ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ CAUCHY ΣΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΣΙΣΚΟΥ ΜΑΡΙΑ

Α. Μ. 201022

Επιβλέπων καθηγητής:

ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ, 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

THE CONTRIBUTION OF CAUCHY TO THE FOUNDATIONS OF CALCULUS

ΣΙΣΚΟΥ ΜΑΡΙΑ

Α. Μ. 201022

Επιβλέπων καθηγητής:

ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ, 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……11/3/2014……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Παπασταυρίδης Σταύρος (επιβλέπων Καθηγητής)	**Καθηγητής**	……..
2) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	**Καθηγητής**	…….
3) Λάππας Διονύσιος	**Αν. Καθηγητής**	…….

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ
ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ :

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ CAUCHY ΣΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Σίσκου Μαρία

Επιβλέπων καθηγητής

Παπασταυρίδης Σταύρος

Τριμελής επιτροπή

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Λάππας Διονύσιος

Παπασταυρίδης Σταύρος.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Σταύρο Παπασταυρίδη, καθηγητή του τμήματος μαθηματικών του ΕΚΠΑ, που με τίμησε επιβλέποντας την εργασία μου καθώς και για τη βοήθεια του, τον χρόνο που αφιέρωσε και τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις που μου παρείχε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος μαθηματικών κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή και για τη βοήθεια που μου προσέφεραν σε όλη τη διάρκεια της μελέτης μου για την εργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη ……7

Abstract……8

Πρόλογος……..9

Εισαγωγή

I. Η περίπτωση και ο σκοπός για συζητήσεις στα θεμέλια του λογισμού…. 10
II. Τα θεμέλια του Απειροστικού Λογισμού στον $18^{ο}$ αιώνα…….. 12

Κεφάλαιο 1

1.1 Ορισμός συνάρτησης κατά Cauchy……... 14
1.2 Ορισμός ορίου τιμών μεταβλητής…….. 20
1.3 Ορισμός ορίου συνάρτησης κατά Cauchy …… 23
1.4 Η προέλευση του ορισμού του Cauchy για το όριο…… 28

Κεφάλαιο 2

2.1 Ορισμός συνέχειας κατά Cauchy ……..31
2.2 Συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών κατά Cauchy……..34
2.3 Προς την αυστηρή τυποποίηση. Η ανισότητα του Lagrange……45
2.4 Θεώρημα ενδιαμέσου τιμής……..47
2.5 Οι ρίζες της απόδειξης του Cauchy για το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών……..….59

Κεφάλαιο 3

3.1 Σύγκλιση σειρών…….. 65
3.2 Το Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας……..77
3.3 Ορισμός παραγώγου κατά Cauchy……..81
3.4 Θεώρημα Μέσης Τιμής……....84
3.5 Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων……..89

Κεφάλαιο 4

4.1 Επίλογος . Cauchy-Bolzano ……92

Βιβλιογραφία…… 99

Περίληψη

Πολλοί μαθηματικοί του 18ου αι. συχνά παρουσίαζαν αποτελέσματα όχι με μεγάλη αυστηρότητα. Ο Augustin- Louis Cauchy (1789-1857) ήταν ο πρώτος που έθεσε επιτυχώς το λογισμό σε αυστηρές βάσεις. Βέβαια θα πρέπει να συμπληρώσουμε ότι οι μαθηματικοί που είχαν φτάσει σε σπουδαία αποτελέσματα στην ανάλυση του 18ου αι. , τα οποία στη συνέχεια βοήθησαν στην ανάπτυξη ιδεών για να αυστηροποιηθεί ο λογισμός, ήταν οι Newton (1643-1727), Maclaurin (1698-1746), d'Alembert (1717-1783) και ιδίως οι Euler (1707-1783), και Lagrange (1736-1813). Ακόμη και ο Cauchy δεν ήταν απόλυτα 'αυστηρός' σε ερευνητικές εργασίες του. Ωστόσο αυστηρά κριτήρια είχε στο νου του όταν έκανε το Cours d'analyse. Όταν ο Cauchy αναφέρεται στο έργο αυτό με την αυστηρότητα της γεωμετρίας ως το ιδανικό στο οποίο φιλοδοξούσε δεν είχε στο νου διαγράμματα αλλά τη λογική δομή όπως κατασκευάστηκαν και τα έργα του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Αποφεύγει την άλγεβρα γιατί κάποια πράγματα ισχύουν κάτω από ορισμένες συνθήκες μόνο. Πολλοί άνθρωποι πιστεύουν ότι ο Cauchy στις αυστηρές αποδείξεις του στην ανάλυση εισάγει τα 'δ, ε'. Όμως με μια πρώτη ματιά στο Cours d'analyse (1821) βλέπει ότι δεν υπάρχουν 'δ, ε' στον ορισμό του ορίου, και ακόμη οι προτάσεις στον ορισμό ακούγονται περισσότερο διαισθητικές παρά βασισμένες στην άλγεβρα των ανισοτήτων. Έπειτα στο Calcul infinitesimal (1823) ο Cauchy ορίζει την παράγωγο σαν λόγο πηλίκου διαφορών καθώς οι διαφορές είναι απειροελάχιστες. Βλέποντας πάλι το Cours d'analyse βλέπουμε ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί το κριτήριο Cauchy για τη σύγκλιση σειρών το οποίο όμως δεν έχει αποδείξει ότι είναι ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση. Γενικά ένας σύγχρονος μαθηματικός θα δυσκολευτεί να εκτιμήσει τη 'δουλειά' του Cauchy λόγω της 'παλιομοδίτικης' ορολογίας του αλλά και διότι τα δύο βιβλία που προαναφέραμε Cours d'analyse (1821) και Calcul infinitesimal (1823) ήταν διαλέξεις που αρχικά είχαν δοθεί σε φοιτητές που σκόπευαν να ασχοληθούν με το λογισμό. Όταν όμως τα δύο αυτά βιβλία μελετηθούν πιο προσεκτικά θα φανεί η σπουδαία δουλειά του Cauchy.

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να μελετήσουμε τη συμβολή του Cauchy στην θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Έτσι θα περιγράψουμε πως ήταν η κατάσταση για τα μαθηματικά την εποχή πριν τον Cauchy και θα αναλύσουμε τι έγραψε ο Cauchy ξεκινώντας από την αρχική έννοια της μεταβλητής μέχρι την έννοια της παραγώγου. Αν και εμείς μελετήσαμε μέχρι και την παράγωγο σε αυτήν την εργασία θα πρέπει να αναφέρουμε πως η συνεισφορά του Cauchy ήταν μεγάλη και στην ολοκλήρωση. Επίσης στην εργασία αυτή αναφέρουμε κάποιες ομοιότητες που υπάρχουν μεταξύ των δυο σπουδαίων μαθηματικών, του Cauchy και του Bolzano (1781-1848) και αντιπαραθέτουμε τους αντίστοιχους ορισμούς που έχουμε εμείς σήμερα στην ανάλυση.

Λέξεις κλειδιά: Cauchy, όριο, συνέχεια, σύγκλιση, παράγωγος, Bolzano**.**

Abstract

In the eighteenth century many mathematicians were developing and applying powerful methods which they could not justify, without really see foundations as an important area of mathematical endeavor. Augustin- Louis Cauchy (1789-1857) gave the first reasonably successful rigorous foundation for the calculus. Other mathematicians of course participated in the development of the foundations of the calculus. Some of them were Newton (1643-1727), Maclaurin (1698-1746), d'Alembert (1717-1783) and especially Euler (1707-1783) and Lagrange (1736-1813). Cauchy himself was not consistently rigorous in his research papers. Nevertheless rigorous criteria were constantly in Cauchy's mind when he developed his Cours d'Analyse. When Cauchy referred in that work to the rigor of geometry as the idea to which he aspired, he had in mind, not diagrams, but logical structure: the way the works of Euclid and Archimedes were constructed. He does not prefer algebraic formulas because they hold true only under certain conditions and for certain values of quantities they contain. Many people believe that Cauchy's rigorous proofs introduced delta-epsilon methods into analysis. But on first looking into the Cours d'Analyse (1821) they may be somewhat shocked to find no deltas or epsilons anywhere near the definition of limit ; moreover, the words in the definition sound more like appeals to intuition than to algebra of inequalities. Then in Calcul infinitesimal (1823) Cauchy defined the derivative as the ratio of the quotient of differences when the differences are infinitesimal. Returning to the Cours d'Analyse we see that Cauchy used the Cauchy criterion but he did not even try to prove that it is a sufficient condition for convergence. A modern reader finds difficulty to appreciate Cause because of his old fashioned terminology and because the two books, Cours d'analyse (1821) and Calcul infinitesimal (1823), were originally lectures given to students who planned to apply the calculus. Once the Cours d'analyse, or the Calcul infinitesimal has been examined more closely, it will be seen that Cauchy's achievement is as impressive as expected.

The purpose of this work is to study the contribution of Cauchy to the foundations of calculus. We are going to describe how the situation was for mathematics before Cauchy and analyze what Cauchy wrote, from the initial concept of variable to the concept of derivative. Although we have studied up to the derivative in this work, we must mentioned that the contribution of Cauchy was great and for the integral. Also in this paper we report some similarities between the two great mathematicians, Cauchy and Bolzano (1781-1848) and juxtapose their respective definitions we have today in analysis.

Key words : Cauchy, limit, continuity, convergence, derivative, Bolzano

Πρόλογος

Συχνά στην ιστορία των μαθηματικών υπάρχει το φαινόμενο οι ιδέες και οι εφαρμογές να προηγούνται και έπειτα να βρίσκονται αυστηρά θεμέλια γι' αυτές. Το $18^{ο}$ αιώνα εμφανίζεται ένας νέος λογισμός. Οι επιστήμονες εκείνης της εποχής είχαν πεισθεί για την 'αλήθεια' του λογισμού από τις εντυπωσιακές εφαρμογές που είχε και από το γεγονός ότι μπορούσε να προβλέψει τον τρόπο που λειτουργούσε ο φυσικός κόσμος και πιο συγκεκριμένα η μηχανική και η κίνηση των πλανητών.

Ο Augustin- Louis Cauchy (1789-1857) ήταν ο πρώτος που έθεσε επιτυχώς το λογισμό σε αυστηρές βάσεις. Το 1821 ο Augustin- Louis Cauchy δημοσίευσε το Cours d'Analyse για τα μαθήματα που παρέδιδε στην Ecole Polytechnique. Το έργο αυτό του Cauchy είναι ένα από τα βιβλία που επηρέασε περισσότερο στα μαθηματικά. Ο Cauchy δεν έδωσε μόνο έναν ορισμό των ορίων αλλά έδωσε και τα μέσα για να γίνουν αυστηρά θεμέλια του λογισμού.

Ένας σύγχρονος μαθηματικός πιστεύει ότι ο Cauchy στις αυστηρές αποδείξεις του στην ανάλυση εισάγει τα 'δ, ε'. Όμως με μια πρώτη ματιά στο Cours d'analyse βλέπει ότι δεν υπάρχουν 'δ, ε' στον ορισμό του ορίου, και ακόμη οι προτάσεις στον ορισμό ακούγονται περισσότερο διαισθητικές παρά βασισμένες στην άλγεβρα των ανισοτήτων. Έπειτα στο Calcul infinitesimal (1823) ο Cauchy ορίζει την παράγωγο σαν λόγο πηλίκου διαφορών καθώς οι διαφορές είναι απειροελάχιστες. Βλέποντας πάλι το Cours d'analyse βλέπουμε ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί το κριτήριο Cauchy για τη σύγκλιση σειρών το οποίο όμως δεν έχει αποδείξει ότι είναι ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση.

Σε σπουδαία αποτελέσματα στην ανάλυση του $18^{ου}$ αι. ,που βοήθησαν στην ανάπτυξη ιδεών για να αυστηροποιηθεί ο λογισμός, είχαν καταλήξει και άλλοι μαθηματικοί όπως οι Newton (1643-1727), Maclaurin (1698-1746), d'Alembert (1717-1783) και ιδίως οι Euler (1707-1783), και Lagrange (1736-1813).

Επίσης Ο Cauchy εμφανίζει αρκετές ομοιότητες με τον σύγχρονο του Bolzano (1781-1848).Οι ομοιότητες αυτές θα αναλυθούν στο κείμενο μας.

Ο ρόλος του Cauchy στη Θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ι. Η περίπτωση και ο σκοπός για συζητήσεις στα θεμέλια του λογισμού.

Αρχικά ο λογισμός ήταν κάτι καινούριο οπότε και μη στοιχειώδεις εργασίες, όπως του Newton, έπρεπε να έχουν κάποια εισαγωγή που να επεξηγεί τις βασικές έννοιες του λογισμού. Υπήρχε μεγάλη αύξηση του ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά και τις επιστήμες τον 18^{ο} αιώνα. Από τα μέσα του 17^{ου} αι. ξεκινάει η θεμελίωση επιστημονικών κοινοτήτων και περιοδικών. Βιβλία στοιχειώδη και μη ήταν αναγκαία για την αναπτυσσόμενη επιστημονική κοινότητα. Επίσης ήταν μεγάλο και το ενδιαφέρον για τις επιστήμες από άτομα που δεν ήταν μαθηματικοί λόγω της επιτυχίας του Newton στη φυσική, στην κατανόηση των νόμων του σύμπαντος. Ένας ακόμη παράγοντας που συνέβαλε στο να οδηγηθούνε στη συζήτηση των θεμελίων του λογισμού ήταν η διαμάχη των Newton- Leibniz. Ο Newton και οι υποστηρικτές του τόνισαν ορισμένα σημεία του λογισμού σε μια προσπάθεια να δείξουν ότι ήταν διαφορετικός ,ανώτερος και πιο αυστηρός από τον λογισμό του Leibniz. Στην προσπάθεια να υπερασπιστούν οι Βρετανοί μαθηματικοί τον λογισμό του Newton έδωσαν έμφαση στην αυστηρότητα της γεωμετρίας σε αντίθεση με τη μη αυστηρότητα των αλγεβρικών απειροστών των άλλων μαθηματικών. Έτσι οδηγήθηκαν σε εκτεταμένες συζητήσεις για τα θεμέλια.

Το 18^{ο} αιώνα πολλοί μαθηματικοί και επιστήμονες είχαν στηριχτεί στη βασιλική πατρωνία ή σε προσωπική τους περιουσία. Όμως όπως μεγάλωνε η επιστημονική κοινότητα περισσότεροι άνδρες της μεσαίας τάξης έγιναν επιστήμονες. Αυτοί οι άνθρωποι χρειαζόντουσαν υποστήριξη. Επιπλέον είχε ξεκινήσει η πεποίθηση ότι οι επιστήμονες ήταν χρήσιμοι για το κράτος, για την επέκταση βιομηχανιών και για τις στρατιωτικές δυνατότητες τους. Έτσι άνοιξαν νέα σχολεία και επιστημονικά τμήματα. Το πιο σπουδαίο παράδειγμα είναι η Ecole Polytechnique που ιδρύθηκε στο Παρίσι από την Επαναστατική κυβέρνηση το1795 με σκοπό να βγουν από αυτήν επιστήμονες και μηχανικοί. Επομένως το γεγονός ότι υπάρχουν φοιτητές κάνει έναν δάσκαλο να

αναπτύξει τις αρχικές έννοιες ενός αντικειμένου με σαφήνεια. Έτσι εξηγείται γιατί οι συνεισφορές στα θεμέλια του λογισμού των Lagrange (1736- 1813), Cauchy (1789-1857), Weierstrass (1815- 1897) , και Dedekind(1831-1916) υποκινήθηκαν από τη διδασκαλία τους. Τα θεμέλια του λογισμού τα αντιμετώπιζαν σαν ένα θέμα περισσότερο φιλοσοφικό ή παιδαγωγικό, παρά μαθηματικό. Κατά τα τέλη του αιώνα ($18^{ου}$) υπήρχε η επιθυμία μερικών μαθηματικών να τραβήξουν την προσοχή στα θεμέλια του λογισμού . Ο Lagrange για παράδειγμα θεωρούσε ότι θεμελιωνόταν μια ολοκληρωμένη δομή που θα έλυνε ότι προβλήματα υπήρχαν. Ένας άλλος λόγος συζήτησης των βασικών εννοιών του λογισμού ήταν ότι η αυστηρότητα του λογισμού είχε δεχθεί επίθεση και οι μαθηματικοί ήθελαν να την υπερασπιστούν. Εκτός από μερικές επιθέσεις που προήλθαν από μαθηματικούς λόγω των απειροστών, οι σπουδαιότερες επιθέσεις προήλθαν από φιλόσοφους και θεολόγους. Η πιο γνωστή κριτική και που επηρέασε περισσότερο ήταν αυτή του επίσκοπου του Cloyne, George Berkeley το 1734 η οποία ασκήθηκε για να υπερασπιστεί τη θρησκεία ως προς τους επιστήμονες. Η επίθεση του Berkeley δεν ήταν για προσωπικό λόγο αλλά ήταν μέρος της αντίθετης άποψης του με τις επικρατούσες απόψεις του Διαφωτισμού. Ο Newton βάσει της σωστής* σειράς που αργότερα ονομάστηκε ‘the Newtonian world-machine’ είχε συμφωνήσει ότι υπήρχε Θεός που είχε δημιουργήσει τον κόσμο.(*Ο Newton θεωρούσε ότι το σύμπαν το είχε δημιουργήσει ο Θεός όμως λειτουργούσε με βάσει τους νόμους της φυσικής). Όμως υπήρχε μεγάλη διαφορά στον Θεό του Newton και του Θεού των Χριστιανών κατά την επίσημη εκκλησία. Με την ανάπτυξη του ενδιαφέροντος του ευρέως κοινού για τα επιστημονικά θέματα και τα μαθηματικά, υπήρξε μια αυξανόμενη κατευθυνόμενη εικονομαχία ενάντια στις παλιές φιλοσοφίες, τις φεουδαρχικές κυβερνήσεις και τη Χριστιανική θρησκεία.

Ο Berkeley αντεπιτέθηκε τονίζοντας αδυναμίες σε αυτό που πίστευαν οι στοχαστές του Διαφωτισμού ότι ήταν η πιο ασφαλής επίτευξη: τα μαθηματικά.

Η επίθεση του Berkeley έκανε τις συζητήσεις για τα θεμέλια του λογισμού να διαρκέσουν και να αναζητηθούν αρχές που θα έκαναν τα θεμέλια επιτυχή και το λογισμό αυστηρό. Ο d’Alembert, ο Carnot(1887-1894) και ο Lagrange αναφέρθηκαν στα επιχειρήματα του Berkeley.

(Grabiner, Σελ.27)

ΙΙ. ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΟΝ 18^{ο} αιώνα.

Το 18^{ο} αι. τα μαθηματικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν οι μαθηματικοί της εποχής δεν είχαν ως προϋπόθεση την ύπαρξη αυστηρών θεμελίων του λογισμού και πολλά είχαν άμεση εφαρμογή στη φυσική.

Ο Joseph-Louis Lagrange είχε το σπουδαιότερο ρόλο στην τοποθέτηση στο κέντρο του ενδιαφέροντος θεμελιωδών ερωτήσεων για το λογισμό, τις οποίες αργότερα δέχθηκε αν και άλλαξε κατά πολύ ο Cauchy.

Η άλγεβρα ήταν η θεωρία των εξισώσεων και ειδικότερα η μελέτη ρίζας, ο συσχετισμός των συντελεστών και οι μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων. Η επίλυση των εξισώσεων γινόταν με άμεσο τρόπο ή αν δεν ήταν δυνατόν με προσεγγιστικές μεθόδους. Μόλις το 1770-1771 τέθηκε το ερώτημα εάν είναι επιλύσιμη μια εξίσωση, από τον Lagrange. “The analysis of infinite” ένας κλάδος μαθηματικών που ονομάστηκε από τον Euler και ασχολήθηκε με την εύρεση αθροισμάτων άπειρων σειρών, με τη μετατροπή τους από ένα τύπο σε άλλο, καθώς επίσης και με την εύρεση ορίων άπειρων γινομένων και συνεχών κλασμάτων. Δεν υπήρχε όμως πρόθεση εύρεσης γενικής θεωρίας για τη σύγκλιση, παρόλο που είχαν αναφερθεί κάποια κριτήρια. Ο διαφορικός λογισμός μελετούσε την εύρεση διαφορικών, τις μεταξύ τους σχέσεις και την εφαρμογή τους στη γεωμετρία και στη φυσική. Ο ολοκληρωτικός λογισμός μελετούσε διαφορικές εξισώσεις και εκτιμούσε ορισμένα ολοκληρώματα αλλά δεν αποδείκνυε την ύπαρξη λύσης σε κανένα πρόβλημα. Τον διαφορικό λογισμό τον μελετούσαν περισσότερο πάνω σε προβλήματα της φυσικής και όχι στο πλαίσιο γενικών μαθηματικών θεωριών.

Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε ένα δείγμα από το επιστημονικό περιοδικό Memoires de I' Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, για τις χρονιές 1750, 1775, και 1800. Στο έτος 1750 υπάρχουν τέσσερα άρθρα του Leonard Euler. Το ένα αφορά την εξαγωγή εξισώσεων της κίνησης ενός περιστρεφόμενου σώματος, άλλο αφορά το διαφορετικό βαθμό του φωτός που εκπέμπει ο ήλιος και τα άλλα ουράνια σώματα, το τρίτο τις ισημερίες και το τέταρτο την επίδραση της υδραυλικής μηχανής που προτείνεται από τον Johan Andreas Segner. Ακόμη δύο άρθρα του Jean Le Rond d’Alembert αφορούν το ένα τον γενικό τύπο λύσης διαφορικής εξίσωσης παλλόμενης χορδής και το άλλο την ολοκλήρωση ορισμένων ρητών συναρτήσεων. Γενικά και από άλλα άρθρα καταλαβαίνουμε ότι τα μαθηματικά άρθρα περιλαμβάνανε φυσική και ουράνια μηχανική. Τα άρθρα που είχαν ‘καθαρά’ μαθηματικό περιεχόμενο στήριζαν την απόδειξη στο να μπορεί κάτι να οριστεί με φορμαλιστικό τρόπο. Το 1775 υπάρχει μια αλλαγή

παρατηρώντας στο ίδιο περιοδικό τρείς εργασίες του Lagrange. Η μια εργασία είναι ολοκλήρωση γραμμικών εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών, η δεύτερη είναι για την έλξη ελλειπτικών σφαιροειδών και η τελευταία είναι για τη συμβολή στην αριθμητική θεωρία ζητώντας πότε η τετραγωνική μορφή $py^2 + 2pyz + rz^2$ μπορεί να γραφεί σαν 4na+b όπου b= 0, 1, 2, 3. .

Στο Berlin Memoires το 1800 η εικόνα είναι κάπως διαφορετική. Ανάμεσα σε διάφορα μαθηματικά άρθρα υπάρχει και ένα για τα θεμέλια του λογισμού. Αυτό είναι το δεύτερο μέρος από μια έκθεση του J. -P. Gruson 'Le calcul d'exposition'.

Παρατηρώντας και άλλα επιστημονικά περιοδικά βλέπουμε ότι υπάρχει παντού αυτό το σκεπτικό. (Δεν ασχολούνται με τη θεμελίωση του λογισμού). Για παράδειγμα ενώ μεταχειρίζονταν τις άπειρες σειρές σαν να ήταν πολυώνυμα και αυτό τους είχε οδηγήσει σε πολύ σημαντικά αποτελέσματα, δεν είχαν καταλήξει σε μια γενική θεωρία σύγκλισης. Όμοια εφόσον οι διαφορικές εξισώσεις προέκυπταν από προβλήματα της φυσικής δεν είχαν ενδιαφερθεί να αποδείξουν ότι υπάρχει λύση. Θεωρούσαν την ύπαρξη της λύσης δεδομένη και προσπαθούσαν μόνο να τη βρουν. Στην προσπάθεια να αποφασίσουν ποιο είδος συνάρτησης είναι η λύση για τη διαφορική εξίσωση της παλλόμενης χορδής είχαν εμφανιστεί πολλές διαφορετικές απόψεις. Μεταξύ άλλων σε διαφωνία είχαν έρθει οι d' Alembert, Euler, Lagrange, Daniel Bernoulli. Αυτή η διαφωνία επηρέασε τον Cauchy και τον Bolzano στον ορισμό συνεχούς συνάρτησης και ίσως και τον Cauchy στην έννοια του ολοκληρώματος. Οι μαθηματικοί αυτοί έκαναν εντυπωσιακά λίγα λάθη. Εν μέρη αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι άπειρες σειρές που μελετούσαν ήταν δυναμοσειρές με φραγμένους συντελεστές, οι οποίες συμπεριφέρονται όμοια με πολυώνυμα. Οπότε ακόμη και με την έλλειψη μιας γενικής θεωρίας σύγκλισης κατάληγαν σε ορθά αποτελέσματα. Όπως επίσης πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι μαθηματικοί εκείνης της εποχής ήταν σπουδαίοι, όπως ο Euler που είχε απίστευτη ικανότητα να επιλέγει καρποφόρες μεθόδους παραγώγισης, με αποτέλεσμα να αποφεύγουν τα λάθη.

