ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΙΦΙΓΕΝΕΙΑ ΣΥΝΟΔΙΝΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΛΑΠΠΑΣ

Αθήνα
Ιούνιος, 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών"

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Α/Α	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1	Διονύσιος Λάππας (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής	
2	Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αναπληρωτής Καθηγητής	
3	Παναγιώτης Σπύρου	Επίκουρος Καθηγητής	

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στον κ. Διονύσιο Λάππα που μου εμπιστεύθηκε το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας και την βοήθεια που μου προσέφερε καθ όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια και κ. Παναγιώτη Σπύρου για την συμμετοχή τους στην Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή.

Κατάλογος περιεχομένων

0.Εισαγωγή....6
1. Η άλγεβρα των Βαβυλωνίων....10
1.1 Γενικά για την άλγεβρα των Βαβυλωνίων-Προβλήματα Άλγεβρας....10
1.2 Η μέθοδος της δοκιμής και του λάθους....11
1.3 Πρόβλημα που οδηγεί σε σύστημα δευτέρου βαθμού....12
1.4 Πρόβλημα που οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση. 15
1.5 Εξισώσεις ανωτέρου βαθμού....18
2. Η γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων....20
2.1 Παραβολή Χωρίων....21
2.2 Γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης....24
2.3 Γεωμετρική επίλυση της γενικευμένης δευτεροβάθμιας εξίσωσης....31
2.4 Γεωμετρική επίλυση συστήματος....37
3. Η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων από τους Άραβες....41
3.1 al-Khwarizmi....41
3.2 Tabit ben Qurra....44
3.3 Omar Khayyam....47
3.3.1 Μαθηματική συμβολή στην επίλυση κυβικών εξισώσεων....47
3.3.2 Παραδείγματα επίλυσης κυβικών εξισώσεων....51
4.Η Άλγεβρα στην Ιταλία....56
4.1 Leonardo da Pisa (Fibonacci)....56
4.2 Maestro Benedetto....59
4.3 Antonio Mazzinghi....60
4.4 Master Dardi of Pisa....62
4.5 Luca Pacioli....67
4.6 Η επίλυση της κυβικής και τεταρτοβάθμιας εξίσωσης....68
4.6.1 Del Ferro....68
4.6.2 Niccolo Tartaglia – Girolamo Cardano....71
4.6.3 Ferrari....75
4.7 Rafael Bombelli....79
5. Francois Viete....80
5.1 Ομογενοποίηση της Άλγεβρας....80
5.2 Μετασχηματισμοί εξισώσεων....81
6. Pierre de Fermat - Rene Descartes....84
6.1 Μετασχηματισμός τετραγωνικών εξισώσεων....84
6.2 Η “Γεωμετρία” του Καρτέσιου. 85
6.3 Κατασκευή Μέσης Αναλόγου και σύγκριση με τους Έλληνες....88
7.Οι προγενέστεροι του Galois....94
7.1 Waring....94
7.2 Vandermonde....94
7.3 Lagrange....96
7.3.1 Κυβικές εξισώσεις....96
7.3.2 Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις 97
7.4 Malfatti....99
7.4.1 Τρίτου βαθμού εξίσωση....99
7.4.2 Πέμπτου βαθμού εξίσωση....100
7.5 Ruffini-Cauchy-Abel....101
7.6 Gauss....105
8. Η άλγεβρα του Galois....110

9.Διδακτικές προεκτάσεις.....115
9.1 Συνέπειες της ιστορικής διάστασης της άλγεβρας στη διδασκαλία της.....115
10.Βιβλιογραφία.....118
11.Δικτυακοί τόποι.....118

0.Εισαγωγή

Οι εξισώσεις ιστορικά είναι συνδεδεμένες με λύσεις προβλημάτων. Μελετώντας τις πηγές, η επίλυση των εξισώσεων διέρχεται διάφορα στάδια. Η παρούσα διπλωματική εργασία καλύπτει ιστορικά ένα μεγάλο χρονικό διάστημα που ξεκινά με την "άλγεβρα" των Βαβυλωνίων (1700 π.Χ.), τις γεωμετρικές απαιτήσεις των Αρχαίων Ελλήνων (300 π.Χ.), συνεχίζει με τους Άραβες (800-1100 μ.Χ.), τους Ιταλούς (1200 – 1600 μ.Χ.), και καταλήγει στις σύγχρονες διατυπώσεις, $18^{ος}-19^{ος}$ αιώνας, των Gauss και Galois που έχουν την καταγωγή τους στους Viete και Descartes (1550-1650 μ.Χ.).

Στην παρούσα διατριβή σκοπεύουμε να διεξέλθουμε την **μετάβαση** από την γεωμετρική θεώρηση των Ελλήνων στην πλήρη αλγεβροποίηση και χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών και την διδακτική αξιοποίησή της. Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε πως τα προβλήματα οδήγησαν σε επινοήσεις για την επίλυση εξισώσεων και πως η εξίσωση έγινε μαθηματικό αντικείμενο και αυτονομήθηκε. Στην πορεία της αυτονόμησης, δημιουργήθηκε ένας καινούργιος κλάδος των μαθηματικών που χαρακτηριζόταν ως Άλγεβρα. Σήμερα η Άλγεβρα εξυπηρετεί διαφορετικά πράγματα, μια πανσπερμία αντικειμένων και αντιμετωπίζεται κάτω από την οπτική των δομών. Όταν ξεκινά η οπτική αυτή, $19^{ος}$ αιώνας, με τον Galois, όπου πραγματοποιείται και η αυτονόμηση, ολοκληρώνεται και η ιστορική αναδρομή που γίνεται.

Συχνά αναφέρεται ότι οι Βαβυλώνιοι ήταν οι πρώτοι που έλυσαν εξισώσεις, δευτέρου βαθμού. Στην πραγματικότητα οι Βαβυλώνιοι δεν είχαν γνώση της έννοιας της εξίσωσης. Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζει την αλγοριθμική προσέγγιση των Βαβυλωνίων στην επίλυση προβλημάτων που προέκυπταν από την καθημερινή ζωή τους και λύνονταν κατά βάση με τη μέθοδο της δοκιμής-λάθους. Όλα τα Βαβυλωνιακά προβλήματα είχαν λύσεις που ήταν θετικές ποσότητες καθώς ο άγνωστος ήταν σχεδόν πάντα ένα μήκος ενώ μόνο με σύγχρονη ορολογία η επίλυσή τους οδηγεί σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Στο δεύτερο κεφάλαιο παραθέτουμε την γεωμετρική προσέγγιση των αρχαίων Ελλήνων μέσα από το έργο του Ευκλείδη, τα Στοιχεία. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται κυρίως στην έννοια της παραβολής των χωρίων και μέσα από συγκεκριμένες προτάσεις των βιβλίων ΙΙ και VI των Στοιχείων, φαίνεται πως επιτυγχάνεται η εύρεση

συγκεκριμένου ευθύγραμμου τμήματος που στην δική μας ορολογία είναι η ρίζα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Ο Ευκλείδης δεν είχε γνώση της έννοιας της εξίσωσης και εργαζόταν με καθαρά γεωμετρικά μεγέθη.

Το τρίτο κεφάλαιο ξεκινάει με τον Άραβα μαθηματικό al-Khwarizmi, ο πρώτος που έγραψε μια συστηματική παρουσίαση πάνω στην βασική θεωρία των εξισώσεων, που περιείχε τόσο παραδείγματα όσο και αποδείξεις. Ο al-Khwarizmi, μη γνωρίζοντας τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν, έδωσε μια κατηγορία έξι διαφορετικών τύπων εξισώσεων, στους οποίους όλες οι εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού μπορούν να αναχθούν. Τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις ήταν ο πρώτος που τις έλυσε με χρήση των διαδικασιών "al-jabr" και "al-muqabala". Η ερμηνεία τους αντίστοιχα είναι η πρόσθεση ισοδύναμων όρων και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης με σκοπό να μειώσει τους αρνητικούς όρους και η μείωση θετικών όρων αφαιρώντας ίσες ποσότητες και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης. Ο μαθηματικός, αστρονόμος και ποιητής Omar Khayyam από την Περσία, απέδειξε πως αναπαρίστανται οι ρίζες κυβικών εξισώσεων με ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν από την τομή κωνικών τομών, χωρίς όμως να βρει την φόρμουλα επίλυσης της κυβικής εξίσωσης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται Ιταλοί μαθηματικοί με πρώτο τον Fibonacci και επιλύουν τετραγωνικές εξισώσεις, εφόσον η φόρμουλα ήταν πλέον γνωστή, κάποιους συγκεκριμένους τύπους κυβικών εξισώσεων με εξαγωγή κυβικών ριζών και τετραγωνικές εξισώσεις που κατά κύριο λόγο μετασχηματίζονται και ανάγονται σε τετραγωνικές. Από το 1500, μια καινούργια εποχή ξεκινά για τα μαθηματικά στην Ιταλία. Ο Luca Pacioli στο Suma, συνοψίζει όλη την γνώση της εποχής χρησιμοποιώντας καινούργιο και απλουστευμένο συμβολισμό, οι μαθηματικοί Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia και Gerolamo Cardano επιλύουν την γενική κυβική εξίσωση, ο καθένας από μία μορφή της κατ' αντιστοιχία με τις σταθερές που εμφανίζονταν στην εξίσωση, ενώ ο μαθητής του Cardano, Ludovico Ferrari, γρήγορα βρήκε μια ακριβή λύση για εξισώσεις τετάρτου βαθμού.

Σημαντική εξέλιξη στην άλγεβρα επήλθε τον 16° αιώνα, καθώς έγινε η πρώτη εμφάνιση απλών και εύχρηστων συμβόλων για τον άγνωστο, για τις αλγεβρικές δυνάμεις και τις αλγεβρικές πράξεις και υπάρχει ξεκάθαρα κατεύθυνση προς την ομογενοποίηση της Άλγεβρας με τη βοήθεια των Viete και του Καρτέσιου. Τα

πρώτα αυτά σημαντικά και καθοριστικά βήματα προς την αυτονόμηση της Άλγεβρας παρουσιάζονται στο 5ο και 6ο κεφάλαιο της εργασίας. Ο Viete επιδιώκει την αποκόλληση της Άλγεβρας από την αριθμητική και την γεωμετρία, εισάγει την πρώτη συστηματική αλγεβρική συμβολογραφία, και ασχολείται με μετασχηματισμούς εξισώσεων για την γεωμετρική επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Η συμβολή του Καρτέσιου στα Μαθηματικά και στην Άλγεβρα είναι μεγάλη καθώς σε αυτόν οφείλεται κυρίως ο σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός. Στο έργο του *La Géométrie* (1637), που αποτελεί στην ουσία την θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας, παρουσιάζει τον συμβολισμό αυτό. Το εργαλείο του Καρτέσιου στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων είναι η εισαγωγή αριθμητικών όρων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση και εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας) στη Γεωμετρία και η συμβολική άλγεβρα. Περνάει από την αριθμητική των γεωμετρικών μεγεθών στην αριθμητική των γραμμάτων.

Η δουλειά πάνω στην επίλυση εξισώσεων συνεχίστηκε για τους επόμενους δύο αιώνες, $17^{ος}$ και $18^{ος}$, όπου οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να βρουν την λύση για εξισώσεις 5ου ή μεγαλύτερου βαθμού (7ο Κεφάλαιο). Ο Waring διερευνά την επίλυση της κυκλοτομικής εξίσωσης. Ο Vandermonde βασιζόμενος στις γνωστές λύσεις των τετραγωνικών και κυβικών εξισώσεων, κατασκευάζει γενικές αρχές πάνω στις οποίες πρέπει να βασίζεται η επίλυση των εξισώσεων αλλά σε εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4 δε μπορεί να γενικεύσει γιατί η μέθοδός του δουλεύει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Επιλύει όμως την κυκλοτομική εξίσωση $x^n-1=0$ για n=11. Η προσπάθεια του Lagrange στη δημιουργία μιας γενικής φόρμουλας με χρήση των "αναπτυγμάτων Lagrane" αποτυγχάνει επίσης γιατί η βοηθητική εξίσωση που χρησιμοποιεί στην μέθοδό του έχει βαθμό μεγαλύτερο της αρχικής. Καταφέρνει όμως να παραθέσει τις ήδη γνωστές λύσεις εξισώσεων 2ου, 3ου και 4ου βαθμού σαν αποτελέσματα μιας και μόνο αρχής ενώ βλέπουμε και την επίλυση της εξίσωσης $x^5-1=0$. Ακολουθεί ο Malfatti που ασχολείται με εξισώσεις 5ου βαθμού, αφού εφαρμόζει την μέθοδό του πρώτα σε εξισώσεις 3ου βαθμού. Ο Ruffini, μαθητής του Lagrange που χρησιμοποιούσε κυρίως μεθόδους του δασκάλου του, ισχυρίστηκε ότι απέδειξε ότι η γενική εξίσωση 5ου βαθμού δεν μπορεί να λυθεί με ριζικά, αλλά η απόδειξή του δεν ήταν πλήρης. Ο Cauchy γενίκευσε το αποτέλεσμα του Ruffini ότι το πλήθος διαφορετικών τιμών που φτάνει μια μη-συμμετρική συνάρτηση, δεν γίνεται να είναι μικρότερος του 5 εκτός και αν είναι 2, σε συναρτήσεις n μεταβλητών. Ο Abel ήταν αυτός που κατάφερε να αποδείξει ότι η συνάρτηση 5ου βαθμού είναι αδύνατο να επιλυθεί με ριζικά. Το τέλος αυτού του κεφαλαίου κατέχει η σημαντικότατη προσφορά του Γερμανού μαθηματικού Carl Friedrich Gauss στην Άλγεβρα και την θεωρία εξισώσεων

πρώτον επιλύοντας την κυκλοτομική εξίσωση με χρήση ριζικών και δεύτερον με την απόδειξη ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο μιγαδικό επίπεδο.

Ολοκληρώνοντας την αναδρομή στην θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων, καταλήγουμε στο 8ο κεφάλαιο όπου στις αρχές πλέον του $19^{ου}$ αιώνα ο Evariste Galois αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος επίλυσης εξίσωσης ν-οστού βαθμού. Η άλγεβρα περνά οριστικά στην σύγχρονη φάση της, όπου από την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων το ενδιαφέρον στρέφεται στην μελέτη αφηρημένων μαθηματικών συστημάτων (π.χ. οι ομάδες), των οποίων τα αξιώματα βασίζονται στην συμπεριφορά μαθηματικών αντικειμένων όπως οι μιγαδικοί αριθμοί τους οποίους οι μαθηματικοί ανακάλυψαν κατά την επίλυση των εξισώσεων. Τέλος το 9ο κεφάλαιο αποτελεί μια διδακτική προέκταση αναλύοντας τις συνέπειες της ιστορικής διάστασης της άλγεβρας στη διδασκαλία της.

1. Η άλγεβρα των Βαβυλωνίων.

1.1 Γενικά για την άλγεβρα των Βαβυλωνίων-Προβλήματα Άλγεβρας.

Η Βαβυλώνα, που το όνομά της σημαίνει "πύλη του Θεού", πριν από το 18ο αιώνα π.Χ. ήταν μια ασήμαντη ακκαδιακή πόλη, χτισμένη πολύ παλιά από τους Σουμέριους στις όχθες του Ευφράτη. Το 18ο αιώνα, εμφανίστηκε στο προσκήνιο της ιστορίας και απέκτησε τόση δύναμη, με αποτέλεσμα να ηγηθεί για αιώνες στην ιστορία του αρχαίου κόσμου και να δώσει το όνομά της στην περιοχή της νότιας Μεσοποταμίας. Η πολιτιστική ανάπτυξη αλλά και η **πρωτοφανής ανάπτυξη της άλγεβρας** των Βαβυλωνίων πραγματοποιείται κατά την πρώτη Βαβυλωνιακή δυναστεία με επικεφαλής τον Χαμουραμπί το 1700 π.Χ. Ότι γνωρίζουμε για τον τρόπο που σκέφτονταν οι μαθηματικοί της εποχής του Χαμουραμπί είναι αυτά που ανιχνεύουμε μέσα από τα ίδια τα κείμενα.

Οι μαθηματικές πλάκες που έχουν μεταφραστεί περιέχουν έναν πολύ μεγάλο αριθμό προβλημάτων, τα οποία στο σύνολό τους αναφέρονται σε θέματα της καθημερινής ζωής, της οικονομίας, της γεωργίας και της παραγωγής. Υπάρχουν για παράδειγμα προβλήματα σχετικά με την μέτρηση αποστάσεων,τον υπολογισμό του βάρους σωμάτων, τον υπολογισμό του εργατικού δυναμικού και του χρόνου εργασίας, τη μέτρηση των διαστάσεων και της επιφάνειας αγροτικών εκτάσεων σχήματος ορθογωνίου ή τετραγώνου. Υπάρχουν επίσης προβλήματα που αναφέρονται στην κατασκευή καναλιών, στην παρασκευή ψωμιού ή μπύρας και άλλα που ζητούν τον υπολογισμό δύο αντίστροφων αριθμών όταν είναι γνωστό το άθροισμα ή η διαφορά τους.

Με χρήση σημερινής ορολογίας και συμβολισμού, η λύση των βαβυλωνιακών προβλημάτων οδηγεί στη λύση εξισώσεων και συστημάτων πρώτου και δευτέρου βαθμού ειδικών μορφών, καθώς και στη λύση εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού, συγκεκριμένων όμως κατηγοριών. Οι Βαβυλώνιοι δεν γνώριζαν αλγεβρικές μεθόδους και δεν είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς ούτε γενικούς τύπους τους οποίους μπορούσαν να εφαρμόσουν κατά τη λύση προβλημάτων. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε συγκεκριμένα προβλήματα και τη λύση τους, που αποτελούν τα πιο αντιπροσωπευτικά για να δείξουν το επίπεδο γνώσεων και τον τρόπο σκέψης των Βαβυλωνίων σχετικά με την επίλυση εξισώσεων πρώτου, δευτέρου ή μεγαλύτερου βαθμού. Σε αυτά τα κείμενα **δεν υπάρχει αλγεβρικός συμβολισμός και σε καμία**

περίπτωση δεν έχει διατυπωθεί η έννοια της εξίσωσης. Θα παρουσιάσουμε δηλαδή την πιο πρωτόγονη διαδικασία επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων που έχει καταγραφεί που είναι εντελώς πρακτική και συγκεκριμένη.

1.2 Η μέθοδος της δοκιμής και του λάθους.

Το πρόβλημα και η λύση που ακολουθεί, έχει μεταφραστεί από τον Fr. Thureau-Dangin στο έργο του *Textes Mathematiques Babyloniens* ([5], No 189). Όλα τα βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα είναι γραμμένα στο εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης ενώ η γραφή των βαβυλωνιακών αριθμών που εμφανίζονται στα προβλήματα ακολουθεί τον ειδικό τρόπο γραφής που εισήγαγε ο Otto Neugebauer ([4], σελ.311-314). Στην ερμηνεία των προβλημάτων χρησιμοποιείται σημερινή ορολογία και συμβολισμός.

- <u>Πρόβλημα 189 του *Textes Mathematiques Babyloniens* : Υπολογισμός του μήκους ενός καλαμιού</u>

Βαβυλωνιακή Διατύπωση (εξηνταδικό σύστημα)	Σύγχρονη Διατύπωση (δεκαδικό σύστημα)
Έχω ένα καλάμι. Η διάστασή του είναι άγνωστη σε μένα. Έκοψα από αυτό ένα cubit και μετά περπάτησα 60 φορές το μήκος του καλαμιού κατά μήκος. Το υποκατέστησα όπως ήταν πρώτα και μετά περπάτησα 30 φορές το μήκος του κατά πλάτος. Η επιφάνεια είναι 6,15. Ποιο ήταν το αρχικό μήκος του καλαμιού;	Καλάμι με άγνωστο μήκος χρησιμοποιείται για να μετρηθεί το μήκος και το πλάτος μιας επιφάνειας. Στην αρχή αφαιρούμε από το καλάμι 1 cubit (1 ninda έχει 12 cubits) και το μήκος της επιφάνειας ισούται με 60 φορές το υπόλοιπο μήκος του καλαμιού. Υποκαθιστούμε το καλάμι στο αρχικό του μήκος και μετράμε το πλάτος της επιφάνειας που είναι 30 φορές το μήκος του καλαμιού. Ζητείται να βρεθεί το μήκος του καλαμιού, αν το εμβαδόν της επιφάνειας είναι 6, 15 = 6 $*$ 60 + 15 = 375.

Βαβυλωνιακή Επίλυση	Σύγχρονη Επίλυση

Για τις πράξεις σου γράψε 1, 0 και 30. Για το καλάμι που δε γνωρίζεις γράψε 1. Πολλαπλασίασε με αυτό τις 60 φορές που περπάτησες: 1, 0 είναι το λάθος μήκος. Πολλαπλασίασε το ίδιο 1 με 30: 30 είναι το λάθος πλάτος. Πολλαπλασίασε 1, 0, το λάθος μήκος, με το 30, το λάθος πλάτος: 30, 0 είναι η λάθος επιφάνεια. Πολλαπλασίασε το 6, 15, τη σωστή επιφάνεια, με το 30, 0 τη λάθος επιφάνεια. Θα βρεις 3, 7, 30, 0. Πολλαπλασίασε το λάθος μήκος με 0;5, το οποίο είχε αποκοπεί, θα βρεις 5. Πολλαπλασίασε το λάθος πλάτος με 5, θα βρεις 2, 30. Χώρισε το 2, 30 στα δύο: 1, 15. Πολλαπλασίασε το 1, 15 με το 1, 15 θα βρεις 1, 33, 45. Πρόσθεσε το στο 3, 7, 30, 0 θα βρεις 3, 9, 3, 45. Τίνος είναι τετράγωνο αυτό; είναι το τετράγωνο του 13, 45. Πρόσθεσε σε αυτό 1, 15 που είχες τετραγωνίσει, θα βρεις 15,0. Βρες τον αντίστροφο του 30, 0 της λάθος επιφάνειας: 0;0, 2. Πολλαπλασίασε το 15, 0 με το 0;0,2:0;30 είναι το αρχικό μήκος του καλαμιού.	Με τα σημερινά δεδομένα, αν χ είναι το αρχικό μήκος του καλαμιού, θα είχαμε να λύσουμε την εξίσωση $60(x-\frac{1}{12})\cdot 30x=375$ η οποία δίνει $x=\frac{1}{2}$. Επομένως το μήκος του καλαμιού ήταν: $\frac{1}{2}$ της ninda = 6 cubits.

Παρατηρώντας την διαδικασία επίλυσης που ακολουθείται στο βαβυλωνιακό κείμενο διαπιστώνουμε ότι είναι αρκετά μπερδεμένη και επίπονη. Πιο συγκεκριμένα θεωρώντας ότι το αρχικό μήκος του καλαμιού είναι 1 (1 ninda) γίνονται διάφορες δοκιμές. Χρησιμοποιείται λοιπόν **η μέθοδος της δοκιμής και του λάθους**.

1.3 Πρόβλημα που οδηγεί σε σύστημα δευτέρου βαθμού.

- <u>Υπολογισμός των διαστάσεων ενός ορθογωνίου</u>

Βαβυλωνιακή Διατύπωση (εξηνταδικό σύστημα)	Σύγχρονη Διατύπωση (δεκαδικό σύστημα)
Ένα ορθογώνιο έχει επιφάνεια 7;30. Πρόσθεσα το μήκος και το πλάτος του και βρήκα 6;30. Να υπολογιστούν το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου.	Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 7,5. Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους του είναι 6,5. Να βρεθεί το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου.

Βαβυλωνιακή Επίλυση	Σύγχρονη Διατύπωση της Λύσης
Χώρισε το 6;30 σε δύο μέρη, αποτέλεσμα 3; 15.	Χώρισε το 6,5 σε δύο ίσα μέρη, αποτέλεσμα 3,25.
Πολλαπλασίασε το 3; 15 με τον εαυτό του, αποτέλεσμα 10 ; 33, 45. Η επιφάνεια όμως μας έχει δοθεί ως 7;30.	Πολλαπλασίασε το 3,25 με τον εαυτό του, αποτέλεσμα 10,5625. Όμως η επιφάνεια είναι 7,5.
Αφαίρεσε από τον 10; 33, 45 το 7; 30 αποτέλεσμα 3; 3, 45.	Αφαίρεσε από το 10,5625 το 7,5 αποτέλεσμα 3,0625.
Βρες τον αριθμό, του οποίου το τετράγωνο είναι 3; 3, 45. Αυτός είναι 1; 45.	Βρες τον αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι 3,0625. Αυτός είναι ο 1,75.
Πρόσθεσε το 1; 45 στο 3; 15 αποτέλεσμα 5, αυτό είναι το μήκος.	Πρόσθεσε το 1,75 στο 3,25, αποτέλεσμα 5, που είναι το μήκος.
Αφαίρεσε το 1; 45 από το 3; 15 αποτέλεσμα 1; 30, αυτό είναι το πλάτος.	Αφαίρεσε το 1,75 από το 3,25, αποτέλεσμα 1,5, που είναι το πλάτος.
	Η λύση, αν πάρουμε για μήκος το χ και για πλάτος το ψ, αποτελεί επίλυση του συστήματος $\chi \cdot \psi = 7{,}5$ και $\chi + \psi = 6{,}5$

Ο τρόπος με τον οποίο λύνεται το πρόβλημα των διαστάσεων ενός

συγκεκριμένου ορθογωνίου είναι καθαρά πρακτικός. Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι το μήκος και το πλάτος είναι ίσα μεγέθη. Άρα το καθένα θα ισούται με το μισό του αθροίσματος των δύο. Οδηγούμαστε λοιπόν στην πρώτη πράξη της βαβυλωνιακής λύσης: 6,5 : 2 = 3,25. Το γινόμενό τους τότε θα είναι ίσο με το τετράγωνο του καθενός: 3,25 · 3,25 = 10,5625 (2η πράξη). Όμως αυτό το αποτέλεσμα υπερβαίνει την δοθείσα επιφάνεια κατά: 10,5625 – 7,5 = 3,0625 (3η πράξη). Αυτό σημαίνει ότι το μήκος και το πλάτος δεν είναι ίσα μεταξύ τους και ότι απέχουν από την μέση τιμή (μήκους-πλάτους) δηλαδή το 3,5 τόσο όσο είναι η τετραγωνική ρίζα της απόκλισης από το αρχικό εμβαδόν: $\sqrt{3{,}0625}=1{,}75$ (4η πράξη). Θα μπορούσαμε να το σκεφτούμε και ως εξής. Αφού το μήκος και το πλάτος είναι άνισα, έστω ότι το μήκος είναι μεγαλύτερο από το πλάτος. Επομένως το μήκος είναι ίσο με $3{,}5+(\text{κάτι})$ και το πλάτος ίσο με $3{,}5-(\text{κάτι})$ και το γινόμενο μήκους πλάτους (το 7,5) ίσο με $10{,}5625-(\text{κάτι})^2$. Από τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε ότι, $(\text{κάτι})^2=3{,}0625$ και $(\text{κάτι})=1{,}75$. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι λοιπόν ίσες με 3,25 + 1,75 = 5 και 3,25 – 1,75 = 1,5 (τελευταίες πράξεις του κειμένου).

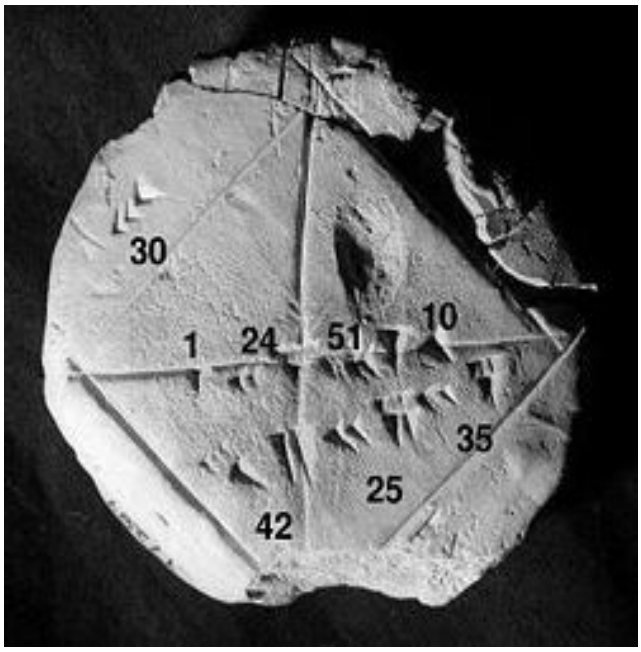
Η λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\chi*\psi=\alpha$$
$$\chi+\psi=\beta$$

είναι

$$\chi=\frac{1}{2}\beta+\omega$$
$$\psi=\frac{1}{2}\beta-\omega$$
$$\omega=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\beta\right)^2-\alpha}$$

Αυτό που κάνουν οι Βαβυλώνιοι βήμα προς βήμα χρησιμοποιώντας αριθμούς, ισοδυναμεί ουσιαστικά με εφαρμογή των παραπάνω τύπων. Δεν δίνουν όμως αυτούς τους τύπους ούτε χρησιμοποιούν



Εικόνα 1: Προσέγγιση της ρίζας 2.

αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Ακολουθούν έναν συγκεκριμένο αλλά πρακτικό τρόπο επίλυσης. Επειδή δεν είχαν συγκεκριμένη διαδικασία για να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες αλλά, είχαν κατασκευάσει **πίνακες τετραγώνων**, και έτσι έβρισκαν τον αριθμό, το τετράγωνο του οποίου ήταν γνωστό. Ένας τέτοιος πίνακας φαίνεται στην εικόνα 1. Είναι η βαβυλωνιακή πλάκα με αριθμό YBC 7289. Η διαγώνιος δίνει μια προσέγγιση της ρίζας του 2 σε τέσσερα εξηνταδικά ψηφία, που αντιστοιχούν σε έξι δεκαδικά στοιχεία: $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296...$

1.4 Πρόβλημα που οδηγεί σε δευτεροβάθμια εξίσωση.

