



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«Εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Ανάλυσης μέσω του
ρυθμού μεταβολής ποσοτήτων»**

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΣΑΛΕΒΟΥΡΑΚΗΣ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια

Βασιλική Φαρμάκη

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2009

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ**

Βασίλειος Σαλεβουράκης

ΑΘΗΝΑ

Ιούνιος 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών**

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη
από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1).....(επιβλέπουσα)		
2).....		
3).....		

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, δηλαδή

- Την επιβλέψασα κ. Βασιλική Φαρμάκη, αναπληρώτρια καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α., για την εν γένει εποπτεία και την καθοδήγησή της, κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής.
- Τον κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια, αναπληρωτή καθηγητή Ε.Κ.Π.Α., για τις οδηγίες και τις παρεμβάσεις του που αφορούν το κεφάλαιο της ιστορικής ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού.
- Τον κ. Νικόλαο Κλαουδάτο, διδάκτορα της διδακτικής των μαθηματικών, για την αποφασιστικής σημασίας βοήθεια που μου προσέφερε στην ανάλυση των διαλόγων την επιλογή του θεωρητικού πλαισίου και τη διατύπωση των συμπερασμάτων της εργασίας αυτής.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Καλογεράκη, σχολικό συμβουλο Μαθηματικών στο νομό Χανίων και την κ. Αικατερίνη Χωματά φιλόλογο πρώην διευθύντρια του 5^{ου} Εν. Λυκείου Ηλιούπολης, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν.

Αισθάνομαι τέλος την ανάγκη να ευχαριστήσω τις συναδέλφους εκπαιδευτικούς,

- Σοφία Πιτσογιάννη, φιλόλογο, για τη βοήθειά της στην επιμέλεια του κειμένου,
- Κατερίνα Κεφαλωνίτου, φιλόλογο, για την επιμέλεια των κειμένων στην αρχαία ελληνική γλώσσα,
- Πηνελόπη Γκότση, βιολόγο, για τη βοήθειά της στη μετάφραση της ξενόγλωσσης αρθρογραφίας,

αλλά και συνολικά για την ηθική στήριξή τους κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της μελέτης.

Αθήνα, 24/06/2009

Σαλεβουράκης Βασίλειος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
----------------------	----------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο :Το γνωστικό αντικείμενο και η έρευνα.

1.1. Τα δύο θεμελιώδη προβλήματα του απειροστικού λογισμού.....	10
1.2. Ερευνητικά ερωτήματα και αναγκαιότητα της μελέτης.....	12
1.3. Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	13
1.4. Το πείραμα.....	17
1.4.1. Περιγραφή του πειράματος.....	17
1.4.2. Τα προβλήματα.....	18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο :Θεωρητικό πλαίσιο.

2.1. Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση.....	26
2.2. Η πρακτική της τάξης.....	33
2.3. Η θεωρία της αλληλεπίδρασης κατά Piaget και Vygotsky.....	40
2.4. Η γενίκευση και η αφαίρεση.....	42
2.5. Διαίσθηση και αυστηρότητα.....	44
2.6. Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία.....	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο :Η ιστορική ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.

3.1. Εισαγωγή.....	51
3.2. Τα μαθηματικά πριν από τον 6 ^ο π.Χ. αιώνα.....	52
3.3. Τα ελληνικά μαθηματικά.....	55
3.3.1. Η σχολή της Ιωνίας.....	55
3.3.2. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας.....	56
3.3.3. Ο Εύδοξος.....	67
3.3.4. Ο Αρχιμήδης.....	71
3.4. Τα μαθηματικά από τον Αρχιμήδη μέχρι και τον 19 ^ο αιώνα.....	78
3.4.1. Τα μαθηματικά στο μεσαίωνα.....	78
3.4.2. Οι προπομποί της ανακάλυψης του απειροστικού λογισμού.....	80
3.4.3. Η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού.....	96
3.4.4. Η αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού.....	101

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: Η ανάλυση των διαλόγων.

4.1.	Εικόνες των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης.....	113
4.2.	Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής.....	120
4.3.	Μέσος ρυθμός μεταβολής σε ένα διάστημα πλάτους 0,1 sec.....	124
4.4.	Η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής.....	130
4.5.	Το θεμελιώδες θεώρημα.....	142
4.6.	Ο ρυθμός μεταβολής της συσσώρευσης.....	150
4.7.	Κάποια άμεσα συμπεράσματα.....	161

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: Συμπεράσματα.

5.1.	Συμπεράσματα και προτάσεις για διδασκαλία.....	163
5.2.	Βιβλιογραφία.....	169
5.2.1.	Βιβλιογραφία στην ελληνική γλώσσα.....	169
5.2.2.	Βιβλιογραφία στην αγγλική γλώσσα.....	171

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστή από προηγούμενες έρευνες αλλά και από τη διδακτική μας εμπειρία, η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών του απειροστικού λογισμού. Εστιάζουν σε αλγοριθμικούς κανόνες και μεθοδολογίες σχετικά με την παράγωγο και το ολοκλήρωμα, προκειμένου να είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν τα θέματα των εισαγωγικών εξετάσεων, χωρίς να αντιλαμβάνονται διαισθητικά και ουσιαστικά τις βασικές έννοιες που απλώς χρησιμοποιούν. Στην εργασία αυτή έγινε μια προσπάθεια να καταγραφούν οι εμπειρίες των μαθητών της Γ' Λυκείου και να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης δύο πραγματικών προβλημάτων, που είχαν ως αντικειμενικό στόχο μια εποπτική αιτιολόγηση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, μας δόθηκε η ευκαιρία να διερευνήσουμε τις εικόνες που σχηματίζουν οι μαθητές για τις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, όπως η συνάρτηση, το όριο, ο μέσος και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής και η συσώρευση ενός μεγέθους. Η μελέτη αυτή έδειξε ότι οι έννοιες του ορίου, του ρυθμού μεταβολής και της απειροελάχιστης μεταβολής είναι κομβικές για την κατανόηση του θεμελιώδους θεωρήματος. Η ανάλυση των διαλόγων πιστοποίησε ότι οι δυσκολίες των μαθητών με το θεμελιώδες θεώρημα, έχουν σχέση με την αποδυναμωμένη διδακτικά έννοια του ρυθμού μεταβολής στο σχολείο αλλά και με τις φτωχές εμπειρίες των μαθητών γύρω από την έννοια της συναρτησιακής μεταβολής και της οριακής κατάστασης. Πιστεύοντας ότι η θεωρία είναι αυτό πάνω στο οποίο πρέπει να στηριζόμαστε μια που κατά τον John Dewey, *«είναι το πιο πρακτικό απ' όλα τα πράγματα»*, Thompson, (1994), θεωρούμε ότι η βαθύτερη κατανόηση και η εμβάθυνση στις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης είναι και ο μόνος τρόπος αντιμετώπισης των δύσκολων, γενικά, προβλημάτων του απειροστικού λογισμού. Παρά την ολοφάνερη και αναμενόμενη δυσκολία που είχαν οι μαθητές στο να κατανοήσουν και να εμβαθύνουν σε ένα τόσο δύσκολο εννοιολογικά γνωστικό πεδίο, η μετατόπιση του νοήματος σε κάποιες περιπτώσεις και ο επανακαθορισμός των απόψεων τους για τις κεντρικές έννοιες, σε κάποιες άλλες, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατόν η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού στο Λύκειο να μην περιορίζεται στην εκμάθηση τύπων και μεθόδων, για την μηχανιστική εφαρμογή τους σε ασκήσεις και μόνον.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσεται σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή του πειράματος, καταγράφονται τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα από την έρευνα στη διδασκαλία του απειροστικού λογισμού διεθνώς, αναλύεται ο σκοπός και τίθενται οι στόχοι της εργασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχτηκε η πρακτική της τάξης, η ανάλυση των διαλόγων και η επιλογή μας για μια κάπως εκτεταμένη αναφορά στην ιστορική ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Η τελευταία αναπτύσσεται στο τρίτο κεφάλαιο και περιλαμβάνει τα ιστορικά στοιχεία με βάση την κυριότερη ελληνική και ξένη βιβλιογραφία που αφορούν την περίοδο από τις απαρχές των μαθηματικών έως και την αυστηρή θεμελίωσή του, τον 19^ο αιώνα. Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την ανάλυση των διαλόγων οι οποίοι παρατίθενται κατά τη σειρά που εξετάζονται οι έννοιες. Δηλαδή συναρτησιακή μεταβολή, μέσος ρυθμός μεταβολής, στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής – όριο, συσσώρευση και ρυθμός συσσώρευσης ενός μεγέθους. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο δίνουμε τα συμπεράσματα, κάποιες προτάσεις για διδασκαλία και τις αναφορές στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία, στην οποία ανατρέξαμε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας μελέτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

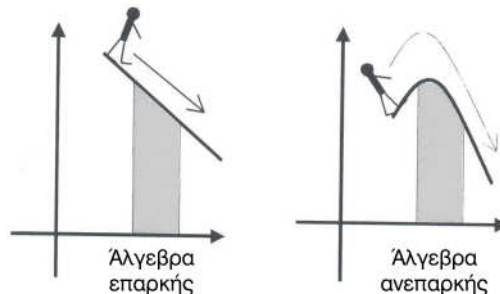
Το γνωστικό αντικείμενο και η έρευνα.

- 1.1. Τα δύο θεμελιώδη προβλήματα του απειροστικού λογισμού.
- 1.2. Ερευνητικά ερωτήματα και αναγκαιότητα της μελέτης.
- 1.3. Βιβλιογραφική ανασκόπηση.
- 1.4. Το πείραμα.
 - 1.4.1. Περιγραφή του πειράματος.
 - 1.4.2. Τα προβλήματα.

1.1. Τα δύο θεμελιώδη προβλήματα του απειροστικού λογισμού

Σύμφωνα με τους Hughes-Hallett et al, (στους Berry & Nyman, 2003), ο απειροστικός λογισμός (Calculus), είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρώπινης διάνοιας συγκρινόμενο ευθέως με την κατάκτηση της σελήνης και την αποκρυπτογράφηση του ανθρώπινου γονιδιώματος. Εμπνευσμένοι από προβλήματα αστρονομίας κυρίως, οι Newton και Leibniz ανέπτυξαν τις ιδέες τους τριακόσια χρόνια πριν. Από τότε και σε κάθε αιώνα που περνούσε καταδεικνύονταν όλο και περισσότερο η ικανότητα του απειροστικού λογισμού στο να διασαφηνίζει ερωτήματα στα μαθηματικά, στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, στις κοινωνικές επιστήμες και στη βιολογία. Η ασυνήθιστη δυνατότητα του νέου λογισμού να ανάγει περίπλοκα προβλήματα σε απλούς κανόνες και διαδικασίες τον κατέστησε ιδιαίτερα επιτυχημένο και αποτελεσματικό εργαλείο στα χέρια των επιστημόνων, Berry & Nyman, (2003).

Ο απειροστικός λογισμός αναπτύχθηκε, στην προσπάθεια των επιστημόνων να απαντήσουν στα δύο παρακάτω ερωτήματα:



Στο σχήμα το μικρό ανθρωπάκι περπατά προς την κατεύθυνση που δείχνουν τα βέλη στα δύο μονοπάτια. Οι διαφορές σε αυτά τα δύο μονοπάτια είναι βαθειά εδραιωμένες και σηματοδοτούν με απόλυτο τρόπο το πέρασμα από την άλγεβρα στην ανάλυση. Στην πρώτη περίπτωση, έστω και αν δεν δίνονται καθόλου αριθμητικά στοιχεία, διαισθητικά αντιλαμβάνεται κάποιος ότι η κλίση της συγκεκριμένης διαδρομής είναι πάντα σταθερή και πάντα αρνητική. Από την άλγεβρα γνωρίζουμε ότι αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι δύο διακεκριμένα σημεία αυτής της διαδρομής, τότε ανεξαρτήτως από το πόσο μακριά ή κοντά βρίσκονται αυτά, η κλίση της διαδρομής θα είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, και φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα λ θα προκύπτει οποιοδήποτε ζεύγος

διακεκριμένων σημείων και αν επιλέξουμε πάνω στην πρώτη διαδρομή. Ας

θεωρήσουμε τώρα τη σκιαγραφημένη περιοχή που ορίζεται από την εν λόγω διαδρομή, τον x' και τις δύο κατακόρυφες ευθείες, που διέρχονται από τα δύο διακεκριμένα σημεία. Αν ονομάσουμε A το εμβαδόν αυτό, τότε από τη στιγμή που το σχήμα είναι τραπέζιο το εμβαδόν A θα υπολογίζεται από το γνωστό τύπο για το εμβαδόν τραπεζίου. Το γεγονός ότι η σκιαγραφημένη περιοχή ορίζεται από τέσσερις ευθείες σταθερής κλίσης, καθιστά επαρκή έναν απλό τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού A . Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να πούμε ότι στην περίπτωση της «αλγεβρικής διαδρομής», στοιχειώδεις αλγεβρικοί τύποι είναι αρκετοί για να υπολογίσουν την κλίση και το εμβαδόν της περιοχής κάτω από αυτήν.

Στη δεύτερη περίπτωση το «ανθρωπάκι» βαδίζει πάνω σε μια καμπύλη. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδρομής αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά, ότι η κλίση αλλάζει συνεχώς, καθώς μετακινείται από αριστερά προς τα δεξιά. Εμπειρικά μπορούμε να δούμε ότι ξεκινά με θετική κλίση και τερματίζει με αρνητική και κάπου ανάμεσα στο υψηλότερο σημείο της διαδρομής, για μια στιγμή, η κλίση γίνεται μηδέν. Συνεπώς, πώς θα μπορούσε να υπολογίσει κάποιος τη κλίση κατά μήκος της καμπύλης, όπου αυτή συνεχώς μεταβάλλεται; Ειδικότερα, πώς θα μπορούσε να υπολογίσει την κλίση σε ένα σημείο P της καμπύλης; Ίσως θα μπορούσαμε να ζητήσουμε τη βοήθεια του γνωστού τύπου για την κλίση της ευθείας, αλλά το ερώτημα που προκύπτει είναι, ποια δύο σημεία είναι τα καταλληλότερα. Η διαίσθησή μας λέει, να πάρουμε δύο σημεία πολύ κοντά στο P . Αλλά είναι αυτό ακριβές; Δύο σημεία εκατέρωθεν του P θα μπορούσαν να δώσουν π.χ. άλλοτε θετική και άλλοτε αρνητική κλίση, ανάλογα με τη σχέση των τεταγμένων τους. Είναι φανερό ότι ο τύπος για την κλίση της ευθείας δεν είναι αρκετός για να μας δώσει την απάντηση στο ερώτημα «ποια είναι η κλίση όταν η ευθεία αντικαθίσταται από μια καμπύλη». Για να απαντήσουμε σε αυτό το πρόβλημα θα πρέπει να επιστρατευτούν πιο δυναμικές και πιο γενικές τεχνικές υπολογισμού της. Το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα του απειροστικού λογισμού διατυπώνεται λοιπόν ως εξής:

Πρόβλημα I. Να βρεθεί η ακριβής κλίση σε κάθε σημείο P μιας οποιασδήποτε καμπύλης.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην σκιαγραφημένη περιοχή με στόχο να αναζητήσουμε το εμβαδόν της. Άμεσα γίνεται αντιληπτό ότι η καμπύλη που είναι το ένα από τα τέσσερα σύνορά της, παρουσιάζει πρόβλημα στον υπολογισμό του εμβαδού. Δεν είναι το σύνορο ενός τριγώνου, τραπεζίου ή παραλληλογράμμου, όπου θα χρησιμοποιούσαμε έναν στοιχειώδη τύπο ή έναν συνδυασμό από τέτοιους τύπους για να εξάγουμε το εμβαδόν. Μια λύση είναι να το προσεγγίσουμε, οπότε κινδυνεύουμε από ένα σφάλμα αντίστοιχο εκείνου που θα είχαμε υπολογίζοντας τη κλίση σε ένα σημείο της καμπύλης με το τύπο για την κλίση του ευθυγράμμου τμήματος. Το δεύτερο θεμελιώδες πρόβλημα του απειροστικού λογισμού μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόβλημα II. Να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου, του οποίου το σύνορο τουλάχιστον κατά ένα μέρος του, είναι μια τυχαία καμπύλη.

Στην πορεία για τη λύση των δύο παραπάνω προβλημάτων, αναπτύχθηκε ένα εκπληκτικό σύνολο από μαθηματικά εργαλεία, τα οποία προήγαγαν στο έπακρο τις μαθηματικές και υπολογιστικές μας ικανότητες. Τα εργαλεία αυτά μας επέτρεψαν να λύσουμε προβλήματα τα οποία με μόνη την άλγεβρα, ήταν απλώς απροσπέλαστα.

1.2. Ερευνητικά ερωτήματα και αναγκαιότητα της μελέτης.

Η δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση των βασικών εννοιών της ανάλυσης στη διάρκεια της Γ' Λυκείου, είναι μια πραγματικότητα που τη βιώνει ο διδάσκων καθημερινά κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Είναι γνωστό από τα συμπεράσματα διαφόρων ερευνών ότι η έννοια του απείρου και του απειροστού, το βαθύτερο νόημα της οριακής κατάστασης και άλλες σύνθετες έννοιες, δε γίνονται κατανοητές. Ως εκ τούτου, τα παιδιά αρκούνται στην εφαρμογή ορισμένων κανόνων, αλγορίθμων ή τεχνικών προκειμένου να λύσουν κάποια προβλήματα, χωρίς τις περισσότερες φορές να καταλαβαίνουν γιατί ισχύουν οι κανόνες αυτοί. Βλέπε ενδεικτικά Orton, (1983), Tall, (1990, 1997), Cornu, (1991), Cottrill et al, (1996). Πιστεύουμε ότι αν οι μαθητές έχουν μια ικανοποιητική κατανόηση των κεντρικών

εννοιών της ανάλυσης θα ελαχιστοποιούνται τα κρούσματα μηχανιστικής αντιμετώπισης των προβλημάτων. Υποστηρίζουμε επίσης ότι αν, με τη βοήθεια του διδάσκοντος, οι μαθητές έχουν εμβαθύνει, έστω και μερικώς, στα νοήματα που διέπουν τις σύνθετες καταστάσεις που πραγματεύεται ο συγκεκριμένος κλάδος, θα έχουν την ευκαιρία για μια ουσιαστικότερη επαφή με το γνωστικό πεδίο που έχει χαρακτηριστεί ως ένα από τα πιο καταπληκτικά επιτεύγματα της ανθρώπινης διάνοιας. Ο J. Stewart (1999), γράφει στον πρόλογο του βιβλίου του « Calculus»: *«Η έμφαση πρέπει να δίνεται στην κατανόηση των εννοιών. Νομίζω σχεδόν όλοι συμφωνούμε ότι αυτός πρέπει να είναι ο πρωτεύων στόχος της διδασκαλίας του απειροστικού λογισμού»*.

Στην εργασία αυτή στόχος μας είναι να εξετάσουμε τόσο τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις βασικές έννοιες της ανάλυσης οι μαθητές της Γ' Λυκείου, όσο και το επίπεδο κατανόησης των εννοιών αυτών εκ μέρους των μαθητών. Μέσα από κάποιες διδασκαλίες, ανεπαρκείς ως προς το πλήθος και τη διάρκειά τους ομολογουμένως, εξετάζουμε πως αντιλαμβάνονται τα παιδιά την έννοια της συναρτησιακής συμμεταβολής δύο μεγεθών, του ρυθμού μεταβολής, την έννοια του ορίου συνάρτησης και της συσσώρευσης ενός μεγέθους. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε με ποιους τρόπους μπορούν οι μαθητές, εμπλεκόμενοι σε μια διαδικασία μοντελοποίησης της κίνησης να αναπτύσσουν, να χρησιμοποιούν και να βελτιώνουν συμβολισμούς, εμποδώνοντας ταυτόχρονα τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού. Τι είναι αυτό τέλος πάντων που έχουν στο νου τους τα παιδιά όταν μιλάνε για δύο μεγέθη που αλληλοεξαρτώνται και συμμεταβάλλονται; Τι καταλαβαίνουν όταν χρησιμοποιούν τη φράση «ρυθμός μεταβολής»; Τι φαντάζονται όταν εισέρχονται σε μια οριακή κατάσταση; Ποιες εικόνες σχηματίζουν για τη συσσώρευση ενός μεγέθους και το ρυθμό με τον οποίο αυτή μεταβάλλεται; Σκοπός μας επίσης είναι να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τον τρόπο που διδάσκεται η ανάλυση σήμερα στο Λύκειο, να αναλύσουμε τους λόγους για τους οποίους γίνεται αυτό και να διατυπώσουμε κάποιες προτάσεις για διδασκαλία.

1.3. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού έχει γίνει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας διεθνώς. Το

πολυσύνθετο του συγκεκριμένου γνωστικού πεδίου, η φύση των νοημάτων του και η δυσκολία που βιώνουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να το προσεγγίσουν, είναι οι κυριότεροι λόγοι για τους οποίους αποτελεί αντικείμενο επιστημονικής έρευνας στα πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Tall (1990), η διερεύνηση των ιδεών και της κατανόησης των μαθητών στις κεντρικές έννοιες του απειροστικού λογισμού αποκάλυψε θεμελιώδεις ασυνέπειες. Οι μαθητές μάθαιναν να απαντούν σε συγκεκριμένες (standart) ερωτήσεις αλλά αν η κατανόησή τους εξετάζονταν συστηματικά, αναδύονταν δυσκολίες που ήταν καλά συγκαλυμμένες. Οι προ-μαθηματικές εμπειρίες που μοιραία οι μαθητές φέρνουν μέσα στην τάξη επηρεάζουν την κατανόησή τους στις έννοιες της ανάλυσης. Οι Hobbs & Relf (1997), υπογραμμίζουν ότι αν η επιδίωξη σε μια σειρά μαθημάτων απειροστικού λογισμού είναι οι μαθητές να καταλαβαίνουν τι κάνουν και λιγότερο να διαχειρίζονται σύμβολα, τότε πρέπει να αφιερώσουμε περισσότερο χρόνο στις βασικές έννοιες οι οποίες πρέπει να διερευνώνται εξονυχιστικά. Στην πλειοψηφία των μαθημάτων αυτών η εισαγωγή στον απειροστικό λογισμό γίνεται κατά βάση σταδιακά ξεκινώντας με την έννοια της συνάρτησης συνεχίζοντας με αυτήν του ορίου, της συνεχείας κ.λ.π.. Αυτό έχει κάποια πλεονεκτήματα αλλά βάζει βραχυπρόθεσμους στόχους και δεν είναι μακράς πνοής. Αναπτύσσουν ταχύτητα για να τρέξουν την ύλη αντί να διερευνούν σε βάθος τις βασικές έννοιες. Οι Borgen & Manu Stan (2002), κατά τη διάρκεια μιας μελέτης περίπτωσης, διαπίστωσαν ότι ένας μαθητής μπορεί να παρουσιάσει μια λύση σε ένα πρόβλημα ανάλυσης χρησιμοποιώντας τους αλγεβρικούς τύπους και τις τυπικές διαδικασίες, χωρίς να έχει συνδέσει τα επιμέρους συστατικά του προβλήματος. Είναι όμως γνωστό ότι πλήρης κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί μόνο όταν ο μαθητής συνδέσει τη γνώση και τις εμπειρίες του με τα διάφορα μέρη του προβλήματος. Εάν επιπλέον ο δάσκαλος είναι ενήμερος των πιθανών παρανοήσεων των μαθητών, τότε αυτό θα τον βοηθήσει να βελτιώσει τη διδασκαλία του. Οι Gravemeijer & Doorman (1999), διαπίστωσαν πως όταν οι μαθητές ασχολούνται με την επίλυση των λεγομένων «context problems», ξαναανακαλύπτουν τα μαθηματικά και δεν αισθάνονται απόσταση μεταξύ της καθημερινής εμπειρίας και των μαθηματικών. Ο απειροστικός λογισμός προσφέρει τις ευκαιρίες για επαφή των μαθητών με αυτά τα προβλήματα. Τα παιδιά που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα, αναπτύσσουν την εμπειρική πραγματικότητά τους. Από τη μια μεριά τα προβλήματα αυτά έχουν τις ρίζες τους σ' αυτήν την εμπειρική πραγματικότητα και από την άλλη λύνοντάς τα, βοηθούν τους μαθητές να επεκτείνουν την πραγματικότητά τους. Οι

Berry & Nyman (2003), συμφωνούν με τον Koirala (1997), ότι ένα εισαγωγικό μάθημα στον απειροστικό λογισμό, πρέπει να είναι απαλλαγμένο από τα τυπικά, αναπτυγμένο διαισθητικά και βασισμένο εννοιολογικά πάνω στις συναρτήσεις και την γραφική τους αναπαράσταση, π.χ. βλέπε και προσέγγιση του M. Kline, (1977). Οι τύποι και οι κανόνες δεν θα πρέπει να δίνονται χωρίς αιτιολόγηση αλλά θα πρέπει να αναπτύσσονται διαισθητικά, με βάση τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες των μαθητών. Ο Tim Erickson (2006), επισημαίνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται όταν καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στον απειροστικό λογισμό, για να μοντελοποιήσουν πραγματικές καταστάσεις στη φυσική. Όταν συναντούν σύμβολα διαφορετικά από το x για την ανεξάρτητη μεταβλητή και το y για την εξαρτημένη, τα αισθάνονται ξένα και δεν μπορούν να τα χειριστούν με τον ίδιο τρόπο. Άμεση συνέπεια αυτού είναι η δυσκολία να συνδέσουν τα μαθηματικά μοντέλα που απλόχερα προσφέρει ο απειροστικός λογισμός με τις πραγματικές καταστάσεις και στο σημείο αυτό η βοήθεια του δασκάλου είναι αποφασιστικής σημασίας. Καλείται βέβαια να υπερπηδήσει εμπόδια όπως π.χ. τα προγράμματα σπουδών που είναι τόσο γεμάτα ώστε οτιδήποτε παραπανίσιο να αντιμετωπίζεται τουλάχιστον με καχυποψία. Ο P. Liljedahl σε μια προσπάθεια να μελετήσει τον τρόπο που συνδέεται το αντικείμενο της μάθησης με τις προσωπικές εμπειρίες του μαθητή, συμπεραίνει ότι η ανάγκη να γεφυρώσουμε τις κεντρικές έννοιες της ανάλυσης που θα διδάξουμε με τις εμπειρίες των μαθητών είναι αποδεδειγμένη και η σημασία αυτής της γεφύρωσης πολύ μεγάλη. Οι Asiala, et al (1997), έδειξαν ότι οι μαθητές που παρακολουθούν διδασκαλίες βασισμένες περισσότερο στη θεωρία και στη θεωρητική ανάλυση, ίσως έχουν μεγαλύτερη επιτυχία στο να αναπτύξουν την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και της παραγώγου της σε σχέση με μαθητές που παρακολουθούν παραδοσιακές διδασκαλίες. Σύμφωνα με τον Πρίντσεξ (2006), τα απειροστά, παρ' ότι έχουν επαρκώς θεμελιωθεί τα τελευταία πενήντα χρόνια, εξακολουθούν να είναι παραγκωνισμένα και στο σχολείο και στο Πανεπιστήμιο αφού υπάρχει απροθυμία για την αλλαγή συνηθειών όπως του κλασικού ορισμού του ορίου. Κατά τον Kleiner (2001), τα απειροστά, σε ανεπίσημο επίπεδο, φαίνεται να είναι τόσο ελκυστικά όσο και τα όρια. Οι φυσικοί και οι μηχανικοί, τα έχουν χρησιμοποιήσει γι' αυτό το λόγο αρκετά μετά τον εξοστρακισμό τους από τα μαθηματικά. Οι μαθηματικοί δε, τα χρησιμοποιούν ακόμη έστω και ανεπίσημα με την βεβαιότητα ότι έχουν βοήθεια στην αυστηρότητα. Η έννοια ενός πράγματος τόσο μικρού ώστε να θεωρείται αμελητέο είναι οικεία. Για πάνω από δύο χιλιετίδες η μέθοδος των απειροστών

χρησιμοποιούνταν με μεγάλη επιτυχία, από επιστήμονες όπως ο Αρχιμήδης, ο Leibniz, ο Newton, ο Euler και ο Cauchy. Ο Orton (1983) αναφέρει ότι αρκετοί μαθητές μαθαίνουν την παραγωγή σαν ένα σύνολο κανόνων που πρέπει να εφαρμοστεί, χωρίς προσπάθεια να διαφανούν οι λόγοι για τους οποίους γίνεται αυτό και να δικαιολογηθεί η διαδικασία. Για πολλούς αυτό είναι μια λανθασμένη διδακτική πρακτική αλλά στην πράξη ο ισχυρισμός αυτός δεν έχει διερευνηθεί πλήρως. Όμως το ερώτημα αν θα πρέπει οι μαθητές να εισάγονται από νωρίς στον απειροστικό λογισμό παραμένει. Όσον αφορά την κεντρική έννοια του ρυθμού μεταβολής, ο Orton βρήκε ότι την σχετίζουν με τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας, πράγμα που τους οδηγεί σε παρανοήσεις. Γενικά τα παιδιά έχουν μικρή διαισθητική κατανόηση των βασικών εννοιών και θεμελιώδεις παρανοήσεις σχετικά με την παράγωγο. Σχεδόν όλοι οι μαθητές μπορούν να εφαρμόζουν τους κανόνες παραγωγής, αλλά μόλις τους παρουσιάζεται μια συνάρτηση που δεν έχουν ξαναδεί, η συχνότητα των λαθών αυξάνεται δείχνοντας δυνατή εξάρτηση από τα αλγοριθμικά βήματα, χωρίς να υπάρχει βαθιά εννοιολογική κατανόηση. Ένα άλλο σημείο που παρουσίαζε μεγάλες δυσκολίες για τους μαθητές, είναι και η μετάβαση από το μέσο στο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής. Γενικότερα ο Orton επιβεβαίωσε ότι μαθητές που τα κατάφερναν καλά σε προβλήματα ρουτίνας, είχαν σοβαρές δυσκολίες όταν συναντούσαν πρωτότυπα προβλήματα. Αυτό το απέδωσε στην ασθενή εννοιολογική εικόνα που έχουν για τις βασικές έννοιες της ανάλυσης. Ο Cornu (1991), διαπίστωσε ότι η ποικιλία των ιδεών, ο πλούτος και η πολυπλοκότητα των εννοιών και τα γνωστικά εμπόδια, κάνουν τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου εξαιρετικά δύσκολη. Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες αλλά το πρόβλημα παραμένει άλυτο. Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις προσπάθειες, η έρευνα εδώ και αρκετά χρόνια έχει δείξει ότι οι αντιλήψεις των μαθητών χαρακτηρίζονται από μεγάλη ποικιλία, ότι κάνουν θεμελιώδη λάθη και δεν ξεπερνούν απαραίτητα τα επιστημολογικά εμπόδια. Οι Cottrill et al (1996), βρήκαν ότι η δυναμική κατανόηση του ορίου είναι πολύ πιο σύνθετο πράγμα, από το να εσωτερικεύσει κανείς μια ενέργεια όπως ο τυπικός ορισμός. Αντίθετα από ορισμένους ερευνητές που πιστεύουν ότι η δυναμική κατανόηση μπορεί να εμποδίσει τη διαδικασία της τυπικής κατανόησης του ορίου, ασπάζονται το αντίθετο, δηλαδή ότι η δυσκολία να κινηθούμε προς μια πιο τυπική ανάπτυξη της έννοιας είναι, τουλάχιστον εν μέρει, αποτέλεσμα της ανεπαρκούς δυναμικής κατανόησης. Η Jordaan (2005), διερευνώντας τις παρανοήσεις σπουδαστών μιας πολυτεχνικής σχολής γύρω από την έννοια του ορίου, παρατήρησε

ότι έβλεπαν το όριο σαν κάτι μη δυνάμενο να το φτάσει κανείς και το απέδωσε στη γλώσσα που χρησιμοποιούν τα βιβλία με τη χρήση των λέξεων «τείνει στο» και «προσεγγίζω». Είναι λέξεις που υποδηλώνουν την ενέργεια «πλησιάζοντας το όριο», και η οποία εγκαθιστά μια δυναμική αναπαράσταση του ορίου. Η αναπαράσταση αυτή υποδηλώνει μια κίνηση προς το όριο χωρίς ποτέ να φτάνουμε εκεί. Αυτό δικαιολογεί και την άποψη της πλειοψηφίας των μαθητών ότι το όριο είναι μια διαδικασία και όχι ένα αντικείμενο. Κλείνοντας αυτήν τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, θα αναφερθούμε στον Thompson (1994), στου οποίου το άρθρο με τίτλο «*Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus*», στηρίχτηκε ένα μεγάλο μέρος αυτής της εργασίας. Σύμφωνα με τον Thompson οι μαθητές κατ' επανάληψη έχουν δείξει ότι η εικόνα που σχηματίζουν για την έννοια της συνάρτησης, είναι μια έκφραση μικρή αριστερά, μια μεγαλύτερη δεξιά και στη μέση το $=$. Δεν είναι η μόνη που θα μπορούσαν να πλάσουν αλλά είναι η μόνη που δουλεύει. Οι αναπαραστάσεις των μαθητών για το μέσο ρυθμό μεταβολής, δεν είναι ενεργητικές και λειτουργικές σε τέτοια έκταση ώστε να μπορούν να αφομοιώσουν κάθε μεταβολή ενός μεγέθους που προκύπτει πολλαπλασιαστικά από δύο άλλα μεγέθη.. Βλέπουν τη μεταβολή του ενός μεγέθους ανεξάρτητα από τη μεταβολή του άλλου μεγέθους και αυτό δημιουργεί περαιτέρω δυσκολίες στην κατανόηση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού.

1.4. Το πείραμα.

1.4.1. Περιγραφή του πειράματος.

Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης έγιναν δύο διδασκαλίες διάρκειας δύο διδακτικών ωρών η κάθε μία, σε ένα τμήμα Γ΄ τάξης θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης ενός Γενικού Λυκείου της Αθήνας. Οι διδασκαλίες αυτές επαναλήφθηκαν σε ένα τμήμα επίσης θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης ενός ιδιωτικού σχολείου της Αθήνας. Ο αριθμός των μαθητών κάθε τάξης ήταν δέκα τρεις. Κατά τη διάρκεια αυτών των διδασκαλιών λύθηκαν δύο «πραγματικά προβλήματα» τα οποία παραθέτουμε και αναλύουμε παρακάτω. Οι διδασκαλίες μαγνητοφωνήθηκαν και οι διάλογοι παρατίθενται προς ανάλυση, όπως ακριβώς έγιναν και προέκυψαν κατά την απομαγνητοφώνηση. Πριν προχωρήσουμε στην

ανάλυση των δύο προβλημάτων που οι μαθητές κλήθηκαν να διαπραγματευτούν, θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε στην πρακτική της τάξης. Οι μαθητές συζητούσαν και αντάλλασαν μεταξύ τους απόψεις προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτήματα, συνεργαζόμενοι ανά δύο στο ίδιο θρανίο. Στη συνέχεια και αφού προηγουμένως τα παιδιά έγραφαν τις απαντήσεις τους στο φύλλο εργασίας, ακολουθούσε διάλογος του διδάσκοντος με όλη την τάξη προκειμένου να σχολιαστούν οι απαντήσεις των μαθητών και να λυθούν στον πίνακα τα δύο προβλήματα των οποίων αντικειμενικός στόχος ήταν μια διαισθητική προσέγγιση και αιτιολόγηση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού. Προσδοκία μας ήταν μέσα από την ανάλυση των διαλόγων και την εξέταση των απαντήσεων των μαθητών, να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα σχετικά με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού και τις βελτιώσεις εκείνες που θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην εμπέδωσή τους.

1.4.2. Τα προβλήματα.

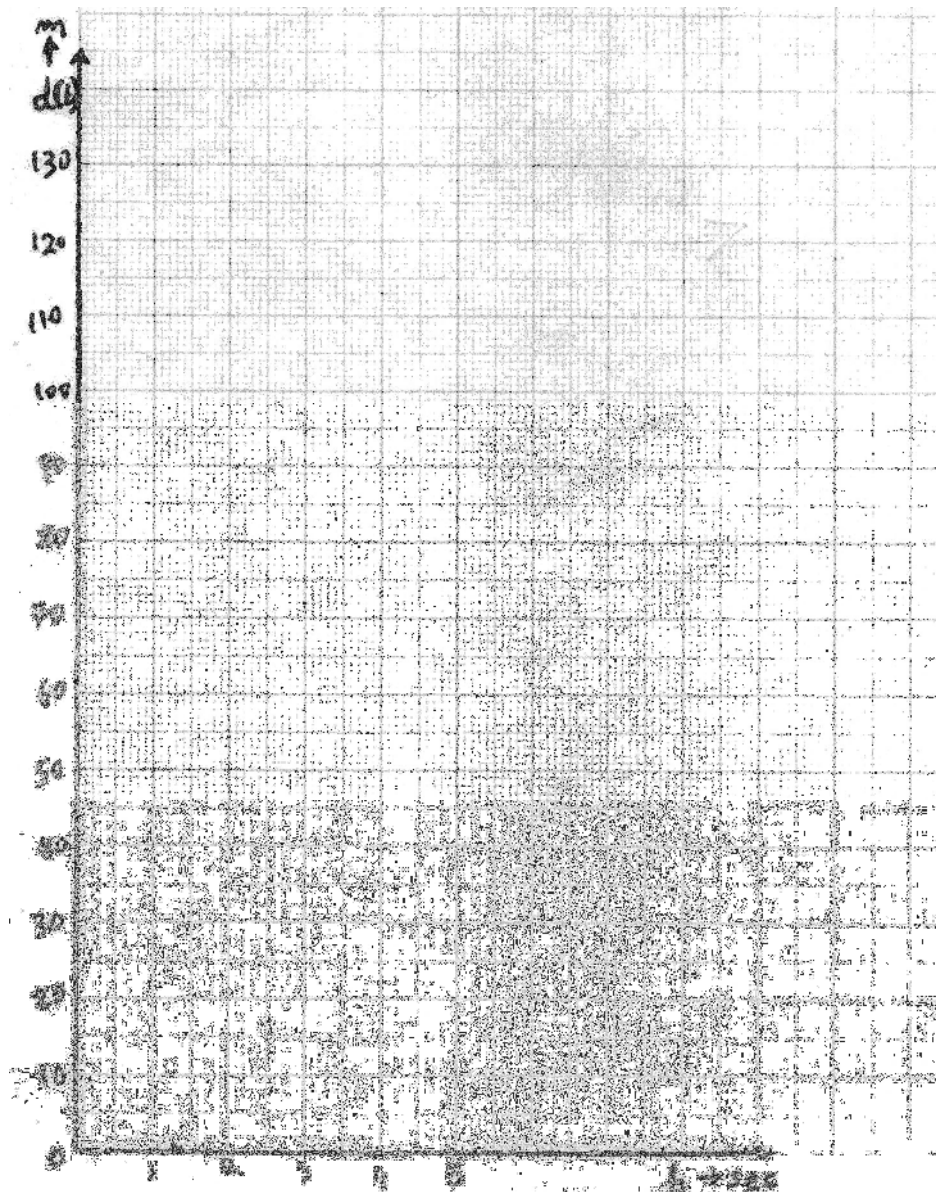
Το πρώτο πρόβλημα επιλέχτηκε από το χώρο της φυσικής και αφορά την ελεύθερη πτώση ενός αντικειμένου. Πρόκειται για μια κατάσταση προσιτή και οικεία στους μαθητές.

Πρόβλημα 1: Η έννοια του ρυθμού μεταβολής.

Ένα αντικείμενο αφήνεται να πέσει ελεύθερα από την ταράτσα ενός ουρανοξύστη.

α) Αν $d(t)$, $t \in [0, 5]$ παριστάνει την απόσταση που διανύει κατά την πτώση του το αντικείμενο σε συνάρτηση με το χρόνο, να βρείτε το $d(t)$, και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\psi = d(t)$, αφού συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών. (Να αγνοήσετε την αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 10\text{m/sec}^2$)

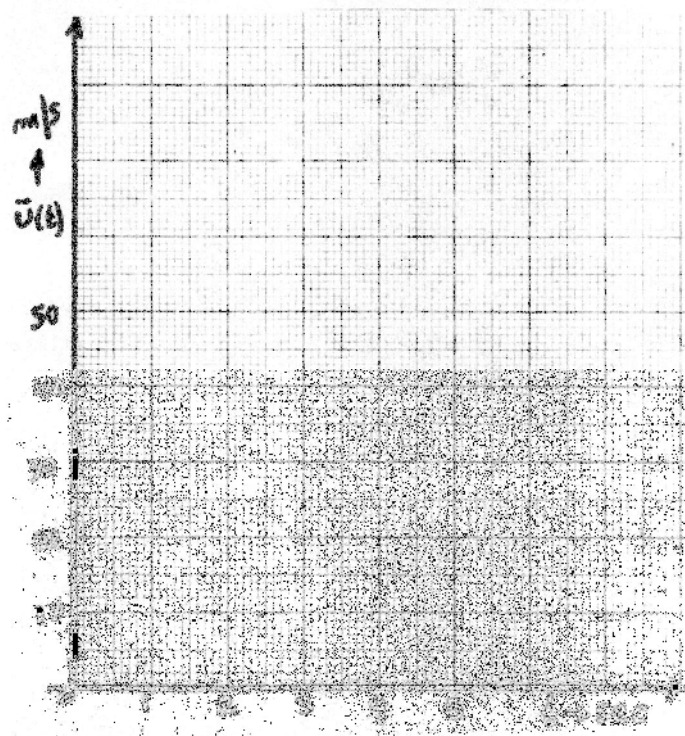
$t \rightarrow \text{sec}$	0	1	2	3	4	5
$d(t) \rightarrow \text{m}$						



β) Βρείτε τη μέση ταχύτητα του αντικειμένου μεταξύ 3,1 και 3,2 sec
 3,2 και 3,3 sec
 3,15 και 3,25 sec

γ) i) Να προσδιορίσετε το τύπο της συνάρτησης που εκφράζει τη μέση ταχύτητα $\bar{v}(t)$ του αντικειμένου, μέσα σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα πλάτους 0,1sec και να κάνετε τη γραφική της παράσταση, στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.

ii) Υπολογίστε το $\bar{v}(2,5)$. Τι παριστάνει το αποτέλεσμα;



δ) i) Να γενικεύσετε την απάντησή σας στο (γ), εισάγοντας μία παράμετρο h . Να προσδιορίσετε δηλαδή τη μέση ταχύτητα του αντικειμένου πάνω σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους h .

ii) Δοκιμάστε ολοένα και μικρότερες τιμές της παραμέτρου h , έτσι ώστε, να προκύψει μια οικογένεια συναρτήσεων.

Για $h = 0,1$ $\bar{v}(t) = \dots\dots\dots$

Για $h = 0,01$ $\bar{v}(t) = \dots\dots\dots$

Για $h = 0,001$ $\bar{v}(t) = \dots\dots\dots$

Για $h = 0,0001$ $\bar{v}(t) = \dots\dots\dots$

Για $h = 0,00001$ $\bar{v}(t) = \dots\dots\dots$

Τι παρατηρείτε;

ε) Ο Νίκος είχε την εξής απορία σχετικά με το (δ): Εγώ γνωρίζω ότι ταχύτητα σημαίνει διανύω μια ορισμένη απόσταση μέσα σε ένα χρονικό διάστημα. Αν λοιπόν σκεφτόμαστε για ένα κινούμενο σώμα, για μια στιγμή του χρόνου, τότε δεν θα διανύσει καμιά απόσταση σ' αυτή τη χρονική στιγμή, διότι απλά δεν θα έχει κανένα χρονικό περιθώριο να μετακινηθεί πουθενά. Συνεπώς τι νόημα έχει να μιλάμε για ταχύτητα του σώματος μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή;

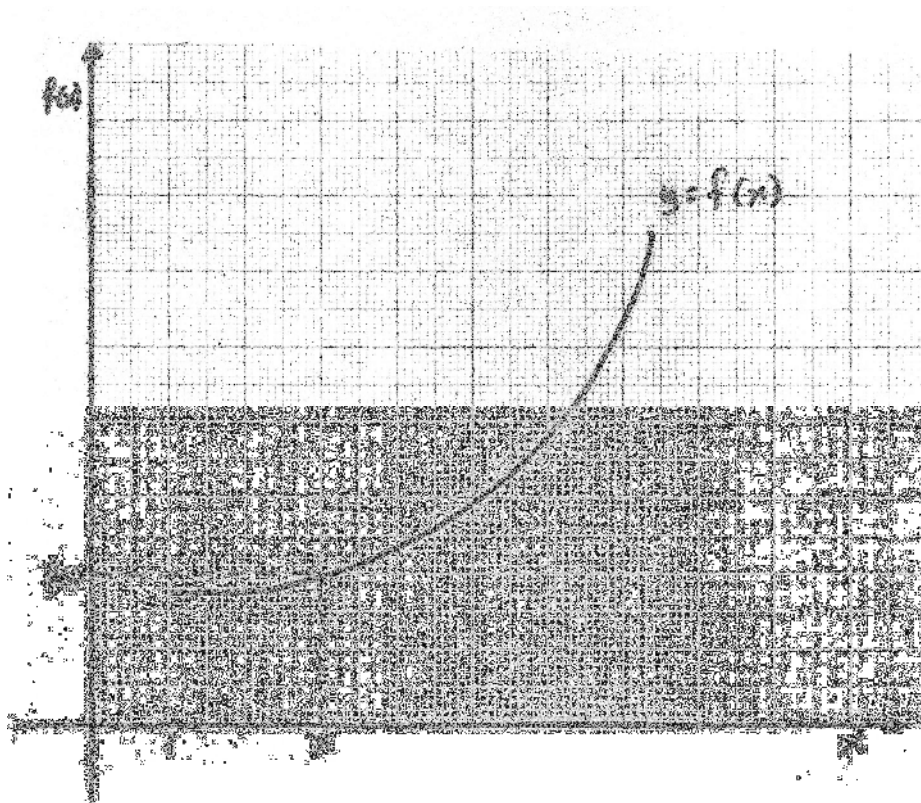
i) Σχολιάστε το δίλλημα του Νίκου

ii) Δώστε το τύπο της συνάρτησης που εκφράζει την ταχύτητα v του αντικειμένου, κάθε χρονική στιγμή t .

στ) Υποθέστε ότι ένα μέγεθος y εξαρτάται από ένα άλλο μέγεθος x , και η σχέση τους καθορίζεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$.

i) Να εκφράσετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του y σε κάθε διάστημα μήκους h , που βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f .

- ii) Τι σχέση έχει η συνάρτηση αυτή με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του y ως προς x ; Μπορείτε να προσδιορίσετε τη συνάρτηση που εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του y ως προς x και να δώσετε τη μονάδα μέτρησής του;
- iii) Προσπαθείστε να απεικονίσετε γραφικά αυτή τη σχέση στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



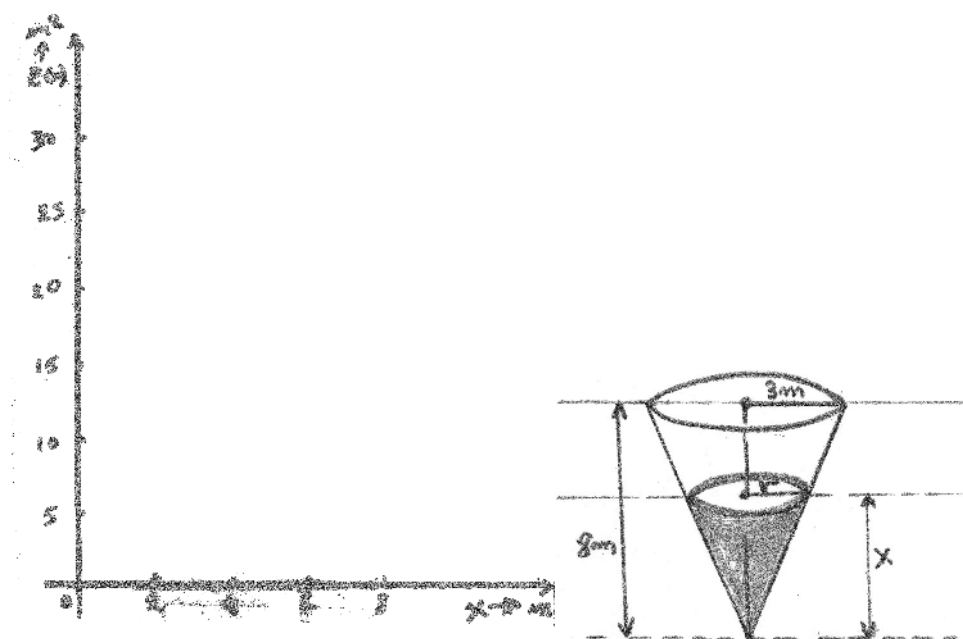
Στόχος του πρώτου ερωτήματος είναι να διερευνηθεί το επίπεδο της γνώσης των μαθητών γύρω από την έννοια της συνάρτησης και της συναρτησιακής μεταβολής. Στο δεύτερο ερώτημα εξετάζεται η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής που είναι κομβική στον απειροστικό λογισμό. Στο πρώτο υποερώτημα των ερωτημάτων (γ) και (δ), επιχειρούμε μια γενίκευση της έννοιας του μέσου ρυθμού, ώστε αυτός να εκφράζεται ως συνάρτηση του χρόνου για την αναπαράσταση της οποίας, οι μαθητές θα πρέπει να επιστρατεύσουν τις εμπειρίες τους από την έννοια της συνάρτησης. Στο δεύτερο υποερώτημα του ερωτήματος (δ) καθώς και στο πέμπτο ερώτημα, εξετάζουμε την θεμελιώδη έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής ενός μεγέθους, όπου μας δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται μια οριακή κατάσταση. Τέλος στο έκτο ερώτημα επιχειρούμε μια γενίκευση όσων εξετάστηκαν παραπάνω. Το ερώτημα αυτό τελικά δε λύθηκε ούτε

συζητήθηκε μέσα στην τάξη, κυρίως λόγω έλλειψης χρόνου. Δόθηκε όμως για να το επεξεργαστούν τα παιδιά στο σπίτι.

Η ιδέα για το δεύτερο πρόβλημα πηγάζει από μια πραγματική κατάσταση, όπου ένα ανεστραμμένο κωνικό δοχείο γεμίζει με νερό.

Πρόβλημα 2: Η έννοια της συσώρευσης ενός μεγέθους.

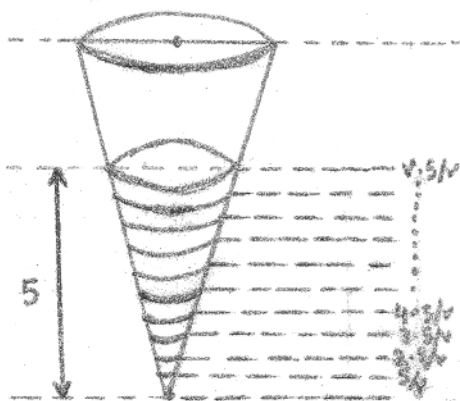
Θεωρούμε ένα κωνικό δοχείο με ακτίνα βάσης 3m και ύψος 8m, που είναι ανεστραμμένο και γεμίζει με νερό. α) i) Να εκφράσετε το εμβαδόν E της (κυκλικής) επιφάνειας του νερού (μιας οριζόντιας τομής δηλαδή), ως συνάρτηση του ύψους x του νερού στο κωνικό δοχείο.



ii) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = E(x)$ στο διπλανό σύστημα αξόνων παίρνοντας $\frac{9\pi}{64} \approx 0,44$, και τα δεδομένα από τον παρακάτω πίνακα.

x	0	2	4	6	8
$E(x)$	0	1,76	7,04	15,84	28,16

β) i) Στη περίπτωση που το $x = 5m$, να χωρίσετε το ύψος αυτό σε n ίσα μέρη και υποθέτοντας το n αρκετά μεγάλο να προσθέσετε τους όγκους των στερεών που προκύπτουν



ii) Να γενικεύσετε για τη τυχαία τιμή του ύψους x .

Τι εκφράζει το άθροισμα αυτό;

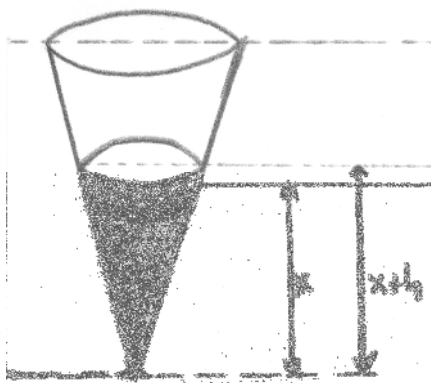
γ) Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης που μας δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής $dV(x)$, του όγκου του νερού σε οποιοδήποτε διάστημα του ύψους $x \in [0, 8]$, πλάτους h . Γράψτε τη μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής του όγκου.

δ) (i) Τι εκφράζει η διαφορά $V(x+h) - V(x)$;

(ii) Για μικρά h να δικαιολογήσετε την σχέση

$$\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \approx E(x)$$

Στην παραπάνω σχέση, με πιο τρόπο το 1^ο μέλος μπορεί να προσεγγίζει καλύτερα το $E(x)$; Πότε τελικά έχουμε ισότητα και ποια είναι αυτή;



ε) i) Να επανέλθετε στο ερώτημα (β) στο οποίο υπενθυμίζουμε ότι προσδιορίσαμε κατά προσέγγιση τον όγκο για $x=5$. Με ποιον τρόπο μπορούμε να προσεγγίσουμε καλύτερα την ακριβή τιμή του όγκου για $x=5$; Να γράψετε έναν τύπο, που θα μας δίνει την ακριβή τιμή του όγκου του νερού στο κωνικό δοχείο, όταν το ύψος x του νερού είναι 5m.

ii) Να γενικεύσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (i), και να δώσετε το τύπο μιας συνάρτησης, που εκφράζει την ακριβή τιμή του όγκου του νερού για την τυχαία τιμή του ύψους x του νερού.

iii) Ποιο συμπέρασμα προκύπτει αν ληφθεί υπόψη η ισότητα στο ερώτημα δ(ii);

Στο πρώτο ερώτημα ζητείται να εκφραστεί το εμβαδόν μιας οριζόντιας τομής του νερού σε συνάρτηση με το ύψος x του νερού, καθώς το κωνικό δοχείο γεμίζει και ήταν άλλη μια ευκαιρία για τα παιδιά να διαχειριστούν τις εμπειρίες τους από την έννοια της συνάρτησης. Στο δεύτερο ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν τον όγκο V του νερού σε συνάρτηση με το ύψος του x , με τη βοήθεια ενός αθροίσματος Riemann. Στόχος του ερωτήματος αυτού, ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ότι έχουμε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά τον όγκο του νερού συναρτήσει του ύψους, αλλά η δεδομένη απειρία τους σχετικά με το άθροισμα Riemann, μας υποχρέωσε να αρκεστούμε στον υπολογισμό του τύπου της συνάρτησης προκειμένου κατόπιν να βρουν το ρυθμό με τον οποίο αυτός μεταβάλλεται. Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές κλήθηκαν να επαναφέρουν τις εμπειρίες τους για το μέσο ρυθμό μεταβολής, σε μια μη συνηθισμένη κατάσταση, ενώ στο τέταρτο και στο πέμπτο ερώτημα επιχειρείται μια εποπτική αιτιολόγηση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού που ήταν και ο αντικειμενικός σκοπός των δύο προβλημάτων. Κατά τη διαπραγμάτευση των δύο αυτών ερωτημάτων μας δόθηκε για άλλη μια φορά η ευκαιρία, να εξετάσουμε τον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια του ορίου συνάρτησης και γενικότερα τις οριακές καταστάσεις, φτάνοντας μέχρις αυτήν του ορισμένου ολοκληρώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Θεωρητικό πλαίσιο.

- 2.1. Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση.
- 2.2. Η πρακτική της τάξης.
- 2.3. Η θεωρία της αλληλεπίδρασης κατά Piaget και Vygotsky.
- 2.4. Η γενίκευση και η αφαίρεση.
- 2.5. Διαίσθηση και αυστηρότητα.
- 2.6. Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία.

2.1 Κοινότητες Πρακτικής στη Μάθηση.

Η έρευνα στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης ασχολήθηκε για πολλά χρόνια με τις αδυναμίες και τις αποτυχίες της παραδοσιακής προσέγγισης της σχολικής μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές. Βασική αρχή αυτής της προσέγγισης είναι ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα σύνολο αφηρημένων κανόνων και τεχνικών, αποκομμένων από την καθημερινή πραγματικότητα του μαθητή, που δεν μπορούν να ανακαλυφθούν από αυτόν, αλλά μόνο να αποκτηθούν μέσα από επίπονες και μακροχρόνιες, εξατομικευμένου κυρίως χαρακτήρα, διαδικασίες αναπαραγωγής της γνώσης. Αυτό επιδιώκεται με την ασφυκτική καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, η οποία οφείλει να υπακούει χωρίς παρεκκλίσεις σε ένα προκαθορισμένο πρωτόκολλο εργασίας, κοινό για όλους τους μαθητές και συγκροτημένο από ένα φορέα, που αναγνωρίζεται επισήμως ως ο αρμόδιος από επιστημονική, κοινωνική και πολιτική άποψη για αυτό το σκοπό.

Το πλήθος και το εύρος των αδυναμιών της συγκεκριμένης προσέγγισης και η συνεχιζόμενη αποτυχία ιδιαίτερα υψηλού ποσοστού μαθητών στα μαθηματικά σε ολόκληρο τον κόσμο, κατέστησαν σαφή την ελλιπή κατανόηση και ερμηνεία των φαινομένων μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, που προσέφερε αυτή η θεώρηση και αμφισβήτησαν σοβαρά την αντίστοιχη εκπαιδευτική πράξη. Η συνειδητοποίηση αυτή, αν και ξεκίνησε ουσιαστικά τη δεκαετία του 1970, εκφράστηκε με συγκεκριμένο τρόπο τη δεκαετία του 1980, ενώ κατά τη δεκαετία του 1990 και την τρέχουσα δεκαετία απέκτησε τέτοια δυναμική, ώστε οδήγησε στην ανάπτυξη μιας σειράς εναλλακτικών θεωρήσεων των παραπάνω φαινομένων, στην πλειοψηφία τους συμπληρωματικών μεταξύ τους, όπως τείνει να γίνει σήμερα αποδεκτό. Σε αυτή την εξέλιξη συνέβαλαν συγκυρίες επιστημονικού, κοινωνικού και πολιτικού χαρακτήρα, όχι απαραίτητα η μια ανεξάρτητα από τις άλλες.

Συγκεκριμένα, κατά το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα, ψυχολογικές θεωρίες όπως αυτές του κονστρουκτιβισμού – που έδωσε έμφαση στην ενεργό κατασκευή της γνώσης από το άτομο – και της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης της γνώσης – που εστίασε στη σημασία της διαμεσολάβησης του κοινωνικού πλαισίου και των πολιτισμικών εργαλείων στη διαδικασία μάθησης - καθώς και κοινωνιολογικές θεωρίες, όπως του Bernstein, για τους εκπαιδευτικούς μηχανισμούς αναπαραγωγής των κοινωνικών δομών, και του Bourdieu, για το ρόλο του «πολιτισμικού κεφαλαίου» του μαθητή στην εκπαίδευσή του, προσέφεραν νέους τρόπους ανάγνωσης των

φαινομένων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι αναγνώσεις αυτές οδήγησαν στην αναγνώριση της αναγκαιότητας συν-θεώρησης των ψυχολογικών και κοινωνιολογικών παραμέτρων για την κατανόηση των φαινομένων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, προσανατολισμό που διέπει σήμερα την αναζήτηση θεωρητικών πλαισίων ικανών να ερμηνεύσουν αποτελεσματικά την πολυπλοκότητα αυτών των φαινομένων. Ωστόσο, με εξαίρεση την κονστρουκτιβιστική θεώρηση η οποία δοκιμάστηκε στην εκπαιδευτική πράξη και, ανεξάρτητα από την ακριβή ερμηνεία και την επιτυχημένη ή μη εφαρμογή της, αποτελεί σήμερα ένα από τα κυρίαρχα πρότυπα στο δυτικό κόσμο, ελάχιστες από τις υπόλοιπες θεωρητικές προσεγγίσεις δοκιμάστηκαν σε μεγάλη κλίμακα στη σχολική πραγματικότητα για διάφορους λόγους.

Παράλληλα ή ίσως σε αλληλεπίδραση με τα παραπάνω, οι ασταθείς και συχνά δυσχερείς οικονομικές, κοινωνικές και πολιτικές συνθήκες που διαμορφώθηκαν στο δυτικό κόσμο, ιδιαίτερα με τις μετακινήσεις μεγάλων ομάδων μεταναστών κατά την τελευταία δεκαετία του εικοστού αιώνα, ενίσχυσαν τη συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας για αναθεώρηση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Ειδικότερα, ενθάρρυναν την υιοθέτηση εκπαιδευτικών πολιτικών πιο φιλικών προς τις ανάγκες των διαφόρων κοινωνικών και πολιτισμικών ομάδων που συγκροτούν τις δυτικές κοινωνίες. Στην πορεία αναγνώρισης και υλοποίησης αυτών των αλλαγών, που βρίσκεται ακόμη σε εξέλιξη, συνέβαλε σημαντικά η εκπαιδευτική έρευνα, καταγράφοντας τη σταθερή αποτυχία των εκπαιδευτικών συστημάτων να εντάξουν με επιτυχία στην εκπαιδευτική διαδικασία μαθητές που προέρχονταν από μη προνομιούχες κοινωνικές τάξεις και από εθνικές, θρησκευτικές ή άλλες μειονότητες.

Στην παραδοσιακή τάξη των μαθηματικών, η μάθηση αποτελεί συχνά μια παθητική, ατομική και σιωπηλή διαδικασία. Οι μαθητές επιλύουν ασκήσεις από ένα βιβλίο ή φύλλο εργασίας, στις οποίες καλούνται να εργαστούν πάνω σε μια στενά προκαθορισμένη ερώτηση, που επιδέχεται μια συγκεκριμένη και μοναδική απάντηση, η οποία μπορεί να αξιολογηθεί μόνο από τον εκπαιδευτικό και αναμένεται να παραχθεί με σχετική ταχύτητα και χωρίς δισταγμό, μέσα από την αναπαραγωγή διεργασιών που έχουν πρόσφατα διδαχτεί.

Σε αντίθεση με την παραδοσιακή, οι εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά τις οποίες υιοθετούν οι μεταρρυθμιστικές εκπαιδευτικές πολιτικές, εστιάζουν στην ανάπτυξη της σκέψης και του συλλογισμού, στην επίλυση προβλήματος και στην επικοινωνία. Αυτή η οπτική δεν προσφέρει μόνο μια

διευρυμένη θεώρηση για τη μαθηματική ικανότητα και τη διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά διαμορφώνει, επιπλέον, ένα πλαίσιο λειτουργίας της τάξης, το οποίο προϋποθέτει τη διασφάλιση ισότιμων ευκαιριών για όλους τους μαθητές σε ό,τι αφορά την επεξεργασία της μαθηματικής γνώσης και την επίτευξη υψηλών στόχων στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Σε αυτή την κατεύθυνση, η τάξη μετατρέπεται σε ένα πεδίο δράσης όπου οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά με τη μαθηματική γνώση, ο λόγος αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της δραστηριοποίησής τους και η προσωπική κατασκευή και κατανόηση του μαθηματικού νοήματος συνιστούν σημαντικούς στόχους της κοινωνικά οροθετημένης δραστηριότητας που αναπτύσσεται.