Κεφάλαιο 1

1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ CAUCHY

Προκειμένου να ορίσει ο Cauchy την συνάρτηση και εν συνεχεία το όριο, ξεκινάει κατ αρχάς ορίζοντας τις έννοιες «ΑΡΙΘΜΟΣ» (NOMBRES) και «ΠΟΣΟΤΗΤΑ» (QUANTITE) που κατά κάποιο τρόπο αντιστοιχούν στις δικές μας έννοιες Θετικός πραγματικός και πραγματικός αριθμός.

Γράφει λοιπόν ότι αριθμός είναι το «απόλυτο» μέτρο ενός μεγέθους και η ποσότητα είναι ένας αριθμός που έχει στο αριστερά του το σύμβολο + ή -. Περιγράφει το πώς γίνονται πράξεις με τα + και - . Μεταξύ άλλων περιγράφει και τον κανόνα «πλην επί πλην κάνει συν».

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley Sandifer:

‘Αρχικά θα υποδείξουμε ποια έννοια θα είναι κατάλληλη να επισυνάψουμε για τις λέξεις αριθμός και ποσότητα. Πάντα θα θεωρούμε τους αριθμούς με την έννοια που χρησιμοποιούνται στην αριθμητική, όπου οι αριθμοί προκύπτουν από το απόλυτο μέτρο των μεγεθών, και θα χρησιμοποιούμε τον όρο ποσότητες μόνο για πραγματικές θετικές ή αρνητικές ποσότητες, δηλαδή που ακολουθούν τα πρόσημα + ή -.Επιπλέον θεωρούμε αυτές τις ποσότητες για να εκφράσουμε την αύξηση και τη μείωση, έτσι ώστε ένα δοσμένο μέγεθος θα αντιπροσωπευθεί από έναν αριθμό μόνο αν θέλουμε να το συγκρίνουμε με ένα άλλο μέγεθος ίδιου τύπου που λαμβάνεται σαν μονάδα και στον ίδιο αριθμό προηγείται το πρόσημο + ή -, αν το σκεφτούμε, σαν να είναι δυνατόν να αυξηθεί ή να μειωθεί ένα δοσμένο μέγεθος ίδιου τύπου.’

ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paroît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité*.

Nous prendrons toujours la dénomination de

TOM. 1. A

2 COURS D'ANALYSE.

nombres dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs; et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire, aux nombres précédés des signes + ou —. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissemens ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera

Cauchy, 1821, Σελ. 23.

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.5

Στην συνέχεια περιγράφει την έννοια της «μεταβλητής» (variable) η οποία προετοιμάζει την έννοια της συνάρτησης. Ουσιαστικά θα ορίσει την συνάρτηση πιο κάτω μέσω δύο μεταβλητών που αλληλοσυνδέονται. Σήμερα στην θεμελίωση του Απειροστικού, δεν δίνεται ορισμός της μεταβλητής αλλά η έννοια χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις μαθηματικές συζητήσεις .

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet.

Cauchy, 1821, Σελ. 23

Bradley- Sandifer 2009, Σελ.6

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley Sandifer:

'Ονομάζουμε μεταβλητή μια ποσότητα εάν μπορεί να θεωρηθεί ότι μπορεί να πάρει διαδοχικά πολλές διαφορετικές τιμές. Συνήθως συμβολίζουμε μια τέτοια ποσότητα με ένα γράμμα από το τέλος της αλφαβήτου.'

Βλέπουμε ότι ορίζει μία «μεταβλητή ποσότητα» σαν κάτι που δύναται να λάβει **διαδοχικά** διάφορες πραγματικές τιμές. Ασφαλώς με τα σημερινά κριτήρια ο ορισμός είναι κάπως ασαφής. Το «successivement" παραπέμπει κυρίως σε ακολουθίες, ενώ ο Cauchy κάνει χρήση και για συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Συνήθως τις μεταβλητές τις συμβολίζει με ένα από τα τελευταία γράμματα της αλφαβήτου. Ο Cauchy διαχωρίζει τη σταθερή τιμή από τη μεταβλητή και συμβολίζει τις σταθερές τιμές με τα πρώτα γράμματα της αλφαβήτου.Θεωρεί οτι σταθερή τιμή είναι το γράμμα που έχει μια συγκεκριμένη σταθερή τιμή.

Στην συνέχεια ο Cauchy συνεχίζει στον ορισμό αυτού που λέμε **σήμερα πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητή**ς.

§ I. — *Considérations générales sur les fonctions.*

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante;* et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Cauchy, 1821, Σελ. 37.

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.17..

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley- Sandifer:

'Όταν μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε αν δοθεί η τιμή της μίας εξ'αυτών κάποιος να μπορεί να βρει τις τιμές όλων των άλλων μεταβλητών τότε θεωρούμε ότι αυτές οι διάφορες μεταβλητές εκφράζονται μέσω της μιας , η οποία παίρνει το όνομα *ανεξάρτητη μεταβλητή* . Οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζονται *συναρτήσεις* της μεταβλητής.'

Εμείς σήμερα στην αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας, χρησιμοποιούμε τον όρο «μεταβλητή» και όχι «ανεξάρτητη μεταβλητή», αλλά εννοούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Στον Απειροστικό Λογισμό στο πρώτο έτος φοίτησης μας στο πανεπιστήμιο βλέπουμε τον ορισμό της συνάρτησης, εφόσον πρώτα έχει προηγηθεί μια αναφορά στα σύνολα. Ο ορισμός

είναι ο εξής: ‘Μια διμελής σχέση f⊂ X×Y είναι συνάρτηση από το X στο Y, την οποία συμβολίζουμε με f :X→Y , αν για κάθε xϵ X υπάρχει ένα μοναδικό y ϵ Y ώστε (x, y) ϵ f.
Το X είναι το πεδίο ορισμού της f. Λέμε επίσης ότι η f ορίζεται στο X. Αντί (x, y) ϵ f γράφουμε y=f(x) (εφόσον από τον ορισμό της συνάρτησης το y καθορίζεται μοναδικά από την ίδια τη συνάρτηση f και το xϵ X).
Αν xϵ X και f(x) = y το y είναι η τιμή της f στο x.
Το σύνολο f(x)= { yϵY : υπάρχει xϵ X ώστε y=f(x) } είναι το σύνολο τιμών της f.’
(Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1999, Σελ.126,)

Επίσης συναντάμε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης και στο 2^{ο} έτος φοίτησης στον Απειροστικό Λογισμό ΙΙΙ.
Ορισμός : ‘ Ένας νόμος f ο οποίος σε κάθε σημείο x ενός υποσυνόλου Α του ℝ αντιστοιχεί ένα καθορισμένο πραγματικό αριθμό f(x), ονομάζεται πραγματική συνάρτηση μιας (πραγματικής) μεταβλητής με πεδίο ορισμού το σύνολο Α και (συμφωνούμε να) γράφουμε f: A⊆ ℝ → ℝ
Ο πραγματικός αριθμός f(x) ονομάζεται η εικόνα του x. Εξάλλου, η μεταβλητή x ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και η μεταβλητή y=f(x) εξαρτημένη μεταβλητή.
Το υποσύνολο f(A):= {y∈ ℝ : y=f(x) για κάποιο x∈ A}={f(x): x∈ A } ονομάζεται το πεδίο τιμών (ή η εικόνα) της συνάρτησης f.’
(Τσίτσας,2002, Σελ.206)

Ο Cauchy συνεχίζει με τον ορισμό της **πραγματικής συνάρτησης πολλών πραγματικών μεταβλητών** και την ορίζει ως συνδεδεμένες μεταβλητές έτσι ώστε όταν δίνονται οι τιμές κάποιων από αυτές να μπορούν να βρεθούν και οι τιμές των υπολοίπων. Αυτές από τις οποίες βρίσκουμε τις υπόλοιπες ονομάζονται ανεξάρτητες. Οι μη ανεξάρτητες αποτελούν (συνιστούν) τις συναρτήσεις

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes;* et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Cauchy, 1821, Σελ. 37,

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.17

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley- Sandifer:

'Όταν μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε αν δοθούν οι τιμές κάποιων από αυτές κάποιος να μπορεί να βρει όλες τις υπόλοιπες ,θεωρούμε αυτές οι διάφορες ποσότητες εκφράζονται μέσω των διάφορων άλλων , οι οποίες παίρνουν το όνομα *ανεξάρτητες μεταβλητές.* Οι άλλες ποσότητες ονομάζονται *συνάρτηση* αυτών των μεταβλητών.'

Ένας σύγχρονος ορισμός είναι ο παρακάτω.

Ορισμός. ‘ Ένας νόμος f ο οποίος σε κάθε σημείο x ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί έναν καθορισμένο πραγματικό αριθμό f(x), ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το σύνολο A και (συμφωνούμε να) γράφουμε f: $A\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Το υποσύνολο $f(A):= \{y \in \mathbb{R} : y=f(x) \text{ για κάποιο } x\in A\}$ του $\mathbb{R}$ ονομάζεται το πεδίο τιμών (ή η εικόνα) της συνάρτησης f.’

(Τσίτσας, 2002, Σελ.197)

1.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ο κύριος στόχος του Cauchy σε πρώτη φάση, είναι να ορίσει το όριο συνάρτησης και ακολουθίας. Προς τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί σαν ενδιάμεση κρίσιμη έννοια, την έννοια του ορίου μίας μεταβλητής.

Κατωτέρω παρουσιάζουμε μία εικόνα της διαχρονικής εξέλιξης της εννοίας του ορίου.

What Is a Limit?

Leibniz (1684): If any continuous transition is proposed terminating in a certain limit, then it is possible to form a general reasoning, which covers also the final limit.

Newton (1687): The ultimate ratio of evanescent quantities . . . [are] limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished *in infinitum*.

Maclaurin (1742): The ratio of $2x + o$ to a continually decreases while o decreases and is always greater than the ratio of $2x$ to a while o is any real increment, but it is manifest that it continually approaches to the ratio of $2x$ to a as its limit.

D'Alembert (1754): This ratio $[a : 2y + z]$ is always smaller than $a : 2y$, but the smaller z is, the greater the ratio will be and, since one may choose z as small as one pleases, the ratio $a : 2y + z$ can be brought as close to the ratio $a : 2y$ as we like. Consequently, $a : 2y$ is the limit of the ratio $a : 2y + z$.

Lacroix (1806): The limit of the ratio $(u_1 - u)/h$ . . . is the value towards which this ratio tends in proportion as the quantity h diminishes, and to which it may approach as near as we choose to make it.

Cauchy (1821): If the successive values attributed to the same variable approach indefinitely a fixed value, such that they finally differ from it by as little as one wishes, this latter is called the limit of all the others.

Katz, 1998, σελ. 708.

Ο πρώτος ορισμός ορίου που δίνει ο Cauchy, ως προετοιμασία της εννοίας του ορίου ακολουθίας και συνάρτησης, είναι αυτό που ονομάζει «όριο μιας μεταβλητής». Κάπως αυτή η έννοια του, αντιστοιχεί με το καθ υμάς όριο ακολουθίας. Βέβαια ο Cauchy στην συνέχεια χρησιμοποιεί γενικά πραγματικές μεταβλητές και όχι μόνον ακολουθίες. Εδώ υπάρχει μία κάποια ασάφεια (με τα δικά μας κριτήρια).

Ορίζει την έννοια του ορίου μεταβλητής λέγοντας πως όταν οι διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή προσεγγίζουν επ' αόριστον μια σταθερή τιμή έτσι ώστε να καταλήγουν να διαφέρουν από αυτή όσο λιγότερο είναι επιθυμητό τότε η σταθερή αυτή τιμή ονομάζεται όριο της μεταβλητής. Εφόσον ορίζει την έννοια του ορίου μεταβλητής δίνει ένα αλγεβρικό και ένα γεωμετρικό παράδειγμα για να γίνει κατανοητή η έννοια. Στην άλγεβρα ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο διαφόρων κλασμάτων που το προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο και στη γεωμετρία ο κύκλος είναι το όριο εγγεγραμμένου πολυγώνου που αυξάνει ο αριθμός των πλευρών του ολοένα και περισσότερο.

fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; &c....

Cauchy, 1821, Σελ. 25

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.6

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley-Sandifer : 'Όταν οι τιμές που αποδίδονται διαδοχικά σε μια συγκεκριμένη μεταβλητή προσεγγίζουν επ' αόριστον μια σταθερή τιμή με τέτοιο τρόπο ώστε να καταλήγουν να διαφέρουν από αυτή όσο λιγότερο είναι επιθυμητό τότε αυτή η σταθερή τιμή ονομάζεται όριο όλων των άλλων τιμών. Έτσι για παράδειγμα ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο διαφόρων κλασμάτων που το προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο. Στην γεωμετρία ο κύκλος που είναι εγγεγραμμένα πολύγωνα που συνεχώς αυξάνονται οι πλευρές τους είναι το όριο αυτών '

1.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ CAUCHY

Ο Cauchy δεν δίνει κάπου με έμφαση **ορισμό ορίου συνάρτησης**. Βέβαια αφού όρισε το όριο μεταβλητής, η ιδέα του ορίου συνάρτησης είναι διάχυτη, υπονοείται από την έννοια του ορίου μεταβλητής.

Συγκεκριμένα ξεκινάει πως όταν μια μεταβλητή συγκλίνει σε ένα συγκεκριμένο αριθμό θα πρέπει να το γράφουμε με συγκεκριμένο τρόπο. Έτσι βάζει μπροστά απο τη μεταβλητή τη λέξη 'lim' που χρησιμοποιούμε και εμείς σήμερα. Έπειτα συνεχίζει λέγοντας πως μερικές φορές όταν μια ή περισσότερες μεταβλητές συγκλίνουν σε σταθερά όρια, μια συνάρτηση που περιέχει αυτές τις μεταβλητές συγκλίνει αντιστοιχα σε διάφορες τιμές.

Νομίζουμε ότι μία σωστή απόδοση του πνεύματος του Cauchy θα ήταν το εξής: Έστω y μία συνάρτηση που εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή x και a, b σταθερές. Αν όταν η x προσεγγίζει την a, τότε η y προσεγγίζει την b, τότε λέμε ότι η y έχει όριο b όταν η x τείνει προς την a.

Για πρώτη φορά, μετά από αρκετή προετοιμασία, «αγγίζει» το όριο συνάρτησης στο Cours d Analyse σελ 26.

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière ; c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

$$lim.$$

devant la quantité variable dont il s'agit. Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à-la-fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites, à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation *lim.*, de manière à entourer l'expression que l'on considère. Supposons, pour fixer les idées, qu'une variable positive ou négative représentée par x converge vers la limite 0, et désignons par A un nombre constant : il sera facile de s'assurer que chacune des expressions

$$lim.(A^x), \quad lim.(\sin. x)$$

a une valeur unique déterminée par l'équation

$$lim.(A^x) = 1,$$

$$\text{ou} \quad lim.(\sin. x) = 0;$$

tandis que l'expression

$$\lim_{x \to 0} \left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

admet deux valeurs, savoir, $+\infty$, $-\infty$, et

$$\lim_{x \to 0} \left(\left(\sin. \frac{1}{x}\right)\right)$$

une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et $+1$.

Cauchy, 1821, Σελ. 26

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.12

Cauchy, 1821, Σελ. 26

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.12

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley-Sandifer :

'Όταν μια μεταβλητή συγκλίνει σε ένα συγκεκριμένο αριθμό είναι χρήσιμο να το γράφουμε με συγκεκριμένο τρόπο. Έτσι βάζουμε μπροστά από τη μεταβλητή τη λέξη 'lim'. Μερικές φορές όταν μια ή περισσότερες μεταβλητές συγκλίνουν σε σταθερά όρια, μια συνάρτηση που περιέχει αυτές τις μεταβλητές συγκλίνει αντίστοιχα σε διάφορες τιμές. Ως εκ τούτου ορίζουμε αυθαίρετα ένα τέτοιο όριο χρησιμοποιώντας τη διπλή παρένθεση μετά το 'lim' έτσι ώστε να περικλείεται η συνάρτηση. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι μια θετική ή αρνητική μεταβλητή που συμβολίζεται με x συγκλίνει στο 0 και συμβολίζουμε με A ένα σταθερό αριθμό. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτές οι εκφράσεις(συναρτήσεις) $\lim A^x$ και limsinx έχουν μια μοναδική τιμή που προσδιορίζεται από την εξίσωση $\lim A^x = 1$ και limsinx=0 ή η έκφραση $\lim((\frac{1}{\chi}))$ παίρνει τις δυο τιμές $-\infty, +\infty$ και $\lim((\sin\frac{1}{\chi}))$ παίρνει άπειρες τιμές απο το -1 έως το +1.'

Γενικότερα ο Cauchy δεν τονίζει τους διαφόρους ορισμούς που χρησιμοποιεί, π.χ. με αλλαγή παραγράφου η με αναγγελία «ορισμός» η κάτι τέτοιο, όπως κάνουμε σήμερα. Οι ορισμοί εμφανίζονται εντός κειμένου τύπου «πεζογραφίας».

Όπως είδαμε, στους ορισμούς του ορίου δεν εμφανίζονται «δ και ε», οι διατυπώσεις είναι κάπως αόριστες και είναι ασαφές (τουλάχιστον με τα δικά μας κριτήρια αυστηρότητας) το τι ακριβώς εννοεί.

Στην συνέχεια θα κοιτάξουμε να δούμε το πώς χρησιμοποιεί στην μαθηματική πράξη αυτούς τους ορισμούς, δηλαδή όταν αποδεικνύει θεωρήματα κλπ.

Στο Cours d Analyse σελ. 54, Bradley- Sandifer σελ. 35, υπάρχει ένα παράδειγμα ορίου το οποίον αναλύεται αρκετά λεπτομερώς και ο Cauchy παρουσιάζει αρκετά ενδιαφέροντα πορίσματα αυτού. Π.χ. όταν το x τείνει προς το άπειρο το μεν logx/x τείνει στο 0 το δε a^x/x

(όταν a >1) τείνει προς το άπειρο. Τονίζει μάλιστα ότι αυτό δείχνει ότι ο λογάριθμος τελικά αυξάνεται πιο αργά από το x, ενώ το a^x αυξάνεται πιο γρήγορα.

Ας δούμε ένα βασικό παράδειγμα ορίου που επεξεργάζεται ο Cauchy.

1.er THÉORÈME. ***Si, pour des valeurs croissantes de x, la différence***

$$f(x+1)-f(x)$$

converge vers une certaine limite k, la fraction

$$\frac{f(x)}{x}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Cauchy, 1821, Σελ.48

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.35

Κατωτέρω παραθέτουμε τη μετάφραση στα ελληνικά από το αγγλικό κείμενο στο βιβλίο των Bradley-Sandifer : 'Θεώρημα 1. Αν η διαφορά f(x+1)- f(x)
συγκλίνει σε ένα συγκεκριμένο όριο k όταν το x μεγαλώνει, τότε ο λόγος $\frac{f(x)}{x}$, όταν το x μεγαλώνει, συγκλίνει στο ίδιο όριο'

Ακολουθεί η απόδειξή του:

Αρχικά υποθέτουμε οτι το κ είναι πεπερασμένος αριθμός και θεωρούμε 'ε' αριθμό όσο μικρό επιθυμούμε. Επειδή οι αυξανόμενες τιμές του x κάνουν τη διαφορά f(x+1) –f(x) να συγκλίνει στο όριο κ

μπορούμε να έχουμε ένα h αρκετά μεγάλο ώστε όταν το x είναι ίσο ή μεγαλύτερο από το h η διαφορά f(x+1)-f(x) να είναι μεταξύ των κ-ε, κ+ ε. Από αυτό για κάθε ακέραιο n κάθε μία από τις ποσότητες

f(h+1)- f(h),
f(h+2)- f(h+1),
…..
f(h+n)- f(h+n-1)

και κατά συνέπεια ο αριθμητικός τους μέσος
[f(h+n)-f(h)]/n
είναι μεταξύ των ορίων κ-ε, κ+ ε. Επομένως [f(h+n)- f(h)]/n= κ+ α όπου α είναι μεταξύ των –ε, +ε.
Θέτουμε **h+n =x** και έχουμε [f(x)- f(h)]/(x-h)= κ+ α (1) και f(x)=f(h)+(x-h)(κ+ α),
f(x)/x=f (h)/x+(1- h/x)(κ+α) (2). Επιπλέον για να αυξάνει απεριόριστα το x πρέπει ο ακέραιος n να αυξάνει απεριόριστα χωρίς να αλλάζει η τιμή του h.
Έστω ότι το h στην εξίσωση (2) θεωρείται σταθερή ποσότητα και το x μεταβλητή που συγκλίνει στο ∞. Τα f(h)/x και h/x που είναι στο δεξί μέλος τείνουν στο μηδέν και όλο το δεξί μέλος συγκλίνει σε ένα όριο του τύπου κ+ α όπου το α είναι μεταξύ των –ε, +ε. Έτσι ο λόγος f(x)/x έχει όριο μια ποσότητα μεταξύ των κ-ε, κ+ ε. Αυτό ισχύει όσο μικρό και να είναι το ε, και επομένως το όριο που ζητάμε είναι το κ. Με άλλα λόγια έχουμε limf(x)/x= lim[f(x+1)-f(x)].
Δεύτερον υποθέτουμε ότι κ=∞. Θεωρώντας ένα Η όσο μεγάλο επιθυμούμε μπορούμε πάντα να βρούμε ένα h τόσο μεγάλο ώστε για x μεγαλύτερο ή ίσο με το h, η διαφορά f(x+h)- f(x) που συγκλίνει στο ∞ , να είναι πάντα μεγαλύτερη απο το Η. Έτσι καταλήγουμε στον τύπο : [f(h+n)-f(h)]/n> Η . Τώρα αν θέσουμε h+n= x βρίσκουμε αντί της εξίσωσης (2) τη σχέση f(x)/x > f(h)/x + H(1-h/x) από την οποία συμπεραίνουμε ότι limf(x)/x >H όταν το x τείνει στο ∞. Το όριο του λόγου f(x)/x είναι μεγαλύτερο απο το Η , όσο μεγάλο και αν είναι αυτό. Αυτό το όριο δε μπορεί πάρα να είναι το +∞.
Τέλος ας υποθέσουμε ότι κ= -∞. Επειδή η διαφορά f(x+1)-f(x) έχει όριο το -∞ η [-f(x+1)]-[-f(x)] έχει όριο το +∞ και έτσι συμπεραίνουμε ότι και το f(x)/x θα έχει όριο το -∞.

Στα παραπάνω όμως ο καθηγητής Σ. Γ. Παπασταυρίδης επισημαίνει πως υπάρχουν προβλήματα όπως: Η απόδειξη του Cauchy έχει κενό στο σημείο που λέει ότι **«h+n =x», διότι από εκεί και πέρα χρησιμοποιεί τον n σαν ακέραιο, κάτι που δεν ισχύει αναγκαστικά.**

Επιπλέον ο ισχυρισμός δεν ισχύει διότι υπάρχει αντιπαράδειγμα. Περιγράφουμε ένα αντιπαράδειγμα στην συνέχεια. Έστω συνάρτηση g: (0, 1) →R και αν x πραγματικος τότε [x] είναι ο μέγιστος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x. Ορίζουμε την συνάρτηση

f: (0, +∞) →R, ως εξής :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ ακέραιος} \\ g(x-[x]) & \text{αν ο } x \text{ δεν είναι ακέραιος.} \end{cases}$$

Στην συνάρτηση f ισχύει f(x+1) – f(x) =0, άρα αν ισχύει το θεώρημα που διατυπώνει ο Cauchy θα πρέπει

lim(f(x)/x)=0 όταν limx=+∞. Όμως αυτό δεν ισχύει, εξηγούμε το γιατί. Έστω g(x)=1/x. Έστω a τυχαίος θετικός σταθερός πραγματικός. Θεωρούμε την ακολουθία x_n= n+(a/n). Για n αρκούντως μεγάλο ισχύει [n+(a/n)]=n οπότε g(x_n -[x_n])=g(a/n)=n/a. Αρα f(x_n)/x_n =(n/a)/(n+(a/n)=n/(an+a^2/n), που τείνει στο 1/a όταν το n πάει στο +∞. Όμως το a είναι οιοσδήποτε θετικός πραγματικός, άρα το f(x)/x ΔΕΝ συγκλίνει όταν το x πάει στο +∞.