Θα παρουσιάσουμε δύο προβλήματα που περιέχονται στην ίδια πλάκα που βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο και έχει αριθμό BM 13901 (εικόνα 2) και οδηγούν στην λύση εξισώσεων δευτέρου βαθμού της μορφής $x^2 \pm a \cdot x = b$.

- <u>1ο Πρόβλημα</u>

Βαβυλωνιακή Διατύπωση (εξηνταδικό σύστημα)	Σύγχρονη Διατύπωση (δεκαδικό σύστημα)
Πρόσθεσα την πλευρά και την επιφάνεια του τετραγώνου μου και βρήκα 0; 45. Ποια είναι η πλευρά;	Αν στην επιφάνεια του τετραγώνου, προσθέσω την πλευρά του, θα βρω 0,75. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

Βαβυλωνιακή Επίλυση	Σύγχρονη Απόδοση της Λύσης
Πάρε το 1. Χώρισε το σε δύο ίσα μέρη, αποτέλεσμα 0; 30. *Πολλαπλασίασε το 0; 30 με τον εαυτό του θα βρεις 0; 15.* *Πρόσθεσε το 0; 15 στο 0; 45, αποτέλεσμα 1, το οποίο είναι το τετράγωνο του 1.*	Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και ονομάσουμε χ την πλευρά του τετραγώνου, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $x^2 + x = 0,75$ αφού 0; 45 = 0,75. Βρίσκεται πρώτα το 0,5 και μετά το τετράγωνό του, το 0,25. Στη συνέχεια προσθέτει το 0,25 στο

Αφαίρεσε από το 1 το 0; 30 που είχες πολλαπλασιάσει με τον εαυτό του, αποτέλεσμα 0; 30 που είναι η πλευρά του τετραγώνου.	0,75 και βρίσκει 1. Από την τετραγωνική ρίζα του 1 αφαιρεί το 0,5 και δηλώνει ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι αυτή η τιμή, δηλαδή το 0,5. Υπολογίζονται λοιπόν κατά σειρά οι αριθμοί $0,5$, $0,5^2$, $0,5^2+0,75$ $\sqrt{0,5^2+0,75}$ και αποφαίνεται ότι η τιμή του χ είναι το 1 – 0,5 = 0,5.

- <u>2ο Πρόβλημα</u>

Βαβυλωνιακή Διατύπωση (εξηνταδικό σύστημα)	Σύγχρονη Διατύπωση (δεκαδικό σύστημα)
Από την επιφάνεια του τετραγώνου μου αφαίρεσα την πλευρά του και βρήκα 14,30. Ποια είναι η πλευρά;	Αν από την επιφάνεια τετραγώνου αφαιρέσω την πλευρά του, θα βρω 870. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

Βαβυλωνιακή Επίλυση	Σύγχρονη Απόδοση της Λύσης
Πάρε το μισό του 1 που είναι 0; 30. *Πολλαπλασίασε το 0; 30 επί 0; 30 το οποίο είναι 0; 15.* *Πρόσθεσε αυτό στο 14,30 , αποτέλεσμα 14,30; 15. Αυτό είναι το τετράγωνο του 29; 30.* *Πρόσθεσε το 0; 30 στο 29; 30 θα βρεις 30.* *Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου.*	Αν χρησιμοποιήσουμε σημερινό συμβολισμό και ονομάσουμε χ την πλευρά του τετραγώνου, τότε η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση της εξίσωσης $$x^2-x=870$$ αφού 14,30 = 870. Και εδώ, όπως και στο 1ο πρόβλημα, διαιρείται ο συντελεστής του χ, το 1, στα δύο, το 0,5. Υπολογίζεται το τετράγωνο του 0,5, το 0,25, το οποίο προστίθεται στο 870. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι το 870,25 το οποίο είναι το

	τετράγωνο του 29,5. Η πλευρά του τετραγώνου τότε είναι το άθροισμα 29,5 + 0,5 = 30. Υπολογίζονται λοιπόν κατά σειρά οι αριθμοί $0{,}5\ ,\ \ 0{,}5^2=0{,}25\ ,$ $0{,}5^2+870=870{,}25\ ,\ \ \sqrt{870{,}25}$ και αποφαίνεται ότι χ = 29,5 + 0,5 = 30.

Εικόνα 2: Η Βαβυλωνιακή πλάκα BM13901

Σχόλια

Αν παρατηρήσουμε την διατύπωση των δύο προβλημάτων βλέπουμε ότι γίνονται πράξεις μεταξύ επιφάνειας και μήκους, πρόσθεσης και αφαίρεσης αντίστοιχα. Οι Βαβυλώνιοι λοιπόν δεν είχαν αίσθηση της έννοιας του γεωμετρικού μεγέθους. Αυτό που ενδιέφερε δηλαδή τους Βαβυλώνιους είναι η ίδια η ποσότητα, όπως εκφράζεται από τους αριθμούς και όχι η γεωμετρική έννοια της ποσότητας. Πως όμως έλυναν τις εξισώσεις της μορφής $\chi^2 \pm \alpha \cdot \chi = \beta$; Υπάρχουν διάφορες απόψεις πάνω σε

αυτό.

Είναι πολύ πιθανό να εργάζονταν όπως οι Άραβες αλλά και εμείς οι ίδιοι, δηλαδή **μετασχηματίζοντας το πρώτο μέλος ώστε να γίνει τέλειο τετράγωνο**:

$$(\chi \pm \frac{1}{2}\alpha)^2 = \beta + (\frac{1}{2}\alpha)^2$$

Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι ότι **εισήγαγαν έναν δεύτερο άγνωστο** $\psi = \chi \pm \alpha$, οπότε θα είχαν την διαφορά α των χ και ψ και το γινόμενο $\chi\psi = \chi(\chi \pm \alpha) = \beta$ και επομένως θα ανήγαγαν την περίπτωση αυτή σε σύστημα της μορφής:

$$\chi * \psi = \alpha$$
$$\chi - \psi = \beta$$

του οποίου την επίλυση είδαμε στην παράγραφο 1.3 ([7], σελ.70).

Τέλος, όπως είδαμε και σε παραπάνω προβλήματα, θα μπορούσαμε να πούμε πως για τη λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων οι Βαβυλώνιοι πιθανότατα να χρησιμοποιούσαν αποκλειστικά είτε τη **μέθοδο της δοκιμής και του λάθους** είτε **κατάλληλους πίνακες αριθμών**. Χρησιμοποιούσαν δηλαδή μέθοδο καθαρά πρακτική και κάθε πρόβλημα το αντιμετώπιζαν ξεχωριστά και ανεξάρτητα από τα άλλα ([8], σελ.217).

1.5 Εξισώσεις ανωτέρου βαθμού.

Οι Βαβυλώνιοι έλυναν εξισώσεις με βαθμό μεγαλύτερο του δευτέρου με κύριο εργαλείο τους την **χρήση συγκεκριμένων πινάκων** που είχαν κατασκευάσει και όχι κάνοντας χρήση γενικών τύπων λύσης.

Σε πλάκες που βρίσκονται στο Πανεπιστήμιο της Κωνσταντινούπολης, υπάρχουν πίνακες που περιέχουν όλες τις δυνάμεις της μορφής α^{ν} . Με αυτούς λύνονται εξισώσεις της μορφής $\alpha^{\chi} = \beta$. Η λύση της εξίσωσης

$$\chi^3 = 0;2,13,20$$

που υπάρχει σε μια πλάκα δίνεται με τη βοήθεια σχετικού πίνακα και είναι χ=0;20. Πραγματικά, επειδή $0;2,13,20 = \frac{1}{27}$ θα είναι $\chi^3 = \frac{1}{27}$ και επομένως

$\chi=\frac{1}{3}=0;20$. Στο Βρετανικό Μουσείο υπάρχει μια πλάκα με αριθμό BM 85200 στην οποία το 22ο πρόβλημα οδηγεί στην λύση μιας αμιγούς κυβικής εξίσωσης,

$$12\chi^3=1;30$$

που λύνεται με τη χρησιμοποίηση πινάκων κυβικών ριζών. Βρίσκεται πρώτα το $\frac{1}{12}=0;5$, στη συνέχεια το γινόμενο $1;30\times0;5=0;7,30$ και από τον πίνακα κυβικών ριζών βρίσκεται η ρίζα του 0;7,30, χ=0;30. Πραγματικά, στο δεκαδικό σύστημα, έχουμε: $12\chi^3=1\frac{1}{2}\Leftrightarrow\chi^3=\frac{1}{8}(0;7,30)$ και $\chi=\frac{1}{2}(0;30)$.

Από πίνακες που είχαν κατασκευάσει οι Βαβυλώνιοι και περιείχαν τα αθροίσματα $v^3+v^2=v^2(v+1)$ όπως και με τους πίνακες των δυνάμεων α^v , επιλύονταν εξισώσεις της μορφής $\chi^2(\mu\chi+1)=\alpha$. Παρακάτω φαίνεται ένα παράδειγμα για πίνακες με αθροίσματα ([8], σελ.224), που βρέθηκαν σε πλάκες.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v^2	1	4	9	16	25	36	49	1,4	1,21	1,40
v^3	1	8	27	1,4	2,5	3,36	5,43	8,32	12,9	16,40
v^2+v^3	2	12	33	1,20	2,30	4,12	6,32	9,36	13,30	18,20

Εικόνα 3: Πίνακας αθροισμάτων

Το 23ο πρόβλημα της πλάκας BM 85200 του Βρετανικού μουσείου ανάγεται στη μικτή τριτοβάθμια εξίσωση

$$\chi^2(12\chi+1)=1;45$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη ο συγγραφέας με το 12^2 , λαμβάνει

$$(12\chi)^2(12\chi+1)=4,12$$

και από εδώ βρίσκει χωρίς καμιά περαιτέρω συζήτηση, $12\chi=6$. Πως βρήκε το αποτέλεσμα αυτό; Από τον πίνακα των αθροισμάτων, αφού η τελευταία εξίσωση γίνεται $(12\chi)^3+(12\chi)^2=4,12$. Έτσι χ=0;30.

Τέλος σε μία από τις πλάκες που βρέθηκαν στα Σούσα και βρίσκεται στο Μουσείο του Λούβρου, υπάρχει το εξής πρόβλημα:
" Πολλαπλασιάζω το μήκος και το πλάτος και βρίσκω 20,0. Πολλαπλασιάζω τον κύβο του μήκους με τη διαγώνιο του ορθογωνίου και βρίσκω 14,48,53,20. Ποιο είναι το μήκος και ποιο το πλάτος;"

Αν χ, ψ, δ είναι αντίστοιχα το μήκος, το πλάτος και η διαγώνιος του ορθογωνίου, η λύση του προβλήματος οδηγεί στη λύση του συστήματος

$$\chi \cdot \psi = 20,0$$
$$\chi^3 \delta = 14,48,53,220$$

Η λύση του συστήματος αυτού οδηγεί στη λύση της εξίσωσης

$$\chi^8 + 6,40,0,0,\chi^2 = 3,39,28,25,27,24,26,40$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής δίνει

$$\chi^4 = 11,51,6,40,\chi^2 = 26,40 \quad \text{και} \quad \chi = 40, \psi = 30 \ .$$

2. Η γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων Ελλήνων.

Ο χρυσός αιώνας του ελληνικού πολιτισμού, ο αιώνας του Περικλή, είναι η πέμπτη εκατονταετία. Αποτελεί την περίοδο της πλήρους εκδίπλωσης της δύναμης της Αθηναϊκής πολιτείας. Μέσα σε αυτήν την εκατονταετία εγείρονται οι ναοί της Ακρόπολης και η γλυπτική παράγει τα ανυπέρβλητα αριστουργήματά της. Είναι ο αιώνας των μεγάλων τραγικών ποιητών Αισχύλου, Σοφοκλή και Ευριπίδη και των μεγάλων ιστορικών Ηροδότου και Θουκυδίδη. Στη φιλοσοφία αυτός ο αιώνας υπήρξε η περίοδος του διαφωτισμού, του ορθολογισμού. Οι σοφιστές δίδασκαν ότι κάθε αλήθεια και κάθε αξία είναι μόνο σχετική. Υλιστικά συστήματα, όπως αυτό του ατομικού Δημοκρίτου, επηρέαζαν ευρείς κύκλους. Ο Αναξαγόρας και ο Δημόκριτος θεωρούσαν ότι ο ήλιος και η σελήνη δεν ήταν ζωντανά όντα αλλά αδρανείς λίθοι που στριφογυρίζουν μέσα στον στρόβιλο των ατόμων. Σε αντίθεση με αυτές τις απόψεις βρισκόταν η θρησκευτικό-μεταφυσική των Πυθαγορείων, οι οποίοι παρέμεναν προσηλωμένοι για παράδειγμα στην πεποίθηση ότι οι πλανήτες ήταν έμψυχα θεία όντα, τα οποία εκτελούν τέλειες κυκλικές κινήσεις ως αποτέλεσμα της

τελειότητας τους και της βαθιάς γνώσης που κατείχαν ([7], σελ.116).

Τα μαθηματικά έφτασαν στο απόγειό τους τον **4ο αιώνα**, τον αιώνα του Πλάτωνος. Η ανάπτυξη που έλαβε χώρα τον 5ο αιώνα, υπήρξε προπαρασκευαστική και έβαλε τα θεμέλια της περιόδου άνθησης. Αυτή η ανάπτυξη έλαβε χώρα κυρίως στη σχολή των **Πυθαγορείων**. Τέσσερα μαθήματα, δηλαδή γνωστικά αντικείμενα μελέτης ήταν γνωστά στους Πυθαγορείους: η Θεωρία των αριθμών (Αριθμητική), η Θεωρία της μουσικής (Αρμονική), η Γεωμετρία και η Αστρονομία. Εμείς θα εξετάσουμε την Γεωμετρία των Πυθαγορείων την οποία βρίσκουμε καταγεγραμμένη στα Στοιχεία (300 π.Χ.). Ο Ευκλείδης είναι ο συγγραφέας του έργου Στοιχεία, της καθοριστικής σημασίας εργασίας στην κλασική γεωμετρία, που σήμερα έχει το όνομά του: την ονομάζουμε "Ευκλείδεια Γεωμετρία". Τα Στοιχεία αποτελούνται από 13 βιβλία, μερικά από τα οποία πραγματεύονται τομείς των μαθηματικών που σήμερα ονομάζουμε άλγεβρα και θεωρία αριθμών, αλλά οι αρχαίοι Έλληνες πλησίασαν αυτά τα θέματα πάντοτε από γεωμετρική σκοπιά. Η Πυθαγόρεια γεωμετρία αντιστοιχεί στις προτάσεις 27-48 του Βιβλίου Ι καθώς και σε όλο το Βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων, που αποτελείται από 14 προτάσεις.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε συγκεκριμένες προτάσεις από τα Βιβλία Ι, ΙΙ και VI των Στοιχείων και σχόλια πάνω σε αυτές που δίνουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για την **επίλυση εξισώσεων με γεωμετρικό τρόπο** από τους Αρχαίους Έλληνες. Στο Βιβλίο Ι θα δούμε τι ακριβώς είναι η διαδικασία που ονομάστηκε **"Παραβολή Χωρίων"**. Στο Βιβλίο ΙΙ, που έχει χαρακτηριστεί από τον Van der Waerden **"γεωμετρική άλγεβρα"** ([7], σελ. 131), θα δούμε την **γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων** ενώ στο Βιβλίο VI την **γενικευμένη μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης**.

2.1 Παραβολή Χωρίων

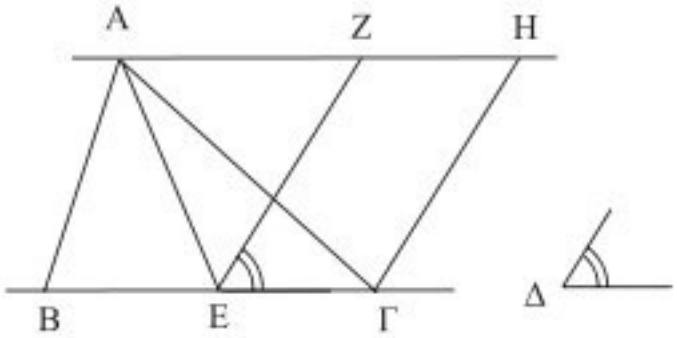
Μας ενδιαφέρει η πρόταση 44 αλλά ξεκινάμε από την 42 και την 43 γιατί χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της 44.

Πρόταση Ι.42

Δοθέντος τριγώνου και μίας γωνίας να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το τρίγωνο, του οποίου μία γωνία είναι ίση με τη δοθείσα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και γωνία $\widehat{\Delta}$. Διχοτομούμε την ΒΓ, φέρουμε την ΑΕ και κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{ZE\Gamma}$ με κορυφή το Ε και πλευρά την ΕΓ, ίση με τη $\widehat{\Delta}$. Από το Α φέρουμε ΑΖ//ΒΓ και από το Γ φέρουμε ΓΗ//ΕΖ .



Το ΕΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμο και 2(ΑΕΓ)=(ΕΖΗΓ) (πρόταση 41).

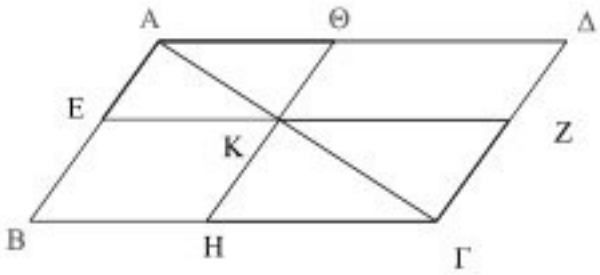
Όμως (ΑΒΕ)=(ΑΕΓ) (πρόταση 38) άρα 2(ΑΕΓ)=(ΑΒΓ).

Επομένως (ΑΒΓ)=(ΕΖΗΓ). ([9], σελ.193)

Πρόταση Ι.43

Σε κάθε παραλληλόγραμμο, τα συμπληρώματά του ως προς μια διαγώνιο έχουν ίσα εμβαδά.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διαγώνιος, από σημείο Κ της οποίας φέρουμε ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι (ΕΒΗΚ)=(ΘΚΖΔ).

Η διαγώνιος ΑΓ διαιρεί το ΑΒΓΔ σε ίσα τρίγωνα, δηλαδή (ΑΒΓ)=(ΑΓΔ). Επίσης, αφού ΑΕΚΘ, ΚΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, θα ισχύει (ΑΕΚ)=(ΑΘΚ) και

(ΚΗΓ)=(ΚΖΓ) οπότε:

(ΑΒΓ)-(ΑΕΚ)-(ΚΗΓ) = (ΑΓΔ)-(ΑΘΚ)-(ΖΚΓ) ή (ΕΒΗΚ) = (ΘΚΖΔ)

([9], σελ.194)

Η πρόταση 43 έχει πολλές εφαρμογές σε προτάσεις των Στοιχείων όπως τις Ι.44, ΙΙ.4-ΙΙ.8, VI.27-VI.29.

Πρόταση Ι.44

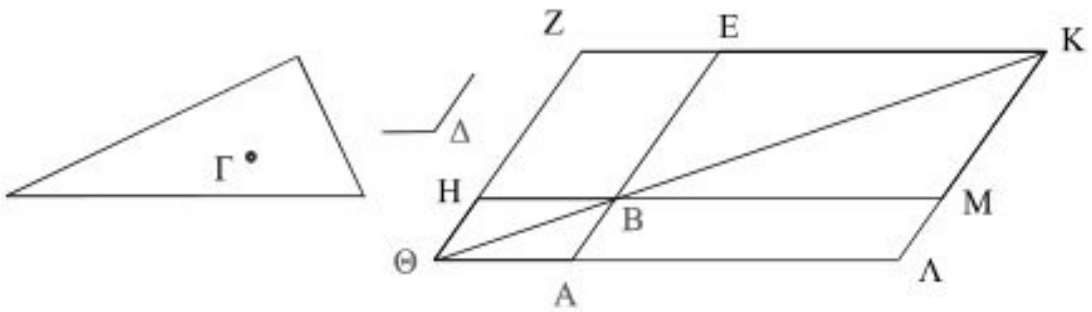
Δοθείσας μιας πλευράς, μιας γωνίας και ενός τριγώνου, να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το τρίγωνο.

Απόδειξη

Έστω τμήμα ΑΒ, Γ δοθέν τρίγωνο, $\hat{\Delta}$ δοθείσα γωνία.

Προεκτείνουμε την ΑΒ και κατασκευάζουμε γωνία $E\hat{B}H=\hat{\Delta}$ και παραλληλόγραμμο ΒΕΖΗ με (ΕΒΗΖ)=(Γ).

Προεκτείνουμε τις ΖΕ, ΖΗ, ΗΒ και από το Α φέρνουμε ΑΘ//ΒΗ. Φέρνουμε την ΘΒ που τέμνει την προέκταση της ΖΕ στο Κ και κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΘΛΚΖ. Τότε (πρόταση 42) είναι (ΕΒΗΖ) = (Γ) = (ΑΒΜΛ) και $E\hat{B}H=A\hat{B}M$. Οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΜΛ είναι το ζητούμενο.



([9], σελ.195)

Σύμφωνα με τον Heath, η πρόταση αυτή είναι μια από τις πιο εντυπωσιακές όλης της Γεωμετρίας, αν μάλιστα λάβουμε υπόψη τη μεγάλη σημασία του αποτελέσματος που παίρνουμε, δηλαδή του μετασχηματισμού ενός παραλληλογράμμου μιας μορφής σε άλλο παραλληλόγραμμο με μια γωνία ίση, εμβαδά ίσα και μια πλευρά δεδομένη, αλλά και την απλότητα των μέσων που

χρησιμοποιήθηκαν, δηλαδή την πρόταση 43.

Ο Πρόκλος ονομάζει την πρόταση **"Παραβολή Χωρίων"** και την χαρακτηρίζει σαν κατεξοχήν Πυθαγόρεια πρόταση, χρησιμοποιώντας σαν πηγή το "Οι περί τον Εύδημο", ([11]). Αναφέρει ότι ο Εύδημος και οι μαθητές του απέδιδαν την πρόταση στην "Πυθαγόρεια Μούσα" και αναφέρει ότι η ισότητα εμβαδών ***(παραβολή)*** και η ανισότητα εμβαδών ***(υπερβολή ή έλλειψη)***, στάθηκαν η αφορμή για την ονομασία των αντίστοιχων κωνικών τομών.

Εδώ έχουμε τη μέθοδο της **παραβολής των χωρίων** που είναι μέθοδος σύγκρισης εμβαδών. Αν αναλύσουμε τα λεγόμενα του Πρόκλου σε συνδυασμό με την πρόταση 44 έχουμε τα εξής τρία προβλήματα:

1. Με πλευρά δοθέν τμήμα να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο kx = E (σχήμα)
2. Πάνω σε δοθέν τμήμα να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο και να περισσεύει και ένα τετράγωνο $kx-x^2=E$ *(έλλειψη)* (σχήμα)
3. Πάνω σε δοθέν τμήμα να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τρίγωνο και να λείπει ένα τετράγωνο $kx+x^2=E$ *(υπερβολή)* (σχήμα)

Όπως αναφέρει ο Πρόκλος, σύμφωνα με τον Εύδημο, οι ονομασίες ***παραβολή, έλλειψη*** και ***υπερβολή*** οφείλονται στις περιπτώσεις 1, 2, 3 ([9], σελ.196).

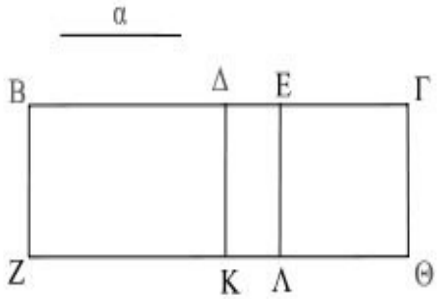
2.2 Γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\mathbf{x^2+\alpha x=\alpha^2}$.

Στο δεύτερο βιβλίο των στοιχείων υπάρχει μια σειρά προτάσεων που στην ουσία αποτελούν γεωμετρικές διατυπώσεις αλγεβρικών τύπων. Παραθέτουμε ενδεικτικά κάποιες από αυτές (προτάσεις ΙΙ.1-4, ΙΙ.7) που προσδίδουν στο δεύτερο βιβλίο την ιδιότητα ενός εγχειριδίου άλγεβρας ενδεδυμένου με γεωμετρική μορφή. Τα προς μελέτη μεγέθη είναι πάντοτε ευθύγραμμα τμήματα. Αντί για "το

γινόμενο αβ" λέμε "το ορθογώνιο που περιέχεται από τα α και β" και αντί για $α^2$ έχουμε "το από του α τετράγωνο". Πολύ εύστοχα λοιπόν ο Zeuthen κάνει λόγο σχετικά με αυτό για "γεωμετρική άλγεβρα". Αυτή η γεωμετρική άλγεβρα έχει σαφείς επιρροές από την άλγεβρα των Βαβυλωνίων σύμφωνα με τον Van Der Waerdenn. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν και αυτοί τους όρους "ορθογώνιο" αντί του χψ και "τετράγωνο" αντί του $χ^2$, αλλά εκτός από αυτά χρησιμοποιούσαν και αριθμητικές εκφράσεις όπως πολλαπλασιασμό, εξαγωγή ρίζας κ.λ.π. Οι Έλληνες από την άλλη πλευρά, αποφεύγουν με συνέπεια τέτοιες εκφράσεις εκτός εάν πρόκειται για πράξεις με ακεραίους ή με απλά κλάσματα, το καθετί είναι μεταφρασμένο σε γεωμετρική ορολογία. Εν συνεχεία θα δούμε πως λυνόντουσαν οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις με γεωμετρικό τρόπο από τους Αρχαίους Έλληνες (προτάσεις ΙΙ.5-6, ΙΙ.11).

Πρόταση ΙΙ.1

Αν δοθούν τμήματα α και ΒΓ και το ΒΓ διαιρεθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το ορθογώνιο που ορίζουν τα α, ΒΓ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των ορθογωνίων που ορίζουν το α με καθένα από τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το ΒΓ.



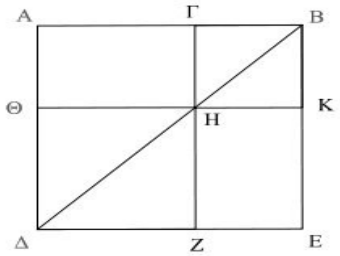
Η πρόταση 1 θα μπορούσε να αποδοθεί από τον τύπο:

$$α(β+γ+...)=αβ+αγ+...$$

όπου $β+γ+...=ΒΓ$. Οι προτάσεις ΙΙ.2 και ΙΙ.3 αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της ΙΙ.1 .

Πρόταση ΙΙ.4

Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα. ([9], σελ.219)

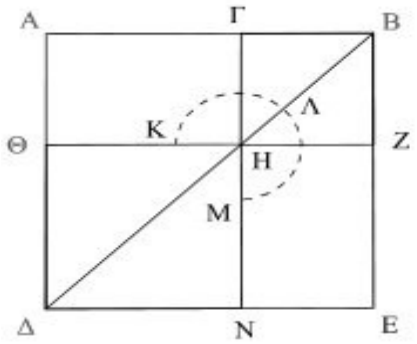


Η πρόταση 4 αποτελεί, αν θέσουμε ΑΓ=α και ΓΒ=β, τη γεωμετρική μορφή της

ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Πρόταση ΙΙ.7

Αν Γ σημείο του τμήματος ΑΒ, τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΒ, ΑΓ είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ, ΒΓ και το τετράγωνο της ΑΓ.



([9], σελ.232)

Αν θέσουμε ΑΒ = α και ΓΒ = β, τότε η ΙΙ.7 μας δίνει την ανάλογη ταυτότητα της ΙΙ.4 για την διαφορά: $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$.

Οι επόμενες δύο προτάσεις, ΙΙ.5 και ΙΙ.6 αποτελούν μια διπλή μορφή του τύπου

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

ή, μιας και ο Ευκλείδης αποφεύγει να αφαιρεί επιφάνειες, του τύπου

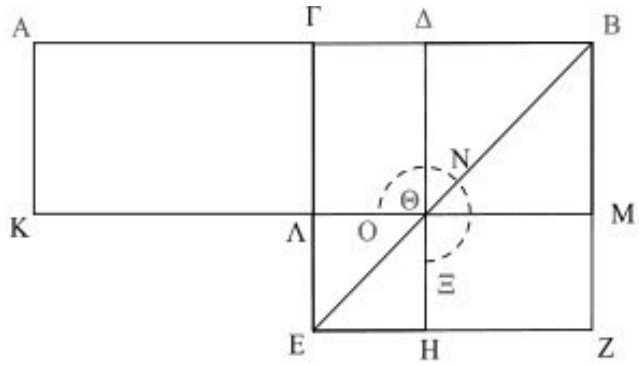
$$\alpha^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\beta^2 \ .$$

Πρόταση ΙΙ.5

Αν τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δύο ίσα τμήματα και από ένα σημείο του σε δύο άνισα τμήματα, το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα μαζί με τετράγωνο που έχει πλευρά το τμήμα με άκρα τα σημεία διαίρεσης είναι ίσα με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό του αρχικού τμήματος.

Απόδειξη

Έστω Γ το μέσο του ΑΒ και Δ σημείο που διαιρεί το ΑΒ σε μέρη άνισα. Θα αποδείξουμε ότι το ορθογώνιο που ορίζουν τα άνισα τμήματα ΑΔ, ΔΒ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ είναι ισοδύναμα με το τετράγωνο πλευράς ΒΓ.



Σχεδιάζουμε με πλευρά ΓΒ τετράγωνο ΓΒΖΕ (Ι.46), και φέρνουμε τη διαφώνιο ΒΕ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΗ//ΒΖ και από το Θ την ΚΜ//ΑΒ (Ι.30 και Ι.31) (Σχ.13). Από το Α φέρνουμε ΑΚ//ΓΕ.

