ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Η Γεωμετρία στην επιφάνεια της σφαίρας. Εφαρμογές στη Χαρτογραφία και Διδακτικές προεκτάσεις

**Κωνσταντίνος Σελεβίστας**

**Επιβλέπων Καθηγητής**
**Λάππας Διονύσιος**

**Αθήνα**
**Φεβρουάριος 2008**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση
**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την ……. από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

| Ονοματεπώνυμο | Βαθμίδα | Υπογραφή |
|---|---|---|
| 1) Λάππας Διονύσιος (επιβλέπων καθηγητής) | Αναπλ. Καθηγητής | ……. |
| 2) Γιανακούλιας Ευστάθιος | Αναπλ. Καθηγητής | ……. |
| 3) Σπύρου Παναγιώτης | Επικ. Καθηγητής | ……. |

© Κωνσταντίνος Σελεβίστας, 2008

Η εργασία αυτή *δεν* αφιερώνεται σ' όλους εκείνους τους δασκάλους με την ισχυρή θέληση που αντιπαρέρχονται κάθε ερώτηση, έκκληση και παράπονο για να συνεχίσουν το άψογα σχεδιασμένο μάθημά τους. Σ' όλους αυτούς που συνεχίζουν απτόητοι το μάθημά τους σχεδόν μέχρι το τελευταίο λεπτό της διδακτικής ώρας στραμμένοι σχεδόν πάντα προς τον πίνακα ξεχνώντας να κοιταχτούν στα μάτια με τους μαθητές τους.

## Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Σωτήρη Ντελή που διάβασε ένα μεγάλο μέρος της εργασίας κάνοντας λεπτομερείς υποδείξεις. Χαρά στην υπομονή του! Αν η εργασία δεν αποδείχθηκε… ατέρμονη σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στις από καρδιάς τηλεφωνικές συζητήσεις που μου χάρισε.

Ευχαριστώ βαθιά τον Παναγιώτη Δεληβοριά που δέχτηκε να βρει τον μπελά του μαζί μου. Πάμπολλες φορές πάνω από έναν υπολογιστή προσπάθησε να ταιριάξει τα αισθητικά πρόχειρα κείμενά μου με τους χάρτες και τα σχέδια που επιθυμούσα να τα συνοδεύουν. (Μαζί του έμαθα και εγώ τι πάει να πει διαμόρφωση κειμένου και πώς μπορεί κάποιος να ψάχνει αποτελεσματικά στο Google).

Στον Τάσο Πατρώνη θα ’μαι πάντα βαθιά υποχρεωμένος που υπήρξε δάσκαλός μου. Χωρίς τις (ομολογουμένως απαιτητικές) συζητήσεις μαζί του η εργασία δεν θα είχε ξεκινήσει ποτέ: θα είχε μείνει απλώς ένας ασχημάτιστος ευσεβής πόθος. Ας ηχήσουν λοιπόν γι’ αυτόν οι σάλπιγγες και τα τύμπανα.

Ένα ακόμη ευχαριστώ στον Διονύση τον Παύλου (ή απλά στον Διονύση) που παίρνοντάς με απ’ το χέρι προσπάθησε να με κάνει γεωγραφικά ευαίσθητο.

Τον καθηγητή Γεωγραφίας του Α.Π.Θ. και πρόεδρο της Εθνικής Χαρτοθήκης κύριο Ευάγγελο Λιβιεράτο ευχαριστώ θερμά για τις τόσες ερωτήσεις που δέχτηκε να μου απαντήσει ηλεκτρονικά, χωρίς καν να με γνωρίζει.

Τη Φωτεινή Ράλλη ευχαριστώ για το «κερασάκι στην τούρτα» δηλαδή για την πληκτρολόγηση των συμπερασμάτων, του προλόγου και της γενικής εισαγωγής καθώς και τη σελιδοποίηση της όλης εργασίας.

Τέλος δεν μπορώ να μην ευχαριστήσω την τριμελή μου επιτροπή σ’ αυτό το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα και ειδικά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Λάππα Διονύση για την βιβλιογραφική του υποστήριξη, για την υπομονή του να με περιμένει να εμφανιστώ μετά από μεγάλα διαστήματα “απουσίας” αλλά πάνω απ’ όλα για την ευκαιρία που μου έδωσε να ντύσω και με επίσημο λόγο την αγάπη μου για τη θάλασσα.

.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γενική εισαγωγή

ΜΕΡΟΣ Ι

Το μακρινό παρελθόν
και η τοποθέτηση του προβλήματος

§1. Εισαγωγή
§2. Το αντικείμενο και οι σκοποί της Ναυσιπλοΐας (Navigation)
§3. Τρόποι πλεύσης μέχρι την εμφάνιση της μαγνητικής πυξίδας
§4. Η καθιέρωση της μαγνητικής πυξίδας και οι *λοξοδρομικές* πλεύσεις
§5. Οι αδυναμίες των ναυτικών χαρτών του Μεσαίωνα και το κεντρικό ερώτημα της εργασίας
Σημειώσεις πρώτου μέρους
Βιβλιογραφία πρώτου μέρους

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Η επινόηση του Mercator και οι απρόσμενες μαθηματικές ιδέες
που ξεπήδησαν απ' αυτήν

§6. Εισαγωγή
§7. Ο Gerardus Mercator και η εποχή του
§8. Ο νέος ναυτικός χάρτης του Mercator
§9. Μερικά αναπάντητα ερωτήματα
§10. Η καθοριστική συνεισφορά του Edward Wright
§11. Μία εφαρμογή της Γεωγραφίας στα Μαθηματικά: η ιστορία του ολοκληρώματος $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$
11.1 Η γέννηση μιας μαθηματικής εικασίας και η ανακοίνωση ενός στοιχήματος.
11.2 Η συνεισφορά του James Gregory
11.3 Η προσέγγιση του Isaac Barrow
11.4 Η προσέγγιση μέσω σειρών του John Wallis

11.5 Η συνεισφορά του Απειροστικού Λογισμού στην κατασκευή του μερκατορικού χάρτη

Σημειώσεις δεύτερου μέρους

Βιβλιογραφία δεύτερου μέρους

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

Γυρνώντας στο σήμερα:

Οι σύμμορφες απεικονίσεις στο πλαίσιο της Διαφορικής Γεωμετρίας

§12. Εισαγωγή

§13. Η έννοια « επιφάνεια»

§14. Μετρική γεωμετρία των επιφανειών

§15. Απεικονίσεις επιφανειών και Χαρτογραφικές Προβολές

§16. Σύμμορφες απεικονίσεις: Ορισμός και ισοδύναμες διατυπώσεις

§17. Μία αλγεβρική εξίσωση για τις λοξοδρομικές καμπύλες

§18. Η μερκατορική προβολή είναι μία σύμμορφη απεικόνιση

§19. Στις παρυφές της διπλωματικής εργασίας: «Κάθε χάρτης είναι ένας συμβιβασμός»

§20. Οι σύγχρονοι πλοηγοί χρησιμοποιούν μερκατορικούς χάρτες

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Αναπαραστάσεις της μοναδιαίας σφαίρας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Δύο τόποι πάνω στη Γη συνδέονται με άπειρες στο πλήθος λοξοδρομίες

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3: Αποτύπωση πορείας πάνω σε χάρτες διαφόρων ειδών

1. Πτήση με σταθερή βορειοανατολική κατεύθυνση
2. Πλους από τον Παναμά στη Μ. Βρετανία

Σημειώσεις τρίτου μέρους

Βιβλιογραφία τρίτου μέρους

ΜΕΡΟΣ ΙΥ

Συμπεράσματα

§21. Συμπεράσματα της όλης μελέτης

# Γενική Εισαγωγή

*«Θυμάσαι που ταξίδια ονειρευόμουνα*
*κι είχα ένα διαβήτη κ' ένα χάρτη*
*και πάντα για να φύγω ετοιμαζόμουνα*
*κι όλο η μητέρα μου 'λεγε:το Μάρτη...»*

Νίκος Καββαδίας, από τη συλλογή Μαραμπού, 1933

Η μελέτη αυτή παρακολουθεί μία συνάντηση των Μαθηματικών με τη Θάλασσα. Ένα τέτοιο θέμα μπορεί ν' ακούγεται απρόσμενο σε ένα μαθηματικό τμήμα, όμως θα αρκούσαν τα παρακάτω λόγια του Νεύτωνα για να υποδείξουν ότι οι δύο χώροι έχουν μια παλιά και πολύ γόνιμη σχέση: *«Αν αντί να στέλνονται οι παρατηρήσεις των ανθρώπων της θάλασσας σε ικανούς μαθηματικούς στην ξηρά, η ξηρά έστελνε μαθηματικούς στη θάλασσα, αυτό θα συνεισέφερε πολύ περισσότερα στη βελτίωση της ναυσιπλοΐας και στην ασφάλεια των ανθρώπινων ζωών και περιουσιών»* (Isaac Newton, αρχές 17$^{ου}$ αι.). Η συνάντηση για την οποία γίνεται λόγος εδώ πραγματοποιήθηκε στο πεδίο της Γεωγραφίας και ακόμη ειδικότερα στο πεδίο της Χαρτογραφίας. Το ερώτημα που επιχειρείται να απαντηθεί εν συντομία διατυπώνεται ως εξής: Ποιά χαρακτηριστικά πρέπει να έχει ένας ναυτικός χάρτης ώστε οι ναυσιπλόοι να μπορούν γρήγορα, εύκολα και με ακρίβεια να χαράζουν *την πορεία τους* πάνω σ' αυτόν και στη συνέχεια να την ακολουθούν στην πράξη; Το ερώτημα (όπως θα φανεί και στις σελίδες που ακολουθούν) από μαθηματική σκοπιά σχετίζεται άμεσα με τον τρόπο που η σφαιρική γεωμετρία της υδρογείου αποτυπώνεται στον επίπεδο χάρτη.

Από πλευράς αρχιτεκτονικής δομής η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα μέρη και όπως φαίνεται και από τον τίτλο του καθενός από αυτά, αναπτύσσεται με βάση την ιστορική εξέλιξη των γεγονότων. Στο πρώτο μέρος αναφέρονται όλα εκείνα τα ιστορικά γεγονότα από τη Ναυσιπλοΐα και τη Χαρτογραφία, τα οποία είναι απαραίτητα για την πληρέστερη περιγραφή του κεντρικού ερωτήματος. Στο δεύτερο μέρος (και πάλι μέσα στο ιστορικό της πλαίσιο) παρουσιάζεται η καθοριστική απάντηση που έδωσε στο παραπάνω ερώτημα ο Φλαμανδός χαρτογράφος *Gerardus Mercator* το 1569. Συζητιέται ο ναυτικός του χάρτης, οι μαθηματικές του ιδιότητες, καθώς και ο τρόπος κατασκευής του, ο οποίος (παραδόξως) έγινε γνωστός μετά το θάνατο του δημιουργού του. Ο χάρτης αυτός, ακόμη και σήμερα, αποτελεί τον

υποχρεωτικό εξοπλισμό όλων των ναυσιπλόων. Στο ίδιο μέρος παρουσιάζεται και μία απρόσμενη συμβολή του μερκατορικού χάρτη στον προβληματισμό γύρω από τη γέννηση του Απειροστικού Λογισμού: ο υπολογισμός του τριγωνομετρικού ολοκληρώματος της τέμνουσας μιας γωνίας ($\int \tau\varepsilon\mu\nu x = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot dx$). Το ολοκλήρωμα αυτό αναδύθηκε ακριβώς εξαιτίας του μερκατορικού χάρτη και μάλιστα σε μια εποχή που ούτε ο Απειροστικός Λογισμός είχε παρουσιαστεί, αλλά ούτε και ο ίδιος ο Newton είχε γεννηθεί. Ο ακριβής υπολογισμός του –όπως αναφέρεται και στα συμπεράσματα της εργασίας– σχετίζεται άμεσα με την (ακριβή) κατασκευή του μερκατορικού χάρτη.

Το τρίτο μέρος αποτελεί μία *σύγχρονη* διαπραγμάτευση των ιδεών του Mercator. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η κεντρική έννοια των *σύμμορφων απεικονίσεων*, καθώς και των ιδιοτήτων της στο πλαίσιο της Διαφορικής Γεωμετρίας. Όλες οι ιδιότητες της μερκατορικής προβολής που ανέκυψαν στα δύο πρώτα μέρη, εδώ πλέον παρουσιάζονται ως θεωρήματα ενός *''ενιαίου σώματος'' ορισμών και θεωρημάτων*. Μ' αυτόν τον τρόπο τα ιστορικά αποτελέσματα ενοποιούνται αλλά επεκτείνονται κιόλας για να συμπεριλάβουν κι άλλα ακόμη.

Η εργασία έχει έναν έντονα *διαθεματικό* χαρακτήρα. Κατά την εκπόνησή της πολλές φορές απαιτήθηκε η προσφυγή όχι μόνο σε μαθηματικά συγγράμματα, αλλά και σε συγγράμματα Ναυσιπλοΐας, Γεωγραφίας, Χαρτογραφίας και Φυσικής, καθώς και σε διάφορες εγκυκλοπαίδειες. Αυτή η αναγκαστική περιήγηση σε ποικίλους επιστημονικούς χώρους αποτελεί ίσως και την κυριότερη αξία της. Τα όποια συμπεράσματα της περιήγησης αναφέρονται στο τέταρτο (και τελευταίο) μέρος της εργασίας.

Κλείνοντας, πρέπει να αναφερθεί ότι όλες οι μεταφράσεις των ξενόγλωσσων αποσπασμάτων που παρατίθενται έγιναν από τον γράφοντα.

Στον Παναγιώτη Δεληβοριά…

# ΜΕΡΟΣ Ι

## Το μακρινό παρελθόν
## και η τοποθέτηση του προβλήματος

«Τ' ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΥ τα έκανα στο Σχολείο της θάλασσας. Ιδού και μερικές πράξεις για παράδειγμα:
(1) Εάν αποσυνδέσεις την Ελλάδα, στο τέλος θα δεις να σου απομένουν μια ελιά, ένα αμπέλι κι ένα καράβι που σημαίνει: με άλλα τόσα την ξαναφτιάχνεις».

Οδυσσέας Ελύτης, «Ο μικρός Ναυτίλος»

## §1. Εισαγωγή

Απώτατος σκοπός αυτού του πρώτου μέρους της εργασίας είναι να περιγράψει όσο πιο αναλυτικά γίνεται το βασικό ερώτημα με το οποίο αυτή καταπιάνεται και να φωτίσει το ιστορικό πλαίσιο μέσα στο οποίο το ερώτημα αυτό διαμορφώθηκε. Μέσα από το πλαίσιο αυτό θα αναδειχθούν οι αδυναμίες των παλαιών *ναυτικών χαρτών* του *ύστερου Μεσαίωνα (14$^{ος}$ και 15$^{ος}$ αι.)* και θα φανεί η ανάγκη μιας άλλης μαθηματικής διαπραγμάτευσης του τρόπου με τον οποίο "ζωγραφίζεται" στο χαρτί *η σφαιρική πραγματικότητα των ναυτικών.* Αυτή η «άλλη μαθηματική διαπραγμάτευση» εξάλλου, είναι που αποτελεί και το κεντρικό θέμα όλης της εργασίας.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της όλης παρουσίασης αποτελεί η συχνή εναλλαγή από θέματα Ναυσιπλοΐας σε θέματα Χαρτογραφίας. Η εναλλαγή αυτή δεν θα μπορούσε παρά να είναι παρούσα μιας και οι σχέσεις των δύο "χώρων" είναι παλιές και στενές. Σύμφωνα μ' ένα κλασικό σύγγραμμα Ιστορίας της Χαρτογραφίας, *«απ' το ξεκίνημά τους, η εξέλιξη της ναυσιπλοΐας σαν επιστήμης και των ναυτικών χαρτών σαν ναυτοπλοϊκό βοήθημα, βάδισαν χέρι χέρι. Μία περαιτέρω ανάπτυξη της πρώτης αναπόφευκτα παρήγαγε μια βελτίωση στους δεύτερους»* (Brown, 1979, σελ. 134).

Κατόπιν τούτου, οι σκοποί της Ναυσιπλοΐας και η εντυπωσιακή τους διαχρονικότητα παρουσιάζονται στην παράγραφο 2 ενώ στην παράγραφο 3 γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στους ποικίλους τρόπους με τους οποίους οι ναυσιπλόοι προσπάθησαν –πριν την εμφάνιση της μαγνητικής πυξίδας– να πετύχουν αυτούς τους σκοπούς. Ιδιαίτερη μνεία εδώ γίνεται στους τρόπους που επινόησαν ώστε να έχουν μία *συνεχή επίγνωση της διεύθυνσης* που ακολουθούσαν κατά τη διάρκεια των μακρινών ταξιδιών τους.

Την κορύφωση όλων αυτών των τρόπων αποτέλεσαν αναμφισβήτητα οι *λοξοδρομικές πλεύσεις.* Εμφανίστηκαν λίγο μετά την εμφάνιση της μαγνητικής πυξίδας και γρήγορα καθιερώθηκαν ως ο πλέον εύκολος και ασφαλής τρόπος κίνησης στη θάλασσα. Ο ορισμός τους, η ισχυρή φυσική ιδιότητα που διαθέτουν καθώς και τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά, είναι το αντικείμενο της παραγράφου 4. Η καθοριστική επίδραση που άσκησαν στην κατασκευή των ναυτικών χαρτών του ύστερου Μεσαίωνα είναι αντικείμενο της αμέσως επόμενης παραγράφου που αποτελεί και την "καρδιά" του πρώτου μέρους.

Στην παράγραφο 5 παρουσιάζονται οι *ναυτικοί χάρτες του ύστερου Μεσαίωνα* (οι παλαιότεροι ναυτικοί χάρτες που έχουν φθάσει στα χέρια μας!), συζητιέται η

*εμπειρική* βάση της κατασκευής τους, ο τρόπος χρήσης τους και αναλύονται οι αδυναμίες τους. Αυτές με τη σειρά τους διαμορφώνουν με σαφήνεια (πλέον) το κεντρικό ερώτημα της εργασίας.

## §2. Το αντικείμενο και οι σκοποί της Ναυσιπλοΐας (Navigation)(*)

Η ιστορία της ναυσιπλοΐας αρχίζει με την πρώτη προσπάθεια του ανθρώπου να κατευθύνει το σκάφος του από το σημείο που βρισκόταν προς ένα άλλο σημείο που έβλεπε με τα ίδια του τα μάτια. Οι διαδικασίες αυτές της κατευθύνσεως του σκάφους άρχισαν σαν μια τέχνη, που το κύριο χαρακτηριστικό της ήταν η εμπειρία και η εξειδίκευση. Αυτή άλλωστε η τέχνη χαρακτηρίστηκε ως «ναυτική τέχνη» και ο ασχολούμενος μ' αυτή ως ναυτικός. Σήμερα η «ναυτική τέχνη» της κατεύθυνσης του πλοίου έχει δώσει τη θέση της σε μια πλατιά «ναυτική επιστήμη». Η ναυσιπλοΐα με βάση τα μαθηματικά και την αστρονομία αποτελεί πλέον ιδιαίτερο τομέα της «ναυτικής επιστήμης» που περιλαμβάνει τη ναυτική γεωμετρία, ναυτική επίπεδη και σφαιρική τριγωνομετρία, ναυτική κοσμογραφία και αστρονομική ναυσιπλοΐα (Ντούνης και Δημαράκης, 1995, σελ. 2).

Παρ' όλες όμως τις αλλαγές, οι βασικοί σκοποί της ναυσιπλοΐας έχουν μείνει αναλλοίωτοι στο πέρασμα των αιώνων. Οι επόμενοι δύο ορισμοί είναι, νομίζουμε, αντιπροσωπευτικοί:

*«Η ναυσιπλοΐα (navigation) είναι το σύνολο των διαδικασιών που εφαρμόζονται για να καθοδηγηθεί – κατευθυνθεί το πλοίο με ασφάλεια και στο συντομότερο χρονικό διάστημα από ένα λιμάνι σε άλλο, ή από ένα σημείο του πλανήτη μας σε άλλο σημείο»* (Ντούνης και Δημαράκης, 1995, σελ. 1).(**)

*«Η ναυσιπλοΐα είναι μια Τέχνη η οποία μέσα από αληθείς και αλάνθαστους κανόνες διδάσκει πως να κυβερνάμε και να κατευθύνουμε ένα Πλοίο από ένα Λιμάνι σε άλλο, ασφαλώς, σωστά, και στο συντομότερο χρόνο. Χρησιμοποιώ εδώ τη λέξη «ασφαλώς» στο βαθμό που είναι στα χέρια του ανθρώπου να το επιτύχει. Λέγοντας δε «σωστά» δεν εννοώ μέσω μιας ευθείας πορείας, αλλά μέσω του συντομότερου δυνατού και πλέον κατάλληλου δρόμου που μπορεί να βρεθεί»* (Thomas Blundeville, 1622, σελ. 649)(***).

---

(*) Ο όρος «navigation» προέρχεται από το λατινικό ρήμα «navigere» όπου η λέξη «navis» σημαίνει πλοίο και «agere» σημαίνει κινώ-κατευθύνω. Έτσι ο όρος ναυσιπλοΐα είναι το ουσιαστικό του ρήματος «ναυσιπλοώ» που σημαίνει διαπλέω τις θάλασσες.

(**) Από το εγχειρίδιο των Σχολών Εμπορικού Ναυτικού, «Ναυτιλία» των Χρ. Ντούνη και Αν. Δημαράκη, 1995, Εκδ. Ιδρύματος Ευγενίδου, σελ. 1.

(***) Από τις «Ασκήσεις» του T. Blundeville και την εισαγωγική του μελέτη «A new and necessarie treatise of navigation, containing all the chiefest principles of that arte», πρώτη έκδοση 1594. Το

Η ασφάλεια λοιπόν κατά την πλεύση καθώς και η εύρεση του συντομότερου δυνατού πλου είναι οι δύο βασικοί σκοποί της ναυσιπλοΐας. Φυσικά από τα δύο αυτά αιτήματα το αίτημα της ασφαλούς πλεύσης είναι μακράν το σημαντικότερο.

## §3. Τρόποι πλεύσης μέχρι την εμφάνιση της μαγνητικής πυξίδας

Οι ναυτικοί, όπως είναι φυσικό, τη γνώση της χρονικά συντομότερης διαδρομής από πολύ νωρίς τη συνέδεσαν με τη μέτρηση των αποστάσεων. Οι *Περίπλοες* – τα παλαιότερα ναυτοπλοϊκά *κείμενα* που έχουν φθάσει στα χέρια μας(*) – είναι διάσπαρτα από καταγραφές αποστάσεων μεταξύ σημαντικών λιμανιών, νησιών και χαρακτηριστικών τοποθεσιών της ξηράς(1). Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι σε κανένα από αυτά τα κείμενα οι υπολογισμοί των αποστάσεων δεν συνδέονται με πορεία σε *μέγιστο κύκλο* η οποία όπως γνωρίζουμε σήμερα αποτελεί τη διαδρομή ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο σημείων της γήινης σφαίρας(2). Επίσης θα πρέπει να αναφερθεί ότι αν και όλα αυτά τα κείμενα είναι γραμμένα με τρόπο που υπονοούν ότι συνοδεύονται από κάποιου είδους ναυτικών χαρτών, ωστόσο κανένας τέτοιος χάρτης δεν έχει διασωθεί!

Σε αντίθεση με τον χρονικά συντομότερο πλου που από την αρχή συνδέθηκε με τη σύγκριση αποστάσεων, η επιλογή του ασφαλέστερου πλου συνδέθηκε με μια πληθώρα παραγόντων: βάθη των νερών, μεταβολές παλιρροιών, ώρες πλημμυρίδας και αμπώτιδας, γνώση των θαλασσίων ρευμάτων και ανέμων αλλά και μορφή των ακτογραμμών, ακόμα και παρουσία γλυκού νερού στους ενδιάμεσους σταθμούς των ταξιδιών(3). Πάνω απ' όλα όμως και πριν απ' όλα ο ασφαλής πλους συνδέθηκε με την ακριβή γνώση της *διεύθυνσης*. (Brown, 1979, σελ. 122). Ο λόγος είναι απλός: η καθυστερημένη άφιξη σ' έναν προορισμό μπορεί να είναι άβολη ή ακόμη και επικίνδυνη αλλά χωρίς μία ακριβή γνώση της διεύθυνσης ένας ναυσιπλόος δεν θα φθάσει ποτέ στον προορισμό του. Στους *περίπλοες* – αν και δεν συνοδεύονται όπως είπαμε από χάρτες – η κρισιμότητα του παράγοντα της διεύθυνσης διαφαίνεται από το γεγονός ότι όλες οι πλεύσεις που αναφέρονται αναλυτικά αφορούν σε πορείες κοντά στις ακτογραμμές (από 'κει και το όνομα *περίπλοες*). Οι πλήρως

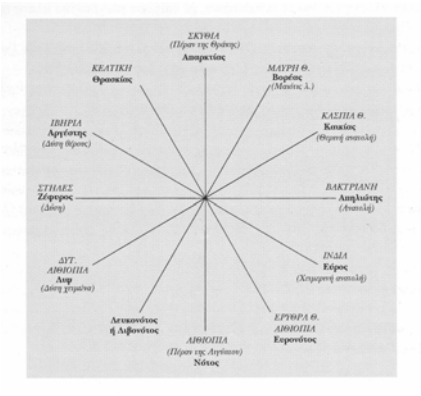
---

παράθεμα που αναφέρουμε είναι από την έκτη έκδοση του 1622 όπως το βρήκαμε στο βιβλίο του Lloyd Brown, «The story of maps», εκδ. Dover, 1979, σελ. 113.

(*) Το παλαιότερο του 4ου ή 5ου αι. π.Χ. τα υπόλοιπα, των Βυζαντινών χρόνων.

απομακρυσμένες από την ακτή αλλά ακόμη και οι νυκτερινές πορείες δεν αποκλείονται αλλά υπάρχει πολύ σπάνια και συνήθως υπαινικτική αναφορά τους[(*)].

Σήμερα οι ιστορικοί της Χαρτογραφίας υποστηρίζουν ότι οι πρώτοι ναυτικοί[(4)] ως μόνο οδηγό για τον έλεγχο της διεύθυνσης που ακολουθούσαν είχαν ευδιάκριτα σημεία στις ακτές (Μιχαηλίδου, 2004, σελ. 22). Αργότερα τον έλεγχο αυτό τον συνέδεσαν με τη γνώση των τόπων από τους οποίους φυσούσαν οι διάφοροι άνεμοι (Brown, 1979). Βέβαια ο προσδιορισμός αυτός – γνωστός σήμερα ως *μέθοδος του ανεμολογίου* – παρουσίαζε αρκετές ατέλειες μιας και κάποιες φορές οι τόποι απ' τους οποίους υποτίθετο ότι φυσούσε ένας άνεμος παρουσίαζαν σημαντική ποικιλία ενώ άλλες φορές από τον ίδιο τόπο φαίνονταν να φυσούν δύο εντελώς διαφορετικοί άνεμοι[(5)].




Εικόνα 1. Το *ανεμολόγιο (ή ρόδο των ανέμων)* του Τιμοσθένη (3ος αι. π.Χ.). Περιγράφονται 12 άνεμοι-διευθύνσεις με ταυτόχρονη αναφορά γεωγραφικών προελεύσεων. Ο παρατηρητής υποτίθεται ότι βρίσκεται στο σημείο που συναντώνται οι *ακτίνες των ανέμων*, ενώ ο κύκλος που αυτές φτιάχνουν παριστά τον ορίζοντα του παρατηρητή (ορίζοντας της Ρόδου). Από Λιβιεράτος 1998, σελ. 50.

Όπως είναι φυσικό η ανακάλυψη όλο και περισσότερων και πιο μακρινών γεωγραφικών εκτάσεων πολύ γρήγορα οδήγησε σε ερωτήματα σχετικά με την ανάγκη αντικατάστασης των εμπειρικών γεωμετρικών εκτιμήσεων των ναυτικών διαδρομών από ακριβέστερες μεθόδους προσδιορισμού των διευθύνσεων στη θάλασσα. Η απάντηση αυτή τη φορά ήρθε από το μακρινό ουρανό των αστεριών. Οι άνθρωποι – με κυρίαρχους τους Έλληνες – άρχισαν να παρατηρούν τις θέσεις των αστεριών και να τις συνδέουν, λογισμικά πλέον με τη γήινη επιφάνεια[(6)] (Λιβεριάτος 1998, σελ. 19).

Από τη σύνδεση αυτή ναυσιπλοΐας και αστρονομίας η έννοιας της διεύθυνσης άρχισε να αποκτά μία αντικειμενική υπόσταση. Ήδη από τον 4ο αι. π.Χ. (και ίσως και αρκετά νωρίτερα) η *Μικρή και η Μεγάλη Άρκτος* μ' έναν γενικό τρόπο υποδείκνυαν

---

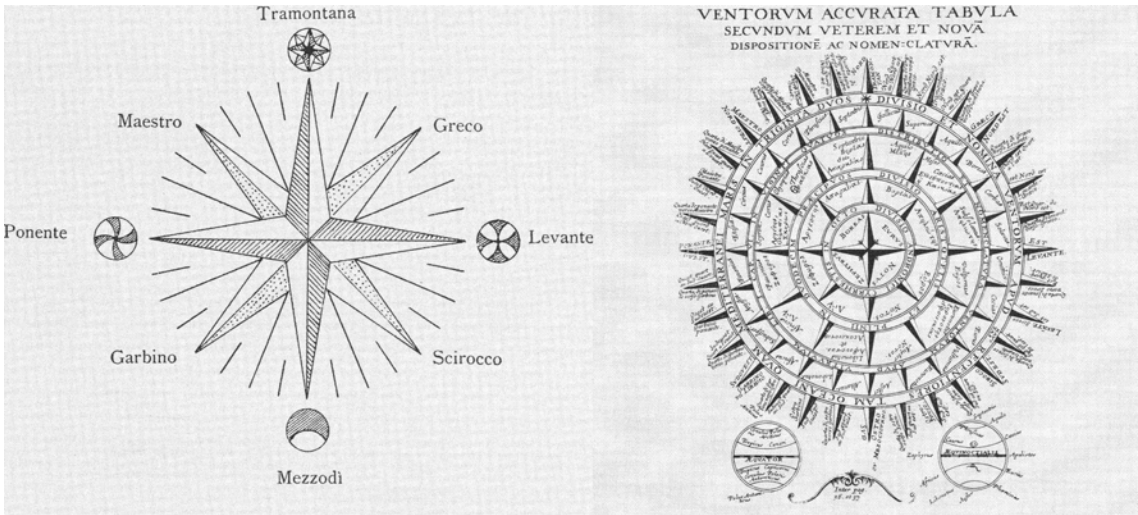
(*) Βλέπε για παράδειγμα το απόσπασμα από τον Περίπλου του Σκύλακα που παραθέτει ο L. Brown στη σελίδα 120.

στους ναυτικούς την κατεύθυνση του *Βόρειου Πόλου του Ουρανού* και κατά συνέπεια και του Βόρειου Πόλου της Γης (*Γεωγραφικός Βορράς*)[7].

## §4. Η καθιέρωση της μαγνητικής πυξίδας και οι λοξοδρομικές πλεύσεις

Το επόμενο και καθοριστικό βήμα στον αντικειμενικό προσδιορισμό των θαλάσσιων διευθύνσεων υπήρξε η ανακάλυψη της μαγνητικής βελόνας και η συνακόλουθη επινόηση της μαγνητικής πυξίδας[8]. Η εκτεταμένη χρήση της τελευταίας τουλάχιστον από τα τέλη του 13ου αι. μ.Χ. σε συνδυασμό με την υποδιαίρεση του κύκλου σε μοίρες[*] οδήγησαν σε δύο αλλαγές οι οποίες τελικά επηρέασαν καθοριστικά την εξέλιξη των ναυτικών χαρτών του ύστερου Μεσαίωνα (14ος και 15ος αι.).

Η πρώτη απ' αυτές είχε να κάνει με την πλήρη τυποποίηση των διευθύνσεων των ανέμων. Τα *ανεμολόγια* (ή *ρόδα των ανέμων*) τα οποία σταδιακά καθιερώθηκαν δεν είχαν υποδιαιρέσεις σε 4 ή 8 ή 12 προσανατολισμένες διευθύνσεις αλλά σε 16 ή και 32. Η "ταυτότητα" ενός ανέμου σ' αυτά καθορίζονται πλέον με βάση τη γωνία που σχημάτιζε η διεύθυνση του ανέμου με τη διεύθυνση του Βορρά, η οποία λόγω της πυξίδας θεωρούνταν η πιο σταθερή αλλά και η πιο "φυσική" απ' όλες τις διευθύνσεις.

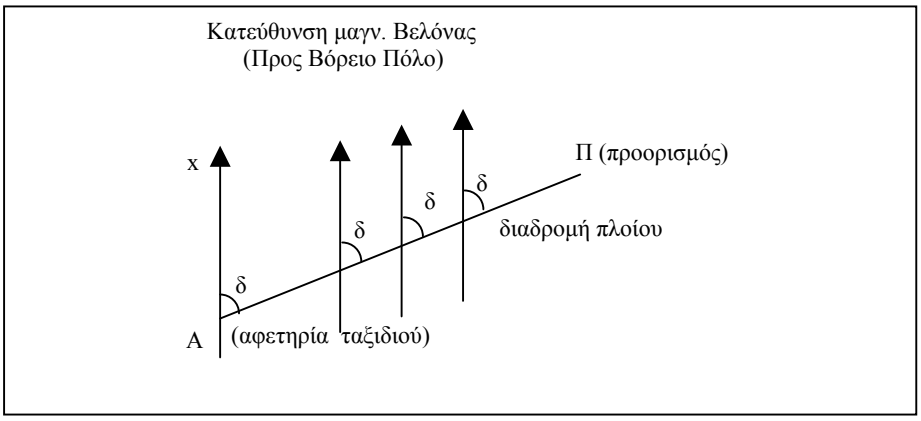



Εικόνα 2. Ρόδο οκτώ ανέμων του 13ου αιώνα (αριστερά) και πλήρες ρόδο του 17ου αιώνα (δεξιά). Φαίνεται η εξέλιξη από τους 4 ανέμους του Ομήρου στις 32 διευθύνσεις των πυξίδων (από Λιβιεράτος, 1998, σελ. 122).

---

[*] Είχε ήδη προταθεί από τον Ίππαρχο γύρω στο 140 π.Χ.

Η δεύτερη αλλαγή είχε να κάνει με τον τρόπο πλεύσης που άρχισαν να υιοθετούν οι ναυτικοί στα ταξίδια ανοικτής θαλάσσης: Η *πλεύση σταθερής πυξίδας*(*) καθιερώθηκε (κάτι που συνεχίζει να ισχύει μέχρι και σήμερα) ως ο απλούστερος και πλέον ασφαλής τρόπος κίνησης πάνω στη θάλασσα. Σύμφωνα μ' αυτόν, ένα πλοίο προσπαθεί να ακολουθεί διαδρομή η οποία να σχηματίζει συνεχώς την ίδια γωνία με την κατεύθυνση προς την οποία δείχνει η μαγνητική βελόνα της πυξίδας(**). Όμως η μαγνητική βελόνα (προσεγγιστικά τουλάχιστον) δείχνει πάντα βόρεια (δηλ. προς το Βόρειο Πόλο)(9). Έτσι αν κάποιος στηριχθεί πάνω στην *άμεση* εποπτεία των *μικρών* αποστάσεων μπορεί – όπως δείχνει το επόμενο σχήμα – να συμπεράνει ότι η πλεύση σταθερής πυξίδας πάνω στην υδρόγειο είναι μία ευθεία γραμμή που ενώνει την αρχή με το τέλος του ταξιδιού. Επειδή όμως σε σφαιρική επιφάνεια ευθείες γραμμές δεν υπάρχουν και το ρόλο της συντομότερης διαδρομής τον παίζουν τα τόξα μεγίστων κύκλων, αυτό που ουσιαστικά εννοεί το σχήμα 1 είναι ότι η διαδρομή ΑΠ είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου που ενώνει τα δύο αυτά σημεία.



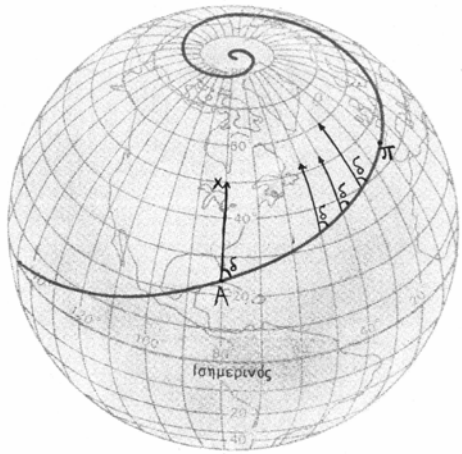

Σχήμα 1. Πλεύση σταθερής πυξίδας: η μορφή της πάνω στην υδρόγειο για μια μικρή (…) διαδρομή. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΠ ουσιαστικά θα πρέπει να' ναι ένα μικρό κομμάτι τόξου μέγιστου κύκλου.

---

(*) Με τον τρόπο αυτό αποδίδουμε τις φράσεις «movement in a constant compass direction / bearing», «compass course», «rhumb line course». Η λέξη «rhumb» είναι μια παλιά λέξη που σημαίνει «πυξίδα».

(**) Η γωνία αυτή ονομάζεται και *πορεία*. Τυπικά ως *πορεία* ορίζεται η γωνία που σχηματίζει ο διαμήκης άξονας του πλοίου με την κατεύθυνση του Βορρά. Βλέπε σχετικά και το βιβλίο «Ναυτιλία» των Ντούνη και Δημαράκη σελ. 33, 34.

Τα πράγματα βέβαια αποδεικνύονται πολύ διαφορετικά αν κάποιος αντικρίσει τη Γη στο σύνολό της. Τότε γίνεται φανερό ότι η ευθεία γραμμή Αχ που στο σχήμα 1 υποδεικνύει την κατεύθυνση του Βορρά, στην πραγματικότητα είναι ένας μέγιστος κύκλος – *ο μεσημβρινός που περνά απ' τον τόπο Α* (σχήμα 2). Έτσι η πλεύση σταθερής πυξίδας είναι μία γραμμή που σχηματίζει σταθερή γωνία μ' όλους τους μεσημβρινούς της Γης. Η μορφή της τελικά αναδεικνύεται σπειροειδής (και όχι κυκλική!) γιατί οι μεσημβρινοί συγκλίνουν καθώς πλησιάζουν στους πόλους. Συχνά ονομάζουμε τη γραμμή αυτή και *λοξοδρομία*[10].




Σχήμα 2. Πλεύση σταθερής πυξίδας: η μορφή της πάνω στην υδρόγειο για μια μεγάλη διαδρομή. Είναι φανερό ότι δεν πρόκειται για μέγιστο κύκλο σφαίρας αλλά για μία σπειροειδή καμπύλη!

Τυπικά ο πρώτος που απέδειξε ότι μία λοξοδρομία δεν είναι μέγιστος κύκλος ήταν ο Πορτογάλος Pedro Nuñez το 1534 στην εργασία του Tratado de Esfera.[(*)] Πρακτικά, οι ναυτικοί του *ύστερου Μεσαίωνα (14ος και 15ος αι.)* ήδη είχαν επίγνωση αυτής της διαφοράς. Έτσι, οι καλοί ναυσιπλόοι της εποχής φρόντιζαν να σταθμίζουν εμπειρικά τις αποκλίσεις ανάλογα με τις ιδιομορφίες της πλεύσης, αν και υπήρχε η πίστη ότι ακολουθώντας σταθερά τη διεύθυνση ενός ανέμου η πορεία θα ήταν τελικά η συντομότερη – δηλαδή σε μέγιστο κύκλο σφαίρας[(**)] (Λιβιεράτος 1998, σελ. 136). Πάντως, όπως φαίνεται και από τη σύγκριση των σχημάτων 1 και 2, για μικρά

---

(*) Η πληροφορία είναι από το άρθρο «Lambert, Euler and Lagrange as Map makers» του George W. Heine το οποίο βρήκαμε στο διαδίκτυο.

(**) Η πεποίθηση αυτή διατηρήθηκε μέχρι τον 16ο αιώνα!

σχετικά ταξίδια και *μεσαία γεωγραφικά πλάτη* (όπως αυτά της Μεσογείου) οι διαφορές των δύο διαδρομών είναι αμελητέες[11].

Αν και γεωμετρικά περίπλοκη η λοξοδρομική καμπύλη[12], στην πράξη μπορεί πολύ εύκολα να ακολουθηθεί μιας και είναι η γραμμή εκείνη που κατά μήκος της η βελόνα της μαγνητικής πυξίδας παραμένει ακίνητη. Βέβαια για να μπορέσει ο ναυσιπλόος να υλοποιήσει μια τέτοια πλεύση πρέπει – πριν απ' όλα – να μπορέσει να μετρήσει τη γωνία $\boldsymbol{\delta}$ που φαίνεται στο σχήμα 2. Τη γωνία αυτή οι ναυσιπλόοι τη μετρούσαν πάνω στο χάρτη τους.

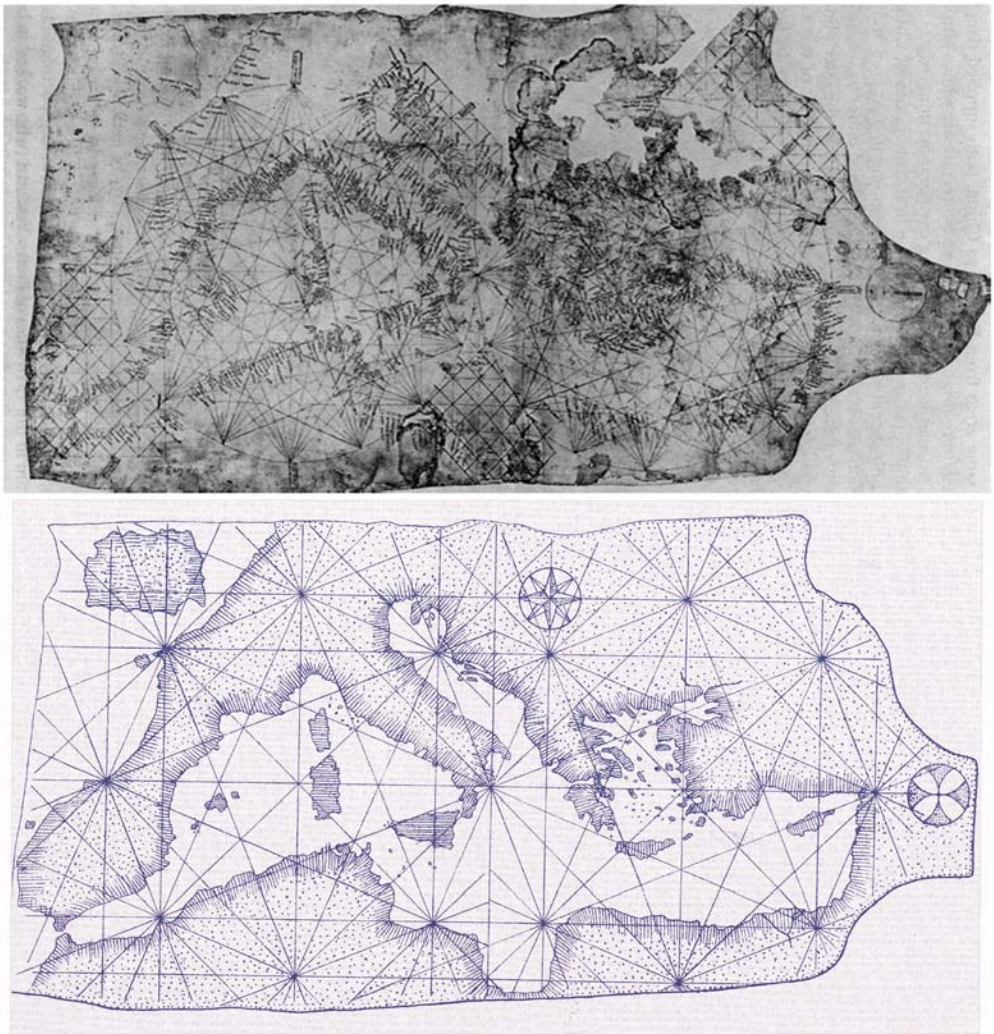
Στην επόμενη και τελευταία παράγραφο του πρώτου μέρους, παρουσιάζονται εν συντομία αυτοί οι χάρτες και συζητούνται οι αδυναμίες τους.

## §5. Οι αδυναμίες των ναυτικών χαρτών του Μεσαίωνα και το κεντρικό ερώτημα της εργασίας

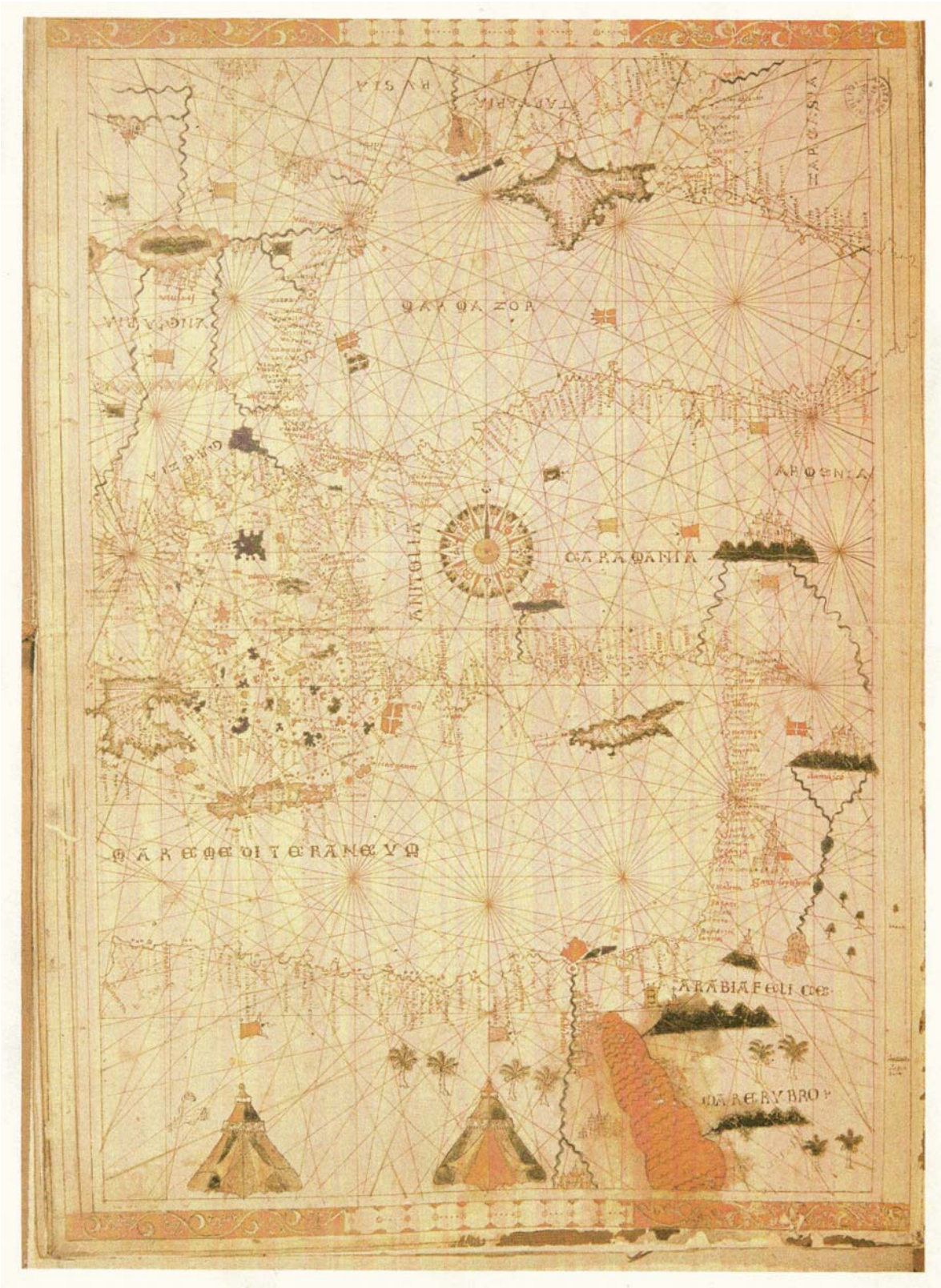
Μπορεί ν' ακούγεται παράξενο αλλά την ίδια στιγμή που τα παλαιότερα σωζόμενα *ναυτοπλοϊκά κείμενα* χρονολογούνται από τον 4$^{ο}$ ή 5$^{ο}$ αι. προ Χριστού, ο παλαιότερος σωζόμενος *ναυτικός χάρτης* που έχουμε στα χέρια μας είναι μόλις των αρχών του 14$^{ου}$ αιώνα μετά Χριστόν[13]! Ο χάρτης αυτός (που φαίνεται πιο κάτω στην Εικόνα 3), αποτελεί το πρότυπο μιας μεγάλης οικογένειας ναυτικών χαρτών που κυριάρχησαν στη ναυσιπλοΐα κατά το 14$^{ο}$ και 15$^{ο}$ αιώνα (Λιβιεράτος, Μπούτουρα, 2000). Ονομάστηκαν *πορτολάνοι χάρτες*(*) και η εμφάνισή τους πιθανόν να είναι το αποτέλεσμα της χρήσης της πυξίδας στη ναυτιλία (Μιχαηλίδου 2006, σελ. 23). Οι παλαιότεροι απ' αυτούς είναι σχεδιασμένοι σε ολόκληρο δέρμα ζώου και στην πλειοψηφία τους είναι προσανατολισμένοι με τη διεύθυνση της μαγνητικής βελόνας (ό.π., σελ. 23).

