ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Το πλαίσιο της διδασκαλίας της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, ως κίνητρο για την βαθύτερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών »

ΣΩΤΗΡΗΣ ΣΥΡΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Παναγιώτης Σπύρου (επιβλέπων Καθηγητής)	Επ. Καθηγητής	.....
2) Δέσποινα Πόταρη	Αν. Καθηγήτρια	.....
3) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Καθηγητής	.....

Στην γυναίκα μου Αρετή και τον γιό μου Παναγιώτη

Ευχαριστώ την τριμελή επιτροπή που συνέβαλε σ' αυτή την προσπάθεια και ιδιαίτερα τον κ. Σπύρου για τον χρόνο που διέθεσε, την υπομονή του και τις συμβουλές του.

Επίσης ευχαριστώ, για την πολύτιμη συμπαράστασή τους, τον Γιώργο Ψυχάρη και την Ειρήνη Κουλέτση

Περιεχόμενα

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ; 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ 25

Α. ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΤΡΟΠΟΥΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ 25

Β. ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ «ΤΙ ΕΜΠΟΔΙΖΕΙ» ΤΗΝ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ 35

Γ. ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ 41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ 49

Α. Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 49

Β. Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝΚΑΙ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 89

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο} : ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ 92

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}: ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 109

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο} : ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ 125

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 142

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ 1-6 148

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

«Αγαπητέ Κύριε,

«Οι περισσότεροι από μας έχουν διδάξει μερικά πράγματα για το ξεκίνημα των εκθετικών ιδεών με την χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\psi = 2^x$. …. Εάν δεχτούμε ότι διατηρείται ο πολλαπλασιαστικός κανόνας για τους εκθέτες μπορούμε εύκολα να δούμε τι σημαίνουν οι κλασματικοί και αρνητικοί εκθέτες ....Έχω πραγματικά μια ερώτηση που δεν μπορώ να απαντήσω: τι μπορούμε να πούμε για τους άρρητους ή ακόμα για τις υπερβατικούς εκθέτες; Φυσικά μπορώ να βρω αριθμητικές προσεγγίσεις για το $2^{\sqrt{2}}$ και το 2^{π}, αλλά κάνοντάς το αυτό υποθέτω ότι συμπεριφέρονται σαν κανονικοί εκθέτες, που είναι αρκετά σαφές ότι δεν είναι. Αποδίδουμε «νόημα» στους αρνητικούς και τους κλασματικούς εκθέτες. Μπορεί κάποιος (μπορεί κανείς;) να κάνει κάτι για τους άλλους εκθέτες που ανέφερα; Και αν όχι τότε πρέπει να πούμε ότι η $\psi = 2^x$ δεν είναι, τελικά, μια συνεχής συνάρτηση και έτσι όλη η κουβέντα για την παραγώγιση στερείται θεμελίωσης…. Όλα αυτά μου φαίνονται πολύ παράξενα και αν κάποιος είναι ικανός να οργανώσει τα πράγματα με έναν συστηματικό τρόπο παρακαλώ να το κάνει. Αλλά για να γυρίσω στην ερώτησή μου: τι μπορούμε να πούμε (ή να σκεφτούμε) σχετικά με το $2^{\sqrt{2}}$ και το 2^{π};»

Γράμμα αναγνώστη στο περιοδικό Mathematics Teaching 86 (1979)

Από το βιβλίο: A. Gardiner (1980) Infinite Processes. Background to Analysis

Springer-Verlag W New York Heidelberg Berlin

Κάποιες τέτοιες σκέψεις, όπως αυτές του συναδέλφου που έγραψε το παραπάνω γράμμα, ήταν αυτές που με έκαναν να ξεκινήσω αυτήν την εργασία. Η αρχική μου ερώτηση ήταν ακριβώς αυτή: τι *σημαίνει* δύναμη με εκθέτη άρρητο; Και κυρίως, πως θα διδάξω αυτήν την έννοια στους μαθητές μου στο Λύκειο;

Στο σχολικό βιβλίο η δύναμη με άρρητο εκθέτη ορίζεται ως το όριο των δυνάμεων με εκθέτη την ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του άρρητου εκθέτη με ν δεκαδικά ψηφία, όταν το ν τείνει στο άπειρο. Οι μαθητές βλέπουν το όριο για πρώτη φορά. Στην ουσία δηλαδή λέει στους μαθητές ότι η δύναμη με άρρητο εκθέτη είναι κάποιο όριο. Οι μαθητές δεν ξέρουν βέβαια τι σημαίνει όριο. Άτυπα το βιβλίο ορίζει ως όριο ή οριακή τιμή (αναφερόμενο σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα που δίνει πριν τον γενικό ορισμό) ως εξής: «Όταν το πλήθος των δεκαδικών προσεγγίσεων της ακολουθίας (1) (των δεκαδικών προσεγγίσεων του άρρητου εκθέτη) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) (της ακολουθίας των αντίστοιχων δυνάμεων) φαίνεται να προσεγγίζουν έναν ορισμένο αριθμό που λέγεται

όριο της ακολουθίας αυτής». Μετά λέει ότι, γενικά, αποδεικνύεται ότι οι όροι της ακολουθίας α^{ρ_ν} «προσεγγίζουν» ένα πραγματικό αριθμό, τον οποίο θα τον λέμε όριο της ακολουθίας.

Δηλαδή, το όριο αυτής της ακολουθίας είναι ένας αριθμός που οι όροι της «προσεγγίζουν» αλλά και ο πραγματικός αριθμός είναι αυτό το όριο.

Τι είναι λοιπόν ο αριθμός που παριστάνει μια δύναμη με άρρητο εκθέτη; Ένα όριο

Τι είναι ένα όριο; Ένας αριθμός (που «προσεγγίζεται» σε μία άπειρη διαδικασία.)

Αυτή είναι λοιπόν η στιγμή που οι μαθητές μπαίνουν στον κόσμο του απειροστικού λογισμού, τον οποίο θα διδαχθούν πιο συστηματικά στην επόμενη τάξη, με τρόπο, και έτσι νομίζω συνεχίζουν και στην επόμενη τάξη, που είναι τελείως «ακατανόητος» για αυτούς.

Δεν νομίζω ότι θα βρούμε πολλούς μαθητές που θα τους φαίνεται πειστική μια τέτοια ερμηνεία της δύναμης με άρρητο εκθέτη (για να μην πάμε ακόμα και στην ερμηνεία των δυνάμεων με ρητό εκθέτη που πάλι βασίζεται σε ένα αυθαίρετο «αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα….», δες σελ. 122 του σχολικού βιβλίου) και θέλω να πιστεύω και ελάχιστους καθηγητές, τουλάχιστον ανάμεσα σε κείνους που ενδιαφέρονται η διδασκαλία τους να έχει «νόημα» για τους μαθητές.

Στην ουσία, ο ορισμός που δίνεται από το βιβλίο εμπεριέχει την αιτία η οποία οδήγησε στην αριθμητικοποίηση της ανάλυσης (δες Κεφάλαιο 1): η ανάγκη να «βελτιωθεί» το κριτήριο του Cauchy για τη σύγκλιση ακολουθίας οδήγησε στο να οριστεί ο πραγματικός αριθμός ανεξάρτητος από την έννοια του ορίου. Φτάσαμε έτσι στο αξίωμα της πληρότητας ή συνέχειας και στην θεμελίωση του σώματος των πραγματικών αριθμών. Μετά μπορούσαμε να αποδείξουμε αν θέλουμε ότι, για παράδειγμα, ένας συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός είναι το όριο των δεκαδικών προσεγγίσεών του. Η βάση όμως όλου του συστήματος έγινε η, ανεξάρτητη, έννοια του πραγματικού αριθμού. Τι μας λέει τότε το βιβλίο; Το βιβλίο φτάνει, πιθανώς, μέχρι την εποχή του Cauchy όπου ο απειροστικός λογισμός ήταν συνδεδεμένος με την γεωμετρική εποπτεία και όπου δεν υπήρχε ιδιαίτερη ανησυχία για την ύπαρξη κάποιου αριθμού. Εθεωρείτο δεδομένη από την γεωμετρική εποπτεία της ευθείας των αριθμών. Χρειάστηκε το θεώρημα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών για να μας εξασφαλίσει την ύπαρξη και τον ορισμό των πραγματικών αριθμών.

Τώρα θα πείτε: αφού τόσους αιώνες οι μαθηματικοί μπόρεσαν να δημιουργήσουν τόσα και τόσα έχοντας μόνο μία διαισθητική γνώση για τους πραγματικούς αριθμούς γιατί θα πρέπει να ενδιαφερόμαστε για το τι παραπάνω θα χρειαζόμασταν να πούμε στους σημερινούς μαθητές μας; Πόσο μάλλον όταν για να τους μιλήσουμε για κάτι παραπάνω θα πρέπει να πάμε στην αξιωματική θεωρία κάτι που φαντάζει εξαιρετικά δύσκολο. Όλα αυτά φαίνεται να είναι αδύνατον να διδαχθούν σε μαθητές του Λυκείου και ακόμα περισσότερο σε μαθητές της Β΄ Λυκείου στους οποίους όμως (παραδόξως;) η έννοια της δύναμης με εκθέτη άρρητο «πρέπει» (σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα) να διδαχθεί! Και όμως πραγματικά πρέπει οι μαθητές της Β΄ Λυκείου να κατανοήσουν αυτήν την έννοια, όπως και γενικότερα την έννοια του πραγματικού αριθμού που είναι η βάση της ανάλυσης την οποία θα διδαχθούν στη επόμενη τάξη.

Αποφάσισα έτσι να προσπαθήσω να προσεγγίσω μια διδασκαλία της έννοιας αυτής και μέσα από την διδασκαλία της ήλπιζα ότι θα μου δοθεί η ευκαιρία να συζητηθούν στην τάξη και άλλα θέματα σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς, όπως η έννοια της πυκνότητας, η συνέχεια και φυσικά το όριο προκειμένου να βοηθήσω τους μαθητές μου (στο σχολείο που εργάζομαι) να προετοιμαστούν για τις έννοιες της Ανάλυσης της Γ΄ Λυκείου.

Η βιβλιογραφία όμως πάνω στην διδασκαλία της έννοια της δύναμης με εκθέτη άρρητο αριθμό, αλλά και γενικότερα πάνω στην διδασκαλία της έννοιας του πραγματικού αριθμού, είναι μάλλον φτωχή (τουλάχιστον στον βαθμό που εγώ μπόρεσα να την εξερευνήσω). Το κύριο στήριγμά μου, προκειμένου να κατασκευάσω μια (πειραματική) διδασκαλία που να έχει ουσιαστική επεξηγηματική αξία, ήταν η ερευνητική εργασία πάνω στην εκθετική συνάρτηση της ερευνήτριας Jere Confrey και των συνεργατών της. Μέσω των θεωριών της Confrey, η οποία μέσω της εκθετικής συνάρτησης αναπτύσσει έναν «πολλαπλασιαστικό κόσμο» σε αντίθεση με τον συνήθη «προσθετικό κόσμο» (βασιζόμενη και στην ιστορική εξέλιξη των σχετικών εννοιών), μπορεί κανείς να συλλάβει μια *ενιαία* εξήγηση των δυνάμεων με εκθέτη γενικά ρητό αριθμό. Προσπάθησα να επεκτείνω την λογική της για να φτάσω σε μια πρόταση για την διδασκαλία που να περιλαμβάνει και τους άρρητους εκθέτες.

Η εργασία αυτή, εκτός από την παρουσίαση αυτής της πειραματικής διδασκαλίας και ενός σχετικού ερωτηματολογίου, περιλαμβάνει μια ευρεία βιβλιογραφική έρευνα, το μεγαλύτερο μέρος της οποίας μου χρειάστηκε προκειμένου να αναλύσω την διδασκαλία αυτή, μετά την πραγματοποίηση της. Η πειραματική διδασκαλία για την εργασία αυτή δεν είναι μια προτεινόμενη διδασκαλία αλλά ένα αντικείμενο εξέτασης προκειμένου να

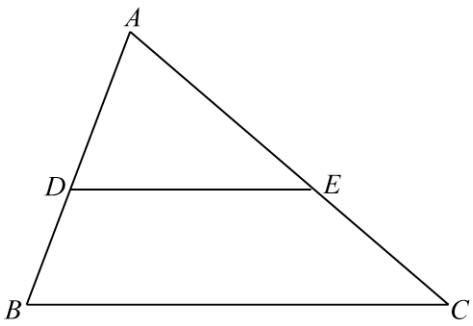
ερευνήσουμε αν το πλαίσιο της εκθετικής συνάρτησης μπορεί πράγματι να μας επιτρέψει να επιτύχουμε μια καλύτερη μεταξύ μας μαθηματική επικοινωνία με αντικείμενο τους πραγματικούς αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ;

Η έννοια των πραγματικών αριθμών (**Merenluoto – Lehtinen, 2002**) είναι μια από τις πιο σύνθετες και βαθιές έννοιες των μαθηματικών. Σαν κατασκευή των ανώτερων μαθηματικών είναι απολύτως αφηρημένη και τελείως απρόσιτη στις αισθήσεις μας και (κατά την Sfard,1991) μπορούμε να την προσεγγίσουμε μόνο «με τα μάτια του μυαλού μας». Οι μαθηματικοί έχουν διαφορετικά είδη αυστηρών κατασκευών για αυτούς τους αριθμούς με ποιο γνωστούς εκείνους όπου οι πραγματικοί αριθμοί παρουσιάζονται ως όρια ακολουθιών (προσέγγιση που, σε ένα μη τυπικό πλαίσιο, ακολουθούμε σε αυτήν την εργασία) ή ως τομές της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Αυτές οι κατασκευές, ωστόσο, είναι σχετικά νέες στην ιστορία των μαθηματικών: ο αυστηρός ορισμός για τους πραγματικούς αριθμούς αναπτύχθηκε στο τέλος του 19^{ου} αιώνα.

Το κύριο πρόβλημα για την αργή ανάπτυξή τους, σύμφωνα με τις Merenluoto – Lehtinen, 2002, ήταν η διχοτομία των συνεχών και διακριτών μεγεθών. Η βασική ιδέα των αριθμών από την Αρχαιότητα ήταν η διακριτή τους φύση ως συλλογή αντικειμένων, ενώ τα συνεχή μεγέθη δεν μετρούνταν με αριθμούς αλλά με γραμμές. Ο Boyer,(1949) ομοίως υποστηρίζει ότι η βαθύτερες πηγές των πραγματικών αριθμών βρίσκονται σε δύο από τις πιο προφανείς όψεις της φύσης: την πολλαπλότητα και την μεταβλητότητα, δηλαδή την δυνατότητα της επανάληψης και της συνέχειας.

Για τους αρχαίους Έλληνες, (Tall & Katz, 2010x) η γεωμετρία και η αριθμητική θεωρούνταν θεμελιωδώς διακριτά πεδία. Οι πράξεις της αριθμητικής μπορούν να εφαρμοστούν στους φυσικούς αριθμούς και στα κλάσματα , αλλά το γινόμενο δύο μηκών ήταν ένα εμβαδόν, έτσι οι αρχαίοι Έλληνες δεν οικοδόμησαν μια πλήρη αριθμητική στην γεωμετρία.



Η θεωρία τους των αναλογιών περιοριζόταν στο να συγκρίνει μεγέθη του ίδιου είδους . Για παράδειγμα, για το παρακάτω σχήμα όπου το DE είναι παράλληλο με το BC η αναλογία AB:AD :: AC:AE που προκύπτει ερμηνευόταν ως: «το AB είναι για το AD ότι το AC για το AE» (Πρόταση 1 από το βιβλίο VI των Στοιχείων του Ευκλείδη)

Τον 17^{ο} αιώνα, ο Descartes (1653) ξεπέρασε(Tall & Katz, 2010x και Γιαννακούλιας, 2007, σελ. 169)) τους περιορισμούς που συνεπαγόταν η αρχαία οπτική με την απλή μέθοδο της επιλογής ενός μήκους ως μονάδα σε ένα συγκεκριμένο υπολογισμό. Μπορούσε έτσι να πολλαπλασιάζει και να διαιρεί μήκη.

Ξαναγράφοντας την αναλογία AB:AD :: AC:AE ως $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ και επιλέγοντας AE = 1, μπορούσε να υπολογίσει το AB = AC × AD θεωρώντας το πλέον ως ένα άλλο μήκος και όχι σαν ένα εμβαδόν. Αυτό όχι μόνο έδωσε μια πλήρη αριθμητική των αριθμών ως μήκη, αλλά του επέτρεψε να συνδέσει την θέση ενός σημείου σε μια γραμμή με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (συνταγμένων) και μια επίπεδη καμπύλη να θεωρείται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων οι συντεταγμένες την επαληθεύουν. Με την Καρτεσιανή (αναλυτική) γεωμετρία εισάγεται στα Μαθηματικά η έννοια του **μεταβλητού μεγέθους** και παράλληλα εγκαινιάζεται μια συμπληρωματική ανταλλαγή ιδεών ανάμεσα στην Γεωμετρία και την Άλγεβρα. Οι εργασίες του Descartes θα σημάνουν την έναρξη της περιόδου της **«Αριθμητικοποίησης»** των Μαθηματικών που η ολοκλήρωσή της θα ξεπεράσει τα διακόσια χρόνια.

Ο απειροστικός λογισμός του Leibniz (1646 – 1716) (Γιαννακούλιας, 2007, σελ. 348), διαπραγματευόταν κυρίως καμπύλες ή σχέσεις μεταξύ μεταβλητών γεωμετρικών μεγεθών, συνδεδεμένων με την καμπύλη, με συνέπεια να μην μπορεί να γίνει κατανοητός δίχως αναφορά στην γεωμετρική του ερμηνεία. Χρησιμοποίησε (Tall & Katz, 2010x) τις ιδέες του Descartes για να υπολογίσει τις κλίσεις των καμπυλών και τα εμβαδά επιφανειών που περιορίζονταν από καμπύλες, θεωρώντας μια καμπύλη σαν ένα πολύγωνο με έναν άπειρο αριθμό απειροελάχιστα μικρών πλευρών, έτσι ώστε να μπορεί να υπολογίσει την κλίση μιας καμπύλης σαν τον λόγο dψ/dχ για απειροελάχιστες αυξήσεις dχ και dψ στην ανεξάρτητη μεταβλητή χ και στην εξαρτημένη μεταβλητή ψ.

Ο Euler (1707 – 1783)συνέχισε (Tall & Katz, 2010x) την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού στον 18^{ο} αιώνα, εστιάζοντας στην άλγεβρα παρά στην γεωμετρία, επιτρέποντας υπολογισμούς με απειροστά σαν να ήταν κανονικοί αριθμοί. Έγραφε το 1749 : «Ο απειροστικός λογισμός αφορά μεταβλητές ποσότητες, που σημαίνει ποσότητες εξεταζόμενες γενικά». Επίσης ο-Euler (Γιαννακούλιας, 2007, σελ. 310) ήταν ο πρώτος που έδωσε έναν ορισμό για την έννοια της συνάρτησης, την οποία έκανε βασική έννοια για τα Μαθηματικά.

Στο ξεκίνημα του 19^{ου} αιώνα (Tall & Katz, 2010x) ο Cauchy (1789 – 1857) υιοθέτησε μια πιο συγκεκριμένη άποψη για τις μεταβλητές ποσότητες, ορίζοντας ένα απειροστό με όρους μιας ακολουθίας των οποίων οι όροι φθίνουν στο 0. Έδωσε τον ακόλουθο ορισμό για το απειροστό (Γιαννακούλιας, 2007, σελ. 351): «Όταν οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας μειώνονται διαρκώς με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνονται μικρότερες από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα, εκείνη η μεταβλητή γίνεται αυτό που ονομάζουμε απειροστό. Μια τέτοια μεταβλητή έχει όριο το 0».

Ο Cauchy θεώρησε σαν βασική έννοια την έννοια του ορίου (που -Γιαννακούλιας, 2007,σελ.350- από την εποχή του Newton είχε θεωρηθεί , ερμηνευμένο γεωμετρικά, ως ένα σύνορο που μπορούσε να προσεγγιστεί ολοένα και περισσότερο, δίχως όμως να ξεπεραστεί) πάνω στην οποία βάσισε όλες τις υπόλοιπες έννοιες του απειροστικού λογισμού. Ο ορισμός του ορίου (Bagni, G.,2003) που έδωσε ήταν:

«Όταν οι τιμές μιας μεταβλητής προσεγγίζουν απεριόριστα μια σταθερή τιμή, όσο κοντά θέλουμε, αυτή η σταθερή τιμή είναι το *όριο* όλων αυτών των τιμών. Για παράδειγμα, ένας **άρρητος** αριθμός είναι το όριο όλων των διαφορετικών κλασμάτων που δίνουν προσεγγιστικές τιμές για αυτό»

Το σημαντικό (Katz, 1998),και αυτό που διαφοροποιεί την αντίληψη του Cauchy για το όριο σε σχέση με τους προγενέστερους του μαθηματικούς, είναι, όπως φαίνεται από τις αποδείξεις των θεωρημάτων του, ότι μεταφράζει τους ισχυρισμού του αριθμητικά χρησιμοποιώντας την γλώσσα των ανισοτήτων. Ήταν η πρώτη χρήση της λογικής των ε- δ ορισμών για το όριο (Grabiner, 1983) τους οποίους απέδωσε, με την μορφή που τους ξέρουμε σήμερα, ο Weierstrass (Boyer, 1949 σελ. 286).

Αυτό γίνεται επίσης φανερό και στο χρήσιμο κριτήριο που είχε βρει ο Cauchy για την σύγκλιση μιας ακολουθίας, που με σημερινή σημειογραφία γράφεται:

Η ακολουθία (α_ν) *συγκλίνει αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ακέραιος* $\mu > 0$ *ώστε για κάθε* $\kappa > \mu$, $|\alpha_\mu - \alpha_\kappa| < \varepsilon$.

Αυτό φαίνεται (Giaquinto, 2002) σωστό: Αν μπορούμε να δείξουμε ότι οι όροι της ακολουθίας τελικά είναι οσοδήποτε κοντά θέλουμε, η ακολουθία κάπου θα καταλήγει. Αλλά για να αποδειχθεί αυτό χρειάζεται να θεωρήσουμε το σύστημα των πραγματικών αριθμών. Παρόμοια εικασία είναι ότι αν όλοι οι όροι μιας αύξουσας ακολουθίας είναι μικρότεροι από κάποιον αριθμό, τότε η ακολουθία θα συγκλίνει.

Και αυτό επίσης *φαίνεται* σωστό: κάποιος μπορεί να φανταστεί τους όρους μιας ακολουθίας να συμπιέζονται όλο και περισσότερο καθώς πλησιάζουν το άνω φράγμα του συνόλου των όρων της από κάτω, μέχρι να καταλήξουν σε ένα σημείο, και αυτό θα μπορούσε να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της ακολουθίας, το όριό της. Αλλά πάλι για να αποδειχθεί αυτό χρειάζεται να θεωρήσουμε το σύστημα των πραγματικών αριθμών.

Ο Cauchy προσπάθησε (Boyer, 1949, σελ. 281) να αποδείξει το θεώρημα για την σύγκλιση ακολουθίας αλλά απέτυχε γιατί η κατανόησή του για τους πραγματικούς αριθμούς (Katz, 1998) ήταν στο επίπεδο της διαισθητικής κατανόησης. Παρότι είχε δώσει τον ορισμό, που αναφέραμε παραπάνω, για τους άρρητους αριθμούς, θεωρούσε ως εκ των προτέρων δεδομένη την ύπαρξη ενός τέτοιου αριθμού χωρίς κανένα επιχείρημα που να αιτιολογεί την βεβαιότητά του αυτή.

Η αποτυχία αυτή του Cauchy ήταν (Giaquinto, 2002)**το αποτελεσματικό κίνητρο** για να φτάσουμε στον ορισμό του πραγματικού αριθμού.

Χωρίς έναν ολοκληρωμένο ορισμό των άρρητων αριθμών η πλήρης απόδειξη του κριτηρίου σύγκλισης του Cauchy είναι αδύνατη:

Ο Cauchy είχε υποστηρίξει, όπως είδαμε πριν, ότι οι άρρητοι αριθμοί πρέπει να ειδωθούν ως όρια ακολουθιών ρητών αριθμών. Από την στιγμή (Boyer, 1949, σελ. 281) που ένα όριο ορίζεται σαν ένας αριθμός τον οποίο οι όροι της ακολουθίας προσεγγίζουν με τέτοιο τρόπο που τελικά η διαφορά ανάμεσα σε αυτόν τον αριθμό και τους όρους της ακολουθίας μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε δοσμένο αριθμό, η ύπαρξη του άρρητου αριθμού εξαρτάται, στον ορισμό του ορίου, από την γνώση της ύπαρξής του και συνεπώς του προηγουμένως δοθέντος ορισμού, της ίδιας ποσότητας της οποίας ο ορισμός επιχειρείται.

Αυτό σημαίνει (Boyer, 1949, σελ. 281) ότι, για παράδειγμα, δεν μπορεί κανείς να ορίσει τον αριθμό $\sqrt{2}$ σαν το όριο της ακολουθίας 1, 1,4, 1,41, 1,414,… επειδή για να αποδείξει κανείς ότι αυτή η ακολουθία έχει ένα όριο, θα πρέπει να υποθέσει, με βάση τον ορισμό του ορίου και της σύγκλισης, την ύπαρξη αυτού του αριθμού ως προηγουμένως αποδεδειγμένο ή ορισμένο.

Ο Cauchy δεν φαίνεται (Boyer, 1949, σελ. 281) να είχε παρατηρήσει την κυκλικότητα αυτού του συλλογισμού, αλλά σιωπηλά υπέθεσε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει ένα όριο.

Δηλαδή θεώρησε ότι η ύπαρξη ενός αριθμού που κατέχει την εξωτερική σχέση που εκφράζεται στον ορισμό, θα προέκυπτε από τις εσωτερικές σχέσεις που εκφράζονται στο θεώρημα Cauchy. Αυτή η ιδέα ίσως να βασιζόταν σε προκαταλήψεις προερχόμενες από την Γεωμετρία. Η προσπάθεια να βασιστεί η ιδέα του αριθμού πάνω σε αυτήν της γεωμετρικής γραμμής είχε προκαλέσει τις Πυθαγόρειες δυσκολίες με την ασυμμετρία και δυσκολίες στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Το ίδιο είχε υπονοήσει και ο Gregory St. Vincent, δύο αιώνες πριν τον Cauchy, ότι το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος και οι σειρές θα μπορούσαν έτσι να θεωρηθούν ότι έχουν ένα όριο. Ωστόσο, προκειμένου να γίνει η έννοια του ορίου ανεξάρτητη από την Γεωμετρία, οι μαθηματικοί του δεύτερου μισού του 19^{ου} αιώνα, προσπάθησαν να κατασκευάσουν ορισμούς για τους άρρητους αριθμούς χωρίς την χρήση του ορισμού ενός ορίου.

Ο Weierstrass (1815 – 1897) ήταν ο πρώτος που προσπάθησε συστηματικά να πετύχει τους στόχους αυτούς. Θέλησε (Boyer, C., - Merzbach, U.,1997 σελ. 629) να διαχωρίσει τον απειροστικό λογισμό από την Γεωμετρία και να τον βασίσει μόνο στην έννοια του αριθμού. Διαπίστωσε ότι για να πετύχει κάτι τέτοιο, ήταν αναγκαίο να ορίσει τους άρρητους, ανεξάρτητα από την έννοια του ορίου. Στην προσπάθειά του να λύσει το λογικό λάθος του Cauchy , έλυσε το θέμα της ύπαρξης ενός ορίου μιας συγκλίνουσας ακολουθίας, θεωρώντας, (μπορούμε να πούμε απλοποιημένα), την ίδια την ακολουθία ως τον αριθμό ή το όριο (στην πραγματικότητα όρισε τους άρρητους αριθμούς ,ευρύτερα, ως σύνολα ρητών). Ορίζοντας για παράδειγμα (Boyer, 1949 σελ. 286) το $\sqrt{2}$ με τον τρόπο αυτό, μετά μπορούμε *να αποδείξουμε*, αν θέλουμε, ότι είναι το όριο της ακολουθίας 1, 1,4, 1,41,…. εξομαλύνοντας έτσι το λογικό λάθος της θεωρίας του Cauchy.

Κάνοντας την βάση του απειροστικού λογισμού πιο αυστηρά τυπική (Boyer, 1949 σελ. 285), ο Weierstrass επιτέθηκε επίσης στην επίκληση της διαίσθησης της συνεχούς κίνησης που υπονοείται στην έκφραση του Cauchy – ότι μια μεταβλητή *προσεγγίζει* ένα όριο. Μέχρι τότε, γενικά, η μεταβλητή οριζόταν σαν ποσότητα ή μέγεθος που δεν είναι σταθερό. Αλλά από τον καιρό του Weierstrass είχε αναγνωριστεί ότι οι ιδέες της μεταβλητής και του ορίου δεν είναι ουσιαστικά εξαρτώμενες από τον χρόνο, αλλά αντιμετωπίζονται με καθαρά στατικούς όρους. Ο Weierstrass ερμήνευσε μια μεταβλητή χ απλά σαν ένα γράμμα που υποδεικνύει ένα οποιοδήποτε στοιχείο μιας συλλογής αριθμητικών τιμών. Μια συνεχής μεταβλητή οριζόταν ομοίως με στατικούς όρους. Έτσι η μεταβλητή δεν αναπαριστά μια

προοδευτική μετάβαση διαμέσου όλων των τιμών ενός διαστήματος, αλλά μια διαζευκτική υπόθεση (disjunctive assumption) από οποιαδήποτε τιμή του διαστήματος.

Στην διάρκεια του 18ου αιώνα υπήρχε (Boyer, 1949 σελ. 287) μια έντονη συζήτηση για το αν μια μεταβλητή που προσεγγίζει το όριό της μπορεί ποτέ να το φτάσει ή όχι. Αυτό είναι ουσιαστικά το κρίσιμο σημείο στο επιχείρημα του παράδοξου με τον Αχιλλέα του Ζήνωνα. Λαμβάνοντας, ωστόσο, υπόψη την ακρίβεια της θεωρίας του Weierstrass για τα όρια, το ερώτημα αυτό φαίνεται να είναι εντελώς άσχετο (μη συναφές). Στην έννοια του ορίου δεν εμπλέκεται η ιδέα της προσέγγισης, αλλά μόνο μια στατική κατάσταση. Η αόριστη διαίσθησή μας για την κίνηση, αν και ιδιαίτερα γόνιμη στην υποβολή προτάσεων των ερευνών που οδήγησαν στην εφεύρεση του απειροστικού λογισμού, βρέθηκε, στο φως της περαιτέρω ανάπτυξης της σκέψης, να είναι εντελώς ακατάλληλη και παραπλανητική. Και τι μπορούμε τότε να πούμε για την ασαφή και ασύλληπτη αίσθηση για την συνέχεια η οποία επηρεάζει τόσο πολύ την σκέψη μας; Είναι επίσης αβάσιμη; Τι μπορούμε να πούμε για την ιδέα του απείρου που ο Weierstrass είχε, με συγκεκαλυμμένο τρόπο, χρησιμοποιήσει στον ορισμό του για τους άρρητους αριθμούς; Μπορεί σε αυτό να δοθεί ένας συνεπής ορισμός; Αυτές οι ερωτήσεις ερευνήθηκαν από τους Dedekind , Cantor και άλλους μαθηματικούς (που παρουσίασαν τις δουλειές τους γύρω στο 1872) που σκέφτονταν με παρόμοιο τρόπο με τον Weierstrass αναζητώντας έναν ικανοποιητικό ορισμό για τους άρρητους αριθμούς.

Ο Dedekind (1831 – 1916) κατάλαβε (Boyer, 1949 σελ. 290) ότι η θεωρία των άρρητων αριθμών, που βρίσκεται στην ρίζα της δυσκολίας της έννοιας του ορίου, έπρεπε να αναπτυχθεί μόνο μέσω της Αριθμητικής, προκειμένου να είναι αυστηρή. Αναρωτήθηκε τι είναι αυτό που υπάρχει σε ένα συνεχές γεωμετρικό μέγεθος που ξεπερνάει την δυσκολία στην οποία προφανώς η Αριθμητική αποτυγχάνει. Δηλαδή, ποια είναι η φύση της συνέχειας; Η Γεωμετρία (Giaquinto 2002) έχει δύο νόμους για την διάταξη των σημείων μιας ευθείας. Ο ένας είναι ο νόμος της *πυκνότητας*: ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία μιας ευθείας υπάρχει κάποιο άλλο. Ο άλλος γεωμετρικός νόμος είναι ότι για κάθε διαίρεση μιας ευθείας υπάρχει ακριβώς ένα σημείο που παράγει την διαίρεση αυτή. Ο Dedekind προσδιόρισε αυτή την ιδιότητα σαν το κρίσιμο επιπλέον συστατικό (μαζί με την πυκνότητα) που κάνει μια γραμμή συνεχή. Κατέληξε (Boyer, 1949 σελ. 290) ότι η ουσία της συνέχειας μιας γραμμής βρίσκεται στην φύση της διαίρεσης μιας γραμμής από ένα σημείο. Είδε ότι σε κάθε διαίρεση («τομή») των σημείων μιας ευθείας σε δύο κλάσεις, έτσι ώστε κάθε σημείο της μίας να είναι αριστερά από κάθε σημείο της άλλης, υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο που παράγει αυτήν την διαίρεση. Αυτό δεν

ισχύει για το διατεταγμένο σύστημα των ρητών αριθμών. Αυτό τότε εξηγεί γιατί τα σημεία μιας ευθείας σχηματίζουν ένα συνεχές, αλλά οι ρητοί αριθμοί όχι. Όπως το εξέφρασε ο Dedekind: «Από αυτή την απλή παρατήρηση αναδεικνύεται το μυστικό της συνέχειας». Γίνεται φανερό έτσι ότι το πεδίο των ρητών αριθμών πρέπει να συμπληρωθεί για να σχηματιστεί ένα συνεχές πεδίο. Το μόνο που απαιτείται είναι το αξίωμα (του συνεχούς) των Cantor - Dedekind ότι τα σημεία μιας ευθείας μπορούν να τεθούν σε μία 1- 1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς. Αν αυτό εκφραστεί αριθμητικά, σημαίνει ότι για κάθε διαίρεση των ρητών αριθμών σε δύο κλάσεις υπάρχει ένα μόνο πραγματικός αριθμός που να παράγει αυτή την τομή.

Έτσι, για να ξαναγυρίσουμε στον ορισμό του $\sqrt{2}$, αν διαιρέσουμε τους ρητούς αριθμούς σε δύο κλάσεις Α και Β, έτσι ώστε η Α να περιέχει όλους τους ρητούς αριθμούς που τα τετράγωνά τους είναι μικρότερα από το 2 και η Β να περιέχει όλους τους ρητούς αριθμούς που τα τετράγωνά τους είναι μεγαλύτερα από το 2, υπάρχει, από το αξίωμα του συνεχούς, ένας μόνο πραγματικός αριθμός – που στην περίπτωση αυτή γράφεται $\sqrt{2}$ - ο οποίος παράγει αυτή την διαίρεση. Όμοια, κάθε πραγματικός αριθμός ορίζεται από μία τέτοια τομή στο σύστημα των ρητών αριθμών. Επιπλέον, αυτή η τομή συνιστά τον ορισμό του αριθμού $\sqrt{2}$. Όμοια, κάθε πραγματικός αριθμός ορίζεται σαν μία τομή στο σύστημα των ρητών αριθμών.

Αυτό το αξίωμα κάνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών συνεχές με την έννοια ότι η ευθεία γραμμή έχει αυτήν την ιδιότητα. Επιπλέον, ο πραγματικός αριθμός του Dedekind είναι κατά μία έννοια μια δημιουργία του ανθρώπινου μυαλού, ανεξάρτητη από τις διαισθήσεις του χώρου και του χρόνου. Ο απειροστικός λογισμός θεωρείτο γενικά σχετιζόμενος με τα συνεχή μεγέθη αλλά πριν από τα μέσα του 19ου αιώνα, κανείς δεν είχε εξηγήσει με ακρίβεια με ποια έννοια μπορούσε αυτό να γίνει αποδεκτό. Τα σύμβολα για τις μεταβλητές είχαν αντικαταστήσει την ιδέα των γεωμετρικών μεγεθών, αλλά ο Cauchy σιωπηλά ερμήνευε γεωμετρικά μια συνεχή μεταβλητή. Ο Dedekind έδειξε ότι δεν ήταν η προφανής απουσία περιορισμών από την διακριτότητα των ρητών αριθμών που έκανε τις γεωμετρικές ποσότητες συνεχείς αλλά μόνο το γεγονός ότι τα σημεία σε αυτά σχημάτιζαν ένα πυκνό πλήρες σύνολο.

Ο Dedekind ολοκλήρωσε την εργασία του (Katz, 1998) ορίζοντας τις γνωστές αριθμητικές πράξεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ήταν όμως, έτσι ικανός να φτάσει σε αποδείξεις θεωρημάτων που ποτέ πριν δεν είχαν αποδειχθεί. Ένα από αυτά ήταν το θεώρημα ότι κάθε φραγμένη αύξουσα ακολουθία (β_i) πραγματικών αριθμών έχει ένα όριο.

Αν A_2 είναι το σύνολο όλων των αριθμών γ που είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει $\gamma < \beta_i$ για κάθε i, και A_1 το σύνολο όλων των υπόλοιπων αριθμών, ο Dedekind εύκολα έδειξε ότι η τομή (A_1,A_2) καθορίζει τον αριθμό α ο οποίος είναι ο ελάχιστος αριθμός στο A_2 και ο οποίος είναι το απαιτούμενο όριο. Η ιδιότητα αυτή είναι λογικά ισοδύναμη (Dunham, 2005 σελ. 159) με την ιδιότητα της πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ότι δηλαδή (Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. ,1999): «Αν το Α είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε το Α έχει ελάχιστο άνω φράγμα» ιδιότητα που συμπεριέλαβε (Berge, A., 2008) ο Hilbert στην αξιωματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών το 1900.

Η κατασκευή του **Cantor** (Berge, A., 2008) από την άλλη μεριά, αποτελείτο από την κατασκευή ενός αριθμητικού συστήματος στο οποίο όλες οι βασικές ακολουθίες έχουν ένα όριο το οποίο ανήκει σε αυτό το σύστημα. Ο στόχος ήταν να βρει ένα καλά ορισμένο σύνολο για να αποδείξει άλλα θεωρήματα της ανάλυσης.

Ξεκινώντας (Katz, 1998), όπως ο Dedekind από τους ρητούς αριθμούς, ο Cantor εισήγαγε την έννοια της βασικής ακολουθίας, μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ με την ιδιότητα ότι «για κάθε θετικό ρητό αριθμό ε υπάρχει ένας ακέραιος ν_1 τέτοιος ώστε $\left|\alpha_{\mu+\nu} - \alpha_\nu\right| < \varepsilon$ για κάθε $\nu \geq \nu_1$ για κάθε θετικό ακέραιο μ.» Μια τέτοια ακολουθία, που τώρα καλείται ακολουθία Cauchy, ικανοποιεί το κριτήριο που έθεσε ο Cauchy το 1821. Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα, για τον Cauchy ήταν φανερό ότι μια τέτοια ακολουθία συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό β. Ο Cantor από την άλλη μεριά κατάλαβε το λογικό λάθος που προκύπτει, αφού αυτή η πρόταση προϋπέθετε την ύπαρξη ενός τέτοιου πραγματικού αριθμού. Για τον λόγο αυτό ο Cantor χρησιμοποίησε την βασική ακολουθία για να *ορίσει* τον πραγματικό αριθμό β. Με άλλα λόγια ο Cantor συσχέτισε έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε βασική ακολουθία ρητών αριθμών. Ο ρητός αριθμός r ήταν από μόνος του συνδεδεμένος σε μια ακολουθία, την ακολουθία r, r, …r,…, αλλά υπήρχαν επίσης ακολουθίες που δεν ήταν συνδεδεμένες με ρητούς. Για παράδειγμα η ακολουθία 1, 1,4, 1,41, 1,414 …. που παράγεται από τον γνωστό αλγόριθμό για τον υπολογισμό του $\sqrt{2}$, ήταν μια τέτοια βασική ακολουθία.

Συνειδητοποιώντας ότι δύο βασικές ακολουθίες θα μπορούσαν να συγκλίνουν στον ίδιο ρητό αριθμό, όρισε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο τέτοιων ακολουθιών. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίστηκε ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των βασικών ακολουθιών.

Στην συνέχεια όρισε την σχέση διάταξης σε τέτοιες ακολουθίες και τις βασικές πράξεις της αριθμητικής. Αλλά ο Cantor ήθελε να δείξει ότι το σύνολο που είχε ορίσει ήταν με κάποια έννοια το ίδιο με την ευθεία των αριθμών. Ήταν καθαρό στον Cantor ότι κάθε σημείο στην γραμμή αντιστοιχεί σε μία βασική ακολουθία, αλλά συνειδητοποίησε ότι το αντίστροφο απαιτούσε ένα αξίωμα (το αξίωμα Cantor - Dedekind που αναφέραμε και παραπάνω) , δηλαδή, ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό (κλάση ισοδυναμίας βασικών ακολουθιών) αντιστοιχεί ένα καθορισμένο σημείο πάνω στην γραμμή.

Οι δύο ορισμοί του συνόλου των πραγματικών αριθμών που είδαμε παραπάνω οδηγούν σε ένα ερώτημα(Giaquinto, 2002): Στο ένα ορισμό οι πραγματικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται από κλάσεις Cauchy – ισοδύναμων βασικών ακολουθιών από ρητούς αριθμούς. Στον άλλο ορισμό οι πραγματικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται ζεύγη κλάσεων ρητών αριθμών, τις τομές. Αλλά καμία τομή δεν είναι μια κλάση Cauchy – ισοδύναμων βασικών ακολουθιών. Έτσι ένας πραγματικός αριθμός δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα και μια τομή και μία κλάση Cauchy – ισοδύναμων βασικών ακολουθιών. Φαίνεται σαν να είναι ο ένας από τους δύο ορισμούς, ή και οι δύο, λανθασμένος. Στην πραγματικότητα κανένας από αυτούς τους ορισμούς δεν είναι λανθασμένος. Ούτε ο Cantor ούτε ο Dedekind θεώρησαν ότι θα έδιναν μεταφυσικούς όρους που να προσδιορίζουν τους πραγματικούς αριθμούς. Μάλλον πρέπει να τους δούμε ως αυτούς που όρισαν αντιπροσώπους (εκπρόσωπους) (representatives) των πραγματικών αριθμών. Κάθε μία από τις προσεγγίσεις περιέχει όχι μόνο ένα ορισμό την αντιπροσώπων αλλά επίσης ορισμούς μερικών ιδιοτήτων και πράξεων πάνω σε αυτούς. Ο ρόλος του κάθε συστήματος είναι να διαλέξει μια κλάση αντικειμένων, μαζί με κάποιες ιδιότητες και πράξεις σε αυτά, που μπορεί να αποδειχθεί ότι έχουν χαρακτηριστικά που να αποδίδονται στο υποθετικό σύστημα των πραγματικών αριθμών. Το πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα ήταν να εξακριβώσουν την πεποίθησή τους ότι ήταν δυνατό για μια συλλογή αντικειμένων να έχει όλα αυτά τα χαρακτηριστικά μαζί.

Δηλαδή, το πρόγραμμα της αριθμητικοποίησης του 1872, πηγαίνοντας πέρα από την γεωμετρική εικόνα και εκφραζόμενο τυπικά, απέδειξε ότι υπάρχει ένα σύνολο (το σύνολο των πραγματικών αριθμών) που ικανοποιεί τις παρακάτω τρείς συνθήκες (Boyer, 1949):

α) οι τιμές ή τα στοιχεία του σχηματίζουν ένα διατεταγμένο σύνολο

β) το σύνολο αυτό είναι πυκνό, δηλαδή ανάμεσα σε δύο τιμές ή στοιχεία πάντα υπάρχουν άλλα

γ) το σύνολο αυτό είναι πλήρες, δηλαδή αν τα στοιχεία χωρίζονταν, όπως σε μία τομή Dedekind, πάντα υπάρχει κάποιο που να παράγει αυτή την τομή.

Υπάρχει όμως ακόμα μία παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε πάνω στους δύο ορισμούς (Giaquinto, 2002): Τα σημεία στο χώρο που μελετήθηκαν από την ανάλυση του 19^{ου} αιώνα ορίστηκαν με όρους πραγματικών αριθμών και οι πραγματικοί αριθμοί ορίστηκαν μέσω των ρητών αριθμών. Θέτοντάς το έτσι χάνουμε κάτι σημαντικό: και οι δύο θεωρίες για τους πραγματικούς αριθμούς περιλαμβάνουν αυθαίρετα άπειρες κλάσεις ή ακολουθίες στοιχείων προερχόμενες από ένα άπειρο απόθεμα. Η θεωρία του Cantor όχι μόνο θεωρεί δεδομένο το άπειρο σύνολο των ρητών αλλά επίσης υποθέτει ότι υπάρχει ένα όλων των βασικών ακολουθιών χωρίς περιορισμούς στις ακολουθίες που μπορούμε πραγματικά να ορίσουμε, με την έννοια ότι είναι «αυθαίρετες» ακολουθίες. Αυτές οι ακολουθίες είναι άπειρα αντικείμενα. Η θεωρία του Dedekind υποθέτει ότι υπάρχει ένα σύνολο όλων των διαιρέσεων των ρητών σε κλάσεις, πάλι χωρίς περιορισμούς σε αυτές τις διαιρέσεις για τις οποίες μπορούμε να έχουμε έναν ορισμό. Αυτό που δέχεται είναι ότι κάθε κλάση είναι ένα άπειρο αντικείμενο. Στην πραγματικότητα οι ακολουθίες μπορούν να αναπαρασταθούν σαν κλάσεις, άπειρες ακολουθίες, απείρων κλάσεων.

Έτσι και οι δύο θεωρίες στην πραγματικότητα υποθέτουν την ύπαρξη ενός συνόλου από αυθαίρετα άπειρες κλάσεις στοιχείων από ένα άπειρο απόθεμα. Αυτό είναι σημαντικό. Η διαισθητική μας έννοια για τα σημεία μιας ευθείας δεν επαρκεί για να αναδείξει μια κατάλληλη σύλληψη των πραγματικών αριθμών. Δεν μπορούμε να συλλάβουμε τους πραγματικούς αριθμούς παρά μόνο σαν είδη άπειρων κλάσεων.

Ο ορισμός του συνόλου των πραγματικών αριθμών, που είδαμε παραπάνω, είναι μακριά(Boyer, 1949) από κάθε επίκληση στην εμπειρία και από την εικόνα μιας ομαλής συνεκτικότητας που ενστικτωδώς συσχετίζεται με την έννοια της συνέχειας. Προσδιορίζει μόνο μια άπειρη διακριτή πολλαπλότητα στοιχείων, που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες - ότι το σύνολο είναι διατεταγμένο, πυκνό και πλήρες. Με αυτήν την έννοια πρέπει κάποιος να ερμηνεύσει την παρατήρηση ότι ο απειροστικός λογισμός μελετάει συνεχείς μεταβλητές. Δεν υπάρχει τίποτα το δυναμικό στην ιδέα της μαθηματικής συνέχειας. Η

δυναμική διαίσθηση της κίνησης συγχέεται με την στατική έννοια της συνέχειας. Η πρώτη είναι ένα θέμα μιας εκ των υστέρων (a posteriori) επιστημονικής περιγραφής ενώ η δεύτερη είναι θέμα μόνο ενός a priori μαθηματικού ορισμού. Μπορούμε συνεπώς να προτείνουμε ότι η κίνηση μπορεί να οριστεί μαθηματικά με συνεχείς μεταβλητές αλλά δεν μπορούμε, εξαιτίας των περιορισμών της αντίληψης μέσω των αισθήσεών μας, να αποδείξουμε ότι έτσι πρέπει να οριστεί. Η μαθηματική θεωρία της συνέχειας βασίζεται όχι στην διαίσθηση αλλά στις λογικά ανεπτυγμένες θεωρίες του αριθμού και του συνόλου σημείων, η οποία με την σειρά της, εξαρτάται από την ιδέα ενός απειροσυνόλου.

Τα Μαθηματικά, ωστόσο, χρειάζονταν επιπλέον μια θεωρία για το άπειρο στον ορισμό τους για την συνέχεια και τον αριθμό.

Από τον Αριστοτέλη μέχρι και τους Cauchy και Weierstrass (Boyer, 1949 σελ. 296)το άπειρο υπήρχε μόνο ως δυνάμει άπειρο – μια ανολοκλήρωτη διαδικασία. Ωστόσο, ο ακριβής ορισμός του αριθμού άρρητα προϋποθέτει, όπως εξηγήσαμε και παραπάνω, την προηγούμενη ύπαρξη άπειρων συναθροισμάτων (aggregates). Οι Dedekind και Cantor θεώρησαν ότι η εργασία τους θα ολοκληρωνόταν με τον ορισμό του απείρου.

Ο Dedekind (Boyer, 1949 σελ. 296)είπε: «Ένα σύστημα (system)S θα λέγεται άπειρο αν είναι όμοιο με ένα γνήσιο υποσύνολό του. Σε αντίθετη περίπτωση το S θα λέγεται πεπερασμένο σύστημα (system)». Με αυτόν τον ορισμό ένα άπειρο συνάθροισμα (aggregate) υπάρχει ως λογικά συνεπής οντότητα και έτσι ο ορισμός του συνόλου των πραγματικών αριθμών ολοκληρώνεται.

Ο Cantor (Boyer, 1949 σελ. 296) δεν ήταν ικανοποιημένος με μόνο τον ορισμό των άπειρων συνόλων. Κάνοντας την μελέτη του απείρου ένα αυτόνομο πεδίο των Μαθηματικών, ο Cantor (Fischbein, 1999)αλλάζοντας την οπτική μας με τη σύγκριση των πληθάριθμων των συνόλων, απέδειξε ότι το ενεργεία (πραγματικό) άπειρο πρέπει να γίνει αποδεκτό ως μη-αντιφατική έννοια στα μαθηματικά.

Ενώ ο Gauss το 1831 έγραφε :

« Διαμαρτύρομαι για την χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως μιας αυτοτελούς και ενιαίας οντότητας. Αυτό δεν επιτρέπεται ποτέ στα μαθηματικά. Το άπειρο δεν είναι παρά ένας τρόπος εκφράσεως, όπου ομιλούμε για όρια ορισμένων πηλίκων τα οποία (όρια) μπορούν τα πηλίκα να τα πλησιάσουν όσο θέλουμε ενώ άλλα πηλίκα μπορούν να καταστούν απεριορίστως μεγάλα », (Αρτεμιάδης, 2000, σελ. 508)

ο Cantor αντέτεινε:

«Το δυνάμει άπειρο συναντάται κυρίως όταν έχουμε μια απροσδιόριστη, μεταβαλλόμενη ποσότητα. Πιο γενικά, μιλώ για το δυνάμει άπειρο όταν πρόκειται για απροσδιόριστη ποσότητα η οποία είναι σε θέση να λάβει οποιοδήποτε προσδιορισμό. Με το ενεργεία άπειρο νοείται μια ποσότητα η οποία από την μία δεν μεταβάλλεται, είναι σταθερή και προσδιορισμένη από κάθε άποψη – μια γνήσια σταθερά – και από την άλλη υπερβαίνει κάθε πεπερασμένη ποσότητα του ίδιου είδους με αυτή» (Ρουσόπουλος, 1999 σελ. 172)

Αν και η δουλειά του Cantor (Boyer, 1949 σελ. 298) δεν ξεκαθάρισε καμία αντίρρηση στη βάση των εννοιολογικών δυσκολιών που είναι έμφυτες στην έννοια του απείρου, αντικρούει σίγουρα οποιοδήποτε επιχείρημα που προβάλλεται επάνω στο αποτέλεσμα λογικής αντίφασης. Με το έργο του πάνω στο άπειρο ο Cantor καθόρισε σε σημαντικό βαθμό τα σύγχρονα Μαθηματικά.

Συνοψίζοντας, ο Giaquinto (2002 σελ. 20) απαντά στο ερώτημα «τι είναι τελικά ένας πραγματικός αριθμός (αν είναι κάτι);» Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα για τους πραγματικούς αριθμούς, καταλήγει στο ότι δύο πλήρη διατεταγμένα σώματα είναι ισομορφικά αν μπορούν να τεθούν σε 1- 1 αντιστοιχία με τρόπο που να διατηρούνται οι δομικές τους ιδιότητες. Δηλαδή, όλα αυτά τα σώματα έχουν την ίδια δομή που μπορούμε να την ονομάζουμε *η* δομή ενός πλήρους διατεταγμένου σώματος. Μια απάντηση λοιπόν, σε αυτό ερώτημα, που επικρατεί σήμερα είναι ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι τίποτα παραπάνω από τις θέσεις (positions) σε αυτή την δομή. Υποθέτοντας αυτή την απάντηση, ο σημαντικός στόχος, για τα μαθηματικά, ήταν να δειχθεί ότι υπάρχει μια τέτοια δομή. Αυτό, αποτελεσματικά, έγινε, χρησιμοποιώντας διαφορετικούς τρόπους ο καθένας, από τους Cantor και Dedekind.

Θα τελειώσουμε αυτήν την σύντομη αναφορά στους πραγματικούς αριθμούς με την παράθεση των απόψεων του Boyer (1949, σελ. 303 – 309) στον επίλογο του βιβλίου του, για ένα άλλο ενδιαφέρον ερώτημα: «γιατί άργησε τόσο πολύ να δοθεί ο ορισμός των πραγματικών αριθμών;» Η ενδιαφέρουσα απάντησή του συνοψίζεται από την φράση:

«Σε κάθε περίπτωση, το βασικό εμπόδιο στην πορεία ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού ήταν μια παρανόηση για την φύση των Μαθηματικών». Παραθέτω παρακάτω, συνοπτικά, τα επιχειρήματά του:

Από την εποχή των εμπειρικών Μαθηματικών στην προ – ελληνική εποχή, διατηρήθηκε η αντίληψη ότι είναι ο κλάδος είτε των εμπειρικών επιστημών είτε της υπερβατολογικής (transcendental) φιλοσοφίας. Σε κάθε περίπτωση τα Μαθηματικά περιορίζονταν από αντιλήψεις που προέρχονταν είτε a posteriori από τις φυσικές επιστήμες είτε επιβάλλονταν a priori από μια απόλυτη φιλοσοφία.

Στο επίπεδο των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων, τα Μαθηματικά ήταν ένα σύνολο πληροφοριών που αφορούσαν στον φυσικό κόσμο.

Στους αρχικούς Ιωνικούς χρόνους τακτοποίησαν αυτή την γνώση σε μία παραγωγική βάση αλλά παρέμενε μία εμπειρική επιστήμη. Ωστόσο, ο ασιατικός μυστικισμός του Πυθαγόρα αντέστρεψε αυτήν την κατάσταση και έδωσε στα Μαθηματικά μια πραγματικότητα πάνω από τις αισθήσεις της οποίας ο κόσμος των φαινομένων ήταν ένα αντίστοιχο. Οι βάσεις των συλλογισμών (premises) τότε θεμελιώθηκαν ρητώς και αυτό που έπρεπε να κάνουν οι μαθηματικοί ήταν να αναπτύξουν τις λογικές τους συνέπειες.

Ο Πλάτωνας ανέπτυξε αυτή την όψη των Μαθηματικών μέσα σε μία ιδεαλιστική φιλοσοφία η οποία αρνιόταν επίμονα την καθαρή λογική και υποθετική φύση των θεωρημάτων των Μαθηματικών. Ωστόσο, στο ελληνικό στάδιο των ιδεών που οδηγούσαν στον απειροστικό λογισμό, οι απόψεις του Πλάτωνα άσκησαν μεγάλη επιρροή, δεδομένου ότι αντιστάθμιζαν την στάση της σχολής του Αριστοτέλη. Για τον Πλάτωνα οι μαθηματικές οντότητες είχαν μια οντολογική πραγματικότητα, ανεξάρτητη από τις αισθήσεις και τα αξιώματα ανακαλύπτονταν μόνο από την λογική.

Ο Αριστοτέλης έβλεπε τα Μαθηματικά σαν μια ιδεατή αφαίρεση του φυσικού κόσμου και έτσι αντιμετώπιζε τους συλλογισμούς και τους ορισμούς όχι σαν αυθαίρετους αλλά σαν καθοριζόμενους από τις ερμηνείες που δίνουμε, μέσω των αισθήσεων, για τον κόσμο. Οι επιτρεπόμενες έννοιες για την Γεωμετρία ήταν μόνο αυτές που ήταν συμβατές με αυτήν την εικόνα. Το απειροστό και το ενεργεία άπειρο είχαν αποκλειστεί όχι τόσο επειδή δημιουργούσαν λογικές ασυνέπειες, αλλά λόγω μιας υποτιθέμενης ασυμβατότητας με τον φυσικό κόσμο, από τον οποίο προέρχονταν οι έννοιες των Μαθηματικών. Η συνέχεια βασιζόταν στην ταύτιση των άκρων και πάνω στην ενότητα, όπως φαινόταν να υποδεικνύουν οι αισθήσεις. Για να αποφύγει τις δυσκολίες που συνεπάγονταν οι έννοιες

του απείρου και της συνέχειας, είχε εισάγει την έννοια της κίνησης. Ομοίως, ο αριθμός, θεωρείτο, σε συμφωνία με την εμπειρία μέσω των αισθήσεων, σαν άθροισμα μονάδων με αποτέλεσμα οι άρρητες ποσότητες να μην θεωρούνται αριθμοί. Τα Μαθηματικά ήταν οι λογική των σχέσεων, αλλά η φύση των σχέσεων αυτών καθοριζόταν πλήρως από αξιώματα τα οποία με την σειρά τους υπαγορεύονταν από τα πειστήρια της φυσικής εμπειρίας.

Ο Αρχιμήδης παρουσιάζει στοιχεία και από την Πλατωνική και από την Αριστοτελική φιλοσοφική άποψη.

Ο Newton ερμήνευε τα Μαθηματικά με όρους της πρόσληψης μέσω των αισθήσεων, στο πρότυπο του Αριστοτέλη.

Η περισσότεροι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα χρησιμοποίησαν τα απειροστά και το άπειρο με την εικασία ότι υπάρχουν, και μεταχειρίστηκαν το συνεχές ως να αποτελείται από αδιαίρετα επηρεασμένοι από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Και στην διάρκεια του 18^{ου} αιώνα οι έρευνες για την θεμελίωση του απειροστικού λογισμού είχαν την μορφή της αναζήτησης για διαισθητικά αποδεκτές εξηγήσεις παρά λογικά συνεπείς.

Παράλληλα όμως είχε ραγδαία εξέλιξη ο αλγεβρικός φορμαλισμός (ιδιαίτερα από τους Euler και Langrange) γεγονός που οδήγησε, στον 19^{ο} αιώνα, σε μια όψη των Μαθηματικών στην οποία περιλαμβανόταν η Μη – Ευκλείδεια Γεωμετρία – ένα αξιωματικό σύστημα ανεξάρτητο από τον κόσμο της εμπειρίας μέσω των αισθήσεων και οτιδήποτε θα μπορούσε να υποδείξει η ενδοσκόπηση. Ο απειροστικός λογισμός μπόρεσε ελεύθερα να υιοθετήσει της δικές του συλλογιστικές βάσεις και να σχηματίσει τους δικούς του ορισμούς, με μόνη απαίτηση την εσωτερική συνέπεια. Η ύπαρξη μίας έννοιας εξαρτιόταν μόνο από μια έλλειψη αντιφάσεων στο σύνολο των σχέσεων στο οποίο εντασσόταν. Οι βάσεις του απειροστικού λογισμού ορίστηκαν φορμαλιστικά με βάση μόνο τις έννοιες του αριθμού και των απείρων συναθροισμάτων στοιχείων (infinite aggregates) χωρίς να είναι απαραίτητη ή πιθανή καμία τεκμηρίωση που να βασίζεται στον κόσμο της εμπειρίας.

Ωστόσο αυτή η μεγάλη αλλαγή στην θεώρηση των Μαθηματικών δεν έγινε εύκολα αποδεκτή. Πλήθος φιλοσόφων (υλιστές είτε ιδεαλιστές) είχαν σοβαρές επιφυλάξεις στο να την αποδεχτούν. Δεν μπόρεσαν εύκολα να εκτιμήσουν την φύση των σύγχρονων Μαθηματικών: Τα Μαθηματικά δεν είναι ούτε μια περιγραφή της φύσης ούτε μία εξήγηση των φαινομένων της. Δεν ενδιαφέρονται ούτε για την φυσική κίνηση ούτε γι α την μεταφυσική παραγωγή των ποσοτήτων. Είναι απλά η συμβολική λογική πιθανών σχέσεων και σαν τέτοια αυτό που τους ενδιαφέρει δεν είναι η προσεγγιστική ή απόλυτη αλήθεια

αλλά μόνο η υποθετική αλήθεια. Αυτό σημαίνει ότι τα Μαθηματικά καθορίζουν τι συμπεράσματα προκύπτουν λογικά από συγκεκριμένες αρχικές υποθέσεις. Ο συνδυασμός των Μαθηματικών με την φιλοσοφία ή με τις Φυσικές Επιστήμες, συχνά προσφέρει σημαντικά στην παραγωγή νέων προβλημάτων ή απόψεων. Ωστόσο, στην τελική αυστηρή τυποποίηση και επεξεργασία των νέων εννοιών, τα Μαθηματικά πρέπει απαραίτητα να είναι ελεύθερα από οποιαδήποτε συστατικά των εμπειριών από τις οποίες αυτές οι έννοιες προήρθαν.

Ο απειροστικός λογισμός είναι χωρίς αμφιβολία η μεγαλύτερη βοήθεια που μπορούμε να έχουμε στην προσπάθειά μας να ανακαλύψουμε και να κατανοήσουμε την φυσική αλήθεια. Αλλά, η βάση αυτής της επιτυχίας του ήταν ότι οι έννοιες που περιέχει σταδιακά ανεξαρτητοποιήθηκαν από τις προκαταλήψεις που προκύπτουν από την εμπειρία μας της μεταβλητότητας και της πολλαπλότητας. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι προσπάθησαν να ξεχωρίσουν και να αντιπαραβάλλουν το ποιοτικό με το ποσοτικό, αλλά στην Αναγέννηση και την πρώιμη μοντέρνα εποχή αυτά συσχετίστηκαν μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης, παραμένοντας όμως στην εξάρτηση των εξηγήσεων για τις ποσότητες από το πώς τις αντιλαμβανόμαστε μέσω των αισθήσεων. Η πραγματική ανεξαρτησία ήρθε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα όπου ο απειροστικός λογισμός βασίστηκε αποκλειστικά σε τυπικές (ordinal) θεωρήσεις. Η ιστορία των εννοιών του απειροστικού λογισμού δείχνει ότι οι ποιοτικές εξηγήσεις προκύπτουν μέσα από τις ποσοτικές και αυτές με την σειρά τους προκύπτουν από τις τυπικές (ordinal), πιθανώς την πιο θεμελιώδη μαθηματική έννοια.