Παρατηρούμε ότι επειδή τα ορθογώνια ΓΔΘΛ και ΘΗΖΜ είναι ίσα, τότε

(ΓΔΘΛ) + (ΔΒΜΘ) = (ΘΗΖΜ) + (ΔΒΜΘ) ή
(ΓΒΜΛ) = (ΒΖΗΔ) ή
(ΑΓΛΚ) = (ΒΖΗΔ) ή
(ΑΔΘΚ) = (ΓΛΘΗΖΒ) (1)

που είναι ο γνώμονας ΟΝΞ. Αλλά το ΑΔΘΚ είναι το ορθογώνιο που ορίζουν τα ΑΔ, ΔΒ, αφού ΔΒ=ΔΘ. Αν στα μέλη της (1) προσθέσουμε το τετράγωνο ΛΕΗΘ, θα πάρουμε:

(ΑΔΘΚ) + (ΛΕΗΘ) = (ΓΒΖΕ).

Άρα $ΑΔ\cdot ΔΒ+ΓΔ^2=ΓΒ^2$. ([9], σελ.221)

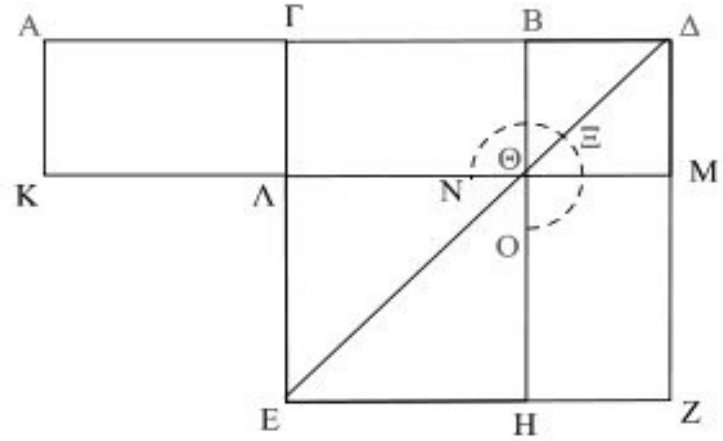
Αν θέσουμε ΑΓ=α και ΓΔ=β τότε έχουμε την αλγεβρική μορφή $α^2=(α-β)(α+β)+β^2$.

Πρόταση ΙΙ.6

Αν Γ είναι το μέσον τμήματος ΑΒ και προεκτείνουμε το τμήμα κατά ΒΔ, τότε το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα ΑΔ και ΒΔ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΒΔ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ.

Απόδειξη

Έστω Γ το μέσον της ΑΒ και Δ σημείο στην προέκταση της ΑΒ. Σχεδιάζουμε το τετράγωνο ΓΔΖΕ, φέρουμε τη διαγώνιο ΔΕ και την ΒΗ//ΓΕ που τέμνει την ΔΕ στο Θ. Από το Θ φέρουμε ΘΜ//ΑΔ και ΑΚ//ΓΕ.



Επειδή ΑΓ=ΓΒ, τα ορθογώνια ΑΓΛΚ, ΓΒΘΛ είναι ίσα. Αλλά ΓΒΘΛ = ΜΘΗΖ. Άρα ΑΓΛΚ = ΜΘΗΖ, οπότε αν σε αυτά προσθέσουμε το ΓΔΜΛ, τότε το (ΑΔΜΚ) θα είναι ίσο με το εμβαδόν του γνώμονα ΝΞΟ. Αλλά το ΑΔΜΚ είναι το ορθογώνιο που ορίζουν τα τμήματα ΑΔ, ΔΒ. Άρα ο γνώμονας ΝΞΟ έχει εμβαδόν το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα ΑΔ, ΔΒ. Αν προσθέσουμε σ'αυτά και το τετράγωνο ΛΘΗΕ, που είναι τετράγωνο πλευράς ΒΓ, τότε το ορθογώνιο με πλευρές ΑΔ, ΒΔ και το τετράγωνο πλευράς ΒΓ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΓΔ.

Άρα $ΑΔ\cdot ΒΔ+ΒΓ^2=ΓΔ^2$. ([9], σελ.227)

Αν θέσουμε ΓΔ=α και ΑΓ=β τότε και πάλι παίρνουμε $α^2=(α-β)(α+β)+β^2$.

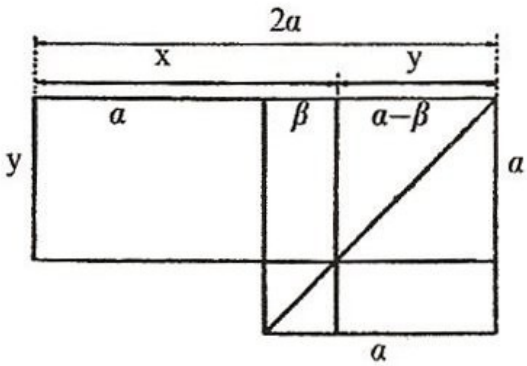
Το εύλογο ερώτημα που προκύπτει, είναι για ποιο λόγο χρειάζονταν δύο προτάσεις για έναν τύπο. Αν καλέσουμε χ και ψ τα δύο άνισα μέρη στα οποία διαιρείται η ευθεία 2α στη ΙΙ.5, τότε η ΙΙ.5 μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο

$$\left(\frac{χ+ψ}{2}\right)^2=χψ+\left(\frac{χ-ψ}{2}\right)^2 \quad (1) \qquad ή$$

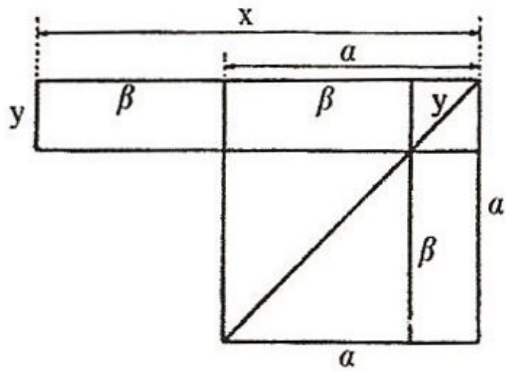
$$\left(\frac{χ+ψ}{2}\right)^2-\left(\frac{χ-ψ}{2}\right)^2=χψ \quad (2)$$

ενώ αν το χ χρησιμοποιηθεί για να συμβολίσει το άθροισμα της δεδομένης ευθείας στη ΙΙ.6 και της προεκτασής της, και το ψ για να συμβολίσει την ίδια την

προέκταση, τότε η πρόταση ΙΙ.6 οδηγεί και πάλι στους τύπους (1) και (2). Οδηγούμαστε δηλαδή και πάλι σε δύο προτάσεις για έναν τύπο. ([7], σελ.134)



Πρόταση ΙΙ.5



Πρόταση ΙΙ.6

Οι προτάσεις ΙΙ.5 και ΙΙ.6 αποτελούν λύσεις προβλημάτων και η απάντηση στο ερώτημα που τίθεται, βρίσκεται αν παρακολουθήσουμε τόσο στα "Στοιχεία" όσο και σε άλλα έργα του Ευκλείδη την εφαρμογή των δύο προτάσεων.

Στα "Δεδομένα" (Προτάσεις 84 και 85), το θέμα που εξετάζεται είναι πως να αποδειχτεί ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα χ και ψ είναι γνωστά, όταν δίδονται το άθροισμα τους $\chi+\psi$ ή η διαφορά τους $\chi-\psi$, και επίσης το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από αυτά, χψ. Όταν δίνεται το άθροισμα $\chi+\psi=2\alpha$, τότε εφαρμόζεται η ΙΙ.5 προκειμένου να προσδιοριστεί η ημιδιαφορά $\frac{1}{2}\cdot(\chi-\psi)=\beta$. Αν δίνεται η διαφορά, τότε χρησιμοποιείται η ΙΙ.6 προκειμένου να υπολογισθεί το ημιάθροισμα από τον τύπο (1). Οι ΙΙ.5 και ΙΙ.6 λοιπόν αποτελούν λύσεις προβλημάτων αφού στην ΙΙ.5 ζητείται να κατασκευασθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα χ και ψ, όταν δίνονται το άθροισμα και το γινόμενο ενώ στην ΙΙ.6 όταν δίνονται η διαφορά και το γινόμενο.

Στα "Στοιχεία", στην πρόταση ΙΙ.11 ζητείται η διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.

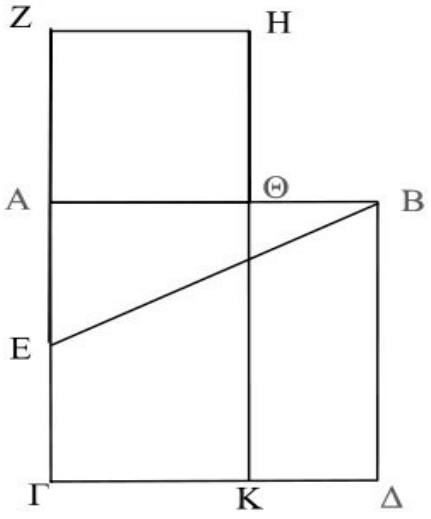
Πρόταση ΙΙ.11

Να διαιρεθεί δοσμένο τμήμα ώστε το ορθογώνιο που ορίζει το τμήμα και το ένα μέρος του να είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το άλλο μέρος.

Απόδειξη

Ζητάμε να προσδιορίσουμε σημείο Θ του ΑΒ, ώστε $AB \cdot \Theta B = A\Theta^2$. Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΔΓ και το μέσο Ε του ΑΓ. Φέρνουμε την ΒΕ και στην προέκταση του ΓΑ παίρνουμε ΕΖ=ΕΒ και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΖΗΘ. Θα αποδείξουμε ότι το Θ είναι το ζητούμενο σημείο.

Προεκτείνουμε την ΗΘ, η οποία τέμνει τη ΓΔ στο Κ. Σύμφωνα με την πρόταση ΙΙ.6, το ορθογώνιο που ορίζουν οι ΓΖ, ΖΑ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΑΕ θα είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΕΖ, δηλαδή:



$$\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EZ^2 \quad (1)$$

Αλλά ΕΖ=ΕΒ, άρα η (1) γίνεται

$$\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EB^2 \quad (2)$$

Όμως $EB^2 = EA^2 + AB^2$ (Πυθ.Θεώρημα) . Άρα

$$\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EA^2 + AB^2$$

ή $\Gamma Z \cdot ZA = AB^2$

ή $(ZH\Kappa\Gamma) = (AB\Delta\Gamma) \quad (3)$

Αν αφαιρέσουμε από τα μέλη της (3) το (ΑΘΚΓ), θα πάρουμε (ΑΖΗΘ)=(ΘΒΔΚ) ή $A\Theta^2 = AB \cdot B\Theta$ δηλαδή το σημείο Θ είναι το ζητούμενο. ([9], σελ.241-242)

Αν θέσουμε ΑΒ=α και ΑΘ=χ τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\alpha(\alpha - \chi) = \chi^2$$

δηλαδή $\chi^2 + \alpha\chi = \alpha^2$

ή $\chi(\chi + \alpha) = \alpha^2$

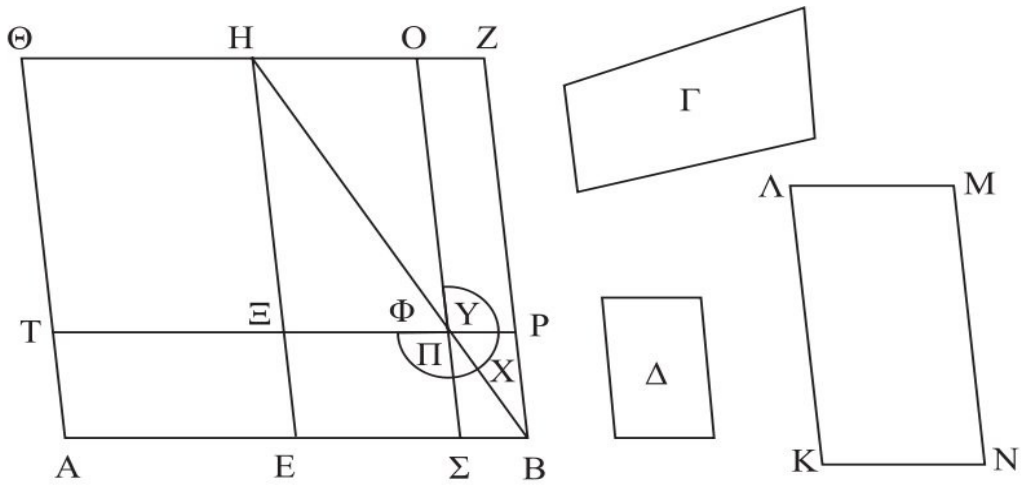
Η πρόταση ΙΙ.11 αποτελεί ουσιαστικά γεωμετρική επίλυση αυτής της **δευτεροβάθμιας εξίσωσης**. Η τελευταία εξίσωση απαιτεί την κατασκευή δύο τμημάτων χ και χ+α, των οποίων δίδονται η διαφορά α και το γινόμενο α^2 . Αφού η διαφορά είναι δεδομένη, το πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση της ΙΙ.6.

2.3 Γεωμετρική επίλυση της γενικευμένης δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Πρόταση VI.28

Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρέσουμε παραλληλόγραμμο, όμοιο και ομοίως κείμενο με δοσμένο παραλληλόγραμμο Δ, το παραλληλόγραμμο που μένει είναι ισοδύναμο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ. Το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ δεν μπορεί να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν παραλληλογράμμου που γράφεται με πλευρά το μισό του ευθύγραμμου τμήματος και είναι όμοιο με αυτό που αφαιρούμε.

Απόδειξη



Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, πολύγωνο Γ και παραλληλόγραμμο Δ. Αν Ε το μέσο της ΑΒ, κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΕΒΖΗ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ καθώς και το παραλληλόγραμμο ΑΕΗΘ. Το Γ δε μπορεί να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ΑΕΗΘ. Αν (ΑΕΗΘ)=(Γ), τότε το πρόβλημα έχει λυθεί, αφού

$$(ΑΒΖΘ) = (Γ) + (ΕΒΖΗ)$$

και το ΕΒΖΘ είναι όμοιο με το Δ. Αν όμως, το ΑΕΗΘ είναι μεγαλύτερο του Γ, τότε και το ΕΒΖΗ θα είναι μεγαλύτερο του Γ.

Έστω ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως κείμενο του Δ που έχει

εμβαδόν τη διαφορά των εμβαδών των ΕΒΖΗ και Γ.Άρα το ΚΛΜΝ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο με το ΕΒΖΗ. Έστω ότι η ΚΛ είναι ομόλογος της ΕΗ και η ΛΜ της ΗΖ. Επειδή

(ΕΒΖΗ) = (Γ) + (ΚΛΜΝ) τότε (ΕΒΖΗ) > (ΚΛΜΝ)

οπότε ΗΕ > ΚΛ, ΗΖ > ΛΜ. Επί της ΕΗ παίρνουμε ΗΞ=ΚΛ και επί της ΗΖ παίρνουμε ΗΟ=ΛΜ, οπότε δημιουργείται το παραλληλόγραμμο ΗΞΠΟ, το οποίο είναι όμοιο με το ΚΛΜΝ, άρα και με το ΗΕΒΖ. Τότε, όμως το Π βρίσκεται στη διαγώνιο ΗΒ. Από το Π φέρουμε τις ΡΤ//ΑΒ, ΟΣ//ΒΖ.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο γνώμονας ΥΧΦ έχει το ίδιο εμβαδόν με το Γ και επειδή

(ΠΡΖΟ)=(ΕΣΠΞ) τότε (ΒΖΟΣ)=(ΒΡΞΕ)

Αλλά το (ΒΡΞΕ) = (ΕΞΤΑ), οπότε το (ΑΣΠΤ) είναι ίσο με όλον τον γνώμονα ΥΧΦ, ο οποίος έχει το ίδιο εμβαδόν με το Γ.

Επομένως, (ΑΒΡΤ) = (ΑΣΠΤ) + (ΣΒΡΠ) και το ΣΒΡΠ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο με το Δ , ([9], σελ.474-475).

Στην πρόταση VI.28, ο Ευκλείδης υποθέτει ότι αν δύο όμοια παραλληλόγραμμα έχουν εμβαδά άνισα, τότε το μεγαλύτερο έχει τις αντίστοιχες πλευρές μεγαλύτερες από αυτές του μικρότερου. Αυτή η πρόταση είναι το γεωμετρικό ισοδύναμο της συνθήκης για να έχει λύση η εξίσωση

$$\alpha\chi-\frac{\beta}{\gamma}\chi^2=\Gamma \quad (1)$$

([9], σελ.475-476).

Σύμφωνα με τα σχόλια του Heath για την πρόταση VI.28 ([3], Βιβλίο VI,σελ.262-265) η αντιστοιχία μεταξύ της γεωμετρικής μεθόδου του Ευκλείδη (*έλλειψη* δεδομένου σχήματος) και της συνηθισμένης αλγεβρικής μεθόδου για την επίλυση της εξίσωσης, φαίνεται αν υποθέσουμε ότι τα παραλληλόγραμμα είναι ***ορθογώνια***. Για να λύσουμε την εξίσωση αλγεβρικά, αλλάζουμε τα πρόσημα και γράφουμε

$$\frac{\beta}{\gamma}\chi^2-\alpha\chi=-\Gamma$$

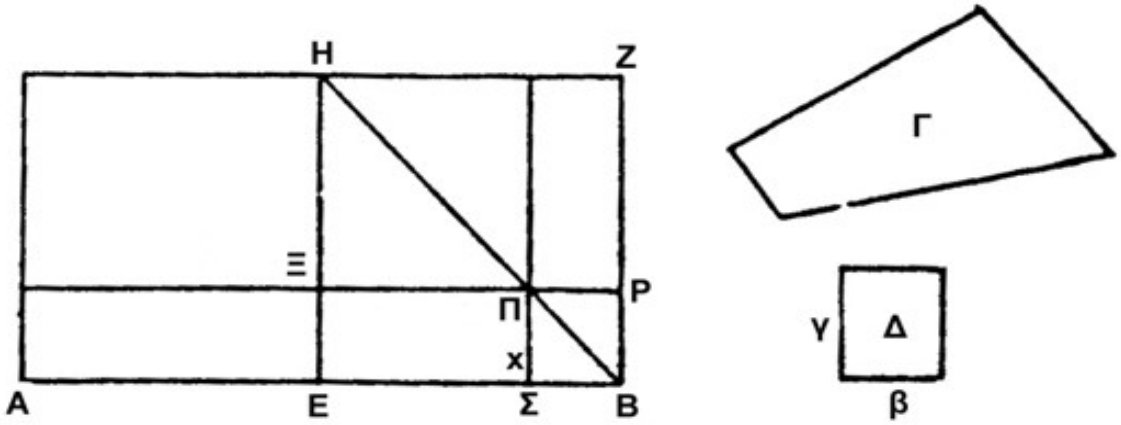
Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε το τετράγωνο προσθέτοντας $\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}$.

Έτσι $\frac{\beta}{\gamma}x^2-\alpha x+\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}-\Gamma$ και με εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας, έχουμε

$$\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cdot x-\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}-\Gamma}$$

και $x=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}-\Gamma)}$.

Τώρα ας δούμε τη μέθοδο του Ευκλείδη.



Πρώτα αναγράφει ΗΕΒΖ στην ΕΒ (μισό του ΑΒ) όμοιο με το δοθέν παραλληλόγραμμο Δ. Κατόπιν τοποθετεί σε μια γωνία ΖΗΕ του ΗΕΒΖ ένα όμοιο και παρομοίως τοποθετημένο παραλληλόγραμμο ΗΠ, ίσο με τη διαφορά μεταξύ του παραλληλογράμμου ΗΒ και την περιοχής Γ. Οπότε $\Xi\Pi=H\Xi\cdot\frac{\beta}{\gamma}$.

Ομοίως $\frac{\alpha}{2}=EB=HE\cdot\frac{\beta}{\gamma}$. Έτσι ώστε $HE=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2}$

Επομένως το παραλληλόγραμμο $H\Pi=H\Xi^2\cdot\frac{\beta}{\gamma}$.

Και το παραλληλόγραμμο $HB=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}$.

Έτσι, παίρνοντας το παραλληλόγραμμο ΗΠ ίσο προς (ΗΒ-Γ), ο Ευκλείδης πραγματικά βρίσκει το ΗΞ από την εξίσωση

$$H\Xi^2\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}-\Gamma$$

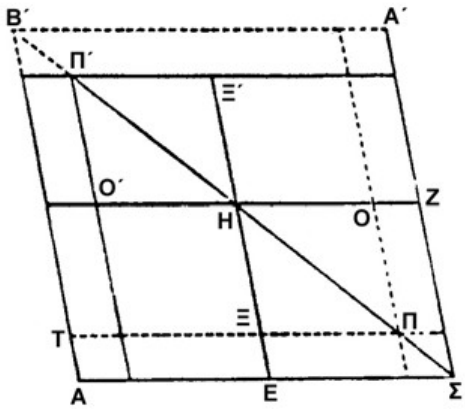
Η τιμή που βρίσκει είναι $HΞ=\sqrt{\frac{γ}{β}(\frac{γ}{β}\cdot\frac{α^2}{4}-Γ)}$

Και βρίσκει ΠΣ (ή χ) **αφαιρώντας** το ΗΞ από το ΗΕ, οπότε

$$χ=\frac{γ}{β}\cdot\frac{α}{2}-\sqrt{\frac{γ}{β}(\frac{γ}{β}\cdot\frac{α^2}{4}-Γ)}$$

Θα παρατηρηθεί ότι ο Ευκλείδης δίνει μόνο μια λύση, αυτή που αντιστοιχεί στο **αρνητικό** πρόσημο του ριζικού. Αλλά ο λόγος πρέπει να είναι ο ίδιος με αυτόν για τον οποίο δίνει μόνο την μια "περίπτωση" στην VI.27. Δεν είναι δυνατόν να μην μπόρεσε να δει πως να **προσθέσει** το ΗΞ με το ΗΕ ώστε να βρει άλλη λύση. Όπως φαίνεται κάτω από την τελευταία πρόταση, η άλλη λύση που μπορεί να επιτευχθεί στο (1) με την τοποθέτηση του παραλληλογράμμου ΗΞΠΟ στη γωνία που είναι κάθετα απέναντι στην ΖΗΕ, έτσι ώστε ΗΠ' να είναι κατά μήκος της ΒΗ που **δημιουργείται**. Το παραλληλόγραμμο ΑΠ' τότε δίνει τη δεύτερη λύση . Η πλευρά αυτού του παραλληλογράμμου που βρίσκεται κατά μήκος της ΑΒ είναι ίση προς την ΣΒ. Η άλλη πλευρά είναι αυτή που καλέσαμε χ και σε αυτήν την περίπτωση

$$χ=ΕΗ+ΗΞ'=\frac{γ}{β}\cdot\frac{α}{2}+\sqrt{\frac{γ}{β}(\frac{γ}{β}\cdot\frac{α^2}{4}-Γ)} \quad (2)$$



ένα παραλληλόγραμμο όμοιο και ίσο προς το ΑΠ' μπορεί να αποκτηθεί με τη δημιουργία ΒΗ έως ότου συναντήσει την ΑΤ που δημιουργείται και συμπληρώνοντας το παραλληλόγραμμο Β'ΑΒΑ΄, οπότε φαίνεται ότι το συμπλήρωμα ΠΑ' είναι ίσο με το συμπλήρωμα ΑΠ, εκτός από το να είναι ίσο, όμοιο και ομοίως τοποθετημένο προς την ΑΠ'.

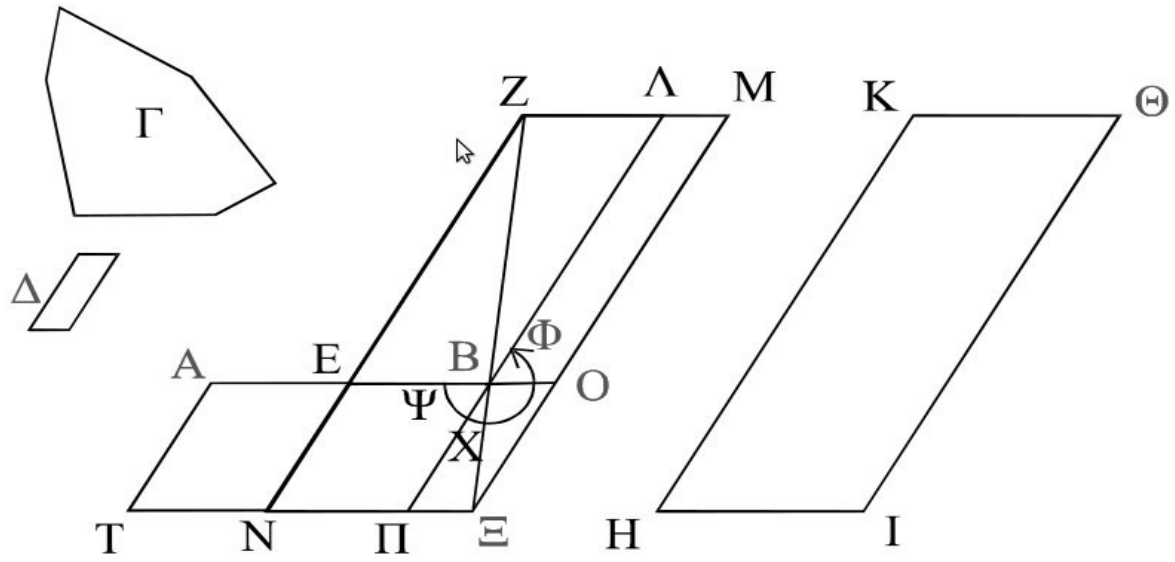
Η ειδική περίπτωση της (1) λύνεται στην πρόταση II.5 όπως είδαμε παραπάνω, στην οποία δηλαδή το έλλειμμα είναι ένα ***τετράγωνο***, και αντιστοιχεί στην εξίσωση $αχ-χ^2=β^2$. Αυτό είναι το πρόβλημα ***της εφαρμογής σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή ένα ορθογώνιο ίσο προς μια δοθείσα περιοχή και που υπολείπεται*** *(falling short)* ***κατά ένα τετράγωνο***.

Πρόταση VI.29

Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό προς δοθέν πολύγωνο, το οποίο να είναι όμοιο προς το δοθέν και να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο κατά το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το δοθέν πολύγωνο Γ και το δοθέν παραλληλόγραμμο Δ. Πάνω στο ΑΒ θα γράψουμε παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό προς το πολύγωνο Γ και το οποίο θα υπερβάλλει το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο πλευράς ΑΒ κατά παραλληλόγραμμο όμοιο προς το Δ.



Αν είναι Ε το μέσον του ΑΒ, γράφουμε πάνω στο ΕΒ παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ. Σύμφωνα με την πρόταση 25, κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΗΙΘΚ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το Δ, το οποίο να έχει εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των Γ και ΕΒΛΖ. Τότε το ΗΙΘΚ θα είναι όμοιο και ομοίως κείμενο και προς το παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ. Έστω ότι η ΚΘ είναι ομόλογη προς την ΖΛ και η ΚΗ είναι ομόλογη προς την ΖΕ.

Επειδή (ΗΙΘΚ) > (ΕΒΛΖ), θα είναι και ΚΘ > ΖΛ και ΚΗ > ΖΕ.

Προεκτείνουμε τις ΖΛ και ΖΕ προς το μέρος των Λ και Ε, αντίστοιχα, και θεωρούμε ευθύγραμμα τμήματα ΖΛΜΝ και ΖΕΝ τέτοια, ώστε

ΖΛΜ = ΚΘ , ΖΕΝ = ΚΗ

και συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΖΝΞΜ, το οποίο πλέον είναι ισεμβαδικό και όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΗΙΘΚ.

Επομένως, το ΖΝΞΜ θα είναι όμοιο και προς το παραλληλόγραμμο ΕΒΛΖ, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 26, τα παραλληλόγραμμα ΖΝΞΜ και ΕΒΛΖ θα είναι περί την ίδια διαγώνιο ΖΞ.

Από το Β φέρουμε παραλλήλους προς τις ΖΛ και ΖΕ, που τέμνουν τις ΞΜ και ΝΞ στα σημεία Ο και Π, αντίστοιχα.

Επειδή είναι (ΗΙΘΚ) = (ΕΒΛΖ) + Εμβ(Γ) και (ΗΙΘΚ) = (ΖΝΞΜ), θα είναι και: (ΖΝΞΜ) = (ΕΒΛΖ) + Εμβ(Γ). Επομένως:

(ΖΝΞΜ) – (ΕΒΛΖ) = Εμβ (Γ)

οπότε το εμβαδόν του "γνώμονα" ΨΧΦ ισούται προς το εμβαδόν του Γ.
Επειδή είναι ΑΕ = ΕΒ, θα είναι και (ΑΤΝΕ) = (ΕΝΠΒ) = (ΒΟΜΛ).

Οπότε:

(ΑΤΝΕ) + (ΕΝΞΟ) = (ΒΜΟΛ) + (ΕΝΞΟ) ή

(ΑΤΞΟ) = Εμβαδόν "γνώμονα" ΨΧΒ ή

(ΑΤΞΟ) = Εμβ (Γ) , ([9], σελ.476-477)

Σύμφωνα με τα σχόλια του Heath για την πρόταση VI.29 ([3], Βιβλίο VI,σελ.266-267) το πρόβλημα της VI.29 αντιστοιχεί στη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

$$\alpha\chi+\frac{\beta}{\gamma}\chi^2=\Gamma \quad (1)$$

Η αλγεβρική λύση αυτής της εξίσωσης δίνει:

$$\chi=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}-\Gamma\right)}$$

Η ακριβής αντιστοίχηση της μεθόδου του Ευκλείδη (*υπερβολή* δεδομένου σχήματος) προς την αλγεβρική λύση μπορεί να γίνει κατανοητή, όπως στην περίπτωση της VI.28, με την υπόθεση των παραλληλόγραμμων ως ***ορθογώνιων***.

