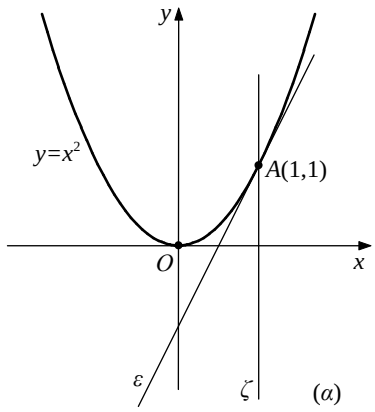


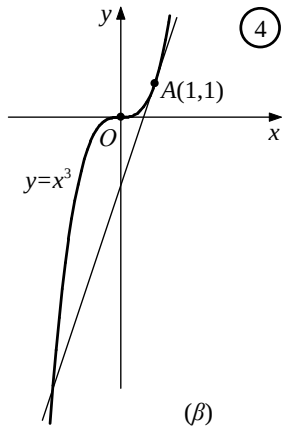
Τέλος, και πάλι στην παράγραφο 1.8 και στην ενότητα των βασικών θεωρημάτων, μετά το θεώρημα Bolzano, ακολουθεί η πρόταση: «Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της». Μπορεί όμως μία συνάρτηση να είναι συνεχής και να έχει ρίζες, αλλά όχι διαδοχικές. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$ του σχήματος Ι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποσαφήνιση και αυτού του σημείου.

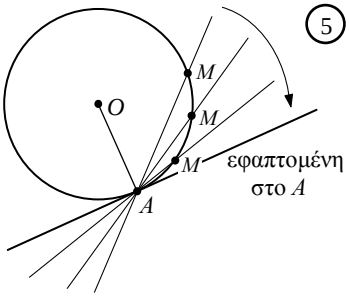
Παράγωγος

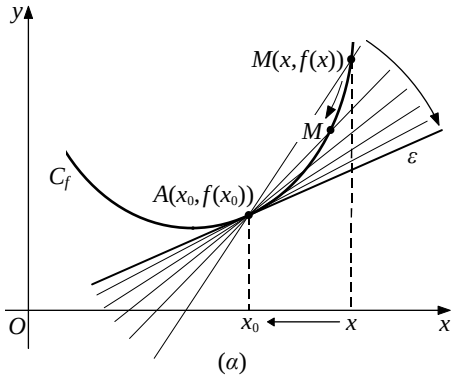
Στην παράγραφο 2.1 εισάγεται, στο σχολικό εγχειρίδιο το πρόβλημα της εφαπτομένης μιας καμπύλης. Οι οπτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται εκτείνονται από την εφαπτομένη κύκλου που οι μαθητές συνάντησαν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία προηγούμενων τάξεων, στον ορισμό της εφαπτομένης καμπύλης ως όριο τεμνουσών, και είναι συγκεκριμένα οι εξής:

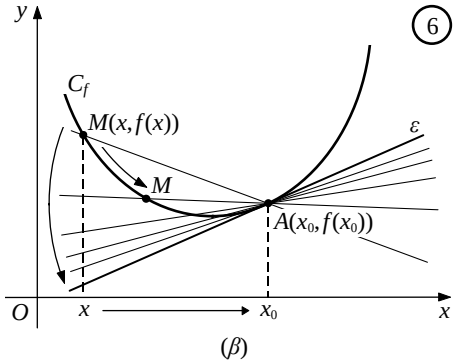


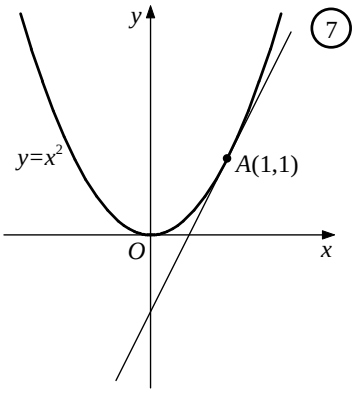












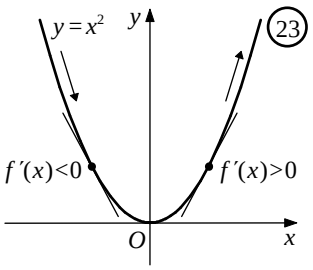
Οι παρατηρήσεις σχετικά με τις προηγούμενες γραφικές αναπαραστάσεις και τη συνεισφορά τους στην κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης μιας καμπύλης, συνοψίζονται σε τρία βασικά σημεία και