Ο καθηγητής Β. Νεστορίδης θεωρεί ότι η διατύπωση του θεωρήματος από το βιβλίο του Cauchy είναι ελλειπής αλλά εύκολα συμπληρώνεται και η διαίσθηση του (Cauchy) είναι ισχυρότατη κ εφαρμόζεται σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. (Στις τελευταίες σελίδες υπάρχουν οι ασκήσεις που μας παρέδωσε ο καθηγητής.)

Τουλάχιστον τρείς διακεκριμένοι ιστορικοί των μαθηματικών στα παρακάτω βιβλία τους,

The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus Grabiner Κεφ.1 Σελ.8

Bradley Sandifer Cauchy Cours D analyse. An annotated Traslation Springer 2009 Σελ.36 Κεφ.2.3

Katz Victor J. A History of Mathematics, an Introduction. 2nd edition. Addison-Wesley, 1998, σελ. 709.

Δίνουν έμφαση στο παράδειγμα αυτό του Cauchy χωρίς να έχουν επισημάνει το κενό.

Στην ιστοσελίδα www.sciencedirect.com υπάρχει το Another theorem of Cauchy which 'admits exceptions' R. P. Burn, 2011. Υπάρχει αναφορά στην έλλειψη που υπάρχει στο θεώρημα του Cauchy και δίνονται αντιπαραδείγματα. Ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα είναι το παρακάτω.

Αντιπαράδειγμα: f(x)= $\frac{1}{1-x+[x]}$, όπου [x] το ακέραιο μέρος του x.

x≤ $[x]$ < x+1. Γι αυτή τη συνάρτηση f(x+1)- f(x) = 0, για όλες τις τιμές του x, ενώ για x>1 η $\frac{f(x)}{x}$ παίρνει τιμές στο διάστημα [1,+∞). Επομένως δεν υπάρχει όριο για την $\frac{f(x)}{x}$ καθώς x→ ∞

.

1.4 Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ CAUCHY ΓΙΑ ΤΟ ΟΡΙΟ

Όπως έχουμε δει ο Cauchy όρισε το όριο με την πρόταση: ' Όταν οι τιμές που αποδίδονται σε μια μεταβλητή προσεγγίζουν επ' αόριστον μια σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να απέχουν τόσο

λίγο όσο είναι επιθυμητό, τότε η σταθερή τιμή λέγεται όριο όλων των άλλων. Αυτή η έννοια, μεταφρασμένη στην άλγεβρα των ανισοτήτων, ήταν ακριβώς αυτό που χρειαζόταν ο Cauchy για το λογισμό του. Η ίδια η γλώσσα αυτού του λεκτικού ορισμού μερικές φορές λαμβάνεται για να δείξει την ανωτερότητα του ορισμού του ορίου του Cauchy σε σχέση με όλους τους προηγούμενους ορισμούς. Ο ορισμός του Cauchy δεν σχετίζεται με την έννοια της κίνησης, δεν εξαρτάται από τη γεωμετρία, δεν περιλαμβάνει τον περιττό περιορισμό, που συχνά περιλαμβάνεται στους προηγούμενους ορισμούς , ότι μια μεταβλητή δεν θα μπορούσε ποτέ να ξεπεράσει το όριο. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά ανήκαν στο όριο που έδωσε ο Lacroix το 1810. Παρόλο που ο Lacroix δεν όρισε το όριο γενικά, οι συζητήσεις του σε συγκεκριμένα παραδείγματα κάνουν ξεκάθαρο ότι είχε κατανοήσει το όριο γενικά. Για παράδειγμα όρισε α να είναι το όριο της συνάρτησης $ax/(x + a)$ καθώς το x αυξάνει απεριόριστα , από τη στιγμή που η διαφορά του α με την τιμή της συνάρτησης ‘γίνεται μικρότερη καθώς το x μεγαλώνει και μπορεί να γίνει μικρότερο από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, έτσι ώστε το προτεινόμενο κλάσμα να μπορεί να πλησιάσει το α όσο θέλουμε. ’ Και εξετάζοντας τα αθροίσματα των εναλλασσόμενων σειρών επεσήμανε ρητά, ακολουθώντας τον Simon l’Huilier, ότι αυτή η ποσότητα μπορεί να ξεπεράσει το όριο της. Έπειτα από τη μελέτη που κάναμε δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι ένας ορισμός του ορίου που ακούγεται λογικός προηγήθηκε της εργασίας του Cauchy. Έχοντας την έννοια του ορίου όχι ακόμα αρκετά σαφώς ορισμένη και απελευθερωμένη από περιττούς περιορισμούς ο Cauchy θα μπορούσε να είχε απορρίψει την έννοια αυτή όπως είχε κάνει και ο Lagrange το 1917.

Ο Lagrange βλέπει το όριο περισσότερο σαν τμήμα της γεωμετρίας παρά της άλγεβρας. Η έννοια του ορίου δεν είναι αρκετά ευρεία για να θεμελιώσει το λογισμό. Ο Lagrange παρατήρησε ότι αν μια ποσότητα ποτέ δεν μπορεί να ξεπεράσει το όριο της τότε η εφαπτομένη δεν μπορεί πάντα να ορίζεται σαν το όριο μιας τέμνουσας. Εντέλει η ιδέα του ορίου είναι βασισμένη στο παράδειγμα μιας καμπύλης το οποίο είναι όριο μιας ακολουθίας πολυγώνων. Κάτι που το καθιστά μέρος της γεωμετρίας.

Το Fonctions analytiques του Lagrange ξεχώριζε από τα ήδη υπάρχοντα βιβλία σε ένα πολύ σημαντικό σημείο. Πρωτίστως σκόπευε να καθιερώσει την αυστηρότητα στο λογισμό και όχι να παράξει νέα αποτελέσματα. Φυσικά δεν ήταν αδιάφορο σε νέα αποτελέσματα ,όπως για παράδειγμα για το υπόλοιπο Lagrange για τις σειρές Taylor. Ο Lagrange ανήγαγε γνωστά

αποτελέσματα μεγάλης πολυπλοκότητας μέσω των νέων θεμελίων τόσο στο λογισμό όσο και στην άλγεβρα και στη μηχανική.

Ο Bolzano και ο Cauchy επηρεάστηκαν από την οπτική του Lagrange. Ο Bolzano αναφερόμενος στη δουλειά του Lagrange επανέλαβε την έκκληση για εγκατάλειψη της προσφυγής στη γεωμετρία και κίνηση υπέρ της άλγεβρας όπως φαίνεται και στον τίτλο της απόδειξης του 'purely analytical proof' του θεωρήματος που λέει ότι μεταξύ δυο τιμών συνάρτησης [f(x)] που δίνουν αποτελέσματα με διαφορετικό πρόσημο υπάρχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα της εξίσωσης [f(x)=0]. Όταν ο Cauchy έκανε στην πρώτη του σπουδαία δουλειά μηχανικής το 1818, αναφέρει στο βιογραφικό του ότι το Fonctions analytiques ήταν ένα από τα τέσσερα βιβλία που χρησιμοποίησε.

Ίσως ο Cauchy θα μπορούσε να αναγνωρίσει την καταλληλότητα της άλγεβρας των ανισοτήτων ως θεμέλιο για τον λογισμό ακόμη και χωρίς την υπόδειξη που παρέχεται από την έννοια του ορίου. Αλλά είναι φυσικά αδύνατο να το γνωρίζουμε. Αλλά η έννοια του ορίου όπως είναι αντιληπτή το 1810 μαζί με έναν αιώνα δηλώσεων ότι οι έννοιες του λογισμού θα μπορούσαν να γίνουν κατανοητές σαν όρια βοήθησε στο να στραφεί η προσοχή του Cauchy στη σωστή κατεύθυνση.

Κεφάλαιο 2

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΤΑ CAUCHY

Ο Cauchy αφού έχει μιλήσει για όρια συνεχίζει με τον ορισμό της συνεχούς πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Cauchy, 1821, Σελ. 43

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.26

Ακολουθεί μετάφραση του αμέσως προηγουμένου πλαισίου.

‘ Έστω f(x) είναι συνάρτηση της μεταβλητής x και για κάθε τιμή του x μεταξύ δυο ορίων η f(x) παίρνει πάντα μια μοναδική τιμή. Αν σε αυτές τις τιμές του x προσθέτουμε ένα πολύ μικρό αριθμό α , η συνάρτηση θα προσαυξηθεί κατά τη διαφορά

f (x+α)- f(x) ,

η οποία εξαρτάται από το α και από το x. Δεδομένου αυτού η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής συνάρτηση του x αν μεταξύ αυτών των ορίων για κάθε τιμή αυτών των x η τιμή της διαφοράς

f(x+α)- f(x)

φθίνει απεριόριστα μαζί με την τιμή του α. Με άλλα λόγια η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής ως προς x σε ένα διάστημα αν στο διάστημα αυτό μια απειροελάχιστη αύξηση του x δημιουργεί πάντα απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης.

Επίσης λέμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x σε μια περιοχή συγκεκριμένης τιμής του x όταν είναι συνεχής μεταξύ δύο ορίων του x που περικλείουν αυτή την τιμή ακόμα και όταν τα όρια είναι πολύ κοντά μεταξύ τους.’

Cauchy, 1821, Σελ. 43

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.26

Κατ αρχάς παρατηρούμε ότι δεν ορίζει αυτό που σήμερα ονομάζουμε «συνάρτηση συνεχής στο σημείο $α_0$». Ορίζει δύο έννοιες που αντιστοιχούν στις δικές μας «συνάρτηση συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα» και επίσης «συνάρτηση συνεχής σε μία περιοχή του $α_0$».

Επισημαίνουμε ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί τον όρο «voisinage» (περιοχή), όμως είναι απλώς μία λέξη της καθομιλουμένης Γαλλικής και όχι σαφώς ορισμένος μαθηματικός όρος. (σελ. 49 Cours d'analyse)

Ασφαλώς υπάρχει κάποια ασάφεια στον ορισμό. Δεν είναι σαφές αν αυτό που ορίζει είναι αυτό που εμείς εννοούμε «συνεχής» η αυτό που εμείς λέμε «ομοιόμορφα συνεχής».

Είναι λογικό εκ πρώτης όψεως κάποιος να σχολιάσει ότι στον ορισμό συνεχείας δεν υπάρχουν «δ και ε», και ότι εν πάση περιπτώσει ο ορισμός είναι ασαφής. Όμως η βαθύτερη μελέτη του έργου του μας δείχνει ότι μάλλον έχει στο μυαλό του κατ ουσίαν κάποια έννοια του «δ και ε». Παραθέτει ένα παράδειγμα αμέσως μετά τον ορισμό της συνέχειας, ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση sinx είναι συνεχής και το βασίζει στην ταυτότητα sin(x+a)-sinx= 2sin(a/2)cos(x+a/2).

D'après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable x est continue par rapport à cette variable. Ainsi, par exemple, la fonction $\sin x$, admettant pour chaque valeur particulière de la variable x une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$, et par suite celle de la différence

$$\sin(x+\alpha) - \sin x = 2\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(x+\tfrac{1}{2}\alpha),$$

décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à x. En général, si l'on envisage sous le

Cauchy, 1821, Σελ. 44

Bradley- Sandifer , 2009, Σελ.26

Η μετάφραση στα ελληνικά:

'Μετά από αυτά που είπαμε είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε τα όρια μεταξύ των οποίων μια συνάρτηση του x είναι συνεχής ως προς x. Έτσι για παράδειγμα η συνάρτηση ημx η οποία παίρνει μοναδική πεπερασμένη τιμή για κάθε τιμή του x είναι συνεχής μεταξύ οποιωνδήποτε δυο ορίων του x δεδομένου ότι η τιμή του ημ($\frac{1}{2}\alpha$) και συνεπώς η τιμή της διαφοράς ημ(x+α) – ημx= 2ημ($\frac{1}{2}\alpha$)συν(x+$\frac{1}{2}\alpha$) φθίνει απεριόριστα με το α, με οποιαδήποτε τιμή και να πάρει το x.'

Οι Bradley- Sandifer στην σελ. 27 σχολιάζουν ότι η απόδειξη είναι κατά κάποιο τρόπο ανεπαρκής εφόσον στηρίζεται στην υπόθεση ότι η sinx είναι συνεχής στο μηδέν και η cosx είναι φραγμένη.

Ο Σ. Γ. Παπασταυρίδης σχολιάζει ότι αυτή η εκτίμηση ίσως δεν είναι ορθή, για τους παρακάτω λόγους. Κατ αρχάς είναι πασίγνωστο ότι το cosx φράσσεται απολύτως από το 1. Περαιτέρω δεν είναι αναγκαίο να υποθέσει συνέχεια της συνάρτησης sinx στο 0. Μπορεί να χρησιμοποιήσει την γεωμετρικά εύλογη ανισότητα $|\sin a| \leq |a|$. Ασφαλώς δεν δίνει τέτοιες λεπτομέρειες, όμως σίγουρα αυτές οι σκέψεις είναι στα πλαίσια των δυνατοτήτων του.

Ο σύγχρονος ορισμός συνεχούς συνάρτησης κατά σημείο είναι :

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f: X \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση και $x_0 \epsilon X$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \epsilon X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Γενικά το δ στον ορισμό αυτό εξαρτάται από το ε και το x_0.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο X αν είναι συνεχής σε κάθε $x \epsilon X$.

(Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας 1999, Σελ.139)

Ο σύγχρονος ορισμός ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης είναι :

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ και $f: X \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

αν $x, y \epsilon X$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, 1999, Σελ.156)

2.2 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ κατά CAUCHY

Στην συνέχεια προχωρεί φυσιολογικά να ορίσει την συνέχεια πραγματικής συνάρτησης πολλών πραγματικών μεταβλητών.

Κατ ουσία ορίζει μία πραγματική συνάρτηση πολλών πραγματικών μεταβλητών ως συνεχή, όταν είναι συνεχής σε κάθε μία μεταβλητή ξεχωριστά. Ξεκινώντας λοιπόν τον «ορισμό» αυτό προχωρεί να αποδείξει ως «θεώρημα» πλέον (σε σημερινή ορολογία) ότι αν η f είναι «συνεχής κατά Cauchy» τότε $\lim f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ όταν $\lim x_1 = a_1$, $\lim x_2 = a_2$, $\lim x_n = a_n$, .

Εδώ υπάρχει πρόβλημα.

Προς επιβεβαίωση των ανωτέρω παραθέτουμε τον ορισμό του από το γαλλικό πρωτότυπο καθώς και την «απόδειξη» του ισχυρισμού του.. Βλ. Cours d Analyse σελ. 46, η Bradley Sandifer σελ. 28.

Soit maintenant

$$f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables x, y, z, ..., et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières X, Y, Z, ... attribuées à ces

variables, $f(x, y, z, \ldots)$ soit à la fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z, ... On prouvera aisément que, si l'on désigne par α, β, γ, ... des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à x, y, z, ... les valeurs X, Y, Z, ... ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) - f(x, y, z, \ldots)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

$$\begin{aligned}
&f(x+\alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),\\
&f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) - f(x+\alpha, y, z, \ldots),\\
&f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables α, β, γ, ..., savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de α, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de β, celle de la troisième avec la valeur numérique de γ, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$

convergera vers la limite zéro, si α, β, γ, ... convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

Cauchy, 1821, Σελ. 46,

Bradley Sandifer, 2009, Σελ.28

Ακολουθεί ελληνική μετάφραση

Έστω τώρα η συνάρτηση πολλών μεταβλητών f(x, y, z, ….) και υποθέτουμε ότι σε μια περιοχή συγκεκριμένων τιμών X, Y, Z,… αυτών των μεταβλητών η f(x, y, z, ….) είναι ταυτόχρονα συνεχής ως προς x ,y,z,... Εύκολα αποδεικνύουμε ότι αν τα α, β, γ είναι απείρως μικρές ποσότητες και τα x, y, z,.. πάρουν τις τιμές X, Y, Z,… ή τιμές πολύ κοντά σε αυτές τότε η διαφορά

$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma,\ldots) - f(x, y, z,\ldots.)$

είναι απείρως μικρή. Πράγματι είναι ολοφάνερο από την προηγούμενη υπόθεση ότι οι αριθμητικές τιμές των διαφορών

f(x+α, y, z,..) –f(x, y, z ,…),
f(x+ α, y+β , z,….)-f(x+α, y , z,….)

f(x+ α, y+β , z+γ,….)-f(x+α, y+β , z,….)

φθίνουν απεριόριστα μαζί με τα α, β, γ,.. ., δηλαδή η αριθμητική τιμή της πρώτης διαφοράς μειώνεται μαζί με το α, φ αριθμητική τιμή της δεύτερης διαφοράς μαζί με το β, της τρίτης με το γ και ούτω καθεξής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα όλων αυτών των διαφορών δηλ. το

f(x+ α, y+β , z+γ,….)-f(x+, y , z,…)

συγκλίνει στο μηδέν όταν τα α, β, γ,.. πηγαίνουν στο ίδιο όριο.

Cauchy, 1821, Σελ. 46

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.28

Κατωτέρω παραθέτουμε το «θεώρημα» του, το οποίον ουσιαστικά για εμάς είναι ο ορισμός της συνεχείας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

THÉORÈME I. — *Si les variables $x, y, z, \ldots$ ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots$, *et que la fonction* $f(x, y, z, \ldots)$ *soit continue par rapport à chacune des variables* $x, y, z, \ldots$ *dans le voisinage du système des valeurs particulières*

$$x = \mathbf{X}, \quad y = \mathbf{Y}, \quad z = \mathbf{Z}, \quad \ldots,$$

$f(x, y, z, \ldots)$ *aura pour limite* $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots)$.

Cauchy, 1821, Σελ. 47

Bradley- Sandifer 2009, Σελ.29

Ακολουθεί η ελληνική μετάφραση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Εάν οι μεταβλητές x, y, z,… έχουν όρια τις αντίστοιχες σταθερές ποσότητες X, Y, Z,… και η συνάρτηση f(x, y, z, ….) είναι συνεχής για κάθε μια από τις μεταβλητές x, y, z ,…. σε μια περιοχή του συστήματος των τιμών x=X, y=Y,z= Z, … τότε η f(x, y, z, …) έχει όριο το f(X, Y, Z,…).

Παραθέτουμε κατωτέρω και την απόδειξη του παραπάνω, για να μπορεί ο αναγνώστης να κρίνει ανεξαρτήτως ότι είναι εσφαλμένη με βάση τον ορισμό συνεχείας του Cauchy

$$f(x+\alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+6, z, \ldots) - f(x+\alpha, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots) - f(x+\alpha, y+6, z, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables $\alpha, 6, \gamma, \ldots$, savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de α, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de 6, celle de la troisième avec la valeur numérique de γ, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$

convergera vers la limite zéro, si $\alpha, 6, \gamma, \ldots$ convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$f(x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots)$$

aura pour limite

$$f(x, y, z, \ldots).$$

La proposition qu'on vient de démontrer subsiste évidemment dans le cas même où l'on établirait entre les nouvelles variables $\alpha, 6, \gamma, \ldots$ certaines relations. Il suffit que ces relations permettent aux nouvelles variables de converger toutes en même temps vers la limite zéro.

Lorsque, dans la même proposition, on remplace $x, y, z, \ldots$ par

$X, Y, Z, \ldots$, et $x+\alpha, y+6, z+\gamma, \ldots$ par $x, y, z, \ldots$, on obt l'énoncé suivant :

Cauchy, 1821, Σελ. 46

Bradley- Sandifer 2009, Σελ.28

Μετάφραση:

f(x+α, y, z, . . .)− f(x, y, z, . . .),
f(x+α, y+β, z, . . .)− f(x+α, y, z, . . .),
f(x+α, y+β, z+γ, . . .)− f(x+α, y+β, z, . . .),
……

Οι αριθμητικές τιμές των παραπάνω διαφορών μειώνονται απεριόριστα μαζί με τις ποσότητες α, β, γ,… Δηλαδή η αριθμητική τιμή της πρώτης διαφοράς μειώνεται μαζί με το α, η αριθμητική της δεύτερης διαφοράς μειώνεται μαζί με το β, της τρίτης με το γ και ούτω καθεξής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα όλων αυτών των διαφορών δηλ. το

f(x+α, y+β , z+γ,….)-f(x, y, z,…)
συγκλίνει στο μηδέν όταν τα α, β, γ,.. πηγαίνουν στο ίδιο όριο. Με άλλα λόγια η

f(x+ α, y+β, z+γ,….) έχει όριο το f(x, y, z,…)

Η πρόταση που μόλις αποδείξαμε ισχύει και στην περίπτωση έχουμε ορίσει συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των α, β, γ,.. , αρκεί αυτές οι σχέσεις να επιτρέπουν οι νέες μεταβλητές να συγκλίνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Αν στην ίδια πρόταση αντικαταστήσουμε τα x, y, z, … με X, Y, Z, …. Και τα x+ α, y+β , z+γ,… με x, y , z,… καταλήγουμε στην ακόλουθη δήλωση. (Θεώρημα 1)

Cauchy, 1821, Σελ. 46

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.28

Σήμερα στον απειροστικό λογισμό ΙΙΙ συναντάμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 7.17 (Συνέχεια διανυσματικής συνάρτησης)
f : A ⊆ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Η f συνεχής σε ένα σημείο α, του πεδίου ορισμού A, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to a} f(x)$= f(α)

(Τσίτσας , 2002, Σελ 281)

Για m= 1 βλέπουμε ότι έχουμε τον ορισμό πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.
$\lim_{x\to a} f(x)$= f(α) σημαίνει ότι $\lim_{(x1,\chi 2,x3,\dots xn)\to(\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3,\dots an)} f(x1,\chi 2,\chi 3,\dots xn)$= f($\alpha_1$, α_2 ,α_3,…a_n)
Ο Cauchy δεν χρησιμοποιεί x_1, x_2, x_3 ,… αλλά x, y, z
Επίσης παρατηρούμε ότι ο Cauchy δεν χρησιμοποιεί ανισότητες (<) αλλά λεκτικά αναφέρει ότι οι διαφορές μειώνονται απεριόριστα. Ένας σύγχρονος μαθηματικός θα περίμενε να δει ανισότητες με 'δ' και με 'ε' όπως έχουμε στα σύγχρονα βιβλία.

[Ορισμός 7.1 Όριο πραγματικής συνάρτησης Έστω f $A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το υποσύνολο Α του $\mathbb{R}^n$ και **α** ένα σημείο συσσώρευσης του Α. Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει ως όριο τον πραγματικό αριθμό b όταν το **x τείνει στο α** και συμβολίζουμε με $\lim_{x\to a} f(x)$= b
ή $\lim_{(x1,\chi 2,\chi 3,\dots xn)\to(\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3,\dots an)} f(x1,\chi 2,\chi 3,\dots xn)$= b τότε και μόνο τότε ,
Όταν για κάθε ε >0 υπάρχει δ(ε) = δ >0 έτσι ώστε να ισχύει
|f(**x**) – b| < ε για κάθε **x** ∈ Α με **x** ≠ **α** και ||**x-α**|| < δ
(Τσίτσας, 2002, Σελ 257)

[Ορισμός 7.12 Όριο διανυσματικής συνάρτησης: Έστω f $A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το υποσύνολο Α του $\mathbb{R}^n$ και **α** ένα σημείο συσσώρευσης του Α. Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει ως όριο το στοιχείο **b** του $\mathbb{R}^m$ όταν το **x τείνει στο α** και συμβολίζουμε με

$\lim_{x\to a} f(x)$= **b** ή $\lim_{(x1,\chi 2,\chi 3,\dots xn)\to(\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3,\dots an.)} f(x1,\chi 2,\chi 3,\dots xn)$= **b** τότε και μόνο τότε
Όταν για κάθε ε >0 υπάρχει δ(ε) = δ >0 έτσι ώστε να ισχύει
||f(**x**) – b|| < ε για κάθε **x** ∈ Α με **x** ≠ **α** και ||**x-α**|| < δ

(Τσίτσας, 2002, Σελ 273)]

Αντιπαράδειγμα :

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f: $R^2 \to R$ με τύπο f(x, y)=xy/(x^2 +y^2) όταν τα x, y, δεν είναι αμφότερα 0, και f(0, 0)=0, είναι συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά, (όπως δηλαδή το ορίζει ο Cauchy). Κατά την σημερινή αντίληψη είναι συνεχής παντού εκτός του (0, 0**), όμως δεν είναι συνεχής στο (0, 0), με τον δικό μας ορισμό και για αυτή δεν ισχύει το**

παραπάνω θεώρημα του Cauchy . .-Αυτό εύκολα το βλέπει κανείς επιλέγοντας αρχικά x=y και υπολογίζοντας το όριο όταν το y τείνει στο 0, όποτε βρίσκει το όριο ½. Στην συνέχεια επιλέγει x=2y οπότε το ίδιο όριο είναι 2/5. Άρα δεν ισχύει το «θεώρημα» του Cauchy.