---

(*) Από την ιταλική λέξη *porto = λιμάνι* (Βίκτωρ Μέλας, 1999, σελ. 33).



Εικόνα 3. Ο *Πορτολάνος της Πίζας – Carta Pisana* (~1290 μ.Χ.). Ο πρώτος (σωζόμενος) ναυτικός χάρτης και η διαγραμματική του απόδοση (κάτω). Από 15 ρόδα των 16 διευθύνσεων το καθένα, εκπορεύονται οι διευθύνσεις των ανέμων οι οποίες πλέον υποδεικνύουν πλεύσεις σταθερής πυξίδας από έναν τόπο σ' έναν άλλο. Τα ρόδα είναι οργανωμένα σε δύο κύκλους των 8 ρόδων με κοινό ρόδο στο μέσον της Μεσογείου στον Κρότωνα της Καλαβρίας (από Λιβιεράτος, Μπούτουρα, 2000).



Εικόνα 4. Πορτολάνος της Ανατολικής Μεσογείου *του Ιωάννου Ξενοδόχου από την Κέρκυρα* (1520). Καλύπτεται από κυκλικό σύστημα 16 ρόδων των 32 διευθύνσεων με ένα ακόμη ρόδο 32 διευθύνσεων στο κέντρο του κύκλου (από Σφυρόερας κ.ά., 1985).

Στην αρχή οι πορτολάνοι περιορίστηκαν στην αποτύπωση των ακτογραμμών της Μεσογείου και του Ευξείνου Πόντου[14]. Σταδιακά – και ιδιαίτερα από τα τέλη του 15ου αι. και μετά – ακολουθώντας την πορεία των *Μεγάλων Ανακαλύψεων (1500-1650)*[*] θα καλύψουν και τις ακτές της νοτιοανατολικής Ασίας, της αφρικανικής ηπείρου (στο σύνολό της), καθώς και εκείνες του *λεγόμενου "Νέου Κόσμου"*. Με τον τρόπο αυτό (όπως θα δούμε λίγο πιο κάτω) θα προκαλέσουν μία *βαθιά κρίση* στη ναυτική χαρτογραφία κατά το 16ο αι., κρίση που οφείλεται σε ατέλειες διαφόρων ειδών που παρεισφρύουν στην επίπεδη αναπαράσταση της σφαιρικής πραγματικότητας (Τόλιας, σελ. 29, 31).

Εικόνα 5. Ο *Καταλανικός Άτλας* (1375), Ευρώπη και Βόρεια Αφρική. Εξαίρετο δείγμα της χαρτογραφικής σχολής της Καταλονίας. Επεκτείνοντας το σκοπό του παραδοσιακού πορτολάνου απεικονίζει ολόκληρη την Ευρώπη και την Ασία. Μπορεί να θεωρηθεί πρόδρομος των παγκόσμιων χαρτών της Αναγέννησης (Από Μιχαηλίδου, 2004).

---

[*] Η ημερομηνία είναι συμβατική, παρμένη από το βιβλίο «Γενική Χαρτογραφία» του Ε. Λιβιεράτου, εκδ. Ζήτη, 1988, σελ. 18.

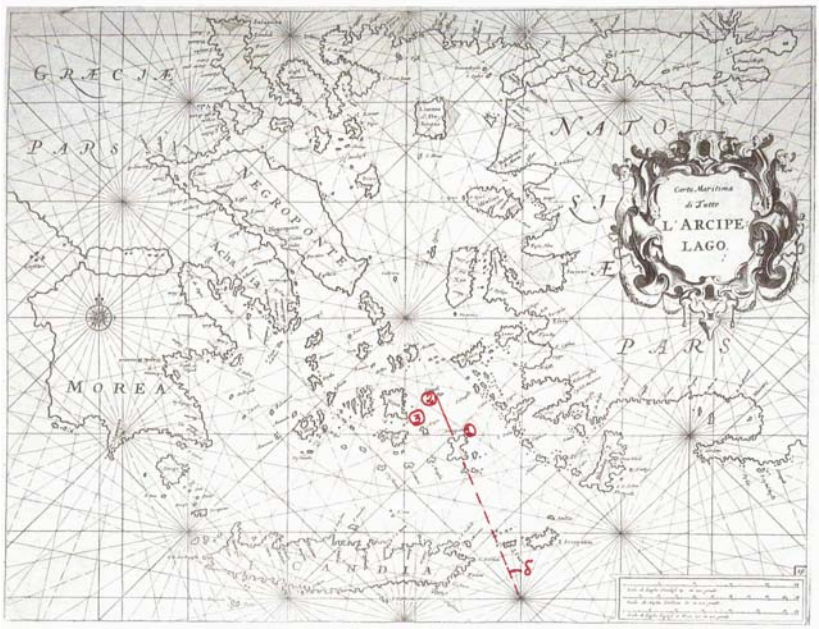
Σχετικά με τον τρόπο κατασκευής των πορτολάνων χαρτών πρέπει να αναφέρουμε πως *«το σημαντικότερο μέρος των μελετητών συντάσσεται με την άποψη ότι οι παλαιοί πορτολάνοι χάρτες δεν είναι προϊόν κανενός συστήματος προβολής, αλλά περισσότερο αποτυπώσεις εμπειρικών δεδομένων, γνωστών στους ναυτικούς»* (ό.π., σελ. 30). Δηλαδή αποτυπώσεις μιας λίγο πολύ εμπειρικής "ζωγραφικής" που δεν στηρίχθηκε σε κάποια ιδιαίτερη μαθηματική αρχή αλλά ούτε και στο *σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων*(*). Οι Λιβιεράτος και Μπούτουρα (2000) αναφέρουν ότι η κατασκευή τους στηρίζεται στη λεγόμενη *πολική αρχή των αποστάσεων και των προσανατολισμένων διευθύνσεων*. Σύμφωνα μ' αυτήν, ένας τόπος αποκτά με σαφήνεια τη θέση του πάνω στην υδρόγειο αλλά και στο χάρτη, με βάση την απόστασή του από έναν άλλο γνωστό τόπο (πόλο), αλλά συγχρόνως και με βάση τη διεύθυνση που ακολουθούμε για να φθάσουμε σ' αυτόν ξεκινώντας από τον γνωστό τόπο.

Η παρατήρηση αυτή φέρνει στο προσκήνιο και το βασικό-χαρακτηριστικό γνώρισμα των πορτολάνων χαρτών: το δίκτυο των ευθειών γραμμών που τους καλύπτει(**) και οι οποίες ανά 16 ή 32 διασταυρώνονται σχηματίζοντας ρόδα των ανέμων. Οι *ακτίνες* αυτές των *ανέμων* ήσαν και το βασικό βοήθημα των ναυτικών στην προσπάθεια τους να καταστρώσουν πάνω στο χάρτη τους μια πλεύση σταθερής πυξίδας. Η τακτική που ακολουθούσαν φαίνεται στο υποθετικό παράδειγμα της εικόνας 6.

---

(*) Είχαν ήδη καθιερωθεί από τον *Κλαύδιο Πτολεμαίο (85-165 μ.Χ.)*. Παρέμειναν σε αφάνεια για μια μεγάλη περίοδο του Μεσαίωνα και χρησιμοποιήθηκαν σε ελάχιστες περιπτώσεις από τους λόγιους της Χαρτογραφίας για την παραγωγή "παγκόσμιων χαρτών" - εικόνων του γνωστού κόσμου.

(**) Οι γραμμές αυτές τεμνόμενες σε πολλά σημεία του χάρτη δημιουργούν ένα πυκνό πλέγμα γνωστό και ως *μαρτελόγιο*. Η ετυμολογία της λέξης ενδεχομένως από το *mar teloio = θαλάσσιος κάνναβος* (Τόλιας, σελ. 28).




Εικόνα 6. Πορτολάνος του Αιγαίου από τον *F.M. Levanto* (1664). Παράδειγμα σχεδιασμού λοξοδρομικής πλεύσης από την Αστυπάλαια (①) στη Δονούσα (②). Ο χάρτης υποδεικνύει να ακολουθήσουμε πλεύση σταθερής πυξίδας με γωνία $\boldsymbol{\delta}$ ως προς Βορρά ίση με 22,5°. Ο χάρτης ανήκει σε μια περίοδο που οι πορτολάνοι είχαν αρχίσει να παρακμάζουν (από Σφυρόερας κ.α., 1985).

Θέλοντας να ταξιδέψουμε από την Αστυπάλαια (σημείο ①) στη Δονούσα (σημείο ②)[(*)], ξεκινάμε προσπαθώντας να εντοπίσουμε πάνω στο χάρτη μία *ακτίνα ανέμου* που να συνδέει τα δύο νησιά. Μια τέτοια ακτίνα υπάρχει και μάλιστα ξεκινά από το "αριστερό" άκρο ενός χαρακτηριστικού κόλπου που βρίσκεται στο βόρειο μέρος της Αστυπάλαιας. Παρακολουθώντας την ακτίνα αυτή μέχρι το πλησιέστερο ρόδο ανέμων διαπιστώνουμε ότι σχηματίζει γωνία $\delta=2\cdot(360:32)=22,5°$ με την κατεύθυνση του Βορρά. Έτσι λοιπόν αν στην πράξη ακολουθήσουμε μία λοξοδρομική πλεύση η οποία σχηματίζει με την κατεύθυνση της μαγνητικής βελόνας ακριβώς αυτή τη γωνία, αναμένεται κάποια στιγμή να φθάσουμε στον προορισμό μας[(15)].

Εδώ όμως ακριβώς είναι που δημιουργείται το σφάλμα που στην περίπτωση των μακρινών ταξιδιών παίρνει δραματικές διαστάσεις: Στους πορτολάνους χάρτες η σφαιρική πραγματικότητα έχει αποδοθεί σχεδιαστικά με τέτοιο τρόπο ώστε οι σπειροειδείς λοξοδρομίες παραμορφώνονται σε ευθύγραμμα τμήματα· ταυτόχρονα όμως ο όλος σχεδιασμός – ακριβώς γιατί είναι λίγο πολύ εμπειρικός – συνεπιφέρει αλλοιώσεις και στις γωνίες κατά τη μεταφορά τους από τη σφαίρα στο επίπεδο. Έτσι

---

(*) Στο χάρτη το νησί σημειώνεται με το αρχαίο όνομά του που ήταν *Στενώσα.*

η πορεία ***δ*** που υποδεικνύει ο χάρτης ν' ακολουθήσουμε δεν έχει καμία σχέση μ' αυτή που στην πραγματικότητα πρέπει ν' ακολουθηθεί. Όπως πολύ χαρακτηριστικά το έθεσε ένας χαρτογράφος στα μέσα του 16$^{ου}$ αι., *«κάτω από τις υπάρχουσες συνθήκες δεν έχει κανένα νόημα να ακολουθείς επί μακρόν μια πλεύση σταθερής πυξίδας έτσι όπως εμφανίζεται στο χάρτη. Οι γραμμές σταθερής πλεύσης οι οποίες εκκινούν από τα ρόδα ανέμων μπορεί να είναι ευθείες γραμμές πάνω στο χάρτη αλλά οι ίδιες πάνω στη σφαιρική επιφάνεια του ωκεανού παράγουν μία σειρά από σπειροειδείς καμπύλες οι οποίες θα οδηγούσαν ένα ναυσίπλοο με ακρίβεια στο πουθενά»!* (Michiel Coignet, 1581)(*).

Οι ναυσίπλοοι του ύστερου Μεσαίωνα είχαν επίγνωση αυτής της αδυναμίας (Λιβιεράτος, 1998). Σύμφωνα δε με το Lloyd Brown (1979*), «… ποτέ δεν έκρυψαν την ανάγκη τους για καλύτερους χάρτες. Ο Martin Cortes*(**) *οδύρονταν γιατί οι σοφοί άντρες φαίνονταν ότι δεν μπορούσαν να κατασκευάσουν ακριβείς χάρτες. Οι σοφοί άντρες βέβαια, μεταξύ τους και οι χαρτογράφοι, είχαν επίγνωση των (σχετικών) προβλημάτων αλλά η επίλυσή τους ήταν ένα άλλο ζήτημα»* (Brown 1979, σελ. 134).

Στην ουσία του το πρόβλημα που έπρεπε να επιλυθεί συμπυκνώνεται στο εξής ερώτημα: Σε τι είδους χάρτη θα μπορούσε μία πλεύση σταθερής πυξίδας εύκολα και με ακρίβεια να χαραχτεί και (κατόπιν) να ακολουθηθεί;

Το 16$^{ο}$ αι. ο Φλαμανδός χαρτογράφος Gerard Mercator είχε συνειδητοποιήσει, ότι ο όλος σχεδιασμός ενός τέτοιου χάρτη θα πρέπει *να υπηρετεί μια βασική παραμόρφωση·* στην πραγματικότητα να εκπορεύεται απ' αυτήν: οι σπειροειδείς λοξοδρομίες θα εμφανίζονται πάνω του σαν ευθύγραμμα τμήματα. Επιπλέον για να μπορεί ο σχεδιασμός να υπηρετεί λειτουργικά αυτή την παραμόρφωση θα πρέπει *να πληροί και μία ιδιότητας σταθερότητας:* να μην αλλοιώνει τα μεγέθη των γωνιών κατά τη "μεταφορά" τους από τη σφαίρα στο επίπεδο. Το ερώτημα βέβαια που μπαίνει είναι αν θα μπορούσε να υπάρξει ένας τέτοιος σχεδιασμός. Ο Mercator στα 1569 πέτυχε να κατασκευάσει ένα τέτοιο χάρτη του Κόσμου. Την επινόησή του καθώς και

---

(*) Το συγκεκριμένο παράθεμα είναι από το βιβλίο του L. Brown (σελ. 134), ο οποίος αποδίδει σε ελεύθερη γλώσσα τα λόγια του Coignet από το έργο του «Instruction nouvelle des points plus excellents et necessaries, toucbant l' art de nauiguer…». Η υπογράμμιση δική μας.

(**) Ισπανός συγγραφέας βιβλίων για τη ναυσιπλοΐα. Έζησε γύρω στο 1550. Τα βιβλία του έκαμαν αίσθηση.

τις απρόσμενες μαθηματικές ιδέες που ξεπήδησαν απ' αυτή, παρακολουθεί το δεύτερο μέρος της Διπλωματικής.

Παρατήρηση

Μία εντυπωσιακή διαφορά που έχει η γεωμετρία της σφαίρας απ' αυτήν του επιπέδου φαίνεται στο διαφορετικό πλήθος των λοξοδρομιών που συνδέουν δύο σημεία όταν αυτά θεωρηθούν πάνω στη σφαίρα και όταν τα ίδια σημεία θεωρηθούν πάνω σ' ένα επίπεδο ναυτικό χάρτη. Στην περίπτωση του χάρτη υπάρχει μία και μόνο λοξοδρομία, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία. Πάνω στη σφαίρα όμως, αυτό που ισχύει είναι ότι υπάρχουν άπειρες στο πλήθος λοξοδρομίες που ενώνουν τους δύο τόπους!

Η απόδειξη αυτής της απρόσμενης ιδιότητας θα παρουσιαστεί στο τρίτο μέρος της Διπλωματικής μιας και απαιτεί την αυστηρή μαθηματική διαπραγμάτευση των εννοιών «καμπύλη», «επιφάνεια» και «γωνία».

**Σημειώσεις πρώτου μέρους**

(1) Για παράδειγμα στο παλαιότερο απ' αυτά που είναι του 4ου ή 5ου αι. π.χ. διαβάζουμε: *«Η πλεύση κατά μήκος της Λιβύης* (εννοεί Αφρικής) *από το Καννωβικό*(*) *στόμα* (του Νείλου) *στην Αίγυπτο μέχρι της Ηράκλειες Στήλες, υπολογισμένη με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιήθηκε στην Ασία και στην Ευρώπη απαιτεί 74 ημέρες αν κάποιος ακολουθήσει διαδρομή δίπλα στις ακτές»* (Brown, 1979, σελ. 120). Το κείμενο αναφέρεται στα ταξίδια του ναυσιπλόου και γεωγράφου Σκύλακα από την Καρία (560-480 π.Χ.) και φέρει τον τίτλο *«Σκύλαξ ο Καρυανδεύς, ο περίπλους της θαλάσσης του κατωκοιμένου μέρους Ευρώπης και Ασίας και Λιβύης».* Κατά τον Lloyd Brown (1979) η φράση που αναφέραμε υπονοεί ότι υπάρχει και συντομότερος δρόμος – η πλεύση κατά μήκος ευθείας γραμμής με τις ακτές απέναντι ή διαγωνίως ως προς αυτές. Παρόμοιες καταγραφές αποστάσεων μετρημένων σε *στάδια* αυτή τη φορά, βρίσκουμε και στους άλλους λιγοστούς *Περίπλοες* που έχουν διασωθεί και που ανάγονται στους βυζαντινούς χρόνους. Ο σημαντικότερος απ' αυτούς είναι αναμφισβήτητα το χειρόγραφο με κωδικό 4701 της βιβλιοθήκης της Μαδρίτης και τίτλο *«Σταδιασμός ήτοι περίπλους της Μείζονος Θαλάσσης»* (δηλ. της Μεσογείου και της Μαύρης Θάλασσας). Πρόκειται για χειρόγραφο του 10ου αι. μ.Χ. το οποίο όμως βασίζεται σε αρχαιότερο πρότυπο αγνώστου συγγραφέα του 4ου ή 5ου αι. μ.Χ. (Λιβιεράτος 1988, Brown 1979). Σύμφωνα με τον Ε. Λιβιεράτο (1998) αποτελεί το μεγαλύτερο εφαρμοσμένο χαρτογραφικό έργο της Μεσογείου. Περιέχει πάμπολλες καταγραφές αποστάσεων καθώς και πολλά άλλα στοιχεία σχετικά με τις ναυτικές διαδρομές μεταξύ των λιμανιών της Μεσογείου (βλέπε για παράδειγμα Brown, 1979, σελ. 120-121).

(2) Στο επίπεδο η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι το (μοναδικό) ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει. Πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας που δεν υπάρχουν ευθείες, την ιδιότητα της συντομότερης διαδρομής κατέχει το τόξο του (μοναδικού) *μέγιστου κύκλου* που ενώνει τα δύο σημεία. *Μέγιστος κύκλος σφαίρας*

---

(*) Από την πόλη *Κάννωβος*, το κυριώτερο Αιγυπτιακό λιμάνι για τους Έλληνες εμπόρους πριν την ίδρυση της Αλεξάνδρειας. Η πόλη αναφέρεται από τον Ηρόδοτο και βρίσκονταν στα ανατολικά προάστια της Αλεξάνδρειας περίπου 25 km από το σημερινό κέντρο της (στο σημερινό *Abu Qir*).

ονομάζεται εκείνος ο κύκλος πάνω της που το κέντρο του είναι το κέντρο της σφαίρας. Για παράδειγμα, στη γήινη σφαίρα ο *ισημερινός* και οι *μεσημβρινοί* είναι μέγιστοι κύκλοι. Πολύ μικρά κομμάτια των μέγιστων κύκλων μοιάζουν με ευθύγραμμα τμήματα.

(3) Τα σωζόμενα Βυζαντινά αποσπάσματα είναι και εδώ χαρακτηριστικά: Ο βυζαντινός *Σταδιασμός* που αναφέραμε πριν, στο μεγαλύτερο μέρος του καταπιάνεται με την διερεύνηση αυτών ακριβώς των παραγόντων ενώ σε άλλο βυζαντινό απόσπασμα με χρήσιμες οδηγίες τη ναυσιπλοΐα διαβάζουμε για *«... τους γιγνώσκοντας ακριβώς την πείραν της θαλάσσης... ποίοι άνεμοι κυμαίνουσιν αυτήν και ποίοι φυσώσιν από της γης· ίνα δε γιγνώσκοσιν και τας κρυπτόμενας πέτρας εις την θάλασσαν και τους τόπους τους μη έχοντας βάθος και την παραπλεομένην γην και το πόσο απέχουσιν οι τοιούτοι λιμένες εις από του άλλου...»* (Σφυρόερας κ.ά., 1985, σελ. 25).

(4) Στο βιβλίο της Ελένης Μαντά «100 αιώνες θάλασσα» διαβάζουμε ότι τα θαλασσινά ταξίδια στην Ελλάδα, και πιθανότατα σε ολόκληρο τον κόσμο, ξεκίνησαν από το Αιγαίο. Ευρήματα που βρέθηκαν στο σπήλαιο Φράγχθι της Αργολίδας *τοποθετούν τους πρώτους ναυτικούς γύρω στα 8000 π.Χ.* (Μαντά, 2003, σελ. 17-18). Σχετικές πληροφορίες επίσης υπάρχουν και στο περιοδικό «Γεωτρόπιο» της εφημερίδας «Ελευθεροτυπία», τεύχος 280, 27 Αυγούστου 2007, στο άρθρο «Τα αρχαία Σκαριά», σελ. 12-15.

(5) Για παράδειγμα ο *Όμηρος (8$^{ος}$ – 7$^{ος}$ αι. π.Χ.)* στην *Οδύσσεια* αναφέρει ότι ο *Βορέας* και ο *Ζέφυρος* φυσούν από τη Θράκη (Brown, 1979, σελ. 124). Πάντως οι εποχιακοί άνεμοι αποτελούσαν εξαίρεση μιας και πνέουν από σταθερή κατεύθυνση και ακριβώς γι' αυτό το λόγο φαίνεται να έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην οργάνωση των ναυτικών ταξιδιών. Η Ε. Μαντά (2003) μας πληροφορεί σχετικά ότι, *οι Κρήτες ναυτικοί ήδη από το 1400 π.Χ.* χρησιμοποιούσαν τα καλοκαιρινά *μελτέμια* για να ταξιδέψουν μέχρι την Αίγυπτο και να πουλήσουν τα εμπορεύματά τους. Μέσα σε 5 μόνο ημέρες κάλυπταν μία απόσταση 370 ν.μ. (1 ν.μ. = 1.852 m). Ωστόσο η επιστροφή τους κρατούσε έναν και δύο μήνες μιας και λόγω του αντίθετου καιρού έπρεπε πλέον να ταξιδέψουν ακτή ακτή από τη Φοινίκη και τη Μ. Ασία για να επιστρέψουν μέσω Δωδεκανήσων στην Κρήτη.

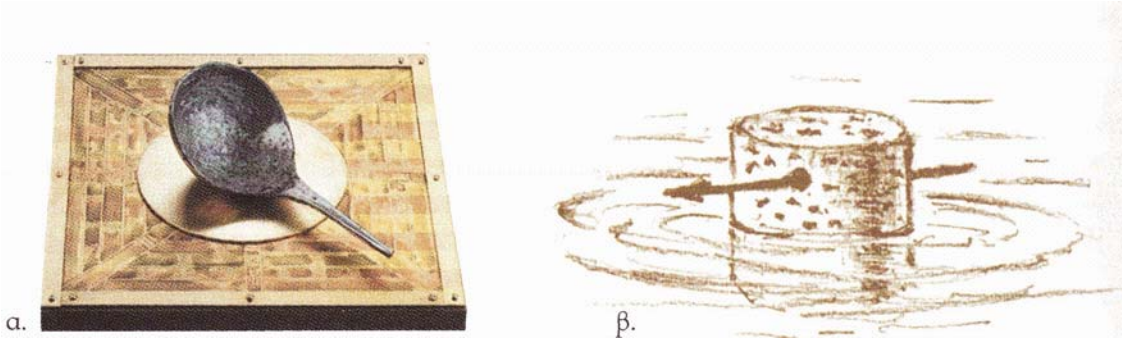
(6) Πότε ακριβώς συνέβη για πρώτη φορά αυτή η σύνδεση δεν το γνωρίζουμε. Ο Στράβωνας (68 π.Χ. – 20 μ.Χ.) – που μαζί με τον Ηρόδοτο και τον Κλαύδιο Πτολεμαίο αποτελούν τις κυριότερες πηγές μας για τις γεωγραφικές γνώσεις των

αρχαίων – αναφέρει ότι η *Μικρή Άρκτος* δεν είχε αναγνωριστεί ως αστερισμός μέχρι που οι Έλληνες έμαθαν γι' αυτήν από τους Φοίνικες που τη χρησιμοποιούσαν στα ναυτικά τους ταξίδια. Σύμφωνα με τον Ε. Λιβιεράτο (1998) πολλοί αρχαίοι πολιτισμοί έστρεψαν από νωρίς το ενδιαφέρον τους στην παρατήρηση και τη μελέτη του έναστρου στερεώματος. Το ενδιαφέρον τους όμως εντοπίζονταν σχεδόν αποκλειστικά στην επίδραση των άστρων στους ανθρώπους, κάτι πολύ κοντά στην αστρολογία. Μόνο οι Έλληνες που διακρίθηκαν στη θάλασσα αναζήτησαν στον έναστρο ουρανό τη μέθοδο προσδιορισμού θέσης και προσανατολισμού στη θάλασσα (Λιβιεράτος, σελ. 18, 19).

(7) Ο Lloyd Brown στο βιβλίο του «The Story of Maps» (σελ. 204), αναφέρεται σ' ένα κείμενο του Ίππαρχου (~140π.Χ.), στο οποίο ο Ίππαρχος σχολιάζει και διορθώνει τον Εύδοξο τον Κνίδιο (410-355 π.Χ.). Από την αναφορά αυτή συνάγεται ότι ήδη από τον 4$^{ο}$ αι. π.Χ. οι Αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τις δύο *Άρκτους* για τον προσδιορισμό του Βόρειου Πόλου της Γης. Ας σημειώσουμε εδώ πως η κατεύθυνση προς την οποία βρίσκεται ο Βόρειος Πόλος της Γης μπορεί να προσδιοριστεί αν πρώτα εντοπιστεί πάνω στο νυχτερινό ουρανό το λαμπρότερο αστέρι του αστερισμού της *Μικρής Άρκτου* που ονομάζεται και *Πολικός Αστέρας (Polaris).* Ο εντοπισμός αυτός επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του αστερισμού της *Μεγάλης Άρκτου*. Τις πληροφορίες του ο Brown τις αντλεί από το έργο του Sir Thomas Heath, «Aristarchus, of Samos the ancient Copernicus A history of Greek Astronomy to Aristarchus», 1913, The Clarendon Press.

(8) Το πότε ακριβώς συνέβη η ανακάλυψη της μαγνητικής βελόνας, το πού, καθώς και το πότε πρωτοχρησιμοποιήθηκε στη ναυσιπλοΐα η μαγνητική πυξίδα, είναι ερωτήματα που ακόμη και σήμερα αποτελούν ένα πολύ μπερδεμένο κουβάρι. Άκρως ενδιαφέρουσες είναι οι πληροφορίες που παραθέτει γι' αυτό το θέμα ο L. Brown στις σελίδες 126-131 του βιβλίου του.

Επίσης συμπληρωματικά οι πληροφορίες στην εγκυκλοπαίδεια «Μπριττάνικα» καθώς και οι πληροφορίες στις ηλεκτρονικές διευθύνσεις www.el.wikipedia.org (μετάβαση στο λήμμα «Ανεμολόγιο») και www.FishFinder.gr/PageSub Catalog.asp?c=46-141-Null (επιλογή «Πυξίδες»). Όσο για τη διαφορά μεταξύ μαγνητικής βελόνας και μαγνητικής πυξίδας, η ακόλουθη εικόνα από το βιβλίο της Ελένης Μαντά «100 αιώνες θάλασσα») (Εκδ. Ναυτικό Μουσείο Αιγαίου, σελ. 94), είναι νομίζουμε διαφωτιστική:




Εικόνα 7. α. Αναπαράσταση αρχικής μορφής πυξίδας από την Κίνα (τέλη 3ου αιώνα π.Χ.). Χρησιμοποιήθηκε μάλλον για τελετουργικούς σκοπούς. Ουσιαστικά πρόκειται για μαγνητική βελόνα.
β. Φελλός με μαγνητισμένη βελόνα σε νερό . Μαγνητική πυξίδα των Βυζαντινών χρόνων.

(9) Η γη αποτελεί τεράστιο φυσικό μαγνήτη με όλα τα χαρακτηριστικά του, δηλαδή το βόρειο μαγνητικό πόλο, το νότιο μαγνητικό πόλο και το μαγνητικό ισημερινό. Οι μαγνητικοί πόλοι αποτελούν τα σημεία μεγίστης μαγνητικής εντάσεως και βρίσκονται κοντά στους γεωγραφικούς πόλους αλλά δεν συμπίπτουν μ' αυτούς. Ο μεν βόρειος κείται κοντά στον κόλπο Hudson (ΒΑ ακτές Καναδά, περίπου 650 μίλια μακριά από τον Βόρειο γεωγρ. πόλο), ο δε νότιος κοντά στη South Victoria Land (Ανταρκτική). Οι μαγνητικοί πόλοι δεν παραμένουν σταθερά στο ίδιο σημείο, αλλά κινούνται συνεχώς σε ακαθόριστα ίχνη.

Η μαγνητική βελόνα τώρα, ακριβώς επειδή είναι μαγνήτης είναι προσανατολισμένη προς το βόρειο μαγνητικό πόλο της Γης. Η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνσή της με την κατεύθυνση του γεωγραφικού Βορρά ονομάζεται *απόκλιση*. Για το ρόλο που διαδραμάτισε η *απόκλιση* στα ναυτικά ταξίδια βλέπε το πολύ ενδιαφέρον κείμενο του Lloyd Brown στις σελίδες 132-134 του βιβλίου του.

<u>Σ' αυτή την εργασία θα θεωρούμε ότι οι πυξίδες δείχνουν προς το γεωγραφικό Βόρειο Πόλο</u>**.**

(10) Η μετονομασία αυτή οφείλεται στον Ολλανδό μαθηματικό Willebrord Snellius ή Snell (1580-1626) ο οποίος την πρότεινε το 1624 σε μία μελέτη του για την ναυσιπλοΐα (Rickey and Tuchinsky, 1980). Η αλλαγή ονομασίας –κατά τη γνώμη μας– υποδηλώνει μία μετατόπιση από την αρχική Φυσική προσέγγιση του θέματος σε μια γεωμετρική. Να αναφέρουμε εδώ ότι μεταξύ δύο σημείων της Γης μπορεί ν' αποδειχθεί ότι διέρχονται άπειρες λοξοδρομίες. Εκείνη όμως η οποία ενδιαφέρει το ναυτιλλόμενο είναι αυτή που ενώνει τα σημεία απευθείας χωρίς να περιστρέφεται γύρω από τη Γη.

(11) Στο εγχειρίδιο των Σχολών Εμπορικού Ναυτικού «Ναυτιλία» των Ντούνη και Δημαράκη και στις σελίδες 48 και 49, υπάρχει εκτενής αναφορά στη σύγκριση μεταξύ λοξοδρομικής και *ορθοδρομικής πλεύσης* (η τελευταία είναι η πλεύση σε μέγιστο κύκλο σφαίρας). Εκεί διαβάζουμε ότι:

*«γενικά, για μικρές αποστάσεις η διαφορά ορθοδρομικής και λοξοδρομικής αποστάσεως είναι αμελητέα . Γι' αυτό προτιμούμε να πλέουμε λοξοδρομικά έχοντας το πλεονέκτημα ότι θα τηρήσουμε σταθερή πορεία. Συνήθως στα μεσαία πλάτη, μέχρι 600 ν.μ. (1 ν.μ. = 1852 μ.) πλέομε λοξοδρομικά».*

Για μεγαλύτερες αποστάσεις – όπως για παράδειγμα αυτές των υπερατλαντικών ταξιδιών – βλέπε σχετικά το τρίτο μέρος της Διπλωματικής και την παράγραφο με τίτλο «Οι σύγχρονοι πλοηγοί χρησιμοποιούν μερκατορικούς χάρτες».

(12) Την ακριβή αλγεβρική εξίσωση θα τη δούμε στο τρίτο μέρος της Διπλωματικής. Η εξίσωση αυτή – όπως προκύπτει απ' το δεύτερο μέρος της Διπλωματικής – με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο έγινε γνωστή σίγουρα μετά το 1670 (που πρωτοαποδείχθηκε ότι $\int \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \ln\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$).

(13) Η δήλωση αυτή (που αποτελεί και την επίσημη άποψη των ιστορικών της χαρτογραφίας) δεν μπορεί παρά να γίνει αποδεκτή με κάποιο σκεπτικισμό, μιας και δεν έχουμε παρουσιάσει έναν <u>αυστηρό</u> ορισμό της έννοιας «ναυτικός χάρτης». Ένας τέτοιος ορισμός βέβαια δεν είναι εύκολο να δοθεί μιας και κατ' αρχήν <u>δεν είναι δυνατό</u> να δοθεί <u>ένας απόλυτος</u> ορισμός για την έννοια «χάρτης» που να καλύπτει όλες τις εποχές κι όλους τους πολιτισμούς. Στα ερωτήματα «τι είναι αυτό που κάνει ένα χάρτη να είναι χάρτης» και «πότε ένα σκίτσο ή γενικότερα ένα δημιούργημα δεν είναι χάρτης», οι απαντήσεις δεν είναι καθόλου προφανείς. Γι' αυτά τα εξόχως ενδιαφέροντα ζητήματα υπάρχει εκτενής συζήτηση στο κλασσικό πλέον εξάτομο έργο των εκδόσεων του Πανεπιστημίου του Chicago, «The History of Cartography» την έκδοση του οποίου επιμελήθηκαν κατ' αρχήν οι Harley και Woodward (ειδικά η εισαγωγή του πρώτου τόμου, οι σελίδες 371-463, καθώς και το τρίτο Βιβλίο του δεύτερου τόμου). Κατατοπιστικό γι' αυτά τα ζητήματα και το άρθρο «Uncommon Directions» του Robin Herbst στο περιοδικό *Humanities*.

Όπως όμως και να' χει το πράγμα, για το ερώτημα που μας απασχολεί εδώ δηλ. αυτό της **χάραξης** πάνω σ' έναν **έντυπο** χάρτη της διαδρομής ενός πλοίου,

αυτό που πρέπει να' χουμε στο νου μας είναι η *"κλασική-συνηθισμένη αντίληψη"* της έννοιας του χάρτη.

(14) Οι πορτολάνοι αυτοί ονομάστηκαν *κλασικοί ή κανονικοί πορτολάνοι.* Υπήρξαν δημιούργημα των Ιταλών χαρτογράφων και κυρίως των χαρτογραφικών σχολών της Γένοβας και της Βενετίας. Παραλλαγή τους που εμφανίστηκε λίγο αργότερα, αποτελούν οι *καταλανικοί πορτολάνοι,* δημιούργημα Ισπανών χαρτογράφων κυρίως από τις πόλεις Μαγιόρκα και Βαρκελώνη.

(15) Βέβαια, ο συγκεκριμένος χάρτης που παρουσιάζουμε έχει αποτυπώσει λάθος το μέγεθος της Αμοργού (σημείο ③). Στην πραγματικότητα αυτό το νησί είναι αρκετά μεγαλύτερο με αποτέλεσμα αν ακολουθήσουμε την πλεύση σταθερής πυξίδας που προτείνει ο χάρτης, κάποια στιγμή να πέσουμε πάνω στην Αμοργό!

Ανεξάρτητα απ' αυτό ν' αναφέρουμε πως στην περίπτωση που η αρχή και το τέλος ενός ταξιδιού δεν συνδέονταν πάνω στον πορτολάνο χάρτη με μία ήδη υπάρχουσα ακτίνα ανέμου, οι ναυσιπλόοι ένωναν μ' ένα χάρακα αυτά τα δύο σημεία και στη συνέχεια μετρούσαν μ' ένα μοιρογνωμόνιο τη γωνία που σχημάτιζε ο χάρακας με την κατεύθυνση του Βορρά. Προφανώς όσο πιο πυκνό ήταν το δίκτυο των διευθύνσεων των ανέμων τόσο λιγότεροι επιπλέον σχεδιασμοί απαιτούνταν.

**Βιβλιογραφία πρώτου μέρους**


- Άτλας Παπύρου (1968). *Η κατάκτηση της Γης από τον Άνθρωπο* (Τόμος Γ΄). Αθήνα: Εταιρεία Εγκυκλοπαιδικών Εκδόσεων (Πρωτότυπη Έκδοση, Fratelli Fabbri Editori – Milano, 1968).
  Σελ. 14-39

- Brown, L.A. (1979). *The story of maps* (ανατύπωση από νέο εκδ. οίκο της 1ης έκδοσης του 1949) New York: Εκδ. Dover.
  Σελ. 3-34, 113-166.

- Λιβιεράτος, Ε. (1988). *Γενική Χαρτογραφία* (2η Έκδ.). Θεσσαλονίκη: εκδ. Ζήση.
  Σελ. iii-vi, 1-6, 12-29.

- Λιβιεράτος, Ε. (1998). *Χαρτογραφίας και Χαρτών Περιήγησις.* Θεσσαλονίκη: εκδ. Εθνική Χαρτοθήκη.
  Σελ. 13-28, 101-152, 164-167, 190-192.

- Μαντά Ε. (2003). *100 Αιώνες Θάλασσα.* Μύκονος: Εκδ. Ναυτικό Μουσείο Αιγαίου.
  Σελ. 17-28, 37-40, 43, 65-67.

- Μέλας, Β.Θ. (1999). *«Γης Περίοδος Πάσης» Συνοπτική Ιστορία της Χαρτογραφίας.* Αθήνα: Εκδ. Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.
  Σελ. 7-20, 29-41.

- Ντούνης, Χ., Δημαράκης, Α. (1995). *Ναυτιλία* (Τόμος Α΄). Αθήνα: Εκδ. Ίδρυμα Ευγενίδου.
  Σελ. 1-4, 18-26, 33-34, 46-49, 67-94.

- Randles, W.G.L. (1988). From the Mediteranean Portulan Chart to the Marine World Chart of the Great Discoveries: The Crisis in Cartography in the Sixteenth Century. *Imago Mundi, 40,* 115-118.

- Σφυρόερας, Β., Αβραμέα, Α., Ασδραχάς, Σ. (1985), *Χάρτες και Χαρτογράφοι του Αιγαίου Πελάγους*. Αθήνα: Εκδ. Ολκός.
  Σελ. 23-28.

- Τόλιας, Γ. (1999). *Οι Ελληνικοί Ναυτικοί Χάρτες Πορτολάνοι*. Αθήνα: Εκδ. Ολκός.
  Σελ. 17-34.


**Από το Διαδίκτυο**

<u>Άρθρα – Πανεπιστημιακές Σημειώσεις</u>


- Heine, G.W. (n.d.). Lambert, Euler, and Lagrange as Map Makers. Retrieved December 5, 2006, from
  http://www.phobos.ramapo.edu/~ldant/Heine_Euler_article.pdf.

- Herbst, R. (1999). Uncommon Directions. *Humanities, 20,* Retrieved January 6, 2007 from.
  http://www.neh.gov/news/humanities/1999-05/map.html
  (άρθρο που αναφέρεται στη δυσκολία του ορισμού της έννοιας «χάρτης».).

- Λιβιεράτος, & Μπούτουρα (2000). Κύθηρα, η εκ δυσμών πύλη του Αιγαίου στους αναγεννησιακούς χάρτες. Ανάκληση Δεκέμβριος 19, 2006 από
  http://www.maplibrary.gr/Kythira_paper/Text.html

- Μιχαηλίδου, Ε. (2004). *Ιστορία της Χαρτογραφίας* (Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο). Ανάκληση Μάιος 20, 2007 από

www.survey.ntua.gr/main/courses/cartography/gencarto/documentation/history2.pdf
σελ. 1-30.

- Μιχαηλίδου, Ε. (2007). *Η μάθηση και η διδασκαλία με χάρτες* (Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Π.Τ.Δ.Ε. Ρόδος). Ανάκληση Μάιος 25, 2007 από

http://www.rhodes.aegean.gr/ptde/personel/407/michaelidou/Cartography_Text.pdf.
σελ. 1-13.

Ορισμοί γεωγραφικών όρων

- Andrews, J.H. (January 1998). Definitions of the word “map”, 1649-1996. Retrieved May 1, 2007 from
  http://www.maphist.nl/discpapers.html
  (Κατάλογος με 321 διαφορετικούς ορισμούς της έννοιας «χάρτης» από το 1649 έως το 1996. Αποτέλεσε το υλικό για ένα μικρό άρθρο στο περιοδικό *Cartographica,* xxxiii, 4, p1-11).

- Woodward, History of Cartography, Vol2, Book 3 (University of Chicago) (n.d.). Retrieved May 1, 2007, from
  http://www.press.uchicago.edu/Misc/Chicago/907287.html#2
  (Αποσπάσματα από το περίφημο 6τομο έργο *The History of Cartography ,* edited Harley and Woodward, University of Chicago Press, 1987. Αναφέρεται και ο διάσημος ορισμός της έννοιας του «χάρτη»).

Βιογραφίες

- Indexes of Biographies (University of St. Andrews, Scotland) (n.d.). Retrieved May 24, 2007 from
  http:/www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html
  (Εντυπωσιακά ενημερωμένος κατάλογος με βιογραφικά στοιχεία μαθηματικών όλων των εποχών).

- The Galillo Project-Catalog of the Scientific Community (n.d.) Retrieved May 26, 2007 from
  http://www.galileo.rice.edu/lib/Catalog
  (Πρόγραμμα Γαλιλαίος. Περιέχει εντυπωσιακή βάση δεδομένων με βιογραφικά στοιχεία επιστημόνων από διάφορους κλάδους και εποχές).

Ναυτικά, επιστημονικά όργανα

- Για το «ανεμολόγιο» στην ηλεκτρονική διεύθυνσηhttp://www.el.wikipedia.org
  (Μετάβαση στο λήμμα «ανεμολόγιο»).

- Για την «πυξίδα» στη διεύθυνση

http://www.FishFinder.gr/PageSubCatalog.asp?c=46-141-Null (Επιλογή «Πυξίδες»).

- Ηλεκτρονικός κατάλογος – αρχείο επιστημονικών οργάνων των μεσαιωνικών και αναγεννησιακών χρόνων από 4 σπουδαία Ευρωπαϊκά Μουσεία στη διεύθυνση http://www.mhs.ox.ac.uk/epact/introduction.php

- Πληροφορίες για ανακατασκευές ιστορικών επιστημονικών οργάνων από το Institute and Museum of the history of Science της Φλωρεντίας στη διεύθυνση http://www. imss.fi.it/istituto/index.html

Ηλεκτρονικά αρχεία χαρτών

- Cartographic Images (February, 1998). Retrieved May 26, 2007 from http://www.henry-davis.com/MAPS
  (Πολύτιμο αρχείο παλαιών χαρτών!!)

- Old World Auctions – Prices Realized Auction 104 (September, 2003) Retrieved May 28, 2007 from
  http://www.oldworldauctions.com/prices/prices104.htm
  (Συμπληρωματικά ως προς το προηγούμενο. Μεταξύ άλλων περιέχει 2 χάρτες του Captain Cooke σε μερκατορική προβολή κι έναν παγκόσμιο χάρτη του Euler. Ακόμη πιο πολλοί χάρτες στην βασική διεύθυνση www.oldworldauctions.com/ archives.asp).

Στον Τάσο Πατρώνη…

# ΜΕΡΟΣ ΙΙ

## Η επινόηση του Mercator και οι απρόσμενες μαθηματικές ιδέες που ξεπήδησαν απ΄ αυτήν

«Στη Γεωγραφία οφείλει κανείς να εξετάσει την έκταση ολόκληρης της Γης καθώς και το σχήμα της και τη θέση της κάτω από τους ουρανούς έτσι ώστε να προσδιορίσει σωστά τις ιδιομορφίες και τις διαστάσεις του τμήματος το οποίο πραγματεύεται… Το πιο σπουδαίο και εξαίσιο επίτευγμα των μαθηματικών είναι ότι αποκαλύπτουν όλα αυτά τα πράγματα στην ανθρώπινη διάνοια».

Κλαύδιος Πτολεμαίος, «Γεωγραφική Υφήγησις», 1$^{ος}$ αι. μ.Χ.

«Η βαθιά μελέτη της Φύσης είναι η πιο γόνιμη πηγή μαθηματικών ανακαλύψεων»

Joseph Fourier, 1807

## §6. Εισαγωγή

Αν στο ξεκίνημα αυτού του δεύτερου μέρους επιχειρήσουμε να κάνουμε μια σύγκριση ανάμεσα σ΄ αυτά που θα ακολουθήσουν και σ΄ αυτά που έχουν ήδη ειπωθεί, αυτό που πρέπει κατ΄ αρχήν να πούμε είναι πως τα όσα ελέχθησαν στο πρώτο μέρος είχαν έναν έντονα *εμπειρικό* χαρακτήρα. Οι παλαιοί πορτολάνοι χάρτες, σχεδιασμένοι συχνά από τους ίδιους τους ναυτικούς που λειτουργούσαν ως εμπειρικοί χαρτογράφοι της ανάγκης, σε μεγάλο βαθμό βάσισαν την κατασκευή τους σε στοιχειώδη μαθηματικά που αφορούσαν σε μετρήσεις αποστάσεων και γωνιών. Ακόμη κι αν οι ακτογραμμές αποδίδονται σ΄ αυτούς με εντυπωσιακή ακρίβεια, εντούτοις αυτή η *"ανεπιτήδευτη"* αποτύπωση της σφαίρας στο επίπεδο, κατά τη διάρκεια των "Μεγάλων Ανακαλύψεων" ανάδειξε κρίσιμες αδυναμίες οι οποίες και γέννησαν το αίτημα κατασκευής ενός νέου ναυτικού χάρτη ο οποίος να πληροί πλέον συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες.

Με την *επινόηση* αυτού του ναυτικού χάρτη, τις *μαθηματικές του ιδιότητες*, τον *τρόπο κατασκευής του* και τις *απρόσμενες μαθηματικές ιδέες* που ξεπήδησαν απ΄ αυτόν ασχολείται το δεύτερο μέρος της Διπλωματικής.

Ως εκ τούτου, τα όσα διαδραματίζονται από δω και κάτω – σε αντίθεση με το πρώτο μέρος – αναδεικνύουν ένα *πιο μεθοδικό και πιο επιστημονικό* χαρακτήρα. Τα μαθηματικά επιχειρήματα που εμφανίζονται είναι πιο "εκλεπτυσμένα" και τα πρόσωπα που πρωταγωνιστούν στη διαμόρφωσή τους είναι (τα περισσότερα) βαθείς γνώστες των μαθηματικών της εποχής τους και στη συντριπτική τους πλειοψηφία καθαρόαιμοι μαθηματικοί. *Το δεύτερο μέρος μετακομίζει – θα λέγαμε – από το εργαστήριο στο σπουδαστήριο*.

Από απόψεως περιεχομένου το δεύτερο μέρος χωρίζεται σε δύο υποενότητες. Στην πρώτη, που αποτελείται από τις παραγράφους 7 έως και 10, παρουσιάζονται *στο ιστορικό τους πλαίσιο* η επινόηση από τον G.Mercator της χαρτογραφικής του προβολής καθώς και οι μαθηματικές ιδέες που απαιτήθηκαν για την ακριβή κατασκευή – αποκρυπτογράφηση του μερκατορικού χάρτη. Οι ιδέες αυτές όσο κι αν ακούγεται παράξενο έγιναν γνωστές 30 χρόνια αργότερα από την παρουσίαση του χάρτη μιας και ο Mercator δεν είπε τίποτα γι΄ αυτές! Ιδιαίτερη προσπάθεια εδώ καταβλήθηκε ώστε να διαφανούν οι σχέσεις της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών με τις κοινωνικές και επιστημονικές απαιτήσεις της εποχής.

