ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ:

<<ΧΡΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ(:ΟΜΑΔΩΝ) ΣΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΥΝΘΕΣΕΩΝ>>

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

κ. Λάππας Διονύσιος

ΣΑΡΡΗ ΝΕΚΤΑΡΙΑ
Α.Μ. Δ200816

ΑΘΗΝΑ 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά και η μουσική έχουν τις απαρχές τους στα βάθη των αιώνων. Η μουσική στους αρχαίους πολιτισμούς αποτελούσε πολλές φορές τρόπο επικοινωνίας, ενώ, σύμφωνα με τα ***Πολιτικά* του Αριστοτέλη (Η' ,1339A-1342B,V,3-VII,11)**, η αποστολή της είναι τριπλή: *για ψυχαγωγία και ανάπαυση , γιατί μπορεί να ασκήσει ευεργετική επίδραση στη διαμόρφωση του χαρακτήρα και γιατί μπορεί να συμβάλει στη διανοητική και αισθητική απόλαυση και καλλιέργεια.* Από την άλλη, η ανάγκη των ανθρώπων να ερμηνεύσουν και να εξηγήσουν φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω τους οδήγησε στην ανάπτυξη της γεωμετρίας και της άλγεβρας. **Η σύνδεση,** λοιπόν, των δύο αυτών επιστημών προκύπτει τόσο από την κοινή τους πορεία και την συνύπαρξή τους στη ζωή των ανθρώπων όσο και από το γεγονός ότι αποτελούν δύο τρόπους επικοινωνίας, κοινούς για όλους τους πολιτισμούς .

Οι μελετητές κατανοούν σήμερα την μαθηματική βάση της μουσικής , την οποία ανέδειξε πρωτίστως **ο Πυθαγόρας**. Ο Πυθαγόρας ενοποίησε τη μουσική με τα μαθηματικά. Κοινός στόχος και των δύο είναι , με τη βοήθεια των αναλογιών, η ανακάλυψη της χρυσής τομής, που θα οδηγήσει με τη σειρά της στον αρμονικό συνδυασμό των ήχων των χορδών , στην αρμονική φωτοσκίαση των κιόνων του Παρθενώνα και εν τέλει στην ένωση σώματος και ψυχής.

Η μουσική λοιπόν είναι μαθηματικά και τα μαθηματικά εμπεριέχουν μουσική. Μέσα στο ταξίδι αιώνων η σύνδεση αυτή ενδυναμώνεται και μάλιστα οδηγεί και σε σημαντικές νέες ανακαλύψεις, όπως προστάζει κάθε φορά η αντίστοιχη εποχή. Η αντίληψη και ο τρόπος σκέψης είναι ο ίδιος και στις δύο επιστήμες, εκείνο που αλλάζει είναι ο διαφορετικός τρόπος έκφρασής τους ανάλογα με το αν το προς επεξεργασία αντικείμενο είναι μαθηματικό ή μουσικό. Τα Μαθηματικά και η Μουσική προϋποθέτουν **ένα σχέδιο του νου**. Δημιουργούν έναν κόσμο μέσα στο μυαλό μας. Αυτόν τον κόσμο το ανάγουμε είτε σε αριθμούς είτε σε νότες για να μπορέσουμε να τον συλλάβουμε. Άρα οι αριθμοί και οι νότες αποτελούν διαφορετικές εκφράσεις ενός σχεδίου.

Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε αυτήν την ισχυρή σύνδεση των δύο επιστημών και να μελετήσουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματά της.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται μια σύντομη περιγραφή της κοινής πορείας μαθηματικών και μουσικής, μιας πορείας που ξεκινά από τις ανακαλύψεις σπουδαίων φιλοσόφων και μαθηματικών ,όπως ο Πλάτων και ο Πυθαγόρας , συνεχίζει χωρίς να αφήνει ανεπηρέαστη την ελληνική βυζαντινή μουσική και φθάνει μέχρι το Fourrier. Στο τέλος του πρώτου μέρους παρουσιάζονται οι κυματικές εξισώσεις κάποιων κατηγοριών μουσικών οργάνων , όπως τα έγχορδα και

τα ξυλόφωνα, οι οποίες μαρτυρούν πόσο σημαντικά είναι τα μαθηματικά στην ορχήστρα!

Στο δεύτερο και κύριο μέρος της εργασίας αναφέρονται αρχικά κάποιες βασικές μουσικές έννοιες και στη συνέχεια παρουσιάζεται η σχέση της μουσικής με τη θεωρία ομάδων! Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να ερμηνεύσουμε και να κατανοήσουμε μουσικές συνθέσεις μέσω αυτής της θεωρίας. Έργα σπουδαίων συνθετών, **όπως του Mozart και του Beethoven**, ερμηνεύονται εξαιρετικά με βάση τη θεωρία ομάδων , χωρίς ωστόσο να το γνωρίζουν οι δημιουργοί τους! Δηλαδή τα μαθηματικά προσφέρουν τη δυνατότητα στους θεωρητικούς της μουσικής να δουν από διαφορετική οπτική γωνία μια μουσική σύνθεση. Αλλά και η μαθηματική θεωρία βρίσκει εφαρμογή και κατανοείται καλύτερα μέσω των κατάλληλων μουσικών παραδειγμάτων!

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΟΥΣΙΚΗ-ΠΟΡΕΙΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Ο Πλάτων στην ''Πολιτεία'' **(580 c8-531 c8)** αναφέρει τα 4 μαθήματα που κάνουν ένα άτομο ''ανώτερο ''. Αυτά είναι : Η αριθμητική , η γεωμετρία , η αστρονομία και η μουσική. Οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι (από τους οποίους έχει επηρεαστεί ο Πλάτων) πίστευαν , όπως αναφέρει ο ίδιος ο Πλάτων **(530 d8)**, ότι αυτές είναι '' αδελφές επιστήμες'' . Από αυτές, η Αριθμητική και η Μουσική σχετίζονταν με τους αριθμούς και την ποσότητα , ενώ η Γεωμετρία και η Αστρονομία με το μέγεθος.

Πιο συγκεκριμένα:

Αριθμητική: Αριθμοί σε ακινησία

Μουσική : Αριθμοί σε κίνηση

Γεωμετρία : Μεγέθη σε ακινησία

Αστρονομία: Μεγέθη σε κίνηση

Από τον παραπάνω διαχωρισμό προκύπτει η στενή σύνδεση της Αριθμητικής με τη Μουσική στην αρχαία Ελλάδα , η οποία συνεχίστηκε και συνεχίζεται στους αιώνες που ακολουθούν. Ο Ανθρωπολόγος **G. Murdock** (1986) αναφέρει πως υπάρχουν 72 κοινά στοιχεία σε όλους τους πολιτισμούς , μεταξύ των οποίων είναι τα σύμβολα της αρίθμησης και της μουσικής.

Όπως αναφέρουν και οι **Κεϊσογλου Σ. , Σπύρου Παναγιώτης** στο άρθρο τους *Μαθηματικά-Μουσική: πορείες* παράλληλες, οι δύο βασικές συνιστώσες κάθε μουσικής έκφρασης είναι ο **Ρυθμός** και η **Αρμονία**.

ΣΧΕΣΗ ΡΥΘΜΟΥ-ΑΡΙΘΜΟΥ

Ο **Ρυθμός** είναι η πρώτη μουσική κατάκτηση για τον άνθρωπο, όπως ακριβώς ο Αριθμός είναι η πρώτη Μαθηματική κατασκευή. Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι ο άνθρωπος κατασκευάζει μουσική από τους προϊστορικούς χρόνους . Οι **Garland και Kahn**(1995) αναφέρουν πως αποτελεί γεγονός ότι οι επιδόσεις του ανθρώπου στη μουσική προηγούνται της ομιλίας. Το αρχαιότερο εύρημα που έχει σχέση με τις μουσικές συνήθειες των ανθρώπων έχει ηλικία 35000 χρόνων και είναι οστά από μαμούθ τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή ρυθμικών ήχων. Άρα , ο ρυθμός είναι το πρώτο είδος μουσικής που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος.

Αντίστοιχα , η πρώτη Μαθηματική έννοια που κατασκευάστηκε στο νου του ανθρώπου ήταν αυτή του αριθμού. Η άποψη αυτή ενισχύεται από τη μελέτη του τρόπου με το οποίο ένα παιδί στην προσχολική ηλικία αναπτύσσει σταδιακά την

έννοια του αριθμού. Σύμφωνα με πειράματα του **Piaget ,**το παιδί αρχικά θεωρεί τον αριθμό ως πλήθος συγκεκριμένων αντικειμένων και σταδιακά αντιλαμβάνεται την αφηρημένη έννοια του αριθμού. Σύγχρονοι ερευνητές όπως οι **Gelman** και **Gallistei** (1982) υποστηρίζουν ότι η πρώτη ικανότητα του παιδιού σχετικά με τα μαθηματικά είναι αυτή της αρίθμησης. Το παιδί μέσω της έμφυτης ικανότητας κατάτμησης του χρόνου , δημιουργεί μια 1-1 αντιστοιχία των γεγονότων με τις χρονικές στιγμές, δηλαδή ουσιαστικά αριθμεί.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι οι δύο πρωταρχικές έννοιες του ρυθμού και του αριθμού έχουν κοινή καταγωγή και συνυπάρχουν από τα πρώτα χρόνια ζωής του ανθρώπου μέσω της ικανότητας κατάτμησης του χρόνου και την 1-1 αντιστοιχία. Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες συνυπάρχουν στον τρόπο που γράφεται η Δυτική μουσική και το οποίο θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια.

ΑΡΜΟΝΙΑ

Σύμφωνα με τον Όμηρο η **αρμονία** προέρχεται ετυμολογικά από την ταύτιση των εννοιών *αρμός* (σύνδεσμος) και *συμφωνίας*(ισορροπίας).Στην μουσική , αρμονία σημαίνει η σύνδεση δύο ή περισσότερων φθόγγων με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύπτει ευχάριστος ήχος.

Σύμφωνα με τον **Barker ,** η Αρμονία θεωρούταν θεότητα στην αρχαιότητα και μάλιστα φερόταν να είναι κόρη της Αφροδίτης , της θεάς της ομορφιάς και της δημιουργίας , και του Άρη , του θεού του πολέμου.

Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Η πρώτη συστηματική και καθοριστική προσπάθεια σύνδεσης Μαθηματικών και Μουσικής γίνεται από τον Πυθαγόρα και τη σχολή του.

Ο Πυθαγόρας δεν έγραψε κανένα έργο και ό, τι διασώθηκε από τη διδασκαλία του οφείλεται στους μαθητές του. Για τους Πυθαγόρειους η ουσία των πραγμάτων βρίσκεται στους **αριθμούς** και στις **μαθηματικές σχέσεις.** Γνωστή είναι ακόμα η πυθαγόρεια διδασκαλία της ‘’ μιμήσεως’’ κατά την οποία τα αισθητά υπάρχουν κατ’ απομίμηση ατελή και τέλειου νοητού κόσμου. Η αληθινή πηγή της σοφίας για τους Πυθαγόρειους είναι η **τετρακτύς**, δηλαδή οι τέσσερις πρώτοι φυσικοί αριθμοί που θεωρείται ότι συνδέονται μεταξύ τους με διάφορες σχέσεις . Πράγματι, από αυτούς τους τέσσερις αριθμούς μπορεί κανείς να κατασκευάσει αρμονικές αναλογίες. Οι αναλογίες αυτές δημιουργούν την **αρμονία** (το άκουσμα για το ωραίο) που για τους Πυθαγόρειους είχε όχι απλώς γενική σημασία, αλλά κυριολεκτικά κοσμική.

Ο ***Σέξτος, Προς Μαθηματικούς VII,94-95*** αναφέρει για τον Πυθαγόρα και την τετρακτύν:

Οι Πυθαγόρειοι συνηθίζουν άλλοτε να λένε '' όλα μοιάζουν με αριθμό'' και άλλοτε παίρνουν έναν όρκο, τον πιο δραστικό από όλους: '' όχι, μα εκείνον που μας έδωσε την τετρακτύ, που περιέχει την πηγή και τη ρίζα της αέναης φύσης ''. Λέγοντας ''εκείνον που μας έδωσε '' εννοούν τον Πυθαγόρα (γιατί το θεοποιούσαν) και λέγοντας τετρακτύς εννοούν τον αριθμό που, συνθεμένος από τους τέσσερις πρώτους αριθμούς, παράγει τον τελειότερο αριθμό, το δέκα, γιατί ένα συν δύο συν τρία συν τέσσερα μας κάνει δέκα. Αυτός ο αριθμός είναι η πρώτη τετρακτύς που αποκαλείται '' πηγή της αέναης φύσης '' επειδή , όπως αυτοί πιστεύουν, ολόκληρος ο κόσμος είναι ρυθμισμένος σύμφωνα με την αρμονία. Η αρμονία είναι ένα σύστημα από τρεις συγχορδίες , την Τετάρτη, την Πέμπτη και την Ογδόη. Οι αναλογίες των τριών συγχορδιών βρίσκονται στους τέσσερις αριθμούς που μόλις αναφέραμε- στο ένα ,το δύο, το τρία και το τέσσερα.

Σημαντικές πηγές για τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων αποτελούν τα Φυσικά και τα Μεταφυσικά του Αριστοτέλη:

Αριστοτέλης
Ένα από τα πιο φημισμένα χωρία του Αριστοτέλη είναι το
[985b23 -986a26] από τα Μεταφυσικά.

Στο χωρίο αυτό, ο Αριστοτέλης αναλύει την άποψη των Πυθαγορείων για τους αριθμούς. Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που υποστήριξαν την άποψη ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Από τα Μαθηματικά, οι πιο βασικοί αριθμοί είναι οι πρώτοι ενώ πιστεύουν πως ότι βρίσκεται στη φύση αποτελεί μίμηση των αριθμών. Στις παραπάνω γραμμές,
φαίνεται καθαρά η ανάγκη των Πυθαγορείων να στηρίξουν τον κόσμο σε βάσεις αριθμών και ισχυρίζονταν πως όλο το σύμπαν βασιζόταν στην αρμονία.

Ένα άλλο απόσπασμα του Αριστοτέλη, το οποία συνδέεται άμεσα με την Φιλοσοφία των Πυθαγορείων προέρχεται από τα Φυσικά **[213b23-29]** :

Σ' αυτό το χωρίο, ο Αριστοτέλης, αναφέρεται στο πως έβλεπαν οι Πυθαγόρειοι τον ουρανό. Για τους Πυθαγόρειους, λοιπόν, ο ουρανός αποτελούσε υπόδειγμα τάξης των όντων. Για να κατανοήσουμε αυτή τη φράση, αρκεί να σκεφτούμε τον ουρανό σαν ένα θόλο, έξω από τον οποίο βρίσκεται το κενό, το οποίο ταυτίζεται με το άπειρο, ενώ στο εσωτερικό του θόλου βρίσκεται ο ουρανός, με τα όντα να είναι δυνάμει άπειρα. Αυτό σημαίνει ότι τμήμα του κενού και της απειρίας έχει εισχωρήσει στο πεπερασμένο του ουρανού και των όντων του. Θα μπορούσαμε να το παρομοιάσουμε με την εισπνοή, ότι δηλαδή, ο ουρανός εισέπνευσε το κενό φέρνοντας μ' αυτό τον τρόπο την απειρία στα όντα του.

Ας δούμε τώρα κάποια σχόλια για τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων από τους Φιλόλαο, Ίππασο, Ιάμβλιχο και Σιμπλίκιο:

Φιλόλαος

Αν παρατηρήσουμε τα σχόλια του Φιλόλαου, θα διαπιστώσουμε μεγάλη ομοιότητα με αυτά του Αριστοτέλη. Πιο συγκεκριμένα, κατά τον Φιλόλαο, όλα τα όντα αποτελούνται από τα άπειρα και τα περαίνοντα (αντίστοιχα στον Αριστοτέλη: από το άπειρο και το πέρας). Από αυτά προκύπτει το εν και άρα οδηγούμαστε, ξανά, στη θεωρία
του Αριστοτέλη. Συμπληρώνει δε, σημαντικές λεπτομέρειες για τις απόψεις των Πυθαγορείων σχετικά με την αστρονομία. Σύμφωνα με αυτές, οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα πάντα γυρνούν γύρω από τη γη και μόνον ο Αρίσταρχος ο Σάμιος τόλμησε να εκφράσει το διαφορετικό, ότι δηλαδή τα πάντα κινούνται γύρω από τον ήλιο. Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τη γη ως το κέντρο του κόσμου, σαν κάποιο εν ≈ πυρ (το έλεγαν) και ήθελαν υποχρεωτικά να υπάρχουν 10 πλανήτες μέχρι που με την Αριθμητική κατέληξαν στην άποψη ότι πρέπει να υπάρχει ένα κόμμα, μια "αντιγή".

Ίππασος

Τα σχόλια του Ίππασου, μοιάζουν με τα σχόλια του Φιλόλαου, άρα και με τα σχόλια του Αριστοτέλη. Πιο συγκεκριμένα, ο Ίππασος έχει το πυρ, το οποίο αποκαλούσε μονάδα και θεωρούσε ότι αυτό το εν είναι αεικίνητο και πεπερασμένο. Έπειτα έχει τους αριθμούς και θεωρεί ότι όλα τα πράγματα έχουν μια "αέναη κίνηση". Αν θεωρήσουμε την κίνηση στο σύνολο της, θα παρατηρήσουμε ότι η κίνηση αυτή, σχετίζεται με το
άπειρο και άρα η θεωρία του είναι πολύ κοντά με τις δύο παραπάνω θεωρίες, του Φιλολάου και του Αριστοτέλη.

Ιάμβλιχος, Περί του Πυθαγόρειου βίου

Όλα τα ακούσματα διαιρούνται σε τρεις κατηγορίες: μερικά σημαίνουν τι είναι ένα πράγμα, άλλα ποιο είναι το άκρο άωτο ενός πράγματος και άλλα τι πρέπει και τι δεν πρέπει να κάνει κανείς.

Όπως γράφει και ο Σ. Νεγρεπόντης, ο **Σιμπλίκιος**, στο χωρίο *εις Φυσικά*, 455,15-459,3 (το οποίο αποτελεί μέρος του χωρίου *εις Φυσικά*, 452,19-458,16, στο οποίο ο Σιμπλίκιος σχολιάζει το Αριστοτελικό χωρίο [Φ1]), αναλύει και διευκρινίζει τον διαιρετικό χαρακτήρα του Πυθαγόρειου αρτίου-απείρου, βασιζόμενος στους «εξηγητές» του Αριστοτέλη, ως εξής:

(α) Κάθε τι το άρτιον «εις ίσα διαιρείσθαι», και κάθε επ' άπειρον διαίρεσις «εις ίσα και ημίσυ» είναι «άπειρον κατά την διχοτομίαν». Είναι σαφές («δήλον») ότι η επ' άπειρον διαίρεση («τομή») λαμβάνεται **«ουκ επ'αριθμών αλλ' επί μεγεθών»**), διότι οι αριθμοί δεν διαιρούνται «επί πολύ» εις ίσα, και διαιρούμενοι μέχρι τη μονάδα φέρουν σε στάση την διαίρεση («ιστώσι την τομήν»).

(β) «επί δε μεγεθών», πλην της επ' άπειρον διαιρέσεως κατά την διχοτομίαν, υπάρχει η δυνατότης, και ουδέν κώλυμα υπάρχει, «το καταλειπόμενον» να διαιρείται «αεί» σε δύο άνισα («μη ίσα») μέρη, να υπόκειται δηλαδή σε επ' άπειρον «δυαδική» διαίρεση. Και αυτή η επ' άπειρον δυαδική διαίρεση έχει ως αρχή το Πυθαγόρειο άρτιον, διότι ο μικρότερος άρτιος είναι το δύο («αρχή του αρτίου η δυάς»), και η εν λόγω διαίρεση είναι δυαδική.

Όπως φαίνεται από αυτό το σχόλιο του Σιμπλίκιου, οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν τον όρο «αρτιον» για την έννοια του απείρου με τρόπο καθαρά συμβολικό, ως «σημείον» (456,16), και ότι η Πυθαγόρεια έννοια του απείρου αναφέρεται στην δυαδική επ' άπειρον διαίρεση των μεγεθών.

Οι Πυθαγόρειοι έψαχναν παντού την τάξη και πίστευαν ότι το σύμπαν είναι αρμονικά κατασκευασμένο. Η μουσική θεωρείται μια τέλεια ένωση αντίθετων συναισθημάτων , ως η ασυμφωνία μέσα στη συμφωνία.

ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ

Η ανθυφαίρεση , δηλαδή ο αλγόριθμος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών , ήταν μέθοδος γνωστή στους Πυθαγόρειους πολύ πριν τον Ευκλείδη , ο οποίος την αναφέρει στα βιβλία VII (πεπερασμένη ανθυφαίρεση αριθμών) και X (άπειρη ανθυφαίρεση μεγεθών) των Στοιχείων . Η σχέση των Πυθαγόρειων με την ανθυφαίρεση μαρτυρείται από την Πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής και από την ύπαρξη των λεγόμενων πλευρικών και διαμετρικών αριθμών , δηλαδή των ρητών προσεγγίσεων του λόγου διαμέτρου/πλευρά τετραγώνου λόγω της ύπαρξης ασυμμετρίας.

Σύμφωνα με τον **Φιλόλαο** , η Πυθαγόρεια θεωρία της Μουσικής είναι η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση των δύο βασικών μουσικών διαστημάτων $\frac{2}{1}$ (αρμονία) και $\frac{3}{2}$ (δι' οξειάν).

Σύμφωνα με τους **Κεϊσογλου Σ. και Σπύρου Π.** στο άρθρο τους <<*Μαθηματικά–Μουσική: πορείες παράλληλες*>>, δύο βασικά ερωτήματα απασχολούν τους Πυθαγόρειους:

- Πότε δύο ήχοι συνηχούν αρμονικά;
- Ποια είναι η βαθύτερη αιτία αυτής της αρμονικής συνήχησης;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα προέρχεται από την παρατήρηση και το πείραμα , που οδηγούν στην διατύπωση του πρώτου νόμου στον οποίο υπακούει η αρμονία: *όταν δύο χορδές έχουν μήκη ανάλογα με δύο από τους αριθμούς 1,2,3,4, τότε συνηχούν αρμονικά.*

Έτσι κατασκευάζεται η Πυθαγόρεια κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για πολλούς αιώνες σαν φυσική κλίμακα μουσικής σύνθεσης. Η αρμονία προέρχεται από τους λόγους που σχηματίζουν οι αριθμοί 1,2,3,4 οι οποίοι , όπως αναφέρθηκε, αποτελούν την **τετρακτύν ,** το σύμβολο της πυθαγόρειας σχολής.

Οι Πυθαγόρειοι είχαν διαπιστώσει ότι για την αρμονία δεν είχαν σημασία τα απόλυτα μήκη των χορδών μιας λύρας αλλά η μεταξύ τους σχέση η οποία καθορίζει και τη μελωδία της μουσικής. Είναι η σχέση μεταξύ δύο χορδών μιας λύρας η οποία αποτελεί ένα μουσικό διάστημα , όπως δύο διαφορετικοί αριθμοί μπορεί να δίνουν το ίδιο κλάσμα . Ένα δίχορδο λοιπόν μπορούμε να το φανταστούμε ως λόγο αριθμών (κλάσμα).

Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν τη λύρα και σύμφωνα με τον **Ιάμβλιχο** ,στο έργο του **'' περί πυθαγορείου βίου '' ,** θεωρούσαν τον αυλό '' υβριστικόν'' όργανο. Χρησιμοποιούνταν η οχτάχορδη λύρα (Βαβυλωνιακής προέλευσης).

Οι Πυθαγόρειοι ασχολούνταν με τα μουσικά διαστήματα 2/1 (αρμονία) και 3/2 (δι' οξειάν). Ήθελαν να βρουν κοινό μέτρο για τα διαστήματα αυτά , να ανακαλύψουν μια σχέση συμμετρίας.

Ο Φιλόλαος ($5^{ος}$-$4^{ος}$ αιώνας π.Χ.) , ο αρχαιότερος Πυθαγόρειος για τον οποίο σώζονται κάποια κείμενα , στο ***περί φύσεως, απόσπασμα 6,***αναφέρεται στο βαβυλωνιακό τετράχορδο με μήκη χορδών 6,8,9,12 που αντιστοιχούν στα ονόματα των χορδών **υπάτη , μέσσα , τρίτη , νεάτη** και έτσι προκύπτουν τα δίχορδα:

αρμονία = δι΄οξειάν +συλλαβά (6,12) ή (1,2)

δι΄οξειάν = συλλαβά +επόγδοον (6,9) ή (8,12) ή (2,3)

συλλαβά=2 επόγδοον +δίεσις (6,8) ή (9,12) ή (3,4)

επόγδοον = 2 διέσεις + πυθαγόρειο κόμμα (8,9)

Ο Ευκλείδης στην πραγματεία του ***Κανόνος Κατανομή*** , αντιμετωπίζοντας τα μουσικά διαστήματα ως σχέσεις αριθμητικών δυάδων , ονομάζει τα εύφωνα διαστήματα ως:

<< διπλάσιον>> = $\frac{2}{1}$ (αρμονία ή διαπασών)

<<ημιόλιον>> = $\frac{3}{2}$ (διαπέντε- δι΄οξειάν)

<<επίτριτον>> = $\frac{4}{3}$ (διατεσσάρων – συλλαβά)

<<επόγδοον>> = $\frac{9}{8}$ (διάστημα τόνου)

Άρα προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:

Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω πράξεις των μουσικών διαστημάτων , που θα δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω :

$2/1 = (3/2)^{1} * 4/3$, με $4/3 < 3/2$

$3/2 = (4/3)^{1} * 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^{2} * 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^{2} * 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Η τελευταία αναλυτικότερα γράφεται :

$$3^{2}/2^{3} = (2^{8}/3^{5})^{2} * 3^{12}/2^{19}$$

όπου το $3^{12}/2^{19}$ είναι το << πυθαγόρειο κόμμα>> , ένα πολύ μικρό διάστημα το οποίο το θεωρούσαν ≈ 1 και τη δίεση≈1 ημιτόνιο (μισό τόνο) .

Άρα η μουσική κλίμακα ήταν περίπου 12 ημιτόνια.

Δηλαδή:

αρμονία= [τόνος , τόνος , ημιτόνιο , τόνος , τόνος , τόνος , ημιτόνιο]

που δεν είναι άλλη από τη ματζόρε κλίμακα.

Τα διαδοχικά διαστήματα που δημιουργούνται κατά τις ανθυφαιρέσεις είναι λόγοι μεταξύ δυνάμεων του 2 και 3 . Η διαδικασία σταματά αν κάποιος από τους λόγους γίνει ίσος με τη μονάδα , οπότε ο προηγούμενος λόγος που θα έχει βρεθεί θα είναι

το κοινό μέτρο που αναζητούμε και θα καταμετρεί και το αρχικό διάστημα και όλα τα άλλα. Όμως, όπως έχει αναφέρει και **ο Σ.Νεγρεπόντης**, η πολλαπλασιαστική διαδικασία της ανθυφαίρεσης είναι άπειρη καθώς κανένα από τα προκύπτοντα διαστήματα δε μπορεί να αποτελέσει κοινό μέτρο αυτής και τα αρχικά μεγέθη 2/1 και 3/2 είναι μεταξύ τους ασύμμετρα. Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα θα το αποδείξουμε στην παράγραφο που ακολουθεί:

Οι 10 πρώτοι όροι της ανθυφαίρεσης της αρμονίας και η απειρία της

Ο Φιλόλαος στο **'' Περί Φύσεως''**, απόσπασμα 6, γραμμές 16-24 υπολογίζει τους τέσσερις πρώτους όρους της ανθυφαίρεσης της αρμονίας :

$2/1 = (3/2)^{1} * 4/3$, με $4/3 < 3/2$

$3/2 = (4/3)^{1} * 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^{2} * 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^{2} * 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Η τελευταία γράφεται :

$3^{2}/2 = (2^{8}/3^{5})^{2} * 3^{12}/2^{19}$

Συνεχίζοντας έχουμε :

$2^{8}/3^{5} = (3^{12}/2^{19})^{3} * 2^{65}/3^{41}$

Αρκεί $2^{65}/3^{41} < 3^{12}/2^{19}$

ή $2^{84} < 3^{53}$

ή $84 \log 2 < 53 \log 3$

ή $25.286 < 25.287$,ισχύει .

Έπειτα παίρνουμε :

$3^{12}/2^{19} = (2^{65}/3^{41})*3^{53}/2^{84}$

Αρκεί $3^{53}/2^{84} < 2^{65}/3^{41}$

ή $3^{94} < 2^{149}$

ή $94 \log 3 < 149 \log 2$

ή $44.849 < 44.853$, που ισχύει.