Κατά συνέπεια πρέπει να κατανοηθεί πλήρως η διπλή φύση των Μαθηματικών: σαν την γλώσσα μιας περιγραφικής ερμηνείας των σχέσεων που ανακαλύπτονται στα φυσικά φαινόμενα και σαν μια λογική επεξεργασία αυθαίρετων υποθετικών προτάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Α) ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΤΡΟΠΟΥΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

➢ Η θεωρία της εκπραγμάτωσης της Sfard

Η Sfard (Σπύρου, 2009) προτείνει δύο προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας : Μία *λειτουργική* (operational) η οποία εστιάζεται στην διαδικασία και μία *δομική* (structural) η οποία εστιάζεται στα αφηρημένα αντικείμενα.

Η Sfard (1992) θεωρεί τα Μαθηματικά ως μια ιεραρχία στην οποία αυτό που φαίνεται να είναι μια διαδικασία σε ένα επίπεδο πρέπει να μετατραπεί πλήρως σε ένα αφηρημένο αντικείμενο για να γίνει ένα στέρεο κομμάτι πιο αφηρημένων μαθηματικών κατασκευών. Κάνει όμως τις δύο ακόλουθες διευκρινήσεις:

- Ένα αφηρημένο αντικείμενο είναι μια εννοιολογική οντότητα αλλά και κάτι παραπάνω: είναι μια μεταφορά που δημιουργεί μια μαθηματική κατασκευή στην εικόνα ενός υλικού αντικειμένου.

- Οι όροι διαδικασία και αντικείμενο πρέπει να ειδωθούν σαν τις διαφορετικές όψεις του ίδιου πράγματος, παρά σαν δύο διακριτά τελείως ξεχωριστά συστατικά του μαθηματικού κόσμου. Με άλλα λόγια ο διαδικαστικός και ο δομικός τρόπος σκέψης δρουν συμπληρωματικά.

Η Sfard (1992) διακρίνει, κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας στο νου εκείνου που μαθαίνει, ένα συνεχές, χαρακτηριζόμενο από τρία στάδια, μοντέλο που περιγράφει τις διαδοχικές μεταβάσεις από διαδικαστικές σε δομικές αντιλήψεις:

α) Μια διαδικασία που γίνεται σε ήδη οικία αντικείμενα (*εσωτερίκευση* – interiozation)

β) Η μετατροπή της διαδικασίας σε μια πιο συμπαγή, αυτοπροσδιοριζόμενη ολότητα, μια μάλλον τεχνική αλλαγή της προσέγγισης της διαδικασίας (*συμπύκνωση* – condensation) και

γ) Η απόκτηση της ικανότητας να θεωρηθεί αυτή η νέα οντότητα σαν ένα νέο αντικείμενο που ενσωματώνει όλα του τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες (εκπραγμάτωση ή αντικειμενοποίηση ή υποστασιοποίηση - reification).
Η εσωτερίκευση και συμπύκνωση μιας διαδικασίας δεν σημαίνει ότι κάποιος έχει αποκτήσει την ικανότητα να σκέφτεται για αυτήν με δομικό – κατασκευαστικό τρόπο. Δίχως την εκπραγμάτωση, η προσέγγισή του θα παραμείνει καθαρά διαδικαστική.

- **Η θεωρία APOS**

Κατά τον Dubinsky και τους συνεργάτες του (Σπύρου, 2009,και Dubinsky at all, 2005) τα μαθηματικά αντικείμενα οικοδομούνται μέσα από την ακολουθία **A**ctions (ενέργειες ή δράσεις) – **P**rocesses (διαδικασίες) – **O**bjects (αντικείμενα) – **S**chema (σχήματα), μια θεωρία γνωστή ως APOS.
Συγκεκριμένα:

- Μια ενέργεια ή δράση είναι ένας φυσικός ή νοητικός μετασχηματισμός (ως αντίδραση σε εξωτερικά ερεθίσματα) ώστε να επιτευχθούν άλλα αντικείμενα
- Καθώς το άτομο επαναλαμβάνει και αναστοχάζεται πάνω σε μία ενέργεια και αρχίζει να εγκαθιστά συνειδητό έλεγχο πάνω της, η ενέργεια εσωτερικεύεται και μετατρέπεται σε διαδικασία
- Οι διαδικασίες αυτές, ιδωμένες πια ως μια ολότητα, ενθυλακώνονται (encapsulated) σε ένα νοητικό αντικείμενο. Η ενθυλάκωση (ή η reification της Sfard που είδαμε προηγουμένως) είναι μια σημαντική αφαίρεση για την μαθηματική ανάπτυξη γιατί μόνο όταν μια διαδικασία έχει ενθυλακωθεί σε ένα αντικείμενο μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί σε άλλες διαδικασίες. Για παράδειγμα μια συνάρτηση μπορεί να γίνει κατανοητή σαν μια διαδικασία εισόδου – εξόδου. Αλλά μόνο αν μια συνάρτηση ειδωθεί σαν ένα πράγμα, μπορούμε να μιλήσουμε, για παράδειγμα, για πράξεις με συναρτήσεις (Ely, 2007)
- Οι ενέργειες, οι διαδικασίες και τα αντικείμενα οργώνονται σε συνεκτικές δομές που ονομάζονται σχήματα που αποτελούν ένα νέο αντικείμενο.

Ο Dubinsky (2005),ωστόσο διευκρινίζει ότι η χρήση των γνωστικών μηχανισμών της εσωτερίκευσης (interiorization) και της ενθυλάκωσης (encapsulation) καθώς και των νοητικών δομών της δράσης, της διαδικασίας , του αντικειμένου και του σχήματος, είναι

απλά περιγραφές του πιθανού τρόπου σκέψης ενός ατόμου. Δεν μπορούν να περιγράψουν αυτό που πραγματικά συμβαίνει στην σκέψη κάποιου. Ωστόσο θεωρούν ότι μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμες σε διάφορες μελέτες για την σκέψη των μαθητών.

- **Οι «τρείς κόσμοι» των μαθηματικών του Tall**

Ο Tall (Tall, 2004, Juter, 2007, 2009) έχει εισαγάγει «τρεις κόσμους των μαθηματικών» για να διακρίνει τους διαφορετικούς τρόπους μαθηματικής σκέψης, με σκοπό «να κερδίσει μια επισκόπηση όλης της έκτασης της μαθηματικής γνωστικής ανάπτυξης» (Tall, 2004, σελ. 287). Οι τρείς κόσμοι του Tall έχουν ιεραρχική δομή, με την έννοια ότι υπάρχει μία ανάπτυξη από την απλή πρόσληψη μιας έννοιας μέσα από ενέργειες στην τυπική κατανόηση της έννοιας. Είναι διακριτοί αλλά αναπτύσσονται αλληλεπιδραστικά.

Ο πρώτος κόσμος είναι ο *ενσαρκωμένος (embodied) κόσμος* και εδώ τα άτομα χρησιμοποιούν τις φυσικές αντιλήψεις (perceptions) τους για το πραγματικό κόσμο για να εκτελέσουν διανοητικούς πειραματισμούς και να δημιουργήσουν συλλήψεις (conceptions) των μαθηματικών εννοιών. Διαισθητικές αναπαραστάσεις αναπτύσσονται φυσικά εδώ από την έλλειψη αυστηρότητας.

Ο δεύτερος κόσμος καλείται τον *διαδικασιοεννοιολογικός* (proceptual) κόσμος. Εδώ τα άτομα ξεκινούν από διαδικαστικές δράσεις πάνω σε νοητικές συλλήψεις (conceptions) από τον πρώτο κόσμο, όπως είναι το μέτρημα, οι οποίες με την χρήση συμβόλων γίνονται ενθυλακωμένες ως έννοιες και μας επιτρέπουν να μεταβαίνουμε αβίαστα από τις διαδικασίες μέσω των οποίων *κάνουμε* μαθηματικά, στις έννοιες που *σκεφτόμαστε για* τα μαθηματικά. Τα σύμβολα αντιπροσωπεύουν και τις διαδικασίες και τις έννοιες, παραδείγματος χάριν την μέτρηση και τον αριθμό ή την πρόσθεση και το άθροισμα. Τα σύμβολα, μαζί με τις διαδικασίες και τις έννοιες, καλούνται procepts (διαδικασιοέννοια) (Gray & Tall, 1994). Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται με διπλή σημασία ως διαδικασίες και έννοιες ανάλογα με το πλαίσιο.

Ο τρίτος κόσμος είναι ο *τυπικός – αξιωματικός* (formal) κόσμος και βασίζεται σε ιδιότητες που εκφράζονται με τυπικούς ορισμούς και αξιωματικές θεωρίες περιλαμβάνοντας τυπικές αποδείξεις και παραγωγές (ή πορίσματα ή συμπεράσματα). Είναι ο κόσμος στον οποίο τα Μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα και πρωταρχικές έννοιες. Με την χρήση αυτών ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται

μαθηματικές προτάσεις. Ο κόσμος αυτός αποτελεί το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης.

Η Juter (2007, 2009) θεωρεί ότι οι παλαιότερες θεωρίες των Tall & Vinner 1981 και Vinner 1991 για την «εικόνα έννοιας» (concept image) μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν ένα συμπλήρωμα στην θεωρία των «τριών κόσμων». Ο όρος «εικόνα έννοιας» (Vinner 1991) περιγράφει την συνολική γνωστική δομή που σχετίζεται με μία έννοια. Είναι αυτό που έρχεται στην μνήμη μας όταν ακούμε ή βλέπουμε το όνομα μιας έννοιας. Η «εικόνα έννοιας» μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση, στην περίπτωση που η έννοια έχει οπτικές αναπαραστάσεις, καθώς επίσης μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών. Η κατανόηση μιας έννοιας, κατά τον Vinner (1991) προϋποθέτει τον σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας για αυτήν. Η αποστήθιση του «ορισμού της έννοιας» (concept definition), δηλαδή του τυπικού της ορισμού, δεν εγγυάται την κατανόησή της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της. Γενικότερα, για τον Tall (2001)αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε στα Μαθηματικά είναι να οργανώσουμε ορθολογικά τις διάφορες εμπειρίες μας για να κτίσουμε μια όσο το δυνατόν συνεπέστερη εικόνα.

Για την Juter (2009) εντυπώσεις από την διδασκαλία, συζητήσεις, επίλυση προβλημάτων και αναγνώσματα, που όλα οδηγούν στην μαθηματική σκέψη, ασκούν επίδραση στην ανάπτυξη της «εικόνας έννοιας». Σε σχέση με τους «τρείς κόσμους», θεωρεί ότι τα άτομα μετακινούνται ανάμεσα σε αυτούς καθώς οι ανάγκες και οι εμπειρίες τους αλλάζουν και νοητικές αναπαραστάσεις των εννοιών σχηματίζονται και τροποποιούνται στις «εικόνες έννοιας». Έτσι, κατανόηση μιας έννοιας, κατά την Juter (2009), σημαίνει ότι ένα άτομο είναι ικανό να συνδέει αυτήν την έννοια με την «εικόνα έννοιας» που έχει για αυτήν με ένα τρόπο που να έχει νόημα για αυτόν, που είναι διαφορετικό από το να είναι απλά ικανό να εκτελεί μια συγκεκριμένη διαδικασία. Η «εικόνα έννοιας» Juter (2009) που μπορεί να συνοδεύει μια διαισθητική εισαγωγή σε μια καινούργια έννοια, μπορεί να αποτελέσει το υπόβαθρο για πιο ακριβείς αναπαραστάσεις αργότερα, ωστόσο αν δεν συνδυαστεί με τους τυπικούς ορισμούς της έννοιας μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα παρά να διευκολύνει κάποιον στο να σχηματίσει νόημα για τις έννοιες. Ο Vinner (1991), θεωρεί ότι κατά τον σχηματισμό μιας έννοιας θα πρέπει να υπάρχουν μακροχρόνιες διαδικασίες αλληλεπίδρασης μεταξύ του «ορισμού έννοιας» και της «εικόνας έννοιας». Θεωρεί επίσης ότι ένα λάθος που κάνουν πολλοί εκπαιδευτικοί στην δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι να αναμένουν σε μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης από τον «ορισμό έννοιας» προς την «εικόνα έννοιας», δηλαδή να αναμένουν ότι η «εικόνα έννοιας» θα

διαμορφωθεί από τον «ορισμό έννοιας» και θα ελέγχεται πλήρως από αυτήν. Ο Vinner (1991) προτείνει η εισαγωγή των μαθηματικών εννοιών να γίνεται με τρόπους κοντά στο τρόπο της σκέψης των μαθητών παρά με τον τεχνικό τρόπο. Θα μπορούσαμε ίσως να υποστηρίξουμε ότι δείχνει μια προτίμηση σε αυτό που λέει ο Tall (2001) ως «φυσική σκέψη» (σε αντίθεση με την «τυπική σκέψη», όπου ξεκινάμε από τους τυπικούς ορισμούς) για να φτάσουμε την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας: Σε μια *φυσική* προσέγγιση κάποιος κτίζει πάνω στο σύνολο «εικόνων έννοιας»(concept imagery) για να δώσει ένα προσωπικό νόημα στην έννοια και να φτάσει στον τυπικό ορισμό της.

Σχόλιο 1: <u>Γιατί τόση φασαρία για την ενθυλάκωση</u>;

Τα τελευταία χρόνια, αναφέρουν οι Tall et. al, 2000 έχει δοθεί μεγάλη σημασία στην ενθυλάκωση (ή εκπραγμάτωση – που θεωρείται ταυτόσημος όρος) μιας διαδικασίας σε ένα νοητικό αντικείμενο σαν μια βασική μέθοδος για την κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων. Παρόμοια, αλλά με πιο περιορισμένο πεδίο εφαρμογής, όπως αναφέρουν, είναι και ο όρος procept .

Ο Dubinsky (2005a) διερωτάται τι είναι τι σημαντικό με αυτόν το όρο και υποστηρίζει ότι: « Αν και η ενθυλάκωση δεν αναφέρεται παρά σε ένα απλό νοητικό μηχανισμό, συνεπιφέρει μια ριζική μετακίνηση στην φύση της κατανόησης κάποιου. Αντίθετα από το να σκεφτόμαστε με όρους μιας εσωτερικευμένης σειράς δράσεων που εφαρμόζονται σε ένα υπάρχον αντικείμενο ή αντικείμενα, η ενθυλάκωση σημαίνει ικανότητα να σκεφτόμαστε την ίδια έννοια σαν μια μαθηματική οντότητα στην οποία νέες υψηλότερου επιπέδου μετατροπές μπορούν να εφαρμοστούν.»

Η Sfard (1992) διερωτάται αν η δομική αντίληψη, που έρχεται μόνο με την ενθυλάκωση ενός αντικειμένου, είναι πραγματικά απαραίτητη ή αρκεί η λειτουργική κατανόηση. Καταλήγει στο ότι και οι δύο αντιλήψεις (λειτουργικές και δομικές) είναι απαραίτητες και συμπληρωματικές μεταξύ τους και επίσης ότι και οι δύο πρέπει να χρησιμοποιηθούν στην διαδικασία της μάθησης και της επίλυσης προβλημάτων, ωστόσο η δομική αντίληψη είναι εκείνη που καθιστά όλες τις γνωστικές διεργασίες πραγματικά αποτελεσματικές , είναι εκείνη που μετατρέπει τις μακριές σειρές λειτουργικά θεωρούμενης πληροφορίας σε πολύ περισσότερο συμπαγείς μονάδες και έτσι πολύ ευκολότερης αντιμετώπισης από την άποψη της γνωστικής προσπάθειας που απαιτείται.

Οι Tall et. al 2000 εκφράζουν το ερώτημα για το τι είναι το αντικείμενο της ενθυλάκωσης. Καταλήγουν ότι: «Το «αντικείμενο» της ενθυλάκωσης μιας διαδικασίας είναι ένας τρόπος σκέψης που χρησιμοποιεί μια πλούσια εικόνα έννοιας (concept image) με τρόπο που να την καθιστά μια ελεγχόμενη (manipulable) οντότητα, εν μέρει με τη χρησιμοποίηση διανοητικών διαδικασιών και σχέσεων για *να κάνουμε* μαθηματικά και εν μέρει για να χρησιμοποιούμε ένα όνομα ή ένα σύμβολο για να το χειριστούμε διανοητικά, και *να σκεφτόμαστε* για τα μαθηματικά.»

- **Η θεωρία των ενσαρκωμένων Μαθηματικών των Lakoff &Nunez**

Τα τελευταία χρόνια (Σπύρου, 2007) στο χώρο της έρευνας για την διδασκαλία και την κατανόηση των Μαθηματικών κερδίζει έδαφος η συζήτηση για τα embodied mathematics που μπορούμε να το μεταφράσουμε ενσώματα (ή ενσωματωμένα ή ενσαρκωμένα) Μαθηματικά. Η ιδέα αυτή στην πλήρη ανάδειξή της εμφανίζεται στις πρόσφατες εργασίες του Lakoff και των συνεργατών του που συνοψίζονται στο βιβλίο «Where mathematics comes from. How the Embodied minds brings mathematics into being» (Lakoff & Núñez, 2000) αλλά είναι μια θεωρία που έχει αφετηρία το έργο «Metaphors We Live By» των γλωσσολόγων George Lakoff και Mark Johnson το οποίο δημοσίευσαν το 1980 και στο οποίο δείχνουν με πειστικό τρόπο ότι η μεταφορά κατακλύζει τόσο τη σκέψη μας όσο και την καθημερινή μας γλώσσα.

Η θεωρία των ενσώματων Μαθηματικών (Núñez,2000 a), προβάλει τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1. Η φύση των μαθηματικών αφορά ανθρώπινες ιδέες, και όχι απλώς τυπικές αποδείξεις, αξιώματα και ορισμούς (οι αποδείξεις, τα αξιώματα και οι ορισμοί συνιστούν μόνο ένα μέρος των μαθηματικών, που επίσης κατανοείται μέσω επακριβών συνόλων ιδεών).

2. Αυτές οι ιδέες είναι θεμελιωμένες σε χαρακτηριστικούς του ανθρώπινου είδους γνωσιακούς και σωματικούς μηχανισμούς της καθημερινότητας, καθιστώντας, συνεπώς, τα μαθηματικά ένα ανθρώπινο εγχείρημα, και όχι μια πλατωνική και υπερβατική οντότητα.

3. Ότι εξαιτίας αυτής της θεμελίωσης, οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι αυθαίρετες, δηλαδή, δεν αποτελούν το προϊόν καθαρώς κοινωνικών και πολιτισμικών συμβάσεων (παρ' όλο που οι κοινωνικο-πολιτισμικές διαστάσεις διαδραματίζουν κρίσιμους ρόλους στο σχηματισμό και την εξέλιξη των ιδεών).

4. Ότι η εννοιολογική (και ιδεολογική) δομή που συνιστά τα μαθηματικά μπορεί να μελετηθεί εμπειρικά, μέσω επιστημονικών μεθόδων.

5. Ότι μια συγκεκριμένη μεθοδολογία βασισμένη στην ενσώματη γνωσιακή επιστήμη – η Ανάλυση Μαθη*μ*ατικών Ιδεών – μπορεί να εξυπηρετήσει αυτό το σκοπό.

Τους παραπάνω ισχυρισμούς προσπαθεί, η θεωρία αυτή, να τους τεκμηριώσει στην βάση των νέων δεδομένων που εισάγει η σύγχρονη γνωσιακή επιστήμη, με σημαντικότερα τα παρακάτω συμπεράσματα:

1*. Το ενσώματο του νου*. Η λεπτομερής φύση και η δυναμική των σωμάτων μας, των εγκεφάλων μας και της καθημερινής μας λειτουργίας στον κόσμο δομούν τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη λογική. Αυτό περιλαμβάνει τις μαθηματικές έννοιες και τη μαθηματική λογική.

2. *Το γνωσιακό ασυνείδητο*. Οι περισσότερες γνωσιακές διαδικασίες είναι ασυνείδητες – όχι κατασταλμένες κατά τη Φροϋδική έννοια, αλλά απλά απρόσβατες σε άμεση συνειδητή ενδοσκόπηση. Δεν μπορούμε μέσω της ενδοσκόπησης να κοιτάξουμε απ' ευθείας τα εννοιολογικά μας συστήματα και τις χαμηλού επιπέδου γνωσιακές διαδικασίες μας. Αυτό περιλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής σκέψης.

3. *Μεταφορική σκέψη*. Κατά το μεγαλύτερο μέρος, τα ανθρώπινα όντα αντιλαμβάνονται τις αφηρημένες έννοιες με σαφή τρόπο, με τη χρήση ακριβούς συμπερασματικής δομής και τρόπων συλλογισμού θεμελιωμένων στο αισθησιο-κινητικό σύστημα. Ο γνωσιακός μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο κατανοείται μέσω του σαφούς ονομάζεται εννοιολογική *μ*εταφορά (conceptual metaphor). Η μαθηματική σκέψη επίσης χρησιμοποιεί την εννοιολογική μεταφορά, όπως όταν αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς ως σημεία πάνω σε μια ευθεία, ή το χώρο ως σύνολα σημείων.

Οι εννοιολογικές μεταφορές είναι θεμελιώδεις γνωσιακοί μηχανισμοί (από τεχνική άποψη, είναι αντιστοιχίσεις δια*μ*έσου περιοχών οι οποίες διατηρούν τα συ*μ*περάσ*μ*ατα [inference-preserving cross-domain mappings]) που προβάλλουν τη συμπερασματική δομή μιας περιοχής πηγής σε μια περιοχή στόχου, επιτρέποντας στη χρήση αβίαστου συγκεκριμένου για το είδος και σωματικά βασισμένου συμπεράσματος να δομήσει αφηρημένο συμπέρασμα.

Όσον αφορά τις μαθηματικές έννοιες, οι Lakoff και Núñez (2000) διακρίνουν τους δύο παρακάτω σημαντικούς τύπους εννοιολογικών μεταφορών:

• *Τις θεμελιωτικές μεταφορές* (grounding metaphors), οι οποίες θεμελιώνουν την κατανόησή μας για τις μαθηματικές ιδέες μέσω της καθημερινής εμπειρίας. Στις περιπτώσεις αυτές, η περιοχή στόχου της μεταφοράς είναι μαθηματική, αλλά η περιοχή πηγής βρίσκεται εκτός των μαθηματικών

• *Τις Συνδετικές Μεταφορές* (linking metaphors), οι οποίες είναι μεταφορές εντός των μαθηματικών και που μας επιτρέπουν να αντιληφθούμε μια μαθηματική περιοχή μέσω μια άλλης μαθηματικής περιοχής. Στις περιπτώσεις αυτές, και οι δύο περιοχές της αντιστοίχισης είναι μαθηματικές. Οι συνδετικές μεταφορές είναι, από πολλές απόψεις, οι πλέον ενδιαφέρουσες αφού αποτελούν μέρος της δομής των ίδιων των Μαθηματικών. Εμφανίζονται όποτε ένας κλάδος των Μαθηματικών χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση ενός άλλου.

Σχόλιο 2: Εκπραγμάτωση και εννοιολογική μεταφορά

Η Sfard (1994) θεωρεί ότι η θεωρία της για την εκπραγμάτωση (reification) συνδυάζεται με την γνωσιακή θεωρία για τα ενσώματα Μαθηματικά που είδαμε παραπάνω.

Αναφερόμενη σε έργα των Lakoff και Johnson εστιάζει την προσοχή της στα παρακάτω σημεία:

- Στην θεωρία τους για τον μη – αντικειμενικό (non – objectivist) τρόπο που οι άνθρωποι δημιουργούν την κατανόηση τους για τον κόσμο. Θεωρούν ότι το νόημα και η κατανόηση είναι αδιαχώριστα: είναι η δική μας κατανόηση που δίνει στα σύμβολα και τις έννοιες το νόημά τους και η σωματική μας εμπειρία είναι η μόνη πηγή κατανόησης , αντίθετα από άλλες θεωρήσεις - που οι δύο συγγραφείς ονομάζουν «Objectivist» θέλοντας να δηλώσουν όλες εκείνες τις θεωρίες που είτε ρητά είτε άρρητα ενσωματώνουν την άποψη ότι όλες οι γνώσεις είναι προτασιακής (propositional) φύσης, δηλαδή εκφράζονται με ακριβείς όρους που αντιστοιχούν σε αντικειμενικές πλευρές της πραγματικότητας- που θεωρούν ότι το νόημα είναι ένα θέμα σχέσεων ανάμεσα σε σύμβολα και τον πραγματικό κόσμο και είναι τελείως ανεξάρτητο από το ανθρώπινο μυαλό. Κατά συνέπεια, υπό αυτή την οπτική, θεωρείται σαν μια διαδικασία που μεσολαβεί ανάμεσα στο ανθρώπινο μυαλό και το καθολικά βιωμένο, απόλυτο, διαχρονικό βασίλειο γεγονότων και ιδεών.
- Στην έννοια των εικονο – σχημάτων (Embodied ή Image schemata) που είναι δομές από μια δραστηριότητα από την οποία οργανώνουμε την ουσία της εμπειρία μας με

τρόπους που μπορούμε να κατανοούμε και αποτελούν τα εργαλεία για να χειριζόμαστε τα διάφορα φυσικά και διανοητικά ερεθίσματα που αντιμετωπίζουμε. Το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι η συμπερασματική τους δομή διατηρείται υπό μεταφορικές αντιστοιχίσεις. Μέσω της εννοιολογικής μεταφοράς τα εικονο – σχήματα, αρχικά χτισμένα για να βάλουν τάξη στην φυσική μας εμπειρία «κληρονομούνται» στην σφαίρα της περισσότερο αφηρημένης σκέψης για να δώσουν σχήμα, δομή και νόημα στην φαντασία μας.

- Η Sfard (1994), θεωρεί ότι ως μεγάλη την συμβολή της θεωρίας των Lakoff και Johnson στο να κατανοήσουμε, με την ανάδειξη της σημασίας της εννοιολογικής μεταφοράς, το πώς η υποκειμενική κατανόηση μπορεί να είναι συμβατή με μια κοινά αποδεκτή αφηρημένη γνώση. Είναι ο μηχανισμός της εννοιολογικής μεταφοράς που ξεκινώντας από κοινούς σε όλους μας μηχανισμούς που έχουν σαν βάση το ανθρώπινο σώμα, *φέρνουν τις αφηρημένες ιδέες στην ύπαρξη*, και αυτό είναι που τις κάνει «Πλατωνικές» με την έννοια ότι τις αντιλαμβανόμαστε ως να εκφράζουν παγκόσμιες ιδέες.

Με βάση τα παραπάνω η Σφάρντ (1994) εξηγεί πως αυτά συνδέονται με την reification, δηλαδή την πράξη της δημιουργίας κατάλληλων αφηρημένων οντοτήτων που επιτρέπουν την μετάβαση από ένα λειτουργικό σε ένα δομικό τρόπο σκέψης:

Ο κύριος τύπος μεταφοράς στα Μαθηματικά είναι η μεταφορά του οντολογικού αντικειμένου: ένα αφηρημένο αντικείμενο (από Sfard, 1992) είναι μια εννοιολογική οντότητα, δηλαδή μια «ακέραια ολότητα», αλλά πρέπει παράλληλα να είναι σαφές ότι είναι και κάτι παραπάνω: είναι μια μεταφορά που δημιουργεί μια μαθηματική κατασκευή στην εικόνα ενός υλικού αντικειμένου. Μια προσεκτικότερη ματιά στα μαθηματικά θα απεκάλυπτε ότι αυτό που έχει σημασία είναι διαδικασίες (από Sfard, 1992) που εκτελούμε νοητικά, πρώτα σε φυσικά αντικείμενα (για παράδειγμα απαρίθμηση, μέτρηση) και μετά, σε ένα υψηλότερο επίπεδο, σε αυτές τις αρχικές διαδικασίες αυτές καθαυτές. Το γεγονός, ωστόσο, ότι ο κόσμος των αφηρημένων μαθηματικών ιδεών είναι φτιαγμένος στην εικόνα της φυσικής πραγματικότητας είναι σε πλήρη συμφωνία με την θεωρία των Lakoff και Johnson. Είναι η σωματική μας εμπειρία που μας αναγκάζει να σκεφτόμαστε για τις διαδικασίες σαν να εκτελούνται σε συγκεκριμένα αντικείμενα και να παράγουν αντικείμενα. Η ονομασία «Reification» δίνεται στην πράξη της δημιουργίας των κατάλληλων αφηρημένων οντοτήτων. Με άλλα λόγια *η reification είναι η γένεση της μεταφοράς ενός οντολογικού αντικειμένου* που φέρνει ένα μαθηματικό αντικείμενο στην ύπαρξη και με αυτόν τον τρόπο κάνει βαθύτερη την κατανόησή μας**.** Και τελικά είναι η

μετάβαση από ένα λειτουργικό σε ένα δομικό εικονο – σχήμα, με τις παρακάτω διευκρινήσεις:

Ένα λειτουργικό σχήμα φέρνει στο πεδίο των αφαιρέσεων μια μεταφορά του να κάνεις, του να χειρίζεσαι ορισμένα αντικείμενα για να λαμβάνεις κάποια άλλα αντικείμενα. Ως τέτοιο είναι ένα σχήμα δράσης. Το δομικό ενσωματωμένο σχήμα, από την άλλη μεριά, μεταφέρει ένα εντελώς διαφορετικό οντολογικό μήνυμα – ένα μήνυμα για μία οριστική, που μοιάζει με αντικείμενο, κατασκευή πάνω στην οποία μπορούμε να δράσουμε για να κατασκευάσουμε άλλα αντικείμενα. Το πλεονέκτημα του τελευταίου τύπου σχήματος σε σχέση με τον προηγούμενο τύπο, είναι ότι είναι πιο αλληλεπιδραστικό, πιο οικονομικό και πιο εύκολο στον χειρισμό, πιο επιδεκτικό για ολιστική μεταχείριση .

Β] ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ «ΤΙ ΕΜΠΟΔΙΖΕΙ» ΤΗΝ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

➢ Θεωρία των επιστημολογικών εμποδίων

Η έννοια ενός «γνωστικού εμποδίου» (Cornu, 1991), αν μελετηθεί, μπορεί να βοηθήσει στην αναγνώριση δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην διαδικασία της μάθησης, και να προσδιορίσει πιο κατάλληλες διδακτικές στρατηγικές.

Μπορεί (Cornu, 1991) κανείς να προσδιορίσει διαφόρων ειδών γνωστικά εμπόδια (γενετικά, ψυχολογικά, διδακτικά κ.λ.π) αλλά για την διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας το πιο σημαντικό είναι να καθοριστούν κυρίως τα επιστημολογικά εμπόδια. Κατά τον Gaston Bachelard, που εισήγαγε πρώτος τον όρο αυτό (το 1938), τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά:

- είναι αναπόφευκτα και ουσιαστικά συστατικά της γνώσης που πρόκειται να αποκτηθεί,

- βρίσκονται, τουλάχιστον εν μέρει, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας

Η λέξη «επιστημολογικό» (Ely, 2007) χρησιμοποιήθηκε από τον Bachelard για να υποδείξει μια σύνδεση με τις ευρύτερες πεποιθήσεις του ατόμου που μαθαίνει, για το τι συνιστά γνώση. Στην δουλειά του Brousseau (ο οποίος, πολύ αργότερα, εισήγαγε την ιδέα των επιστημολογικών εμποδίων στα Μαθηματικά), ο όρος «επιστημολογικό» απλά σηματοδοτεί το γεγονός ότι ο ρόλος του εμποδίου στην κατασκευή μιας έννοιας είναι δομικός, μέρος της έννοιας καθαυτής και όχι συμπτωματικός.

Ο Guy Brousseau (Σπύρου, 2009) παραθέτει την πρόταση του Duroux για την κατάλληλη προσαρμογή της αρχικής έννοιας του Bachelard στην περιοχή των Μαθηματικών, ένα σύνολο προϋποθέσεων που χαρακτηρίζουν το «επιστημολογικό εμπόδιο»:

- Ένα εμπόδιο είναι μια γνώση ή μια αντίληψη και όχι μια δυσκολία ή αστοχία γνώσης
- Η γνώση αυτή δίνει απαντήσεις κατάλληλες για ένα δεδομένο πλαίσιο αλλά δίνει εσφαλμένες απαντήσεις έξω από το πλαίσιο αυτό. Μια ορθή ή γενικότερη απάντηση απαιτεί μια εμφανέστατα διαφορετική οπτική
- Επιπλέον, η γνώση αυτή ανθίσταται σε οποιεσδήποτε αντιφάσεις αντιμετωπίζει καθώς και στην εγκαθίδρυση μιας αρτιότερης γνώσης. Δεν αρκεί η κατοχή μιας πιο κατάλληλης γνώσης για τον παραγκωνισμό της προγενέστερης αλλά είναι αναγκαία η συνειδητοποίηση της απόρριψης και η ενσωμάτωσή της μέσα στην νέα γνώση.

- **ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ**

Το πλαίσιο της «εννοιολογικής αλλαγής» (Prediger, 2008)έχει γίνει τα τελευταία χρόνια μια σημαντική προσέγγιση προκειμένου να εξηγηθούν οι δυσκολίες των μαθητών στην μάθηση εννοιών των φυσικών επιστημών ή των Μαθηματικών. Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής δίνει έμφαση στο γεγονός ότι η μάθηση δεν είναι πάντα συσσωρευτική (cumulative) με την έννοια ότι νέα γνώση απλά «προστίθεται» στην προηγούμενη (σαν μια διαδικασία εμπλουτισμού). Αντίθετα, η μάθηση συχνά απαιτεί την *ανακατασκευή* (*reconstruction)* της προηγούμενης γνώσης όταν έρχεται αντιμέτωπη με νέες εμπειρίες και προκλήσεις. Προβλήματα εννοιολογικής αλλαγής μπορούν να εμφανιστούν όταν η προηγούμενη γνώση του μαθητή είναι ασύμβατη με τις απαραίτητες νέες κατανοήσεις (conceptualisations).

Η απαιτούμενη, στις περιπτώσεις αυτές, ριζική ανακατασκευή της γνώσης (Merenluoto - Lehtinen , 2002) δεν εξεταζόταν επαρκώς στην παραδοσιακή διδασκαλία. Τα Μαθηματικά θεωρούνταν σαν μια ιεραρχική δομή στην οποία όλες οι νέες έννοιες προκύπτουν λογικά από τις προηγούμενες, οι οποίες επιτρέπουν στον μαθητές να εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους βαθμιαία.

Οι έρευνα στα πλαίσια της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής (Merenluoto, Palonen,2007) έχει καταδείξει ότι, σε περιπτώσεις που η προηγούμενη γνώση των μαθητών είναι ασύμβατη με την επιστημονική γνώση, οι μαθητές είναι επιρρεπείς στο να κάνουν συστηματικά λάθη ή να δημιουργούν *παρανοήσεις* (misconceptions). Πολλές από αυτές τις παρανοήσεις είναι *συνθετικά μοντέλα* (synthetic models), που σημαίνει ότι οι μαθητές προσπαθούν να συνθέσουν την νέα πληροφορία στην προηγούμενη γνώση τους αντί να κάνουν τις απαιτούμενες ριζικές αλλαγές. Πιο συγκεκριμένα, τα συνθετικά μοντέλα δημιουργούνται, σύμφωνα με την θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής, ως εξής (Biza, Souyoul, Zachariades, 2005): Οι μαθητές από πολύ μικρή ηλικία δημιουργούν *αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια* (initial explanatory frameworks) που αποτελούνται από ένα συνεκτικό πυρήνα από *αρχικές ιδέες ή εκ των προτέρων πεποιθήσεις ή προϋποθέσεις* (*presuppositions*). Αυτές οι αρχικές ιδέες επηρεάζουν τις *πεποιθήσεις* (beliefs) που δημιουργούνται από την καθημερινή και πολιτισμική εμπειρία τους. Τα συνθετικά μοντέλα, που δημιουργούνται όταν η νέα γνώση που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι ασύμβατη με την προηγούμενη γνώση τους, είναι μια μείξη από τις υπάρχουσες πεποιθήσεις τους με την επιστημονική θεωρία.

- **Σχέση εννοιολογικής αλλαγής με την θεωρία των διαισθήσεων του Fischbein**

Ο Fischbein (1987) (από Tirosh & Tsamir, 2004) διατύπωσε μια θεωρία στην οποία καθόρισε την έννοια της διαίσθησης (intuition) και τον ουσιαστικό ρόλο που παίζει στην σκέψη των μαθητών καθώς μαθαίνουν Μαθηματικά. Σύμφωνα με τον Fischbein, η διαισθητική γνώση είναι ένας τύπος άμεσης, άρρητης, υποκειμενικής, προφανούς γνώσης που οδηγεί με έναν καταναγκαστικό τρόπο σε γενικεύσεις. Ο Fischbein συζήτησε διάφορες ταξινομήσεις της διαισθητικής γνώσης, μια από τις οποίες είναι οι αρχικές και οι δευτερεύουσες διαισθήσεις. Οι αρχικές διαισθήσεις ορίστηκαν ως οι διαισθήσεις που «αναπτύσσονται στα άτομα ανεξάρτητα από οποιαδήποτε συστηματική διδασκαλία, σαν μία επίπτωση της προσωπικής εμπειρίας τους». Οι δευτερεύουσες διαισθήσεις ορίστηκαν ως «εκείνες που αποκτιούνται, όχι μέσω της φυσικής εμπειρίας, αλλά μέσω κάποιας εκπαιδευτικής παρέμβασης». Οι δευτεροβάθμιες διαισθήσεις σχηματίζονται όταν η τυπική γνώση γίνεται διαισθητική. Στο Fischbein (2001) εξηγεί τον όρο «άδηλα μοντέλα» (tacit models) που είναι νοητικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε ασυνείδητα, χωρίς να έχουμε επίγνωση της παρουσίας τους και των επιδράσεών τους για τις στρατηγικές και τα συμπεράσματα της σκέψης μας. Ωστόσο, τα μοντέλα αυτά μπορεί να οδηγήσουν σε διαστρεβλωμένες ερμηνείες και συμπεράσματα.

Οι Tirosh & Tsamir, 2004 διαπιστώνονται κάποιες ομοιότητες και κάποιες διαφορές της θεωρίας διαισθήσεων του Fischbein και του πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής:

Ομοιότητες:

-Και τα δύο μοντέλα αναφέρονται σε ασυμβατότητες ανάμεσα στις αρχικές ιδέες των σπουδαστών που φέρνουν στην τάξη από την προηγούμενη (καθημερινή ή μαθηματική) εμπειρία τους και στη γνώση που πρόκειται να αποκτήσουν μέσω της διδασκαλίας.

-Και τα δύο θεωρητικά πρότυπα προτείνουν ότι «αρχικές διαισθήσεις» (primary intuitions - θεωρία διαισθήσεων Fischbein) ή «αρχικές ιδέες» (presuppositions - προσέγγιση εννοιολογικής αλλαγής) συνεχίζουν να επιδρούν ακόμα και μετά από την διδασκαλία.

-Και τα δύο θεωρητικά μοντέλα βλέπουν την αύξηση της συνειδητοποίησης για τις αρχικές διαισθήσεις ή τις αρχικές ιδέες ως «κλειδί» για την ανάπτυξη και την αξιολόγηση μαθησιακών περιβαλλόντων και εκπαιδευτικών πρακτικών στην επιστήμη και τα μαθηματικά. Το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής δίνει έμφαση

στη σταδιακή και χρονοβόρα φύση τέτοιου είδους αλλαγών και προτείνει λεπτομερή διδακτικά βήματα

Διαφορές:

-Σύμφωνα με το μοντέλο εννοιολογικής αλλαγής κατά την εκμάθηση, υφίσταται μια μίξη αρχικών ιδεών και επιστημονικής γνώσης (συνθετικά μοντέλα) όπου διακρίνονται καταστάσεις «φιλικές» στον εμπλουτισμό (των γνώσεων) και καταστάσεις «προβληματικές» για την ριζική αλλαγή. Σύμφωνα με το μοντέλο του Fischbein, είναι αναπόφευκτη μια μίξη αρχικών διαισθήσεων και τυπικής γνώσης. Ο Fischbein προσδιόρισε τρεις τύπους μαθηματικής γνώσης: φορμαλιστική γνώση, αλγοριθμική γνώση, και διαισθητική γνώση, και έδειξε ότι ασυμβατότητες μεταξύ αυτών των τύπων γνώσης οδηγούν σε συστηματικά λάθη, παρερμηνείες και επιστημολογικά εμπόδια.

- **Σχέση εννοιολογικής αλλαγής με επιστημολογικά εμπόδια:**

Πολύ λίγα άρθρα βρήκαμε που ξεκαθαρίζουν την παραπάνω σχέση:

-Η Prediger (2008) αναφέρει ότι η θεωρία των επιστημολογικών εμποδίων, σε συνδυασμό με τη θεωρία διαισθήσεων του Fischbein, μπορεί να έχει μια σημαντική συμβολή στις έρευνες του πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής, καθώς μπορεί να διευκρινίσει ότι τα εμπόδια στην εννοιολογική αλλαγή μπορεί να αναζητηθούν βαθύτερα στο μαθηματικό περιεχόμενο της γνώσης από ότι συχνά φαίνεται στις προσεγγίσεις της εννοιολογικής αλλαγής.

-Ο Greer (2004) αναφέρει ότι η σημασία της εννοιολογικής ανακατασκευής έχει αναγνωριστεί από πολλές θεωρίες, ανάμεσα στις οποίες εξέχουσα θέση έχει η θεωρία των επιστημολογικών εμποδίων».

-Ο Clement (2003) δίνει, ίσως μια πιο «ειλικρινή» διαφορά των δύο θεωριών: «Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου χρησιμοποιείται συνήθως μόνο στην Γαλλική εκπαιδευτική έρευνα και στις χώρες του Ευρωπαϊκού νότου. Στις άλλες χώρες χρησιμοποιείται ο όρος εννοιολογική αλλαγή»

Σχόλιο 3: **H Sfard και η εννοιολογική αλλαγή**

Η Sfard στο άρθρο της Reconceptualizing Conceptual Change (2007) θεωρεί ότι το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής (το οποίο θεωρεί ότι έχει ρίζες και στην θεωρία των διαισθήσεων του Fischbein) έχει μια αξιόλογη ενοποιητική δύναμη και μπορεί να λειτουργήσει ως εργαλείο για την ενημέρωση της εκπαιδευτικής πρακτικής. Ωστόσο θεωρεί ότι πολλοί από τους όρους που χρησιμοποιεί δεν δηλώνονται με αρκετή σαφήνεια και έχει εκφράσει κάποιους γενικότερους προβληματισμούς για αυτούς.

Ας δούμε, για παράδειγμα, τις αντιρρήσεις της για έναν σημαντικό όρο για το πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, αυτόν των «παρανοήσεων» (misconceptions):

Στο Sfard, 2001d αναφερόμενη στον όρο misconceptions, λέει : «Αυτή η δηλωτική ετικέτα υπονοεί ότι κάποιος πρέπει να αναμένει μια διαφορά των ατομικών θεωρήσεων των μαθητών και της «επίσημης», «ορθής» εκδοχής των μαθηματικών εννοιών. Όροι όπως νοητικές εικόνες (concept images) (σε αντιδιαστολή με τον ορισμό της έννοιας (concept definition), από τους Tall και Vinner) ή άδηλα μοντέλα (από τον Fischbein), οι οποίοι άρχισαν να εμφανίζονται παράλληλα με την έννοια παρανόηση (misconception) μπορούν να θεωρηθούν εννοιολογικά πολύ κοντά, δεδομένου ότι υπονοούν την ίδια βασική ιδέα της απόκλισης μεταξύ των ατομικών και κοινών εννοιολογικών δομών.»

Η άποψη της Sfard (2001d) είναι ότι αυτοί οι όροι υπονοούν την υιοθέτηση της μεταφοράς για την μάθηση ως *απόκτηση γνώσης*: «Επηρεασμένοι από τα λαϊκά πρότυπα της μάθησης υπονοούμενα στους καθημερινούς τρόπους ομιλίας, και περαιτέρω ενθαρρυμένοι από τις πολυάριθμες επιστημονικές θεωρίες του νου, που αντιλαμβάνονται την μάθηση ως αποθήκευση των πληροφοριών υπό μορφή νοητικών αναπαραστάσεων (mental representations), οι μελετητές της μαθηματικής σκέψης και της επίλυσης προβλήματος σιωπηρά υιοθετούν τη μεταφορά της μάθησης *ως απόκτησης της γνώσης*. Η έμφαση είναι εδώ στον όρο *απόκτηση*, η οποία υπογραμμίζει την ατομική (individual) φύση της προσπάθειας. Η απόκτηση μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε από την ενεργητική υποδοχή ή από την ενεργό κατασκευή, ως συνέπεια μιας εξατομικευμένης εκδοχής των εννοιών και των διαδικασιών.» (Sfard , 2001d).Η Sfard (1998) θεωρεί ότι η ανθρώπινη μάθηση, από παλιά, εθεωρείτο ως μια απόκτηση κάποιου πράγματος ως «η πράξη του να κερδίζεις γνώση». Από την εποχή του Piaget και του Vygotsky η ανάπτυξη της γνώσης στην διαδικασία της μάθησης έχει αναλυθεί με όρους ανάπτυξης των εννοιών. Οι έννοιες κατανοούνται ως οι βασικές μονάδες της γνώσης που μπορούν να συσσωρευτούν, βαθμιαία να καθοριστούν και να συνδυαστούν ώστε να σχηματίσουν πιο πλούσιες

γνωστικές δομές. Η εικόνα αυτή δεν αλλάζει όταν μιλάμε για αυτόν που μαθαίνει ως ένα άτομο που κατασκευάζει νόημα ούτε ακόμα όταν μιλάμε στα πλαίσια θεωριών που εξετάζουν την κοινωνική κατασκευή της γνώσης. Οι περισσότερες θεωρίες μάθησης που έχουν αναπτυχτεί τις τελευταίες δεκαετίες, παρά τις μεγάλες διαφορές τους για το «πως», δεν διαφέρουν στην ουσία: η ιδέα της μάθησης ως η κατοχή κάποιων υλικών προϊόντων παραμένει η ίδια σε όλες αυτές τις θεωρίες. Η Sfard (2001d) δεν είναι απορριπτική για αυτές τις θεωρήσεις για την μάθηση, οι οποίες έχουν κάνει πολύ καλό και την θεωρία και στην πρακτική της εκπαίδευσης των Μαθηματικών. Ωστόσο, αυτές οι θεωρίες «απομονώνουν» τις γνωστικές δραστηριότητες από το πλαίσιό τους και μας λένε μόνο ένα περιορισμένο μέρος της ιστορίας της μάθησης. Η Sfard (1998) αναφέρεται σε μια εναλλακτική – συμπληρωματική «μεταφορά για την μάθηση» από αυτήν της «μεταφοράς της απόκτησης της γνώσης», αυτήν της «μεταφοράς της συμμετοχής στην μάθηση» όπου η μάθηση θεωρείται ως μια διαδικασία ένταξης κάποιου σε μια ορισμένη κοινότητα, που σημαίνει να αποκτήσει την ικανότητα να επικοινωνεί στην γλώσσα αυτής της κοινότητας και να δρα σύμφωνα με τους νόμους αυτής της κοινότητας, παρά να γίνεται κάτοχος γενικευμένων αποπλαισιοποιημένων εννοιολογικών σχημάτων. Εξειδικεύει τις απόψεις της για αυτήν την δεύτερη «μεταφορά» για την μάθηση στο Sfard, 2001d, εισάγοντας την ιδέα της «επικοινωνιακής προσέγγισης στην γνώση» (communicational approach),σύμφωνα με την οποία «η σκέψη μπορεί να νοηθεί ως μια περίπτωση επικοινωνίας» και «η μάθηση μπορεί να οριστεί ως μύηση σε ένα διάλογο – διαπραγμάτευση (discourse)». Η αναλυτική περιγραφή ωστόσο, αυτών των σημαντικών ιδεών ξεπερνάει το πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

Γ] ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Η Sfard (1994a) διαπιστώνει ότι:

«Μπορεί να ειπωθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, εξαρτάται από την σχολή σκέψης στην οποία ανήκει κανείς, ότι: οι μαθητές και οι καθηγητές τους δεν μοιράζονται το ίδιο *παράδειγμα (paradigm)*ή ότι, ασυνείδητα, εμπλέκονται σε διαφορετικές μαθηματικές *πρακτικές* (*practices*) ή ότι δεν συμμετέχουν στην ίδια μαθηματική *συνομιλία* (*discourse*). Όπως και να το θέσει κανείς, το μήνυμα είναι πάντα το ίδιο: οι μαθητές δεν μπορούν να επικοινωνήσουν με τους καθηγητές τους γιατί, παρότι μπορεί να χρησιμοποιούν πανομοιότυπες εκφράσεις, ζουν σε ασύμβατους μαθηματικούς κόσμους, βασίζονται σε διαφορετικές αρχές (κανόνες) και οι σκέψεις τους μάλλον πάνε παράλληλα παρά συγκρούονται ή συμπίπτουν».

Θα προσπαθήσουμε στα παρακάτω να διερευνήσουμε τις διαπιστώσεις αυτές της Sfard, μετατοπίζοντας την εστίασή μας από τις γενικές θεωρίες μάθησης, των προηγούμενων παραγράφων του κεφαλαίου αυτού, στην πραγματικότητα της αίθουσας των Μαθηματικών κατά την διδακτική πράξη. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κατά κύριο λόγο το άρθρο του H. Steinbring (1991): *Mathematics in teaching processes—the disparity between teacher and student knowledge*, αλλά και ορισμένες απόψεις για την διδασκαλία της Sfard και των Lakoff και Núñez.

- **Ο Steinbring (1991)** αναλύει διδακτικά επεισόδια από την τάξη των Μαθηματικών προσπαθώντας να διακρίνει τους τρόπους με τους οποίους εκφράζεται η διαφορά της γνώσης του καθηγητή και των μαθητών, και να εντοπίσει τις επιπτώσεις αυτής της διαφοράς για την μάθηση.

Θεωρεί ότι, από το αναλυτικό πρόγραμμα, τους καθηγητές, τους γονείς και τους μαθητές, τονίζεται η υλική πλευρά (ως ένα σύνολο πληροφοριών) των Μαθηματικών σε αντίθεση με την εννοιολογική διάσταση. Τα Μαθηματικά, συνήθως, διδάσκονται γραμμικά σαν ένα έτοιμο προϊόν, πλήρως ανεπτυγμένο, και η έμφαση δίνεται στις διαδικασίες (ρουτίνες) που πρέπει να μάθουν οι μαθητές. Η μαθηματική γνώση ερμηνεύεται ως μια συλλογή από

ατομικές κατανοήσεις, ικανότητες ή ακόμα και λύσεις και η οποία, γνώση, ως κάτι που σταδιακά συσσωρεύεται.

Ο ρόλος του καθηγητή, σε μια τέτοια θεώρηση είναι να γνωρίζει περισσότερα από τους μαθητές του και να προσπαθεί, «πιάνοντάς τους από το χέρι», να τους μεταφέρει σταδιακά την παραπάνω «γνώση» που αυτός διαθέτει.

Οι παραπάνω, ακραίες ίσως, απόψεις έχουν υποστεί, τις τελευταίες δεκαετίες, πολύ μεγάλη κριτική από την άποψη ότι η γνώση δεν πρέπει να δίνεται έτοιμη στον μαθητή αλλά θα πρέπει να του παρέχονται οι ευκαιρίες να κατασκευάζει μόνος του την γνώση. Σε αυτή την προσέγγιση η γνώση παύει να είναι αντικειμενική (objective) . Ωστόσο, αυτές οι θεωρίες δεν αμφισβητούν την παρανόηση για την γνώση ως κάτι που έχει συσσωρευτικό χαρακτήρα, σαν ένα απόθεμα που αποτελείται από πολλά ξεχωριστά αποδεδειγμένα γεγονότα και στοιχεία. Απλά δίνει έμφαση στο ότι δεν υπάρχει μία μόνο αντικειμενική γνώση αλλά ότι σχηματίζεται ατομικά από τον καθένα που μαθαίνει. Έτσι δίνεται έμφαση στην κοινωνική κατασκευή της γνώσης.

Υπάρχουν λοιπόν, δύο αντίθετες κουλτούρες για την διδασκαλία και την μάθηση των Μαθηματικών: αυτής που τα Μαθηματικά θεωρούνται πρωτίστως ως ένα προϊόν ή ένα κατασκεύασμα και αυτής που θεωρεί την διδασκαλία και την μάθηση κυρίως ως μια κοινωνική διαδικασία.

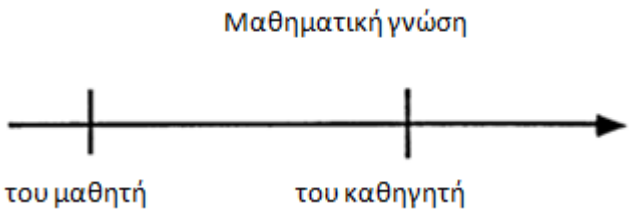
Ωστόσο στην πραγματική σχολική τάξη, οι δύο παραπάνω φαινομενικά ασύμβατες κουλτούρες, κάτω από την πίεση της γραμμικής και συσσωρευτικής μορφής του μαθηματικού περιεχομένου, ουσιαστικά γίνονται συμβατές με ένα στυγνό τρόπο: η κοινωνική διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης στερείται τα ουσιαστικά κοινωνικά χαρακτηριστικά της και εκφυλίζεται σε κάποιο είδος κοινότυπου επικοινωνιακού μοτίβου από γεγονότα. Ο ρόλος του καθηγητή παραμένει κεντρικός. Καθορίζει το τι πρέπει να διδαχθεί αλλά επίσης παρέχει κρίσιμες κατευθύνσεις για τους μαθητές προσδιορίζοντας το τι είναι νόμιμη αντίληψη για την μαθηματική γνώση.

Πιο συγκεκριμένα ο Steinbring (1991) ανέλυσε διαλόγους κατά την διαπραγμάτευση μεταξύ του καθηγητή και των μαθητών για εισαγωγικές έννοιες των πιθανοτήτων. Ο καθηγητής προσπαθεί να «μυήσει» τους μαθητές στην γλώσσα των συνολοθεωρητικών εννοιών των πιθανοτήτων (είδη ενδεχομένων, εύρεση του δειγματικού χώρου για τον υπολογισμό πιθανότητας). Για να επιτύχει την κατανόηση των τυπικών εννοιών, ο καθηγητής χρησιμοποίησε παιχνίδια και παραδείγματα με ζάρια. Ο καθηγητής θέτει ένα πρόβλημα

και διαδοχικά ερωτήματα στους μαθητές και αναμένει από τους μαθητές να συμφωνήσουν όλοι μαζί, με την καθοδήγησή του, σε ένα «σωστό» τρόπο αντιμετώπισης και έκφρασης.

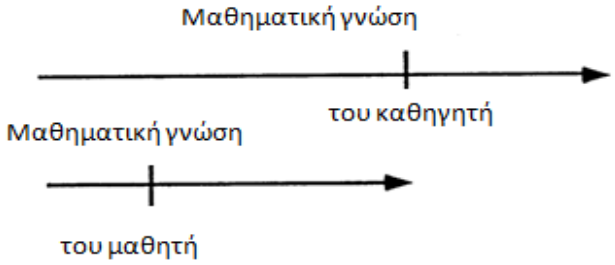
Ο Steinbring καταλήγει, από την ανάλυση των διαλόγων στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Μια προσεκτική ματιά στα φαινόμενα που παρουσιάζονται στην πραγματική σχολική τάξη δείχνει ότι η βασική προϋπόθεση (υπόθεση) εδώ είναι μια χρονολογικά οργανωμένη δομή γνώσης. Ο καθηγητής ουσιαστικά υποθέτει ένα «καλούπι» μαθηματικής γνώσης που έχει οργανώσει για τον εαυτό του με ανασκόπηση (in retrospect) και επιχειρεί να αναπτύξει την γνώση των μαθητών σε ένα όμοιο επίπεδο.
- Στον διάλογο που αναπτύσσεται, πολλές φορές, ο καθηγητής και οι μαθητές ουσιαστικά δεν μιλούν για τα ίδια πράγματα και οι μαθητές δέχονται τα πράγματα που ο καθηγητής φαινομενικά έχει βγάλει από τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις του, σαν κάτι προκαθορισμένο από τον καθηγητή.
- Αν η διαδικασία της μάθησης λειτουργεί όπως οργανώθηκε από τον καθηγητή, οι μαθητές πραγματικά φαίνεται να ακολουθούν το μονοπάτι της γνώσης βήμα προς βήμα ακριβώς όπως το είχε σχεδιάσει ο καθηγητής από την δική του διατεταγμένη προοπτική της γνώσης (Εικόνα 1).



Εικόνα 1 (Steinbring ,1991)

- Αν όμως, ανακύπτουν δυσκολίες για τους μαθητές στην πορεία της διδασκαλίας, είναι τουλάχιστον εμφανές ότι η γνώση των μαθητών και η γνώση του καθηγητή – παρά την σχετική γραμμική διάταξη (η οποία είναι συχνά μόνο κλασματική και ανολοκλήρωτη στο μαθητή) – είναι εγκατεστημένη σε τελείως διαφορετικά επίπεδα. Ο καθηγητής πρέπει να ανεβάσει την κατανόηση των μαθητών στο δικό του επίπεδο γνώσης. (Εικόνα 2)



Εικόνα 2 (Steinbring ,1991)

Ο καθηγητής προσπαθεί να το καταφέρει αυτό με τις δικές του διδακτικές μεθόδους, μέσα από ένα επιδέξιο παιχνίδι ερωτήσεων και απαντήσεων ή αντικρούοντας τις προτάσεις των μαθητών. Αυτές μεθοδολογικές βοήθειες αναδεικνύονται κυρίως με την επιδίωξη της καθοδήγησης των μαθητών πίσω στο σωστό μονοπάτι γνώσης, να τους επιτρέψει να υπερνικήσουν πολύ μεγάλα κενά γνώσης με ενδιάμεσα βήματα, να τους απαλλάξει από αδιέξοδα και παρακάμψεις στο μονοπάτι για την μαθηματική γνώση με τόσο συνέπεια προετοιμασμένη.

- Είναι συχνά δύσκολο για τους συμμετέχοντες στην μαθησιακή διαδικασία να συνειδητοποιήσουν ότι οι διακοπές στην κατανόηση δεν προκαλούνται απλά από ένα έλλειμμα ή μια απόκλιση ή ένα λάθος σε σχέση με το σωστό μονοπάτι της μάθησης, αλλά ότι τέτοιες διακοπές είναι μία έκφραση ενός θεμελιώδους προβλήματος της ανάπτυξης και κατανόησης θεωρητικών γνώσεων μέσα στην εννοιολογική – συστημική δομή τους. Οι δυσκολίες και τα εμπόδια στην κατανόηση που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μέσα στην διαδικασία της μάθησης, πολλές φορές, οφείλονται κατά ένα μεγάλο μέρος στην αντίθεση που προκύπτει από το γεγονός ότι η διαδικασία της μάθησης ήταν οργανωμένη βήμα προς βήμα και παραγωγικά σύμφωνα με την ιεραρχία της γνώσης με την γραμμική διάταξή της, ενώ οι νέες εννοιολογικές σχέσεις της γνώσης απαιτούν μια συστημική – ολιστική σύνδεση, αφού η νέα έννοια αποτελείται μόνο από την θέση της μέσα στο σύστημα και δεν είναι το αποτέλεσμα μεθοδολογικών ή λογικών συμπερασμάτων.
- Μπορεί ο καθηγητής και οι μαθητές να χρησιμοποιούν τους ίδιους όρους, αλλά ο καθένας μέσα στα δικά του πλαίσια επιχειρηματολογίας, με τελείως διαφορετικό επιδιωκόμενο νόημα (intentional meaning). Οι μαθητές , αντιμετωπίζουν τις έννοιες σύμφωνα με την δική τους «τοπική» προοπτική (συνδεδεμένη με το συγκεκριμένο πρόβλημα που τους τίθεται) ενώ ο καθηγητής εκφράζει την δική του

πιο σφαιρική άποψη που περικλείει, αλλά σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, τις συλλήψεις των μαθητών.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις , ο Steinbring θεωρεί ότι υπάρχει μια ουσιαστική και δύσκολη αλληλεξάρτηση στην τάξη των μαθηματικών, ανάμεσα στους τύπους αλληλεπίδρασης ανάμεσα στον καθηγητή και τους μαθητές από την μία μεριά και τις άρρητες συλλήψεις και στάσεις για τον χαρακτήρα του περιεχομένου των Μαθηματικών από την άλλη μεριά. Θεωρεί, ότι αυτή είναι μια αρκετά διαφορετική άποψη από αυτή του ριζικού κονστρουκτιβισμού σύμφωνα με τον οποίο όλη η γνώση και όλα τα νοήματα είναι υποκειμενικές κατασκευές των συμμετεχόντων της εκπαιδευτικής διαδικασίας και δεν υπάρχει καμία γνώση ως τέτοια αλλά αυτή η γνώση και τα νοήματα είναι πάντα σε διαπραγμάτευση σε διαλογική ερμηνεία. Δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών εννοιών υπέρ μιας αποκλειστικά υποκειμενικής – κοινωνικής σύστασής τους. Ένα ουσιαστικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών εννοιών είναι η θεωρητική ή αυτό – αναφορική φύση της μαθηματικής γνώσης που είναι αρκετά προφανής στην κοινωνική, ιστορική ανάπτυξη πολλών μαθηματικών εννοιών. Όσο όμως βασιζόμαστε σε μια γραμμική κατανόηση των Μαθηματικών, ακόμα και αν η διδασκαλία μας είναι καθαρά προσανατολισμένη στην βάση αλληλεπιδραστικών κοινωνικών – επικοινωνιακών παραμέτρων, θα εισάγουμε περισσότερα μεθοδολογικά τρυκ, περισσότερες βοήθειες στην διδασκαλία που αναπόφευκτα θα έρχονται σε αντίθεση με κρυμμένες και άρρητες αντιλήψεις για τα Μαθηματικά. Η πραγματική διδακτική διαδικασία, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, τείνει να καταστρέψει την θεωρητική φύση της μαθηματικής γνώσης δηλώνοντας αυτή την εννοιολογική διαφορά απλά σαν ποσοτική διαφορά στην γνώση. Αυτό προκαλεί τον κυρίαρχο ρόλο του καθηγητή στη μεσολάβηση της μαθηματικής γνώσης στην αλληλεπίδραση της τάξης. Η αμοιβαία κοινωνική διαδικασία της «στρέψης στον καθηγητή (ο καθηγητής το κέντρο)» και οι αναμενόμενες «προσδοκίες από τους μαθητές» οδηγεί σε μια άρνηση της μαθηματικής γνώσης σαν μια σχετικά ανεξάρτητη ποιότητα. Η γνώση όλο και περισσότερο εισάγεται μόνο από τον καθηγητή, είναι εξαρτώμενη από αυτόν και δεν μπορεί να πάρει διορθωτική ή τροποποιητική αυτόνομη λειτουργία μέσα στην διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης.