(Τσίτσας, 2002, Σελ 281)]

Επίσης ο Cauchy διατυπώνει με απόδειξη κάπως «περιγραφική», ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Κατωτέρω δίνεται το κείμενο στα γαλλικά καθώς και η μετάφραση του από το αντίστοιχο αγγλικό κείμενο

blies, dans le second, entre les quantités $x - X$, $y - Y$, $z - Z$; et il en résulte que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ aura pour limite $f(X, Y, Z, \ldots)$, dans le cas même où les variables x, y, z, ... seraient assujetties à certaines relations, pourvu que ces relations leur permettent de s'approcher indéfiniment des limites X, Y, Z, ...

Supposons, pour fixer les idées, que x, y, z, ... soient fonctions d'une même variable t considérée comme indépendante, et continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière

$$t = T.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$f(x, y, z, \ldots) = u,$$

u sera ce qu'on appelle une fonction composée de la variable t; et, si

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots, \quad U$$

désignent respectivement ce que deviennent

$$x, \quad y, \quad z, \quad \ldots, \quad u$$

dans le cas où l'on suppose $t = T$, il est clair, d'une part, qu'une

valeur de t très voisine de T fournira pour u une valeur unique et finie; d'autre part, qu'il suffira de faire converger t vers la limite T, pour que les variables x, y, z, ... convergent vers les limites X, Y, Z, ..., et, par suite, la fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$ vers la limite $U = f(X, Y, Z, \ldots)$. On prouverait absolument de la même manière que, si l'on attribue à t une valeur très voisine de T, la valeur correspondante de la fonction u sera la limite de laquelle cette fonction s'approchera indéfiniment, tandis que t convergera vers la valeur donnée; et l'on doit conclure que u sera fonction continue de t dans le voisinage de $t = T$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Cauchy, 1821, Σελ. 47

Bradley- Sandifer 2009, Σελ.29

Ακολουθεί ελληνική μετάφραση

Ως αποτέλεσμα των προηγουμένων η συνάρτηση f(x, y, z,…) έχει όριο το f(X, Y, Z,…) και στην περίπτωση που τα x, y, z,.. είναι συναρτήσεις οι οποίες επιτρέπουν τη σύγκλιση στα όριο X, Y, Z,… .
Για να το διευκρινίσουμε αυτό ας υποθέσουμε ότι τα x, y, z,.. είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t ,θεωρώντας τες ανεξάρτητες και συνεχείς ως προς τη μεταβλητή t σε συγκεκριμένη περιοχή κοντά στην τιμή t=T
Αν για λόγους ευκολίας θεωρήσουμε f(x, y, z,…) = u

Τότε το u είναι σύνθετη συνάρτηση της μεταβλητής t

Αν X, Y, Z,…,U είναι οι αντίστοιχες τιμές των x, y, z,…,u
Στην περίπτωση που t=T είναι φανερό ότι από τη μια μεριά ότι μια τιμή του t πολύ κοντά στο T θα δίνει στο u μια μοναδική πεπερασμένη τιμή. Από την άλλη μεριά αρκεί να συγκλίνει το t στο T ώστε οι μεταβλητές x, y, z,… να συγκλίνουν στα X, Y, Z,… και ταυτόχρονα η συνάρτηση u=f(x, y, z,…) να συγκλίνει στο U=f(X,Y,Z,…). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν δώσουμε στο t μια τιμή πολύ κοντά στο T η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης u είναι το όριο της συνάρτησης καθώς το t τείνει στη δοσμένη τιμή .
Έτσι συμπεραίνουμε ότι η u είναι συνεχής συνάρτηση του t σε μια περιοχή του t= T και καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα:

Cauchy, 1821, Σελ. 47

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.29

THÉORÈME II. — *Désignons par*

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots$$

plusieurs fonctions de la variable t, qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$. *Soient, de plus,*

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},\quad \ldots$$

les valeurs particulières de $x, y, z, \ldots$ *correspondantes à* $t = \mathrm{T}$; *et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction*

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

soit en même temps continue par rapport à x, continue par rapport à y, continue par rapport à z, ...; u, considérée comme une fonction de t, sera encore continue par rapport à t dans le voisinage de la valeur particulière $t = \mathrm{T}$.

Μετάφραση:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: - Έστω x, y, z,.. συναρτήσεις του t ,συνεχείς ως προς t σε περιοχή κοντά στην τιμή t=T.

Επιπλέον έστω X, Y, Z,.. οι αντίστοιχες τιμές των x, y, z,.. για t=T .Υποθέτουμε ότι σε μια περιοχή κοντά σε αυτές τις τιμές η συνάρτηση u= f(x, y, z,….) είναι ταυτόχρονα συνεχής ως προς x, y, z, … Τότε η u ως συνάρτηση του t είναι επίσης συνεχής ως προς t σε μια περιοχή κοντά στο t= T.

Cauchy, 1821, Σελ. 47

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.29

2.3. Προς την αυστηρή τυποποίηση: η ανισότητα του Lagrange.

Ένας μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα πλησίασε περισσότερο τον ορισμό της συνέχειας των Cauchy- Bolzano, μέσω μιας αλγεβρικής συζήτησης σχετικά με μια εργασία του για προσεγγίσεις συναρτήσεων με σειρές Taylor. Το 1797 ο **Lagrange** προσπάθησε να αποδείξει ένα αποτέλεσμα χρήσιμο για την προσέγγιση συναρτήσεων μέσω της σειράς Taylor :

Αν $f(x+h) = f(x) + hp(x) + h^2q(x) + \ldots .$

Υπάρχει ενα h ικανοποιητικά μικρό έτσι ώστε $|f(x)| > |hp + h^2q + \ldots|$.

Η απόδειξη του Lagrange δεν ήταν σωστή. Ωστόσο στο μαθημα του έδωσε μια περιγραφή για τη συνεχή συνάρτηση που πλησίαζε οσο καμία άλλη τον ορισμό των Cauchy- Bolzano. Έστω hP δοσμένη συνάρτηση , όπου P είναι συνάρτηση των x και h. Ο Lagrange είπε πως αν το x είναι σταθερό τότε καθώς το P υπάρχει και είναι πεπερασμένο το hP απλοποιείται με το h. Αν σκεφτούμε την καμπύλη που αντιστοιχεί σε αυτή τη συνάρτηση, με τετμημένη h και τεταγμένη hP , η καμπύλη θα τέμνει τον άξονα στο O(0,0). Ακόμη ο Lagrange είπε ‘ Η πορεία της καμπύλης θα είναι αναγκαστικά συνεχής από το σημείο αυτό. Έτσι θα πλησιάζει σιγά- σιγά τον άξονα πριν τον τμήσει και προσεγγίζοντας διαρκώς θα έχουμε μια ποσότητα μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα. Ο χαρακτηρισμός αυτός είναι γεωμετρικός αλλά ο Lagrange τον καθιστά αλγεβρικό: ‘οπότε πάντα μπορούμε να βρούμε μια τετμημένη h που αντιστοιχεί σε μια τεταγμένη μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα και έπειτα όλες οι μικρότερες τιμές του h να δίνουν τεταγμένες μικρότερες απο οποιαδήποτε ποσότητα. Αν και ο Lagrange δεν το χρησιμοποίησε για να ορίσει την ιδιότητα της συνεχούς συνάρτησης για πρώτη φορά χρησιμοποιεί όρους ανισοτήτων. Ο Lagrange στη συνέχεια δυο φορές είχε υπογραμμίσει την ουσιώδη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων. Η Grabiner έχει ήδη αναφερθεί στις ομοιότητες των Cauchy και Bolzano με το Equations numeriques του Lagrange. Ακόμη συχνά και ο Cauchy και ο Bolzano αναφέρονται στο Fonctions analytiques του Lagrange όπου βρέθηκε ο χαρακτηρισμός της συνέχειας.

Στην πραγματικότητα η αντιστοιχία της οπτικής του Lagrange και της οπτικής των Cauchy- Bolzano για τη συνέχεια τονίστηκε το 1830 απο τον ίδιο τον Bolzano. Είχε αναφέρει (η Grabiner) ότι ο όρος συνεχής συνάρτηση είχε χρησιμοποιηθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους: Για παράδειγμα για τον Lacroix σημαίνει ότι ο λόγος $\Delta F(x) / \Delta x$ ήταν φραγμένος, για τους Kastner και Fries σήμαινε ότι η συνάρτηση είχε την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, για τον Eytelwein σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι πραγματική και πεπερασμένη. Όλα αυτά είναι

σημαντικά αλλά καλό θα ήταν να διατηρηθεί η ορολογία που εισήγαγε ο Lagrange , ο Cauchy κ. α. για να κατανοούμε την ιδιότητα της συνέχειας συνάρτησης. **‘Η απόλυτη τιμή της διαφοράς F(x+ Δx) –F(x) γίνεται και παραμένει μικρότερη απο οποιοδήποτε λόγο 1/N αν το Δx το πάρουμε ικανοποιητικά μικρό. ’**

Ο Cauchy και ο Bolzano ξεπέρασαν τις λεπτομέριες απο παλαιότερες συζητήσεις για την κυματική εξίσωση ,διασταυρώνοντας καμπύλες, πολυώνυμα και δυναμοσειρές κοντά στο μηδέν. Αναγνώρισαν και απομόνωσαν την βασική ιδιότητα που καθορίζει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. Ήταν ακριβώς η ιδιότητα που χρειαζόντουσαν στις εντελώς διαφορετικές αποδείξεις τους για το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών συνεχών συναρτήσεων. Εξίσου σημαντική ήταν η ιδιότητα για τον Cauchy στις μετέπειτα εργασίες του στον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Το γεγονός αυτό μας δείχνει την ικανότητα του Cauchy να επιλέγει τη σημαντική ιδιότητα για μια έννοια μέσα απο πολλές ιδιότητες.

Ο Cauchy και ο Bolzano άρχισαν την αυστηρή θεωρία της συνέχειας αποδεικνύοντας θεωρήματα. Εφόσον ο Cauchy είχε αποδείξει πρώτα το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις , εφάρμοσε τον ορισμό και το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στην εργασία του στο λογισμο, όπως για παράδειγμα για την απόδειξη του θεωρήματος της μέσης τιμής στις παραγώγους και στα ολοκληρώματα, και στην απόδειξη της ύπαρξης ορισμένου ολοκληρώματος για αυτό που αποκαλούσε συνεχή συνάρτηση , (το οποίο όντως ήταν συνεχής συνάρτηση). Αργότερα μαθηματικοί επέκτειναν το θεώρημα του Cauchy για συνεχείς συναρτήσεις. Ο Abel σωστά χειρίστηκε τη συνέχεια συνάρτησης ορίζοντας τη με δυναμοσειρές. Ο Weierstrass διαχώρησε την ομοιόμορφη συνέχεια απο την κατα σημείο συνέχεια.

2.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥ ΤΙΜΗΣ (INTERMEDIATE VALUE THEOREM η BOLZANO)

Ο Cauchy διατυπώνει και αποδεικνύει αυτό που εμείς ονομάζουμε Θεώρημα της Ενδιάμεσης τιμής η Θεώρημα του Bolzano. Κατ αρχάς δίνει μία «γεωμετρική» απόδειξη.

Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en Géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Si la fonction* $f(x)$ *est continue par rapport à la variable* x *entre les limites* $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, *et que l'on désigne par* b *une quantité intermédiaire entre* $f(x_0)$ *et* $f(\mathrm{X})$, *on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x *comprises entre* x_0 *et* X.

Démonstration. — Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ et qui passe

Cauchy, 1821, Σελ. 50

Bradley- Sandifer 2009, Σελ.31

1° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2° par le point correspondant aux coordonnées X et $f(X)$, sera continue entre ces deux points; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y = b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

On peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation

$$f(x) = b.$$

Cauchy, 1821, Σελ. 50

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.31

Ακολουθεί μετάφραση

«Μία σημαντική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη Γεωμετρία για να αναπαραστήσουν τις συντεταγμένες ευθειών ή καμπύλων **(«συνεχών»)** γραμμών. Από αυτή την παρατήρηση μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε την ακόλουθη πρόταση:

Θεώρημα IV. - Αν η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής ως προς x μεταξύ των ορίων $x= x_0$ και x= X ,και αν b είναι μια ποσότητα μεταξύ των $f(x_0)$ και f(X) η εξίσωση

f (x) = b

μπορεί να έχει πάντα λύση μια ή περισσότερες τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των x_0 και X

Απόδειξη. – Για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή θα πρέπει να δείξουμε ότι η καμπύλη που έχει εξίσωση την y= f(x) τέμνει την ευθεία γραμμή που έχει εξίσωση την y = b μια ή περισσότερες φορές στο διάστημα που περιέχεται μεταξύ των συντεταγμένων που αντιστοιχούν στις τετμημένες x_0 και X. Τώρα είναι προφανές ότι αυτό ισχύει. Πράγματι επειδή η συνάρτηση

f(x) είναι συνεχής μεταξύ των ορίων $x=x_0$ και x= X, η καμπύλη με εξίσωση y = f(x) που περνάει πρώτον από το σημείο με συντεταγμένες x_0 , $f(x_0)$ και δεύτερον από το σημείο με συντεταγμένες X, f(X) θα είναι συνεχής μεταξύ αυτών των σημείων. Επειδή η σταθερή τεταγμένη b της ευθείας με εξίσωση y= b βρίσκεται μεταξύ των τεταγμένων $f(x_0)$, f(X) των δύο σημείων η ευθεία γραμμή θα περνάει οπωσδήποτε από αυτά τα σημεία και δεν γίνεται να μην συναντάει την καμπύλη που προαναφέραμε σε αυτό το διάστημα.

Επιπλέον όπως θα κάνουμε στο Note III μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα IV με μία άμεση και καθαρά αναλυτική μέθοδο , η οποία έχει και το πλεονέκτημα να μας παρέχει την αριθμητική λύση της εξίσωσης f(x)= b»

(Cauchy, 1821, Σελ. 50)

(Bradley- Sandifer 2009, Σελ.31)

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να προσέξουμε ότι ο Cauchy παρόλο που αναφέρεται σε συνεχή καμπύλη, δεν έχει ορίσει ποια καμπύλη θεωρείται συνεχής. Ο Cauchy όπως και κάθε μεγάλος μαθηματικός φαίνεται ότι μετέχει και του παλιού και του καινούριου. Χρησιμοποιεί τη συνέχεια καμπύλης προφανώς σύμφωνα με τα δεδομένα της εποχής του χωρίς να δώσει ιδιαίτερη σημασία για έναν ορισμό.

Στην συνέχεια δίνει και μία «αναλυτική» απόδειξη. Βλ. Cours d' Analyse NOTE III, σελ. 378 ή Bradley Sandifer σελ. 309.

Παραθέτουμε την διατύπωση του θεωρήματος και την απόδειξη.

Résoudre *numériquement* une ou plusieurs équations, c'est trouver les valeurs en nombres des inconnues qu'elles renferment; ce qui exige évidemment que les constantes comprises dans les équations dont il s'agit soient elles-mêmes réduites en nombres. Nous nous occuperons seulement ici des équations qui renferment une inconnue, et nous commencerons par établir, à leur égard, les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. — *Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x, qui demeure continue par rapport à cette variable entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$. Si les deux quantités $f(x_0)$, $f(\mathrm{X})$ sont de signes contraires, on pourra satisfaire à l'équation*

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. — Soit x_0 la plus petite des deux quantités x_0, X. Faisons

$$\mathrm{X} - x_0 = h,$$

et désignons par m un nombre entier quelconque supérieur à l'unité. Comme des deux quantités $f(x_0)$, $f(\mathrm{X})$, l'une est positive, l'autre négative, si l'on forme la suite

$$f(x_0),\quad f\left(x_0 + \frac{h}{m}\right),\quad f\left(x_0 + 2\frac{h}{m}\right),\quad \dots,\quad f\left(\mathrm{X} - \frac{h}{m}\right),\quad f(\mathrm{X}),$$

et que, dans cette suite, on compare successivement le premier terme avec le second, le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, etc., on finira nécessairement par trouver une ou plusieurs fois deux termes consécutifs qui seront de signes contraires. Soient

$$f(x_1),\quad f(\mathrm{X}')$$

Cauchy, 1821, Σελ. 378, Note III

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.309

deux termes de cette espèce, x_1 étant la plus petite des deux valeurs correspondantes de x. On aura évidemment

$$x_0 < x_1 < X' < X$$

et

$$X' - x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X - x_0).$$

Ayant déterminé x_1 et X' comme on vient de le dire, on pourra de même, entre ces deux nouvelles valeurs de x, en placer deux autres x_2, X'' qui, substituées dans $f(x)$, donnent des résultats de signes contraires, et qui soient propres à vérifier les conditions

$$x_1 < x_2 < X'' < X',$$

$$X'' - x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0).$$

En continuant ainsi, on obtiendra : 1° une série de valeurs croissantes de x, savoir

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots; \tag{2}$$

2° une série de valeurs décroissantes

$$X, \quad X', \quad X'', \quad \ldots, \tag{3}$$

qui, surpassant les premières de quantités respectivement égales aux produits

$$1 \times (X - x_0), \quad \frac{1}{m} \times (X - x_0), \quad \frac{1}{m^2} \times (X - x_0), \quad \ldots,$$

finiront par différer de ces premières valeurs aussi peu que l'on voudra. On doit en conclure que les termes généraux des séries (2) et (3) convergeront vers une limite commune. Soit a cette limite. Puisque la fonction $f(x)$ reste continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, les termes généraux des séries suivantes

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots,$$
$$f(X), \quad f(X'), \quad f(X''), \quad \ldots$$

convergeront également vers la limite commune $f(a)$; et, comme en s'approchant de cette limite ils resteront toujours de signes contraires, il est clair

Cauchy, 1821, Σελ. 378, Note III

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.309

que la quantité $f(a)$, nécessairement finie, ne pourra différer de zéro. Par conséquent on vérifiera l'équation

(1) $$f(x) = 0,$$

en attribuant à la variable x la valeur particulière a comprise entre x_0 et X. En d'autres termes,

(4) $$x = a$$

sera une *racine* de l'équation (1).

Cauchy, 1821, Σελ. 378, Note III

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.309

Κατωτέρω παραθέτουμε την μετάφραση του θεωρήματος και ολόκληρης της απόδειξης

«Για να επιλύσουμε αλγεβρικά μια ή περισσότερες εξισώσεις πρέπει να βρούμε τις τιμές των αγνώστων που περιέχονται ,σε αριθμούς. Αυτό προφανώς απαιτεί οι σταθεροί που περιέχονται στις εξισώσεις να περιορίζονται σε αριθμούς. Θα ασχοληθούμε εδώ μόνο με εξισώσεις που περιέχουν μόνο έναν άγνωστο και θα αρχίσουμε για να το θεσπίσουμε αυτό με τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα I. – Έστω f(x) μια πραγματική συνάρτηση της μεταβλητής x , η οποία είναι συνεχής ως προς x μεταξύ των ορίων x= x_0 και x= X. Αν οι ποσότητες f(x_0) και f(X) έχουν αντίθετα πρόσημα τότε η εξίσωση f(x)= 0 έχει λύση για μια ή περισσότερες τιμές του x που υπάρχουν μεταξύ των x_0 ,X.

Απόδειξη.- Έστω x_0 μικρότερο από το X. Θεωρούμε X- x_0= h και ορίζουμε m έναν ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο του 1. Επειδή μια από τις δύο ποσότητες f(x_0) και f(X) είναι θετική και μια είναι αρνητική αν γράψουμε την ακολουθία

f(x_0) , f($x_0 + \frac{h}{m}$) , f($x_0 + 2\frac{h}{m}$) , ……, f($x_0 - \frac{h}{m}$) ,f(X),

και υποθέσουμε ότι σε αυτή την ακολουθία συγκρίνουμε επιτυχώς τον πρώτο όρο με τον δεύτερο, το δεύτερο με τον τρίτο , τον τρίτο με τον τέταρτο και ούτω καθεξής τελικά θα πρέπει να βρούμε ότι μια ή περισσότερες φορές δυο διαδοχικοί όροι έχουν αντίθετο πρόσημο. Έστω f(x_1) και f(X′) δυο τέτοιοι όροι. x_1 ο μικρότερος όρος.

Έτσι έχουμε $x_0 < x_1 < X' < X$ και $X'-x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X- x_0)$

Έχοντας ορίσει τα x_1 , X όπως μόλις είπαμε μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να βρούμε δυο άλλες τιμές x_2 και X΄΄ μεταξύ των x_1 και X΄ που δίνουν αποτελέσματα με αντίθετο πρόσημο στην f(x) και ικανοποιούν τις συνθήκες $x_1 < x_2 < X'' < X'$ και $X''-x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0)$

Συνεχίζοντας έτσι παίρνουμε: 1ον μια αύξουσα σειρά τιμών του x , την
(2) $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$
Και 2ον μια φθίνουσα σειρά τιμών την
(3) $X, X', X'', \ldots..$
που οι τιμές της δεύτερης υπερβαίνουν τις αντίστοιχες τιμές της πρώτης σειράς κατά
$1\times (X - x_0)$, $\frac{1}{m} \times (X - x_0)$, $\frac{1}{m^2} \times (X - x_0)$
Και τελικά διαφέρουν από τους όρους της πρώτης σειράς όσο λίγο είναι επιθυμητό.
Συμπεραίνουμε ότι οι όροι των σειρών (2) και (3) συγκλίνουν σε ένα κοινό όριο. Έστω α το όριο αυτό. Επειδή η f(x) είναι συνεχής από το $x= x_0$ στο x=X οι γενικοί όροι των ακόλουθων σειρών
$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots.,$
f(X), f(X΄), f(X΄΄),….
Ομοίως συγκλίνουν στο κοινό όριο f(α). Καθώς πλησιάζουν το όριο αυτό έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα, επομένως είναι σαφές ότι το f(α) εφόσον είναι πεπερασμένο δεν μπορεί να έχει άλλη τιμή από τη μηδενική. Κατά συνέπεια ικανοποιεί την εξίσωση
(1) $f(x) = 0$,
Θέτοντας όπου x την τιμή α, που περιέχεται μεταξύ των x_0 και X. Με άλλα λόγια
(4) $x= \alpha$
Είναι η ρίζα της εξίσωσης (1)»

Αξίζει στο σημείο αυτό να κάνουμε έναν σχολιασμό για τις δύο αυτές αποδείξεις του Cauchy. . Ο Cauchy λοιπόν μας δίνει δύο αποδείξεις που και τις δύο τις θωρεί σωστές και ιδίου κύρους. Η μία είναι η γεωμετρική και η δεύτερη είναι η αναλυτική. Σήμερα την γεωμετρική την θεωρούμε εσφαλμένη. Πιθανότατα πολλοί διδάσκοντες θα αναφέρουν την επιχειρηματολογία της γεωμετρικής «απόδειξης», σαν κάτι που βοηθάει την διαίσθηση και μας οδηγεί στην αναλυτική απόδειξη. Την αναλυτική απόδειξη που δίνει ο Cauchy, την θεωρούμε σήμερα ουσιαστικά σωστή. (Βέβαια έχει μία έλλειψη. Χρησιμοποιεί σιωπηρά το ότι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών, θα συγκλίνει. Αυτό το κάνει και σε άλλα σημεία του βιβλίου, το κάνει σιωπηρά και χωρίς καμιά εξήγηση. Ο Cauchy βρίσκει ένα πλεονέκτημα στην αναλυτική απόδειξη, το ότι επιτρέπει να βρούμε μέσω προσέγγισης, την ρίζα της συνάρτησης.