Στο επόμενο βήμα :

$2^{65}/3^{41} = (3^{53}/2^{84})^5 * 2^{485}/3^{306}$

Αρκεί $2^{485}/3^{306} < 3^{53}/2^{84}$

ή $2^{569} < 3^{359}$

ή 569 log2 < 359 log3

ή 171.2860< 171.2865 , ισχύει .

Στη συνέχεια έχουμε :

$3^{53}/2^{84} = (2^{485}/3^{306})^2 * 3^{665}/2^{1054}$

Πρέπει $3^{665}/2^{1054} < 2^{485}/3^{306}$

ή $3^{971} < 2^{1539}$

ή 971 log3 < 1539 log2

ή 463.284 < 463.285 , το οποίο ισχύει.

Συνεχίζοντας:

$2^{485}/3^{306}= (3^{665}/2^{1054})^{23} * (2^{24727}/3^{15601})$

Πρέπει $2^{24727}/3^{15601}<3^{665}/2^{1054}$

ή $2^{25781}<3^{16266}$

ή 25781 log2<16266 log3

ή 7760.854318<7760.854329 , το οποίο ισχύει.

Συνεχίζοντας:

$3^{665}/2^{1054}= (2^{24727}/3^{15601}) * (3^{16266} / 2^{25781})$

Πρέπει $3^{16266} / 2^{25781}<2^{24727}/3^{15601}$

ή $3^{31867}<2^{50508}$

ή 31867 log3<50508 log2

ή 15204.42302<15204.42324 , το οποίο ισχύει.

Συνολικά οι 10 πρώτοι όροι της (πολλαπλασιαστικής) ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι: [1,1,2,2,3,1,5,2,23,1…] (*από εργασία στο Σ. Νεγρεπόντη στα πλαίσια του μαθήματος Αρχαία ελληνικά Μαθηματικά-Στοιχεία Ευκλείδη).*

Από τις παραπάνω σχέσεις , για τα υπόλοιπα, έχουμε

$2^2/3 > 3^2/2^3 > 2^8/3^5 > 3^{12}/2^{19} > 2^{65}/3^{41} > 3^{53}/2^{84} > 2^{485}/3^{306} > 3^{665}/2^{1054}$

αυτά τείνουν στο λόγο 1/1. Όμως επειδή είναι της μορφής $2^{\kappa}/3^{\lambda}$ ή $3^{\kappa}/2^{\lambda}$ δεν θα γίνουν ποτέ ίσα με 1/1, αφού θα έπρεπε $2^{\kappa}=3^{\lambda}$ για κάποια κ, λ, άτοπο , διότι 2, 3 πρώτοι και έκαστος ακέραιος έχει μοναδικό ανάπτυγμα σε γινόμενο πρώτων.

Πιο συγκεκριμένα:

Πρόταση. Η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη.

Απόδειξη. Η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της αρμονίας έχει την ακόλουθη μορφή:

$2/1=3/2 \cdot \gamma_1$

$3/2=\gamma_1^{\lambda(1)} \cdot \delta_1$

…

$\gamma_{\nu-1}=\delta_{\nu-1}^{\kappa(\nu)} \cdot \gamma_\nu$, με $\delta_{\nu-1}>\gamma_\nu$,

$\delta_{\nu-1}=\gamma_\nu^{\lambda(\nu)} \cdot \delta_\nu$, με $\gamma_\nu>\delta_\nu$,

…

(Ώστε $\gamma_1=4/3$, $\lambda(1)=1, \delta_1=9/8$, κλπ).

Ισχυρισμός. $\gamma_\nu=2^{\rho(\nu)}/3^{\sigma(\nu)}$, $\delta_\nu=3^{\phi(\nu)}/2^{\chi(\nu)}$.

(Η απόδειξη του ισχυρισμού πραγματοποιείται με μαθηματική επαγωγή).

Ο ισχυρισμός ισχύει για ν=1, εφόσον $\gamma_1=4/3$, $\delta_1=9/8$.

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για ν-1, ώστε

$\gamma_{\nu-1}=2^{\rho(\nu-1)}/3^{\sigma(\nu-1)}$, $\delta_{\nu-1}=3^{\phi(\nu-1)}/2^{\chi(\nu-1)}$.

Τότε $\gamma_{\nu-1}=\delta_{\nu-1}^{\kappa(\nu)} \cdot \gamma_\nu$, άρα $\gamma_\nu=2^{\rho(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\chi(\nu-1)} / 3^{\sigma(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\phi(\nu-1)}$, και

$\delta_{\nu-1}=\gamma_\nu^{\lambda(\nu)} \cdot \delta_\nu$, άρα $\delta_\nu=3^{\phi(\nu-1)+\lambda(\nu)(\sigma(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\phi(\nu-1))} / 2^{\chi(\nu-1)+\lambda(\nu)(\rho(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\chi(\nu-1))}$.

Θέτουμε $\rho(\nu)= \rho(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\chi(\nu-1)$,

$\sigma(\nu)= \sigma(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\phi(\nu-1)$,

$\phi(\nu)=\phi(\nu-1)+\lambda(\nu)(\sigma(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\phi(\nu-1))=\phi(\nu-1)+\lambda(\nu)\sigma(\nu)$, και

$\chi(\nu)=\chi(\nu-1)+\lambda(\nu)(\rho(\nu-1)+\kappa(\nu-1).\chi(\nu-1))=\chi(\nu-1)+\lambda(\nu).\rho(\nu))$.

Από τον Ισχυρισμό έπεται άμεσα ότι ο γ_ν είναι λόγος αρτίου προς περιττό αριθμό, και άρα διάφορος του λόγου 1/1, και παρομοίως ότι ο δ_ν είναι λόγος περιττού προς άρτιο αριθμό, και άρα διάφορος του λόγου 1/1.

Επομένως, η ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη.

Ο Αρχύτας ο Πυθαγόρειος και η Μουσική

Ο Αρχύτας (430-350 π.Χ.) θεωρείται ως ο σημαντικότερος ίσως μελετητής της ακουστικής στην αρχαία Ελλάδα. Οι έρευνές του για το μουσικό ήχο τον οδήγησαν στην ανακάλυψη ότι ο ήχος παράγεται από δονήσεις του αέρα και ότι το ύψος του εξαρτάται από την ταχύτητα των παλμών , δηλαδή ψηλότεροι ήχοι παράγονται από ταχύτερους παλμούς και χαμηλότεροι ήχοι από βραδύτερους. Σύμφωνα με τον Αθήναιο έγραψε το σύγγραμμα ‘’**περί αυλών’’** , όπου διατύπωσε την παρατήρηση ότι το μικρό μήκος του αυλού παράγει υψηλό τόνο , ενώ το μεγάλο χαμηλό τόνο.

Ο Πλάτων και η Αρμονία

Ο Πλάτων γεννήθηκε περίπου 70 χρόνια μετά το θάνατο του Πυθαγόρα. Ήταν μαθητής του Σωκράτη και δάσκαλος του Αριστοτέλη. Ο Πλάτων ,όπως οι Πυθαγόρειοι, πίστευε στην ύπαρξη ενός αρμονικά κατασκευασμένου σύμπαντος. Στον ***Τίμαιος*** , μιλά για έναν ήρωα που σκοτώνεται στη μάχη και δώδεκα μέρες αργότερα μιλά και περιγράφει τι είδε μετά το θάνατό του . Περιγράφει τον ουρανό όπου περιστρέφονται οχτώ πλανήτες και ένας κεντρικός πλανήτης πηγαίνει στον καθένα από τους πλανήτες αυτούς χωριστά.

Ο Πλάτων χρησιμοποιούσε επίσης την αρμονία για να δέσει την μουσική με την αστρονομία:

Υπάρχουν δύο είδη συναισθημάτων, το ένα εμφανίζεται στην αστρονομία και το άλλο είναι ο ήχος του πρώτου. Όπως τα μάτια είναι για την αστρονομία , έτσι και τα αυτιά είναι για να λαμβάνουν αυτό που παράγει η αρμονία , για το λόγο αυτό έχουμε δύο αδελφές επιστήμες , τη μουσική και την αστρονομία, όπως δίδαξαν και οι Πυθαγόρειοι.

Στην ***Πολιτεία*** ο Πλάτων θαυμάζει τον τρόπο που οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούν τις μαθηματικές αναλογίες για να παράγουν μουσική συμφωνία , ενώ στο ***Φίληβος*** μιλά για ασυμφωνία που γίνεται αρμονική μέσω των αριθμών.

Ο Πλάτων διαφωνεί με τους Πυθαγόρειους στην ιεραρχία. Πιστεύει πως η αρμονία των Μαθηματικών είναι ανώτερη της αρμονίας της μουσικής και γι' αυτό κριτικάρει τους Πυθαγόρειους ότι εστιάζουν κυρίως στον ήχο των μουσικών διαστημάτων και όχι στη σιωπηλή αρμονία των αριθμών.

Ο Πτολεμαίος και η Αρμονία

Περίπου 500 χρόνια μετά τον Πλάτωνα , ένας άλλο σπουδαίο μυαλό ασχολήθηκε με τη μουσική , τα μαθηματικά και την αστρονομία . Ο Πτολεμαίος εργάστηκε στην Αλεξάνδρεια το 2^{ο} αιώνα π. Χ. Το σπουδαιότερο έργο του, που αφορά την αστρονομία , είναι η ***Μαθηματική Σύνταξις*** , αλλά έγραψε και ένα σημαντικό βιβλίο πάνω στη μουσική θεωρία , ***Αρμονικά.***

Ενώ ο Πυθαγόρας θεωρούσε τα μαθηματικά και τη μουσική στενά συνδεδεμένα και ο Αριστόξενος , από την άλλη , πίστευε πως η μουσική είναι ανεξάρτητη από τα μαθηματικά και την αστρονομία , ο Πτολεμαίος συνδύασε τις δύο αυτές απόψεις. Χρησιμοποίησε το μονόχορδο για να πειραματιστεί με τα μαθηματικά των μουσικών διαστημάτων.

Στα *Αρμονικά* , ο Πτολεμαίος θεωρεί , όπως οι Πυθαγόρειοι , ότι η Αρμονία είναι μια δύναμη της λογικής , μια αρχή απαραίτητη για να θέτει σε τάξη το σύμπαν. Οι δύο αισθήσεις μας , η όραση και η ακοή , δημιουργούν ένα επιστημονικό πεδίο παρατηρώντας την αρμονία.

Ο καλύτερος τρόπος για να παρατηρήσουμε την αρμονία με τα μάτια είναι η αστρονομία , ενώ με την ακοή είναι η μουσική.

Ο Πτολεμαίος αναφέρει διάφορους τρόπους με τους οποίους η μουσική σχετίζεται με τους πλανήτες:

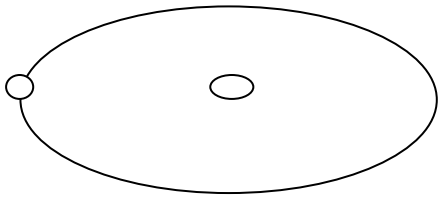
Κάποιοι πλανήτες έχουν μουσικά χαρακτηριστικά που βασίζονται είτε στην αστρολογική παρατήρηση είτε στην αστρονομική.

Kepler (1571-1630)

Ο **Kepler ,** 1500 χρόνια μετά , συμφωνούσε σε πολλά σημεία με τον Πτολεμαίο. Το πιο γνωστό του βιβλίο είναι ***The Harmony of the World*** . Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει τον 3^{ο} νόμο του Kepler.

Οι τρεις νόμοι του είναι:

1. Κάθε πλανήτης περιστρέφεται σε έλλειψη με μια εστία τον ήλιο. Η άλλη εστία είναι ένα μαθηματικό σημείο.



2. Μια νοητή ευθεία σχεδιασμένη από το κέντρο του ήλιου στο κέντρο ενός πλανήτη διανύει σε ίσους χρόνους ίσες αποστάσεις.
3. **$T^2=kD^3$,** όπου T= περίοδος περιστροφής , D= μέση απόσταση από τον ήλιο , k=σταθερά

Στο βιβλίο αυτό , ο Kepler ασχολείται με το πώς και που ο Δημιουργός θα διαλέξει να τοποθετήσει τη μουσική. Πιστεύει ότι ο Δημιουργός βάζει την αρμονία του τις στιγμές των extreme συναισθημάτων. Γι' αυτό ο Kepler κοιτάζει το **αφήλιο** και το **περιήλιο**.

Το περιήλιο είναι το σημείο του πλανήτη που είναι πιο κοντά στον ήλιο , όταν ο πλανήτης κινείται γρηγορότερα. Το αφήλιο είναι το σημείο το μακρύτερο στον ήλιο, όταν ο πλανήτης κινείται με την ελάχιστη ταχύτητα.

Διάλεξε τη γωνιακή ταχύτητα ως πιο κατανοητή σε έναν παρατηρητή στον ήλιο. Το επόμενο βήμα ήταν να μετατρέψει τις γωνιακές ταχύτητες σε μουσικά διαστήματα χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές αναλογίες όπως ο Πυθαγόρας.

Πήρε τους λόγους: $\frac{\alpha\varphi\acute{\eta}\lambda\iota o\ \pi\lambda\alpha\nu\ \acute{\eta}\tau\eta\ \chi}{\alpha\varphi\acute{\eta}\lambda\iota o\ o\upsilon\rho\alpha\nu o\ \acute{\upsilon}}$ $\frac{\pi\varepsilon\rho\iota\ \acute{\eta}\lambda\iota o\ \pi\lambda\alpha\nu\ \acute{\eta}\tau\eta\ \chi}{\alpha\varphi\acute{\eta}\lambda\iota o\ o\upsilon\rho\alpha\nu o\ \acute{\upsilon}}$

$\frac{\alpha\varphi\acute{\eta}\lambda\iota o\ \pi\lambda\alpha\nu\ \acute{\eta}\tau\eta\ \chi}{\pi\varepsilon\rho\iota\ \acute{\eta}\lambda\iota o\ o\upsilon\rho\alpha\nu o\ \acute{\upsilon}}$ $\frac{\pi\varepsilon\rho\iota\ \acute{\eta}\lambda\iota o\ \pi\lambda\alpha\nu\ \acute{\eta}\tau\eta\ \chi}{\pi\varepsilon\rho\iota\ \acute{\eta}\lambda\iota o\ o\upsilon\rho\alpha\nu o\ \acute{\upsilon}}$

όπου $o\ o\upsilon\rho\alpha\nu\acute{o}\varsigma$ είναι ο πιο απομακρυσμένος πλανήτης.

Στη συνέχεια ο Kepler χρησιμοποίησε αυτές τις αναλογίες για να δημιουργήσει την οκτάβα.

Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος

Δυϊσμός *είναι η έννοια που δηλώνει μια διδασκαλία που δέχεται την ύπαρξη δύο διαφορετικών αρχών που δεν μπορεί να αναχθεί η μία στην άλλη.*

Όπως αναφέρει ο Χ. Σπυρίδης στο έργο του << *Ο Δυϊσμός του Μουσικού Διαστήματος (2004)*>>, ο Ευκλείδης στην ***Κανόνος Κατανομή*** αντιμετωπίζει το μουσικό διάστημα είτε ως μια σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους είτε ως μία απόσταση δύο σημείων επί του κανόνος. Η σχέση των δύο αριθμών προς αλλήλους εκφράζει το λόγο των μηκών δύο δονούμενων τμημάτων χορδής επί του κανόνος που δημιουργούν το μουσικό διάστημα. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος εκφράζει το μήκος του σιγούντος τμήματος χορδής μεταξύ δύο πατημάτων επί του κανόνος δια των οποίων υλοποιείται το μουσικό διάστημα. Η πρώτη αντιμετώπιση είναι *λογαριθμική* και η δεύτερη *γραμμική.* Τα ονόματα που αναφέρθηκαν παραπάνω και που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για τα εύφωνα διαστήματα μιας οκτάβας είναι:

διπλάσιον , ημιόλιον , επίτριτον , επόγδοον για τη λογαριθμική αντιμετώπιση και

διαπασών , διαπέντε , διατεσσάρων , τονιαίον για τη γραμμική αντιμετώπιση.

Υπάρχει δηλαδή μια δυϊκή αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων όπου υπάρχει πλήρη αντιστοιχία μεταξύ των ονομάτων των τεσσάρων μουσικών διαστημάτων.

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (50-120 μ.Χ.) ήταν Μαθηματικός και Νεοπυθαγόρειος φιλόσοφος. Στην **<< *Αριθμητική Εισαγωγή*** >> του αναφέρει ότι χαρακτηριστικά γνωρίσματα των όντων είναι **το πλήθος** και **το μέγεθος.** Με το πλήθος ασχολείται η Αριθμητική και με το μέγεθος , δηλαδή το πηλίκο , ασχολείται η Μουσική.

Στην Αριθμητική , την γραμμικότητα την εκφράζει μια οποιαδήποτε αναλογία κατά ποσότητα , δηλαδή μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδος, και τη λογαριθμικότητα εκφράζει μια οποιαδήποτε αναλογία κατά ποιότητα , δηλαδή μια γεωμετρική πρόοδος.

Από τον καιρό του Πυθαγόρα , το μουσικό διάστημα το αντιμετώπιζαν με τρόπο γραμμικό και ο Πυθαγόρας , λόγω των αδυναμιών που είχε αυτός ο τρόπος αντιμετώπισης εισήγαγε το λογαριθμικό τρόπο , δηλαδή το μουσικό διάστημα ως λόγο δύο ομοειδών μεγεθών.

Ο Αριστόξενος ($4^{ος}$ αιώνας π.Χ.) επιστρέφει στη γραμμικότητα των μουσικών διαστημάτων. Εισάγει για πρώτη φορά τον **ίσο συγκερασμό** (διδάσκεται λανθασμένα ότι εισηγητής του ίσου συγκερασμού είναι ο Bach). Έτσι η διαπασών διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα. Ο

Αριστόξενος ονομάζει μουσικό διάστημα την απόσταση ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού ύψους.

Με τον ορισμό αυτό συμφωνεί και ο **W.Burkert** ,ο οποίος αναφέρει το εξής:

Για μας τους μουσικούς της Ευρωπαϊκής μουσικής , και λόγω της μουσικής σημειογραφίας και λόγω του πληκτρολογίου του πιάνου καθίσταται ιδιαίτερα καταληπτή η έννοια του μουσικού διαστήματος ως αποστάσεως , ως ευθύγραμμου τμήματος.

Ο **Σωκράτης** στο Φίληβο του Πλάτωνος λέει:

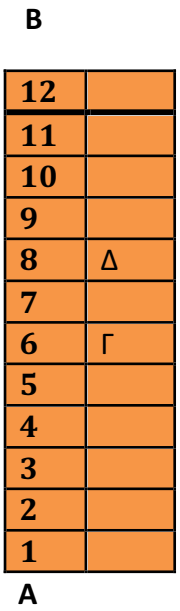
Αλλ' , ω φίλε, επειδάν λάβης τά διαστήματα οπόσα εστί τον αριθμόν της φωνης οξύτητός τε πέρι και βαρύτητος,…

Σε όλους αυτούς τους ορισμούς το διάστημα θεωρείται ως ευθύγραμμο τμήμα κατά μήκος της χορδής του μονόχορδου μουσικού οργάνου. Στη Μουσική ,δηλαδή, έχει τη διπλή σημασία της απόστασης μεταξύ δύο φθόγγων διαφορετικού μουσικού ύψους και του λόγου δύο αριθμών.

Πράξεις μεταξύ των διαστημάτων

- **πρόσθεση δύο διαστημάτων**

Έστω ότι δίνονται δύο σημεία Α και Β που είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και η απόστασή τους δίνει το μήκος του ΑΒ. Θεωρούμε επίσης και τον κανόνα που έχει διαιρεθεί σε 12 ίσα τμήματα.



Θέτουμε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ , που είναι 12 μονάδες μήκους, και στη συνέχεια θέτουμε σε ταλάντωση το μήκος της χορδής ΑΔ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με ΒΔ , που έχει μήκος 4 μονάδες. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούστηκε το ημιόλιον διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής , ενώ ως σχέση αριθμών χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής ΒΑ/ΔΑ=12/8.

Στη συνέχεια , θέτουμε σε ταλάντωση τα τμήματα ΔΑ και ΓΑ της χορδής . Το μη ηχούν τμήμα της χορδής είναι το ΔΓ , μήκους 2 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των ΔΑ , ΓΑ ακούγεται το επίτριτον διάστημα που ως μήκος χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΔΓ , ως σχέση δύο αριθμών χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής ΔΑ/ΓΑ=8/6.

Τέλος , θέτοντας σε ταλάντωση ολόκληρο το τμήμα ΒΑ , μήκους 12 μονάδων , και το ΓΑ , μήκους 6 μονάδων , παίρνουμε το διπλάσιον διάστημα (διαπασών). Το μη ηχούν τμήμα της χορδής είναι το ΒΓ που έχει μήκος 6 μονάδες. Το διπλάσιο διάστημα ως μήκος χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ και ως λόγο αριθμών χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής ΒΑ/ΓΑ=12/6.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα ημιόλιον και επίτριτον ισούται με το μήκος της χορδής στο διαπασών , δηλαδή ΒΓ=ΒΔ+ΔΓ , όπως ακριβώς έλεγε και ο Φιλόλαος (αρμονία=συλλαβά + δι’ οξειάν). Αν τώρα στη θέση των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής τοποθετήσουμε τους αντίστοιχους λόγους των ηχούντων τμημάτων της χορδής , δηλαδή προσθέτουμε μουσικά διαστήματα ως λόγους μεγεθών :

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{AB}{A\Delta}+\frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση , η πράξη μεταξύ των λόγων θα πρέπει να είναι ο πολλαπλασιασμός (λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).

- **αφαίρεση δύο διαστημάτων**

Θεωρούμε πάλι τον κανόνα διαιρεμένο και αριθμημένο σε 12 ίσα τμήματα.

Α

12	
11	
10	
9	Γ
8	Δ
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	

Β

Αν θέσουμε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ και στη συνέχεια το τμήμα της χορδής ΔΑ , μήκους 8 μονάδων μήκους , τότε το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ΒΔ , μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των ΒΑ , ΔΑ ακούγεται το ημιόλιον διάστημα , όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Ακολούθως , θέτουμε σε ταλάντωση το ΒΑ και μετά το τμήμα της χορδής ΓΑ , μήκους 9 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ΒΓ , μήκους 3 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των ΒΑ , ΓΑ ακούγεται το επίτριτον διάστημα που ως μήκος χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής , ενώ ως σχέση αριθμών χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής ΒΑ/ΓΑ=12/9.

Για να εκτελέσουμε το επόγδοο διάστημα θέτουμε σε ταλάντωση τα τμήματα ΔΑ και ΓΑ της χορδής . Το μη ηχούν τμήμα της χορδής είναι το ΓΔ και έχει μήκος 1 μονάδα μήκους. Το επόγδοο διάστημα χαρακτηρίζεται ως μήκος από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΓΔ , ως σχέση αριθμών χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής ΓΑ/ΔΑ=9/8.

Αν πάρουμε τη διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο επόγδοο διάστημα. Αν τώρα στη θέση των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής τοποθετήσουμε τους αντίστοιχους λόγους των μηκών των

ηχούντων τμημάτων της χορδής , προκύπτει η αφαίρεση των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών ως εξής:

$\frac{ΓΑ}{ΔΑ}=\frac{ΒΑ}{ΔΑ}=\frac{ΒΑ}{ΓΑ}$

Η σχέση αυτή ισχύει αν θεωρήσουμε ότι μεταξύ των λόγων υπάρχει η πράξη της διαίρεσης.

Μετατροπή του μουσικού διαστήματος από μία σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους σε μία απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος

Ο Αρχύτας ο Πυθαγόρειος πρότεινε τετράχορδα για το εναρμόνιο , το χρωματικό και το διατονικό γένος ως εξής:

$\frac{5}{4}\times\frac{36}{35}\times\frac{28}{27}=\frac{4}{3}$

$\frac{32}{27}\times\frac{243}{224}\times\frac{28}{27}=\frac{4}{3}$

$\frac{9}{8}\times\frac{8}{7}\times\frac{28}{27}=\frac{4}{3}$

ή με τους ακέραιους , αντίστοιχα,

1512,1890,1944,2016

1512,1792,1944,2016

1512,1701,1944,2016

Για την εύρεση τεσσάρων αριθμών που να δομούν **εναρμόνιο** τετράχορδο με τις σχέσεις $\frac{5}{4}\times\frac{36}{35}\times\frac{28}{27}=\frac{4}{3}$ εργάστηκε ως εξής :

Ο πρώτος αριθμός πρέπει να διαιρείται με το 4 για να μας δώσει το δεύτερο ως επιτέταρτο ($\frac{5}{4}$).

Άρα ο δεύτερος αριθμός θα είναι ο 4+$\frac{1}{4}$ *4 = 5. Άρα έχουμε τους αριθμούς 4 και 5. Ο δεύτερος αριθμός , επειδή θα δώσει το επιτρικοντάπεμπτο ($\frac{36}{35}$) πρέπει να διαιρείται με το 35. Για να γίνει αυτό πολλαπλασιάζουμε και το 4 και το 5 με το 7.

Άρα προκύπτουν οι αριθμοί: 7*4=28 , 7*5=35 , 35+$\frac{1}{35}$ *35=36.

Το 36 θα δώσει τον τέταρτο αριθμό ως επιεικοσιέβδομο , πρέπει να διαιρείται με το 27. Το Ε.Κ.Π. (27,36) είναι το 108. Για να διατηρήσουμε τις σχέσεις των τριών αριθμών 28 , 35 , 36 και για να προκύψει από τον τρίτο ο τέταρτος κάνουμε τα εξής:

3*28=84

3*35=105

3*36=108

108 + $\frac{1}{27}$*108=112

Για την εύρεση τεσσάρων αριθμών που δομούν το **χρωματικό** τετράχορδο με τις αριθμητικές σχέσεις $\frac{32}{27} \times \frac{243}{224} \times \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$ εργάστηκε ως εξής:

Ο πρώτος αριθμός πρέπει να διαιρείται με το 27 . Παίρνοντας ως πρώτο αριθμό το 27 , ο δεύτερος είναι ο αριθμός 27+$\frac{5}{27}$=32. Άρα έχουμε τους αριθμούς 27 και 32. Ο δεύτερος αριθμός πρέπει να διαιρείται με το 224 για να μας δώσει τον τρίτο αριθμό. Για να γίνει αυτό πολλαπλασιάζουμε και το 32 και το 27 με το 7. Άρα προκύπτουν οι τρεις αριθμοί:7*27=189 , 7*32=224 , 224+ $\frac{9}{224} * 224$=243. Ο τρίτος αριθμός , ο 243, για να μας δώσει τον τέταρτο πρέπει να διαιρείται με το 27 και διαιρείται. Άρα οι τέσσερις αριθμοί είναι οι: 189 , 224 , 243 , 243 + $\frac{1}{27} * 243$=252.

Για την εύρεση τεσσάρων αριθμών που δομούν το **διατονικό** τετράχορδο με τις αριθμητικές σχέσεις $\frac{9}{8} \times \frac{8}{7} \times \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$ εργάστηκε ως εξής:

Ο πρώτος αριθμός πρέπει να διαιρείται με το 8 για να μας δώσει το δεύτερο , ο οποίος θα είναι 8+$\frac{1}{8}$*8=9. Ο δεύτερος αριθμός θα μας δώσει τον τρίτο ως εφέβδομό του , άρα πρέπει να διαιρείται ακριβώς με το 7 . Για να γίνει αυτό κάνουμε το εξής:

7*8=56

7*9=63

63+$\frac{1}{7}$*63=72

Ο τρίτος αριθμός , ο 72 , πρέπει να διαιρείται με το 27. Το Ε.Κ.Π. (72,27) είναι το 216.

Άρα ,

3*56=168

3*63=189

3*72=216

216+$\frac{1}{27}$*216=224

Για να αρχίσουν οι τρεις τετράδες των αριθμών που βρέθηκαν με τον παραπάνω τρόπο από τον ίδιο αριθμό , βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των αρχικών τους αριθμών 84 , 189, 168 που ισούται με το 1512. Άρα , εφαρμόζοντας τις σχέσεις του καθενός τετραχόρδου βρίσκουμε τους ακέραιους αριθμούς που δίνει ο Αρχύτας.