Οι θεωρίες μάθησης που κυριάρχησαν στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης τις τελευταίες δεκαετίες μπορούν να διακριθούν σε αυτές που αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως διαδικασία «απόκτησης» της γνώσης και σε εκείνες που την προσεγγίζουν ως διαδικασία «συμμετοχής» στη συγκρότηση της γνώσης (Sfard, 1998). Οι πρώτες επικεντρώνονται στην οικοδόμηση των γνωστικών δομών από το άτομο και θεωρούν ότι το κοινωνικό περιβάλλον αποτελεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο συμβαίνει αυτή η κατασκευή, επηρεάζοντας τη μορφή της, χωρίς, ωστόσο, να συνιστά συστατικό της. Αντιπροσωπευτική θεωρία αυτής της ομάδας είναι ο κονστρουκτιβισμός και ιδιαίτερα οι ιδέες του Piaget, ενώ σημαντικές υπήρξαν και οι παράγωγες προσεγγίσεις του ριζοσπαστικού και του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού. Στον κονστρουκτιβισμό, η διαδικασία νοητικής ανάπτυξης είναι μια διαδικασία προσωπικής, ενεργού οικοδόμησης της γνώσης. Για το ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό, οι αλληλεπιδράσεις του ατόμου με το κοινωνικό περιβάλλον αποτελούν τις βασικότερες πηγές διατάραξης των εννοιολογικών του δομών και μπορούν να οδηγήσουν σε εννοιολογική ανάπτυξη, ενώ για τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό, η διαπραγμάτευση του νοήματος στο πλαίσιο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων είναι τόσο σημαντική, όσο και η προσωπική οικοδόμηση της γνώσης από το μαθητευόμενο. Οι θεωρητικές αυτές προσεγγίσεις, αν και δεν αγνόησαν την επίδραση των κοινωνικών παραμέτρων στη μαθηματική εκπαίδευση, τις αντιμετώπισαν είτε ως διαμεσολαβητικές, είτε ως απλό ερέθισμα για την ενεργοποίηση της εσωτερικής διαδικασίας κατασκευής του μαθηματικού νοήματος από το άτομο.

Σε ό,τι αφορά τις «συμμετοχικές» θεωρίες μάθησης, βασική τους αρχή είναι ότι το νόημα, η σκέψη και ο συλλογισμός είναι προϊόντα κοινωνικής δραστηριότητας. Γενεσιουργός πηγή αυτών των θεωριών είναι η κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση του Vygotsky, σύμφωνα με την οποία το σύνολο της μάθησης είναι προϊόν της

αλληλεπίδρασης με τους άλλους και επομένως τα νοήματα που κατασκευάζει το άτομο ερμηνεύουν τον κόσμο με τον τρόπο που ορίζουν συγκεκριμένες κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές. Κατά συνέπεια, η ατομικότητα αναδύεται μέσα στις κοινωνικές πρακτικές. Ο Vygotsky αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στη λειτουργία των πολιτισμικών εργαλείων στην κοινωνία, ιδίως της γλώσσας, και στη διαδικασία κατάκτησής τους από το παιδί. Έτσι, σε αντίθεση με την κονστρουκτιβιστική θεώρηση και τα παράγωγά της που επιχείρησαν να εισάγουν κοινωνικο-πολιτισμικούς παράγοντες σε μια ψυχολογική οπτική με έμφαση στο άτομο, ο Vygotsky υιοθετεί μια ολοκληρωτικά κοινωνικο-πολιτισμική ψυχολογική θεώρηση.

Οι ιδέες του Vygotsky, οι εξελίξεις σε διάφορα άλλα γνωστικά πεδία, όπως η ανθρωπολογία, η ψυχολογία και η κοινωνιολογία, καθώς και η παράλληλη διαπίστωση ότι το σχολείο αναπαράγει τις κοινωνικές ανισότητες μέσω της αποτυχίας στα σχολικά μαθηματικά, πυροδότησαν μια σειρά από προσπάθειες για τη μελέτη του ακριβούς ρόλου των κοινωνικο-πολιτισμικών παραμέτρων στη μάθηση των μαθηματικών. Καθοριστικές σε αυτή την κατεύθυνση υπήρξαν, αρχικά, οι εργασίες της Lave (1988) και Lave & Wenger (1991), με τις οποίες έθεσαν βασικά ερωτήματα σχετικά με τις πρακτικές μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών μέσα και έξω από το σχολείο. Τα ερωτήματα αυτά οδήγησαν στις λεγόμενες θεωρίες «πλαισιοθετημένης μάθησης» (situated learning), σύμφωνα με τις οποίες *η γνώση είναι εγκατεστημένη σε ιδιαίτερες μορφές εμπειρίας που προκύπτουν σε συγκεκριμένες περιστάσεις και γίνεται κατανοητή με σχεσιακό τρόπο, ως κάτι που κατανέμεται μεταξύ ανθρώπων, δραστηριοτήτων και περιβαλλόντων, και όχι ως σταθερό, ατομικό χαρακτηριστικό.* Η μάθηση αντιμετωπίζεται ως κοινωνικό φαινόμενο που συγκροτείται στον πραγματικό κόσμο μέσα από μια διαδικασία «νόμιμης περιφερειακής συμμετοχής» (legitimate peripheral participation) σε κοινότητες πρακτικής (communities of practice), που βρίσκονται σε εξέλιξη. Μια κοινότητα πρακτικής είναι ένα σύνολο σχέσεων και κανόνων που αναπτύσσεται μεταξύ των συμμετεχόντων π.χ. σε μια τάξη μαθηματικών. Με τον τρόπο αυτόν η συμμετοχή στην πρακτική μιας κοινότητας, π.χ. της κοινότητας των ανθρώπων που παράγουν μαθηματικά, αποτελεί την *επιστημολογική αρχή της μάθησης* π.χ. των μαθηματικών. Είναι φανερό ότι σε μια «πλαισιοθετημένη» θεώρηση της μάθησης, οι μαθητές μαθαίνουν όχι μόνο έννοιες και διαδικασίες στην τάξη των μαθηματικών, αλλά και να «είναι» μαθητές των μαθηματικών. Ο Wenger (1998), σε πιο πρόσφατη εργασία του, αναγνωρίζοντας όχι μόνο τη σημασία της συμμετοχής του μαθητή σε ποικίλες

κοινότητες πρακτικής για τη μάθηση, αλλά και τη σημασία του βαθμού προσχώρησής του σε αυτές, υποστηρίζει ότι η μάθηση είναι μια διαδικασία διαμόρφωσης ταυτότητας: «Εφόσον η μάθηση μετασχηματίζει αυτό που είμαστε και αυτό που μπορούμε να κάνουμε, αποτελεί μια εμπειρία ταυτότητας. Δεν πρόκειται για μια απλή συλλογή δεξιοτήτων και πληροφορίας, αλλά για μια διαδικασία του «γίνεσθαι» –να γίνουμε κάποιο συγκεκριμένο άτομο ή αντίστροφα, να αποφύγουμε να γίνουμε κάποιο συγκεκριμένο άτομο» (σελ. 215). Έτσι, ο Wenger επιχειρεί να προσφέρει μια θεώρηση, η οποία λαμβάνει υπόψη της τα πολιτισμικά συστήματα, τις δομές και τους κανόνες που μορφοποιούν την ύπαρξη και τη διαμεσολάβηση του ατόμου, το οποίο συμμετέχει ενεργά σε αυτά τα συστήματα.

Ο Wenger διατυπώνει δύο έννοιες κλειδιά: Την *συμμετοχή* (participation) και την *συμπύκνωση* ή *εκπραγμάτωση* (reification). Η συμμετοχή αναφέρεται στην διαδικασία «του λαμβάνω μέρος» ενώ η συμπύκνωση στην διαδικασία «του μετασχηματίζω τις εμπειρίες μου σε αντικείμενο». Η συμμετοχή είναι μια σύνθετη διαδικασία προσωπική και κοινωνική η οποία συνδυάζει το πράττω, ομιλώ, σκέφτομαι, αισθάνομαι, ανήκω, συζητώ, επιλύω κλπ. Συμπεριλαμβάνει ολόκληρη την προσωπικότητα μαζί με το σώμα, τον νου, τα αισθήματα και τις κοινωνικές σχέσεις και έτσι αποτελεί μια *πηγή ταυτότητας*. Από την άλλη μεριά, η συμπύκνωση σχετίζεται με τις αφαιρετικές διαδικασίες, τα εργαλεία, τα σύμβολα τους όρους και έννοιες που παράγει μια κοινότητα πρακτικής. Έτσι, ένας μαθηματικός τύπος, ένα συμπέρασμα διατυπωμένο σε κατάλληλη γλώσσα ή όχι, ακόμα και ένα σχέδιο μαθήματος είτε το έχουμε στον νου μας είτε το διατυπώνουμε σε φύλλο εργασίας, αποτελεί μια συμπύκνωση. Κατά τον Wenger, οι δύο αυτές έννοιες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή παρουσιάζονται ως ζεύγη: Η συμμετοχή συχνά οδηγεί σε συμπύκνωση η οποία, με την σειρά της οδηγεί σε περαιτέρω συμμετοχή. *Και οι δύο χρησιμεύουν στην διαδικασία διαπραγμάτευσης του νοήματος*, δηλαδή στο να αποκτούμε εμπειρίες του κόσμου ή, διαφορετικά, στο να ζούμε σε έναν κόσμο στον οποίο η συμμετοχή μας είναι πλήρης νοήματος.

Η μάθηση στην πλαίσιοθετημένη οπτική λοιπόν γίνεται κατανοητή ως μια διαδικασία αλλαγής της συμμετοχής σε μεταβαλλόμενες κοινότητες πρακτικής, και η προσωπική ικανότητα για μάθηση θεωρείται ως μια λειτουργία των περιβαλλόντων μέσα στα οποία το άτομο ενεργεί. Η οπτική αυτή δέχεται ότι η γνώση μεταβάλλεται

ανάμεσα σε πλαίσια και καταστάσεις, κάτι που μπορεί να θεωρηθεί ως χαρακτηριστικό της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Η ερμηνεία που δίνουμε στην πιο πάνω παράγραφο είναι η ακόλουθη: Όπως είδαμε, στην οπτική αυτή η μάθηση των Μαθηματικών ταυτίζεται με την συμμετοχή στις πρακτικές της μαθηματικής σχολικής κοινότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι εξατομικευμένες ενέργειες θεωρούνται ως στοιχεία ή εκδοχές ενός ενσωματωμένου συστήματος πρακτικών ή ενός συνόλου ενεργειών οι οποίες έχουν εσωτερικευθεί και καθοδηγούν την συμπεριφορά μας. Με άλλα λόγια, η συμμετοχή στις πρακτικές της σχολικής μαθηματικής κοινότητας αναπτύσσει μια σειρά εμπειριών, ή, διαφορετικά, μια σειρά εσωτερικευμένων ενεργειών, οι οποίες αναφέρονται σε διάφορες μαθηματικές καταστάσεις. Έτσι, *το να γνωρίζω ή να θυμάμαι κάτι* σημαίνει να κάνω επιλογές από το σύνολο των εμπειριών μου ανάλογα με την κατάσταση που ερευνώ. Οι εμπειρίες, όμως, συγκροτούνται κατά την διάρκεια της συμμετοχής μας σε εξελισσόμενα πλαίσια συμμετοχής ή, το ίδιο πράγμα, με αλλαγές στους τρόπους συμμετοχής στις πρακτικές της σχολικής μαθηματικής κοινότητας. Για παράδειγμα από το ακούω ή παρακολουθώ, στο συνεισφέρω με τις δικές μου ιδέες στο έργο που συμμετέχω. Άλλος τρόπος συμμετοχής είναι το «παρακολουθώ» και άλλος το «λέω την γνώμη μου». Γενικότερα, η μάθηση αλλά και *το νόημα του έργου* αλλάζουν, εξελίσσονται, καθώς αλλάζει η μαθηματική πρακτική, κατά συνέπεια και οι τρόποι συμμετοχής κατά την διάρκεια της διδασκαλίας ή μιας δραστηριότητας.

Όπως είδαμε *τρόποι συμμετοχής* είναι π.χ. το πράττω, ομιλώ, διαισθάνομαι, ανήκω, συζητώ, επιλύω, αποδεικνύω, σχεδιάζω, υπολογίζω, ακούω, λέω την γνώμη μου, μετρώ, αναπτύσσω εικασίες, ερμηνεύω ένα διάγραμμα κτλ. Σε κάθε τρόπο συμμετοχής επανα-οργανώνεται η γνώση αλλά και η ίδια η δραστηριότητα, και καταλήγει σε μια συμπίκνωση η οποία μπορεί να είναι προσωρινή, εφήμερη, δοκιμαστική δηλαδή εικασία-υπόθεση, με την οποία επανα-οργανώνω την συμμετοχή μου στο έργο.

Ανάλογα μπορούμε να προσδιορίσουμε *τρόπους περιορισμένης ή υποβαθμισμένης συμμετοχής* οι οποίοι, μερικές φορές, καταλήγουν να είναι *τρόποι μη συμμετοχής στις πρακτικές*: Περιθωριακή στάση, ή και αδιαφορία, διαμέσου της αγνόησης των ιδεών κάποιου άλλου ή υιοθέτηση των ιδεών άλλου άκριτα χωρίς να τις κατανοούμε, εκτέλεση διαδικασιών, π.χ. αλγορίθμων, χωρίς να τους συνδέουμε με κάποιο έργο δηλαδή χωρίς να τους αποδίδουμε νόημα, να αναζητούμε, ή να μαντεύουμε, την

σωστή απάντηση αδιαφορώντας για το ίδιο το έργο μέσα στο οποίο η απάντηση αποκτά νόημα κτλ. Ένας σημαντικός παράγοντας που οδηγεί σε μη συμμετοχή είναι η *παιδαγωγική αυθεντία η οποία αποτρέπει την διαπραγμάτευση*.

Ένας βασικός όρος είναι το *συνοριακό αντικείμενο* (boundary object). Σύμφωνα με τον Wenger, ο κοινωνιολόγος Leigh Star επινόησε τον όρο αυτόν προκειμένου να περιγράψει αντικείμενα τα οποία μπορούν να συντονίσουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους τα βλέπουμε προκειμένου να πραγματοποιηθεί κάποιος σκοπός. Για παράδειγμα, ένα δάσος μπορεί να θεωρηθεί συνοριακό αντικείμενο *μόνον όταν προκύψει μία ανάγκη* εξαιτίας της οποίας διάφορες κοινότητες πρακτικής, π.χ. δασολόγοι, γεωπόνοι, οικολόγοι, βιολόγοι κλπ, αναζητούν τρόπους συνεργασίας και συντονισμού των διαφορετικών οπτικών με τις οποίες ‘βλέπουν’ το δάσος. Γενικότερα, δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε όλα τα αντικείμενα ως συνοριακά. Όμως, στον βαθμό που αυτά ανήκουν σε πολλαπλές πρακτικές μπορούν να θεωρηθούν ως *σύνδεσμοι διαφορετικών οπτικών* και έτσι έχουν την δυνατότητα να αντιμετωπιστούν ως συνοριακά αντικείμενα, *όταν αυτές οι οπτικές χρειάζεται να συντονιστούν, να συνδεθούν*. Ο Wenger, σελ. 114, αναγνωρίζει τους ακόλουθους τρεις τύπους πρακτικών σύνδεσης οπτικών από διαφορετικές κοινότητες: Τις συνοριακές (boundary practices), τις επικαλυπτόμενες (overlap practices) και τις περιφερειακές (peripheries practices) πρακτικές. Από αυτές θα επικεντρωθούμε στην πρώτη. Στην περίπτωση αυτή, αν υπάρξει κάποιο γεγονός το οποίο θα δώσει την αφορμή για αμοιβαία εμπλοκή ανθρώπων που ανήκουν σε διαφορετικές κοινότητες, τότε είναι πιθανόν να ξεκινήσει μια πρακτική. Ο στόχος αυτής της πρακτικής είναι να *διαπραγματευτεί τα σύνορα των διαφορετικών κοινοτήτων* και να υποστηρίξει μια σύνδεση ανάμεσα σε έναν αριθμό άλλων πρακτικών, διευθετώντας αντιπαραθέσεις, συμβιβάζοντας οπτικές και βρίσκοντας απαντήσεις. Το αποτέλεσμα της συνοριακής πρακτικής είναι μια μορφή συλλογικής διαμεσολάβησης μεταξύ των εμπλεκόμενων κοινοτήτων.

Τα σύνορα όμως των κοινοτήτων δεν είναι θεσμικά οριοθετημένα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ‘περιφερειακά’ θέματα που οριοθετούνται ασαφώς. Έτσι, οι πρακτικές, π.χ. δύο κοινοτήτων, μπορεί να προσδιορίζουν το τι είναι διαθέσιμο χωρίς να μπορούν να επιβάλλουν συγκεκριμένες πρακτικές. Το ζήτημα επιλογής της προσέγγισης εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η όλη κατάσταση από τους εργαζόμενους σε συνοριακές πρακτικές, δηλαδή από το αν έχουν ή όχι συνείδηση της ‘συνοριακότητας’ του θέματος.

Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων παρουσιάζουν το πλεονέκτημα της συνοριακής λειτουργίας επειδή συντονίζουν δραστηριότητες και ‘μεταφράζουν’ συζητήσεις από διαφορετικές κοινότητες. Πράγματι, μία συζήτηση πάνω σε γραφική παράσταση π.χ. ταχύτητας – χρόνου στο μάθημα των μαθηματικών, εύκολα μετατοπίζεται σε συζήτηση της ερμηνείας του γραφήματος δηλαδή στον χώρο της φυσικής. Αντίστροφα, κάθε κατασκευή γραφικής παράστασης στην φυσική αναπόφευκτα αναφέρεται στις αντίστοιχες μαθηματικές διαδικασίες.

Ο Wenger, σελ. 274, θεωρεί ότι ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός πρέπει να εμπλέκει τις κοινότητες μάθησης *σε δραστηριότητες πέρα από τα σύνορά τους* έτσι ώστε οι μαθητές να μάθουν το τι απαιτείται προκειμένου να γίνουν αποτελεσματικοί στον κόσμο στον οποίο η εκπαίδευση *υποτίθεται* ότι οδηγεί. Έτσι, η ικανότητα των μαθητών να εργάζονται με συνοριακές πρακτικές δεν είναι απλά ένα ζήτημα δεξιοτήτων, εξάσκησης, *αλλά ζήτημα ταυτότητας*: Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να ‘βαδίζουν’ κατά μήκος των συνόρων και να βρίσκουν τρόπους να μετέχουν σε ένα κόσμο πολύπλοκο και ο οποίος ενσωματώνει πολλαπλές, αντιθετικές οπτικές. (Σακονίδης, 2007) Ο απειροστικός λογισμός, την κατανόηση των βασικών εννοιών του οποίου εξετάζουμε, είναι το κατ’ εξοχήν γνωστικό πεδίο στο οποίο τα μαθηματικά συνδέονται με τις άλλες επιστήμες κατά τρόπο σαφή και ξεκάθαρο. Συνεπώς είναι και το κατάλληλο πεδίο για να δοκιμαστούν και να βρουν εφαρμογή όσα παραπάνω αναφέρονται.

2.2. Η πρακτική της τάξης.

Σχετικά με τις μορφές επικοινωνίας των συμμετεχόντων σε μια διδασκαλία, μπορούμε να πούμε ότι η έρευνα επικεντρώνει στη συνεργασία μεταξύ ζευγών μαθητών και στα μοντέλα επικοινωνίας μεταξύ τους. Π.χ. Sfard (2002), Lerman (2001), (στο Κυριακίδου 2004), που ερευνήσαν τις μορφές επικοινωνίας ζευγών μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος. Αντίθετα η έρευνα των μοντέλων επικοινωνίας μεταξύ δασκάλου και μαθητών, καθώς και οι συνέπειές τους στη συμπεριφορά των μαθητών κατά τη λύση προβλήματος είναι αρκετά περιορισμένη. Π.χ. Tudge (1990), (στο Κυριακίδου 2004). Γενικότερα οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί της μαθηματικής εκπαίδευσης φαίνεται να συμφωνούν ότι πράγματι υπάρχει επίδραση των επικοινωνιακών μοντέλων και των διδακτικών στρατηγικών

που ακολουθεί ο δάσκαλος των μαθηματικών στη λύση προβλημάτων από τους μαθητές του. Όλα αυτά όμως έρχονται στην επιφάνεια όταν μελετάμε τις ενέργειες των μαθητών. Σύμφωνα με κάποιους από τους παραπάνω ερευνητές, η έμφαση στην επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητή κρύβει τον κίνδυνο της μεταφοράς της γνώσης. Σύμφωνα με κάποιους άλλους, η στρατηγική του δασκάλου πρέπει να μας απασχολεί ως αντικείμενο έρευνας, μόνο αν διαπιστώνεται η αδυναμία των μαθητών να αναπτύξουν τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης. Μια άλλη μερίδα ερευνητών τέλος, προκειμένου να αναγνωρίσουν γενικά μοντέλα επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών, θεωρούν το σύνολο των μαθητών, ως μια ολότητα που αλληλεπιδρά με τον καθηγητή, Κυριακίδου, (2004). Βλέπε επίσης και σημείωση 5 σελ. 311 στους Even & Schwartz (2003).

Σύμφωνα με το Βερύκιο (2006), η χρήση της συζήτησης με όλη την τάξη ως εργαλείο μάθησης των μαθηματικών απαιτεί σημαντικό χρόνο και προσπάθεια από τη μεριά του δασκάλου. Πρέπει να τροποποιηθούν καθιερωμένα πρότυπα αλληλεπίδρασης και οι μαθητές πρέπει να μάθουν στρατηγικές που θα τους ενθαρρύνουν να ακούνε και να απαντάνε ο ένας στον άλλο. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης πρέπει να ληφθούν αποφάσεις για την κατεύθυνση, τον τόνο, την μαθηματική αξία και τη χρήση κάποιας μεθόδου για να κριθεί η ποιότητά της. Κύρια χαρακτηριστικά της διαδικασίας που διευκολύνει τη συζήτηση με όλη την τάξη είναι: η ανάπτυξη απόψεων και η παρακίνηση για συζήτηση, η διάρθρωση του φυσικού χώρου της τάξης, η ενθάρρυνση των μαθητών να ρωτούν και να απαντούν ο ένας στον άλλο, η ώθηση να παίρνουν θέση και η δημιουργία μιας απαίτησης για συναίνεση. Ο δάσκαλος που χρησιμοποιεί τη συζήτηση με όλη την τάξη σαν εργαλείο μάθησης μαθηματικών αγωνίζεται με αντίπαλο το χρόνο και τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος, τις προσδοκίες των μαθητών και ένα υψηλό επίπεδο αβεβαιότητας σε σχέση με το ρόλο του κατά τη διάρκεια της συζήτησης.

Σύμφωνα με το Σακονίδη (2007), οι σύγχρονες θεωρήσεις πρεσβεύουν ότι η μαθηματική γνώση κατασκευάζεται τόσο κοινωνικά όσο και ατομικά, και ότι η πρακτική των μαθηματικών είναι βασικά μια κοινωνική πρακτική. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με αυτήν την οπτική, τα μαθηματικά παράγονται με την αξιοποίηση εργαλείων και συμβάσεων κοινωνικά καταξιωμένων και αφορούν ιδέες, που κρίνονται ως αξιόπιστες μόνο όταν γίνονται αποδεκτές από τη μαθηματική κοινότητα Tymoczko, 1986, (στο Σακονίδης, 2007). Σε αυτό το πλαίσιο, η επικοινωνία και η ενεργοποίηση της τάξης ως κοινότητας αποτελούν καθοριστικά χαρακτηριστικά της

μαθηματικής δραστηριότητας. Αν δεχτούμε ότι τα σχολικά μαθηματικά θα πρέπει να συνδεθούν με αυθεντικό τρόπο με την κουλτούρα της μαθηματικής πρακτικής, οι μαθηματικές τάξεις επιβάλλεται να γίνουν κοινότητες, στις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά σε συνεργατική μαθηματική πρακτική, άλλοτε με τους συμμαθητές τους και άλλοτε με τους συμμαθητές και το δάσκαλό τους, ακολουθώντας κοινά αποδεκτούς κανόνες πρακτικής συλλογισμού στα μαθηματικά.

Ένας τέτοιος προσανατολισμός της τάξης των μαθηματικών έχει σοβαρές συνέπειες τόσο για τον εκπαιδευτικό όσο και για την εκπαιδευτική πράξη. Ο πρώτος χρειάζεται να διαθέτει καλή κατανόηση των μαθηματικών ιδεών και δομών καθώς και της ποικιλίας των νοημάτων και των εφαρμογών των μαθηματικών διαδικασιών και του μαθηματικού συμβολισμού. Για να συντονίσει μια ομάδα που εμπλέκεται σε μαθηματικό λόγο ή να στηρίξει μαθητές ή ομάδες να διατυπώσουν και να επανεξετάσουν τους μαθησιακούς τους στόχους ή τις στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος, ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει ευρεία, σε βάθος και ευέλικτη γνώση τόσο του περιεχομένου όσο και παιδαγωγικών εναλλακτικών προσεγγίσεων. Δίχως αυτή τη γνώση δε θα είναι σε θέση να αναδιατυπώνει άμεσα στόχους και να συσχετίζει τις αντιλήψεις των μαθητών του με τις χαρακτηριστικές διανοητικές δραστηριότητες, τις δομές της γνώσης και τους πολιτισμικούς κανόνες που θεωρούνται αποδεκτοί από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα.

Η έμφαση της εργασίας μέσα στην τάξη θα πρέπει να βρίσκεται στη συμμετοχή του μαθητή σε συλλογικές διαδικασίες. Ο εκπαιδευτικός επιβάλλεται να επιζητά και να παρακολουθεί με προσοχή τις εξηγήσεις των μαθητών, για να διαγνώσει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται. Επιπλέον, θα πρέπει να εκμεταλλεύεται τη σκέψη τους, χωρίς, ωστόσο, να περιορίζεται από αυτήν. Αναμένεται να χρησιμοποιεί αποτελεσματικά διάφορες τεχνικές συζήτησης και διαλόγου με όλη την τάξη, όσο πιο συχνά είναι δυνατό, καταβάλλοντας προσπάθεια ενεργοποίησης των μαθητών μέσα σε ομάδες εργασίας και αξιοποιώντας τις σχετικές εμπειρίες τους μέσα και έξω από το σχολείο.

Σε ό,τι αφορά τις διδακτικές προσεγγίσεις που ενδείκνυνται σε μια τάξη προσανατολισμένη στις σύγχρονες αντιλήψεις για τη μαθηματική εκπαίδευση, κυρίαρχη επιδίωξη αναμένεται να είναι η μύηση των μαθητών, μέσα από την ατομική και συλλογική δραστηριότητα της τάξης, στους τρόπους δράσης, συλλογισμού και επιχειρηματολογίας, που χαρακτηρίζουν την κοινότητα πρακτικής των μαθηματικών και θεωρούνται έγκυροι στο πλαίσió της. Για το σκοπό αυτό, είναι σημαντικό σε μια τέτοια τάξη η δραστηριότητα να είναι οργανωμένη με τέτοιο τρόπο ώστε:

- να αναδεικνύονται με σαφήνεια οι ισχύοντες κανόνες συμμετοχής στα δρώμενα της τάξης. Δηλαδή, οι προσδοκίες που έχουν τα μέλη της κοινότητας το ένα από τις ενέργειες του άλλου, αλλά και οι υποχρεώσεις που αναμένεται να αναλάβουν με την εμπλοκή τους σε κάθε φάση (κοινωνικοί κανόνες της τάξης). Αυτό θα σήμαινε στην πράξη, για παράδειγμα, την ενθάρρυνση των μαθητών να εξηγούν και να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους με λογικά – μαθηματικά επιχειρήματα, να ερμηνεύουν τις απαντήσεις που δίνονται από τους συμμαθητές τους και τον εκπαιδευτικό, να δηλώνουν τη συμφωνία ή τη διαφωνία τους και να αμφισβητούν εναλλακτικές προσεγγίσεις σε ένα θέμα όταν γίνεται φανερή η σύγκρουση μεταξύ ερμηνειών. *Είναι αυτονόητο ότι αυτοί οι κανόνες εγκαθιδρύονται από κοινού από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές και αποτελούν την πρακτική της τάξης.*
- να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να συνειδητοποιούν ότι η συμμετοχή τους στο μάθημα των μαθηματικών συνεπάγεται τη συμμετοχή τους σε μια συγκεκριμένη κοινότητα πρακτικής. Αυτή η κοινότητα δεν είναι απλά μια ομάδα ανθρώπων αλλά περιλαμβάνει προσδοκίες, πεποιθήσεις, εργαλεία, καθημερινές καταστάσεις και τρόπους αλληλεπίδρασης, που καθορίζουν το είδος και την εγκυρότητα της μαθηματικής γνώσης, η οποία παράγεται στο πλαίσιο της όπως για παράδειγμα, το τι αναγνωρίζεται ως διαφορετική, εκλεπτυσμένη ή «έξυπνη» μαθηματική λύση ή ως αποδεκτή μαθηματική εξήγηση (κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες), Yackel & Cobb, (1996), (στο Σακονίδης, 2007) . Προς την κατεύθυνση αυτή οι μαθητές είναι επιθυμητό να εμπλέκονται σε καταστάσεις, οι οποίες απαιτούν τη συλλογική λήψη αποφάσεων για το είδος, την καταλληλότητα και την αξιοπιστία της γνώσης και των μεθόδων που ενδείκνυται να αξιοποιηθούν, καθώς και για τον έλεγχο της εγκυρότητας της απάντησης, τόσο από μαθηματική όσο και από κοινωνικοπολιτισμική άποψη. Συνθήκες εργασίας όπως αυτές προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές να εμπλακούν στους «νόμιμους» τρόπους διαπραγμάτευσης του μαθηματικού νοήματος και να τους κρίνουν. Κατά συνέπεια, να αναπτύξουν πεποιθήσεις και να διαμορφώσουν αξίες για τα μαθηματικά οι οποίες θα τους καταστήσουν ικανούς να δρουν προοδευτικά ως αυτόνομα μέλη της σχολικής μαθηματικής κοινότητας.

- να ενθαρρύνονται οι μαθητές να αναπτύσσουν συγκεκριμένες πρακτικές διαχείρισης του μαθηματικού περιεχομένου στο πλαίσιο της κοινότητας της τάξης. Πρόκειται για τους έγκυρους τρόπους μαθηματικού συλλογισμού, οι οποίοι αναδεικνύονται καθώς οι μαθητές εργάζονται με ειδικά εργαλεία (για παράδειγμα, το μοιρογνωμόνιο) για την ολοκλήρωση συγκεκριμένων εργασιών. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να τους δίνεται η ευκαιρία να εξερευνούν μαθηματικά θέματα από πολλές οπτικές γωνίες, να πειραματίζονται με μια ποικιλία από αναπαραστάσεις και να είναι σε θέση να επιλέγουν αυτές που εξυπηρετούν καλύτερα την υπό μελέτη κατάσταση. Επίσης, να συνειδητοποιούν την ύπαρξη διαφόρων προσεγγίσεων σε ένα ερώτημα και να αναπτύσσουν την ικανότητα να επιλέγουν τη μαθηματικά αποτελεσματικότερη.

Με δεδομένο ότι τα έργα που δίνονται από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές καθορίζουν αποφασιστικά τη δραστηριότητα που αναδεικνύεται στην τάξη, είναι αυτονόητο πως η διαμόρφωση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος όπως αυτό που περιγράφηκε παραπάνω, εξαρτάται από την επιλογή και τον τρόπο αξιοποίησής τους. Οι σύγχρονες αντιλήψεις για τη μαθηματική εκπαίδευση υποστηρίζουν ότι τα έργα αυτά, για να υπηρετήσουν το συγκεκριμένο προσανατολισμό, χρειάζονται εκτός των άλλων:

- να είναι αυθεντικά, να έχουν νόημα για τους μαθητές και να τους προσφέρουν κίνητρο για να εμπλακούν στη σχετική δραστηριότητα. Ωστόσο, η διατήρηση του χαρακτηριστικού της αυθεντικότητας δεν είναι εύκολη υπόθεση, καθώς η τάξη δεν μπορεί να μετατραπεί, για παράδειγμα, σε σουπερμάρκετ για τις ανάγκες του σχετικού έργου. Στην προσπάθεια μιας ρεαλιστικής επίλυσης αυτού του προβλήματος, η βιβλιογραφία προτείνει την υιοθέτηση έργων για παράδειγμα, Ainley & Pratt, (2002), (στο Σακονίδης, 2007), τα οποία οδηγούν σε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, που έχει νόημα και ενδιαφέρον για τους μαθητές, π.χ. σχεδιασμός ενός χαρταετού και ταυτόχρονα εξυπηρετούν τους στόχους μάθησης, για παράδειγμα, αναγνώριση και μελέτη των ιδιοτήτων του αντίστοιχου επιπέδου σχήματος.
- να βρίσκονται όσο γίνεται περισσότερο υπό τον έλεγχο των μαθητών, αντί του εκπαιδευτικού. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να αποτελούν σημεία εκκίνησης που προσφέρουν απλώς το έναυσμα για εποικοδομητική ενεργοποίηση των

μαθητών. Οι τελευταίοι αναμένεται να διατυπώνουν τους δικούς τους στόχους, να θέτουν τα κατάλληλα ερωτήματα, να επιλέγουν τις ενδεικνυόμενες μεθόδους, τις κατάλληλες αναπαραστάσεις κ.τ.λ. Να συζητούν τις ιδέες τους, να αντιπαραβάλλουν τις υποθέσεις τους έναντι άλλων και να τις ελέγχουν, να υπερασπίζονται τις θέσεις τους και να σχολιάζουν και να κρίνουν, επιχειρηματολογώντας, αυτές των άλλων εταίρων της τάξης. Έτσι, τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως πεδίο αναζήτησης παρά ως δεδομένο αντικείμενο μάθησης, και η εργασία των μαθητών ως ανάλογη αυτής που ακολουθείται στην κοινότητα των επαγγελματιών μαθηματικών. Μια τέτοια προσέγγιση ενθαρρύνει τους μαθητές να επιστρατεύουν αποτελεσματικά τις υπάρχουσες γνώσεις τους και τους καθιστά ικανούς να δημιουργούν ταξινομήσεις και σχέσεις και να τις ελέγχουν τόσο στο εσωτερικό πεδίο των μαθηματικών όσο και σε σχέση με άλλες κοινωνικές κατασκευές.

Είναι γεγονός ότι η διαμόρφωση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος στην τάξη των μαθηματικών προς την κατεύθυνση που προτείνουν οι σύγχρονες προσεγγίσεις στη μαθηματική εκπαίδευση συνιστά ένα δύσκολο στόχο. Ωστόσο, είναι βέβαιο ότι αποτελεί μια επιβεβλημένη επιλογή, καθώς μόνο σε ένα τέτοιο περιβάλλον είναι εφικτή η αποτελεσματική –και ταυτόχρονα ορατή– διαχείριση της πολυπλοκότητας της τάξης των μαθηματικών ως ολότητας. Εστιάζοντας στις πρακτικές στις οποίες συμμετέχουν οι μαθητές σε ένα μαθησιακό περιβάλλον σαν αυτό, παρέχεται η δυνατότητα τεκμηριωμένης ανάγνωσης της εξέλιξης του κοινωνικού πλαισίου μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μάθηση των μαθηματικών, γεγονός που διευκολύνει το σχεδιασμό κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων προς όφελος όλων των μαθητών. Η πρακτική της τάξης κατά τη διάρκεια των τεσσάρων συνολικά διδασκαλιών που έγιναν στα πλαίσια αυτής της μελέτης, μπορούμε να πούμε ότι περιγράφεται ικανοποιητικά από το παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο αν ληφθούν υπόψη και τα απρόοπτα που πάντα караδοκούν σε ένα μάθημα μαθηματικών.

Η εικόνα μιας τάξης μαθηματικών όπως αυτή περιγράφεται στην παράγραφο 1.4.1, παρουσιάζει στοιχεία των κυριοτέρων θεωριών μάθησης. Δηλαδή της θεωρίας για την ενεργό οικοδόμηση της γνώσης στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης, της κοινωνικοπολιτισμικής προσέγγισης όπου η γνώση είναι προϊόν αλληλεπίδρασης μεταξύ των συμμετεχόντων και των θεωριών πλαισιοθετημένης μάθησης όπου η γνώση βιώνεται μέσα από εμπειρίες που αποκτώνται από τη σχέση μεταξύ των

συμμετεχόντων και είναι περισσότερο ένα κοινωνικό φαινόμενο παρά ένα ατομικό χαρακτηριστικό. Τα παραπάνω στοιχεία πάντως, δεν είναι άμεσα αναγνωρίσιμα σε μια συνηθισμένη τάξη μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο και μάλιστα στο Λύκειο. Την εμπειρία μας αυτή είχαμε την ευκαιρία να επαληθεύσουμε με το ξεκίνημα των διδασκαλιών. Με την έναρξη του μαθήματος και αφού ένας μαθητής διάβασε το πρώτο ερώτημα του πρώτου προβλήματος, έγινε αντιληπτή μια διστακτικότητα που είχαν τα παιδιά στο να συνεργαστούν και να συζητήσουν το ερώτημα. Ήταν δηλαδή εμφανής η προσπάθεια να δουλέψουν ξεχωριστά, ο καθένας για τον εαυτό του. Ο διάλογος που ακολούθησε, έγινε στο δημόσιο σχολείο και παρατίθεται στο παρακάτω απόσπασμα:

Διάλογος 1

- 1.1 Διδ: *(Διακρίνοντας μια περίεργη ησυχία) Δεν έχετε συνηθίσει να κουβεντιάζετε μεταξύ σας βλέπω...*
- 1.2 Μαθ: *Δε μας αφήνουνε όταν κάνουμε μάθημα(γέλια...).*
- 1.3 Διδ: *Μπορείτε όμως να το συνηθίζετε σιγά-σιγά, μπορεί αυτό για πρώτη φορά να γίνει!*
- 1.4 Διδ: *(Απευθυνόμενος στη μοναδική ομάδα που αποτελούνταν από τρεις μαθητές) Εσείς οι τρεις μπορείτε να συνεργάζεστε και να συζητάτε μεταξύ σας (βλέποντάς τους διστακτικούς).*

Η διστακτικότητα των μαθητών να συνεργαστούν και να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, τουλάχιστον στο ξεκίνημα, δε μας εξέπληξε καθόλου. Αντιθέτως θα μπορούσε να πει κανείς ότι ήταν κάτι το αναμενόμενο. Τάξεις συνεργατικής διδασκαλίας δεν υπάρχουν ακόμη στην ελληνική μέση εκπαίδευση, πολύ δε περισσότερο στη Γ' Λυκείου όπου η πίεση χρόνου για την ολοκλήρωση της εξεταστέας ύλης, δεν αφήνει πολλά περιθώρια στον διδάσκοντα για την πραγματοποίηση τέτοιων διδασκαλιών. Πιστεύουμε πάντως ότι κατά τη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς, αυτό θα μπορούσε να γίνεται τουλάχιστον κατά την εισαγωγή των βασικών εννοιών, δηλαδή τέσσερις με πέντε φορές το χρόνο.

Οι μαθητές, παρά την αδράνεια των πρώτων στιγμών, κατάφεραν τελικά να συζητήσουν μεταξύ τους και εδώ πρέπει να υπογραμμίσουμε την ενίσχυση των ασθενέστερων μαθητών, μέσα στο κλίμα μιας κοινότητας πρακτικής. Σύντομα αισθάνθηκαν πολύ άνετα και ενεργοποιήθηκαν άλλοι λιγότερο και άλλοι

περισσότερο, μέσω της συνεργασίας με τους συμμαθητές τους. Εξ άλλου είναι γνωστά τα συναισθήματα αυτών των μαθητών από τον ρόλο κομπάρσου που καλούνται να παίξουν στις δασκαλοκεντρικές διδασκαλίες, όπου μόνο όταν ο διδάσκων αποφασίσει να τους απευθύνει το λόγο γίνεται αντιληπτή η παρουσία τους, και η στιγμή εκείνη μπορεί να μην είναι και η καλύτερη γι' αυτούς.

Δεν θα μπορούσαμε βέβαια, να μην αναφερθούμε στις περιπτώσεις εκείνες που και εμείς βιώσαμε στη διάρκεια των διδασκαλιών, όπου οι καλύτεροι μαθητές, οι έχοντες δηλαδή περισσότερες γνώσεις επιβάλλονται μέσα στην ομάδα. Η συζήτηση εξελίσσεται ουσιαστικά, στην παράθεση μόνο των δικών τους απόψεων, με τους πιο αδύνατους μαθητές να καλύπτονται κάτω από την ομπρέλα των αντικειμενικά υπέρτερων γνώσεων αυτών των μαθητών. Δεν είναι σπάνιες επίσης οι περιπτώσεις της ουσιαστικής άρνησης για συνεργασία των μαθητών αυτής της κατηγορίας, χαρακτηριζόμενοι κυρίως από υπερτροφικό «εγώ» και από μία τάση για προσωπική προβολή, κατάλοιπα του βαθμοθηρικού χαρακτήρα της ελληνικής δημόσιας και ιδιωτικής μέσης εκπαίδευσης. Είναι γενικώς παραδεκτό, ότι η αυθεντία είτε αυτή εκδηλώνεται από την πλευρά του διδάσκοντος, είτε εμφανίζεται σε περιπτώσεις όπως η παραπάνω, εμποδίζει την διαπραγμάτευση και στο σημείο αυτό, μόνο ο διαμεσολαβητικός ρόλος του δασκάλου μπορεί να αποτρέψει τέτοια φαινόμενα. Από τους χειρισμούς του εξαρτάται εν πολλοίς η αποκατάσταση των ισορροπιών και η λειτουργία της «ζώνης επικείμενης ανάπτυξης». Αυτό το τελευταίο, κρίνεται αποφασιστικής σημασίας στην πλαισιοθετημένη μάθηση, και γενικότερα σε μια κοινότητα πρακτικής. Έτσι θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν εμπειρίες, που θα μετουσιωθούν σε γνώση την οποία κατόπιν, έχουν τη δυνατότητα να ανακαλούν σε παρεμφερείς καταστάσεις.

2.3 Η θεωρία της αλληλεπίδρασης κατά Piaget και Vygotsky

Προκειμένου να σκιαγραφήσουμε την πρακτική της τάξης την οποία υιοθετήσαμε όπως αυτή περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο, παραθέτουμε μερικά στοιχεία για τις διαφορετικές θέσεις των Piaget και Vygotsky, σχετικά με τη θεωρία της αλληλεπίδρασης (interactionism).

Οι δύο αυτοί ερευνητές διέκριναν δύο τύπους εννοιών, τις αυθόρμητες ή καθημερινές και τις επιστημονικές ή θεωρητικές. Οι πρώτες αναπτύσσονται με μη

συστηματικό τρόπο διαμέσου της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Οι δεύτερες εισάγονται κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης και λειτουργούν μέσα σε ένα ιεραρχικό σύστημα διασυνδέσεων με άλλες επιστημονικές έννοιες και σχέσεις. Ο Davydov επεσήμανε την ουσιαστική διαφορά στα δύο αυτά είδη των εννοιών. Οι καθημερινές έννοιες αναπτύσσονται δια μέσου της εμπειρικής αφαίρεσης με τη σύγκριση των χαρακτηριστικών διαφορετικών καταστάσεων και την επισήμανση ομοιοτήτων και διαφορών. Αντίθετα, οι επιστημονικές έννοιες απαιτούν τη θεωρητική αφαίρεση, είναι ποιοτικά διαφορετικές από τις καθημερινές, δεν μπορούν να προκύψουν από την εμπειρική αφαίρεση αλλά χρειάζονται ένα ποιοτικό, νοητικό άλμα. Για παράδειγμα η έννοια του «κυκλικού αντικειμένου» μπορεί να προκύψει με εμπειρική αφαίρεση από ένα δίσκο, έναν τροχό ή από ένα ουράνιο σώμα. Όμως η μαθηματική έννοια του κύκλου απαιτεί τη θεωρητική αφαίρεση προκειμένου να γίνει αντιληπτός ως γεωμετρικός τόπος. Η παρατήρηση αυτή και άλλες παρόμοιες δείχνουν την ειδική φύση των μαθηματικών εννοιών. Ο Piaget πίστευε στον απόλυτο διαχωρισμό των καθημερινών και των επιστημονικών εννοιών σε αντίθεση με τον Vygotsky, ο οποίος πίστευε ότι υπάρχει μια ‘αλληλουποστήριξη’ μεταξύ των δύο αυτών τύπων. Η ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών δε γίνεται αυθαίρετα, αλλά προϋποθέτει ένα συγκεκριμένο επίπεδο ανάπτυξης των καθημερινών εννοιών. Σύμφωνα με το Δαφέρμο, (2002), οι επιστημονικές και οι καθημερινές έννοιες σχηματίζονται μέσω διαφορετικών δρόμων και ο καθένας από τους παραπάνω τύπους εννοιών είναι ισχυρός, στη σφαίρα εκείνη, στην οποία ο άλλος τύπος εκδηλώνει την αδυναμία του και την περιορισμένη ερμηνευτική του ικανότητα. Οι επιστημονικές έννοιες είναι ισχυρές στη σφαίρα των ανώτερων νοητικών λειτουργιών, ενώ οι καθημερινές είναι ισχυρές στη σφαίρα των κατώτερων και προετοιμάζουν το δρόμο για την έλευση των επιστημονικών εννοιών. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών όμως, οι οποίοι θέλουν να ερμηνεύσουν την κατάσταση μέσα στην τάξη των μαθηματικών, δεν έχουν επαρκείς απαντήσεις από τις θεωρίες αυτές. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε η Θεωρία της Αλληλεπίδρασης στη βάση των θέσεων του Bruner για τον τρόπο πρόσκτησης της γλώσσας, καθώς και των παρακάτω δύο αρχών του Wittgenstein:

1. Η σημασία μιας λέξης βρίσκεται στη χρήση της.

Για παράδειγμα, όταν ρωτάμε τον συνομιλητή μας «τι εννοείς;» ουσιαστικά τον ρωτάμε ‘με πιο τρόπο χρησιμοποιείς αυτή την έκφραση’ ή ‘σε ποιο πλαίσιο εντάσσεις τη φράση σου;’. Η γλώσσα επομένως, θεωρείται περισσότερο ως δραστηριότητα, μια

κοινωνική πρακτική, όπου τα νοήματα των φράσεων σηματοδοτούνται από τον τρόπο που τις χρησιμοποιούμε.

2. Η καθημερινή γλώσσα είναι επαρκής.

Που σημαίνει ότι είναι καλύτερα κάποιος να προσπαθήσει να κατανοήσει τη γλώσσα π.χ. των μαθητών του, παρά να επισημάνει τα λογικά της σφάλματα και να απαιτήσει να διορθωθούν. Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζουμε τη θεωρία αυτή στη μάθηση των μαθηματικών είναι ο ακόλουθος: Πριν ο μαθητής γίνει ικανός να διατυπώσει έναν ορισμό ή ένα θεώρημα, εισάγεται σε έναν μικρόκοσμο αλληλεπιδράσεων, μερικές από τις οποίες προκαλούνται από το δάσκαλο, αν και οι περαιτέρω μορφές τους εξαρτώνται από τις πρωτοβουλίες του μαθητή. Η μορφή των αλληλεπιδράσεων καθορίζει τα όρια και τους κανόνες για το τι θα πει ο μαθητής ή ο δάσκαλος, πως θα το πει και πότε. Ωστόσο όλοι αυτοί οι κανόνες έχουν έναν διαπραγματευτικό χαρακτήρα. Διαμορφώνονται διαμέσου κάποιων περισσότερο ή λιγότερο σαφών και άμεσων διαπραγματεύσεων ανάμεσα στο δάσκαλο και το μαθητή και μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Το μονοπάτι προς τη μαθηματική σκέψη οδηγεί, διαμέσου νύξεων, στη μαθηματική διαπραγμάτευση, καθώς σταδιακά κατανοούμε ποιες είναι οι προθέσεις πίσω από συγκεκριμένες εκφράσεις και τέλος, ποιες είναι οι κοινές προϋποθέσεις. Αυτά μαθαίνονται από την αλληλεπίδραση με εκείνους που νομιμοποιούνται να θέτουν τα πρότυπα (standards) της μαθηματικής διαπραγμάτευσης, οι οποίοι συνήθως είναι οι δάσκαλοι των μαθηματικών και το σχολικό βιβλίο. Ο μαθητής κάνει λάθη και τα διορθώνει σύμφωνα με τις υποδείξεις του δασκάλου, διαπραγματεύεται τον τρόπο του να λέει κάτι και τον τρόπο του να σκέφτεται ανταλλάσσοντας επιχειρήματα με το δάσκαλο και με τους άλλους μαθητές. Φυσικά πάντα υπάρχουν όρια τόσο στη διαπραγμάτευση όσο και στην επιχειρηματολογία, που επιβάλλονται από το κοινωνικό και το θεσμικό πλαίσιο αυτών των αλληλεπιδράσεων όπως είναι το σχολείο, οι αρχές του δασκάλου κ.λ.π., Κλαουδάτος, (2007)

2.4. Η γενίκευση και η αφαίρεση.

Η ανάπτυξη των διαδικασιών της αφαίρεσης και της γενίκευσης, είναι ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών. Η έμφαση στις ενέργειες και η περιγραφή των γνωστικών εργαλείων που θα επιτρέψουν στο μαθητή

να κατασκευάσει αφαιρέσεις και γενικεύσεις, είναι τα ουσιώδη χαρακτηριστικά του μοντέλου που ανέπτυξε ο W. Dorfler, για τις διαδικασίες αυτές. Στη διδακτική των μαθηματικών, ο όρος γενίκευση χρησιμοποιείται συχνά με τρόπο διαισθητικό και σημαίνει μια ιδιότητα ή ένα σύστημα ιδιοτήτων, το οποίο είναι κοινό σε διάφορα αντικείμενα ή καταστάσεις. Αυτό το κοινό σύστημα ιδιοτήτων, επισημαίνεται με τη σύγκριση των αντικειμένων ή των καταστάσεων, διαχωρίζεται νοητικά και αποσπάται από τα αντικείμενα ή τις καταστάσεις. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εμπειρική ή αριστοτέλεια αφαίρεση. Η παρατήρηση και η σύγκριση μαθηματικών αντικειμένων, όμως, δεν είναι απαραίτητο να μας οδηγήσει σε ένα γενικευμένο συμπέρασμα. Γι' αυτό η εμπειρική γενίκευση έχει υποστεί δριμεία κριτική, μέσα από την οποία προέκυψε η ανάγκη για ένα νέο είδος γενίκευσης που ονομάστηκε θεωρητική γενίκευση. Αυτή δουλεύει σε διαφορετικό επίπεδο από την εμπειρική γενίκευση, αλλά χρειάζεται ένα σημείο αφετηρίας, που πολλές φορές είναι το αποτέλεσμα εμπειρικών γενικεύσεων. Το σημείο αφετηρίας για τη θεωρητική γενίκευση, είναι μια ενέργεια ή ένα σύστημα ενεργειών, το οποίο είναι υλικό, φανταστικό ή συμβολικό. Τα αντικείμενα στα οποία εφαρμόζονται οι ενέργειες, είναι συγκεκριμένα υλικά ή ιδεατά αντικείμενα και η προσοχή μας επικεντρώνεται σε σχέσεις ή διασυνδέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται σταθερές όταν οι ενέργειες επαναλαμβάνονται όσο συχνά θέλουμε και τότε ονομάζονται «αναλλοίωτες» των ενεργειών. Η περιγραφή των αναλλοίωτων γίνεται συμβολικά με εισαγωγή συμβόλων για τα στοιχεία των ενεργειών ή για τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Τα σύμβολα μπορεί να είναι λεκτικά, εικονικά, γεωμετρικά ή αλγεβρικά. Τελικά οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων γίνονται, σταδιακά, ανεξάρτητες από τα αντικείμενα από τα οποία αρχικά δημιουργήθηκαν. Έχουμε δηλαδή μια κατασκευαστική αφαίρεση. Με αυτό τον τρόπο, αναπτύσσεται ένα νέο αντικείμενο της σκέψης, ένα μαθηματικό αντικείμενο, του οποίου η σημασία και το νόημα βρίσκεται στις «αναλλοίωτες». Στο αντικείμενο αυτό τα σύμβολα είναι τώρα μεταβλητές με το χαρακτήρα αντικειμένων. Αυτή η αντικειμενοποίηση των μεταβλητών και των συμβόλων, συμπληρώνει τη διαδικασία της αφαίρεσης, η οποία άρχισε με την επισήμανση των αναλλοίωτων. Αυτή η κατασκευασμένη γενίκευση είναι τώρα σε θέση να βοηθήσει, τόσο με υποκειμενικό - γνωσιακό τρόπο, όσο και με αντικειμενικό - επιστημολογικό για μια περαιτέρω επεκτατική γενίκευση, Dorfler, (1991).

2.5. Διαίσθηση και αυστηρότητα.

Όπως αναφέραμε στην περίληψη, τα δύο προβλήματα που διδάχθηκαν μέσα στην τάξη είχαν σαν τελικό στόχο μια εποπτική αιτιολόγηση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού. Στην επιλογή αυτή οδηγηθήκαμε, όπως θα δούμε παρακάτω, αφ' ενός από το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια αυτής της διαδρομής εξετάζονται όλες οι θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, και αφετέρου από τον τρόπο που στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου (σελ. 334) αιτιολογείται διαισθητικά το

θεμελιώδες θεώρημα, δηλαδή ότι $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$. Η επιλογή αυτή εμπεριέχει τον

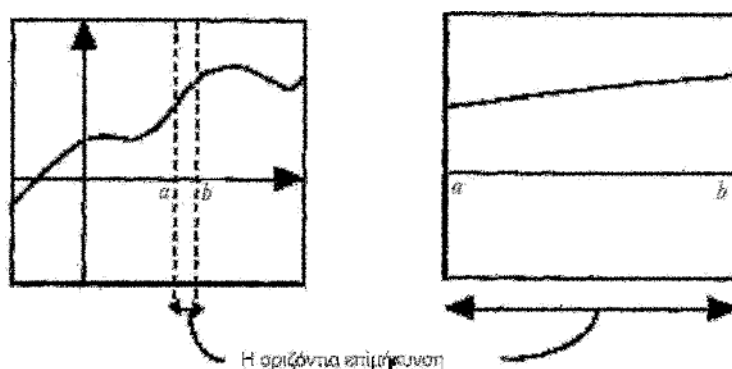
κίνδυνο να οδηγηθούν οι μαθητές σε λανθασμένα συμπεράσματα από τις οπτικές αναπαραστάσεις. Η νοερή απεικόνιση μπορεί δηλαδή να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα. Είναι γνωστό εξ άλλου, ότι για δύο χιλιάδες χρόνια η ευκλείδεια γεωμετρία θεωρήθηκε ως η θεωρία αρχέτυπο για την παραγωγική λογική, έως ότου συνειδητοποιήθηκε το 19^ο αιώνα ότι κάποιες υπονοούμενες οπτικές ενδείξεις είχαν υπεισέλθει χωρίς λογική θεμελίωση. Παράλληλα για μεγάλο διάστημα του 19^{ου} αιώνα εθεωρείτο ότι οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν το πολύ πεπερασμένο πλήθος σημείων, στα οποία είναι μη παραγωγίσιμες. Η κατάσταση για μια συνάρτηση, ότι θα μπορούσε να είναι συνεχής παντού αλλά πουθενά παραγωγίσιμη (βλέπε π.χ. σελ. 110), ήταν πολύ παράξενη για να θεωρηθεί επαρκή. Παρόμοια, οι γραφικές μέθοδοι χρησιμοποιούνταν συχνά για την απόδειξη των αναλυτικών θεωρημάτων. Θεωρούνταν ας πούμε, ικανοποιητική μια απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, σύμφωνα με το οποίο μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, διέρχεται απ' όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, με αυτό τον τρόπο. Η καμπύλη εκλαμβάνονταν ως ένα «συνεχές νήμα», οπότε αν είναι αρνητική κάπου και θετική κάπου αλλού, πρέπει να διέρχεται από το 0 κάπου στο ενδιάμεσο. Όμως γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2-2$, ορισμένη μόνο στους ρητούς, είναι αρνητική για $x=1$ και θετική για $x=2$, αλλά δεν υπάρχει ρητός αριθμός a για τον οποίο $f(a)=0$. Κατά συνέπεια οι ικανότητες της νοερής απεικόνισης φαίνεται να μας απογοητεύουν.

Όμως κατά τον D. Tall, (1990), η άρνηση της νοερής απεικόνισης ισοδυναμεί με την άρνηση των θεμελίων πολλών από τις βαθύτερες μαθηματικές ιδέες. Στα αρχικά στάδια ανάπτυξης της θεωρίας των συναρτήσεων, των ορίων, της συνέχειας κ.λ.π., η νοερή απεικόνιση αποδείχθηκε μια θεμελιώδης πηγή ιδεών. Η άρνηση αυτών

των ιδεών στους μαθητές σημαίνει αποκοπή τους από τις ιστορικές ρίζες του θέματος. Εξ' άλλου είναι γνωστό ότι στη μαθηματική έρευνα η απόδειξη δεν αποτελεί παρά το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας. Πριν καταστεί δυνατόν να υπάρξει μια απόδειξη, πρέπει να υπάρχει μια ιδέα ως προς το αν το θεώρημα θα μπορούσε να αληθεύει. Αυτό το διερευνητικό στάδιο της μαθηματικής σκέψης επωφελείται από το σχηματισμό μιας γενικής εικόνας της κατάστασης και μια τέτοια γενική εικόνα μπορεί να επωφεληθεί από μια νοερή απεικόνιση. Δεν είναι τυχαίο ότι όταν νομίζουμε ότι καταλαβαίνουμε κάτι λέμε «...το βλέπω». Στο δοκίμιό του «*towards a disciplined intuition*», ο Bruner χαρακτηρίζει δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις στην επίλυση προβλημάτων, και αναφέρει σχετικά: «*Ουσιαστικά σε κάθε τομέα της διανοητικής προσπάθειας κάποιος μπορεί να διακρίνει δύο προσεγγίσεις που συνήθως ισχυριζόμαστε ότι είναι διαφορετικές. Η μια είναι διαισθητική, η άλλη αναλυτική...γενικά η διαίσθηση είναι λιγότερο αυστηρή όσον αφορά την απόδειξη, περισσότερο προσανατολισμένη σε ολόκληρο το πρόβλημα παρά σε συγκεκριμένα μέρη, λιγότερο λεκτική όσον αφορά την αιτιολόγηση και βασισμένη σε μια αποφασιστικότητα για δράση με ανεπαρκή δεδομένα.*», στον D. Tall, (1990).

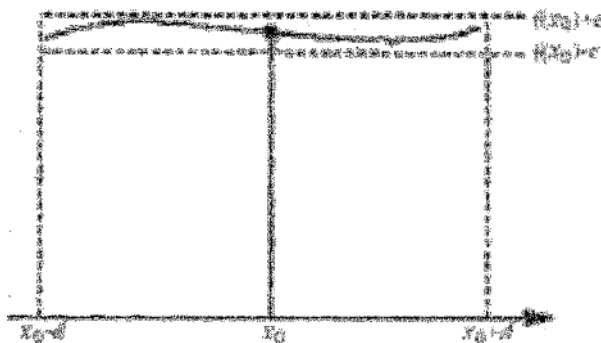
Σύμφωνα με τον Tall, υπάρχουν πολλά στοιχεία για ναδειχθεί ότι ο ισχυρότερος τρόπος για να χρησιμοποιηθεί ο εγκέφαλος, είναι να ενσωματωθούν και οι δύο μέθοδοι επεξεργασίας. Η έκκληση πρώτα στο δεξί ημισφαίριο του εγκεφάλου για να δώσει καθολικές συνδέσεις και ενοποιητικά σχήματα, και κατόπιν στο αριστερό για την ανάλυση των σχέσεων και τη δόμηση των λογικών πορισμάτων μεταξύ των εννοιών. Κάτι τέτοιο απαιτεί μια νέα σύνθεση της μαθηματικής γνώσης που θα αποδίδει την πρέπουσα βαρύτητα και στους δύο τρόπους σκέψης. Ειδικότερα χρειάζεται μια προσέγγιση που να απευθύνεται στη διαίσθηση και που παράλληλα μπορεί να της δοθεί μια αυστηρή διατύπωση. Η ιδέα δηλαδή είναι να αποτανθούμε στη δύναμη οπτικής δημιουργίας σχημάτων στο δεξιό ημισφαίριο κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να παράγει κατάλληλες διαισθήσεις για να εξυπηρετήσει τη λογική παραγωγικότητα του αριστερού ημισφαιρίου. Αν θέλουμε να καλύψουμε το χάσμα που εμφανίζεται στην κατανόηση του απειροστικού λογισμού από το μαθητή, τότε πρέπει να βρούμε έναν τρόπο που να είναι γνωστικά ελκυστικός για το μαθητή τη στιγμή που ξεκινά η μελέτη, και που ταυτόχρονα φέρει τους σπόρους για την κατανόηση των τυπικών εννοιών που εμφανίζονται αργότερα. Με δεδομένο λοιπόν ότι ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται η έννοια του ορίου φαίνεται τόσο μη ικανοποιητική γνωστική αφετηρία για τη μελέτη του απειροστικού λογισμού,

επομένως και οι προσπάθειες για να καταστεί «γεωμετρικά διαισθητική» επίσης αποτυγχάνουν, άρα χρειαζόμαστε μια κάπως διαφορετική προσέγγιση. Αυτή είναι δυνατή μέσω μιας απλής οπτικής επινόησης. Όπως είδαμε πιο πριν, η κλίση μιας ευθείας $y=ax+\beta$ είναι απλά το πηλίκο της μεταβολής της τεταγμένης y προς την αντίστοιχη μεταβολή της τετμημένης x , αλλά κάτι τέτοιο αποτυγχάνει σε μια καμπύλη. Μια εναλλακτική αντιμετώπιση βρίσκεται στο να μεγεθυνθεί η εικόνα. Αν ένα αρκετά μικρό μέρος της γραφικής παράστασης σχεδιαστεί σε μεγάλη μεγέθυνση, τότε οι περισσότερες από αυτές μοιάζουν τοπικά ευθύγραμμα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

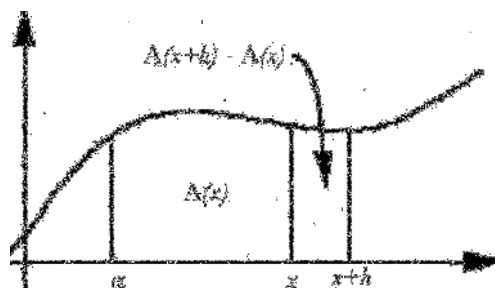


Από την άλλη μεριά η ολοκλήρωση είναι η ιδέα της «συσσωρευτικής αύξησης» η οποία συχνά αντιμετωπίζεται ως υπολογισμός του εμβαδού του χωρίου «κάτω» από την καμπύλη. Οπότε μπορεί να συντελεστεί με τη χρήση λεπτών λωρίδων ή τη χρήση κανόνων όπως του τραπεζίου. Οπτικά, αν πάρουμε μεγαλύτερο πλήθος λωρίδων, καθίσταται προφανές ότι το άθροισμα των εμβαδών των λωρίδων αυτών θα πρέπει να δώσει την τιμή του ζητούμενου εμβαδού. Ένας τρόπος να απεικονιστεί αποτελεσματικότερα το θεμελιώδες θεώρημα είναι να φανταστούμε ένα μικροσκοπικό μέρος της γραφικής παράστασης επιμηκυτό οριζόντια. Σε πολλές περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης επιμηκύνεται ώστε να αποκτήσει ευθύγραμμη μορφή και όσο περισσότερο επιμηκύνεται τόσο πιο ευθύγραμμη γίνεται. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα με ένα πρόγραμμα σχεδιασμού γραφικών παραστάσεων που χρησιμοποιεί μια λεπτή ακτίνα για το x και κανονική για το y , ώστε να πετυχαίνουμε την οριζόντια επιμήκυνση της καμπύλης. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αιτιολογήσουμε εποπτικά τη σχέση
$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x),$$
 αιτιολόγηση που περιέχεται και στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου. Η τυπική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος όπως αυτή αναφέρεται στα συμπεράσματα

(σελ. 168), απαιτεί την έννοια της συνέχειας. Ο αυστηρός ορισμός της συνέχειας λέει ότι: « μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν, με δεδομένο οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, μπορεί να βρεθεί μια μικρή απόσταση δ , ώστε, όποτε το x βρίσκεται μεταξύ $x_0 - \delta$ και $x_0 + \delta$, το $f(x)$ βρίσκεται μεταξύ $f(x_0) - \varepsilon$ και $f(x_0) + \varepsilon$ ». (βλέπε σχήμα)



Οι επιπτώσεις του ορισμού αυτού απαιτούν μήνες ακόμα και χρόνια για να κατανοηθούν πλήρως. Διαθέτει όμως, μια ελκυστική διαισθητική θεμελίωση: « Μια συνεχής και παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση, είναι μια συνάρτηση που η γραφική της παράσταση έχει την ιδιότητα κάθε κατάλληλα μικρό τμήμα της να μετατρέπεται σε ευθύγραμμο όταν επιμηκύνεται οριζόντια». (βλέπε σχήμα)



Βλέπουμε λοιπόν, ότι εισάγοντας κατάλληλες νοερές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών, μπορούμε να δώσουμε μια πολύ ευρύτερη εικόνα των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούν να γίνουν αντιληπτές οι έννοιες και κατ' επέκταση, ισχυρότερες διαισθήσεις απ' ότι με μια παραδοσιακή προσέγγιση. Συνεπώς η διαίσθηση και η αυστηρότητα δεν είναι απαραίτητο να βρίσκονται σε σύγκρουση. Με την παροχή ενός κατάλληλα ισχυρού πλαισίου, η διαίσθηση οδηγεί φυσιολογικά στην αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης, Tall, (1990).