Ας πάμε τώρα στον Bolzano. Ο οδηγός μας είναι η αγγλική μετάφραση των έργων του Bolzano, Russ Steve. The Mathematical Works of Bernard Bolzano. Oxford University Press 2004. Τα σχετικά με το θεώρημα της ενδιαμέσου τιμής, (που συνήθως ονομάζεται Θεώρημα του Bolzano), περιέχονται στην εργασία Purely Analytic Proof of the Theorem that between any two Values, which give Results of Opposite Sign, there lies at least one real Root of the Equation by Bernard Bolzano Priest, For the Proceedings of the Royal Society of Sciences, Prague, 1817. Όπως και ο Cauchy έτσι και ο Bolzano δίνει δύο «αποδείξεις» του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής. Και με τον Bolzano έχουμε μία γεωμετρική και μία αναλυτική απόδειξη.

Η γεωμετρική απόδειξη βρίσκεται στο Russ p. 254 . Ακολουθεί το σχετικό κείμενο:

I. The *most common* kind of proof depends on a truth borrowed from *geometry, namely: that every continuous* [*continuirlich*]a *line of simple curvature of which the ordinates are first positive and then negative* (or conversely), *must necessarily intersect the abscissae-line*o *somewhere at a point lying between those ordinates*. There is certainly nothing to be said against the *correctness*, nor against the *obviousness* of this geometrical proposition. But it is also equally clear that it is an unacceptable breach of *good method* to try to derive truths of *pure* (or general) mathematics (i.e. arithmetic, algebra, analysis) from considerations which belong to a merely *applied* (or special) part of it, namely *geometry*. Indeed, have we not long felt, and acknowledged, the impropriety of such a $\mu\varepsilon\tau\alpha\beta\alpha\sigma\iota\varsigma\ \varepsilon\iota\varsigma\_\alpha\lambda\lambda o\ \ \gamma\varepsilon\nu o\varsigma$ Are there not a hundred other cases where a method of avoiding this [transition] has been discovered, andwhere the avoidancewas considered a virtue?* So if we wish to be consistent must we not strive to do the same here? In fact, anyone who considers that scientific proofs should not merely be *confirmations* [*Gewismachungen*], but rather *groundings* [*Begrundungen*], i.e. presentations of the objective reason for the truth to be proved, realizes at once that the strictly scientific proof, or the objective reason of a truth, which holds equally for *all* quantities, whether in space or not, cannot possibly lie in a truthwhich holds merely for quantitieswhich are in *space*.

Μετάφραση:

Ι.Η πιο συνήθης απόδειξη στηρίζεται σε μια αλήθεια της γεωμετρίας, η οποία λέει: ότι κάθε συνεχής γραμμή μιας απλής καμπύλης της οποίας οι συντεταγμένες αρχικά είναι θετικές και στη συνέχεια αρνητικές (ή αντίστροφα) ,πρέπει οπωσδήποτε να τέμνει την γραμμή των τετμημένων σε κάποιο σημείο που είναι μεταξύ αυτών των συντεταγμένων. Σίγουρα δεν υπάρχει τίποτα που να μπορούμε να πούμε ως προς την ορθότητα ή ως προς του ότι είναι προφανής αυτή η γεωμετρική πρόταση. Όμως είναι επίσης σαφές ότι πρόκειται για μια μη αποδεκτά καλή μέθοδο

για να προσπαθήσει κάποιος να συμπεράνει γενικές μαθηματικές ‘αλήθειες’(π.χ. στην αριθμητική, την άλγεβρα, ή την ανάλυση) από συμπεράσματα που ανήκουν μόνο σε μία εφαρμοσμένη (ή ειδική) περίπτωση της γεωμετρίας. Πράγματι έχουμε αναγνωρίσει τη μη καταλληλότητα της ‘’μετάβασις εις άλλο γένος’’. Δεν υπάρχουν εκατοντάδες άλλες περιπτώσεις όπου μια μέθοδος αποφυγής μιας τέτοιας μετάβασης έχει ανακαλυφθεί , και που η αποφυγή θεωρείται αρετή; Έτσι αν θέλουμε να είμαστε συνεπείς δεν πρέπει να προσπαθήσουμε να κάνουμε το ίδιο και εδώ ; Πράγματι όποιος σκεφτεί αυτές τις επιστημονικές αποδείξεις δεν θα πρέπει να τις δει σαν επιβεβαιώσεις αλλά περισσότερο σαν groundings (υπόβαθρα) δηλαδή σαν παρουσιάσεις του αντικειμενικού λόγου για την αλήθεια που πρέπει να αποδειχθεί , αντιλαμβάνεται αμέσως ότι η αυστηρή επιστημονική απόδειξη ή ο αντικειμενικός λόγος μιας αλήθειας, που είναι ισοδύναμος για όλες τις ποσότητες , είτε είναι σε διάστημα είτε όχι, πιθανόν δε μπορεί να στηρίζεται σε μια αλήθεια η οποία ισχύει απλώς για ποσότητες που είναι στο διάστημα.

Η αναλυτική απόδειξη του Bolzano, βρίσκεται στο Russ p. 260,

Thus all the proofs so far of the proposition which forms the title of this paper are inadequate. Now the one which I submit here for the judgement of scholars contains, I flatter myself, not a mere confirmation, but the objective grounding of the truth to be proved, i.e. it is strictly scientific.∗∗

The following is a short survey of the proof. The truth to be proved, that between the two values α and β which give results of opposite sign there always lies at least one real root, clearly rests on the more general truth that, if two continuous functions of x, fx and φx, have the property that for $x = \alpha$, $f\alpha < \varphi\alpha$, but for $x = \beta$, $f\beta > \varphi\beta$, theremust always exist some value of x lying between α and β for which $fx = \varphi x$. If $f\alpha < \varphi\alpha$, then by virtue of the law of continuity $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, if i is taken small enough. The property of being smaller therefore belongs to the function of i represented by the expression $f(\alpha + i)$ for all values of i smaller than a certain value. Nevertheless this property does not hold for all values of i without restriction, namely not for an i which is$=\beta - \alpha$, since $f\beta$ is already $>\varphi\beta$. Now the

theorem holds that whenever a certain property M applies to all values of a variable quantity i which are smaller than a given value, and yet not for all values in general, then there is always some greatest value u, of which it can be asserted that all i which are<u possess the property M. For this value of i itself, f (α+u) cannot be <φ(α +u) because then by the law of continuity f (α +u+ω) < φ(α +u+ω) if ω is taken small enough. And consequently it would not be true that u is the greatest of the values for which the assertion holds that all lower values of i make f (α + i) < φ(α + i), for u + ω would be a still greater value for which this holds. But still less can f (α + u) > φ(α + u), for then f (α + u − ω) > φ(α + u − ω) would also be true if ω is sufficiently small, and consequently it would not be true that for all values of i which are <u, f (α + i) < φ(α + i). So therefore it must be that f (α + u) = φ(α + u), i.e. there is a value of x lying between α and β,

namely $\alpha + u$, for which the functions fx and φx are equal to one another. It is now only a question of proving the *theorem* mentioned.We prove this by showing that those values of i of which it can be asserted that all smaller values possess the property M, and those of which this can no longer be asserted, can be brought as near one another as we please. From which it follows, for anyone having a correct concept of *quantity*, that the idea of an i which is the greatest of those [quantities] of which it can be said that all below them possess the property M, is the idea of a real, i.e. *actual*, quantity [*einer reellen, d.h. wirklichen Grose*].n

Μετάφραση:

Έτσι μέχρι τώρα όλες οι αποδείξεις της πρότασης, που αποτελεί τον τίτλο της παρούσας εργασίας είναι ανεπαρκείς. Τώρα αυτό που μπορώ να υποβάλω εδώ για την κρίση των μελετητών περιέχει όχι μια απλή επιβεβαίωση, αλλά το αντικειμενικό υπόβαθρο της αλήθειας που πρέπει να αποδειχθεί, δηλαδή είναι αυστηρά επιστημονική.
Το παρακάτω είναι μια σύντομη περιγραφή της απόδειξης. Η αλήθεια που πρέπει να αποδειχθεί , ότι μεταξύ δυο τιμών α, β που δίνουν διαφορετικού πρόσημου αποτελέσματα υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, προφανώς στηρίζεται στην πιο γενική αλήθεια ότι, αν δυο συνεχείς συναρτήσεις του χ, οι fχ. και φχ έχουν την ιδιότητα που για χ=α , fα< φα αλλά για χ= β

, fβ> φβ , πρέπει να υπάρχει πάντα κάποια τιμή του χ μεταξύ των α, β για το οποίο fχ= φχ . Αν fα < φα , τότε από το νόμο της συνέχειας f(α+ i) < φ(α+i) , για i αρκετά μικρό. Η ιδιότητα του να είναι μικρότερο ανήκει στην συνάρτηση του i που υπάρχει στην έκφραση f(α+ i) για όλες τις τιμές του i μικρότερες από μια συγκεκριμένη τιμή. Ωστόσο αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για όλες τις τιμές του i χωρίς περιορισμό, δηλαδή για ένα i το οποίο είναι i= β – α δεδομένου ότι ξέρουμε πως fβ >φβ. Τώρα το θεώρημα λέει ότι όταν μια συγκεκριμένη ιδιότητα Μ ισχύει για όλες τις τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας i που είναι μικρότερες από οποιαδήποτε δοθείσα τιμή ,και όμως όχι για όλες τις τιμές γενικά , τότε υπάρχει πάντα κάποια μεγαλύτερη τιμή u για την οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι όλα τα i που είναι < u ισχύει η ιδιότητα Μ. Γι'αυτή την τιμή του i δεν μπορεί f(α+u) <φ(α+ u) διότι τότε από το νόμο της συνέχειας f(α+u+ω) < φ(α+u+ω) για ω αρκετά μικρό. Και κατά συνέπεια δεν θα ήταν αληθές ότι το u είναι η μεγαλύτερη τιμή των i για την οποία ισχύει f(α+ i) < φ(α+i) εφόσον η u+ω
θα είναι η μεγαλύτερη τιμή για την οποία ισχύει. Αλλά ακόμα λιγότερο μπορεί f(α+u) > φ(α+u) ,γιατί τότε f(α+u-ω) >φ(α+u-ω) θα ήταν επίσης αληθές για ω ικανοποιητικά μικρό και κατά συνέπεια δεν θα ήταν αληθές ότι για όλες τις τιμές του i που είναι μικρότερες από το u f(α+ i) < φ(α+i). Επομένως πρέπει να ισχύει ότι f(α+u) = φ(α+u). Δηλαδή υπάρχει μια τιμή του χ που βρίσκεται μεταξύ των α, β, η α+u , για την οποία οι συναρτήσεις fχ και φχ είναι ίσες. Τώρα πλέον είναι μόνο θέμα απόδειξης. Το αποδεικνύουμε αυτό δείχνοντας ότι εκείνες οι τιμές του i για τις οποίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι μικρότερες τιμές έχουν την ιδιότητα Μ , και εκείνες οι για τις οποίες δεν μπορούμε να τι ισχυριστούμε πλέον αυτό μπορούν να πλησιάσουν μεταξύ τους όσο επιθυμούμε. Από αυτό προκύπτει ότι, για όποιον έχει μια σωστή έννοια (εικόνα) της ποσότητας ,η ιδέα ενός i το οποίο είναι το μεγαλύτερο από αυτές τις ποσότητες, για τις οποίες μπορούμε να πούμε ότι όλες κάτω από αυτό έχουν την ιδιότητα Μ είναι η ιδέα μιας πραγματικής ποσότητας.

Γενικά βλέπουμε ότι ο Bolzano σε αντίθεση με τον Cauchy χρησιμοποιεί δύο συναρτήσεις, μέγιστη τιμή και καταλήγει σε άτοπο. Διαβάζοντας την απόδειξη του Cauchy και την απόδειξη του Bolzano βλέπουμε ότι έχουμε δυο διαφορετικές αποδείξεις.

Ο Cauchy φτιάχνει δυο ακολουθίες, μια φθίνουσα και μια αύξουσα με όρους του x που βρίσκονται μεταξύ των ορίων x_0, X , οι οποίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο και λόγω της συνέχειας ισχυρίζεται πως και οι αντίστοιχες τιμές f(x) θα συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Επειδή τα f(x) είναι και αρνητικά και θετικά το όριο αυτό συμπεραίνει ότι είναι το μηδέν.

Ο Bolzano λέει πως αυτή η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε στηρίζεται σε μια γενικότερη αλήθεια η οποία λέει ότι αν δυο συνεχείς συναρτήσεις του x , οι f(x), φ(x) έχουν την ιδιότητα :

Για x= α f(α) < φ(α) και
Για x= β f(β) > φ(β)

Υπάρχει πάντα κάποια τιμή του x μεταξύ των α, β για την οποία $f(x)= \varphi(x)$

Αν $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ λόγω της συνέχειας $f(\alpha+ i) < f(\alpha+i)$ για i αρκετά μικρό. Αλλά αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για όλα τα i .Δηλαδή για $i= \beta- \alpha$ αφού $f(\beta) > \varphi(\beta)$.

Έτσι το θεώρημα ισχύει όταν μια συγκεκριμένη ιδιότητα Μ ισχύει για όλα τα i που είναι μικρότερα από μια συγκεκριμένη τιμή.

Επομένως πάντα υπάρχει η μέγιστη τιμή u ώστε για όλα τα i με $i < u$ να ισχύει η ιδιότητα Μ.

Έτσι δεν ισχύει $f(\alpha+ u) < \varphi (\alpha+ u)$ γιατί από τη συνέχεια για μικρό ω θα ίσχυε $f(\alpha+ u+ \omega) < \varphi (\alpha+ u+ \omega)$ και επομένως δεν θα ήταν αληθές ότι η u είναι η μέγιστη τιμή για την οποία ισχύει η ιδιότητα.

Και ο Bolzano όπως και ο Cauchy θεωρεί σωστές και τις δύο αποδείξεις. Αναφέρει όμως ότι η γεωμετρική απόδειξη συνιστά «μετάβαση εις άλλο γένος» και η φράση αυτή είναι γραμμένη ελληνιστί στο γερμανικό κείμενο του Bolzano. Η αντίρρηση είναι ας το πούμε «φιλοσοφική». Θεωρεί ότι ένα θεώρημα που αναφέρεται σε αριθμούς θα πρέπει να αποδειχθεί με συλλογισμούς πάνω σε αριθμούς. Σήμερα δεν βάζουμε τέτοιου είδους απαιτήσεις στις αποδείξεις μας.

Επίσης αξίζει να αναφέρουμε ότι για την αναλυτική απόδειξη χρησιμοποιεί σιωπηρά το εξής: Έστω Α υποσύνολο των πραγματικών που δεν είναι κενό ούτε όλοι οι πραγματικοί. Έστω επίσης ότι αν το χ ανήκει στο Α και $\psi<\chi$ τότε και το ψ ανήκει στο Α. Τότε το Α έχει supremum (με τον σημερινό ορισμό). Δηλαδή χρησιμοποιεί σιωπηρά χωρίς αναφορές η σχόλια κάτι που πρακτικώς είναι πολύ κοντά σε ένα αξίωμα που χρησιμοποιείται σήμερα για τον αξιωματικό ορισμό των πραγματικών: μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών έχει supremum.

2.5 Οι ρίζες της απόδειξης του Cauchy για το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Μια προσεγγιστική μέθοδος μπορεί να μας παρέχει έναν τρόπο δόμησης μιας ποσότητας και επομένως την απόδειξη ότι υπάρχει. Η επανάσταση που έγινε απο τον Cauchy στον λογισμό έγινε εν μέρει από τον μετασχηματισμό ήδη υπαρχουσών τεχνικών. Πήρε κάτι πού ήταν για ένα συγκεκριμένο σκοπό και το διεύρυνε τόσο ώστε να χρησιμοποιηθεί για διαφορετικό σκοπό. Πριν τον Cauchy η προσεγγιστική μέθοδος ήταν για να πλησιάζουν όλο και περισσότερο σε έναν πραγματικό αριθμό που η ύπαρξη θεωρείτο αυτονόητη. Μετά τον Cauchy οι πραγματικοί αριθμοί ορίζονταν σαν όρια συγκλίνουσας προσεγγιστικής διαδικασίας και η ύπαρξη τους αποδεικνύονταν από τη σύγκλιση της προσέγγισης. (Αυτό έδωσε και την πληρότητα των πραγματικών.) Ένα από τα πρώτα παραδείγματα που φαίνεται η αλλαγή έχει βρεθεί στην ιστορία της απόδειξης του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών του Cauchy. Μια προσεγγιστική μέθοδος του $18^{ου}$ αιώνα οδήγησε τον Cauchy άμεσα στη αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος. Ο Cauchy και ο Bolzano είναι οι πρώτοι που απέδειξαν το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις. [f(x) συνεχής στο [α, β] f(a)≠ f(b), για κάθε n με f(a)<n < f(b) υπάρχει ξ, ε [α, β] ώστε f(ξ)= n]

Η απόδειξη του Cauchy στηρίζεται σε συγκεκριμένη πολύ απλή προσεγγιστική διαδικασία. Παρόλο που η διαδικασία είναι απλή η βασική ιδέα είναι επαναστατική. Ο Cauchy μετέτρεψε την προσεγγιστική διαδικασία σε κάτι εντελώς διαφορετικό: στην απόδειξη της ύπαρξης ορίου. Το $18^{ο}$ αιώνα οι μαθηματικοί θεωρούσαν ότι όλα τα πολυώνυμα είχαν την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών. Αυτή η ιδιότητα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν οι μηδενικές τιμές του πολυωνύμου. Συγκεκριμένα αν P(x) το πολυώνυμο και P(a) < 0 , P(b) > 0 τότε θεωρούσαν ότι υπάρχει κάποιο X μεταξύ των a, b ώστε P(X) = 0 . Οι ποσότητες a, b λέγονταν όρια της ρίζας X. Δοσμένων των a,b το X μπορεί να το προσεγγίσουμε σε οποιοδήποτε βαθμό. Συγκεκριμένα αν και P(a) < 0 , P(b) > 0 παίρνουμε το $\frac{P(a)+P(b)}{2}$, αν είναι 0 καλώς. Αλλιώς όπου a βάζουμε a+b/2 και συνεχίζουμε. Η διαφορά b-a μας δίνει ένα άνω όριο στο σφάλμα παίρνοντας το a ή b σαν λύση. Ο Maclaurin στην εργασία του είπε οτι αν b-a < 1 τότε a ή b μπορεί να είναι η πρώτη προσέγγιση στη μέθοδο του Νεύτωνα.

Μία παρόμοια εκδοχή δόθηκε από τον Lagrange με μικρή διαφορά. Έστω P(a), P(b) ετερόσημα και επιλέγουμε ένα n οσοδήποτε μικρό. Τότε το χ μπορεί να είναι A, A+n, A +2n,… B-3n, B-2n, B-n,B. Βλέποντας τις διαδοχικές τιμές που παίρνει το P θα βρούμε δύο ετερόσημους αριθμούς στην ακολουθία. Ακόμη όπως επισήμανε ο Lagrange η διαδικασία από μόνη της δίνει όρια στο

σφάλμα, το οποίο είναι η διαφορά ανάμεσα στη ρίζα και την προσέγγιση. Έτσι είναι ίσο με n ή μικρότερο. Ο Lagrange παρουσίασε αυτή του τη μέθοδο μαζί με μια μέθοδο εύρεσης ενός αριθμού n που είναι μικρότερος από τη διαφορά δύο πραγματικών ριζών του P. Όταν γίνει η επιλογή του n η μέθοδος του Lagrange βρίσκει όλες τις πραγματικές ρίζες ανάμεσα στα δοσμένα όρια A και B. Αυτό έκανε τη μέθοδο ελκυστική στους μαθηματικούς για την εύρεση ριζών στις εξισώσεις. Αλλά η δυνατότητα επανάληψης της διαίρεσης του διαστήματος σε τμήματα έκανε τον Cauchy να προσφύγει σε αυτή τη μέθοδο.

Ο Cauchy πήρε την προσεγγιστική διαδικασία και την επανέλαβε (όπως ο Maclaurin με τα μισά) για να τη μετατρέψει σε απόδειξη ύπαρξης της ενδιάμεσης τιμής. Στις σημειώσεις του Cauchy έστω f συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα που περιλαμβάνει τα χ_0 και X. Αν $f(\chi_0)$ και f(X) ετερόσημα και $X-\chi_0 = h$,αν χωρίσουμε το διάστημα $X-\chi_0$ σε m διαστήματα μήκους h/m βρίσκουμε όπως ο Lagrange τα πρόσημα των $f(x_0)$, $f(x_0+h/m)$,… f(X-h/m), f(X). Δύο τιμές της f(x) θα είναι ετερόσημες και θα διαφέρουν κατά h/m.

Όμως ο Cauchy δεν έκανε τη διαδικασία για να βρει τις ρίζες της f(x)=0 μεταξύ των χ_0 και X με ένα σφάλμα h/m. Ο Cauchy επανέλαβε την προσεγγιστική διαδικασία του Lagrange εφαρμόζοντας την στο νέο διάστημα μήκους h/m. Από αυτή την επανάληψη έφτιαξε δυο ακολουθίες του χ , μια αύξουσα και μια φθίνουσα έτσι ώστε οι όροι της μιας να πλησιάζουν απεριόριστα τους όρους της άλλης. Στη εργασία του Cauchy η αύξουσα ακολουθία είναι η χ_0. $\chi_1,\chi_2,\ldots$, η φθίνουσα είναι η X,X΄,X΄΄,. . . και η ακολουθία της διαφορά τους είναι η $X-\chi_0$, $(1/m)(X-\chi_0)$, $(1/m^2)(X-\chi_0)^2$, κτλ. Οι δύο ακολουθίες πρέπει να συγκλίνουν σε ένα κοινό όριο που το ονόμασε α. Αλλά η f(x) είναι συνεχής ανάμεσα στα χ_0, X. Έτσι για τον Cauchy ‘’Για κάθε τιμή του χ ανάμεσα στα όρια αυτά η αριθμητική (απόλυτη) τιμή της διαφοράς f(x+a)-f(x) μειώνεται επ’ αόριστον με το α.

Έτσι ο Cauchy υποστήριξε ότι οι ακολουθίες $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,… και f(X),f(X΄), f(X΄΄),. . . πρέπει να συγκλίνουν στο κοινό όριο f(a). Τελικά αφού οι δύο ακολουθίες έχουν αντίθετο πρόσημο το κοινό όριο f(a) πρέπει να εί ναι 0. Έτσι ο Cauchy απέδειξε την ύπαρξη λύσης α στην f(x)=0 για χ μεταξύ των χ_0, X.

H Grabiner θεωρεί ότι η απόδειξη του Cauchy έχει τρία χαρακτηριστικά που βρέθηκαν σε πολλές αυστηρές αποδείξεις του στην ανάλυση.

Πρώτον υποθέτει σιωπηρά μια μορφή του αξιώματος της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Την ύπαρξη του ορίου φραγμένης, μονότονης ακολουθίας. Τέτοιες υποθέσεις που δεν εξετάζονται αποτελούν σημαντική αν και αναπόφευκτη, αδυναμία του *Cours d' analyse.* Δεύτερον αφήνει κάποιες λεπτομέρειες σαν άσκηση στον αναγνώστη. Για παράδειγμα δεν υπολόγισε το ‘ε’ και το ‘κ’ που χρειάζονται στη θεωρία που λέει :όταν το όριο της ακολουθίας $\{x_k\}$ είναι a και f συνεχής τότε το όριο της $\{f(x_k)\}$ είναι f(a).

Τέλος η απόδειξη είναι εξαιρετικής σαφήνειας και σημειογραφίας. Για παράδειγμα η συστηματική χρήση των δεικτών, που δεν εφευρέθηκε από τον Cauchy , αλλά τους χρησιμοποιούσε, ήταν σημαντική στο να γίνονται τα πράγματα σαφή.

