ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η διδασκαλία του Ορίου συνάρτησης με χρήση Νέων Τεχνολογιών»

Σκοτίδας Σωτήριος

ΑΘΗΝΑ 2010

Επιβλέπων Καθηγητής : *Θεοδόσης Ζαχαριάδης*

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Πόταρη και κ. Γιαννακούλια, οι οποίοι μέσω των μαθημάτων τους, μου έδωσαν γόνιμες ιδέες διδακτικής, αλλά και το διάστημα συγγραφής της εργασίας με βοήθησαν στην επιτυχή περάτωσή της. Ιδιαίτερα όμως πρέπει να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη, ο οποίος πέρα από τις σημαντικές, λεπτομερείς και προσεκτικές υποδείξεις του στην διάρκεια δόμησης της Διπλωματικής, με βοήθησε να δω υπό άλλη οπτική γωνία τη διδακτική των εννοιών της Ανάλυσης.

Ευχαριστώ γενικότερα όλους τους Καθηγητές μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα, που μου έμαθαν περισσότερα γράμματα και με έκαναν (θέλω να πιστεύω) καλύτερο δάσκαλο.

Ευχαριστώ την σύζυγό μου Παναγιώτα που με παρότρυνε προς τις σπουδές μου και με στήριξε στις προσπάθειές μου.

Φυσικά, ένα μεγάλο ευχαριστώ προς όλους τους συμφοιτητές μου, οι οποίοι μέσω των προβληματισμών και των ιδεών που συζητούσαμε, έκαναν πιο ευχάριστο και πιο διδακτικό το κλίμα στη διάρκεια των μαθημάτων.

Ένα όμορφο ταξίδι έφτασε στο τέλος του.

Νοέμβριος 2010

Σωτήριος Σκοτίδας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 14

1.1 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΣΘΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 14

1.2 ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ 21

1.3 Η ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 24

1.3.1 Οπτικοποίηση και Απόδειξη 29

1.3.2 Ο ρόλος της οπτικοποίησης στην διδασκαλία και μάθηση της μαθηματικής ανάλυσης 34

1.4 ΕΝΟΡΑΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ 37

1.4.1 Ο προβληματισμός είναι ισχυρό κίνητρο μάθησης 37

1.4.2 Η σκέψη είναι θεμέλιο της γνώσης 38

1.4.3 Ο ρόλος των Μαθηματικών είναι η οργάνωση της σκέψης 39

1.5 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 40

1.5.1. Τι είναι αναπαραστάσεις; 40

1.5.2 Αναπαραστάσεις και Διδασκαλία Μαθηματικών 42

1.5.3 Νέες Τεχνολογίες και Αναπαραστάσεις 45

1.5.4 Νέες Τεχνολογίες και απόδειξη 50

1.5.5 Διαίσθηση – Αναπαραστάσεις και όριο συνάρτησης 52

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ 63

2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ 63

2.1.1 Παραδοσιακές Θεωρίες Μάθησης και Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Λογισμικού ... 63

2.1.2 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτικό λογισμικό 65

2.2 ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ 73

2.2.1 Ορισμός του εκπαιδευτικού λογισμικού 73

2.2.2 Είδη εκπαιδευτικού λογισμικού - Κατηγοριοποίηση αναφορικά με το σκοπό που δημιουργήθηκε το ΕΛ 73

2.2.3 Κατηγοριοποίηση ΕΛ σχετική με την παιδαγωγική μέθοδο που ακολουθήθηκε 74

2.2.4 Τα χρώματα στο ΕΛ 76

2.3 ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ 76

2.3.1 Η Εξέλιξη της ΔτΜ με εργαλεία Ψηφιακής Τεχνολογίας 76

2.3.2 Η εισαγωγή των Τεχνολογιών Πληροφορίας και επικοινωνίας στη μαθηματική εκπαίδευση 82

2.3.3 Η σκοπιμότητα της ένταξης εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση 83

2.3.4 Ο ρόλος της τεχνολογίας στη μάθηση των μαθηματικών 86

2.3.5 Εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά *90*

2.3.6 Χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού για την διδακτική των μαθηματικών *100*

2.4 ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ Η/Υ 101

2.4.1 Βασικά επιχειρήματα υπέρ της χρήσης ΝΤ στη μαθηματική εκπαίδευση *101*

2.4.2 Προβληματισμοί ως προς τη χρήση ΝΤ στη μαθηματική εκπαίδευση *104*

2.4.3 Προϋποθέσεις χρήσης των ΤΠΕ στη διδακτική *105*

2.4.4 Πορίσματα της Παιδαγωγικής Έρευνας σχετικά με τη χρήση της Υπολογιστικής Τεχνολογίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση *108*

2.4.5 Η Αξιοποίηση Των Προγραμμάτων Προσομοίωσης Java Applets στη Διδασκαλία Των Μαθηματικών *110*

3^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ. ΟΡΙΟ 116

3.1 Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ 116

3.1.1 Από το αξίωμα της συνέχειας του Ευδόξου στην έννοια του ορίου ακολουθίας *116*

3.1.2 Μέθοδος της εξάντλησης – Όριο *118*

3.1.3 Η έννοια του Ορίου σε λανθάνουσα μορφή στην Αρχαία Ελλάδα- Η διδακτική του προσαρμογή στο σχολείο *122*

3.1.4 Παράδοξα του Ζήνωνα – Όρια *126*

3.1.5 Τα όρια στη νεώτερη εποχή *130*

3.1.6 Επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορική εξέλιξη *140*

3.2 Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 142

3.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 143

3.4 Η ΦΥΣΗ ΤΗΣ ΙΔΕΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΚΑΙ Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ 145

3.5 ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΡΙΟΥ - ΑΥΘΟΡΜΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΣΦΑΛΜΕΝΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ 149

3.6 ΤΡΕΙΣ ΚΟΣΜΟΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ 152

3.7 ΤΑ ΟΡΙΑ ΟΠΩΣ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΟΧΗ - ΈΡΕΥΝΕΣ 159

3.8 ΤΕΛΙΚΑ ΠΩΣ ΘΑ ΔΙΔΑΞΟΥΜΕ ΤΑ ΌΡΙΑ ; 174

3.9. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΟ ΌΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ 180

3.9.1 Τύπος (Ι). Διαισθητική – Δυναμική Προσέγγιση *183*

3.9.2 Τύπος (ΙΙ). Όρια με πίνακες τιμών *192*

3.9.3. Τύπος (ΙΙΙ). Όρια με τον ε – δ Ορισμό *201*

3.10 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ 209

4^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ. Η ΕΡΕΥΝΑ 229

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 229

4.2 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΕΡΕΥΝΑΣ - ΣΤΟΧΟΙ 231

4.3 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 232

4.4 ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΣΤΟΝ Ε-Δ ΟΡΙΣΜΟ ΜΕΣΩ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 237

4.5 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΙΙ 245

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 262

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ..... 278

Παράρτημα Ι. Ερωτηματολόγιο Ι (όριο συνάρτησης)..... 279

Παράρτημα ΙΙ. Φύλλο εργασίας στο ε-δ ορισμό 281

Παράρτημα ΙΙΙ. Ερωτηματολόγιο ΙΙ (μετά το μάθημα στο ε-δ ορισμό) 283

«Οι εκδρομές στη χώρα των μαθηματικών δεν έχουν σαφές δρομολόγιο· μπορείτε να ταξιδεύετε προς όποια κατεύθυνση θέλετε και να επισκεφτείτε οποιαδήποτε περιοχή. Η πρώτη σας στάση μπορεί να είναι η χώρα των Πρώτων Αριθμών όπου η αναζήτηση του μεγαλύτερου πρώτου αριθμού δίνει σημαντικές πληροφορίες για τη δημιουργία αδιαπέραστων συστημάτων ασφαλείας των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Μπορείτε μετά να συνεχίσετε νότια προς τη χώρα της Ανάλυσης όπου ένα φαινομενικά απλό πρόβλημα που ταλαιπωρεί τους τοπογράφους χρόνια ολόκληρα, μόλις λύθηκε. Υπάρχει ακόμα η Τοπολογία όπου η ελάχιστη επιφάνεια μιας σαπουνόφουσκας επαναλαμβάνεται στην κατασκευή μεγάλων αψίδων. Στην οροσειρά των κλασματικών ανακαλύπτετε καινούργιους τρόπους για την περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων, κάτι που ήταν αδύνατο να γίνει παλιότερα. Στη θάλασσα της Στατιστικής μπορείτε να ρίξετε ένα κέρμα τηλεφωνικά, απόλυτα σίγουροι ότι ο συμπαίκτης σας δε σας ρίχνει.

Καλωσορίσατε λοιπόν στη χώρα των Μαθηματικών. Καθίστε αναπαυτικά, χαλαρώστε κι απολαύστε το ταξίδι. Ερασιτέχνες ή άνθρωποι του μαθηματικού χώρου θα αποκτήσετε μια καλύτερη άποψη του δυναμικού και χρήσιμου κόσμου των σύγχρονων Μαθηματικών».

Ivars Peterson

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σπουδή των Μαθηματικών θέτει στους μαθητές αλλά κυρίως στους καθηγητές, απαιτήσεις όσο καμιά άλλη Επιστήμη. Οι απαιτήσεις αυτές είναι συνέπεια της «φύσης των πραγμάτων». Ο άνθρωπος από καταβολής του «βολεύεται» στην ασάφεια, στο περίπου και στην αβεβαιότητα. Δεν θέλει να «γνωρίζει ακριβώς», αφού στην καθημερινή του ενασχόληση δεν του είναι απαραίτητο. Με το σκεπτικό αυτό βρίσκει αφύσικο, ακατόρθωτο αυτό που διακρίνει τα Μαθηματικά: η σαφήνεια, η ακρίβεια, η σχολαστική φροντίδα στη χρήση των ορισμών, η αυστηρότητα των αποδείξεων (Παντελίδης, Γ., 1998).

Η Ανάλυση αποτελεί το πιο ισχυρό και τελείως απαραίτητο εργαλείο για κάθε σε βάθος εξέταση προβλημάτων που απασχολούν σήμερα εκτός από τα Μαθηματικά, την Φυσική, την Τεχνολογία, την Βιολογία, την Ιατρική, την Οικονομία, τις Κοινωνικές Επιστήμες. Στην Ανάλυση εισάγεται για πρώτη φορά η έννοια της αρίθμησης και συνεχούς διαδικασίας, η έννοια της προσεγγίσεως με την εισαγωγή του ορίου καθώς και η γνωστή από την Αρχαιότητα έννοια της εξαντλήσεως για τον υπολογισμό των εμβαδών.

Λόγω λοιπόν της μεγάλης σημασίας της Ανάλυσης σε ένα ευρύ πεδίο επιστημών, η διδασκαλίας της αποτελεί ένα από τα κεντρικά θέματα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πολλές διεθνείς έρευνες, τονίζουν πως οι περισσότεροι μαθητές που τελειώνουν την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παρουσιάζουν προβλήματα στην κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης που έχουν διδαχθεί και ιδιαίτερα στην έννοια του ορίου, καθώς οι σημαντικές έννοιες παράγωγος, ολοκλήρωμα στηρίζονται σ΄ αυτή. Συνεπώς το θέμα της διδασκαλίας της Ανάλυσης είναι ένα σημαντικό πρόβλημα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ως βασική αιτία εντοπίζεται η λογική που διέπει τη διδασκαλία των μαθημάτων Ανάλυσης στα τελευταία χρόνια σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται την Ανάλυση ως μια σειρά δεξιοτήτων που πρέπει να μάθουν, οι οποίες τους χρησιμεύουν για να λύνουν ασκήσεις, να υπολογίζουν ποσότητες με χρήση γνωστών μεθόδων. Είναι αλήθεια ότι οι περισσότερες ασκήσεις των σχολικών βιβλίων μπορούν να αντιμετωπιστούν επιτυχώς με επιφανειακές γνώσεις, χωρίς

κάποια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση. Η κλασική ακολουθία ορισμός – θεώρημα – απόδειξη που παρουσιάζεται στην διδασκαλία, δημιουργεί παραπλανητική άποψη σχετικά με τα Μαθηματικά, καθώς δεν τους δείχνει τη διαδικασία συλλογισμού στα Μαθηματικά, δεν τους βοηθάει να χρησιμοποιούν την διαίσθησή τους όταν σκέφτονται πάνω στις έννοιες.

Τα παραπάνω συνδέονται με μια γενικότερη μαθηματική πρακτική επιφανειακών στρατηγικών (Lithner, 2004). Οι πρακτικές αυτές παράγονται από το διδακτικό προσωπικό και σιωπηρά ή ρητά επιβάλλονται από τα σχολικά εγχειρίδια και τα σχολικά αναλυτικά προγράμματα (Ferrini-Mundy & Graham, 1991). Ακόμη και σε πανεπιστημιακό επίπεδο, αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον εντοπισμό σοβαρών δυσκολιών για τους φοιτητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με μη-αλγοριθμικού τύπου προβλήματα, τα οποία συνεπάγονται εννοιολογική κατανόηση (Gonzales-Martin & Camacho, 2004).

Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση εστιάζει στην εκμάθηση διαδικασιών και αλγορίθμων χωρίς να δίνει την απαιτούμενη σημασία στη διαίσθηση και στη δημιουργία πολλαπλών αναπαραστάσεων των εννοιών, οι οποίες θα συνέβαλαν στην ουσιαστική τους κατανόηση. Ποιοτική και εύστοχη χρήση των αναπαραστάσεων δεν συντελεί απλώς στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά βοηθά και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Αυτή επιτυγχάνεται όταν ο μαθητής θα χρησιμοποιήσει διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας ως εργαλείο στην προσπάθειά του να κατανοήσει μια απόδειξη ή και να κατασκευάσει ο ίδιος μια απόδειξη.

Ο Schwatzenberger (1980) ισχυρίζεται ότι οι μαθηματικές δυσκολίες της κλασικής ανάλυσης δεν επιδέχονται μια απλή εξήγηση. Με βάση αυτή τη θέση, σε κάθε διαισθητικό σχηματισμό των εννοιών του απειροστικού λογισμού θα εμφανίζονται συχνά στους μαθητές οι βασικές του δυσκολίες. Ο Tall (1985) όμως ισχυρίζεται ότι το παραπάνω επιχείρημα αναδεικνύει τις μαθηματικές δυσκολίες της ανάλυσης και όχι τις γνωστικές δυσκολίες του απειροστικού λογισμού. Πως θα μπορέσει όμως η διδασκαλία της Ανάλυσης να είναι αποτελεσματική; Η απάντηση στο ερώτημα δεν είναι καθόλου απλή. Το σίγουρο είναι πως ένα από τα στοιχεία που βοηθούν στην δημιουργία πολλαπλών και πρόσθετα δυναμικών

αναπαραστάσεων, είναι η χρήση των νέων τεχνολογιών. Η βάση της Ανάλυσης είναι οι άπειρες διαδικασίες. Μια άγνωστη ποσότητα την υπολογίζουμε προσεγγίζοντας την από γνωστές ποσότητες. Μια τέτοια διαδικασία περιέχει κίνηση, είναι δηλαδή μια δυναμική διαδικασία. Είναι λοιπόν φυσικό πως τέτοιου τύπου διαδικασίες μπορούν να κατανοηθούν καλύτερα μέσα σε ένα κατάλληλο περιβάλλον. Ποιο είναι όμως αυτό; Κοιτώντας το παρελθόν, βλέπουμε πως οι ρίζες της Ανάλυσης και τα προβλήματα που οδήγησαν στη δημιουργία τους, συνδέονται με την Γεωμετρία και την Φυσική. Ο συνδυασμός της δυναμικής φύσης την εννοιών της Ανάλυσης με τις ιστορικές της ρίζες, οδηγούν αβίαστα στη σκέψη πως η διδασκαλία της Ανάλυσης με χρήση εργαλείων δυναμικής Γεωμετρίας, μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόησή της (Calgeo, 2007).

Ένα άλλο σημαντικό θέμα είναι η ανάπτυξη σωστών διαισθήσεων από τους μαθητές, η οποία συνδέεται άμεσα με τις αντιλήψεις που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για την έννοια πριν την διδασκαλία της. Αυτές οι αντιλήψεις μπορεί να έχουν σχηματιστεί είτε από χρήση του μαθηματικού όρου για την έννοια στην καθημερινή ζωή, είτε από την διδασκαλία ειδικών περιπτώσεων της έννοιας σε προηγούμενες τάξεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έννοια του ορίου, καθώς πολύ πριν διδαχθεί ο μαθητής την συγκεκριμένη έννοια, οι μαθητές έχουν ακούσει και χρησιμοποιήσει στην καθημερινή τους ζωή τον όρο «όριο», όπως π.χ. όριο ταχύτητας. Αυτό έχει ως συνέπεια να δημιουργείται η αντίληψη ότι το «όριο είναι ένα αξεπέραστο φράγμα». Είναι λοιπόν αυτονόητο πως αν κατά την διδασκαλία δεν ληφθούν υπόψη προϋπάρχουσες αντιλήψεις, τότε αυτές παραμένουν και δημιουργούν εμπόδια στην κατανόηση.

Η έννοια του ορίου συνάρτησης παρέχει ένα κατάλληλο και ενδιαφέρον πλαίσιο για τη μελέτη των μαθηματικών πεποιθήσεων και διαισθήσεων. Η έννοια αυτή, που όπως ήδη αναφέρθηκε αποτελεί την θεμελιώδη έννοια του Απειροστικού Λογισμού, είναι δύσκολη στην κατάκτησή της από τους μαθητές (Davis & Vinner, 1986 · Sierpinska, 1987 · Tall & Vinner, 1981). Δυστυχώς, οι μαθητές εξακολουθούν συχνά να διατηρούν ατελείς και εσφαλμένες αντιλήψεις για το όριο ακόμη κι έπειτα από προσεγμένη διδασκαλία (Davis & Vinner, 1986, Williams, 1991). Έχουν καταγραφεί στην διεθνή βιβλιογραφία αρκετά μοντέλα του ορίου (ο

Cornu τα ονομάζει αυθόρμητα) από τους μαθητές, κάποια από τα οποία είναι ασυνεπή προς τον τυπικό ορισμό. Οι οριακές διαδικασίες δεν είναι πάντα διαισθητικές και αυτό οδηγεί αναπόφευκτα στην δημιουργία ενός τυπικού πλαισίου για τον υπολογισμό ορισμένων ορίων, κάτι που φυσικά δυσκολεύει ακόμα περισσότερο τους μαθητές.

Έχει λυθεί όμως το πρόβλημα της κατανόησης του ορίου αν διδάξουμε στους μαθητές τον ακριβή ορισμό του; Είναι άραγε σωστή η άποψη πως θα είναι καλύτερα η διδασκαλία του ορίου να αρχίζει με την οικειοποίηση δεξιοτήτων και μεθόδων με την ελπίδα-πίστη ότι η βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση θα έλθει αργότερα; (αυτό είναι και το σημερινό μοντέλο διδασκαλίας και αφορά κυρίως τους μαθητές που έχουν τα Μαθηματικά κατεύθυνσης ως κύριο μάθημα και θα συνεχίσουν σε κάποιο Μαθηματικό Τμήμα). Στην περίπτωση αυτή βέβαια κυριαρχούν αρχικά οι «απλοϊκές εννοιολογικές αντιλήψεις». Μπορεί η κατανόηση να επέλθει νωρίτερα; Οι Davis & Vinner (1986) απαντάνε πως αυτό είναι δύσκολο, αλλά όχι ακατόρθωτο.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από 4 κεφάλαια. Στο πρώτο γίνεται αρχικά αναφορά στο πως επιδρά η διαίσθηση στην διδασκαλία των μαθηματικών και ιδιαίτερα της Ανάλυσης, όπως και η σχέση της διαίσθησης με τις Νέες Τεχνολογίες. Στη συνέχεια ερευνάται ο ρόλος της οπτικοποίησης (στατικής ή δυναμικής) στην αποδεικτική διαδικασία και ιδιαίτερα στην διδασκαλία και μάθηση της μαθηματικής ανάλυσης. Τέλος αναλύεται η συνεισφορά των αναπαραστάσεων στην διδασκαλία των μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα του ορίου της συνάρτησης, ενώ πρόσθετα παρατίθεται μια διδακτική προσέγγιση στον ε-δ ορισμό του ορίου.

Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στην Διδακτική των Μαθηματικών με χρήση νέων τεχνολογιών, αρχίζοντας με μια ανασκόπηση της χρήσης τεχνολογικών εργαλείων στη διδακτική πράξη και ειδικότερα της εξέλιξης της ΔτΜ με τα εργαλεία της Ψηφιακής Τεχνολογίας μέχρι τα σύγχρονα εκπαιδευτικά (μαθηματικά) λογισμικά. Τεκμηριώνεται η ανάγκη χρήσης των λογισμικών στην μαθηματική εκπαίδευση, όμως παράλληλα τίθενται και οι προϋποθέσεις χρήσης, αλλά και οι προβληματισμοί. Τέλος γίνεται ειδική μνεία στα σύγχρονα Java applets που σήμερα

χρησιμοποιούνται εκτενώς, έχοντας γίνει απαραίτητα εργαλεία κατανόησης εννοιών και αποδεικτικών διαδικασιών.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αρχικά μια ιστορική αναδρομή στην έννοια του ορίου. Βλέπουμε πως η γίνεται η μετάβαση από το αξίωμα του Ευδόξου στο όριο ακολουθίας, όπως και το ότι το όριο συνάρτησης υποκρύπτεται στην αρχή της εξάντλησης. Επίσης ερευνάται η σύνδεση των παραδόξων του Ζήνωνα αλλά και των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών των Πυθαγορείων με την έννοια του ορίου. Στην συνέχεια, η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης μετατίθεται στην νεώτερη εποχή ($17^{ος}$ – $19^{ος}$ αιώνας) και πιο συγκεκριμένα στις εργασίες (κυρίως) των Newton, Leibniz, Cauchy, D' Alebert για να καταλήξουμε στον φορμαλιστικό ορισμό του Weierstrass. Επίσης χαρτογραφούνται τα επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορική εξέλιξη του ορίου, ενώ παράλληλα γίνεται εκτενής αναφορά στην ερευνητική βιβλιογραφία σχετικά με τα προβλήματα διδασκαλίας και κατανόησης της έννοιας του ορίου. Ειδικότερα, ερευνάται η πιθανή ομοιότητα των δυσκολιών κατανόησης της έννοιας, βάσει των σημερινών μεθόδων διδασκαλίας, με τις δυσκολίες που στο παρελθόν αντιμετώπισαν και σημαντικοί μαθηματικοί κατά την ενασχόλησή τους με την δομή και το ύφος της έννοιας. Επίσης παρατίθενται ερευνητικά συμπεράσματα σχετικά με τις επιδόσεις μαθητών σε δραστηριότητες με το όριο συνάρτησης, ύστερα από συμβατικές διδασκαλίες και διδασκαλίες στηριζόμενες στις νέες τεχνολογίες. Το κύριο μέρος του κεφαλαίου περιλαμβάνει διάφορες ιδέες και τρόπους διδασκαλίας του ορίου με την χρήση μαθηματικού λογισμικού στην Ελλάδα αλλά και γενικότερα σε παγκόσμιο επίπεδο.

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί το ερευνητικό κομμάτι της εργασίας. Επιχειρείται μια προσωπική έρευνα σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου με στόχο την διερεύνηση των πεποιθήσεων-αντιλήψεων τους σχετικά με την έννοια του ορίου μέσω ενός ερωτηματολογίου, αλλά και την διδασκαλία του ε-δ ορισμού του ορίου με την χρήση του μαθηματικού λογισμικού Euclidraw. Στους μαθητές που συμμετείχαν στο μάθημα δόθηκε και ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο με σκοπό να εντοπιστεί τυχόν μεταβολή του βαθμού κατανόησης της έννοιας. Μπορεί βέβαια το δείγμα να ήταν μικρό (30 μαθητές) για εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων, αλλά

γενικά επιβεβαιώθηκαν προηγούμενα ερευνητικά συμπεράσματα για τις παρανοήσεις των μαθητών στην έννοια του ορίου.

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1.1 Ο ρόλος της διαίσθησης στα μαθηματικά

Η διαίσθηση εκφράζει μια βαθιά ανάγκη της διανοητικής συμπεριφοράς μας κατά τη διάρκεια του συλλογισμού μας να στηριχθούμε σε αναπαραστάσεις και ιδέες που εμφανίζονται, υποκειμενικά σαν βέβαιες, λογικά συγκροτημένες και σαφείς (Fischbein 1987).

Ο όρος «intuition» στην αγγλική γλώσσα μεταφράζεται στα ελληνικά με τους όρους διαίσθηση, ενόραση, εποπτεία. Οι έννοιες αυτές θεωρούνται συγγενικές, με την διαφορά στο νόημα τους να είναι αρκετά λεπτή. Για την έννοια της διαίσθησης υπάρχουν οι επόμενες διατυπώσεις :

Διαίσθηση είναι η αντίληψη μιας έννοιας-κατάστασης χωρίς την συμβολή της λογικής, η ενστικτώδης γνώση, η κατανόηση με το υποσυνείδητο, χωρίς την επέμβαση του λογικού· διαίσθηση είναι επίσης η απροσδιόριστη γνώση αυτού που δεν μπορεί να αποδειχτεί με τη λογική ή αυτού που δεν υπάρχει ακόμη.

Διαίσθηση θα λέγαμε ότι είναι η ολιστική σύλληψη της αντιμετώπισης ενός προβλήματος – ερωτήματος, που έχει ως βασικό προϊόν την διατύπωση εικασιών. Η διαισθητική σκέψη, σε αντιδιαστολή με την αναλυτική, δεν προχωρά με προσεκτικά, σαφή βήματα και είναι συμπληρωματικής φύσεως. Επιτρέπει άλματα και κατασκευάζει ένα δρόμο, πάνω στον οποίο θα κινηθεί η αναλυτική σκέψη. Η διαίσθηση τονίζει αυτό που αισθανόμαστε ως σωστό, ως πιο αληθές, πιο πιθανό, χωρίς να έχουμε ακόμη μια προφανή ή εμφανή λογική αιτιολόγηση για αυτή την προδιάθεση. Η επιβεβαίωση της αλήθειας της ή όχι, θα γίνει με την (παραδεκτή) μέθοδο της απόδειξης. Η διαίσθηση είναι μια καθολική (σφαιρική) αντήχηση στον εγκέφαλο και εξαρτάται από τη γνωστική δομή του ατόμου, η οποία με τη σειρά της επίσης εξαρτάται από την προηγούμενη εμπειρία του ατόμου (Tall, 1991).

Ενόραση είναι η σε βάθος αντίληψη μιας έννοιας ή μιας κατάστασης. Είναι επίσης το αποτέλεσμα ενός εσωτερικού φωτισμού, μιας στιγμιαίας έμπνευσης, στην προσπάθεια προσέγγισης μιας λύσης ενός προβλήματος. Μάλλον σχετίζεται με την

αιφνίδια ανακάλυψη, την επινόηση μιας λύσης προβλήματος, η οποία συνήθως απαντάται σε δασκάλους των μαθηματικών ή μαθητές που έχουν μια μακρά, έντονη ενασχόληση με προβλήματα και ισχυρή μαθηματική νοοτροπία.

Εποπτεία είναι η συνολική αντίληψη ενός θέματος, το να μπορεί να δει κανείς μια έννοια από πολλές οπτικές γωνίες, διά μέσου μιας νοητικής αναπαράστασης. Δεν φαίνεται να είναι στενά συγγενική έννοια με την διαίσθηση. Η εποπτεία σε κάθε τομέα των μαθηματικών αυξάνει με την συνεχή τριβή του μαθητή με τις έννοιες που χρησιμοποιούνται στον τομέα αυτό. Πλουσιότερη εποπτεία μπορεί να τον οδηγήσει σε δημιουργική εργασία, δηλαδή στην διατύπωση και επίλυση προβλημάτων ή στη δημιουργία νέων αποδείξεων σε ήδη λυμένα προβλήματα.

Ο συλλογισμός μας έχει ανάγκη να στηριχτεί αρχικά σε μια σκέψη που τη θεωρεί διαισθητικά σωστή, ώστε να την αναπτύξει περαιτέρω και να την ελέγξει με λογικές σκέψεις. Τούτο, το εφαρμόζουμε επανειλλημένα σε προβλήματα του τύπου «υπάρχει συνάρτηση……..;» , «υπάρχει το όριο….;» όπου πρώτα πρέπει να διαισθανθούμε, στηριζόμενοι στο γνωστικό μας υπόβαθρο και στην εμπειρία μας την απάντηση και μετά να αποδείξουμε. Επίσης σε προβλήματα γεωμετρικών τόπων όταν παίρνουμε κάποιες χαρακτηριστικές θέσεις για να διαισθανθούμε και να αποκτήσουμε μια εποπτική εικόνα για το ποιος μπορεί να είναι ο γεωμετρικός τόπος. Παρόμοια κατάσταση υπάρχει και στη διδασκαλία της Ανάλυσης όταν προσπαθούμε να συνδέσουμε την γεωμετρική ερμηνεία Θεωρημάτων με τις μεθόδους της τυπικής απόδειξής των (π.χ. θεωρήμα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού). Η επινόηση δεν είναι πάντα γραμμική συνάρτηση της προϋπάρχουσας μαθηματικής θεωρίας.

Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα πως η διαίσθηση αποτελεί σημαντική μεταβλητή στην συνάρτηση (πολλών μεταβλητών) της μάθησης των μαθηματικών και πρέπει να ασκηθεί μέσα από την εκπαίδευση, θέση που έχει διατυπωθεί άλλωστε από πολλούς μαθηματικούς με βάση την εμπειρία τους αλλά και τα ιστορικά γεγονότα των διαφόρων ανακαλύψεων, επινοήσεων και αποδείξεων. Η καλλιέργειά της διαίσθησης μπορεί να επιτευχθεί, μέσα σε κάποια

όρια, με το να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να μαντεύουν και να εικάζουν, αλλά και μέσω της οπτικοποποίησης (στατικής ή δυναμικής) των εννοιών – προβλημάτων.

Η διαισθητική σκέψη συνδέεται με τη μαθηματική σκέψη. Μαθηματική σκέψη σημαίνει ικανότητα για παραγωγικό συλλογισμό, αφαιρετική σκέψη, αναλυτικές και συνθετικές ικανότητες, διαίσθηση, επινοητικότητα, ανάπτυξη αναπαραστάσεων, ικανότητα για γενίκευση.

Κατά τον Hadamard «η λογική επικυρώνει την κατάκτηση της διαίσθησης» και φυσικά είναι λίγες οι ανακαλύψεις που στηρίχτηκαν αποκλειστικά στη λογική. Η παρέμβαση της ενόρασης, που πηγάζει από το ασυνείδητο, είναι αναγκαία τουλάχιστον για την έναρξη της λογικής εργασίας (Hadamard, 1995). Άλλωστε «η επινόηση των φανταστικών αριθμών από τον Cardano φαινόταν καθαρός παραλογισμός» (Changeux J. P. & Connes Al., 1995).

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι τα Μαθηματικά μπορούν να νοηθούν χωρίς αυστηρές αποδείξεις. Η αξία των Μαθηματικών βρίσκεται στην παραγωγική απόδειξη. Εκείνο όμως που πρέπει να δούμε είναι ότι η «μαθηματική δραστηριότητα δεν μπορεί να συμπεριληφθεί μόνο σε ένα παραγωγικό σχήμα» (Κυνηγός 2007).

Η νοοτροπία της παράθεσης αυστηρών, φορμαλιστικών αποδείξεων, δεν συνάδει με την τρέχουσα μαθηματική πρακτική ή την σύγχρονη φιλοσοφία της Διδακτικής των Μαθηματικών (Hanna , 1991).

Πολλοί μαθηματικοί του παρελθόντος, πρώτα οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη και κατόπιν στην απόδειξη με την χρησιμοποίηση μεθόδων ευρετικών που δεν στηρίζονταν στην αυστηρή λογική ή είχαν προσεγγιστικό χαρακτήρα. Τέτοια παραδείγματα συνιστούν οι μέθοδοι του Νεύτωνα και του Leibnitz. Ο τρόπος που τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν και κατανοήθηκαν απεικονίζεται πολύ εύστοχα στην ιστορία του διαφορικού λογισμού (Kline, 1970).

Οι αποδείξεις ανατρέπουν πολλές φορές την αρχική εποπτική αντίληψη. Ο μαθηματικός κόσμος εξεπλάγη όταν το 1872 ο Weirstrass παρουσίασε το παράδειγμα μιας συνάρτησης συνεχούς για κάθε πραγματική τιμή του χ αλλά χωρίς παράγωγο σε κάθε τιμή του χ.

«Κάθε διδασκαλία είναι μάταιη, αν απευθύνεται σε κάποιον του οποίου η περιέργεια δεν έχει διεγερθεί» (A. Grothendieck, 1986). Πολλές διδακτικές προτάσεις θεωρούν δεδομένο το ενδιαφέρον από την πλευρά του μαθητή. Η φαντασία και η επινοητικότητα στα Μαθηματικά, απαιτούν το στοιχείο της ελκυστικότητας στην διδασκαλία για να μπορέσουν να αναπτυχθούν και φυσικά είναι ξένες προς το τυπικό σχήμα :θεώρημα- απόδειξη-άσκηση- νέο θεώρημα- νέα απόδειξη. Ο Tall (1991) σημειώνει πως «για την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος διδασκαλίας γνωστικά ελκυστικός από την αρχή, που θα φέρει ταυτόχρονα τους σπόρους για την κατανόηση των τυπικών ορισμών των εννοιών που εμφανίζονται αργότερα. Ο τρόπος με τον οποίο θα επιτευχθεί αυτό δεν είναι η (επικίνδυνη) υπεραπλούστευση των εννοιών, αλλά η παρουσίαση στους μαθητές όλων των πτυχών της πολυπλοκότητά τους και των αντιπαραδειγμάτων τους».

Σύμφωνα με τις βασικές ιδέες του δομισμού (constructivism), (Piaget, Von Clasefeld): τα Μαθηματικά δεν κατασκευάζονται από αισθητηριακά δεδομένα, αλλά από ανθρώπινη νοητική δραστηριότητα, που απαιτεί στοχασμό, αφαιρετική σκέψη, αναπαραστάσεις με σύμβολα, εικόνες, υποθέσεις (Κυνηγός, 2007).

Το μοντέλο διδασκαλίας των μαθηματικών είναι συνήθως αυτό της έκθεσης ολοκληρωμένων και «έτοιμων» θεωριών, χωρίς στοιχεία από την ιστορική-γενετική εξέλιξη των εννοιών. Έτσι, παραμελούμε τις φάσεις της επώασης και σύλληψης των θεμελιωδών ιδεών, επιμένοντας στην σημασία των άψογων αποδείξεων ή της παρουσίασης φορμαλιστικών (άρα και μάλλον δυσνόητων) ορισμών. (βλ. ε – δ Ορισμός του Ορίου Συνάρτησης).

Κάθε μαθηματική έννοια έχει δύο διαφορετικούς χαρακτήρες που είναι χρήσιμο να διακρίνουμε: είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο αλλά και ταυτόχρονα ένα εργαλείο. Η απόδοση νοήματος στα μαθηματικά αντικείμενα και στις μαθηματικές πρακτικές έχει ιδιαίτερη σημασία για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Μια μαθηματική έννοια, ένα μαθηματικό αντικείμενο δεν αιχμαλωτίζεται στον ορισμό του, ούτε καν στις διάφορες αναπαραστάσεις του. Υπάρχει ένας προοδευτικός εμπλουτισμός των εννοιών που γίνεται καθώς το άτομο προσπαθεί

να αντιμετωπίσει διάφορα προβλήματα. Το σύνολο των μαθηματικών αντικειμένων που θεωρούνται από τον μαθητή σαν παραδείγματα κάποιας μαθηματικής έννοιας δεν συμπίπτει απαραίτητα με το σύνολο των μαθηματικών αντικειμένων που καθορίζονται από τον ορισμό της έννοιας. Αν αυτά τα δύο σύνολα δεν είναι τα ίδια, τότε η συμπεριφορά του μαθητή δεν θα είναι η επιθυμητή.

Σε ότι αφορά την Ανάλυση, οι αντιεποπτικές απόψεις έχουν οδηγήσει σε μια παιδαγωγική παρέκκλιση: στην ουσιαστική απαγόρευση της χρήσης της γεωμετρικής εποπτείας ως μέσο για την κατανόηση των διαφόρων προτάσεων. Οι ρίζες αυτής της παρέκκλισης βρίσκονται σε έναν από τους θεμελιωτές της Ανάλυσης, τον K. Weierstrass, η «αντιγεωμετρική» στάση του οποίου ήταν δικαιολογημένη μέσα στο κλίμα της εποχής του. Ας αναρωτηθούμε όμως που θα ήταν σήμερα τα Μαθηματικά αν ο Bombelli , ο Euler , ο d' Alembert και άλλοι είχαν λυγίσει μπρος στα προβλήματα που γεννούσε η απαίτηση της αυστηρότητας. Η απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού από τον Barrow με χρήση όμοιων τριγώνων, πιστοποιεί την δύναμη της γεωμετρικής εποπτείας.

Αναφέρουμε εδώ την άποψη ενός μεγάλου και καθ΄ όλα «αυστηρού» μαθηματικού: (Rene Baire: «Lecons sur les Theories Generales de l' Analyse» T.I. Paris 1907) «λέγεται συχνά ότι η Ανάλυση μπορεί να χτισθεί ξεκινώντας από την έννοια του ακεραίου αριθμού και μόνο. Αυτό είναι ακριβές, αλλά αν θελήσουμε να ακολουθήσουμε συστηματικά αυτή την άποψη, αν θελήσουμε να αγνοήσουμε τη Γεωμετρία, θα στερηθούμε από μια πολύτιμη βοήθεια και τις περισσότερες φορές θα καταδικαστούμε σε μακροσκελείς παρεκβάσεις. Άρα είναι προτιμότερο να νομιμοποιήσουμε τα αμοιβαία δάνεια που ανταλλάσσουν στην πραγματικότητα η Ανάλυση και η Γεωμετρία».

Είναι αλήθεια πως η γεωμετρική εποπτεία των μαθητών είναι μάλλον φτωχή και αυτό ίσως τους οδηγήσει σε λάθη και παρανοήσεις, οι οποίες όμως πρέπει να αντιμετωπιστούν γόνιμα.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν μερικές βασικές έννοιες της Ανάλυσης, όπως είναι οι άρτια – περιττή συνάρτηση , αύξουσα – φθίνουσα, φραγμένη. Μπορούμε να αναφέρουμε μερικές απλές ιδέες – ερωτήσεις που θα

συνεισέφεραν στον εμπλουτισμό και έλεγχο της γεωμετρικής εποπτείας των μαθητών (Μάκρας, 1998). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

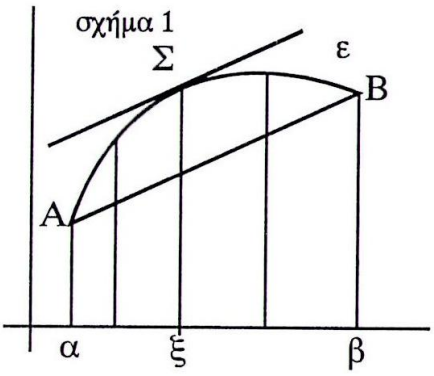
Κάθε αύξουσα συνάρτηση σε όλο το R δεν μπορεί να είναι άνω φραγμένη.

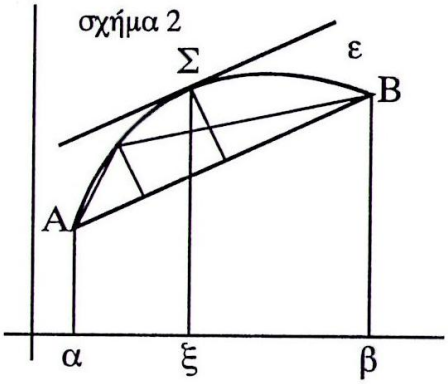
Κάθε περιττή συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άνω φραγμένη.

Κάθε συνεχής συνάρτηση στο [α , β] έχει ακρότατα στα άκρα του διαστήματος.

Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ τότε f γνησίως αύξουσα στο R .

Προχωρώντας σε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, η γεωμετρική ερμηνεία του οποίου δίνεται συνήθως εκ των υστέρων, ενώ δεν δίνεται κάποιο επιχείρημα για την «σύλληψη» της απόδειξης του.





Μια εφαπτομένη κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f. Θα γίνει κάποτε παράλληλη προς την ΑΒ;

Η χορδή ΑΒ κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της. Τι συμβαίνει τη «στιγμή» που παύει να τέμνει την C_f ;

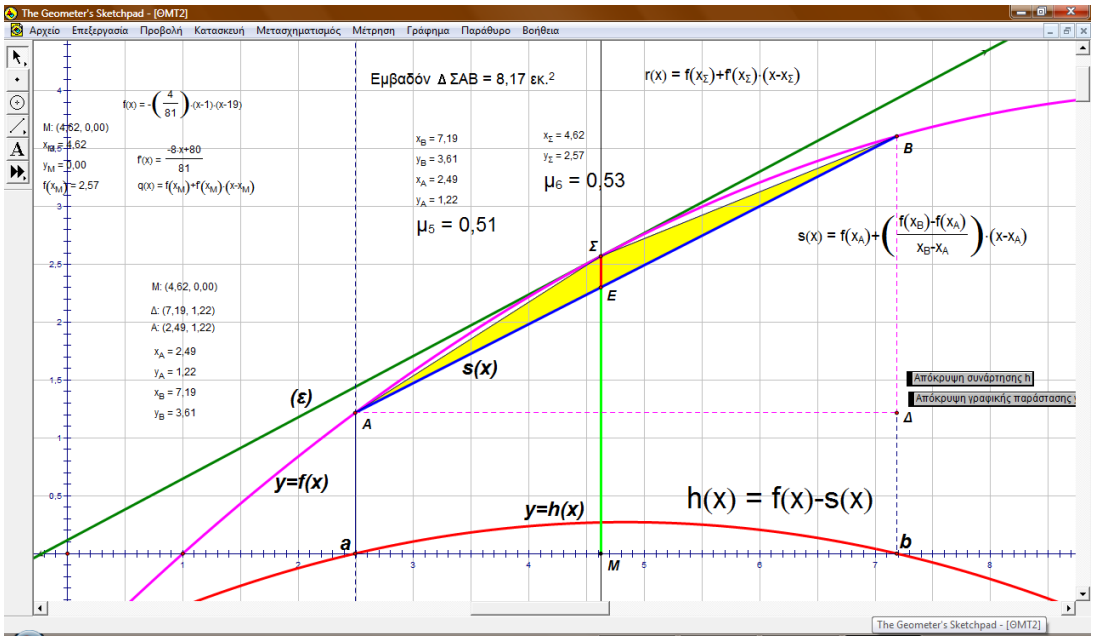
Για την απόδειξη θεωρούνται σε διάφορα βιβλία οι βοηθητικές συναρτήσεις

$$h(x) = f(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\ , \quad w(x) = x\left[f(b) - f(a)\right] - (b - a) f(x)\ ,$$

γιατί άραγε αυτές;

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix}$ εκφράζει το διπλάσιο εμβαδόν του τριγώνου ΑΣΒ, το οποίο μηδενίζεται όταν το Σ φθάσει στα Α , Β και γίνεται μέγιστο όταν η ΑΒ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της C_f στο Σ. Επίσης η h(x) δεν εκφράζει τίποτα άλλο από την διαφορά των τεταγμένων των σημείων των γραμμών ΑΒ και C_f που έχουν την ίδια τετμημένη, η οποία βέβαια γίνεται μέγιστη εκεί που η (ε) είναι παράλληλη της ΑΒ. Τέλος είναι $g(x)=(b-a)h(x)+\underbrace{bf(a)-af(a)}_{c}$. Τίποτα δεν είναι τυχαίο!

Τα παραπάνω θα μπορούσαν να αναπαρασταθούν – διαισθητοποιηθούν με την χρήση ενός γεωμετρικού λογισμικού.



Προσπαθώντας να αιτιολογήσουμε την ύπαρξη της συνάρτησης h(x), παρατηρούμε (με βάση τις μετρήσεις), ότι το κίτρινο εμβαδό μεγιστοποιείται τη στιγμή που η πράσινη εφαπτομένη (ε) σε κάθε σημείο της C_f με τετμημένη στο διάστημα [α , β], είναι παράλληλη προς την χορδή ΑΒ (s(x)). Το μήκος του κόκκινου τμήματος (ΣΕ) εκφράζει τις τιμές της συνάρτησης h(x) = f(x) – s(x) (κόκκινη γραφική παράσταση) και προφανώς h(a)=h(b) = 0, που παραπέμπει στην εφαρμογή του Θ. Rolle.

1.2 Διαίσθηση και Νέες Τεχνολογίες

«Η δύναμη της εποπτείας στην οποία εμβαπτίζεται ο χρήστης ενός Μαθηματικού λογισμικού τον βοηθά να κατανοήσει σε βάθος το λεπτό και ευαίσθητο χώρο των Μαθηματικών εννοιών εμπλουτίζοντας συγχρόνως, μέσω των αισθητηριακών δεδομένων, τον τόσο χρήσιμο για τα Μαθηματικά χώρο της διαίσθησης. Η κατευθυνόμενη εποπτεία οδηγεί στην εικασία και αυτή με τη σειρά της στην ανακάλυψη της λύσης του προβλήματος» (Αυγερινός & Κιουλάφας,2002). Ο Αρχιμήδης είχε πει ότι το πιο σημαντικό και το πιο δύσκολο ήταν να βρει το αποτέλεσμα, τη λύση ενός προβλήματος και μετά ήταν μια μάλλον σχετικά απλή υπόθεση, για αυτόν τουλάχιστον, να το αποδείξει.

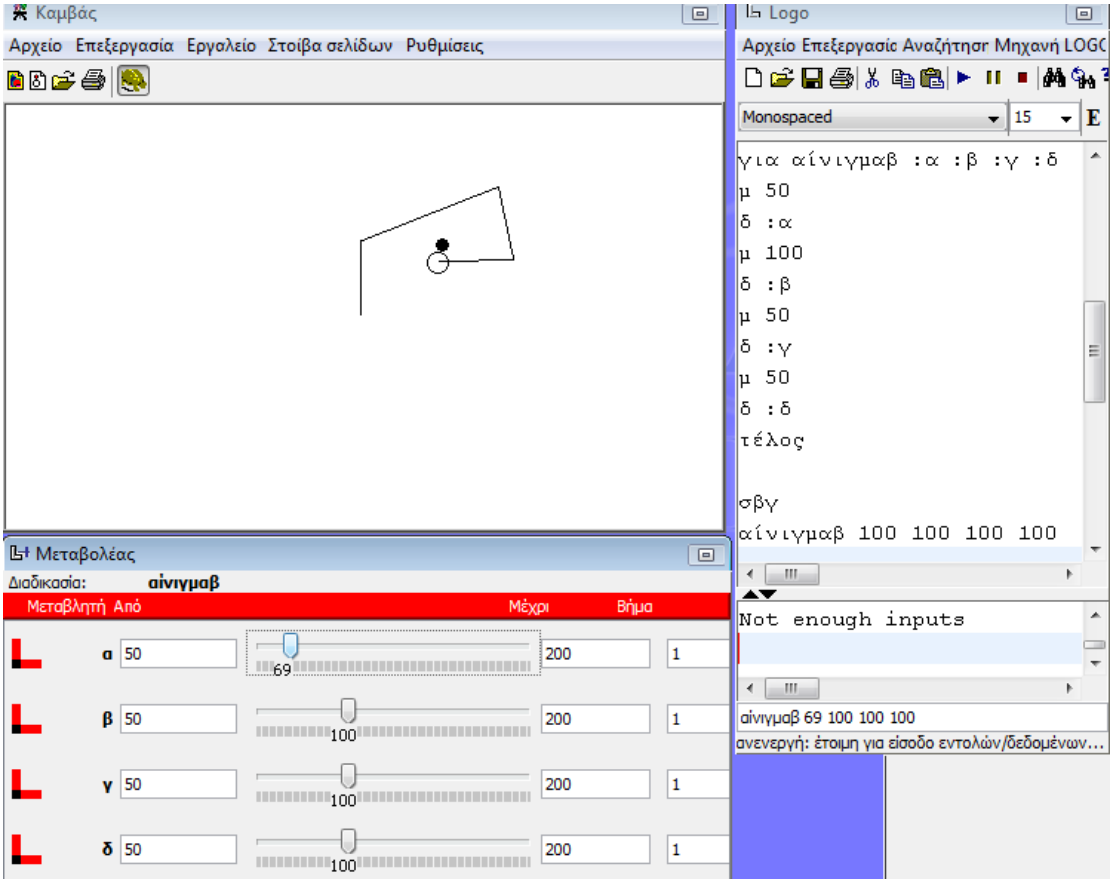
«Εισάγοντας κατάλληλα, πολύπλοκες νοερές αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών, είναι δυνατόν να δώσουμε μια πολύ ευρύτερη εικόνα των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούν να γίνουν αντιληπτές οι έννοιες, δίνοντας έτσι ισχυρότερες διαισθήσεις από ότι με μια παραδοσιακή προσέγγιση. Είναι δυνατό να σχεδιαστεί λογισμικό που επιτρέπει συμμετοχή του χρήστη ώστε να επιτραπεί στους μαθητές να εξερευνήσουν τις μαθηματικές ιδέες με τον διττό ρόλο του, να είναι ταυτόχρονα άμεσα ελκυστικό στους μαθητές και ταυτόχρονα να παρέχει θεμελιώδεις έννοιες πάνω στις οποίες μπορούν να δομηθούν οι ιδέες. Εξερευνώντας επιτυχημένα και αποτυχημένα παραδείγματα, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν τις οπτικές διαισθήσεις που είναι απαραίτητες για να παράξουν ισχυρές τυπικές ενοράσεις. Έτσι η διαίσθηση και η τυπικότητα ή η αυστηρότητα δεν είναι απαραίτητο να βρίσκονται σε σύγκρουση. Με την παροχή ενός κατάλληλα ισχυρού πλαισίου, η διαίσθηση οδηγεί φυσιολογικά στην αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης» (Tall, 1991).

Αναγνωρίζοντας την ύπαρξη διαισθητικών γνώσεων, πρέπει να μπορούμε να δημιουργήσουμε τις συνθήκες εκείνες που θα προωθήσουν την ανάπτυξή τους. Η εικονική σχηματοποίηση των ιδεών μας και φαντασίας μας, που πραγματοποιείται μέσω των Η/Υ, μας δίνει την δυνατότητα για βαθύτερο στοχασμό, για μεγαλύτερη κατανόηση και ανάλυση του προβλήματος, και για αναστοχασμό αν χρειαστεί, για την πορεία που ακολουθούμε στην προσπάθειά μας να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος.

Σε κάποιες περιπτώσεις βρισκόμαστε αντιμέτωποι με ένα φαινόμενο που αντίκειται στην διαίσθησή μας, όταν με την αιτιολόγηση αναγνωρίζουμε ότι η πραγματικότητα δεν ταιριάζει με τις προσδοκίες μας. Σε αυτές τις περιπτώσεις η διαίσθηση φαίνεται να απατά. Τότε ο μαθητής δέχεται την πίεση να αγνοήσει τη διαίσθηση και να βασιστεί στις τυπικές αποδείξεις. Ο μαθητής λοιπόν αναπόφευκτα θέλει να μάθει γιατί η διαίσθησή του, του έδωσε λάθος προσδοκία. Χρειάζεται να μάθει πώς να δουλεύει με τις διαισθήσεις του για να μπορεί να τις αλλάζει. Εδώ μπορεί να βοηθήσει ο υπολογιστής.

Για να δούμε μια πρώτη προσέγγιση της σχέσης διαίσθησης και υπολογιστή, ας πάρουμε το παράδειγμα της LOGO. Στη LOGO οι μαθητές μπορεί να χρειαστεί να κατασκευάσουν μια ακολουθία από εντολές (μια διαδικασία) για να φτιάξουν ένα παραλληλόγραμμο. Ο Papert (1980) ισχυρίζεται ότι, «... ο υπολογιστής επιτρέπει ή υποχρεώνει το παιδί να εξωτερικεύσει τις διαισθητικές του προσδοκίες». Όταν η διαίσθηση ερμηνεύεται μέσα σ' ένα πρόγραμμα, τότε αυτό χρησιμεύει στην απομοντελοποίηση της διαισθητικής γνώσης. Για παράδειγμα, στην κατασκευή μιας διαδικασίας που φτιάχνει ένα παραλληλόγραμμο, οι μαθητές πρέπει να αναλύσουν τις εικονικές τους απόψεις για τη διαδρομή του παραλληλογράμμου και να συλλογιστούν πάνω στο πώς τα συστατικά του μέρη θα τοποθετηθούν μαζί.

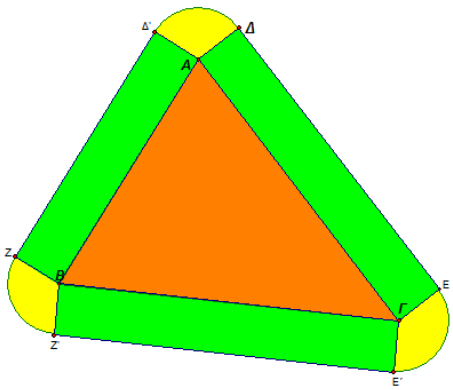
Επιπλέον, ζητώντας από τους μαθητές αν ένα τετράγωνο ή ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να σχεδιαστεί από μια γενική διαδικασία παραλληλογράμμου, ενθαρρύνουμε τους μαθητές να αρχίσουν να ταξινομούν λογικά τα σχήματα. Ο μαθητής πρέπει να βρει τις αλλαγές που πρέπει να κάνει στον παρακάτω κώδικα στη Logo, ώστε να επιτύχει την κατασκευή παραλληλογράμμου.



Αλλά και σε ένα γεωμετρικό λογισμικό, όταν ο μαθητής κατασκευάσει ένα τετράγωνο, με δεδομένη πλευρά, με τον τρόπο που θα το έκανε και στο στατικό χαρτί, παρατηρεί ότι με το σύρσιμο η κατασκευή του «χαλάει». Αναγκάζεται τότε να μπει στη λογική των γεωμετρικών κατασκευών.

Ακόμα, οι υπολογιστικές ιδέες μπορούν να ληφθούν ως υλικά για τη δουλειά της επαναδιαμόρφωσης και επανεκτίμησης της διαισθητικής γνώσης. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα πως έχουμε το εξής πρόβλημα:

Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από τα σημεία του τριγώνου ΑΒΓ απόσταση όχι μεγαλύτερη από τον θετικό αριθμό r και έχει εμβαδό E(r). Υπολογίστε το $\lim_{r\to+\infty}\frac{E(r)}{r^2}$.



Καθώς το r είναι η κοινή διάσταση των ορθογωνίων, κάποιοι μαθητές μπορεί να νομίσουν πως καθώς το r αυξάνει, το E(r) μεγαλώνει πολύ ταχύτερα σε σχέση με το r^2, άρα το όριο θα είναι ∞. Δημιουργώντας όμως μια δυναμική αναπαράσταση του προβλήματος σε ένα γεωμετρικό λογισμικό, το σημείο Δ κινείται πάνω στην ημιευθεία ΑΔ και πινακοποιώντας τα δεδομένα (r, E(r)) παρατηρούμε ότι οι τιμές του λόγου συνεχώς μικραίνουν, τείνοντας να σταθεροποιηθούν (π).

Βασική παιδαγωγική αρχή είναι πως δεν δίνεται (αμέσως) η σωστή απάντηση, αλλά πρέπει να αναζητηθούν συγκρούσεις μεταξύ δύο διαισθητικών τρόπων σκέψης ή μεταξύ μιας διαισθητικής και μιας τυπικής ανάλυσης. Η γνωστική σύγκρουση οδηγεί στην θεμελίωση της γνώσης και την ποιοτική κατανόηση.

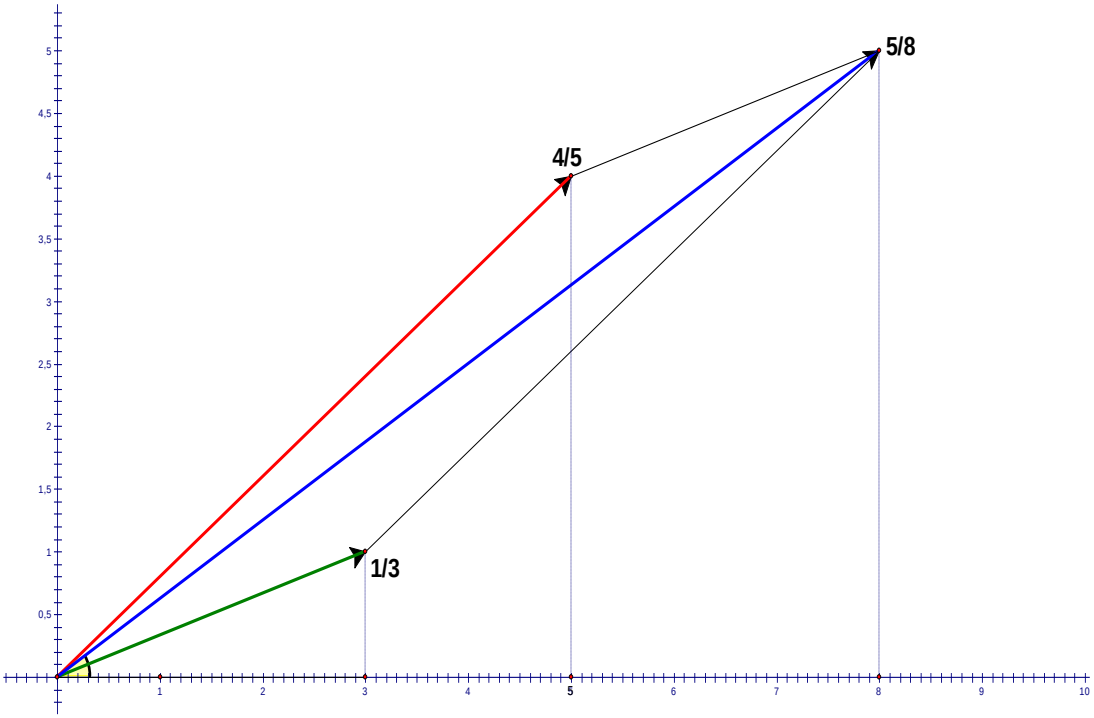
1.3 Η οπτικοποίηση στα Μαθηματικά

Αναμειγνύοντας και παραφράζοντας τους ορισμούς των Zimmerman και Cunnigham(1991) αλλά και Hershkowitz et al.(1989) μπορούμε να πούμε ότι : «Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, ερμηνείας, χρήσης και στοχασμού πάνω σε εικόνες, απεικονίσεις, διαγράμματα στο μυαλό μας, στο χαρτί ή με τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση και μετάδοση πληροφοριών, σκεφτόμενοι και αναπτύσσοντας νέες ιδέες προάγοντας έτσι την κατανόηση.»

Η οπτικοποίηση μπορεί να συνοδεύει μια συμβολική ανάπτυξη καθώς μια εικόνα, εξαιτίας του ότι είναι υπαρκτή-χειροπιαστή, μπορεί να είναι «ένας βασικός παράγοντας δημιουργίας της αίσθησης της αυταπόδειξης και της αμεσότητας» (Fisbein, 1987).

Ας σκεφτούμε ένα πρώτο απλό παράδειγμα για την ιδιότητα της διαμέσου των θετικών κλασμάτων : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Οι Flegg, Hay, Moss (1985) αποδίδουν αυτόν τον κανόνα στον Γάλλο μαθηματικό Nicolas Chuquet (1484). Η συμβολική απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι αρκετά απλή και αυτό κατά παράδοξο τρόπο, μερικές φορές δεν είναι αρκετά ξεκάθαρο στους μαθητές. Ο Georg Pick (Αυστριακός – Τσέχος μαθηματικός, διάσημο το Θεώρημα του Pick) έγραψε ότι ένα

επίπεδο πλέγμα χρησιμοποιήθηκε από την εποχή του Gauss συχνά για οπτικοποίηση και για εφαρμογή της επαγωγικής μεθόδου. Προσπαθώντας να βάλουμε τα στοιχεία της θεωρίας αριθμών σε μια γεωμετρική βάση και ακολουθώντας τον Pick, αναπαριστούμε το κλάσμα A/B με το τυχαίο σημείο (B,A) στο επίπεδο. Ο λόγος που βάζουμε (B,A) και όχι (A,B) είναι για οπτική διευκόλυνση καθώς η κλίση της ευθείας γραμμής από την αρχή Ο στο σημείο (B,A) είναι ακριβώς A/B και γι΄ αυτό κλάσματα τα οποία είναι τοποθετημένα σε αύξουσα σειρά μεγέθους αναπαρίστανται με γραμμή που εκτείνεται προς τα πάνω με κατεύθυνση την κλίση. Οπτικά, όσο πιο απότομη είναι η γραμμή τόσο πιο μεγάλο είναι το κλάσμα. (τα ισοδύναμα κλάσματα αναπαρίστανται με σημεία στην ίδια γραμμή μέσω της αρχής Ο).



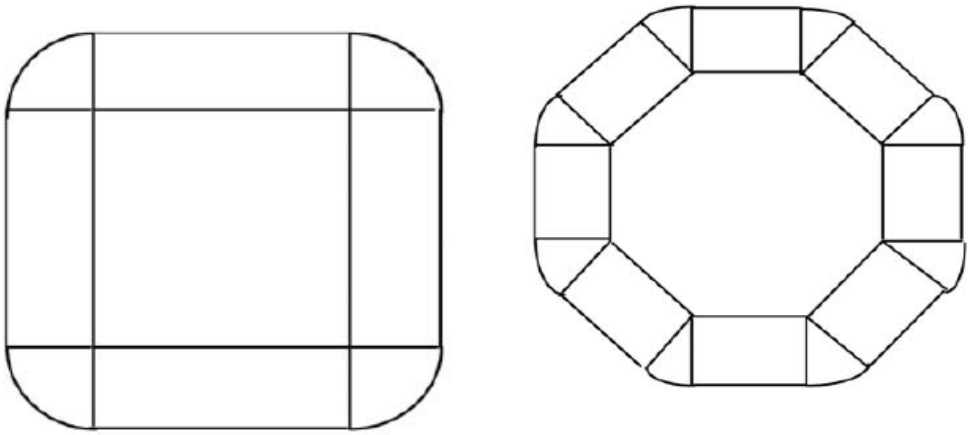
Το ίδιο ισχύει γενικά για τα a/b , c/d. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το παραλληλόγραμμο τονίζει την ιδέα της ενδιαμεσότητας και την λογική που υπάρχει πίσω από αυτή, προσθέτοντας νόημα στην συμβολική απόδειξη. Επωφεληθήκαμε της οπτικοποίησης προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την Γεωμετρία ως βοήθημα αυτών που φαίνονται να είναι αμιγώς συμβολικές – αλγεβρικές ιδιότητες.

Στο ίδιο πνεύμα ο Papert(1980) αναφέρει το εξής πρόβλημα: «Ας φανταστούμε μια χορδή – σκοινί γύρω από την περιφέρεια της Γης , η οποία για το

σκοπό αυτό θεωρείται λεία σφαίρα. Κάποιος προτείνει να τοποθετηθεί ένα σκοινί γύρω από τη Γη σε ύψος 6 πόδια από το έδαφος. Πόσο σκοινί θα χρειαστούμε;»

Οι πιο πολλοί άνθρωποι βιώνουν μια εξαναγκαστική αίσθηση ότι θα χρειαστεί μια αρκετά μεγάλη ποσότητα. Ωστόσο η ακριβής αλγεβρική παράσταση δίνει το αποτέλεσμα $2\pi(R+h) - 2\pi R = 2\pi h$ περίπου 38 πόδια μακρύτερη. (σχετ. πρβλ. υπήρχε και στο σχολικό βιβλίο μαθηματικών της β΄ γυμνασίου).

Για πολλούς το αποτέλεσμα αυτό είναι μια έκπληξη και αιτία στοχασμού για το κενό μεταξύ αυτού που προσδοκήθηκε και αυτού που προέκυψε. Ο Papert προτείνει μια οπτική λύση η οποία θα βοηθούσε να απομακρύνουμε τα λάθη από τη διαίσθησή μας, ώστε η συμβολική λύση να θεωρείται εκτός από σωστή και διαισθητικά πειστική. Ξεκινάει λοιπόν με μια απλή περίπτωση, μια χορδή γύρω από μια τετράγωνη Γη. Η χορδή στους πόλους θεωρείται ότι βρίσκεται σε απόσταση h από το τετράγωνο. Κατά μήκος των πλευρών η χορδή είναι ευθεία, ενώ πηγαίνοντας γύρω από τη γωνία, ακολουθεί ένα τμήμα κύκλου ακτίνας h. Το επιπλέον μήκος βρίσκεται εξολοκλήρου στις γωνίες. Τα 4 τεταρτοκύκλια σχηματίζουν έναν κύκλο ακτίνας h, άρα $2\pi h$. Αν αυξήσουμε τις πλευρές του τετραγώνου η επιπλέον ποσότητα παραμένει ίδια.

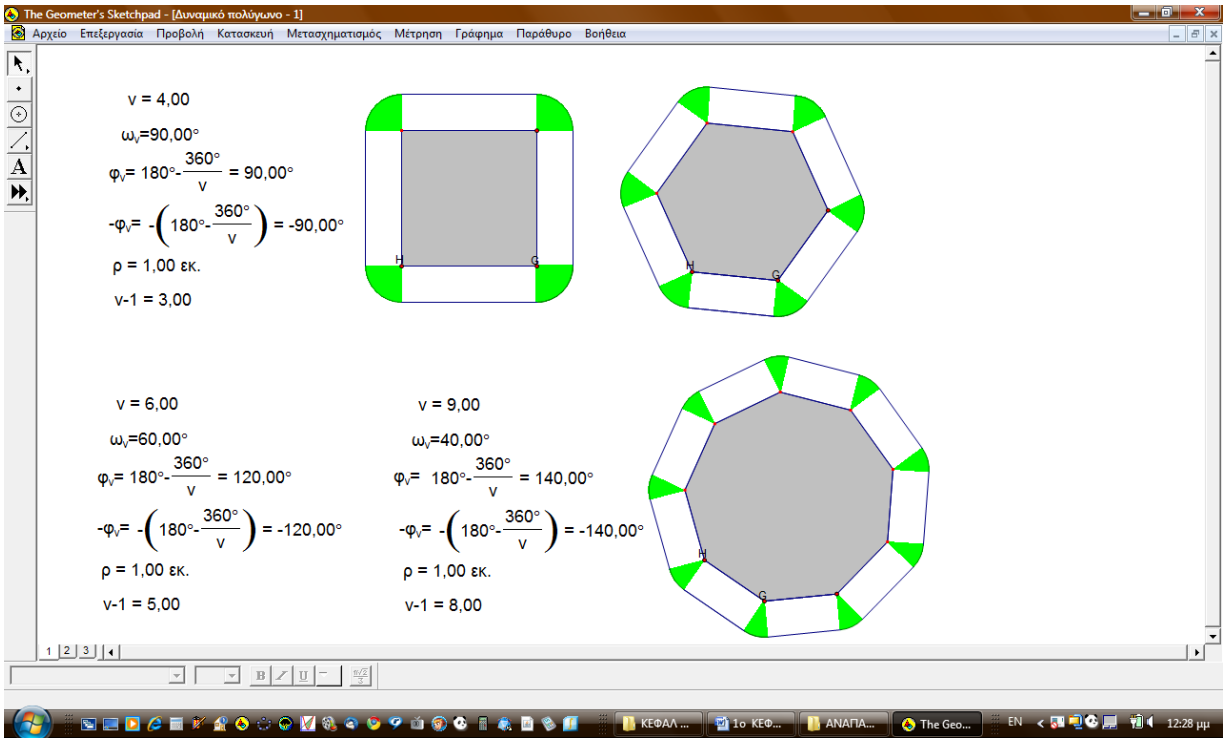


Στη συνέχεια παραμορφώνει το τετράγωνο προς τη στρογγυλή Γη , αρχικά κοιτώντας το σχήμα ενός οκταγώνου. Τα επιπλέον κομμάτια της χορδής βρίσκονται στα κομμάτια πίττας στις γωνίες. Αν αυτά τοποθετηθούν μαζί σχηματίζουν πάλι ένα κύκλο ακτίνας h , άρα πάλι $2\pi h$. Αυτός ο κύκλος είναι πάντα ανεξάρτητος από

το μέγεθος του οκταγώνου. Τα ίδια ισχύουν και για το 100-γωνο , για το 1000-γωνο, κ.ο.κ. Το επίσημο συμβολικό αποτέλεσμα γίνεται τώρα και διαισθητικά πειστικό.

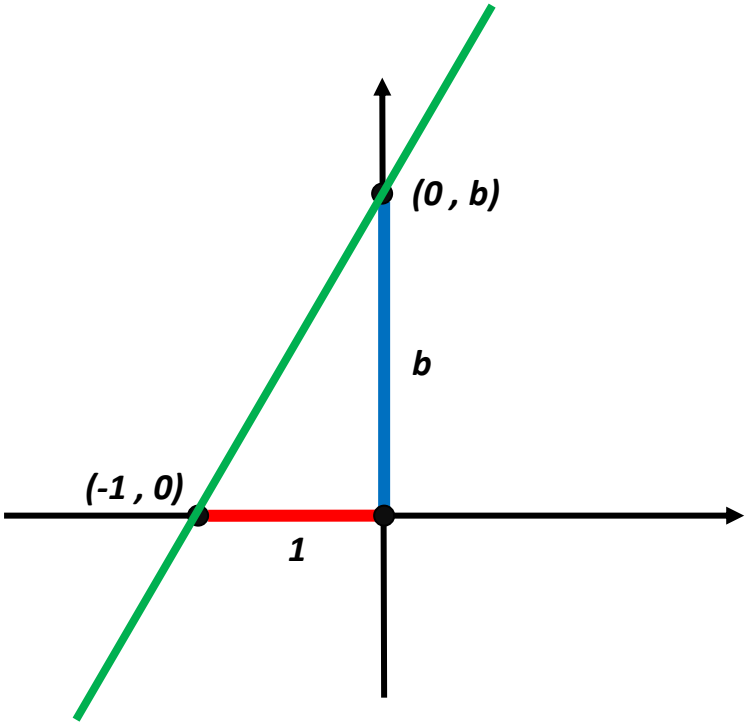
Η οπτικοποίηση σε αυτό το παράδειγμα θα μπορούσε να μας βοηθήσει να προσαρμόσουμε τις λανθασμένες διαισθήσεις και να τις εναρμονίσουμε με την παγερή ορθότητα του συμβολικού επιχειρήματος.

Δημιουργούμε λοιπόν σε ένα λογισμικό (π.χ. στο Geometers Sketchpad) ένα δυναμικό σχήμα ώστε πατώντας Shift και + να μπορούμε εύκολα να αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών και να παρατηρούμε αυτό που πρέπει: η παραπάνω χορδή είναι πάντοτε το σύνολο των μηκών των τόξων, δηλαδή $2\pi h$. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε έναν κώδικα στη Logo.



Ένας άλλος ρόλος της οπτικοποίησης είναι εκεί όπου η οπτική λύση σε ένα πρόβλημα ίσως μας βοηθήσει να ασχοληθούμε με έννοιες και σημασίες οι οποίες μπορούν εύκολα να παρακαμφθούν από τη συμβολική επίλυση του προβλήματος. Ας σκεφτούμε το εξής παράδειγμα: Ποιο είναι το κοινό χαρακτηριστικό της οικογένειας των γραμμικών συναρτήσεων f(x) = bx + b ; Η συμβολική επίλυση θα

υποδήλωνε απλά μια συντακτική μετατροπή f(x) = b(x+1), άρα η bx πάει μία μονάδα προς τα αριστερά και ότι f(-1)=0 ή με άλλα λόγια ότι όλες οι γραφικές παραστάσεις (ευθείες) διέρχονται από το σημείο (-1,0). Ας συγκρίνουμε αυτό με την ακόλουθη γραφική λύση που παρουσιάστηκε από ένα μαθητή: στην f(x) = bx+b το πρώτο b είναι η κλίση ενώ το δεύτερο b είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο τέμνει η ευθεία τον y – άξονα. Καθώς η κλίση είναι άνοδος προς απόσταση και εδώ η κλίση είναι ίδια με την τεταγμένη του σημείου της ευθείας στον y – άξονα, μια αύξηση της τεταγμένης θα αντιστοιχεί πάντα σε οριζόντια απόσταση 1.



Για τους μαθητές η οπτικοποίηση μπορεί να έχει έναν ισχυρό – συμπληρωματικό ρόλο στα 3 σημεία που τονίστηκαν παραπάνω:

α) υποστήριξη και απεικόνιση των ουσιωδώς συμβολικών αποτελεσμάτων (πιθανόν να παρέχει μιαν απόδειξη από μόνη της), όπως στην περίπτωση της διαμέσου,

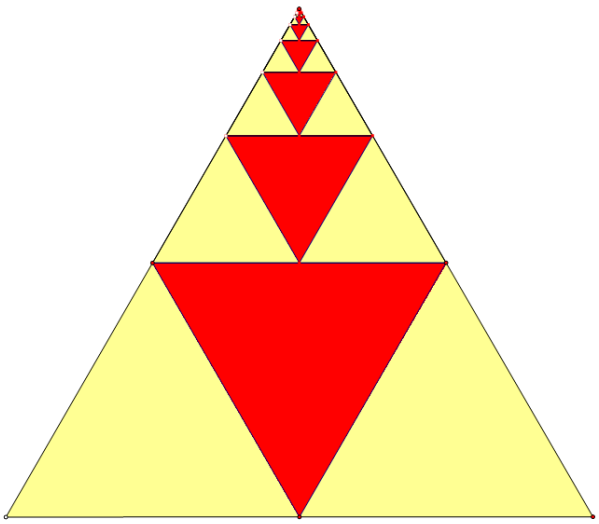
β) ένας πιθανός τρόπος επίλυσης της σύγκρουσης μεταξύ των σωστών συμβολικών λύσεων και των εσφαλμένων διαισθήσεων, όπως με το πρόβλημα της χορδής γύρω από τη Γη,

γ) ένας τρόπος να μας βοηθήσει να επανασχοληθούμε και να επανακτήσουμε εννοιολογικές βάσεις οι οποίες εύκολα μπορούν να παρακαμφθούν από τυπικές λύσεις , όπως με την κλίση (Arcavi, 2003).

1.3.1 Οπτικοποίηση και Απόδειξη

«Παρά την προφανή σπουδαιότητα των οπτικών αναπαραστάσεων στις ανθρώπινες γνωστικές δραστηριότητες, η οπτική αναπαράσταση παραμένει ένας πολίτης δεύτερης κατηγορίας τόσο στη θεωρία όσο και στην πράξη των μαθηματικών. Συγκεκριμένα είμαστε όλοι μαθημένοι να κοιτάζουμε περιφρονητικά τις αποδείξεις που κάνουν χρήση διαγραμμάτων, γραφημάτων ή άλλων εξωγλωσσικών τύπων ή αναπαράστασης και φυσικά περνάμε αυτή την περιφρόνηση και στους μαθητές. Όμως τα οπτικά σχήματα αναπαράστασης μπορούν να είναι σημαντικά ως νόμιμα στοιχεία μαθηματικών αποδείξεων» (Barwise & Etchemendy, 1991).

Ας πάρουμε το εξής παράδειγμα: στο βιβλίο «Αποδείξεις χωρίς λόγια» χρησιμοποιούμε το παρακάτω σχήμα για να αποδείξουμε την σχέση $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+.....=\frac{1}{3}$ (Mabry, 1999).



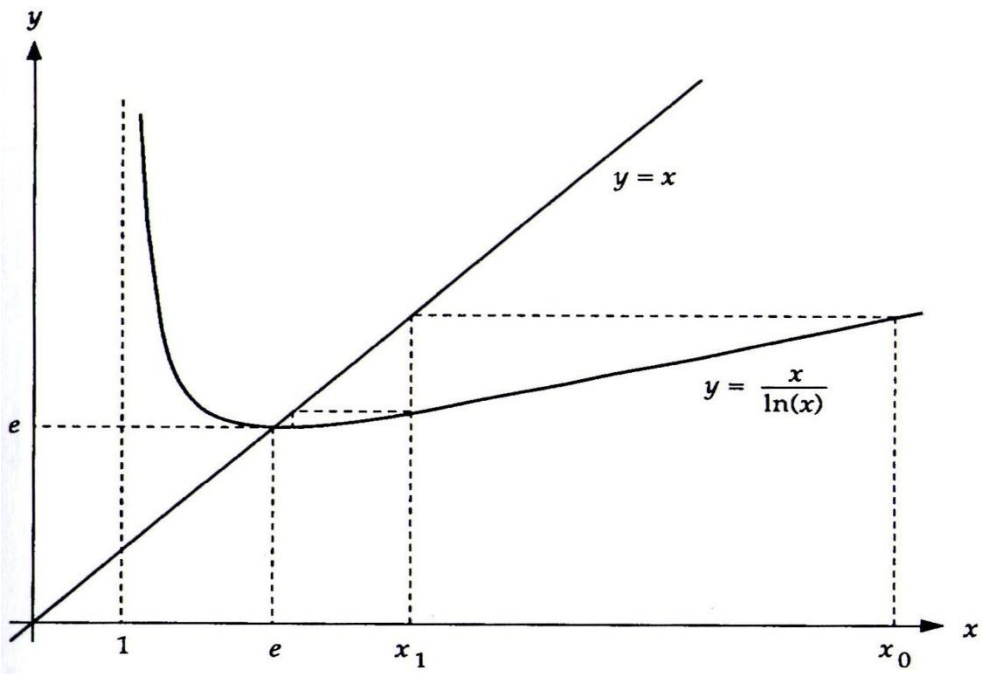
Μπορεί όμως να ισχυριστεί κανείς ότι το παραπάνω : α) δεν είναι χωρίς λέξεις β) δεν είναι μια απόδειξη. Υπάρχουν λοιπόν οι εξής επιφυλάξεις: α) παρόλο που τα λεκτικά συμπεράσματα δεν είναι σαφή, όταν βλέπουμε την παραπάνω απόδειξη, το πιο πιθανό είναι να αποκωδικοποιήσουμε την εικόνα με χρήση λέξεων (είτε φωναχτά είτε νοερά) και β) το πρότυπο του Hilbert για μια απόδειξη είναι το αν μπορεί να είναι αριθμητική, αλλιώς θα θεωρούνταν ανύπαρκτη (Hadamard, 1994). Όσον αφορά την πρώτη επιφύλαξη, μπορεί να παρουσιαστεί το αντεπιχείρημα ότι η οπτικοποίηση δεν έχει σκοπό να αποκλείσει την λεκτική απόδοση , αλλά αντιθέτως συμπληρώνει αυτή. Όσον αφορά την δεύτερη επιφύλαξη «υπάρχει ένα ξεκάθαρα αναγνωρίσιμο αν και αντισυμβατικό κίνημα που γίνεται ολοένα και περισσότερο έντονο στη μαθηματική κοινότητα, να καταστήσει τον οπτικό συλλογισμό αποδεκτό στην εφαρμογή των μαθηματικών παράλληλα και συνδυαστικά με τον αλγεβρικό. Σύμφωνα με αυτό το κίνημα, ο οπτικός συλλογισμός προορίζεται όχι μόνο να υποστηρίξει την ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων και τρόπων απόδειξης, αλλά θα έπρεπε να εξελιχθεί σε έναν πλήρως αποδεκτό τρόπο συλλογισμού που περιλαμβάνει απόδειξη μαθηματικών θεωρημάτων» (Dreyfus, 1994).

Επειδή είναι κοινά αποδεκτό ότι οι υπολογιστές έχουν αυξήσει τις δυνατότητες για απεικόνιση, αυτό έχει ως αποτέλεσμα η έρευνα να έχει στραφεί στη διερεύνηση της πιθανής συμβολής των οπτικών αναπαραστάσεων στις μαθηματικές αποδείξεις, μέχρι ποιο σημείο δηλαδή οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο ως βοηθητικά στοιχεία στην δόμηση μιας μαθηματικής πρότασης, αλλά και για την αιτιολόγησή της, όπως και για το ρόλο της οπτικοποίησης στη διαδικασία εκμάθησης και παραγωγής αποδείξεων (Hanna, 2000). Ερευνητές που προτρέπουν στη χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά και στη διδασκαλία των μαθηματικών επισημαίνουν ότι είναι αρκετές οι περιπτώσεις όπου οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορεί να παραπλανήσουν και να οδηγήσουν σε λάθη. (Brown, 1999, αναφορά από Hanna, 2000).

Όλοι οι δάσκαλοι των μαθηματικών αναγνωρίζουν τα διαγράμματα και τις οπτικές αναπαραστάσεις ότι είναι απαραίτητα συστατικά μιας επιτυχημένης διδασκαλίας ή ενός μαθηματικού επιχειρήματος, ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν

για να διευκολύνουν τη φάση της απόδειξης και ότι είναι ικανά να μεταβιβάσουν τη διορατικότητα και τη γνώση (Hanna, 2000). Όμως, τουλάχιστον μέχρι σήμερα, δεν θεωρούνται υποκατάστατα της παραδοσιακής απόδειξης.

Η «οπτική απόδειξη» (proof by looking), εισάγεται ως έκφραση από τον David Wells το 1991 και σημαίνει την μη παραγωγική απόδειξη, την απόδειξη που γίνεται «με μια ματιά (at sight) εξετάζοντας ένα κατάλληλο σχήμα». Για παράδειγμα μια αναδρομική ακολουθία (x_n) για το e: (Thomas P. Dence , «Αποδείξεις χωρίς λόγια»).

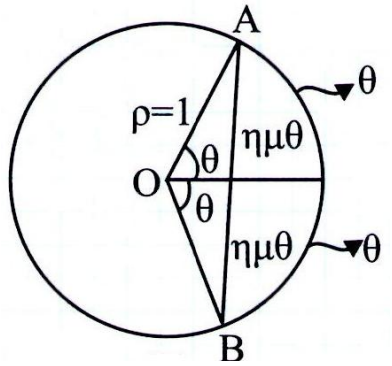


$$x_0 > 1\,,\quad x_{n+1} = \frac{x_n}{\ln(x_n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = e$$

Οι Borwein και Jorgenson (1997) υποστηρίζουν ότι η οπτικοποίηση μπορεί να συμβάλει άμεσα στο σώμα της μαθηματικής γνώσης και μια εικόνα μπορεί να παίξει το ρόλο μιας οπτικής απόδειξης. Αναγνωρίζουν όμως ότι μια οπτική αναπαράσταση συναντά περιορισμούς εάν πρόκειται να γίνει αποδεκτή ως αυστηρή απόδειξη.

Η Laborde (2000) επισημαίνει ότι η κατανόηση δεν μπορεί να επιτευχθεί μόνο μέσω της οπτικής ένδειξης, δεδομένου ότι η κατανόηση απαιτεί αναδόμηση του αντιληπτικού συστήματος των εννοιών, και μόνο η απόδειξη η βασισμένη στα θεωρητικά επιχειρήματα αποτελεί μέσο κατανόησης.

Ο Τουμάσης (1999a) όμως σημειώνει ότι από διδακτικής άποψης αυτό που έχει σημασία είναι η κατασκευή αποδείξεων οι οποίες θα πείθουν τους μαθητές και θα τους προσφέρουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά συμπεράσματα με εμπιστοσύνη και αυτοπεποίθηση. Για παράδειγμα, ένα σπουδαίο όριο στην Ανάλυση είναι το $\lim_{\theta \to 0} \frac{\eta\mu\theta}{\theta} = 1$.



Μια εναλλακτική απόδειξη στηρίζεται στο γεγονός ότι οι πλευρές επίκεντρης γωνίας θ σε μοναδιαίο κύκλο αποκόπτουν από τον κύκλο τόξο μήκους θ. Δηλαδή στο σχήμα βλέπουμε ότι ΑΒ=2ημθ , $AB = 2\theta$. Καθώς θ→0 προφανώς η χορδή ΑΒ και το τόξο AB μπορεί να θεωρηθούν προσεγγιστικά ίσα. Επομένως όταν θ→0 είναι $\frac{AB}{AB} \to 1$ δηλαδή $\lim_{\theta \to 0} \frac{\eta\mu\theta}{\theta} = 1$. Τα παραπάνω ισχύουν αν θ>0 και θ→0^+ . Αν θ<0 έχουμε το ίδιο συμπέρασμα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\frac{\eta\mu\theta}{\theta} = \frac{\eta\mu(-\theta)}{-\theta}$. Η συγκεκριμένη απόδειξη είναι τόσο «αυστηρή» όσο και η συνηθισμένη (στο σχολικό βιβλίο) και από παιδαγωγικής απόψεως έχει το πλεονέκτημα ότι είναι διαισθητικά πλέον αποδεκτή (Τουμάσης, 1999b).

Ωστόσο υπάρχουν ακόμη πολλά ζητήματα που αφορούν στην οπτικοποίηση στα μαθηματικά και απαιτούν προσοχή. Λαμβάνοντας υπόψη τους Eisenberg και Dreyfous (1991), μπορούμε να ταξινομήσουμε τις δυσκολίες γύρω από την οπτικοποίηση σε 3 βασικές κατηγορίες: *πολιτισμική , γνωστική και κοινωνιολογική*.

Μια «πολιτισμική» δυσκολία αναφέρεται στις αντιλήψεις και αξίες που ισχύουν σχετικά με το τι σημαίνουν τα μαθηματικά και η εφαρμογή τους, τι είναι νόμιμο ή αποδεκτό και τι δεν είναι. Αμφισβητήσεις ή διαφωνίες εντός της μαθηματικής κοινότητας και δηλώσεις όπως «αυτά δεν είναι μαθηματικά» (Sfard, 1998), είναι πιθανόν να διεισδύουν μέσα στην τάξη, μέσω της ύλης του Α.Π., την επιμόρφωση των καθηγητών και να διαμορφώνουν νοοτροπία. Αυτή η συμπεριφορά που η Presmeg (1997) ονομάζει «υποτίμηση της οπτικοποίησης», αφήνει πολύ μικρά περιθώρια για δυνατότητα ενσωμάτωσης και αναγνώρισης της αξίας της οπτικοποίησης εντός της σχολικής αίθουσας, ως αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι γνωστικές δυσκολίες περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων, τη συζήτηση της οποίας η απλοϊκή εκδοχή θα ήταν η εξής: είναι το «οπτικό» πιο εύκολο ή πιο δύσκολο; Όταν η οπτικοποίηση δρα πάνω σε εννοιολογικά πλούσιες εικόνες ή σύμφωνα με τον Fisbein όταν υπάρχουν μεσολαβητικές εννοιολογικές δομές, τότε η γνωστική απαίτηση είναι υψηλή. Εξάλλου ο συλλογισμός σε οπτικό περιβάλλον ίσως να υποδηλώνει ότι δεν υπάρχουν πάντα διαδικαστικά «ασφαλείς» επαναλαμβανόμενες – συνηθισμένες φόρμουλες για να βασιστούμε (όπως ίσως συμβαίνει με τις επίσημες συμβολικές προσεγγίσεις). Συνειδητά ή υποσυνείδητα τέτοιες καταστάσεις πιθανόν να απορριφθούν από μαθητές (ίσως και από καθηγητές) εξαιτίας του ότι παραείναι «αναξιόπιστες», «ριψοκίνδυνες» ή «ανακριβείς».

Μια άλλη γνωστική δυσκολία δημιουργείται από την ανάγκη να αποκτήσουμε μια ευέλικτη και ικανή ερμηνεία, μεταξύ οπτικών και αναλυτικών αναπαραστάσεων της ίδιας κατάστασης, που απαντάται στον πυρήνα της κατανόησης του μεγαλύτερου μέρους των μαθηματικών. Το να μαθαίνουμε να καταλαβαίνουμε και να είμαστε ικανοί στο να χειριζόμαστε πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορεί να είναι μία μακροσκελής, εξαρτώμενη από το περιβάλλον, μη γραμμική και ακόμη πολύπλοκη διαδικασία για τους μαθητές (Schoenfeld , Smith και Arcavi, 1993).

Στις κοινωνιολογικές δυσκολίες θα συμπεριλαμβάναμε αυτό που οι Eisenberg και Dreyfus (1991) θεωρούν ως ζητήματα διδασκαλίας. Η ανάλυσή τους

προτείνει ότι η διδασκαλία υπαινίσσεται μία «διδακτική μετατόπιση» (Chevallard, 1985) η οποία εν συντομία, αναφέρεται στη μετατροπή την οποία υφίσταται αμείλικτα η γνώση, όταν προσαρμόζεται από τον επιστημονικό – ακαδημαϊκό της χαρακτήρα στη γνώση που πρόκειται να διδαχθεί. Αυτή η διαδικασία, από τη φύση της, δίνει γραμμική μορφή, διαχωρίζει σε τμήματα και πιθανόν κάνει αλγοριθμική τη γνώση, απογυμνώνοντας την (τουλάχιστον στα πρώτα στάδια) από πολλές από τις πλούσιες διασυνδέσεις της. Έτσι, πολλοί καθηγητές ίσως να νιώθουν ότι οι αναλυτικές αναπαραστάσεις, οι οποίες είναι διαδοχικές στη φύση τους, είναι περισσότερο παιδαγωγικά κατάλληλες και αποτελεσματικές.

Ένα άλλο είδος «κοινωνιολογικής» (ή καλύτερα κοινωνικοπολιτισμικής) δυσκολίας, είναι η τάση των σχολείων γενικά και των τάξεων των μαθηματικών συγκεκριμένα, να είναι πολυπολιτισμικές. Μερικοί μαθητές ίσως να προέρχονται από οπτικά πλούσιους πολιτισμούς και γι΄ αυτό η οπτικοποίηση ίσως τους βοηθήσει να αντιμετωπίσουν πιθανά ελλείμματα. Αντίθετα, δεν είναι πολλοί οι μαθητές που έχουν υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά και βοηθιούνται από την οπτικοποίηση (Presmerg, 1986,1989).

1.3.2 Ο ρόλος της οπτικοποίησης στην διδασκαλία και μάθηση της μαθηματικής ανάλυσης

Το γεγονός ότι η οπτικοποίηση είναι μια πολύ σημαντική πτυχή των μαθηματικών είναι κάτι εντελώς φυσικό, εάν λάβουμε υπόψη την έννοια της μαθηματικής δραστηριότητας και τη δομή του ανθρώπινου νου. Μέσα από τη μαθηματική δραστηριότητα άνθρωπος προσπαθεί να διερευνήσει πολλές διαφορετικές δομές της πραγματικότητας και την κατάλληλη για αυτή τη διερεύνηση διαδικασία την ονομάζουμε μαθηματικοποίηση. Η Μαθηματική Ανάλυση προέκυψε για να μελετηθούν οι δομές της αλλαγής των αληθινών πραγμάτων στο χρόνο και στο χώρο.

Καθώς η διαδικασία μαθηματικοποίησης έχει αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη και η ανθρώπινη αντίληψη είναι πολύ έντονα οπτική, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι η συνεχής υποστήριξη για την οπτική πλευρά της,

εμφανίζεται και στην μαθηματική ανάλυση, προκειμένου να διερευνηθούν διάφορα είδη μεταβολών.

Ακόμη και στις μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες η διαδικασία της αφαίρεσης φαίνεται να μας πάει πολύ πέρα από ό, τι μας είναι αισθητό, (μέσω της χρήσης συμβολικών διεργασιών), τα διαγράμματα, και άλλες μορφές νοητικών διεργασιών που αφορούν την φαντασία, συνοδεύουν την εργασία. Αυτό θα βοηθήσει στο να αποκτήσουμε αυτό που θα ονομάζαμε ολιστική σχέση μεταξύ των διαφόρων αντικειμένων διαπραγμάτευσης.

Είναι αλήθεια ότι «μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις», αλλά αυτό προϋποθέτει μια σημαντική προϋπόθεση, ότι η εικόνα έρχεται να αποκρυπτογραφηθεί σωστά και κατανοητά. Διαφορετικά, μια εικόνα δεν αξίζει τίποτα.

Η μαθηματική ανάλυση του 17ου αιώνα γεννιέται με ένα πολύ ισχυρό οπτικό συστατικό και παραμένει έτσι στους πρώτους αιώνες της ανάπτυξής της, σε συνεχή αλληλεπίδραση με τα γεωμετρικά και φυσικά προβλήματα. Οι ακόλουθες λέξεις του Sylvester συνοψίζουν τις πεποιθήσεις κλασικών μαθηματικών για την απεικόνιση: «Ο Lagrange έχει εκφράσει κατηγορηματικά την πίστη του στη σημασία που πρέπει να δώσει ο μαθηματικός στη σχολή της παρατήρησης. Ο Gauss έχει αποκαλέσει τα μαθηματικά επιστήμη του οφθαλμού» (1912, as sited in Davies, 1993, σ. 334).

Η οπτικοποίηση είναι μια τεχνική που χρησιμοποιήθηκε από τους πιο δημιουργικούς μαθηματικούς όλων των εποχών και όπως μπορούμε να δούμε μέσα από κάποια δείγματα προερχόμενα από την ιστορία των μαθηματικών, διαδραμάτισε πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών.

Παρά τον ισχυρό όμως ρόλο που κατά παράδοση είχε η οπτικοποίηση, η προσήλωση στον φορμαλισμό, κατά ένα μεγάλο μέρος του 20^{ου} αιώνα, είχε ως συνέπεια ένα είδος υποβιβασμού της οπτικοποίησης. Συνοπτικά οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτό ήταν ότι η Ανάλυση βασανίζονταν από αμφιβολίες και σύγχυση από τον 17^{ο} αιώνα και μέχρι τα τέλη του 19^{ου}, οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες ώθησαν πολλούς μαθηματικούς να είναι ιδιαίτερα άτολμοι με την διαίσθηση.

Επίσης η πολεμική κατά των συνόλων Cantor, σε συνδυασμό με τα παράδοξα γύρω από τα θεμέλια των μαθηματικών, οδήγησαν πολλούς μαθηματικούς να δώσουν έμφαση στην τυπική πλευρά της δομής των μαθηματικών, προσπαθώντας έτσι να επιτύχουν σταθερές βάσεις στο οικοδόμημα των μαθηματικών.

Η ατελής απόδειξη κάποιων προτάσεων (για παράδειγμα το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων ή το θεώρημα της κλειστής καμπύλης του Jordan), που βασίζεται σε μια εμπιστοσύνη σε ορισμένα διαισθητικά στοιχεία, συνέβαλαν στην ενίσχυση μιας πιο αυστηρής στάσης απέναντι στις διαισθητικές αποδείξεις.

Όλα αυτά οδηγούν στη δημιουργία μιας τάσης προς αυστηρή τυποποίηση, όχι μόνο σε ό, τι έχει σχέση με τα θεμέλια των μαθηματικών, αλλά και σε ό, τι αφορά την ενδοεπικοινωνία μέσα στην μαθηματική κοινότητα. Είναι γεγονός πως αυτή η τάση διαπέρασε και τις μεθόδους διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών σε κάθε επίπεδο. Οι συνέπειες ήταν πολύ σοβαρές σε ό, τι αφορά την οπτικοποίηση. Η ατμόσφαιρα της δυσπιστίας που δημιουργήθηκε, οδήγησε κάποιους μαθηματικούς επιθετικά υπέρ της καθιέρωσης της τυπικότητας στην παρουσίαση των νέων αποτελεσμάτων και θεωρήματα. Ακόμη και η δομή των σχολικών βιβλίων («μοντέρνα μαθηματικά») είχε την τάση να συμμορφώνεται με τα ίδια πρότυπα.