Πως μπορούν μαθητές και καθηγητής να επικοινωνήσουν;

- Ο Steinbring προτείνει:

Για να μεταβάλουμε και να αλλάξουμε αυτούς τους κοινωνικό – επικοινωνιακούς μηχανισμούς στην διαδικασία της μάθησης, απαιτείται να μεταβάλλουμε και να αλλάξουμε την αντίληψη για την Μαθηματική γνώση. Στην επικράτηση της άποψης για την γραμμικότητα της διδασκαλίας η οποία αντιστοιχεί σε μία γραμμικότητα της μαθηματικής γνώσης μόνο ο πρόσθετος χαρακτηρισμός της γνώσης σαν ένα σχεσιακό (relational) σύστημα αντί για μια γραμμική διάταξη της γνώσης θα μπορούσε να βοηθήσει στην περίπτωση που προκύπτουν δυσκολίες στην κατανόηση. Μια αντίληψη των σχολικών Μαθηματικών έτσι τροποποιημένη θα μπορούσε να φέρει την ισορροπία ανάμεσα στα αντικειμενικά και υποκειμενικά συστατικά της μαθηματικής γνώσης. Μόνο αυτό θα μπορούσε να αλλάξει την θεώρηση του καθηγητή σαν τον μόνο που κατέχει την γνώση και αποφασίζει για αυτήν και για την αξιολόγησή της. Για να ξεπεράσουμε με εποικοδομητικό τρόπο την διαφορά ανάμεσα στην γνώση του καθηγητή και των μαθητών θα πρέπει να θεωρήσουμε πιο σοβαρά τις θεμελιώδεις σχέσεις αλληλεξάρτησης ανάμεσα στα τοπικά (υλικά) στοιχεία και την συστημική (εννοιολογική) διάσταση των Μαθηματικών και όχι να προσπαθούμε να την απαλείψουμε με μεθοδολογικές βοήθειες και τεχνάσματα υπέρ της υλικής πτυχής**.** Μια αντίληψη του χαρακτήρα της γνώσης των σχολικών μαθηματικών έτσι τροποποιημένη θα μπορούσε να συνεισφέρει στην καθιέρωση μιας νέας ισορροπίας των υποκειμενικών και των αντικειμενικών στοιχείων της μαθηματικής γνώσης στην διαδικασία της μάθησης. Από αυτή την προοπτική, η μαθηματική γνώση δεν είναι πλέον ένα αντικειμενικό προϊόν φτιαγμένο με κάποιο απόλυτο τρόπο, αλλά μάλλον περιέχει, σαν γνώση, και τις δύο πλευρές, αντικειμενικά και υποκειμενικά στοιχεία. Μόνο αυτή η προοπτική μπορεί να μας επιτρέψει να ταρακουνήσουμε την κυριαρχία της ρουτίνας της επικοινωνίας της αλληλεπίδρασης της τάξης ή τουλάχιστον να την περιορίσουμε. Μέσα σε μια κοινωνικά οργανωμένη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης η μαθηματική γνώση η ίδια θα έπρεπε να γίνεται το αντικείμενο για διαπραγμάτευση των νοημάτων. Πρέπει να είμαστε ενήμεροι για την διαφορετική επιστημολογική όψη των μαθητών και των καθηγητών και να την θεωρούμε ως απαραίτητη για την μάθηση. Τελικά η διαφορά της γνώσης ανάμεσα στον καθηγητή και τους μαθητές μπορεί να μειωθεί μόνο αν αυτή ακριβώς η διαφορά αποκτήσει περισσότερη σημασία.

- Η Sfard (1994a) θεωρεί ότι ο καθηγητής και οι μαθητές μπορεί να μην είναι ενημερωμένοι ότι για το γεγονός ότι συμμετέχουν σε διαφορετικές πρακτικές και ότι η μαθηματική φαντασία τους μπορεί να διαμορφώνεται από διαφορετικές μεταφορές. Η ανικανότητά τους να επικοινωνήσουν μεταξύ τους θα ερμηνευθεί έπειτα ως αποτυχία του μαθητή να μάθει ή αποτυχία του δασκάλου να διδάξει, ή οι δύο.

Θεωρεί ότι το πρώτο βήμα προς μια καλύτερη επικοινωνία στην σχολική τάξη είναι η συνειδητοποίηση των καθηγητών για τις μετα – μαθηματικές διαφορές στις πεποιθήσεις τους με τους μαθητές. Ως μετα- μαθηματικές πεποιθήσεις ορίζει τις πεποιθήσεις για τα αντικείμενα και τις μεθόδους της μαθηματικής έρευνας, για την φύση και τους όρους της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων και για τις αποδεκτές μορφές αντιπροσώπευσης της γνώσης. Ωστόσο δεν θεωρεί ότι είναι απαραίτητο αυτές οι πεποιθήσεις να εξετάζονται ρητά: η ασυμμετρία των λέξεων του καθηγητή και των μαθητών μπορεί να εμποδίσει οποιαδήποτε άμεση προσπάθεια να επέλθει μια αμοιβαία κατανόηση. Ο καθηγητής παρά να προσπαθήσει να καταστήσει ρητές στους μαθητές του τις μετα – μαθηματικές του αρχές, πρέπει να στοχεύει στην παροχή στους μαθητές κατάλληλων εμπειριών, ώστε να μυηθεί σε μια νέα μαθηματική εμπειρία με τη συμβίωση με έναν νέο μαθηματικό κόσμο. Ένας τύπος διδασκαλίας που βασίζεται στην συμμετοχή στην μαθηματική δράση φαίνεται να είναι πιο ελπιδοφόρο από τέτοιου είδους διαλόγους μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή.

Ομοίως επιφυλακτική είναι η Sfard (1994) στο να λέμε στους μαθητές ρητά τις μεταφορές που χρησιμοποιούμαι στα Μαθηματικά. Πιστεύει ότι θα πρέπει να του βοηθάμε να κατασκευάζουν τις δικές τους δομικές μεταφορές, αλλά μελέτες έχουν δείξει ότι ακόμα και οι πιο ειλικρινείς προσπάθειες να επέλθει η κατάλληλη μεταφορά έχουν συνήθως περιορισμένη επιτυχία.

- Για τους Núñez, Edwards, & Matos, (1999) έχει μεγάλη σημασία το πώς αντιλαμβανόμαστε τα μαθηματικά: σαν εξωτερικό τοπίο από αντικειμενικές αλήθειες που τις «ανακαλύπτουμε» ή σαν ένα προϊόν προσαρμογής της ανθρώπινης δραστηριότητας στον κόσμο, που μοιράζεται και αποκτά νόημα μέσα από την γλώσσα, αλλά βασίζεται τελικά σε βιολογικές και υπαρξιακές εμπειρίες μοναδικές στο ανθρώπινο είδος μας.

Για μια διδασκαλία με νόημα, το πιο σημαντικό είναι να δημιουργούμε διδακτικά περιβάλλοντα που να ολοκληρώνουν τους τρόπους που τα αντιληπτικά μας συστήματα

λειτουργούν φυσικά, επεκτείνοντας την σωματικά θεμελιωμένη φυσική κατασκευή του νοήματος.

Οι Núñez, Edwards, & Matos, (1999) θεωρούν ότι μια σημαντική πηγή παιδαγωγικών προβλημάτων στην μαθηματική εκπαίδευση είναι τα φιλοσοφικά θεμέλια που υπονοούνται στην μαθηματική εκπαίδευση για το πώς βλέπουμε τα μαθηματικά που κυριαρχούν στην κουλτούρα μας (objectivism, Platonism, formalism δες Núñez 2007 σελ. 131). Αυτοί οι φιλοσοφικοί περιορισμοί μοιραία μεταφέρονται στην διδακτική διαδικασία και μπορούν να οδηγήσουν στην διδασκαλία υποτιθέμενων εξωτερικών άχρονων αληθειών που συλλαμβάνουν ουσίες παρά σαν βασισμένους στο μυαλό, ενσωματωμένους τρόπους που οι άνθρωποι σχηματίζουν νόημα. Το θεμελιώδες εννοιολογικό λάθος που υποκρύπτεται σε αυτό το είδος της διδασκαλίας είναι η ιδέα ότι η διαίσθηση μπορεί να αντικατασταθεί από την αυστηρότητα με σκοπό να εξαλείψει την ασάφεια. Όχι μόνο αυτό δεν είναι δυνατό (και στην πραγματικότητα ούτε απαραίτητο) αλλά αν κανείς μελετήσει τις φυσικές, πλαισιοθετημένες , αυθόρμητες, καθημερινές σκέψεις και διαισθήσεις από μια ενσωματωμένη γνωσιακή προοπτική, κάποιος μπορεί να δει ότι οι διαισθήσεις δεν είναι καθόλου ασαφείς. Μπορεί να δει έτσι κανείς πως η συμπερασματική δομή της καθημερινής εμπειρίας που κρύβεται κάτω από την διαίσθηση, αντιστοιχίζεται σε άλλα πεδία. Οι αποκαλούμενες «παρανοήσεις» (Núñez, 2000 a) δεν είναι δεν είναι πραγματικά παρανοήσεις (άποψη που συμφωνεί με της Sfard, 2001d που αναφέραμε στο σχόλιο 3 παραπάνω). Αυτός ο όρος συνεπάγεται ότι υπάρχει μια «λανθασμένη» αντίληψη, λανθασμένη σε σχέση με κάποια «αλήθεια». Αλλά η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών δείχνει ότι δεν υπάρχουν καθαυτές λανθασμένες αντιλήψεις, αλλά μάλλον παραλλαγές ιδεών και εννοιολογικών συστημάτων με διαφορετικές συμπερασματικές δομές. Από παιδαγωγική άποψη, επομένως, θα ήταν πολύ σημαντικό (Núñez, 2000 a) να αναγνωρίσουμε ποιες ακριβώς είναι οι παραλλαγές της συμπερασματικής δομής που παράγουν τις αποκαλούμενες παρανοήσεις. Καθιστώντας τούτο σαφές, θα πρέπει να ακολουθήσει μια παιδαγωγική μεσολάβηση για να παρακινήσει τους μαθητές να λειτουργήσουν με τις κατάλληλες εννοιολογικές αντιστοιχίσεις που προβάλλουν τη συμπερασματική δομή που απαιτείται από την εξεταζόμενη μαθηματική ιδέα. Τέλος, οι Núñez, Edwards, & Matos, (1999) θεωρούν ότι οι μαθητές πρέπει να είναι ενήμεροι του γεγονότος ότι τα μαθηματικά θεωρήματα, αντικείμενα και αποδείξεις είναι ιδέες που έχουν νόημα επειδή ακριβώς είναι θεμελιωμένα στην σωματική μας εμπειρία σαν κοινωνικά όντα και οι καθηγητές (Núñez, 2000 a) να γνωρίζουν την σιωπηρή εννοιολογική δομή των μαθηματικών ιδεών που πρέπει να διδάξουν.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα κάνουμε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικής με την διδασκαλία των πραγματικών αριθμών και εννοιών που σχετίζονται με αυτήν, ενώ στο δεύτερο μέρος θα κάνουμε μια αντίστοιχη ανασκόπηση ερευνών που σχετίζονται με την διδασκαλία της έννοιας της δύναμης και της εκθετικής συνάρτησης.

Α] Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Οι πραγματικοί αριθμοί (Giannakoulias at all, 2007) εμφανίζονται στο σχολείο, στο μάθημα των μαθηματικών, μέσα από μια διαδικασία εμπλουτισμού του συνόλου των φυσικών αριθμών. Το σύνολο των φυσικών αριθμών επεκτείνεται στο σύνολο των ακεραίων προκειμένου να συμπεριληφθούν οι αρνητικοί ακέραιοι. Το σύνολο των ακεραίων επεκτείνεται στο σύνολο των ρητών αριθμών ώστε να αναδειχθούν οι λόγοι ακεραίων. Τελικά οι άρρητοι αριθμοί ενώνονται με το σύνολο των ρητών και κατασκευάζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Κάθε ένα από τα σύνολα αυτά των αριθμών εμφανίζονται φυσιολογικά σε ένα πλαίσιο μιας απαραίτητης επέκτασης του κάθε συνόλου με σκοπό να επιλυθούν προβλήματα που στο υποσύνολο δεν μπορούν αν αντιμετωπισθούν. Κάθε «μεγαλύτερο» σύνολο έχει κάποιες από τις ιδιότητες του υποσυνόλου (αλλά όχι όλες) και τις επιπλέον δικές του νέες ιδιότητες.

Ωστόσο, όπως θα προσπαθήσουμε να δείξουμε παρακάτω, μια τέτοια διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω αποκρύπτει ένα πλήθος προβλημάτων στην κατανόηση των μαθητών.

Κάποια γνωστικά προβλήματα (Giannakoulias at all, 2007) που σχετίζονται με την έννοια του αριθμού ανακύπτουν από το γεγονός ότι στα σχολικά μαθηματικά οι αριθμοί δεν ορίζονται (και δεν θα μπορούσαν να ορίζονται) με τον τυπικό τρόπο. Όμως (Merenluoto - Lehtinen ,2004) αν και οι ανώτερες ιδιότητες των ρητών και των πραγματικών αριθμών δεν διδάσκονται ρητά, αυτές οι ιδιότητες ενσωματώνονται στις αναπαραστάσεις, τους κανόνες των πράξεων και στην διάταξη αυτών των αριθμών. Οι μαθητές (Giannakoulias at all, 2007)

αντί για έναν ορισμό για τους πραγματικούς αριθμούς, έχουν κάποια εικόνα έννοιας (concept image), με την έννοια των Tall και Vinner (1981) που λειτουργεί σαν ορισμός. Η εικόνα έννοιας στα σχολικά Μαθηματικά περιλαμβάνει διάφορες αναπαραστάσεις για τους αριθμούς όπως, σημεία πάνω στην αποκαλούμενη «ευθεία των πραγματικών αριθμών», δεκαδικοί, κλάσματα και κάποιους άλλους αριθμούς – τους άρρητους – που δεν μπορούν να εκφραστούν σαν κλάσματα αλλά, δυνητικά, μπορούν να γραφούν σαν δεκαδικοί με άπειρα, μη επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία. Τελικά, σύμφωνα με τα σχολικά εγχειρίδια, η εικόνα έννοιας των πραγματικών αριθμών αναμένεται να είναι το σύνολο όλων των δεκαδικών αριθμών.

Ας εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά όλες αυτές τις μεταβάσεις από την άποψη της γνωσιακής επιστήμης και αρχικά στο πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής.

Η μετάβαση από το σύνολο των φυσικών στο σύνολο των ρητών αριθμών

Έχει υποστηριχθεί (Vamvakoussi – Vosniadou , 2007) ότι, ακόμα και πριν την διδασκαλία, τα μικρά παιδιά σχηματίζουν μια βασισμένη σε αντικειμενικά πρότυπα ορθότητας (*principled) κατανόηση* του αριθμού που έχει τις ρίζες της στην πράξη της μέτρησης . Όταν τα μικρά παιδιά μαθαίνουν να καταμετρούν τους αριθμούς (Merenluoto, Lehtinen, 2002)**,** σχηματίζουν συγκεκριμένες *αφελείς* (naive) θεωρίες για τους αριθμούς που βασίζονται στην 1-1 αντιστοιχία των λέξεων των αριθμών με τα αντικείμενα κατά την διαδικασία της μέτρησης . Μια από τις βασικές οντολογικές υποθέσεις – εκ των προτέρων πεποιθήσεις (presumptions) της έννοιας του αριθμού που αναπτύσσεται μέσα σε αυτό το πλαίσιο, είναι η ιδέα ότι οι αριθμοί είναι διακεκριμένοι (separate) και ασυνεχείς - διακριτοί (discrete), δηλαδή αναπτύσσεται ένα ενστικτώδες αίσθημα (που συμβαδίζει με τις πεποιθήσεις (beliefs) που αναπτύσσουν οι μαθητές από τις εμπειρίες της καθημερινής ζωής) ότι υπάρχει πάντα ένας «επόμενος αριθμός» και ένα είδος κενού ανάμεσα σε δύο αριθμούς. Οι Vamvakoussi – Vosniadou (2007) θεωρούν επιπλέον ως μια *θεμελιώδη προϋπόθεση* (εκ των προτέρων πεποίθηση - fundamental presupposition) του αρχικού επεξηγηματικού πλαισίου του αριθμού το γεγονός ότι η ιδιότητα της διάταξης («orderability») δεν διαφοροποιείται από την ύπαρξη του επόμενου αριθμού («nextness»).

Στα πρώτα σχολικά χρόνια (Vamvakoussi - Vosniadou, 2007), αυτή η αρχική (initial) κατανόηση του αριθμού βοηθάει τους μαθητές να επιχειρηματολογούν για τους φυσικούς αριθμούς και να μαθαίνουν τις ιδιότητές τους, να χτίζουν στρατηγικές για τις πράξεις με φυσικούς αριθμούς κ.λ.π. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος του μετρήματος βοηθάει το παιδί

να σχηματίσει την αρχή του επομένου (successor principle) (δηλαδή ότι αν δοθεί ένας συγκεκριμένος φυσικός αριθμός, μπορεί να βρεθεί πάντα και ο επόμενός του), η οποία, στην συνέχεια, το βοηθά να συμπεράνει ότι υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί. Η πρόσθεση και η αφαίρεση γίνονται κατανοητές σε όρους μετρήματος, ο πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και οι αριθμοί μπορούν να διαταχθούν με βάση την θέση τους στην διαδικασία της απαρίθμησης.

Ωστόσο (Vamvakoussi - Vosniadou, 2007) όταν ο μαθητής θα αντιμετωπίσει αριθμούς με διαφορετικές ιδιότητες από αυτές των φυσικών αριθμών, το αρχικό του επεξηγηματικό πλαίσιο (που περιγράψαμε προηγουμένως) θα σταθεί εμπόδιο στην εξέλιξη της μάθησής του. Πράγματι, υπάρχουν πολλά στοιχεία, από διάφορες ερευνητικές εργασίες, που δείχνουν ότι οι μαθητές σε διάφορα επίπεδα της μαθητικής τους διαδρομής, χρησιμοποιούν την γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς για να κατανοήσουν τους ρητούς και να σχηματίσουν νόημα για την δεκαδική και κλασματική αναπαράστασή τους, συχνά υποπίπτοντας σε λάθη στην διάταξη, στις πράξεις, και στον συμβολισμό των ρητών αριθμών . Σημαντικές γνωστικές αδυναμίες που εντοπίζονται στους μαθητές, κατά την μετάβαση από το σύνολο των φυσικών στο σύνολο των ρητών αριθμών, είναι:

α)η αδυναμία των μαθητών να συνειδητοποιήσουν ότι η διακριτότητα (ή ασυνέχεια**)** (discreteness) είναι μια ιδιότητα που δεν διατηρείται στο σύνολο των ρητών αριθμών,

β) η αδυναμία τους να συνειδητοποιήσουν ότι το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από στοιχεία που μπορούν να αναπαρασταθούν είτε σαν κλάσματα είτε σαν δεκαδικοί, παραμένοντας ωστόσο αμετάβλητα κάτω από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις,

γ) η αδυναμία τους να συλλάβουν (objectifying) τους ρητούς ως αντικείμενα τους ρητούς αριθμούς και να κατανοήσουν (conceptualizing) τους φυσικούς αριθμούς σαν ένα υποσύνολο των ρητών και να δώσουν κατάλληλη σημασία στον κλασματικό και δεκαδικό συμβολισμό.

Οι παραπάνω γνωστικές αδυναμίες τους οδηγούν σε *παρανοήσεις* (misconceptions) και στη δημιουργία συνθετικών μοντέλων. Επιπλέον τους εμποδίζουν να κατανοήσουν την ιδιότητα που χαρακτηρίζει (Vamvakoussi - Vosniadou, S., 2004 και Merenluoto - Lehtinen, 2004) το σύνολο των ρητών αριθμών από το σύνολο των ακεραίων αριθμών: την ιδιότητα της πυκνότητας (δηλαδή ότι ανάμεσα σε δύο άνισους ρητούς αριθμούς υπάρχουν άλλοι άπειροι ρητοί αριθμοί). Η ιδιότητα αυτή είναι ριζικά διαφορετική από την ιδιότητα της διακριτότητας (discreteness) που χαρακτηρίζει το σύνολο των ακεραίων αριθμών, ωστόσο η

κατανόησή της συνδέεται στενά με την κατανόηση της έννοια του ρητού αριθμού. Αντίθετα, η μη κατανόηση αυτής της ιδιότητας θα αποτελέσει αργότερα εμπόδιο και για την κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών αλλά και της έννοιας του ορίου έννοιες που, όπως και η πυκνότητα, είναι στενά συνδεδεμένες με την έννοια του απείρου (Vamvakoussi - Vosniadou, 2004).

Σχετικά με την κατανόηση την πυκνότητας των ρητών αριθμών, οι Vamvakoussi - Vosniadou, (2004) θεωρούν ότι δεν βοηθά η συνεχόμενη διαίρεση ενός διαστήματος με ρητά άκρα (π.χ. η εύρεση του μέσου όρου μ δύο αριθμών α και β και μετά η εύρεση του μέσου του α και του μ και να συνεχίσουν αυτή την διαδικασία) όπου η έννοια του ενεργεία απείρου προσεγγίζεται με ένα δυνάμει τρόπο. Ούτε φαίνεται να βοηθά (Vamvakoussi - Vosniadou, 2007) η παρουσία της ευθείας των αριθμών, όπως φάνηκε από τις απαντήσεις των μαθητών σε σχετική έρευνα που έκαναν. Τέλος οι Merenluoto - Lehtinen (2004) θεωρούν ότι και οποιαδήποτε διδακτική απόπειρα να δημιουργήσουμε γνωστικές συγκρούσεις επίσης δεν βοηθά.

Αυτό που χρειάζεται κατά τις Vamvakoussi - Vosniadou (2004, 2007) είναι αλλαγές στο επεξηγηματικό πλαίσιο των μαθητών για την έννοια του αριθμού. Οι αλλαγές αυτές δεν μπορούν να επιτευχθούν με μόνο τον εμπλουτισμό του αρχικού τους επεξηγηματικού πλαισίου για τον αριθμό. Απαιτείται εννοιολογική αλλαγή, δηλαδή απαιτούνται αλλαγές στην δομή της έννοιας του αριθμού, στις *θεμελιώδεις προϋποθέσεις* που την συνοδεύουν με ποιο σημαντική αλλαγή να σταματήσουν να σκέφτονται για τους ρητούς αριθμούς με όρους των φυσικών αριθμών και των ιδιοτήτων τους, καθώς και αλλαγή στο πλαίσιο της χρήσης του. Η εννοιολογική αυτή αλλαγή αναμένεται να είναι μια αργή και σταδιακή διαδικασία. Στην διαδικασία αυτή βοηθά οι καθηγητές να είναι ενημερωμένοι για την φύση των αλλαγών που απαιτούνται καθώς και η δημιουργία διδακτικών περιβαλλόντων που να βοηθούν τους μαθητές να εκφράζουν και να αναπτύσσουν τις απόψεις τους, ώστε να συνειδητοποιούν τις πεποιθήσεις τους.

Από μια άλλη προοπτική, (Vamvakoussi - Vosniadou , 2007 με αναφορά στη Sfard, 1991) η μετακίνηση από την αποδοχή του ότι το πηλίκο δύο αριθμών εκτός από μια πράξη (ή ένας λόγος) είναι και ένα μαθηματικό αντικείμενο, μπορεί να ειδωθεί σαν μια οντολογική μετακίνηση κατά την οποία μια *διαδικασία* γίνεται μέλος της κατηγορίας των *αντικειμένων*.

Η μετάβαση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Η έννοια των πραγματικών αριθμών είναι μία από τις πιο σύνθετες και «βαθιές» έννοιες των Μαθηματικών γεγονός που φανερώνεται και από την μακριά και περίπλοκη ιστορική της ανάπτυξη (Merenluoto – Lehtinen, 2007). Στην πραγματικότητα, η έννοια των πραγματικών αριθμών, οι έννοια της πυκνότητας της ευθείας των πραγματικών αριθμών και οι έννοιες της συνέχειας και του ορίου είναι βαθιά συνδεδεμένες. Για να μπορέσει κανείς να καταλάβει την δομή αυτού του συνδυασμού θα πρέπει να κάνει μια ριζική ανακατασκευή της προηγούμενης σκέψης του και αυτή η ανακατασκευή φαίνεται να είναι πολύ σύνθετη και δύσκολη στην επίτευξή της (Merenluoto – Lehtinen, 2002).

Στο επίπεδο των Μαθηματικών του Λυκείου οι μαθητές, για τις ανάγκες του Απειροστικού λογισμού που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου θα πρέπει να κατανοήσουν τουλάχιστον τα παρακάτω (Merenluoto – Lehtinen, 2002):

α) την ιεραρχική φύση των πραγματικών αριθμών, όπου οι άρρητοι και οι ρητοί αριθμοί, οι ακέραιοι και οι φυσικοί αριθμοί, κατανοούνται ως υποσύνολα

β) την συμπαγή φύση της ευθείας των πραγματικών αριθμών, όπου τα σημεία παριστάνουν τους πραγματικούς αριθμούς, και όπου οι άρρητοι αριθμοί «γεμίζουν» τα κενά ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς και

γ) τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Επιπλέον πρέπει να δουν το όριο ως

προϋπόθεση για την συνέχεια.

Ωστόσο, η έρευνα των Merenluoto – Lehtinen (1997, 2002, 2004), σε μαθητές Λυκείου, (που θα δούμε πιο αναλυτικά στην ανάλυση του ερωτηματολογίου της παρούσας έρευνας) καταλήγει στο ότι η, παρατηρούμενη, μέτρια λειτουργική κατανόηση όλων των παραπάνω εννοιών σε συνδυασμό με τα συνθετικά μοντέλα των μαθητών, φαίνεται να αποτελούν εμπόδιο για την περαιτέρω εννοιολογική τους ανάπτυξη: η ανάγκη για την αναθεώρηση των αντιλήψεών τους δεν εμφανίζεται καν στους σπουδαστές. Η μεγάλη τους πλειοψηφία δεν μπορεί να κάνει τις συνδέσεις ανάμεσα στα συστατικά των προκαταρκτικών (preliminary) εννοιών των πραγματικών αριθμών και της αυθόρμητης σκέψης για τους αριθμούς που φαίνεται να βασίζεται στους φυσικούς αριθμούς.

Κατά την άποψη των Tynjälä - Merenluoto - Murtonen (2002) αυτό που απαιτείται είναι μια ριζική αλλαγή στην σκέψη των μαθητών για την έννοια του αριθμού και προτείνουν τα παρακάτω τρία στάδια αλλαγών στην έννοια του αριθμού:

Πρώτα, για την συνέχεια των αριθμών: η έννοια του αριθμού αλλάζει από την αντίληψη των αριθμών ως κάτι το διακριτό, που ισχύει στους «ακεραίους» και ο «επόμενος» αριθμός ορίζεται από τη συνέχεια των αριθμών. Δεν υπάρχουν «κενά» στην αριθμογραμμή και ο «επόμενος» δεν ορίζεται αλλά είναι πιθανό να έχουμε μια οσοδήποτε κοντινή προσέγγιση (έννοια του ορίου).

Έπειτα, για την έννοια της συνέχειας συνάρτησης: δεν συνδέεται με το «μηχανισμό της συνέχειας που προκαλείται από την κίνηση» αλλά στη μαθηματική έννοια της συνέχειας βασισμένη στη συνέχεια των αριθμών (η έννοια του ορίου).

Τρίτο, η φύση της μαθηματικής επιχειρηματολογίας αλλάζει έτσι ώστε η βάση της να μην είναι πλέον η φυσική πραγματικότητα αλλά η λογική συνοχή.

Όλα τα παραπάνω, κατά τους Merenluoto – Lehtinen (2002), απαιτούν την ενοποίηση των διαφορετικών ειδών γνώσης για τους «αριθμούς» όπως εκφράζεται από τους μαθητές και τους μαθηματικούς και που συνοπτικά παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα 1:

	Η οπτική των ειδικών στα μαθηματικά	
Επιχειρηματολογία βασισμένη στην λογική συνέπεια και όχι στην διαίσθηση για την πραγματικότητα	Η λογικά ανεπτυγμένη, συνεκτική και δομημένη θεωρία των πραγματικών αριθμών	
Ενοποίηση δύο διαφορετικών ειδών γνώσης	Η προκαταρκτική έννοια των πραγματικών αριθμών: Η δομή (ιεραρχία) των αριθμών, η συμπαγής φύση της ευθείας των αριθμών, η έννοια του ορίου	
	Αριθμοί και ευθεία των αριθμών	Όριο και συνέχεια
Ανάπτυξη της επιστημονικής κατανόησης των αριθμών και της έννοιας του ορίου	Η συμπαγής φύση της ευθείας των αριθμών (πυκνότητα)	Η συνέχεια βασισμένη στο όριο
	Η πρότερη σκέψη βασισμένη στην συνεκτική κατανόηση των φυσικών αριθμών	Η προηγούμενη σκέψη βασισμένη στον προσδιορισμό του μηχανισμού ή την αιτία (cause) της συνέχειας
	Η οπτική των μαθητών	

Πίνακας 1: Ένα πειραματικό «γράφημα» των ριζικών εννοιολογικών αλλαγών στις επεκτάσεις της έννοιας του αριθμού και τις «περιοχές» των εξηγήσεων των μαθητών και των καθηγητών των Μαθηματικών. (Merenluoto – Lehtinen, 2002)

Άρρητοι αριθμοί

Λίγη προσοχή έχει δοθεί στους άρρητους αριθμούς στα σχολικά μαθηματικά κατά τους Fischbein, Jehiam, Cohen (1995), που θεωρούν ότι ο κύριος λόγος είναι ότι τα σχολικά μαθηματικά θεωρούνται ουσιαστικά σαν ένα σύνολο τεχνικών και ότι ιδέα των μαθηματικών ως συνεπές, δομικά οργανωμένο σώμα γνώσης, δεν αναπτύσσεται συστηματικά στο μαθητή. Αναφέρουν ότι βεβαίως, αυτό είναι διδακτικά ένα δύσκολο έργο, αλλά τα προγράμματα σπουδών δεν πρέπει να το αποφεύγουν. Στο ίδιο άρθρο τους θεωρούν ότι εάν κανείς σκοπεύει να μεταβιβάσει στους μαθητές το συναίσθημα της δομικής σύλληψης (structurality) των μαθηματικών, θα πρέπει να υπογραμμίσει, καταρχήν, τη συνεκτική εικόνα του αριθμητικού συστήματος με την ακριβή ιεραρχία του: «Εάν περνάμε από τους φυσικούς αριθμούς στους ακέραιους και από αυτούς στους ρητούς αριθμούς, ο όρος «ρητός αριθμός» ο ίδιος επιβάλλει την αντίθετη έννοια των άρρητων αριθμών. Πώς θα ήταν δυνατό να περάσει κανείς από τους ρητούς αριθμούς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, χωρίς να περιγράψει το σύνολο των άρρητων αριθμών; Οι άρρητοι αριθμοί είναι ένα μέρος του συστήματος και χωρίς αυτούς η έννοια των πραγματικών αριθμών δεν είναι ολοκληρωμένη. Αρκεί κανείς να παραμελήσει τους άρρητους αριθμούς και το όλο σύστημα καταρρέει. Αυτό ακριβώς συμβαίνει σήμερα.» Οι Sirotic & Zazkis, (2005) θεωρούν ότι η έννοια ενός άρρητου αριθμού είναι εγγενώς δύσκολη, αλλά η κατανόηση των άρρητων αριθμών είναι απαραίτητη για επέκταση και ανακατασκευή της έννοιας του αριθμού από το σύστημα των ρητών στο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς μια ιδιαίτερη διδακτική προσοχή είναι απαραίτητη για την κατάλληλη ανάπτυξη της έννοιας.

Σε έρευνά τους για τους λόγους που η έννοια του άρρητου αριθμού είναι δύσκολη για τους μαθητές, οι Fischbein, Jehiam, Cohen (1995) υπέθεσαν αρχικά ότι οι δυσκολίες προέρχονται από α) την σύνδεση των άρρητων αριθμών με την έννοια της ασυμμετρίας, που όπως φανερώνει η ιστορική ανάπτυξη της έννοιας, είναι αντίθετη με την βασική μας διαίσθηση για τους αριθμούς ως οντότητες που σχετίζονται με την απαρίθμηση και την μέτρηση και β) με την πρόταση ότι η δύναμη του συνεχούς είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη του συνόλου των ρητών αριθμών. Ωστόσο, στα αποτελέσματα της έρευνάς τους αναφέρουν φαίνεται ότι τα δύο διαισθητικά εμπόδια που αναφέρονται παραπάνω δεν είναι πρωτόγονης φύσης αφού προϋποθέτουν μια κάποια διανοητική ωριμότητα που τα υποκείμενα της έρευνας (μαθητές και φοιτητές) δεν είχαν, αφού φάνηκε ότι δεν ήταν ικανοί να οριοθετήσουν σωστά τις έννοιες των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών αριθμών. Είχαν γενικά

τελείως μπερδεμένες ιδέες για αυτές τις έννοιες και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Ειδικότερα, οι περισσότεροι δεν εκπλήσσονται από το γεγονός ότι υπάρχουν ζευγάρια τμημάτων που είναι ασύμμετρα, ούτε έχουν συναίσθηση για την διάκριση ανάμεσα στην απειρία των ρητών και των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς δεν μπορούν να θεωρηθούν διαισθητικές οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν.

Οι Sirotic και Zazkis (2004)σε δική τους έρευνα με φοιτητές, επιβεβαίωσαν τα ευρήματα της έρευνας που αναφερθήκαμε παραπάνω και προτείνουν τα εξής: «Τα ευρήματά μας, υποδεικνύουν ότι η υπανάπτυξη των διαισθήσεων συχνά συνδέονται με αδυναμία στην τυπική γνώση και με την έλλειψη της αλγοριθμικής εμπειρίας. Η οικοδόμηση συνεπών συνδέσεων ανάμεσα στους αλγορίθμους, στις διαισθήσεις και στις έννοιες είναι ουσιαστικό για να υπάρξει μία ζωτική (ως αντίθετη της απλής απομνημόνευσης) γνώση οποιουδήποτε μαθηματικού πεδίου, και συνεπώς και για την κατανόηση των άρρητων αριθμών.»

Οι Sirotic & Zazkis, (2005) ερεύνησαν την κατανόηση της ευθείας των πραγματικών αριθμών από φοιτητές. Βρήκαν ότι η κοινή αντίληψη στην πλειοψηφία των φοιτητών για την ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ότι αυτή περιορίζεται στην ευθεία των ρητών αριθμών, ή ακριβέστερα, στην ευθεία των δεκαδικών ρητών αριθμών όπου μόνο δεκαδικοί με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων αναπαριστώνται ως σημεία πάνω στην αριθμογραμμή. Θεωρούν ότι η έμφαση στη δεκαδική αναπαράσταση των άρρητων αριθμών δεν συμβάλει στην εννοιολογική κατανόηση τους, καθώς οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την αντίφαση να μιλάμε για αριθμούς που δεν μπορούμε να τους γράψουμε ή να τους γνωρίζουμε και παράλληλα τους ονομάζουμε «πραγματικούς». Θεωρούν ότι πρέπει να δίνουμε έμφαση στην γεωμετρική αναπαράστασή τους (όπου τουλάχιστον είναι αυτό δυνατό) αφού αυτό θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές:

α) να γίνουν πιο ευαίσθητοι στην διάκριση ανάμεσα στον άρρητο αριθμό και την δεκαδική του αναπαράσταση

Β) να συμβάλει στην ενθυλάκωση της δύσκολης έννοιας του άρρητου αριθμού από το στάδιο της διαδικασίας, στο στάδιο του αντικειμένου, αφού η προσοχή τους θα εστιαστεί στην αντιπροσώπευση ενός άρρητου αριθμού ως ένα αντικείμενο – σημείο πάνω στην αριθμογραμμή, μια άρρητη απόσταση- παρά στην ατέρμονη διαδικασία της κατασκευής στο χρόνο των άπειρων δεκαδικών του ψηφίων.

Όριο

Ο Cornu (1991) κάνει μια επισκόπηση των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν την έννοια του ορίου για πρώτη φορά.

Αρχικά διακρίνει τις *αυθόρμητες συλλήψεις* (spontaneous conceptions) που προϋπάρχουν της τυπικής διδασκαλίας στη σκέψη των μαθητών και σε αυτές περιλαμβάνονται ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως η χρήση των λέξεων «τείνει σε» και «όριο». Αυτές οι συλλήψεις, που συγκροτούν μια αρχική εικόνα έννοιας (concept image) είναι επίμονες και μπορεί να έρθουν σε σύγκρουση με την μαθηματική έννοια του ορίου. Στη συνέχεια αναφέρεται σε διάφορα γνωστικά εμπόδια δίνοντας μεγάλο βάρος στα επιστημολογικά εμπόδια, δηλαδή εμπόδια που είναι εγγενή στην μαθηματική έννοια του ορίου. Ανάμεσα σε αυτά τα εμπόδια είναι και τα παρακάτω:

- <u>Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού :</u>

Η ιδέα του απειροστού σαν μια μεταβλητή που τείνει στο μηδέν παρέπεμπε στην ιδέα μιας «ενδιάμεσης κατάστασης» ανάμεσα εκείνου *που είναι τίποτα αλλά και ταυτόχρονα είναι κάτι*, είναι ακόμα και σήμερα παρούσα στους σύγχρονους μαθητές. Για παράδειγμα θεωρούν ότι ο 0,99… είναι «ο τελευταίος αριθμός πριν το 1» αλλά δεν είναι ίσος με τον 1.

- <u>Η μεταφυσική διάσταση της έννοιας του ορίου</u>

Η έννοια του απείρου δίνει μια μεταφυσική διάσταση στην έννοια του ορίου που είναι και σήμερα ένα από τα κύρια εμπόδια που συναντούν οι μαθητές οι οποίοι, μη μπορώντας να βασιστούν στις γνωστές τους έννοιες της αριθμητικής και της άλγεβρας, θεωρούν την έννοια του ορίου και του απείρου ως «μη πραγματικά μαθηματικά» ή «πολύ αφηρημένα» ή «η μέθοδος είναι καλή, υπό τον όρο ότι είστε ικανοποιημένοι με μια κατά προσέγγιση τιμή».

- <u>Το όριο επιτυγχάνεται ή όχι</u>;

Αυτή είναι μια διαμάχη που διήρκεσε σε όλη την ιστορία της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα, ο Robins (1697 – 1751) εκτιμούσε ότι το όριο δεν μπορούσε ποτέ να επιτευχθεί, όπως τα εγγεγραμμένα σε κύκλο πολύγωνα δεν μπορούν ποτέ να γίνουν ίσα με τον κύκλο. Υποστήριζε: «Δίνουμε το όνομα τελικό μέγεθος (ultimate magnitude) στο όριο το οποίο μια μεταβλητή ποσότητα μπορεί να προσεγγίσει όσο κοντά θέλουμε, αλλά με τη οποία δεν μπορεί να είναι απολύτως ίσα». Παρόμοια σκέφτονταν και πολλοί άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί. Η συζήτηση αυτή είναι ζωντανή και στους μαθητές μας. Ακόμα

και για τους φοιτητές το όριο είναι μια προσέγγιση: Οι Schwarzenberger & Tall,. (1978) παραθέτουν τις αντιφάσεις ενός φοιτητή για το όριο: «Όταν λέμε $s_n \rightarrow s$ σημαίνει ότι το s_n πλησιάζει το s καθώς το n μεγαλώνει, αλλά στην πραγματικότητα δεν φτάνει το s μέχρι το άπειρο» . Ο ίδιος φοιτητής στη ίδια σελίδα στο κάτω μέρος έγραψε: «Το άπειρο είναι μια φανταστική έννοια που επινοήθηκε από τους μαθηματικούς και είναι χρήσιμη για την περιγραφή των ορίων κ.λ.π

Για πολλούς ερευνητές, όπως αναφέρεται στο Cottrill et al. (1996), θεωρείται ότι η παρανόηση αυτή (ότι το όριο είναι κάτι που «ποτέ δεν επιτυγχάνεται») δημιουργείται όταν αντιμετωπίζουμε το όριο δυναμικά δηλαδή ως κάτι που μεταβάλλεται στον χρόνο, που εμπεριέχει κάποιου είδους κίνηση, και όχι «στατικά», σαν μία λογική συνθήκη, όπως επιβάλει ο μαθηματικός ορισμός του.

Ο Cornu (1991α) παρατηρεί ότι η έννοια του ορίου είναι για τους περισσότερους μαθητές, το πρώτο θέμα στο οποίο τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται σε ένα πεπερασμένο υπολογισμό που δίνει μια καθορισμένη απάντηση. Η διάκριση αυτή αναφέρουν οι Cottrill et al. (1996) μιλώντας στα πλαίσια της θεωρίας APOS, είναι ακριβώς μια διάκριση ανάμεσα σε μια δράση (action) και μία διαδικασία(process). Από την στιγμή που ένας υπολογισμός περιλαμβάνει ένα άπειρο αριθμό βημάτων, μπορεί να γίνει κατανοητός μόνο μέσα από μία διαδικαστική σύλληψη. Στην ανάλυσή τους οι Cottrill et all. (1996),μιλώντας με όρους της θεωρίας APOS, θεωρούν ότι αυτό που αποκαλούμε δυναμική έννοια του ορίου είναι κάτι περισσότερο σύνθετο από μια διαδικασία που συλλαμβάνεται με την εσωτερίκευση (interiozation) μιας δράσης. Δεν είναι μια απλή διαδικασία αλλά ένα συντονισμένο ζευγάρι διαδικασιών (καθώς το χ τείνει στο α, το f(χ) τείνει στο L) που είναι στην πραγματικότητα ένα σχήμα (schema), δηλαδή μια συνεκτική συλλογή από δράσεις, διαδικασίες και αντικείμενα. Σε αντίθεση με άλλους ερευνητές που πιστεύουν ότι η δυναμική σύλληψη μπορεί να εμποδίσει την πρόοδο προς την ανάπτυξη της τυπικής κατανόησης της έννοιας του ορίου, πιστεύουν ότι η δυσκολία στην μετακίνηση προς μια πιο τυπική σύλληψη του ορίου είναι, τουλάχιστον μερικώς, ένα αποτέλεσμα μιας ασαφούς ανάπτυξης μιας ισχυρής δυναμικής σύλληψης. Προτείνουν, για την διδασκαλία του τυπικού ορισμού του ορίου συνάρτησης, να βοηθήσουμε τους μαθητές να κατασκευάσουν, (για τον σκοπό αυτό προτείνουν και την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή), μια ξεχωριστή διαδικασία πρώτα στο πεδίο ορισμού και μετά, στο μυαλό τους, να χρησιμοποιήσουν την συνάρτηση για να κατασκευάσουν μια διαδικασία στο πεδίο τιμών. Δηλαδή η συνάρτηση έχει τον ρόλο του **συντονιστή** ανάμεσα σε δύο ξεχωριστές διαδικασίες, αυτήν που γίνεται στο πεδίο ορισμού και αυτήν που γίνεται στο πεδίο τιμών. Ειδικότερα, η συνάρτηση

εφαρμόζεται στην διαδικασία της προσέγγισης, με τιμές του χ, ενός αριθμού α, για να πάρουμε την διαδικασία των προσεγγίσεων, με τιμές f(χ), του ορίου L. Στην συνέχεια του άρθρου τους οι Cottrill et all. (1996) κάνουν ορισμένες προτάσεις για το πώς μπορούν να οδηγηθούν τελικά οι μαθητές, εκφράζοντας τις διαδικασίες με τεχνικούς όρους, σε μια ουσιαστική κατανόηση του τυπικού ορισμού του ορίου, αλλά αυτό δεν αφορά την παρούσα εργασία.

Άπειρο

Το σημαντικό, και για την κατανόηση της έννοιας του ορίου, αλλά και του πραγματικού αριθμού, είναι να απαντηθεί το ερώτημα: μπορεί κάποιος να έχει την αίσθηση ότι όλα τα βήματα μιας άπειρης διαδικασίας παρουσιάζονται όλα την ίδια στιγμή, ακόμα και αν δεν μπορεί κανείς να κάνει στην πραγματικότητα όλα αυτά τα βήματα; Δηλαδή μπορεί κανείς να συλλάβει μια άπειρη διαδικασία ως μια ολότητα; Δηλαδή μπορεί να συληφθεί το ενεργεία άπειρο από το ανθρώπινο μυαλό; Για παράδειγμα ο Fischbein (1994) λέει:

«Για να δεχθεί κανείς ότι την ισότητα 1 + ½ + ¼ + …. = 2, κάποιος πρέπει να συλλάβει *διαισθητικά* το ενεργεία άπειρο του αθροίσματος. Επειδή αυτό δεν συμβαίνει στους μαθητές, θεωρούν ότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι μικρότερο από το δύο». Στο

Με το θέμα της κατανόησης του απείρου έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές .Παρακάτω θα περιγράψουμε τις απόψεις των Fischbein, Dubinsky, Nunez (και των συνεργατών τους).

- Ο Fischbein (2001, 1993 και Fischbein et all 1979) ασχολήθηκε με την διαισθητική κατανόηση των μαθητών για την έννοια του απείρου. Θεωρεί (1979) ότι το άπειρο είναι, διαισθητικά, αντιφατική έννοια από την φύση της. Η εξήγηση για αυτό είναι ότι η λογική μας είναι , λόγω των εμπειριών μας, συνδεδεμένη με πεπερασμένες πραγματικότητες. Για να ξεπεράσουμε αυτήν την αντίφαση, το ανθρώπινο πνεύμα έχει εφεύρει την δυνάμει απειρία και την ενεργεία απειρία. Θεωρεί τη δυνάμει απειρία (2001) ως «διαδικασίες, οι οποίες σε κάθε στιγμή είναι πεπερασμένες, αλλά συνεχίζονται χωρίς τέλος» . Το ενεργεία άπειρο (1993) αναφέρεται σε άπειρα σύνολα στοιχείων που θεωρούνται στην ολότητά τους. Για παράδειγμα, η διαδικασία της συνεχούς διαίρεσης ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι δυνητική απειρία, ενώ η ολότητα των φυσικών, των ρητών και των πραγματικών αριθμών είναι παραδείγματα ενεργεία απείρου.

Εξηγεί σε τι διαφέρει η διαίσθηση του απείρου από την μαθηματική έννοια του απείρου: «Η διαίσθηση του απείρου σημαίνει το τι *πραγματικά νοιώθουμε* ως αληθινό ή προφανές και όχι αυτό που δεχόμαστε ως αληθινό σαν συνέπεια μιας λογικής ανάλυσης. Αυτό σημαίνει ότι η έννοια του απείρου μπορεί να αναπτυχθεί από την διδακτική διαδικασία, ενώ οι διαισθήσεις για το άπειρο μπορεί να παραμείνουν ανέπαφες».

Ο Fischbein (1991 σελ. 324) θεωρεί ότι το άπειρο εμφανίζεται *διαισθητικά* ως ισοδύναμο με το ανεξάντλητο. Αυτό το διαπίστωσε από τις απαντήσεις ενός δείγματος μαθητών που εξέτασε στην παρακάτω ερώτηση: «Διαιρούμε ένα τμήμα ΑΒ πρώτα στην μέση και συνεχίζουμε διαιρώντας κάθε ένα από τα τμήματα που προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο. Ερώτηση: Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο Γ του τμήματος, θα φτάσουμε σε μια κατάσταση που ένα από τα σημεία της διαίρεσης θα είναι το Γ;» Οι μαθητές σε ποσοστό πάνω από 80% απάντησαν καταφατικά. Παρά το ότι είχαν διδαχθεί τους άρρητους αριθμούς δεν σκέφτηκαν ότι ένα σημείο που αντιστοιχεί σε άρρητο αριθμό δεν θα μπορούσαμε να το «πετύχουμε» με μια τέτοια διαδικασία διαιρέσεων. Από αυτό το παράδειγμα συμπεραίνει ότι η ερμηνεία του απείρου ως κάτι ανεξάντλητο, είναι ο ουσιαστικός λόγος που *διαισθητικά* υπάρχει μόνο ένα είδος, ένα επίπεδο απείρου. Μια τέτοια αντίληψη για το άπειρο το καθιστά ως κάτι που δεν μπορεί να το υπερβεί ένα πιο πλούσιο άπειρο. Σε σχέση με το παραπάνω παράδειγμα (με το σημείο Γ), η λογική του ανεξάντλητου χαρακτήρα του απείρου υπονοεί ότι στο όριο, οι διαδοχικές διαιρέσεις του τμήματος θα καλύψουν *όλα* τα σημεία του τμήματος και ότι αυτό είναι ήδη το ενεργεία άπειρο. Γενικότερα, ο Fischbein (1978) θεωρεί ότι οι διαισθητικές συλλήψεις των μαθητών σε οριακές διαδικασίες, εστιάζονταν στην απειρία της διαδικασίας παρά στη τελική τιμή του ορίου. Η «χωρίς τέλος πάλη» με την δυνάμει απειρία μιας οριακής διαδικασίας αποδείχθηκε ένα σοβαρό γνωστικό εμπόδιο για την κατανόηση της έννοιας του ορίου από τους μαθητές. «Στην πραγματικότητα η έννοια του ορίου είναι μια αντιφατική έννοια (με την διαλεκτική Hegelian έννοια) επειδή το μυαλό μας από την φύση του δεν είναι προσαρμοσμένο στην σύλληψη του ενεργεία απείρου» (Fischbein, 1994)

Ο Fischbein (από Dubinsky 2005a) θεωρεί ότι το ενεργεία άπειρο είναι «μια καθαρά λογική, εννοιολογική κατασκευή όχι διαισθητικά αποδεκτή». Παράλληλα όμως λέει: «Ήταν τον 19^{ο} αιώνα, με τον Cantor, που το ενεργεία άπειρο έγινε αποδεκτό ως μια μαθηματική έννοια σαν ένα αποτέλεσμα μιας παντελούς αλλαγής της αντίληψης» (Fischbein, 1994)

- Ο Dubinsky et all. (2005a&b) προτείνει μια APOS ανάλυση της (γνωσιακής) σύλληψης της έννοιας του απείρου. Η έννοια του απείρου εμπλέκεται και στην έννοια του

ορίου έτσι όπως αναλύθηκε στο Cottrill et all. (1996) όπου μια συνάρτηση, όπως είδαμε, συλλαμβάνεται ως ο συντονιστής δύο διαδικασιών, μία στο πεδίο ορισμού και μία στο πεδίο τιμών . Από την στιγμή που, συνήθως, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης είναι άπειρα σύνολα, έχουμε ένα παράδειγμα μιας σημαντικής μαθηματικής έννοιας που ενσωματώνει πλευρές του μαθηματικού απείρου που πρώτα συλλαμβάνονται ως διαδικασίες.

Οι Dubinsky et all (2005a & b), στο πλαίσιο της θεωρίας APOS κάνουν την παρακάτω διάκριση:

Η *δυνάμει απειρία* είναι η αντίληψη της απειρίας σαν μια διαδικασία που κατασκευάζεται ξεκινώντας από ορισμένα πρώτα βήματα που είναι δράσεις. Για την επανάληψη αυτών των βημάτων στο άπειρο απαιτείται η εσωτερίκευση αυτής της δράσης σε μια διαδικασία.

Το *ενεργεία άπειρο* είναι το νοητικό αντικείμενο που παίρνουμε από την ενθυλάκωση αυτής της διαδικασίας σε ένα αντικείμενο. Μέσω της ενθυλάκωσης το άπειρο γίνεται γνωσιακά επιτεύξιμο.

Για να επιτευχθεί το ενεργεία άπειρο απαιτείται μια ριζική μετακίνηση στην φύση της σκέψης μας. Παρά να σκεφτόμαστε με όρους εσωτερίκευσης ακολουθιών από δράσεις που εφαρμόζονται σε ένα υπάρχον αντικείμενο, η ενθυλάκωση σηματοδοτεί την ικανότητα να σκεφτόμαστε την ίδια έννοια σαν μια μαθηματική οντότητα στην οποία νέοι, υψηλότερου επιπέδου μετασχηματισμοί μπορούν να εφαρμοστούν.

Διακρίνει επίσης δύο προϋποθέσεις για να φτάσει κανείς να σκεφτεί μια άπειρη διαδικασία *στατικά* (δηλαδή να σκεφτεί την υπονοούμενη διαδικασία σαν ένα ενθυλακωμένο γνωστικό αντικείμενο):

Πρώτον να δει την διαδικασία σαν *ολοκληρωμένη (complete)* , δηλαδή να μπορεί να φανταστεί ότι όλα τα βήματα της διαδικασίας έχουν πραγματοποιηθεί και να ξέρει παράλληλα τις βασικές ιδιότητες του κάθε βήματος και δεύτερον να δει την διαδικασία σαν μία *ολότητα* (totality), δηλαδή να δει ότι το αντικείμενο που συνδέεται με την κατάσταση στο άπειρο απεικονίζει το σύνολο της διαδικασίας, σαν όλα τα βήματα να πραγματοποιούνται σε μία μόνο στιγμή, παρά οποιαδήποτε από τις μεμονωμένες πτυχές της. Ότι, με κάποιο τρόπο, ξεπερνά και στέκεται έξω από την διαδικασία. Από αυτή την άποψη, το αντικείμενο της ενθυλάκωσης μιας άπειρης διαδικασίας, αυτό που προκύπτει όταν δούμε την άπειρη διαδικασία σαν μια ολοκληρωμένη ολότητα (completed totality), μπορούμε να το ονομάσουμε και υπερβατολογικό (transcendent) αντικείμενο της διαδικασίας.

Οι Dubinsky et all. (2008), επιβεβαίωσαν ερευνητικά τις παραπάνω θεωρητικές αρχές, εξετάζοντας την περίπτωση δύο σχετιζόμενων άπειρα επαναλαμβανόμενων διαδικασιών. Πραγματοποίησαν συνεντεύξεις με ορισμένους φοιτητές με αντικείμενο εξέτασης την κατανόησή τους για το πρόβλημα με ονομασία «μπάλες του τένις»: «Υποθέστε ότι έχουμε τρείς κάδους για μπάλες του τένις με άπειρη χωρητικότητα. Έναν κάδο «εκκίνησης» που περιέχει αριθμημένες μπάλες 1, 2, 3,…, έναν κάδο Α και έναν κάδο Τ. Στις 12 παρά μισό λεπτό οι μπάλες 1 και 2 πηγαίνουν από τον κάδο «εκκίνησης» στον κάδο Α και ταυτόχρονα η μπάλα 1 πάει στον κάδο Τ. Στις 12 παρά ¼ του λεπτού, οι μπάλες 3 και 4 πηγαίνουν στον κάδο Α και η μπάλα 3 ταυτόχρονα πάει στον κάδο Τ, ομοίως 1/8 του λεπτού πριν τις 12 κ.λ.π. Πόσες μπάλες θα έχουν οι κάδοι Α και Τ στις 12 ακριβώς;»
Από τους φοιτητές που εξέτασαν οι Dubinsky et all. (2008), μόνο ένας κατάφερε να λύσει σωστά το πρόβλημα, δηλαδή να αιτιολογήσει ότι στις 12 ο κάδος Α θα είναι άδειος και ο κάδος Τ θα έχει όλες τις μπάλες. Εξετάζοντας την σκέψη αυτού του φοιτητή έκαναν τις παρακάτω παρατηρήσεις:

-Ο φοιτητής αρχικά *εσωτερικοποιεί* τις δράσεις που σχετίζονται με τα αρχικά βήματα της διαδικασίας , προσδιορίζοντας με ακρίβεια το πρότυπο (pattern) της διαδικασίας για ν βήματα.

-Βλέπει τον χρόνο 12 το μεσημέρι ως κάτι που οριακά («το όριο της ακολουθίας») θα επιτευχθεί , σαν το υπερβατολογικό αντικείμενο της διαδικασίας της συνεχούς διαίρεσης του χρόνου. Για τον φοιτητή η ώρα 12 το μεσημέρι υποδεικνύει το «επόμενο» βήμα από την ολοκλήρωση των άπειρων βημάτων των υποδιαιρέσεων.

-Βλέπει την άπειρη επαναληπτική διαδικασία σαν ένα *συντονισμό δράσεων* ανάμεσα στο πέρασμα του χρόνου και την μετακίνηση των μπαλών: «Για κάθε βήμα ν το οποίο συμβαίνει $\frac{1}{2^{\nu}}$ του λεπτού πριν από τις 12, η μπάλα ν μετακινείται από τον κάδο Α στον Τ και αυτό συμβαίνει για άπειρες φορές». Μια ένδειξη της σημασίας αυτού του συντονισμού για την λύση του προβλήματος φαίνεται από την απάντησή του όταν ρωτήθηκε τι θα συνέβαινε αν δεν υπήρχε ο περιορισμός του χρόνου: « Η διαδικασία αυτή δεν θα ολοκληρωνόταν». Ο συντονισμός της διαδικασίας του χρόνου με την διαδικασία της μετακίνησης των μπαλών, διευκολύνει την σύλληψη της τελευταίας διαδικασίας ως ολοκληρωμένης. Ο φοιτητής δίνει προσοχή στην αντιστοιχία του αριθμού των βημάτων με τις μπάλες που περιέχονται στον Τ την οποία την αντιλαμβάνεται ως μια ολότητα. Αυτό του επιτρέπει να κάνει μια ενθυλάκωση για να πάρει το σωστό αποτέλεσμα: «Οποιοδήποτε ν και να διαλέξω, η μπάλα ν θα βρεθεί στον κάδο Τ, αυτό σημαίνει ότι ο αρχικός κάδος θα αδειάσει στον κάδο Τ». Στη

συνέχεια, σε ερώτηση για το τι συμβαίνει στον κάδο Α συμπεραίνει, μέσω της απαγωγής σε άτοπο, ότι θα είναι, τελικά, άδειος (αφού αν υποθέσουμε ότι κάποια μπάλα, έστω μ είναι στον κάδο Α στις 12 η ώρα, τότε αυτό έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι η μπάλα μ μετακινείται στο βήμα μ $\frac{1}{2^{\mu}}$ του λεπτού πριν τις 12. Άρα στις 12 ο Τ θα περιέχει όλες τις μπάλες και ο Α θα είναι άδειος)

Αντίθετα με αυτόν τον φοιτητή, οι υπόλοιποι φοιτητές δεν κατάφεραν να λύσουν σωστά το πρόβλημα και το κύριο πρόβλημα που αντιμετώπισαν ήταν με την θεώρηση του χρόνου που τον θεώρησαν ως κάτι που δεν ολοκληρώνεται («ποτέ δεν θα φτάσουμε στις 12 το μεσημέρι») και παράλληλα στο ότι δεν κατάφεραν να συντονίσουν το πέρασμα του χρόνου με την μετακίνηση των μπαλών. Οι Dubinsky et all. (2008) θεωρούν ότι σύμφωνα με την θεωρία APOS αυτό εξηγείται ως εξής: Για να μπορέσει κανείς να συντονίσει δύο διαδικασίες θα πρέπει και οι δύο να είναι πλήρως κατασκευασμένες και να συλλαμβάνονται ως ολοκληρωμένες. Οι φοιτητές που είδαν το πέρασμα του χρόνου ως κάτι ανολοκλήρωτο, είχαν επίσης πρόβλημα να δουν και την διαδικασία μετακίνησης των μπαλών σαν κάτι ολοκληρωμένο. Σαν αποτέλεσμα ο συντονισμός των δύο δράσεων ήταν αδύνατος, πέρα από έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων.
Ωστόσο, οι Dubinsky et all. (2008) εκφράζουν μια αμφιβολία για την παραπάνω εξήγηση: Ο φοιτητής που έλυσε το πρόβλημα, αν και έβλεπε την διαδικασία του χρόνου ως κάτι ολοκληρωμένο, είδε την διαδικασία της μετακίνησης των μπαλών σαν κάτι που δεν ολοκληρώνεται, όταν απομονώθηκε ο χρόνος. Έτσι, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μπορεί ο συντονισμός που συμβαίνει ανάμεσα σε δύο άπειρα επαναλαμβανόμενες διαδικασίες απαιτεί τουλάχιστον την μία διαδικασία, και όχι απαραίτητα και τις δύο, να μπορούν να ειδωθούν ως ολοκληρωμένες.

- Οι Núñez & Lakoff (2005) υποθέτουν ότι η ιδέα του «ενεργεία απείρου» στα μαθηματικά είναι μεταφορική, ότι οι ποικίλες ιδέες που χρησιμοποιούν το ενεργεία άπειρο κάνουν χρήση του έσχατου (τελικού) *αποτελέσματος μιας χωρίς τέλους διαδικασίας*. «Μιλώντας κυριολεκτικά δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα. Αν η διαδικασία δεν έχει τέλος, δεν μπορεί να υπάρξει κανένα τέτοιο «έσχατο αποτελέσματα». Αλλά οι πολύ ανθρώπινοι μηχανισμοί της μεταφοράς μας επιτρέπουν να κατανοούμε και να κατασκευάζουμε το «αποτέλεσμα» μιας άπειρης διαδικασίας – με όρους του μόνου τρόπου που έχουμε για να κατανοούμε το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας – με όρους μιας διαδικασίας που *έχει* ένα τέλος. Αυτή η μεταφορική αποδοχή του ενεργεία απείρου επέτρεψε στους μαθηματικούς ,

αποδεχόμενοι την ύπαρξη μιας «τελικής κατάστασης» μιας άπειρης διαδικασίας ως πραγματική, να αναπτύξουν τον απειροστικό λογισμό.»