Στη δεύτερη υποενότητα (παράγραφος 11) και σε άμεση σχέση με τις ιδέες για τις οποίες μόλις έγινε λόγος, παρουσιάζεται *στο ιστορικό της πλαίσιο* μία απρόσμενη συμβολή του μερκατορικού χάρτη στον προβληματισμό γύρω από τη γέννηση του Απειροστικού Λογισμού: ο υπολογισμός του τριγωνομετρικού ολοκληρώματος της *τέμνουσας μιας γωνίας* $\left( \int \text{τεμνx} = \int \frac{1}{\text{συνx}} \cdot \text{dx} \right)$. Πρόκειται για ένα ολοκλήρωμα που είναι αντιπροσωπευτικό μιας μεγάλης κατηγορίας τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων που συναντάμε στο Λύκειο. Την εποχή που πρωτοεμφανίστηκε το ολοκλήρωμα αυτό ο Απειροστικός Λογισμός δεν είχε παρουσιαστεί αλλά ούτε και ο ίδιος ο Newton είχε γεννηθεί! Οι Rickey και Tuchinsky (1980) χαρακτηρίζουν την όλη περίπτωση ως μία *εφαρμογή της Γεωγραφίας στα Μαθηματικά παρά το αντίστροφο*. Ο υπολογισμός όπως αναφέρουν εξελίχθηκε *«σ' ένα από τα σημαντικότερα ανοιχτά προβλήματα των μέσων του 17$^{ου}$ αιώνα»*(σελ.165).

## §7. Ο Gerardus Mercator και η εποχή του

*«Οποιοσδήποτε κάνει τα μονοπάτια της θάλασσας πιο εύκολα, οποιοσδήποτε μειώνει τους κινδύνους και απαλύνει τις ταλαιπωρίες στη ζωή των ναυτικών, αξίζει να τον θυμούνται. Όμως η ύπαρξη του Mercator ακόμη και στα μυαλά των ευφυών και μορφωμένων ανθρώπων της θάλασσας, φαίνεται έως τώρα να είναι μετά βίας κάτι περισσότερο από ένα απλό όνομα».*

Elial Hall, 1878(*)

Ο *Gerard Mercator* – γόνος φτωχής πολυμελούς οικογένειας και εγγονός παπά – γεννήθηκε το 1512 στο Rupelmonde της ανατολικής Φλάνδρας (σημερινό Βέλγιο), αλλά για πολλά χρόνια έζησε στο Duisburg της σημερινής Γερμανίας. Το πραγματικό του όνομα ήταν *Gerard Kremer*. Μετά το θάνατο της μητέρας του όμως (~1528)(**), άλλαξε το αρχικό του επίθετο (που στα γερμανικά σημαίνει «έμπορος») στο λατινικό «Mercator» (που επίσης σημαίνει «έμπορος»). Το πλήρες όνομα που – τελικά – διάλεξε για τον εαυτό του και με το οποίο έγινε γνωστός ήταν το *«Gerardus Mercator de Rupelmonde»*.

Αφού τελείωσε το σχολείο του υπό την επίβλεψη του παππού του, ο Mercator ξεκίνησε τις σπουδές του στα 1530 σπουδάζοντας Φιλοσοφία στο πανεπιστήμιο της Louvain(***) όπου και εντρύφησε στον Αριστοτέλη. Πήρε το δίπλωμά του δύο χρόνια αργότερα και αφού πέρασε μία προσωπική κρίση σχετική με τις επιστημονικές του ανησυχίες και τις θεολογικές του καταβολές, επανήλθε στις σπουδές στα 1534. Αυτή τη φορά διδάχτηκε μαθηματικά και αστρονομία από τον εξέχοντα Ολλανδό μαθηματικό Regnier Gemma Frisius. Παράλληλα έμαθε τις τέχνες του χαράκτη και του κατασκευαστή επιστημονικών οργάνων δίπλα στον Gaspard van der Heyden ενώ για ένα διάστημα δίδαξε και μαθηματικά στους φοιτητές του πανεπιστημίου του Louvain. Όμως το μεγάλο του ενδιαφέρον από πολύ νωρίς υπήρξε η Γεωγραφία. Όπως και ο ίδιος έγραψε αργότερα: *«Από την εποχή της νεότητάς μου η γεωγραφία υπήρξε για μένα το πρωτεύον αντικείμενο μελέτης. Όσο επιδιδόμουν σ΄ αυτή,*

---

(*) Από την ομιλία του ενώπιον της Αμερικανικής Γεωγραφικής Εταιρίας της Νέας Υόρκης.

(**) Είχε ήδη μείνει ορφανός από πατέρα λίγα χρόνια νωρίτερα.

(***) Εκείνη την εποχή το πανεπιστήμιο της Louvain ήταν από τα πιο ονομαστά κέντρα γνώσης στην Ευρώπη.

*εφαρμόζοντας τις θεωρήσεις της φυσικής και γεωμετρικής επιστήμης, άρχισα – λίγο, λίγο – να γοητεύομαι όχι μόνο από την περιγραφή της Γης αλλά και από την όλη δομή της λειτουργίας του κόσμου, του οποίου τα πολυάριθμα στοιχεία δεν είναι γνωστά μέχρι σήμερα σε κανέναν»* (Watelet, 1994) [(1)].

Η εποχή στην οποία έζησε ο Mercator υπήρξε μια εποχή μεγάλων πολιτικών, οικονομικών και κοινωνικών αλλαγών για την Ευρώπη. Πρόκειται για την εποχή που ακολούθησε τα ταξίδια του Χριστόφορου Κολόμβου στην Αμερική[(*)] και το πέρασμα του ακρωτηρίου της Καλής Ελπίδας από τον Vasco da Gamma[(**)] (με την άνευ προηγουμένου αύξηση του εμπορίου και των οικονομικών συναλλαγών), για την εποχή του Μαρτίνου Λούθηρου και της Προτεσταντικής Μεταρρύθμισης[(***)], επίσης για την εποχή του Κάρολου του Πέμπτου αυτοκράτορα της Γερμανίας, του Francis του Πρώτου της Γαλλίας, του Ερρίκου του Όγδοου και της βασίλισσας Ελισάβετ της Αγγλίας. Είναι τέλος η εποχή που γεννήθηκε η Ολλανδική Δημοκρατία. Η Φλάνδρα την περίοδο αυτή γνώρισε μεγάλη πολιτική και οικονομική ακμή. Χαρακτηριστικό δείγμα αυτής της ακμής είναι η λειτουργία το 1531 στην Αμβέρσα του πρώτου χρηματιστηρίου – οίκου εμπορικών συναλλαγών στον Κόσμο. Συνακόλουθο αυτής της ακμής βέβαια ήταν και η άνοδος των τεχνών. Η φλαμανδική ζωγραφική δημιούργησε ένα ξεχωριστό ρεύμα στην τέχνη το οποίο στο ξεκίνημά του τουλάχιστον, βασίστηκε σ΄ ένα έντονο ενδιαφέρον για τη φύση και την αλήθεια (*νατουραλισμός και ρεαλισμός*). Ταυτόχρονα όμως, η εποχή αυτή ήταν και μια εποχή έντονων θρησκευτικών εντάσεων. Ο ίδιος ο Mercator το 1544 συνελήφθη ως αιρετικός (ύποπτος λουθηρανισμού), φυλακίστηκε και λίγο έλειψε να χάσει τη ζωή του.

Στο επιστημονικό επίπεδο[(2)] ο 16$^{ος}$ αιώνας (συμβαδίζοντας με τις κοινωνικές απαιτήσεις) περιστράφηκε γύρω από τα ζητήματα της απλοποίησης και της διευκόλυνσης των υπολογιστικών μεθόδων καθώς και της ακρίβειας και της ταχύτητας εκτέλεσης των αριθμητικών υπολογισμών. Πίνακες υπολογισμού τόκων και τρόποι μέτρησης των πολυπληθών μονάδων μέτρησης και νομισμάτων κάνουν την εμφάνισή τους. Παράλληλα στα 1585 ο Simon Stevin εισάγει σε συστηματική

---

[(*)] Το πρώτο το 1492, το τέταρτο και τελευταίο το 1502.

[(**)] Το 1497. Ο Vasco da Gamma ήταν ο πρώτος Ευρωπαίος που ξεπερνώντας το νοτιότερο άκρο της Αφρικανικής Ηπείρου ταξίδεψε (δια θαλάσσης) από τον Ατλαντικό στον Ινδικό ωκεανό φθάνοντας στην Ινδία.

[(***)] Τυπικά εκκινεί στις 31 Οκτωβρίου του 1517.

βάση τους δεκαδικούς αριθμούς στη θέση των (άλλων) κλασμάτων. Στην Αστρονομία ο Κοπέρνικος δημοσιεύει το έργο του για την κίνηση των ουρανίων σωμάτων ενώ πλούσιο υλικό αστρονομικών παρατηρήσεων συγκεντρώνεται από τον Kepler. Η Τριγωνομετρία (ιδιαίτερα η σφαιρική) διαμορφώνεται σε ανεξάρτητο μαθηματικό κλάδο μεγάλης σημασίας. Είναι χαρακτηριστικό ότι σ΄ όλη τη διάρκεια του 16$^{ου}$ αιώνα, ένα από τα κύρια αντικείμενα μαθηματικής δραστηριότητας υπήρξε η κατασκευή τριγωνομετρικών πινάκων μεγάλης ακρίβειας. Αποκορύφωμα όλων αυτών των διεργασιών βέβαια υπήρξε η δημοσίευση στα 1614 από το Napier του βιβλίου του για τους λογαρίθμους.

Μέσα σ΄ αυτό το κλίμα ο Mercator άσκησε το χαρτογραφικό του επάγγελμα και προσπάθησε ν΄ αποκαταστήσει *«το νόμο της αλήθειας* (που) *είχε παραμεληθεί σε πολλούς χάρτες»* της εποχής του όπως χαρακτηριστικά αναφέρει σ΄ ένα γράμμα του στον Abraham Ortelius, έναν άλλο μεγάλο χαρτογράφο της εποχής (Μέλας, 1999, σελ. 41). Σύμφωνα με τον Brown (1979), *«για 57 χρόνια υπήρξε ο κορυφαίος χαρτογράφος της Ευρώπης και ίσως έκανε περισσότερα από οποιονδήποτε άλλο άνθρωπο για να ανυψώσει την κατασκευή χαρτών από μια χαμηλή τέχνη σε μια θετική επιστήμη»* ( σελ. 158).

Εικόνα 8. Ο Mercator σε βελγικό χαρτονόμισμα και γραμματόσημο.

Σε αντίθεση με προγενέστερους χαρτογράφους, υπήρξε μεγάλος θαυμαστής και βαθύς μελετητής των γραπτών του *Κλαύδιου Πτολεμαίου (85-165 μ.Χ.)*. Το 1578 εξέδωσε τους χάρτες των οποίων η κατασκευή περιγράφεται στο έργο *«Γεωγραφική Υφήγησις»* του Πτολεμαίου, προσπαθώντας να τους αποδώσει στην αρχική τους μορφή και όχι αλλοιωμένους ή βελτιωμένους(*). Έξι χρόνια αργότερα εξέδωσε και τα

(*) Το έργο αυτό του Πτολεμαίου – γνωστό στη Δύση ως *«Γεωγραφία»* - για περισσότερους από 12 αιώνες αποτέλεσε την υψηλότερη αυθεντία στα γεωγραφικά ζητήματα. Ακόμη και μετά τις ναυτικές ανακαλύψεις του 15$^{ου}$ και 16$^{ου}$ αι. αναγνωρίζονταν από τους χαρτογράφους ως το υπόβαθρο όλων των γεωγραφικών γνώσεων (Hall, 1878, σελ. 172-173).

ίδια τα κείμενα της *«Γεωγραφικής Υφηγήσεως»*, αφού πρώτα είχε μελετήσει και συγκρίνει διάφορες επανεκδόσεις τους. Εν τω μεταξύ, ήδη από το 1544 είχε εκδώσει *χάρτη της Ευρώπης* (εξαιρετικά ακριβή) στον οποίο έπαιρνε κριτικά τις αποστάσεις του από τις (κυρίαρχες έως τότε) απόψεις του μεγάλου γεωγράφου της Αρχαιότητας(3). Αυτή η δουλειά του, ίσως περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη, εκτόξευσε στα ύψη τη φήμη του ως χαρτογράφου ανάμεσα στους ομότεχνούς του.

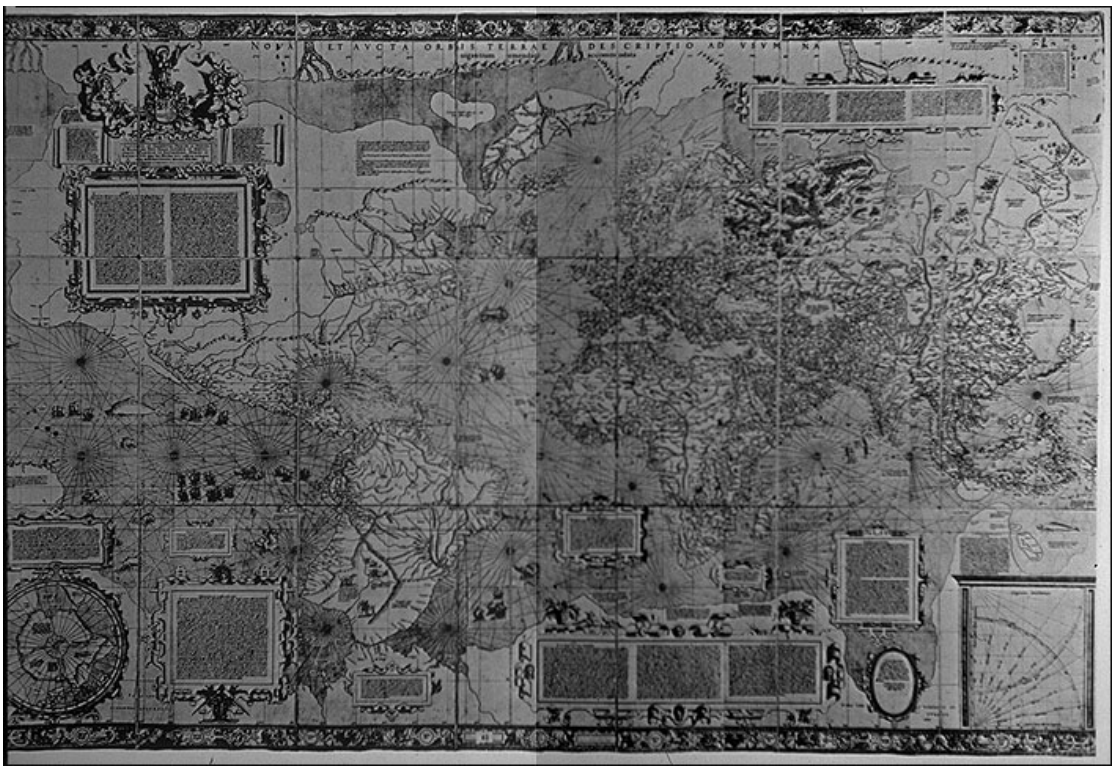
Ο Mercator ήταν απ΄ τους πρώτους χαρτογράφους που προσπάθησαν να συγκεράσουν την εμπειρική άποψη της χαρτογραφίας με την επιστημονική αντίληψη του Πτολεμαίου. Η προσπάθειά του αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στο *διάσημο χάρτη του του 1569 για τη ναυσιπλοΐα* στον οποίο συνυπάρχουν οι γραμμές σταθερής πλεύσης του ρόδου των ανέμων με τις γραμμές των παραλλήλων και των μεσημβρινών του γεωγραφικού συστήματος συντεταγμένων που είχε εισάγει ο Πτολεμαίος(4).

Σ΄ όλη τη διάρκεια της καριέρας του υπήρξε εντυπωσιακά παραγωγικός(5). Πέθανε το 1594 στο Duisburg μετά από τρία εγκεφαλικά. Σύμφωνα με την ιστοσελίδα βιογραφιών του πανεπιστημίου St Andrews, *«...ο διαχωρισμός του Mercator από τις μεθόδους του Πτολεμαίου ήταν το ίδιο σημαντικός για τη Γεωγραφία, όσο σημαντικός ήταν και ο διαχωρισμός του Κοπέρνικου για την Αστρονομία»*.

## §8. Ο νέος ναυτικός χάρτης του Mercator

Την εποχή που ο Mercator ήταν έτοιμος να καταπιαστεί με το πρόβλημα της δημιουργίας μίας *μαθηματικής προβολής*(6) κατάλληλης για τους ναυτικούς είχε ήδη συμπληρώσει 30 χρόνια παρουσίας στη χαρτογραφική αγορά (Brown, σελ. 135). Όπως είδαμε και στο τέλος του πρώτου μέρους, είχε πλέον συνειδητοποιήσει πως οι βασικές λειτουργίες που έπρεπε να επιτελεί *η προβολή του* ήταν 1ον) να μετασχηματίζει-παραμορφώνει τις λοξοδρομικές καμπύλες σε ευθύγραμμα τμήματα 2ον) να αποδίδει τα γωνιακά ανοίγματα χωρίς καμία παραμόρφωση (αναλλοίωτα). Το 1569 κυκλοφόρησε το νέο του ναυτικό χάρτη με τον τίτλο, *«Νέα και πληρέστερη αναπαράσταση της γήινης σφαίρας κατάλληλα προσαρμοσμένη για χρήση της στη Ναυσιπλοΐα»*(7). Βλέποντας κανείς το χάρτη αυτό (φαίνεται πιο κάτω στην εικόνα 9), εύκολα παρατηρεί ότι:

- πρόκειται σαφώς για έναν παγκόσμιο χάρτη. Είναι σχεδιασμένες η Αμερικανική Ήπειρος, η Αφρική, η Ευρώπη, η Ασία "μέχρις άκρων" (δηλ. και η Ιαπωνία), ενώ στο πάνω μέρος του χάρτη στη μέση, δεσπόζει (αφύσικα μεγάλη) η Γροιλανδία καθώς και κάποιοι ακαθόριστοι όγκοι – απ΄ άκρου σ΄ άκρο του χάρτη (!) – που φαίνεται να παριστάνουν τις αρκτικές περιοχές. Παρόμοιοι όγκοι στο κάτω μέρος απεικονίζουν την Ανταρκτική.
- τα γνωστά μας (από τους πορτολάνους χάρτες) ρόδα των ανέμων συνυπάρχουν μ' ένα πλέγμα οριζόντιων και κατακόρυφων ευθειών που όλοι γνωρίζουμε σήμερα ότι δεν είναι τίποτε άλλο από την απεικόνιση πάνω στο χάρτη των μεσημβρινών και των παραλλήλων της γήινης σφαίρας(*).
- υπάρχουν κάποιες ατέλειες στο περίγραμμα των ηπείρων αλλά και στις θέσεις ποταμών και οροσειρών.
- οι περιοχές στο πάνω και στο κάτω μέρος εμφανίζονται όλες (!) παραμορφωμένες (αφύσικα μεγάλες). Η Γροιλανδία για την οποία έγινε λόγος πριν, εμφανίζεται να έχει έκταση μεγαλύτερη από ολόκληρη τη λεκάνη της Μεσογείου.

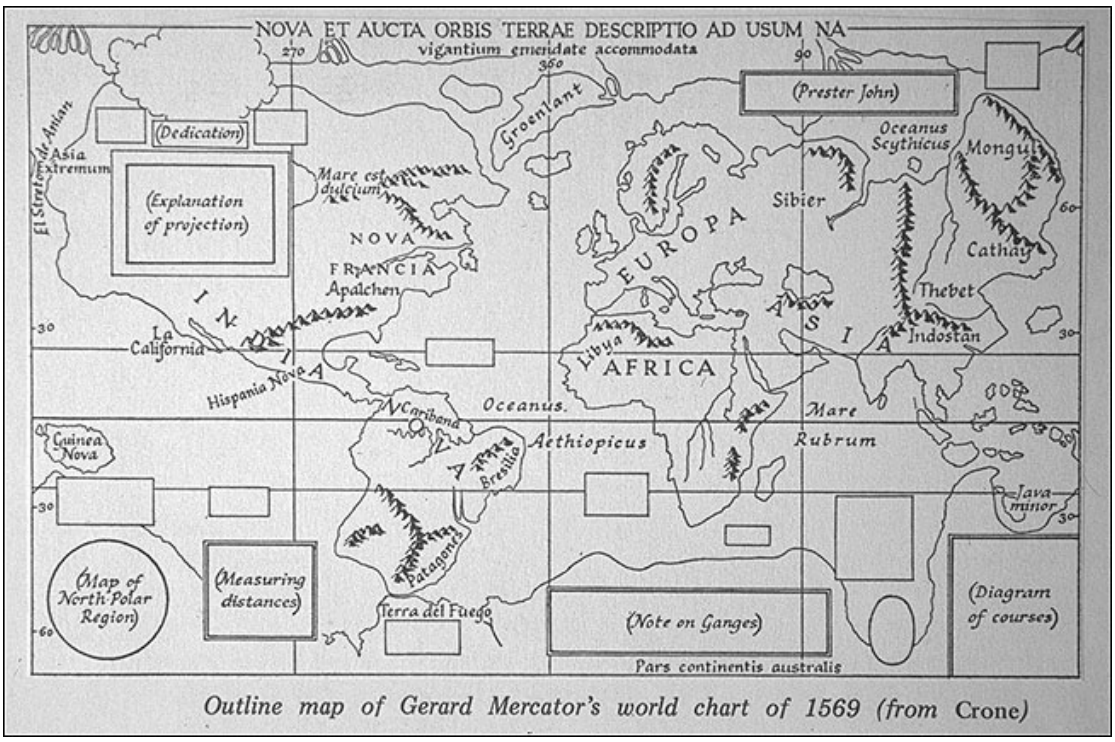


Εικόνα 9. Παγκόσμιος χάρτης του Mercator (1569). Το χρώμα έχει αφαιρεθεί για διευκόλυνση στην ηλεκτρονική αναπαραγωγή (από www.henry-davis.com/MAPS).

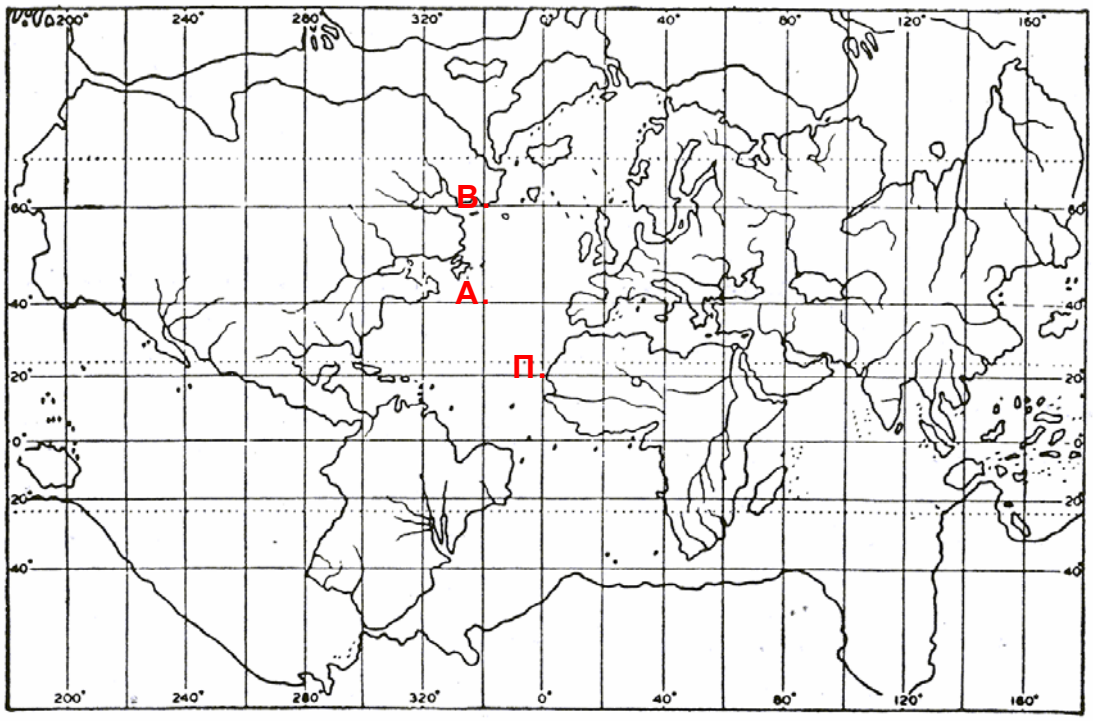
(*) Υπενθυμίζουμε ότι πάνω στην Υδρόγειο μεσημβρινοί και παράλληλοι είναι κύκλοι που τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. Οι μεσημβρινοί είναι ίσοι κύκλοι που συναντώνται στους δύο πόλους ενώ οι παράλληλοι είναι άνισοι κύκλοι, παράλληλοι μεταξύ τους με μεγαλύτερο απ΄ όλους τον ισημερινό.

Παρ΄ όλο που ο χάρτης παραμορφώνει τις αποστάσεις, η αρχική πρόθεση του Mercator ήταν μάλλον η αντίθετη. Σ΄ ένα σύντομο και σχετικά πυκνό επεξηγηματικό κείμενο που έγραψε στο πάνω αριστερό μέρος του χάρτη του διαβάζουμε σχετικά: *«Κατασκευάζοντας αυτή την αναπαράσταση του κόσμου έπρεπε... ν΄ απλώσουμε την επιφάνεια της σφαίρας πάνω στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε οι θέσεις των τόπων να συμφωνούν μεταξύ τους ως προς όλες τις πλευρές και όσο αφορά τις αληθείς διευθύνσεις και αποστάσεις και όσο αφορά τα σωστά γεωγραφικά μήκη και πλάτη... Έχοντας αυτή την πρόθεση έπρεπε να αναζητήσουμε ένα καινούργιο διακανονισμό μεταξύ μεσημβρινών και παραλλήλων και να εφαρμόσουμε μια καινούργια αναλογία»* (το παράθεμα από Rickey and Tuchinsky, 1980, σελ. 163)[8].

Προκειμένου να διερευνήσουμε αυτόν τον *«καινούργιο διακανονισμό μεταξύ μεσημβρινών και παραλλήλων»* από τη μία αλλά και την παραμόρφωση των αποστάσεων από την άλλη, μεταφερόμαστε στο γενικότερο περίγραμμα του χάρτη (όπως αυτό εμφανίζεται στις εικόνες 10 και 11).




Εικόνα 10. Γενικό περίγραμμα του χάρτη του Mercator (1569). Διακρίνονται επεξηγήσεις του περιεχομένου των πλαισίων καθώς και οι κυριότεροι παράλληλοι και μεσημβρινοί (από www.henry-davis.com/MAPS).




Εικόνα 11. Γενικό περίγραμμα του χάρτη του Mercator (1569) με έμφαση στην παρουσίαση όλων των μεσημβρινών και των παραλλήλων (από Tuchinsky, 1978, σελ. 17).

Κοιτώντας προσεκτικά βλέπουμε ότι:

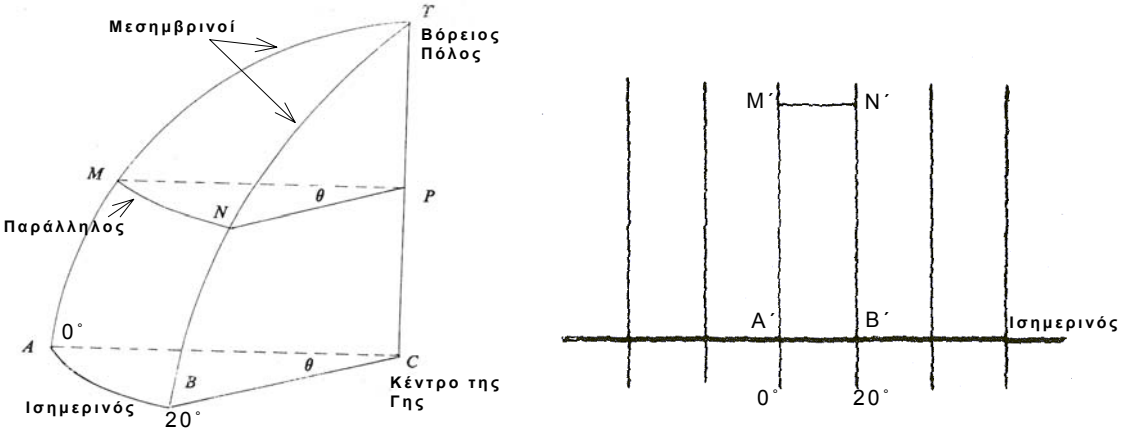
1ον) Ο ισημερινός είναι σχεδιασμένος σαν ευθεία γραμμή μιας και αποτελεί περίπτωση λοξοδρομικής καμπύλης(9). Στο χάρτη η γραμμή αυτή είναι οριζόντια και λίγο πιο κάτω από τη μέση του. (Σημειωτέον, ο ισημερινός έχει αποδοθεί σ΄ όλο του το μήκος από το "αριστερό" άκρο της Γης στη Νέα Γουϊνέα, μέχρι το "δεξιό" άκρο της στην Ιάβα και πάλι στη Νέα Γουϊνέα).

2ον) Για παρόμοιους λόγους και οι μεσημβρινοί εμφανίζονται σχεδιασμένοι επίσης ως ευθείες γραμμές (λοξοδρομίες με $\boldsymbol{\delta} = 0$)(10). Προκειμένου όμως οι *«αληθείς διευθύνσεις»* (δηλ. οι γωνίες πάνω στην Υδρόγειο) να σχεδιαστούν αναλλοίωτες στο χάρτη, οι ευθείες των μεσημβρινών έχουν σχεδιαστεί κάθετες στην ευθεία του ισημερινού δηλ. παράλληλες μεταξύ τους(*).

3ον) Αυτή η αναγκαία σχεδιαστική επιλογή οδηγεί αναπόφευκτα σε μία πρώτη παραμόρφωση στην απόδοση των αποστάσεων που είναι παρούσα και στους πορτολάνους χάρτες. Ο ίδιος ο Mercator (πάνω στο επεξηγηματικό του κείμενο) περιγράφει αυτή την παραμόρφωση ως εξής: *«Στους χάρτες των ναυτικών οι μοίρες*

(*) Η παραλληλία αυτή των μεσημβρινών πάνω στο μερκατορικό χάρτη – με αθόρυβο τρόπο – είναι παρούσα και στους πορτολάνους χάρτες. Εκεί οι μεσημβρινοί αναπαριστώνται με τις γραμμές Βορράς-Νότος που εκκινούν απ΄ τα ρόδα των ανέμων ενώ οι παράλληλοι από τις ευθείες Δύση-Ανατολή.

*του γεωγραφικού μήκους*(*) *αυξάνονται σταδιακά σε μήκος*(**) *καθώς προχωράμε από τον ισημερινό προς τους πόλους, πέρα απ΄ τις σχετικές αναλογίες που έχουν πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, και αυτό διότι εμφανίζονται πάντα ίσες με τις μοίρες του ισημερινού»* (το παράθεμα από Hall, 1878, σελ. 181)(11). Μ΄ άλλα λόγια, οι παράλληλοι πάνω στο χάρτη έχουν "τεντωθεί" ώστε ν΄ αποκτήσουν το ίδιο μήκος με τον ισημερινό. Μάλιστα οι παράλληλοι που είναι πολύ κοντά στους πόλους αναγκαστικά είναι τεντωμένοι πολύ περισσότερο απ΄ ότι αυτοί που είναι πολύ κοντά στον ισημερινό(***). Αυτό το τέντωμα (διαφορετικό για κάθε γεωγραφικό πλάτος), είναι μία πρώτη αιτία της διόγκωσης των αποστάσεων τουλάχιστον στη διεύθυνση Δύση-Ανατολή. Το σχήμα 3 δείχνει ξεκάθαρα την όλη κατάσταση:




α. β.

Σχήμα 3. α. Μία "φέτα" της υδρογείου μεταξύ δύο μεσημβρινών. Η γωνιακή τους απόσταση είναι θ = 20°. Η γραμμική τους απόσταση μειώνεται καθώς ανεβαίνουμε προς το Β. πόλο (μήκος του $\overset{\frown}{MN}$ < μήκος του $\overset{\frown}{AB}$).

β. Η ίδια "φέτα" πάνω στο χάρτη. Ενώ το $\overset{\frown}{AB}$ έχει παραμείνει αναλλοίωτο (Α΄Β΄ = ΑΒ), το ΜΝ έχει αυξήσει το μήκος του για να γίνει ίσο με το Α΄Β΄ (Μ΄Ν΄ = Α΄Β΄). Έτσι αν το νέο ΜΝ (δηλ. το Μ΄Ν΄) ξανατοποθετούνταν πάνω στην υδρόγειο θα έπιανε περισσότερες μοίρες γεωγραφικού μήκους(12).

---

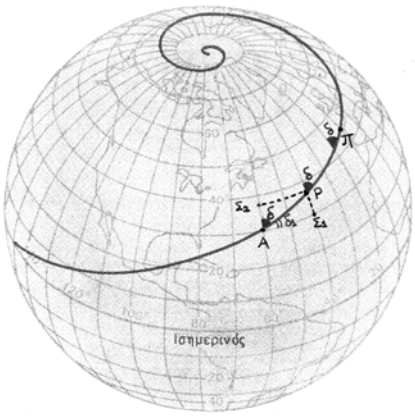
(*) Εννοεί *την απόσταση μεταξύ δύο μεσημβρινών* μετρημένη όμως σε μοίρες με βάση την τρισδιάστατη γωνία που σχηματίζουν οι δύο μεσημβρινοί καθώς τέμνονται κατά μήκος του άξονα περιστροφής της Γης *(γωνιακή απόσταση)*. Βλέπε σχετικά το παράδειγμα του σχήματος 3.

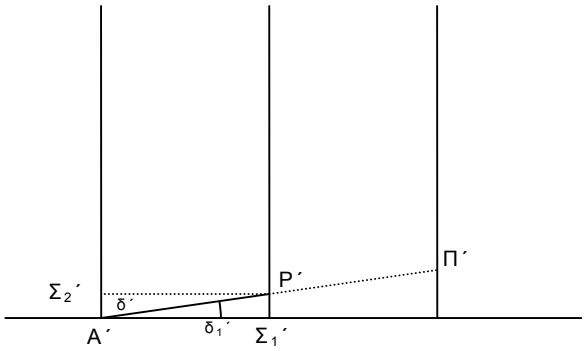
(**) Με τη φράση *«σε μήκος»*, ο Mercator αναφέρεται πάλι στην απόσταση των δύο μεσημβρινών μετρημένη όμως σε cm, m, km, ή ναυτικά μίλια *(γραμμική απόσταση)*. Αυτή η τελευταία μετριέται με το μήκος ενός τόξου παραλλήλου που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο μεσημβρινούς. Προφανώς, η γραμμική απόσταση δύο μεσημβρινών *πάνω στην Υδρόγειο* δεν είναι σταθερή.

(***) Ο μόνος παράλληλος που δεν έχει υποστεί τέτοιο τέντωμα είναι ο ίδιος ο ισημερινός. Κατά μήκος του οι αποστάσεις μεταφέρονται όπως πραγματικά είναι στην Υδρόγειο. Είχαν απλώς υποστεί μία αναγκαία σμίκρυνση λόγω της *κλίμακας του χάρτη*: η οριζόντια διάσταση του χάρτη δεν είναι 40.000 km που είναι το πραγματικό μήκος του ισημερινού, αλλά 208 cm $\left(\text{Κλίμακα} = \frac{208\text{cm}}{40.000\text{km}} \approx \frac{2\cdot 10^2\text{cm}}{4\cdot 10^9\text{cm}} = \frac{1}{50.000.000}\right)$.

*Εμείς χωρίς να διατρέχουμε κάποιο κίνδυνο αλλοίωσης των ιστορικών γεγονότων, θα φανταζόμαστε την οριζόντια διάσταση του χάρτη ίση με 40.000 km* (για την έννοια της κλίμακας βλέπε και σημείωση 21).

4$^{ov}$) Μοιραία αυτή η παραμόρφωση συνεπιφέρει και μία αλλοίωση στις πραγματικές διευθύνσεις η οποία πλέον θέτει υπό αίρεση τη μία από τις δύο βασικές λειτουργίες του χάρτη. Η αλλοίωση αυτή εξηγείται στο σχήμα 4.




Σχήμα 4. α. Μία λοξοδρομία πάνω στην υδρόγειο. Επικεντρωνόμαστε σ΄ ένα *μικρό* κομμάτι AP που μοιάζει με ευθεία γραμμή (Αγνοούμε σ΄ αυτή τη φάση τα σημεία $\Sigma_1$, $\Sigma_2$)

β. Οι μεσημβρινοί πάνω στο χάρτη έχουν "ξεκολλήσει" για να γίνουν παράλληλοι, οπότε οι διευθύνσεις "έχουν τραβηχτεί προς τα κάτω και δεξιά". Δηλ. η γωνία $\boldsymbol{\delta}$ έχει μεγαλώσει ($\delta' > \delta$) ενώ η γωνία $\boldsymbol{\delta_1}$ έχει μικρύνει ($\delta_1' < \delta_1$).

Ο Mercator δηλώνει (αν και δεν το εξηγεί πλήρως), ότι διορθώνει αυτή την αλλοίωση στις διευθύνσεις με το να τοποθετήσει παράλληλους που πάνω στην υδρόγειο ισαπέχουν (φαίνονται στην εικόνα 8 να προχωρούν κατά 20$^o$), σε άνισες μεταξύ τους αποστάσεις αυξανόμενες προς τους πόλους. Συνεχίζοντας το απόσπασμά του απ' εκεί που το σταματήσαμε , διαβάζουμε: *«Αλλά* (πάνω στο χάρτη των ναυτικών εννοείται) *μία τέτοια αύξηση* (σαν την αύξηση στις μοίρες του γεωγραφικού μήκους) *δεν υπάρχει και στις μοίρες του γεωγραφικού πλάτους*(*). *Αυτό οδηγεί σε μία τεράστια παραμόρφωση στο σχήμα των χωρών και μία απόκλιση από την αλήθεια όσο αφορά στα γεωγραφικά πλάτη και μήκη ή αλλιώς, όσο αφορά στις διευθύνσεις και στις αποστάσεις… Υπό το πρίσμα όλων αυτών, έχω προσδώσει στις μοίρες του γεωγραφικού πλάτους, καθώς προχωράμε από τον ισημερινό προς τους πόλους, <u>μία σταδιακή αύξηση στο μήκος τους</u> αντίστοιχη με την αύξηση του μήκους των παραλλήλων»* (ό.π., σελ. 181, η υπογράμμιση δική μας).

(*) Δηλαδή στην απόσταση *μεταξύ* των παραλλήλων.

Κατόπιν τούτων είναι νομίζουμε φανερή (αν και όχι με σαφήνεια αιτιολογημένη), η καινοτομία που εισήγαγε ο Mercator: με τα λόγια του Elial Hall (1878), *«ο χάρτης του μπορεί να οριστεί σαν ο χάρτης εκείνος, στον οποίο η παραμόρφωση των κατευθύνσεων η οποία προκαλείται από την παράλληλη τοποθέτηση των μεσημβρινών (με την συνεπακόλουθη επιμήκυνση των αποστάσεων μεταξύ τους) ,αντισταθμίζεται και διορθώνεται από μία αντίστοιχη επιμήκυνση των αποστάσεων μεταξύ των παραλλήλων»* (σελ. 180). Μία δεύτερη (επιπλέον) παραμόρφωση των αποστάσεων κάνει την εμφάνισή της, αυτή τη φορά στην κατεύθυνση Νότος-Βορράς.

Παρατήρηση 1

Αν κάποιος αναζητήσει πάνω στο χάρτη της εικόνας 9 το Βόρειο και το Νότιο Πόλο δεν θα τους βρει πουθενά. Αυτό βέβαια ήταν αναμενόμενο να συμβεί μιας και οι μεσημβρινοί ενώ στην πραγματικότητα συναντώνται στους δύο πόλους, ωστόσο στην εικονική πραγματικότητα του χάρτη έχουν απομακρυνθεί "μέχρις παραλληλίας" οπότε και συναντώνται στο… άπειρο. Έτσι, θεωρητικά τουλάχιστον, στην κατακόρυφη διεύθυνση Βορράς-Νότος ο χάρτης έχει άπειρο μήκος(13). Και μόνο αυτή η παρατήρηση είναι αρκετή για να δείξει ότι και στην κατακόρυφη διεύθυνση οι αποστάσεις έχουν "τεντωθεί". Βέβαια δεν μας εξηγεί γιατί το "τέντωμα" αυτό δεν είναι μοιρασμένο ομοιόμορφα πάνω στους μεσημβρινούς αλλά αλλάζει καθώς ανεβαίνουμε προς τους πόλους.

Παρατήρηση 2

Τελικά είναι φανερό πως η μεγάλη παραμόρφωση των αποστάσεων καθώς πλησιάζουμε προς τους πόλους είναι το αναγκαίο τίμημα το οποίο κατέβαλε ο Mercator στην προσπάθειά του να διατηρήσει τα γωνιακά ανοίγματα αναλλοίωτα κατά τη μεταφορά τους από τη σφαίρα στο επίπεδο(14). Το ότι (μετά απ΄ όλα αυτά) οι λοξοδρομίες μετασχηματίζονται σίγουρα σε ευθύγραμμα τμήματα πάνω στο μερκατορικό χάρτη, είναι απλό να αποδειχθεί:

Μία λοξοδρομία πάνω στην Υδρόγειο "κόβει" όλους τους μεσημβρινούς υπό την ίδια γωνία $\boldsymbol{\delta}$. Εφ΄ όσον όμως (σύμφωνα με τον Mercator) οι γωνίες διατηρούνται κατά τη μεταφορά τους στο χάρτη του, άρα μία λοξοδρομία (και πάνω στο χάρτη) θα σχηματίζει με όλες τις παράλληλες ευθείες των μεσημβρινών σταθερή γωνία $\boldsymbol{\delta}$. Θα είναι συνεπώς μία ευθεία γραμμή γιατί οι ευθείες γραμμές στην επίπεδη γεωμετρία είναι ακριβώς εκείνες οι γραμμές που σχηματίζουν την ίδια γωνία με μία *οικογένεια* ευθειών(15).

## §9. Μερικά αναπάντητα ερωτήματα

Παρ΄ όλο που ο Mercator δημιούργησε το χάρτη του για τις ανάγκες των ναυσιπλόων, οι τελευταίοι δεν φαίνεται να τον χρησιμοποίησαν ποτέ τα επόμενα 25 χρόνια που μεσολάβησαν μέχρι το θάνατο του Φλαμανδού χαρτογράφου. Σύμφωνα με τον Elial Hall (1878), *«... ο χάρτης του Mercator φαίνεται να στέκεται μόνος του, φαινομενικά απομονωμένος από τις υπόλοιπες δουλειές του... Καμία ανακοίνωση δεν προηγήθηκε της δημοσίευσής του και καμία σχετικά αναφορά δεν φαίνεται να έχει γίνει από το δημιουργό του στις επόμενες δημοσιεύσεις του... Απ΄ ότι φαίνεται πετάχτηκε στην άκρη και ξεχάστηκε ή τουλάχιστον έμεινε στη μνήμη μόνο σαν ένα επιστημονικό περίεργο... Όσο ζούσε ο Mercator οι ναυσιπλόοι δεν τον χρησιμοποίησαν για τις ανάγκες τους. Ήταν προκατειλημμένοι εναντίον του και εκτός αυτού εμφάνιζε δυσκολίες όταν προσπαθούσαν να τον στρέψουν σε πρακτικά χρήσιμους υπολογισμούς...»* (σελ. 184). Οι δυσκολίες για τις οποίες κάνει λόγο ο Hall έχουν να κάνουν με το ότι ο Mercator δεν ανέφερε τίποτα για το πόση είναι αριθμητικά η επιμήκυνση των αποστάσεων μεταξύ των παραλλήλων καθώς αυτοί τοποθετούνται πάνω στο χάρτη του. Το μόνο που αναφέρει σχετικά είναι ότι είναι ίση με την επιμήκυνση στην οποία υπόκεινται οι ίδιοι οι παράλληλοι προκειμένου (πάνω στο χάρτη) να εμφανίζονται ίσοι σε μήκος με τον ισημερινό. Γι΄ αυτή την τελευταία επιμήκυνση όμως, απλώς μας πληροφορεί ότι αλλάζει από παράλληλο σε παράλληλο και άρα δεν είναι ομοιόμορφη.

Οι πρακτικές δυσκολίες που προκαλούνται απ΄ αυτή την ασάφεια είναι πολύ σημαντικές. Για να γίνουν αντιληπτές ας επιστρέψουμε στο χάρτη της εικόνας 11 και ας φανταστούμε ένα ναυσιπλόο ευρισκόμενο σε σημείο Χ του Ατλαντικού Ωκεανού, με στίγμα $340^o$ γεωγραφικού μήκους(*) και $50^o$ γεωγραφικού πλάτους (γνωστό από μετρήσεις), ο οποίος ξεκινά ένα ταξίδι με προορισμό το σημείο Π του χάρτη με στίγμα (σύμφωνα με το χάρτη), $0^o$ γεωγρ. μήκους και $20^o$ γεωγρ. πλάτους. Για να μπορέσει να χαράξει την πορεία του σκάφους του(**) είναι απαραίτητο να τοποθετήσει πάνω στο χάρτη το σημείο εκκίνησης Χ. Όμως μιας και οι αποστάσεις μεταξύ των

(*) ή όπως θα λέγαμε σήμερα $20^o$ *δυτικού* γεωγραφικού μήκους.

(**) Βλέπε §5 του πρώτου μέρους.

παραλλήλων δεν αυξάνονται "ομοιόμορφα", το σημείο Χ θα βρίσκεται όχι στη μέση του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ αλλά κάπου πιο πάνω, άγνωστο όμως που!

Ουσιαστικά λοιπόν, μη γνωρίζοντας κάποιος πως ακριβώς αυξάνονται οι αποστάσεις μεταξύ των παραλλήλων, είναι αδύνατο να χρησιμοποιήσει ένα ήδη υπάρχοντα μερκατορικό χάρτη για να τοποθετήσει το στίγμα του και να χαράξει πορεία. Εκτός αυτού, είναι αδύνατο και να κατασκευάσει ένα δικό του μερκατορικό χάρτη (μιας και δεν γνωρίζει σε τι ακριβώς αποστάσεις να τοποθετήσει τους παράλληλους). Τελικά – με όσα ο Mercator παρέλειψε να πει – είναι αδύνατο και να αποδειχθεί τυπικά ότι ο χάρτης του διατηρεί τα γωνιακά ανοίγματα αναλλοίωτα. Για να ακριβολογούμε, *η τεχνική* με την οποία ο Φλαμανδός χαρτογράφος *κατασκεύασε* το χάρτη του και *τοποθέτησε* τους παραλλήλους πάνω του, μας είναι (ακόμη και σήμερα) πλήρως άγνωστη.

Ο πρώτος που φαίνεται να έδωσε μία απάντηση στα παραπάνω ζητήματα ήταν ο William Barlowe στα 1597. Η προσέγγισή του, γεωμετρική και μάλλον δύσχρηστη, έμεινε ουσιαστικά στην αφάνεια[16]. Μια πραγματικά πλήρης και σαφής απάντηση, καθώς και μία εύκολη κατασκευή και ανάγνωση του μερκατορικού χάρτη, προτάθηκε για πρώτη φορά μόλις στα 1599 από τον μαθηματικό Edward Wright. Το αν αυτή η κατασκευή είναι ίδια μ΄ αυτή που χρησιμοποίησε στα 1569 ο Mercator, είναι κάτι που προφανώς θα παραμείνει αναπάντητο.

## §10. Η καθοριστική συνεισφορά του Edward Wright

Σε αντίθεση με το Mercator ο Edward Wright (1561-1615) ήταν ένας καθαρόαιμος μαθηματικός. Γεννημένος και μεγαλωμένος στην Αγγλία, την περίοδο που αποφάσισε να ασχοληθεί με το μερκατορικό χάρτη ήταν ήδη καθηγητής μαθηματικών στο Caius College του Cambridge. Βέβαια ζώντας μέσα στο κλίμα της εποχής του σε μεγάλο βαθμό επηρεάστηκε από το κυρίαρχο επιστημονικό αίτημα του 16ου αιώνα για ακρίβεια και ταχύτητα στους υπολογισμούς και απλοποίηση και διευκόλυνση των ποσοτικών μεθόδων. Είναι χαρακτηριστικό ότι όταν ο Napier το 1614 δημοσίευσε το έργο του για τους λογαρίθμους (στο οποίο έδινε έναν γρήγορο τρόπο υπολογισμού πολύπλοκων πολλαπλασιασμών), την ίδια χρονιά ο Wright ξεκίνησε τη μετάφρασή του στα αγγλικά για λογαριασμό της Εμπορικής Εταιρείας των Ανατολικών Ινδιών στην οποία εργάζονταν (Θωμαΐδης, 1987, σελ. 44). Δεν είναι λοιπόν καθόλου αβάσιμο να σχηματίσουμε την εντύπωση πως σε αντίθεση με άλλους

συναδέλφους του ο Wright υπήρξε ένας μαθηματικός "και του λιμανιού αλλά και του σαλονιού".