Για το εναρμόνιο τετράχορδο:

1512 , 1512+$\frac{1}{4}$*1512=1890 , 1890+$\frac{1}{35}$*1890=1944 , 1944+$\frac{1}{27}$*1944=2016

Για το χρωματικό τετράχορδο:

1512 , 1512+$\frac{5}{27}$*1512=1792 , 1792+$\frac{19}{224}$*1792=1944 , 1944+$\frac{1}{27}$*1944=2016

Για το διατονικό τετράχορδο:

1512 , 1512+$\frac{1}{8}$*1512=1701 , 1701+$\frac{1}{7}$*1701=1944 , 1944+$\frac{1}{27}$*1944=2016

Ελληνική Βυζαντινή Μουσική

Το πιο γνωστό όργανο που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των μουσικών διαστημάτων ήταν το μονόχορδο. Ήταν ένα όργανο με μια χορδή που έχει τοποθετηθεί στην οικογένεια του λαούτου. Ονομαζόταν και *Πυθαγόρειος κανών* γιατί πίστευαν ότι το είχε εφεύρει ο Πυθαγόρας. Πολλοί μαθηματικοί εργάστηκαν για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων πάνω στον κανόνα (όπως ο Αρχύτας).Για τον καθορισμό των τονιαίων διαστημάτων της Βυζαντινής Μουσικής εργάστηκε πρώτος ο θεωρητικός Χρύσανθος. Σύμφωνα με τον ίδιο η σειρά των οκτώ φθόγγων της διατονικής κλίμακας είναι η:

ΠΑ-ΒΟΥ-ΓΑ-ΔΙ-ΚΕ-ΖΩ-ΝΗ-ΠΑ

Αυτά τα διαστήματα είναι όλα τόνοι και τα μεν πρώτα πέντε λέγονται τόνοι , τα δε δύο τελευταία (ΖΩ-ΝΗ , ΒΟΥ-ΓΑ) λείμματα , σύμφωνα με τους αρχαίους Έλληνες. Οι Ευρωπαίοι ονομάζουν τα δύο τελευταία ημιτόνια. Ο Χρύσανθος αναφέρει ότι ο μείζων τόνος έχει λόγο προς τον ελάσσονα 12 προς 9 , προς τον ελάχιστον 12 προς 7. Άρα αν πούμε ότι το διάστημα του μείζονος τόνου έχει 12 γραμμές , βρίσκουμε ότι το διάστημα του ελάσσονος ισούται με 9 γραμμές και του ελάχιστου με 7 γραμμές.

Η Μουσική Πατριαρχική Επιτροπή εξέφρασε διαφωνίες στον τρόπο που εργάστηκε ο Χρύσανθος και όρισε τους δεσμούς σε χορδή προς παραγωγή του τετραχόρδου ΔΙ-ΝΗ , παίρνοντας *για το ΔΙ-μήκος χορδής 1, για το ΚΕ- μήκος χορδής τα 8/9 , για το ΖΩ-μήκος χορδής τα 22/27, για το ΝΗ –μήκος χορδής τα ¾.*

Λόγω κάποιων προβλημάτων όμως που προέκυψαν κλήθηκαν δάσκαλοι της εποχής να εκφράσουν τη γνώμη τους για τα διαστήματα αυτά. Έτσι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

ΝΗ	ΠΑ	ΒΟΥ	ΓΑ	ΔΙ	ΚΕ	ΖΩ	ΝΗ	ΠΑ	ΒΟΥ	ΓΑ	ΔΙ	ΚΕ	ΖΩ'	ΝΗ
1	8/9	81/100	3/4	2/3	16/27	27/50	1/2	4/9	81/200	3/8	1/3	8/27	27/100	1/4

Μέγεθος Μουσικού Διαστήματος

Όπως αναφέρει και ο **Χ. Σπυρίδης** στο βιβλίο του <<*Ο Δυϊσμός του Μουσικού Διαστήματος (2004)*>>, στη **Μουσική Ακουστική** ο λόγος δύο ακουστικών συχνοτήτων $\frac{f1}{f2}$ ορίζεται ως μουσικό διάστημα και το μέγεθος του ήχου σχετίζεται με το μέγεθος του μουσικού διαστήματος. Επειδή μάλιστα η συχνότητα και το μήκος μιας δονούμενης χορδής είναι αντιστρόφως ανάλογα , μπορούμε να γράψουμε ότι: $\frac{f1}{f2}=\frac{L2}{L1}$. Αν το f_2 παριστάνει το οξύτερο από τους δύο φθόγγους , το μουσικό διάστημα εκφράζεται ως ο λόγος f_2/f_1.

Το μέγεθος ενός μουσικού διαστήματος δίνεται από τη λογαριθμική σχέση:

μέγεθος μουσικού διαστήματος=$d_k(\delta) = k*\log(f_2/f_1)/\log 2$,

όπου f_1 και f_2 οι συχνότητες των φθόγγων του μουσικού διαστήματος και $f_2>f_1$,ενώ το k είναι μια σταθερά που εκφράζει τις μονάδες μέτρησης του μεγέθους.

Το μέγεθος του μουσικού διαστήματος έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $d_k(\delta_1*\delta_2)=d_k(\delta_1) + d_k(\delta_2)$

Το μέγεθος του αθροίσματος δύο μουσικών διαστημάτων ισούται με το άθροισμα των μεγεθών των δύο μουσικών διαστημάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $\delta_1=(f_2/f_1)$ και $\delta_2=(g_2/g_1)$ είναι τα δύο διαστήματα. Τότε το άθροισμά τους είναι το $\delta_1 * \delta_2 = (f_2g_2/f_1g_1)$ και ισχύει.

$d_k(\delta_1*\delta_2)= d_k(f_2g_2/f_1g_1)= k\log_2(\frac{f2g2}{f1g1})=k\log_2(\frac{f2}{f1}.\frac{g2}{g1})=k\ [\log_2(\frac{f2}{f1}) + \log_2(\frac{g2}{g1})]=k\log_2(\frac{f2}{f1}) + k\log_2(\frac{g2}{g1}) = d_k(f_2/f_1)+d_k(g_2/g_1)=d_k(\delta_1)+d_k(\delta_2)$. □

β) $d_k(\delta_1:\delta_2)=d_k(\delta_1) - d_k(\delta_2)$

Το μέγεθος της διαφοράς δύο μουσικών διαστημάτων ισούται με τη διαφορά των μεγεθών των δύο μουσικών διαστημάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $\delta_1=(f_2/f_1)$ και $\delta_2=(g_2/g_1)$ είναι τα δύο διαστήματα. Τότε η διαφορά τους είναι το $\delta_1:\delta_{2=}(f_2g_1/f_1g_2)$ και ισχύει.

$d_k(\delta_1:\delta_2)= d_k(f_2g_1/f_1g_2)= k\log_2(\frac{f2g1}{f1g2})=k\log_2(\frac{f2}{f1}.\frac{g1}{g2})=k [\log_2(\frac{f2}{f1}) + \log_2(\frac{g1}{g2})]=k\log_2(\frac{f2}{f1}) - k\log_2(\frac{g2}{g1}) = d_k(f_2/f_1)-d_k(g_2/g_1)=d_k(\delta_1) : d_k(\delta_2)$. □

γ) $d_k(\lambda\delta)=\lambda d_k(\delta)$

Το μέγεθος του ακέραιου πολλαπλάσιου ενός μουσικού διαστήματος , που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό ενός μουσικού διαστήματος δ επί ένα φυσικό αριθμό λ , ισούται με το γινόμενο του λ επί του δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\delta=(f_2/f_1)$ ένα διάστημα και $d_k(\delta)$ το μέγεθός του. Έστω λδ το πολλαπλάσιο μουσικό διάστημα . Άρα $d_k(\lambda\delta) = d_k (f_2^{\lambda} / f_1^{\lambda})= k \log_2 (f_2^{\lambda} / f_1^{\lambda})=k\log_2 (f_2^{\lambda}) - k\log_2 (f_1^{\lambda}) =k\lambda \log_2 (f_2) - k\lambda \log_2 (f_1)$

$= \lambda (k\log_2 (f_2) - k\log_2 (f_1))= \lambda d_k (f_2 / f_1)=\lambda d_k(\delta)$. □

δ) $d_k(\frac{1}{\lambda}\delta)=1/\lambda\, d_k(\delta)$

Το μέγεθος του ακέραιου πολλαπλάσιου ενός μουσικού διαστήματος που προκύπτει από την υποδιαίρεση ενός μουσικού διαστήματος δ σε λ ίσα μουσικά διαστήματα , ισούται με το μέγεθος του δ διαιρεμένου δια του λ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το μουσικό διάστημα δ γράφεται $\delta=(f_2/f_1)$. Τότε το διάστημα (1/λ) δ ισούται με ($\sqrt[\lambda]{f2}/\sqrt[\lambda]{f1}$). Άρα $d_k(\frac{1}{\lambda}\delta)= d_k(\sqrt[\lambda]{f2}/\sqrt[\lambda]{f1}) = k\log_2(\sqrt[\lambda]{f2}/\sqrt[\lambda]{f1}) = k\log_2(\sqrt[\lambda]{f2}) - k\log_2(\sqrt[\lambda]{f1}) =\frac{1}{\lambda}(k\log_2 (f_2) - k\log_2 (f_1))= \frac{1}{\lambda} d_k (f_2 / f_1)= \frac{1}{\lambda}d_k(\delta)$. □

Με τη βοήθεια της τελευταίας ιδιότητας προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε ως αρχικό μουσικό διάστημα την οκτάβα , δηλαδή δ=(2/1) ,και την υποδιαιρέσουμε σε k ίσου μεγέθους διαστήματα , τότε το διάστημα που προκύπτει και το οποίο είναι το $\varepsilon=\sqrt[k]{2/1}$, έχει μέγεθος ίσο με :

$d_k(\varepsilon)=\frac{1}{k}\, d_k\,(\delta)=\frac{1}{k}\, d_k\,(2/1)=\frac{1}{k}\, k\,(\log_2 2-\log_2 1)=1$

Άρα έχουμε μια φυσική ερμηνεία της σταθεράς που εμφανίζεται στον ορισμό του μεγέθους. Από την εξίσωση του μεγέθους του μουσικού διαστήματος προκύπτουν οι ακόλουθες μονάδες μέτρησης μεγέθους μουσικών διαστημάτων:

ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ k	ΣΥΓΚΕΡΑΣΜΟΣ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ
12	Ευρωπαϊκός, δωδεκάφθογγος, ημιτονικός	(Ευρωπαϊκό) ημιτόνιο
53	Μερκατορικός	Κόμμα του Μερκάτορα
68	Παλαιοβυζαντινός	Κόμμα ή Γραμμή ή Ηχομόριο
72	Του Χρυσάνθου ή Χρυσανθινός	Κόμμα ή Γραμμή ή Βυζαντινό Ηχομόριο
612	Σχισματικός	Sch (σχίσμα)
665	Δελφικός	Δελφική μονάδα

Σύγχρονες αντιλήψεις

Όπως αναφέρουν και **οι Κεϊσογλου & Σπύρου** στο <<*Μαθηματικά-Μουσική: πορείες παράλληλες*>>, η Πυθαγόρεια προσέγγιση των αρμονικών συνηχήσεων μέσω της μελέτης των αριθμητικών σχέσεων δύο ήχων συνεχίστηκε ως το Μεσαίωνα. Η Μουσική αντιμετωπίστηκε σαν ένας κλάδος της εφαρμοσμένης αριθμητικής και ήταν μία από τις τέσσερις ακαδημαϊκές σπουδές των τεσσάρων κλάδων των Μαθηματικών.

Το πέρασμα από την Πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής σε μια νέα μουσική θεωρία έγινε σταδιακά. Ο 16^{ος} αιώνας χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη της ναυσιπλοΐας, η οποία απαιτεί ακρίβεια στις μετρήσεις και κατασκευή αξιόπιστων ρολογιών. Έτσι παρατηρείται στροφή του ενδιαφέροντος προς τη μελέτη της κίνησης του εκκρεμούς , άρα και των παλμικών κινήσεων. Ενώ λοιπόν οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν με τις αριθμητικές σχέσεις των ήχων , τώρα η μελέτη στρέφεται στον τρόπο παραγωγής των ήχων.

Η μελέτη επικεντρώνεται στο φαινόμενο της παλλόμενης χορδής που είχε μελετήσει και ο Πυθαγόρας . Ο Πυθαγόρας όμως μελέτησε τον ήχο που παράγεται από μια χορδή χωρίς να συνυπολογίσει τις παραμέτρους της τάσης και της μάζας της χορδής. Μαθηματικοί όπως ο Euler ,ο D' Alembert και ο Langrange επιχείρησαν να λύσουν την εξίσωση της παλλόμενης χορδής. Ο Bernoulli βρήκε μια λύση μέσω

τριγωνομετρικών συναρτήσεων , αυτός όμως που έδειξε τη γενική λύση του προβλήματος της παλλόμενης χορδής ήταν ο Fourier το 1822 στο έργο του <<**Theorie analytique de la chaleur**>>.

Ανάλυση Fourier

Ιδιότητες περιοδικών συναρτήσεων

- Αν f , g είναι δύο περιοδικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού τότε η συνάρτηση f+g είναι περιοδική συνάρτηση της περιόδου.
- Αν f περιοδική συνάρτηση με περίοδο T , τότε f (x+k*T)=f(x), k=0,1,2,…

Οι βασικές αυτές ιδιότητες των περιοδικών συναρτήσεων ερμηνεύουν το γεγονός ότι αν συνηχούν δύο νότες και η μία έχει διπλάσια συχνότητα από την άλλη , τότε έχουμε την αίσθηση ότι ακούμε την ίδια νότα. Αυτό μπορεί πολύ απλά να το διαπιστώσει κάποιος απλά πατώντας συγχρόνως τη νότα ΝΤΟ της $2^{ης}$ και της $4^{ης}$ οκτάβας.

Ο Fourier αποδεικνύει ότι κάθε περιοδική συνάρτηση f είναι δυνατόν να αναλυθεί σε άπειρο άθροισμα απλούστερων περιοδικών συναρτήσεων.

Αν υποθέσουμε ότι μέσω ενός μουσικού οργάνου ή της ανθρώπινης φωνής παράγουμε μια νότα , το οποίο σημαίνει ότι έχουμε δημιουργήσει στον αέρα ένα περιοδικό φαινόμενο το οποίο περιγράφεται από ένα άπειρο άθροισμα προσθετέων που ο καθένας περιέχει ημίτονα και συνημίτονα της μορφής cos wt , sin (2wt) , …, cos (nwt) , sin (nwt). Δηλαδή ένα μουσικό όργανο ,όταν παράγει μια νότα , παράγει ήχους διαφόρων συχνοτήτων και για n=1 έχουμε τη βασική συχνότητα της νότας , ενώ οι συχνότητες που προκύπτουν για n=2,3,… είναι οι αρμονικές συνιστώσες της συγκεκριμένης νότας.

Η μελέτη των μουσικών φαινομένων μέσω της ανάλυσης Fourier δημιουργεί νέες δυνατότητες προσέγγισης της αρμονικής συνήχησης δύο μουσικών τόνων. Όταν δύο νότες συνηχούν , η αρμονία ή η δυσαρμονία που παράγεται οφείλεται στη σύμπτωση ή μη των αρμονικών συνιστωσών. Αν στο πιάνο παίξουμε τη συγχορδία ΝΤΟ-ΜΙ-ΣΟΛ-ΝΤΟ έχουμε το αίσθημα της δυσαρμονίας (J.Jeans 1968). Οι αρμονικές συνιστώσες κάθε νότας που παράγονται από το πιάνο είναι πολλές και δεν είναι ίδιες με αυτές που προέρχονται από τις άλλες νότες της συγχορδίας. Αν η ίδια συγχορδία ακουστεί από το φλάουτο δεν υπάρχει η αίσθηση της δυσαρμονίας γιατί οι αρμονικές συνιστώσες που παράγονται από ένα φλάουτο είναι ελάχιστες.

Ας δούμε τώρα τους περιορισμούς στον ήχο που έχει το αυτί διαφόρων ζώων. Η συχνότητα του ήχου μετριέται σε Hertz (Hz) .Έτσι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

ΕΙΔΟΣ	**ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΗΧΟΥ(Hz)**
χελώνα	20-1000
χρυσόψαρο	100-2000
βάτραχος	100-3000
λαγός	300-45000
σκύλος	50-46000
γάτα	30-50000
αρουραίος	1000-60000
ποντίκι	1000-100000
δελφίνι	1000-130000
πιγκουίνος	200-10000
άνθρωπος	20-20000

Θα κλείσουμε το πρώτο μέρος της εργασίας παρουσιάζοντας τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των μαθηματικών και της λειτουργίας των μουσικών οργάνων , εξετάζοντας μουσικά όργανα όπως τα έγχορδα (πιάνο , βιολί, κιθάρα) , τα ντραμς και το ξυλόφωνο.

Τα Μαθηματικά στην Ορχήστρα

Τα μουσικά όργανα είναι χωρισμένα σε πέντε κύριες κατηγορίες , που καθεμιά από αυτές έχει διαφορετική μαθηματική περιγραφή του ήχου που παράγουν τα μουσικά της όργανα.

Οι πέντε αυτές κατηγορίες είναι οι ακόλουθες:

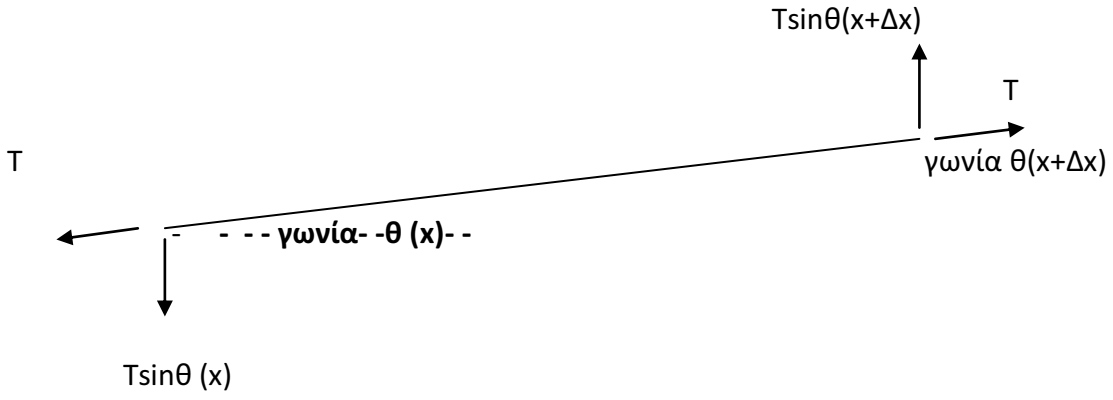
- **Ιδιόφωνα** (που ο ήχος παράγεται από τον κορμό τους)
- **Μεμβρανόφωνα**(που ο ήχος παράγεται από μια μεμβράνη , π.χ. τα ντραμς)
- **Χορδόφωνα** (που ο ήχος παράγεται από μία ή περισσότερες χορδές , π.χ. το βιολί ,το πιάνο και η άρπα)
- **Αερόφωνα** (που ο ήχος παράγεται από τον αέρα που δίνουμε στο όργανο , π.χ. το φλάουτο , το κλαρίνο και το σαξόφωνο)
- **Ηλεκτρόφωνα** (που ο ήχος παράγεται με ηλεκτρονικά μέσα , π.χ. η ηλεκτρική κιθάρα)

Θα ξεκινήσουμε από την κυματική εξίσωση των μουσικών οργάνων με χορδές (χορδόφωνων) και στη συνέχεια θα μελετήσουμε μαθηματικά και τις υπόλοιπες κατηγορίες.

Η κυματική εξίσωση των χορδών

Έστω y η συνάρτηση του χρόνου t και της θέσης x κατά μήκος μιας χορδής. Επειδή η συνάρτηση y είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών , οι κατάλληλες συναρτήσεις θα προκύψουν με τη βοήθεια των μερικών παραγώγων.

Ας θεωρήσουμε , λοιπόν , μια χορδή και τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σ' αυτήν.



Έστω **T η τάση της χορδής (σε N)** και **ρ η πυκνότητα της χορδής (σε Kg/m^3)**.Στη θέση x της χορδής , η γωνία θ(x) που σχηματίζεται από τη χορδή και τον οριζόντιο άξονα ικανοποιεί τη σχέση **εφ θ(x)=$\frac{dy}{dx}$.** Με μια μικρή μεταβολή του μήκους της χορδής από x σε x+Δx προκύπτει ότι η αριστερή κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης T θα είναι Tsinθ(x) και η δεξιά κατακόρυφη συνιστώσα της θα είναι Tsinθ(x+Δx). Υποθέτοντας ότι η γωνία θ(x) είναι μικρή , οι τριγωνομετρικοί αριθμοί sinθ(x) και tanθ(x) είναι περίπου ίσοι. Άρα η διαφορά των κατακόρυφων συνιστωσών της δύναμης είναι:

$$T\tan\theta(x+\Delta x)-T\tan\theta(x)=T\left(\frac{dy(x+\Delta x)}{dx}-\frac{dy(x)}{dx}\right)=T\,\Delta x\frac{\frac{dy(x+\Delta x)-dy(x)}{dx}}{\Delta(x)}\approx T\,\Delta x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Η μάζα της πλευράς της χορδής είναι περίπου ρ Δx. Άρα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα **F=ma** και για επιτάχυνση **a=$\frac{d^2y}{dt^2}$** έχουμε:

$$T\,\Delta x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\approx(\rho\Delta x)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Άρα , απαλείφοντας το Δx και από τα δύο μέλη προκύπτει ο τύπος:

$$T\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\approx\rho\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Άρα προκύπτει **η κυματική εξίσωση** :

$\frac{d^2y}{dt^2}$**=c²** $(\frac{d^2y}{dx^2})$**,** όπου c=$\sqrt{T/\rho}$. (1)

Ο D' Alembert ανακάλυψε μια απλή μέθοδο για την εύρεση της γενικής λύσης της (1). Η ιδέα του βασιζόταν στη παραγώγιση της διαφορικής παράστασης

$$\frac{d^2}{dt^2} - c^2\frac{d^2}{dx^2}$$

ως

$$\left(\frac{d}{dt}+c\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dt}-c\frac{d}{dx}\right).$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε μια αλλαγή μεταβλητών ως εξής:

u=x+ct , v=x-ct

και με τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}=c\frac{dy}{du}-c\frac{dy}{dv}$.

Διαφορίζοντας ξανά έχουμε :

$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{du}(\frac{dy}{dt})\frac{du}{dt}+\frac{d}{dv}(\frac{dy}{dt})\frac{dv}{dt}$ =c(c $\frac{d^2y}{du^2}$ − c$\frac{d^2y}{dudv}$)-c(c$\frac{d^2y}{dvdu}$ −c$\frac{d^2y}{dv^2}$) =

=c²($\frac{d^2y}{du^2}$-2$\frac{d^2y}{dudv}$+$\frac{d^2y}{dv^2}$).

Ομοίως , $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}+2\frac{d^2y}{dudv}+\frac{d^2y}{dv^2}$.

Άρα η (1) γίνεται :

c²$(\frac{d^2y}{du^2}$**-2**$\frac{d^2y}{dudv}$**+**$\frac{d^2y}{dv^2})$**=c²**$(\frac{d^2y}{du^2}$ **+ 2** $\frac{d^2y}{dudv}$**+**$\frac{d^2y}{dv^2})$.

Θα αποδείξουμε ότι η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από το **y=f(x+ct)+g(x-ct) ,** όπου f , g κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις .

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει την κίνηση δύο κυμάτων , όπου το ένα κινείται προς τα αριστερά και το άλλο προς τα δεξιά , και το καθένα κινείται με ταχύτητα c.

Όταν **x=0 ή x=l**, έχουμε ότι y=0(ανεξάρτητο του t).

- Η περίπτωση x=0 δίνει:

0=f(ct)+g(-ct) , για όλα τα t, άρα **g(λ)=- f(-λ)**. Άρα **y=f(x+ct)-f(ct-x)**. Αυτό στην ουσία σημαίνει ότι το κύμα ταξιδεύοντας προς τα αριστερά φθάνει στο άκρο της χορδής και επιστρέφει αντίστροφα σαν ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά.

- Όταν **x=l,y=0 , έχουμε** f(l+ct)=f(ct-l) , για όλα τα t, άρα f(λ)=f(λ+2l).

Θα συνοψίσουμε όλα τα παραπάνω με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα (d' Alembert)

Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης $d^2y/dt^2=c^2\ (d^2y/dx^2)$ *δίνεται από τον τύπο* ***y=f(x+ct)+g(x-ct) ,*** *όπου f , g κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις.*

- Οι λύσεις που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες y=0 για x=0 ή x=l , για όλα τα t , είναι της μορφής **y=f(x+ct)-f(ct-x) ,** ενώ η f ικανοποιεί τη f(λ)=f(λ+2l) για όλα τα λ.

Η κυματική εξίσωση στα αερόφωνα όργανα

Θεωρούμε τον αέρα στο σωλήνα και έστω x η μετατόπισή του κατά μήκος του σωλήνα τη χρονική στιγμή t. Τη μετατόπιση x του αέρα τη χρονική στιγμή t τη συμβολίζουμε με ξ(x,t). As συμβολίσουμε την πίεση του αέρα με ρ . Ορίζουμε ως *ακουστική πίεση* τη διαφορά :

p(x,t)=P(x,t)-ρ , όπου P(x,t) είναι η απόλυτη πίεση.

Από το νόμο του Hooke γνωρίζουμε ότι : p = $-B\frac{d\xi}{dx}$, όπου B είναι ο χώρος που καταλαμβάνει ο αέρας.

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι:

$\frac{dp}{dx}=-\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}$.

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

και

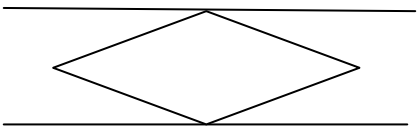
$$\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2p}{dt^2}$$, όπου $c=\sqrt{B/\rho}$.

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι οι κυματικές εξισώσεις της μετατόπισης και της ακουστικής πίεσης αντίστοιχα.

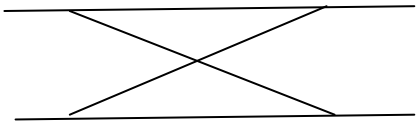
Οι οριακές συνθήκες εξαρτώνται από το αν η άκρη του σωλήνα είναι ανοικτή ή κλειστή. Αν η άκρη του σωλήνα είναι κλειστή , η μετατόπιση ξ του αέρα τείνει να είναι μηδέν για κάθε t. Αν η άκρη του σωλήνα είναι ανοικτή , η ακουστική πίεση p είναι 0 για όλα τα t.

Αν ο σωλήνας είναι ανοιχτός και στα δύο άκρα, όπως στο φλάουτο, η ακουστική πίεση ορίζεται κάτω από τις ίδιες ακριβώς οριακές συνθήκες όπως στην περίπτωση της χορδής. Άρα, η λύση του d' Alembert δουλεύει και σ' αυτήν την περίπτωση.

Άρα έχουμε τα ακόλουθα σχήματα:

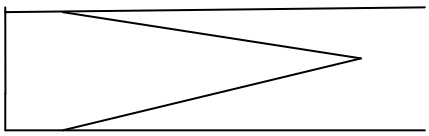


πίεση

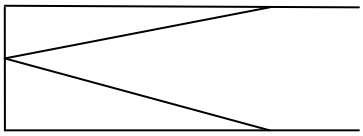


μετατόπιση

πίεση και μετατόπιση σε ένα ανοιχτό σωλήνα



πίεση



μετατόπιση

πίεση και μετατόπιση σε ένα σωλήνα κλειστό στο ένα του άκρο

Η κυματική εξίσωση του τυμπάνου (μεμβρανόφωνο όργανο)

Ας θεωρήσουμε ένα τύμπανο που έχει πυκνότητα ρ και τάση ανά μέτρο Τ(μονάδα μέτρησης Newton/μέτρο). Για να κατανοήσουμε την κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις όπως είναι η επιφάνεια του τυμπάνου , το επιχείρημα είναι ανάλογο όπως στην περίπτωση της μιας διάστασης. Θεωρούμε δύο μεταβλητές x και y , και έστω z να εκφράζει τη μετατόπιση πάνω στην επιφάνεια του οργάνου. Θεωρούμε επίσης ένα ορθογώνιο στοιχείο της επιφάνειας πλάτους Δx και μήκους Δy. Τότε η τάση στην αριστερή και τη δεξιά πλευρά του τυμπάνου ισούται είναι ΤΔy.