Η ακόλουθη μαρτυρία του Hadamard(1995) σχετικά με το ρόλο της απεικόνισης είναι αρκετά αντιπροσωπευτική όσον αφορά την επίδραση της εικόνας στις μαθηματικές διαδικασίες του αναλυτή: «Έχω δώσει μια απλοποιημένη απόδειξη του (α) μέρους του θεωρήματος του Jordan (μια συνεχής κλειστή καμπύλη χωρίς διπλά σημεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές) και φυσικά η απόδειξη μου είναι εντελώς αριθμητική (διαφορετικά θα θεωρούνταν ότι δεν υφίσταται), όμως, ερευνώντας το, ποτέ δεν έπαψα να αναφέρομαι στο διάγραμμα. Δεν μπορώ καν να πω ότι ρητά έχει επαληθευθεί, ή ότι ελέγχει όλους τους κρίκους του επιχειρήματος ως προς το να είναι καθαρά αριθμητική (με άλλα λόγια, το αριθμητικό επιχείρημα δεν φαίνεται σε γενικές γραμμές πλήρες στη συνείδηση μου».

1.4 Ενόραση και Φορμαλισμός

1.4.1 Ο προβληματισμός είναι ισχυρό κίνητρο μάθησης

Ο προβληματισμός του μαθητή είναι ένα κίνητρο μάθησης με εξέχουσα σημασία. Ο Felix Klein λέει πως «αυτά τα κίνητρα βρίσκονται εύκολα σε μιαν ενορατική διδασκαλία». Αντίθετα στην φορμαλιστική διδασκαλία δεν παρέχονται τέτοιες ευκαιρίες. Η παρουσίαση θεμάτων χωρίς υποκίνηση του ενδιαφέροντος για τη σπουδή τους, δηλαδή χωρίς τον κατάλληλο προγενέστερο προβληματισμό των μαθητών, τους αποστερεί κάθε δυνατότητα πραγματικής μάθησης.

Με την ενόραση μπορούν να μπουν σε κίνηση η παρατηρητικότητα, η φαντασία και η κρίση και με αυτά τα εφόδια ο προβληματισμένος μαθητής, δεν πετυχαίνει μόνο ανακάλυψη, αλλά προχωρεί σταθερά στη μάθηση. Το σπουδαίο είναι ότι θα διευρύνει τον πνευματικό του ορίζοντα χωρίς εξωτερική πίεση.

Η ενόραση έχει προβάδισμα από τη Λογική. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία αναπτύχθηκε πρώτη από όλους τους κλάδους των Μαθηματικών, διότι η ενόραση είναι άμεσα εφαρμοσμένη στις γεωμετρικές έννοιες. Μέσω των προβληματισμών που δημιουργούνται πάνω στα γεωμετρικά σχήματα, οδηγούμαστε στις αποδεικτικές μεθόδους.

Αλλά και οι ρητοί αριθμοί έχουν μια προφανή φυσική σημασία, δηλαδή προήλθαν ενορατικά από τα φυσικά αντικείμενα. Οι άρρητοι δεν έγιναν αρχικά αποδεκτοί ως αριθμοί (παρά μόνο ως γεωμετρικά μεγέθη), διότι δεν είχαν ενορατική στήριξη. Η χρησιμότητά τους όμως τους επέβαλε και στηρίχθηκαν λογικά μόλις το 1870 (Klein,1970).

Επίσης ο Διαφορικός Λογισμός που αναπτύχθηκε αργότερα ήταν από τη γέννησή του γεμάτος ασάφειες, λάθη και περιπλοκές. Δεν κατέρρευσε όμως, διότι είχε ενορατικές βάσεις. Το ίδιο και οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Η Λογική επικυρώνει εκ των υστέρων τις κατακτήσεις της ενόρασης, διότι το περιεχόμενο των Μαθηματικών δεν το υπαγορεύει η Λογική, αλλά η πράξη υπαγορεύει τη λογική δομή τους (Hadamard, 1995).

Η απροβλημάτιστη (δηλαδή η αξιωματική) παρουσίαση των Μαθηματικών στη διδασκαλία, δίνει λαθεμένη εικόνα για το πώς αναπτύχθηκαν αυτά, διότι καλλιεργεί την εντύπωση πως τα Μαθηματικά είναι δημιούργημα ιδιοφυών ανθρώπων και οι άλλοι απλώς πρέπει να τα μάθουν.(Μαρουσάκης, 1984)

1.4.2 Η σκέψη είναι θεμέλιο της γνώσης

Στο σύγχρονο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα προσφέρονται, με την επιβολή, πλήθος πληροφοριών, που είναι ξεκομμένες από την εμπειρία και τη φαντασία των μαθητών, στην παραφορτωμένη τους δεκτικότητα. Ζητείται από μια αγύμναστη μνήμη να συγκρατήσει το βάρος αυτών των πληροφοριών και να τις μετατρέψει σε γνώσεις. Μια πληροφορία όμως για να αφομοιωθεί σε γνώση, πρέπει πρώτα να τη γονιμοποιήσει η νόηση, ύστερα να τη διευρύνει η φαντασία και μέσω κριτικής επεξεργασίας να γίνει γνώση.

Αυτό σημαίνει πως η καλλιέργεια της σκέψης διαμέσου του μαθηματικού του υλικού, πρέπει να είναι ο αρχικός και βασικός στόχος της Μαθηματικής Παιδείας. Η συνειδητή, αυτοδύναμη σκέψη του μαθητή θα τον οδηγήσει σε πρωτοβουλίες, με απώτερο στόχο την ουσιαστική κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών.

Συχνά η σκέψη θεωρείται ταυτόσημη της νοημοσύνης και αυτό γιατί αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την αντιμετώπιση των αναγκών που προκύπτουν από την προσαρμογή του ανθρώπου στο περιβάλλον. Η νοημοσύνη δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ικανότητα προσαρμογής στο περιβάλλον(Κωσταρίδου-Ευκλείδη,1997). Άλλωστε, όπως φαίνεται στο Ματσαγγούρας, 2006 και στη σχετική του αναφορά σε ειδικούς επιστήμονες (Τομασίδης, 1982· Halpern, 1984· Costa, 1985· Fisher, 1990· Prithard, 1996) δεν υπάρχει συμφωνία στον τρόπο που αυτοί αντιλαμβάνονται και ορίζουν τη σκέψη. Έτσι άλλοι την ορίζουν ως συνειρμική συσχέτιση ιδεών, άλλοι ως αναζήτηση λογικών σχέσεων μεταξύ δεδομένων κι άλλοι ως διαδικασία αναδόμησης γνωστικών καταστάσεων. Η κριτική σκέψη χαρακτηρίζεται ως υψηλού επιπέδου σκέψη(higher order thinking) (Vygotsky, 1978), γιατί το άτομο πρέπει να χρησιμοποιήσει αξιολογικά κριτήρια κατά την ανάλυση και επίλυση προβλημάτων,

καθώς και για τη λήψη αποφάσεων μέσα σε απρόβλεπτες καταστάσεις. Ο R. Paul ορίζει την κριτική σκέψη ως πειθαρχημένη και αυτοκατευθυνόμενη σκέψη, που λειτουργεί με βάση διανοητικούς κανόνες και προσανατολίζεται στη φύση του προβλήματος ή τη γνωστική περιοχή. (Τριλιανός, 1997).

Η σύγχρονη Μαθηματική εκπαίδευση επιζητά την δημιουργία ενός νέου σχολείου που θα στηρίζει την ανακάλυψη μαθηματικών εννοιών, την καλλιέργεια της Μαθηματικής σκέψης μέσω της διερευνητικής διαδικασίας (Yerushalmy, 1999).

1.4.3 Ο ρόλος των Μαθηματικών είναι η οργάνωση της σκέψης

Ο ρόλος των Μαθηματικών στη Γενική Παιδεία δεν είναι το παθητικό φόρτωμα του μαθητικού μυαλού με τύπους και σύμβολα, αλλά η οργάνωση της σκέψης του μαθητή διά μέσου του μαθηματικού υλικού, εκφραζόμενου αρχικά με τον αριθμό και το σχήμα. Το όργανο της σκέψης είναι η γλώσσα, ο λόγος. Με τη συμβολοκρατία του φορμαλισμού δεν προάγεται η σκέψη, αφού δεν σκεφτόμαστε με τα σύμβολα, αλλά με τις λέξεις, δηλαδή με τον λόγο. Η πληθωριστική χρήση του συμβολισμού είναι ένας μηχανιστικός, επιφανειακός χειρισμός των εννοιών. Ο φορμαλισμός είναι η οικονομία της σκέψης για να φτάσουμε ταχύτερα στο αποτέλεσμα. Ο αυτοματισμός όμως της τυποκρατίας εμπεριέχει τον κίνδυνο να αποκοιμίσει τη σκέψη.

Ο Poincaret λέει: «είχα πολλές φορές την ευκαιρία να τονίσω τη θέση που πρέπει να έχει η ενόραση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Χωρίς αυτή, τα νεαρά άτομα δεν μπορούν να μυηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών, δεν μπορούν να τα αγαπήσουν και θα τα αντιλαμβάνονται πάντα ως κουβέντες χωρίς νόημα. Πολλοί νέοι μαθηματικοί πιστεύουν πως αν διδάξουν τα μαθηματικά με μια αυστηρή, αξιωματική θεμελίωση, οι μαθητές θα τα απορροφήσουν. Αυτοί οι δάσκαλοι επειδή έχουν αφομοιώσει την παραγωγική πρόσβαση, δεν θυμούνται τις δυσκολίες που οι ίδιοι συνάντησαν μαθαίνοντας. Άλλοι πάλι δεν αισθάνονται ικανοποιημένοι όταν, σε μικρές τάξεις, παρουσιάζουν ατελείς αποδείξεις. Όμως η εκπαίδευση δε γίνεται για την ικανοποίηση των δασκάλων αλλά για τους μαθητές

τους και μια σωστή παιδαγωγική προσέγγιση γίνεται πάντοτε με κάποιους συμβιβασμούς».

1.5 Η σημασία των αναπαραστάσεων στα μαθηματικά

1.5.1. Τι είναι αναπαραστάσεις;

Είναι δύσκολο να οριστεί μια έννοια σαν την «αναπαράσταση» που χρησιμοποιείται από διαφορετικούς μεταξύ τους τομείς, όπως η Ψυχολογία, η Επιστημολογία, τα Μαθηματικά, σε μια ποικιλία πλαισίων. Ένας πιθανός τρόπος προσέγγισης είναι μέσα από την αναζήτηση μιας απάντησης στο ερώτημα «*Αναπαράσταση τίνος*». «Μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της τίποτα. Χρειάζεται ερμηνεία, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το άτομο που θα διατυπώσει. Η ερμηνεία για παράδειγμα ενός πίνακα ζωγραφικής από έναν παρατηρητή γίνεται με σημείο αναφοράς την προηγούμενη εμπειρία του. Από την πλευρά του ζωγράφου, εκείνο που αναπαρίσταται είναι ένα κομμάτι της εμπειρίας του, είτε αυτή σχετίζεται με αντικείμενα και καταστάσεις της πραγματικής ζωής, είτε είναι προϊόν της φαντασίας του δημιουργού.» (Κολέζα, 1994)

Ο όρος «αναπαράσταση» είναι ασαφής και ως τέτοιος επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996; Roth & McGinn, 1998; Seeger, 1998). Σύμφωνα με τους Kaput (1987a; 1987b) και Goldin (1987), η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει : (α) την έννοια που αναπαρίσταται, (β) την ολότητα που αναπαριστά, (γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται. Επίσης ο όρος αναπαράσταση επιδέχεται δύο διαφορετικές ερμηνείες:

Αναπαράσταση μπορεί να είναι μια υλική οργάνωση συμβόλων, όπως σχήματα, γραφικές παραστάσεις, κώδικες, κ.λ.π. που αποτελούν τα «μοντέλα» ποικίλων νοητικών διαδικασιών .

Με τον όρο αναπαράσταση μπορεί να εννοούμε όμως και έναν τρόπο οργάνωσης της γνώσης και υπό αυτή την έννοια αποτελεί κεντρικό σημείο της γνωστικής ψυχολογίας (Denis και Dubois,1976).

Δεν είναι άγνωστο ότι υπάρχουν *εξωτερικές* και *εσωτερικές* αναπαραστάσεις. Οι πρώτες αναφέρονται σε όλα τα εξωτερικά συμβολικά συστήματα και έχουν σαν στόχο να αναπαραστήσουν κάποια «πραγματικότητα» π.χ. μαθηματική, ενώ οι δεύτερες αντιστοιχούν σε μια εσωτερικευμένη γνώση που έχουμε γι' αυτή την πραγματικότητα (Dufour-Janvier,B. , Bednarz,N. , Balanger,M. , 1987).

Αν θέλουμε τις δύο προηγούμενες ερμηνείες να τις προβάλουμε στο επίπεδο της έρευνας της διδακτικής, θα λέγαμε ότι έχουμε δύο εκδοχές για το θέμα της αναπαράστασης (Vergnaud, G. ,1988):

- την εκδοχή των συμβολικών εκπεφρασμένων αναπαραστάσεων που περιέχουν τα στοιχεία και τις διαδικασίες που χρησιμοποιεί το υποκείμενο στην επικοινωνία του με τους άλλους (γραφικές παραστάσεις, πίνακες, άλγεβρες κ.λ.π.) και
- την εκδοχή των μη εκπεφρασμένων προ-εννοιακών και εννοιακών αναπαραστάσεων που καθορίζουν τη γνωστική δραστηριότητα του υποκειμένου: γνώσεις και διαδικασίες που θα χρησιμοποιήσει, συνδυασμούς πληροφοριών που θα πραγματοποιήσει, κ.λ.π.

Μια σειρά από έρευνες (Lesh, Mehr & Post, 1987b) έχουν εντοπίσει πέντε διαφορετικά συστήματα εκπεφρασμένων αναπαραστάσεων που εμφανίζονται στη διαδικασία μάθησης μαθηματικών εννοιών και επίλυσης προβλημάτων. Τα συστήματα αυτά είναι :

- Κομμάτια εμπειρίας στα οποία η γνώση οργανώνεται γύρω από γεγονότα της καθημερινότητας και τα οποία χρησιμοποιούνται ως πλαίσιο για την αντιμετώπιση νέων καταστάσεων.
- Σύνολα αντικειμένων που φτιάχτηκαν με στόχο την αναπαράσταση μαθηματικών σχέσεων (π.χ. κύβοι).
- Εικόνες ή διαγράμματα.
- Γλώσσες ομιλούμενες ή εξειδικευμένες (π.χ. η μαθηματική).
- Γραπτά σύμβολα (π.χ. $\chi+2=5$, $A \cup B=\Gamma$) .

Τα πέντε προηγούμενα συστήματα αναπαράστασης θα μπορούσαν να ενταχθούν σε δύο βασικές κατηγορίες (Von Glaserfeld, 1987): τα εικονικά και τα μη εικονικά ή συμβολικά.

1.5.2 Αναπαραστάσεις και Διδασκαλία Μαθηματικών

Οι εικόνες, και γενικότερα οι αναπαραστάσεις, διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στον τομέα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, καθώς τα σύγχρονα βιβλία και διδακτικά υλικά περιλαμβάνουν περισσότερες εικόνες, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, παρά ποτέ προηγουμένως (Schnotz, 2002; Carney & Levin, 2002).

Η χρήση ποικίλων εξωτερικών αναπαραστάσεων, όπως οι εικόνες σε συνδυασμό με τα κείμενα, χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών για την προώθηση της κατανόησης και της μάθησης μαθηματικών ιδεών. Σύμφωνα με τον Janvier (1987), τα περισσότερα σχολικά βιβλία σήμερα περιλαμβάνουν μια ποικιλία αναπαραστάσεων με σκοπό να προωθήσουν την κατανόηση.

Η κατανόηση από λεκτικές και εικονικές πληροφορίες έχει θεωρηθεί ως πιθανώς ευεργετική για τη μάθηση (Schnotz, 2002; Carney & Levin, 2002). Για παράδειγμα, οι Ainsworth, Wood & Bibby (1997) εισηγούνται ότι η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν διαφορετικές ιδέες και διαδικασίες και να προάγουν βαθύτερη κατανόηση. Επιπλέον, μια δεύτερη αναπαράσταση μπορεί να ενισχύσει τη μετάφραση μιας πιο πολύπλοκης ή λιγότερο γνώριμης αναπαράστασης (Gagatsis & Michaelidou, 2002). Σύμφωνα με τους Ainsworth et al. (1997), συνδυάζοντας τις διάφορες αναπαραστάσεις οι μαθητές δεν περιορίζονται από τις αδυναμίες μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης.

Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους (Kaput, 1985; 1987a; 1987b). Οι πρακτικοί λόγοι αναφέρονται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς και ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και στα μαθηματικά. Οι

θεωρητικοί λόγοι αναφέρονται στην ανάγκη για ύπαρξη ενός συστηματικού πλαισίου σε σχέση με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι δυσκολίες που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και τη χρήση αναπαραστάσεων.

Οι αναπαραστάσεις θεωρούνται «σύμφυτες» με τα μαθηματικά (Dufour – Janvier et al.,1987; Kaput, 1987a). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια μαθηματική έννοια, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης.

Στο σχεδιασμό των εθνικών επιπέδων εκπαίδευσης και αξιολόγησης για τα μαθηματικά στην Αμερική (NCTM 2000), αναγνωρίζεται η μεγάλη σημασία των αναπαραστάσεων. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι το αναλυτικό πρόγραμμα θα πρέπει να καλλιεργεί στους μαθητές την ικανότητα:

- να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις με στόχο να οργανώνουν, να κωδικοποιούν και να επικοινωνούν τις μαθηματικές τους ιδέες,
- να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις με στόχο τη κατανόηση και επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης,
- να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στη μοντελοποίηση και ερμηνεία φυσικών, κοινωνικών και μαθηματικών φαινομένων.

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν α) η ικανότητα για αναγνώριση της έννοιας σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και β) η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post & Mehr, 1987). Η τελευταία προϋπόθεση, δηλαδή η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών αλλά και για την επίλυση μαθηματικού

προβλήματος (Janvier, 1987). Με βάση αποτελέσματα ερευνών, μαθητές και φοιτητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σε αυτή τη διαδικασία, που επηρεάζουν τόσο τη μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλήματος. Επομένως, μια άλλη βασική επιδίωξη της διδασκαλίας μιας έννοιας πέρα από την κατανόησή της μέσα από τη δημιουργία πλούσιων και καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων, θα πρέπει να εστιάζεται στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από μια αναπαράσταση σε άλλη με συνέπεια και ακρίβεια, χωρίς αντιφάσεις (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2001).

Οι Gagatsis & Christou (2002) παρατηρούν ότι όταν η διδασκαλία εννοιών γίνεται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι μαθητές πραγματοποιούν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων και έτσι μπορούν να διακρίνουν μεταξύ τους τις μαθηματικές έννοιες.

Για την κατανόηση και τη μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας αυτό που έχει σημασία είναι η αναγκαιότητα ταυτόχρονης συνύπαρξης τουλάχιστον δύο πεδίων αναπαράστασης (ή δύο σημειωτικών σχημάτων αναπαράστασης) (Duval, 1993).

Επιπλέον, οι αναπαραστάσεις ενδείκνυνται στο να κάνουν τα μαθηματικά πιο γοητευτικά και ενδιαφέροντα (Dyfour-Janvier, Bednarz και Belanger, 1987). Σύμφωνα με τους Noss και Hoyles (1996), οι αναπαραστάσεις αποτελούν κεντρικό στοιχείο για την κατασκευή σημασιών. Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν πως οι αναπαραστάσεις δομούν και δομούνται από το πλαίσιο συμφραζομένων. Οι αναπαραστάσεις, επίσης, είναι δυνατόν να αποτελούν τα πεδία πρώτης αναφοράς των δράσεων του παιδιού προκειμένου να οικοδομήσει βασικές έννοιες (Kaput, 1987a).

Οι Lesh, Mehr και Post (1987b) διαχώρισαν τα αναπαραστατικά συστήματα σε «διαφανή» και «αδιαφανή». Στα «διαφανή» αναπαραστατικά συστήματα τίποτε περισσότερο ή λιγότερο δεν υπονοείται πέρα από τις ιδέες ή τις δομές που αναπαριστώνται. Στα «αδιαφανή» αναπαραστατικά συστήματα δίνεται έμφαση σε ορισμένες έννοιες ή δομές, ενώ κάποιες άλλες δε φωτίζονται, αλλά βρίσκονται κρυμμένες πίσω από άλλες.

1.5.3 Νέες Τεχνολογίες και Αναπαραστάσεις

Οι σύγχρονες εποικοδομιστικές προσεγγίσεις στη μάθηση δίνουν έμφαση στον ενεργητικό, υποκειμενικό και κατασκευαστικό χαρακτήρα της γνώσης των ατόμων προκειμένου να προσαρμοστούν στο περιβάλλον στο οποίο ζουν (Von Glasersfeld, 1987). Η έμφαση δίνεται στην ενεργητική και πρακτική συμμετοχή των μαθητών (Piaget, 1970) σε δραστηριότητες που αφορούν σε εμπειρικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής που έχουν νόημα για αυτούς ώστε να τους δημιουργείται κίνητρο για μάθηση (Leont'ev, 1981, ο.π. ανάφ. στο Noss, & Hoyles, 1996). Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αναστοχαστούν στις ενέργειες που πραγματοποιούν προκειμένου να φέρουν σε πέρας αυτές τις δραστηριότητες και να δημιουργήσουν αφηρημένες έννοιες (von Glasersfeld, 1987). Επιπλέον, αναγνωρίζεται ο ρόλος των εργαλείων και ειδικότερα των περιβαλλόντων μάθησης σε υπολογιστή, στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών (Papert, 1980; Jonassen, 1996; Noss & Hoyles, 1996). Ειδικότερα, αναγνωρίζεται η σημασία των περιβαλλόντων πολλαπλών αναπαραστάσεων στην έκφραση των ιδιαιτεροτήτων των μαθητών στη μάθησή τους, προσφέροντάς τους δυνατότητες διαφορετικής αφετηρίας (Borba & Confrey 1996; Dyfour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Τα περιβάλλοντα αυτά παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση εννοιών με μεγάλο βαθμό αδιαφάνειας, όπως είναι οι έννοιες της Ανάλυσης. Οι μαθητές εκφράζοντας τη γνώση τους σε διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα μπορούν να πραγματοποιήσουν συνδέσεις ανάμεσα στη συγκεκριμένη, τη διαισθητική και στη συμβολική γνώση (Kordaki & Potari, 2002; Noss, Healy, & Hoyles, 1997). Οι δυσκολίες των μαθητών στη μάθηση έχουν αποδοθεί στο ότι υπάρχει μεγάλο κενό στις αναπαραστάσεις του μαθητή και στα προτεινόμενα σε αυτόν αναπαραστασιακά συστήματα για την έκφραση της γνώσης του (Dyfour-Janvier, et al., 1987). Αποκτά λοιπόν σημαντική αξία η εξεύρεση κατάλληλων αναπαραστασιακών συστημάτων τα οποία να δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή να εκφράσει τη διαισθητική του γνώση και να προχωρήσει χωρίς κενά σε συμβολικά συστήματα αναπαραστάσεων (Dyfour-Janvier, et al., 1987).

Οι Dettori και Lemut (1995) αναφέρουν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μέσα από ένα περιβάλλον υπερμέσων διέγειραν τις αναπαραστασιακές ικανότητες

των παιδιών, τους έδωσαν δυνατότητες διαφορετικής αφετηρίας, όπως επίσης τους έδωσαν τη δυνατότητα για αναστοχασμό πάνω σε αυτές. Επιπλέον, υποστηρίζεται ότι η εννοιολογική κατανόηση απορρέει από τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (Noss και Hoyles, 1996), ενώ η χρήση νέων μορφών αναπαραστάσεων αλλάζει το είδος των μαθηματικών που διδάσκονται (Borba, M., & Confrey, G. (1996). Η επιλογή των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση περιβαλλόντων μάθησης σε υπολογιστή παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαφοροποίηση των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές στα προβλήματα που τους τίθενται.

Ο Η/Υ είναι ένα εκφραστικό αλληλεπιδραστικό μέσο που παρέχει τη δυνατότητα «δραστήριας μάθησης» ενώ στα παραδοσιακά *αδρανή* συστήματα (μολύβι-χαρτί) υπάρχει απόσταση των ενεργειών από τις μαθηματικές τους σημασίες. Οι διαφορές δυναμικών-αδρανών συστημάτων μάθησης οδηγούν σε διαφορετικούς τρόπους μάθησης. Τα δυναμικά συστήματα, δηλαδή οι υπολογιστές, υποβοηθούν την αυτοέκφραση και την σύνδεση εικονικής με συμβολική πληροφορία. Τα περιβάλλοντα Η/Υ με τις *πολλαπλές αναπαραστάσεις* που διαθέτουν, διευκολύνουν την δημιουργία πλούσιων γνωστικών εμπειριών αυξάνοντας την άμεση εκφραστικότητα του μαθητή. Αυτός ο διαμεσολαβητικός ρόλος του Η/Υ συναρτάται από τις συμβολικές αναπαραστάσεις που παρέχει.

Πολλοί ερευνητές αναζητούν το αν η εννοιολογική κατανόηση απορρέει από τη δημιουργία πολλαπλών αναπαραστάσεων και τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ αυτών. Σε αυτό, η χρήση των δυνατοτήτων του Η/Υ και των Εκπαιδευτικών Λογισμικών που επιτρέπουν ποικιλία αναπαραστάσεων είναι σημαντική. Φαίνεται ότι μέσω αυτής επιτυγχάνεται πολλαπλότητα τρόπων επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές οι οποίοι βρίσκουν νέους τρόπους έκφρασης. Πάντως η επιλογή των αναπαραστάσεων που θα χρησιμοποιούνται παίζει ρόλο και κακή επιλογή μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε στατικές προσεγγίσεις (όπως και στα στατικά συστήματα). Οι εξωτερικές εικόνες παρέχουν αισθητική παρότρυνση για τις εικονικές έννοιες και εκεί που πρέπει να εστιάσουμε είναι ο βαθμός επίδρασης των εξωτερικών εικόνων στην αλληλεπίδραση του εικονικού με το εννοιολογικό μέρος της διεργασίας. Ειδικά στην γεωμετρία, εικόνες και έννοιες πρέπει να

αλληλεπιδρούν για την ανάπτυξη της λογικής, αφού έχουν σύνθετο ρόλο στην παρουσίαση της γνώσης. Τα σχήματα αποτελούν ένα είδος «εικονικής έννοιας». Ιδιαίτερη μνεία έχει γίνει για την διαφορά σχεδίου (ως αντικείμενο-εικόνας) και σχήματος που αποτελεί εκπρόσωπο κλάσης άπειρων αντικειμένων με κάποιες κοινές ιδιότητες. Οι υπολογιστές δίνουν την δυνατότητα υλοποίησης ενός μοντέλου που να ανταποκρίνεται στην έννοια-σχήμα καθώς και την αλληλεπίδραση εικόνας-έννοιας. *Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας δίνουν την δυνατότητα αυτής της συσχέτισης εικονικού-εννοιολογικού αφού ο μαθητής πρέπει πρώτα να καταλάβει τη εσωτερική λογική που εξαρτάται από την διαδικασία με την οποία παράγει το λογισμικό τις αναπαραστάσεις και γίνεται εμφανής όταν ένα στοιχείο της εικόνας μετακινείται*. Η αισθητηριακή αντίληψη τώρα θεωρείται σημαντική στη γεωμετρία αλλά δεν φτάνει από μόνη της. Η εικονική ανατροφοδότηση που παρέχει το ΕΛ σε συνδυασμό με την δυναμικότητα των σχημάτων που κρατούν αναλλοίωτες ιδιότητες οδηγεί σε ένα νέο είδος αντίληψης που δεν είναι μόνο αισθητηριακή αφού παρέχει πληροφορία που μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να ανακαλύψει τα λάθη που έκανε στις αρχικές υποθέσεις του για τις ιδιότητες των σχημάτων. Επιπλέον η ανατροφοδότηση βοηθά το μαθητή να ελέγχει ποιοτικά ή ποσοτικά τις στρατηγικές που αναπτύσσει.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας ως εργαλεία / τεχνουργήματα τα οποία ενσωματώνουν δομικά τις μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες, είναι αναπαραστατικές υποδομές (Kaput et al. 2002) που παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων.

Σύμφωνα με τον Gawlick (2005) ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί α) για να οπτικοποιήσει ο μαθητής ότι μια ιδιότητα ισχύει σε κάθε περίπτωση συρσίματος του σχήματος, β) για να διερευνήσει τις ιδιότητες του σχήματος με τη χρήση μακροεντολών και γ) για την κατασκευή γεωμετρικών τόπων. Έτσι η αξία της δυναμικής προσέγγισης είναι διπλή καθώς μπορεί να ενισχύσει τους μαθητές των χαμηλότερων επιπέδων να εξοικειωθούν με τα εργαλεία και παρέχει τη βάση για την σταδιακή τους μετακίνηση σε υψηλότερα επίπεδα.

Οι Harel & Dubinsky μιλάνε για «αντίληψη ενέργειας» και «αντίληψη διαδικασίας» σε μαθησιακές έρευνες με υπολογιστή. Με τον πρώτο όρο εννοούν

την κατανόηση μιας ενέργειας διανοητικής ή φυσικής διαχείρισης αντικειμένων με στατικό τρόπο, ενώ με τον δεύτερο όρο περιγράφουν την δυναμική διαχείριση αντικειμένων, δηλαδή τον μετασχηματισμό μιας οντότητας ενώ διατηρούνται κάποια ποσοτικά της χαρακτηριστικά και μεταβάλλονται κάποια άλλα. Οι ίδιοι ερευνητές τόνισαν την δυνατότητα αντίληψης διαδικασίας που δίνουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις στον Η/Υ και την βοήθεια που αποκτούν οι μαθητές για την δημιουργία πιο δυναμικών εννοιών που ονομάζουν έννοιες διεργασίας.

Πάντως σε κάθε περίπτωση οι αναπαραστάσεις που τα multimedia και hypermedia στη σύγχρονη τεχνολογία υποστηρίζουν, συνεπικουρούν στη μάθηση.

Αυτό που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι η αναζήτηση των πλαισίων μέσα στα οποία η σύγχρονη τεχνολογία μπορεί να προσφέρει βοήθεια στη μάθηση. Ένα DGS, όπως π.χ. το Cabri εισάγει ένα ιδιαίτερο είδος εικόνων που μπορούν να συρθούν και να αλλάξουν κάτω από την επίδραση του συρσίματος (Mariotti, 2003). Από την προοπτική του Vygotsky, με το Dragging δημιουργείται ένα «εργαλείο σημειωτικής διαμεσολάβησης». Ο N.Balacheff[1] ισχυρίζεται ότι αυτή η μετάβαση από την οθόνη του υπολογιστή στα μαθηματικά είναι μια διαδικασία *modelling.* Οι Εμμ. Νικολουδάκης & Σ. Ιωάννου (2003) θεωρούν ότι το υπολογιστικό περιβάλλον συμβάλλει με την «αλλαγή» γλώσσας - δεδομένου ότι το λογισμικό χρησιμοποιεί τη δική του γλώσσα επικοινωνίας κι αλληλεπίδρασης - στην αλλαγή του τρόπου επικοινωνίας, αποσκοπώντας και επιτυγχάνοντας καλύτερα αποτελέσματα στη διαδικασία διδασκαλίας μάθησης σε σχέση με την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία.

Επίσης, ο David Tall (1993) σημειώνει ότι τόσο η κάθετη όσο και η οριζόντια ανάπτυξη – κατά τον Piaget και τους συγγραφείς που ακολούθησαν μετά από αυτόν - θέτουν δυσκολίες στο άτομο. Η κάθετη ανάπτυξη απαιτεί άφθονο χρόνο για την εξοικείωση με μια δοσμένη διαδικασία για να της επιτρέψει να εσωτερικευτεί και επίσης για την απαραίτητη γνωστική αναδιοργάνωση της διαδικασίας σε αντικείμενο. Η οριζόντια ανάπτυξη απαιτεί την ταυτόχρονη κατανόηση δύο ή περισσοτέρων διαφορετικών αναπαραστάσεων και τις συνδέσεις μεταξύ τους, το

[1] N. Balacheff Learning mathematics as modelling http://mathforum.org/technology/papers/

οποίο είναι πιθανόν να προσδώσει γνωστική αγωνία στις βραχυπρόθεσμες πηγές της μνήμης. Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να περιοριστούν με ποικίλους τρόπους χρησιμοποιώντας ένα περιβάλλον υπολογιστή για να παρέχει υποστήριξη. Το λογισμικό μπορεί να είναι σχεδιασμένο για να διεκπεραιώνει μερικές από τις διαδικασίες, αφήνοντας το μαθητή να συγκεντρωθεί σε άλλες που θα επιλέξει να εστιάσει την προσοχή του. Η ακολουθία της μάθησης στην κάθετη ανάπτυξη μπορεί να τροποποιηθεί παρέχοντας περιβάλλοντα, τα οποία επιτρέπουν τη μελέτη ανώτερων εννοιών με μια διαισθητική μορφή πριν ή την ίδια στιγμή που αυτές κατασκευάζονται. Οι οριζόντιοι δεσμοί μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων μπορεί να είναι προγραμματισμένοι με τέτοιο τρόπο, που το άτομο να χειρίζεται μια αναπαράσταση και να μπορεί να βλέπει τις συνέπειες της ενέργειάς του σε άλλες συνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Επιπλέον, επειδή ο υπολογιστής μπορεί να προγραμματιστεί για να ανταποκρίνεται με έναν εκ των προτέρων ορισμένο τρόπο, μπορεί να παράσχει ένα περιβάλλον, μέσα στο οποίο ο μαθητής μπορεί να εξερευνήσει τις συνέπειες επιλεγμένων ενεργειών για να προβλέψει και να ελέγξει υπό κατασκευή θεωρίες.

Τέλος ο Φ. Καλαβάσης (1997) σημειώνει: «Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι απαιτήσεις ικανοτήτων σε τεχνολογικό περιβάλλον συγκλίνουν κατ’ απόλυτο τρόπο με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της επιστημολογίας όπως αυτές συντίθενται από τη Διδακτική των Μαθηματικών».

Σύμφωνα με τον Piaget, εκείνος που "ενεργεί" μαθαίνει. Ο υπολογιστής από την πλευρά του αποτελεί εργαλείο που δίνει την δυνατότητα στο μαθητή να ενεργεί. Και όχι απλά να ενεργεί αλλά να επαναλαμβάνει τις ενέργειές του όσες φορές θέλει, να πειραματίζεται, να παρατηρεί, να αναπτύσσει εικασίες και να διαπιστώνει την ισχύ ή την άρνηση τους, να μετασχηματίζει.

1.5.4 Νέες Τεχνολογίες και απόδειξη

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών και η εισδοχή όλο και περισσότερο των υπολογιστών στη ζωή μας, δεν θα μπορούσε να αφήσει άθικτη την απόδειξη. Πολλοί πιστεύουν ότι η διείσδυση του υπολογιστή και στον χώρο των καθαρών Μαθηματικών (π.χ. πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων), πρέπει να επηρεάσει την διδασκαλία στο επίπεδο της σχολικής αίθουσας, με το να εξασθενίσει την σημασία της παραδοσιακής μαθηματικής απόδειξης, προς όφελος πιο εμπειρικών και δοκιμαστικών τρόπων (De Villiers, M.,1998). Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη, την εγκυρότητα κάποιων μαθηματικών προτάσεων, μπορεί να την εξασφαλίσει και η «πειραματική» διαδικασία μιας υπολογιστικής απόδειξης. Η απόδειξη με χρήση υπολογιστή στο περίφημο πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, έθεσε το ερώτημα κατά πόσο μπορεί μια τέτοια απόδειξη να αποτελέσει αποδεκτή απόδειξη. Ερωτήματα που τίθενται και από τη σκοπιά της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών, τα οποία αναγκαστικά επαναπροσδιορίζουν την έννοια της απόδειξης, αλλά και κατ' επέκταση των ίδιων των Μαθηματικών και που αποσιωπώνται στο σχολείο· αποσιωπάται, δηλαδή, η πολυπλοκότητα της απόδειξης. (Van Bendegem, J.P. 2003, Θεσ/κη). Οι νέες τεχνολογίες (Cabri, Sketchpad, Excel, Geogebra κ.ά.), και ιδιαίτερα τα λογισμικά πακέτα, γνωστά γενικά ως Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (Euclidraw), χρησιμοποιούνται στην τάξη ως εργαλεία οπτικοποίησης για την διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρίας και την ανάπτυξη των αποδεικτικών δεξιοτήτων των μαθητών (De Villers, 2003· Hanna, 2000). Στο επίπεδο της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση, το θέμα της χρήσης των νέων τεχνολογιών έχει αντιμετωπιστεί από διαφορετικές απόψεις. Έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες για τον τρόπο με τον οποίο η εισαγωγή των νέων τεχνολογιών αλλάζει την εκμάθηση στη σχολική τάξη, αλλά και για τον τρόπο με τον οποίο οι νέες τεχνολογίες μπορούν να ενσωματωθούν στη σχολική πρακτική (Laborde, 2001· Healy, 2000· Mariotti & Bartolini Bussi, 1998).

Οι παρεχόμενες από το δυναμικό λογισμικό δυνατότητες για ευρετικές διαδικασίες και διερεύνηση το καθιστούν ικανό να ενθαρρύνει την ανάγκη για απόδειξη, να μεσολαβεί στην μετάβαση από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο,

και εν γένει, στην εισαγωγή των μαθητών στη θεωρητική σκέψη (Hadas et al., 2000· Jones, 2000· Marrades & Gutierrez, 2000 κ.ά.).

Οι οπτικές και οι ευρετικές δυνατότητες όμως που προσφέρονται από τα περιβάλλοντα λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στο να «φαίνονται» τόσο εύκολα οι μαθηματικές ιδιότητες, μπορούν όμως να μειώσουν ή ακόμα και να εξαφανίσουν οποιαδήποτε ανάγκη για να κάνουν και να μάθουν πώς να κάνουν απόδειξη οι μαθητές (Laborde, 2000· Hoyles & Jones, 1998) ή αντίθετα, μια τέτοια παρεχόμενη δυνατότητα ανοίγει νέους δρόμους σημαντικών τρόπων προσέγγισης στην απόδειξη, οι οποίοι μπορούν να συμβάλουν στην πρόοδο της κατανόησης από τους μαθητές του ρόλου της απόδειξης και ενισχύουν την ανάγκη τους για να κάνουν απόδειξη (Jones, 2000· Hadas et al., 2000 κ.ά).

Στο υπολογιστικό λοιπόν περιβάλλον, αλλάζει κάπως η χρηστικότητα και ο ρόλος της απόδειξης. Ένα απλό παράδειγμα είναι η κατασκευή (από τον μαθητή) ενός σχήματος με κάποιες ιδιότητες, στο οποίο ο μαθητής παρατηρεί την αλλοίωσή του με το σύρσιμο. Έτσι οδηγείται στο να αποδείξει κάτι για να δικαιολογήσει την αλλοίωση, άρα να εξηγήσει την συμπεριφορά του δυναμικού σχήματος. Παράλληλα οι μαθητές έρχονται σε γνωστική σύγκρουση σε σχέση με αυτό που περίμεναν (Hadas et al., 2000). Επίσης, αν ο διδάσκων χρησιμοποιήσει το παιχνίδι των αλλοιώσεων του σχήματος, μέσω της ερώτησης «τι θα γινόταν αν», μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε ευκολότερα ή δυσκολότερα προβλήματα.

Ο Francis (1996) επισημαίνει ότι η επανάσταση των τεχνολογιών θα κινήσει τους μαθηματικούς μακριά από το φορμαλισμό της δεκαετίας των Bourbaki που εξουσιάζει ακόμα τα ακαδημαϊκά μαθηματικά. Προσθέτει ότι είναι παράλογο να αναμένεται ο πειραματισμός με τους υπολογιστές να αντικαταστήσει την αυστηρότητα των μαθηματικών. Ο οπτικός συλλογισμός δεν μπορεί να αναγνωρίζεται ως ίσης αξίας με τον προτασιακό.

Ο Palais (1999) παρατηρεί ότι η χρήση των υπολογιστών στη μοντελοποίηση των μαθηματικών αντικειμένων επιτρέπει όχι μόνο το μετασχηματισμό των δεδομένων, την αλλαγή των εικόνων, αλλά και την εξέταση χαρακτηριστικών γνωρισμάτων τους που ήταν απρόσιτα χωρίς τους υπολογιστές. Η οπτικοποίηση μπορεί άμεσα να ανοίξει το δρόμο για αυστηρές αποδείξεις, αλλά οι οπτικές

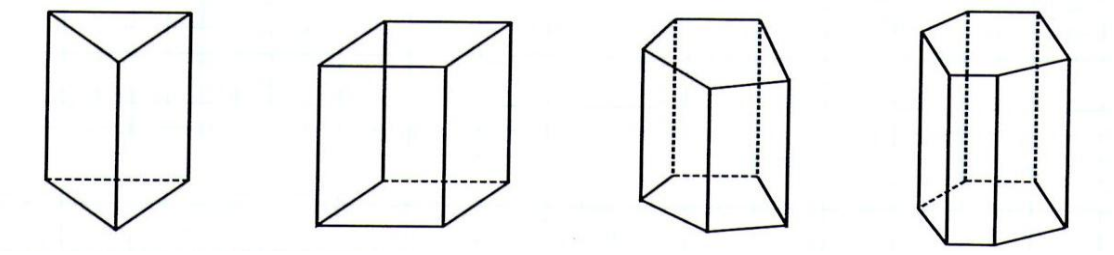
αναπαραστάσεις δεν θα μπορούσαν να γίνουν αποδεκτές ως νόμιμες (αυστηρές) αποδείξεις.

Μερικοί ερευνητές έχουν απαιτήσει την χρησιμοποίηση αποδείξεων για να δημιουργήσουν μια εμπειρία με νόημα, σαν μέσο ενίσχυσης των αποτελεσμάτων (Hanna, 1998) παρέχοντας την ευκαιρία με περιβάλλοντα όπως της δυναμικής γεωμετρίας. Τα εργαλεία των υπολογιστών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κερδίσουν την πεποίθηση μέσω της οπτικοποίησης ή της εμπειρικής επαλήθευσης, αλλά όπως ο De Villiers (1998, 2003) σημειώνει: «*οι αποδείξεις έχουν πολλαπλές λειτουργίες που μπορούν να υπερβούν την απλή επαλήθευση και που μπορούν να αναπτυχθούν σε περιβάλλον υπολογιστικό: όπως επαλήθευση (ενδιαφερόμενο με την αλήθεια μιας δήλωσης), η εξήγηση (γιατί είναι αληθινό και επομένως περιλαμβάνει την συζήτηση που διευκρινίζει την πρόταση ή το αποτέλεσμα), την ανακάλυψη (εφεύρεση νέων αποτελεσμάτων), την επικοινωνία (διαπραγμάτευση της έννοιας), την διανοητική πρόκληση (η εκπλήρωση η προερχόμενη από την κατασκευή της απόδειξης), την συστηματοποίηση (οργάνωση των αποτελεσμάτων σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, θεωρημάτων)*».

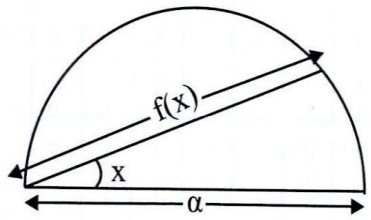
1.5.5 Διαίσθηση – Αναπαραστάσεις και όριο συνάρτησης

Η ιδέα της χρήσης εικονικών αναπαραστάσεων στην πρακτική των μαθηματικών δεν είναι βέβαια καινούρια, καθώς οι οπτικές αναπαραστάσεις, όπως τα διαγράμματα, οι γραφικές παραστάσεις και τα σχέδια θεωρούνταν ανέκαθεν απαραίτητα εργαλεία στο έργο των μαθηματικών (Rival, 1987).

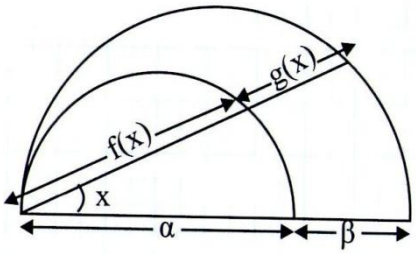
Όταν μια έννοια αναπτύσσεται με κατάλληλο τρόπο από νωρίς στη μαθηματική εκπαίδευση, τότε γίνεται ευκολότερο το πέρασμα στις αφηρημένες και συμβολικές πλευρές αυτής της έννοιας (Τουμάσης, 1999b). Έτσι αν η ιδέα του ορίου αναπτυχθεί από τις μικρότερες τάξεις μέσω εικόνων και διαγραμμάτων, τότε η εισαγωγή στην Ανάλυση ίσως να ήταν ευκολότερη υπόθεση. Κάποιοι από τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με τις οριακές διαδικασίες:



Έχουμε μια ακολουθία κανονικών πρισμάτων. Τι θα συμβεί εάν συνεχίζουμε με κανονικά πρίσματα των οποίων ο αριθμός των πλευρών συνεχώς αυξάνει;



Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα ημικύκλιο διαμέτρου α και μια μεταβλητή χορδή η οποία σχηματίζει γωνία x με την διάμετρο και το μήκος της είναι f(x). Η χορδή κινείται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τι θα συμβεί αν το x μικρύνει πάρα πολύ (τείνει στο μηδέν;)

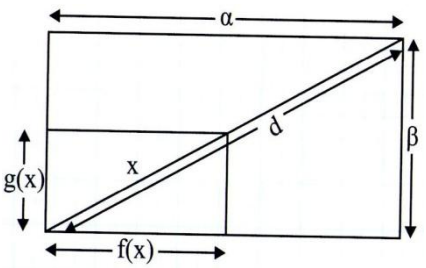


Εδώ έχουμε δύο ημικύκλια διαμέτρων α και α+β, ενώ πάλι μια μεταβλητή χορδή f(x) σχηματίζει γωνία x με την διάμετρο και τέμνεται από την μικρότερη ημικυκλική περιφέρεια σε δύο μεταβλητά μέρη.

Αν f(x) , g(x) είναι τα μήκη των δύο αυτών τμημάτων, τότε από το σχήμα έπεται :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a \ , \ \lim_{x\to a} g(x) = \beta \ , \ \lim_{x\to 0}\big(f(x) + g(x)\big) = a + \beta$$

Επομένως $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} g(x)$.



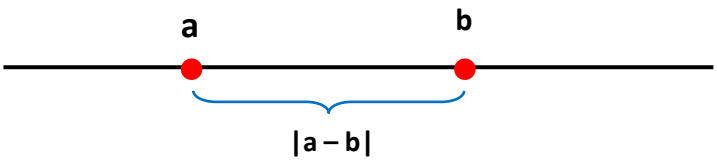
Εδώ έχουμε ένα ορθογώνιο διαστάσεων α, β και διαγωνίου d, ενώ στο εσωτερικό αυτού υπάρχει ένα μικρότερο μεταβλητό ορθογώνιο του οποίου η διαγώνιος είναι τμήμα κάθε φορά της διαγωνίου του μεγαλύτερου. Έστω x το μήκος της μεταβλητής διαγωνίου. Τότε οι πλευρές του θα μεταβάλλονται συναρτήσει του

x και έστω f(x) , g(x) τα μήκη τους. Το γινόμενο f(x)g(x) θα αντιπροσωπεύει κάθε φορά το εμβαδόν του μεταβλητού ορθογωνίου.

Παρατηρούμε ότι αν το x τείνει στο d θα έχουμε f(x)g(x) τείνει στο αβ, δηλαδή $\lim_{x\to d}\left(f(x)g(x)\right)=a\beta$. Ακόμα από το σχήμα προκύπτει $\lim_{x\to d} f(x)=a$, $\lim_{x\to d} g(x)=\beta$, επομένως $\lim_{x\to d}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to d} f(x)\cdot\lim_{x\to d} g(x)$.

Είναι γνωστές οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές – φοιτητές σε όλο τον κόσμο όταν προσπαθούν να κατανοήσουν τον αυστηρό ε – δ ορισμό του Ορίου. Η χρήση των ποσοδεικτών δημιουργεί ένα μυστήριο για τους φοιτητές (Juter, 2003; 2005a; 2006a). Οι μαθητές διαμαρτύρονται για την χρήση των συμβόλων και μεταβλητών, ενώ μια μικρή αλλαγή στη διατύπωση μπορεί να επιφέρει μεγάλη μεταβολή του μαθηματικού περιεχομένου, κάτι που παραμένει αόρατο για τους περισσότερους μαθητές – φοιτητές. Επίσης δεν είναι λίγοι αυτοί που θέτουν το ερώτημα της χρήσης του ορισμού για την αντιμετώπιση εύρεσης ορίων (Bokhari & Yushau, 2006), και δεν πιστεύουν στην σημασία της γνώσης του τυπικού ορισμού για την κατανόηση βασικών εννοιών της Ανάλυσης (Juter, 2003; 2005a; 2006a). Για μια πρώτη διδακτική προσέγγιση του ε-δ ορισμού του ορίου, θα μπορούσαμε να έχουμε τα παρακάτω:

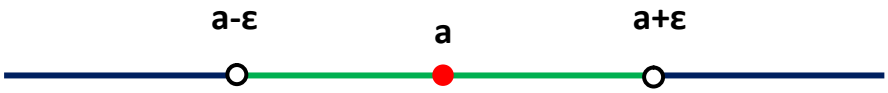
Θυμηθείτε ότι αν έχουμε σημεία (α,0) και (b,0) στον άξονα των x, τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι |α – b| .



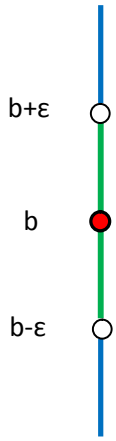
Όμοια , αν (0 , c) και (0 , d) δύο σημεία στον άξονα των ψ, τότε η μεταξύ τους απόσταση θα είναι |c – d| .

Υποθέτουμε τώρα ότι (α ,0) είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στον άξονα των x και ε είναι επίσης ένας τυχαίος θετικός αριθμός. Ψάχνουμε να βρούμε όλα τα σημεία της μορφής (x , 0) τέτοια ώστε η απόστασή τους από το δοσμένο

σημείο (α , 0) να είναι μικρότερη από ε. Δηλαδή ζητάμε τις λύσεις της ανίσωσης |x – α|< ε. Εύκολα βρίσκουμε ότι πρέπει α – ε < x < α + ε, δηλαδή x ∈ (α – ε , α + ε).



Όμοια , έστω ότι δίνεται το σημείο (0 ,b) πάνω στον άξονα των ψ και ένας θετικός αριθμός ε. Τότε για το y των σημείων (0 , y) που η απόστασή τους από το σημείο (0 , b) είναι μικρότερη από ε , θα ισχύει y ∈ (b – ε , b + ε).



Διαισθητικός ορισμός του Ορίου

Έστω f(x) μια συνάρτηση και a , L πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε :

το f(x) είναι οσοδήποτε κοντά στο L, όταν το x είναι κατάλληλα κοντά στο α και όχι α.

Τότε λέμε ότι το όριο της f(x) όταν το x προσεγγίζει το α, είναι L και γράφουμε $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Το να κάνουμε το f(x) οσοδήποτε κοντά στο L είναι το ίδιο με το να κάνουμε την απόσταση του f(x) από το L οσοδήποτε μικρή , δηλαδή η ποσότητα |f(x) – L| να γίνεται οσοδήποτε μικρή.

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να επαληθεύσουμε ή να ελέγξουμε την παραπάνω άποψη.

Πρώτα επιλέγουμε το πόσο μικρή θέλουμε να είναι η απόσταση του f(x) από το L. Επιλέγουμε ε>0 έτσι ώστε |f(x) - L| < ε .

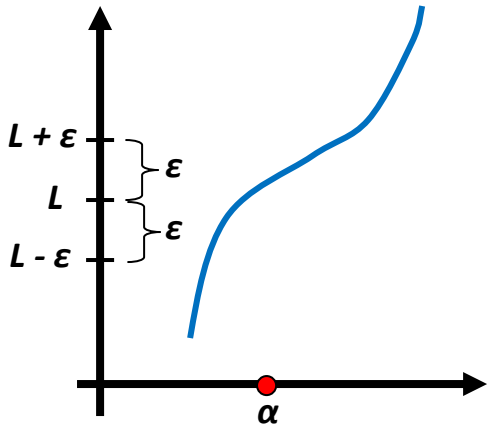
Έπειτα ψάχνουμε να βρούμε το πόσο μικρή θα πρέπει να κάνουμε την απόσταση του x από το α , δηλαδή την |x – α|. Βρίσκουμε δηλαδή ένα δ>0 , έτσι ώστε |x – α| < δ.

Συμπερασματικά :

1. Επιλέγουμε ένα ε>0 για το οποίο θέλουμε |f(x) - L| < ε
2. Βρίσκουμε ένα δ>0
3. Υποθέτουμε ότι 0 < |x – α| < δ
4. Τότε |f(x) - L| < ε

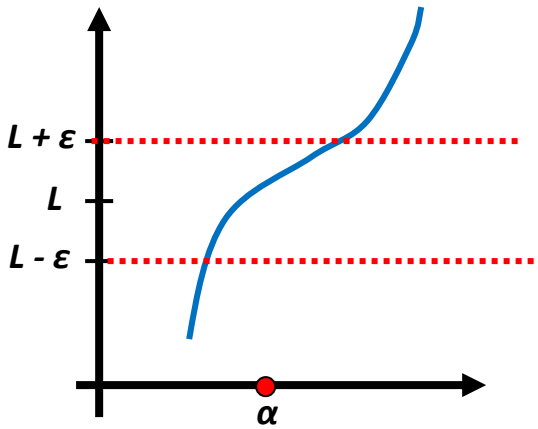
Για να ισχύει $\lim_{x \to a} f(x) = L$ πρέπει να επαληθεύσουμε ότι ισχύουν τα παραπάνω.

Έστω τώρα ότι έχουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης y = f(x) και έστω α ένας αριθμός στον χ – άξονα τέτοιος ώστε οποιοδήποτε διάστημα κέντρου α να έχει κοινά στοιχεία με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (εκτός του α). Έστω επίσης L ένας αριθμός στον y - άξονα.



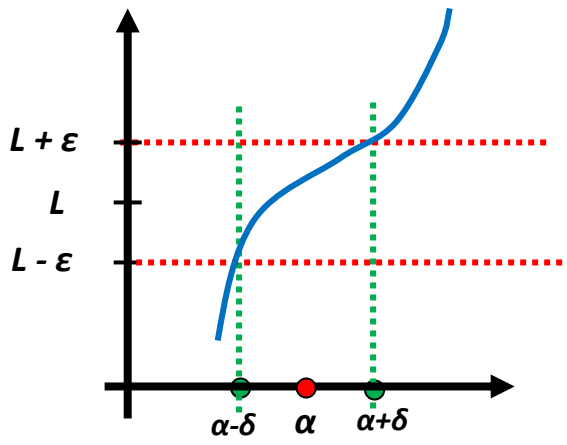
Πρώτα αποφασίζουμε το πόσο κοντά θέλουμε να είμαστε στο L. Καλούμε αυτή την απόσταση ε.

Αυτό σημαίνει ότι το f(x) να βρίσκεται μεταξύ των αριθμών L – ε , L + ε. Σχεδιάζουμε τις ευθείες y = L – ε , y = L + ε.



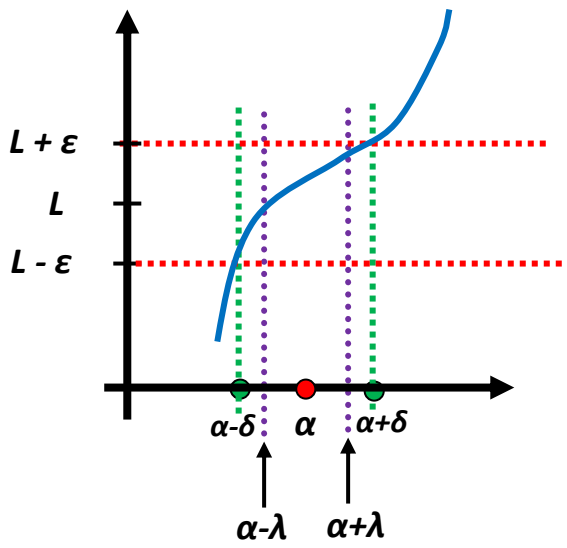
Πρέπει να καθορίσουμε το πόσο κοντά πρέπει να είναι το χ στο α, έτσι ώστε το f(x) να βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα (L – ε , L + ε) .

Επιλέγοντας το χ να βρίσκεται στο διάστημα (α – δ , α + δ)\{α} τότε το f(x) θα βρίσκεται στο διάστημα (L - ε , L + ε).



Αλλάζοντας το ε , θα έχουμε αντίστοιχη αλλαγή στο δ. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο χρησιμοποιώντας τις ευθείες y = L – ε, y = L + ε , χ = α – δ , χ = α + δ . Το πιο σημαντικό σε αυτή την κατασκευή είναι :

- η γραφική παράσταση της f για τα χ ∈ (α – δ , α + δ)\{α} να βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο.
- η γραφική παράσταση να συναντά το σύνορο του ορθογωνίου στις κάθετες γραμμές.



Η παραπάνω τεχνική που χρησιμοποιήθηκε δίνει το μεγαλύτερο δυνατό δ ώστε αν $\chi \in (\alpha - \delta , \alpha + \delta) \setminus \{\alpha\}$ τότε $f(x) \in (L - \varepsilon , L + \varepsilon)$.

Αν $0 < \lambda < \delta$ και αν $\chi \in (a - \lambda , a + \lambda) \setminus \{\alpha\}$ τότε συνεχίζει να ισχύει η σχέση $f(x) \in (L - \varepsilon , L + \varepsilon)$.

Ένας από τους λόγους για τους οποίους η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού βρίσκεται (κάποιες φορές) σε αποδιοργάνωση, είναι ότι οι έννοιες που κάποιοι έμπειροι μαθηματικοί θεωρούν διαισθητικές, δεν είναι «διαισθητικές» για τους μαθητές. Ο λόγος είναι ότι η διαίσθηση εξαρτάται από το γνωστικό υπόβαθρο του ατόμου κι αυτό με τη σειρά του εξαρτάται από τα βιώματα- εμπειρίες του ατόμου. Δεν είναι φυσικά καθόλου ασφαλής η υπόθεση ότι ο αρχάριος θα διαθέτει τις ίδιες διαισθήσεις με τον έμπειρο, ακόμα κι όταν μελετώνται φαινομενικά απλές οπτικές ενοράσεις. Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση δείχνει ότι οι ιδέες των μαθητών για πολλές έννοιες δεν είναι εκείνες που θα αναμένονταν (Tall, 1991).

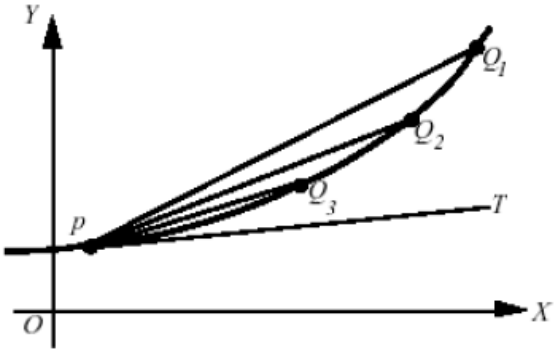
Λόγου χάρη, επειδή η τυπική ιδέα ενός ορίου αποδεικνύεται δύσκολη στην κατανόησή της στα αρχικά στάδια του απειροστικού λογισμού, εισάγεται συνήθως μέσω οπτικών ιδεών, όπως είναι π.χ. η παράγωγος, θεωρούμενη ως όριο μιας ακολουθίας τεμνουσών που προσεγγίζουν μια εφαπτομένη.

Η έννοια του ορίου διαθέτει πλούσια διαισθητική βάση και οι μαθητές που διδάσκονται για πρώτη φορά την έννοια, διατηρούν άτυπες αντιλήψεις για αυτήν. Αποτέλεσμα αυτών των αντιλήψεων είναι κάποιες φορές οι νοητικές αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν να είναι ασυνεπείς με την έννοια κατά συνέπεια και η εικόνα έννοιας που προκύπτει. Αυτό γίνεται φανερό με τις παρανοήσεις για την έννοια στις οποίες οδηγούνται. Η σημασία των άτυπων αντιλήψεων έχει απασχολήσει και απασχολεί ερευνητές της διδακτικής (Cornu,1983 ;Davis & Vinner,1986; Grugnetti & Rizza, 2007; Schwarzenberger & Tall, 1978; Williams,1991,2001).

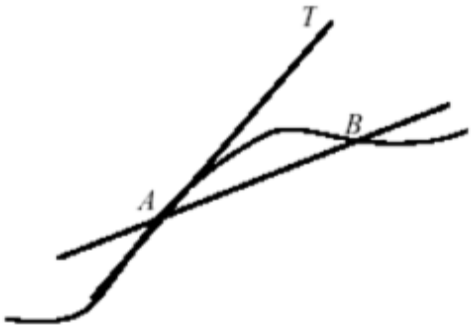
Η εμπειρική έρευνα δείχνει ότι ο μαθητής πρέπει να ξεπεράσει πλήθος εννοιολογικών δυσκολιών. Λόγου χάρη, ο Orton (1977) (όπως αναφέρει και η

Mamona-Downs, 2000) ανέφερε τις ακόλουθες απαντήσεις 110 μαθητών στον απειροστικό λογισμό.

Όταν ρωτήθηκαν τι συμβαίνει στις τέμνουσες PQ μιας σχεδιασμένης καμπύλης καθώς το σημείο Q_n τείνει προς το P κινούμενο πάνω στην καμπύλη, 43 μαθητές φάνηκαν μη ικανοί, ακόμα κι όταν παροτρύνθηκαν έντονα, να αντιληφθούν ότι η διαδικασία οδηγεί στην εφαπτομένη της καμπύλης.



Πολλοί μαθητές εμφανίστηκαν να εστιάζουν την προσοχή τους μόνο στη χορδή PQ, παρά το γεγονός ότι το διάγραμμα και η εξήγηση είχαν σκοπό να προσπαθήσουν να εξασφαλίσουν ότι αυτό δεν θα συνέβαινε. Μερικές χαρακτηριστικές, ανεπαρκείς απαντήσεις : «η γραμμή μικραίνει σε μήκος», «γίνεται σημείο», «το εμβαδόν μικραίνει». Παρόμοιο ερώτημα υποβλήθηκε από τον Tall (1985): Μια τέμνουσα που «τείνει» σε μια εφαπτομένη.

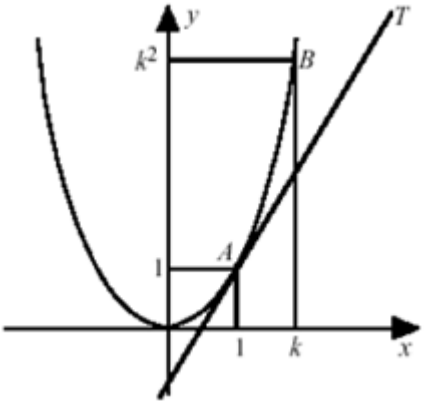


Καθώς B→A η γραμμή που διέρχεται από τα A, B τείνει στην εφαπτομένη AT.

Από ένα δείγμα εννέα 16-χρονων μαθητών που πέρασαν συνεντεύξεις σε βάθος (ως μέρος ενός ευρύτερου προγράμματος), τέσσερις είπαν ότι η πρόταση ήταν «αληθής» αλλά συνέδεσαν το σύμβολο B→A με διανυσματικό συμβολισμό και απεικόνισαν νοερά το B κινούμενο προς το A, κατά μήκος της ευθείας BA. Γι΄ αυτούς το ευθύγραμμο τμήμα BA «τείνει» βεβαίως στην εφαπτομένη, αλλά υπό μια απολύτως απροσδόκητη έννοια. Εν τω μεταξύ, ένας άλλος μαθητής θεώρησε την

πρόταση «ψευδή» επειδή «κάπου μακριά στο άπειρο η ευθεία ΑΒ και η εφαπτομένη ΑΤ θα απείχαν πάντοτε πολύ η μία από την άλλη, ανεξάρτητα από το πόσο το κοντά έρχεται το Α στο Β». Κατά συνέπεια είναι επίσης δυνατό να λάβουμε μια «λανθασμένη» απάντηση για έναν πολύ λογικό λόγο.

Στην έρευνα του Tall (1985), μια ερώτηση που είχε σκοπό να διερευνήσει τη διαισθητική φύση της οριακής διαδικασίας δόθηκε σε 160 μαθητές που επρόκειτο να ξεκινήσουν μια σειρά μαθημάτων απειροστικού λογισμού, 96 από τους οποίους είχαν ήδη κάποια εμπειρία στον απειροστικό λογισμό.



Στη γραφική παράσταση της $y = x^2$ έχουμε τα σημεία Α(1,1) και Β(k , k^2), ενώ το Τ είναι ένα σημείο πάνω στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο Α.

a) Γράψτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.
b) Γράψτε την κλίση της ΑΤ
c) Εξηγήστε πως θα μπορούσατε να βρείτε την κλίση της ΑΤ από βασικές αρχές.

Μόνο 16 μαθητές (10%) βρήκαν και την τιμή k+1 για την κλίση της ΑΒ και την τιμή 2 για την εφαπτομένη, ενώ 44 (24%) βρήκαν $(k^2-1)/(k-1)$ και 2. Μετά τους πρώτους δύο μήνες της σειράς μαθημάτων, οι αριθμοί μεταβλήθηκαν ελάχιστα σε 17 (11%) και 38 (24%) αντίστοιχα. Από αυτούς, μόνο ένας μαθητής στο προκαταρτικό τεστ (ο οποίος διέθετε ήδη εμπειρία στον απειροστικό λογισμό) κι ένας μαθητής στο τεστ μετά την διδασκαλία επέτρεψαν στο k να τείνει στο 1 για να βρουν ότι το k+1 τείνει στο 2. Κατά τις συνεντεύξεις άλλων μαθητών, κατέστη σαφές ότι καμία ιδέα ορίου δεν τους ήρθε στο νου. Κάποιος που βρήκε την κλίση της ΑΒ ίση με k+1 μπορούσε να δει οπτικά ότι η κλίση της ΑΤ ήταν περίπου 2. Υπονοήθηκε ότι καθώς το Β πλησίαζε το Α, το k θα πλησίαζε το 1 και το k+1 θα πλησίαζε το 2.

Στο παραπάνω πείραμα μια αυθόρμητη έννοια ορίου δεν εμφανίστηκε σε κανένα μαθητή που δεν είχε εμπειρία στον απειροστικό λογισμό. Τούτο δεν παρέχει

καμία υποστήριξη στην ιδέα ότι το γεωμετρικό όριο αποτελεί διαισθητική έννοια. Αντιθέτως, πολλές άλλες έρευνες υποδεικνύουν τα σοβαρά εννοιολογικά προβλήματα που συνδέονται με την έννοια του ορίου (Schwarzenberger & Tall 1977, Cornu 1981, Tall & Vinner 1981, Sierpiriska 1987). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες λόγω της γλώσσας, η οποία τους υποδηλώνει ότι ένα όριο «προσεγγίζεται» αλλά δεν μπορεί να επιτευχθεί. Αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την ατελή φύση της έννοιας, που πλησιάζει, αλλά ποτέ δε φαίνεται να φθάνει. Ακόμη περισσότερες δυσκολίες αντιμετωπίζουν στην χρήση των ποσοδεικτών όταν η έννοια καθορίζεται τυπικά.

Οι διαισθητικές πεποιθήσεις (Tirosh & Tsamir, 2002) που είναι ασυμβίβαστες με τον τυπικό ορισμό, είναι πιθανή αιτία για την χαμηλή αυτοπεποίθηση των μαθητών στην έννοια του ορίου. Αυτή η σύγκρουση πρέπει να κάνει τους μαθητές να σκεφτούν πως υπάρχουν πολύ περισσότερα πράγματα που πρέπει να κατανοήσουν ακόμα σχετικά με την έννοια.

Η Juter(2003) με έρευνα της σε πανεπιστήμιο της Σουηδίας αναζήτησε απαντήσεις στις ερωτήσεις :

- πως σχηματίζουν οι φοιτητές τις εσωτερικές αναπαραστάσεις τους για το όριο συνάρτησης,
- αν αλλάζουν αυτές οι αναπαραστάσεις με τη διδασκαλία κατά τη διάρκεια της έρευνας,
- αν κάτι αλλάζει τι είναι αυτό και
- αν οι αναπαραστάσεις των φοιτητών με υψηλές επιδόσεις διαφέρουν από αυτών με χαμηλότερες.

Στην έρευνα συμμετείχαν περίπου 100 φοιτητές, 19 ετών και άνω. Οι φοιτητές αυτοί είχαν διδαχθεί ανάλυση και άλγεβρα σε πρώτο επίπεδο. Παρακολούθησαν πρόγραμμα χωρισμένοι σε δύο υποομάδες (10 εβδομάδες για κάθε ομάδα), το οποίο περιελάμβανε δύο διαλέξεις (45 λεπτών) και δύο συνεδρίες εργασίας, τρεις ημέρες ανά εβδομάδα. Στη πρώτη σειρά μαθημάτων το όριο συνάρτησης παρουσιάστηκε πριν τη παραγώγιση ενώ στη δεύτερη ακολούθησε άλλη σειρά σε σχέση με το ολοκλήρωμα και τις σειρές. Μετά το τέλος του

προγράμματος, για τη πρώτη ομάδα η εξέταση ήταν μόνο γραπτή ενώ για τη δεύτερη γραπτή και προφορική.

Η Juter σημειώνει ότι είναι αδύνατο να γνωρίζουμε τι σκέφτονται οι φοιτητές. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να διαπιστώσουμε τι ολοκληρώνουν, τι λένε και τι κάνουν. Σε κάποιες περιπτώσεις οι φοιτητές δεν εγκαταλείπουν τις αρχικές αναπαραστάσεις εύκολα.

Όμως παρατηρήθηκαν κάποιες αλλαγές στις αναπαραστάσεις των φοιτητών. Ένας φοιτητής ενώ θεωρούσε το όριο σαν σύγκριση μεταξύ συναρτήσεων, άρχισε να το θεωρεί σαν ένα άφθαστο σημείο. Κάποιος άλλος ενώ εστίαζε στην απόσταση μεταξύ συνάρτησης και ορίου, άρχισε να θεωρεί το όριο σαν φράγμα που δεν μπορεί να ξεπεραστεί. Αυτές οι αλλαγές δεν δημιούργησαν τροποποιήσεις στις υπόλοιπες αναπαραστάσεις. Άλλαξαν όμως τον τρόπο που σκέφτονται αυτοί οι μαθητές για το όριο.

Η Juter (2003) στα συμπεράσματα της έρευνας σημειώνει ότι οι αναπαραστάσεις των φοιτητών κατά τη διάρκεια του προγράμματος αλλάζουν. Κάποιες αλλαγές ανακατασκευάζουν ολόκληρα τμήματα της εικόνας έννοιας. Άλλες αλλαγές είναι μικρότερες τροποποιήσεις στην εικόνα έννοιας. Ακόμη, κάποια τμήματα αν και λαθεμένα παραμένουν αναλλοίωτα.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ

2.1.1 Παραδοσιακές Θεωρίες Μάθησης και Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Λογισμικού

Η Κορδάκη (2001), αναφέρει ότι πριν αρκετά χρόνια, η επικρατούσα άποψη για το πώς ο μαθητής μαθαίνει ήταν ότι η γνώση μεταφέρεται από το δάσκαλο στο μαθητή με κάποιον τρόπο (Von Glasersfeld, 1987). Έτσι (Κορδάκη, 2001), οι εκπαιδευτικοί αλλά και οι ερευνητές της εκπαιδευτικής διαδικασίας είχαν το καθήκον της εξεύρεσης του αποδοτικότερου τρόπου για αυτήν τη μεταβίβαση. Η προσέγγιση αυτή χαρακτηρίζεται ως μοντέλο της μεταφοράς της γνώσης ή συμπεριφοριστικό μοντέλο μάθησης. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, το άτομο και τα αντικείμενα μάθησης αποτελούν ξεχωριστές οντότητες. Ως εκ τούτου, το άτομο που επιθυμεί να μάθει πρέπει οπωσδήποτε να κατασκευάσει μια αντιστοιχία μεταξύ των γνωστικών του δομών και αυτών των αντικειμένων μάθησης. Όσο πιο ταιριαστή είναι αυτή η αντιστοιχία τόσο πιο κοντά στην αλήθεια είναι το άτομο. Η αξιολόγηση αυτής της αντιστοιχίας των δομών θεωρείται ότι είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί από εξωτερικούς παράγοντες με απόλυτα αντικειμενικό τρόπο και ανεξάρτητα από το άτομο που μαθαίνει. Έτσι, η γνώση αποκτά έναν απόλυτο χαρακτήρα και η έμφαση δίνεται στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και όχι στη διαδικασία της μάθησης και στην εξέλιξη του μαθητή, ενώ εξωτερικά κίνητρα και αμοιβές χρησιμοποιούνται για τη βελτίωση της επίδοσής του. Επιπλέον, αγνοούνται οι γνωστικές λειτουργίες του νου και, ως εκ τούτου, οι ιδιαιτερότητες των ατόμων στη μάθησή τους, ενώ δίνεται έμφαση στις λειτουργίες της μνήμης με τη χρήση της επανάληψης για τη διόρθωση των λαθών των μαθητών. Η γνώση που αποκτιέται με τη διαδικασία που προαναφέρθηκε αποτελεί κυρίως πληροφορική γνώση και όχι γνώση που στηρίζεται στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης με βάση την οποία είναι

δυνατόν να εξάγονται συμπεράσματα, να γίνεται έλεγχος υποθέσεων, όπως επίσης διατύπωση γενικεύσεων και προβλέψεων.

Το μεταδοτικό συμπεριφοριστικό μοντέλο μάθησης ήταν το μοντέλο το οποίο επηρέασε τις αρχικές (προς το τέλος της δεκαετίας του 1960) προσπάθειες σχεδιασμού λογισμικού για την εκπαίδευση (Κορδάκη, 2001). Ο τύπος του λογισμικού που παραγόταν εκείνη την εποχή ήταν παιχνίδια, προσομοιώσεις και διδακτικά υλικά, ενώ το εκπαιδευτικό αυτό λογισμικό έτρεχε μόνο σε μεγάλους υπολογιστές τύπου main frame (Plato programs) (Kaput, 1992). Τα διδακτικά υλικά, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν και ως προσομοιώσεις των βιβλίων, αποτελούνταν κυρίως από σειριακές παρουσιάσεις των εννοιών που επιλέγονταν για διδασκαλία. Η αλληλεπίδραση του μαθητή με το πρόγραμμα ήταν περιορισμένη. Ουσιαστικά, ο μαθητής μπορούσε μόνο να προχωρήσει μια σελίδα μπρος ή πίσω, ή να γυρίσει στον πίνακα περιεχομένων του μαθήματος και να λύσει ασκήσεις όπως αυτές που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Αυτά τα διδακτικά υλικά συνοδεύονταν συνήθως από ένα σύστημα αξιολόγησης της απάντησης το οποίο εκφραζόταν με σχόλια επιβράβευσης προς το μαθητή ή με κάποια παρότρυνση να συνεχίσει στην περίπτωση που έκανε λάθος. Λίγο αργότερα (στη δεκαετία του 1970) έγινε μια προσπάθεια αντικατάστασης του δασκάλου από τον υπολογιστή. Κατασκευάστηκαν τότε εκπαιδευτικά προγράμματα που προσπαθούσαν να προσομοιώσουν τους παραδοσιακούς τρόπους διδασκαλίας (παρουσίαση κάποιας ύλης και εξέταση) και τα παραδοσιακά συστήματα αναπαράστασης (κείμενα, στατικές εικόνες, στατικές γραφικές παραστάσεις), δηλαδή τα συστήματα που χρησιμοποιούσαν τα «αδρανή» μέσα, με κύριο εκπρόσωπο τους το περιβάλλον χαρτί-μολύβι (Kaput, 1992). Ο τρόπος αλληλεπίδρασης με αυτά τα προγράμματα προσπαθούσε να μιμηθεί την αλληλεπίδραση μαθητή - δασκάλου όπως αυτή είχε προβλεφθεί από το σχεδιαστή του λογισμικού. Η ποιότητα των δραστηριοτήτων που τα προγράμματα αυτά υποστήριζαν ήταν τύπου εκγύμνασης και εξάσκησης (drill and practice, Becker, 1990). Στη διάρκεια της δεκαετίας του 1980 και μέχρι σήμερα κατασκευάστηκαν προγράμματα λογισμικού που εισήγαγαν νέες διαστάσεις στην εκπαίδευση. Τέτοια προγράμματα ήταν περιβάλλοντα που στηρίζονταν σε γλώσσες προγραμματισμού, όπως η Logo, οι προσομοιώσεις και οι

μικρόκοσμοι με τη χρήση γλωσσών υψηλού επιπέδου και αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού (high level, object-oriented programming languages).

Σήμερα οι υπολογιστές υπάρχουν σχεδόν σε κάθε σπίτι, έχουν εισαχθεί στα σχολεία και γενικά έχουν οδηγήσει σε μια νέα εκπαιδευτική εποχή. Ιδιαίτερα οι δυνατότητες των μικρόκοσμων ανοίγουν στους μαθητές δυνατότητες να εξερευνήσουν πραγματικά συστήματα και να κάνουν έλεγχο υποθέσεων με παραγωγικό ή επαγωγικό τρόπο. Χρησιμοποιώντας τις προσομοιώσεις και την αναγνώριση πρότυπων σε συνδυασμό με το στοιχείο της δυνατότητας αλληλεπίδρασης βοηθούν τα παιδιά να αναπτύξουν μοντέλα ανάλυσης ή πρόβλεψης που χαρακτηρίζονται από διανοητικές εικόνες και δράσεις όπως και λογική σκέψη (Janvier, 1987c).

2.1.2 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτικό λογισμικό

Σε αντιδιαστολή με τις παραδοσιακές δυτικές φιλοσοφίες που θεωρούσαν ανεξάρτητο τον πραγματικό κόσμο από το άτομο που προσπαθούσε να τον γνωρίσει, αναπτύχθηκε η επιστημολογική θεώρηση του εποικοδομισμού (constructivism) για τη γνώση και τη μάθηση (Von Glasersfeld, 1995). Ο εποικοδομισμός στηρίζεται στη γενετική επιστημολογία, όπως αυτή αναπτύχθηκε από τον J. Piaget. Από αυτή τη θεώρηση, η γνώση δε μελετάται ως κάτι απόλυτο και ανεξάρτητο από το άτομο, αλλά συνδέεται με την ανάπτυξή του (Piaget, 1970). Η γνώση δεν αντιμετωπίζεται πια ως μια παθητική στάση μίμησης των συμπεριφορών των ενηλίκων αλλά ως μια υποκειμενική και κατασκευαστική δραστηριότητα του ατόμου προκειμένου να προσαρμοστεί στο ζωτικό του περιβάλλον, όπως και στο περιβάλλον των εννοιών μέσα στις οποίες ζει (Von Glasersfeld, 1995). Επιπλέον, κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρήσεις για τη γνώση γίνονται αποδεκτές (Vygotsky, 1978), οι οποίες δίνουν έμφαση στο ρόλο των υλικών μέσων και ειδικότερα, των εργαλείων (Cobb, 1997), στο ρόλο της δραστηριότητας (Leont'ev, 1981, ό.π. ανάφ. στο Noss και Hoyles, 1996), στο ρόλο της επικοινωνίας με άλλα άτομα ή ομάδες (Vygotsky, 1978) και, γενικότερα, στο ρόλο του πλαισίου των συμφραζομένων με το οποίο αλληλεπιδρά το άτομο (Lave, 1988, Ko rdaki και Potari, 1999).

Το λάθος, σύμφωνα με τις εποικοδομιστικές θεωρίες μάθησης, αποτελεί διαφορετική αλλά ισότιμη άποψη που έχει νόημα για εκείνον που την προτείνει και, επομένως, πρέπει να αντιμετωπίζεται από τον εκπαιδευτικό ως ευκαιρία για μάθηση (Cobb, 1991). Από αυτή τη θεώρηση, η μάθηση αντιμετωπίζεται ως δικαίωμα όλων των μαθητών και οι εκπαιδευτικοί έχουν το καθήκον να δημιουργούν περιβάλλοντα μάθησης τα οποία να δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να εξελιχθούν και να τροποποιήσουν τις απόψεις τους. Για το σκοπό αυτόν, κρίνεται σκόπιμη η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που σχετίζονται με προβλήματα της καθημερινής ζωής, τους δημιουργούν ισχυρό εσωτερικό κίνητρο και ανταποκρίνονται στο γνωστικό τους επίπεδο (Von Glasersfeld, 1987). Επιπλέον, οι ανοικτές και διερευνητικές δραστηριότητες οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα πολλαπλών επιλύσεων στους μαθητές παρέχουν σε αυτούς την ευκαιρία να εκφράσουν τις ατομικές τους διαφορές στη μάθηση (Magone, Cai, Silver και Wang, 1994, Hadas και Arcavi, 1997). Ο ρόλος του καθηγητή δεν είναι να επιβραβεύει τις σωστές ή να διορθώνει τις λαθεμένες επιλύσεις των μαθητών του. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να αναγνωρίζει ότι τα παιδιά δεν αποτελούν μικρογραφία των ενηλίκων, αλλά σκέπτονται με διαφορετικό τρόπο από αυτούς και ότι τα μαθηματικά του δασκάλου είναι διαφορετικά από αυτά τα οποία ο κάθε μαθητής κατασκευάζει (Steffe και Kieren, 1994, Confrey, 1995, Cobb και Steffe, 1983). Ως εκ τούτου, ο εκπαιδευτικός πρέπει να διερευνά και να δημιουργεί μοντέλα για τις αφετηρίες στις οποίες βρίσκονται οι μαθητές του και να βρίσκει τρόπους ώστε να τους δίνει ευκαιρίες να αυτοδιορθώνονται και να κατασκευάζουν τη γνώση τους μέσα από τις δικές τους γνωστικές λειτουργίες, όπως επίσης να τους προσφέρει ευκαιρίες για μαθηματικές γενικεύσεις και επεκτάσεις. Ιδιαίτερα σημαντικός χαρακτηρίζεται ο ρόλος της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης των απόψεων των μελών μιας ομάδας στα πλαίσια της προσπάθειας ανακατασκευής σημασιών των μαθηματικών εννοιών (Bauersfeld, 1988). Επιπλέον, αναγνωρίζεται ο ρόλος του αναστοχασμού του μαθητή στις ενέργειές του, όπως και της γνωστικής σύγκρουσης μεταξύ των ενεργειών του μαθητή και των αποτελεσμάτων τους ως εργαλείων για την τροποποίηση των απόψεών του (Piaget, 1970; Von Glasersfeld, 1987). Διακρίνεται, επίσης, ο ρόλος των υλικών μέσων και, ειδικότερα, του εκπαιδευτικού λογισμικού πολλαπλών αναπαραστάσεων ως περιβαλλόντων τα οποία παρέχουν ευκαιρίες

στους μαθητές να εκφράσουν τις ατομικές τους διαφορές στη μάθηση (Dyfour-Janvier, Bednarz και Belanger, 1987). Ειδικότερα, αναγνωρίζεται η σημασία των εικονικών αναπαραστάσεων, με τη χρήση των οποίων ορισμένες φορές είναι ευκολότερη η έκφραση της μαθηματικής γνώσης των μαθητών (Sutherland, 1995).
Ας εξετάσουμε δύο ιδέες του Vygotsky :

α) Κατ΄ αρχήν έχουμε την ιδέα του για τη «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» (ZPD). Αυτή είναι η απόσταση μεταξύ του φαινομένου επιπέδου ανάπτυξης ενός παιδιού (όπως προσδιορίζεται μέσα από τη λύση ενός προβλήματος) και του εν δυνάμει επιπέδου ανάπτυξης (όπως προσδιορίζεται μέσα από τη λύση ενός προβλήματος κάτω από την καθοδήγηση ενός ενήλικα ή με τη συνεργασία πιο ικανών συμμαθητών του).

Όταν ένας μαθητής στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος συναντήσει ένα εμπόδιο, τότε ο καθηγητής τον υποβοηθά έμμεσα με μικρές ευκολότερες ερωτήσεις, ώστε να τον οδηγήσει με κριτικό τρόπο σκέψης στη δυνατότητα ξεπεράσματος του εμποδίου. Η «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» είναι το κενό που πρέπει να γεφυρωθεί από τον καθηγητή με κατάλληλο τρόπο, κλιμακωτά.

Ποια βοήθεια μπορούν να προσφέρουν οι ΤΠΕ σε αυτή την περίπτωση;

Η ομαδική εργασία 2 ή 3 ατόμων για την επίλυση ενός προβλήματος μπροστά σε έναν υπολογιστή μπορεί να δημιουργήσει ένα περιβάλλον το οποίο θα μπορεί μπορεί να προσφέρει την κλιμακωτή ζεύξη που απαιτείται. Αυτό εξαρτάται από τη σύνθεση της ομάδας των μαθητών, τον τύπο του λογισμικού και την κατάλληλη προσαρμογή του σεναρίου διδασκαλίας με την μεσολάβηση του καθηγητή.

β) Η δεύτερη ιδέα του Vygotsky αφορά το ζωτικό ρόλο με τον οποίο η κουλτούρα και το κοινωνικό περιβάλλον επιδρούν στη μάθηση. Η μάθηση είναι κοινωνική αλλά και ατομική δραστηριότητα και ένα διαδραστικό πρόγραμμα σε υπολογιστή που δίνει κίνητρα και ενθαρρύνει τη συνεργασία και την ουσιαστική μάθηση ανάμεσα στις ομάδες των παιδιών αποτελεί σίγουρα ένα πολύ πλούσιο περιβάλλον.

Στη δεκαετία του 1980, όπως ήδη αναφέρθηκε, εισήχθη η έννοια του μικρόκοσμου, η οποία χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Papert (1980), ο οποίος

υποστήριξε ότι οι μικρόκοσμοι αποτελούν «μικρά πεδία πιαζετιανών μαθηματικών» (mini domains of Piazetian Mathematics). Σε αυτούς τους χώρους είναι δυνατός ο αναστοχασμός και η αφαίρεση, η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη νέων λογικομαθηματικών δομών. Ο όρος «πιαζετιανά μαθηματικά» χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να δοθεί έμφαση στον ενεργητικό και κατασκευαστικό χαρακτήρα των μαθηματικών, σε αντιπαράθεση με τα σχολικά μαθηματικά. Ένας μικρόκοσμος, βασικά, αποτελεί έναν εννοιολογικό χώρο (Vergnaud, 1983, ό.π. Hilel, 1992) ο οποίος συνίσταται από τις ακόλουθες αλληλοσυσχετιζόμενες ουσιαστικές δυνατότητες:

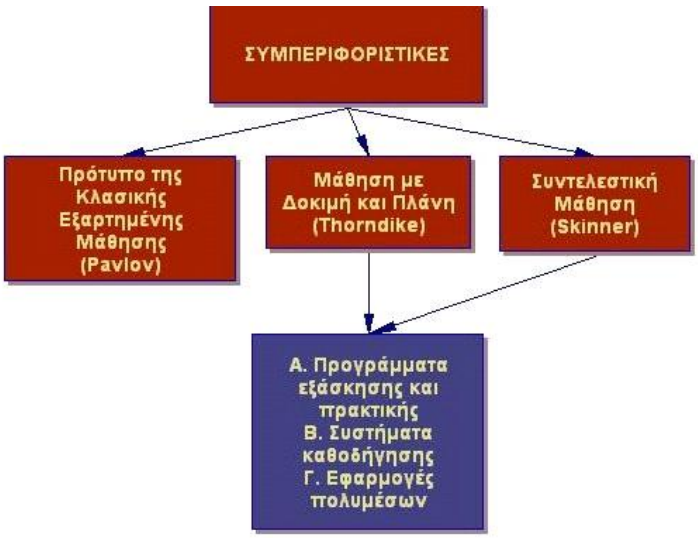
1) Ένα σύνολο από βασικά αντικείμενα, στοιχειώδεις λειτουργίες που μπορούν να επιδράσουν σε αυτά και κανόνες που εκφράζουν τους τρόπους με τους οποίους οι λειτουργίες επιδρούν σε αυτά τα αντικείμενα. Το σύνολο αυτό αποτελεί συνήθη δομή ενός τυπικού συστήματος από μια μαθηματική οπτική (Balacheff και Kaput, 1996).

2) Ένα φαινομενολογικό χώρο ο οποίος συνδέει αντικείμενα και ενέργειες επί των εννοιολογικών αντικειμένων με τα φαινόμενα στην οθόνη του υπολογιστή. Αυτό το φαινομενολογικό πεδίο καθορίζει τον τύπο της ανατροφοδότησης που ο μικρόκοσμος παρέχει, σε συνάρτηση με τις ενέργειες και τις αποφάσεις του χρήστη (Balacheff και Kaput, 1996). Ο εννοιολογικός χώρος, σύμφωνα με τον Vergnaud (1983, ό.π. Hilel, 1992), αποτελείται «από ένα εκτεταμένο σύνολο καταστάσεων για το χειρισμό διαφορετικών διασυνδεδεμένων εννοιών, διαδικασιών και αναπαραστάσεων».

Επιπλέον, ένας μικρόκοσμος παρέχει τη δυνατότητα σύνδεσης των υπολογιστικών αντικειμένων με σχέσεις (Laborde, 1998, · Pufall, 1988). Η δυνατότητα δημιουργίας νέων λειτουργιών (μακροκατασκευών) από το συνδυασμό ήδη υπαρχόντων ενυπάρχει επίσης στον ορισμό του μικρόκοσμου. Από αυτή την άποψη, μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι ένας μικρόκοσμος αναπτύσσεται παράλληλα με τη γνώση του μαθητή (Hoyles, 1993). Τα αντικείμενα των μικρόκοσμων θεωρούνται ως ενδιάμεσα αντικείμενα μεταξύ των συγκεκριμένων, άμεσα διαχειρίσιμων και των αφηρημένων συμβολικών αντικειμένων (Papert, 1980,

ό.π. Hoyles, 1993). Αυτά τα περιβάλλοντα μπορούν να συνδυάσουν τις δυνατότητες ανάπτυξης της εμπειρικής λογικής σκέψης και της παραγωγικής λογικής και ως εκ τούτου, αποτελούν περιοχές που υπόσχονται πολλά για το μέλλον της διδασκαλίας και της μάθησης (Balacheff και Kaput, 1996). Τα τελευταία χρόνια έχουν κατασκευαστεί αρκετοί μικρόκοσμοι για την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών. Ο μικρόκοσμος Cabri - geometry (Laborde, 2001) για παράδειγμα, αποτελεί ένα παράδειγμα δυναμικού περιβάλλοντος για τη μάθηση γεωμετρικών εννοιών.

Οι διάφορες (σύγχρονες) εκπαιδευτικές εφαρμογές των υπολογιστών βασίζονται ρητά ή άρρητα σε θεωρίες μάθησης και ψυχοπαιδαγωγικές θεωρίες (Κόμης 2004). Μια συνοπτική σύνδεση των διαφόρων τύπων λογισμικού με τις θεωρίες μάθησης είναι η παρακάτω (Κόμης, 2004):



Στα παραπάνω σχήματα κατανέμονται οι τρεις μορφές ψηφιακών τεχνολογιών σε σχέση με τις τρεις θεωρίες μάθησης, οι Συμπεριφοριστικές, Γνωστικές και Κοινωνικοπολιτισμικές.

Συμπεριφοριστικές μορφές

Είναι η φιλοσοφία που βρίσκεται πίσω από λογισμικά κυρίως εξάσκησης και πρακτικής και γενικά πίσω από λογισμικά που ρίχνουν το βάρος περισσότερο στην

ατομική εργασία του μαθητή. Στα λογισμικά αυτά χρησιμοποιείται εκτενώς η λογική της θετικής ενίσχυσης (με ήχους, εικόνες κλπ.) και ακολουθείται συνήθως γραμμική πορεία, κατανεμημένη σε επάλληλα στάδια κλιμακούμενης δυσκολίας. Ο κάθε μαθητής μπορεί να ακολουθεί το δικό του ρυθμό, κάτι που είναι θετικό, αλλά δεν αξιοποιείται η συνεργατική μάθηση. Στα θετικά αυτών των λογισμικών συγκαταλέγονται η «νομιμοποίηση» του μαθητή να κάνει λάθος (δοκιμή και πλάνη), η άμεση αξιολόγηση της πράξης, η εξατομίκευση και επίτευξη μικρών και σταδιακών επιτυχιών που ενισχύουν το αυτοσυναίσθημα των λιγότερο «προχωρημένων» μαθητών. Οι δραστηριότητες εστιάζουν σε ερωτηματολόγια πολλαπλών επιλογών με συστηματική και άμεση διόρθωση των απαντήσεων. Ως παιδαγωγικοί στόχοι τίθενται η συνεχής και σταθερή δραστηριότητα του μαθητευόμενου, η παρατήρηση συγκεκριμένων συμπεριφορών.

Σοβαρό μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι οι μαθητές εθίζονται στην εξάρτηση από μια εξωτερική πηγή ενίσχυσης και από εξωτερικό έλεγχο των πράξεών τους με μικρή ανατροφοδότηση και δυνατότητα για αυτοαξιολόγηση (Ράπτης & Ράπτη, 2007).

Γνωστικές μορφές

Τα τελευταία χρόνια οι θεωρίες που εντάσσονται στο επιστημονικό παράδειγμα του εποικοδομισμού (γνωστικές και κοινωνικοπολιτισμικές) είναι αυτές που γίνονται ευρύτερα αποδεκτές ως υπόβαθρο ανάπτυξης εκπαιδευτικού λογισμικού.

Προγράμματα προσομοιώσεων και μοντελοποιήσεων, «κατασκευής» μικρόκοσμων, επίλυσης προβλημάτων, ανοιχτά περιβάλλοντα μάθησης που επιτρέπουν είτε στον εκπαιδευτικό να παρέμβει και να τα προσαρμόσει είτε, το σπουδαιότερο, στο μαθητή να παρέμβει ώστε να ελέγξει την πορεία της μαθησιακής διαδικασίας, προγράμματα που προσφέρουν πολλαπλές αναπαραστάσεις των εννοιών, προσφέρονται ως εργαλεία που βοηθούν στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, την πρωτοβουλία, ευνοούν τις συνεργατικές μορφές μάθησης και εν τέλει, εφόσον είναι συνεπή στη θεωρητική τους θεμελίωση,

υποστηρίζουν τη σταδιακή δόμηση της γνώσης σε ατομικό αλλά και ομαδικό επίπεδο.

Οι δραστηριότητες περιλαμβάνουν εξερεύνηση γεωμετρικών και εννοιολογικών μικρόκοσμων, προγραμματισμό σε ανοικτό και φιλικό περιβάλλον, ενώ ως παιδαγωγικοί στόχοι τίθενται η μάθηση σε μικρές ομάδες, η διαλογική σχέση δασκάλου-μαθητή, η διερεύνηση λογικομαθηματικών εννοιών μέσω προγραμματιστικών εφαρμογών, ο πειραματισμός και η επίλυση προβλήματος.

Ο/η εκπαιδευτικός, λειτουργώντας ως εμψυχωτής και αρωγός στις προσπάθειες των μαθητών, φροντίζει να δημιουργεί το κατάλληλο κλίμα, συντονίζει και βοηθά στην οργάνωση των δραστηριοτήτων.