Σε αυτή την περίπτωση, η κατασκευή του Ευκλείδη στην ΕΒ του παραλληλόγραμμου ΕΛ όμοιου προς το Δ είναι αντίστοιχη στην εύρεση του ότι

η (ευθεία γραμμή) $ZE=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2}$ και το $(E\Lambda)=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}$

Ο διορισμός του όμοιου παραλληλόγραμμου ΜΝ ίσου προς το άθροισμα του ΕΛ και Γ αντιστοιχεί με την απόδειξη ότι:

$$ZN^2\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}+\Gamma$$

ή

$$ZN=\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}+\Gamma)}$$

Οπότε χ βρίσκεται ότι:

$$\chi=ZN-ZE=\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha^2}{4}+\Gamma)}-\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{2}$$

Ο Ευκλείδης παίρνει, σε αυτή την περίπτωση, τη λύση που αντιστοιχεί στο ***θετικό*** πρόσημο πριν το ριζικό διότι, από αυτή την άποψη, αυτή θα ήταν η ***μόνη*** λύση. Δεν είναι αναγκαίος ο ***διορισμός***, διότι μια πραγματική γεωμετρική λύση είναι πάντα πιθανή όποιο και αν είναι το μέγεθος του Γ.

Η ειδική περίπτωση της (1) λύνεται στην πρόταση ΙΙ.6 όπως είδαμε παραπάνω, η περίπτωση δηλαδή στην οποία η υπερβολή είναι ένα ***τετράγωνο***, και αντιστοιχεί τη λύση της εξίσωσης $\alpha\chi+\chi^2=\beta^2$. Αυτό είναι το πρόβλημα ***της εφαρμογής σε μια δοθείσα ευθεία γραμμή ενός ορθογώνιου*** (rectangle) ***ίσου προς μια δοθείσα περιοχή*** (to a given area) ***και υπερβάλλον*** (exceeding) ***κατά ένα τετράγωνο*** (square).

2.4 Γεωμετρική επίλυση συστήματος.

Υπάρχει και μια δεύτερη περίπτωση όπου εμφανίζονται δύο προτάσεις, οι οποίες εκφράζουν τον ίδιο αλγεβρικό τύπο. Οι προτάσεις ΙΙ.9 και ΙΙ.10.

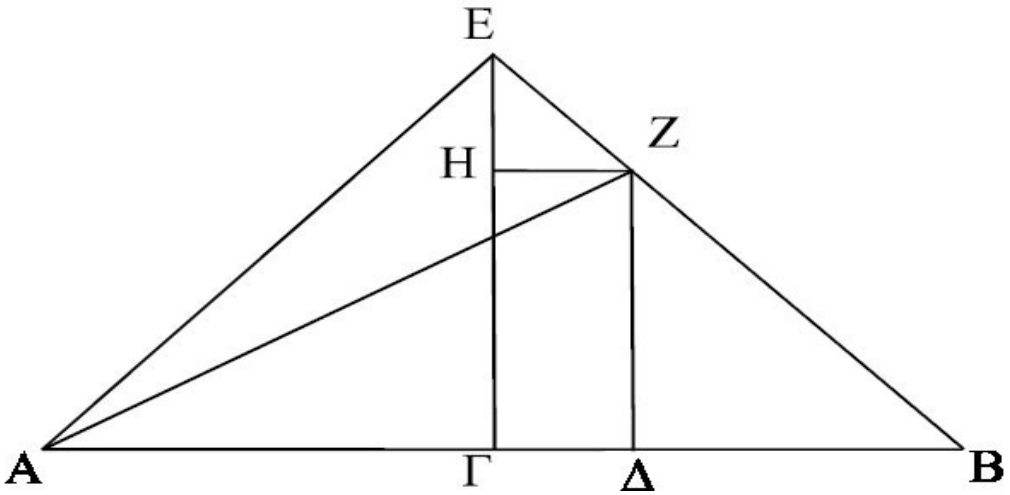
Πρόταση ΙΙ.9

Αν Γ το μέσο του τμήματος ΑΒ και Δ σημείο του τμήματος, τότε τα εμβαδά των τετραγώνων με πλευρές τα τμήματα τα οποία ορίζει το Δ έχουν άθροισμα διπλάσιο

από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τα ΓΔ και το ήμισυ του τμήματος ΑΒ.

Απόδειξη

Φέρουμε κάθετο στην ΑΒ στο σημείο Γ σ'αυτήν και παίρνουμε ΓΕ=ΑΓ=ΓΒ. Φέρουμε τις ΕΑ, ΕΒ και ΖΔ//ΓΕ και ΖΗ//ΑΒ, καθώς και την ΑΖ.



Επειδή ΑΓ=ΓΕ και $\widehat{ΑΓΕ}=90^\circ$, θα είναι $\widehat{ΑΕΓ}=\widehat{ΕΑΓ}=45$. Θα είναι επίσης $\widehat{ΒΕΓ}=\widehat{ΕΒΓ}=45$. Άρα $\widehat{ΑΕΒ}=90^\circ$.

Ακόμα, $\widehat{ΗΕΖ}=45$, $\widehat{ΕΗΖ}=90^\circ$, γιατί $\widehat{ΕΗΖ}=\widehat{ΕΓΒ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Άρα και $\widehat{ΕΖΗ}=45$, οπότε ΕΗ=ΖΗ.

Επίσης, αφού $\widehat{ΓΒΕ}=45^\circ$ και $\widehat{ΒΔΖ}=90^\circ$, εφόσον $\widehat{ΒΔΖ}=\widehat{ΒΓΕ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, θα είναι $\widehat{ΔΖΒ}=45^\circ$, άρα ΔΒ=ΔΖ. Και αφού ΑΓ=ΓΕ, θα είναι $ΑΓ^2=ΓΕ^2$, άρα $2ΑΓ^2=ΑΓ^2+ΓΕ^2=ΑΕ^2$ ή $ΑΕ^2=2ΑΓ^2$.

Ομοίως, αφού ΕΗ=ΗΖ, θα είναι $ΕΗ^2=ΗΖ^2$. Άρα $ΕΗ^2+ΗΖ^2=2ΗΖ^2=ΕΖ^2=2ΓΔ^2$ ή $ΕΖ^2=2ΓΔ^2$.

Άρα $ΑΕ^2+ΕΖ^2=2(ΑΓ^2+ΓΔ^2)$ και αφού $ΑΕ^2+ΕΖ^2=ΑΖ^2$, θα είναι $ΑΔ^2+ΔΖ^2=2(ΑΓ^2+ΓΔ^2)$. Άρα $ΑΔ^2+ΔΒ^2=2(ΑΓ^2+ΓΔ^2)$. ([9], σελ.235-236)

Αν θέσουμε ΑΒ=2α, ΑΔ=χ, ΔΒ=ψ, η πρόταση ΙΙ.9 γράφεται:

$$χ^2+ψ^2=2[(\frac{χ+ψ}{2})^2+(\frac{χ-ψ}{2})^2]$$

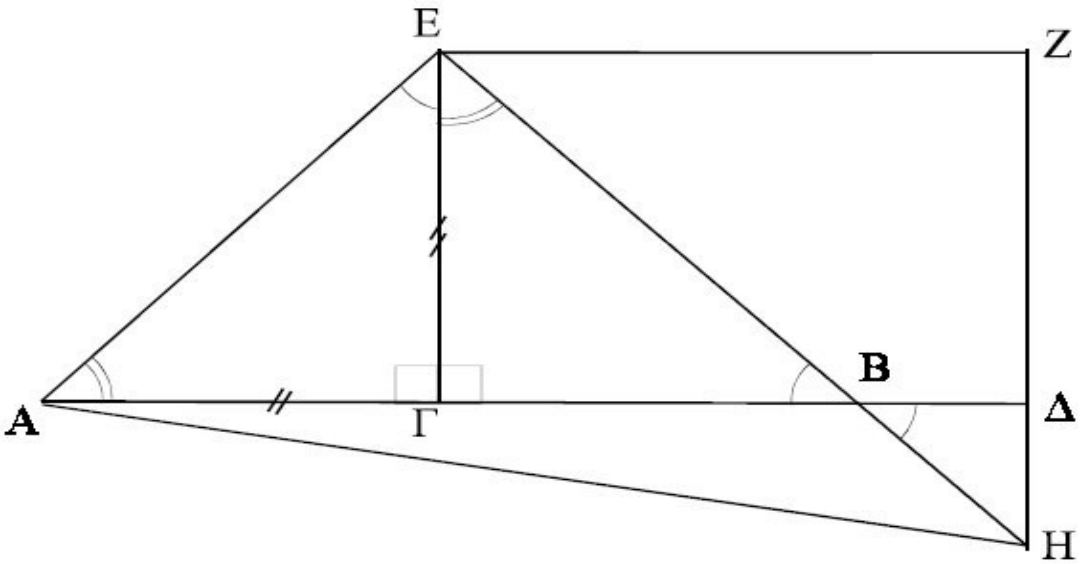
Πρόταση ΙΙ.10

Αν Γ το μέσο του τμήματος ΑΒ και Δ σημείο στην προέκταση του ΑΒ, τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΔ, ΒΔ είναι διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΓ, ΓΔ.

Απόδειξη

Φέρουμε κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Γ και παίρνουμε πάνω στην κάθετη τμήμα ΓΕ=ΑΓ=ΓΒ.

Φέρουμε τις ΕΑ, ΕΒ και ΕΖ//ΑΒ, ΔΖ//ΓΕ.



Είναι $\widehat{ΓΕΖ}+\widehat{ΕΖΔ}=180$, επομένως $\widehat{ΖΕΒ}+\widehat{ΕΖΔ}<180$. Άρα οι ΕΒ, ΖΔ τέμνονται στο Η (5ο αίτημα).

Φέρουμε την ΑΗ. Αφού ΓΑ=ΓΕ και $\widehat{ΑΓΕ}=90$, θα είναι $\widehat{ΕΑΓ}+\widehat{ΑΕΓ}=45$. Για τον ίδιο λόγο $\widehat{ΓΕΒ}=\widehat{ΕΒΓ}=45$, άρα $\widehat{ΑΕΒ}=90$. Αλλά $\widehat{ΕΒΓ}=\widehat{ΔΒΗ}=45$ και $\widehat{ΒΔΗ}=90$, οπότε ΒΔ=ΔΗ. Επίσης, αφού $\widehat{ΕΗΖ}=45$ και $\widehat{ΕΖΗ}=90$, θα είναι $\widehat{ΖΕΗ}=45$. Δηλαδή $\widehat{ΕΗΖ}=\widehat{ΖΕΗ}$.

Άρα ΗΖ=ΕΖ και αφού ΕΓ=ΑΓ, θα είναι $ΕΓ^2=ΑΓ^2$.

Άρα $ΕΓ^2+ΓΑ^2=2ΑΓ^2=ΑΕ^2$.

Για τον ίδιο λόγο $2ΖΕ^2=ΖΕ^2+ΖΗ^2=ΕΗ^2=2ΓΔ^2$.

Άρα $2ΑΓ^2+2ΓΔ^2=ΑΕ^2+ΕΗ^2=ΑΗ^2=ΑΔ^2+ΔΗ^2=ΑΔ^2+ΔΒ^2$.

Επομένως, $A\Delta^2+B\Delta^2=2(A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2)$. ([9], σελ.238-239)

Όπως η πρόταση ΙΙ.9 έτσι και η πρόταση ΙΙ.10 οδηγεί στον τύπο:

$$\chi^2+\psi^2=2[(\frac{\chi+\psi}{2})^2+(\frac{\chi-\psi}{2})^2]$$

Και οι δύο μπορούν να θεωρηθούν πως είναι λύσεις προβλημάτων. Στην περίπτωση της ΙΙ.9, το πρόβλημα είναι: να προσδιοριστούν τα χ και ψ όταν δίδονται το $\chi+\psi$ και $\chi^2+\psi^2$. Στην περίπτωση της ΙΙ.10 δεδομένων των $\chi-\psi$ και $\chi^2-\psi^2$, ζητούνται τα χ και ψ. Επομένως, έχουμε να κάνουμε με τις λύσεις των συστημάτων των εξισώσεων, ([7], σελ.138),

$$\chi+\psi=s, \chi^2+\psi^2=F$$

$$\chi-\psi=d, \chi^2+\psi^2=F$$

Ο Zeuthen, θεωρούσε ότι οι προτάσεις ΙΙ.9, ΙΙ.10 χρησίμευαν στους Αρχαίους Έλληνες για την αντιμετώπιση Διοφαντικών εξισώσεων ([9], σελ.240). Συγκεκριμένα, ο Zeuthen παρατήρησε ότι η πρόταση ΙΙ.9 δίνει

$$A\Delta^2+B\Delta^2=2(A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2) \quad \text{ή} \quad A\Delta^2-2A\Gamma^2=2\Gamma\Delta^2-B\Delta^2$$

και για ΓΔ=χ, ΒΔ=ψ παίρνουμε

$$(2\chi+\psi)^2-2(\chi+\psi)^2=2\chi^2-\psi^2 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι αν οι αριθμοί χ, ψ ικανοποιούν τη μια από τις εξισώσεις

$$2\chi^2-\psi^2=\pm 1 \quad (2)$$

τότε οι αριθμοί χ+ψ, 2χ+ψ θα ικανοποιούν την άλλη εξίσωση.

Π.χ. Αν $2\chi^2-\psi^2=-1$, τότε:

$$2(\chi+\psi)^2-(2\chi+\psi)^2=2(\chi^2+2\chi\psi+\psi^2)-(4\chi^2+4\chi\psi+\psi^2)=-2\chi^2+\psi^2=-(-1)=1.$$

3. Η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων από τους Άραβες.

3.1 al-Khwarizmi

Η επιστημονική συμβολή του al-Khwarizmi είναι σημαντική τόσο στα Μαθηματικά όσο και στην Αστρονομία. Εμείς θα ασχοληθούμε με την πραγματεία του στην Άλγεβρα και συγκεκριμένα στις αλγεβρικές εξισώσεις. Έγραψε μια συστηματική παρουσίαση πάνω στην βασική θεωρία των εξισώσεων, που περιείχε τόσο παραδείγματα όσο και αποδείξεις. Ο al-Khwarizmi, μη γνωρίζοντας τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν, έδωσε μια κατηγορία έξι διαφορετικών τύπων εξισώσεων, στους οποίους όλες οι εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού μπορούν να αναχθούν. Οι τύποι αυτοί χρησιμοποιούν τριών ειδών ποσότητες, τις ρίζες, τα τετράγωνα ριζών και αριθμών και αριθμούς:

1. Τετράγωνα ίσα με ρίζες
2. Τετράγωνα ίσα με αριθμούς
3. Ρίζες ίσες με αριθμούς
4. Τετράγωνα και ρίζες ίσα αριθμούς
5. Τετράγωνα και αριθμοί ίσα με ρίζες
6. Ρίζες και αριθμοί ίσες με τετράγωνα

Ο al-Khwarizmi δίνει την λύση και των έξι τύπων εξισώσεων, κατά κύριο λόγο όμως της δευτεροβάθμιας με ένα αριθμητικό παράδειγμα για κάθε περίπτωση και μια απόδειξη που αποτελεί γεωμετρική συμπλήρωση του τετραγώνου.

Ο al-Khwarizmi ήταν ο πρώτος μουσουλμάνος συγγραφέας που έγραψε για επίλυση προβλημάτων με χρήση των διαδικασιών "***al-jabr***" και "***al-muqabala***". Η συνηθισμένη ερμηνεία του *jabr* στους μαθηματικούς χειρισμούς είναι: η πρόσθεση ισοδύναμων όρων και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης με σκοπό να μειώσει τους αρνητικούς όρους. Η συνηθισμένη ερμηνεία του *muqabala* είναι: η μείωση θετικών όρων αφαιρώντας ίσες ποσότητες και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης. Αλλά ο al-Khwarizmi χρησιμοποιεί επίσης τον όρο με την έννοια του "εξισώνω". Ο συνδυασμός των δύο όρων: *al-jabr al-muqabala* χρησιμοποιείται μερικές φορές με μια πιο γενική έννοια: εκτέλεση αλγεβρικών χειρισμών ή πιο απλά: Η επιστήμη της Άλγεβρας. Ακολουθούν παραδείγματα από την μετάφραση του Rosen στο "Algebra of Mohammed ben Musa", που δείχνουν την χρήση των όρων αυτών στην δουλειά του Al-Khwarizmi πάνω στην επίλυση **δευτεροβάθμιων αλγεβρικών εξισώσεων,**

([7], σελ.4-8).

<u>1ο Παράδειγμα</u> (χρήση του όρου *al-jabr)*

Πρόβλημα:

"Διαίρεσα το δέκα σε δύο μέρη. Πολλαπλασίασα το ένα από τα δύο μέρη με το άλλο. Μετά από αυτό πολλαπλασίασα ένα από τα δύο με τον εαυτό του, και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον εαυτό του είναι τέσσερις φορές όσο το αποτέλεσμα του ενός από τα δύο μέρη με το άλλο."

Λύση κατά al-Khwarizmi	**Σύγχρονος συμβολισμός**
Ο al-Khwarizmi καλεί το ένα από τα δύο μέρη "κάτι" και το άλλο "10 μείον κάτι". Πολλαπλασιάζοντας τα δύο, αποκτά "δέκα κάτι μείον ένα τετράγωνο". Για το τετράγωνο του αγνώστου "κάτι" ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τη λέξη *mal,* η οποία σημαίνει κάτι σαν "πλούτος" ή "ιδιοκτησία".	
Τελικά λαμβάνει την εξίσωση: "*Ένα τετράγωνο, το οποίο είναι ίσο με σαράντα κάτι μείον τέσσερα τετράγωνα"*	$x^2=40x-4x^2$
Εν συνεχεία ο συγγραφές χρησιμοποιεί την διαδικασία ***al-jabr***, προσθέτοντας και στα δύο μέρη της εξίσωσης το $4x^2$ που αλλάζει την εξίσωση και δίνει λύση το χ=8.	$x^2+4x^2=40x-4x^2+4x^2$ ή $5x^2=40x$ ή $x^2=8x$ ή $x=8$

<u>2ο Παράδειγμα</u> (χρήση του όρου *al-muqabala*)

Άλλη μία εξίσωση του al-Khwarizmi που βρίσκεται στο ίδιο βιβλίο είναι η:

$$50+x^2=29+10x$$

που μειώνεται μέσω του *al-muqabala* στο

$$21+x^2=10x$$

<u>3ο Παράδειγμα - Επίλυση μεικτής δευτεροβάθμιας εξίσωσης</u> $\alpha x^2+\beta x=\gamma$.

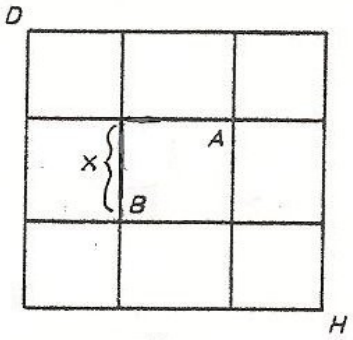
Στην ορολογία του al-Khwarizmi ο τύπος αυτός δευτεροβάθμιας εξίσωσης μπορεί να παρουσιαστεί μέσα από το παρακάτω πρόβλημα:

"*Ρίζες και Τετράγωνα ισοδύναμα με αριθμούς:*
Ένα τετράγωνο και δέκα ρίζες της ίδιας ποσότητας ισοδυναμεί με τριάντα εννιά dirhems; αυτό μας οδηγεί στο ερώτημα, πόσο πρέπει να είναι το τετράγωνο το οποίο, όταν αυξηθεί κατά δέκα από τις δικές του ρίζες ισοδυναμεί με το τριάντα εννιά?" .

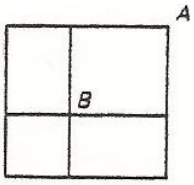
Λύση κατά al-Khwarizmi	**Σύγχρονος συμβολισμός**
Χωρίζεις τον αριθμό των ριζών, που στην συγκεκριμένη περίπτωση αποδίδει πέντε. Αυτό θα το πολλαπλασιάσεις με τον εαυτό του. Το αποτέλεσμα είναι είκοσι πέντε. Πρόσθεσε αυτό στο τριάντα εννιά. Το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα. Τώρα πάρε την ρίζα αυτού που είναι οκτώ, και αφαίρεσε από αυτήν το μισό αριθμό των ριζών που είναι το πέντε. Το υπόλοιπο είναι το τρία. Αυτή είναι η ρίζα του τετραγώνου που σκέφτηκες; το τετράγωνο είναι το εννέα.	Με σύγχρονο συμβολισμό, η εξίσωση είναι: $x^2+10x=39$ που μπορεί να μετασχηματιστεί στην $(x+5)^2=39+25=64$ $x+5=\sqrt{64}=8$ $x=8-5=3.$

Γεωμετρική επίλυση του προβλήματος.

Ο al-Khwarizmi δίνει και γεωμετρική απόδειξη. Κατασκευάζει ένα τετράγωνο AB η πλευρά του οποίου είναι η ζητούμενη ρίζα χ. Στις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου κατασκευάζει ορθογώνια που το καθένα έχει πλάτος το $\frac{1}{4}$ του 10 ή ισοδύναμα $\frac{1}{4}\cdot 10=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.



Τώρα το τετράγωνο μαζί με τα τέσσερα ορθογώνια είναι ίσο με 39. Με σκοπό να συμπληρωθεί το τετράγωνο DH, πρέπει να προστεθεί τέσσερις φορές το τετράγωνο πλευράς 2 $\frac{1}{2}$ που είναι 25 κατά τον al-Khwarizmi. Έτσι η περιοχή του μεγάλου τετραγώνου είναι 64 και η πλευρά του 8. Επομένως η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι 8-5=3.



Μια άλλη πιο απλή γεωμετρική απόδειξη που δίνει ο al-Khwarizmi είναι αυτή όπου ορθογώνια πλάτους 5, κατασκευάζονται μόνο στις δύο από τις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου AB. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Μέσα από αυτές τις αποδείξεις μπορούμε να καταλάβουμε κατά τον B.Van der Waerden ότι πηγή του al-Khwarizmi δεν είναι ο Ευκλείδης. Η πρώτη απόδειξη είναι σαφώς πιο περίπλοκη από την απόδειξη του Ευκλείδη στην πρόταση II.4, η οποία όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο λέει ότι το τετράγωνο σε ένα ευθύγραμμο τμήμα α+β είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων με α και β πλευρές και δύο φορές το ορθογώνιο αβ. Η δεύτερη απόδειξη του al-Khwarizmi είναι πιο κοντά στην II.4.

3.2 Tabit ben Qurra

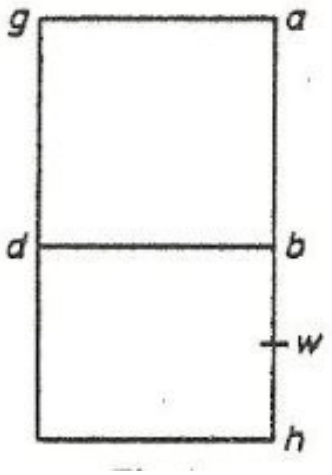
Ο Tabit ben Qurra (836-901) γεννήθηκε στο Harran και ήταν μέλος της αίρεσης των Σαμπιανών. Η Σαμπιανή αίρεση ήταν λάτρεις των αστεριών από το Harran, που συχνά τους μπερδεύουν με τους Mandaeans. Φυσικά, όντας λάτρεις των αστεριών, υπήρχε μεγάλο κίνητρο για την μελέτη της αστρονομίας, και έτσι η αίρεση ανέδειξε πολλούς καλούς αστρονόμους και μαθηματικούς. Η αίρεση, με

δυνατές Ελληνικές ρίζες, είχε στα πρώιμα της χρόνια υιοθετήσει την Ελληνική κουλτούρα, και ήταν συνηθισμένο για τα μέλη της να μιλάνε τα Ελληνικά παρόλο που μετά την κατάκτηση των Σαμπιανών από το Ισλάμ, έγιναν Αραβόφωνοι. Υπήρχε ακόμα μία γλώσσα που χρησιμοποιείτο στην νότια Τουρκία, τα Συριακά, και ήταν η μητρική γλώσσα του Tabit ben Qurra, αλλά ήταν άνετος στο χειρισμό τόσο στα Ελληνικά όσο και στα Αραβικά.

Γεωμετρική επαλήθευση της Επίλυσης των Δευτεροβάθμιων Εξισώσεων.

Το έργο του Tabit σχετικά με αυτό το θέμα "*On the Verification of Problems of the Algebra by Geometrical Proofs*", έχει εκδοθεί σε γερμανική μετάφραση. Σύμφωνα με τον Tabit υπάρχουν τρεις φορμαλιστικές μορφές στις οποίες τα περισσότερα προβλήματα μπορούν να αναχθούν, ([7], σελ.18-20).

"Η πρώτη βασική μορφή είναι: **Τετράγωνα και ρίζες ίσα με αριθμούς**. Ο τρόπος και η μέθοδος της επίλυσης δια μέσου της πρότασης ΙΙ.6 από τα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι όπως περιγράφεται: φτιάχνουμε το τετράγωνο του αγνώστου ίσο με ένα τετράγωνο *a b g d*, φτιάχνουμε *b h* ίσο με το ίδιο πολλαπλάσιο της μονάδας με την οποία οι γραμμές μετριούνται όπως είναι με το δοσμένο αριθμό ριζών, και έτσι συμπληρώνεται η επιφάνεια *d h*. Εφόσον το τετράγωνο είναι το *a b g d* η ρίζα είναι η πλευρά του *a b*, και στο χώρο των υπολογισμών και των αριθμών είναι ίσο με το προϊόν του ab και της μονάδας, με την οποία μετριούνται οι γραμμές. Τώρα ένας αριθμός αυτών των μονάδων ίσο με το δοσμένο αριθμό ριζών είναι στο *b h*, καθώς το προϊόν του *a b* και *b h* είναι ίσο με τις ρίζες στο χώρο των υπολογισμών και των αριθμών. Αλλά το γινόμενο των *a b* και *b h* είναι η περιοχή *d h*, αφού τα *a b* και *b d* είναι ίσα. Έτσι η περιοχή *d h* με αυτόν τον τρόπο είναι ισοδύναμη με τις ρίζες του προβλήματος και η περιοχή *g h* ίση με το τετράγωνο του αγνώστου μαζί με τις ρίζες."



Η ερμηνεία του Tabit είναι **ογκώδης**, επειδή δεν μπορεί να εξισώσει μια περιοχή ή ευθύγραμμο τμήμα με έναν αριθμό. Γιαυτό και εισάγει μια μονάδα μήκους, έστω e. Εάν η δοσμένη εξίσωση είναι

$$x^2+mx=n \quad ,$$

στην οποία το χ είναι ένας άγνωστος αριθμός, ενώ τα m και n είναι γνωστοί αριθμοί, την **μετασχηματίζει σε μια γεωμετρική εξίσωση**

$$x^2+mex=ne^2$$

όπου τα χ και e είναι ευθύγραμμα τμήματα. Και συνεχίζει:

"Τώρα το τετράγωνο και οι ρίζες μαζί είναι ίσες με έναν γνωστό αριθμό. Επομένως η περιοχή *g h* είναι γνωστή και ίση με το γινόμενο των *a h* και *a b*, αφού το *a b* είναι ίσο με το *a g*. Έτσι το γινόμενο των *h a* και *a b* είναι γνωστό, και το τμήμα *b h* είναι γνωστό επειδή ο αριθμός των μονάδων του είναι γνωστός. Έτσι όλα ανάγονται σε ένα γνωστό γεωμετρικό πρόβλημα: έστω ευθύγραμμο τμήμα *b h* γνωστό. Σε αυτό ένα τμήμα *a b* προστίθεται και το γινόμενο των *a h* και *a b* είναι γνωστό.

Τώρα στην πρόταση 6 του βιβλίου ΙΙ των Στοιχείων έχει αποδειχθεί ότι, αν το τμήμα *b h* χωριστεί στο σημείο *w,* το προϊόν των *h a* και *a b* μαζί με το τετράγωνο του *b w* είναι ίσο με το τετράγωνο του *a w*. Αλλά το γινόμενο των *h a* και *a b* είναι γνωστό και το τετράγωνο του *b w* είναι γνωστό. Επομένως το τετράγωνο του *a w* είναι γνωστό έτσι και το *a w* είναι γνωστό, και αν το *b w* αφαιρεθεί, το *a b* προκύπτει σαν γνωστό και αυτή είναι η ρίζα. Αν την πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό της, το τετράγωνο *a b g h*, που είναι το τετράγωνο του αγνώστου, το οποίο είναι αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Η διαδικασία συμφωνεί με την διαδικασία των ανθρώπων concerned με την άλγεβρα κατά την επίλυση προβλημάτων. Όταν χωρίζουν τον αριθμό των ριζών, αυτό είναι το ίδιο όπως όταν παίρνουμε το μισό του τμήματος *b h*, και όταν το πολλαπλασιάζουν με τον εαυτό του , αυτό είναι το ίδιο όπως όταν παίρνουμε το τετράγωνο του μισού του *b h.* Όταν προσθέτουν στο αποτέλεσμα το δοσμένο αριθμό, είναι το ίδιο όπως όταν προσθέτουμε το γινόμενο των *h a* και *a b*, με σκοπό να πάρουμε το τετράγωνο του αθροίσματος του *a b* και και του διαιρεμένου τμήματος. Τέλος όταν παίρνουν την ρίζα του αποτελέσματος είναι όπως όταν λέμε: Το άθροισμα του *a b* και του διαιρεμένου τμήματος είναι γνωστό από την στιγμή που είναι γνωστό το τετράγωνο."

Με τον ίδιο τρόπο ο Tabit ben Qurra αντιμετωπίζει τις άλλες δύο μορφές προβλημάτων $\chi^2+\beta=\alpha\chi$ και $\beta+\alpha\chi=\chi^2$. Επιλύονται με τη βοήθεια των Ευκλείδειων προτάσεων ΙΙ.5 και ΙΙ.6 αντίστοιχα, και η συμφωνία με την αλγεβρική επίλυση αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που απεδείχθη και στην πρώτη περίπτωση.