Στην περίπτωση της χορδής , όπου είχε μόνο μήκος και όχι πλάτος ,είχαμε δει ότι :

$$T\tan\theta(x+\Delta x)-T\tan\theta(x)=T\left(\frac{dy(x+\Delta x)}{dx}-\frac{dy(x)}{dx}\right)=T\,\Delta x\frac{\frac{dy(x+\Delta x)-dy(x)}{dx}}{\Delta(x)}\approx T\,\Delta x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Στην περίπτωση αυτή η διαφορά μεταξύ των συνιστωσών της τάσης που βρίσκονται στη δεξιά και την αριστερή μεριά είναι περίπου :

$$(T\Delta y)(\Delta x\frac{d^2z}{dx^2}).$$

Ομοίως ,η διαφορά μεταξύ των συνιστωσών της τάσης που βρίσκονται στο μπροστινό και στο πίσω μέρος του ορθογώνιου στοιχείου είναι περίπου:

$$(T\Delta x)(\Delta y\frac{d^2z}{dy^2}).$$

Άρα η συνολική δύναμη πάνω στο στοιχείο της επιφάνειας του τυμπάνου είναι περίπου:

$$T\Delta x\Delta y(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}).$$

Η μάζα του στοιχείου της επιφάνειας του τυμπάνου είναι περίπου :

$$m=\rho\Delta x\Delta y$$

άρα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$T\Delta x\Delta y\,(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2})\approx(\rho\Delta x\Delta y)\,\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ΔxΔy , έχουμε την κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις , η οποία ονομάζεται μερική διαφορική εξίσωση:

$$\rho\,\frac{d^2z}{dt^2}=T\,(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}),$$

η οποία γίνεται

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c^2(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2})$$

αν θέσουμε c=$\sqrt{T/\rho}$, όπως και στην περίπτωση της μία διάστασης , το οποίο παίζει το ρόλο της ταχύτητας των κυμάτων πάνω στη μεμβράνη.

Χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες (r,θ) και από τη σχέση

$$\frac{d^2z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2z}{d\theta^2}=\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}$$

παίρνουμε τη σχέση:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c\,(\frac{d^2z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2z}{d\theta^2}).$$

Θέλουμε οι λύσεις να είναι της μορφής **z=f(r)g(θ)h(t).**

Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στην κυματική εξίσωση , παίρνουμε:

$$f(r)g(\theta)h''(t)=c^2\left(f''(r)g(\theta)h(t)+\frac{1}{r}f'(r)\,g(\theta)h(t)+\frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)h(t)\right).$$

Διαιρώντας τώρα τα μέλη της εξίσωσης με **f(r)g(θ)h//(t)** έχουμε:

$$\frac{h''(t)}{h(t)}=c^2\left(\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}\right).$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης εξαρτάται από το χρόνο t και όχι από τα r και θ , και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης εξαρτάται από τα r και θ και όχι από το χρόνο t. Επειδή t,r,θ είναι τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές , προκύπτει ότι η κοινή αξία των δύο μερών παραμένει σταθερή , δηλαδή είναι ανεξάρτητη από τις μεταβλητές t,r,θ. Άρα έχουμε τις δύο εξισώσεις :

$$h''(t)=-w^2h(t)\ ,$$

με γενική λύση της μορφής h(t)=sin(wt +ϕ) , όπου ϕ σταθερά

και

$$\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}=-\frac{w^2}{c^2}\quad (*)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (*) με r^2 παίρνουμε την εξίσωση **:**

$$r^2\frac{f''(r)}{f(r)}+r\frac{f'(r)}{f(r)}+r^2\frac{w^2}{c^2}=-\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}\ .$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής εξαρτάται μόνο από το r , ενώ το δεξί μέλος εξαρτάται μόνο από το θ. Η συνάρτηση g(θ) είναι περιοδική με περίοδο 2π γιατί είναι μια συνάρτηση γωνίας. Άρα προκύπτει ότι :

$$g''(\theta)=-n^2g(\theta)$$

και η συνάρτηση g(θ) είναι πολλαπλάσιο του **sin(nθ+ψ),** όπου ψ άλλη μια σταθερά.

Άρα η (*) γίνεται :

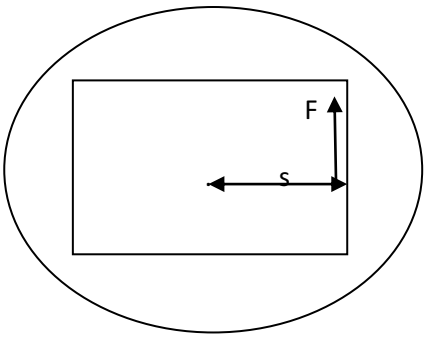
$$r^2\frac{f''(r)}{f(r)}+r\frac{f'(r)}{f(r)}+r^2\frac{w^2}{c^2}=n^2,$$

η οποία μετασχηματίζεται στη μορφή :

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+\left(\frac{w^2}{c^2}-\frac{n^2}{r^2}\right)f(r)=0.$$

Τα ξυλόφωνα και η κυματική εξίσωση

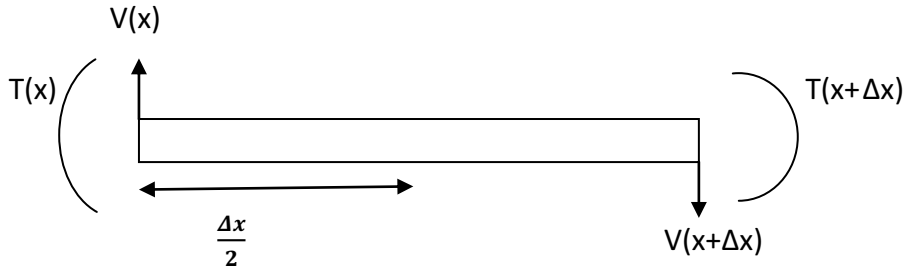
Θα μελετήσουμε τη θεωρία των κυμάτων που διασχίζουν ένα κομμάτι ξύλο . Σκοπός είναι να βρεθεί η κυματική εξίσωση των ξυλόφωνων οργάνων.



Η δύναμη στροφής είναι **T=Fs.**

Αν προσπαθήσουμε να στρίψουμε ένα αντικείμενο κατά μία γωνία εφαρμόζοντας μια δύναμη **F** σε μια απόσταση **s** από τη γωνία , τότε η δύναμη στροφής θα είναι **T=Fs**.

Ας θεωρήσουμε μία πλευρά ξύλου μήκους **Δx** , και έστω **V(x)** η κάθετη δύναμη.



Η δύναμη στροφής είναι:

$$-V(x)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - V(x+\Delta x)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \approx -V(x)\Delta x$$

(το ‘’-‘’ είναι επειδή θεωρούμε ως θετική φορά τη φορά των δεικτών του ρολογιού).

Άρα η δύναμη στροφής ικανοποιεί την εξίσωση:

$$T(x+\Delta x)-T(X)-V(x)\Delta(x)\approx 0 \text{ ή } V(x)\approx \frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x}.$$

Όταν το Δx τείνει στο 0, παίρνουμε $V(x)=\frac{dT(x)}{dx}$.

Άρα προκύπτει:

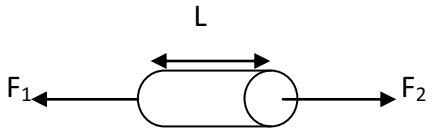
$$V(x)-V(x+\Delta x)\approx -\Delta x\frac{dV(x)}{dx}\approx -\Delta x\frac{d^2T(x)}{dx^2}.$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις V(x) , T(x) είναι πραγματικές συναρτήσεις των x ,t. Άρα μπορούμε να γράψουμε τη συνολική πάνω δύναμη ως **-Δx**$\frac{d^2T(x,t)}{dx^2}$ **.**

Έστω **ρ** η γραμμική πυκνότητα (σε kg/m) , τότε η μάζα δίνεται από τον τύπο **m=ρΔx**. Θεωρώντας y την κατακόρυφη μετατόπιση , ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γίνεται :

-Δx$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = \rho\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$ **ή** $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d^2T}{dx^2}$ **=0.**

Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ της T και του $\frac{d^2y}{dx^2}$ **.** Για να κατανοήσουμε αυτή τη σχέση έχουμε το σχήμα:



Αν μια δύναμη $F=F_2-F_1$ ασκηθεί σε ένα κομμάτι ξύλου μήκους L και εμβαδού A , τότε το μήκος του θα αυξηθεί κατά ΔL. Η τάση ορίζεται να είναι **f=F/A.** Η επέκταση ορίζεται να είναι **ε=ΔL/L.**

Από το νόμο του Hooke έχουμε ότι η επέκταση είναι ανάλογη της τάσης: **f=Eε.**

Η σταθερά E καλείται **Young' s modulus (N/m^2).**

Ανάλογα με το υλικό έχουμε και διαφορετική τιμή της σταθεράς E:

ΥΛΙΚΟ	**ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ E (N/m^2)**
Αλουμίνιο	$7.05X10^{10}$
Χρυσός	$7.8X10^{10}$
Σίδηρος	$21.2X10^{10}$
Ασήμι	$8.27X10^{10}$
Γυαλί	$5.1\text{-}7.1X10^{10}$

Στο κέντρο του ξύλου υπάρχει μια ''ουδέτερη'' επιφάνεια . Η μια πλευρά αυτής της επιφάνειας συμπιέζει τα ''φύλλα'' του ξύλου ,ενώ η άλλη πλευρά τα τεντώνει. Έστω R η ακτίνα , άρα το μήκος της πλευράς στην επιφάνεια αυτή είναι **RΔθ.** Το μήκος του ''φύλλου'' ξύλου είναι **(R-n)Δθ,** άρα η επέκταση είναι $\frac{-n\Delta\theta}{R\Delta\theta}=\frac{-n}{R}$.

Άρα από το νόμο του Hooke, η τάση του ''φύλλου'' είναι $\frac{-En\Delta A}{R}$.

Υποθέτοντας ότι η συνολική οριζόντια δύναμη είναι μηδέν , έχουμε:

$$\frac{-E}{R}\int \boldsymbol{ndA} = \mathbf{0},$$

άρα $\int ndA = 0$.

Η συνολική δύναμη στροφής δίνεται από τον τύπο :

$$\mathbf{T=}\ \frac{E}{R}\int n^2\, dA.$$

Ο τύπος για την ακτίνα R είναι :

$$\mathbf{R=(1+}\ (\frac{dy}{dx})^2\ )^{3/2}\ /\ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Υποθέτοντας ότι $\frac{dy}{dx}$ είναι μικρό , έχουμε ότι $\frac{1}{R}=\frac{d^2y}{dx^2}$. Άρα :

$$\mathbf{T(x,t)=EI}\frac{d^2y}{dx^2}\mathbf{,}\ \text{όπου}\ \mathbf{I=}\int n^2\, dA.$$

Άρα ο τύπος $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\rho}\ \frac{d^2T}{dx^2}$ **=0** γίνεται:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{EI}{\rho}\ \frac{d^4y}{dx^4} \mathbf{=0.}$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση μου υπακούνε τα κύματα πάνω στο ξύλο. Είναι γνωστή ως εξίσωση των **Euler-Bernoulli.**

Θέτοντας y=f(x)g(t), έχουμε:

$$\mathbf{f(x)g''(t)+}\ \frac{EI}{\rho}\ \mathbf{f^{(4)}(x)g(t)=0}$$

ή

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = -\frac{EI}{\rho}\frac{f^{(4)}(x)}{f(x)}\ .$$

Επειδή το αριστερό μέρος δεν εξαρτάται από το x , και το δεξί μέλος δεν εξαρτάται από το t, και τα δύο μέλη είναι σταθερά.

Άρα:

$$\mathbf{g''\ (t)=-w^2g(t)\ \ \&\ \ f^{(4)}(x)=}\frac{w^2\,p}{EI}\ f(x).$$

Η πρώτη εξίσωση δείχνει ότι το g(t) είναι πολλαπλάσιο του **sin(wt+ϕ),** ενώ η δεύτερη εξίσωση έχει λύσεις : **f(x)=Asinkx+Bcoskx+Csinhkx+Dcoshkx ,** όπου k=$\sqrt[4]{\frac{w^2\ p}{EI}}$.

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

y=(Asinkx+Bcoskx+Csinhkx+Dcoshkx) sin(wt+ϕ).

Οι οριακές συνθήκες εξαρτώνται από το τι συμβαίνει στο τέλος του ξύλου. Αν το ένα άκρο του ξύλου είναι ελεύθερο τότε $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ***και*** $\frac{d^3y}{dx^3}$**=0.** Αν το ένα άκρο δεν είναι ελεύθερο , τότε δεν υπάρχει μετατόπιση , άρα **y=0** και $\frac{dy}{dx}$**=0**.

Υπολογίζουμε:

$\frac{dy}{dx}$**=k(Acoskx-Bsinkx+Ccoshkx+Dsinhkx) sin(wt+ϕ)**

$\frac{d^2y}{dx^2}$ **=k^2(-Asinkx-Bcoskx+Csinhkx+Dcoshkx) sin(wt+ϕ)**

$\frac{d^3y}{dx^3}$**=k^3(-Acoskx+Bsinkx+Ccoshkx+Dsinhkx) sin(wt+ϕ).**

Στην περίπτωση του ξυλόφωνου και τα δύο άκρα είναι ελεύθερα. Παίρνουμε τα δύο άκρα να είναι **x=0 & x=l.** Οι συνθήκες $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ***και*** $\frac{d^3y}{dx^3}$**=0** όταν x=0 δίνουν **B=D και A=C.**

Αυτές οι συνθήκες στην περίπτωση που x=l δίνουν:

A(sinhkl-sinkl) + B(coshkl-coskl)=0

A(coshkl-coskl)+B(sinhkl+sinkl)=0.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **cosh^{2}kl-sinh^{2}kl =1** και **sin^{2}kl+cos^{2}kl=1** και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν μία μη μηδενική λύση για τα A ,B όταν η ποσότητα **(sinhkl-sinkl)(sinhkl+sinkl)-(coshkl-coskl)^2** εξαφανίζεται , η συνθήκη γίνεται **coshklcoskl=1.**

Θέτοντας λ=kl, το λ πρέπει να είναι μία λύση της εξίσωσης **coshλ cosλ=1.**

Από την εξίσωση k=$\sqrt[4]{\frac{w^2\ p}{EI}}$, προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα και η συχνότητα δίνονται από τις σχέσεις:

w=$\sqrt{\frac{EI}{p}}\frac{\lambda^2}{l^2}$ **,** **v=**$\frac{w}{2\pi}$**=**$\sqrt{\frac{EI}{p}}\frac{\lambda^2}{2\pi l^2}$**.**

Καθώς το n αυξάνεται , η τιμή του λ_n αυξάνεται , άρα το $\cosh\lambda_n$ αυξάνεται εκθετικά και το και το $\cos\lambda_n$ είναι μια πολύ μικρή θετική ποσότητα. Για n≥5 , έχουμε την προσέγγιση:

$$\boldsymbol{\lambda_n \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-(-1)^n 2e^{-(n+1/2)\pi}-4e^{-2(n+1/2)\pi}.}$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Όπως είδαμε και στο εισαγωγικό μέρος , τα μαθηματικά και η μουσική είναι στενά συνδεδεμένα. Αυτό είναι απολύτως λογικό αν σκεφτούμε ότι τα μαθηματικά ερμηνεύουν το φυσικό μας κόσμο και ο ήχος ,τα ηχητικά κύματα συμβαίνουν στο φυσικό μας κόσμο. Σε κάθε μουσικό κομμάτι υπάρχουν ενσωματωμένες μαθηματικές δομές. Ακούγοντας ένα μουσικό κομμάτι πρέπει να βρούμε τον κατάλληλο τρόπο για να το καταλάβουμε. Σύμφωνα με το φιλόσοφο **David Hume** ο νους λαμβάνει εντυπώσεις που κάποια στιγμή γίνονται ιδέες. Στο κυρίως μέρος της παρούσας εργασίας θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η θεωρία ομάδων περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο τα σύνολα και οι νότες συνδέονται και πως μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο. Τα μαθηματικά δηλαδή προσφέρουν ένα κατάλληλο πλαίσιο στους θεωρητικούς της μουσικής ώστε οι δεύτεροι να βρουν κατάλληλους τρόπους να ακούσουν ένα μουσικό κομμάτι. Ένα μουσικό κομμάτι δεν αποτελείται από ανεξάρτητους μεταξύ τους ήχους , αλλά από ιδέες που συνδέονται η μία με την άλλη. Η θεωρία ομάδων δεν προσφέρει εξισώσεις για την περιγραφή ενός μουσικού κομματιού. Αντίθετα , δίνει τη δυνατότητα στους ακροατές, τους συνθέτες και τους μουσικούς να αντιληφθούν το έργο και να βρουν τρόπους να ακούνε , να αντιλαμβάνονται και να ερμηνεύουν καλύτερα τα μουσικά κομμάτια.

Σ’ αυτό εδώ το μέρος θα μελετήσουμε τη θεωρία ομάδων , ξεκινώντας από τις συμμετρίες που εμφανίζονται στη μουσική. Στη συνέχεια θα δούμε πως η μαθηματική γλώσσα της θεωρίας ομάδων περιγράφει αυτές τις συμμετρίες μελετώντας τις **T/I** και **PLR** ομάδες καθώς και τη χρήση τους στην ανάλυση των έργων των **Johann Sebastian Bach ,Ludwig van Beethoven, Richard Wagner , Paul Hindemith.**

Πριν ξεκινήσουμε όμως κρίνεται σκόπιμο και χρήσιμο να γίνει μια μικρή αναφορά στη σύγχρονη θεωρία της μουσικής και κυρίως σε κάποιους βασικούς ορισμούς και έννοιες της που θα μας απασχολήσουν σ ΄ αυτό το μέρος , όπου όπως αναφέρθηκε θα επιχειρήσουμε την ερμηνεία των μουσικών κομματιών μέσω της θεωρίας ομάδων.

Βασικές μουσικές έννοιες

Συμφωνία και Ασυμφωνία

Στην ιστορία της Μουσικής θεωρίας , οι όροι *συμφωνία* και *ασυμφωνία* έχουν χρησιμοποιηθεί με διαφορετικές ερμηνείες. Ο **Tenney** εντόπισε τις ακόλουθες ερμηνείες των εννοιών αυτών στις διάφορες εποχές της Ευρωπαϊκής Μουσικής:

- Από την αρχαία ελληνική μουσική θεωρία μέχρι τον 9^{ο} αιώνα μ.Χ., δεν υπάρχει η αρμονία με τη σύγχρονη έννοια του ταυτόχρονου ακούσματος διαφορετικών νοτών. Οι όροι *συμφωνία* και *ασυμφωνία* αναφέρονται απλά στη σχέση μεταξύ των φθόγγων ενός μουσικού κειμένου , όπου το κυρίως θέμα τους είναι η ανάπτυξη των κλιμάκων.

- Μεταξύ 900 και 1300 μ.Χ. , οι όροι αναφέρονται στην ποιότητα του ήχου που παράγεται από δύο νότες που παίζονται ταυτόχρονα, ανεξάρτητα από το μουσικό κείμενο. Την περίοδο αυτή μόνο έξι διαστήματα θεωρούνται σύμφωνα : (2:1) ,(3:2),(4:3),(3:1),(8:3), (4:1). Τα υπόλοιπα θεωρούνταν ασύμφωνα (ή διάφωνα). Αυτό μπορεί να οφείλεται και στο γεγονός ότι η κλίμακα που χρησιμοποιείται την περίοδο αυτή είναι η Πυθαγόρεια κλίμακα.

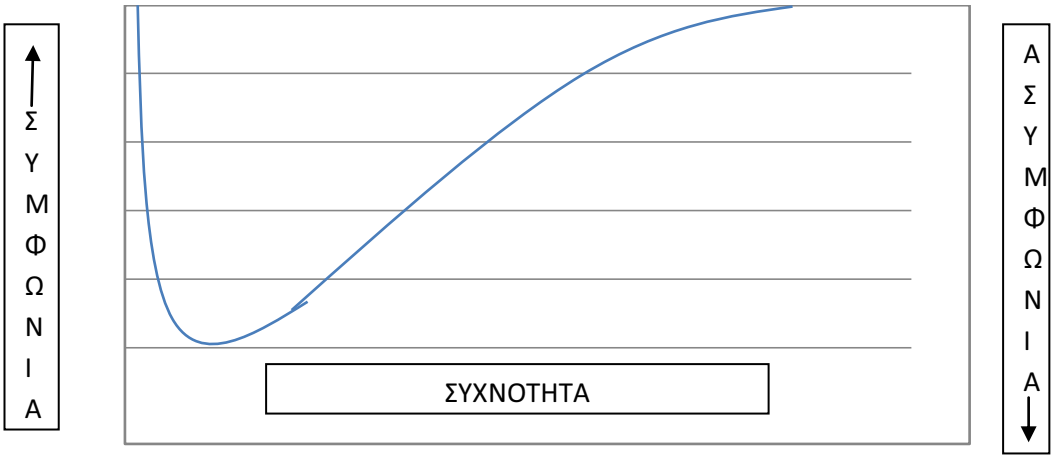
- Μεταξύ των χρόνων 1300 και 1700 , αυτό που ενδιαφέρει τους μουσικούς είναι το αποτέλεσμα στον ήχο που βγαίνει από το ταυτόχρονο άκουσμα δύο νοτών σε κάθε μουσικό κομμάτι. Αυτό σημαίνει ότι οι ίδιες νότες θεωρούνται ως σύμφωνες σε ένα κομμάτι και ως ασύμφωνες σε ένα άλλο.

- Τον 18^{ο} αιώνα ο **Rameau** εισάγει την έννοια της **θεμελιώδης βάσης** , και έτσι μια νότε θεωρείται σύμφωνη ή ασύμφωνη ανάλογα με τη σχέση της με τη βάση.

- Τον 19^{ο} αιώνα , ο **Helmholtz** επιστρέφει στη μελέτη της ποιότητας του ήχου που παράγεται από δύο νότες που παίζονται ταυτόχρονα και αυτή η ποιότητα είναι ανεξάρτητη από το μουσικό κείμενο.

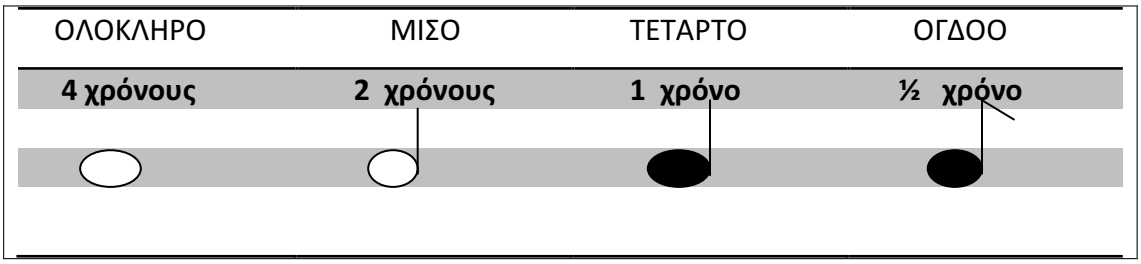
Ο Γαλιλαίος και **ο Mersenne** (16^{ος} -17^{ος} αιώνας) ανακάλυψαν τη σχέση μεταξύ μουσικού φθόγγου και συχνότητας. Η ερμηνεία της *συμφωνίας* ήταν ότι όταν δύο νότες έχουν τις συχνότητές τους σε απλή αναλογία τότε υπάρχει μια ομαλότητα και μια περιοδικότητα στον ήχο που βγαίνει από τις δύο αυτές νότες. Η εξήγηση αυτή βέβαια δεν βασίζεται σε αντικειμενικά κριτήρια καθώς θεωρεί ότι δύο νότες είναι σύμφωνες επειδή εμείς τις ακούμε σύμφωνες.

Οι Plomp & Levelt (1960) , φαίνεται πως είναι οι πρώτοι που εφάρμοσαν μια πειραματική ανάλυση για τη συμφωνία και την ασυμφωνία σε ένα μεγάλο αριθμό αντικειμένων. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους δείχνουν ότι σε μια κλίμακα συμφωνίας που κυμαίνεται από 0 (συμφωνία) ως 1 (ασυμφωνία), η συχνότητα κυμαίνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



Αξίες φθόγγων

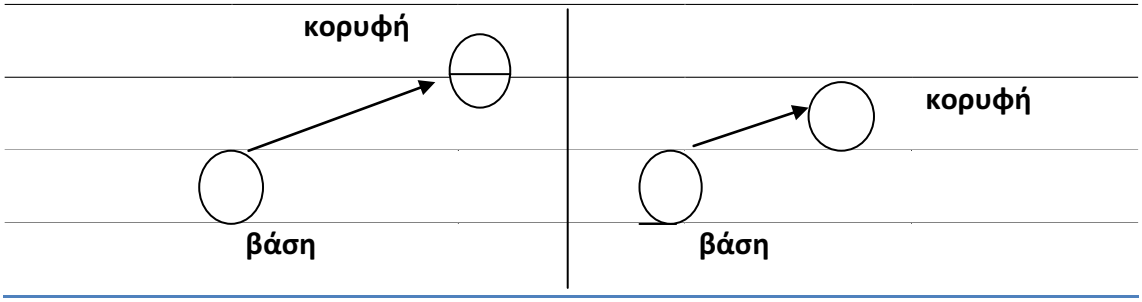
Από το σχήμα κάθε νότας εξαρτάται η διάρκειά της. Τη διάρκεια τη μετράμε σε χρόνους.



Διάστημα

Η απόσταση που χωρίζει τον ένα φθόγγο από τον άλλο λέγεται διάστημα. Οι φθόγγοι του διαστήματος είναι δύο , ο χαμηλότερος που λέγεται **βάση** και ο ψηλότερος που λέγεται **κορυφή.**

π.χ.



Τα διαστήματα χωρίζονται σε **ανιόντα** και σε **κατιόντα.** Ανιόντα λέγονται τα διαστήματα που ο πρώτος φθόγγος είναι χαμηλότερος και ο δεύτερος ψηλότερος και κατιόντα τα διαστήματα που ο πρώτος είναι ψηλότερος και ο δεύτερος χαμηλότερος.

ημιτόνιο= το μικρότερο διάστημα ανάμεσα σε δύο νότες

τόνος= δύο ημιτόνια

τριημιτόνιο= τρία ημιτόνια

Τα διαστήματα χωρίζονται επίσης σε **μελωδικά** και **αρμονικά.**

Μελωδικά λέγονται αυτά που οι φθόγγοι τους ακούγονται διαδοχικά , δηλαδή ο ένας κατόπιν του άλλου , οπότε ακούγεται πρώτα ο χαμηλότερος και μετά ο ψηλότερος ή πρώτα ο ψηλότερος και μετά ο χαμηλότερος.

Αρμονικά λέγονται αυτά που οι φθόγγοι τους ακούγονται ταυτόχρονα και γράφονται ο ένας πάνω στον άλλο. Τα αρμονικά διαστήματα χωρίζονται σε **σύμφωνα** και **διάφωνα .**

Για τα σύμφωνα έχουμε τις υποδιαιρέσεις :

α) τελείως σύμφωνα: μας δίνουν ένα ολοκληρωμένο άκουσμα

β) ατελώς σύμφωνα: μας δίνουν μερική αυτοτέλεια χωρίς να μας δημιουργούν με το άκουσμά τους ένα πραγματικό τέλος.

Διάφωνα διαστήματα είναι εκείνα που δεν ακούγονται ευχάριστα. Δημιουργούν μεταξύ των φθόγγων που τα αποτελούν μία διαφωνία , ένα μάλωμα και ζητούν στην κλασσική μουσική μια λύση , δηλαδή μια κατάληξη σε ένα σύμφωνο διάστημα.

Κλίμακες

Κλίμακα στα αρχαία ελληνικά σημαίνει *σκάλα* και *βαθμίδα= σκαλοπάτι.*

Στο εισαγωγικό μέρος είδαμε πως η Πυθαγόρεια κλίμακα της μουσικής προέκυψε από την πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση των δύο βασικών διαστημάτων του βαβυλωνιακού τετράχορδου που είναι η αρμονία (2/1) και η δι' οξειάν(3/2). Επειδή η ανθυφαίρεση αυτή είναι άπειρη μηδένισαν κάποιο υπόλοιπο και έτσι η μουσική κλίμακα πήρε τη μορφή: **τόνος-τόνος –ημιτόνιο-τόνος-τόνος-τόνος-ημιτόνιο.**

Κάθε κλίμακα έχει 7 βαθμίδες (ΝΤΟ-ΡΕ-ΜΙ-ΦΑ-ΣΟΛ-ΛΑ-ΣΙ). Τις βαθμίδες τις συμβολίζουμε με λατινικούς αριθμούς. Κάθε βαθμίδα έχει το όνομά της:

I=τονική , **II**=επιτονική , **III**=μέση , **IV**=υποδεσπόζουσα , **V** =δεσπόζουσα, **VI**=επιδεσπόζουσα, **VII**=προσαγωγέας

Η μουσική κλίμακα διαιρείται σε δύο υποκατηγορίες , **τη μείζονα και την ελάσσονα**.

Μια μείζονα κλίμακα αποτελείται από :

τόνος-τόνος-ημιτόνιο-τόνος-τόνος-τόνος-ημιτόνιο

δηλαδή η μείζονα κλίμακα είναι η πυθαγόρεια κλίμακα.