Κοινωνικοπολιτισμικές μορφές

Όπως είδαμε και στην ανάπτυξη των θεωριών, το επιπλέον στοιχείο στις κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες είναι το βάρος που ρίχνουν στην κοινωνική αλληλεπίδραση και στο ρόλο που παίζει το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον, όπως εκφράζονται μέσω των συμβολικών συστημάτων, στη συγκρότηση της γνώσης.

Αυτές οι θεωρίες βρίσκονται πίσω από περιβάλλοντα συνεργατικής μάθησης και εργαλεία ανοιχτά, τόσο στον τρόπο που θα τα αξιοποιήσει ο μαθητής, όσο και στις επιρροές του περιεχομένου τους και τις μορφές της πραγματικότητας που προσφέρουν.

Η θεωρία του Vygotsky ειδικά, με τις έννοιες της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης και του πλαισίου στήριξης είναι βασική σε λογισμικά που χρησιμοποιούν σταδιακή και κατανεμημένη γνωστική στήριξη ώστε πολλοί μαθητές να ανέλθουν από το στάδιο του «απλού εξερευνητή της αυθόρμητης μάθησης», με τη βοήθεια πιο έμπειρων ατόμων, σε ανώτερα επίπεδα.

Οι δραστηριότητες που προβάλλονται είναι αυτές της αναζήτησης-πρόσβασης σε ευρύ φάσμα αρχείων για την κατασκευή project, η επικοινωνία χρηστών-ηλεκτρονικό ταχυδρομείο και οι τηλεδιασκέψεις. Ως παιδαγωγικοί στόχοι

τίθενται η αρτιότερη οργάνωση της διδασκαλίας, οι συλλογικές καταστάσεις μάθησης και η οικονομία χρόνου και πόρων.

2.2 ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

2.2.1 Ορισμός του εκπαιδευτικού λογισμικού

Η λέξη εκπαίδευση έχει τη ρίζα της στη λέξη παιδεία (Πρέζας, 2003). Αυτή είναι μια ευρεία έννοια που περιλαμβάνει τόσο την παροχή στάσεων όσο και την έννοια της κατάρτισης. Η λέξη Λογισμικό αναφέρεται στα προγράμματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στους Η/Υ. Κάνοντας αναγωγή στην ετυμολογία της λέξης, μπορούμε να πούμε πως τα προγράμματα αυτά οικοδομούνται με κάποια «λογική», με κάποια μέθοδο και έχοντας κάποιο σκοπό, κάποιο στόχο. Άρα, εκπαιδευτικό λογισμικό θεωρείται το λογισμικό που περιέχει διδακτικούς στόχους, ολοκληρωμένα σενάρια με παιδαγωγική σημασία και κυρίως επιφέρει συγκεκριμένα διδακτικά και μαθησιακά αποτελέσματα (Τ.Α. Μικρόπουλος,2000).

Ως εκπαιδευτικό λογισμικό θεωρούμε λοιπόν το μέσο της εκπαιδευτικής διαδικασίας που αποσκοπεί στη διευκόλυνση της μάθησης, χρησιμοποιώντας ως κύριο εργαλείο τον υπολογιστή. Η διευκόλυνση της μάθησης μπορεί να επιτευχθεί είτε χρησιμοποιώντας το εκπαιδευτικό λογισμικό ως συμπληρωματικό μέσο υποστήριξης της εκπαιδευτικής διαδικασίας από τον εκπαιδευτικό, είτε ως υποστηρικτικό μέσο αυτοδιδασκαλίας από τον μαθητή (Μ. Γρηγοριάδου, Σ. Μπακογιάννης 1991, όπ. ανάφ. στο Πρέζας, 2003).

2.2.2 Είδη εκπαιδευτικού λογισμικού - Κατηγοριοποίηση αναφορικά με το σκοπό που δημιουργήθηκε το ΕΛ

Οι τρόποι που χρησιμοποιούμε για να κατηγοριοποιήσουμε το ΕΛ εξαρτώνται από το αν προσεγγίζουμε το ΕΛ από την τεχνοκρατική ή από την παιδαγωγική πλευρά, όπως και από το αν προσεγγίζουμε το ΕΛ από την πλευρά της εκπαίδευσης ή της κατάρτισης. Τέλος εξαρτάται από τους διδακτικούς στόχους που έχουμε βάλει και ποιος είναι ο σκοπός που δημιουργήθηκε το ΕΛ.

Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες Εκπαιδευτικού Λογισμικού *γενικού, ειδικού σκοπού* και *λογισμικό παρουσίασης*:

- *Γενικού* ονομάζουμε αυτό που με τη βοήθειά του μπορούμε να διδάξουμε όλα τα μαθήματα με διαθεματική προσέγγιση (π.χ. μικρόκοσμοι). Τότε ο υπολογιστής χρησιμοποιείται ως εργαλείο έρευνας (Inquiry), Επικοινωνίας (Communication), Κατασκευής (Construction) και Έκφρασης (Expression).

  Βασικές υποκατηγορίες αυτής ορίζονται οι εξής (Πέτρου, Φεσάκης, Καλαβάσης, Δημητρακοπούλου, 2000):

  a) Λογισμικό προσποίησης και δραματοποίησης.

  b) Λογισμικό κατασκευής μοντέλων, προσομοιώσεων, μικρόκοσμων.

  c) Λογισμικό αλληλεπίδρασης με νοήμονα κατασκευάσματα.

- *Ειδικού* σκοπού όταν είναι εστιασμένο σε μια γνωστική περιοχή(π.χ. Geometres SketchPad)

- Ο Υπολογιστής σαν *εργαλείο παραγωγής και παρουσίασης* διδακτικού υλικού (π.χ. PowerPoint της Microsoft) με :

  a) άμεση αλληλεπίδραση Η/Υ και χρήστη

  b) μέσω *τηλεεκπαίδευσης.*

2.2.3 Κατηγοριοποίηση ΕΛ σχετική με την παιδαγωγική μέθοδο που ακολουθήθηκε

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες ΕΛ : τα Ανοικτά Περιβάλλοντα και τα Πακέτα Κατάρτισης(Εξάσκησης). Έχουμε συνοπτικά τις ακόλουθες κατηγορίες και υποκατηγορίες (Δ. Αλιμήσης, 2000):

Ως **ανοικτά περιβάλλοντα** ονομάζουμε τα προγράμματα όπου μαθητές και εκπαιδευτικοί μπορούν να κατασκευάσουν ότι επιθυμούν. Αυτά τα λογισμικά στηρίζονται στις μεταθεωρίες μάθησης, όπως στον κονστρουκτιβισμό, στις κοινωνικοπολιτικές θεωρίες και στη θεωρία πολλαπλής νοημοσύνης. Υποκατηγορίες αυτής της γενικής κατηγορίας ΕΛ είναι (Πρέζας, 2003):

α. Λογισμικό ανακαλυπτικής μάθησης(discovery model): ο μαθητής με την μελέτη προσομοιώσεων ανακαλύπτει το αντικείμενο μάθησης.

β. Διερευνητικό λογισμικό: μορφές αυτού του τύπου μάθησης είναι η διερευνητική μάθηση, η ανάπτυξη τεχνικών επίλυσης προβλημάτων και η μέθοδος project-based learning.

γ. Λογισμικό στο οποίο ο υπολογιστής χρησιμοποιείται σαν εργαλείο ανάπτυξης νοητικών δεξιοτήτων (mindtool).

δ. Λογισμικό στο οποίο ο υπολογιστής χρησιμοποιείται σαν μέσο αναζήτησης της πληροφορίας και μέσο επικοινωνίας (μηχανές αναζήτησης, portals εκπαίδευσης).

ε. Λογισμικό προσομοίωσης

στ. Γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. LOGO). «Περικλείουν» ολόκληρη τη θεωρία μάθησης, καθώς χρησιμοποιούν ανοικτό επεκτάσιμο περιβάλλον προγραμματισμού και ανάπτυξης (Τ.Α. Μικρόπουλος 2000).

ζ. Νοήμονα συστήματα εκπαίδευσης ή διδαχής (τα λογισμικά αυτά «αποφασίζουν» και «κατασκευάζουν» το διδακτικό υλικό, επιλέγουν την προσφορότερη διδακτική μέθοδο, ανταποκρίνονται κατάλληλα σε μαθησιακά προβλήματα.

Αν θα έπρεπε να σταθούμε ιδιαίτερα σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες, αυτή σίγουρα είναι το «διερευνητικό λογισμικό». Διερευνητικό είναι το λογισμικό που παρέχει δυνατότητες για τη δυναμική σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων οντοτήτων και εννοιών του μελετώμενου γνωστικού χώρου, την εξομοίωση φυσικών φαινομένων, τη διενέργεια πειραμάτων και συγκρίσεων μεταξύ διαφορετικών σεναρίων με αλλαγή συνθηκών και παραμέτρων, την υποστήριξη ομαδικής εργασίας και ανταλλαγής δεδομένων, εργασιών και εμπειριών, την αποθήκευση των ενεργειών του μαθητή για μετέπειτα ανάλυση, τη χρήση πλούσιου εποπτικού υλικού (χάρτες, animations, γραφήματα, κ.λπ.) (Koutlis, Kynigos, 2000)

2.2.4 Τα χρώματα στο ΕΛ

Τα χρώματα συμμετέχουν αποφασιστικά στην συνολική εικόνα παρουσίασης του ΕΛ, γιατί εκτός από την καλαισθησία παίζουν σπουδαίο ρόλο και στο εκπαιδευτικό αποτέλεσμα. Τα χρώματα λοιπόν :

- Βοηθούν στην λήψη αποφάσεων (Reising J. M. , and Aretz A. J. 1987).
- Συμβάλλουν στη μάθηση (Fischler M. and Fircshein O. 1998, Durrett H.L. and Stimmel D.T. 1987, Bertin J. 1983) .
- Αποκαλύπτουν οργανώσεις και μορφές (F.L. Engel, 1980).
- Προσθέτουν διαστάσεις.
- Κάνουν τις εικόνες πιο ρεαλιστικές (R.D. Filley, 1982).
- Επιδρούν στα ανθρώπινα συναισθήματα(Valdez, P. & Mehrabian, A. 1994).

Το μέγεθος της επίδρασης των χρωμάτων αυξάνει με την ακόλουθη χρωματική κλίμακα: μπλε, πράσινο, κίτρινο, πορτοκαλί, κόκκινο.

2.3 ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

2.3.1 Η Εξέλιξη της ΔτΜ με εργαλεία Ψηφιακής Τεχνολογίας

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για τη μαθησιακή διαδικασία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα βασισμένα σε εργαλεία σύγχρονης τεχνολογίας αρχίζουν με τη θεώρηση του Αμερικανού μαθηματικού και παιδαγωγού από το Media Lab του MIT, S. Papert (1980). Το βασικό χαρακτηριστικό της θεώρησης του Papert είναι η σχέση της με τη θεωρία του J. Piaget και η προσέγγιση που προσδίδεται στην αξιοποίηση της σύγχρονης τεχνολογίας, καθώς αντιμετωπίζεται ως πολιτισμικό εργαλείο. Ο Papert ήθελε να περιγράψει τη μάθηση ως μια δραστηριότητα που πηγάζει από τη διερευνητική και δημιουργική ανθρώπινη φύση. Πιο συγκεκριμένα προσέγγισε την εκμάθηση των μαθηματικών ως μια διαδικασία φυσιολογικής εξέλιξης της λογικομαθηματικής σκέψης, παραλληλίζοντάς την με την εκμάθηση της γλώσσας.

Τόνισε ότι μαθαίνουμε να μιλάμε και να σκεφτόμαστε λογικά πολύ πριν πάμε σχολείο, σε καταστάσεις, όπου η μάθηση αυτή πραγματοποιείται καθώς αποκτούμε ικανότητες επιβίωσης και επικοινωνίας στο κοινωνικό και φυσικό μας περιβάλλον (Papert, 1980).

Ο Piaget βλέπει την ανθρώπινη σκέψη να επηρεάζεται από την οργανική φύση του ανθρώπου και τον φυσικό και κοινωνικό του περίγυρο. Βλέπει ως έμφυτες ανθρώπινες τάσεις την εξισορρόπηση (equilibration), την αυτο-ρύθμιση (self-regulation) και την αυτοεξέταση / αναστοχασμό (reflection). Στο πλαίσιο αυτό θεωρεί ότι η ανθρώπινη σκέψη αποτελεί μια περίπλοκη δομή από γνωστικά σχήματα (cognitive schemes), δηλαδή δομικούς γνωσιακούς λίθους βασισμένους στην εμπειρία. Κάνει επίσης την πρώτη προσπάθεια περιγραφής του τρόπου εξέλιξης ή ανάπτυξης της δομής αυτής προτείνοντας δύο τρόπους με τους οποίους αυτό συμβαίνει: την αφομοίωση (assimilation), όπου ένα καινούργιο γνωστικό σχήμα εντάσσεται στην υπάρχουσα δομή και τη συμμόρφωση (accommodation), όπου, επειδή το γνωστικό σχήμα δεν μπορεί να ενταχθεί στην υπάρχουσα γνωσιακή δομή, προκαλείται από τον άνθρωπο κάποια δομική αλλαγή ή αναπροσαρμογή της δομής αυτής. (Κυνηγός, 2006)

Ο Papert βασίζεται στη θεώρηση αυτή θεωρώντας την ως τη σημαντικότερη συνεισφορά του Piaget. Μετά την συνεργασία του με τον Piaget , ο Papert ήταν πεπεισμένος ότι **μπορούν να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα τα οποία να είναι πολύ πιο πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων** (Papert, 1980).

Η προβληματική του Papert είναι ριζικά αντίθετη με αυτήν που, προερχόμενη από τη γνωστική ψυχολογία, επικράτησε τις δεκαετίες του 70 και του 80, σύμφωνα με την οποία δόθηκε έμφαση στη μελέτη των παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες που εμφανίζονταν στα αναλυτικά προγράμματα εκείνης της εποχής.

Η δομική (constructivist) θεώρηση της μάθησης, προσεγγίζεται ως μια διαδικασία που συμβαδίζει με την ανθρώπινη έκφραση, δηλαδή ως κάτι που ο άνθρωπος οικοδομεί. Αν προσεγγίσουμε με τον τρόπο αυτό την ερμηνεία του πώς μαθαίνουμε μαθηματικά, τότε πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο ποια νοήματα δομεί το παιδί και όχι στο αν «καταλαβαίνει ή παρανοεί» νοήματα που

υπάρχουν. Αυτό ακριβώς κάνει ο Papert: ουσιαστικά «αναποδογυρίζει» την προσέγγιση και μελετάει τα μαθηματικά νοήματα που δομούν τα παιδιά, δηλαδή τι καταλαβαίνουν (αντί για το τι παρανοούν) και πώς η κατανόηση αυτή αναπτύσσεται (αντί για το ποιες παρανοήσεις «διορθώνονται»).

Η θεώρηση του Papert έχει και ένα δεύτερο σκέλος, τη **φιλοσοφία του για τη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας**. Αυτή πηγάζει από τη πρωτόγνωρη τότε φιλοσοφία σχεδιασμού και χρήσης μιας γλώσσας προγραμματισμού, που τότε ήταν το βασικό εργαλείο στην εξέλιξη της επιστήμης της τεχνητής νοημοσύνης, την LiSP. Οι χρήστες της LiSP, είχαν θέσει ως στόχο να αναπτύξουν προγράμματα που απαιτούσαν σύλληψη και λύση εξαιρετικά δύσκολων γι' αυτούς προβλημάτων. Για ένα τέτοιο πρόγραμμα συνήθως εργάζονταν αρκετοί επιστήμονες. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούσαν τη γλώσσα προγραμματισμού ως εργαλείο σκέψεων, προτάσεων και δημιουργίας αλλεπάλληλων υποπρογραμμάτων τα οποία άλλαζαν και διόρθωναν συνεχώς.

Ο προγραμματισμός δηλαδή ήταν αναπόσπαστο εργαλείο σκέψης και δημιουργίας και όχι απλώς ένας κώδικας καταχώρησης έτοιμων αλγορίθμων στην μηχανή. Ο Papert σκέφτηκε ότι η δραστηριότητα αυτών των επιστημόνων ήταν μια γνήσια δραστηριότητα μάθησης. Γιατί να μην υπάρχει μια γλώσσα προγραμματισμού κατάλληλη, ώστε να μπορούν ακόμα και μικρά παιδιά να εμπλακούν σε τέτοιου είδους δραστηριότητα (στο δικό τους επίπεδο σκέψης); Έτσι συνέλαβε την γλώσσα Logo και την ανέπτυξε μαζί με τους συνεργάτες του στο Media Lab (Feurzig & Papert, 1971).

Στο πλαίσιο αυτό ο προγραμματισμός ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν διαισθητικές ιδέες και να τις εκφράσουν με τη χρήση συμβόλων, να τις «εκτελέσουν» στον Η/Υ και να παρατηρήσουν άμεσα το αποτέλεσμά τους συγκρίνοντάς το με το αποτέλεσμα που επιδίωκαν πριν από την «εκτέλεση». Τους δίνει επίσης τη δυνατότητα να ομαδοποιήσουν ένα σύνολο ιδεών και μετά είτε να τις χρησιμοποιήσουν ως ένα αντικείμενο, με ορισμένη ονομασία, σε ένα υψηλότερο αφαιρετικό επίπεδο, είτε να στοχαστούν πάνω σε μια συγκεκριμένη ιδέα που «ενυπάρχει» σ' αυτό το αντικείμενο. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια ιδέα με εναλλακτικούς τρόπους: ως εργαλείο, αλλά και ως αντικείμενο πάνω στο οποίο μπορούν να στοχαστούν. Ο προγραμματισμός για τη ΔτΜ επομένως προσεγγίζεται

ως μέσο έκφρασης, διερεύνησης, δόμησης και αποκάλυψης ιδεών, στο πλαίσιο μικρών ομάδων εργασίας οι οποίες ασχολούνται με κάποιο σχέδιο εργασίας (project), και μπορεί να δημιουργήσει σημαντικές ευκαιρίες για την κοινωνική κατασκευή του νοήματος μέσα στη σχολική τάξη (Kynigos,1995).

Στην όλη διαδικασία, κομβική είναι η φύση της «μαθηματικής έννοιας». Εάν ακολουθήσουμε το παραδοσιακό για τη δεκαετία του '80 μοντέλο των παρανοήσεων, τότε δεν χρειάζεται συζήτηση: οι μαθηματικές έννοιες είναι αυτές του αναλυτικού προγράμματος, οι οποίες έχουν προκύψει από βασικές υπαρκτές έννοιες-οντότητες της μαθηματικής επιστήμης. Εάν όμως χρησιμοποιήσουμε το δομικό μοντέλο για τη μάθηση, τότε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τι σημαίνει «μαθηματική έννοια»; Είναι οποιαδήποτε έννοια δομεί ο μαθητής;

Πώς μπορούμε να διακρίνουμε μια έννοια, έτσι ώστε να μπορούμε να συνεννοηθούμε γι' αυτήν; Φαίνεται πάντως ορθότερο να αντιμετωπίσουμε τις έννοιες ως κατασκευάσματα των μαθητών μέσα από τη δράση τους σε κοινωνικές ομάδες στο πλαίσιο της μαθησιακής κατάστασης.

Σ' αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικός ο τρόπος που προσδιόρισε την μαθηματική έννοια ο Γάλλος ψυχολόγος G. Vergnaud (1991). Υποστήριξε ότι **δεν έχει νόημα η αντίληψη μιας μαθηματικής έννοιας σε απομόνωση**. Νόημα έχει η θεώρησή της σε σχέση:

α) με άλλες έννοιες που συνδέονται στενά μ' αυτήν,

β) με μία ομάδα καταστάσεων στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και

γ) με μία ομάδα διαθέσιμων αναπαραστάσεών της.

Για το λόγο αυτό, ο Vergnaud ονόμασε την τριάδα αυτή **νοητικό πεδίο** και υποστήριξε ότι στη διδακτική των μαθηματικών αυτός πρέπει να είναι ο τρόπος αναφοράς στις μαθηματικές έννοιες.

Μετά από χρόνια, οι Balacheff και Gaudin (2002), συμπλήρωσαν την πρόταση του Vergnaud, προσθέτοντας μια τέταρτη πτυχή στον ορισμό του νοητικού πεδίου το οποίο προσδιόρισαν ως εξής:

- P ένα σύνολο προβληματικών καταστάσεων / προβλημάτων.
- R ένα σύνολο πράξεων, σχέσεων και αξιωμάτων.
- L ένα αναπαραστασιακό σύστημα.
- Σ μία δομή ελέγχου.

Στην πραγματικότητα, οι Balacheff και Goldin επεκτείνουν την έννοια του νοητικού πεδίου του Vergnaud, η οποία περιλαμβάνει τα πρώτα τρία στοιχεία, προκειμένου να εντάξουν σ' αυτά ρητά το Σ, το οποίο δηλώνει αυτό που απαιτείται, προκειμένου να γίνουν από τους μαθητές κρίσεις, επιλογές, και να ληφθούν αποφάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Οι Balacheff και Goldin συνδυάζουν το Σ με το θεωρητικό δόμημα των «θεωρημάτων εν δράσει» (theorems in action) του Vergnaud, δηλαδή τα συμπεράσματα που παράγουν οι μαθητές, τα οποία αφορούν σταθερές μέσα σε μία ομάδα αντικειμένων σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται μ' αυτά. Η ανοιχτή αυτή θεώρηση ως προς το τι μπορεί να χαρακτηριστεί «νόημα σε χρήση» (*conception in use)* διατυπώθηκε αρχικά από το Vergnaud, από μία γνωστική οπτική και επικεντρώθηκε σε μαθηματικές έννοιες περισσότερο, παρά στις γνώσεις των μαθητών (1991). Η προσθήκη των Balacheff και Goldin μετατρέπει τον όρο ώστε να είναι κεντρικά χρήσιμος για την περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας μεν αλλά σε σχέση με μαθηματικές έννοιες.(Κυνηγός, 2006)

Παρότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμα τα δομήματα αυτά για τη μελέτη της εκμάθησης των μαθηματικών με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας, ο Vergnaud δεν τα διατύπωσε με βάση το πλαίσιο αυτό, ενώ και οι Balacheff και Goldin μόνο περιφερειακά το έλαβαν υπόψη στην θεωρητική προσέγγιση που προαναφέραμε. Αντίθετα, η Mariotti (2002) παρέχει ένα χρήσιμο πλαίσιο κατανόησης της δημιουργίας νοημάτων, που πηγάζει από τις έρευνές της σε μαθησιακά περιβάλλοντα που αξιοποιούν τα εργαλεία της ψηφιακής τεχνολογίας. Με βάση την έννοια της **κοινωνικής διαμεσολάβησης του νοήματος** (Vygotsky, 1978), η Mariotti εντάσσει τη δραστηριότητα αναπαράστασης με ψηφιακά εργαλεία στο παραδοσιακό ρεπερτόριο μέσων αναπαράστασης της ανθρώπινης νόησης, όπως αυτό της γραπτής και προφορικής γλώσσας. Εκλαμβάνει έτσι τη μαθηματική δραστηριότητα με ψηφιακά εργαλεία ως κοινωνική διαμεσολάβηση του μαθηματικού νοήματος που μπορεί να επιτευχθεί εναλλακτικά με αυτά και με το γραπτό και προφορικό λόγο. (Κυνηγός, 2006)

Για τα εργαλεία αυτά οι Hoyles και Noss χρησιμοποιούν τον όρο **εκφραστικά μέσα** (expressive media, 2003). Βέβαια οι συγκεκριμένοι ερευνητές του προσδίδουν μια κάπως ιδιόμορφη σημασία σε σχέση με αυτή που είπαμε. Χρησιμοποιούν τον

όρο εκφραστικά μέσα για να κάνουν τη διάκριση μεταξύ των διερευνητικών λογισμικών για τα μαθηματικά και των μικρόκοσμων, προκειμένου να υπογραμμίσουν ότι στην περίπτωση των «μικρόκοσμων» δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη δραστηριότητα της κατασκευής (Kafai & Resnick, 1996) και στον προγραμματισμό.

Εύλογα θα αναρωτηθεί κανείς αν θα έπρεπε να είναι πρωταρχικός στόχος να παρακάμψουμε την ανάγκη οι μαθητές να μαθαίνουν τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό για να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα; Γιατί να μην αρκεί ο δυναμικός χειρισμός των αντίστοιχων εργαλείων (π.χ. του Cabri ή του Geometry Sketchpad) για να ασκηθούν στη μαθηματική σκέψη; Η άποψη ότι η εκμάθηση του τυπικού φορμαλισμού όχι μόνο δεν εμποδίζει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης αλλά με τα κατάλληλα εργαλεία, δραστηριότητες και διδακτική υποστήριξη, μπορεί να την ενισχύσει, έχει σημαντικά υπέρ αυτής επιχειρήματα. Κάθε φορά που επινοείται ένας νέος τρόπος αναπαράστασης εννοιών δεν σημαίνει ότι οι διαθέσιμες μέχρι τότε αναπαραστάσεις πρέπει άκριτα να εγκαταλειφθούν. Όταν καταλαγιάσει το φαινόμενο του νεωτερισμού, η καινούργια αναπαράσταση καταλαμβάνει μια θέση ανάμεσα στις προηγούμενες και παράλληλα αυτές αναπροσδιορίζονται ώστε να λειτουργούν συμπληρωματικά με τις καινούργιες.

Ο φορμαλισμός θεωρείται ευρέως ως εμπόδιο στις προσπάθειες των μαθητών να δημιουργήσουν και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες, ενώ οι μαθητές δεν βρίσκουν κάποιο νόημα στη χρήση του μαθηματικού φορμαλισμού. Τον θεωρούν απλώς ως επιβεβλημένο κώδικα για τη διεξαγωγή τυπικών, συνηθισμένων δραστηριοτήτων χωρίς νόημα (meaningless routines) (Dubinsky, 2000). Αντίθετα, οι δυναμικές διεπιφάνειες που επιτρέπουν τον εικονοκεντρικό χειρισμό, δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να έχουν **πρόσβαση σε μαθηματικές ιδέες παρακάμπτοντας την τυπική αναπαράσταση** (Laborde, C.& Laborde, J. M., 1995 · Laborde et al, 2006). Άραγε αυτό σημαίνει ότι ο φορμαλισμός είναι χρήσιμος μόνο σε καταξιωμένους μαθηματικούς, οι οποίοι μπορούν, μέσω αυτού, να εκφράσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες; Μία βασική παραδοχή στη μελέτη μας είναι ότι, όπως η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει τα μέσα για να παρακαμφθεί ο φορμαλισμός, έτσι μπορεί και να ενισχύσει έναν εντελώς

διαφορετικό τρόπο χρήσης του από τους μαθητές, **δηλαδή** η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει **στους μαθητές τη δυνατότητα να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα χρησιμοποιώντας ως μέσο τον τυπικό φορμαλισμό** (Kynigos, 2002).

2.3.2 Η εισαγωγή των Τεχνολογιών Πληροφορίας και επικοινωνίας στη μαθηματική εκπαίδευση

Στις χώρες της Ευρώπης και κυρίως στην Αγγλία και τη Γαλλία υλοποιήθηκαν προγράμματα εισαγωγής των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά και άλλων μαθημάτων, σε ευρεία έκταση, από τη δεκαετία του ’80.

Το λογισμικό, που αρχικά χρησιμοποιήθηκε, το παρήγαγαν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί φορείς των χωρών αυτών. Δεν ήταν όμως αρκετά ελκυστικό στους μαθητές, κυρίως ως προς τη μορφή του (γραφικά κ.λ.π). Έτσι αντικαταστάθηκε από λογισμικό που παρήγαγαν Πανεπιστήμια, Ερευνητικά Ινστιτούτα, Εταιρίες Πληροφορικής αλλά και ανεξάρτητοι κατασκευαστές λογισμικού, και το οποίο κυκλοφόρησε και στο εμπόριο.

Στην Ελλάδα η προσπάθεια εισαγωγής των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά και άλλων μαθημάτων άρχισε να σχεδιάζεται το 1996, από τη Διεύθυνση Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης του ΥΠΕΠΘ, το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι) και το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (ΙΤΥ) το οποίο ανέλαβε και την τελική ευθύνη του εγχειρήματος.

Η πρώτη πιλοτική εφαρμογή άρχισε το 1997 σε 64 Γυμνάσια, στα πλαίσια του προγράμματος ΟΔΥΣΣΕΙΑ (έργο Οδυσσέας) και σταδιακά επεκτάθηκε σε 385 σχολεία, κυρίως της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τα οποία εξοπλίστηκαν με τελευταίας τεχνολογίας εργαστήρια πληροφορικής.

Για την επιμόρφωση των καθηγητών των σχολείων αυτών, ώστε να μπορούν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του νέου τρόπου διδασκαλίας, επελέγησαν από το ΥΠΕΠΘ 125 εκπαιδευτικοί όλων των ειδικοτήτων και παρακολούθησαν ή παρακολουθούν ειδικό πρόγραμμα εξειδίκευσης μεταπτυχιακού επιπέδου στα Πανεπιστήμια Αθηνών, Μακεδονίας και Θεσσαλονίκης.

Στα πλαίσια των ενεργειών του προγράμματος ΟΔΥΣΣΕΙΑ έχουν κατασκευαστεί για χρήση στη μαθηματική εκπαίδευση τα λογισμικά: E-SLAT/ Αβάκιο, ΓΑΙΑ, ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ, ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ, ΙΡΙΣ, ΚΟΣΜΟΣ, ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ, ΠΡΩΤΕΑΣ, ΤΑΞΙΝΟΜΟΥΜΕ, ΧΕΛΩΝΟΚΟΣΜΟΙ, ΧΗ.ΠΟ.ΛΟ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΩ ΤΗ ΓΗ, και έχουν μεταφραστεί και προσαρμοστεί στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα τα διεθνώς καταξιωμένα εκπαιδευτικά λογισμικά Micro Worlds Pro, The Geometer's Scetchpad, Modellus, Cabri Geometry II, Function Probe, Tabletop JR & Tabletop, Eyewitness Virtual Reality Earth Quest.

Η επέκταση της χρήσης των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε όλα τα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της χώρας αναμένεται με την ολοκλήρωση (2003) του προγράμματος «Κοινωνία της Πληροφορίας» στη διάρκεια του οποίου (σύμφωνα με το στόχο του ΥΠΕΠΘ) θα επιμορφωθούν όλοι οι καθηγητές μαθηματικών (και των υπολοίπων ειδικοτήτων) στη χρήση, για εκπαιδευτικούς σκοπούς, της πληροφορικής και των νέων τεχνολογιών επικοινωνίας.

2.3.3 Η σκοπιμότητα της ένταξης εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση

Για εκατοντάδες χρόνια (ΥΠΕΠΘ, 2008), η διδασκαλία των μαθηματικών στη βασική παιδεία βασίζονταν στα γνωστά στατικά μέσα: πίνακας/χαρτί, κιμωλία/στυλό και σχολικό εγχειρίδιο. Η πρώτη τεχνολογία, οι αριθμητικοί υπολογιστές, δημιούργησαν την αίσθηση ότι θα γίνουν απαραίτητο εργαλείο για κάθε μαθητή και ότι θα υποκαταστήσουν την ανάγκη να κάνουμε πράξεις με το χέρι. Ο αντίλογος ήταν ήδη έτοιμος: οι μαθητές πρέπει να ξέρουν τους κανόνες και τη σημασία των πράξεων και ο μόνος τρόπος να τις καταλάβουν είναι να κάνουν πράξεις οι ίδιοι.

Στην πραγματικότητα δεν υπήρξε πειστικό επιχείρημα ότι θα προσθέσουν κάτι στον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν κάποιες μαθηματικές έννοιες. **Υπάρχουν άραγε επιχειρήματα για την χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών**

αρκετά πειστικά ώστε, τουλάχιστον, να αξίζει η επένδυση κυρίως σε χρόνο και προσπάθεια; Θεμελιώδης αφετηριακή είναι θέση είναι ότι η ένταξη της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων στο εκπαιδευτικό μας σύστημα έχει νόημα μόνο όταν στοχεύει σε κάποια *πρόσθετη παιδαγωγική αξία*. Τα τελευταία χρόνια, τα μαθηματικά στο εκπαιδευτικό μας σύστημα συνεχίζουν να εκλαμβάνονται από την κοινωνία ως μια θεωρητική γνώση που διδάσκεται κυρίως μετωπικά με άξονα την απομνημόνευση των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων της θεωρίας και την εξάσκηση στη λύση ασκήσεων με στόχο αποκλειστικά την αντιμετώπιση των εξετάσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και να διακρίνουν τη χρησιμότητά τους, καθώς δεν υπάρχει κανένας τέτοιος προσανατολισμός του Α.Π. και του σχολικού εγχειριδίου προς αυτή την κατεύθυνση συχνά.

Αναπόφευκτα, χρησιμοποιείται ο τυπικός μαθηματικός φορμαλισμός και τα στατικά προ-τεχνολογικά μέσα έκφρασης μαθηματικών εννοιών με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα σημαντικό εμπόδιο κατανόησης των εννοιών στους μαθητές: το πώς και γιατί της αναπαράστασης των εννοιών.

Λαμβάνοντας υπόψη και το άγχος που δημιουργείται από την ανάγκη προετοιμασίας για τις εξετάσεις, καταλήγει κανείς στο συμπέρασμα ότι πολύ λίγες ευκαιρίες δίνονται στο αντικείμενο αυτό ώστε να το αγαπήσουν και να το κατανοήσουν οι περισσότεροι μαθητές μας.

Από τη δεκαετία του ’90 (ΥΠΕΠΘ, 2008), και μετά η επιστημονική γνώση στη διδακτική των μαθηματικών δίνει ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αναπτύσσουν συνειδητή μαθηματική σκέψη, λειτουργώντας σε ένα κοινωνικό περιβάλλον, δηλαδή σε καταστάσεις επικοινωνίας με τους συμμαθητές και τους εκπαιδευτικούς τους. Η γενικότερη παιδαγωγική τάση που αρχίζει να επικρατεί είναι το να μελετήσουμε πώς μέσα από την εκπαίδευση μπορούμε να ενισχύσουμε στους μαθητές έναν επιστημονικό, μαθηματικό τρόπο σκέψης. Επομένως ο στόχος είναι όχι μόνο η κατανόηση εννοιών που αναφέρονται ρητώς μέσα στο αναλυτικό πρόγραμμα του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου, αλλά πολύ ευρύτερα, η ενίσχυση της λογικομαθηματικής πτυχής της σκέψης και έκφρασης των μαθητών ως αναπόσπαστο μέρος της κουλτούρας και του πολιτισμού μας. Άρα προβάλει έντονα, όσον αφορά τη διδακτική των μαθηματικών , η ανάγκη

δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων όπου κυριαρχούν η δράση, ο διάλογος, το βίωμα, η έκφραση, η αναπαράσταση, ο πειραματισμός και η συμμετοχή σε πολλαπλές συλλογικότητες.

Έτσι, οδηγούμαστε στην μάθηση των μαθηματικών ως μια εμπειρική, υποθετικοπαραγωγική διαδικασία, όπου ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2007).

Για την περίπτωση των μαθηματικών (ΥΠΕΠΘ, 2008), η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να αξιοποιηθεί ακριβώς σε αυτό το πλαίσιο όταν χρησιμοποιούνται ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εκφραστικά εργαλεία σε συνδυασμό με εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας (Χρονάκη, 2000, Ματσαγγούρας, 1987, Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης, 2002). Με τον όρο «εκφραστικά εργαλεία» εννοούμε εργαλεία λογισμικού που είναι σχεδιασμένα ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν μοντέλα με μέσο τις πολλαπλές και αλληλεξαρτώμενες μαθηματικές αναπαραστάσεις, να πειραματίζονται με τη συμπεριφορά τους και να τα αλλάζουν συχνά και με ευκολία, να χειρίζονται, να αναλύουν και να συσχετίζουν δεδομένα. Τα εργαλεία αυτά επίσης υποστηρίζουν τη διασύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών που είναι κατακερματισμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα, όπως η άλγεβρα, η ανάλυση, η Ευκλείδεια, η διαφορική, η διανυσματική και η αναλυτική γεωμετρία και η τριγωνομετρία στην γεωμετρική και την αλγεβρική της έκφανση. Με τα εργαλεία αυτά οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογικομαθηματική σκέψη τις οποίες είναι αδύνατο να έχουν χωρίς τα δυναμικά αυτά μέσα. Ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν τη διδακτική των μαθηματικών (Κυνηγός, 2007).

Βέβαια η παραπάνω πραγματικότητα δεν σημαίνει ότι η προσέγγιση στη διδακτική των μαθηματικών είναι τεχνοκεντρική και επομένως εργαλειοκεντρική. Πρέπει να δοθεί προσοχή στην διαδικασία χρήσης της τεχνολογίας αυτής για τον εμπλουτισμό της κουλτούρας των μαθητών με περισσότερη και πιο ποιοτική λογικομαθηματική σκέψη.

2.3.4 Ο ρόλος της τεχνολογίας στη μάθηση των μαθηματικών

Υποστηρίζεται από πολλούς ερευνητές ότι ο υπολογιστής μπορεί να παίξει σημαντικό και μοναδικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών και ορισμένα περιβάλλοντα εκπαιδευτικού λογισμικού αλλά και προγράμματα γενικού σκοπού χαρακτηρίστηκαν ως γνωστικά περιβάλλοντα (Hillel, 1993; Dorfler, 1993; Laborde, 1993). Ο υπολογιστής σύμφωνα με τους Noss & Hoyles (1992), παίζει κεντρικό, καθολικό και διαπεραστικό ρόλο στο πλαίσιο συμφραζομένων στο οποίο συντελείται η μάθηση, στο οποίο εντάσσονται επίσης, ο καθηγητής, οι μαθητές και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους καθώς και οι δραστηριότητες τις οποίες καλούνται να φέρουν σε πέρας. Οι προσεγγίσεις που δημιούργησαν οι μαθητές στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και σε περιβάλλον εκπαιδευτικού λογισμικού για τους λόγους και τις αναλογίες, ήταν ποιοτικά διαφορετικές (Hoyles & Noss, 1992a) ενώ η ίδια διαφοροποίηση παρατηρήθηκε και στις προσεγγίσεις μαθητών σε έννοιες που αφορούσαν στη διατήρηση και στη μέτρηση της επιφάνειας (Κορδάκη, 1999; Kordaki & Potari, 2002; Kordaki, 2003). Υποστηρίζεται ότι το περιβάλλον του υπολογιστή με τη μορφή εκπαιδευτικού λογισμικού μπορεί να παίξει το ρόλο σκαλωσιάς (scaffolding) και να λειτουργήσει υποστηρικτικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών (Hoyles & Noss, 1992a; Κορδάκη, 1999) καθώς και ως περιβάλλον αναδιοργάνωσης της σκέψης των παιδιών (Hillel, 1993; Κορδάκη, 1999). Οι Borba & Confrey (1996) αναφέρθηκαν στο ρόλο του εκπαιδευτικού λογισμικού ως μέσου διαμεσολάβησης στις ενέργειες του μαθητή αφ ενός και αφ ετέρου ως μέσου του οποίου οι δυνατότητες δύνανται να διευρυνθούν από τις ενέργειες του μαθητή. Ο διαμεσολαβητικός ρόλος του υπολογιστή καθορίζεται μέσα από το διαμεσολαβητικό ρόλο της γλώσσας και των αναπαραστάσεων που παρέχει στη σύνδεση της δραστηριότητας του ατόμου και της μαθηματικής αφαίρεσης. Η τεχνολογία και ειδικότερα οι υπολογιστές μπορούν να δώσουν στους μαθητές την ευκαιρία για μαθηματικοποίηση μέσα από την πραγματοποίηση συνδέσεων μεταξύ μη τυποποιημένων και τυποποιημένων μαθηματικών (Noss, 1988). Μπορεί επίσης να τους βοηθήσει να κάνουν γενικεύσεις στηριγμένοι σε ειδικές περιπτώσεις (Hoyles & Noss, 1989). Από μια ευρύτερη

σκοπιά: *«η δύναμη της τεχνολογίας η οποία διαμορφώνει τα Μαθηματικά επηρεάζει επίσης σε βάθος και τη διδασκαλία και τη μάθησή τους»* (Kaput, 1992).

Πιο συγκεκριμένα οι τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας δίνουν δυνατότητες:

α) *προσομοίωσης πραγματικών καταστάσεων*. Με αυτό τον τρόπο δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να προσεγγίσουν τα μαθηματικά αφ ενός ως ανθρώπινες δραστηριότητες (Bishop, 1988) και αφ ετέρου να κατανοήσουν τη σημασία τους σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο (Clements, 1989)

β) *πειραματισμού.* Οι μαθητές σε ειδικά σχεδιασμένα περιβάλλοντα έχουν την ευκαιρία να πραγματοποιήσουν μαθηματικές διερευνήσεις

γ) *εικονικής ανατροφοδότησης των ενεργειών του μαθητή*. Με αυτό τον τρόπο του δίνεται η δυνατότητα για αναστοχασμό, διόρθωση και διατύπωση εικασίας. Η διαδικασία αυτή είναι δυνατό να συνεχιστεί έως ότου καταλήξει σε βιώσιμο αποτέλεσμα και είναι η ίδια με αυτήν που ακολουθούν οι μαθηματικοί στην παραγωγή νέας μαθηματικής γνώσης (Lakatos, 1976, ο.π. Villareal, 1997). Οι εικόνες που δημιουργούνται από τους μαθητές σε περιβάλλοντα εκπαιδευτικού λογισμικού δεν είναι φτωχές αναπαραστάσεις αισθητηριακού επιπέδου διότι έχουν μια δικιά τους εσωτερική λογική που εξαρτάται από τη διαδικασία η οποία τις παράγει και τις εμφανίζει στην οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή (Dorfler, 1993). Οι εικόνες αυτές παίζουν ένα διαμεσολαβητικό ρόλο ο οποίος εξαρτάται από τη συνεισφορά της εννοιολογικής και της αισθητηριακής διάστασης και της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης. Με αυτό τον τρόπο ένα νέο είδος αισθητηριακής αντίληψης διαμορφώνεται. Αυτού του είδους η εικονική ανατροφοδότηση δεν έχει μόνο αισθητηριακά χαρακτηριστικά αλλά περιέχει και πληροφορία βοηθώντας έτσι το μαθητή να ελέγξει τις υποθέσεις του.

δ) *υψηλής αλληλεπίδρασης*. Τα δυναμικά αλληλεπιδραστικά ηλεκτρονικά περιβάλλοντα ενεργοποιούν νέους τρόπους σκέψης, διότι οι ενέργειες του μαθητή βρίσκονται συνδεδεμένες με τις μαθηματικές σημασίες τους, ενώ στα παραδοσιακά μέσα βρίσκονται σε απόσταση. Έτσι

σηματοδοτείται μια αργή αλλά βαθειά ιστορική εξέλιξη η οποία οδηγεί στο κατώφλι μιας νέας ιστορικής εποχής (Kaput, 1994)

ε) *δυναμικής αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας* από την άποψη του ότι τα βασικά χαρακτηριστικά της παραμένουν σταθερά και κρυμμένα στην εσωτερική λογική με την οποία η έννοια έχει υλοποιηθεί στο λογισμικό, ενώ είναι δυνατό να εξεικονίζονται στην οθόνη του υπολογιστή κλάσεις ισοδυναμίας εξωτερικών αναπαραστάσεων αυτής της έννοιας οι οποίες διατηρούν αυτή την εσωτερική λογική.

στ) *αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας σε πολλαπλά αναπαραστασιακά συστήματα* . Οι υπολογιστές δίνουν ευκαιρίες αναπαράστασης μιας έννοιας ή/και μιας σχέσης σε πολλαπλά αναπαραστασιακά συστήματα όπως πχ. εικόνες, διαγράμματα, πίνακες, αριθμητικές αναπαραστάσεις, γραφικές παραστάσεις, αναπαραστάσεις σε φυσική γλώσσα, σε γλώσσες προγραμματισμού, σε κινούμενη εικόνα, σε προσομοίωση, τα οποία είναι δυνατό να επικοινωνούν μεταξύ τους. Η επιλογή των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση εκπαιδευτικού λογισμικού παίζει σημαντικό ρόλο στη διαφοροποίηση των στρατηγικών που αναπτύσσουν οι μαθητές για τα προβλήματα που τους τίθενται (Κορδάκη 1999, Kordaki & Potari, 2002; Kordaki, 2003). Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι δυναμικές αναπαραστάσεις στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών όπου το σχήμα και η έννοια βρίσκονται σε διαλεκτική σχέση και αλληλεπίδραση (Mariotti, 1995). Επιπλέον, τα εικονικά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιούνται με ολιστικό αλλά και διαισθητικό τρόπο όπως και τα προτασιακά συστήματα, όμως ένας λόγος που τα παιδιά δυσκολεύονται στο σχολείο είναι ότι δεν τους δίνεται η ευκαιρία να εκφράζονται με εικονικό τρόπο (Sutherland, 1995).

ζ) *άμμεσης διαχείρισης* (direct manipulation) *των σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή*. Τα γεωμετρικά σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή μπορούν να μεταβάλλονται μέσω της λειτουργίας της *"άμμεσης διαχείρισης"* έτσι ώστε να διατηρούν τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, ενώ η μορφή τους μεταβάλλεται.

η) *διάθεσης μιας ποικιλίας εργαλείων*. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές έχουν δυνατότητες επιλογής των εργαλείων που ταιριάζουν περισσότερο στη γνωστική τους ανάπτυξη και να εκφράσουν τις ατομικές ή/και ενδοατομικές τους διαφορές στη μάθηση των μαθηματικών (Kordaki, 2003; Kordaki & Balomenou, 2006).

θ) *σχεδίασης*. Η σχεδίαση με τη βοήθεια των εργαλείων που διαθέτει το περιβάλον ενός μικρόκοσμου ή/και με τη βοήθεια των εντολών κάποιας γλώσσας προγραμματισμού αναγκάζει το μαθητή να σχεδιάσει ένα σχήμα συνειδητά και με βάση τις ιδιότητές του ακολουθώντας έτσι τα βασικά σημεία-έννοιες μιας γεωμετρικής κατασκευής (Laborde, 1992).

ι) *αυτόματης επίλυσης προβλήματος*. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν τις δικές τους στρατηγικές επίλυσης με τα αποτελέσματα που δίνει ο υπολογιστής και να προσπαθούν να αυτοδιορθώνονται.

κ) *επέκτασης*. Πολλά περιβάλλοντα εκπαιδευτικού λογισμικού διαθέτουν δυνατότητες επέκτασης μέσω της κατασκευής μακροεντολών σύμφωνα με τις ανάγκες του χρήστη. Έτσι, τα περιβάλλοντα αυτά εξελίσσονται παράλληλα με τον μαθητή ή/και τον καθηγητή.

λ) *καταγραφής του ιστορικού των ενεργειών του χρήστη*. Με αυτό τον τρόπο βρίσκεται στη διάθεση του μαθητή, του καθηγητή αλλά και του ερευνητή ένα πλούσιο υλικό για παραπέρα μελέτη και έρευνα.

μ) *παρουσίασης πληροφορίας με ποικίλους τρόπους*. Μια ποικιλία υλικών μέσων μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα μάθημα για παρουσίαση πληροφοριών όπως πχ. κείμενο, εικόνες, ήχος, κινούμενες εικόνες κα.

ν) *επικοινωνίας και μάθησης στο χώρο και στο χρόνο του μαθητή*. Το διαδίκτυο επίσης αποτελεί ένα άλλο σημαντικό εργαλείο, το οποίο μπορεί να παίξει καταλυτικό ρόλο στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών. Με τη χρήση του είναι δυνατό να σχεδιαστούν εργασίες (projects) με διερευνητικό χαρακτήρα και διεπιστημονικό περιεχόμενο. Επιπλέον η επικοινωνία μαθηματικών ιδεών μέσω του διαδικτύου ή του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου δίνει την ευκαιρία στους καθηγητές και

στους μαθητές να διευρύνουν τις απόψεις τους για μαθηματικά θέματα ή διδακτικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά.

2.3.5 Εκπαιδευτικό λογισμικό για τα μαθηματικά

Όπως ήδη αναφέρθηκε ο ρόλος της υπολογιστικής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει ως κύριο άξονα την προσέγγιση των υπολογιστών ως αναπαραστασιακών εργαλείων έκφρασης μαθηματικών εννοιών. Η χρήση των εργαλείων αυτών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη διερεύνηση μέσα από το πείραμα, την ομαδική εργασία και επικοινωνία των μαθητών στα πλαίσια συνεργατικών δραστηριοτήτων.

Στοχεύει δηλαδή στη δημιουργία νέων ρόλων για τον εκπαιδευτικό και το μαθητή. Φυσικά η τεχνολογία των υπολογιστών που αφορά τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών ενισχύει τις δυνατότητες για μοντελοποίηση από μέρους των μαθητών, για χρήση πολλαπλών και διασυνδεόμενων αναπαραστάσεων, για δυναμικό χειρισμό και κιναισθητική διαχείριση των εικονιζόμενων στη οθόνη.

Συμπερασματικά, τα ψηφιακά εργαλεία είναι :

- εργαλεία κυρίως για να κάνει μαθηματικά με αυτά ο μαθητής,
- εργαλεία με τα οποία ο εκπαιδευτικός μπορεί να σχεδιάσει δραστηριότητες για τους μαθητές του,
- με τα εργαλεία ο μαθηματικός μπορεί να ασχοληθεί επιστημονικά ο ίδιος με τα μαθηματικά στο δικό του επίπεδο.

Σε αυτό το πλαίσιο η πρόσθετη παιδαγωγική αξία της χρήσης ενός λογισμικού στη διδασκαλία των μαθηματικών αναζητείται στις δομές και στις σχέσεις που διέπουν τις ενέργειες των μαθητών με ψηφιακά αντικείμενα που να είναι σχεδιασμένα να επιδέχονται χειρισμό και να ευνοούν ένα πλήθος αλληλεπιδράσεων μεταξύ των υπολογιστικών εργαλείων και όλων των εμπλεκομένων στη διδακτική πράξη. Τα μαθηματικά που αναδεικνύονται στο πλαίσιο των αλληλεπιδράσεων σε τέτοια περιβάλλοντα μπορεί να περιγραφούν ως μια δραστηριότητα διασυνδέσεων μέσα από επαγωγικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς παρά ως μια άκαμπτη ακολουθία υλοποίησης διδακτικών οδηγιών.

Για τους παραπάνω λόγους στον επιστημονικό χώρο της διδακτικής των μαθηματικών ο όρος «εκπαιδευτικό λογισμικό» συχνά αντικαθίσταται από περιγραφές όπως «δυναμικά ψηφιακά μέσα», «δυναμικά υπολογιστικά περιβάλλοντα», «αλληλεπιδραστικά μαθησιακά περιβάλλοντα».

Το Εκπαιδευτικό Λογισμικό (Ε.Λ.) θεωρείται μέρος του πλαισίου συμφραζομένων (context) της μάθησης. Αυτό το πλαίσιο επίσης συμπεριλαμβάνει το μαθητή, το δάσκαλο, την αλληλεπίδραση τους και τις δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα. Σημαντική είναι η διερεύνηση της επίδρασης του ΕΛ στη διαδικασία αλλά και της αλληλεπίδρασής του με το μαθητή, δηλαδή αν και πόσο δίνει στο μαθητή τη δυνατότητα να εκφράσει και να δομήσει τις ιδέες του. Φαίνεται ότι το ΕΛ επηρεάζει τις προσεγγίσεις των μαθητών στο αντικείμενο της μάθησης, αφού αυτές είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες που αναπτύσσουν στο πλαίσιο χαρτί-μολύβι. Το κέρδος είναι συγκέντρωση στα βασικά σημεία των εννοιών, ξεκαθάρισμα των αναλογικών σχέσεων που εμπεριέχονται στο περιβάλλον και η δυνατότητα γενίκευσης μέσα από ειδικές περιπτώσεις.

Το Ε.Λ. δίνει, μέσω των αλληλεπιδραστικών μέσων που διαθέτει, την ευκολία του πειραματισμού. Μέσα από προσεγγίσεις διερευνητικές, ο μαθητής εμπλέκεται με πιο πραγματικά προβλήματα που υλοποιούνται στην οθόνη του Η/Υ. Παρέχεται έτσι η δυνατότητα γενίκευσης μέσα από ειδικές περιπτώσεις (π.χ. με τη Logo έχουν διερευνηθεί γενικεύσεις με πειραματισμό για την έννοια του παραλληλογράμμου) και σύνδεσης επαγωγικής σκέψης με παραγωγική σκέψη. Επίσης έχουν παρατηρηθεί η διευκόλυνση της ποσοτικής συσχέτισης, της επίλυσης προβλημάτων, της έμφασης εννοιών και γενικά των διερευνητικών δραστηριοτήτων πειραματισμού.

Ακολουθεί ένας ενδεικτικός κατάλογος λογισμικών που σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με τα Μαθηματικά:

Cabri Geometry II Plus

Το Cabri ανήκει στη κατηγορία του λογισμικού που προσφέρεται κυρίως για **διερευνητική μάθηση** και **πειραματισμό** σε ένα μεγάλο μέρος των **Μαθηματικών**, των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, καθώς και όλων των τάξεων του Γυμνασίου και του Λυκείου. Επιτρέπει στον χρήστη, με εργαλεία τα βασικά γεωμετρικά

σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (σημείο, κύκλο, ευθ. τμήμα, ημιευθεία και ευθεία), τις στοιχειώδεις κατασκευές και τους βασικούς μετασχηματισμούς (μεταφορά, στροφή κτλ), να κατασκευάζει οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα, και να το επεξεργάζεται μετρώντας τα βασικά μεγέθη του (μήκη πλευρών και της περιμέτρου του, το εμβαδόν του και μέτρα των γωνιών του). Ο δυναμικός τρόπος επεξεργασίας του σχήματος καθώς και επεξεργασία των αριθμητικών αποτελεσμάτων μέσω calculator που υπάρχει ενσωματωμένος στο πρόγραμμα, επιτρέπει στον χρήστη να πειραματίζεται με απλό τρόπο και να οικοδομεί την γνώση. Η χρήση συντεταγμένων και άλλων στοιχείων της Αναλυτικής Γεωμετρίας (εξισώσεις κτλ) διευρύνει ακόμα περισσότερο τις δυνατότητες επεξεργασίας των γεωμετρικών σχημάτων. Τέλος η δυνατότητα κατασκευής **animations** κάνει το πρόγραμμα ένα ιδανικό εργαλείο για τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών. Το πρόγραμμα μπορεί να ενταχθεί στο κύριο διδακτικό έργο και την καθημερινή πραγματικότητα του σχολείου και ανταποκρίνεται τόσο στις ανάγκες των μαθητών, όσο και των εκπαιδευτικών. Συμπληρώνει τη μαθησιακή και διδακτική διαδικασία. Προκαλεί και διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών. Ενισχύει τη διερευνητική και ενεργητική μάθηση. Αξιοποιεί την προσομοίωση φαινομένων. Προσφέρει την δυνατότητα για πολλαπλή αναπαράσταση της γνώσης. Είναι απλό και φιλικό στη χρήση του από εκπαιδευτικούς και μαθητές που δεν έχουν ιδιαίτερη ειδίκευση σε υπολογιστές.

Απευθύνεται κυρίως σε Μαθηματικούς και δευτερευόντως σε Φυσικούς.

Function Probe

Το Function Probe απευθύνεται σε μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου για χρήση του στην μελέτη και διερεύνηση συναρτησιακών σχέσεων. Είναι ένα ευέλικτο και δυναμικό εργαλείο σχεδιασμένο ώστε να μαθαίνεται και να χρησιμοποιείται εύκολα ακόμη και από έναν αρχάριο χρήστη υπολογιστή. Είναι ένα κατάλληλο εργαλείο που βοηθά τους μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν προβλήματα που εμπεριέχουν συναρτησιακές σχέσεις. Είναι σχεδιασμένο ώστε να είναι συμβατό με δράσεις και αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε μια ποικιλία καταστάσεων προβληματισμού τις οποίες αντιμετωπίζουν στο μάθημα των Μαθηματικών.

Το Function Probe χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων στην σχεδίαση γραφικών παραστάσεων, στην επεξεργασία και ανάλυση δεδομένων, στην δυναμική περιγραφή διαδικασιών όπως μετασχηματισμών και γραμμικών παλινδρομήσεων και στην περιγραφή διαδικασιών που αναπαριστούν μαθηματικές αρχές.

Έτσι, το πρόγραμμα σχεδιάστηκε ώστε να:

α) Προκαλεί τη διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών με τρόπους αναγνωρίσιμους από τους μαθητές.

β) Επιτρέπει στους μαθητές να ενεργούν με τρόπους που αυτοί επιλέγουν.

γ) Βοηθά τους μαθητές να βελτιώνονται προοδευτικά (σύμφωνα με τις δυνατότητές τους) στοχεύοντας στην κατανόηση μιας χρήσιμης μαθηματικής έννοιας.

Το Function Probe απευθύνεται σε μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου για χρήση του στην μελέτη και διερεύνηση συναρτησιακών σχέσεων. Είναι ένα ευέλικτο και δυναμικό εργαλείο σχεδιασμένο ώστε να μαθαίνεται και να χρησιμοποιείται εύκολα ακόμη και από έναν αρχάριο χρήστη υπολογιστή. Είναι ένα κατάλληλο εργαλείο που βοηθά τους μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν προβλήματα που εμπεριέχουν συναρτησιακές σχέσεις. Είναι σχεδιασμένο ώστε να είναι συμβατό με δράσεις και αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε μια ποικιλία καταστάσεων προβληματισμού τις οποίες αντιμετωπίζουν στο μάθημα των Μαθηματικών. Το Function Probe χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων στην σχεδίαση γραφικών παραστάσεων, στην επεξεργασία και ανάλυση δεδομένων, στην δυναμική περιγραφή διαδικασιών όπως μετασχηματισμών και γραμμικών παλινδρομήσεων και στην περιγραφή διαδικασιών που αναπαριστούν μαθηματικές αρχές. Έτσι, το πρόγραμμα σχεδιάστηκε ώστε να:

α) Προκαλεί τη **διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών** με τρόπους αναγνωρίσιμους από τους μαθητές.

β) Επιτρέπει στους μαθητές να ενεργούν με τρόπους που αυτοί επιλέγουν.

γ) Βοηθά τους μαθητές να βελτιώνονται προοδευτικά (σύμφωνα με τις δυνατότητές τους) στοχεύοντας στην κατανόηση μιας χρήσιμης μαθηματικής έννοιας.

MicroWorlds Pro

Το MicroWorlds Pro είναι περιβάλλον γενικής χρήσης που καλλιεργεί σύνθετες δεξιότητες και μαθησιακές τάσεις και επιτρέπει τη διερεύνηση - επανάληψη - αξιολόγηση δύσκολων εννοιών.

Η γλώσσα προγραμματισμού στην οποία βασίζεται το MicroWorlds Pro είναι η Logo, μια γλώσσα υψηλού επιπέδου που σχεδιάστηκε εξαρχής για την εκπαίδευση. Τα χαρακτηριστικά που τη διακρίνουν και την καταξιώνουν ως γλώσσα με παιδαγωγικές προδιαγραφές είναι:

α) Προσφέρεται για την αντιμετώπιση ελκυστικών και πλούσιων σε παιδαγωγική αξία εφαρμογών σε ποικίλα γνωστικά πεδία

β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλά επίπεδα προγραμματισμού, από τις πλέον εξειδικευμένες τεχνικές μέχρι τον πειραματισμό, με άμεσες απλές οδηγίες που δεν απαιτούν κανενός είδους προπαιδεία στον προγραμματισμό.

γ) Η εμβάθυνση στον προγραμματισμό με τη Logo αναπτύσσει ένα στέρεο υπόβαθρο πληροφορικής παιδείας σε ευρύ φάσμα εννοιών και τεχνικών (ανάπτυξη και δόμηση προγράμματος, οργανωμένη διαχείριση τοπικών μεταβλητών, δομές δεδομένων-λίστες, αναδρομή, παράλληλη επεξεργασία κ.ά.)

δ) Από τη δομή της είναι επεκτάσιμη. Με απλές έννοιες-διαδικασίες μπορεί κανείς να δομήσει άλλες πιο σύνθετες με τρόπο επαγωγικό, έτσι όπως δομείται η ανθρώπινη νόηση. Το χαρακτηριστικό αυτό την καθιστά ένα δυνατό εργαλείο έκφρασης ιδεών που ευνοεί την κατασκευή της γνώσης.

ε) Διαθέτει ένα δυναμικό γραφικό περιβάλλον για την μελέτη αναδρομικών μαθηματικών μοντέλων (φράκταλ κ.α.) και την προσομοίωση φαινομένων. Η γεωμετρία της χελώνας αποτελεί βιωματικό εργαλείο διερεύνησης και προσέγγισης εννοιών ακόμη και σε πρώιμες ηλικίες.

στ) Η σπονδυλωτή δομή των προγραμμάτων της επιτρέπει τη συνεργασία ανάμεσα σε ομάδες μαθητών και τον καταμερισμό εργασίας για την εκπόνηση συνδετικών εργασιών.

Το περιβάλλον του MicroWorlds Pro είναι μια από τις πιο αξιόλογες εφαρμογές που βασίζονται στη γλώσσα Logo. Είναι ένα πλούσιο πολυμεσικό περιβάλλον με ειδικά μελετημένο σχεδιασμό, που ευνοεί με πολλούς τρόπους την ανάπτυξη συνθετικών εργασιών στο πλαίσιο πολλών μαθημάτων (Μαθηματικά, Φυσική, Βιολογία, κ.ά.):

α) Διαθέτει δυνατότητες δημιουργίας και αναπαραγωγής πολυμεσικών σεναρίων καθώς και κινούμενων σχεδίων

β) Είναι προγραμματιστικό και συνεπώς δεν περιορίζεται σε ορισμένα μόνο είδη εφαρμογών

γ) Το πλήθος των χελωνών με την απεριόριστη γκάμα «κουστουμιών» και τη δυναμική κίνηση προσφέρουν τη δυνατότητα και τις ευκολίες προσομοίωσης ποικίλων φαινομένων.

δ) Η διαχείριση προγραμματιζόμενων αντικειμένων και η κίνησή τους σε διάφορα επίπεδα διαστρωμάτωσης πάνω στην οθόνη καθιστούν την προσομοίωση πιο ρεαλιστική.

Το περιβάλλον μπορεί να αξιοποιηθεί από διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης, μια που η διαχείριση των προγραμματιζόμενων αντικειμένων είναι δυνατό να γίνει και με οπτικό τρόπο, με τα προβλεπόμενα εργαλεία τα οποία μπορεί κανείς να χειριστεί με το ποντίκι.

The Geometer's Sketchpad

Το «The Geometer's Sketchpad» είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, της Άλγεβρας και της Τριγωνομετρίας. Ο σχεδιασμός και η κατασκευή του στηρίχθηκαν σε πολύχρονες έρευνες στην περιοχή της διδακτικής των μαθηματικών. Είναι ένα διεθνώς δοκιμασμένο εργαλείο μάθησης για το οποίο υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία και τεκμηρίωση.

Το «The Geometer's Sketchpad» είναι ιδανικό για την οργάνωση δραστηριοτήτων διερευνητικής μάθησης στο σχολικό εργαστήριο και στο σπίτι. Αξιοποιεί τις δυνατότητες των νέων τεχνολογιών λαμβάνοντας υπόψη τις νέες τάσεις για διερευνητική προσέγγιση στη σχεδίαση του λογισμικού (με πολλαπλές αναπαραστάσεις, άμεσο χειρισμό κ.τ.λ.). Με τις δυνατότητες που διαθέτει βοηθά στην κατανόηση με ολοκληρωμένο τρόπο εννοιών και διαδικασιών μέσα από την επίλυση προβλημάτων και τον πειραματισμό.

Το «The Geometer's Sketchpad» είναι ένα «ανοικτό» περιβάλλον διερευνητικής μάθησης. Οι δυνατότητές του είναι τόσο ευρείες που αν και αρχικά σχεδιασμένο για τις ανάγκες της γυμνασιακής εκπαίδευσης σήμερα συνιστάται από την Πέμπτη τάξη του Δημοτικού μέχρι τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Οι δυνατότητες αυτές το μετέτρεψαν σε ένα εκπαιδευτικό εργαλείο με απεριόριστο αριθμό εφαρμογών. Αν και σχεδιάστηκε αρχικά για Γεωμετρία, σήμερα οι μαθητές μπορούν να το χρησιμοποιήσουν για να εξερευνήσουν την Άλγεβρα, την Τριγωνομετρία, την Τέχνη, την Επιστήμη και πολλά άλλα.

Modellus

Το λογισμικό Modellus, το οποίο σχεδιάστηκε από μία ομάδα επιστημόνων με την καθοδήγηση του καθηγητή Vitor Duarte Teodoro από το Πανεπιστήμιο Lisbon της Πορτογαλίας, είναι ένα ισχυρό εργαλείο, ιδιαίτερα χρήσιμο για τη διδασκαλία των θετικών επιστημών. Κυρίως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υποστήριξη των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Χημείας, των Οικονομικών και δευτερευόντως της Βιολογίας. Ανήκει στην κατηγορία του ανοικτού τύπου περιβάλλοντος-**εργαλείο για modeling, πειραματισμό και simulation**, απαραίτητο για την ανάπτυξη **μαθηματικών μοντέλων** και την επεξεργασία τους μέσα από γραφικές παραστάσεις , πίνακες και animations.

Στον πυρήνα του προγράμματος υπάρχει μια περιοχή εργασίας (παράθυρο) στην οποία ο μαθητής μπορεί να γράψει το μαθηματικό μοντέλο με μορφή εξισώσεων ή ορισμών μεγεθών. Στη συνέχεια, το σύστημα αναλαμβάνει να

πραγματοποιήσει την αναπαράσταση της εξέλιξης του φαινομένου που υπακούει στο μαθηματικό μοντέλο.

Το Modellus αξιοποιεί πολλές προηγούμενες προσπάθειες που έγιναν στην κατεύθυνση της δημιουργίας ενός λογισμικού κατάλληλου για μοντελοποιήσεις σε ποικίλες γνωστικές περιοχές.

EucliDraw

Το **EucliDraw**, είναι ένα πρόγραμμα για τον σχεδιασμό σχημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του επιπέδου. Είναι το μοντέρνο σχεδιαστικό εργαλείο που προσομοιώνει το φύλλο χαρτιού, τον κανόνα, τον διαβήτη καθώς και δεκάδες άλλων ειδικών εργαλείων που επιτρέπουν τον σχεδιασμό συνθέτων σχημάτων με ταχύτητα και ακρίβεια. Εκτός της πληθώρας των έτοιμων προς χρήση εργαλείων, ενσωματώνει ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον προγραμματισμού, στο οποίο μπορείτε να γράψετε και να κατασκευάσετε πρόσθετα εργαλεία δικής σας επινόησης. Έτσι μπορείτε να επεκτείνετε απεριόριστα τις δυνατότητές του, μπορείτε να δημιουργήσετε συλλογές ειδικών εργαλείων και μ' αυτές να κατασκευάσετε σχήματα, ενδεχομένως, άγνωστα μέχρι σήμερα.

Το EucliDraw είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιας προσπάθειας, που ξεκίνησε πριν το 1990 στο Πανεπιστήμιο Κρήτης και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Μια πρώτη στατική μορφή του προγράμματος κυκλοφορεί ελεύθερα (freeware) ήδη από το 1998 στο διαδίκτυο, με το όνομα **Isoptikon**. Το κίνητρο για την ανάπτυξη του προγράμματος ήταν αφ' ενός η φυσική κλίση των δημιουργών του προς την Γεωμετρία, αφ' ετέρου η επιθυμία κατασκευής ενός εργαλείου, το οποίο θα μπορούσε να παράγει ζωντανά σχήματα. Απώτερος στόχος: να αναζωπυρωθεί το ενδιαφέρον για την Γεωμετρία, ενός κατ' εξοχήν επιτεύγματος του Ελληνικού πνεύματος και παράδοσης. Μιας παράδοσης που περιφρονήθηκε και παραγκωνίστηκε από τα σχολεία, χάριν άλλων πιο *μοντέρνων* κλάδων των Μαθηματικών.

Geogebra

Το πρόγραμμα GeogGebra είναι ένα ελεύθερο λογισμικό ανοικτού κώδικα και συνδυάζει Άλγεβρα και Γεωμετρία. Απευθύνεται στους μαθητές και καθηγητές όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης.Πρόκειται για ένα βραβευμένο πρόγραμμα που αναπτύχθηκε από τον Αυστριακό μαθηματικό Markus Hohenwarter ως βοήθημα για την διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολεία. Πρόσφατα έτυχε χορηγίας από την Αυστριακή Ακαδημία Επιστημών, την Αυστριακή κυβέρνηση και το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών των ΗΠΑ για την περαιτέρω ανάπτυξή του.

Γύρω από την Geogebra έχει δημιουργηθεί μία μεγάλη και δραστήρια κοινότητα μαθηματικών από όλο τον κόσμο.

Η Geogebra συνδυάζει χαρακτηριστικά προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας (Geometer's Sketchpad , Cabri, Cinderella, EucliDraw, WinGeom) και προγραμμάτων γραφικών παραστάσεων (Graphmat, WinPlot). Παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας δυναμικού φύλλου εργασίας σε μορφή ιστοσελίδας (html). Δημιουργεί γραφικά σε γλώσσα Postcript (eps) αλλά αν τα γραφικά του εξαχθούν (με την εντολή Export) σε μορφή png μπορούν να εισαχθούν ως εικόνες σε έγγραφα του Microsoft Word και άλλων εφαρμογών. Εξίσου καλά μπορούν να εισαχθούν με Αντιγραφή-Επικόλληση.

Graphmatica

Ένα δυνατό και εύκολο στη χρήση λογισμικό για την Άλγεβρα και την Ανάλυση. Δεν σχεδιάζει μόνο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Το Graphmatica θυμάται τις τελευταίες 999 εξισώσεις που εισαγάγατε ή φορτώσατε από ένα αρχείο. Μπορείτε να αποθηκεύσετε την εργασία σας για μεταγενέστερη χρήση ή με οποιονδήποτε επεξεργαστή κειμένου, ενώ υπάρχει πλήρης βιβλιοθήκη μαθηματικών συναρτήσεων. Μπορείτε να επιλέξετε μεταξύ των εξής ειδών σχεδίασης: καρτεσιανή, πολική, παραμετρική, πεδίο ροής και προσέγγιση αρχικής τιμής για μέχρι τέταρτου βαθμού διαφορικές εξισώσεις (καθώς και τέταρτου βαθμού γραμμικά συστήματα), τα οποία ανιχνεύονται αυτόματα ανάλογα με τις μεταβλητές που χρησιμοποιείτε στην εξίσωσή σας. Υποστηρίζονται επίσης καρτεσιανές ανισότητες. Η δυνατότητα σχεδίασης δεδομένων και προσαρμογής καμπύλης διευκολύνει την εισαγωγή πειραματικών δεδομένων και την εύρεση της

εξίσωσης που τα περιγράφει καλύτερα. Οι επιλογές Παύση και Πίνακες Σημείων σας επιτρέπουν να δείτε τις συντεταγμένες των σημείων των γραφημάτων σας όπως ακριβώς έχουν σχεδιαστεί. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ποντίκι για να επιλέξετε μια νέα κλίμακα ή να δείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου, να επιλέξετε την αρχική τιμή μιας διαφορικής εξίσωσης, ή ακόμα και να βρείτε την εφαπτομένη μιας καμπύλης ή να ολοκληρώσετε μια συνάρτηση χωρίς να πατήσετε ούτε ένα πλήκτρο. Υπάρχουν ισχυρές δυνατότητες αριθμητικού λογισμού. Μπορείτε να βρείτε τις τομές καμπυλών, παραγώγους, ολοκληρώματα, και ακρότατα για οποιαδήποτε καρτεσιανή εξίσωση.

Mathematica

Το Mathematica είναι ένα μαθηματικό πακέτο με πολλές δυνατότητες σε σχεδόν όλους τους τομείς των μαθηματικών (Άλγεβρα, Θεωρία συνόλων, Ανάλυση, διαφορικές εξισώσεις, Στατιστική κ.α.). Η υπολογιστική μηχανή του Mathematica είναι ο πυρήνας (kernel), ενώ η σύνδεση μεταξύ του χρήστη και του πυρήνα γίνεται μέσω του front end (περιβάλλον εργασίας) και του Mathematica notebook. Μπορεί να απλοποιήσει εκφράσεις, να υπολογίσει αθροίσματα και γινόμενα, να δημιουργήσει γραφικές παραστάσεις σε 3 διαστάσεις, όπως και να λύσει αλγεβρικές εξισώσεις. Μπορεί να υπολογίζει επίσης όρια συναρτήσεων, ακρότατα, παραγώγους, ολοκληρώματα.

Αβάκιο E-Slate

Το Αβάκιο E-Slate διαθέτει εργαλεία υψηλού επιπέδου για τη σύνθεση εκπαιδευτικών «Μικρόκοσμων» (εστιασμένων εφαρμογών) για πειραματισμό και διερεύνηση φαινομένων, εννοιών, υποθέσεων και συσχετισμών. Ιδέες εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε λογισμικό, στη μορφή Μικρόκοσμων που απαρτίζονται από αλληλο-συνεργαζόμενες «Ψηφίδες». Οι Ψηφίδες παρέχονται ως μια βιβλιοθήκη προκατασκευασμένων υπολογιστικών αντικειμένων (software components), ειδικά σχεδιασμένων για εκπαιδευτική χρήση, τα οποία μπορούν πολύ εύκολα να συνδεθούν μεταξύ τους. Η διασύνδεση και διαχείριση τόσο των ψηφίδων όσο και των εκπαιδευτικών

δραστηριοτήτων (Μικρόκοσμων) μπορεί να προγραμματιστεί μέσα από μια ειδικά σχεδιασμένη συμβολική γλώσσα βασισμένη στη Logo. Μερικές από τις δυνατότητες του: δυναμικά συσχετιζόμενες πολλαπλές αναπαραστάσεις εννοιών, κατασκευή και διαχείριση μοντέλων και προσομοιώσεων, υψηλού επιπέδου διαδραστικότητα, δομήσιμη και προσαρμόσιμη λειτουργικότητα, δομημένο και προσαρμόσιμο πολυμεσικό υλικό, προγραμματιζόμενα αντικείμενα και συμπεριφορές, διασύνδεση με εργαστηριακά όργανα μετρήσεων.

2.3.6 Χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού για την διδακτική των μαθηματικών

Λαμβάνοντας υπόψη τόσο η ύπαρξη του διεθνώς πλούσιου και αξιοποιήσιμου λογισμικού γενικής χρήσης (όπως π.χ. το excel), όσο και τις ιδιαίτερες δυνατότητες σχεδιασμού και αξιοποίησης της σύγχρονης υπολογιστικής τεχνολογίας που αφορά τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Ψυχάρης, 2005, Keisoglou & Kynigos, 2006, Kynigos & Gavrilis, 2006), τα κύρια χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού λογισμικού συνδέονται με τις τεχνολογικές όσο και παιδαγωγικές παραμέτρους που θα πρέπει να διαθέτει ώστε να μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά στο μάθημα των μαθηματικών. Τέτοιες παράμετροι αφορούν δυνατότητες όπως:

- **Η έκφραση μαθηματικών ιδεών και νοημάτων,** που σχετίζεται με τη μελέτη μιας γνωστικής περιοχής των μαθηματικών. Το λογισμικό πρέπει να στοχεύει στη δημιουργία ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων.
- **Η ύπαρξη πολλαπλών διασυνδεόμενων αναπαραστάσεων** με δυνατότητα δυναμικού χειρισμού. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τη δυνατότητα ύπαρξης γραφικών αναπαραστάσεων, όπου οι αλλαγές στη μια αναπαράσταση επιφέρουν αλλαγές και στις υπόλοιπες που συνδέονται με αυτή. Οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις μπορεί να αφορούν διαφορετικές

γνωστικές περιοχές των μαθηματικών (όπως άλγεβρα-ανάλυση, γεωμετρία, στατιστική, πιθανότητες).

- **Διερεύνηση-πειραματισμός.** Το λογισμικό πρέπει να αφήνει περιθώρια ανάπτυξης εικασιών και υποθέσεων για όσα συμβαίνουν στη οθόνη, ενισχύοντας παράλληλα τις προϋποθέσεις για αφαιρετική σκέψη και αναστοχασμό. Ο μαθητής πρέπει να μπορεί να πειραματιστεί με διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλλάζοντας παραμέτρους, αποδομώντας και μετασχηματίζοντας μαθηματικά αντικείμενα και κατασκευές, βασιζόμενος κυρίως στην ανατροφοδότηση του υπολογιστή. Ο μαθητής έχει έτσι τη δυνατότητα να ελέγχει τις δράσεις του και να επαναπροσδιορίζει τις στρατηγικές του, να διερευνά δηλαδή τους τρόπους επίτευξης των ζητούμενων μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας.
- **Υποστήριξη της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας.** Το λογισμικό πρέπει να υποστηρίζει τη δυνατότητα σχεδιασμού δραστηριοτήτων που ενισχύουν την επικοινωνιακή διάσταση της μάθησης των μαθηματικών με άξονα τη συνεργατική μάθηση ανάμεσα και μεταξύ ομάδων μαθητών.

2.4 ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ Η/Υ

2.4.1 Βασικά επιχειρήματα υπέρ της χρήσης ΝΤ στη μαθηματική εκπαίδευση

Η εμφάνιση της τεχνολογίας των υπολογιστών και οι διαφαινόμενες προοπτικές και προκλήσεις από τη χρήση της έχουν ταρακουνήσει την εκπαιδευτική κοινότητα η οποία προσπαθεί να δώσει απαντήσεις σε θεμελιώδη ερωτήματα σχετικά με το νέο τοπίο που διαμορφώνεται στην εκπαίδευση. Οι ένθερμοι υποστηρικτές της εκτεταμένης χρήσης των υπολογιστών στην μαθηματική εκπαίδευση έχουν αναπτύξει και ορισμένα επιχειρήματα που όπως θα δούμε παρακάτω υποστηρίζονται (εν μέρει) και από την παιδαγωγική έρευνα.

Α) Οι υπολογιστές επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες.

Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μάθουν περισσότερα Μαθηματικά, αλλά και να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες των Μαθηματικών με την κατάλληλη χρήση της τεχνολογίας (Dunham & Dick 1994, Sheets 1993, Groves 1994).

Υπάρχουν λογισμικά (Function Probe, Sketchpad, Geogebra, Graph) που δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναλύσουν και να επεξεργαστούν δεδομένα τα οποία υπεισέρχονται ως μεταβλητές ή διατεταγμένα ζεύγη και κατόπιν παρουσιάζονται μέσω διαγραμμάτων, δίνοντας έτσι διαφορετικές αντιπροσωπεύσεις της ίδιας έννοιας, ώστε να την αφομοιώσουν σε βάθος(Tall, 1996).

Β) Οι υπολογιστές διευκολύνουν τον πειραματισμό, την εξερεύνηση προτύπων και κανονικοτήτων ώστε να οδηγηθούν στην διατύπωση εικασιών τις οποίες μετά ελέγχουν, οπότε είτε ανασκευάζουν είτε αποδεικνύουν παραγωγικά. Αυτή η διαδικασία βοηθά στη μύηση στον γνήσιο μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Γ) Η χρήση των υπολογιστών διευκολύνει την μελέτη ρεαλιστικών εφαρμογών.

Τα αριθμητικά δεδομένα που προέρχονται από παρατηρήσεις πραγματικών φαινομένων είναι συνήθως άβολα αφού οι αριθμοί αυτοί είναι πολύ μεγάλοι και ποτέ ακέραιοι. Οι υπολογιστές επιτρέπουν την διαχείριση αυτών των δεδομένων προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα που αποδεικνύουν την αξία των Μαθηματικών για την μελέτη του πραγματικού κόσμου.

Δ) Η χρήση των υπολογιστών δημιουργεί θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά.

Οι προσπάθειες για μεταρρυθμίσεις στη μαθηματική εκπαίδευση βασίζονται στην πεποίθηση ότι όλοι οι μαθητές είναι ικανοί να μάθουν μαθηματικά(NCTM, 1989). Άρα το πρόβλημα της παρακίνησης του ενδιαφέροντος όλων των μαθητών για τα Μαθηματικά αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα. Ο υπολογιστής δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο προσέγγισης των

εννοιών για τον μαθητή, κάτι που σε συνδυασμό με το γεγονός της στοιχειώδους χρήσης υπολογιστών από την συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, αυξάνει την πιθανότητα για επιτυχέστερη διδασκαλία.

Οι μαθητές που δεν μπορούν εύκολα να συγκεντρωθούν, μπορούν ν' ασχοληθούν πιο πολύ μ' ένα θέμα ζητούμενο από υπολογιστή. Όμως και αυτοί που έχουν δυσκολίες οργάνωσης μπορεί να βρεθούν κερδισμένοι από τους περιορισμούς που επιβάλλονται σ' ένα υπολογιστικό περιβάλλον. (Sheets, 1993).

Όπως συχνά επισημαίνεται, η εργασία στον υπολογιστή είναι αρκετά ελκυστική για το μαθητή (Meskill & Mossop, 1997). Το μαθησιακό περιβάλλον που μπορεί να δημιουργηθεί π.χ. με την τεχνολογία των πολυμέσων μπορεί να καταστήσει τη διδασκαλία ενδιαφέρουσα και συναρπαστική. Επίσης, ευνοείται η διαφοροποίηση της διδασκαλίας. Ο καθηγητής μπορεί να βοηθηθεί από έναν ακόμη υπομονετικό και σχετικά ευφυή συνεργάτη, όπως ο υπολογιστής, ο οποίος μπορεί να παρακολουθήσει την πορεία του διδασκόμενου, να ανιχνεύσει τις ιδιαιτερότητες του, να προσαρμόσει τη διδασκαλία στο επίπεδό του και να τον συνδράμει στις δυσκολίες του.

Ε) Ορισμένες έννοιες από τη φύση τους φαίνεται ότι δημιουργούν προβλήματα στη διδασκαλία και μάθησης τους καθώς είναι δύσκολο να οπτικοποιηθούν με τα παραδοσιακά διδακτικά μέσα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, έννοιες της Ανάλυσης(όριο συνάρτησης, ασύμπτωτες, ορισμός του ορισμένου ολκληρώματος)γεωμετρικοί τόποι, στερεομετρία. Με την χρήση όμως κατάλληλου λογισμικού (EucliDraw, Gabri II , ή 3D) αναδεικνύονται σημαντικές πτυχές των παραπάνω εννοιών.

2.4.2 Προβληματισμοί ως προς τη χρήση ΝΤ στη μαθηματική εκπαίδευση

Ορισμένοι μαθηματικοί – παιδαγωγοί είναι διστακτικοί και σκεπτικοί σχετικά με τους τρόπους χρήσης της τεχνολογίας και κάποιοι από αυτούς πιστεύουν ότι οι νέες τεχνολογίες δεν θα έχουν μέλλον στη μαθηματική εκπαίδευση. Τα επιχειρήματα που προβάλλονται είναι συνήθως τα εξής:

Α) Οι μαθητές πρέπει πρώτα να κατανοήσουν τις έννοιες με τις παραδοσιακές μεθόδους και κατόπιν να χρησιμοποιήσουν τα υπολογιστικά μέσα.

Β) Το κόστος των υπολογιστών είναι πολύ μεγάλο και δεν είναι δυνατό όλα τα σχολεία να εφοδιαστούν με ικανό αριθμό ώστε όλοι οι μαθητές να έχουν πρόσβαση σε αυτούς.

Γ) Οι δάσκαλοι των μαθηματικών, κυρίως οι παλιότεροι, αισθάνονται ανασφάλεια με την χρήση της νέας τεχνολογίας επειδή δεν την κατέχουν. Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός της απροθυμίας τους να μάθουν κάτι καινούργιο, τους καθιστά αντιπάλους στην νέα προσπάθεια.(«Τίποτα δεν είναι πιο δύσκολο για ένα δάσκαλο από το να εγκαταλείψει τις παλιές του συνήθειες και προκαταλήψεις», Μοντεσσόρι,1967). Ούτως ή άλλως απαιτείται μεγάλος χρόνος για την επιμόρφωσή τους προκειμένου να πειστούν για την αξία των νέων διδακτικών μεθόδων.

Δ) Η εκτεταμένη χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών θα έχει ως συνέπεια την εξασθένηση της πρακτικής εξάσκησης σε κάποιες δεξιότητες που αποτελούν τη βάση της μαθηματικής δραστηριότητας(βλ. αλγεβρικός λογισμός). Αυτό θα έχει ως συνέπεια να υπονομευθεί η καλλιέργεια ικανότητας επίλυσης προβλημάτων καθώς και η μάθηση προχωρημένων μαθηματικών.

Πολλοί εκπαιδευτικοί φοβούνται ότι η χρήση της τεχνολογίας θα έχει αρνητικό αντίκτυπο κατά κάποιο τρόπο την κατανόηση των μαθητών τους και την εκμάθηση των μαθηματικών (Schmidt, M.E., & Callahan, L.G. 1992). Ομοίως, πολλοί εκπαιδευτικοί φοβούνται ότι οι μαθητές μπορούν να γίνουν υπερβολικά

εξαρτημένοι από την τεχνολογία με αποτέλεσμα την μείωση της ικανότητας τους στην εκτέλεση μαθηματικών χειρισμών. (Bitter, G.G., & Hatfield, M.M.1991 ; Milou, 1999).

Αν οι καθηγητές αποφασίσουν να ενσωματώσουν την τεχνολογία στις οδηγίες τους, θα πρέπει να είναι αρκετά πεπεισμένοι για τη χρησιμότητά του (Biter & Hatfield, 1991). Κάποιοι καθηγητές επίσης αναφέρουν ότι οι μαθητές είναι πιο πρόθυμοι να κάνουν μαθηματικά όταν πρόκειται για την τεχνολογία, όπως γραφικά υπολογιστών (Milou, 1999).

Σαφέστατα κάποιες από τις παραπάνω αντιρρήσεις συνιστούν σοβαρό προβληματισμό, ενώ άλλες πάλι θεωρούνται πλευρές της γενικότερης αντίστασης σε κάθε τι νέο.

2.4.3 Προϋποθέσεις χρήσης των ΤΠΕ στη διδακτική

Σύμφωνα με τη διεθνή ερευνητική εμπειρία (Hoyles and Noss, 1992b, Kynigos 1992), αλλά και με τις σύγχρονες φιλοσοφικές και παιδαγωγικές θέσεις (Olson 1987, Noss 1988) οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας μπορούν να δώσουν δυνατότητες που ήταν ανύπαρκτες μέχρι τώρα. Οι καταλυτικές αλλαγές στην τεχνολογία και η εμφάνιση των Η/Υ επαναστατικοποίησαν όλες τις περιοχές της γνώσης και της επιστήμης και συνέβαλαν αποφασιστικά στην ποιοτική μεταβολή της κοινωνίας, με τη μετάβασή της από τη βιομηχανική κοινωνία στην τεχνολογική κοινωνία της γνώσης και της πληροφορίας (Τουμάσης & Αρβανίτης, 2003). Οι εφαρμογές των Νέων Τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας είναι δυνατό να συνεισφέρουν στη βελτίωση και επαναπροσανατολισμό της διαδικασίας της μάθησης σε μια κατεύθυνση που όπου η μάθηση θα γίνει ενεργητική και οι μαθητές θα μαθαίνουν να συνεργάζονται, να είναι μεθοδικοί, να παίρνουν πρωτοβουλίες, να θέτουν στόχους, να επιχειρηματολογούν, να σκέφτονται και να εκφράζονται ελεύθερα (Παπαδόπουλος, 1999).

Όμως παρά την, σχεδόν καθολική, συμφωνία για τα πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα που είναι δυνατό να προσφέρει η ένταξη των ΤΠΕ στην εκπαίδευση, δεν πρέπει να παραγνωρισθεί το γεγονός ότι η άκριτη και δίχως όρους και

προϋποθέσεις χρήση τους μπορεί να επιφέρει αρνητικά αποτελέσματα στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Οι Ράπτης και Ράπτη (1996) επισημαίνουν ότι βασική **προϋπόθεση για να αποτελέσει ο υπολογιστής ένα αποτελεσματικό γνωστικό εργαλείο** είναι η λειτουργία του σε σχέση αφενός με το θεσμικό και πολιτιστικό πλαίσιο του παιδαγωγικού περιβάλλοντος και αφετέρου με τη «γλώσσα» και τις αρχές της τεχνολογίας. Ο Κυνηγός (1995) τονίζει ότι χρειάζεται μεγάλη προσοχή στον τρόπο χρήσης του Η/Υ, γιατί υπάρχει ο κίνδυνος να ενταχθεί η χρήση του Η/Υ στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας που ως κυρίαρχες διαδικασίες έχει την μετάδοση πληροφοριών από τον δάσκαλο-πομπό στον μαθητή δέκτη καθώς και την καθοδηγητική διδασκαλία με βάση αυστηρά καθορισμένο γνωστικό περιεχόμενο. Στην ουσία ο κίνδυνος αυτός έγκειται στη χρήση του υπολογιστή ως μέσου για την επίτευξη ικανοποιητικής κατάρτισης και όχι ως εργαλείου διδακτικής. Η τεράστια διαφορά μεταξύ των όρων κατάρτιση και διδακτική έχει επισημανθεί ιδιαίτερα από τον Von Glasersfeld (1991a) κατά την εξέταση της μαθηματικής παιδείας υπό το πρίσμα του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού.

Η σημαντικότερη ίσως εκ των προϋποθέσεων είναι η εξής: για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση οποιασδήποτε εφαρμογής των ΤΠΕ ισχύει ότι και για κάθε εκπαιδευτικής εφαρμογή γενικότερα, δηλαδή ότι: *«κατά πάγια πρακτική η υλοποίηση είναι το τελικό προϊόν μιας παραγωγικής διαδικασίας της οποίας προηγείται πάντα η ανάλυση με σκοπό την τεκμηρίωση της συγκεκριμένης (διδακτικής) ανάγκης και τον ακριβή και σαφή προσδιορισμό της λειτουργικότητάς της, ως προς το (παιδαγωγικό) στόχο που εξυπηρετεί η δημιουργία της»* (Καλλιγάς, Φερεντίνος, Πετρέσκου,2003). Επίσης, πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη ότι κατά κανόνα οι εφαρμογές υλοποιούνται για τις (εκπαιδευτικές ή γνωστικές) ανάγκες των τελικών χρηστών τους, που επί του προκειμένου είναι οι διδασκόμενοι και όχι οι διδάσκοντες. Επομένως απαιτείται να προσδιοριστεί κατ' αρχήν η αναγκαιότητα δημιουργίας και εφαρμογής της συγκεκριμένης εκπαιδευτικής δραστηριότητας που εξυπηρετεί και αναδεικνύει τον σχεδιασμό του μαθησιακού περιβάλλοντος που είναι συμβατός με την επιλεγμένη θεωρία μάθησης. Στη συνέχεια, η αναγκαιότητα της ενδεχόμενης κατασκευής εκπαιδευτικής εφαρμογής των ΤΠΕ ή και

οποιουδήποτε άλλου αναγκαίου εποπτικού μέσου, θα προκύψει με σαφήνεια από την ανάλυση των συγκεκριμένων διδακτικών και παιδαγωγικών αναγκών με σκοπό την ενίσχυση του συνολικού εκπαιδευτικού σχεδιασμού. Συνεπώς, οι αρχές (πρότυπα ή κριτήρια) που διέπουν τη δημιουργία, ενσωμάτωση και αξιολόγηση των εκπαιδευτικών εφαρμογών των ΤΠΕ ταυτίζονται με εκείνες που κατευθύνουν τον βασικό σχεδιασμό του μαθησιακού περιβάλλοντος, οι οποίες είναι άμεση συνέπεια των αρχών που προσδιορίζουν τη συγκεκριμένη θεωρία μάθησης, που έχει επιλεγεί για εφαρμογή στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Εκτός των παραπάνω κρίνεται απαραίτητο, προκειμένου να καταστεί αποτελεσματική η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στην ανάπτυξη εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που αξιοποιούν τις ΤΠΕ στη διδακτική πράξη, να προσδιορισθεί με σαφήνεια τι σημαίνει *«εργάζομαι πάνω σε μια δραστηριότητα»,* γενικά και ανεξάρτητα από την αναγκαιότητα ή μη της χρήσης εφαρμογών των ΤΠΕ. Η *δραστηριότητα* είναι μια έννοια κλειδί γύρω από την οποία διαρθρώνονται σχεδόν όλες οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις, με προεξάρχουσα την θεωρία του *κονστρουκτιβισμού,* βασικές αρχές της οποίας είναι αφενός ότι η γνώση οικοδομείται ενεργητικά από το άτομο και δεν αποτελεί μια παθητική διαδικασία απορρόφησης πληροφοριών από το περιβάλλον και αφετέρου ότι η απόκτηση της γνώσης είναι μια διαδικασία οργάνωσης των εμπειριών του ατόμου και όχι η αποκάλυψη ενός κόσμου που προϋπάρχει ανεξάρτητα από το άτομο (Von Glasersfeld, 1991b). Εργασία πάνω σε μια δραστηριότητα σημαίνει κυρίως «προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια *παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα»* (ΥΠΕΠΘ, 1997). Με την χρήση των δραστηριοτήτων (Κολέζα, 1997) επιδιώκεται μια στροφή προς μια διδασκαλία διαρθρωμένη γύρο από ευρετικές διαδικασίες, σε άμεση συνάρτηση με την καθημερινή ζωή. Ο Von Glasersfeld (1987) θεωρεί ότι η δραστηριότητα προσφέρει στους μαθητές ένα ισχυρό εσωτερικό κίνητρο προκειμένου να εμπλακούν ενεργητικά στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης. Οι Κορδάκη και Κόμης (2001) τονίζουν τη μεγάλη σημασία της συμμετοχής των μαθητών σε δραστηριότητες που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή τους.

2.4.4 Πορίσματα της Παιδαγωγικής Έρευνας σχετικά με τη χρήση της Υπολογιστικής Τεχνολογίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Τα τελευταία 20 χρόνια περίπου έχει διεξαχθεί σημαντική έρευνα σχετικά με τη χρήση των πάσης φύσεως Η/Υ (τσέπης, PC) στη μαθησιακή διαδικασία, ικανή να βοηθήσει τον τρόπο με τον οποίο τα τεχνολογικά αυτά εργαλεία θα ενσωματωθούν στη διδασκαλία. Οι ερευνητές έχουν επισημάνει ότι η χρήση των υπολογιστών μέσα στην τάξη επηρεάζει όχι μόνο το μαθηματικό περιεχόμενο του προγράμματος διδασκαλίας, αλλά και τις μαθησιακές αλληλεπιδράσεις, την οργάνωση της τάξης και τον τρόπο αξιολόγησης της προόδου των μαθητών.

Η έρευνα σχετικά με τη χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών έχει καταλήξει στα εξής γενικά συμπεράσματα (Shumway, 1988; NCTM, 1987;Hembree & Dessart, 1986; Becker, 1987; Capper & Copple, 1985; Leinhart et al., 1990; McCoy, 1991;Henderson & Landesman,1992; Funkhouser, 1993; Kaput & Thompson, 1994; Dunham, 1999;Becker et al., 1999, οπ. ανάφ. στο Τουμάσης & Αρβανίτης, 2003: 56):

- Ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, προσφέροντας τη δυνατότητα οπτικοποίησης και συγκεκριμένης επεξεργασίας τους.