ενισχύονται από τα αποτελέσματα ερευνών στην περιοχή (Biza, Christou & Zachariades, 2008). Το πρώτο κύριο σημείο είναι ότι, όπως παρατηρούμε από τα παραπάνω γραφήματα, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο γραφική αναπαράσταση συνάρτησης της οποίας η εφαπτομένη σε κάποιο σημείο να διαπερνά την καμπύλη (όπως η $f(x) = x^3$ στο σημείο $x_0 = 0$). Επίσης δεν υπάρχει γράφημα συνάρτησης η οποία συμπίπτει με την εφαπτομένη της (όπως μία ευθεία) ή συμπίπτει με την εφαπτομένη της σε ένα διάστημα όπως η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$. Το δεύτερο σημείο είναι, ότι αντί για τα δύο σχήματα 6α και 6β, ίσως ένα ενιαίο σχήμα με τις τέμνουσες να αλλάζουν θέσεις και αριστερά και δεξιά του χ_o, καθώς η τετμημένη του σημείου που τις ορίζει παίρνει τιμές όσο κοντά στο χ_o θέλουμε, έδινε με πιο συνεπή τρόπο την οριακή τους θέση. Το τρίτο σημείο είναι, ότι ο συνδυασμός των σχημάτων 5 και 6 ίσως συντελεί ως ένα βαθμό στην αντίληψη ότι κάποιες ιδιότητες της εφαπτομένης του κύκλου θα μεταφέρονται και στην εφαπτομένη καμπύλης, όπως για παράδειγμα ότι η εφαπτομένη καμπύλης έχει όπως και του κύκλου ένα κοινό σημείο με αυτή κοντά στο χ_o. Οι Biza, Christou & Zachariades (2008) εντόπισαν τέτοιες δυνατές παρανοήσεις των μαθητών που σχετίζονται με την έννοια της εφαπτομένης, διερευνώντας τις οπτικές των μαθητών για τη σχέση μιας καμπύλης και της εφαπτομένης της σε ένα σημείο, κατά τη μετάβαση από την Ευκλείδεια Γεωμετρία στην Ανάλυση. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 196 μαθητές της Γ΄ τάξης του ελληνικού Λυκείου, που είχαν διδαχθεί Ευκλείδεια Γεωμετρία και Διαφορικό Λογισμό, με συνδυασμό ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων. Από την έρευνα προέκυψε μία ιεραρχία από τρία γκρουπ μαθητών με διαφορετικές εικόνες της έννοιας (Tall & Vinner, 1981) της εφαπτομένης καμπύλης. Η εικόνα που είχαν για την έννοια οι μαθητές στο 1° γκρουπ ήταν «αναλυτική, τοπική»: η εφαπτομένη μπορεί να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με την καμπύλη, μπορεί να συμπίπτει με την καμπύλη, υφίσταται σε σημείο καμπής. Στο 2° γκρουπ οι απόψεις των μαθητών ήταν «ενδιάμεσες τοπικές»: πίστευαν ότι η εφαπτομένη μπορεί να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με την καμπύλη, αλλά υπάρχει γειτονιά κοντά στο σημείο επαφής στην οποία δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, καθώς και ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη σε σημείο καμπής. Τέλος, στο 3° γκρουπ, οι μαθητές είχαν «γεωμετρική καθολική» εικόνα της έννοιας: πίστευαν ότι η εφαπτομένη έχει ένα μόνο κοινό

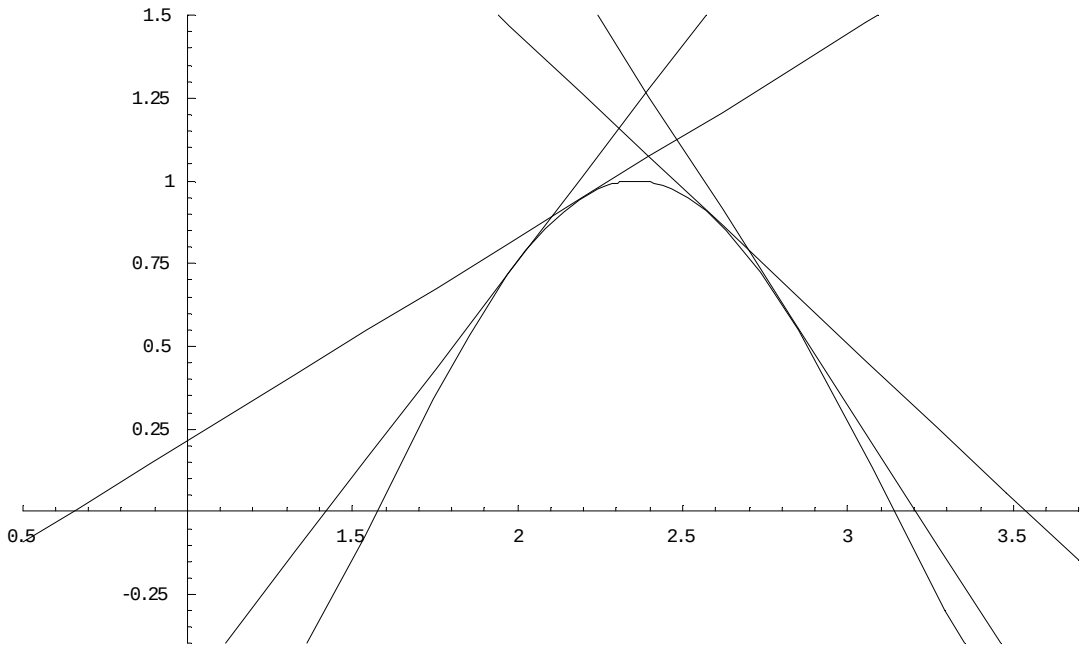
σημείο με την καμπύλη και την αφήνει ολόκληρη στο ίδιο ημιεπίπεδο ή έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την καμπύλη και μπορεί να υπάρχει εφαπτομένη σε ένα σημείο καμπής.

Ένα σημαντικό θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού που συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του Λυκείου, είναι το θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της. Αυτό το θεώρημα συνήθως χρησιμοποιείται για τη μελέτη συναρτήσεων. Το σχολικό βιβλίο, **στην παράγραφο 2.6**, πριν τη διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος αναφέρει:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty, 0)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $f'(x) = 2x < 0$, ενώ στο διάστημα $(0, +\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) = 2x > 0$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης.