Ο πίνακας συχνοτήτων για τη μείζονα κλίμακα είναι :

Νότα	**ντο**	**ρε**	**μι**	**φα**	**σολ**	**λα**	**σι**	**ντο**
Συχνότητα	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

Μια ελάσσονα κλίμακα διακρίνεται σε δύο είδη , τις **αρμονικές** και τις **μελωδικές.**

Αρμονικές είναι οι ελάσσονες κλίμακες που είναι ίδιες και στο ανέβασμα και στο κατέβασμα και μελωδικές είναι οι ελάσσονες κλίμακες που είναι διαφορετικές στο κατέβασμα απ' ότι στο ανέβασμα.

Η αρμονική κλίμακα αποτελείται από:

τόνος-ημιτόνιο-τόνος-τόνος-ημιτόνιο-τριημιτόνιο-ημιτόνιο

Η μελωδική δεν έχει τριημιτόνιο.

Σημεία αλλοιώσεως

δίεση # : ανεβάζει τη νότα ένα ημιτόνιο

ύφεση b : κατεβάζει τη νότα ένα ημιτόνιο

αναίρεση♮ : επαναφέρει τη νότα στη φυσική της κατάσταση

Η σειρά των διέσεων είναι : **ΦΑ-ΝΤΟ-ΣΟΛ-ΡΕ-ΛΑ-ΜΙ-ΣΙ**

και η σειρά των υφέσεων είναι : **ΣΙ-ΜΙ-ΛΑ-ΡΕ-ΣΟΛ-ΝΤΟ-ΦΑ.**

Κλίμακες με διέσεις

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την αντιστοιχία μεταξύ μιας μείζονας και μιας ελάσσονας κλίμακας που η μία είναι **σχετική** της άλλης , δηλαδή οι δύο αυτές κλίμακες έχουν τον ίδιο οπλισμό.

ΜΕΙΖΟΝΕΣ	ΕΛΑΣΣΟΝΕΣ	ΟΠΛΙΣΜΟΣ
ΝΤΟ	**ΛΑ**	**-**
ΣΟΛ	**ΜΙ**	**ΦΑ#**
ΡΕ	**ΣΙ**	**ΦΑ# ,ΝΤΟ#**
ΛΑ	**ΦΑ#**	**ΦΑ# , ΝΤΟ# , ΣΟΛ#**
ΜΙ	**ΝΤΟ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#**
ΣΙ	**ΣΟΛ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#,ΛΑ#**
ΦΑ#	**ΡΕ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#,ΛΑ#,ΜΙ#**
ΝΤΟ#	**ΛΑ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#,ΛΑ#,ΜΙ#,ΣΙ#**

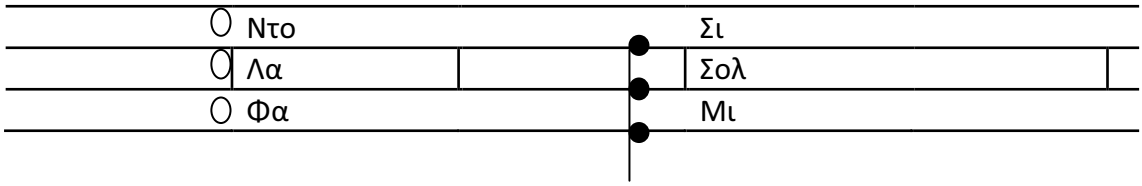
Κλίμακες με υφέσεις

Ομοίως έχουμε τον παρακάτω πίνακα για τις σχετικές κλίμακες με υφέσεις:

ΜΕΙΖΟΝΕΣ	**ΕΛΑΣΣΟΝΕΣ**	**ΟΠΛΙΣΜΟΣ**
ΦΑ	ΡΕ	ΣΙb
ΣΙb	ΣΟΛ	ΣΙb,ΜΙb
ΜΙb	ΝΤΟ	ΣΙb,ΜΙb,ΛΑb
ΛΑb	ΦΑ	ΣΙb,ΜΙb,ΛΑb,ΡΕb
ΡΕb	ΣΙb	ΣΙb,ΜΙb,ΛΑb,ΡΕb,ΣΟΛb
ΣΟΛb	ΜΙb	ΣΙb,ΜΙb,ΛΑb,ΡΕb,ΣΟΛb,ΝΤΟb
ΝΤΟb	ΛΑb	ΣΙb,ΜΙb,ΛΑb,ΡΕb,ΣΟΛb,ΝΤΟb,ΦΑb

Συγχορδίες

Συγχορδία λέγεται το ταυτόχρονο άκουσμα τριών ή και περισσότερων φθόγγων οι οποίοι είναι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο , π.χ



Το είδος της συγχορδίας καθορίζεται από το είδος των διαστημάτων που περιέχει.

Τώρα μπορούμε να δούμε με ποιον τρόπο συνδέεται η θεωρία ομάδων με τη μουσική ξεκινώντας από την έννοια της συμμετρίας.

Συμμετρία στη μουσική

Η ***σχεδόν* συμμετρία** είναι πιο συνήθης στη μουσική από την απόλυτη συμμετρία. Σε ένα μουσικό κομμάτι ο αριθμός των ημιτόνιων μεταξύ των νοτών ποικίλλει ώστε να δοθεί η κατάλληλη αρμονία. Όπως γράφει και **ο David J.Benson** στο έργο του *<<MUSIC-A Mathematical Offering>>,* στο *Richard Strauss' Elektra (1906-1908)* , παρόλο που η συμμετρία παίζει ελάχιστο ρόλο, η επιρροή της είναι φανερή στην επιλογή του κλειδιού στο οποίο θα παιχτεί το κομμάτι. Η εισαγωγή αρχίζει με το κομμάτι του Αγαμέμνονα στη ΡΕ ελάσσονα. Στη συνέχεια το κομμάτι της Ηλέκτρας αποτελείται από συγχορδίες στη ΣΙ ελάσσονα και στη ΦΑ ελάσσονα, που τοποθετούνται συμμετρικά γύρω από τη ΡΕ – η κλίμακα έχει τη σειρά ΝΤΟ-ΡΕ-ΜΙ-ΦΑ-ΣΟΛ-ΛΑ-**ΣΙ**-ΝΤΟ-**ΡΕ**-ΜΙ-**ΦΑ** κτλ. Ακολούθως , στο μονόλογο της Ηλέκτρας , ο Αγαμέμνονας συνοδεύεται με ΣΙb και η Κλυταιμνήστρα με ΦΑ# , που είναι πάλι συμμετρικά ως προς το ΡΕ. Η όπερα συνεχίζεται με αυτόν τον τρόπο.

Ο λόγος για τον οποίο η συμμετρία στη μουσική είναι σημαντική έγκειται στο γεγονός ότι η ομαλότητα του σχεδίου μας δημιουργεί προσδοκίες για το τι θα ακολουθήσει. Η καλή μουσική περιέχει μια ισορροπία μεταξύ προσδοκίας και έκπληξης. Στο παραπάνω παράδειγμα υπήρχε μια οριζόντια ανάκλαση. Παραδείγματα κυκλικής συμμετρίας μπορούν επίσης να βρεθούν στη μουσική.

Στο ***Capriccio,K.395*** για πιάνο του **Mozart ,** υπάρχει σχεδόν συμμετρία. Κάθε ομάδα από νότες από τη δεξιά μεριά αρχίζει από ένα σταδιακό ανέβασμα το οποίο ακολουθεί ένα σταδιακό κατέβασμα , ενώ κάθε ομάδα από νότες από την αριστερή μεριά αρχίζει με ένα σταδιακό κατέβασμα το οποίο ακολουθεί ένα σταδιακό ανέβασμα. Κάθε ζευγάρι που αποτελείται από τις δύο αυτές ομάδες νοτών διαφέρει από το προηγούμενό του και έτσι δεν μας δημιουργείται το αίσθημα της πλήξης.

Η άρπα των Nzakara

Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα από το άρθρο του Chemillier(2002). Οι Nzakara και Zande από το Κονγκό και το Σουδάν έχουν μια μουσική παράδοση που περιλαμβάνει ποίηση που τραγουδιέται με συνοδεία της πεντάχορδης άρπας. Οι πέντε χορδές της άρπας αντιστοιχούν στις νότες ΝΤΟ-ΡΕ-ΜΙ-ΣΟΛ-ΣΙb . Αυτές οι πέντε χορδές μοιάζει να έχουν κυκλική διάταξη και όχι ευθεία:

0

4 1

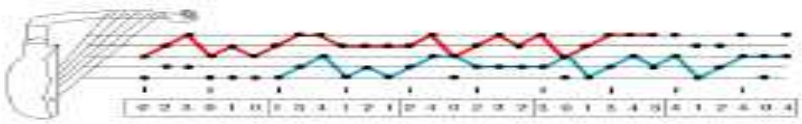
3 2

Οι χορδές εμφανίζονται σε ζεύγη και υπάρχουν μόνο πέντε πιθανά ζεύγη . Οι χορδές του ζεύγους έχουν ένα μοναδικό κοινό γείτονα και χρησιμοποιώντας τον κοινό αυτό γείτονα-αριθμό ονομάζουμε τα ζεύγη.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

ΟΝΟΜΑ	ΧΟΡΔΕΣ	
0	1	4
1	0	2
2	1	3
3	2	4
4	0	3

Το επαναλαμβανόμενα σχέδια της άρπας χωρίζονται σε κατηγορίες που ονομάζονται **nebakia , limanza , gitangi.**



Ας δούμε ένα παράδειγμα από το **imanza:**

4 . . . . . .

3 . . . . . .

2 . . . . . .

1 . . . . . .

0 . . . . . .

Χρησιμοποιώντας τα ονόματά τους έχουμε τη σειρά:

120141403424231202014030342231 3

Με την πρώτη ματιά είναι δύσκολο να δούμε κάποιο σχέδιο , αλλά διαιρώντας τα σε ομάδες των 6 έχουμε:

12 014140 342423 120201 403034 2313

Το αρχικό κομμάτι **12** μπορεί να θεωρηθεί ως το τέλος της τελευταίας ομάδας , δηλαδή **231312.**

Κάθε ομάδα των 6 προκύπτει από την προηγούμενη πηγαίνοντας 2 θέσεις κάτω στον κύκλο των 5 χορδών. Υπάρχει επίσης ένα είδος κυκλικής συμμετρίας. Μπορούμε τώρα να αντιστρέψουμε τη σειρά.

Άρα :

213132 430304 102021 324243 041410

και μετά μετασχηματίζουμε την παραπάνω κυκλική διάταξη των πέντε χορδών τοποθετώντας στη θέση της χορδής **x** τη χορδή **5-x** (mod 5). Άρα προκύπτει η σειρά:

014140 342423 120201 403034 231312 , που είναι ίδια με την αρχική σειρά.

ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΟΜΑΔΕΣ

Η μαθηματική δομή που επεξηγεί την έννοια της συμμετρίας είναι η έννοια της ομάδας. Σ΄ αυτήν την παράγραφο θα δοθούν τα βασικά αξιώματα της θεωρίας ομάδων και θα δούμε πως από τα αξιώματα αυτά εξηγείται η έννοια της συμμετρίας.

Σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων. Σύμφωνα με τον **Cantor , σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων ,που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας , είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο. Αυτά τα αντικείμενα καλούνται στοιχεία του συνόλου. Γράφοντας $x \in X$ δηλώνουμε ότι το αντικείμενο x είναι στοιχείο του συνόλου X.

Ένα σύνολο δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλο. Γιατί αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των συνόλων ως ένα σύνολο τότε πηγαίνουμε στο **παράδοξο του Russel** που είναι το ακόλουθο:

Αν το σύνολο όλων των συνόλων θεωρηθεί ως ένα σύνολο , τότε είναι πιθανόν για ένα σύνολο να είναι στοιχείο του εαυτού του, δηλαδή $X \in X$. *Τώρα σχηματίζουμε το*

σύνολο S που αποτελείται από όλα τα X που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Αν το S δεν ανήκει στο S τότε είναι ένα από τα σύνολα X που ικανοποιεί την ιδιότητα των στοιχείων του S, άρα το S Є S. Αν τώρα το S Є S , τότε το S ικανοποιεί την ιδιότητα των συνόλων X που δεν ανήκουν στον εαυτό τους και έτσι το S δεν ανήκει στο S.

Αν X είναι ένα σύνολο , γράφουμε IXI για να δηλώσουμε το πλήθος των στοιχείων του X . Δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

Μερικά παραδείγματα συνόλων είναι τα ακόλουθα:

Το σύνολο {2,4,6} είναι το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς 2,4,6 και μόνον αυτούς. Το σύνολο {F# , C#} είναι το σύνολο που αποτελείται από τις ακολουθίες νοτών των κλιμάκων ΦΑ# και ΝΤΟ# και μόνον αυτές.

Ομάδα είναι ένα σύνολο G μαζί με μία πράξη * που παίρνει δύο στοιχεία g και h του G και τα πολλαπλασιάζει δίνοντας πάλι ένα στοιχείο του G , το οποίο γράφεται ως gh.Για να είναι το G ομάδα πρέπει ο πολλαπλασιασμός να ορίζεται για όλα τα ζεύγη των στοιχείων g και h, και πρέπει να ικανοποιούνται και τα ακόλουθα αξιώματα:

- **(ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)** Δοθέντων των στοιχείων g,h και k της ομάδας G (όχι αναγκαστικά διάφορα μεταξύ τους), το αποτέλεσμα είναι το ίδιο είτε πολλαπλασιάσουμε το gh με το k είτε αν πολλαπλασιάσουμε το g με το hk , δηλαδή : (gh)k=g(hk).
- **(ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ)** Υπάρχει ένα στοιχείο e της ομάδας G , που έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε στοιχείο g Є G, έχουμε eg=g και ge=g.
- **(ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ)** Για κάθε στοιχείο g Є G, υπάρχει ένα αντίστροφο στοιχείο g^{-1} , τέτοιο ώστε gg^{-1}=e και $g^{-1}g$=e.

Αν μια ομάδα εκτός από τα παραπάνω τρία αξιώματα ικανοποιεί και την **(αντι)μεταθετική ιδιότητα** , δηλαδή αν δοθούν δύο στοιχεία g και h της G τότε ισχύει gh=hg , τότε η ομάδα λέγεται **αβελιανή.**

Μπορούμε να δώσουμε ένα παράδειγμα ομάδας κατασκευάζοντας έναν πίνακα πολλαπλασιασμού για μια ομάδα που έχει π.χ. τρία στοιχεία:

	e	**a**	**b**
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Το παραπάνω παράδειγμα είναι μια αβελιανή ομάδα καθώς ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο. Ωστόσο οι πίνακες αυτοί δεν αποτελούν πάντα έναν καλό τρόπο αναπαράστασης μιας ομάδας . Αν έχουμε για παράδειγμα έναν 6x6 πίνακα και θέλουμε να δούμε αν ικανοποιούνται τα τρία αξιώματα της ομάδας. Τότε πρέπει να γίνουν 6x6x6 έλεγχοι μόνο για την προσεταιριστική ιδιότητα!

Ένας καλύτερος τρόπος αναπαράστασης μιας ομάδας είναι μέσω **permutation** , που ορίζεται ως οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να διαταχθεί ένα σύνολο αντικειμένων. **Permutation** ενός συνόλου X είναι μία συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ τέτοια ώστε κάθε στοιχείο y της X μπορεί να γραφεί ως f(x) για ένα μοναδικό $x \in X$. Η f έχει μια αντίστροφη συνάρτηση την f^{-1} . Άρα έχουμε $f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$ και $f(f^{-1}(y))=f(x)=y$.

Για παράδειγμα , αν θεωρήσουμε το σύνολο X={1,2,3,4,5} , η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: f(1)=3 , f(2)=5, f(3)=4 , f(4)=1, f(5)=2 , το οποίο είναι permutation του X και που η αντίστροφη δίνεται ως εξής :$f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(2)=5$, $f^{-1}(3)=1$,$f^{-1}(4)=3$, $f^{-1}(5)=2$.

Υπάρχουν δύο τρόποι συμβολισμού του παραπάνω. Ο πρώτος τρόπος ταξινομεί τα στοιχεία του X και πού αυτά πηγαίνουν. Έτσι για το παραπάνω παράδειγμα έχουμε τον εξής συμβολισμό:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο άλλος τρόπος συμβολισμού είναι ο κυκλικός συμβολισμός. Στο παραπάνω παράδειγμα είδαμε ότι το 1 πάει στο 3, το 3 πάει στο 4 και το 4 επιστρέφει στο 1 , ενώ το 2 πάει στο 5 το οποίο επιστρέφει στο 2. Άρα το συμβολίζουμε ως εξής:

f=(1,3,4)(2,5).

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό , αν ένα στοιχείο δεν είναι στο τέλος του κύκλου , η συνάρτηση το αντιστοιχεί στο αμέσως επόμενο στοιχείο του ίδιου κύκλου . Αν το στοιχείο βρίσκεται στο τέλος του κύκλου , το αντιστοιχεί στο στοιχείο που βρίσκεται στην αρχή του κύκλου.

Το σύνολο όλων των **permutations** ενός συνόλου X αποτελεί μια ομάδα που καλείται **συμμετρική ομάδα** στο σύνολο X , με πράξη τη σύνθεση δύο συναρτήσεων ως εξής:

Στο παραπάνω παράδειγμα είχαμε την συνάρτηση f που αντιστοιχούσε τα στοιχεία του συνόλου X={1,2,3,4,5} ως f(1)=3 , f(2)=5 , f(3)=4 , f(4)=1 , f(5)=2 και είχαμε τους συμβολισμούς:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad f=(1,3,4)(2,5).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση g που είναι άλλος ένας τρόπος αντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων του ίδιου συνόλου X και οι δύο συμβολισμοί της είναι :

$$g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad g=(1,2,5,3)(4)$$

Αν πάρουμε f(g(1))=f(2)=5 και συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο , τότε παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα:

$$fg=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,5,4)$$

και

$$gf=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2,3,4)$$

Επίσης ,

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)$$

Τη συμμετρική αυτή ομάδα τη συμβολίζουμε ως **Symm(X).** Αν X={1,2,….,n} το σύνολο των φυσικών αριθμών από το 1 ως το n, αντί για Symm(X) γράφουμε S_n. Δηλαδή η ομάδα των permutation είναι μια υποομάδα της ομάδας Symm(X).

Γενικά , **υποομάδα H** μιας ομάδας G είναι ένα υποσύνολο του G που τα στοιχεία του ικανοποιούν τα αξιώματα της ομάδας και διατηρεί την πράξη της ομάδας G.

Το Θεώρημα του Cayley

Το θεώρημα του Cayley εξηγεί γιατί τα αξιώματα της θεωρίας ομάδων περιλαμβάνουν τη φυσική έννοια της συμμετρίας.

Έστω G μια ομάδα. Σε κάθε στοιχείο g Є G εφαρμόζουμε permutation στη Symm(G) η οποία στέλνει ένα στοιχείο h Є G στο gh Є G. Μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μια

αντιγραφή της ομάδας G ως ομάδα permutation μέσα στη Symm(G). Ο καλύτερος τρόπος για να το πούμε αυτό είναι εισάγοντας την έννοια **ομομορφισμός ομάδων.**

Έστω G ,H ομάδες , τότε ένας *ομομορφισμός* $f:G \rightarrow H$ είναι μια συνάρτηση από το σύνολο G στο σύνολο H , που *διατηρεί τον πολλαπλασιασμό ,* με την έννοια ότι αντιστοιχεί το ουδέτερο στοιχείο του G στο ουδέτερο στοιχείο του H , ενώ για δύο στοιχεία g_1 , g_2 του G έχουμε:

$$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2).$$

Η εικόνα ενός ομομορφισμού f είναι υποομάδα της H.

Έστω ένας ομομορφισμός $f: X \rightarrow Y$, τότε έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

- Αν δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του X που να πηγαίνουν στην ίδια θέση στο Y (injective), τότε ο ομομορφισμός καλείται **μονομορφισμός**. Δηλαδή αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα , αν $f(x_1)=f(x_2)$,τότε $x_1=x_2$.
- Η εικόνα της συνάρτησης f είναι το υποσύνολο του Y που περιέχει τα f(x) , για όλα τα $x \in X$. Αν κάθε στοιχείο του Y ανήκει στην εικόνα της f (surjective) , τότε ο ομομορφισμός καλείται **επιμορφισμός.**
- Ο ομομορφισμός που είναι και μονομορφισμός και επιμορφισμός (injective + surjective = bilective) καλείται **ισομορφισμός.**

Θεώρημα (Cayley)

Αν G είναι μια ομάδα , έστω f μια συνάρτηση τέτοια , ώστε $f:G \rightarrow Symm(G)$ *για την οποία ισχύει f(g)(h)=gh. Τότε η f είναι ένας μονομορφισμός , και άρα η G είναι ισόμορφη με μία υποομάδα της Symm(G).*

Απόδειξη

Αρχικά πρέπει θα δείξουμε ότι η f (g) είναι *bijective.* Αυτό αποδεικνύεται εύκολα ως εξής:

$f(g^{-1})(f(g)(h))=f(g^{-1})(gh)=g^{-1}(gh)=(g^{-1}g)h=h$, $h \in G$

και ομοίως $f(g)(f(g^{-1})(h))=h$.

Επειδή G ομάδα ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα , με τη βοήθεια της οποίας θα δείξουμε ότι η f είναι ομομορφισμός ως εξής:

$f(g_1g_2)(h)=(g_1g_2)h=g_1(g_2h)=f(g_1)(g_2h)=f(g_1)(f(g_2)(h))=(f(g_1)f(g_2))(h)$.

Τέλος , για να αποδείξουμε ότι η f είναι μονομορφισμός ως εξής:

αν $f(g_1)=f(g_2)$, τότε για κάθε $h \in G$ είναι $f(g_1)(h)=f(g_2)(h)$. Παίρνοντας ως h το ουδέτερο στοιχείο του G, παίρνουμε το ζητούμενο $g_1=g_2$. □

Αριθμητική Modulo 12

Ας θεωρήσουμε την επιφάνεια ενός ρολογιού με τους αριθμούς 0 ως 11 ,που το 0 είναι στη θέση του αριθμού 12. Χρησιμοποιώντας το ρολόι μπορούμε να δούμε τι ώρα θα είναι δύο ώρες μετά τη μία . Μετακινώντας τον ωροδείκτη δύο θέσεις μετά το 1 παίρνουμε το 3. Ομοίως 6 ώρες μετά το 3 παίρνουμε 9. Αν ακολουθήσουμε τώρα την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τι ώρα είναι 4 ώρες μετά το 8 ή 7 ώρες μετά το 9 . Πράγματι , στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε το 0 γιατί επιστρέφουμε πάλι στην αρχή και στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε το 4. Αυτό καλείται **αριθμητική modulo 12.**

Άρα , 1+2=3 mod12

6+3=9 mod12

8+4=0 mod12

9+7=4 mod12.

Με την ίδια λογική ορίζεται και η αφαίρεση. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

1=3-2 mod12

3=9-6 mod 12

8=0-4 mod 12

9=4-7 mod 12

Ενώ οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι απολύτως λογικές και ταυτίζονται με τη συνήθη αριθμητική , οι δύο τελευταίες εξισώσεις απαιτούν για την κατανόησή τους να σκεφτούμε την επιφάνεια του ρολογιού. Αν δηλαδή είμαστε στη θέση 0 και μετακινηθούμε 4 θέσεις προς τα πίσω πάμε στη θέση 8. Άρα 8=0-4. Επειδή δουλεύουμε σε mod 12 , προσθέτοντας ή αφαιρώντας το 12 παίρνουμε έναν αριθμό ,μεταξύ 0 και 11. Άρα,

-12=0=12=24

-13=-1=11=23

-8=4=16=28

Οι μαθηματικοί και οι μουσικοί χρησιμοποιούν το συμβολισμό :

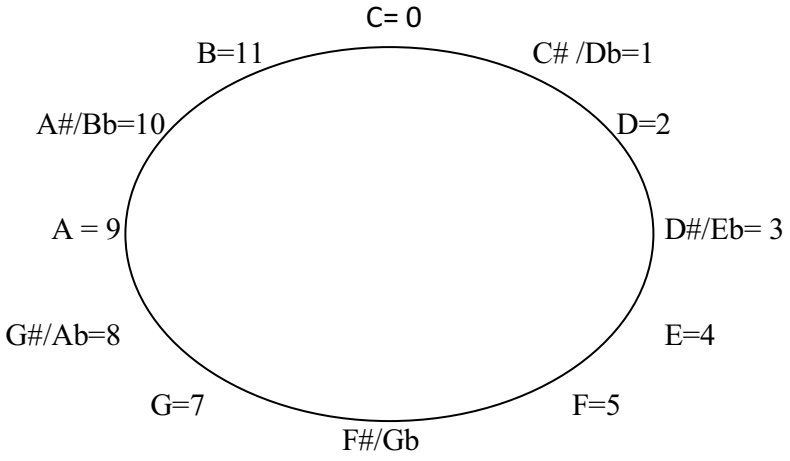
Z_{12} = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}.

Στη μουσική υπάρχουν 12 κλειδιά στο πιάνο , από το μεσαίο ΝΤΟ μέχρι το επόμενο ΝΤΟ , που χωρίζονται ως εξής:

A	**A#** **Bb**	**B**	**C**	**C#** **Db**	**D**	**D#** **Eb**	**E**	**F**	**F#** **Gb**	**G**	**G#** **Ab**	**A**

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει πως δύο νότες που διαφέρουν κατά μία οκτάβα ακούγονται το ίδιο. Κάποιες στήλες αποτελούνται από δύο νότες , π.χ. A# - Bb. Αυτό συμβαίνει γιατί οι δύο αυτές νότες , αν και έχουν διαφορετικό όνομα , βρίσκονται στην ίδια ακριβώς θέση πάνω στα πλήκτρα ή τις χορδές των μουσικών οργάνων και κατά συνέπεια ακούγονται το ίδιο. Οι δύο αυτοί φθόγγοι λέγονται **εναρμόνιοι.**

Όπως αναφέρει και ο **T.M.Fiore** στο άρθρο του *<<Musical Actions of Dihedral Groups (2008)>>,*οι θεωρητικοί της μουσικής βρίσκουν χρήσιμο να μεταφράζουν τις παραπάνω 12 κλάσεις σε modulo 12, παίρνοντας για 0 το C , δηλαδή το ΝΤΟ. Άρα έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



ΤΟ ΜΟΥΣΙΚΟ ΡΟΛΟΙ

Από το παραπάνω σχήμα μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε μουσικό διάστημα αν σκεφτούμε ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κλάσεων , π.χ. C-C# είναι ένα ημιτόνιο. Έτσι το διάστημα από το D στο G# είναι έξι ημιτόνια.

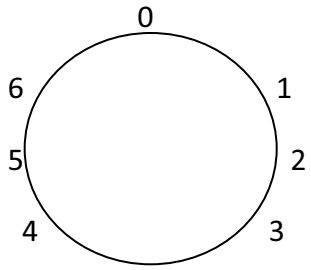
Σημείωση

Τα ονόματα των φθόγγων δίνονται παραπάνω με τη διεθνή τους ονομασία. Η μετάφρασή τους στα ελληνικά έχει ως εξής:

C= ΝΤΟ , D=ΡΕ, E=ΜΙ, F=ΦΑ, G=ΣΟΛ, A=ΛΑ, B=ΣΙ.

Αριθμητική Modulo 7

Είδαμε παραπάνω ότι η αριθμητική mod 12 είναι χρήσιμη για τους θεωρητικούς της μουσικής καθώς στη μουσική υπάρχουν 12 κλειδιά και μπορούμε να βρούμε τα διαστήματα μεταξύ δύο κλειδιών με τη βοήθεια του μουσικού ρολογιού. Το ίδιο χρήσιμη είναι όμως και η αριθμητική mod 7 γιατί από το ένα ΝΤΟ πάνω στο πιάνο μέχρι το επόμενο ΝΤΟ υπάρχουν 7 άσπρα πλήκτρα-κλειδιά. Για να σκεφτούμε όπως παραπάνω , αρκεί να φανταστούμε το ρολόι που αντί να πηγαίνει από το 0 στο 11 να πηγαίνει από το 0 στο 6.