Υποθέτουν επίσης ότι όλες οι περιπτώσεις ενεργεία απείρου είναι ειδικές περιπτώσεις μίας μόνο γενικής εννοιολογικής μεταφοράς στην οποία διαδικασίες που συνεχίζονται έπ' άπειρον (που σημαίνει χωρίς τέλος) κατανοούνται ως να έχουν ένα τέλος και ένα έσχατο αποτέλεσμα. Αυτήν την μεταφορά την καλεί Βασική Μεταφορά του Απείρου (ΒΜΑ) που σχηματικά την παρουσιάζουν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 2:

Η ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ		
Περιοχή πηγής: *Ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες*	→	Περιοχή στόχου: *Επαναληπτικές διαδικασίες που συνεχίζουν στο άπειρο*
Αρχική Κατάσταση	→	Αρχική Κατάσταση
Κατάσταση που είναι αποτέλεσμα από την αρχική κατάσταση της διαδικασίας	→	Κατάσταση που είναι αποτέλεσμα από την αρχική κατάσταση της διαδικασίας
Η διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η επόμενη κατάσταση	→	Η διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η επόμενη κατάσταση
Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την νιοστή επανάληψη της διαδικασίας.	→	Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την νιοστή επανάληψη της διαδικασίας.
Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας.	→	Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας (ενεργεία άπειρο) (μεταφορικά)
Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.	→	Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.

Πίνακας 2: Η Βασική μεταφορά του απείρου (Lakoff & Núñez ,2000 σελ. 159)

Δηλαδή , (Radu, Weber, 2009) οι Lakoff και Nunez προτείνουν ότι μια άπειρη επαναληπτική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ολοκληρωθεί εάν μια μεταφορική τελική κατάσταση προστίθεται σε αυτή. Η προσθήκη αυτή μπορεί να γίνει με την σχεδίαση ενός παραλληλισμού μεταξύ των πεπερασμένων διαδικασιών (που έχουν ένα σαφώς καθορισμένο τελικό στάδιο) και των άπειρων διαδικασιών. Καθώς και οι δύο τύποι διαδικασιών έχουν μία αρχική κατάσταση και μια σαφή διαδικασία για την απόκτηση της επόμενης κατάστασης από μια υπάρχουσα κατάσταση, κάποιος μπορεί να επεκτείνει τον παραλληλισμό με το να φαντάζεται ότι και οι άπειρες διεργασίες, έχουν επίσης μια τελική, μοναδική, κατάσταση που έπεται από όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις. Αυτή η επέκταση είναι που ονομάζουν Βασική Μεταφορά του Απείρου. Η μεταφορική διαδικασία που προκύπτει έχει απείρως πολλές ενδιάμεσες καταστάσεις και ένα μεταφορικό τελικό στάδιο που είναι *μοναδικό* (δηλαδή, δεν μπορούμε να διακρίνουμε καμία προηγούμενη κατάσταση στην διαδικασία που να ακολουθεί τη φάση ολοκλήρωσης της διαδικασίας (the completion stage) αν και προηγείται της τελικής κατάστασης, και δεν υπάρχει άλλη

κατάσταση της διαδικασίας που και να προκύπτει από την ολοκλήρωση της διαδικασίας και να ακολουθεί την τελική κατάσταση).

Οι Dubinsky et all. (2008) επιχειρούν μια σύγκριση ανάμεσα στην θεωρία της ΒΜΑ και της θεωρίας APOS σε σχέση με το ενεργεία άπειρο. Η βασική διαφορά τους θεωρούν ότι είναι ότι για την ΒΜΑ η κατάσταση στο άπειρο συλλαμβάνεται ως η μεταφορική συμπλήρωση (μία τελική προκύπτουσα κατάσταση) μιας άπειρης διαδικασίας, ενώ για την APOS, η κατάσταση στο άπειρο είναι ένα υπερβατολογικό αντικείμενο που προκύπτει από την ενθυλάκωση της διαδικασίας. Θεωρούν (Dubinsky, et all 2005b σελ. 9)ότι η σκέψη ότι οι άπειρες διαδικασίες μπορούν να έχουν μία τελική κατάσταση δεν βοηθάει και αντίθετα μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα τους μαθητές όπως το να θεωρήσουν το άπειρο σαν έναν αριθμό. Θα μπορούσαμε, συνοπτικά, να παρουσιάσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους με τον παρακάτω Πίνακα 3 (σύμφωνα με το Dubinsky et all., 2008)):

	APOS	**ΒΜΑ**
Νοητικοί μηχανισμοί	Interiorization – coordination (Νοητικοί μηχανισμοί που φέρνουν την μετάβαση στην κατάσταση στο άπειρο)	Εννοιολογική μεταφορά (Γνωσιακός μηχανισμός που διευκολύνει την μετάβαση στην κατάσταση στο άπειρο)
Ομοιότητες	Δράσεις σε ορισμένα πρώτα βήματα → εσωτερίκευση σε νοητική διαδικασία → πολλαπλές εμφανίσεις αυτής της διαδικασίας συντονίζονται για να σχηματίσουν μια άπειρη επαναληπτική διαδικασία	Κατασκευή της αρχικής κατάστασης και των πρώτων βημάτων → κατασκευή μιας άπειρης διαδικασίας που παράγει κάθε ενδιάμεση κατάσταση από την προηγούμενη της
Διαφορές	Η τελική κατάσταση **λαμβάνεται** μέσα από την ενθυλάκωση, η οποία προκύπτει όταν κάποιος εφαρμόζει μια δράση σε ένα ολοκληρωμένο όλο.	Η τελική κατάσταση **προκύπτει** μέσα από την μεταφορική σύλληψη της άπειρης διαδικασίας με όρους μιας πεπερασμένης διαδικασίας και ειδικότερα μιας άπειρης διαδικασίας με ένα μεταφορικό τελευταίο όρο.
Η σύλληψη του ενεργεία απείρου από το άτομο	Η κατάσταση στο άπειρο είναι ένα transcendent **αντικείμενο** που προκύπτει από την ενθυλάκωση της διαδικασίας, στην προσπάθεια του ατόμου να εφαρμόσει μια δράση στη διαδικασία	Η κατάσταση στο άπειρο γίνεται αντιληπτή ως η μεταφορική ολοκλήρωση μιας άπειρης διαδικασίας
Κριτική	**Κριτική της APOS ανάλυσης** (Dubinsky, et all 2005b):	

	Οι εξηγήσεις που βασίζονται στην θεωρία APOS απλά περιγράφουν τους τύπους της σκέψης με τους οποίους ένα άτομο θα μπορούσε να σκεφτεί το ενεργεία άπειρο. Δεν περιγράφουν, απαραίτητα, αυτό που «πραγματικά» συμβαίνει στο μυαλό του ατόμου, αλλά δίνουν ένα μοντέλο για την κατανόηση της σκέψης του, που μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμο για την πραγματοποίηση ερευνών και για τον σχεδιασμό αποτελεσματικών παιδαγωγικών στρατηγικών. **Κριτική στην ΒΜΑ**: Η ΒΜΑ δεν αναφέρεται στην σημασία της σύλληψης της διαδικασίας σαν μια ολότητα, ούτε στην επίδραση της εφαρμογής διαφορετικών δράσεων στις ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες. – Η ΒΜΑ δεν προσδιορίζει συγκεκριμένους νοητικούς μηχανισμούς που χρειάζονται να εφαρμοστούν για να κατασκευαστεί η τελική κατάσταση στο άπειρο. -Τελικά: η μέθοδος της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών των Lakoff και Nunez δεν παρέχει πάντα εξηγήσεις για όλο το εύρος της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

Πίνακας 3: Σύγκριση των απόψεων της θεωρίας APOS για τις άπειρες επαναληπτικές, με τις αντίστοιχες απόψεις των Lakoff και Nunez (σύμφωνα με το Dubinsky et all., 2008))

Πως θα απαντούσαν, πιθανόν, οι Lakoff και Nunez στην κριτική των Dubinsky et all.; Πιθανόν όπως απάντησαν(http://www.maa.org/reviews/wheremath_reply.html) στην κριτική για το "Where Mathematics Comes From» της Bonnie Gold στο περιοδικό MAA: «Η εννοιολογική μεταφορά έχει επεξηγηματική δύναμη ακριβώς επειδή υπάρχουν εμπειρικά παρατηρήσιμοι ενσαρκωμένοι μηχανισμοί που ικανοποιούν ισχυρούς βιολογικούς και γνωστικούς περιορισμούς. Η Gold όμως δεν αναφέρει καθόλου τον όρο ενσάρκωση (embodiment) ούτε μία φορά!... Είναι η πραγματικότητα του πως σκέφτονται οι άνθρωποι, μια γνωσιακή πραγματικότητα που πρέπει να εξηγήσουμε με εύλογους γνωσιακούς όρους, ποιοι γνωσιακοί μηχανισμοί χρησιμοποιούνται στην ανθρώπινη κατανόηση.»

Οι Lakoff & Núñez (2000) προσπαθούν να ερμηνεύσουν, στα πλαίσια της γνωσιακής επιστήμης, το πώς συνδέονται οι έννοιες του απείρου και του ορίου με την έννοια του πραγματικού αριθμού: (σελ. 181):

«Δεν προκαλεί έκπληξη ότι η έννοια του απείρου είναι κεντρική στις έννοιες των πραγματικών αριθμών και του ορίου. Η ιδέα του ορίου προκύπτει σε απάντηση του γεγονότος ότι υπάρχουν άπειρες σειρές που τα αθροίσματά τους είναι πεπερασμένα. Οι πραγματικοί αριθμοί θεμελιωδώς κατανοούνται με την χρήση της έννοιας του απείρου: σε όρους δεκαδικών με άπειρα δεκαδικά ψηφία, απείρων σειρών ή ακολουθιών και απείρων

τομών. Από την στιγμή που έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει μία μόνο γενική έννοια του ενεργεία απείρου που χαρακτηρίζεται μέσω της ΒΜΑ. Θα μπορούσε να υπάρχει μια ειρωνεία εδώ. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται «πραγματικοί». Αν και κανένας μέχρι στιγμής δεν έχει δει κανέναν πραγματικό αριθμό ούτε στην φύση ούτε στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές ή οπουδήποτε αλλού. Η ειρωνεία είναι ότι αυτό που καλούμε «πραγματικοί» αριθμοί είναι θεμελιωδώς μεταφορικοί στην σύλληψή τους.»

Οι Lakoff & Núñez (2000,) δείχνουν πως μέσω της ΒΜΑ, χαρακτηρίζονται οι πραγματικοί αριθμοί στο τυπικό αξιωματικό σύστημα: μέσω του αξιώματος του ελάχιστου άνω φράγματος ή μέσα από τις άπειρες τομές εγκιβωτισμένων διαστημάτων.
Εξηγεί, παίρνοντας ως παράδειγμα το π, ότι από την πλευρά του δυνάμει απείρου δεν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα. Είναι μόνο από την πλευρά του ενεργεία απείρου, μέσω της ΒΜΑ που μπορεί αυτό να υπάρξει. Όμως έτσι, απαιτώντας ένα διατεταγμένο σώμα όπως οι ρητοί να περιέχουν όλα τα ελάχιστα άνω φράγματα, οι μαθηματικοί προσθέτουν τους άρρητους στους ρητούς.
Εντελώς ισοδύναμη θεωρούν ότι είναι η κατασκευή των πραγματικών αριθμών με άπειρες τομές εγκιβωτισμένων διαστημάτων με ρητά άκρα. Η ανάλυση που κάνουν φαίνεται συνοπτικά στον παρακάτω Πίνακα 4:

Εγκιβωτισμένα διαστήματα		
Περιοχή – στόχου: *Επαναληπτικές διαδικασίες που συνεχίζουν στο άπειρο*	→	***Ειδική περίπτωση:*** *Άπειρες ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων*
Αρχική Κατάσταση (0)	→	Μια χωρίς τέλος ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων, το καθένα από τα οποίο ορίζεται από το ζευγάρι των ρητών αριθμών $[\lambda_v, \theta_v]$,όπου $\lambda_v > \lambda_{v-1}$ και $\theta_v < \theta_{v-1}$
Κατάσταση (1) που είναι αποτέλεσμα από την αρχική κατάσταση της διαδικασίας	→	Ο πρώτος όρος της ακολουθίας: Το διάστημα $[\lambda_1, \theta_1]$,
Η διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση (ν – 1) παράγεται η επόμενη κατάσταση (ν)	→	Από την τομή των $[\lambda_{v-1}, \theta_{v-1}]$ και $[\lambda_v, \theta_v]$.
Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την νιοστή επανάληψη της διαδικασίας.	→	Το διάστημα $[\lambda_v, \theta_v]$.
«Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας» (ενεργεία άπειρο «∞»)	→	**Το «διάστημα» $[\lambda_\infty, \theta_\infty]$, όπου $\lambda_\infty > \lambda_v$ και $\theta_\infty < \theta_v$ για κάθε ν.** **Η απόσταση ανάμεσα στα λ_∞ και θ_∞ είναι 0. Δηλαδή, το «διάστημα» είναι ένα σημείο,** **$\rho = \lambda_\infty = \theta_\infty$.**
Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση («∞») ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.	→	**Συνεπαγωγή: το ρ είναι ένα μοναδικό σημείο και είναι μεγαλύτερο από κάθε λ_v και μικρότερο από κάθε θ_v .**

Πίνακας 4: Η «κατασκευή» των πραγματικών αριθμών μέσω εγκιβωτισμένων διαστημάτων (Lakoff & Núñez, 2000, σελ.206)

Οι Lakoff & Núñez (2000, σελ.292) εξηγούν και τις μεταφορές που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή των πραγματικών αριθμών με τομές Dedekind. Θεωρούν ότι και σε αυτή την περίπτωση γίνεται ,άρρητη, χρήση της ΒΜΑ μαζί με άλλες μεταφορές που έχουν να κάνουν με την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Σε όλες τις περιπτώσεις κατασκευής των πραγματικών αριθμών οι Lakoff & Núñez (2000) αναδεικνύουν το πώς, οι μαθηματικοί καταφέρνουν μέσω της ΒΜΑ να συλλαμβάνουν, γνωσιακά, συνεχείς διαδικασίες με καθαρά διακριτούς όρους. Σε κάθε περίπτωση (ο.π. σελ. 207) οι διάφοροι ορισμοί των πραγματικών αριθμών είναι, άρρητα, μεταφορικοί ορισμοί. Η ισοδυναμία αυτών των ορισμών, δηλαδή ότι έχουν τα ίδια συνεπαγόμενα, κάνουν τους μαθηματικούς να θεωρούν ότι χαρακτηρίζουν τις ίδιες «οντότητες», με τις ίδιες ιδιότητες, και μιλούν για *τους* πραγματικούς αριθμούς σαν αυτοί να ήταν υπαρκτές αντικειμενικές οντότητες.

Στα παρακάτω θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε, περιληπτικά, την σύνδεση των μαθηματικών ιδεών που οδήγησαν στην μαθηματική έννοια της συνέχειας συνάρτησης με τους ανθρώπινους ενσαρκωμένους μηχανισμούς έτσι όπως περιγράφεται στη βιβλιογραφία των Lakoff & Núñez.

Η φυσικά συνεχής γραμμή

Οι Núñez & Lakoff,(1998) ονομάζουν «φυσική συνέχεια» την καθημερινή ιδέα της συνέχειας που προκύπτει από την κίνηση, παράγοντας μία τροχιά χωρίς «άλματα» ή «χάσματα». Μια γραμμή που παράγεται με αυτόν τον τρόπο είναι μία «ολιστική» γραμμή (Núñez, Edwards, Matos, 1999) που δεν αποτελείται από διακριτά στοιχεία, και τα σημεία είναι θέσεις (τοποθεσίες) *πάνω* στην γραμμή. Με αυτή την έννοια, μια γραμμή είναι μια οντότητα διαφορετική από τα σημεία, που είναι θέσεις πάνω στην ευθεία, όπως ακριβώς και ένας αυτοκινητόδρομος είναι μια διαφορετική οντότητα από τις τοποθεσίες πάνω σε αυτόν. Οι γραμμές από την οπτική της καθημερινής μας γεωμετρικής διαίσθησης, είναι φυσικά συνεχείς με αυτήν την έννοια.

Δύο διαφορετικές μεταφορές για την ευθεία των πραγματικών αριθμών

α) *Η μεταφορά ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΝΩ ΣΕ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ*

Η παραπάνω μεταφορά (Πίνακας 5) είναι σύμφωνα τους Núñez & Lakoff,(1998) η «καρδιά» της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Οι Πραγματικοί Αριθμοί Είναι Σημεία Πάνω Σε Μια Ευθεία (Γραμμή)		
Περιοχή πηγής: Σημεία πάνω σε μια γραμμή		Περιοχή στόχου: Πραγματικοί αριθμοί
Τα σημεία P_i πάνω σε μια γραμμή	→	Οι πραγματικοί αριθμοί R_i
Μια απόσταση $D_j(P_j, P_k)$ ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι σημείων	→	Μια σχέση διαφοράς $Diff_j$ $(R_j - R_k)$ = $\lvert R_j - R_k \rvert$ ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών.
Μια χωρική σχέση διάταξης ισχύει μεταξύ όλων των ζευγαριών σημείων.	→	Μια σχέση διάταξης ισχύει ανάμεσα σε όλα τα ζευγάρια πραγματικών αριθμών.
Καθορισμένα σημεία α και β, με το α χωρικά διατεταγμένο – προηγούμενο του β	→	Καθορισμένοι πραγματικοί αριθμοί 0 και 1, με το 0 μικρότερο του 1.

Πίνακας 5: Η κύρια μεταφορά της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Núñez & Lakoff,1998 σελ. 90)

Αν θεωρήσουμε την μίξη των δύο περιοχών (δηλαδή τα σημεία μιας γραμμής και τους αριθμούς με μία σχέση διάταξης) παράγεται το «εννοιολογικό μείγμα» της συνηθισμένης «αριθμογραμμής», που μπορούμε να το ονομάσουμε *Αριθμογραμμή Μείγμα*. Με το μείγμα αυτό (Núñez & Lakoff,1998)και με την χρήση των συντεταγμένων μπορεί να χαρακτηριστεί μια φυσικά συνεχής συνάρτηση, ως μια καμπύλη στο επίπεδο, έτσι ώστε κάθε σημείο πάνω στην καμπύλη να ορίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος (χ, f(x)). Έτσι ορισμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης εξακολουθεί να έχει τις ιδιότητες της «φυσικά συνεχούς» γραμμής (για παράδειγμα να παράγεται από την κίνηση ενός σημείου). Αυτή ήταν η έννοια της γραφικής παράστασης μέχρι και το τέλος του 19^{ου} αιώνα, οπότε και έγινε η σύγχρονη θεμελίωση της Ανάλυσης με «στατικούς» συνολοθεωρητικούς όρους. Το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση ήταν η μεταφορά που περιγράφουμε αμέσως παρακάτω.

β) *Η θεώρηση της Αριθμογραμμής μέσα από την μεταφορά ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΗ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ ΣΗΜΕΙΩΝ*

Σύμφωνα με αυτήν την μεταφορά μια γραμμή συνίσταται από τα σημεία της, τα οποία είναι αφηρημένες οντότητες, στοιχεία ενός συνόλου που αποτελούν τον χώρο. Από την μείξη της φυσικής ευθείας, των συνόλων και των αριθμών (Πίνακας 6, αναλυτικά στο Lakoff & Núñez ,2000, σελ.281) προκύπτει, μεταφορικά, το Συνολοθεωρητικό Αριθμογραμμή Μείγμα, όπου οι αριθμοί τότε καθορίζουν τι είναι τα σημεία.

Το Συνολοθεωρητικό Αριθμογραμμή Μείγμα				
Περιοχή πηγής: Η μείξη Χώρου - Συνόλου			Περιοχή Στόχου	
Φυσικά συνεχής χώρος: Η ευθεία		Σύνολα	Αριθμοί	
Η ευθεία	↔	Ένα σύνολο	→	Ένα σύνολο από αριθμούς
Σημεία – Τοποθεσίες	↔	Στοιχεία ενός συνόλου	→	Αριθμοί
Τα σημεία είναι θέσεις πάνω σε μια γραμμή	↔	Τα στοιχεία είναι μέλη ενός συνόλου	→	Μεμονωμένοι αριθμοί είναι μέλη ενός συνόλου αριθμών

Πίνακας 6: Η θεώρηση της ευθείας των πραγματικών αριθμών ως σύνολο σημείων – αριθμών (Lakoff & Núñez ,2000, σελ.281)

Οι Lakoff & Núñez (2000) εξηγούν γιατί οι δύο παραπάνω θεωρήσεις για την ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ριζικά διαφορετικές:

Υπάρχει, εξηγούν, μια ουσιώδης διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές αντιλήψεις για την ευθεία των αριθμών. Στο Συνολοθεωρητικό Αριθμογραμμή Μείγμα, υπάρχει ένας 1- 1 συσχετισμός μεταξύ των σημείων νοούμενα ως στοιχεία ενός συνόλου στη περιοχή πηγής και στους πραγματικούς αριθμούς στη περιοχή στόχος. Σε αυτή την απεικόνιση όλα τα στοιχεία του συνόλου της περιοχής πηγής απεικονίζονται πάνω σε όλους τους αριθμούς. Αυτό όμως δεν ισχύει στο φυσικά συνεχές Αριθμογραμμή Μείγμα. Εδώ, τα σταθερά σημεία απεικονίζονται σε αριθμούς αλλά ολόκληρη η φυσικά συνεχής ευθεία – το «μέσο» στο οποίο είναι τοποθετημένα τα σημεία – δεν απεικονίζεται. Από την στιγμή που οι τοποθεσίες των σημείων είναι μηδενικών διαστάσεων και δεν έχουν μέγεθος, κανένα σημείο - τοποθεσία δεν «καταλαμβάνει» οποιοδήποτε ποσό αυτού του «μέσου». Τα σημεία – τοποθεσίες δεν αποτελούν το χώρο. Αυτό σημαίνει ότι ανεξάρτητα σε ποιο σύστημα αριθμών απεικονίζονται τα σημεία – τοποθεσίες, το μέσο του χώρου (που μένει χωρίς απεικόνιση θα έχει μια απεριόριστη ποσότητα από σημεία – τοποθεσίες «άδεια». Τα σημεία – τοποθεσίες μιας φυσικά συνεχούς ευθείας αριθμών ποτέ δεν εξαντλούνται. Αυτό δεν ισχύει για την Συνολοθεωρητικό ευθεία των αριθμών, η οποία είναι ένα εννοιολογικό μείγμα τριών εννοιολογικών πεδίων – χώρος , σύνολα, και αριθμοί. Το πεδίο των συνόλων έχει τον κεντρικό ρόλο στο μείγμα. Τα σημεία είναι στοιχεία ενός συνόλου. Το είδος του αριθμητικού συστήματος στο οποίο απεικονίζεται το σύνολο εξαρτάται από τις τυπικές σχέσεις (για παράδειγμα τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών) που περιορίζει τι τα μέλη

του συνόλου μπορούν να είναι και πως σχετίζονται μεταξύ τους. Το σύστημα των πραγματικών αριθμών είναι «πλήρες». Αυτό σημαίνει ότι είναι κλειστό σύνολο ως προς τις αριθμητικές πράξεις και περιέχει τα όρια όλων των άπειρων ακολουθιών. Εφόσον οι αριθμοί καθορίζουν τι είναι τα σημεία, ένα πλήρες σύνολο αριθμών εξαντλεί *όλα* τα σημεία που ορίζονται από αυτούς τους αριθμούς. Και αφού οι πραγματικοί αριθμοί είναι πλήρεις και ορίζουν το τι είναι τα «σημεία» στο Συνολοθεωρητικό Αριθμογραμμή Μείγμα, φυσικά, εξαντλούν όλα τα σημεία σε αυτό το μείγμα. Έτσι (Lakoff & Núñez ,2000, σελ.299) όταν οι μαθηματικοί λένε ότι «η ευθεία είναι *χωρίς κενά*» εννοούν ότι δεν υπάρχουν κενά, όχι ανάμεσα στα *σημεία*, αλλά ανάμεσα στους *αριθμούς*. Οι Lakoff & Núñez ,(2000) εξηγούν αναλυτικά το πώς ο Dedekind με την θεώρηση των «Τομών» (που είναι ισοδύναμη με άλλες θεωρήσεις της σύγχρονης θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών) δημιούργησε μια νέα μεταφορά για την συνέχεια: Η Συνέχεια Για Μια Αριθμογραμμή Είναι Αριθμητική Πληρότητα. Αυτό είναι μια τεράστια αλλαγή στην σκέψη. Η συνέχεια δεν προέρχεται πια από την κίνηση ή από οποιαδήποτε γεωμετρική θεώρηση, αλλά από την πληρότητα ενός αριθμητικού συστήματος.

Αλλά στην φυσικά συνεχή ευθεία των πραγματικών αριθμών, *οι πραγματικοί αριθμοί δεν «εξαντλούν» τα σημεία της ευθείας*. Τα σημεία- τοποθεσίες που αντιστοιχίζονται στους πραγματικούς αριθμούς δεν είναι όλες οι πιθανές σημεία – τοποθεσίες πάνω στην ευθεία, η οποία είναι ένα φυσικά συνεχές υπόβαθρο. Έτσι, το ερώτημα για το αν οι πραγματικοί αριθμοί «εξαντλούν την ευθεία» δεν διατυπώνεται με αρκετή ακρίβεια: εξαρτάται στο τι θεωρούμε ότι είναι η «ευθεία». Η «ευθεία των πραγματικών αριθμών» δεν είναι μια (φυσικά συνεχής) ευθεία. Η φυσική συνέχεια και η μαθηματική συνέχεια είναι δύο εντελώς διαφορετικές έννοιες. Οι Lakoff & Núñez (2000 σελ. 289) επισημαίνουν εδώ μια παρανόηση που έχουν οι μαθητές (και ίσως και πολλοί καθηγητές), ότι οι δύο «ευθείες» ταυτίζονται, ότι «έχει αποδειχθεί» ότι οι πραγματικοί αριθμοί «εξαντλούν» τα σημεία μιας φυσικά συνεχούς γραμμής. Θεωρούν ότι οι μαθητές αξίζουν μια πιο καθαρής εικόνας για τα Μαθηματικά.

Η πορεία από το όριο προς την συνέχεια

Ο τυπικός ορισμός της συνέχειας κατά τους Núñez, Edwards, Matos,(1999), προέκυψε από τρείς σημαντικές διανοητικές μετακινήσεις του 19^{ου} αιώνα: την αριθμητικοποίηση της ανάλυσης , τον σύνολο – θεωρητικό τρόπο σκέψης και την φιλοσοφία του φορμαλισμού. Και οι τρείς αυτές θεωρήσεις απαιτούν να αντιλαμβανόμαστε τις γραμμές και τον χώρο σαν *σύνολα σημείων*. Ο ορισμός αυτός βασίζεται σε τρείς νέες, σε σχέση με την έννοια της «φυσικής» συνέχειας, μεταφορές. Οι νέες μεταφορές είναι:

Μια Γραμμή Είναι ένα Σύνολο Σημείων

Η Φυσική Συνέχεια Είναι Χωρίς Κενά

Προσεγγίζοντας ένα Όριο Είναι Η Διατήρηση της Εγγύτητας Κοντά σε Ένα Σημείο

Περιγράψαμε το πώς εννοούν τις δύο πρώτες μεταφορές. Θα δούμε παρακάτω την τρίτη μεταφορά και πως από τον συνδυασμό τους προκύπτει η συνέχεια συνάρτησης.

Με την τρίτη μεταφορά που αναφέραμε παραπάνω, οι Núñez, Edwards, Matos,(1999), προσπαθούν να ερμηνεύσουν, από γνωσιακή άποψη, τον τυπικό ορισμό του ορίου ο οποίος είναι ο:

> *Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το α, εκτός, πιθανώς από το α, και έστω L ένας πραγματικός αριθμός. Η πρόταση* $lim_{\chi \to \alpha} f(\chi) = L$ *, σημαίνει ότι για κάθε ε > 0, υπάρχει δ >0 τέτοιος, ώστε για κάθε χ που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα, με εξαίρεση το α, με 0 <* $|\chi - \alpha|$ *< δ, να ισχύει* $|f(\chi) - L| < \varepsilon$.

Οι Núñez & Lakoff (1998) παρατηρούν ότι ο παραπάνω ορισμός αντικαθιστά την προγενέστερη ιστορικά ιδέα της «προσέγγισης» ενός ορίου προκειμένου να αποσυνδεθεί η ιδέα του ορίου από την κίνηση και να οριστεί με καθαρά αριθμητικούς όρους. Η νέα ιδέα είναι επίσης μεταφορική, ότι Προσεγγίζοντας ένα Όριο Είναι Η Διατήρηση της Εγγύτητας Κοντά σε Ένα Σημείο, δηλαδή το f(χ) είναι αυθαίρετα κοντά στο L, όταν το χ είναι επαρκώς κοντά στο α. Το επίπεδο αποτελείται από ένα σύνολο από ζεύγη πραγματικών αριθμών, ενώ το ανοιχτό διάστημα, αντικαθιστά την φυσική συνέχεια της γραμμής στον γεωμετρικό ορισμό του ορίου, αλλά δεν είναι ένα τμήμα μιας γραμμής, είναι ένα σύνολο διακριτών αριθμών «χωρίς κενά».

Η συνέχεια συνάρτησης σε ένα πραγματικό αριθμό, όπως εκφράζεται από τον τυπικό ορισμό, γίνεται αντιληπτή με τον ίδιο τρόπο: ως η διατήρηση της εγγύτητας, όχι μόνο κοντά στον πραγματικό αριθμό αλλά *και* σε αυτόν.

Ο τυπικός ορισμός είναι:

> *«Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και α ∈ Δ. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο α, όταν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε για κάθε χ με* $|\chi - \alpha| < \delta$ *,(1), να ισχύει* $|f(x) - f(\alpha)|$*<ε, (2)»*

Η απαίτηση, να ορίζεται η συνάρτηση σε ένα ανοιχτό διάστημα (υποσύνολο των πραγματικών αριθμών) που περιέχει το α, εξασφαλίζει την «απουσία κενών» στο διάστημα που περιέχει το α και από την (2) εξασφαλίζεται η διατήρηση της «εγγύτητας» κοντά στο

f(α) και στο ίδιο το f(α). Αν αυτό ισχύει για κάθε α ενός διαστήματος, τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση σε αυτό το διάστημα.

Δηλαδή αυτό που κάνει η μαθηματική συνέχεια είναι (Lakoff και Nunez ,1998, σελ. 99):

Αρχικά υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα το οποίο είναι «χωρίς κενά». Αυτό που κάνει ο ε – δ ορισμός είναι να εγγυηθεί ότι:

α) όταν οι γραμμές κατανοούνται ως σύνολα πραγματικών αριθμών και

β) όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι χωρίς κενά και

γ) η συνάρτηση διατηρεί την εγγύτητα σε αυτό το διάστημα , τότε

δ) και το σύνολο τιμών θα είναι επίσης χωρίς κενά.

Οι Núñez, Edwards, Matos,(1999) θεωρούν ότι δεν πρέπει να συγχέουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης έτσι όπως ορίζεται από τον τυπικό ορισμό, με την φυσική συνέχεια μιας γραμμής. Ο ε – δ ορισμός, παίζει ένα πιο περιορισμένο ρόλο: απλά πραγματοποιεί ένα ακριβή χαρακτηρισμό της έννοιας «αντίστοιχα». Στη θέση της φυσικά συνεχούς γραμμής υπάρχει μόνο το αριθμητικά χωρίς κενά σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση δεν είναι μια καμπύλη στο επίπεδο, είναι απλά ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών.

Β] Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝΚΑΙ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Η Confrey και οι συνεργάτες της (1994, 1994 -1, 1994 -2, 1994 -3) ανέπτυξαν μια θεωρία για να ερευνήσουν την κατανόηση των μαθητών για την εκθετική και την λογαριθμική συνάρτηση και, παράλληλα, να προτείνουν μια νέα οπτική για την διδασκαλία τους, η οποία βασίζεται σε ένα εναλλακτικό μοντέλο για την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Πιο συγκεκριμένα, η Confrey (1994 -2) εντοπίζει τις ρίζες για την κατανόηση της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στην ανάπτυξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Με βάση την έρευνά της σε μαθητές και μελετώντας την ιστορική ανάπτυξη των αντίστοιχων ιδεών, έκανε την εξής υπόθεση (Confrey, 1994 -3) «Τα μοντέλα του πολλαπλασιασμού που βασίζονται στην επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, με υποκείμενη βάση την απαρίθμηση, δεν επεξηγούν επαρκώς πολλές από τις ενέργειες των μαθητών που μπορούν να ειδωθούν σαν πολλαπλασιαστικές και δεν επεξηγούν τις καταστάσεις που διαμορφώνονται στην τυπική μελέτη της λογαριθμικής και της εκθετικής συνάρτησης.» Η Confrey (1994 -3)θεωρεί ότι οι αριθμοί και οι πράξεις εμπλέκονται σε συμπληρωματικές γνωσιακές διαδικασίες. Οι αριθμοί κατασκευάζονται ως αποτέλεσμα των πράξεων. Οι πράξεις είναι συνδεδεμένες με καταστάσεις και δράσεις.

Η Confrey (1994 -2) διαπίστωσε ότι στην σκέψη των μικρών παιδιών υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος κατασκευής των αριθμών, που ταιριάζει με τον τρόπο που, οι αριθμοί, αναπτύχτηκαν ιστορικά.

Ιστορικά,(Confrey 1994 -2), βρίσκουμε δύο ξεχωριστές έννοιες, τον αριθμό και τον λόγο. Ο αριθμός ήταν, από την πρότερη Ελληνική εποχή, συνδεδεμένος με την απαρίθμηση. Επειδή τότε εθεωρείτο ότι όλα τα μεγέθη ήταν φτιαγμένα από μια κοινή μονάδα (το ΕΝ) η απαρίθμηση θεωρείτο επίσης κατάλληλη για την μέτρηση ενός μεγέθους. Ακόμα και μετά την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, η έννοια του αριθμού συνέχισε να γίνεται αντιληπτή ως ένας μετρητής ή ένας δείκτης του μέτρου ενός μεγέθους. Επειδή και η απαρίθμηση και η μέτρηση δημιουργούν μια επαναλαμβανόμενη προσθετική δράση , η πρόσθεση ήταν η βασική πράξη για τους αριθμούς και ο πολλαπλασιασμός μια σύντμηση της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για «προσθετικούς κόσμους» αναφερόμενοι σε αριθμητικές δομές (ή ευθείες) που είναι φτιαγμένες από την πρόσθεση ως διάδοχη δράση.

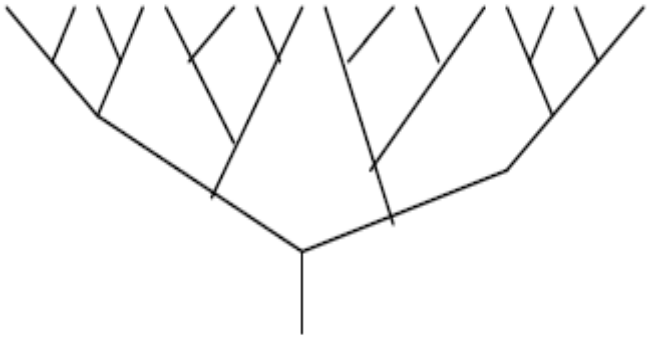
Αντίθετα, οι λόγοι ήταν διαφορετικοί από τους αριθμούς. Για τον Ευκλείδη αποτελούσε μια σχέση ανάμεσα στα μέτρα δύο μεγεθών. Πουθενά στους αρχαίους δεν συναντάμε όμως αθροίσματα λόγων παρά μόνο γινόμενα λόγων (Νεγρεπόντης, 2008). Η Confrey (1994 -2) αναλύει διεξοδικά ότι οι Thomas of Bradwardine (1290 –1349) και Nicole Oresme (1320 – 1382) δημιούργησαν έναν κόσμο με λόγους στον οποίο η πρωταρχική (primitive) δράση που λαμβάνεται στους λόγους είναι ο πολλαπλασιασμός. Οι λόγοι του Oresme ωστόσο είναι στην ουσία ισόμορφοι με τους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για «πολλαπλασιαστικούς κόσμους» αναφερόμενοι σε αριθμητικές δομές (ή ευθείες) που είναι φτιαγμένες από τον πολλαπλασιασμό ως διάδοχη δράση.

Κατά την Confrey (1994 -2) ένας παραγωγικός τρόπος να δούμε τους πολλαπλασιαστικούς κόσμους είναι μέσα από την ανάπτυξη ανεξάρτητων πολλαπλασιαστικών δομών που ονομάζει διαχωρισμένες (splitting) δομές.

Στην πιο στοιχειώδη μορφή του ο όρος splitting μπορεί να οριστεί σαν μια δράση που δημιουργεί ταυτόχρονα πολλαπλούς τύπους ενός προτύπου, μια δράση που συχνά αναπαρίσταται από ένα δενδροδιάγραμμα (Εικόνα 1). Είναι μια πρωταρχική λειτουργία (με την έννοια της εσωτερικευμένης δράσης) που απαιτεί μόνο την αναγνώριση του τύπου του διαχωρισμού (σε πόσα μέρη) και της απαίτησης ότι τα μέρη είναι ίσα.

Αντίθετα με τις προσθετικές καταστάσεις όπου η αλλαγή καθορίζεται μέσα από τον προσδιορισμό μιας μονάδας και στην συνέχεια με την απαρίθμηση των διαδοχικών εμφανίσεων αυτής της μονάδας, η εστίαση στο splitting είναι στην δημιουργία ίσων μερών ή αντιγράφων ενός αρχικού. Στενά συνδεδεμένη με αυτήν την πρωταρχική έννοια είναι οι ενέργειες του μοιράσματος και της διαίρεσης στο μισό που και οι δύο εμφανίζονται από νωρίς στην δραστηριότητα των παιδιών. Γεωμετρικά, διαφοροποιείται από την πρόσθεση, με την σύνδεσή της με την ομοιότητα, η οποία αποτελεί την βάση για την βαθιά μας αντίληψη για τον προσδιορισμό των αντικειμένων όταν κινούνται προς την κατεύθυνσή μας (μεγέθυνση) ή προς την αντίθετη κατεύθυνση (σμίκρυνση).

Η Confrey (1994 -2) δίνει το παρακάτω παράδειγμα διαχωρισμού (Εικόνα 2), θέλοντας παράλληλα να συνδέσει τις προσθετικές – απαρίθμησης δομές (counting**)** με τις πολλαπλασιαστικές - διαχωριζόμενες (splitting**)** δομές:

Βήματα	ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΔΥΟ ΙΣΑ ΜΕΡΗ ΣΕ ΚΑΘΕ ΒΗΜΑ	Πλήθος των μερών σε κάθε βήμα
4		16
3		8
2		4
1		2
0		1

Εικόνα 1: Δενδροδιάγραμμα για την έννοια του διαχωρισμού (Confrey ,1994 -2)

Στις αριθμητικές δομές η διάδοχη δράση είναι η πρόσθεση της μονάδας ενώ στις πολλαπλασιαστικές διαχωριζόμενες δομές είναι ο διαχωρισμός σε ν ίσα μέρη. Ως μονάδα ορίζεται ως η αμετάβλητη σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της κάθε δομής. Τα διαστήματα ανάμεσα σε δύο αριθμούς στην πρώτη περίπτωση περιγράφονται μέσω της αφαίρεσης ενώ στην δεύτερη μέσω του λόγου.

Με τις διακρίσεις που αναφέρονται παραπάνω, η Confrey (1994 -2) προτείνει ότι τα ανθρώπινα όντα αντιμετωπίζουν καταστάσεις στις οποίες οι επιθυμητές ποσοτικές ενέργειές τους περιγράφονται καλύτερα με το διαχωρισμό παρά με την απαρίθμηση. Αυτές οι καταστάσεις είναι εκείνες στις οποίες η αφετηρία κατανοείται σαν ένα όλο. Σε τέτοιες καταστάσεις, η διάδοχη δράση δεν είναι μια αυξητική μέτρηση, όπως στις γραμμικές λειτουργίες π.χ. ανεβαίνοντας σκαλοπάτια, ταξιδεύοντας με σταθερή ταχύτητα κ.λ.π., αλλά το όλο μετασχηματίζεται πολλαπλασιαστικά σε περισσότερα (ή λιγότερα): τεντώνεται, ενισχύεται, αναδιπλώνεται, αναπαράγεται ή επεκτείνεται. Αυτές οι ενέργειες είναι όλες δεμένες με την αρχική τους εκδοχή, τον διαχωρισμό (split). Κατασκευασμένες κατά αυτόν τον τρόπο, οι splitting δομές παράγουν γεωμετρικές ακολουθίες**,** ενώ οι counting δομές παράγουν αριθμητικές ακολουθίες. Για να καταστήσουμε αυτές τις γεωμετρικές δομές πυκνότερες, χρειαζόμαστε μια μέθοδο για να τοποθετούμε νέες τιμές ανάμεσα στις υπάρχουσες τιμές σε οποιαδήποτε επιθυμητή πυκνότητα. Αυτή η μέθοδος απαιτεί να

είμαστε σε θέση να παρεμβάλουμε τιμές παραμένοντας συνεπείς με τις πρωταρχικές δράσεις που έχτισαν τη δομή.

Είτε διαχωρίζοντας είτε μετρώντας, μπορούμε (Confrey 1994 -2) να αλλάξουμε το μέγεθος της «μονάδας» αλλά όχι το είδος δράσης που δημιουργεί τη μονάδα. Κατά συνέπεια, αυξάνουμε την πυκνότητα μιας counting δομής, όπως η {1, 2, 3, 4,..} με την παρεμβολή νέων στοιχείων μεταξύ των υπαρχόντων στοιχείων έτσι ώστε, όταν ολοκληρώνεται, τα διαδοχικά στοιχεία διατηρούν μια σταθερή μονάδα που βασίζεται στην δράση της πρόσθεσης, δηλ., {1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4,…}. Επιπλέον, η πυκνότητα μιας splitting δομής, όπως η {2, 4, 8, 16,…} αυξάνεται με την εισαγωγή στοιχείων έτσι ώστε να διατηρείται η συνέπεια του τύπου της δράσης, του πολλαπλασιασμού. Δηλαδή, {2, 2 $\sqrt{2}$, 4, 4 $\sqrt{2}$, 8, 8 $\sqrt{2}$, 16, …}.

Τέτοιες δράσεις, όπου οποιοσδήποτε αριθμός στοιχείων μπορεί να παρεμβληθεί μεταξύ ζευγαριών διαδοχικών στοιχείων, είναι επαρκείς για να κατασκευάσουν τις δομές με την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Ωστόσο, (Confrey 1994 -2) όταν κατασκευάζεται η πυκνότητα των πραγματικών αριθμών, οι λειτουργίες που παρήγαγαν τους δύο ξεχωριστούς κόσμους είναι ενταγμένοι σε τυπικές αναπαραστάσεις, όπως τα αξιωματικά συστήματα ή η ευθεία των πραγματικών αριθμών, και ο πολλαπλασιαστικός κόσμος μπορεί να ειδωθεί ως ένα υποσύνολο του προσθετικού κόσμου.

Η Confrey (1994) θεωρεί ότι αντιπαραθέτοντας (juxtaposing) γεωμετρικές με αριθμητικές ακολουθίες , δημιουργούμε εκθετικές – λογαριθμικές συναρτήσεις. Το γεγονός αυτό γίνεται φανερό αν εξετάσει κανείς την ιστορία της έννοιας του λογαρίθμου, που θα δούμε παρακάτω σε πολύ γενικές γραμμές:

Η έννοια του λογαρίθμου ξεκίνησε ιστορικά (Θωμαΐδης, 1985), σαν ένα τέχνασμα απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών και βαθμιαία εξελίχθηκε σε μια βασική σχέση συναρτησιακής εξάρτησης, που περιγράφει ένα πλήθος φυσικών φαινομένων. Η λογαριθμική συνάρτηση, ιστορικά, έπαιξε τον ρόλο συνάρτησης προτύπου (Νεγρεπόντης et all. 1999).

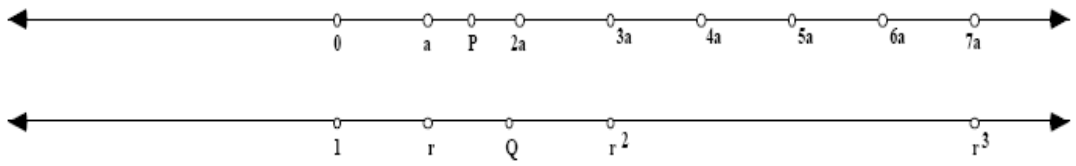
Αυτός που έδωσε την ονομασία «λογάριθμος» και ανέπτυξε την αντίστοιχη έννοια ήταν ο Σκωτσέζος John Napier (1550 - 1617). Αυτός βασίστηκε σε μια γνωστή στην εποχή του ιδέα: την αντιπαράθεση (juxtaposition) μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου.

Αν αντιπαραθέσουμε (juxtapose) μια αριθμητική και μία γεωμετρική ακολουθία (Katz, 1995), μπορούμε να δούμε πως ο Napier θα μπορούσε να είχε σκεφτεί την ιδέα για να κάνει πολλαπλασιασμούς μέσω της, ευκολότερης, πρόσθεσης.

Αριθμητική ακολουθία: 0, 1 ,2, 3, 4, 5…
Γεωμετρική ακολουθία: 1, 2, 4, 8, 16, 32…

Στην γεωμετρική ακολουθία, το γινόμενο του 4 με το 8 μπορεί να βρεθεί προσθέτοντας τους αντίστοιχους όρους στην αριθμητική ακολουθία και βρίσκοντας τον αριθμό στην γεωμετρική ακολουθία που αντιστοιχεί στο 5, δηλαδή το 32. Έτσι, εύκολα ο πολλαπλασιασμός μετατρέπεται σε πρόσθεση. Ωστόσο, μπορούμε να δούμε την πρόκληση που θα πρέπει να αντιμετώπισε ο Napier κοιτώντας τις δύο ακολουθίες: καμία από αυτές δεν είναι πυκνή. Ο Napier ήθελε να είναι ικανός, προκειμένου να κατασκευάσει τους περίφημους λογαριθμικούς του πίνακες, να πολλαπλασιάζει οποιουσδήποτε αριθμούς, όχι μόνο ακέραιες δυνάμεις κάποιας βάσης. Ακόμα και η επιλογή μιας βάσης κοντά στο 1 για την γεωμετρική ακολουθία δεν μπορούσε να παράξει την πυκνότητα που επιθυμούσε. Το πραγματικό πρόβλημα που αντιμετώπισε ο Napier (Confrey - Smith,1994 - 2) ήταν να βρει έναν τρόπο να συνδέσει κάθε σημείο στο συνεχή πολλαπλασιαστικό κόσμο με ένα σημείο στο συνεχή προσθετικό κόσμο ώστε ο ισομορφισμός να παραμένει ανέπαφος. Αυτό σημαίνει ότι και ο πολλαπλασιασμός οποιονδήποτε αριθμών στον πολλαπλασιαστικό κόσμο θα είναι ισοδύναμος με την πρόσθεση των αντίστοιχων αριθμών στον προσθετικό κόσμο.

Ο Napier μετέτρεψε το αριθμητικό πρόβλημα που αντιμετώπιζε σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, θεωρώντας κινούμενα σημεία πάνω σε δύο ευθείες γραμμές όπως φαίνονται στην παρακάτω Εικόνα 2 (Katz, 1995).



Εικόνα 2: Παρουσίαση της αναπαράστασης των κινούμενων σημείων του Napier

Το σημείο P στην πάνω γραμμή κινείται αριθμητικά. Το P κινείται με σταθερή ταχύτητα και καλύπτει ίσα διαστήματα σε ίσους χρόνους. Το σημείο Q ξεκινά με την ίδια ταχύτητα με το P και καλύπτει την απόσταση ανάμεσα στα σημεία στον ίδιο χρόνο που το P κινείται

ανάμεσα στα σημεία. Αυτή η απαίτηση παράγει μια αύξουσα ταχύτητα σε κάθε ένα από τα διαστήματα [1, r], [r, r^2], [r^2, r^3], κλπ.

Σύμφωνα με τον Katz (1995), αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση επέτρεψε στον Napier να συλλάβει το σημείο Q ως κινούμενο με μία ομαλά αυξανόμενη ταχύτητα, που σημαίνει ότι η ταχύτητα του γεωμετρικού σημείου στο μοντέλο θα είναι πάντα ανάλογη της απόστασής του από την αρχή. Αυτό που κατάφερε τελικά ήταν να μετατρέψει την αρχική αντιστοιχία αριθμών σε αντιστοιχία σημείων.

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την γεωμετρική του αναπαράσταση, ο Napier θεώρησε δύο οποιαδήποτε διαστήματα [α, β] και [γ, σ] στην κάτω γραμμή τέτοια ώστε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\sigma}$. Τότε παρατήρησε (Katz, 1995) ότι όταν η σχέση αυτή ισχύει, ο χρόνος που χρειάστηκε για να διανύσει το Q το διάστημα [α, β] ήταν ίδιος με τον χρόνο που χρειάστηκε να διανύσει το [γ, σ]. Από την στιγμή που η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι η ίδια στην πάνω και την κάτω γραμμή, τα σημεία στην πάνω γραμμή τα ονόμασε λογάριθμους (log) των αντίστοιχων στην κάτω γραμμή, και από την στιγμή που το P κινείται με σταθερή ταχύτητα, θα ισχύει logβ - logα = logσ - logγ. Δηλαδή, αν δύο ζευγάρια τιμών στην γεωμετρική πρόοδο είχαν τον ίδιο λόγο, τότε οι αντίστοιχοι όροι στην αριθμητική πρόοδο είχαν ίσες αποστάσεις ο ένας από τον άλλο.

Τελικά, ακολουθώντας αυτά τα βήματα, ο Napier (Confrey - Smith,1994 - 2) έφτασε στο συμπέρασμα ότι ο πολλαπλασιαστικός κόσμος στην κάτω γραμμή είναι συνεχής, και έτσι η ιδιότητα που αναφέρθηκε πιο πάνω, ισχύει ανάμεσα σε οποιαδήποτε σημεία και αν διαλέξει κανείς όχι μόνο αυτά που προκύπτουν από την αρχική γεωμετρική ακολουθία.

Η Confrey και οι συνεργάτες της διακρίνουν, στην ανάπτυξη της έννοιας του λογαρίθμου, ορισμένες πολύ σημαντικές μαθηματικές ιδέες:

Πρώτον, πάνω στην έννοια της συνάρτησης. Οι Confrey και Smith (1994 -1) και Confrey (1994 -3), θεωρούν ότι ο ορισμός της συνάρτησης ως αντιστοιχίας μεταξύ των τιμών δύο συνόλων που αποδίδεται στον Dirichlet, βασίζεται σε μια πιο πρωταρχική (primitive) έννοια που ονομάζεται *covariation* και βρίσκεται στους παλαιότερους, ιστορικά, ορισμούς της συνάρτησης.

Πριν συνεχίσουμε με την παράθεση των απόψεων της Confrey, ας δούμε τους ορισμούς στους οποίους αναφέρεται:

Ως κλασικός ορισμός θεωρείται, συνήθως, αυτός που έδωσε ο Euler το 1747 (Σπύρου, 2004):

«*Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση (δηλαδή ένας μαθηματικός τύπος) που συνθέτει με οποιοδήποτε τρόπο μια μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες*», ορισμό που ο ίδιος ο Euler το 1775 τον επαναδιατύπωσε πιο αφηρημένα (και για να αποφύγει την χρήση της μεταβλητής που εκείνη την εποχή αναφέρονταν κυρίως σε γεωμετρικά μεγέθη) ως εξής:

«*Μια ποσότητα καλείται συνάρτηση μόνο αν εξαρτιέται από μία άλλη ποσότητα με τέτοιο τρόπο ώστε, αν η τελευταία ποσότητα αλλάζει η πρώτη ποσότητα υφίσταται αλλαγή από μόνη της*».

Ως μοντέρνος ορισμός θεωρείται αυτός που διατύπωσε ο Dirichlet το 1837 (με τις διάφορες πιο τυπικές (συνολοθεωρητικές) ή λιγότερο τυπικές παραλλαγές του που συναντούμε στα σύγχρονα πανεπιστημιακά και σχολικά εγχειρίδια αντίστοιχα) (Σπυρου,2004):

« *Η μεταβλητή ψ είναι συνάρτηση της μεταβλητής χ η οποία ορίζεται στο διάστημα α < χ <β, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής χ από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της μεταβλητής ψ, ανεξάρτητα από την μορφή της αντιστοιχίας*».

Κατά την Confrey, (1994 -1),στον μοντέρνο ορισμό κάποιος εστιάζει σε έναν κανόνα ο οποίος επιτρέπει τον καθορισμό μιας μοναδικής τιμής ψ για κάθε δοσμένη τιμή χ. Σε μια συμεταβαλλόμενη (co varying) σχέση η έμφαση δίνεται στο να μπορεί κανείς να κινείται από το ψ_v στο ψ_{v+1} σε συνδυασμό με την κίνηση από το χ_v στο χ_{v+1}. Ένα παράδειγμα (Confrey 1994 - 2) συνάρτησης που ικανοποιεί τον μοντέρνο ορισμό αλλά δεν έχει την αίσθηση μιας συμεταβαλλόμενης σχέσης, είναι η «συνάρτηση του Dirichlet»:

Η τιμή της f(x) είναι ίση με 1, αν ο χ είναι ρητός και 0 αν ο χ είναι άρρητος.

Η Confrey (1994 - 2) θεωρεί ότι το μοντέλο της συνδιακύμασης (co variation model) ήταν κεντρικό στην ανάπτυξή της εκθετικής – λογαριθμικής συνάρτησης. Η λογαριθμική συνάρτηση αναδεικνύεται (ιστορικά) μέσα από την συμεταβολή (co generation) μίας προσθετικής και μίας πολλαπλασιαστικής αριθμογραμμής, (ή την αντιπαράθεση ενός προσθετικού και ενός πολλαπλασιαστικού κόσμου) όπου το

πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών συμεταβάλονται μέσα από ταυτόχρονες αλλά ανεξάρτητες δράσεις.

Η προσέγγιση όμως αυτή για την εκθετική συνάρτηση (Confrey (1994 - 1)είναι πολύ χρήσιμη γιατί αναδεικνύει την βασική ιδιότητα της συνάρτησης αυτής (Κλαουδάτος, 2008):

> *Η ικανή και αναγκαία συνθήκη (άρα η ιδιότητα που την χαρακτηρίζει) ώστε μια συνάρτηση να είναι εκθετική συνάρτηση, είναι ότι «σε ίσα διαστήματα της ανεξάρτητης μεταβλητής έχουμε το ίδιο ποσοστό μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής». Αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το διάστημα μήκους 1 για την ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε για μια εκθετική συνάρτηση f ο λόγος* $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ *είναι σταθερός, ανεξάρτητος δηλαδή από το χ που θα επιλέξουμε.*

Η δεύτερη παρατήρηση των Confrey και Smith (1994 - 1), είναι ότι διέκριναν την ιδέα μιας πολλαπλασιαστικής μονάδας και ενός πολλαπλασιαστικού ποσοστού (rate) μεταβολής που προκύπτει από την αναγνώριση της πολλαπλασιαστικής μονάδας, τόσο στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του λογαρίθμου, όσο και στους μαθητές. Σε συνεντεύξεις με μαθητές, οι Confrey και Smith τους παρουσίασαν έναν πίνακα τιμών για να αναπαραστήσουν την διαίρεση ενός κελιού στον χρόνο. Ο χρόνος, ξεκινώντας από το 0, δινόταν με ακέραιες τιμές, ενώ ο αριθμός των κελιών δινόταν με δυνάμεις του 9. Οι μαθητές αναγνώρισαν τον πολλαπλασιασμό με το 9 (μονάδα του πολλαπλασιασμού) σαν μια δράση για την μετακίνηση στον πίνακα προς τα κάτω και την διαίρεση για την μετακίνηση προς τα πάνω. Σύμφωνα με τους Confrey και Smith, οι μαθητές αναγνώρισαν επίσης διάφορες δυνάμεις του 9 σαν ένα σταθερό λόγο (πολλαπλασιαστικός ρυθμός μεταβολής) ανάμεσα στους όρους. Για παράδειγμα, βρίσκουν ότι ο λόγος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς όρους ($\frac{\psi_\nu}{\psi_{\nu-1}}$) θα πρέπει να είναι 9 ασχέτως από την θέση του ψ_ν στον πίνακα. Όμοια, αναγνωρίζουν τον λόγο $\frac{\psi_\nu}{\psi_{\nu-2}}$ ως 81, πάλι άσχετα από την θέση του ψ_ν στον πίνακα.

Τρίτον, η εφεύρεση των λογαρίθμων δείχνει τον ζωτικό ρόλο που η αναπαράσταση έπαιξε στο να φτάσει ο Napier στην εικασία για την επίλυση του προβλήματος της πυκνότητας με τον συντονισμό (coordination) των δράσεων δύο ακολουθιών. Αυτή η αναπαράσταση μαζί με την ιδιοφυή ιδέα του για δύο σημεία που κινούνται σε δύο γραμμές, επέτρεψαν στον Napier να δει πως θα μπορούν να συσχετιστούν οι όροι στις ακολουθίες χρησιμοποιώντας τις θέσεις των σημείων. Οι Confrey και Smith (1994 - 2) θεωρούν ότι όταν αντιμετωπίζουμε μια συνάρτηση σαν έναν αλγόριθμο για να αντιστοιχίσουμε πραγματικούς αριθμούς σε

πραγματικούς αριθμούς, υποτιμούμε τον ρόλο της ως ένα συντονιστή μεταξύ αριθμού και δράσης στο ένα πεδίο και αριθμού και δράσης στο άλλο πεδίο. Ο Napier σκέφτηκε σχετιζόμενες δράσεις μέσα στους δύο κόσμους παρά με την σύγχρονη έννοια της συνάρτησης που σχετίζει τιμές ανάμεσα στους δύο κόσμους. Αυτό ήταν που τον οδήγησε στην ιδιότητα ότι αν δύο ζευγάρια τιμών στην γεωμετρική πρόοδο είχαν τον ίδιο λόγο, τότε οι αντίστοιχοι όροι στην αριθμητική πρόοδο είχαν ίσες αποστάσεις ο ένας από τον άλλο, που είδαμε πιο πάνω.

Η παραπάνω θεώρηση της συνάρτησης ταιριάζει με εκείνη των Cottrill et al. (1996) και Dubinsky et al. (2008) που είδαμε στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου. Σε παρακάτω σχόλιο θα εξετάσουμε και τις απόψεις της Sfard για την έννοια της συνάρτησης.

Οι απόψεις της Confrey και των συνεργατών της για την διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης

Οι Confrey και Smith (1994 - 1) αναφέρονται στην επίδραση της έρευνας των κονστρουκτιβιστών στην διδασκαλία η οποία έχει συμβάλει στο να μην βλέπουμε τους μαθητές σαν ανεπαρκείς ή ανώριμους αλλά ως σκεπτόμενους ανθρώπους και ικανούς να σχηματίζουν νόημα στα δικά τους πλαίσια αναφοράς. Η θεωρία τους έχει καταφέρει να τεκμηριώσει ότι τα λάθη των μαθητών σπάνια είναι τυχαία αλλά έχουν μια δική τους λογική και λειτουργικότητα.

Σε αυτό που έχει δοθεί λιγότερη προσοχή, θεωρούν, είναι ότι το ερευνητικό πρόγραμμα των κονστρουκτιβιστών υπονοεί κάτι πολύ περισσότερο από το να αναθεωρήσουμε τις απόψεις μας για τους μαθητές και τον τρόπο που μαθαίνουν. Η δική μας κατανόηση για τα Μαθηματικά πρέπει να αμφισβητηθεί και να αναδιατυπωθεί λαμβάνοντας υπόψη τις προσεγγίσεις και τις μεθόδους των μαθητών. Όλο και πιο συχνά, η ατζέντα των δομιστών περιορίζεται στο θέμα του πώς να πάρουμε τις πλούσιες και διαφορετικές έννοιες και τις στρατηγικές των μαθητών για να τις ευθυγραμμίσουμε με τις δικές μας πιο ειδικές απόψεις, και τις απόψεις των ειδικών που υποτίθεται ότι είναι πλήρεις, καλά δομημένες και μη-προβληματικές. Για παράδειγμα (Confrey και Smith, 1994 - 1) εύκολα μπορούμε να βάλουμε την ταμπέλα «παρανοήσεις» (misconceptions) σε εναλλακτικές συλλήψεις των μαθητών , όμως αυτό πολύ συχνά υποδεικνύει μια δική μας στενή όψη των εννοιών, περιορισμένες από την θέση τους σε μια αποπλαισιομένη (decontextualized) και ισχυρά αφηρημένη θεώρηση των μαθηματικών συστημάτων. Μια τέτοια θεώρηση αγνοεί τον πλούτο των συλλήψεων των μαθητών και την ικανότητά τους να δημιουργούν δικά τους

βιώσιμα μοντέλα και έτσι περιορίζει και την γνώση και ανάπτυξη των ίδιων των ερευνητικών μας μεθόδων. (Θυμηθείτε και την κριτική στις «παρανοήσεις» από την Sfard Nunez που αναπτύξαμε στο 2^{ο} Κεφάλαιο).

Για τη διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης οι Confrey (1994 -3) και οι συνεργάτες της θεωρεί ότι παρά το γεγονός ότι είναι πολύ σημαντική έννοια για τα Μαθηματικά, η αντιμετώπιση της στο σχολικό πρόγραμμα είναι πολύ πρόχειρη. Θεωρεί ότι τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές δεν αποτελούν αποτέλεσμα κάποιου επιστημολογικού εμποδίου σχετικού με την έννοια, από κάποιο εμπόδιο που έρχεται σε αντίθεση με τον τρόπο που σχηματίζουμε την κατανόησή μας, αλλά αντίθετα, τα προβλήματα προκύπτουν από τον τρόπο που διδάσκουμε τις σχετικές έννοιες.

Για μια καλύτερη αντιμετώπιση της έννοιας της εκθετικής συνάρτησης στο σχολείο προτείνουν να δοθεί περισσότερη προσοχή στα παρακάτω:

α) Η αντιμετώπιση του πολλαπλασιασμού (Confrey,1994 -1) αποκλειστικά ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης σε όλες τις βαθμίδες της σχολικής εκπαίδευσης, έχει μια επιζήμια επίδραση στους μαθητές όταν αντιμετωπίζουν την μελέτη των λόγων και των αναλογιών και συνεπώς και τις εκθετικές συναρτήσεις. Το γεγονός της μονομερούς χρήσης του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης μπορεί να προκύπτει από μια αδικαιολόγητη επιθυμία να δημιουργήσουμε και να παρουσιάσουμε μία μόνο κατασκευή των πραγματικών αριθμών, παρά να προβάλλουμε την δυνατότητα πολλαπλών αριθμητικών συστημάτων.