Το 1599 εξέδωσε στο Λονδίνο το έργο του *«Certaine Errors in Navigation… detected and corrected»*(17) μέσα στο οποίο έδινε απάντηση σε όλα τα ερωτήματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Οι ιστορικοί της Χαρτογραφίας θεωρούν το έργο αυτό ως *«την πρώτη πρακτικά σωστή πραγματεία πάνω στη ναυσιπλοΐα, με την έννοια ότι στηρίζεται σε ακριβείς παρατηρήσεις, πίνακες και χάρτες»* (Hall, 1878, σελ. 194), *σηματοδοτεί δε, τη στροφή στην επιστημονική κατασκευή χαρτών»* (Brown, 1979, σελ. 138).

Ο ίδιος ο Wright στο ξεκίνημα του διάσημου βιβλίου του αισθάνεται την ανάγκη να υπερασπιστεί επί μακρόν τον εαυτό του από πιθανές κριτικές. Κατ΄ αρχήν απ΄ τους ανθρώπους της θάλασσας, *«οι οποίοι πιθανώς το θεωρούν ντροπή να δεχθούν είτε διορθώσεις από τους λόγιους είτε κατευθύνσεις από την ξηρά και έτσι δεν προσκολλώνται στα ακατάλληλα Πανεπιστήμια»*, αλλά και από άλλους οι οποίοι μπορεί να πουν ότι *«… δεν κάνω τίποτε περισσότερο απ΄ αυτό που είχε ήδη γίνει από τον Gerhardus Mercator και τον παγκόσμιο χάρτη του πολλά χρόνια πριν»*. Σ΄ αυτούς πρέπει να απαντήσει ότι *«… πράγματι <u>επ΄ ευκαιρίας αυτού του χάρτη του Mercator</u> σκέφτηκα για πρώτη φορά να διορθώσω τα τόσα πολλά και χονδροειδή λάθη και ανοησίες… στον κοινό Ναυτικό Χάρτη*(*)*, αυξάνοντας τις αποστάσεις των παραλλήλων καθώς προχωράμε από τον Ισημερινό στους Πόλους με τέτοιο τρόπο ώστε, <u>σε κάθε σημείο που έχει πλάτος φ στο Χάρτη, ένα μικρό κομμάτι μεσημβρινού να μπορεί να εμφανίζει με το αντίστοιχο κομμάτι του παράλληλου την ίδια – σχεδόν – σχέση που εμφανίζουν και πάνω στην Υδρόγειο</u>. Αλλά τον τρόπο με τον οποίο αυτό πρέπει να γίνει δεν τον έμαθα ούτε από το Mercator, ούτε από κανέναν άλλο»* (**).

Κατόπιν τούτων, το πρώτο πράγμα που κάνει ο Wright προκειμένου να παρουσιάσει «τον τρόπο του» είναι να δείξει ότι ο παράλληλος σε γεωγραφικό πλάτος φ, πάνω στο χάρτη, τεντώνεται κατά ένα παράγοντα secφ προκειμένου να αποκτήσει ίδιο μήκος με τον ισημερινό(***). Ας παρακολουθήσουμε μία απόδειξη του

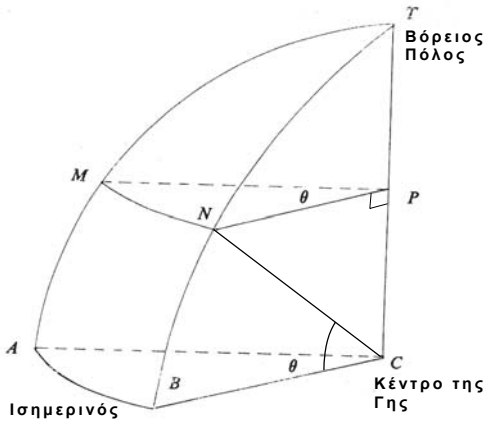
---

(*) Εννοεί τους πριν τον Mercator πορτολάνους χάρτες.

(**) Wright, 1599, σελ. 8, 9 του προλόγου ή και Carslaw, σελ. 1,2. Οι υπογραμμίσεις δικές μας.

(***) Αξίζει να προσεχθεί ότι καθώς το φ αυξάνεται από $0^o$ έως $90^o$, το cosφ μειώνεται άρα το $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$ σταδιακά μεγαλώνει (όπως έλεγε και ο Mercator).

ισχυρισμού του με τη βοήθεια του σχήματος 5. Τα επιχειρήματά του είναι δισδιάστατα και αποδεικνύουν ότι $BC = NP \cdot \sec\varphi$. ①




Σχήμα 5. Μία "φέτα" της γήινης σφαίρας

Στο σχήμα η γωνιακή απόσταση των 2 μεσημβρινών είναι $\theta^o$ ενώ το τόξο $\overset{\frown}{MN}$ βρίσκεται πάνω σε παράλληλο κύκλο γεωγραφικού πλάτους $\varphi^o$. Η ακτίνα αυτού του κύκλου είναι NP = MP < BC = AC = NC = ακτίνα Γης.

Ο τύπος ① (σήμερα) μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα αν στο ορθογώνιο τρίγωνο CNP γράψουμε,

$$\cos\varphi = \frac{NP}{NC} \Rightarrow NP = NC \cdot \cos\varphi \Rightarrow NC = NP \cdot \sec\varphi \quad \xRightarrow{NC = BC} \quad BC = NP \cdot \sec\varphi .$$

Έτσι τώρα από τον τύπο που δίνει το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε: μήκος $\overset{\frown}{AB}$ = μήκος $\overset{\frown}{MN} \cdot \sec\varphi$, κάτι που αποδεικνύει ότι ο παράλληλος γεωγραφικού πλάτους φ προκειμένου να γίνει ίσος σε μήκος με τον ισημερινό, πάνω στο χάρτη, τεντώνεται κατά $\sec\varphi$[18].

Το επόμενο βήμα του Wright είναι να δείξει τον τρόπο με τον οποίο τεντώνονται οι μεσημβρινοί ή ισοδύναμα, τον τρόπο με τον οποίο *«αυξάνονται οι αποστάσεις <u>μεταξύ</u> των παραλλήλων»: «κάθε <u>μικρό</u> κομμάτι μεσημβρινού...»* που βρίσκεται σ΄ ένα σημείο απ΄ όπου περνά ένας παράλληλος πλάτους φ, τεντώνεται-αυξάνεται και αυτό (όπως και ολόκληρος ο παράλληλος), *«... με την ίδια αναλογία με*

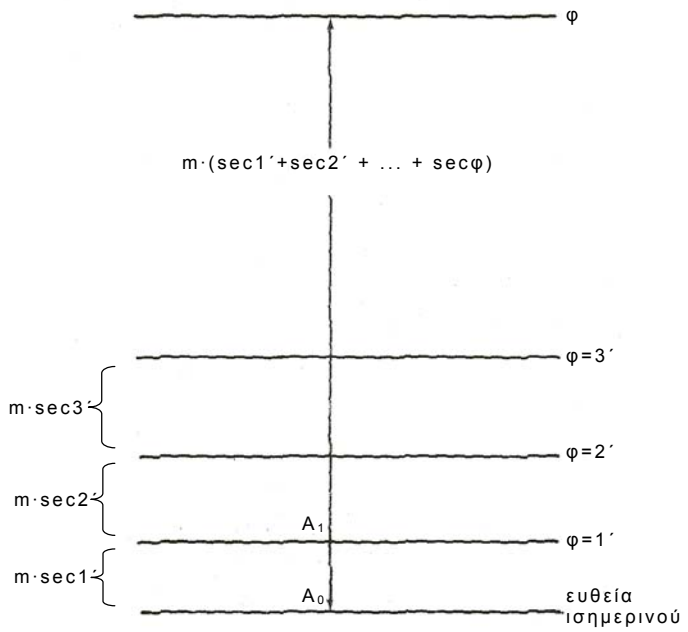
*την οποία αυξάνονται τα αντίστροφα συνημίτονα ή αλλιώς, η υποτείνουσα του τόξου*(*) *που περιλαμβάνεται μεταξύ αυτού του σημείου* (γεωγραφικού πλάτους φ ενν.) *και του ισημερινού»*(**). Έτσι – με δικά μας λόγια – στο σχήμα 4 της παραγράφου 8 το *στοιχειώδες* ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΣ_1ΡΣ_2$ είναι όμοιο με το αντίστοιχό του πάνω σ' ένα μερκατορικό χάρτη(19) και συνεπώς – με τα λόγια του Wright – *«... σε κάθε σημείο που έχει πλάτος φ στο Χάρτη, ένα μικρό κομμάτι μεσημβρινού... εμφανίζει με το αντίστοιχο κομμάτι του παράλληλου την ίδια – σχεδόν – σχέση που εμφανίζουν και πάνω στην Υδρόγειο».* Προφανής συνέπεια αυτής της ομοιότητας σε μικρή κλίμακα είναι το πολυπόθητο αναλλοίωτο των γωνιών. Βέβαια εδώ απαιτείται κάποια προσοχή μιας και το γεωγραφικό πλάτος φ αλλάζει με *συνεχή* τρόπο καθώς κινούμαστε βόρεια, κατά μήκος ενός μεσημβρινού: τι θα σημαίνει άραγε να τεντωθούν *όλα* τα κατακόρυφα μήκη πάνω σ΄ ένα μεσημβρινό κατά secφ;

Για να φωτιστεί αυτό το σημείο ας θεωρήσουμε κατ΄ αρχήν (χωρίς κίνδυνο αλλοίωσης των ιστορικών γεγονότων), ένα χάρτη του οποίου η κλίμακα είναι ίση με τη μονάδα(20) δηλαδή ένα χάρτη που οι αποστάσεις κατά μήκος του ισημερινού μεταφέρονται (πάνω στο χάρτη) χωρίς καμία σμίκρυνση. Ένας τέτοιος χάρτης έχει οριζόντια διάσταση 40.000 km (δύσχρηστος μεν, βολικός δε για τα επιχειρήματα που θα ακολουθήσουν). Ο Wright προχώρησε ως εξής: Θεώρησε το τόξο ενός λεπτού της μοίρας $\left(1' = \frac{1}{60}\text{ της μοίρας}\right)$ πάνω στον ισημερινό της Γης σαν το μικρότερο δυνατό στοιχειώδες κομματάκι τόξου. Σημειωτέον, το μήκος αυτού του κομματιού είναι ίδιο είτε θεωρηθεί πάνω στον ισημερινό της γήινης σφαίρας, είτε θεωρηθεί πάνω σ΄ οποιοδήποτε μεσημβρινό της (μιας και στη σφαίρα μεσημβρινοί κι ισημερινός είναι ίσιοι κύκλοι). Ας συμβολίσουμε το μήκος αυτού του μικρού τόξου με m. Στη συνέχεια ο Wright "μετέφερε" ένα μεσημβρινό από τη σφαίρα στο χάρτη του κομματάκι κομματάκι (δηλαδή ανά πρώτο λεπτό της μοίρας). Σχεδίασε το πρώτο στοιχειώδες κομμάτι m ξεκινώντας από τον ισημερινό και στο τέλος αυτού του κομματιού τοποθέτησε τον παράλληλο γεωγραφικού πλάτους φ = 1΄. Ο παράλληλος αυτός όμως, έχει υποστεί τέντωμα κατά sec1΄. Έτσι και το πρώτο κομματάκι πάνω στο χάρτη υπόκειται σε τέντωμα κατά sec1΄ οπότε το μήκος του εμφανίζεται ίσο με m·sec1΄ (πρόκειται για το ευθύγραμμο τμήμα $A_0A_1$ στο σχήμα 6 που ακολουθεί).

---

(*) Λέγοντας *«υποτείνουσα του τόξου»*, υποθέτουμε ότι εννοεί στο σχήμα την υποτείνουσα NC του ορθογωνίου τριγώνου NPC.

(**) Από Wright, 1599, σελ. 17 και 18, όπως παρατίθεται από τον Cajori, 1915, σελ. 312, 313.




Σχήμα 6. Τοποθέτηση των παραλλήλων πάνω σ' ένα μερκατορικό χάρτη σύμφωνα με τον τρόπο του Wright.

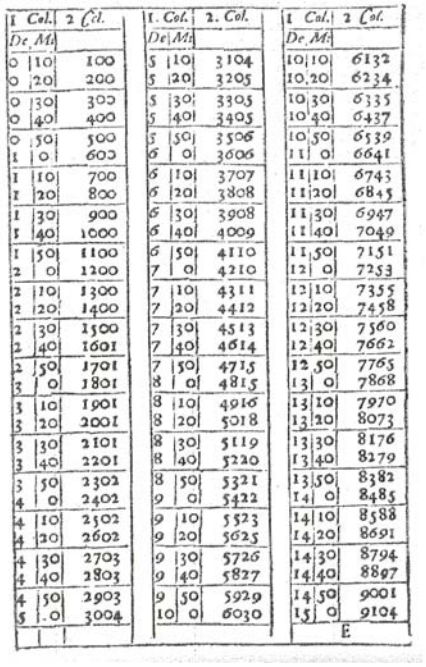
Αμέσως πάνω απ΄ αυτό το κομμάτι μετέφερε το επόμενο στοιχειώδες κομμάτι του μεσημβρινού του στο τέλος του οποίου πρέπει να τοποθετηθεί ο παράλληλος γεωγραφικού πλάτους φ = 2΄. Το δεύτερο αυτό κομμάτι πάνω στο χάρτη θα καταλαμβάνει μήκος m·sec2΄ οπότε *η συνολική* απόσταση πάνω στο χάρτη του παραλλήλου φ = 2΄ από τον ισημερινό θα είναι m·sec1΄ + m·sec2΄. Προχωρώντας μ΄ αυτόν τον τρόπο ο Wright μπόρεσε να τοποθετήσει πάνω στο χάρτη του όλες τις ευθείες που παριστάνουν τους παράλληλους: ο παράλληλος γεωγραφικού πλάτους φ είναι μία ευθεία που απέχει από την ευθεία του ισημερινού συνολική απόσταση m·(sec1΄ + sec2΄ + … + secφ).

Παρατήρηση

Ο Wright αρχικά ετοίμασε ένα προσχέδιο της εργασίας του το οποίο και έστειλε πριν το 1594 στον Thomas Blundeville[21]. Στο προσχέδιο αυτό φαίνεται ότι ως στοιχειώδες κομμάτι τόξου πάνω στον ισημερινό θεώρησε το τόξο μιας μοίρας και όχι το $\frac{1}{60}$ της μοίρας. Όπως όμως διαβάζουμε στην «Γενική Ιστορία της Ναυσιπλοΐας από τον $15^{o}$ έως τον $20^{o}$ αιώνα», *«αργότερα πρόσεξε ότι όσο πιο μικρό ήταν το αρχικό στοιχειώδες κομμάτι τόξου, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα πετύχαινε. Το 1599 λοιπόν*

*(στην πρώτη έκδοση του βιβλίου του), δεν υιοθέτησε τη μία μοίρα αλλά τα 10 πρώτα λεπτά της μοίρας* $\left(10' = \frac{1}{6}\text{της μοίρας}\right)$ *σαν αρχικό στοιχείο m. Τελικά το 1610, στη δεύτερη έκδοση του βιβλίου του, υιοθέτησε το τόξο 1΄ και είχε την υπομονή να υπολογίσει το μήκος κάθε 1΄ μεσημβρινού στο χάρτη του μέχρι και το γεωγραφικό πλάτος φ = 89° 59'»* (Captain F. Marguet, 1930) [22].

Σήμερα σ΄ αυτές τις υπομονετικές προσπάθειες του Wright να υπολογίσει το άθροισμα secφ1΄ + secφ2΄ + … + secφ αναγνωρίζουμε τον προσεγγιστικό υπολογισμό του $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$ [23]. Βέβαια την εποχή εκείνη ο Ολοκληρωτικός Λογισμός των Newton και Leibnitz δεν είχε ακόμη εμφανιστεί. Ο Wright, για να διευκολύνει τους ναυσιπλόους σε ανάλογους υπολογισμούς, συμπεριέλαβε στο βιβλίο του μία σειρά από πίνακες στους οποίους φαίνονται έτοιμα τα αποτελέσματα των αθροισμάτων sec1΄, sec1΄ + sec2΄ και γενικά sec1΄ + sec2΄ + … + secφ. Ονόμασε αυτά τα αθροίσματα *meridional parts* ή όπως λέμε στα ελληνικά, *αυξομερή πλάτη*. Ο πίνακας που ακολουθεί είναι από την πρώτη έκδοση του βιβλίου του στα 1599 όπου τα στοιχειώδη κομμάτια μεσημβρινού προχωρούν κατά 10΄ γεωγραφικού πλάτους. Η πρώτη και η δεύτερη στήλη δίνουν τις μοίρες και τα λεπτά αντίστοιχα της γωνίας (ή του αντίστοιχου τόξου), ενώ η τρίτη στήλη δίνει το άθροισμα sec10΄ + sec20΄ + … + secφ (όχι όμως με τη σημερινή έννοια)[24].

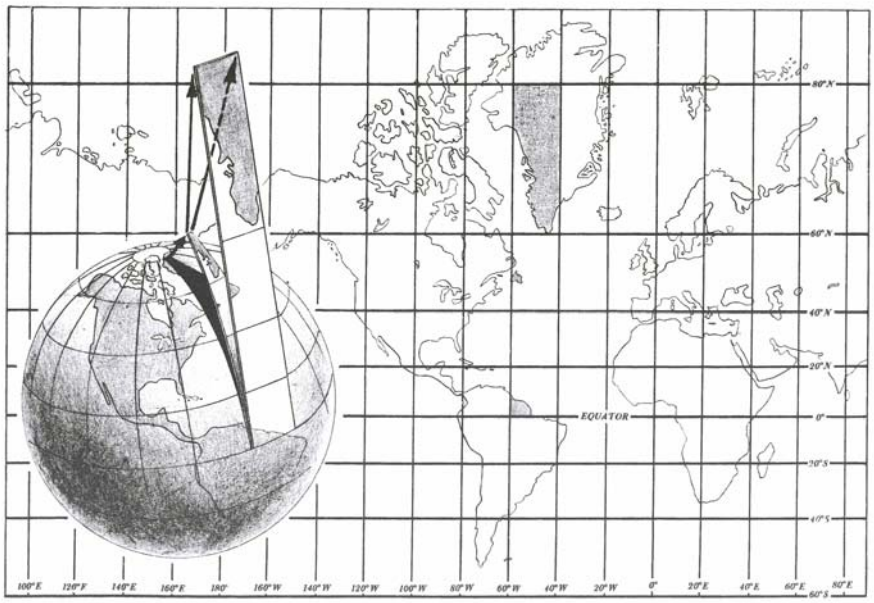


| 1 Col. De | Mi | 2 Col. | 1. Col. De | Mi | 2. Col. | 1 Col. De | Mi | 2 Col. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 100 | 5 | 10 | 3104 | 10 | 10 | 6132 |
| 0 | 20 | 200 | 5 | 20 | 3205 | 10 | 20 | 6234 |
| 0 | 30 | 300 | 5 | 30 | 3305 | 10 | 30 | 6335 |
| 0 | 40 | 400 | 5 | 40 | 3405 | 10 | 40 | 6437 |
| 0 | 50 | 500 | 5 | 50 | 3506 | 10 | 50 | 6539 |
| 1 | 0 | 600 | 6 | 0 | 3606 | 11 | 0 | 6641 |
| 1 | 10 | 700 | 6 | 10 | 3707 | 11 | 10 | 6743 |
| 1 | 20 | 800 | 6 | 20 | 3808 | 11 | 20 | 6845 |
| 1 | 30 | 900 | 6 | 30 | 3908 | 11 | 30 | 6947 |
| 1 | 40 | 1000 | 6 | 40 | 4009 | 11 | 40 | 7049 |
| 1 | 50 | 1100 | 6 | 50 | 4110 | 11 | 50 | 7151 |
| 2 | 0 | 1200 | 7 | 0 | 4210 | 12 | 0 | 7253 |
| 2 | 10 | 1300 | 7 | 10 | 4311 | 12 | 10 | 7355 |
| 2 | 20 | 1400 | 7 | 20 | 4412 | 12 | 20 | 7458 |
| 2 | 30 | 1500 | 7 | 30 | 4513 | 12 | 30 | 7560 |
| 2 | 40 | 1601 | 7 | 40 | 4614 | 12 | 40 | 7662 |
| 2 | 50 | 1701 | 7 | 50 | 4715 | 12 | 50 | 7765 |
| 3 | 0 | 1801 | 8 | 0 | 4815 | 13 | 0 | 7868 |
| 3 | 10 | 1901 | 8 | 10 | 4916 | 13 | 10 | 7970 |
| 3 | 20 | 2001 | 8 | 20 | 5018 | 13 | 20 | 8073 |
| 3 | 30 | 2101 | 8 | 30 | 5119 | 13 | 30 | 8176 |
| 3 | 40 | 2201 | 8 | 40 | 5220 | 13 | 40 | 8279 |
| 3 | 50 | 2302 | 8 | 50 | 5321 | 13 | 50 | 8382 |
| 4 | 0 | 2402 | 9 | 0 | 5422 | 14 | 0 | 8485 |
| 4 | 10 | 2502 | 9 | 10 | 5523 | 14 | 10 | 8588 |
| 4 | 20 | 2602 | 9 | 20 | 5625 | 14 | 20 | 8691 |
| 4 | 30 | 2703 | 9 | 30 | 5726 | 14 | 30 | 8794 |
| 4 | 40 | 2803 | 9 | 40 | 5827 | 14 | 40 | 8897 |
| 4 | 50 | 2903 | 9 | 50 | 5929 | 14 | 50 | 9001 |
| 5 | 0 | 3004 | 10 | 0 | 6030 | 15 | 0 | 9104 |

Εικόνα 12. Πίνακες αυξομερών πλατών από την πρώτη έκδοση του βιβλίου του Wright.

Ακολουθώντας αυτό τον πίνακα ένας ναυσιπλόος, μπορούσε πλέον να υπολογίσει την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πάνω στο χάρτη αλλά και να τοποθετήσει ένα παράλληλο πάνω του στη σωστή απόσταση από τον ισημερινό. Μετά απ΄ όλα αυτά ο Wright φθάνει στο σημείο να υποστηρίξει στο κείμενό του ότι πλέον, *«... η ναυσιπλοΐα μπορεί μέσω αριθμητικών υπολογισμών και μόνο, να εκτελεστεί χωρίς χάρτη ή υδρόγειο σφαίρα αρκεί να είναι γνωστά μόνο τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη των τόπων»*! (Wright, 1599, σελ. 14).

Όπως ήταν φυσικό η δημοσίευση της εργασίας αυτής άλλαξε δραματικά τη στάση των ναυσιπλόων απέναντι στο μερκατορικό χάρτη. Από τη σχετική βιβλιογραφία δεν είναι δυνατό να παρακολουθηθεί με λεπτομέρεια αυτή η αλλαγή. Πάντως, αυτό που είναι σίγουρο είναι πως γύρω στο 1630 στο γαλλικό λιμάνι της Διέππης(*) – που αποτελούσε πολύ σημαντικό κέντρο εμπορίας χαρτών – οι περισσότεροι χάρτες που πωλούνταν ήταν σε μερκατορική προβολή (Hall, σελ. 184). Το 1646 κυκλοφόρησε και ο πρώτος *άτλας*(**) με μερκατορικούς χάρτες από τον Sir Robert Dudley με τον τίτλο *Arcano del Mare* (Tuchinsky, σελ. 18). Από τότε έως και σήμερα οι μερκατορικοί χάρτες αποτελούν τον υποχρεωτικό εξοπλισμό όλων των ναυσιπλόων.




Εικόνα 13. Σύγχρονος μερκατορικός χάρτης. Ο πρώτος μεσημβρινός στο Greenwich. Ένα *σφαιρικό τρίγωνο* προβάλλεται – σύμφωνα με τον τρόπο του Mercator – από την Υδρόγειο στο επίπεδο και μετασχηματίζεται σε παραλληλόγραμμο! (από Brown, 1979).

(*) Βρίσκεται στη μεριά των στενών της Μάγχης.

(**) Ο όρος σημαίνει *συλλογή χαρτών*. Καθιερώθηκε από τον ίδιο το Mercator.

## § 11. Μία εφαρμογή της Γεωγραφίας στα Μαθηματικά: Η ιστορία του ολοκληρώματος $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$

### 11.1. Η γέννηση μιας μαθηματικής εικασίας και η ανακοίνωση ενός στοιχήματος

Οι γεωγράφοι τα χρόνια που ακολούθησαν μετά τον Wright, φάνηκε ότι πραγματικά είχαν ανάγκη από έναν *τύπο* ώστε να μπορούν να παρακαμφθούν οι μακροσκελείς αθροίσεις των αυξομερών πλατών. Βέβαια ο Απειροστικός Λογισμός δεν είχε αναπτυχθεί ακόμη· ο Newton γεννήθηκε το 1642 ενώ ο Λογισμός του (για τις άπειρα μικρές μεταβολές), αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1660. Έτσι *«στα 50 χρόνια που ακολούθησαν, διεξήχθει μία έρευνα για την εύρεση ενός τέτοιου τύπου η οποία όμως δεν στηριζόταν στις τεχνικές του Απειροστικού Λογισμού»* (Tuchinsky, σελ. 19).

Το 1614 ο Σκώτος John Napier δημοσίευσε στα λατινικά το διάσημο βιβλίο του για τους λογαρίθμους(*). Η πρώτη αγγλική μετάφραση εκδόθηκε το 1616 από το Wright συνοδευμένη από ένα πίνακα ημιτόνων καθώς και ένα πίνακα λογαρίθμων ημιτόνων(**) μιας και αυτοί ήταν πολύ χρήσιμοι στους αστρονόμους της εποχής. Το 1620 ο Edmund Gunter (1581-1626), ένας Άγγλος μαθηματικός και ιερέας, δημοσίευσε έναν πίνακα λογαριθμικών εφαπτομένων ενώ τα χρόνια που ακολούθησαν η έκδοση τέτοιων πινάκων έγινε όλο και πιο συχνή. Γύρω στα 1645 ο Henry Bond (~1600-1678), ένας άνθρωπος που διαφήμιζε τον εαυτό του ως *«δάσκαλο ναυσιπλοΐας, τοπογραφίας και άλλων κλάδων των μαθηματικών»*(***) συγκρίνοντας τον πίνακα αυξομερών πλατών του Wright μ' έναν τέτοιο πίνακα λογαριθμικών εφαπτομένων ανακάλυψε μία πολύ μεγάλη συμφωνία στα νούμερα. Δημοσίευσε αυτή την αναπάντεχη ανακάλυψή του στην *«Επιτομή Ναυσιπλοΐας»* του Norwood. Ο γνωστός Edmund Halley – ο οποίος ενεπλάκη ενεργά στη μαθηματική εξέλιξη της ιστορίας του μερκατορικού χάρτη – 50 χρόνια αργότερα μας πληροφορεί πως ο Bond διατύπωσε την εικασία *«…ότι η γραμμή του Μεσημβρινού* (πάνω στο χάρτη εννοείται) *αντιστοιχούσε με μια Σκάλα* (scale) *Λογαριθμικών εφαπτομένων του μισού της συμπληρωματικής γωνίας του γεωγραφικού*

---

(*) Σ' αυτή την πρώτη έκδοση οι λογάριθμοι δεν ήταν ακριβώς όπως τους εννοούμε σήμερα.
(**) lnsinx
(***) Από Rickey and Tuchiusky, 1980, σελ. 164.

*πλάτους»* (Halley 1698, σελ. 202)[25]. Μ' άλλα λόγια (και με σημερινά σύμβολα) η εικασία του Bond ήταν ότι

$$\int_{o}^{\varphi_o} \sec\varphi \cdot d\varphi = -\ln\tan\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_o\right)\right]$$

Ο τύπος αυτός είναι ισοδύναμος με τον

$\int_{o}^{\phi_o} \sec\phi \cdot d\phi = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_o}{2}\right)$ αλλά και τον

$\int_{o}^{\phi_o} \sec\phi \cdot d\phi = \ln\left|\sec\phi_o + \tan\phi_o\right|$ οι οποίοι είναι και οι τύποι που πιο συχνά απαντώνται στα βιβλία τα σχετικά με υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Ο Bond δεν απέδειξε τον τύπο του, όμως έδωσε το έναυσμα σε μια σειρά από διαπρεπείς μαθηματικούς να το επιχειρήσουν. Μαθηματικοί όπως ο Άγγλος John Collins, ο Γερμανός Nicolaus Mercator (καμία σχέση με τον Gerhard) και ο επίσης Άγγλος William Oughtred προσπάθησαν ανεπιτυχώς να βρουν μια απόδειξη· ήταν η εποχή που οι μαθηματικοί άρχιζαν ξανά μετά τον Αρχιμήδη να διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται τα άπειρα αθροίσματα ενός συνεχούς μεγέθους[(*)]. Το 1666 στον πρώτο πρώτο τόμο των *Φιλοσοφικών Πρακτικών της Βασιλικής Εταιρίας του Λονδίνου* ο Nicolaus Mercator (1620;-1687) ανακοίνωνε ότι: *«Βλέποντας ότι όλα αυτά πράγματι εξαρτώνται από την απάντηση στο Ερώτημα "είναι ή όχι η Γραμμή Τεχνητής Εφαπτομένης[(**)] η αληθινή Γραμμή Μεσημβρινού;», γι' αυτό και αναλαμβάνω βοηθούμενος από το Θεό να απαντήσω στο εν λόγω Ερώτημα. Και για να μάθει ο κόσμος την Προθυμία και την Αυτοπεποίθηση με την οποία αναλαμβάνω αυτή την αποστολή, προτίθεμαι να βάλω ένα Στοίχημα με όποιον ή όποιους το επιθυμούν, το ποσό που μία άλλη Εφεύρεσή μου[26] (λιγότερο εκλεπτυσμένη, αλλά με πολύ μεγαλύτερο όφελος για το κοινό), μπορεί να φέρει στον Εφευρέτη της».*

Ο Mercator τελικά δεν κατάφερε να βρει την απόδειξη της εικασίας. Δύο χρόνια αργότερα όμως – το 1668 – δημοσίευσε μία πραγματεία πάνω στους λογαρίθμους, την *Logarithmo – technia.* Σύμφωνα με τον Carslaw (1924) *«το έργο αυτό θα είναι πάντα σημαντικό… γιατί σ' αυτό βρίσκουμε για πρώτη φορά τη χρήση άπειρων σειρών στην*

---

(*) αυτό δηλαδή που σήμερα ονομάζουμε *ολοκλήρωμα.*

(**) Εκείνη την εποχή χρησιμοποιούνταν συχνά ο όρος *τεχνητός αριθμός* αντί του όρου *λογάριθμος.* Ο Napier στο έργο του *Constructio* που εκδόθηκε το 1616 επιλέγει αυτόν τον πρώτο όρο ενώ στο επόμενο έργο του *Descriptio* (το οποίο όμως εκδόθηκε νωρίτερα απ' το *Constructio),* υιοθετεί σταθερά πλέον τον όρο *λογάριθμος.*

*Ανάλυση»* (σελ. 3). Συγκεκριμένα, ο Mercator για να υπολογίσει το εμβαδόν που περικλείεται από την υπερβολή ψ=$\frac{1}{t+1}$, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $t = 0$ και $t = \chi$ υιοθετεί το άπειρο άθροισμα $\frac{1}{t+1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$ και στη συνέχεια "περνώντας στα εμβαδά" καταλήγει στον τύπο

$$\int \frac{1}{t+1} dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

που είναι το ανάπτυγμα σε άπειρη σειρά του ln (x+1). Ο Carslaw αναφέρει ότι *«... είναι αρκετά πιθανό ο Mercator να οδηγήθηκε σ' αυτή την ανακάλυψη από το ενδιαφέρον του για την αληθινή διαίρεση του μεσημβρινού. Παρ' όλο που δε δημοσίευσε τίποτε άλλο πάνω σ'αυτό το θέμα οι ιδέες που περιλαμβάνονται στη Logarithmo-technia προσέλκυσαν την προσοχή άλλων μαθηματικών... η εισαγωγή της άπειρης σειράς του είναι υπεύθυνη για την επίλυση του προβλήματος της* (ακριβούς) *διαίρεσης της μεσημβρινής γραμμής καθώς και για άλλες πολύ σημαντικότερες ανακαλύψεις»* (ο.π., σελ. 4).

### 11.2. Η συνεισφορά του James Gregory

Η πρώτη απόδειξη του τύπου του Bond ήρθε στα 1668 από τον James Gregory (1638-1675), έναν πρωτοπόρο και άγνωστο μαθηματικό από τον Αμπερντήν ο οποίος συχνά απέφευγε να δημοσιεύσει τις μεθόδους του[27]. Το 1668 εξέδωσε μία απόδειξη της εικασίας στο έργο του *Exercitationes Geometricae,* μια σειρά μαθηματικών φυλλαδίων κάτω από ενιαίο τίτλο. Σ' ένα απ' αυτά παρουσιάζει μια γεωμετρική απόδειξη της άπειρης σειράς του Mercator για το υπερβολικό εμβαδόν, ενώ σ' ένα άλλο αποδεικνύει την εικασία του Bond. Ο Edmund Halley σχολιάζοντας αυτή την απόδειξη αναφέρει σχετικά: *«Ο πρώτος που απέδειξε την αναφερθείσα σχέση ήταν ο εξαίσιος κύριος James Gregory στις Ασκήσεις του Γεωμετρίας... χωρίς όμως να καταφέρει να αποφύγει μία μακριά σειρά συνεπαγωγών και μία περιπλοκή των σχέσεων δια των οποίων το ουσιαστικό στοιχείο της απόδειξης σε μεγάλο βαθμό χάνεται και ο αναγνώστης την εγκαταλείπει εξουθενωμένος πριν την κατανοήσει»!*[(*)]. Παρακολουθώντας μία σύγχρονη αποσαφήνιση της απόδειξης καταλήγουμε στο παρόμοιο συμπέρασμα ότι *«σε*

---

[(*)] Halley, 1698 όπως παρατίθεται από τον Carslaw, σελ. 6.

*κανένα βαθμό αυτή δεν θα μπορούσε να παρουσιαστεί στους σημερινούς σπουδαστές του Απειροστικού Λογισμού»*[(*)]. Για τους λόγους αυτούς αποφεύγεται και η παρουσίασή της στο πλαίσιο αυτής της εργασίας.

### 11.3. Η προσέγγιση του Isaac Barrow

Η πρώτη "κατανοητή" απόδειξη της εικασίας του Bond ήρθε τελικά γύρω στα 1670 από τον Isaac Barrow (1630-1677), δάσκαλο του Newton και κάτοχο της Λουκασιανής Έδρας των μαθηματικών στο Trinity College του Cambridge (από την οποία και αποχώρησε το 1669 για χάρη του μαθητή του). Ο Barrow είχε μελετήσει κι αυτός την *Logarithmo-technia* και πιθανόν ήταν ο άνθρωπος που έφερε για πρώτη φορά το Newton σε επαφή με τη δουλειά του N. Mercator. Μέσα απ' τις δικές του μελέτες ο Newton θα καταλήξει (στο 1669), όπως λέει ο Barrow, *«σε παρόμοια αποτελέσματα με τον Κύριο Mercator αλλά με μεθόδους πολύ πιο γενικές»* (Carslaw, σελ. 41)[(28)].

Η απόδειξη του Barrow είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτη μιας και κατά πως φαίνεται σηματοδοτεί την πρώτη περίπτωση ανάλυσης μιας συνάρτησης σε απλά κλάσματα προκειμένου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμά της. Αναπαράγουμε την απόδειξη αυτή με σύγχρονο συμβολισμό[(**)] σημειώνοντας κάποιες επιμέρους ισότητες με κεφαλαία γράμματα προκειμένου να τις σχολιάσουμε:

$$\int \sec\varphi \cdot d\varphi = \int \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi \qquad \text{A}$$

$$= \int \frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi} d\varphi \qquad \text{B}$$

$$= \int \frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi)\cdot(1+\sin\varphi)} d\varphi$$

Το βήμα Α αποτελεί μία περίπτωση σχεδιασμού από τα πριν: ο πολλαπλασιασμός με cosφ έγινε ώστε να εμφανιστεί το cosφ υψωμένο σε ζυγή δύναμη και να μπορεί με την εφαρμογή της ταυτότητας $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$ (βήμα Β) να προκύψει η

---

(*) Rickey and…, 1980, σελ. 165.

(**) ό.π., σελ. 165. Η πρωτότυπη απόδειξη είναι διατυπωμένη σε πιο γεωμετρική γλώσσα στο έργο *Lectiones Geometricae* (Lect. XII, App. I) του Barrow.

παραγοντοποιημένη μορφή $\frac{1}{(1-\sin\varphi)\cdot(1+\sin\varphi)}$. Αυτή πλέον μπορεί να αναλυθεί σε απλά κλάσματα μιας και είναι ρητή συνάρτηση της ποσότητας sinφ=t:

$$\frac{1}{(1-\sin\varphi)\cdot(1+\sin\varphi)}=\frac{1/2}{(1-\sin\varphi)}+\frac{1/2}{(1+\sin\varphi)}$$

οπότε

$$\int \sec\varphi\cdot d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\left(\int\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}d\varphi+\int\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}d\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[-\ln(1-\sin\varphi)+\ln(1+\sin\varphi)\right]+c \qquad \Gamma$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{(1+\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)}+c$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\cdot\frac{1+\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)+c \qquad \Delta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{(1+\sin\varphi)^2}{1-\sin^2\varphi}+c$$

$$=\ln\sqrt{\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2}+c$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right|+c$$

$$=\ln\left|\sec\varphi+\tan\varphi\right|+c.$$

Στο βήμα Γ φαίνεται πλέον ότι ο αριθμητής cosφ που δημιουργήθηκε στο βήμα Α είναι εντελώς απαραίτητος προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα(*). Όσο για το (καθαρά τριγωνομετρικό) βήμα Δ έγινε έχοντας κατά νου όλες τις βελτιώσεις του αποτελέσματος ώστε αυτό να έρθει στην επιθυμητή μορφή.

Η απόδειξη του Barrow έχει μεγάλη αξία γιατί μπορεί να γενικευτεί άμεσα δημιουργώντας μία μεγάλη κατηγορία ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο. Η γενίκευση αυτή παρουσιάζεται στις σημειώσεις του δεύτερου μέρους(29).

---

(*) $\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}=\frac{(\sin\varphi)'}{1-\sin\varphi}=(-\ln(1+\sin\varphi)'...$

### 11.4. Η προσέγγιση του John Wallis

Οι προσεγγίσεις των Gregory και Barrow αν και αποτελούν αποδείξεις της εικασίας του Bond, στο επίπεδο των υπολογισμών του μερκατορικού χάρτη μπορούν να βοηθήσουν μόνο στο βαθμό που είναι διαθέσιμοι πίνακες της συνάρτησης f(x)=lntanx. Το 1685 ο John Wallis (1616-1703), καθηγητής μαθηματικών στο Emmanuel College του Cambridge, ακολουθώντας μία διαφορετική τακτική κατάφερε για πρώτη φορά να υπολογίσει το $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$ με τη βοήθεια μιας άπειρης σειράς· τα υπολογιστικά πλεονεκτήματα της μεθόδου του (όπως θα δούμε σε λίγο), είναι ασύγκριτα(*).

Ο Wallis φαίνεται να'φτασε σ' αυτό το αποτέλεσμα μετά από την επαφή του με τα γραπτά του N. Mercator. Το 1668 – τη χρονιά που ο τελευταίος εξέδωσε τη Logarithmo-technia – ο Wallis κοινοποίησε στη Βασιλική Εταιρία του Λονδίνου μια έκθεση του συγκεκριμένου έργου, προσπαθώντας να εξηγήσει καλύτερα τις άπειρες αθροίσεις του Mercator(**). Η προσπάθειά του όπως μας πληροφορεί ο Carslaw κρίθηκε ασαφής. Δεκαεπτά χρόνια αργότερα (το 1685) επέστρεψε στο πρόβλημα μ' ένα άρθρο του στα *Φιλοσοφικά Πρακτικά* της Βασιλικής Εταιρίας. Μέσα σ' αυτό δημοσίευσε την άπειρη σειρά του απαντώντας στο γράμμα κάποιου κυρίου Richard Norris *«σχετικά με την Συνάθροιση των Τεμνουσών και την αληθινή Διαίρεση των Μεσημβρινών στο θαλάσσιο Χάρτη»*. Υιοθετώντας σύγχρονο συμβολισμό είναι εύκολο να παρουσιάσουμε τον τύπο του Wallis(30).

Από τον τύπο Β της προηγούμενης υποπαραγράφου έχουμε:

$$\int_o^{\varphi_o} \sec\varphi \cdot d\varphi = ... = \int_o^{\varphi_o} \frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$= \int_o^{\varphi_o} \cos\varphi \cdot \left[1 + \sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \sin^6\varphi + ...\right] \cdot d\varphi$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο τύπος για το άπειρο άθροισμα φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

---

(*) Ο Wallis υπήρξε ο μεγαλύτερος μαθηματικός της γενιάς που προηγήθηκε του Newton.

(**) Αυτές που εμφανίζονται στον υπολογισμό του $\int \frac{1}{t+1} \cdot dt$ .

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots \quad \text{με} \quad |\alpha| < 1,$$

όπου $\alpha = \sin^2\varphi$. Προφανώς $|\alpha| = \sin^2\varphi < 1$ για $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$(*).

Το επόμενο βήμα είναι να μετατραπεί αυτό το ολοκλήρωμα ενός άπειρου αθροίσματος σε άπειρο άθροισμα ολοκληρωμάτων(31):

$$\int_o^{\varphi_o} \sec\varphi \cdot d\varphi = \int_o^{\varphi_o} \cos\varphi \cdot 1 \cdot d\varphi + \int_o^{\varphi_o} \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot d\varphi + \ldots$$

$$= \sin\varphi_o + \frac{\sin^3\varphi_o}{3} + \frac{\sin^5\varphi_o}{5} + \ldots \qquad ①$$

όπου η τελευταία σειρά, όπως μπορεί ν' αποδειχθεί, συγκλίνει για $\varphi_o \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σειρά για να προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_o^{\varphi_o} \sec\varphi \cdot d\varphi$. Τις τιμές του $\sin\varphi_o$ θα τις πάρουμε από έναν πίνακα που έχει το ημίτονο των γωνιών. Για $\varphi_o = \frac{\pi}{6}$ κάποια μερικά *αθροίσματα* της σειράς έχουν ως εξής:

| Υψηλότερη δύναμη του sinx | Μερικό άθροισμα |
|---|---|
| 1 | 0.49999999 |
| 3 | 0.54166666 |
| 5 | 0.54791666 |
| 7 | 0.54903273 |
| 9 | 0.54924975 |
| 11 | 0.54929414 |
| 13 | 0.54930352 |
| 15 | 0.54930556 |
| 17 | 0.54930601 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |

(*) Η τιμή $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ούτως ή άλλως δεν μας ενδιαφέρει στη μερκατορική προβολή μιας και αντιστοιχεί στο Βόρειο πόλο της Γης.

Όπως φαίνεται και από τη δεξιά στήλη του πίνακα, η σειρά δεν παρουσιάζει μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης. Όμως η προσέγγιση μπορεί πολύ εύκολα να βελτιωθεί σε οποιοδήποτε επιθυμητό βαθμό αρκεί στις αθροίσεις να συμπεριληφθούν κι άλλες δυνάμεις του sinx από τον τύπο ①. (Για τυχόν συγκρίσεις, η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι: $\int_0^{\pi/6} \sec\varphi \cdot d\varphi = 0.54930614.$ ).

Η προσέγγιση του Wallis έχει (και αυτή) γενικότερη αξία και εφαρμόζεται κάθε φορά που η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης οδηγεί σε "δυσάρεστους" τύπους οι οποίοι μπορούν να μετατραπούν σε (αριθμησίμως) άπειρα αθροίσματα.

Παρατήρηση

Πριν κλείσει αυτή η παράγραφος θα πρέπει να σημειώσουμε και μια ιδιαίτερα αξιόλογη προσέγγιση του Edmund Halley (1656-1742)[(*)]. Εμφανίστηκε το 1696, και αυτή στα Φιλοσοφικά Πρακτικά, στην εργασία του *«An easy Demonstration of the Analogy of the Logarithmick Tangents to the Meridian Line, or Sum of the Secants; with various Methods for computing the same to the utmost Exactness».* Η παρουσίαση αυτής της προσέγγισης ξεφεύγει από τα (αναπόφευκτα) όρια της εργασίας μας[(32)].

## 11.5. Η συνεισφορά του Απειροστικού Λογισμού στην κατασκευή του μερκατορικού χάρτη

Κλείνοντας αυτή την αναφορά στην ιστορία του ολοκληρώματος της τέμνουσας μιας γωνίας θα μπορούσε κάποιος (παραφράζοντας τον Edward Wright), να πει ότι *«πράγματι εξαιτίας αυτού του χάρτη του Mercator»* οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν για πρώτη φορά με τον υπολογισμό του $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$. Προσπαθώντας να βελτιώσουν την κατασκευή της μερκατορικής προβολής σε επιθυμητά επίπεδα ακρίβειας, απέκτησαν ένα επιπλέον κίνητρο για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού (Tuchinsky, 1978). Με τη σειρά του ο Απειροστικός Λογισμός με την ολοένα και πιο αυστηρή του προσέγγιση για τις άπειρα μικρές ποσότητες, τελικά οδήγησε στην κατασκευή

---

[(*)] Πρόκειται για τον άνθρωπο που προέβλεψε την επιστροφή του διάσημου πλέον κομήτη που φέρει το όνομά του. Ο Halley διαδέχτηκε τον Wallis στη Σαβιλιανή Έδρα του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης όταν ο τελευταίος μετακόμισε εκεί από το Cambridge.

μερκατορικών χαρτών μεγάλης ακρίβειας. Όπως το διατυπώνει και ο Tuchinsky (1978), *«Καθώς όλο και πιο λεπτομερείς μερκατορικοί χάρτες όλο και μικρότερων τμημάτων της γήϊνης επιφάνειας εμφανίζονταν στο πέρασμα των αιώνων, μία όλο και πιο ακριβής τοποθέτηση των παραλλήλων του πλάτους έγινε απαραίτητη. Από τη στιγμή που ο ακριβής μαθηματικός υπολογισμός του* $\int sec\varphi \cdot d\varphi$ *ήταν γνωστός, αυτή η τοποθέτηση μπορούσε αμέσως να επιτευχθεί σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας. Οι μόνοι περιορισμοί πλέον στην παραγωγή μερκατορικών χαρτών ήταν αυτοί που έθεταν η διαδικασία εκτύπωσης, το μέγεθος και η ποιότητα του χαρτιού κ.ο.κ. Κανένα μαθηματικό εμπόδιο πλέον δεν στέκονταν στο δρόμο του χαρτογράφου, διότι οι μέθοδοι για τη δημιουργία της μερκατορικής προβολής τόσο στη θεωρία όσο και στην πράξη ήταν διαθέσιμες και μάλιστα σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας»* (σελ.30).

**Σημειώσεις δεύτερου μέρους**

(1) Το συγκεκριμένο απόσπασμα βρίσκεται στο M. Watelet (ed), *Gerard Mercator cosmographe: le temps et l' espace* (Antwerp, 1994). Παρατίθεται στην ιστοσελίδα βιογραφιών του Πανεπιστημίου St Andrews (στη βιογραφία του Mercator) απ' όπου και το μεταφέραμε.

(2) Οι πληροφορίες για τις σχέσεις των Μαθηματικών με τις κοινωνικές και επιστημονικές απαιτήσεις της εποχής αντλήθηκαν από το πολύ ενδιαφέρον άρθρο του Γιάννη Θωμαΐδη, «Ανάδυση και εξέλιξη των λογαριθμικών εννοιών», 1987, Εκδ. Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών.