Άρα η πρόσθεση γίνεται:

1+2=3 mod7

4+3=0 mod7

5+4=2 mod7

Για την αφαίρεση έχουμε:

1=3-2 mod7

4=0-3 mod 7

5=2-4 mod7

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις της αφαίρεσης γίνονται κατανοητές αν μετακινήσουμε τον ωροδείκτη του ρολογιού με τις 7 ώρες τις αντίστοιχες κάθε φορά θέσεις προς τα πίσω. Όπως και στο mod12 , έτσι και στο mod7 προσθέτοντας ή αφαιρώντας το 7 βρίσκουμε κάθε φορά έναν αριθμό μεταξύ 0 και 6. Άρα ,

-7=0 mod7

-8=-1=6mod7

18=11=4 mod7

Και στην περίπτωση αυτή , οι μαθηματικοί και οι μουσικοί χρησιμοποιούν το συμβολισμό $Z_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Μεταφορά και Αντιστροφή (Transposition and Inversion)

Μία μουσική σύνθεση ,πολύ γνωστή τον 18° αιώνα, είναι η **Φούγκα.** Η φούγκα έχει συνδεθεί κυρίως με τον J. S. Bach (μία από τις μουσικές του συλλογές φέρει τον τίτλο *μικρά πρελούδια και φούγκες*). Η φούγκα , όπως άλλωστε και όλες οι μουσικές συνθέσεις , περιέχει μία κύρια μελωδία , **το θέμα** , και καθώς η φούγκα προχωράει , το θέμα *μεταφέρεται ή μετατρέπεται* σε άλλες φόρμες.

Στη μουσική οι όροι **μεταφορά** και **μετατροπία** ορίζονται ως εξής:

Μεταφορά ή τρασπόρτο (trasporto) είναι η μεταφορά μιας μουσικής σύνθεσης σε έναν άλλο τόνο από αυτόν που είναι γραμμένη. Είναι δηλαδή η μεταφορά της μελωδίας σε μια άλλη κλίμακα ή διάστημα . Η μεταφορά γίνεται όταν η σύνθεση δεν μπορεί να εκτελεστεί από μια ανθρώπινη φωνή ή από ένα μουσικό όργανο , στον τόνο που είναι γραμμένη αρχικά. Π.χ. όταν είναι γραμμένη για τη φωνή της σοπράνο (υψηλότερη γυναικεία φωνή) και θέλει να την τραγουδήσει και η κοντράλτο (χαμηλότερη γυναικεία φωνή) , πρέπει υποχρεωτικά να μεταφερθεί σε χαμηλότερο τόνο. Η μεταφορά μπορεί να γίνει σε ψηλότερο ή χαμηλότερο τόνο από τον αρχικό , ανάλογα με την ανθρώπινη φωνή ή το μουσικό όργανο , μόνο που πρέπει να διατηρηθεί ο αρχικός τρόπος της κλίμακας , δηλαδή αν ο αρχικός τρόπος είναι μείζονας να μεταφερθεί σε μείζονα ή αν είναι ελάσσονας να μεταφερθεί σε ελάσσονα.

Μετατροπία λέγεται η αλλαγή ταυτότητας μιας μελωδίας. Π.χ. αν μια μελωδία ξεκινήσει σε ΝΤΟ μείζονα και στη συνέχεια με κάποιο σημείο αλλοίωσης περάσει σε άλλη κλίμακα , τότε έχουμε μετατροπία.

Στα μαθηματικά , η **μεταφορά** στο Z_{12} είναι η συνάρτηση

$T_n: Z_{12} \longrightarrow Z_{12}$

που ορίζεται από τον τύπο

$T_n(x):=x+n \mod 12$

και η **αντιστροφή** είναι η συνάρτηση

$I_n : Z_{12} \longrightarrow Z_{12}$

που ορίζεται από τον τύπο

$I_n(x):=-x+n \mod 12$.

Άρα , σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω , μπορούμε να πούμε τα παρακάτω :

$T_2(0) = 0 + 2 = 2 \mod 12$
$T_2(1) = 1 + 2 = 3 \mod 12$
$T_2(2) = 2 + 2 = 4 \mod 12$
$T_2(3) = 3 + 2 = 5 \mod 12$
$T_2(4) = 4 + 2 = 6 \mod 12$
$T_2(5) = 5 + 2 = 7 \mod 12$
$T_2(6) = 6 + 2 = 8 \mod 12$
$T_2(7) = 7 + 2 = 9 \mod 12$
$T_2(8) = 8 + 2 = 10 \mod 12$
$T_2(9) = 9 + 2 = 11 \mod 12$
$T_2(10) = 10 + 2 = 0 \mod 12$
$T_2(11) = 11 + 2 = 1 \mod 12$

Ομοίως $I_0(x)=-x \mod 12$, $I_1(x)=-x+1 \mod 12$ κτλ.

Ο Bach συχνά χρησιμοποιούσε διατονικές μεταφορές και αντιστροφές , που μπορούμε να θεωρήσουμε ως mod 7 μεταφορές και αντιστροφές . Πολλοί όμως σύγχρονοι συνθέτες χρησιμοποιούν mod 12 μεταφορές και αντιστροφές.

Οι μεταφορές και οι αντιστροφές έχουν μια αναπαράσταση στο *μουσικό ρολόι* που κατασκευάσαμε παραπάνω. Η μεταφορά T_1 προκαλεί στον ωροδείκτη στροφή ίση με το $\frac{1}{12}$ μιας πλήρης στροφής , ενώ η αντιστροφή I_0 δίνει μία αντανάκλαση (reflection) του ρολογιού περί της γωνίας 0-6. Άρα οι (T_1,I_0) παράγουν την **δίεδρη ομάδα των συμμετριών του δωδεκάγωνου.**

Επειδή $(T_1)^n=T_n$ και $T_n \circ I_0=I_n$, καταλήγουμε στο ότι οι 12 μεταφορές και οι 12 αντιστροφές σχηματίζουν τη δίεδρη ομάδα των 24 στοιχείων**(order 24)**.

Έχουμε τις συνθέσεις:

$Tm \circ Tn = Tm+n \mod 12$
$Tm \circ In = Im+n \mod 12$
$Im \circ Tn = Im-n \mod 12$
$Im \circ In = Tm-n \mod 12$

Η ομάδα αυτή καλείται *T/I ομάδα .*

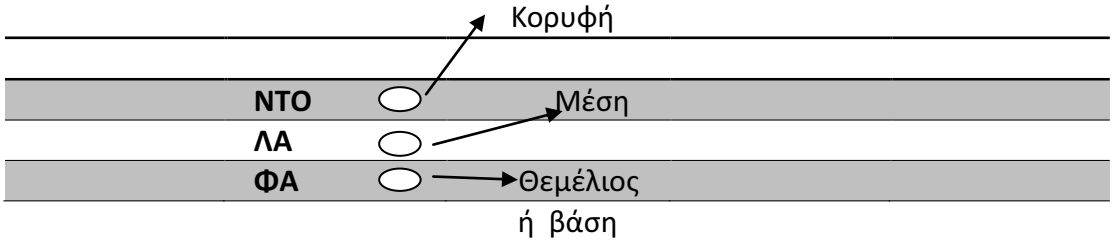
Η ομάδα T/I και οι μείζονες & ελάσσονες συγχορδίες

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω , **συγχορδία** λέγεται το ταυτόχρονο άκουσμα τριών ή και περισσότερων φθόγγων οι οποίοι είναι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο. Υπάρχουν 4 είδη συγχορδιών , οι:

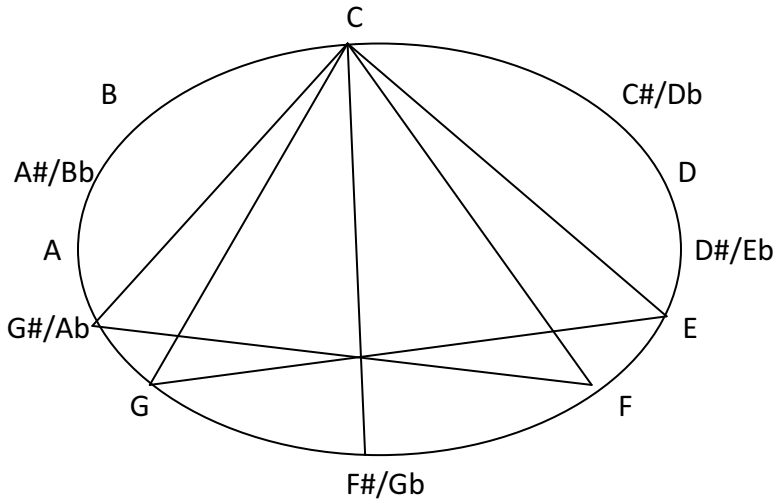
- Μείζονες
- Ελάσσονες
- Αυξημένες
- Ελαττωμένες

Θα ασχοληθούμε με τα δύο πρώτα είδη των τρίφωνων συγχορδιών , δηλαδή των συγχορδιών που αποτελούνται από 3 φθόγγους.
Ο πρώτος (χαμηλότερος)φθόγγος της συγχορδίας λέγεται **θεμέλιος ή βάση** και δίνει το όνομα στη συγχορδία. Αν π.χ. ο πρώτος φθόγγος είναι ΝΤΟ η συγχορδία λέγεται ΝΤΟ.
Ο δεύτερος (μεσαίος) φθόγγος λέγεται **μέση,** γιατί βρίσκεται στη μέση, και ο τρίτος (ψηλότερος) φθόγγος λέγεται **κορυφή.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Μια **μείζονα συγχορδία** αποτελείται από το θεμέλιο φθόγγο , το μεσαίο φθόγγο (μέση) που βρίσκεται 4 ημιτόνια πάνω από το θεμέλιο και τον ψηλότερο φθόγγο (κορυφή) που είναι 7 ημιτόνια πάνω από το θεμέλιο. Για παράδειγμα , η ΝΤΟ-μείζονα συγχορδία αποτελείται από το φθόγγο ΝΤΟ , το φθόγγο που βρίσκεται 4 ημιτόνια πάνω από τη ΝΤΟ , δηλαδή το φθόγγο ΜΙ, και το φθόγγο που βρίσκεται 7 ημιτόνια πάνω από το ΝΤΟ, δηλαδή το φθόγγο ΣΟΛ. Άρα προκύπτει η συγχορδία ΝΤΟ-ΜΙ-ΣΟΛ ή ,με τη διεθνή ονομασία, C-E-G. Άρα έχουμε {0,4,7}={C,E,G} , η οποία αναπαριστάνεται με το ακόλουθο πολύγωνο:



Είπαμε για τις μεταφορές και τις αντιστροφές που δρουν στο Z_{12} και είδαμε ότι κάθε μείζονα συγχορδία αποτελείται από 3 φθόγγους οι οποίοι ανήκουν στις κλάσεις που ορίζουν τα 12 μουσικά κλειδιά. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε μεταφορές και αντιστροφές σε κάθε μείζονα συγχορδία. Το παραπάνω σχήμα δείχνει τι συμβαίνει αν εφαρμόσουμε το I_0 στη ΝΤΟ-μείζονα συγχορδία. Η συγχορδία που προκύπτει δεν είναι μια μείζονα αλλά μια ελάσσονα συγχορδία.

Μία ελάσσονα συγχορδία αποτελείται από το θεμέλιο φθόγγο , το μεσαίο φθόγγο που βρίσκεται 3 ημιτόνια πάνω από το θεμέλιο και την κορυφή που βρίσκεται 7 ημιτόνια πάνω από το θεμέλιο. Για παράδειγμα , η ΦΑ ελάσσονα συγχορδία είναι η {5,8,0}=[ΦΑ,ΛAb ,ΝΤΟ} και το πολύγωνό της εμφανίζεται επίσης στο παραπάνω σχήμα.

Οι μείζονες και οι ελάσσονες συγχορδίες αποτελούν το σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών , δηλαδή των συγχορδιών που έχουν ευχάριστο άκουσμα.

Ας δούμε συγκεντρωτικά τον πίνακα των συμφώνων συγχορδιών:

ΜΕΙΖΟΝΕΣ ΣΥΓΧΟΡΔΙΕΣ	**ΕΛΑΣΣΟΝΕΣ ΣΥΓΧΟΡΔΙΕΣ**
C={0,4,7}	{0,8,5}=f
C#=Db={1,5,8}	{1,9,6}=f#=gb
D={2,6,9}	{2,10,7}=g
D#=Eb={3,7,10}	{3,11,8}=g#=ab
E={4,8,11}	{4,0,9}=a
F={5,9,0}	{5,1,10}=a#=bb
F#=Gb={6,10,1}	{6,2,11}=b
G={7,11,2}	{7,3,0}=c
G#=Ab={8,0,3}	{8,4,1}=c#=db
A={9,1,4}	{9,5,2}=d
A#=Bb={10,2,5}	{10,6,3}=d#=eb
B={11,3,6}	{11,7,4}=e

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει τη δράση της T/I ομάδας. Για παράδειγμα αν εφαρμόσουμε το T_1 π.χ. στο {0,4,7} θα πάρουμε το αμέσως επόμενο στοιχείο της στήλης , δηλαδή το {1,5,8}.

Άρα , $T_1(0,4,7)=(T_1(0),T_1(4),T_1(7))=(1,5,8)$.

Ομοίως, μπορούμε να μεταφέρουμε τη ΝΤΟ μείζονα συγχορδία κατά 7 βήματα ως εξής:

$T_7\{0,4,7\}=\{T_7(0),T_7(4),T_7(7)\}=\{0+7,4+7,7+7\}=\{7,11,2\}$

Ένας μουσικός θα παρατηρήσει ότι με την εφαρμογή της T_7 πάνω στη ΝΤΟ μείζονα παίρνουμε τη ΣΟΛ μείζονα συγχορδία , δηλαδή τη {ΣΟΛ,ΣΙ,ΡΕ}={7,11,2}.

Επίσης είδαμε στο προηγούμενο σχήμα ότι αν εφαρμόσουμε τη I_0 στη μείζονα συγχορδία {ΝΤΟ,ΜΙ,ΣΟΛ}={0,4,7} θα πάρουμε τη ΦΑ ελάσσονα συγχορδία , δηλαδή τη {0,8,5}={ΝΤΟ,ΛAb,ΦΑ} (δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων του συνόλου).

Γενικά , αν θεωρήσουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης να έχει αριθμό 0 , τότε το n-οστό στοιχείο της πρώτης στήλης είναι το

$T_n(0,4,7)=(T_n(o),T_n(4),T_n(7))$ (1)

και το n-οστό στοιχείο της δεύτερης στήλης είναι το

$I_n(0,4,7)=(I_n(0),I_n(4),I_n(7))$ (2).

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, για κάθε δύο σύμφωνες συγχορδίες Y και Z υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο g της T/I ομάδας τέτοιο , ώστε **g Y=Z.** Σύμφωνα με τις (1) ,(2) υπάρχει g_1 ώστε $g_1C=Z$ και g_2 ώστε $g_2C=Y$, άρα υπάρχει g Y=Z, όπου $g=g_1g_2^{-1}$. Το g είναι μοναδικό!

Είδαμε παραπάνω ότι η ΝΤΟ μείζονα συγχορδία {ΝΤΟ,ΜΙ,ΣΟΛ } είναι {0,4,7}. Η συγχορδία αυτή είναι μέρος του κύριου θέματος του **Haydn's Surprise Symphony.** Το πρώτο μέρος του κύριου θέματος είναι **{C,C,E,E,G,G,E,F,F,D,D,B,B,G},** δηλαδή {ΝΤΟ,ΝΤΟ,ΜΙ,ΜΙ,ΣΟΛ,ΣΟΛΜΙ,ΦΑ,ΦΑ,ΡΕ,ΡΕ,ΣΙ,ΣΙ,ΣΟΛ} το οποίο γράφεται {0,0,4,4,7,7,4,5,5,2,2,11,11,7}.

Οι μεταφορές και οι αντιστροφές είναι τρόποι που χρησιμοποιούν οι μουσικοί για την καλή αισθητική και ακουστική των κομματιών τους. Στη συνέχεια θα δούμε τις μεταφορές και τις αντιστροφές που εφαρμόζουν οι μουσικοί σε μια φούγκα και ένα πρελούδιο.

Η φούγκα του Bach

Ο Johann Sebastian Bach (1685-1750) ανέπτυξε και έφερε νέα δεδομένα στην τέχνη της φούγκας. Συνέθεσε τα *Well-Tempered Clavier Book I &II* , καθένα από τα οποία περιλαμβάνει 24 πρελούδια και φούγκες.

Μία φούγκα είναι μια μουσική σύνθεση που συνήθως ξεκινά με το **θέμα** (subject) της μουσικής σύνθεσης , το οποίο αποτελεί τμήμα του κυρίως μέρους του κομματιού. Σε όλη την έκταση του έργου , το θέμα παίζεται πολλές φορές και σε διάφορες φωνές – οι ανδρικές φωνές είναι ο μπάσος (χαμηλότερη) και ο τενόρος(ψηλότερη) και οι γυναικείες είναι η κοντράλτο(χαμηλότερη) και η σοπράνο (ψηλότερη)-και έχουν εφαρμοστεί μεταφορές και αντιστροφές.

Στη συνέχεια θα δούμε τις μεταφορές και τις αντιστροφές που υπάρχουν στη *φούγκα 6, γραμμένη στη ρε μείζονα, του Well-Tempered Clavier Book I.*

Το θέμα της φούγκας είναι το ακόλουθο:

X=**{D,E,F,G,E,F,D,C#,D,Bb,G,A}**={ΡΕ,ΜΙ,ΦΑ,ΣΟΛ,ΜΙ,ΦΑ,ΡΕ,ΝΤΟ#,ΡΕ,ΣΙb,ΣΟΛ,ΛΑ}=
={2,4,5,7,4,5,2,1,2,10,7,9}

και αρχίζει στο πρώτο μέτρο και τελειώνει στην αρχή του τρίτου μέτρου. Το θέμα αποτελείται από 12 νότες!

Στο μέτρο 3, μία άλλη φωνή τραγουδά τη μελωδία:

{A,B,C,D,B,C,A,G#,A,F,D,E}={ΛΑ,ΣΙ,ΝΤΟ,ΡΕ,ΣΙ,ΝΤΟ,ΛΑ,ΣΟΛ#,ΛΑ,ΦΑ,ΡΕ,ΜΙ}=
={9,11,0,2,11,0,9,8,9,5,2,4}

Αν παρατηρήσουμε προσεχτικά τη μελωδία αυτή και τη συγκρίνουμε με την αρχική μελωδία X θα δούμε ότι η παραπάνω μελωδία είναι η T_7X. Δηλαδή προσθέτοντας το 7 σε κάθε στοιχείο του X προκύπτει η παραπάνω μελωδία.

Στο μέτρο 6 το θέμα επιστρέφει στην αρχική του μορφή , όπως και στην εισαγωγή του έργου , αλλά μια οκτάβα χαμηλότερα .

Στο μέτρο 8 υπάρχει η μελωδία :

{E,F,G,A,F,Bb,G,F#,G,Eb,C#,D}={ΜΙ,ΦΑ,ΣΟΛ,ΛΑ,ΦΑ,ΣΙb,ΣΟΛ,ΦΑ#,ΣΟΛ,ΜΙ
b,ΝΤΟ#,ΡΕ}= ={4,5,7,9,5,10,7,6,7,3,1,2}.

Παρατηρώντας την τελευταία μελωδία βλέπουμε ότι οι πέντε πρώτοι φθόγγοι είναι το T_2 των πέντε πρώτων φθόγγων του X, ενώ οι επόμενοι πέντε είναι το T_5 των αντίστοιχων φθόγγων του X. Ο $11^{ος}$ φθόγγος δεν ταιριάζει και ο $12^{ος}$ είναι επίσης το T_5 του $12^{ου}$ φθόγγου του X.

Στο μέτρο 13 υπάρχει η μελωδία:

{A,B,C#,D,B,C#,A,G#,A,F,D,E}={ΛΑ,ΣΙ.ΝΤΟ#,ΡΕ,ΣΙ,ΝΤΟ#,ΛΑ,ΣΟΛ#,ΛΑ,ΦΑ,ΡΕ,ΜΙ}=
={9,11,1,2,11,1,9,8,9,5,2,4}

η οποία είναι το T_7X όπως στο μέτρο 3 , εκτός από τον 3° και τον 6° φθόγγο που στο μέτρο 3 ήταν το ΝΤΟ ενώ τώρα είναι το ΝΤΟ#.

Τα μέτρα 17,18 και 21 είναι αντίστοιχα:

{A,B,C,D,B,C#,A,G#,A,F,D,E}={9,11,0,2,11,1,9,8,9,5,2,4}

{A,B,C#,D,B,C,A,G#,A,F,D,E}={9,11,1,2,11,0,9,8,9,5,2,4}

{A,B,C#,D,B,C#,A,G#,A,F,D,E}={9,11,1,2,11,1,9,8,9,5,2,4}

τα οποία είναι πάλι T_7X όπως το μέτρο 3, εκτός πάλι από τους φθόγγους που αντί για C είναι C#, δηλαδή αντί για ΝΤΟ είναι ΝΤΟ#.

Το διάστημα 7 είναι πολύ σημαντικό ναι τη δυτική μουσική και καλείται **το τέλειο πέμπτο (the perfect fifth).** Σε πολλές φούγκες εφαρμόζεται το T_7. Να δούμε τώρα που εμφανίζεται η αντιστροφή.

Τα μέτρα 14 και 22 είναι αντίστοιχα:

{E,D,C#,B,D,C#,E,F,E,A,C,Bb}={4,2,1,11,2,1,4,5,4,9,0,10}

{E,D,C#,B,D,C#,E,F,E,G,Bb,A}={4,2,1,11,2,1,4,5,4,7,10.9}

Παρατηρώντας τις δύο αυτές μελωδίες βλέπουμε ότι ταυτίζονται με εξαίρεση τους τρεις τελευταίους φθόγγους. Επίσης, τα δύο πρώτα τους στοιχεία E,D είναι τα δύο πρώτα στοιχεία του X αλλά με αντίστροφη σειρά. Ομοίως οι τρεις τελευταίες νότες του 22 είναι οι τρεις τελευταίες νότες του X αλλά με άλλη σειρά.

Αν εφαρμόσουμε I_6X παίρνουμε:

{4,2,1,11,2,1,4,5,4,8,11,9}

το οποίο ,αν εξαιρέσουμε τις τρεις τελευταίες νότες , ταυτίζεται με τα μέτρα 14 και 22.

Βλέπουμε , λοιπόν, ότι οι μεταφορές και οι αντιστροφές παίζουν σημαντικό ρόλο σε ένα μουσικό κομμάτι , μας βοηθάνε να το ακούσουμε και να το κατανοήσουμε καλύτερα ,καθώς και να αναγνωρίσουμε σχέσεις μεταξύ διαφορετικών μερών του κομματιού.

Tristan and Isolde (ένα πρελούδιο απ' τον Wagner)

Ο Richard Wagner (1813-1883) , γεννημένος 63 χρόνια μετά το θάνατο του Bach, είναι γνωστός για τις σπουδαίες και μεγάλες του όπερες. Το πρελούδιό του από τη διάσημη όπερα *Tristan and Isolde* είναι ένα ακόμα παράδειγμα για μεταφορές και αντιστροφές.

Ακούγοντας το κομμάτι πάνω στο πιάνο , ας ονομάσουμε X_i το σύνολο των φθόγγων που ακούγονται στον i κύκλο από το πιάνο. Κοιτάζοντας τις ομάδες των φθόγγων θα παρατηρήσουμε ότι συνδέονται με τον ακόλουθο τρόπο:

X_1	X_2	X_3	X_4
X_5	X_6	X_7	X_8
X_9		X_{12}	X_{13}
{0,2,5,8}	{0,2,6,8}	{0,2,6,8}	{0,2,5,8}

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι μελωδίες της πρώτης στήλης μπορούν με μεταφορές ή αντιστροφές να μετατραπούν στο {0,2,5,8}, οι μελωδίες της δεύτερης στήλης μπορούν να γίνουν {0,2,6,8} , της τρίτης στήλης γίνονται {0,2,6,8} και της τέταρτης στήλης {0,2,5,8}.Επίσης, παρατηρούμε ότι η πρώτη και η τέταρτη στήλη μπορούν να μεταφερθούν ή να αντιστραφούν στην ίδια μελωδία. Το ίδιο και οι δύο μεσαίες στήλες.

Μπορούμε δηλαδή να ακούσουμε μουσικά και να δούμε μαθηματικά ότι υπάρχει μια ομοιότητα στα διαφορετικά επίπεδα , δηλαδή στους διαφορετικούς κύκλους.

Η φούγκα του Hindemith

Ο Paul Hindemith (1895-1963) το 1941 , μόλις 5 χρόνια πριν γίνει Αμερικανός πολίτης, συνέθεσε το έργο *Ludus Tonalis.* Το έργο αυτό είναι μια συλλογή από 12 φούγκες. Επειδή πρόκειται για συλλογή από φούγκες μας θυμίζει κάτι από το Bach, ωστόσο είχε πιο μοντέρνες ιδέες για τη συμμετρία στη μουσική.

Η φούγκα του Hindemith, γραμμένη στη ΣΟΛ μείζονα , είναι ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα μεταφορών και αντιστροφών στη μουσική.

Η φούγκα ξεκινά με το θέμα , όπως ακριβώς και στο Bach, το οποίο είναι:

{G,G,G,G,G,G,G,C,D,G,C,F}={ΣΟΛ,ΣΟΛ,ΣΟΛ,ΣΟΛ,ΣΟΛ,ΣΟΛ,ΣΟΛ,ΝΤΟ,ΡΕ,ΣΟΛ,ΝΤΟ,ΦΑ}
=={7,7,7,7,7,7,7,0,2,7,0,5}.

Στο συγκεκριμένο θέμα παρατηρούμε ότι γίνεται επανάληψη της νότας ΣΟΛ, γεγονός που σημαίνει ότι μπορούμε εύκολα , κατά τη διάρκεια του κομματιού , να αναγνωρίσουμε μεταφορές ή αντιστροφές του θέματος. Για παράδειγμα , τα μέτρα 3 , 8 και 15 περιέχουν επαναλαμβανόμενες νότες άρα αποτελούν μετατροπές του αρχικού θέματος.

Οι δύο ομάδες νοτών {G,C,D} , {G,C,F} που βρίσκονται στο τέλος του θέματος είναι πολύ οικείες στο αυτί μας. Θα εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των ομάδων αυτών με τη βοήθεια των μεταφορών και των αντιστροφών.

Έστω το σύνολο S των μορφών της {G,C,D}={7,0,2} που έχουν υποστεί μεταφορά ή αντιστροφή. Μερικά παραδείγματα του S είναι τα ακόλουθα:

$T_0(7,0,2)=(7,0,2)$

$T_1(7,0,2)=(8,1,3)$

$T_2(7,0,2)=(9,2,4)$

$T_3(7,0,2)=(10,3,5)$

και

$I_0(7,0,2)=(5,0,10)$

$I_1(7,0,2)=(6,1,11)$

$I_2(7,0,2)=(7,2,0)$

$I_3(7,0,2)=(8,3,1)$

κτλ.

Τα στοιχεία του S είναι διατεταγμένα σύνολα. Δύο στοιχεία του S είναι διαφορετικά μεταξύ τους αν έχουν διαφορετική διάταξη. Για παράδειγμα, τα {7,0,2} και {7,2,0} είναι διαφορετικά στοιχεία του S.

Υπάρχουν διάφορες συναρτήσεις από το $S \longrightarrow S$ που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Γνωρίζουμε ήδη τις μεταφορές και τις αντιστροφές , δηλαδή τις συναρτήσεις T_n: $Z_{12} \longrightarrow Z_{12}$, I_n:$Z_{12} \longrightarrow Z_{12}$ οι οποίες εισάγουν τις αντίστοιχες συναρτήσεις από $S \longrightarrow S$. Θα ορίσουμε τώρα μια νέα συνάρτηση $J:S \rightarrow S$. Ορίζουμε τη J(x) να είναι η μορφή που έχει ίδιους τους δύο πρώτους φθόγγους με το x , αλλά σε αντίστροφη σειρά. Για παράδειγμα, J(0,7,5)=(7,0,2) και, ομοίως, J(7,0,2)=(0,7,5).

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη μουσική ερμηνεία της συνάρτησης J , η οποία στην πραγματικότητα είναι μια μουσική συνάρτηση.

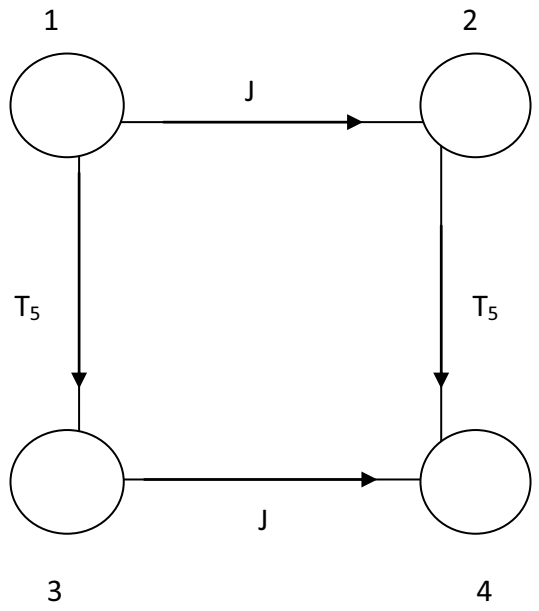
Στο θέμα της φούγκας του Hindemith είδαμε ότι υπάρχουν δύο ομάδες των τριών νοτών. Οι ομάδες αυτές είναι :

{G,C,D}={7,0,2}

{C,G,F}={0,7,5} .