Έτσι με βάση την διαχωριζόμενη (splitting) δομή καταθέτουν τις παρακάτω ιδέες για το σχολικό πρόγραμμα όλων των βαθμίδων (Confrey, 1994 -3),

α) Να αναπτύσσουμε στα παιδιά αυτού του είδους τον συλλογισμό ξεκινώντας από τις μικρές ακόμα τάξεις. Να αναπτύσσουμε την γεωμετρική έννοια του αριθμού παράλληλα με την αριθμητική

β) Οι μικροί μαθητές αναπτύσσουν διαισθήσεις και ιδέες διαχωρισμού που δεν ενθαρρύνονται από το σχολικό πρόγραμμα.

γ) Οι αριθμοί δεν είναι ομοιόμορφες οντότητες, μάλλον η συμπεριφορά τους εξαρτάται από πως έχουν κατασκευαστεί μέσα σε διάφορα πλαίσια, κάτι το οποίο πρέπει οι καθηγητές να έχουν υπόψη τους για να κατανοούν την σκέψη των μαθητών.

Επίσης προτείνουν (Confrey, 1994 -1) να δοθεί μεγαλύτερη σημασία στην έννοια του ποσοστού μεταβολής και της πολλαπλασιαστικής μονάδας στην διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης που, σε συνδυασμό με την θεώρηση της συνάρτησης ως συμεταβολή, μπορεί

να προσφέρει μία πλούσια γλώσσα στις μαθηματικές συζητήσεις μας με τους μαθητές και μια ισχυρή διαισθητική βάση για την κατανόηση της χρήσης των δυνάμεων και της εκθετικής συνάρτησης, πριν από την εισαγωγή στις τυπικές έννοιες, αλλά ωστόσο να συμβάλει στην προετοιμασία τους για τις έννοιες του απειροστικού λογισμού.

Σχόλιο: Οι απόψεις της Sfard για την έννοια της συνάρτησης και την διδασκαλίας της

Η Sfard (1992) διακρίνει στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης ένα προβάδισμα των διαδικαστικών εννοιών έναντι των κατασκευαστικών. Ως διαδικαστική (ή λειτουργική) ορίζει μια θεώρηση της συνάρτησης στην οποία λαμβάνεται μάλλον σαν υπολογιστική διαδικασία, κυρίως σε σύνδεση με έναν αλγόριθμο, ενώ ως κατασκευαστική (ή δομική) ορίζει τη θεώρηση της συνάρτησης η οποία λαμβάνεται ως ένα πραγματικό αντικείμενο το οποίο δίνεται από τον τυπικό ορισμό, ως μια αντιστοίχηση μεταξύ των τιμών δύο συνόλων. Θεωρεί ότι και οι δύο θεωρήσεις της συνάρτησης είναι απαραίτητες και συμπληρωματικές μεταξύ τους, ότι και οι δύο πρέπει να χρησιμοποιούνται στην διδασκαλία: η πρώτη θεώρηση επιτρέπει στον καθηγητή και τους μαθητές να επικοινωνούν με μια γλώσσα εφικτή και από τους δύο αφού φαίνεται, από έρευνά της σε μαθητές, ότι οι αντιλήψεις των μαθητών είναι πιο κοντά στον λειτουργικό παρά στον δομικό τρόπο σκέψης για την έννοια της συνάρτησης, ενώ η δεύτερη είναι απαραίτητη για την περαιτέρω μάθηση, για την απόκτηση πιο περίπλοκων μαθηματικών εννοιών.
Η Sfard (1992), προτείνει τις δύο παρακάτω γενικές διδακτικές αρχές:

1η αρχή: Οι έννοιες δεν πρέπει να εισάγονται με δομικούς όρους. Σχετικά με την έννοια της συνάρτησης η εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης με την λειτουργική θεώρηση της προσφέρει ένα πρώτο υγιές, φυσικό στάδιο, για την ανάπτυξη της έννοιας

2η αρχή: Η δομική αντίληψη δεν θα πρέπει να απαιτείται όσο ο μαθητής μπορεί να κάνει και χωρίς αυτή. Ειδικότερα για την έννοια της συνάρτησης αναφέρει ότι, στα πλαίσια των σχολικών μαθηματικών, μπορεί να μην δημιουργηθούν καθόλου οι κατάλληλες συνθήκες για την εισαγωγή της δομικής αντίληψης για την συνάρτηση.

Σε έρευνά της με μαθητές η Sfard (1992) αναγνώρισε μια τάση των μαθητών να ταυτίζουν την συνάρτηση με έναν αλγεβρικό – υπολογιστικό τύπο. Η Sfard θεωρεί ότι παρότι αυτή η θεώρηση είναι συμβατή με την λειτουργική προσέγγιση (ο τύπος ως μια σύντομη περιγραφή ενός υπολογιστικού αλγόριθμου) όπως και της δομικής (ο τύπος ως μια στατική σχέση μεταξύ διατεταγμένων ζευγών), μερικές φορές μπορεί να μην είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο, αλλά μια «ψευτοδομική» αντίληψη που επιδεικνύει μια σημασιολογική υποτιμητική αντίληψη για την έννοια, με κύριο αποτέλεσμα να απομονώνει την συνάρτηση από τις άλλες αναπαραστάσεις της (αναφέρεται ιδιαίτερα στην γραφική της αναπαράσταση) και να δυσκολεύει τις μεταβάσεις από την μία αναπαράσταση στην άλλη, πράγμα που έχει επιβεβαιωθεί και από άλλες έρευνες . Θεωρεί ότι αν ο μαθητής ήταν ενήμερος των διαδικασιών πίσω από τα σύμβολα, το πέρασμα από τον τύπο στα γραφήματα θα ήταν αρκετά φυσικό. Προτείνει επίσης την έκθεση των μαθητών σε πολλά είδη αναπαραστάσεων της συνάρτησης (πίνακες, σύμβολα, γραφήματα) ως ένα τρόπο που βοηθάει στο ξερίζωμα ψευδοδομικών αντιλήψεων.

- Οι Pitta- Christou- Zachariades (2007) σε έρευνά τους (την ποσοτική ανάλυση της οποίας θα δούμε στην ανάλυση του Ερωτηματολογίου στο αντίστοιχο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας) σε μαθητές Λυκείου, επιχειρούν να καταγράψουν τα επίπεδα κατανόησης των μαθητών για τις δυνάμεις διαμέσου της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής και της θεωρίας των πρωτοτύπων (prototypes).

Ως πρωτότυπα θεωρούνται κάποια ειδικά παραδείγματα για κάθε μαθηματική έννοια που είναι πιο κεντρικά στην αντίστοιχη διδασκαλία από άλλα. Αυτά τα παραδείγματα έχουν θεωρηθεί σημαντικά στην εννοιολογική εκμάθηση. Τα παραδείγματα αυτά χρησιμοποιούνται ως «σημεία αναφοράς» για τον σχηματισμό και την κρίση σχετικά με την ιδιότητα μέλους άλλων παραδειγμάτων στην κατηγορία. Στην περίπτωση των δυνάμεων οι μαθητές φαίνεται ότι αναπτύσσουν «πρωτοτυπικά παραδείγματα» για την έννοια της δύναμης όπως: «μια δύναμη είναι όπως η $α^ν$, όπου οι α και ν είναι θετικοί ακέραιοι». Όμως αυτά τα «πρωτοτυπικά παραδείγματα» τους εμποδίζουν να κατανοήσουν πιο σύνθετες εκφράσεις που δεν ταιριάζουν με αυτά. Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα των Pitta et all. (2007) έδειξε ότι η έννοια της δύναμης είναι δύσκολη για τους μαθητές κυρίως για δύο λόγους:

α) Πρέπει κανείς να λάβει υπόψη του την σχέση μεταξύ συμβόλων, νοημάτων και ιδιοτήτων των δυνάμεων. Οι μαθητές, προσκολλημένοι στα πρωτοτυπικά παραδείγματα,

αντιμετωπίζουν την ύψωση σε εκθέτη σαν μία δράση (αυτήν του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού) και έτσι μένουν σε μια διαδικαστική κατανόηση.

β**)** Η εννοιολογική κατανόηση των δυνάμεων εμπλέκει μια βαθιά κατανόηση του συστήματος των αριθμών με την αυστηρή του ιεραρχία (φυσικοί αριθμοί, ρητοί αριθμοί, άρρητοι αριθμοί, πραγματικοί αριθμοί, κ.λ.π.).

Οι Pitta et al. (2007) ισχυρίζονται ότι για να φτάσουν οι μαθητές σε μια δομική κατανόηση της έννοιας της δύναμης απαιτείται η αποδοχή νέας γνώσης και νέας λογικής που όμως έρχεται σε αντίθεση με την αρχική γνώση των μαθητών. Συνεπώς απαιτείται μια εννοιολογική αλλαγή.

Για να επιτευχθεί αυτή η εννοιολογική αλλαγή, οι Pitta et al. (2007) προτείνουν να παρασχεθεί στους μαθητές περισσότερη εμπειρία στην ερμηνεία των εκθετικών μορφών: να μπορούν να μεταφράζουν τις ιδέες τους σε σύμβολα, να τα ερμηνεύουν και να κάνουν γενικεύσεις. Για παράδειγμα πρέπει οι μαθητές να μπορούν να ερμηνεύσουν το $2^{1/2}$ έχοντας κατανοήσει τι μπορεί να σημαίνει «μισός παράγοντας του 2». Θα πρέπει να καταλάβει ότι $2^{1/2} = \sqrt{2}$ όχι εξαιτίας ενός αυθαίρετου κανόνα που δίνει ένας καθηγητής ή ένα βιβλίο. Μάλλον θα πρέπει να συλλογιστεί ότι το $\sqrt{2}$ είναι μια συνέπεια του ορισμού των δυνάμεων και πρέπει επίσης να καταλάβει ότι η έννοια του εκθέτη, που ορίζεται αρχικά μόνο για τους φυσικούς αριθμούς, μπορεί να επεκταθεί για να περιλάβει το 0 τους αρνητικούς ακεραίους, τα κλάσματα και τους πραγματικούς αριθμούς.

- Ο Weber (2002) χρησιμοποιεί την θεωρία APOS της Dubinsky για να περιγράψει ένα μοντέλο μιας διαδικασίας διαδοχικών σταδίων από τα οποία, θεώρει, ότι οι μαθητές αναπτύσσουν την κατανόηση της εκθετικής συνάρτησης και την έννοια της δύναμης.

Το ζητούμενο είναι, κατά τον Weber, να είναι οι μαθητές ικανοί:

- να κατανοήσουν την ύψωση σε εκθέτη (exponentiation) σαν μια μαθηματική **διαδικασία** (και όχι μόνο σαν μια μαθηματική **δράση**) και
- να κατανοήσουν τις εκθετικές εκφράσεις σαν μαθηματικά **αντικείμενα.**

Αφού κάνει πρώτα μια θεωρητική ανάλυση, κάνει τις παρακάτω διδακτικές προτάσεις ώστε να επιτευχθούν οι παρακάτω στόχοι:

Τα βήματα αυτά είναι:

Βασιζόμενοι στην συνήθη κατανόηση των μαθητών για τις δυνάμεις ως η δράση του πολλαπλασιασμού της βάσης τόσες φορές όσες μας λέει ο εκθέτης για περιπτώσεις που ο εκθέτης είναι κάποιος φυσικός αριθμός, (*Η ύψωση σε εκθέτη ως μια δράση)*να ενθαρρύνουμε τους μαθητές (με κατάλληλες ερωτήσεις και με χρήση υπολογιστή) *εσωτερικεύσουν* (interiorize) την δράση σε μία διαδικασία (*Η ύψωση σε εκθέτη ως διαδικασία)* δηλαδή να μπορούν να δουν την δουν σαν μια συνάρτηση και να μπορούν να διακρίνουν τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης

(π.χ .η 2^{χ} θα είναι μια θετική συνάρτηση αφού ξεκινάς με έναν ακέραιο και επαναλαμβανόμενα τον πολλαπλασιάζεις με έναν θετικό αριθμό. Θα είναι επίσης μια αύξουσα συνάρτηση αφού κάθε φορά που το χ αυξάνεται κατά ένα, το 2^{χ} διπλασιάζεται.) Μπορούν επίσης να φανταστούν την αντίστροφη διαδικασία της Exponentiation και να πάρουν την διαδικασία του να παίρνουν τους λογαρίθμους. Επίσης να εξετάσουν ειδικές περιπτώσεις. Στην συνέχεια, εξετάζοντας ακόμα περιπτώσεις με φυσικούς εκθέτες, να κατανοήσουν (για παράδειγμα μέσα από τις ιδιότητες των δυνάμεων) την δύναμη σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο που είναι το προϊόν των επαναλαμβανόμενων πολλαπλασιασμών (*Οι εκθετικές εκφράσεις ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας*). Τέλος ο μαθητής πρέπει να γενικεύσει την κατανόησή του για την δύναμη α^{χ}, ως να αντιπροσωπεύει «το γινόμενο χ παραγόντων ίσων με α» και στην περίπτωση που ο χ δεν είναι φυσικός (*Γενίκευση*). Για παράδειγμα, θεωρώντας την συνάρτηση $f(x) = 2^{\chi}$, για να μπορεί να ερμηνεύσει ο μαθητής την τιμή f(1/2), να μπορεί να καταλαβαίνει τι μπορεί να σημαίνει «μισός παράγοντας του 2». Να καταλαβαίνουν δηλαδή ότι ο $\sqrt{2}$ ότι είναι ο μόνος λογικά συνεπής αριθμός που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «ο μισός παράγοντας του 2» (μια προσέγγιση που όπως είδαμε αναφέρεται και στο Pitta et al. 2007).

Καταλήγοντας, ο Weber (2002) τονίζει ότι η κατανόηση της ύψωσης σε εκθέτη ως συνάρτηση είναι απαραίτητη για κάποιον που σκοπεύει να αποκτήσει μια καλή κατανόηση του απειροστικού λογισμού και των ανώτερων Μαθηματικών. Αλλά αυτό απαιτεί πρώτα την κατανόηση της ύψωσης της δύναμης ως μια διαδικασία πράγμα που δεν είναι εύκολο να το πετύχουν οι μαθητές, αφού οι περισσότεροι φαίνεται να μένουν προσκολλημένοι στην αντιμετώπιση της ύψωσης σε εκθέτη σαν μια δράση, γεγονός που καθιστά το μέλλον τους στον απειροστικό λογισμό αβέβαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Διατύπωση του προβλήματος

Έχει διατυπωθεί από πολλούς ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών η άποψη ότι η γνώση των μαθητών για τους πραγματικούς αριθμούς είναι αποσπασματική και προβληματική από πολλές απόψεις (Merenluoto – Lehtinen, 2002, δες και 6ο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας)

Η έννοια του πραγματικού αριθμού έχει μια μακριά ιστορία ανάπτυξης (δες 1ο κεφάλαιο). Στην πραγματικότητα η έννοια των πραγματικών αριθμών, η έννοια της πυκνότητας της ευθείας των πραγματικών αριθμών και οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας είναι βαθιά συνδεδεμένες (Merenluoto – Lehtinen, 2002). Για να μπορέσει κανείς να καταλάβει την δομή αυτού του συνδυασμού πρέπει να κάνει μια ριζική ανακατασκευή της προηγούμενης σκέψης του και αυτή η ανακατασκευή φαίνεται πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθεί. (Merenluoto – Lehtinen, 2002)

Τις δυσκολίες αυτές δεν φαίνεται να μπορεί να τις αντιμετωπίσει ο τρόπος που γίνεται σήμερα η διδασκαλία τους στο σχολείο. Η διδασκαλία των πραγματικών αριθμών γίνεται με μια διαδικασία εμπλουτισμού η οποία όμως αποκρύπτει ένα πλήθος προβλημάτων στην κατανόηση των μαθητών (Giannakoulias et al., 2007). Βέβαια ο τυπικός ορισμός τους είναι πολύ δύσκολο να διδαχθεί στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Giannakoulias et al., 2007) αλλά η μικρή σημασία που τους δίνεται ίσως τελικά να οφείλεται στην γενικότερη έμφαση που δίνεται στα σχολικά μαθηματικά στην εκμάθηση τεχνικών παρά στην εννοιολογική κατανόηση (Fischbein et al. 1995) ή ίσως να οφείλεται στο ότι δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως από τους καθηγητές οι δυσκολίες των μαθητών στο να κατασκευάσουν μια κατάλληλη κατανόηση των πραγματικών αριθμών (Lehtinen, Merenluoto, Kasanen,1997).

Από την άλλη μεριά οι πραγματικοί αριθμοί είναι το μοντέλο πάνω στο οποίο στηρίζονται οι έννοιες του απειροστικού λογισμού που διδάσκεται ο μαθητής στην Γ΄ Λυκείου (Lehtinen, Merenluoto, Kasanen,1997). Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν (Merenluoto – Lehtinen, 2002, δες στο 3ο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας) τουλάχιστον α) την ιεραρχική φύση των πραγματικών αριθμών β) την συμπαγή φύση της ευθείας των πραγματικών αριθμών και γ) τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας και να δουν το όριο ως προϋπόθεση για την συνέχεια.

Ο μαθητής της Γ΄ Λυκείου, χωρίς να έχει καμία εξοικείωση με τις έννοιες αυτές, έρχεται σε επαφή μαζί τους μέσα από έναν έντονο ρυθμό που δεν επιτρέπει καθυστερήσεις. Πουθενά στα προηγούμενα χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσής του δεν έχει γίνει κάποια απόπειρα εισαγωγής στις παραπάνω έννοιες, με απλό και ενορατικό τρόπο, χωρίς λεπτολόγες θεωρητικές διατυπώσεις. «Εδώ ίσως να βρίσκεται η ουσία του προβλήματος» (Θωμαΐδης 1985α)

Η πρώτη επαφή του μαθητή με την έννοια του πραγματικού αριθμού έτσι όπως τον αντιλαμβάνεται η Ανάλυση, γίνεται στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου με τον ορισμό της δύναμης με εκθέτη άρρητο αριθμό, που όμως διδάσκεται με ένα τρόπο που θεωρώ (όπως εξήγησα και στον πρόλογο της εργασίας αυτής) ότι απέχει πολύ από το να είναι κατανοητός από τους μαθητές.

Έχει θεμελιωθεί από την έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών ότι η έννοια της δύναμης με εκθέτη διαφορετικό από φυσικό αριθμό είναι προβληματική για τους μαθητές (Pitta-Christou- Zachariades ,2007 δες 3^{ο} Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας). Η Confrey με τους συνεργάτες της (όπως είδαμε στο 3^{ο} Κεφάλαιο) έχει προτείνει μια διαφορετική θεώρηση της εκθετικής συνάρτησης που αναδεικνύει διαφορετικούς τρόπους για την κατασκευή των αριθμών μέσα σε διαφορετικά πλαίσια, και θεωρεί ότι μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μια ισχυρή διαισθητική βάση για την κατανόηση των δυνάμεων και της εκθετικής συνάρτησης και να συνεισφέρει στην προετοιμασία των μαθητών για τις έννοιες του απειροστικού λογισμού. Η έρευνά της όμως φτάνει μέχρι την έννοια της δύναμης με εκθέτη ρητό αριθμό.

Στην εργασία αυτή υποθέτουμε ότι η προσπάθεια επέκτασης της θεωρίας της Κόνφρευ ώστε να συμπεριληφθεί και η περίπτωση της δύναμης με εκθέτη πραγματικό αριθμό θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε μια καλύτερη κατανόηση για το πώς θα μπορούσαμε να εισάγουμε τους μαθητές με έναν πιο ουσιαστικό τρόπο στην έννοια του πραγματικού αριθμού και σε έννοιες που σχετίζονται με αυτόν και τελικά σε μια πιο ομαλή μετάβαση στις έννοιες του απειροστικού λογισμού.

Σκοπός της εργασίας

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να διερευνήσει τον ρόλο που θα μπορούσε να διαδραματίσει η διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης για την ανάπτυξη της κατανόησής μας για το πώς θα μπορούσαμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν, σε μια ισχυρή διαισθητική βάση, την έννοια της δύναμης με άρρητο εκθέτη και μέσω αυτής έννοιες που σχετίζονται γενικότερα με την έννοια του πραγματικού αριθμού έτσι όπως τον αντιμετωπίζει η Ανάλυση.

Προκειμένου να επιτύχω τον παραπάνω στόχο, χρησιμοποίησα ως βάση μια πειραματική σχετική διδασκαλία που πραγματοποίησα σε δύο τμήματα της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου στο σχολείο στο οποίο εργάζομαι τις οποίες βιντεοσκόπησα και απομαγνητοφώνησα (αναλυτικά στο 5^{ο} Κεφάλαιο).

Αυτή η πειραματική διδασκαλία δεν αντιμετωπίζεται σε αυτή την εργασία ως μια πρόταση διδασκαλίας αλλά σαν ένα αντικείμενο έρευνας, η ίδια, προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος που περιγράψαμε παραπάνω.

<u>Ερευνητικό Ερώτημα</u>

- Ποιοι είναι οι σημαντικοί παράγοντες που θα μπορούσαν να μας οδηγήσουν μέσα από το πλαίσιο της διδασκαλίας της εκθετικής συνάρτησης σε μια καλύτερη κατανόηση των τρόπων που οι μαθητές θα μπορούσαν να κατανοήσουν βαθύτερα έννοιες που σχετίζονται με τους πραγματικούς αριθμούς.

Τα συμπεράσματα (δες Κεφάλαιο 7) αυτής της εργασίας προκύπτουν από την ποιοτική ανάλυση της πειραματικής διδασκαλίας μέσα από διάφορα, υπάρχοντα, θεωρητικά πλαίσια της διδακτικής των Μαθηματικών (δες Κεφάλαιο 5), την ανάλυση των αντιδράσεων των μαθητών κατά την διάρκεια της διδασκαλίας (δες Κεφάλαιο 7) και την ανάλυση ενός ερωτηματολογίου που συμπλήρωσαν οι μαθητές που παρακολούθησαν την πειραματική διδασκαλία, αλλά και μαθητές της Β΄ Λυκείου του ίδιου σχολείου που δεν παρακολούθησαν την διδασκαλία αυτή (δες Κεφάλαιο 6).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο} : ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Για να σχεδιάσω την διδασκαλία μου βασίστηκα, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του λογαρίθμου (μέσα από την αντιπαράθεση μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου) και στον «πολλαπλασιαστικό κόσμο» της Κόνφρευ. Θεώρησα ότι θα πρέπει να προσπαθήσω, πριν την διδασκαλία μου, να προσφέρω στους μαθητές μου την δυνατότητα εξοικείωσης με αυτά. Άλλωστε αυτό θα μου επέτρεπε, κρατώντας την επαφή με την ύλη του σχολικού βιβλίου, να υπενθυμίσω στους μαθητές τις ιδιότητες των δυνάμεων (με ακέραιους εκθέτες) αλλά και να τους εισάγω (ακολουθώντας την ιστορική πορεία ανάπτυξης) στην έννοια των λογαρίθμων (πριν την διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης).

Παρακάτω θα περιγράψω, πολύ σύντομα, αυτές τις δύο εισαγωγικές διδασκαλίες.

<u>ΜΑΘΗΜΑ 1</u> ΑΝΤΙΠΑΡΑΒΟΛΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Σε αυτό το, διάρκειας μίας διδακτικής ώρας μάθημα, οι μαθητές με την βοήθεια ενός φύλλου εργασίας που τους μοιράστηκε (δες ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1) ήθελα να εξοικειωθούν (συνεργαζόμενοι με τους συμμαθητές τους και με τον καθηγητή) με την αντιπαράθεση μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, που, όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, είναι η βάση της ανάπτυξης της έννοιας του λογαρίθμου. Επίσης ήθελα οι μαθητές να θυμηθούν και να επαληθεύσουν μέσα από την αντιπαράθεση αυτή, τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό (θετικό ή αρνητικό και ερμηνεία των ορισμών για δυνάμεις με εκθέτη 0 και 1), αλλά επίσης να γνωρίσουν, για πρώτη φορά, την έννοια του λογαρίθμου και την ερμηνεία της ονομασίας τους, όπως προτείνονται στο άρθρο Θωμαΐδης, 1985 και, στην περίληψη αυτού του άρθρου, στο ιστορικό σημείωμα του βιβλίου της Β΄ Λυκείου (2009) (σελ. 151). Σε αυτό το άρθρο του υποστηρίζει ότι οι λογαριθμικές έννοιες δεν πρέπει να εισάγονται μέσω της αντιστροφής των αντίστοιχων εκθετικών εννοιών, αλλά με τρόπο σύμφωνο με αυτόν που ιστορικά γεννήθηκε αυτή η έννοια και με τρόπο ώστε να δικαιολογείται στους μαθητές η ονομασία τους. Για να ερμηνεύσω στους μαθητές ότι στα χρόνια του Νάπιερ «η γεωμετρική πρόοδος οριζόταν σαν μια ακολουθία αριθμών που βρισκόταν σε συνεχή αναλογία» (που αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα που ανέφερα παραπάνω), σκέφτηκα να το συνδέσω με την συνεχή αναλογία τμημάτων (με λόγο φ) που προκύπτει αν διαιρούμε διαδοχικά ένα τμήμα σε μέσο και άκρο

λόγο, ένα θέμα που οι μαθητές διδάσκονται στο μάθημα της γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου. Μετά φτάσαμε, με τους μαθητές μου, στην ερμηνεία που προτείνει το ιστορικό σημείωμα για την λέξη «λογάριθμος».

ΜΑΘΗΜΑ 2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Σε αυτό το διάρκειας δύο διδακτικών ωρών μάθημα, οι μαθητές με την βοήθεια ενός φύλλου εργασίας που τους μοιράστηκε (δες ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2,) ήθελα να εξάγουν (συνεργαζόμενοι με τους συμμαθητές τους και με τον καθηγητή), πάλι μέσα από την αντιπαράθεση μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Αρχικά συζητήθηκε με τους μαθητές, μέσα από συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα, το γιατί η αντιπαράθεση αυτή θεωρήθηκε χρήσιμη για την διευκόλυνση στην εκτέλεση διάφορων πράξεων (πολλαπλασιασμός, διαίρεση, ύψωση σε εκθέτη, εξαγωγή ρίζας). Μετά από κάθε κανόνα που διαπιστώναμε, εκφραζόταν λεκτικά η αντίστοιχη ιδιότητα των λογαρίθμων, με την έννοια του όρου λογάριθμος (ως εκθέτη) που είχαμε δώσει στο προηγούμενο μάθημα. Επίσης, μέσα από την θεώρηση της λογικής που προκύπτει από την αντιπαράθεση των αριθμητικών και γεωμετρικών ακολουθιών σε διάφορες περιπτώσεις, προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε το γεγονός ότι δεν θα είχε νόημα να ορίσουμε τον λογάριθμο σε περιπτώσεις όπου ο λόγος της γεωμετρικής ακολουθίας είναι 1 ή 0 ή αρνητικός αριθμός. Προκειμένου οι ιδιότητες αυτές να αποδειχθούν παρουσιάστηκε, στους μαθητές, η ανάγκη για την διατύπωση του τυπικού ορισμού. Στην συνέχεια προχωρήσαμε στην τυπική διατύπωση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και την απόδειξή τους. Πάλι ακολούθησα, σε γενικές γραμμές το ιστορικό σημείωμα του βιβλίου της Β΄ Λυκείου (2009) (σελ. 149) έχοντας υπόψη μου και άλλα άρθρα όπως Θωμαΐδης, 1985, και Katz, 1995.

Πριν ακολουθήσει η παρακάτω, κύρια για την εργασία αυτή, διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης, μεσολάβησαν αρκετές διδακτικές ώρες στις οποίες οι μαθητές, στο σπίτι τους και μαζί με τον καθηγητή στην τάξη, ασχολήθηκαν με ασκήσεις πάνω στην έννοια του λογαρίθμου καθώς και με επίλυση εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων και συστημάτων.

Η ΚΥΡΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Σε αυτό το διάρκειας μίας διδακτικής ώρας μάθημα (δες την απομαγνητοφώνηση της διδασκαλίας στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4), οι μαθητές με την βοήθεια ενός φύλλου εργασίας που τους μοιράστηκε (δες ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3) καλούνταν αρχικά να

εκφράσουν την σχέση που συνδέει τις τιμές της γεωμετρικής ακολουθίας με τις αντίστοιχες τιμές της αριθμητικής προόδου (η συνάρτηση $\psi = 2^{\chi}$) και στη συνέχεια να συμμετάσχουν σε μια, καθοδηγούμενη από το φύλλο εργασίας και τον καθηγητή, συζήτηση σχετικά με την κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\psi = 2^{\chi}$. Το κύριο θέμα στην διαδικασία αυτή ήταν να συζητηθεί το πώς «μπορούν να καλυφθούν τα κενά» στην γραφική παράσταση.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1η Φάση: Διδασκαλία της δύναμης με ρητό εκθέτη

Στην 1η φάση της διδασκαλίας ο κύριος στόχος μου ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη, με τρόπο που να συνδέεται με την αρχική τους κατανόηση για την έννοια της δύναμης, αυτόν του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού. Να επεκτείνουν δηλαδή με ένα «φυσικό» τρόπο της έννοιας της δύναμης με φυσικό εκθέτη σε αυτόν της δύναμης με ρητό εκθέτη και να ερμηνεύσουν παράλληλα τον ορισμό.

Αρχικά θύμισα στους μαθητές την αντιπαράθεση μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, που είχαν γνωρίσει σε παλαιότερα μαθήματα, και μετά τους κάλεσα να βρουν την σχέση που συνδέει τις μεταξύ τους τιμές (δραστηριότητα 1 του φύλλου εργασίας, Εικόνα 1).

Απόσπασμα από το φύλλο εργασίας

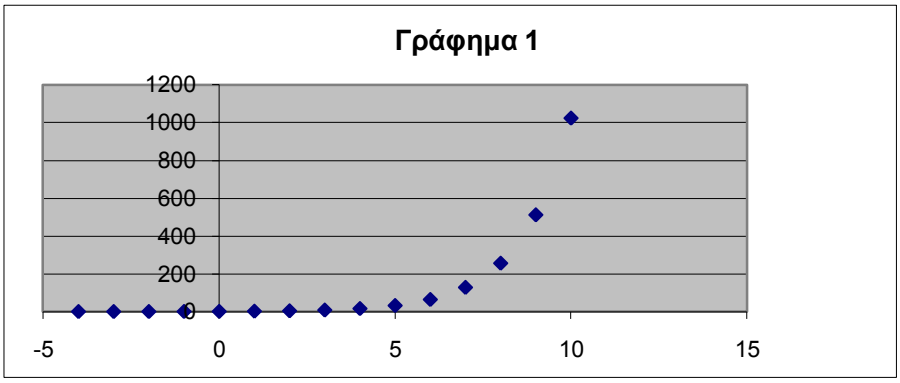
ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Στον παρακάτω πίνακα έχουμε μια **«αντιπαράθεση»** μιας αριθμητικής προόδου και μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ = 2

-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64

Αν θεωρήσουμε τις τιμές της αριθμητικής προόδου ως χ και τις τιμές της γεωμετρικής προόδου ως ψ, **ποια σχέση** συνδέει το κάθε ψ με το αντίστοιχο χ;

Στο παρακάτω γράφημα 1 έχουμε παραστήσει με σημεία τα ζεύγη (χ, ψ) του παραπάνω πίνακα



Εικόνα 1: Η πρώτη δραστηριότητα στο φύλλο εργασίας.

Οι μαθητές εύκολα βρήκαν ότι **η σχέση είναι** η $\psi = 2^{x}$. Στη συνέχεια ρώτησα τους μαθητές «ποιά θα μπορούσε να πούμε ότι είναι η βασική ιδιότητα εδώ;» και καταλήξαμε ότι «κάθε φορά που το χ αυξάνεται κατά 1, το ψ διπλασιάζεται, δηλαδή **το ποσοστό που μεταβάλλεται το ψ** (εννοώντας το $\frac{\psi_{\nu+1}}{\psi_{\nu}}$) είναι σταθερό και αυτό το ποσοστό είναι 200%.»

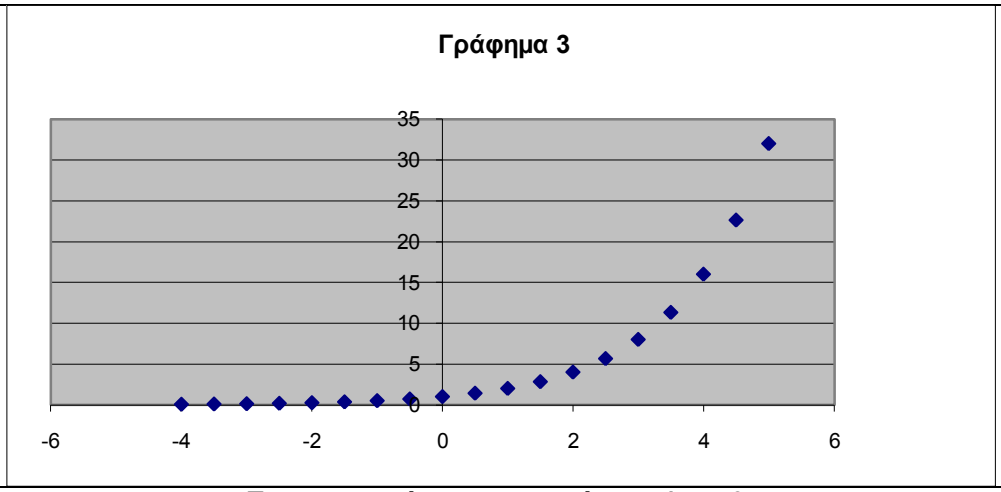
Στην συνέχεια στρέψαμε την προσοχή μας στο Γράφημα 1 (εικόνα 1)και τέθηκε για πρώτη φορά στη διδασκαλία το «**πως θα γεμίσουμε τα κενά** στην γραφική παράσταση;» λέγοντας στους μαθητές: «γιατί όλες οι γραφικές παραστάσεις που σας έχουν δοθεί μέχρι τώρα είναι συνεχόμενες γραμμές. Αλλά πως βγαίνει αυτό το συνεχόμενο; Για να δούμε ένα παράδειγμα εδώ».

Στην συνέχεια προχωρήσαμε σε ένα πρώτο βήμα προς το «συνεχόμενο»: τον χωρισμό των διαστημάτων **«στην μέση»** (Εικόνα 2).

Απόσπασμα από το φύλλο εργασίας

3) Πως θα μπορούσαμε να γεμίσουμε τα "κενά" ανάμεσα στα σημεία του παραπάνω γραφήματος και παράλληλα να παραμένει η πάνω σειρά αριθμητική ακολουθία και η κάτω γεωμετρική; Ας περιοριστούμε στο διάστημα [0, 5]. Μπορείτε να βρείτε τις τιμές που λείπουν;

0	α1	1	α2	2	α3	3	α4	4	α5	5
1	γ1	2	γ2	4	γ3	8	γ4	16	γ5	32



Τι παρατηρείται στα γραφήματα 1 και 3;

Εικόνα 2: Ο χωρισμός των διαστημάτων, από το – 4 έως το 5, «στη μέση».

Παράλληλα με την συμπλήρωση του πίνακα από τους μαθητές, για να τους βοηθήσω να βρουν ποιο είναι στην κάτω γραμμή «το μισό», μιλήσαμε για την διαφορά ανάμεσα στις τιμές της αριθμητικής προόδου (πάνω γραμμή) και της γεωμετρικής προόδου (κάτω γραμμή). Εστίασα την προσοχή τους ότι στην πάνω γραμμή «πάω προσθετικά, κάθε φορά προσθέτω 1, η μονάδα μου είναι το 1, έχω έναν «**προσθετικό κόσμο**». Το μισό είναι το ½ γιατί αν προστεθεί με τον εαυτό του μου κάνει 1», ενώ στην κάτω γραμμή «πάω πολλαπλασιαστικά, κάθε φορά πολλαπλασιάζω με το 2, έχω έναν **πολλαπλασιαστικό κόσμο**.» Καταλήξαμε ότι «**το μισό του 2** (ή μισός παράγοντας του 2) στον πολλαπλασιαστικό κόσμο είναι το $\sqrt{2}$ γιατί αυτός είναι ο αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του κάνει 2». Αποδείξαμε και αλγεβρικά ότι προκειμένου **να διατηρείται** πάνω η αριθμητική πρόοδος (ίσες διαφορές) πρέπει «το μισό» να είναι ½ και προκειμένου να διατηρείται κάτω η γεωμετρική πρόοδος (ίσοι λόγοι) «το μισό» πρέπει να είναι το $\sqrt{2}$. Θύμισα στους μαθητές ότι αυτούς τους αριθμούς τους είχαμε ονομάσει παλαιότερα «**αριθμητικό μέσο**» και «**γεωμετρικό μέσο**» και συζητήσαμε το «γιατί τους ονόμασαν έτσι;».

Αφού συμπληρώσαμε τον υπόλοιπο πίνακα τους ρώτησα: «Σε αυτό το νέο πίνακα **διατηρείται η σχέση ψ = $2^{χ}$;**». Μερικοί μαθητές αντικατέστησαν τις αντίστοιχες τιμές στον τύπο και πρότειναν: «διατηρείται γιατί $\sqrt{2} = 2^{1/2}$». Τους ρώτησα: «και ποιος μας το λέει αυτό;» μου απάντησαν από ιδιότητα (εννοούσαν ορισμό) και στην συνέχεια προσπαθήσαμε **να εξηγήσουμε τον ορισμό** παρατηρώντας ότι στον νέο πίνακα διατηρείται η βασική ιδιότητα της συνάρτησης (αν το χ αυξάνεται κατά 1 το ψ διπλασιάζεται, αυξάνεται

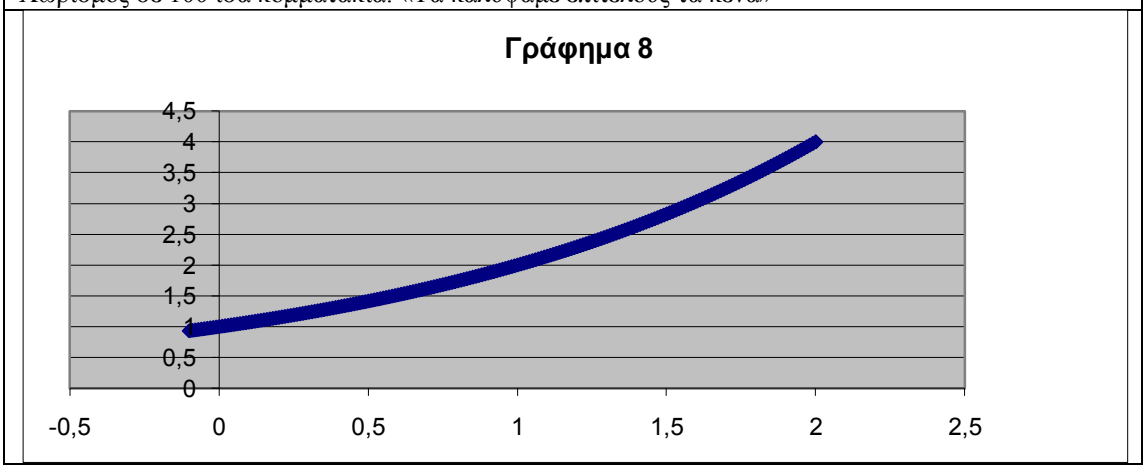
με το ίδιο ποσοστό) «άρα είναι ο ίδιος νόμος άρα σαφώς θα πρέπει να ορίσουμε ότι $\sqrt{2}$ = $2^{1/2}$. Δεν είναι ένας αυθαίρετος ορισμός» (λόγια του καθηγητή).

Στην συνέχεια αφού σχολιάσαμε τα Γραφήματα 1 και 3 (εικόνες 1 και 2), προχωρήσαμε στο να «**πυκνώσουμε**» περισσότερο τις τιμές για να «καλύψουμε τα κενά». Πρώτα κατασκευάσαμε ένα πίνακα όπου η μονάδα να χωρίζεται, στην πάνω και στην κάτω γραμμή «σε 10 ίσα κομματάκια» και ερμηνεύσαμε όπως πριν, με βάση την ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης, ότι θα πρέπει να ορίσουμε ότι $\sqrt[10]{2} = 2^{0,1}$ ερμηνεύοντας το $2^{0,1}$ και ως τον αριθμό που όταν πολλαπλασιαστεί 10 φορές με τον εαυτό του κάνει 2 αλλά και ως «τον αριθμό που θα πάρω αν χωρίσω το 2, πολλαπλασιαστικά, σε 10 ίσα κομματάκια».

Στην συνέχεια, παρατηρώντας την αντίστοιχη γραφική αναπαράσταση και βλέποντας ότι «τα κενά πάλι δεν καλύπτονται» προχωρήσαμε σε χωρισμό σε 100 ίσα κομμάτια και συζητήσαμε την γραφική αναπαράσταση (Γράφημα 8, Εικόνα 3).

Οι μαθητές, γρήγορα κατέληξαν ότι δεν τα καλύψαμε τα κενά, παρά μόνο φαινομενικά, γιατί «αν συνεχίσουμε, άπειροι αριθμοί άρα…» (λόγια μαθητή)

Απόσπασμα από το φύλλο εργασίας
Χωρισμός σε 100 ίσα κομματάκια: «Τα καλύψαμε επιτέλους τα κενά»



Εικόνα 3: Το γράφημα που προκύπτει από τον χωρισμό της μονάδας σε 100 ίσα μέρη.

Ανάλυση της 1ης Φάσης

- <u>Η συνάρτηση ως συντονιστής δύο παράλληλων κόσμων</u>:

Στην παραπάνω αντιμετώπιση της συνάρτησης, ακολούθησα, την θεωρίας της Confrey, που παρουσίασα στο 3ο Κεφάλαιο. Η σχέση $\psi = 2^{\chi}$, δεν ειδώθηκε σαν ένας τύπος με τον οποίο δίνουμε τιμές στο χ για να βρούμε τα αντίστοιχα ψ, αυτό ισχύει αλλά δεν είναι το πρωτεύων. Το βάρος δόθηκε στη σύνδεση των τρόπων που μεταβάλλονται οι τιμές στην αριθμητική και στην γεωμετρική πρόοδο. Η ανάδειξη αυτής της έννοιας της συνάρτησης, ως συντονιστή ανάμεσα σε δύο ανεξάρτητες διαδικασίες (και όχι της αντιστοίχισης) είναι που μου επέτρεψε, δίνοντας βάρος στο σταθερό ποσοστό μεταβολής να ερμηνεύσω μαζί με τους μαθητές μου την ισότητα για παράδειγμα $\sqrt{2} = 2^{1/2}$: Αν αντιμετώπιζα την συνάρτηση απλά ως ένα κανόνα αντιστοίχισης, όπως έκαναν αρχικά οι μαθητές, θα οδηγούμασταν σε έναν τυπικό, αλλά και ταυτόχρονα αυθαίρετο ορισμό. Η αντιμετώπιση της συνάρτησης στο ρόλο του συντονιστή ανάμεσα σε δύο παράλληλους κόσμους ήταν αυτή που μου επέτρεψε να ερμηνεύσω (μέσα από την προσπάθεια να απαντηθεί το ερώτημα αν διατηρείται η σχέση $\psi = 2^{\chi}$, δηλαδή αν διατηρείται ο νόμος ότι αν το χ μεταβληθεί κατά 1 τότε το χ διπλασιάζεται) το γιατί το $\sqrt{2}$, δηλαδή το πολλαπλασιαστικό μισό του 2, είναι πράγματι ίσο με το $2^{1/2}$, δηλαδή ο αριθμός που θα προκύψει αν βάλω στην θέση του χ το ½ γιατί, για παράδειγμα: αν αυξήσω το χ κατά 1, δηλαδή το χ γίνει 3/2, τότε το αντίστοιχο ψ θα είναι $2\sqrt{2}$, δηλαδή το διπλάσιο του $\sqrt{2}$, το ψ δηλαδή αυξάνεται κατά το ίδιο ποσοστό όπως και στον αρχικό πίνακα τιμών. Άρα «σαφώς μπορώ να ταυτίσω τους δύο πίνακες» αυτόν που είχα αρχικά με αυτόν που έφτιαξα χωρίζοντας τα διαστήματα στην μέση, γιατί ισχύει ο ίδιος νόμος. Και στους δύο πίνακες οι δύο ανεξάρτητες διαδικασίες συντονίζονται με τον ίδιο τρόπο, και άρα θα ισχύει η ίδια σχέση: $\psi = 2^{\chi}$, άρα μπορώ τώρα να ορίσω ότι « $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, αλλά δεν είναι ένας αυθαίρετος ορισμός».

<u>Κριτική</u>: Δεν δόθηκε αρκετός χρόνος και οι κατάλληλες δραστηριότητες (ίσως προβλήματα της καθημερινής ζωής ή εργασία με υπολογιστές) στην παραπάνω διδασκαλία ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να φτάσουν σε μια πραγματική κατανόηση της βασικής ιδιότητας της εκθετικής συνάρτησης, αλλά αντίθετα τους δόθηκε έτοιμη από τον καθηγητή.

- <u>Η ενθυλάκωση της έννοιας της δύναμης με ρητό εκθέτη</u>:

Η δύναμη με εκθέτη ρητό νομίζω ότι μέσα από την διδασκαλία που περιγράψαμε μπορεί, καταρχήν, να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές, να πάψει να είναι κάτι παράξενο ή ένα

τεχνικό κατασκεύασμα των μαθηματικών. Επιπλέον τα βήματα που ακολουθήθηκαν μπορούν να τους βοηθήσουν να ενθυλακώσουν την διαδικασία της ύψωσης σε εκθέτη σε ένα αντικείμενο, την δύναμη με ρητό εκθέτη. Μιλώντας με όρους της θεωρίας APOS (στο πνεύμα του Weber, 2002, που παρουσιάσαμε στο 3^{ο} Κεφάλαιο) ακολουθήθηκαν τα παρακάτω βήματα:

Από τα αρχικά βήματα που ακολουθήθηκαν (χωρισμός σε 2 ίσα μέρη) οι μαθητές αρχίζουν να καταλαβαίνουν ότι ο εκθέτης δείχνει τον αριθμό των πολλαπλασιαστικών *δράσεων* που πρέπει να κάνουμε στην πολλαπλασιαστική μονάδα για να πάρουμε ως αποτέλεσμα την δύναμη. Στην συνέχεια με την επανάληψη των δράσεων στις περιπτώσεις που χωρίζουμε σε 10, 100, ίσα διαστήματα μπορεί να τους βοηθήσει να *εσωτερικοποιήσουν* τις δράσεις σε μία διαδικασία, δηλαδή αναστοχαζόμενοι πάνω στις δράσεις να αρχίζουν να αποκτούν συνειδητό έλεγχο πάνω τους. Η εσωτερίκευση των δράσεων σε μια διαδικασία μπορεί να τους οδηγήσει, στην συνέχεια να αποκτήσουν μια ενιαία αντίληψη για την έννοια της δύναμης, είτε ο εκθέτης είναι φυσικός είτε ρητός. Σε αυτό βοηθάει το ότι, έτσι όπως ερμηνεύτηκαν οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη στην διδασκαλία, η έννοια της δύναμης έχει ενιαία ερμηνεία αφού συνδέεται (και επεκτείνει) την προτωτυπική τους έννοια για την δύναμη ως επαναλαμβανόμενος πολλαπλασιασμός. Έτσι μπορούν να δουν την διαδικασία ως μια ολότητα που να συνδέει, μέσω της διαμεσολάβησης της συνάρτησης, την διαδικασία με την παραγωγή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Η διαδικασία έτσι μπορεί να *ενθυλακωθεί* στο μαθηματικό αντικείμενο που ονομάζεται δύναμη το οποίο μπορεί στην συνέχεια να χρησιμοποιηθεί σε άλλες δράσεις όπως για παράδειγμα να δεχθούν ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός (για παράδειγμα το $2^{0,3}$ θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως $(2^{0,1})^3$ και ομοίως με τις άλλες ιδιότητες, καθώς επίσης και τον γενικό ορισμό $α^{χ/ψ} = \sqrt[ψ]{α^χ}$). Έτσι, η ενθυλάκωση αυτή μπορεί να οδηγήσει προς την δομική κατανόηση της έννοιας της δύναμης με ρητό εκθέτη.

<u>Κριτική</u>: Δεν δόθηκε χρόνος για να συζητηθούν με τους μαθητές οι ιδιότητες των δυνάμεων στην περίπτωση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη. Ωστόσο τα λόγια ενός μαθητή, λίγο αργότερα στην διδασκαλία: «**Ξέρουμε** το $\sqrt{2}$, **το έχουμε υπολογίσει πιο πριν** ότι **είναι** 2 εις την 0,5» και η συμφωνία και ενός άλλου μαθητή μαζί του («ναι είναι το 2 εις την ½»), αποτελούν μια ισχυρή ένδειξη ότι πράγματι, τουλάχιστον αυτοί οι δύο μαθητές ενθυλάκωσαν την έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο.

2η Φάση: Διδασκαλίας της δύναμης με άρρητο εκθέτη

- «*Οι ρητοί δεν είναι αρκετοί για να καλυφθούν τα κενά*»: Ο καθηγητής υποστήριξε με αυτούς τους χωρισμούς παίρνουμε στην ουσία ρητούς αριθμούς στην πάνω γραμμή, και έτσι δεν πρόκειται ποτέ να καλύψουμε τα κενά καταρχήν στον χ΄χ γιατί αυτός περιέχει και άρρητους αριθμούς. Λέει ο καθηγητής: «Κάπου υπάρχει, για παράδειγμα, το $\sqrt{2}$ πάνω στον άξονα, το δεχόμαστε αξιωματικά, το οποίο δεν θα εμφανιστεί στην παραπάνω διαδικασία, γιατί δεν είναι ρητός». Στην συνέχεια θέτει το ερώτημα: «Αν βάλω λοιπόν πάνω στον χ΄χ το $\sqrt{2}$, ένα άρρητο αριθμό, πως μπορώ να βρω τον $2^{\sqrt{2}}$;» Σε συζήτηση με τους μαθητές ξεκαθαρίζεται ότι δεν μπορώ να πάω με την προηγούμενη διαδικασία (με τους ρητούς εκθέτες) γιατί «είναι άρρητος αριθμός, δεν ξέρω όλα τα δεκαδικά του ψηφία…. δεν θα εμφανιστεί στους χωρισμούς που κάναμε πριν…» και συμφωνούν να ακολουθήσουν μια διαδικασία προσέγγισης αυτού του αριθμού.
- Η «προσεγγιστική διαδικασία»: Ο καθηγητής παραπέμπει τους μαθητές στο φύλλο εργασίας για να παρατηρήσουν την διαδικασία (μια οριακή διαδικασία εγκιβωτισμένων διαστημάτων) που φαίνεται παρακάτω (εικόνα 4) αφού πρώτα τους εξηγεί την λογική με την οποία κατασκευάστηκε. Δηλαδή ότι «αν χωρίσω σε 10 ίσα κομματάκια, προσέγγιση με ένα δεκαδικό ψηφίο, θα είναι $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$» κ.λ.π. Στη συνέχεια ο καθηγητής καλεί τους μαθητές να παρατηρήσουν τα νούμερα που προκύπτουν στα δύο άκρα. Οι μαθητές παρατηρούν ότι «μετά από κάποια ψηφία υπάρχει στασιμότητα… κάθε ένα σταθεροποιείται με πιο πολλούς αριθμούς». Ο καθηγητής λέει: «Πράγματι σταθεροποιούνται αυτά, αυτή η διαδικασία **τελικά** κάπου **καταλήγει**, δηλαδή τι σημαίνει καταλήγει;». Ένας μαθητής, που συμμετείχε ενεργά στη όλη συζήτηση, λέει: «**Φτάνει** σε έναν αριθμό».

Απόσπασμα από το φύλλο εργασίας	
$\sqrt{2}$ = 1,4142135623730950488016887242097	
1,4 2,6390158	1,5 2,8284271
1,41 2,6573716	1,42 2,675855
1,414 2,6647497	1,415 2,66659735
1,4142 2,6651191	1,4143 2,66530383
1,41421 2,6651376	1,41422 2,66515604
1,414213 2,6651431	1,414214 2,66514495
1,4142135 2,6651440	1,4142136 2,66514421

Εικόνα 4: Η «προσέγγιση» του $2^{\sqrt{2}}$ με μια οριακή διαδικασία εγκιβωτισμένων διαστημάτων

Ανάλυση της 2ης Φάσης

- <u>Η ενθυλάκωση της έννοιας της δύναμης με ρητό εκθέτη στο σχολικό βιβλίο και στην πειραματική διδασκαλία</u>) :

Ο στόχος μου σε αυτή την φάση της διδασκαλίας ήταν να ενθυλακώσουν τον $2^{\sqrt{2}}$, σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο. Να συλλάβουν διαισθητικά την «ύπαρξη» ενός τέτοιου αριθμού. Σύμφωνα με τον Fischbein και τον Dubinsky (όπως είδαμε στο 3^{ο} Κεφάλαιο) αυτό σημαίνει να συλλάβουν *διαισθητικά* το ενεργεία άπειρο, που σημαίνει να συλλάβουν μια άπειρη διαδικασία ως μια ολότητα ή να ενθυλακώσουν μια άπειρη διαδικασία σε ένα μαθηματικό αντικείμενο που, κατά τον Dubinsky (2008), είναι ισοδύναμο με την, γνωσιακή, επίτευξη του ενεργεία απείρου (δες και στο 3^{ο} Κεφάλαιο τις απόψεις του Fischbein και του Dubinsky για το ενεργεία άπειρο). Η αποδοχή του ενεργεία απείρου κατά τους Lakoff και Nunez (2000), όπως έχουμε αναφέρει στο 3^{ο} κεφάλαιο, είναι αυτή που επέτρεψε την θεμελίωση του

απειροστικού λογισμού. Οι Lakoff και Nunez (2000 σελίδες 200 – 205) τεκμηριώνουν ότι ακριβώς αυτή η (μεταφορική) αποδοχή του ενεργεία απείρου επέτρεψε στους μαθηματικούς να φτάσουν στην ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών (την αξιωματική αποδοχή του ελάχιστου άνω φράγματος ενός μη κενού άνω φραγμένου συνόλου) που είναι η ιδιότητα που διαφοροποιεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών από εκείνο των ρητών. Η ιδιότητα της πληρότητας, όπως είδαμε στο 1^{ο} Κεφάλαιο σχετίζεται άμεσα με τον τρόπο που κατασκεύασαν τους πραγματικούς αριθμούς οι Dedekind και Cantor και όπως επισημαίνουν οι Νεγρεπόντης et al. 1999, σελ. 27: «Η ιδιότητα αυτή είναι υπαρξιακή και προβλέπει την ύπαρξη πολλών πραγματικών αριθμών, εν τούτοις, η ύπαρξη αυτών των αριθμών δεν προκύπτει από κάποια κατασκευαστική διαδικασία.» Επίσης, η αρχή του κιβωτισμού που ουσιαστικά χρησιμοποίησα στην διδασκαλία, « βασίζεται κατά τρόπο ουσιαστικό στην ιδιότητα της πληρότητας» (Νεγρεπόντης et al. 1999, σελ. 49) ενώ κατά τους Lakoff και Nunez (2000)(σελ. 206) είναι ένας, ισοδύναμος (με αυτόν της ιδιότητας της πληρότητας) (μεταφορικός) τρόπος για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών. Όπως εξηγήσαμε στο 1^{ο} Κεφάλαιο, η «ύπαρξη» των πραγματικών αριθμών προηγείται από την απόδειξη της σύγκλισης. Πρέπει πρώτα να δεχτούμε την «ύπαρξη» και μετά να πάμε στην απόδειξη μέσω ορίου. Αυτή την πορεία προσπάθησα να ακολουθήσω, σε ένα επίπεδο βέβαια μακριά από την αυστηρή μαθηματική θεώρηση. Όπως θα προσπαθήσω να δείξω παρακάτω η διδασκαλία μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μια δυνατότητα να αποδεχθούν διαισθητικά αυτό το αξίωμα που είναι το βασικότερο προκειμένου να μπουν στον κόσμο του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Παρακάτω θα προσπαθήσω να αναλύσω το πώς αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσα από την διδασκαλία που παρουσίασα παραπάνω και παράλληλα να εξηγήσω γιατί η διδακτική αντιμετώπιση του σχολικού βιβλίου είναι προβληματική σε αυτό το θέμα. Για την παρακάτω ανάλυση θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως τις ιδέες του Dubinsky (2008) που περιγράψαμε στο 3^{ο} Κεφάλαιο.

Η διδακτική προσέγγισή που παρουσίασα παραπάνω παρουσιάζει μια ομοιότητα με αυτή του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης, et all. 1991 σελ. 123) στο εξής: Το σχολικό βιβλίο αναφέρει μια προσεγγιστική διαδικασία για το $3^{\sqrt{2}}$. Για να περιγράψει την διαδικασία, διακρίνει δύο ακολουθίες που εξελίσσονται παράλληλα.

«Η μία είναι η ακολουθία (1) των διαδοχικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$

Η άλλη είναι η ακολουθία (2) των αντίστοιχων δυνάμεων του 3, όπως προκύπτουν από τον υπολογισμό τους με έναν υπολογιστή τσέπης.»

Παρατηρούμε, λέει το σχολικό βιβλίο, ότι «καθώς το πλήθος των ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν έναν ορισμένο αριθμό που λέγεται όριο της ακολουθίας αυτής. Είναι επομένως λογικό να ορίσουμε την δύναμη $3^{\sqrt{2}}$ ως την παραπάνω οριακή τιμή.»

Η ομοιότητα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι και στην δική μου διδασκαλία διακρίνονται δύο ακολουθίες: μια άπειρη ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ με άκρα τις κάτω και πάνω προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ με ν δεκαδικά ψηφία και την ακολουθία των εγκιβωτισμένων διαστημάτων $[\gamma_\nu, \delta_\nu]$ με άκρα τις αντίστοιχες προσεγγίσεις με ν δεκαδικά ψηφία των αντίστοιχων δυνάμεων με βάση το 2.

Αυτές οι θεωρήσεις συμφωνούν με την άποψη των Lakoff και Nunez (2000) ότι, γνωσιακά, οι συνεχείς διαδικασίες είναι επαναληπτικές διαδικασίες , που είδαμε στο 3^{ο} κεφάλαιο καθώς και την αντίστοιχη προκύπτουσα θεώρηση του ορίου συνάρτησης.

Η διαφορά είναι βέβαια ότι στη διδασκαλία μου θεώρησα ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Αυτή η επιλογή μου έγινε γιατί θεώρησα ότι αυτός ο τρόπος κατασκευής των πραγματικών αριθμών (δες και στο 3^{ο} Κεφάλαιο την θεωρία των Lakoff, Nunez) θα ήταν πιο κοντά στις διαισθήσεις των μαθητών. Επίσης είναι ο τρόπος που οι μαθητές διδάχθηκαν, με διαδοχικές προσεγγίσεις, την έννοια του $\sqrt{2}$ στην Β΄ Γυμνασίου. Επίσης στην φάση αυτή της διδασκαλίας , δεν δίνεται βάρος στην λέξη «προσέγγιση» αλλά σε λέξεις «στασιμότητα», «καταλήγει», «φτάνει», που είναι μακριά από το λεξιλόγιο του σχολικού βιβλίου. Βέβαια θα παρατηρήσατε πιθανόν ότι ο τίτλος αυτός δραστηριότητας στο φύλο εργασίας αναφέρεται στη «προσέγγιση» του $2^{\sqrt{2}}$. Αυτός, ας θεωρήσουμε προσωρινά, ότι αναφέρεται με την έννοια της γνωστικής προσέγγισης, της «σύλληψης».

Μια πιο σημαντική, ωστόσο διαφορά με το σχολικό βιβλίο, που θα αναλύσουμε παρακάτω, είναι ότι στην δική μου διδασκαλία η μία από αυτές τις δύο ακολουθίες (αυτή που αφορά στο $\sqrt{2}$) φαίνεται να έχει ένα «όριο»: το $\sqrt{2}$, στο οποίο αναφέρθηκα και προηγουμένως. Αντίθετα το σχολικό βιβλίο αφήνει τελείως ασχολίαστο το τι γίνεται με την ακολουθία (1). Θα εξηγήσουμε στα παρακάτω γιατί αυτή είναι μια σημαντική παράλειψη:

Θυμίζουμε ότι η Dubinsky (2008) εστιάζει το ενδιαφέρον της σε δύο παραμέτρους που, θεωρεί, ότι μπορούν να οδηγήσουν κάποιον να ενθυλακώσει μια άπειρη διαδικασία σε ένα αντικείμενο και μέσω αυτής της ενθυλάκωσης να καταστήσει το άπειρο γνωσιακά επιτεύξιμο (ενεργεία άπειρο): στο να καταφέρει να δει την μία από τις δύο διαδικασίες ως

ολοκληρωμένη ολότητα και να καταφέρει να δει την άλλη διαδικασία ως συντονισμένη με αυτή που έχει μια τελική κατάσταση στο άπειρο.

Αν δεχθούμε την υπόθεση αυτή, τότε η διαδικασία που κάνει το βιβλίο δεν φαίνεται να βοηθά τους μαθητές να ενθυλακώσουν την έννοια του $2^{\sqrt{2}}$:

Το βιβλίο προτείνει στο μαθητή να δει την όλη διαδικασία σαν μια αντιστοίχιση ανάμεσα στους όρους δύο ακολουθιών. Αυτό το επιβεβαιώνει με δύο τρόπους. Πρώτα οπτικά παρουσιάζοντας την παρακάτω εικόνα:

1, 1,4 1,41, 1,414, 1,1412, ……. (1)

3^{1}, $3^{1,4}$, $3^{1,41,}$ $3^{1,414}$, $3^{1,1412}$ …… (2)

αλλά και ρητώς μιλώντας για την «αντίστοιχη ακολουθία δυνάμεων»

Επιπλέων όπως είπαμε και πριν, δεν αναφέρεται καθόλου στο τι σχέση έχει η ακολουθία (1) με το $\sqrt{2}$. Αντίθετα αναφέρει ότι «όσο το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, τότε οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν έναν ορισμό, που λέγεται οριακή τιμή ή όριο της ακολουθίας αυτής». Δηλαδή φαίνεται ότι και οι δύο ακολουθίες δεν έχουν μια «τελική κατάσταση». Για την δύναμη $2^{\sqrt{2}}$, λέει ότι «είναι λογικό να την ορίσουμε ως το όριο της ακολουθίας (2)). Η προσωπική μου άποψη είναι ότι δεν φαίνεται και τόσο «λογικό». Αλλά και στα πλαίσια της Dubinsky (2008) δεν φαίνεται ότι μέσα από μια τέτοια διαδικασία μπορεί ο μαθητής να ενθυλακώσει την διαδικασία σε ένα αντικείμενο και στην περίπτωση μας να δει τον $2^{\sqrt{2}}$ σαν ένα αριθμό. Δεν πληρείται καμία από τις δύο προϋποθέσεις που φαίνεται να είναι απαραίτητες: ούτε η μία διαδικασία έχει μία εμφανή «τελική κατάσταση», ούτε και υπάρχει συντονισμός ανάμεσα στις δύο άπειρες διαδικασίες. Για το τελευταίο, θα απαιτείτο η αντιστοιχία να μπορεί να ειδωθεί σαν ολότητα. Αν μείνουμε στην αντιστοιχία έτσι όπως την περιγράφει το βιβλίο**,** τότε, ιδιαίτερα μετά από ορισμένα πρώτα βήματα, δεν εστιάζουμε στην σύνδεση των δύο παράλληλων διαδικασιών αλλά μόνο στα εξαγόμενα (στις δυνάμεις του 3). Έτσι όμως η ακολουθία των δυνάμεων δεν «καταλήγει» ποτέ, συνεχίζεται επ΄ άπειρον, εφόσον οι εκθέτες δεν εξαντλούνται.