2.6. Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία.

Πολλοί ερευνητές και δάσκαλοι πιστεύουν ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να παίξει πολύτιμο ρόλο στη διδασκαλία και τη μάθηση. Ισχυρίζονται ότι η ιστορία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι πεπερασμένο και ορισμένο γνωστικό σύστημα, αλλά μια διαδικασία σε εξέλιξη που έχει στενή σχέση με τους άλλους επιστημονικούς κλάδους. Βοηθά τους μαθητές να καταλάβουν ότι οι μαθηματικές έννοιες που εισάγονται, τροποποιούνται και επεκτείνονται μέσω της διαδικασίας της λύσης προβλήματος. Ότι τα λάθη, οι αμφιβολίες, τα διαισθητικά ζητήματα, οι διαμάχες, οι αμφισβητήσεις, οι διενέξεις και τέλος οι εναλλακτικές μέθοδοι προσέγγισης, δεν νομιμοποιούν μόνο αλλά στην πραγματικότητα δρουν ως μοχλός ανάπτυξης των μαθηματικών. Ο φιλοσοφικός στοχασμός και η αναπαράσταση των ιστορικών δεδομένων καθορίζουν και εξηγούν ορισμένες διδακτικές επιλογές. Από φιλοσοφικής πλευράς τα μαθηματικά πρέπει να ειπωθούν σαν μια ανθρώπινη δραστηριότητα που ταυτόχρονα σχετίζεται με την προσωπική κουλτούρα του καθ' ενός και είναι συνυφασμένα με αυτήν. Κάτω από το πολιτισμικό πρίσμα η μαθηματική εξέλιξη έρχεται ως αθροιστικό αποτέλεσμα δραστηριοτήτων μέσω διαφόρων πολιτισμών. Τέλος κάτω από το πρίσμα ενός πολιτισμού που περιλαμβάνει διαφορετικές αρχές και ιδέες, οι μαθητές αισθάνονται ότι η κατανόησή τους για τα μαθηματικά εμπλουτίζεται από την ιστορία των μαθηματικών, βλέπε και Furingetti & Somaglia, 1998: Tzanakis & Arcavi, 2000, στο Farmaki & Paschos, (2007)

Δεν είναι μόνο η επιθυμία για μια σχετική πληρότητα της εργασίας που μας οδήγησε στο να αφιερώσουμε το τρίτο κεφάλαιο στην ιστορική ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, αλλά η βεβαιότητα και η απόλυτη συμφωνία για όσα υποστηρίζονται από τους παραπάνω ερευνητές σχετικά με το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πρακτική.

Σχετικά με το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στο σχεδιασμό διδακτικών προτάσεων η Ε. Μπιζά αναφέρει: *«Συνήθως στη διδακτική πράξη, όταν γίνεται τυπική εισαγωγή μαθηματικών εννοιών, δεν λαμβάνονται υπόψη οι ήδη σχηματισμένες απόψεις των μαθητών/τριών καθώς και οι σωματικοί τους περιορισμοί. Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργούνται γνωστικές συγκρούσεις και να αυξάνονται τα διδακτικά εμπόδια. Είναι λοιπόν ερευνητικό ζητούμενο ο σχεδιασμός διδακτικών προτάσεων που*

να λαμβάνει υπόψη του τις παραμέτρους αυτές. Πηγή τέτοιων ιδεών μπορεί να αποτελέσει η ιστορία των Μαθηματικών και η μελέτη των επιστημολογικών εμποδίων στην εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με την άποψη αυτή η ιστορία δεν χρειάζεται να είναι ορατή ως κυρίαρχο στοιχείο στη διδασκαλία αλλά να λειτουργεί ως μεσολαβητής για την επίτευξη των αντικειμενικών στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό σημαίνει ότι οι στόχοι της διδασκαλίας πρέπει να θεωρούνται σε συνδυασμό με την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών», Μπιζά, (2003).

Επιπλέον οι ορισμοί και τα μαθηματικά αποτελέσματα, που σε ένα αυστηρά μαθηματικό κείμενο εμφανίζονται συμπληρωμένα και κάπως στατικά, εδώ αποκτούν μια δυναμική οντότητα καθώς διαφαίνεται η κοπιαστική προσπάθεια πολλών από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς μέσα από τους αιώνες για ένα βήμα που σήμερα μπορεί να μας φαίνεται μικρό. Έτσι είμαστε ίσως σε θέση να εκτιμήσουμε πόσο διαφορετική είναι η απόκτηση, η δημιουργία πραγματικά νέας μαθηματικής γνώσης, από την εκ των υστέρων μελέτη και κατανόησή της, Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, (1987)

Σύμφωνα με τον Τζανάκη, (2008), η γενική ιδέα της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση είναι αρκετά παλιά. Σταδιακά εκφάνσεις αυτής της ιδέας εφαρμόστηκαν στην πράξη με ποικίλους τρόπους, έτσι ώστε, μέσα στις τρεις τελευταίες δεκαετίες να διαμορφωθεί ένας ενεργός ερευνητικός κλάδος στα πλαίσια της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, οδηγώντας την δεκαετία του 1970, αρχικά στην δημιουργία και μετά στην ανάπτυξη μιας διεθνούς ομάδας μελέτης πάνω στα θέματα αυτά, που είναι γνωστή ως η HPM Study Group (*The International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*) και η οποία είναι μία από τις δύο βασικότερες ομάδες μελέτης που τελούν υπό την αιγίδα της Διεθνούς Επιτροπής για την Μαθηματική Εκπαίδευση (ICMI: *The International Commission on Mathematical Instruction*). Μολονότι τα επιχειρήματα υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών είναι ενδιαφέροντα και σημαντικά και οι ερευνητικές και διδακτικές δραστηριότητες στο πεδίο αυτό είναι πολλές και σε ευρεία διεθνή κλίμακα, εντούτοις παραμένουν πάντα σοβαρές αντιρρήσεις, τόσο από δασκάλους των μαθηματικών όσο και από ερευνητές στην ΜΕ και ιστορικούς των μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Η ιστορική ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού.

- 3.1. Εισαγωγή.
- 3.2. Τα μαθηματικά πριν από τον 6^ο π.Χ. αιώνα.
- 3.3. Τα ελληνικά μαθηματικά.
 - 3.3.1. Η σχολή της Ιωνίας.
 - 3.3.2. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας.
 - 3.3.3. Ο Εύδοξος.
 - 3.3.4. Ο Αρχιμήδης.
- 3.4. Τα μαθηματικά από τον Αρχιμήδη μέχρι και τον 19^ο αιώνα.
 - 3.4.1. Τα μαθηματικά στο μεσαίωνα.
 - 3.4.2. Οι προπομποί της ανακάλυψης του απειροστικού λογισμού.
 - 3.4.3. Η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού.
 - 3.4.4. Η αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού.

3.1. Εισαγωγή.

Σύμφωνα με το Γιαννακούλια (2007), διακρίνουμε τρεις περιόδους στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού:

- $6^{\text{ος}} - 3^{\text{ος}}$ π.Χ αιώνας. Ο απειροστικός λογισμός βρίσκεται σε λανθάνουσα μορφή και ανιχνεύεται μέσα από τα επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων και μαθηματικών.
- $16^{\text{ος}} - 17^{\text{ος}}$ μ.Χ αιώνας. Ο απειροστικός λογισμός «ανακαλύπτεται» και αναπτύσσεται με γοργούς ρυθμούς.
- $18^{\text{ος}} - 19^{\text{ος}}$ μ.Χ. αιώνας. Είναι η περίοδος της αυστηρής θεμελίωσής του που τελειώνει την τρίτη δεκαετία του $19^{\text{ου}}$ αιώνα, με την κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης περιόδου μεσολαβεί ο Μεσαίωνας. Στις αρχές του οι άνθρωποι ενδιαφέρονταν περισσότερο να διαφυλάξουν το υλικό που είχε συλλεχθεί κατά τους κλασικούς χρόνους, παρά να δημιουργήσουν κάτι καινούριο. Για το σκοπό αυτό σπουδαία φαίνεται να ήταν η συμβολή των Βυζαντινών λογίων και μοναχών. Με τις μεταφράσεις των κλασικών έργων των αρχαίων Ελλήνων από τους Άραβες λόγιους, γύρω στο 10^{o} μ.Χ. αιώνα, αναθερμαίνεται το ενδιαφέρον για τα προβλήματα που εκείνοι είχαν μελετήσει, άλλα εκ των οποίων είχαν λύσει και άλλα είχαν αφήσει για τους μεταγενέστερους.

3.2. Τα μαθηματικά πριν από τον 6^ο αιώνα π.Χ.

Οι πληροφορίες που έχουμε από αιγυπτιακούς παπύρους και από κείμενα των αρχαίων Βαβυλωνίων που βρέθηκαν σε πήλινες πινακίδες και αγγεία, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι απαρχές των Μαθηματικών εντοπίζονται στους πολιτισμούς που ανέπτυξαν χώρες όπως η Κίνα, η Ινδία, η Αίγυπτος και οι λαοί της Μεσοποταμίας, όπως οι Βαβυλώνιοι και οι Σουμερίοι. Η περίοδος που καλύπτεται αφορά το διάστημα μεταξύ των ετών 3000 π.Χ. και 600 π.Χ., οπότε και εμφανίζονται οι Έλληνες προσωκρατικοί φιλόσοφοι.

Τα μαθηματικά που ανέπτυξαν οι λαοί αυτοί είναι κυρίως υπολογιστικά και προέκυψαν κάτω από την πίεση που άσκησαν οι πρακτικές ανάγκες εκείνης της εποχής, ανάγκες που σχετίζονταν με το να χειρίζονται θέματα που αποτελούσαν μέρος των καθημερινών τους ασχολιών. Τέτοια ήταν η εύρεση του εμβαδού αγροτεμαχίων για τον ακριβή υπολογισμό του φόρου, το μοίρασμα καθορισμένης ποσότητας σιταριού σε συγκεκριμένο αριθμό ατόμων, ή η δίκαιη διανομή συσσιτίου σ' έναν αριθμό εργατών.

Τεκμηριωμένα λοιπόν οι λαοί αυτοί γνώριζαν πώς να υπολογίζουν το εμβαδόν ορθογωνίων τριγώνων, παραλληλογράμμων και τραπεζίων. Επίσης, υπολόγιζαν όγκους πρισμάτων και κυλίνδρων πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος, καθώς και τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας. Από τη πλευρά της αριθμητικής μπορούσαν να λύσουν προβλήματα που ανάγονταν σε εξισώσεις καθώς και συστήματα εξισώσεων. Οι Βαβυλώνιοι ειδικά ήσαν γνώστες του πυθαγορείου θεωρήματος και των πυθαγορείων τριάδων.¹

Στις χώρες αυτές της Ανατολής, οι παραπάνω μαθηματικές γνώσεις έμοιαζαν θα λέγαμε με μια συλλογή από χρήσιμες συνταγές που ελάχιστα συνδέονταν μεταξύ τους. Μόνο υποθέσεις έχουν γίνει για τον τρόπο παραγωγής αυτών των κανόνων – άλλοι ακριβείς και άλλοι προσεγγιστικοί – είναι βέβαιο όμως ότι η βασική ιδέα υπολογισμού του εμβαδού στοιχειωδών σχημάτων ήταν η κατάτμηση του επιπέδου σχήματος σε τρίγωνα και η ανακατανομή των κομματιών, ώστε να καταλήγουν σε ένα ή περισσότερα ορθογώνια.

¹ Γ.Χριστιανίδης, θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 53

Η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού, που εμφανίστηκε υπό τη μορφή της ανακατανομής και που ήταν απαραίτητη για τον υπολογισμό εμβαδών ευθυγράμμων σχημάτων και όγκων στερεών, θα αποτελέσει το θεμέλιο για την ανάπτυξη του ολοκληρωτικού λογισμού.²

Αξιοσημείωτο είναι ότι οι Βαβυλώνιοι είχαν βρει για την $\sqrt{2}$ τη προσεγγιστική τιμή 1,414213, μια τιμή που διαφέρει ελάχιστα από τη σημερινή προσέγγιση. Για το εμβαδόν του κύκλου, οι μεν Βαβυλώνιοι (όπως και οι Κινέζοι) χρησιμοποιούσαν το τύπο $E = \left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right)$, όπου c το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και d η διάμετρος

του, οι δε Αιγύπτιοι το τύπο $E = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ ο οποίος δίνει για τον αριθμό π την προσεγγιστική τιμή 3,16049. Σύμφωνα με όσα περιέχονται στον πάπυρο της Μόσχας, διαπιστώνουμε ότι ήξεραν επίσης να υπολογίζουν τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας με τετραγωνική βάση, δια μέσου του τύπου $V = (a^2 + ab + b^2)\frac{h}{3}$, όπου h είναι το ύψος και a, b οι πλευρές της άνω και κάτω βάσης. Είναι αδύνατον να υποθέσουμε ότι ο τύπος αυτός βρέθηκε εμπειρικά. Πρέπει να ελήφθη βάσει ενός θεωρητικού συλλογισμού.³

Εξ' άλλου, από τα προβλήματα 26 και 40 του παπύρου του Rhind συμπεραίνουμε ότι για τη λύση υπολογιστικών προβλημάτων οι Αιγύπτιοι εφαρμόζαν τη «μέθοδο της αυθαίρετης παραδοχής». Ένα παράδειγμα τέτοιου υπολογισμού είναι το πρόβλημα 26, στο οποίο ζητείται να βρεθεί η ποσότητα στην οποία, αν προσθέσουμε το τέταρτο μέρος αυτής, κάνουν μαζί 15. Εμείς θα λύναμε το πρόβλημα αυτό, σχηματίζοντας την εξίσωση $x + x/4 = 15$. Ο Αιγύπτιος όμως δεν εργαζόταν έτσι. Αρχίζει με την αυθαίρετη υπόθεση ότι η ζητούμενη ποσότητα ισούται με έναν αριθμό, έστω τον αριθμό 4. Το τέταρτο του 4 είναι το 1. Αλλά $4 + 1 = 5$ και όχι 15, όπως απαιτεί η συνθήκη του προβλήματος. Πρέπει λοιπόν να βρούμε πόσες φορές χωράει το 5 στο 15. Το 15 είναι τριπλάσιο του 5, άρα πρέπει να τριπλασιαστεί και ο αριθμός 4 που επιλέχτηκε αυθαίρετα και γίνεται έτσι 12. Το τέταρτο του 12 είναι το 3 και $12 + 3 = 15$, είναι η λύση του προβλήματος.

² Σ. Νεγρεπόντης-Σ. Γιωτόπουλος-Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός λογισμός, τόμος Ι.

³ 3. B.L.van der Vaerden, η αφύπνιση της επιστήμης, σελ.27.

Σύμφωνα με ένα σχόλιο του Chase,

« Η προσεκτική μελέτη του παπύρου του Rhind, με έχει πείσει, εδώ και πολλά χρόνια, ότι το έργο αυτό δεν είναι μια απλή συλλογή πρακτικών προβλημάτων [...] και ότι οι Αιγύπτιοι δεν ήταν απλώς ένα έθνος εμπόρων που δεν ενδιαφέρονταν για τίποτα άλλο, παρά μόνο για αυτά των οποίων θα μπορούσαν να κάνουν χρήση. Πιστεύω μάλλον ότι μελετούσαν τα Μαθηματικά και άλλα θέματα χάριν αυτών των ιδίων»

Κατά τον Χριστιανίδη, η άποψη του Chase μάλλον ενισχύεται, αν ληφθούν υπ' όψιν τα ακόλουθα:⁴

1. Το πρόβλημα 40 του παπύρου του Rhind δεν φαίνεται να έχει άμεση σχέση με τα πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής. Είναι δύσκολο να δεχτούμε ότι, υπό πραγματικές συνθήκες, μοίραζαν ψωμί με τρόπο ώστε οι μερίδες να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.
2. Στο πρόβλημα 26 του παπύρου του Rhind αναδύεται ένας ορισμένος βαθμός αφηρημένης σκέψης, αφού η μέθοδος της αυθαίρετης παραδοχής μπορεί να χρησιμοποιείται σε προβλήματα που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα διαφορετικών αντικειμένων, επί των οποίων θα ήταν δυνατόν να εφαρμόζονται οι ίδιες επιλυτικές τεχνικές.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, ισχυρίζεται ο Chase, θα μπορούσαμε ίσως να αναγνωρίσουμε την ύπαρξη μιας μαθηματικής δραστηριότητας που γίνεται «χάριν αυτής της ιδίας». Ο τρόπος που είναι διατυπωμένο το πρόβλημα 40 πιθανότατα θα μπορούσε να αποδοθεί σε μια εκπαιδευτική πρακτική, όπου ο δάσκαλος θέτει στους μαθητές προβλήματα πολύ δυσκολότερα από αυτά που θα αντιμετώπισουν στις επαγγελματικές τους απασχολήσεις. Με άλλα λόγια, διακρίνονται καθαρά τα ίχνη ενός εκπαιδευτικού συστήματος που είχαν δημιουργήσει και στο οποίο πρωτεύουσα θέση φαίνεται να κατείχαν τα Μαθηματικά.

Παρά το γεγονός ότι οι παραπάνω αναφορές έχουν σχέση με τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού, δεν υπάρχουν γραπτά από τα οποία να τεκμηριώνεται, ότι τα αποτελέσματα αυτά παρήχθησαν από ατέρμονες διαδικασίες μέσω της συμπερασματικής μεθόδου, ούτε υπάρχουν στοιχεία στα μαθηματικά αυτών των λαών, από τα οποία να προκύπτει αναφορά στις έννοιες του απείρως μεγάλου ή του απείρως μικρού. Οι Έλληνες ήσαν αυτοί που κατά πρώτον ανέλυσαν συστηματικά

⁴ Γ.Χριστιανίδης, θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 24.

την ιδέα των συνεχών ποσοτήτων και ανέπτυξαν έννοιες που οδήγησαν στην παράγωγο και στο ολοκλήρωμα.⁵

3.3. Τα ελληνικά μαθηματικά.

3.3.1. Η σχολή της Ιωνίας.

Λέγοντας ελληνικά μαθηματικά εννοούμε τα μαθηματικά που ανέπτυξαν οι άνθρωποι οι οποίοι μιλούσαν και έγραφαν την ελληνική γλώσσα, ανεξάρτητα από το εάν κατοικούσαν εντός ή εκτός των συνόρων της σημερινής Ελλάδος. Υπ' αυτήν την έννοια ο επιθετικός προσδιορισμός «ελληνικός» δηλώνει για την ιστορία των μαθηματικών κάτι πολύ ευρύτερο από ότι δηλώνει ο ίδιος όρος για την πολιτική, στρατιωτική ή οικονομική ιστορία.⁶ Τα ελληνικά μαθηματικά λοιπόν, κάνουν την εμφάνισή τους τον 6^ο π.Χ. αιώνα και αναπτύσσονται με γοργά βήματα έχοντας αρωγό τη γνώση που είχε προέλθει από τους λαούς της Ανατολής και κυρίως, λόγω γειτνίασης, από τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους. Στο απόγειό τους φτάνουν στα τέλη του 4^{ου} και στη διάρκεια του 3^{ου} π..Χ. αιώνα, η επίδρασή τους όμως, κράτησε μέχρι και τους πρώτους μεταχριστιανικούς αιώνες.

Κατά τον 6^ο π.Χ. αι. χάρις στους Ίωνες φιλοσόφους Θαλή (640 – 546 π.Χ.), Αναξίμανδρο (610 – 546 π.Χ.) και Αναξίμενη (585 – 525 π.Χ.), αρχίζει να διαφαίνεται η ριζική μεταστροφή από τις μυθολογικές παραστάσεις, στην επιστημονική αντίληψη του κόσμου. Διανοίγεται ο δρόμος του επιστημονικού κριτηρίου και τίθενται μερικά από τα πιο βασικά φιλοσοφικά προβλήματα.⁷ Παρά την ελλιπή πληροφόρηση που έχουμε για τη περίοδο αυτή λόγω απουσίας γραπτών κειμένων, θεωρείται βέβαιο από τους ερευνητές ιστορικούς ότι ο Θαλής είναι αυτός που έθεσε τις βάσεις της θεωρητικής γεωμετρίας, καθώς σε αυτόν αποδίδονται τα πρώτα ψήγματα της παραγωγικής σκέψης. Σύμφωνα με το Θαλή αρχή των πάντων ήταν το νερό. Ο Αναξίμανδρος, μαθητής του Θαλή, εξήγησε τη δημιουργία του κόσμου εκκινώντας από το άπειρο, που είναι και το επίκεντρο της φιλοσοφίας του. Ένα άπειρο που προφανώς προσλαμβάνει δύο ερμηνείες:

- Άπειρον $\alpha + \text{πέρας} = \text{χωρίς τέλος}$

⁵ .B.Boyer , The history of the calculus and its conceptual development , p. 15

⁶ Γ.Χριστιανίδης , θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 24

⁷ Ε.Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 27

- Άπειρον α + περάω = αδιαπέραστο

Ο Αναξίμανδρος, φαίνεται πως εννοούσε μια πρωταρχική αιτία δίχως όρια στο χώρο. Το άπειρο είναι απεριόριστο στο χώρο και ποιοτικά ακαθόριστο, καθώς δεν προσδιορίζεται μορφικά σαν ένα από τα τέσσερα στοιχεία.

Στο άπειρο ο Αναξίμανδρος δεν είδε μόνο την πρωταρχική ύλη και την αρχική κατάσταση του κόσμου, αλλά και την αιτία της κοσμικής τάξης. Σ' αυτή την πρωταρχική ουσία απέδωσε θεϊκές ιδιότητες, χαρακτηρίζοντας το άπειρο ως «αθάνατο, ανώλεθρον και θείον», σύμφωνα με τον Σιμπλίκιο (Εις τα φυσικά, 24, 13). Η αδυναμία της ανθρώπινης διάνοιας να καθορίσει το άπειρο ποσοτικά και ποιοτικά, το καθιστά πηγή και κατευθυντήρια δύναμη του κόσμου.⁸ Τέλος, ο Αναξίμανδρος, μαθητής του Αναξίμανδρου, προσπάθησε να γεφυρώσει το χάσμα ανάμεσα στο νερό που είχε καθορίσει ο Θαλής σαν αρχή των πάντων και στο άπειρο του Αναξίμανδρου. Προς τούτο, θεώρησε τον αέρα ως γενεσιουργό υλικό από το οποίο εδομούνται τα πάντα.

3.3.2. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας.

Μετά τους Ίωνες ακολουθούν διαδοχικά η σχολή των πυθαγορείων και η σχολή της Χίου. Δυστυχώς όμως, όπως γενικότερα συμβαίνει με τα ελληνικά μαθηματικά, οι γνώσεις μας για τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του αντλούνται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων, όπως ο Νικόμαχος ο Γερασηνός, ο Θέων ο Σμυρναίος (2^{ος} μ.Χ.αι.) και ο Ιάμβλιχος (3^{ος} – 4^{ος} μ.Χ.αι.)

Σύμφωνα με την πυθαγόρεια κοσμογονία, το σύμπαν δημιουργήθηκε με διαίρεσή του αριθμού ένα, που πραγματοποιήθηκε μετά από «εισπνοή απείρου». Το άπειρο εισβάλλει στο αδιαφοροποίητο «είναι», ταυτόσημο με τον αριθμό ένα, και το διασπά δημιουργώντας από τη μονάδα τη δυάδα. Το «είναι» οριοθετείται από το «μη είναι», ισχυρότατα συνδεδεμένο με το κενό, που εκτείνεται επ' άπειρον. Αυτό λοιπόν το άπειρο και οριοθετούν κενό εισβάλλει στο πεπερασμένο «είναι», το διασπά και δημιουργείται από το ένα η δυάδα, από αυτήν η τριάδα κ.ο.κ., κατά τρόπον ώστε το πυθαγόρειο σύμπαν να αποτελεί ένα αντίγραφο του συνόλου που σήμερα ονομάζουμε σύνολο των φυσικών αριθμών.⁹ Ήταν τελείως φυσικό λοιπόν για τους Πυθαγορείους

⁸ Πηγή: Wikipedia, διαδίκτυο.

⁹ Δ. Αναπολιτάνος, εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ. 15

να αναμένουν να υπακούει ο κόσμος σε σχέσεις και νόμους που μπορούν να εκφραστούν με λόγους της μορφής p/q , όπου p και q φυσικοί αριθμοί. Αν οποιαδήποτε δύο εκτεταμένα αντικείμενα δεδομένων μηκών συγκρίνονταν, θα έπρεπε να δίνουν σαν αποτέλεσμα σύγκρισης των μηκών τους έναν λόγο x/y , όπου x, y θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Πίστευαν δηλαδή ότι η σύγκριση δύο εκτεταμένων μεγεθών μπορούσε πάντα να οδηγήσει μετά από πεπερασμένα το πλήθος βήματα, σε εύρεση ενός κοινού μέτρου για αυτά τα μεγέθη. Αυτή η πυθαγόρεια πίστη για σύμμετρη δομή του κόσμου έμελλε να διαψευστεί. Οι πυθαγόρειοι στην προσπάθειά τους να βρουν το γεωμετρικό μέσο των δύο ιερών συμβόλων τους, δηλαδή του ένα και του δύο, οδηγήθηκαν στο ισοδύναμο αποτέλεσμα της κατασκευής τετραγώνου με εμβαδό διπλάσιο ενός δοσμένου τετραγώνου πλευράς a .¹⁰ Για τη λύση του προβλήματος απαιτήθηκε η μελέτη του λόγου της διαγωνίου προς τη πλευρά του τετραγώνου, όπου με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος βρήκαν ότι συνδέονται με τη σχέση $\delta^2 = 2\alpha^2$. Αναζήτησαν λοιπόν θετικούς ακέραιους μ, ν , ώστε, $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\mu}{\nu}$. Η αναζήτηση

αυτή απέβη άκαρπη. Απέδειξαν με έκπληξη ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι θετικοί ακέραιοι. Η απόδειξη βασίστηκε σε απλές παρατηρήσεις τους σχετικά με τους άρτιους και τους περιττούς, όπως περιγράφει ο Αριστοτέλης στο έργο του Αναλυτικά πρότερα, 41 α 26: «ἀσύμμετρος ἢ διάμετρος διὰ τό γίνεσθαι τὰ περιττά ἴσα τοῖς ἀρτίοις, συμμέτρου τεθείσης».

[Είναι ασύμμετρη η διάμετρος, (προς την πλευρά), διότι αν υποθεθεί σύμμετρη, τότε τα περιττά γίνονται ίσα με τα άρτια.]

Η απόδειξη αυτή έχει περιληφθεί στο παράρτημα του Χ βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη, με τον αριθμό 27:

«Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρος ἔστιν ἢ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει»

[Ἐστω ζητεῖται να αποδειχθεῖ ὅτι στα τετράγωνα σχήματα η διάμετρος (διαγώνιος) είναι ασύμμετρος κατά το μήκος προς την πλευρά]

Απόδειξη. (σε σύγχρονη ορολογία). Ἐστω ὅτι υπάρχει ρητός $\frac{\mu}{\nu}$, ὥστε $\frac{\mu^2}{\nu^2} = 2$. Χωρίς

βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ὅτι οἱ μ, ν , δεν εἶναι ἄρτιοι. Τότε $\mu^2 = 2\nu^2$, ὁπότε μ^2 ἄρτιος. Τότε καὶ ὁ μ εἶναι ἄρτιος καὶ ἄρα $\mu^2 = 4\kappa^2 = 2\nu^2$, δηλαδή $\nu^2 = 2\kappa^2$, καὶ συνεπῶς ὁ

¹⁰D. Struik, Συνοπτική Ιστορία των μαθηματικών

v^2 και άρα και ο v είναι άρτιος. Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι και οι δύο φυσικοί μ, v είναι άρτιοι, που είναι άτοπο.

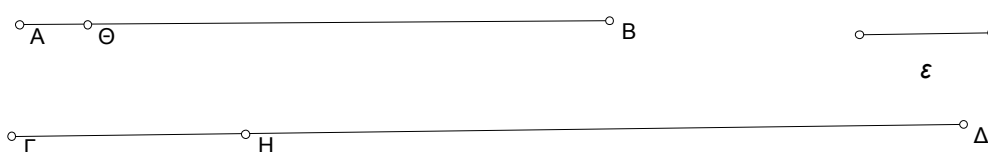
Από κάποιους ιστορικούς διατυπώνεται η γνώμη ότι η απόδειξη της παραπάνω προτάσεως, που υπάρχει στα Στοιχεία, ίσως δεν ήταν η πρώτη που δόθηκε, τόσο για το προχωρημένο στάδιο της μαθηματικής σκέψης, όσο και για την χρησιμοποίηση της μεθόδου της «εις άτοπον απαγωγής», που προϋποθέτει τη γνώση του αποδεικτέου.¹¹

Κατά μία εκδοχή που υποστηρίζουν ορισμένοι ιστορικοί, όπως ο Zeuthen, ο Becker, και ο Σ. Νεγρεπόντης¹², η ασυμμετρία πλευράς και διαγωνίου αποδείχθηκε με την ανθυφαιρετική μέθοδο. Αυτή η διαδικασία είτε τερματίζεται μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, οπότε το τελευταίο βήμα δίνει το κοινό μέτρο των δύο μεγεθών, ή συνεχίζεται επ' άπειρον, οπότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα, όπως βεβαιώνει η παρακάτω πρόταση β' του X βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη:

« Ἐάν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένων αἰεί του ἐλάσσονος ἀπό του μείζονος, τό καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖ τό πρό ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τά μεγέθη ».

[Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο, και το υπόλοιπο που προκύπτει κάθε φορά ουδέποτε καταμετρεῖ τα προηγούμενα μεγέθη, τότε τα μεγέθη αυτά είναι ασύμμετρα].

Απόδειξη.



Έστω τα μεγέθη AB και $\Gamma\Delta$ με $AB < \Gamma\Delta$. Έστω επίσης ότι τα μεγέθη είναι σύμμετρα, οπότε θα υπάρχει ένα κοινό τους μέτρο το ϵ . Το AB συγκρινόμενο με το $\Gamma\Delta$, θα καταμετρήσει το $H\Delta$ και θα αφήσει ένα υπόλοιπο $\Gamma H < AB$. Το ΓH συγκρινόμενο με το AB θα καταμετρήσει το ΘB και θα αφήσει ένα υπόλοιπο $A\Theta < \Gamma H$. Η διαδικασία

¹¹ B.L.van der Waerden , η αφύπνιση της επιστήμης .

¹² Σ. Νεγρεπόντης, παραδόσεις μαθημάτων αρχαίων ελληνικών μαθηματικών.

αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον εξ υποθέσεως, αφού το εκάστοτε υπόλοιπο ουδέποτε καταμετρεί τα προηγούμενα μεγέθη. Έτσι θα προκύψει ένα υπόλοιπο μικρότερο από το κοινό μέτρο ϵ . Ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι το $A\Theta$. Το ϵ μετρά το AB άρα και το πολλαπλάσιο αυτού το $H\Delta$. Μετρά όμως και το $\Gamma\Delta$ άρα και το $\Gamma H = \Gamma\Delta - H\Delta$, άρα και το πολλαπλάσιο αυτού ΘB , άρα και το $A\Theta = AB - \Theta B$. Το τελευταίο όμως, είναι άτοπο διότι $\epsilon > A\Theta$ και συνεπώς τα αρχικώς δοθέντα μεγέθη AB και $\Gamma\Delta$, είναι ασύμμετρα.

Κατά τον Von Fritz¹³, είναι πιθανόν η ανακάλυψη της ύπαρξης ασυμμέτρων μεγεθών να έγινε από τον πυθαγόρειο Ίππασο, ο οποίος απέδειξε την ασυμμετρία ανάμεσα στην πλευρά και την διαγώνιο κανονικού πενταγώνου.

Βλέποντας λοιπόν τα πράγματα υπό το πρίσμα της ιστορικής ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού, μπορούμε να πούμε ότι κατά την περίοδο αυτή έχουμε την εμφάνιση ατέρμονων διαδικασιών στα μαθηματικά. Είναι η αλγοριθμική διαδικασία της ανθυφαίρεσης, που χρησιμοποιούνταν από τους αρχαίους Έλληνες για την εύρεση μέγιστου κοινού μέτρου στη σύγκριση δύο δεδομένων μηκών. Για την περίπτωση των ασυμμέτρων, συνεχίζεται επ' άπειρον, μιας και σε κανένα στάδιό της δεν μπορούμε να πετύχουμε υπόλοιπο ίσο με το μηδέν.

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου, είχε σοβαρές επιπτώσεις στην πυθαγόρεια φιλοσοφία: *«Η πυθαγόρεια λοιπόν πίστη στην αριθμητική δομή και φύση του κόσμου προσέκρουσε στην ανακάλυψη ύπαρξης ασυμμέτρων μεγεθών με δραματικά αποτελέσματα. Οι πυθαγόρειοι, κάτω από το βάρος της κρίσης, δεν μπόρεσαν να αναθεωρήσουν την οντολογία τους. Κάτι τέτοιο θα ήταν ίσως αδύνατο. Η κρίση, καταστροφική για τους πυθαγόρειους, ενσωματώθηκε δημιουργικά στο γνωστικό corpus των ερχόμενων γενεών και οδήγησε τελικά μετά από αιώνες επώδυνου τοκετού, συνδεδεμένου βέβαια και με άλλες μικρότερες ή μεγαλύτερες κρίσεις, στα σημερινά συνεχιστικά μαθηματικά που σχετίζονται με τα νοητά αντικείμενα, τα οποία είναι γνωστά κάτω από το γενικό τίτλο πραγματικοί αριθμοί»*.¹⁴

Την εμφάνιση ατέρμονων διαδικασιών έχουμε και λίγο αργότερα όταν, μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου, άρχισαν προσπάθειες ρητής προσέγγισης του λόγου δ:α. Το πρόβλημα της προσέγγισης του λόγου της διαγωνίου προς την πλευρά με τη βοήθεια ρητών αριθμών, είχε προταθεί

¹³ Δ. Αναπολιτάνος, εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ. 24

¹⁴ . -----//-----, εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ. 26

και λυθεί από τους Βαβυλωνίους. Αλλά οι πυθαγόρειοι προχώρησαν αυτό το παλιό πρόβλημα πολύ μακρύτερα. Βρήκαν ολόκληρο σύνολο προσεγγίσεων απείρως αυξανόμενης ακρίβειας. Επιπλέον, ανέπτυξαν μια επιστημονική θεωρία σε ό,τι αφορά αυτές τις προσεγγίσεις και απέδειξαν τη γενική πρόταση με πλήρη επαγωγή.¹⁵ Αυτό έγινε με την επινόηση των πλευρικών και διαγωνίων αριθμών. Ο Πρόκλος ερμηνεύοντας ένα χωρίο στην Πολιτεία του Πλάτωνα που αναφέρεται στον αριθμό 7, ως τη ρητή διαγώνιο που συνδέεται με την πλευρά 5, δίνει τον ακόλουθο ορισμό των πλευρικών και διαγωνίων αριθμών, τον οποίο αποδίδει στους πυθαγορείους:¹⁶

«Ως απαρχή όλων των αριθμών, η μονάδα είναι δυνάμει και πλευρά και διαγώνιος. Λαμβάνουμε τώρα δύο μονάδες, μια πλευρική και μία διαγώνιο και κατασκευάζουμε τη νέα πλευρά προσθέτοντας τη διαγώνιο μονάδα στην πλευρική. Τη δε νέα διαγώνιο κατασκευάζουμε προσθέτοντας το διπλάσιο της πλευρικής στην διαγώνιο μονάδα». Έτσι βρίσκουμε τον πλευρικό αριθμό 2 και τον διαγώνιο αριθμό 3. Από εδώ συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο με τους αριθμούς που βρήκαμε προηγουμένως. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε:

1	1
$1 + 1 = 2$	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
$2 + 3 = 5$	$2 \cdot 2 + 3 = 7$
$5 + 7 = 12$	$2 \cdot 5 + 7 = 17$
$12 + 17 = 29$	$2 \cdot 12 + 17 = 41$
.....	
$\alpha_{\eta+1} = \alpha_{\eta} + \delta_{\eta}$	$\delta_{\eta+1} = 2 \cdot \alpha_{\eta} + \delta_{\eta} \quad (1)$

Για το πώς οι Έλληνες κατέληξαν στον παραπάνω αναδρομικό τύπο ο van der Waerden,¹⁷ αποτολμώντας μια εικασία γράφει:

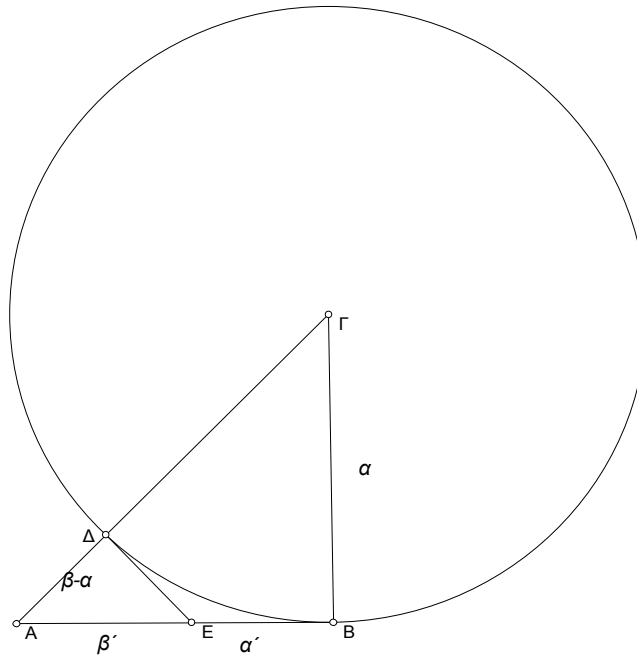
« Οι Έλληνες μαθηματικοί γνώριζαν τη μέθοδο των διαδοχικών αφαιρέσεων (ανταναίρεσις) για τον προσδιορισμό του μέγιστου κοινού μέτρου δύο σύμμετρων μεγεθών α και β . Το μικρότερο, έστω το α , αφαιρείται από το μεγαλύτερο, δίνοντας έτσι δύο νέα μεγέθη α και

¹⁵ B.L. van der Waerden, η αφύπνιση της επιστήμης, σελ.144.

¹⁶ -----//-----, η αφύπνιση της επιστήμης, σελ.142.

¹⁷ -----//-----, η αφύπνιση της επιστήμης, σελ.143.

$\beta - \alpha$. Κατόπιν το μικρότερο από αυτά τα μεγέθη αφαιρείται πάλι από το μεγαλύτερο κ.ο.κ. Εάν υπάρχει κοινό μέτρο, η διαδικασία θα καταλήξει σε δύο ίσα μεγέθη, τα οποία είναι ίσα προς το κοινό μέτρο. Στο έβδομο βιβλίο των Στοιχείων, η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε αριθμούς προκειμένου να προσδιοριστεί ο ΜΚΔ, ενώ στην αρχή του δεκάτου βιβλίου



εφαρμόζεται σε τυχαία μεγέθη, για να διαπιστωθεί αν υπάρχει κοινό μέτρο και, στην περίπτωση που υπάρχει, να προσδιοριστεί. Εάν εφαρμοστεί σε δύο ασύμμετρα μεγέθη η διαδικασία συνεχίζει επ' άπειρον. Αν, επί παραδείγματι, είναι α η πλευρά και β η διαγώνιος ενός τετραγώνου, τότε μπορεί κάποιος να αφαιρέσει το α από το β μία φορά. Το υπόλοιπο $\beta - \alpha = AD = DE = EB = \alpha'$, μπορεί τώρα να αφαιρεθεί από το $\alpha = AB$, αφήνοντας υπόλοιπο $\beta' = AE$. Τώρα τα α' και β' είναι πάλι η πλευρά και διαγώνιος ενός μικρότερου τετραγώνου, και από τις σχέσεις

$$\beta' = \alpha - \alpha', \quad \alpha' = \beta - \alpha \quad \text{έπεται ότι} \quad \alpha = \alpha' + \beta', \quad \beta = 2 \cdot \alpha' + \beta'$$

Οι τελευταίοι έχουν την ίδια μορφή με τους αναδρομικούς τύπους (1). Η επανάληψη αυτής της διαδικασίας αφαιρέσεων θα δώσει πάλι μια μικρότερη πλευρά α'' και μια μικρότερη διαγώνιο β'' . Εάν η διαδικασία συνεχιστεί μέχρι η διαφορά μεταξύ, ας πούμε, των α''' και β''' να γίνει πολύ μικρή για να είναι παρατηρήσιμη, οπότε στρογγυλοποιώντας μπορούμε να θέσουμε $\alpha''' = \beta'''$ και παίρνοντας τη τιμή αυτή ως τη μονάδα μήκους, τότε τα α και β παριστάνονται με τη βοήθεια των τύπων (1), δηλαδή με τη μορφή διαδοχικών πλευρικών και διαγωνίων αριθμών.

Αν σχηματίσουμε τους λόγους των διαμέτρων προς τις αντίστοιχες πλευρές παίρνουμε την ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, όπου

$$\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1, \alpha_2 = \frac{3}{2} = 1.5, \alpha_3 = \frac{7}{5} = 1.4, \alpha_4 = \frac{17}{12} = 1.4166\dots, \alpha_5 = \frac{41}{29} = 1.4137913\dots$$

Παρατηρούμε¹⁸ ότι κάθε όρος με περιττό δείκτη είναι μικρότερος από όλους τους επόμενους, ενώ κάθε όρος με άρτιο δείκτη είναι μεγαλύτερος από όλους τους επόμενους. Αν πάρουμε δύο διαδοχικά πηλίκια, τότε κατά τους πυθαγόρειους ο $\sqrt{2}$ θα είναι μεγαλύτερος από κάθε όρο περιττής τάξης και μικρότερος από κάθε όρο άρτιας τάξης, οι δε διαφορές $\sqrt{2} - \alpha_{2n+1}, \sqrt{2} - \alpha_{2n+2}$, μπορούν να γίνουνται οσοδήποτε μικρές. Συνεχίζοντας την κατασκευή και άλλων πηλίκων με την προηγούμενη διαδικασία, οι προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ γίνονται ολοένα και πιο επιτυχημένες. Οι πυθαγόρειοι ωστόσο, δήλωναν πως ποτέ δεν θα βρεθεί πηλίκιο ίσο προς $\sqrt{2}$ κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής, όσο και αν συνεχιζόταν. Σε σύγχρονη ορολογία, με την παραπάνω προσέγγιση δημιουργούνται δύο μονότονες ακολουθίες των οποίων το κοινό όριο, καθώς ο n τείνει στο άπειρο, υπάρχει και είναι ο $\sqrt{2}$. Συνεπώς, μέσα από την προσεγγιστική διαδικασία των πυθαγορείων ανιχνεύονται οι έννοιες της μονότονης, της φραγμένης ακολουθίας, καθώς και η έννοια του ορίου ακολουθίας.

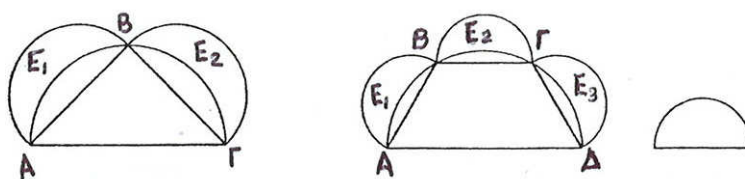
Φαίνεται ότι οι Έλληνες μαθηματικοί που ακολούθησαν εγκατέλειψαν την προσπάθεια των πυθαγορείων να ταυτοποιήσουν τον κόσμο των αριθμών με τον κόσμο της γεωμετρίας και τον κόσμο του συνεχούς. Αυτός ήταν και ο λόγος που απέτυχαν να γενικεύσουν το σύστημα των αριθμών κατά μήκος μιας γραμμής, πράγμα το οποίο πρότεινε αργότερα ο απειροστικός λογισμός καθώς αναπτυσσόταν. Μας είναι άγνωστο τελικά αν οι πυθαγόρειοι υλοποίησαν ή όχι το απείρως μικρό. Ξέρουμε όμως ότι η έννοια του απειροστού μπήκε στη μαθηματική σκέψη μέσω του δόγματος που εξελίχθηκε τον 5^ο αιώνα π.Χ. σαν αποτέλεσμα του προβληματισμού των Ελλήνων, όσον αφορά τη φύση και τον φυσικό κόσμο.¹⁹

Από την άλλη πλευρά, η σχολή της Χίου έχει ως κύριο εκπρόσωπό της τον Ιπποκράτη τον Χίο (470 – 410 π.Χ.), ο οποίος αναφέρεται ως έμπορος και

¹⁸ Ε. Σταμάτης, Ευκλείδου Γεωμετρία, τόμος II

¹⁹ C.B. Boyer, The history of the calculus and its conceptual development, p. 20.

μαθηματικός που ίδρυσε στην Αθήνα σχολή, όπου και δίδασκε γεωμετρία. Σ' αυτόν αποδίδεται η μέθοδος της «εις άτοπον απαγωγής», ενώ υπήρξε ο πρώτος στην ιστορία της επιστήμης που συνέγραψε συστηματικά οργανωμένη πραγματεία γεωμετρίας, τα «Στοιχεία», της οποίας ένα, αλλά διάσημο απόσπασμα, διασώθηκε μέχρι τις μέρες μας ενσωματωμένο στο έργο του Σιμπλίκιου. Σε αυτό υπολογίζεται το εμβαδόν των σχημάτων που είναι σήμερα γνωστά ως «μηνίσκοι του Ιπποκράτους». Ο Ιπποκράτης απέδειξε ότι $E_1 + E_2 = (AB\Gamma)$ και ότι $E_1 + E_2 + E_3 + (\text{εμβ. ημικυκλίου με διάμετρο } \lambda_6) = (AB\Gamma\Delta)$, πιστεύοντας ότι αν είναι δυνατόν να τετραγωνιστούν οι μηνίσκοι, τότε θα ήταν δυνατόν να τετραγωνιστεί το ημικύκλιο και άρα, ο κύκλος.



Στην απόδειξή του χειρίζεται έξοχα ανισότητες ευθυγράμμων τμημάτων, γωνιών και εμβαδών. Ο van der Waerden²⁰, αναφέρει σχετικά:

« Ακόμα πιο σημαντική για την αποτίμηση του μαθηματικού επιπέδου που είχε κατακτηθεί κατά το πρώτο ήμισυ του 5^{ου} αιώνα και ιδιαιτέρως από τον Ιπποκράτη, είναι η εξαιρετική αποδεικτική τεχνική και οι υψηλές απαιτήσεις αυστηρότητας που πρέπει να πληρούν οι αποδείξεις. Ο Ιπποκράτης δεν αρκείται απλώς στο να κατασκευάσει τους μηνίσκους και να συμπεράνει από τα σχήματα ότι η εξωτερική περιφέρεια είναι μεγαλύτερη η μικρότερη του ημικυκλίου, αλλά θέλει να το αποδείξει αυστηρά. Οι πράξεις με ανισότητες είναι πολύ πρόσφατο επίτευγμα των νεώτερων μαθηματικών. Ο Euler δεν σκοτιζόταν και πολύ αν οι άπειρες σειρές του συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Χρησιμοποιούσε χωρίς κανένα δισταγμό αποκλίνουσες σειρές στους υπολογισμούς του και πετύχαινε ορθά αποτελέσματα. Η αναγκαιότητα των "επιλογικών", δηλαδή των υπολογισμών με όρους των ϵ και δ , και η εκτίμηση των υπολοίπων, δεν αναγνωρίστηκαν παρά πολύ αργότερα, κατά τη διάρκεια της περιόδου κρίσης των σύγχρονων μαθηματικών. Στις αρχές του 4^{ου} αιώνα, τα ελληνικά μαθηματικά διήλθαν από μια τέτοια περίοδο κρίσης. Οι εκτιμήσεις του Ευδόξου, ο οποίος έδειξε ότι η διαφορά των εγγεγραμμένων και των περιγεγραμμένων πολυγώνων ενός κύκλου μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή, βρίσκονται στο ίδιο ύψος με τις σύγχρονες εκτιμήσεις των υπολοίπων όρων. Αλλά αυτές οι εκτιμήσεις ήσαν δυνατές

²⁰ B.L.van der Waerden , η αφύπνιση της επιστήμης , σελ.154.

διότι ο Ιπποκράτης είχε δείξει το πώς να δίνει κανείς ακριβείς αποδείξεις με ανισότητες» ».

Απέναντι στην αντίληψη των πυθαγορείων βρέθηκαν οι φιλόσοφοι της Ελεατικής σχολής, αρχικά με τον ιδρυτή της Παρμενίδη (515 – 440 π.Χ.) και κατόπιν με τον μαθητή του τελευταίου Ζήνωνα (495 – 435 π.Χ.). Σύγχρονοι των Ελεατών φιλοσόφων είναι ο Εμπεδοκλής (495 – 435 π.Χ.), ο οποίος δέχεται ότι θεμελιακά δομικά στοιχεία του κόσμου είναι η γη, ο αέρας, το νερό και η φωτιά, περνώντας έτσι από το μονισμό στον πλουραλισμό, και ο Αναξαγόρας (500 – 428 π.Χ.), ο οποίος φαίνεται ότι είναι ο πρώτος που διατυπώνει την έννοια του απείρου και της συνέχειας στη γεωμετρία, καθώς και τη διαιρετότητα του συνεχούς όπως αναφέρει και ο Συμπλίκιος στα Φυσικά του.

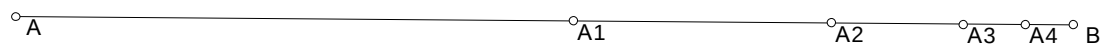
« Όμοῦ χρήματα πάντα ἦν , ἄπειρα καί πληθος καί σμικρότητα.... οὔτε γάρ του σμικροῦ ἔστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον αἰεί (Τό γάρ ἐόν οὐκ ἔστι τό μή οὐκ εἶναι), ἀλλά καί του μεγάλου αἰεί ἔστι μεῖζον καί ἴσον ἔστι τῷ σμικρῷ πληθος, πρὸς ἑαυτό δέ ἕκαστον ἔστι καί μέγα καί σμικρόν.» (Συμπλίκιος, , Εἰς τὰ Φυσικά, 164, Φυσικά, 17).

[Όλα τα πράγματα ήταν μαζί, άπειρα τόσο στο πλήθος όσο και στη μικροσκοπικότητα....όταν δοθεί ένα μικρό μέγεθος δεν μπορούμε με τη διαίρεσή του να οδηγηθούμε στο ελάχιστο, αλλά κάθε φορά φτάνουμε σε κάτι πιο μικρό. Είναι αδύνατο αυτό που υπάρχει να πάψει να υπάρχει με τη συνεχή διαίρεση, αλλά και του μεγάλου υπάρχει πάντα μεγαλύτερο. Και είναι ίσον κατά το πλήθος προς το μικρό (δηλαδή οσοδήποτε μεγάλο αποτελείται από πολλά μικρά) ως προς τον εαυτό του όμως, κάθε μέγεθος είναι και μεγάλο και μικρό].

Ο Ζήνων ο Ελεάτης ήταν αυτός που με τα παράδοξα που διατύπωσε, γνωστά και ως «παράδοξα της κίνησης του Ζήνωνα», αφύπνισε τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους και επηρέασε για αιώνες τη μαθηματική σκέψη. Οι συλλογισμοί του φανερώνουν τη δυσκολία να δοθεί μια ερμηνεία για το τι σημαίνει «μια γραμμή να αποτελείται από σημεία». Διατυπώνει τα παράδοξα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να τονίζονται οι αντιφάσεις που περικλείουν οι έννοιες της κίνησης και του χρόνου, αποκαλύπτοντας τη σύγκρουση ανάμεσα στο διακριτό και το συνεχές, αλλά και δείχνοντας τον κίνδυνο που εγκυμονεί η απερίσκεπτη χρήση του απείρου²¹. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, τα παράδοξα του Ζήνωνα είναι συνολικά τέσσερα

²¹ Ε. Γιαννακούλιας ,απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα,σελ.54.

(Φυσική Ακρόασις, VI, 239b-240b). Εδώ, θα περιοριστούμε να παρουσιάσουμε τα δύο: (α) Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι ένας δρομέας πρόκειται να διανύσει την απόσταση AB. Για να το επιτύχει αυτό, θα πρέπει προηγουμένως να διανύσει την



απόσταση $AA_1 = AB/2$, στη συνέχεια την $A_1A_2 = AB/4$, την $A_2A_3 = AB/8$ κ.ο.κ.

Σύμφωνα με τον Ζήνωνα, μια τέτοια διαδικασία είναι αδύνατη, διότι, για να διανύσει ο δρομέας την πεπερασμένη απόσταση AB θα πρέπει να περάσει από ένα άπειρο πλήθος σημείων, δηλαδή να ολοκληρώσει μια άπειρη διαδικασία μεταβάσεων. (β) Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας είναι παρόμοιο. Σύμφωνα με αυτό, αν στη θέση A βρίσκεται ο «ώκύπους Αχιλλεύς» και στη θέση X, ένα στάδιο πιο μπροστά, η χελώνα, με σκοπό να παραβγούν στο τρέξιμο, τότε ο Αχιλλέας δεν θα κατορθώσει να φτάσει την χελώνα, γιατί όταν ο Αχιλλέας μεταβεί στη θέση A_1 που ταυτίζεται με την προηγούμενη θέση X της χελώνας, αυτή θα έχει ήδη μετακινηθεί στη θέση X_1 , ενώ νέα προσπάθεια του Αχιλλέα να φτάσει στη θέση A_2 , που είναι ίδια με τη X_1 , θα συνοδεύεται από νέα μετακίνηση της χελώνας κ.ο.κ., με αποτέλεσμα η χελώνα να βρίσκεται πάντα κατά τι πιο μπροστά από τον Αχιλλέα.

Έχουμε λοιπόν εδώ την εμφάνιση του προβλήματος της κίνησης, που υπήρξε θεμελιώδες για την ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού, σε συνδυασμό με την περιγραφή ατέρμονων διαδικασιών. Αξίζει όμως, να αναφέρουμε την Αριστοτελική ερμηνεία για τα παράδοξα του Ζήνωνα, παρότι το αρχικό Αριστοτελικό ερώτημα γύρω από το άπειρο και το νόημα της ύπαρξης του τελευταίου έχει χαρακτήρα εντελώς διαφορετικό από αυτόν που προσλαμβάνει όταν διατυπωθεί στα πλαίσια μιας σύγχρονης πρωτοβάθμιας μαθηματικής θεωρίας. Ο χαρακτήρας του ερωτήματος είναι καθαρά φιλοσοφικός και δεν έχει σχέση με την ταξινόμηση συγκεκριμένων προτάσεων ή εννοιών στα πλαίσια ενός αυστηρού, γλωσσικού, φορμαλιστικού συστήματος.

Ο Αριστοτέλης θεωρεί ότι τα σημεία πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν είναι τίποτα άλλο, παρά δυνατότητες για αντίστοιχες πράξεις διαίρεσής του. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η απόσταση που πρόκειται να

διανύσει ο δρομέας του πρώτου παραδόξου. Με την υπόθεση ότι η κίνηση διαρκεί μια ώρα και ότι γίνεται με σταθερή ταχύτητα, χωρίς αυτό να βλάπτει τη γενικότητα της αιτιολόγησης, συνάγουμε πως σε $\frac{1}{2}$ της ώρας διάνυσε απόσταση $AB/2$, σε $\frac{3}{4}$ της ώρας $3AB/4$, σε $7/8$ της ώρας $7AB/8$ κ.ο.κ. Επομένως, ο δρομέας κατάφερε σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα να ολοκληρώσει μία άπειρη διαδικασία πραγμάτωσης αντίστοιχων πράξεων διαίρεσης του AB . Οι πράξεις αυτές πρέπει να είναι κατά τρόπο θεμελιώδη, πράξεις νοητικές ή αντιληπτικές. Με άλλα λόγια, ο δρομέας κάθε φορά που βρίσκεται στην αντίστοιχη θέση, θα πρέπει να έχει συνείδηση της παρουσίας του σ' αυτήν. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, αφού από την ίδια τη φύση του ο δρομέας δεν μπορεί να πραγματώσει ένα άπειρο πλήθος αντιληπτικών ή νοητικών πράξεων μεταξύ των δύο συγκεκριμένων που καθορίζονται από την αυτοσυνείδηση της παρουσίας του στην αρχή και στο τέλος της διαδρομής. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, ο δρομέας δεν μπορεί να βρίσκεται σε όλες αυτές τις θέσεις στα αντίστοιχα εκάστοτε «τώρα», γιατί ούτε τα «τώρα», ούτε οι θέσεις υπάρχουν πραγματικά. Υπάρχουν μόνο σαν δυνατότητες, από τις οποίες ο δρομέας μόνο πεπερασμένα μπορεί να πραγματώσει. Το ευθύγραμμο τμήμα διανύεται στο διάστημα της μιας ώρας κατά τρόπο συνεχή. Το παράδοξο λοιπόν, εμφανίζεται ως τέτοιο, γιατί σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, υποτίθεται λανθασμένα πως κατά την διάρκεια της κίνησης ο δρομέας έχει συνείδηση απείρων θέσεων της διαδρομής που διανύει.²²

Η εξέταση της περιόδου 600 π.Χ. – 400 π.Χ. ολοκληρώνεται με την αναφορά μας στους λεγόμενους ατομικούς φιλοσόφους Λεύκιππο (500 – 440 π.Χ.) και Δημόκριτο (460 – 360 π.Χ.), οι οποίοι διαφώνησαν με την άποψη του Ζήνωνα ότι τα γεωμετρικά μεγέθη είναι ενιαία και αδιαίρετα, αλλά και με τον ισχυρισμό του Αναξαγόρα, ότι αυτά διαιρούνται επ' άπειρον. Οι ατομικοί φιλόσοφοι δέχονται ότι ο κόσμος δομείται από στοιχειώδη σωματίδια που είναι αδιαίρετες φυσικές μονάδες, τα άτομα. Ένα σώμα σχηματίζεται από ένα μεγάλο μεν, πεπερασμένο δε πλήθος από αυτές τις δομικές μονάδες, αφού, αν αυτές ήταν άπειρες το πλήθος, τότε και το ίδιο το σώμα θα ήταν άπειρο.²³

²² Δ. Αναπολιτάνος, εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ. 74.

²³ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 55.

Τα μέχρι τώρα ιστορικά δεδομένα συνηγορούν με την άποψη ότι ο απειροστικός λογισμός ανατέλλει κατά την χρονική περίοδο 600 – 400 π.Χ. των Ελληνικών μαθηματικών. Ακολουθεί η συστηματική καταγραφή των επιτευγμάτων αυτών από τον Ευκλείδη και η οριστική θεμελίωση του οικοδομήματος από τους κορυφαίους μεταξύ των μαθηματικών, τον Εύδοξο και τον Αρχιμήδη.

3.3.3. Ο Εύδοξος.

Η διατύπωση των παραδόξων του Ζήνωνα και η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου, επέφεραν ένα είδος ρήξης με την κρατούσα άποψη περί ενός κόσμου που εκφράζεται με λόγους ακεραίων αριθμών και προκάλεσαν την αμφισβήτηση κεντρικών εννοιών των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, όπως αυτής της αναλογίας. Κατά τη διάρκεια του 4^{ου} π.Χ. αιώνα διαπιστώνουμε εξαιτίας των παραπάνω, βαθιές ανακατατάξεις στην θεμελίωση των μαθηματικών. Τότε αυτά παίρνουν την αυστηρά συμπερασματική τους μορφή, την οποία συναντούμε στα δεκατρία βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη, που πιθανολογείται ότι γράφτηκαν γύρω στο 300 π.Χ. Το πρόβλημα που προέκυψε με το λόγο ασύμμετρων μεγεθών λύθηκε από τον μεγαλύτερο μετά τον Αρχιμήδη μαθηματικό της αρχαιότητας, τον Εύδοξο (408 – 355 π.Χ.). Ο Εύδοξος είναι αυτός που παρουσιάζει για πρώτη φορά την έννοια του μεγέθους. Τα μεγέθη είναι ποσότητες, όπως ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες, εμβαδά, όγκοι, χρόνοι, που μπορούν να μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο, σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς. Διατυπώνει εξάλλου τη γενική θεωρία λόγων, κατά τέτοιο τρόπο, που καθιστά περιττή κάθε αναφορά σε σύμμετρα ή ασύμμετρα μεγέθη.

Έτσι, απάλλαξε τη μαθηματική κοινότητα από την κρίση που είχε δημιουργήσει η ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Παρότι η εργασία του Ευδόξου δεν σώθηκε, θεωρείται δεδομένο ότι απετέλεσε τη βάση για τα βιβλία V και VI των Στοιχείων. Το V περιέχει τη γενική θεωρία λόγων. Οι πέντε πρώτοι ορισμοί έχουν ως εξής:

- α'. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τό ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρεῖ τό μείζον.
- β'. Πολλαπλάσιον δέ τό μείζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρεῖται ὑπό του ἐλάττονος.
- γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικιότητα ποιά σχέσις.

- δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.
- ε'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμόν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατ'ἀλλήλα.