Ο Cauchy έμαθε αυτή τη μέθοδο απόδειξης από την άλγεβρα του $18^{ου}$ αιώνα και πιθανότατα από τον Lagrange; Η απάντηση μάλλον είναι ναι. Αρχικά ο Cauchy απέδειξε το θεώρημα σε κάποια σημείωση στο *Cours d' analyse* με τίτλο "On the resolution of numerical equations. " Αυτός ήταν σχεδόν ο τίτλος καθενός από τα τρία έργα του Lagrange στην προσεγγιστική μέθοδο. ‘the paper of 1767; the book of 1798; and the fifth chapter of the "Lecons elementaires," given at the Ecole Poly technique’. Πιθανόν στον Cauchy να ήταν γνωστό το "Lecons elementaires," διότι αυτή η εργασία είναι η πηγή του τύπου παρεμβολής του Lagrange , το αντικείμενο της εργασίας V στο *Cours d' analyse* με τίτλο "Sur la formule de Lagrange relative a l'interpolation. ". Ο Cauchy σίγουρα είχε διαβάσει το *Equations numeriques* του Lagrange και στις δυο εκδόσεις 1798, 1808 γιατί αναφέρεται ρητά στις σημειώσεις του στις αριθμητικές εξισώσεις, στις οποίες σημειώσεις, όχι και τόσο τυχαία, κάνει πολλούς υπολογισμούς των ορίων για τα σφάλματα στις αλγεβρικές προσεγγίσεις.

Ίσως ήταν και μια πρόταση του Lagrange το κίνητρο του Cauchy να δώσει απόδειξη στο θεώρημα. Στο κείμενο του *Cours d' analyse* ο Cauchy είχε αρκεστεί να δώσει ένα γεωμετρικό επιχείρημα για την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών σε συνεχείς συναρτήσεις, αλλά αναφέρει στον αναγνώστη τη σημείωση III για μια ‘καθαρά αναλυτική και ευθεία’ απόδειξη. Αυτό ήταν επίσης μια διαδικασία του Lagrange στο *Equations numeriques*. Στο κείμενο ο Lagrange αναφέρει ότι αυτό το θεώρημα συνήθως αποδεικνυόταν από ‘τη θεωρία των καμπυλών γραμμών’ αλλά πρόσθεσε τυπικά ότι μια αλγεβρική απόδειξη θα ήταν προτιμότερη. Τότε έδωσε ένα επιχείρημα για το θεώρημα βασισμένο στη διάσπαση της εξίσωσης σε γραμμικούς παράγοντες όπου ο καθένας προφανώς είχε την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, αλλά αναγνώρισε ότι αυτό δεν ίσχυε στις εξισώσεις με μιγαδικές ρίζες. Έτσι προσπάθησε να δώσει

καλύτερη απόδειξη στην σημείωση I στο βιβλίο. Αλλά η δεύτερη απόδειξη του Lagrange δεν είναι πολύ πειστική. Είναι βασισμένη σε ένα θεώρημα σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις που είναι πιο ισχυρό απο το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών. 'Αν $f(a) < \varphi(a)$ και $f(b) > \varphi(b)$, τότε υπάρχει ένα ενδιάμεσο σημείο στο οποίο οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. ' Η απόδειξη του Lagrange γι' αυτό το πιο ισχυρό θεώρημα βασίζεται σε μια διαισθητική εικόνα δύο ποσοτήτων που πλησιάζει και περνάει η μία την άλλη και αναφέρει τη φυσική εικόνα δυο σωμάτων που κινούνται κατά μήκος της ίδιας γραμμής καθώς το ένα προσπερνάει το άλλο. Ο Bolzano ήταν σίγουρα σωστός όταν το 1817 άσκησε κριτική στις αποδείξεις πως στηρίζονται στην έννοια της κίνησης.

Δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε το ενδιαφέρον του Cauchy στην αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών να έχει προκληθεί από την αναζήτηση αυτού από τον Lagrange, ή απο την απογοήτευση του διαβάζοντας την απόδειξη του Lagrange, ή να είναι η επίδραση απο την ανάγνωση μιας προσεγγιστικής τεχνικής τόσο καλά προσαρμοσμένης στη δομή της ενδιάμεσης τιμής. Έχουμε έτσι στις αριθμητικές εξισώσεις του Lagrange '*Equations numeriques'* μια εμφανή πηγή, ως προς το κίνητρο και ως προς την τεχνική ,της απόδειξης του Cauchy.

Ο ισχυρισμός του Ivor-Grattan-Guinness ότι ο Cauchy 'δανείστηκε' από τον Bolzano την απόδειξη του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών δεν μπορεί από την άλλη μεριά να διατηρηθεί. Αρχικά ο Cauchy είχε διαβάσει το βιβλίο του Lagrange το οποίο ρητά καλεί για μια αλγεβρική μέθοδο. Έτσι ο Cauchy δεν χρειαζόταν να έχει διαβάσει την εργασία του Bolzano όπως ο Grattan-Guinness υποστηρίζει για να έχει την ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος. (Το κίνητρο του Bolzano ήταν διαφορετικό. Θεωρούσε ότι μια απόδειξη χρειαζόταν για να γεμίσει ένα κενό στην κατά τα άλλα αυστηρή απόδειξη του Gauss(1816) του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας.) Δεύτερον η τεχνική της απόδειξης που χρησιμοποίησε ο Cauchy δεν μοιάζει καθόλου με αυτή του Bolzano. Ο Bolzano ξεκινάει την απόδειξη προσπαθώντας να δείξει ότι κάθε ακολουθία που ικανοποιεί αυτό που λέμε κριτήριο του Cauchy έχει όριο. Χρησιμοποίησε αυτό το αποτέλεσμα για να αποδείξει ότι κάθε φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα. Έπειτα χρησιμοποίησε το αποτέλεσμα σκεφτόμενος ελάχιστα άνω φράγματα για να αποδείξει το πιο ισχυρό θεώρημα για ζεύγη συνεχών συναρτήσεων που ορίστηκαν το 1798 από τον Lagrange, και τελικά όπως ο Lagrange κατέληξε στο θεώρημα ενδιαμέσων τιμών σαν συνέπεια αυτού του ισχυρού αποτελέσματος. Η Grabiner δεν βλέπει

κανένα τρόπο να γίνεται να μετατραπεί η απόδειξη του Bolzano σε αυτή του Cauchy. Ούτε η υπόθεση του Bolzano ήταν απαραίτητο να επηρεάσει τον Cauchy δεδομένου ότι η εργασία του Lagrange στις προσεγγίσεις παρέχει ένα πολύ πιθανό πλαίσιο για την απόδειξη του Cauchy. Πράγματι ο Cauchy αμέσως ακολούθησε την απόδειξη του με μία συζήτηση για το πως η ίδια τεχνική θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του σφάλματος στην αντίστοιχη προσέγγιση.

Οπότε τι έχει φανεί όσον αφορά την προέλευση (τις ρίζες) του έργου του Cauchy ; Παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα που χρησιμοποιεί ο Cauchy συναντώνται ξανά και ξανά. Χωρίς καμιά αμφιβολία τα επιχειρήματα αυτά ήταν γνωστά στον Cauchy, όπως και οι συγγραφείς αυτών. Εφόσον οι αναφορές του Cauchy είναι συνήθως όχι πολύ συγκεκριμένες, τίποτα περαιτέρω δεν μπορεί να συναχθεί. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν θα ευχόταν η Grabiner να προκύψουν περαιτέρω συμπεράσματα. Η Grabiner δεν πιστεύει ότι ο Cauchy είχε δει την εργασία του Lagrange στην προσεγγιστική μέθοδο και από κει συνέχισε να κάνει την απόδειξη του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών. Δε μοιάζει να είναι αυτός ο τρόπος που δουλεύει ο Cauchy. Ο Cauchy ενδιαφερόταν για ένα πρόβλημα, ή έχοντας ακούσει ή διαβάσει κάτι, και έβγαζε τεράστιο αριθμό δικών του αποτελεσμάτων. Μερικές φορές ακόμη ξαναανακάλυπτε και ξαναδημοσίευε αποτελέσματα τα οποία ο ίδιος είχε παλαιότερα αποδείξει πράγμα που αποδείκνυε ότι δεν θα μπορούσε να ήταν αντιγραφέας. Ακόμα και μια ρητή αναφορά του Cauchy σε κάποιον άλλο μαθηματικό δεν μπορεί να αποδείξει άμεσα ότι ο Cauchy επηρεάστηκε εφόσον θα μπορούσε να έχει βγάλει ο ίδιος ένα αποτέλεσμα και στη συνέχεια το έργο κάποιου άλλου στο αποτέλεσμα του να τραβάει την προσοχή του και από ευγένεια να αναφέρει το όνομα του. Ακόμη και στην περίπτωση ρητών αναφορών σε ένα μεγάλης αναλογίας κομμάτι δουλειάς, όπως στην περίπτωση των *Equations numeriques, του Lagrange* ***ο*** Cauchy θα μπορούσε να στηρίζεται μόνο σε επανασύλλεξη (recollection). Η Grabiner πιστεύει ότι το μόνο που μπορεί να τεκμηριωθεί από τις διαθέσιμες πηγές είναι το ‘κλίμα’ της μαθηματικής γνώμης το οποίο σχημάτιζε τις ερωτήσεις του Cauchy και τις διαθέσιμες τεχνικές. Ο τρόπος που αντιμετώπιζε αυτές τις ερωτήσεις ήταν ξεκάθαρα δικός του. Δεν είναι κάτι λιγότερο απο έναν μεγάλο μαθηματικό που έχει επηρεαστεί από την εποχή του. Τα επιτεύγματα του δεν ήταν προφανείς συνέπειες των αναπτυγμάτων του $18^{ου}$ αιώνα. Για παράδειγμα ο Lagrange είχε διαθέσιμα όλα όσα χρειαζόταν για να αποδείξει το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών: την επιθυμία για μια απόδειξη, την τεχνική για την εύρεση της ενδιάμεσης τιμής, το ενδιαφέρον για αυστηρότητα, και

την τεχνική ικανότητα των ανισοτήτων. Αλλά δεν τα συνδύασε όλα αυτά ούτε τα συνδύασε κάποιος άλλος μαθηματικός της εποχής. Κανείς εκτός του Bolzano δεν μπόρεσε να πλησιάσει την αυστηρότητα της δουλειάς του Cauchy και ο Bolzano δεν ήταν ισάξιος του Cauchy στην εφαρμογή των μαθηματικών επιτευγμάτων μέχρι να γίνει γνωστή με τη δουλειά του Cauchy.

Κεφάλαιο 3

3.1 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ

Η θεωρία της σύγκλησης σειρών ξεκινάει από το κεφάλαιο 6 του Bradley R. E., Sandifer σελ. 85 η Cours d Analyse σελ. 114. Ο Cauchy δίνει τον ορισμό σύγκλισης σειράς, αποδεικνύει τα περί συγκλίσεως σειρών γεωμετρικών προόδων, το ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει, και διατυπώνει ως **προφανές το γνωστό κριτήριο** σύγκλισης (που σήμερα ονομάζεται κριτήριο του Cauchy), ότι κάθε ακολουθία Cauchy (κατά την σημερινή ορολογία) συγκλίνει (σελ. 87 Bradley-Sandifer) . Φυσικά σήμερα ξέρουμε ότι ούτε προφανές είναι ούτε θα μπορούσε να αποδειχθεί αυστηρά εφ όσον δεν υπήρχε τότε πλήρης κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Όμως η διαίσθηση του Cauchy συνέβαλε στην μετέπειτα πορεία μερικών ακόμα δεκαετιών να κατανοήσουμε καλύτερα την αξιωματική δομή των πραγματικών αριθμών.

Σαν παράδειγμα αναφέρει την σύγκλιση της σειράς γεωμετρικής προόδου, (Cours d Analyse σελ. 115). Επίσης αποδεικνύει ότι η σειρά $\Sigma(1/n)$ συγκλίνει προς το συν άπειρο, (Cours d Analyse σελ. 117).

Επίσης αποδεικνύει ότι η γνωστή σειρά $\Sigma(1/n!)$ συγκλίνει και το όριο ονομάζεται ως γνωστόν e, (Cours d Analyse σελ. 118).. Χρησιμοποιεί περίπου σαν κάτι αυτονόητο το ότι κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει, κάτι που εκείνη την εποχή δεν θα μπορούσε να αποδειχθεί.

Διατυπώνει σαν θεώρημα, με ασαφή «απόδειξη», ότι το όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτησης, κάτι που γνωρίζουμε ότι δεν είναι αληθές, (Bradley-Sandifer, σελ. 90 , Cours d Analyse σελ. 120). Ένα απλό αντιπαράδειγμα είναι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με τύπο $f_n(x)=x^n$, όπου το όριο κατά σημείο (όπως λέγεται σήμερα, είναι η μη συνεχής συνάρτηση f όπου $f(1)=1$ και $f(x)=0$ για x διάφορο του 1. Σήμερα έχουμε την έννοια της ομαλής σύγκλισης η οποία διατηρεί την συνέχεια, την ολοκληρωσιμότητα Riemann, την ιδιότητα του να είναι αναλυτική συνάρτηση και την διαφορισιμότητα (με επιπλέον συνθήκες). (ΣΧΟΛΙΟ. Για το ολοκλήρωμα Lebesgue, υπάρχουν ισχυρότερα θεωρήματα με ασθενέστερες υποθέσεις).

Επίσης αποδεικνύει μία σειρά από τα χρήσιμα κριτήρια σύγκλισης σειρών που διδάσκουμε και σήμερα, π.χ. κριτήριο λόγου, κριτήριο ρίζας κλπ, (Cours d Analyse σελ. 136 και Νεγρεπόντης , Γιωτόπουλος , Γιαννακούλιας , Απειροστικός Λογισμός Ι σελ.92-93 κλπ).

Επίσης αναπτύσσει σε σειρά τα διώνυμο $(1+x)^r$.

Εδώ ο Cauchy, αρχίζει να περιγράφει το όριο μιάς σειράς.

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad \ldots,$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quan-

Cauchy, 1821, Σελ. 114,

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.85

(συνεχίζει)

Συνεχίζει την περιγραφή του ορίου σειράς εκ του προηγουμένου. Εξηγεί επίσης το όριο μιας γεωμετρικής προόδου.

tité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que, dans la première hypothèse, la progression

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire

(συνεχίζει)

Κατωτέρω οCauchy διατυπώνει αυτό που σήμερα ονομάζουμε Κριτήριο του Cauchy. Φυσικά δεν το αποδεικνύει και δεν θα ήταν δυνατόν να το αποδείξει με την περιορισμένη κατανόηση των πραγματικών αριθμών. Όμως η διαίσθηση του μαζί με το έργο άλλων, οδήγησε στο δεύτερο ήμισυ του 19ου αιώνα στον εντοπισμό του ποία αξιώματα πρέπει να ικανοποιούν οι πραγματικοί αριθμοί.

que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \dots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Prenons pour exemple la progression géométrique

(2) $$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \dots.$$

Si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, celle du terme général x^n croîtra indéfiniment avec n, et cette seule remarque suffira pour constater la divergence de la série. La série sera encore divergente si l'on suppose $x = \pm 1$, parce qu'alors la valeur numérique du terme général x^n, se réduisant à l'unité, ne décroîtra pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Mais, si la valeur numérique de x est inférieure à l'unité, les sommes des termes de la série pris à partir de x^n en tel nombre que l'on voudra, savoir :

$$x^n,$$
$$x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1 - x^2}{1 - x},$$
$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1 - x^3}{1 - x},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

se trouvant toutes comprises entre les limites

$$x^n, \quad \frac{x^n}{1 - x},$$

(συνεχίζει)

Στην συνέχεια ο Cauchy αποδεικνύει ότι η σειρά με γενικό όρο (1/n) συγκλίνει προς το + άπειρο.

chacune d'elles deviendra infiniment petite pour des valeurs de n infiniment grandes; et par suite la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Prenons pour second exemple la série numérique

$$(3) \qquad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \ldots.$$

Le terme général de cette série, savoir $\frac{1}{n+1}$, décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et cependant la série n'est pas convergente; car la somme faite du terme $\frac{1}{n+1}$ et de ceux qui le suivent jusqu'au terme $\frac{1}{2n}$ inclusivement, savoir

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

reste constamment supérieure, quel que soit n, au produit

$$n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

et par suite cette somme ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, ainsi que cela aurait lieu si la série était convergente. Ajoutons que, si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la série (3), et par 2^m la plus haute puissance de 2 renfermée dans $n+1$, on trouvera

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right),$$

et, *a fortiori*,

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

On en conclura que la somme s_n croît indéfiniment avec le nombre entier m, et par conséquent avec n, ce qui est une nouvelle preuve de la divergence de la série.

(συνεχίζει)

Στην συνέχεια ο Cauchy αποδεικνύει ότι η σειρά με γενικό όρο (1/n!) συγκλίνει προς το πραγματικό αριθμό που τον ονομάζει e.

Considérons encore la série numérique

$$(4) \qquad 1, \ \frac{1}{1}, \ \frac{1}{1.2}, \ \frac{1}{1.2.3}, \ \ldots, \ \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \ \ldots.$$

Les termes de cette série, qui occupent un rang supérieur à n, savoir

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}, \ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)}, \ \ldots,$$

seront respectivement inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}, \ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{n}, \ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{n^2}, \ \ldots.$$

Par suite, la somme des premiers termes pris en tel nombre que l'on voudra sera toujours inférieure à la somme des termes correspondants de la progression géométrique, qui est une série convergente, et à plus forte raison, à la somme de cette progression, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{1}{n-1}.$$

Comme cette dernière somme décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que la série (4) est elle-même convergente. On est convenu de désigner par la lettre e la somme de cette série. En ajoutant les n premiers termes, on obtiendra, pour valeur approchée du nombre e,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, l'erreur commise sera inférieure au produit du $n^{\text{ième}}$ terme par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n = 11$, on trouvera pour la valeur approchée de e

$$(5) \qquad e = 2,7182818\ldots;$$

et l'erreur commise dans cette hypothèse sera inférieure au produit

(συνεχίζει)

de la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ par $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{36288000}$, en sorte qu'elle n'altérera pas la septième décimale.

Le nombre e, déterminé comme on vient de le dire, sera souvent employé dans la sommation des suites et dans le Calcul infinitésimal. Les logarithmes pris dans le système qui a ce nombre pour base s'appellent *népériens*, du nom de *Néper*, inventeur des logarithmes, ou *hyperboliques*, parce qu'ils servent à mesurer les diverses parties de l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie de points. Ainsi, lorsque la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots; \tag{6}$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}. \tag{7}$$

La série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots = s_n + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

et, par suite,

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots.$$

Κατωτέρω υπάρχει ένα Θεώρημα του Cauchy, που έχει ένα κενό, το πλέον ίσως συζητημένο από τα κενά του Cauchy. Σε γενικές γραμμές ο Cauchy υποστηρίζει ότι μία συγκλίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, συγκλίνει προς συνεχή συνάρτηση.

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Lorsque les différents termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x = -1$, $x = 1$;

Το ανωτέρω Theoreme I, δεν είναι σωστό και στις επόμενες δεκαετίες έχει μελετηθεί με ιδιαίτερη ένταση. Πολλές λεπτομέρειες βρίσκει κανείς στο Lakatos σελ. 127.

Μετάφραση:

‘Ονομάζουμε σειρά μια αόριστη ακολουθία ποσοτήτων

$u_0, u_1, u_2, u_{3,} \ldots,$

τα οποία ακολουθούν το ένα το άλλο σύμφωνα με ένα καθορισμένο νόμο. Οι ποσότητες αυτές είναι οι διάφοροι όροι της σειράς που εξετάζουμε. Έστω

$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1}$

είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων , όπου n είναι οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Αν για κάθε αυξανόμενη τιμή του n το άθροισμα s_n προσεγγίζει επ’αόριστον ένα συγκεκριμένο όριο s , τότε η σειρά είναι συγκλίνουσα και το όριο της ονομάζεται το άθροισμα της σειράς .
Σε αντίθεση , αν το άθροισμα s_n δεν προσεγγίζει κανένα συγκεκριμένο όριο καθώς το n αυξάνει απεριόριστα , η σειρά είναι αποκλίνουσα και δεν έχει άθροισμα. Σε κάθε περίπτωση ο όρος που αντιστοιχεί στο δείκτη n, δηλαδή ο u_n , είναι αυτό που λέμε ο γενικός όρος. Για να είναι μια σειρά πλήρως ορισμένη αρκεί να δώσουμε τον γενικό όρο ως συνάρτηση του δείκτη n .
Μια από τις πιο απλές σειρές είναι η γεωμετρική πρόοδος ,

$1, x, x^2, x^3, \ldots,$

η οποία έχει γενικό όρο τον x^n ,δηλαδή τη νιοστή δύναμη του x. Αν γράψουμε το άθροισμα των πρώτων n όρων της σειράς τότε βρίσκουμε

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{x^n}{1-x}$$

Καθώς οι τιμές του n αυξάνονται η αριθμητική τιμή του κλάσματος $\frac{x^n}{1-x}$ συγκλίνει στο όριο μηδέν , ή αυξάνεται πέρα από κάθε όριο , σύμφωνα με το αν υποθέσουμε ότι η αριθμητική τιμή του x είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη της μονάδας. Με βάση την πρώτη υπόθεση συμπεραίνουμε ότι η πρόοδος

$1, x, x^2, x^3, \ldots$

είναι συγκλίνουσα σειρά η οποία έχει άθροισμα το $\frac{1}{1-x}$. Και με βάση τη δεύτερη υπόθεση η ίδια πρόοδος είναι αποκλίνουσα σειρά , η οποία δεν έχει άθροισμα.
Ακολουθώντας τις αρχές που ορίσαμε παραπάνω ότι η σειρά

(1) $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n,}\, u_{n+1,} \ldots$

είναι συγκλίνουσα , είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ότι οι αύξουσες του n κάνουν το άθροισμα

$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots. + u_{n+}\, u_{n+1,\ldots.}$

να συγκλίνει σε ένα σταθερό όριο s. Με άλλα λόγια είναι ικανό και αναγκαίο , για απείρως μεγάλες τιμές του n , τα αθροίσματα

s_n , s_{n+1}, s_{n+2} , …..

να διαφέρουν από το όριο s και συνεπώς το ένα από το άλλο ,κατά πολύ μικρές ποσότητες. Επιπλέον οι διαφορές μεταξύ του πρώτου αθροίσματος s_n και κάθε επόμενου ορίζονται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις

$s_{n+1} - s_n = u_n$,

$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1}$,

$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$,

……..

Ως εκ τούτου προκειμένου η σειρά (1) να συγκλίνει πρέπει πρώτα απ' όλα ο γενικός όρος u_n να φθίνει απεριόριστα καθώς το n αυξάνει. Αλλά αυτή η κατάσταση δεν αρκεί και πρέπει επίσης για αύξουσες τιμές του n τα διαφορετικά αθροίσματα

$u_n + u_{n+1}$,

$u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$,

……..

Δηλαδή τα τόσα αθροίσματα αθροίσματα των όσων ποσοτήτων

u_n , u_{n+1} , u_{n+2} ,…

είναι επιθυμειτό , αρχίζοντας με το πρώτο τελικά συνεχώς να λαμβάνουν αριθμητικές τιμές μικρότερες από οποιοδήποτε όριο. Κάθε φορά που αυτές οι προυποθέσεις πληρούνται η σύγκλιση της σειράς είναι εγγυημένη.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τη γεωμετρική πρόοδο

(2) 1, x , x^2, x^3,…

Αν η αριθμητική τιμή του x είναι μεγαλύτερη της μονάδας , ο γενικός όρος x^n αυξάνει απεριόριστα μαζί με το n , και η παρατήρηση αυτή και μόνο αρκεί για να οριστεί αποκλίνουσα η σειρά. Ακόμη η σειρά είναι αποκλίνουσα αν x= +1 ή x= - 1 διότι η αριθμητική τιμή του γενικού όρου που είναι 1 δεν φθίνει απεριόριστα όταν αυξάνει το n. Ωστόσο αν η αριθμητική τιμή του xείναι μικρότερη του 1 τότε τα αθροίσματα οποιωνδήποτε όρων της σειράς ξεκινώντας από τον x^n , που είναι τα:

x^n,

$x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x}$,

$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x}$

……

Είναι μεταξύ των ορίων x^n και $\frac{x^n}{1-x}$

Και το καθένα γίνεται απείρως μικρό για απείρως μεγάλες τιμές του n. Συνεπώς η σειρά είναι συγκλίνουσα.