- Οι μαθητές που χρησιμοποιούν υπολογιστές διαμορφώνουν μια καλύτερη στάση απέναντι στα Μαθηματικά, ενώ αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους για τις μαθηματικές τους ικανότητες

- Όταν ο υπολογιστής χρησιμοποιείται στην παραδοσιακή διδασκαλία ως συμπληρωματικό μέσο, επιτυγχάνεται μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα από ότι όταν χρησιμοποιείται ως η μοναδική βάση για διδασκαλία

- Η διδασκαλία που υποβοηθείται από τον υπολογιστή (Computer Assisted Instruction, CAI) είναι πιο αποτελεσματική όσον αφορά στην άνοδο της επίδοσης αδύνατων μαθητών και των πολύ καλών μαθητών παρά των μέτριων μαθητών.

- Η διδασκαλία με χρήση Η/Υ συμβάλλει στην ενεργοποίηση και παρακίνηση όλων των μαθητών και ιδιαίτερα αυτών που δείχνουν μια παθητική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

Σε γενικές γραμμές μπορεί να ειπωθεί ότι η έρευνα έχει να δώσει ελπιδοφόρα σημάδια για το μέλλον της υπολογιστικής τεχνολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Υπάρχουν βέβαια και έρευνες οι οποίες δείχνουν ότι η χρήση Η/Υ δεν είχε σημαντική επίδραση στην επίδοση των μαθητών ή στη βελτίωση της κατανόησης ορισμένων μαθηματικών εννοιών (Johnson et al, 1994; Ford & Klicka, 1994). Σε άλλες έρευνες πάλι δεν κατέστη δυνατό να βγουν ξεκάθαρα συμπεράσματα υπέρ της θετικής επίδρασης των υπολογιστών στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Coffin,1987; Ferrel,1985).

Η έρευνα σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας αποκαλύπτει την πολυπλοκότητα της αλληλεπίδρασης της τεχνολογίας και της διδασκαλίας στην εκμάθηση των μαθηματικών. Ένα πράγμα παραμένει σταθερό. Είναι τελικά οι καθηγητές μαθηματικών και όχι τα τεχνολογικά εργαλεία που εξακολουθούν να είναι το κλειδί για την επιτυχία της διδασκαλίας των μαθηματικών στο μαθησιακό περιβάλλον. Η φύση των μαθηματικών από τη δική τους οπτική και η συσχέτισή τους με τις δυνατότητες της τεχνολογίας, καθώς και η εκπαίδευση που λαμβάνουν , καθορίζουν την αποτελεσματικότητά τους στην ενσωμάτωση της τεχνολογίας στα μαθηματικά (στη διδασκαλία και στη μάθηση). (Garofalo, Drier, Harper, Timmerman, & Shockey, 2000; Kaput, 1992; NCTM, 2002).

Η έρευνα πάντως γύρω από τη σχολική χρήση της πρόσφατης υπολογιστικής τεχνολογίας στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών συνεχίζεται και ολοένα αυξάνεται. Είναι επιτακτική ανάγκη να μάθουμε στο *τι* και στο *πως* μαθαίνουμε και διδάσκουμε Μαθηματικά σε ένα πλούσιο τεχνολογικό περιβάλλον.

2.4.5 Η Αξιοποίηση Των Προγραμμάτων Προσομοίωσης Java Applets στη Διδασκαλία Των Μαθηματικών

Η Java είναι μια αντικειμενοστραφής γλώσσα προγραμματισμού[2] και εκτελείται σε ποικίλα λειτουργικά περιβάλλοντα (Windows, Macintosh, UNIX κλπ). Μικροεφαρμογές της γλώσσας Java είναι τα Java Applets που εμφανίζονται σε ιστοσελίδες με τρόπο παρόμοιο με τις εικόνες. Πρόκειται για διαλογικές και ευέλικτες εφαρμογές ως προς τη λειτουργία τους που δημιουργούν προσομοιώσεις φυσικών καταστάσεων και μαθηματικών εννοιών. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία κίνησης, εφέ, εικόνων και διαδραστικών (interactive) ασκήσεων (Μακράκης & Στεφάνου, 2001). Τα Java Applets είναι μικρά σε μέγεθος αρχεία που μεταφέρονται εύκολα μέσω του διαδικτύου και μπορούν να τρέξουν με ασφάλεια σε οποιοδήποτε υπολογιστή, ενώ είναι διαθέσιμα σε κάθε χρόνο και χώρο (Γκούτσιας, Α., 2002).

Τα Applets είναι προσομοιώσεις φαινομένων, πειραματικών διατάξεων, μαθηματικών μοντέλων και μαθηματικών σχέσεων, είναι κατά κάποιον τρόπο μικρά εικονικά εργαστήρια που επιτρέπουν την αλληλεπίδραση με τον χρήστη. Ο χρήστης μπορεί μεταβάλλοντας τις παραμέτρους να δει άμεσα τα αποτελέσματα αυτής της παρέμβασής του. Η ένταξή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία εκτός από το ότι την εμπλουτίζει με ένα νέο μέσο που είναι ενδιαφέρον και προσελκύει τους μαθητές, δίνει τη δυνατότητα να υλοποιηθεί διερευνητική μάθηση. Έτσι οι μαθητές έχουν ένα εργαλείο πειραματισμού και μάθησης, χωρίς περιορισμούς χρόνου και τόπου, το οποίο συμβάλλει στην κατανόηση εννοιών και φαινομένων και στη διατύπωση γόνιμων ερωτημάτων. Οι εκπαιδευτικοί από την άλλη αποκτούν ρόλο συντονιστή, καθοδηγητή, οργανωτή και ισότιμα συμμετέχοντα στην διαδικασία της μάθησης. (Χατζηβασιλείου, Ταξίδης, Σαλονικιός, Ίτσιου, 2005).

Ως προγράμματα προσομοίωσης τα Java Applets, ταξινομούνται και αποκτούν παιδαγωγική προοπτική, σύμφωνα με την ταξινόμηση των Μπακίρη, Π.,

---

[2] Object Oriented - αποδίδεται στα ελληνικά με τον όρο Αντικειμενοστραφής και είναι ένα είδος προγραμματισμού στο οποίο δεν ορίζουμε μόνο τους τύπους των δεδομένων (data types) αλλά και τις ιδιότητες (properties) των αντικειμένων (objects) καθώς και τις μεθόδους (methods) που μπορούν να εφαρμοσθούν σ' αυτά. Είναι χαρακτηριστικό της γλώσσας Java.

κα (Μπακίρης, Π., κα, 2004), στην κατηγορία των ενεργών αναπαραστάσεων (enactive representations), μια κατηγορία της οποίας τα εκπαιδευτικά μέσα αντιστοιχούν στη φυσική παρόρμηση των παιδιών για κατασκευή και αλληλεπίδραση με ενεργές αναπαραστάσεις.

Η χρήση έτοιμων προσομοιώσεων, με σκοπό την διεύρυνση και την κατανόηση κάποιου θέματος, έχει την εκπαιδευτική της αξία, δίνοντας τη δυνατότητα καθορισμού των παραμέτρων της προσομοίωσης και της ταυτόχρονης παρατήρησης της συμπεριφοράς και της μεταβολής διαφόρων μεγεθών (Βίγκλας & Σπυρόπουλος, 2003).

Από τις έρευνες προκύπτει ότι τα Java Applets που βασίζονται στα προγράμματα σπουδών βελτιώνουν τις οπτικοακουστικές ικανότητες των μαθητών και ενισχύουν τη δυνατότητα να δημιουργηθούν συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων. Ένας αρχικός στόχος των Java Applets είναι η δημιουργία περιβάλλοντος μάθησης, στο οποίο οι μαθητές να μπορούν να εξερευνήσουν τα δυναμικά σχέδια των 2-D και 3-D αντικειμένων, επιτρέποντας να εκφράσουν τις ιδέες τους με νέους τρόπους(Χατζηβασιλείου, Ταξίδης, Σαλονικιός, Ίτσιου, 2005). Οι τρόποι αυτοί έχουν επίπτωση στις ήδη υπάρχουσες ιδέες (Πατσιομίτου, Στ., 2006). «Δεν έχουμε πάντα τις ιδέες και έπειτα τις εκφράζουμε στο μέσο. Έχουμε τις ιδέες με το μέσο» (DiSessa, 2000, σ.116).

Τα Java Applets έχουν επιτυχώς αναπτυχθεί ως διδακτικά εργαλεία σε όλες τις περιοχές μάθησης, με έμφαση στην αλληλεπίδραση, τα γραφικά και τη διασκέδαση σημειώνει ο Kahn (1998) για τη χρήση αυτής της τεχνολογίας . Σε άρθρο τους οι Gadanidis, G., Gadanidis, J., & Schindler, K., (2003), υποστηρίζουν ότι τα Java Applets διευκολύνουν τη διερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων. Οι ίδιοι υποστηρίζουν μάλιστα ότι μπορούν να θεωρηθούν ως παιδαγωγικά πρότυπα, ευέλικτα και φιλικά στη χρήση, που επιτρέπουν στους μαθητές να συμμετέχουν σε έρευνες για τις μαθηματικές σχέσεις χωρίς να χρειάζεται να ξοδευτεί αρκετός, πολύτιμος, χρόνος για να μάθουν να χρησιμοποιούν το εργαλείο που δημιουργεί τις διάφορες μαθηματικές αναπαραστάσεις, έτσι οι μαθητές εμπλέκονται σε μια ενεργητική μάθηση, η οποία εμπεριέχει την κατασκευή νοημάτων μέσα από τις αναπαραστάσεις και την οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών.

Τα καλά σχεδιασμένα προγράμματα προσομοίωσης Java Applets μπορούν να παρέχουν στους μαθητές ένα κανάλι για να συζητήσουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα σε ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον μάθησης.

Ο όρος αλληλεπίδραση χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει μια διαδικασία κατά την οποία το άτομο έρχεται σε επαφή με το περιβάλλον του. Η φύση και η έκταση της αλληλεπίδρασης που θα χαρακτηριζόταν ως κατάλληλη για οποιοδήποτε μαθησιακό περιβάλλον ποικίλει, σύμφωνα με τη διδακτική φιλοσοφία της φύσης του γνωστικού αντικειμένου, την ωριμότητα των μαθητών και το μέσο διδασκαλίας (Liaw & Huag, 2000, Trentin, 2000, Yacci, 2000, στο Μακράκης, & Στεφάνου, 2001).

Η αλληλεπίδραση προσεγγίζεται ως μια από τις πιο σημαντικές διαδικασίες μάθησης και ιδιαίτερα όταν βασίζεται στις αρχές της ενεργητικής μάθησης, της οικοδόμησης της γνώσης, της στοχαστικής μάθησης, της αυθεντικής και υποβοηθητικής μάθησης (Μακράκης, 1998β, στο Τσεμασφύρας, επιμ.). Στο πλαίσιο αυτών, οι μαθητές δεν εκλαμβάνονται ως παθητικοί δέκτες, αλλά ως αυτόνομα και υπεύθυνα άτομα τα οποία συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία της μάθησης, υποβοηθούμενα από τις δυνατότητες της αλληλεπιδραστικής υπολογιστικής τεχνολογίας. Η έννοια της ενεργητικής μάθησης προϋποθέτει ότι ο μαθητής θα αναπτύξει ένα ιδιαίτερο είδος ψυχολογικής σχέσης με τη διαδικασία και το περιεχόμενο (Little, 1991). Η διευκολυντική ρυθμιστική παρέμβαση του εκπαιδευτικού συντελείται στο πλαίσιο μιας συνεχούς υποστήριξης των μαθησιακών επιδιώξεων των μαθητών, με ταυτόχρονη σταδιακή απόσυρση του ελέγχου και της υποστήριξης από το σύστημα και τον εκπαιδευτικό. Δημιουργείται με άλλα λόγια μια σκαλωσιά (scaffolding) η οποία μπορεί να οδηγήσει σταθερά τον μαθητή στην αυτόνομη μάθηση (Μακράκης, & Στεφάνου, 2001).

Παράλληλα η γραφιστική προσέγγιση στην αλληλεπίδραση, παίζει σημαντικό ρόλο στα μαθησιακά κίνητρα και κατά συνέπεια στην έκβαση του μαθησιακού αποτελέσματος (Lohr, 2000). Οι μαθητές συχνά έλκονται από την καινοτομία των αλληλεπιδραστικών πολυμέσων, αλλά εάν τα κίνητρα δεν προεκτείνονται πέρα από το επίπεδο της καινοτομίας η ενεργός εμπλοκή των μαθητών δεν παραμένει για πολύ. Η διάταξη της πληροφορίας στην οθόνη και ο τρόπος παρουσίασης επηρεάζουν σημαντικά την κατεύθυνση, τη διάρκεια και το

βαθμό προσοχής του μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό το χρώμα, η ταχύτητα, η κίνηση και ο ήχος, μπορούν να επηρεάσουν την αλληλεπιδραστική διαδικασία (Hannafin, & Hooper, 1989).

Ο Lester υποστηρίζει ότι: «ενώ τα φυσικά αντικείμενα γίνονται περισσότερο αφηρημένα όταν μοντελοποιούνται σε οθόνη υπολογιστή, τα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία είναι από τη φύση τους αφηρημένα, γίνονται περισσότερο συγκεκριμένα» (Lester, 2000, σ.2 στο Gadanidis et al 2003). Με το να οδηγήσουμε τους μαθητές να αναλύσουν τις εφαρμογές με απλά έως σύνθετα μαθηματικά μοντέλα, ωθούνται να παίξουν ενεργά, μαθαίνοντας τις σημαντικές έννοιες και να αναπτύξουν δεξιότητες, που ενσωματώνονται μέσα στις διάφορες δραστηριότητες των Java Applets (Πατσιομίτου, Στ., 2006).

Όταν οι μαθητές παίζουν με τα interactive applets μπορούν να έχουν πρόσβαση σε νέα επίπεδα γνώσης των μαθηματικών (Sinclair, 2005). Στοχεύουμε λοιπόν να εκμεταλλευτούμε την ανάγκη του παιδιού για παιχνίδι, επιτρέποντας σ' αυτά να εισχωρήσουν στον αφηρημένο και τυπικό τρόπο σκέψης (Noss, 2005). Έτσι οι μαθητές με τα Java Applets και μέσα από το παιχνίδι και την ανάπτυξη στρατηγικών, συνδυάζουν τη διασκέδαση και την εκπαίδευση.

Τα τελευταία χρόνια πολλά εκπαιδευτικά ιδρύματα στρέφουν την προσοχή τους στην παραγωγή portals με μαθησιακά εργαλεία τα οποία επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς την on line χρήση Applets και άλλων μαθηματικών υλικών που παρέχουν μάθηση (Muirhead, 2003).

Όπως ήδη αναφέρθηκε οι υπολογιστικές αναπαραστάσεις μπορούν να κάνουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες χειροπιαστές, αποκαλύπτοντας τις ιδιότητες που σχετίζονται με καθημερινές καταστάσεις τις οποίες αναπαριστούν (Vosniadou, 1996). Ειδικά για τις μαθηματικές προσομοιώσεις, όπως είναι τα Java Applets, τα μοντέλα γίνονται πιο απτά (Lester, 2000).

Ο Connell (1998) ισχυρίζεται ότι όταν η τεχνολογία χρησιμοποιείται ευθυγραμμισμένη με την κονστρουκτιβιστική φιλοσοφία υπάρχει καταφανής βελτίωση στη μαθηματική κατανόηση και επίδοση των μαθητών.

Υπάρχουν έρευνες που μαρτυρούν ότι «η σκέψη μας είναι βαθιά καλουπωμένη σε υλικές διατάξεις και κοινωνικοτεχνικές συλλογές» (Levy, 1993,

σ.10 στο Gadanidis, G., et al, 2003, σ.324). Άρα είναι πιθανό καλοσχεδιασμένα και εύχρηστα Java Applets που επιτρέπουν τους μαθητές και τους δασκάλους να χρησιμοποιούν και να εξερευνούν τις μαθηματικές σχέσεις, να μπορούν να επηρεάσουν αυτό που ο Levy (1993) αναφέρει ως γνωστική οικολογία του μαθησιακού περιβάλλοντος, που σημαίνει ότι οι νέοι τρόποι αναπαράστασης μπορούν να αλλάξουν τα μαθηματικά που διδάχτηκαν.

Τα Java Applets ως παιδαγωγικά μέσα επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, μεταφέροντας την εστίασή τους από τις ξεκομμένες δεξιότητες στην περιοχή της διερεύνησης των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών (Gadanidis, 2001).

Από την πειραματική διδασκαλία με τη χρήση Java Applets του ιστοχώρου www.illuminations.nctm.org/mathlets, που διενήργησε η Πατσιομίτου (2006), προέκυψε ότι οι μαθητές με την χρήση προσομοιώσεων java applets οδηγούνται στο να αναλύσουν τις εφαρμογές με απλά ή και σύνθετα μαθηματικά μοντέλα και ωθούνται να «παίξουν» ενεργά μαθαίνοντας τις σημαντικές έννοιες και αναπτύσσοντας τις δεξιότητες που ενσωματώνονται μέσα στις διάφορες δραστηριότητες χειρισμού. Τα προγράμματα αυτά υποστήριξαν την ανάπτυξη επικοινωνίας, παρέχοντας πολυάριθμες ευκαιρίες για συζητήσεις μεταξύ μαθητών και μεταξύ μαθητών και της ερευνήτριας, προσφέροντας έτσι στους μαθητές ένα κανάλι για να συζητήσουν τις μαθηματικές έννοιες.

Σε σχέση με τα ζητήματα ένταξης των Java Applets στο σχεδιασμό των μαθημάτων των μαθηματικών, διενήργησαν σχετική έρευνα οι Gadanidis, G., Gadanidis, J., & Schindler, K.,(2003) στο University of Western Ontario Canada, με στόχο την ανάδειξη των παραγόντων εκείνων που επηρεάζουν την παιδαγωγική σκέψη των εκπαιδευτικών όταν σχεδιάζουν το μάθημα των μαθηματικών με τη χρήση Java Applets, τα οποία πιθανόν να εμπλέκουν τους μαθητές στην διερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων. Από την έρευνα αυτή προέκυψαν πέντε βασικοί παράγοντες διαμεσολάβησης στην χρήση των online Applets κατά τον σχεδιασμό του μαθήματος των μαθηματικών. Οι παράγοντες αυτοί είναι: οι παιδαγωγικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, οι απόψεις σχετικά με τον τρόπο διαχείρισης της τάξης, η εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, τα

μαθηματικά θέματα και οι μαθηματικές γνώσεις που προσωπικά διαθέτει ο κάθε εκπαιδευτικός.

Βασική θέση την οποία υποστηρίζουν οι παραπάνω ερευνητές είναι ότι σύμφωνα με μια κονστρουκτιβιστική θεώρηση (Gadanidis, 1994), υπάρχουν τέσσερα επίπεδα μαθηματικής εμπλοκής των μαθητών:

1. Οι μαθητές ως παθητικοί μαθητευόμενοι, εστιάζουν στην ανάκληση μαθηματικών γεγονότων και απλών δεξιοτήτων.
2. Οι μαθητές ως παθητικοί μαθητευόμενοι, εστιάζουν στην εφαρμογή μαθηματικών κανόνων για να λύσουν καθημερινά προβλήματα.
3. Οι μαθητές ως ενεργοί μαθητευόμενοι, εστιάζουν στις μαθηματικές σχέσεις, διερευνούν τις σχέσεις μέσω εννοιών και πολλαπλών αναπαραστάσεων και δοκιμάζουν εικασίες.
4. Οι μαθητές ως ενεργοί μαθητευόμενοι, εστιάζουν στις επεκτάσεις της κατανόησης των μαθητικών σχέσεων σε νέα πλαίσια ή σε πιο γενικευμένες καταστάσεις.

Καθώς μετακινούμαστε από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 4 η μαθηματική επιτήδευση και η εμπλοκή των μαθητών με τη διερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων αυξάνουν. Τα μαθηματικά μετακινούνται από τους νόμους και τους κανόνες στις σχέσεις ανάμεσα σε έννοιες και στις σχέσεις, στις γενικεύσεις, και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών. Η εμπλοκή των μαθητών μετακινείται από το να ακούν το δάσκαλο στο να ανακαλύπτουν και να εφαρμόζουν στην πράξη τους κανόνες σε μια ενεργητική διερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων.

3^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ. ΟΡΙΟ

3.1 Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου

3.1.1 Από το αξίωμα της συνέχειας του Ευδόξου στην έννοια του ορίου ακολουθίας

Η εικόνα για τους πραγματικούς αριθμούς που έχουμε σήμερα ήταν το αποτέλεσμα πολλαπλών αναζητήσεων και αντεγκλήσεων. Η κρίση που προκάλεσε η ανακάλυψη των αρρήτων ενσωματώθηκε δημιουργικά στο γνωστικό σώμα των ερχόμενων γενεών ένεκα των ιδιοφυών παρατηρήσεων και απόψεων του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού Ευδόξου(408 – 355 π.Χ.) (Αυγερινός & Κιουλάφας, 2003).

Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία που θεωρούσε ότι το Σύμπαν ήταν δομημένο κατά ρητό τρόπο, δέχτηκε πλήγμα με την ανακάλυψη των αρρήτων. Όλη η Πυθαγόρεια θεωρία των αναλογιών και των ομοίων σχημάτων είχε μέχρι τότε στηριχθεί στην υπόθεση ότι δύο τυχόντα ευθύγραμμα τμήματα ήταν πάντα σύμμετρα μεγέθη. Η κρίση ξεπεράστηκε το 370 π.χ. χάρη στον ορισμό της αναλογίας μεταξύ μεγεθών που έδωσε ο Εύδοξος, ο οποίος είναι τελείως ανεξάρτητος αν τα θεωρούμενα μεγέθη είναι σύμμετρα ή όχι. Ο ορισμός αυτός είναι ο υπ΄αριθμόν 5 στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη και αποτελεί κορυφαία στιγμή στα μαθηματικά. Δοσμένος με σύγχρονο συμβολισμό έχει ως εξής:

Αν α, β, γ, δ είναι τέσσερα τυχόντα μεγέθη όπου α, β είναι ομοειδή καθώς και τα γ, δ είναι επίσης ομοειδή, τότε ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ ισούται με τον λόγο $\frac{\gamma}{\delta}$ τότε και μόνον τότε όταν για μ , ν τυχόντες ακεραίους και θετικούς είναι :

$$\mu\cdot\alpha \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle \nu\cdot\beta \text{ τότε και μόνο τότε όταν } \mu\cdot\gamma \left\langle \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\rangle \nu\cdot\delta$$

Ο αμέσως προηγούμενος ορισμός από τον παραπάνω, είναι ο Ορισμός 4 στο V βιβλίο και έχει βαρύνουσα σημασία. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι *για μεγέθη*

συγκρίσιμα μεταξύ τους δεχόμαστε ότι το καθένα από αυτά μπορεί πολλαπλασιαζόμενο να υπερβεί το άλλο. Η έννοια αυτού του ορισμού επαναλαμβάνεται με σαφέστερο τρόπο στο 8^{ο} θεώρημα του 5^{ου} βιβλίου που λέει τα εξής : «Εάν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και η διαφορά αυτών πολλαπλασιαστεί με ένα θετικό αριθμό, τότε γίνεται μεγαλύτερη από οποιοδήποτε μεγάλο μέγεθος».

Το νόημα αυτού του ορισμού 4 που αναφέρεται ως το *αξίωμα της συνέχειας*, το οποίο όμως σύμφωνα με όσα αναφέρει ο Ε. Σταμάτης στην εισαγωγή του 1^{ου} βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη στη σελίδα 29, διατύπωσε για πρώτη φορά ο Αναξαγόρας στο σωζόμενο απόσπασμα του έργο «περί φύσεως» ως εξής :

«*ούτε γαρ του σμικρού έστι το γε ελάχιστον, αλλ' έλασσον αεί, (το γαρ εάν ουκ έστι μη ουκ είναι), αλλά και του μεγάλου έστι μείζον*», δηλαδή «*κατά την θεώρηση του μικρού δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει μικρότατο, αλλά πάντοτε μικρότερο, διότι το υπάρχον δεν μπορεί να μην υπάρχει οσοδήποτε μικρό και αν θεωρηθεί. Αλλά και του μεγάλου υπάρχει πάντοτε μεγαλύτερο*.»

Σήμερα το αξίωμα συνέχειας φέρει το όνομα του Αρχιμήδη και είναι γνωστό ως *Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών*, ο ίδιος όμως ο Αρχιμήδης αναφέρει ότι ήταν ιδέα του Ευδόξου. Το αξίωμα συνέχειας του Ευδόξου με σύγχρονη ορολογία γράφεται ως εξής:

Αν α, β είναι θετικοί (πραγματικοί) αριθμοί τότε υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε ν•α>β.

Ποια ήταν άραγε η σκοπιμότητα της θέσπισης αυτού του ορισμού; Ήθελε να αποφύγει τα απειροστά ή απλώς τον βόλευε στην δόμηση της θεωρίας του; Το σίγουρο πάντως είναι ότι η άρνηση της αλήθειας αυτής της πρότασης μας οδηγεί στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι φραγμένο.

Ας δούμε τώρα την ισχυρή σχέση που έχει το αξίωμα συνέχειας του Ευδόξου με τον ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας (Αυγερινός & Κιουλάφας, 2003):

- Από τη σχέση ν·α>β έχουμε ότι $\nu > \frac{\beta}{\alpha}, \forall \beta \in R, a \in R^*_+$. Δηλαδή η πρόταση του Ευδόξου διατυπώνεται ως εξής: *για οποιονδήποτε μεγάλο πραγματικό αριθμό πάντα υπάρχει φυσικός μεγαλύτερος.*

- Αν ορίσουμε την ακολουθία α: N→R , $a_\nu = \nu$ τότε θα λέμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathrm{N} : \forall \nu > \nu_0 \Rightarrow \nu > \mathrm{M}$$

Οπότε οσοδήποτε μεγάλος κι αν είναι ο αριθμός Μ πάντα υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του, δηλαδή ν>Μ από κάποιον ν_0 και μετά.

- Στη σχέση ν·α>β αν αντικαταστήσουμε το α με ε όπου ε αυθαίρετος πραγματικός μεγαλύτερος του μηδενός και το β=1 , τότε η πρόταση του Ευδόξου γράφεται :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathrm{N} \ \mu\varepsilon \ \nu \cdot \varepsilon > 1$ δηλαδή $\varepsilon > \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon$ και αυτό για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό ε οσοδήποτε μικρό. Με άλλα λόγια το αξίωμα συνέχειας του Ευδόξου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Για οσοδήποτε μικρό θετικό πραγματικό αριθμό, υπάρχει μικρότερος θετικός ρητός.

- Εάν τώρα θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha : \mathrm{N} \to R$, $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ τότε για το όριο της ακολουθίας α_ν θα γράφουμε :

$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathrm{N} : \forall \nu > \nu_0 \Rightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon$, δηλαδή από κάποιον φυσικό ν_0 και μετά υπάρχουν θετικοί ρητοί που είναι μικρότεροι από οσοδήποτε μικρό θετικό πραγματικό αριθμό ε.

3.1.2 Μέθοδος της εξάντλησης – Όριο

Το αξίωμα της συνέχειας του Ευδόξου αποτέλεσε την βάση για την ανάπτυξη του "Ελληνικού Ολοκληρωτικού Λογισμού". Ο υπολογισμός του εμβαδού καμπυλόγραμμων σχημάτων είχε προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών (Αυγερινός & Κιουλάφας, 2003).

Ο σοφιστής Αντιφών (425 π.χ.) υπήρξε ένας από τους παλαιότερους Αθηναίους μαθηματικούς ο οποίος ασχολήθηκε με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου. Ο Αντιφών είχε την ιδέα ότι το εμβαδόν του κύκλου μπορεί να υπολογισθεί με την εγγραφή στον κύκλο κανονικών πολυγώνων, το πλήθος των πλευρών των οποίων διαρκώς διπλασιάζεται.

Η εγγραφή κανονικού πολυγώνου στον κύκλο και ο επ΄ άπειρον διπλασιασμός των πλευρών του υπήρξε βέβαια η βασική ιδέα, αλλά πέραν τούτου οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης δεν γνώριζαν πώς να χειρισθούν περαιτέρω το όλο θέμα διότι η έννοια του ορίου, τους ήταν άγνωστη. Έτσι ο Αντιφών ήταν ο πρώτος που έπεσε στις παγίδες των ορίων.

Ο Εύδοξος διατύπωσε μια έμμεση μέθοδο για την αυστηρή απόδειξη προτάσεων, που αναφέρονται σε υπολογισμούς εμβαδών ή όγκων. Η μέθοδός του καθιερώθηκε και χρησιμοποιήθηκε τόσο στην Αρχαία Ελλάδα όσο και αργότερα όπως π.χ. στην Αναγέννηση, από μεγάλους μαθηματικούς.

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σήμερα με τη φράση «η μέθοδος της εξάντλησης» με τον συγκεκριμένο όρο να μην χρησιμοποιείται από τους αρχαίους έλληνες, αλλά εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε κείμενο του Gregoire de Saint Vincent το 1647 σύμφωνα με το Dirk J. Struik (1982).

Η μέθοδος του Ευδόξου περιλαμβάνεται στο βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη (πρόταση 1) και έχει ως ακολούθως:

Αν από το μεγαλύτερο, από δύο δοθέντα άνισα μεγέθη, αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του και στη συνέχεια αφαιρέσουμε από το υπόλοιπο τμήμα μεγαλύτερο από το μισό του και αυτό συνεχίζεται εσαεί, τότε θα προκύψει κάποτε ένα μέγεθος μικρότερο από το μικρότερο από τα δύο αρχικώς δοθέντα μεγέθη.

Η απόδειξη της μεθόδου στηρίζεται στο αξίωμα συνέχειας και προκύπτει εφαρμόζοντας την εις άτοπο απαγωγή. Μεταβάλλοντας τώρα τις λέξεις αλλά κρατώντας το νόημα της μεθόδου σταθερό, μπορούμε να την αποδώσουμε ως εξής (Αυγερινός & Κιουλάφας, 2003):

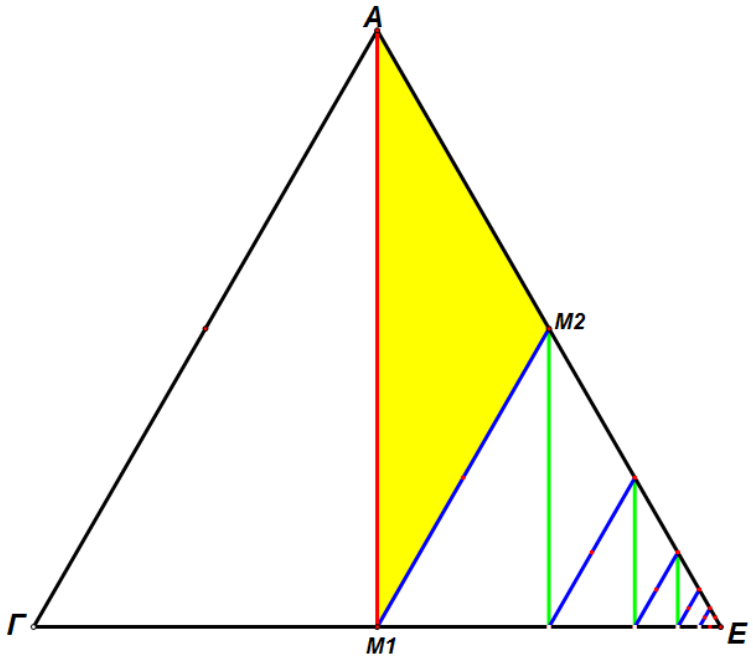
Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε πάλι τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία των αφαιρέσεων, τότε θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο άνισα μεγέθη α και ε (ας είναι α>ε) και από το α αφαιρείται μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, από το υπόλοιπο αφαιρείται μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, τότε θα μείνει κάποιο μέγεθος που είναι μικρότερο από το ε.

Συμβολίζοντας με α_1 , α_2 , ….. , α_v τα μεγέθη που κάθε φορά αφαιρούνται κατά την παραπάνω διαδικασία και θέσουμε $S_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ με κ = 1,2,…., ν τότε κατά την πρώτη αφαίρεση θα αφαιρεθεί μια ποσότητα $S_1 = \alpha_1$ και μετά την ν – οστή αφαίρεση θα έχει αφαιρεθεί συνολικά ποσότητα $S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_v$. Σύμφωνα με την αρχή της εξάντλησης θα υπάρχει κάποιο ν για το οποίο η διαφορά $\alpha - S_v$ θα γίνει μικρότερη από το ε για οποιοδήποτε ε , οσοδήποτε μικρό. Έτσι για την ακολουθία (S_v) των μερικών αθροισμάτων, η μέθοδος της εξάντλησης με σημερινή ορολογία και συμβολισμό διατυπώνεται ως εξής:

«Για κάθε ε>0 θα υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ $\Rightarrow |S_n - \alpha| < \varepsilon$, με άλλα λόγια $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ (Γιαννακούλιας, 2006. Η Ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού).

Ας πάρουμε για παράδειγμα ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Επειδή κάθε διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα, αν ακολουθώντας τη μέθοδο του Ευδόξου αφαιρούμε κάθε φορά το ένα από τα δύο ισεμβαδικά τρίγωνα, θα υπάρξει κάποια στιγμή που το εμβαδόν του εναπομείναντος τριγώνου θα είναι μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο πραγματικό αριθμό.



Το αρχικό εμβαδόν είναι $E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ οπότε το εμβαδόν E_1 που αφαιρούμε θα είναι $E_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^3}$ και ομοίως $E_2 = \frac{1}{2}E_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^4}$, $E_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^5}$ και συνεπώς μετά από ν επαναλήψεις της ίδιας διαδικασίας έχουμε ότι το εμβαδόν που αφαιρούμε θα είναι $E_\nu = \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{\nu+2}}$. Έτσι μετά από ν διαδοχικές αφαιρέσεις, το εναπομείναν τρίγωνο θα έχει εμβαδόν

$$\varepsilon_\nu = E - (E_1 + E_2 + \ldots + E_\nu) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \ldots. + \frac{a^2\sqrt{3}}{2^{\nu+2}}\right).$$

Δηλαδή $\varepsilon_\nu = \alpha^2\sqrt{3}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots. + \frac{1}{2^{\nu+2}}\right)\right]$ = ... = $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2^{\nu+3}}$

Συνεπώς το εμβαδόν ε_ν μπορεί να γίνει μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος ε, για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > \nu_0$ με $\nu_0 \in N$.

Ας το δούμε τώρα στη γενική περίπτωση. Έστω Κ ένα δεδομένο μέγεθος και ε ένα προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους και λ ένας πραγματικός αριθμός με $\frac{1}{2} \le \lambda < 1$. Συμβολίζουμε με K_1 το μέγεθος που προκύπτει μετά από την αφαίρεση τουλάχιστον του μισού του αρχικού , δηλαδή $K_1 = K - \lambda K = K(1-\lambda)$

Ομοίως $K_2 = K_1 - \lambda K_1 = K(1-\lambda)^2$, $K_3 = K(1-\lambda)^3$ και κατά συνέπεια $K_\nu = K(1-\lambda)^\nu$

Όμως

$$\frac{1}{2} \le \lambda < 1 \Rightarrow 0 \le 1-\lambda < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le (1-\lambda)^\nu < \frac{1}{2^\nu} \Rightarrow 0 \le K(1-\lambda)^\nu < \frac{K}{2^\nu}.$$

Άρα ισχύει για το εναπομείναν μέγεθος ότι $0 \le K_\nu < \frac{K}{2^\nu}$.

Τότε όμως μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό ν_0 τέτοιον ώστε $K_\nu < \varepsilon$, $\forall\ \nu > \nu_0$. Δηλαδή η πρόταση της «εξάντλησης» είναι ισοδύναμη με την σύγχρονη πρόταση $\lim_{\nu\to\infty} K_\nu = \lim_{\nu\to\infty} K(1-\lambda)^\nu = 0$.

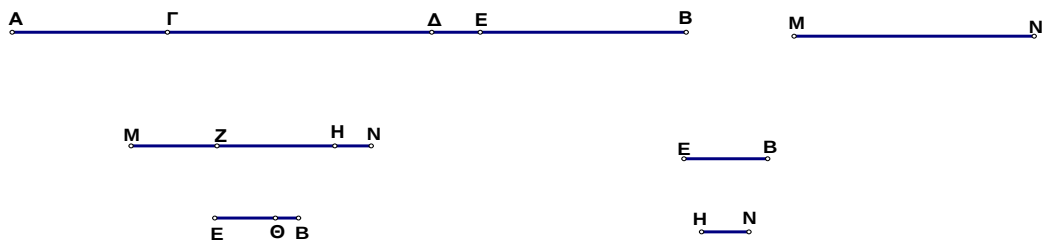
3.1.3 Η έννοια του Ορίου σε λανθάνουσα μορφή στην Αρχαία Ελλάδα- Η διδακτική του προσαρμογή στο σχολείο

Η κατάκτηση της έννοιας του Ορίου διήνυσε ένα ταξίδι τουλάχιστον 23 αιώνων (6ος π.χ και 17 μ.χ.) και μέσα από τις γνωσιολογικές συγκρούσεις ενσωματώθηκε δημιουργικά στο σώμα των ερχόμενων γενεών και απέκτησε τη σημερινή αυστηρότητα.

Η αρχική δοξασία των Πυθαγορείων ότι το σύμπαν μπορούσε να περιγραφεί πλήρως στα πλαίσια ρητών σχέσεων (Αναπολιτάνος,1985) τους οδήγησε στην ανακάλυψη των αρρήτων καθώς προσπαθούσαν να βρουν κοινό μέτρο μεταξύ της διαγωνίου και της πλευράς τετραγώνου. Παράλληλα όμως οδηγήθηκαν και στην εμφάνιση των εννοιών της ακολουθίας και του ορίου, χωρίς όμως να το συνειδητοποιήσουν. Στη συνέχεια η απάντηση της σχολής των Ελεατών στη πυθαγόρεια θέση ότι «κάθε γραμμή σχηματίζεται από σημεία που δεν έχουν διαστάσεις» δόθηκε με τα παράδοξα του Ζήνωνα όπου και εκεί συναντάμε την έννοια του Ορίου. (Αυγερινός & Κιουλάφας, 2004)

Οι Πυθαγόρειοι είχαν ως βάση την θεώρηση ότι δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ήταν σύμμετρα, δηλαδή είχαν μια κοινή μονάδα μέτρησης.

Δηλαδή δοθέντων δύο ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΜΝ με ΑΒ>ΜΝ μπορούμε να βρούμε το κοινό τους μέτρο με την εξής διαδικασία: πάνω στο ΑΒ παίρνουμε σημεία Γ , Δ, Ε τέτοια ώστε ΑΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΜΝ.



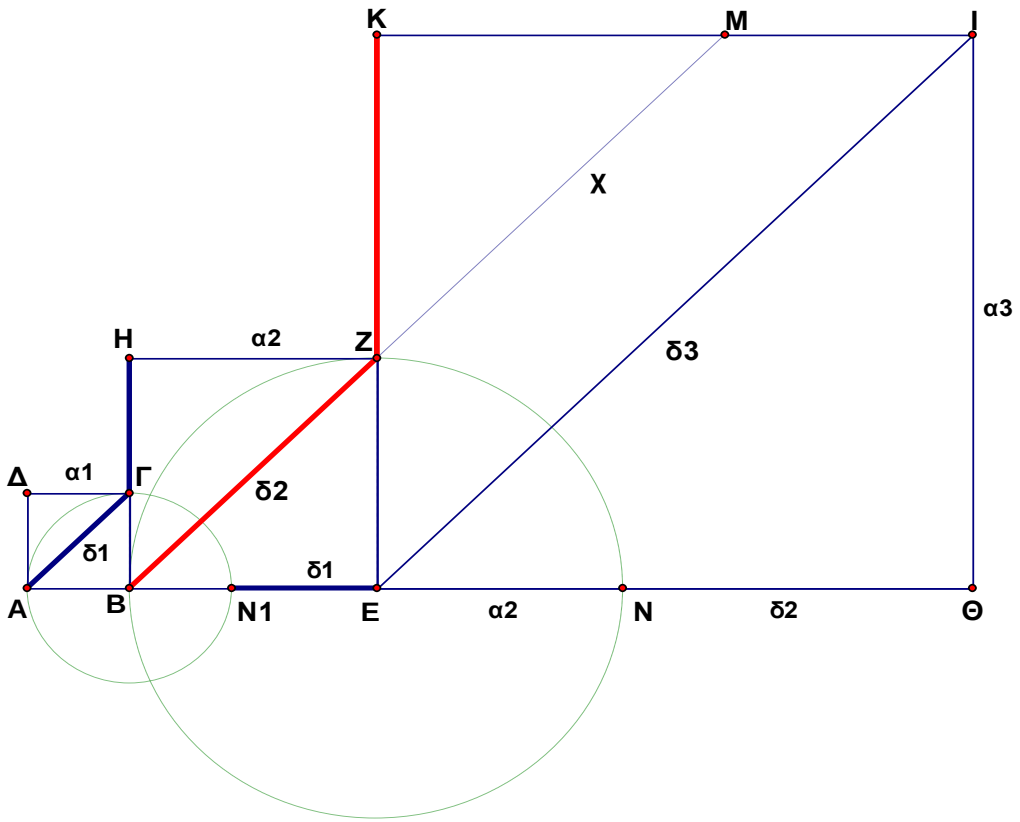
Αν μήκος ΕΒ=0, τότε το κοινό τους μέτρο είναι το ΜΝ. Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τα τμήματα ΜΝ , ΕΒ. Αν είναι μήκος ΗΝ $\neq$0 επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τα τμήματα ΕΒ , ΗΝ. Οι Πυθαγόρειοι είχαν την αντίληψη ότι μετά από έναν αριθμό βημάτων θα κατέληγαν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ενδεχομένως αρκετά μικρό, τέτοιο όμως ώστε το μήκος του να είναι το κοινό μέτρο των δύο τμημάτων ΑΒ , ΜΝ.

Αν όμως η παραπάνω μέθοδος εφαρμοσθεί για την διαγώνιο και την πλευρά ενός πενταγώνου ή για την διαγώνιο και την πλευρά ενός τετραγώνου, το μήκος του εναπομείναντος τμήματος είναι πάντα διάφορο του μηδενός οσοδήποτε μεγάλος κι αν είναι ο αριθμός των βημάτων. Η διαπίστωση αυτή έγινε η αιτία για την ανακάλυψη των αρρήτων.

Η διαδικασία που ακολούθησαν οι Πυθαγόρειοι για τον υπολογισμό του $\sqrt{2}$ περιλαμβάνεται σε όσα αναφέρει ο Θέων ο Σμυρναίος ($2^{ος}$ μ.Χ. αιώνας) και αργότερα ο Πρόκλος ($5^{ος}$ μ.Χ. αιώνας) για τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς. Η διαδικασία είναι η εξής:

Κατασκευάζουμε συνεχόμενα τετράγωνα έτσι ώστε η πλευρά του επομένου να ισούται με το άθροισμα της πλευράς και της διαγωνίου του προηγουμένου. Οι αριθμοί που παριστάνουν τα μήκη των πλευρών ονομάζονται *πλευρικοί αριθμοί* (a_i) και οι αριθμοί που παριστάνουν τα μήκη των διαγωνίων ονομάζονται *διαμετρικοί αριθμοί* (δ_i). Οι κύκλοι στο σχήμα και τα διαφορετικά χρώματα αποδεικνύουν ότι

είναι δυνατή η κατασκευή της ακολουθίας των αρχικών τετραγώνων με αυτή την αρχική συνθήκη.



Για τον προσδιορισμό του μήκους της διαγωνίου ενός τετραγώνου του παραπάνω σχήματος ενεργούμε ως εξής: έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την διαγώνιο δ_3 του τετραγώνου ΕΘΙΚ. Φέρνουμε την προέκταση της ΒΖ που τέμνει την ΚΙ στο Μ. Το ΒΕΙΜ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς δ_3 = ΕΙ = ΒΜ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΚΜ , ΖΕΒ είναι όμοια οπότε $\frac{x}{\delta_2} = \frac{\delta_2}{\alpha_1 + \delta_1} \Leftrightarrow x = \frac{\delta_2^{\,2}}{\alpha_1 + \delta_1}$. Όμως

$\delta_2^{\,2} = 2(\alpha_1 + \delta_1)^2$ άρα $x = \frac{2(\alpha_1 + \delta_1)^2}{\alpha_1 + \delta_1} = 2(\alpha_1 + \delta_1) = 2\alpha_2$

Συνεπώς $\delta_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ και γενικότερα $\delta_{v+1} = 2\alpha_v + \delta_v$.

Επειδή είναι δυνατή η κατασκευή ενός αρχικού τετραγώνου με α = δ = 1 τετράγωνο με απειροστό μέγεθος (Σταμάτης, 1975) μπορούμε να προσδιορίσουμε πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς εφ΄ όσον γνωρίζουμε ότι $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \delta_v$ και $\delta_{v+1} = 2\alpha_v + \delta_v$.

ν	α_ν	δ_ν	$\lambda_{2\nu+1} = \delta_{2\nu+1}/\alpha_{2\nu+1}$	$\lambda_{2\nu} = \delta_{2\nu}/\alpha_{2\nu}$
1	1	1	1	
2	2	3		1,5
3	5	7	1,4	
4	12	17		1,41666666666667
5	29	41	1,41379310344828	
6	70	99		1,414285711428571
7	169	239	1,41420118343195	
8	408	577		1,41421568627451
9	985	1393	1,41421319796954	
10	2378	3363		1,4142211362489487
11	5741	8119	1,41421355164605	
12	13860	19601		1,41421356421356
13	33461	47321	1,41421356205732	
14	80782	114243		1,41421356242727
15	195025	275807	1,41421356236380	
16	470832	665857		1,41421356237469
17	1136689	1607521	1,41421356237282	
18	2744210	3880899		1,41421356237314

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε δύο ακολουθίες την $\lambda_{2\nu+1}$ της οποίας οι όροι βαίνουν αυξανόμενοι και την $\lambda_{2\nu}$ της οποίας οι όροι συνεχώς μικραίνουν. Συγκρίνοντας τους όρους των ακολουθιών αυτών με τον αριθμό $\sqrt{2}$ =1,41421356237309.. συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_5 < .... < \lambda_{2\nu+1} < \sqrt{2} < \lambda_{2\nu} < ..... < \lambda_6 < \lambda_4 < \lambda_2$. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι το κοινό όριο των δύο ακολουθιών καθώς το ν τείνει στο άπειρο κι αυτό γιατί από τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα έχουμε : $|\lambda_{2\nu+1} - \sqrt{2}| < 2,7 \bullet 10^{-13}$ και

$|\lambda_{2\nu} - \sqrt{2}| < 0,5 \bullet 10^{-13} \ \forall\ \nu>9$

Δηλαδή $\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \nu_0 \in N :\ \forall\ \nu > \nu_0 \Rightarrow |\lambda_{2\nu} - \sqrt{2}| < \varepsilon$

Ομοίως $\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \nu_1 \in N :\ \forall\ \nu > \nu_1 \Rightarrow |\lambda_{2\nu+1} - \sqrt{2}| < \varepsilon$

Δηλαδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_{2\nu+1} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_{2\nu} = \sqrt{2}$ (με σύγχρονη ορολογία)

3.1.4 Παράδοξα του Ζήνωνα – Όρια

Η γενική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι κάθε μέγεθος μπορεί να σχηματισθεί από άπειρο πλήθος άλλων μεγεθών, αντιμετώπισε ισχυρή κριτική από τον Παρμενίδη (515 – 440 π.Χ.) αρχηγό της Ελεατικής Σχολής ο οποίος πίστευε ότι κάθε μέγεθος είναι μια μοναδική οντότητα και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε άλλα μικρότερα μεγέθη (C. Boyer – U. Merzbah, 1997).

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (495 – 435) μαθητής του Παρμενίδη διατύπωσε της εξής αντίρρηση στην άποψη των Πυθαγορείων. Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να διαιρεθεί σε άπειρο πλήθος σημείων, τότε :

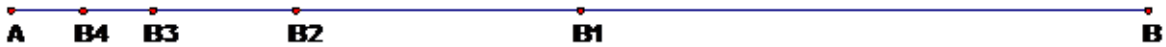
Ή κάθε σημείο θα έχει συγκεκριμένο μήκος οπότε το ευθύγραμμο τμήμα θα έχει άπειρο μήκος αφού θα σχηματίζεται από άπειρα σημεία

Ή κάθε σημείο δεν θα έχει μήκος οπότε το ευθύγραμμο τμήμα δεν θα έχει μήκος (Dirk J. Struik, 1982).

Για να ενισχύσει την άποψή του ότι κάθε ποσότητα είναι αδιαίρετη, ο Ζήνων διατύπωσε προτάσεις, παράδοξα που εκ πρώτης όψεως φαίνονται παράλογες αλλά στην πραγματικότητα είναι θεμελιωμένες σε σοβαρά επιχειρήματα. Τα παράδοξα του Ζήνωνα έφτασαν σε εμάς από τον Αριστοτέλη («Φυσικά» τόμος VI, 294b)και είναι γνωστά με τις ονομασίες *Αχιλλέας , Βέλος , Διχοτομίας , Στάδιο.* Ο Ζήνωνας κατόρθωσε με τα παράδοξά του να αγγίξει την ουσία του Απειροστικού Λογισμού, καθώς τα παράδοξά του αναφέρονται στις έννοιες του απείρου, του ορίου, της συνέχειας και της παραγώγου.

Το παράδοξο της Διχοτομίας εμπεριέχει την έννοια του ορίου με την αυστηρή του φορμαλιστική μορφή, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα. Μεταφράζοντας την διχοτομία στη σύγχρονη γλώσσα, έχουμε:

Έστω ότι θα κατευθυνθούμε από το Α στο Β βαδίζοντας πάνω σε μια ευθεία γραμμή που τα συνδέει. Για να φτάσουμε στο Β πρέπει πρώτα να διασχίσουμε το μισό της απόστασης ΑΒ , το AB_1. Για να φτάσουμε στο B_1 πρέπει να φτάσουμε στο B_2 , μέσον του AB_1 . Αυτό συνεχίζεται ατέρμονα.



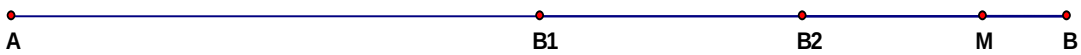
Αντιστρέφοντας τώρα την πορεία αλλά κρατώντας το νόημα της πρότασης μπορούμε να την αποδώσουμε ως εξής: είναι δυνατόν να φτάσουμε από το Α στο Β διανύοντας κάθε φορά τη μισή από την απόσταση που απομένει;

Ας υποθέσουμε ότι ΑΒ = α και ότι με τη φράση «1^{ο} βήμα» εννοούμε την απόσταση AB_1 , «κ – βήμα» την απόσταση $AB_1 + B_1B_2 + ...+B_{K-1}B_K$, τότε η απόσταση που θα διανύσουμε μετά από n – βήματα θα είναι $\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+....+\frac{a}{2^n}$ δηλαδή μπορεί να ορισθεί μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το N^* και σύνολο τιμών το R, έτσι ώστε f(n) να είναι η απόσταση που έχει διανυθεί μετά από n – βήματα . Ορίζουμε λοιπόν την f:N⟶R με

$$f(n) = \frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+....+\frac{a}{2^n}=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=a\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Συνεπώς $f(n)=a-\frac{a}{2^n}$ δηλαδή όσα βήματα και να κάνουμε πάντα θα υπάρχει θεωρητικά έστω και μια μικρή , ελάχιστη απόσταση από το άκρο Β. Οπότε το ερώτημα που τίθεται είναι πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο Β.

Προς τούτο ας πάρουμε ένα σημείο Μ πολύ κοντά στο Β έτσι ώστε η απόσταση d(M , B) = ε > 0 όπου ε ένας οποιοσδήποτε μικρός θετικός αριθμός.



Η απόσταση ΑΜ θα είναι d(A , M) = α – ε . Οπότε η πρόταση «πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε στο Β» μεταφράζεται στην ύπαρξη ενός φυσικού αριθμού n τέτοιου ώστε f(n) > α – ε , ∀ ε > 0. Δηλαδή

$$f(n) > a - \varepsilon \Leftrightarrow \alpha - \frac{\alpha}{2^n} > a - \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{a}{\varepsilon} \Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) > \ln\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln a - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$

οπότε αν $n_0 = \left[\frac{\ln a - \ln \varepsilon}{\ln 2}\right]$ τότε $\forall$ n $\in$N , n > n_0 έχουμε ότι f(n) > α – ε .

Συνεπώς για κάθε n > n_0 οι τιμές f(n) άπειρες το πλήθος βρίσκονται στο διάστημα (α – ε , α) δηλαδή δεξιά του Μ και αριστερά του Β.

Συμπερασματικά, για να απέχει το Μ απόσταση ε, οσοδήποτε μικρή από το Β, οφείλει το n να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Θα λέγαμε λοιπόν ότι το n οφείλει να βρίσκεται στην περιοχή του απείρου.

Αναδιατυπώνοντας τα παραπάνω με σύγχρονο και πρακτικό τρόπο, υποθέτουμε ότι d(A , B) =1000m και ζητάμε η απόσταση από το τέλος της διαδρομής, δηλαδή το Β, να είναι μικρότερη από 5mm. Τότε το n_0 λόγω των παραπάνω θα είναι $n_0 = \left[\frac{\ln 1000000 - \ln 5}{\ln 2}\right] = 17$ οπότε για n = 18 έχουμε :

$$f(18) = 1000000\left(1 - \frac{1}{2^{18}}\right) = 999996{,}185302734 > 1000000 - 5 = 999995.$$

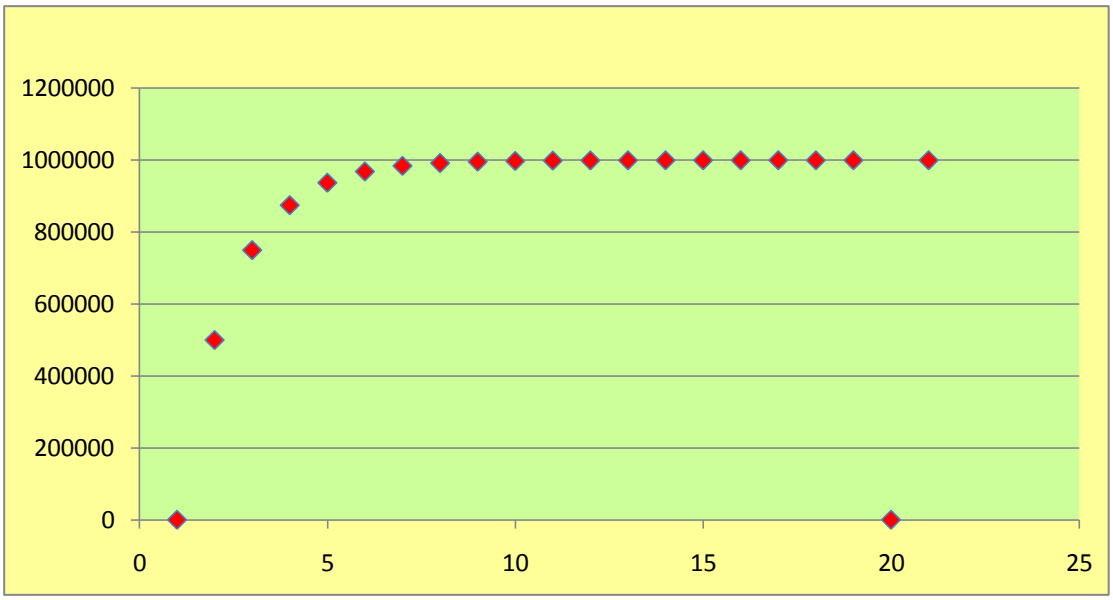
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την απόσταση σε mm που έχουμε διανύσει και συγχρόνως την απόσταση σε mm που έχουμε να διανύσουμε από τη θέση που βρισκόμαστε μέχρι το τέλος.

Από τον παρακάτω πίνακα είναι φανερό ότι για n = 30, το ε < 1 (μικρό). Για n = 30 δηλαδή, η απόστασή μας από το Β είναι μικρότερη από το ένα χιλιοστό του χιλιοστού του μέτρου. Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι μπορούμε να πλησιάσουμε στο Β όσο κοντά θέλουμε, όταν το n είναι στην περιοχή του απείρου.

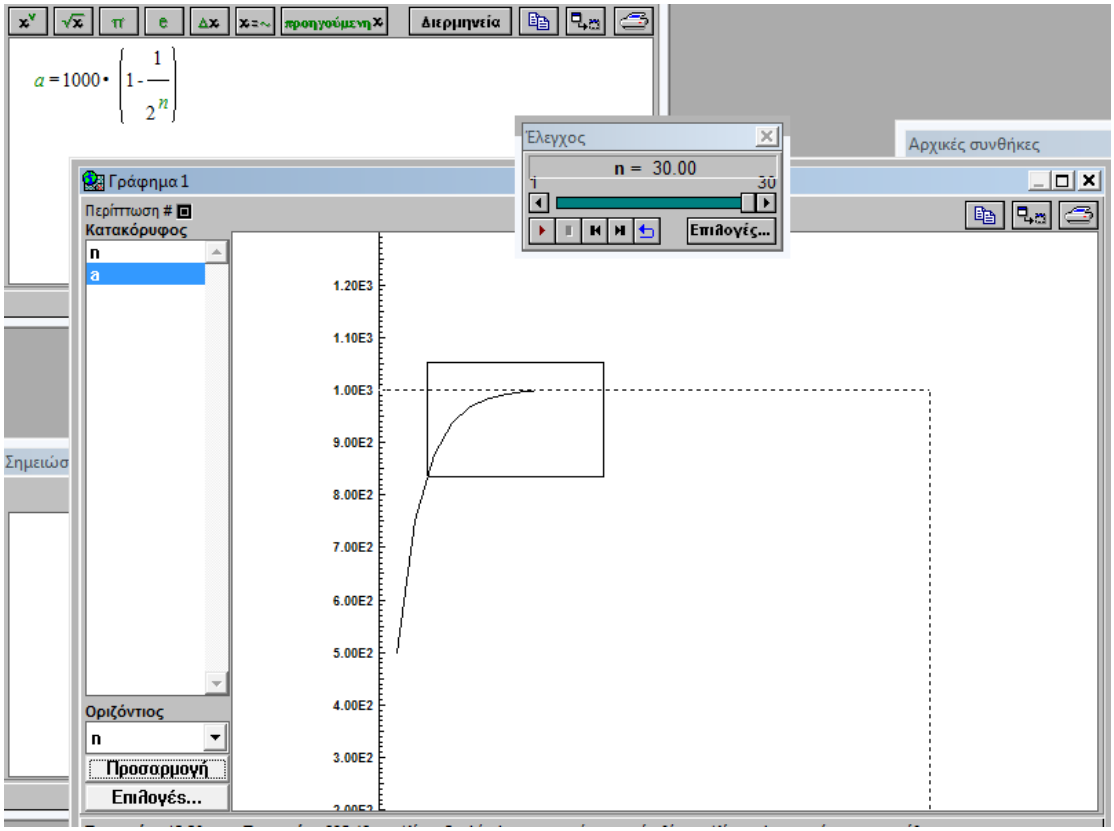
n	Απόσταση από την αρχή Α σε mm	Απόσταση από το τέλος Β σε mm
1	500000	500000
2	750000	250000
3	875000	125000
4	937500	62500
5	968750	31250
6	984375	15625

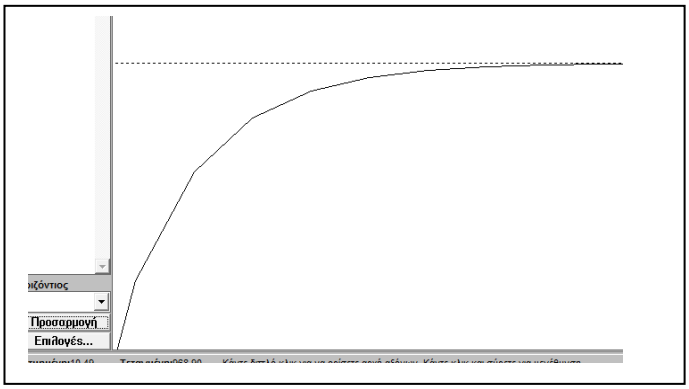
7	992187	7812,5
8	996093,75	3906,25
9	998046,875	1953,125
10	999023,4375	976,5625
11	999511,71875	488,28125
12	999755,859375	244,140625
13	999877,9296875	122,0703125
14	999938,96484375	61,03515625
15	999969,482421875	30,5175781250
16	999984,7412109370	15,2587890625
17	999992,3706054690	7,6293945313
18	999996,1853027340	2,8146972656
….	……	…….
30	999999,9990686770	0,0009313226

Κάνοντας χρήση του Excel για τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα, το αποτέλεσμα υπογραμμίζεται ισχυρότερα από το παρακάτω γράφημα.



Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Modellus, όπου με το παράθυρο μεγέθυνσης τονίζουμε περισσότερο την οριακή διαδικασία.





3.1.5 Τα όρια στη νεώτερη εποχή

Τα όρια των συναρτήσεων έχουν αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια πολλών αιώνων για να φθάσουν στο τρέχον επίπεδο της αυστηρότητας (Katz, 1998). Πολλοί μαθηματικοί είχαν ασχοληθεί με την ιδέα του ορίου για διάφορους λόγους.

Για πολλούς αιώνες, οι σκέψεις και ιδέες γύρω από το όριο μπερδεύονταν με ασαφείς και μερικές φορές φιλοσοφικές ιδέες του απείρου. Η ιδέα του ορίου

επίσης συγχέονταν με υποκειμενικές, αόριστες, γεωμετρικές διαισθήσεις (The History of Limits, δικτυακός τόπος:

http://occawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubboks/thomas_awl/chapter1/medialib/cu).

Ο Cornu (1991) υποστηρίζει ότι η ιδέα ενός ορίου παρουσιάστηκε όταν απαιτήθηκε η λύση τριών ειδών δυσκολιών:

- Γεωμετρικά προβλήματα, όπως υπολογισμοί εμβαδών περιοχών, «εξάντληση» και μελέτη της φύσης των γεωμετρικών μηκών
- Το πρόβλημα του αθροίσματος και σύγκλισης μιας σειράς
- Τα προβλήματα διαφορισιμότητας (differenciation) που προέρχονται από τη σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες που συγχρόνως τείνουν προς το μηδέν.

Η ιστορική εξέλιξη των ορίων δείχνει κάποια κρίσιμα σημεία - για παράδειγμα, το θέμα της αυστηρότητας, την οποία οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίσουν καθώς μαθαίνουν μαθηματικά. Η σύγκριση του εννοιολογικού επιπέδου των μαθητών με την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών μπορεί να έχει πολλές θεωρητικές και μεθοδολογικές περιπλοκές, δεδομένου ότι η ιστορία και η ψυχολογία είναι δύο διαφορετικά πεδία (Furinghetti & Radford, 2002). Οι μαθηματικές έννοιες έχουν αλλάξει με τα χρόνια, και αυτό σημαίνει διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικούς πολιτισμούς (Grugnetti & Rogers, 2000), γεγονός που περιπλέκει περαιτέρω τις συγκρίσεις. Η σύγκριση μπορεί, παρά τις πιθανές επιπλοκές, να είναι χρήσιμη και κατατοπιστική - για παράδειγμα, στην εξεύρεση μεθόδων κριτικής μάθησης. Η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μπορεί, επίσης, σύμφωνα με τους Bartolini Bussi και Sierpinska (2000), καθώς και τους Grugnetti και Rogers (2000) να υποστηρίξει, να εμπνεύσει τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά.

Η χρήση των ορίων των συναρτήσεων δεν απαιτούσε την γνώση του αυστηρού επίσημου ορισμού , με τη σύγχρονη έννοια του όρου, από την αρχή της δημιουργίας τους. Αρχικά, υπήρξε μια έμμεση εισαγωγή τους. Ένα παράδειγμα από τον 4ο π.Χ. δόθηκε από τον Ιπποκράτη το Χίο, (αναφορά Εύδημου) ο οποίος

απέδειξε ότι, αν A_1 , A_2 , d_1 , d_2 , είναι τα εμβαδά και οι διάμετροι δύο κύκλων , τότε ισχύει $A_1/A_2 = d_1^2/d_2^2$ (Edwards, 1979). Πάντως στο βιβλίο XII των Στοιχείων υπάρχει η σχετική πρόταση η οποία όμως αποδίδεται στον Εύδοξο. Η απόδειξη εκεί είναι με την μέθοδο της εξάντλησης. Σύμφωνα με τον Edwards, πιθανώς στην οριακή διαδικασία κατά την απόδειξη του Ιπποκράτη, να υπεισέρχονται τα απειροστά σαν κάποιες ποσότητες που μπορεί να απορρίψει ως μηδέν, ακόμη και αν δεν είχε ένα αρκετά αυστηρό πλαίσιο της έννοιας του ορίου για να περιγράψει τα απειροστά. Αυτό το είδος της γεωμετρικής χρήσης των ορίων δεν προκαλεί προβλήματα με την έμμεση έννοια των ορίων. Ο Αρχιμήδης εργάστηκε με τα θεμέλια της Ανάλυσης, αλλά δεν είχε θεσπίσει όρια λόγω του φόβου του για το άπειρο (Edwards, 1979). Αντ 'αυτού, χρησιμοποίησε μια μέθοδο παρόμοια με αυτή του Ιπποκράτη- για παράδειγμα, συμπληρώνοντας μια σφαίρα με επαρκή αριθμό πυραμίδων με ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας. (Thiele, 2003). Αυτός ο τρόπος απόδειξης γεωμετρικών ιδιοτήτων ήταν η αρχή των αδιαιρέτων.

Τον 17ο αιώνα, ο Cavalieri ήταν επίσης απρόθυμος να χρησιμοποιήσει τα όρια (Edwards, 1979). Νόμιζε ότι η αυστηρότητα ήταν ένα φιλοσοφικό ζήτημα. Ο Cavalieri εισήγαγε την έννοια των αδιαιρέτων το 1635 (van Maanen, 2003), αλλά δεν εξήγησε τι εννοούσε με αυτά (Boyer, 1949). Συνήθιζε να χρησιμοποιεί απειροελάχιστους όγκους ή εμβαδά (και τα κάλεσε αδιαίρετα) για να δείξει ότι δύο γεωμετρικά αντικείμενα έχουν το ίδιο μέγεθος. Έκρυψε στην ουσία την έννοια του ορίου στους υπολογισμούς του και δεν μπόρεσε να την αντιμετωπίσει (Edwards, 1979).

Ο Fermat, όπως ο Ιπποκράτης, θεωρεί τα απειροστά πολύ κοντά στο μηδέν στο έργο του με τα προβλήματα μεγίστου – ελαχίστου. (Edwards, 1979). Δημιούργησε για πρώτη φορά ψευδοισότητα όπου προστίθεται ένα e έτσι ώστε f (x + e) $\cong$f (x). Στη συνέχεια διαιρεί με το e και τελικά διαγράφει το e. Χρησιμοποιεί για παράδειγμα ,την συνάρτηση f(x)=x(b-x) και από την f (x + ε) $\cong$f (x) καταλήγει ότι x=b/2.

Ο Fermat δίνει μερικές μόνο εξηγήσεις για τη λογική αυτής της μεθόδου του, έτσι ώστε οι ερευνητές του σήμερα να μην είναι βέβαιοι για τις προθέσεις του. Εδώ λείπουν κάποιες εξηγήσεις που θα μπορούσαν να είχαν εκφράσει κάτι άλλο, και αυτό είναι ένα παράδειγμα των προβλημάτων που περιγράφουν μια ιστορική εξέλιξη.

Ο όρος όριο με τη μοντέρνα έννοια-εκδοχή είναι προϊόν του Διαφωτισμού στην Ευρώπη στα τέλη του 18ου και στις αρχές του 19ου αιώνα. Αναπτύχθηκε ως μέσο για να μπει ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός σε μια αυστηρή βάση. Μέχρι σήμερα, υπάρχουν μόνο σπάνιες περιπτώσεις στις οποίες η έννοια όριο χρησιμοποιήθηκε σωστά και αυστηρά (χωρίς παρέκκλιση). Ο σύγχρονος ορισμός είναι ο νεότερος από 150 χρόνων. Η έννοια του ορίου παραμένει μια από τις πιο σπουδαίες (και μερικές φορές πιο δύσκολες) έννοιες προς κατανόηση για τους μαθητές /φοιτητές των μαθηματικών .

Αρχικά όταν οι Newton και Leibniz ανέπτυσσαν την Ανάλυση, η δουλειά τους στηριζόταν στην ιδέα αναλογιών (λόγων) και γινομένων αυθαίρετα μικρών ποσοτήτων ή αριθμών. Ο Newton τα ονόμασε fluxions (ροές) και ο Leibniz αναφέρεται σε αυτά ως διαφορικά. Αυτές οι ιδέες χτίστηκαν πάνω στη δουλειά των Descartes ,Fermat και Wallis οι οποίοι είχαν στις εργασίες τους την ανάγκη για κάποια έννοια του «απείρως μικρού».

(The Platonic Realms, διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: http://www.mathacademy.com/platonic_realms/encyclopedia/encyhome.html).

Η ρίζα αυτών των ζητημάτων θέτει το εξής ερώτημα: «Πόσο κοντά μπορούν να είναι δύο αριθμοί χωρίς να είναι ο ίδιος αριθμός; ». Μία άλλη ερώτηση είναι: «Πόσο μικρός μπορεί να είναι ένας αριθμός χωρίς να είναι μηδέν;». Η αποτελεσματική απάντηση που δόθηκε από τον Newton και άλλους ήταν ότι υπάρχουν infinitesimals (υπερβολικά μικρές ποσότητες). Αυτά θεωρούνται θετικές ποσότητες μικρότερες από οποιονδήποτε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό.

Μια τέτοια ιδέα φαινόταν απαραίτητη , επειδή ο διαφορικός λογισμός (differential calculus) στηριζόταν σημαντικά στη μελέτη των αναλογίων (ratios), των

οποίων και τα δύο terms (μέρη μιας εξίσωσης) εξαφανίζονταν συγχρόνως προς το μηδέν.

Οι Leibniz και Newton είχαν ασχοληθεί με τα θεμέλια της Ανάλυσης με διαφορετικούς τρόπους κατά τη διάρκεια 20 ετών περίπου από το 1660 (Guicciardini, 2003). Και οι δύο χρησιμοποίησαν μια διαισθητική, γεωμετρική, συνεχή ανάπτυξη των ορίων. Και οι δύο πίστευαν ότι απειροστά στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν, αλλά τα χρησιμοποιούσαν ως σύμβολα στις αποδείξεις. Θεωρούσαν ως απειροστά τις ποσότητες που είχαν την ιδιότητα να τείνουν στο μηδέν. Παρά αυτές τις ομοιότητες στη δουλειά τους, υπήρχαν ορισμένες διαφορές στις προσεγγίσεις τους για τα όρια. Ο Leibniz δεν είχε κανένα πρόβλημα να αποδεχθεί τα απειροστά, έστω και αν αυτά δεν θεωρούνταν πραγματικά ότι υπάρχουν. Σκέφτηκε τα Όρια ως θεμέλια της Ανάλυσης και έμεινε με την πεποίθηση ότι τα όρια κάνουν δυνατή την δημιουργία της θεωρητικής Ανάλυσης (Guicciardini, 2003). Ο Leibniz αντιλήφθηκε ότι ο καθορισμός της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης εξαρτάται από το λόγο των διαφορών της συνάρτησης και της μεταβλητής, καθώς οι διαφορές αυτές γίνονται απείρως μικρές. Ορίζοντας την εφαπτομένη ως την ευθεία που συνδέει δύο διαδοχικά σημεία της καμπύλης τα οποία απέχουν μεταξύ τους απείρως μικρή ποσότητα, με την έννοια ότι η διαφορά dx είναι απείρως μικρή. Έτσι θεώρησε ως βασική έννοια το διαφορικό, το οποίο όρισε ως εξής:

Το διαφορικό dy της τεταγμένης y ενός σημείου P είναι μια ποσότητα η οποία έχει λόγο προς τη διαφορά dx της τετμημένης x του P, ίσο με το λόγο της y προς την υποεφαπτομένη της καμπύλης στο P, κάτι που με σύγχρονο συμβολισμό μεταφράζεται ως εξής: $\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f\left(x+dx\right) - f(x)}{dx}$. Εδώ βέβαια υπάρχουν αντιφάσεις: από τη μια μεριά το $\frac{dy}{dx}$ είναι ο λόγος των απειροστών μεταβολών dx και dy των μεταβλητών x , y αντίστοιχα, από την άλλη το $\frac{dy}{dx}$ αντιπροσωπεύει το όριο του λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ καθώς $\Delta x \to 0$.

Ο Newton εργάστηκε με τα όρια των λόγων γεωμετρικών μεγεθών. Δημιούργησε μια θεωρία στην οποία προσπάθησε να απορρίψει τα απειροστά (Guicciardini, 2003). Δήλωσε τον εξής ορισμό στο έργο του Principia : «Οι ποσότητες και οι λόγοι των ποσοτήτων, οι οποίοι σε κάθε πεπερασμένο χρόνο συγκλίνουν συνεχώς στην ισότητα, και πριν από τη λήξη αυτού του χρόνου, προσεγγίζουν πιο κοντά η μία στην άλλη ώστε η διαφορά τους να γίνεται οσοδήποτε μικρή, γίνονται τελικά ίσοι» (Edwards, 1979, σ. 225).

Ο Newton χρησιμοποιούσε τα απειροστά στην Principia με έναν τρόπο που ήταν παρεξηγημένος από άλλους μαθηματικούς. Συνήθιζε να χρησιμοποιεί τις λέξεις πρωταρχικός και τελικός λόγος και εφήμερη ποσότητα στην παρουσίασή του, χωρίς να καθορίζει τι εννοούσε με αυτούς, προκαλώντας σύγχυση στους άλλους μαθηματικούς (Boyer, 1949).

Πιο συγκεκριμένα θεωρεί ότι οι μεταβλητές ποσότητες γεννώνται από συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων και όχι από αθροίσματα άπειρου πλήθους απειροστών σημείων. Έτσι η γραμμή γεννάται από μια ρέουσα ποσότητα x την οποία ονόμασε ρέον, ενώ την ταχύτητα με την οποία γεννάται αυτή η γραμμή, την ονόμασε ροή και τη συμβόλισε με $\dot{x}$. Το απείρως μικρό μήκος κατά το οποίο αυξάνεται ένα ρέον σε απείρως μικρό χρόνο το ονόμασε στιγμή του ρέοντος και το συμβόλισε με $\dot{x}o$. Στην προσπάθειά του όμως να υπολογίσει τη ροή (παράγωγο) μιας συνάρτησης, αναγκαζόταν να εμφανίσει το σύμβολο $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$ (δηλαδή το $\frac{dy}{dx}$) . Εδώ εμφανίστηκε κριτική όσον αφορά την εξάλειψη των όρων που περιείχαν δυνάμεις των $\dot{x}o$ και $\dot{y}o$ με εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας. Ο Newton διευκρινίζει : «οι στιγμές $\dot{x}o$ και $\dot{y}o$ δεν πρέπει να θεωρούνται ποτέ μόνες αλλά ως πηλίκο $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$ ». Έτσι όμως δημιουργήθηκε μεγαλύτερη σύγχυση. Τι είναι τελικά ο λόγος $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$; Μια ενιαία οντότητα ή πηλίκο δύο μεταβλητών; Τώρα πια αναγκάζεται να απαλλαγεί από τις στιγμές και τα απειροστά. Οι μαθηματικές ποσότητες (λέει) δεν θεωρούνται

ότι απαρτίζονται από στιγμές ή από πολύ μικρά μέρη, αλλά περιγράφονται με συνεχή κίνηση. Για να υπολογίσει τώρα τη ροή μιας συνάρτησης π.χ. της $y = x^n$ συμβόλισε με «ο» την αύξηση της μεταβλητής x και θέτοντας x + ο στη θέση του x, αναπτύσσει το διώνυμο $(x + o)^n$ και στη συνέχεια $\left(x+o\right)^n - x^n = nox^{n-1} + o\left\{\frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \ldots + o^{n-1}\right\}$ και διαιρώντας με ο , παίρνει $\frac{\mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}\ \sigma\tau\eta\ x^n}{\mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}\ \sigma\tau\eta\ x} = nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \ldots + o^{n-1}$. Στο σημείο αυτό λέει ότι αν το «ο» πλησιάζει το μηδέν, τότε οι όροι που έχουν ως παράγοντα το «ο» εξαφανίζονται και επομένως ο λόγος θα ισούται με nx^{n-1} . Με σύγχρονο συμβολισμό $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$. Δηλαδή βρήκε ουσιαστικά το όριο του λόγου των διαφορών όταν η αύξηση «ο» της μεταβλητής πλησιάζει στο μηδέν. Όμως δεν το ονομάζει όριο του λόγου αλλά «έσχατο λόγο των μεταβολών». Και πάλι όμως υπήρχαν ενστάσεις: είναι μηδέν το «ο»; Αν ναι, μπορούμε να διαιρέσουμε με αυτό; Αν δεν είναι μηδέν, τότε δεν κάνουμε λάθος όταν το απαλείφουμε; Ο Newton απαντά ότι οι ποσότητες του προηγούμενου παραδείγματος ήταν το όριο του λόγου των μηδενιζόμενων απειροστών αυξήσεων. Περιγράφει δηλαδή τα όρια ως «έσχατους λόγους», δηλαδή, ως την τιμή του λόγου αυτών των μηδενιζόμενων ποσοτήτων τη στιγμή ακριβώς που αυτές μηδενίζονται, δηλαδή οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους μηδενίζονται οι ποσότητες δεν είναι στην πραγματικότητα οι λόγοι των εσχάτων ποσοτήτων, αλλά όρια προς τα οποία τείνουν ποσότητες που μειώνονται απεριόριστα και προς τα οποία προσεγγίζουν πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, χωρίς ποτέ να τα ξεπερνούν, ούτε στην πραγματικότητα να τα φθάνουν, αφού οι ποσότητες μειώνονται επ' άπειρον. Έτσι φαίνεται ότι ο Newton λέγοντας όριο μάλλον εννοούσε ένα σύνορο.

Λίγα χρόνια αργότερα, οι James Jurin και Benjamin Robins συζήτησαν για το αν οι μεταβλητές φτάνουν στα όριά τους ή όχι (Boyer, 1949). Ο Jurin (1685-1750) πίστευε ότι ορισμένες μεταβλητές θα μπορούσαν να φθάσουν τα όριά τους λέγοντας ότι «ο έσχατος λόγος δύο ποσοτήτων είναι ο λόγος που επιτυγχάνεται τη στιγμή που αυτές εξουδετερώνονται» και κατηγόρησε τον Robins ότι έχει

παρεξηγήσει τις θεωρίες του Newton. Στον ορισμό κατά Robins των ορίων, η μεταβλητή δεν φθάνει στα όρια της. Για να τονίσει τον συλλογισμό του, ο Robins χρησιμοποίησε ένα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με τον κύκλο να είναι το όριό του. Υποστήριξε ότι «δίνουμε την ονομασία έσχατο μέγεθος στο όριο το οποίο μια μεταβλητή μπορεί να προσεγγίσει όσο πολύ εμείς θέλουμε, αλλά με το οποίο ποτέ δεν μπορεί να γίνει απολύτως ίση». Αριθμητικές και γεωμετρικές αντιλήψεις των ορίων αναμείχθηκαν και προκάλεσαν σύγχυση.

Παρά την επιτυχία των μεθόδων των Newton και Leibniz και τον ενθουσιασμό μαθηματικών όπως ο Lagrange και ο Euler , η ιδέα του infinitesimal ήταν όλο και πιο δύσκολο να στηριχτεί κατά το 18^{ο} αιώνα. Η κύρια ένσταση ήταν ότι είναι αδύνατο να φανταστούμε ένα αντικείμενο απεριόριστα μικρό με οποιονδήποτε χειροπιαστό τρόπο. Χωρίς μία γερή επιστημονική βάση για infinitesimals, οι μαθηματικοί δε μπορούσαν να είναι απόλυτα σίγουροι για τις μεθόδους τους. Μία τέτοια θεωρητική βάση δε φαινόταν , άμεσα ορατή παρά τους σχεδόν δύο αιώνες προσπάθειας από τη μαθηματική κοινότητα της Ευρώπης.

Στο ερώτημα «τι είναι απειροστό;» ή «τι είναι ρυθμός μεταβολής;» η απάντηση που θα έδιναν τόσο ο Leibniz όσο και ο Newton όπως είδαμε είναι κατασκευαστική: αν θεωρήσουμε το λόγο $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ τότε καθώς το *h* τείνει στο μηδέν ο λόγος αυτός γίνεται ένας «ultimate» λόγος, δηλαδή ένα όριο που η διαφορά του από τις τιμές του λόγου να μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή [Boyer B.Carl]. Κατά τον Newton «ultimate» λόγοι είναι όρια προς τα οποία συγκλίνουν πάντα λόγοι ποσοτήτων που ελαττώνονται απεριόριστα και τα οποία (όρια) πλησιάζουν όσο θέλουμε αλλά δεν τα ξεπερνούν, ούτε ποτέ τα φθάνουν, έως ότου οι ποσότητες αυτές εξανεμισθούν. Ένας τέτοιος ορισμός δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στις αποδείξεις θεωρημάτων σχετικών με όρια. Ήταν αναγκαία η επαναδιατύπωσή του με τη βοήθεια της Άλγεβρας στα αυστηρά μαθηματικά πλαίσια.

Ένας νέος τρόπος σκέψης σχετικά με τις ratios (αναλογίες) εξαφανιζόμενων ποσοτήτων εισάγεται από το Γάλλο μαθηματικό D'Alembert, που ονομάστηκε *μέθοδος των ορίων*. Προσπάθησε να ορίσει ως κεντρική έννοια του διαφορικού

λογισμού το όριο αντικαθιστώντας την χρήση των απειροστών (κάτι που τελικά δεν έγινε αποδεκτό). Πιο συγκεκριμένα είπε: «το απειροστό δεν υπάρχει καθ' αυτό. Ένα μέγεθος είναι κάτι ή τίποτα. Αν είναι κάτι τότε δεν έχει ακόμα μηδενιστεί. Η υπόθεση ότι υπάρχει μια ενδιάμεση κατάσταση αποτελεί χίμαιρα». Ποιον ορισμό όμως έδωσε για το όριο; «ένα μέγεθος είναι όριο κάποιου άλλου μεγέθους, όταν το δεύτερο πλησιάζει το πρώτο οσοδήποτε κοντά, δίχως ωστόσο να μπορεί να το ξεπεράσει και με τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα».

Όπως βλέπουμε η διατύπωσή του είναι σχεδόν ίδια με αυτή που χρησιμοποιείται σήμερα, αν και (γενικά) βασιζόταν σημαντικά σε γεωμετρικές διαισθήσεις (ενστικτώδεις γνώσεις). Για παράδειγμα ,ο D'Alembert θεώρησε την εφαπτομένη σε μία καμπύλη ως το όριο σε secant (ευθείες) γραμμές καθώς τα ακραία σημεία των ευθειών γραμμών συνέκλιναν στο σημείο επαφής και ταυτίζονταν με αυτό «μέσα στο όριο». Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο η έννοια της παραγώγου εξηγείται από τα μαθήματα Ανάλυσης παγκοσμίως σήμερα. Ωστόσο, ως καθαρά γεωμετρικό επιχείρημα , χωρίς αριθμητική ή πρακτική βάση, η σκέψη να βάζουμε όρια σε secant (ευθείες) γραμμές, βρίσκει διαχρονικές αντιρρήσεις όπως αυτές που εκθέτονται στα παράδοξα του Ζήνωνα (The Platonic Realms).

Ο D' Alembert επέμεινε ότι μια ποσότητα δεν θα μπορούσε ποτέ να ταυτιστεί με το όριό της: «Για να μιλήσει κανείς σωστά, το όριο ποτέ δεν συμπίπτει ή ποτέ δεν ταυτίζεται με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πάντοτε προσεγγίζει και μπορεί να διαφέρει τόσο μικρή ποσότητα, όσο θέλουμε.»

Ο Cauchy τόνισε την αυστηρότητα στην παρουσίαση της Ανάλυσης, και ήταν ο πρώτος που παρουσίασε έναν αρκετά σαφή ορισμό του ορίου προσπαθώντας να απαλλάξει αυτή την έννοια από κάθε γεωμετρική αναπαράσταση: «Όταν διαδοχικά αποδιδόμενες τιμές μίας μεταβλητής προσεγγίζουν επ 'αόριστον μια σταθερή τιμή κατά τέτοιο τρόπο ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτή τόσο λίγο όσο θέλετε , τότε η σταθερή τιμή ονομάζεται το όριο όλων των άλλων». (Belhoste, 1991, σελ. 66) .

Ο νέος ορισμός επέτρεψε να ενισχυθεί η αυστηρότητα των απειροστών (Edwards, 1979) και να αποφευχθεί η απείρως μικρή ποσότητα σταθερών αριθμών

που χρησιμοποιούνταν από μαθηματικούς νωρίτερα, όπως Newton. Ο Cauchy ορίζει απειροστό να είναι μια μεταβλητή με οριακή τιμή μηδέν. Συγκεκριμένα λέει ότι «μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητικά της τιμή ελαττώνεται συνεχώς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να έχει όριο το μηδέν». Το απειροστό δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ποσότητα η οποία όμως πρέπει να θεωρείται ότι έχει πάντοτε όριο το μηδέν. Στην σύνθεση του Cauchy έλειπε ένας σαφής ορισμός της έννοιας του αριθμού, ο οποίος κατέστησε τα έργα του κάπως ασαφή, με τις έννοιες του αριθμού και του ορίου να περιορίζουν ανάλογα το ένα το άλλο (Boyer, 1949). Ο Cauchy θεώρησε την έννοια του ορίου τόσο βασική ώστε όρισε τους άρρητους ως όρια ακολουθίας ρητών. Έτσι όμως έπεσε σε ένα κύκλο : η έννοια του ορίου στηρίζεται στην έννοια του πραγματικού αριθμού, που σημαίνει ότι η έννοια του αριθμού είναι προγενέστερη εκείνης του ορίου.

Μέχρι τότε, η έννοια του ορίου είχε αντιμετωπιστεί ως μια διαδικασία σε συνεχή κίνηση. Αντίθετα ο Weierstrass αντιλαμβάνεται τα όρια ως στατικές οντότητες, απαλλαγμένες από τις γεωμετρικές διαστάσεις και στηρίζεται αποκλειστικά στους πραγματικούς αριθμούς (Boyer, 1949). Ο ορισμός άρρητων αριθμών ήταν ανεξάρτητος από τα όρια, έτσι δεν στηρίχθηκε σε κυκλικό συλλογισμό, όπως έκανε ο Cauchy . Ο ορισμός κατά Weierstrass είναι αυτός που χρησιμοποιείται σήμερα, και έχει ως εξής: «A ονομάζεται το όριο της f (x), όταν $x \to a$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $| f(x) - A | < \varepsilon$ για κάθε x που ορίζεται έτσι ώστε $0 < | x - a | < \delta$» .

Συνοψίζοντας την ιστορική εξέλιξη των ορίων, θα λέγαμε ότι ξεκίνησε με μια άτυπη γεωμετρική προσέγγιση, καθώς οι υπολογισμοί ήταν πιο σημαντικοί από την αυστηρότητα. Η έλλειψη αυστηρότητας που προκαλεί ασάφειες στις αντιλήψεις των μαθηματικών όσον αφορά την έννοια, και το γεγονός ότι προχώρησαν προς τη χρήση των ορίων, τους αναγκάζει να συνεργαστούν περαιτέρω για να διευθετήσουν τις εκκρεμότητες καθώς οι αντιλήψεις περί του ορισμού δεν είχαν διευθετηθεί πριν περάσουν αιώνες.

Πολλοί άλλοι μαθηματικοί έχουν συμβάλει στην ανάπτυξη των ορίων μέσα από βιβλία, επιστολές και άρθρα. Δεν μπορεί κανείς να δει μια ιστορική επισκόπηση

της έννοιας ως γραμμική εξέλιξη, επειδή υπάρχουν πολλοί παράγοντες που προκαλούν την ερμηνεία των ιστορικών εγγράφων με διαφορετικό τρόπο. Οι κοινωνικοπολιτισμικές αντιλήψεις της σύγχρονης εποχής και των αρχαίων χρόνων επηρεάζουν τον τρόπο που αντιλαμβάνεται κάποιος τις έννοιες (Radford, 1997). Οι κοινωνικές αλλαγές, και η πολιτιστική προκατάληψη δημιούργησαν διαφορές στα αποτελέσματα των συγκρίσεων, οι οποίες πρέπει να αναγνωρίζονται (Furinghetti & Radford, 2002; Radford, 2000).

3.1.6 Επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορική εξέλιξη

Είναι χρήσιμο να μελετήσουμε την ιστορία της έννοιας του ορίου για να εντοπίσουμε περιόδους αργής ανάπτυξης και δυσκολιών που προέκυψαν κατά την εξέλιξη. Κάτι τέτοιο μπορεί να υποδηλώνει την ύπαρξη εμποδίων.

Ο Brousseau in Cornu (1991) ορίζει ως ένα επιστημολογικό εμπόδιο τις γνώσεις που λειτουργούν σε ένα συγκεκριμένο τομέα δράσης και εγκαθίστανται. Έπειτα οι γνώσεις αυτές αποτυγχάνουν να λειτουργήσουν ικανοποιητικά σε διαφορετικό περιβάλλον όπου δυσλειτουργούν και οδηγούν σε αντιθέσεις. Είναι επομένως απαραίτητο να καταστραφούν οι αρχικές ανεπαρκείς γνώσεις και να αντικατασταθούν με μία νέα έννοια που λειτουργεί ικανοποιητικά στον καινούριο τομέα.

Επιστημολογικά εμπόδια υπάρχουν στην ιστορική εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης και της εκπαιδευτικής πρακτικής .Έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά :

- Είναι αναπόφευκτο και σπουδαίο μέρος της γνώσης που θα αποκτηθεί.
- Βρίσκονται, τουλάχιστον εν μέρει, στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας (Cornu 1991) .

Υπάρχουν τέσσερα σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορία της έννοιας του ορίου σύμφωνα με τον Cornu αυτά είναι:

- Η αποτυχία να συνδυαστεί η γεωμετρία με αριθμούς. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι ουσιαστικά μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το

πρόβλημα του απείρου. Εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη, όχι στους αριθμούς. Κάθε περίπτωση αντιμετωπίζεται μεμονωμένα με τη χρήση ενός συγκεκριμένου επιχειρήματος προσαρμοσμένου στο γεωμετρικό πλαίσιο. Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρώς αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του ορίου των αριθμών απουσιάζει. Η γεωμετρική ερμηνεία, και η επιτυχία της στην επίλυση των συναφών προβλημάτων, επομένως, φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε τη μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

- Η ιδέα του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού. Είδαμε ότι στην ιστορία της έννοιας του ορίου διατυπώθηκε η υπόθεση της ύπαρξης απειροελάχιστων ποσοτήτων. Ο Cauchy επίσης όρισε το άπειρο ως «μια μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό οσοδήποτε μεγάλο». Η ιδέα μιας ενδιάμεσης κατάστασης, μεταξύ εκείνου που είναι τίποτα και εκείνου που δεν είναι, συναντάται συχνά στους σύγχρονους μαθητές.
    - Η μεταφυσική πλευρά της ιδέας του ορίου. Η έννοια του Ορίου έχει άμεση σχέση με το άπειρο και τα απειροστά, επομένως με την μεταφυσική και την φιλοσοφία. Η μεταφυσική σκοπιά της έννοιας του ορίου αποτελεί ένα από τα κύρια εμπόδια και για τους σημερινούς μαθητές. Αυτό το εμπόδιο καθιστά την κατανόηση της έννοιας του ορίου ιδιαίτερα δύσκολη, ιδιαίτερα όταν ένα όριο δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με τη χρήση γνωστών μεθόδων άλγεβρας και αριθμητικής.
    - Φτάνεται το όριο ή όχι; Ο D’ Alembert επέμεινε ότι μια ποσότητα δεν πρέπει ποτέ να γίνει ίση με το όριό της. Αυτή η διαφωνία παραμένει ζωντανή και στους μαθητές, που συχνά αναρωτιούνται: «Όταν το x τείνει στο μηδέν, τότε δεν είναι ίσο με μηδέν»;

3.2 Η διδασκαλία της Ανάλυσης

Η μάθηση της ανάλυσης υπήρξε αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ένα από τα σημαντικά συμπεράσματα που εξήχθησαν από αυτή την έρευνα είναι ότι οι μαθητές γενικά αναπτύσσουν συνηθισμένες πρακτικές και αλγεβρικές δεξιότητες επέμβασης, παρά εννοιολογική κατανόηση των θεωρητικών εννοιών (Berry & Nyman, 2003; Evrynck, 1981; Sierpinska,1987; Robert, 1982; Davis & Vinner, 1986). Οι Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorff, K.E. (1997) αναφέρουν ότι πολλοί ερευνητές βρήκαν ότι οι μαθητές έχουν μια αδύναμη εικόνα της έννοιας της συνάρτησης και τείνουν να βασίζονται στην ανάγκη για αλγεβρικούς τύπους όταν αναπτύσσουν την έννοια της συνάρτησης.

Το αντικείμενο της ανάλυσης είναι ιδιαίτερα αφηρημένο και απαιτεί υψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης που δυσκολεύει τους μαθητές. Οι Ferrini-Mundy, J. & Graham, K.G. (1991) ισχυρίζονται ότι η κατανόηση βασικών εννοιών της ανάλυσης από τους μαθητές είναι εξαιρετικά «πρωτόγονη» - «πρωταρχική» : «οι μαθητές δεν επιδεικνύουν καμία διαίσθηση σχετικά με τις έννοιες και διαδικασίες της ανάλυσης. Επιμελώς μιμούνται παραδείγματα και οι προσπάθειές τους να προσαρμόσουν προγενέστερη γνώση σε νεώτερη, συχνά καταλήγει σε πολύ επίμονες και ανεπαρκείς έννοιες που οι μαθητές αρνούνται πεισματικά να αλλάξουν».

Για την διδασκαλία της ανάλυσης, ίσως είναι πιο πρακτικό να επικαλεστούμε τη διαίσθηση κάποιου στο να αντιλαμβάνεται μαθηματικές έννοιες και ιδέες (τουλάχιστον στην αρχή), παρά να έχουμε την απαίτηση να έχει κλίση προς την ικανότητα αφηρημένης και αυστηρής μαθηματικής κατανόησης. Σύμφωνα με τους Parameswaran(2006) & Koirala(1997): «ένα εισαγωγικό μάθημα στην ανάλυση θα πρέπει να είναι άτυπο, διαισθητικό και θεμελιωδώς βασισμένο κυρίως σε διαγράμματα και συναρτήσεις. Οι τύποι και οι κανόνες δεν θα έπρεπε να δίνονται έτοιμοι, αλλά θα έπρεπε να αναπτύσσονται διαισθητικά στη βάση της προγενέστερης ενασχόλησης των μαθητών με τα μαθηματικά και γενικότερα τις επιστήμες».

3.3 Η έννοια του ορίου - Θεωρητικό πλαίσιο

Τα Μαθηματικά περιλαμβάνουν έννοιες όπως το όριο και το άπειρο, τα οποία μεταφέρουν περίπλοκες – σύνθετες έννοιες που μπορεί να ερμηνευθούν κατά τρόπο ασυμβίβαστο (Tall, 1992a).