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα ακόλουθα: Στον ορισμό γ' δε λέει τι είναι λόγος (δηλαδή αν είναι αριθμός ή κάτι άλλο). Αυτό είναι μια σημαντική επανάσταση. Δίχως να μας λέει τι είναι ο λόγος, θα μας πεί τι είναι αναλογία. Αυτή είναι η μεγαλοφυΐα του Ευδόξου. Ο ορισμός δ' μας λέει πως αν A, B είναι δύο μεγέθη του ίδιου είδους, δηλαδή δύο επιφάνειες ή δύο χρονικά διαστήματα, και το $A < B$, τότε είναι πάντα εφικτό να βρεθεί θετικός ακέραιος n, ώστε $nA > B$, γνωστή και σαν ιδιότητα Αρχιμήδους - Ευδόξου, ή σαν αξίωμα της συνέχειας. Γεννιέται το ερώτημα: Γιατί έθεσε αυτόν τον ορισμό; Πιθανότατα να ήθελε να αποφύγει τα απειροστά, αλλά μπορεί και να τον διευκόλυνε. Αν π.χ. έχουμε δύο επίπεδα σχήματα των οποίων τα εμβαδά δεν βρίσκονται σε αντιστοιχία με αριθμούς, θα τον εξυπηρετούσε να γνωρίζει αν m φορές το ένα θα ξεπερνούσε το εμβαδόν του άλλου.²⁴

Ο ορισμός ε' με σημερινή γραφή διατυπώνεται ως εξής: Για δύο ζεύγη ομοειδών μεγεθών A, B και Γ, Δ ισχύει $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ μόνο αν για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς μ, ν, ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

$$(i) \mu A > \nu B, \text{ και } \mu \Gamma > \nu \Delta, \text{ ή, } \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} > \frac{A}{B} \right\} = \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} > \frac{\Gamma}{\Delta} \right\}$$

$$(ii) \mu A = \nu B, \text{ και } \mu \Gamma = \nu \Delta, \text{ ή, } \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} = \frac{A}{B} \right\} = \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} = \frac{\Gamma}{\Delta} \right\}$$

$$(iii) \mu A < \nu B, \text{ και } \mu \Gamma < \nu \Delta, \text{ ή, } \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} < \frac{A}{B} \right\} = \left\{ \frac{\nu}{\mu} : \frac{\nu}{\mu} < \frac{\Gamma}{\Delta} \right\}$$

που δεν είναι τίποτε άλλο, παρά οι τομές Dedekind. Η έννοια του συνεχούς εισάγεται από τον Ευδόξο τον 4^ο π.Χ. αιώνα και πάνω στις ιδέες του θα στηριχτεί ο R. Dedekind, προκειμένου να ορίσει το σύστημα των πραγματικών αριθμών, δύο

²⁴ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ.62.

χιλιάδες χρόνια αργότερα²⁵. Έτσι λοιπόν τώρα, προτάσεις ή θεωρήματα που είχαν αποδειχθεί μόνο για σύμμετρα μεγέθη, αποδεικνύονται και για ασύμμετρα.

Με αφορμή ένα από τα φημισμένα προβλήματα της εποχής εκείνης, τον τετραγωνισμό του κύκλου, ο Αθηναίος σοφιστής Αντιφών εμπνεύστηκε μια εμβρυϊκή μορφή της αρχής της εξάντλησης, αφού προσπάθησε να καλύψει το εμβαδόν του κύκλου με εγγεγραμμένα πολύγωνα, των οποίων ο αριθμός των πλευρών συνεχώς διπλασιάζεται. Ο Αντιφών πίστευε ότι αν συνέχιζε με αυτόν τον τρόπο, ο κύκλος κάποια στιγμή θα καλυπτόταν από ένα πολύγωνο με πλευρές απειροστού μήκους, οι οποίες θα συνέπιπταν με την περιφέρεια του κύκλου. Τελικά, γνωρίζοντας ότι κάθε πολύγωνο ισοδυναμεί με τετράγωνο, θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι ήταν δυνατή η κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δοσμένο κύκλο. Κατά τον T.Heath²⁶, ο Αντιφών «γέννησε» την ιδέα της «εξάντλησης» μιας επιφάνειας από μια ακολουθία εγγεγραμμένων σε αυτήν πολυγώνων, μια ιδέα που ανέπτυξε ο Εύδοξος και τη χρησιμοποίησε για να θεμελιώσει τη μέθοδο της εξάντλησης. Η μέθοδος της εξάντλησης αποτελεί μια εφαρμογή της αρχής της συνέχειας, και είναι μέγιστης σημασίας για την γένεση των απείρων διαδικασιών.

Πρόταση 1(X βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη)

«Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐάν ἀπό τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τό ἥμισυ, καί τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τό ἥμισυ καί τοῦτο αἰεί γίγνηται, λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους».

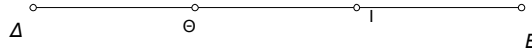
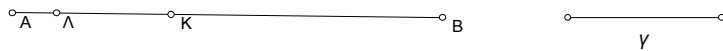
(Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο του μισού του, και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτό γίνεται πάντα, τελικά θα απομείνει κάποιο μέγεθος που θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους).

Απόδειξη.

Έστω τα μεγέθη AB και γ με $AB > \gamma$. Τότε υπάρχει φυσικός με τον οποίο αν πολλαπλασιάσουμε το γ θα προκύψει μέγεθος μεγαλύτερο του AB. (ορισμός δ' του Ευδόξου) Έστω ΔΕ το πολλαπλάσιο του γ που είναι μεγαλύτερο του AB, και ας είναι $\Delta\Theta = \Theta I = IE = \gamma$. Αφαιρούμε από το AB μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, το ΒΚ και από το υπόλοιπο ΑΚ αφαιρούμε μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του το ΑΚ.

²⁵ Σ. Νεγρεπόντης, παραδόσεις μαθημάτων αρχαίων ελληνικών μαθηματικών.

²⁶ T. Heath, The history of Greek mathematics.



Συνεχίζουμε τη διαδικασία έως ότου οι υποδιαίρεσεις του AB γίνουν ίσες με τις υποδιαίρεσεις του ΔE . Επειδή $IE < \Delta E/2$ ενώ $KB > AB/2$ και $\Delta E > AB$ για τα εναπομένοντα ΔI και AK θα ισχύει $\Delta I > AK$. Με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε ότι $\Theta\Delta > \Lambda A$ και άρα $\gamma > \Lambda A$.

Ο Εύδοξος με την παραπάνω αρχή, μπόρεσε να αποφύγει το πέρασμα στο όριο. Η περιγραφή όμως της διαδικασίας με σύγχρονη ορολογία οδηγεί στο όριο μιας ακολουθίας μερικών αθροισμάτων. Ο Εύδοξος και οι μεταγενέστεροι Έλληνες μαθηματικοί ποτέ δεν θεώρησαν ότι η διαδικασία στη μέθοδο της εξάντλησης συνεχιζόταν επ' άπειρον μέχρις ότου να εξαντληθεί το αρχικό μέγεθος, αλλά πάντα υπήρχε μια ποσότητα που απέμενε και η οποία μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή επιθυμούσαν. Η μέθοδος είχε βέβαια το μειονέκτημα, ότι για να αποδειχθεί κάποιο αποτέλεσμα έπρεπε να είναι εκ των προτέρων γνωστό, μοιάζοντας έτσι με την μαθηματική επαγωγή. Μπορεί όμως να ισχυριστεί κανείς ότι η μέθοδος της εξάντλησης εισήγαγε για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών την ιδέα του ορίου.²⁷

Σύγχρονος του Ευδόξου ήταν ο Πλάτων (427 – 347 π.Χ.), μαθητής του Ευδόξου στα μαθηματικά, ενώ ο Εύδοξος με τη σειρά του υπήρξε, όπως μας πληροφορεί ο Πρόκλος, μαθητής του Πλάτωνα στη φιλοσοφία. Ο Πλάτων πίστευε στην απόκτηση της τέλει γνώσης των μαθηματικών, πριν από τη μύηση στη φιλοσοφία, γιατί με αυτά μαθαίνει κανείς να εξασκείται στη διαλεκτική, που ήταν κατά τον φιλόσοφο το μέσον για την κατανόηση της αληθινής ουσίας των όντων. Ιδρύει την Ακαδημία, όπου η γεωμετρία μαζί με την αστρονομία βρίσκονται στο επίκεντρο της μελέτης. Ο Πλάτων εκδήλωσε ζωνφό ενδιαφέρον για τα προβλήματα της γεωμετρίας δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στις αρχές της, στις υποθέσεις και στις αποδεικτικές μεθόδους. Η τυποποίηση της αναλυτικής μεθόδου αποδίδεται σ' αυτόν. Στους διαλόγους του ασχολήθηκε με το πυθαγόρειο πρόβλημα της φύσης των αριθμών και της σχέσης τους με την γεωμετρία. Μελέτησε επίσης τη δυσκολία της αδυναμίας για σύγκριση

²⁷C.B. Boyer, The history of the calculus and its conceptual development, p. 26

ασυμμέτρων μεγεθών, τα παράδοξα του Ζήνωνα, το δημοκρίτειο πρόβλημα των αδιαιρέτων, καθώς και της φύσης του συνεχούς. Γι' αυτούς τους λόγους θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι ο Πλάτων διαπραγματεύτηκε τις δυσκολίες και τα προβλήματα εκείνα που οδήγησαν τελικά στον απειροστικό λογισμό.

Όπως θα δούμε, ωστόσο, ο απειροστικός λογισμός ήταν το αποτέλεσμα μιας μακράς και επίπονης εξάσκησης της μαθηματικής σκέψης, που αναπτύχθηκε αργά και με πολλή δυσκολία από πολλούς σκεπτόμενους ανθρώπους.²⁸

Την ίδια περίοδο ο Αριστοτέλης (384 – 322 π.Χ.) ιδρύει στην Αθήνα τη δική του φιλοσοφική σχολή, την Περιπατητική, που μαζί με την Ακαδημία του Πλάτωνα καθιστούν την Αθήνα το κέντρο της πνευματικής ζωής του τότε ελληνόφωνου κόσμου. Με αφορμή τα παράδοξα του Ζήνωνα, ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε με την έννοια του απείρου το οποίο και ορίζει σαν κάτι που δεν μπορούμε να ξεπεράσουμε. Δεν είναι μέγεθος ούτε πλήθος, αλλά κάτι το αδιαίρετο. Το διακρίνει σε εν ενεργεία και εν δυνάμει άπειρο ενώ απορρίπτει τα παράδοξα του Ζήνωνα ισχυριζόμενος, όπως είδαμε πιο πάνω, ότι κάποιος που κινείται δεν μπορεί παρά να έχει συνείδηση της παρουσίας του μόνο σε πεπερασμένα πολλές θέσεις της διαδρομής.

3.3.4. Ο Αρχιμήδης.

Εκατό χρόνια αργότερα εμφανίζεται ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, (287 – 212 π.Χ.), ο οποίος με το έργο του θέτει τα στέρεα θεμέλια του ολοκληρωτικού λογισμού, πάνω στα οποία έκτισαν το λαμπρό αυτό οικοδόμημα των μαθηματικών οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί αρκετούς αιώνες αργότερα. Η ανάλυση και η μελέτη του έργου του τον κατατάσσει δίκαια μεταξύ των μεγαλύτερων μαθηματικών όλων των εποχών. Ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε με τον υπολογισμό εμβαδών επιπέδων σχημάτων καθώς και όγκων στερεών σωμάτων. Προσδιόρισε το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου και της σπείρας, την επιφάνεια και τον όγκο της σφαίρας, τον όγκο τμημάτων στερεών εκ περιστροφής και το κέντρο βάρους επιπέδων σχημάτων και στερεών εκ περιστροφής. Στην εργασία του « κύκλου μέτρησις », προκειμένου να υπολογίσει το εμβαδόν του

²⁸ C.B. Boyer , The history of the calculus and its conceptual development , p. 26.

κύκλου, ο Αρχιμήδης απέδειξε πρώτα τη διπλή ανισότητα,
 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \Leftrightarrow 3,1408... < \pi < 3,1428...$ Για την απόδειξή της εγγράφει και

περιγράφει σε κύκλο με ακτίνα τη μονάδα κανονικά εξάγωνα και στη συνέχεια αυξάνει το πλήθος των πλευρών τους σε 12, 24, 48 και 96 αντίστοιχα. Τέλος, οδηγείται στο συμπέρασμα ότι το μήκος της περιφέρειας του κύκλου προσδιορίζεται από την παραπάνω διπλή ανισότητα. Αυτή είναι και η πρώτη ιστορικά καταγεγραμμένη προσπάθεια υπολογισμού της τιμής του π . Από τη στιγμή που η μέθοδος έγινε γνωστή, ήταν απλώς θέμα υπομονής και επιδεξιότητας στους υπολογισμούς να βρεθεί η τιμή του με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια επιθυμούσε κανείς. Πάντως, η τιμή $\pi = 3\frac{1}{7} = 3,142857$ που εξάγει ο Αρχιμήδης χρησιμοποιώντας

κανονικό 96-γωνο, παραμένει έως σήμερα η συνήθης προσέγγιση του π για τους υπολογισμούς.²⁹ Κατόπιν, ο Αρχιμήδης υπολογίζει το εμβαδόν του κύκλου κάνοντας χρήση της μεθόδου της εξάντλησης, προκειμένου να συγκρίνει ευθύγραμμα τμήματα με καμπυλόγραμμα. Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος υπολογίζεται από τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων, τα οποία προσεγγίζουν αυτό της καμπύλης επιφάνειας, καθώς το πλήθος των πλευρών τους ολοένα και αυξάνεται. Έτσι, απέδειξε ότι:

« πᾶς κύκλος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ οὕτῳ ἢ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μια τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἢ δὲ περιμέτρος τῇ βάσει »

(το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει κάθετες πλευρές, το μήκος της περιφέρειας και την ακτίνα του κύκλου).

Η τεχνική που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης, στην ουσία είναι η ίδια που χρησιμοποιείται σήμερα για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου. Σε σύγχρονη ορολογία το εμβαδόν E του κύκλου είναι το κοινό όριο των ακολουθιών (E_n) και (e_n) , των εμβαδών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων αντίστοιχα, καθώς το πλήθος των πλευρών τους αυξάνεται απερίοριστα. Ο φόβος των απείρων διαδικασιών και τα παράδοξα του Ζήνωνα, ίσως να εμπόδισαν τον μεγάλο αυτό μαθηματικό, να αναπτύξει την έννοια του ορίου. Η έννοια όμως αυτή, υποβόσκει μέσα στη διαδικασία της μεθόδου της εξάντλησης.³⁰

²⁹ Γ. Χριστιανίδης, θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 136.

³⁰ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 86.

Σύμφωνα πάντως με τον van der Waerden,³¹ από τον τρόπο που αποδεικνύει αυστηρά το εμβαδόν παραβολικού χωρίου γίνεται φανερό ότι ο Αρχιμήδης γνωρίζει την έννοια του ορίου. Κατά την διάρκεια των υπολογισμών εμφανίζεται το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{4}$. Αν και δεν κάνει λόγο για άθροισμα άπειρης γεωμετρικής προόδου, ωστόσο κατέχει την έννοια. Πράγματι, η σύγχρονη έννοια «άθροισμα απείρων όρων» δεν είναι τίποτε άλλο παρά το όριο ενός πεπερασμένου αθροίσματος, δηλαδή ένας αριθμός που διαφέρει από αυτό το πεπερασμένο άθροισμα λιγότερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε , αρκεί να παίρνουμε πλήθος προσθετέων κατάλληλα μεγάλο. Ο Αρχιμήδης αποδεικνύει και διατυπώνει με μεγάλη σαφήνεια ότι το παραβολικό χωρίο, αν και μεγαλύτερο από κάθε μερικό άθροισμα της γεωμετρικής προόδου που προκύπτει από την άθροιση των εμβαδών των τριγώνων, διαφέρει από αυτό το άθροισμα λιγότερο από οποιαδήποτε δεδομένη επιφάνεια, οσοδήποτε μικρή κι αν είναι αυτή. Κατόπιν αυτού, είναι ζήτημα καθαρά διαδικαστικό για τον πολύ επιδέξιο στους υπολογισμούς και στη χρήση ανισοτήτων Αρχιμήδη, να τεκμηριώσει ότι το παραβολικό χωρίο είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του αρχικώς εγγεγραμμένου στο χωρίο τριγώνου. Ο van der Waerden καταλήγει χαρακτηριστικά:

« Όλα αυτά περιέχονται στον Αρχιμήδη διατυπωμένα ουσιαστικά με τα ίδια λόγια. Αυτό δείχνει ότι οι αποκλίσεις, οι οποίες εμφανίζονται στην άθροιση απείρων σειρών και στις πράξεις με όρια, τα "επιλοντικά", όπως αποκαλούνται μερικές φορές οι υπολογισμοί με οσοδήποτε μικρά ε , ήταν για τον Αρχιμήδη σαν ανοικτό βιβλίο. Από αυτή την άποψη, η σκέψη του είναι τελείως σύγχρονη.»

Στην πραγματεία του « Περί κωνοειδών και σφαιροειδών », ο Αρχιμήδης υπολογίζει όγκους στερεών χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο "εγκλεισμού" που χρησιμοποίησε ο Riemann για να δώσει τον αυστηρό ορισμό του ολοκληρώματος. Δείχνει έτσι, μεγάλη εξοικείωση με αυτή την οριακή διαδικασία. Δεν θα μπορούσαμε να πούμε, ωστόσο, ότι κατάλαβε πως το θεμέλιο όλων αυτών των γεωμετρικών ερμηνειών που έδινε στους υπολογισμούς όγκων και εμβαδών, ήταν μία και μόνο έννοια. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι στον τετραγωνισμό της παραβολής από τη μια και στον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας και του σφαιροειδούς από την άλλη, οι αυστηρές αποδείξεις του βασίζονται σε τελείως διαφορετικές μεθόδους, παρόλο

³¹ B.L. van der Waerden , η αφύπνιση της επιστήμης , σελ.257.

που και οι δύο οδηγούν στο ίδιο ολοκλήρωμα: $\int_0^a x(a-x)dx$, πράγμα που σημαίνει ότι

κάθε μέθοδος που είναι αποτελεσματική για ένα από αυτά τα προβλήματα, θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί και για το άλλο. Παρ' όλα αυτά, ο τρόπος και η αυστηρότητα του υπολογισμού των εμβαδών και των όγκων καθιστούν δικαιωματικά τον Αρχιμήδη προάγγελο του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού.³²

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στο μεγάλο μαθηματικό, θα αναφερθούμε στην "ευρετική" του μέθοδο, τον τρόπο δηλαδή, που ανακάλυπτε τα αποτελέσματα, τα οποία κατόπιν απεδείκνυε αυστηρά με τη μέθοδο της εξάντλησης. Μέχρι περίπου εκατό χρόνια πριν, υπήρχε η εντύπωση ότι ο Αρχιμήδης, όπως και πολλοί μαθηματικοί της αρχαιότητας, απέκρυπτε τους τρόπους ή την αναλυτική σκέψη, μέσω των οποίων οδηγούνταν στα αποτελέσματά του και παρέθετε μόνο την συνθετική διαδικασία, με την οποία αυτά αποδεικνύονταν αυστηρά. Αυτό είχε αναγκάσει τον Wallis να δηλώσει ότι « δίνει την εντύπωση πως έχει σκοπό να καλύψει όλα τα ίχνη των ερευνών του, σαν να είναι απρόθυμος να αποδώσει στην αιωνιότητα τα μυστικά της μεθόδου του, ενώ συγχρόνως επιθυμεί να αποσπάσει από αυτήν την επιδοκιμασία για τα αποτελέσματά του ».³³

Η ανακάλυψη όμως και η εν συνεχεία ανάγνωση από τον Heiberg, το 1906, του παλίμψηστου κώδικα της Κωνσταντινούπολης, διευρύνει τις γνώσεις μας για το έργο του Αρχιμήδη. Σ' αυτόν περιείχοντο τα δύο βιβλία του έργου του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», ολόκληρο το βιβλίο «Περί έλικων», τμήματα από τα έργα «κύκλου μέτρησις» και « [περί] ίσορροπιών [των] επιπέδων », τμήματα από το βιβλίο «[περί] όχουμένων », τα οποία μέχρι τότε ήταν γνωστά από λατινικές μεταφράσεις τους, καθώς και η μέχρι τότε άγνωστη «ἀρχή τοῦ στομαχίου ». Το σπουδαιότερο όμως εύρημα που ήρθε στο φώς με το παλίμψηστο της Κωνσταντινούπολης, ήταν η πραγματεία του «Περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἑρατοσθένην ἔφοδος». Το σύγγραμμά του αυτό είναι αφιερωμένο αποκλειστικά, στις ευρετικές μεθόδους που χρησιμοποίησε προκειμένου να οδηγηθεί στα αποτελέσματά του, τα οποία σε άλλες πραγματείες του αποδεικνύει με αυστηρό τρόπο. Ένα τυπικό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου, είναι η εύρεση του εμβαδού παραβολικού χωρίου. Θεωρεί το χωρίο ως

³² B.L. van der Waerden , η αφύπνιση της επιστήμης , σελ.265.

³³ Σ. Νεγρεπόντης-Σ. Γιωτόπουλος-Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός λογισμός, τόμος Ι

συγκείμενο από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από ορισμένη διεύθυνση και έχουν τα άκρα τους στη περιφέρεια του σχήματος. Κατόπιν υποθέτει τη νοητή αποδόμησή του σε μια απειρία τέτοιων παραλλήλων τμημάτων με στόχο την αναδόμησή του από αυτά. Το «άθροισμα» όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων, δίνει την επιφάνεια του σχήματος.³⁴ Έτσι καταλήγει στην παρακάτω πρόταση:

«Έστω το τμήμα $AB\Gamma$, το περιεχόμενο υπό της ευθείας $ΑΓ$ και της παραβολής $AB\Gamma$. Ας τμηθεί η $ΑΓ$ στο μέσον, στο [σημείο] Δ , ας αχθεί η ΔBE παράλληλη προς την διάμετρο και ας αχθούν οι AB και $B\Gamma$. Λέγω, ότι το τμήμα $AB\Gamma$ είναι ένα και ένα τρίτο του τριγώνου $AB\Gamma$ »

Ο Αρχιμήδης όμως, δεν αναγνωρίζει το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε με την εφαρμογή αυτής της μεθόδου ως έγκυρο και αυστηρά αποδεδειγμένο. Θεωρεί ότι η μέθοδος είναι απλώς ευρετική. Αποσκοπεί στην ανακάλυψη και μόνο, του αποτελέσματος. Δεν αρκεί δηλαδή, για να πείσει τον αναγνώστη, ότι το θεώρημα είναι αληθές. Γι' αυτό σε μια άλλη πραγματεία του με τίτλο «Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής» επανέρχεται στο ίδιο θεώρημα και δίνει δύο αυστηρά τεκμηριωμένες αποδείξεις, τη μία μηχανική και την άλλη γεωμετρική. Το ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: «Γιατί ο Αρχιμήδης θεωρεί ότι η περιγραφείσα ευρετική μέθοδος, δεν είναι επαρκής, για να θεωρηθεί το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε, έγκυρο και αυστηρά αποδεδειγμένο; Υπάρχει μήπως κάποιο έλλειμμα μαθηματικής αυστηρότητας στη μέθοδο αυτή και αν ναι που εντοπίζεται;» Στα ερωτήματα αυτά υπάρχει η εξής άποψη:³⁵

«Η χρήση επιχειρημάτων από τη Μηχανική δεν δημιουργεί απολύτως κανένα πρόβλημα. Μη ξεχνάμε άλλωστε, ότι την επιστήμη αυτή την έχει θεμελιώσει ο ίδιος στα δύο βιβλία των "μηχανικών". Εξ' άλλου η μία από τις δύο αποδείξεις που δίνει για τον τετραγωνισμό της παραβολής, είναι "μηχανικού" χαρακτήρα. Θεωρεί, όπως είπαμε, ότι ένα επίπεδο σχήμα δομείται από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται με ορισμένη διεύθυνση και έχουν τα άκρα τους στη περιφέρεια του σχήματος. Τότε το σχήμα μπορεί να αποδομηθεί σε τέτοιες παράλληλες χορδές και να δομηθεί εκ νέου από αυτές. Το «άθροισμα» των ευθυγράμμων τμημάτων δίνει την επιφάνεια του σχήματος. Καλούμε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα «αδιαίρετα». [Η αντίληψη αυτή επεκτείνεται και στην

³⁴ Γ. Χριστιανίδης, θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 93.

³⁵ Γ. Χριστιανίδης, θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 140.

περίπτωση των σχημάτων του χώρου, τα οποία είναι δυνατόν να αποδομηθούν σε παράλληλες επίπεδες τομές]. Αν τώρα, ληφθούν υπ' όψιν τα δύο είδη επιχειρημάτων, που χρησιμοποιούνται στη συλλογιστική που αναπτύσσει ο Αρχιμήδης κατά την εφαρμογή της μεθόδου, προκύπτει αβίαστα το συμπέρασμα, ότι η έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στη χρήση των αδιαιρέτων. Το γιατί, το εξηγεί ο Dijksterhuis ως εξής: "Εδώ ο Αρχιμήδης θίγει ένα θέμα το οποίο κατά τους αιώνες που προηγήθηκαν έδωσε, περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο θέμα στα ελληνικά μαθηματικά, αφορμή για βίαιη διαμάχη. Επρόκειτο για το θεμελιώδες ερώτημα του ατομισμού ή της συνέχειας, για το οποίο, αν και η προέλευσή του είναι από τη φυσική, οι απόψεις διίσταντο επίσης και μεταξύ των μαθηματικών, και το οποίο εκφράζεται με τον καλύτερο τρόπο στην απορία η οποία βασάνιζε τον Δημόκριτο: αν οι κυκλικές τομές, οι παράλληλες προς τη βάση, που χαράσσονται σε έναν κώνο είναι ίσες, τότε πως είναι δυνατόν ο κώνος να διαφέρει από έναν κύλινδρο; Και εάν γίνονται μικρότερες όσο προχωρούμε προς την κορυφή, τότε η καμπύλη επιφάνεια, η οποία πρέπει να είναι λεία, δεν είναι βαθμοειδής;" Πράγματι, η αποδόμηση ενός επιπέδου σχήματος σε αδιαίρετα, [ή ενός στερεού σε παράλληλες επίπεδες τομές], και η εν συνεχεία αναδόμησή του από όλα αυτά, δίνει αφορμή να εμφανιστεί αμέσως ένα παράδοξο. Συγκεκριμένα, για να μπορεί να εφαρμοστεί η συνθήκη ισορροπίας του ζυγού, οι γραμμές στις οποίες αποδομείται το επίπεδο σχήμα πρέπει, προφανώς, να έχουν βάρος. Αν θεωρηθεί όμως, ότι το εκάστοτε σχήμα συγκροτείται από άπειρες γραμμές, κάθε γραμμή πρέπει να έχει μηδενικό πάχος, και άρα μηδενικό βάρος. Διαφορετικά, αν δηλαδή το πάχος των γραμμών δεν ήταν μηδενικό, το καμπύλο τμήμα της περιφέρειας του παραβολικού χωρίου, δεν θα ήταν στην πραγματικότητα καμπύλο αλλά βαθμοειδές. Αυτό είναι το μαθηματικό παράδοξο που εμφωλεύει στην περιγραφείσα μέθοδο. Ο Αρχιμήδης έχει πλήρη επίγνωση του προβλήματος αυτού και γι' αυτό θεωρεί ότι η μέθοδος, δεν είναι στέρα θεμελιωμένη από μαθηματικής απόψεως και, επομένως, δεν μπορεί να εκληφθεί ως αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος. Η μέθοδος είναι γι' αυτόν μόνο ευρετική.»

Παρά το σαφές του παραδόξου, ο Αρχιμήδης, μέσα από το έργο του «Περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἑρατοσθένην ἔφοδος» μας αποκαλύπτει ότι στην πραγματικότητα ακολουθούσε μια μέθοδο απειροστικού τύπου, όμοια με εκείνη των αδιαιρέτων την οποία ανακάλυψε 2000 χρόνια αργότερα ο Cavalieri. Έτσι ο

Αρχιμήδης ανεπιφύλακτα μπορεί να θεωρηθεί ο πρόδρομος του ολοκληρωτικού λογισμού.³⁶

Τέλος αξίζει να αναφερθούμε στα τελευταία αποτελέσματα από τις συνεχιζόμενες προσπάθειες για την ανάγνωση του παλίμψηστου κώδικα της Κωνσταντινούπολης, με τις πιο σύγχρονες τεχνικές. Από τα κομμάτια του κειμένου που δεν μπόρεσε να διαβάσει, κατά την ανακάλυψή του ο Heiberg και κυρίως των διαγραμμάτων τα οποία αναγνώσθηκαν, αποκαλύπτεται ένας Αρχιμήδης, ο οποίος ενδιαφερόταν περισσότερο για τους μαθηματικούς συλλογισμούς που η γεωμετρία του έδινε την αφορμή να αναπτύξει, παρά για τα φυσικά γνωρίσματα και την ποιοτική συμπεριφορά των αντικειμένων που μελετούσε. Ένας Αρχιμήδης ο οποίος δεν είναι τόσο ο εφευρέτης ή ο μηχανικός που προσπαθεί να θέσει στην υπηρεσία του τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου, αλλά ο θεωρητικός μαθηματικός, που ενδιαφέρεται κυρίως για τις αφηρημένες έννοιες του κόσμου των μαθηματικών και της μαθηματικής φυσικής. Το ότι η γνώση της συμπεριφοράς των πραγματικών αντικειμένων του φυσικού κόσμου, περνάει μέσα από τη μελέτη της συμπεριφοράς των αφηρημένων αντικειμένων του κόσμου των μαθηματικών είναι, ίσως, η μεγαλύτερη προσφορά της επιστήμης στον άνθρωπο και συνάμα το πιο συναρπαστικό και το πιο μαγευτικό στοιχείο της ανθρώπινης δραστηριότητας. Την κατανόηση αυτής της αλήθειας, φαίνεται σήμερα ότι την οφείλουμε στον Αρχιμήδη.³⁷

Σύγχρονος του Αρχιμήδη ήταν ο σπουδαίος μαθηματικός Απολλώνιος (262 – 180 π.Χ.), ο οποίος, κατά τον Ευτόκιο, γενίκευσε και επέκτεινε την ήδη υπάρχουσα θεωρία των κωνικών τομών. Ο Απολλώνιος ήταν η τελευταία μεγάλη μορφή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Από το χρονικό αυτό σημείο αρχίζει μια φθίνουσα πορεία στην παραγωγή νέων ιδεών και η επιστημονική δραστηριότητα περιορίζεται στη συγγραφή σχολιαστικών υπομνημάτων και εξηγήσεων στα μεγάλα έργα του παρελθόντος, τα οποία συνοψίζονται και ανθολογούνται, για να περάσουν αργότερα στους Άραβες και μέσω αυτών, στη Δυτική Ευρώπη. Σ' αυτή τη φθίνουσα πορεία των ελληνικών επιστημών συνέβαλλαν τα εξής:

- Οι σημαντικές πολιτικές, κοινωνικές και οικονομικές αλλαγές που είχαν συντελεστεί στον ευρύτερο ελληνιστικό κόσμο, ο οποίος βρισκόταν πλέον υπό Ρωμαϊκή κατοχή.

³⁶ Σ. Νεγρεπόντης-Σ. Γιωτόπουλος-Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός λογισμός, τόμος

³⁷ Γ. Χριστιανίδης, θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 154.

- Η διακοπή της προφορικής παράδοσης της αρχαίας επιστήμης.
- Το ιδεολογικό υπόβαθρο φιλοσοφικών και θρησκευτικών κινήματων όπως του νεοπλατωνισμού και του χριστιανισμού.³⁸

Ο τελευταίος εκπρόσωπος των μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας ήταν ο Διόφαντος. Πιθανολογείται ότι έζησε τον 3^ο μ.Χ. αιώνα και στο πιο σημαντικό έργο του, « τα αριθμητικά », θέτει τις βάσεις της σημερινής άλγεβρας, που είναι ο κλάδος εκείνος των μαθηματικών, χωρίς την ύπαρξη του οποίου, ο απειροστικός λογισμός δεν θα μπορούσε να αναπτυχθεί. Στο έργο αυτό που αποτελείται από δέκα τρία βιβλία, εκ των οποίων σώζονται τα δέκα, ο Διόφαντος εισάγει μια ειδική ορολογία και μια σειρά από συντομογραφίες για την παράσταση των διαδοχικών δυνάμεων του αγνώστου. Το κρίσιμο σημείο, όμως, είναι ότι εισήγαγε τις συντομογραφίες αυτές στο λογιστικό μέρος της επιλυτικής διαδικασίας των προβλημάτων. Κάνει δηλαδή υπολογισμούς με τον άγνωστο και το στοιχείο αυτό είναι, που προσδίδει στο έργο του αλγεβρικό χαρακτήρα.

Η επίδραση που άσκησε το έργο αυτό στη γέννηση των νεώτερων μαθηματικών από τον Fr. Viète, τον R. Descartes, τον P. Fermat και τους άλλους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα, είναι πολύ μεγάλη, και θα μπορούσαμε να την συνοψίσουμε επαναλαμβάνοντας τα ακόλουθα λόγια του Γερμανού ιστορικού των μαθηματικών Jacob Klein (1899 – 1978): *“Η νεότερη άλγεβρα και ο νεότερος φορμαλισμός, αναπτύχθηκαν από την άμεση ενασχόληση του Viète με τον Διόφαντο. Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς απλώς επεξεργάστηκαν περεταιίρω και λεπτομερέστερα το έργο του”*³⁹

3.4. Τα μαθηματικά από τον Αρχιμήδη και μέχρι τον 19^ο αιώνα.

3.4.1 Τα μαθηματικά στο μεσαίωνα.

Περί το 1100 με 1200 μ.Χ. γίνεται ο μεγαλύτερος αριθμός μεταφράσεων των ελληνικών και αραβικών μαθηματικών στη λατινική γλώσσα, και έτσι ανακτάται όλη η παράδοση της ελληνικής και αραβικής επιστήμης. Κατ’ αυτόν τον τρόπο οι

³⁸ -----//----- , θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 104.

³⁹ Γ. Χριστιανίδης , θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, σελ. 108.

διανοούμενοι της Δύσης, ήρθαν σε επαφή με την ευκλείδεια γεωμετρία, την σκέψη του Αρχιμήδη και την αραβική άλγεβρα, η μελέτη των οποίων έδωσε ώθηση σε σκέψεις και συζητήσεις γύρω από την έννοια του απείρου, τη φύση του συνεχούς και την ύπαρξη των αδιαιρέτων. Ο Αριστοτέλης, από τη μια προσέφερε ένα συμπαγές λογικό σύστημα επιστημονικής σκέψης, από την άλλη όμως, άρχισε δειλά-δειλά να αμφισβητείται. Οι έρευνες για το άπειρο και για προβλήματα που αφορούσαν τη κίνηση, θα θέσουν τις λογικές βάσεις του απειροστικού λογισμού και οι διαλογισμοί πάνω σε αυτά τα θέματα, παρ' ότι ήσαν περισσότερο φιλοσοφικού παρά μαθηματικού περιεχομένου, θα ασκήσουν αργότερα μεγάλη επίδραση στους διανοητές του. Την εποχή αυτή και λίγο αργότερα, η κίνηση παύει σιγά-σιγά να είναι αντικείμενο φιλοσοφικής ενασχόλησης, και γίνεται αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας. Οι έννοιες της ταχύτητας, του χρόνου, του διαστήματος καθώς και της στιγμιαίας ταχύτητας, άρχισαν να απασχολούν τους επιστήμονες, και έτσι ανατέλλει ο κλάδος της κινηματικής. Οι ερευνητές του κολλεγίου Merton της Οξφόρδης, στην προσπάθειά τους να ορίσουν την στιγμιαία ταχύτητα, και ελλείψει της έννοιας του ορίου, την όρισαν με τη βοήθεια της ομοιόμορφης ταχύτητας. Απέδειξαν λοιπόν, ένα από τα σημαντικότερα μεσαιωνικά αποτελέσματα, τον « κανόνα της μέσης ταχύτητας του Merton ».⁴⁰

« Μια ομαλά επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη κίνηση, είναι ισοδύναμη όσον αφορά το διάστημα που διανύεται σε δοθέντα χρόνο, με μια ομαλή κίνηση στην οποία η ταχύτητα είναι ίση καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον του χρόνου της ομαλά επιταχυνόμενης ή επιβραδυνόμενης κίνησης ».

Μια από τις σπουδαιότερες μορφές της εποχής αυτής, είναι ο διακεκριμένος σχολαστικός Nicole Oresme (1320 – 1382 μ.Χ.), στου οποίου τις εργασίες, «ερωτήσεις για τη γεωμετρία του Ευκλείδη» και «Πραγματείες για το σχηματισμό των ποιοτήτων και των κινήσεων», ανιχνεύει κανείς την αρχή της σύγχρονης έννοιας του γραφήματος, ενώ γενικά, θεωρείται ο πρόδρομος της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Δέχτηκε την επίδραση των πυθαγορείων και των πλατωνιστών, αλλά προχώρησε ακόμη παραπέρα και εισήγαγε την ιδέα της κίνησης στη γεωμετρία. Έτσι θεώρησε τη γραμμή να παράγεται από τη κίνηση ενός σημείου και όχι ως άθροισμα σημείων, την επιφάνεια να παράγεται από τη ροή ή τη κίνηση μιας γραμμής παράλληλης προς τον εαυτό της και όχι ως άθροισμα γραμμών. Ήταν ιδέες που θα επιδράσουν αργότερα

⁴⁰ E. Grant, οι φυσικές επιστήμες το μεσαίωνα.

τόσο στον Γαλιλαίο, όσο και στον Cavalieri, το δημιουργό της θεωρίας των αδιαιρέτων. Υπολόγισε με τη γεωμετρική του μέθοδο το άπειρο άθροισμα $1/2+2/4+3/8+\dots+n/2^n+\dots$, παρασυρόμενος από τη γενικότερη τάση ενασχόλησης με τις άπειρες διαδικασίες την εποχή του μεσαίωνα, κυρίως από τη πλευρά των ερευνητών του κολλεγίου του Merton. Η αποδοχή των άπειρων διαδικασιών την εποχή του μεσαίωνα ήταν, σύμφωνα με τον Edwards,⁴¹ μέγιστης σημασίας, γιατί προετοίμασε το δρόμο για πιο ενδιαφέρουσες εργασίες στις σειρές, το 17^ο αιώνα, όταν πλέον οι μαθηματικοί είχαν στη διάθεσή τους την αριθμητική και τις απαιτούμενες αλγεβρικές μεθόδους.

3.4.2. Οι προπομποί της ανακάλυψης του απειροστικού λογισμού.

Έτσι φτάνουμε στα τέλη του 15^{ου} αιώνα, όπου σημειώνεται μια νέα άνθηση στην άλγεβρα και στην υπολογιστική αριθμητική. Οι ευρωπαίοι μαθηματικοί εξοικειώνονται και πάλι με τα ελληνικά μαθηματικά, μαθαίνουν την αραβική άλγεβρα, συνθέτουν τις δύο παραδόσεις και η σύνθεση αυτή είχε ως αποτέλεσμα μια νέα ώθηση στα μαθηματικά. Ο Francois Viète (1540 – 1603), γύρω στα 1580, εισήγαγε τη χρήση των συμβόλων “+” και “-”, επινόησε το σύμβολο a^2 για το $a \cdot a$ και ενοποίησε αλγεβρικές και γεωμετρικές μεθόδους, εμπνευσθείς από τις προσπάθειες να εγκαταλειφθεί η αποδεικτική μέθοδος των αρχαίων ελλήνων και να εισαχθεί η ελεύθερη χρήση των απειροστών, για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων.

Ο Φλαμανδός Simon Stevin (1548 – 1620), είναι ο σπουδαιότερος από τους μελετητές του Αρχιμήδη αυτήν την εποχή. Στην εργασία του «*The elements of the Arts of weighing*» (1586), απέδειξε προτάσεις σχετικές με το κέντρο βάρους τριγώνου, όπου εκτός από τη μέθοδο της εξάντλησης, χρησιμοποιεί για πρώτη φορά μια “οριακή διαδικασία” κάνοντας τη σκέψη ότι αν η διαφορά δύο μεγεθών μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιοδήποτε δοσμένο μέγεθος, τότε αναγκαία αυτά είναι ίσα. Δούλεψε μόνο με εγγεγραμμένα στην καμπύλη πολύγωνα σε αντίθεση με τον Αρχιμήδη και ενώ για τον Αρχιμήδη, η διαφορά των εμβαδών μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή, αλλά ήταν πάντα υπαρκτή, για τον Stevin γινόταν ολοένα και μικρότερη μέχρι που εξαφανιζόταν στο άπειρο.

⁴¹ C.H.Edwards, The Historical Development of the Calculus.

Ένας άλλος πρωτεργάτης αυτής της προσπάθειας, θεωρείται ο Johannes Kepler (1571 – 1630 μ.Χ.). Ο Kepler ασχολήθηκε με τα μαθηματικά και την αστρονομία. Κατά το 1600, βοηθούμενος από τον Δανό αστρονόμο Tycho Brahe, ανακαλύπτει ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειπτικές. Στο έργο του «*Nova Sterometria*»(1615), κάνει χρήση της έννοιας του απειροστού για να λύσει τα προβλήματα που τον απασχολούν. Θεωρεί π.χ. ότι ο κύκλος αποτελείται από άπειρα τρίγωνα που έχουν κοινή κορυφή το κέντρο του και οι απείρως μικρές βάσεις κείνται στην περιφέρειά του. Μη διακρίνοντας δε καμία διαφορά μεταξύ πολυγώνου και κύκλου, φαίνεται να διαπραγματεύεται αορίστως και χωρίς να έχει σαφή αντίληψη, την έννοια της συνέχειας.⁴² Θεωρεί τη σφαίρα, για να υπολογίσει τον όγκο της, ως αποτελούμενη από άπειρο αριθμό κώνων, που έχουν τη κορυφή τους στο κέντρο της σφαίρας, και τις βάσεις τους, απειροστού μεγέθους, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, την οποία και καλύπτουν. Κάποιες άλλες φορές όμως χρησιμοποίησε στους υπολογισμούς του και τα αδιαίρετα. Πρότεινε δηλαδή μια ατομιστική θεωρία των γεωμετρικών σχημάτων σύμφωνα με την οποία, αυτά μπορούσαν να θεωρηθούν ότι συντίθενται από ένα άπειρο αριθμό αδιαιρέτων μονάδων. Έτσι οι γραμμές εκλαμβάνονται ως αθροίσματα σημείων, οι επιφάνειες ως αθροίσματα γραμμών και τα στερεά ως αθροίσματα επιφανειών. Κατ' αυτόν το τρόπο ταύτιζε το απειροστό εμβαδόν με μια γραμμή και το όλον εμβαδόν με άθροισμα απείρων γραμμών. Χάρης στον Kepler δηλαδή, οι έννοιες του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού, γίνονται πλέον οικείες στον επιστημονικό κόσμο. Με τους όγκους των στερεών ασχολήθηκε εξ' αιτίας της παρατήρησής του, ότι οι Αυστριακοί έμποροι είχαν έναν σχετικά ακριβή τρόπο να υπολογίζουν τον όγκο του κρασιού που απέμενε σε ένα βαρέλι. Στην προσπάθειά του δε να αποδείξει ότι το μέγιστου όγκου παραλληλεπίπεδο που εγγράφεται σε δοσμένη σφαίρα είναι ο κύβος, έκανε έναν πίνακα με δύο στήλες όπου έγραψε τους όγκους των παραλληλεπιπέδων που εγγράφονται σε μια σφαίρα ακτίνας 10, για όλα τα ακέραια μήκη από 1 έως 20. Παρατήρησε λοιπόν ότι, κοντά στη μέγιστη τιμή του ο όγκος μεταβάλλεται ελάχιστα για μικρές μεταβολές του μήκους. «*Κοντά στη μέγιστη τιμή, οι μειώσεις και στις δύο πλευρές είναι κατ' αρχήν ανεπαίσθητες*».⁴³ Σε σύγχρονη ορολογία οι παρατηρήσεις αυτές αποδίδονται με την

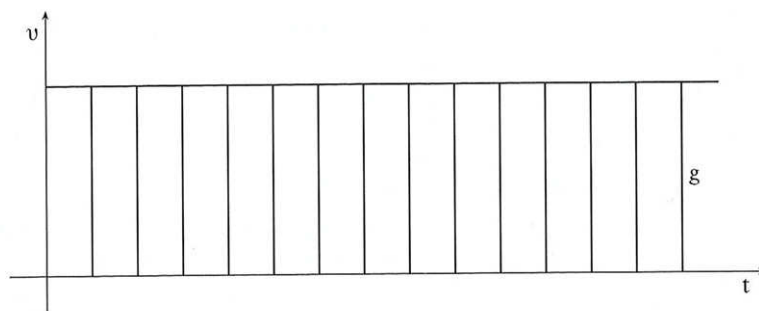
⁴² Ε. Γιαννακούλιας, *απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα*,σελ.123.

⁴³ V. J. Katz, *A History of Mathematics, An introduction*, p.469.

ισότητα $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow V'(x) = 0$. Δηλαδή ο Kepler “είδε” ότι στο σημείο του μεγίστου, η παράγωγος μηδενίζεται!! Για το έργο του αυτό, μπορούμε να τον κατατάξουμε, κατά τους ιστορικούς των μαθηματικών, μεταξύ των προδρόμων του απειροστικού λογισμού.⁴⁴

Σύγχρονος του Kepler ήταν ο μεγάλος στοχαστής και θεμελιωτής της σύγχρονης επιστήμης Galileo-Galilei (1564 – 1642). Το 1582 εγγράφεται στο πανεπιστήμιο της γενέτειράς του, της Πίζας για να σπουδάσει ιατρική, αλλά γρήγορα γοητεύεται από τα μαθηματικά συνεπαρμένος από την μαθηματική περιγραφή των φυσικών φαινομένων που είχε δώσει στα κείμενά του ο Αρχιμήδης. Έτσι λοιπόν εμφανίζεται ως ο καλύτερος μαθητής του. Τολμά να κάνει αυτό που δεν τόλμησαν οι αρχαίοι Έλληνες, να θέσει δηλαδή σε κίνηση τη στατική και να συνδέσει το διάστημα με το χρόνο. Εξέφρασε συνεπώς ποσοτικά τη κίνηση με αριθμούς, θεμελιώνοντας μια νέα επιστήμη τη μηχανική. Έτσι το 1604 διατύπωσε το νόμο για την πτώση των σωμάτων γράφοντας σε επιστολή του προς το φίλο του Paulo Sarpi: «Οι αποστάσεις που διανύει ένα σώμα που κινείται με φυσική κίνηση, είναι ανάλογες με τα τετράγωνα των χρόνων».⁴⁴ Δεν κατάφερε όμως, να τον εκφράσει στη μορφή $S = 1/2gt^2$, γιατί η άλγεβρα δεν ήταν ακόμη αρκετά ανεπτυγμένη. Στην εργασία του «Διάλογοι και μαθηματικές αποδείξεις για δύο νέες επιστήμες», ασχολήθηκε:

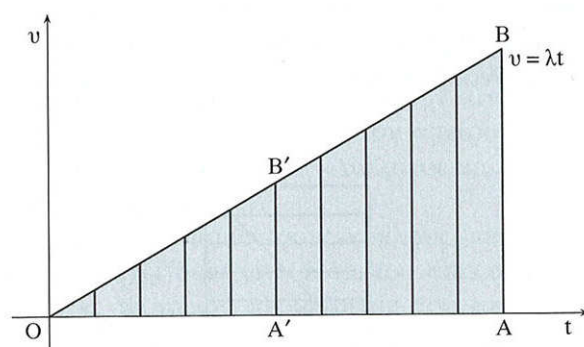
α) Με τη μελέτη της ομοιόμορφης κίνησης και της ομοιόμορφα επιταχυνόμενης κίνησης. Για μεν τη πρώτη θεώρησε την ταχύτητα v σταθερή και ίση με την επιτάχυνση g και $S = gt = vt$ το διάστημα που διανύεται σε χρόνο t , οπότε το S θα δίνεται από το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει βάση t και ύψος v .



Για δε την δεύτερη υπέθεσε ότι η ταχύτητα είναι ανάλογη το χρόνο t δηλαδή,

⁴⁴ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ.127.

$v = \lambda t$, και η ολική απόσταση που διανύεται θα ισούται με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου με βάση t και ύψος v .



Το κοινό στοιχείο των δύο περιπτώσεων είναι ότι ο Γαλιλαίος ισχυρίστηκε πως τα εμβαδά του ορθογωνίου και του τριγώνου δίνονται από το άθροισμα των καθέτων κάθε μια από τις οποίες ισούται με την ταχύτητα v , το διάστημα δηλαδή που διανύεται στη μονάδα του χρόνου, θεωρώντας τις όμως ταυτόχρονα και σαν μια απειροστή απόσταση που διανύεται αν πολλαπλασιαστεί με ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι στη περίπτωση της ομοιόμορφης κίνησης το εμβαδόν του ορθογωνίου συμφωνεί με το διάστημα $S = vt$, ενώ στη περίπτωση της ομοιόμορφα επιταχυνόμενης έχουμε $S = \frac{1}{2}t \cdot \lambda t = \frac{1}{2}\lambda t^2$, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά το

$$\int_0^t \lambda x dx. \text{ Τέλος για την ταχύτητα της κίνησης } S = \frac{1}{2}\lambda t^2 \text{ διετύπωσε την εικασία ότι}$$

πρέπει να ισούται με $v = \lambda t$, που με σύγχρονη ορολογία είναι η παράγωγος της συνάρτησης S .⁴⁵ «Η σχέση που υπάρχει μεταξύ ολοκληρώματος και παραγώγου φαίνεται να έχει γίνει αντιληπτή για πρώτη φορά, μέσα όμως από μια θολή εικόνα των πραγμάτων». Είναι φανερό ότι ο Γαλιλαίος θεωρεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως άπειρο άθροισμα των αδιαρέτων $A'B'$.

β) Με το πρόβλημα του συνεχούς και την έννοια του απείρου. Διετύπωσε λοιπόν δύο παράδοξα που έχουν σχέση με τη σύγκριση των πληθαιθμών δύο απειροσυνόλων. Στο πρώτο θεώρησε δύο ομόκεντρους κύκλους όπου ο μεγαλύτερος είχε διπλάσια διάμετρο, και άρα διπλάσιο μήκος από το μικρότερο, και παρατήρησε ότι μεταξύ των σημείων τους υφίσταται αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Στο δεύτερο, καθώς ανέλυε το φαινόμενο της επιτάχυνσης, διεπίστωσε ότι αν θεωρούσε την άπειρη ακολουθία των φυσικών $1, 2, 3, \dots$, και την ακολουθία των τετραγώνων τους $1, 4, 9, \dots$, τότε

⁴⁵ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 130.

κάθε όρος της δεύτερης βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους όρους της πρώτης. Έτσι το πλήθος των αριθμών και των τετραγώνων τους θα έπρεπε να είναι το ίδιο. Αλλά γνώριζε ότι οι περισσότεροι φυσικοί αριθμοί δεν είναι τέλεια τετράγωνα.

Ο Γαλιλαίος τότε επεσήμανε: «...*Το πλήθος όλων των αριθμών είναι άπειρο και το πλήθος των τετραγώνων όμως, είναι άπειρο· ούτε το πλήθος των τετραγώνων είναι μικρότερο από το πλήθος όλων των αριθμών, ούτε το τελευταίο είναι μεγαλύτερο του πρώτου. Και τέλος οι ιδιότητες ίσο, μεγαλύτερο και μικρότερο, δεν είναι εφαρμόσιμες στο άπειρο, αλλά μόνο σε πεπερασμένα μεγέθη*».⁴⁶ Ο Γαλιλαίος χρησιμοποίησε τα αδιαίρετα για την απόδειξη των διαφόρων εικασιών του πράγμα που ενέπνευσε τον μαθητή του Bonaventura Cavalieri, να αναπτύξει μια νέα μέθοδο υπολογισμού εμβαδών και κέντρων βάρους, που για αρκετά χρόνια απετέλεσε το βασικό εργαλείο έρευνας, για αρκετούς μαθηματικούς πριν από τον Newton και τον Leibniz. Ο Γαλιλαίος αξιοποιώντας τα, κατά γενική ομολογία, λίγα μεσαιωνικά επιτεύγματα κατόρθωσε να αλλάξει τη συνείδηση των ανθρώπων για τον πραγματικό κόσμο, κτίζοντας την επιστήμη της Μηχανικής, και καταρρίπτοντας τελικά το αριστοτελικό μοντέλο για τον κόσμο. Αυτό είναι αρκετό να τον κατατάξει σ' εκείνη την κατηγορία των ανθρώπων που αλλάζουν κατά καιρούς τη ροή της επιστήμης. Ο 17^{ος} αιώνας ήταν ο αιώνας της επιστημονικής επανάστασης. Η ώθηση που δόθηκε στην επιστήμη ήταν μεγάλη και ωφείλεται στην εγκατάλειψη των μεταφυσικών ανησυχιών και στη μεταστροφή των ερευνητών στα προβλήματα του φυσικού κόσμου. Τα ερωτήματα που κυριάρχησαν την εποχή αυτή ήταν:

1. Το πρόβλημα της χάραξης της εφαπτομένης μιας καμπύλης, που ενδιέφερε πρωτίστως αυτούς που ασχολούνταν με την επιστήμη της οπτικής.
2. Η εύρεση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός κινητού, από την εξίσωση $S = S(t)$, της απόστασης που διανύει το κινητό συναρτήσει του χρόνου.
3. Η εύρεση της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής μιας συνάρτησης.
4. Ο υπολογισμός του μήκους των καμπυλών, του εμβαδού κάτω από αυτές, καθώς και του όγκου των στερεών που προέκυπταν από την περιστροφή τους

⁴⁶ R. Rucker, το άπειρο και ο νους.

Οι μέχρι την εποχή αυτή μέθοδοι υπολογισμού εμβαδών και όγκων, ήταν η μέθοδος των απειροστών του Kepler και αυτή των αδιαιρέτων, που πρωτοέγινε γνωστή από τον Γαλιλαίο.

Ο μαθητής του Γαλιλαίου Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), ανέπτυξε τη μέθοδο των αδιαιρέτων την οποία περιέγραψε λεπτομερώς στα συγγράμματά του «Γεωμετρία μέσω μιας μέχρι τώρα άγνωστης μεθόδου, των αδιαιρέτων των συνεχών» (1635) και «έξι γεωμετρικές ασκήσεις» (1647). Παρ' ότι σε κανένα σημείο της εργασίας του δεν εξηγεί τι εννοεί με τον όρο αδιαίρετα των συνεχών, ο ίδιος στο δεύτερο από τα παραπάνω βιβλία του, λέει ότι η ευθεία αποτελείται από σημεία όπως το κομπολόι από χάντρες, το επίπεδο από ευθείες όπως ένα ύφασμα από κλωστές, και το στερεό από επίπεδα, όπως ένα βιβλίο από σελίδες. Επίσης κάθε αδιαίρετο με την κίνησή του παράγει το επόμενο ανώτερο συνεχές, που αποτελείται συνεπώς από άπειρα αδιαίρετα. Η μέθοδος των αδιαιρέτων του Cavalieri, διαφέρει από αυτήν των απειροστών του Kepler, σε δύο κρίσιμα σημεία:⁴⁷

1. Ο Kepler φαντάστηκε ένα γεωμετρικό αντικείμενο να αποσυντίθεται σε άπειρα αντικείμενα του ίδιου είδους, π.χ. εμβαδά ή όγκοι, τα οποία κατόπιν τα πρόσθετε επί τούτου, για να προκύψει το εμβαδόν ή ο όγκος του δοσμένου αντικειμένου. Ο Cavalieri φαντάστηκε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των αδιαιρέτων δύο δοσμένων γεωμετρικών αντικειμένων. Εάν δύο αντίστοιχα αδιαίρετα είχαν σταθερό λόγο, κατέληγε στο συμπέρασμα ότι και τα εμβαδά ή οι όγκοι των δύο αντικειμένων, θα ευρίσκονταν στον ίδιο λόγο. Και εάν το ένα ήταν γνωστό αντικείμενο, θα μπορούσε να υπολογίσει το άλλο
2. Ο Kepler θεωρούσε τα γεωμετρικά αντικείμενα ως συντιθέμενα από απειροστά της ίδιας διαστάσεως, ενώ ο Cavalieri, από άπειρα αδιαίρετα της αμέσως κατώτερης διάστασης, χωρίς να ξεκαθαρίζει αν αυτά είχαν πάχος ή όχι, και τα οποία παρήγαγαν το γεωμετρικό αντικείμενο μέσω της κίνησης, κινούμενα μάλιστα παραλλήλως προς τον εαυτό τους. Το σύνολο όλων των αδιαιρέτων ενός γεωμετρικού αντικειμένου, ο Cavalieri, το ονόμασε Omnes lineae, δηλαδή «όλες οι γραμμές»

Τα παραπάνω συνοψίζονται στις παρακάτω προτάσεις γνωστές ως αρχή του Cavalieri:

⁴⁷ C.H.Edwards, The Historical Development of the Calculus, p. 104.

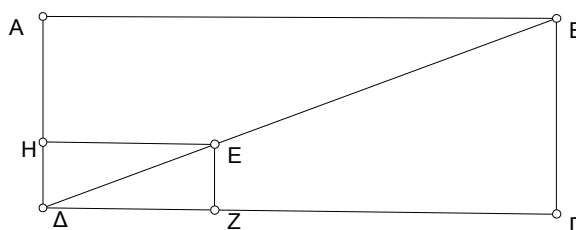
(i) «Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη, και τεμνόμενα από παράλληλα προς τις βάσεις επίπεδα, σε ίσα όμως ύψη από αυτές, αποκόπτονται τομές που βρίσκονται σε δοσμένο λόγο, τότε οι όγκοι των στερεών αυτών βρίσκονται επίσης στον ίδιο λόγο».

(ii) Αν δύο επίπεδα σχήματα έχουν ίσα ύψη και περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών και τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που αποκόπτονται από ευθεία παράλληλη προς τις αρχικές έχουν σταθερό λόγο, τότε τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα εμβαδά των επιπέδων σχημάτων.⁴⁸

Ο Cavalieri εφαρμόζοντας τη μέθοδό του υπολόγισε το εμβαδόν κάτω από τη γενικευμένη παραβολή $y = x^κ$, για όλες τις ακέραιες τιμές του $κ$ από το 1 έως το 9,

στο διάστημα $[0, a]$. Αυτό με σύγχρονη ορολογία γράφεται $\int_0^a x^κ dx = \frac{a^{κ+1}}{κ+1}$. Μετά

έκανε την εικασία ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε ακέραια και θετική τιμή του $κ$, η οποία αποδείχθηκε στην εικοσαετία που ακολούθησε, από τους Fermat, Pascal και Roberval. Ο Cavalieri αποφεύγει να αναφερθεί στο αν τα αδιαίρετά του είχαν πάχος ή όχι, προκειμένου να αποφύγει συγκρίσεις μεταξύ πληθαιθμών απειροσυνόλων. Αυτό όμως λίγο τον ενδιέφερε διότι όπως έλεγε, δεν τον απασχολούσε η ακριβής φύση των αδιαιρέτων, αλλά μόνο η χρήση τους ως εργαλείου επίτευξης υπολογιστικών αποτελεσμάτων. Δέχτηκε σκληρή κριτική κυρίως από τον ιησουίτη Paul Guldin αλλά και από τον Torricelli. Αποτέλεσμα της κριτικής αυτής ήταν κάποια παράδοξα, που πήγασαν ακριβώς από την παραδοχή ότι τα αδιαίρετα δεν έχουν πάχος. Ο Torricelli ανέφερε το παράδειγμα ενός ορθογωνίου όπως στο σχήμα



$$\frac{HE}{AB} = \frac{\Delta E}{\Delta B} = \frac{EZ}{B\Gamma}, \text{ και, άρα}$$

$$\frac{HE}{EZ} = \frac{AB}{B\Gamma}, \text{ , από την αρχή του Cavalieri προκύπτει τότε ότι,}$$

$$\frac{\varepsilon\mu\beta(AB\Delta)}{\varepsilon\mu\beta(B\Gamma\Delta)} = \frac{AB}{B\Gamma} = 1$$

⁴⁸ K. Andersen, Cavalieri's method of indivisibles.

Που είναι άτοπο αφού οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Ο Torricelli ισχυρίστηκε ότι το παράδοξο αυτό θα μπορούσε να ξεπεραστεί αν θεωρούσε κανείς ότι τα αδιαίρετα είχαν στην πραγματικότητα πάχος. Στην περίπτωση αυτή τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα θα ήταν πιο παχιά από τα οριζόντια στο λόγο

$\frac{AB}{BG}$, συνεπώς αν κάποιος τα θεωρούσε αθροιστικά, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ΔBG , θα

είχαν όντως το ίδιο εμβαδόν. Στη συνέχεια όμως, ο Torricelli άλλαξε γνώμη και είδε με διαφορετικό μάτι τη χρήση των αδιαιρέτων. Στο βιβλίο του «*Opera Geometrica*» έδωσε παραδείγματα υπολογισμού εμβαδών και όγκων με τη χρήση της μεθόδου αυτής και έτσι την έκανε γνωστή στην Ευρώπη μια που τα βιβλία του Cavalieri, ήταν ιδιαίτερα δύσκολα ακόμη και για τους μαθηματικούς. Η μέθοδος των αδιαιρέτων χρησιμοποιήθηκε αρκετά πριν από τους Newton και Leibniz, εκείνο όμως που έχει σημασία, είναι το γεγονός ότι παρακίνησε αρκετούς να την βελτιώσουν ή να αναπτύξουν νέες μεθόδους. Το συνολικό έργο του Cavalieri, έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην περαιτέρω ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού και γι' αυτό ο ίδιος θεωρείται από τους πρωτεργάτες αυτής της ανάπτυξης.