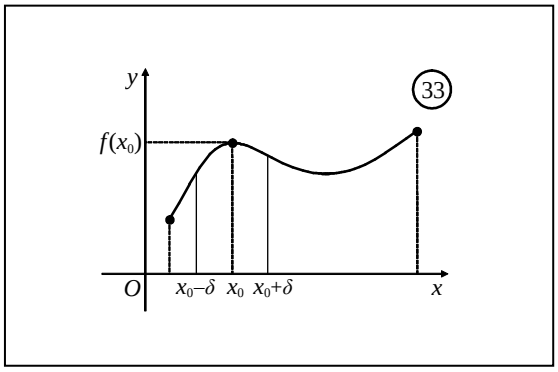
Πως όμως σκεφτήκαμε ότι ίσως συνδέεται η μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της και οδηγηθήκαμε στη διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος; Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να αποδειχθεί μια μαθηματική πρόταση πρέπει πρώτα να προκύψει αυτή ως εικασία. Δηλαδή, κατάλληλες σκέψεις να οδηγήσουν στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανόν να ισχύει η συγκεκριμένη πρόταση. Αυτό το βήμα, είναι ένα πολύ σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή και είναι ένα βήμα που μπορεί να γίνει στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο. Ένα παράδειγμα όπου με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μπορούμε να οδηγηθούμε στην εικασία για την ισχύ του θεωρήματος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 2

Στο προηγούμενο σχήμα, η μελέτη της κίνησης της εφαπτομένης πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να οδηγήσει στην παρατήρηση ότι στα διαστήματα που η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία (αντίστοιχα αμβλεία) γωνία με τον άξονα xx΄. Αυτή η μελέτη μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου ο μαθητής μπορεί να βλέπει την κίνηση της εφαπτομένης.

Στην παράγραφο 2.7, το σχολικό βιβλίο παραθέτει στην απόδειξη του θεωρήματος του Fermat το ακόλουθο σχήμα:

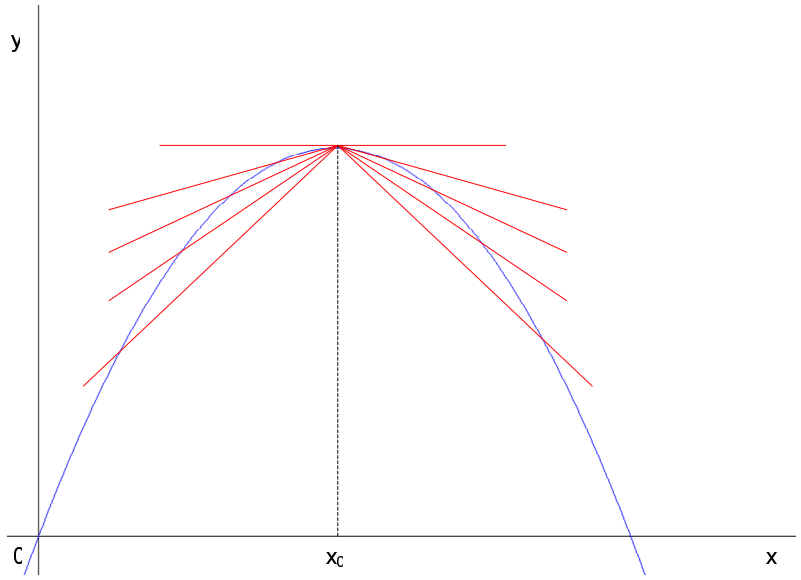


Το σχήμα αυτό όμως δεν αποκαλύπτει στο μαθητή την μαθηματική ιδέα που κρύβεται πίσω από τη φορμαλιστική παρουσίαση της απόδειξης, παρά μόνο του παρέχει

εποπτεία για την κατανόηση του ακόλουθου συμβολισμού που χρησιμοποιείται στην αρχή της απόδειξης:

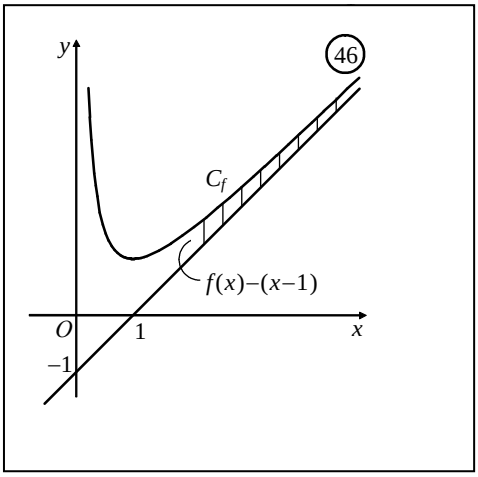
υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ένα σχήμα που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της διαδικασίας της απόδειξης του θεωρήματος του Fermat, θα μπορούσε να είναι το ακόλουθο:

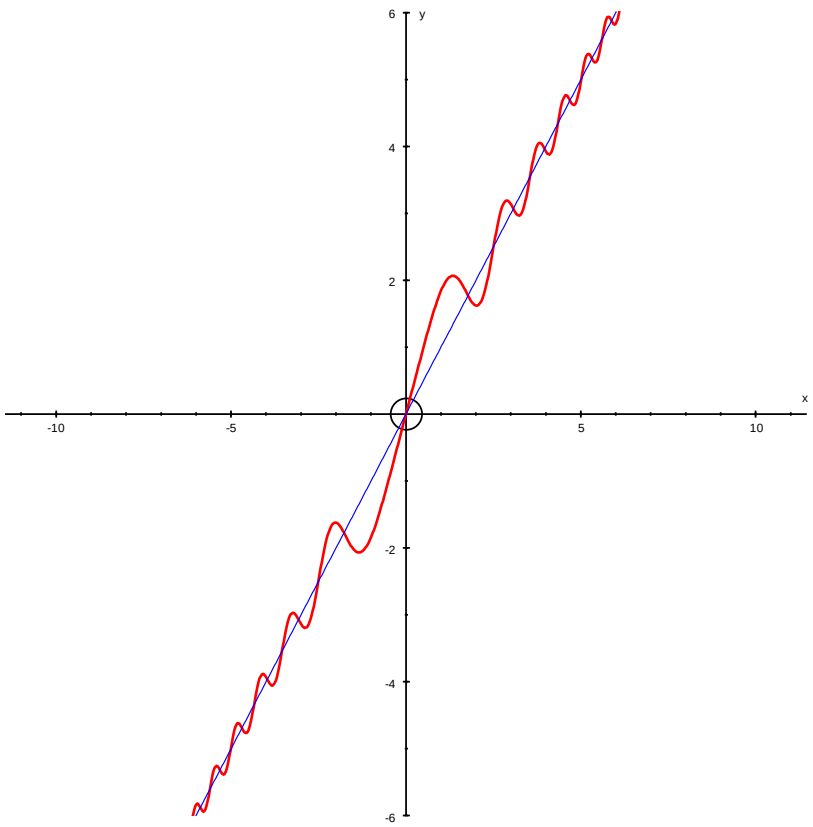


Μέσω του ορισμού του, το τοπικό μέγιστο συνδέεται έτσι με τις κλίσεις των τεμνουσών (που το ένα τους άκρο είναι το σημείο τοπικού μεγίστου). Αυτές παραμένουν μη αρνητικές κοντά στο χ_o και αριστερά του και μη θετικές δεξιά, ενώ η εφαπτομένη στο σημείου τοπικού μεγίστου είναι οριζόντια. Αυτή είναι και η λογική της απόδειξης.

Στην παράγραφο 2.9, το εγχειρίδιο προσεγγίζει διαισθητικά την έννοια της πλάγιας ασύμπτωτης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μέσω του γραφήματος συγκεκριμένης συνάρτησης και της πλάγιας ασύμπτωτής της, παρουσιάζοντας το ακόλουθο σχήμα:



Και σε αυτή την περίπτωση όπως και στο όριο η γραφική αναπαράσταση που επιλέγεται απεικονίζει μονότονη σύγκλιση. Οι πιθανές παρανοήσεις των μαθητών εδώ ομοιάζουν με εκείνες που εμφανίζονται στην έννοια του ορίου και συνίστανται στην εντύπωση ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που έχει πλάγια ασύμπτωτη, καθώς το χ τείνει στο άπειρο, τείνει να συμπέσει με την ασύμπτωτή της χωρίς ποτέ να συμπίπτει. Η παρανόηση αυτή μπορεί να αρθεί με την εικόνα μιας συνάρτησης όπως είναι η $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x}\sin x^2, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και επιδέχεται και στο +∞ και στο -∞ ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία ψ = χ. Η ευθεία και η συνάρτηση έχουν άπειρα σημεία τομής σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα (-∞, -M] και [M, +∞) για οσοδήποτε μεγάλο και θετικό M.

Ολοκλήρωμα

Τέλος, στο κεφάλαιο των ολοκληρωμάτων και **στην παράγραφο 3.4**, που το σχολικό βιβλίο εισάγει τον ορισμό του εμβαδού με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος συνδυάζονται αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις με προσεκτικό τρόπο και με σκοπό την κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Ο προβληματισμός εδώ συνίσταται στο κατά πόσο οι γραφικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις που παρατίθενται συντελούν από μόνες τους στην κατανόηση του ορισμού μιας έννοιας αν δεν έχει προηγηθεί ένα πρόβλημα που κάνει απαραίτητο τον ορισμό αυτό. Η εισαγωγή μιας θεμελιώδους έννοιας είναι λογικό να αρχίζει με ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται από τις υπάρχουσες γνώσεις και

από το οποίο προκύπτει η ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας. Αν και τελικά ορίζεται με ένα μάλλον περίπλοκο τρόπο, το ορισμένο ολοκλήρωμα τυποποιεί μια απλή, διαισθητική έννοια – αυτή του εμβαδού. Ο ορισμός μιας διαισθητικής έννοιας μπορεί να παρουσιάσει μεγάλες δυσκολίες (Spivak, 1991) – και το «εμβαδόν» δεν αποτελεί εξαίρεση. Στη στοιχειώδη Γεωμετρία, αποδεικνύονται τύποι για τα εμβαδά πολλών επιπέδων σχημάτων, αλλά σπάνια δίνεται ένας αποδεκτός ορισμός του εμβαδού. Το πλήθος των τετραγώνων με μοναδιαία πλευρά που χωρούν σε μια επιφάνεια αρκεί για να οριστούν τα εμβαδά των απλούστερων επιφανειών αλλά όχι για το εμβαδόν ενός κύκλου, για παράδειγμα, με μοναδιαία ακτίνα. Ένας τέτοιος κύκλος έχει εμβαδόν τον άρρητο αριθμό π, αλλά δεν είναι σαφές τι σημαίνει «π τετράγωνα». Με ένα τέτοιο προβληματισμό, προκύπτει η ανάγκη ορισμού του εμβαδού των ειδικών επιφανειών (που φράσσονται από το γράφημα, τον χ΄χ και τις κατακόρυφες ευθείες) που εισάγει το σχολικό βιβλίο. Πάνω σε αυτή την απαραίτητη βάση η χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων μπορεί στη συνέχεια να οδηγήσει τους μαθητές στην κατανόηση του ορισμού και στη σωστή χρήση του.