(3) Στο άρθρο του Elial Hall, «Gerard Mercator: His Life and Works», 1878, διαβάζουμε σχετικά: *«Το 1544 ο Mercator εξέδωσε στο Duisburg ένα μεγάλο χάρτη της Ευρώπης… Ο χάρτης αυτός έχει σήμερα χαθεί αλλά είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε τα οφέλη του από ένα απλούστερο αντίγραφό του που εκδόθηκε μετά το θάνατό του Mercator από το γιο του Rumold… Σοβαρές και δραστικές αλλαγές και βελτιώσεις (σε σχέση με τον Πτολεμαϊκό χάρτη) εισάγονται σχεδόν σε κάθε τμήμα της Ευρώπης. Η Μεσόγειος Θάλασσα παρουσιάζεται μικρότερη κατά 5° γεωγραφικού μήκους και το Ακρωτήριο Fenisterre καθώς και οι παρακείμενες ακτές της Ισπανίας εμφανίζονται μετατοπισμένες κατά 15° ανατολικώτερα»* (σελ. 171).

(4) Στο χάρτη αυτό ο Mercator βελτίωσε κι άλλο το μήκος της Μεσογείου. Στο βιβλίο του Philip Tuchinsky, «Mercator's World map and the Calculus», 1978, διαβάζουμε σχετικά: *«Ο Πτολεμαίος θεώρησε το ανατολικό-δυτικό μήκος της Μεσογείου ίσο με 62°. Η τιμή των 52° του Mercator ήταν μια ουσιώδης βελτίωση αλλά μια πραγματικά σωστή τιμή μικρότερη των 42° καθιερώθηκε μετά το 1700»* (σελ. 17).

(5) Ίσως η καλύτερη παρουσίαση του έργου του (αλλά και της ζωής του) βρίσκεται στο άρθρο του Elial Hall που αναφέραμε πιο πριν. Μία κατατοπιστική παρουσίαση των έργων του υπάρχει και στο βιβλίο του Lloyd Brown «The story of maps», σελ. 134, 135, 158 έως 160. Τέλος πολύ διαφωτιστική και η παρουσίαση των έργων του από την ιστοσελίδα του Πανεπιστημίου της

Σκωτίας, St Andrews. Η ιστοσελίδα περιέχει και ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες από τη ζωή του.

(6) Ο όρος δηλώνει την αποτύπωση – προβολή της σφαιρικής επιφάνειας της Γης πάνω στο επίπεδο χαρτί. Για παράδειγμα οι τρόποι με τους οποίους δημιουργήθηκαν οι πορτολάνοι χάρτες αποτελούν παραδείγματα χαρτογραφικών προβολών. Ο τρόπος που ακολούθησε ο Mercator για την κατασκευή του χάρτη του 1569 αποτελεί ένα άλλο παράδειγμα χαρτογραφικής προβολής. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στις πολύ… "φιλικές" σημειώσεις της Ευανθίας Μιχαηλίδου, «Η μάθηση και η διδασκαλία με χάρτες», 2006, διαθέσιμες από το διαδίκτυο.

(7) Ο τίτλος του χάρτη στα λατινικά έχει ως εξής: *«Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantum emendate accommodata».* Η ελληνική μετάφραση του τίτλου έχει γίνει με βάση την αγγλική μετάφραση που βρήκαμε στη βιογραφία του Mercator στην ιστοσελίδα βιογραφιών του Πανεπιστημίου St Andrews.

(8) Το συγκεκριμένο απόσπασμα παρατίθεται από το άρθρο «An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant» των F. Rickey και P. Tuchinsky, στο περιοδικό *Mathematics Magazine,* 1980. Οι συγγραφείς του άρθρου αντλούν το απόσπασμα από το: Anonymous, Gerard Mercator, Map of the World (1569), Supplement no.2 to *Imago Mundi,* 1961.

(9) Η γωνία $\boldsymbol{\delta}$ για την οποία έγινε λόγος στο σχήμα 2 του πρώτου μέρους, είναι ίση με 90°.

(10) Ως πρώτος μεσημβρινός (αρχή μέτρησης του γεωγραφικού μήκους) έχει επιλεγεί ο μεσημβρινός που περνά από τα νησιά του Πράσινου Ακρωτηρίου (Capo Verde). Η επιλογή αυτή φαίνεται να ήταν μία καινοτομία του Mercator (Hall, 1878). Σήμερα, ως πρώτο μεσημβρινό θεωρούμε αυτόν που περνά από το αστεροσκοπείο του Greenwich. Για τις αλλαγές που κατά καιρούς έχουν υπάρξει στην επιλογή του πρώτου μεσημβρινού, βλέπε το πραγματικά πολύ ενδιαφέρον σημείωμα στο *Μαθηματικό και Φιλοσοφικό Λεξικό του Hutton Charles* (στο λήμμα MERIDIAN). Οι πληροφορίες είναι διαθέσιμες στο διαδίκτυο μέσα από το *Archimedes Project,* μια βάση δεδομένων που αφορούν

στη Ιστορία των Επιστημών. Το πρόγραμμα παρέχει πρόσβαση σε 9 (κλασικά στο είδος τους) λεξικά στη διεύθυνση
http://141, 14, 236, 86/cgi-bin/archim/ dict/hw

(11) Το κείμενο πάνω στο χάρτη του Mercator είναι στα λατινικά. Ο Hall στο άρθρο του μεταφέρει ένα σημαντικό απόσπασμα του κειμένου στην πρωτότυπη γλώσσα και κατόπιν το μεταφράζει στα αγγλικά.

(12) Ειρήσθω εν παρόδω ας αναφερθεί ότι το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει την κατεύθυνση που θα ακολουθήσει στο τρίτο μέρος της εργασίας ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός μιας χαρτογραφικής προβολής. Εκεί η χαρτογραφική προβολή θα οριστεί σαν μια *συνάρτηση* από τη σφαίρα $S^2$ στο επίπεδο $IR^2$. Η αντιστοιχία αυτή θα είναι *1-1* αλλά όχι κατ' ανάγκην επί. Επίσης θα είναι *αμφισυνεχής* ώστε ένα τόξο της σφαίρας να μην μπορεί να "σπάσει" σε ασύνδετα κομμάτια όταν απεικονίζεται στο επίπεδο αλλά και αντίστροφα, ασύνδετα ευθύγραμμα τμήματα πάνω στο χάρτη να μην αντιστοιχούν σ' ένα ενιαίο τόξο πάνω στη σφαίρα.

(13) Στην πράξη ο σχεδιασμός σταματά βόρεια του ισημερινού σε γεωγραφικό πλάτος φ=80° και νότια του ισημερινού σε γεωγραφικό πλάτος φ=66°30΄. Τελικά το ύψος του χάρτη είναι 131 cm ενώ το μήκος του 208 cm (Hall, 1878, σελ. 183). Οι διαστάσεις αυτές αφορούν ένα πιστό αντίγραφο του πρωτότυπου χάρτη που εκδόθηκε από τον Jomard στη δουλειά του *Les Monuments de la Géographie ou Recueil d' anciennes Cartes publiées en fac-similé.* Ο πρωτότυπος χάρτης του 1569 σώζεται σε τουλάχιστον δύο αντίτυπα. Το πρώτο βρίσκεται στην Εθνική Βιβλιοθήκη των Παρισίων, το δεύτερο στη βιβλιοθήκη της πόλης Breslau στη Γερμανία, ενώ ένα τρίτο αμφισβητούμενο αντίτυπο φαίνεται να υπάρχει στην πόλη Nürnberg. Οι πληροφορίες είναι από την σχολιασμένη επανέκδοση του προλόγου του βιβλίου του Wright (καθώς και των πινάκων του αυξομερών πλατών του 1599), στο περιοδικό *Hydrographic Review,* 1931, vol 8, σελ. 84-97. Ο τίτλος του άρθρου είναι «Origin of Meridional Parts». Η πληροφορία για τα τρία αντίτυπα υπάρχει και στο βιβλίο του Maor, «Trigonometric delights», εκδ. Πανεπιστημίου Princeton. Εκεί αναφέρεται (σελ. 180, ηλεκτρονικής έκδοσης) ότι το αντίτυπο στο Breslau

καταστράφηκε κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου (www.press.princeton.edu/books/maor).

(14) Στην παράγραφο 8 του τρίτου μέρους θα δούμε ότι ο Mercator δεν θα μπορούσε να είχε καταφέρει κάτι καλύτερο. Σχεδόν διακόσια χρόνια μετά την πρώτη έκδοση του μερκατορικού χάρτη, ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler απέδειξε ότι χάρτης που να μην αλλοιώνει ούτε τις αποστάσεις αλλά ούτε και τις γωνίες απλά δεν μπορεί να υπάρξει!

(15) Ο απαιτητικός αναγνώστης ίσως σκεφτεί ότι οι δύο στόχοι που έθεσε ο Mercator κατά την κατασκευή του χάρτη του (και που αναφέρονται στην αρχή της παραγράφου 8), μπορούν να ελαττωθούν σε έναν: οι γωνίες να διατηρούνται αναλλοίωτες κατά τη μεταφορά του στο χάρτη. Η αλήθεια όμως δεν είναι αυτή. Για να αποδείξουμε ότι *η τυχαία* λοξοδρομία μετασχηματίζεται σε ευθεία γραμμή, στηριχθήκαμε σε δύο ήδη κατοχυρωμένες – *σύμφωνα με το Mercator* – ιδιότητες της προβολής του:

1η) Οι γωνίες σχεδιάζονται πάνω στο χάρτη αναλλοίωτες σε σχέση με το πώς ήταν στην Υδρόγειο.

2η) Κάποιες *πολύ ειδικές* λοξοδρομίες – ο ισημερινός και οι μεσημβρινοί – μετασχηματίζονται πάνω στο χάρτη σίγουρα σε ευθείες γραμμές.

Αυτή η τελευταία ιδιότητα δικαιολογεί πλήρως το διπλό στόχο που έθεσε ο Mercator.

(16) Ένα απόσπασμα της εργασίας του ( με τίτλο «The Navigator's Supply & c.») μπορεί κάποιος να βρει στις σελίδες 194 και 195 του άρθρου του Hall. Επίσης, ένα πολύ μικρότερο απόσπασμα στη σελίδα 136 του βιβλίου του Lloyd Brown.

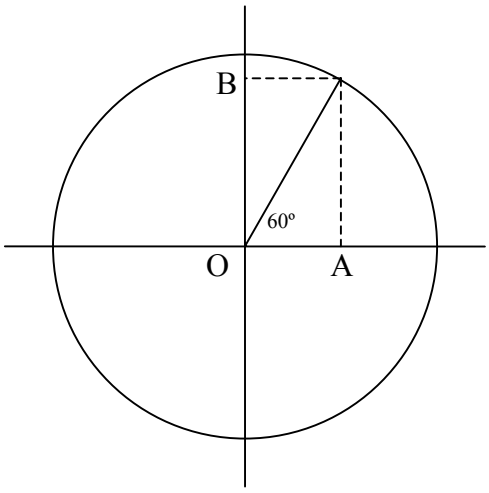
(17) Ο πλήρης τίτλος του βιβλίου του είναι αρκετά μακρύς: *«Certaine errors in navigation, arising, either of the ordinarie erroneous making or vsing of the sea chart, compasse, crosse staffe, and tables of declination of the sunne, and fixed stares detected and corrected».*

(18) Πρόκειται σίγουρα για μία πολύ απλή απόδειξη. Την εποχή όμως του Wright ο συμβολισμός στην Τριγωνομετρία ήταν ακόμη υπό διαμόρφωση. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας νοούνταν κατά τα πρότυπα του Κλαύδιου Πτολεμαίου, ως ευθύγραμμα τμήματα σε τριγωνομετρικό κύκλο (και όχι ως λόγοι ευθυγράμμων τμημάτων σε τρίγωνο). Επειδή δε οι υπολογισμοί γινόταν

με κλάσματα (και όχι με δεκαδικούς αριθμούς), προκειμένου να αποφευχθούν οι δύσκολες πράξεις η ακτίνα του κύκλου θεωρούνταν όχι ίση με τη μονάδα, αλλά ίση με 1.000.000 ή και 10.000.000. Έτσι στο επόμενο σχήμα (όπου η ακτίνα είναι ίση με $10^7$),

cos 60° = OA = 5.000.000 (και όχι 0,5)

ενώ sin 60° = OB = 8.660.254 (και όχι 0,8660254).




( Οι σχετικές πληροφορίες από το άρθρο του Γιάννη Θωμαΐδη, σελ. 10, 11).

Η απόδειξη όπως παρουσιάστηκε εδώ εμφανίζεται στον Tuchinsky (1978) στις σελίδες 12 και 13 του βιβλίου του. Στο άρθρο που έγραψαν 2 χρόνια αργότερα ο Tuchiusky μαζί με τον Frederick Rickey (*Mathematics Magazine, 1980, vol. 53),* παρουσιάζουν μια διαφορετική (τρισδιάστατη) απόδειξη με τη σημείωση ότι *«η απόδειξη του Wright είναι δισδιάστατη»* (σελ. 163).

(19) Τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι όμοια γιατί έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{A'\Sigma_1'}{A'\Sigma_2'} = \frac{A\Sigma_1 \cdot \sec\varphi}{A\Sigma_2 \cdot \sec\varphi} = \frac{A\Sigma_1}{A\Sigma_2}$$

Η χρήση του θεωρήματος της ομοιότητας εδώ, νομιμοποιείται γιατί έχουμε επικεντρωθεί σ' ένα *μικρό* κομμάτι της σφαίρας και η σφαίρα *τοπικά* είναι μία επιφάνεια που μοιάζει με επίπεδο. Στο τρίτο μέρος της εργασίας θα δούμε ότι αυτή η *εν σμικρώ* προσέγγιση μιας επιφάνειας για να μπορεί να πραγματοποιηθεί, θα πρέπει αυτή να δέχεται εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε

σημείο της. Η συγκεκριμένη απαίτηση θα αναγορευτεί σε βασική ιδιότητα όταν θα δοθεί ο μαθηματικός ορισμός της έννοιας της επιφάνειας.

Πάντως πρέπει να αναφερθεί ότι η μερκατορική προβολή δεν διατηρεί την ομοιότητα μεγάλων περιοχών. Για παράδειγμα στην εικόνα 13 σελ. 49 το τρίγωνο που σχηματίζουν 2 μεσημβρινοί, ο ισημερινός και ο πόλος, απεικονίζεται σαν παραλληλόγραμμο. Η πιο αυστηρή διαπραγμάτευση της *εν σμικρώ ομοιότητας* προαπαιτεί τη θεωρία του Απειροστικού Λογισμού και θα παρουσιαστεί στο τρίτο μέρος της εργασίας.

(20) Κάθε χάρτης για να είναι σε μέγεθος βολικό για εκτύπωση απεικονίζει το γεωγραφικό χώρο σε σμίκρυνση η οποία δηλώνεται μέσω της κλίμακας. Η κλίμακα ορίζεται ως *«ο λόγος ενός μήκους πάνω στο χάρτη προς το αντίστοιχό του πάνω στη γήινη επιφάνεια»*. Η κλίμακα συνήθως εκφράζεται μ' ένα κλάσμα ή λογο. Έτσι αν η κλίμακα του χάρτη δίνεται μέσα από το λόγο $\frac{1}{5.000.000}$, τότε ένα εκατοστό πάνω στο χάρτη αναπαριστά 5.000.000 εκατοστά πάνω στη γήινη επιφάνεια. Θα μπορούσε άνετα να ερμηνευτεί: ένα χιλιοστό πάνω στο χάρτη αναπαριστά 5.000.000 χιλιοστά στο έδαφος. Η μονάδα μέτρησης δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αφού η αναλογία παραμένει σταθερή. Η κλίμακα συμβολίζεται συνήθως με το σύμβολο $\frac{1}{\kappa}$. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα κ=5.000.000. Όταν η κλίμακα είναι ίση με τη μονάδα (κ=1), τότε ο χάρτης έχει φυσικό μέγεθος δηλαδή δεν έχει υποστεί καμμιά σμίκρυνση. Στην πράξη βέβαια αυτό δεν συμβαίνει ποτέ. Στο χάρτη του Mercator για παράδειγμα που έχει κλίμακα 1:50.000.000, όλες οι αποστάσεις πριν αποτυπωθούν στο χαρτί πολλαπλασιάζονται με τον αριθμό $\frac{1}{50.000.000}$ για να αποκτήσουν εκτυπώσιμο μέγεθος.

Πάντως η κλίμακα για την οποία γίνεται λόγος εδώ, δεν έχει να κάνει με την – ούτως ή άλλως – αναγκαστική παραμόρφωση στην οποία υπόκεινται οι αποστάσεις όταν μεταφέρονται από μια *σφαιρική* επιφάνεια στο *επίπεδο* χαρτί.

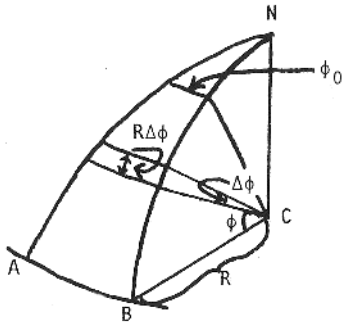
(Οι πληροφορίες είναι από τις σημειώσεις της Ευανθίας Μιχαηλίδου, «Η μάθηση και η διδασκαλία με χάρτες», σελ. 3, ηλεκτρονική έκδοση).

(21) Το προσχέδιο αυτό ο Blundeville το συμπεριέλαβε στις «Ασκήσεις» του. Τη μελέτη του αυτή την ξανασυναντήσαμε στην πρώτη πρώτη παράγραφο της Διπλωματικής.

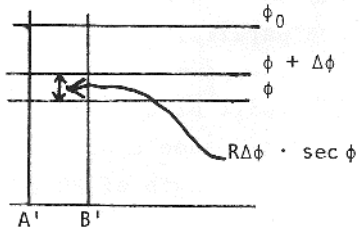
(22) Από το Captain G. Marguet, «Histoire de la Navigation du XV$^{e}$ au XX$^{e}$ siecle», Paris October 1930, περιοδικό *Revue Maritime.* Το συγκεκριμένο απόσπασμα αναπαράγεται και στη σχολιασμένη επανέκδοση του προλόγου του Wright στο περιοδικό *Hydrographic Review*, 1931, Vol 8, σελ. 84, απ' όπου και το μεταφέρουμε.

(23) Ας υπολογίσουμε ακόμη μία φορά την απόσταση που έχει πάνω στο μερκατορικό χάρτη, ο παράλληλος σε γεωγραφικό πλάτος $\varphi=\varphi_o$ από τον ισημερινό. Όμως τώρα ας υιοθετήσουμε σύγχρονο συμβολισμό.

Κατ' αρχήν τεμαχίζουμε ένα μεσημβρινό που βρίσκεται ανάμεσα σ' αυτόν τον παράλληλο και τον ισημερινό σε πολύ μικρά κομμάτια. Αυτό ισοδυναμεί με το να τεμαχίσουμε σε πολύ μικρά κομμάτια το διάστημα $[0, \varphi_o]$.




Πάνω στη Γη




Πάνω στο χάρτη

Έτσι ένα μικρό κομμάτι μεσημβρινού που βρίσκεται *κοντά* σ' ένα παράλληλο φ ($0\le\varphi\le\varphi_o$), αντιστοιχεί σε γωνιακό άνοιγμα Δφ. Το μήκος πάνω στην Υδρόγειο Σφαίρα θα είναι $R_{ΓΗΣ}.\Delta\varphi$ αν το Δφ μετρά σε rad, ή $\frac{R_{ΓΗΣ}\cdot\pi}{180}\cdot\Delta\varphi$ αν το Δφ μετρά σε μοίρες.

Όταν αυτό το κομμάτι μεταφερθεί πάνω στο χάρτη το μήκος του θα γίνει $\frac{R_{ΓΗΣ}\cdot\pi}{180}\cdot\Delta\varphi\cdot\sec\varphi$ ή $\frac{R\cdot\pi}{180}.\int_0^{\varphi_o}\sec\varphi\cdot\Delta\varphi$. Η σταθερή ποσότητα έξω από το ολοκλήρωμα είναι το μήκος που έχει πάνω στη σφαιρική Γη το τόξο μιας μοίρας (είτε θεωρηθεί στον ισημερινό είτε σε οποιοδήποτε μεσημβρινό). Αν το Δφ

προχωρά κατά 1΄ τότε η ποσότητα αυτή ισούται με $\frac{R_{ΓΗΣ} \cdot \pi \cdot \frac{1}{60}}{180}$ και δίνει το μήκος που έχει πάνω στη Γη ένα τόξο 1΄. Αυτή την ποσότητα ο Wright συμβόλισε με m. Εμείς σήμερα γνωρίζοντας ότι $R_{Γης}$≈6.378 km, παίρνουμε m≈1855m που είναι και ο τυπικός ορισμός του *γεωγραφικού μιλίου*. Αυτή η τιμή την εποχή του Wright δεν ήταν γνωστή.

(24) Οι διαφορές κατά κύριο λόγο οφείλονται στον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο υπολογίζονταν τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας (βλέπε σχετικά και τη σημείωση 17). Επίσης και στον τρόπο με τον οποίο ο Wright θεωρούσε τη σταθερά m (βλέπει σημείωση 23).

(25) Το συγκεκριμένο απόσπασμα παρατίθεται από τον Tuchinsky (1978), σελ. 19. Όσο για τον πλήρη τίτλο της εργασίας του Halley, αναφέρεται στην παρατήρηση της παραγράφου 11.4.

(26) Ο Nicolaus Mercator εδώ - κατά πάσα πιθανότητα – αναφέρεται σ' ένα ρολόι το οποίο κατασκεύασε προκειμένου να μπορεί να μετρηθεί *με ακρίβεια* ο χρόνος ακόμα και στη μέση του ωκεανού. Η ύπαρξη ενός τέτοιου ρολογιού *ακριβείας* είναι εντελώς απαραίτητη προκειμένου κάποιος να μπορέσει να υπολογίσει το γεωγραφικό μήκος του τόπου στον οποίο βρίσκεται. Χαρακτηριστικό της μεγάλης σημασίας που είχε εκείνη την εποχή η ακριβής μέτρηση του γεωγραφικού μήκους είναι το γεγονός ότι, παρ' όλο που το ρολόι του Mercator δεν απεδείχθη τόσο ακριβές όσο χρειαζόταν, ο ίδιος εξαιτίας αυτής της εφεύρεσής του έγινε δεκτός στη Βασιλική Εταιρία του Λονδίνου το Νοέμβριο του 1666 (από το site βιογραφιών του πανεπ. St. Andrews). Περισσότερες πληροφορίες γι' αυτό το κορυφαίο επιστημονικό πρόβλημα της Αναγέννησης, στον Λιβιεράτο (1998) καθώς και στον Brown (1979).

(27) Για να πάρει κανείς μια ιδέα για το πόσα πράγματα ανακάλυψε αυτός ο άνθρωπος πριν τα… ξαναανακαλύψουν άλλοι, δεν έχει παρά να επισκεφτεί την ιστοσελίδα βιογραφιών του πανεπιστημίου St Andrews και να διαβάσει τη βιογραφία του.

(28) Τα αποτελέσματά του αφορούν στην προσέγγιση μέσω σειρών των συναρτήσεων $\sin^{-1}x$, sinx, cosx, ln (1+x) αλλά και τη διωνυμική σειρά με εκθέτη αρνητικό ακέραιο. Τα αποτελέσματα δημοσιεύτηκαν από τον John

Collins με τον τίτλο *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* όταν ο τελευταίος τα πληροφορήθηκε από τον Isaac Barrow. Η σχετική αλληλογραφία υπάρχει στο άρθρο του Carslaw. Τη δουλειά αυτή ο Collins τη γνωστοποίησε και στο Grecory ο οποίος κατόπιν τούτων – το Φεβρουάριο του 1671 – έδωσε το ανάπτυγμα σε άπειρη σειρά των συναρτήσεων $\tan^{-1}x$, tanx, lntanx, secx και lnsecx! Οι σειρές αυτές αν και σχετίζονται καίρια με τον καλύτερο υπολογισμό του $\int \sec\varphi d\varphi$, ο γράφων δε γνωρίζει αν έγιναν πλατειά γνωστές και πότε.

(29) Ο βασικός στόχος της μεθόδου του Barrow είναι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση να μπορεί να έρθει στη μορφή Α δηλαδή να μπορεί να εμφανίζει μια ζυγή δύναμη του cosφ και ένα cosφ μόνο του.

- Σ' ένα πρώτο επίπεδο γενίκευσης τέτοιες συναρτήσεις βέβαια είναι οι συναρτήσεις $\cos^{2\rho+1}\varphi$ όπου $\rho \in Z$: αν $\rho \in Z^-$ η ζυγή δύναμη του cosφ θα εμφανίζεται στον παρονομαστή (όπως στην περίπτωση του $\int \sec\varphi d\varphi$), ενώ αν $\rho \in Z^+$ θα εμφανίζεται στον αριθμητή. Σε κάθε περίπτωση $\int \cos^{2\rho+1}\varphi d\varphi = \int \cos\varphi \cdot (1-\sin^2\varphi)^\rho d\varphi = \int (\sin\varphi)' \cdot (1-\sin^2\varphi)^\rho d\varphi$ οπότε η αλλαγή μεταβλητής sinφ=t μας πηγαίνει σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t.
- Φυσικά την ίδια κατάληξη σε ρητή συνάρτηση θα έχουμε αν ξεκινήσουμε με την ακόμη γενικότερη κατηγορία ολοκληρωμάτων $\int \sin^v\varphi \cdot \cos^{2\rho+1}\varphi d\varphi$ με $v,\rho \in Z$.
- Επίσης εντελώς συμμετρικά μ' αυτά τα ολοκληρώματα μπορούν να αντιμετωπιστούν και τα ολοκληρώματα $\int \sin^{2\rho+1}\varphi d\varphi$ και $\int \cos^v\varphi \cdot \sin^{2\rho+1}\varphi d\varphi$ αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ στη μορφή $\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$. Για παράδειγμα

$$\int \sin^{2\rho+1}\varphi d\varphi = \int \sin\varphi \cdot \sin^{2\rho}\varphi d\varphi = \int \sin\varphi \cdot (1-\cos^2\varphi)^\rho d\varphi =$$

$\int (\cos\varphi)'.(1-\cos^2\varphi)^\rho \cdot d\varphi$ οπότε με την αλλαγή μεταβλητής cosφ=t πάμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

- Τελικά μπορούμε να έχουμε μία ενιαία γραφή όλων αυτών των περιπτώσεων σε μία: πρόκειται για την πολύ γενική κατηγορία ολοκληρωμάτων

$\int \sin^{\nu} \varphi \cdot \cos^{\mu} \varphi \cdot d\varphi$ όπου ή ν = περιττός ακέραιος ή μ = περιττός ακέραιος ή και οι δύο εκθέτες είναι περιττοί ακέραιοι(*).

<u>Παρατήρηση:</u> Ένας άλλος τρόπος ένταξης του $\int \sec \varphi d\varphi$ σε μια γενικότερη κατηγορία τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων που ανάγονται σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης, εμφανίζεται στο βιβλίο *«Ολοκληρώματα»* του Γ. Μπαραλού, ιδιωτική έκδοση, σελ. 31 (εκεί προτείνεται η αλλαγή μεταβλητής $t=\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}$). Η ίδια προσέγγιση αναφέρεται και στο κλασικό σύγγραμμα του M. Spivak *«Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός»,* 1991, εκδ. Π.Ε.Κ., σελ. 313 και 322.

(30) Η εργασία του Wallis βρίσκεται στο περιοδικό *Philosophical Transactions,* No 176, 1685. Cf. *Abridged Transactions,* voli, p572. Η εδώ παρουσίαση εμφανίζεται στον Tuchinsky (1978) και στηρίζεται και στις πληροφορίες που υπάρχουν στον Carslaw (1924), σελ. 6.

(31) Θα πρέπει να τονιστεί ότι η μετατροπή αυτή γενικά *δεν* ισχύει. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη περίπτωση ο υπολογισμός είναι νόμιμος μιας και η εμπλεκόμενη σειρά είναι συγκλίνουσα για όλες τις τιμές σ' ένα *κλειστό* διάστημα [0, x] ( όπου $0 \le x \angle \frac{\pi}{2}$ ) ενώ ταυτόχρονα οι επιμέρους συναρτήσεις που εμφανίζονται (συμπεριλαμβανομένου και του αθροίσματος), είναι όλες συνεχείς.

(32) Μία πολύ σύντομη περιγραφή της όλης προσέγγισης υπάρχει στον Carslaw (1924) και στις σελίδες 6 και 7.

---

(*) Η κατηγορία αυτή εμφανίζεται στο κλασικό φροντιστηριακό βοήθημα *«Ολοκληρώματα Δ' Δέσμης»* των Σ. Μαρίνη και Α. Παπαδήμα, εκδ. Σαββάλα και στις σελίδες 47, 48 και 50.

**Βιβλιογραφία δεύτερου μέρους**


- Cajori, F. (1915). On an Intergration Ante-dating the Integral Calculus. *Bibliotheca Mathematica,* 3rd Series, *14,* 312-319.

- Carslaw, H.S. (1924). The story of Mercator's map. A chapter in the History of Mathematics. *Mathematical Gazette, 12,* 1-7.

- Hall, E.E. (1878). *Journal of the American Geographical Society of New York, 10,* 163-196.

- Θωμαΐδης, Γ. (1987). *Ανάδυση και εξέλιξη των λογαριθμικών εννοιών.* Θεσσαλονίκη: Εκδ. Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών.
  Σελ. 1, 5, 9-11, 13-15, 44.

- Μαρίνης Σ. Παπαδήμας, Α (1997). *Ολοκληρώματα Δ΄ Δέσμης.* Αθήνα: Εκδ. Σαββάλας.
  Σελ. 47-51.

- Μπαραλός, Γ. *Ολοκληρώματα.* Αθήνα: Ιδιωτική Έκδοση.
  Σελ. 31, 55.

- Ντούνης, Χ. Δημαράκης, Α. (1995). *Ναυτιλία* (τόμος Α΄). Αθήνα: Εκδ. Ίδρυμα Ευγενίδου.
  Σελ. 70-82.

- Rickey, F. Tuchinsky, P. (1980). An application of Geography to Mathematics: History of the integral of the secant. *Mathematics Magazine, 53* (3), 162-166.

- Spivak, M. (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός.* (μετάφραση). Ηράκλειο: Εκδ. Π.Ε.Κ. (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
  Σελ. 312-313, 322.

- Tuchinsky, P.M. (1978). *Mercator's World Map and the Calculus.* Από τη σειρά Modules and Monographs in Undergraduate Mathematics and its Applications (UMAP) Project. Newton, Mass: Εκδ. Education Development Center (EDC) / Project UMAP.

- Wright, Edward. (1599) *Certaine Errors in Navigation,… detected and corrected.* London: Εκδ.Valentine Sims.
  Το βιβλίο είναι διαθέσιμο σε μικροφίλμς ως μέρος των Παλαιών Αγγλικών Βιβλίων της περιόδου 1475-1640 και στις μπομπίνες με αριθμούς 539 και 1018 (δύο διαφορετικά αντίτυπα της έκδοσης του 1599). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ο πρόλογος του βιβλίου καθώς και οι πίνακες αυξομερών πλατών όλα από την επανέκδοσή τους με τίτλο Origin of meridional parts (1931) στο περιοδικό *International Hydrographic Review, 8,* 84-97.


**Από το Διαδίκτυο**

<u>Βιβλία – Πανεπιστημιακές Σημειώσεις</u>


- Maor, *Trigonometric Delights* (Princeton University). Retrieved August 5, 2007 from http://www.press.princeton.edu/books/maor/index.html

- The Archimedes Project: Archimedes Repository Dictionary-Access(n.d.). Retrieved, June 2, 2007 from
  http://141, 14, 236, 86 / cgi-bin/archim/dict/hw
  (Εντυπωσιακή βάση δεδομένων στην Ιστορία των Επιστημών. Ανάμεσα σε άλλα παρέχει πρόσβαση σε 9 - κλασικά στο είδος τους – λεξικά. Ένα από αυτά και το: Hutton, Charles (1795). *A Mathematical and Philosophical Dictionary*).

- Μιχαηλίδου, Ε. (2007). *Η μάθηση και η διδασκαλία με χάρτες* (Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Π.Τ.Δ.Ε. Ρόδος). Ανάκληση Μάιος 25, 2007 από
  www.rhodes.aegean.gr/ptde/personel/407/michaelidou/Cartography-Text.pdf
  σελ. 7-13.

Βιογραφίες

- Indexes of Biographies (University of St. Andrews, Scotland) (n.d.). Retrieved May 24, 2007 from
  www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html
  (Εντυπωσιακά ενημερωμένος κατάλογος με βιογραφικά στοιχεία μαθηματικών όλων των εποχών).

Στο Σωτήρη Ντελή…

# ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

## Γυρνώντας στο σήμερα:
## Οι σύμμορφες απεικονίσεις στο πλαίσιο της Διαφορικής Γεωμετρίας

«Έχετε απόλυτο δίκιο ότι η ουσιώδης συνθήκη σε κάθε χαρτογραφική προβολή είναι η διατήρηση της ομοιότητας σε απειροστή κλίμακα· μία συνθήκη η οποία θα πρέπει να αγνοηθεί μόνο όταν πολύ ειδικές ανάγκες το επιβάλλουν»

C.F. Gauss (Στον Hensen, 11 Δεκεμβρίου του 1825)

## §12. Εισαγωγή

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, οι μέθοδοι που χρησιμοποίησε ο ίδιος ο Mercator για να κατασκευάσει στα 1569 το χάρτη του παραμένουν ακόμη και σήμερα ένα μυστήριο. Οι λιγοστές σκέψεις που έγραψε πάνω στο χάρτη του καθώς και η μετέπειτα μαθηματική προσέγγιση του Edward Wright βοήθησαν με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο να συμπληρώσουμε το παζλ της κατασκευής του. Ωστόσο, μία *ενιαία* εξήγηση του τρόπου λειτουργίας του μπορεί να έρθει μόνο μέσα από μία συστηματική *θεωρία* των σύμμορφων απεικονίσεων (ή προβολών). Βέβαια όσο αναγκαία είναι η συστηματική θεωρία για την ενιαία εξήγηση της μερκατορικής προβολής άλλο τόσο αναγκαία είναι και η ιστορική παρουσίαση των πρώτων ιδεών για την ολοκληρωμένη γνώση της μαθηματικής θεωρίας. Σε μια διδακτορική διατριβή[(1)] που υποστηρίχθηκε το 2005 στο Πανεπιστήμιο Columbia, η συγγραφέας συμπυκνώνει αυτή την άποψη πολύ εύστοχα: *«Η ιστορία των σύμμορφων απεικονίσεων στα μαθηματικά μπορεί να διαιρεθεί σε πέντε περιόδους ανακαλύψεων: 1η) 1569-1813, 2η) 1814-1830, 3η) 1831-1850, 4η) 1851-1863, 5η) 1864-σήμερα. Κάθε περίοδος μπορεί να φαίνεται ασύνδετη με τις άλλες αν θεωρηθεί μόνη της αλλά, όλες μαζί περιέχουν τα συστατικά στοιχεία που είναι απαραίτητα για τη σύγχρονη θεωρία των σύμμορφων απεικονίσεων»*[(*)] (Doyle, 2005).

Η θεωρία για την οποία κάνουμε λόγο σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στο Gauss και παρουσιάστηκε στα 1822 στην εργασία του πάνω στην αναπαράσταση *«μιας δοσμένης επιφάνειας πάνω σε μία άλλη ώστε η απεικόνιση να διατηρεί την ομοιότητα στην απειροστή κλίμακα»*[(2)].

Στόχος μας σ' αυτό το τελευταίο μέρος της διπλωματικής είναι να παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία αυτής της θεωρίας[(3)]. Για την καλύτερη κατανόηση προηγούνται κάποια στοιχεία από τη θεωρία επιφανειών. Κατ' αρχήν παρουσιάζεται αναλυτικά ο ορισμός της επιφάνειας μιας και πάνω του θα στηριχθούν όλοι οι μετέπειτα ορισμοί και τα όποια θεωρήματα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται πολύ συνοπτικά –εν ήδη τυπολογίου– κάποια στοιχεία από τη μέτρηση των επιφανειών. Ακολουθεί μία παράγραφος η οποία διαπραγματεύεται την έννοια της απεικόνισης μεταξύ δύο επιφανειών. Η έννοια ορίζεται γενικά ανάμεσα σε δύο τυχαίες επιφάνειες. Στην ίδια

---

[(*)] Οι υπογραμμίσεις δικές μας.

παράγραφο δίνεται κι ένας ορισμός της χαρτογραφικής προβολής. Κατόπιν τούτων ακολουθούν σε τρεις παραγράφους οι ορισμοί και τα θεωρήματα της θεωρίας των σύμμορφων απεικονίσεων. Τον επίλογο του τρίτου μέρους αποτελούν οι παράγραφοι 19 και 20 που περιέχουν κατά τη γνώμη μας πολύ ενδιαφέροντα ζητήματα μερικά από τα οποία κινούνται στα όρια της διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα, η παράγραφος 19 επιχειρεί να συνδέσει τη μερκατορική προβολή με τους γενικότερους προβληματισμούς της Μαθηματικής Χαρτογραφίας ενώ η παράγραφος 20 παρουσιάζει πως η μερκατορική προβολή εντάσσεται μέσα στις πρακτικές των σύγχρονων ναυσιπλόων.Ένα παράρτημα πάνω στις αναπαραστάσεις της σφαίρας κρίθηκε αναγκαίο μιας και η συγκεκριμένη επιφάνεια –ως μοντέλο του σχήματος της Γης– είναι αυτή που κυρίως απασχολεί τους χαρτογράφους. Η απόδειξη της ιδιότητας ότι δύο τόποι πάνω στη Γη συνδέονται με άπειρες στο πλήθος λοξοδρομίες αποτέλεσε το αντικείμενο του παραρτήματος 2.

Τέλος, ένα ακόμη παράρτημα παρουσιάζει μέσα από χάρτες κάποιες από τις κυριότερες ιδέες αυτής της εργασίας.

## §13. Η έννοια «επιφάνεια»

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να παρουσιάσει έναν ορισμό της επιφάνειας αρκετά γενικό ώστε να καλύπτει την επιφάνεια της σφαίρας, τουλάχιστον όπως την αντιλαμβάνονται οι χαρτογράφοι (δηλαδή μέσα από τις γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων της ). Ακόμη κι έτσι, ο ορισμός που δίνεται παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυνατή γενικότητα που θα ήταν επιθυμητή στα πλαίσια της κλασικής διαφορικής γεωμετρίας! Έχει καταβληθεί μία προσπάθεια ώστε ο ορισμός να παρουσιαστεί εξελικτικά όχι απαραίτητα από κάποιο σεβασμό σε θέματα Διδακτικής, αλλά γιατί έτσι θα εξυπηρετηθεί καλύτερα η μαθηματική ανάπτυξη των επόμενων εννοιών. Αν ωστόσο κάποιες μαθηματικές ιδέες παρουσιάζονται συμπιεσμένες, αυτό οφείλεται στους χωρικούς και χρονικούς περιορισμούς αυτής της εργασίας.

Ξεκινώντας από τον Ευκλείδη να αναφέρουμε ότι στον 5$^{ο}$ ορισμό του 1$^{ου}$ βιβλίου των Στοιχείων του ορίζει ότι, *«επιφάνεια είναι ότι έχει μόνον μήκος και πλάτος»*. Ο Euler στην «Opera posthuma» αναφέρει ότι *«…σε μία φυσική επιφάνεια οι αρμόζουσες συντεταγμένες οφείλουν να είναι μία συνάρτηση διπλής μεταβλητής…»*(*).

Κινούμενοι προς αυτή την κατεύθυνση αναζητούμε έναν ορισμό ο οποίος:

1$^{ον}$) θα αναδεικνύει το διδιάστατο χαρακτήρα της επιφάνειας

2$^{ον}$) θα μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε πάνω σε μία επιφάνεια τις συνήθεις πρακτικές της Ανάλυσης, δηλαδή οριακές διαδικασίες

3$^{ον}$) θα καλύπτει το κρίσιμο για μας παράδειγμα επιφάνειας της σφαίρας, που είναι και το συνηθισμένο μοντέλο του σχήματος της Γης.

Ας σημειωθεί εδώ ότι η δεύτερη απαίτηση αποτελεί εντελώς απαραίτητη προϋπόθεση για να μπορέσουμε κάποια στιγμή να μιλήσουμε για εφαπτόμενο επίπεδο σ' ένα σημείο μιας επιφάνειας. Με τη σειρά της αυτή η δυνατότητα μας επιτρέπει όταν περιοριζόμαστε σ' ένα μικρό τμήμα μιας επιφάνειας να το χειριζόμαστε σαν επίπεδο(**).

---

(*) *«Et quia per naturam superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarum variabilium…»* (σ.494, ηλεκτρονική έκδοση των έργων του).

(** ) Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι πολύ συχνά στο πρώτο και στο δεύτερο μέρος της εργασίας έγινε χρήση αυτής της δυνατότητας. Για παράδειγμα στο σχήμα 1 της §4 ή και στο σχήμα 4 της §8.

Ο επόμενος ορισμός είναι μια πρώτη απόπειρα να ικανοποιηθούν οι τρεις απαιτήσεις.

Ορισμός 1

Έστω S ένα υποσύνολο του $R^3$ για το οποίο υπάρχει μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}\ (u,v) = (\ f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\ )$, ενός ανοιχτού συνόλου U του uv επιπέδου <u>επί</u> του S, που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

i) είναι κλάσης τουλάχιστον $C^1$ ($C^m$, $m \geq 1$)

ii) $\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$, για κάθε (u,v) ϵ U.

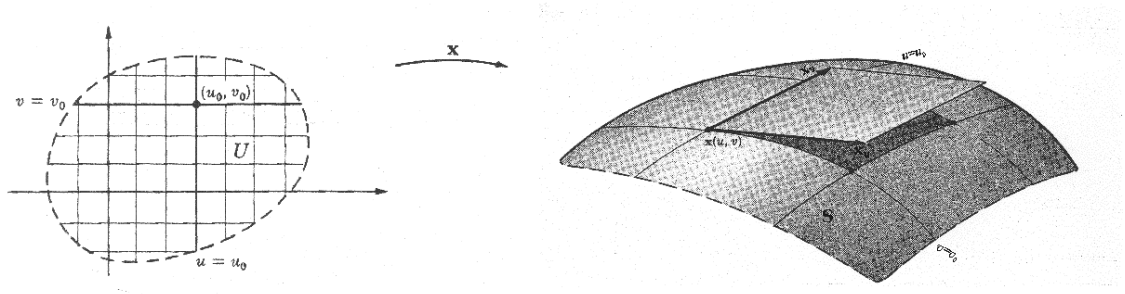
Στην περίπτωση αυτή το S ονομάζεται *επιφάνεια* ενώ η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}\ (u,v)$ ονομάζεται *παραμετρική παράσταση* της επιφάνειας.

Παρατηρήσεις

α) Ο ορισμός –μέσω της συνάρτησης $\vec{\mathbf{x}}(u,v)$– αναδεικνύει το διδιάστατο χαρακτήρα της επιφάνειας S.

β) Η πρώτη συνθήκη είναι η εντελώς απαραίτητη ιδιότητα για να κάνουμε κάποια «Ανάλυση» πάνω στο S.

γ) Τηρουμένης της πρώτης συνθήκης νομιμοποιείται και η ύπαρξη της δεύτερης συνθήκης, η οποία όταν ικανοποιείται εξασφαλίζει ότι σ' ένα σημείο του συνόλου S τα διανύσματα $\vec{\mathbf{x}}_u$, $\vec{\mathbf{x}}_v$ υπάρχουν, δεν μηδενίζονται και δεν είναι συγγραμμικά. Μ' άλλα λόγια οι *επιφανειακές καμπύλες* u = σταθερός αριθμός και v = σταθερός αριθμός δεν εξαφανίζονται γύρω από ένα σημείο ενώ ταυτόχρονα λειτουργούν και ανεξάρτητα[4]. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την έννοια «εφαπτόμενο επίπεδο». Αυτό το τελευταίο, τουλάχιστον διαισθητικά, είναι προφανές από μια απλή εποπτεία του σχήματος 7. Για έναν πιο τυπικό ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου θα πρέπει κανείς να περιμένει τις έννοιες της επόμενης παραγράφου.




Σχήμα 7.

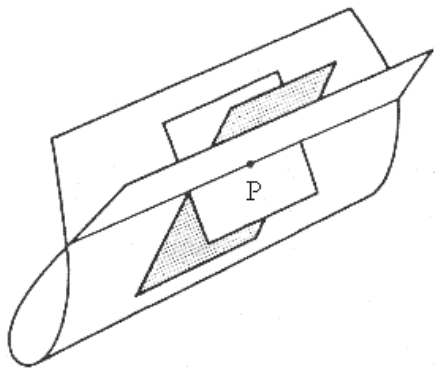
δ) Η συνθήκη ii) έχει πάρα πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις [5]. Μία απ' αυτές είναι και η

$$\text{ii}_\alpha\text{): Ο πίνακας } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ έχει τάξη 2 ή αλλιώς, έχει}$$

τουλάχιστον μία $2\times2$ υποορίζουσα $\neq 0$.

Η διατύπωση αυτή θα αποδειχθεί πολύ χρήσιμη όταν στην παράγραφο 15 μιλήσουμε για απεικόνιση μιάς επιφάνειας πάνω σε μία άλλη.

ε) Ένα πρώτο μειονέκτημα του ορισμού 1 είναι ότι λείπει η απαίτηση η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}$ να είναι 1-1. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 8, η απαίτηση αυτή είναι εντελώς απαραίτητη αν θέλουμε να μιλάμε για *ΤΟ* εφαπτόμενο επίπεδο σ' ένα σημείο P μιας επιφάνειας.




Σχήμα 8.

στ) Ένα δεύτερο *πολύ σημαντικό* μειονέκτημα είναι ότι ο ορισμός δεν καλύπτει την περίπτωση της σφαίρας! Το «για κάθε» της δεύτερης συνθήκης αποδεικνύεται... ασήκωτο για την περίπτωσή της. Μία αναλυτική εξήγηση αυτής της πολύ ενδιαφέρουσας αδυναμίας υπάρχει στις δύο πρώτες παραγράφους του Παραρτήματος 1. Η εξήγηση αυτή καλύπτει και τις αδυναμίες του ορισμού 2 που θα δώσουμε λίγο πιο κάτω.

ζ) Για να μιλήσουμε για το τελευταίο μειονέκτημα του ορισμού 1 απαιτείται να δούμε προσεκτικά τον τρόπο που αυτός λειτουργεί. Κάθε φορά που θέλουμε να μιλήσουμε για την επιφάνεια S είμαστε αναγκασμένοι να μιλάμε όχι ακριβώς γι' αυτήν αλλά για τον τρόπο με τον οποίο την περιγράφουμε –δηλαδή για τη συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}(u,v)$. Αυτή η προσέγγιση ενώ έχει το πλεονέκτημα που υποδεικνύει η παρατήρηση α), μπορεί να δημιουργήσει επιπλοκές σε περίπτωση που θέλουμε *πάνω* στην επιφάνεια S να ορίσουμε κάποια *περαιτέρω* μαθηματικά αντικείμενα.(*) Ο ορισμός 1 δεν μπορεί να μας εγγυηθεί ότι οι όποιες ιδιότητες(**) αυτών των νέων μαθηματικών αντικειμένων θα εξαρτώνται μόνο από την επιφάνεια και όχι από τον τρόπο που την περιγράφουμε, δηλαδή δεν μπορεί να μας εγγυηθεί το προφανές! Το τελευταίο αυτό μειονέκτημα του ορισμού 1 επιγραμματικά το διατυπώνουμε ως εξής: "ο ορισμός 1 δεν αποτελεί εγγύηση για μελλοντικές επενδύσεις" . Μία δυναμική κίνηση βελτίωσης αποτελεί ο ορισμός 2.

Ορισμός 2

Έστω S ένα υποσύνολο του $R^3$ και έστω ακόμη μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$ ενός ανοιχτού συνόλου U του uv επιπέδου στο S, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) η $\vec{\mathbf{x}}$ είναι κλάσης τουλάχιστον $C^1$ ($C^m$, $m \geq 1$)
ii) $\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$, για κάθε $(u,v) \in U$
iii) Η $\vec{\mathbf{x}}$ είναι 1-1 στο U (όχι κατ' ανάγκην επί) και αμφισυνεχής.

Στην περίπτωση αυτή τόσο η $\vec{\mathbf{x}}$ όσο και η εικόνα της $\vec{\mathbf{x}}(U)$ ονομάζονται *τμήμα* (επιφάνειας) του συνόλου S. Ειδικότερα ονομάζουμε τη $\vec{\mathbf{x}}$ *παραμέτρηση του τμήματος* $\vec{\mathbf{x}}(U)$ ή και του συνόλου S.