Την ίδια χρονιά που ο Cavalieri δημοσιεύει την εργασία του «*έξι γεωμετρικές ασκήσεις*», ο ιησουΐτης μοναχός Gregoire de Saint-Vincent (1584 – 1667), δημοσιεύει μια δική του εργασία 1200 σελίδων, με τίτλο «*Γεωμετρική εργασία για τον τετραγωνισμό του κύκλου και των κωνικών τομών*». Ο Gregoire κάνει στο έργο του αυτό μια αποτυχημένη προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου, της οποίας το σφάλμα βρήκε ο Christiaan Huygens το 1651. Το σημαντικό όμως, είναι ότι ο Gregoire θεωρεί εγγεγραμμένα στο κύκλο πολύγωνα με άπειρο πλήθος πλευρών, αντί για πεπερασμένο που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης. Έτσι ενώ ο Αρχιμήδης έκανε υποδιαίρεσεις του πλήθους των πλευρών, μέχρις ότου το σφάλμα γίνει μικρότερο μιας δεδομένης ποσότητας, αυτός αύξανε το πλήθος τους, μέχρις ότου “εξαντληθεί” το σχήμα στο οποίο τα πολύγωνα ήσαν εγγεγραμμένα. Έχουμε λοιπόν για πρώτη φορά την εμφάνιση του όρου “εξάντληση”. Η άπειρη υποδιαίρεση τον οδήγησε στην έννοια του ορίου μιας άπειρης γεωμετρικής προόδου και αυτό συνετέλεσε, ώστε να στραφεί στην κατεύθυνση που έθετε τον απειροστικό λογισμό στη σωστή βάση. Το άθροισμα μιας τέτοιας γεωμετρικής σειράς, μπορούσε να προσεγγιστεί όσο καλά ήθελε, αρκεί να θεωρούσε ένα αρκετά μεγάλο πλήθος αρχικών όρων της προόδου για να τους προσθέσει. Παρ’ ότι δεν είχε την δυνατότητα αναλυτικής προσέγγισης, τα

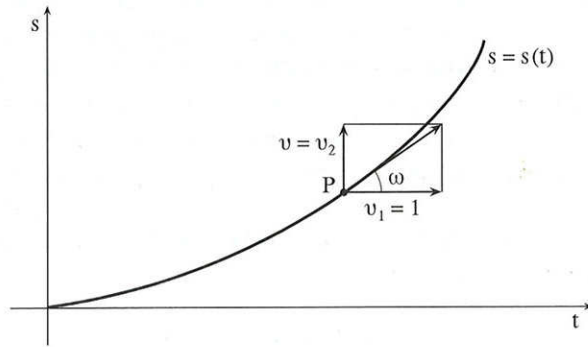
επιχειρήματά του ήταν εντελώς πρωτότυπα, και είναι φανερό ότι είχε συλλάβει την έννοια του ορίου.⁴⁹

Έτσι μελέτησε και το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας και υποθέτοντας ότι οι ταχύτητές τους πρέπει να βρίσκονται σε κάποιο λόγο, υπολόγισε το σημείο στο οποίο θα συναντηθούν, χωρίς όμως να κατανοήσει τη φιλοσοφική πλευρά του προβλήματος που έθεσε ο Ζήνωνας. Η εργασία του Gregoire, παρακίνησε τους μαθηματικούς να ασχοληθούν με τον υπολογισμό δυναμοσειρών, οι οποίες έπαιξαν ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Ο Gregoire και ο Cavalieri, μαζί με τους Fermat και Καρτέσιο, προετοίμασαν το έδαφος στους Newton και Leibniz, για την "ανακάλυψη" του απειροστικού λογισμού. Ο Leibniz το επιβεβαιώνει τουλάχιστον όσον αφορά τον Gregoire λέγοντας:⁵⁰ «Κατά τη μελέτη του λογισμού, πήρα ουσιαστική βοήθεια και από τις πολυάριθμες έξυπνες ιδέες του πατέρα Gregoire de Saint Vincent»

Όπως είπαμε η μέθοδος των αδιαιρέτων του Cavalieri, έγινε γνωστή στην Ευρώπη από τον φίλο του Evangelista Torricelli (1608 – 1647), ο οποίος την εφάρμοσε εκτενώς, για τον υπολογισμό του εμβαδού διαφόρων σχημάτων στο έργο του «Opera Geometrika». Κατά το 1644 συνέλαβε την ιδέα της χρήσης της κινηματικής για τη χάραξη της εφαπτομένης στο σημείο μιας καμπύλης. Θεώρησε την καμπύλη ως την τροχιά ενός κινουμένου σημείου, η κίνηση του οποίου είναι αποτέλεσμα δύο απλούστερων κινήσεων, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης με γνωστά μέτρα. Η κατεύθυνση της συνισταμένης κίνησης όπως αυτή προέκυπτε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έδινε και την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης σε κάθε σημείο της. Ο Torricelli, το 1646, εργαζόμενος με την γενικευμένη παραβολή t^n , θεώρησε την κίνηση σε άξονες $S - t$ και ανέλυσε την ταχύτητα σε δύο κάθετες συνιστώσες v_1 και v_2 . Υπέθεσε $v_1 = 1$ και $v_2 = v = t^n$, οπότε η συνισταμένη θα έδινε την κατεύθυνση της εφαπτομένης του διαγράμματος ενώ η κλίση της εφαπτομένης, είναι $\text{efw} = v_2/v_1 = v_2/1 = v$. (βλέπε σχήμα στην επόμενη σελίδα)

⁴⁹ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ. έως τον 19^ο αιώνα, σελ.157

⁵⁰ R. Calinger, A Contextual history of mathematics



Δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα διαστήματος χρόνου, ισούται με την ταχύτητα του κινητού στο σημείο αυτό. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι το διάστημα που διανύεται όταν $v = t^n$, είναι ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη, και το οποίο από την εικασία του Cavalieri ισούται με $S = E = t^{n+1}/n+1$, έχουμε τις σχέσεις:

$$v = S' = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)' = t^n, \text{ που με σύγχρονο συμβολισμό γράφεται,}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t x^n dx \right) = t^n, \text{ και εκφράζει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού}$$

λογισμού. Ο Torricelli, έδειξε λοιπόν την αντίστροφη σχέση που υπάρχει μεταξύ της διαφορίσης και της ολοκλήρωσης, για παραβολές της μορφής $y = x^n$, n θετικός ακέραιος. Δεν κατόρθωσε βέβαια να δει το θεμελιώδες θεώρημα στη γενικότητά του, αλλά για όλα τα παραπάνω θεωρείται ένας εξ αυτών που συνέβαλαν σε μεγάλο βαθμό στη δημιουργία του απειροστικού λογισμού.⁵¹

Από αυτό το χρονικό σημείο και έπειτα οι εξελίξεις είναι ραγδαίες και η πορεία προς την "ανακάλυψη" του απειροστικού λογισμού επιταχύνεται. Ο μαθητής του Cavalieri, Pietro Mengoli, (1625 – 1685), στην εργασία του «Παραδείγματα γεωμετρικών στοιχείων» (1659), περιέγραψε την έννοια του ορίου και βοήθησε στη χρήση αθροισμάτων δυναμοσειρών, που όπως έχουμε αναφέρει υπήρξαν καθοριστικές για την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού: «Αν μια μεταβλητή ποσότητα μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από κάθε δοσμένο πεπερασμένο αριθμό, τότε αυτή θα ονομάζεται quasi-infinite ενώ αν μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό θα ονομάζεται quasi-nil»⁵²

⁵¹ M. Baron, The origins of the infinitesimal calculus.

⁵² Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα,σελ.164

Ο Γάλλος φιλόσοφος René Descartes (Καρτέσιος), (1596 – 1650), στο παράρτημα «*La Geometrie*» του έργου του που είναι γνωστό με το τίτλο «*Μέθοδος*» (1637), περιγράφει μια νέα μέθοδο αντιμετώπισης γεωμετρικών προβλημάτων, κατά την οποία κάθε τέτοιο πρόβλημα μπορούσε να μετατραπεί σε αλγεβρικό και αντίστροφα, ανακαλύπτοντας έτσι την Αναλυτική Γεωμετρία. Με αυτήν εισάγεται στα μαθηματικά η γενική έννοια του μεταβλητού μεγέθους, που απετέλεσε μεγάλο βήμα για την εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης. Ο Καρτέσιος ασχολήθηκε και με το πρόβλημα της χάραξης της εφαπτομένης μιας καμπύλης και επινόησε γι' αυτό μια μέθοδο χωρίς τη χρήση απειροστών.

Την Αναλυτική Γεωμετρία επινόησε εργαζόμενος ανεξάρτητα από τον Καρτέσιο, και ο Γάλλος μαθηματικός Pierre de Fermat (1601 – 1665). Τις ιδέες του περιγράφει στην εργασία του με τίτλο «*Introductio to plane and Solid loci*» (1629), η οποία όμως δημοσιεύθηκε μετά τον θάνατό του με αποτέλεσμα, η ανακάλυψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας, να αποδοθεί στον Καρτέσιο. Το 1629 βασιζόμενος στην παρατήρηση του Kepler, ότι η μεταβολή μιας συνάρτησης στην περιοχή μιας τοπικά μέγιστης (ελάχιστης) τιμής είναι αμελητέα, θα ανακαλύψει μια μέθοδο προσδιορισμού των ακροτάτων μιας συνάρτησης, με την οποία ουσιαστικά θεμελιώνει τον Διαφορικό Λογισμό. Ο Fermat, εισήγαγε έναν αλγόριθμο που καθορίζει το A , ώστε το $f(A)$ να είναι ακρότατη τιμή. Κατά τον H. Eves⁵³ η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

1. Το A αντικαθίσταται με το $A+E$
2. $f(A)$ και $f(A+E)$ θεωρούνται ίσα οπότε θέτει $f(A) = f(A+E)$
3. Κοινοί όροι αν υπάρχουν στην ισότητα (2) διαγράφονται
4. Όλοι οι όροι διαιρούνται με το E
5. Οι όροι που περιέχουν E διαγράφονται
6. Το A ορίζεται από την ισότητα

$$\frac{f(A+E) - f(A)}{E} \Big|_{E=0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

Τις ιδέες του ανακοίνωσε στη μαθηματική κοινότητα το 1638. Τον αλγόριθμο αυτό χρησιμοποίησε και για τη χάραξη εφαπτομένης σε σημεία καμπυλών. Οι επινοήσεις του αυτές, οδήγησαν στον υπολογισμό της παραγώγου με τη βοήθεια των απειροστών και γενικότερα στο διαφορικό λογισμό. Γι' αυτό οι Lagrange, Laplace και Fourier, αργότερα, τον θεώρησαν ως τον αληθινό επινοητή του διαφορικού λογισμού. Πάντως

⁵³ H. Eves, Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, τόμος 2.

ο Katz απαντώντας στο ερώτημα αν ο Fermat είναι αυτός που ανακάλυψε τον λογισμό, απαντά αρνητικά και το δικαιολογεί ως εξής:⁵⁴ «Ο Fermat δεν διέγινε ποτέ την αντίστροφη σχέση μεταξύ των δύο προβλημάτων της εφαπτομένης και του εμβαδού, αφενός διότι δεν κατάλαβε ότι οι δύο αυτές βασικές λειτουργίες ορίζουν νέες συναρτήσεις πάνω στις οποίες κάποιος θα μπορούσε να τις ξαναεφαρμόσει και αφετέρου δεν έκανε ποτέ τις "σωστές" ερωτήσεις που θα τον οδηγούσαν σε αυτήν την αντίστροφη σχέση. Ήταν άλλοι αυτοί που μπόρεσαν να δούν τι ο Fermat παρέλειψε».

Την ίδια περίοδο ο Gilles Persone de Roberval, (1602 – 1675), φέρνει τον ολοκληρωτικό λογισμό πιο κοντά, υπολογίζοντας εμβαδά με τη βοήθεια απειροστών. Θεώρησε το εμβαδόν υπό την καμπύλη $y = x^m$, στο διάστημα $[0, 1]$, να αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό, απείρως λεπτών ορθογωνίων λωρίδων. Το εμβαδόν αυτό μπορούσε κατά τον Roberval, να προσεγγιστεί από το κλάσμα

$\frac{0^m + 1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m}{n^{m+1}}$, και καθώς το n γινόταν απείρως μεγάλο, ο λόγος αυτός

έτεινε στο $\frac{1}{m+1}$. Είναι φανερό ότι σαν φιλοσοφία η μέθοδος έμοιαζε με αυτή της

εξάντλησης, αφού το καμπυλόγραμμο εμβαδό προσεγγίστηκε από ευθύγραμμο χωρία. Όμως αντί της έμμεσης απόδειξης, ο αριθμός των ορθογωνίων γίνεται άπειρος και όταν το πλήθος τους m γίνεται απείρως μεγάλο, έχουμε μετάβαση στο "όριο", μια έννοια που παρέμενε ακόμη ασαφής. Αλλά και στον διαφορικό λογισμό η συμβολή του Roberval είναι αξιοσημείωτη, αφού χαράσσει την εφαπτομένη σε σημεία καμπυλών, εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου και στα "στιγμιαία" διανύσματα των ταχυτήτων στα σημεία αυτά.

Η απόσταση από τον Ολοκληρωτικό λογισμό θα μικρύνει ακόμη περισσότερο εξ' αιτίας των ιδεών του Blaise Pascal (1623 – 1662). Το 1654 χρησιμοποιώντας

μαθηματική επαγωγή απέδειξε το τύπο $\sum_{k=1}^n k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + A(n)$, όπου $A(n)$

πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του m . Με τη βοήθεια αυτού υπολογίζει εμβαδά υπό την καμπύλη $y = x^n$ στο διάστημα $[0, a]$, κάνοντας όμως, μια διαγραφή που δεν αιτιολογεί αυστηρά. «Για αρκετά μεγάλα n , οι μικρότερες δυνάμεις του n

παραλείπονται διότι θεωρούνται αμελητέες, στη σύγκρισή τους με τον όρο $\frac{n^{m+1}}{m+1}$ στον

⁵⁴ V. J. Katz, A History of Mathematics, An introduction, p.485.

παραπάνω τύπο. Σύμφωνα με τον M. Simon,⁵⁵ η διαγραφή ποσοτήτων με τον τρόπο που το έκανε ο Pascal, έχει χαρακτηριστεί ως η βασική αρχή του διαφορικού λογισμού και παρά την ελλιπή αιτιολόγησή της, άσκησε αργότερα μεγάλη επίδραση στον Leibniz, ο οποίος αποδέχτηκε ως βασική αρχή του λογισμού του, ότι οι διαφορές υψηλότερης τάξης μπορούν να παραλείπονται. Αν τα παραπάνω εφαρμοστούν στην $y = x^m$ στο $[0, a]$, υποδιαιρώντας την επιφάνεια σ' ένα πολύ μεγάλο αριθμό n , ορθογωνίων λωρίδων με πλάτος $h = a/n$ η κάθε μια, τότε το εμβαδόν είναι

$$\varepsilon = \left[h^m + (2h)^m + \dots + (nh)^m \right] = h^{m+1} \sum_{i=1}^n i^m \approx \frac{(nh^{m+1})}{m+1} = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Το 1659 δημοσιοποίησε ανεπίσημα κάποιες επιστολές, στις οποίες αναφερόταν στον υπολογισμό όγκων, εμβαδών, μήκους τόξων και στην εύρεση κέντρων βάρους. Σ' αυτές εξηγούσε για τα αδιαίρετα ενός ευθυγράμμου σχήματος, ότι είναι μια απειρότητα απειροστών ορθογωνίων, των οποίων το άθροισμα διαφέρει από το σχήμα, μόνο κατά μία ποσότητα οσοδήποτε μικρή. Η έννοια του ορίου φαίνεται να είναι προ των πυλών και ο Blaise Pascal δίκαια θεωρείται ο θεμελιωτής της ολοκλήρωσης και από τους πρωτεργάτες της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού.

Ο John Wallis (1616 – 1703), είναι ο μαθηματικός που αξιοποίησε την αναλυτική γεωμετρία των Καρτέσιου και Fermat, ώστε να εισαγάγει τις αναλυτικές μεθόδους την γεωμετρία. Στο βιβλίο του που είναι γνωστό με τον τίτλο «*Arithmetica infinitorum*» (1655), ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου και επέκτεινε την άλγεβρα σε μια αληθινή ανάλυση, χρησιμοποιώντας τα αδιαίρετα και τις άπειρες γεωμετρικές προόδους. Διαφοροποιήθηκε από τον Cavalieri, θεωρώντας ότι μια επίπεδη επιφάνεια, δεν αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό γραμμών, αλλά από ένα άπειρο αριθμό παραλληλογράμμων, με απείρως μικρό ύψος. Στην πρώτη πρόταση του βιβλίου του γράφει: «Υποθέτω ότι κάθε επίπεδο αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό παραλλήλων γραμμών, ή από ένα άπειρο αριθμό παραλληλογράμμων ιδίου ύψους, (έστω ότι το ύψος κάθε παραλληλογράμμου είναι $1/\infty$ του όλου ύψους, όπου το ∞ συμβολίζει το άπειρον). Τα συνολικά ύψη συνθέτουν το ύψος του σχήματος» Τόνιζε ότι οι δικές του γραμμές είναι διασταλτές και έχουν τόσο πάχος, ώστε με ένα άπειρο πολλαπλασιασμό να μπορεί να συγκριθεί με το ύψος του σχήματος. Ο Wallis είχε φανταστεί αυτά τα παραλληλόγραμμα να αυξάνουν μέσω της διαστολής, μέχρις ότου

⁵⁵ C.B. Boyer, The history of calculus and its conceptual development.

γεμίσουν το σχήμα και αυτό ελάχιστα διαφέρει από την έννοια της «γένεσης ποσοτήτων», που απετέλεσε τη βάση για την θεωρία των ροών του Newton.⁵⁶ Στο *Arithmetica Infinitorum* έδωσε και μια αριθμητική περιγραφή στο όριο συνάρτησης, το οποίο όρισε ως «τον αριθμόν που προσεγγίζεται από τη συνάρτηση, με τρόπο ώστε, η διαφορά μεταξύ του αριθμού αυτού και της συνάρτησης να μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα και να εξαφανιστεί τελικά καθώς η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον».

Ο Ολλανδός Cristiaan Huygens (1629 – 1695), υπέρμαχος της αυστηρότητας των αποδείξεων, υπολόγισε εμβαδά τμημάτων επιφανείας του παραβολοειδούς και υπερβολοειδούς, προσπαθώντας να ξεκαθαρίσει τη μέθοδο του Fermat για τα ακρότατα. Τον προβλημάτισε ιδιαίτερα το σημείο εκείνο που ο Fermat διαιρούσε με το E, και στη συνέχεια το θεωρούσε ίσο με το 0. Λόγω της φήμης που είχε αποκτήσει ως εξάιρετος φυσικός, κλήθηκε από τον Λουδοβίκο 14^ο στο Παρίσι όπου τον έκανε μέλος της ακαδημίας των επιστημών. Εκεί συνάντησε τον Leibniz, τον οποίο θα επηρεάσει σε μεγάλο βαθμό όσον αφορά στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, όπως θα περιγράψει αργότερα ο ίδιος ο Leibniz.

Την αλγοριθμική και υπολογιστική ακρίβεια του διαμορφούμενου απειροστικού λογισμού θα ενισχύσουν οι κανόνες των Hudde και Sluse για τη κλίση της εφαπτομένης και τον υπολογισμό μεγίστων και ελαχίστων. Το 1657 ο Άγγλος μαθηματικός William Neil, κάνει την ευθείοποίηση της ημικυβικής παραβολής $y^2 = x^3$ διαψεύδοντας τον Καρτέσιο, ο οποίος είκοσι χρόνια πριν, είχε ισχυριστεί στη γεωμετρία του, ότι ο άνθρωπος νους δεν θα μπορέσει ποτέ να επιτύχει τον ακριβή καθορισμό του μήκους μιας καμπύλης.⁵⁷

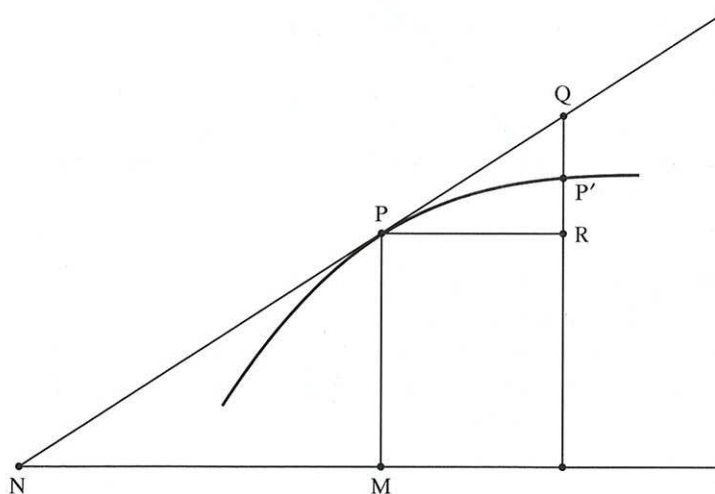
Ο James Gregory (1638 – 1675), ένα από τα αυθεντικότερα μαθηματικά ταλέντα του 17^{ου} αιώνα, είναι αυτός που εξέφρασε αλγεβρικά τις μεθόδους του Αρχιμήδη, κλείνοντας το εμβαδόν παραβολικού τομέα ανάμεσα σε δύο ακολουθίες εμβαδών εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων, και συμπεραίνοντας ότι η διαφορά των αντιστοίχων όρων τους, μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένο θετικό αριθμό, για κατάλληλα μεγάλο αριθμό πλευρών. Ανακάλυψε ανεξάρτητα από τον Newton την διωνυμική σειρά $(1 + d)^x = 1 + xd + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} d^2 + \dots$, χωρίς να

⁵⁶ J. Scott, The mathematical work of John Wallis.

⁵⁷ D.T. Whiteside, Mathematical thought in the later 17th century.

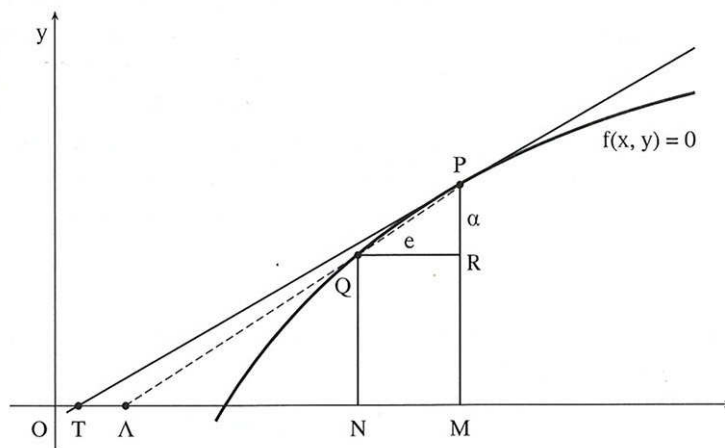
γνωστοποιήσει το γεγονός. Πλησίασε αρκετά στην αντίστροφη σχέση που υπάρχει μεταξύ των προβλημάτων της εφαπτομένης και του εμβαδού, ο πρόωρος θάνατός του όμως, δεν του επέτρεψε την ανακάλυψη του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού. Έδωσε τον παρακάτω σαφή ορισμό της έννοιας της συνάρτησης: «*Συνάρτηση είναι μια ποσότητα που προκύπτει από άλλες ποσότητες, με μια σειρά αλγεβρικών πράξεων ή με κάθε άλλη νοητή πράξη*». Με τη φράση «κάθε άλλη νοητή πράξη» υπονοεί τις πράξεις που μας περνούν στο όριο, όπως ο ίδιος εξήγησε. Χειρίστηκε τις ατέρμονες διαδικασίες με μεγάλη πρωτοτυπία, όπως φαίνεται μέσα από το έργο του, και αν είχε ζήσει περισσότερο, ίσως να είχε συμπεριληφθεί στους επινοητές του απειροστικού λογισμού, δίπλα στους Newton και Leibniz.

Το δεύτερο μισό του 17^{ου} αιώνα, ο Isaac Barrow (1630 – 1677), βοήθησε στην περαιτέρω εξέλιξη των υπάρχουσών απειροστικών μεθόδων για το πρόβλημα της εφαπτομένης και τον υπολογισμό εμβαδών, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές μεθόδους και ασκώντας σκληρή κριτική στο «*Arithmetica Infinitorum*» του Wallis, και στην αναλυτική γεωμετρία των Καρτέσιου και Fermat. Στο έργο του «*Γεωμετρικές Διαλέξεις*» (1669), ανέπτυξε σε γεωμετρική μορφή τις ιδέες του, κύριο χαρακτηριστικό των οποίων ήταν, η χρήση του χαρακτηριστικού τριγώνου. Πρόκειται για το τρίγωνο $PP'R$, (βλέπε σχήμα), στο οποίο για πολύ μικρή αύξηση PR , το τόξο PP' θεωρείται και ως τόξο της καμπύλης και ως τμήμα της εφαπτομένης. Κατά τον υπολογισμό της υποεφαπτομένης NM , χρησιμοποιεί την ίδια μέθοδο με αυτήν του Fermat, και την αναπτύσσει στην πρόταση 11 των «διαλέξεων», ενώ στην πρόταση 19 απέδειξε το δεύτερο μέρος του



θεμελιώδους θεωρήματος με τη μορφή $\int_a^b Rf'(x) = R(f(b) - f(a))$. Ο Barrow

ανακάλυψε την αντίστροφη σχέση μεταξύ εφαπτομένης της καμπύλης και εμβαδού υπό την καμπύλη, χωρίς να μας το λέει φανερά αλλά όπως φαίνεται από ένα προσεκτικό διάβασμα των «διαλέξεων», θεωρώντας ότι οι καμπύλες προκύπτουν, γεννώνται, από την κίνηση ενός σημείου. Έτσι, η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο P της καμπύλης που προκύπτει από τη κίνηση του σημείου P πάνω στην καμπύλη, θα ισούται με τη στιγμιαία ταχύτητα του σημείου στο P.⁵⁸ Ο λόγος των προσανξήσεων a/e , των μεταβλητών, είναι ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ με σημερινή ορολογία, και



όταν το Q τείνει στο P, τότε η χορδή PQ τείνει να γίνει εφαπτομένη της καμπύλης στο P. (βλέπε και σχήμα) Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση του ορίου του λόγου $\Delta y/\Delta x$, καθώς Δx τείνει στο 0. Φαίνεται δηλαδή, ότι ο Barrow, έφτασε πολύ κοντά στο να επινοήσει το διαφορικό λογισμό, όμως η ακραιφνώς γεωμετρική αντιμετώπιση του προβλήματος της εφαπτομένης, δεν του επέτρεψε να δώσει στη μέθοδο αυτή μια απλή αλγοριθμική μορφή, όπως έκαναν αργότερα οι Newton και Leibniz.⁵⁹ Για τον ίδιο λόγο και ο Katz,⁶⁰ απαντά αρνητικά στο ερώτημα αν ο Barrow είναι ο επινοητής του λογισμού: «Δεν φαίνεται πουθενά ότι είναι γνώστης της θεμελιώδους φύσης των προτάσεων 11 και 19 των “διαλέξεων”, ούτε τονίζει πουθενά την σπουδαιότητά τους. Παρουσιάζονται στο κείμενό του σαν δύο μεταξύ πολλών αποτελεσμάτων, που σχετίζονται με εφαπτόμενες και εμβαδά χωρίς να τις χρησιμοποιήσει ποτέ για τον

⁵⁸ V. J. Katz, A History of Mathematics, An introduction, p.501.

⁵⁹ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ.238.

⁶⁰ V. J. Katz, A History of Mathematics, An introduction, p.503.

υπολογισμό τους. Αναγνωρίζοντας τέλος τις ικανότητες του μαθητή του Newton, παραιτήθηκε για χάρη του από την Λουκασιανή έδρα των μαθηματικών, του Cambridge, και άφησε σε αυτόν την ανακάλυψη του λογισμού».

3.4.3 Η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού.

Μέχρι το 1660 και όσον αφορά στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, μπορούμε να πούμε ότι έχουν κατανοηθεί με σαφήνεια η λογιστικές και οι γεωμετρικές σχέσεις, ανάμεσα στο πρόβλημα των ακροτάτων και σ' αυτό της εφαπτομένης, δηλαδή ότι το μέγιστο βρισκόταν με μηδενισμό της κλίσης της εφαπτομένης η οποία γραφόταν με τις γνωστές διαδικασίες. Δεν έχει δοθεί ένας ικανοποιητικός ορισμός της εφαπτομένης και δεν έχει κατανοηθεί η σχέση της με το πρόβλημα του εμβαδού υπό την καμπύλη. Δεν υπήρχε λογισμός ενιαίος λειτουργικός με κατάλληλη ορολογία, συμβολισμούς και κανόνες, που να προσφέρει γενικές τεχνικές για τα προβλήματα που εκκρεμούσαν. Την δεκαετία 1660 – 70, όλα αυτά θα γίνουν από τους Isaac Newton και Gottfried Leibniz, οι οποίοι θεωρούνται οι επινοητές του απειροστικού λογισμού αφού πέτυχαν τους εξής τέσσερις στόχους:

1. Ανέπτυξαν γενικές έννοιες – ο Newton την έννοια της ροής και του ρέοντος, ο Leibniz το διαφορικό και το ολοκλήρωμα – οι οποίες σχετίζονταν με τα δύο βασικά προβλήματα του λογισμού, την κλίση μιας καμπύλης και το εμβαδόν.
2. Ανέπτυξαν αλγορίθμους οι οποίοι επέτρεπαν την εύκολη χρήση αυτών των εννοιών.
3. Κατανόησαν και εφήρμοσαν στη πράξη την αντίστροφη σχέση των εννοιών αυτών.
4. Χρησιμοποίησαν αυτές τις δύο έννοιες, για τη λύση πολλών δύσκολων και μέχρι εκείνη την ώρα άλυτων προβλημάτων. Αυτό που δεν έκαναν αμφότεροι, ήταν να επαληθεύσουν τις μεθόδους τους με την αυστηρότητα της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας, διότι και οι δύο χρησιμοποίησαν απειροστές ποσότητες.⁶¹

Ο Isaac Newton (1642 – 1727), κατέλαβε το 1627 την «Λουκασιανή» έδρα των μαθηματικών στο Cambridge, από την οποία παραιτήθηκε γι' αυτό το λόγο ο δάσκαλός του Isaak Barrow, και έχοντας μελετήσει το «Arithmetica Infinitorum» του

⁶¹ V. J. Katz, A History of Mathematics, An introduction, p.521.

Wallis και τις γεωμετρικές εργασίες για τις άπειρες σειρές, κατάφερε να επεκτείνει το διωνυμικό θεώρημα και για την περίπτωση που ο εκθέτης είναι κλασματικός ή αρνητικός. Έτσι είχε στα χέρια του ένα δυνατό εργαλείο που το χρησιμοποίησε για να αναπτύξει τη μέθοδο των ροών, την οποία επινόησε το 1666, για να αντιμετωπίσει προβλήματα φυσικής που σχετίζονταν με την κίνηση. Η πρώτη δημοσίευση έγινε το 1687 στην εργασία του «*philosophiae naturalis principia mathematica*» (μαθηματικές αρχές της φιλοσοφίας της φύσης). Σ' αυτήν ο Newton παρουσίασε τρεις μεθόδους ερμηνείας του νέου λογισμού.⁶² Η πρώτη σχετίζεται με τα απειροστά, και εκεί χρησιμοποίησε το απείρως μικρό με παρόμοιο τρόπο, όπως οι Fermat και Barrow. Κατόρθωσε όμως, να επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής τους με τη βοήθεια του διωνυμικού θεωρήματος. Στη δεύτερη μέθοδο παρουσίασε την έννοια της ροής (fluxion) και του ρέοντος (fluent). Η ροή είναι η ταχύτητα με την οποία παράγεται η γραμμή από την κίνηση ενός σημείου της και το απείρως μικρό μήκος κατά το οποίο αυξάνεται το x σε απειροστό χρόνο o , το ονόμασε στιγμή του ρέοντος. Η τρίτη μέθοδος σχετίζεται με τους πρώτους και έσχατους λόγους, δηλαδή τα όρια και τη θεώρησε ως την πιο αυστηρή. Τον Οκτώβριο του 1666 σε ένα χειρόγραφο του με τίτλο, «*Η προσούρα του Οκτωβρίου του 1666 για τις ροές*», παρουσιάζει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού στη μορφή $\frac{dE}{dx} = y$, όπου E το

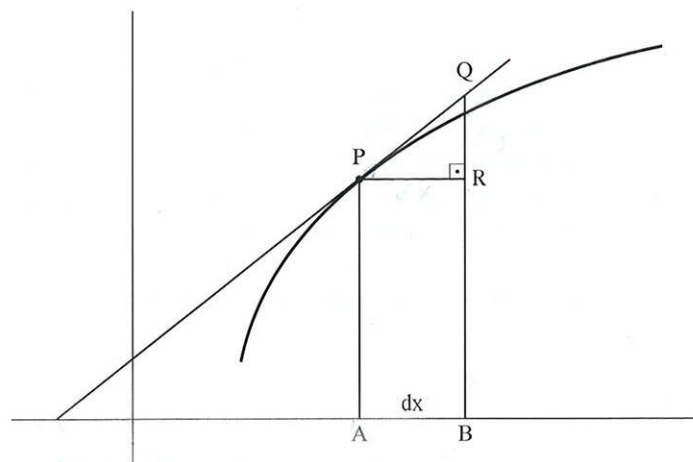
εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$, βρίσκοντας έτσι τη διαδικασία που οδηγεί στο αόριστο ολοκλήρωμα. Την αντίστροφη σχέση των προβλημάτων της εφαπτομένης και του εμβαδού, τη δείχνει στην εργασία του «*Ανάλυση εξισώσεων με απειράριθμους όρους*», όπου αποδεικνύει ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού υπό την καμπύλη $y = f(x)$, σε κάθε σημείο της x ισούται με y . Με τη μέθοδο των ροών, δίνει στην ουσία τον τρόπο εύρεσης του ρυθμού μεταβολής ενός μεγέθους $y = f(x)$, δηλαδή της παραγώγου. Με την επέκταση του διωνυμικού θεωρήματος και για εκθέτες κλασματικούς ή αρνητικούς, κατάφερε να εκφράσει υπερβατικές συναρτήσεις ως άπειρο άθροισμα δυνάμεων του x , και έγινε έτσι επιτρεπτή η διαφορίση ή η ολοκλήρωση όρο με όρο αυτών των συναρτήσεων. Κατάφερε έτσι να υπολογίσει μήκη τόξων, εμβαδά επιπέδων σχημάτων, ευθαιοποίησε πρώτος την κισσοειδή καμπύλη και ανέπτυξε σε άπειρες σειρές τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφες αυτών. Το έργο του Newton αφομοιώθηκε δύσκολα από τους

⁶² Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 267.

μαθηματικούς της εποχής εκείνης και χρειάστηκε να περάσουν δεκάδες χρόνια για να συμβεί αυτό. Χαρακτηρίστηκε σαν ένα από τα πιο υπέροχα δημιουργήματα που παρήγαγε ποτέ ο ανθρώπινος νους.

Την ίδια εποχή ο γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος Gottfried Wilhem von Leibniz (1646 – 1716), εργαζόμενος ανεξάρτητα από τον Newton, θα καταλήξει σε ανάλογα συμπεράσματα. Με την προτροπή του Cr. Huygens τον οποίο συνάντησε στο Παρίσι το 1672, μελέτησε τις εργασίες των Wallis, Gregoire και Pascal, από τις οποίες πληροφορήθηκε για τα μέχρι εκείνο τον καιρό αποτελέσματα και κυρίως τη μέθοδο των αδιαιρέτων και τη χρησιμότητα του διαφορικού τριγώνου. Το αρχικό αντικείμενο μελέτης του Leibniz, ήταν οι ακολουθίες. Από μια άπειρη ακολουθία (α_n) , $n \in \mathbb{N}$, σχημάτισε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n) , $n \in \mathbb{N}$, με $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ και την ακολουθία των διαφορών (δ_n) , $n \in \mathbb{N}$, με $\delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$. παρατήρησε ότι $S_{n+1} - S_n = \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι το άθροισμα διαδοχικών όρων της (δ_n) δίνει ως αποτέλεσμα τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι τελεστές άθροισης της διαφοράς είναι αμοιβαία αντίστροφοι, πράγμα που έπαιξε αποφασιστικό ρόλο στην ανακάλυψη του λογισμού του. Πράγματι θεωρώντας ότι μια καμπύλη προσεγγίζεται από πολύγωνα με ολοένα αυξανόμενο αριθμό πλευρών, οι τετμημένες και τεταγμένες των κορυφών τους σχημάτιζαν ακολουθίες x_k, y_k , και συμβόλισε την απειροστή διαφορά των τετμημένων dx των τεταγμένων dy . Διέκρινε στη συνέχεια ότι οι μεν διαφορές αντιστοιχούσαν σε εφαπτόμενες τα δε αθροίσματα σε εμβαδά όπως ο ίδιος γράφει σε μια επιστολή του προς τον Wallis.⁶³ Τόνιζε δε με έμφαση ότι στο λογισμό του, οι τετραγωνισμοί χωρίων προκύπτουν από “αθροίσεις” διαφορικών εμβαδών και όχι από αθροίσεις γραμμών όπως στη μέθοδο των αδιαιρέτων. Το 1675 απέδειξε τους κανόνες διαφορίσης για το γινόμενο και το πηλίκο, ενώ το 1684 για την τετραγωνική ρίζα. Την ίδια χρονιά δημοσιεύεται το πρώτο άρθρο του για το διαφορικό λογισμό όπου ορίζει το dy από την ισότητα $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{υποεφαπτομένη}}$, κάνοντας χρήση του διαφορικού τριγώνου.

⁶³ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 270.



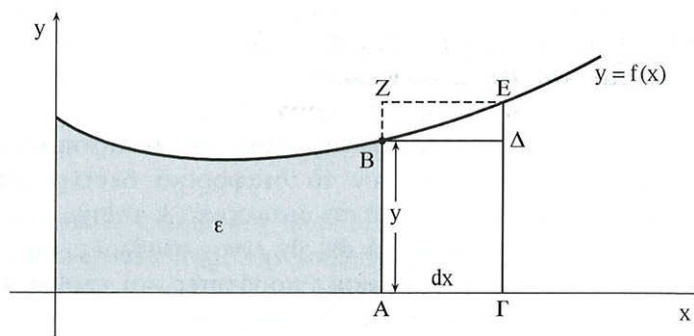
Τα διαφορικά dx και dy , είναι σταθερές αλλά ασύγκριτα μικρές ποσότητες και επομένως αμελητέες σε σχέση με τις τιμές των x και y . Ορίζει ως εφαπτομένη της καμπύλης στο P την ευθεία που ενώνει δύο απείρως γειτονικά σημεία της καμπύλης, αφού καθώς το dx γίνεται ολοένα και πιο μικρό, το σημείο Q τείνει να γίνει σημείο της καμπύλης και άρα το QR είναι περίπου ίσο με το dy , καθώς το Q τείνει να συμπίψει με το P . (βλέπε σχήμα) Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}, \text{ με το } \frac{dy}{dx} \text{ να έχει διπλό ρόλο του λόγου των } dx, dy, \text{ και}$$

του συμβόλου που παριστάνει το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ καθώς Δx τείνει στο 0. Τέλος το 1686

αποδεικνύει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού σε ένα άρθρο του με τίτλο «*De Geometria recondite et analysi indivisibilium atque Infinitorum*», που δημοσιεύτηκε στο *Acta Eruditorum*.⁶⁴ Για τον υπολογισμό του εμβαδού ε του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία AB , αυξάνει την τετμημένη x του σημείου A κατά απειροστή ποσότητα dx , στην οποία αντιστοιχεί μια απειροστή αύξηση dy της y . Αν δε το

⁶⁴ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 276.



στοιχειώδες εμβαδόν (ΑΓΕΒ), από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\Gamma E = y + dy, ydx < \text{εμβ}(\text{ΑΓΕΒ}) < (y + dy)dx \text{ και } y < d\varepsilon/dx < y + dy$$

Καθώς το dx τείνει στο μηδέν και το dy θα τείνει στο μηδέν, και άρα $d\varepsilon/dx = y$. Από την τελευταία ισότητα και τη σχέση $\varepsilon = \int d\varepsilon = \int ydx$ προκύπτει τότε το θεμελιώδες

$$\text{θεώρημα του απειροστικού λογισμού: } \frac{d\varepsilon}{dx} = y \Rightarrow \frac{d}{dx} \int ydx = y$$

Το 1674 ο Leibniz γνωστοποίησε με επιστολή του στον Oldenburg, γραμματέα της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου, την ανακάλυψη του θεωρήματος που έγινε γνωστό με την ονομασία "θεώρημα μετασχηματισμού", όπου υπολογίζει εμβαδά καμπυλόγραμμων σχημάτων με χρήση απειροστών ορθογωνίων και απειροστών τριγώνων. Η σημασία του θεωρήματος αυτού έγκειται στο ότι συνέδεσε το πρόβλημα του τετραγωνισμού καμπύλης με την κατασκευή της εφαπτομένης σε ένα σημείο της. Η διαφορά του λογισμού του Leibniz από τον σημερινό είναι ότι: 1) Ο μεν λογισμός του Leibniz αφορά μεταβλητές που διατρέχουν μια ακολουθία απείρως κοντινών τιμών, ενώ ο σύγχρονος διαπραγματεύεται με συναρτήσεις και 2) ο λογισμός του Leibniz αντιστοιχίζει μια μεταβλητή, σε μια νέα απειροστή που είναι το διαφορικό της, ενώ ο σημερινός αντιστοιχίζει σε μια συνάρτηση, μια νέα συνάρτηση, την παράγωγό της. Ανάλογα πράγματα συμβαίνουν και στο ολοκληρωτικό λογισμό.

Η συμβολή των Newton και Leibniz στην επιστήμη υπήρξε τεράστια. Εισήγαγαν νέα γλώσσα, νέες συλλογιστικές, νέες προτάσεις και νέα ερωτήματα στα μαθηματικά. Μπορούσαν να αποδείξουν, ότι είναι σε θέση να δίνουν λύσεις σε προβλήματα που είτε είχαν απαντηθεί ελλιπώς, είτε είχαν μείνει αναπάντητα έως εκείνη τη στιγμή. Η "διαφύση" απετέλεσε μια νέα πράξη, που δεν ενεργούσε σε αριθμούς αλλά σε μεταβλητές ποσότητες, και τα προβλήματα εμβαδού και όγκου, εύρισκαν πλέον τη λύση τους με την "αντιδιαφύση" αντί για την άθροιση. Η αλήθεια πάντως είναι ότι

δεν όρισαν με σαφήνεια τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας τους – όπως ο Newton την έννοια της ροής και ο Leibniz την έννοια του διαφορικού – με συνέπεια να δεχτούν αναπόφευκτα κριτική κυρίως από το φιλόσοφο G. Berkeley.⁶⁵

3.4.4 Η αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού.

Οι μαθηματικοί που ακολούθησαν τους Newton και Leibniz, είχαν ο καθένας τη δική του συνεισφορά στην προώθηση, τελειοποίηση, και εφαρμογή του νέου λογισμού με αποτέλεσμα αυτός να καταστεί το ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο που ξέρουμε σήμερα, στα χέρια των επιστημόνων. Πιο συγκεκριμένα:

Ο Colin Maclaurin (1698 – 1746), ήταν οπαδός του λογισμού του Newton. Με το έργο του συνέβαλλε στη διάδοση της μεθόδου των ροών. Υπερασπίστηκε τη χρήση των ορίων έναντι των απειροστών και ήταν αυτός που επηρέασε τον D' Alembert, να προσεγγίσει τη θεμελίωση του λογισμού με βάση την έννοια του ορίου. Χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ανισότητες, απέδειξε μια ειδική περίπτωση του θεμελιώδους θεωρήματος και επινόησε το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου για την εύρεση των ακροτάτων συναρτήσεως, καθώς και το θεώρημα των σειρών που φέρει το όνομά του.

Οι αδελφοί Jacob και Johan Bernoulli, ήταν από τους πρώτους που εκτίμησαν τη μεγάλη σημασία του νέου λογισμού, μελέτησαν σε βάθος το έργο του Leibniz, και σε μια εργασία του ο Jacob (1654 – 1705), αναφέρει για πρώτη φορά τον όρο *Calculus integralis*. Είχε τη γνώμη ότι στη χρήση του απείρου ελλοχεύουν κίνδυνοι και πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί. Ανακάλυψε ότι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης είναι η λογαριθμική και απέδειξε τη σύγκλιση της σειράς, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$, εισήγαγε τις πολικές συντεταγμένες, και δημοσίευσε πρώτος τη λύση των διαφορικών εξισώσεων της μορφής $y' + f(x)y = g(x)y^n$. Ο Johan (1667 – 1748), σε άρθρο του το 1694, επινόησε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, όρισε την ακτίνα καμπυλότητας μιας καμπύλης με το τύπο $r = \frac{dx}{dy} : \frac{d^2y}{ds^2}$,

⁶⁵ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 286.

έλυσε το *βραχυστοχρόνιο*⁶⁶ πρόβλημα, ολοκλήρωσε και διαφορίσε τις εκθετικές συναρτήσεις και εισήγαγε τη λύση των διαφορικών εξισώσεων με χωριζόμενες μεταβλητές. Τέλος έδωσε τον ακόλουθο ορισμό της συνάρτησης, απελευθερωμένο από γεωμετρικά στοιχεία που παρέμεινε αμετάβλητος έως το 19^ο αιώνα: «*Συνάρτηση είναι μια ποσότητα που αποτελείται με οποιοδήποτε τρόπο από μεταβλητή ποσότητα και από σταθερές*».

Ο Brook Taylor (1685 – 1731), μαθητής του Newton, μελέτησε τη θεωρία των ροών και απέδειξε το θεώρημα που φέρει το όνομά του, για το ανάπτυγμα συναρτήσεων σε σειρά.

Ο Marquis Guillance F.A. de l' Hôpital (1661 – 1704), μνήθηκε επί πληρωμή στο νέο λογισμό από τον Johann Bernoulli, με τη συμφωνία να δοθούν λύσεις στα προβλήματα που θα ανέκυπταν και να μην παραχωρηθούν σε άλλους τα χειρόγραφα. Χρησιμοποίησε το υλικό αυτό για να εκδώσει το πρώτο εγχειρίδιο για τον απειροστικό λογισμό με τίτλο, «*Analyse des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes*» (Ανάλυση των απειροστών για την κατανόηση των καμπύλων γραμμών). Το βιβλίο αυτό συνέβαλλε στην εκλαίκευση του απειροστικού λογισμού, τον οποίο παρουσιάζει μεθοδικά και συστηματικά, εισάγει με όρους απειροστικούς την έννοια της ισότητας, $x + dx = x$, (δύο ποσότητες είναι ίσες αν διαφέρουν κατά ένα απειροστό), ορίζει την έννοια της μεταβλητής, (οι ποσότητες εκείνες που αυξάνονται ή μειώνονται συνεχώς) και της σταθεράς, (οι ποσότητες που παραμένουν ίδιες ενώ οι άλλες μεταβάλλονται) Διατυπώνει επίσης τον κανόνα που σήμερα φέρει το όνομά του για την άρση της απροσδιοριστίας 0/0 και για τον οποίο δίκαια ο Bernoulli διαμαρτύρεται ότι τον έκλεψε, από τις σημειώσεις που είχε πάρει απ' αυτόν στα πλαίσια της συμφωνίας τους.

Η ισότητα $x + dx = x$ προκάλεσε σοκ, και στη μαθηματική κοινότητα της Γαλλίας δημιουργήθηκε μια ομάδα με επικεφαλής τον Michel Rolle (1652 – 1719), αντίθετη στη χρήση του απειροστικού λογισμού, όπως αυτός αναπτυσσόταν στο βιβλίο του l' Hôpital. Είχαν την άποψη ότι στη παραπάνω εξίσωση, η ποσότητα dx έπρεπε να είναι 0 και θεώρησαν ότι ο λογισμός αυτός, δεν είναι μια αυστηρή επιστήμη όπως η γεωμετρία, αλλά μια προσεγγιστική μέθοδος. Ο Leibniz, μέσω δύο επιστολών του, προσπάθησε να ανατρέψει τους ισχυρισμούς αυτούς, στη 2 – 2 -1702. Εν τέλει οι

⁶⁶ Αν A, B είναι δύο σημεία ενός κατακόρυφου επιπέδου, να καθοριστεί η τροχιά AMB, πάνω στην οποία ένα κινητό M θα φτάσει από το A στο B στο συντομότερο δυνατό χρονικό διάστημα.

επιθέσεις του Rolle σταμάτησαν μετά το θάνατο του Ι' Hôpital, με προτροπή και της γαλλικής Ακαδημίας, και ο απειροστικός λογισμός επικράτησε οριστικά στην Ευρώπη. Η κριτική όμως, του Rolle, ήταν εποικοδομητική γιατί ανάγκασε τους υποστηρικτές των απειροστών, ν' ασχοληθούν με το ζήτημα της θεμελίωσης του λογισμού, ώστε αυτός να γίνει καθολικά αποδεκτός.⁶⁷

Την μεγαλύτερη, ίσως, συμβολή στο να εξελιχθεί ο λογισμός στο σύστημα που γνωρίζουμε και χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα, έχει ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler (1707 – 1783), μαθητής του Johann Bernoulli. Συνέγραψε μεγάλο αριθμό βιβλίων στα οποία συγκέντρωσε και ταξινόμησε το υλικό που υπήρχε έως τότε, με σπουδαιότερα τα «*Institutiones calculi differentialis*» (μαθήματα διαφορικού λογισμού) και «*Institutiones calculi Integralis*» (μαθήματα ολοκληρωτικού λογισμού). Βοήθησε ώστε ο λογισμός να βασιστεί στην άλγεβρα και την αριθμητική και προετοίμασε το έδαφος για να θεμελιωθεί το σύστημα των πραγματικών αριθμών. Ως θεμελιώδη έννοια του λογισμού του διατήρησε το διαφορικό. Αρνήθηκε την έννοια του απειροστού, ως μιας ποσότητας μη μηδενικής που γίνεται μικρότερη από κάθε μέγεθος. Ισχυρίστηκε δηλαδή, ότι αν ένας αριθμός είναι μικρότερος από κάθε δοσμένη ποσότητα, τότε αυτός ισούται με μηδέν. Το 1748 δημοσίευσε το βιβλίο του «*Introductio in analysis infinitorum*», που θεωρείται ένα από τα πιο σημαντικά βιβλία μαθηματικών όλων των εποχών. Στην εργασία αυτή καθιστά τη συνάρτηση βασική έννοια του λογισμού, ο οποίος πλέον, μελετά ιδιότητες συναρτήσεων και όχι καμπυλών. Έδωσε τον ακόλουθο ορισμό της συνάρτησης: «*Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που αποτελείται με οποιονδήποτε τρόπο, από την μεταβλητή και από σταθερές ποσότητες*». Η συμβολή του στη μελέτη απείρων σειρών είναι τεράστια, ενώ εισήγαγε στα μαθηματικά τον αριθμό

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
, βρήκε το διαφορικό της συνάρτησης $y = \ln x$, ενώ το 1734 στην

εργασία του «*De progressionibus harmonicis observationes*», απέδειξε τον τύπο

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + c_n$$
, όπου c_n είναι η σταθερά του Euler. Η τιμή της υπολογίστηκε απ'

αυτόν να είναι ίση με 0,577218. Σήμερα συμβολίζεται με γ , είναι

⁶⁷ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ.306.

$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$, συγκαταλέγεται μεταξύ των σημαντικότερων

σταθερών όπως ο π και ο e , και δεν έχει αποδειχθεί αν είναι ρητός ή άρρητος αριθμός. Οι μεγάλοι μαθηματικοί αναγνώρισαν την προσφορά του Euler και αυτό φαίνεται από τη γνώμη που είχε ο Gauss γι' αυτόν:

*«Η μελέτη των έργων του Euler θα παραμείνει το καλύτερο σχολείο για τα διάφορα πεδία των μαθηματικών και τίποτα άλλο δεν μπορεί να τα αντικαταστήσει».*⁶⁸

Περί τα τέλη του 18^{ου} αιώνα και αφού μια προσπάθεια του Γάλλου Jean Le Rond D' Alembert (1717 – 1783), να θεμελιωθεί ο λογισμός του Leibniz με βάση την έννοια του ορίου, θα αποτύχει, ο Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), θα επιχειρήσει να δώσει μια αλγεβρική θεμελίωση στον απειροστικό λογισμό, με σκοπό να τον απαλλάξει από τις ασαφείς έννοιες του απειροστού, του διαφορικού και του ορίου. Έτσι το 1797 στο έργο του *«θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων»*, παρουσίασε μια μέθοδο που βασιζόταν στον ισχυρισμό ότι κάθε συνάρτηση αναπτυσσόταν σε δυναμοσειρά με καθαρά αλγεβρικές διαδικασίες. Εδώ εισάγει για πρώτη φορά και το συμβολισμό $f'(x)$ της παραγώγου συναρτήσεως, την οποία ονόμασε πρώτη παραγόμενη συνάρτηση της $f(x)$. Η καινοτομία όμως, που παρουσιάζει ο Lagrange, είναι η έννοια της συνάρτησης ως μιας απλής αλγεβρικής έκφρασης, ή γενικότερα ως σχέσης εξάρτησης, που βοήθησε να απεγκλωβισθεί η έννοια της παραγώγου από προγενέστερες έννοιες, όπως της ροής και του ρυθμού μεταβολής. Ήταν η πρώτη θεωρία συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Τέλος ο Lagrange ανακάλυψε μια προσεγγιστική μέθοδο υπολογισμών με τη βοήθεια ανισοτήτων, την οποία χρησιμοποίησε για να αποδείξει το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού και το θεώρημα για τη μονοτονία συναρτήσεων σε ένα διάστημα, με χρήση του πρόσημου της παραγώγου.

Γύρω στα 1800 και αφού με την ανακάλυψη των μη ευκλείδιων γεωμετριών, εξέλειπε κάθε ελπίδα στήριξης του νέου λογισμού από την κλασική ελληνική γεωμετρία, υπήρξε επιτακτική η ανάγκη επαναθεμελίωσής του μόνο πάνω σε αριθμητικές έννοιες. Ο Τσέχος Bernhard Bolzano (1781 – 1848), εργάστηκε προς αυτή την κατεύθυνση και το 1817 στην εργασία του *«Αναλυτική Απόδειξη»* δίνει τον κατάλληλο ορισμό της συνεχούς συνάρτησης: *«Όταν λέγω ότι η συνάρτηση $f(x)$*

⁶⁸ D. Struik, Συνοπτική Ιστορία των μαθηματικών.

μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του x , μέσα ή έξω από κάποια όρια, σημαίνει ακριβώς ότι, αν x είναι μια τέτοια τιμή, η διαφορά $f(x+\omega) - f(x)$, μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, με τον περιορισμό να έχουμε το ω όσο μικρό επιθυμούμε».⁶⁹ Ορίζει την παράγωγο της f , ως την ποσότητα την οποία ο λόγος $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, προσεγγίζει όσο κοντά θέλουμε

καθώς ο $\Delta x \rightarrow 0$ και τη συμβολίζει $\frac{dy}{dx}$, τονίζοντας ότι το $\frac{dy}{dx}$, δεν παριστάνει το

πηλίκο του dy προς το dx , ούτε είναι πηλίκο μηδενικών, ούτε είναι ένας λόγος από εξαφανιζόμενες ποσότητες, αλλά ένας αριθμός που προσεγγίζεται απ' αυτόν το λόγο. Σε επόμενες εργασίες του αποδεικνύει το σύνολο των θεωρημάτων που ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα.

Σύγχρονος του Bolzano, ήταν ο μεγαλύτερος Γερμανός μαθηματικός του 19^{ου} αιώνα, Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Το χαρακτηριστικό του έργου του ήταν το πολύ υψηλό επίπεδο και η απόλυτη αυστηρότητα, και γι' αυτό συνέβαλλε τα μέγιστα στην ανάπτυξη του λογισμού, θεωρείται δε από τους πρωτεργάτες της αυστηρής θεμελίωσης του.

Το 1755, ο Euler έδωσε μια γενικότερη διατύπωση του ορισμού της συνάρτησης: «Αν μεγέθη εξαρτώνται από άλλα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε αν τα τελευταία μεταβληθούν και τα πρώτα να υφίστανται επίσης μια μεταβολή, τότε τα πρώτα ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων».

Ο Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), ο μεγαλύτερος ίσως μαθηματικός του 19^{ου} αιώνα, είναι πλέον σε θέση να θεμελιώσει αυστηρά το νέο λογισμό δίνοντας ορισμούς που έγιναν αποδεκτοί σχεδόν αμέσως από τη μαθηματική κοινότητα. Στο πιο σημαντικό έργο του «Cours d' analyse» (1821), έδωσε τους παρακάτω ορισμούς για τις έννοιες: Μεταβλητή, συνάρτηση, όριο συνάρτησης, απειροστό, άπειρη ποσότητα, συνέχεια συνάρτησης.

- *Μεταβλητή είναι μια ποσότητα που θεωρείται ως διαδοχή πολλών τιμών, διαφορετικών μεταξύ τους.*
- *Όταν οι μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε, όταν δίνεται η τιμή της μιας, κάποιος να μπορεί να ορίσει τις τιμές των άλλων, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι διάφορες ποσότητες μπορούν να εκφραστούν*

⁶⁹ 69. I. Grattan-Guinness, Bolzano, Cauchy and the 'new analysis' of the early 19th century.

μέσω μιας απ' αυτές, η οποία παίρνει το όνομα της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι εκείνες που ονομάζονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής.

- Όταν οι τιμές που δίνονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή πλησιάζουν διαρκώς μια σταθερή τιμή από την οποία διαφέρουν τόσο λίγο, οσοδήποτε θα επιθυμούσε κανείς, αυτή η σταθερή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων.
- Όταν οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας μειώνονται διαρκώς με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνονται μικρότερες από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα, εκείνη η μεταβλητή γίνεται αυτό που ονομάζουμε απειροστό.
- Μια μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο, είναι αυτή που ονομάζουμε άπειρη ποσότητα.
- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε x , η αριθμητική τιμή της διαφοράς $f(x+h)-f(x)$ τείνει στο μηδέν, καθώς το h τείνει στο μηδέν. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $f(x)$ θα παραμένει συνεχής ως προς x σε ένα δεδομένο διάστημα, αν μια απειροστή αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντα μια απειροστή αύξηση στην ίδια τη συνάρτηση.

Στο έργο του «περίληψη μαθημάτων που δόθηκαν στη Βασιλική Πολυτεχνική σχολή επί του απειροστικού λογισμού» (1823), δίνει τον ορισμό της παραγώγου συναρτήσεως, την οποία συμβολίζει $f'(x)$, παίρνοντας από τον Lagrange και το συμβολισμό και την ονομασία:

Όταν μια συνάρτηση $y=f(x)$ παραμένει συνεχώς μεταξύ δύο άκρων της μεταβλητής x , και όταν αντιστοιχίσουμε σε μια τέτοια μεταβλητή, μια τιμή μεταξύ των δύο παραπάνω άκρων, τότε μια απερίοριστα μικρή μεταβολή της μεταβλητής παράγει μια απερίοριστα μικρή μεταβολή της τιμής της συνάρτησης. Άρα αν θέσουμε $\Delta x=i$, οι δύο όροι του λόγου

των διαφορών $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, θα είναι απερίοριστα μικρές ποσότητες. Παρ'

όλο που οι δύο όροι θα πλησιάζουν απερίοριστα και ταυτόχρονα στο όριο μηδέν, ο λόγος είναι δυνατόν να συγκλίνει σε κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό. Αυτό το όριο όταν υπάρχει, έχει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x , αλλά μεταβάλλεται

με το x . Η μορφή της νέας συνάρτησης, που είναι το όριο του λόγου $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$,

θα εξαρτάται από τη μορφή της αρχικής συνάρτησης $y=f(x)$. Ακριβώς για να δείξουμε

αυτή την εξάρτηση, τη νέα συνάρτηση ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση και τη συμβολίζουμε y' ή $f'(x)$.

Διατυπώνει και αποδεικνύει το *θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού* καθώς και το *θεώρημα* που αφορά τη μονοτονία συνάρτησης σε ένα διάστημα $[a, b]$, σε σχέση με το πρόσημο της παραγώγου και σε μια βελτιωμένη έκδοση παρουσίασε το *γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού*. Ο Cauchy αξιολόγησε ως κεντρικό πρόβλημα, το θέμα της αντιμετώπισης των απείρων σειρών, διότι αναγνώρισε τη σημασία της αναπαράστασης συναρτήσεων με αυτές. Έτσι ασχολήθηκε επισταμένως με το θέμα αυτό, έδωσε τον ορισμό της σύγκλισης σειρών και έθεσε τη θεμελιώδη γενική συνθήκη για να συμβαίνει αυτό, που είναι το κριτήριο σύγκλισης που φέρει το όνομά του. Δίνει επίσης, τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και το σύμβολο $\int$, θεωρείται πλέον ως όριο αθροίσματος και όχι ως άθροισμα:

«Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[x_0, X] \rightarrow \mathbb{R}$, χώρισε το διάστημα $[x_0, x]$ σε n υποδιαστήματα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, X]$, θεώρησε το άθροισμα $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$, και απέδειξε ότι στη περίπτωση που το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος τείνει στο 0, τότε υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Το όριο αυτό που εξαρτάται από το τύπο της συνάρτησης f και από τα άκρα x_0, X το ονόμασε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[x_0, X]$ και το συμβόλισε με $\int_{x_0}^X f(t)dt$ »

Με τη βοήθεια του ορισμού του ολοκληρώματος, δείχνει τη γραμμικότητα, την προσθετικότητα, το *θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού* και για πρώτη φορά έχουμε την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, δίχως να βασίζεται στη διαισθητική έννοια του εμβαδού. Ο λογισμός όπως τον ξέρουμε σήμερα ωφείλεται κατά κύριο λόγο στον Cauchy, ο οποίος με την αυστηρότητά του, αφ' ενός εδραίωσε τα προγενέστερα συμπεράσματα, αφ' ετέρου έδωσε ένα πλαίσιο για πολλά νέα, μερικά από τα οποία, δεν μπορούσαν καν να διατυπωθούν πριν από αυτόν.

Σύγχρονος του Cauchy υπήρξε ο Πρώσος μαθηματικός Dirichlet (1805 – 1859), ο οποίος ασχολούμενος με τη εύρεση συνθηκών για τη σύγκλιση σειρών, έθεσε έναν ακόμη γενικότερο ορισμό της συνάρτησης, αυτόν που χρησιμοποιείται σήμερα: «Μια συνάρτηση $y(x)$, είναι ορισμένη αν έχουμε οποιοδήποτε κανόνα, που σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη τιμή του y , δίχως να είναι

απαραίτητο να διατυπωθεί μέσω μιας αναλυτικής έκφρασης ή εξίσωσης». Κατόπιν έθεσε τις συνθήκες που θα έπρεπε να πληρεί μια φραγμένη συνάρτηση ώστε να αναλύεται κατά Fourier (συνθήκες Dirichlet), και έδωσε παράδειγμα συνάρτησης που δεν τις ικανοποιεί, συνάρτησης δηλαδή που είναι ασυνεχής σε άπειρο πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού της. Πρόκειται για τη συνάρτηση

$$D(x) = \begin{cases} c, & x \in Q \\ d \neq c, & x \notin Q \end{cases} \quad (\text{συνάρτηση Dirichlet}).$$

Σε μια προσπάθεια να πείσει τη μαθηματική κοινότητα για την επέκταση της εννοίας του ολοκληρώματος, ώστε να συμπεριληφθούν στη κλάση των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων, συναρτήσεις όπως η D , έδωσε τον ακόλουθο ορισμό της συνέχειας, τον οποίο χρησιμοποιούμε και σήμερα: «η f είναι συνεχής στο σταθερό σημείο x , όταν φθίνοντας το h σταθερά, η διαφορά $f(x+h) - f(x)$, θα πρέπει να συγκλίνει στο μηδέν». Στα πλαίσια της παραπάνω προσπάθειας, περιέγραψε την ιδιότητα εκείνη που αργότερα έγινε γνωστή ως ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης, σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Τέλος το 1854, απέδειξε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Η ανακάλυψη της συνάρτησης $D(x)$ υπήρξε ιστορική, αφού όντας αδύνατο να σχεδιαστεί, για πρώτη φορά η ανάλυση προσπερνά και υπερβαίνει τη γεωμετρία.⁷⁰

Ο Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), θα απαλλάξει τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος του Cauchy, από την απαίτηση της συνέχειας της f , ενώ αντικατέστησε τον παράγοντα $f(x_{i-1})$, με τον $f(t_i)$, όπου t_i τυχαίο σημείο του υποδιαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$. Έδωσε το πρώτο παράδειγμα συνάρτησης που ενώ είναι ασυνεχής σε κάθε διάστημα, εν τούτοις είναι ολοκληρώσιμη. Πρόκειται για τη

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(kx)}{k^2}, \text{ όπου } B(x) = x - [x], \text{ αν } x \neq k/2, \text{ και } 0, \text{ αν } x = k/2,$$

η οποία παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $x = p/2n$, $(p, 2n) = 1$, $p \in \mathbb{Z}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη και η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, δεν παραγωγίζεται όμως στα σημεία ασυνεχείας της f , που είναι άπειρα σε πλήθος όπως είδαμε προηγουμένως. Ο Bolzano είχε πρώτος κατανοήσει τη

⁷⁰ Ε.Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ.373

διαφορά μεταξύ συνέχειας και παραγωγισιμότητας και το 1834 στην εργασία του «*Functionenlehre*», έδωσε παράδειγμα συνεχούς συναρτήσεως $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε, το σύνολο των σημείων στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη, να είναι πυκνό.