3.4. Συμπεράσματα

Οι έννοιες του ορίου , της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος εισάγονται και αναπτύσσονται μόνο στο σχολικό εγχειρίδιο της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης του ελληνικού Ενιαίου Λυκείου, σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι έννοιες αυτές αποτελούν κεντρικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Ο τρόπος με τον οποίο οι έννοιες αυτές εισάγονται και αναπτύσσονται στο σχολικό εγχειρίδιο αναλύθηκε ως προς τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται, εστιάζοντας στις οπτικές αναπαραστάσεις, το σκοπό χρήσης τους και τη συνεισφορά τους στην κατανόηση των εννοιών.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στο σχολικό εγχειρίδιο

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας υποστηρίζει τον ισχυρισμό ότι η κατανόηση των Μαθηματικών είναι στενά συνδεδεμένη με την ικανότητα να συνδυάζουν οι μαθητές την αναλυτική και την οπτική σκέψη (Presmeg, 2006). Η

οπτικοποίηση και η οπτική σκέψη αποτελούν κεντρικά σημεία των μελετών της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, αναμορφώνοντας τον τρόπο που διδάσκεται ο Απειροστικός Λογισμός (Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg 2009). Από την ανάλυση του εγχειριδίου προέκυψε αρχικά, ότι ο συνδυασμός αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, που η βιβλιογραφία χαρακτηρίζει ως θεμελιώδες συστατικό για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, εντοπίστηκε κυρίως στην εισαγωγή των ορισμών των διερευνώμενων εννοιών, λιγότερο στις αποδείξεις ή αιτιολογήσεις των προτάσεων και αισθητά λιγότερο στα παραδείγματα και κυρίως στις λυμένες εφαρμογές που παρουσιάζονται και στις ασκήσεις που προτείνονται. Οι οπτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται είναι σχεδόν αποκλειστικά γραφήματα συναρτήσεων. Ως εκ τούτου, η οπτική που φαίνεται να υιοθετεί το ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο για τις έννοιες που διερευνήθηκαν είναι ισχυρά αλγεβρική κυρίως στα παραδείγματα που χρησιμοποιεί και στις εφαρμογές και ασκήσεις που προτείνει.

Ο σκοπός χρήσης των οπτικών αναπαραστάσεων από το σχολικό εγχειρίδιο

Οι γραφικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται από το βιβλίο με κύριο σκοπό την κατανόηση των ορισμών και την περιγραφή των μαθηματικών συμπερασμάτων. Το όριο, η συνέχεια, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα, ως μαθηματικές έννοιες είναι αφηρημένες και ορίζονται με μαθηματικά σύμβολα. Η δυνατότητα αναπαράστασης των ορισμών τους ώστε αυτοί να γίνουν κατανοητοί από τις αισθήσεις συμβάλει ουσιαστικά στην κατανόησή τους. Οι γραφικές αναπαραστάσεις που συνοδεύουν τον τρόπο με τον οποίο αποδίδονται οι προτάσεις και τα θεωρήματα του σχολικού εγχειριδίου, χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των μαθηματικών συμπερασμάτων, συνεισφέροντας έτσι ουσιαστικά στην κατανόηση της φορμαλιστικής διατύπωσής τους. Καμία όμως από τις γραφικές αναπαραστάσεις που υπάρχουν στο βιβλίο δεν προκαλεί την εικασία για την ισχύ κάποιων προτάσεων, ώστε να αναπτύξει τη μαθηματική σκέψη των μαθητών. Επίσης, οι χρησιμοποιούμενες γραφικές αναπαραστάσεις, δε συνεισφέρουν στην κατανόηση της ίδιας της διαδικασίας της απόδειξης, όπου αυτή παρατίθεται, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τη μαθηματική ιδέα που βρίσκεται πίσω από την απόδειξη.

Η συνεισφορά των γραφικών αναπαραστάσεων του σχολικού εγχειριδίου στην κατανόηση των εννοιών

Οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας και της παραγώγου, ως θεμελιώδεις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, αναπτύσσονται στο σχολικό εγχειρίδιο με οπτικές αναπαραστάσεις οι οποίες είναι δυνατόν να οδηγήσουν τους μαθητές σε παρανοήσεις που εντοπίζονται από τη βιβλιογραφία. Τέτοιες παρανοήσεις αφορούν κυρίως στη μονότονη σύγκλιση μιας συνάρτησης στο όριό της (Cornu, 1991) και την εικόνα του γραφήματος μιας συνεχούς συνάρτησης ως γραμμή που δε διακόπτεται (Tall & Vinner, 1981, Pinto & Tall, 2002). Σε πιθανές παρανοήσεις είναι δυνατόν να οδηγήσουν τους μαθητές και κάποιες από τις γραφικές αναπαραστάσεις που παρατίθενται στο κεφάλαιο των παραγώγων. Οι παρανοήσεις αυτές σχετίζονται κυρίως με την έννοια της εφαπτομένης μιας καμπύλης και την εικόνα που έχουν σχηματίσει για την έννοια οι μαθητές από την Ευκλείδεια Γεωμετρία και την εφαπτομένη του κύκλου και εντοπίζονται αναλυτικά από πρόσφατες έρευνες (Biza, Christou & Zachariades, 2008).