3.3 Omar Khayyam

Ο Omar Khayyam γεννήθηκε το 1048 στο Nishapur της Περσίας και ήταν μαθηματικός, φυσικός, φιλόσοφος, αστρονόμος και ποιητής, ενώ έγραψε πραγματείες πάνω στην μηχανική, την γεωγραφία και την μουσική. Τα πολιτικά γεγονότα του 11ου αιώνα έπαιξαν μεγάλο ρόλο στην πορεία της ζωής του. Οι Σελτζούκοι Τούρκοι εισέβαλαν στην νοτιοδυτική Ασία και τελικά ιδρύσανε μια αυτοκρατορία που περιλάμβανε την Μεσοποταμία, την Συρία, την Παλαιστίνη και το μεγαλύτερο μέρος του Ιράν. Μεγάλωσε μέσα σε αυτήν την ασταθή στρατιωτική αυτοκρατορία λοιπόν που είχε θρησκευτικά προβλήματα καθώς γινόταν προσπάθεια να καθιερωθεί ένα ορθόδοξο Μουσουλμανικό καθεστώς. Στην Nishapur ο Khayyam σπούδασε φιλοσοφία, ήταν ένας εξαιρετικός μαθηματικός και αστρονόμος και έγραψε διάφορα έργα πριν την ηλικία των 25 χρόνων συμπεριλαμβανομένου του βιβλίου *"Προβλήματα Αριθμητικής", ενός* βιβλίου πάνω στην μουσική και ενός πάνω στην άλγεβρα. Το 1070 πήγε στο Ουζμπεκιστάν που αποτελεί μια από τις παλαιότερες πόλεις της Κεντρικής Ασίας. Εκεί τον Khayyam υποστήριξε ο Abu Tahir ένας εξέχων δικαστής της πόλης Samarkand, και αυτό του επέτρεψε να γράψει την πιο διάσημη δουλειά στην Άλγεβρα, *Treatise on Demonstration of Problems of Algebra.* Η πολιτική κατάσταση που επικρατούσε τα χρόνια του Khayyam δημιουργούσε πολλές δυσκολίες σε ανθρώπους της μάθησης όπως αυτός, εκτός και αν είχαν την υποστήριξη ενός κυβερνήτη σε κάποιο από τα πολυάριθμα δικαστήρια. Ο ίδιος ο Khayyam στην εισαγωγή του έργου του, *Treatise on Demonstration of Problems of Algebra,* περιέγραψε αυτές τις δυσκολίες. Ύστερα από πρόσκληση που έγινε στο Khayyam από τον Malik-Shah τον διοικητή της πόλης Esfahan, ο Khayyam ανέγειρε το αστεροσκοπείο της Esfahan όπου δούλεψε με άλλους αστρονόμους για 18 χρόνια, μέχρι το 1092 που πέθανε ο κυβερνήτης της Esfahan. Το 1118 μετά από αλλαγή του κυβερνήτη της πόλης, φεύγει από την Esfahan και ταξιδεύει στο Merv (σήμερα Mary, Turkmenistan) την πρωτεύουσα της αυτοκρατορίας των Σελτζούκων, όπου είχε δημιουργηθεί ένα μεγάλο ισλαμικό κέντρο μάθησης. Εκεί ο Khayyam έγραψε επιπρόσθετα έργα πάνω στα μαθηματικά.

3.3.1 Μαθηματική συμβολή στην επίλυση κυβικών εξισώσεων.

Ο Omar Khayyam καθιερώθηκε σαν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς και αστρονόμους της μεσαιωνικής περιόδου και αποτελεί συγγραφέας της πιο σημαντικής πραγματείας πάνω στην άλγεβρα πριν την σύγχρονη εποχή, το

"Treatise on Demonstration of Problems of Algebra" (1070) το οποίο έθεσε τις αρχές της άλγεβρας, και αποτελεί μέρος του σώματος των Περσικών Μαθηματικών που μεταδόθηκε στην Ευρώπη. Πιο συγκεκριμένα, έβγαλε **γενικές μεθόδους για την επίλυση κυβικών εξισώσεων τέμνοντας μια υπερβολή με έναν κύκλο** και κάποιων εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού. Στην πραγματεία του αυτή έγραψε και πάνω στην τριγωνική διάταξη των διωνυμικών συντελεστών γνωστό σαν τρίγωνο του Pascal σήμερα. Το 1077, ο Omar έγραψε το *Ashar ma ashkala min musadar at Kitab Uqlidis* που εκδόθηκε στα αγγλικά σαν "Πάνω στις δυσκολίες των ορισμών του Ευκλείδη". Ένα μεγάλο μέρος του βιβλίου ασχολείται με το πασίγνωστο *Αίτημα Της Παραλληλίας* του Ευκλείδη, που είχε τραβήξει το ενδιαφέρον και του Tabit ben Qurra. Η προσπάθεια του Omar στην απόδειξη του αιτήματος της παραλληλίας ήταν μία σαφής πρόοδος σε σχέση με προσπάθειες που είχαν γίνει πριν από αυτόν (Al-Haytham), και τα σχόλιά του έκαναν το πέρασμά τους και στην Ευρώπη συντελώντας ίσως στην επακόλουθη ανάπτυξη της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας. Η πραγματεία αυτή του Khayyam μπορεί να θεωρηθεί σαν η πρώτη πραγματεία πάνω στο αξίωμα παραλληλίας που βασίζεται περισσότερο σε διαισθητικό αξίωμα. Ο Khayyam ανασκευάζει τις προηγούμενες απόπειρες από άλλους Έλληνες και Πέρσες μαθηματικούς για να αποδείξει την πρόταση. Και αυτός, σαν τον Αριστοτέλη, αρνείται την χρήση της κίνησης στην γεωμετρία. Κατά μία έννοια δηλαδή, κάνει το πρώτο βήμα προς την διατύπωση ενός μη-Ευκλείδειου αξιώματος σαν εναλλακτική στο αξίωμα της παραλληλίας. Αυτή η φιλοσοφική ματιά του Omar Khayyam είχε σημαντικό αντίκτυπο στην προσέγγιση και τις μεθόδους του στην γεωμετρική άλγεβρα και ιδιαιτέρως στην **επίλυση κυβικών εξισώσεων.** Η επίλυσή του δεν είναι ένας άμεσος δρόμος σε μια αριθμητική λύση και πράγματι οι λύσεις του δεν είναι αριθμοί αλλά μάλλον ευθύγραμμα τμήματα. Από την άποψη αυτή η δουλειά του Khayyam μπορεί να θεωρηθεί **η πρώτη συστηματική μελέτη και η πρώτη ακριβής μέθοδος επίλυσης κυβικών εξισώσεων.**

Κυβική εξίσωση και τομή κωνικών τομών. Η πρώτη σελίδα από χειρόγραφο που βρίσκεται στο Πανεπιστήμιο Τεχεράνης.

Σε ένα άτιτλο γραπτό του Khayyam πάνω στις κυβικές εξισώσεις και προγενέστερο του διάσημου έργου του πάνω στην Άλγεβρα, από το οποίο είναι το απόσπασμα από κάτω, υπάρχουν προβλήματα πάνω στην γεωμετρική άλγεβρα.

> Όποιος νομίζει ότι η άλγεβρα είναι ένα τρικ στην απόκτηση αγνώστων το νομίζει μάταια. Καμία σημασία δεν πρέπει να δίνεται στο γεγονός ότι η άλγεβρα και η γεωμετρία είναι διαφορετικές σε εμφάνιση. Η άλγεβρα είναι γεωμετρικά γεγονότα που αποδεικνύονται από τις προτάσεις V και VI του δεύτερου βιβλίου των Στοιχείων.
>
> Omar Khayyam

Ένα από τα **γεωμετρικά προβλήματα** που εξετάζει είναι το επόμενο:

Βρες ένα σημείο στο τεταρτοκύκλιο ενός κύκλου τέτοιο ώστε όταν φέρουμε την κάθετο από το σημείο σε μια από τις συνορεύουσες ακτίνες, ο λόγος που σχηματίζουν το μήκος της καθέτου προς το μήκος της ακτίνας

να ισοδυναμεί με το λόγο των τμημάτων που ορίζονται από το ίχνος της καθέτου.

Ο Khayyam δείχνει ότι το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση ενός άλλου γεωμετρικού προβλήματος:

Βρες ένα ορθογώνιο τρίγωνο δεδομένου ότι η υποτείνουσα ισούται με το άθροισμα ενός σκέλους και του ύψους στην υποτείνουσα.

Το πρόβλημα αυτό με τη σειρά του οδήγησε τον Khayyam να λύσει την κυβική εξίσωση $x^3+200x=20x^2+2000$ όπου βρήκε μια θετική λύση της, θεωρώντας την τομή μια ορθογώνιας υπερβολής και ενός κύκλου. Μια κατά προσέγγιση αριθμητική λύση βρέθηκε μετά με την παρεμβολή των τριγωνομετρικών πινάκων. Αξιοσημείωτο, πέρα από την επίλυση της εξίσωσης, είναι η δήλωση του Khayyam ότι η επίλυση της εξίσωσης απαιτεί την χρήση των κωνικών τομών και ότι δεν μπορεί από την άλλη να επιλυθεί με μεθόδους που χρησιμοποιούν κανόνα και διαβήτη. Αυτό το αποτέλεσμα δεν θα μπορούσε να αποδειχτεί για ακόμα 750 χρόνια. Ο Khayyam επίσης έγραψε ότι ήλπιζε να δώσει μια πλήρη περιγραφή της επίλυσης κυβικών εξισώσεων σε κατοπινή του δουλειά:

Εάν προκύψει η ευκαιρία και μπορώ να τα καταφέρω, θα δώσω και τις δεκατέσσερις μορφές με όλες τις περιπτώσεις τους, και πως να διακρίνεται τι είναι δυνατό ή αδύνατο έτσι ώστε μια διατριβή, που θα περιέχει στοιχεία που είναι σε μεγάλο βαθμό χρήσιμα σε αυτήν την τέχνη να ετοιμαστεί.

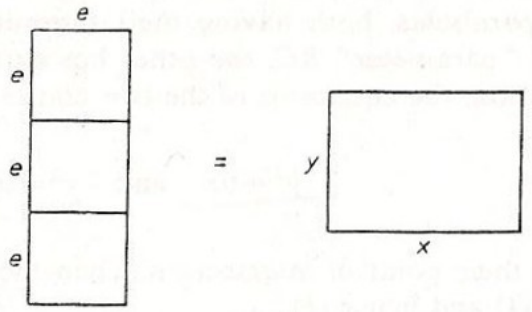
Πράγματι ο Khayyam δημιούργησε αυτό το έργο, το ***"Treatise on Demonstration of Problems of Algebra"*** που περιείχε μια ολοκληρωμένη ταξινόμηση κυβικών εξισώσεων με γεωμετρικές επιλύσεις δια μέσου της τομής κωνικών τομών που παρουσιάζονται παρακάτω. Μάλιστα ο Khayyam δίνει μια ενδιαφέρουσα ιστορική αναδρομή στην οποία ισχυρίζεται ότι οι Αρχαίοι Έλληνες δεν άφησαν τίποτα πάνω στην θεωρία των κυβικών εξισώσεων ενώ η συμβολή μεταγενέστερων συγγραφέων όπως οι al-Mahani και al-Khazin ήταν στο να μεταφράσουν γεωμετρικά προβλήματα σε αλγεβρικές εξισώσεις μετά από την δουλειά του al-Khwarizmi. Ο Khayyam λοιπόν, είναι **ο πρώτος που συνέλαβε μια γενική θεωρία πάνω στις κυβικές εξισώσεις**. Ένα άλλο επίτευγμα στο βιβλίο αυτό της άλγεβρας, είναι η συνειδητοποίηση του Khayyam ότι **μια κυβική εξίσωση μπορεί να έχει πάνω από μία λύση**. Αποδεικνύει την ύπαρξη εξισώσεων με δύο λύσεις, αλλά δεν φαίνεται να βρίσκει ότι μια κυβική εξίσωση μπορεί να έχει τρεις λύσεις. Ελπίζει ότι "αριθμητικές λύσεις" μπορεί να βρεθούν κάποτε όταν γράφει:

Ίσως κάποιος άλλος που έρχεται μετά από εμάς το ανακαλύψει στην περίπτωση, όπου δεν είναι μόνο οι πρώτες τρεις πρώτες τάξεις των γνωστών δυνάμεων, δηλαδή ο αριθμός, το πράγμα και το τετράγωνο.

Αυτός ο "κάποιος" ήταν ο del Ferro, ο Tartaglia και ο Ferrari τον 16ο αιώνα.

3.3.2 Παραδείγματα επίλυσης κυβικών εξισώσεων.

Η άλγεβρα του Omar Khayyam είναι κυρίως γεωμετρική. Πρώτα επιλύει γραμμικές και τετραγωνικές εξισώσεις με τις γεωμετρικές μεθόδους που περιγράφει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία, και μετά δείχνει ότι οι **κυβικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν με τομές κωνικών τομών**. Επειδή γνώριζε ότι συγγραφείς πριν από αυτόν πολλές φορές εξίσωναν γεωμετρικά μεγέθη με αριθμούς χρησιμοποιεί, προς αποφυγή της λογικής αυτής ανακολουθίας, το **τέχνασμα της εισαγωγής μιας μονάδας** μέτρησης. Για παράδειγμα, όταν λέει ότι ένας αριθμός είναι ίσος με ένα ορθογώνιο, εννοεί ότι ο αριθμός αυτός είναι ένα ορθογώνιο του οποίου η μία πλευρά είναι η μονάδα μέτρησης που έχει ορίσει και η άλλη πλευρά ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο σε μήκος του δοθέντος αριθμού με τέτοιο τρόπο ώστε τα κομμάτια από τα οποία αποτελείται να είναι ίσα με την μονάδα μέτρησης. Αυτό σχηματικά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα που αναπαριστά την εξίσωση $3=x\cdot y$:



Ακολουθούν παραδείγματα επίλυσης συγκεκριμένων τύπων κυβικών εξισώσεων, ([7], σελ.25-28).

1ο παράδειγμα

Ο πρώτος τύπος κυβικής εξίσωσης που απαιτεί κωνικές τομές είναι:

"Ένας αριθμός είναι ίσος με έναν κύβο."

ή με σύγχρονο συμβολισμό $x^3=N$.

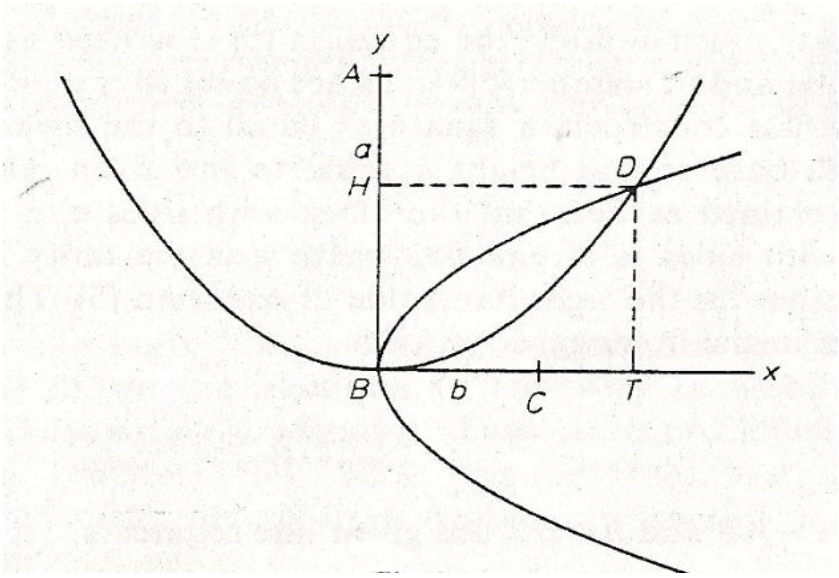
Λύση

Ο Omar πρώτα επιλύει το παρακάτω βοηθητικό πρόβλημα:

"Να βρεθούν δύο ευθείες μεταξύ δύο δοθέντων ευθειών έτσι ώστε οι τέσσερις ευθείες να σχηματίζουν μια συνεχή αναλογία."

Εάν οι δύο δοθέντες ευθείες λέγονται AB=a και BC=b, το πρόβλημα είναι να βρεθούν x και y τέτοια ώστε

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b} \quad (1)$$



Ο Omar σχεδιάζει δύο κάθετα ευθύγραμμα τμήματα BA και BC, και κατασκευάζει δύο παραβολές που έχουν την κορυφή τους στο B. Η πρώτη παραβολή έχει άξονα BC και "παράμετρο" BC, ενώ η άλλη παραβολή έχει άξονα BA και "παράμετρο" BA. Σε σύγχρονο συμβολισμό έχουμε:

$$y^2=bx \quad \text{και} \quad x^2=ay \quad (2)$$

για τις εξισώσεις των δύο κωνικών τομών.

Έστω D το σημείο τομής τους. Τότε οι κάθετες x=DH και y=DT ικανοποιούν τις εξισώσεις (2) και επομένως και τις (1).

Εν συνεχεία ο Omar θεωρεί την εξίσωση $x^3=N$ όπου το N είναι ένας γνωστός αριθμός. Κατασκευάζει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση e^2 και ύψος Ne.

Τώρα έχει να κατασκευάσει έναν κύβο ισοδύναμο με αυτό το παραλληλεπίπεδο. Στην περίπτωση που N=2 έχουμε το γνωστό Ελληνικό πρόβλημα του "διπλασιασμού του κύβου". Ο Ιπποκράτης ο Χίος είχε αποδείξει ότι αυτό το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα εύρεσης δύο μέσων ανάλογων x και y μεταξύ δύο γνωστών ευθυγράμμων τμημάτων a και b. Ο Omar Khayyam ακολουθεί την ίδια πορεία. Επιλύει το βοηθητικό πρόβλημα (1) θέτοντας a=e και b=Ne, και αποδεικνύει ότι η πρώτη διάμεσος x είναι η πλευρά του ζητούμενου κύβου.

2ο παράδειγμα

Σύμφωνα με την ορολογία του Omar:

"Ένας κύβος και ένας αριθμός πλευρών ισοδύναμα με έναν αριθμό".

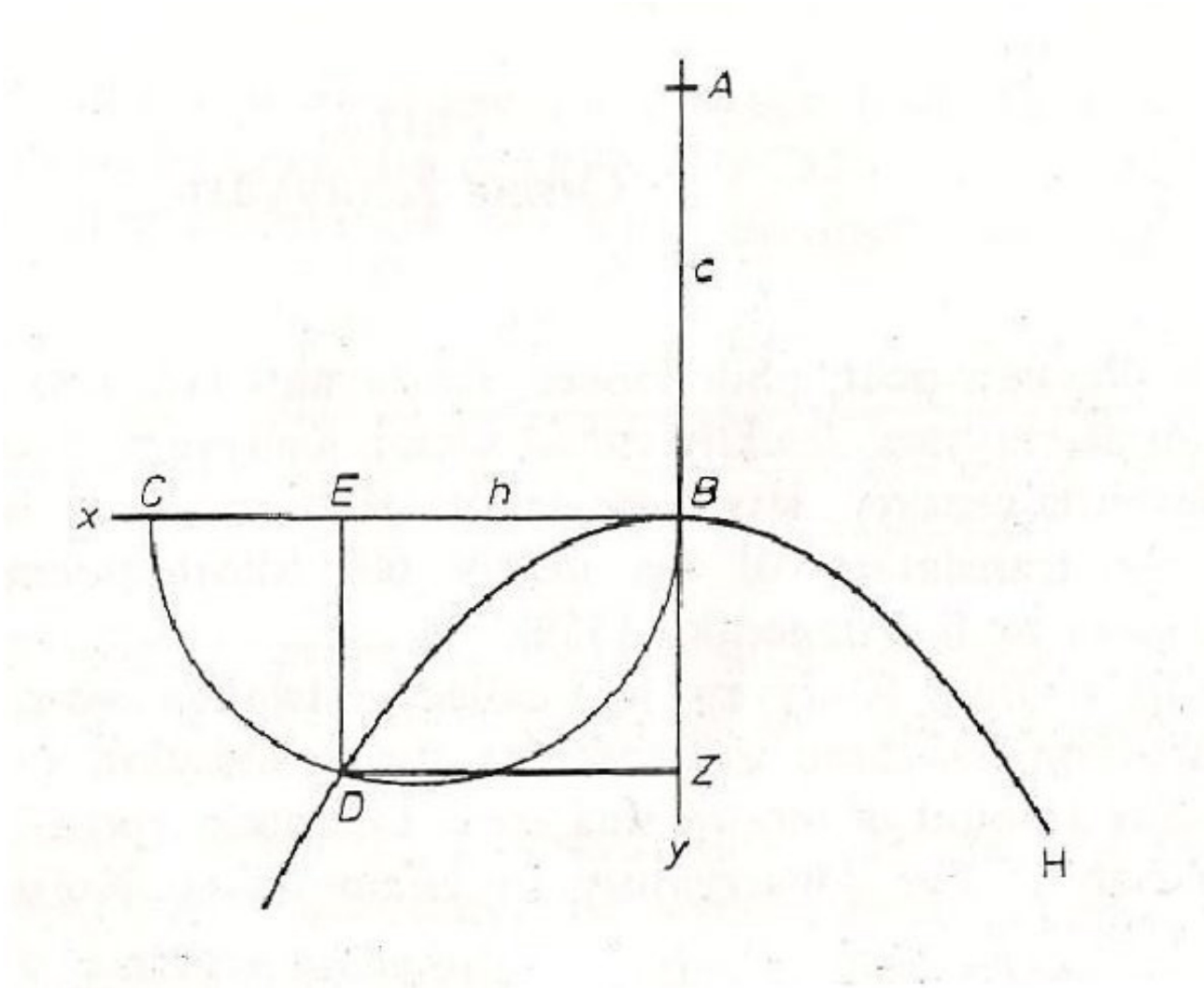
ή με σύγχρονη ορολογία $x^3+ax=b$.

Λύση

Ο Omar κατασκευάζει ένα τετράγωνο c^2 ίσο με τον γνωστό αριθμό a, και μετά ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση c^2 και ύψος h ίσο με το δοθέν αριθμό b. Αυτό σημαίνει όπως είχε εξηγήσει νωρίτερα, ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές c, c, και h είναι ισοδύναμο με ένα παραλληλεπίπεδο με πλευρές e, e και be, όπου e είναι η μονάδα μήκους και b είναι ο δοθέν αριθμός στο δεξί χέρι της εξίσωσης $x^3+ax=b$. Έτσι η εξίσωση μπορεί να γραφεί στην ομογενή μορφή:

$$x^3+c^2\cdot x=c^2\cdot h \quad (1)$$

στην οποία c=AB και h=BC είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.



Για να λυθεί η εξίσωση (1) **γεωμετρικά,** ο Omar κατασκευάζει μια παραβολή με κορυφή στο B, άξονα τον BZ και "παράμετρο" AB=c. Στη συνέχεια φέρνει ημικύκλιο με διάμετρο BC=h. Το ημικύκλιο έχει οπωσδήποτε ένα σημείο τομής D με την παραβολή. Από το σημείο D κατασκευάζει ορθογώνιο DZBE. Ο Omar αποδεικνύει ότι DZ=x και λύνει την εξίσωση.

Σύγχρονος συμβολισμός

Έστω x=DZ και y=DE οι συντεταγμένες του D. Η εξίσωση της παραβολής είναι

$$x^2=yc \quad (2)$$

ή στην ορολογία του Omar: "Το τετράγωνο με πλευρά DZ θα είναι ίσο με το γινόμενο των BZ και AB". Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$y^2=x(h-x) \quad (3)$$

την οποία ο Omar γράφει σαν μια αναλογία

"BE προς ED είναι ίσο με ED προς EC".

Με τον ίδιο τρόπο γράφει και την (2) σαν αναλογία:

"AB προς BE είναι ίσο με BE προς ED".

Από τις δύο αυτές αναλογίες ο Omar οδηγείται στο συμπέρασμα ότι EB=x είναι μια λύση, και η μοναδική λύση του προβλήματός του.

Με παρόμοιο τρόπο ο Omar επιλύει και διαφορετικές μορφές της εξίσωσης $x^3+ax=b$.

Η $x^3+b=ax$ γράφεται στην ομογενοποιημένη μορφή $x^3+c^2\cdot h=c^2\cdot x$ και λύνεται τέμνοντας την παραβολή $yc=x^2$ με την υπερβολή $y^2=x(x-h)$. Η $x^3+b=ax$ ομοίως.

Η $x^3+ax^2=b$ γράφεται ως $x^3+ax^2=s^3$ όπου τα a και s είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα. Επιλύεται με το σημείο τομής της υπερβολής $xy=s^2$ και της παραβολής $s(x+a)=y^2$. Η λύση είναι περίπλοκη, γιατί απαιτεί μία προκαταρκτική επίλυση της εξίσωσης $s^3=b$ με χρήση δύο παραβολών. Θα ήταν πιο απλό να θέσουμε $b=cd^2$ και να βρούμε το σημείο τομής της παραβολής $x^2=cy$ και της υπερβολής $(x+a)y=d^2$.

Η $x^3+b=ax^2$ λύνεται με παρόμοιο τρόπο. Και πάλι, ο σταθερός όρος b είναι ίσος με ένα κύβο s^3 . Ο Omar παρατηρεί ότι σε αυτήν την περίπτωση η λύση δεν είναι πάντα εφικτή.

Ο τελευταίος τύπος $x^3=ax^2+bx$ ανάγεται στην $x^3=ax^2+ac^2$ και λύνεται τέμνοντας την υπερβολή $xy=ac$ με την παραβολή $y^2=a(x-a)$.

Ο Omar διαπραγματεύεται επίσης εξισώσεις που έχουν όρους της μορφής

$$\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}.$$

3ο Παράδειγμα

Επίλυση της εξίσωσης $x^3=\frac{10}{x^3}$.

Λύση

Πολλαπλασιάζονται και τα δύο μέλη με το x^3 .
Η εξίσωση γίνεται $(x^3)^2=10$.
Άρα $x^3=\sqrt{10}$.

4.Η Άλγεβρα στην Ιταλία

4.1 Leonardo da Pisa (Fibonacci)

Μέσα από τη δουλειά του Fibonacci έγιναν γνωστές στην Ιταλία οι μέθοδοι του al-jabr και al-muqabala. Είναι γνωστό εξάλλου ότι τον 12ο αιώνα εμφανίστηκε μια λατινική μετάφραση της Άλγεβρας του al-Khwarizmi. Μεταξύ 1200 και 1225 ο Fibonacci κατά την παραμονή του στην Πίζα συνέθεσε αρκετά έργα όπως τα *"Liber Abbaci" (1202), "Practica geometriae" (1220), "Flos" (1225)* και *"Liber Quadratorum" (1225),* μέσα στα οποία έχει καταπιαστεί με την επίλυση διαφόρων τύπων αλγεβρικών εξισώσεων.

Στο τρίτο μέρος του έργου του, "The Liber Abbaci", περιέχεται μια **συστηματική επεξεργασία γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων**. Πιο συγκεκριμένα ο Leonardo επιλύει τις παρακάτω έξι κανονικές μορφές.

$$\beta x=\gamma$$
$$\alpha x^2=\gamma$$
$$\alpha x^2=\beta x$$
$$\alpha x^2=\beta x+\gamma$$
$$\alpha x^2+\beta x=\gamma$$
$$\alpha x^2+\gamma=\beta x \quad ,$$

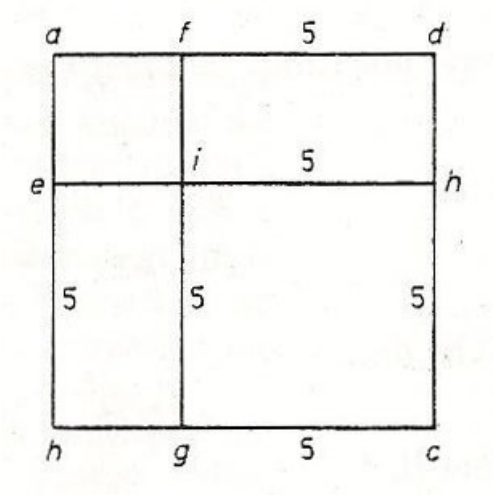
όπου η άγνωστη ποσότητα χ λέγεται radix, το τετράγωνο της άγνωστης ποσότητας quadratus ή census, και ο σταθερός όρος numerus. Παρακάτω παρουσιάζονται δύο εφαρμογές πάνω σε εξισώσεις ([6], σελ.38,41), η πρώτη από το "Libber Abbaci" και η επόμενη από το "Liber quadratorum" του οποίου έργου αποτελεί και κύριο θέμα.

1ο Παράδειγμα

Επίλυση μεικτής τετραγωνικής εξίσωσης:
"Το τετράγωνο του χ και το δεκαπλάσιο του ίσο με το τριάντα εννιά."

Λύση

Η επίλυση της είναι ίδια όπως στην άλγεβρα του al-Khwarizmi και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε σύγχρονο συμβολισμό έχουμε $\chi^2+10\chi=39$.