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης J , είναι J(7,0,2)=(0,7,5) και J(0,7,5)=(7,0,2). Αν όμως παρατηρήσουμε το μουσικό κομμάτι θα δούμε ότι η δεύτερη ομάδα των τριών νοτών είναι η {G,C,F} και όχι η {C,G,F}. Αυτή είναι μία από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι θεωρητικοί της μουσικής. Παρόλα αυτά , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σύνολα {G,C,F} και {C,G,F} , επειδή αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία, είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα η συνάρτηση J μπορεί να θεωρηθεί μια καλή μουσική συνάρτηση.

Ας δούμε τώρα το ακόλουθο διάγραμμα:



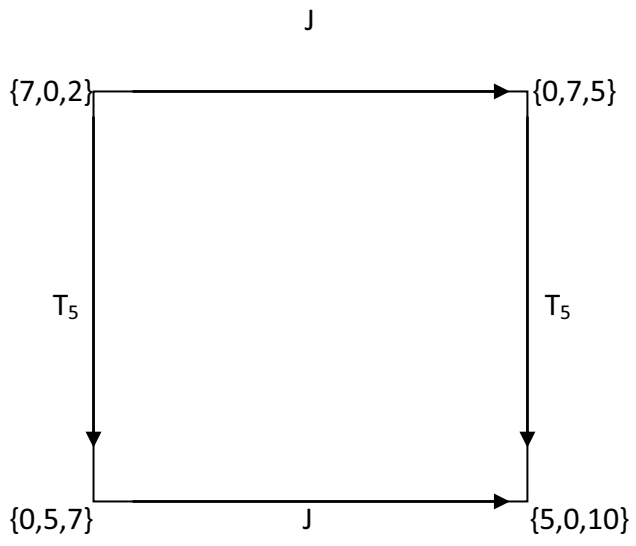
Τοποθετώντας στον πρώτο κύκλο το {7,0,2} , μέσω της συνάρτησης J θα προκύψει το στοιχείο του δεύτερου κύκλου {0,7,5} και μέσω της συνάρτησης T_5 θα προκύψει το στοιχείο {0,5,7} του τρίτου κύκλου. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το στοιχείο του $4^{ου}$ κύκλου ως εξής:

J(0,5,7)=(5,0,10) (δηλαδή από το στοιχείο του τρίτου κύκλου βρίσκουμε το στοιχείο του τέταρτου κύκλου) ,

και

T_5(0,7,5)=(5,0,10) (δηλαδή από το στοιχείο του δεύτερου κύκλου βρίσκουμε το στοιχείο του τέταρτου κύκλου).

Άρα το διάγραμμα γίνεται:



Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει ότι όποιο δρόμο και να ακολουθήσουμε το αποτέλεσμα δεν αλλάζει.

Το παραπάνω διάγραμμα συνδέεται με τη φούγκα του Hindemith με τον ακόλουθο τρόπο:

Κοιτάζοντας στα μέτρα 2 & 4 τις τέσσερις ομάδες των τριών νοτών θα παρατηρήσουμε ότι είναι αυτές που τοποθετήσαμε στο παραπάνω διάγραμμα. Το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει σε τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά μέρη της φούγκας. Αυτά τα μέτρα είναι τα:

2 & 4

9 & 16

37 & 39

55 & 57.

Μέχρι τώρα , λοιπόν , έχουμε δει πως η ομάδα T/I ,δηλαδή η ομάδα των μεταφορών και των αντιστροφών , επιδρά στη μουσική σύνθεση διάσημων συνθετών δίνοντάς μας την ευκαιρία να ανακαλύψουμε έναν νέο τρόπο ακρόασης και κατανόησης των μουσικών κομματιών. Η μαθηματική δομή δεν δίνεται με εξισώσεις αλλά με περιγραφή σχέσεων μεταξύ των λεγόμενων μειζόνων και ελασσόνων συγχορδιών ή απλώς των ομάδων των τριών νοτών. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την επίδραση μιας δεύτερης ομάδας πάνω στη μουσική σύνθεση. Η ομάδα αυτή ονομάζεται **ομάδα PLR**.

Η ΟΜΑΔΑ PLR

Όπως αναφέρει και ο **T.M.Fiore** στο άρθρο του<< *Musical Actions of Dihedral Groups (2008)*>>,η ομάδα PLR είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που τα στοιχεία που εισάγονται είναι μείζονες και ελάσσονες συγχορδίες και τα στοιχεία που εξάγονται είναι επίσης μείζονες και ελάσσονες συγχορδίες. Αυτές οι μουσικές συναρτήσεις μας πηγαίνουν πίσω στο θεωρητικό της μουσικής **Hugo Riemann** (1849-1919). Για το λόγο αυτό , η ομάδα PLR καλείται ***neo-Riemannian group.*** Οι ομάδες PLR και T/I σχετίζονται με έναν πολύ ενδιαφέρον τρόπο που θα δούμε στη συνέχεια.

Ο David Lewin έχει μελετήσει τους PLR μετασχηματισμούς για να ερμηνεύσει ορισμένα φαινόμενα που παρουσιάστηκαν στη μουσική στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, όπου η χρωματική μουσική άλλαζε αποκτώντας πιο μοντέρνα χαρακτηριστικά και οι θεωρητικοί της μουσικής εργάζονταν στο να αναπτύξουν μια εναλλακτική θεωρία.

Θα αρχίσουμε την περιγραφή της ομάδας PLR από την παρουσίαση των τριών συναρτήσεων **P , L ,R** .

Οι τρεις συναρτήσεις P, L, R : S⟶ S ορίζονται ως εξής:

$P(y_1,y_2,y_3)=I_{Y1+Y3}(y_1,y_2,y_3)$

$L(y_1,y_2,y_3)=I_{Y2+Y3}(y_1,y_2,y_3)$

$R(y_1,y_2,y_3)=I_{Y1+Y2}(y_1,y_2,y_3)$

Ενώ στις αντιστροφές της μορφής I_n η γωνία της αντιστροφής είναι ανεξάρτητη από τη συγχορδία που εισάγουμε , στις τρεις αυτές συναρτήσεις η γωνία της αντιστροφής εξαρτάται από τη συγχορδία που εισάγουμε. Το χαρακτηριστικό αυτό τις κάνει να διαφέρουν από τις συνήθεις αντιστροφές.

Για τις τρεις αυτές συναρτήσεις η γωνία αντιστροφής στο μουσικό ρολόι όταν εισάγουμε τη συγχορδία $\{y_1,y_2,y_3\}$ γίνεται:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΓΩΝΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ
P	$\frac{y1+y3}{2}, \frac{y1+y3}{2}+6$
L	$\frac{y2+y3}{2}, \frac{y2+y3}{2}+6$
R	$\frac{y1+y2}{2}, \frac{y1+y2}{2}+6$

Στη συνέχεια , μιλώντας στη γλώσσα της μουσικής , θα δώσουμε μια περιγραφή του τρόπου δράσης των συναρτήσεων P , L, R πάνω στις μείζονες και τις ελάσσονες συγχορδίες.

Στην αρχή αυτού του μέρους της εργασίας είχε γίνει μια αναφορά στις βασικές έννοιες της μουσικής θεωρίας και είχε παρουσιαστεί ο παρακάτω πίνακας:

ΜΕΙΖΟΝΕΣ	ΕΛΑΣΣΟΝΕΣ	ΟΠΛΙΣΜΟΣ
ΝΤΟ	**ΛΑ**	**-**
ΣΟΛ	**ΜΙ**	**ΦΑ#**
ΡΕ	**ΣΙ**	**ΦΑ# ,ΝΤΟ#**
ΛΑ	**ΦΑ#**	**ΦΑ# , ΝΤΟ# , ΣΟΛ#**
ΜΙ	**ΝΤΟ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#**
ΣΙ	**ΣΟΛ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#,ΛΑ#**
ΦΑ#	**ΡΕ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#,ΛΑ#,ΜΙ#**
ΝΤΟ#	**ΛΑ#**	**ΦΑ#,ΝΤΟ#,ΣΟΛ#,ΡΕ#,ΛΑ#,ΜΙ#,ΣΙ#**

Ο πίνακας αυτός δίνει την αντιστοιχία μιας μείζονας κλίμακας και **της σχετικής της** ελάσσονας , δηλαδή δίνει την αντιστοιχία μεταξύ δύο κλιμάκων που έχουν τον ίδιο οπλισμό. Οι θεωρητικοί της μουσικής συνηθίζουν να συμβολίζουν τις μείζονες κλίμακες με κεφαλαία γράμματα και τις ελάσσονες κλίμακες με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα.

Η συνάρτηση P αντιστοιχεί μια σύμφωνη συγχορδία της μιας στήλης του παραπάνω πίνακα στη μοναδική εκείνη σύμφωνη συγχορδία της άλλης στήλης του πίνακα που με τέτοιο τρόπο , ώστε οι δύο συγχορδίες να έχουν τα δύο στοιχεία , το πρώτο και το τρίτο ,ίδια ακριβώς με τη διαφορά ότι είναι γραμμένα αντίστροφα. Για παράδειγμα, P(0,4,7)=(7,3,0) και P(7,3,0)=(0,4,7). Ένας μουσικός θα παρατηρούσε ότι η συγχορδία (0,4,7) είναι η ΝΤΟ μείζονα **(C-major)** και η συγχορδία (7,3,0) είναι η ΝΤΟ ελάσσονα **(c-minor)**.

Γενικά , η συνάρτηση P αντιστοιχεί μια μείζονα συγχορδία **στην ομώνυμή της** ελάσσονα και μια ελάσσονα συγχορδία στην ομώνυμή της μείζονα , όπου ομώνυμες λέγονται δύο συγχορδίες που έχουν το ίδιο όνομα και διαφορετικό οπλισμό.

Η συνάρτηση L αντιστοιχεί μια σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική εκείνη σύμφωνη συγχορδία της άλλης στήλης του πίνακα που έχει τα δύο τελευταία στοιχεία ίδια με τα στοιχεία της αρχικής συγχορδίας , αλλά είναι γραμμένα αντίστροφα.

Για παράδειγμα , L(0,4,7)=(11,7,4) και L(11,7,4)=(0,4,7).

Η συνάρτηση R αντιστοιχεί μια σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική εκείνη σύμφωνη συγχορδία της άλλης στήλης του πίνακα που έχει τα δύο πρώτα στοιχεία ίδια με τα στοιχεία της αρχικής συγχορδίας , αλλά γραμμένα αντίστροφα.

Για παράδειγμα, R(0,4,7)= (4,0,7) και R(4,0,7)=(0,4,7).

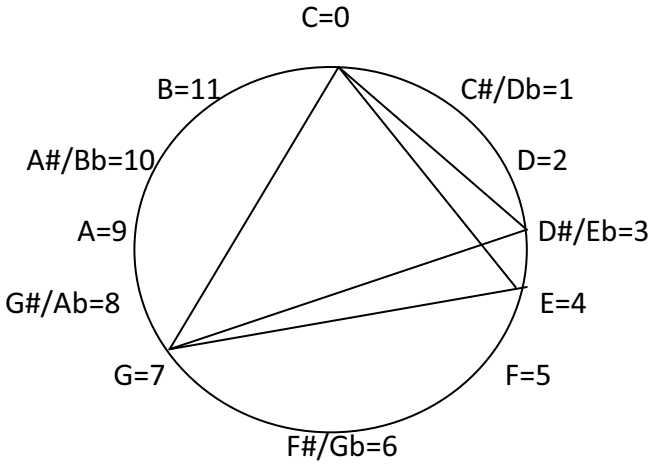
Ένας μουσικός θα παρατηρούσε ότι η συγχορδία (0,4,7) είναι η ΝΤΟ μείζονα **(C-major)** και η συγχορδία (4,0,7) είναι η ΛΑ ελάσσονα **(a-minor).**

Γενικά , όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα , η συνάρτηση R αντιστοιχεί μια μείζονα συγχορδία στη σχετική της ελάσσονα και μια ελάσσονα συγχορδία στη σχετική της μείζονα , αντιστοιχεί δηλαδή μια συγχορδία της μίας στήλης με τη συγχορδία της άλλης στήλης η οποία έχει διαφορετικό όνομα από την πρώτη και τον ίδιο οπλισμό με αυτήν.

Οι τρεις αυτοί μετασχηματισμοί των τρίφωνων συγχορδιών επινοήθηκαν από τους Ευρωπαίους συνθέτες με μεγάλη επιτυχία στα χρόνια 1500=1900. Όπως είδαμε παραπάνω , οι τρεις συναρτήσεις δρουν στη ΝΤΟ- μείζονα συγχορδία ως εξής:

- η συνάρτηση P πηγαίνει το 4 στο 3 (δηλαδή τη συγχορδία {0,4,7} στη συγχορδία {7,3,0} ,
- η συνάρτηση L πηγαίνει το 0 στο 11 (δηλαδή τη συγχορδία {0,4,7} στη συγχορδία {11,7,4},
- η συνάρτηση R πηγαίνει το 7 στο 9 (δηλαδή τη συγχορδία {0,4,7} στη συγχορδία {4,0,9}.

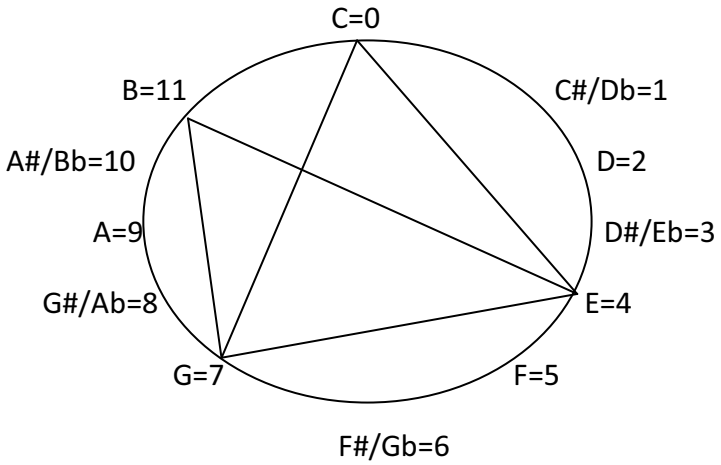
Αυτό σημαίνει ότι είναι ελάχιστη η αλλαγή στον τόνο της φωνής που τραγουδά τη μελωδία. Ας δούμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα:



Εδώ έχουμε το μετασχηματισμό **PC=c** .

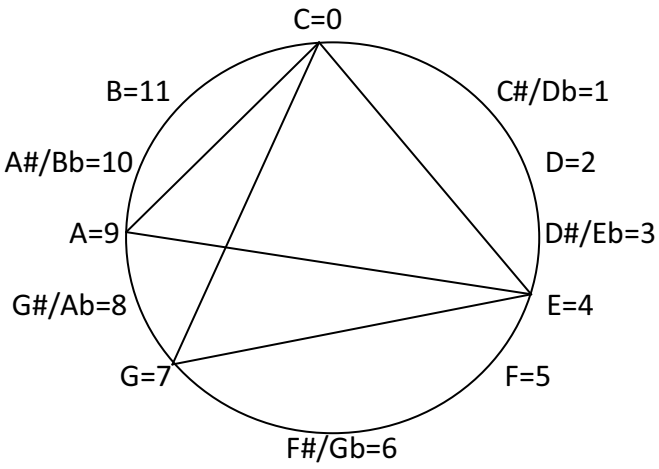
Από το διάγραμμα φαίνεται ότι προκύπτει μια μικρή αλλαγή του τόνου από το 4 στο 3.

Να δούμε τώρα τι γίνεται με τα διαγράμματα των άλλων δύο συναρτήσεων .



Εδώ έχουμε τον μετασχηματισμό **LC=e** και παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μικρή αλλαγή στην τονικότητα της μελωδίας.

Τέλος , για τη συνάρτηση R έχουμε το διάγραμμα:



Στο τελευταίο διάγραμμα έχουμε το μετασχηματισμό **RC=a** και φαίνεται και εδώ ότι η μελωδία αλλάζει ελάχιστα.

Αφού ορίσαμε τις συναρτήσεις P,L,R μπορούμε τώρα να ορίσουμε την ομάδα PLR ως ακολούθως:

Ορισμός

Η ομάδα PLR είναι η ομάδα που το σύνολό της περιλαμβάνει όλες τις πιθανές συνθέσεις των συναρτήσεων P ,L,R και έχει ως πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

Σύμφωνα με τον ορισμό , κάποια από τα στοιχεία της ομάδας PLR είναι τα P,L,R,PoL,LoR, LoL,RoLoP. Τα στοιχεία αυτά δεν είναι άπειρα το πλήθος , αλλά μόνο 24!

Ας δούμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

*Η ομάδα PLR παράγεται από τις συναρτήσεις L και R και είναι δίεδρη του **order 24**(έχει ακριβώς 24 στοιχεία).*

Απόδειξη

Από τις σχέσεις

$P(y_1,y_2,y_3)=I_{Y1+Y3}(y_1,y_2,y_3)$

$L (y_1,y_2,y_3)=I_{Y2+Y3}(y_1,y_2,y_3)$

$R(y_1,y_2,y_3)=I_{Y1+Y2}(y_1,y_2,y_3)$

μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathbf{PT_1=T_1P}$ **,** $\mathbf{LT_1=T_1L}$ **,** $\mathbf{RT_1=T_1R}$**.** Ξεκινώντας από τη ΝΤΟ-μείζονα συγχορδία και εφαρμόζοντας εναλλάξ τις συναρτήσεις R και L, θα πάρουμε την ακόλουθη σειρά συγχορδιών:

C,a,F,d,Bb,g,Eb,c,Ab,f,Db,bb,Gb,eb,B,g#,E,c#,A,f#,D,b,G,e,C , δηλαδή

ντο μείζονα , λα ελάσσονα, φα μείζονα ,ρε ελάσσονα, σι ύφεση μείζονα, σολ ελάσσονα , μι ύφεση μείζονα , ντο ελάσσονα , λα ύφεση μείζονα , φα ελάσσονα , ρε ύφεση μείζονα , σι ύφεση ελάσσονα , σολ ύφεση μείζονα , μι ύφεση ελάσσονα , σι μείζονα, σολ δίεση ελάσσονα, μι μείζονα , ντο δίεση ελάσσονα , λα μείζονα , φα δίεση ελάσσονα , ρε μείζονα , σι ελάσσονα, σολ μείζονα , μι ελάσσονα , ντο μείζονα

Οι 24 ισομορφισμοί R , LR , RLR , … , $R\,(LR)^{11}$, $R(LR)^{12} = 1$ είναι διακεκριμένοι και έτσι η ομάδα PLR έχει τουλάχιστον 24 στοιχεία και το LR έχει διάταξη 12 **(order 12)**.

Είναι $R(LR)^3(C)=c$ και από το γεγονός ότι η $R(LR)^3$ έχει διάταξη 2 **(order 2)** και εφαρμόζεται πάνω στην T_1 , έχουμε ότι $R(LR)^3=P$ και η ομάδα PLR παράγεται μόνο από τις L και R.

Θέτουμε $s=LR$ *και* $t=L$*, τότε* $s^{12}=1$, $t^2=1$ *και* $tst=L(LR)L=RL=s^{-1}$.

Το ότι η ομάδα PLR έχει ακριβώς 24 στοιχεία θα το αποδείξουμε παρακάτω. □

Μουσικά παραδείγματα

Η ροκ μελωδία του **Elvis** τη δεκαετία του 50 υπάρχει σε πολλά δημοφιλή τραγούδια. Αν ξεκινήσουμε από τη ΝΤΟ μείζονα συγχορδία {0,4,7} και εφαρμόσουμε τις συναρτήσεις διαδοχικά τις συναρτήσεις R , L , RoLoRoL , LoR , θα προκύψει η ακολουθία :

ΝΤΟ μείζονα – ΛΑ ελάσσονα – ΦΑ μείζονα – ΣΟΛ μείζονα – ΝΤΟ μείζονα . Η ίδια ακολουθία υπάρχει και στο **'' Stand by me''** της δεκαετίας του 80.

Οι **Beatles** έκαναν την πρώτη τους εμφάνιση το 1964 . Η κύρια μελωδία του **''Oh! Darling''** είναι : **ΜΙ μείζονα – ΛΑ μείζονα – ΜΙ μείζονα – ΦΑ# ελάσσονα- ΡΕ μείζονα – ΣΙ ελάσσονα –ΜΙ μείζονα – ΣΙ ελάσσονα- ΜΙ μείζονα- ΛΑ μείζονα.** Αν εστιάσουμε στις συγχορδίες ΦΑ# μείζονα , ΡΕ μείζονα , ΣΙ ελάσσονα και ΜΙ μείζονα , αυτή είναι η ακολουθία που προκύπτει αν αρχίσουμε από τη ΦΑ# μείζονα και εφαρμόσουμε διαδοχικά τις συναρτήσεις L , R , PoLoR.

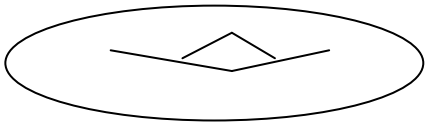
Τα δύο αυτά παραδείγματα δείχνουν ότι η μαθηματική ανάλυση δεν είναι χρήσιμη μόνο στην κλασική μουσική αλλά και στα δημοφιλή τραγούδια.

Η Τοπολογία και ο Φακός

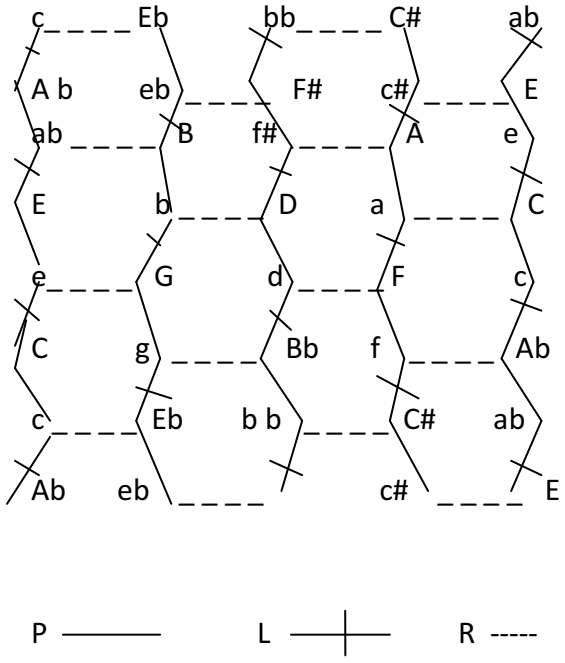
Η τοπολογία είναι ένας πολύ σημαντικός κλάδος των μαθηματικών που μελετά περισσότερο τα ποιοτικά παρά τα ποσοτικά ερωτήματα που προκύπτουν από τη γεωμετρία. Για παράδειγμα , ο κύκλος και το τετράγωνο είναι ποιοτικά ίδια γιατί το ένα μπορεί να μετασχηματιστεί στο άλλο. Η ευθεία μιας πλευράς όμως δεν είναι ποιοτικά ίδια με τον κύκλο. Μπορούμε να πάρουμε μια πλευρά από έναν κύκλο μόνο μέσω ποιοτικών αλλαγών , όπως το κόψιμο του σχήματος. Η τοπολογία δεν ενδιαφέρεται για έννοιες όπως *επιφάνεια , γωνία ,μήκος* , άρα οι τοπολόγοι θεωρούν δύο αντικείμενα ως ίδια αν διαφέρουν μόνο ποσοτικά. Ο κύκλος και το τετράγωνο διαφέρουν ποσοτικά αλλά όχι ποιοτικά. Για το λόγο αυτό θεωρούνται τοπολογικά ίδια.

Ο φακός είναι ένα παράδειγμα μαθηματικού αντικειμένου πολύ σημαντικό για την τοπολογία.

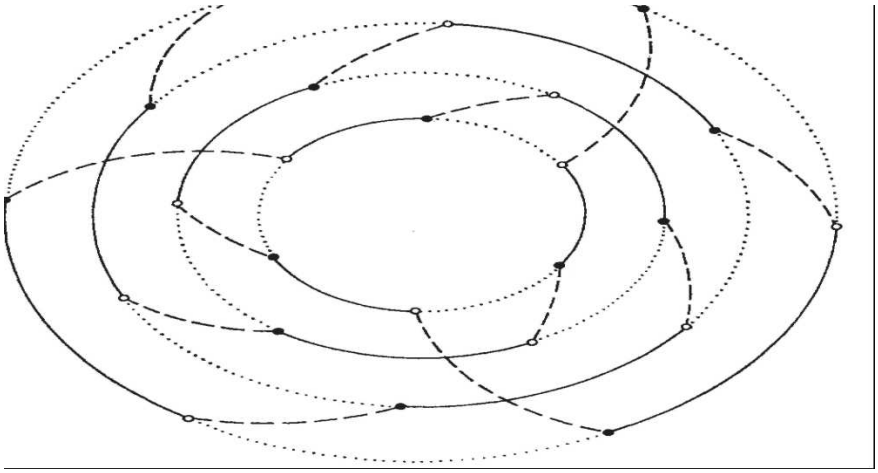
Το σχήμα του φακού είναι :



Ας δούμε τώρα το γράφημα των **Douthett** και **Steinbach ,** που συνδέει τις σύμφωνες συγχορδίες με τις συναρτήσεις **P , L, R**:



Στο παραπάνω σχήμα οι κορυφές είναι οι σύμφωνες συγχορδίες , και η πλευρά μεταξύ δύο κορυφών είναι P , L ή R , όπου οι συναρτήσεις αυτές στέλνουν μια κορυφή σε μια άλλη. Το παραπάνω γράφημα είναι περιοδικό οριζόντια και κάθετα, άρα η οι πλευρές της κορυφής και της βάσης μπορούν να πέσουν οι μεν πάνω στις δε , το ίδιο συμβαίνει και με τις πλευρές της δεξιάς και της αριστερής μεριάς του γραφήματος , αν στρίψουμε το γράφημα κατά το 1/3. Το αποτέλεσμα είναι ένα γράφημα πάνω στο φακό. Ο **Waller** μελέτησε αυτό το γράφημα πάνω στο φακό και παρατήρησε ότι ομάδα αυτομορφισμού είναι η δίεδρη ομάδα με 24 στοιχεία.



Ο ΦΑΚΟΣ ΤΟΥ WALLER

Την ίδια παρατήρηση με το Waller έκαναν και οι Douthett & Steinbach και παρουσίασαν το φακό του Waller στα πλαίσια της νέο- Riemann θεωρίας.

Η κίνηση στη μουσική μπορεί να παρουσιαστεί ως κίνηση πάνω στην επιφάνεια του φακού . Υπάρχει δηλαδή μια σύνδεση ανάμεσα στο φακό , στην ομάδα PLR και στη μελωδία μιας μουσικής σύνθεσης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της σύνδεσης αυτής αποτελεί η **9η Συμφωνία του Μπετόβεν (Beethoven ‘ s Ninth Symphony).**

Η 9η Συμφωνία του Μπετόβεν

Ο Ludwig van Beethoven (1770-1827) συνέθεσε την 9η Συμφωνία του τα χρόνια 1822-1824 , 80 χρόνια δηλαδή πριν τη μελέτη της τοπολογίας από τον **Poincare.** Στα μέτρα 143-176 της μουσικής του σύνθεσης μπορεί κάποιος να δει ότι υπάρχει η ακολουθία των 19 συγχορδιών και συγκεκριμένα:

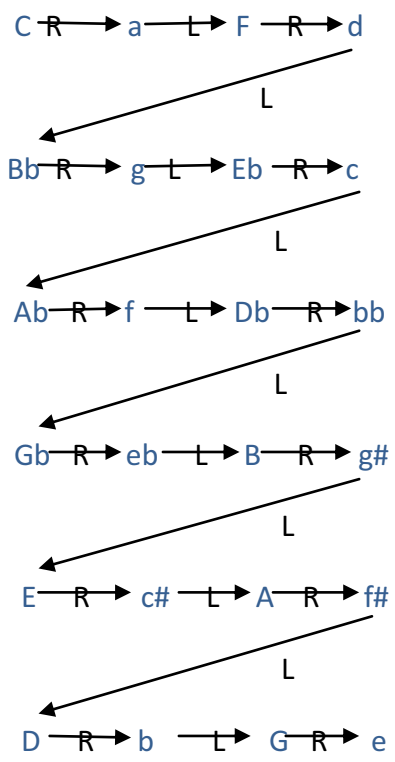
C,a,F,d,Bb,g,Eb,c,Ab,f,Db,bb,Gb,eb,B,g#,E,c#,A

Η παραπάνω ακολουθία περιλαμβάνει , όπως εύκολα παρατηρεί κάποιος , τόσο μείζονες όσο και ελάσσονες συγχορδίες. Επίσης , αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μπορούμε να αποκτήσουμε την παραπάνω ακολουθία συγχορδιών απλά εφαρμόζοντας διαδοχικά στη ΝΤΟ μείζονα συγχορδία τις συναρτήσεις **R , L, R, L κ.ο.κ.** Ο Beethoven δεν περιέλαβε στη συγκεκριμένη ακολουθία τις πέντε τελευταίες συγχορδίες , αλλά μπορούμε να τις συμπληρώσουμε πολύ γρήγορα μέσω της αλληλοδιαδοχής των συναρτήσεων **R** και **L.** Στην ουσία , δηλαδή , ο Beethoven έχει δημιουργήσει μια ακολουθία όπου εμφανίζονται και οι 24 μείζονες και ελάσσονες συγχορδίες χωρίς καμία να επαναλαμβάνεται.