Επειδή όμως, καθυστέρησε να τη δημοσιεύσει κέρδισε ο Weierstrass τη δόξα της ανακάλυψης αυτής, όταν έδωσε το δικό του παράδειγμα.⁷¹

Για την ομαλή ανάπτυξη του λογισμού, υπήρξε επιτακτική η ανάγκη ενασχόλησης με την έννοια του ορίου, πάνω στην οποία ο Cauchy είχε θεμελιώσει τις υπόλοιπες βασικές έννοιες δηλαδή τη συνέχεια την παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Τα προβλήματα που υπήρχαν σχετικά με την έννοια του ορίου ήταν:⁷²

- Η συνέχιση της χρήσης των απειροστών.
- Η εμφάνιση της “σκοτεινής” έννοιας του πηλίκου $0/0$
- Η έλλειψη ενός συστήματος αριθμών αυστηρά θεμελιωμένου απ’ όπου να παίρνε τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή.
- Η παραδοχή της αρχής “ότι ισχύει μέχρι το όριο, ισχύει και για το όριο”
- Οι αντικρουόμενες απόψεις γύρω από το ερώτημα, αν μια μεταβλητή μπορεί να φτάσει το όριό της.

Τα παραπάνω επιστημολογικά εμπόδια για την ομαλή συνέχιση της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού, παραμερίστηκαν, όταν οι Dedekind και Weierstrass, θεμελιώσαν το σύστημα των πραγματικών αριθμών. Η αδήριτη ανάγκη να πάψει ο λογισμός να ζητά τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας, οδήγησαν τον Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916) – όπως ο ίδιος γράφει στη μονογραφία του «*συνέχεια και άρρητοι αριθμοί*» - να σκεφτεί πάνω στο θέμα μέχρις ότου βρει ένα καθαρά αριθμητικό και τέλεια αυστηρό θεμέλιο για τις αρχές της απειροστικής ανάλυσης. Το πρόβλημά του ήταν να βρει μια αρχή για τη συνέχεια σε αριθμητική γλώσσα. Φαντάστηκε λοιπόν, την ευθεία των αριθμών σαν ένα στέρεο σωλήνα απείρου μήκους, γεμάτο με διατεταγμένους ρητούς αριθμούς. Κάθε τομή του σωλήνα δίνει δύο τμήματα A, B και μας αποκαλύπτει δύο διατομές, τα άκρα των συνόλων A και B. Κοιτάζοντας τις εκτεθειμένες αυτές πλευρές μπορεί κανείς να διαβάσει τους αριθμούς που μας δείχνουν. Αν δε μας δείχνουν αριθμό τότε η τομή έχει γίνει σ’ έναν άρρητο. Έτσι ο Dedekind όρισε τους άρρητους με τη βοήθεια των συνόλων A και

⁷¹ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 378.

⁷² F. Cajori, Grafting of the theory of limits on the calculus of Leibniz.

B.⁷³ Συγκεκριμένα εισήγαγε την έννοια της τομής στο σύνολο Q ως εξής: Μια τομή είναι ο χωρισμός του Q σε δύο κλάσεις L και R , τέτοιες ώστε αν $x \in L$ και $y \in R$, τότε $x < y$. Συμβόλισε με (L, R) την τομή και διετύπωσε το ακόλουθο αξίωμα:

«Για οποιαδήποτε τομή (L, R) , υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός που αντιστοιχεί στην τομή (ή παράγει την τομή). Κάθε τομή (L, R) , έχει τις ιδιότητες:

- i) L, R είναι μη κενά υποσύνολα του Q .
- ii) L, R ξένα μεταξύ τους.
- iii) Αν $x \in L$ και $y \in R$, τότε $x < y$
- iv) Το L δεν έχει μέγιστο στοιχείο.
- v) Αν (L_1, R_1) και (L_2, R_2) δύο τομές, τότε $L_1 \subset L_2$ ή $L_2 \subset L_1$
- vi) Αν $x = (L_1, R_1)$ και $y = (L_2, R_2)$, τότε $x < y \Leftrightarrow L_1 \subset L_2$.

Εύκολα κατόπιν απέδειξε την πληρότητα των πραγματικών αριθμών, ενώ τα θεωρήματα που είχαν προκαλέσει σύγχυση στον Cauchy, όπως π.χ. ότι «μία ακολουθία γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω συγκλίνει» μπορούσαν πλέον να αποδειχθούν.

Θα ακολουθήσει ο ακριβής αλγεβρικός ορισμός της έννοιας του ορίου, με ανισοτικές σχέσεις που περιείχαν τα δ και ε , από τον Carl Weierstrass (1815 – 1897), και η απομάκρυνση των απειροστών είναι πια οριστική. Το 1865 έδωσε μια λεπτομερή κατασκευή των αρρήτων, θεωρώντας τους άπειρα φραγμένα αθροίσματα ρητών, το 1867 απέδειξε ότι κάθε άπειρο φραγμένο σύνολο έχει σημείο συσσωρεύσεως και το 1869 το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων. Το 1872 σε συνεργασία με έναν φοιτητή του δίνει τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας. Την ίδια χρονιά ανακοίνωσε στην Ακαδημία του Βερολίνου ότι βρήκε παράδειγμα συνάρτησης που είναι παντού συνεχής, αλλά πουθενά παραγωγίσιμη, δηλαδή μιας συνεχούς συνάρτησης, που δεν έχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Είναι η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sin(a^n \pi x)$, όπου a περιττός ακέραιος και b σταθερά με $0 < b < 1$ και $ab > 1 + 3/2\pi$. Με την ιστορική αυτή ανακάλυψη ο Weierstrass, κατάφερε ένα σοβαρό κτύπημα στη χρησιμοποίηση της γεωμετρικής διαίσθησης, στις αναλυτικές μελέτες. Το ότι η συνέχεια δεν συνεπάγει την παραγωγισιμότητα, έκανε

⁷³ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 383.

τους μαθηματικούς να είναι στο εξής πιο προσεκτικοί και να μην εμπιστεύονται τη διαίσθηση ή τη γεωμετρική σκέψη.⁷⁴ Τα απειροστά μετά τους Dedekind και Weierstrass έχουν πλέον εξαφανιστεί, και έχουν αντικατασταθεί από τους ακριβείς “ $\epsilon - \delta$ ” ορισμούς δίνοντας στο λογισμό εκείνη την αυστηρότητα, που οι δημιουργοί του αναζητούσαν ολόκληρους αιώνες.

⁷⁴ Ε. Γιαννακούλιας, απ. λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^ο π.Χ έως τον 19^ο αιώνα, σελ. 387

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Η ανάλυση των διαλόγων.

- 4.1. Εικόνες των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης.
- 4.2. Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής.
- 4.3. Μέσος ρυθμός μεταβολής σε ένα διάστημα πλάτους 0,1 sec.
- 4.4. Η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής.
- 4.5. Το θεμελιώδες θεώρημα.
- 4.6. Ο ρυθμός μεταβολής της συσσώρευσης.
- 4.7. Κάποια άμεσα συμπεράσματα.

4.1. Εικόνες των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης

Ο στόχος του πρώτου ερωτήματος και των δύο προβλημάτων, ήταν να προσανατολίσει τους μαθητές, στο να επαναφέρουν τις εμπειρίες τους και να εμπλουτίσουν τις εικόνες τους γύρω από την έννοια της συνάρτησης. Χωρίς αμφιβολία πρόκειται για την θεμελιώδη έννοια του απειροστικού λογισμού και θελήσαμε να διερευνήσουμε τις εμπειρίες που έχουν οι μαθητές σχετικά με αυτή την έννοια. Τι είναι αυτό που έρχεται στο νου τους, όταν λένε ή αντιλαμβάνονται ότι δύο μεγέθη αλληλοεξαρτώνται και συμμεταβάλλονται;

Υπενθυμίζουμε ότι ο Newton οραματίστηκε συνεχείς αλλαγές και μεταβλητές (ρέουσες) ποσότητες που προκύπτουν από συνεχείς αλλαγές, ό,τι δηλαδή σήμερα θα αποκαλούσαμε με τον όρο συνάρτηση. Ακριβώς γι' αυτό το λόγο η διορατικότητα και η οξυδέρκειά του χαρακτηρίστηκαν τόσο σπουδαίες. Η μέθοδός του ξεκίνησε από μια αναλυτική έκφραση μιας συνάρτησης f , που δίνει το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας, και παρήγαγε μια αναλυτική έκφραση για μια συνάρτηση F , που έδινε το συσσωρευμένο ποσό αυτής της ποσότητας. Τι εικόνες άραγε θα μπορούσαν να είχαν υποστηρίξει την διορατικότητα του Newton; Πρώτα απ' όλα είχε μια εικόνα δυναμικών ποσοτήτων, σε συνεχή ροή αντί για την πιο συνηθισμένη έννοια σταθερών ποσοτήτων, υποχρεωμένων σε ακινησία. Δεύτερον αντιλαμβανόταν την κίνηση σαν θεμελιακή αρχή για τις μεθόδους του και τρίτον δεν δυσκολευόταν καθόλου να σκέπτεται ένα συνεχές συντιθέμενο από απειροστές ποσότητες, οσοδήποτε μικρές κάποιος θα επιθυμούσε, οι οποίες συγκρινόμενες με οποιοδήποτε θετικό μέγεθος, φάνταζαν αμελητέες, Thompson, (1994).

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο να υπολογίσουν την επιφάνεια της κυκλικής οριζόντιας τομής του κώνου συναρτήσει του ύψους του νερού, σε αντίθεση με το πρώτο ερώτημα του πρώτου προβλήματος όπου έχοντας γνωστό το τύπο που δίνει το διάστημα που διανύει ένα αντικείμενο ευρισκόμενο σε ελεύθερη πτώση, βρήκαν εύκολα τη συνάρτηση $d(t)$. Σε κάθε περίπτωση πάντως, φαίνεται να λείπει η κινητικότητα και η δυναμική από τις εικόνες που τα παιδιά σχηματίζουν για την έννοια της συνάρτησης. Για το θέμα αυτό είχαμε τρεις συζητήσεις κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών, οι οποίες παρατίθενται στα παρακάτω αποσπάσματα. Ο διάλογος 2 έγινε στο δημόσιο σχολείο, ενώ οι διάλογοι 3 και 4 με το τμήμα του ιδιωτικού σχολείου.

Διάλογος 2

- 2.1 Διδ: Για πείτε μου λοιπόν πως εκφράζεται το διάστημα που διανύει ένα αντικείμενο κατά την ελεύθερη πτώση του, ως συνάρτηση του χρόνου; Τι βρήκατε;
- 2.2 Ανδρέας: $d(t) = 5t^2$ (Ο διδάσκων γράφει στον πίνακα τον τύπο).
- 2.3 Διδ: Και το t ;
- 2.4 Ανδρέας: Το $t \in [0, 5]$.
- 2.5 Διδ: Τι λέμε στην περίπτωση αυτή σχετικά με τα μεγέθη d και t ;
- 2.6 Ανδρέας: Ότι το t είναι η μεταβλητή, είναι η τιμή η οποία μεταβάλλεται, είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και $d(t)$ το $d(t)$ δηλαδή το y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.
- 2.7 Διδ: Μάλιστα. Και τα δύο μεγέθη τι κάνουν σ' αυτήν την κατάσταση;
- 2.8 Ανδρέας: Όσο μεταβάλλεται το t , μεταβάλλεται και το $d(t)$. Το $d(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου.
- 2.9 Διδ: Μάλιστα. Δηλαδή εδώ έχουμε δύο μεγέθη που τι κάνουν;
- 2.10 Ζωή: Επηρεάζεται το ένα από το άλλο, ανάλογα με την τιμή του t , έχουμε το $d(t)$.
- 2.11 Διδ: Πώς λέγεται η σχέση που τα συνδέει;
- 2.12 Ζωή: Συνάρτηση.
- 2.13 Διδ: Τι είναι για σας το μαθηματικό αντικείμενο που ονομάζουμε συνάρτηση; Τι εικόνα σχηματίζει κάποιος στο μυαλό του όταν ακούει αυτό το πράγμα;
- 2.14 Ανδρέας: Εγώ έχω στο μυαλό μου το πινακάκι που συμπληρώσαμε προηγουμένως, όπου κάθε τιμή του x ,....
- 2.15 Διδ: Του t εδώ.
- 2.16 Ανδρέας: Του t ναι, αντιστοιχεί σε μία και μόνο μία τιμή του y , δηλαδή του d , και αυτό που είπα και πριν ότι η εξαρτημένη μεταβλητή το $d(t)$ εξαρτάται από το t .
- 2.17 Διδ: Και τι συμβαίνει με τα δύο μεγέθη; (έχοντας πάντα στο νου μου την ιδέα της συμμεταβολής με τη δυναμική που εμπεριέχεται σ' αυτήν).
- 2.18 Ζωή: Το ένα επηρεάζει το άλλο; (η Ζωή απαντά με ερώτηση που δείχνει αμφιβολία).
- 2.19 Διδ: Αλληλοεξαρτώνται δηλαδή, συµμεταβάλλονται. Μάλιστα. Για σας τελικά το μαθηματικό εργαλείο που ονομάζουμε συνάρτηση, κάνει κάποια δουλειά επί πρακτικού επιπέδου; Τι συμβαίνει με αυτό;
- 2.20 Οδυσσέας: (Δεν ακούγεται καθαρά, κατά πάσα πιθανότητα λέει

ότι αντιστοιχίζει τις τιμές του x στις τιμές του y).

2.21 Διδ: *Γενικότερα όμως; εκφράζει τη σχέση.....*

Τι είναι τελικά η συνάρτηση με βάση τα όσα είπατε προηγουμένως;

2.22 Γιάννης: *Η σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων.*

2.23 Διδ: *Η σχέση μεταξύ δύο μεγεθών, η αλληλεξάρτηση τους.*

Οι εικόνες που έχουν αναπτύξει ο Ανδρέας και η Ζωή σχετικά με τη θεμελιώδη έννοια της συνάρτησης, φαίνεται να είναι διαφορετικές. Ο Ανδρέας είναι ένας τυπικά καλός μαθητής που σημαίνει πολύ καλός γνώστης των τύπων και της μεθοδολογίας, πράγματα που χρησιμοποιεί ως βασικά εργαλεία για να αντιμετωπίζει τα προβλήματα. Προσπαθεί να αναπαράγει πιστά τους ορισμούς και την ορολογία, (2.6). Η εικόνα που σχηματίζει για την έννοια της συνάρτησης είναι αυτή του πίνακα τιμών, που του δίνει την ευκαιρία να χρησιμοποιήσει για άλλη μια φορά τον τυπικό ορισμό: «κάθε τιμή του t , αντιστοιχεί σε μία μόνο τιμή του $d(t)$ ». (2.14, 2.16) Παρά το ότι έχει συνειδητοποιήσει την εξάρτηση του διαστήματος d από το χρόνο t , σε κανένα σημείο της σκέψης του δε φαίνεται ότι η εξάρτηση αυτή είναι αμφίδρομη, ενώ δεν υπάρχουν ίχνη εμπειριών συμμεταβολής των δύο μεγεθών που να εμπεριέχουν και κάποια δυναμική ή κινητικότητα. Η παγίωση στατικών εικόνων για τις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού, πιστεύουμε ότι είναι αποτέλεσμα του ρόλου που καλείται να παίξει ο διδάσκων, ο οποίος υποχρεώνεται να κινηθεί ανάμεσα στις συμπληγάδες της κατανόησης των εννοιών και της απαίτησης για έγκαιρη ολοκλήρωση της εξεταστέας ύλης. Αντίθετα, ίχνη τέτοιων αναπαραστάσεων που υποδηλώνουν μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, εντοπίζουμε στις απαντήσεις της Ζωής. Η Ζωή φαίνεται να έχει σχηματίσει μια, έστω και θολή εικόνα συμμεταβολής και αλληλεξάρτησης των μεγεθών t και $d(t)$, (2.10) σε καμία όμως περίπτωση δεν αναδύεται η δυναμική και η κινητικότητα που υπάρχει σ' αυτήν την αλληλεξάρτηση. Οι εικόνες της φαίνεται να είναι απολύτως στατικές, είναι όμως αξιοσημείωτη η προσπάθειά της, η πρόθεσή της, να παρακάμψει τον τυπικό ορισμό και να δει πιο ουσιαστικά και πιο βαθιά την έννοια της συνάρτησης. Έτσι ίσως δικαιολογείται και η απάντησή της με χρήση ερωτηματικού (2.18) στην δεύτερη προσπάθεια που έκανα για να ελέγξουμε, αν η έννοια της συμμεταβολής υπάρχει στη σκέψη της (2.9, 2.17). Ο Γιάννης ένας ιδιαίτερα αδύνατος μαθητής, όπως διαπίστωσα κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, φαίνεται πως μέσα από την συζήτηση αντιλήφθηκε την πρακτική σημασία της έννοιας της συνάρτησης, και τον ρόλο που αυτή θα μπορούσε να

διαδραματίσει στον πραγματικό κόσμο (2.22). Αντίθετα ο Οδυσσέας στην παρέμβασή του δείχνει ότι περισσότερο αντιμετωπίζει τα πράγματα από την σκοπιά του Ανδρέα παρά προσπαθεί να εμβαθύνει έστω και ελάχιστα στην έννοια που εξετάζουμε (2.20). Έχοντας υπόψη ότι η μάθηση ταυτίζεται με τη συμμετοχή και ότι είναι αποτέλεσμα εμπειριών που βιώνουν οι μαθητές μέσα από την πρακτική της κοινότητας, βασικός μας στόχος υπήρξε ο επανακαθορισμός των απόψεων των μαθητών σχετικά με τις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης. Θα ήταν ιδιαίτερα θετικό, για παράδειγμα, αν ένα ποσοστό μαθητών μπορούσε να αντιληφθεί την έννοια της συνάρτησης, ως μια λειτουργική συμμεταβολή δύο μεγεθών και όχι ως μία στατική αντιστοιχία δύο μεταβλητών.

Διάλογος 3

- 3.1 Διδ: *Αυτό που προσδιορίσατε πως ονομάζεται;
 $d(t)$ το έχουμε συμβολίσει; Πόσο είναι;*
- 3.2 Μαθητές: *$5t^2$ (Ο διδάσκων γράφει στο πίνακα τον
τύπο $d(t) = 5t^2$, $t \in [0, 5]$).*
- 3.3 Διδ: *Λέμε ότι βρήκατε το διάστημα που
διανύει το αντικείμενο κατά την ελεύθερη
πτώση του..... πείτε μου τη λέξη....*
- 3.4 Μαθητές: *Συναρτήσει του χρόνου.*
- 3.5 Διδ: *....Του χρόνου. Γενικά ποια είναι η άποψή σας
για τον όρο συνάρτηση; πως αντιλαμβάνεσθε
την έννοια; Όταν δηλαδή ακούτε ότι ένα μέγεθος
εκφράζεται σε συνάρτηση με ένα άλλο τι καταλαβαίνετε;*
- 3.6 Κων/νος: *Είναι μια αντιστοιχία μεταξύ των
δύο μεγεθών, ας πούμε δηλαδή όταν το ένα μέγεθος
παίρνει κάποια τιμή, ποια θα είναι η αντίστοιχη
μεταβολή στο άλλο μέγεθος.*
- 3.7 Διδ: *Η αντίστοιχη μεταβολή ή η αντίστοιχη τιμή;*
- 3.8 Κων/νος: *Η τιμή που θα παίρνει...δηλαδή
πως αντιδρά το ένα μέγεθος σε σχέση με το άλλο.*

Ο Κωνσταντίνος, όπως γνωρίζω, έχει καλή διαισθητική αντίληψη για τις διάφορες έννοιες του απειροστικού λογισμού, και παρ' ότι είναι εξοικειωμένος με μια τέτοιου είδους αντιμετώπιση των εννοιών αυτών, δεν καταφέρνει να ξεφύγει από τον τυπικό ορισμό. Δεν μπορεί να εκφράσει την κινητικότητα και τη δυναμική που εμπεριέχεται σε μια τέτοια αλληλεξάρτηση και μιλάει μόνο για εξάρτηση του ενός μεγέθους από

το άλλο (3.6, 3.8). Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι μια αντιστοιχία μεταξύ των μαθηματικών συμβόλων x και y , με τις μεταβλητές ποσότητες t και $d(t)$, υπάρχει στο νου σχεδόν όλων των παιδιών. Η αντιστοιχία αυτή, η οποία είναι αντιστοιχία μεταξύ συμβόλων φυσικών ποσοτήτων και αφηρημένων μαθηματικών συμβόλων, επιτρέπει στους μαθητές να «μετακινούνται» ανάμεσα στα μαθηματικά και τη φυσική όποτε κρίνουν αυτό απαραίτητο.

Διάλογος 4

- 4.1 Διδ: *Τι υπολογίσαμε; Θέλω να μου πει κάποιος.*
- 4.2 Ντοριάν: *Το στιγμιαίο εμβαδόν, το εμβαδόν του κυλίνδρου για κάποιο συγκεκριμένο ύψος, πώς το λένε αυτό.....*
- 4.3 Διδ: *Της επιφάνειας του νερού σε συνάρτηση με το ύψος. Μπορεί κάποιος να μου περιγράψει τις εικόνες που έχει στο μυαλό του, καθώς γεμίζουμε τον κώνο με νερό;*
- 4.4 Ντοριάν: *Ανεβαίνει η στάθμη του.*
- 4.5 Άρης: *Μεγαλώνει το εμβαδόν.*
- 4.6 Διδ: *Μπορείς να μας το αναλύσεις Άρη;*
- 4.7 Άρης: *Καθώς ρίχνουμε το νερό ανεβαίνει η στάθμη (δείχνει με το χέρι το σχήμα στο πίνακα, κάνοντας μια ανοδική κίνηση), μεγαλώνει το x , επομένως ανοίγει ο κύκλος αφού είναι κώνος (σχηματίζει με τους αντίχειρες και τους δείκτες μια συνεχώς διευρυνόμενη κυκλική επιφάνεια).....εε... και μεγαλώνει η επιφάνεια.*
- 4.8 Διδ: *Και σε γενικές γραμμές αυτό το μαθηματικό εργαλείο που χειριστήκατε τόσο πολύ εφέτος και το ονομάζουμε συνάρτηση, σε τι χρησιμεύει τελικά;*
- 4.9 Μαρία: *Να βρίσκουμε κάθε χρονική στιγμή κάποιο εμβαδόν ή κάποιο μέγεθος άγνωστο.*
- 4.10 Διδ: *Να έχουμε δηλαδή μια περιγραφή της αλληλεξάρτησής τους.*

Ο Άρης αντιλαμβάνεται τη δυναμική και την κίνηση που ενυπάρχει στην αλληλεξάρτηση του ύψους του νερού στο κωνικό δοχείο και του εμβαδού της οριζόντιας επιφάνειας, και την συνοδεύει με τις κινήσεις των χεριών και των δακτύλων του. Πρόκειται για χειρονομίες που διευκολύνουν τη συζήτηση, αλλά και τη διατύπωση των σκέψεών του. Ο τρόπος που επιλέγει ο Άρης προκειμένου να περιγράψει πώς αντιλαμβάνεται τη συναρτησιακή αυτή συμμεταβολή, προδίδει

σίγουρα μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, μακριά από τυπικούς ορισμούς και φορμαλιστικές διατυπώσεις (4.5, 4.7).

Ένας από τους σκοπούς της έννοιας της συνάρτησης, είναι να αναπαραστήσει τον τρόπο με τον οποίο τα πράγματα μεταβάλλονται. Μέσα από αυτό το πρίσμα είναι φυσικό να συνδέσουμε τη συνάρτηση με έννοιες που τις χαρακτηρίζει η κινητικότητα, όπως είναι ο ρυθμός μεταβολής (διαφόριση) και η σωρευτική αύξηση ενός μεγέθους (ολοκλήρωση), προκειμένου να οδηγηθούμε στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, που μας λέει ότι οι δύο παραπάνω διαδικασίες είναι αντίστροφες. Η έννοια της συνάρτησης έλαβε εξέχουσα θέση στις εργασίες του Leibniz, στο τέλος του 17^{ου} αιώνα, ο οποίος χρησιμοποίησε τον όρο *functio*, για να περιγράψει μια μεταβλητή y , της οποίας η τιμή εξαρτιόταν από μια μεταβαλλόμενη ποσότητα x . Ο συμβολισμός $y = f(x)$, ήρθε τον επόμενο αιώνα. Εξ αρχής πάντως, μια συνάρτηση είχε συνδεθεί με τη γραφική της παράσταση δηλαδή ένα σύνολο σημείων $(x, f(x))$, στο καρτεσιανό επίπεδο. Τον εικοστό αιώνα έγινε αποδεκτή η εποπτική εικόνα μιας συνάρτησης σαν ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, δίνοντας την ευκαιρία για έναν συνολοθεωρητικό ορισμό ότι δηλαδή πρόκειται για κάθε σύνολο με στοιχεία διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $G = \{(x, y) \in A \times B, \text{ με } x \in A \text{ και } y \in B\}$ και με την προϋπόθεση ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει μόνο ένα $y \in B$, ώστε $(x, y) \in G$. Μια τέτοιου είδους ανάπτυξη αντιμετώπισε πολλές εννοιολογικές δυσκολίες και για να επιτευχθεί έγιναν επίπονες γνωστικές προσπάθειες. Η Sierpinski (1992), (στο Tall 1997), περιέγραψε πώς οι περίπλοκες αλλαγές στη σημασία της έννοιας ακολουθήθηκαν από δύσκολα εννοιολογικά εμπόδια, τα οποία έπρεπε να ξεπεραστούν. Για παράδειγμα ένα άτομο που οι εμπειρίες του γύρω από την έννοια ήταν φορμαλιστικές και υπολογιστικές, ήταν δύσκολο να αποδεχθεί έναν ορισμό που δεν θα περιείχε αυτά τα χαρακτηριστικά. Σε αυτή την κατηγορία πιστεύουμε ότι κατατάσσεται και ο Ανδρέας, που κατά τη γνώμη μας είναι ένας πολύ αντιπροσωπευτικός τύπος μαθητή που τον χαρακτηρίζει μια επιφανειακή εκμάθηση των διαφόρων εννοιών, αρκετή όμως, για την αντιμετώπιση των εισαγωγικών εξετάσεων.

Είναι γενικότερα σκόπιμο να κάνουμε προσεκτική διάκριση μεταξύ της φορμαλιστικής μαθηματικής γνώσης *concept definition*, και της ευρύτερης έννοιας, *concept image* που περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες και σχετιζόμενες ιδιότητες και διαδικασίες που αφορούν την έννοια και βρίσκονται στο νου του ατόμου. Για παράδειγμα ο Vinner (1983, 1991 στο Tall, 1997), βρήκε ότι ακόμα και μαθητές που

μπορούσαν να δώσουν ένα σωστό συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης, ήταν πιθανό να χρησιμοποιούσαν τις διαισθητικές εικόνες που είχαν για να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικά με συναρτήσεις. Η εννοιολογική εικόνα είναι αυτό που ζωντανεύει στη μνήμη των μαθητών όταν ακούν ή βλέπουν κάπου γραμμένο το όνομα της έννοιας. Είναι κάτι που χωρίς να χρειάζεται να περιγραφεί με λόγια, συσχετίζεται άμεσα στο νου των μαθητών με την ίδια την έννοια. Στην πραγματικότητα είναι αυτό που ονομάζουμε εμπειρίες του μαθητή για κάποιο θέμα. Θα μπορούσε να είναι μια εποπτική αναπαράσταση της έννοιας, στην περίπτωση που η έννοια είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί εποπτικά ή ένα σύνολο από εντυπώσεις ή εμπειρίες. Οι εποπτικές αναπαραστάσεις, οι νοητικές εικόνες, οι εντυπώσεις και οι εμπειρίες που συσχετίζονται με μια συγκεκριμένη έννοια, θα μπορούσαν να ερμηνευθούν με λεκτικά σχήματα. Αλλά είναι πολύ βασικό να θυμόμαστε, ότι οι λέξεις, δεν είναι το πρώτο πράγμα που ζωντανεύει στη μνήμη μας. Έρχονται στο προσκήνιο σε κάποιο επόμενο στάδιο. Για παράδειγμα, όταν ακούμε τη λέξη «τραπέζι», το πιθανότερο είναι να ζωντανέψει στη μνήμη μας η εικόνα ενός συγκεκριμένου τραπέζιού. Εμπειρίες όπου καθόμαστε ή τρώμε σε ένα τραπέζι, μπορούν επίσης να ενεργοποιηθούν. Μπορεί κάποιος να ανακαλέσει στη μνήμη του, ότι πολλά τραπέζια είναι ξύλινα, τα περισσότερα από αυτά έχουν τέσσερα πόδια, ότι συνήθως δεν ξαπλώνουμε στο τραπέζι και ότι καμιά φορά καθόμαστε σε αυτό, μόνο που αυτό δεν είναι και τόσο ευγενική συμπεριφορά. Όμοια και στο άκουσμα της λέξης «συνάρτηση», ίσως να ανακαλέσει κάποιος την έκφραση $y=f(x)$, ίσως να σχηματίσει νοερά τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, μπορεί ίσως να φέρει στο νου του μια συγκεκριμένη συνάρτηση όπως την $y=x^2$ ή την $y=\eta\mu x$. Απ' όλα όσα αναφέρθηκαν, γίνεται σαφές ότι κάθε άτομο αντιλαμβάνεται την εικόνα μιας έννοιας μέσα από το δικό του πρίσμα. Επιπροσθέτως, το ίδιο άτομο μπορεί να αντιδράσει διαφορετικά στο άκουσμα του ονόματος μιας έννοιας σε διαφορετικές καταστάσεις. Τέτοια εννοιολογική εικόνα ασφαλώς και δεν αφορά μόνο τους μαθητές. Απαντάται σε όλες τις περιοχές της επίπονης ανθρώπινης προσπάθειας για ανάπτυξη, συμπεριλαμβανομένης και της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών, όπου τα άτομα έχουν εννοιολογικές εικόνες που σχετίζονται με τις εμπειρίες τους αλλά και με την επικρατούσα κουλτούρα. Οι διάδοχες γενιές δεν αντικαθιστούν όλα τα παλιά στοιχεία με καινούρια. Αντιθέτως διατηρούν κάποιες απόψεις που απεδείχθησαν χρήσιμες και με αυτές τροφοδοτούν τις επόμενες. Έτσι και οι δάσκαλοι των μαθηματικών διατηρούν τις δυναμικές ιδέες για τις μεταβαλλόμενες μεταβλητές,

παράλληλα με τις φορμαλιστικές αντιλήψεις των διατεταγμένων ζευγαριών, σε μια δραστική σύνθεση ιδεών, την οποία θα περάσουν στην επόμενη γενιά, Tall, (1997)

4.2. Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής.

Οι μαθητές διαπραγματεύτηκαν το υπολογιστικό 2^ο ερώτημα του 1^{ου} προβλήματος με αρκετή δυσκολία. Ήταν φανερό η έλλειψη της άνεσης που θα έπρεπε να έχουν ακόμη και στη χρήση απλών αριθμητικών ταυτοτήτων προκειμένου να διευκολυνθούν στους υπολογισμούς. Στην προσπάθειά μας να διερευνήσουμε το βαθμό κατανόησης εκ μέρους των μαθητών, της σημασίας της διαφοράς $d(3,2) - d(3,1)$ και κατ' επέκταση του λόγου $\frac{d(3,2) - d(3,1)}{3,2 - 3,1}$, παραθέτουμε τους παρακάτω διαλόγους 5 και 6 που κάναμε με το τμήμα του δημόσιου σχολείου.

Διάλογος 5

5.1 Διδ: Για πείτε μου πως απαντήσατε στο ερώτημα αυτό;

5.2 Γιάννης: $U = \frac{d(3,2) - d(3,1)}{3,2 - 3,1}$. Θα αντικαταστήσουμε και.....

5.3 Διδ: Ας μου πει πάλι κάποιος, τι παριστάνει το $d(3,2)$.

5.4 Αλ/νδρος: Το ύψος που βρίσκεται εκείνη τη στιγμή το αντικείμενο (παρ' ότι λίγο πριν το ερώτημα αυτό είχε απαντηθεί σωστά από το Νίκο).

5.5 Διδ: Το ύψος που είχε ή το διάστημα που είχε διανύσει, από τη στιγμή που αφέθηκε έως τα 3,2 sec;

5.6 Αλ/νδρος: Το διάστημα που είχε διανύσει μετά από 3,2 sec.

5.7 Διδ: Και το $d(3,1)$;

5.8 Αλ/νδρος: Το διάστημα μετά από 3,1 sec.

5.9 Διδ. Οπότε εάν αυτά τα δύο τα αφαιρέσεις, τι προκύπτει;

5.10 Αλ/νδρος: το πόσος χρόνος έχει χρειαστεί για να πάει από.....

5.11 Διδ: Αν αφαιρέσεις το $d(3,1)$ από το $d(3,2)$, αυτή η διαφορά παριστάνει χρόνο;

5.12 Αλ/νδρος: Όχι παριστάνει την απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων.

5.13 Διδ: Οπότε διαιρώντας αυτό το διάστημα με το χρόνο που χρειάστηκε για να το διανύσει, δηλαδή με το 0,1 sec, τι θα προκύψει;

5.14 Αλ/νδρος: Η μέση ταχύτητα του αντικειμένου στο διάστημα [3,1, 3,2].

Διάλογος 6

- 6.1 Διδ: Μπορώ να έχω τη μονάδα μέτρησης του αποτελέσματος;
- 6.2 Ανδρέας: m/sec.
- 6.3 Διδ: Δηλαδή μονάδες διαστήματος ανά μονάδα χρόνου.
Για πείτε μου τι παριστάνει το αποτέλεσμα αυτό;
Τι σημαίνει δηλαδή για σας ότι στο χρονικό διάστημα
από 3,1 έως 3,2 sec, το αντικείμενο έπεφτε με μέση ταχύτητα 31,5 m/sec;
- 6.4 Ανδρέας: Ότι κατά τη διάρκεια της πτώσης του και από 3,1 έως 3,2 sec,
το αντικείμενο κινούνταν με μέση ταχύτητα 31,5 m/sec.
- 6.5 Διδ: Τι εννοείτε όταν λέτε ότι η μέση ταχύτητα ήταν 31,5 m/sec
κατά τη διάρκεια αυτού του 1/10 sec;
(Ησυχία.....).
- 6.6 Διδ: Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος το αντικείμενο
έπεφτε με την ίδια ταχύτητα;
- 6.7 Ζωή: Όχι. Αν είχε την ίδια ταχύτητα τότε θα διένυε το
διάστημα αυτό με σταθερή ταχύτητα αλλά ξέρουμε
ότι αυτό δεν συμβαίνει αφού η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη.
- 6.8 Διδ: Εάν σας ζητούσα τη μέση ταχύτητα σε ένα
μικρότερο πλάτος διάστημα, π.χ. σε ένα διάστημα 1/100
του δευτερολέπτου, κατά τη διάρκεια αυτού του 1/100 sec,
το αντικείμενο καθώς έπεφτε, είχε την ίδια ταχύτητα;
- 6.9 Ανδρέας: Θα είχε την ίδια ταχύτητα.
- 6.10 Διδ: Γιατί;
- 6.11 Ανδρέας: Διότι τη θεωρούμε αμελητέα αυτήν την απόσταση.
- 6.12 Διδ: Το 1/100 του δευτερολέπτου είναι αμελητέο
για σένα... είναι τόσο μικρό δηλαδή.....
- 6.13 Ανδρέας: Θα είχε αλλάξει η ταχύτητα; Το διάστημα
είναι πάρα πολύ μικρό που θα είχε διανύσει σε 1/100 του
δευτερολέπτου, οπότε η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί
σταθερή κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος.
- 6.14 Διδ: Θα μπορούσα να σας είχα ζητήσει τη μέση ταχύτητα
σε ένα διάστημα, ακόμη μικρότερου πλάτους.
Ας πούμε σε ένα διάστημα 1/1000 του δευτερολέπτου.
Το ερώτημα παραμένει το ίδιο. Η ταχύτητα του
αντικειμένου παραμένει ίδια κατά τη διάρκεια αυτού
του 1/1000 του δευτερολέπτου;
- 6.15 Ανδρέας: Δεν πρέπει να ήταν ίδια. Μάλλον θα
μεταβληθεί πολύ λίγο.

Η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής είναι αυτή που κατ' αρχήν πρέπει να έχει γίνει κατανοητή, ώστε σε συνδυασμό με αυτήν της απειροελάχιστης μεταβολής, να οδηγηθούν τα παιδιά στην κεντρική έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής. Όπως φαίνεται στον διάλογο 5, (5.4, 5.10), ο Αλέξανδρος δυσκολεύεται να αναπαραστήσει τη διαφορά $d(3,2) - d(3,1)$, και η δυσκολία αυτή, κατά την άποψή μας, έχει τις ρίζες της στις πενιχρές εμπειρίες που διαθέτουν τα παιδιά για την αλληλεξάρτηση και τη συμμεταβολή δύο μεγεθών, απόρροια αφ' ενός της φτωχής διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη και εφ' ετέρου του τρόπου που τα σχολικά βιβλία αντιμετωπίζουν την έννοια της μέσης ταχύτητας. Παρ' ότι ο Αλέξανδρος γνωρίζει ότι ο λόγος $\frac{d(3,2) - d(3,1)}{3,2 - 3,1}$, είναι η μέση ταχύτητα του αντικειμένου, δεν είναι καθόλου σαφές τι

σημαίνει γι' αυτόν η έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής. Το ίδιο συμβαίνει και με τον Ανδρέα στον διάλογο 6, ο οποίος δε μπαίνει στην ουσία όταν καλείται να απαντήσει στο ερώτημα 'τι σημαίνει μέση ταχύτητα 31,2 m/sec''(6.4). Στην ερώτηση αυτή η απάντηση δεν είναι καθόλου εύκολη. Σύμφωνα με τον Thompson, η ανάπτυξη των πρώτων εικόνων του ρυθμού μεταβολής αρχίζει με τα παιδιά να φαντάζονται εικόνες μεταβολής σε μια ποσότητα π.χ. μετατόπιση θέσης, αύξηση όγκου και εξελίσσεται στη χαλαρά συντονισμένη εικόνα συμμεταβολής δύο ποσοτήτων π.χ. μετατόπιση και διάρκεια μετατόπισης, κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα μέτρα τους να παραμένουν σε σταθερό λόγο. Η ανάπτυξη ώριμων αναπαραστάσεων μέσου ρυθμού μεταβολής συντελείται, όταν αντιληφθούν τη σχέση μεταξύ της συνολικής συσσώρευσης των δύο ποσοτήτων και των αυξήσεων με τις οποίες οι συσσωρεύσεις αυτές επιτυγχάνονται. Όταν δηλαδή αντιληφθούν πλήρως, τον τρόπο με τον οποίο το ένα μέγεθος αυξάνεται πάντα σε σχέση με την αύξηση του άλλου μεγέθους. Για παράδειγμα, στη περίπτωση της ομαλής κίνησης, η ολικά διανυθείσα απόσταση σε σχέση με τη διάρκεια του ταξιδιού μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει προκύψει μέσω αυξήσεων της απόστασης και αυξήσεων του χρόνου ώστε ανά πάσα στιγμή, μέσα στο ταξίδι, ο λόγος ολικά διανυθείσα απόσταση προς τον ολικά απαιτηθέντα χρόνο να ισούται με την αύξηση της απόστασης προς την αύξηση του χρόνου. Ο Αλέξανδρος και ο Ανδρέας, δεν φαίνεται να έχουν στο μυαλό τους μια τέτοιου είδους συμμεταβολή όταν μιλάνε για μέση ταχύτητα. Αυτό που κάνουν είναι να αναγνωρίζουν το τύπο για τη μέση ταχύτητα και να τον εφαρμόζουν προκειμένου να καταλήξουν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, χωρίς όμως να είναι σε θέση να εμβαθύνουν στο τι παριστάνει το αποτέλεσμα αυτό. Οι διάλογοι μέσα στη τάξη ενός

Λυκείου, υποδηλώνουν ότι μαθητές και δάσκαλοι χρησιμοποιούν μια συμβολική γλώσσα, μιλώντας για συμβολισμούς και συμβολικές ενέργειες, χωρίς να είναι σε θέση να δίνουν παραδείγματα αυτών των συμβολισμών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, οι μαθητές να μαθαίνουν να επικεντρώνουν σε μηχανιστικές διαδικασίες και πώς να τις γράψουν.

Αξίζει στο σημείο αυτό, να σχολιάσουμε την άποψη του Ανδρέα ότι σε 1/100 ή σε 1/1000 sec η ταχύτητα του αντικειμένου που πέφτει δεν θα μεταβληθεί ουσιαστικά. Διαφαίνεται η δυσκολία του να διακρίνει μια πολύ μικρή ποσότητα χρόνου από ένα απειροστό χρονικό διάστημα (6.9, 6.11, 6.13). Η δυσκολία αυτή είναι κατανοητή και ωφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές σπάνια έχουν την ευκαιρία να συζητήσουν σε βάθος την έννοια της μέσης ταχύτητας, με αποτέλεσμα να μην έχουν και τις ανάλογες εμπειρίες στην έννοια αυτή. Πρέπει πάντως να υπογραμμιστεί η, έστω και μερική, μετατόπιση του νοήματος σαν απόρροια του διαπραγμάτευσης του θέματος με τον Ανδρέα (6.15). Το πέρασμα από τη στατικότητα του πλάτους ενός πολύ μικρού χρονικού διαστήματος, στη δυναμική και την κινητικότητα ενός απειροστού χρονικού διαστήματος με τελικό προσορισμό την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας, απαιτεί εκ μέρους των μαθητών μια επίπονη προσπάθεια που θα έχει ως κύριο χαρακτηριστικό, τη ρήξη με την αλγεβρική σκέψη, την απεμπλοκή από τα πιστεύω και τις εγκατεστημένες αντιλήψεις και τελικά, την έρευνα προς διαφορετικές κατευθύνσεις, Κλαουδάτος, (2005).

Εντύπωση επίσης προκάλεσε η περίπτωση κάποιων μαθητών, οι οποίοι για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας, μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 , χρησιμοποίησαν το τύπο $\bar{v} = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}$. Προφανώς οδηγήθηκαν σ' αυτόν συγχέοντας τη μέση ταχύτητα με τον όρο μέση τιμή. Ο τύπος αυτός δίνει το σωστό αποτέλεσμα για τη μέση ταχύτητα κατά την ελεύθερη πτώση, η οποία είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και η ταχύτητα σε αυτήν εκφράζεται γραμμικά σε συνάρτηση με το χρόνο. Χρησιμοποίησαν όμως, την έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας, που τυπικά ήταν το ζητούμενο του προβλήματος και άρα άγνωστη σε αυτούς.

4.3. Μέσος ρυθμός μεταβολής σε ένα διάστημα πλάτους 0,1sec

Στο τρίτο και τέταρτο ερώτημα του πρώτου προβλήματος, οι μαθητές καλούνται να εισέλθουν σε μια διαδικασία γενίκευσης, υπολογίζοντας πρώτα τη μέση ταχύτητα του αντικειμένου σε ένα οποιοδήποτε διάστημα πλάτους 0,1 sec, και κατόπιν σε ένα οποιοδήποτε χρονικό διάστημα πλάτους h . Στην πρώτη φάση της γενίκευσης η «αναλλοίωτη» είναι το πλάτος 0,1 και πρέπει οι μαθητές να εισάγουν μια τυχαία μεταβλητή t που θα αναπαριστά την αρχή ενός τέτοιου χρονικού διαστήματος, ενώ στη δεύτερη φάση της γενίκευσης παραμένει σταθερή η αρχή t και πρέπει να εισάγουν τη μεταβλητή h που είναι το πλάτος του τυχαίου εξ αυτών των διαστημάτων. (βλέπε και παράγραφο 2.4)

Η δυσκολία των μαθητών να γενικεύσουν και να απαντήσουν στο ερώτημα αυτό ήταν πολύ μεγάλη. Οι διάλογοι που ακολουθούν έγιναν με το τμήμα του δημόσιου σχολείου και είναι κατατοπιστικοί:

Διάλογος 7

- 7.1 Μαθήτρια: *Να βρούμε τη μέση ταχύτητα όλου του διαστήματος και μετά να διαιρέσουμε με το 0,1, ώστε να βρούμε.....μα τι λέω; Ναι.....*
- 7.2 Διδ: *(Βλέποντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν).
Θέλω να βοηθήσω σ' αυτό λιγάκι. Το [3,1, 3,2] είναι ένα τέτοιο διάστημα. Το [3,15, 3,25] είναι επίσης ένα τέτοιο.
Δεν είναι τα μοναδικά.....*
- 7.3 Μαθητής: *Υπάρχουν άπειρα που μπορούμε να βρούμε.*
- 7.4 Διδ: *Για σκεφτείτε, πως θα μπορούσατε λοιπόν να παραστήσετε ένα τυχαίο διάστημα πλάτους 0,1sec;*
- 7.5 Μαθητής: *Να πάρουμε μια τυχαία τιμή του χρόνου.*
- 7.6 Διδ: *Σαν τι θα τη πάρετε αυτή την τυχαία τιμή του χρόνου; Σαν αρχή.
Πείτε μου μια τυχαία τιμή του χρόνου σαν αρχή του διαστήματος.*
- 7.7 Ανδρέας: *Το μηδέν.*
- 7.8 Διδ: *Το μηδέν είναι τυχαία τιμή;*
- 7.9 Ανδρέας: *Το ένα.*
- 7.10 Διδ: *Το ένα είναι τυχαία τιμή του χρόνου; Πως συμβολίζετε την τυχαία τιμή του χρόνου μέσα στο [0, 5];*
- 7.11 Μαθητές: *(Όλοι μαζί) t ...*
- 7.12 Διδ: *Οπότε αν εσείς θέλετε να συμβολίσετε με αρχή το t ,
ένα τυχαίο χρονικό διάστημα πλάτους 0,1 ποιο θα είναι αυτό;*

7.13 Μαθητής: *(Επιχειρεί πάλι να δώσει συγκεκριμένη τιμή στο t) για t ίσο με...*

7.14 Διδ: *Γιατί συγκεκριμένη τιμή στο t;*

7.15 Μαθητής: *t μείον....*

7.16 Μαθητής: *Μείον 0,1.....*

Στο σημείο αυτό, βλέποντας τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές, να παραστήσουν το τυχαίο διάστημα πλάτους 0,1sec παίρνοντας σαν αρχή ενός τέτοιου διαστήματος την τυχαία χρονική στιγμή t, αποφασίσαμε να επαναπροσανατολίσουμε το διάλογο προς την κατεύθυνση αυτή.

7.17 Διδ: *Μια στιγμή. Αν πάρετε σαν αρχή το 3,2, τότε το διάστημα πιο είναι;*

7.18 Ανδρέας: *[3,2, 3,3].*

7.19 Διδ: *Αν πάρετε σαν αρχή το 3,28, πιο είναι το διάστημα;*

7.20 Ανδρέας: *[3,28, 3,38].*

7.21 Διδ: *Πώς σκεφθήκατε για να το βρείτε;*

7.22 Μαθητές: *Προσθέσαμε στην αρχή το 0,1.*

7.23 Διδ: *Πάρτε τώρα σαν αρχή το τυχαίο t.*

7.24 Μαθητές: *[t, t+0,1].*

Η δυσκολία των μαθητών να γενικεύσουν δίνοντας το τυχαίο χρονικό διάστημα πλάτους 0,1sec, είναι εμφανής, (7.1, 7.7, 7.9, 7.13, 7.15, 7.16). Μετά την παρέμβασή μας, (7.17, 7.19, 7.21) τα αποτελέσματα φαίνεται να είναι καλύτερα, (7.22, 7.24). Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε τη κρισιμότητα της διαμεσολάβησης του διδάσκοντος, ειδικά στις περιπτώσεις που έχουμε διαπραγμάτευση του νοήματος μεταξύ αυτού και των μαθητών.

Σύμφωνα με τη Sfard, ο μετασχηματισμός μιας διαδικασίας σε αντικείμενο συντελείται σε τρία στάδια. Το πρώτο είναι το στάδιο της εσωτερίκευσης και περιγράφεται ως η περίοδος, όπου ο μαθητής εκτελεί πράξεις σε μαθηματικά αντικείμενα-έννοιες, κατωτέρου επιπέδου, εξοικειώνεται με τις διαδικασίες και τις εσωτερικεύει. Το δεύτερο είναι το στάδιο της συμπύκνωσης. Εδώ οι παραπάνω διαδικασίες συμπυκνώνονται σε μια απλή μορφή, που είναι εύκολο να απομνημονευθεί. Στο στάδιο αυτό ο μαθητής είναι ικανός να συνδυάζει διαδικασίες, να κάνει συγκρίσεις και να γενικεύει εμπειρικά, ενώ αυξάνεται η ικανότητά του να παρουσιάζει εναλλακτικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας. Το τρίτο είναι το στάδιο της αντικειμενοποίησης. Στο στάδιο αυτό, ο μαθητής μπορεί να αντιληφθεί μια

μαθηματική έννοια ως ένα πλήρες μαθηματικό αντικείμενο με τα δικά του χαρακτηριστικά (Sfard, 1991).

Στην περίπτωση μας έχουμε τη μετάβαση από το αρχικό στάδιο, όπου οι μαθητές εσωτερικεύουν τη διαδικασία εύρεσης της μέσης ταχύτητας, στο δεύτερο στάδιο της συμπύκνωσης, όπου είναι ικανά να γενικεύουν, ενώ μπορούν πλέον να αντιλαμβάνονται εναλλακτικές αναπαραστάσεις της έννοιας αυτής. Τα παραπάνω διαφαίνονται επαρκώς στο απόσπασμα που ακολουθεί:

Διάλογος 8

- 8.1 Διδ: Στο σημείο αυτό τώρα, εφαρμόστε το τύπο της μέσης ταχύτητας γι' αυτό το διάστημα.
- 8.2 Ζωή:
$$\frac{d(t+0,1) - d(t)}{(t+0,1) - t} = \frac{d(t+0,1) - d(t)}{0,1}$$
- 8.3 Διδ: Μπορείτε να κάνετε τις πράξεις και να φτάσετε στον τελικό τύπο για τη συνάρτηση $\bar{v}(t)$;
- 8.4 Νίκος: Αυτό στο οποίο έχουμε φτάσει, είναι η παράγωγος της μετατόπισης του αντικειμένου.
- 8.5 Διδ: Έχει κάποιος να κάνει κάποιο σχόλιο επ' αυτού;
- 8.6 Ανδρέας: Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος του διαστήματος είναι η ταχύτητα του κινητού.
- 8.7 Διδ: Αλλά αυτό που έχουμε γράψει στον πίνακα, είναι η παράγωγος του διαστήματος;
- 8.9 Ζωή: Είναι η παράγωγος το $d(t)$διά του t
- 8.10 Διδ:Έχει κάποιος να πεί κάτι επί του θέματος; Πρόκειται για την παράγωγο του διαστήματος;
- 8.11 Μαθήτρια: Νομίζω ότι δεν έχουμε την παράγωγο, γιατί αν ήταν η παράγωγος θα είχαμε $(0,1)^2$.
- 8.12 Διδ: Μήπως έχεις στο νου σου τον κανόνα του πηλίκου;
- 8.13 Μαθήτρια: Ναι.
- 8.14 Διδ: Μάλιστα. Θέλετε να κάνετε τις πράξεις;
- 8.15 Νίκος: Για να έχουμε την παράγωγο πρέπει να πάρουμε το όριο αυτού του λόγου.
- 8.16 Διδ: Α! μάλιστα. Βρείτε τώρα τη συνάρτηση $\bar{v}(t)$.
- 8.17 Μαθητής: Δε θα μπορούσαμε να παραγωγίσουμε τη μετατόπιση;
- 8.18 Διδ: Τώρα αυτό που ζητάμε είναι η μέση ταχύτητα. Όπως καταλαβαίνετε η μέση ταχύτητα στο τυχαίο

διάστημα πλάτους 0,1 sec, δεν μπορεί να ταυτίζεται με την παράγωγο της συνάρτησης $d(t)$. Θα δούμε όμως, ποια είναι η σχέση που τα συνδέει. Μπορείτε τώρα εργαζόμενοι όπως και με τους αριθμούς προηγουμένως, να βρείτε τον τύπο της $\bar{v}(t)$;

- 8.19 Νίκος: Μπερδεύομαι. (Πλησιάζω στην κόλλα του και διαπιστώνω ότι έχει αντικαταστήσει όπου t συγκεκριμένες τιμές).
- 8.20 Αιδ: Γιατί αντικαταστήσατε συγκεκριμένες τιμές; Θα πρέπει να κάνετε τις πράξεις με αυτά που έχετε.
- 8.21 Νίκος: Ωστε να πάρουμε τη μέση ταχύτητα, ως συνάρτηση του χρόνου.

Η δυσκολία του Νίκου να διακρίνει τη μέση ταχύτητα από την παράγωγο δεν ήταν ασυνήθιστη. (8.4) Σύμφωνα με τον Thompson, οι μαθητές που βιώνουν τέτοιες δυσκολίες στο διαφορικό λογισμό, φαίνεται να θέλουν να σκέφτονται το πηλίκο διαφορών σαν την παράγωγο και το ερμηνεύουν σαν «πόσο γρήγορα το μέγεθος μεταβάλλεται», χωρίς να μπορούν να συλλάβουν τις λεπτομέρειες για το τι αναπαριστά η έκφραση αυτή, δηλαδή σαν ένα ποσό μεταβολής μιας ποσότητας, σε σχέση με τη μεταβολή μιας άλλης ποσότητας. Όπως είδαμε, κάποιοι μαθητές επιλέγουν να γράψουν το πηλίκο διαφορών στις εργασίες τους ως: $\frac{f(x+0,1) - f(x)}{(x+0,1) - x}$.

Υποθέτουμε ότι αυτό δρα κάπως μνημονικά για να τους θυμίζει, ότι ο παρονομαστής είναι επίσης μια διαφορά και ότι το πηλίκο αποτιμά στην ουσία τη σύγκριση των δύο διαφορών. Είναι πολύ σπουδαίο το ότι ο Νίκος (8.15) επανορθώνει, συνδέοντας άμεσα την παράγωγο με το όριο του λόγου μεταβολής, ενώ παρά τη δυσκολία που αντιμετωπίζει αρχικά με τη συνάρτηση $\bar{v}(t)$, φαίνεται να κατανοεί πλήρως, τελικά, τι είναι αυτό που θα υπολογίσει, παίρνοντας ίσως και κάποια βοήθεια από τις εμπειρίες που απέκτησε κατά τη διαπραγμάτευση της έννοιας της συνάρτησης. (8.18 – 8.21)

Μετά τις πράξεις ο τύπος που προέκυψε για τη συνάρτηση $\bar{v}(t)$, ήταν $\bar{v}(t) = 10t + 0,5$. Μόνο δύο μαθητές έδωσαν απάντηση στο ερώτημα τι παριστάνει το $\bar{v}(2,5)$ και θα πρέπει να σχολιαστούν:

Σταύρος: εκφράζει τη μέση ταχύτητα του αντικειμένου τη στιγμή $t = 2,5\text{m/s}$. (Υποθέτουμε ότι ο Σταύρος θα ήθελε να γράψει $t = 2,5\text{s}$.)

Ο Σταύρος εμφανίζεται να μιλάει για την ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και πιθανολογούμε ότι αντιμετωπίζει το λόγο που εκφράζει τη μέση ταχύτητα σαν την παράγωγο της συνάρτησης $d(t)$, με αποτέλεσμα να τη συγχέει με την στιγμιαία ταχύτητα. Πρόκειται δηλαδή, για το ίδιο πρόβλημα με αυτό που αναφέρθηκε παραπάνω.

Κωνσταντίνος: *παριστάνει τη σταθερή ταχύτητα με την οποία θα έπρεπε να κινείται το σώμα για να διανύσει την απόσταση 2,55m σε 0,1sec. [Τα 2,55m είναι η διαφορά $d(2,5+0,1) - d(2,5)$]*

Ο Κωνσταντίνος ερμηνεύει σωστά την έννοια της μέσης ταχύτητας. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι για την απάντησή του αυτή, στηρίχτηκε σε ένα προφανές λειτουργικό-ενεργητικό σχήμα που έχει για το μέσο ρυθμό μεταβολής. Τι εννοούμε λέγοντας μέσο ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας; Μέση ταχύτητα 55km/h σε ένα ταξίδι σημαίνει, ότι αν επαναλαμβάναμε το ταξίδι ταξιδεύοντας με σταθερό ρυθμό 55km/h, τότε θα διανύαμε ακριβώς την ίδια απόσταση, ακριβώς στον ίδιο χρόνο. Τυπικά εννοούμε ότι αν μια ποσότητα μεταβαλλόταν με σταθερό ρυθμό, που έχει τιμή ίση με το μέσο ρυθμό μεταβολής, σε ένα διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε θα καταλήγαμε με το ίδιο ποσό μεταβολής στην εξαρτημένη ποσότητα μετά το τέλος της διαδικασίας. Η ερμηνεία αυτή έχει στενή σχέση με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, που λέει, ότι όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις έχουν ένα μέσο ρυθμό μεταβολής σε ένα διάστημα $[a, b]$, ο οποίος ισούται με το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής σε κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφέρουμε ότι κατά τη διάρκεια του σχολιασμού στη τάξη το αποτέλεσμα $\bar{v}(2,5)=25,5\text{m/s}$, ερμηνεύτηκε σωστά και από κάποιους άλλους μαθητές, χωρίς όμως να γράψουν την ερμηνεία τους αυτή στο φύλλο εργασίας. Χαρακτηριστικά παραθέτουμε το παρακάτω απόσπασμα από έναν διάλογο με το τμήμα του δημόσιου σχολείου.

Διάλογος 9

9.1 Διδ: *Να μη δώσουμε άλλο χρόνο εδώ. Να γράψουμε στον πίνακα τη συνάρτηση $\bar{v}(t)$.*

9.2 Αλ/νδρος: $\bar{v}(t) = \frac{d(t+0,1) - d(t)}{0,1} = \frac{5(t+0,1)^2 - 5t^2}{0,1} = \dots = 10t + 0,5$

- 9.3 Διδ: Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\bar{v}(t)$;
- 9.4 Ανδρέας: Το $[0, 5]$. [Του επισημαίνω ότι η $d(t+0,1)$ είναι σύνθετη συνάρτηση, και ορίζεται για τα $t \in [0, 5]$, ώστε, $(t + 0,1) \in [0, 5]$].
- 9.5 Ανδρέας: Το $[0, 4,9]$
- 9.6 Διδ: Το $\bar{v}(2,5)$ πόσο είναι;
- 9.7 Ανδρέας: $\bar{v}(2,5)=10 \cdot 2,5+0,5=25,5\text{m/sec}$
- 9.8 Διδ: Τι παριστάνει αυτός ο αριθμός παιδιά;
- 9.9 Παν/της: Τη μέση ταχύτητα στο διάστημα $[2,5, 2,5+0,1]$, δηλαδή στο διάστημα $[2,5, 2,6]$.

Κατά το δεύτερο στάδιο της γενίκευσης οι δυσκολίες ήταν λιγότερες. Αναμενόμενο ήταν βέβαια, κάποιοι μαθητές να μπερδέψουν το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής t με αυτόν της παραμέτρου h . Σε γενικές γραμμές πάντως, έφτασαν στο τύπο $\bar{v}_h(t) = \frac{d(t+h) - d(t)}{h} = \dots\dots = 10t + 5h$, με σχετική ευκολία. Στο σημείο αυτό η

ερώτηση (δ) ολοκληρώνεται ζητώντας από τους μαθητές να δοκιμάσουν στον παραπάνω τύπο ολοένα και μικρότερες τιμές του πλάτους h , και να μας πουν τι παρατηρούν. Ο στόχος του ερωτήματος ήταν να φτάσουν στον ορισμό του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής δηλαδή της στιγμιαίας ταχύτητας, και κατ' επέκταση στον ορισμό της παραγώγου μιας συναρτήσεως, λαμβάνοντας ίσως και κάποια βοήθεια από το ερώτημα (ε). Ο προσανατολισμός των ερωτημάτων είναι να αντιληφθούν οι μαθητές την παράγωγο, σαν μια συνάρτηση που προσεγγίζεται από τον λεγόμενο «νευτώνιο λόγο» $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η έννοια της παραγώγου, όπως είναι γνωστό, αναπτύσσεται

σημειακά (τοπικά), και έχει οριστεί με την αποδοχή, ότι το x στην έκφραση $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, είναι σταθερό σε σχέση με το h . Η προσπάθειά μας για

μια εναλλακτική προσέγγιση του ορισμού του ρυθμού μεταβολής βασίστηκε στην άποψη του D. Tall, σύμφωνα με την οποία το x στον ορισμό της παραγώγου, είναι ελεύθερο να μεταβάλλεται για κάθε τιμή του h , Tall, (1986), Tall et al., (1988). Η

προσέγγιση αυτή της παραγώγου έχει δύο πολύ φυσικές ερμηνείες. Η πρώτη είναι ότι για τη σταθερή ποσότητα h , η συνάρτηση $f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, δίνει το μέσο

ρυθμό μεταβολής του μεγέθους $f(x)$, πάνω σε κάθε διάστημα μήκους h , που

περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f . Η δεύτερη είναι ότι η συνάρτηση $f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, δίνει τη κλίση κάθε τέμνουσας που ορίζεται από τα σημεία $(x, f(x))$ και $(x+h, f(x+h))$. Η δεύτερη αυτή ερμηνεία υποστηρίζει την εικόνα μιας ολισθαίνουσας τέμνουσας, η οποία βέβαια, καθώς ολισθαίνει σ' ένα διάστημα μήκους h , μέσα στο πεδίο ορισμού της f , ακολουθεί την κλίση της καμπύλης. Η σχέση κάθε μιας ερμηνείας με το σταθερό ορισμό της παραγώγου, είναι ότι καθώς αφήνουμε το h να τείνει στο 0, παράγουμε μια οικογένεια συναρτήσεων που συγκλίνουν στη συνάρτηση που δίνει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του μεγέθους $f(x)$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, όταν βέβαια το παραπάνω όριο υπάρχει. Ο λόγος για τον οποίο επιλέξαμε αυτή την προσέγγιση της παραγώγου, είναι ότι η έννοια της συνάρτησης, είναι κυρίαρχη σε κάθε συζήτηση που αφορά το ρυθμό μεταβολής. Επίσης ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται για το ρυθμό μεταβολής συνάρτησης, σε πραγματικές καταστάσεις, με τρόπους που να είναι συνεπείς με την ιδέα του ρυθμού πάνω σε ένα διάστημα. Τέλος είχαμε την ελπίδα, ότι οι εικόνες των παιδιών για το ρυθμό μεταβολής σε ένα μικρό διάστημα, θα ενεργοποιούνταν, όταν θα σκεφτόντουσαν για τη σχέση μεταξύ της συσσώρευσης και της αύξησης στο επόμενο πρόβλημα.