<u>Στην περίπτωση της διδασκαλίας μου</u> :

- Η πορεία της διδασκαλίας όπου εξετάζονται τα πρώτα, πεπερασμένου πλήθους, βήματα *θα μπορούσε* να βοηθήσει τους μαθητές να *εσωτερικοποιήσουν* τις δράσεις (χωρισμός σε 2, 10, 100 κομματάκια) σε μια διαδικασία που συνεχίζεται για άπειρα

βήματα και στην οποία ο ρόλος της συνάρτησης παραμένει να είναι ο *συντονισμός* των δύο ανεξάρτητων διαδικασιών (όπως είχα δείξει στην ανάλυση της προηγούμενης φάσης της διδασκαλίας) και, υποθέτω, και στις διαδικασίες που προκύπτουν από τα εγκιβωτισμένα διαστήματα. Μια ένδειξη ότι κάποιοι μαθητές έχουν εσωτερικοποιήσει τις δράσεις σε μια διαδικασία είναι ο παρακάτω διάλογος που έγινε λίγο πριν αρχίσουμε την διαδικασία που συζητάμε : Κ «Είναι $2^{\sqrt{2}}$ = $2^{1,41421356....}$ Αν ο εκθέτης ήταν ρητός θα μπορούσα να τον βρω στον χωρισμό που έκανα πριν σε 10, 100, 1000,…… κομματάκια. Κάπου θα τον συναντούσα. Αλλά αυτός…, δεν ξέρω τα δεκαδικά του ψηφία. Είναι άπειρα και μη επαναλαμβανόμενα. Άρα σε αυτή την διαδικασία του χωρίσματος – να μικρύνω δηλαδή τα διαστήματα ώστε να γεμίσω τα κενά – δεν θα εμφανιστεί το $\sqrt{2}$, γιατί δεν είναι ρητός». Μ: «Πάλι όμως μπορώ να το βρω (εννοεί το $2^{\sqrt{2}}$) έστω στο περίπου». Αυτό σημαίνει ότι αυτός ο μαθητής έχει δει ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχίζεται στο άπειρο.

Οι μαθητές *θα μπορούσαν* να δουν την διαδικασία που σχετίζεται με το $\sqrt{2}$ ως μία διαδικασία που θα ολοκληρωθεί. Αυτό θα μπορούσαν να το αντιληφθούν γιατί έχει τονιστεί στην διδασκαλία ότι «μπορούμε να βάλουμε πάνω στην ευθεία τον $\sqrt{2}$, (καθηγητής)» ότι «ξέρουμε το $\sqrt{2}$ είναι το 2 εις την 0,5(μαθητής, που παραπέμπει σε όσα έχουν ειπωθεί προηγουμένως στη διδασκαλία)».

Ο συντονισμός της διαδικασίας που σχετίζεται με το $\sqrt{2}$, και που οι μαθητές μπορούν να δουν όπως είπαμε ως ολοκληρωμένη, με την διαδικασία που σχετίζεται με το $2^{\sqrt{2}}$ *θα μπορούσε* να τους διευκολύνει να συλλάβουν και την τελευταία ως μια ολοκληρωμένη ολότητα, δηλαδή να ενθυλακώσουν την διαδικασία σε ένα (μαθηματικό) αντικείμενο, τον αριθμό $2^{\sqrt{2}}$.

Βλέπουμε ότι, όπως και στην περίπτωση της ενθυλάκωσης της δύναμης με ρητό εκθέτη, σημαντικό ρόλο μπορεί να παίξει η θεώρηση της συνάρτησης ως «συντονιστής» ανάμεσα σε δύο ανεξάρτητες διαδικασίες, και όχι σαν ένας «κανόνας» αντιστοίχησης ανάμεσα στις τιμές δύο συνόλων.

<u>Κριτική</u>

- Θεώρησα ως δεδομένο ότι οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι «με αυτούς τους χωρισμούς παίρνουμε στην ουσία ρητούς αριθμούς» πράγμα που δεν είναι καθόλου προφανές για αυτούς (αφού προϋποθέτει να κατανοούν την έννοια της

ασυμμετρίας αλλά και της ευθείας των πραγματικών αριθμών) , όπως είδαμε και στο 3^{ο} Κεφάλαιο (π.χ Fischbein, 1991). Γενικότερα θα έπρεπε να δείξω περισσότερη προσοχή στο τι σημαίνει «ο άρρητος $\sqrt{2}$» παρά να θεωρήσω ότι είναι κάτι για το οποίο έχουν είδη μια βαθιά κατανόηση. Θα δούμε και στην ανάλυση του ερωτηματολογίου, στο επόμενο κεφάλαιο, ότι αυτή η υπόθεση δεν ισχύει.

3η Φάση: Από το όριο στην συνέχεια

- <u>Ο πραγματικός αριθμός σαν ένα όριο</u>

Στην φάση αυτή ο καθηγητής ερμηνεύει το «φτάνει σε έναν αριθμό» με την μαθηματική έννοια του ορίου: Καθηγητής : «Φτάνει σε έναν αριθμό. Με ποια έννοια, αφού είναι άπειρη διαδικασία**,** δεν φτάνει ποτέ πουθενά. Με ποια έννοια φτάνει σε έναν αριθμό τότε. Υπάρχει κάποιος αριθμός, άρρητος, δεν τον ξέρουμε αυτός ποιος είναι, αλλά με αυτήν την διαδικασία *μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο κοντά θέλουμε*, με οποιαδήποτε δεκαδική προσέγγιση θέλουμε….. Τι σημαίνει αυτό; Έναν αριθμό που μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με όσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε, τον θεωρούμε γνωστό. Και δεν σας είναι ξένο αυτό. Το ρίζα2 τι είναι; Ένας άρρητος…. Δεν τον ξέρουμε ακριβώς αλλά μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με οσαδήποτε δεκαδικά ψηφία θέλουμε. Με την ίδια έννοια, και αυτόν τον αριθμό ($2^{\sqrt{2}}$) τον ξέρουμε, **υπάρχει**.

- <u>Πως τελικά καλύπτονται τα κενά</u>;

Ο καθηγητής δίνει την παρακάτω εξήγηση: «Άρα μπορώ να βάλω το ρίζα2 πάνω στο πινακάκι και τον $2^{\sqrt{2}}$ από κάτω…. Αν δεχτώ δηλαδή [σχεδιάζει ένα σύστημα αξόνων] ότι το χ που παίρνει τιμές πάνω στον χ΄χ μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές ,χωρίς να αφήνει κανένα κενό ,αυτό το δέχομαι αξιωματικά. Ότι αν πάρω όλους τους πραγματικούς στον χ΄χ, τότε δεν μένει κανένα κενό. Τότε, αν πάρω λοιπόν όλα τα χ πάνω στον χ΄χ, έχει νόημα και το $2^{χ}$, είπαμε $2^{\sqrt{2}}$ έχει νόημα, υπάρχει αυτό το πράγμα και ομοίως τα άλλα, τότε θα μείνει κανένα κενό; [Σχεδιάζει στον πίνακα την γραφική παράσταση της ψ = $2^{χ}$] Θα μείνει κανένα κενό; Όχι….. Το καταλάβατε παιδιά, ότι πράγματι, θεωρητικά, υπάρχει τρόπος, να καλύψω όλα τα κενά και να πάρω μία συνεχόμενη γραμμή, η οποία είναι και η γραφική παράσταση της συνάρτηση της συνάρτησης ψ = $α^{χ}$;»

Οι μαθητές δεν φάνηκε να πείθονται και ιδιαίτερα ένας μαθητής (ο Γιάννης1) που είχε εκφράσει τις αντιρρήσεις σε όλη την διάρκεια της διδασκαλίας. Με αυτό το θέμα θα ασχοληθούμε στο 7ο Κεφάλαιο.

Ανάλυση της 3ης Φάσης

- Πως ο καθηγητής «κάλυψε τα κενά»;

Ο καθηγητής πρώτα «εξασφάλισε» ότι η συνάρτηση f(x) = 2^x ορίζεται στο $\sqrt{2}$, δηλαδή ότι «υπάρχει» ο αριθμός $2^{\sqrt{2}}$ και στη συνέχεια «έδειξε» (μέσα από τις διαδοχικές προσεγγίσεις) ότι το όριο $\lim_{\chi\to\sqrt{2}} f(x)$ είναι ο αριθμός $2^{\sqrt{2}}$ γιατί, αν χρησιμοποιήσουμε την μη τυπική γλώσσα του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου (σελ. 160), «οι τιμές f(x) βρίσκονται οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο $2^{\sqrt{2}}$, για όλα τα χ ≠ $\sqrt{2}$, που βρίσκονται «αρκούντως κοντά» στο $\sqrt{2}$». Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο, η συνάρτησης είναι συνεχής στο $\sqrt{2}$, και αφού αυτό ισχύει για όλες τις τιμές του χ, θα είναι συνεχής συνάρτηση, άρα και η γραφική της παράσταση θα είναι μια «συνεχόμενη γραμμή», δηλαδή μια γραμμή χωρίς «κενά». Βέβαια, δεν είχα στο μυαλό μου την μαθηματική θεώρηση της συνέχειας, μέσω του ορίου, δεν είχα φυσικά την απαίτηση να αναγνωρίσουν την μαθηματική έννοια της συνέχειας, έτσι όπως δίνεται από τον τυπικό ορισμό. Στην πραγματικότητα σκεφτόμουν με έναν τρόπο πολύ «φυσικό» για μένα και ανέμενα έτσι να σκεφτούν και οι μαθητές. Το κλειδί για να το κατανοήσουμε αυτό, όπως θα δούμε, είναι να ερμηνεύσουμε την λέξη «κενό» και μάλιστα πως το αντιλαμβάνεται ο καθηγητής και πως οι μαθητές. Αυτό θα μας εξηγήσει και το γιατί οι μαθητές «δεν κάλυψαν τελικά τα κενά». Όμως για να το ερμηνεύσουμε αυτό θα χρειαστεί να μιλήσουμε με την γλώσσα ενός τελείως διαφορετικού θεωρητικού πλαισίου, αυτό των ενσωματωμένων Μαθηματικών των Lakoff και Nunez, πράγμα που θα κάνουμε στο Κεφάλαιο 7.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Η πειραματική διδασκαλία που παρουσίασα στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε σε δύο τμήματα της Β΄ Λυκείου (50 μαθητές συνολικά – πειραματική ομάδα) και μερικές ημέρες μετά την διδασκαλία μοίρασα στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο (δες ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5). Για να το συμπληρώσουν είχαν στην διάθεσή τους περίπου μισή ώρα. Το ίδιο ερωτηματολόγιο το μοίρασα και σε δύο άλλα τμήματα της Β΄ Λυκείου του ίδιου σχολείου στα οποία δίδασκαν το μάθημα της άλγεβρας δύο άλλοι μαθηματικοί του σχολείου. Οι μαθητές αυτών των δύο τμημάτων (40 μαθητές συνολικά – ομάδα ελέγχου) είχαν επίσης διδαχθεί την εκθετική και την λογαριθμική συνάρτηση αλλά με τον τρόπο που περιγράφει το σχολικό βιβλίο.

Το Λύκειο στο οποίο αναφέρομαι βρίσκεται σε ένα προάστιο της Αθήνας. Το μέσο κοινωνικό –οικονομικό επίπεδο των κατοίκων αυτού του προαστίου θεωρείται μέσο.

Το ερωτηματολόγιο αυτό το κατασκεύασα επιλέγοντας ερωτήσεις (με πολύ μικρές αλλαγές σε ορισμένες) από έρευνες της διδακτικής των Μαθηματικών πάνω στην κατανόηση του συνόλου των ρητών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών από μαθητές ίδιας περίπου ηλικίας (στις περισσότερες περιπτώσεις) με τους μαθητές της παρούσας εργασίας.

Ο λόγος που κατασκεύασα το ερωτηματολόγιο αυτό ήταν για να διαπιστώσω αν η διδασκαλία μου είχε κάποια επίδραση στην κατανόηση των μαθητών για τις δυνάμεις, την πυκνότητα και γενικά στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Τα συμπεράσματα που θα παρουσιάσω παρακάτω προκύπτουν από την σύγκριση των δύο ομάδων (πειραματική και ελέγχου) καθώς και από τα ευρήματα των ερευνών από όπου πήρα τις ερωτήσεις. Η πλήρης παρουσίαση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου βρίσκεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6. Εδώ θα παρουσιάσω και θα σχολιάσω συνοπτικά τα πιο ενδιαφέροντα ευρήματα.

Ερώτηση 1: Δυνάμεις με εκθέτη ρητό.

Σύγκρινε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών χρησιμοποιώντας ένα από

τα σύμβολα $<$ *,* $=$*, ή* $>$

α) 5^{6} *....*5^{7} *β)* $0,5^{6}$ *....*$0,5^{7}$ *γ)* $5^{0,6}$*....*$5^{0,7}$ *δ)* $0,5^{0,6}$*....*$0,5^{0,7}$ *ε)* $5^{0,7}$ *...* $6^{0,7}$ *ζ)* $0,5^{0,7}$ *....* $0,6^{0,7}$

Την ερώτηση αυτή την πήρα (με μικρές μετατροπές στα νούμερα και προσθέτοντας τις ερωτήσεις γ) και δ)) από ένα μεγαλύτερο ερωτηματολόγιο που παρουσιάζεται στο άρθρο των Pitta-Pantazi, D. - Christou, C. - Zachariades, T. (2007), στο οποίο αναφερθήκαμε και στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας, που είχε σκοπό να περιγράψει και να αναλύσει τα επίπεδα κατανόησης των δυνάμεων από τους μαθητές Λυκείου. Οι ερευνητές στο άρθρο αυτό μέσα από την κατάλληλη στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο αλλά και μέσα από ημι – δομημένες συνεντεύξεις, κατέταξαν τους μαθητές σε τρείς κατηγορίες:

Ομάδα 1: Χαμηλές επιδόσεις. Προ εννοιολογικό (*pre – conceptual*) επίπεδο κατανόησης. Αρχέτυπο (prototype) του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού για φυσικούς εκθέτες. Η ύψωση σε εκθέτη ως μια δράση. Μόνο διαδικαστική κατανόηση.

Ομάδα 2: Μέτριες επιδόσεις. Εννοιολογικό (*conceptual)* επίπεδο κατανόησης. Επέκταση των αρχετυπικών μορφών και για αρνητικούς ακέραιους εκθέτες. Εσωτερίκευση της δράσης σε διαδικασία.

Ομάδα 3: Υψηλές επιδόσεις. Αναδομημένο (*restructured*) επίπεδο κατανόησης. Αναδιοργάνωση της γνώσης. Αναγνώριση των δυνάμεων ως μαθηματικά αντικείμενα.

Από τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου που έδωσα στους μαθητές (δες ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6) για την ερώτηση 1 μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

- ***Στην ερώτηση 1)α)*** και στις τρείς περιπτώσεις τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι πολύ υψηλά. Αυτό δείχνει την (διαδικαστική) κατανόηση του αρχετύπου του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού από τους μαθητές. Ο πιθανότερος τρόπος που σκέφτηκαν: «Ίδια βάση, μεγαλύτερος εκθέτης, άρα μεγαλύτερη και η δύναμη».

- ***Στην ερώτηση 1)β)***, το μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων παρουσιάζεται στην ομάδα ελέγχου(65%) και το μικρότερο στην ομάδα του άρθρου (42%) ενώ η πειραματική ομάδα βρίσκεται ανάμεσα (56%). Βέβαια όλα αυτά τα ποσοστά είναι σημαντικά μικρότερα από τα αντίστοιχα της πρώτης ερώτησης. Αυτό (Pitta-Pantazi, D. - Christou, C. - Zachariades, T. ,2007) οφείλεται στο γεγονός ότι η τυφλή εφαρμογή των αρχετυπικών παραδειγμάτων μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνείες τους μαθητές όταν αυτοί δεν έχουν μια ουσιαστική κατανόηση (στην συγκεκριμένη περίπτωση) των κλασματικών αριθμών. Βέβαια η παρερμηνεία εδώ είναι ότι «ο πολλαπλασιασμός κάνει κάτι μεγαλύτερο» (Fischbein, 1993).

- ***Στην ερώτηση 1)γ)*** ($5^{0,6}$ … $5^{0,7}$) έχουμε την μεγαλύτερη και πιο αξιοσημείωτη διαφορά (για τα υποερωτήματα της ερώτησης 1) στις σωστές απαντήσεις ανάμεσα στην ομάδα ελέγχου και την πειραματική ομάδα (18% διαφορά υπέρ της πειραματικής ομάδας). Η διαφορά αυτή μας επιτρέπει ίσως να εικάσουμε ότι έχει επιδράσει θετικά η διδασκαλία, αφού αυτή ακριβώς η περίπτωση ήταν που εξετάστηκε σε αυτήν: στην διδασκαλία είχαμε ερμηνεύσει με τους μαθητές την περίπτωση του $2^{0,5}$ («το μισό του 2 πολλαπλασιαστικά» ή «ο αριθμός που αν τον πολλαπλασιάσω δύο φορές με τον εαυτό του μου κάνει 2»), το $2^{0,1}$ («χωρίζω πολλαπλασιαστικά το 2 σε δέκα ίσα κομματάκια και παίρνω το 1 από αυτά» ή «ο αριθμός που αν τον πολλαπλασιάσω 10 φορές με τον εαυτό του μου κάνει 2») και ομοίως το $2^{1,4}$. Άρα ένας μαθητής θα μπορούσε, για παράδειγμα, να σκεφτεί (σύμφωνα με την διδασκαλία) ότι «οι 0,6 παράγοντες του 5 είναι μικρότερο από τους 0,7 παράγοντες του 5», ή «χωρίζουμε, πολλαπλασιαστικά, το 5 σε 10 ίσα κομματάκια και την μία φορά παίρνουμε 6 τέτοια κομματάκια ενώ την άλλη 7, δηλαδή περισσότερα».
  Βέβαια δεν μπορώ να ισχυριστώ με βεβαιότητα ότι κάποιοι μαθητές σκέφτηκαν με αυτό τον τρόπο, αλλά θεωρώ πιθανό ότι η διαισθητική τους κατανόηση για τέτοιου είδους παραστάσεις, ενισχύθηκε μέσα από την διδασκαλία.
  Η παραπάνω εικασία επιβεβαιώνεται και από την διαφορά (10%) στην επίδοση της πειραματικής ομάδας στην ερώτηση **1)ε)**: «οι 0,7 παράγοντες ίσοι με 5 είναι μικρότερος αριθμός από τους 0,7 παράγοντες ίσους με 6».

- ***Στην ερώτηση 1)δ)*** **(**$0,5^{0,6}$….$0,5^{0,7}$) η διαφορά υπέρ της πειραματικής ομάδα μειώνεται στο 5%. Εδώ φανερώνεται μια αβλεψία της διδασκαλίας για αυτού του είδους των περιπτώσεων. Η ίδια λογική της προηγούμενης ερώτησης (η λογική που τονίστηκε στην διδασκαλία) εδώ θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στην σκέψη: «χωρίζω το 0,5 σε 10 ίσα κομματάκια και την μια φορά παίρνω 6 από αυτά ενώ την άλλη φορά παίρνω 7» μπορεί να οδηγήσει, με μια βιαστική θεώρηση, σε λανθασμένη απάντηση! Θα έπρεπε στην διδασκαλία να έχουμε εξετάσει και περιπτώσεις σαν αυτή τις ερώτησης 1)δ) ώστε να αποτρέψουμε πιθανές παρανοήσεις. Θα μπορούσε να είχε αντιμετωπιστεί κάπως έτσι: «Τι σημαίνει χωρίζω πολλαπλασιαστικά το 0,5 σε 10 ίσα κομματάκια: βρίσκω έναν αριθμό που αν πολλαπλασιαστεί 10 φορές με τον εαυτό του δίνει το 0,5, άρα όσα πιο πολλά τέτοια κομματάκια πάρω τόσο πιο μικρός θα είναι ο αριθμός» ή με την λογική: «οι 0,6 παράγοντες ίσοι με 0,5 είναι αριθμός μεγαλύτερος από τους 0,7 παράγοντες ίσους με το 0,5 γιατί όταν πολλαπλασιάζεται συνεχώς ένας αριθμός μικρότερος του 1 παίρνεις όλο και μικρότερα νούμερα.»

Ερωτήσεις 2 και 3: Ικανότητα διάκρισης των ρητών από τους άρρητους αριθμούς

2) *Θεωρείστε τον ακόλουθο αριθμό 012122122212… (υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ψηφίων όπου ο αριθμός των 2 μεταξύ των 1 αυξάνεται κατά ένα). Είναι αυτός ένας ρητός ή άρρητος αριθμός; Πώς το ξέρετε;*

3) *Θεωρείστε το 53/83. Καλέστε αυτόν τον αριθμό Μ. Στην εκτέλεση αυτής της διαίρεσης, η οθόνη του υπολογιστή δείχνει το 0.63855421687. Είναι ο Μ ένας ρητός ή άρρητος αριθμός; Εξηγήστε*

Οι ερωτήσεις 2 και 3 έχουν παρθεί από το άρθρο των Zazkis - Sirotic, (2004). Στο άρθρο αυτό εξετάζεται πως οι αναπαραστάσεις επηρεάζουν τις αποφάσεις για την αρρητότητα. Στην ερώτηση 3 δόθηκε μια κλασματική αναπαράσταση (53/83) που οι δύο ερευνήτριες ονομάζουν «διαφανή» αναπαράσταση ενός ρητού αριθμού: ο ορισμός ενός ρητού αριθμού στηρίζεται στην ύπαρξη της αναπαράστασης α/β. Όταν ένας πραγματικός αριθμός δεν μπορεί να αναπαρασταθεί κατά αυτόν τον τρόπο, λέγεται άρρητος. Μέχρι την τυπική κατασκευή των άρρητων αριθμών, για παράδειγμα από τις τομές Dedekind, αυτό το ιδιαίτερο αναπαραστασιακό χαρακτηριστικό γνώρισμα χρησιμοποιούνταν σαν ένας λειτουργικός ορισμός του άρρητου αριθμού. Δηλαδή, άρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός που δεν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας λόγος ακεραίων. Ένας ισοδύναμος ορισμός των άρρητων αριθμών αναφέρεται στην άπειρη και μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική του αναπαράσταση. Στην ερώτηση 2 δόθηκε μια άπειρη μη επαναλαμβανόμενη δεκαδική αναπαράσταση (0,12122122212…) που είναι επίσης μια «διαφανή» αναπαράσταση ενός άρρητου αριθμού, με την έννοια ότι η αρρητότητα του αριθμού μπορεί να προκύψει από την αναπαράστασή του.

Δεν ισχύει όμως το ίδιο με την αναπαράστασή του δεκαδικού (0,63855421687…) την οποία οι δύο ερευνήτριες ονομάζουν «αδιαφανή» αναπαράσταση (δεν μπορούμε αν διακρίνουμε από αυτή την αναπαράσταση αν έχουμε επανάληψη ή όχι των δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή αν ο αριθμός είναι ρητός ή άρρητος)

Οι ερωτήσεις, στην παραπάνω έρευνα, δόθηκαν σε ένα δείγμα 46 μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών οι οποίοι καλούνταν να απαντήσουν αλλά και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Από την επεξεργασία των ερωτηματολογίων τους προέκυψε ότι τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων *με* σωστή αιτιολόγηση ήταν αρκετά χαμηλότερα από αυτά που παρουσιάζονται στο Παράρτημα 6 (όπου έχω παραλείψει την διάκριση της σωστής ή μη αιτιολόγησης για να συγκριθεί με το ερωτηματολόγιο που έδωσα στους μαθητές στο οποίο αρκετοί μαθητές δεν αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους και τελικά δεν προχώρησα σε μια τέτοια κατηγοριοποίηση.)

Τα αποτελέσματα της έρευνας των δύο ερευνητριών, είναι ότι για μια σημαντική μειονότητα των μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών:

- οι ορισμοί των άρρητων, όπως και των ρητών, αριθμών δεν ήταν στο «ενεργό» ρεπερτόριο της γνώσης τους
- υπήρχε μια τάση να βασίζονται στο κομπιουτεράκι και εξέφρασαν την προτίμηση τους στην δεκαδική αναπαράσταση παρά στην κλασματική αναπαράσταση
- υπήρχε μια σύγχυση ανάμεσα στην αρρητότητα και την άπειρη δεκαδική αναπαράσταση, ανεξάρτητα από την δομή αυτής της αναπαράστασης
- η ιδέα του «επαναλαμβανόμενου μοτίβου (pattern)» στην δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών πολλές φορές γενικευόταν ώστε τελικά να συμπεριλαμβάνει οποιοδήποτε μοτίβο (pattern).

Όλες οι παραπάνω διαπιστώσεις ισχύουν και μάλιστα σε σημαντικά μεγαλύτερο βαθμό, και για τους μαθητές του δικού μου ερωτηματολογίου:

Η πρώτη παρατήρηση επιβεβαιώνεται από το μεγάλο ποσοστό μαθητών που δεν απάντησαν (ιδιαίτερα στην ερώτηση 3), από τα χαμηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων αλλά και από αυτά που έγραψαν οι μαθητές στο ερωτηματολόγιο (όσοι αιτιολόγησαν την απάντησή τους), π.χ.: «είναι άρρητος γιατί έχει άπειρα ψηφία (για την ερώτηση 3)», «άρρητος γιατί μετά από κάποια στιγμή επαναλαμβάνεται (για την ερώτηση 3)», «είναι άρρητος γιατί διαιρείται μόνο με τον εαυτό του (για την ερώτηση 3)», «απάντησα στην τύχη», «είναι άρρητος γιατί η διαίρεση δεν είναι τέλεια (για την ερώτηση 3)» κ.λ.π

Για την δεύτερη παρατήρηση θα μπορούσα να αναφέρω απαντήσεις της ερώτησης 3) όπως: «είναι ρητός επειδή έχει συγκεκριμένο (ή πεπερασμένο) αριθμό ψηφίων» ή «ο αριθμός Μ είναι άρρητος γιατί ο υπολογιστής προσεγγίζει τον αριθμό» ή «είναι ρητός γιατί βρίσκει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα» ή «είναι ρητός γιατί κάποια στιγμή τα ψηφία του σταματούν» ή «είναι άρρητος καθώς δεν είναι κλάσμα» κ.λ.π .

Για την τρίτη παρατήρηση: «Δεν έχει καμία περιοδικότητα, είναι άρρητος. Μπορεί να έχει και άλλα ψηφία (ερώτηση 3)», «Ο Μ που έχει οριστεί ως κλάσμα είναι ρητός αριθμός, παρόλο που με την διαίρεση του κλάσματος το αποτέλεσμα είναι ένας άρρητος δεκαδικός με κάμποσα ψηφία» , «(ερώτηση 3) είναι άρρητος γιατί έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία» κ.λ.π

Για τη τέταρτη παρατήρηση: (για την ερώτηση2) «Είναι ρητός διότι παρουσιάζει μια περιοδικότητα και οι περιοδικοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν σε κλάσμα» , «είναι ρητός επειδή είναι περιοδικός» κ.λ.π

Θα προσπαθήσω παρακάτω να δώσω μια ερμηνεία για την μεγάλη απόκλιση που παρουσιάζεται στα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στην τρίτη ερώτηση (60% στην πειραματική ομάδα έναντι μόλις 28% στην ομάδα ελέγχου) όταν μάλιστα στην δεύτερη ερώτηση τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι περίπου ίδια:

Ας δούμε πρώτα την αιτιολόγηση των μαθητών που απάντησαν, σωστά, ότι ο αριθμός είναι ρητός στις δύο ομάδες (τα νούμερα παριστάνουν αριθμό μαθητών):

Αιτιολόγηση	Ομάδα ελέγχου	Πειραματική ομάδα
Κλάσμα	4	14
Τέλεια διαίρεση	2	1
Συγκεκριμένος (ή πεπερασμένος) αριθμός ή σταθερός αριθμός ή δίνει συγκεκριμένο αποτέλεσμα	0	10
Χωρίς εξήγηση - Άλλο	5	5

Παρατηρούμε ότι πολλοί μαθητές της πειραματικής ομάδας αιτιολόγησαν σωστά την απάντησή τους (ως κλάσμα) και ότι πολλοί μαθητές της πειραματικής ομάδας (αλλά κανένας της ομάδας ελέγχου) χαρακτηρίζουν τον ρητό αριθμό ως αυτόν που έχει πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων ή που δίνει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα (ανεξάρτητα αν στην συγκεκριμένη περίπτωση ορισμένοι τουλάχιστον μπορεί να μην κατάλαβαν ότι η οθόνη του υπολογιστεί δεν δείχνει όλα τα ψηφία). Για να ερμηνεύσουμε αυτά τα ευρήματα, θα χρειαστεί πρώτα να δούμε και τις απαντήσεις αυτών που απάντησαν λανθασμένα και μετά να ανατρέξουμε στην διδασκαλία.

Η αιτιολόγηση των μαθητών που απάντησε λανθασμένα στην ερώτηση 3) (άρρητος):

Αιτιολόγηση	Ομάδα ελέγχου	Πειραματική ομάδα
Καμία περιοδικότητα	3	1
Άπειρα δεκαδικά ψηφία	3	1
Ο υπολογιστής προσεγγίζει τον αριθμό		4
Χωρίς εξήγηση - Άλλο	16	5

Παρατηρούμε και εδώ ότι η ποιότητα των επιχειρημάτων είναι διαφορετικά στις δύο ομάδες. Η έμφαση στην ομάδα έλεγχου δίνεται στην (δεκαδική) μορφή του αριθμού ενώ στην πειραματική ομάδα στο εάν αυτό που δείχνει ο υπολογιστή είναι προσέγγιση ή όχι του αριθμού. Επιπλέον, στην ερώτηση 2, οι μαθητές της

πειραματικής ομάδας δίνουν επίσης απαντήσεις που δεν συναντάμε στην ομάδα ελέγχου: « *Είναι άρρητος γιατί μπορεί να προσεγγιστεί με αρκετά μεγάλη ακρίβεια, αλλά ποτέ με απόλυτη ακρίβεια*» ή «*είναι άρρητος γιατί δεν μπορεί να προσδιοριστεί εντελώς*» ή «είναι άρρητος γιατί πάντα θα αυξάνεται για ένα και δεν θα φτάσει ποτέ στο ακέραιο γιατί υπάρχουν άπειρα ψηφία – αριθμοί» ή «*είναι άρρητος γιατί μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο θέλουμε αλλά ποτέ δεν θα βρούμε ποιος ακριβώς είναι*» κ.λ.π.
Οι διαφορετικές προσεγγίσεις, όπως φαίνεται καθαρά στους δύο παραπάνω πίνακες και στις απαντήσεις της ερώτησης 2, δείχνουν μια μετατόπιση των μαθητών της πειραματικής ομάδας (έστω και λανθασμένα σε ορισμένες περιπτώσεις) από την αναπαράσταση του αριθμού, σε διαφορετικά χαρακτηριστικά του αριθμού όπως το αν «είναι σταθερός» ή αν «μπορούμε να τον βρούμε μόνο προσεγγιστικά».

Νομίζω ότι αυτή η διαφοροποίηση οφείλεται στην επίδραση της διδασκαλίας, όπου χρησιμοποιήθηκε παρόμοια ορολογία. Οι μαθητές φαίνεται να συγκράτησαν ότι οι άρρητοι διακρίνονται από τους ρητούς από το ότι «στον άρρητο αριθμό δεν ξέρω όλα τα δεκαδικά του ψηφία είναι άπειρα και μη επαναλαμβανόμενα… δεν ξέρουμε ποιος είναι αλλά μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο κοντά θέλουμε» (αποσπάσματα από την διδασκαλία, λόγια του καθηγητή). Ωστόσο, φαίνεται ότι ορισμένοι μαθητές ανέπτυξαν μια «ψευτοδομική» (δανείζομαι τον όρο της Sfard,1992) αντίληψη για τους άρρητους αριθμούς. Ο άρρητος αριθμός ταυτίστηκε σε αυτούς τους μαθητές ως ένας αριθμός που «δεν μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με απόλυτη ακρίβεια», μια αντίληψη που αν δεν συνδυάζεται με μια βαθύτερη κατανόηση των εννοιών μπορεί να οδηγήσει σε απαντήσεις όπως αυτή ενός μαθητή που απάντησε στην 2^{η} ερώτηση ότι «ο αριθμός είναι άρρητος γιατί δεν μπορεί να προσεγγιστεί ακριβώς ποτέ» και στην 3^{η} ερώτηση «είναι (λανθασμένα) άρρητος γιατί ο υπολογιστής προσεγγίζει μόνο τον αριθμό». Η Sfard (1992), θεωρεί ότι ενώ οι λειτουργικές αντιλήψεις για μία έννοια μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα υγιές στάδιο ανάπτυξης, οι ψευδοδομικές είναι δυνητικά, επιζήμιες.

Όμως στην διδασκαλία έγινε, επίσης, μια προσπάθεια να πειστούν οι μαθητές ότι «η οριακή διαδικασία κάπου καταλήγει», δηλαδή δίνει (και αυτή) «ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα». Ότι και ο άρρητος είναι ένας *συγκεκριμένος* αριθμός. Αυτό δεν φαίνεται να έγινε αποδεκτό από πολλούς μαθητές, οι οποίοι συγκράτησαν μόνο το «αφού είναι μια άπειρη διαδικασία δεν φτάνει ποτέ πουθενά» που ανέφερε ο καθηγητής χωρίς, όπως φαίνεται να δώσει τις απαραίτητες εξηγήσεις.

Δηλαδή, παρά την μετατόπιση στη σκέψη για τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς, φαίνεται ότι (Zazkis, 2007) οι μαθητές (και των δύο ομάδων) δεν έχουν φτάσει στην κατανόηση ενός άρρητου αριθμού σαν ένα αντικείμενο (κατά την ορολογία των Dubinsky, Sfard), δηλαδή η έννοια του άρρητου αριθμού δεν έχει ενθυλακωθεί. Αντίθετα ένας άρρητος αριθμός αντιμετωπίζεται ως προσκολλημένος στην διαδικασία δημιουργίας του από ένα ατέλειωτο άθροισμα δεκαδικών του ψηφίων, δηλαδή σαν ένας αριθμός που κατασκευάζεται στον χρόνο και όχι σαν ένα ήδη φτιαγμένο αντικείμενο.
Ωστόσο θα πρέπει να συνεκτιμήσουμε και ένα άλλο στοιχείο που δείχνει ότι γενικότερα η διδασκαλία είχε θετική επίδραση στην ευαισθητοποίηση των μαθητών για την διάκριση

ανάμεσα στους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς: Στην πειραματική ομάδα το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά και στις δύο ερωτήσεις είναι 42% ενώ στην ομάδα ελέγχου είναι μόλις 20%!

Ερώτηση 4: Πυκνότητα των ρητών αριθμών

4) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους 0,005 και 0,006; Επέλεξε ένα από τα παρακάτω:

ι) Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός *ιι) Υπάρχουν οι αριθμοί: …*

ιιι) Υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί / κλάσματα

ιν) Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί ή περιοδικοί δεκαδικοί, κλάσματα, και άρρητοι αριθμοί. *ν) Τίποτα από τα παραπάνω. Πιστεύω ότι: …*

Την ερώτηση αυτή την πήρα από το άρθρο Vamvakoussi – Vosniadou, (2007). Με την ερώτηση αυτή οι δύο ερευνήτριες εξέτασαν 137 μαθητές της Β΄ Λυκείου από διαφορετικά σχολεία της Αθήνας. Οι δύο ερευνήτριες, στην προσπάθειά τους να εξετάσουν τα ενδιάμεσα στάδια της κατανόησης της δομής των ρητών αριθμών, διέκριναν τις παρακάτω κατηγορίες και υποκατηγορίες μαθητών:

	1η υποκατηγορία	2η υποκατηγορία
1η κατηγορία μαθητών: Πεπερασμένο πλήθος αριθμών («Finiteness»)	*Διακριτότητα (Discreteness)*: μαθητές που θεώρησαν τους δοσμένους αριθμούς 0,005 και 0,006 ως διαδοχικούς (4,2%)	*Εξευγενισμένη Διακριτότητα (Refined Discreteness):* μαθητές που δεν θεώρησαν τους δοσμένους αριθμούς διαδοχικούς αλλά θεώρησαν ότι υπάρχουν πεπερασμένοι ρητοί στο δοσμένο διάστημα (16,9%)
2η κατηγορία μαθητών: Άπειρο πλήθος αριθμών («Infinity»)	*Περιορισμένη πυκνότητα (Constrained Density):* μαθητές που απάντησαν ότι υπάρχει άπειρος αριθμός αλλά της ίδιας συμβολικής αναπαράστασης. Οι μαθητές σε αυτήν την κατηγορία ήταν απρόθυμοι να δεχτούν, παραδείγματος χάριν, ότι μπορούν να υπάρξουν δεκαδικοί μεταξύ δύο κλασμάτων ή αντίστροφα (15,5%)	*Πυκνότητα (Density):* μαθητές που απάντησαν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί στο διάστημα, ανεξάρτητα από την συμβολική τους αναπαράσταση (21,1%)

Οι υπόλοιποι μαθητές (42,3%) έχουν χαρακτηριστεί ως «Μεικτή κατηγορία» με βάση και τις υπόλοιπες απαντήσεις τους στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου του άρθρου αυτού.

Στα συμπεράσματά τους, οι δύο ερευνήτριες, περιλαμβάνουν και τα παρακάτω:

- Η πεποίθηση της διακριτότητας ήταν ισχυρή
- Αρκετοί μαθητές είχαν την πεποίθηση ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις αναπαριστάνουν αναγκαστικά και διαφορετικούς αριθμούς.

Στο ερωτηματολόγιο της παρούσας εργασίας, παρατηρούνται σημαντικά υψηλότερα ποσοστά, σε σχέση με τα ποσοστά του άρθρου των Vamvakoussi, X. - Vosniadou, S., (2007), στην κατηγορία «Infinity» και ιδιαίτερα στην υποκατηγορία *Density* (57% και 60% για την ομάδα ελέγχου και την πειραματική ομάδα αντίστοιχα, έναντι 21,1% που αναφέρεται στο άρθρο (αν και λόγο της διαφορετικής κατηγοριοποίησης που γίνεται στο άρθρο δεν μπορεί να γίνει ακριβής σύγκριση).

Στην κατηγορία αυτή δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στην ομάδα ελέγχου και την πειραματική ομάδα. Ωστόσο, στην προτεινόμενη απάντηση «Υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί/κλάσματα» υπάρχει μια αξιοσημείωτη διαφορά: 43% στην ομάδα ελέγχου έναντι 22% της πειραματικής ομάδας. Θα μπορούσε αυτό να οφείλεται στην επίδραση της διδασκαλίας, όπου οι άρρητοι «καλύπτουν τα κενά» ανάμεσα στους ρητούς, αλλά δεν φαίνεται να είναι αρκετά ισχυρά τα δεδομένα ώστε να μπορέσω να ισχυριστώ κάτι τέτοιο μόνο με τις απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα.

Ερώτηση 5: **Πυκνότητα των αριθμών**

5) α) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο άρρητους. Σωστό ή λάθος;

β) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο άρρητους. Σωστό ή λάθος;

γ) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο ρητούς. Σωστό ή λάθος;

δ) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν ρητό ανάμεσα σε δύο ρητούς. Σωστό ή λάθος;

Η ερώτηση αυτή την πήρα από το άρθρο Zazkis, R., Sirotic, N. (2007). Εξετάστηκαν 46 μελλοντικοί καθηγητές Μαθηματικών, ως προς την κατανόησή τους για την έννοια της αρρητότητας.

Όλες οι παραπάνω προτάσεις είναι σωστές και μπορεί κανείς να το δείξει, τυπικά, κατασκευάζοντας τους αριθμούς στα ερωτήματα:

- Στην 5)α) ο επιθυμητός ρητός μπορεί να κατασκευαστεί με την «περικοπή» της δεκαδικής έκφρασης του μεγαλύτερου άρρητου σε κάποιο σημείο

- Στην 5)β) παίρνεις τον μέσο όρο των δύο άρρητων αλλά αν αυτός είναι ρητός παίρνεις τον μέσο όρο ενός από τους άρρητους και του ρητού μέσου όρου των δύο άρρητων.
- Στην 5)γ) για παράδειγμα, μπορείς να προσθέσεις έναν αρκετά μικρό άρρητο στον μικρότερο ρητό
- Στην 5)δ) παίρνεις τον μέσο όρο των δύο ρητών

Σχετικά με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι δύο ερευνήτριες διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού γενικά και ειδικότερα στην κατανόηση της έννοιας του άρρητου αριθμού καθώς και ότι οι σχετικές διαισθήσεις τους δεν είναι επαρκώς ανεπτυγμένες.
Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται, σύμφωνα με τις δύο ερευνήτριες, στον μη – διαισθητικό χαρακτήρα του απείρου και δεν μπορούν εύκολα να ξεπεραστούν ακόμα και αν ερμηνευτούν με την τυπική διδασκαλία. Αντίθετα, η επιφανειακή τυπική γνώση μπορεί να λειτουργήσει ως ένα εμπόδιο στην διαισθητική κατανόηση. Για παράδειγμα, οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις των φοιτητών στις ερωτήσεις 5)β) και 5)δ) οφείλεται στην τυπική γνώση ότι «υπάρχουν πιο πολλοί άρρητοι από ρητούς», γνώση η οποία ενθαρρύνει την σκέψη ότι θα πρέπει να υπάρχουν κάποιοι «γειτονικοί» άρρητοι ανάμεσα στους οποίους κανένας ρητός δεν μπορεί να βρεθεί.

Μια άλλη διάσταση που αναδεικνύουν οι δύο ερευνήτριες, εκτός από την τυπική και την διαισθητική είναι και η αλγοριθμική γνώση. Οι φοιτητές που απάντησαν σωστά στα ερωτήματα, πρότειναν και μια διαδικασία για την κατασκευή του κατάλληλου ρητού ή άρρητου αριθμού. Ωστόσο, σε μερικές περιπτώσεις, οι φοιτητές βάσιζαν τις απαντήσεις τους μόνο σε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα, χωρίς να εξασφαλίζουν την γενικότητα.

Σε σχέση με το δικό μου ερωτηματολόγιο, οι ποσοστιαίες διαφορές στις σωστές απαντήσεις ανάμεσα στις δύο ομάδες και στους φοιτητές δεν είναι σημαντικές, αντίθετα από τις διαφορές στις λανθασμένες απαντήσεις: οι φοιτητές γενικά προτιμούσαν να μην δώσουν καμία απάντηση σε σημαντικό μεγαλύτερο ποσοστό από τους μαθητές, παρά να απαντήσουν λανθασμένα. Το γεγονός αυτό προξενεί εντύπωση γιατί για τους μαθητές, που αντικειμενικά δεν είναι εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους ερωτήματα, λογικά θα έπρεπε να προτιμήσουν να μην απαντήσουν σε μεγαλύτερο ποσοστό. Πιθανόν να εξέταζαν κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα για να μπορέσουν να απαντήσουν, και μετά, αυθαίρετα, να γενίκευαν.

Συγκρίνοντας τις απαντήσεις των μαθητών της πειραματικής ομάδας με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου παρατηρούμε αξιοσημείωτες διαφορές μόνο στα ερωτήματα 5)β) και 5)δ). Για την ερώτηση 5)δ) οι σωστές απαντήσεις στην πειραματική ομάδα ξεπερνούν το αντίστοιχο ποσοστό της ομάδας ελέγχου κατά 12% αλλά και την ομάδα των φοιτητών κατά 10%. Μάλιστα στις λανθασμένες απαντήσεις η διαφορά υπέρ της πειραματικής ομάδας φτάνει στο 16% σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Η ευνοϊκή αυτή συμπεριφορά θα μπορούσε, νομίζω, να αποδοθεί στην επίδραση της διδασκαλίας, όπου με τους συνεχείς χωρισμούς,

διαπιστώθηκε, σε ένα πρώτο στάδιο πριν την εισαγωγή των αρρήτων, ότι τα «κενά δεν καλύπτονται» που σημαίνει, ότι ανάμεσα υπάρχουν και άλλοι ρητοί αριθμοί, αφού μπορούμε να συνεχίσουμε τον χωρισμό σε περισσότερα «κομμάτια». Βέβαια θα περίμενε κανείς μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε αυτήν την ερώτηση από την πειραματική ομάδα. Η μόνη υπόθεση που θα μπορούσα να κάνω, συνδυάζοντας και την μη αναμενόμενη διαφορά στις σωστές απαντήσεις στην ερώτηση 5)β) (52% έναντι 68% της ομάδας ελέγχου) αλλά και τα ευρήματα του προαναφερόμενου άρθρου, είναι ότι οι μαθητές είχαν συγκρατήσει από παλιότερες συζητήσεις που είχα κάνει μαζί τους μέσα στην τάξη, ότι «οι άρρητοι είναι περισσότεροι από τους ρητούς» και αυτό επηρέασε τις απαντήσεις τους. Ωστόσο και αυτή η υπόθεση είναι αμφιβόλου εγκυρότητας καθώς δεν υποστηρίζεται από τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 7)β), που θα εξετάσουμε παρακάτω, για το εάν «το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των πραγματικών αριθμών», στην οποία τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών των δύο ομάδων είναι ίδια μεταξύ τους.

Ερώτηση 6: Πράξεις με άρρητους αριθμούς

6) Πόσοι <u>ακέραιοι αριθμοί</u> υπάρχουν πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ανάμεσα στο $-5\sqrt{2}$ *και στο* $8\sqrt{2}$*;*

Την ερώτηση αυτή την πήρα από το άρθρο Merenluoto - Lehtinen , (2002). Ήταν μία από τις 7 ερωτήσεις ενός ερωτηματολογίου που ερευνούσε την τυπική γνώση των μαθητών για την δομή (Hierarchy) του συνόλου των πραγματικών αριθμών και την κατανόηση της πυκνότητας (την χωρίς κενά φύση) της ευθείας των πραγματικών αριθμών (δύο ακόμα ερωτήσεις αυτού του ερωτηματολογίου, που εξετάζουν την κατανόηση της ευθείας των πραγματικών αριθμών είναι οι ερωτήσεις 8)α) και 8)β) που θα εξετάσουμε παρακάτω).

Το ερωτηματολόγιο αυτό δόθηκε σε 564 μαθητές της δευτέρας και της τρίτης Λυκείου από 24 σχολεία της Φιλανδίας.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής δείχνουν ότι η τυπική γνώση της δομής των πραγματικών αριθμών φαίνεται να είναι σε καθεστώς σύγχυσης στο μυαλό των μαθητών. Φαίνεται ότι οι μαθητές θυμούνται κάποια αποσπασματικά σχετικά θέματα. Η τυπική γνώση τους φαίνεται να αναπαριστά μια εμπλουτισμένη (*enrichment*) μορφή μάθησης βασισμένη στην ενθύμηση πληροφοριών. Δεν έχουν, στην πραγματικότητα, δομική (*structural*) επίγνωση της δομής των πραγματικών αριθμών αν και μερικοί μαθητές με υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά έδειξαν κάποια διαίσθηση δομικής αφαίρεσης.

Σχετικά με την ερώτηση 6) οι δύο ερευνητές παρατηρούν επιπλέον ότι σημαντικό ποσοστό των μαθητών χρησιμοποίησε την λογική των ακεραίων αριθμών στις

πράξεις με άρρητους αριθμούς. Το 33% των μαθητών δεν θεώρησαν το $\sqrt{2}$ ως πολλαπλασιαστή.

Στο δικό μου ερωτηματολόγιο τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ήταν και στις δύο ομάδες πολύ μικρά. Ωστόσο, αξιοσημείωτες διαφοροποιήσεις των απαντήσεων εντοπίζονται στη μεγάλη διαφορά που εμφανίζουν στην απάντηση «12 ή κοντά στο 12» :63% για την ομάδα ελέγχου έναντι μόλις 30% των μαθητών της πειραματικής ομάδας, στην διαφορά των ποσοστών των μαθητών που δεν απάντησαν (12% και 28% αντίστοιχα) και στην ποιοτική διαφορά των απαντήσεων με τον χαρακτηρισμό «Άλλο».

Στο «Άλλο» παρατήρησα τα εξής: στην ομάδα έλεγχου μόνο ένας μαθητής απάντησε «άπειροι» και κανένας ότι δεν υπάρχει «κανένας» αριθμός. Αντίθετα στην πειραματική ομάδα, στην κατηγορία «Άλλο», 7 μαθητές (14%) απάντησαν «άπειρο» και 5 μαθητές (10%) «κανένας». Φαίνεται ότι, μέσα από την διδασκαλία, κάποιοι μαθητές ταύτισαν την παρουσία ενός άρρητου αριθμού με την παρουσία του απείρου σε κάθε περίπτωση! Πάλι, δηλαδή όπως στις ερωτήσεις 2) και 3) διακρίνουμε μια «ψευτοδομική» προσέγγιση. Για το «κανένας» δεν μπορώ να κάνω κάποια ασφαλή υπόθεση αλλά ίσως και αυτό οφείλεται σε κάποια σύγχυση στο μυαλό των μαθητών για την απροσδιόριστη φύση των άρρητων αριθμών.

Ωστόσο, από τις απαντήσεις σε αυτή την ερώτηση φαίνεται ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έλαβαν πιο πολύ υπόψη τους την παρουσία του άρρητου αριθμού, χωρίς όμως να καταφέρουν να τον ερμηνεύσουν σωστά.

Ερώτηση 7: Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

7) α) Το σύνολο των σημείων της ευθείας των αριθμών έχει <u>το ίδιο πλήθος στοιχείων</u> με το σύνολο των ρητών αριθμών;

7) β) Το σύνολο των ρητών αριθμών έχει <u>το ίδιο πλήθος στοιχείων</u> με το σύνολο των πραγματικών αριθμών;

Την ερώτηση αυτή την πήρα από το άρθρο των Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002), στο οποίο αναφέρθηκα και στην προηγούμενη ερώτηση.

Με τις ερωτήσεις αυτές ήθελαν να διερευνήσουν την αναπαράσταση των μαθητών της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Από μαθηματικής άποψης, τα σημεία της ευθείας των αριθμών αναπαριστούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών έτσι ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ένα αντίστοιχο σημείο της ευθείας των αριθμών.

Συνεπώς οι δύο αυτές ερωτήσεις είναι λογικά ίδιες αλλά οι μαθητές απάντησαν πολύ διαφορετικά. Μόνο το 35% των μαθητών στη έρευνα των δύο ερευνητριών απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις. Στο δικό μου ερωτηματολόγιο τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 30% για την πειραματική ομάδα και 25% για την ομάδα ελέγχου.

Οι δύο ερευνητές κατέληξαν στο, λογικό, συμπέρασμα ότι **τα σημεία της ευθείας των αριθμών δεν φαίνεται να αναπαριστούν τους πραγματικούς αριθμούς στην πλειοψηφία των μαθητών**. Φαίνεται να αντιλαμβάνονται την ευθεία των αριθμών σαν μια αναπαράσταση των ρητών, των ακεραίων, των δεκαδικών ή ακόμα και των φυσικών αριθμών.

Συγκρίνοντας τώρα την πειραματική ομάδα με την ομάδα ελέγχου, παρατηρούμε μια σημαντική διαφορά μόνο στις απαντήσεις της ***ερώτησης 7)α)***, όπου το ποσοστό των μαθητών της πειραματικής ομάδας που απάντησαν σωστά ήταν 60% έναντι μόλις 35% των μαθητών της ομάδας ελέγχου. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μεγάλη αυτή διαφορά οφείλεται στην επίδραση της διδασκαλίας όπου φαίνεται να έγινε φανερό στους μαθητές ότι τα σημεία της ευθείας δεν μπορούν να καλυφθούν μόνο από τους ρητούς αριθμούς.

Δεν παρατηρείται όμως η ίδια διαφορά στην ***ερώτηση 7)β)*** όπου το ποσοστό των σωστών απαντήσεων της πειραματικής ομάδας μειώνονται στο 38%. Η εξήγηση που μπορώ να δώσω για το μικρό αυτό ποσοστό, σύμφωνα με αυτά που είχαν γράψει κάποιοι μαθητές πάνω στο ερωτηματολόγιο, είναι ότι θεωρούν ότι αφού και τα δύο σύνολα είναι άπειρα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Δεν μπορούν δηλαδή, όπως άλλωστε είναι αναμενόμενο, να φανταστούν διαφορετικά είδη απείρων.

Ερώτηση 8:

α) Πόσα κλάσματα (ρητοί αριθμοί) υπάρχουν πάνω στην ευθεία των αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{5}{6}$*;*

β) Ποιο από όλα αυτά <u>τα κλάσματα</u> που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{5}{6}$ *είναι «το επόμενο» του* $\frac{3}{5}$*;*

γ) Πόσοι <u>πραγματικοί αριθμοί</u> υπάρχουν στην ευθεία των αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς 0,99 και 1;

δ) Ποιος από όλους τους <u>πραγματικούς αριθμούς</u> που είναι ανάμεσα στους 0,99 και 1 είναι «πιο κοντά» στον 1;

Την ερώτηση αυτή την πήρα, επίσης, από το άρθρο των Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002). Οι ερωτήσεις αυτές στοχεύουν στην διερεύνηση της κατανόησης από τους μαθητές της «πυκνότητας (συμπαγής φύση) της ευθείας των αριθμών». Οι ερωτήσεις είναι δύο διαφορετικών ειδών για τους ρητούς και τους πραγματικούς αριθμούς: ερωτήσεις για την «πυκνότητα (ερωτήσεις α) και γ)) και το όριο (ερωτήσεις β) και δ))».

Από τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση αυτή, οι δύο ερευνητές παρατήρησαν τα παρακάτω:

- Περίπου το 30% των μαθητών βάσιζαν τις απαντήσεις τους στην αυθόρμητη λογική των ακεραίων αριθμών (pre – level απαντήσεις). Για αυτούς τους μαθητές φαίνεται, όπως διαπιστώθηκε και στην ερώτηση 7, ότι η ευθεία των αριθμών κατανοείται μάλλον σαν να έχει διακριτή, παρά συμπαγή, φύση.
- Πολλοί από τους μαθητές (recognition level) που αναγνώρισαν την άπειρη πυκνότητα της ευθείας των ρητών και πραγματικών αριθμών δεν μπόρεσαν να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους ή έδωσαν ασαφείς απαντήσεις.
- Άλλοι μαθητές (Re – presentation level) έδειξαν μια συναίσθηση της δυνατότητας προσθήκης περισσότερων αριθμών στην ευθεία των αριθμών, βασισμένοι στην λογική της επανάληψης, αλλά και στην βασική διαίσθηση του «επόμενου» αριθμού, που αναπαριστά λειτουργική κατανόηση.
- Πολύ λίγων μαθητών οι απαντήσεις δείχνουν ότι οι μαθητές έχουν δομική κατανόηση (structural abstraction level). Οι μαθητές αυτοί φαίνεται ότι μπορούν να δώσουν επαρκείς απαντήσεις για το ότι ανάμεσα σε δύο κλάσματα υπάρχουν άπειροι ρητοί ή πραγματικοί αριθμοί ή ότι η έννοια του «επόμενου αριθμού» αλλά και του «πλησιέστερου αριθμού» αφορά μόνο τα σύνολα των φυσικών και των ακεραίων αριθμών.

Συγκρίνοντας, συνολικά, τις απαντήσεις των μαθητών στο δικό μου ερωτηματολόγιο με τις απαντήσεις των μαθητών στο άρθρο των Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002) δεν παρατηρούμε σημαντικές διαφορές , εκτός ίσως στην ***ερώτηση 8)γ)*** όπου οι μαθητές του δικού μου ερωτηματολογίου, σε σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό, αναγνωρίζουν την ύπαρξη άπειρων πραγματικών πάνω στην ευθεία, όπως άλλωστε είχαν κάνει και στην ερώτηση 4, που εξετάσαμε προηγουμένως. Μεγαλύτερη ωστόσο εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι τα ποσοστά αυτά, και στις δύο ομάδες, είναι σημαντικά μειωμένα στην ερώτηση 8)α). Εδώ είναι φανερή η επίδραση της διαφορετικής αναπαράστασης.

Ωστόσο για την παρούσα εργασία μεγαλύτερη ίσως σημασία έχουν οι απαντήσεις των μαθητών στις ***ερωτήσεις 8)β) και 8)δ)***, όπου εξετάζεται η κατανόηση των μαθητών στην «συμπαγή» φύση του συνόλου των ρητών και των πραγματικών αριθμών, όπου δεν μπορεί να οριστεί ο επόμενος αριθμός αλλά ανάμεσα σε δύο ρητούς ή πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι άλλοι αριθμοί. Ενώ για τις ερωτήσεις 8)α) και 8)γ) φαίνεται (Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , 2002) να αρκεί, προκειμένου ένας μαθητής να απαντήσει σωστά, ένας εμπλουτισμός της προηγούμενης γνώσης του για την διακριτή φύση των φυσικών αριθμών και της αντίστοιχης ευθείας των αριθμών, στις ερωτήσεις 8)β) και 8)δ) απαιτείται μια ριζική και συνειδητή ανακατασκευή της προηγούμενης σκέψης του, δηλαδή μια εννοιολογική αλλαγή της έννοιας του αριθμού.

Στην ***ερώτηση 8)γ)*** παρατηρούμε μια μεγάλη διαφορά στις απαντήσεις των δύο ομάδων: οι απαντήσεις για το «επόμενο κλάσμα» του $\frac{3}{5}$ ήταν εσφαλμένη σε ποσοστό 78% στην ομάδα ελέγχου έναντι μόνο 46% στην πειραματική ομάδα. Ωστόσο η διαφορά αυτή δεν οφείλεται στην διαφορά των σωστών απαντήσεων (τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ήταν μόλις 5 και 6% αντίστοιχα!) αλλά στα ποσοστά των μαθητών που δεν απάντησαν (17 και 48% αντίστοιχα). Στα πολύ μικρά ποσοστά των σωστών απαντήσεων διαπιστώνουμε την θεμελιώδη επιστημολογική πεποίθηση των μαθητών για την έννοια του επόμενου αριθμού η οποία είναι πολύ δύσκολο να αλλάξει (Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , 2002). Η διαφορά στα ποσοστά των μαθητών που δεν απάντησαν μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα βήμα πιο κοντά στην κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας: μαζί με τις ερωτήσεις που παρουσιάζονται στο άρθρο των Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , 2002, οι δύο ερευνητές ζητούσαν από τους μαθητές να βαθμολογήσουν το πόσο βέβαιοι ήταν για τις απαντήσεις που έδιναν. Αυτό που διαπιστώθηκε από την ανάλυση των ερωτηματολογίων σε σχέση με τις ερωτήσεις 8)β) και 8)δ), ήταν ότι οι μαθητές με χαμηλότερου επιπέδου κατανόηση είχαν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση για τις απαντήσεις τους – ίσως γιατί δεν γνώριζαν την ποιότητα των απαντήσεών τους – ενώ αντίθετα οι μαθητές του υψηλότερου επίπεδου κατανόησης ήταν περισσότερο επιφυλακτικοί για τις απαντήσεις τους – ίσως λόγω της πρόσφατης αλλαγής στην σκέψη τους.

Το ίδιο θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι ισχύει και στην πειραματική ομάδα: η διδασκαλία επέδρασε ώστε οι μαθητές να αμφιβάλλουν για την μέχρι τώρα πεποίθησή τους ότι «πάντα υπάρχει ο επόμενος αριθμός». Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας φαίνεται να έφτασαν σε μια λειτουργική κατανόηση της συνεχούς δυνατότητας προσθήκης, με την λογική της επανάληψης, νέων (ρητών) αριθμών στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ωστόσο δεν έφτασαν σε μια δομική κατανόηση που θα τους επέτρεπε να απαντήσουν σωστά την ερώτηση. Αυτό φαίνεται και στις απαντήσεις τους στην ***ερώτηση 8)δ)*** όπου φαίνεται η προτίμησή τους σε έναν αριθμό που μπορεί να προσεγγίζει το 1 οσοδήποτε κοντά παρά στην, σωστή, απάντηση ότι «δεν υπάρχει επόμενος».

Γενικά συμπεράσματα που προκύπτουν από το Ερωτηματολόγιο

Για την έννοια της δύναμης

Συνολικά, όπως φαίνεται από τις απαντήσεις τους στην ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου, οι μαθητές έχουν καλή κατανόηση του αρχέτυπου του επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού για την έννοια της δύναμης (ερώτημα 1)α)) αλλά η απλά διαδικαστική και όχι ουσιαστική (ή δομική) κατανόηση της έννοιας, τους οδηγεί σε παρερμηνείες και λανθασμένες απαντήσεις (ερωτήματα 1)β),γ),δ)), όταν η βάση και ο εκθέτης δεν είναι φυσικοί αριθμοί.

Συγκρίνοντας την πειραματική με την ομάδα ελέγχου παρατηρούμε μεγάλες διαφορές στις απαντήσεις των μαθητών κυρίως στα ερωτήματα 1)γ) και 1)ε) όπου υπερέχει σημαντικά η πειραματική ομάδα. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως μια θετική επίδραση της διδασκαλίας στην, διαισθητική τουλάχιστον, κατανόηση των μαθητών για την έννοια της δύναμης, πράγμα που ήταν και ένας στόχος της διδασκαλίας. Βέβαια η διδασκαλία σκόπευε επίσης και στην δομική κατανόηση της έννοιας αυτής από τους μαθητές και στην αναδόμηση της σκέψης τους, προσφέροντάς τους την ευκαιρία να δώσουν λογικές εξηγήσεις για το νόημα της δύναμης με εκθέτη ρητό και μάλιστα συνδέοντας αυτές τις εξηγήσεις με την αρχετυπική έννοια για την δύναμη που κατέχουν οι μαθητές. Βέβαια, με μόνο τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο, δεν μπορούμε να φτάσουμε σε ένα τέτοιο συμπέρασμα ως προς το βάθος της κατανόησής τους.