Σε άλλα παραδείγματα, ο Fibonacci χωρίζει το 10 σε δύο μέρη, το χ και το 10-χ ικανοποιώντας μία βοηθητική συνθήκη όπως:

$$\frac{\chi}{10-\chi}+\frac{10-\chi}{\chi}=\sqrt{5}$$

Επίσης στο "Libber Abbaci" περιλαμβάνονται εξισώσεις που ανάγονται σε τετραγωνικές εξισώσεις. Το σύνολο των εξισώσεων

$$\psi=\frac{10}{\chi} \quad , \quad \zeta=\frac{\psi^2}{\chi} \quad , \quad \zeta^2=\chi^2+\psi^2$$

οδηγεί σε τετραγωνική εξίσωση για το χ^4 :

$$\chi^8+100\chi^4=10000 \quad \text{ή} \quad \text{αν}\ \chi^4=\omega\ \text{τότε παίρνουμε},\ \omega^2+100\omega=10000 \ .$$

2ο Παράδειγμα

Στο "Liber quadratorum" ο Fibonacci ασχολείται με την **επίλυση ζεύγους Διοφαντικών εξισώσεων:**

$$x^2+5=y^2$$
$$x^2-5=z^2$$

Λύση

Το πρώτο βήμα είναι να γενικευτεί το πρόβλημα θέτοντας C για την σταθερά:

$$x^2+C=y^2$$
$$x^2-C=z^2 \quad (1)$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε τις εξισώσεις (1) κατά μέλη και παίρνουμε

$$2x^2=y^2+z^2 \quad (2)$$

Η (2) μειώνεται από την αντικατάσταση $y=u+v$ και $z=u-v$ στην εξίσωση

$$x^2=u^2+v^2 \quad (3)$$

Η (3) είναι η εξίσωση Πυθαγόρειων Τριάδων. Η επίλυση της είναι γνωστή:

$$x=a^2+b^2 \ , \quad u=2ab \ , \quad v=b^2-a^2 \ .$$

Εάν τα a και b είναι περιττοί αριθμοί, η προηγούμενη λύση μπορεί να υποδιπλασιαστεί:

$$x=\frac{a^2+b^2}{2} \ , \quad u=ab \ , \quad v=\frac{b^2-a^2}{2} \ .$$

Ωστόσο ο Fibonacci λαμβάνει το θεώρημα:

Εάν τα a και b είναι πρώτοι προς αλλήλους αριθμοί, και b>a, τότε συνεπάγεται
(i) Εάν a και b είναι και οι δύο περιττοί, τότε ισχύει η ισότητα $C=ab(b-a)(b+a)$ με ισοδύναμο τετράγωνο

$$x^2=\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$$

(ii) Εάν το a είναι περιττός και το b άρτιος αριθμός και αντίστροφα, τότε ισχύει η ισότητα $C=4ab(b-a)(b+a)$ με ισοδύναμο τετράγωνο

$$x^2=(a^2+b^2)^2$$

Για a=1 και b=9, βρίσκει

$$C=720=5\times 12^2$$

και

$$x=41,\quad y=49,\quad z=31$$

Διαιρώντας τα x, y, z με το 12 οδηγείται στην λύση του προβλήματός του για C=5, δηλαδή

$$x=3+\frac{5}{12},\quad y=4+\frac{1}{12},\quad z=2+\frac{7}{12}.$$

Με την ίδια ακριβώς μέθοδο ο Fibonacci παίρνει τιμές των x, y, z και διαφορετικές του 5 τιμές του C.

4.2 Maestro Benedetto

Ο Maestro Benedetto, αμπασίστας από την Φλωρεντία, δίνει αρχικά τις λύσεις έξι τύπων εξισώσεων, γραμμικών και τετραγωνικών μορφών, στο μεγάλο του έργο "Trattato di praticha d'arismetica" που ολοκλήρωσε το 1463, ([6], σελ.42). Αυτές είναι:

$$x^2=px\ ,\ x^2+px=q$$
$$x^2=q\ ,\ x^2+q=px$$
$$px=q\ ,\ x^2=px+q$$

Στη συνέχεια ο Benedetto δίνει τις γνωστές ονομασίες των δυνάμεων του x, με κατάλληλες συντομεύσεις όπως

$$x^2=\text{censo}=c$$
$$x^3=\text{cubo}=b$$
$$x^4=\text{censo di censo}=cc$$

και δίνει κανόνες για τον πολλαπλασιασμό των δυνάμεων αυτών με τα αντίστροφά τους και για ριζικά όπως $\sqrt{a}$ και $\sqrt[3]{a}$.

Επίσης παρουσιάζει μια σειρά εξισώσεων που η λύση τους προκύπτει είτε από την αναγωγή τους σε τετραγωνικές εξισώσεις είτε με χρήση ριζικών. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$x^3+px^2=qx$$

ανάγεται στην

$$x^2+px=q$$

ή

$$x^4=px$$

που επιλύεται σαν

$$x=\sqrt[3]{p}.$$

Οι επόμενοι τρεις τύποι επιλύονται πρώτα ως προς x^2 και μετά για x

$$x^4+px^2=q$$
$$x^4+q=px^2$$
$$x^4=px^2+q$$

Η εξίσωση $\frac{1}{12}\cdot x^2+(2+\frac{1}{12})x+12=x$ προκύπτει από ένα αριθμητικό πρόβλημα του Φλωρεντινού *Biaggio* που βρίσκεται επίσης στο "Trattato di praticha d'arismetica", και δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ένα άλλο πρόβλημα του Biaggio οδηγεί στην εξίσωση

$$x^4+x^2=110$$

της οποίας μοναδική θετική λύση είναι η

$$x=\sqrt{10}.$$

4.3 Antonio Mazzinghi

Από την πραγματεία του *Antonio Mazzinghi ,"Fioretti"*, έχουμε κάποια δύσκολα προβλήματα που οδηγούν σε **επίλυση συστήματος**, όπως το παρακάτω ([6], σελ.44),

"Να βρεθούν αριθμοί σε συνεχή αναλογία με άθροισμα 19 και άθροισμα τετραγώνων 40."

Σε σύγχρονη ορολογία αν x, y, z οι ζητούμενοι αριθμοί, έχουμε

$$x+y+z=10$$
$$x:y=y:z$$
$$x^2+y^2+z^2=40.$$

Από αυτές τις εξισώσεις προκύπτει αρχικά

$$2xy+2xz+2yz=100-40=60$$
$$xz=y^2$$

και αντικαθιστώντας τον όρο xz με το y^2 ,

$$2(x+y+z)y=60$$
$$y=3$$

και τελικά

$$x+z=7$$
$$x^2+z^2=31$$

επομένως

$$x=\frac{1}{2}(7+\sqrt{13}) \text{ και } z=\frac{1}{2}(7-\sqrt{13}) \ .$$

Ο Antonio Mazzinghi ήταν ο πρώτος που εισήγαγε ένα ειδικό όνομα για μια άλλη άγνωστη ποσότητα πέρα από το παραδοσιακό "cosa" του κυρίως αγνώστου.

Ενδιαφέρουσες μεθόδους επίλυσης **κυβικών εξισώσεων** περιέχονται σε δύο ιταλικά χειρόγραφα, το Fond. Princ. II.V.152 και το Conv. Sopp. G.7. 1135. Το πρώτο χειρόγραφο περιέχει μια ακολουθία 22 εξισώσεων που μπορούν να μειωθούν σε τετραγωνικές ή καθαρά κυβικές εξισώσεις. Οι τρεις τελευταίες εξισώσεις από αυτήν την ακολουθία είναι οι

$$ax^4=bx^2+c \ , \ ax^4+c=bx^2 \ , \ ax^4+bx^2=c$$

που είδαμε και στην δουλειά του Benetto. Στη συνέχεια ακολουθεί η επίλυση κυβικών εξισώσεων των μορφών

$$ax^3+bx^2=c \ , \ ax^3=bx^2+c \ , \ ax^3+c=bx^2$$

Μέθοδος επίλυσης της $ax^3+bx^2=c$:

Διαιρείται η εξίσωση κατά μέλη με το α και μειώνεται στην περίπτωση που α=1 παίρνοντας την μορφή

$$x^3+px^2=q.$$

Το $x+\frac{1}{3}\cdot p$ γίνεται ίσο με έναν νέο άγνωστο θέτοντας $x+\frac{1}{3}\cdot p=y$ που δίνει μια εξίσωση της μορφής

$$y^3=ry+s \quad (1)$$

Το y σαν λύση της (1) ονομάζεται "η κυβική ρίζα του s με συμπλήρωμα r". Για παράδειγμα η κυβική ρίζα του 44 με συμπλήρωμα 5 είναι $5\times4+44=4$, το 4.

Εάν το συμπλήρωμα παραμένει άγνωστο, είναι πάντα δυνατό να βρεθεί η ρίζα, βρίσκοντας ένα νούμερο y^3 που δίνει s. Εάν είναι γνωστό το συμπλήρωμα, για να βρεθεί το y πρέπει να ακολουθηθεί η μέθοδος της δοκιμής και του λάθους.

Υπάρχει επίσης η περίπτωση να βγει αρνητικός ο όρος s της (1). Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$2x^3+36x^2=704$$

οδηγεί στο x+6=y και

$$y^3=108y-80. \quad (2)$$

Ο συγγραφέας αναφέρει ότι πρέπει να βρεθεί η κυβική ρίζα του "χρωστούμενου 80" με συμπλήρωμα 108. Επομένως, οι αρνητικοί αριθμοί θεωρούνται οφειλή. Η λύση της (2) μετά από δοκιμή και λάθος, είναι y=10.

Το δεύτερο χειρόγραφο καταπιάνεται με την ίδια ακολουθία των 22 γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων του πρώτου χειρογράφου και ακόμα δύο τύπους κυβικών εξισώσεων, που ανταποκρίνονται στις $ax^3+bx^2=c$ και $ax^3+c=bx^2$ του πρώτου χειρογράφου αλλά με διαφορετικά αριθμητικά παραδείγματα:

$24x^3+81x^2=516$, $3x^3+27x^2=1620$ για τον πρώτο τύπο και

$16x^2=x^3+576$ για τον δεύτερο τύπο.

4.4 Master Dardi of Pisa

Η δουλειά του Master Dardi of Pisa με τίτλο *"Aliabraa argibra"* αποτελεί ένα αλγεβρικό κείμενο του 14ου αιώνα που περιέχει 198 διαφορετικούς τύπους

εξισώσεων και τους κανόνες επίλυσής τους. Ο Dardi ξεκινάει με τους γνωστούς έξι τύπους γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων που έχουμε ήδη αναφέρει παραπάνω. Ακολουθούν οι κυβικές και διτετραγωνικές εξισώσεις όπως

$$ax^3=n$$
$$ax^3=bx$$
$$ax^4=bx$$

που επιλύονται εξάγοντας κυβικές ή τετραγωνικές ρίζες. Η επόμενη κατηγορία εξισώσεων είναι αυτές που μπορούν να μειωθούν σε τετραγωνικές ή καθαρά κυβικές εξισώσεις, για παράδειγμα

$$n=ax+\sqrt{bx}$$

Ιδιαίτερη σημασία στην δουλειά του Dardi έχει η επίλυση τεσσάρων μη ανατάξιμων μικτών κυβικών και διτετραγωνικών εξισώσεων. Σε σύγχρονο συμβολισμό θα είχαμε

$$cx+bx^2+ax^3=n \quad (1)$$
$$dx+cx^2+bx^3+ax^4=n \quad (2)$$
$$dx+cx^2+ax^4=n+bx^3 \quad (3)$$
$$dx+ax^4=n+cx^2+bx^3 \quad (4)$$

Οι κανόνες που παρουσιάζονται για την επίλυση τους δεν είναι γενικοί αλλά περιορίζονται στις συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Μέθοδος επίλυσης της $cx+bx^2+ax^3=n$.

Διαιρούνται αρχικά όλοι οι συντελεστές με το α και η εξίσωση μειώνεται στην

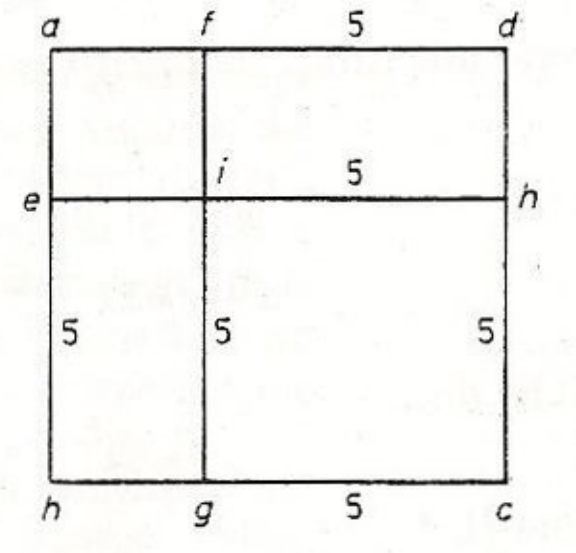
$$x^3+bx^2+cx=n \quad (1')$$

Η λύση της (1') δίνεται από τον τύπο

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3+n}-\frac{c}{b}$$

χωρίς να ξέρουμε πως έφτασε σε αυτόν ο Dardi. Σύμφωνα με τον Van der Waerden ([6], σελ.48), μία υποθετική λύση είναι η παρακάτω:

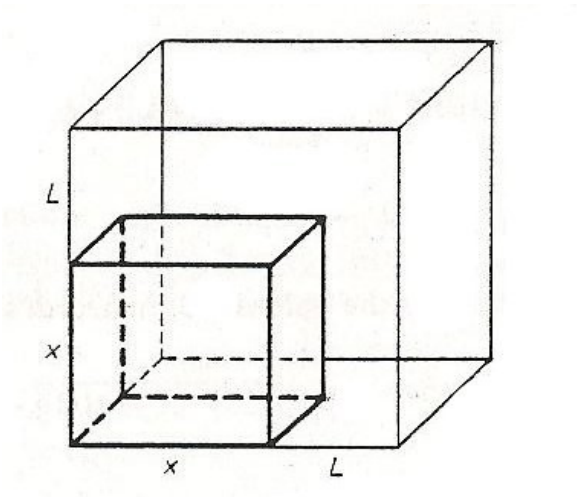
Η επίλυση μιας τετραγωνικής εξίσωσης $x^2+bx=c$ λύνεται προσθέτοντας και στα δύο μέλη μια σταθερά, ώστε στο αριστερό μέλος να προκύψει ένα ανάπτυγμα τετραγώνου $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ (al-Khwarizmi και Fibonacci). Η λύση που ακολουθεί



δοκιμάζει ανάλογα να προστεθεί και στα δύο μέλη της εξίσωσης (1') μια σταθερά ώστε το αριστερό μέλος της να γίνει ανάπτυγμα κύβου $(x+L)^3$. Ο τρόπος με τον οποίο οι al-Khwarizmi και Fibonacci επιτυγχάνουν το ανάπτυγμα του τετραγώνου $(x+\frac{b}{2})$ είναι μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης

Αν προσπαθήσουμε να φτιάξουμε ένα παρόμοιο σχήμα για τον κύβο $(x+L)^3$ είναι γεωμετρικά ξεκάθαρο ότι ο μεγαλύτερος κύβος μπορεί να μοιραστεί σε οκτώ μέρη:

- ο κύβος x^3
- τρία παραλληλεπίπεδα $x^2 \cdot L$
- τρία παραλληλεπίπεδα $x \cdot L^2$
- ένας κύβος L^3



Αν υποθέσουμε ότι αυτά τα μέρη είναι ίσα με τους τρεις όρους του αριστερού μέλους της εξίσωσης $x^3+bx^2+cx=n$ (1'), με μια επιπλέον σταθερά για να προστεθεί και στα δύο μέλη της εξίσωσης τότε έχουμε τις επόμενες τρεις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται

$$L^3=\text{σταθερά} \quad (\alpha)$$
$$b \cdot x^2=L \cdot x^2 \quad (\beta)$$
$$c \cdot x=L^2 \cdot x \quad (\gamma)$$

Η συνθήκη (α) ικανοποιείται πάντα από την κατάλληλη επιλογή του προστιθέμενου όρου. Διαιρώντας την συνθήκη (β) με την (γ) προκύπτει

$$L=\frac{c}{b}$$

Η εξίσωση (1) τώρα γράφεται

$$(x+L)^3=n+L^3$$

και η λύση της είναι

$$x=\sqrt[3]{n+L^3}-L=\sqrt[3]{n+(c/b)^3}-c/b \quad ,$$

σε πλήρη αντιστοιχία με την λύση του Dardi.

Πρόβλημα του Dardi για εξίσωση της μορφής $cx+bx^2+ax^3=n$.

"Κάποιος δανείζει σε έναν άλλο 100 Lira, και μετά από 3 χρόνια λαμβάνει 150 Lira με ετήσιο τόκο. Κάποιος ρωτά με τι μηνιαίο τόκο δόθηκε το δάνειο."

Λύση

Εάν το μηνιαίο επιτόκιο είναι x δηνάρια προς 1 Lira, το ετήσιο επιτόκιο είναι 12x προς Lira, και το επιτόκιο είναι $\frac{x}{20}$. Έτσι οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$100(1+\frac{x}{20})^3=150$$

Αν πολλαπλασιαστεί με το 80 παίρνουμε την εξίσωση

$$x^3+60x^2+1200x=4000$$

η οποία γράφεται,

$$(\chi+20)^3=4000+8000=12000$$

και λύνεται εξάγοντας μια κυβική ρίζα.

Παράδειγμα της μορφής $dx+cx^2+bx^3+ax^4=n$.

Εάν ο δανειστής πάρει 160 Lira μετά από 4 χρόνια, η εξίσωση για το x γίνεται

$$(x+20)^4=256000$$

ή

$$x^4+80x^3+2400x^2+32000x=96000$$

που λύνεται εξάγοντας μια τέταρτης δύναμη ρίζα.

Πρόβλημα του Dardi για εξίσωση της μορφής $dx+cx^2+ax^4=n+bx^3$ και $dx+ax^4=n+cx^2+bx^3$.

"Να χωριστεί το 10 σε δύο μέρη ώστε το γινόμενό τους διαιρούμενο με τη διαφορά τους να είναι το $\sqrt{g}$ όπου g=18 για την (3) και g=28 για την (4)."

Λύση

Εάν το ένα μέρος καλείται x και το άλλο 10-x, έχουμε

$$\frac{x(10-x)}{x-(10-x)}=\sqrt{g} \quad (6)$$

Στην πρώτη περίπτωση (g=18)

$$x^2\cdot(10-x)^2=18\cdot(2x-10)^2$$

ή

$$x^4-20x^3+28x^2+720x=1800 \quad (7)$$

που είναι εξίσωση της μορφής (3).

Στην δεύτερη περίπτωση (g=28)

$$x^2(10-x)^2=28(2x-10)^2$$

ή

$$x^4-20x^3-12x^2+1120x=2800 \quad (8)$$

που είναι εξίσωση της μορφής (4).

Μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων $dx+cx^2+ax^4=n+bx^3$ (3) και $dx+ax^4=n+cx^2+bx^3$ (4).

Η λύση του Dardi για τις εξισώσεις (3) και (4) όπου και πάλι θέτει α=1, ακολουθεί τον τύπο $x=\sqrt[4]{(\frac{c}{4})^2+n}+\frac{b}{4}-\sqrt{\frac{d}{2b}}$ (9). Αν γράψουμε την (6) σαν τετραγωνική εξίσωση παίρνουμε

$$(2x-10)\sqrt{g}=10x-x^2$$

ή

$$x^2-2(5-\sqrt{g})x=10\sqrt{g} \quad (10)$$

Η λύση της (10) είναι

$$x=5-\sqrt{g}+\sqrt{(5-\sqrt{g})^2+10\sqrt{g}}$$

ή

$$x=5-\sqrt{g}+\sqrt{25+g} \quad (11)$$

Από την άλλη, η τετραγωνοποίηση της (6) αποφέρει

$$x^2(10-x)^2=g(2x-10)^2$$

ή

$$x^4+(100-4g)x^2+40gx=20x^3+100g \quad (12)$$

και αν την γράψουμε σαν

$$x^4+cx^2+dx=bx^3+n$$

παίρνουμε

$$b=20,\ c=100-4g,\ d=40g,\ n=100g. \quad (13)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές (13) στον τύπο (9) του Dardi, παίρνουμε

$$x=\sqrt[4]{(25-g)^2+100g}+5-\sqrt{g},$$

που συμφωνεί με την (11).

Το πρόβλημα του Dardi ήταν πως μπορεί να γραφτεί η λύση (11) στην μορφή (9), χωρίς να υπάρχουν όμως ειδικοί αριθμοί όπως το 5 και το g αλλά εκφράσεις που μπορούν να υπολογιστούν από τους συντελεστές. Το ερώτημα είναι πως έλυσε ο Dardi το πρόβλημα αυτό. Και πάλι κατά τον Van der Waerden ([6], σελ.51), θεωρούμε τους τρεις όρους της εξίσωσης (11). Ο πρώτος όρος 5 αποκτήθηκε διαιρώντας το 10 που δίνεται στο παραπάνω πρόβλημα, και το b=20 βρέθηκε διπλασιάζοντας αυτόν τον όρο. Έτσι, ο πρώτος όρος στο (11) μπορεί να γενικευτεί με το $\frac{b}{4}$. Έτσι, ο δεύτερος όρος στην (9) εξηγήθηκε. Ο δεύτερος όρος $\sqrt{g}$ στο (11) είναι η τετραγωνική ρίζα του δοσμένου αριθμού g, και ο συντελεστής d είναι 40g, έτσι αν διαιρέσουμε το d με το 2b=40 παίρνουμε το g. Έτσι ο τρίτος όρος του (9) είναι

$$-\sqrt{\frac{d}{2b}}=-\sqrt{g}.$$

Ο πρώτος όρος του (9) είναι πιο δύσκολο να εξηγηθεί. Στο (5) ο πρώτος όρος είναι η κυβική ρίζα του "άθροισμα n και κάτι ακόμα", όπου n είναι ο σταθερός όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης (1). Έτσι ο Dardi απέκτησε μια λύση της (2), στην οποία μια τέταρτη ρίζα του "άθροισμα n και κάτι ακόμα" προέκυψε. Έτσι υποθέτουμε ότι ο Dardi ήθελε να γράψει τον τρίτο όρο της (11) στην μορφή

$$\sqrt[4]{\text{άθροισμα n και κάτι ακόμα}}.$$

Έφτασε στον στόχο του κάνοντας το "κάτι ακόμα" ίσο με το $\left(\frac{c}{4}\right)^2$, για το οποίο

ισχύει $\sqrt[4]{\left(\frac{c}{4}\right)^2+n}=\sqrt[4]{(25-g)^2+100g}=\sqrt[4]{(25+g)^2}=\sqrt{25+g}.$

4.5 Luca Pacioli

Με τον Luca Pacioli μια καινούργια εποχή ξεκινά για τα μαθηματικά στην Ιταλία. Το 1494 στην Βενετία τυπώνεται η πρώτη έκδοση του βασικού του έργου, *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita,* γνωστό ως *Summa.* Το έργο αυτό είναι περισσότερο μια σύνοψη της μαθηματικής γνώσης της εποχής και δεν κάνει μεγάλη πρόοδο. Το σημαντικό είναι η συμβολογραφία και η διατύπωση των υπολογισμών που χρησιμοποιεί ο Pacioli, καθώς είναι πολύ απλή και πλησιάζει

τον σύγχρονο τρόπο. Η τετραγωνική ρίζα συμβολίζεται με R ή R2, ενώ η τρίτη και τέταρτη ρίζα με R3 και R4 αντίστοιχα. Ο άγνωστος σε μια εξίσωση υποδηλώνεται με το co. (cosa), το τετράγωνό του με το ce. (censo), ο κύβος του με το cu. (cubo), η τέταρτη ρίζα του με ce.ce. (censo censo). Εάν εισάγεται ένας δεύτερος άγνωστος, ονομάζεται "quantita". Για την πρόσθεση και την αφαίρεση χρησιμοποιεί τα σύμβολα *p* και *m.* Έτσι το

RV40mR320

σημαίνει με βάση τα παραπάνω $\sqrt{40-\sqrt{320}}$,([6]), σελ.46). Στο τέλος του βιβλίου του, ο Pacioli αναφέρει ότι σε εξισώσεις που έχουν τους όρους n, x, x^3 (δηλαδή αριθμό, ρίζα και κύβο της ρίζας), ή $n, x^{2,} x^3$ ή $n, x^{3,} x^4$ δεν έχεί επιτευχθεί η δημιουργία γενικών κανόνων επίλυσης. Λίγο αργότερα οι κυβικές και τετραγωνικές εξισώσεις επιλύονται από τους del Ferro, Tartaglia, Cardano και Ferrari.

4.6 Η επίλυση της κυβικής και τεταρτοβάθμιας εξίσωσης

4.6.1 Del Ferro

Ο Scipione del Ferro είναι γνωστός και ως Ferreo και μερικές φορές σαν dal Ferro. Γεννήθηκε στην Μπολόνια της Ιταλίας το 1465 και διορίστηκε το 1496 λέκτορας στην αριθμητική και τη γεωμετρία στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, μια θέση που διατήρησε για το υπόλοιπο της ζωής του. Δεν υπάρχουν γραπτά του del Ferro. Αυτό κατά ένα μέρος οφείλεται στο δισταγμό του να γνωστοποιήσει ευρέως τα αποτελέσματά του, πέρα από έναν στενό κύκλο φίλων και μαθητών του. Ξέρουμε ωστόσο ότι διατηρούσε ένα τετράδιο στο οποίο κατέγραφε τις πιο σημαντικές του ανακαλύψεις. Αυτό το τετράδιο πέρασε στα χέρια του μαθηματικού Hannibal Nave, άντρα της κόρης του del Ferro, όταν πέθανε ο del Ferro το 1526. Ο Hannibal Nave ανέλαβε τις διαλέξεις του del Ferro στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια το 1526, και είχε στην κατοχή το τετράδιο του del Ferro, μέχρι το 1543, χρονιά κατά την οποία οι Cardano και ο Ferrari επισκέφτηκαν τον Nave και έμαθαν και για το τετράδιο του del Ferro, όπου υπήρχε η πιο σπουδαία ανακάλυψή του. Ο del Ferro κατάφερε να βρει μια φόρμουλα για την **πρώτη αλγεβρική επίλυση της κυβικής εξίσωσης** (1515), όμοια με την φόρμουλα που ήταν γνωστή για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων. Σήμερα γράφουμε τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ σαν $\chi=[-\beta+\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}]/2\alpha$ και $\chi=[-\beta-\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}]/2\alpha$. Την

εποχή του del Ferro, παρόλο που τέτοιες λύσεις ήταν γνωστές, δεν ήταν γνωστές σε αυτήν την μορφή. Πρώτον στα μέσα του 16ου αιώνα το μηδέν δεν χρησιμοποιείτο, δεύτερον οι αρνητικοί αριθμοί δεν ήταν σε χρήση και τρίτον δεν υπήρχε γνώση της ύπαρξης δευτεροβάθμιας εξίσωσης με δύο λύσεις.

Η **γενική κυβική εξίσωση** έχει τη μορφή $\mathbf{x^3+ax^2+bx+c=0}$. Η γενική μορφή μπορεί να μειωθεί, εισάγοντας μια νέα μεταβλητή $x'=x+\frac{1}{3}a$ στην απλούστερη μορφή $\mathbf{x^3+px+q=0}$. Οι μαθηματικοί την εποχή του del Ferro ήξεραν ότι το πρόβλημα επίλυσης της γενικής κυβικής εξίσωσης μπορεί να απλοποιηθεί ανάγοντάς το στην επίλυση δύο άλλων απλούστερων τύπων με θετικούς συντελεστές και δεκτές θετικές τιμές του χ:

$$x^3+px=q\ (1)\ ,\ x^3=px+q\ (2)\ \text{ και }\ x^3+q=px\ (3)\ \text{ όπου } p,q\text{:θετικοί}$$

Φυσικά, εάν χρησιμοποιούνταν οι αρνητικοί συντελεστές, τότε θα υπήρχε μόνο μία περίπτωση. Καθώς δεν γνωρίζουμε με σιγουριά τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο del Ferro, θεωρείται ότι χρησιμοποίησε το γεγονός ότι το $\chi=\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$ λύνει την εξίσωση $\chi^2=(2\sqrt{\alpha^2-\beta})+2\alpha$ για να εικάσει ότι το $\chi=\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\beta}}$ λύνει την εξίσωση $\chi^3=(3\cdot\sqrt[3]{\alpha^2-\beta})\cdot\chi+2\alpha$. Αυτό αποδεικνύεται αληθές. Έπειτα με την κατάλληλη αντικατάσταση των παραμέτρων, μπορεί να βρεθεί η λύση της απλής κυβικής εξίσωσης:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Υπάρχουν εικασίες σχετικά με το αν ο del Ferro οδηγήθηκε σε επίλυση της κυβικής εξίσωσης μετά από τη σύντομη θητεία του Luca Pacioli στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια από το 1501-1502. Ο Pacioli είχε δηλώσει νωρίτερα, στο *Summa de arithmetica,* ότι θεωρούσε αδύνατη την επίλυση της εξίσωσης, δημιουργώντας μεγάλο ενδιαφέρον στην μαθηματική κοινότητα. Είναι επίσης άγνωστο αν ο del Ferro, κατάφερε να λύσει και τους δύο τύπους (1), (2) της κυβικής εξίσωσης. Ο Cardano, στο βιβλίο του *Ars Magna* (1545), δηλώνει ότι ο del Ferro ήταν ο πρώτος που κατάφερε να λύσει την κυβική εξίσωση $\mathbf{x^3+px=q}\ (\mathbf{1})$ και ότι η λύση που δίνει είναι η μέθοδος του del Ferro. Ακολουθεί το παράδειγμα της

$$\chi^3+6\chi=20\ (4)$$

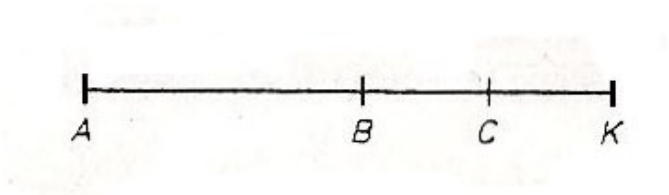
που χρησιμοποίησε ο Cardano στο *Ars Magna* για να παρουσιάσει την μέθοδο αυτή ([6], σελ.53):

Ο Cardano εκφράζει την εξίσωση αυτή

"Έστω ένας κύβος και έξι φορές η ακμή του ίσα με το 20."

και η ιδέα είναι να λυθεί θέτοντας $x=u-v$.

Αυτό εκφράζεται με γεωμετρική ορολογία από τον Cardano ως εξής: Το u αντιπροσωπεύεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα AC, το v με το CK και στη συνέχεια διατυπώνεται: "Παίρνοντας σημείο B τέτοιο ώστε BC=CK, το AB είναι ίσο με το GH", δηλαδή με το x.