Η έννοια του ορίου είναι ο θεμέλιος λίθος αρκετών συνδεδεμένων εννοιών όπως συνέχεια, παραγωγισιμότητα, ολοκλήρωση, σύγκλιση σειρών κ.λ.π. Όμως οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται επαρκώς αυτή την έννοια, οπότε ενδέχεται να έχουν εσφαλμένες αντιλήψεις όταν ασχολούνται με άλλες έννοιες της ανάλυσης όπως είναι η συνέχεια και η παράγωγος. Ο ακριβής τυπικός ορισμός της έννοιας του ορίου είναι τόσο σύνθετος και μη διαισθητικός που αποτυγχάνει στο να παρουσιάσει εύκολα και άμεσα τις απλές, διαισθητικές και φανερές ιδέες που οδήγησαν σε αυτή τη διατύπωση. «Ο ε – δ ορισμός του ορίου περιέχει γενικά και οντολογικά στοιχεία και έχει σχεδιαστεί να επιλύει μαθηματικές δυσκολίες και όχι νοητικές». (Williams, 2001)

Διάφοροι ερευνητές έχουν εντοπίσει μια πολλαπλότητα των δυσκολιών που ενδέχεται να παρακωλύουν την κατασκευή της έννοιας όριο, η οποία περιλαμβάνει

(α) επιστημολογικές δυσκολίες (Brousseau, 1997; Sierpinska, 1985),

(β) διδακτικές δυσκολίες που προκύπτουν από τις μεθόδους διδασκαλίας που δεν είναι αποτελεσματικές (Brousseau, 1997; Artigue, 1998a), και

(γ) γνωστικές δυσκολίες, λόγω των αφαιρετικών διαδικασιών που εμπεριέχονται στην έννοια του Ορίου (Cornu, 1991; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991).

Η ιστορία του ορίου συνάρτησης δείχνει ότι δεν είναι εμφανής ο τρόπος με τον οποίο θα πρέπει να δηλώνεται ο ορισμός του ορίου. Πολλοί μαθηματικοί που έχουν εργαστεί πάνω στα όρια σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και με διαφορετικές προσεγγίσεις για εκατοντάδες χρόνια, αντιμετώπισαν εμπόδια. Δεν υπήρξε κανένας σαφής ορισμός των Ορίων μέχρι τον ορισμό του Weierstrass (Juter, 2006): Το όριο της *f (x),* όταν χ τείνει στο α είναι Α, αν για κάθε ε > 0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε |f(x) – A| < δ , για κάθε *x* του Π.Ο. της f με 0<|χ-a|<δ.

Οι διαισθητικές γνώσεις που αποκτήθηκαν στο ανεπίσημο περιβάλλον και σε πραγματικές συνθήκες ζωής έχουν θεμελιώδη σημασία για την απόκτηση και την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας (Fischbein, 1999). Οι λέξεις «τείνει προς» και «όριο» έχουν νόημα για τους μαθητές χωρίς να έχουν διδαχθεί την έννοια του Ορίου. Οι μαθητές εξακολουθούν να βασίζονται σε αυτές τις έννοιες, ακόμη και μετά την διατύπωση του επίσημου ορισμός της έννοιας αυτής. Οι μαθητές αναπτύσσουν τις εικόνες του ορίου και του απείρου , οι οποίες σχετίζονται με παρανοήσεις σχετικά με τη διαδικασία του «πλησιάζει» ή «γίνεται μεγάλο» ή «πηγαίνει για πάντα» (Cornu, 1991).

Διάφοροι ερευνητές έχουν περιγράψει τις πεποιθήσεις – αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη διαδικασία του ορίου ποικιλοτρόπως: το όριο ως κάτι ανέφικτο – απρόσιτο, το όριο ως στρογγυλοποίηση (Parameswaran,2006), το όριο ως φράγμα (Williams, 1991; Nardi, 1996). Οι πιο κοινές αντιλήψεις του Ορίου που περιγράφονται στην βιβλιογραφία (Williams, 1991; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic 1996; Tall 1992b) συχνά περιγράφονται από τα ακόλουθα θέματα:

(α) του αν μια συνάρτηση μπορεί να φτάσει το όριό της,

(β) κατά πόσον το όριο αυτό είναι πραγματικά ένα φράγμα ,

(γ) του κατά πόσον το όριο είναι δυναμική διαδικασία ή στατικό αντικείμενο και

(δ) του κατά πόσον η έννοια του Ορίου είναι εγγενώς συνδεδεμένη με την έννοια της κίνησης.

Η έννοια του Ορίου συνάρτησης συνδέεται συχνά με έννοιες ορίου ταχύτητας (ένα θεωρητικά αδύνατο σημείο) «προσεγγίζει» και «τείνει να», με δυναμικές ιδέες «συνεπάγεται την κίνηση προς ένα αντικείμενο το οποίο μπορεί ή δεν μπορεί να φτάσει» (Alcock & Simpson, 2004).

Ο τυπικός ορισμός του Ορίου δεν συγκλίνει-συνάδει σε γενικές γραμμές με την δυναμική - διαισθητική ιδέα του ορίου από πλευράς των μαθητών , οπότε απαντούν διαφορετικά όταν ρωτώνται για τον ορισμό του ορίου απ΄ ότι σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ο Tall (1980) ανέφερε ότι η έννοια του δυναμικού

απείρου είναι που εμπλέκεται στην έννοια του ορίου εξαιτίας των γλωσσικών αλληγοριών που συνδέονται με την έννοια. Ένας μαθητής μπορεί να φανταστεί κανείς ότι ένα όριο είναι μια διαδικασία που ποτέ δεν ολοκληρώνεται.

Η διδασκαλία και εκμάθηση των πολύπλοκων εννοιών του ορίου θα πρέπει να σχεδιαστεί και να εφαρμοστεί με μεγάλη προσοχή. Η λύση προβλήματος ως κεντρική προσέγγιση που βασίζεται σε μια κονστρουκτιβιστική προοπτική φαίνεται να είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος για να διδαχθεί η ιδέα του Ορίου. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αντιληφθούν τον βαθμό της κατανόησης από τους μαθητές και τις πιθανές παρανοήσεις. Οι γνώσεις αυτές μπορεί να είναι καθοριστικής σημασίας σε σχέση με την ανάπτυξη ειδικών μεθόδων διδασκαλίας για την αντιμετώπιση αυτών των παρανοήσεων ώστε να ενισχυθεί η εννοιολογική κατανόηση. Ένα άλλο σημαντικό θέμα προς συζήτηση είναι η άτυπη εισαγωγή της έννοιας του Ορίου. Αν η ιδέα εισάγεται για πρώτη φορά με ανεπίσημο τρόπο, τότε η εικόνα της έννοιας είναι χτισμένη πολύ πριν δοθεί οποιαδήποτε επίσημη ορισμός της έννοιας (Williams, 2001). Η Mamona-Downs (2001) προτείνει μια διδακτική ακολουθία για τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου μιας ακολουθίας. Η βασική ιδέα είναι να επιτρέψουμε στους μαθητές να ωριμάσουν οι διαισθήσεις τους προκειμένου να κατανοήσουν τον τυπικό ορισμό. Στρατηγική της είναι να εντοπίσει έναν κεντρικό πυρήνα του ορισμού και μετά χτίζει «την κατανόηση των ορίων από τους μαθητές βήμα προς βήμα , αρχής γενομένης από τον κεντρικό πυρήνα».

3.4 Η φύση της ιδέας του ορίου και ο ορισμός του

Ένας ανεπίσημος ορισμός του ορίου

Αν οι τιμές μιας συνάρτησης (function) *f(x)* προσεγγίζουν την τιμή *L* καθώς τα *x* προσεγγίζουν το *c,* λέμε ότι *f* έχει όριο *L* καθώς *x* πλησιάζει *c* και γράφουμε $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Ο επίσημος ορισμός

Το όριο f(x) καθώς x πλησιάζει c είναι ο αριθμός L αν ισχύει το παρακάτω κριτήριο: Δεδομένης μιας οποιασδήποτε ποσότητας – ακτίνας $\varepsilon > 0$ για το L , υπάρχει μία ακτίνα $\delta > 0$ για το c τέτοια ώστε για όλα τα x με $0<|x-c|<\delta$ να συνεπάγεται $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ξεκινώντας από το προπτυχιακό επίπεδο και μετά, οι μαθηματικοί ορισμοί γίνονται ολοένα και περισσότερο αφηρημένοι και για την κατανόησή τους είναι απαραίτητη η απόκτηση μαθηματικών ικανοτήτων. Αρκετές έρευνες έχουν εστιάσει στον ρόλο των ορισμών στα Μαθηματικά (Mariotti & Fischbein, 1997; Pimm, 1993.) Η έρευνα αποκαλύπτει ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες στην κατανόηση και χρήση των μαθηματικών ορισμών. (Zaslavsky & Shir, 2005; Vinner, 1991; Edwards and Ward, 2004.)

Η αρχική κατανόηση που αναπτύσσεται μέσω της διαισθητικής προσέγγισης είναι πολύ κρίσιμη για την μετέπειτα εξέλιξη. Συμφωνώντας με τον Fischbein (1987), οι αρχικές διαισθητικές αναπαραστάσεις είναι με ισχυρό τρόπο επισυναπτόμενες στις αντίστοιχες έννοιες και καθιστούν δύσκολη την απόδραση από τις επιπτώσεις τους. Η επιρροή τους μπορεί να παραμείνει για πολύ καιρό, ακόμα και μετά την απόκτηση αφηρημένων γνώσεων της έννοιας.

Κατά την άποψη πολλών μαθητών – φοιτητών ο ε-δ ορισμός περιλαμβάνει συνθήκες με πολλές μεταβλητές, και ως εκ τούτου είναι δύσκολο να κατανοηθεί. Σπουδαστές που δεν κατανοούν πλήρως τον ορισμό έχουν περάσει δύσκολες καταστάσεις, καθώς ασχολούνται με την εφαρμογή του (Bokhari & Yushau, 2006). Μια μικρή αλλαγή στη διατύπωση του ορισμού φέρνει μια μεγάλη μεταβολή του μαθηματικού περιεχομένου, το οποίο σε γενικές γραμμές, παραμένει αόρατο στα μάτια των μαθητών.

Με λίγα λόγια, οι περισσότεροι φοιτητές δεν δείχνουν μόνο ανεπάρκεια στην εφαρμογή του ορισμού, αλλά και αγνοούν τη χρήση του στην τεχνική των μαθημάτων, και ως εκ τούτου παραλείπουν αυτά στις σπουδές τους.

Ο ρόλος του ορισμού είναι ωστόσο αναπόφευκτος στην αιτιολόγηση ανυπαρξίας ορισμένων ορίων όπως π.χ. του $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Αρκετά βιβλία βασικής ανάλυσης αναιρούν την αναλυτική αιτιολογία επικυρώνοντας τον ισχυρισμό από αριθμομηχανές ή CAS.

Οι εκπαιδευτικοί παίρνουν την απόφαση ανάλογα να παρουσιάσουν ή να αποκλείσουν τον ορισμό από το πρόγραμμα διδασκαλίας τους , ενώ ορισμένοι λένε στους μαθητές τους να τον απομνημονεύσουν. Πολλοί εκπαιδευτικοί που δίνουν μικρή έμφαση στην εξήγηση του, αναζητούν μια κατάλληλη αφορμή – παράδειγμα για την άμεση εφαρμογή του, πριν προχωρήσουν στο επόμενο θέμα. Αυτός μπορεί να είναι ένας από τους λόγους που ο ορισμός δεν έχει μια ενιαία θέση στα βασικά βιβλία Ανάλυσης.

Στο παρελθόν, σχεδόν σε κάθε κείμενο Ανάλυσης που χρησιμοποιούνταν , το κεφάλαιο για το όριο άρχιζε με τον ορισμό του Ορίου. Τώρα οι περισσότεροι συγγραφείς παρέχουν αρχικά μια διαισθητική αντίληψη του ορίου, και μετά υπολογιστικές μεθόδους που βασίζονται κυρίως σε τεχνικές αλγεβρικών. Υπάρχουν βιβλία σχετικά με την Ανάλυση στα οποία ο ορισμός αυτός ή έχει μετακινηθεί σε ένα παράρτημα ή έχει αγνοηθεί .

Τα προβλήματα με όρια βάσει του ορισμού απαιτούν υπολογισμό του δ που οδηγούν σε σύνθετες ανισότητες όταν οι υπό εξέταση συναρτήσεις είναι μη γραμμικές. Για μερικές συναρτήσεις ο υπολογισμός του δ είναι αδύνατος εξαιτίας της χαοτικής φύσης των ανισοτήτων.

Η ιδέα του ορίου σημαίνει πρόοδο σε ένα υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης το οποίο ο Tall (1992a) ονομάζει προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Αυτή η πρόοδος εμπεριέχει μία δύσκολη μετάβαση. Ξεκινά από το σημείο όπου οι έννοιες έχουν μια ενστικτώδη βάση θεμελιωμένες στην εμπειρία και φτάνει σε ένα σημείο όπου οι έννοιες προσδιορίζονται από επίσημους ορισμούς και τις ιδιότητες τους και αναδομούνται μέσα από λογικά συμπεράσματα.

Στη διάρκεια αυτής της μετάβασης (και πολύ αργότερα), προηγούμενες εμπειρίες και οι ιδιότητες τους καθώς και το αναπτυσσόμενο σώμα επαγωγικών

γνώσεων, υπάρχουν συγχρόνως στο μυαλό των μαθητών - φοιτητών. Αυτό προκαλεί μία μεγάλη ποικιλία γνωστικών συγκρούσεων που λειτουργούν ως εμπόδιο στη μάθηση.

Αφηρημένες έννοιες όπως τα όρια μπορούν να γίνουν αντιληπτά λειτουργικά ως διαδικασίες ή δομικά ως αντικείμενα. Ο δυαδικός χαρακτήρας μαθηματικών εννοιών που έχουν διαδικαστική και δομική πλευρά ερευνήθηκε από πολλούς ερευνητές. Η Sfard (1991) χρησιμοποίησε το όρο reification (θεωρώ κάτι αφηρημένο ως αληθινό αντικείμενο) για να περιγράψει τη σταδιακή εξέλιξη μιας διαδικασίας σε αντικείμενο. Ο Dubinsky (1991) διατύπωσε μια θεωρία για το πώς οι έννοιες ξεκινάνε σαν διαδικασίες οι οποίες συνοψίζονται ως νοητικά αντικείμενα που στη συνέχεια είναι διαθέσιμα για υψηλότερου επιπέδου αφηρημένη σκέψη. Οι Gray & Tall που αναφέρονται στους Kindron & Zehavi (2002) διατύπωσαν την έννοια procept, ένα συνδυασμό της έννοιας και της διαδικασίας, που έρχεται στο μυαλό από ένα σύμβολο. Στην περίπτωση του ορίου το ίδιο σύμβολο $\lim_{n\to\infty} a_n$ μπορεί να είναι απλά μια διαδικασία , η διαδικασία της τάσης προς ένα όριο. Αν θεωρηθεί ως μια νέα οντότητα που είναι αποκομμένη από τη διαδικασία που τη δημιούργησε, τότε γίνεται ένα αντικείμενο. Διαδικασίες μπορούν τότε να εκτελεστούν σε αυτό το αντικείμενο και να επιτευχθεί ένα νέο είδος στατικής θεωρίας (Kindron & Zehavi 2002).

Οι Kidron & Zehavi (2002) χρησιμοποιούν την εξήγηση του Cornu ότι ο ορισμός του ορίου διατυπώνεται με βάση μια συνοπτική διαδικασία «δώσε μου ένα ε >0 και θα βρω ένα N τέτοιο ώστε ……», παρά μια έννοια της μορφής «υπάρχει μια συνάρτηση N(ε) τέτοια ώστε……..» όπως στην περίπτωση του ορίου μιας ακολουθίας.

Υπάρχει γενική συμφωνία ότι διαδικαστικές ή λειτουργικές αντιλήψεις πρέπει να προηγούνται της ανάπτυξης δομικών εννοιών του αντικειμένου (Cottrill et al 1996; Tall, 1992b; Sfard, 1991). Διάφοροι συγγραφείς έχουν την τάση να κάνουν διαχωρισμό ανάμεσα στις δυναμικές ή λειτουργικές αντιλήψεις του ορίου και στις στατικές ή επίσημες αντιλήψεις. Το δεύτερο αναγνωρίζεται με τον επίσημο ορισμό ε – δ (Cottril et al., 1996). Υπάρχουν ωστόσο δύο διαφορετικές απόψεις για

τη σχέση που έχουν οι μαθητές με τη διαδικαστική αντίληψη του ορίου, που επίσης ονομάζεται δυναμική αντίληψη. Ορισμένοι συγγραφείς αναφέρουν ότι είναι εύκολο και φυσικό για τους φοιτητές να αναπτύξουν μια δυναμική αντίληψη (Tall, 1992a; Williams, 1991; Tall & Vinner, 1981). Σύμφωνα με αυτή την άποψη η κύρια δυσκολία για τους φοιτητές είναι να περάσουν από τη δυναμική αντίληψη στην επίσημη κατανόηση των ορίων.

Άλλοι συγγραφείς πιστεύουν ότι η επίσημη κατανόηση πρέπει να χτιστεί πάνω στη δυναμική αντίληψη των μαθητών. Σύμφωνα με αυτή την άποψη η δυσκολία αντιμετωπίζεται στη δόμηση της δυναμικής ιδέας και αυτή η δυσκολία αποτελεί εμπόδιο στην κατανόηση (Davis & Vinner, 1986; Cottrill et al., 1996).

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η φύση της έννοιας του ορίου είναι σχετικά περίπλοκη. Επιστημολογικά εμπόδια υπάρχουν εξαιτίας της ίδιας της φύσης της έννοιας. Τα μοντέλα κατανόησης της έννοιας του ορίου που έχουν οι μαθητές - φοιτητές μπορεί να έχουν συγκεκριμένες εσφαλμένες αντιλήψεις .

3.5 Μοντέλα ορίου - Αυθόρμητες και εσφαλμένες αντιλήψεις των ορίων

Η διδασκαλία των περισσότερων μαθηματικών εννοιών δε ξεκινά σε παρθένο έδαφος. Στην περίπτωση των ορίων, ο μαθητής έχει ήδη ένα συγκεκριμένο αριθμό ιδεών, εικόνων και γνώσεων, από την καθημερινή εμπειρία, πριν αρχίσει οποιαδήποτε διδασκαλία πάνω σε αυτό το θέμα. Ο Cornu(1991) περιγράφει τις αντιλήψεις μιας ιδέας που υπάρχουν πριν από την επίσημη διδασκαλία ως αυθόρμητες αντιλήψεις. Στη διάρκεια ενός μαθήματος μαθηματικών αυτές οι αυθόρμητες ιδέες δεν εξαφανίζονται , αλλά αναμειγνύονται με τις νεοαποκτηθείσες γνώσεις, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να διαμορφώσουν τις προσωπικές ιδέες του μαθητή.

Στη περίπτωση των ορίων , οι λέξεις *τείνει προς* και *όριο* , έχουν σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσει οποιοδήποτε μάθημα. Οι μαθητές συνεχίζουν να στηρίζονται σε αυτές τις έννοιες αφού τους δοθεί επίσημος ορισμός. Έρευνες έχουν δείξει πολλές διαφορετικές σημασίες για την έκφραση «τείνει προς». Μερικές από

αυτές είναι «προσεγγίζει» (μένοντας στο τέλος μακριά από αυτό), «πλησιάζει χωρίς να το φτάνει», πλησιάζει και…μόλις που το φτάνει» (χωρίς αποκλίσεις).

Η ίδια η λέξη όριο μπορεί να έχει διαφορετικές σημασίες για διαφορετικούς ανθρώπους σε διαφορετικές στιγμές. Συχνότερα θεωρείται ένα «αδιάβατο όριο». (Cornu 1991; Monaghan 1991).

Οι Olivier (1989) και Bezuidenhout (1998) συμφωνούν ότι ένας δάσκαλος των μαθηματικών, δε μπορεί να μεταδώσει έτοιμες και άθικτες γνώσεις στους φοιτητές/μαθητές.

Θεωρούν τα λάθη και τις εσφαλμένες αντιλήψεις ως το φυσικό αποτέλεσμα της προσπάθειας του ανθρώπου να χτίσει τις γνώσεις του. Αυτές οι εσφαλμένες αντιλήψεις είναι έξυπνες ερμηνείες - δομές που βασίζονται σε σωστές ή ημιτελείς (αλλά όχι λαθεμένες) προηγούμενες γνώσεις. Οι εσφαλμένες αντιλήψεις επομένως δε μπορούν να αποφευχθούν. Μπορούν ωστόσο να παρεμποδίσουν την ανάπτυξη μιας πιο εξεζητημένης - βαθύτερης κατανόησης θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών σε μεγάλο βαθμό.

Τέτοια λάθη και εσφαλμένες αντιλήψεις δε θα έπρεπε να αντιμετωπίζονται ως φοβερά πράγματα που πρέπει να «ξεριζωθούν». Κάτι τέτοιο μπορεί να μπερδέψει το μαθητή και να κλονίσει την εμπιστοσύνη του/της στις προηγούμενες γνώσεις του/της. Αντ ‘αυτού, τα λάθη θεωρούνται ως μέρος της διαδικασίας της μάθησης.

Αυτό σημαίνει ότι οι καθηγητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις πιθανές εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών τους. Οι εσφαλμένες αντιλήψεις θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όταν αναπτύσσονται οι διδακτικές στρατηγικές. Η αναγνώριση αυτών των αντιλήψεων μπορεί να δημιουργήσει αξιόλογες ευκαιρίες για την ενίσχυση της μάθησης.

Η πρώτη έρευνα του David Tall (1980) ξεκίνησε με θέματα της Ανάλυσης και των Ορίων. Αυτό τον οδήγησε στην ανακάλυψη διαφορών ανάμεσα στις μαθηματικές θεωρίες και τις γνωστικές πεποιθήσεις πολλών ανθρώπων. Για παράδειγμα, η ακολουθία 0.9 , 0.99 , …. 0.999999999 ….. έχει μαθηματικό όριο ίσο με 1. Γνωστικά υπάρχει η τάση να θεωρείται ότι η έννοια πλησιάζει όλο και

περισσότερο το 1 χωρίς να το φτάνει στην πραγματικότητα (Limits, Infinitesimals and Infinities: *http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/limits-infinity.html)*

Δίνει την παρακάτω αιτία για αυτή την τάση. Ο πρωτόγονος εγκέφαλος αντιλαμβάνεται την κίνηση. Για αυτό το λόγο η πνευματική ιδέα μιας ακολουθίας σημείων που τείνουν προς ένα όριο είναι πιο πιθανό να επικεντρωθεί στα κινούμενα σημεία παρά στο σημείο όριο .

Η ιδέα επομένως του ορίου γίνεται πρώτα αντιληπτή ως διαδικασία και έπειτα ως έννοια. Στην περίπτωση του ορίου, η διαδικασία της τάσης προς ένα όριο είναι μία πιθανή διαδικασία που μπορεί να μη φτάσει ποτέ το όριο της (μπορεί να μην έχει καν μία σαφή καθορισμένη διεργασία για να εκτελέσει τη διαδικασία του ορίου). Κάτι τέτοιο προκαλεί γνωστική διαμάχη σε σχέση με τις γνωστικές εικόνες οι οποίες συγκρούονται με τον επίσημο ορισμό.

Οι Tall και Vinner (1981) χρησιμοποιούν τον όρο εικόνα μιας έννοιας για να περιγράψουν τη συνολική γνωστική δομή (στο μυαλό ενός ανθρώπου) η οποία συνδέεται με μία συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Αυτή περιλαμβάνει όλες τις πνευματικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες. Η εικόνα μιας έννοιας χτίστηκε με το χρόνο μέσα από όλων των ειδών τις εμπειρίες και τις αλλαγές καθώς ο άνθρωπος συναντά νέα ερεθίσματα . Κάθε άτομο έχει τη δική του μοναδική εικόνα της έννοιας μιας μαθηματικής ιδέας.

Ο ορισμός μιας έννοιας από την άλλη πλευρά, είναι ένα αρκετά διαφορετικό θέμα. Οι Tall και Vinner (1981) θεωρούν ότι ο ορισμός μιας έννοιας είναι ένα σχήμα λέξεων που καθορίζουν αυτή την έννοια . Ένας τέτοιος ορισμός μιας έννοιας μπορεί να είναι επίσημος – τυπικός και να δίνεται στους ανθρώπους ως μέρος μιας μαθηματικής θεωρίας . Μπορεί να είναι προσωπικός , δημιούργημα ενός ατόμου για να περιγράψει (μερικώς) τη δική του εικόνα μιας έννοιας. Ένας προσωπικός ορισμός μιας έννοιας μπορεί να θεωρηθεί μέρος της εικόνας της έννοιας, αλλά ο επίσημος ορισμός μιας έννοιας είτε μπορεί να θεωρηθεί μέρος της εικόνας της έννοιας είτε όχι (Tall, 1980).

Στις περισσότερες χώρες το όριο παρουσιάζεται με έναν ανεπίσημο τρόπο πρώτα, με τον επίσημο ορισμό να ακολουθεί πολύ αργότερα και ίσως να μη δίνεται

και καθόλου. Αυτό συνεπάγεται ότι η εικόνα μιας έννοιας διαμορφώνεται πολύ πριν δοθεί οποιοσδήποτε επίσημος ορισμός. Οι εικόνες της έννοιας του ορίου επομένως είναι πιθανό να περιέχουν παράγοντες που συγκρούονται με τον επίσημο/ορισμό της έννοιας (Tall, 1980).

Για παράδειγμα, αν η αρχική διδασκαλία δίνει έμφαση στη διαδικασία προσέγγισης ενός ορίου, παρά στην έννοια του ίδιου του ορίου, τότε η εικόνα της έννοιας περιλαμβάνει πολλούς παράγοντες που συγκρούονται με τον επίσημο ορισμό («πλησιάζει αλλά δε μπορεί να φτάσει», «δε μπορεί να περάσει», «τείνει προς»). Οι φοιτητές αναπτύσσουν εικόνες ορίων οι οποίες σχετίζονται με εσφαλμένες αντιλήψεις σχετικά με τη διαδικασία «πλησιάζει» , «μεγαλώνει» ή «συνεχίζεται για πάντα» (Cornu 1991).

3.6 Τρεις Κόσμοι Των Μαθηματικών σε σχέση με την Ιστορία

Ο Tall (2004) εισήγαγε τρεις κόσμους των μαθηματικών για τη διάκριση των διαφόρων τρόπων μαθηματικής σκέψης με σκοπό να «αποκτήσουν μια γενική εικόνα του πλήρους φάσματος στην γνωστική ανάπτυξη των μαθηματικών». Η θεωρία των τριών κόσμων δίνει έμφαση στην κατασκευή των νοητικών αναπαραστάσεων των εννοιών και έχει προκύψει από τις διάφορες θεωρίες για την ανάπτυξη ιδεών, όπως η εργασία της Sfard (1991) για την ενθυλάκωση των διαδικασιών προς τα αντικείμενα και τις θεωρίες του Piaget περί αφαιρετικής διδαδικασίας (Tall, 2004). Οι τρεις κόσμοι είναι κάπως ιεραρχημένοι, με την έννοια ότι υπάρχει μια εξέλιξη από τη στιγμή που μόλις κάποιος αντιληφθεί μια έννοια έως ότου μέσω ενεργειών φθάσει στην επίσημη κατανόηση της έννοιας.

Ο πρώτος κόσμος καλείται εννοιολογικο-ενσώματος (ενσαρκωμένος) κόσμος και εδώ τα άτομα χρησιμοποιούν φυσικές αντιλήψεις τους για τον πραγματικό κόσμο, για να οικοδομήσουν μέσω βιωματικής εμπειρίας τις μαθηματικές έννοιες. Ο κόσμος αυτός επεκτείνεται και σε αφαιρετικές νοητικές διαδικασίες, αλλά είναι πάντα συνδεδεμένος με την δράση των αισθήσεων. Οι βιωματικές εμπειρίες των μαθητών μπορεί να κατηγοριοποιηθούν ως αντικείμενα του πραγματικού κόσμου

και κάποιες από αυτές βοηθούν στις εξερευνήσεις των μαθητών με βάση την διαισθητική αντίληψη των ορίων των συναρτήσεων.

Ο δεύτερος κόσμος καλείται proceptual-συμβολικός κόσμος. Εδώ τα άτομα ξεκινούν με διαδικαστικές ενέργειες πάνω στις νοητικές αντιλήψεις από τον πρώτο κόσμο, οι οποίες με τη χρήση συμβόλων γίνονται κλειστές ως έννοιες. Τα σύμβολα αναπαριστούν διαδικασίες και έννοιες - για παράδειγμα, την καταμέτρηση και τον αριθμό ή την πρόσθεση και το ποσό. Τα σύμβολα, με τις διαδικασίες και τις έννοιες μαζί, καλούνται procepts (Gray & Tall, 1994) και χρησιμοποιούνται κατά διττό τρόπο ως διαδικασίες και έννοιες, ανάλογα με το πλαίσιο.

Ο τρίτος κόσμος καλείται τυπικός-αξιωματικός κόσμος, και εδώ οι ιδιότητες εκφράζονται με επίσημους ορισμούς και αξιώματα. Υπάρχει μια αλλαγή σε σχέση με τον δεύτερο κόσμο, με συνδέσεις μεταξύ των αντικειμένων και των διαδικασιών με τις αξιωματικές θεωρίες που περιλαμβάνουν τυπικές αποδείξεις και αφαιρέσεις. Η αυστηρότητα που απαιτεί αυτός ο κόσμος αποτελεί και την συνιστώσα που δημιουργεί μεγάλες δυσκολίες στους μαθητές.

Τα άτομα μετακινούνται ανάμεσα στους κόσμους, με βάση τις ανάγκες τους, τις εμπειρίες των αλλαγών και τις νοητικές παραστάσεις των εννοιών οι οποίες διαμορφώνονται και μεταβάλλονται. Οι σπουδαστές οι οποίοι αδυνατούν να ενσωματώσουν τις διαδικασίες ως αντικείμενα ή να κάνουν το βήμα από procepts σε μια αυστηρά τυπική έκθεση μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια συνηθισμένη μάθηση ως υποκατάστατο. Αυτή η μάθηση μπορεί να είναι επαρκής για καταστάσεις ρουτίνας, αλλά αν οι φοιτητές δεν είναι σε θέση να δημιουργήσουν διαχειρίσιμες νοητικές οντότητες, θα αντιμετωπίσουν ακόμη μεγαλύτερα προβλήματα στην εκμάθηση νέων πραγμάτων. Η μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών μπορεί να παρατηρηθεί στο πλαίσιο αυτών των τριών κόσμων, όπως η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών.

Εάν ληφθεί υπόψη η εξέλιξη των ορίων που ξεκίνησε με γεωμετρικό - διαισθητικό τρόπο, και στη συνέχεια, μέσω των συμβολικών χειρισμών σε αυστηρά τυπικές παραστάσεις, μπορεί κανείς να δει ότι οι φάσεις είναι αυτές των τριών κόσμων του Tall (2004). Στην αρχή της ύπαρξης ορίων, είχαν ρεαλιστικά χρησιμοποιηθεί και δεν είχαν εξηγηθεί ρητά. Οι μέθοδοι εξάντλησης των

Ιπποκράτη και Αρχιμήδη (Edwards, 1979), που άρχισαν πριν από την αυστηρή θεμελίωση της έννοιας, μπορεί να θεωρηθούν ως διανοητικά περάσματα στον πρώτο κόσμο των μαθηματικών, τον ενσώματο κόσμο. Γεωμετρικές καταστάσεις οδήγησαν στην ανάγκη για τα όρια, και εν συνεχεία άρχισαν να λαμβάνουν μορφή. Αργότερα οι Fermat, Newton, και Leibniz, χρησιμοποιούσαν υπολογισμούς με σύμβολα (Edwards, 1979; Guicciardini, 2003), όταν εξέταζαν τα όρια. Δεν είχε ακόμη γίνει χρήση της επίσημης θεωρίας των ορίων, αλλά γίνεται μια χειραγώγηση των ορίων με τη βοήθεια των συμβόλων και των λέξεων. Η εξέλιξη σε αυτό το στάδιο είχε εισέλθει στον δεύτερο κόσμο των μαθηματικών, τον proceptual κόσμο. Η φάση αυτής της μεταβολής μεταξύ των δύο πρώτων κόσμων συνεχίστηκε μέχρι που ήρθε ο Weierstrass με την θεωρία του για τα όρια (Boyer, 1949) και επέκτεινε την ανάπτυξη των ορίων στον τυπικό κόσμο των μαθηματικών. Η σύγκριση της ιστορίας και των τριών κόσμων είναι βέβαια ακατέργαστη, αλλά δίνει μια εικόνα της ανάπτυξης, η οποία μπορεί να αποδειχθεί πολύτιμη στη διδασκαλία των ορίων.

Σε μια αρκετά φιλόδοξη, έρευνα που διεξήγαγε η Juter (2006) (Department of Mathematics Luleå University of Technology) προσπάθησε να συγκρίνει την ανάπτυξη της έννοιας των ορίων σε πρωτοετείς φοιτητές, με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας. Ο στόχος ήταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια, όπως οι μαθηματικοί του παρελθόντος, δηλαδή αν έχουν τις ίδιες περίπου αντιλήψεις κατά την χρονική εξέλιξη της έννοιας.

Υπήρχαν 112 φοιτητές που συμμετείχαν στη μελέτη. Τα μαθήματα Ανάλυσης δόθηκαν πάνω από 20 εβδομάδες. Οι φοιτητές είχαν δύο διαλέξεις και δύο συνεδρίες για την επίλυση έργων, 3 ημέρες την εβδομάδα. Κάθε διάλεξη και σύνοδος διήρκεσε 45 λεπτά. Έτσι, ο συνολικός χρόνος διδασκαλίας 180 περίπου ώρες.

Η έννοια των ορίων των συναρτήσεων παρουσιάστηκε στο πρώτο μάθημα. Στην πρώτη διάλεξη σχετικά με τα όρια, ο διδάσκων ακολούθησε το βιβλίο, παρουσιάζοντας τον τυπικό ορισμό και θεωρήματα με βάση τον ορισμό, αλλά και όρια συναρτήσεων όταν το χ τείνει στο άπειρο. Το βιβλίο είχε διαισθητική προσέγγιση στις πρώτες σελίδες του, αλλά η έννοια γίνεται αυστηρά τυπική μετά

από αυτό. Στην φάση αυτή γενικά οι φοιτητές έδειξαν απροθυμία και είπαν πως έχουν σύγχυση όσον αφορά τις απόλυτες τιμές.

Στην 2η διάλεξη παρουσιάστηκαν μερικά τυπικά όρια καθώς και κάποιες αποδείξεις (με ταχύτητα που σχολιάστηκε αρνητικά από τους φοιτητές). Ο αριθμός e εισήχθη ως όριο ακολουθίας. Κατόπιν παρουσιάστηκε η συνέχεια (κάποια τμήματα παραλήφθηκαν). Ο διδάσκων ακολουθούσε το βιβλίο για να βοηθήσει τους σπουδαστές να παρακολουθήσουν τον συλλογισμό του. Ο διδάσκων έλυσε μόνος του κάποια έργα.

Στην τρίτη διάλεξη ο καθηγητής συνέχισε να αποδεικνύει θεωρήματα από την προηγούμενη διάλεξη. Μερικά θεωρήματα έγιναν εύλογα μέσα από εικόνες.

Στην επίλυση έργων υπήρχαν κάποια στάδια και μερικά από τα έργα επηρεάστηκαν από τις εργασίες των Szydlik (2000) and Tall & Vinner (1981), όπως για παράδειγμα:

Αποφασίστε και εξηγήστε για το όριο $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{x^3+1}$. Μπορεί η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-2}{x^3+1}$ να επιτύχει την οριακή αυτή τιμή; Γιατί;

Ή η οριακή τιμή $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x^{-2}\right)}{10000}$ υπάρχει ή όχι;

Υπήρξε και μια σειρά συνεντεύξεων, όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να σχολιάσουν κάποιες προτάσεις, πολύ παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι Williams (1991) σε μια μελέτη σχετικά με τα μοντέλα των μαθητών των ορίων. Οι δηλώσεις που οι μαθητές σχολίασαν είναι οι εξής :

1) Μια οριακή τιμή περιγράφει πως μια συνάρτηση κινείται όταν το χ τείνει σε μια δεδομένη τιμή.
2) Η οριακή τιμή είναι ένας αριθμός πέραν του οποίου η συνάρτηση δεν μπορεί να πάρει τιμές.

3) Η οριακή τιμή είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε οι τιμές μιας συνάρτησης μπορεί να είναι όσο κοντά θέλουμε στον αριθμό αυτό διά μέσω κατάλληλου περιορισμού των τιμών του χ.

4) Η οριακή τιμή είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο το οποίο η συνάρτηση προσεγγίζει αλλά ποτέ δεν φτάνει.

5) Η οριακή τιμή είναι μια προσεγγιστική τιμή, η οποία μπορεί να είναι τόσο ακριβής όσο επιθυμούμε.

6) Μία οριακή τιμή καθορίζεται από την εισαγωγή αριθμών όλο και πιο κοντά συγκεκριμένο αριθμό μέχρι η οριακή τιμή να επιτευχθεί.

Ο λόγος για το ότι ζητήθηκε ο σχολιασμός αυτών των δηλώσεων ήταν να γνωρίσουν οι μαθητές τις αντιλήψεις για την ικανότητα των συναρτήσεων στην επίτευξη των οριακών τιμών αλλά και άλλων χαρακτηριστικών των ορίων. Οι μαθητές είχαν τις δηλώσεις για να έχουν κάτι που να μπορεί να συγκριθεί με τις δικές τους σκέψεις. Υπήρχαν και κάποια έργα που ως στόχο είχαν να καταστήσουν τους μαθητές ικανούς για να αποσαφηνίσουν τον τυπικό ορισμό και να διευκρινισθεί τι λέει πραγματικά. Για παράδειγμα:

Είναι το ίδιο πράγμα να πει κάποιος «Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $| f(x) - A | < \varepsilon$ για κάθε x που ορίζεται ώστε $0 < | x - a | < \delta$» με το να πει «Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $| f(x) - A | < \varepsilon$ για κάθε x που ορίζεται έτσι ώστε $0 < | x - a | < \delta$»; Ποια είναι η διαφορά, αν υπάρχει;

Φάνηκε ότι οι φοιτητές αντιδρούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους στη μάθηση των ορίων των συναρτήσεων. Πολλοί φοιτητές άλλαξαν τις απόψεις τους μεταξύ των διαφόρων σταδίων. Περίπου εμφανίζουν τις ίδιες μεταβολές στην εξέλιξη της μαθησιακής ανάπτυξης με την ιστορική εξέλιξη. Οι εξελίξεις των φοιτητών φαίνεται να έχουν σχέση με την ιστορική ανάπτυξη των ορίων, η οποία με τη σειρά της είχε σχέση με την θεωρία του Tall (2004) των 3 κόσμων των μαθηματικών .

Ο μέσος μαθητής βρίσκεται στον πρώτο κόσμο των μαθηματικών έχοντας μια διαισθητική αντίληψη της έννοιας του ορίου όταν αρχίζει τις σπουδές σε

πανεπιστημιακό επίπεδο, διότι αυτό είναι το Α.Π. διδασκαλίας στα λύκεια στη Σουηδία.

Οι μαθητές με προβλήματα εξήγησης στον ορισμό του ορίου φαίνεται να ακολουθούν το στάδιο του Νεύτωνα και Leibniz δίνοντας μια αίσθηση για το τι κάνουν, αλλά στερούνται τα μέσα για την αυστηρή διατύπωση και εξήγησης της έννοιας των ορίων. Ως εκ τούτου, δεν αποδεικνύεται ότι οι φοιτητές είχαν φτάσει στον 3^{ο} κόσμο των μαθηματικών του Tall (2004). Τέσσερις μαθητές με την υψηλότερη βαθμολογία θα μπορούσαν να εξηγήσουν τους ρόλους των ποσοδεικτών, στον ορισμό με την τυπική του μορφή, έτσι ώστε να μοιάζουν ότι έχουν φτάσει στον τρίτο κόσμο. Αυτό σημαίνει ότι οι φοιτητές δεν είναι έτοιμοι να αφομοιώσουν την πολυπλοκότητα της έννοιας στην πρώτη πορεία τους.

Η ανάγκη για αυστηρότητα που τέθηκε ξεκάθαρα από διαμάχες όπως του Jurin και διαφωνία Robins σχετικά με το αν τα όρια μπορεί να τα φτάσουμε ή όχι (Boyer, 1949), φαίνεται να περνάει και σήμερα στους μαθητές-σπουδαστές που έχουν το ίδιο πρόβλημα, ακόμη κι αν να έχουν πρόσβαση σε σαφείς ορισμούς των ορίων.

Η αυστηρότητα του ορισμού , ως εκ τούτου δεν ενεργοποιεί στους μαθητές εικόνες των εννοιών (Tall & Vinner, 1981). Αν οι εικόνες της έννοιας είναι πολύ φτωχές, δεν υπάρχει αρκετό πεδίο για εξερεύνηση.

Είναι σημαντικό οι μαθητές να πάρουν παραδείγματα που δεν μπορούν να λύσουν χωρίς την ευκρίνεια ενός αυστηρού ορισμού, διαφορετικά δεν βλέπουν κανένα λόγο για να μάθουν ένα αυστηρό ορισμό. Άλλωστε στην βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετά εύστοχα παραδείγματα που τονίζουν την αναγκαιότητα της χρήσης του ε – δ ορισμού:

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x \ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & x \ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{cases}$ δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του R, ή αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}x & , x \ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \\ 1-x & , x \ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{cases}$ είναι συνεχής μόνο σε ένα σημείο.

Είναι αλήθεια όμως ότι στην επίλυση προβλημάτων με βάση έναν ορισμό, μερικοί μαθητές, συχνά, δεν πηγαίνουν πίσω στο ορισμό για την επίλυση των δυσκολιών τους, δεδομένου ότι δεν κατανοούν πλήρως τη σημασία και την συνάφεια των μαθηματικών ορισμών. (Alcock and Simpson, 2002).

Πολλοί φοιτητές στη μελέτη της Juter ήταν σε θέση *να λύσουν σχετικά δύσκολα καθήκοντα για τα όρια, ακόμη και αν δεν ήταν σε θέση να εξηγήσουν την έννοια του ορισμού*. Πολλοί από τους μαθητές χαμηλής ή μέσης στάθμης δεν παρουσίασαν πρόοδο στην εκμάθηση των ορίων, παρά την μεγάλη προσπάθεια του διδάσκοντα με παραδείγματα, γραφικών και εξήγηση των αποδείξεων. Τόσο στη θεωρία όσο και στην επίλυση προβλημάτων οι απαντήσεις τους ήταν ασαφείς.

Πολλοί φοιτητές είχαν μια αλγεβρική προσέγγιση για τα όρια, χρησιμοποιώντας γνωστές διαδικασίες για τον υπολογισμό τους , ακόμη και αν η επιλεγείσα διαδικασία ήταν ακατάλληλη για το πρόβλημα. Η ασφάλεια των γνωστών μεθόδων φαίνεται να κυριαρχεί ενάντια στην αβεβαιότητα για τη διερεύνηση νέων χαρακτηριστικών της έννοιας.

Καθώς τα Όρια για πρώτη φορά παρουσιάστηκαν για την αντιμετώπιση και επίλυση καταστάσεων ιστορικά, ενώ με τον καιρό, μέσω εργασιών πολλών μαθηματικών η θεωρία έγινε σαφής, μια σημαντική ερώτηση που αναδύεται είναι πόσος χρόνος χρειάζεται, για να αφομοιώσουν σήμερα οι φοιτητές την έννοια. Το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν πρόσβαση στη θεωρία μπορεί να τους δελεάσει για να μάθουν δύσκολα σημεία από συνήθεια (Tall, 2004), κάτι που ήταν αδύνατο για τους μαθηματικούς του τότε, χωρίς ικανότητα επινόησης. Οι εργασίες των Leibniz (Katz, 1998), Newton (Edwards, 1979) και Cauchy (Belhoste,1991) δείχνουν πόσο δύσκολο είναι να διαμορφώσει κάποιος μια συνοπτική περιγραφή για το τι είναι εύκολο οι φοιτητές να κατανοήσουν.

Η ιστορική εξέλιξη μέσα από τους τρεις κόσμους των μαθηματικών (Tall, 2004) στην συγκεκριμένη μελέτη φαίνεται να ταιριάζει μόνο στην πρόοδο του υψηλού επιπέδου μαθητών.

3.7 Τα όρια όπως διδάσκονται στη σύγχρονη εποχή - Έρευνες

Οι μαθητές μαθαίνουν με διαφορετικό τρόπο, και ως εκ τούτου δεν υπάρχει μια διδακτική στρατηγική ανώτερη από όλες τις άλλες. Διαφορετικές χώρες, στην δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιούν διαφορετικές προσεγγίσεις για να διδάξουν τα όρια. Σε τουλάχιστον ένα αυστραλιανό πανεπιστήμιο, οι φοιτητές δεν διδάσκονται τον τυπικό ορισμό μέχρι το δεύτερο έτος των μαθηματικών (School of Mathematics, 2004). Κατά το πρώτο έτος τους, εισάγονται διαισθητικά στην έννοια, μέσω παραδειγμάτων, σε αντίθεση με τους μαθητές στη μελέτη της Juter, που διδάχθηκαν τον επίσημο ορισμό του Weierstrass κατά το πρώτο εξάμηνο τους. Υπάρχουν πλεονεκτήματα, καθώς και μειονεκτήματα με τους δύο τρόπους προσέγγισης.

Η Sierpinska (1994) περιέγραψε ένα μάθημα από μια μελέτη όπου ένας δάσκαλος εισήγαγε τα Όρια σε μια τάξη. Ο δάσκαλος χρησιμοποίησε τρεις διαφορετικές μορφές εξηγήσεων : φυσική γλώσσα, γεωμετρική αναπαράσταση και παραδείγματα. Παρά τη διαφορετική- πολλαπλή παρουσίαση, δεν υπήρχαν πολλές αποδείξεις για την κατανόηση των Ορίων από τους μαθητές - φοιτητές. Όλα τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στο μάθημα ήταν συγκλινουσών ακολουθιών, έτσι ώστε οι φοιτητές να μην έχουν καμία σχέση με την ικανότητα σύγκρισης των συγκλινουσών ακολουθιών. Η Sierpinska υποστήριξε ότι υπάρχουν ασάφειες όσον αφορά τη χρήση του όρου Όριο. Ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με διάφορους τρόπους - παραδείγματος χάριν, με απόλυτες τιμές είτε σε σχέση με γειτονικές περιοχές - αλλά τα όρια συχνά διδάσκονται σε γενικές γραμμές με στόχο τη δημιουργία παραστάσεων των μαθητών για την έννοια.

Η Sierpinska (1994) διερεύνησε επίσης τη χρήση μεταφορών στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών. Ισχυρίστηκε ότι η κατανόηση, με βάση μια νέα μεταφορά προκαλεί αναδιοργάνωση στις νοητικές παραστάσεις, δημιουργώντας έναν λόγο για τον σχηματισμό της έννοιας. Η γλώσσα των ορίων (π.χ., «τείνουν να») έχει ίχνη των μεταφορών που χρησιμοποίησαν μαθηματικοί, όπως ο Νεύτωνας.

Η Στεργίου (2002) εξέτασε τις προσπάθειες φοιτητών το Μαθηματικού Τμήματος να προσεγγίσουν την έννοια της ταχύτητας σύγκλισης, η οποία μπορεί

να θεωρηθεί ως μια σύγχρονη εκδοχή ερμηνείας των απειροστών ποσοτήτων. Κι αυτό γιατί η ταχύτητα σύγκλισης της ακολουθίας ως θεωρητικού μοντέλου είναι ένα εύστοχο παράδειγμα κατασκευής εμπειρικών *μοτίβων* όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εξίσου καλά και τον υπολογιστή. Το μοντέλο δίνει μια πρώτη (διαισθητική) προσέγγιση της διαδικασίας υπολογισμού του ορίου χωρίς να χρησιμοποιεί την τυπική μορφή της έννοιας του ορίου (ε και δ). Είναι δυνατόν επίσης η συνέχεια αυτής της προσέγγισης να οδηγήσει στα απειροστά μέσα από μια διαφορετική προοπτική.

Οι φοιτητές είχαν προβλήματα στο να ξεχωρίσουν μια συγκλίνουσα ακολουθία από μια συνεχή συνάρτηση. Οι ερευνητές υποστήριξαν ότι τα προβλήματα των φοιτητών στον διαχωρισμό των εννοιών θα μπορούσε να ήταν χειρότερα αν η διδασκαλία των ορίων των ακολουθιών παραμερίζονταν πριν τη διδασκαλία των ορίων των συναρτήσεων, κάτι που άλλωστε συμβαίνει εδώ και χρόνια στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Ο Todorov (2001) επέκρινε τη μέθοδο της διδασκαλίας των ορίων με υπολογιστές και τον ε - δ ορισμό και υποστήριξε ότι η θεωρία θα ήταν πιο προσιτή στους μαθητές εάν τη διδάσκονταν σε σχέση με την έννοια των απειροστών, ακολουθώντας δηλαδή την ιστορική εξέλιξη. Ένας λόγος είναι ότι ο αριθμός των ποσοδεικτών στη διατύπωση των απειροστών είναι μικρότερος σε σχέση με την ε – δ φόρμουλα. Οι ποσοδείκτες είναι προβληματικοί για τους σπουδαστές για να τους κατανοήσουν (Cornu, 1991; Juter, 2003), αλλά ένα υποκατάστατο, δεν είναι απαραίτητα πιο εύκολο για αυτούς. Ο ε-δ ορισμός, υποστηρίζει ο Todorov, αποτελεί μια δυσάρεστη έκπληξη για τους μαθητές καθώς περιέχει τους ποσοδείκτες $\exists$, $\forall$ με τον σωστό συνδυασμό τους να τους δυσκολεύει πολύ. Ως αποτέλεσμα, ένα μάθημα ανάλυσης μοιάζει με συλλογή από ασκήσεις στη μαθηματική λογική αντί για μια αυστηρή εκδοχή του διαφορικού λογισμού. Το χάσμα μεταξύ του στοιχειώδους λογισμού και της πραγματικής ανάλυσης διευρύνεται και μερικοί μαθητές δικαιολογημένα αναρωτιούνται αν αυτά τα δύο σκέλη των μαθηματικών έχουν κάτι κοινό.

Ο Todorov (2001) υποστήριξε ότι ένα άλλο πλεονέκτημα της απειροελάχιστης προσέγγισης είναι ότι οι μαθητές δεν χρειάζεται να μαντέψουν το όριο και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι αυτό είναι ένα όριο, κάτι που πρέπει να γίνει όταν κάνουν χρήση του ε – δ ορισμού. Η απόδειξη της ύπαρξης και ο υπολογισμός του ορίου γίνονται ταυτόχρονα. Οι μαθητές περισσότερο υπολογίζουν και λιγότερο αποδεικνύουν. Παραθέτοντας κάποιους ορισμούς, στη συνέχεια προχωρά σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Κάθε πραγματικός x $\neq$0, γράφεται x = r + dx για κάποιον r με dx$\approx$0

St(r + dx) = r με dx$\approx$0 , st(1/dx) = $\pm\infty$, dx$\approx$0 και dx>0 ή <0 αντίστοιχα

Αν st(f(r+dx))=st(f(r+dy)) για όλα τα dx , dy , τότε $\lim_{x\to r} f(x) = st\left(f\left(r+dx\right)\right)$

$\lim_{x\to r^+} f(x) = st\left(f\left(r+dx\right)\right),\ \ dx>0,\ dx\approx 0$

St(x$\pm$y) = st(x) $\pm$ st(y)

St(xy) = st(x) · st(y)

St(x/y) = st(x) / st(y)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x-1} = \mathrm{st}\left[f(1+\mathrm{d}x)\right] = \mathrm{st}\left(\frac{(1+\mathrm{d}x)^3+4(1+\mathrm{d}x)^2+1+\mathrm{d}x-6}{1+\mathrm{d}x-1}\right)$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{1+3\mathrm{d}x+3\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x^3+4+8\mathrm{d}x+4\mathrm{d}x^2+1+\mathrm{d}x-6}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{12\mathrm{d}x+7\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}\right) = \mathrm{st}\left(12+7\mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2\right) = 12$$

ή

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\left(\frac{x^3-9}{x^3+x^2-7x+2}\right) = \mathrm{st}[f(2+\mathrm{d}x)]$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{(2+\mathrm{d}x)^3-9}{(2+\mathrm{d}x)^3+(2+\mathrm{d}x)^2-7(2+\mathrm{d}x)+2}\right)$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{-1+12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x^3}{9\mathrm{d}x+7\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x^3}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-1+12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x(9+7\mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2)}\right)$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{1}{\mathrm{d}x}\right)\times \mathrm{st}\left(\frac{-1+12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}x^3}{9+7\mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2}\right) = (\pm\infty)\times(-1/9) = \mp\infty$$

όπου dx είναι ένα μη μηδενικό infinitesimal, θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα.

Το βασικό πλεονέκτημα των τύπων $st\left(f\left(r+dx\right)\right)$ & $st\left(f\left(1/dx\right)\right)$ σε σχέση με τον ε-δ ορισμό των ορίων $\lim_{x\to r^{\pm}} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ είναι ότι ορίζουν έναν αλγόριθμο υπολογισμού του ορίου συναρτήσει των f , r χωρίς την συμμετοχή ενός υποψήφιου L για την τιμή του ορίου.

Μια άλλη μέθοδος είχε χρησιμοποιηθεί σε μια πειραματική διδασκαλία που είχε διεξαχθεί σε μάθημα αριθμητικής ανάλυσης σε πανεπιστήμιο της Αυστραλίας (Furina, 1994). Πέντε φοιτητές συμμετείχαν σε μια μελέτη διάρκειας 4 εβδομάδων στις οποίες έλυναν προβλήματα ορίου ασχολούμενοι 40 λεπτά μία φορά την εβδομάδα. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν λογιστικά φύλλα (Excel) για την επίλυση των καθηκόντων τους ατομικά για 20 λεπτά, και στη συνέχεια συζητήθηκαν τα έργα τους από κοινού. Η Furina κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν φοιτητές οι οποίοι έχουν μια παραμελημένη άποψη για το τι σημαίνει «τείνει στο μηδέν» και ότι είχαν την αλγεβρική προσέγγιση για τα όρια, αφήνοντας απέξω μια ανεπτυγμένη κατανόηση των ορίων, αλλά παρ' όλα αυτά ήταν σε θέση να επιλύσουν απαιτητικές εργασίες στα Όρια.

Μια πρόσφατη έρευνα (Elia, Gagatsis, Panaura, Zachariades, Zoulinaki, 2009) με θέμα τις αντιλήψεις των μαθητών στο όριο και την συμπεριφορά τους στην επίλυση έργων που απαιτούσαν πολλαπλές δεξιότητες, αποκάλυψε σημαντικά συμπεράσματα. Στην έρευνα συμμετείχαν 222 μαθητές της Γ ΄ Λυκείου οι οποίοι

είχαν ως μάθημα βαρύτητας τα Μαθηματικά και είχαν διδαχθεί μέχρι και Ολοκληρωτικό Λογισμό,

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούν να έχουν καλές επιδόσεις σε μετατροπές από μια γεωμετρική αναπαράσταση των ορίων σε μια αλγεβρική, που απαιτεί απλή αναγνώριση. Το γεγονός ότι στο σχολείο η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης με το x να τείνει στο $x_0 \in R$ εισάγεται οπτικά μέσω παραδειγμάτων που περιλαμβάνουν δυναμικές προσεγγίσεις και εφαρμογές σε γεωμετρικά ή αριθμητικά πλαίσια, παρέχει μια εξήγηση για αυτό το πόρισμα. Στις σχολικές μαθηματικές δραστηριότητες, συνήθως οι μαθητές παράγουν μια αλγεβρική παράσταση που βασίζεται σε μια γραφική παράσταση και δεν συνηθίζουν στην αντίστροφη μετατροπή, δηλαδή την κατασκευή ενός γραφήματος δοθείσης της αλγεβρικής παράστασης. (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Duval, 2002).

Οι περισσότεροι από τους μαθητές, δεν φάνηκε να κατανοούν την έννοια του ορίου αρκετά καλά ώστε να είναι σε θέση να την εξηγήσουν. Αυτή η δυσκολία πηγάζει από την προσαρμογή της διδασκαλίας στις οδηγίες του Π.Ι. , οι οποίες εφαρμόζονται στην πράξη στο σχολείο. Σύμφωνα με αυτές η διδασκαλία των ορίων δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία των μαθητών για την εισαγωγή των εννοιών των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων , γεγονός που συνεπάγεται την έλλειψη συστηματικής προσπάθειας για την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των ορίων. Το περίεργο πάντως είναι πως ούτε στις έννοιες των παραγώγων και ολοκληρωμάτων αναδεικνύεται ο ουσιώδης ρόλος του Ορίου. Υπάρχουν πολλοί μαθητές άραγε, υποψήφιοι για εισαγωγή στα Μαθηματικά Τμήματα που γνωρίζουν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι όριο ακολουθίας; Μια χρονιά δόθηκε (κατά τη διάρκεια μαθημάτων) σε μαθητές της Θ. - Τ. Κατεύθυνσης ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^{p}$ όπου $p \in N^{*} - \{1\}$. Κανένας μαθητής δεν σκέφτηκε ότι αυτό το όριο έχει σχέση με ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+k\frac{1-0}{n}}\right)^{p} = \int_0^1 f(x)dx\ , \quad f(x)=\frac{1}{(1+x)^{p}}\right]$$

Σημαντικό εύρημα ήταν ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών που προσδιόρισε την έννοια του ορίου σωστά (20,7%), απαντά σωστά σε όλες σχεδόν τις δραστηριότητες του ερωτηματολογίου. Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές οι οποίοι είναι ικανοί στο να παρέχουν επαρκείς εξηγήσεις για την έννοια του ορίου μπορούν να εφαρμόζουν τους αλγόριθμους και τις διαδικασίες σε δραστηριότητες με διαφορετικές απαιτήσεις.

Μία από τις κύριες αντιλήψεις που εκφράζονται από τους μαθητές, που είχαν επίσης εντοπιστεί σε προηγούμενες μελέτες (Cornu, 1983;, Davis & Vinner, 1986; Williams, 1991), ήταν το μοντέλο του ορίου ως ένας αριθμός που δεν μπορούμε να φθάσουμε. Μια άλλη ιδέα που κατέχεται από ένα πλήθος σπουδαστών, ήταν ότι «το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι η αριθμητική τιμή που παίρνει η συνάρτηση παίρνει για $x = x_0$». Αυτό συμφωνεί με την διαπίστωση των Davis & Vinner (1986), ότι οι φοιτητές διατηρούν τις πρωτογενείς διαισθήσεις τους, ακόμη και αφού έλαβαν προσεκτικά σχεδιασμένα φύλλα διδασκαλίας, με αποτέλεσμα να θεωρούν σωστή πάντα την ισότητα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Σε μια προσπάθεια να εξηγήσουν τη σχέση του x_0 με το Π.Ο. της συνάρτησης για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης στο χ_0 , ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών δήλωσε ότι το σημείο x_0 πρέπει να ανήκει στο Π.Ο. της συνάρτησης και ότι σε διαφορετική περίπτωση το όριο δεν έχει κανένα νόημα.

Μια ιδέα που παρατηρείται συχνά μεταξύ των μαθητών ήταν ότι το Όριο μιας συνάρτησης f δεν υπάρχει στο x_0, μόνο όταν τα όρια από αριστερά και δεξιά δεν είναι ίσα. Μια άλλη αδυναμία που παρατηρήθηκε αφορά τη ανικανότητα σύλληψης της ιδέας ότι υπάρχουν αριθμοί με δύο διαφορετικές παραστάσεις στο δεκαδικό σύστημα, δηλαδή, 2 και 1.999 ... που είναι ίσες. Σύμφωνα με προηγούμενα πορίσματα ερευνών (Monaghan, 1991; Sierpinska, 1987; Tall & Vinner, 1981), προκύπτει ότι ορισμένοι φοιτητές δεν θεώρησαν τον αριθμό 1.999 ... (σε κάποιο από τα έργα) ως πραγματικό αριθμό αλλά ως όρο της άπειρης ακολουθίας 1.9,1.99,1.999 ....

Η επιτυχής κατασκευή της έννοιας του ορίου βρέθηκε ότι διαδραματίζει έναν κρίσιμο ρόλο στην επιτυχία των μαθητών. Οι ομάδες των μαθητών που είχαν κατασκευάσει μια εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου (συμπεριλαμβανομένης μιας επαρκούς ιδέας της σχέσης του x_0 με το Π.Ο. της συνάρτησης και τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το όριο μιας συνάρτησης στο χ_0 δεν υπάρχει), ήταν αυτοί που είχαν μεγαλύτερη πιθανότητα να πραγματοποιήσουν σωστά τις μετατροπές των Ορίων από την αλγεβρική στη γεωμετρική αντιπροσώπευση και αντιστρόφως.

Οι μαθητές αντιμετώπιζαν με παρόμοιο και συνεπή τρόπο την κατασκευή ενός γραφήματος με δεδομένα τα όρια σε αλγεβρική μορφή, αλλά η επίδοσή τους ήταν εμφανώς διαφορετική σε άλλα έργα που αφορούσαν ένα διαφορετικό είδος μετατροπής. Αυτού του είδους οι ασυνέπειες μπορούν να θεωρηθούν ως ενδείξεις μιας έλλειψη ευελιξίας μεταξύ των διαφορετικών τρόπων εκπροσώπησης, ή με άλλα λόγια αποδεικνύουν την ύπαρξη του κατακερματισμού στην «σκέψη των μαθητών (Elia et al., 2007).

Μια ενδιαφέρουσα έρευνα πραγματοποιήθηκε από τον R. Parameswaran (2006) ο οποίος προσπάθησε να κατανοήσει το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του ορίου, εισάγοντας ερωτήσεις σχετικά με το όριο που περιλαμβάνουν υπερβολικά μικρούς ή εξαιρετικά μεγάλους αριθμούς για τις τιμές χ της συνάρτησης f(x) που εμπλέκεται. Προσπάθησε να εξερευνήσει το κατά πόσο οι πραγματικές εμπειρίες ζωής και πρακτικές αυτής της σχολικής τάξης στην στρογγυλοποίηση πραγματικών αριθμών σε έναν βολικό ρητό, επηρεάζουν την κατανόηση της έννοιας του ορίου. Τα ζητήματα που αρχικά προέκυψαν και αφορούσαν την κατανόηση εκ μέρους των μαθητών της έννοιας του ορίου και τα οποία οδήγησαν στην μελέτη του, ήταν τα ακόλουθα:

a) Ποια είναι τα λάθη, αν υπάρχουν, τα οποία εισχωρούν και επηρεάζουν την κατανόηση της έννοιας των ορίων, όταν «μικροί» αριθμοί χρησιμοποιούνται ως παράμετροι στον ορισμό της συνάρτησης, όταν οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τον ε – δ ορισμό;

b) Πως τέτοιες λανθασμένες πρακτικές μπορούν να ξεπεραστούν όταν οι μαθητές εκτίθενται στον ε – δ ορισμό;

Ο ερευνητής προσπάθησε να καταλάβει τις νοερές κατασκευές που οι μαθητές δημιουργούν σχετικά με τις έννοιες των απειροστών και των ορίων, βασιζόμενος σε δράσεις στη σχολική τάξη τα οποία αποτελούνταν από τεστ και συνεντεύξεις.

Η ουσία της έρευνας αποκαλύπτει τον ισχυρό βαθμό της ικανότητας των μαθητών να χτίζουν στις προγενέστερες εμπειρίες τους και στη δυσκολία τους στο να αντιμετωπίσουν πιθανώς την άπειρη διαδικασία. Αυτό που λίγες έρευνες έχουν λάβει υπόψη τους είναι η ολική φύση των προγενέστερων εμπειριών των μαθητών με την αριθμητική, χρησιμοποιώντας δεκαδικές αναπαραστάσεις και πεπερασμένες προσεγγίσεις. Αυτή η εμπειρία μπορεί να προκαλέσει επιστημολογικά εμπόδια, που σχετίζονται με την ανάγκη να απλοποιήσουμε τις νέες ιδέες με τέτοιο τρόπο, ώστε να ταιριάζει στην εμπειρία των μαθητών. Το να μειώσουμε τα προβλήματα του ορίου παίρνοντας απλές στρογγυλοποιήσεις πριν από το όριο, μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις, κάνοντας έτσι μεγαλύτερη την γνωστική δυσκολία όσον αφορά την κατανόηση της διαδικασίας του ορίου ως τυπική έννοια.

Στο πρόγραμμα σπουδών του κεντρικού συμβουλίου δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ινδία, οι μαθητές εκτίθενται στη μελέτη του ορίου μιας συνάρτησης σε σημείο, όταν είναι στην 12^{η} τάξη. Διδάσκονται λεπτομερώς σχετικά με τις συναρτήσεις και τις γραφικές τους αναπαραστάσεις. Η έννοια του ορίου εισάγεται με τη βοήθεια της γραφικής αναπαράστασης μιας συνάρτησης. Συνήθως η συζήτηση περί ορίου περιορίζεται στην τάξη σε θέματα που αφορούν ρητές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις, ενώ λαμβάνονται επίσης υπόψη και συναρτήσεις δύο ή και περισσότερους κλάδους. Ο επίσημος ε-δ ορισμός δεν δίδεται.

Το δείγμα της έρευνας αποτελούνταν από δύο ομάδες μαθητών, όλοι εκ των οποίων ήταν στη 12^{η} τάξη. Οι μαθητές ήταν ετερογενείς όσον αφορά στις μαθηματικές τους ικανότητες. Η πρώτη ομάδα μαθητών ανήκε στο ίδιο σχολείο στο οποίο ο ερευνητής ήταν δάσκαλος και η άλλη ομάδα αποτελούνταν από μαθητές από διαφορετικά σχολεία. Οι μαθητές διδάχθηκαν την έννοια του ορίου με ανεπίσημο τρόπο και με παραδείγματα τόσο από αλγεβρικές όσο και από γραφικές αναπαραστάσεις των ορίων. Οι βασικές ιδιότητες των ορίων εξηγήθηκαν χωρίς

αποδείξεις. Ωστόσο, οι αποδείξεις κάποιων τυποποιημένων ορίων, όπως $\lim_{\theta\to 0}\frac{\eta\mu\theta}{\theta}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ επεξεργάστηκαν και βρέθηκαν εντός της αίθουσας. Το τεστ περί ορίων διεξήχθηκε για την πρώτη ομάδα των μαθητών κατόπιν εντατικού διαδραστικού μαθησιακού προγράμματος. Ο συνολικός αριθμός των μαθητών σε αυτό το δείγμα ήταν εξήντα οκτώ (68). Δέκα (10) μαθητές των οποίων οι απαντήσεις ήταν αντιπροσωπευτικές των προσεγγίσεων που υιοθετήθηκαν και οι οποίοι είχαν εκφραστεί πιο ευκρινώς στο τεστ τους, στη συνέχεια υποβλήθηκαν σε ατομική συνέντευξη μία μέρα μετά τη διεξαγωγή του τεστ.

Το δεύτερο δείγμα αποτελούνταν από ένδεκα (11) μαθητές, οι οποίοι είναι πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικών στο Μαθηματικό Ινστιτούτο Chennai. Αυτοί οι μαθητές εισήχθησαν μετά από ένα πολύ δύσκολο σε εθνικό επίπεδο εισαγωγικό διαγωνισμό στα μαθηματικά. Μερικοί από αυτούς ήταν παραλήπτες μεταλλείων στη διεθνή μαθηματική Ολυμπιάδα. Οι εισηγητές προήλθαν από τα αρχαιότερα ερευνητικά ινστιτούτα της χώρας. Οι μαθητές παρακολουθούσαν μία σειρά μαθημάτων στην Ανάλυση Ι, όταν διεξήχθηκε ο διαγωνισμός. Αυτοί οι μαθητές είχαν εκτεθεί στον τυπικό ορισμό των ορίων. Έξι (6) μαθητές πέρασαν από συνέντευξη μία μέρα μετά το τεστ.

Τα ερωτήματα του test διατυπώθηκαν έτσι ώστε να εξερευνήσουν και να κατανοήσουν το πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια του ορίου βασισμένοι στην πραγματική ζωή και τις πρακτικές στρογγυλοποίησης εντός της σχολικής τάξης, όποτε αυτό είναι βολικό να γίνει. Οι παράμετροι, οι οποίες απαντώνται στον ορισμό, ήταν έτσι επιλεγμένες που ήταν υπερβολικά μικρές, αλλά μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τη φύση του ορίου.

Λίστα Ερωτημάτων

1. Έστω $f(x)=\begin{cases} x & , x\neq 2^{-1000} \\ 1000 , & x=2^{-1000} \end{cases}$

Υπολογίστε $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 2^{-1000}} f(x)$

Δείγμα	I	II
Ποσοστό % σωστών απαντήσεων 1ου ορίου	27	45
Ποσοστό % σωστών απαντήσεων 2ου ορίου	15	34

Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις:

<u>Μαθητής 1:</u> $\lim_{x\to 2^{-1000}} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2^{1000}}} f(x)$. Ο αριθμός 2^{1000} είναι ένας υπερβολικά μεγάλος αριθμός , δηλαδή ∞. Οπότε $1/_{2^{1000}} = 1/_{\infty} = 0$, άρα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1000$$

<u>Μαθητής 2:</u> Αν χ→0 , f(x) = 1000 $\left(x = 2^{-1000} \leftrightarrow x \to 0\right)$

Αν $x \to 2^{-1000}$, $f(x) = 1000$

Οι απαντήσεις γενικότερα αποκαλύπτουν ότι οι μαθητές παραπλανήθηκαν ή μπερδεύτηκαν από την απότομη ασυνέχεια στο 2^{-1000}. Μία πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι καθώς ο αριθμός 2^{-1000} θεωρείται ως υπερβολικά μικρός σε σχέση με το μέγεθος των αντικειμένων που συναντά κανείς στην πραγματική ζωή, οι μαθητές ίσως να θεώρησαν ότι καθώς x → 0, αυτό κατά κάποιο τρόπο επηρεάζει την τιμή του ορίου στο x=0.

Η ακόλουθη είναι μία ενδεικτική απάντηση ενός μαθητή, που αποτυγχάνει να λύσει το ερώτημα 1 χρησιμοποιώντας τον τυπικό ορισμό, ενώ θα ήταν εύκολο να το λύσει χρησιμοποιώντας την ανεπίσημη έννοια των ορίων.

<u>Μαθητής 3</u>: $\lim_{x\to 2^{-1000}} f(x) = 0$, αφού $x \to 2^{-1000} \Rightarrow x \neq 2^{-1000}$

Γι' αυτό f(x) = x και γι' αυτό |f(x) – 0|< ε (ε>0) $\Rightarrow$ |χ – 0|< ε άρα -ε < χ < ε $\Rightarrow$ $-\varepsilon - 2^{-1000} < x - 2^{-1000} < \varepsilon - 2^{-1000} < \varepsilon + 2^{-1000} \Rightarrow \left|\chi - 2^{-1000}\right| < \varepsilon + 2^{-1000} = \delta$.Οπότε $f(x) \to 0$ όταν $x \to 2^{-1000}$.

2. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x-(0,1)^{100000}}$ εάν υπάρχει .

Δείγμα	I	II
Ποσοστό % σωστών απαντήσεων	30	56

<u>Μαθητής 4 :</u> $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x-(0,1)^{10000}} = \dfrac{1}{0-0}$ (επειδή $0,1^{10000}$ είναι σχεδόν μηδέν) $= \frac{1}{0} = \infty$.

Ένας μαθητής γράφει $(0,1)^{10000} \to 0$. Μία πιθανή εξήγηση του για ποιό λόγο ο μαθητής στρογγυλοποιεί τον αριθμό $0,1^{10000}$ στο μηδέν, είναι ότι αποτυγχάνει να συνειδητοποιήσει, ότι οι σταθερές του προβλήματος δεν μπορούν να στρογγυλοποιηθούν στη διαδικασία της εύρεσης του απαιτούμενου ορίου. Ο μαθητής δηλ. στρογγυλοποιεί τη συνάρτηση πριν εφαρμόσει το όριο.

Ο ίδιος όμως μαθητής (στη συνέντευξη) αποτυγχάνει να αναγνωρίσει την ίδια συνάρτηση όταν αυτή παρουσιάζεται με διαφορετική μορφή χωρίς να περιλαμβάνει μικρούς αριθμούς.

I : Ποιο είναι το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^{10000}}{10^{10000}x-1}$;

<u>Μαθητής 4:</u> Νομίζω ότι το όριο είναι -10^{10000}

Μία πιθανή εξήγηση για αυτό θα μπορούσε να είναι ότι ο αριθμός 10^{10000} είναι ο συντελεστής της μεταβλητής x και όχι η σταθερά της συνάρτησης. Μία άλλη πιθανή εξήγηση είναι επίσης ότι ο μαθητής απλώς αντικατέστησε το x=0 στη συνάρτηση για να υπολογίσει το όριο χωρίς να στρογγυλοποιήσει τη συνάρτηση,

καθώς ο αριθμός 1 στον παρονομαστή δεν ήταν πολύ μικρή ποσότητα για να αγνοηθεί.

3. Υπολόγισε το $\lim_{x\to 1} f(x)$ όπου

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , \ 0\le x<1-(0,1)^{1000}\\ 10^{2004}(1+x)^{2004} & , \ x\ge 1-(0,1)^{1000}\end{cases}$$

Δείγμα	I	II
Ποσοστό % σωστών απαντήσεων	20	34

<u>Μαθητής 5:</u> το $0,1^{10000}$ είναι πολύ μικρό, ισούται με το μηδέν.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2^{2004}(10)^{2004}$$

<u>Μαθητής 6:</u> $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$ (όπου 0≤χ<1) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2^{2004}(10)^{2004}$ (όπου χ>1-0 , άρα χ>1)

<u>Μαθητής 7:</u> $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ θα μπορούσε να πάρει τις τιμές σύμφωνα με 1/(1-χ) όπου σε αυτή την περίπτωση το όριο δεν υπάρχει καθώς $1-(0,1)^{1000}$ τείνει στο 1 ή αν το χ βρίσκεται στο άλλο διάστημα , τότε το όριο υπάρχει και ισούται με $2^{2004}(10)^{2004}$.

Το ότι, από τη στιγμή που 1-$(0,1)^{1000}$<1, είναι πιθανό να βρει κανείς μία περιοχή που γειτνιάζει με το 1 στα αριστερά του 1, είναι η απαιτούμενη διανοητική κατασκευή, η οποία δεν εκτελέστηκε από τους περισσότερους μαθητές. Αυτό πιθανόν υποδηλώνει δυσκολίες που τέθηκαν από την παρουσία των «μικρών» αριθμών που εμπλέκονται στο πρόβλημα.

Αυτό είναι ένα άλλο παράδειγμα χρησιμοποίησης στρογγυλοποιήσεων από τους μαθητές, που προηγείται της λήψης του ορίου, καθώς οι στρογγυλοποιήσεις ήταν κοινή πρακτική στην προγενέστερή τους εμπειρία.

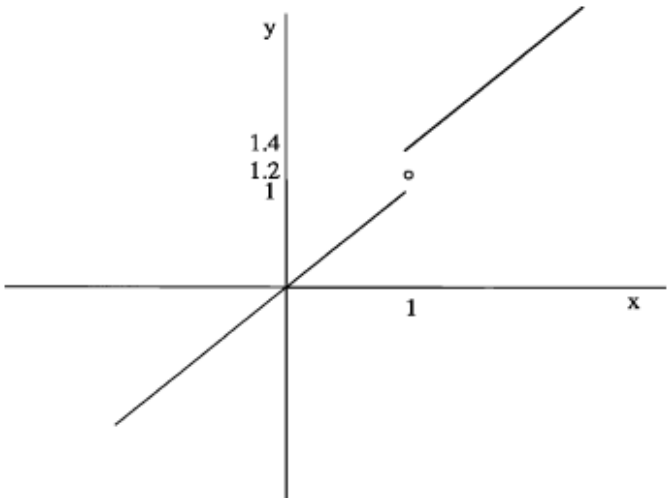
4. Υπολόγισε το $\lim_{x\to 0} g(x)$ όπου $g(x)=\begin{cases} x & , x<0 \text{ ή } x>2^{-1000} \\ 2^{-1000} & , 0\le x\le 2^{-1000} \end{cases}$

Δείγμα	I	II
Ποσοστό % σωστών απαντήσεων	28	34

<u>Μαθητής 8:</u> $\lim_{x\to 0^-} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$ διότι όταν είναι $0\le x\le 2^{-1000}$, $f(x)=1/2^{1000}$ =0. Το 2^{1000} είναι πολύ μεγάλο και γι΄ αυτό τείνει προς το άπειρο. Οπότε $\frac{1}{2^{1000}}=\frac{1}{\infty}=0$.

Η παραπάνω απάντηση οδηγεί επίσης στο συμπέρασμα ότι ο μαθητής προσεγγίζει τις «μικρές» ποσότητες ως μηδέν. Η παρουσία μικρών αριθμών στη συνάρτηση προκαλεί σύγχυση, σύγκρουση ή παρεμπόδιση στον υπολογισμό του ορίου.

Επιπρόσθετα στα παραπάνω, το ακόλουθο ερώτημα συμπεριλήφθηκε στο τεστ για τους μαθητές του Μαθηματικού Ινστιτούτου Chennai.



5. Έστω f:R→R η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παραπάνω σχήμα. Θέτουμε $\chi_0 = 1$.

a) Έστω ε=0,25. Βρες ένα δ τέτοιο ώστε $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 0,25$

b) Βρες ένα ε>0 για το οποίο ΔΕΝ υπάρχει δ τέτοιο που $|x - x_0| < \delta$ να συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

c) Έστω $x_1 = 0,9$ και ε=0,25. Βρες το μεγαλύτερο δυνατό δ τέτοιο ώστε $|x - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < 0,25$ *(Ποσοστό σωστών απαντήσεων 87%).*

Οι πιο πολλοί μαθητές του δείγματος ΙΙ ήταν σε θέση να λύσουν το ερώτημα 5 χρησιμοποιώντας τον ε-δ ορισμό δείχνοντας ότι καταλαβαίνουν τον τυπικό ορισμό των ορίων. Ωστόσο φαίνεται να διευκρινίζουν μηχανικά τον ορισμό παρά να παίρνουν στοιχεία από τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης.

Ένας πιθανός λόγος για τη μη λήψη υποδείξεων από τη γραφική αναπαράσταση είναι ότι μερικοί μαθητές πιστεύουν ότι μία τέτοια απόδειξη θα ήταν μη αυστηρή. Μία τέτοια πεποίθηση θα μπορούσε να είχε καλλιεργηθεί από την έμφαση των καθηγητών του ε-δ ορισμού ως της πιο αυστηρής, μαθηματικά, εναλλακτικής προσέγγισης στην έννοια του ορίου σε σχέση με την διαισθητική-γραφική. Η ακόλουθη δήλωση από τον Nardi (1996) υποστηρίζει μία τέτοια εξήγηση: «η δυσκολία των μαθητών στο να βρίσκουν όρια είτε μέσω του ορισμού ή μέσω της άλγεβρας των ορίων αποδόθηκε κυρίως στην προοδευτικά αυξανόμενη

δυσπιστία προς τη σχολική μαθηματική γνώση. Χρησιμοποιώντας ανισότητες προκειμένου να διαχειριστούν ποσότητες, γραφικές συναρτήσεις για να μαντέψουν όρια και να χρησιμοποιήσουν την άλγεβρα των ορίων, είναι μαθηματικές πρακτικές που οι μαθητές αμφισβήτησαν εξαιτίας της ακαμψίας τους και για αυτό ήταν δύσκολη η αποδοχή τους».

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών καταδεικνύει ξεκάθαρα ότι οι πιο πολλοί μαθητές θεωρούν τον προσδιορισμό των ορίων ως μία διαδικασία *στρογγυλοποίησης,* όταν πολύ μικρές ποσότητες εμπλέκονται στον ορισμό της συνάρτησης ή στο σημείο του πεδίου ορισμού, όπου το όριο επρόκειτο να υπολογισθεί.

Το ότι οι μαθητές του 2^{ου} δείγματος , οι οποίοι είχαν μάθει τον τυπικό ορισμό ε-δ, έκαναν επίσης λάθη με τους μαθητές του 1^{ου} δείγματος δείχνει το πόσο βαθειά εμποτισμένη είναι αυτή η συνήθεια στο μυαλό των μαθητών.

Με βάση την επιστημολογική άποψη του κονστρουκτιβισμού στην μαθηματική εκπαίδευση (Von Glasersfeld 1983; 1987; 1991b), η μάθηση των μαθηματικών είναι μια εσωτερική και προσωπική διαδικασία κατασκευής όπου ο μαθητής ψάχνει να δώσει νόημα στην μαθηματική γνώση. Αρνείται την ύπαρξη αντικειμενικότητας στις μαθηματικές δομές που είναι εξωτερικές του αρχάριου μαθητή και ισχυρίζεται ότι η απόκτηση μαθηματικής γνώσης είναι μια δυναμική διαδικασία. Η αποδοχή τέτοιας γνώσης στηρίζεται στη συνεχή αλληλεπίδραση και διαπραγμάτευση εντός της μαθητικής κοινότητας. Έτσι, η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και η ανάπτυξη εσωτερικών αναπαραστάσεων μαθηματικών δομών είναι τόσο κοινωνικοπολιτισμικές, όσο και γνωστικές δραστηριότητες. Γι΄ αυτό, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις που έχουν αποκτηθεί έτσι, είναι ανοικτές στην επίδραση του κοινωνικοπολιτισμικού περιβάλλοντος του μαθητή (Cobb, Yackel & Wood, 1992).

Τα παραπάνω είναι σύμφωνα με τις διαπιστώσεις της έρευνας σχετικά με την επίδραση της αριθμητικής στρογγυλοποίησης των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας των ορίων.

Στην διαδικασία κατανόησης της έννοιας του ορίου, θα περίμενε κάποιος ότι η διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου που οι μαθητές μαθαίνουν μέσω μιας άτυπης προσέγγισης (όπως η χρήση γραφικών παραστάσεων), θα βοηθήσει στο να αφομοιωθεί καλύτερα ο τυπικός ορισμός. Φαίνεται όμως ότι η διαίσθηση που αποκτήθηκε μέσω της άτυπης προσέγγισης, φαίνεται πως δεν χρησιμοποιήθηκε σωστά, αφότου οι μαθητές διδάχτηκαν τον τυπικό ορισμό.

Η υπόθεση ότι η μάθηση του ε – δ ορισμού θα βοηθούσε τους μαθητές να μην πέσουν στην παγίδα της αδιάκριτης χρήσης της αριθμητικής της στρογγυλοποίησης, αποδείχθηκε απλοϊκή. Πράγματι, σύμφωνα με τον Williams (2001) «*ο ε – δ ορισμός έχει σκοπό να ξεπεράσει μαθηματικές δυσκολίες με την άτυπη έννοια του ορίου και όχι να βοηθήσει να επιλυθούν γνωστικά εμπόδια που αντιμετωπίζονται – βιώνονται από τους μαθητές*». Όταν ο μαθητής συναντά μια κατάσταση που εμπλέκει πολύ μικρούς αριθμούς, πιθανόν για πρώτη φορά, νιώθει μια γνωστική παραφωνία. Καθώς όχι μόνο ανίκανος αλλά και αβέβαιος για το πώς πρέπει να προχωρήσει, αυτό που έρχεται να τον σώσει δεν είναι ο ε – δ ορισμός αλλά οι δοκιμασμένες πρακτικές της αριθμητικής της στρογγυλοποίησης οι οποίες συμβάλουν στην απλοποίηση της προβληματικής κατάστασης.

3.8 Τελικά πως θα διδάξουμε τα Όρια ;

Ένας αριθμός ερευνητών (Davis & Vinner, 1986; Sierpinska, 1987; Tall & Vinner, 1981) θεωρεί ότι η προηγούμενη γνώση των άλλων μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με την έννοια του ορίου (όπως πραγματικοί αριθμοί και συναρτήσεις), μπορεί να προκαλέσουν δυσκολίες στην θεμελίωση της έννοιας από τους μαθητές. Η φορμαλιστική παρουσίαση των ορίων στα σχολικά εγχειρίδια φαίνεται να είναι μακριά από τα βιώματα των μαθητών και την μέση μαθηματική τους ικανότητα, αλλά και η διαισθητική παρουσίαση είναι μακριά από την εστίαση σε ζωτικά σημεία της έννοιας.

Εξακολουθεί να υπάρχει ασάφεια στη διδασκαλία των ορίων των συναρτήσεων σε διαφορετικές χώρες. Διαφορετικές μέθοδοι διδασκαλίας και στρατηγικές εφαρμόζονται ανάλογα με τα διάφορα προβλήματα.

Οι αυστραλιανοί φοιτητές δεν διδάσκονται τον ε – δ ορισμό έως το δεύτερο έτος των μαθηματικών. Μέχρι τότε είχαν εργαστεί με τα όρια δημιουργώντας μια διαισθητική έννοια του όρου. Ένας κίνδυνος είναι ότι οι καθημερινές τους εμπειρίες θα διαταράξουν τις αντιλήψεις τους για τα όρια. Οι εσφαλμένες αναπαραστάσεις μπορούν να γίνουν έντονες αν εφαρμοστούν και μετά από λίγο καιρό πολύ δύσκολο να αλλάξει (Cornu, 1991).

Το φαινομενικό πλεονέκτημα της αναμονής όσον αφορά την έλευση του τυπικού ορισμού είναι ότι οι σπουδαστές παίρνουν χρόνο για να συνηθίσουν την έννοια των ορίων, και τα αποτελέσματα περισσοτέρων ερευνών συμπεραίνουν ότι χρειάζεται.

Ο κίνδυνος από τη θέσπιση ορίων με άτυπο τρόπο ίσως αξίζει να αντιμετωπιστεί για να καταστεί η μάθηση πιο εύκολη για τους μαθητές. Το τίμημα για αυτή την πιο ομαλή εισαγωγή είναι ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν μεγαλύτερη επίγνωση των ειδών προβλημάτων που οι μαθητές μπορεί να αντιμετωπίσουν αργότερα, όταν θα μάθουν τον τυπικό ορισμό, για παράδειγμα η επίδραση των καθημερινών αντιλήψεων και της γλώσσας (Sierpinska, 1994).

Τα συμπεράσματά των ερευνών δίνουν στοιχεία για ανεπαρκείς ή ακόμα και για ακατάλληλες στρατηγικές διδασκαλίας που εφαρμόζονται για την ανάπτυξη στην κατανόηση των ορίων. Η έννοια του ορίου είναι δύσκολη και οι μαθητές θα πρέπει να αντιμετωπίσουν διαφορετικές καταστάσεις, δηλαδή, ασυνήθιστα προβλήματα, έτσι ώστε οι ίδιοι να αναγκαστούν να «ξεφύγουν» από συμβατικές καταστάσεις, αλλά την ίδια στιγμή, να μπορούν να κάνουν και αλγεβρικούς υπολογισμούς σε πολλές ασκήσεις.

Οι μαθητές - φοιτητές πρέπει να αξιολογήσουν τις αντιλήψεις τους κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης για την προσαρμογή των νοητικών παραστάσεων τους. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να τους βοηθήσουν με διερευνητικές εργασίες, οι οποίες θα εκθέτουν την ανάγκη για αυστηρότητα, και θα βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν όλες τις διαφορετικές πτυχές των ορίων των συναρτήσεων, βρίσκοντας σημαντικά τμήματα της έννοιας στις εικόνες που έχουν γι΄ αυτή.

Το κύριο ζητούμενο είναι η εξεύρεση αποτελεσματικών διδακτικών προσεγγίσεων, οι οποίες θα συνδυάζουν την ικανότητα αλγεβρικών υπολογισμών και την εννοιολογική κατανόηση του ορίου. Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή διδακτικών δραστηριοτήτων που δεν περιορίζονται σε στενά διδακτικά πλαίσια, θα μπορούσε να συμβάλει στην ανάπτυξη μιας σφαιρικής και συνεκτικής κατανόησης των ορίων και την επιτυχή επίλυση των προβλημάτων. *Ας δούμε για παράδειγμα πως ο ε – δ ορισμός του Ορίου συνάρτησης θα μπορούσε να βοηθήσει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης γραφικής παράστασης*:

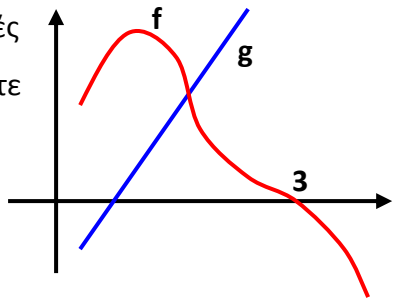
Έστω f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ άρα με βάση τον ορισμό $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε x με $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$, άρα ή $|f(x)-h(x)|<\varepsilon\,|x-x_0|$ όπου $h(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (εφαπτομένη ευθεία)

και για ε = ½ $|f(x)-h(x)|<\frac{1}{2}|x-x_0|$ άρα το |f(x)-h(x)| πάει πιο γρήγορα στο μηδέν σε σχέση με το $|x-x_0|$.

Έτσι για παράδειγμα η f(x) = |x| δεν έχει εφαπτομένη στο μηδέν διότι το |f(x)-h(x)|=|x| και το |x-0|=|x| πάνε με την ίδια ταχύτητα στο μηδέν , πράγμα που δεν συμβαίνει με την $f(x)=x^2$, όπου το |f(x)-h(x)| πάει με μεγαλύτερη ταχύτητα στο μηδέν από ότι το $|x-x_0|$.

Ένα ενδεικτικό παράδειγμα που συνδυάζει γραφικό και εννοιολογικό πλαίσιο για την λύση του, θα μπορούσε να είναι το ακόλουθο:

«στο διπλανό σχήμα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , υπολογίστε $\lim_{x\to 3^-}\frac{g(x)}{f(x)}$ » .



Στην έρευνα των Elia, Gagatsis, Panaoura,Zachariades, Zoulinaki (2009) που αναφέρθηκε, το πρώτο από τα έργα που οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν, ήταν το ακόλουθο:

Ένα «περίεργο» φυτό μεγαλώνει σε ένα θερμοκήπιο και παρατηρούμε την ανάπτυξη του. Έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις σχετικά με το ύψος του:

Σε 240 ώρες το ύψος του είναι 1,9 m

Σε 264 ώρες το ύψος του είναι 1,99 m.

Σε 288 ώρες το ύψος της είναι 1,999 m.

Σε 312 ώρες το ύψος της είναι 1,9999 m.

……

α) Μήπως τα διαδοχικά ύψη του φυτού έχουν ένα όριο; (L1)

β) Εάν ναι, ποιο είναι αυτό το όριο; (L2)

γ) Η οροφή του θερμοκηπίου απέχει 2 m πάνω από το έδαφος. Θα φτάσει το φυτό το ανώτατο όριο; (L3)

Η συντριπτική πλειοψηφία (86%) των μαθητών ανέφεραν ότι το ύψος του φυτού έχει ένα όριο, το 66% βρήκε το όριο, αν και δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι είχαν κατανοήσει την όλη κατάσταση, και το 76% πρότεινε ότι το φυτό δεν θα μπορούσε ποτέ να φτάσει το ανώτατο όριο. Σε αυτή την περίπτωση, ο χρόνος λειτούργησε ως «παρασιτική» μεταβλητή, διότι θα πάρει άπειρο χρόνο για να φτάσει το φυτό στο όριο.

Το παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσε να τεθεί στα πλαίσια της εισαγωγής των μαθητών στις οριακές διαδικασίες, χαρτογραφώντας παράλληλα τις διαισθητικές- γνωστικές πεποιθήσεις τους. Επιπλέον αναδεικνύονται οι δεξιότητές τους (ή μη) για την επίλυση μη συνήθων προβλημάτων.

Οι McGinn και Boote (2003) υπογραμμίζουν τη σημασία που έχει για τους μαθητές να εργαστούν με διαφορετικά είδη δραστηριοτήτων στην πράξη τόσο σε δεξιότητες ρουτίνας όσο και σε ικανότητες επίλυσης στα προβλημάτων στα

μαθηματικά, και υποστήριξαν ότι η Ιστορία των μαθηματικών προσφέρει μια σειρά από διαφορετικά είδη προβλημάτων που είναι κατάλληλα για τέτοια πρακτική.

Έργα βασισμένα στα αρχικά ιστορικά κείμενα μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν διαφορετικούς τρόπους αντίληψης των ορίων και επίσης να κάνουν αυτούς να εξερευνήσουν τα όρια σε διάφορες ιστορικές καταστάσεις. Ιστορικά παραδείγματα έχουν βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία (Radford, 2000), γενικά άλγεβρα (Katz, Dorier, Bekken & Sierpinska, 2000).

Για παράδειγμα, θα μπορούσε να δοθεί στους μαθητές το παρακάτω κείμενο: (σχολικό βιβλίο Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, σελ. 207-208) «γνωρίζουμε ότι οι μαθηματικοί του παρελθόντος είχαν αδυναμία στο να διαπραγματευθούν με λογική αυστηρότητα τον ορισμό του απείρως μικρού και απείρως μεγάλου. Για να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες εισάγουν την έννοια του ορίου. Ο D' Alembert όρισε το 1765 αυτήν την έννοια στην «Εγκυκλοπαίδεια» του Diderot ως εξής: *Ένα μέγεθος ονομάζεται όριο ενός άλλου όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίζει το πρώτο σε μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, αν και ένα μέγεθος δεν μπορεί να ξεπερνά ποτέ το μέγεθος που προσεγγίζει, έτσι ώστε η διαφορά μιας τέτοιας ποσότητας από το όριο της να είναι εντελώς αμελητέα*.

a) Υπάρχει η έννοια της κίνησης στην παραπάνω διαδικασία;

b) Θεωρείτε σωστό τον παραπάνω ορισμό; Γιατί;

c) Πως βοηθάνε οι ακολουθίες

$$a_n = \begin{cases} 2-10^{-n} & , \ n \ \textit{περιττός} \\ 2+10^{n} & , \ n \ \textit{άρτιος} \end{cases} \quad , \quad t_n = \begin{cases} \underset{n-\textit{εννιάρια}}{1,9999\ldots9} & , \ n \le 300 \\ 2 & , \ n > 300 \end{cases}$$ στο b);

d) Μπορείτε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax}{x+a}$ με βάση τον παραπάνω ορισμό;

Η M. Artigue (2003) σημειώνει ότι σε ερωτηματολόγια που δόθηκαν σε πρωτοετείς στα Γαλλικά Πανεπιστήμια στην ερώτηση τι πιστεύουν για δύο αριθμούς α , β αν για κάθε ε>0 ισχύει |α - β|<ε , η άποψη που κυριάρχησε ήταν

για δύο αριθμούς που βρίσκονται απειροελάχιστα κοντά με κάποια έννοια της διαδοχής (αντί της σωστής απάντησης α=β). Το ίδιο ερώτημα έγινε και σε φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πατρών (Στεργίου, 2002). Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις:

Φοιτητής 1 *(πτυχίο)*

Από την σχέση αυτή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι α=b. Είναι

$0 \leq |\alpha - b| < \varepsilon$ *. Για να είναι α=b πρέπει το ε να είναι ή να τείνει στο μηδέν. Δηλαδή να έχουμε την μορφή* $0 \leq |\alpha - b| < \varepsilon$ *, οπότε α=b. Επειδή όμως το ε είναι θετικός πραγματικός, μπορούμε να βρίσκουμε πάντα έναν ποιο κοντά στο 0 αφού οι πραγματικοί είναι άπειροι.*

Φοιτητής 2

Ισχύει ότι αφού $|\alpha-\beta|<\varepsilon \Leftrightarrow \beta-\varepsilon < \alpha < \beta+\varepsilon$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι το β βρίσκεται κοντά σε μια " ε " περιοχή του α για κάθε ε, έτσι τα α ,β θα βρίσκονται «πολύ κοντά» αλλά με την αυστηρή έννοια της ισότητας δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το α = β.