Ρητοί – Άρρητοι αριθμοί

Συνολικά, οι απαντήσεις πολλών μαθητών δείχνουν ότι δεν έχουν σαφή κριτήρια για να διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς και οι σχετικοί ορισμοί βρίσκονται συγκεχυμένοι στο μυαλό τους (ερωτήσεις 2), 3) και 6)).

Συγκρίνοντας την πειραματική με την ομάδα ελέγχου, παρατηρούμε, διαβάζοντας τις αιτιολογήσεις που έδωσαν οι μαθητές (ερωτήσεις 2) και 3)),πρώτον μια μεγαλύτερη ικανότητα διάκρισης των ρητών από τους άρρητους αριθμούς και παράλληλα μια μετατόπιση της εστίασης τους από την αναπαράσταση των αριθμών σε βαθύτερα χαρακτηριστικά τους όπως το αν «μπορεί να προσεγγιστεί, ή όχι, με απόλυτη ακρίβεια» ή αν «δίνει, ή όχι, ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα» κ.λ.π. Αυτή η μετατόπιση των μαθητών της πειραματικής ομάδας μπορεί, κατά την γνώμη μου, να εξηγηθεί ως επίδραση της διδασκαλίας στην σκέψη τους για τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Η επίδραση αυτή μπορεί να θεωρηθεί θετική από την άποψη ότι ενεργοποίησε τις δυνατότητές τους για κριτική θεώρηση μιας πιο ουσιαστικής διάκρισης ανάμεσα στους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς, αλλά, όμως, σε μερικές, τουλάχιστον, περιπτώσεις μαθητών (όπως είδαμε στις ερωτήσεις 2), 3) και 6)) μπορεί να υπονοεί μια «ψευτοδομική» κατανόηση που είναι δυνητικά επιζήμια. Επίσης δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι επιτυγχάνεται ο απώτερος στόχος της διδασκαλίας που ήταν να φτάσουν οι μαθητές στην κατανόηση του άρρητου

αριθμού ως ένα αντικείμενο. Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε και με αφορμή το ερώτημα 6 όπου οι μαθητές έλαβαν πιο πολύ υπόψη τους την παρουσία του άρρητου αριθμού, χωρίς όμως να καταφέρουν να τον ερμηνεύσουν σωστά.

Πυκνότητα των αριθμών και η συμπαγής φύση της ευθείας των αριθμών

Συνολικά, από τις απαντήσεις των μαθητών φαίνεται ότι η πεποίθηση της διακριτότητας στα σύνολα των ρητών και πραγματικών αριθμών παραμένει ισχυρή (ερώτηση 8)α)) ιδιαίτερα όταν οι αριθμοί αναπαριστώνται σε κλασματική μορφή και δεν φαίνεται να τους βοηθά η παρουσία της ευθείας των πραγματικών αριθμών (ερωτήσεις 8)α) και 8)γ)). Άλλωστε (ερώτηση 7) τα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών δεν φαίνεται να αναπαριστούν τους πραγματικούς αριθμούς σε μεγάλο ποσοστό των μαθητών.

Η έλλειψη της κατανόησης του ρητού και του άρρητου αριθμού τους εμποδίζει να κατανοήσουν θέματα που έχουν να κάνουν με την πυκνότητα του συνόλου των ρητών και των πραγματικών αριθμών (ερώτηση 5)).

Συγκρίνοντας την πειραματική με την ομάδα ελέγχου, παρατηρούμε σε ορισμένες ερωτήσεις μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων (ιδιαίτερα στις ερωτήσεις 5)δ) και 7)α)) που μπορεί να ερμηνευτεί ως επίδραση της διδασκαλίας, όπου οι ρητοί δεν μπορούσαν «να καλύψουν τα κενά» παρά το ότι μπορούμε πάντα να «προσθέτουμε» ρητούς ανάμεσα σε δύο άλλους.

«Επόμενος» αριθμός» – Όριο

Συνολικά, φανερώθηκε (ερωτήσεις 8)β) και 8)δ)) η αδυναμία της συντριπτικής πλειοψηφίας να κατανοήσουν ότι η έννοια του «επόμενου» αριθμού αφορά μόνο το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Η κατανόηση αυτή απαιτεί εννοιολογική αλλαγή της έννοιας του αριθμού που ήταν ένας από τους στόχους της διδασκαλίας που δεν φαίνεται να επιτεύχθηκε σε αυτόν τον τομέα.

Ωστόσο, συγκρίνοντας την πειραματική με την ομάδα ελέγχου (ερωτήσεις 8)β) και 8)δ)) παρατηρούμε ένα σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών της πειραματικής ομάδας που δεν απάντησαν (ιδιαίτερα στην ερώτηση 8)β)), γεγονός που δείχνει την αμφιβολία τους (εικάζω λόγω της επίδρασης της διδασκαλίας) για την μέχρι τώρα πεποίθησή τους για τον επόμενο αριθμό η οποία φαίνεται ακλόνητη στην ομάδα ελέγχου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{ο} : ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την ανάλυση του ερωτηματολογίου (Κεφάλαιο 6^{ο}) φάνηκε ότι η επίδραση της πειραματικής διδασκαλίας ήταν μικρή στην κατανόηση των μαθητών για έννοιες που σχετίζονται με τους πραγματικούς αριθμούς (διάκριση των ρητών με τους άρρητους, πυκνότητα, «επόμενος αριθμός», όριο).

Βέβαια, δύσκολα θα μπορούσαμε να αναμένουμε πολύ καλύτερα αποτελέσματα, τουλάχιστον για τους δύο παρακάτω λόγους:

- Η εννοιολογική αλλαγή αλλά και η ενθυλάκωση των διαδικασιών σε μαθηματικά αντικείμενα, είναι μια αργή και σταδιακή διαδικασία (π.χ. Vamvakoussi - Vosniadou, 2007 και Sfard, 1992).
- Η πειραματική διδασκαλία ήταν πολύ «πυκνή». Σε μία μόλις διδακτική ώρα συζητήθηκαν πολλές και δυσνόητες έννοιες. Επιπλέον δεν δόθηκε χρόνος στους μαθητές να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους και με τον καθηγητή.

Ωστόσο, στα παρακάτω θα επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι δεν είναι πάντα ο χρόνος η αιτία της μη κατανόησης, ή ότι και περισσότερο χρόνο να είχα διαθέσει πάλι τα αποτελέσματα θα ήταν πενιχρά, σε κάποια τουλάχιστον θέματα που εμπεριέχονται στην πειραματική διδασκαλία. Μέσα από την ανάλυση ενός διαλόγου ανάμεσα στον καθηγητή και ενός μαθητή που έγινε, τμηματικά, κατά την διάρκεια της πειραματικής διδασκαλίας, θα προσπαθήσω να δείξω ότι υπήρξαν βαθύτεροι λόγοι (αντιλήψεις του καθηγητή και των μαθητών για την διδακτική διαδικασία και των Μαθηματικών γενικότερα αλλά και η αντιμετώπιση των συγκεκριμένων υπό συζήτηση μαθηματικών εννοιών) που δεν θα μπορούσαν να επιτρέψουν μια καλύτερη κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές, ανεξάρτητα από τον χρόνο που θα διέθεταν.

Ανάλυση ενός διαλόγου του καθηγητή με έναν μαθητή

	Γιάννης1	**Καθηγητής**
<u>1ος διάλογος του Γιάννη1</u> με τον καθηγητή (λίγο πριν ξεκινήσουμε τον χωρισμό σε 10 ίσα μέρη) Χρονική στιγμή της διδασκαλίας : 19:03	Πως θα καταφέρουμε να καλύψουμε τα κενά **αν δεν πάρουμε πάρα πολύ μικρές αποστάσεις**. Δηλαδή…	Ναι αυτό πάμε να κάνουμε.
	Δεν καλύπτονται κύριε τα κενά. Μπορούμε να βρούμε πολλά σημεία **και να τα ενώσουμε**, αλλά τα κενά …	Δηλαδή, συγνώμη Γιάννη. Όταν σου λέει η παραβολή είναι κάπως έτσι, μια **συνεχόμενη γραμμή**, στην πραγματικότητα υπάρχουν κενά αλλά δεν τα βλέπουμε;
	Όχι, **δεν υπάρχουν κενά**, αλλά εμείς **δεν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε** βρίσκοντας όλες τις τιμές μία – μία **και να τις ενώσουμε μεταξύ τους.**	**Ναι πρακτικά δεν μπορούμε,** θεωρητικά όμως μπορούμε να σκεφτούμε πως **στην πραγματικότητα** μπορούν να καλυφθούν. **Θεωρητικά**…
	Ναι	

	Γιάννης1	**Καθηγητής**
<u>2^{ος} διάλογος του Γιάννη1 με τον καθηγητή</u> (Αφού έχουμε θεωρήσει την διαίρεση σε 10, 100, 1000 … κομμάτια, ο καθηγητής ρωτάει την τάξη αν θα καλύψουμε έτσι τα κενά και ο Γιάννης1 επανέρχεται αυθόρμητα)	Αυτό δεν θα το κάνουμε **ποτέ**.	Δηλαδή και αυτή η συνεχόμενη γραμμή (σχεδιάζω μια τυχαία γραμμή στον πίνακα) τι είναι, **απάτη**;
Χρονική στιγμή της διδασκαλίας : 24:34	Όχι, **θεωρητικά** υπάρχει, εμείς δεν πρόκειται να το κάνουμε ποτέ.	Ναι
	Δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις τιμές **και να ενώσουμε…**	Πρακτικά όχι. Αλλά …
	Εντάξει ξέρουμε ότι υπάρχει	Γιατί όμως υπάρχει;
	….	

	Γιάννης1	**Καθηγητής**
<u>3^{ος} διάλογος του Γιάννη1 με τον καθηγητή</u> (αφού έχουμε ορίσει το $2^{\sqrt{2}}$ και ο καθηγητής έχει «εξηγήσει» πως «δεν μένει τελικά κανένα κενό», όπως περιγράψαμε στο 5^{ο} ; Κεφάλαιο.		Γιάννη1 το κατάλαβες αυτό;
Χρονική στιγμή της διδασκαλίας : 34:00	Ναι κύριε. Το κατάλαβα.	
	(όμως φαίνεται ότι ούτε αυτός ούτε οι συμμαθητές του το κατάλαβαν στην πραγματικότητα)	

Είναι εμφανές στους παραπάνω διαλόγους ότι δεν υπάρχει πραγματική επικοινωνία ανάμεσα στον μαθητή και τον καθηγητή του:

Στον 1^{ο} διάλογο ο καθηγητής δεν ασχολείται καν με την αναζήτηση των πραγματικών αντιρρήσεων του μαθητή. Με αρκετά απότομο τρόπο διακόπτει την σκέψη του εισάγοντας το «μεθοδολογικό τρυκ» της «συνεχόμενης γραμμής» της παραβολής, που είναι «πραγματικότητα»!. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να

αναγκάσει τον μαθητή να «παραδεχθεί» ότι «δεν υπάρχουν κενά» αλλά ουσιαστικά να παραμένει με την αρχική του άποψη. Τότε ο καθηγητής, αντί να προσπαθήσει να τον βοηθήσει να εκφράσει τις πραγματικές του αντιρρήσεις, εισάγει στον διάλογο μια πολύ ισχυρή λέξη: «Θεωρητικά». Ο μαθητής φαίνεται να συναινεί με την παρέμβαση του καθηγητή.

Στον 2^{ο} διάλογο, μετά από 5 περίπου λεπτά, ακολουθεί ένας ακριβώς ίδιος διάλογος, με τα ίδια επιχειρήματα και από τις δύο πλευρές, δείγμα και αυτό ότι ο προηγούμενος διάλογος δεν ήταν ουσιαστικός αφού δεν υπήρξε η παραμικρή μετατόπιση στις απόψεις τους. Η μόνη διαφορά, είναι ότι ο μαθητής χρησιμοποιεί την φρασεολογία του καθηγητή «θεωρητικά υπάρχει» ενώ είναι φανερό ότι δεν αντιλαμβάνεται τι σημαίνει αυτό.

Στον 3^{ο} διάλογο, μετά από 10 λεπτά, ο μαθητής δίνει μια πολύ γνώριμή μας απάντηση, από την σχολική εμπειρία: «Ναι κύριε, το κατάλαβα» πράγμα που ήταν φανερό, από το ύφος του, ότι δεν ίσχυε. Το ίδιο φαίνεται να ίσχυε και για τους συμμαθητές του, αφού άλλωστε κανείς δεν επιχείρησε να διατυπώσει κάποιο επιχείρημα κατά (αλλά ούτε και υπέρ) των επιχειρημάτων του.

Ο Steinbring (1992) (δες στο 2^{ο} Κεφάλαιο) μας βοηθάει να ερμηνεύσουμε το τι ακριβώς συνέβη. Ακολουθώντας το σκεπτικό του, διαπιστώνουμε τα παρακάτω:

- Ακόμα και αν δεχθούμε ότι η διδασκαλία είχε σχεδιαστεί και πραγματοποιήθηκε έτσι ώστε να παράσχει στους μαθητές κατάλληλες δραστηριότητες και ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον ανάμεσα στους μαθητές μεταξύ τους και με τον καθηγητή, προκειμένου οι μαθητές να «κατασκευάσουν» την γνώση, στην ουσία αυτό που αναδεικνύεται είναι κυρίως ο κεντρικός ρόλος του καθηγητή:
ο καθηγητής υποθέτει ουσιαστικά ένα καλούπι μαθηματικής γνώσης που έχει από πριν οργανώσει για τον εαυτό του και επιχειρεί να αναπτύξει την γνώση των μαθητών σε ένα όμοιο επίπεδο. Ακολουθεί μία χρονολογικά οργανωμένη, με γραμμικό τρόπο, δομή της γνώσης. Ο διάλογος που κάνει με τους μαθητές γίνεται, ουσιαστικά, μόνο για να εξυπηρετήσει αυτή την δομή. Για παράδειγμα, με το τρυκ της παραβολής, ο καθηγητής δεν ενδιαφερόταν να κατανοήσει την σκέψη του Γιάννη1 αλλά απλά να *χρησιμοποιήσει* την παρέμβαση του μαθητή για να εξυπηρετήσει τον σχεδιασμό του (να προχωρήσει σε περισσότερους χωρισμούς των διαστημάτων) ενδυναμώνοντας παράλληλα, όπως ήλπιζε, το κίνητρο των μαθητών

ώστε να ενδιαφερθούν να παρακολουθήσουν την συνέχεια της διδασκαλίας «του», έτσι όπως **αυτός** την είχε σχεδιάσει.

- Οι μαθητές αποδέχονται, ως φυσιολογική, αυτή την δομή του μαθήματος: ο Γιάννης1, αλλά και οι υπόλοιποι μαθητές, αισθάνονται, ουσιαστικά, πολύ αδύναμοι να αμφισβητήσουν την «αυθεντία» του καθηγητή, του «κατόχου» της μαθηματικής γνώσης. Ο Γιάννης1 υποκύπτει σε αυτήν, αρχικά δεχόμενος ότι «δεν υπάρχουν κενά», μετά ότι «θεωρητικά υπάρχει» και μετά ότι «κατάλαβε», ενώ είναι φανερό ότι διατηρεί τις αντιρρήσεις του, που δεν τόλμησε να τις αναπτύξει αλλά και κανείς δεν ενδιαφέρθηκε, είτε ο καθηγητής είτε οι συμμαθητές του, να τον βοηθήσουν να το κάνει. Από όλους, μέσα στην τάξη, η μαθηματική γνώση θεωρείται μη αμφισβητήσιμη και ότι επιπλέον εκφράζει την «πραγματικότητα» και ότι η γνώση θα έλθει με έναν γραμμικό τρόπο, έτσι όπως το έχει σχεδιάσει ο καθηγητής και υπό την καθοδήγησή του.
- Το «**θεωρητικά**» που είπε ο καθηγητής, που είναι κενό νοήματος για τον μαθητή ακόμα και αν ερμηνευτεί ως το αντίθετο του «πρακτικά», φανερώνει την πηγή του πραγματικού προβλήματος στην μεταξύ τους επικοινωνία: καθηγητής και μαθητής κινούνται σε ένα διαφορετικό επίπεδο μαθηματικής γνώσης, ή σε διαφορετικές «**πραγματικότητες**». Ο Γιάννης1 αντιμετωπίζει τις έννοιες σύμφωνα με την δική του «τοπική» προοπτική (συνδεδεμένη με το συγκεκριμένο πρόβλημα που τίθεται) ενώ ο καθηγητής το αντιμετωπίζει «θεωρητικά» δηλαδή σύμφωνα με μια πιο σφαιρική άποψη, εντάσσοντας τις έννοιες μέσα σε ένα πολύ ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο.

Οι πεποιθήσεις καθηγητή και μαθητών που αναφέραμε παραπάνω εμποδίζουν την εστίαση της διδασκαλίας σε αυτό που θα μπορούσε να φέρει ίσως την πραγματική κατανόηση των μαθητών (Steinbring, 1992): το να κάνει την ίδια την μαθηματική γνώση το κέντρο της διαπραγμάτευσης των νοημάτων ανάμεσα στον καθηγητή και τους μαθητές.

Στα παρακάτω, θα δείξουμε ότι ενώ ο μαθητής και ο καθηγητής χρησιμοποιούν τους ίδιους όρους , ο καθένας βρίσκεται σε ένα τελείως διαφορετικό πλαίσιο επιχειρηματολογίας, ότι εννοούν τελείως διαφορετικά πράγματα. Αυτό είναι που πάνω από όλα εμποδίζει την επικοινωνία τους και αυτό θα έπρεπε να είναι ίσως το κέντρο του μαθήματος.

Η ανάλυση των πλαισίων στα οποία επιχειρηματολογούν ο Γιάννης1 και ο καθηγητής του.

Πρώτα να δούμε πως έχει διδαχθεί στο σχολείο ο Γιάννης1 την έννοια της «γραμμής» και της «ευθείας των πραγματικών αριθμών».

Ο μαθητής διδάσκεται για την έννοια της *γραμμής* στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας (Αργυρόπουλος et al., 2001) ότι μια γραμμή είναι «μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο, όπως όταν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή την μύτη ενός μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί.» Επίσης για το *σημείο* μαθαίνει ότι «δεν έχει διαστάσεις» και ότι «σε κάθε θέση του μολυβιού, που σχηματίζει μια γραμμή, το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο».

Για την ευθεία των πραγματικών αριθμών διδάσκεται ότι : «Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.» (Ανδρεαδάκης et al. 2009).

Με βάση την παραπάνω, πιθανή, θεώρηση του Γιάννη1 για την γραμμή και την ευθεία των πραγματικών αριθμών, και με την βοήθεια των προτάσεων της θεωρίας των ενσαρκωμένων Μαθηματικών των Lakoff και Nunez για τους πραγματικούς αριθμούς, έτσι όπως της εκθέσαμε στο 3^{ο} Κεφάλαιο, θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε την σκέψη του μαθητή και του καθηγητή του.

Α) **<u>Γραμμή</u>**

Η Γραμμή	***Πως το εννοεί ο μαθητής***	***Πως το εννοεί ο καθηγητής***
	«Μια γραμμή είναι μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο» (Βιβλίο Γεωμετρίας Α Λυκείου). Σε τέτοια θεώρηση για την γραμμή τα σημεία είναι τοποθεσίες πάνω σε μια γραμμή αλλά δεν αποτελούν την γραμμή η οποία είναι «φυσικά συνεχής», προκύπτει από κίνηση αλλά είναι ένα στατικό αντικείμενο, ένας φορέας, ένα υπόβαθρο, που είναι ανεξάρτητος από τα σημεία που μπορούμε να τοποθετήσουμε πάνω της.	Η γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων. Τα σημεία δεν είναι τοποθεσίες *πάνω* σε μια γραμμή αλλά είναι οι οντότητες οι οποίες αποτελούν την γραμμή. Δεν υπάρχει γραμμή ανεξάρτητη από τα σημεία της.

Β) **<u>Η ευθεία των πραγματικών αριθμών</u>**

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών	***Πως το εννοεί ο μαθητής***	***Πως το εννοεί ο καθηγητής***
	«Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.» (Ανδρεαδάκης et al. 2009) Οι αριθμοί μπορούν να παρασταθούν με ένα σημείο-τοποθεσία πάνω στην αριθμογραμμή. Δεν συνεπάγεται όμως ότι σε κάθε σημείο – τοποθεσία της ευθείας αντιστοιχεί ένας αριθμός! Αφού τα σημεία είναι απλά τοποθεσίες πάνω σε μια ευθεία, και οι ευθείες είναι ο φορέας πάνω στον οποίο βρίσκονται, θα έχει ένα ανεξάντλητο απόθεμα σημείων – τοποθεσίες *που θα μένουν χωρίς αντιστοίχιση με κάποιο αριθμό.*	Τα σημεία είναι στοιχεία ενός συνόλου που στη συνέχεια αντιστοιχίζονται 1 -1 με τους πραγματικούς αριθμούς. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα πλήρες σύστημα αριθμών (δηλαδή είναι κλειστό ως προς τις αριθμητικές πράξεις και περιέχει όλους τους αριθμούς που θα μπορούσαν να είναι τα όρια των ακολουθιών ρητών αριθμών) και παράλληλα ορίζουν το τι είναι τα «σημεία» της «ευθείας», φυσικά εξαντλούν όλα τα σημεία μιας τέτοιας «ευθείας». Αυτό δεν σημαίνει ότι εξαντλούν τα σημεία μιας φυσικά συνεχούς ευθείας. Σε σχέση με την συνήθη έννοια που δίνουμε σε μια ευθεία, η «ευθεία των πραγματικών αριθμών» δεν είναι ευθεία!

Με μια τέτοια κατανόηση για την ευθεία και για την ευθεία των πραγματικών αριθμών, σίγουρα ο μαθητής, σε αντίθεση με τον καθηγητή του, δεν μπορεί να φτάσει σε μια κατανόηση της 1- 1 αντιστοιχίας ανάμεσα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Αυτό άλλωστε απαιτεί την αξιωματική κατασκευή των πραγματικών αριθμών, που ο μαθητής αγνοεί, και αυτό που του έχει ειπωθεί στο σχολικό βιβλίο για την ευθεία των πραγματικών αριθμών αλλά και για τους πραγματικούς αριθμούς, σε συνδυασμό με την έννοια της «γραμμής», είναι πολύ μακριά από μια τέτοια κατανόηση. Αυτό θα φανεί πιο καθαρά στα παρακάτω.

Γ) **Τα «κενά» στον χ΄χ**

Απουσία κενών στον χ΄χ	*Πως το εννοεί ο μαθητής*	*Πως το εννοεί ο καθηγητής*
	Η απουσία κενών, γενικά, σε μια «φυσικά» συνεχή γραμμή σημαίνει απουσία αλμάτων κατά την κίνηση που την παράγει.	Η απουσία κενών είναι όχι ανάμεσα στα σημεία αυτά καθαυτά αλλά ανάμεσα στους αριθμούς. Αφού κάθε αριθμός είναι διακριτός και κάθε αριθμός αντιστοιχίζεται (αξιωματικά, από την κατασκευή των πραγματικών αριθμών) με μία 1 -1 αντιστοιχία με τα σημεία μιας γραμμής, δεν υφίσταται πλέον καμία φυσική συνέχεια της γραμμής ανεξάρτητη από το σύνολο των σημείων – αριθμών. Η συνέχεια της γραμμής προέρχεται από την πληρότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών τελείως ανεξάρτητη από οποιαδήποτε γεωμετρική θεώρηση.

Τι σημαίνει ο χ΄χ να μην έχει κενά σε μια φυσικά συνεχή γραμμή; Να μπορώ να μετακινηθώ από ένα σημείο σε ένα άλλο χωρίς να κάνω κάποιο άλμα. Άρα ο Γιάννης1 βλέπει ότι αριθμητικά (χωρίς κίνηση), δηλαδή αν ταυτίζαμε τα σημεία με τους αριθμούς, βλέπει ότι ο χ΄χ θα έχει πάντα κενά και άρα και η γραφική παράσταση θα έχει πάντα κενά. Στα αρχικά βήματα βέβαια αυτό είναι σωστό, αφού προχωράμε με τους διαρκείς χωρισμούς, δηλαδή με την πυκνότητα των ρητών. Ωστόσο αυτό παραμένει ως το τέλος, δηλαδή και όταν ο καθηγητής εισάγει τους άρρητους αριθμούς στον χ΄χ. Η στάση του Γιάννη1 δεν φαίνεται να έχει μεταβληθεί. Άλλωστε από την αρχή έδειχνε πολύ σίγουρος για τις απόψεις του. Η σιγουριά του αυτή μπορεί να προέρχεται από τα παρακάτω:

Συνοπτικά ο Γιάννης1: α) βλέπει την ευθεία ως φυσικά συνεχή, β) δεν έχει συνείδηση ότι τα σημεία της ευθείας των αριθμών αναπαριστούν τους πραγματικούς αριθμούς (δες ερωτηματολόγιο ερώτηση 7) και γ) αυτό συμβαίνει (Fischbein, 1995) *όχι εξαιτίας κάποιων διαισθητικών εμποδίων*, αλλά γιατί δεν έχει την ικανότητα να οριοθετήσει σωστά τις

έννοιες των πραγματικών αριθμών. Οι έννοιες σχετικά με τους ρητούς και τους άρρητους είδαμε και στο ερωτηματολόγιο (ερωτήσεις 2,3) ότι είναι τελείως μπερδεμένες στο μυαλό των μαθητών.

Βέβαια ο καθηγητής αφήνει αρχικά τον μαθητή με την αβεβαιότητα για το πώς θα καλυφθούν τα κενά της γραφικής παράστασης, προκειμένου να «εμπλακεί» στην παρακολούθηση της διδασκαλίας που θα ακολουθήσει στην συνέχεια. Ωστόσο, ο καθηγητής έχει στο μυαλό του μόνο «τα κενά» της γραφικής παράστασης. Δεν καταλαβαίνει ότι το πρόβλημα ξεκινάει από το ότι ο Γιάννης1 δεν έχει (και δεν θα μπορούσε να έχει) συνδέσει στο μυαλό του τον χ΄χ με την ευθεία των πραγματικών αριθμών, όπως την εννοούμε στα μαθηματικά. Θεωρεί ότι ο μαθητής δέχεται ότι «αξιωματικά» τα σημεία της ευθείας καλύπτονται από τους πραγματικούς αριθμούς. Ίσως και ο ίδιος ο καθηγητής θεωρεί ότι η «φυσική» και η «μαθηματική» ευθεία ταυτίζονται. Άλλωστε έχει συνηθίσει να μετακινείται πολύ εύκολα από την μία ευθεία στην άλλη. (Οι Nunez και Lakoff, 1998, σελ. 94 γράφουν σχετικά: «Ακόμα και αν οι μαθηματικοί συνειδητά πιστεύουν την μεταφορά Μια Ευθεία Είναι Ένα Σύνολο Σημείων, ασυνείδητα χρησιμοποιούν την παραδοσιακή έννοια της ολιστικής ευθείας… αυτό άλλωστε φανερώνεται όταν μιλούν για το ότι οι «άρρητοι γεμίζουν τα κενά των ρητών» μια φράση που δεν έχει νόημα στα σύνολα παρά μόνο στην ολιστική ευθεία».)
Συνοπτικά, ο μαθητής δεν μπορεί να αντιληφθεί την συνέχεια της ευθείας των πραγματικών αριθμών, έτσι όπως την εννοεί ο καθηγητής διότι:

α) δεν έχει την κατανόηση των άρρητων αριθμών και γενικά του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Ο καθηγητής την θεώρησε ωστόσο αυτονόητη.

β) ταυτίζει την φυσικά συνεχή ευθεία με την μαθηματικά συνεχή ευθεία (και ο καθηγητής δεν τον βοηθάει καθόλου με αυτήν την σύγχυση του)

γ) Δεν πρόκειται ακριβώς για σύγχυση του μαθητή, αλλά οφείλεται στον τρόπο που του διδάσκουμε τα μαθηματικά ως μία επιστήμη που περιγράφει με ακρίβεια την πραγματικότητα και στην συγκεκριμένη περίπτωση ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι η φυσικά συνεχής γραμμή και ότι η γραφική παράσταση είναι μια φυσικά συνεχής καμπύλη.

Να δούμε όμως και την συνέχεια της διδασκαλίας. Πως ο καθηγητής «καλύπτει» τελικά τα κενά της γραφικής παράστασης και πως δεν τα «καλύπτει» ο μαθητής και γιατί:

Γραφική παράσταση	*Πως το εννοεί ο μαθητής*	*Πως το εννοεί ο καθηγητής*
	Καμπύλες στο επίπεδο. Παράγονται από την κίνηση ενός κινητού. Κάθε σημείο-τοποθεσία *πάνω* στην καμπύλη ορίζεται απ ό ένα διατεταγμένο ζεύγος (χ, f(χ))	Ένα σύνολο από διατεταγμένη ζεύγη πραγματικών αριθμών.

Είδαμε μέχρι τώρα ότι ο Γιάννης1, δεν μπορεί να αντιληφθεί, κινούμενος μέσα στο δικό του πλαίσιο, και αγνοώντας την έννοια του άρρητου και γενικά του πραγματικού αριθμού, ότι ο χ΄χ δεν μπορεί να «καλυφτεί» από αριθμούς και ούτε μπορεί να πειστεί από την «αξιωματική» θεώρηση του καθηγητή.

Έτσι ο χ΄χ ποτέ δεν πρόκειται να καλυφθεί από αριθμούς. Σαν αποτέλεσμα και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης που είναι τοποθεσίες πάνω σε μια νοητή καμπύλη (την γραφική παράσταση) που ως τέτοια προκύπτει από την κίνηση (είναι «φυσικά» συνεχής» για τον μαθητή) θα αφήνουν «κενά» πάνω σε αυτήν. Αυτό εννοεί ο μαθητής όταν λέει «**να ενώσουμε τα σημεία**»: «βλέπει» τα σημεία που προκύπτουν από τα ζεύγη των αντιστοίχων τιμών σαν τοποθεσίες πάνω σε μια «φυσικά» συνεχή γραμμή, η οποία για να δημιουργηθεί χρειάζεται την κίνηση. Συνεπώς, ο μαθητής σκεφτόμενος τις γραμμές, πρώτα τον χ΄χ και στην συνέχεια την γραφική παράσταση, ως «φυσικά συνεχείς», δεν μπορεί να αντιληφθεί πως, με έναν τέτοιο τρόπο, μπορεί «να γεμίζουν τα κενά» (και πράγματι δεν μπορούν να γεμίσουν αν μιλάμε για την φυσική συνέχεια έτσι όπως την αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινή ζωή). Τα «κενά» αρχικά στον χ΄χ και στην συνέχεια στη γραφική παράσταση, όπως θα δούμε παρακάτω, «γεμίζουν» μόνο στο Αξιωματικό σύστημα των πραγματικών αριθμών).

Για τον καθηγητή, που ακολουθεί τον μαθηματικό ορισμό της συνέχειας, τα «κενά γεμίζουν»: Ο σύγχρονος ε –δ μαθηματικός ορισμός της συνέχειας συνάρτησης, μέσω του ορίου, βασίζεται, σύμφωνα με τους Lakoff και Nunez (1998) στην μεταφορά της «διατήρησης της εγγύτητας κοντά σε μια τοποθεσία» και όχι στην «απουσία αλμάτων κατά την κίνηση» που υποθέτουμε στην «φυσική» συνέχεια. Οι Lakoff και Nunez (1998) εξηγούν (όπως περιγράψαμε στο 3^{ο} Κεφάλαιο), ότι αυτό που κάνει είναι να εγγυηθεί ότι:

α) όταν οι γραμμές κατανοούνται ως σύνολα πραγματικών αριθμών και

β) όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι χωρίς κενά και

γ) η συνάρτηση διατηρεί την εγγύτητα σε αυτό το διάστημα , τότε

δ) και το σύνολο τιμών θα είναι επίσης χωρίς κενά.

Βασική προϋπόθεση (κατά τους Lakoff και Nunez, 1998) για να γίνει κατανοητός αυτός ο ορισμός είναι να έχει κατανοηθεί ότι η συνάρτηση πρέπει να ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα το οποίο είναι «χωρίς κενά»(ως υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών) που περιέχει το α. Το ανοιχτό διάστημα δεν είναι ένα τμήμα μια φυσικά συνεχούς γραμμής. Είναι ένα σύνολο διακριτών αριθμών και το «χωρίς κενά» αφορά κενά ανάμεσα σε αριθμούς που εξασφαλίζεται από το αξίωμα της πληρότητας. Με την προϋπόθεση ότι αυτό έχει γίνει κατανοητό, ο ε – δ ορισμός απλά πραγματοποιεί έναν ακριβή χαρακτηρισμό της έννοιας «αντίστοιχα»: δηλαδή αν δεν υπάρχουν κενά στο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το α τότε μέσω της συνάρτησης (θεωρούμενης ως κανόνας αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο συνόλων) τότε δεν θα υπάρχουν «κενά» (λόγω της διατήρησης της εγγύτητας κοντά στο f(α) αλλά και στο f(α)) και στο αντίστοιχο διάστημα που περιέχει το f(α). Και αν αυτό ισχύει για κάθε α του πεδίου ορισμού τότε το διάστημα που ορίζουν οι τιμές της συνάρτησης στον ψ΄ψ θα είναι ένα «χωρίς κενά» διάστημα και η συνάρτηση θα (λέμε ότι) είναι συνεχής. Να σημειώσουμε εδώ ότι η συνάρτηση πρέπει να ειδωθεί *αποκλειστικά* με τον τυπικό ορισμό της (δομικά) .

Αυτά προσπάθησε να περιγράψει στους μαθητές ο καθηγητής στην διδασκαλία που περιγράψαμε, χρησιμοποιώντας μια άτυπη αντίληψη του ορίου και της συνέχειας. Δέχεται, άρρητα, στη διδασκαλία του ότι τα σημεία που είναι κοντά στο $\sqrt{2}$ πάνω στον χ΄χ αντιστοιχούν σε σημεία που είναι κοντά στον $2^{\sqrt{2}}$ πάνω στον ψ΄ψ. Έτσι «εξασφαλίζει» το όριο (την «διατήρηση της εγγύτητας») και κατόπιν την συνέχεια, αφού το όριο είναι το $2^{\sqrt{2}}$. Στη συνέχεια λέει στους μαθητές ότι αυτό μπορεί να γίνει για κάθε χ πάνω στον χ΄χ («ο οποίος είναι χωρίς κενά, το δέχομαι «αξιωματικά») και άρα η γραφική παράσταση θα είναι «μια συνεχόμενη γραμμή». Η θεώρησή του δείχνει μια στατική αντίληψη του ορίου και της συνάρτησης. Βλέπει το όριο με όρους εγγύτητας και όχι κίνησης. Αλλά ταυτίζει την μαθηματική συνέχεια με την φυσική συνέχεια. Θεωρεί ότι η μαθηματική συνέχεια εκφράζει στην μαθηματική γλώσσα την «φυσική» συνέχεια (αυτό υπονοεί και το σχολικό βιβλίο Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου, σελ. 160). Όμως (Núñez, 2007 σελ. 152) «ο ε – δ φορμαλισμός είναι αντίθετος στην διαίσθηση και δύσκολος να συληφθεί γιατί χαρακτηρίζει μια διαφορετική κατηγορία καθημερινών ανθρώπινων ιδεών όπως η «διατήρηση της εγγύτητας» και η «απουσία κενών» που είναι αντίθετες με την συμπερασματική δομή της φυσικής συνέχειας». Οι Lakoff και Nunez (2000) θεωρούν ότι η έννοια της μαθηματικής συνέχειας είναι μία διαφορετική έννοια από αυτήν της «φυσικής συνέχειας». Λένε (σελ. 274) «Αυτό

δεν σημαίνει ότι τέτοιες ιδιότητες ολοκληρωτικά μοντελοποιούν την καθημερινή έννοια του φυσικά συνεχούς χώρου».

Επίσης, για να εκτιμήσουμε καλύτερα τα παραπάνω, ας δούμε πως γίνεται η συνήθης εισαγωγή των μαθητών της Γ΄ Λυκείου στην έννοια του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης:

Για το όριο:

http://www.study4exams.gr/math_k/mod/resource/view.php?id=667 (επίσημη ιστοσελίδα του ΥΠ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ Δ.Β.Μ.Θ.)

«Έστω η συνάρτηση f =…. που ορίζεται σε ένα διάστημα εξαιρουμένου ενός σημείου $χ_o$. Βάζουμε τιμές του χ πολύ κοντά στο $χ_o$, και κατασκευάζουμε τον πίνακα αντιστοίχων τιμών. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι αν βάλουμε τιμές του χ πολύ κοντά στο $χ_o$, το f(χ)παίρνει τιμές πολύ κοντά σε έναν αριθμό L. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε: το όριο της f καθώς το χ τείνει στο $χ_o$ είναι L.»

Επιπλέον, στο βιβλίο γίνεται πρώτα μια «διαισθητική» προσέγγιση του ορίου με δυναμικούς όρους (κίνηση) βασισμένη στη συνέχεια διαφόρων γραφικών παραστάσεων που δίνονται ως παραδείγματα.

Για την συνέχεια συνάρτησης στο $χ_o$:

http://www.study4exams.gr/math_k/mod/resource/view.php?id=740 (επίσημη ιστοσελίδα του ΥΠ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ Δ.Β.Μ.Θ.)

Η εισαγωγή στην συνέχεια στο $χ_o$ δίνεται από τον συνήθη ορισμό που απαιτεί η συνάρτηση (της οποίας το πεδίο ορισμού της θεωρείται ένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων) να ορίζεται στο $χ_o$ και το όριο στο $χ_o$ να είναι ίσο με το f($χ_o$).

Συνοψίζοντας, η κριτική του Núñez (2007) είναι:

- *το «μικρές αλλαγές στο χ αντιστοιχεί σε μικρές αλλαγές στο ψ» είναι μια πολύ καλή περιγραφή για το τι είναι διαισθητικό στον ε – δ ορισμό. Έχει τις σωστές στατικές έννοιες και αναδεικνύει τις σωστές μεταξύ τους σχέσεις. Αλλά αυτό που λείπει είναι ακριβώς η ανάγκη της ερώτησης για τα Μαθηματικά, δηλαδή την ακριβή μαθηματικοποίηση της «φυσικής συνέχειας» που υπονοεί ότι με αυτόν τον τρόπο εκφράζει. Αυτό που λείπει είναι ότι, γνωσιακά μιλώντας, η πρόταση αυτή δεν χαρακτηρίζει την φυσική συνέχεια που προέρχεται από την κίνηση.*

- Σε μια φυσικά συνεχή γραμμή «απουσία κενών» σημαίνει απουσία αλμάτων – χασμάτων κατά την κίνηση που την παράγει : σημαίνει ότι έχεις περάσει (κατά την κίνηση) από όλα τα σημεία – τοποθεσίες πάνω στην γραμμή. Η συνέχεια, λοιπόν, μιας φυσικά συνεχούς γραμμής, σημαίνει ότι ιχνογραφείται από την κίνηση, μέσα στο χρόνο και ότι το ίχνος της κίνησης είναι μια στατική ολιστική γραμμή χωρίς «άλματα».

- Τίποτα από αυτά δεν εμφανίζονται στον τυπικό ορισμό της συνέχειας ο οποίος βασίζεται σε μια τελείως διαφορετική μεταφορά την Διατήρηση της εγγύτητας κοντά σε μια τοποθεσία. Αυτή η θεώρηση δεν έχει κίνηση και συνεπώς δεν έχει και «άλματα». Δεν είναι ίδια ιδέα με την «φυσική συνέχεια». Πολλοί όμως εκπαιδευτικοί και μαθηματικοί, σκεπτόμενοι ότι μπορούν να διδάξουν μαθηματικά αφήνοντας τα ίδια τα μαθηματικά ανέγγιχτα (έξω από την συζήτηση), πιστεύουν ότι το πρόβλημα με την φυσική συνέχεια είναι ότι δεν είναι αρκετά ακριβής και πιστεύουν ότι ο ε – δ ορισμός α) την κάνει ακριβή και β) γενικεύει την ιδέα της φυσικής συνέχειας. Αλλά αυτό δεν είναι αλήθεια.

-Το πρόβλημα δεν είναι στην «δυσκολίες της έννοιας της συνέχειας» αλλά ξεκινούν από την εσφαλμένη πεποίθηση (και από τους καθηγητές και από τους μαθητές) ότι ο φορμαλισμός γενικεύει και κάνει τις διαισθητικές ιδέες πιο ακριβείς.

Από την ανάλυση της διδασκαλίας που κάναμε παραπάνω φαίνεται ότι αυτές οι απόψεις δίνουν μια πειστική ερμηνεία στο γιατί ο Γιάννης1 (και οι συμμαθητές του) δεν μπόρεσαν να καταλάβουν γιατί «γέμισαν τα κενά». Σίγουρα το κλειδί είναι το ότι δεν έχουν μια ικανοποιητική κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Δεν φαίνεται ότι το πρόβλημα λύνεται με το να μην ορίζουμε την γραμμή μέσω της κίνησης. Παλαιότερα η ευθεία διδασκόταν στην Γεωμετρία του Λυκείου «σαν ένα υποσύνολο του γεωμετρικού χώρου που είναι ένα μη κενό σύνολο που τα στοιχεία του τα ονομάζουμε γεωμετρικά σημεία» (Παπαμιχαήλ, Δ., Σκιαδά, Α.(1979) *Θεωρητική Γεωμετρία* Εκδ. ΟΕΔΒ, Αθήνα 1979). Προφανώς αυτή η θεώρηση δημιουργούσε περισσότερα προβλήματα και αντικαταστάθηκε.

Σίγουρα όμως πρέπει να είμαστε ενήμεροι για το ποια γλώσσα χρησιμοποιούμε και για το ποια εικόνα για τα Μαθηματικά δίνουμε στους μαθητές μας. Σίγουρα πρέπει να διαπραγματευόμαστε τα μαθηματικά νοήματα μέσα στην τάξη, με μεγαλύτερο ενδιαφέρον για την σκέψη των μαθητών. Σε αυτή την εργασία δοκιμάσαμε κάποιους πιθανούς δρόμους για την διδασκαλία των πραγματικών αριθμών σε μαθητές της Β΄ Λυκείου με σκοπό να προετοιμαστούν για την Ανάλυση της Γ’ Λυκείου. Προσπαθήσαμε , μέσα από την ανάλυση της διδασκαλίας, να δούμε ποιοι από αυτούς έχουν κάποια δυνατότητα να οδηγήσουν τους μαθητές σε μια καλύτερη κατανόηση των πραγματικών αριθμών και ποιοι κινούνται σε λάθος κατεύθυνση. Αναδείξαμε επίσης ότι, αν μιλάμε για μια διδασκαλία που να έχει νόημα για τους μαθητές και άρα να είναι αποτελεσματική, θα πρέπει ο καθηγητής να έχει μια διαφορετική αντίληψη για την διδακτική πρακτική του, να μην έχει τον ρόλο του κατόχου της «απόλυτης» μαθηματικής γνώσης αλλά να «κάνει την ίδια την μαθηματική γνώση το κέντρο της διαπραγμάτευσης των νοημάτων ανάμεσα

στον καθηγητή και τους μαθητές» κατά τον Steinbring (1992) ή ισοδύναμα, να μη σκεφτόμαστε ότι « μπορούμε να διδάξουμε τα μαθηματικά αφήνοντας τα ίδια τα μαθηματικά ανέγγιχτα (έξω από την συζήτηση)» όπως λέει ο Núñez (2007) (ποιο αναλυτικά οι ιδέες τους στο 2^{ο} Κεφάλαιο).

Για να μπορούμε όμως να έχουμε μια αποτελεσματική επικοινωνία με τους μαθητές πρέπει να έχουμε μια αρχική, τουλάχιστον, κατανόηση της σκέψης τους αλλά και μια «συνειδητοποίηση για τις μετα – μαθηματικές διαφορές στις πεποιθήσεις μας με τους μαθητές»(Sfard,1994a, δες στο 2^{ο} Κεφάλαιο). Σε αυτό ακριβώς το σημείο ελπίζω ότι αυτή η εργασία ίσως προσέφερε κάποιες ιδέες, οι οποίες θα μπορούσαν να μας προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες στην τάξη ή στην έρευνα για να κατανοήσουμε περισσότερο την σκέψη των μαθητών και να επιτύχουμε μια καλύτερη μαθηματική επικοινωνία μαζί τους και συνεπώς και μια περισσότερο αποτελεσματική διδασκαλία.

Συμπεράσματα – Συζήτηση

Μέσω της εκθετικής συνάρτησης οι μαθητές, έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια του πραγματικού αριθμού έτσι όπως τον αντιμετωπίζει η Ανάλυση, που θα διδαχθούν στην Γ΄ Λυκείου, και στην οποία κατέχει κεντρική θέση. Από τι προηγούμενες τάξεις η γνώση των μαθητών για τους πραγματικούς αριθμούς είναι αποσπασματική και προβληματική από πολλές απόψεις, όπως διαπιστώσαμε στην ανάλυση του Ερωτηματολογίου. Σε αυτή την εργασία θεωρήσαμε ότι η εκθετική συνάρτηση θα μπορούσε να αποτελέσει μια ευκαιρία να συζητηθούν με τους μαθητές διάφορες πλευρές των πραγματικών αριθμών, των ιδιοτήτων τους και της σημασίας τους.

Στην πειραματική διδασκαλία, που παρουσιάσαμε στο 5^{ο} Κεφάλαιο, είδαμε, αρχικά, με πιο τρόπο η διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης θα μπορούσε να προσφέρει ευκαιρίες για την κατανόηση από τους μαθητές των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και παρά το ότι δεν δόθηκε αρκετός χρόνος στους μαθητές, από το ερωτηματολόγιο φάνηκε ότι υπήρξε θετική ανταπόκριση. Αυτό το κομμάτι της ερευνητικής διδασκαλίας βασίστηκε σε μια καλοδουλεμένη θεωρία, αυτή της Confrey και των συνεργατών της, η οποία προσφέρει, με έναν βιωματικό τρόπο, μια διαφορετική θεώρηση για την κατασκευή μιας κατηγορίας των πραγματικών αριθμών, τις δυνάμεις. Η ιδέα ότι δεν υπάρχει ένας μόνο τρόπος κατασκευής των πραγματικών αριθμών είναι σημαντική, κατά την γνώμη μας, και μπορεί να

καθοδηγήσει την σκέψη μας και την σκέψη των μαθητών σε μια θεώρηση των πραγματικών αριθμών που να ξεφεύγει από τους απλούς ορισμούς ή τις εύκολες «ερμηνείες» για την ανάγκη επέκτασής τους και μπορεί να οδηγήσει σε μια βαθύτερη θεώρηση και κατανόηση της φύσης τους. Η θεωρία της Confrey και των συνεργατών της αναδεικνύει επίσης την σημασία της θεώρησης της συνάρτησης ως μια σχέση συμεταβολής δύο μεταβλητών, μια έννοια της συνάρτησης που συχνά υποτιμούμε στο Λύκειο. Βασιστήκαμε σε αυτήν την θεωρία για να προχωρήσουμε στην, βιωματική, «κατασκευή» της δύναμης με άρρητο εκθέτη όπου και πάλι είδαμε (στο 5^{ο} Κεφάλαιο) ότι είναι σημαντική η θεώρηση της συνάρτησης όπως προτείνει η Confrey και οι συνεργάτες της. Η «κατασκευή» αυτή νομίζουμε, ότι θα μπορούσε να αποτελέσει μια ισχυρή βιωματική βάση για την έννοια του πραγματικού αριθμού στους μαθητές.

Στην συνέχεια της πειραματικής διδασκαλίας προσπαθήσαμε να «αιτιολογήσουμε» στους μαθητές το πώς θεωρούμε στα μαθηματικά την έννοια του πραγματικού αριθμού και να αναδείξουμε την σύνδεσή του με τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Από την ανάλυση της πειραματικής φάνηκαν κάποια βαθύτερα προβλήματα που σχετίζονται με την διδασκαλία των πραγματικών αριθμών που έχουν να κάνουν και με τον τρόπο που τους διδάσκουμε και με τις επιπτώσεις αυτής της διδασκαλίας στη μη κατανόηση από τους μαθητές, ουσιαστικά, όλων των άλλων εννοιών της Ανάλυσης. Όπως αναλύσαμε στο μέρος αυτό της εργασίας το βασικότερο πρόβλημα για την διδασκαλία των πραγματικών αριθμών στο Λύκειο, είναι ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη μας την σκέψη των μαθητών για αυτούς, αλλά απλά προσπαθούμε να επιβάλλουμε, και πιθανώς χωρίς να έχουμε συνείδηση για το τι ακριβώς κάνουμε, έναν ψευδο – φορμαλισμό που φυσικά είναι κενός νοήματος για τους μαθητές. Πιστεύω ότι οι περισσότεροι καθηγητές των Μαθηματικών επιδιώκουν την βαθύτερη επικοινωνία με τους μαθητές τους στην προσπάθειά τους να τους βοηθήσουν να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Στην περίπτωση της διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών όμως η επικοινωνία αυτή φαίνεται να μην επιτυγχάνεται. Ο λόγος νομίζουμε, είναι ότι δεν έχουμε μια αρκετά καλή κατανόηση της σκέψης των μαθητών για τους πραγματικούς αριθμούς και αυτό εμποδίζει και την επικοινωνία μας μαζί τους και την αναζήτηση νέων, πιο αποτελεσματικών αλλά και πιο ουσιαστικών διδακτικών πρακτικών που να λαμβάνει υπόψη της τις προσεγγίσεις και τις τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές κάνοντάς τις κεντρικό θέμα στην διαπραγμάτευση των μαθηματικών νοημάτων ανάμεσα στον καθηγητή και τους μαθητές.

Η εργασία αυτή, νομίζουμε ότι κάνει κάποια βήματα προς αυτές τις κατευθύνσεις και αυτός ήταν, άλλωστε, και ο σκοπός της.

Πρόταση για περαιτέρω έρευνα

Ιδιαίτερο βάρος πρέπει να δοθεί στην, παραμελημένη από τα σχολικά βιβλία, έννοια της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Κάποιοι ερευνητές (Núñez- Lakoff, 1998 , Merenluoto-Palonen,2007) προτείνουν ότι θα έπρεπε να εξηγήσουμε στους μαθητές τις εννοιολογικές μεταφορές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί στις ερμηνείες τους για τους πραγματικούς αριθμούς. Νομίζουμε ότι θα έπρεπε να διερευνηθεί, σε έρευνα με μαθητές, αν αυτό θα μας προσέφερε κάποια ευκαιρία να κατανοήσουμε καλύτερα την σκέψη τους ή αν θα μπορούσε να κάνει την επικοινωνία μας μαζί τους καλύτερη ή αν θα βοηθούσε την κατανόησή τους. Αν κινηθούμε σε μια τέτοια κατεύθυνση, ίσως θα μας ήταν χρήσιμη η παρακάτω περιγραφή για την ευθεία των πραγματικών αριθμών, με την οποία κλείνουμε την εργασία αυτή:

> «Καλούμε «ευθεία των πραγματικών αριθμών» το σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται τότε ως σημεία της ευθείας. Για τα σημεία χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα με τους πραγματικούς αριθμούς. Η ταυτοποίηση αυτή βασίζεται σε αξίωμα της Αναλυτικής Γεωμετρίας.
>
> **Την μεταφορά αυτή της γλώσσα της Γεωμετρίας στην θεωρία των πραγματικών αριθμών** την κάνουμε ανεξάρτητα από τις έννοιες και τις αντίστοιχες προτάσεις της Γεωμετρίας. Δηλαδή δεν χρησιμοποιούμε για την απόδειξη των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών έννοιες και θεωρήματα της Γεωμετρίας. Η θεμελίωση της Γεωμετρίας παρουσιάζει της ίδιες δυσκολίες (ή μάλλον μεγαλύτερες) με την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, οπότε δεν πρόκειται να ωφεληθούμε αν θελήσουμε να προτάξουμε την Γεωμετρία από την Ανάλυση.
>
> Παλαιότερα αυτό γινόταν συχνά και πολλές αποδείξεις βασικών θεωρημάτων της Ανάλυσης στηρίζονταν σε προτάσεις της Γεωμετρίας. Σήμερα επιδιώκεται το οικοδόμημα της Ανάλυσης να είναι απαλλαγμένο από την Γεωμετρία **από παλιά δε συνήθεια** διατηρήθηκε **η γλώσσα** της Γεωμετρίας και τα Γεωμετρικά σχήματα, τα τελευταία δε χρησιμοποιούνται κυρίως για τους αναγνώστες εκείνους που δεν έχουν αρκετά ανεπτυγμένο «τον αναλυτικό τρόπο σκέψης», ώστε να

κατατοπίζονται και να κατανοούν με την βοήθεια της εποπτείας, ευκολότερα τις αναλυτικές αποδείξεις.»

(**Κάππος, Δ. (1962): Μαθήματα Αναλύσεως. Απειροστικός Λογισμός Τεύχος Α Αθήνα 1962**)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1	Bagni, G., (2003) *Historical roots of limit notion: Development of its representation registers and cognitive development* Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education
2	Berge, A. (2008) *The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis* Educational Studies in Mathematics 67 (p. 217 - 235)
3	Biza, I., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2005). *Conceptual change in advanced Mathematical thinking* Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (17-21 Feb. 2005)
4	Boyer, C. – Merzbach, U. (1997) *Η Ιστορία των Μαθηματικών* Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού Αθήνα
5	Boyer, C. B. (1949). The history of calculus and its conceptual development . New York: Dover Publications.
6	Boyer, C., - Merzbach, U.,(1997) *Η Ιστορία των Μαθηματικών* Εκδόσεις Πνευματικού (2η έκδοση)
7	Clément, P. (2003) *Situated conceptions and obstacles. The example of digestion/excretion'*, in D.Psilos et al., Science Education Research in the Knowledge-Based Society, Kluwer Academic Publishers, p.89-98.
8	Confrey, J (1994 - 3) *Splitting, Similarity, and Rate of Change: A New Approach to Multiplication and Exponential Functions* The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics Edited by Guershon Harel and Jere Confrey State University of New York Press
9	Confrey, J. - Smith, E. (1994 - 1) *Exponential functions, rates of change, and the multicative unit* Educational Studies in Mathematics 26: 135-164, 1994
10	Confrey, J. - Smith, E. (1994 - 2) Multiplicative Structures and the Development of Logarithms: What Was Lost by the Invention of Function? The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics Edited by Guershon Harel and Jere Confrey State University of New York Press
11	Confrey, J., Harel G. (1994) The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics, (Introduction) Edited by Guershon Harel and Jere Confrey State University of New York Press
12	Cornu, B. (1991). *Limits* In Advanced Mathematical Thinking, edited by Tall, D. ME Library: Kluwer Academic Press: 153-166.
13	Cottrill, Jim, Dubinsky, Ed, Nichols, Devilyna, Schwingendorf, Keith, Thomas, Karen & Vidakovic, Draga (1996). *Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema*. Journal of Mathematical Behavior, 15, 167–192.
14	David Tall & Mikhail Katz (2010 x) *A Cognitive Analysis of Cauchy's Conceptions of Continuity, Limit, and Infinitesimal, with implications for teaching the calculus.* (Submitted for publication.) http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html
15	Dubinsky, E., & MacDonald, M. (2001). APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 273–280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
16	Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis, Part 1*. Educational Studies in Mathematics, 58, 335–359.

17	Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A., & Brown, A. (2005b). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2*. Educational Studies in Mathematics, 60, 253-266.
18	Dubinsky, E., Weller, K., Stringer, C. & Vidakovic, D. (2008). *Infinite iterative process: the tennis ball problem*. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 1(1), 99-121.
19	Dubinsky,E., Weller, K., McDonald M., and Brown, A. (2005) *Some historical issues and paradoxes regarding the infinity concept: an APOS analysis, Part 1.* Educational Studies in Mathematics, Educational Studies in Mathematics 58 (2005) 335–359
20	Dunham, W., (2005) *The Calculus Gallery Masterpieces from Newton to Lebesgue* Pnnceton University Press
21	Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). *Geometric and algebraic approaches in the concept of " limit" and the impact of the " didactic contract"*. International Journal of Science and Mathematics Education, 7, 765-790.
22	Elstak, Iwan,.(2007). *College students' understading of rational exponents: A teaching experiment,* DISSERTATION http://etd.ohiolink.edu/send-pdf.cgi/Elstak%20Iwan%20Rene.pdf?acc_num=osu1186505864
23	Ely, R. (2007): *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus*. PhD thesis, The University of Wisconsin - Madison, 2007.
24	Fischbein, E. - Jehiam, R. - Cohen, D., (1995) *The concept of irrational numbers in high - school students and prospective teachers,* Educational Studies in Mathematics 29: 29-44, 1995.
25	Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics, Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
26	Fischbein, E. (1999) *Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning* Educational Studies in Mathematics 38: 11–50, 1999.
27	Fischbein, E. (2001) '*Tacit models and infinity*' ,Educ. Studies in Math., 48, 309-329.
28	Fischbein, E., Tirosh, D., & Hass, P. (1979*). The intuition of infinity*. Educational Studies in Mathematics, 10, 3-40.
29	Fischbein, E.: 1993, 'The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity', in R. Biehler, R. Scholz, R. Straser, and B. Winkelmann (eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 231–245.
30	Fischbein, E.: 1994, '*The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*', in R. Biehler, R. Scholz, R. Straser, and B. Winkelmann (eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 231–245.
31	Giannakoulias, E. - Souyoul, A. - Zachariades, T., (2007) *Students Thinking About Fundamental Real Numbers Properties* CERME 5 2007
32	Giaquinto, M.(2002) *The Search for Certainty: a philosophical account of the foundations of mathematics*, Oxford University Press, (2002).
33	Grabiner,J. (1983) *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus,* American Mathematical Monthly 90 (1983), 185-194
34	Greer, B. (2004) *The growth of mathematics through conceptual restructuring* Learning and Instruction 14 (2004) 541–548
35	Juter, K.(2007) Students' Concept Development of Limits CERME 5 (2007)
36	Juter, K.(2009) *Conceptual Change and Conections in Analysis* Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France

37	Katz, V. (1995) *Napier's logarithms adapted for today's classroom*. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (Eds.), Learn from the masters (pp. 49-56). Washington, DC: Mathematical Association of America.
38	Katz, V. (1998) *A History of Mathematics An Introduction* ADDISON-WESLEY
39	Lakoff, G. & Núñez, R. E., (2000) *Where mathematics comes from. How the Embodied minds brings mathematics into being*, New York: Basic Books.
40	Lehtinen, E., Merenluoto, K., & Kasanen, E. (1997) *Conceptual change in mathematics: from rational to (un)real numbers.* European Journal of Psychology of Education, XII(2), 131–145
41	McGowen, M. & Tall, D. (2010b). *Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics*. Journal of Mathematical Behavior 29, 169–179.
42	Merenluoto, K. - Palonen, T., (2007) *When We Clashed with the Real Numbers: Complexity of Conceptual Change in Number Concept RE-FRAMING THE CONCEPTUAL CHANGE APPROACH IN LEARNING AND INSTRUCTION Copyright © 2007 Elsevier Ltd.*
43	Merenluoto, K. – Lehtinen, E. (2002) *Conceptual Change in Mathematics: Understanding the Real Numbers* Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice Edited by Margarita Limón and Lucia Mason KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS (2002)
44	Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002) *Conceptual change in mathematics: understanding the real numbers* M. Limón & L. Mason (Eds.), Reconsidering Conceptual Change. Issues in Theory and Practice, 233-257. © 2002 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
45	Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2004) *Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change,* Learning and Instruction 14 (2004) 519–534
46	Merenluoto, K. and Palonen, T (2007). *When we Clashed with the Real Numbers: Complexity of Conceptual Change in Number Concept.* In: S. Vosniadou,. A. Baltas,. and X. Vamvakoussi, (eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction.* Oxford: Elsevier, (pp. 247-263).
47	Núñez R. (2003). *Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Cognition*. In B. Baaquie & P. Pang (Eds.) Metaphor and Contemporary Science (pp. 49-72). University Scholars Occasional Papers Series. Singapore: National University of Singapore.
48	Núñez, R. & Lakoff, G. (2005). *The Cognitive Foundations of Mathematics*: *The Role of Conceptual Metaphor*. In J. Campbell (ed.) Handbook of Mathematical Cognition. New York: Psychology Press.
49	*Núñez R. (2007). The Cognitive Science of Mathematics: Why is it relevant for Mathematics Education?* In R. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput (Eds.), Foundations for the Future in Mathematics Education (pp. 127 – 154)
50	Núñez, R. (2000 a). *Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics*. Opening plenary address in Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol 1. 1, pp. 3–22. Hiroshima, Japan.
51	Núñez, R., Edwards, L. & Matos, J.F.,(1999) *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education*, Educational Studies in Mathematics, (39), pp. 45-65

52	Núñez, R. & Lakoff, G. (1998). *What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and epsilon-delta continuity*. Mathematical Cognition, 4 (2), 85 - 101.
53	Pitta-Pantazi,Demetra - Christou, Constantinos - Zachariades,Theodossios (2007) *Secondary school students' levels of understanding in computing exponents,* Journal of Mathematical Behavior 26 (2007) 301–311
54	Prediger, S. (2008). *The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions*.Learning and Instruction 18(1)2008, 3-17
55	Radu, I., Weber, K. (2009) *Conceptual Changes in Mathematics Majors' Understanding of Completed Infinite Iterative Processes* http://mathed.asu.edu/crume2009/Radu_LONG.pdf.
56	Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.
57	Sfard, A. (1992). *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification ¾ the case of function*. In Dubinsky, E. and Harel, G. (eds), The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes 25, (pp.59-84)
58	Sfard, A. (1994). *Reification as a birth of a metaphor*. For the Learning of Mathematics, 14(1), 44-55.
59	Sfard, A. (1994a). *Mathematical practices, anomalies and classroom communications problems.* In P. Ernest (Ed.), Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education (248-273). London: The Falmer Press.
60	Sfard, A. (2001d). *There is More to Discourse than Meets the Ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before*. Educational Studies in Mathematics, 46(1/3), 13-57.
61	Sirotic, N. & Zazkis, R., (2004). *Irrational numbers: Dimensions of Knowledge,* Proceedings of the conference for Psychology of Mathematics Education – North American Chapter. Vol. 1. (pp. 171-178). Toronto, Canada.
62	Sirotic, N. & Zazkis, R. (2005). Locating irrational numbers on a number line. *Proceedings of the Conference for Psychology of Mathematics Education – North American Chapter.* Roanoke, VA.
63	Steinbring, H. (1991). *Mathematics in teaching processes—the disparity between teacher and student knowledge.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 11, 65–107.
64	Tall, D. and Vinner, S.: 1981, '*Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*', Educational Studies in Mathematics 12, 151–169.
65	Tall, D.& Thomas, M.& Davis, G.& Gray E, & Simpson A. (2000) *What is the object of the encapsulation of a process?*, Journal of Mathematical Behavior, 18 (2), 1-19.
66	Tall, David (2004). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281–288.
67	Tall, D. (2001). Natural and Formal Infinities, *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2&3), 199–238.