4.4. Η έννοια του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής

Η επανάσταση της έννοιας της παραγώγου αντανακλά την επανάσταση του απειροστικού λογισμού συνολικά, κλείνοντας περίπου τριακόσια χρόνια προοδευτικής ωρίμανσης, αλλά όχι χωρίς ψάξιμο και λάθη όπως είδαμε στην ιστορική αναφορά, ξεκινώντας από το 1600 και κορυφώνοντας το 1870 με το λογισμό ουσιαστικά στη σημερινή του μορφή. Η σύγχρονη ιστορικός των μαθηματικών Judith Grabiner, περιγράφει με έξοχο τρόπο αυτή τη διαδικασία, Grabiner, (1983b, p 195): *«η παράγωγος πρώτα χρησιμοποιήθηκε, μετά ανακαλύφθηκε, κατόπιν εξερευνήθηκε και αναπτύχθηκε και μετά από όλα αυτά ορίστηκε»*

Η έννοια του ορίου είναι ο ακρογωνιαίος λίθος για πολλές άλλες έννοιες όπως η συνέχεια, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Είναι επίσης καθολικά αποδεκτό στη διεθνή βιβλιογραφία, ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες με την έννοια του ορίου είτε αυτή σχετίζεται με τη συνάρτηση και τη συνέχεια είτε με τις σειρές και τις ακολουθίες, Cornu, (1981), Sierpinska, (1987), Tall, (1981,1982), Tall & Vinner,

(1981). Επιπλέον, πολλές από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην ενασχόλησή τους με άλλες έννοιες όπως η παράγωγος και το ολοκλήρωμα, μπορεί να έχουν σχέση με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, Orton, (1983), Tall, (1992). Κατά τη διάρκεια της μετάβασης από το μέσο στο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής, μας δόθηκε η ευκαιρία, να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου προσεγγίζουν τη θεμελιώδη αυτή έννοια. Να πληροφορηθούμε πως σκέφτονται κατά την οριακή διαδικασία και κατ' επέκταση στα πρώτα στάδια της εκμάθησης της έννοιας της παραγώγου. Τι είναι αυτό που έχουν στο μυαλό τους τα παιδιά όταν χρησιμοποιούν φράσεις όπως:

«ο h τείνει στο 0» , «καθώς ο x τείνει στο x_0 , το πηλίκο $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ έχει όριο τον

αριθμό m » κ.λ.π. Εξ' άλλου η περίπτωση του μέσου ρυθμού κρίνεται, κατά γενική ομολογία, ιδανική για το σκοπό αυτό, επειδή ακριβώς εμπερικλείει τη δυναμική και την κινητικότητα της ταυτόχρονης μεταβολής και της σύγκρισης των μεταβολών δύο μεγεθών.

Σύμφωνα με τον D. Tall, όταν οι μαθητές διδάσκονται όρια με άτυπο στυλ, με τους φορμαλιστικούς ορισμούς να έρχονται πολύ αργότερα, τότε αυτοί γίνονται πιο εύκολα κατανοητοί αφού προηγουμένως έχει κτιστεί μια εικόνα της έννοιας. Η προσέγγιση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σταθερές και αδιαμφισβήτητες ιδιότητες που δεν είναι διακριτές στον ορισμό, γίνονται μέρος της εικόνας της έννοιας. Κατά τον Cornu, (στο Parameswaran, 2007), οι μαθητές που έχουν εμπειρίες από ποσότητες που μικραίνουν κατά τη διάρκεια οριακών καταστάσεων, μπορούν να τις φαντάζονται οσοδήποτε μικρές. Ζητήσαμε από τους μαθητές να αντικαταστήσουν στο τελικό τύπο της μέσης ταχύτητας, που ήταν $\bar{v}(t) = 10t + 5h$, ολοένα και μικρότερες τιμές του h , και να γράψουν τι παρατηρούν σχετικά με τη συμπεριφορά της μέσης ταχύτητας. Πριν παραθέσουμε κάποιους διαλόγους με ιδιαίτερο ενδιαφέρον, σταχυολογούμε ορισμένες απαντήσεις των μαθητών στο παραπάνω ερώτημα.

Νίκος: *η μέση ταχύτητα μειώνεται, όταν μειώνεται η απόσταση h .*

Ανδρέας: *Όσο μικραίνει η παράμετρος, τόσο η μέση ταχύτητα τείνει να γίνει σταθερή στο διάστημα $[t, t+h]$*

Ζωή: *Όσο μικραίνει το πλάτος, μικραίνει και η μέση ταχύτητα του αντικειμένου.*

- Παναγιώτης:** Όσο οι τιμές του h μειώνονται, έτσι και η συνάρτηση $\bar{v}(t)$ μετατοπίζεται προς το $O(0,0)$, δηλαδή τείνει να γίνει 0 αλλά δεν γίνεται.
- Φιλοκτήμων:** Όσο δίνονται τιμές για το h το οποίο συνεχώς μειώνεται, αναλόγως η συνάρτηση $\bar{v}(t)$ μετατοπίζεται πιο κοντά στο $O(0,0)$. Το h τείνει στο 0 αλλά δε γίνεται ποτέ 0.

Οι διάλογοι 10 και 11 έγιναν με το τμήμα του δημόσιου σχολείου ενώ οι διάλογοι 12 και 13 έγιναν με τα παιδιά του ιδιωτικού σχολείου.

Διάλογος 10

- 10.1 Διδ:** Να κουβεντιάσουμε λιγάκι αυτό το ερώτημα;
Πόσο μπορεί να μικραίνει το h ;
- 10.2 Παν/της:** Μέχρι να φτάσει στο 0;
- 10.3 Διδ:** Φτάνει στο 0 το h ;
- 10.4 Παν/της:** Φτάνει χωρίς να ακουμπήσει ελάχιστα.
- 10.5 Διδ:** Πόσο δηλαδή ελάχιστα;
- 10.6 Παν/της:** 0,1 Εεε... ελάχιστα, δεν ξέρω.
- 10.7 Διδ:** Πόσο τελικά μπορεί να μικραίνει αυτό το h ;
- 10.8 Ζωή:** Φτάνει μέχρι το 0^+ .
- 10.9 Διδ:** Τι εννοείς όταν λές ότι φτάνει μέχρι το 0^+
μια θετική ποσότητα όπως είναι το h ;
- 10.10 Ζωή:** Ότι κοντεύει να φτάσει στο 0, αλλά δε φτάνει.
Από τα θετικά πάει προς τα μικρότερα. Μειώνεται
μεν αλλά δε φτάνει στο 0, δεν παίρνει τη τιμή 0.
- 10.11 Ανδρέας:** Αν το h γινόταν 0, δεν θα είχαμε το διάστημα
 $[t, t+h]$, αλλά θα είχαμε το διάστημα $[t, t]$ που είναι αδύνατο.
- 10.12 Διδ:** Μάλιστα. Πως φαντάζεσαι τη συμπεριφορά του h λοιπόν;
- 10.13 Ανδρέας:** Ως μια παράμετρο η οποία τείνει να γίνει 0, αλλά δε γίνεται.

Ο στόχος των ερωτήσεών μας στον παραπάνω διάλογο, ήταν να διερευνήσουμε το βαθμό κατανόησης των μαθητών σχετικά με την κατάσταση κατά την οποία ο h τείνει στο 0. Τι είναι αυτό που σκέφτονται τα παιδιά όταν εισέρχονται σε μια οριακή διαδικασία; Στη βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί και τονιστεί παρανοήσεις στην έννοια του ορίου, όπως: α) σύγχυση για το εάν η μεταβλητή φτάνει το όριό της, β) αβεβαιότητα γύρω από το αν τα όρια είναι δυναμικές διαδικασίες ή στατικά αντικείμενα, Cottrill, et al, (1996). Ο Παναγιώτης (10.2) φαίνεται στην αρχή να έχει

κάποιες αμφιβολίες για το αν ο h φτάνει ή όχι στο 0. Έστω και αμυδρά, μάλλον σκιαγραφείται εδώ η σύγχυση των μαθητών, για το αν η προσεγγίζουσα ποσότητα φτάνει το όριο. Έτσι πρέπει να εξηγηθεί και η απάντησή του που γίνεται υπό μορφή ερωτήσεως. Γρήγορα όμως, ξεπερνά την αρχική του αμφιβολία και ισχυρίζεται ότι «φτάνει χωρίς να ακουμπήσει ελάχιστα», (10.4). Υποθέτουμε ότι στο σημείο αυτό η απάντηση δείχνει ότι ο μαθητής αντιλαμβάνεται και κάποια κινητικότητα στην όλη διαδικασία. Η κινητικότητα αυτή φαίνεται πιο έντονα στην απάντηση της Ζωής, (10.8, 10.10), ενώ η απάντηση του Ανδρέα στο ερώτημα αν το h φτάνει την τιμή 0 με χρήση της απαγωγής σε άτοπο (10.11), δείχνει για μια ακόμα φορά προσήλωση στις τυπικές διαδικασίες χωρίς να είναι ξεκάθαρο αν ο μαθητής διακρίνει το 0 από μια απείρως μικρή ποσότητα.

Στο σημείο αυτό οι μαθητές δείχνουν να μπερδεύονται συγχέοντας το t με τη μεταβλητή από την οποία εξαρτάται το όριο δηλαδή το h το οποίο αρκετές φορές θεωρούν ως παράμετρο (10.13), που παριστάνει το τέλος του διαστήματος, οπότε αποφασίζω να ξεκαθαρίσω τη σχέση του t με το h , σχηματίζοντας ένα διάστημα με αρχή t και πέρας $t+h$, αφήνοντας κατόπιν το h να μικραίνει και δείχνοντας με τα χέρια μου, τα διαδοχικά διαστήματα που γίνονται ολοένα και λεπτότερα. Η σύγχυση ανάμεσα στη μεταβλητή h του ορίου και στην ανεξάρτητη μεταβλητή x της συνάρτησης $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ δεν είναι κάτι ασυνήθιστο. Παρατηρήθηκε και κατά τη βαθμολόγηση του 4^{ου} θέματος των γενικών εξετάσεων του έτους 2008, το οποίο δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές.

Διάλογος 11

- 11.1 Διδ:** *Τα άκρα του διαστήματος είναι $t, t+h$. Καθώς το h μικραίνει τι κάνει το διάστημα;*
- 11.2 Ανδρέας:** *Μικραίνει.*
- 11.3 Διδ:** *Το πλάτος του (δείχνω στον πίνακα διαδοχικές θέσεις του $t+h$, και το διάστημα να μικραίνει) έχετε αυτήν τη διαδικασία δηλαδή. Για πείτε μου πόσο μπορεί να μικραίνει ο h ;*
- 11.4 Αλ/δρος:** *Μπορεί να παίρνει άπειρες τιμές.
Επομένως μπορεί να μικραίνει όσο θέλει.
Μπορεί να γίνεται ολοένα μικρότερο και να πάρει όσο μικρές τιμές θέλει. Εντάξει δεν υπάρχει όριο.
(Προφανώς εννοεί στο πόσο μπορεί να μικραίνει ο h).*

- 11.5 Διδ: *Το h λοιπόν μπορεί να πάρει οσοδήποτε μικρές τιμές θέλουμε.*
- 11.6 Ανδρέας: *Εκτός από το 0 όμως.*
- 11.7 Διδ: *Στην πορεία του προς το 0 μπορούμε να τον φανταστούμε οσοδήποτε μικρό. Και κάθε φορά σε ένα τέτοιο διάστημα του οποίου το πλάτος μικραίνει αδιάκοπα θα έχουμε τη μέση ταχύτητα. Αλήθεια αυτές οι μέσες ταχύτητες σε ολοένα και μικρότερου πλάτους διαστήματα τελικά τι κάνουν; Αυτή η οικογένεια συναρτήσεων που προκύπτει καθώς ο h ολοένα και μικραίνει, πως συμπεριφέρεται;*
- 11.8 Ζωή: *Όσο το h μικραίνει, μικραίνει και η μέση ταχύτητα.*
- 11.9 Διδ: *Ποια τιμή φαίνεται να πλησιάζει η μέση ταχύτητα καθώς το h μικραίνει;*
- 11.10 Ανδρέας: *Την ταχύτητα που είχε πριν φτάσει στο $t+h$ την ταχύτητα που είχε στο t αυτήν θα έχει και στο $t+h$. Αν φανταστούμε το h να μικραίνει ολοένα, θα βλέπουμε η ταχύτητα να μεταβάλλεται όλο και πιο λίγο. Θα τείνει να πάρει την ταχύτητα που είχε στο t .*
- 11.11 Διδ: *Πάντως θα συμφωνήσετε ότι όσο μικρό και αν είναι αυτό το h , στο διάστημα $[t, t+h]$ δεν θα διατηρεί σταθερή την ταχύτητά του.*
- 11.12 Ανδρέας: *Δεν θα έχει ποτέ την ίδια ταχύτητα συμφωνώ, αλλά τείνει να γίνει ίδια.*
- 11.13 Διδ: *Μπορείς να μας περιγράψεις για άλλη μια φορά την εικόνα που σχηματίζεις όσο το h τείνει στο 0;*
- 11.14 Ανδρέας: *Όσο το h τείνει στο 0, η μέση ταχύτητα στο διάστημα $[t, t+h]$, τείνει να γίνει η ταχύτητα την οποία είχε στο προηγούμενο διάστημα. (προφανώς εννοούσε «την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή»).*
- 11.15 Ζωή: *Ναι αλλά λογικά θα κοντεύει στο 0.*
- 11.16 Διδ: *Το h δε γίνεται ποτέ 0, όταν τείνει στο 0. Συνεπώς πάντα έχω κάποιο πλάτος διαστήματος.*
- 11.17 Ζωή: *Και η μέση ταχύτητα;*
- 11.18 Διδ: *Η μέση ταχύτητα (δείχνω με το χέρι μου το διάστημα $[t, t+h]$, που τείνει να εκμηδενιστεί το πλάτος του) που θα τείνει;*
- 11.19 Γιάννης: *Στην τιμή $10t$.*
- 11.20 Διδ: *Είμαι σίγουρος ότι αναγνωρίσατε την τιμή $10t$ στην οποία τείνει η μέση ταχύτητα.....*

Ο Αλέξανδρος, έχει σίγουρα μια δυναμική κατανόηση της οριακής κατάστασης (11.4) και αυτό φαίνεται από τις εκφράσεις του «μπορεί να μικραίνει όσο θέλει» και «γίνεται ολοένα μικρότερο και παίρνει όσο μικρές τιμές θέλει» Στη συνέχεια η προσπάθειά μας ήταν να μεταφέρουμε τη συζήτηση στην έννοια της στιγμιαίας

ταχύτητας σαν όριο των διαδοχικών μέσων ταχυτήτων καθώς το διάστημα $[t, t+h]$ γίνεται ολοένα και λεπτότερο. Η Ζωή αντιλαμβάνεται ότι οι μέσες ταχύτητες μειώνονται σταδιακά από τα αριθμητικά αποτελέσματα, δε φαίνεται όμως να καταλαβαίνει, (11.8) ότι προσεγγίζουν ένα συγκεκριμένο όριο. Ο Ανδρέας (11.10, 11.12, 11.14) κάνει μια αξιοσημείωτη προσπάθεια να φανταστεί τα άκρα t και $t+h$, σχεδόν ταυτισμένα με αποτέλεσμα, να δυσκολεύεται να διακρίνει τις χρονικές στιγμές t και $t+h$ και να δείχνει ότι έχει μια διαισθητική άποψη για το τι είναι ταχύτητα τη στιγμή t . Αντίθετα η Ζωή (11.17) αρνείται ουσιαστικά την ύπαρξη ταχύτητας, σε μηδενικού πλάτους χρονικό διάστημα και μας θυμίζει έντονα το δίλλημα του Νίκου στο επόμενο ερώτημα. Τέλος ο Γιάννης (11.19) δίνει την απάντηση για το πού τείνουν οι διάφορες μέσες ταχύτητες, και στο σημείο αυτό μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μια σαφή και ξεκάθαρη προσέγγιση του νοήματος της στιγμιαίας ταχύτητας.

Διάλογος 12

- 12.1 Διδ: Προκειμένου όμως παιδιά η οικογένεια αυτή των συναρτήσεων να προσεγγίσει τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t , τι τιμές θα δώσετε στο h ;
- 12.2 Έντο: Πολύ μικρές.
- 12.3 Μαρία: Πολύ μικρές, κοντά στο 0.
- 12.4 Διδ: Τι θα πετύχετε μ' αυτό; Δηλαδή δίνοντας πολύ μικρές τιμές στο h τι θα πετύχετε σχετικά με το διάστημα $[t, t+h]$;
- 12.5 Πάνος: Να έχει αμελητέο πλάτος το διάστημα.
- 12.6 Μάριος: Να είναι τόσο μικρή η διαφορά μεταξύ μέσης και στιγμιαίας, ώστε να είναι αμελητέα.
- 12.7 Διδ: Οι διάφορες μέσες ταχύτητες που θα προκύψουν για τα διάφορα h , θα προσεγγίσουν τη στιγμιαία έτσι; Ωραία για δώστε στο h τιμές που ολοένα μικραίνουν.
- 12.8 Μαρία: Δε μπορεί το h να πάρει τη τιμή 0;
- 12.9 Μάριος: Θα μηδενίζεται ο παρονομαστής του κλάσματος στη περίπτωση αυτή.
- 12.10 Διδ: Παιδιά η Μαρία ρώτησε το εξής: «δε μπορεί ο h να πάρει την τιμή 0;»
- 12.11 Έντο: Αν πάρει την τιμή 0 το h , τότε το

*διάστημα που θα έχουμε θα είναι μια
συγκεκριμένη τιμή, οπότε δε θα ψάχνουμε
τη μέση ταχύτητα, δεν θα έχει νόημα, θα
ψάχνουμε την ταχύτητα εκείνη τη στιγμή.*

12.12 Άρης: *Δεν θα έχει διανύσει καθόλου διάστημα.*

12.13 Αιδ: *Εμείς Μαρία, τι θέλουμε δίνοντας στο h
ολοένα και μικρότερες τιμές;*

12.14 Μαρία: *Να βρούμε τη μέση ταχύτητα συναρτήσει του t .*

12.15 Αιδ: *Και για το h τι θέλουμε;*

12.16 Μαρία: *Να είναι πολύ μικρό, ώστε να
προσεγγίζει τη στιγμιαία.*

12.17 Αιδ: *Στην ανάλυση φέτος αυτό πως το είπατε
όταν δίνεις στο h ολοένα και μικρότερες τιμές;*

12.18 Πάνος: *Όριο.*

12.19 Αιδ: *Ποιο ρήμα χρησιμοποιήσατε για το h ;*

12.20 Πάνος: *τείνει στο 0.*

Ο Μάριος (12.6) μιλάει για αμελητέα διαφορά μεταξύ προσεγγίζουσας και προσεγγιζόμενης ποσότητας, και αυτό δεν πρέπει να περάσει απαρατήρητο. Ο μαθητής χρησιμοποιεί την έκφραση «η διαφορά να είναι **τόσο μικρή** ώστε να είναι **αμελητέα**» και από αυτό φαίνεται πως έχει καλή διαισθητική άποψη για τις απείρως μικρές ποσότητες επιπλέον δε, προσδίδει και την απαραίτητη δυναμική στην οριακή διαδικασία. Η Μαρία (12.8) επαναφέρει τη γνωστή αμφιβολία των μαθητών για το αν το όριο κατακτάται κάποια στιγμή, και η απαντήσεις που δίνουν ο Έντυ (12.11) και ο Άρης (12.12) στο ερώτημα της, είναι μάλλον διαφορετικά προσανατολισμένες δείχνουν όμως ανάγλυφα τη δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση μιας οριακής κατάστασης. Ο Έντυ, ένας άριστος μαθητής ισχυρίζεται ότι για $h \neq 0$, θα έχω πάντα μια μέση ταχύτητα και για $h=0$, θα έχουμε την ευκαιρία να ψάξουμε για την στιγμιαία ταχύτητα, τη χρονική στιγμή t . Διαχωρίζει πλήρως δηλαδή την προσεγγίζουσα ποσότητα από το όριό της και δεν υπάρχει αμφιβολία ότι αντιμετωπίζει το όριο σαν ένα στατικό αντικείμενο. Ο Άρης έχει, όπως και η Ζωή προηγουμένως, το ίδιο πρόβλημα με αυτό του Νίκου του επομένου ερωτήματος: «αν το $h=0$, δε θα έχει διανύσει καθόλου διάστημα!!» Η Μαρία (12.14, 12.16) επανερχόμενη τέλος, με το σχόλιό της δείχνει ότι έχουμε σαφή μετατόπιση του νοήματος, σχετικά με τη στιγμιαία ταχύτητα.

Στο διάλογο που ακολουθεί, επιχειρήσαμε μία ακόμη προσπάθεια, να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις των παιδιών, γύρω από τη δυναμική που εμπεριέχεται ή όχι, σε μια οριακή διαδικασία, και για τα στατικά χαρακτηριστικά του ορίου.

Διάλογος 13

- 13.1 Διδ: *Μπορεί κάποιος να μου πει πως φαντάζεται αυτή τη διαδικασία;*
- 13.2 Σταύρος: *Το πλησίασμα του h εννοείτε;*
- 13.3 Διδ: *Ναι.*
- 13.4 Σταύρος: *Μπορούμε να διαιρούμε κάθε φορά το διάστημα διά δύο.*
- 13.5 Διδ: *Θεωρείτε σκόπιμο να σταθεροποιήσουμε κάπου την τιμή του h , κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, ή δε μας ενδιαφέρει η περίπτωση αυτή;*
- 13.6 Μαθητές: *Τι εννοείτε;*
- 13.7 Διδ: *Δηλαδή, καθώς έχουμε μπει σε αυτή τη διαδικασία, όπου το h ελαττώνεται και πάει προς το 0, ρωτάω αν θα ήταν σκόπιμο ή θα μας ενδιέφερε ή θα ήταν σωστό, να τη σταθεροποιήσουμε κάπου νομίζοντας ότι εν πάσει περιπτώσει, αυτό το πλάτος μας αρκεί και ότι αν έχουμε την τιμή της μέσης ταχύτητας, στην ουσία, θα έχουμε υπολογίσει και τη στιγμιαία.*
- 13.8 Άρης: *Ναι, γιατί μπορεί αυτό να συνεχίζεται επ' άπειρον.*
- 13.9 Διδ: *Άρα θα μας ενδιέφερε να το σταθεροποιήσουμε το h ;*
- 13.10 Άρης: *Ναι.*
- 13.11 Έντο: *Στην πρακτική εφαρμογή, αν μικρύνουμε πάρα πολύ το h , κάποια στιγμή, η απόκλιση θα είναι τόσο μικρή, που στην ουσία δεν θα μας ενδιαφέρει πρακτικά, αλλά θεωρητικά πάντα θα είναι δυνατόν να μικραίνει ο h , δηλαδή διαφέρει η πράξη από τη θεωρία.*

Ο Άρης (13.8, 13.10) έχει την άποψη ότι μπορούμε να σταθεροποιήσουμε το h σε κάποια τιμή αν αυτή είναι αρκετά κοντά στο 0, έχοντας έτσι μια ικανοποιητική προσέγγιση της στιγμιαίας ταχύτητας. Ανάλογα απαντά και ο Έντο (13.11) ο οποίος διαχωρίζει την πράξη από τη θεωρία προσδίδοντας έτσι στατικά χαρακτηριστικά στο όριο, που στη περίπτωσή μας είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Επιπλέον φαίνεται από τις

απαντήσεις τους ότι τους είναι αρκετά δύσκολο να δουν ουσιαστικά την οριακή κατάσταση σαν μια ατέρμονη διαδικασία που οδηγεί στο όριο των μέσων ταχυτήτων, δηλαδή στη στιγμιαία ταχύτητα, και να διακρίνουν την κινητικότητα που είναι συνεχής και τη δυναμική που είναι απαραίτητο συστατικό στοιχείο της. Ο Cornu (1981) επεσήμανε το γεγονός ότι η έννοια του ορίου είναι, για τα περισσότερα παιδιά, το πρώτο σημείο στο οποίο τα μαθηματικά δεν περιορίζονται σε έναν τελικό υπολογισμό που να δίνει μια τελική απάντηση. Η πιο συνηθισμένη δυσκολία που έχουν για να κατασκευάσουν μια δυναμική αντίληψη του ορίου είναι η διαισθητική τους άποψη ότι το όριο είναι κάτι που ποτέ στην πραγματικότητα δεν το φτάνουμε, Cottrill, et al, (1996). Έτσι θα μπορούσε να εξηγηθεί και η επιμονή του Άρη αλλά και του Έντυ για ένα τελικό αποτέλεσμα έστω και αν αυτό προκύπτει από μια ικανοποιητική προσέγγιση και όχι από μια ατέρμονη διαδικασία.

Ο στόχος μας με το 5^ο ερώτημα ήταν να προσανατολίσουμε τους μαθητές να σκεφτούν ακόμη περισσότερο για τη συγκεκριμένη οριακή κατάσταση και γενικότερα για τη στιγμιαία ταχύτητα, ως όριο των μέσων ταχυτήτων. Από τις δέκα οκτώ απαντήσεις που πήραμε οι δώδεκα απάντησαν βασικά, ότι μια στιγμή δεν είναι στ' αλήθεια μια στιγμή αλλά μια ποσότητα χρόνου, τόσο μικρή ώστε να μην διακρίνεται στην ουσία από το μηδέν. Τρεις εξ αυτών θεώρησαν ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι αυτή που αναπτύχθηκε με την πάροδο του χρόνου, παίρνοντας σαν αρχή μια υποθετική χρονική στιγμή $t=0$ κατά την οποία η ταχύτητα ήταν επίσης μηδέν. Τρεις απαντήσεις τέλος δεν προσέγγισαν με αξιόλογο τρόπο το θέμα, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές προτίμησαν να μη σχολιάσουν το δίλημμα του Νίκου. Παραθέτουμε μερικές απαντήσεις των παιδιών στο 5^ο ερώτημα:

Αλέξανδρος: *Η ταχύτητα την κάθε στιγμή συμβολίζει την ταχύτητα που θα έτρενε να πάρει το σώμα, αν μελετούσαμε τη μέση ταχύτητά του σε ένα διάστημα πάρα πολύ μικρού πλάτους (αμελητέου πλάτους), ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε το χρονικό αυτό διάστημα ως στιγμή.*

Νίκος: *Εφόσον μιλάμε για μια χρονική στιγμή, η απόσταση h δε μπορεί να πάρει την τιμή 0 αλλά τείνει. Άρα όσο μικρή και να είναι η απόσταση h , δεν μηδενίζεται και αυτό σημαίνει, ότι μπορούμε να μιλήσουμε για ταχύτητα για μια χρονική στιγμή.*

Κωνσταντίνος: *Μπορούμε να θεωρήσουμε τη χρονική στιγμή ως ένα χρονικό διάστημα που τείνει στο 0 και συνεπώς η ταχύτητα τη χρονική στιγμή αυτή, θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα του χρονικού διαστήματος.*

- Έλενα: Ουσιαστικά όταν αναφερόμαστε σε μια χρονική στιγμή, εννοούμε το απειροστό διάστημα του χρόνου, κατά το οποίο μετράμε τη ταχύτητα του κινητού. Το διάστημα αυτό είναι πάρα πολύ μικρό, δηλαδή σαν εικόνα. Είναι η στιγμή που πατάμε το χρονόμετρο, όταν το κινητό περνάει από το σημείο που μας ενδιαφέρει.
- Νικολέττα: Με τον όρο «μια στιγμή», δε μπορούμε προφανώς να κυριολεκτούμε! Εννοούμε λοιπόν, ένα διάστημα το οποίο όμως είναι πολύ-πολύ μικρό (απειροελάχιστο, τείνει στο 0).
- Μαρίνα: Ένα αμάξι για παράδειγμα, όταν ξεκινάει έχει μια αφετηρία που την ορίζουμε ως $x=0$ και όταν ξεκινάει $t=0$. Άρα το νόημα να μιλάμε για ταχύτητα κάποια χρονική στιγμή, είναι ότι εκείνη τη στιγμή έχει διανύσει μια απόσταση, με μια συγκεκριμένη ταχύτητα.

Στο διάλογο σχετικά με το δίλημμα του Νίκου πήραν μέρος η Λυδία, ο Γιώργος, ο Σταύρος, ο Άρης και ο Έντυ. Ο βασικός μας στόχος ήταν να διερευνήσουμε κατά πόσο υπάρχει δυναμική και κινητικότητα στον όρο «στιγμή» και λιγότερο για το πόσο μικρό είναι αυτό που ονομάζουμε «στιγμή», μια που για το πώς αντιλαμβάνονται τα παιδιά τα απείρως μικρά μεγέθη είχαμε αναφερθεί και στους προηγούμενους διαλόγους:

Διάλογος 14

- 14.1 Λυδία: Είναι εκείνο το δέκατο του δευτερολέπτου, εκείνο το απειροστό χρονικό διάστημα.
- 14.2 Διδ: Τι εννοείς όταν λες «το απειροστό χρονικό διάστημα»;
- 14.3 Λυδία: Πάρα πολύ μικρό, το οποίο είναι ασήμαντο!!
- 14.4 Γιώργος: Είναι ένα διάστημα που η διαφορά του ενός άκρου από το άλλο, είναι τόσο μικρή σχεδόν ασήμαντη που μπορούμε να την πούμε στιγμιαία ταχύτητα.
- 14.5 Σταύρος: Βασικά εφόσον έχει νόημα να μιλάμε για Δt , κάθε φορά που μας δίνει μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, θα θεωρούμε εμείς $t=0$, τη στιγμή που δεν είχε ταχύτητα, και είναι σα να κάνουμε μια αφαίρεση με το 0, $\frac{x(t) - x(0)}{t - 0}$.
- 14.6 Διδ: Έτσι βρίσκεις τη μέση ταχύτητα στο διάστημα $[0, t]$. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τη στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή t .
- 14.7 Άρης: Όταν λέμε για μια χρονική στιγμή, εννοούμε ένα αμελητέο χρονικό διάστημα, αμελητέου πλάτους, του οποίου το όριο τείνει στο 0 ένα dt που λέμε!

Στην ουσία πρόκειται για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Απλά είναι τόσο κοντά μεταξύ τους που τη θεωρούμε μία.

14.8 Έντο: *Κατά την άποψή μου ο Νίκος έχει λάθος προσέγγιση στο θέμα, διότι όταν μελετάς ένα φαινόμενο όπως είναι η κίνηση, δε μπορείς να πεις μεμονωμένα για μια στιγμή. Είναι σα να βλέπεις ένα βίντεο να τρέχει και να παγώσεις το χρόνο. Εφόσον το παγώνεις δεν έχει ούτε κίνηση ούτε τίποτα.*

14.9 Διδ: *Έχω την εντύπωση ότι έχεις το ίδιο πρόβλημα με το Νίκο. (γέλια...).*

14.10 Έντο: *Διαφωνώ με την προσέγγισή του. Είναι σαν να λέει ότι εφόσον παγώνουμε το χρόνο δεν κινείται τίποτα. Όμως σημασία έχει ότι γενικότερα όπως εξελίσσεται το φαινόμενο, εκείνη τη στιγμή δε μπορούμε να πούμε ότι είναι μια στιγμή και τέρμα, θα είναι κάτι συν dt, πάντα υπάρχει πλάτος διαστήματος που τείνει στο 0. Δηλαδή η διαφορά της μιας χρονικής στιγμής από την άλλη είναι σχεδόν μηδενική.*

Οι μαθητές και οι μαθήτριες στο παραπάνω απόσπασμα μίλησαν βασικά για απειροελάχιστου μήκους χρονικό διάστημα, δείχνοντας για άλλη μια φορά να διαχωρίζουν το μηδενικό πλάτος της χρονικής στιγμής από το απείρως μικρό. Είμαστε όμως πολύ επιφυλακτικοί για το κατά πόσο το πλησίασμα του ενός άκρου είναι συνεχές και μη διακοπτόμενο στη σκέψη τους. Κατά πόσο δηλαδή αντιλαμβάνονται μια ατέρμονη διαδικασία που οδηγεί τελικά στην οριακή τιμή που ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα. Για παράδειγμα ο Έντο (14.10) με τις φράσεις του «έτσι όπως εξελίσσεται» και «πάντα υπάρχει πλάτος» δημιουργεί την υπόνοια ότι φαντάζεται μια συνέχεια στη διαδικασία. Τελειώνοντας όμως λέει: «δηλαδή η διαφορά της μιας χρονικής στιγμής από την άλλη, είναι σχεδόν μηδενική». Και το ερώτημα που τίθεται είναι αν η διαφορά αυτή είναι σχεδόν μηδενική και συνεχίζει να μικραίνει στη σκέψη του, ή όχι. Υπενθυμίζουμε ότι ο Newton θεωρούσε τις πολύ μικρές ποσότητες όπως ο h σαν συνήθεις ποσότητες που πλησίαζαν συνεχώς, στο 0. Αντίθετα, ο Leibniz «έβλεπε» αυτές τις ποσότητες εξ αρχής απείρως μικρές, ποσότητες που ήσαν μικρότερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αλλά μη μηδενικές. Παρ' ότι η έννοια του απειροστού, όπως είδαμε στην ιστορική αναδρομή, χρησιμοποιήθηκε από πολλούς μαθηματικούς εκείνης της εποχής, ο Leibniz ήταν

αυτός που τη χρησιμοποίησε περισσότερο εκτεταμένα και συστηματικά από οποιονδήποτε άλλον. Και μολονότι η έννοια έπαψε να εμφανίζεται στις τυπικές αποδείξεις στα μέσα του 18^{ου} αιώνα, χρησιμοποιούμε ακόμη το συμβολισμό που ο Leibniz ανέπτυξε γύρω από αυτήν. Ο συμβολισμός αυτός μας διευκολύνει στο να κάνουμε χρήση των ιδεών του ως μη αυστηρά εργαλεία δικαιολόγησης. Τα απειροστά του Leibniz ήταν θεμελιωδώς διαφορετικό είδος αριθμών, από τις πολύ-πολύ μικρές μεταβλητές ποσότητες που χρησιμοποιούσε ο Newton και οι οποίες μπορούσαν να πλησιάσουν οσοδήποτε κοντά στο 0, με αποτέλεσμα οι όροι που περιείχαν αυτές τις ποσότητες να μπορούν να χαρακτηρίζονται αμελητέοι κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Ενώ οι ποσότητες του Newton βρίσκονταν στη διαδικασία προσέγγισης προς το μηδέν χωρίς να το φτάνουν, οι ποσότητες του Leibniz ήταν ήδη εκεί αλλά όχι ακόμη μηδέν. Ένας τρόπος να σκεφτούμε για τα απειροστά, είναι να πάρουμε στον άξονα το διάστημα που ορίζεται από τους αριθμούς 0 και 1, και να το κόβουμε συνεχώς στη μέση βρίσκοντας τους αριθμούς $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, κ.ο.κ. Οι πιο πολλοί από εμάς θα δεχτούμε χωρίς αμφιβολία ότι οι αριθμοί αυτοί που προκύπτουν διαιρώντας κάθε φορά δια δύο, όχι μόνο πλησιάζουν ολοένα και πιο κοντά στο μηδέν αλλά επιπλέον αν επιλέξουμε έναν άλλο θετικό αριθμό r , τότε σημεία αυτής της ακολουθίας θα βρεθούν κάποτε μεταξύ του μηδενός και του r . Δηλαδή για οποιονδήποτε θετικό αριθμό r , υψώνοντας το $1/2$ σε κατάλληλα μεγάλο εκθέτη θα πάρουμε αριθμό μικρότερο του r . Αλλά αυτό ισχύει μόνο αν ο r είναι ένας συνηθισμένος έστω πολύ μικρός θετικός αριθμός. Τα απειροστά είναι όλα μικρότερα από όλες αυτές τις δυνάμεις του $1/2$. Αυτές κινούνται ολοένα και περισσότερο προς τα αριστερά πλησιάζοντας το μηδέν αλλά ουδέποτε βρίσκονται πιο αριστερά από τα απειροστά. Παρ' ότι όμως οι δύο επινοητές του απειροστικού λογισμού είδαν τις πολύ μικρές ποσότητες με τόσο διαφορετικό τρόπο τελικά κατέληξαν στους ίδιους γενικούς κανόνες, τύπους και διαδικασίες, αυτές δηλαδή που διδάσκονται σήμερα κατά την εισαγωγή στον απειροστικό λογισμό. Εξετάζοντας κανείς από πιο κοντά τις δύο προσεγγίσεις, του Newton και του Leibniz, θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι αυτή του Newton φαίνεται πιο πιστευτή και πιο φυσική. Αυτό υποστηρίζεται και από το γεγονός ότι η προσέγγιση του Newton είναι που κωδικοποιήθηκε σε αυστηρή θεμελίωση του λογισμού το 19^ο αιώνα. Κάποιος άλλος θα μπορούσε να επιχειρηματολογήσει ότι οι περισσότεροι από εμάς είμαστε πιο εξοικειωμένοι με την προσέγγιση του Newton, παρά με αυτήν του Leibniz.. Πρέπει πάντως να σημειώσουμε ότι η προσέγγιση του τελευταίου για τα απειροστά, κωδικοποιήθηκε

από μια εναλλακτική θεμελίωση του λογισμού βασισμένη στην εργασία του αμερικανού επιστήμονα της λογικής Abraham Robinson, τη δεκαετία του 1960, S. Monk, (2007)

4.5. Το θεμελιώδες θεώρημα

Η σχέση μεταξύ παραγώγου και ολοκληρώματος εκφράζεται σήμερα με την παρακάτω πρόταση, γνωστή και ως θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού: Αν η f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$ τότε,

I) η συνάρτηση $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, είναι μια αρχική (αντιπαράγωγος) της f στο $[a, \beta]$

II) αν F μια οποιαδήποτε αρχική της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

Κατά το δεύτερο μέρος του διδακτικού πειράματος επικεντρώσαμε στο μέρος (I) του θεμελιώδους θεωρήματος. Σύμφωνα με μια ελεύθερη και άτυπη επεξήγηση που δίνει ο Thompson, αυτό λέει ότι: Αν μια ποσότητα A έχει μέτρο $t \in [a, \beta]$ και μια ποσότητα B έχει μέτρο $f(t)$, που είναι συνάρτηση του t , τότε καθώς η ποσότητα AB συσσωρεύεται με μεταβολές του A (και άρα και του B), η συσσώρευση της ποσότητας AB πραγματοποιείται με ρυθμό που ταυτίζεται με το μέτρο της ποσότητας B , δηλαδή με το $f(t)$, στο απώτατο άκρο της συσσώρευσής της. Για παράδειγμα, έστω ότι $A=t$ είναι ο χρόνος και $B=v(t)$, είναι η ταχύτητα ενός κινητού που εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Τότε ο υπολογισμός του διαστήματος που διανύει το κινητό επιτυγχάνεται με την συσσώρευση (άθροιση) των γινομένων $v(t)\Delta t$, σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα στο οποίο χωρίσαμε το διάστημα κίνησης.

$$\text{Δηλαδή, } S(t) = \int_a^t v(u)du, \text{ οπότε, } S'(t) = \left(\int_a^t v(u)du \right)' = v(t)$$

Έστω ακόμη ότι $A=t \in [a, \beta]$, και $f(t)$, $t \in [a, \beta]$, μια θετική συνάρτηση. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf , τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $t=a$ και $t=x$, προκύπτει από τη συσσώρευση (άθροιση) των γινομένων $f(t)\Delta t$, σε κάθε απειροελάχιστο διάστημα από αυτά που χωρίστηκε το $[a, \beta]$. Άρα

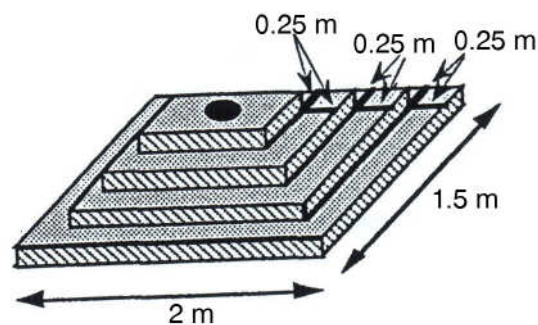
$$E(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ οπότε, } E'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Το θεμελιώδες θεώρημα, το γεγονός δηλαδή ότι η συσσώρευση μιας ποσότητας και ο ρυθμός μεταβολής της συσσώρευσής της έχουν αδιάρρηκτη σχέση, αποτελεί τον μεγαλύτερο και σπουδαιότερο σταθμό στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Πριν ο Newton και ο Leibniz αντιληφθούν το θεμελιώδες θεώρημα, ως ολοκλήρωμα εννοούνταν ο καθορισμός του σωρευτικού ποσού ενός μεγέθους όπως, μήκος τόξου, εμβαδόν, όγκος ή μάζα. Αυτό δε που τώρα ονομάζουμε παράγωγο, γινόταν κατανοητό κυρίως ως ο καθορισμός της γωνιακής ταχύτητας της επαφής ή της καμπυλότητας. Όπως όμως αναφέρθηκε στην ιστορική αναδρομή, τα δύο αυτά είδη προβλημάτων γίνονταν κατανοητά ξέχωρα και το καθένα αναπτύσσονταν με τεχνικές που περιορίζοντουσαν από τον τύπο των προβλημάτων που ετίθεντο προς λύση. Η σχέση μεταξύ των προβλημάτων «να βρεθεί η καμπύλη αν δοθεί μια περιοχή κάτω απ' αυτήν ή η εφαπτομένη της σε ένα σημείο με γνωστή τετμημένη», δεν ήταν τόσο άμεσα εμφανής. Η σχέση μεταξύ εφαπτομένης και τροχιάς τελικά υπήρξε ένας από τους πιο σημαντικούς δεσμούς μεταξύ των διαδικασιών της διαφορίσης και της ολοκλήρωσης. Γενικά και για όλους τους παραπάνω λόγους, η ανάγκη για συστηματοποίηση και επαναδιοργάνωση των υπαρχουσών ιδεών υπήρξε ιδιαίτερα κρίσιμη κατά τον 17^ο αιώνα. Όπως επίσης είδαμε στην ιστορική αναδρομή, η αντίστροφη σχέση των δύο προβλημάτων προσεγγίστηκε περισσότερο γεωμετρικά από τους, Torricelli, Gregory και Barrow, αλλά μόνο ο Newton κατέστησε τη σχέση αυτή κεντρική και γενική. Ο Newton αντελήφθη το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, μέσω μιας πολύ συγκεκριμένης εικόνας σωρευτικής μεταβολής. Αυτής κατά την οποία η συσσώρευση συμβαίνει με τη διαδικασία της αύξησης. Κατά τον Thompson, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί με την έννοια της λέξης αύξηση, γιατί μπορεί να φέρει στην επιφάνεια πολλά προβλήματα σχετικά με τη συνέχεια της αύξησης και με τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες. Αυτό είναι το γνωστό πρόβλημα των απειροστών. Αλλά για εμάς σημασία έχουν οι εικόνες και όχι οι λογικές αποδείξεις. Αναφερόμαστε στις εικόνες εκείνες που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα. Ο τρόπος που επιλέξαμε για να αιτιολογήσουμε την αλήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος είναι αυτή που είχε επιλέξει και ο Newton. Στην κατά Newton ανάπτυξη της σχέσης παραγώγου

και ολοκληρώματος έχουμε μια έκφραση για το εμβαδόν που προέκυψε, όχι από τον ορισμό ενός αθροίσματος απειροστών εμβαδών, ούτε από ισοδύναμες μεθόδους που είχαν επεξεργαστεί προγενέστεροι αρχής γενομένης από τον Αντιφώντα έως και τον Pascal. Αντίθετα προέκυψε από την υπόθεση της στιγμιαίας αύξησης. Με άλλα λόγια, αν και προηγουμένως εμβαδά είχαν υπολογιστεί με τη βοήθεια ορισμένου ολοκληρώματος, που με τη σειρά του ορίστηκε σαν το όριο ενός αθροίσματος, ο Newton εδώ όρισε πρώτα το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και από αυτόν βρήκε το εμβαδόν με τη βοήθεια αυτού που σήμερα ονομάζουμε αόριστο ολοκλήρωμα, ή αντιπαράγωγο συνάρτησης. Πρέπει να σημειωθεί ακόμη ότι η διαδικασία που ήταν θεμελιώδης σε αυτήν την πρόταση, είναι ο ορισμός του ρυθμού μεταβολής. Δηλαδή, ότι εμείς σήμερα ονομάζουμε παράγωγο, πάρθηκε σαν βασική έννοια και το ολοκλήρωμα ορίστηκε σε σχέση με αυτήν. (Boyer, 1959, p. 191). Γενικότερα, ο Newton αισθανόταν αρκετά άνετα να σκέφτεται ένα συνεχές συντιθέμενο από απειροστές ποσότητες, όσο μικρές θα επιθυμούσε κάποιος, και οι οποίες αθροιζόμενες θα έδιναν την τιμή του ζητούμενου μεγέθους. Πρέπει πάντως να υπογραμμιστεί ότι μέσω αυτού του τρόπου δε γίνεται μια αυστηρή δικαιολόγηση. Είναι περισσότερο εικόνες που υποστηρίζουν το γεγονός ότι το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, είναι διαισθητικά φανερό. Επίσης φαίνεται ότι ο Newton διαισθάνθηκε την ανεπάρκεια των απειροστών σαν λογικό θεμέλιο του δικού του απειροστικού λογισμού και τελικά τα αποκέρυξε. Παρ' όλα αυτά είναι ξεκάθαρο ότι οι εισαγωγικές του εμβαθύνσεις διευκολύνθηκαν από την αποδοχή των απειροστών εκ μέρους του.

Κατά την άποψη του Thompson, ένας τρόπος να δει κανείς διαισθητικά ξεκάθαρα το θεμελιώδες θεώρημα είναι και ο εξής: «Σε μια μεταβαλλόμενη ποσότητα που προκύπτει από το γινόμενο δύο άλλων, η ολική συσσώρευση της ποσότητας αυτής, μεταβάλλεται όπως ο λόγος των αυξήσεων των ποσοτήτων που την συνιστούν». Αν για παράδειγμα, έχεις οδηγήσει για x km και στο επόμενο 0,0001sec είχες μέση ταχύτητα 93 km/h, τότε κατά τη διάρκεια αυτού του 0,0001 sec η ολικά διανυθείσα (συσσωρευθείσα) απόσταση, μεταβάλλεται με ρυθμό 93 km/h, ανεξάρτητα από το πόσο μακριά έχεις οδηγήσει. Πράγματι, ο ρυθμός μεταβολής της ολικά συσσωρευθείσας αποστάσεως, κατά τη διάρκεια του τελευταίου 0,0001sec, είναι
$$\frac{(x + \Delta x) - x}{0,0001} = \frac{\Delta x}{0,0001} = 93 \frac{km}{h},$$
 όπου Δx , το

διάστημα που αντιστοιχεί στο 0,0001sec. Η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση της ταχύτητας και του διαστήματος, αλλά σε κάθε περίπτωση που μια ποσότητα προκύπτει από το γινόμενο δύο άλλων ποσοτήτων, εκ των οποίων η μία είναι ο ρυθμός μεταβολής της. Ένα δεύτερο παράδειγμα στο οποίο αναδεικνύεται η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ της συσσώρευσης μιας ποσότητας, των αυξήσεων των ποσοτήτων από τις οποίες αυτή προκύπτει πολλαπλασιαστικά και του ρυθμού μεταβολής, είναι το εξής: Υποθέστε ότι έχουμε ένα δοχείο όπως στο σχήμα, στην επόμενη σελίδα, μέσα στο οποίο αδειάζουμε υγροποιημένο πλαστικό από μια οπή στο επάνω μέρος. Έστω επίσης ότι $V(h)$ παριστάνει τον όγκο του πλαστικού μέσα στο δοχείο σε συνάρτηση με το ύψος του h , από τον πάτο του δοχείου. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ως προς το ύψος h , όταν το υγροποιημένο πλαστικό γεμίζει το τρίτο πάτωμα;



Ο συνολικός όγκος μεταβάλλεται με το ρυθμό με τον οποίο γεμίζει το τρίτο πάτωμα, ανεξάρτητα από το πόσος όγκος πλαστικού έχει προηγουμένως συσσωρευθεί. Ο ρυθμός αυτός ισούται με το ηλίκο

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{(\text{εμβ.} \cdot \text{βάσης}, A) \cdot (\text{ύψους})}{\text{ύψους}} = \text{εμβ.} \cdot \text{βάσης}(A). \quad \text{Το αποτέλεσμα αυτό}$$

επαληθεύεται εύκολα, αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση $V(h)$ και κατόπιν βρούμε την παράγωγό της για $0,50 < h \leq 0,75$. Ο ρυθμός μεταβολής της συσσώρευσης του όγκου καθώς γεμίζει το τρίτο πάτωμα ισούται με το εμβαδόν της βάσεως του τρίτου πατώματος, και αυτό γίνεται διαισθητικά άμεσα αντιληπτό αφού καθ' όλη τη διάρκεια της πλήρωσης του τρίτου πατώματος η βάση παραμένει ίδια. Έτσι λοιπόν μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τη συνάρτηση $V(h)$, βρίσκοντας τη συνάρτηση που δίνει τη βάση A συναρτήσει του ύψους h και εφαρμόζοντας κατόπιν τη μέθοδο της αντιπαραγωγίσης. Με σύγχρονη ορολογία τα παραπάνω γράφονται

$\left(\int_0^h A(u) du \right)' = A(h)$. Στο πρώτο παράδειγμα όπου η ταχύτητα, δηλαδή ο ρυθμός

μεταβολής του διαστήματος, δεν παραμένει σταθερός σε κανένα διάστημα του χρόνου t όπως π.χ. στην περίπτωση της επιταχυνόμενης κίνησης, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι σε κάθε απειροελάχιστο χρονικό διάστημα οδηγούσαμε με μια μέση ταχύτητα. Κατόπιν από αυτήν θα μπορούσαμε να ανακατασκευάσουμε την ολική διανυθείσα απόσταση προσθέτοντας τις στοιχειώδεις αποστάσεις, που προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας αυτή τη μέση ταχύτητα επί το αντίστοιχο απειροστό χρονικό

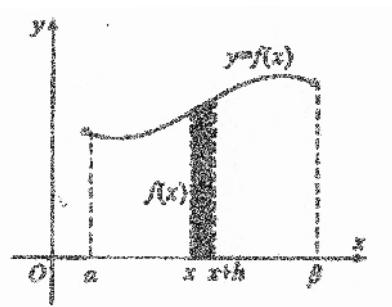
διάστημα. Αυτό με σύγχρονη ορολογία γράφεται $\left(\int_0^t v(u) du \right)' = v(t)$. Δηλαδή η

συσσωρευόμενη ποσότητα φανταζόμαστε ότι προκύπτει από την άθροιση απειροστών αυξήσεων των ποσοτήτων από τις οποίες συντίθεται πολλαπλασιαστικά, κατά τέτοιον τρόπο ώστε αυτές να παράγουν τις αυξήσεις της συσσωρευόμενης ποσότητας, που εδώ ήταν είτε το διάστημα είτε ο όγκος. Αν πάντως μία από τις συνιστώσες ποσότητες είναι ο ρυθμός με τον οποίο η συσσωρευόμενη ποσότητα μεταβάλλεται σε ένα απειροστό διάστημα, τότε η ολική συσσώρευση μεταβάλλεται σ' αυτό το απειροστό διάστημα με ρυθμό που είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της ποσότητας στο διάστημα αυτό. Τα παραπάνω γενικεύονται με τη σχέση

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Προκειμένου να διερευνήσουμε πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά το θεμελιώδες θεώρημα, επιλέξαμε ένα πρόβλημα που δεν ήταν τόσο συνηθισμένο, από την άποψη ότι δεν είχε ως αντικείμενο το διάστημα, το χρόνο και την ταχύτητα. Περιμέναμε από τους μαθητές να επιστρατεύσουν τις εμπειρίες που απέκτησαν στο μάθημα ως προς την έννοια της συνάρτησης και το ρυθμό μεταβολής, προκειμένου να κατασκευάσουν διαισθητικά το θεμελιώδες θεώρημα. Ο μεγαλύτερος στόχος του πειράματος, όμως, ήταν να αναδείξει τις αντιλήψεις και τους προσανατολισμούς τους, που πιθανόν να διευκολύνουν ή να παρεμποδίζουν αυτήν την κατασκευή. Στην επιλογή των ερωτημάτων οδηγηθήκαμε και από τον τρόπο που το σχολικό βιβλίο της

Γ' Λυκείου, δικαιολογεί εποπτικά τη σχέση $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$, που είναι ο εξής:



Αν $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, τότε, $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \text{εμβαδόν του χωρίου } \Omega \approx f(x)h$, για

μικρά $h > 0$. Συνεπώς για μικρά $h > 0$, διαιρώντας με το h , έχουμε: (βλέπε και σχήμα)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x), \text{ άρα } F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x).$$

Όπως απέδειξε ο Thompson, κατά τη διάρκεια ενός πειράματος με μια μαθήτρια 1^{ης} Γυμνασίου, τα παιδιά ακόμη και σ' αυτήν την ηλικία μπορεί να έχουν πρώιμες αναπαραστάσεις της συσσώρευσης ενός μεγέθους. Αυτό διαφάνηκε κατά τη διάρκεια της συζήτησης που είχαμε με τους μαθητές στο δημόσιο σχολείο, προκειμένου να σχολιάσουμε την απάντηση στο πρώτο ερώτημα του δευτέρου προβλήματος. Ζητούσαμε να εκφραστεί το εμβαδόν μιας οριζόντιας τομής του νερού που πέφτει σε ένα ανεστραμμένο κωνικό δοχείο, συναρτήσει του ύψους στο οποίο βρίσκεται αυτή η οριζόντια τομή.

Διάλογος 15

- 15.1 Διδ: *Με ενδιαφέρει κάποιος να μου πει τι πετύχαμε απαντώντας στο ερώτημα (α).*
- 15.2 Μαθητής: *Το εμβαδόν του κύκλου.*
- 15.3 Διδ: *Βρήκαμε την επιφάνεια του νερού.*
- 15.4 Μαθητής: *Συναρτήσει του ύψους.*
- 15.5 Διδ: *Αντιλαμβάνεσθε τα δύο μεγέθη που έχουμε εδώ, τα οποία αλληλοεξαρτώνται και συμμεταβάλλονται;*
- 15.6 Σταύρος: *Πιστεύω, πως την ώρα που γεμίζει το δοχείο, σχηματίζεται ένα όμοιο..... ένας ομόκεντρος κύκλος με τον αρχικό που φαίνεται στο σχήμα.*

Ο Σταύρος, (15.6) με τη βοήθεια και του σχήματος που είχα κάνει στον πίνακα, μορφοποιεί μια εικόνα κατά την οποία διαδοχικοί κύκλοι ή κύλινδροι απειροελάχιστου πάχους, πέφτουν ο ένας πάνω στον άλλο και κατ' αυτόν τον

τρόπο επιτυγχάνεται η συσσώρευση του όγκου V του νερού συναρτήσει του ύψους x στο οποίο βρίσκεται η άνω επιφάνειά του. Με λίγη τόλμη μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εικόνα αυτή είναι μια πρώιμη αναπαράσταση της σχέσης

$$V(x) = \int_0^x E(t) dt . \text{ Είναι η ίδια εικόνα που θα σχημάτιζε κάποιος στην προσπάθειά}$$

του να υπολογίσει το διάστημα που διήνυσε ένα αυτοκίνητο, το οποίο επιταχύνει για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα, θεωρώντας δηλαδή ότι το διάστημα αυτό είναι άθροισμα στοιχειωδών διαστημάτων που διανύθηκαν με σταθερή ταχύτητα σε κάθε απειροελάχιστη στιγμή του χρόνου! Το συμπέρασμα που μπορούμε να αποκομίσουμε από το σχόλιο του Σταύρου είναι ότι υπάρχουν πρώιμοι τύποι αναπαραστάσεων, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν παιδαγωγικά στη διδασκαλία των βασικών εννοιών του απειροστικού λογισμού. Απομένει βέβαια το ανοικτό ερώτημα κατά πόσο μπορούμε να διασφαλίσουμε τις ευκαιρίες εκείνες στους μαθητές ώστε να χρησιμοποιήσουν τις εμπειρίες αυτές κατά τρόπο αποτελεσματικό για μια εμβάθυνση στον απειροστικό λογισμό. Η άποψή μας αυτή ενισχύεται και από το διάλογο που επακολούθησε μετά την απάντηση στο δεύτερο ερώτημα, όπου ζητούσαμε να εκφραστεί ο όγκος του νερού μέσα στο δοχείο, προσεγγιστικά με τη βοήθεια ενός αθροίσματος Riemann. Προκειμένου τα παιδιά να αισθανθούν πιο οικεία, τους ανέφερα το πρόβλημα του εμβαδού κάτω από μια θετική συνάρτηση $y=f(x)$, $x \in [0,8]$, περικλειόμενο από τον άξονα $x'x$, καθώς επίσης και από τις ευθείες $x=0$ και $x=5$, η οποία όμως κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της, διαγράφοντας έτσι ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο εμβαδόν, που δίνεται κατά προσέγγιση, από τη συνάρτηση $E(x) = \frac{x}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} f(i \frac{x}{\nu})$, $x \in [0,8]$.

Και ο διάλογος 16 έγινε με το τμήμα στο δημόσιο σχολείο:

Διάλογος 16

- 16.1 Διδ: *Με ποια διαδικασία θα βρείτε ακριβέστερη τιμή του εμβαδού, κάτω από την καμπύλη $y=f(x)$;*
- 16.2 Σταύρος: *Με το ολοκλήρωμα.*
- 16.3 Διδ: *Πριν φτάσουμε εκεί...*
- 16.4 Σταύρος: *Είναι πιο χρονοβόρα διαδικασία. Πρέπει να χωρίσουμε σε πάρα πολύ μικρά κομμάτια.*
- 16.5 Διδ: *Σε πόσα;*

- 16.6 Σταύρος: Σε άπειρα.
- 16.7 Διδ: Πρακτικά γίνεται αυτό;
- 16.8 Σταύρος: Όχι.
- 16.9 Διδ: Πώς φαντάζεσαι τη διαδικασία, μπορείς να μου πεις;
- 16.10 Σταύρος: Λόγω της καμπύλης, δε μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το... (σηκώνεται στον πίνακα και δείχνει το καμπύλο τμήμα της γραφικής παράστασης ανάμεσα σε δύο κατακόρυφες ευθείες), είναι αυτό εδώ που μας ενοχλεί. Και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το εμβαδόν.
- 16.11 Διδ: Μάλιστα. Όταν τα κομμάτια γίνονται ολοένα και περισσότερα, τι φαντάζεσαι ότι συμβαίνει;
- 16.12 Σταύρος: Χωρίζουμε όλο και σε περισσότερα κομμάτια έτσι ώστε να βγάλουμε πιο ίσια τη διάσταση αυτή, (δείχνει το επάνω μέρος της λωρίδας που είναι τμήμα της καμπύλης), να είναι έτσι ώστε, να μπορούμε να υπολογίσουμε με τους τύπους που γνωρίζουμε, το εμβαδόν του χωρίου.
- 16.13 Διδ: Έχεις τη δυνατότητα να χωρίζεις το διάστημα σε ολοένα και περισσότερα κομμάτια;
- 16.14 Σταύρος: Δε γίνεται μέχρι ένα σημείο μπορώ να το κάνω, από εκεί και πέρα.
- 16.15 Διδ: Τι θα σε εμπόδιζε να συνεχίσεις ακόμη και από το σημείο που φαντάζεσαι;
- 16.16 Σταύρος: Το μέγεθος.
- 16.17 Διδ: Θεωρητικά όμως;
- 16.18 Σταύρος: Θεωρητικά μπορεί να γίνει, πρακτικά δε γίνεται.
- 16.19 Διδ: Δηλαδή το συμπέρασμα είναι ότι, μπορούμε τελικά να χωρίζουμε το διάστημα σε ολοένα και περισσότερα κομμάτια, χωρίς τελικά αυτή η διαδικασία να έχει ένα τέλος, έτσι;

Η άθροιση των απείρως μικρών κατά προσέγγιση ορθογωνίων υπάρχει στη σκέψη του Σταύρου, (16.6, 16.8, 16.12), και αυτό είναι μια πρόωπη εικόνα συσσώρευσης ενός μεγέθους. Το πρόβλημά του φαίνεται να είναι περισσότερο πρακτικό. Πως δηλαδή θα χωρίσει το εμβαδόν σε ικανά ως προς τον αριθμό κομμάτια, το κάθε ένα από τα οποία θα είχε εμβαδόν που θα μπορούσε να υπολογιστεί «με τους τύπους που ξέρουμε». Φαίνεται να τον εμποδίζει το πεπερασμένο του σχήματος (16.14, 16.16) και αυτό για έναν μαθητή της ηλικίας αυτής δεν πρέπει να μας εκπλήσσει. Το θέμα είναι, αμέσως μετά, να αντιληφθεί

ότι θεωρητικά η διαίρεση αυτή είναι εφικτή, πράγμα το οποίο δεν δυσκολεύεται να αποδεχτεί, (16.18). Απομένει πλέον να πειστούμε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο αυτής της διαδικασίας και τη συνέχειά της, πράγμα για το οποίο δε μπορούμε να είμαστε απολύτως βέβαιοι. Σε αυτό το σημείο (16.19), η επέμβασή μας απέβλεπε στο να συνοψίσει τη σκέψη του μαθητή έτσι ώστε να έχουμε την επιθυμητή μετατόπιση του νοήματος που ήταν και ο βασικός στόχος των διαλόγων με τους μαθητές. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικά.

4.6. Ο ρυθμός μεταβολής της συσσώρευσης

Με δεδομένο ότι οι μαθητές δεν ήταν καθόλου εξοικειωμένοι με τα αθροίσματα Riemann αφ' ενός, και λόγω του περιορισμένου χρόνου που είχαμε στη διάθεσή μας αφ' ετέρου, αποφασίσαμε να βοηθήσουμε στον υπολογισμό του όγκου του νερού που πέφτει στο ανεστραμμένο κωνικό δοχείο, συναρτήσει του ύψους x του νερού. Η μη εξοικείωση των μαθητών με τα αθροίσματα Riemann, ωφείλεται στο γεγονός ότι το βάρος κατά τη διδασκαλία της έννοιας του ολοκληρώματος πέφτει στις μεθόδους υπολογισμού και όχι στην εμβάθυνση στην ίδια την έννοια. Εξ' άλλου, ο μοναδικός στόχος του ερωτήματος (β) ήταν να κατανοήσουν τα παιδιά ότι μπορούμε να έχουμε έναν τύπο μιας συνάρτησης, η οποία, έστω και κατά προσέγγιση, θα μας δίνει τον όγκο του νερού σε ύψος x μέσα στο κωνικό δοχείο διαφορετικό από το γνωστό τύπο του κώνου. Φτάσαμε

λοιπόν στη συνάρτηση $V(x) = \frac{x}{V} \sum_{i=1}^V E(i \frac{x}{V}), x \in [0,8]$. Ακολούθως ζητήθηκε από

τους μαθητές να βρουν το τύπο της συνάρτησης που δίνει το μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου σε οποιοδήποτε διάστημα πλάτους h , μέσα στο $[0,8]$. Αν εξαιρέσουμε μια-δυο περιπτώσεις που οι μαθητές φάνηκε να συγχέουν για άλλη μια φορά το μέσο ρυθμό μεταβολής και την παράγωγο, πρόβλημα στο οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί, η απάντηση από τους υπόλοιπους και στις δύο τάξεις ήταν άμεση και χωρίς δισταγμό: $dV(x) = \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διεξοδική συζήτηση μέσα στην τάξη, κατά την αντιμετώπιση του πρώτου προβλήματος, για τη μέση ταχύτητα του αντικειμένου

σε οποιοδήποτε διάστημα πλάτους h , και η μετέπειτα γενίκευσή του για το τυχαίο μέγεθος $y=f(x)$, είχε αποδώσει καρπούς. Γενικότερα η εμβάθυνση στις βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού, φαίνεται να είναι ο μοναδικός τρόπος για μια όχι μηχανιστική προσέγγιση αυτού του δύσκολου γνωστικού αντικειμένου.

Τα παιδιά είχαν χαράξει με σχετική ευκολία τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης $E(x) = \frac{9\pi}{64} x^2, x \in [0,8]$, που εκφράζει την επιφάνεια μιας οριζόντιας

τομής του νερού σε ύψος x . Η έλλειψη ενός προγράμματος γραφικών, δε μας επέτρεψε να προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $dV(x)$, για να τους δείξουμε ότι είναι ταυτόσημη με αυτήν της $E(x)$. Το ερώτημα λοιπόν τέθηκε αναγκαστικά σε δύο φάσεις: Ζητήθηκε πρώτα να αναπαραστήσουν τη διαφορά

$V(x+h)-V(x)$, και μετά να δικαιολογήσουν τη σχέση $\frac{V(x+h)-V(x)}{h} \approx E(x)$.