Επιβεβαιώνεται έτσι για μια ακόμη φορά ότι η έννοια του απειροστού συνεχίζει να είναι ζωντανή με διάφορους τρόπους στο νου των σπουδαστών. Αξιοσημείωτο είναι πως η ίδια ερώτηση ήταν και θέμα του Πανελλήνιου Μαθηματικού Διαγωνισμού 1990. Θα μπορούσαμε ίσως να τροποποιήσουμε την ερώτηση (για να γίνει πιο εύκολη): Υποθέστε ότι $\alpha \neq \beta$. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε ε>0, τι θα συμβεί αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$;

Στην μελέτη της Furina (1994) οι φοιτητές της μελέτης θεωρούν τα απειροστά ως μηδέν, όπως έκαναν οι Fermat (Edwards, 1979) και άλλοι μαθηματικοί.

Εάν τα όρια διδάσκονται μεταφορικά ή διαισθητικά (Sierpinska, 1994), μπορούν να θεωρηθούν ως απειροστά σε περιπτώσεις όπως αυτές στην μελέτη της

Στεργίου (2002). Τα απειροστά είναι τότε παραδείγματα και δεν αποτελούν θεμέλιο της εργασίας με το όρια.

Η μάθηση των ορίων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κάνουν τη μετάβαση στην αφηρημένη σκέψη. Η αφηρημένη σκέψη είναι ουσιαστικής σημασίας για τους μαθητές στο να κατανοήσουν πώς ο ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση μη συνηθισμένων προβλημάτων. (Katz et. al., 2000).

Πέρα από τα παραπάνω που αφορούν τους τρόπους συμβατικής διδασκαλίας της έννοιας του ορίου, υπάρχει και η ενναλακτική προσέγγιση με την χρήση νέων τεχνολογιών (ΤΠΕ), όπου μπορούμε να επιχειρήσουμε τον φωτισμό των σημείων που δημιουργούν πρόβλημα κατανόησης στους μαθητές, μέσω δυναμικών, πολλαπλών αναπαραστάσεων.

3.9. Διδακτικές Προσεγγίσεις στο Όριο συνάρτησης με τη χρήση μαθηματικού Λογισμικού

Ήδη έχει επισημανθεί ότι μια σημαντική δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του ορίου για τους μαθητές, είναι η εστίαση είτε στην πτυχή της έννοιας που σχετίζεται με την διαδικασία προσέγγισης, είτε στην πτυχή που σχετίζεται με μια διακριτή τιμή, αυτή του ορίου. Οι μαθητές δυσκολεύονται να δουν την έννοια στη μαθηματική της διάσταση, δηλαδή ότι και οι δύο αυτές πτυχές είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την έννοια του ορίου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντίστοιχα για την επίλυση προβλημάτων (Trouche & Guin, 1996). Η δυσκολία έγκειται στην επιστημολογική ασυνέχεια – διάσταση μεταξύ των δύο αυτών πτυχών μεταξύ τους. Η χρήση λογισμικών, όπως το Derive, επιτρέπει στους μαθητές να χειρίζονται παράλληλα τις δύο πτυχές με δυναμικό τρόπο. (Κυνηγός, 2007). Η λειτουργικότητα της εστίασης («zooming») στα περισσότερα λογισμικά μαθηματικών, όπως π.χ. στο Function Probe, Euclidraw, Modellus, επιτρέπουν στους μαθητές να παρατηρήσουν τι γίνεται π.χ. στο σημείο όπου μια ευθεία εφάπτεται με

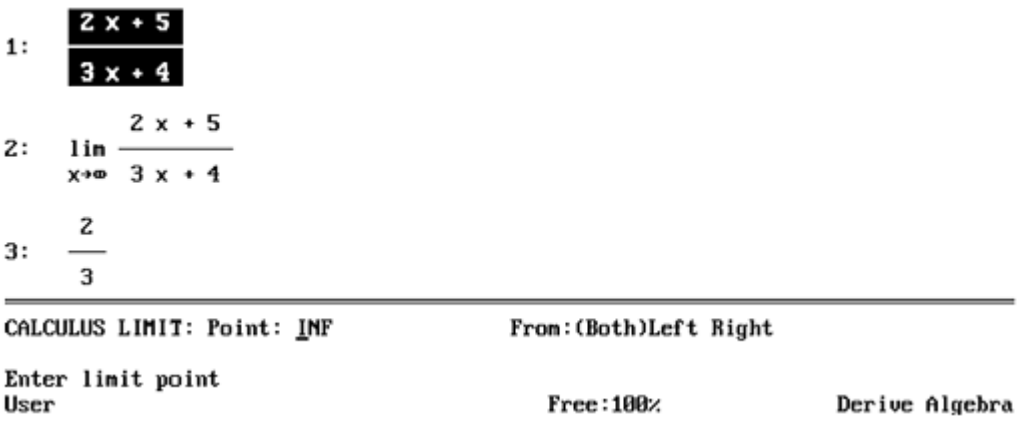
μια καμπύλη και να εξηγήσουν ότι για απειροστό διάστημα έχουμε δύο παράλληλες ευθείες (Milani & Baldino, 2002).

Οι Gray & Tall (1993) ανέφεραν μια μεγάλη ποικιλία από περιπτώσεις όπου ένα σύμβολο μπορεί να είναι διφορούμενο και να αντιπροσωπεύει είτε μια διαδικασία ή μια έννοια. Το αποκαλούν procept. Τα σύμβολα $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{n \to \infty} a_n$ αντιπροσωπεύουν είτε την διαδικασία του να παίρνει η συνάρτηση τιμές κοντά σε μια συγκεκριμένη τιμή, ή την τιμή του ίδιου του ορίου. Το όριο είναι συνεπώς, ένα παράδειγμα ενός procept.

Ο Tall (1993) υποστηρίζει ότι ο υπολογιστής ανακουφίζει τον μαθητή από την τυραννία του να πρέπει να ενσωματώσει τη διαδικασία πριν αποκτήσει αισθητικά τις ιδιότητες του μαθηματικού αντικειμένου. Χρησιμοποιώντας το λογισμικό το οποίο διεξάγει εσωτερικά τη διαδικασία, καθίσταται δυνατή στον μαθητή η διερεύνηση των ιδιοτήτων του αντικειμένου που παράγονται πριν , κατά ή μετά από τη μελέτη της ίδιας της διαδικασίας. Αυτή η νέα ευελιξία στο αναλυτικό πρόγραμμα που δίνει νέες δυνατότητες για το επίπεδο κατασκευής των εννοιών, ονομάζεται αρχή της επιλεκτικής κατασκευής.

Με δεδομένη τη σωστή αντίληψη του μαθητή για τους αριθμούς, ένα περιβάλλον που θα μπορούσε να αποδειχθεί κατάλληλο για τη διερεύνηση της έννοιας όριο είναι ένα σύστημα άλγεβρας ηλεκτρονικών υπολογιστών (CAS), όπως Maple, Mathematica ή Derive. Αυτά επιτρέπουν χειραγώγηση της «ορθής» απάντησης έτσι ώστε ρητές εκφράσεις που περιέχουν τους αριθμούς $\sqrt{2}, \pi, e$ κ.λ.π. να μην μπορούν οι μαθητές να τις απλοποιήσουν για να καταλήξουν σε προσεγγιστικές απαντήσεις, εκτός κι αν υπάρχει ρητή εντολή να το πράξουν. Όλα τα παραπάνω λογισμικά επιτρέπουν προγραμματισμό σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό.

Π.χ. για την εύρεση του ορίου $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+5}{3x+4}$ ο μαθητής μπορεί με μια τυπική ακολουθία βασικών βημάτων να μετακινηθεί από την αρχική έκφραση στην λήψη της τιμής του ορίου με τη μορφή 2/3.



Η παραπάνω διαδικασία είναι ανάλογη με την εφαρμογή μιας ακολουθίας πλήκτρων για την εύρεση ενός αποτελέσματος στον υπολογιστή τσέπης.

Ως εκ τούτου συμπεριφέρεται κατά τρόπο γνωστό στο μαθητή και, κατά μία έννοια, λιγότερο "καλύπτεται από μυστήριο» από ό, τι η παραδοσιακή δυναμική προσέγγιση για το όριο. Υπό μια άλλη αίσθηση βέβαια, ωστόσο, η εσωτερική διαδικασία με την οποία ο υπολογιστής εκτελεί τη διαδικασία παραμένει μυστηριώδης. Αλλά, ακριβώς όπως κάποιος που ξέρει τι είναι τετραγωνική ρίζα, αλλά δεν γνωρίζει τον αλγόριθμο για να την υπολογίσει , μπορεί να δώσει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο $\sqrt{2}$ με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, έτσι και ο μαθητής μπορεί να δώσει κάποιο νόημα για το αποτέλεσμα που βρίσκει με άλλα μέσα. Για παράδειγμα, υπολογίζοντας τις τιμές της παραπάνω έκφρασης για μεγάλες τιμές του x, ή διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x και επισημαίνοντας ότι, όταν το x παίρνει μεγάλες, τότε το 1 / x παίρνει μικρές τιμές. Κατά συνέπεια, επιλεκτικά ο μαθητής μπορεί να επικεντρωθεί στην παραγωγή του ορίου ως αντικείμενο (χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή) ή στην οριακή διαδικασία (με χαρτί και μολύβι). Συνεπώς, ο μαθητής μπορεί να δει τις δύο συμπληρωματικές πτυχές του ορίου procept ως έννοια και διαδικασία.

Ουσιώδης διδακτική προσέγγιση στην έννοια του ορίου γίνεται με την βοήθεια γεωμετρικών λογισμικών, όπως είναι το **Sketchpad**, **Gabri** ή το **Geogebra** που είναι συνδυασμός γεωμετρικού και αλγεβρικού λογισμικού ή του **Modellus** που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση διαφόρων φαινομένων ή και του **Excel**.

3.9.1 Τύπος (Ι). Διαισθητική – Δυναμική Προσέγγιση

Ο συνηθέστερος και σχετικά απλός διδακτικός τύπος προσέγγισης του Ορίου, είναι ένας συνδυασμός animation και φύλλου εργασίας. Στην ουσία χρησιμοποιείται η δυνατότητα κινούμενου σημείου στη γραφική παράσταση και η αλγεβρική «μετάφραση» των μεταβολών που επέρχονται στο στατικό χαρτί.

Στην διεύθυνση *http://www2.e-yliko.gr/htmls/analyk.aspx* (Νικολαΐδης,2003) τίθενται αρχικά κάποιοι διδακτικοί στόχοι (Λογισμικό **Sketchpad**):

Να κατανοήσουν οι μαθητές:

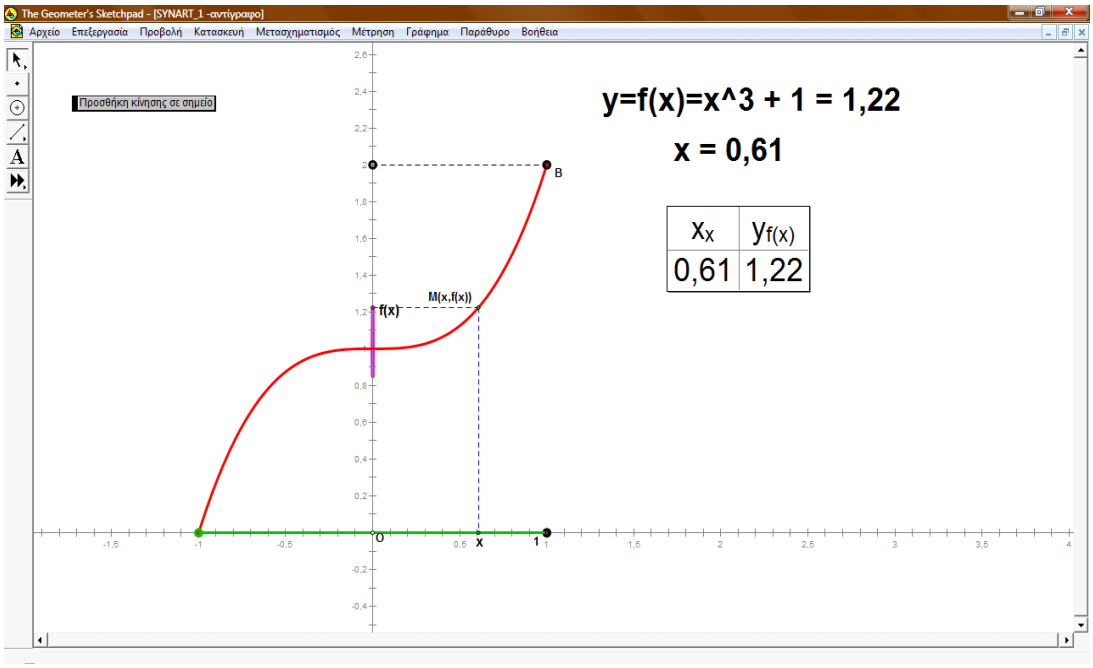
- Την διαφορά μεταξύ των εννοιών $\chi=\chi_0$ και $\chi\to\chi_0$, $\chi\to\chi_0^+$, $\chi\to\chi_0^-$.
- Την ισοδυναμία $|\chi-\chi_0|<\varepsilon \Leftrightarrow x_0-\varepsilon<\chi<x_0+\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon>0$
- Όταν $\chi\to\chi_0$ τότε μπορεί $y=f(x)\to m$ (ή όχι)
- Την έννοια του συμβόλου: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- Υπάρχει στο IR το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=m$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=m$
- Η ανάπτυξη της παρατηρητικότητας των μαθητών και εποπτική προσέγγιση (γεωμετρικά) των μαθηματικών εννοιών.
- Η εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση των Η/Υ και του Διαδικτύου για την αναζήτηση πληροφοριών και η αξιοποίησή τους.
- Οι μαθητές να πειραματιστούν.
- Να αναπτύξουν πνεύμα συνεργασίας και διαλόγου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Οι μαθητές (εργαζόμενοι σε ομάδες) ανοίγουν το αρχείο synart_1 και δουλεύουν παράλληλα στο φύλλο εργασίας

Το πεδίο ορισμού της f είναι ……, το σύνολο τιμών της f είναι ……
Μετακινήστε το χ ώστε να προσεγγίζει το μηδέν ή εναλλακτικά πατήστε το κουμπί «προσθήκη κίνησης» παρατηρώντας τον πίνακα τιμών. Όταν $\chi \to 0^+$ τότε $f(\chi) \to$…… (δεξιό πλευρικό όριο) Όταν $\chi \to 0^-$ τότε $f(\chi) \to$…… (αριστερό πλευρικό όριο)
Όταν $\chi \to 1^-$ τότε $f(\chi) \to$…… (αριστερό πλευρικό όριο) Όταν $\chi \to 1^+$ τότε $f(\chi) \to$…… (δεξιό πλευρικό όριο)

Συνηθέστερα γράφουμε : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ και αν τα δύο αυτά πλευρικά όρια είναι ίσα γράφουμε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

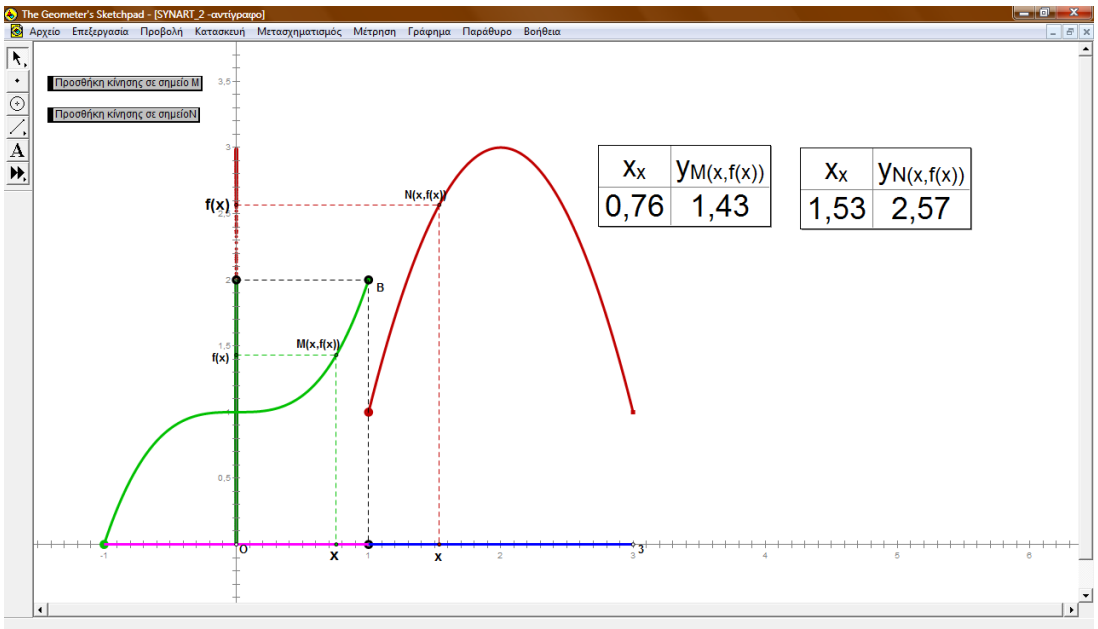
Ανοίξτε το αρχείο «synart_2», στο οποίο υπάρχει η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , -1 \le x < 1 \\ -2x^2 + 8x - 5 & , \ 1 < x \le 3 \end{cases}$$

Μετακινήστε το σημείο M (την τετμημένη του) προσεγγίζοντας τον αριθμό 1 , όπως ανάλογα και το σημείο N (την τετμημένη του) και παρατηρήστε τον πίνακα τιμών.

Όταν $\chi \to 1^-$	τότε f(χ)→.....	δηλ. limf(x)=.....
Όταν $\chi \to 1^+$	τότε f(χ)→.....	δηλ. limf(x)=.....

Αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = k$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = m$ με k ≠m λέμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.



Στην παραπάνω δραστηριότητα ξεκαθαρίζεται για ποιο λόγο δεν υπάρχει το όριο όταν τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3</u>

Ανοίγουμε τώρα το αρχείο synart_3 όπου έχουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + k & , a \le x < x_0 \\ m & , x = x_0 \\ \dfrac{n}{x} & , x_0 < x \le b \end{cases}$$

1. $f(x_0)$=.....

2. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = ...$

3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = ...$

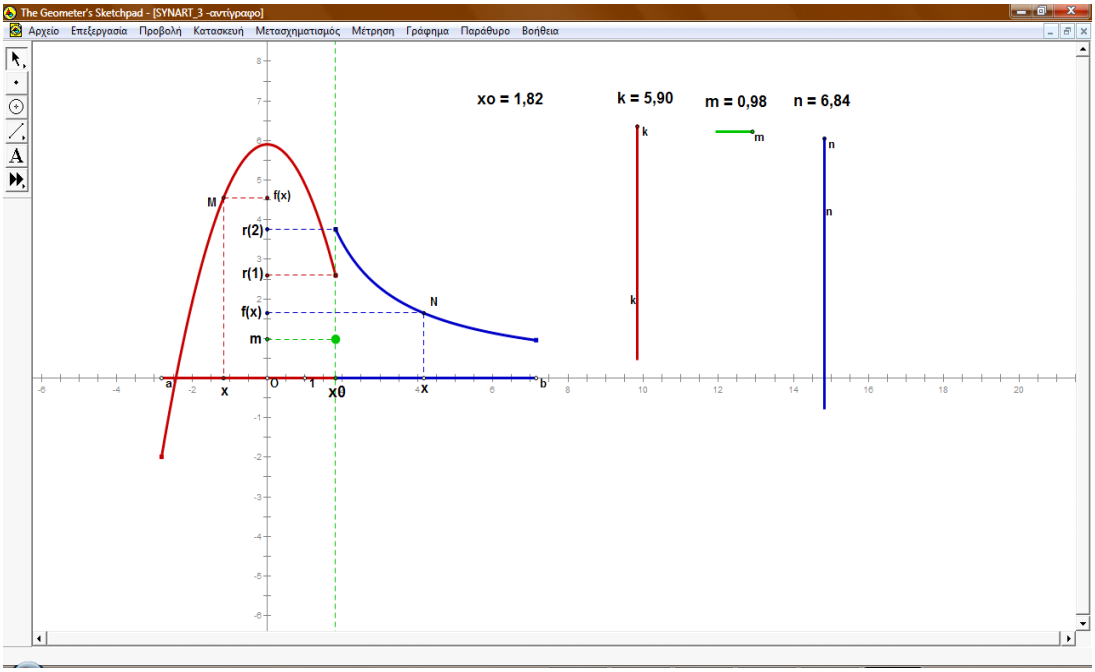
4. Υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$;..... με τι ισούται;.....

5. Μεταβάλλετε τις παραμέτρους k , m , n ώστε να πετύχετε διαδοχικά:

   → $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = m$

   → $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = m$

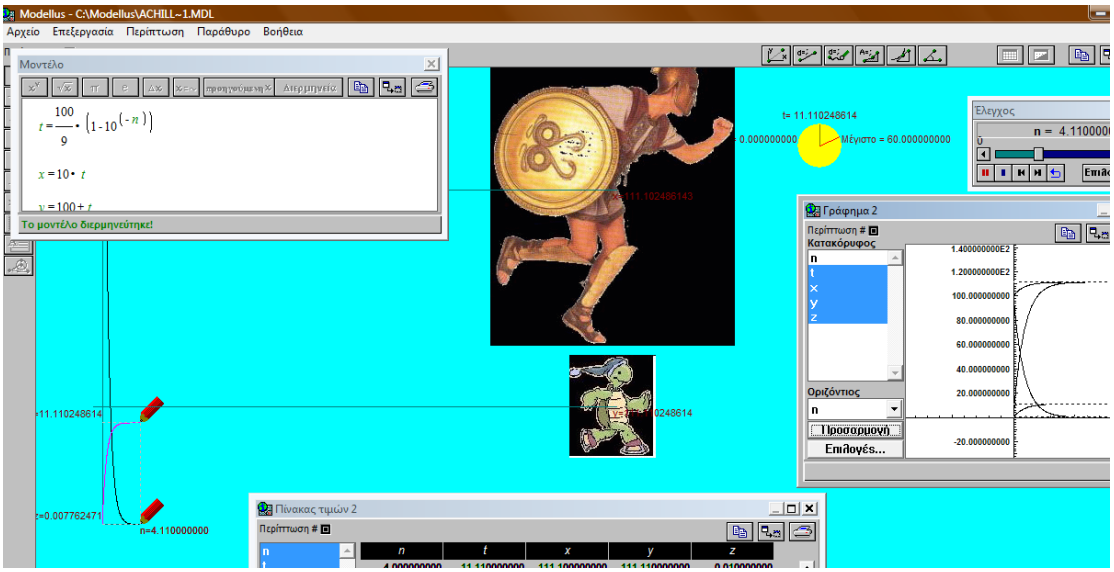
   → Υπάρχει τώρα το $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) =$;..... με τι ισούται;.....



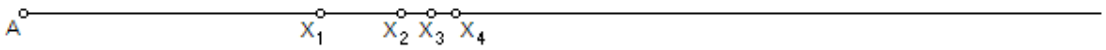
Η δραστηριότητα αποβλέπει στο να βοηθήσει τον μαθητή στην άρση εσφαλμένων αντιλήψεων όσον αφορά την σχέση της ύπαρξης του ορίου με την τιμή της συνάρτησης στο x_0 .

Προσέγγιση της έννοιας του Ορίου με το Modellus

Οι Ξεναρίου & Κανελλοπούλου(2004) επιχειρούν να χρησιμοποιήσουν ένα λογισμικό μοντελοποίησης(Modellus), για να προσεγγίσουν τις οριακές διαδικασίες μέσω του γνωστού παραδόξου του Αχιλλέα και της χελώνας.



Ο Ζήνωνας ισχυρίζεται ότι ο Αχιλλέας δεν μπορεί να φτάσει ποτέ μια χελώνα που έστω προπορεύεται μια απόσταση.



Ας υποθέσουμε ότι η χελώνα προπορεύεται του Αχιλλέα 100 m και ότι η ταχύτητα $υ_A$ του Αχιλλέα είναι $υ_A$=10 m/sec και της χελώνας, $υ_x$, είναι $υ_x$=1 m/sec. Τότε ο Αχιλλέας σε χρόνο t_1=10 sec θα διανύσει την απόσταση (AX_1)=100 m, την οποία τον προσπερνούσε η χελώνα. Κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου t1 η χελώνα θα διανύσει το διάστημα X_1X_2 =10 m. Στη συνέχεια για να διατρέξει αυτή την απόσταση ο Αχιλλέας θα χρειαστεί χρόνο t_2 =1 sec. Κατά το χρόνο t_2 η χελώνα θα διανύσει το διάστημα X_2X_3 =1 m και ο Αχιλλέας θα το διατρέξει σε χρόνο t3 =1/10 sec. Η κίνηση αυτή θα συνεχίζεται επ' άπειρο. Έτσι, κατέληξε ο Ζήνων, ότι ο Αχιλλέας δε θα φτάσει ποτέ τη χελώνα. Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι «ο ταχύτερος ποτέ δεν θα προσπεράσει τον βραδύτερο». Όμως σήμερα ξέρουμε ότι ο συνολικός

χρόνος που χρειάζεται ο Αχιλλέας είναι ένας πεπερασμένος αριθμός και δίνεται απ' τη σχέση

$$T_{ολικ} = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα θεωρούμε τις συναρτήσεις $t = \frac{100}{9}\left[1 - 10^{-n}\right]$, $x = 10t$, $y = 100 + t$, z = y – x, ενώ επιλέγοντας προσέγγιση αρκετών δεκαδικών ψηφίων και με τη βοήθεια των πολλαπλών αναπαραστάσεων που προσφέρει το λογισμικό, μοντελοποιούμε τις κινήσεις. Οι έννοιες «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος», αναπαρίστανται με τρεις τρόπους: γράφημα, παρουσίαση, πίνακας τιμών.

Οι διδακτικοί στόχοι που τίθενται είναι :

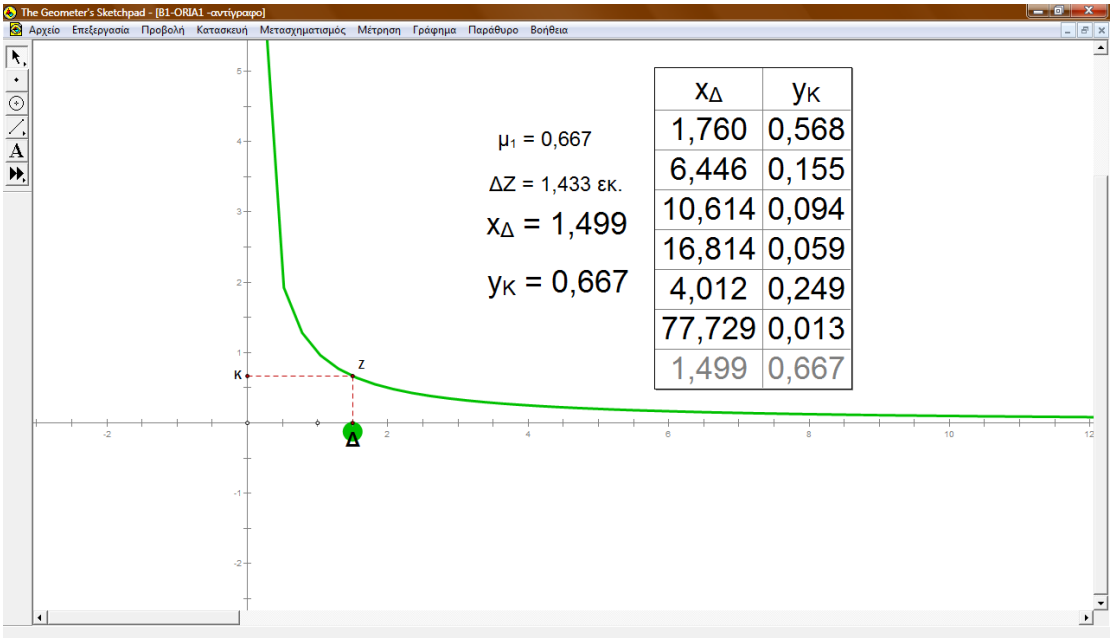
- Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με την έννοια του ορίου μέσω της επ' άπειρον μειούμενης απόστασης της χελώνας και του Αχιλλέα.

- Να ενταχθούν σε διαδικασίες προσωπικού αναστοχασμού, σε σχέση με την δυναμική διάσταση της μαθηματικής επιστήμης, της εξέλιξη της και των σύγχρονων εναλλακτικών τρόπων χειρισμού των αριθμητικών τεχνικών.

Ο Ζάφειρας (2004) διαπραγματεύεται τη δυναμική των λογισμικών των μαθηματικών, στη διδακτική τους εφαρμογή στην τάξη, με κοινό σημείο αφετηρίας την έννοια του ορίου, (Α΄& Γ΄ Λυκείου) μέσα από μια δραστηριότητα με τρία βήματα στα οποία **η διδακτική προσέγγισή γίνεται με χρήση διαφόρων τρόπων και λογισμικών**.

Βήμα 1^{ο} : Το ΟΡΙΟ με την βοήθεια του **Geometry Sketchpad**

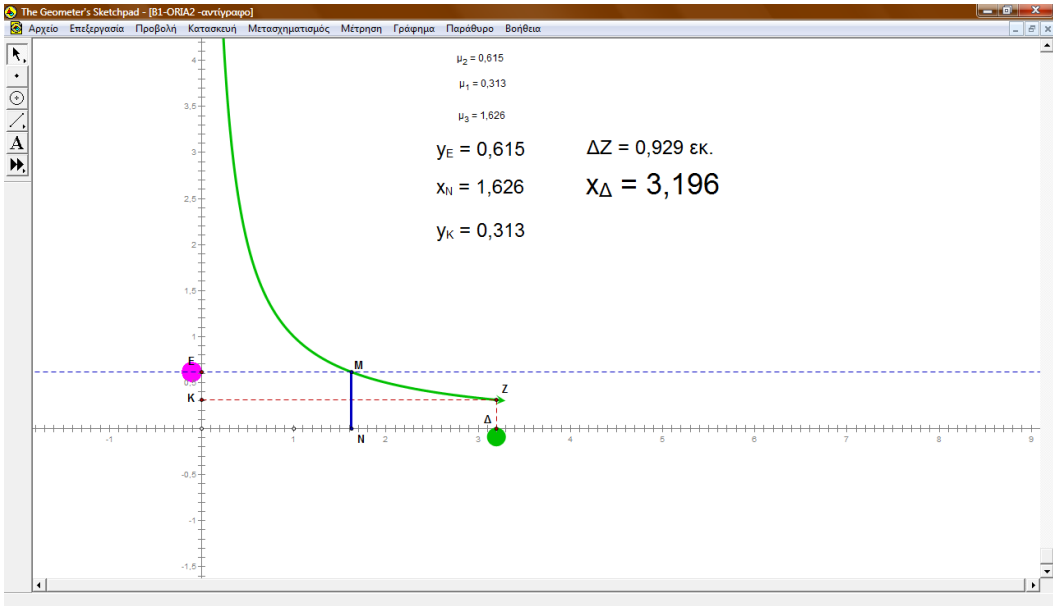
Εδώ υπάρχει <u>ενορατική</u> προσέγγιση της έννοιας του ορίου στο $+\infty$, μέσω μιας γνωστής συνάρτησης, της y = 1/x . (αρχείο Sketchpad: B1-ORIA1)



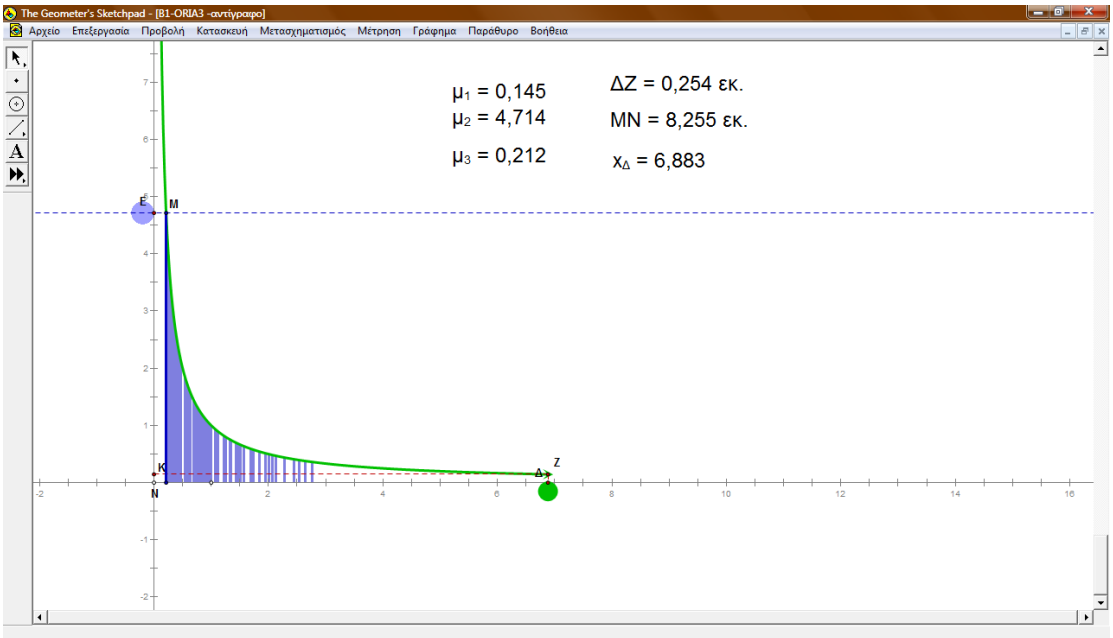
Μετακινώντας το σημείο Δ (ή την πράσινη σφαίρα) συνεχώς δεξιότερα ο μαθητής μπορεί να παρατηρεί και να καταγράφει σε ένα πίνακα τις τιμές τετμημένη του Δ και τεταγμένη του σημείου Κ.

Ανοίγοντας το αρχείο Sketchpad: B1-ORIA2 ο μαθητής μπορεί να μετακινήσει το σημείο Ε (ή την μωβ σφαίρα). Σε κάθε μετακίνηση στο θετικό ημιάξονα yy΄ με κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων (ε→0), το σημείο Ν μετακινείται σε τιμές μεγαλύτερες στον θετικό ημιάξονα xx΄ και για κάθε τιμή της τετμημένης Χο του Ν , υπάρχουν x > Χο ώστε y<ε. Τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορεί να κάνει ο μαθητής μέσα από έναν πίνακα.

$y\Delta(K) < 0{,}4 \quad = \varepsilon$	για $\chi = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0{,}3 \quad = \varepsilon$	για $\chi = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0{,}1 \quad = \varepsilon$	για $\chi = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0{,}08 \quad = \varepsilon$	για $\chi = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0{,}05 \quad = \varepsilon$	για $\chi = X_0 =$	

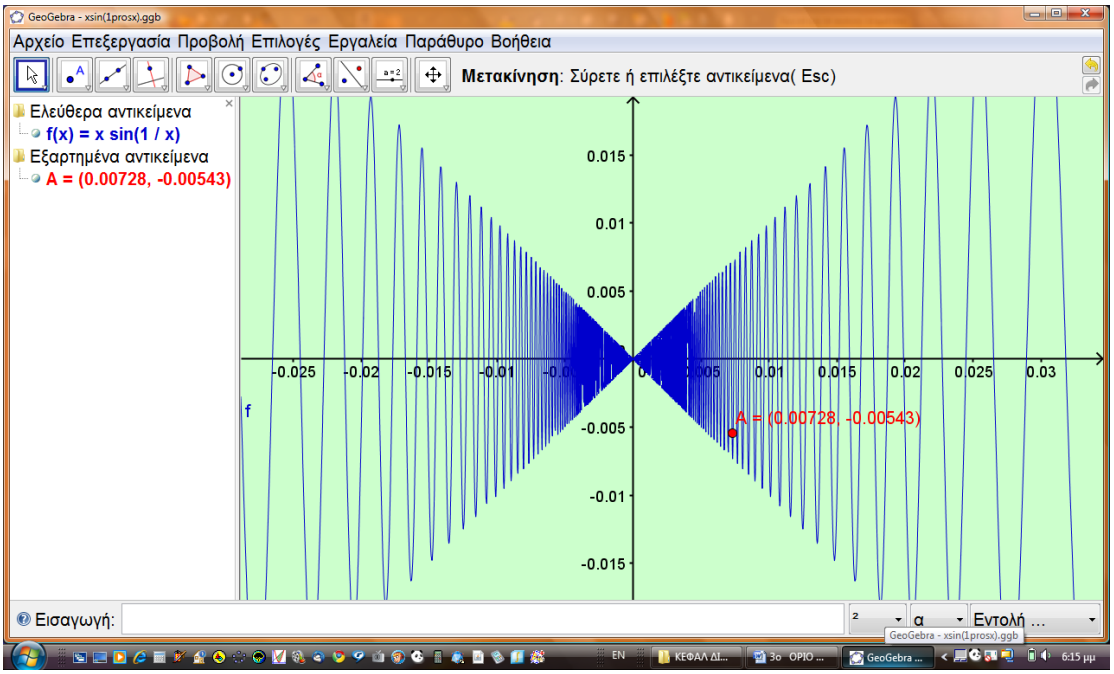


Τέλος ανοίγοντας το αρχείο B1-ΟΡΙΑ3, μπορεί (ο μαθητής) μετακινώντας το σημείο Ε ή την μπλε σφαίρα να δει ενορατικά, διαδοχικές θέσεις του σημείου Ε ($\varepsilon \to 0$) και του Ν ($X_0 \to \infty$).



Άρση παρανοήσεων ορισμού του ορίου

Μια συνήθη λανθασμένη διατύπωση του διαισθητικού ορισμού του ορίου που διατυπώνουν οι μαθητές, είναι η εξής: « $\lim_{x \to a} f(x) = c$ σημαίνει ότι όταν οι τιμές του χ πλησιάζουν τον αριθμό α, τότε οι αντίστοιχες τιμές f(x) πλησιάζουν το c». Για να άρουμε την συγκεκριμένη παρανόηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Geogerbra (ή άλλο κατάλληλο λογισμικό) δημιουργώντας ένα κινούμενο σημείο στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x \cdot \eta\mu\left(1/x\right)$ όπου μετρώντας τις συντεταγμένες του σημείου διαπιστώνουμε ότι το |x| μειώνεται ενώ το |f(x)| αυξομειώνεται, ενώ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.



3.9.2 Τύπος (ΙΙ). Όρια με πίνακες τιμών

Στην διεύθυνση:

http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Classroom_Activities/KCPT/The_First_Week_of_Calculus.html,

βρίσκουμε σχέδια μαθήματος για κάποιες έννοιες της Ανάλυσης, μεταξύ αυτών και του Ορίου (**The Geometer's Sketchpad Resource Center**). Οι ορισμοί της παραγώγου και ολοκληρώματος είναι άμεσα συνδεδεμένοι με την έννοια του ορίου. Στις δραστηριότητες που ακολουθούν διερευνείται η μαθηματική έννοια του ορίου σε σχέση με την τιμή της συνάρτησης μέσα από έναν πίνακα τιμών, επιλέγοντας τιμές κοντά και όλο πιο κοντά στην x-τιμή στην οποία θέλουμε να βρούμε το όριο. Αυτού του είδους η προσέγγιση για την έννοια του ορίου προτείνεται για τα αρχικά στάδια, έχοντας φυσικά την δυνατότητα για ακρίβεια αρκετών δεκαδικών ψηφίων στο λογισμικό που θα χρησιμοποιηθεί.

1. Ανοίξτε το LimitByTable.gsp αρχείο το οποίο περιέχει τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{0,4x^2 - 10}{x - 5}$$

2. Χρησιμοποιήστε τον Sketchpad's calculator για να υπολογίστε την τιμή f(5). Ποιο είναι το αποτέλεσμα; Γιατί νομίζετε ότι έχετε αυτό το αποτέλεσμα;

3. Το αρχείο περιέχει μια παράμετρο x. Κάντε διπλό κλικ σε αυτήν την παράμετρο για να αλλάξετε την τιμή της. Πρώτα να αλλάξετε την τιμή με το 4 και καταγράψτε την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης f (x). Επαναλάβατε για χ=5 , χ=6

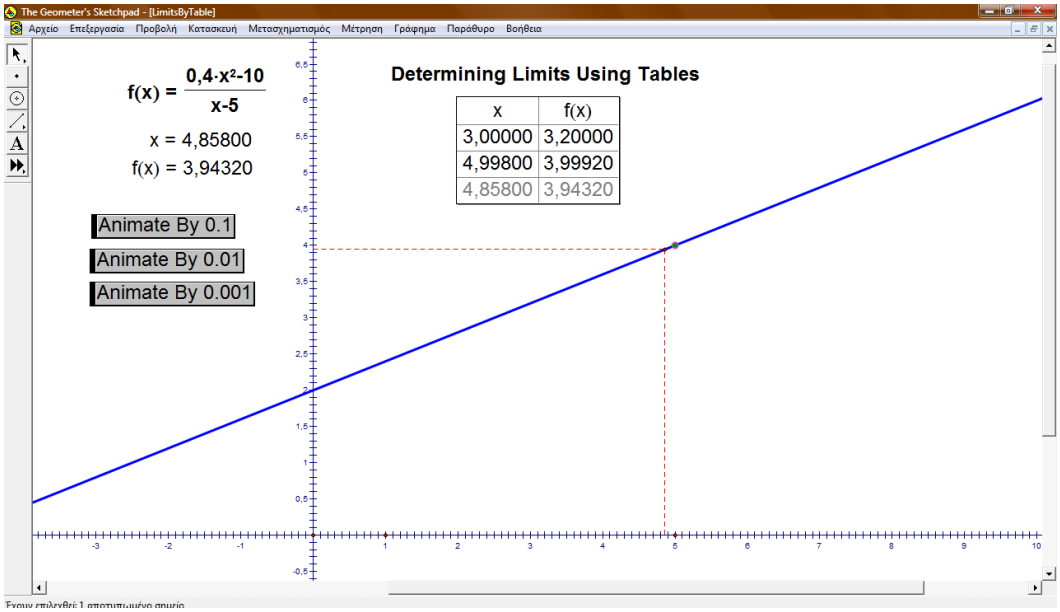
f (4)=; _____ f (5)=;_____ f (6)= ;_____

4. Αλλάξτε την τιμή της παραμέτρου x σε 4,5 και κάντε κλικ στο κουμπί Animate by 0.1. Τι συμβαίνει; Ποιες τιμές φαίνεται να παίρνει το x; Πότε θα σταματήσει;

5. Μπορείτε να συλλέξετε τις μεταβαλλόμενες τιμές του πίνακα στη δεξιά πλευρά. Επιλέξτε τον πίνακα και κατόπιν επιλέξτε: «προσθήκη δεδομένων πίνακα». Κάντε κλικ στο κουμπί για να προσθέσετε 10 καταχωρήσεις.

6. Για να είναι χρήσιμη η συλλογή των τιμών του πίνακα, οι τιμές πρέπει να αλλάζουν. Κάντε κλικ στο κουμπί «Προσθήκη κίνησης κατά 0,1» για να αλλάξετε την παράμετρο και να προσθέσετε τις τιμές στον πίνακα.

7. Τι δείχνει τώρα ο πίνακας για το f(5); Μπορείτε να δείτε ένα pattern στις τιμές f(x) πριν και μετά το f(5); Αν έχετε ακολουθήσει αυτό το pattern, ποια θα ήταν η τιμή για το f(5); (Αυτή η τιμή είναι το όριο της f(x) όταν το x προσεγγίζει το 5).



Πηγαίνοντας όλο και πιο κοντά στο Όριο

8. Για να πάρει τιμές η f(x) κοντά σε αυτό το όριο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τις τιμές του x που είναι πιο κοντά στο 5. Κάντε διπλό κλικ στην παράμετρο x και αλλάξτε την αξία του σε 4,95. Στη συνέχεια, προσθέστε 10 επιπλέον καταχωρήσεις στον πίνακα και κάντε κλικ στο κουμπί Animate By 0.01 για να προσθέσετε νέες καταχωρήσεις.

9. Το pattern εξακολουθεί να υποδηλώνει το ίδιο όριο με το x να προσεγγίζει το 5; Πόσο κοντά είναι στο όριο οι νέες προσεγγιστικές τιμές;

10. Για να πάρει τις τιμές ακόμα πιο κοντά στο όριο, αλλάξτε το x σε 4.995, και προσθέστε 10 ακόμα καταχωρήσεις, χρησιμοποιώντας το κουμπί Animate By 0.001

11. Το μοτίβο εξακολουθεί να υποδηλώνει το ίδιο όριο με το x να προσεγγίζει το 5; Πόσο κοντά είναι οι νέες αυτές τιμές στο όριο; Έχουν πράγματι φθάσει στο όριο;

Συμβουλευτείτε τον πίνακα για να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις.

x	f(x)
4.95000	3.98000
4.96000	3.98400
4.97000	3.98800
4.98000	3.99200
4.99000	3.99600
5.00000	undefined
5.01000	4.00400
5.02000	4.00800
5.03000	4.01200
5.04000	4.01600
4.95000	3.98000

12. Περίπου πόσο κοντά πρέπει να είναι το x στο 5, έτσι ώστε η τιμή της f (x) να απέχει 0,01 από το όριο;

13. Περίπου πόσο κοντά πρέπει να είναι το x στο 5, έτσι ώστε η τιμή της f (x) να απέχει 0,001 από το όριο;

Περισσότερη εξερεύνηση

Αλλάξτε την προηγούμενη συνάρτηση με μία από τις παρακάτω, και συλλέξτε παρόμοια δεδομένα. Για κάθε συνάρτηση , περιγράψτε τις διαπιστώσεις σας, πείτε αν όχι η συνάρτηση έχει ένα όριο L και βρείτε τιμή του L (αν είναι δυνατόν).

$f(x) = \frac{1}{x-5}$ στο x = 5 , $f(x) = 2 + \frac{|x-5|}{x-5}$ στο x = 5

Τα κουμπιά Animation σε αυτό το αρχείο έχουν οριστεί έτσι ώστε το x να κινείται και στις δύο πλευρές της τιμής 5. Μπορείτε να αλλάξετε τις ιδιότητες του κουμπιού για να χρησιμοποιήσετε έναν διαφορετικό ορισμό. (Με δεξί κλικ στην αριστερή άκρη του κουμπιού «animation», πήγαινε στο μενού «Κίνηση» του παράθυρου διαλόγου «Ιδιότητες»). Τροποποίησε τα κουμπιά για να διερευνήσεις ένα ή περισσότερα από τα ακόλουθα όρια.

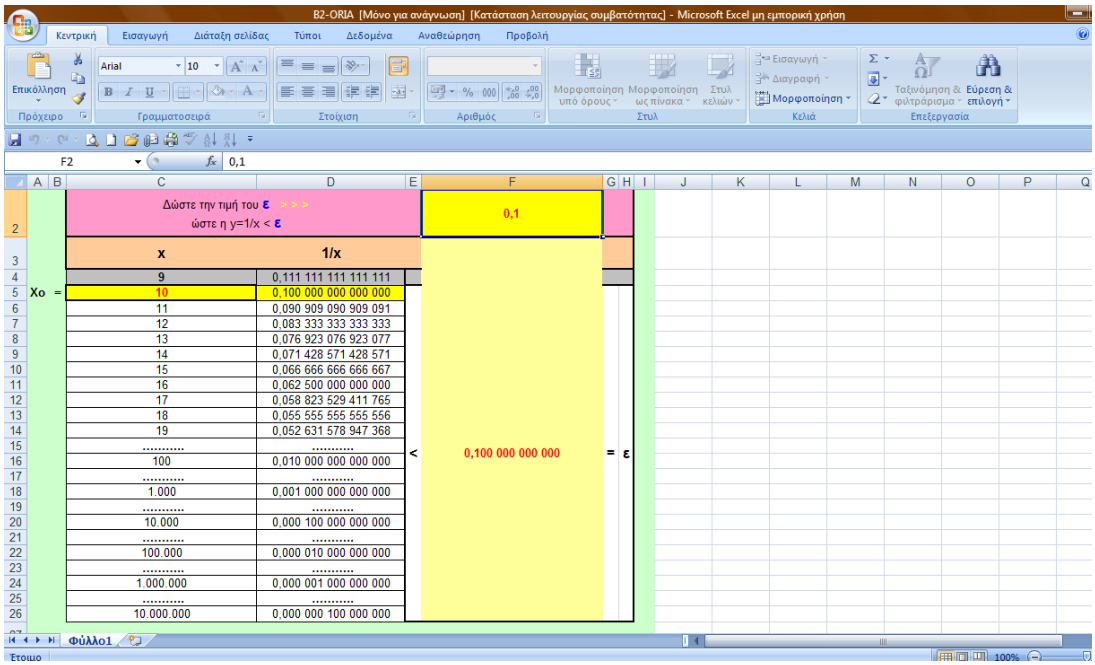
$f(x) = |x-2|$ at x = 2 , $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ at x = 1 , $f(x) = 0.5x + \frac{|x-3|}{x-3} + 1$ at x = 3

$$f(x) = \sin(x) \text{ at } x = \frac{\pi}{4} \quad , \quad f(x) = \tan(x) \text{ at } x = \frac{\pi}{2}$$

Εναλλακτικά, η διδακτική προσέγγιση με πίνακες θα μπορούσε να γίνει και με **Excel**.

Το Όριο με τη βοήθεια του Excel

Εδώ υπάρχει <u>αριθμητική</u> προσέγγιση της έννοιας του ορίου στο $+\infty$, μέσω της συνάρτησης $y = {}^{1}/_{x}$ (αρχείο Excel: B2-ORIA), (Ζάφειρας 2003).



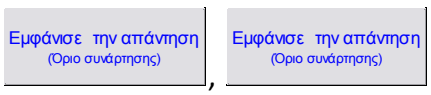
x	1/x
9	0,111 111 111 111 111
10	0,100 000 000 000 000
11	0,090 909 090 909 091
12	0,083 333 333 333 333
13	0,076 923 076 923 077
14	0,071 428 571 428 571
15	0,066 666 666 666 667
16	0,062 500 000 000 000
17	0,058 823 529 411 765
18	0,055 555 555 555 556
19	0,052 631 578 947 368
.....	.....
100	0,010 000 000 000 000
.....	.....
1.000	0,001 000 000 000 000
.....	.....
10.000	0,000 100 000 000 000
.....	.....
100.000	0,000 010 000 000 000
.....	.....
1.000.000	0,000 001 000 000 000
.....	.....
10.000.000	0,000 000 100 000 000

Εδώ μπορούμε να δώσουμε μια τιμή του ε και να δούμε την τιμή x_0 αλλά και τις τιμές του y για ένα πλήθος τιμών του $x > x_0$.

Μια ολοκληρωμένη διδακτική προσέγγιση για την έννοια του Ορίου στο ∞ μέσω του Excel, βρίσκουμε στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο της Κύπρου (Επιμορφωτικό Υποστηρικτικό Υλικό για την ενσωμάτωση των ΤΠΕ στην μαθησιακή διαδικασία, 2008). Επιχειρείται εποπτική παρουσίαση της έννοιας του ορίου συνάρτησης στο άπειρο μέσω του πίνακα τιμών (αριθμητική προσέγγιση) και της γραφικής παράστασης (γεωμετρική προσέγγιση). Το επισυναπτόμενο αρχείο *limit.xls* περιέχει 5 Φύλλα, ενώ στο σενάριο επισυνάπτεται και φύλλο εργασίας, το οποίο καθοδηγεί τους μαθητές στη δραστηριότητα. Στην $1^{η}$ δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να

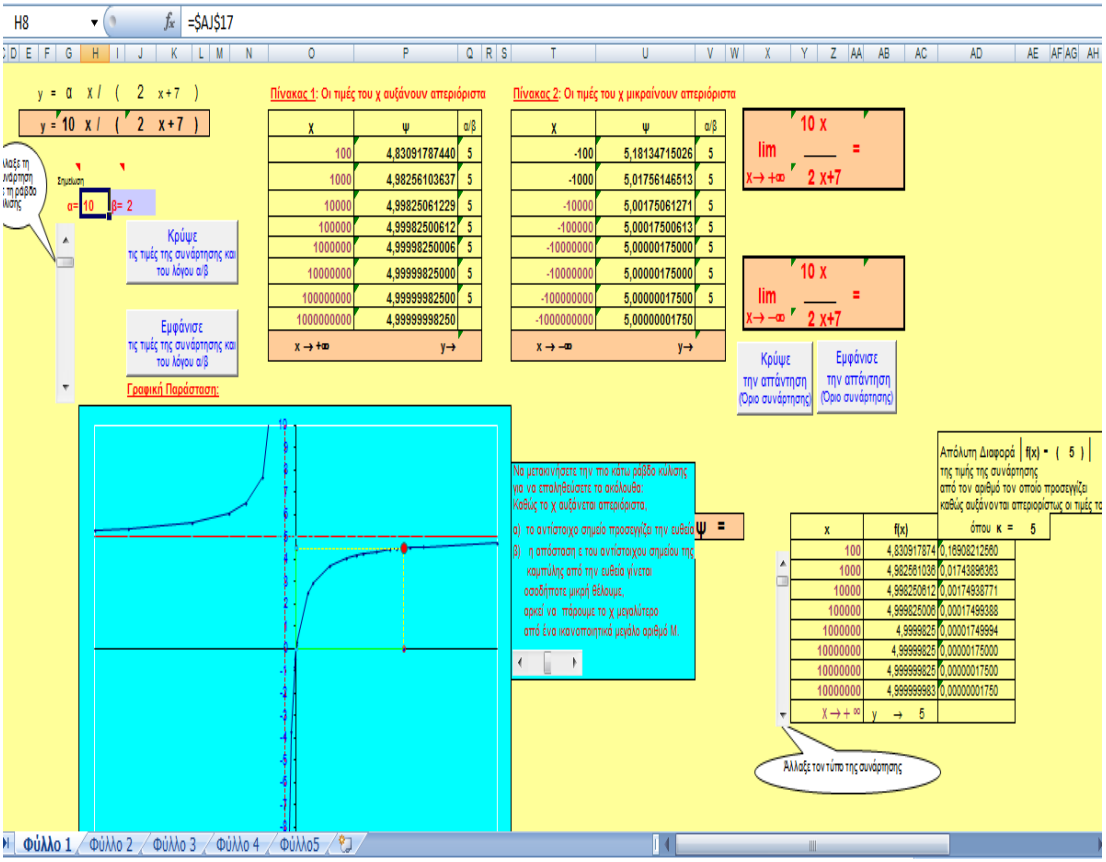
ανοίξουν από το αρχείο limit.xls το Φύλλο 1 στο οποίο παρουσιάζονται δύο πίνακες τιμών και η γραφική παράσταση της συνάρτησης F(x)= 10x / (2x+7). Οι δύο πίνακες (Πίνακας 1 και Πίνακας 2) παρουσιάζουν τις τιμές της συνάρτησης για πολύ μεγάλες τιμές του χ και πολύ μικρές τιμές αντίστοιχα. Βάσει αυτών των στοιχείων και με τη βοήθεια του διδάσκοντα οι μαθητές θα μπορέσουν να γνωρίσουν την έννοια του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ και στο $-\infty$, *εποπτικά, αριθμητικά και συμβολικά*. Στη γραφική παράσταση μπορούν να δουν δυναμικά την κίνηση του σημείου της καμπύλης καθώς το χ αυξάνεται όπως και την απόσταση του αντίστοιχου σημείου της καμπύλης από την οριζόντια ασύμπτωτο που μειώνεται συνεχώς. Έτσι θα μπορέσουν οι μαθητές να γνωρίσουν την έννοια του ορίου και να καταλήξουν στη διατύπωση του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο άπειρο, μέσα από τις διαφορετικές προσεγγίσεις του (αλγεβρική και γεωμετρική) .

Στη συνέχεια αφού γίνει η ανακεφαλαίωση της νέας έννοιας, θα πρέπει οι μαθητές να προχωρήσουν στη $2^{η}$ δραστηριότητα όπου καλούνται να συνεχίσουν να εργάζονται με το λογισμικό για να βρουν όρια ρητών συναρτήσεων των οποίων ο πίνακας πολύ Μεγάλων/Μικρών τιμών και η γραφική τους παράσταση, προκύπτουν δυναμικά από τη μεταβολή των σταθερών α και β όπου α είναι ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης στον αριθμητή και β ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης στον παρονομαστή. Οι μαθητές θα πρέπει να βρουν τα όρια αυτών των συναρτήσεων είτε μέσα από τον πίνακα τιμών συνάρτησης για πολύ μεγάλες/μικρές τιμές του χ, είτε μέσα από τη γραφική παράσταση. Στο λογισμικό δίνονται οι απαντήσεις των ορίων. Το μόνο που έχουν να κάνουν οι μαθητές είναι να πατήσουν το ανάλογο κουμπί



για να μπορέσουν να ελέγξουν την απάντησης τους. Τα παραδείγματα των ρητών συναρτήσεων που δίνονται στα φύλλα του αρχείου limit.xls καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις. Δηλαδή: Βαθμός Αριθμητή < Βαθμός Παρονομαστή, Βαθμός Αριθμητή > Βαθμός Παρονομαστή και Βαθμός Αριθμητή = Βαθμός Παρονομαστή. Καλούνται επίσης να υπολογίσουν και τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\chi}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\chi}$,

όρια που θα τους χρησιμεύσουν αργότερα όταν ασχοληθούν με τις Ιδιότητες Ορίων και στις Επιτρεπτές / Μη Επιτρεπτές πράξεις του απείρου. Επίσης με το παράδειγμα της συνάρτησης $y = \eta\mu x$ θα διαπιστώσουν ότι δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις όριο στο ∞. Επίσης υπάρχουν και οδηγίες για την χρήση του Excel.



Δραστηριότητα 1η:

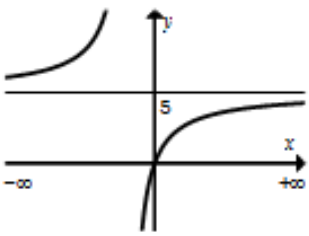
Να ανοίξετε το αρχείο limit.xls και στη συνέχεια το Φύλλο 1 στο οποίο δίνονται δύο πίνακες τιμών για τη συνάρτηση $f(\chi)=\frac{10\chi}{2\chi+7}$ και η γραφική παράσταση της f . (διαφορετικά να μεταβάλετε τη σταθερά α της συνάρτησης $y=\alpha x/(2x+7)$ έτσι ώστε να γίνει 10)

Πίνακας 1 της f:

Τιμές τις f όταν το χ αυξάνει απεριόριστα με θετικές τιμές

χ	ψ
100	4,83091787440
1000	4,98256103637
10000	4,99825061229
100000	4,99982500612
1000000	4,99998250006
10000000	4,99999825000
100000000	4,99999982500
x → +∞	y→

Γραφική Παράσταση της f:



Πίνακας 2 της f:

Τιμές τις f όταν το χ μικραίνει απεριόριστα με αρνητικές τιμές

χ	ψ
-100	5,18134715026
-1000	5,01756146513
-10000	5,00175061271
-100000	5,00017500613
-10000000	5,00000175000
-10000000	5,00000175000
-100000000	5,00000017500
x → −∞	y→ .....

A) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

a) Με βάση τον Πίνακα 1 της f παρατηρούμε ότι όταν το χ αυξάνει απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f προσεγγίζει όσο θέλουμε τον αριθμό .....

➢ Λέμε ότι «η συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό ..... όταν το χ τείνει στο $+\infty$»

➢ Συμβολικά γράφου με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ .....

b) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, παρατηρούμε ότι όταν το χ αυξάνει απεριόριστα, τότε η καμπύλη f πλησιάζει όσο θέλουμε την ευθεία .....

Η ευθεία αυτή λέγεται Οριζόντια Ασύμπτωτος.

c) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, παρατηρούμε ότι η απόσταση του σημείου $(x, f(x))$ της καμπύλης f από την ευθεία ..... μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή έστω ε, όταν πάρουμε το χ μεγαλύτερο από κάποιο ικανοποιητικά μεγάλο θετικό αριθμό έστω M.

B) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

a) Με βάση τον Πίνακα 2 της f παρατηρούμε ότι όταν το χ μικραίνει απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f προσεγγίζει όσο θέλουμε τον αριθμό .....

➢ Λέμε ότι «η συνάρτηση f έχει όριο τον αριθμό ..... όταν το χ τείνει στο $-\infty$»

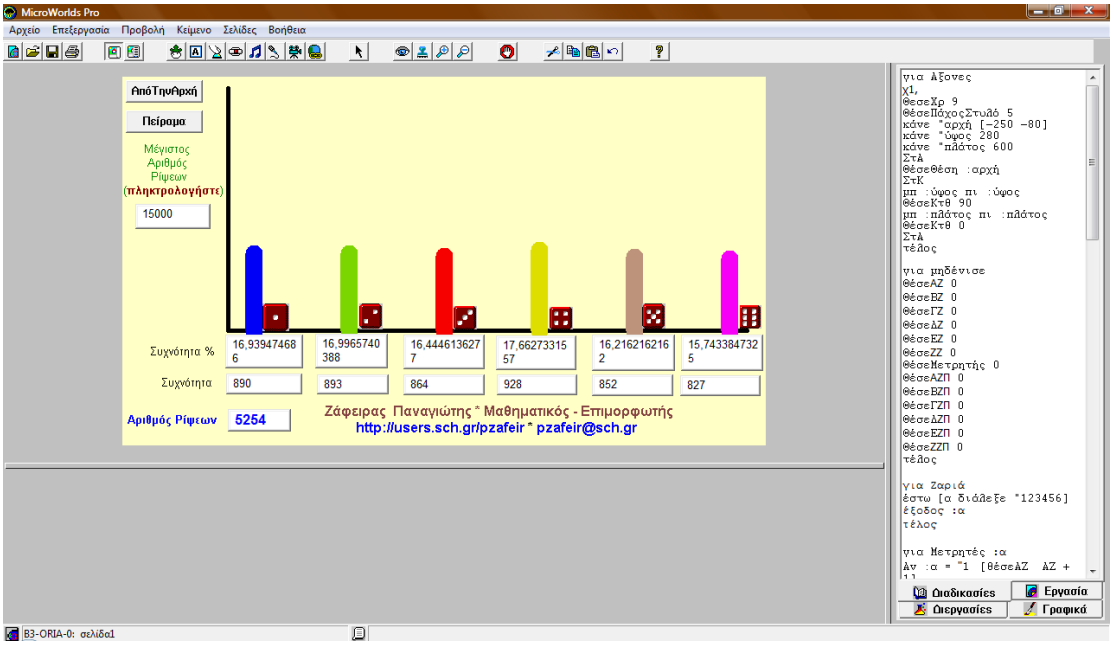
➢ Συμβολικά γράφου με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ .....

b) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, παρατηρούμε ότι όταν το χ μικραίνει απεριόριστα, τότε η καμπύλη f πλησιάζει όσο θέλουμε την ευθεία .....

➢ Συμβολικά: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ..... $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists M\in R^{+}$ τέτοιος ώστε $\forall \chi>M$ να ισχύει $|f(x)-5|<\varepsilon$

Το Όριο με τη βοήθεια του ***MicroworldPro***

Εδώ υπάρχει πειραματική προσέγγιση της έννοιας του ορίου στο $+\infty$ με μια προσομοίωση ενός πειράματος τύχης για ένα πολύ μεγάλο αριθμό δοκιμών. Ένα ζάρι ρίχνεται όσες φορές ζητήσουμε από το πρόγραμμα και μπορούμε να έχουμε τη συχνότητα (απόλυτη και σχετική) εμφάνισης ενός από τα ενδεχόμενα καθώς και το σχετικό ραβδόγραμμα. Το πείραμα μπορεί να σταματήσει οποιαδήποτε στιγμή καταγράφοντας τον αριθμό των μέχρι τώρα δοκιμών και να συνεχιστεί αργότερα.



Οι συχνότητες και ο αριθμός επαναλήψεων μπορεί να καταγράφονται σε ένα πίνακα και να συγκρίνονται με τις θεωρητικά αναμενόμενες (1 προς 6 ή 16,666…% για κάθε ενδεχόμενο).

H16 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		100	1000	5000	10000	15000		
2	1	12	16	16,02	16,29	16,68	---->	16,666
3	2	19	15,7	18,04	17,2	16,79	---->	16,666
4	3	20	16,1	16,56	16,85	16,67	---->	16,666
5	4	16	16,3	16,02	15,97	16,05	---->	16,666
6	5	19	17,7	17,02	17,04	16,83	---->	16,666
7	6	14	18,2	16,16	16,56	16,97	---->	16,666
8								

Επιλέγοντας μια επιθυμητή απόκλιση (ε) από το αναμενόμενο μπορούμε πειραματικά να βρούμε ένα αριθμό επαναλήψεων (Χο) του πειράματος πέραν του οποίου οι συχνότητες πλησιάζουν τις αναμενόμενες με απόκλιση μικρότερη του ε.

Στον παραπάνω πίνακα είναι καταγεγραμμένα τα στοιχεία από μια εκτέλεση του πειράματος με σημεία διακοπής εκτέλεσης 100, 1.000, 5.000, 10.000, 15.000 δοκιμές που είναι και το άνω όριο δοκιμών που έχει δοθεί κατά την δημιουργία της εφαρμογής.

3.9.3. Τύπος (ΙΙΙ). Όρια με τον ε – δ Ορισμό

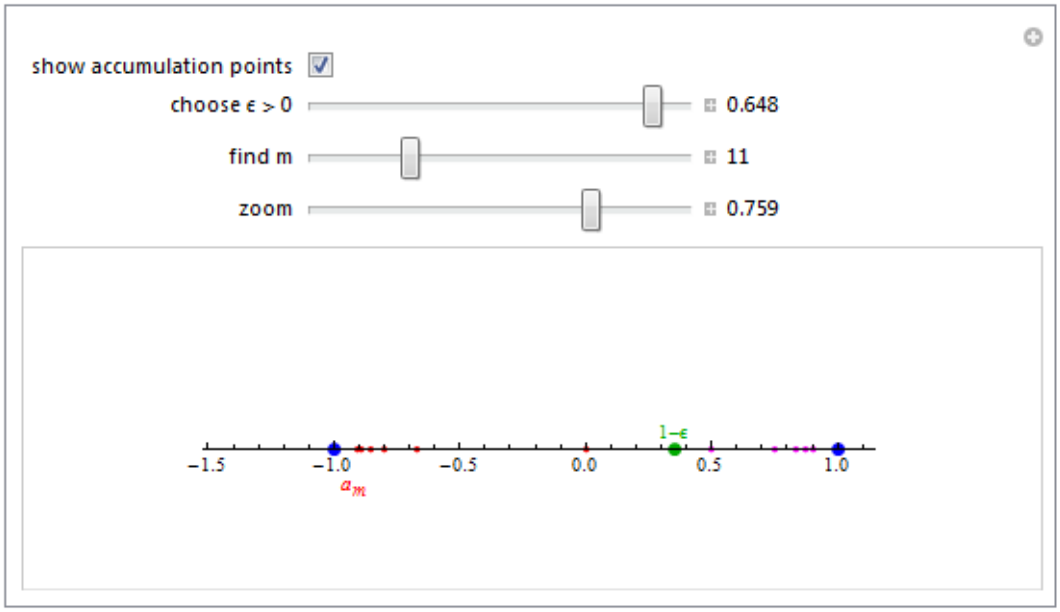
Ο επίσημος ορισμός του ορίου έχει ως εξής:
L είναι το όριο της f(x) με το x να προσεγγίζει το c εάν και μόνο εάν: Για κάθε ε> 0, δεν έχει σημασία πόσο μικρό, υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοια ώστε, όταν το x είναι απέχει από το δ λιγότερο από c, τότε f (x) απέχει από το L λιγότερο από ε.

Είναι γνωστές σε παγκόσμιο επίπεδο οι μεγάλες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές-σπουδαστές οι οποίοι καλούνται να οικειοποιηθούν τον αυστηρό ε-δ ορισμό του Ορίου. «Ο ε – δ ορισμός του ορίου περιέχει γενικά και οντολογικά στοιχεία και έχει σχεδιαστεί να επιλύει μαθηματικές δυσκολίες και όχι γνωστικές» (Williams,2001). Οι παρακάτω εφαρμογές προσπαθούν να αποσαφηνίσουν τις έννοιες του σημείου συσσώρευσης και της πρότασης «Για κάθε ε>0 , ∃ δ>0 ……».

Στην διεύθυνση, http://demonstrations.wolfram.com/

συναντάμε το παρακάτω **applet** που έχει ως στόχο να κατανοήσει ο μαθητής την πολύ σημαντική έννοια του σημείου συσσώρευσης. (Ένας αριθμός a θα ονομάζεται σημείο συσσώρευσης για την ακολουθία α_n αν για κάθε ε>0 υπάρχει m ώστε $|a - \alpha_m| < \varepsilon$, δηλαδή αν κάθε ε-περιοχη του a περιέχει όρους της ακολουθίας α_n . Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο σημεία συσσώρευσης, τα 1 , -1. Μετακινώντας τον δρομέα m, βρίσκουμε ότι για κάθε ε>0, μπορούμε να βρούμε όρους α_m που να ανήκουν στο διάστημα (1-ε, 1).

Accumulation Point



Στην διεύθυνση:

http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Classroom_Activities/KCPT/The_First_Week_of_Calculus.html,

έχουμε το ακόλουθο σχέδιο μαθήματος (με χρήση του GSP):

Α: Πρώτη Συνάρτηση

1. Ανοίξτε το αρχείο LimitEpsilonDelta.gsp που περιέχει τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{0,4x^2-10}{x-5}$

2. Κάντε διπλό κλικ στην παράμετρο c και ρυθμίστε την τιμή του σε 5. Σύρετε το σημείο x κατά μήκος του άξονα, και παρατηρήστε τις τιμές του x και τις αντίστοιχες της συνάρτησης. Χρησιμοποιήστε το κουμπί ενέργειας Μετακίνηση x -> c για να μετακινήσετε το x στην ακριβή τιμή του c. Τι συμβαίνει; Ποια είναι η τιμή f (c);

3. Σύρετε x πέρα δώθε κοντά στο c, και παρατηρήστε τις τιμές των x και f (x).

Ποιό πιστεύετε ότι είναι το όριο της συνάρτησης όταν το x είναι κοντά στο c;

4. Κάντε διπλό κλικ στην παράμετρο L και αλλάξτε την αξία του σ΄ αυτό το όριο.

5. Κάντε κλικ κουμπί Show Epsilon . Αυτό το κουμπί εμφανίζεται στην πράσινη περιοχή πάνω και κάτω από τον αριθμό L στον άξονα των y. Χρησιμοποιήστε τον μεταβολέα του ε για να αλλάξετε την τιμή του ε και παρατηρήστε τα αποτελέσματα. Ρύθμισε τον μεταβολέα, ώστε το ε να είναι περίπου 0,25.

Κινήστε x εμπρός και πίσω. Για ποιες τιμές του x η τιμή της συνάρτησης βρίσκεται εντός της ε – περιοχής του L; (Με άλλα λόγια, για ποιες τιμές του x το οριζόντιο κόκκινο τμήμα αγγίζει την πράσινη περιοχή του άξονα των y;)

6. Κάντε κλικ στο κουμπί Show Delta. Σύρετε τον μεταβολέα δ εμπρός και πίσω, και παρατηρήστε τις συνέπειες για το οριζόντιο μπλε τμήμα του x-άξονα.

Κάνε κλικ στο κουμπί Restrict x, και σύρετε το x πέρα δώθε. Παρατηρήστε ότι η τιμή του x περιορίζεται τώρα στην μπλε περιοχή. Η δουλειά σου είναι τώρα να καθορίσεις το δ έτσι ώστε η τιμή της f (x) είναι πάντα μέσα στην ε – περιοχή του L.

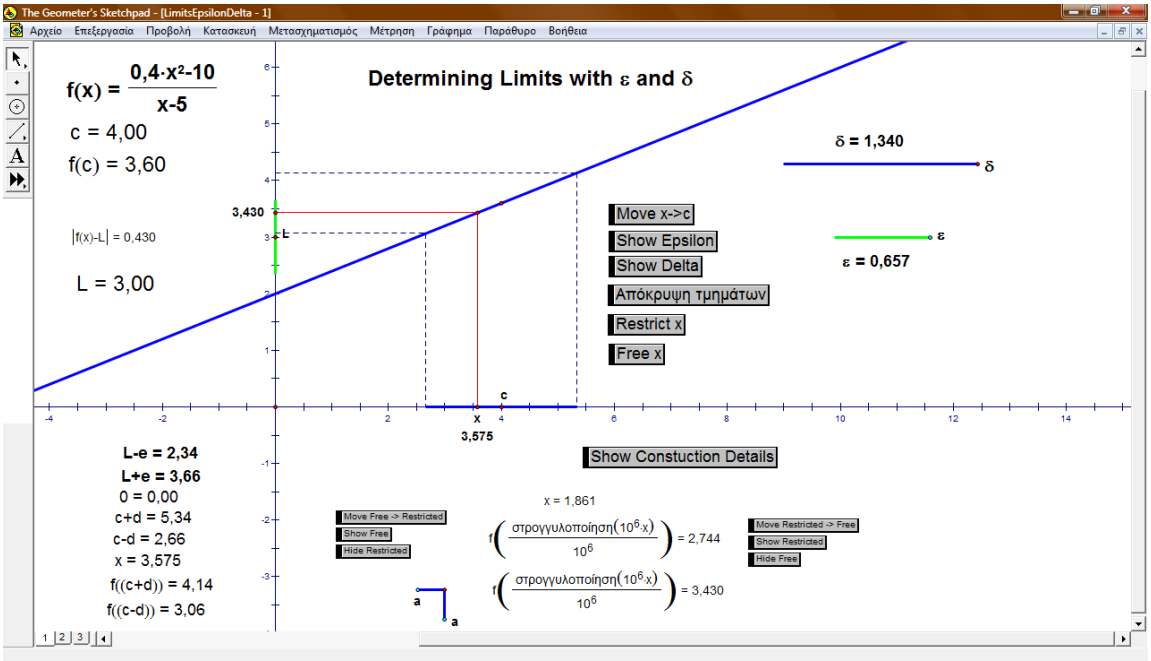
7. Σύρε τον μεταβολέα του δ μέχρι να νομίσεις ότι πληρούται η προϋπόθεση αυτή. Αυτές οι τιμές του x κάνουν το μπλε τμήμα του άξονα x αρκετά μικρό ώστε οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης να είναι πάντα μέσα στο πράσινο τμήμα του άξονα y ; Σύρε το x πέρα δώθε για να ελέγξεις το αποτέλεσμά σου.

Ποιες τιμές του δ υποχρεώνουν τις τιμές f (x) να βρίσκονται εντός της ε – περιοχής του L;

8. Τώρα δοκιμάστε μια μικρότερη τιμή του ε. Θέστε ε = 0,15, και προσδιορίστε τις τιμές του δ που υποχρεώνουν τις τιμές f (x) να κινούνται στο ε - πλαίσιο του L.

Ποια τιμή του δ απαιτείται τώρα για να κρατήσει το f (x) εντός της ε – περιοχής του L;

Πιστεύετε ότι πάντοτε μπορείτε να βρείτε μια κατάλληλη τιμή του δ, ακόμη και αν το ε είναι πολύ μικρό ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.



Β: Δεύτερη Συνάρτηση

9. Μετάβαση στη σελίδα 2 του αρχείου. Σε αυτή τη σελίδα θα διερευνηθεί το όριο μιας διαφορετικής συνάρτησης.

10. Κάντε κλικ στο κουμπί Show Epsilon, και βεβαιωθείτε ότι το ε είναι κοντά στο 1,0. Επίσης, κάντε κλικ στο κουμπιά Show Delta και Show Segments.

Μπορείτε να προσαρμόσετε το δ ώστε να κρατηθούν οι τιμές f (x) εντός της ε – περιοχής του L; Ποιες τιμές του δ πρέπει να χρησιμοποιείτε;

11. Τώρα να επιλέξετε μια μικρότερη τιμή του ε, θέτοντας ε = 0,50. Προσπαθήστε να ρυθμίσετε πάλι το δ ώστε να κρατηθούν πάλι οι τιμές f (x) στο ε - πλαίσιο του L.

Τι συμβαίνει όταν προσπαθείτε να προσαρμόσετε το δ ώστε να βρίσκονται οι τιμές f (x) εντός της ε – περιοχής του L; Βοηθά να χρησιμοποιηθεί και μια

μικρότερη τιμή του δ; Μπορείτε να κάνετε αυτό το έργο, επιλέγοντας μια διαφορετική τιμή του L;

Γ: Άλλες συναρτήσεις

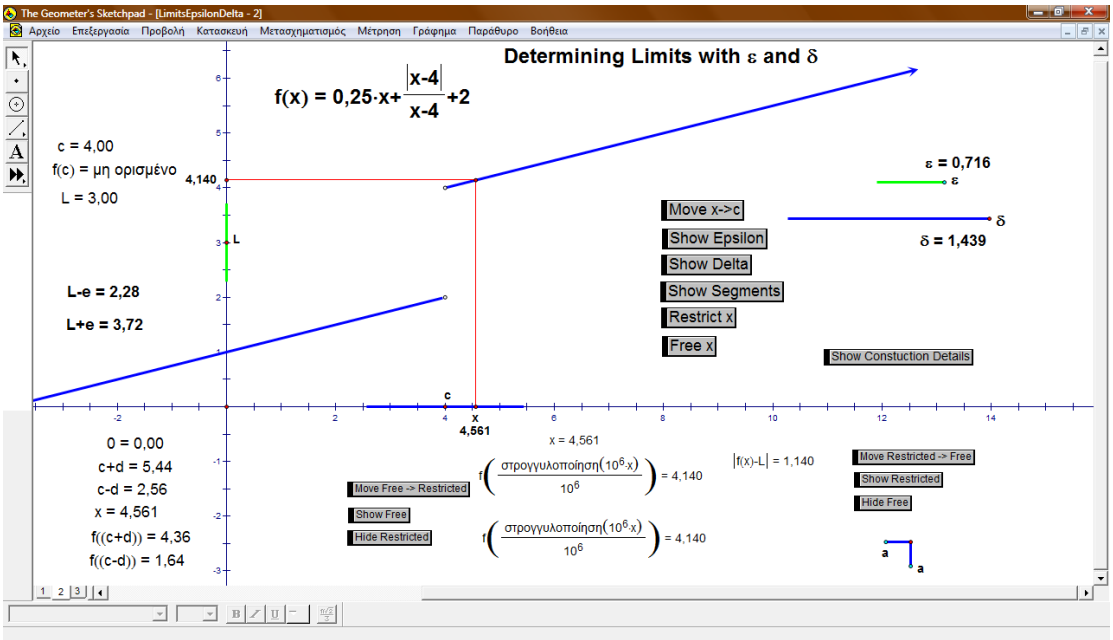
12. Μετάβαση στη σελίδα 3, που περιέχει τη συνάρτηση $f(x)=1+\frac{x}{x-3}$. Να ορίσετε την τιμή του c στο 3,0. Θέστε ε = 1,00. Πειραματιστείτε με διάφορες ρυθμίσεις του L και του δ.

Υπάρχουν τιμές του L και δ που κρατούν τα f (x) εντός της ε – περιοχής του L; Αν ναι, ποιες είναι αυτές; Αν όχι, γιατί όχι;

Δοκιμάστε τώρα μερικές από τις παρακάτω συναρτήσεις.

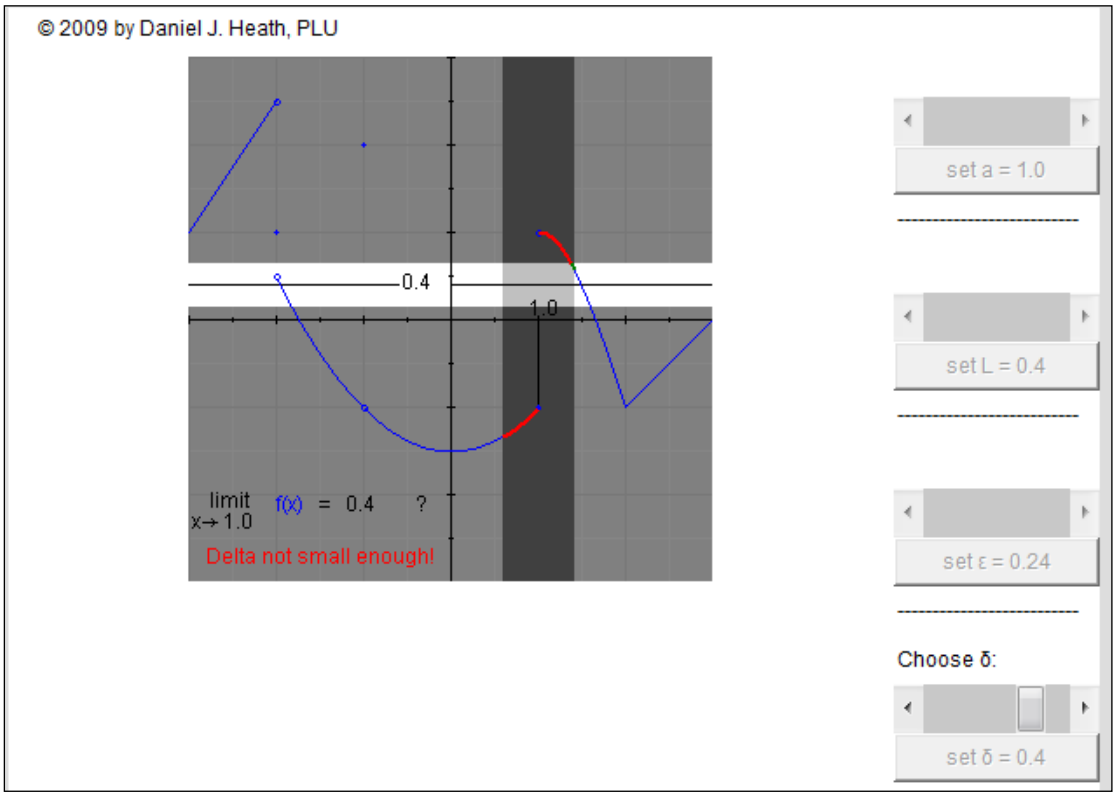
$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ at x = 1 and at x = 0 , $f(x)=0.5x+\frac{|x-3|}{x-3}+1$ at x = 0.5 and at x = 3

$f(x)=\tan(x)$ at x = $\frac{\pi}{4}$ and at x = $\frac{\pi}{2}$



Ο ε-δ ορισμός με applets

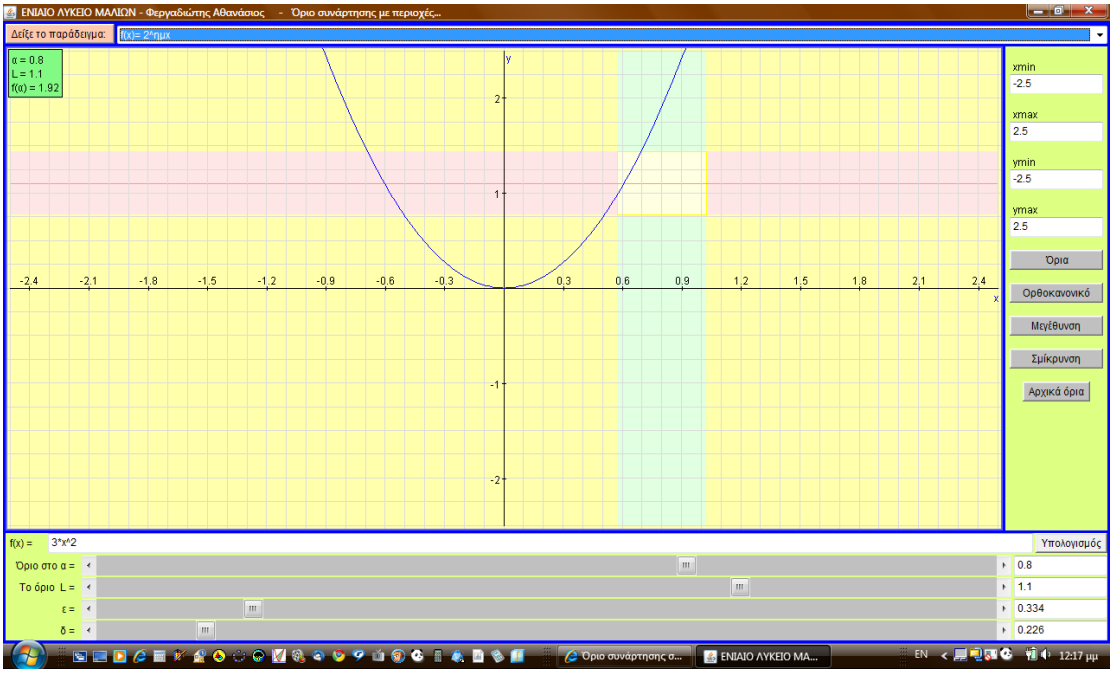
Στην ιστοσελίδα http://www.plu.edu/~heathdj/java/ βρίσκονται **applets java** με πολλαπλά αντικείμενα της Ανάλυσης και μεταξύ αυτών για τον ε-δ ορισμό του ορίου. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε πρώτα τον αριθμό a για την εύρεση του ορίου $\lim_{x \to \alpha} f(x)$ και στην συνέχεια την πιθανή τιμή του L. Θέτοντας ε οσοδήποτε μικρό, προσπαθούμε να βρούμε κατάλληλο δ ώστε η C_f για τα x της δ- περιοχής του a να βρίσκονται στην ε – ζώνη του L.



Αντίστοιχο αρχείο βρίσκουμε στην παρακάτω διεύθυνση που κατασκευάστηκε με την βοήθεια του προγράμματος **LIVEMATH**:

http://users.ira.sch.gr/fergadioti/elm/index.php/katg1/57-orio/48-x0/665-x

Όπως και στο προηγούμενο applet επιλέγουμε το a στο οποίο θέλουμε να βρούμε το όριο και θέτουμε μια τιμή για το υποτιθέμενο όριο L. Στη συνέχεια για συγκεκριμένες τιμές του ε προσπαθούμε να βρούμε κατάλληλη τιμή για το δ ώστε <u>για όλα τα χ</u> της δ-περιοχής του a τα αντίστοιχα f(x) να βρίσκονται εξολοκλήρου στην ε-περιοχή του L.



ε-δ Ορισμός με το Geogebra

Στο έργο του ΥΠΕΠΘ-Π.Ι. «Μαθηματικά με το Geogebra» (Α΄- Γ΄ Λυκείου, 2008) βρίσκουμε έτοιμα σενάρια με χρήση αρχείων.ggb και βιβλία μαθητή-καθηγητή. Εκεί βρίσκουμε το σενάριο με το οποίο οι μαθητές επεξεργάζονται την έννοια του ορίου σε ένα σημείο μιας συνάρτησης. Καλούνται να διερευνήσουν το όριο μερικών τύπων συναρτήσεων με τη βοήθεια ενός ορθογωνίου του οποίου οι δυο διαστάσεις ορίζονται για πολύ μικρές τιμές των μεταβολέων δ και ε.

Πιο συγκεκριμένα: στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) =κ*x^ν+λ καθώς και οι ευθείες ψ=L και x=χ_o . Ένα ορθογώνιο που δημιουργείται από τις ευθείες ψ=L-ε, ψ=L+ε, x=χ_o-δ και x=χ_o+δ μπορεί να κινείται ελεύθερα σύροντας το σημείο χο αλλά και να μεταβάλλονται οι διαστάσεις του μέσω των μεταβολέων των δ και ε. Μπορείτε για κάθε χ_o να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό;

<u>Διερευνήσεις</u>

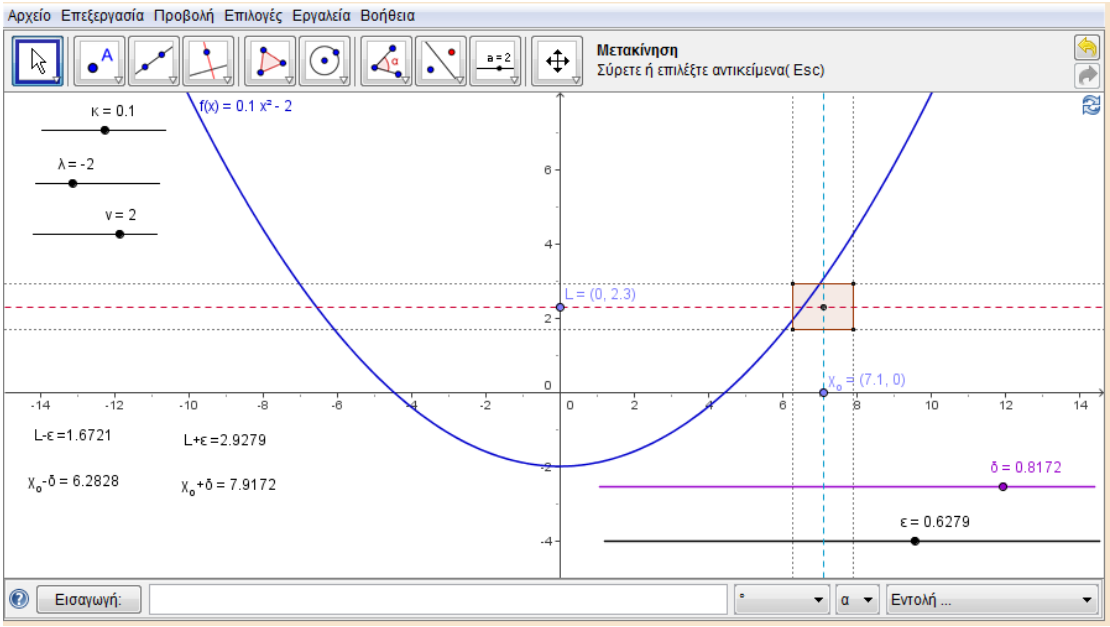
1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν κ=1, λ=-2, ν=1. Επιλέξτε ακόμα το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (1,0) και ο δείκτης του μεταβολέα ε να δείχνει 0,3. Μπορείτε να ορίσετε κατάλληλη τιμή στον μεταβολέα δ, ώστε το ορθογώνιο

που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του δ, όταν μικραίνετε την τιμή του ε;

2. Επιλέξτε κ=1, λ=-2, ν=1. Για ε=0,03 ερευνήστε τις τιμές του δ που ορίζουν μια καλή προσέγγιση του ορίου της συνάρτησης στο χ_0 =2. Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά αυτή την προσέγγιση του ορίου;

3.Με την εντολή Redefine επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης σε $f(x)=k(x-1)^{\nu} + \lambda$. Ερευνήστε για το όριο σε διάφορα σημεία της καμπύλης. Τι συμβαίνει στο αριστερό άκρο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της καμπύλης; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την προσέγγιση του ορίου με το ορθογώνιο;

4. Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο της $f(x)=\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2-10x+5}}$ στο χ_0 =5 ;



Επισυνάπτονται αναλυτικές οδηγίες προς τον διδάσκοντα όσον αφορά την αναμενόμενη συμπεριφορά των μαθητών.

3.10 Η επίδραση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη διδασκαλία της έννοιας του ορίου

Η μάθηση της Ανάλυσης αποτέλεσε αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ένα από τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή είναι ότι οι φοιτητές σε γενικές γραμμές αναπτύσσουν τυπικές τεχνικές και όχι εννοιολογική κατανόηση των θεωρητικών εννοιών. (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997). Η έννοια όριο είναι πλούσια σε αφαιρετικές διαδικασίες και απαιτεί υψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης στο οποίο πολλοί μαθητές, δύσκολα αντεπεξέρχονται. (Parameswaran, 2006).

Η αφηρημένη φύση των ορίων παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες για τους περισσότερους φοιτητές και έχουν μικρή επιτυχία στην κατανόηση αυτής της σημαντικής μαθηματικής έννοιας (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997).

Μεγάλο μέρος της έρευνας για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές έδειξε ότι η έννοια των ορίων δεν καθορίζεται με σαφήνεια στο μυαλό τους (Davis & Vinner, 1986; Mamona Downs, 2001). Ο κύριος λόγος, σύμφωνα με Fischbein, Jehiam, και Cohen (1995), είναι ότι τα σχολικά μαθηματικά δεν τονίζουν την ιδέα των μαθηματικών ως ένα συνεκτικό, οργανωμένο στη δομή του σύνολο γνώσεων. Κατά συνέπεια, λιγότερη έμφαση δίνεται στη θεωρητική σκέψη η οποία είναι αναγκαία για την ανάπτυξη της έννοιας των ορίων.

Επειδή λοιπόν η πλέον βασική έννοια της Ανάλυσης είναι το Όριο συνάρτησης, προσπαθούμε να διερευνήσουμε εάν οι νέες τεχνολογίες βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της συγκεκριμένης έννοιας. Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε τρεις έρευνες που διαπραγματεύονται την διδασκαλία του Ορίου συνάρτησης με την βοήθεια κατάλληλου λογισμικού (Sun & Monaghan, 1993· Büyükköroğlu, Düzce, Çetin, Mahir, Deniz & Üreyen, 2006· Yiasoumis, Mattheou & Christou, 2009):

1η έρευνα για την κατανόηση της έννοιας του ορίου με την χρήση κατάλληλου λογισμικού

Οι Sun & Monaghan (1993, όπ. ανάφ. στο Monaghan, Sun & Tall, 1994) ερεύνησαν τις επιπτώσεις στην διδασκαλία της έννοιας του ορίου μέσω της χρήσης λογισμικού Derive στα πρώιμα στάδια. Το συγκεκριμένο CAS επελέγη διότι είναι σχετικά απλό στην χρήση του.

Το πείραμα είχε ως κίνητρο την μελέτη μιας ομάδας 9 σπουδαστών σε ένα κολέγιο που είχαν κάνει εκτεταμένη χρήση του συστήματος πληροφορικής άλγεβρας.

Το 50% των μαθημάτων γίνονταν σε αίθουσες όπου μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν το Derive και τους δόθηκαν palmtop υπολογιστές τους οποίους θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ανά πάσα στιγμή. Αυτή είναι η Derive ομάδα.

Η ομάδα σύγκρισης αποτελούνταν από 19 μαθητές από 3 διαφορετικά σχολεία με παρόμοια περιβάλλοντα με το ίδιο πρόγραμμα σπουδών, αλλά οι οποίοι δεν είχαν συναντήσει ένα σύστημα υπολογιστών άλγεβρας. Και οι δύο ομάδες είχαν διδαχθεί μέχρι και ολοκληρωτικό λογισμό μιας μεταβλητής.

Ένα ερωτηματολόγιο σχεδιάστηκε για να αποσπάσει τις αντιλήψεις των μαθητών για το όριο.

Q1 : Βρείτε τα επόμενα όρια (αν υπάρχουν). Εξηγήστε τα αποτελέσματά σας.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{όπου} \quad f(x)=\begin{cases} 3 & , \ x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \ x\neq 1 \end{cases}$$

Οκτώ από τους εννέα μαθητές της ομάδας Derive χρησιμοποίησαν Derive για να βρουν το πρώτο όριο και ισχυρίστηκαν ότι δεν γνώριζαν καμία άλλη μέθοδο. Η εξαίρεση ήταν ένας μαθητής που «δεν του άρεσε» το σύστημα πληροφορικής. Από τους 19 μη Derive μαθητές οι 12 διαίρεσαν με το x και στη συνέχεια χρησιμοποίησαν ότι το 1 / x προσεγγίζει το 0 όταν το x προσεγγίζει το άπειρο. Τρεις αντικατέστησαν με αριθμούς και τέσσερις δεν απάντησαν.