Αντικαθιστώντας το $x=u-v$ στην εξίσωση (3), παίρνουμε

$$x^3+6x=(u-v)^3+6(u-v)=(u^3-v^3)-3uv(u-v)+6(u-v)=20.$$

Τώρα τα u και v υπόκεινται στις επόμενες συνθήκες:

$$u^3-v^3=20\ (5) \quad \text{και} \quad 3uv=6\ (6)$$

Μετά ακολουθεί ότι το $x=u-v$ ικανοποιεί την ζητούμενη εξίσωση

$$x^3+6x=20.$$

Στην γεωμετρική ορολογία του Cardano η μείωση του $(u-v)^3$ στο $(u^3-v^3)-3uv(u-v)$ είναι ογκώδης αλλά η βασική ιδέα είναι η ίδια. Είναι εύκολο να προσδιοριστεί το u και το v από τις συνθήκες (5) και (6). Από την (6) βρίσκουμε

$$u\cdot v=2$$

επομένως

$$u^3\cdot v^3=8.$$

Τώρα η διαφορά και το γινόμενο των δύο κύβων u^3 και v^3 είναι γνωστή, και μπορούμε να βρούμε

$$u^3=\sqrt{108}+10 \quad \text{και} \quad v^3=\sqrt{108}-10$$

έτσι τα u και v είναι κυβικές ρίζες γνωστών αριθμών, και παίρνουμε

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

Ο del Ferro δεν δημοσίευσε όπως είδαμε, ποτέ την λύση του. Την μοιράστηκε μόνο με λίγους φίλους. Ανάμεσά τους ήταν και ο μαθητής του Antonio Fiore από την Βενετία. Με τον ερχομό του στο σκηνικό, μια δραματική εξέλιξη ξεκινά.

4.6.2 Niccolo Tartaglia – Girolamo Cardano.

Ο Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) γεννήθηκε στην Brescia της Ιταλίας και ήταν μαθηματικός, μηχανικός, τοπογράφος, και βιβλιοθηκάριος στην τότε Δημοκρατία της Βενετίας. Εξέδωσε πολλά βιβλία, συμπεριλαμβανομένων των πρώτων μεταφράσεων του Αρχιμήδη και του Ευκλείδη στα Ιταλικά. Ο Tartaglia ήταν αυτοδίδακτος στα μαθηματικά αλλά δεδομένης της εξαιρετικής του ικανότητας η μητέρα του μπόρεσε να του βρει προστάτη, ο οποίος τον πήγε στην Πάντοβα να σπουδάσει. Όταν γύρισε στην Brescia, έγινε αντιπαθής έχοντας υπερεκτιμημένη άποψη για τον εαυτό του και έφυγε πάλι για την Βερόνα στην οποία δίδασκε μαθηματικά. Το 1535 πήγε στην Βενετία. Εκεί από χαμηλής καταγωγής δάσκαλος μαθηματικών στην Βενετία, ο Tartaglia απέκτησε βαθμιαία τη φήμη του πολλά υποσχόμενου μαθηματικού, συμμετέχοντας με επιτυχία σε έναν μεγάλο αριθμό διαγωνισμών, κερδίζοντας διάφορα έπαθλα. Την εποχή εκείνη οι προκλήσεις διαμάχεων, πολλές φορές έναντι μεγάλου χρηματικού ποσού, ήταν μια συνηθισμένη μορφή διαγωνισμού στο γνωστό κόσμο.

Όπως είδαμε παραπάνω ο del Ferro λίγο πριν τον θάνατό του πέρασε το μυστικό του σχετικά με την αλγεβρική επίλυση της κυβικής εξίσωσης στον μαθητή του, Fior. Η κυβική εξίσωση τότε, είχε περισσότερες της μιας μορφές, και ο Fior έμαθε από τον Del Ferro να λύνει μόνο έναν τύπο, δηλαδή **"αγνώστους και κύβους ίσους με αριθμούς"** που σε σύγχρονο συμβολισμό είναι η $\mathbf{x^3+px=q}$. Το γεγονός ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν βρίσκονταν σε χρήση, οδήγησε σε πληθώρα άλλων περιπτώσεων κυβικής εξίσωσης ακόμα και για τις μορφές που δεν είχαν τον όρο με το τετράγωνο. Ο Fior άρχισε να καυχιέται ότι μπορεί να λύνει κυβικές εξισώσεις και έτσι κανονίστηκε μια αναμέτρηση μεταξύ του ίδιου και του Tartaglia, το 1535. Ο Tartaglia από την άλλη, είχε επίσης ανακαλύψει πως να λύνει έναν από τους τύπους της κυβικής εξίσωσης, καθώς ο φίλος του Zuanne da Coi είχε θέσει δύο προβλήματα που οδήγησαν τον Tartaglia σε μια γενική επίλυση κυβικής εξίσωσης

διαφορετικής της $x^3=px+q$ μορφής που ήξερε να λύνει ο Fior. Πιο συγκεκριμένα **"τετράγωνα και κύβοι ίσα με αριθμούς"** που σε σύγχρονο συμβολισμό είναι $\mathbf{x^3+px^2=q}$. Για την αναμέτρηση μεταξύ των Tartaglia και Fior, κάθε ένας έπρεπε να προσκομίσει στον αντίπαλο τριάντα ερωτήσεις προς απάντηση. Ο Fior, ήταν σίγουρος ότι η ικανότητά του να λύνει κυβικές εξισώσεις αρκούσε για να νικήσει τον Tartaglia, αλλά ο Tartaglia ετοίμασε μια ποικιλία διαφορετικών προβλημάτων, εκθέτοντας τον Fior σαν έναν μάλλον μέτριο μαθηματικό. Ο Fior πάλι, προσέφερε στον Tartaglia, τριάντα ευκαιρίες να λύσει το "άγνωστοι και κύβοι" πρόβλημα καθώς πίστευε πως θα ήταν ανίκανος να λύσει αυτόν τον τύπο. Ωστόσο, λίγο πριν την λήξη της αναμέτρησης, ο Tartaglia είχε έμπνευση και ανακάλυψε την μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης (1). Σε λιγότερο από δύο ώρες είχε λύσει και τα τριάντα προβλήματα του Fior, ο οποίος είχε καταφέρει να λύσει ελάχιστα από τα προβλήματα του Tartaglia. Έτσι νικητής αναδείχθηκε ο Tartaglia που δεν πήρε το έπαθλο του νικητή καθώς η ικανοποίηση της νίκης ήταν για αυτόν αρκετή.

Σε αυτό το σημείο, στο προσκήνιο έρχεται ο Cardano. Ο Cardano γεννήθηκε στην Pavia, το 1501. Το 1520, εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Pavia και αργότερα σπούδασε ιατρική στην Padua. Η εκκεντρική και διαχυτική του συμπεριφορά, του δημιουργούσε προβλήματα. Έκανε δύσκολα φίλους ενώ μετά το πέρας των σπουδών του δεν μπορούσε να βρει δουλειά. Το 1525, έκανε επανειλημμένως αίτηση στο Κολέγιο Φυσικής του Μιλάνου, αλλά δεν έγινε ποτέ δεκτός λόγω της φήμης που είχε αποκτήσει. Τελικά, κατάφερε να αποκτήσει αρκετή φήμη σαν φυσικός και οι υπηρεσίες του απέκτησαν μεγάλη αξία στα δικαστήρια. Σήμερα είναι γνωστός για τις επιδόσεις του στην άλγεβρα. Ο Cardano λοιπόν, πλησίασε το 1539 τον Tartaglia, μετά την φήμη που είχε αποκτήσει εκείνος κερδίζοντας τον διαγωνισμό επίλυσης κυβικών εξισώσεων με τον Fior και μην έχοντας καταφέρει να ανακαλύψει την μέθοδο επίλυσης μόνος του. Αρχικά ο Cardano ζήτησε από τον Tartaglia να συμπεριλάβει την επίλυση στο βιβλίο που θα εξέδιδε εκείνη την χρονιά, το *Practica Arithmeticae.* Ο Tartaglia απέρριψε αυτήν την πρόταση, δηλώνοντας ότι θα εκδώσει ο ίδιος την φόρμουλα του σε ένα δικό του βιβλίο πιο μετά. Ο Cardano το δέχτηκε αυτό αλλά ζήτησε και πάλι από τον Tartaglia να του φανερώσει την μέθοδο, με την προϋπόθεση να την κρατήσει μυστική. Ο Tartaglia τελικά δέχτηκε μετά τον όρκο του Cardano ότι δεν θα δημοσιεύσει την λύση της κυβικής εξίσωσης, πριν το κάνει ο ίδιος και έτσι ο Cardano έμαθε την μέθοδο επίλυσης της κυβικής εξίσωσης.

Ακολούθησε μια περίοδος εντατικής μαθηματικής μελέτης από τον Cardano,

δουλεύοντας πάνω στην επίλυση των κυβικών και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Το 1543, στο ταξίδι που έκανε στην Μπολόνια, έμαθε από τον della Nave ότι ο del Ferro ήταν ο πρώτος που κατάφερε την επίλυση της κυβικής εξίσωσης, πριν τον Tartaglia. Έτσι θεώρησε ότι θα μπορούσε να εκδώσει την μέθοδο επίλυσης της κυβικής εξίσωσης παρά τον όρκο του στον Tartaglia. Το 1545 εξέδωσε το μεγαλύτερο μαθηματικό του έργο το *Ars Magna,* όπου παρουσιάζει την επίλυση της κυβικής και τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Την επίλυση της κυβικής εξίσωσης της μορφής $\mathbf{x^3+px=q}$ $(\mathbf{1})$ ο Cardano κατάφερε να την **επεκτείνει** στην **επίλυση των μορφών** $\mathbf{x^3=px+q}$ $(\mathbf{2})$ **και** $\mathbf{x^3+q=px}$ $(\mathbf{3})$ της κυβικής εξίσωσης. Η διαφορά με την επίλυση της (1) είναι ότι στις εξισώσεις (2) και (3), η λύση πρέπει να γραφτεί στην μορφή $u+v$ αντί $u-v$. Για τα υπόλοιπα, οι υπολογισμοί είναι ακριβώς ίδιοι ([6], σελ.55).

Έτσι στην εξίσωση $\mathbf{x^3=px+q}$ $(\mathbf{2})$ έχουμε

$$\begin{Bmatrix} x^3-px=q \\ x=u+v \end{Bmatrix} \Rightarrow x^3-px=u^3+v^3+3uv(u+v)-p(u+v)=q \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 3uv=p \\ u^3+v^3=q \end{Bmatrix}$$

Δηλαδή, επειδή $(u+v)^3-3uv(u+v)=u^3+v^3$ αντίστοιχα έχουμε την $x=u+v$ λύση της (2) αν θεωρήσουμε για $p=3uv$ και για $q=u^3+v^3$.

Από τις συνθήκες για τα p και q οδηγούμαστε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς u^3:

$$\begin{Bmatrix} 3uv=p \\ u^3+v^3=q \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v=\dfrac{p}{3u} \\ u^3+\dfrac{p^3}{27u^3}=q \end{Bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την $u^3+\dfrac{p^3}{27u^3}=q$ με u^3 προκύπτει η δευτεροβάθμια:

$$(u^3)^2-q\cdot u^3+\frac{p^3}{27}=0$$

η οποία λύνεται με τον γνωστό τρόπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, και τα u και v, βρίσκονται με κυβικές ρίζες ώστε x=u+v να είναι η λύση της (2):

$$\begin{cases} u^3=\frac{1}{2}q+w \\ v^3=\frac{1}{2}q-w \end{cases}$$

με

$$w=\sqrt{(\frac{1}{2}q)^2-(\frac{1}{3}p)^3}=\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}} \quad (7)$$

και έτσι

$$\mathbf{x=u+v=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot q+w}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot q-w}} \quad (\mathbf{8})$$

Ένα από τα πρώτα προβλήματα που αντιμετώπισε ο Cardano είναι πως η φόρμουλα της λύσης μερικές φορές περιλαμβάνει **τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών**, παρόλο που η λύση ήταν "κατάλληλος" αριθμός. Καθώς έλυνε την εξίσωση $x^3=15x+4$ οδηγήθηκε σε παράσταση που περιλάμβανε το $\sqrt{-121}$, αφού η (7) γίνεται $w=\sqrt{(\frac{1}{2}4)^2-(\frac{1}{3}15)^3}=\sqrt{4-125}=\sqrt{-121}$. Το παράδοξο για τον Cardano ήταν πως ενώ ήξερε ότι δεν μπορεί να πάρει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, ήξερε επίσης ότι το x=4 είναι λύση της εξίσωσης. Στην αδύνατη αυτή περίπτωση ή αλλιώς *"casus irredusibilis"* κατά τον Cardano, οι εκφράσεις $\frac{1}{2}q+w$ και $\frac{1}{2}q-w$ είναι συζυγείς μιγαδικοί και η πρώτη κυβική ρίζα της (8) έχει 3 περιπτώσεις (την αρχική ρίζα και την αρχική ρίζα πολλαπλασιασμένη με την κυβική ρίζα της μονάδας). Έπειτα λόγω της συνθήκης 3uv=p, η δεύτερη κυβική ρίζα της (8) είναι συζυγής της πρώτης και έτσι το άθροισμα είναι πάντα πραγματικό, όποια από τις 3 περιπτώσεις προκύψει. Σχετικά με αυτήν την περίπτωση ο Cardano έγραψε στον Tartaglia το 1539:

Σου στέλνω για να ρωτήσω για την λύση διαφόρων προβλημάτων για τα οποία δεν μου έδωσες απάντηση, ένα από τα οποία αφορά τον κύβο που ισοδυναμεί με έναν άγνωστο και έναν αριθμό. Έχω βεβαίως κατανοήσει τον κανόνα αυτό, αλλά όταν ο κύβος του ενός τρίτου του συντελεστή του

αγνώστου, είναι μεγαλύτερος σε τιμή από το τετράγωνο του ενός δευτέρου του αριθμού, τότε φαίνεται ότι δεν μπορώ να το ταιριάξω μες στην εξίσωση.

Ο Cardano δίνει δηλαδή με ακρίβεια τις συνθήκες για τις οποίες η φόρμουλα περιλαμβάνει τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών, όταν δηλαδή $(\frac{1}{3}\cdot p)^3 > (\frac{1}{2}\cdot q)^2$. Ο Tartaglia όμως, όπως ακριβώς και ο Cardano, δεν ήταν σε θέση να καταλάβει τους μιγαδικούς αριθμούς που μόλις κάνουν την εμφάνισή τους στο μαθηματικό προσκήνιο. Ο Cardano ήξερε ότι οι εξισώσεις του τύπου (2) και (3) αν ικανοποιούν την συνθήκη $(\frac{1}{3}\cdot p)^3 > (\frac{1}{2}\cdot q)^2$ τότε υπάρχουν 3 πραγματικές ρίζες αλλά πολύ προσεκτικά **αποφεύγει την *"casus irredusibilis"***, στην περιγραφή της επίλυσης με χρήση κυβικών ριζών. Σε όλα του τα παραδείγματα, το **w είναι πάντα ρίζα θετικού αριθμού**, και υπάρχει μόνο μία θετική ρίζα.

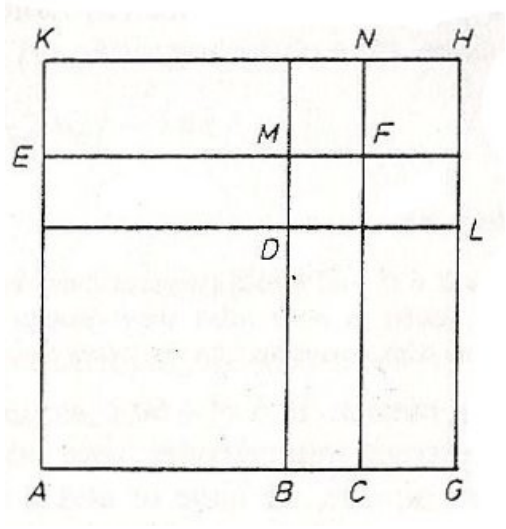
Είναι προς τιμήν του Cardano, ότι παρόλο που δεν ήταν σε θέση να καταλάβει τους μιγαδικούς αριθμούς, παρουσιάζει στο *Ars Magna* τον πρώτο υπολογισμό με μιγαδικούς αριθμούς επιλύοντας μια συγκεκριμένη κυβική εξίσωση:

Βάζοντας στην άκρη το πνευματικό βάσανο και πολλαπλασιάζοντας το $5+\sqrt{-15}$ *με το* $5-\sqrt{-15}$ *, παίρνουμε* $25-(-15)$. *Έτσι το γινόμενο είναι 40. ....και μέχρι εκεί φτάνει η αριθμητική πονηριά, της οποίας αυτό, το ακραίο, είναι όπως έχω πει, τόσο δυσδιάκριτο που είναι άχρηστο.*

4.6.3 Ferrari

Ο Lodovico Ferrari γεννήθηκε το 1522 στο Μιλάνο και εγκαταστάθηκε στην Μπολόνια όπου έγινε υπηρέτης του Cardano. Ήταν εξαιρετικά έξυπνος, και ο Cardano άρχισε να του διδάσκει μαθηματικά. Μετά την αποκάλυψη της επίλυσης κυβικής εξίσωσης στον Cardano από τον Tartaglia, ο Cardano ενθάρρυνε τον μαθητή του πλέον Ferrari να εξετάσει τις **τεταρτοβάθμιες εξισώσεις**. Ο Ferrari κατάφερε να λύσει την τεταρτοβάθμια εξίσωση με ίσως την πιο κομψή μέθοδο από όλες τις μεθόδους που είχαν βρεθεί για τέτοιου τύπου προβλήματα, ανάγοντάς την σε κυβική και μετά σε τετραγωνική εξίσωση. Ο Cardano εξέδωσε και τις 20 περιπτώσεις τεταρτοβάθμιων εξισώσεων στο *Ars Magna.* Παρακάτω ακολουθεί περιγραφή της μεθόδου του Ferrari όπως την παρουσιάζει ο Cardano και όπως περιγράφεται με μοντέρνα ορολογία.

Η παρουσίαση στο *Ars Magna* ξεκινά με ένα θεώρημα για τετράγωνα και ορθογώνια ([6], σελ.57):



"Έστω το τετράγωνο AF που διαιρείται σε δύο άλλα τετράγωνα AD και DF, και δύο συμπληρώματα DC και DE, και ας προσθέσω τον γνώμονα KFG γύρω του ώστε να συμπληρώσω ολόκληρο το τετράγωνο AH. Αυτός ο γνώμονας θα αποτελείται από το GC^2 συν δύο φορές το προστιθέμενο τμήμα GC x CA, καθώς το FG είναι GC x CF από τον πρώτο ορισμό του δεύτερου βιβλίου των Στοιχείων, και το CF ισοδυναμεί με το CA από τον ορισμό του τετραγώνου. Από την πρόταση I.43, το KF ισοδυναμεί με το FG, ενώ οι δύο επιφάνειες CF και FK που αποτελούνται από GC x 2CA και GC^2, ισοδυναμούν με το FH σαν επακόλουθο της II.4 των Στοιχείων. Επομένως η πρόταση είναι σαφής. Εάν λοιπόν το AD είναι ίσο με το x^4, και κάθε ένα από τα CD και DE ίσο με $3x^2$, και το DF ισοδυναμεί με 9, τότε το BA θα ισοδυναμεί με το x^2 και το BC θα είναι απαραίτητα ίσο με 3. Από τη στιγμή που θα προσθέσουμε περισσότερα τετράγωνα στα DC και DE, αυτά θα είναι τα CL και KM. Για να ολοκληρώσουμε όλο το τετράγωνο LMN είναι απαραίτητο. Αυτό, όπως δείχθηκε, αποτελείται από το τετράγωνο του GC (συν 2GC x BC), το μισό του αρχικού αριθμού τετραγώνων, καθώς το CL είναι είναι η επιφάνεια που παράγεται από GC x AB, όπως είδαμε, και το AB είναι το x^2 αφού υποθέσαμε ότι το AD είναι το x^4, και έτσι τα FL και MN σχηματίζονται από τα GC x CB, σύμφωνα με την πρόταση 1.42 των Στοιχείων. Επομένως η επιφάνεια LMN (αυτός είναι ο αριθμός που θα προστεθεί) είναι GC x 2BC συν το GC που ρυθμίζει τον εαυτό του. Αυτή η απόδειξη είναι δική μας."

Σε μοντέρνα ορολογία, το θεώρημα αυτό για AB = a, BC = b και CG = c παίρνει την μορφή της ταυτότητας:

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2ac + 2bc + c^2 \quad (1)$$

Και πάλι με σύγχρονο συμβολισμό, ας δούμε την επίλυση του Ferrari, με χρήση του προηγούμενου θεωρήματος ή ισοδύναμα της ταυτότητας (1). Σε μια τεταρτοβάθμια εξίσωση, ο όρος x^3 μπορεί πάντα να φύγει και έτσι μόνο οι όροι x^4, x^2, x και ο

σταθερός απομένουν. Έτσι η τεταρτοβάθμια εξίσωση παίρνει την μορφή

$$x^4+px^2+qx+r=0 \quad (2)$$

Πρώτα συμπληρώνεται το τετράγωνο και προκύπτει

$$x^4+2px^2+p^2=px^2-qx-r+p^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+p)^2=px^2-qx-r+p^2 \quad (3)$$

Από την ταυτότητα (1) έχουμε για κάθε y:

$$(x^2+p+y)^2=(x^2+p)^2+2x^2y+2py+y^2$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία την (3):

$$(x^2+p+y)^2=px^2-qx-r+p^2+2x^2y+2py+y^2 \ (3a) \ \Rightarrow$$
$$(x^2+p+y)^2=(p+2y)x^2-qx+(p^2-r+2py+y^2) \quad (4)$$

Το δεξί μέλος της (4) είναι μια τετραγωνική εξίσωση ως προς χ, και μπορούμε να επιλέξουμε το y ώστε να γίνει και τέλειο τετράγωνο. Αυτό γίνεται μηδενίζοντας την διακρίνουσα, που σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$(-q)^2-4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)=0.$$

Ξαναγράφεται η τελευταία εξίσωση στην μορφή

$$(q^2-4p^3+4pr)+(-16p^2+8r)y-20py^2-8y^3=0$$

που αποτελεί κυβική εξίσωση ως προς y και λύνεται με την γνωστή πλέον μέθοδο. Με αυτήν την τιμή του y το δεξί μέλος της (4) είναι τέλειο τετράγωνο, επομένως παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και στα δύο μέλη, προκύπτει μια νέα τετραγωνική ως προς χ. Αν λυθεί αυτή η τετραγωνική εξίσωση προκύπτει και η λύση χ της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης (2).

Ένα αριθμητικό παράδειγμα της μεθόδου αυτής υπάρχει στο *Ars Magna*, και είναι η εξίσωση

$$x^4+6x^2+36=60x$$

για την οποία ο Cardano παραθέτει τα αντίστοιχα βήματα επίλυσης ([6], σελ.58) όπως ακολουθούν:

Με σκοπό να μειώσει το αριστερό μέλος της εξίσωσης σε ένα τετράγωνο $(x^2+a)^2$, προσθέτει $6x^2$ και στα δύο μέλη, αποκτώντας

$$(x^2+6)^2=6x^2+60x \quad (5)$$

Στη συνέχεια διατυπώνει:
"Εάν το $6x^2+60x$ είχε τετραγωνική ρίζα, θα είχαμε λύση. Αλλά δεν έχει. Έτσι πρέπει να προστεθούν και στα δύο μέλη αρκετά τετράγωνα και έναν αριθμό έτσι ώστε στο ένα μέλος να υπάρχει ένα τριώνυμο με μια ρίζα και από το άλλο το ίδιο."

Αυτό σημαίνει: εάν το $6x^2+60x$ ήταν το τετράγωνο ενός διωνύμου $px+q$, θα βγάζαμε τετραγωνικές ρίζες και από τις δύο πλευρές στην (5). Αλλά αφού το $6x^2+60x$ δεν είναι ένα τέλειο τετράγωνο, πρέπει να προσθέσουμε τον όρο $2bx^2$ και έναν σταθερό όρο και στα δύο μέλη ώστε να έχουμε τέλεια τετράγωνα.

Για $a=\chi^2$, $b=6$, και $c=b$ στην ταυτότητα (1), ο Cardano παίρνει την ταυτότητα

$$(x^2+6+b)^2=(x^2+6)^2+2bx^2+12b+b^2.$$

Έτσι, αν κάποιος προσθέσει $2bx^2+12b+b^2$ στα δύο μέλη της (5), παίρνει

$$(x^2+6+b)^2=(6x^2+60x)+(2bx^2+12b+b^2)=(2b+6)x^2+60x+(b^2+12b) \quad (6)$$

Τώρα το b (δηλαδή το y που είδαμε προηγουμένως), επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε το δεξί μέλος της (13) να γίνει ένα τέλειο τετράγωνο ενός διωνύμου $px+q$. Η συνθήκη για κάτι τέτοιο είναι

$$(2b+6)(b^2+12b)=30^2$$

ή

$$2b^3+30b^2+72b=900$$

ή

$$b^3+15b^2+36b=450 \quad (7)$$

Αυτή είναι μια κυβική εξίσωση ως προς b, που μπορεί να λυθεί με την μέθοδο του Cardano για τις κυβικές και δίνει

$$b=\sqrt[3]{190+\sqrt{33903}}+\sqrt[3]{190-\sqrt{33903}}-5.$$

Τώρα το δεξί μέλος της (6) είναι ένα τέλειο τετράγωνο, και βγάζοντας τετραγωνικές ρίζες και από τις δύο πλευρές παίρνουμε μια τετραγωνική εξίσωση ως προς χ.

4.7 Rafael Bombelli

Ο Rafael Bombelli σε αντίθεση με τον Cardano, καταπιάνεται με την περίπτωση που η κυβική εξίσωση δίνει λύσεις μη πραγματικές, την αδύνατη περίπτωση δηλαδή όπως έλεγε ο Cardano ([6], σελ.60-61). Επιλύοντας την εξίσωση

$$x^3=15x+4 \quad (1)$$

με τους κανόνες του Cardano που είδαμε νωρίτερα, βρίσκει

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}. \quad (2)$$

Ακολουθώντας τον Cardano, ονομάζει τις φανταστικές ρίζες "σοφιστικές", αλλά τονίζει ότι η εξίσωση (1) με κανένα τρόπο δεν είναι αδύνατη γιατί έχει λύση την x=4. Συνεχίζει ερευνώντας πως θα δώσει νόημα στην ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού, εξισώνοντας την πρώτη κυβική ρίζα της (2) με ένα μιγαδικό αριθμό $p+\sqrt{-q}$:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=p+\sqrt{-q} \quad (3)$$

Αυτό αποφέρει

$$2+\sqrt{-121}=(p^3-3pq)+(3p^2-q)\sqrt{-q}$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται θέτοντας

$$2=(p^3-3pq) \quad (4)$$

και

$$\sqrt{-121}=(3p^2-q)\sqrt{-q} \quad (5)$$

Αν αυτές οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται, παίρνουμε επίσης

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=p-\sqrt{-q} \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (3) και (6), ο Bombelli αποκτά

$$\sqrt[3]{125}=p^2+q$$

ή

$$q=5-p^2 \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (4) προκύπτει η κυβική εξίσωση ως προς p:

$$4p^3-15p=2 \quad (8)$$

Μια λύση της είναι η p=2 άρα q=1. Έτσι έχουμε

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1} \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

επομένως,

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4.$$

Ο Bombelli εισήγαγε μια ονομασία γιαυτό που ονομάζουμε +i, "piu di meno, και για το -i, meno di meno και παρουσίασε κανόνες όπως (-i)(-i)=-1.

5. Francois Viete

5.1 Ομογενοποίηση της Άλγεβρας

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε αλγεβρική συμπεριφορά στην γεωμετρία, γεωμετρικές αποδείξεις αριθμητικών κανόνων και αλγεβρικές επιλύσεις γεωμετρικών προβλημάτων. Η άλγεβρα με λίγα λόγια βλέπετε μέσα από αριθμητική και/ή γεωμετρική σκοπιά. Αυτό αρχίζει να αλλάζει, δηλαδή η άλγεβρα γίνεται κλάδος των μαθηματικών και αντιμετωπίζεται αυτόνομα και ομοιογενώς με την βοήθεια του Viete και του Καρτέσιου, ο καθένας με τον τρόπο του. Το 1591, ο Viete εκδίδει το βιβλίο *In artem analyticam isagoge* το οποίο σημαίνει *"Introduction to the analytic art"* και αποτελεί ένα βιβλίο άλγεβρας. Με αυτό γίνεται ο πρώτος μαθηματικός που αντιμετωπίζει το πρόβλημα της ετερογένειας της άλγεβρας. Η έμπνευσή του αυτή προέρχεται πιθανότατα από τις παιδαγωγικές αρχές του Peter Ramus, ανθρωπιστή του δεκάτου έκτου αιώνα. Για τον Ramus, η γνώση πρέπει να οργανώνεται σε αντικείμενα που να είναι ομοιογενή. Η άλγεβρα που μέχρι τότε ήταν εξαρτημένη από την αριθμητική και την γεωμετρία δεν ακολουθούσε την αρχή αυτή. Για τον Viete λοιπόν **η ομογενοποίηση της άλγεβρα**ς σήμαινε την **αποκόλληση της από την αριθμητική και την γεωμετρία**.