Παρατηρήσεις

α) Ο ορισμός αυτός θα μπορούσε να είναι ο ορισμός που ψάχνουμε αν δεν ήταν τόσο...τέλειος(!) ώστε να καταλήγει πολύ περιοριστικός. Για μία ακόμη φορά η περίπτωση της σφαίρας δεν καλύπτεται και οι λόγοι είναι ίδιοι με προηγουμένως: η συνθήκη ii) δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από όλα τα σημεία της.

---

(*) Για παράδειγμα μία συνάρτηση $f:S \to R$ που να μετρά την *καμπυλότητα* μιας επιφάνειας σ' ένα σημείο της ,ή γενικότερα μία συνάρτηση που να μετρά κάποιο μέγεθος πάνω στην επιφάνεια S.

(**) Όπως για παράδειγμα η ιδιότητα του να είναι μία συνάρτηση $f:S \to R$ *διαφορίσιμη* σ' ένα σημείο της επιφάνειας.

β) Ο νέος ορισμός εξαλείφει όλα τ' άλλα μειονεκτήματα του προηγούμενου. Η ιδιότητα της $\vec{\mathbf{x}}$ να είναι 1-1 εγγυάται ότι η S δεν παρουσιάζει αυτοτομές. Η ιδιότητα της αμφισυνέχειας από *τοπολογική* άποψη εγγυάται ότι το σύνολο S έχει τα ίδια *τοπολογικά* χαρακτηριστικά με το κομμάτι U του επιπέδου. Από καθαρά τεχνική άποψη εξαλείφει πλήρως το μειονέκτημα που περιγράψαμε στην παρατήρηση ζ). Αν έχουμε περιγράψει μία επιφάνεια S με δύο διαφορετικούς τρόπους $\vec{\mathbf{x}}(u,v)$, $\vec{\mathbf{x}}_1(u_1,v_1)$ , η αμφισυνέχεια μας εξασφαλίζει ότι το πέρασμα από τον ένα τρόπο στον άλλο γίνεται μ' ένα διαφορίσιμο μετασχηματισμό συντεταγμένων. Μ' έναν τέτοιο μετασχηματισμό, μαθηματικά αντικείμενα που ορίστηκαν πάνω στην S μπορούν να θεμελιώσουν τις ιδιότητές τους ανεξάρτητα από το όποιο σύστημα συντεταγμένων(5).

Ο "τελειωτικός" ορισμός είναι ο ορισμός 3. Σύμφωνα μ' αυτόν ένα υποσύνολο S του $R^3$ χαρακτηρίζεται ως *κανονική* επιφάνεια όταν, ακόμη κι αν δεν είναι τμήμα ωστόσο, μπορεί να προκύψει από "συρραφή" τμημάτων. Η ιδέα σε πιό τυπική φόρμα έχει ως εξής:

Ορισμός 3

Έστω S ένα υποσύνολο του $R^3$.Έστω επίσης ότι για κάθε σημείο P στο S υπάρχουν ένα ανοικτό σύνολο $V_p$ του $R^3$ και μία συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}: (U\subseteq R^2)\rightarrow V_p\cap S$, όπου το U είναι ανοικτό σύνολο του $R^2$, με τις εξής ιδιότητες:

i) η $\vec{\mathbf{x}}$ είναι κλάσης τουλάχιστον $C^1$ ($C^m$, $m\geq 1$)
ii) $\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$, για κάθε $(u,v) \in U$
iii) Η $\vec{\mathbf{x}}$ είναι 1-1 στο U, επί στο $V_p\cap S$ και αμφισυνεχής.

Στην περίπτωση αυτή το σύνολο S ονομάζεται *κανονική* επιφάνεια. Η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}$ ονομάζεται ένα *πλέγμα συντεταγμένων* ή ένα *τοπικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το P* ή μία *τοπική παραμετρική παράσταση* γύρω από το P.

Παρατηρήσεις

α) Ο ορισμός αυτός είναι αρκετά συνολοθεωρητικός και παρουσιάζει περισσότερους ποσοδείκτες απ' ό,τι ο ορισμός 1.Ωστόσο καλύπτει όλες τις απαιτήσεις που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου (βλέπε και την παράγραφο 3 του παραρτήματος 1).

β) Προφανώς (...) ένα τμήμα επιφάνειας είναι αυτόματα και κανονική επιφάνεια. Το αντίστροφο βέβαια δεν ισχύει. Στα επόμενα όταν θα μιλάμε για επιφάνειες θα

εννοούμε πάντα την “ιδανική τους εκδοχή” δηλ. το τμήμα επιφάνειας. Σε κάθε περίπτωση όλα όσα οριστούν μπορούν (με την απαραίτητη τεχνική...αβαρία) να επεκταθούν και σε κανονικές επιφάνειες.

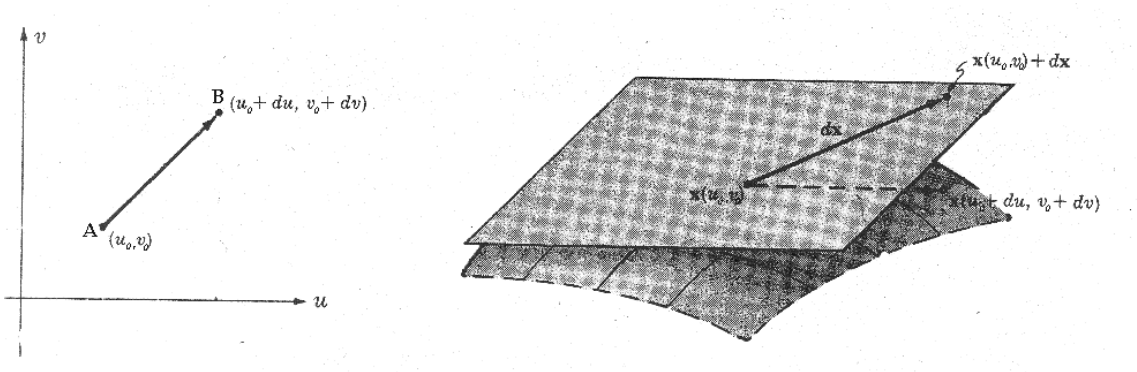
## §14. Μετρική γεωμετρία των επιφανειών(*)

Συνάρτηση Διαφορικού

Έστω S ένα τμήμα επιφάνειας με παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$, $(u,v) \in U$ όπου U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $IR^2$. Έστω ακόμη $P = \vec{\mathbf{x}}(u_o,v_o)$ ένα σημείο πάνω στην S.

Απομακρυνόμαστε από το σημείο $A=(u_0, v_0)$ αφήνοντας τη μεταβλητή v να κινηθεί ελεύθερα ενώ κρατάμε τη μεταβλητή u σταθερή και ίση με $u_0$. Προκύπτει έτσι μια ευθεία στο uv επίπεδο με εξίσωση $u=u_0$ η οποία μέσω της συνάρτησης $\vec{\mathbf{x}}(u,v)$ απεικονίζεται σε μία *παραμετρική καμπύλη* πάνω στην επιφάνεια, με εξίσωση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u_o,v)$. Προφανώς στο σημείο P το διάνυσμα $\vec{\mathbf{x}}_v$ είναι εφαπτόμενο σ' αυτήν την καμπύλη και άρα και εφαπτόμενο και στην επιφάνεια S. Παρόμοια για $v=v_0$ η παραμετρική καμπύλη $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v_o)$ ανήκει εξ ολοκλήρου στην S και το εφαπτόμενο διάνυσμά της $\vec{\mathbf{x}}_u$ στο σημείο P είναι και εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας.

Ας απομακρυνθούμε τώρα από το σημείο $A=(u_o, v_o) \in U$ με *οποιονδήποτε* τρόπο, δηλαδή ας πάμε σ' ένα άλλο σημείο $B=(u_o,v_o)+(du, dv)$ όπου τα du, dv είναι *τυχαίες τιμές*. Διανυσματικά οι μεταβολές αυτές γύρω από το $(u_o, v_o)$ περιγράφονται από τα διανύσματα $\vec{AB}=(du, dv)$ που είναι εφαρμοστά στο A (σχήμα 9).




Σχήμα 9.

---

(*) Η προσέγγισή μας σε μεγάλο βαθμό βασίζεται στο βιβλίο του M. Lipschutz «Διαφορική Γεωμετρία», Εκδ. ΕΣΠΙ, σελ. 126-129, 157-158, 171-174. Για μια πιο αφηρημένη, και συνάμα πολύ εμπνευσμένη προσέγγιση των εννοιών, βλέπε John McCleary, «Geometry from a differentiable viewpoint», Cambridge University Press.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv$ είναι επίσης διανύσματα εφαπτόμενα στην επιφάνεια και μάλιστα είναι *όλα* τα εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας στο σημείο P= $\vec{\mathbf{x}}(u_o,v_o)$ (σχήμα 9)(*).

Ορισμός

Η συνάρτηση που απεικονίζει το τυχόν (εφαρμοστό) διάνυσμα (du, dv) του uv επιπέδου στο τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv$ της επιφάνειας στο σημείο $\vec{\mathbf{x}}(u_o,v_o)$, ονομάζεται *διαφορικό* της συνάρτησης $\vec{\mathbf{x}}(u, v)$ στο σημείο $(u_0, v_o)$. Συμβολίζεται ως $d\vec{\mathbf{x}}_{(uo,vo)}$ και έχει τύπο $d\vec{\mathbf{x}}_{(uo,vo)}(du, dv) = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv$ (6)

Παρατηρήσεις

i) Στην έκφραση $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv$ οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο σημείο $(u_o, v_o)$ άρα είναι σταθερά διανύσματα. Έτσι το διαφορικό $d\vec{\mathbf{x}}$ είναι μία γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών du, dv.

ii) Με γνωστή την τιμή $\vec{\mathbf{x}}(u_o,v_o)$, γραμμική συνάρτηση 2 μεταβλητών που να προσεγγίζει τις τιμές $\vec{\mathbf{x}}((u_o,v_o)+(du, dv))$ καλύτερα απ' ότι η $=d\vec{\mathbf{x}}_{(uo,vo)}$, *δεν υπάρχει*(7).

iii) Η παράσταση $\vec{\mathbf{x}}(u_o,v_o)+ \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}}\cdot du, \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}\cdot dv$ αποτελεί λοιπόν την πιο καλή-κοντινή γραμμική προσέγγιση των τιμών $\vec{\mathbf{x}}((u_o,v_o)+(du, dv))$ γύρω από το σημείο $\vec{\mathbf{x}}(u_o,v_o)$. Η ίδια παράσταση δημιουργεί και την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο P της επιφάνειας(8).

<u>Πρώτη θεμελιώδης Τετραγωνική Μορφή</u>

Έστω πάλι το τμήμα επιφάνειας S, $\vec{\mathbf{x}}(u,v)$ ένα τυχαίο σημείο της επιφάνειας και $d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv$ ένα τυχαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αυτό. Θεωρούμε τη συνάρτηση I που η τιμή της στο τυχόν διάνυσμα (du, dv) του επιπέδου uv είναι το εξής εσωτερικό γινόμενο:

$$I(du, dv)=d\vec{\mathbf{x}}\cdot d\vec{\mathbf{x}}=\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv\right)=$$

$$=\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}}\right)du^2 + 2\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}\right)du\cdot dv + \left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}\right)dv^2 =$$

$$=E\cdot du^2+2\cdot F\cdot du\cdot dv+G\cdot dv^2$$

---

(*) Για την απόδειξη βλέπε Lipschutz, σελ. 158.

όπου θέσαμε $E = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}}$, $F = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}$, $G = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}$,

Η συνάρτηση αυτή που συμβολίζεται $I = \mathbf{d}\,\vec{\mathbf{x}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$ λέγεται *πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή* (ή 1η Θ.Τ.Μ.) του τμήματος $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ και είναι μία ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς du, dv. Οι συντελεστές E, F, G λέγονται *θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης* και είναι συναρτήσεις των u και v. Ουσιαστικά η συνάρτηση I έχει πεδίο ορισμού το uv επίπεδο. Όμως συχνά στη βιβλιογραφία η πρώτη θεμελιώδης τ.μ. I ορίζεται και ως μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το εφαπτόμενο επίπεδο, η οποία στο τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv = d\vec{\mathbf{x}}$ αντιστοιχίζει την τιμή $I\,(d\vec{\mathbf{x}}) = d\vec{\mathbf{x}}\ d\vec{\mathbf{x}} = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$.

Παρατήρηση

Στην 1η Θ.Τ.Μ. μπορούμε να φθάσουμε και μ' ένα διαφορετικό τρόπο. Ας θεωρήσουμε μία καμπύλη *πάνω* στην επιφάνεια S που να περνά από το σημείο $Q = \vec{\mathbf{x}}(u,v)$. Η καμπύλη αυτή θα έχει γενικό τύπο $\vec{\mathbf{x}}(u(t), v(t)) = \vec{\mathbf{x}}(t)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο Q της καμπύλης είναι το $d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}} \cdot dv$. Αν s=s(t) είναι ο τύπος που δίνει το μήκος τόξου της καμπύλης μεταξύ του *αρχικού* σημείου Q και τυχαίου άλλου σημείου της, τότε από τη θεωρία καμπύλων γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right| \Leftrightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow (ds)^2 = (d\vec{\mathbf{x}})^2 \Leftrightarrow (ds)^2 = d\vec{\mathbf{x}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} = I \qquad \text{ή}$$

$$ds = \left|d\vec{\mathbf{x}}\right| = \sqrt{I} = \text{στοιχειώδες μήκος τόξου πάνω σε μία επιφανειακή καμπύλη}$$

<u>Ιδιότητες</u>

α) Αν περιγράψουμε την επιφάνεια S όχι με την παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}(u,v)$ αλλά με μία νέα παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}(u_1,v_1)$, τότε το θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης E, F, G αλλάζουν. Ωστόσο η ποσότητα I παραμένει αναλλοίωτη. Αναμενόμενο αφού η I συνδέεται μ' ένα καθαρά γεωμετρικό στοιχείο όπως είναι το μήκος τόξου( για την τυπική απόδειξη βλέπε M. Lipschutz, σελ. 172).

β) $I = \left|d\vec{\mathbf{x}}\right|^2 \geq 0$ ενώ I = 0 αν και μόνο αν du=dv=0 (τουλάχιστον όσο μελετάμε πραγματικές επιφάνειες).

γ) Παρόμοια $E \geq 0$, $G \geq 0$.

δ) Όπως είδαμε και στην παρατήρηση που προηγήθηκε, η ποσότητα $\sqrt{I}$ μας δίνει το στοιχειώδες μήκος ds πάνω σε μία επιφανειακή καμπύλη $\vec{\mathbf{x}}$ (u(t), v(t)). Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος τόξου ανάμεσα σε δύο τυχαία σημεία της καμπύλης τότε από την

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right| \Rightarrow S = \int_{t=a}^{t=b} \left|\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right| \cdot dt, \quad (a \leq b) \Rightarrow$$

$$S = \int_a^b \left(\frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt}\right)^{1/2} \cdot dt \overset{\cdots}{\Rightarrow}$$

$$S = \int_a^b \left[E \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \cdot F \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

ε) Αν στο σημείο Q= $\vec{\mathbf{x}}$ (u,v) πάρουμε δύο τυχαία εφαπτόμενα διανύσματα, τότε αυτά θα έχουν τη μορφή $d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}\, dv$, $\delta\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}}\, \delta u + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}\, \delta v$ και θα αντιστοιχούν σε δύο κανονικές καμπύλες της επιφάνειας. Η γωνία αυτών των δύο καμπύλων στο σημείο Q δίνεται από τον τύπο

$$\cos a \underset{\substack{\text{εσωτερικού}\\ \text{γινομένου}}}{\overset{\text{από ορισμό}}{=}} \frac{d\vec{\mathbf{x}} \cdot \delta\vec{\mathbf{x}}}{\left|d\vec{\mathbf{x}}\right| \cdot \left|\delta\vec{\mathbf{x}}\right|} \overset{ds=\left|d\vec{\mathbf{x}}\right|=\sqrt{I}}{=} \frac{d\vec{\mathbf{x}} \cdot \delta\vec{\mathbf{x}}}{ds \cdot \delta s} =$$

$$= \frac{E \cdot du \cdot \delta u + F \cdot (du \cdot \delta v + dv \cdot \delta u) + G \cdot dv \cdot \delta v}{\sqrt{E \cdot du^2 + 2F du \cdot dv + G \cdot dv^2} \cdot \sqrt{E \cdot \delta u^2 + 2F \delta u \cdot \delta v + G \cdot \delta v^2}}$$

## §15. Απεικονίσεις επιφανειών και Χαρτογραφικές Προβολές

Ορισμοί

Δύο επιφάνειες(*) S και $S_1$ θα λέμε ότι έχουν απεικονιστεί η μία πάνω στην άλλη αν υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των σημείων τους. Την αντιστοιχία αυτή την ονομάζουμε *απεικόνιση* των δύο επιφανειών και μπορούμε να τη συμβολίζουμε με το γράμμα $\vec{\mathbf{f}}$. Το ερώτημα βέβαια που τίθεται είναι τι ιδιότητες είναι απαραίτητο να έχει αυτή η συνάρτηση $\vec{\mathbf{f}}$. Η απάντηση έρχεται εύκολα αν θεωρήσουμε ότι το τμήμα επιφάνειας S έχει παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$ (u, v), (u, v) $\in U \subseteq IR^2$, ενώ το τμήμα επιφάνειας $S_1$ έχει παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_1$ $(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1)$ $\in U_1 \subseteq IR^2$. Τότε μια απεικόνιση ανάμεσα στα δύο τμήματα $S = \vec{\mathbf{x}}(U)$ και $S_1 = \vec{\mathbf{x}}_1(U_1)$ μπορεί ισοδύναμα να οριστεί και με τις συναρτήσεις $\left.\begin{array}{l} u_1 = u_1(u, v) \\ v_1 = v_1(u, v) \end{array}\right\} u, v \in U$ (**) ①. Φυσικά μέσω της $\vec{\mathbf{f}}$ θέλουμε να περνάμε από τη μία παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}$ (της S), στην άλλη παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}_1$ (της $S_1$) χωρίς όμως να καταστρέφονται οι βασικές ιδιότητες των δύο παραμετρήσεων(***). Μέσα από τις νέες σχέσεις ορισμού ① είναι φανερό ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν οι συναρτήσεις $u_1$, $v_1$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τέτοιες ώστε $\dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \neq 0.$ ②

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις ① όχι για να ορίσουμε την απεικόνιση των δύο επιφανειών αλλά για να μετασχηματίσουμε τις $(u_1, v_1)$ συντεταγμένες της επιφάνειας $S_1$ σε (u, v) συντεταγμένες της ίδιας επιφάνειας (!), τότε παίρνουμε μία νέα παραμέτρηση της $S_1$ στη μορφή $\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_1$ (u, v). Προφανώς ( λόγω της προϋπόθεσης ②) η $\vec{\mathbf{x}}_1$ έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες του «τμήματος». Δύο σημεία των S και $S_1$ τα οποία μέσω της $\vec{\mathbf{f}}$ απεικονίζονται το ένα πάνω στο άλλο, υποδεικνύονται τώρα από τις

---

(*) Στην πραγματικότητα αυτό που εννοούμε εδώ είναι τμήματα επιφανειών. Βέβαια οι ορισμοί που δίνουμε μπορούν να επεκταθούν κατάλληλα και για μία κανονική επιφάνεια.

(**) Υπενθυμίζουμε ότι εξ ορισμού του τμήματος, οι συναρτήσεις $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}_1$ είναι 1-1. Προφανώς είναι και επί στα σύνολα τιμών τους. Άρα η απεικόνιση (u, v) είναι και αυτή 1-1 και επί.

(***) Αυτές που αναφέρονται στον ορισμό 2 της §13. Ειδικά για την ιδιότητα ii) είναι πολύ διαφωτιστική η ισοδύναμή της διατύπωση που αναφέρεται στην παρατήρηση δ) της ίδιας παραγράφου.

ίδιες (u, v) συντεταγμένες τους $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$ (u, v), $\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_1$ (u, v). Φθάσαμε έτσι σε μια προσέγγιση αρκετά πιο ευέλικτη από την αρχική. Σύμφωνα μ' αυτήν :

Δύο τμήματα S, $S_1$ θα λέμε ότι απεικονίζονται το ένα πάνω στο άλλο, όταν μπορούν να βρεθούν παραμετρήσεις τους που να έχουν αντίστοιχα μορφή $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$ (u, v), $\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_1$ (u, v) με (u, v) $\in$ U (③), U = ανοικτό υποσύνολο του $IR^2$ και S = $\vec{\mathbf{x}}$ (U), $S_1$ = $\vec{\mathbf{x}}_1$ (U).

Ένα…«παράδειγμα»

Αν ζητήσουμε τώρα ένα παράδειγμα όλων των προηγούμενων θα το βρούμε… «κάτω από τη μύτη μας». Για του λόγου το αληθές, έστω η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_1$ (λ, φ)=(cosλ·cosφ, sinλ·cosφ, sinφ) με (λ, φ) $\in$ $(-\pi,\pi)\,x\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Έστω επίσης τα σύνολα V=$(-\pi,\pi)\,x\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (ανοικτό υποσύνολο του $IR^2$) και $S_1$=όλα τα σημεία της μοναδιαίας σφαίρας εκτός των 2 πόλων… (επίσης ανοικτό υποσύνολο αλλά του $IR^3$).

Η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1$, όπως έχουμε ήδη πει,(*) είναι ένα τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας. Την ίδια στιγμή όμως η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1$ υποδεικνύει και μία απεικόνιση της επιφάνειας (!) S=V$\subseteq$ $IR^3$ στην επιφάνεια $S_1$ ως εξής: Το ορθογώνιο S μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}$ (λ, φ) = (λ, φ, 0) ενώ η επιφάνεια $S_1$ μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}_1$ (λ, φ)(8).

Μερικές κρίσιμες επισημάνσεις

1) Η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1$ (λ, φ) που περιγράφει τη σφαίρα δεν αποτελεί χαρτογραφική προβολή κι αυτό γιατί είναι μία συνάρτηση *από το* επίπεδο *στη* σφαίρα. Μία πραγματική χαρτογραφική προβολή λειτουργεί αντίστροφα «ξεδιπλώνοντας» *την* σφαίρα *στο* επίπεδο. Είναι δηλ. μία απεικόνιση από τη σφαίρα στο επίπεδο. Βεβαίως ως μία τέτοια συνάρτηση στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Y= $x_1^{-1}$(9) (!)

---

(*) Παράρτημα 1, σελ. Εκεί η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1$ συμβολίζεται με $\vec{\mathbf{x}}$.

2) Γενικά αν V είναι ένα τμήμα της σφαίρας $S^2$, ως χαρτογραφική προβολή του V ορίζεται μια απεικόνιση Y: $(V \subseteq S^2) \rightarrow IR^2 \subseteq IR^3$.

3) Στην πράξη, οι περισσότερες χαρτογραφικές προβολές που μπορούν να οριστούν «τυφλά» μέσα απ' αυτόν τον ορισμό, αποδεικνύονται άχρηστες. Μία χαρτογραφική προβολή για να έχει ενδιαφέρον για κάποιο χαρτογράφο θα πρέπει να επιτελεί κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Όπως διαβάζουμε και στα «Μαθήματα Γεωγραφίας» του Ελευθέριου Βαβλιάκη: *«Οι χάρτες χαρακτηρίζονται από τις παρακάτω ιδιότητες: ……. γ) Οι χάρτες χρησιμοποιούνται για κάποιο σκοπό. Η προβολή και το σχήμα του χάρτη είναι τέτοια, ώστε να εκπληρούν το σκοπό για τον οποίο κατασκευάστηκε»* (Βαβλιάκης 1985, σελ. 41)[(10)]. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα αν και η συνάρτηση $Y = x_1^{-1}$ θα μπορούσε να ληφθεί ως χαρτογραφική προβολή, ωστόσο στην πράξη οι σημερινοί χαρτογράφοι την προσπερνούν αδιάφορα ενώ αντίθετα δείχνουν πολύ μεγάλη προτίμηση στην ίδια τη συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1(\lambda, \varphi)$ μιας και είναι ο "αγαπημένος" τους τρόπος για να αποδίδουν τη σφαίρα (Βλέπε και Παράρτημα 1).

Απ' όσα έχουν προηγηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια είναι πλέον φανερό ότι μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα που επιβάλλεται να έχει ένας ναυτικός χάρτης είναι, κατά τη μεταφορά των σημείων από την υδρόγειο στο επίπεδο, να διατηρεί τα γωνιακά ανοίγματα. Τις ειδικές αυτές απεικονίσεις μελετάμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

## §16. Σύμμορφες απεικονίσεις: Ορισμός και ισοδύναμες διατυπώσεις

Μια απεικόνιση $\vec{\mathbf{f}}$ επιφάνειας S σε επιφάνεια $S_1$[(*)] ονομάζεται *σύμμορφη* αν η (κυρτή) γωνία δύο οποιονδήποτε προσανατολισμένων καμπύλων της S που τέμνονται σε σημείο P[(11)], είναι ίση με τη γωνία μεταξύ των αντίστοιχων προσανατολισμένων καμπύλων της $S_1$[(12)] που τέμνονται στο $P_1=\vec{\mathbf{f}}(P)$.[(13)]

Θα δώσουμε μερικές *ισοδύναμες διατυπώσεις* αυτού του ορισμού. Προς τούτο ας γράψουμε (σύμφωνα με τις σχέσεις ③ της §15) τις δύο επιφάνειες S, $S_1$ στη μορφή $\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{x}}(u, v)$ και $\vec{\mathbf{x}}_1=\vec{\mathbf{x}}_1(u, v)$ αντίστοιχα. Επίσης ας υιοθετήσουμε τη σύμβαση στοιχεία της επιφάνειας $S_1$ που είναι αντίστοιχα με στοιχεία της επιφάνειας S, να δηλώνονται με το δείκτη «1».

Έστω τώρα $d\vec{\mathbf{x}}, \delta\vec{\mathbf{x}}$ δύο εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο P της S που αντιστοιχούν σε δύο διαφορίσιμες καμπύλες της επιφάνειας που περνούν από το P[(14)]. Έστω ακόμη $\theta=\left(d\vec{\mathbf{x}}\,\hat{,}\,\delta\vec{\mathbf{x}}\right)$ η κυρτή γωνία τους. Τα αντίστοιχα στοιχεία στην $S_1$ θα είναι τα $d_1\vec{\mathbf{x}}, \delta_1\vec{\mathbf{x}}$ και $\theta_1=\left(d_1\vec{\mathbf{x}}\,\hat{,}\,\delta_1\vec{\mathbf{x}}\right)$. Αν τώρα για διευκόλυνση των πράξεων που θα ακολουθήσουν (!) επιλέξουμε το $\delta\vec{\mathbf{x}}$ να παριστά εφαπτόμενο διάνυσμα σε παραμετρική καμπύλη v=σταθερός αριθμός (άρα δv=0), τότε η συνθήκη του ορισμού μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\vec{\mathbf{f}}:S_1\to S_2 \text{ είναι σύμμορφη} \overset{\text{ορσ.}}{\Leftrightarrow} \theta=\theta_1 \overset{\theta,\theta_1=\text{κυρτές}}{\Longleftrightarrow} \cos\theta=\cos\theta_1 \underset{\text{προηγ. παραγρ.}}{\overset{\text{τύπος}}{\Longleftrightarrow}} \frac{d\vec{\mathbf{x}}\cdot\delta\vec{\mathbf{x}}}{|d\vec{\mathbf{x}}|\cdot|\delta\vec{\mathbf{x}}|}=\frac{d_1\vec{\mathbf{x}}\cdot\delta_1\vec{\mathbf{x}}}{|d_1\vec{\mathbf{x}}|\cdot|\delta_1\vec{\mathbf{x}}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E\cdot du\cdot\delta u+F\cdot(du\cdot\delta u+dv\cdot\delta u)+G dv\cdot\delta v}{\sqrt{E\cdot du^2+2\cdot F\cdot du\cdot dv+G\cdot dv^2}\cdot\sqrt{E\cdot\delta u^2+2\cdot F\cdot\delta u\cdot\delta v+G\cdot\delta v^2}}=$$

$$=\frac{E_1\cdot du\cdot\delta u+F_1\cdot(du\cdot\delta v+dv\cdot\delta u)+G_1\cdot dv\cdot\delta v}{\sqrt{E_1\cdot du^2+2\cdot F_1\cdot du\cdot dv+G_1\cdot dv^2}\cdot\sqrt{E_1\cdot\delta u^2+2\cdot F_1\cdot\delta u\cdot\delta v+G_1\cdot\delta v^2}} \underset{v=\text{σταθ.},\,\delta v=0}{\overset{\text{για την επιλογή της καμπύλης}}{\Longleftrightarrow}}$$

---

(*) Χρησιμοποιούμε αυτή την έκφραση παρ' όλο που εννοούμε την απεικόνιση ενός συγκεκριμένου *τμήματος* S πάνω σε ένα *τμήμα* $S_1$.

$$\Leftrightarrow \frac{E\cdot du\cdot \delta u + F\cdot dv\cdot \delta u}{ds\cdot\sqrt{E\cdot \delta u^2}} = \frac{E_1\cdot du\cdot \delta u + F_1\cdot dv\cdot \delta u}{ds_1\cdot\sqrt{E_1\cdot \delta u^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{E}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{F}{\sqrt{E}}\cdot\frac{dv}{ds} = \sqrt{E_1}\cdot\frac{du}{ds_1} + \frac{F_1}{\sqrt{E_1}}\cdot\frac{dv}{ds_1} \qquad ①$$

Παρατηρούμε ότι οι όποιες αναφορές στην καμπύλη v=σταθερό εξαφανίστηκαν (!)

- Αν τώρα η απεικόνιση $\vec{\mathbf{f}}$ είναι σύμμορφη, η τελευταία σχέση ισχύει *για κάθε* καμπύλη που περνά από το P ή αλλιώς *για κάθε* διεύθυνση $\frac{du}{dv}$ [15]. Άρα στην ισότητα ① οι αντίστοιχοι "συντελεστές" των δύο παραστάσεων θα είναι ίσοι. Έτσι,

$$\sqrt{E}\cdot\frac{du}{ds} = \sqrt{E_1}\cdot\frac{du}{ds_1} \quad \text{και} \quad \frac{F}{\sqrt{E}}\cdot\frac{dv}{ds} = \frac{F_1}{\sqrt{E_1}}\cdot\frac{dv}{ds_1}$$

οπότε $\frac{\sqrt{E_1}}{E} = \frac{ds_1}{ds} = \frac{F_1}{F}\cdot\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_1}}$ ②

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο λόγος $\frac{ds_1}{ds}$ δεν εξαρτάται από τα du, dv αλλά μόνο από τα (u, v), δηλ. μόνο από το σημείο στο οποίο υπολογίζεται και όχι από το πώς θα κινηθώ γύρω απ' αυτό. Άρα

$$① \Leftrightarrow \frac{ds_1}{ds} = \rho(u,v) > 0 \Leftrightarrow \boxed{ds_1=\rho(u, v)\cdot ds,\ \rho>0} \qquad ③$$

$$\Leftrightarrow ds_1^2 = \rho^2(u,v)\cdot ds^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad I_1^2 = \rho^2(u,v)\cdot ds^2$$

$$\Leftrightarrow E_1\cdot du^2+2F_1\cdot du\cdot dv+G_1\cdot dv^2=\rho^2\cdot E\cdot du^2+2\cdot\rho\cdot F\cdot du\cdot dv+\rho^2\cdot G\cdot dv^2 \qquad \text{για } \underline{\text{όλα}} \text{ τα du, dv}$$

$$\overset{\text{οι αντίστοιχοι συντελεστές}}{\underset{\text{ίσοι}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{E_1=\rho^2(u, v)\cdot E \quad \text{και} \quad F_1=\rho^2\cdot(u, v)\cdot F \quad \text{και} \quad G_1=\rho^2(u, v)\cdot G} \qquad ④$$

- Αντίστροφα, αν στο τυχόν (u, v) ισχύει $ds_1=\rho(u, v)\cdot ds$ $(\rho>0)$ για <u>όλα</u> τα (du, dv), τότε ισχύουν αναγκαστικά οι ④[*]

---

[*] Απλώς επαναλαμβάνουμε όλα τα βήματα που συνδέουν την εξίσωση ③με τις εξισώσεις ④.

Οπότε

$$\cos\theta_1 = \frac{E_1 du \cdot \delta u + F_1 \cdot (du \cdot \delta v + dv \cdot \delta u) + G_1 \cdot dv \cdot \delta v}{ds_1 \cdot \delta s_1} =$$

$$\frac{\rho^2 \cdot [Edu \cdot \delta u + F \cdot (du \cdot \delta v + dv \cdot \delta u) + Gdv \cdot \delta v]}{\rho \cdot ds \cdot \rho \cdot \delta s} = \cos\theta \Rightarrow$$ η απεικόνιση $\vec{\mathbf{f}}$ είναι σύμμορφη. Φθάσαμε τελικά στις εξής δύο ισοδύναμες διατυπώσεις του ορισμού:

*1η Ισοδύναμη Διατύπωση*: Μία απεικόνιση $\vec{\mathbf{f}}$ επιφανείας S σε μία άλλη επιφάνεια $S_1$ είναι σύμμορφη αν και μόνο αν το μήκος τόξου ds υπολογισμένο "γύρω από" ένα τυχαίο σημείο P της S και το μήκος του τόξου $ds_1$ υπολογισμένο "γύρω από" το αντίστοιχο σημείο $P_1=\vec{\mathbf{f}}(P)$ της $S_1$, έχουν σταθερό λόγο, δηλαδή ανεξάρτητο απ' τις μεταβολές du, dv (και εξαρτώμενο μόνο από τις συντεταγμένες u,v).

*2η Ισοδύναμη Διατύπωση*: Η απεικόνιση $\vec{\mathbf{f}}: S_1 \to S_2$ είναι σύμμορφη αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\rho=\rho(u, v)>0$ τέτοια ώστε για κάθε (u, v) να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες $E_1=\rho^2(u, v)\cdot E$, $F_1=\rho^2(u, v)\cdot F$, $G_1=\rho^2(u, v)\cdot G$(**)
όπου E, F, G, $E_1$, $F_1$, $G_1$ είναι αντίστοιχα τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης των τμημάτων S και $S_1$.

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε την ιδιότητα που αναφέρεται στην 1η ισοδύναμη διατύπωση, λέγοντας ότι ένα μικρό σχήμα (για παράδειγμα ένα τρίγωνο) "σ' ένα" σημείο P της επιφάνειας S, είναι *σχεδόν*(16) όμοιο με το αντίστοιχο σχήμα του(***) στην επιφάνεια $S_1$. Όσο πιο μικρά τα σχήματα, τόσο πιο μεγάλη η ομοιότητα. Έτσι φθάνουμε στην

*3η Ισοδύναμη Διατύπωση*: Μία απεικόνιση μεταξύ δύο επιφανειών είναι σύμμορφη αν και μόνο αν διατηρεί την ομοιότητα σε *απειροστή* κλίμακα.

Μ' αυτήν τη διατύπωση ξανασυναντάμε τη ρήση του Gauss που είδαμε νωρίτερα στην επικεφαλίδα αυτού του τρίτου μέρους ( καθώς και την εν σμικρώ προσέγγιση της σφαιρικής γεωμετρίας από την επίπεδη ευκλείδια που ακολουθούσαν οι μαθηματικοί και οι χαρτογράφοι μέχρι το 17ο αι.). . Πάντως, ένας σύμμορφος χάρτης που

---

(**) Υπενθυμίζουμε ότι τα θεμελιώδη ποσά α΄ τάξης μιας επιφάνειας $\vec{\mathbf{x}}(u, v)$ είναι συναρτήσεις των παραμέτρων (u, v) δηλ. E=E(u, v), F=F (u, v), κ.ο.κ.
(***) Αυτό το σχήμα θα είναι πάλι τρίγωνο.Βλέπε σχετικά τη σημείωση (13 ).

απεικονίζει στο επίπεδο μια μικρή περιοχή κάποιας επιφάνειας γύρω από ένα σημείο της, είναι σχεδόν ακριβής όσο αναφορά στις γωνίες και στους λόγους των αποστάσεων. Παρ' όλα αυτά ο ίδιος χάρτης μπορεί να δώσει μία αρκετά παραμορφωμένη εικόνα της περιοχής αν απομακρυνθούμε πολύ από το συγκεκριμένο σημείο(*).

Εξειδικεύοντας τώρα την $2^{η}$ διατύπωση στην περίπτωση της (μοναδιαίας) σφαίρας και της απεικόνισής της στο επίπεδο, έχουμε:

$\vec{\mathbf{x}} : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to S^2$ με

$\vec{\mathbf{x}}(\lambda, \varphi) = (\cos\lambda\cdot\cos\cdot\varphi, \quad \sin\lambda\cdot\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\vec{\mathbf{x}}_{\lambda} = (-\sin\lambda\cdot\cos\varphi, \cos\lambda\cdot\cos\varphi, 0)$

$\vec{\mathbf{x}}_{\varphi} = (-\cos\lambda\cdot\sin\varphi, -\sin\lambda\cdot\mathrm{cin}\varphi, \cos\varphi)$

$E = \vec{\mathbf{x}}_{\lambda}\cdot\vec{\mathbf{x}}_{\lambda} = \cos^2\varphi$

$F = \vec{\mathbf{x}}_{\lambda}\cdot\vec{\mathbf{x}}_{\varphi} = 0$ (μεσημβρινοί και παράλληλοι συναντιούνται κάθετα)

$G = \vec{\mathbf{x}}_{\varphi}\cdot\vec{\mathbf{x}}_{\varphi} = 1$

Επίσης $I = ds^2 = (\cos^2\varphi)d\lambda^2 + d\varphi^2$

Στην περίπτωσή μας $S_1 = S^2$ και $S_2 \subseteq R^2$ όπου το $IR^2$ όμως το βλέπουμε σαν επιφάνεια στο χώρο $IR^3$(δηλ. $IR^2 \subseteq IR^3$).

Άρα αν V είναι ένα τμήμα της σφαίρας, μία χαρτογραφική προβολή

$Y: (V \subseteq S_1) \to S_2 \subseteq IR^2 \subseteq IR^3$ είναι σύμμορφη αν και μόνο αν $\exists\ \rho(\lambda, \varphi) > 0$ τ.ω.

$E_1 = \rho^2.E$ και $F_1 = \rho^2\cdot F$ και $G_1 = \rho^2\cdot G^2$ ή

$E_1 = \rho^2\cdot(\lambda,\varphi)\cdot\cos^2\varphi$, $F_1 = 0$, $G_1 = \rho^2\cdot(\lambda\cdot\varphi)$. ⑤

Οι τελευταίες αυτές σχέσεις θα μας φανούν πολύ χρήσιμες όταν μιλήσουμε για την μερκατορική προβολή.

---

(*) Όπως συμβαίνει για παράδειγμα με το σφαιρικό τρίγωνο της εικόνας 13.

## §17. Μία αλγεβρική εξίσωση για τις λοξοδρομικές καμπύλες

Σ' αυτή την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον το «οπλοστάσιο» του απειροστικού λογισμού για να δώσουμε μία αλγεβρική εξίσωση για τις λοξόδρομες καμπύλες σε λ, φ συντεταγμένες. Σε όλα τα επόμενα η παραμέτρηση της σφαίρας που έχουμε στο νου μας είναι η… συνήθης παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\lambda, \varphi)$ όπου λ το γεωγραφικό μήκος και φ το γεωγραφικό πλάτος (βλέπε και παράρτημα 1). Ξεκινάμε παραθέτοντας τον τυπικό ορισμό αυτών των καμπύλων.

Ορισμός

Μία καμπύλη της σφαίρας $S^2$ ονομάζεται λοξόδρομος καμπύλη(*) αν τέμνει όλους τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία α.

Έστω τώρα μία λοξόδρομη καμπύλη που συναντάει ένα μεσημβρινό στο σημείο P. Έστω ακόμη $\delta\vec{\mathbf{x}}$, $d\vec{\mathbf{x}}$ τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα στο P που αντιστοιχούν στη λοξοδρομική καμπύλη και στο μεσημβρινό. Επειδή ο μεσημβρινός χαρακτηρίζεται από την εξίσωση λ = σταθερός αριθμός, κατά μήκος του dλ = 0. Έτσι αν $\alpha = \widehat{(\delta\vec{\mathbf{x}}, d\vec{\mathbf{x}})}$, ο προηγούμενος ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha = \widehat{(\delta\vec{\mathbf{x}}, d\vec{\mathbf{x}})} = \text{σταθερή για όλους τους μεσημβρινούς} \Leftrightarrow \cos\alpha = \text{σταθερός αριθμός}$$

$$\overset{\text{παραγρ.}}{\underset{\text{σελ.}}{\Leftrightarrow}} \frac{d\vec{\mathbf{x}} \cdot \delta\vec{\mathbf{x}}}{|d\vec{\mathbf{x}}| \cdot |\delta\vec{\mathbf{x}}|} = \text{σταθερός αριθμός} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{E \cdot d\lambda \cdot \delta\lambda + F(d\lambda \cdot \delta\varphi + d\varphi \cdot \delta\lambda) + G d\varphi \cdot \delta\varphi}{\sqrt{E \cdot d\lambda^2 + 2 \cdot F d\lambda \cdot d\varphi + G d\varphi^2} \cdot \sqrt{E \cdot \delta\lambda^2 + 2 \cdot F \delta\lambda \cdot \delta\varphi + G \delta\varphi^2}} = \text{σταθ.} \overset{d\lambda=0,}{\underset{F=0\ \text{στη σφαίρα}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G \cdot d\varphi \cdot \delta\varphi}{\sqrt{G \cdot d\varphi^2} \cdot \delta s} = \cos\alpha \quad (\alpha = \text{σταθερή}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{G} \cdot \frac{\delta\varphi}{\delta s} = \cos\alpha$$

Παρατηρήστε ότι οι όποιες αναφορές στο μεσημβρινό εξαφανίστηκαν! Έτσι απ' εδώ και κάτω μπορούμε να υιοθετήσουμε το συνηθισμένο σύμβολο d αντί του δ, αναφερόμενοι βέβαια στη λοξόδρομη καμπύλη.

---

(*) Ή λοξοδρομική καμπύλη ή λοξοδρομία.

$$\Leftrightarrow \sqrt{G}\cdot\frac{d\varphi}{ds}=\cos\alpha \underset{\substack{\text{μοναδιαία}\\ \text{σφαίρα}\\ \vec{\mathbf{x}}\,(\lambda,\,\varphi)}}{\overset{G=1\ \text{στη}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{ds}=\cos\alpha \quad \Leftrightarrow ds\cos\alpha=d\varphi \underset{\text{τετρ. μορφής}}{\overset{\substack{\text{ορσ 1ης}\\ \text{θεμελ.}}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{I}\cdot\cos\alpha=d\varphi \underset{\text{ποσότητες}}{\overset{\text{θετικές}}{\Leftrightarrow}} I\cdot\cos^2\varphi=d\varphi^2 \underset{I=(\cos^2\cdot\varphi)\cdot d\lambda+d\varphi^2}{\overset{\substack{\text{Στην μον. σφαίρα}\\ \vec{\mathbf{x}}\,(\lambda,\,\varphi),}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2\varphi\cdot d\lambda^2+d\varphi^2)\cdot\cos^2\alpha=d\varphi^2 \underset{\substack{\text{πράξεις}\\ \text{για χωρισμό}\\ \text{μεταβλητών}}}{\overset{\text{κάνουμε}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos^2\alpha)\cdot d\varphi^2=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\varphi\cdot d\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$|\sin\alpha|\ d\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\varphi\cdot d\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\, d\varphi=\pm\cos\alpha\cdot\cos\varphi\cdot d\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\pm\cot\alpha\, d\lambda \overset{\text{ολοκληρώνουμε}}{\Leftrightarrow} \qquad ①$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi=\pm\cot\alpha\cdot\int d\lambda \quad \Leftrightarrow \qquad \left(\text{το…. διάσημο ολοκλήρωμα } \int\sec\varphi d\varphi\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pm\ \cot\alpha\cdot(\lambda+c),\quad c=\text{σταθερά ολοκλήρωσης} \qquad ②$$

Παρατηρήσεις

1) Στην τελική αυτή εξίσωση, το διπλό πρόσημο ± δηλώνει ότι οι λοξοδρομικές καμπύλες μπορούν να τυλίγονται γύρω από τη σφαίρα είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα.

2) Η εξίσωση παραμένει απαράλλαχτη και για σφαίρα ακτίνας $R\neq1$.

3).Ο τύπος ① αν λυθεί ως προς λ παίρνει την πολύ πρακτική μορφή

$$\lambda=M\cdot\log\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+N \text{ για κάποιες σταθερές M, N.} \qquad ③$$

Στην αμέσως επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μορφή της εξίσωσης.

## §18. Η μερκατορική προβολή είναι μία σύμμορφη απεικόνιση

*Στο Σωτήρη Ντελή…*

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε ως θεώρημα (!) το σύμμορφο χαρακτήρα της μερκατορικής προβολής. Ξεκινάμε συνοψίζοντας (με μία *εκ των υστέρων σοφία*) το πρόβλημα που έλυσε ο Mercator:

Να βρεθεί μία χαρτογραφική προβολή $Y:S^2 \to IR^2 \subseteq IR^3$ τέτοια ώστε,

1ον) μεσημβρινοί και παράλληλοι να απεικονίζονται σε ορθογώνιες γραμμές(*) .

2ον) οι λοξοδρομικές καμπύλες να απεικονίζονται σε ευθύγραμμα τμήματα και

3ον) τα γωνιακά ανοίγματα να διατηρούνται αναλλοίωτα κατά τη μεταφορά τους απ' τη σφαίρα στο επίπεδο.

Για να κατασκευάσουμε μία τέτοια προβολή στέλνουμε κατ' αρχήν τους μεσημβρινούς "στους εαυτούς τους", πράγμα που σημαίνει ότι η σύνθεση

$Y o \vec{\mathbf{x}} : (-\pi, \pi) x \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to S^2 \to IR^2 \subseteq IR^3$ ικανοποιεί την $\left(Y o \vec{\mathbf{x}}\right)$ $(\lambda, \varphi)=(\lambda, \upsilon(\lambda, \varphi), 0)$

Η επιπλέον συνθήκη $\upsilon(\lambda, \varphi)=\upsilon(\varphi)$ εγγυάται πλήρως την ισχύ της πρώτης ιδιότητας(17). Απομένει να βρούμε έναν κατάλληλο τύπο για την $\upsilon(\varphi)$(**). Φυσικά ο κατάλληλος τύπος θα προκύψει από την απαίτησή μας να ικανοποιούνται οι ιδιότητες 2) και 3). Μέσα από την απεικόνιση Y η λοξοδρομική καμπύλη $(\lambda(\varphi), \varphi)$(***) απεικονίζεται στην επίπεδη γραμμή $(\lambda(\varphi), \upsilon(\varphi), 0)$. Η ιδιότητα 2) μας επιβάλλει η γραμμή αυτή να είναι ευθεία δηλ. να έχει τη μορφή

$A \cdot \lambda(\varphi)+B \cdot \upsilon(\varphi)+C=0$ για κάποιες σταθερές A, B, C.

Για την επιλογή B=0 η εξίσωση αυτή γίνεται λ=σταθερός αριθμός, δηλ. παίρνουμε τις εικόνες των μεσημβρινών που αποτελούν και τετριμμένη περίπτωση λοξοδρομικών καμπύλων. Για $B \neq 0$ η εξίσωση γίνεται.

---

(*) ώστε η η κατεύθυνση Νότος-Βορράς να υποδεικνύεται στο χάρτη από την κατακόρυφη ( 'προς τα πάνω') διεύθυνση, κάτι που είναι βολικό στους ναυτικούς.

(**) Η διατύπωση σκόπιμα αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο το πρβ. να επιδέχεται παραπάνω από μία λύσεις.

(***) Υπενθυμίζουμε ότι από την παρατήρηση 3 της προηγούμενης παραγράφου έχουμε $\lambda=\lambda(\varphi)=M.\log\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+N$.