Αυτός που παρατήρησε πρώτος την παραπάνω ακολουθία ήταν ο **Cohn** , ο οποίος την αναφέρει σε μια σειρά από άρθρα του τις χρονιές 1991 , 1992 και 1997.

Η εντυπωσιακή ακολουθία των 24 συγχορδιών απεικονίζεται στο παρακάτω γράφημα , με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε το φακό μέσω , φυσικά , της ακολουθίας του Beethoven. Παρόλο που στο έργο υπάρχουν οι 19 από τις 24 συγχορδίες , από το γράφημα φαίνεται ότι αν ο Beethoven είχε συνεχίσει με τον ίδιο τρόπο θα είχε δημιουργήσει , όπως είπαμε , την ακολουθία και των 24 συγχορδιών. Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι το πιο εντυπωσιακό από όλα τα μουσικά παραδείγματα καθώς συνδυάζει την τοπολογία , την ομάδα PLR και φυσικά τον Beethoven. Το βέβαιο πάντως είναι ότι χωρίς τα μαθηματικά δεν θα μπορούσαμε να ακούσουμε με διαφορετικό τρόπο ένα μουσικό κομμάτι και δεν θα είχαμε ακούσει έναν φακό στην 9η Συμφωνία του Beethoven.

Ας δούμε όμως το γράφημα:



Στο παραπάνω γράφημα οι κορυφές είναι οι μείζονες και οι ελάσσονες συγχορδίες και οι πλευρές παίρνουν το όνομά τους από τις συναρτήσεις P , L , R . Το συγκεκριμένο γράφημα είναι ένα μουσικό γράφημα καθώς οι γειτονικές συγχορδίες μιας συγχορδίας είναι εκείνες ακριβώς οι συγχορδίες που είναι πιο κοντά σε αυτήν . Είναι δηλαδή οι συγχορδίες εκείνες που έχουν ίδιους τους δύο φθόγγους τους με την αρχική συγχορδία. Για παράδειγμα , οι γειτονικές συγχορδίες **της D(ΡΕ μείζονα) = {2,6,9}** είναι οι συγχορδίες:

b(ΣΙ ελάσσονα) ={6,2,11} , f# (ΦΑ# αλάσσονα)= {1,9,6} , d(ΡΕ ελάσσονα)= {9,5,2}.

Όπως έχει αναφερθεί στις προηγούμενες σελίδες , αν εφαρμόσουμε στη ΡΕ μείζονα τις συναρτήσεις P , L , R θα πάρουμε αντίστοιχα τις συγχορδίες ΡΕ ελάσσονα , ΦΑ# ελάσσονα και ΣΙ ελάσσονα.

Παρατηρώντας το παραπάνω γράφημα , μπορούμε να δούμε ότι οι δύο γραμμές της κορυφής ταιριάζουν με τις δύο γραμμές της βάσης , άρα μπορούμε να κολλήσουμε την κορυφή με τη βάση του γραφήματος. Στη συνέχεια κολλάμε τους κύκλους του κυλίνδρου που προκύπτει αφού τους στρίψουμε κατά το 1/3. Κολλάμε εδώ τις συγχορδίες που είναι ίδιες στην αριστερή και στη δεξιά μεριά , π.χ. τη ΝΤΟ

μείζονα της αριστερής μεριάς με τη ΝΤΟ μείζονα της δεξιάς μεριάς. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ο φακός.

Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα στη μουσική που σχετίζονται με την τοπολογία , όπως το ***Musical offering*** **του Bach ,**έργα του **Schoenberg** και του **Slonimsky.**

Οι ομάδες T/I και PLR είναι Δυϊκές

Στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας αναφέρθηκε η έννοια του **δυϊσμού** στα πλαίσια του μουσικού διαστήματος. Πιο συγκεκριμένα, ο Ευκλείδης στο έργο ***Κανόνος Κατανομή*** αντιμετωπίζει το μουσικό διάστημα είτε ως μια σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους είτε ως μία απόσταση δύο σημείων επί του κανόνος. Οι δύο αυτοί τρόποι αντιμετώπισης του μουσικού διαστήματος είναι δυϊκές. Στη συγκεκριμένη παράγραφο είχε δοθεί ο ακόλουθος ορισμός της έννοιας του δυϊσμού:

Δυϊσμός *είναι η έννοια που δηλώνει μια διδασκαλία που δέχεται την ύπαρξη δύο διαφορετικών αρχών που δεν μπορεί να αναχθεί η μία στην άλλη.*

Σ' αυτό το δεύτερο μέρος της εργασίας , είδαμε ότι η δίεδρη ομάδα των 24 στοιχείων δρα πάνω στο σύνολο S των μειζόνων και ελασσόνων συγχορδιών με δύο διαφορετικούς και ενδιαφέροντες τρόπους:

- μέσω της ομάδας T/I χρησιμοποιώντας μεταφορές και αντιστροφές
- μέσω της neo-Riemannian ομάδας PLR χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις P , L, R.

Θεωρώντας τις ομάδες T/I και PLR ως υποομάδες της ομάδας Sym(S) στο σύνολο S , θα δούμε ότι οι δύο αυτές ομάδες είναι δυϊκές με την με την έννοια που θα εξετάσουμε παρακάτω.

Ο όρος **δυϊσμός** στη neo-Riemannian ορολογία , αναφέρεται κυρίως σε μια ιδέα που σχετίζεται με τη μουσική και το θεωρητικό της μουσικής **Hugo Riemann.** Αναφέρεται κυρίως στα στοιχεία της ομάδας PLR.

Για να καταλάβουμε το δυϊσμό ανάμεσα στις δύο ομάδες , θα αρχίσουμε από τη ΝΤΟ μείζονα συγχορδία. Αν εφαρμόσουμε τη συνάρτηση T_1 στη ΝΤΟ μείζονα και στη συνέχεια εφαρμόσουμε τη συνάρτηση L θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το αν εφαρμόσουμε πρώτα τη συνάρτηση L και στη συνέχεια τη συνάρτηση T_1. Δηλαδή ανεξάρτητα από τη διαδρομή που θα ακολουθήσουμε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

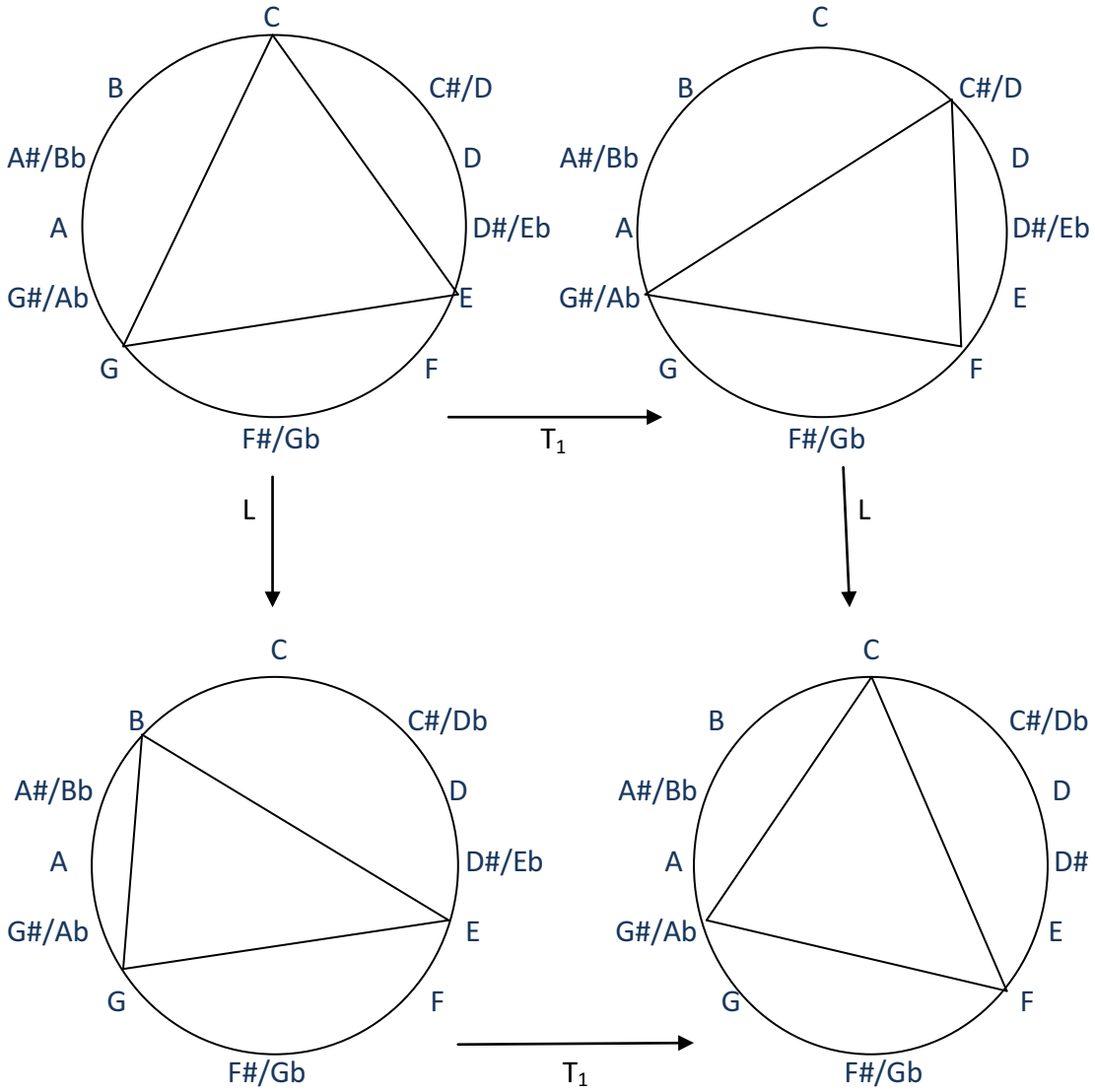
Άρα οι P , L , R '' επικοινωνούν '' με τις συναρτήσεις T ,I της άλλης ομάδας και μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό θα συμβεί με οποιαδήποτε συγχορδία και αν

αρχίσουμε και με οποιεσδήποτε συναρτήσεις της μιας και της άλλης ομάδας και αν εφαρμόσουμε. Αυτό φαίνεται πιο παραστατικά στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "L"'] & S \arrow[d, "L"] \\ S \arrow[r, "T_1"] & S \end{tikzcd}$$

Μπορούμε να πούμε ότι το παραπάνω διάγραμμα ‘’ επικοινωνεί ‘’. Επίσης , μπορούμε να πούμε ότι οποιοδήποτε διάγραμμα με οριζόντιες γραμμές στην ομάδα T/I και κάθετες γραμμές στην ομάδα PLR θα ‘’ επικοινωνεί’’ .

Ας δούμε τώρα πιο παραστατικά πως οι συναρτήσεις T_1 και L ‘’ επικοινωνούν’’.



Άρα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Οι ομάδες PLR και T/I είναι δυϊκές . Δηλαδή ,καθεμιά από αυτές δρα μεταβατικά πάνω στο σύνολο S των μειζόνων και ελασσόνων συγχορδιών και καθεμιά από αυτές προκύπτει από την άλλη στην ομάδα Sym(S).

Απόδειξη

Από όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα για την ομάδα T/I και κυρίως από τις εξισώσεις $T_n(0,4,.7)=(T_n(0),T_n(4),T_n(7))$ και $I_n(0,4,7)=(I_n(o),I_n(4),I_n(7))$, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η T/I ομάδα δρα μεταβατικά. Προηγουμένως είπαμε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας PLR επικοινωνεί με κάθε στοιχείο της ομάδας T/I. Δηλαδή , η ομάδα PLR περιέχεται στο **C(T/I) (centralizer)** της ομάδας T/I στη Sym(S). Για κάθε στοιχείο Y του S , υποθέτουμε ότι υπάρχει στοιχείο h του C(T/I) τέτοιο , ώστε **hY=Y** και στοιχείο g της ομάδας T/I τέτοιο , ώστε **ghY=gY & hgY=gY.** Καθώς η ομάδα T/I δρα μεταβατικά , κάθε Y του συνόλου S είναι του τύπου gY , για κάποιο g της ομάδας T/I, και για το λόγο αυτό η h είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο S όπως προκύπτει από την τελευταία εξίσωση.

Κάνοντας έναν υπολογισμό για το πλήθος των στοιχείων έχουμε :

$|C(T/I)| / |C(T/I)_Y| \leq |S|=24.$

Είναι $|C(T/I)_Y|=1$, και η ομάδα PLR είναι υποομάδα της C(T/I), συμπεραίνουμε ότι

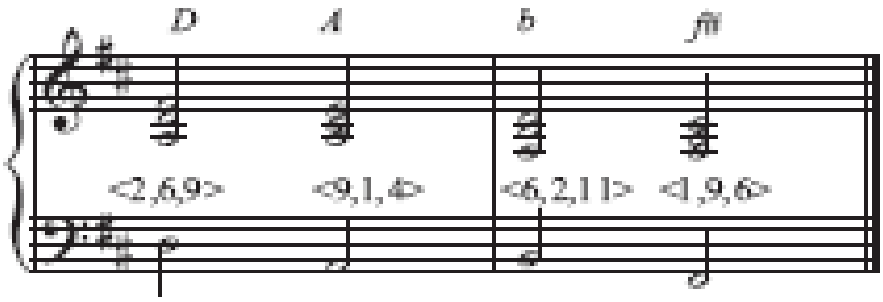
$|PLR\ ομάδα| \leq |C(T/I)| \leq 24.$

Όπως όμως είδαμε από τη διάσημη ακολουθία των 19 συγχορδιών στα μέτρα 143-176 στην 9η Συμφωνία του Μπετόβεν , η ομάδα PLR έχει τουλάχιστον 24 στοιχεία. Άρα **η ομάδα PLR έχει ακριβώς 24 στοιχεία** και ισούται με τη C(T/I) (έτσι συμπληρώνεται η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος). Άρα , συμπεραίνουμε ότι η ομάδα PLR δρα απλώς μεταβατικά στο σύνολο S. Αν αντιστρέψουμε και τους ρόλους των δύο ομάδων στη Sym(S) θα δούμε ότι πράγματι οι δυο αυτές ομάδες είναι δυϊκές. □

Μουσικά παραδείγματα

- Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια μουσικά παραδείγματα του δυϊσμού μεταξύ των ομάδων T/I και PLR ξεκινώντας από το ***Canon στη PE μείζονα*** του **Johnann Pachelbel**, ένα έργο που συνθέθηκε το 1680.

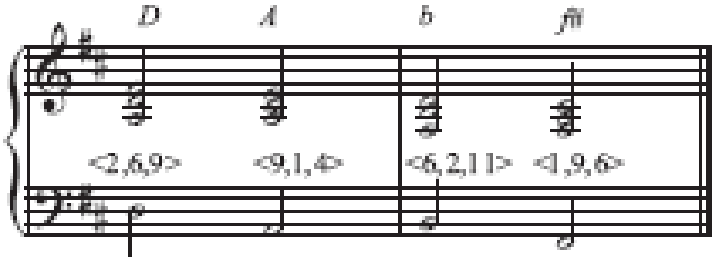
Ένα μέρος του έργου είναι το ακόλουθο:



Από την ακολουθία των συγχορδιών που υπάρχει στο συγκεκριμένο έργο προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "T_7"] \arrow[d, "R"'] & A \arrow[d, "R"] \\ b \arrow[r, "T_7"'] & f\# \end{tikzcd}$$

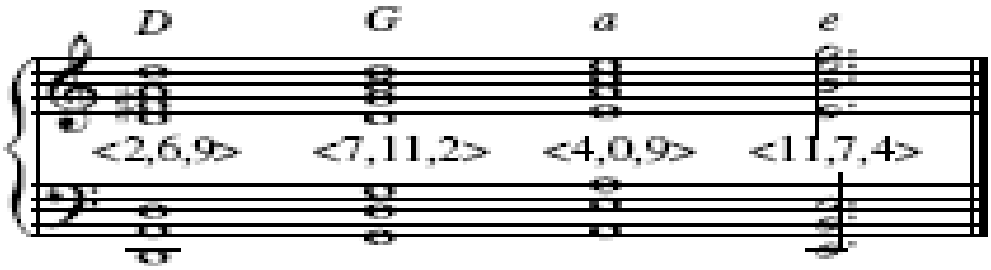
- Ένα άλλο μουσικό παράδειγμα βρίσκεται στο θέμα ***Grail*** του πρελούδιου στο **Parsifal,Πράξη 1 ,** μία όπερα του **Richard Wagner** το 1882. Το παράδειγμα αυτό είναι το ακόλουθο:



Το αντίστοιχο διάγραμμα είναι το εξής :

$$\begin{tikzcd} Ab \arrow[r, "T_5"] \arrow[d, "R"'] & Db \arrow[d, "R"] \\ f \arrow[r, "T_5"'] & bb \end{tikzcd}$$

- Ένα τρίτο μουσικό παράδειγμα είναι το ***Religion*** , ένα τραγούδι για φωνή και πιάνο γραμμένο από τον **Charles Ives** το 1920. Ένα μέρος του έργου είναι το ακόλουθο:



Στο αντίστοιχο διάγραμμα ο οριζόντιος μετασχηματισμός είναι η αντιστροφή I_6. Η αντιστροφή αυτή μετασχηματίζει τις μείζονες συγχορδίες σε ελάσσονες συγχορδίες και αντιστρόφως. Κατακόρυφα δρα η συνάρτηση LR.

Άρα έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "I_6"'] \arrow[d, "LR"'] & a \arrow[d, "LR"] \\
G \arrow[r, "I_6"'] & e
\end{tikzcd}$$

Παρατηρώντας προσεχτικά το διάγραμμα μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση LR ανεβάζει τη συγχορδία ΡΕ μείζονα (D) κατά 5 ημιτόνια , αλλά κατεβάζει τη συγχορδία ΛΑ ελάσσονα (a) κατά 5 ημιτόνια. Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση LR συμπεριφέρεται δυϊκά στη δεξιά και την αριστερή στήλη του διαγράμματος.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Από όσα παρουσιάστηκαν στα δύο μέρη της εργασίας φαίνεται καθαρά η στενή σύνδεση μαθηματικών και μουσικής. Μια σύνδεση που έχει τις ρίζες της βαθιά μέσα στους αιώνες και ξεκινά περίπου από τον πρώτο χρόνο ζωής του ανθρώπου, είναι μια σύνδεση έμφυτη που συνάμα κρίνεται αναγκαία για την ομαλή πορεία της ζωής μας. Από τον Πυθαγόρα και τον Πλάτωνα μέχρι τον Fourrier και τον d' Alembert , η σύνδεση αυτή όχι μόνο δεν εξασθενεί αλλά εμπλουτίζεται και ενδυναμώνεται καθώς η επιστήμη των μαθηματικών εφοδιάζεται με νέα μέσα και νέες ανακαλύψεις που όμως πάντα στο δρόμο τους συναντούν τις αντίστοιχες νέες μεθόδους της μουσικής επιστήμης. Έτσι οι δύο αυτές '' αδελφές επιστήμες '' των Πυθαγορείων δεν σταματούν να συμπορεύονται και είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα συνεχίσουν την κοινή τους πορεία και τους επόμενους αιώνες.

Άλλωστε , όπως είδαμε και στο πρώτο μέρος της εργασίας μας , η πλειοψηφία των μαθηματικών είχε γνώση μουσικής , η ερμηνεία της οποίας οδηγούσε με τη σειρά της στη χρήση ,ή και στην ανακάλυψη ,νέων μαθηματικών μεθόδων. Ακόμα και στην ορχήστρα υπάρχει παρουσία των μαθηματικών. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας είδαμε πρακτικά πως αυτή τη σύνδεση μαθηματικών και μουσικής ενυπάρχει στα έργα μεγάλων μουσικών συνθετών όπως ο Beethoven και ο Bach. Συγκεκριμένα είδαμε πως πίσω από τμήματα μεγάλων μουσικών έργων κρύβεται , χωρίς να το γνωρίζουν οι δημιουργοί τους, μία ολόκληρη θεωρία ομάδων . Οι ομάδες **T/I** και **PLR** μας έδωσαν μια εντυπωσιακή ερμηνεία διαφόρων φαινομένων της μουσικής ενώ , όπως αποδείχθηκε, η σύνθεση σπουδαίων έργων βασίστηκε στις ιδιότητες των δύο αυτών ομάδων! Το γεγονός αυτό είναι εντυπωσιακό αν σκεφτεί κανείς ότι οι περισσότεροι συνθέτες δεν γνώριζαν μαθηματικά και πολλά έργα γράφτηκαν πριν την ανάπτυξη της θεωρίας ομάδων! Έτσι η θεωρία αυτή μας προσφέρει έναν καλό τρόπο ακρόασης , κατανόησης και ερμηνείας ενός μουσικού κομματιού.

Τα μαθηματικά και η μουσική , οι δύο αυτές επιστήμες που όπως είδαμε συμπληρώνει η μία την άλλη, θεωρούνται από σπουδαίους επιστήμονες και δημιουργούς ως οι δύο επιστήμες που εξηγούν τα πάντα. Θα κλείσουμε με κάποιες φράσεις των ανθρώπων αυτών που μαρτυρούν πως αντιλαμβάνονται τη σύνδεση μαθηματικών και μουσικής και πως αυτή η σύνδεση έχει επηρεάσει το έργο τους:

Τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν το συνδετικό κρίκο μεταξύ της μουσικής και της ψυχής κι επομένως μεταξύ της μουσικής και των ηθικών αντιλήψεων με τις οποίες οι φιλόσοφοι του παρελθόντος τα είχαν συνδέσει επίμονα.

ΤΙΜΑΙΟΣ

Δεν θα υπήρχε (μουσική) αρμονία αν δεν υπήρχαν αριθμοί. Δεν θα υπήρχε αρμονία αν δεν υπήρχε ο άνθρωπος για να την ακούσει και να την κρίνει ως τέτοια, για να γίνουν οι αριθμοί εργαλεία. Δεν υπάρχει αρμονία μόνη της.

ΡΟΥΝΤΟΛΦ ΤΑΣΝΕΡ , καθηγητής στο τεχνολογικό πανεπιστήμιο της Βιέννης

Δεν συνηθίζεται να σκεφτόμαστε μαθηματικά όταν ακούμε μουσική , όπως επίσης να φανταζόμαστε μουσική όταν λύνουμε ένα αλγεβρικό πρόβλημα. Εντούτοις , ο Πυθαγόρας ενοποίησε τα μαθηματικά με τη μουσική , και από τότε αυτές οι δύο ατραποί του πνεύματος δεν χώρισαν ποτέ.

Τα Μαθηματικά είναι θεμελιώδη για κάθε εξήγηση. Είναι διαφωτισμός. Αν σκέφτεσαι μαθηματικά οι αριθμοί αποκτούν κατά κάποιον τρόπο συναίσθημα. Είναι κάτι ζωντανό με το οποίο προσπαθείς να ταυτιστείς. Και μια παρτιτούρα έχει κενά, είναι αφηρημένη, αλλά αν ακούσεις το μουσικό κομμάτι που περιγράφει, σε χτυπά κατευθείαν στην καρδιά.

ΡΟΥΝΤΟΛΦ ΤΑΡΝΕΡ

Έτσι οδηγήθηκα στο να ακούω είτε να νομίζω ότι ακούω , όπως ο Πυθαγόρας ,τη μουσική των πλανητών και των ουράνιων σφαιρών, για να καταλήξω στη διατύπωση της θεωρίας μου για τη Συμπατική Αρμονία

……

….αξιοσημείωτο είναι το ότι κατέληξα έστω και μετά από 2500 χρόνια στα ίδια συμπεράσματα εντελώς μόνος , οδηγημένος βασικά από τις δικές μου εμπειρίες , τις οποίες απέκτησα γράφοντας μουσική.

ΜΙΚΗΣ ΘΕΟΔΩΡΑΚΗΣ – ΣΥΜΠΟΣΙΟ 2006

Οι Πυθαγόρειοι είχαν εξερευνήσει και συνδέσει την αρμονική τους θεωρία των πλανητικών σφαιρών με τη Μουσική και με την Ψυχή. Η σχέση ψυχής και πλανητών κατ' αυτούς ανάγεται σε μια ανώτερης μορφής εσωτερική κατάδυση , σε μια αστρική περιπλάνηση στις ρίζες του όντος , εκεί όπου ο άνθρωπος αγωνιά μπροστά στην αδυναμία του να συλλάβει το ασύλληπτο του Απείρου.

ΜΙΚΗΣ ΘΕΟΔΩΡΑΚΗΣ-ΣΥΜΠΟΣΙΟ 2006

Τις μεγαλύτερές μου ανακαλύψεις στον τομέα της επιστήμης τις πέτυχα αργά το βράδυ και ενώ ταξίδευα παίζοντας βιολί.

Αϊνστάιν

Αναφορές

Αρχαία κείμενα:

- ***Αριστοτέλης****, Πολιτικά (Η' ,1339A-1342B,V,3-VII,11)*
- ***Πλάτων*** *, Πολιτεία (580 c8-531 c8 & 530 d8)*
- ***Σέξτος****, Προς Μαθηματικούς (VII,94-95)*
- ***Αριστοτέλης****, Μεταφυσικά (985b23 -986a26)*
- ***Αριστοτέλης****, Φυσικά (213b23-29)*
- ***Ιάμβλιχος****, Περί του Πυθαγόρειου βίου*
- ***Σιμπλίκιος****, εις Φυσικά (455,15-459,3)*
- ***Φιλόλαος****, περί φύσεως (απόσπασμα 6)*
- ***Πλάτων,*** *Τίμαιος & Φίληβος*
- ***Πτολεμαίος****, Αρμονικά*

Άρθρα:

- ***Thomas M. Fiore,2003,*** *Music and Mathematics, σημειώσεις διαλέξεων στο προπτυχιακό μάθημα Math 107, Πανεπιστήμιο του Michigan*
- ***Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore & Ramon Satyendra ,*** *Musical Actions of Dihedral Groups (Copyright the Mathematical Association of America 2008)*
- ***Μίκης Θεοδωράκης, 10 Μαρτίου 2006****, Συμπαντική Αρμονία (ομιλία στο διεθνές Συμπόσιο)*
- ***Κεϊσογλου Στέφανος, Σπύρου Παναγιώτης****,* ***2006*** *, Μαθηματικά-Μουσική: πορείες παράλληλες, Metamath Music Page*
- ***R.Cohn****,* ***1992*** *, Dramatization of hypermetric conflicts in the Scherzo of Beethoven' s Ninth Symphony, 19th- Century Music 15, p.22-40*
- ***Ελληνική Βυζαντινή Μουσική****, προέλευση από http:/www.byzantine-musics.com*
- ***Σ. Νεγρεπόντης*** *,* ***Σημειώσεις με τίτλο:*** *<< Η θεμελίωση της Πυθαγόρειας Φιλοσοφίας («τα πάντα είναι αριθμοί») στην Πυθαγόρεια Γεωμετρία («ασυμμετρία διαμέτρου τετραγώνου»)>>, Πανεπιστήμιο Αθηνών,* Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Βιβλιογραφία:

- ***Σπυρίδης Χαράλαμπος*** *,* ***2004*** *,Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ, εκδόσεις '' Λ. Γεωργιάδης ''*
- ***David J. Benson, 2007,*** *Music: A Mathematical Offering, εκδ. Cambridge University Press*
- ***Barker Andrew, 1989,*** *Greek Musical Writings II, Harmonic and Acoustic Theory, εκδ. Cambridge University Press*

- ***Στέλλα Βοσνιάδου*,*1994***, *η Ψυχολογία των Μαθηματικών, εκδ. GUTENBERG*
- ***Ιωάννης Δ. Χριστοφίλου, 1985 ,*** *Θεωρία της Μουσικής, εκδ. Music Lovers*