Σαν δεύτερο παράδειγμα ας πάρουμε την αριθμητική σειρά

(3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \ldots\ldots$

Ο γενικός όρος της σειράς που είναι ο $\frac{1}{n+1}$,φθίνει απεριόριστα καθώς το n αυξάνει . Ωστόσο η σειρά δεν είναι συγκλίνουσα ,διότι το άθροισμα των όρων από το $\frac{1}{n+1}$ μέχρι το $\frac{1}{2n}$ που είναι

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

Είναι πάντα μεγαλύτερο από

$$\mathrm{n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

όποια και αν είναι η τιμή του n.

Συνεπώς το άθροισμα δεν φθίνει απεριόριστα με την αύξηση των τιμών του n , ;όπως θα γινόταν αν η σειρά ήταν συγκλίνουσα. Ας προσθέσουμε ότι , αν ορίσουμε το άθροισμα των n πρώτων όρων της σειράς (3) s_n και τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που φράσεται από το n+1 και το 2^m , τότε έχουμε

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. + \frac{1}{n+1}$

$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots..+ (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \frac{1}{2^m})$,

και $s_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα s_n αυξάνει απεριόριστα μαζί με τον ακέραιο m και επομένως με τον n , που είναι μια νέα απόδειξη για την απόκλιση σειράς.

Ας εξετάσουμε περαιτέρω την αριθμητική σειρά

(4) $1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots\ldots, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}, \ldots\ldots$

Οι όροι της σειράς με δείκτη μεγαλύτερο από n είναι

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2)}, \ldots\ldots\ldots,$

Οι οποίοι είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους όρους της γεωμετρικής προόδου

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot nn}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot nn^2}, \ldots\ldots\ldots,$

Συνεπώς το άθροισμα πολλών από τους αρχικούς όρους (όσων όρων είναι επιθυμητό) είναι πάντα μικρότερο από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής προόδου , η οποία

είναι συγκλινουσα και κατά μείζονα λόγο είναι μικρότερο από το άθροισμα της σειράς αυτής. Δηλαδή

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\ \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}\ \frac{1}{n-1}$$

Επειδή αυτό το τελευταίο άθροισμα φθίνει απεριόριστα καθώς το n αυξάνει συνεπάγεται ότι η σειρά (4) είναι συγκλίνουσα. Συμβατικά δηλώνει το άθροισμα της σειράς αυτής με το e. Με την προσθήκη των n πρώτων όρων έχουμε μια κατά προσέγγιση τιμή του αριθμού e.

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\ \ldots\ldots+\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}.$$

Σύμφωνα με αυτά που μόλις είπαμε το σφάλμα θα είναι μικρότερο από τον νιοστό όρο κατά $\frac{1}{n-1}$. Ως εκ τούτου για παράδειγμα αν n= 11 βρίσκουμε την προσεγγιστική τιμή του e να είναι

(5) e= 2.7182818…..,

και το σφάλμα σε αυτή την περίπτωση είναι μικρότερο από το κλάσμα $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot45678910}$ κατά $\frac{1}{10}$, που είναι $\frac{1}{36,288,000}$, και έτσι δεν επηρεάζει την έβδομη δεκαδική θέση.

Ο αριθμός e, όπως μόλις τον ορίσαμε , χρησιμοποιείται συχνα στο άθροισμα σειράς και στον απειροστικό Λογισμό. Λογάριθμοί που έχουν σαν βάση τον e λέγονται Napierian για τον Napier, τον εφευρέτη των λογαρίθμων και της υπερβολής , διότι μετράνε τα διάφορα τμήματα της περιοχής μεταξύ της ισόπλευρης υπερβολής και των ασύμπτωτων της.

Γενικά ορίζουμε το άθροισμα συγκλίνουσας σειράς με το άθροισμα των πρώτων όρων που ακολουθείται από αποσιωπητικά. Έτσι όταν η σειρά

$u_0, u_1, u_2, u_{3,\ldots}$

είναι συγκλίνουσα , το άθροισμα της είναι

$u_0+\ u_1+\ u_2+\ u_{3+}\ldots..$

Από αυτή τη σύμβαση η τιμή του e καθορίζεται από τν εξίσωση

(6) $e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot34}+\cdots,$

και αν κάποιος σκεφτεί την γεωμετρική πρόοδο

$1, x , x^2, x^3,\ldots$

Έχουμε για τιμές του x μικρότερες από 1,

(7) $1 + x+ x^2+ x^3+\ldots\ldots= \frac{1}{1-x}$

Συμβολίζοντας το άθροισμα της συγκλίνουσας σειράς

$u_0, u_1, u_2, u_{3,\ldots}$

με s και το άθροισμα των nπρώτων όρων με s_n έχουμε

$s = u_0+ u_1+ u_2+\ldots.+ u_{n+} u_{n+1 +}\ldots..$

$= s_n + u_{n+} u_{n+1 +}\ldots..,$

Με αποτέλεσμα

$s- s_n = u_{n+} u_{n+1 +}\ldots..,$

Από αυτή την τελευταία εξίσωση συνεπάγεται ότι οι ποσότητες

$$u_{n+} u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots$$

σχηματίζουν μια νέα συγκλίνουσα σειρά , το άθροισμα της οποίας είναι ίσο με $s- s_n$. Αν αναπαραστήσουμε αυτό το άθροισμα με r_n , έχουμε

$$s= s_n+ r_n$$

και ο r_n ονομάζεται υπόλοιπο της σειράς (1) που ξεκινάει από τον n-οστό όρο.

Ας υποθέσουμε ότι οι όροι της σειράς (1) περιλαμβάνουν κάποια μεταβλητή x. Αν η σειρά είναι συγκλίνουσα και οι διάφοροι όροι της είναι συνεχείς συναρτήσεις του x σε μια περιοχή συγκεκριμένης τιμής της μεταβλητής , τότε οι

$$s_n, r_n \text{ και } s$$

είναι επίσης τρεις συναρτήσεις της μεταβλητής x, η πρώτη εκ των οποίων είναι προφανώς συνεχής ως προς x σε μια περιοχή της αντίστοιχης τιμής του x. Δεδομένου αυτού ας εξετάσουμε τις αυξήσεις αυτών των τριών συναρτήσεων όταν αυξάνεται το x κατά μια απείρως μικρή ποσότητα α. Για όλες τις δυνατές τιμές του n η αύξηση της s_n είναι απειροελάχιστη. Η αύξηση της r_n , όπως και η r_n η ίδια, γίνεται απείρως μικρή για πολύ μεγάλες τιμές του n . Κατά συνέπεια και η αύξηση της s πρέπει να είναι απείρως μικρή. Από αυτή την παρατήρηση συμπεραίνουμε την ακόλουθη πρόταση:

Θεώρημα Ι . – Όταν διάφοροι όροι της σειράς (1) είναι συναρτήσεις της ίδιας μεταβλητής x , συνεχείς ως προς x σε μια περιοχή συγκεκριμένης τιμής της μεταβλητής για την οποία η σειρά συγκλίνει , το άθροισμα s της σειράς είναι επίσης μια συγκλίνουσα συνάρτηση του x στην περιοχή της συγκεκριμένης τιμής.

3.2 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ο Cauchy στο κεφάλαιο 10 του Cours d Analyse, (BS σελ. 217), παρουσιάζει απόδειξη του λεγομένου ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ. (ΣΧΟΛΙΟ. Η ορολογία είναι «ιστορική», διότι τελικά ούτε της άλγεβρας είναι ούτε (ιδιαίτερα θεμελιώδες είναι). Οι αποδείξεις που έχουμε βρεί, όλες χρησιμοποιούν κάποια οριακή έννοια, π.χ. το ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, (που είναι απλό πόρισμα του θεωρήματος Bolzano). Επίσης σημειώνουμε ότι οι αλγεβριστές βρήκαν σώματα όπου να έχουν ρίζες τα πολυώνυμα τους.). Θα λέγαμε ότι σήμερα οι πιο φυσιολογικές αποδείξεις του ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ, ανήκουν στα πλαίσια της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων.

Ο Caychy αποδεικνύει το θεώρημα βασιζόμενος στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών και, όπως λέει και ο ίδιος, είναι ίδιας φιλοσοφίας με εκείνη του Legendre Theorie des Nombres, (βλ. του Cours d Analyse σελ. 275).

Théorème I. — *Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, *l'équation*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (1)$$

dans laquelle n désigne un nombre entier égal ou supérieur à l'unité, a toujours des racines réelles ou imaginaires.

Μετάφραση:

Θεώρημα Ι: Όποιες και αν μπορεί να είναι οι τιμές , πραγματικές ή φανταστικές ,των σταθερών $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a_n$

η εξίσωση

(1) $\alpha_0\chi^n + \alpha_1\chi^{n-1} + \alpha_2\chi^{n-2} + \ldots..+\alpha_{n-1}\chi + \alpha_n = 0$

στην οποία το n είναι ένας ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος της μονάδας,έχει πάντα μια πραγματική ή φανταστική ρίζα.

Cauchy, 1821, Σελ. 275

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.218

Η γραμμή της απόδειξης είναι περίπου ως εξής: Ξεκινάει με την εις άτοπο απαγωγή υποθέτοντας ότι το πολυώνυμο δεν έχει μιγαδική ρίζα. Κατ αρχάς εξηγεί ότι υπάρχει ένας δίσκος με κέντρο (0, 0), (αρκετά μεγάλης ακτίνας), όπου το πολυώνυμο δεν μηδενίζεται εντός του εσωτερικού του δίσκου. Δέχεται ότι η απόλυτη τιμή του πολυωνύμου (που είναι πραγματική συνάρτηση), έχει ελάχιστο, που θα είναι στο εσωτερικό του δίσκου και ασφαλώς δεν είναι 0, (αφού υπετέθη ότι δεν υπάρχουν ρίζες), . Δουλεύοντας λοιπόν με πολλές πράξεις χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών, αποδεικνύει ότι για κάθε ελάχιστο

της απόλυτης τιμής του πολυωνύμου, υπάρχει στο εσωτερικό του δίσκου και ένα άλλο ελάχιστο ακόμα μικρότερο από το προηγούμενο, έτσι φθάσαμε σε άτοπο.

Βέβαια φυσιολογικά αναμένει κανείς ότι η απόδειξη ενός τέτοιου θεωρήματος στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα, θα έχει κάποιο κενό. Στην συγκεκριμένη απόδειξη το κενό βρίσκεται στην παραδοχή ότι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε έναν δίσκο (υποσύνολο του επιπέδου), αναγκαστικά θα έχει ένα ελάχιστο. (Βλ. Cours d analyse p. 278, BS p. 220). Το χρησιμοποιεί χωρίς κανένα σχόλιο σαν να είναι κάτι το προφανές η αυτονόητο. Από εκεί και πέρα το επιχείρημα του είναι τύπου maximum modulus, (με αρκετή πραξεολογία).

Αξίζει να σημειωθεί ότι πουθενά αλλού στο Cours d Analyse ο Cauchy δεν χρησιμοποιεί το ότι συνεχείς συναρτήσεις έχουν ελάχιστο σε π.χ. κλειστό διάστημα η κάτι τέτοιο.

Κατωτέρω υπάρχει το κείμενο του Cours d Analyse (BS, σελ. 220), όπου ο Cauchy υποθέτει ότι η συνάρτηση, το τετράγωνο του μέτρου ενός πολυωνύμου, περιοριζόμενη σε κλειστό δίσκο, έχει ελάχιστο.

Il résulte de cette dernière formule que la fonction $F(u, v)$, toujours évidemment positive, est le produit de deux facteurs, dont l'un, savoir

$$r^{2n} = (u^2 + v^2)^n,$$

croîtra indéfiniment si l'on attribue aux variables u, v, ou à l'une d'elles seulement, des valeurs numériques de plus en plus grandes, tandis que l'autre facteur convergera dans la même hypothèse vers la limite ρ_0^2, c'est-à-dire vers une limite finie différente de zéro. On en conclura que la fonction $F(u, v)$ ne peut conserver une valeur finie qu'autant que les deux quantités u, v reçoivent elles-mêmes des valeurs de cette espèce, et devient infiniment grande dès que l'une des deux quantités croît indéfiniment. De plus, comme l'équation (4) donne pour $F(u, v)$ une fonction entière, et par conséquent une fonction continue des variables u et v, il est clair que $F(u, v)$, variant avec elles par degrés insensibles, et ne pouvant s'abaisser au-dessous de zéro, atteindra une ou plusieurs fois une certaine limite inférieure qu'elle ne dépassera jamais. Représentons par A cette limite, et par u_0, v_0 un des systèmes de valeurs finies de u et de v, pour lesquels $F(u, v)$ se réduit à A, en sorte qu'on ait identiquement

(10) $$F(u_0, v_0) = A.$$

Cauchy, 1821, Σελ. 278

Bradley- Sandifer, 2009, Σελ.220

Μετάφραση :

Έπεται ότι η συνάρτηση F (u, v) , η οποία είναι τελικά πάντα θετική , είναι αποτέλεσμα δύο παραγόντων , εκ των οποίων ο ένας που είναι ο

$$r^{2n} = (u^2 + v^2)^n ,$$

μεγαλώνει απεριόριστα εάν δώσουμε σε μια ή και στις δυο μεταβλητές u, v, ολοένα και μεγαλύτερες αριθμητικές τιμές, καθώς με την ίδια υπόθεση , ο άλλος παράγοντας συγκλίνει στο όριο ρ_o^2 , που είναι ένα πεπερασμένο όριο διάφορο του μηδενός. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση F (u, v) δεν μπορεί να διατηρήσει μια πεπερασμένη τιμή , εκτός όταν και οι δυο ποσότητες u, v έχουν τέτοιες τιμές , και γίνεται απεριόριστα μεγάλη όταν μια από τις δύο ποσότητες αυξάνει απεριόριστα . Επιπλέον η εξίσωση

(4) $F(u, v) = [\varphi(u, v)]^2 + [\chi(u, v)]^2$

δίνει μια ακέραιη συνάρτηση για την F (u, v) και κατά συνέπεια μια συνεχή συνάρτηση των μεταβλητών u, v .Έτσι είναι σαφές ότι η F (u, v) ποικίλλει ανάλογα με τα u, v με αισθητούς βαθμούς και δεν μπορεί να πέσει κάτω από το μηδέν και επομένως επιτυγχάνει , μια ή περισσότερες φορές, ένα ορισμένο κατώτατο όριο κάτω από το οποία δεν κατεβαίνει. Ορίστε το όριο αυτό A και u_0 ,v_0, ένα σύστημα των u, v για το οποίο F (u, v) φθίνει στο A. Δηλαδή

(10) $F(u_0, v_0) = A$

3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΚΑΤΑ CAUCHY

Περαιτέρω ο Cauchy προχωρει να ορίσει την έννοια της παραγώγου. Τα σχετικά βρίσκονται στο

Cauchy Augustin-Louis, Œuvres complètes, série 2, tome 4

Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal p.9-261

Leçons sur le calcul différentiel p.265-609

Του λοιπού θα το ονομάζουμε «Resume» .

{ Ορισμός ορίου κατά Cauchy:
‘Όταν οι διαδοχικές τιμές που αποδίδονται σε μια μεταβλητή τελικά προσεγγίζουν μια σταθερή τιμή , και εν τέλει καταλήγουν να διαφέρουν από αυτή τόσο λίγο, όσο είναι επιθυμητό , η σταθερή τιμή ονομάζεται όριο όλων των άλλων.’}

Για να ορίσει ο Cauchy την παράγωγο με βάση αυτόν τον ορισμό του ορίου θεώρησε το όριο του λόγου των διαφορών [f(x+i)-f(x)]/ i σε ένα διάστημα που είναι συνεχής η f(x).

'Η παράγωγος είναι το όριο του πηλίκου απειροελάχιστων διαφορών.'(σελ.126)

[Η συνέχεια χρειαζόταν έτσι ώστε και η f(x+i)-f(x) και το i εν τέλει ταυτόχρονα να συγκλίνουν στο όριο μηδέν ή ισοδύναμα να είναι απειροελάχιστες ποσότητες. Αν και ο Cauchy δεν το όρισε ποτέ αυτό σαν θεώρημα κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής.]

Ο Cauchy παρατήρησε, όπως και πολλοί προκάτοχοι του, ότι παρόλο που και ο αριθμητής και ο παρονομαστής του λόγου τείνουν στο μηδέν , 'ο λόγος μπορεί να συγκλίνει σε άλλο όριο θετικό ή αρνητικό.' Επιπλέον ο Cauchy πρόσθεσε : ' Αυτό το όριο όταν υπάρχει , έχει μια πεπερασμένη τιμή για κάθε x, αλλά ποικίλλει μαζί με το x… θα είναι μια νέα συνάρτηση του x … Για να δείξουμε αυτή την σχέση με το x δίνουμε τη νέα συνάρτηση που ονομάζεται παράγωγος συνάρτησης [function derivee] και τη συμβολίζουμε με προσθήκη ενός τόνου. y΄ ή f΄(x)

[Grabiner, 1981, Σελ.125,]

Όπως φαίνεται από το γαλλικό πρωτότυπο, μια και έχει ορίσει το όριο συνάρτησης, προχωρεί να ορίσει την παράγωγο (DERIVEE), πραγματικής συνάρτησης μιάς μεταβλητής. Την ορίζει όπως και σήμερα την ορίζει ως το όριο του βασικού πηλίκου (f(x+i)-f(x))/i, όταν i πηγαίνει στο 0.

Όπως φαίνεται στο γαλλικό πρωτότυπο, αμέσως μετά υπολογίζει την παράγωγο της x^n χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Νεύτωνα, κι βρίσκει ότι η παράγωγος είναι η συνάρτηση nx^{n-1} .

Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \tag{1}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1},$$

et il aura pour limite la quantité $m x^{m-1}$, c'est-à-dire une nouvelle fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seule-

Resume Calcul Infinitésimal σελ. 22.

3.4 Θεώρημα Μέσης Τιμής

Ο Cauchy δεν όρισε απλά την παράγωγο αλλά χρησιμοποίησε τον ορισμό του για να αποδείξει θεωρήματα που σχετίζονται με παραγώγους και έτσι έφτιαξε την πρώτη αυστηρή θεωρία στις παραγώγους. Το σημαντικό θεώρημα αυτής της θεωρίας είναι το εξής:
Αν η f(x) είναι συνεχής μεταξύ των x-x_0 , x- X και A είναι το ελάχιστο (minimum) της f΄(x) σε αυτό το διάστημα και B είναι το μέγιστο (maximum) τότε $A \leq [f(X) - f(x_o)] / (X - x_0) \leq B$.(Ο Cauchy έγραψε την ανισότητα ≤ λεκτικά) Οι συμβολισμοί είναι της Grabiner.
[Grabiner, 1981. Σελ.126]

(5.5) $\min f'(x) \leq \frac{f(X)-f(xo)}{X-x0} \leq \max f'(x)$ για f(x) συνεχή μεταξύ των x= x_0 και x= X

Το θεώρημα μέσης τιμής (5.6) για τις παραγώγους είναι ένα εύκολο πόρισμα της σχέσης (5.5) και του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις.

Αν f΄(x) είναι συνεχής μεταξύ των x=x_0 και x=x_0 +h τότε υπάρχει ένα θ μεταξύ των 0 και 1 ώστε

(5.6) $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/ h = f'(x_0 + \theta h)$

Ο Cauchy όρισε το βασικό θεώρημα ως εξής:

‘Αν f(x) είναι συνεχής μεταξύ των ορίων x=x_0 , x= X και ορίσουμε A τη μικρότερη τιμή και B τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να λάβει η f΄(x) στο διάστημα ,ο λόγος $[f(X) - f(x_o)] / (X - x_0)$ θα περιέχεται οπωσδήποτε μεταξύ των A και B.’

<u>Απόδειξη</u>. Έστω δ, ε δυο πολύ μικροί αριθμοί. Ο πρώτος επιλέγεται έτσι ώστε για κάθε τιμή του i μικρότερη από δ και για κάθε τιμή του x που περιέχεται μεταξύ των ορίων x_0, X ο λόγος
f(x+ i) –f(x) / i
να είναι πάντα μεγαλύτερος από f΄(x)- ε [Στο Cauchy’s Oeuvres είναι κατά λάθος γραμμένο f(x)- ε]
και μικρότερος από f΄(x)+ ε. Αν παρεμβάλουμε n-1 τιμές της μεταβλητής x μεταξύ των ορίων x_0, X , δηλαδή x_1 , x_2, …, x_{n-1} ,

έτσι ώστε η διαφορά X-x_0 διαιρεθεί στα $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$,…. X-x_{n-1}

όπου όλα θα έχουν το ίδιο πρόσημο και οι αριθμητικές τιμές είναι μικρότερες από δ ,τότε, εφόσον από τους λόγους

(5) $f(x_1) - f(x_0) / x_1 - x_0$, $f(x_2) - f(x_1) / x_2 - x_1$,……., $f(X) - f(x_{n-1}) / X - x_{n-1}$

ο πρώτος θα περιέχεται μεταξύ των ορίων f΄(x_0)- ε, f΄(x_0) +ε ,ο δεύτερος μεταξύ των ορίων f΄(x_1)- ε, f΄(x_1) +ε , κτλ. κάθε λόγος θα είναι μεγαλύτερος από A- ε και μικρότερος από B +ε

. Επιπλέον εφόσον οι λόγοι (5) έχουν παρονομαστές ίδιου προσήμου ,αν διαιρέσουμε το άθροισμα των αριθμητών τους , έχουμε αποκτήσει ένα μέσο λόγο ,ο οποίος περιέχεται μεταξύ του μεγαλύτερου κ του μικρότερου.

Έτσι ο τύπος (4) $[f(X) - f(x_0)] / (X- x_0)$ με τον οποίο συμπίπτει ο μέσος λόγος θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων Α- ε και Β+ ε , και δεδομένου ότι το συμπέρασμα αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το πόσο μικρό μπορεί να είναι το ε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο λόγος (4) θα πρέπει να περιέχεται μεταξύ των Α και Β.

<u>Πόρισμα.</u> Αν η παράγωγος συνάρτηση f΄(x) είναι συνεχής μεταξύ των ορίων $x= x_0$, x= X τότε η συνάρτηση αυτή καθώς πηγαίνει από το ένα όριο στο άλλο θα ποικίλλει κατά τέτοιο τρόπο ώστε να περιέχεται πάντα μεταξύ των Α και Β και να λαμβάνει διαδοχικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.΄Ετσι οποιαδήποτε ενδιάμεση ποσότητα μεταξύ των Α και Β θα είναι μια τιμή της f΄(x) που αντιστοιχεί σε μια τιμή του x που βρίσκεται μεταξύ των ορίων x_0 , $X=x_0 +h$ ή ισοδύναμα σε μια τιμή του x της σχέσης
$x_0 +\theta h = x_0 + \theta (X- x_0)$,
όπου το θ είναι ένας αριθμός μικρότερος της μονάδας. Αν εφαρμόσουμε αυτή την παρατήρηση στη σχέση (4) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει , μεταξύ των ορίων 0 και 1 , μια τιμή του θ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$[f(X) - f(x_0)] / (X- x_0) = f'[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

ή ισοδύναμα την εξίσωση

(6) $$[f(x_0 + h)- f(x_0)] / h = f'(x_0 + \theta h)$$

Εφόσον η τελευταία σχέση ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του x που στη σχέση είναι γραμμένο σαν x_0 , όσο η συνάρτηση f(x) και η παραγωγός της f΄(x) παραμένουν συνεχείς μεταξύ των ορίων $x= x_0$, $x= x_0+h$ έχουμε γενικά, εφόσον ισχύουν αυτοί οι όροι, την παρακάτω σχέση

(7) $$[f(x + h)- f(x)] / h = f'(x + \theta h)$$

Έπειτα γράφοντας Δx αντί για h έχουμε

(8) $$[f(x + \Delta x)- f(x)] / h = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις εξισώσεις (7) και (8) το θ θα δηλώνει έναν άγνωστο αριθμό (μη αρνητικό) μικρότερο της μονάδας.