$A\cdot\lambda(\varphi)+B\cdot\upsilon(\varphi)+C=0 \Rightarrow$

$(A\cdot\lambda(\varphi)+B\upsilon(\varphi)+C)'=(0)' \Leftrightarrow$

$A\cdot\lambda'(\varphi)+B\cdot\upsilon'(\varphi)=0 \Leftrightarrow$

$\upsilon'(\varphi)=-\frac{A}{B}\cdot\lambda'(\varphi)$

Όμως[18] $\lambda'(\varphi) = -\frac{M}{\cos\varphi}$

Άρα $\upsilon'(\varphi) = -\frac{A}{B}\cdot\left(-\frac{M}{\cos\varphi}\right)$ ή

$\upsilon'(\varphi)= \frac{b}{\cos\varphi}$, b= σταθερός αριθμός

Αν τώρα ελέγξουμε προσεκτικά την… καταγωγή του σταθερού αριθμού b ξεκινώντας από την εξίσωση ② της προηγούμενης παραγράφου, θα διαπιστώσουμε ότι τελικά η σταθερά b κληρονομεί την ελευθερία επιλογής που είχε η σταθερά c σε εκείνη την εξίσωση. Έτσι λοιπόν τον αριθμό b τον επιλέγουμε εμείς κατά βούληση. Ωστόσο, το επόμενο θεώρημα οδηγεί σε μία «ευτυχή» απλοποίηση.

*<u>Θεώρημα:</u>* Μία χαρτογραφική προβολή $(Yo\vec{\mathbf{x}})$ $(\lambda, \varphi) = (\lambda, \upsilon(\varphi)\ 0)$, με

$\frac{d\upsilon}{d\varphi} = \frac{b}{\cos\varphi}$, είναι σύμμορφη αν και μόνο αν $b=\pm1$!

*<u>Απόδειξη:</u>* Έχοντας κατά νου τις σχέσεις ⑤ της παραγράφου 16, υπολογίζουμε τα θεμελιώδη ποσά $E_1$, $F_1$, $G_1$.

Προς τούτο, $(Yo\vec{\mathbf{x}})_\lambda=(1, 0, 0)$

Και $(Yo\vec{\mathbf{x}})_\varphi=\left(0, \frac{d\upsilon}{d\varphi}, 0\right)$.

Άρα $E_1=1$, $F_1=0$, $G_1=\left(\frac{d\upsilon}{d\varphi}\right)^2$.

Επομένως η $Y\circ\vec{\mathbf{x}}$ είναι σύμμορφη αν και μόνο αν

$\exists\ \rho=\rho(\lambda, \varphi)$ τ·ω.

$$\left.\begin{array}{l} 1=\rho^2(\lambda, \varphi)\cdot\cos\varphi \\ \left(\frac{d\upsilon}{d\varphi}\right)^2=\rho^2(\lambda,\varphi) \end{array}\right\}\Leftrightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} \rho^2(\lambda, \varphi)=\frac{1}{\cos^2\phi} \\ \left(\frac{d\upsilon}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\phi} \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho(\lambda, \varphi)=\frac{\pm 1}{\cos\varphi}=\frac{d\upsilon}{d\varphi}$. Επειδή όμως θέλουμε $\rho(\lambda, \varphi)>0$ – και αφού $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ - τελικά $b=1$.

Επιβάλλοντας τώρα την *αναγκαστική*(*) συνθήκη $\upsilon(0)=0$ (δηλ. ο ισημερινός να απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα του χάρτη), παίρνουμε:

$$\upsilon'(\varphi)=\frac{1}{\cos^2\varphi} \Leftrightarrow \upsilon(\varphi)=\int\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi$$

(για μια ακόμη φορά το διάσημο ολοκλήρωμα $\int\sec\varphi d\varphi$ )

$$\Leftrightarrow \upsilon(\varphi)=\ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c \overset{\upsilon(0)=0}{\Leftrightarrow} \upsilon(\varphi)=\ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Τελικά φθάνουμε στον τύπο της μερκατορικής προβολής:

$$Y(\lambda, \varphi)^{(**)}=\left(\lambda, \ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),0\right)$$

ή αλλιώς

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ \psi=\ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right\}$$ όπου x, ψ οι συντεταγμένες πάνω στον επίπεδο χάρτη. ①

---

(*) Η συγκεκριμένη συνθήκη είναι αναγκαστική διότι σε οποιοδήποτε άλλη περίπτωση, π.χ. αν θέταμε $\upsilon(30) = 0$, οι μεσημβρινοί δεν θα απεικονίζονταν σε ευθείες.

(**) Αν ήμασταν απόλυτα τυπικοί θα γράφαμε $(Y\circ\vec{\mathbf{x}})\ (\lambda, \varphi)$

Παρατηρήσεις

α).Με την όλη πορεία που ακολουθήσαμε δεν αποδείξαμε μόνο το σύμμορφο χαρακτήρα της μερκατορικής προβολής αλλά ταυτόχρονα δώσαμε και μία εξαιρετικά σύντομη περιγραφή της μέσα από τον συμπυκνωμένο αλγεβρικό τύπο ①[19].

β).Η όλη προσέγγιση έχει μια μοναδικότητα με την εξής έννοια: Η μερκατορική προβολή δεν αποτελεί απλώς *μία* λύση στο πρόβλημα που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου: αποτελεί τη *μόνη* λύση! Ακόμη κι αν ο μερκατορικός χάρτης εισάγει μεγάλες παραμορφώσεις όσο αφορά στις αποστάσεις και στα εμβαδά, εν τούτοις είναι η μοναδική μας επιλογή αν θέλουμε να ικανοποιούνται ταυτοχρόνως οι ιδιότητες 1), 2) και 3)[20]. Περιττό να πούμε ότι ένα τέτοιο συμπέρασμα δεν θα μπορούσε με κανένα τρόπο να προκύψει μέσα από την ιστορική παρουσίαση των ιδεών στα προηγούμενα κεφάλαια. Απαιτούνταν η ολοκληρωμένη παρουσίαση της θεωρίας.

γ).Από την ανάγνωση των παραγράφων 18 και 19 ίσως προκύπτει το "συμπέρασμα" ότι, προκειμένου να αποδείξουμε το σύμμορφο χαρακτήρα της μερκατορικής προβολής και να δώσουμε τον τύπο της, υπολογίσαμε δύο φορές το $\int \sec\varphi d\varphi$ : μία για να βρούμε την εξίσωση των λοξοδρομικών καμπύλων[(*)] και μία για να κατασκευάσουμε τον τύπο της προβολής. Η αλήθεια όμως είναι ότι το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα το συναντήσαμε μόνο μία φορά στο δρόμο μας, στο τέλος της κατασκευής. Ας δούμε γιατί: για να βρούμε τον τύπο της μερκατορικής προβολής, αναζητήσαμε ένα τύπο για τη συνάρτηση υ΄(φ). Για την εύρεση αυτού του τύπου χρησιμοποιήσαμε όχι τον τελικό τύπο της λοξοδρομικής καμπύλης αλλά τον τύπο $\lambda'(\varphi)=-\frac{M}{\cos\varphi}$. Ο τύπος αυτός ουσιαστικά είναι ο τύπος ① της παραγράφου 17 που εμφανίζεται *πριν* την ολοκλήρωση του secφ. Πάντως όπως και να 'χει η κατάσταση είναι σαφές ότι για μια *ακριβή* περιγραφή της μερκατορικής προβολής, ο *ακριβής* υπολογισμός του $\int \sec\varphi d\varphi$ είναι αναπόφευκτος.

---

(*) σχέση 2, §17.

## §19. Στις παρυφές της διπλωματικής εργασίας: «Κάθε χάρτης είναι ένας συμβιβασμός»

*Στο Διονύση Παύλου…*

Ένας θεματικός χάρτης της Ευρώπης που θα έδειχνε την κατανομή των διαφόρων θρησκευτικών δογμάτων ή την κατανομή των βροχοπτώσεων ή την πληθυσμιακή κατανομή, δεν θα υπήρχε κανένας λόγος να διατηρεί τις γωνίες. Θα ήταν όμως απόλυτη ανάγκη να μην αλλοιώνει τα εμβαδά διότι σε αντίθετη περίπτωση οι πληροφορίες που θα παρείχε θα ήταν πολύ παραπλανητικές. Αυτή η φυσιολογική διαπίστωση μας φέρνει μπροστά σ' ένα καίριο ερώτημα: Είναι δυνατόν ένας χάρτης να διατηρεί *και* τις γωνίες *και* τα εμβαδά; Ή αν το προχωρήσουμε λίγο πιο πέρα: Είναι δυνατόν ένας χάρτης να διατηρεί *και* τις γωνίες *και* τα εμβαδά *και* τις αποστάσεις; Για παράδειγμα στην περίπτωση του μερκατορικού χάρτη αν, έστω, παραιτηθούμε από την απαίτηση η πλεύση προς Βορρά να αναπαρίσταται στο χάρτη από την κατεύθυνση "προς τα πάνω"(*), είναι άραγε δυνατό να κατασκευάσουμε ένα χάρτη που να μην αλλοιώνει ούτε τις γωνίες ούτε τα εμβαδά ούτε τις αποστάσεις;

Τέτοιοι χάρτες, αν υπάρχουν, είναι αναμενόμενο να ονομάζονται «σωστοί χάρτες» ή «τέλειοι χάρτες». Ο Euler στα 1778 στην εργασία του *«De repraesentatione superficie sphaericae super plano»,* έδωσε μία ξεκάθαρη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

*Θεώρημα 1:* Σωστοί χάρτες δεν υπάρχουν.

*Απόδειξη:* Η απόδειξη του Euler στηρίζεται στις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την "ομοιότητα σε απειροστή κλίμακα" για την οποία κάναμε λόγο σε προηγούμενες παραγράφους. Για την περίπτωσή μας ένα συνθετικό επιχείρημα είναι αρκετό. Θα κινηθούμε με την απαγωγή στο άτοπο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει μια «τέλεια χαρτογραφική προβολή» και έστω $\overset{\Delta}{ABC}$ ένα τρίγωνο πάνω στη σφαίρα $S^2$ του οποίου οι πλευρές είναι τμήματα μέγιστων κύκλων (σφαιρικό τρίγωνο). Γνωρίζουμε ότι (…) τα

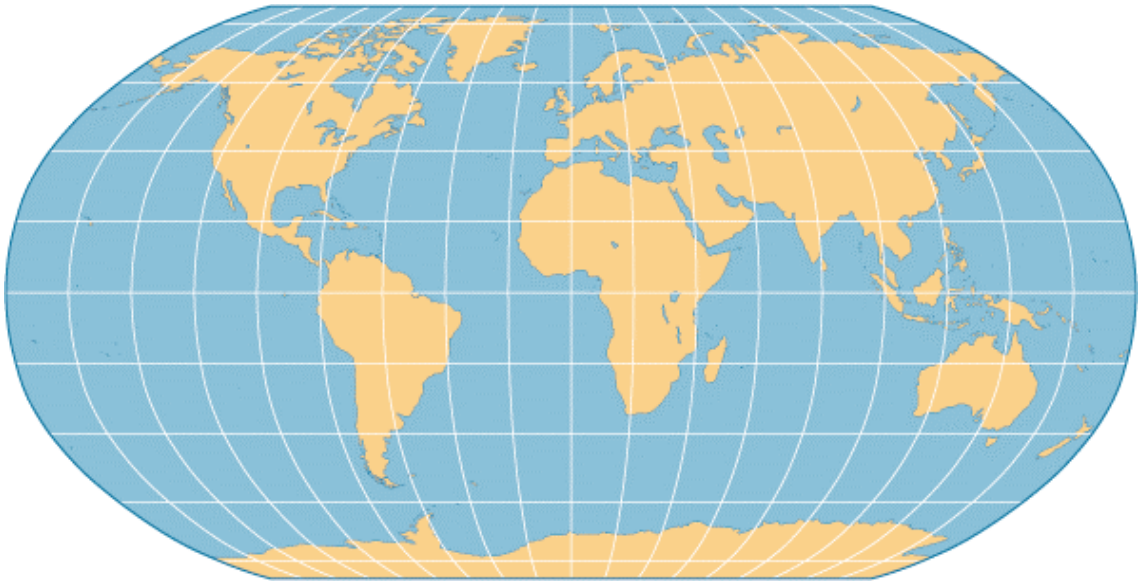
(*) δηλ. οι μεσημβρινοί να απεικονίζονται σε παράλληλες μεταξύ τους ευθείες κάθετες όμως προς την ευθεία η οποία παριστάνει τον ισημερινό.

τόξα μέγιστων κύκλων ελαχιστοποιούν τις αποστάσεις πάνω στη σφαίρα, άρα τα μήκη AB, BC, CA πάνω στη σφαίρα θα είναι τα ελάχιστα δυνατά. Έτσι, η «τέλεια χαρτογραφική προβολή» θα αντιστοιχίζει τα AB, BC, CA, σε ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο. Όμως το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου $\overset{\Delta}{ABC}$ υπερβαίνει τις 180° ενώ το άθροισμα του αντίστοιχου επίπεδου τριγώνου στο χάρτη θα είναι ακριβώς 180°.Έτσι η «τέλεια χαρτογραφική προβολή» δεν θα διατηρεί τις γωνίες! Επί ποινή αντιφάσεως λοιπόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι «τέλειοι χάρτες» δεν υπάρχουν! Σαν να μη έφτανε αυτό, έρχονται δύο ακόμη προτάσεις οι οποίες μάλιστα μπορούν να αποδειχθούν σχετικά εύκολα[21] :

*Θεώρημα 2:* Κάθε χάρτης που διατηρεί τις αποστάσεις διατηρεί και τις γωνίες και τα εμβαδά (είναι δηλ. τέλειος χάρτης).

*Θεώρημα 3:* Κάθε χάρτης που διατηρεί τις γωνίες και τα εμβαδά, διατηρεί και τις αποστάσεις (με άλλα λόγια είναι και πάλι τέλειος χάρτης).

Κατόπιν τούτων και σύμφωνα με το θεώρημα του Euler συμπεραίνουμε πως ένας χάρτης θα παραμορφώνει *πάντα* (σε μικρό ή μεγάλο βαθμό) τις αποστάσεις, ενώ μπορεί να διατηρεί μόνο τις γωνίες ή μόνο τα εμβαδά. Μ' άλλα λόγια μετά τον Euler έγινε και μαθηματικά αποδεκτό ότι *«...ουσιαστικά κάθε χάρτης είναι ένας συμβιβασμός»* (Osserman, 1995,σελ. 50)[22]. Ένας συμβιβασμός που υιοθετείται σε σχέση *πάντα* με το σκοπό τον οποίο καλείται να επιτελέσει ο χάρτης. Έτσι ένας χάρτης μπορεί να παραμορφώνει και τις αποστάσεις και τις γωνίες και τα εμβαδά αλλά για το συγκεκριμένο σκοπό που σχεδιάστηκε να είναι η καλύτερη επιλογή. Όπως αναφέρει και ο Osserman στο βιβλίο του «Η ποίηση του Σύμπαντος», *«η πρόκληση πλέον για τους χαρτογράφους ήταν να επινοήσουν νέες μεθόδους χαρτογράφησης της Γης, οι οποίες είτε θα ελαχιστοποιούσαν τη συνολική παραμόρφωση είτε θα ήταν κατάλληλες για την εξυπηρέτηση ενός συγκεκριμένο σκοπού. Έτσι οι χαρτογράφοι απάντησαν με εκατοντάδες – κυριολεκτικά – διαφορετικούς χάρτες, αρκετοί από τους οποίους βρίσκονται σε κοινή χρήση»* (ό.π., σελ. 50,51)[23].



Εικόνα 14. *Προβολή Robinson.* Στην προβολή αυτή παραμορφώνονται τόσο οι αποστάσεις όσο και τα εμβαδά και οι γωνίες αλλά όλα σε μικρό βαθμό. Χρησιμοποιείται σε περιοδικά όπως το National Geographic ενώ εμφανίζεται συχνά και σε σχολικούς άτλαντες.

Παρ' όλα αυτά – για να επιστρέψουμε στο κεντρικό θέμα αυτής της εργασίας – ο χάρτης του Mercator παραμένει ακόμη και σήμερα αξεπέραστος. Το επόμενο απόσπασμα του Lloyd Brown από το βιβλίο του «The story of maps» είναι νομίζουμε χαρακτηριστικό: *«Άλλες προβολές μπορεί να παρουσιάζουν μεγαλύτερη ακρίβεια στο σχήμα ή στο μέγεθος, όμως αυτές συχνά χρησιμοποιούνται μόνο για να κοιτάζονται ή να μελετούνται ενώ "η μερκατορική προβολή δημιουργήθηκε πράγματι για να δουλευτεί στην πράξη και αυτή μόνο έχει την ανεκτίμητη ιδιότητα να μπορεί να χαραχτεί πάνω της με ακρίβεια και εύκολα μία πορεία από οποιοδήποτε προαποφασισμένο σημείο. Είναι λοιπόν η μόνη η οποία συναντάει τις απαιτήσεις της ναυσιπλοΐας και έχει μία παγκόσμια χρησιμότητα, εξαιτίας του γεγονότος ότι η πλεύση του πλοίου με σταθερή πυξίδα πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας, είναι μία ευθεία γραμμή πάνω σ' αυτή την προβολή".»*, (σελ. 137)[24].

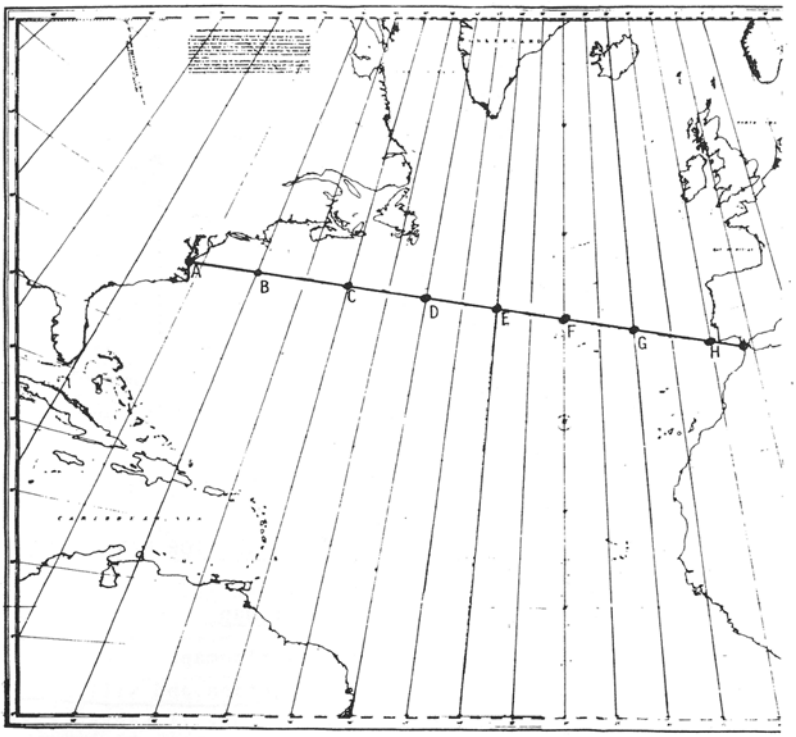
Οι Resnikoff και Wells σ' ένα πολύ ενδιαφέρον βιβλίο τους[25] μας πληροφορούν ότι η μερκατορική προβολή, *«το 1969 γιόρτασε την 400οστή επέτειο συνεχούς χρησιμότητάς της για την ανθρωπότητα στην Αίθουσα Ελέγχου του Κέντρου Επανδρωμένων Διαστημικών Αποστολών καθώς ο άνθρωπος πατούσε για πρώτη φορά στη Σελήνη ... πολύ λίγα προϊόντα της ανθρώπινης διάνοιας έχουν απολαύσει μια τέτοια*

*μακροβιότητα»* (σελ. 155). Αλλά κι από τη δική μας –Ελληνική- πραγματικότητα αξίζει να αναφερθεί ότι όλοι οι ναυτικοί χάρτες που εκδίδει η Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού για την περιοχή της Μεσογείου είναι σε μερκατορική προβολή.

Στην επόμενη και τελευταία παράγραφο του 3$^{ου}$ μέρους, θα πούμε λίγα λόγια για τη σημερινή χρήση της μερκατορικής προβολής από τους σύγχρονους ναυσιπλόους.

## §20. Οι σύγχρονοι πλοηγοί χρησιμοποιούν μερκατορικούς χάρτες
## (Απόσπασμα από το βιβλίο του
## P.M. Tuchinsky
## *Mercator's world map and the calculus)*

Ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων πάνω σε μία σφαίρα είναι το τόξο μεγίστου κύκλου που ενώνει αυτά τα δύο σημεία. Οι σύγχρονοι αεροπλόοι και ναυσιπλόοι φυσικά προτιμούν να ακολουθούν αυτόν τον συντομότερο δρόμο[(26)]. Για να το πετύχουν ξεκινούν σημειώνοντας την πορεία μ' έναν χάρακα πάνω σ' ένα *γνωμονικό* χάρτη[(*)] ( εικόνα 15), στον οποίο όλες οι πορείες μέγιστων κύκλων εμφανίζονται σαν ευθείες γραμμές.




Εικόνα 15. Μία διαδρομή κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου εμφανίζεται σαν ευθεία γραμμή πάνω σ' αυτή τη *γνωμονική προβολή*.

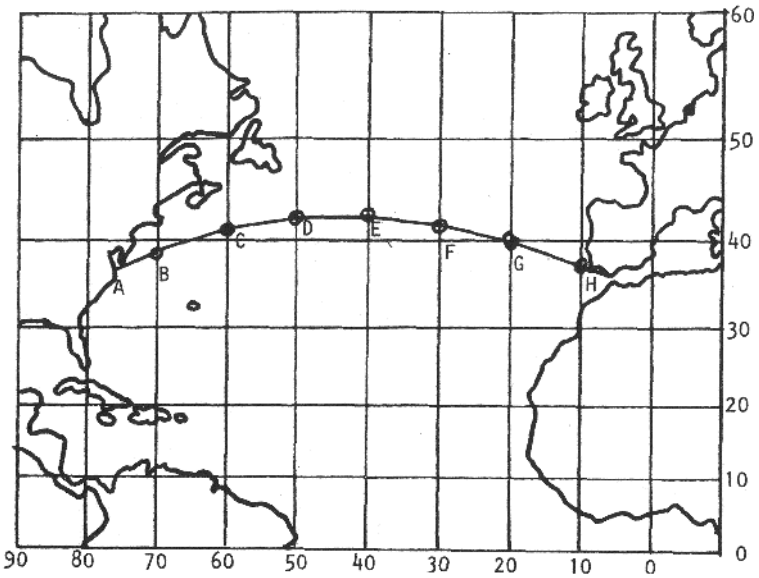
---

(*) Πρόκειται για χάρτη ο οποίος απεικονίζει τόξα μέγιστων κύκλων σε ευθύγραμμα τμήματα. Η γνωμονική προβολή φυσικά αλλοιώνει τις αποστάσεις αλλά όχι τις ελάχιστες αποστάσεις. Επίσης αλλοιώνει τις γωνίες! Ανήκει σε μία κατηγορία απεικονίσεων που ονομάζονται *γεωδαιτικές* απεικονίσεις.

Εντούτοις η ένδειξη της πυξίδας αλλάζει συνεχώς κατά μήκος μιας πορείας σε μέγιστο κύκλο (ο οποίος εκτός ειδικών περιπτώσεων δεν είναι λοξοδρομία)[27] ενώ οι πιλότοι βρίσκουν πολύ πιο βολικό να ακολουθούν μία πορεία σταθερής πυξίδας. Έτσι είναι πολύ συνηθισμένο και βολικότερο να αντικαθίσταται η πορεία σε μέγιστο κύκλο με μία ακολουθία από λοξόδρομες πορείες.

Επειδή οι γωνίες δεν μπορούν να μετρηθούν άμεσα πάνω σ' ένα γνωμονικό χάρτη (ή χάρτη μέγιστων κύκλων)[*], ο πλοηγός συλλέγει μερικά βολικά χαρακτηριστικά σημεία στα οποία οι μεσημβρινοί συναντούν την πορεία του σε μέγιστο κύκλο και τα "περνά" πάνω σ' ένα μερκατορικό χάρτη μεγάλης κλίμακας[28]. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν αυτά τα σημεία πάνω σ' ένα μερκατορικό χάρτη αντιστοιχούν σε τμήματα λοξοδρομιών τα οποία είναι εύκολα να τα ακολουθήσει ένα σκάφος και τα οποία έτσι αποτελούν μια χρήσιμη προσέγγιση της πορείας σε μέγιστο κύκλο.

Η εικόνα 16 δείχνει αυτή τη νέα πορεία όπως φαίνεται πάνω σ' ένα μερκατορικό χάρτη. Η επιπλέον απόσταση η οποία προκύπτει ακολουθώντας τα τμήματα λοξοδρομιών αντί το τόξο μέγιστου κύκλου, είναι ένα αμελητέο μειονέκτημα σε σχέση με την πολύ μεγαλύτερη ευκολία και ασφάλεια στην πλοήγηση.




Εικόνα 16. Η ακολουθία λοξοδρομικών τμημάτων πάνω σ' αυτό το μερκατορικό χάρτη αποτελεί πολύ καλή προσέγγιση της διαδρομής σε μέγιστο κύκλο.

---

[*] Μιας και οι γωνίες δεν διατηρούνται κατά τη μεταφορά τους σ' ένα τέτοιο χάρτη.

Σημείωση του γράφοντος: Μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι όλες οι εργασίες που μόλις περιγράψαμε, στη σημερινή εποχή γίνονται από κάποιο δορυφόρο. Η αλήθεια όμως δεν είναι ακριβώς αυτή. Η επικοινωνία με τους δορυφόρους μπορεί ανά πάσα στιγμή για διάφορους λόγους να καταστεί αδύνατη. Εκτός αυτού *«όχι μόνο στα σύγχρονα πλοία αλλά και στα παλιότερα που εξακολουθούν να αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία του παγκόσμιου στόλου, η εφαρμογή κλασικών μεθόδων ναυσιπλοΐας –όπως έχει διαμορφωθεί σήμερα- θα συνεχίσει στην πράξη να αποτελεί για πολλά χρόνια τη σπονδυλική στήλη των διαδικασιών ασφαλούς κατευθύνσεως στη θάλασσα. Εξάλλου η κλασική ναυσιπλοΐα δεν θα παύσει ποτέ να είναι το αναγκαίο εισαγωγικό υπόβαθρο της ηλεκτρονικής ναυτιλίας»* (.Ντούνης και Δημαράκης,1995, από τον πρόλογο). Γι' αυτό ακόμη και οι σύγχρονοι ναυσιπλόοι πρέπει να είναι σε θέση να πραγματοποιούν όλες αυτές τις εργασίες "με το χέρι". Είναι χαρακτηριστικό ότι στο βιβλίο των προηγούμενων συγγραφέων που διδάσκεται στις σχολές του Εμπορικού Ναυτικού (Εκδ. Ιδρύματος Ευγενίδου), η κατασκευή ενός μερκατορικού χάρτη παρουσιάζεται αναλυτικά ως ένας από τους 6 βασικούς υπολογισμούς με τους οποίους πρέπει να είναι εξοικειωμένος ένας αξιωματικός του Εμπορικού Ναυτικού.(*)

Κλείνουμε αυτή τη σημείωση για το ρόλο των ηλεκτρονικών μέσων στον προσδιορισμό της θέσης ενός σκάφους, με τα λόγια ενός σύγχρονου *skipper*(**): *«Υπολογίζεις με το μάτι την ακτογραμμή. Πόσο μακριά είμαστε; Πού είναι οι ξέρες; Ναι ξέρω την ίδια πληροφορία σου τη δίνει και το GPS. Αλλά όχι να αφήσουμε τους δορυφόρους να μας πάρουν τη δουλειά μας».*

---

(*) Βλέπε σχετικά τις σελίδες 78 έως 87. Παρεμπιπτόντως, στο ίδιο βιβλίο αναφέρεται και μια προσαρμογή της μερκατορικής προβολής στο ελλειψοειδές σχήμα της Γης.

(**) *Skippers* ονομάζονται οι κυβερνήτες των ιστιοπλοϊκών σκαφών. Το απόσπασμα είναι από το site www.skipperandskipper.blogspot.com και την καταγραφή της 15ης Μαρτίου 2006.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

### Αναπαραστάσεις της μοναδιαίας σφαίρας

1. Η… "γνωστή" μας μοναδιαία σφαίρα μπορεί να αποδοθεί με το σύνολο
$S=\{(x, \psi, z) \in IR^3 \ : \ x^2+\psi^2+z^2=1 \qquad (1)\}$(*).
Βέβαια στη γραφή αυτή ο δισδιάστατος χαρακτήρας της σφαίρας είναι καλυμμένος μιας και η εμπλεκόμενη εξίσωση έχει πεπλεγμένη μορφή. Ο διδιάστατος χαρακτήρας «έρχεται στο φως» αν λύσουμε την εξίσωση ως προς μια των μεταβλητών της. Τώρα όμως αναπόφευκτα πληρώνουμε ένα *τίμημα μερικότητας*: δεν μιλάμε πλέον για ολόκληρη τη σφαίρα αλλά για κάποιο ημισφαίριό της. Έτσι, αν λύσουμε την (1) ως $z=\sqrt{1-(x^2+\psi^2)}$ τότε αναγκαστικά $x^2+\psi^2\geq 1$ οπότε μιλάμε μόνο για το «πάνω» ημισφαίριο (μαζί με τον ισημερινό).
Πάντως, ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση μπορούμε να δείξουμε ότι, για $x^2+\psi^2>1$(**), η συνάρτηση.
$\vec{\mathbf{x}}_1(x,\psi)=(x,\psi,\ \sqrt{1-(x^2+\psi^2)}\ )$
αποτελεί – σύμφωνα με τον ορισμό 1 της επιφάνειας – μία παραμετρική παράσταση του "πάνω" ημισφαιρίου (με u = x και v = ψ). Ακόμη περισσότερο αποτελεί – σύμφωνα με τον Ορισμό 2 – *τμήμα* επιφάνειας του συνόλου S(***). Όσο για ολόκληρη τη σφαίρα είναι φανερό ότι μ' αυτή την παραμετρικοποίηση δεν μπορεί να καλυφθεί πλήρως.
2. Μια διαφορετική προσέγγιση – πολύ πιο οικεία σ' έναν χαρτογράφο – θα ήταν να αποδώσουμε τη σφαίρα μέσω της συνάρτησης
$\vec{\mathbf{x}} : [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to IR^3$ με
$\vec{\mathbf{x}}(\lambda,\varphi)=(\cos\lambda\cdot\cos\varphi,\quad \sin\lambda\cdot\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ όπου λ το γεωγραφικό μήκος και φ το γεωγραφικό πλάτος ενός σημείου. Οι ακραίες τιμές $\lambda=\pm\frac{\pi}{2}$ έχουν συμπεριληφθεί

---

(*) Πολύ συχνά το ίδιο σύνολο δηλώνεται και με $S^2$.

(**) οπότε και ικανοποιείται η συνθήκη του ανοιχτού συνόλου.

(***) Βλέπε M. do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", σελ. 55.

γιατί αντιστοιχούν στους δύο πόλους. Από τις δύο τιμές λ = ±π η μία (π.χ. η λ = -π) θα μπορούσε να εξαιρεθεί γιατί αντιστοιχεί στο ίδιο σημείο της επιφάνειας. Με τον τρόπο αυτό καλύπτεται ολόκληρη η επιφάνεια της σφαίρας και συγχρόνως ο διδιάστατος χαρακτήρας της δηλώνεται ρητά. Επίσης, επειδή οι συναρτήσεις cosλ·cosφ, sinλ·cosφ, sinφ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους όλων των τάξεων, έπεται ότι η $\vec{\mathbf{x}}$ είναι κλάσης $C^{\infty}$ και άρα διαφορίσιμη. Παρ' όλα αυτά (και πάλι) η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}$ δεν ικανοποιεί τον ορισμό 1 της επιφάνειας αλλά ούτε και τους επόμενους (πιο απαιτητικούς ορισμούς) της παραγράφου 13. Μ' άλλα λόγια η σφαίρα -μ' αυτή την πολύ φυσιολογική παραμέτρηση- δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως «επιφάνεια»! Το πρόβλημα εμφανίζεται στο εξωτερικό γινόμενο $\vec{\mathbf{x}}_{\lambda} \times \vec{\mathbf{x}}_{\varphi}$:

Επειδή $\vec{\mathbf{x}}_{\lambda}$= (-sinλ·cosφ, cosλ·cosφ, ο)

και $\vec{\mathbf{x}}_{\varphi}$= (-cosλ·sinφ, -sinλ·sinφ, cosφ)

άρα $\vec{\mathbf{x}}_{\lambda} \times \vec{\mathbf{x}}_{\varphi}$= (cosλ·cos$^2$φ, sinλ·cos$^2$φ, sinφ·cosφ)

Έτσι για φ = $\pm\frac{\pi}{2}$ έχουμε $\vec{\mathbf{x}}_{\lambda} = \vec{\mathbf{0}}$ ή αλλιώς, οι παραμετρικές καμπύλες φ = σταθερός αριθμός εξαφανίζονται! Μοιραία $\vec{\mathbf{x}}_{\lambda} \times \vec{\mathbf{x}}_{\varphi} = \vec{\mathbf{0}}$ και δεν πληρείται η πολύ φυσιολογική συνθήκη ii) των ορισμών που εξασφαλίζει την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου σ' ένα σημείο. Οι δύο πόλοι Β και Ν χαρακτηρίζονται ως *ιδιάζοντα* σημεία. Βέβαια το πρόβλημα εδώ δεν οφείλεται στη *γεωμετρική* φύση των σημείων Β και Ν αλλά στην επιλογή της συγκεκριμένης παραμέτρησης που *τα καθιστά* πόλους. Αν για παράδειγμα στρίβαμε τη σφαίρα από Βορρά προς Νότο κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$ rad , τότε κατά την ίδια γωνία θα έστριβε και ο ισημερινός και συνακολούθως και τα σημεία Β και Ν. Μ' αυτήν όμως την αλλαγή συντεταγμένων φ΄ = φ $+\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, λ΄ = λ, τα δύο σημεία θα έπαυαν να είναι ιδιάζοντα και θα "καλύπτονταν" χωρίς πρόβλημα από τις νέες συντεταγμένες(*).

(*) Το πρόβλημα πλέον θα μετακόμιζε στους νέους πόλους.

Πάντως όπως και να έχει το πράγμα, σε σχέση με την αρχική (συνήθη) παραμετρικοποίηση, τα σημεία Β και Ν πρέπει να μείνουν εκτός για να μπορεί η… υπόλοιπη σφαίρα να χαρακτηριστεί επιφάνεια τουλάχιστον με τον ορισμό 1.

Ένα ακόμη πρόβλημα εμφανίζεται όταν (προσπαθώντας να υιοθετήσουμε τον ορισμό 2) επιχειρήσουμε να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}$. Η αντιστροφή αυτή είναι εφικτή μόνο για τα σημεία $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$-C, όπου C είναι το ημικύκλιο που προκύπτει όταν τμήσουμε τη σφαίρα $S^2$ με το επίπεδο $x_2=0$ και από τον κύκλο που θα προκύψει κρατήσουμε εκείνο το κομμάτι που έχει $x_1 \geq 0$. Δηλ.,

$C= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2: x_2=0, x_1 \geq 0\}$

Για $(x_1, x_2, x_3) = \in S^2$-C η αντίστροφη συνάρτηση γίνεται

$$\vec{\mathbf{x}}^{-1}(x_1, x_2, x_3)=(\cot^{-1}\frac{x_1}{x_2}, \sin^{-1} x_3)$$

Μπορεί να αποδειχθεί(*) ότι το σχήμα $S^2$-C με παραμέτρηση την $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(\lambda, \varphi)$ είναι τμήμα επιφάνειας. Το πεδίο ορισμού της $\vec{\mathbf{x}}$ δεν είναι πλέον το

$[-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ αλλά κάποιο γνήσιο υποσύνολο V του $(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$(**).

Τελικά το *τίμημα μερικότητας* για το οποίο μιλήσαμε πιο πριν μοιάζει αναπόφευκτο.

3. Η λύση έρχεται αν, "βάζοντας λίγο νερό στο κρασί μας", υιοθετήσουμε τον ορισμό 3: η σφαίρα ( ολόκληρη) μπορεί να μην είναι τμήμα, καλύπτεται όμως από τμήματα. Έτσι για παράδειγμα η παραμέτρηση $\vec{\mathbf{x}}_1(x,\psi)$ που αναφέραμε στην αρχή δεν καλύπτει πλήρως τη σφαίρα· την καλύπτει όμως μία *οικογένεια* τέτοιων ( *τοπικών πλέον*) παραμετρήσεων με τύπους

$$\vec{\mathbf{x}}_2(x,\psi) = (x,\psi, -\sqrt{1-(x^2+\psi^2)}),$$

$$\vec{\mathbf{x}}_3(x,z) = (x,\sqrt{1-(x^2+z^2)}, z),$$

$$\vec{\mathbf{x}}_4(x,z) = (x,-\sqrt{1-(x^2+z^2)}, z),$$

---

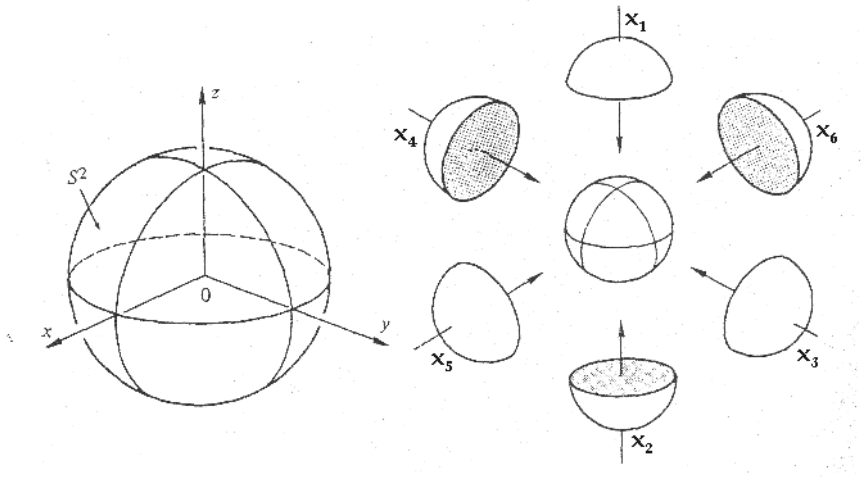
(*) Βλέπε M. do Carmo, σελ. 56-57.

(**) Εμείς *καταχρηστικά* απ' εδώ και στο εξής και για λόγους συντομίας, θα αναφέρουμε ως πεδίο ορισμού το $(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\vec{\mathbf{x}}_5(\psi, z) = (\sqrt{1-(\psi^2+z^2)}, \psi, z),$$

$$\vec{\mathbf{x}}_6(\psi, z) = (-\sqrt{1-(\psi^2+z^2)}, \psi, z).$$

Η κάλυψη φαίνεται συνοπτικά στο επόμενο σχήμα:




Σχήμα 10.

Η προσέγγιση αυτή κάνει πολύ σαφές ότι η σφαίρα είναι ένα αντικείμενο *τοπικά* διδιάστατο. Μέσα από τον ορισμό 3 μία κανονική επιφάνεια φαίνεται να παράγεται παίρνοντας κομμάτια ενός επιπέδου, παραμορφώνοντας τα(*) και συνδέοντάς τας μ' έναν τέτοιο τρόπο ώστε το σχήμα που θα προκύψει να μην έχει οξείες απολήξεις, απότομες πλευρές ή αυτοτομές· να είναι δηλ. αρκετά ομαλό ώστε να έχει νόημα να μιλάμε για εφαπτομένο επίπεδο στα σημεία του.

Πάντως, για την πληρότητα της διαπραγμάτευσης αναφέρουμε ότι ούτε ο ορισμός 3 μπορεί να καλύψει όλες τις «αναμενόμενες»(;) περιπτώσεις επιφανειών. Έτσι για παράδειγμα ο ορθός κυκλικός κώνος – μια «κλασική επιφάνεια» των σχολικών μας χρόνων – δεν αποτελεί κανονική επιφάνεια. Η κορυφή του αποτελεί ιδιάζον σημείο όπου όμως η ιδιομορφία οφείλεται στην ίδια τη γεωμετρική φύση του σχήματος και όχι στην όποια επιλογή παραμέτρων. Παρόμοια πράγματα μπορούμε να πούμε για τον κύβο, την πυραμίδα και…πάει λέγοντας!

(*) Σαν κομμάτια πλαστελίνης τα οποία όμως δεν τα κόβουμε

Αυτά τα σχήματα θα μπορούσαν να θεωρηθούν «επιφάνειες» αν παραιτούμασταν από την απαίτηση να ισχύει η ιδιότητα ii) των ορισμών. Αν επιπλέον αντικαταστήσουμε τη διαφορισιμότητα με τη συνέχεια, θα έχουμε πολύ πιο αδύναμες απαιτήσεις και άρα ένα πολύ πιο γενικό ορισμό: αυτόν της *τοπολογικής* επιφάνειας. Ωστόσο αυτός ο ορισμός θα ήταν ανεπιτυχής για τις ανάγκες της διαφορικής γεωμετρίας[(29)].

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

### Δύο τόποι πάνω στη Γη συνδέονται με άπειρες στο πλήθος λοξοδρομίες

Έστω δύο τόποι $T_0$ και $T_1$ πάνω στη Γη με γεωγραφικές συντεταγμένες αντίστοιχα ( $\lambda_0,\varphi_0$), ($\lambda_1,\varphi_1$). Η γενική εξίσωση μιας λοξοδρομίας είναι η

$$\ln\tan(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}) = \pm\cot\alpha\cdot(\lambda+c)\,, \qquad ①$$

όπου $\alpha$ η σταθερή γωνία που σχηματίζει η λοξοδρομία με όλους τους μεσημβρινούς ενώ $c$ είναι η *σταθερά ολοκλήρωσης* που για κάθε μία λοξοδρομία είναι μοναδική. Για να προσδιοριστεί η $c$ στην περίπτωση της λοξοδρομίας που συνδέει τους τόπους $T_0$, $T_1$, αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες τους στην ① και κατόπιν λύνουμε ως προς $c$:

$$\ln\tan(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4}) = \pm\cot\alpha\cdot(\lambda_0+c)$$

$$\ln\tan(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4}) = \pm\cot\alpha\cdot(\lambda_1+c)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{\ln\tan(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4})}{\ln\tan(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{\lambda_0+c}{\lambda_1+c} \Rightarrow$$

$$(\lambda_1+c)\cdot\ln\tan(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4}) = (\lambda_0+c)\cdot\ln\tan(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$c\cdot\ln\frac{\tan(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4})} = \ln\frac{\tan^{\lambda_0}(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4})}{\tan^{\lambda_1}(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

οπότε τελικά η σταθερά ολοκλήρωσης είναι

$$c = \frac{\ln\dfrac{\tan^{\lambda_o}(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4})}{\tan^{\lambda_1}(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4})}}{\ln\dfrac{\tan(\frac{\phi_0}{2}+\frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{\phi_1}{2}+\frac{\pi}{4})}}\,.$$

Όμως αυτός ο τύπος είναι ανεξάρτητος της γωνίας $\alpha$ . Αυτό σημαίνει ότι η αλλαγή της γωνίας δεν επηρεάζει τον προσδιορισμό του $c$ ή μ' άλλα λόγια, η αλλαγή της γωνίας δεν εκτρέπει τη λοξοδρομία από τους τόπους $T_0$ και $T_1$. Άρα τελικά οι δύο τόποι, εξαιτίας της ελευθερίας στην επιλογή της γωνίας $\alpha$ , συνδέονται με άπειρες στο πλήθος λοξοδρομίες.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

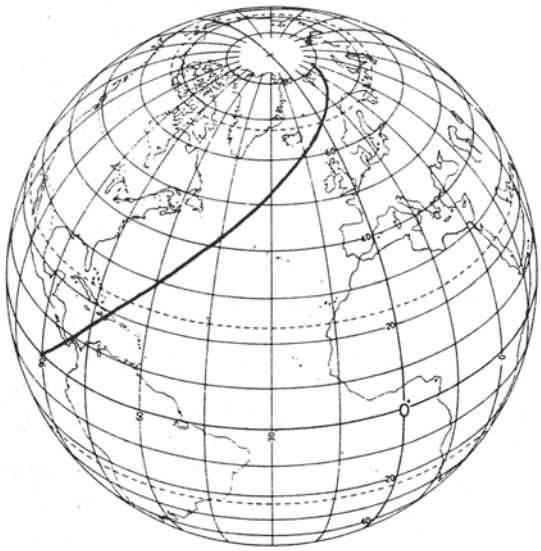
### Αποτύπωση πορείας πάνω σε χάρτες διαφόρων ειδών(*)

*Στη μνήμη του Thomas…*

1. Πτήση με σταθερή Βορειοανατολική κατεύθυνση

Ας φανταστούμε ένα αεροπλάνο να ξεκινάει από τα νησιά Galapagos στον Ειρηνικό Ωκεανό και να κινείται σταθερά βορειοανατολικά σχηματίζοντας με τους μεσημβρινούς γωνία 45°. Μετά από αρκετές ώρες, αυτή η πορεία σταθερής πυξίδας (λοξοδρομία) θα το φέρει στα νησιά Franz Josef Land(**) στον Αρκτικό Ωκεανό. Πώς φαίνεται η πτήση αυτή σε διάφορα είδη χαρτών; Σε ποιο τύπο χάρτη θα ήταν ευκολότερο να χαρακτεί η πορεία του αεροσκάφους;

Απάντηση σ' αυτά τα ερωτήματα δίνουν οι εικόνες 17 έως 21. Η πρώτη απ' αυτές δίνει ίσως και την πιο αξιόπιστη εικόνα της Γης σαν σφαίρα. Η τελευταία αποτελεί την καλύτερη επιλογή για έναν πλοηγό μιας και η πορεία πάνω στο μερκατορικό χάρτη της εικόνας 21 μπορεί να χαραχτεί απλώς μ' ένα μοιρογνωμόνιο και ένα χάρακα.

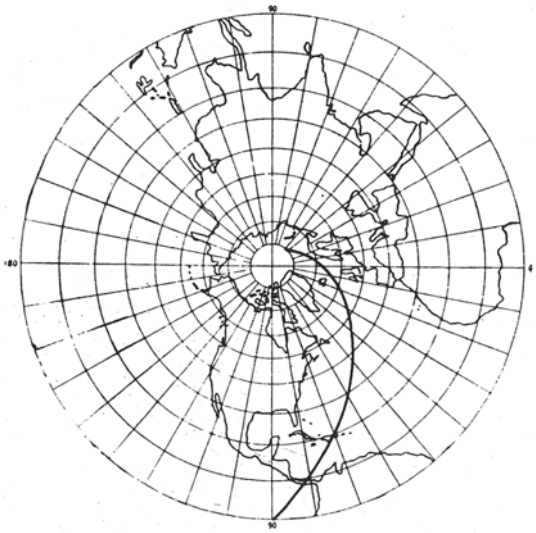


Εικόνα 17. Πτήση με σταθερή βορειοανατολική κατεύθυνση 45° ως προς το γεωγραφικό βορρά από τα νησιά Galapagos στον Ειρηνικό Ωκεανό, στα νησιά Franz Josef Land στον Αρκτικό Ωκεανό.

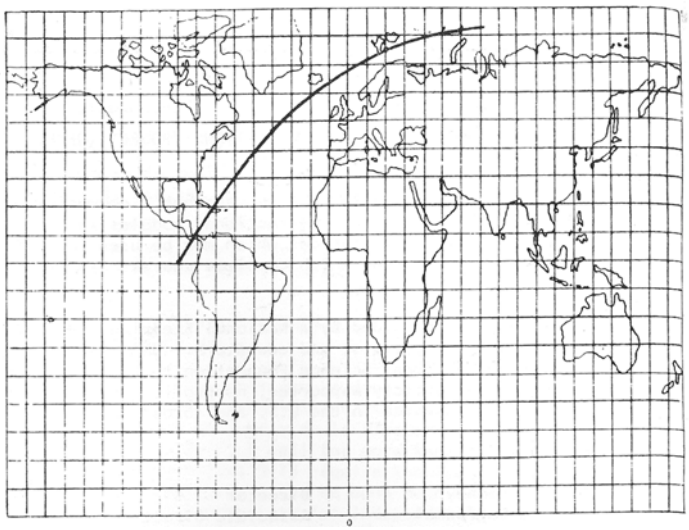
---

(*) Όλοι οι χάρτες που παρουσιάζονται σ' αυτό το παράρτημα είναι από το βιβλίο του P.Tuchinsky.

(**) Γη Φραγκίσκου Ιωσήφ.