Τα παιδιά με σχετική ευκολία κατανόησαν ότι η διαφορά $V(x+h)-V(x)$, παριστάνει κατά προσέγγιση τον όγκο του «στοιχειώδους κυλίνδρου» που έχει βάση $E(x)$ και ύψος h . Παρ' όλα αυτά βρήκαν με αρκετή δυσκολία ότι ο όγκος αυτός ισούται με $E(x)h$ και αυτό πρέπει λογικά να το αποδώσουμε στην ελλιπή έως και ανύπαρκτη ενασχόλησή τους με τους όγκους στερεών και γενικά με τη στερεομετρία. Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνεται η συζήτηση που είχαμε για το θέμα αυτό στο τμήμα του δημόσιου σχολείου:

Διάλογος 17

- 17.1 Μαθήτρια: (Διαβάζει το ερώτημα). Τι εκφράζει η διαφορά $V(x+h)-V(x)$;
- 17.2 Διδ: Να το δείτε και να το συζητήσετε μεταξύ σας.
- 17.3 Σταύρος: (Μετά από περίπου 30') εκφράζει το κυλινδρικό σχήμα το οποίο έχει σχηματιστεί.
- 17.4 Διδ: Να γράψετε την απάντησή σας στο φύλλο εργασίας, μας ενδιαφέρει.
- 17.5 Γιάννης: Μήπως εκφράζει τη διαφορά ύψους;
- 17.6 Διδ: Μα αφού πρόκειται για όγκο.
- 17.7 Γιάννης: Ναι, εκφράζει διαφορά όγκων.
- 17.8 Διδ: Γενικότερα το $V(x+h)$, τι εκφράζει;
- 17.9 Κων/ντίνα: Τον όγκο σε ύψος $x+h$.
- 17.10 Διδ: Πολύ ωραία, και το $V(x)$;
- 17.11 Κων/ντίνα: Τον όγκο μέχρι ύψος x .

- 17.12 *Αιδ:* *Αν λοιπόν αφαιρέσετε αυτούς τους δύο όγκους τι θα βρείτε;*
- 17.13 *Μαθητής:* *Τον όγκο του κυλίνδρου που έχει ύψος h και βρίσκεται σε ύψος x.*
- 17.14 *Γιάννης:* *(Διαβάζει το επόμενο ερώτημα).*
Να δικαιολογήσετε τη σχέση . $\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \approx E(x)$.
- 17.15 *Αιδ:* *Συζητείστε το μεταξύ σας, μας ενδιαφέρει πολύ.*
- 17.16 *Σταύρος:* *Σύμφωνα με την προηγούμενη απάντηση που έχουμε δώσει στο προηγούμενο ερώτημα, για το λόγο ότι ο όγκος που σχηματίστηκε με τα σχήματα που έχουμε φτιάξει στον πίνακα, είναι κατά προσέγγιση ίσος με τον όγκο του νερού που έχει σχηματιστεί στο σχήμα, άρα και σύμφωνα με αυτήν τη διαφορά που μας δίνει τον όγκο του νερού που έχει γεμίσει το δοχείο. Πρέπει το h να τείνει στο μηδέν.*
- 17.17 *Αιδ:* *.....Αυτό θα το δούμε μετά.*
Σε αυτήν τη φάση θέλουμε να δικαιολογήσουμε την ισότητα.....
- 17.18 *Αιδ:* *Τι εκφράζει η διαφορά των δύο όγκων, είπαμε;*
- 17.19 *Μαθητής:* *Τον όγκο του επάνω κομματιού.*
- 17.20 *Μαθήτρια:* *Σε ύψος h.*
- 17.21 *Αιδ:* *Πού έχει ύψος h...πόσο είναι αυτός;*
- 17.22 *Μαθητές:* *x...*
- 17.23 *Αιδ:* *Ο όγκος;*
- 17.24 *Μαθητής:* *Είναι (x+h)-x.*
- 17.25 *Αιδ:* *Ο όγκος του κυλίνδρου παιδιά πως θα δοθεί;*
- 17.26 *Μαθητής:* *V(h).*
- 17.27 *Ανδρέας:* *ΔV!*
- 17.28 *Αιδ:* *Από ποιον τύπο δίνεται ο όγκος του κυλίνδρου;*
- 17.29 *Αλέξανδρος:* *E(x)h(!).*
- 17.30 *Ανδρέας:* *Πως το βγάζουμε αυτός;*
- 17.31 *Αιδ:* *Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο (εμβαδόν βάσης)x(ύψος), αλλά πόσο είναι το εμβαδόν της βάσης του επάνω κυλίνδρου; Δεν είναι η τιμή της συνάρτησης E(x), που υπολογίστηκε στο πρώτο ερώτημα; Για διαιρέστε με το h τώρα.*
(Γράφω στον πίνακα τις ισότητες $V(x+h)-V(x) \approx E(x)h \Rightarrow$

$$\frac{V(x+h) - V(x)}{h} \approx E(x) \text{).}$$

Η Κωνσταντίνα επιστρατεύει τις εμπειρίες της γύρω από την έννοια της συνάρτησης και ξεκαθαρίζει (17.9, 17.11) τα πράγματα σχετικά με τη διαφορά $V(x+h)-V(x)$. Υπενθυμίζουμε ότι ένας από τους στόχους των επεμβάσεών μας ατά τη διάρκεια της διαπραγμάτευσης των εννοιών ήταν ο επανακαθορισμός των απόψεων των μαθητών για τις βασικές έννοιες της ανάλυσης. Ένα ποσοστό των μαθητών ανταποκρίνεται και στην περίπτωση αυτή, η Κωνσταντίνα φαίνεται να μας επιβεβαιώνει. Ο Σταύρος (17.16) μπαίνει σε έναν ασαφή συλλογισμό προκειμένου να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι πρέπει ο h να τείνει στο 0, πράγμα που μάλλον υποπτεύεται έχοντας υπ' όψη τον ορισμό της παραγώγου, χωρίς ουσιαστικά να προσεγγίζει το ερώτημα. Αμέσως παρακάτω φαίνεται πως υπάρχει για άλλη μια φορά σύγχυση μεταξύ της μεταβλητής x , που είναι το ύψος του νερού, και του h , που είναι το ύψος του τελευταίου «στοιχειώδους κυλίνδρου», (17.20, 17.24, 17.26), που προέκυψε μετά την «Νευτώνεια» στιγμιαία αύξηση του όγκου V . Το φαινόμενο αυτό το είχαμε ξανασυναντήσει όταν συζητούσαμε για τον μέσο ρυθμό, στο πρώτο πρόβλημα. Γίνεται δηλαδή φανερό ότι υπάρχουν αντιλήψεις των μαθητών που δεν έχουν ακόμη ανασκευαστεί. Ο Αλέξανδρος τέλος, φαίνεται να έχει τον πλήρη έλεγχο σχετικά με το ρόλο της συνάρτησης $E(x)$, που βρέθηκε στο ερώτημα (α), και το επιβεβαιώνει (17.29), με τη σιγουριά με την οποία δίνει την απάντηση $E(x)h$. Η παρέμβασή μας στο τέλος του διαλόγου (17.31), είχε στόχο να συνοψίσει τη σκέψη και να βοηθήσει στην κατανόηση της απάντησης. Παρ' όλα αυτά δεν μπορούμε με απόλυτο τρόπο να είμαστε σίγουροι, ότι ο Αλέξανδρος ή κάποιο από τα παιδιά γενικότερα, καταλαβαίνουν τι αναπαριστά η έκφραση

$$dV(x) = \frac{V(x+h) - V(x)}{h}, \text{ δηλαδή τη μεταβολή του όγκου σε συνάρτηση με τη}$$

μεταβολή του ύψους του νερού. Σ' αυτό ίσως δε βοηθά καθόλου το γεγονός, ότι οι μαθητές φαίνεται να ξεχνούν πως το h του παρονομαστή, έχει προκύψει από τη διαφορά $(x+h)-x$ και άρα πρόκειται για μεταβολή του ύψους x του νερού. Δεν φαίνεται να γίνεται επίσης κατανοητό, ότι προσπαθούμε να αιτιολογήσουμε την ισότητα δύο διαφορετικών μεγεθών όπως είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου και η επιφάνεια της οριζόντιας τομής του νερού. Το κρίσιμο αυτό σημείο έγινε προσπάθεια να διερευνηθεί, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας με το τμήμα του ιδιωτικού σχολείου. Το γεγονός ότι επιλέξαμε ένα πρόβλημα όπου το μέγεθος, του οποίου τον ρυθμό μεταβολής συζητάμε δεν είναι το διάστημα και η

ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι ο χρόνος, συνετέλεσε ώστε να δυσκολέψει τα παιδιά ακόμη περισσότερο στο να σκεφτούν για το ρυθμό. Πιο πολύ φαίνεται να ασχολούνται με κάποια συναρτησιακή σχέση του όγκου $V(x)$ και της επιφάνειας $E(x)$ παρά με το ρυθμό μεταβολής του όγκου $V(x)$. Ο διάλογος που ακολουθεί είναι αρκετά κατατοπιστικός, και έγινε στο ιδιωτικό σχολείο.

Έχουμε δείξει τη σχέση $\frac{V(x+h)-V(x)}{h} \approx E(x)$ και η επόμενη ερώτηση είναι πως

μπορούμε να προσεγγίσουμε καλύτερα το $E(x)$, από το κλάσμα $\frac{V(x+h)-V(x)}{h}$.

Διάλογος 18

- 18.1 Ντοριάν:** Θα πάρουμε το όριο όταν ο h τείνει στο 0.
- 18.2 Διδ:** Μπορείς να μας περιγράψεις πως αντιλαμβάνεσαι αυτή τη διαδικασία;
- 18.3 Ντοριάν:** Όσο μικρότερο είναι το h , τόσο μικρότερη σημασία θα έχει το πάχος αυτό, (δείχνει με το δείκτη και τον αντίχειρα το πάχος h να μικραίνει), και άρα θα αντικατοπτρίζει καλύτερα το εμβαδόν αυτής της επιφάνειας.
- 18.4 Διδ:** Μπορείς να παίρνεις τιμές του h , όσο μικρές θέλεις;
- 18.5 Ντοριάν:** Ναι.
- 18.6 Διδ:** Πόσο μικρές δηλαδή;
- 18.7 Ντοριάν:** Μηδενικές.
- 18.8 Νικολέττα:** Όσο μικραίνει ο h , δεν έχει όγκο ο κύλινδρος, ο κύλινδρος δεν υπάρχει, υπάρχει μόνο η επιφάνεια.
- 18.9 Διδ:** Εκφυλίζεται δηλαδή στο $E(x)$. Τη διαδικασία αυτή, δηλαδή τη συνεχή ελάττωση του h , εύκολα τη φαντάζεσαι; Μια θετική ποσότητα όπως ο h , πόσο μπορεί να μικραίνει;
- 18.10 Νικολέττα:** Μέχρι να μηδενιστεί.....εεε όχι βασικά να τείνει στο 0...
- 18.11 Κων/ντίνος:** Η ισότητα συνεπώς, θα ισχύει για $h=0$.
- 18.12 Διδ:** Δηλαδή;...είπες για $h=0$;.....θέλω να μου πεις με ποιον τρόπο προσεγγίζω από εδώ (δείχνω το κλάσμα $\frac{V(x+h)-V(x)}{h}$) το $E(x)$ καλύτερα και τότε έχουμε ισότητα;
- 18.13 Κων/ντίνος:** Η προσέγγιση γίνεται με τον τρόπο που είπε ο Ντοριάν, καθώς ο h τείνει στο 0.
- 18.14 Διδ:** Μάλιστα. Άρα η ισότητα ποια είναι;
- 18.15 Κων/ντίνος:** Όταν το h τείνει στο 0.

18.16 Αιδ: *Θέλω να μου πεις αν καταλαβαίνεις τη διαφορά της κατάστασης $h=0$ και $h \rightarrow 0$, και έχω....*

18.17 Κων/ντίνος: *Καταλαβαίνω. Όταν το h τείνει στο 0 απεριόριστα, ο όγκος του κυλίνδρου πλησιάζει όλο και περισσότερο στο εμβαδόν της επιφάνειας.*

Δύο είναι τα θέματα που πρέπει να αναλυθούν, στο απόσπασμα αυτό. Το πρώτο είναι οι απόψεις των παιδιών για την έννοια του ορίου και πως τη χρησιμοποιούν για να δικαιολογήσουν το πότε έχουμε ισότητα στη σχέση $\frac{V(x+h)-V(x)}{h} \approx E(x)$ και το δεύτερο, η αδυναμία τους να δουν τη μεταβολή του όγκου σε σχέση με τη μεταβολή του ύψους. Η αδυναμία τους δηλαδή να σκεφτούν για το ρυθμό μεταβολής του όγκου και να τον συγκρίνουν με την επιφάνεια της οριζόντιας τομής του νερού.

Σχετικά με το πρώτο είναι φανερές και πάλι κάποιες παρανοήσεις γύρω από την έννοια του ορίου γνωστές και από τις προηγούμενες αναλύσεις μας. Ο Ντοριάν και η Νικολέττα δείχνουν να έχουν εμπεδώσει τη διαδικασία προσέγγισης του h προς το 0, (18.3, 18.8, 18.10), δεν είμαστε βέβαιοι όμως ότι αντιλαμβάνονται το ατέρμονο της διαδικασίας και το σπουδαιότερο, αν αυτή θα οδηγήσει τελικά στο σωστό αποτέλεσμα. Πιο χαρακτηριστική είναι όμως η περίπτωση του Κωνσταντίνου, ο οποίος διαχωρίζει πλήρως την προσέγγιση από την ισότητα, (18.11, 18.13) είναι απόλυτα σίγουρος ότι η ισότητα επιτυγχάνεται όταν ο h ισούται με το μηδέν, και η προσέγγιση απλά γίνεται καλύτερη όσο πιο πολύ ο h τείνει στο μηδέν δείχνοντας βέβαιος ότι το όριο δεν μπορεί να δώσει το σωστό αποτέλεσμα. Είναι ολοφάνερο, ότι ο Κωνσταντίνος δεν είχε αντιληφθεί τι μπορεί να πετύχει χειριζόμενος σωστά την έννοια του ορίου. Στα (18.15, 18.17) όμως, διαφαίνεται μια αναθεώρηση των απόψεών του προς τη σωστή κατεύθυνση. Απομένει πάντα στη σκέψη μας το ερωτηματικό για το αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει ότι μόνο αν η διαδικασία είναι άπειρη θα τους οδηγήσει στο σωστό αποτέλεσμα.

Σχετικά με το δεύτερο, οι μαθητές φαίνεται να καταλαβαίνουν ότι καθώς το ύψος h του νερού στο ανεστραμμένο κωνικό δοχείο αυξάνει, αυξάνουν και ο όγκος και η επιφάνεια της κυκλικής οριζόντιας τομής. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό για να τους βοηθήσει να σκεφτούν για τον τρόπο με τον οποίο αυξάνει ο όγκος σε σχέση με την αύξηση του ύψους. Το γεγονός ότι το πρόβλημα που επιλέξαμε δεν ήταν ένα από τα συνηθισμένα όπου η συσσώρευση αφορά το διάστημα και ο ρυθμός την ταχύτητα, με

ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο, κατά την άποψή μας δυσκόλεψε ακόμη περισσότερο τους μαθητές. Ο Ντοριάν, η Νικολέττα και ο Κωνσταντίνος βλέπουν την αύξηση του όγκου ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε αύξηση του ύψους. Αντίθετα εισέρχονται σε μια οριακή διαδικασία (18.3, 18.8) κατά την οποία, όταν μικραίνει τον όγκο του στοιχειώδους κυλίνδρου παίρνεις ένα εμβαδόν. Η εικόνα που σχηματίζουν θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από τη σχέση, $\lim_{h \rightarrow 0} (V(x+h) - V(x)) = E(x)$, ενώ το h στον παρονομαστή του πηλίκου διαφορών, λίγη σημασία φαίνεται να έχει γι' αυτούς. Είναι προφανές ότι τους έχει διαφύγει πως προέρχεται από τη διαφορά $(x+h)-x$, πράγμα που θα μπορούσε να τους βοηθήσει να προσανατολιστούν στο ρυθμό και όχι μόνο σε μια συναρτησιακή μεταβολή. Κατά τον Thompson, μια πολύ φυσική αναπαράσταση του πηλίκου διαφορών $\frac{V(x+h) - V(x)}{h}$

σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής της συσσώρευσης, είναι ότι αναπαριστά το μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου στο διάστημα $[x, x+h]$, όπου ο όγκος υπολογίζεται από το άθροισμα Riemann. Από τη στιγμή που στο παραπάνω διάστημα ο όγκος αυξάνει εκτείνοντας κάθετα τον στοιχειώδη κύλινδρο που έχει βάση $E(x)$, το εμβαδόν δηλαδή της οριζόντιας τομής του νερού σε ύψος x , και η βάση αυτή παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της αύξησης στο διάστημα $[x, x+h]$, τότε ο όγκος αυξάνει με ρυθμό $E(x)$. Είναι δε και ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνει ο συνολικά συσσωρευμένος όγκος του νερού, ανεξάρτητα από την ποσότητα που έχει πιο πριν συσσωρευτεί. Αυτό είναι ανάλογο με την περίπτωση της ταχύτητας: Αν σκεφτόμαστε για μια συνολική συσσώρευση της απόστασης, συναρτήσει του χρόνου, και αν θεωρήσουμε ότι, μέσα σε ένα (πολύ μικρό) χρονικό διάστημα, η απόσταση αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, τότε, ανεξάρτητα από το πόση απόσταση έχει συσσωρευτεί πριν από αυτό το χρονικό διάστημα, η συνολικά συσσωρευμένη απόσταση μεταβάλλεται με αυτόν το σταθερό ρυθμό σ' αυτό το χρονικό διάστημα. Ανάλογο επίσης είναι και το παράδειγμα του δοχείου που αναφέρθηκε πιο πριν και στο οποίο ρίχνουμε υγροποιημένο πλαστικό. Κατά τη διάρκεια που το πλαστικό γεμίζει το τρίτο διαμέρισμα του δοχείου, ο συνολικά συσσωρευμένος όγκος του υγρού, αυξάνεται με ρυθμό που ισούται με το εμβαδόν της βάσης του τρίτου διαμερίσματος, μια που καθ' όλη τη διάρκεια που αυτή γεμίζει, η βάση της διατηρείται σταθερή.

Στη συνέχεια και μπαίνοντας στην τελική ευθεία για την αιτιολόγηση του θεμελιώδους θεωρήματος, έγινε μια ακόμη προσπάθεια να προσανατολίσουμε τον

διάλογο στο ρυθμό μεταβολής του όγκου ως προς την αύξηση του ύψους της στάθμης του νερού. Παράλληλα μας δόθηκε η ευκαιρία να συζητήσουμε για την οριακή διαδικασία που οδηγεί στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και να επιχειρήσουμε μια ακόμη εμβάθυνση στην έννοια του ορίου. Ο διάλογος 19 έγινε κατά τη διδασκαλία του δεύτερου προβλήματος με το τμήμα του ιδιωτικού σχολείου.

Διάλογος 19

- 19.1 Διδ: *Πριν πάμε στο τελευταίο ερώτημα,
θα ήθελα να μου πει κάποιος πως
αντιλαμβάνεται το ρυθμό αύξησης του όγκου
συναρτήσει του ύψους x . Σε σχέση δηλαδή με το ύψος x .*
- 19.2 Κων/ντίνος: *Δηλαδή καθώς ρίχνουμε νερό και
αυξάνεται η στάθμη του νερού, (κάνοντας με το
δείκτη τεντωμένο προς τα πάνω μια ανοδική
κίνηση), πόσο γρήγορα γεμίζει ο κύλινδρος
(σχηματίζοντας με τα δύο του χέρια μια κυκλική
επιφάνεια και κάνοντας μια ανοδική κίνηση,
ανοίγοντάς τα ταυτόχρονα, όπως ακριβώς ανοίγει ο κώνος).*
- 19.3 Διδ: *Μάλιστα.*
- 19.4 Έντυ: *Ο όγκος με τι ρυθμό αυξάνεται ή το ύψος;
Γιατί αν πρόκειται για τον όγκο, εξαρτάται
με τι ρυθμό ρίχνουμε εμείς το νερό.
Αν ρίχνουμε το νερό με σταθερό ρυθμό,
ο όγκος αυξάνεται πάντα σταθερά αλλά
το ύψος δεν αυξάνεται σταθερά.*
- 19.5 Διδ: *Αυτό Έντυ, τότε έχει σημασία;*
- 19.6 Έντυ: *Αν το βλέπαμε χρονικά.*
- 19.7 Διδ: *Θέλω να μου δώσετε τις μονάδες μέτρησης
του ρυθμού μεταβολής του όγκου.*
- 19.8 Έντυ: *m^3/sec*
- 19.9 Διδ: *Ως προς x πάντα.*
- 19.10 Έντυ: *m^2*
- 19.11 Διδ: *Γιατί;*
- 19.12 Σταύρος: *Είναι m^3/m .*
- 19.13 Διδ: *Πράγματι είναι μονάδες μέτρησης του όγκου,
ανά μονάδα μέτρησης του ύψους. Οπότε με τη
βοήθεια και της μονάδας μέτρησης, μπορείτε να
δείτε το ρυθμό αύξησης του όγκου ως προς το ύψος;*

Αν για παράδειγμα αυτό ήταν κάποια στιγμή $\kappa \text{ m}^3/\text{m}$,
τι περιγράφει ακριβώς;

19.14 Σταύρος: Ότι αν μεταβληθεί το ύψος κατά ένα μέτρο,
μεταβάλλεται ο όγκος κατά $\kappa \text{ m}^3$.

19.15 Αιδ: Για κάθε ένα μέτρο αύξησης του ύψους,
έχουμε $\kappa \text{ m}^3$ αύξησης του όγκου. Μάλιστα....στη συνέχεια
ζητάμε να επιστρέψετε στο ερώτημα (β) και να μας πείτε,
με ποιον τρόπο μπορούμε να προσεγγίσουμε καλύτερα,
την ακριβή τιμή του όγκου $V(5)$ και ποια θα είναι η ακριβής
τιμή του όγκου. Απαντήστε πρώτα στο φύλλο εργασίας.

.....(μετά από περίπου 5')

19.16 Ντοριάν: Μήπως όταν το n τείνει στο άπειρο,
να το χωρίσουμε δηλαδή σε άπειρα....

19.17 Σταύρος: Το όριο του $V(5)$, καθώς ο n τείνει στο άπειρο.

19.18 Ιάσων: άμα ολοκληρώσουμε το $E(x)$, το ίδιο πράγμα
δεν είναι; Ολοκληρώμα της $E(x)$ ντε x , το ίδιο πράγμα δεν είναι;

19.19 Αιδ: Μάλιστα. Είναι φανερό ότι πολλά εξαρτώνται
από το βαθμό στον οποίο κατανοήσατε τον ορισμό
του ορισμένου ολοκληρώματος φέτος. Δώστε την
απάντησή σας στο φύλλο εργασίας, γιατί αμέσως
μετά θέλω να συζητήσουμε την κατάσταση κατά την οποία,
χωρίζουμε τον όγκο σε ολοένα και περισσότερα κομμάτια.

.....(μετά από περίπου 3')

19.20 Αιδ: Μπορεί κάποιος να περιγράψει την εικόνα που
έχει καθώς χωρίζουμε το ύψος από 0 έως 5
σε ολοένα και περισσότερα κομμάτια; Τι ακριβώς γίνεται;

19.21 Άρης: Μικραίνει το πλάτος των κυλίνδρων και έτσι
μικραίνει η απόκλιση από τον όγκο $V(5)$ και τον
προσεγγίζουμε καλύτερα.

19.22 Αιδ: Και στην οριακή κατάσταση κατά την οποία
ο n τείνει στο άπειρο;(ησυχία).
Δηλαδή τι θέλω να κατανοήσετε: αν δείτε
το n οσοδήποτε μεγάλο αλλά συγκεκριμένο,
το άθροισμα αυτό, (δείχνω στο πίνακα την έκφραση
του αθροίσματος Riemann για τον όγκο),
θα υπολογισθεί δια της κλασικής προσθέσεως.
Η πρόσθεση όμως, δεν μπορεί να ανταποκριθεί
στην κατάσταση που προσπαθείτε να μου περιγράψετε
δηλαδή όπου χωρίζω το $[0,5]$ σε ολοένα και περισσότερες «φέτες».
Το «ολοένα και περισσότερες φέτες»,

- μπορείτε να μου το περιγράψετε; Το φαντάζεστε;
- 19.23 *Αυδία:* Χωρίζουμε σε όσο πιο μικρά κομμάτια μπορούμε.
- 19.24 *Αιδ:* Και το «ολοένα και περισσότερες» έχει μια διάρκεια ε; πως την αντιλαμβάνεστε;
- 19.25 *Αυδία:* Το ότι συνεχώς μειώνουμε το ύψος του κάθε κομματιού
- 19.26 *Αιδ:* Συνεχώς όμως, έχει σημασία αυτό που είπες....συνεχώς... χωρίς δηλαδή, αυτή η διαδικασία να έχει στο μυαλό μας ένα τέλος. Διότι παιδιά αν της δώσετε ένα τέλος, τότε έχετε συγκεκριμένο αριθμό προσθετέων και το άθροισμα θα σας το βρει η κλασική πρόσθεση. Δεν εννοούμε όμως αυτή την κατάσταση.... με τι ισούται λοιπόν ο όγκος για $x=5$;
- 19.27 *Σταύρος:*
$$V(5) = \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{V} \sum_{i=1}^V E\left(i \frac{5}{V}\right) \right).$$
- 19.28 *Πάνος:* Κύριε δυο λεπτά, δεν είπαμε ότι ζητάμε ακριβή τιμή;
- 19.29 *Αιδ:* Αυτή είναι η ακριβής τιμή του όγκου.
- 19.30 *Πάνος:* Εγώ λέω με αριθμό, δεν μπορούμε να πάρουμε ολοκλήρωμα από μηδέν έως πέντε $E(x)$ ντε x ;
- 19.31 *Αιδ:* Μα αν δεν κάνω λάθος, αυτό το όριο, το συμβολίσατε $\int_0^5 E(x)dx$, και το ονομάσατε ορισμένο ολοκλήρωμα της $E(x)$ από μηδέν έως πέντε. Τι είναι λοιπόν το ορισμένο ολοκλήρωμα παιδιά;
- 19.32 *Μαθητές:* Ένας συγκεκριμένος αριθμός.
- 19.33 *Αιδ:* Ο οποίος εκφράζεται ως το όριο ενός αθροίσματος με άπειρους προσθετέους.

Ο Κωνσταντίνος, παρά τις δυσκολίες που είχε προηγουμένως με την έννοια του ορίου, δείχνει τώρα να καταλαβαίνει και να περιγράφει σωστά (19.2) τι σημαίνει ρυθμός μεταβολής του όγκου, ως προς την αύξηση του ύψους. Δεν πρέπει να παραλείψουμε μια αναφορά στις κινήσεις των χεριών και των δακτύλων του, που ως γνωστών διευκολύνουν τις εκφράσεις του. Έχουμε τη βεβαιότητα ότι έχει κάνει στη σκέψη του την αντιστοιχία με το ρυθμό μεταβολής του διαστήματος ως προς το χρόνο και κατόπιν δε δυσκολεύτηκε να γενικεύσει. Ο Έντυ παραμένει για λίγο με την εντύπωση ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή μας είναι ο χρόνος, με αποτέλεσμα να νομίζει προς στιγμήν ότι τα πάντα εξαρτώνται από το ρυθμό με τον οποίο ρίχνουμε το νερό στο κωνικό δοχείο, αλλά γρήγορα διορθώνει και επανέρχεται, (19.4, 19.6). Στη

συνέχεια επιχειρούμε να δώσουμε μια ακόμη βοήθεια για την εικόνα του ρυθμού μεταβολής του όγκου ως προς το ύψος, χρησιμοποιώντας τις μονάδες μέτρησης, και ο Σταύρος φαίνεται να ανταποκρίνεται ικανοποιητικά, (19.12, 19.14). Κανείς όμως από τους τρεις δεν είναι βέβαιο ότι μπορεί να συνδέσει τον ρυθμό αύξησης του όγκου ως προς το ύψος x , με το εμβαδόν της οριζόντιας τομής του νερού σε ύψος x . Η σχέση $\frac{V(x+h)-V(x)}{h} \approx E(x)$ μάλλον γίνεται εύκολα αντιληπτή αλγεβρικά, όχι όμως και διαισθητικά!

Στη συνέχεια η συζήτηση επανέρχεται στην οριακή διαδικασία με αφορμή τις «φέτες» στις οποίες χωρίζουμε τον όγκο προκειμένου να μπορέσουμε να τον υπολογίσουμε. Ο Orton, απέδειξε ότι οι μαθητές είναι ικανοί να εφαρμόζουν με κάποια ευχέρεια τις βασικές τεχνικές της ολοκλήρωσης αλλά αν εξεταστούν συστηματικά και επισταμένως φαίνεται ότι έχουν μεγάλες παρανοήσεις γύρω από τις υποκείμενες έννοιες. Τα αποτελέσματα του Orton δείχνουν ότι το να χωρίσεις ένα εμβαδόν ή έναν όγκο και μετά να κάνεις χρήση της οριακής διαδικασίας για τον υπολογισμό του, και να δώσεις τους λόγους για τους οποίους αυτή η μέθοδος λειτουργεί, δεν αποτελούσε μέρος της διδασκαλίας για το ολοκλήρωμα. Είναι γνωστό ότι παρόμοιες συνθήκες επικρατούν και στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Η οριακή διαδικασία, απαραίτητη στον απειροστικό λογισμό, γενικά αγνοείται ή παρακάμπτεται και όταν ξαφνικά κρίνεται επιβεβλημένη τα πράγματα είναι πλέον πολύ δύσκολα για το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Όταν ο Orton ρώτησε, πότε είναι δυνατόν να έχουμε μια ακριβή απάντηση για το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y=x^2$ παίρνοντας όλο και περισσότερα ορθογώνια κάτω απ' αυτήν, μόνο δέκα μαθητές δήλωσαν ότι η οριακή διαδικασία ήταν απαραίτητη και η μόνη που μπορεί να δώσει το ακριβές αποτέλεσμα. Εξήντα εννέα μαθητές δήλωσαν ότι παίρνοντας ολοένα και περισσότερα ορθογώνια κάτω από την καμπύλη, θα μπορούσαν να πετύχουν καλύτερες προσεγγίσεις αλλά μια τέτοια διαδικασία ποτέ δε θα μας οδηγούσε στη σωστή απάντηση. Οι μαθητές δεν ήταν εντέλει ικανοί να δηλώσουν ότι το όριο θα έδινε και την απάντηση. Είναι δηλαδή φανερό ότι οι μαθητές δεν έχουν πλήρη αντίληψη για τη δύναμη της έννοιας του ορίου και της οριακής διαδικασίας στα μαθηματικά. Αυτό σημαίνει ότι είτε η διδασκαλία απέτυχε να αναπτύξει στους μαθητές μια αίσθηση για τη χρησιμότητα της έννοιας του ορίου, και αυτό είναι πιθανό, είτε η χρήση της οριακής διαδικασίας, ειδικά σ' αυτήν την περίπτωση, ήταν ιδιαίτερα δύσκολο να κατανοηθεί από τους μαθητές, Orton, (1983).

Ο Ιάσωνας, (19.18), γνωρίζει τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, ενώ ο Άρης (19.21) μιλάει για άλλη μια φορά για την προσέγγιση που μπορεί να επιτευχθεί αυξάνοντας το n , χωρίς όμως να είμαστε σίγουροι αν αντιλαμβάνεται το άπειρο της διαδικασίας. Στο σημείο αυτό αποφασίζουμε (19.22) να δώσουμε άλλη μια βοήθεια προς την κατεύθυνση αυτή με βασικό στόχο τη μετατόπιση του νοήματος. Σαν αποτέλεσμα αυτής της παρέμβασης έχουμε τη Λυδία (19.23, 19.25) να αφήνει σαφή υπονοούμενα για τη συνέχεια της οριακής διαδικασίας, τα οποία προσπαθούμε να τα τονίσουμε με κάθε τρόπο (19.26) και το Σταύρο (19.27) να δίνει την απάντηση για την ακριβή τιμή του όγκου για $x=5$ ως το όριο του αθροίσματος καθώς ο n τείνει στο άπειρο. Η παρέμβαση του Πάνου (19.28, 19.30) μας επαναφέρει στην πραγματικότητα, δείχνοντας βέβαιος ότι το όριο δεν μπορεί να μας δώσει την ακριβή τιμή του όγκου «με αριθμό» και επιλέγοντας το ορισμένο ολοκλήρωμα ως μια πιο αξιόπιστη λύση!!

4.7. Κάποια άμεσα συμπεράσματα.

Οι πρώτες διαπιστώσεις που κάνουμε κλείνοντας την ανάλυση των διαλόγων που είχαμε με τους μαθητές, θα μπορούσαν να σταχυολογηθούν ως εξής:

- Παρά τη συζήτηση που είχε προηγηθεί γύρω από την έννοια της συνάρτησης και της συναρτησιακής μεταβολής, κάποιοι μαθητές συνέχιζαν να δυσκολεύονται στο να αναπαριστούν και να ερμηνεύουν συναρτησιακές εκφράσεις.
- Μετά από αρκετή ώρα διδασκαλίας, οι αντιλήψεις μιας μερίδας μαθητών για το όριο παρέμειναν επίμονες και σταθερές χωρίς να δείχνουν ότι αντιλαμβάνονται τη δυναμική, την κινητικότητα και κυρίως το ατέρμονο αυτών των καταστάσεων.
- Μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών μπορούσε να συσχετίσει τη μεταβολή ενός μεγέθους με τη μεταβολή ενός άλλου μεγέθους. Δυσκολεύονται δηλαδή να αντιληφθούν την έννοια του ρυθμού μεταβολής.
- Σε κάποιες περιπτώσεις η μετατόπιση του νοήματος ήταν προφανής και οι μαθητές αυτοί φάνηκε να επωφελούνται άμεσα από μια τέτοια προσπάθεια εμβάθυνσης στις θεμελιώδεις έννοιες του απειροστικού λογισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Συμπεράσματα.

- 5.1. Συμπεράσματα και προτάσεις για διδασκαλία.
- 5.2. Βιβλιογραφία.
 - 5.2.1. Βιβλιογραφία στην ελληνική γλώσσα.
 - 5.2.2. Βιβλιογραφία στην αγγλική γλώσσα.

5.1. Συμπεράσματα – προτάσεις για διδασκαλία.

Ο Απειροστικός Λογισμός είναι ο κλάδος των μαθηματικών που εξετάζει πώς τα μεγέθη μεταβάλλονται, με τι ρυθμό μεταβάλλονται και πως η αύξηση των μεγεθών συσσωρεύεται. Η σημασία των παραπάνω για τη γνώση του πραγματικού κόσμου είναι τεράστια γι' αυτό και το συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο συγκεντρώνει ολοένα και περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών τα τελευταία τριάντα χρόνια. Τα δύο προβλήματα που τέθηκαν προς διαπραγμάτευση κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών, ήταν σχεδιασμένα κατά τέτοιον τρόπο ώστε να μας δίνεται η ευκαιρία, κατά τη διάρκεια της συζήτησης με τους μαθητές, να διερευνήσουμε τις εικόνες, τις εμπειρίες τις αντιλήψεις και τις σκέψεις τους για τις βασικές έννοιες της ανάλυσης. Δηλαδή την έννοια της συνάρτησης, του μέσου ρυθμού μεταβολής, την έννοια του ορίου και της συσσώρευσης ενός μεγέθους.

Η έννοια της συνάρτησης και γενικότερα της συναρτησιακής μεταβολής, έχει αποδειχθεί θεμελιώδης και στα αναλυτικά προγράμματα κατέχει εξέχουσα θέση, αρχίζοντας τις αναφορές τους σ' αυτήν, ήδη από το Δημοτικό σχολείο. Το επίπεδο κατανόησης των μαθητών της τελευταίας τάξης του Λυκείου για την έννοια της συνάρτησης δε θα μπορούσαμε να το χαρακτηρίσουμε ικανοποιητικό, σαν συμπέρασμα από την παρούσα εργασία. Παρά το γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης διδάσκεται στη μέση εκπαίδευση από πολύ νωρίς, μόνο ένα μικρό ποσοστό των μαθητών αντιλαμβάνεται τη δυναμική που ο όρος εμπερικλείει. Οι περισσότεροι δείχνουν αγκιστρωμένοι στον τυπικό ορισμό χωρίς να έχουν την αίσθηση της συναρτησιακής συμμεταβολής. Η Mamona-Downs (1990), συνέκρινε τις δύο ακραίες διδακτικές προσεγγίσεις που αφορούν στην έννοια της συνάρτησης. Την διαισθητική προσέγγιση δηλαδή, που επιχειρείται στα σχολεία της Μεγάλης Βρετανίας και τη λογική-τυπική προσέγγιση που ακολουθείται στα ελληνικά σχολεία και επιβεβαίωσε προηγούμενες έρευνες, όπου διαπιστωνόταν ότι η πρώτη έχει αποτελέσματα που συγκρούονται με τη δεύτερη, η οποία παρ' ότι δίνει έμφαση στη λογική εν τούτοις δίνει λιγότερη εννοιολογική εμβάθυνση. Τα τελευταία χρόνια οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης επικεντρώνονται περισσότερο στη διαισθητική προσέγγιση, παρ' ότι δεν λείπει από κανένα σχολικό βιβλίο και σε κανένα επίπεδο ο τυπικός ορισμός. Η προσπάθεια εισαγωγής της έννοιας με τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος είναι

εμφανής στα νέα βιβλία του Γυμνασίου και αυτό σηματοδοτεί φανερά μια αλλαγή πλεύσης. Πιστεύουμε ότι μεγάλο μέρος της ευθύνης αναλαμβάνει πλέον ο διδάσκων ο οποίος έχει την ευκαιρία από πολύ ενωρίς να βοηθήσει τους μικρούς μαθητές να σχηματίσουν τις εικόνες που πρέπει για την έννοια της συνάρτησης με αρρωγό το καινούριο σχολικό βιβλίο του Γυμνασίου. Έτσι φτάνοντας αυτοί στη Γ' Λυκείου θα έχουν αποκτήσει τις εμπειρίες εκείνες που θα τους επιτρέψουν να εδραιώσουν μια εύρωστη και στέρεη άποψη για την κομβική αυτή έννοια, που θα τους βοηθήσει περαιτέρω να εμβαθύνουν στις υπόλοιπες βασικές έννοιες της ανάλυσης.

Η συνέχεια με την έννοια του μέσου ρυθμού μεταβολής ήταν σαφώς δυσκολότερη για τους μαθητές και ανέδειξε τα προβλήματα που συναντούν όταν καλούνται να εμβαθύνουν σε έννοιες με τις οποίες δεν έχουν δουλέψει στο παρελθόν. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις εμπειρίες τους από την έννοια της συνάρτησης, ερμήνευσαν με σχετική ευκολία τη διαφορά στον αριθμητή του πηλίκου $\frac{d(3,2) - d(3,1)}{0,1}$, γενίκευσαν

με αρκετή δυσκολία για την τυχαία χρονική στιγμή t , και για το τυχαίο διάστημα πλάτους h φτάνοντας στη συνάρτηση του μέσου ρυθμού $\frac{d(t+h) - d(t)}{h}$. Στη

συνέχεια χρησιμοποίησαν τη γνώση τους αυτή για να εκφράσουν το μέσο ρυθμό μεταβολής του όγκου V του νερού συναρτήσει του ύψους x στο κωνικό δοχείο, γράφοντας το λόγο $\frac{V(x+h) - V(x)}{h}$, αλλά η δυσκολία να αναπαραστήσουν τα δύο

παραπάνω πηλικά ήταν πάρα πολύ μεγάλη. Για παράδειγμα, εύκολα μπορούσαν να δουν την αύξηση του όγκου συναρτήσει του ύψους αδυνατούσαν όμως να αντιληφθούν την αύξηση του όγκου σε σχέση με την αύξηση του ύψους. Η αδυναμία αυτή και γενικά η τάση να βλέπουν την αύξηση του όγκου σαν μεμονωμένο αντικείμενο μοιάζει, σύμφωνα με τον Thompson, με τη δυσκολία που έχουν τα μικρά παιδιά να κατασκευάσουν την εικόνα της ταχύτητας σαν ρυθμό μεταβολής του διαστήματος συναρτήσει του χρόνου. Τα μικρά παιδιά τείνουν να σκέφτονται την ταχύτητα σαν ένα stick απόστασης, δηλαδή σαν μονάδα, με την οποία μετράνε άλλες αποστάσεις και όχι σαν κάτι που μεγαλώνει σε σχέση με την αυξανόμενη διάρκεια του χρόνου. Η αδυναμία αυτή των μαθητών ωφείλεται στο γεγονός ότι οι αναπαραστάσεις τους και οι εμπειρίες τους για το μέσο ρυθμό μεταβολής δεν είναι ενεργητικές σε τέτοια έκταση ώστε να μπορούν να αφομοιώσουν τη σχέση των δύο μεταβολών. Πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι ο επανακαθορισμός των απόψεων των

μαθητών σχετικά με την έννοια του ρυθμού, υπήρξε σαφής σε κάποιες, έστω και λίγες, περιπτώσεις και γι' αυτό θα τονίσουμε για άλλη μια φορά την ανάγκη, στα εισαγωγικά μαθήματα στην ανάλυση, να δίνεται έμφαση στην κατανόηση των βασικών εννοιών, πριν δοθούν κανόνες για μηχανιστική εφαρμογή.

Η εμμονή στη μέση ταχύτητα ως το μοναδικό παράδειγμα μέσου ρυθμού μεταβολής στα σχολικά βιβλία, δεν βοηθά στην απόκτηση εμπειριών σχετικά με την έννοια αυτή. Έχουμε τη γνώμη ότι πρέπει τα βιβλία να εμπλουτιστούν με ποικιλία παραδειγμάτων, όπως π.χ. δοχεία διαφόρων σχημάτων που γεμίζουν με υγρό, που θα βοηθήσουν τους μαθητές στο σχηματισμό νέων εικόνων, στην απόκτηση νέων εμπειριών σχετικά με το μέσο ρυθμό μεταβολής και εν τέλει στην πλήρη εμπέδωση της κεντρικής αυτής έννοιας που με τη βοήθεια του ορίου οδηγεί στην παράγωγο μιας συνάρτησης. Είναι αλήθεια επίσης ότι ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά, όταν μαθαίνουν το μέσο ρυθμό μεταβολής, είναι ότι τον συγχέουν με τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας και σίγουρα η έννοια αυτή δεν θα γίνει προσιτή στους μαθητές αν τους βάλουμε να υπολογίζουν πηλίκα με τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Επιβάλλεται μια πιο ζωντανή προσέγγιση από τους διδάσκοντες οι οποίοι πρέπει με κάθε ευκαιρία που τους δίνεται να ρίχνουν τα θεμέλια αυτής της έννοιας κατά τη διάρκεια της σχολικής διαδρομής των παιδιών χρησιμοποιώντας καταστάσεις από τον πραγματικό κόσμο, πριν πάρουν στα χέρια τους έναν υπολογιστή για να κάνουν διαιρέσεις. Σύμφωνα με τον Orton (1983), η έννοια του ρυθμού μεταβολής πρέπει να είναι το βασικό εργαλείο για έναν εκπαιδευτικό που επιχειρεί μια εισαγωγή στον απειροστικό λογισμό. Η εισαγωγή αυτή, πάντα σύμφωνα με τον Orton, πρέπει να είναι απαλλαγμένη από τους τυπικούς ορισμούς και στηριγμένη σε γραφικές και γενικότερα διαισθητικές εξερευνήσεις, υποστηριζόμενη από ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επιπροσθέτως, η επανάληψη και η επέκταση σε κάθε ευκαιρία, βασικών εννοιών του απειροστικού λογισμού όπως ο μέσος ρυθμός, είναι μέγιστης σημασίας σε κάθε στάδιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Πολλά πράγματα δηλαδή, εξαρτώνται από την επιμονή των διδασκόντων οι οποίοι αδράχνοντας αυτές τις ευκαιρίες πρέπει να επαναφέρουν στο προσκήνιο έννοιες όπως αυτή, όσο το δυνατόν περισσότερες φορές μέσα στη σχολική ζωή των παιδιών. Αναγκαία προϋπόθεση γι' αυτό είναι οι αναφορές στα σχολικά βιβλία να ξεκινούν αρκετά νωρίς ώστε να δίνονται τέτοιες ευκαιρίες στον διδάσκοντα. Τελειώνοντας τα σχόλιά μας στην έννοια του μέσου ρυθμού, δεν πρέπει να παραλείψουμε μια αναφορά στις αδυναμίες που έδειξαν οι μαθητές στις αλγεβρικές πράξεις. Οι αδυναμίες αυτές έχουν

τις ρίζες τους στην πλημμελή αντιμετώπιση της άλγεβρας εκ μέρους των μαθητών, στη διάρκεια της φοιτήσεώς τους στο Γυμνάσιο και αποτελούν σοβαρό εμπόδιο για τους διδασκόμενους αλλά και τους διδάσκοντες κατά τη διάρκεια ενός εισαγωγικού μαθήματος στον απειροστικό λογισμό.

Στη συνέχεια και με την ευκαιρία της εισαγωγής στη στιγμιαία ταχύτητα, προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι μαθητές όταν εισέρχονται σε μια οριακή κατάσταση. Η προσπάθεια αυτή επαναλήφθηκε όταν δικαιολογήσαμε εποπτικά το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, καθώς και όταν μιλήσαμε για την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Σε γενικές γραμμές το επίπεδο κατανόησης ήταν χαμηλό και μπορούμε να πούμε ότι επαληθεύτηκαν κατά ένα μέγιστο ποσοστό οι προηγούμενες έρευνες σχετικά με τις παρανοήσεις που παρουσιάζουν οι μαθητές σε σχέση με την έννοια του ορίου. Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές πιστεύουν ότι το όριο δε δίνει αποτέλεσμα και στις περισσότερες περιπτώσεις το εκλαμβάνουν ως προσεγγιστική διαδικασία. Η έμφαση που έχει δοθεί τα τελευταία χρόνια στη διαισθητική κατανόηση της έννοιας από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, εξορίζοντας από την εξεταστέα ύλη τους τυπικούς ε-δ ορισμούς, έχει συμβάλλει – όπως τουλάχιστον φάνηκε κατά τη διάρκεια της διαπραγμάτευσης των ερωτημάτων – στην κατασκευή μιας εικόνας προοδευτικής προσέγγισης της ανεξάρτητης μεταβλητής που εδώ είναι το h , προς το x_0 και ταυτόχρονα της εξαρτημένης προς ένα σταθερό αριθμό m , όμως σε καμιά περίπτωση δε μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο της διαδικασίας, τη δυναμική που εμπερικλείει καθώς επίσης και το γεγονός ότι η διαδικασία αυτή οδηγεί τελικά σε αποτέλεσμα. Πρέπει πάντως να σημειώσουμε ότι κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων έγινε σε αρκετές περιπτώσεις αισθητή η μετατόπιση του νοήματος της έννοιας του ορίου, πράγμα που διαπιστώνεται από την ανάλυση των διαλόγων.

Ο Parameswaran (2007), υποστηρίζει ότι η επιλογή παραδειγμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ρίχνει άπλετο φως στα σκοτεινά σημεία, θα είναι προς τη θετική κατεύθυνση. Με τη βοήθεια τους ο δάσκαλος θα μπορεί να δώσει έμφαση σε ορισμένα λεπτά σημεία που εμπεριέχονται στην έννοια και θα βοηθήσει έτσι να κλείσει το διάκενο μεταξύ της εννοιολογικής εικόνας και της εικόνας εκ του ορισμού. Ως υποκείμενη έννοια στην ανάπτυξη της κατανόησης του ορισμένου ολοκληρώματος, το όριο μπορεί να βοηθήσει αποφασιστικά στο να μην εισάγεται η ολοκλήρωση σαν κανόνας αντιδιαφόρισης. Κατά την άποψή μας, μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο συζήτησης το κτίσιμο μιας

εννοιολογικής υποδομής στα όρια, σταδιακά μέχρι την Γ' Λυκείου μέσα από βιωματικές καταστάσεις που θα επιλεγούν από τον διδάσκοντα. Έτσι θα εμπεδωθεί η έννοια αυτή, όχι ως μια στατική κατάσταση όπως συνηθίζεται να πιστεύεται, αλλά σαν ένα πολυσύνθετο σχήμα με πολύ σημαντικές και δυναμικές όψεις, καθώς και μεγάλα υπολογιστικά προτερήματα.

Τέλος είχαμε την ευκαιρία να διερευνήσουμε τις εικόνες που έχουν οι μαθητές για τη συσσώρευση ενός μεγέθους και το ρυθμό μεταβολής αυτής της συσσώρευσης, με τη μέθοδο της «στιγμιαίας αύξησης». Διαφάνηκε ξεκάθαρα ότι οι μαθητές διαθέτουν πρώιμες εικόνες της έννοιας του ολοκληρώματος, όπως στην περίπτωση του Σταύρου στο διάλογο 15. Ο Σταύρος βλέπει τη συσσώρευση του όγκου να γίνεται με την εναπόθεση «λεπτών» κυλίνδρων, τον έναν πάνω στον άλλο. Όταν όμως κλήθηκαν να σκεφτούν για το ρυθμό μεταβολής αυτής της συσσώρευσης και να τον συγκρίνουν με το εμβαδόν της οριζόντιας τομής, τότε η όποια κατανόηση προερχόταν μόνο από τους υπολογισμούς. Ήταν δηλαδή καθαρά αλγεβρική και περιγράφεται από τη σχέση
$$\frac{V(x+h)-V(x)}{h} = \frac{E(x)h}{h} \approx E(x), \text{ για μικρά } h.$$
 Διαισθητικά πρόκειται για ένα

ιδιαίτερα σύνθετο σχήμα για την κατανόηση του οποίου απαιτείται ο συντονισμός των μεταβολών της στιγμιαίας αύξησης h με τις μεταβολές του πλήθους n των στοιχειωδών ποσοτήτων στο άθροισμα Riemann. Συγκεκριμένα, για κατάλληλα μικρό h και κατάλληλα μεγάλο n , η επιφάνεια της οριζόντιας τομής και ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου είναι περίπου ίσες ποσότητες. Σύμφωνα με τον Thompson, μια ενεργητική κατανόηση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, προϋποθέτει το συντονισμό όλων των παραπάνω ώστε το σχήμα να παραμένει σε ισορροπία. Κατά τα άλλα μια τυπική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος μπορεί να στηριχτεί στο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού το οποίο λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει μία μέση

τιμή πάνω σε ένα διάστημα $[a,b]$, που ορίζεται από το τύπο
$$f_\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$
 Η

απόδειξη μπορεί να γίνει ως εξής:

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Ορίζουμε τη

συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in \Delta$. Τότε είναι $F'(x) =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x-h}^x f(t)dt - \int_{x-h}^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x-h}^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_{x-h}^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi)h}{h}$$

για κάποιο $\xi \in [x, x+h]$, ακριβώς λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Καθώς τώρα ο h τείνει στο 0 προφανώς ο ξ τείνει στο x και το όριο γίνεται: $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$ επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Άρα $F'(x) = f(x)$.

Σύμφωνα με τον Thompson, το πρόβλημα με την τυπική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος είναι ότι παρουσιάζεται σαν μια στατική κατάσταση. Νομίζει κανείς ότι τίποτα δεν μεταβάλλεται. Αν οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν ότι η $F'(x)$ είναι ένας ρυθμός μεταβολής τότε κάτι πρέπει να αλλάξει. Πριν συνθέσουμε την εικόνα του θεμελιώδους θεωρήματος, πρέπει να προηγηθεί το κτίσιμο της εικόνας του ρυθμού μεταβολής, της συσσώρευσης και του ρυθμού συσσώρευσης.

Κατά την άποψή μας, μεγάλο κομμάτι της ευθύνης για τη βελτίωση της διδασκαλίας του απειροστικού λογισμού στα σχολεία, και με δεδομένο ότι τέτοιες διαδικασίες απαιτούν χρόνο, πέφτει στους υπεύθυνους του αναλυτικού προγράμματος και στους διδάσκοντες. Αυτοί λοιπόν που σχεδιάζουν τα αναλυτικά προγράμματα καθώς και οι δάσκαλοι, δεν θα πρέπει να βιάζονται να δίνουν τους τύπους και τις διαδικασίες για απλή εφαρμογή πριν οι μαθητές κατανοήσουν τις υποκείμενες έννοιες. Αντίθετα πρέπει να δίνουν βάρος στην ανάπτυξη των εννοιών και να ελέγχουν την κατανόηση περισσότερο από τις τεχνικές, όσο και αν αυτές είναι σπουδαίες. Η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού σε ένα τέτοιο περιβάλλον θα διασφαλίσει ένα υψηλό επίπεδο κατανόησης και μια αίσθηση (Calculus sense) για τις διασυνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών εμπειριών, που περιλαμβάνει ευελιξία, δυναμική και μια τέτοιου είδους κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών και των εφαρμογών του, ώστε να μπορούν μετά αυτές εύκολα να γενικευθούν. Τέλος θα πρέπει να σταθούμε ιδιαίτερα στην ανάγκη για επέκταση και περεταίρω έρευνα γύρω από τη διδασκαλία της ανάλυσης στο Λύκειο, η οποία για τα ελληνικά δεδομένα τουλάχιστον βρίσκεται ακόμη σε εμβρυϊκή κατάσταση. Η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της από τους διδάσκοντες και τους υπεύθυνους για τα αναλυτικά προγράμματα, θα δημιουργήσει τις προϋποθέσεις εκείνες που απαιτούνται για τη βελτίωση του σχολικού βιβλίου και την επιζητούμενη εμβάθυνση εκ μέρους των μαθητών.

5.2. Βιβλιογραφία

5.2.1. Βιβλιογραφία στην ελληνική γλώσσα.

- Αναπολιτάνος, Δ.: Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, *εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα, 1985.*
- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ.: Μαθηματικά Γ' Τάξης Ε.Λ., *Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1999.*
- Βερούκιος, Π.: 2006, Συζήτηση με Ολόκληρη την Τάξη: μια σημαντική διάσταση για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, *παρουσιάστηκε στο 23^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Πάτρα, 2006.*
- Γιαννακούλιας, Ε.: Απειροστικός λογισμός, η ιστορική του εξέλιξη από τον πέμπτο π.Χ. έως και τον δέκατο ένατο αιώνα, *εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2007.*
- Grant, E.: Οι φυσικές επιστήμες το Μεσαίωνα, *Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 1994.*
- Δαφέρμος, Μ.: Η Πολιτισμική-Ιστορική θεωρία του Vygotsky, *Εκδόσεις Ατραπός, Αθήνα, 2002.*
- Κλαουδάτος, Ν.: Παραδόσεις μαθημάτων θεωρίας της διδακτικής των Μαθηματικών, *Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2005.*
- Κλαουδάτος, Ν.: Σημειώσεις του μαθήματος « Διδασκαλία των Μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος», *Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2005.*
- Κλαουδάτος, Ν.: Σημειώσεις του μαθήματος « Θεωρία Διδακτικής των Μαθηματικών», *Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2005.*
- Κυριακίδου, Σ.: 2004, Οι διδακτικές και επικοινωνιακές επιλογές του καθηγητή των Μαθηματικών και πώς αυτές επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών του μετά τη Λύση Προβλήματος, *Διπλωματική Εργασία στα πλαίσια του Π.Μ.Σ. « Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.*
- Μπιζά, Ε.: 2003, Διαφορετικές προσεγγίσεις της Μαθηματικής γνώσης. Παραδείγματα αναφερόμενα σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού με

- χρήση Νέων Τεχνολογιών, *Διπλωματική εργασία στα πλαίσια του Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.*
- Νεγρεπόντης Σ: Παραδόσεις μαθημάτων αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, *Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2006.*
- Νεγρεπόντης, Σ.- Γιωτόπουλος Ε.- Γιαννακούλιας Ε.: Απειροστικός λογισμός, τόμος Ι, *Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1999.*
- Πρίντεζης, Ι.: 2006, Τα απειροστά και η αντικατάσταση της έννοιας του Ορίου, *παρουσιάστηκε στο μάθημα διδακτική του Απειροστικού λογισμού στο Π.Μ.Σ. «Διδακτική του Απειροστικού λογισμού», Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.*
- Rucker, R.: Το άπειρο και ο νους, *Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 1999.*
- Σακονίδης, Χ.: 2007, Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση: μια αλλαγή προοπτικής για τη μαθηματική εκπαίδευση, *Στο Δραγώνα Θ. και Φραγκουδάκη Α., «Πρόσθεση όχι αφαίρεση, πολλαπλασιασμός όχι διαίρεση», εκδόσεις Μεταίχμιο.*
- Σταμάτης, Ε.: Ευκλείδου Γεωμετρία, τόμος ΙΙ, *Ο.Ε.Σ.Β., Αθήνα, 1953.*
- Struik, D.: Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών, *Εκδόσεις Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, 1982.*
- Tall, D.: 1990, Διαισθηση και αυστηρότητα: ο ρόλος της νοερής απεικόνισης στον απειροστικό λογισμό, *Κέντρο Ερευνών μαθηματικής εκπαίδευσης, University of Warwick U.K. (μεταφρασμένο).*
- Τζανάκης, Κ.: 2008, Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ ιστορίας των μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης: συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά βάσει της διεθνούς εμπειρίας, *παρουσιάστηκε σε ημερίδα για την ιστορία των μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Πανεπιστημιούπολη Ζωγράφου.*
- Χριστιανίδης, Γ.: Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών, *Π.Ε.Κ., 2003.*
- Van der Waerden, B.: Η αφύπνιση της επιστήμης, *μετάφραση Γ. Χριστιανίδης, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο, 2000.*

5.2.2. Βιβλιογραφία στην αγγλική γλώσσα.

- Andersen, K.: Cavalieri's method of Indivisibles, *Archive for history of Exact Sciences*, 31 (1985).
- Asiala, M., Cottrill, I., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K.: 1997, The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative, *Journal of Mathenatical Behavior*, 16 (4), 355-431.
- Baron, M.: The origins of the infinitesimal calculus, *Oxford Pergamon press*, 1969.
- Berry, J., Nyman, M.: 2003, Promoting students' graphical understanding of the calculus, *Journal of Mathenatical Behavior*, 22, 481-497.
- Boaler, J.: 2002, Introduction: Intricacies of knowledge, practice and theory, in *J. Boaler (Eds), Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, P. 1-17, Ablex Pupliching, Westport
- Boaler, J.: 2000 b, Mathematics from another World: Traditional communities and the alienation of learners, *Journal of Mathenatical Behavior*, 18(4), 379-397.
- Borgen, K., Manu Stan, S.: 2002: What do students really understand?, *Journal of Mathenatical Behavior*, 21, 151-165.
- Boyer, C.: The history of the calculus and its conceptual development, *Dover, New York*, 1969.
- Cajori, F.: Grafting of the theory of limits on the calculus of Leibniz, *Amer. Math. Monthly* xxx (1923).
- Calinger, R.: A Contextual history of mathematics, *prentice Hall, London*, 1999.
- Cormu, B.: 1991, Limits, In D. Tall (ed) *Advanced Mathematical Thinking*, *Kluwer Academic Dordrecht P.D.* 153-166.
- Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D.: 1996, Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated Process Scheme, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Dorfler, W.:1991, Forms and Means of Generalization in Mathematics, in *Bishop, Mellin-Olsen and Dormolen (eds) (in mathematical knowledge: Its Growth through teaching, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, P. 63-85).*
- Edwards, C.H.: The historical Development of the calculus, *Springer-Verlag , New York*, 1979.

- Erickson, T.: 2006, Stealing from physics: modeling with mathematical functions in Data-rich contexts, *Teaching mathematics and its applications*, 25, No. 1.
- Even, R., Schwarz, B.: 2003, Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 283 – 313.
- Eves, H.: Great moments in mathematics, 2 Vols MAA, Washington, 1983.
- Farmaki, V., Paschos, Th.: 2007, Employing genetic ‘moments’ in the history of Mathematics in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics*, 66: 83-106.
- Grabiner, J.: 1983, The changing concept of change, the Derivative from Fermat to Weierstrass, *Mathematics magazine* 56, (195-206).
- Grattan-Guinness, I.: Bolzano, Cauchy and the ‘new analysis’ of the early 19th century, *Archive for history of Exact sciences* 6 (1970).
- Gravemeijer, K., Doorman, M: 1999, Context problems in realistic mathematics Education: a calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics*, 39.
- Heath, T.L.: A history of Greek Mathematics, 2 vols, Clarendon press, Oxford, 1921.
- Hobbs, D., Relf, S.: 1997, Differential calculus: Concepts and Notation, *Teaching Mathematics and its applications*, 16, No 4.
- Jordaan, T.: 2005, Misconceptions of the limit concept in a Mathematics course for engineering students, *Master of education with specialization in Mathematics education, University of South Africa*.
- Katz, V.: A history of Mathematics: An Introduction, Addison-Wesley, Longman, New York, 1998.
- Kleiner, I: 2001, History of the infinitely small and the infinitely large in calculus, *Educational Studies in Mathematics*, 48: 137-174.
- Kline, M.: (1977), “Calculus: an intuitive and physical approach”, (eds) John Wiley and sons
- Koirala, H.P.: 1997, Teaching of calculus for students’ conceptual understanding, *The Mathematics Educator*, 2(1), 52-62.
- Lave, J.: 1988, Cognition in practice: mind, Mathematics and culture in everyday life, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Lave, J., Wenger, E: 1991, Situated learning: legitimate peripheral participation, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

- Liljedahl, P.: 2002, Embodied experience of velocity and acceleration: a narrative, *Journal of Mathematical Behavior*, 20: 439-445.
- Mamona-Downs, J.:1990, Pupils' interpretation of the limit concept; a comparison study between Greeks and English, *Proceedings of the fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Mexico, 1*, 69-75.
- Monk, S.: Making Sense of Calculus, Vol. I: The Mathematics of Change and Variation, *University of Washington, Spring, 2007, U.S.A.*
- Orton, A.: 1983, Students' understanding of integration, *Educational Studies in Mathematics*,14,1-18.
- Orton, A.: 1983, Students' understanding of differentiation, *Educational Studies in Mathematics*,14: 235-250.
- Parameswaram, R.: 2007, On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5: (193-216).
- Roth, W.M., Mc Ginn, M.K.: 1998, Inscriptions: Toward a theory of representing as Social practice, in *Review of Educational Research*, 68,1,35-59.
- Scott, J.: The mathematical work of John Wallis, *Chelsea publishing company, New York*,1981.
- Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A.: 1998, On two metaphors for learning and dangers of choosing just one, *Educational Researcher*, 27(2),4-13.
- Stewart, J.: Calculus, *Brooks Cole publishing company, California*,1999.
- Tall, D.: 1997, Functions and calculus. *Published in A.J. Bishop et al (Eds), International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, *Dordrecht: Kluwer*(1997).
- Tall, D.: 1986, Building and testing a cognitive approach to the calculus using Interactive computer graphics, *Doctoral dissertation, University of Warwick*.
- Tall, D., Van Blokland, P., Kok, D.: 1988, A Graphik Approach to the Calculus, *Computer program for IBM and Compatibles, University of Warwick, Warwick, U.K.*

- Tall, D.: 1990, Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis, *Published in Focus*, 12, 3&4, 49-63.
- Thompson, P.: 1994, Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of Calculus, *Educational Studies in Mathematics*, 26:229-274.
- Wenger, E.: 1998, Communities of practice: learning, meaning and identity, *Cambridge University Press, Cambridge, U.K.*
- Whiteside, D.: Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, *Archive for history of Exact sciences* 1(1961).