Έρευνες (Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg 2009) αναφέρουν επίσης ότι η αντιστρεψιμότητα της σκέψης, δηλαδή η αλλαγή από ένα ευθύ σε έναν αντίστροφο ειρμό σκέψης, είναι στενά συνδεδεμένη με την κατανόηση του Απειροστικού Λογισμού. Επισημαίνουν ακόμη ότι, όταν εισάγονται οι κανόνες ολοκλήρωσης, οι μαθητές που δε χρησιμοποιούν την αντιστρεψιμότητα της σκέψης για την κατανόηση της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, τείνουν να θεωρούν αυτές τις διαδικασίες άσχετες μεταξύ τους, και ότι κάθε μία από αυτές έχει τους δικούς της μνημονικούς κανόνες. Από την ανάλυση του εγχειριδίου ως προς την ποιότητα των παρεχόμενων οπτικών αναπαραστάσεων, διαπιστώθηκε ότι στα κεφάλαια της παραγώγου και του ολοκληρώματος, ελάχιστες ήταν οι οπτικές αναπαραστάσεις που ενθάρρυναν την αντιστρεψιμότητα της σκέψης των μαθητών και επομένως την κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών.

Ανακεφαλαιώνοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το σχολικό εγχειρίδιο που αναλύθηκε, χρησιμοποιεί οπτικές αναπαραστάσεις που στη συντριπτική τους πλειοψηφία είναι γραφήματα συναρτήσεων. Το γεγονός αυτό από μόνο του συνιστά πρόοδο σε σχέση με παλαιότερες εκδόσεις σχολικών βιβλίων, όπου οι οπτικές αναπαραστάσεις ήταν υποτιμημένες και η χρήση τους πολύ περιορισμένη. Το πνεύμα

βέβαια του παρόντος σχολικού εγχειριδίου φαίνεται να παραμένει ισχυρά αλγεβρικό, με έμφαση στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις και ως εκ τούτου, μάλλον να ενισχύει περισσότερο την αναλυτική μορφή σκέψης. Πράγματι, οι οπτικές αναπαραστάσεις φαίνεται να είναι υποβαθμισμένες σε σχέση με τις αλγεβρικές, ενώ στο σύνολο των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται, των λυμένων εφαρμογών που παρουσιάζονται και των ασκήσεων που απαιτούνται, οι οπτικές αναπαραστάσεις μάλλον δεν επαρκούν. Έτσι, ελάχιστες φορές ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν μια γραφική αναπαράσταση και κυρίως να σκεφτούν πάνω σε αυτή, να βγάλουν συμπεράσματα ή να τη μετασχηματίσουν. Ο σκοπός χρήσης των οπτικών αναπαραστάσεων φαίνεται να εστιάζει στην κατανόηση των ορισμών των εννοιών και στη γεωμετρική ερμηνεία της διατύπωσης των θεωρημάτων. Δεν χρησιμοποιούνται οπτικές αναπαραστάσεις για τη δημιουργία εικασιών, ούτε για την κατανόηση της διαδικασίας μιας τυπικής απόδειξης. Η συνεισφορά των γραφικών αναπαραστάσεων του σχολικού εγχειριδίου στην κατανόηση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού είναι συζητήσιμη. Διάφορες παρανοήσεις που συνδέονται από τη βιβλιογραφία με τις έννοιες του ορίου, της συνέχειας και της παραγώγου, φαίνεται να ενισχύονται από τη χρήση γραφημάτων που απεικονίζουν ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων στο σχολικό βιβλίο. Εντοπίζεται έτσι, η απουσία γραφικών αναπαραστάσεων, κρίσιμων για την αποσαφήνιση λεπτών πτυχών των εννοιών, με επίπτωση στην κατανόησή τους.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Η σημασία των οπτικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και τη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού προσεγγίστηκε στην παρούσα εργασία σε τρία μέρη:

Στο πρώτο μέρος η προσέγγιση ήταν θεωρητική και, με βάση τη βιβλιογραφία, αναπτύχθηκε συνδυαστικά μέσα από τους θεωρητικούς φακούς δύο επιστημονικών περιοχών: της Μαθηματικής Εκπαίδευσης και της πρόσφατα αναπτυσσόμενης επιστημονικής περιοχής του οπτικού εγγραμματισμού. Από τη συνδυαστική αυτή προσέγγιση ίσως αναδύεται η ανάγκη για διερεύνηση, σχεδιασμό, ανάπτυξη και εφαρμογή συγκεκριμένων τρόπων εκπαίδευσης πάνω στις αντίστοιχες οπτικές δεξιότητες που καθιστούν ένα μαθητή οπτικά μορφωμένο. Η ανατροφοδότηση από την εφαρμογή μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την επιβεβαίωση της αποτελεσματικότητας των τρόπων αυτών, καθώς και νέο πεδίο έρευνας. Επιπρόσθετη έρευνα, μπορεί να αναπτύξει μεθοδολογικά εργαλεία μέτρησης του βαθμού της οπτικής μόρφωσης ενός μαθητή, καθώς και να αξιολογήσει το συνολικό βαθμό επίδρασης της οπτικής μόρφωσης στη μάθηση των μαθητών ή των σπουδαστών σε επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Τέλος, η χρήση των νέων τεχνολογιών, ως παντοδύναμα μέσα οπτικοποίησης, και η συμβολή τους στη διδασκαλία και τη μάθηση είναι ένα ερευνητικό πεδίο που, λόγω της σημασίας του στην εκπαίδευση, χρήζει ξεχωριστής προσέγγισης. Ωστόσο η ικανότητα ενός μαθητή να σχεδιάζει ένα απλό σχήμα για να αναπαραστήσει ένα μαθηματικό πρόβλημα, η ικανότητά του να ερμηνεύει με κατανόηση ένα τέτοιο σχήμα και να το χρησιμοποιεί για να λύσει το πρόβλημα, είναι θεμελιώδεις δεξιότητες. Χωρίς τέτοιες θεμελιώδεις δεξιότητες, είναι αμφισβητήσιμο εάν η οπτικοποίηση μέσω των υπολογιστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ή ακόμα και αν έχει νόημα. Η όραση διαφέρει από την οπτικοποίηση και το να βλέπει κανείς δεν είναι σημαίνει απαραίτητα ότι κατανοεί.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας προσεγγίστηκε η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα ορισμών, προτάσεων και θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού που μπορούν να κατανοηθούν και οπτικά, και ίσως με ένα πιο άμεσο τρόπο από τον τυπικό τρόπο παρουσίασης ενός ορισμού ή μιας απόδειξης. Εδώ η έμφαση δόθηκε στη συμβολή των οπτικών αναπαραστάσεων