[Grabiner, 1981, Σελ.168 Appendix]

THÉORÈME. — *Si, la fonction* $f(x)$ *étant continue entre les limites* $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, *on désigne par* A *la plus petite, et par* B *la plus grande des valeurs que la fonction dérivée* $f'(x)$ *reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies*

$$\frac{f(\mathrm{X}) - f(x_0)}{\mathrm{X} - x_0} \tag{4}$$

sera nécessairement compris entre A *et* B.

Démonstration. — Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ, et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0, X, le rapport

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

reste toujours supérieur à $f(x) - \varepsilon$ et inférieur à $f'(x) + \varepsilon$. Si, entre les limites x_0, X, on interpose $n - 1$ valeurs nouvelles de la variable x, savoir

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

de manière à diviser la différence $\mathrm{X} - x_0$ en éléments

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{X} - x_{n-1},$$

qui, étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ, les fractions

$$(5) \qquad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{f(\mathrm{X})-f(x_{n-1})}{\mathrm{X}-x_{n-1}},$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0)-\varepsilon$, $f'(x_0)+\varepsilon$, la seconde entre les limites $f'(x_1)-\varepsilon$, $f'(x_1)+\varepsilon$, ..., seront toutes supérieures à la quantité $\mathrm{A}-\varepsilon$, et inférieures à la quantité $\mathrm{B}+\varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (5) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction *moyenne*, c'est-à-dire comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère (*voir* l'*Analyse algébrique*, Note II, théorème XII). L'expression (4), avec laquelle cette moyenne coïncide, sera donc elle-même renfermée entre les limites $\mathrm{A}-\varepsilon$, $\mathrm{B}+\varepsilon$, et, comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit le nombre ε, on peut affirmer que l'expression (4) sera comprise entre A et B.

Corollaire. — Si la fonction dérivée $f(x)$ est elle-même continue entre les limites $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$, en passant d'une limite à l'autre, cette fonction variera de manière à rester toujours comprise entre les deux valeurs A et B, et à prendre successivement toutes les valeurs intermédiaires. Donc alors toute quantité moyenne entre A et B sera une valeur de $f'(x)$ correspondante à une valeur de x renfermée entre les limites x_0 et $\mathrm{X}=x_0+h$ ou, ce qui revient au même, à une valeur de x de la forme

$$x_0+\theta h = x_0+\theta(\mathrm{X}-x_0),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. En appliquant cette remarque à l'expression (4), on en conclura qu'il existe entre les limites 0 et 1 une valeur de θ propre à vérifier l'équation

$$\frac{f(\mathrm{X})-f(x_0)}{\mathrm{X}-x_0} = f'[x_0+\theta(\mathrm{X}-x_0)]$$

ou, ce qui revient au même, la suivante :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h). \tag{6}$$

Cette dernière formule devant subsister quelle que soit la valeur de x représentée par x_0, pourvu que la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ restent continues entre les valeurs extrêmes $x=x_0$, $x=x_0+h$, on aura généralement, sous cette condition,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h), \tag{7}$$

puis, en écrivant Δx au lieu de h, on en tirera

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x. \tag{8}$$

Il est essentiel d'observer que, dans les équations (7) et (8), θ désigne toujours un nombre inconnu, mais inférieur à l'unité.

Exemples. — En appliquant la formule (7) aux fonctions x^a, lx, on trouve

$$\frac{(x+h)^a-x^a}{h}=a(x-\theta h)^{a-1}, \qquad \frac{l(x+h)-lx}{h}=\frac{1}{x+\theta h}.$$

3.5 Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης.

Συνεχίζει με τον κανόνα της παραγώγισης συνθέτου συναρτήσεως που συνήθως ονομάζεται Θεώρημα της Αλυσίδας (Chain Rule). Στο ακόλουθο γαλλικό κείμενο φαίνεται η απόδειξη, σε κεντρικό σημείο της οποίας έχει ένα κενό . .

Soit maintenant z une seconde fonction de x, liée à la première $y = f(x)$ par la formule

(2) $$z = F(y).$$

z ou $F[f(x)]$ sera ce qu'on appelle une *fonction de fonction* de la variable x; et, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz les accroissements infiniment petits et simultanés des trois variables x, y, z, on trouvera

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

puis, en passant aux limites,

(3) $$z' = y'\,F'(y) = f'(x)\,F'[f(x)].$$

(Resume σελ. 25)

Θα το εξηγήσουμε. Χωρίς πολλές λεπτομέρειες ας θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις που συντίθενται και έχουν και οι δύο παράγωγο, την f και g και έστω F η σύνθεση τους, που έχει τύπο F(t)=f(g(t)). Το κλασσικό πηλίκο της παραγώγισης είναι το

(F(t+ε)-F(t))/ε που είναι ίσο με(f(g(t+ε))-f(g(t)))/ε. Περαιτέρω γίνεται το ολίσθημα ότι

(f(g(t+ε))-f(g(t)))/ε =((f(g(t+ε))-f(g(t))/((g(t+ε)-g(t)) (((g(t+ε)-g(t))/ε) και από εκεί και πέρα έπεται εύκολα το θεώρημα.

Το ολίσθημα έγκειται στο ότι το g(t+ε)-g(t) μπορεί να είναι 0 για διάφορες τιμές του ε. Αυτό το σημείο θέλει προσοχή. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει π.χ. Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., Απειροστικός Λογισμός Ι σελ. 338, Πηχωρίδης σελ. 72, Apostol Tom. Mathematical analysis σελ. 106, Brand Louis, σελ. 144, Hardy 10th ed σελ. 216, Lennes Nels Johann, Veblen Oswald σελ. 100, κλπ.

Ο Σ. Γ. Παπασταυρίδης μου ανέφερε προφορικά τα παρακάτω: Το βιβλίο Hardy G. H. A course of pure Mathematics, ένα από τα διασημότερα διδακτικά συγγράμματα του 20ου αιώνα, πρωτοεκδοθέν το 1908 με 10 εκδόσεις εως το 1952 και πολλές επανακτυπώσεις, είχε εσφαλμένη απόδειξη του θεωρήματος αυτού στις πρώτες τρείς εκδόσεις του, (βλέπε Hardy 3rd ed, σελ. 245) . Για κάποιες δεκαετίες μετά το Cours d Analyse, το ολισθηρό σημείο δεν είχε γίνει αντιληπτό. Ίσως η πρώτη σωστή απόδειξη εδόθη από τον Dini στο Lezioni di Analisi Infinitesimale (1877). Σχετικώς βλέπε Carslaw και Kellogg.

Στο σχολικό βιβλίο Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος. Μαθηματικά Γ Τάξης Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση. ΟΕΔΒ 2010, σελ. 302, στα ιστορικά σημειώματα που έγραψε ο Δρ Γιάννης Θωμαίδης, αναφέρεται η αδυναμία στην απόδειξη του Cauchy:

«Με αφετηρία αυτόν τον ορισμό, ο Cauchy υπολόγισε τις παραγώγους των

βασικών συναρτήσεων και απέδειξε τους κανόνες της παραγώγισης.

Π.χ. Για τον ιδιαίτερα σημαντικό κανόνα της παραγώγου μιας σύνθετης συ-

νάρτησης, έδωσε την ακόλουθη απόδειξη:

"Έστω z μια δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεόμενη με την πρώτη y= f(x)

μέσω του τύπου z = F (y) . Η z ή F[f(x)] είναι αυτή που ονομάζεται συ-

νάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής x και αν οι απειροελάχιστες και

ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z συμβολιστούν με Δx, Δy, Δz αντί-

στοιχα, τότε θα είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε

z΄ = F΄(y) y΄ = F΄[f(x)] f΄(x) (*)

(*) Ένα αδύνατο σημείο αυτής της απόδειξης, που αφορά την ισότητα (1), είναι ότι για μικρές μη μηδενικές τιμές του Δx , μπορεί να ισχύει Δy = f(x + Δx) - f(x)= 0 .

Μια διδακτική πρόταση πορείας προς κατανόηση της ιδέας της απόδειξης, και εν συνεχεία την εκτέλεση της απόδειξης, είναι η εξής: Από τα παραπάνω εμφανίζεται πρόβλημα όταν το ((g(t+ε)-g(t)) είναι 0 και για μη μηδενικά ε. Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α. Υπάρχει περιοχή του 0, ώστε αν το ε ανήκει στην περιοχή αυτή, ισχύει (g(t+ε)-g(t))=0 μόνον όταν ε=0. Στην περίπτωση αυτή προχωρούμε ομαλά. Αυτή είναι η εύκολη περίπτωση.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β. Έστω λοιπόν ότι για κάθε περιοχή του 0, υπάρχει μη μηδενικό ε, τέτοιο ώστε ((g(t+ε)-g(t))=0. Αφού όμως η g έχει παράγωγο στο t, (εξ υποθέσεως), τότε εύκολα βλέπει κανείς ότι g΄(t)=0. Αρα το θεώρημα της αλυσίδας αποδεικνύεται στην περίπτωση αυτή, αν αποδείξουμε ότι (f(g(t))΄ =0. Ο στόχος είναι λοιπόν να δείξουμε ότι το πηλίκο (f(g(t+ε))-f(g(t)))/ε μπορεί να γίνει «μικρό» για «μικρό» (και μη μηδενικό) ε. Όταν λοιπόν το ε είναι από εκείνα που ((g(t+ε)-g(t)) = 0, το πηλίκο είναι 0 (ότι πιο μικρό θα θέλαμε). Στην ενάντια περίπτωση το πηλίκο γίνεται (χωρίς πρόβλημα τώρα) το παραπάνω γινόμενο και ισχύει ότι κάνει ο … Cauchy.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Cauchy-Bolzano

Τα επιτεύγματα του Cauchy (1789-1857) αν και εξαιρετικά δεν ήταν μοναδικά. Ο σύγχρονος του Bernhard Bolzano (1781-1848) έκανε παρόμοιες ανακαλύψεις. Αν και δεν είχε μεγάλη επιρροή στα μαθηματικά της εποχής του το έργο του ήταν εξαίσιο. Δεδομένου ότι θέλουμε να καταλάβουμε πως επηρεάστηκε ο Cauchy από τους προκατόχους του θα δούμε αν επηρέασαν τον Bolzano κατά τον ίδιο τρόπο. Η ταυτόχρονη ανακάλυψη τους μας παρέχει ένα ελεγχόμενο πείραμα. Για το σκοπό αυτό θα συγκρίνουμε τα επιτεύγματα του Bolzano και του Cauchy.

Ο Bolzano όπως και ο Cauchy ήθελε να θέσει σε αυστηρές βάσεις την ανάλυση. Το τι θεωρούσε ότι είναι αυτό που κάνει μια απόδειξη αυστηρή φαίνεται από τους τίτλους που έχουν οι εργασίες του. Π. χ. "purely analytic proof" του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις. Θεωρεί ότι τα πάντα πρέπει να προκύπτουν από την άλγεβρα χωρίς να εμφανίζονται απειροστά, γεωμετρία, η έννοια του χώρου και του χρόνου οποιαδήποτε άλλη διαισθητική έννοια. Και για τον Bolzano όπως και για τον Cauchy η άλγεβρα των ανισοτήτων έπαιξε σπουδαίο ρόλο στις αποδείξεις. Αλλά ήταν πιο έντονος ο διαχωρισμός του Bolzano με το παρελθόν. Για παράδειγμα σε αντίθεση με τη συντηρητική ορολογία του Cauchy αποφεύγει σκόπιμα τη γλώσσα της κίνησης και τον όρο απειροελάχιστο *“infinitesimal”*. Ο Bolzano έπειτα αποδεικνύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών συνεχούς συνάρτησης. Η απόδειξη η οποία ήταν διαφορετική από αυτή του Cauchy χρησιμοποιεί αυτό που σήμερα ονομάζουμε ιδιότητα Bolzano – Weierstrass για πραγματικούς αριθμούς. [Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.]. Επιπλέον σε εργασία του το 1817 χρησιμοποιεί αυτό που σήμερα λέμε κριτήριο Cauchy για σύγκλιση ακολουθίας, το οποίο ο Cauchy δήλωσε ως κριτήριο σύγκλισης σειράς το 1821.

Τα επιτεύγματα του Bolzano δεν σταματούν εδώ. Σε επόμενες εργασίες χωρίς να έχει διαβάσει τα βιβλία του Cauchy ο Bolzano έκανε επιπρόσθετη εργασία. Επεξεργάστηκε σε μια βάση ανισοτήτων πολλές ιδιότητες παραγώγων, μεγίστων και σειρές Taylor. Μια σπουδαία ανακάλυψη του ήταν το παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης ,η οποία δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη.

Θεωρείται ότι η σύμπτωση μεταξύ των εργασιών του Cauchy (1821-1823) και του Bolzano (1817) είναι πολύ μεγάλη για να είναι τυχαία. Ο Ivor Grattan- Guinnes θεωρεί ότι όλο το πρόγραμμα του Cauchy που ανάγει το λογισμό στο analyse algebrique, χρησιμοποιώντας

ανισότητες για τις βασικές έννοιες για να είναι αυστηρός , δε μπορεί να εξηγηθεί από προηγούμενες εργασίες του Cauchy. Εξηγεί την σύμπτωση θεωρώντας ότι ο Cauchy έχει δει τις εργασίες του Bolzano και τις χρησιμοποιεί χωρίς να τον αναφέρει. Δηλώνει επίσης ότι ο Cauchy έχει δανειστεί τον ορισμό συνεχούς συνάρτησης κριτήριο Cauchy και την απόδειξη για το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών συνεχούς συνάρτησης από τον Bolzano. Η Grabiner δε μπορεί να πει με σιγουριά αν ισχύει κάτι τέτοιο αλλά θεωρεί ότι οι ομοιότητες υπήρχαν λόγω του ότι επηρεαζόντουσαν από κοινούς παράγοντες της εποχής. [Ο H. Freudenthal και ο H. Sinaceur έχουν δείξει ότι υπάρχουν εννοιολογικές διαφορές ανάμεσα σε Cauchy και Bolzano.]

Ούτε ο Cauchy ούτε ο Bolzano είχαν λύσει όλα τα προβλήματα στην ανάλυση μέχρι το 1825. Υπάρχουν δύο μεγάλα κενά στις εργασίες του Cauchy. Πρώτον δεν ξεχώρισε τη σύγκλιση από την ομοιόμορφη σύγκλιση (όπως ούτε ο Bolzano) και τη συνέχεια από την ομοιόμορφη συνέχεια και δεύτερον ενώ χρησιμοποίησε πολλά αξιώματα των πραγματικών αριθμών δεν είχε κατανοήσει πλήρως τη φύση της πληρότητας ή τις τοπολογικές ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Έτσι έδωσε μια λανθασμένη απόδειξη για τη σύγκλιση εναλλασσόμενων σειρών, η οποία μπορεί εύκολα να διορθωθεί με τη βοήθεια του κριτηρίου του Cauchy.

Το μπέρδεμα μεταξύ συνεχούς και κατά σημείο ιδιοτήτων οδήγησε τον Cauchy στη πασίγνωστη απόδειξη «proof» του λάθος θεωρήματος ότι άπειρη σειρά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Το 1816 ο Bolzano επίσης θεωρούσε ότι ισχύει αυτό. Το 1826 ο Abel (1802-1829) στη μελέτη του για τη συνέχεια αθροίσματος δυναμοσειρών δημοσίευσε αντιπαράδειγμα στο λάθος θεώρημα του Cauchy αλλά δεν αναγνώρισε το λάθος του στην απόδειξη.

Επίσης ο λεκτικός ορισμός των ορίων και της συνέχειας που χρησιμοποιείτο από τους Cauchy και Bolzano κρύβει την διάκριση μεταξύ « για κάθε ε, υπάρχει δ για κάθε χ» και «για κάθε ε και για κάθε χ, υπάρχει ένα δ». Ανάμεσα στους τύπους για τις ιδιότητες της πληρότητας υπέθεσε ότι μια φραγμένη, μονότονη ακολουθία συγκλίνει σε ένα όριο και ότι το κριτήριο Cauchy είναι επαρκής συνθήκη για τη σύγκλιση σειράς. Ενώ κατανοούσε ότι ένας πραγματικός μπορούσε να οριστεί σαν όριο ρητών δεν ανέπτυξε αυτή του την ενόραση στον ορισμό ή στις ιδιότητες των πραγματικών. Για τον Cauchy ήταν κάτι μη αναγκαίο οι πραγματικοί και συνέπειες της μονοτονίας. Με αυτά ασχολήθηκαν άλλοι μαθηματικοί όπως οι Weierstrass (1815-1897), Heine (1821-1881), Meray (1835-1911), Cantor (1845-1918) και Dedekind (1831-1916). Από τον Cauchy επηρεάστηκαν οι Abel, Bolzano, Dirichlet (1805-1859), Riemann (1826-1866) και μέσω του Abel και ο Weierstrass. Ο Cauchy ήταν αυτός που ‘δίδαξε’ αυστηρή ανάλυση όλη την

Ευρώπη , ενώ οι εργασίες του Bolzano ήταν ακόμα σχεδόν αδιάβαστες μέχρι το 1860. Ο λόγος είναι εν μέρη κοινωνικός και διδακτικός. Η Ecole Polytechnique στο Παρίσι όπου παρέδιδε ο Cauchy τα μαθήματα του ήταν η πρώτη επιστημονική σχολή στην Ευρώπη και το Παρίσι ήταν το κέντρο του μαθηματικού κόσμου. Ενώ αντίθετα ο Bolzano εργαζόταν στην Πράγα και ήταν περισσότερο γνωστός σαν φιλόσοφος και θεολόγος παρά σαν μαθηματικός.

Παρακάτω παραθέτουμε τις σημειώσεις που λάβαμε από τον καθηγητή Β. Νεστορίδη.

1

Το θεώρημα ἀπὸ τὸ βιβλίο τοῦ Cauchy δὲ ἔχει τὴν μορφή.

<u>Θεώρημα</u> $f:[10,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τὴ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκη $*$ καὶ τὴν συνθήκη

$$1):\ \lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=K\in[-\infty,+\infty]$$

Τότε δὲ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα

$$\Sigma:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=K.$$

Τὸ θέμα εἶναι τί πρέπει νὰ εἶναι τῆς συνθήκης $*$ ὥστε τὸ θεώρημα νὰ εἶναι σωστό; ὅτι καὶ νὰ εἶναι τὸ $*$, ἂν R εἶναι ὁποιαδήποτε σπέπεια τοῦ Σ τότε δὲ πρέπει τὸ R νὰ εἶναι καὶ σπέπεια τῶν $*$ καὶ 1).

(8)

Άσκηση α) Αν $k \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

τότε υπάρχει $s > 10$ ώστε για

κάθε $\tau > s$ η f να είναι φραγμένη

στο $[s, \tau]$ (και η συμπεριφορά

της f στο $[s, \tau]$ μπορεί να εξαρτάται ακόμα

το τ και να γίνεται ίσως πολύ μεγάλη (κοντά

στο ∞) όταν το τ μεταβάλλεται)

Εκμαγράφηση ακόμα δείχνει: $|f(x)| < (|k|+1)x$

για x μεγάλο.

Έτσι λοιπόν είναι λογικό σάν

(*) να θεωρήσουμε την $\exists\, s > 10$

ώστε $\forall\, \tau > s$ η f είναι φραγμένη στο $[s, \tau]$

(3)

Επιμείνουν Μία άλλη συνθήκη
που συνεπάγεται την (*)
Είναι η (**): f αυξάνει από $[s,+\infty)$
για κάποιο $s>10$.

Άσκηση β) Έστω $f:[10,+\infty)\to\mathbb{R}$
συνάρτηση που ικανοποιεί τό (*) και τό (1)
τότε ικανοποιεί και τό Σ, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=K.$$

Εξίσκωνεται τό Σ ισχύει για κάθε
αυξή συνάρτηση $f:[s,+\infty)\to\mathbb{R}$
που ικανοποιεί τό $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=K\in[-\infty,+\infty]$

Απόδειξη: Κάνετε τη και επίσεσα
ώστε ότι έχω δίκιο.

(4)

Άσκηση γ] Έστω $f:[10,+\infty]\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τό (*) και τό (1) και έστω λέον ύποθέτουμε ότι η $y=f(x)$ έχει (ωλάγει) ασύμπτωτο στό $x=+\infty$. Τότε η ασύμπτωτη έχει εξίσωση της μορφής $y=kx+c$ για κάποτο $c\in\mathbb{R}$ και μέλτε υπόχρεωτικά $k\in\mathbb{R}$.

Όπου $k=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

Άσκηση δ] Έστω $f:[10,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία σπίρτηση που έχει ασύμπτωτη $y=\alpha x+b$ στό $+\infty$ $(\alpha,b\in\mathbb{R},)$

Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x)=\alpha$.

Δηλαδή ικανοποιεί τό (1).

Συμπέρασμα # Δυνάπτωση του θεωρήματος ἀπὸ τὸ βιβλίο τοῦ Cauchy εἶναι ελλειπτίς αλλά εὔκολα συμπληρώνεται καὶ τὸ διαίσθαση τοῦ Cauchy εἶναι ἰσχυρότατα καὶ ἐφαρμόγεται σ' ὅλους τοὺς σπεχεῖς συνεχείας (minimum.)

Βασίλης Νεστοράδης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., Απειροστικός Λογισμός Ι. Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1987.

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., Απειροστικός Λογισμός ΙΙ. Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1993.

Τσίτσας Λ. Ν. Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2002

Τσίτσας Λ. Ν. Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2002

Φίλη Χριστίνα. Εξουσία και Μαθηματικά. Παπασωτηρίου, 2009.

Φίλη Χριστίνα. Οι αρχαιοελληνικές καταβολές των Συγχρόνων Μαθηματικών. Παπασωτηρίου, 2010.

Apostol Tom. Mathematical analysis, Second Edition. Addison-Wesley Publishing Co. 1974.

Bolzano Bernard. The Mathematical Works. Transl. Steve Russ. Oxford University Press, 2004.

Bradley R. E., Sandifer C. E. Cauchy's Cours d' Analyse. Springer Verlag, 2009.

Brand Louis, Μαθηματική Ανάλυση (Advanced Calculus). Ανδρέου Η., Δάσιος Γ., Ζαφειροπούλου Φ., Καδιανάκης Ν., Κόκκινος Χ., Κυριάκη Κ. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 1984.

Burn R. P., Another theorem of Cauchy which 'admits exceptions', 2011, www.sciencedirect.com

Cauchy Augustin-Louis - Œuvres complètes, série 2, tome 3
Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie : Analyse algébrique p.5-5+i-viii+17-471..
http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_2_3

Cauchy Augustin-Louis, Œuvres complètes, série 2, tome 4
Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal p.9-261
Leçons sur le calcul différentiel p.265-609
http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_2_4

Cauchy Augustin-Louis, Œuvres complètes, série 2, tome 5, 8-528 (volume)
Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie
http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_CAUCHY_2_5,

Dedekind Richard, Essays In Theory of Numbers. Dover Publications; First edition (January 1, 1963)

Edwards C. H. Jr. The Historical Development of Calculus. Springer Verlag, 1979.

Grabiner Judith V. The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1981.

Grabiner Judith J. Who GaveYou the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. Who Gaveyou the Epsilon? And Other Tales of Mathematical History. Edited by MarlowAnderson, Victor Katz, RobinWilson. Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 2009.

Katz Victor J. A History of Mathematics, an Introduction. 2nd edition. Addison-Wesley, 1998.

Lakatos, Imre (1976), Proofs and Refutations, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 0-521-29038-4 & ISBN 978-0-521-29038-8. John Worrall & Elie Zahar were the editors of this posthumous book.

Russ Steve. The Mathematical Works of Bernard Bolzano. Oxford University Press 2004

Το έργο του CAUCHY στο GALLICA αποτελείται από Serie 1 kai Serie 2. Ηπρώτη έχει 12τόμους που είναι έργο που δημοσιεύτηκεροy αποτην Academie of Science, και η δεύτερη έχει 15 τόμους που δημοσιεύτηκαν αλλού.

Υπάρχει και Cambridge Library Collection, pou ta exedose se 12+14 tomous (leipei o 15os ?), . Οι πρώτοι 12 αντιστοιχούν με το Gallica, το ca;lcul infinitecimal είναι ο τόμος 16 (12+4 série 2, tome 4 tou galica,) Το Cabrigde χρησιμοποιεί παλαιότερη έκδοση Gautier Villars)
Αντιστοιχούν οι σελίδες 27 gallica me 25 Cambridge