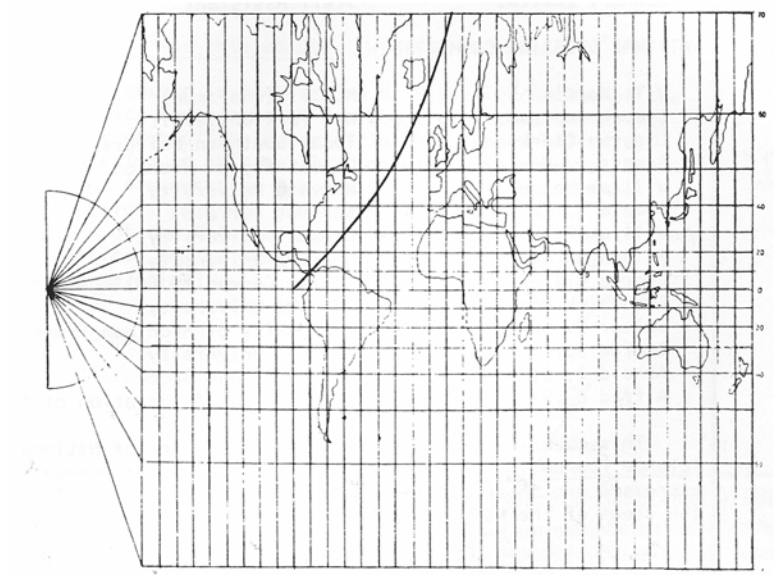
Εικόνα 18. Η πτήση του σχήματος 1 σχεδιασμένη πάνω σ' ένα τύπο σύμμορφου χάρτη γνωστό ως *στερεογραφική προβολή*. Η πορεία σχηματίζει σταθερή γωνία 45° με τους μεσημβρινούς όμως εξαιτίας του ότι οι μεσημβρινοί συγκλίνουν προς το κέντρο του κύκλου, η διαδρομή είναι καμπυλωμένη. Έτσι είναι δύσκολο και να χαραχθεί και να μετρηθεί.



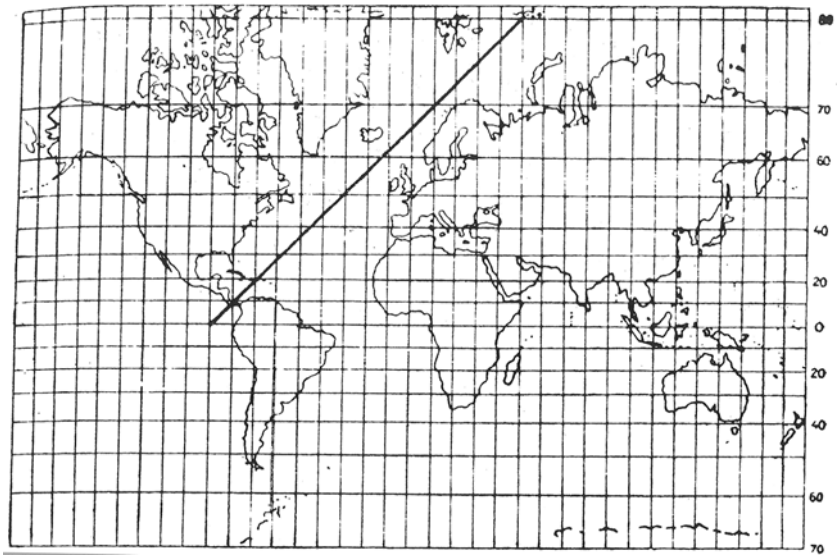
Εικόνα 19. Η πτήση σχεδιασμένη σ' ένα *"ανεπιτήδευτο χάρτη "* δηλ. χάρτη στον οποίο παράλληλοι που ισαπέχουν πάνω στην υδρόγειο εμφανίζονται ισαπέχοντες και πάνω στο χάρτη(*). Οι γωνίες κατά τη μεταφορά τους από την υδρόγειο στο χάρτη αλλοιώνονται. Μία ευθεία γραμμή πάνω σ' έναν τέτοιο χάρτη δεν αντιστοιχεί σε πορεία σταθερής πυξίδας πάνω στη Γη.

---

(*) Ο χάρτης δεν είναι *πορτολάνος* χάρτης διότι όπως είπαμε και στο πρώτο μέρος οι κατασκευαστές τους δεν φαίνεται να στηρίχτηκαν σε κανένα προβολικό σύστημα ούτε και χρησιμοποίησαν δίκτυο γεωγραφικών συντεταγμένων. Εν τούτοις ασυνείδητα οι χάρτες τους αποφεύγουν κάποια «ειδική» τοποθέτηση των παραλλήλων.



Εικόνα 20. Η πτήση σε *ορθή κυλινδρική προβολή*, μια προβολή που συχνά συγχέεται μ' αυτήν του Mercator. Και πάλι οι γωνίες κατά τη μεταφορά τους από την υδρόγειο στο επίπεδο δεν διατηρούνται. Μία πορεία σταθερής πυξίδας δεν αντιστοιχεί πάνω στο χάρτη σε ευθεία γραμμή.




Εικόνα 21. Η πτήση σταθερής κατεύθυνσης όπως αποτυπώνεται σ' ένα μερκατορικό χάρτη. Εδώ η τοποθέτηση των παραλλήλων πάνω στο χάρτη έχει γίνει με τον επιτηδευμένο τρόπο του Mercator. Η ευθεία πορεία εύκολα κατασκευάζεται, μετρείται και ακολουθείται.

2. Πλους από τον Παναμά στη Μεγάλη Βρετανία

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να πραγματοποιήσουμε έναν διάπλου του Ατλαντικού Ωκεανού με σημείο εκκίνησης τη διώρυγα του Παναμά και τελικό προορισμό το νοτιότερο άκρο της Μεγάλης Βρετανίας (Ακρωτήριο Land's End).

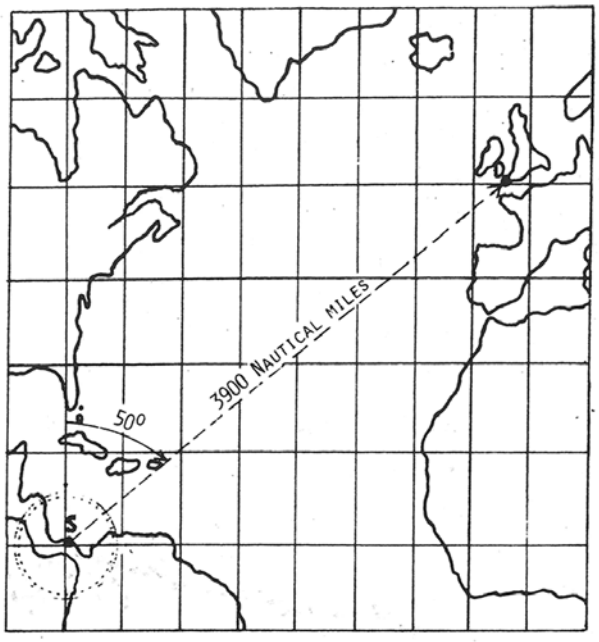
Ο ευκολότερος και ασφαλέστερος τρόπος για να πραγματοποιηθεί ένα τέτοιο ταξίδι είναι να κινηθούμε από το σημείο εκκίνησης Ε μέχρι τον τελικό μας προορισμό Π ακολουθώντας μία πλεύση σταθερής πυξίδας. Για να βρούμε τη γωνία με την οποία θα πρέπει να κινηθούμε σε σχέση με το βορρά (ονομάζεται και *πορεία* ), εργαζόμαστε ως εξής: Πάνω σ' ένα χάρτη εντοπίζουμε τα σημεία Ε και Π και τα ενώνουμε μ' ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στη συνέχεια μ' ένα μοιρογνωμόνιο(*) μετράμε τη γωνία που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα με τη διεύθυνση του Βορρά. Η γωνία αυτή είναι η πορεία του σκάφους(**).

Οι εικόνες 22α και 22β δείχνουν αντίστοιχα τη χάραξη πορείας πάνω σ' έναν *"ανεπιτήδευτο χάρτη"* και πάνω σ' ένα χάρτη του Mercator. Η σιωπηλή παραδοχή ότι οι λοξοδρομίες πάνω στη γήϊνη σφαίρα απεικονίζονται σε ευθείες γραμμές πάνω σ' έναν *"ανεπιτήδευτο χάρτη"*, οδηγεί στα σφάλματα που φαίνονται στην εικόνα 23.

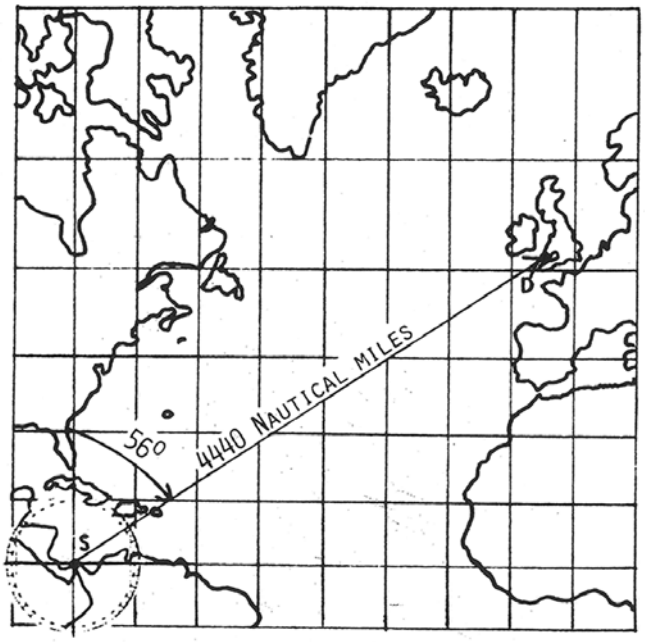
---

(*) Οι σημερινοί ναυτικοί χάρτες έχουν προσαρμοσμένο πάνω τους το μοιρογνωμόνιο. Ονομάζεται *ανεμολόγιο χάρτη ή compass rose*.

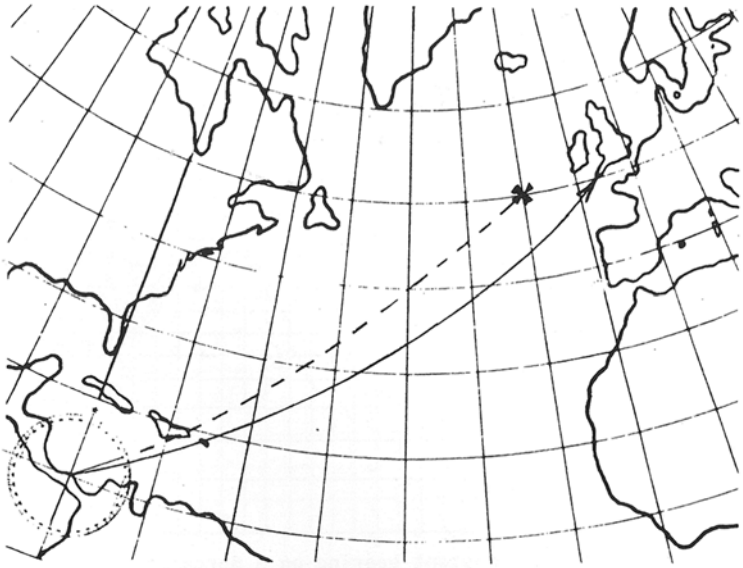
(**) Τυπικά ως πορεία ορίζεται η γωνία που σχηματίζει ο διαμήκης άξονας του πλοίου με την κατεύθυνση του βορρά. Στη ναυτική πρακτική υπάρχει διάκριση μεταξύ της *αληθούς* πορείας που μόλις αναφέραμε, της *μαγνητικής* πορείας και της πορείας *πυξίδας*. Βλέπε σχετικά και το βιβλίο «Ναυτιλία» των Χ. Ντούνη, Αν. Δημαράκη, σελ. 33, 34.




Εικόνα 22α. *"Ανεπιτήδευτος χάρτης"*. Ευθεία γραμμή συνδέει τη διώρυγα του Παναμά με το ακρωτήριο Land's End της Μ. Βρετανίας. Ο χάρτης υποδεικνύει ν' ακολουθήσουμε πάνω στην υδρόγειο πλεύση σταθερής πυξίδας με γωνία 50° ως προς το γεωγραφικό βορρά.




Εικόνα 22β. Η αντίστοιχη σύνδεση σε ευθεία γραμμή πάνω σ' ένα μερκατορικό χάρτη. Η σωστή διεύθυνση που πρέπει να ακολουθηθεί φαίνεται να είναι 56° ανατολικά της διεύθυνσης του γεωγραφικού βορρά.



Εικόνα 23. Τα αποτελέσματα των ναυτοπλοϊκών υποδείξεων των χαρτών 22α και 22β.

Οι ναυτοπλοϊκές υποδείξεις των χαρτών 22α και 22β οδηγούν σε πολύ διαφορετικά αποτελέσματα. Η υιοθέτηση της υπόδειξης του μερκατορικού χάρτη οδηγεί σε μία λοξοδρομία 56° πάνω στην υδρόγειο (η συνεχής γραμμή) η οποία όντως συνδέει τη διώρυγα του Παναμά με το νοτιότερο άκρο της Μ. Βρετανίας. Αντίθετα, η υιοθέτηση της υπόδειξης του *"ανεπιτήδευτου χάρτη"*, οδηγεί σ' έναν προορισμό πολύ μακριά από τον επιδιωκόμενο!(διακεκομμένη γραμμή). Ένας ναυσιπλόος που θα εμπιστευτεί τον χάρτη 22α για ένα *τόσο μακρινό* ταξίδι, όσο έμπειρος κι αν είναι, θα δυσκολευτεί πολύ στην *ανοιχτή θάλασσα* να βρει σημάδια που θα τον βοηθήσουν να διορθώσει την πορεία του και να φθάσει στον προορισμό του.

## Σημειώσεις τρίτου μέρους

(1) Doyle Kathleen Markert, «Contributions of the theory of conformal mapping to the field of electrical engineering education and practice», Phd, Columbia University, 2005, σελ. 8.

(2) Η αναφορά από το βιβλίο του Dirk Struik «Lectures on Classical Differential Geometry», Dover 1988, σελ. 175.

(3) Η ανάπτυξη του θέματός μας σε μεγάλο βαθμό είναι επηρεασμένη από το προαναφερθέν βιβλίο του Struik, σελ. 55-61 και 168-175, καθώς και από το βιβλίο του John McCleary «Geometry from a differentiable Viewpoint», Cambridge Univ. Press, σελ. 95-129.

(4) Αντιπαραδείγματα εδώ αποτελούν:

· η συνάρτηση $\mathbf{x}(u,v) = (u+v,\ (u+v)^2,\ (u+v)^3)$ η οποία ουσιαστικά αποτελεί καμπύλη.

· η κορυφή του ορθού κυκλικού κώνου, βλέπε Struik, σελ. 56

· τα σημεία που παίζουν το ρόλο του βόρειου και του νότιου πόλου σε μια σφαίρα που έχει περιγραφεί μέσω των γεωγραφικών της συντεταγμένων (βλέπε σχετικά και το παράρτημα 1).

(5) Αναλυτικότερα βλέπε τις σελίδες 69-75, Manfredo do Carmo.

(6) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης διαφορικού αποτελείται από όλα τα εφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}=(du, dv)$ γύρω από το $A=(u_o,v_o)$. Φυσικά μπορούμε να σκεφτόμαστε τα (du, dv) ως ελεύθερα διανύσματα του συνόλου U που όμως εκπροσωπούνται από τα αντίστοιχα εφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}$ στο σημείο A. Έτσι τελικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $d\vec{\mathbf{x}}_{(u_o,v_o)}$ είναι το ίδιο το U.

Επίσης επειδή $\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$, η αντιστοίχιση των διανυσμάτων (du, dv) του συνόλου $U \subseteq IR^2$ και των διανυσμάτων $\vec{\mathbf{x}}_u \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_v \cdot dv$ είναι 1-1.

(7) Θα δοκιμάσουμε να δώσουμε ένα πιο τυπικό νόημα σ' αυτή την έκφραση. Ας αναζητήσουμε λοιπόν μια γραμμική συνάρτηση $\vec{\mathbf{L}}_{(u_o,\ v_o)}(du, dv)$ ώστε οι τιμές $\vec{\mathbf{x}}((u_o, v_o) + (du, dv))$ να μπορούν να προκύψουν από τις τιμές $\vec{\mathbf{x}}(u_o, v_o)$ με τον εξής τρόπο:

$$\vec{\mathbf{x}}((u_o, v_o) + (du, dv)) = \vec{\mathbf{x}}(u_o, v_o) + \vec{\mathbf{L}}_{(u_o, v_o)}(du, dv) + \text{κάποιο υπόλοιπο}$$

$$\vec{\mathbf{R}}_{(u_o, v_o)}(du, dv) \quad \text{όπου όμως } \frac{\vec{\mathbf{R}}(du, dv)}{|(du, dv)|} \to \vec{\mathbf{0}} \text{ καθώς } (du, dv) \to \vec{\mathbf{0}}.$$

Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια γραμμική συνάρτηση υπάρχει (Lipschutz, σελ. 130, Θεώρημα 7.8) και είναι μοναδική (Lipschutz, σελ. 127). Επίσης - δεδομένου ότι $\vec{\mathbf{x}}_u \times \vec{\mathbf{x}}_v \neq \vec{\mathbf{0}}$ - αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_u \cdot du + \vec{\mathbf{x}}_v \cdot dv$ εμφανίζει αυτές τις ιδιότητες που πρέπει να έχει η συνάρτηση $\vec{\mathbf{L}}(du,dv)$ (Lipschutz, σελ. 127-128).

(8) Η διανυσματική εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σ' ένα σημείο $\vec{\mathbf{x}}_{(u_o, v_o)}$ μιας επιφάνειας έχει τύπο $\vec{\mathbf{y}}(h, k) = \vec{\mathbf{x}}(u_o, v_o) + h \cdot \vec{\mathbf{x}}_u + k\vec{\mathbf{x}}_v$ όπου τα h, k είναι απλώς ένας διαφορετικός (πιο βολικός) τρόπος για να γράψουμε τα du, dv.

(8) Η απεικόνιση ανάμεσα στις δύο επιφάνειες ορίζεται από τις σχέσεις

$u_1 = u_1(\lambda, \varphi) = \lambda$

$v_1 = v_1(\lambda, \varphi) = \varphi$

Προφανώς η ΟΛΗ αντιστοίχιση είναι 1-1 και επί, είναι $C^\infty$, και έχει ορίζουσα

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\lambda, \varphi)}{\partial(\lambda, \varphi)} = 1 \neq 0$$

(9) Η συνάρτηση $\vec{\mathbf{x}}_1^{-1} : S_1 \to V$ θα αντιστοιχίζει το $(x_1, x_2, x_3) \to (\lambda, \varphi)$ με

$$\vec{\mathbf{x}}_1^{-1}\ (x_1, x_2, x_3) = \left( \cot^{-1} \frac{x_1}{x_2}, \sin^{-1} x_3 \right)$$

ή αλλιώς

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \cot^{-1} \frac{x_1}{x_2} \\ \varphi &= \sin^{-1} x_3 \end{aligned}\right\}$$

(10) Το απόσπασμα είναι από το βιβλίο του Ε. Βαβλιάκη, «Μαθήματα Γεωγραφίας», Εκδ. Πανεπ. Θεσσαλονίκης, 1985.

(11) Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία δύο προσανατολισμένων καμπυλών σε σημείο τομής τους P, είναι η κυρτή γωνία των εφαπτόμενων διανυσμάτων τους (στο P).

(12) Ειδικά για τον… τυπικό ορισμό της προσανατολισμένης καμπύλης, βλέπε το βιβλίο «Διαφορική Γεωμετρία» του M. Lipschutz, εκδ. ΕΣΠΙ, σελ. 47 και σελ. 60 (άσκηση 3.36).

(13) Επειδή η $\vec{\mathbf{f}}$ είναι συνάρτηση, απεικονίζει τεμνόμενες καμπύλες σε τεμνόμενες· οι εικόνες των αρχικών καμπύλων τέμνονται στην εικόνα του αρχικού σημείου τομής. Επιπλέον επειδή η $\vec{\mathbf{f}}$ είναι 1-1, *και* οι μη τεμνόμενες καμπύλες απεικονίζονται σε μη τεμνόμενες. Έτσι τελικά, κάτι που θα αποδειχθεί χρήσιμο στη συνέχεια, ένα τρίγωνο απεικονίζεται σε τρίγωνο.

(14) *Εξ' ορισμού* ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\mathbf{T}}$ λέγεται εφαπτόμενο μιας επιφάνειας S σ' ένα σημείο P, αν υπάρχει μία κανονική καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(t)$ της S που διέρχεται από το P και για την οποία στο σημείο αυτό ισχύει $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{T}}$ (βλέπε και M. Lipschutz, σελ. 158).

(15) Δεδομένης της συνάρτησης $\vec{\mathbf{x}}(u, v)$, η επιφανειακή καμπύλη $\vec{\mathbf{x}}(u(t), v(t))$, καθορίζεται πλήρως από την επίπεδη καμπύλη (u(t), v(t)). Αυτή με τη σειρά της (γύρω από το σημείο $(u_0, v_0)$), καθορίζεται πλήρως από τις συντεταγμένες $(u_0,v_0)$ και την εφαπτομένη $\frac{du}{dv}$ σ' αυτό το σημείο.

(16) *Σχεδόν* όμοιο και όχι όμοιο, γιατί ο λόγος ομοιότητας ρ=ρ(u, v) αλλάζει αν αλλάξει το (u, v), δηλ. αν αλλάξουμε σημείο (πράγμα αναπόφευκτο όταν σχεδιάζουμε ολόκληρο τρίγωνο). Πάντως αν η συνάρτηση ρ=ρ(u, v) είναι σταθερός αριθμός, τότε ο λόγος ομοιότητας είναι ίδιος για όλα τα σημεία. Σ' αυτή την περίπτωση η απεικόνιση ονομάζεται *ομοιοθεσία*.

(17) Πράγματι για να απεικονίζονται οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι σε ορθογώνιες γραμμές, θα πρέπει τα εφαπτόμενα διανύσματα σ' αυτές τις γραμμές να είναι μεταξύ τους κάθετα. Επειδή $(Yo\,\vec{\mathbf{x}})_\lambda = (\lambda, \varphi) = (\lambda, u(\lambda, \varphi), 0)$, τα εφαπτόμενα. δ/τα είναι $(Yo\,\vec{\mathbf{x}})_\lambda = (1, \upsilon_\lambda, 0)$ και $(Yo\,\vec{\mathbf{x}})_\varphi = (0, \upsilon_\varphi, 0)$.

Τα δύο διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, δηλ. ανν

$\upsilon_\lambda.\upsilon_\varphi=0 \Leftrightarrow \upsilon_\lambda=0$ ή $\upsilon_\varphi=0$.

Αν ήταν $\upsilon_\varphi=0$ τότε θα ήταν υ (λ, φ)=υ(λ). Έτσι όμως η απεικόνιση $(Y\circ\vec{\mathbf{x}})\ (x,\lambda) =$ (λ, υ(λ), 0) δεν θα ήταν 1-1, πράγμα αδιανόητο για μία χαρτογραφική προβολή. Άρα αναγκαστικά $\upsilon_\lambda=0$, ∀ λ ⇔ υ(λ, φ)=υ(φ).

(18) Για μια λοξόδρομη καμπύλη

$$\lambda = \lambda(\varphi) = M\cdot\log\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+N,\ \text{άρα}$$

$$\lambda'(\varphi) = M.\frac{1}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lambda'(\varphi) = \frac{M\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\lambda'(\varphi) = \frac{M}{\sin\left[2\cdot\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \frac{M}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\lambda'(\varphi) = -\frac{M}{\cos\varphi}$$

(19) Τα χρόνια του Wright αυτός ο τύπος δεν ήταν διαθέσιμος μιας και ο αλγεβρικός συμβολισμός ήταν πολύ αδύναμος αλλά και οι λογάριθμοι μόλις που γεννιόταν.

(20) Στο βιβλίο των Resnikoff και Wells «Mathematics in civilization», Εκδ. Dover, σελ. 158-160, παρουσιάζονται μερικά παραδείγματα μερκατορικών προβολών όπου ο ισημερινός δεν απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα του επίπεδου χάρτη . Βέβαια στα παραδείγματα αυτά οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι δεν απεικονίζονται σε πλέγμα ευθειών αλλά καμπύλων γραμμών. Έτσι όμως καταστρατηγείται μια βασική απαίτηση της μερκατορικής προβολής. *Τυπικά* μία τέτοια προβολή *δεν* είναι μερκατορική.

(21) Βλέπε σχετικά το βιβλίο του Erwin Kreyszig, «Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry», University of Toronto Press, σελ. 180-182, 196-197.

(22) R. Osserman, «Η ποίηση του Σύμπαντος», Κάτοπτρο 1998, σελ. 50.

(23) Όπως προηγουμένως σελ. 50-51. Κάποιες από αυτές τις νέες χαρτογραφικές προβολές αναφέρονται – πολύ γλαφυρά – και από τον ίδιο τον Osserman στις

σελίδες 51-55 του βιβλίου του. Κάποιες άλλες αναφέρονται από τον E. Kreyszing στο βιβλίο που αναφέραμε πιο πάνω, σελ. 198-200. Τέλος, μία μεγάλη ποικιλία χαρτογραφικών προβολών αναφέρονται στο βιβλίο του Ελευθέριου Βαβλιάκη, «Μαθήματα Γεωγραφίας», Εκδ. Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, 1985, σελ. 45-96. Ειδικότερα στις σελίδες 92-96 αναφέρονται κριτήρια με βάση τα οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε το είδος μιας προβολής που έχει χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή ενός χάρτη. Επίσης αναφέρονται κριτήρια με βάση τα οποία επιλέγουμε μία προβολή ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο πρόκειται να κατασκευάσουμε έναν χάρτη. Το βιβλίο είναι διαθέσιμο και στο διαδίκτυο από την ιστοσελίδα του συγγραφέα.

(24) Lloyd Brown, «The story of maps», εκδ. Dover, σελ. 137. Ένα μέρος του συγκεκριμένου αποσπάσματος ο Lloyd Brown μας το μεταφέρει από το βιβλίο των C.H. Deetz και O.S. Adams, «Elements of Map Projection with applications to map and chart construction», Washington, 1938, p. 101 (U.S. Dept. Of Commerce. Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 68).

(25) H.L. Resnikoff, R.O.Wells, SR, «Mathematics in civilization», Dover, σελ. 155.

(26) Μάλλον θα πρέπει να δούμε με κάποια σχετική επιφύλαξη αυτή τη ρήση του Tuchinsky όσον αφορά στους αεροπλόους, μιας και στο βιβλίο του Robert Osserman «Η ποίηση του Σύμπαντος» διαβάζουμε ότι,

*«… Τον 20ό αιώνα, κατά τον οποίο η ωκεανοπλοΐα αντικαταστάθηκε βαθμιαία από τα αεροπορικά ταξίδια… παραδόξως, χρησιμότερος για την αεροπλοΐα είναι ένας χάρτης που… τον εισήγαγε ο αλ-Μπιρουνί, γύρω στο έτος 1000 και ονομάζεται ισαπεχής αζιμουθιακή προβολή από τους χαρτογράφους και εκθετικός χάρτης από τους μαθηματικούς»* (Osserman, σελ. 51-52).

(27) Στο άρθρο «Lambert, Euler and Lagrange as Map Makers» του George W. Heine διαβάζουμε σχετικά:

*«Μία λοξοδρομία δεν είναι μέγιστος κύκλος: Ο Pedro Nuñez απέδειξε αυτή την πρόταση, στα 1537 στην εργασία του Tratado de Esfera. Δεν γνωρίζουμε αν ο Φλαμανδός χαρτογράφος Gerard Mercator είχε ακούσει ποτέ για τις εργασίες του Πορτογάλου γεωμέτρη, αλλά μέχρι τα 1541 ο Mercator είχε βρει ένα τρόπο να σχεδιάζει με ακρίβεια λοξοδρομίες πάνω σε μία σφαίρα…»* (Heine, σελ. 2).

(28) Στο βιβλίο «Μαθήματα Γεωγραφίας» του Ε. Βαβλιάκη, σελ. 42, βρίσκουμε ότι:

*«Ανάλογα με την κλίμακά τους, οι χάρτες μπορούν να διαιρεθούν ως εξής:*

*α) Χάρτες μεγάλης κλίμακας, από 1:10000 και μεγαλύτερη.*

*β) Χάρτες μεσαίας κλίμακας, από 1:10000 μέχρι 1:300000.*

*γ) Χάρτες μικρής κλίμακας, από 1:300000 και μικρότερη».*

(29) Στο βιβλίο «Εισαγωγή στη Σύγχρονη Άλγεβρα», Τόμος Πρώτος, του Σταύρου Παπασταυρίδη διαβάζουμε στις σελίδες 55 και 56:

*«…οι ορισμοί δεν είναι "απόλυτοι". Οι ορισμοί είναι "συντομογραφίες", που μας επιτρέπουν να συνεννοηθούμεθα αποτελεσματικότερα… Όταν διαβάζουμε ένα Μαθηματικό βιβλίο, πάντα οι ορισμοί προηγούνται των θεωρημάτων. Στην πραγματικότητα όμως η διαδικασία της Μαθηματικής δημιουργίας είναι ακριβώς το αντίθετο. Όταν έχουμε αναπτύξει και έχουμε κατανοήσει ένα κομμάτι μιας θεωρίας, τότε μπορούμε να δούμε ποιοί είναι οι κατάλληλοι ορισμοί. Συνοψίζοντας τα ανωτέρω, μπορούμε να πούμε: Δεν υπάρχουν Ορισμοί "Σωστοί" και "Λάθος", αυτό που υπάρχει είναι Ορισμοί "Επιτυχημένοι" και "Ανεπιτυχείς"».*

**Βιβλιογραφία τρίτου μέρους**


- Βαβλιάκης, Ε. (1985). *Μαθήματα Γεωγραφίας*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
  Σελ. 11-25, 33-36, 40-96.
- Brown, L.A. (1979). *The story of maps* (ανατύπωση από νέο εκδ. οίκο της 1ης έκδοσης του 1949). New York: Εκδ. Dover.
  Σελ. 3-34, 113-166.
- Carmo, M.P. do (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey: Εκδόσεις Prentice-Hall.
  Σελ. 51-74.
- Doyle, K.M. (2005). Contributions of the theory of conformal mapping to the field of electrical engineering education and practice. Doctoral dissertation, Columbia University, USA.
  Σελ. 8-37.
- Heine, G.W. *Lambert, Euler and Lagrange as Map Makers.*
- Kreyszig, E. (1968). *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry.* Toronto: εκδ. University of Toronto Press.
  Σελ. 160-161, 180-183, 188-192, 196-200.
- McCleary, J. (1994). *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Εκδ. Cambridge University Press.
  Σελ. 95-101, 116-129.
- Lipschutz, M.M. (1981). *Διαφορική Γεωμετρία.* (Θ. Κουφογιώργος, Χ. Μπαϊκούσης, μετάφραση). Αθήνα: Εκδ. ΕΣΠΙ (Πρωτότυπη Έκδοση, Mc Graw-Hill, 1974).
  Σελ. 150-174, 227-228, 249.
- Osserman, R. (1986). *A survey of Minimal Surfaces*. New York: Εκδ. Dover.
  Σελ. 1-11, 43-44.
- Osserman, R (1988). *Η ποίηση του Σύμπαντος.* (Γ. Κυριακόπουλος, μετάφραση). Αθήνα: Κάτοπτρο. (Πρωτότυπη Έκδοση, Anchor books, 1995).
  Σελ. 35-55.

- Παπασταυρίδης, Σ. (1983). *Εισαγωγή στη Σύγχρονη Άλγεβρα.* Τόμος 1ος. Πάτρα: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πάτρας.
  Σελ. 54-56.
- Resnikoff, H.L., Wells Jr., R.O. *Mathematics in Civilization.* New York: Εκδ. Dover.
  Σελ. 132-178, ειδικά 154-178.
- Struik, D.J. (1988). *Lectures on Classical Differential Geometry* (ανατύπωση από νέο εκδ. οίκο της 2ης Έκδ. του 1961). New York: Εκδ. Dover.
  Σελ. 55-62, 168-175.
- Tuchinsky, P.M. (1978). *Mercator's World Map and the Calculus*. Από τη σειρά, Modules and Monographs in Undergraduate Mathematics and its Applications (UMAP) Project. Newton, Mass: Εκδ. Education Development Center (EDC)/Project UMAP.

# ΜΕΡΟΣ IV

## Συμπεράσματα

«Εδώ τελειώνουν τα έργα της θάλασσας…»

Γιώργος Σεφέρης, 1933 - 1934

## §21. Συμπεράσματα της όλης μελέτης

Ξεκινώντας τα συμπεράσματα της εργασίας από το τελευταίο μέρος της (και προχωρώντας σταδιακά προς την αρχή της) μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής:

• ΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ παρουσιάστηκε μία σύγχρονη διαπραγμάτευση της μερκατορικής προβολής και των ιδιοτήτων της βασισμένη στο πλαίσιο της Διαφορικής Γεωμετρίας. Η ίδια ακριβώς έννοια πιο πριν (και στις παραγράφους 7 έως 10 του δεύτερου μέρους) είχε ξαναπαρουσιαστεί μέσα όμως στο ιστορικό της πλαίσιο χρησιμοποιώντας τη φυσική γλώσσα των χαρτών. Εκείνη η παρουσίαση από μαθηματικής πλευράς έκανε (διαισθητική) χρήση της έννοιας του "πολύ μικρού" καθώς και (διαισθητική) χρήση της εν σμικρώ προσέγγισης της σφαίρας από το επίπεδο και της σφαιρικής γεωμετρίας από την επίπεδο ευκλείδεια (§8 και §10). Επίσης, έκανε πολύ μικρή χρήση αλγεβρικού συμβολισμού και εκτεταμένη χρήση αλλεπάλληλων αριθμητικών υπολογισμών καθώς και συχνή χρήση της τεχνικής των διαμερίσεων (§10)(*).

Η σύγκριση αυτών των δύο προσεγγίσεων δείχνει ότι:

**α)** Η σύγχρονη διαπραγμάτευση έχει το πλεονέκτημα να ενσωματώνει σ' ένα ενιαίο σώμα ορισμών και θεωρημάτων όλα τα βασικά αποτελέσματα που εκτέθηκαν στην ιστορική παρουσίαση˙ αρκετές φορές μάλιστα τα επεκτείνει. Παραδείγματα αυτής της επέκτασης αποτελούν η αλγεβρική εξίσωση των λοξοδρομικών καμπύλων (§17), η απόδειξη της ιδιότητας ότι μεταξύ δύο οποιονδήποτε τόπων πάνω στη Γη διέρχονται άπειρες στο πλήθος λοξοδρομίες (παράρτημα 1), καθώς και η απόδειξη ότι η μερκατορική προβολή αποτελεί τη μοναδική λύση στο χαρτογραφικό πρόβλημα που έθεσε ο Mercator (§18).

**β)** Από την άλλη, μέσα στη σύγχρονη διαπραγμάτευση ατονεί ο τρόπος με τον οποίο αναδύθηκαν και διαμορφώθηκαν οι έννοιες(**) ενώ χάνεται εντελώς ο τρόπος με τον

---

(*) Σημειωτέον, η στοιχειώδης ιστορία της ναυσιπλοίας και της ναυτικής χαρτογραφίας που εκτίθενται στο πρώτο μέρος (§4, §5) δείχνουν ότι αυτή η εν σμικρώ προσέγγιση της σφαιρικής γεωμετρίας από την επίπεδη ευκλείδεια, νομιμοποιήθηκε διότι οδηγεί – προκειμένου για μικρές αποστάσεις και μόνο – σε καλά δηλαδή πρακτικά χρήσιμα αποτελέσματα. Με το ίδιο ακριβώς κριτήριο η προσέγγιση αυτή κρίθηκε ακατάλληλη για μεγάλα τμήματα της (γήινης) σφαίρας.

(**) π.χ. η έννοια της χαρτογραφικής προβολής (βλέπε σημείωση 12 δεύτερου μέρους), η έννοια της μερκατορικής προβολής και γενικότερα η έννοια της σύμμορφης απεικόνισης. Οι έννοιες αυτές στο πρώτο και στο δεύτερο μέρος εκφράστηκαν μέσα από τη φυσική γλώσσα της Γεωγραφίας.

οποίο κατακτήθηκαν τα θεμελιώδη αποτελέσματα(*). Αυτό βέβαια συμβαίνει γιατί από τη μία προσέγγιση στην άλλη αλλάζει εντελώς το πλαίσιο αναφοράς(**).

**γ)** Πάντως, η ιστορική παρουσίαση των εννοιών μπορεί να λειτουργήσει ως ένα "φυσικό" κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των σύμμορφων απεικονίσεων θέτοντας στο κέντρο του ενδιαφέροντος ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα της διαφορικής γεωμετρίας: αυτό της κατασκευής ενός επίπεδου χάρτη της Γης ο οποίος να πληροί συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες (που επιβάλλουν βέβαια οι ανάγκες της ναυσιπλοΐας). Μάλιστα αρκετά συχνά μέσα στην εργασία η ιστορική προσέγγιση λειτούργησε και ως ένα βασικό και χειροπιαστό κίνητρο και για την ανάπτυξη πρωταρχικών εννοιών της διαφορικής γεωμετρίας όπως αυτή της επιφάνειας (§13).

- ΑΠΟ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ της εργασίας και από τις παραγράφους τις σχετικές με την ιστορία του ολοκληρώματος της τέμνουσας μιας γωνίας (παράγραφοι 10 και 11) προκύπτει ότι:

**α)** Οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν για πρώτη φορά με τον υπολογισμό του $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$ «*πράγματι επ' ευκαιρίας αυτού του χάρτη του Mercator*», όπως πολύ χαρακτηριστικά το διατύπωσε και ο Edward Wright (§12 της εργασίας).

**β)** Ο υπολογισμός του $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$ ξεκινώντας από τον Edward Wright (και τους προσεγγιστικούς του υπολογισμούς μέσω διαμερίσεων), ενέπλεξε μία πλειάδα πολύ σημαντικών μαθηματικών και όπως δείχνουν τα ιστορικά γεγονότα που παρουσιάστηκαν (§11) «*εξελίχθηκε σ' ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα των μέσων του 17ου αι.*» (Rickey and Tuchinsky, 1980). Ο υπολογισμός αυτός ούτε λίγο ούτε πολύ απασχόλησε τους μαθηματικούς από το 1599 (Wright) μέχρι και το 1696 (Halley).

---

(*) π.χ. η απόδειξη του ότι οι σύμμορφες απεικονίσεις διατηρούν την ομοιότητα σε απειροστή κλίμακα ή η απόδειξη του σύμμορφου χαρακτήρα της μερκατορικής προβολής.

(**) Έτσι στην κατασκευή της μερκατορικής προβολής και στην απόδειξη του σύμμορφου χαρακτήρα της στην §18, κεντρικό ρόλο παίζουν η εκτεταμένη χρήση της άλγεβρας και των συναρτήσεων, ο απειροστικός λογισμός (επίλυση διαφορικής εξίσωσης) καθώς και οι βασικές έννοιες της θεωρίας επιφανειών. Στο ίδιο ζήτημα ο Mercator κι ο Wright χρησιμοποίησαν ο μεν πρώτος γεωμετρικά επιχειρήματα επίπεδης ευκλείδειας γεωμετρίας (§8, παρατηρήσεις 3), 4)), ο δε δεύτερος εκτός αυτών και επαναλαμβανόμενους αριθμητικούς υπολογισμούς και αθροίσεις καθώς και αλλεπάλληλες διαμερίσεις (§10).

Πολύ συχνά στα σύγχρονα εγχειρίδια Διαφορικής Γεωμετρίας ο σύμμορφος χαρακτήρας της μερκατορικής προβολής παρουσιάζεται απλώς σαν εφαρμογή μιας γενικής θεωρίας (και όχι σαν κινητήριος μοχλός της) ενώ ο τύπος της δίνεται έτοιμος (π.χ. Do Carmo, 1976, p.230).

**γ)** Σ' όλη αυτή τη χρονική διάρκεια το ολοκλήρωμα φαίνεται να έδωσε το έναυσμα για την πρώτη χρήση άπειρων σειρών στην Ανάλυση (Carslaw 1924).

**δ)** Επίσης, ο υπολογισμός του από τον Isaac Barrow γύρω στα 1670 φαίνεται να αποτελεί την πρώτη καταγεγραμμένη περίπτωση ολοκληρώματος που υπολογίζεται με ανάλυση της προς ολοκλήρωση συνάρτησης σε απλά κλάσματα (Tuchinsky 1978, Rickey and Tuchinsky, 1980). Ο υπολογισμός αυτός (όπως είδαμε και στη σημείωση 29 του δεύτερου μέρους) μπορεί να γενικευτεί άμεσα δημιουργώντας μία μεγάλη κατηγορία ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο. Η κατηγορία αυτή απαντάται σε όλα σχεδόν τα φροντιστηριακά βιβλία του Ελληνικού Λυκείου.

**ε)** Τελικά, το ολοκλήρωμα $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$ του μερκατορικού χάρτη φαίνεται να συνέβαλε με τον τρόπο του στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού στα πρώτα του στάδια. Μάλιστα οι Rickey και Tuchinsky (1980), χαρακτηρίζουν την όλη περίπτωση ως «*μία εφαρμογή της Γεωγραφίας στα Μαθηματικά παρά το αντίστροφο*».

**στ)** Βέβαια, η παράθεση των ιστορικών γεγονότων στην §11 δείχνει ότι από ένα χρονικό σημείο και μετά, τα πράγματα λειτούργησαν και αντίστροφα: χωρίς μία αυστηρή διαπραγμάτευση των άπειρα μικρών μεταβολών, μία πολύ ακριβής κατασκευή του μερκατορικού χάρτη δεν θα μπορούσε να υπάρξει. Η διαπραγμάτευση αυτή δεν είναι άλλη απ' αυτή του Απειροστικού Λογισμού τον Newton και Leibnitz. Το συμπέρασμα αυτό είναι σε απόλυτη συμφωνία με τον Tuchinsky (1978).

• ΣΤΟΝ ΑΠΟΗΧΟ ΟΛΩΝ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ αξίζει να σταθούμε ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ της εργασίας. Από τα όσο ελέχθησαν εκεί φάνηκε ότι:

**α)** Οι μαθηματικές απαιτήσεις που πρέπει να πληροί η μερκατορική προβολή πρωτοαναδείχτηκαν και καθορίστηκαν από τον τρόπο που ναυσιπλοούσαν οι Ευρωπαίοι πάνω στην υδρόγειο (τον 16$^{ο}$ αιώνα) αποβλέποντας στην επέκταση του εμπορίου σε παγκόσμια κλίμακα και των ορίων του γνωστού σ' αυτούς κόσμου[(*)].

**β)** Από ένα σημείο και μετά η πλήρης ικανοποίηση αυτών των απαιτήσεων κατέστησε επιτακτική την ανάγκη αυτές να επαναδιατυπωθούν με καθαρά

---

[(*)] Οι ναυσιπλόοι «*ποτέ δεν έκρυψαν την ανάγκη τους για καλύτερους χάρτες. (Γύρω στο 1550) ο Martin Cortes οδύρονταν γιατί οι σοφοί άντρες φαίνονταν ότι δεν μπορούσαν να κατασκευάσουν ακριβείς χάρτες*» (από Brown, 1979). Ακόμη και την περίοδο που ο Mercator ανακάλυπτε τον μερκατορικό χάρτη ένας άλλος συγγραφέας και χαρτογράφος δήλωνε «*...κάτω από τις υπάρχουσες συνθήκες δεν έχει κανένα νόημα να ακολουθείς επί μακρόν μία πλεύση σταθερής πυξίδας έτσι όπως εμφανίζεται στο χάρτη*» (ο.π.).

μαθηματικούς όρους (Mercator) και να δουλευτούν πλέον "εσωτερικά" στα ίδια τα Μαθηματικά ( όπως είδαμε στο β΄ μέρος της εργασίας η ακριβής κατασκευή του μερκατορικού χάρτη εξελίχθηκε σ' ένα σχεδόν εσωτερικό ζήτημα των πανεπιστημίων του Cambridge και της Οξφόρδης, καθώς και των μαθηματικών της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου).

**γ)** Όλα αυτά τα στοιχεία φαίνεται να συνηγορούν με τον καλύτερο τρόπο ότι τουλάχιστον στην περίπτωση της μερκατορικής προβολής και των συνδεδεμένων μ' αυτή σύμμορφων απεικονίσεων «*η βαθιά μελέτη της Φύσης είναι η πιο γόνιμη πηγή μαθηματικών ανακαλύψεων*» (Fourier, 1807). Στην προέκτασή του βέβαια το συμπέρασμα αυτό οδηγεί ξανά στο… αιώνιο ερώτημα: Πόσο σαφείς είναι οι διαχωριστικές γραμμές ανάμεσα σ' ένα εφαρμοσμένο πρόβλημα και σ' ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα; Ή αλλιώς, πότε κάποιος κάνει εφαρμοσμένα και πότε καθαρά μαθηματικά(*);

**δ)** Επιπλέον, τα συμπεράσματα α) και β) αυτής της υποενότητας φαίνεται να στηρίζουν την άποψη που συχνά αναφέρεται σε βιβλία που καταπιάνονται με την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών ότι, τα μαθηματικά αποτελούν συστατικό στοιχείο αυτού που ονομάζεται Δυτικός Πολιτισμός.

• ΚΛΕΙΝΟΝΤΑΣ ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ θα ξαναθυμίσουμε τις (τουλάχιστον) τρεις διαφορετικές διατυπώσεις του κεντρικού προβλήματος αυτής της μελέτης:

1η διατύπωση: Σε τι είδους χάρτη θα μπορούσε μία πλεύση σταθερής πυξίδας εύκολα και με ακρίβεια να χαραχτεί και (κατόπιν) να ακολουθηθεί; πώς κατασκευάζεται ένας τέτοιος χάρτης; (διατύπωση πριν το Mercator, §5, σελ. 15).

2η διατύπωση: Να απλωθεί η επιφάνεια της σφαίρας πάνω στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε οι λοξοδρομικές καμπύλες να μετασχηματίζονται σε ευθύγραμμα τμήματα και οι διευθύνσεις πάνω στο χάρτη (δηλαδή οι γωνίες) να είναι ίδιες με τις αληθείς διευθύνσεις (δηλαδή τις γωνίες πάνω στη Γη). Πρόκειται για τη διατύπωση του Mercator που συναντήσαμε στην παράγραφο 8 και στις σελίδες 33, 35.

3η διατύπωση: Να αποδειχθεί ότι $\int_{o}^{\varphi_o} \sec\varphi \cdot d\varphi = -\ln\tan\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_o\right)\right]$ (εικασία του Bond) και να δοθεί ένας ακριβής τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος.

(*) π.χ. ο Wallis όταν απαντούσε στον κύριο Richard Norris (βλέπε παράγραφο 11.4), έκανε καθαρά ή εφαρμοσμένα μαθηματικά;…

Οι διατυπώσεις αυτές (καθώς και τα αναλυτικά ιστορικά γεγονότα που παρατέθηκαν) οδηγούν σ' ένα επιπλέον συμπέρασμα:

**ε)** Το πρόβλημα που μελετήσαμε δεν κατέχει ένα καθαρό – αυτόνομο μαθηματικό χώρο στον οποίο εξαρχής τέθηκε, νοηματοδοτούνταν και βελτιωνόταν από τις προσπάθειες διάφορων μαθηματικών. Αντίθετα, υπάρχει μέσα σ' ένα *ενιαίο χώρο* Γεωγραφίας, Χαρτογραφίας, Μαθηματικών και Ναυσιπλοίας. Σ' αυτόν τον *ενιαίο χώρο* είναι που αναδεικνύεται μία πολιτισμική διάσταση των Μαθηματικών.

Αν στη διδακτική πράξη ο *ενιαίος χώρος* αποσιωπηθεί, τότε μοιραία το μαθηματικό πρόβλημα εκπίπτει σε μια απλή εφαρμογή κάποιας γενικότερης θεωρίας με αποτέλεσμα η όποια πολιτισμική διάσταση των Μαθηματικών να μην δύναται να αναδειχθεί[(*)].

---

[(*)] Κεντρικό ρόλο σ' αυτή την ανάδειξη είχε – στην περίπτωσή μας – η ιστορική επιχειρηματολογία η οποία ήταν διαρκής και όχι υπό μορφή ιστορικού σημειώματος.