Το δεύτερο όριο με την ασυνέχεια είναι συγκριτικά πιο δύσκολο. Υπήρξε μεγαλύτερη ποικιλία στις απαντήσεις. Παρ 'όλα αυτά 6 από τους 9 Derive σπουδαστές απλά χρησιμοποίησαν Derive για να βρουν το όριο του μεγαλύτερου μέρους της συνάρτησης και αγνόησαν την ασυνέχεια. Από τους 19 μαθητές της άλλης ομάδας, 11 έδωσαν διαφορετικές απαντήσεις εξετάζοντας την ασυνέχεια, 6 δεν απάντησαν και μόνο 2 αγνόησαν την ασυνέχεια. Το σημείο που εστιάζουμε εδώ είναι ότι χρησιμοποίησαν το Derive ως ένα κουμπί, μια διαδικασία η οποία μπορεί να συγκαλύψει βαθύτερη εξέταση της συνάρτησης.

Q2: α) Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα 0,1 +0,01+0,001 + ……. Γιατί;

Β) Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα 0,9+0,09+0,009+…… Γιατί;

Φαινομενικά αθώες ερωτήσεις με εύκολες απαντήσεις, μπορεί να προκαλέσουν μεγάλα εννοιολογικά προβλήματα σε μαθητές οι οποίοι δεν έχουν εξασκηθεί στα καθαρά μαθηματικά σε οποιοδήποτε βάθος. (Monaghan ,1986).

Τα 7 από τα 9 άτομα της Derive ομάδας ανέφεραν ότι υπάρχει η απάντηση $0,\overline{1}$, με τον τύπο για το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου. Η γενική άποψη της μη Derive ομάδας ήταν ότι αυτή μπορεί να είναι μια απάντηση, αλλά υπήρχαν προβλήματα. Για παράδειγμα, σχολίασαν ότι αυτό ήταν μόνο μια προσέγγιση ή ότι η πραγματική απάντηση τείνει σε αυτό.

Q3 : Εξηγήστε το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$

Όλοι οι μαθητές της ομάδας σύγκρισης έδωσαν ικανοποιητικές θεωρητικές ερμηνείες, αλλά κανένας δεν έδωσε παραδείγματα. Κανένας από την ομάδα Derive δεν έδωσε θεωρητικές ερμηνείες και μόνο δύο μαθητές ανέφεραν τις λέξεις «κλίση» ή «παράγωγος». Τέσσερις μαθητές από την Derive ομάδα έδωσαν παραδείγματα αντικαθιστώντας την f(x) με πολυώνυμο και εκτέλεσαν ή περιέγραψαν την ακολουθία των βασικών βημάτων για τον υπολογισμό του ορίου με το λογισμικό.

Υπό μια ορισμένη οπτική γωνία το CAS μπορεί να κάνει εύκολους ορισμένους υπολογισμούς, αλλά σε άλλες κατευθύνσεις, μπορεί να κάνει τα πράγματα πιο δύσκολα. Το όριο είναι μια βαθιά σύνθετη έννοια. Δεν είναι

δυνατόν ένα λογισμικό να την κάνει αμέσως «εύκολη», αλλά, χρησιμοποιώντας ωστόσο τη διαδικασία της επιλεκτικής κατασκευής, επιτρέπουμε το σχεδιασμό διδακτικού υλικού που εκμεταλλεύεται τις δυνατότητες ποικίλων προσεγγίσεων, δίνοντας έτσι μια βελτιωμένη γνωστική βάση για μια ευέλικτη proceptual κατανόηση του ορίου. Ο σχεδιαστής των προγραμμάτων σπουδών, ή ο μαθητής που θα διερευνήσει τις νέες ιδέες, μπορεί να επιλέξει ποιο μέρος της νέας έννοιας πρέπει να κατασκευάσει στον δοσμένο χρόνο – την διαδικασία ή τις προκύπτουσες έννοιες και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Είναι γνωστό ότι μια αριθμομηχανή επιτρέπει στο παιδί να εκτελεί αριθμητικές πράξεις χωρίς τη διαδικασία της καταμέτρησης ή της χρήσης των τυποποιημένων αλγορίθμων. Συνεπώς, είναι δυνατό για το παιδί να επικεντρώνεται περισσότερο στις ιδιότητες της αριθμητικής από ό, τι στη διαδικασία της καταμέτρησης τα πρώτα χρόνια (Doig, 1993). Ομοίως, είναι δυνατό ο μαθητής να αναπτύξει μια πιο ισορροπημένη άποψη του ορίου διττά ως διαδικασία και ως έννοια με τη χρήση του CAS το οποίο παράγει ένα συμβολικό όριο, ως «σωστή» αριθμητική έκφραση.

2η έρευνα

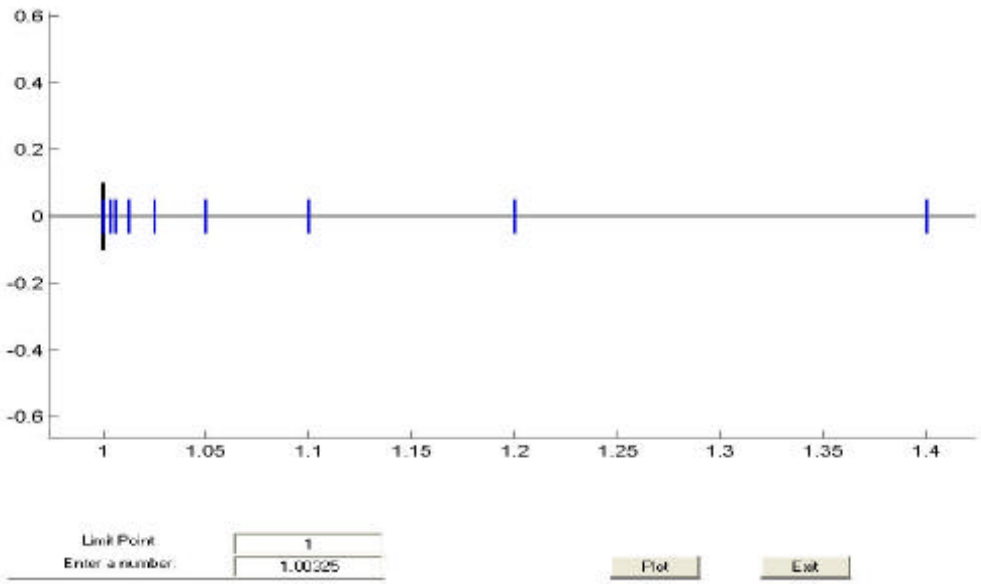
Οι Büyükköroğlu, Düzce, Çetin, Mahir, Deniz & Üreyen (2006), εξέτασαν το αν η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών μπορεί να συνεισφέρει στη διδασκαλία της έννοιας του ορίου και μπορούν να ξεπεραστούν (πιθανές) δυσκολίες με τη βοήθεια του Η/Υ. Επιλέχθηκαν 52 πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος από ένα πανεπιστήμιο της Τουρκίας. Εφαρμόσθηκε μία προ-εξέταση στους φοιτητές και σύμφωνα με τα αποτελέσματα χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, περίπου ίδιου επιπέδου. Οι ομάδες ονομάστηκαν Α και Β.

Η έννοια του ορίου διδάχθηκε χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους στην ομάδα Α εντός της τάξης. Η έννοια διδάχθηκε στην ομάδα Β σε ένα εργαστήριο πληροφορικής με ατομικό Η/Υ **που** έχει ένα πρόγραμμα που ετοιμάστηκε από

ερευνητές που χρησιμοποιούν MATLAB. Κάθε μαθητής σε αυτή την ομάδα παρακολούθησε το μάθημα διαδραστικά από τον υπολογιστή του.

Το πρόγραμμα που ετοιμάστηκε για την ομάδα Β.

Βήμα 1ο:

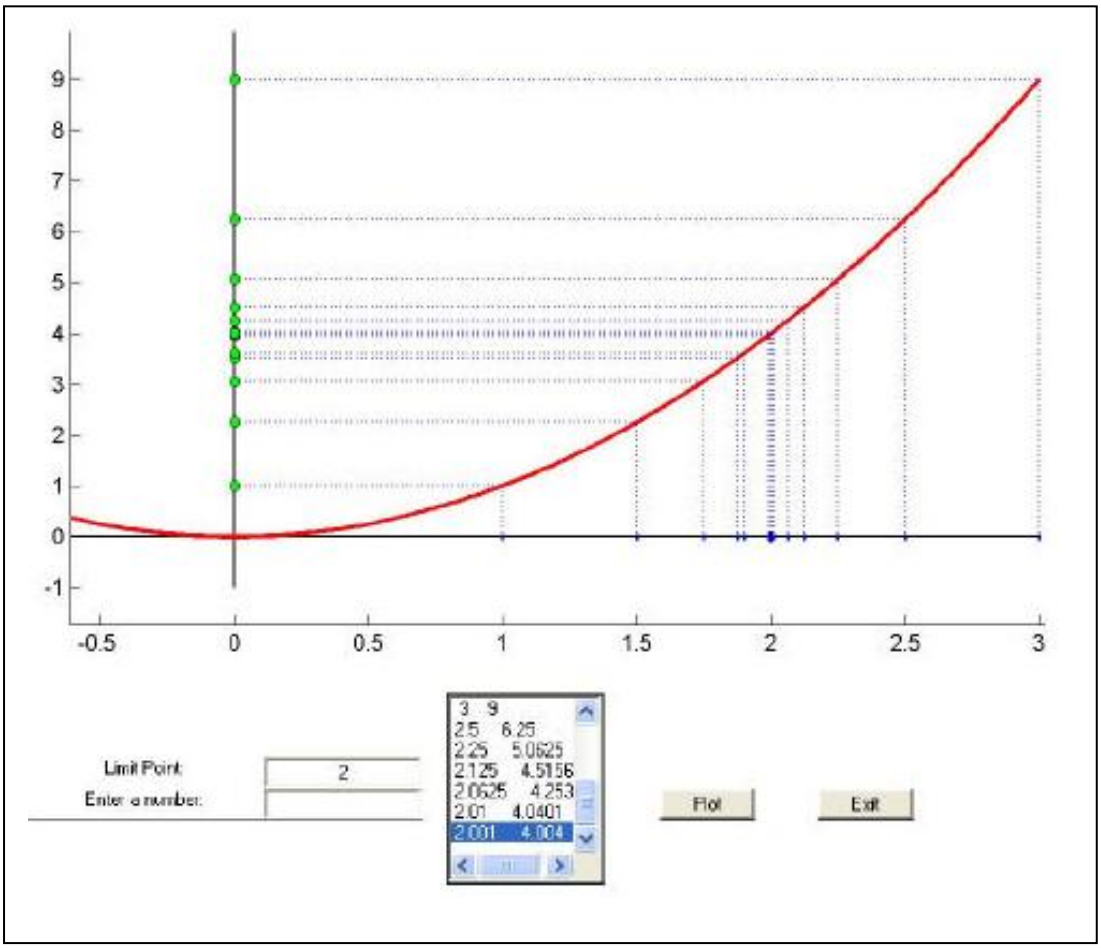


Σχήμα 1: Εφαρμογή της άπλετ που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 1.

Ένας από τους βασικούς λόγους για τους οποίους η έννοια του ορίου δεν μπορεί να κατανοηθεί εύκολα είναι ότι οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν το τι σημαίνει «προσεγγίζω έναν αριθμό». Πράγματι, ο στόχος σε αυτό το βήμα ήταν να δείξουν οι ερευνητές τι σημαίνει το να «προσεγγίζεται ένας αριθμός». Η ηλεκτρονική άπλετ που ετοιμάστηκε σε αυτό το στάδιο, δείχνει τους εισαγόμενους αριθμούς στην πραγματική ευθεία. Αρχικά, ένας αριθμός που θέλαμε να προσεγγισθεί, π.χ. **α** , κι ένας άλλος μεγαλύτερος του **α** αριθμός επιλέγονται και εισάγονται από τους μαθητές και απεικονίζονται στην πραγματική ευθεία. Έπειτα ζητείται από τους μαθητές να εισάγουν έναν αριθμό που να είναι μεγαλύτερος του **α** αλλά μικρότερος του προηγούμενου**.** Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές με σκοπό να αναγκασθούν οι μαθητές να αντιληφθούν εάν ένας τέτοιος αριθμός μπορεί βρεθεί κάθε φορά. Αναλογικά, μια παρόμοια διαδικασία εφαρμόστηκε με τους αριθμούς που ήταν μικρότεροι του **α**.

Βήμα 2^{ο}:

Σε αυτό βήμα έγινε μια προσπάθεια να διαπιστωθεί το εάν οι μαθητές εξακριβώνουν το που οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = x^2$ πλησιάζουν καθώς το x τείνει στο 2. Η άπλετ που ετοιμάστηκε για αυτό το λόγο αποτυπώνει γραφικά/εντοπίζει με συντεταγμένες το γράφημα μιας συνάρτησης και καταγράφει τις τιμές της συνάρτησης στον y-άξονα αντίστοιχα με τις εισαγόμενες x τιμές. Στην εργαστηριακή εφαρμογή, οι μαθητές εισήγαγαν αριθμούς κοντά στο 2 από το πληκτρολόγιο στα απλετς, και συνειδητοποίησαν ότι οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν το 4.



Σχήμα 2: εφαρμογή του άπλετ που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 2.

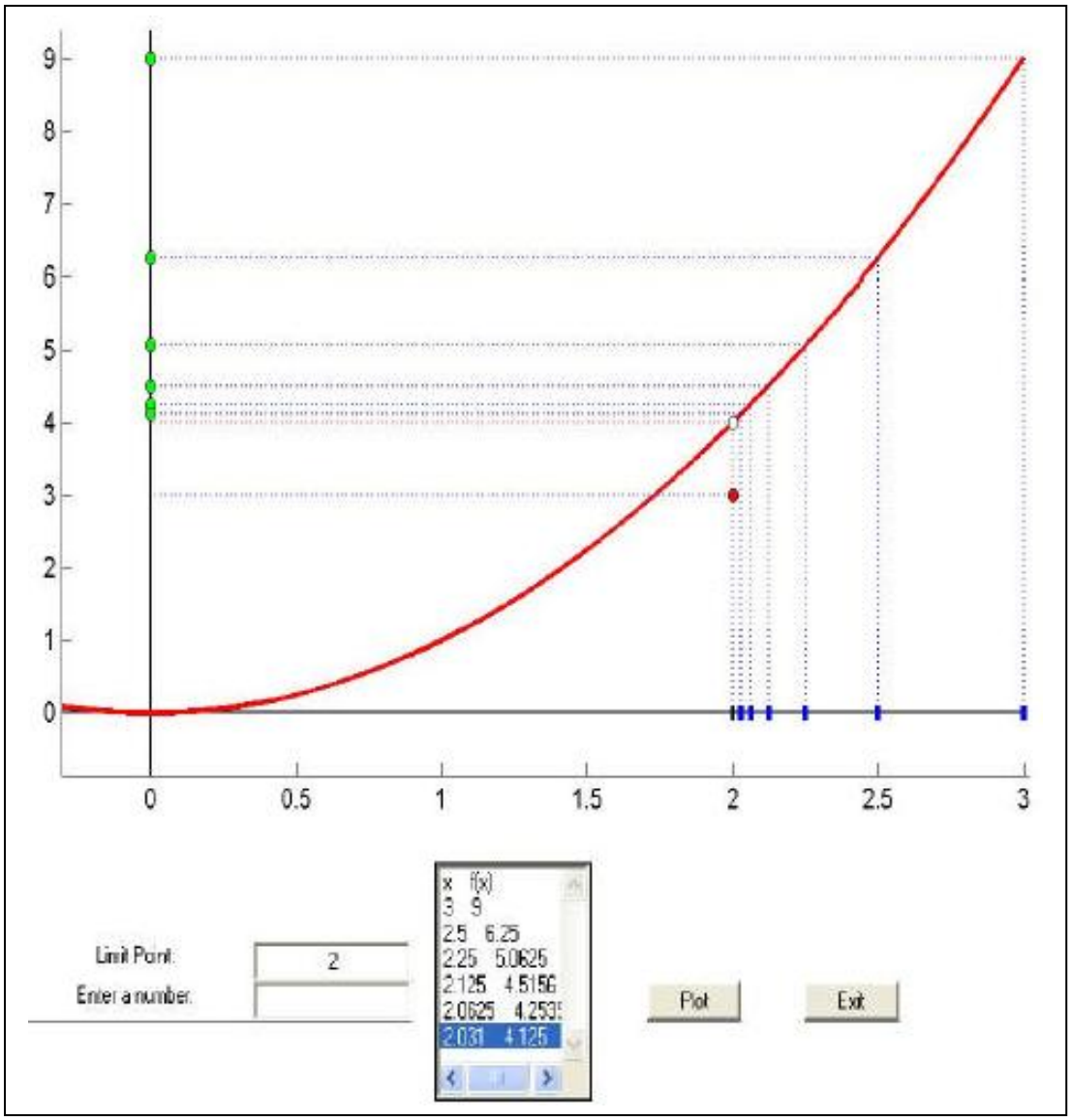
Στη συνέχεια, ο ορισμός του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο δόθηκε ως εξής: «αν η f(x) ορίζεται για όλα τα x κοντά στο α , εκτός από, πιθανόν, στο ίδιο το α, κι αν μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι η f(x) είναι τόσο κοντά όσο θέλουμε στο

L, θεωρώντας ότι το x είναι όσο κοντά θέλουμε στο α, λέμε ότι η συνάρτηση f(x) πλησιάζει το όριο L καθώς το x πλησιάζει το α και γράφουμε $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Βήμα 3^{ο}:

Ο στόχος αυτού του βήματος είναι να διδάξει ότι το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο δεν είναι απαραίτητο να είναι η τιμή της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο. Το ίδιο άπλετ που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 2 εφαρμόστηκε για να βρεθεί το όριο της συνάρτησης.

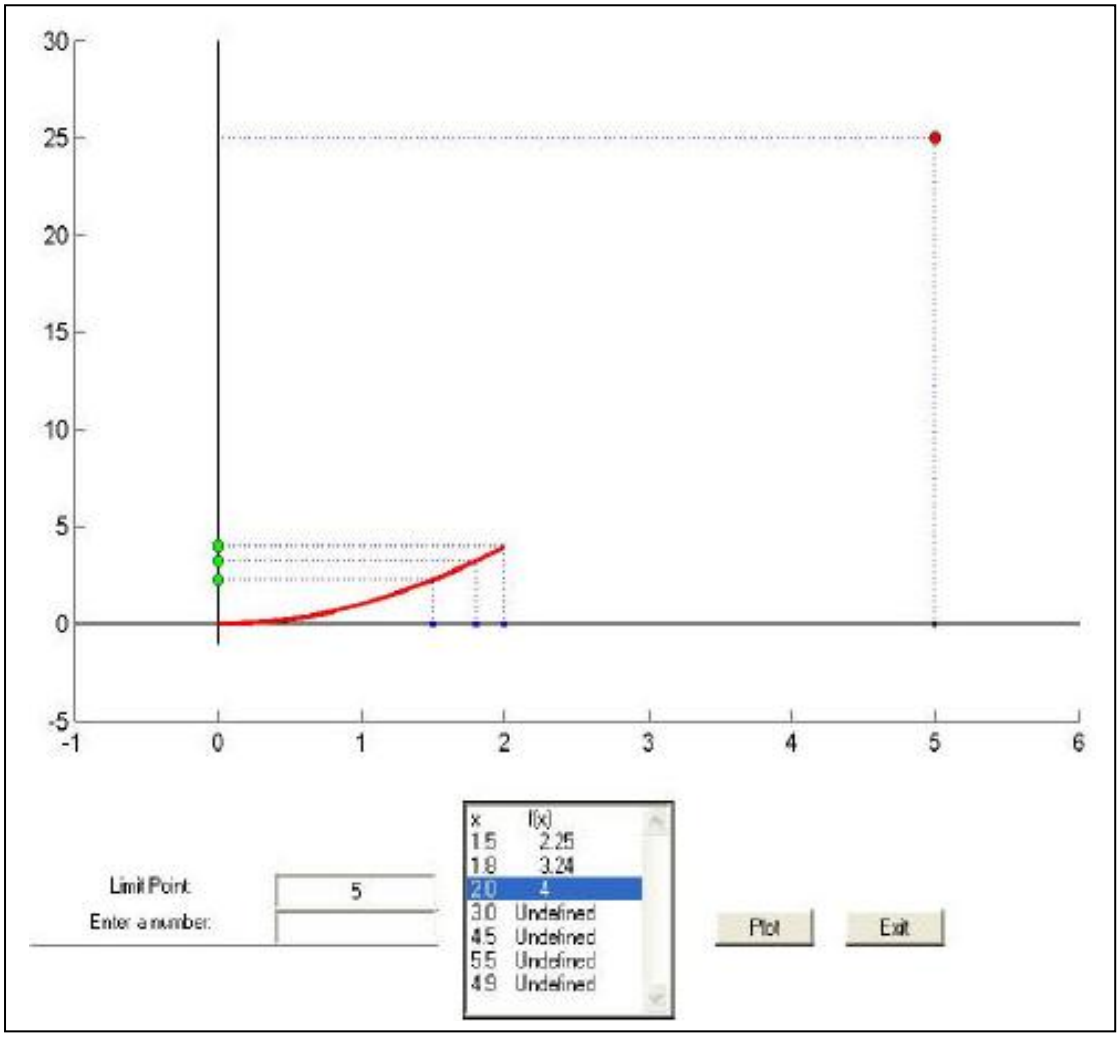
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \neq 2 \\ 3 & , \ x = 2 \end{cases}$$ στο χ = 2 .



Σχήμα 3: Εφαρμογή της απλετ που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 3.

Βήμα 4ο:

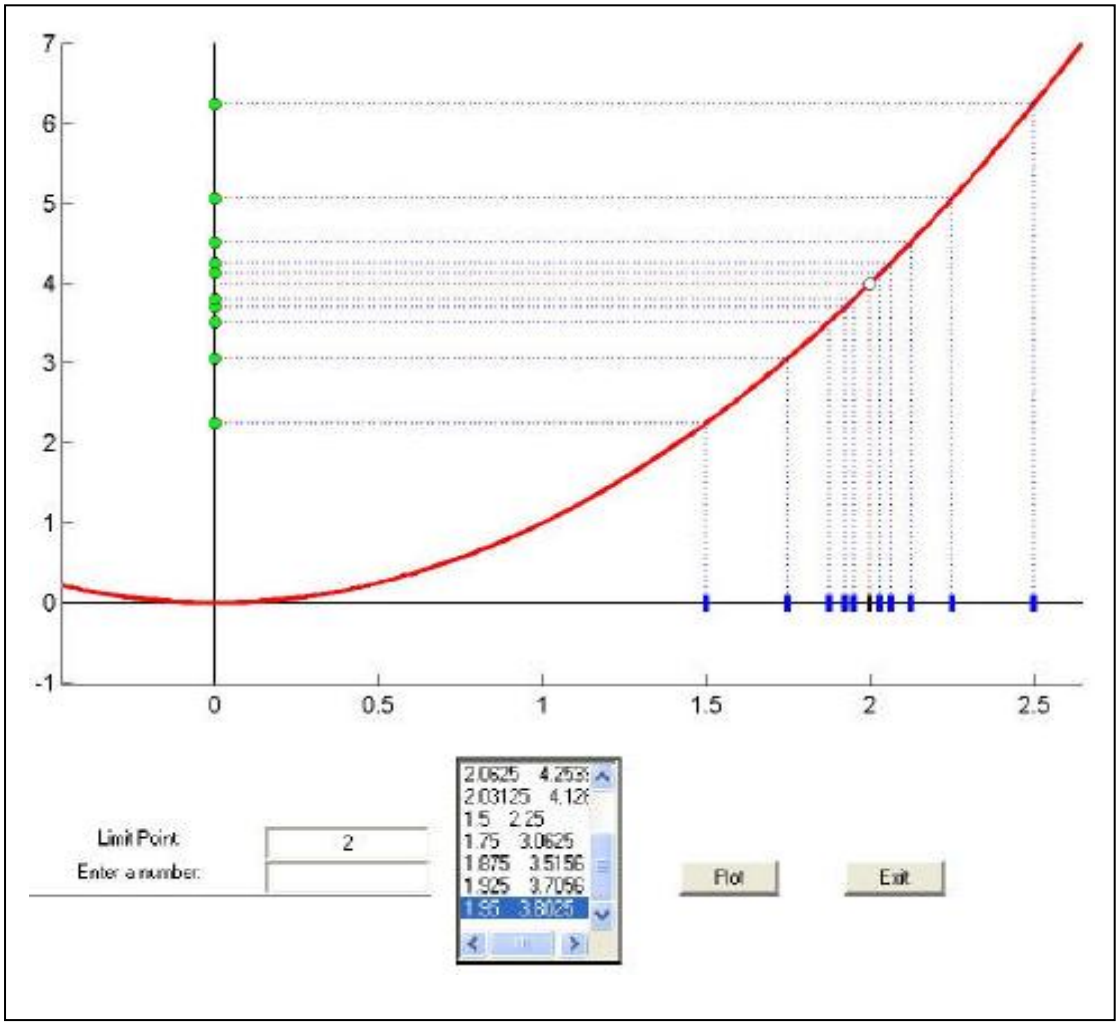
Προκειμένου να συζητηθεί η ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, η συνάρτηση πρέπει να ορισθεί για όλα τα σημεία αρκετά κοντά στο x = α. Για να δοθεί έμφαση σε αυτό, υπήρχε η προσδοκία να μπορέσουν οι μαθητές να αποφασίσουν εάν η συνάρτηση $f:[0,2]\cup\{5\}\to R$, $f(x)=x^2$ έχει όριο στο σημείο x=5. Στο ηλεκτρονικό άπλετ που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το βήμα, σχεδιάστηκε το γράφημα της συνάρτησης και ζητήθηκε από τους μαθητές να βάλουν μερικούς αριθμούς κοντά στο x =5 από το πληκτρολόγιο. Όμως οι αριθμοί που ήταν μεγαλύτεροι του 2 δεν έγιναν δεκτοί από το άπλετ. Και οι μαθητές συμπέραναν ότι δεν μπορούσαν να πλησιάσουν το x =5 με αριθμούς από το πεδίο ορισμού και ως αποτέλεσμα δεν μπορούσαν να υπολογίσουν το όριο.



Σχήμα 4: εφαρμογή του άπλετ που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 4

Βήμα 5^{ο}:

Σύμφωνα με ότι παρατηρήθηκαν εντός της αίθουσας, οι μαθητές φαίνεται να πιστεύουν ότι «αν μια συνάρτηση έχει ένα όριο σε ένα σημείο τότε οι συναρτήσεις πρέπει να ορίζονται σε εκείνο το σημείο». Για να αλλάξουμε αυτή τη λαθεμένη αντίληψη, εξετάστηκε το όριο της συνάρτησης $f: R\setminus\{2\} \to R$, $f(x) = x^2$ όταν το τείνει στο 2. Διευκρινίστηκε ότι μια συνάρτηση μπορεί να έχει ένα όριο στο σημείο όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται.

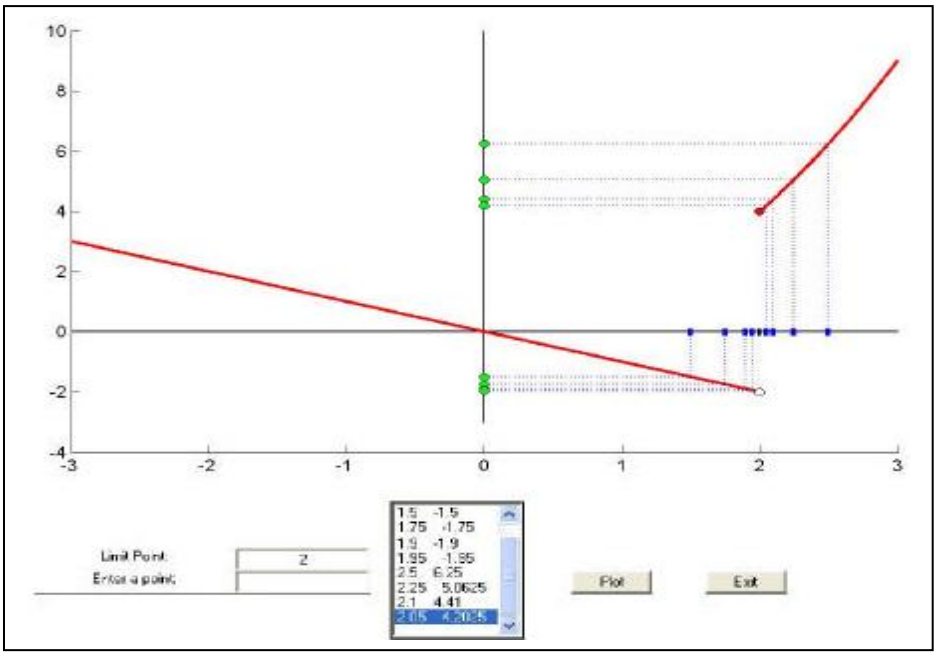


Σχήμα 5: εφαρμογή του άπλετ που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα 5

<u>Βήμα 6</u>

Ως τελικό βήμα, εκτελέστηκαν ασκήσεις χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικά άπλετς για να δώσουν έμφαση την έννοια του ορίου.

Άσκηση 1 : $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 2 \\ -x & , x < 2 \end{cases}$, $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$



Σχήμα 6: εφαρμογή του άπλετ που χρησιμοποιήθηκε στην άσκηση 1

Άσκηση 2 : $f : R - \{3\} \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, $\lim_{x \to 3} f(x) = ?$

Άσκηση 3 : $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 2 \\ -x & , x < 2 \end{cases}$, $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

Άσκηση 4 : $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

Άσκηση 5 : $f : R - \{0\} \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

Άσκηση 6 : $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$

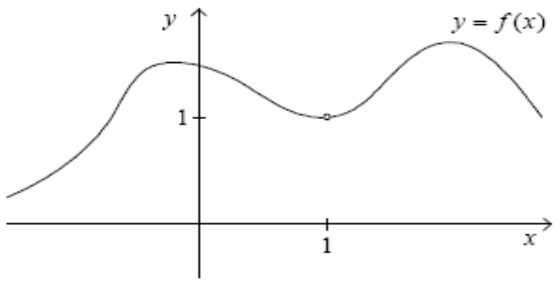
Σε κάθε άσκηση ζητήθηκε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα άπλετς του υπολογιστή τα οποία δείχνουν το γράφημα της συνάρτησης καθώς επίσης να υπολογίσουν το όριο εισάγοντας αριθμούς κοντά στα σημεία του ορίου. Οι μαθητές βρήκαν τα όρια των συναρτήσεων ακολουθώντας τις τιμές συνάρτησης που αντιστοιχούσαν στους εισαγόμενους αριθμούς στην οθόνη.

Τελικά, οι ιδιότητες του ορίου διδάχθηκαν στην ομάδα Β με κλασσικές μεθόδους όπως στην ομάδα Α. Μετά από μια εξέταση που εφαρμόστηκε και στις 2 ομάδες μετά από 2 εβδομάδες, κρίθηκε απαραίτητο η έννοια του ορίου να διδαχθεί.

Ερωτήσεις της εξέτασης που εφαρμόστηκε:

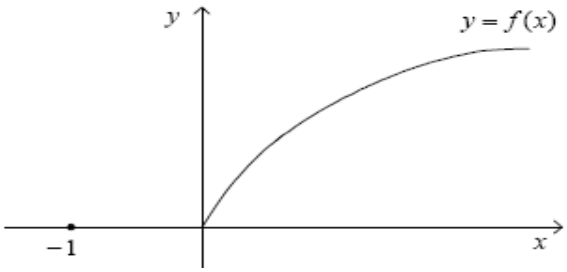
1. Find the limits of the functions f whose graphs are given by the following.

a) $f : R - \{1\} \to R$



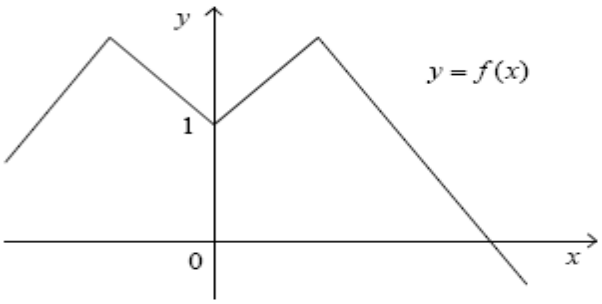
$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

b) $f : \{-1\} \cup [0, \infty) \to R$



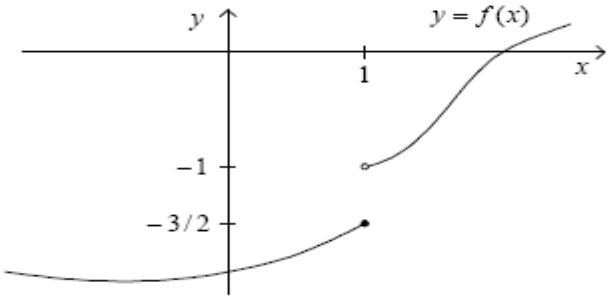
$\lim_{x \to -1} f(x) = ?$

c) $f : R \to R$



$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

d) $f : R \to R$



$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

2. Let $\lim_{x \to 1} f(x) = \pi$. Judge these statements.

   a) f is defined at the point $x = 1$.

   b) f is continuous at the point $x = 1$.

   c) $\lim_{x \to 1}[f(x) - f(1)] = 0$

   d) If g is continuous function and $g(1) = -\pi$ then $\lim_{x \to 1}[f(x) - g(x)] = 2\pi$.

3. Let $f(x) = e^{-x} + 2$. $f(0.001) \approx ?$

4. Let $f(x) = \dfrac{3 - 2x^5}{x(x^2 + 21)(1 - x^2)}$. $f(-2005) \approx ?$

Οι απαντήσεις των μαθητών χωρίστηκαν σε 2 ομάδες, ως σωστές και λάθος. Μια απάντηση θεωρούνταν σωστή αν το σωστό αποτέλεσμα συνοδευόταν από σωστή εξήγηση, αλλιώς θεωρούνταν λάθος. Τα στοιχεία από τα αποτελέσματα της εξέτασης ερμηνεύθηκαν με τη χρήση συχνότητας , ποσοστιαίας αναλογίας και t-τεστ

Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων από τα αποτελέσματα της εξέτασης δίνονται στον πίνακα 1.

		GROUP A (Classroom)	GROUP B (Comp. Laboratory)
Question		**True answer (%)**	**True answer (%)**
1	**a**	36	62
	b	40	57
	c	71	80
	d	44	71
2	**a**	16	24
	b	12	14
	c	12	19
	d	80	81
3		19	28
4		24	28
		$\overline{X}_A = 35{,}4$	$\overline{X}_B = 46{,}4$

Από τον πίνακα εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η 1η ερώτηση έχει 4 ζητήματα, καθένα εκ των οποίων σχετίζεται με την εύρεση του ορίου μιας συνάρτησης με τη χρήση δοσμένων γραφημάτων. Παρατηρείται από τον πίνακα 1, ότι η ομάδα Β είναι πιο επιτυχής. Μπορεί να πει κανείς ότι η διδασκαλία της έννοιας του ορίου χρησιμοποιώντας Η/Υ έχει θετική επίδραση στην κατανόηση της έννοιας. Ένας από τους λόγους αυτής της θετικής επίδρασης μπορεί να είναι η συνεισφορά του Η/Υ στην οπτικοποίηση. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις εξηγήσεις στον Η/Υ ως ένα πραγματικό γεγονός ενώ αντιλαμβάνονται τις εξηγήσεις εντός της σχολικής τάξης ως ένα τεχνητό χαρακτηριστικό.

- Η 2η ερώτηση αποτελείται επίσης από 4 ζητήματα που σχετίζονται με την έρευνα της σχέσης μεταξύ ορίου συνάρτησης σε ένα σημείο και συνέχειας της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο. Μπορεί να δει κανείς από τον πίνακα 1 ότι οι μαθητές και στις 2 ομάδες έχουν παρόμοια ποσοστά σωστών απαντήσεων σε όλα τα ζητήματα. Αν και στα πρώτα 3 ζητήματα έχουν χαμηλό ποσοστό, στο τελευταίο ζήτημα έχουν υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων. Η δυσκολία κατανόησης της σχέσης μεταξύ ορίου και

συνέχειας σε ένα σημείο είναι ένα πρόβλημα που συναντάται συχνά στα μαθήματα ανάλυσης. Τα αποτελέσματα που αποκομίστηκαν δείχνουν ότι τα άπλετς δεν έχουν αξιοσημείωτη επίδραση.

- Η 3η ερώτηση αφορούσε στο «πλησίασμα» της τιμής του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο και των τιμών της συνάρτησης σε μια περιοχή γύρω από εκείνο το σημείο. Η 4η ερώτηση έχει σχέση με την επίδραση της τιμής ορίου στο άπειρο που μπορεί να θεωρηθεί ως μια κατά προσέγγιση τιμή μιας συνάρτησης σε επαρκώς μεγάλους αριθμούς. Σε αυτές τις ερωτήσεις περίμενε κανείς πως η ομάδα Β θα ήταν πιο επιτυχής από την ομάδα Α. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα βάσει του πίνακα, η ομάδα Β είναι πιο επιτυχής κατά 9% και 4% στις ερωτήσεις 3 και 4 αντίστοιχα. Γι'αυτό το λόγο, αυτές οι ερωτήσεις δείχνουν ότι οι μαθητές και στις 2 ομάδες δεν έρχονται σε επαφή με το όριο σε ένα σημείο, και τη συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά στο σημείο του ορίου. Είναι εμφανές ότι το πρόγραμμα του Η/Υ δεν είχε σημαντική συνεισφορά. Πράγματι, οι μαθητές προσδίδουν μεγαλύτερη σημασία στη λειτουργική διαδικασία παρά στα μέσα των εννοιών και εννοιολογικών σχέσεων.
- Ο μέσος όρος των ποσοστών των σωστών απαντήσεων είναι $\overline{X_A} = 35,4$ στην ομάδα Α και $\overline{X_B} = 46,4$ στην ομάδα Β. Προκειμένου να εξακριβωθεί εάν υπήρχαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων εκτελέστηκαν τ-τεστς σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και μπορεί να δει κανείς από το αποτέλεσμα ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ αυτών των 2 μέσων όρων.

3η έρευνα

Οι Yiasoumis, Mattheou & Christou (2009) προσπάθησαν να αναλύσουν τη συλλογιστική μαθητών της 11ης τάξης και τη γνώση τους όσον αφορά τα Όρια μέσα από το μοντέλο Sierpinska της θεωρητικής σκέψης (Sierpinska,2002). Το εννοιολογικό πλαίσιο που προτείνουν, βασίζεται κυρίως στα χαρακτηριστικά που περιγράφονται στο μοντέλο Sierpinska της θεωρητικής σκέψης (2002; 2005) και

αποτελεί μια προσπάθεια να συμπεριλάβει ολόκληρο το φάσμα της κατανόησης των Ορίων από τους μαθητές.

Η Sierpinska (2005) παρέχει επεξηγήσεις για τις κατηγορίες θεωρητικής σκέψης. Οι ερευνητές τροποποίησαν τις ιδέες Sierpinska κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αντανακλά τις προοπτικές που χρησιμοποιούν στις δοκιμές θεωρητικής σκέψης των μαθητών, καθώς εργάζονται πάνω σε δραστηριότητες που αφορούν τα όρια. Σύμφωνα με την Sierpinska (2005), αντανακλαστική σκέψη είναι σκόπιμη σκέψη που στοχεύει στη διευκόλυνση της περαιτέρω κατανόησης της γνώσης και σ' αυτή την περίπτωση της γνώσης των ορίων.

Συστημική σκέψη είναι η σκέψη σχετικά με τα συστήματα των εννοιών. Αναφέρεται κυρίως στην διερεύνηση των συσχετίσεων και αλληλεπιδράσεων των μερών ενός συστήματος Η έννοια των ορίων είναι εγκατεστημένη με βάση τον καθορισμό των ιδιοτήτων. Όταν οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν την έννοια των ορίων, σπανίως σκέφτονται τις συνθήκες ορισμού που η έννοια πληροί (Parameswaran, 2006).

Συνήθως σκέφτονται ορισμένα παραδείγματα και αυτό, βέβαια, δεν μπορεί να τους οδηγήσει στην παραγωγή γενικεύσεων (Ferrini-Mundy, & Graham, 1991). Έτσι, η μελέτη τους επικεντρώθηκε στον άτυπο ορισμό της έννοιας του ορίου ώστε να χαρτογραφηθεί η κατανόηση των μαθητών σ΄αυτό και στη συνέχεια να διερευνηθεί πώς οι μαθητές κατανοούν τη φύση του ορίου.

Η αναλυτική σκέψη αναφέρεται στην ανάπτυξη εξειδικευμένων συστημάτων αναπαράστασης, όπως και συμβολισμών με εξειδικευμένη ορολογία. Τα Όρια φαίνεται να εξελίσσονται παράλληλα με τις μεθόδους για αναπαράσταση των εννοιών και τον συμβολικό τους χειρισμό (Asiala et al., 1997). Στην μελέτη αυτή , διερευνήθηκε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν πότε το όριο αυτό υπάρχει σε ένα συγκεκριμένο σημείο, σε μια συγκεκριμένη αναπαράσταση και κατά πόσον θα μπορούσαν να υπολογίσουν την τιμή του.

Επιπλέον, οι ερευνητές εξέτασαν πώς το Computer Algebra System (CAS), και ιδίως τα μαθηματικά applets μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να έχουν καλύτερα αποτελέσματα στην εκτέλεση των καθηκόντων τους σχετικά με το όριο

και τη βελτίωση των ικανοτήτων τους στην αντανακλαστική, συστημική και αναλυτική σκέψη.

Ένας αριθμός ερευνητικών μελετών υποστηρίζει ότι το CAS μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στη διερεύνηση των προβλημάτων και των εννοιών, μέσω διαφόρων μορφών αναπαραστάσεων (Porzio, 1999; Kaput, 1996). Μέσω της χρήσης του CAS, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά και να μάθουν στρατηγικές για την ανάπτυξη αφηρημένων δομών στην άλγεβρα (Arnold, 2004).

Επιπλέον, το CAS παρακινεί τους μαθητές να επικεντρωθούν κυρίως στην ερμηνεία και την αναπαράσταση των εννοιών παρά στην εκτέλεση των διαφόρων διαδικασιών (Arnold, 2004; Pierce & Stacey, 2007). Η χρήση των υπολογιστών, σε συνδυασμό με το ειδικό λογισμικό το οποίο εκτελεί τη διαδικασία, βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν τις ιδιότητες του αντικειμένου που έχουν παραχθεί πριν, κατά ή μετά την μελέτη της ίδιας της διαδικασίας, αντί να πρέπει να ενσωματώσουν πρώτα τη διαδικασία (Tall, 1993).

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα, μπορεί να υποθέσει κάποιος ότι οι ειδικές βοηθητικές εφαρμογές των μαθηματικών σε ένα περιβάλλον CAS μπορεί να συμβάλουν στην ανάπτυξη της κατανόησης των μαθητών της έννοιας του ορίου και της προαγωγής της θεωρητικής σκέψης τους.

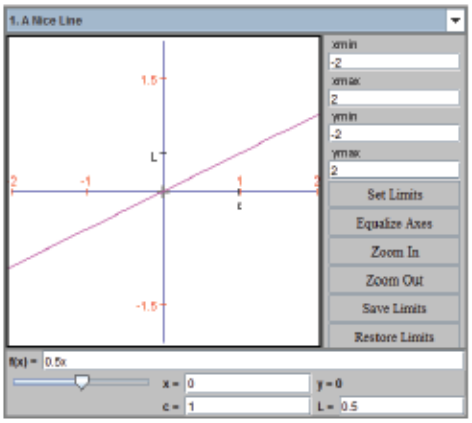
Οι συμμετέχοντες ήταν δύο ομάδες μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από τρεις τάξεις. Υπήρχε η πειραματική ομάδα (ομάδα 1), ενώ οι άλλες δύο κατηγορίες αποτέλεσαν την ομάδα ελέγχου (ομάδα 2). (15 , 37 αντίστοιχα). Όλοι οι μαθητές παρακολούθησαν την 11^{η} τάξη του Λυκείου με μάθημα βαρύτητας τα μαθηματικά. Η πειραματική ομάδα διδάχθηκε την έννοια των ορίων με τη χρήση των μαθηματικών applets και η ομάδα ελέγχου διδάχθηκε τις ίδιες έννοιες και το περιεχόμενο τους με την παραδοσιακή μορφή, δηλαδή, με τις δραστηριότητες που υπαγορεύονται από τα σχολικά εγχειρίδια.

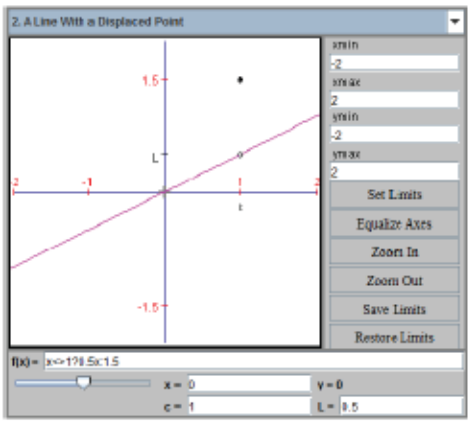
Μια διαδικασία Α προ – test εφαρμόστηκε σε όλους τους φοιτητές λίγο πριν από την έναρξη της διδασκαλίας σχετικά με τα όρια. Αμέσως μετά το προ – test , οργανώθηκε ένα πρόγραμμα παρέμβασης τριών περιόδων. Κάθε περίοδος

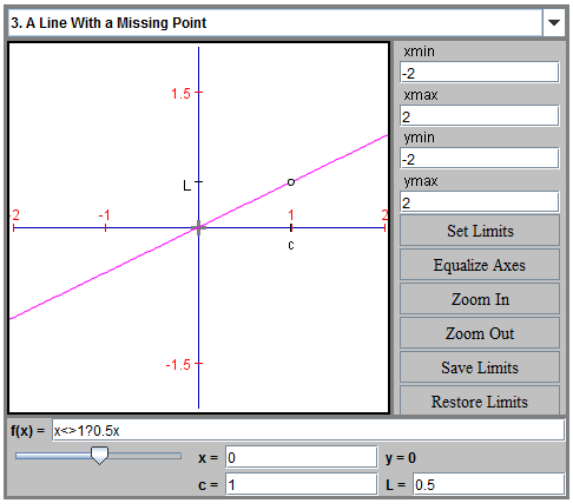
διήρκησε 45 λεπτά. Έπειτα τέθηκε το post – test , το οποίο ήταν ίδιο με το προ – test.

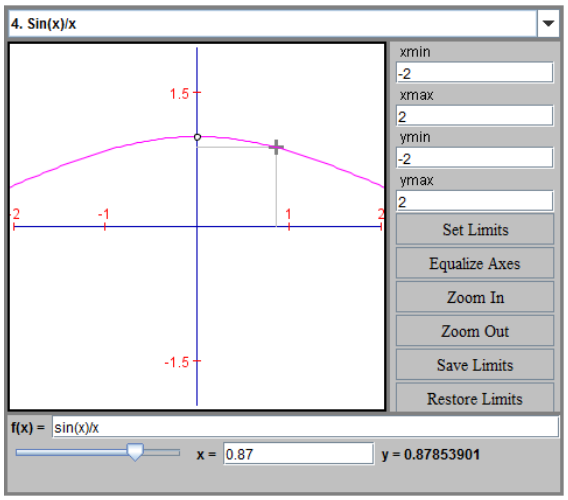
Οι σπουδαστές που ανήκουν στην πειραματική ομάδα ελέγχου εξέτασαν την έννοια του ορίου με τη χρήση των μαθηματικών applets. Το παρακάτω applet είναι ένα παράδειγμα αυτών που χρησιμοποιήθηκαν

(http://www.calculusapplets.com/informallimits.html).









Οι μαθητές εργάζονταν στα applets με βάση κάποιες ερωτήσεις:

1. Στο πρώτο γράφημα είναι το όριο L = 0,5 όταν c = 1; Με άλλα λόγια, προσεγγίζει το f(x) το 0,5 όταν το x προσεγγίζει το 1; Μετακινήστε τον μεταβολέα του x ώστε το x να πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο 1.
2. Επιλέξτε τη δεύτερη συνάρτηση. Αυτό είναι ακριβώς όπως την πρώτη περίπτωση, με τη διαφορά πως ένα σημείο έχει "αποχωριστεί" από

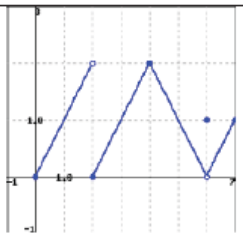
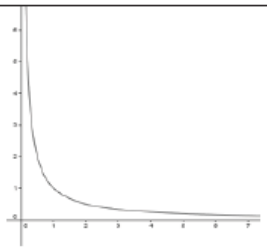
την καμπύλη. Παραμένει το όριο $L = 0,5$ όταν $c = 1$; Μετακινήστε τον μεταβολέα του x, ώστε το x να πάει όλο και πιο κοντά στο 1.

3. Επιλέξτε την τρίτη συνάρτηση. Αυτή μοιάζει με τις προηγούμενες, όμως τώρα υπάρχει ένα σημείο που λείπει. Παραμένει το όριο $L = 0,5$ όταν $c = 1$;
4. Επιλέξτε την τέταρτη (πιο σύνθετη τώρα) συνάρτηση. Ποιο είναι το όριο όταν $c = 0$; Με άλλα λόγια, ποια τιμή προσεγγίζει η f(x) όταν το x προσεγγίζει το μηδέν; Μετακινήστε τον μεταβολέα του x, ώστε το x να πάει όλο και πιο κοντά στο 0.

Στη συνέχεια εξετάζονται οι συναρτήσεις $f(x)=\{x\ ,\ x<1\ \ \&\ \ x+1,\ x\geq 1\}$ (βήμα 5) και $g(x)=0,1/(x-1)^2$ (βήμα 6) ενώ τέλος $w(x) = \sin(1/x)$ (βήμα7).

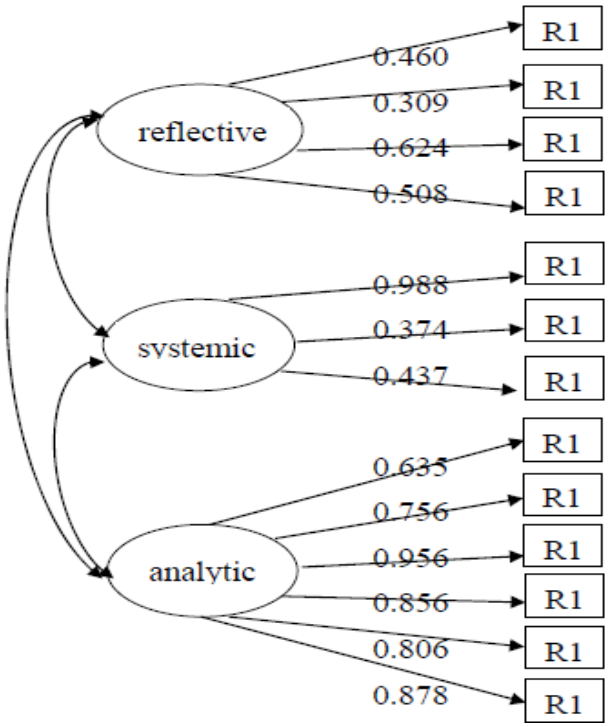
Το τεστ περιελάμβανε 13 ερωτήσεις οι οποίες αντικατοπτρίζουν το μοντέλο Sierpinska της θεωρητικής σκέψης. Συγκεκριμένα, τέσσερις ερωτήσεις στοχεύουν να διερευνήσουν τις ικανότητες των μαθητών στη αντανακλαστική σκέψη, τρεις στη συστημική, και έξι στην αναλυτική σκέψη.

Τα ερωτήματα που αφορούν την αντανακλαστική σκέψη ερευνούν τις ικανότητες των μαθητών για τον προσδιορισμό της εννοιολογικής κατανόησης των ορίων. Τα ερωτήματα που είχαν ως στόχο να ερευνήσουν τις ικανότητες των μαθητών να λειτουργούν την συστημική σκέψη , διερευνούν την ικανότητά τους στον ορισμό των ορίων. Τέλος, τα ερωτήματα που τέθηκαν προκειμένου να διερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να λειτουργεί στην αναλυτική σκέψη, επικεντρώθηκε σε συμβολικές και γραφικές αναπαραστάσεις. Παραδείγματα της ανακλαστικής, συστημικής και αναλυτικής εργασίας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Reflective thinking	Systemic thinking	Analytic thinking
	A limit of a function is a number past which a function cannot go. True/ False	
The limit of the function at $x = 4$ is:..... Explain your answer.		What do you understand by $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$?

Οι σωστές απαντήσεις βαθμολογούνται με 1, οι εσφαλμένες με 0. Εάν ένας μαθητής έδωσε μια εν μέρει σωστή απάντηση, αλλά λάθος αιτιολόγηση, πάλι παίρνει 0. Η επιβεβαιωτική ανάλυση παραγόντων (CFA), εφαρμόστηκε, προκειμένου να διερευνηθεί κατά πόσον το μοντέλο της θεωρητικής σκέψης με τα περιεχόμενά του, προσαρμόζεται στα δεδομένα της συγκεκριμένης έρευνας. Η Πολυμεταβλητή Ανάλυση Μεταβλητότητας (MANOVA) χρησιμοποιήθηκε για τη σύγκριση των επιδόσεων της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου.

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το μοντέλο (μοντέλο των επιδόσεων των μαθητών σχετικά με τα καθήκοντα που απευθύνονται) που περιγράφει καλύτερα το θεωρητικό μοντέλο της Sierpinska (2002).



Προκειμένου να εκτιμηθεί αν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου, πραγματοποιήθηκε MANOVA με τις επιδόσεις των μαθητών σε αντανακλαστικά, συστημικά και αναλυτικά καθήκοντα στο πλαίσιο των προ και μετά test εξαρτημένων μεταβλητών.

Οι μέσοι όροι για την κάθε ομάδα φοιτητών στο πλαίσιο της προ και μετά τη διδασκαλία δοκιμών, σε κάθε κατηγορία της θεωρητικής σκέψης, φαίνονται στον πίνακα.

	Group 1		Group 2		Group 1		Group 2	
	Pre-test	SD	Pre-test	SD	Post-test	SD	Post-test	SD
reflective	0.383	0.26	0.338	0.27	0.617	0.26	0.568	0.30
systemic	0.667	0.21	0.546	0.24	0.600	0.20	0.486	0.19
analytic	0.481	0.29	0.463	0.30	0.762	0.19	0.598	0.27

Η ανάλυση έδειξε σημαντική επίπτωση στην πειραματική ομάδα στα αναλυτικά καθήκοντα $F(1,5)=4,42$ σε επίπεδο σημαντικότητας $p < 0.05$, και μια μη σημαντική για την ομάδα ελέγχου στην αντανακλαστική, συστημική και αναλυτική θεωρητική σκέψη των μαθητών. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που διδάχθηκαν με τους υπολογιστές την έννοια όριο, απέκτησαν μεγαλύτερη ευχέρεια στα αναλυτικά καθήκοντα των tests από ό, τι οι μαθητές στην ομάδα ελέγχου.

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τις προηγούμενες μελέτες (Arnold, 2004; Pierce και Stacey, 2007) που παρείχαν αποδεικτικά στοιχεία για το ότι οι υπολογιστές βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών της Ανάλυσης, μέσα από τις ευκαιρίες που προσφέρονται στην αναπαράσταση των εννοιών στις διάφορες μορφές.

4^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ. Η ΕΡΕΥΝΑ

4.1 Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου αρχικά καθιερώθηκε στην τάξη 11 (Β΄ Λυκείου) της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης , μέσω της εξερεύνησης του αθροίσματος των άπειρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο |λ|<1. Στην τάξη 12 , οι μαθητές που έχουν τα μαθηματικά ως ένα μάθημα βαρύτητας, διδάσκονται στοιχειώδη Ανάλυση, συμπεριλαμβανομένων των Συναρτήσεων , Όριο, Συνέχεια, Παραγώγους , εφαρμογές των παραγώγων σε μονότονες συναρτήσεις, ακρότατες τιμές , κυρτότητα, σημεία καμπής και μελέτη συνάρτησης καθώς και Ορισμένα , Αόριστα Ολοκλήρωματα.

Η έννοια του Ορίου παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα, ορισμένα εκ των οποίων είναι οπτικά - ενορατικά και χωρίς αυστηρή μαθηματική διατύπωση. Με βάση τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (2005), η διδασκαλία της έννοιας της Ορίου στοχεύει στην ανάπτυξη των εξής δυνατοτήτων :

(α) εύρεση του Ορίου μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο $x_0 \in R$

(β) γνώση των ιδιοτήτων των Ορίων και με τη βοήθειά τους, τον υπολογισμό των Ορίων απλών συναρτήσεων.

(γ) τον προσδιορισμό της ύπαρξης της άπειρων ορίων συναρτήσεων βασιζόμενοι σε γραφήματα τους.

(δ) υπολογισμού των Ορίων πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων με το x να τείνει $+\infty$ ή $-\infty$ και

(ε) γνώση των γραφικών παραστάσεων των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων και τα Ορίων που συνδέονται με αυτές.

Το παράδοξο με τις συνέπειες της διδασκαλίας στο παραπάνω πλαίσιο, είναι ότι υπάρχουν μαθητές με υψηλές επιδόσεις στις Εισαγωγικές Εξετάσεις στα Πανεπιστήμια, στο μάθημα των μαθηματικών, οι οποίοι μπορούν και υπολογίζουν δύσκολα όρια, ενώ συγχρόνως «υπολογίζουν» σχεδόν αμέσως το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$ για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-2 \ , \ x\le 1 \\ 5x \quad , \ x=2 \end{cases}$!!!

Οι παραπάνω δυνατότητες στις οποίες στοχεύει, υποτίθεται, η διδασκαλία του Ορίου, αρκούν άραγε για να αντιμετωπιστούν επιτυχώς από τους μαθητές, τα παρακάτω (ενδεικτικά) θέματα;

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:IR→IR, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005.$ Να βρείτε το λ∈IR έτσι ώστε: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2}=3.$

(Πανελλήνιες, Ιούλιος 2005)

2. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)}$ *(Πανελλήνιες, Μάϊος 2005)*

Η εύρεση των παραπάνω ορίων ελέγχει την εννοιολογική κατανόηση ή απαιτεί μόνο χρήση αλγεβρικού λογισμού;

Μια άλλη βασική επισήμανση είναι πως η πρώτη διδακτική προσέγγιση επιχειρείται με παραδείγματα του τύπου $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$, όπου βέβαια η παρέμβαση εξαντλείται στην αλγεβρική απλοποίηση, αποσιωπώντας όμως δύο πολύ σημαντικά στοιχεία: το πρώτο είναι η παρατήρηση πως παρά το γεγονός πως και ο αριθμητής και ο παρονομαστής παίρνουν τιμές πολύ κοντά στο μηδέν (όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2), εντούτοις το κλάσμα παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 4, κάτι που οι μαθητές ούτε καν αντιλαμβάνονται, ενώ το δεύτερο είναι πως κανένας μαθητής δεν κατανοεί τι σημαίνει x→2. Μια απλή ερώτηση θα μπορούσε να ήταν η εξής: «πόσο κοντά στο 2 μπορεί να πάει το x;».

4.2 Υποθέσεις έρευνας - Στόχοι

Από τους πιο σημαντικούς στόχους στην διδακτική των Μαθηματικών είναι ο εντοπισμός των εμποδίων που αναδεικνύονται κατά την διαδικασία μάθησης. Η ουσιαστική κατανόηση προφανώς επιτυγχάνεται με την υπερπήδηση των εμποδίων κι αυτό είναι άμεση συνάρτηση της διανοητικής ανάπτυξης του ατόμου, της ιστορικής ανάπτυξης της έννοιας που θα διδαχθεί, αλλά και του διδακτικού στυλ που θα επιλεγεί.

Η πιο βασική έννοια πάνω στην οποία θεμελιώνεται το οικοδόμημα της Ανάλυσης είναι η έννοια του Ορίου. Οι Davis & Vinner(1986) ισχυρίζονται ότι στην περίπτωση του Ορίου η εννοιακή εικόνα δεν συμφωνεί με τον εννοιακό ορισμό, ενώ περιγράφουν πέντε σημαντικές αιτίες λανθασμένων αντιλήψεων για την έννοια του Ορίου:

- Την επίδραση της γλώσσας
- Την εσφαλμένη ερμηνεία των προσωπικών εμπειριών
- Την επίδραση των ειδικών παραδειγμάτων
- Το υποκειμενικό χτίσιμο των διαφόρων μαθηματικών εννοιών
- Τη συνάθροιση μαθηματικών παραστάσεων από προηγούμενη μη συνεκτική γνώση.

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις φράσεις : «τείνει προς» , «προσεγγίζει», «έχει όριο (φράγμα)» και λιγότερο «συγκλίνει» για να αποδώσουν την έννοια του Ορίου. Οι μαθητές ερμηνεύουν το σύμβολο $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ως μια δυναμική διαδικασία: «καθώς το x προσεγγίζει το α, τότε το f(x) πλησιάζει το c». Συχνά θεωρούν ότι f(x)$\neq$c ως ένα μέρος της εσφαλμένης εννοιακής εικόνας του Ορίου.

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είχε σαν βασικό σκοπό να χαρτογραφήσει τις λανθασμένες αντιλήψεις – πεποιθήσεις των μαθητών της Γ΄ Λυκείου πάνω στην θεμελιώδη έννοια του ορίου και κατά πόσο αυτές συμφωνούν με τα συμπεράσματα των διεθνών ερευνών, αλλά και την αντίδραση τους στην διδασκαλία του ε – δ ορισμού με την βοήθεια της τεχνολογίας, υπό την έννοια της συνεισφοράς της στην καλύτερη εννοιολογική κατανόηση.

Η αρχική υπόθεση ήταν διττή :

- η σχολική διδασκαλία της έννοιας βασίζεται πάνω σε ένα στρεβλό μοντέλο, χωρίς επικέντρωση σε κομβικά σημεία, με αποτέλεσμα η πλειονότητα των μαθητών που εισάγονται στα Μαθηματικά Τμήματα να αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες. (Βαγενά, 2004)
- η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση δύσκολων εννοιών της Ανάλυσης, όπως π.χ. ο ε-δ ορισμός.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ :

1. Η διερεύνηση του βαθμού κατανόησης της έννοιας του Ορίου Συνάρτησης σε σημείο $\chi_0 \in R$ με βάση τις σχολικές γνώσεις.

2. Η ικανότητα αμφίδρομης μετάβασης από την αλγεβρική στην γεωμετρική γλώσσα.

3. Ο έλεγχος των πεποιθήσεών τους σε στοιχειώδη σημεία της έννοιας , όπως είναι τα πλευρικά όρια και τα σημεία συσσώρευσης αλλά και πιο εξειδικευμένα, όπως η σύνδεση της ύπαρξης του Ορίου στο χ_0 με την μονοτονία και τα ακρότατα.

4. Ο ενδεχόμενος επηρεασμός των πεποιθήσεων των 10 μαθητών που παρακολούθησαν το μάθημα για τον ε – δ Ορισμό, κάτι που ελέγχθηκε με πρόσθετο ερωτηματολόγιο (ΙΙ).

5. Οι απόψεις των μαθητών για την βοήθεια που μπορεί να προσφέρει ο υπολογιστής στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

4.3 Μεθοδολογία

Συμμετέχοντες: Μαθητές της Γ΄ Λυκείου της Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης , από το $2^{ο}$, $3^{ο}$, $5^{ο}$ Λύκειο της Καρδίτσας (30 άτομα) στα οποία συμπεριλαμβάνονται 10 μαθητές του $5^{ου}$ Λυκείου οι οποίοι συμμετείχαν και στην διδασκαλία του ε – δ Ορισμού του Ορίου με τη χρήση Λογισμικού.

Πως έγινε η διαδικασία και η Ανάλυση: Σε συνεννόηση με τους συναδέλφους των παραπάνω σχολείων επιλέχτηκαν οι κατά το δυνατόν καλύτεροι μαθητές της Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης και στους οποίους δόθηκε το γενικό ερωτηματολόγιο Ι για επεξεργασία – συμπλήρωση κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας. Παράλληλα δόθηκε η δυνατότητα σε κάποιους μαθητές να επεξεργαστούν τις ερωτήσεις σε χρόνο εκτός σχολείου. Στους 10 μαθητές που συμμετείχαν στο μάθημα για τον ε – δ Ορισμό του Ορίου, δόθηκε το αρχικό ερωτηματολόγιο Ι πριν την διεξαγωγή του μαθήματος και κατόπιν κλήθηκαν να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο ΙΙ (Παράρτημα).

Περιγραφή – Ανάλυση των ερωτήσεων

Η δομή των ερωτημάτων ήταν σε γενικές γραμμές η εξής :

→ Με το πρώτο ερώτημα επιδιώχτηκε να μπει ο μαθητής στη θέση του διδάσκοντα, ρόλος που απαιτεί όχι μόνο γνωστικό υπόβαθρο αλλά και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.

→ Το δεύτερο ερώτημα, που αποδείχτηκε και το πιο εύκολο για τους μαθητές, ήλεγχε την προσέγγιση της έννοιας του Ορίου μέσω γραφικών παραστάσεων

→ Στο τρίτο ερώτημα θέλαμε να ελέγξουμε πως οι μαθητές συνδέουν το πρόσημο των τιμών της Συνάρτησης με το Όριο στο $\chi_0 \in R$, αλλά και την δυνατότητα αμφίδρομης σύνδεσης γεωμετρικής και αλγεβρικής αναπαράστασης.

→ Το τέταρτο ερώτημα επιχειρούσε να ελέγξει στο κατά πόσον οι μαθητές γνωρίζουν για την απαραίτητη προϋπόθεση της ύπαρξης του Ορίου στο $\chi_0 \in R$, αλλά και να επιβεβαιώσει την υπόθεση περί επιφανειακής γνώσης των ιδιοτήτων των Ορίων.

→ Στο πέμπτο ερώτημα διερευνήθηκε η σύνδεση της ύπαρξης του Ορίου με την μονοτονία σε διάστημα γύρω από το χ_0 αλλά και με την ύπαρξη ακρότατου – φράγματος.

→ Τέλος στο $6^{ο}$ ερώτημα ελέγχθηκε η σύνδεση της ύπαρξης του Ορίου με την ύπαρξη των πλευρικών ορίων.

Ανάλυση των απαντήσεων

Θα σχολιάσουμε τις απαντήσεις των μαθητών στα έργα του ερωτηματολογίου από την ποιοτική τους κυρίως πλευρά. Οι απαντήσεις παρουσιάζουν ενδιαφέρον και είναι ενδεικτικές για τις αντιλήψεις που διατηρούν οι μαθητές για την έννοια του ορίου, βάσει της σχολικής διδασκαλίας που στηρίζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα που αναφέρθηκε.

Απαντήσεις Ερώτησης 1

Το 25% περίπου των μαθητών χρησιμοποιούν τις λέξεις «τείνει» , «πλησιάζει» , «παίρνει τιμές πολύ κοντά» , χωρίς βέβαια να αποσαφηνίζεται ο μαθηματικός ρόλος αυτών των λέξεων για την δυναμική διαδικασία προσέγγισης.

Ένα επίσης περίπου 25% των μαθητών δίνουν τελείως λανθασμένη απάντηση, αφού θεωρούν ότι f(x) = 5 για τιμές του χ που «τείνουν» στο 2.

Τρεις μαθητές δεν δίνουν κανενός είδους εξήγηση, ενώ ένας μαθητής συγχέει την εύρεση του Ορίου με τον υπολογισμό της τιμής $f(x_0)$, ευρήματα που σίγουρα συνδέονται με τον καθαρά αλγεβρικό υπολογισμό ορίων χωρίς καμία βαρύτητα στην εξήγηση της δυναμικής διαδικασίας.

Ένα 25% περίπου των μαθητών χρησιμοποιεί γραφική – γεωμετρική προσέγγιση.

Απαντήσεις Ερώτησης 2

Οι 7 από τους 30 μαθητές απαντούν σωστά και εξηγούν γιατί δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to 3} g(x)$, $\lim_{x\to 3} h(x)$, ενώ 6 μαθητές δίνουν σωστές απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μισοί περίπου μαθητές εμπλέκουν στις απαντήσεις τους την έννοια της συνέχειας, κάτι που δείχνει την ισχυρή σύνδεση της εξήγησης της θεμελιώδους αυτής έννοιας με την γραφική απεικόνιση, με δραματικά αποτελέσματα όπως δείχνει η σύγχρονη έρευνα.

Εντύπωση δημιουργεί το γεγονός ότι 6 μαθητές δίνουν μερικώς ή ολικώς λανθασμένες απαντήσεις.

Απαντήσεις Ερώτησης 3

Από τους 5 μαθητές που δίνουν σωστή απάντηση μόνο οι 2 χρησιμοποιούν και γραφική αναπαράσταση. Τρεις μαθητές προσπαθούν να κάνουν (αποτυχημένα) την σύνδεση «αν f(x) > 0 , ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$ », ενώ χαρακτηριστικό είναι ότι 4 μαθητές θεωρούν ότι $\chi_0 = +\infty$. Δύο μαθητές απαντούν καταφατικά και δεν δίνουν κανενός είδους εξήγηση , ενώ ένας μαθητής πιστεύει ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο σε σημείο ασυνέχειας. Σημαντικό είναι ότι 7 μαθητές δεν πρόσεξαν ότι $\chi_0 \in A$.

Απαντήσεις Ερώτησης 4

Στην ερώτηση αυτή απάντησαν σχεδόν όλοι οι μαθητές λάθος. Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις: «Το όριο είναι απλής μορφής, άρα δεν χρειάζεται κανένα από τα γνωστά τεχνάσματα για τον υπολογισμό του» , «Το όριο αυτό είναι απλό, άρα αντικαθιστούμε και δεν χρειάζεται να κάνουμε συζυγή», «Αφού f(x) , g(x) συνεχείς , θα έχουμε…..» , «Το όριο αυτό είναι άθροισμα δύο άλλων συναρτήσεων». Όλες οι απαντήσεις είχαν ως κατάληξη την λανθασμένη σχέση $\lim_{x \to 3}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x) = 8 + 3 = 11$ την οποία έγραψαν 13 μαθητές χωρίς καμιά δικαιολόγηση. Μόνο δύο μαθητές έδωσαν βαρύτητα στο αν το 3 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f + g με τον έναν από τους δύο να κάνει επιπόλαιο λάθος, με αποτέλεσμα η σωστή απάντηση να είναι μοναδική.

Τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν τον ισχυρό προσανατολισμό των μαθητών προς τον καθαρά αλγεβρική υφή του Ορίου και την γνώση διαφόρων τεχνικών, αγνοώντας την δυναμική διαδικασία προσέγγισης. Αυτό έρχεται να συμφωνήσει με την έρευνα των Elia, Gagatsis, Panaura, Zachariades, Zoulinaki (2009), όπου πολλοί μαθητές πιστεύουν πως αρκεί το χ_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης,

για να έχει νόημα το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ανάμεσα στις τετριμμένες, λανθασμένες απαντήσεις υπήρχαν και απαντήσεις μαθητών που ήταν οι καλύτεροι (στα μαθηματικά) των σχολείων τους, καταλήγουμε αβίαστα στο συμπέρασμα της επιδερμικής και στρεβλής διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών εναρμονισμένης με την χονδροειδή θεματολογία των πανελληνίων εξετάσεων.(*ενδεικτική αναφορά παραπάνω*)

Απαντήσεις Ερωτήσεων 5 και 6

Ερώτηση 5

α) **(16 Σ)** και **(14 Λ)**

β) **(7 Σ)** και **(23 Λ)**

γ) **(20 Σ)** και **(10 Λ)**

δ) **(12 Σ)** και **(18 Λ)**

Ερώτηση 6

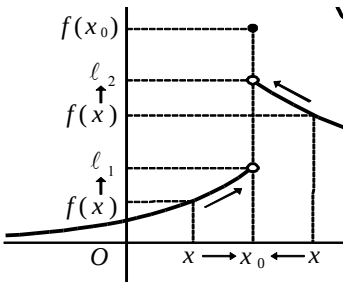
(24 Σ) και **(6 Λ)**

Στην ερώτηση 5 ο συνήθης συνδυασμός απαντήσεων ήταν α) **Σ** , β) **Λ** , γ) **Σ** , δ) **Λ** ένδειξη της ισχυρής σύνδεσης της ύπαρξης ορίου με την ύπαρξη μονοτονίας της συνάρτησης σε διάστημα γύρω από το χ_0 , ενώ η σύνδεση με την ύπαρξη φράγματος – ακροτάτου ήταν σαφώς πιο χαλαρή.

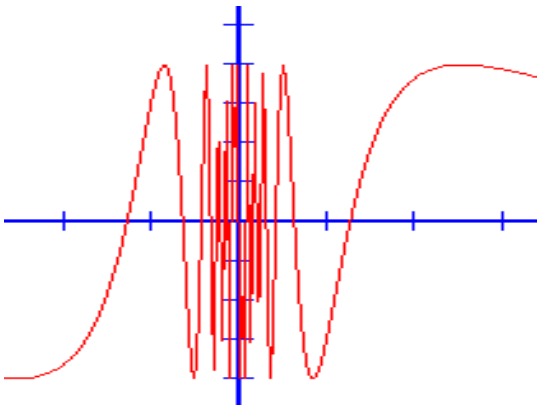
Στην ερώτηση 6 το 80% των μαθητών απάντησε λανθασμένα, επηρεασμένοι προφανώς από την ισοδυναμία

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l,$$

και τον γενικότερο προσανατολισμό του βιβλίου σε σχήματα σαν το παρακάτω



Η περίπτωση συναρτήσεων, όπου δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια όταν το x τείνει στο x_0, όπως π.χ. της συνάρτησης f(x)=ημ(1/x) για x≠0 και f(0)=0, δεν αναφέρεται πουθενά.



Παρατηρούμε δηλαδή ότι για το πολύ γνωστό στους μαθητές όριο $\lim_{x\to 0}\left(x\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$, δεν γίνεται αναφορά για το ότι εδώ έχουμε το όριο γινομένου δύο συναρτήσεων εκ των οποίων η μία δεν έχει όριο. Το παραπάνω αποτέλεσμα έρχεται να συμφωνήσει με την έρευνα των Elia, Gagatsis, Panaura, Zachariades, Zoulinaki (2009), όπου η ιδέα που παρατηρήθηκε συχνά μεταξύ των μαθητών ήταν ότι το Όριο μιας συνάρτησης f δεν υπάρχει στο x_0, **μόνο όταν** τα όρια από αριστερά και δεξιά δεν είναι Ίσα.

4.4 Διδασκαλία εισαγωγής στον ε-δ ορισμό μέσω λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας

Η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος είναι το σημαντικότερο μέσο που μπορεί να υποστηρίξει σε σχολικό επίπεδο τη *λειτουργική, λογική, αισθητική* αξία των μαθηματικών. Προσεγγίζοντας τα μαθηματικά μέσω επίλυσης προβλήματος δημιουργούμε ένα «πραγματικό» πλαίσιο, που δικαιώνει τα μαθηματικά στα μάτια του μαθητή. Η ανάπτυξη των δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη λύση του, δίνουν κίνητρο στο μαθητή για τη μάθηση νέων εννοιών ή για την ενίσχυση ήδη αποκτημένων δεξιοτήτων (Stanic & Kilpatrick, 1989; NCTM , 2000 ; Π.Ι., 2007). Επίσης έχει υπογραμμιστεί η σημασία της επίλυσης προβλήματος ως μέσο που μπορεί να ενισχύσει τον λογικό συλλογισμό (Polya, 1980), ενώ αναδεικνύει και την αισθητική αξία των μαθηματικών υπό την έννοια ότι ο μαθητής δοκιμάζει μια σειρά συναισθημάτων που συνδέονται με τα διάφορα στάδια επίλυσης.

Η προοπτική αξιοποίησης της ψηφιακής τεχνολογίας για παιδαγωγική καινοτομία προώθησε την αντικατάσταση του όρου «σχέδιο μαθήματος» με τον

όρο «εκπαιδευτικό σενάριο». Μέσα από μια κοινωνιολογική προσέγγιση, το σενάριο χαρακτηρίζεται ως μια περίπλοκη και πολυσχιδής μορφή μεταμοντέρνου εγγραμματισμού (Lankshear & Knobel, 2001). Η κατασκευή σεναρίων είναι ένας τρόπος να τεθούν σημαντικές ερωτήσεις της μορφής «τι θα γινόταν αν ….». Αποτελεί επομένως ένα μέσο που βοηθά ομάδες ανθρώπων να αλλάξουν τον τρόπο που σκέφτονται για ένα πρόβλημα, να έρθουν σε σύγκρουση με υπάρχουσες παγιωμένες νοοτροπίες και έτσι, να μάθουν. (Κυνηγός, 2007). Η παιδαγωγική αφετηρία του σχεδιασμού ενός τέτοιου περιβάλλοντος είναι συνδεδεμένη με τη δημιουργία ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων (Κυνηγός κ.α. , 2008).

Θέλοντας να υποστηρίξουμε την παραπάνω διδακτική προσέγγιση τυπικών μαθηματικών εννοιών μέσω της τεχνολογίας, θα μπορούσαμε να σημειώσουμε πως η ανάπτυξη προκλητικού περιβάλλοντος μέσα σε ένα πρόβλημα προσελκύει το ενδιαφέρον του μαθητή και τον ωθεί να αναπτύξει ιδέες ώστε να κατασκευάσει τις έννοιες. Σύμφωνα με τον Goldenberg(1999), «*κάθε δραστηριότητα πρέπει να βασίζεται στη γεωμετρία. Εργαλεία όπως το Geometer's Sketchpad ή το Gabri παρουσιάζουν γεωμετρικές δομές οι οποίες είναι συναρτήσεις ορισμένες με γεωμετρικούς παρά αλγεβρικούς κανόνες, μεταβάλλοντας τη θέση του αντικειμένου(μεταβλητή) και παρατηρώντας την επίδραση πάνω σε αυτή. Έτσι τα* ***γεωμετρικά τεχνολογικά εργαλεία αποτελούν μια εξαιρετική γέφυρα μεταξύ της Γεωμετρίας και της Ανάλυσης***.»

Με την τεχνολογική υποστήριξη του zoom μπορούμε να διερευνήσουμε την δυνατότητα εισαγωγής των μαθητών στις βασικές ιδέες των απειροελάχιστων. Ουσιώδες παραμένει το ερώτημα «αν η μετάβαση από την οπτική ερμηνεία της έννοιας του ορίου στον επίσημο και αυστηρό συλλογισμό, μπορεί να επιτευχθεί μόνο με την χρήση των γραφικών παραστάσεων.» (Kidron, Zelavi & Openhaim, 2001). Η διαδικασία του animation παράγει τις αλλαγές των τιμών των πινάκων, πράγμα που επιτρέπει στους μαθητές να δουν την δυναμική διαδικασία.

Ερευνητικά συμπεράσματα υποστηρίζουν (Oliveiro, 1999) ότι η παρουσίαση αποδείξεων μπορεί να αναπτυχθεί ως διαδικασία μέσα σε ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και το περιβάλλον του λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει την

διαχείριση της σχέσης μεταξύ εμπειρικού και θεωρητικού τομέα των μαθηματικών. «Η διδακτική, η ύλη και η τεχνολογία πρέπει να έχουν νόημα μαζί ως σύνθεση» (Goldenberg, P.(1999)).

Σύμφωνα με την Robutti (2002), πρέπει να επιλέξουμε το είδος της τεχνολογίας και τον τρόπο χρήσης της από τον δάσκαλο ώστε να μπορεί να μεταβιβάσει μια δεδομένη έννοια με έναν ιδιαίτερο τρόπο. *Αυτό που προωθεί την αλλαγή είναι το διδακτικό πρόγραμμα στο οποίο η τεχνολογία παρεμβάλλεται και ειδικότερα οι διδακτικές ακολουθίες που προγραμματίζονται ώστε οι έννοιες της Ανάλυσης να εισαχθούν με κατάλληλη χρήση της τεχνολογίας*.

Έχει παρατηρηθεί ότι ορισμένοι μαθητές αντιμετωπίζουν το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, ως διαδικασία προσέγγισης με βάση την αρχική διαισθητική ερμηνεία της έννοιας των ορίων, ακόμα και μετά την διδασκαλία του ε – δ ορισμού. (Parameswaran, 2006). Επίσης, ο Meehan (2002) υποστηρίζει ότι μερικοί μαθητές δεν κατανοούν την διαφορά μεταξύ των ορισμών στην καθημερινή ζωή και των μαθηματικών ορισμών. Στην καθημερινή ζωή σπάνια χρησιμοποιούν τυπικούς ορισμούς για να κατανοήσουν τον κόσμο γύρω τους, ενώ στα μαθηματικά οι διάφορες έννοιες καθορίζονται από τους ορισμούς και αυτή η μαθηματική σκέψη δεν εμφανίζεται ως μια φυσική διαδικασία.

Ενεργώντας με βάση τα παραπάνω πλαίσια και μετά τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο Ι, οργανώθηκε ένα μάθημα πάνω στην διδασκαλία του ε-δ ορισμού με τη χρήση του λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας Euclidraw, με βάση την δραστηριότητα *2.1 Δραστηριότητα: Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης σε σημείο,* που περιλαμβάνεται στο έργο Calgeo : «Διδασκαλία της Ανάλυσης με χρήση Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας» (www.math.uoa.gr/calgeo). Η δραστηριότητα περιείχε το κατάλληλο αρχείο 2.1.1 activity.gr.euc με το αντίστοιχο φύλλο εργασίας (2.1.1 Φύλλο εργασίας (Ανάλυση), εισαγωγή στο όριο συνάρτησης σε σημείο), με πρόβλημα εκκίνησης το εξής (Παράρτημα Ι):

Μια κάμερα καταγράφει έναν αγώνα των 100m. Με ποιο τρόπο θα μπορούσαν τα δεδομένα της κάμερας να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της ταχύτητας ενός αθλητή κατά τη χρονική στιγμή T=6sec;

Το μάθημα είχε χρονική διάρκεια λίγο περισσότερο από μια διδακτική ώρα. Οι μαθητές βρισκόταν ο καθένας μπροστά σε έναν υπολογιστή στον οποίο είχε φορτωθεί το λογισμικό και το σχετικό αρχείο, ενώ το φύλλο εργασίας καθοδηγούσε τις κινήσεις τους στο αρχείο εργασίας. Η όλη διαδικασία προέβλεπε μια σειρά ενεργειών από μέρους των μαθητών, υπό την διακριτική καθοδήγηση του διδάσκοντος μέσω συζήτησης στους προβληματισμούς που προέκυπταν. Η κατάληξη των ενεργειών θα έπρεπε να ήταν η διατύπωση του ε – δ ορισμού.

Ο βαθμός συγκέντρωσης των μαθητών στην εργασία τους ήταν υψηλός και η συνεργασία τους με τον διδάσκοντα πολύ καλή. Ο νέος τρόπος διδασκαλίας με τη χρήση του λογισμικού σε συνδυασμό με το ότι ο ε – δ ορισμός του ορίου συνάρτησης δεν τους είχε ξανά διδαχθεί, δημιούργησαν ένα πλαίσιο γνήσιας αυτενέργειας των μαθητών. Η δυναμική οπτικοποίηση αύξησε την προσοχή των μαθητών στην μελέτη της έννοιας. Η συμπεριφορά τους όσον αφορά την χρήση του λογισμικού ήταν καλή, καθώς αυτά που απαιτούνταν να κάνουν ήταν εύκολα, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις που χρειάστηκαν πρόσθετες ρυθμίσεις των μενού του προγράμματος (όπως π.χ. στην αλλαγή της ακρίβειας των δεκαδικών ψηφίων στις μετρήσεις και στην εισαγωγή αριθμών), ή στην χρήση του παράθυρου μεγέθυνσης, δεν υπήρξε εμπλοκή.

Η μόνη, μικρή αδυναμία τους φάνηκε στα βήματα Ε9 , Ε10 όπου υπήρξε εμπλοκή απολύτων τιμών και ουσιαστικά είχαμε το πέρασμα από την διαισθητική κατανόηση στην αυστηρή διατύπωση, η οποία όμως επήλθε με έναν μάλλον ομαλό τρόπο. Χαρακτηριστικό ήταν το αίσθημα ευφορίας που εξέφρασαν οι μαθητές, μέσω των σχολίων που διατύπωσαν με το τέλος του μαθήματος, όταν ζητήθηκε από τον διδάσκοντα να δουν τον ε-δ ορισμό του βιβλίου (στον οποίο είχαν καταλήξει) :

«τα καταφέραμε…..νομίζω πως κατάλαβα τον ορισμό»

«πως είναι δυνατόν να βλέπαμε πόσα διαφορετικά πράγματα εμπεριέχει ο ορισμός χωρίς το λογισμικό;»

«όταν είχα δει αρχικά τον ορισμό, μου φαίνονταν ιερογλυφικά. Τώρα κατάλαβα τι σημαίνει».

Γενικά οι μαθητές δήλωσαν ενθουσιασμένοι με τον νέο τρόπο προσέγγισης, διερωτώμενοι μάλιστα «γιατί δεν διδασκόμαστε με αυτόν τον τρόπο τις έννοιες των μαθηματικών;». Η επίδοσή τους όμως στο ερωτηματολόγιο ΙΙ δεν ήταν η αναμενόμενη.

Περιγραφή της δραστηριότητας - Περιγραφή του αρχείου .euc – Συμπεριφορά των μαθητών κατά την διάρκεια του μαθήματος

Η δραστηριότητα χρησιμοποιεί ως αφετηρία προβληματισμού ένα πρόβλημα στιγμιαίας ταχύτητας, όπου φυσικά υποκρύπτεται μια οριακή διαδικασία. Οι μαθητές βέβαια στα πλαίσια της καθημερινής τους εμπειρίας είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της μέσης ταχύτητας. Έτσι, δημιουργήθηκε ένα ελκυστικό περιβάλλον αυτενέργειας των μαθητών. Η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας λειτούργησε με δύο τρόπους: παρέχοντας αρχικά αριθμητικά αποτελέσματα, ώστε οι μαθητές να εξοικονομήσουν χρόνο που θα χρειάζονταν για υπολογισμούς, ενώ στη συνέχεια τα αριθμητικά δεδομένα αναπαρίστανται γραφικά. Ο στόχος είναι οι μαθητές να μπορέσουν να οπτικοποιήσουν την έννοια της σύγκλισης και να πραγματοποιήσουν την ομαλή μετάβαση στον ε-δ ορισμό.

Κομβικής σημασίας για την επίτευξη αυτού, είναι η χρήση των ζωνών του ε και του δ στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, η οποία δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να χειριστούν δυναμικά τις θεμελιώδεις παραμέτρους του προβλήματος, προκειμένου να κατανοήσουν τη σχέση του δ με το ε. Η χρήση της κόκκινης και της πράσινης περιοχής αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο που επιτρέπει την λεκτική αναπαράσταση σύνθετων εκφράσεων. Για παράδειγμα η έκφραση: «όλα τα ζεύγη (x,f(x)) για τα οποία $x \in (T-\delta, T+\delta)$ και $f(x) \in (U-\varepsilon, U+\varepsilon)$» μπορεί απλά να δοθεί ως: «το κομμάτι της γραφικής παράστασης που βρίσκεται στην πράσινη περιοχή». Οι μαθητές έπρεπε να εκτελέσουν τις παρακάτω ενέργειες:

E1: Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$	t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$
…….		……..	
5,93		6,07	
5,95		6,03	
5,99		6,01	
5,995		6,005	
5,999		6,001	
5,9999		6,0001	
5,99999		6,00001	

Στο περιβάλλον του αρχείου *2.1.1.activity.gr.euc* του EucliDraw έχουμε τα δεδομένα της κάμερας. Οι μαθητές άλλαζαν τις τιμές του t που πλησίαζαν το T=6 από μικρότερες και από μεγαλύτερες τιμές και παρατήρησαν πως άλλαζαν και οι τιμές του *s(t)* που δίνουν την απόσταση που έχει καλύψει ο αθλητής έως τη χρονική στιγμή *t*. Στη συνέχεια εμφάνισαν τη μέση ταχύτητα $\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$ (κίτρινο πλαίσιο).

E1: Ποιον αριθμό πλησιάζει η μέση ταχύτητα καθώς το t πλησιάζει το T=6sec;

Οι μαθητές παρατήρησαν πως καθώς το t πλησιάζει το T από δεξιά και από αριστερά, η μέση ταχύτητα πλησιάζει τα 10m/sec. Μέσω της ερώτησης «πόσο κοντά μπορεί να βρεθεί το t στο T» οι μαθητές (με την βοήθεια του διδάσκοντος) άλλαξαν την ακρίβεια των μετρήσεων (από το μενού «Ρυθμίσεις →Παράμετροι εργαλείων→Αρθμ_ΠρΒημ) και διαπίστωσαν πως προσεγγίζουμε το T (μέσω του t) όλο και πιο κοντά, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει t = T.

E2: Ποια είναι η ταχύτητα του αθλητή τη χρονική στιγμή T=6sec;

Οι μαθητές απάντησαν ότι «πρέπει να είναι 10», «λογικά θα είναι 10».

Κατόπιν εμφάνισαν τη συνάρτηση της μέσης ταχύτητας U(t) όπως και το κινητό σημείο (t, U(t)) ώστε να επιβεβαιώσουν γραφικά την απάντησή τους.

Στη συνέχεια εμφάνισαν την ε-ζώνη, για τα σημεία της οποίας οι μαθητές (μετά από κατάλληλη ερώτηση) παρατήρησαν πως έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από *L-ε* και μικρότερη από *L+ε*.

Μετακίνησαν το *t* έτσι ώστε το σημείο (t,U(t)) να μπαινοβγαίνει στην *ε*-ζώνη, παρατηρώντας παράλληλα τις τιμές της μέσης ταχύτητας.

E3: Για ποιες τιμές του t το σημείο (t, U(t)) ανήκει στην ε-ζώνη για ε=0,8;

Οι μαθητές εμφάνισαν την *δ*-ζώνη, τα σημεία της οποίας έχουν τετμημένη μεγαλύτερη του Τ-δ και μικρότερη του Τ+δ. Οι μαθητές ρωτήθηκαν να διευκρινίσουν τι παριστάνουν τα σημεία της πράσινης και κόκκινης ζώνης. Οι απαντήσεις δόθηκαν (σχεδόν καθολικά επιτυχώς) μετά από πειραματισμό μεταβολών των τιμών του t και κατ΄ επέκταση του U(t).

Ε4: Προσπαθήστε να βρείτε ένα δ τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης στην κόκκινη περιοχή.

Οι μαθητές διαπίστωσαν (κατόπιν πειραματισμού) πως υπάρχουν πολλές τέτοιες κατάλληλες τιμές του δ.(για ε=0,8)

Ε5: Μειώστε το ε σε 0,5 και βρείτε κατάλληλο δ ώστε τα σημεία (t, U(t)) να μην βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή.

Αντιμετωπίστηκε σωστά από το σύνολο των μαθητών με κάποια μικρή χρονική διαφορά.

Ε6: Εάν ε=0,05 μπορείτε να βρείτε δ με την παραπάνω ιδιότητα;

Εδώ οι μαθητές κλήθηκαν να εμφανίσουν το παράθυρο μεγέθυνσης καθώς η ε-ζώνη ίσα που φαινόταν. Έτσι βοηθήθηκαν ώστε να δουν σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο (Τ,L). Μπόρεσαν λοιπόν να βρουν και πάλι κατάλληλο δ.

Ε7: Εάν το ε μικρύνει κι άλλο θα μπορούμε πάντα να βρούμε δ με την παραπάνω ιδιότητα;

Το συγκεκριμένο βήμα ήταν σημαντικό για την επιτυχία του μαθήματος και οι μαθητές επαναχρησιμοποιώντας το παράθυρο μεγέθυνσης κατέληξαν στο συμπέρασμα πως όσο και να μικρύνει το ε, πάντοτε μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλο δ. Δημιουργώντας το παράθυρο μεγέθυνσης, οι μεταβολές του δ ήταν ευκρινέστερες όσον αφορά την μεταβολή της κόκκινης ζώνης.

Ε8: Συμπληρώστε τα κενά της παρακάτω πρότασης με τα κατάλληλα χρώματα ώστε να εκφράζει το συμπέρασμα της Ε7.

"Για κάθε ε>0 μπορούμε να βρούμε δ>0 τέτοιο ώστε η συνάρτηση να μην βρίσκεται στην …… ……. περιοχή."

Κάποιοι από τους μαθητές δεν συμπλήρωσαν αμέσως την κατάλληλη λέξη. Πιθανόν θα τους δυσκόλευε περισσότερο η περίπτωση να ήταν η τιμή της συνάρτησης στο Τ = 6 μέσα στην κόκκινη περιοχή, κάτι που δεν μπορούσε να υπάρχει εδώ, λόγω της φύσης του προβλήματος.

Ε9: Συμπληρώστε τα κενά ώστε η παρακάτω πρόταση να αποδίδει το συμπέρασμα της Ε7.

Τα…….. μπορούν να είναι όσο κοντά θέλουμε στο …… αρκεί τα …. να είναι κατάλληλα κοντά στο…… και διαφορετικά του …….