στην κατανόηση εννοιών και κάποιων διαδικασιών αποδείξεων του Απειροστικού Λογισμού και όχι στην αντικατάσταση του τυπικού ορισμού μιας έννοιας ή της τυπικής απόδειξης ενός θεωρήματος από το οπτικό του ανάλογο. Παρουσιάστηκαν επίσης και οι περιορισμοί της χρήσης των οπτικών αναπαραστάσεων, που άλλωστε επισημαίνονται και από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση του πρώτου μέρους. Φυσικά, η χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στον Απειροστικό Λογισμό δεν εξαντλείται στα πλαίσια της παρούσης εργασίας. Υπάρχουν και άλλες κεντρικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, όπως για παράδειγμα αυτή της κυρτότητας, στην κατανόηση και τη χρήση των οποίων, ίσως η οπτική προσέγγιση συνέβαλε εμφανώς.

Στο τρίτο μέρος της εργασίας αναλύθηκε το σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου ως προς τις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού με τις οποίες οι μαθητές, μέσω αυτού, έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά και εξετάστηκαν οι οπτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί. Επιλέχθηκε προς έρευνα το σχολικό βιβλίο γιατί αποτελεί κοινή επίσημη αφετηρία στον τρόπο που εισάγονται οι έννοιες του Απειροστικού Λογισμού για όλους τους Έλληνες μαθητές και κοινή αρχική βάση για τη διδασκαλία και τη μάθηση του Απειροστικού Λογισμού. Με δεδομένο τον τρόπο που χρησιμοποιούνται από το σχολικό εγχειρίδιο οι οπτικές αναπαραστάσεις κατά την εισαγωγή των μαθητών στις έννοιες της Ανάλυσης, μεγάλο φάσμα ερευνών θα μπορούσε να αναπτυχθεί. Σημαντική συνιστώσα της μάθησης προς διερεύνηση, είναι για παράδειγμα ο τρόπος που χρησιμοποιούν και εμπλουτίζουν οι καθηγητές τις προτεινόμενες από το σχολικό βιβλίο αναπαραστάσεις. Το αναζωπυρωμένο ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας, όπως διαπιστώνεται από τη βιβλιογραφία, ως προς το ρόλο των εγχειριδίων στη μάθηση των Μαθηματικών θα μπορούσε να υποκινήσει επίσης σχετικές έρευνες ανάλυσης περιεχομένου των πανεπιστημιακών εγχειριδίων.

Εάν η παρούσα εργασία αναδεικνύει τη σημασία των οπτικών αναπαραστάσεων στη μάθηση και τη διδασκαλία εννοιών της Ανάλυσης, το πνεύμα της δεν υποστηρίζει την ανισορροπία υπέρ της οπτικής προσέγγισης. Η καλλιέργεια της οπτικής σκέψης δεν αναιρεί την ανάγκη για αναλυτική σκέψη και η ανάπτυξη οπτικού συλλογισμού δεν αναιρεί σε καμία περίπτωση την ανάγκη για τυπική απόδειξη. Όμως πόσο πιο εύκολα άραγε θα ήταν τα πράγματα για εμάς και τους μαθητές μας αν είχαμε στη διάθεσή μας κι άλλα εργαλεία για να εξηγήσουμε, να

φέρουμε παραδείγματα, να δώσουμε νόημα στον άψυχο συμβολισμό, να υποκινήσουμε τη διαίσθηση και να πυροδοτήσουμε τη δημιουργικότητα των μυαλών που διδάσκουμε; Ίσως μία απάντηση κρύβεται και στις εικόνες. Όχι μόνο σε αυτές που μπορούμε να δείξουμε αλλά και σε αυτές που μπορούμε να βοηθήσουμε να κατασκευάσει κάθε μαθητής ξεχωριστά στο δικό του νου και «να δει με τα μάτια του μυαλού του».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi A., (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52**,** 215-241.

Artigue M., (1992). Didactic Engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.) *Research in Didactics of Mathematics* pp. 41-65, Grenoble: La Pensee Sauvage.

Aso K., (2001). Visual Images as Educational Material in Mathematics. *Community College Journal of Research and Practice* 25**,** 355-360.

Ausburn F., Ausburn L., (1994). A cross – cultural perspective on visual literacy, challenges for technical communicators. *Retrieved at 18/2/2010 from*: http://www.stc.org/confproceed/1994/PDFs PG445447.

Avgerinou M., (2009). Re-Viewing Visual Literacy in the "Bain d' Images" Era. *TechTrends* 53(2), 28-34.

Avgerinou M., Ericson J., (1997). A review of the concept of Visual Literacy. *British Journal of Educational Technology* 28(4), 280 – 291.

Ball D. L., Feiman-Nemser S., (1988). Using textbooks and teacher's guides: A dilemma for beginning teachers and teacher educators. *Curriculum In*quiry 18**,** 401-423.

Bamford A., (2003). The Visual Literacy White Paper. *Retrieved at 14/1/2010 from:* http://www.adobe.com/uk/education/Pdf/adobe_visual_literacy_paper.pdf.