68	Tall, D. (2003 a). *Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brazil.
69	Tirosh, D., & Tsamir, P. (2004). *What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education?* Learning and Instruction, 14(5), 535–540
70	Tynjälä P., Merenluoto K., Murtonen M. (2002) *What has been meant with 'concept' and 'change' in conceptual change studies? A framework for a meta-analytical study*, Proceedings of the third European Symposium on conceptual change: A process Approach to Conceptual Change, Turku, p.p. 28-45, σ.σ. 33-36
71	Vamvakoussi, X. - Vosniadou, S., (2004) *Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approatch* ,Learning and Instruction 14 (2004) 453 - 467
72	Vamvakoussi, X. - Vosniadou, S., (2007) *How many Numbers are there in a rational number interval? Constrains, syntetic models and the effect of the number line,* Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction Copyright © 2007 by Elsevier Ltd.
73	Vergnaud, G. (1994) *Multiplicative Conceptual Field: What and Why*? The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics Edited by Guershon Harel and Jere Confrey State University of New York Press
74	Vinner, Sh, (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 65-79). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
75	Weber, K. (2002). *Developing students' understanding of exponents and logarithms*. In Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of Mathematics Education (Vols. 1–4).
76	Zazkis, R., Sirotic, N. (2004) *Making Sense Of Irrational Numbers: Focusing On Representations* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 Vol 4 pp 497–504
77	Zazkis, R., Sirotic, N. (2007) *Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge* Educational Studies in Mathematics (2007) 65:49 - 76
78	Ανδρεαδάκης,Σ., Κατσαργύρης,Β., Παπασταυρίδης,Σ., Πολύζος,Γ. ,Σβέρκος Α. (1991, 1η έκδοση) Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα
79	Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ,. Πολύζος Γ. Σβέρκος Α. (2009) *Άλγεβρα Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου* Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα
80	Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος. Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης, Σ., Σιδέρης, Π., (2001) *Ευκλείδια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου* Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα
81	Αρτεμιάδης, Ν.(2000) *Ιστορία των Μαθηματικών από της σκοπιάς του Μαθηματικού.* Ακαδημία Αθηνών
82	Γιαννακούλιας, Ε., (2007) *Απειροστικός Λογισμός. Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.Χ έως και τον 19ο αιώνα* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα
83	Θωμαΐδης, Γ.(1985), *Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών*, Ευκλείδης Γ, 13(Γ), 1-31

84	Θωμαΐδης, Γ. (1985α) *Η διδασκαλία εννοιών της Ανάλυσης με οδηγό την Ιστορική εξέλιξη* Ε.Μ.Ε τεύχος 9,1985
85	Κλαουδάτος, Ν. (2008) *Σημειώσεις του μαθήματος Διδασκαλία των Μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων*, του Διαπανεπιστημιακού – Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ" του ΕΚΠΑ.
86	Νεγρεπόντης, Σ. (2008) *Σημειώσεις του μαθήματος Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ΕΚΠΑ Τμήμα Μαθηματικό
87	Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ, Γιαννακούλιας, Ε (1999): Απειροστικός Λογισμός, εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1999.
88	Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε. (1999) *Απειροστικός Λογισμός* Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα
89	Ντζιώρας, Η. - Πανάκης, Ι.,(1980) *Μαθηματικά, Άλγεβρα, Τριγωνομετρία Β΄ Λυκείου*, Αθήνα, Ο.Ε.Δ.Β
90	Ρουσόπουλος, Γ.(1999) *Μαθηματικός Ρεαλισμός* Εκδόσεις Γράμματα, Αθήνα
91	Σπύρου, Π. (2009) Επιστημολογίες για την Διδακτική των Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Μαθηματικό Αθήνα 2009
92	Σπύρου, Π., & Γαγάτσης, Α. (2004). Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και η διδακτική μεταφορά της. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία & Π. Σπύρου (Εκδ.), Αναπαραστάσεις και Γεωμετρία, Τόμος 1: Επίλυση Προβλημάτων, Μοντέλα και Συναρτήσεις (σσ. 287-302). Λευκωσία: Intercollege Press.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

[Πρώτη γνωριμία με την ιστορία και το σκεπτικό των λογαριθμικών πινάκων – Εξαγωγή των ιδιοτήτων των δυνάμεων]

ΑΝΤΙΠΑΡΑΒΟΛΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΣΤΟΥΣ ΑΡΧΑΙΟΥΣ – ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΧΡΥΣΗΣ ΤΟΜΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΛΟΓΟ 2

					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Ερμηνεία του όρου «λογάριθμος»:

Α) Με βάση τον παρακάτω πίνακα να διαπιστώσετε, με παραδείγματα, τις ιδιότητες των δυνάμεων

1) $4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3$

άρα: και γενικά:

$32 = 2^5$

2)

3)

4)

5)

Β) Αφού πρώτα συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα να ερμηνεύσετε τους ορισμούς των δυνάμεων με εκθέτη το 0, το 1, αρνητικό εκθέτη.

Γ) ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Δ) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ: ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Στον παραπάνω πίνακα αντιπαραβάλλονται μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά

ω = 1 και μία γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ = 2

- **Με κατάλληλα παραδείγματα να επιβεβαιώσετε τους παρακάτω κανόνες:**

Κανόνας 1: *Ο πολλαπλασιασμός 2 όρων της γεωμετρικής προόδου ανάγεται στην πρόσθεση των αντίστοιχων της αριθμητικής προόδου*

π.χ. 8·128 = 1024 και 3 + 7 = 10

Δηλαδή: Ο εκθέτης (λογάριθμος) του γινομένου δύο δυνάμεων ισούται με το άθροισμα των εκθετών τους (με το άθροισμα των λογαρίθμων τους).

Κανόνας 2: *Η διαίρεση 2 όρων της γεωμετρικής προόδου ανάγεται στην αφαίρεση των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής προόδου*

π.χ.

Δηλαδή:

Κανόνας 3: *Η ύψωση ενός όρου της γεωμετρικής προόδου σε εκθέτη ανάγεται στον πολλαπλασιασμό του αντίστοιχου όρου της αριθμητικής προόδου με τον εκθέτη της δύναμης*

π.χ.

Δηλαδή:

Κανόνας 4: *Η εξαγωγή ρίζας ενός όρου της γεωμετρικής προόδου ανάγεται στην διαίρεση του αντίστοιχου όρου της αριθμητικής προόδου με τον δείκτη της ρίζας*

π.χ.

Δηλαδή:

- **Προσπάθησε να επιβεβαιώσεις τους παραπάνω κανόνες και στους παρακάτω πίνακες:**

Α) Βάση το 3

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Β) Βάση το 1/2

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256

Γ) Βάση το 10

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	100000

- Στον πρώτο πίνακα: Αν ονομάσουμε τους όρους α_ι της αριθμητικής προόδου ως λογάριθμους με βάση το 2 των αντίστοιχων όρων γ_ι της γεωμετρικής προόδου και συμβολίσουμε με τον λογάριθμο του γ_ι με $\log_2 \gamma_\iota$, αν δηλαδή $\alpha_\iota = \log_2 \gamma_\iota$, ποια άλλη ισότητα μπορείτε να γράψετε για τους α_ι και γ_ι;

- **Γενικά:**

Ορισμός λογαρίθμου ενός *θετικού* αριθμού θ με βάση τον *θετικό* α με α≠1:

Δηλαδή ο λογάριθμος του θ με βάση το α είναι η λύση της εξίσωσης:

Αν η βάση είναι το 10:

Αν η βάση είναι ο e:

Ιδιότητες λογαρίθμων που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό:

Ιδιότητες λογαρίθμων (λογαριθμικοί κανόνες)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

ΤΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

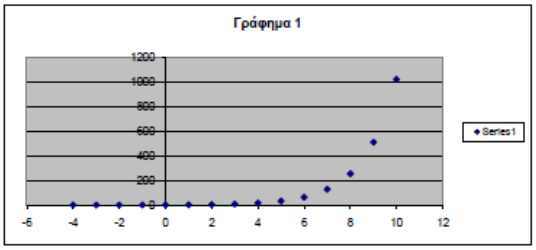
ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1) Στον παρακάτω πίνακα έχουμε μια "αντιπαράθεση" μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω = 1 και μιας γεωμετρικής με διαφορά λ = 2

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

2) Αν θεωρήσουμε τις τιμές της αριθμητικής προόδου ως χ και τις τιμές της γεωμετρικής προόδου ως ψ ποια σχέση συνδέει το κάθε ψ με το αντίστοιχο χ;

Στο παρακάτω γράφημα 1 έχουμε παραστήσει με σημεία τα ζεύγη (χ,ψ) του παραπάνω πίνακα



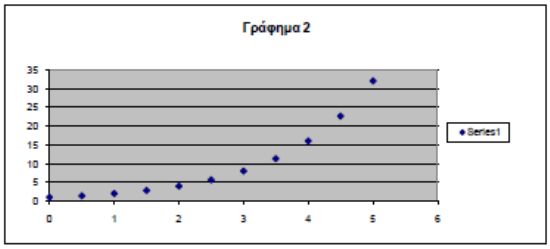
3) Πως θα μπορούσαμε να γεμίσουμε τα "κενά" ανάμεσα στα σημεία του παραπάνω γραφήματος και παράλληλα να παραμένει η πάνω σειρά αριθμητική ακολουθία και η κάτω γεωμετρική;

Ας περιοριστούμε στο διάστημα [0, 5]

0	α1	1	α2	2	α3	3	α4	4	α5	5
1	γ1	2	γ2	4	γ3	8	γ4	16	γ5	32

4) Μπορείτε να βρείτε τις τιμές που λείπουν;

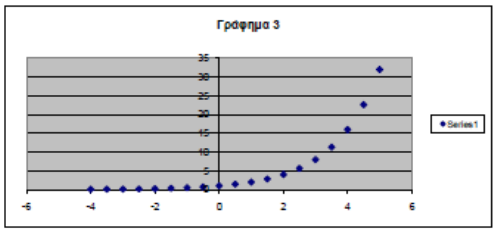
0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
1	1,414214	2	2,828427	4	5,6568542	8	11,31371	16	22,627417	32



5) Παραμένει η ίδια σχέση με πρίν για τα χ και ψ;

Στο παρακάτω γράφημα 3 παριστάνονται με σημεία όλα τα ζεύγη (χ,ψ) στο διάστημα (για το χ) [-4, 5]

-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0,0625	0,0883883	0,125	0,176777	0,25	0,353553	0,5	0,7071068	1	1,414214	2	2,8284271	4	5,656854249	8



6) Τι παρατηρείται στα γραφήματα 1 και 3;

7) Αν θέλουμε να "πυκνώσουμε" ακομα περισσότερο τα σημεία;

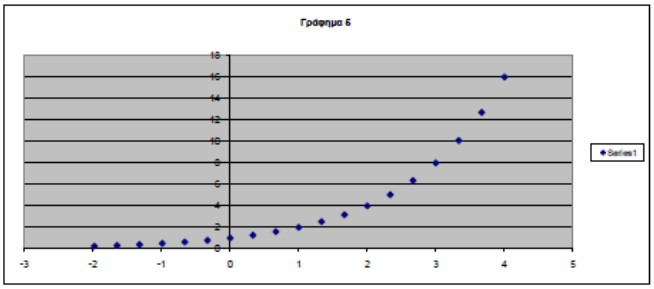
Ας περιοριστούμε στο διάστημα [0, 2]

0	α1	α2	1	α3	α4	2
1	γ1	γ2	2	γ3	γ4	4

8) Μπορείτε να βρείτε τις τιμές που λείπουν;

Στο παρακάτω γράφημα παριστάνονται με σημεία όλα τα ζεύγη (χ,ψ) στο διάστημα (για το χ) [-2, 4]

-1,98	-1,65	-1,32	-0,99	-0,66	-0,33	0	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67
0,25	0,3149606	0,396851	0,5	0,629960816	0,793701	1	1,2599208	1,5874	1,999999	2,51984	3,1747984	3,999994	5,039676049	6,349592471

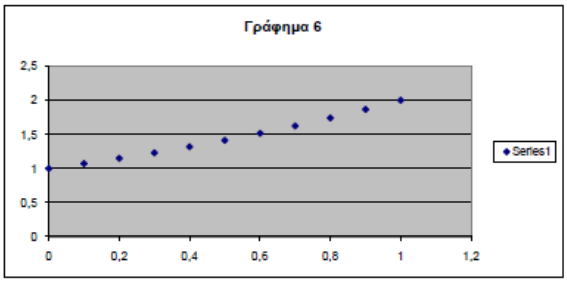


9) Να γεμίσουμε επιτέλους τα κενά:

Ας περιοριστούμε στο διάστημα [0, 1]
Θα χωρίσουμε το διάστημα σε 10 ίσα μέρη. **Γράψτε σε συμβολική μορφή τις τιμές της μεταβλητής ψ στον παρακάτω πίνακα**

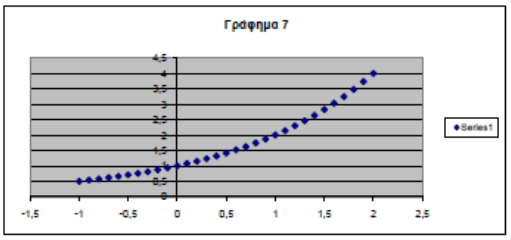
0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	1,071773	1,148698	1,231144413	1,319508	1,414214	1,5157166	1,624505	1,741101	1,866066	2

10) Πως θα ερμηνεύατε το 2^0.1 ; Σε τι διαφέρει από το 2^0.2
Ομοίως, πως θα ερμηνεύατε το 2^1.4 ;



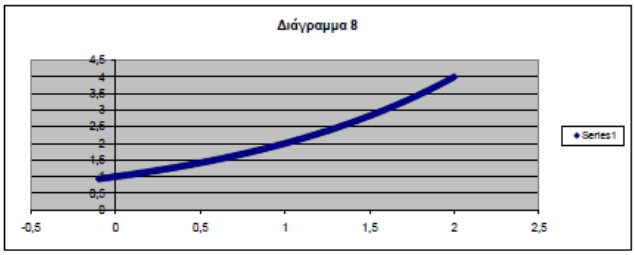
Στο παρακάτω γράφημα 7 παριστάνονται με σημεία όλα τα ζεύγη (χ,ψ) στο διάστημα (για το χ) [-1, 2]

-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,5	0,5358867	0,574349	0,615572	0,659753955	0,707107	0,757858	0,8122524	0,870551	0,933033	1	1,0717735	1,148698	1,231144413	1,319507911



Στον παρακάτω πίνακα και το αντίστοιχο διάγραμα έχουμε διαιρέσει το διάστημα [-0,1, 2] σε 100 ίσα κομμάτια

-0,1	-0,09	-0,08	-0,07	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0	0,01	0,02	0,03	0,04
0,933033	0,9395227	0,946058	0,952638	0,959264119	0,965936	0,972655	0,9794203	0,986233	0,993092	1	1,0069556	1,013959	1,021012126	1,028113827



Στο γράφημα 8 το διάστημα

για το χ είναι το [-0,1, 2]

11) Τελικά καταφέραμε να καλύψουμε τα κενά;

12) Μπορείτε να ερμηνεύσεται το 2^1,41 και το 2^1,42;

13) Πως θα προσεγγίζαμε το 2^ρίζα2 με την παραπάνω διαδικασία;

ρίζα 2 = 1.41421356237309504880168872420 97

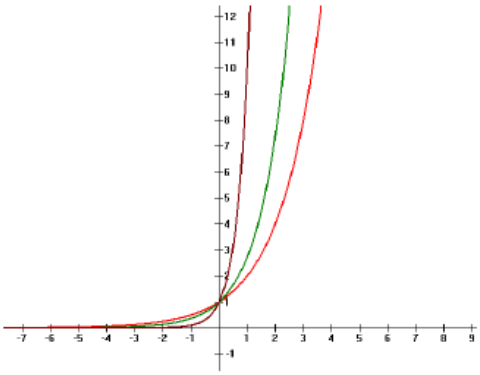
14) Πως μπορούμε να ορίζουμε το 2^ρίζα2;

15) Τελικά πως θα καλυφθούν όλα τα κενά;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = α^χ (αν α > 1)

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:
ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ:
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ:
ΤΟΜΗ ΜΕ ψ΄ψ:
ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ:

λ = 10η ρίζα του 2	**1,4**	**1,5**
	2,6390158	**2,8284271**
λ = 100η ρίζα του 2	**1,41**	**1,42**
	2,6573716	**2,675855**
λ = 1000η ρίζα του 2	**1,414**	**1,415**
	2,6647497	**2,66659735**
λ = 10000η ρίζα του 2	**1,4142**	**1,4143**
	2,6651191	**2,66530383**
λ = 100000η ρίζα του 2	**1,41421**	**1,41422**
	2,6651376	**2,66515604**
λ = 1000000η ρίζα του 2	**1,414213**	**1,414214**
	2,6651431	**2,66514495**
λ = 10000000η ρίζα του 2	**1,4142135**	**1,4142136**
	2,6651440	**2,66514421**



16)Αντιστοιχίστε τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις με τις συναρτήσεις:

α) ψ = 2^χ, β) ψ = 10^χ και γ) ψ = e^χ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΟ Β7

(ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

01.21.Κ: Το θέμα μας σήμερα είναι βασικά η συνάρτηση $\psi = \alpha^{\chi}$, που ονομάζεται εκθετική συνάρτηση. Αλλά παράλληλα, πριν φτάσουμε εκεί, μας ενδιαφέρει να δούμε κάποια άλλα θέματα, που προηγούνται στο να φτάσεις στην γραφική παράσταση.

01.54Κ: Τον τελευταίο καιρό έχουμε μιλήσει πολλές φορές για αυτήν την αντιπαράθεση της αριθμητικής με την γεωμετρική πρόοδο. Μέσα από αυτό το πινακάκι σας θυμίζω ότι έχουμε αρχικά διαπιστώσει τις ιδιότητες των δυνάμεων, μετά εξηγήσαμε την ονομασία του λογαρίθμου, μετά δώσαμε τον τυπικό ορισμό και διαπιστώσαμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων. Έχουμε κάνει πολλά και σήμερα θα κάνουμε άλλο ένα ωραίο μέσα από αυτό το πινακάκι, μέσα από αυτήν την αντιπαράθεση δύο διαφορετικών κόσμων. Πάνω είναι ο προσθετικός κόσμος, πάω συν ένα, και κάτω είναι ο πολλαπλασιαστικός κόσμος, πάω επί δύο.

03.43.Κ: Σε αυτό το πινακάκι, αν ονομάζαμε τις τιμές της αριθμητικής προόδου με χ και τις τιμές της γεωμετρικής προόδου με ψ, ποια σχέση συνδέει το χ με το ψ έτσι ώστε να προκύπτουν αυτές οι αντίστοιχες τιμές; Ποια είναι η συνάρτηση ας πούμε που εκφράζει το ψ ως προς το χ;

Μς: $\psi = 2^{\chi}$

Κ: Μάλιστα. Να το διαπιστώσουμε: αν βάλουμε στη θέση του χ το 2 θα βγει το 4, αν βάλουμε στην θέση το 3, θα βγει 8, σαφώς είναι αυτή η σχέση που βρήκαμε. Ποια θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η βασική ιδιότητα εδώ;

Μς: ……..

Κ: Κοιτάξτε κάτι που δεν το έχουμε σκεφτεί ίσως. Αν αυξήσω το χ κατά 1. Ας πούμε ότι το χ είναι 2 και το κάνω 3. Τα αντίστοιχα ψ θα είναι το 4 και το 8. Ομοίως, αν το χ είναι 5 και το αυξήσω κατά 1, θα γίνει 6. Τα αντίστοιχα ψ θα είναι το 32 και το 64.

Παναγιώτης: Γίνεται διπλάσιο.

Κ: Για να δούμε αυτό που λέει ο Παναγιώτης: Το 8 είναι διπλάσιο του 4, δηλαδή 8 δια 4 κάνει 2, και το 64 είναι διπλάσιο από το 32, δηλαδή 64 δια 32 κάνει 2. Αυτό τι σημαίνει; Ότι όταν το χ αυξάνεται κατά 1 το ψ διπλασιάζεται. Δηλαδή, έχουμε ένα ποσοστό με το οποίο μεταβάλλεται το ψ . Το ποσοστό αυτό ποιο είναι; Με ποιο ποσοστό μεταβάλλεται το ψ όταν το χ μεταβάλλεται κατά 1; Αφού διπλασιάζεται ποιο ποσοστό είναι;

Μς: 200%

05.56Κ: Δηλαδή το ψ μεταβάλλεται με ένα σταθερό ποσοστό, όταν το χ μεταβάλλεται κατά 1. Λοιπόν καλά. Αυτό το κρατάμε και πάμε λίγο στο φυλαδιάκι μας. Έχω παραστήσει με σημεία, όλα τα ζεύγη των αντιστοίχων τιμών. Από το διάστημα – 4 έως το 10. Και με το Excel, έχω βρει τα αντίστοιχα σημεία.

06.25.Κ: Αυτή είναι η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης; Αυτά τα σημεία; Ή για αυτό το πινακάκι τιμών;

Μς: ……

Κ: Μπορώ να βάλω και άλλες τιμές στο χ;

Μς: Όσες θέλουμε [εννοεί μεγαλύτερες του 10]

Κ. Τι τιμές να βάλω; Μπορώ να βάλω τιμές μεγαλύτερες του 10, αλλά τα κενά πως θα τα καλύψω ανάμεσα σε αυτά τα σημεία;

Δήμητρα: [νομίζω:] Πρέπει να βάλουμε τιμές ανάμεσα. Αλλά αυτό δεν…

Κ: Πρέπει να βάλουμε νέες τιμές εδώ μέσα. Να προσπαθήσουμε να καλύψουμε τα κενά; Γιατί όπως ξέρετε εσείς, όλες οι γραφικές παραστάσεις που σας έχουνε δοθεί, είναι συνεχόμενες γραμμές. Αλλά πως βγαίνει αυτό το συνεχόμενο; Για να δούμε ένα παράδειγμα εδωπέρα.

07.35Κ: Θα προσπαθήσουμε σε πρώτη φάση, να χωρίσουμε το διάστημα [0,1] και [1,2] στη μέση. Άμα το χωρίσουμε στην μέση: πάνω θα βάλουμε το ½ έτσι; Το ½ είναι το μισό του 1; Ναι γιατί ½ και ½ κάνει 1. Αλλά από κάτω ποιο είναι το μισό; Σας θυμίζω ότι από πάνω είναι αριθμητική πρόοδος και από κάτω είναι γεωμετρική. Τι σημαίνει αυτό; Αυτό σημαίνει ότι πάνω πάω προσθετικά, κάθε φορά προσθέτω το 1, έχω έναν προσθετικό κόσμο από πάνω. Και από κάτω πάω πολλαπλασιαστικά, κάθε φορά πολλαπλασιάζω με το 2.

Κωνσταντίνος: ρίζα 2

Κ: Η μονάδα από πάνω ποια είναι; Η μονάδα στον προσθετικό μου κόσμο ποια είναι;

Μς: το 1

Κ: και η μονάδα στον πολλαπλασιαστικό κόσμο;

Μς: το 2

Κ: Ωραία. Άρα λοιπόν τι θα βάλω εδώ πέρα στον πολλαπλασιαστικό κόσμο.

Μς: Ρίζα 2

Κ: Λένε ρίζα 2. Να το αποδείξουμε. Στο πινακάκι έχω βάλει πάνω $α_1$ και κάτω $γ_1$. Θέλω να βάλω κάτι εδώ πέρα, ώστε να διατηρείται ο προσθετικός κόσμος, δηλαδή η αριθμητική πρόοδος, και από κάτω να διατηρείται ο γεωμετρικός κόσμος, δηλαδή η γεωμετρική πρόοδος. Να μην χαλάει η γεωμετρική πρόοδος.

Δηλαδή, για να διατηρείται η αριθμητική πρόοδος πρέπει να έχω $α_1 – 0 = 1-α_1$.

Το θυμάστε αυτό; Η διαφορά πρέπει να είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει αριθμητική πρόοδος. Και από κάτω θέλω το $γ_1/1 = 2/γ_1$. Δηλαδή οι λόγοι να είναι ίσοι, δηλαδή γεωμετρική πρόοδος. Πάνω λοιπόν, αν λύσω ως προς $α_1$ θα μου δώσει (1 + 0)/2 και κάτω $\gamma_1^2 = 2\cdot 1$. Τι σας θυμίζουν αυτά;

Μς: Τον αριθμητικό μέσο και τον γεωμετρικό μέσο.

Κ: Γιατί τα είπαν μέσους; Για κοιτάξτε ο αριθμητικός μέσος. Γιατί το είπαν έτσι; Είναι στην μέση έτσι; Είναι το μισό του 1. Γιατί; Γιατί δύο φορές το ½ [1/2 και ½] [αν το προσθέσω με τον εαυτό του] μου κάνει 1. Το ρίζα 2 τώρα είναι στη μέση γιατί; Είναι στην μέση πολλαπλασιαστικά γιατί αν το πολλαπλασιάσω με τον εαυτό του 2 φορές μου κάνει 2. Άρα είναι το μισό του 2 με αυτήν την έννοια. Πολλαπλασιαστικά έτσι;

11.35Κ: Και εδώ πέρα τι μπαίνει;

Μς: ……..

Κ: Πάνω είναι 3/2, δηλαδή ένα και μισό.

Μ: ρίζα 3;

Κ: Ρίζα 3 όχι

Μ: ρίζα 2 δεύτερα;

Κ: όχι

Κ: ένα και μισό πολλαπλασιαστικά

Μς: 2 ρίζα 2.

Κ: Πράγματι το 2 ρίζα2 είναι ο μέσος του 2 και του 4, αφού το τετράγωνό του κάνει 2·4. Άρα πάμε καλά. Πάμε με γεωμετρική πρόοδο.

Κ: Μετά τι θα μπει;

Μς: 5/2 και 4 ρίζα2.

Κ: Ωραία. Η επόμενη ερώτηση είναι η εξής: διατηρείται η σχέση $\psi = 2^{\chi}$; Το πινακάκι αυτό τώρα αντιστοιχεί σε μια άλλη συνάρτηση ή στην ίδια;

Μς: Στην ίδια.

Κ: Γιατί;

Γιάννης: Γιατί την επαληθεύει. Αν βάλλουμε στην θέση του ψ ρίζα2….

Κ: Ναι, και στην θέση του χ ½, παίρνουμε $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Ισχύει αυτό;

Γιάννης: Ναι.

Κ: Ποιος μας το λέει αυτό;

Γιάννης: Το ρίζα 2 από τις ιδιότητες των δυνάμεων μπορούμε να το κάνουμε 2 εις την ½.

Κ: Δεν είναι ιδιότητα είναι ορισμός.

Γιάννης: Ναι

Κ: Και ποιος τον λέει αυτόν τον ορισμό;

Γ: Α, τώρα…

Κ: Εγώ θέλω να το πιάσουμε από κει. Μας είπανε κάποιοι ότι $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. [Μιλάμε και για το $2^{3/2}$ ότι κάνει 2·ρίζα2] Και γενικά ο ορισμός λέει ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} = \alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}$. Γιατί το λέει αυτό ο ορισμός;

Βλέπουμε εδώ πέρα μια αιτία που λέει αυτόν τον ορισμό; Θα έπρεπε τα δύο πινακάκια να αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση; Είναι ο ίδιος νόμος; Ποιος είναι ο νόμος που διέπει το πάνω πινακάκι;

Μς: ….

Κ: Ο νόμος που είπαμε πριν είναι ότι αν αυξήσω το χ κατά ένα, τότε το ψ αυξάνεται με σταθερό ποσοστό. Αν ο νόμος αυτός ισχύει και για το κάτω πινακάκι τότε μιλάμε για την ίδια συνάρτηση. Γιατί κάθε συνάρτηση ορίζεται από κάποιο νόμο που συνδέει τα χ με τα ψ. Για να δούμε ισχύει αυτός ο νόμος εδώ. Ας πάρω για χ το ½. Το αυξάνω κατά 1, πάει 3/2. Το ψ πάει ρίζα2 και μετά πάει 2·ρίζα2. Διπλασιάζεται πάλι; Αυξάνεται δηλαδή το ψ με τον ίδιο ρυθμό, με το ίδιο ποσοστό, καθώς το χ αυξάνεται κατά 1; Άρα είναι ο ίδιος νόμος! Άρα σαφώς θα πρέπει να ταυτίσουμε τα δύο πινακάκια. Άρα σαφώς θα πρέπει να ορίσω ότι πρέπει $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Να γιατί βγαίνει αυτός ο ορισμός. Δεν είναι ένας αυθαίρετος ορισμός. Δηλαδή $2^{0,5}$. Θα ασχοληθούμε με αυτό και παρακάτω, να το ξεκαθαρίσουμε πιο καλά ακόμα.

17.00: Βλέπουμε εδώ πέρα παιδιά, στην πίσω σελίδα, έχω κάνει χωρισμό σε δύο ίσα κομμάτια όλων των διαστημάτων και έχει βγει αυτή η παράσταση. Αυτό σε σχέση με το διάγραμμα 1 μπορείτε να το δείτε λίγο και να κάνετε καμία παρατήρηση;

Κωνσταντίνος: Μικρότερα τα κενά…

Κ: Μικρότερα τα κενά αφού τα έχουμε πυκνώσει

Κωνσταντίνος: Και είναι λιγάκι ποιο απότομη η καμπύλη…

Κ: Ίσως εδώ να μας ξεγελάει επειδή μικρύναμε το διάστημα. Άμα το δεις στο ίδιο διάστημα είναι το ίδιο. Η ουσία είναι ότι ανεβαίνει. Όσο μεγαλώνει το χ μεγαλώνει και το ψ έτσι; Αλλά, τα κενά τα έχουμε καλύψει; Όχι. Πάμε να χωρίσουμε το κάθε διάστημα σε περισσότερα κομματάκια μπας και καλύψουμε τα κενά; Στο φύλλο έχω κάνει με τρία αλλά ας πάμε στα δέκα κομμάτια κατευθείαν. Το άγχος μας είναι να δούμε πως γεμίζουνε τα κενά. Να δούμε πως γεμίζονται. Πως θα χωρίσουμε το καθένα από τα αρχικά διαστήματα σε 10 ίσα κομμάτια;

19.03 Γιάννης 1: Πως θα καταφέρουμε να καλύψουμε τα κενά αν δεν πάρουμε πάρα πολύ μικρές αποστάσεις. Δηλαδή…

Κ: Ναι αυτό πάμε να κάνουμε.

Γιάννης 1: Δεν καλύπτονται κύριε τα κενά. Μπορούμε να βρούμε πολλά σημεία και να τα ενώσουμε, αλλά τα κενά …

Κ: Δηλαδή, συγνώμη Γιάννη. Όταν σου λέει η παραβολή είναι κάπως έτσι, μια συνεχόμενη γραμμή, στην πραγματικότητα υπάρχουν κενά αλλά δεν τα βλέπουμε;

Γ. Όχι, δεν υπάρχουν κενά, αλλά εμείς δεν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε βρίσκοντας όλες τις τιμές μία – μία και να τις ενώσουμε μεταξύ τους.

Κ: Ναι πρακτικά δεν μπορούμε, θεωρητικά όμως μπορούμε να σκεφτούμε πως στην πραγματικότητα μπορούν να καλυφθούν. Θεωρητικά…

Γιάννης 1: Ναι

Κ: Πρακτικά φυσικά δεν μπορούμε, αλλά μπορούμε θεωρητικά να σκεφτούμε και να καταλάβουμε πως καλύπτονται τελικά.

Λοιπόν, αν χωρίζουμε σε 10 ίσα κομματάκια τι τιμές θα βάλω πάνω;

Μς: 0,1, 0,2, ……

Κ: Ωραία, από κάτω πόσο θα είναι το κάθε κομματάκι; Πάνω είναι προσθετικά. Το ένα δέκατο έτσι; Χώρισα την μονάδα σε 10 ίσα κομματάκια προσθετικά. Και το ένα κομματάκι από αυτά είναι το ένα δέκατο γιατί 1/10 και 1/10 κ.λ.π κάνει την μονάδα.

Από κάτω, πολλαπλασιαστικά, πως θα χωρίσω το 2 σε 10 ίσα κομματάκια;

Παναγιώτης: Μπορούμε να το γράψουμε σαν $10^{η}$ ρίζα του 2

Κ: Λέει ο Παναγιώτης $10^{η}$ ρίζα του 2. Συμφωνείται;

Μς: Ναι

Κ: Σαφώς είναι. Μετά τι θα πάει;

Μς: $20^{η}$ ρίζα του 2.

Κ: όχι. Εδώ είναι το 1/10 του 2. Μετά θα πάει το 2/10 του 2. Ποια είναι τα 2/10 του 2;

Παναγιώτης: $10^{η}$ ρίζα του 4

Κ. Δηλαδή $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την δευτέρα. Μετά θα πάει τα 3/10 του 2.

Μς: $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την τρίτη και μετά $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την τετάρτη. Μέχρι να πάει εις την $10^{η}$ και να γίνει 2.

22.00 Κ: Πάλι εδώ πέρα τι βλέπουμε; Αφού διατηρείται ο τύπος $ψ = 2^{χ}$, άμα το δοκιμάσετε θα δείτε ότι όταν το χ αυξάνεται κατά 1 το ψ μεταβάλλεται κατά το διπλάσιό του, το ποσοστό αύξησης του ψ είναι πάλι 200%. Άρα προκύπτει, από την ισότητα, ότι $2^{0,1} = \sqrt[10]{2}$. Εντάξει αυτό υπακούει τον ορισμό που είχαμε δώσει και πριν. Άρα τι είναι το $2^{0,1}$; Άμα σου πω τι είναι το 0,1 τι θα μου πεις;

Μς: Το 1/10 της μονάδας

Κ: Δηλαδή θα μου πεις ότι πρέπει να χωρίσω την μονάδα σε 10 ίσα κομματάκια και να πάρω το 1. Αν σε ρωτήσω τι είναι το $2^{0,1}$, τι θα μου πεις;

Παναγιώτης: Πρέπει να χωρίσω το 2 σε 10 ίσα κομματάκια…

Κ: Αλλά τι όμως; Όχι προσθετικά, πολλαπλασιαστικά και να πάρω το 1. Ωραία.

23.00: Κ: Έχω κάνει τώρα στο διάγραμμα 6 τα σημεία με τα 10 κομματάκια. Καλύπτονται τα κενά;

Μς: Όχι

Κ: Μετά η επόμενη κίνηση ποια θα μπορούσε να είναι; Αφού δουλεύουμε στο δεκαδικό σύστημα, η επόμενη λογική κίνηση ποια θα μπορούσε να είναι;

Μς: Σε 20 ….σε 100

Κ: Σε 100 ναι. Αφού δουλεύουμε στο δεκαδικό σύστημα πάμε με τις δυνάμεις του 10.

Χωρίζουμε σε 100 ίσα κομματάκια. Πάνω θα ήταν 0,01 και κάτω τι θα ήταν;

Μς: $100^{η}$

Κ. Σωστά, $100^{η}$ ρίζα του 2. Κοιτάξτε το διάγραμμα 6 με τα 10 ίσα κομματάκια και το διάγραμμα 8 με τα 100 ίσα κομματάκια. Βλέπετε ότι η μορφή της καμπύλης παραμένει η ίδια. Της υποτιθέμενης καμπύλης. Αλλά τα καλύψαμε τα κενά επιτέλους;

Μς: Ναι

Κ: Τα καλύψαμε;

Μς: Φαινομενικά

Κ: Φαινομενικά ναι. Στην πραγματικότητα τα καλύψαμε;

Μς: Όχι

Γιάννης: Αν συνεχίσουμε, άπειροι αριθμοί άρα…

Μς: Άπειροι….

24:34 Γιάννης 1: Αυτό δεν θα το κάνουμε ποτέ.

Γιάννης: Άπειρα κενά

Κ: Συγνώμη, αυτό που έλεγε ο Γιάννης 1 ότι ποτέ δεν καλύπτονται;

Μς: Ναι

Κ: Δηλαδή και αυτή η συνεχόμενη γραμμή (σχεδιάζω μια τυχαία γραμμή στον πίνακα) τι είναι, απάτη;

Γιάννης 1: Όχι, θεωρητικά υπάρχει, εμείς δεν πρόκειται να το κάνουμε ποτέ.

Κ: Ναι

Γιάννης 1: Δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις τιμές και να ενώσουμε…

Κ: Πρακτικά όχι. Αλλά …

Γ: Εντάξει ξέρουμε ότι υπάρχει

Κ: Γιατί όμως υπάρχει;

Γιάννης 1: ….

Κ: Δηλαδή, τι άλλο θα μπορούσα να κάνω. Εδώ χωρίζω σε 10 κομματάκια, τίποτα. Χωρίζω σε 100 κομματάκια, τίποτα. Σε 1000 κομματάκια, τίποτα. Παίρνω δηλαδή πάνω, στην ουσία, αφού χωρίζω σε 10, 100 κ.λ.π κομματάκια, παίρνω όλους τους δεκαδικούς αριθμούς. Δηλαδή όλους τους ρητούς αριθμούς. Έτσι δεν είναι; Γιατί μετά θα πάει 1,01, 1,02, μετά θα πάει 1,001, 1,002 αλλά τα κενά δεν καλύπτονται. Γιατί όμως; Ο άξονας χ΄χ, σε ένα σύστημα αξόνων, που βάζουμε τα χ, τι αριθμούς περιέχει;

Κωνσταντίνος: Όλο το R

Κ: Όλο το R, δηλαδή όλους τους δεκαδικούς που πάω να βάλω εγώ εδώ, τους δεκαδικούς δηλαδή τους ρητούς, τι άλλο περιέχει;

Μς: Τους άρρητους.

Κ: Τους άρρητους. Άρα λοιπόν τίθεται το ερώτημα: Μπορώ εγώ να βάλω κάπου στην πάνω γραμμή το ρίζα2 για παράδειγμα;

Μς: Γιατί όχι

Κ: Και αν βάλω το ρίζα2, μετά θα πρέπει να υπολογίσω το 2 εις την ρίζα2. Υπάρχει το 2 εις την ρίζα2; Πως μπορώ να το προσεγγίσω;

Μς: ……..

Κ: Τι είναι το 2 εις την ρίζα2; Αφού το ρίζα2 είναι ένας άρρητος αριθμός, δεν τα ξέρω όλα τα δεκαδικά του ψηφία.

Μς: Να το βάλεις στο κομπιουτεράκι

Μς: Δεν γίνεται

Κ: Για πάμε λοιπόν τώρα να προσεγγίσουμε το 2 εις την ρίζα2. Να δούμε τι πράγμα είναι αυτό. Υπάρχει; Πως μπορούμε να το βρούμε;

26.49: Παναγιώτης: Ξέρουμε ότι το ρίζα2, το έχουμε υπολογίσει από πριν ότι είναι 2 εις την 0,5

Γιάννης: Ναι 2 εις την ½.

Κ: Να σου πω: το ρίζα2 είναι 1,41421356….κ.λ.π Αυτό είναι το ρίζα2.

Άρα $2^{\sqrt{2}} = 2^{1,41421356....}$ Αν ο εκθέτης ήταν ρητός θα μπορούσα να τον βρω στον χωρισμό που έκανα πριν σε 10, 100, 1000,…… κομματάκια. Κάπου θα τον συναντούσα. Αλλά αυτός όμως…, δεν ξέρω τα δεκαδικά του ψηφία. Είναι άπειρα και μη επαναλαμβανόμενα. Άρα σε αυτή την διαδικασία του χωρίσματος – να μικρύνω δηλαδή τα διαστήματα ώστε να γεμίσω τα κενά – δεν θα εμφανιστεί το ρίζα2, γιατί δεν είναι ρητός.

Μ: Πάλι όμως μπορώ να το βρω έστω στο περίπου.

Κ: Ωραία, πως μπορώ να τον προσεγγίσουμε; Καταρχήν αν πάμε με δεκαδική προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου το $2^{\sqrt{2}}$ ανάμεσα σε ποια νούμερα θα είναι;

Παναγιώτης: $10^{η}$ ρίζα του 2 εις την $14^{η}$

Κ: Ναι. Θα είναι $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$. Το $2^{1,4}$ δεν μπορώ να το βρω; Χωρίζω σε 10 ίσα κομματάκια και παίρνω τα 14. Τα έχω υπολογίσει, κοιτάξτε στο φυλλάδιο, με προσέγγιση βέβαια κάποιων δεκαδικών ψηφίων. Για να τα παρατηρήσουμε λίγο.

Στην πρώτη περίπτωση είναι το $2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$, με τις δεκαδικές προσεγγίσεις των $2^{1,4}$ και $2^{1,5}$. Μετά έχω πάρει μια προσέγγιση με δύο δεκαδικά ψηφία. Θα είναι $2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$. Και συνεχίζω με 3 δεκαδικά ψηφία, με 4 δεκαδικά ψηφία,… Για παρατηρείστε λίγο αυτά τα νούμερα που προκύπτουν στα δύο άκρα, τι βλέπετε;

Μ: Είναι διαφορετικά

Κ: Είναι διαφορετικά. Πολύ διαφορετικά; Για κοιτάξτε τα λίγο προσεκτικά πως πάνε.

Γιάννης: Αυξάνει κατά 1 συνέχεια.

Παναγιώτης: Μετά από κάποια ψηφία υπάρχει στασιμότητα…

Κ: Για να δούμε τι λέει ο Παναγιώτης. Λέει ότι μετά από κάποια ψηφία, μετά από κάποια βήματα αυτής της διαδικασίας, σταθεροποιούνται, υπάρχει μια στασιμότητα λέει, σταθεροποιούνται τα δεκαδικά ψηφία. Κοιτάξτε λίγο. Στην αρχή είναι το 2 μόνο. Μόνο το ακέραιο μέρος. Μετά πάει το 2,6, ίδιο. Μετά πάει το 2,66 ίδιο. Το βλέπετε και στα δύο άκρα; Τι σημαίνει αυτό; Ότι όσο θα συνεχίζεται αυτή η διαδικασία τι θα γίνεται;

Παναγιώτης: Κάθε ένα θα σταθεροποιείται με ποιο πολλούς αριθμούς.

Κ. Θα σταθεροποιούνται αυτά. Πράγματι, ~~αποδεικνύεται με την βοήθεια των ορίων, ότι~~ αυτή η διαδικασία τελικά κάπου καταλήγει δηλαδή, τι σημαίνει καταλήγει;

Παναγιώτης: Φτάνει σε έναν αριθμό

Κ: Φτάνει σε έναν αριθμό. Με ποια έννοια, αφού είναι άπειρη διαδικασία**,** δεν φτάνει ποτέ πουθενά. Με ποια έννοια φτάνει σε έναν αριθμό τότε. Υπάρχει κάποιος αριθμός, άρρητος, δεν τον ξέρουμε αυτός ποιος είναι, αλλά με αυτήν την διαδικασία μπορούμε να τον προσεγγίσουμε όσο κοντά θέλουμε, με οποιαδήποτε δεκαδική προσέγγιση θέλουμε. Δηλαδή, [βλέπουμε το φυλλάδιο] στην περίπτωση ας πούμε που είναι με τρία δεκαδικά ψηφία, με πόσα δεκαδικά ψηφία τον έχουμε προσεγγίσει αυτόν τον αριθμό, τον $2^{\sqrt{2}}$; Αφού είναι 2,66 και 2,66. Με δύο δεκαδικά ψηφία. Τον έχουμε προσεγγίσει με δύο

δεκαδικά ψηφία. Μετά στο επόμενο βήμα, τον έχουμε προσεγγίσει με τρία δεκαδικά ψηφία. Στο επόμενο με 4 δεκαδικά ψηφία. Τον ξέρουμε δηλαδή. Στο επόμενο με 5 δεκαδικά ψηφία. Τι σημαίνει αυτό; Έναν αριθμό που μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με όσα δεκαδικά ψηφία θέλουμε, τον θεωρούμε γνωστό. Και δεν σας είναι ξένο αυτό. Το ρίζα2 τι είναι; Ένας άρρητος. Τον ξέρουμε;

Μς: Όχι ακριβώς

Κ: Ναι δεν τον ξέρουμε ακριβώς αλλά μπορούμε να τον προσεγγίσουμε με οσαδήποτε δεκαδικά ψηφία θέλουμε. Με την ίδια έννοια, και αυτόν τον αριθμό τον ξέρουμε, υπάρχει.

Μ: Άρα μπορώ να τον βάλω στο…

Κ: Άρα μπορώ να βάλω το ρίζα2 πάνω στο πινακάκι και τον $2^{\sqrt{2}}$ από κάτω. Άρα αν βάλω το ρίζα2 και αν βάλω, ξέρω γω, και όλους τους άρρητους, ότι άρρητο σκεφτώ, το ρίζα3 και ότι άρρητο σκεφτώ, ορίζονται οι αντίστοιχες δυνάμεις, έχουν νόημα, το είδαμε το νόημα, μέσα από το $2^{\sqrt{2}}$ έτσι; Άρα λοιπόν μπορούν τελικά να καλυφθούν τα κενά; Άλλο αν πρακτικά, όπως λέει ο Γιάννης, αυτό είναι αδύνατο. Πρακτικά ναι, χαίρω πολύ είναι αδύνατο. Αλλά θεωρητικά τουλάχιστον, έχω καλύψει όλα τα κενά;

Αν δεχτώ δηλαδή [σχεδιάζω ένα σύστημα αξόνων] ότι το χ που παίρνει τιμές πάνω στον χ΄χ μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές έτσι; Χωρίς να αφήνει κανένα κενό έτσι; Αυτό το δέχομαι. Αξιωματικά το δέχομαι. Ότι αν πάρω όλους τους πραγματικούς στον χ΄χ, τότε δεν μένει κανένα κενό. Τότε, αν πάρω λοιπόν όλα τα χ πάνω στον χ΄χ, έχει νόημα και το $2^{χ}$, είπαμε $2^{\sqrt{2}}$ έχει νόημα, υπάρχει αυτό το πράγμα και ομοίως τα άλλα, τότε θα μείνει κανένα κενό; [Σχεδιάζω στον πίνακα την γραφική παράσταση της ψ = $2^{χ}$] Θα μείνει κανένα κενό; Όχι.

34.00: Γιάννη1 το κατάλαβες αυτό;

Γιάννης1: Ναι κύριε. Το κατάλαβα. [όμως ο τρόπος που το λέει δείχνει ότι διατηρεί τις αμφιβολίες του]

Κ: Δεν το κατάλαβες. Το καταλάβατε παιδιά, ότι πράγματι, θεωρητικά, υπάρχει τρόπος, να καλύψω όλα τα κενά και να πάρω μία συνεχόμενη γραμμή, η οποία είναι και η γραφική παράσταση της συνάρτηση της συνάρτησης ψ = $α^{χ}$.

Βέρα: Είναι άπειρα τα σημεία που πρέπει να πάρεις. Πρώτα το 10 μετά το 100….

Κ: Ναι είναι άπειρα. Αλλά υπάρχουν όμως. Θεωρητικά μπορείς να τα πάρεις. Υπάρχουν.

Κ: Πέστε κάποια ίσως παρατήρηση, κάτι να συζητήσουμε;

Μς: ……[νομίζω ότι αν και δεν το λένε οι μαθητές μάλλον συμφωνούν με την επιφυλακτικότητα του Γιάννη1]

Κ: Προσπαθήσαμε καταρχήν να δώσουμε ένα νόημα σε αυτό εδώ το πράγμα [$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$] και στα όμοιά του, προσπαθήσαμε να δώσουμε ένα νόημα στο τι σημαίνει το $2^{0,2}$ ας πούμε, το $2^{0,3}$, το $2^{1,4}$. Τι σημαίνει το $2^{1,4}$; Πως θα το λέγατε σε ένα παιδάκι του δημοτικού ας πούμε, τι σημαίνει το $2^{1,4}$.

Παναγιώτης: Άμα χωρίσεις το 2 σε 10 ίσα κομμάτια …

Κ: Πολλαπλασιαστικά

Παναγιώτης: Ναι, θα πάρεις τα 10 και άλλα 4 τέτοια

Χριστίνα: Θα καταλάβει τι σημαίνει πολλαπλασιαστικά; [ακούγονται κάποια γέλια]

Κ: Δηλαδή τι πολλαπλασιαστικά; Τι σημαίνει πολλαπλασιαστικά το 1/10 του 2; Ότι είναι εκείνος ο αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί 10 φορές με τον εαυτό του κάνει 2.

Κ: Μετά προσπαθήσαμε να δούμε ότι μπορεί πράγματι να βρεθεί ο αριθμός $2^{\sqrt{2}}$, ότι υπάρχει αυτός ο αριθμός, με την έννοια ότι μπορώ να τον προσεγγίσω με όσα δεκαδικά ψηφία θέλω, όπως υπάρχει το π. Το π το ξέρω; Είναι ένας άρρητος αριθμός. Ξέρω όλα τα δεκαδικά του ψηφία;

Μς: Όχι

Κ: Όχι, αλλά μπορώ να τον προσεγγίσω με ακρίβεια όσων δεκαδικών ψηφίων θέλω. Έχουν βρει τώρα με υπολογιστές, νομίζω ένα τρις ψηφία του. Άρα με αυτήν την έννοια το ξέρω. Και το χρησιμοποιώ. Έτσι λοιπόν και το $2^{\sqrt{2}}$ το ξέρω και το χρησιμοποιώ και υπάρχει. Είναι κάποιος αριθμός. Και επίσης προσπαθήσαμε να δούμε πως καλύπτονται σε μία γραφική παράσταση, στην συγκεκριμένη περίπτωση στην $ψ = 2^{χ}$, όλα τα κενά και δεν μένουνε τρύπες.

37.12: Κ: Και αν πάμε και λίγο στα τυπικά μαθηματικά, τα σχολικά, στην τελευταία σελίδα, αν μιλάμε γενικά για την $\psi = \alpha^{\chi}$ με $\alpha > 1$, γιατί για $\alpha < 1$ θα το πούμε την άλλη φορά, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;

Βέρα: Όλο το R;

Κ: Ναι. Και ποιο είναι το σύνολο τιμών;

Βέρα: Το $(0, +\infty)$

Κ: Ναι, οι τιμές που μπορεί να πάρει το ψ είναι το $(0, +\infty)$. Το 0 δεν το παίρνει. Παίρνει μόνο θετικές τιμές. Ποια είναι η μονοτονία;

Γιάννης 1: Γνησίως αύξουσα.

Κ: Γνησίως αύξουσα. Και πού τέμνει τον ψ΄ψ;

Μς: Στο 1.

Κ: Στο (0,1). Και ασύμπτωτη τώρα ποια είναι;

Γιάννης1: Ο χ΄χ

Κ: Γιατί τον λες ασύμπτωτη τον χ΄χ;

Γιάννης1: Δεν θα πάρει ποτέ κάποια τιμή πάνω στον χ΄χ, δηλαδή να έχει ψ = 0. Θα πηγαίνει αλλά δεν θα φτάσει ποτέ.

Κ: Ναι, και μάλιστα με ποια έννοια τον λέμε ασύμπτωτη

Μς: Δεν θα τέμνει ποτέ τον άξονα

Κ: Ναι αλλά τον πλησιάζει όσο θέλουμε. Και με την ψ = -1 για παράδειγμα δεν συμπίπτει ποτέ. Αλλά δεν είναι ασύμπτωτη. Ο χ΄χ είναι ασύμπτωτη γιατί: την πλησιάζει οσοδήποτε κοντά θέλουμε αλλά ποτέ δεν την φτάνει.

39:22 Κ: Ευχαριστώ πολύ παιδιά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Παρακαλώ απάντησε στις παρακάτω ερωτήσεις, που έχουν γραφτεί στα πλαίσια μιας έρευνας πάνω στην διδασκαλία του συνόλου των πραγματικών αριθμών στο Λύκειο.

Αν θέλεις γράψε το όνομα σου εδώ:

1) Σύγκρινε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών χρησιμοποιώντας ένα από

τα σύμβολα < , =, ή >

α) 5^6 ….5^7

β) $0,5^6$ ….$0,5^7$

γ) $5^{0,6}$….$5^{0,7}$

δ) $0,5^{0,6}$….$0,5^{0,7}$

ε) $5^{0,7}$ … $6^{0,7}$

ζ) $0,5^{0,7}$ …. $0,6^{0,7}$

2) Θεωρείστε τον ακόλουθο αριθμό 0.12122122212… (υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ψηφίων όπου ο αριθμός των 2 μεταξύ των 1 αυξάνεται κατά ένα). Είναι αυτό ένας ρητός ή άρρητος αριθμός; Πώς το ξέρετε;

3) Θεωρείστε το 53/83. Καλέστε αυτόν τον αριθμό Μ. Στην εκτέλεση αυτής της διαίρεσης, η οθόνη του υπολογιστή δείχνει το 0.63855421687 (δεν «χωράνε» άλλα ψηφία). Είναι ο Μ ένας ρητός ή άρρητος αριθμός; Εξηγήστε.

4) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους 0,005 και 0,006; Επέλεξε ένα από τα παρακάτω:

ι) Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός

ιι) Υπάρχουν οι αριθμοί:

ιιι) Υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί / κλάσματα

ιν) Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί ή περιοδικοί δεκαδικοί, κλάσματα, και άρρητοι αριθμοί.

ν) Τίποτα από τα παραπάνω. Πιστεύω ότι:

5) α) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο άρρητους. Σωστό ή λάθος;

β) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο άρρητους. Σωστό ή λάθος;

γ) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο ρητούς. Σωστό ή λάθος;

δ) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν ρητό ανάμεσα σε δύο ρητούς. Σωστό ή λάθος;

6) Πόσοι <u>ακέραιοι αριθμοί</u> υπάρχουν πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ανάμεσα στο $-5\sqrt{2}$ και στο $8\sqrt{2}$;

7) Πόσοι <u>ρητοί αριθμοί</u> βρίσκονται ανάμεσα στο 5/8 και στο 1,5;

8)

α) Το σύνολο των σημείων της ευθείας των αριθμών έχει <u>το ίδιο πλήθος στοιχείων</u> με το σύνολο των ρητών αριθμών;

β) Το σύνολο των ρητών αριθμών έχει <u>το ίδιο πλήθος στοιχείων</u> με το σύνολο των πραγματικών αριθμών;

9)

α) Πόσα κλάσματα (ρητοί αριθμοί) υπάρχουν πάνω στην ευθεία των αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$;

β) Ποιο από όλα αυτά <u>τα κλάσματα</u> που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$ είναι «το επόμενο» του $\frac{3}{5}$;

γ) Πόσοι <u>πραγματικοί αριθμοί</u> υπάρχουν στην ευθεία των αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς 0,99 και 1;

δ) Ποιος από όλους τους <u>πραγματικούς αριθμούς</u> που είναι ανάμεσα στους 0,99 και 1 είναι «πιο κοντά» στον 1;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ: 40 ΜΑΘΗΤΕΣ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ: 50 ΜΑΘΗΤΕΣ

ΑΡΘΡΟ: ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΟΠΩΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΑΡΘΡΟ (ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΕΣ ΟΠΟΥ ΗΤΑΝ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟ) ΑΠΟ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΠΗΡΑ ΤΗΝ ΕΡΩΤΗΣΗ

Όλα τα νούμερα είναι ποσοστά %

1) Σύγκρινε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών χρησιμοποιώντας ένα από τα σύμβολα < , =, ή >

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) 5^6 ….5^7

1) α)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ	5	6	
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ	**95**	**92**	**98**
ΙΣΟ	0	0	
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ		2	
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

* Pitta-Pantazi, D. - Christou, C. - Zachariades, T. (2007)

β) $0,5^6$ ….$0,5^7$

1) β)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ	**65**	**56**	**42**
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ	30	42	
ΙΣΟ			
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	5	2	
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

***** Pitta-Pantazi, D. - Christou, C. - Zachariades, T. (2007)

γ) $5^{0,6}$….$5^{0,7}$

1) γ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ	45	32
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ	**48**	**66**
ΙΣΟ	0	0
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	7	2
ΣΥΝΟΛΑ	100	100

δ) $0,5^{0,6}$….$0,5^{0,7}$

1) δ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ	**53**	**58**
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ	42	36
ΙΣΟ		4
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	5	2
ΣΥΝΟΛΑ	100	100

ε) $5^{0,7}$ … $6^{0,7}$

1) ε)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ	10	10	
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ	**78**	**88**	**86**
ΙΣΟ	5		
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	7	2	
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

* Pitta-Pantazi, D. - Christou, C. - Zachariades, T. (2007)

ζ) $0,5^{0,7}$ …. $0,6^{0,7}$

1) ζ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ	38	38	
ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ	**55**	**58**	**65**
ΙΣΟ		2	
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	7	2	
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

* Pitta-Pantazi, D. - Christou, C. - Zachariades, T. (2007)

2) Θεωρείστε τον ακόλουθο αριθμό 0,12122122212… (υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ψηφίων όπου ο αριθμός των 2 μεταξύ των 1 αυξάνεται κατά ένα). Είναι αυτό ένας ρητός ή άρρητος αριθμός; Πώς το ξέρετε;

ερώτηση 2)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΡΗΤΟΣ	23	16	13
ΑΡΡΗΤΟΣ	**63**	**66**	**76**
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	14	18	11
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

* Zazkis, R., Sirotic, N. (2004)

3) Θεωρείστε το 53/83. Καλέστε αυτόν τον αριθμό Μ. Στην εκτέλεση αυτής της διαίρεσης, η οθόνη του υπολογιστή δείχνει το 0,63855421687. Είναι ο Μ ένας ρητός ή άρρητος αριθμός; Εξηγήστε.

ερώτηση 3)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΡΗΤΟΣ	**28**	**60**	**87**
ΑΡΡΗΤΟΣ	55	22	11
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	17	18	2
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

* Zazkis, R., Sirotic, N. (2004)

4) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους 0,005 και 0,006; Επέλεξε ένα από τα παρακάτω:

ερώτηση 4)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ι) Δεν υπάρχει κανένας τέτοιος αριθμός	0	6	Πεπερασμένοι: 33,5
ιι) Υπάρχουν οι αριθμοί:	0	4	
ιιι) Υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί / κλάσματα	43	22	Άπειροι: 61,3
ιν) Υπάρχουν άπειροι αριθμοί: απλοί ή περιοδικοί δεκαδικοί, κλάσματα, και άρρητοι αριθμοί.	57	**60**	
ν) Τίποτα από τα παραπάνω. Πιστεύω ότι:	0		
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	0	6	4,2
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

*Vamvakoussi, X. - Vosniadou, S., (2007)

5) α) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο άρρητους. Σωστό ή λάθος;

5)α)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΣΩΣΤΟ	**50**	**58**	**52**
ΛΑΘΟΣ	50	38	26
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ		4	22
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

*Zazkis, R., Sirotic, N. (2007)

β) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο άρρητους.

Σωστό ή λάθος;

5)β)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΣΩΣΤΟ	**68**	**52**	**69**
ΛΑΘΟΣ	32	42	11
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ		6	20
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

*Zazkis, R., Sirotic, N. (2007)

γ) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο ρητούς. Σωστό ή λάθος;

5)γ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΣΩΣΤΟ	**83**	**76**	**72**
ΛΑΘΟΣ	17	20	7
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ		4	21
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

*Zazkis, R., Sirotic, N. (2007)

δ) Είναι πάντα δυνατό να βρεις έναν ρητό ανάμεσα σε δύο ρητούς. Σωστό ή λάθος;

5)δ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΣΩΣΤΟ	**50**	**62**	**52**
ΛΑΘΟΣ	50	34	22
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ		4	26
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

*Zazkis, R., Sirotic, N. (2007)

6) Πόσοι <u>ακέραιοι αριθμοί</u> υπάρχουν πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ανάμεσα στο $-5\sqrt{2}$ και στο $8\sqrt{2}$;

6)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
19 (ή κοντά στο 19)	**5**	**6**	
12 (ή κοντά στο 12)	63	30	33
ΑΛΛΟ	20	36	
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	12	28	11
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

180

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)

7)

α) Το σύνολο των σημείων της ευθείας των αριθμών έχει <u>το ίδιο πλήθος στοιχείων</u> με το σύνολο των ρητών αριθμών;

7) α)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΣΩΣΤΟ	43	16	-
ΛΑΘΟΣ	**35**	**60**	-
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	22	24	7
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)

β) Το σύνολο των ρητών αριθμών έχει <u>το ίδιο πλήθος στοιχείων</u> με το σύνολο των πραγματικών αριθμών;

7) β)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΣΩΣΤΟ	38	40	-
ΛΑΘΟΣ	**40**	**38**	-
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	22	22	13
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)

8)

α) Πόσα κλάσματα (ρητοί αριθμοί) υπάρχουν πάνω στην ευθεία των αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$;

8) α)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΑΠΕΙΡΑ	**35**	**36**	44
ΜΕΡΙΚΑ (π.χ 6 ή 7)	50	34	36
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	15	30	20
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)

β) Ποιο από όλα αυτά <u>τα κλάσματα</u> που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{6}$ είναι «το επόμενο» του $\frac{3}{5}$;

8) β)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %	
ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΚΛΑΣΜΑ (π.χ 24/30)	78	46	47	
ΔΕΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ	**5**	**6**	19	
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	17	48	34	
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100	

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)

γ) Πόσοι <u>πραγματικοί αριθμοί</u> υπάρχουν στην ευθεία των αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς 0,99 και 1;

8) γ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
ΑΠΕΙΡΟΙ	**73**	**62**	46
ΕΝΑΣ	5	8	26
ΚΑΝΕΙΣ	2	8	
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	20	22	28
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)

δ) Ποιος από όλους τους <u>πραγματικούς αριθμούς</u> που είναι ανάμεσα στους 0,99 και 1 είναι «πιο κοντά» στον 1;

8) δ)	ΟΜΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ %	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ %	ΑΡΘΡΟ* %
0,999….	18	26	34
0.999….9	30	20	
ΤΟ 1	2	2	
ΔΕΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ	**10**	**14**	**22**
ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	40	38	44
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	100

* Merenluoto, K. - Lehtinen, E. , (2002)