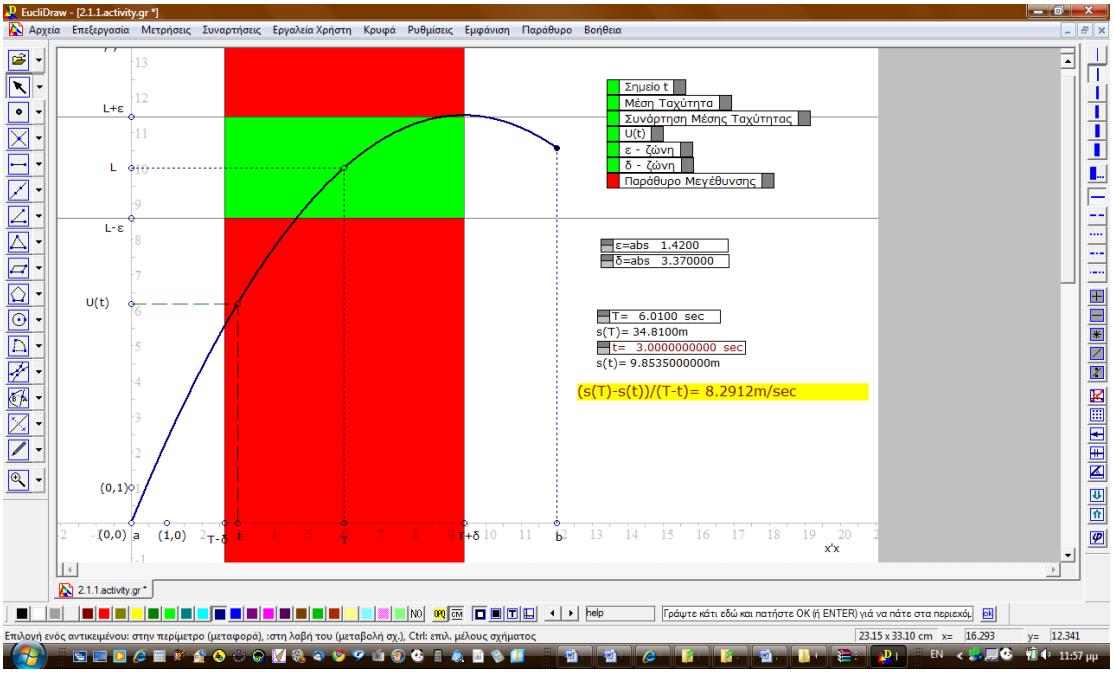
Εδώ παρουσιάστηκαν κάποιες δυσκολίες στην επιτυχή συμπλήρωση των κενών, καθώς οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν σύμβολα για την περιγραφή των οπτικών τους συμπερασμάτων και βέβαια να κατανοήσουν τον ρόλο των ε και δ. Οι

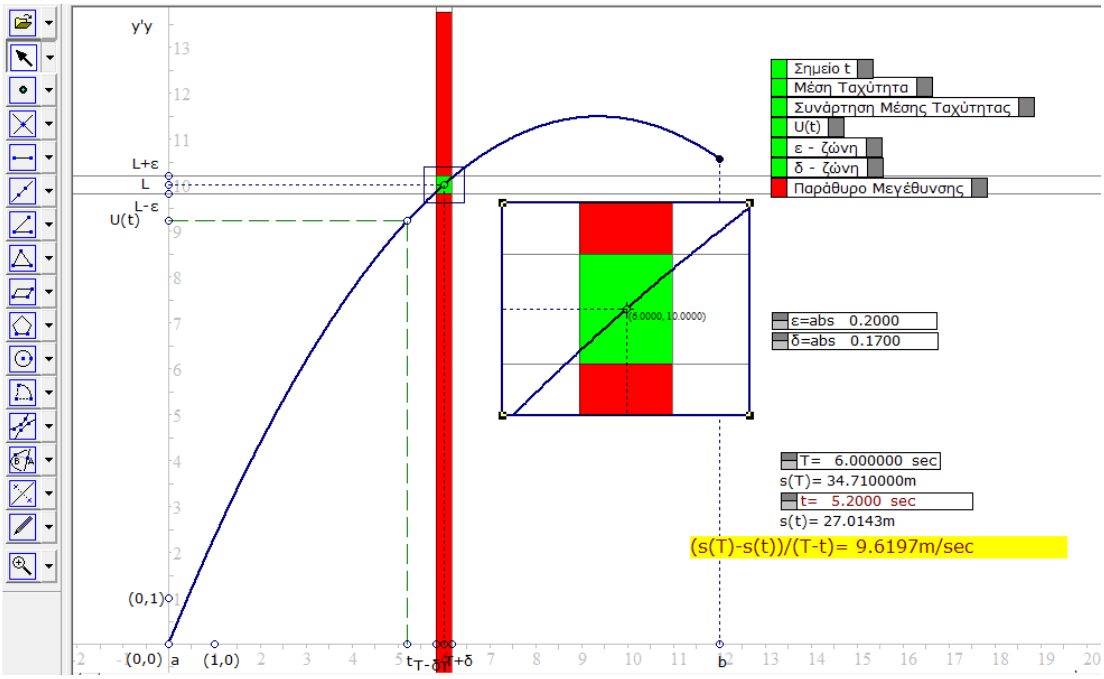
μαθητές χρειάστηκαν 2 – 3 λεπτά μέσα από κάποια συζήτηση με τον διδάσκοντα για να καταλήξουν στην σωστή συμπλήρωση.

Ε10: Προσπαθήστε να διατυπώσετε το συμπέρασμα της Ε7, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.

Το τελευταίο βήμα ήταν το πιο κρίσιμο και βέβαια το πιο δύσκολο. Ο διδάσκων θεώρησε καλό να ρωτήσει πρώτα τους μαθητές για την γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών, ώστε συγχρόνως να τους προδιαθέσει για τις απαντήσεις. Παρά την υπενθύμιση και την συζήτηση που ακολούθησε («για ποια ε βρίσκαμε κάθε φορά ένα δ;» , «σε ποια διαστήματα ανήκουν οι τιμές t και U(t);» , «μπορεί το t να πάρει την τιμή T = 6;» , οι μαθητές γενικά δυσκολεύτηκαν στην επιτυχή διατύπωση του φορμαλιστικού ορισμού. Κυρίως η δυσκολία εντοπίστηκε στην διατύπωση των ανισοτικών σχέσεων. [Για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε εάν $t \in (t - T, t + T)$ με $t \neq T$, τότε $U(t) \in (L - \varepsilon, L+\varepsilon)$ ή ισοδύναμα για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε εάν $0<|t - T|< \delta$ τότε $|U(t) - L| < \varepsilon$].

Αυτό μάλλον επιβεβαιώνει το συμπέρασμα της ερευνητικής βιβλιογραφίας περί των δυσκολιών κατανόησης και ερμηνείας των συμβόλων του ορισμού.





4.5 *Απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο II*

Μετά το μάθημα στον ε-δ ορισμό με την βοήθεια του λογισμικού και του φύλλου εργασίας, δόθηκε στους μαθητές ένα δεύτερο ερωτηματολόγιο(ΙΙ), στο οποίο ζητήθηκαν κάποια στοιχεία σχετικά με το μάθημα (παρατηρήσεις, δυσκολίες, κρίσεις), απαντήσεις σε έργα που εστίαζαν στον ε-δ ορισμό αλλά και στην εννοιολογική κατανόηση. Επίσης οι μαθητές απάντησαν σε τρία ίδια έργα του πρώτου ερωτηματολογίου. Η διάρθρωση των ερωτήσεων περιείχε τους παρακάτω άξονες πληροφοριών:

1ος άξονας : Βαθμός αρεσκείας για τα Μαθηματικά (ερ. 2)

Οι μαθητές που συμμετείχαν στο μάθημα με τη βοήθεια του υπολογιστή ήταν και οι θεωρητικά καλύτεροι στο σχολείο τους σε επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών, κάτι που επαληθεύτηκε με τις υψηλές βαθμολογίες που αποκόμισαν

στην εξέταση τους στο μάθημα Κατεύθυνσης στις Πανελλήνιες εξετάσεις. Παρά το γεγονός όμως αυτό οι προτιμήσεις τους για τον καθορισμό του βαθμού αρεσκείας του μαθήματος ήταν μοιρασμένες ανάμεσα στο «μου αρέσουν πολύ τα Μαθηματικά» και στο «μου αρέσουν λίγο τα Μαθηματικά». Η πρώτη απάντηση συνοδεύτηκε με τον χαρακτηρισμό «τα Μαθηματικά είναι εύκολα», ενώ η δεύτερη με το χαρακτηριστικό «τα Μαθηματικά είναι δύσκολα», κάτι που φαντάζει μάλλον λογικό.

Το γεγονός πάντως πως μαθητές που δείχνουν πως το μάθημα των Μαθηματικών δεν τους ενθουσιάζει αλλά συγχρόνως έχουν και πολύ καλές επιδόσεις στις εισαγωγικές εξετάσεις στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, θα πρέπει να προβληματίσει για την ποιότητα της Μαθηματικής Παιδείας που αρχίζει με την επαφή των παιδιών με προ-μαθηματικές έννοιες μέχρι και τις σπουδές τους στο Πανεπιστήμιο. Το παραπάνω συμπέρασμα θεωρεί ως φυσιολογική την ισότητα (μου αρέσουν λίγο τα Μαθηματικά = χαμηλή μαθηματική νοοτροπία και σκέψη), κάτι όμως που πρέπει να ερευνηθεί περαιτέρω.

<u>2ος άξονας</u> : Εμπειρία στους υπολογιστές (ερ. 4)

Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν πως χρησιμοποιούν υπολογιστή και στο σπίτι και στο σχολείο, ενώ οι υπόλοιποι μόνο στο σχολείο. Δεν υπήρξε κάποιος μαθητής που ανέφερε ότι δεν χρησιμοποιεί καθόλου υπολογιστή. Στις Η.Π.Α υπήρξε μια μελέτη ανάλυσης των εκπαιδευτικών πρακτικών, με σκοπό την διερεύνηση ύπαρξης δυνητικών σχέσεων μεταξύ χρήσης υπολογιστή(γενικά) και μαθηματικών ικανοτήτων – γνώσεων σε 16-χρονους μαθητές.(E.C. Papanastasiou & R.E. Ferdig, 2006). Η μελέτη έδωσε ισχυρή σημασία στα δεδομένα που λαμβάνονται από τον διαγωνισμό της PISA (Program for International Student Assessment), σύμφωνα με την οποία ορίζεται ως μαθηματική μόρφωση η ικανότητα να εντοπίζουν και να κατανοούν οι μαθητές το ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά, αλλά και να παίρνουν σωστές αποφάσεις, όπως και να συμμετέχουν σε μαθηματικές δραστηριότητες με τρόπους που θα βοηθήσουν το άτομο να καταστεί ενεργός πολίτης με στοχασμό. Η μελέτη έδειξε ότι οι δραστηριότητες του υπολογιστή δεν είναι σε όλα εξίσου επωφελής για τη βελτίωση της μαθηματικής παιδείας. Μαθητές

οι οποίοι ήταν εξοικειωμένοι με λογισμικά γραφικών σχεδίασης ή ζωγραφική, είχαν την τάση να έχουν χαμηλότερα επίπεδα των μαθηματικών γνώσεων, ενώ η χρήση υπολογιστή στο σπίτι για ηλεκτρονικές επικοινωνίες (π.χ., e-mail ή "chat rooms") σχετίζονταν με υψηλότερα επίπεδα των μαθηματικών γνώσεων.

Επιπλέον τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συχνή και χωρίς επιτήρηση των εκπαιδευτικών, χρήση του υπολογιστή στο σπίτι θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές να χρησιμοποιούν στρατηγικές για την επίλυση των προβλημάτων τους σε συχνότερη βάση. Ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα αυτής της μελέτης είναι ότι η συχνή χρήση του υπολογιστή για τον προγραμματισμό συνδέεται με χαμηλότερα επίπεδα επίτευξης των μαθηματικών. Δραστηριότητες προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών ανήκουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο σκέψης δεξιοτήτων, συνδέονται στενά με τις δεξιότητες που απαιτούνται για τα θέματα των μαθηματικών, έτσι δεν είναι σαφές γιατί αυτή η αρνητική συσχέτιση υπάρχει με τον τρόπο αυτό. Μια πιθανότητα είναι ότι οι φοιτητές που ενδιαφέρονται για τον προγραμματισμό είναι τόσο επικεντρωμένοι στον προγραμματισμό των δραστηριοτήτων, ώστε να μην επιλέγουν να εστιάσουν τόσο πολύ σε άλλους θεματικούς τομείς όπως τα μαθηματικά. Ωστόσο, αποφασιστικής σημασίας αποτελέσματα για αυτήν την ακριβή σχέση δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς μια πιο εμπεριστατωμένη πειραματική εξέταση της σχέσης αυτής.

Γίνεται λοιπόν σαφές ότι η «παθητική» ή μηχανική χρήση του υπολογιστή από μόνη της δεν σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με αυξημένη ακαδημαϊκή ανάπτυξη, ειδικά στη μαθηματική απόκτηση γνώσεων. Τα διαφορετικά είδη των δραστηριοτήτων που εκτελούνται στον υπολογιστή σχετίζονται με διαφορετικά επίπεδα και είδη σκέψης, τα οποία με τη σειρά τους συνδέονται με πολύ διαφορετικούς τύπους αποτελεσμάτων.

Ερευνητικές μελέτες έχουν εξετάσει πώς η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μάθουν οι μαθητές μαθηματικά σε πολλαπλά εκπαιδευτικά επίπεδα (Dugdale, 2001; Lloyd & Wilson, 2001; Jiang & McClintock, 2000 ; Norman, 1993) καταλήγοντας με την υπόδειξη ότι η τεχνολογία δεν είναι ούτε καλή ούτε κακή, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με θετικό και αρνητικό τρόπο σε συγκεκριμένες γνωστικές περιοχές. Οι εκπαιδευτικοί που ενδιαφέρονται για την

τεχνολογία πρέπει να κατανοήσουν τις ειδικές χρήσεις της για την αύξηση της μαθηματικής μόρφωσης.

<u>3ος άξονας</u> : Απόψεις για το μάθημα

Ο συγκεκριμένος άξονας περιλαμβάνει τους εξής τομείς :

a) Γενική αξιολόγηση του μαθήματος από τους μαθητές. (ερ. 1)

b) Ποια ήταν η διαφορά του μαθήματος για τα όρια που παρακολουθήσατε σε σχέση με τα άλλα μαθήματα μαθηματικών (ερ. 3)

c) Τι σας άρεσε στο μάθημα, τι δεν σας άρεσε (ερ. 5 και ερ. 6)

d) Δυσκολίες που αντιμετωπίσατε (ερ. 7)

e) Τι θα θέλατε να ήταν διαφορετικό στο μάθημα (ερ. 8)

Σαν γενικό σχόλιο στις ερωτήσεις 5,6,7,8 θα λέγαμε ότι οι μαθητές εστίασαν τον ενθουσιασμό τους όπως ήταν φυσικό στην δυναμική αναπαράσταση των υπό εξέταση εννοιών που εμπεριέχει ο ε-δ ορισμός, διατυπώνοντας την άποψη ότι τους βοήθησε να εμβαθύνουν στις έννοιες. Στα στοιχεία που δεν τους άρεσαν στο μάθημα, λίγοι μαθητές συμπεριέλαβαν την κάπως γρήγορη ροή του μαθήματος, ενώ οι περισσότεροι δεν ανέφεραν κάτι. Σε αυτά που τους δυσκόλεψαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος, οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν την σύνδεση των ε και δ. Δεν πρότειναν να αλλάξει κάτι όσον αφορά την διεξαγωγή του μαθήματος, αλλά τόνισαν πως δεν ήταν εύκολο να απαντήσουν καθώς δεν είχαν κάποια άλλη παρόμοια εμπειρία που θα λειτουργούσε ως μέτρο σύγκρισης.

Συγκεκριμένα τώρα όσον αφορά το a) οι περισσότεροι μαθητές χαρακτήρισαν το μάθημα ενδιαφέρον ή πολύ ενδιαφέρον και εύκολο. Δεν υπήρξε κάποιος μαθητής που να το χαρακτήρισε δύσκολο. Εδώ όμως πρέπει να αναφέρουμε τις μικρές δυσκολίες που αντιμετώπισαν με τις απόλυτες τιμές στο φύλλο εργασίας, κάτι που συμφωνεί και με την έρευνα της Juter(2006) στην οποία αναφέρεται πως τις ίδιες δυσκολίες είχαν και πρωτοετείς φοιτητές.

Στο b) οι απαντήσεις ήταν αρκετά ενθαρρυντικές για την καινοτόμο διδακτική προσέγγιση που επιχειρήθηκε. Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις:

→ «Το μάθημα ήταν κατανοητό»

→ «Τα οπτικά μέσα που χρησιμοποιήθηκαν και η άμεση συμμετοχή μας»

→ «Μέσω του υπολογιστή κατανόησα καλύτερα τον ορισμό του ορίου σε σχέση με την τυποποίηση που «προσφέρει» το σχολικό βιβλίο»

→ «Το μάθημα είχε πιο πολύ ενδιαφέρον γιατί περιείχε πράγματα που μας βοηθούν να κατανοήσουμε την ουσία των Μαθηματικών»(σ.σ. προφανώς εννοεί την οπτικοποίηση και το φύλλο εργασίας).

Στο c) οι απαντήσεις εστίασαν στην παραστατικότητα υπό την έννοια «ότι λέγαμε το βλέπαμε και στην πράξη στον υπολογιστή» (μαθητής). Παράλληλα διατυπώθηκε η άποψη ότι «έγινε εμβάθυνση στην προς διαπραγμάτευση έννοια», ή «η χρήση του υπολογιστή για βαθύτερη κατανόηση». Το στοιχείο που δεν άρεσε σε κάποιους μαθητές ήταν ότι η «διαδικασία ολοκληρώθηκε κάπως γρήγορα».

Στο d) μερικές από τις δυσκολίες που εντοπίστηκαν ήταν οι εξής:

→ «το μάθημα αφορούσε τα όρια τα οποία έχουμε διδαχθεί αλλά όχι με αυτόν τον τρόπο»

→ «δυσκολεύτηκα λίγο στον συσχετισμό των ε και δ»

Κάποιοι μαθητές απάντησαν ότι δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία.

Στο e) σχεδόν όλοι οι μαθητές απάντησαν ότι δεν θα άλλαζαν κάτι, παράλληλα όμως παρατήρησαν πως δεν είχαν μέτρο σύγκρισης καθώς δεν είχαν στο παρελθόν παρόμοια εμπειρία αυτής της διδακτικής προσέγγισης.

Ακολουθούν κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις:

Μαθητής 1

5. **Τι σας άρεσε περισσότερο στο μάθημα που παρακολουθήσατε;**

Η παραστατικότητα. Δηλαδή ότι λέγαμε το βλέπαμε και βγαίνει πράξη στον υπολογιστή.

6. **Τι *δεν* σας άρεσε στο μάθημα που παρακολουθήσατε;**

Δεν υπήρχε κάτι που δεν μου άρεσε.

7. **Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίσατε στο μάθημα;**

Το μάθημα αφορούσε τα όρια τα οποία έχουμε διδαχτεί αλλά όχι με αυτόν τον τρόπο. Έτσι, μέχρι να καταλάβουμε ~~την~~ το νόημα του μαθήματος ήταν λίγο δύσκολο.

8. **Τι θα θέλατε να ήταν διαφορετικό στο μάθημα και γιατί;**

Νομίζω πως δε θα άλλαζα κάτι.

Μαθητής 2

5. **Τι σας άρεσε περισσότερο στο μάθημα που παρακολουθήσατε;**

Το ότι [redacted] με βάλανε να καταλάβω [redacted] τα όρια και να τα εξηγήσω.

6. **Τι *δεν* σας άρεσε στο μάθημα που παρακολουθήσατε;**

Δεν υπήρχε κάτι που δε μου άρεσε.

7. **Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίσατε στο μάθημα;**

Στην αρχή δυσκολεύτηκα λίγο στο διάγραμμα αλλά [redacted] ξεπέρασα αργότερα τις [redacted] δυσκολίες αυτές.

8. **Τι θα θέλατε να ήταν διαφορετικό στο μάθημα και γιατί;**

Τίποτα, ήταν πολύ ωραία.

4ος άξονας: Απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικές με το όριο

Η ερώτηση 9 ήταν σχεδόν ίδια με την ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου Ι, στην οποία ζητούνταν από τους μαθητές να περιγράψουν την έννοια του ορίου σε κάποιον φίλο τους. Ο στόχος ήταν να διαπιστωθεί αν υπήρξε εμπλουτισμός του θεωρητικού υπόβαθρου των μαθητών για βαθύτερη ερμηνεία και επεξήγηση.Οι απαντήσεις τους όμως γενικά δεν ήταν οι αναμενόμενες, υπό την έννοια ότι δεν πραγματοποιήθηκε κάποια σημαντική μεταβολή. Από τις «καλύτερες» απαντήσεις:

Μαθητής 9 : «το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ σημαίνει πως όταν το x κοντεύει να πάρει την τιμή x_0 τότε η f(x) πλησιάζει σε μια συγκεκριμένη τιμή»

Μαθητής 4: «Όριο συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in R$ είναι ο αριθμός τον οποίο προσεγγίζουν όλες οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση κοντά στο x_0 εκτός από αυτό».

Μαθητής 7: «Μπορούμε να πλησιάσουμε όσο θέλουμε έναν αριθμό χωρίς όμως να τον συμπεριλάβουμε».

Έγινε δηλαδή πάλι χρήση των όρων «κοντεύει», «πλησιάζει», που απαντάται και στην ερευνητική βιβλιογραφία, χωρίς κάποια βαθύτερη εξήγηση.

Η ερώτηση 10 ζητούσε από τους μαθητές να δικαιολογήσουν το καλύτερο (θεωρητικά) επίπεδο κατανόησης της έννοιας του ορίου με την χρήση του υπολογιστή. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν μεν καταφατικές για την βοήθεια του λογισμικού, αλλά κατά τα άλλα ήταν γενικόλογες, χωρίς εστίαση στο τι ήταν αυτό ακριβώς που τους έκανε να κατανοήσουν καλύτερα το όριο συνάρτησης. Έλειπε δηλαδή μια καθαρά μαθηματική αναφορά στις έννοιες που αναδείχθηκαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος (σημείο συσσώρευσης, σχέση του ορθογωνίου με την γραφική παράσταση, αλληλοεξάρτηση και ρόλος των ε,δ) και η οποία αναμενόταν να μεταβάλει την άποψη των μαθητών για την απαραίτητη προϋπόθεση της ύπαρξης του ορίου. Η μεταβολή αυτή φάνηκε και στις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 13 πως ήταν μικρή. Η μόνη κάπως σχετική απάντηση αναφέρονταν στο ότι «ήταν ορατή η μεταβολή των τιμών της συνάρτησης αν μεταβάλαμε τα διαστήματα στους άξονες».

10. Θεωρείτε ότι η χρήση του υπολογιστή (κατάλληλο λογισμικό) σας βοήθησε να κατανοήσετε καλύτερα το όριο συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in R$;

Ανάλογα με την απάντηση που θα δώσετε, γράψτε δυο λόγια για τη δικαιολόγηση της.

Ναι με βοήθησε αρκετά στην κατανόηση του ορίου. Μερικά σημεία αδιευκρίνιστα ή που δεν υπήρχαν και στο βιβλίο και διδάχτηκαν στο συγκεκριμένο μάθημα.

Η ερώτηση 11 του ερωτηματολογίου ΙΙ προέτρεπε ουσιαστικά τους μαθητές να συγκρίνουν τον βαθμό κατανόησης του ε-δ ορισμού βάσει της παρουσίασης του βιβλίου και του μαθήματος με τον υπολογιστή και το φύλλο εργασίας. Οι μαθητές τόνισαν ιδιαίτερα τον έντονο μαθηματικό φορμαλισμό που κυριαρχεί στην διατύπωση του ε-δ ορισμού και που παρά τα σχήματα που επισυνάπτει το βιβλίο δεν γίνεται κατανοητός. Οι περισσότεροι μαθητές εξέφρασαν την άποψη πως ο μαθητής φτάνει μόνος του στον ε-δ ορισμό μέσω μιας σειράς ενεργειών και αυτό είναι πολύ σημαντικό για τον ίδιο. Εστίασαν ιδιαίτερα στην δυναμική μεταβολή των διαστημάτων που σχετίζονται με τα ε και δ καθώς και στην σύνδεση μεταξύ τους. Μάλιστα συμφωνούν πως αυτό είναι κάτι που μπορεί να καταφέρει ακόμα και ένας «σχετικά μέτριος» μαθητής.

Η ερώτηση 12 είχε ως στόχο να ελέγξει την άμεση χρήση του ορισμού που διδάχτηκε, για την δικαιολόγηση της μη ύπαρξης του ορίου κάποιας συνάρτησης. Όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά, εφαρμόζοντας με επιτυχία τον ε-δ ορισμό, σχεδιάζοντας παράλληλα τις ε , δ ζώνες που τονίστηκαν χρωματικά στο σχετικό αρχείο. Κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις:

11. Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ο ε – δ ορισμός του ορίου συνάρτησης :

> Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell\in\mathbb{R}$ όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $0<|x-x_0|<\delta$, να ισχύει: $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

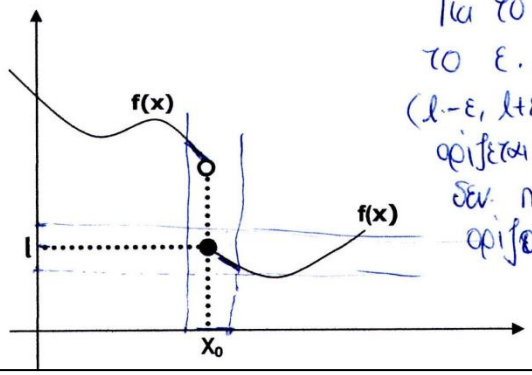
α)Τι εντύπωση νομίζετε ότι θα σχημάτιζε ένας μαθητής διαβάζοντας τον ορισμό αυτό;

Θα υποστήριζε, δικαίως, πως ο ορισμός αυτός είναι μη κατανοητός και όπως οι νέοι αναφέραν: "παλαιάν"...!

β)Θεωρείτε ότι με την βοήθεια του φύλλου εργασίας (που δόθηκε στο μάθημα) και τη χρήση του υπολογιστή, μπορεί κάποιος μαθητής να φτάσει πιο ομαλά στον ε – δ ορισμό; Δικαιολογήστε σύντομα.

Δύναται πως κάποιος μαθητής και κυρίως κάποιος "μέτριος" μαθητής μπορεί να φτάσει πιο ομαλά στον ε-δ ορισμό, εφόσον με τη χρήση του υπολογιστή του δόθηκε ευκαιρία να του αποδείξει χρησιμοποιώντας "αυτά" παραδείγματα.

12. Μπορείτε με βάση το παρακάτω σχήμα και χρησιμοποιώντας τον ε – δ ορισμό, να εξηγήσετε γιατί ΔΕΝ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$;



Για το συγκεκριμένο σχήμα δεν έχει νόημα το ε. Διότι σε οποιαδήποτε περιοχή $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ η περιοχή του χώρου που ορίζεται από τις ευθείες $y=l-\varepsilon$, $y=l+\varepsilon$ δεν περιέχει περιοχή που ορίζουν οι ευθείες $x=x_0-\delta$, $x=x_0+\delta$

10. Θεωρείτε ότι η χρήση του υπολογιστή (κατάλληλο λογισμικό) σας βοήθησε να κατανοήσετε καλύτερα το όριο συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in R$;

Ανάλογα με την απάντηση που θα δώσετε, γράψτε δυο λόγια για τη δικαιολόγηση της.

Ναι, ερχόμαστε σε συναισθηματικότερη επαφή με το αντικείμενο, εφόσον υπάρχουν οπτικά μέσα. Η εμπειρία που είχανε δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας.

11. Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ο ε – δ ορισμός του ορίου συνάρτησης :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, να ισχύει: $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$

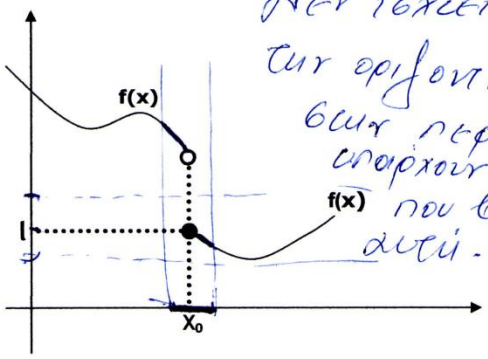
α)Τι εντύπωση νομίζετε ότι θα σχημάτιζε ένας μαθητής διαβάζοντας τον ορισμό αυτό;

Δεν γίνεται εύκολα κατανοητός.

β)Θεωρείτε ότι με την βοήθεια του φύλλου εργασίας (που δόθηκε στο μάθημα) και τη χρήση του υπολογιστή, μπορεί κάποιος μαθητής να φτάσει πιο ομαλά στον ε – δ ορισμό; Δικαιολογήστε σύντομα.

Ναι, γιατί ο καθηγητής φτάνει στον ορισμό αυτό ως συμπέρασμα της εργασίας του.

12. Μπορείτε με βάση το παρακάτω σχήμα και χρησιμοποιώντας τον ε – δ ορισμό, να εξηγήσετε γιατί ΔΕΝ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$;



Δεν ισχύει διότι φέρνοντας την οριζόντια γραμμή γύρω στην περιοχή του x0 (x0-δ, x0+δ) υπάρχουν τιμές της f(x) που βρίσκονται έξω από αυτή. Σύμφωνα με τον ορισμό, αυτό δεν ισχύει.

Η ερώτηση 13 «Τι κατά τη γνώμη σας είναι τελείως απαραίτητο να συμβαίνει για να έχει νόημα το σύμβολο $\lim_{x \to x_0} f(x)$; ($\chi_0 \in$ R)» προσεγγίστηκε σωστά από δύο μαθητές που απάντησαν ως εξής:

«*Το x να είναι όσο κοντά θέλουμε στο x_0*» και «*Πρέπει το x να παίρνει τιμές κοντά στο x_0 όσο ορίζουμε εμείς*». Οι συγκεκριμένοι μαθητές μετέβαλαν – βελτίωσαν τις απαντήσεις τους σε σχέση με το ερωτηματολόγιο Ι.

Η συνηθέστερη απάντηση των υπολοίπων μαθητών εστιάστηκε πως πρέπει «τα πλευρικά όρια να είναι ίσα». Παρατηρούμε δηλαδή ότι η επίδραση του μαθήματος όσον αφορά την διαμόρφωση μιας υγιούς εικόνας του ορίου ήταν μάλλον **μικρή**.

Οι ερωτήσεις 14 , 15 του ερωτηματολογίου ΙΙ ήταν ίδιες με τις ερωτήσεις 5 , 6 αντίστοιχα του ερωτηματολογίου Ι. Προστέθηκαν δύο ακόμα ερωτήσεις οι 13 και 16 που εστίαζαν στην ύπαρξη αναγκαίας συνθήκης για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου.

Η ερώτηση 14 προσπαθούσε να εντοπίσει τις πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά την σύνδεση της ύπαρξης του ορίου στο x_0 με την ύπαρξη μονοτονίας σε περιοχή του x_0 ή μόνο πλευρικά, όπως και τις αντίστοιχες για την ύπαρξη ακροτάτου. Οι μαθητές προφανώς απάντησαν με βάση την διαίσθησή τους, αλλά ίσως και επηρεαζόμενοι από την μορφή της γραφικής παράστασης στο αρχείο του μαθήματος, οπότε οι περισσότεροι ήταν συνεπείς, υπό την έννοια ότι απάντησαν καταφατικά ή αρνητικά και στα δύο αντίστοιχα ερωτήματα (ερωτηματολόγια Ι, ΙΙ) για την μονοτονία ή τα ακρότατα (σε περιοχή του χ_0 ή μόνο πλευρικά). Το ότι η ύπαρξη του ορίου συνεπάγεται και την ύπαρξη μονοτονίας, που αναδείχθηκε μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών, συμφωνεί και με τα ευρήματα της διεθνούς βιβλιογραφίας.

Ο διδάσκων θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αποσαφηνίσουν την σχέση μονοτονίας και ορίου με μια πολύ γνωστή τους συνάρτηση, την $g(x) = x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ την οποία οι μαθητές έχουν συναντήσει πολλές φορές, αλλά

χωρίς να γνωρίζουν κάποιες σημαντικές ιδιότητές της. Για παράδειγμα, θεωρώντας τις ακολουθίες $x_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \pi/2}$, $y_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + 3\pi/2}$ παρατηρούμε ότι $g(x_\nu) = x_\nu > 0$, $g(y_\nu) = -y_\nu < 0$. Ώστε για αρκετά μεγάλα ν δεν υπάρχει διάστημα (-δ , δ) στο οποίο η g(x) να διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επίσης παρατηρούμε ότι για $w_\nu = \frac{1}{2\pi\nu} > x_\nu > y_\nu$ ισχύει ότι $g(w_\nu) = 0 < g(x_\nu)$ και $g(x_\nu) > g(y_\nu)$ δηλαδή η g έχει όριο στο μηδέν χωρίς να είναι μονότονη σε κανένα διάστημα γύρω από το μηδέν.

Στην ερώτηση 15) «Αν ΔΕΝ υπάρχει το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 , τότε αναγκαστικά είναι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (Σ) (Λ) » μόνο ένας από τους μαθητές που είχαν σωστή προσέγγιση του ορίου απάντησε (Λ), ενώ οι άλλοι απάντησαν (Σ) έχοντας προφανώς στο μυαλό τους τις σχολικές τους εμπειρίες, αλλά όλοι φάνηκαν συνεπείς σε σχέση με την αντίστοιχη απάντησή τους στο ερωτηματολόγιο Ι.

Στην ερώτηση 16 «Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \ , & x \le 1 \\ 5 \ , & x = 2 \end{cases}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$; εξηγήστε» , οι μαθητές ήταν σχεδόν συνεπείς ως προς τις απαντήσεις τους αφού οι δύο μαθητές που είχαν την σωστή προσέγγιση στην ερώτηση 13 απάντησαν ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$ διότι «*η f(x) για χ≠2 δεν έχει τύπο*» υπονοώντας μάλλον ότι η f(x) δεν ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο 2, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές ανέφεραν πως δεν υπάρχει το όριο διότι «*υπάρχει μόνο το αριστερό πλευρικό όριο, άρα δεν είναι ίσα τα πλευρικά*» ή ότι «*δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο 2*».

4.6 Συμπεράσματα

Όπως ήδη αναφέρθηκε ένας από τους βασικούς σκοπούς αυτής της έρευνας ήταν να διερευνήσει τις αντιλήψεις των μαθητών της Θετικής – Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης του Γενικού Λυκείου πάνω στο όριο συνάρτησης, τον βαθμό στον οποίο γίνεται κατανοητή αυτή η συγκεκριμένη έννοια από τους μαθητές και πως συσχετίζεται η κατασκευή της έννοιας με τις ικανότητες των μαθητών να χειρίζονται διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των ορίων. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει τι είναι όριο συνάρτησης, υποδεικνύοντας τη δυσκολία που συναντούν στο να κατανοήσουν την έννοια. Γενικά θα λέγαμε ότι οι περισσότερες αντιλήψεις των μαθητών για το όριο που διαπιστώθηκαν στην έρευνα μας, συμφωνούν με τις σχετικές αντιλήψεις που έχουν διατυπωθεί από προηγούμενες έρευνες πάνω στο ίδιο πεδίο. Μια από τις αντιλήψεις που εκφράστηκε από τους μαθητές, ήταν ότι «το όριο μιας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_o είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης για x= x_o». Οι Davis & Vinner(1986) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές διατηρούν τις πρωταρχικές αντιλήψεις τους και μετά από προσεκτικά σχεδιασμένες διδασκαλίες, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε παρανοήσεις όπως $f(x_0)$ είναι το ίδιο με το limf(x) καθώς το x τείνει στο x_0. Μία από τις «ιδιότητες» που δόθηκε από την πλειονότητα των μαθητών αυτής της έρευνας στην έννοια του ορίου είναι ότι «το όριο μιας συνάρτησης είναι το μέγιστο ή ελάχιστο μιας συνάρτησης καθώς το x προσεγγίζει το x_0». Η άποψη αυτή έχει διαπιστωθεί από τον Williams (1991), ο οποίος ερεύνησε και περιέγραψε την ύπαρξη διαφόρων προτύπων ορίων που διατηρούν οι μαθητές. Παρόμοια ευρήματα και στις ερωτήσεις για την μονοτονία φαίνεται να συμφωνούν με την M. Artigue (1998b) η οποία σημειώνει ότι «οι διάφοροι ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν, μεταξύ άλλων, πως το κοινό νόημα της λέξης "όριο" προκαλεί έντονες αντιλήψεις της έννοιας του ορίου ως ένα φράγμα ή ως τον τελευταίο όρο μιας διαδικασίας ή τείνει να περιορίσει τη σύγκλιση στη μονότονη σύγκλιση».

Η επίδοση των μαθητών διέφερε όσον αφορά την κατεύθυνση της μετατροπής μεταξύ γεωμετρικών και συμβολικών αναπαραστάσεων στο όριο. Οι μαθητές εκτέλεσαν καλύτερα τις μετατροπές των ορίων από μια γραφική σε μια συμβολική αναπαράσταση παρά αντίστροφα, δηλαδή την κατασκευή γραφήματος

μιας συνάρτησης βασισμένο σε όριο που δινόταν σε αλγεβρική μορφή. Αυτή η ανεπάρκεια πιθανότατα είναι συνέπεια δύο διαφορετικών παραγόντων. Ο πρώτος αφορά τα διαφορετικά επίπεδα της γνωστικής πολυπλοκότητας των δύο τύπων της μετατροπής των ορίων. Η μετατροπή ενός ορίου από μια γραφική μορφή σε μια αλγεβρική, για παράδειγμα ο υπολογισμός ενός ορίου με βάση τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που δίνεται, μπορεί να θεωρηθεί σαν μια καθαρή μετατροπή (Duval,2002) σε αντίθεση με την αντίστροφη που απαιτεί μεγαλύτερη επινοητικότητα και βαθύτερη κατανόηση. Ο δεύτερος παράγοντας αφορά τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο που όσον αφορά την διαισθητική προσέγγιση του ορίου περιλαμβάνει μονόπλευρες δραστηριότητες χρήσης γεωμετρικών και συμβολικών αναπαραστάσεων.

Δεν προξένησε έκπληξη το γεγονός της σχεδόν καθολικής αποτυχίας στο έργο 4 του ερωτηματολογίου Ι, που απαιτούσε την κατανόηση της ουσιαστικής ιδιότητας του x_0 (σημείο συσσώρευσης). Η διατύπωση της ερώτησης δεν διέφερε από αυτή μιας τυπικής, αλγεβρικής άσκησης στα όρια (οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές τέτοιες στην ενασχόληση τους με τα όρια). Το περιεχόμενο όμως ήταν τελείως διαφορετικό. Αναδείχθηκε έτσι με τον πλέον εμφατικό τρόπο ότι με τις ερωτήσεις στα όρια δεν δίνεται βαρύτητα στην κατανόηση της έννοιας ενώ η εφαρμογή της έννοιας περιορίζεται συχνά σε ασκήσεις ρουτίνας, κάτι που οδηγεί σε μηχανική και επιφανειακή μάθηση (Furinghetti & Paola, 1991). Πιθανότατα αυτό δίνει μια εξήγηση για την περιορισμένη απόδοση των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο.

Τα ευρήματα, γενικά ενισχύουν την αρχική υπόθεση περί επιφανειακής-ανεπαρκούς διδασκαλίας της έννοιας του Ορίου στις σχολικές αίθουσες. Η βαρύτητα της διδασκαλίας εκεί δίνεται σε δύο τομείς: την εισαγωγική – διαισθητική μέσω γραφικών αναπαραστάσεων διδασκαλία και την εξάσκηση σε τεχνικές εύρεσης ορίου συνάρτησης. Και στους δύο τομείς όμως η διδασκαλία αποτυγχάνει διότι στον μεν πρώτο απουσιάζει ουσιαστικά η έννοια της κίνησης που θα προσέδιδε τον δυναμικό – προσεγγιστικό χαρακτήρα της έννοιας μέσω κατάλληλου λογισμικού, στον δε δεύτερο πρόκειται για μία καθαρά αλγεβρική διαδικασία (απλοποίηση τύπων, κριτήριο παρεμβολής), απ' όπου βέβαια απουσιάζει η ουσιαστική απαίτηση του να είναι το x_o σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.

Το γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές συνέχισαν να κάνουν λάθη σε ερωτήσεις του τύπου: υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$ της $f(x)=\begin{cases} x^2-2 \ , \ x\le 1 \\ 5x \quad , \ x=2 \end{cases}$; μας δίνει μια ένδειξη, ότι το πρόβλημα της κατανόησης του Ορίου δεν λύνεται αν διδάξουμε στους μαθητές τον ακριβή ορισμό του, πόσο μάλλον χωρίς την έντονη οπτικοποίηση (βλ. λογισμικό). Αυτό έρχεται να συμφωνήσει με το συμπέρασμα του Prameswaran(2007): «Έχει παρατηρηθεί ότι ορισμένοι μαθητές αντιμετωπίζουν το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, ως διαδικασία προσέγγισης με βάση την αρχική διαισθητική ερμηνεία της έννοιας των ορίων, ακόμα και μετά την διδασκαλία του ε – δ ορισμού». Ακόμα, συμφωνώντας με τον Cornu(1991), έχουμε να παρατηρήσουμε ότι, οι λέξεις «όριο» και «τείνει να», προκαλούν στους μαθητές σύνδεση διαφορετικών σημασιών, που οδηγεί σε παρανοήσεις, ακόμη και μετά τη διδασκαλία του τυπικού ορισμού.

Επίσης, η άποψη ότι ένα μεγάλο μέρος της παραδοσιακής διδασκαλίας πρέπει να αρχίζει με την απόκτηση δεξιοτήτων και μεθόδων εύρεσης του Ορίου με την ελπίδα – πίστη ότι η ουσιαστική κατανόηση θα έλθει αργότερα, κρίνεται ουτοπική με βάση την παραπάνω έρευνα κι αυτό γιατί οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί στο σχολείο την έννοια του Ορίου με τον συμβατικό τρόπο πριν συμμετάσχουν στο μάθημα και απαντήσουν στα ερωτηματολόγια.

Στο θέμα λοιπόν της κατανόησης του ορίου φαίνεται να επικρατεί μια ομιχλώδης κατάσταση με τις απαντήσεις των περισσοτέρων να δηλώνουν συγκεχυμένες απόψεις . Οι μαθητές δείχνουν μια ισχυρή προσήλωση στον καθαρά αλγεβρικό χειρισμό της έννοιας παραβλέποντας ουσιώδη ζητήματα. Αυτό όμως είναι και αναμενόμενο (ως ένα βαθμό) αν λάβουμε υπόψη μας ότι η σχολική διδασκαλία περιχαρακωμένη στις επίσημες οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου δεν αναδεικνύει τις πολλαπλές πτυχές της έννοιας, με την γνωστική σύγκρουση να απουσιάζει. Κατά τη γνώμη μας οι περισσότερες παρανοήσεις ξεκινάνε από το γεγονός ότι δεν αποσαφηνίζεται τι σημαίνει το σύμβολο $x \to x_0$ και πως είναι δυνατόν να συμβεί αυτό αφού δεν υπάρχει στα σχολικά βιβλία η έννοια του σημείου συσσώρευσης. (το x_0 είναι σ.σ. του Π.Ο. της συνάρτησης f, έστω Α, αν σε κάθε διάστημα της μορφής $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)-\{x_0\}$ να υπάρχουν στοιχεία του Α).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) = x με x=1/ν , A = $\left\{-1,-\frac{1}{2},...,-\frac{1}{\nu},....\right\}\cup\left\{...,\frac{1}{\nu},...,\frac{1}{2},1\right\}$ με το μηδέν να είναι σημείο συσσώρευσης, ενώ όλα τα άλλα είναι μεμονωμένα σημεία. Επίσης $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Βέβαια δεν πρέπει να παραβλέψουμε ότι η έννοια του Ορίου από τη φύση της δημιουργεί δυσκολίες, κάτι που αποδεικνύει η ιστορική εξέλιξη που παρατέθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Σύμφωνα με τον Skemp (1996) υπάρχουν δύο είδη κατανόησης στα Μαθηματικά. Η Εννοιολογική (σχεσιακή) κατανόηση (Relational Understanding) όπου ο μαθητής καταλαβαίνει τι κάνει και γιατί το κάνει και η Εργαλειακή Κατανόηση (Instrumental Understanding), όπου ο μαθητής εφαρμόζει μηχανικά μια αλγοριθμική διαδικασία. Για τον μαθητή, αλλά (δυστυχώς) και για τον καθηγητή είναι πιο εύκολη η δεύτερη, κάτι που γίνεται με άλλοθι την μεγάλη ύλη και το Εξεταστικό. Συνέπεια αυτού είναι η υποβάθμιση της Εννοιολογικής Κατανόησης σε δύσκολες έννοιες όπως αυτή του Ορίου, να αποβαίνει ολέθρια για τις μετέπειτα σπουδές των μαθητών στα Μαθηματικά Τμήματα, αλλά και στην δόμηση της (στρεβλής) μαθησιακής νοοτροπίας. Χαρακτηριστικές οι απαντήσεις φοιτητών του Μαθηματικού Αθηνών στην ερώτηση «υπάρχει συνέχεια μεταξύ σχολείου και πανεπιστημίου;»

→ «…τον ορισμό του ορίου τον κάναμε τελείως διαφορετικά στο Λύκειο απ' ότι στο Πανεπιστήμιο. Το σχολείο δεν με βοήθησε καθόλου. Είχα μια εικόνα για τους ορισμούς του Ορίου και της παραγώγου και όταν ήρθα εδώ, όλα ήταν διαφορετικά».

→ «…είναι μεγάλο το χάσμα, δεν υπάρχει καμία σχεδόν σχέση. Είναι τελείως άλλο το πνεύμα. Ίσως θα έπρεπε να υπάρχει κάτι ανάμεσα. Όλοι οι φοιτητές την «πατάνε» τα πρώτα χρόνια, δεν μπορούν να προσαρμοστούν άνετα στο Πανεπιστήμιο.» (αναφ. από Διπλωματική Εργασία Δ. Βαγενά, 2004).

Όλες οι σύγχρονες γνωστικές θεωρίες, είτε πρόκειται για τον κονστρουκτιβισμό του Piaget, είτε για την κοινωνικο-πολιτισμική του Vygotsky, πρεσβεύουν την ενεργό εμπλοκή του μαθητή με τις υπό διαπραγμάτευση έννοιες

(Κολέζα, 2000). Σ΄αυτό το πλαίσιο, ο διδάσκων πρέπει να παρέχει στο μαθητή τα κατάλληλα ερεθίσματα ώστε να επεκτείνει τη γνώση που κατέχει και να περάσει στο επόμενο αναπτυξιακό στάδιο (Μπαρκάτσας,2003). Οι Νέες Τεχνολογίες προσφέρουν στους μαθητές τέτοια ερεθίσματα, αλλά από μόνες τους φυσικά δεν μπορούν να κάνουν θαύματα. Πρέπει να αξιοποιηθούν οι δυνατότητες τους για εναλλακτικές μορφές έκφρασης, διερεύνησης, προσέγγισης και οικοδόμησης της γνώσης (Hoyles, Noss & Adamson, 2002, όπ. ανάφ. στο Κουκίου, 2008). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την δημιουργία μοντέλων, τον πειραματισμό, την διατύπωση εικασιών και την αναπαράσταση ιδεών και εννοιών (diSessa2000, Hoyles & Noss, 1992a, Γαβρίλης, 2004).

Κατά την διδασκαλία εννοιών με στατικά μέσα, ο μαθητής συνήθως καταφεύγει στην αποστήθιση χωρίς την επαρκή κατανόηση, διαμορφώνοντας λανθασμένες ή ημιτελείς γνώσεις της έννοιας. «Η απομνημόνευση δεν οδηγεί σε γνωστικές δομές και το αποτέλεσμα είναι να καταπιέζεται η επιθυμία των μαθητών να μαθαίνουν καθώς μεγαλώνουν. Έτσι ο μαθητής παύει να έχει ενδιαφέρον για τα μαθηματικά» (Dubinsky, 1999). Μέσω της τεχνολογίας προσπαθούμε ο μαθητής να κατασκευάσει τις έννοιες μέσα από πειραματικές διαδικασίες, να κατανοήσει πως τα μαθηματικά είναι ένα ανοικτό πεδίο διερεύνησης, ένα ζωντανό αντικείμενο, να τον βοηθήσουμε να ανακαλύψει γεγονότα και μεθόδους (Cooney, 1999).

Αυτό που πρέπει να γίνει στη χώρα μας είναι μια εκτεταμένη, οργανωμένη έρευνα για την επίδραση των Νέων Τεχνολογιών στην ποιοτική αναβάθμιση της διδασκαλίας της έννοιας του ορίου στις σχολικές αίθουσες, παρόμοια με αυτές που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να αρχίσει πιλοτικά από τα Πειραματικά σχολεία σε συνεργασία με κάποια Πανεπιστημιακά Τμήματα. Βέβαια, είναι προφανές ότι αυτό προϋποθέτει ουσιώδη αλλαγή του Αναλυτικού Προγράμματος, κάτι που σχετίζεται άμεσα με τους γενικότερους σκοπούς της Εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Alcock, L. & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learners' beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, (57, pp. 1–32).

Arcavi, A.(2003). The Role of Visual Representations in the Learning Of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52: 215–241, 2003.

Artigue, M. (1998a). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (18(2), pp. 231–262).

Artigue, M. (1998b). Teaching and Learning Elementary Analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution?. *First Mediterranean Conference on Mathematics.*

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorff, K.E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, (16, pp. 399- 431).

Balacheff, N. & Gaudin N. (2002). Students' Conceptions: an Introduction to a Formal Characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, (* 65, ISSN: 1298-020X).

Balacheff, N., & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop, K. Klements, C. Keitel, J. Kilpatric and C. Laborde (Eds), *International Handbook on Mathematics education*, (pp. 469-501). Dortdrecht: Kluwer.

Bartolini Bussi, M. G., & Sierpinska, A. (2000). The relevance of historical studies in designing and analysing classroom activities. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.). *History in mathematics education. The ICMI Study,* (pp. 154-161). Dordrecht, Boston, London: Kluwer.

Barwise, J. and Etchemendy, J.: 1991, 'Visual information and valid reasoning', in W. Zimmermann and S. Cunningham (eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 9–24.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge: Alternative perspectives for Mathematics Education. In D. A. Grows, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds). *Effective Mathematics Teaching* (pp.27-46). Hillsdale, New Jersey: N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates.

Becker, H. J., (1990). *Computer use in United States schools*. Paper presented at the Annual Meeting of the AERA. Boston, MA.

Belhoste, B. (1991). *Augustin-Louis Cauchy, A biography.* Berlin: Springer Verlag.

Berry, J.S., & Nyman, M.A. (2003). Promoting students' graphical understanding of calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, (22, pp. 481- 497).

Bishop, A. J. (1988a). *Mathematical Enculturation.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J., (1988b). *Mathematics Education and culture.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bitter, G. G., & Hatfield, M. M. (1991). Integration of the Math Explorer(TM) calculator into the mathematics curriculum: The calculator report project.

Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, (12, pp. 59-81).

Bokhari, M. A., & Yushau, B. (2006). Local **(L, ε)-**approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (*v*ol 37 , no 5 , pp. 515-526).

Borba, M., & Confrey, G. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multirepresentational environment. *Educational Studies in Mathematics*, (31, pp. 319-337).

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications.

Boyer, C., & Merzbah, U. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, (2η έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Πνευματικού.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*, (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherlandd & V. Warfield). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Changeux. J. P., & Connes. A. (1995). *Τα Μαθηματικά & ο Εγκέφαλος*. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Penseé Sauvage.

Clements, D. H. (1989). *Computers in elementary mathematics education.* NJ: Prentice-Hall.

Cobb, P. (1991). *Reconstructing Elementary School Mathematics. Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13,(2), 3-32.

Cobb, P. (1997). *Learning from distributed theories of intelligence*. Proceedings of the 21th PME Conference, 2 (pp. 169-176). Lathi, Finland.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist Researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, (14(2), pp. 83-94).

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. (23, pp. 2-33)

Confrey, J. (1995). How Compatible are Radical Constructivism, Sociocultural Approaches and Social Constructivism?. In L. P. Steffe, & J. Gale (Eds), *Constructivism in Education* (pp. 185-226). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Connell, M. L. (1998). Technology in constructivist mathematics classroom. In *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (17(4), pp. 311-338).

Cooney T. J. (1999). Conceptualizing Teachers' Ways of Knowing. *Educational Studies of Mathematics*, (vol. 38, N. 1-3 pp. 163-187).

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, (4, pp. 236–268).

Cornu, B. (1991). Limits, in D. Tall (ed.), *Advanced Mahematical Thinking*, (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, (15, pp. 167–192).

Davis P. J. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, (24, p. 344).

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, (5, pp. 281-303).

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Leher, & D. Chazan (eds). *Designing Learning Enviroments for Developing Understanting of Geometryad Space,* (pp. 369-393*)* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlabaum Associates.

De Villiers, M. (2003). The Value of experimentation in mathematics. *AMESA Proceedings*, (pp. 174-185). Cape Town.

Dettori, G., & Lemut, E. (1995). External Representations in Arithmetic Problem Solving. In R. Sutherland & J. Mason (Eds). *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education*, (pp. 20-33). Berlin : Springer-Verlang.

DiSessa, A. (2000), *Changing minds: Computers, learning and literacy,* London, England: The MIT Press.

Dorfler, W. (1993). Computer use and views of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology,* (pp.159-186). Berlin: Springer - Verlag.

Dreyfus, T. (1994). Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education. In D.F. Robitaille, D.H. Wheeler, & C. Kieran (eds.). *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 107–122). Quebec, Canada: Les Presses de l'Université Laval.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (ed). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2000). Meaning and Formalism in Mathematics. *International Journal o f Computers for Mathematical Learning*, (5, pp. 211-240).

Dugdale, S. (2001). Order out of chaos: A spreadsheet excursion into a mathematical frontier. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (20 (3), pp. 323-341).

Dunham P., & Thomas P. D. (1994). Research on Graphing Caclulators. *Mathematics Teacher* (87, pp. 440-445).

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Reserch in Mathematics Education*, (1(2), p. 116).

Dyfour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Eds). *Problems of representation in teaching and learning of mathematics,* (pp. 109-122). London: Lawrence Erlbaum Associates..

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus.* Berlin: Springer Verlag.

Edwards, B.S. & Ward M.B.(2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definition, *American Mathematical Monthly*, 111, 411-423.

Eisenberg, T., & Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham S. (eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Elia, H., Gagatsis, A., Panaura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, (v*ol 7, N4).

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (5(3), pp. 533–556).

Engel, F. L. (1980). Information selection from visual display units. In *Ergonomic Aspects of Visual Display Terminals*. London: Taylor and Francis.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in acquisition for the notion of limit of a function. In L.P. Mendoza, & E.R. WIllams (Eds.). *Canadian Mathematics Education Study Group. Proceedings of the Annual Meeting*, (pp. 330 -333). Kingston, Ontario, Memorial University of Newfoundland.

Ferrini-Mundy, J., & Graham K. G. (1991). An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development. *American Mathematical Monthly* , (98 (7), pp. 627-635).

Filley, R. D. (1982). *Opening the Door to communication through graphics*. IEEE Trans. Professionnel Commun.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. In D. Reidel (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 615-645). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, (38, pp. 11–50).

Fischler, M. & Fircshein, O. (1998). *Intelligence: The Eye, the Brain and the Computer*. Reading. MA: Addison-Wesley.

Furina, G. (1994). Personal reconstruction of concept definitions: limits. *Proceedings of the 17:th annual conference of the Mathematical Education Research Group of Australasia.* Lismore, Australia: Southern Cross University.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16–19). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (22(5), pp. 719–729).

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 631-654). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Gadanidis, G. (1994). Deconstructing constructivism. *Mathematics Teacher*, (87, (2), pp. 91-97).

Gadanidis, G., Gadanidis, J., & Schindler, K. (2003). Factors mediating the use of the on line applets in the lesson planning of Preservice Mathematics Teaches. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* (22, (4), pp. 322-344), Norfolk VA: AACE.

Garofalo, J., Drier, H., Harper, S., Timmerman, M. A., & Shockey, T. (2000). Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 1(1).

Gawlick, T. (2005). Connecting arguments to actions – Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *Zentralblatt fur Didactik der Mathematik*, (37(5), pp. 361-370).

Goldenberg, P. (1999), Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (vol. 4, numbers 2-3). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gonzales-Martin, A., & Camacho, M. (2004). What is first-year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals?. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, (35 (1), pp. 73-89).

Grothendieck, A. (1986). *R´ecoltes et semailles: R´eflexions et t´emoignages sur un pass´e demath´ematicien*. Universit´e des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, et Centre National de la Recherche Scientifique.

Groves, Sussie. (1994). *Calculators A Learning Environment to promote number sence*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. New Orleans.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdiciplinary issues. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.). *Historyin mathematics education. The ICMI Study,* (pp. 39-62). Dordrecht, Boston, London: Kluwer.

Guicciardini, N. (2003). *Newton's method and Leibniz's calculus*. In H. N. Jahnke (Ed.). *A history of analysis* (pp. 1-39). Rhode Island, USA: American Mathematical Society.

Hadamard J. (1995). *Η Ψυχολογία της επινόησης στα Μαθηματικά.* Αθήνα: Κάτοπτρο.

Hadas, N., & Arcavi, A. (1997). *An attemt to characterize environments in which students can invert insightful proofs in geometry.* Proceedings of the 21th PME Conference, 1 (pp. 237). Lathi, Finland.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, (ch. 4). Dordrecht: Kluwer.

Hannafin, M., & Hooper, S. (1989). An integrated framework for CBI screen design and layout. *Computers in Human Behavior*, 5, 3, 155-165

Hillel, J. (1992). The Notion of Variable in the Context of Turtle Graphics. In C. Hoyles and R. Noss (Eds), *Learning Mathematics and* Logo, (pp. 11-36). Cambridge, Ma: MIT Press.

Hillel, J. (1993). Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds),

Learning from computers: Mathematics Education and Technology, (pp. 18-47). Berlin: Springer-Verlag.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/ schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds). *Learning from computers: Mathematics Education and Technology*, (pp.1-17). Berlin: Springer-Verlag.

Hoyles, C., & Noss, R. (1989). The Computer as a Catalyst in Children's Proportion Strategies. *Journal of Mathematical behavior, (*8, 53-75).

Hoyles, C., & Noss, R. (Eds). (1992). *Learning Mathematics and Logo.* Cambridge: MIT press.

Jiang, Z., & McClintock, E. (2000). Multiple approaches to problem solving and the use of technology. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (19 (1), pp. 7-20).

Jonassen, H. D., (1996). *Computers in the Classroom*. Colombus, OH: Prentice Hall.

Juter, K. (2003). *Learning limits of function, University students' development during a basic course in mathematics.* (Licentiate thesis). Sweden: Luleå University of Technology, Department of Mathematics.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning*, (8(4), pp. 407–431).

Kafai, Y., & Resnick, M. (Eds). (1996). *Constructionism in Practice*. Designing, Thinking and Learning in a Digital World. Wahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Kahn, K. (1998). *Helping children to learn hard things: Computer programming with familiar objects and action.* Morgan Kaufmann.

Kaldrimidou, M. & Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 271–288). Reston, Va: NCTM.

Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Eds). *Problems of representation in teaching and learning of mathematics*, (pp. 19-26). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1987b). Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. A. Grouws (Eds), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan

Kaput, J. J. (1994). The Representational Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, B., Winkelman (Eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline: The state of the art*, (pp. 379- 397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaput,J. J. , Noss, R., & Hoyles, C. (2002). Developing new notations for a learnable mathematics in the computational area. In L. D. English(Ed). *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 51-75). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Katz, V. (1998). *A history of mathematics: An introduction*. (2nd ed.). United States of America: Addison-Wesley Education Publishers Inc.

Katz, V., Dorier, J., Bekken, O., & Sierpinska, A. (2000). The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.). *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 149-154). Dordrecht, Boston, London: Kluwer.

Keisoglou S., & Kynigos, C. (2006). Measurements With A Physical And A Virtual Quadrant: Students' Understandings Of Trigonometric Tangent. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education,* (3, pp. 425-432). Charles University, Facultyof Education, Prague.

Kidron, I., Zelavi, N., & Openhaim, E. (2001). Teaching the limit concept in a CAS environment: Students' dynamic perceptions and reasoning. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the Twenty Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (3, pp. 241-248). Utrecht, the Netherlands.

Kline M. (1981). *Λογική εναντίον Παιδαγωγικής*. Στο Δ. Χασάπης (μετάφραση). Μαθηματική Επιθεώρηση (τ. 22).

Koirala, H.P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator*, (2, pp. 52-62).

Kordaki, M. & Potari, D. (2002, to appear). The Effect of Area Measurement Tools on Pupils' Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers in Mathematical Learning.*

Kordaki, M., & Potari, D. (1999). *Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts*. Journal of Mathematical Behavior, 17(3), pp. 303-316.

Kynigos C. (2002). Generating Cultures for Mathematical Microworld Development in a Multi-Organisational Context. *Journal of Educational Computing Research*, *(1, 2, pp. 183-209).* Baywood Publishing Co. Inc.

Kynigos, C. (1992). The Turtle Metaphor as a Tool for Children Doing Geometry. In C. Hoyles & R. Noss (Eds), *Learning Logo and Mathematics, (pp.* 97-126). Cambridge: M.I.T. press.

Kynigos, C. and Gavrilis, S. (2006) Constructing A Sinusoidal Periodic Covariation. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education, (4-9-16),* Novotna J., Moraova H., Kratka Mm. & Stehlikova N. (Eds), Charles University, Faculty of Education, Prague.

Laborde, C. (1992). *Solving problems in computer based geometry environments: The influence of the futures of the software*. ZDM, (92(4), pp. 128-135).

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology,* (pp. 48-67). Berlin: Springer - Verlag.

Laborde, C., & Laborde, J. M. (1995). What About a Learning Environment Where Euclidian Concepts are Manipulated with a Mouse? In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss, & L. D. Edwards. *Computers and Exploratory Learning*, Springer-Verlag, Germany.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strasser, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of MathematicsEducation: Past, Present and Future*, (pp. 275–304). Sense Publishers.

Lankshear, C., & Knobel, M. (2001). What is "Digital Epistemologies"? In J. Suoranta, M. Yla-Kotola & S. Inkinen (Eds). *The Integrated Media Machine*, (vol. 2 pp. 39-58). Hameenlinna: Edita and University of Lapland.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lesh, R., Mehr, M., & Post, T. (1987b). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Eds). *Problems of representation in teaching and learning of mathematics, (*pp. 41-58). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, J. (2000). *Designing Interactive Mathematic.* Paper presented at the Asian Technology Conference in Mathematics. Chiang Mai. Thailand.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior* , (23(4), pp. 405-427).

Little, D. (1991) *Learner Autonomy I: Definitions, Issues and Problems.* Dublin Authentik.

Littlewood D. E. (2001). *Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά*. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Lloyd, G.M., & Wilson, M. (2001). Offering prospective teachers tools to connect theory and practice: Hypermedia in mathematics teacher education. *Journal of Technology and Teacher Education*, (9 (4), pp. 497-518).

Lohr, L. (2000). Three principles of perception for instructional interface design. *Educational Technology*, (40 (1), pp. 155-165).

Mabry, R.. (1999). «1/4+ $(1/4)^2$ + $(1/4)^3$ + · · · = 1/3». *Mathematics Magazine,* (72(1), p. 63).

Magone, M. E., Cai, J., Silver, E. A., & Wang, N. (1994). *Validating the cognitive complexity and content quality of a mathematics performance assesment*. International Journal for Educational Research, 21(3), 317-340.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of the limit of sequence. *Educational Studies in Mathematics*, (48, pp. 259–288).

Manoucherhri, A. (1999). Computers and school mathematics reform: Implications for mathematics teacher education. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (18(1), pp. 31-48).

Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland, & J. Mason (Eds). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer

Mariotti, M. A. (2002). Influences of Technologies Advances in Students' Math Learning. In L. D. English (ed). *Handbook of Interantional Research in Mathematics Education*, (chapter 29, pp. 757-786). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates publishers.

M. A. Mariotti & E. Fischbein (1997), De_ning in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.

McGinn, M. K., & Boote, D. N. (2003). A first-person perspective on problem solving in a history of mathematics course. *Mathematical Thinking and Learning, (5*(1), pp. 71-107).

Meskill, C., & Mossp, J. (1997). *Technologies use with ESL Learners in NW State*. Preliminary Report, Albany, NW.

Milani, R. & Baldino, R. (2002). The Theory of Limits as an Obstacle to Infinitesimal Analysis. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds). *Proceedings of the 26th PME* , (3 , pp. 345-352).

Milou, E. (1999). The graphing calculator: A survey of classroom usage. *School Science and Mathematics*, (99, pp. 133-139).

Monaghan, J. (1991). *Problems with the language of limits. For the Learning of Mathematics*, (11(3), pp. 20–24).

Muirhead, B. (2003). *Mathematical Instruction in web-centric learning environments, Keynote address at the Mathematics on line: Present examples and a look to the future Conference* (Feb,28). Toronto: Field Institute for Research in Mathematical Science.

Nardi, E. (1996). *Novice mathematicians' encounter with mathematical abstractions: Tensions in concept-image construction and formalizations,* (PhD Dissertation), Oxford: Oxford University.

National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Norman, D. A. (1993). *Things that make us smart : Defending human attributes in the age of the machine*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Noss, R. (1988). The Computer as a Cultural Influence in Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics*, (19(2), pp. 251-268).

Noss, R. (2005). *The playground project - computer software.,* London Knowledge Lab, University of London

Noss, R., & Hoyles, C. (1992). Looking Back and Looking Forward. In C. Hoyles and R. Noss (eds). *Learning Mathematics and Logo*, (pp. 431-470). Massachusetts, London, England: The MIT Press Cambridge.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings:Learning Cultures and Computers.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of Mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics, (*33, pp. 203-233).

Oliveiro F., & Robutti, O. (2001). Measures in Cabri as bridge between perception and theory, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the Twenty Fifth Annual Conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education*, (4, pp. 9-16). Utrecht, the Netherlands.

Olson, P. (1987). Who Computes? In D. Livingstone et al. (Eds), *Critical Pedagogy and Cultural Power*. London: Macmillan.

Organization for Economic Cooperation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment*. Paris: Author.

Papanastasiou, E. C., & Ferdig, R. E. (2006). Computer Use and Mathematical Literacy: An Analysis of Existing and Potential Relationships. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (v. 25 no. 4, pp. 361-71).

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Parameswaran, R. (2006). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (5, pp. 193-216).

Pedagogical Institute (2005). *Instructions for the didactic content and the teaching of mathematics in the school year 2005–2006*. Athens: Publishing Organization of Didactic Books (in Greek).

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology* (3rd ed.). New York: Columbia University Press.

Pimm, D. (1993). Just a matter of definition [Review of the book Learning mathematics through inquiry], *Educational Studies in Mathematics*, 25, 261-277.

Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik (Ed). *Problem Solving in School Mathematics,* (pp.1-2). Reston Virginia: NCTM.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, (* 6(3), pp. 42–46).

Presmeg, N. (1989). Visualization in multicultural mathematics classrooms. *Focus on Learning Problems in Mathematics, (* 11(1&2), pp. 17–24).

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. English, (ed.). *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images*, (pp. 299–312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Pufall, P.B. (1988). Function in Piaget's System: Some Notes for Constructors of Microworlds. In G. Forman, & B. P. Pufall (Eds). *Constructivism in the Computer Age* (pp. 15-35). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, (*17*(1), pp. 26-33).

Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.). *History in mathematics education. The ICMI Study,* (pp. 143-170). Dordrecht, Boston, London: Kluwer.

Reising J. M., & Aretz, A. J. (1987). *Colour computer graphics in military cockpits*. Colour and the Computer. Boston: Academic.

Robert, A. (1982). L'Acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur. *Recherches en Didactique des Mathe´matiques*. (3).

Schmidt, M. E., & Callahan, L. G. (1992). Teachers' and principals' beliefs regarding calculators in elementary mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, (14, 17-29).

Schwarzenberger R.(1980) "Why calculus cannot be made easy" *Mathematical Gazzete*, vol. 64, pp.158-166

Schoenfeld, A. H., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser, (ed.). *Advances in Instructional Psychology*, (vol. 4, pp. 55–176). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

School of Mathematics. (2004). *Mathematics 11CFN, Notes on Calculus.* Melbourne: La Trobe University.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, (22(1), pp. 1–36.)

Sfard, A. (1998). *A mathematician's view of research in mathematics education: An interview with Shimshon A. Amitsur*. In A. Sierpinska and J. Kilpatrick (eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI study, (* pp. 445–458). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers

Sheets, C. (n.d.). *Effects of Computer Learning and Problem Solving Tools on the Development of Secondary School Student's Understanding of Mathematical Function*.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, (6, pp. 5- 67).

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, (18, pp. 371–397).

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* London: The Falmer Press.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktac, A. (2002). A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra. Report of a research conducted at Concordia University (Montréal, Québec, Canada) in the years 1999-2001.

Sierpinska, A. (2005). On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education, in M. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds), Activity and Sign - Grounding Mathematics Education. (pp. 117-136). Dordrecht: Kluwer.

Sinclair, M. (2005). Using technology in the junior grade*. Ontario Mathematics Gazette. (* 43, 4, pp. 30-34).

Skemp, R. (1996). Εννοιολογική και Εργαλειακή Κατανόηση, *Ευκλείδης Γ΄*, (τ. 13, Τεύχος 46, σελ. 20-35).

Stanic, G. & Kilparick, J.(1989). 'Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculm'. In R.I. Charles and Silver(Eds), The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, pp.1-22. USA, NCTM

Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). *Radical Constructivism and Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education, 25(6).

Struik, D. J. (1982). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος.

Sutherland, R. (1995). Mediating mathematical action. In R. Sutherland & J. Mason (Eds). *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education,* (pp. 71-81). Berlin:Springer-Verlag.

Szydlik, J. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, (*31*(3), pp. 258-276).

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, (12(2), pp. 151–169).

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education,* (pp.170–176). Berkeley.

Tall, D. (1985a). Understanding the calculus, *Mathematics Teaching* 110 pp. 49-53.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. In D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, (*48*, pp. 199-238).

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Johnsen Høines, & A. B. Fugelstad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 281-288). Bergen, Norway.

Thiele, R. (2003). Antiquity. In H. N. Jahnke (Ed.), *A history of analysis* (pp. 1-39). Rhode Island, USA: American Mathematical Society.

Todorov, T. (2001). Back to classics: Teaching through infinitesimals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (*32*(1), pp. 1-20).

Trouche, L., & Guin, D. (1996). Seeing is Reality: How Graphing Calculators may Influence the Conceptualisation of Limits. In L. Puig & A. Gutierez (Eds). *Proceedings of the 20th PME*, (4 , pp. 323-330).

Valdez, P. & Mehrabian, A. (1994) Effect of colour on emotions. *Journal of Experimental Psychology*.

Van Maanen, J. (2003). Precursors of differentiation and integration. In H. N. Jahnke (Ed.). *A history of analysis,* (pp. 1-39). Rhode Island, USA: American Mathematical Society.

Vergnaud, G. (1991). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, (*10, 2/3, pp. 133-169).

Villarreal, E. M. (1997). Computers, graphics and refutations. *Proceedings of the 21st PME Conference*, (1, pp. 268). Lathi, Finland.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. Advanced Mathematical Thinking, D.O.Tall (ed.), Dordrecht, Kluwer, 65-81.

Von Glasersfeld, E. (1983). Learning as a constructive activity. *Proceedings of the fifth PME-NA*, (vol. 1, pp. 41-69). Montreal.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity, In C. Janvier (Ed). *Problems of representation in teaching and learning of mathematics,* (pp. 3-18)*,* London: Lawrence Erlbaum Associates.

Von Glasersfeld, E. (1991a). Abstraction, representation and reflection. In L. Steffe (Ed.). *Epistemological foundations of mathematical experience,* (pp. 45-67). New York: Springer.

Von Glasersfeld, E. (Ed). (1991b). *Radical constructivism in mathematics education*. Dortrecht: Kluwer.

Von Glasersfeld, E. (1995). A Constructivist Approach to Teaching. In L. P. Steffe, & J. Gale (Eds), *Constructivism in Education* (pp.3-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadoy, S. (1996). Learning environments for representational growth and cognitive flexibility. In S. Vosniadou, E. De Corte, R. Glasher, & H. Mandl (Eds), *International perspectives on the design of technology – supported learning environments.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky L. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, (22, pp. 219–236).

Williams, S. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education,* (32, pp. 341-367).

Yerushalmy, M. (1999) Making Exploration Visible: On Software Design and School Algebra Curriculum. *International Journal for Computers for Mathematical Learning*, (4 (2-3), pp. 169-189).

Zaslavsky, O.& Shir,K. (2005). Students' conception of a mathematical definition, *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 317-346.

Ελληνόγλωσση

Αλιμήσης, Δ. (2000). *Εκπαίδευση εκπαιδευτικών στην ΠΑ.ΤΕ.Σ Πάτρας στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Η/Υ*.

Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Αυγερινός, Ε., & Κιουλάφας, Μ. (2002). Χρήση Μαθηματικού Λογισμικού στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, 3^{ο} Συνέδριο ΕΤΠΕ, Ρόδος 2002.

Αυγερινός, Ε., & Κιουλάφας, Μ. (2003). Η απαρχή της έννοιας του Ορίου και ο Εύδοξος. *Πρακτικά 20^{ου} Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Βέροια.

Αυγερινός, Ε., & Κιουλάφας, Μ. (2004). Η έννοια του Ορίου στην Αρχαία Ελλάδα και η διδακτική του στη σχολική πραγματικότητα». *Πρακτικά 21^{ου} Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, (σελ. 654-663). Τρίκαλα.

Βίγκλας, Λ., & Σπυρόπουλος, Χ., (2003). *Δημιουργία προσομοιώσεων με εκπαιδευόμενους πράκτορες: Η εκπαιδευτική αξία της κατασκευής προσομοιώσεων από τους μαθητές στο περιβάλλον εκπαιδευόμενων πρακτόρων agent sheets.* Πρακτικά του 2^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου των εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ. Σύρος.

Γιαννακούλιας, Ε. (2006). *Απειροστικός Λογισμός, Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^{ο} π.χ. έως και τον 19^{ο} αιώνα.*

Γκούτσιας, Α. (2002). *Διδακτικές προσεγγίσεις με λογισμικό ή πείραμα. Π*ρακτικά Ημερίδας για τη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών – Καινοτομίες στην εκπαίδευση.

Γρηγοριάδου, Μ., & Μπακογιάννης , Σ. (1991). *Μοντέλο αξιολόγησης εκπαιδευτικού λογισμικού – Η συμμετοχή του μαθητή ως αξιολογητή*.

Κείσογλου, Στ. (2001). *Σύγχρονα λογισμικά σαν εργαλεία αναστοχαστικών κατασκευών. Στο* Τζεκάκη, Μ. (επιμ). Πρακτικά του 5^{ου} Πανελλήνιου

Συνεδρίου, για τη Διδακτική των μαθηματικών και την Πληροφορική στην Εκπαίδευση. Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ, Παν. Μακεδονία, Παιδ. Ινστιτούτο.

Κολέζα, Ε. (1994). Σκέψεις γύρω από το ρόλο της αναπαράστασης στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Μαθηματική Επιθεώρηση τ.41., σελ. 33-69.*

Κολέζα, Ε. (1997). *Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Μυτιλήνη.

Κόμης, Β. Ι. (2004). *Εισαγωγή στις Εκπαιδευτικές Εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών*. Αθήνα : Εκδόσεις. Νέων Τεχνολογιών.

Κορδάκη, Μ. (1999). Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού. (Διδακτορική διατριβή). Πάτρα.

Κορδάκη, Μ. (2001). *Θέματα διδακτικής της Γεωμετρίας στο περιβάλλον Cabri-Geometry II*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.

Κορδάκη, Μ., & Κόμης, Β. (2001). *Αντιλήψεις καθηγητών πληροφορικής σχετικά με το είδος και το ρόλο των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία και τη μάθηση του αντικειμένου*. Πρακτικά 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση.

Κουτσελίνη, Ι. Μ., &, Θεοφιλίδης, Χ. (2002). *Διερεύνηση και Συνεργασία – για μια αποτελεσματική διδασκαλία*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Κυνηγός, Χ. (1995). Η Ευκαιρία που δεν Πρέπει να Χαθεί: Η Υπολογιστική Τεχνολογία ως Εργαλείο Έκφρασης και Διερεύνησης στη Γενική Παιδεία. Στο Α. Καζαμίας και Μ. Κασσωτάκης (Επιμ.). *Προοπτικές για μια Νέα Πολιτική στην Ελληνική Εκπαίδευση*, (σελ. 396-416). Αθήνα: Σείριος.

Κυνηγός, Χ. (2006). Το Μάθημα της Διερεύνησης, Παιδαγωγική Αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κυνηγός, Χ. (2007). *Μαθηματική Εκπαίδευση.* Σημειώσεις του μαθήματος Παιδαγωγικά. Αθήνα .

Κυνηγός κ.ά., (2008). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα ΚΣΕ ΥΠΕΠΘ, ΙΤΥ*.

Κωσταρίδου-Ευκλείδη Α. (1997). *Ψυχολογία της σκέψης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Μακράκης, Β., & Στεφάνου, Χ. (2001). *Αναπτύσσοντας αλληλεπιδραστικά μαθησιακά περιβάλλοντα στην ανοικτή και εξ αποστάσεως εκπαίδευση με την τεχνολογία Java & Java Applets.* Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση. Πάτρα.

Μαρουσάκης, Π. (1984). Τα Αναλυτικά Προγράμματα στη Μέση Εκπαίδευση (Ενόραση & Φορμαλισμός). *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα.

Ματσαγγούρας, Η. (1987). *Ομαδοκεντρική Διδασκαλία και Μάθηση*. Αθήνα: Γρηγόρης.

Ματσαγγούρας Η. (2006). *Στρατηγικές Διδασκαλίας. Η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη*, (5η έκδοση). Αθήνα: Gutenberg.

Μικρόπουλος Τ. Α. (2000) *ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ Θέματα σχεδίασης και αξιολόγησης λογισμικού υπερμέσων*. Αθήνα: Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Μπακίρης, Π., Φεσάκης, Γ., Καλαβάσης, Φ., & Δημητρακόπουλος, Α., (2004). *Ταξινόμηση των εκπαιδευτικών τεχνολογικών μέσων με βάση την υποστήριξη που παρέχουν στις φυσικές παρορμήσεις των παιδιών.* Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου για τις ΤΠΕ στην εκπαίδευση. Αθήνα.

Noss, R. (1988). The computer as a cultural influence in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, (*19, pp. 251-268).

Ξεναρίου, Κ., & Κανελλοπούλου, Ε. (2004). Ο Αχιλλέας και η Χελώνα: μια πρόταση αξιοποίησης ενός λογισμικού μοντελοποίησης (MODELLUS) στη διδασκαλία επιλεγμένων θεμάτων μαθηματικών εννοιών στη Β/θμια Εκπ/ση. *2ο Συνέδριο Σύρου – ΤΠΕ στην Εκπαίδευση*.

Π. Ι. (2007). *Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών του Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα της Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου*. ΑΘήνα: Εκδόσεις Ζήτη.

Παπαδόπουλος, Γ. (1999). *Η Πληροφορική στο σχολείο: Ο σχεδιασμός και το έργο του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*. Πρακτικά Ημερίδας του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου. Αθήνα.

Πατσιομίτου, Στ. (2006). *Συμπεράσματα από την πειραματική διδασκαλία με math applets, του ιστοχώρου illuminations.nctm.org. Αντιλήψεις μαθητών* Πρακτικά του 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή, για τις ΤΠΕ στην εκπαίδευση. Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ.

Πέτρου-Μπακίρη, Α., Φεσάκης, Γ., Καλαβάσης, Φ., & Δημητρακοπούλου, Α. (2000). *Ταξινόμηση των Εκπαιδευτικών Τεχνολογιών ως Σύνολα Μέσων για τις Φυσικές Παρορμήσεις των Παιδιών*. 2ο Συνέδριο: Οι Τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας στην εκπαίδευση. Πάτρα.

Πρέζας, Π. (2003). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτικό Λογισμικό.* Αθήνα: Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Ράπτης, Α., & Ράπτη, Α. (1996). *Η πληροφορική στην Εκπαίδευση: Παιδαγωγική προσέγγιση*. Αθήνα: Συμεών.

Ράπτης, Α., & Ράπτη, Α. (2007). *Μάθηση και Διδασκαλία στην Εποχή της Πληροφορίας. Ολική Προσέγγιση*. Αθήνα.

Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία*, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Στεργίου, Β. (2002). *ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ, ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΟΥ*, (Διδακτορική διατριβή). Πάτρα.

Τουμάσης, Μ. (1999a). Αλλάζει η φύση της μαθηματικής απόδειξης; Παιδαγωγικές συνέπειες. *Ευκλείδης Γ΄*, (16(52), σελ. 5-25). Αθήνα.

Τουμάσης, Μ. (1999b). *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών*. Αθήνα: Κωστόγιαννος.

Τουμάσης, Μ. & Αρβανίτης, Τ. (2003). *Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*. Αθήνα: Σαββάλας.

Τριλιανός, Α. (1997). *Η κριτική σκέψη και η διδασκαλία* της. Αθήνα: Τελέθριον.

Τσεμασφύρας, Γ. (επιμ.). *Τηλεκπαίδευση: Η σημερινή πραγματικότητα στην Ελλάδα.* Πρακτικά της επιστημονικής ημερίδας του Ε.Μ.Π., (56-64).

ΥΠΕΠΘ. (2008). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Πάτρα: ΙΤΥ.

Χατζηβασιλείου,Ε. , Ταξίδης, Χ. , Σαλονικιός, Δ., & Ίτσιου, Σ. (2005). Η Αξιοποίηση Των Προγραμμάτων Προσομοίωσης Java Applets στη Διδασκαλία Των Μαθηματικών. *4^{ο} Συνέδριο στη Σύρο – ΤΠΕ στην Εκπαίδευση.*

Χρονάκη. Α. (2000). Συνεργασία μαθητών σε ομάδες: Μια προσέγγιση από την σκοπιά των εκπαιδευτικών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση, (1, σελ.* 38-49*)*. Αθήνα.

Ψυχάρης, Γ. (2005). *Ανάπτυξη νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας σε προβλήματα αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών με χρήση ειδικών εργαλείων υπολογιστικής τεχνολογίας.*Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. ΦΠΨ Αθηνών, Τομέας Παιδαγωγικής ΕΚΠΑ.

Van Bendegem, J. P. (2003). Η δημιουργική ανάπτυξη των Μαθηματικών. *2ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Ι. Ερωτηματολόγιο Ι (όριο συνάρτησης)

Παράρτημα ΙΙ. Φύλλο εργασίας στο ε-δ ορισμό

Παράρτημα ΙΙΙ. Ερωτηματολόγιο ΙΙ (μετά το μάθημα στο ε-δ ορισμό)

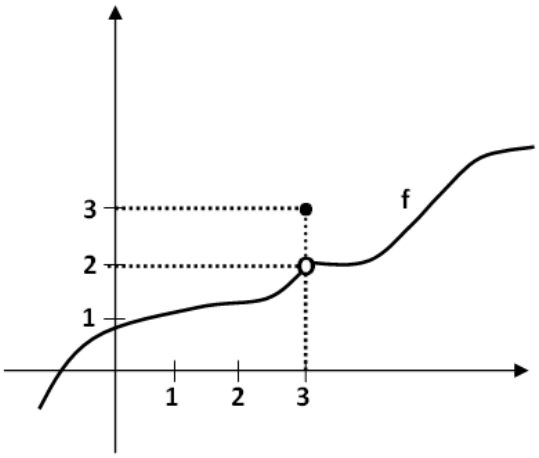
Παράρτημα Ι. Ερωτηματολόγιο Ι (όριο συνάρτησης)

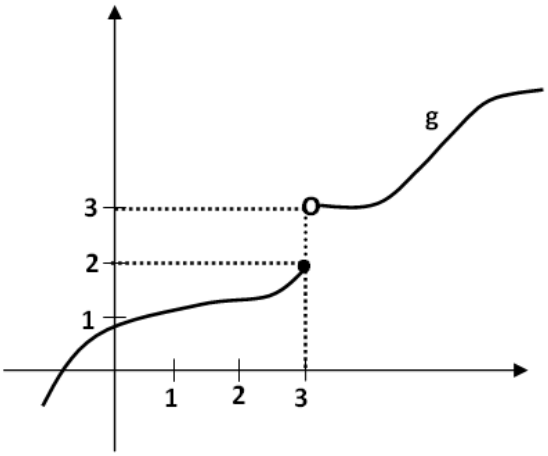
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΣΤΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

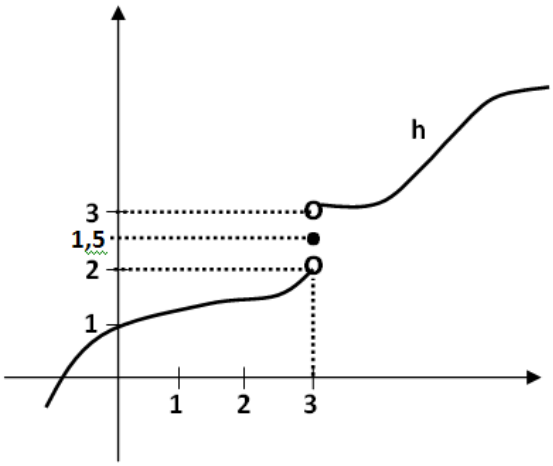
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Θετική ☐ Τεχνολογική ☐
ΦΥΛΟ: Αγόρι ☐ Κορίτσι ☐	
ΣΧΟΛΕΙΟ:	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

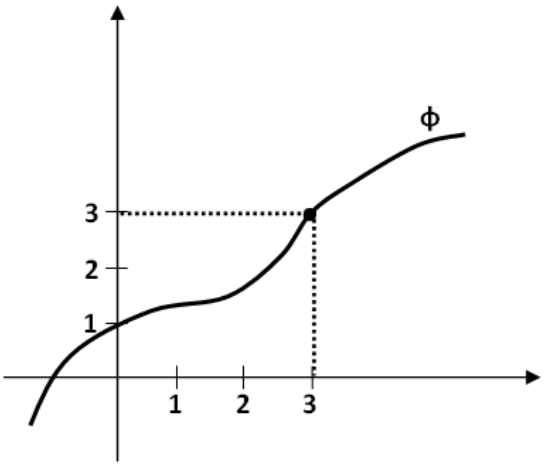
1. Πως θα περιγράφατε σε έναν συμμαθητή σας ότι $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ για να τον βοηθήσετε να καταλάβει;

2. Τι συμπεραίνετε από τα παρακάτω σχήματα για τα όρια των αντίστοιχων συναρτήσεων όταν το χ τείνει στο 3;









3. Έστω συνάρτηση f:A→R για την οποία ισχύει ότι f(x) > 0 , ∀x∈A. Μπορεί να ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ για κάποιο $x_0 \in A$; Αν ναι, δώστε ένα παράδειγμα. Αν όχι , εξηγήστε.

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-3} + 8$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12} + 3$. Τι συμπεραίνετε για το $\lim_{x \to 3} \left(f(x) + g(x) \right)$;

5. Αν ισχύει $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, τότε :

(α) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε η f στο διάστημα (2-δ , 2+δ) να είναι μονότονη. (Σ) (Λ)

(β) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε f(x)≤5 για κάθε χ∈(2-δ,2) ή f(x)≥5 για κάθε χ∈(2-δ,2) (Σ) (Λ)

(γ) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε η f στο (2-δ,2) ή στο (2,2+δ) να είναι μονότονη (Σ) (Λ)

(δ) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε να είναι f(x)≤5 για κάθε χ∈(2,2+δ) ή f(x)≥5 για κάθε χ∈(2,2+δ) (Σ) (Λ)

6. Αν ΔΕΝ υπάρχει το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 , τότε αναγκαστικά είναι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (Σ) (Λ)

Παράρτημα ΙΙ. Φύλλο εργασίας στο ε-δ ορισμό

Φύλλο εργασίας (Ανάλυση)
Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης σε σημείο

ΠΡΟΒΛΗΜΑ
Μια κάμερα καταγράφει έναν αγώνα των 100m. Με ποιο τρόπο θα μπορούσαν τα δεδομένα της κάμερας να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της ταχύτητας ενός αθλητή κατά τη χρονική στιγμή *T*=6sec;

Ανοίξτε το αρχείο *2.1.1.activity.gr.euc* του EucliDraw. Στο περιβάλλον αυτό μπορούμε να έχουμε τα δεδομένα της κάμερας.

Όταν αλλάζουμε τις τιμές του t αλλάζουν και οι τιμές του *s(t)* που δίνουν την απόσταση που έχει καλύψει ο αθλητής έως τη χρονική στιγμή *t*.

Το *t* μπορεί να πλησιάσει το *T* από μικρότερες και από μεγαλύτερες τιμές. Εμφανίστε τη μέση ταχύτητα. Το κίτρινο κουτί παριστάνει τη μέση ταχύτητα $\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$ στο διάστημα που ορίζουν τα *t* και *T*.

Ε1: Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$	t	$\frac{s(T)-s(t)}{T-t}$
4		8	
5		7	
5,5		6,5	
5,8		6,3	
5,9		6,1	
5,93		6,07	
5,95		6,03	
5,99		6,01	
5,995		6,005	
5,999		6,001	
5,9999		6,0001	
5,99999		6,00001	

Ε1: Ποιον αριθμό πλησιάζει η μέση ταχύτητα καθώς το *t* πλησιάζει το *T*=6sec;

Ε2: Ποια είναι η ταχύτητα του αθλητή τη χρονική στιγμή *T*=6sec;

Εμφανίστε τη συνάρτηση (γρ. παρ.) της μέσης ταχύτητας *U(t)* στο αρχείο του EucliDraw και επιβεβαιώστε γραφικά την απάντησή σας.

Εμφανίστε την ε-ζώνη στο αρχείο του EucliDraw.

Μετακινήστε το *t* έτσι ώστε το σημείο (*t,U(t)*) να βρεθεί στην *ε*-ζώνη και παρατηρήστε τις τιμές της μέσης ταχύτητας.

Ε3: Για ποιες τιμές του *t* το σημείο (*t, U(t)*) ανήκει στην *ε*-ζώνη για *ε*=0,8;

Ε4: Προσπαθήστε να βρείτε ένα *δ* τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης στην κόκκινη περιοχή.

Ε5: Μειώστε το *ε* σε 0,5 και βρείτε κατάλληλο *δ* ώστε τα σημεία (t, *U(t)*) να μην βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή.

Ε6: Εάν *ε*=0,05 μπορείτε να βρείτε *δ* με την παραπάνω ιδιότητα;

Ε7: Εάν το *ε* μικρύνει κι άλλο θα μπορούμε πάντα να βρούμε *δ* με την παραπάνω ιδιότητα;

Ε8: Συμπληρώστε τα κενά της παρακάτω πρότασης με τα κατάλληλα χρώματα ώστε να εκφράζει το συμπέρασμα της Ε7.

"Για κάθε *ε*>0 μπορούμε να βρούμε *δ*>0 τέτοιο ώστε η συνάρτηση να μην βρίσκεται στην ……κόκκινη ……. περιοχή."

Ε9: Συμπληρώστε τα κενά ώστε η παρακάτω πρόταση να αποδίδει το συμπέρασμα της Ε7.

Τα ……*U(t)*…….. μπορούν να είναι όσο κοντά θέλουμε στο ……*L*…… αρκεί τα ……*t*……. να είναι κατάλληλα κοντά στο ……*T*…… και διαφορετικά του ……*T*…….

Ε10: Προσπαθήστε να διατυπώσετε το συμπέρασμα της Ε7, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.

Παράρτημα ΙΙΙ. Ερωτηματολόγιο ΙΙ (μετά το μάθημα στο ε-δ ορισμό)

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΣΤΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΣΤΟΝ ε-δ ΟΡΙΣΜΟ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Θετική ☐ Τεχνολογική ☐
ΟΝΟΜΑ:	
ΣΧΟΛΕΙΟ:	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

1. Αξιολογείστε το μάθημα διδασκαλίας του ορίου στο οποίο συμμετείχατε (Κυκλώστε μια επιλογή ***σε κάθε*** στήλη)

Α. Πολύ ενδιαφέρον	Α. Πολύ δύσκολο
Β. Ενδιαφέρον	Β. Δύσκολο
Γ. Δεν είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον	Γ. Εύκολο
Δ. Δεν ήταν καθόλου ενδιαφέρον	Δ. Πολύ εύκολο

2. Κυκλώστε ***σε κάθε*** στήλη την επιλογή που σας εκφράζει περισσότερο

Α. Μου αρέσουν πολύ τα Μαθηματικά	Α. Τα Μαθηματικά είναι πολύ δύσκολα
Β. Μου αρέσουν τα Μαθηματικά	Β. Τα Μαθηματικά είναι δύσκολα
Γ. Μου αρέσουν λίγο τα Μαθηματικά	Γ. Τα Μαθηματικά είναι εύκολα
Δ. Δεν μου αρέσουν τα Μαθηματικά	Δ.Τα Μαθηματικά είναι πολύ εύκολα

3. Ποια ήταν η διαφορά του μαθήματος για τα όρια που παρακολουθήσατε από τα άλλα μαθήματα που μαθηματικών έχετε παρακολουθήσει;

4. Ποια είναι η εμπειρία σας σχετικά με τους υπολογιστές; (Κυκλώστε την κατάλληλη επιλογή)

Α. Χρησιμοποιώ υπολογιστή στο σπίτι και στο σχολείο.

Β. Χρησιμοποιώ υπολογιστή μόνο στο σχολείο.

Γ. Β. Χρησιμοποιώ υπολογιστή μόνο στο σπίτι.

Δ. Δεν χρησιμοποιώ καθόλου υπολογιστή.

5. Τι σας άρεσε περισσότερο στο μάθημα που παρακολουθήσατε;

6. Τι ***δεν*** σας άρεσε στο μάθημα που παρακολουθήσατε;

7. Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίσατε στο μάθημα;

8. Τι θα θέλατε να ήταν διαφορετικό στο μάθημα και γιατί;

9. Πως θα περιγράφατε σε έναν φίλο σας την έννοια του ορίου συνάρτησης σε σημείο $\chi_0 \in R$;

10. Θεωρείτε ότι η χρήση του υπολογιστή (κατάλληλο λογισμικό) σας βοήθησε να κατανοήσετε καλύτερα το όριο συνάρτησης σε σημείο $\chi_0 \in R$;

    Ανάλογα με την απάντηση που θα δώσετε, γράψτε δυο λόγια για τη δικαιολόγηση της.

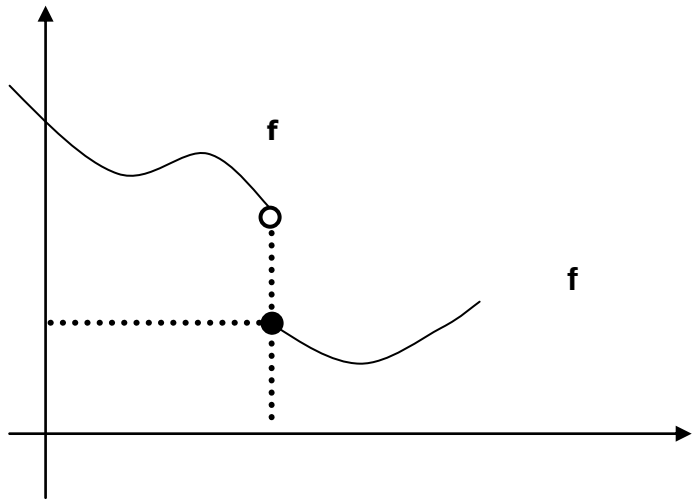
11. Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ο ε – δ ορισμός του ορίου συνάρτησης :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, να ισχύει: $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$

α)Τι εντύπωση νομίζετε ότι θα σχημάτιζε ένας μαθητής διαβάζοντας τον ορισμό αυτό;

β)Θεωρείτε ότι με την βοήθεια του φύλλου εργασίας (που δόθηκε στο μάθημα) και τη χρήση του υπολογιστή, μπορεί κάποιος μαθητής να φτάσει πιο ομαλά στον ε – δ ορισμό; Δικαιολογήστε σύντομα.

12. Μπορείτε με βάση το παρακάτω σχήμα και χρησιμοποιώντας τον ε – δ ορισμό, να εξηγήσετε γιατί ΔΕΝ υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;



13. Τι κατά τη γνώμη σας είναι τελείως απαραίτητο να συμβαίνει για να έχει νόημα το σύμβολο

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; ($\chi_0 \in$ R).

14. Αν ισχύει $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, τότε :

(α) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε η f στο διάστημα (2-δ , 2+δ) να είναι μονότονη. (Σ) (Λ)

(β) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε f(x)≤5 για κάθε χ∈(2-δ, 2) ή f(x)≥5 για κάθε χ∈(2-δ,2) (Σ) (Λ)

(γ) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε η f στο (2-δ, 2) ή στο (2, 2+δ) να είναι μονότονη (Σ) (Λ)

(δ) υπάρχει πάντα δ>0 ώστε να είναι f(x)≤5 για κάθε χ∈(2, 2+δ) ή f(x)≥5 για κάθε χ∈(2, 2+δ) (Σ) (Λ)

15. Αν ΔΕΝ υπάρχει το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0, τότε αναγκαστικά είναι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (Σ) (Λ)

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \ , & x \le 1 \\ 5x \ , & x = 2 \end{cases}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$; Εξηγήστε .