Berry J. S., Nyman M. A., (2003). Promoting students' graphical understanding of Calculus. *Journal of Mathematical Behavior* 22**,** 481-497.

Biza I., Christou C., Zachariades T., (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education* 10(1), 53-70.

Bleed R., (2005). Visual Literacy in Higher Education. *Retrieved at 15/12/2009 from:* http://net.educause.edu/ir/library/pdf/ELI4001.pdf.

Bryant V., (1990). *Yet another introduction to analysis.* Cambridge University Press.

Chevallard Y., (1985). On didactic transposition theory: some introductory notes. *Retrieved at 22/5/2008 from:* http://yves.chevalard.free.fr/spip/IMG/pdf.

Christou C., Pitta-Pantazi D., Souyoul A., Zachariades T., (2005). The Embodied, Proceptual, and Formal Worlds in the Context of Functions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5(2), 241-252.

Cornu B., (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* 153-166, Dordrecht, Kluwer.

Davis P., (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24, 333-344.

Dreyfus T., (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. *In Proceedings of the 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education,* 33-48. Assisi, Italy.

Dreyfus T., Eisenberg T., (1990). On Difficulties with Diagrams: Theoretical Issues. *In Proceedings of the 14th Psychology of Mathematics Education Conference,* 1, 27-33. Oaxtepec, Mexico.

Duval R., (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.) *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* I, 3-26. Mexico.

Fischbein E., (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics* 38, 11-50.

Fischbein E., (1977). Image and Concept in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 8, 153-165.

Freeman D. J., Porter A. C., (1989). Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal* 26(3), 403-421.

Giraaldo V., Gonzalez-Martin A., Santos F., (2009). An Analysis of the Introduction of the Notion of Continuity in the Undergraduate Textbooks in Brazil. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 81-88. Thessaloniki, Greece.

Gonzalez-Martin A., Seffah R., Nardi E., (2009). The Concept of Series in the Textbooks: A Meaningful Introduction? In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 105-112, Thessaloniki, Greece.

Guzman M., (2002). The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. *In Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level* (2nd) SE066909.

Haciomeroglu E. S., Aspinwall L., Presmeg N., (2009). The Role of Reversibility in the Learning of the Calculus Derivate and Antiderivate Graphs. In Swars, S., L., Stinson, D., W., Lemons-Smith, S., *Proceedings of the 31st annual meeting of*

the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Atlanta, GA: Georgia State University.

Hadamard J., (1945). *The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hoffmann M., (2006). What is a "Semiotic Perspective", and What Could It Be? Some Comments on the Contributions to this Special Issue. *Educational Studies in Mathematics* 61, 279-291.

Iliada E., Gagatsis A., Panaoura A., Zachariades T., Zoulinaki F., (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education* 7, 765-790.

Littlewood J., (1953). *A Mathematician's Miscellany.* Methuen & Co. Ltd. London.

McLoughlin C., Krakowski K., (2001). Technological Tools for Visual Thinking: What does the Research tell us? *Retrieved at 14/3/2010 from:* http://auc.uow.edu.au/conf/conf01/downloads/AUC2001_McLoughlin_1.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*: Reston, VA: Author.

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs without words*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C.

Pinto M., Tall D., (2002). Building Formal Mathematics on Visual Imagery: a Case Study and a Theory. *For the Learning of Mathematics* 22(1), 1-21.

Potari D., Sakonidis H., Philippou G., Kynigos C., (2009). Research in Mathematics Education in Greece and Cyprus. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 303-322. Thessaloniki, Greece.

Presmeg N., (1986). Visualization and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics* 17, 297-311.

Presmeg N., (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiereez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future*, 205-235. Rotterdam: Sense Publishers.

Presmeg N., (2008). Semiotic Theoretical Frameworks: Creativity and Imaginative Rationality in Mathematics Education. *Retrieved at 29/3/2010 from:* http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG5/Papers/PRESM.pdf

Radford L., Schubring G., Seeger F., (2008). The Ubiquitousness of Signs. In Radford L., Schubring G., Seeger F. (Eds.) *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, Sense Publishers.

Radford L., (2000). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis. *Educational Studies in Mathematics* 42, 237-268.

Rival I., (1987). Picture Puzzling. Mathematicians Are Rediscovering the Power of Pictorial Reasoning. *The Sciences* 27, 40-46.

Spivak M., (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Sriraman B., Pizzulli M., (2005). Balancing Mathematics Education Research and the NCTM Standards. *ZDM* 37(5), 431-436.

Stodolsky S.S., (1989). Is Teaching Really by the Book? In P. W. Jackson & S. Haroutunian-Gordon (Ed.) *From Socrates to software: The teacher as a text and the text as a teacher*, 159-184. Chicago, The University of Chicago Press.

Stokes S., (2002). Visual Literacy in Teaching and Learning: A Literature Perspective. *Electronic Journal for the Integration of Technology in Education* 1(1), 10 – 19.

Tall D., Vinner S., (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12(2), 151-169.

Tall D., (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the Calculus. In Zimmermann & Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America Notes 19, 105– 119.

Zimmermann W., Cunningham S., (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America Notes 19.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., (2002). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου. Θετική και Τεχνολογικά κατεύθυνση*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Γιαννακούλιας Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός. Η Ιστορική του Εξέλιξη από τον 5° π.χ. έως και τον19ο αιώνα.* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Κολέζα Ε., (2006). Σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών: Α' Μέρος: Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης. *Ευκλείδης Γ'* 65, 3-27.

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., (1999). *Απειροστικός Λογισμός*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.