Στο *Introduction to the analytic art* ο Viete εισήγαγε την **πρώτη**

συστηματική αλγεβρική συμβολογραφία, ενώ βασίστηκε στα Ιταλικά μαθηματικά όπως του Cardano, και την δουλειά των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Απέδειξε την αξία των συμβόλων εισάγοντας γράμματα για την αναπαράσταση των αγνώστων. Πρότεινε την χρήση γραμμάτων σαν σύμβολα ποσοτήτων, τόσο γνωστών όσο και αγνώστων. Χρησιμοποίησε φωνήεντα για τους αγνώστους και σύμφωνα για τις γνωστές ποσότητες. Η σύμβαση όπου γράμματα κοντά στην αρχή του αλφαβήτου αναπαριστούν γνωστές ποσότητες ενώ γράμματα κοντά στο τέλος του αλφαβήτου αναπαριστούν άγνωστες ποσότητες εισήχθη αργότερα από τον Καρτέσιο στο *La Geometrie.* Αυτή η σύμβαση χρησιμοποιείται σήμερα, πολλές φορές χωρίς καν να καταλαβαίνουν οι άνθρωποι ότι μια σύμβαση είναι σε χρήση. Αν ζητήσουμε τη λύση της $\alpha\chi=\beta$ κανείς δεν θα ρωτήσει: "Ποια μεταβλητή είναι ο άγνωστος;"

Ο Viete έκανε και πολλές βελτιώσεις στην θεωρία των εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα έλυνε περισσότερο προβλήματα αναλογιών, το οποία δηλώνει ρητά είναι το ίδιο πράγμα με την επίλυση εξισώσεων. Ωστόσο, ήταν περιορισμένος από την **συνθήκη της ομοιογένειας** της διάστασης. Το πρόβλημα είναι ότι αν ζητήσουμε την επίλυση της εξίσωσης $\chi^3+\chi=1$ τότε ζητάμε την επίλυση ενός προβλήματος που δεν βγάζει νόημα γεωμετρικά. Το χ^3 είναι ένας κύβος ενώ το χ μια ευθεία και δεν έχει νόημα να προστεθεί ένα τρισδιάστατο αντικείμενο σε ένα μονοδιάστατο αντικείμενο. Ο Viete συνεπώς έψαξε για τις λύσεις εξισώσεων όπως η $A^3+B^2A=B^2Z$ όπου σύμφωνα με την σύμβασή του, το Α είναι ο άγνωστος και τα Β και Ζ είναι οι γνωστοί. Ο ίδιος γράφει στο *Introduction to the analytic art:*

Ο πρώτος και μόνιμος νόμος ισοτήτων ή αναλογιών ο οποίος, επειδή συνελήφθη από ομοιογενείς ποσότητες λέγεται ο νόμος των ομοιογενών ποσοτήτων, είναι: ομοιογενείς ποσότητες πρέπει να συγκρίνονται με ομοιογενείς ποσότητες.

Παρουσίασε μεθόδους επίλυσης εξισώσεων δευτέρου τρίτου και τετάρτου βαθμού. Επίσης ήξερε την σύνδεση μεταξύ των θετικών ριζών των εξισώσεων και των συντελεστών των διαφορετικών δυνάμεων της άγνωστης ποσότητας. Μάλιστα ο όρος "συντελεστής" οφείλεται στον Viete.

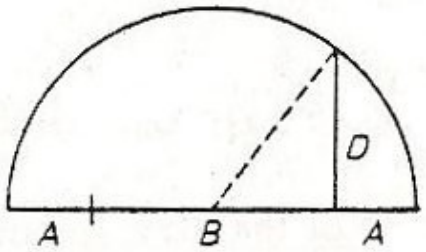
5.2 Μετασχηματισμοί εξισώσεων

Σε δύο πρόσθετες πραγματείες (1593) ο Viete ασχολείται με την **γεωμετρική επίλυση αλγεβρικής εξίσωσης**. Στην πρώτη, *"Effectionum geometricarum canonica recensio",* αποδεικνύει ότι η επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας μόνο κύκλους και ευθείες. Για παράδειγμα για να

λυθεί η εξίσωση

$$A^2+AB=D^2 \quad \text{ή} \quad A(A+B)=D^2$$

ο Viete κατασκευάζει δύο κάθετα ευθύγραμμα τμήματα B και D,και μετά σχεδιάζει ένα ημικύκλιο με κέντρο το μέσο του B. Το A ισούται με τα δύο εναπομείναντα τμήματα της διαμέτρου.



Το 1615 μετά το θάνατο του Viete, εκδόθηκε η διατριβή του "*De equationem emendatione*" , στην οποία πραγματεύεται διάφορες **μεθόδους μετασχηματισμού εξισώσεων,** μετατροπής τους δηλαδή σε εξισώσεις μικρότερου βαθμού, παραδείγματα των οποίων παρουσιάζονται στη συνέχεια ([6], σελ.66-67).

1ο Παράδειγμα μετασχηματισμού κυβικής εξίσωσης:

Έστω η κυβική εξίσωση

$$BA-A^3=Z \quad (1)$$

και η συνθήκη για το E

$$E^3-Z=BE \quad (2)$$

η οποία για μας καθιστά το E λύση της (1) αλλά ο Viete δεν αποδέχεται αρνητικές ρίζες και έτσι συμπεραίνει

$$\text{από}(1)\text{και}(2) \Rightarrow A^3+E^3=B\cdot(A+E) \Rightarrow$$
$$(A+E)\cdot(A^2-AE+E^2)=B\cdot(A+E)$$
$$A^2-AE+E^2=B$$

εξίσωση 2ου Βαθμού ως προς A

2ο Παράδειγμα μετασχηματισμού 4βάθμιας εξίσωσης:

Έστω η τεταρτοβάθμια εξίσωση

$$A^4=Z-BA \quad (3)$$

$$\text{Προστείθεται κατά μέλη στην } (3) \text{ το } A^2E^2+\frac{1}{4}\cdot E^4 \Rightarrow$$

$$\left(A^2+\frac{1}{2}\cdot E^2\right)^2 = Z-BA+A^2E^2+\frac{1}{4}\cdot E^4 \quad (4)$$

Το δεξί μέλος γίνεται ένα τέλειο τετράγωνο αν το Ε ικανοποιεί την εξίσωση

$$Z+\frac{1}{4}E^4=\frac{B^2}{4E^2} \ \wedge \ E^6+4ZE^4=B^2 \quad (5), \text{ η οποία είναι κυβική εξίσωση για το } E^2.$$

Η μέθοδος του Viete είναι ουσιαστικά ίδια με την μέθοδο επίλυσης τεταρτοβάθμιων εξισώσεων του Ferrari.

3ο Παράδειγμα επίλυσης κυβικής εξίσωσης:

Δίνεται η κυβική εξίσωση

$$A^3+3BA=2Z \quad (6)$$

Ο Viete εισάγει έναν νέο άγνωστο Ε μέσω της εξίσωσης

$$B=E(A+E) \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (6) παίρνουμε

$$A^3+3AE(A+E)=2Z \ \Rightarrow \ (A+E)^3=2Z+E^3 \quad (8)$$

$$(7) \ \Rightarrow \ A+E=\frac{B}{E} \text{ και αντικαθιστώντας στην } (8)$$

$$(8) \ \Rightarrow \ B^3=2ZE^3+E^6 \quad (9)$$

$$\text{έχουμε τετραγωνική εξίσωση ως προς το } E^3.$$

Η (9) λύνεται ως προς E^3 και μετά ως προς Ε

$$E=\sqrt[3]{\sqrt{B^3+Z^2}-Z} \quad (10)$$

Τώρα το Α σχηματίζεται μέσω της (7). Σε αντίθεση με την μέθοδο του Cardano στο "Ars Magna", εδώ πρέπει να εξαχθεί μόνο μία κυβική ρίζα. Παρόλα αυτά το τελικό αποτέλεσμα είναι ίδιο με του Cardano, καθώς αν εισαχθεί άλλος άγνωστος, Ε'=Α+Ε, παίρνουμε

$$B=E'(E'-A)$$

και έτσι εξάγεται και πάλι όπως προηγουμένως, μία τετραγωνική εξίσωση για το E'^3:

$$B^3 = E'^6 - 2ZE'^3 \Rightarrow$$
$$E' = \sqrt[3]{\sqrt{B^3 + Z^2} + Z} \quad (11)$$

όπου το $A=E'-E$ είναι η διαφορά δύο κυβικών ριζών όπως στην λύση του Cardano.

Ο Viete γνώριζε για την σχέση μεταξύ ριζών και συντελεστών σε μια εξίσωση. Στο ίδιο δοκίμιο που υπάρχουν τα παραπάνω παραδείγματα, διατυπώνει το θεώρημα:

Εάν, $A^3 + (-B - D - G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG$

τότε, το A ισοδυναμεί οποιαδήποτε από τις ποσότητες B, D, ή G.

6. Pierre de Fermat - Rene Descartes

6.1 Μετασχηματισμός τετραγωνικών εξισώσεων

Ο Fermat ανακάλυψε σχεδόν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα με τον Descartes, την Αναλυτική Γεωμετρία, δηλαδή την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με την βοήθεια της Άλγεβρας. Η παρουσίαση της μεθόδου της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τον Fermat γίνεται στο έργο του *"Introduction to Plane and Solid Loci"* το οποίο ολοκλήρωσε το 1643 αλλά εκδόθηκε μετά το θάνατό του. Στο τέλος αυτής της πραγματείας, ο Fermat εξηγεί μια γενική μέθοδο για τον μετασχηματισμό κάθε τετραγωνικής εξίσωσης με x και y σε μία από τις παρακάτω ειδικές μορφές

$$ax = by \quad \text{ευθεία}$$
$$xy = b \quad \text{υπερβολή}$$
$$x^2 \pm xy = ay^2 \quad \text{ζεύγος ευθειών}$$
$$x^2 = ay \quad \text{παραβολή}$$
$$b^2 - x^2 = y^2 \quad \text{κύκλος}$$
$$b^2 - x^2 = ay^2 \quad \text{έλλειψη}$$
$$b^2 + x^2 = ay^2 \quad \text{υπερβολή}$$

Έτσι κάθε τετραγωνική εξίσωση με x και y αντιπροσωπεύει μια ευθεία ή μια κωνική τομή.

6.2 Η "Γεωμετρία" του Καρτέσιου.

Ο René Descartes (1596-1650) γνωστός και ως Καρτέσιος, ήταν ένας Γάλλος φιλόσοφος, μαθηματικός, φυσικός και συγγραφέας και πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ενήλικης ζωής του στην Ολλανδία. Ονομάστηκε πατέρας της σύγχρονης φιλοσοφίας, και πολλά από την μεταγενέστερη δυτική φιλοσοφία είναι αποτέλεσμα των γραπτών του, που συνεχίζουν να μελετούνται μέχρι και σήμερα. Σημαντικά του έργα του είναι το *"Meditations on First Philosophy"*, το *"Cartesian coordinate system"* και το *"La Géométrie"*. Θεωρείται ο πατέρας της αναλυτικής γεωμετρίας. Η συμβολή του Καρτέσιου στα Μαθηματικά είναι μεγάλη καθώς σε αυτόν οφείλεται κυρίως ο σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός. Στο έργο του *La Géométrie* (*Γεωμετρία*) (1637), που αποτελεί στην ουσία την θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας, παρουσιάζει τον συμβολισμό αυτό. Η πρώτη φράση του Καρτέσιου στο έργο αυτό είναι

"Κάθε πρόβλημα στη Γεωμετρία μπορεί εύκολα να αναχθεί σε τέτοιους όρους ώστε η γνώση του μήκους συγκεκριμένων ευθυγράμμων τμημάτων να είναι αρκετή για την κατασκευή του."

Το εργαλείο του Καρτέσιου στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων είναι η **εισαγωγή αριθμητικών όρων** (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση και εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας) στη Γεωμετρία και η **συμβολική άλγεβρα**. Δεν χρησιμοποιεί την άβολη θεωρία των αναλογιών για να εμβαθύνει στην άλγεβρα του, αλλά ξεπερνάει την αριθμητική των μεγεθών με την **χρήση μιας μονάδας μέτρησης** στις πράξεις ευθυγράμμων τμημάτων. Η μονάδα μέτρησης δεν εισάγεται για να βρεθεί ένας αριθμητικός αντιπρόσωπος ενός μεγέθους όπως είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, αλλά για να επιτευχθεί μια απλοποίηση στον χειρισμό συμβολικών εκφράσεων. Σχετικά με τα σύμβολα, η αλγεβρική συμβολογραφία που χρησιμοποιεί είναι απλή και ανταποκρίνεται ουσιαστικά στην δική μας. Περνάει από την αριθμητική των γεωμετρικών μεγεθών στην **αριθμητική των γραμμάτων**. Ακολουθεί ένα απόσπασμα από την "Γεωμετρία" με τον συμβολισμό που χρησιμοποιεί ο Καρτέσιος:

"Συχνά δεν είναι απαραίτητο να σχεδιάσουμε τις ευθείες στο χαρτί αλλά να τις αναδείξουμε με ένα και μόνο γράμμα. Έτσι, για να προσθέσω τα τμήματα BD και GH, καλώ a το ένα και b το άλλο, και γράφω a+b. Μετά το a-b υποδεικνύει την αφαίρεση του b από το a; το ab ότι το a πολλαπλασιάζεται

με το b; $\frac{a}{b}$ *ότι το a διαιρείται με το b;* $a \cdot a$ *ή* a^2 *ότι το a πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του;* a^3 *ότι αυτό το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το a και πάει λέγοντας. Ξανά, αν επιθυμώ να εξάγω την τετραγωνική ρίζα του* a^2+b^2 *γράφω* $\sqrt{a^2+b^2}$ *; αν επιθυμώ να εξάγω την κυβική ρίζα του* $a^3-b^3+ab^2$ *γράφω* $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$ *και ομοίως για για άλλες ρίζες. Εδώ πρέπει να παρατηρηθεί ότι με τα* a^2 , a^3 *και παρόμοιες εκφράσεις συνήθως εννοώ μόνο απλές ευθείες, τις οποίες ωστόσο ονομάζω τετράγωνα, κύβους, κλπ., ώστε να μπορώ να χρησιμοποιώ όρους της άλγεβρας."*

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a + b$; Et $a - b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\ a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainſi des autres. vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point déterminée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\ a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt déterminée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

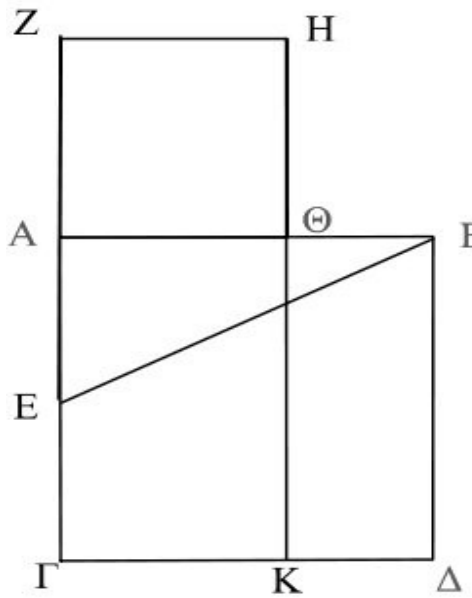
Ο συμβολισμός του Καρτέσιου από το πρωτότυπο του "La Géométrie".

Έτσι λοιπόν η αλγεβρική επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος δεν χρειάζεται να γράφεται σε καθαρά γεωμετρικούς όρους. Όλα τα παραπάνω κάνουν τη συμβολή του έργου αυτού εξαιρετικά μεγάλη καθώς έγινε το πρώτο βήμα προς μια θεωρία αναλλοίωτων που αφαιρεί τις αυθαιρεσίες. Η άλγεβρα που χρησιμοποίησε ο Καρτέσιος κατέστησε δυνατή την αναγνώριση τυπικών προβλημάτων στην γεωμετρία και τον συσχετισμό προβλημάτων που σε γεωμετρική μορφή δεν θα μπορούσε να φανεί ότι συνδέονται ενώ μπορούν να τεθούν ερωτήματα με κομψό τρόπο.

6.3 Κατασκευή Μέσης Αναλόγου και σύγκριση με τους Έλληνες

Μια ποσότητα χ λέγεται "μέση ανάλογος" των ποσοτήτων α και β όταν ικανοποιείται η σχέση $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\beta}$ ή $\chi^2=\alpha\cdot\beta$. Η μέση ανάλογος ή αλλιώς **"χρυσή τομή"** κατά τους Πυθαγορείους, κατασκευάζεται δύο φορές στα Στοιχεία του Ευκλείδη, από την πρόταση ΙΙ.11 και την πρόταση VI.30 όπου αναφέρεται πρώτη φορά σαν μέσος και άκρος λόγος. Δύο ευθύγραμμα τμήματα α>β βρίσκονται σε μέσο και άκρο λόγο αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha-\beta}$ ή ισοδύναμα όπως το έβλεπαν οι αρχαίοι Έλληνες σαν ισότητα εμβαδών $\alpha^2=\alpha\cdot\beta+\beta^2$.

Στην πρόταση ΙΙ.11 η **1η κατασκευή** γίνεται με σκοπό να διαιρεθεί δοσμένο τμήμα α με τέτοιο τρόπο ώστε το ορθογώνιο που ορίζεται από το α και το ένα μέρος του δηλαδή το γινόμενο $\alpha\cdot(\alpha-\beta)$ να ισούται με το τετράγωνο που έχει πλευρά το υπόλοιπο μέρος του α, δηλαδή το β^2 . **Κατασκευάζεται λοιπόν αρχικά ένα τετράγωνο πλευράς α, το** ΑΒΓΔ .



Θέλουμε να βρούμε σημείο Θ του ΑΒ=α τέτοιο ώστε ΑΘ=β και ΘΒ=α-β με $AB\cdot\Theta B=A\Theta^2$ δηλαδή $\alpha\cdot(\alpha-\beta)=\beta^2$ ή αλλιώς $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha-\beta}$ (1) . **Στην συνέχεια της κατασκευής ενώνεται το μέσο Ε του ΑΓ με το Β,** προεκτείνεται το ΕΑ κατά ΕΖ=ΕΒ και κατασκευάζεται το τετράγωνο ΑΖΗΘ. Θ είναι το ζητούμενο σημείο. Προεκτείνεται η ΗΘ τέμνοντας τη ΓΔ στο Κ και σύμφωνα με την πρόταση ΙΙ.6 το ορθογώνιο που ορίζουν οι ΓΖ, ΖΑ και το τετράγωνο πλευράς ΑΕ ισούται με το τετράγωνο πλευράς ΕΖ :

$$\Gamma Z\cdot ZA+AE^2=EZ^2 \Rightarrow \Gamma Z\cdot ZA+AE^2=EB^2 \ (\text{αφού } EZ=EB) \Rightarrow$$
$$\Gamma Z\cdot ZA+AE^2=EA^2+AB^2 \ (\text{Π.Θ. στο τρίγωνο } ABE) \Rightarrow$$
$$\Gamma Z\cdot ZA=AB^2 \Rightarrow (ZHK\Gamma)=(AB\Delta\Gamma) \Rightarrow$$
$$\text{αφαιρώντας το } (A\Theta K\Gamma) \text{ κατά μέλη}: (AZH\Theta)=(\Theta B\Delta K) \Rightarrow$$
$$A\Theta^2=AB\cdot B\Theta \ (2)$$

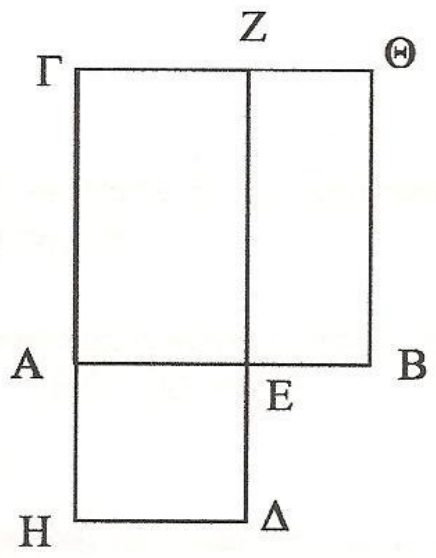
Όπως είδαμε και στην παράγραφο 2.2 η σχέση (2) άρα και η σχέση (1) παίρνει και την μορφή εξίσωσης αν θέσουμε $A\Theta=\beta=\chi$

$$\frac{AB}{A\Theta}=\frac{A\Theta}{\Theta B} \ \text{ή} \ \frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha-\chi}$$

δηλαδή $\alpha(\alpha-\chi)=\chi^2$ ή $\chi^2+\alpha\chi=\alpha^2$ ή $\chi(\chi+\alpha)=\alpha^2$.

Σύμφωνα με τον ορισμό 3 του βιβλίου VI, το Θ διαιρεί το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο, ενώ στην πρόταση VI.30 έχουμε την κατασκευή του μέσου και άκρου λόγου δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος που αποτελεί την **2η κατασκευή** της "χρυσής τομής" όπως είπαμε. Στην κατασκευή ([9], σελ.478), θεωρείται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο οποίο προσδιορίζεται σημείο Ε που να χωρίζει το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}$$



Με πλευρά ΑΒ γράφουμε τετράγωνο ΑΒΘΓ και, προεκτείνοντας την πλευρά ΓΑ, κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΓΖΔΗ το οποίο έχει εκτός του τετραγώνου ΑΒΘΓ το παραλληλόγραμμο ΑΕΔΗ, το οποίο είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΑΒΘΓ (πρόταση VI.29).

Επειδή το ΑΒΘΓ είναι τετράγωνο, λόγω ομοιότητας θα είναι και το ΑΕΔΗ τετράγωνο.

Επειδή είναι (ΑΒΘΓ)=(ΓΖΔΗ), αν από τα παραπάνω αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού του κοινού παραλληλογράμμου ΑΕΖΓ θα προκύψει η ισότητα (ΑΕΔΗ)=(ΕΒΘΖ). Επιπλέον τα ΑΕΔΗ, ΕΒΘΖ είναι και ισογώνια και από την πρόταση VI.14 σύμφωνα με την οποία στα ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, ισχύει:

$$\frac{ZE}{E\Delta}=\frac{AE}{EB}$$

Όμως ΖΕ=ΑΒ και ΕΔ=ΑΕ, οπότε

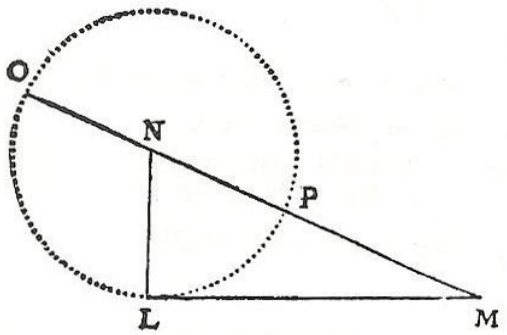
$$\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}$$

και αφού είναι η ΑΒ μεγαλύτερη της ΑΕ θα είναι και η ΑΕ μεγαλύτερη της ΕΒ.

Η αντίστοιχη κατασκευή του Καρτέσιου για την κατασκευή της μέσης αναλόγου ή ισοδύναμα την γεωμετρική επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, βρίσκεται στο μείζον έργο του Καρτέσιου στα μαθηματικά, *La Géométrie* (*Γεωμετρία*) (1637). Η **1η γεωμετρική κατασκευή** που παραθέτει ο Καρτέσιος είναι για την εξίσωση

$$z^2=a\cdot z+b^2 \quad (1)$$

όπου τα a, b είναι γνωστές ποσότητες και η ρίζα ή αλλιώς το άγνωστο ευθύγραμμο τμήμα z μπορεί "εύκολα να βρεθεί" κατά τον Καρτέσιο ως εξής:



1η γεωμετρική κατασκευή του Καρτέσιου.

Κατασκευάζει ένα ορθογώνιο τρίγωνο NLM με την πλευρά LM ίση με το b, την τετραγωνική ρίζα δηλαδή της γνωστής ποσότητας b^2 , και την άλλη πλευρά LN, ίση με το $\frac{1}{2}\cdot a$, το μισό της δεύτερης γνωστής ποσότητας που πολλαπλασιάζεται με το z που υποθέτει ο Καρτέσιος ότι είναι η άγνωστη ευθεία. Μετά προεκτείνει το MN, την υποτείνουσα του τριγώνου, μέχρι το σημείο O έτσι ώστε το NO να είναι ίσο με το NL, ενώ όλη η ευθεία OM είναι το ζητούμενο z. Το z, εκφράζεται τώρα με τον παρακάτω τρόπο:

$$z=\frac{1}{2}\cdot a+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2+b^2}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό βγαίνει ως εξής: Από το σχήμα έχουμε $OM\cdot PM=LM^2$. Εάν, $OM=z$, $PM=z-a$ (αφού NP=NL ως ακτίνες του ίδιου κύκλου άρα OP=a η διάμετρος), και εφόσον $LM=b$, έχουμε $z\cdot(z-a)=b^2$ ή $z^2=a\cdot z+b^2$. Από το Π.Θ. στο τρίγωνο NLM, $MN=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2+b^2}$, επομένως

$$OM = z = ON+MN = \frac{1}{2}\cdot a+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2+b^2}.$$

Η δεύτερη ρίζα, η αρνητική, αγνοείται από τον Καρτέσιο. Η ίδια κατασκευή χρησιμοποιείται και για την περίπτωση της εξίσωσης

$$y^2=-a\cdot y+b^2 \quad (2)$$

όπου y είναι η ζητούμενη ποσότητα. Κατασκευάζεται λοιπόν το ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο NLM. Από την υποτείνουσα MN αποκόπτεται το NL, και μένει το τμήμα PM που είναι το y, η επιθυμητή ρίζα. Έτσι ισχύει

$$y=-\frac{1}{2}\cdot a+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2+b^2}.$$

Η **2η γεωμετρική κατασκευή** είναι μια παραλλαγή της πρώτης και αφορά την μορφή

$$z^2=a\cdot z-b^2 \quad (3)$$

όπου το z είναι η ζητούμενη ποσότητα. Ο Καρτέσιος κατασκευάζει ευθύγραμμο

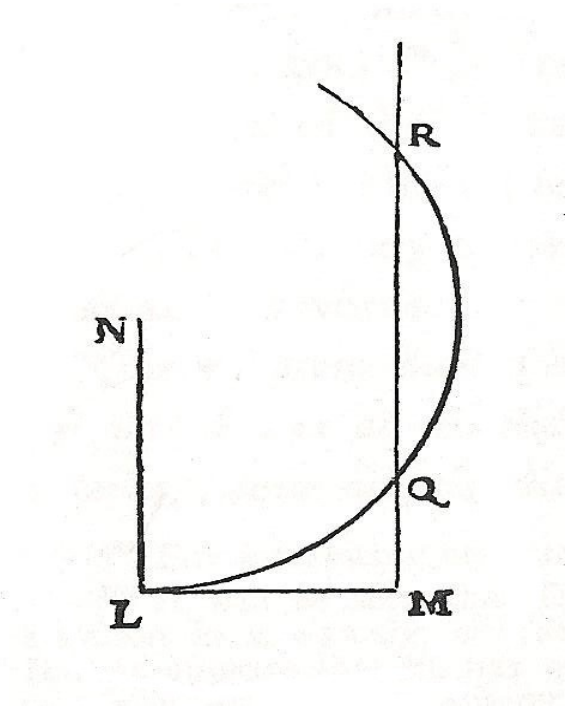
τμήμα NL ίσο με $\frac{1}{2}\cdot a$ και LM τμήμα ίσο με b, όπως και στην κατασκευή της (1). Η διαφορά με την πρώτη κατασκευή είναι πως αντί να ενωθούν τα σημεία M και N, σχηματίζεται η παράλληλη στην LN, MQR, και με το N σαν κέντρο διαγράφεται κύκλος που περνά από το L και τέμνει την MQR στα σημεία Q και R.

Το z τότε είναι είτε το MQ είτε MR, και εκφράζεται με δύο τρόπους:

$$z=\frac{1}{2}\cdot a+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2-b^2},$$

και

$$z=\frac{1}{2}\cdot a-\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2-b^2}.$$



2η γεωμετρική κατασκευή του Καρτέσιου.

Τα αποτελέσματα αυτά βγαίνουν ως εξής:

Εφόσον $MR\cdot MQ=LM^2$ τότε εάν $MR=z$ έχουμε $MQ=a-z$ που συνεπάγεται $z\cdot(z-a)=b^2$ ή αλλιώς $z^2=a\cdot z-b^2$. Εάν αντί γιαυτό ισχύει $MQ=z$ τότε $MR=a-z$ και έτσι προκύπτει και πάλι $z^2=a\cdot z-b^2$. Επιπρόσθετα, αν O είναι το μέσο του τμήματος QR,

$$MQ = OM-OQ = \frac{1}{2}\cdot a-\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2-b^2},$$

και

$$MR = MO+OR = \frac{1}{2}\cdot a+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot a^2-b^2}.$$

Εδώ όπως βλέπουμε ο Καρτέσιος δίνει και τις δύο λύσεις της (3) γιατί είναι και οι δύο θετικές. Εάν το MR εφάπτεται του κύκλου, δηλαδή όταν $b=\frac{1}{2}\cdot a$ οι ρίζες θα

είναι ίσες ενώ εάν $b > \frac{1}{2} \cdot a$ το MR δεν τέμνει τον κύκλο και δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες, μόνο φανταστικές.

Οι κατασκευές του Καρτέσιου λοιπόν βασίζονται στη χρήση κοινής γεωμετρίας, με χρήση ευθυγράμμων τμημάτων και κύκλων και με αυτές ο Καρτέσιος επιλύει συνειδητά τις τετραγωνικές εξισώσεις των μορφών (1), (2), (3). Αντιθέτως για τους Αρχαίους Έλληνες η κατασκευή της "Χρυσής Τομής" δεν είχε την χρησιμότητα της γεωμετρικής επίλυσης εξίσωσης. Το αποτέλεσμα των προτάσεων II.11 και VI.30 το έβλεπαν περισσότερο σαν μια συνεχή αναλογία ενώ η εφαρμογή τους είναι κυρίως στην κατασκευή κανονικών πολυγώνων στα βιβλία IV και XIII. Οι κατασκευές των Ελλήνων βασίζονται σε ισότητες και ομοιότητες εμβαδών ορθογωνίων και τετραγώνων καθώς το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι επιφάνεια ενώ για τον Καρτέσιο το γινόμενο αυτό μπορεί να είναι και πάλι ευθύγραμμο τμήμα.

7.Οι προγενέστεροι του Galois.

7.1 Waring

Είναι γνωστό από τον Viete ότι αν μια εξίσωση n-οστού βαθμού έχει n ρίζες, τότε όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ίσοι με την θεμελιώδη συμμετρική συνάρτηση, ([6], σελ.76). Δηλαδή αν η εξίσωση είναι

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots + \ldots = 0$$

έχουμε

$$a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$a_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n$$
$$\text{κλπ}$$

Στην πραγματεία του "*Miscellanea analytic*" (1762), ο Waring έδειξε ότι όλες οι ρητές συμμετρικές συναρτήσεις των ριζών μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των συντελεστών της εξίσωσης. Πρώτα παράγει εκφράσεις για τα δυναμοαθροίσματα

$$s_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$$

και μετά το ίδιο για αυθαίρετα συμμετρικά πολυώνυμα.

Ο Waring επίσης διερευνά την επίλυση της "κυκλοτομικής εξίσωσης"

$$x^n - 1 = 0$$

και το πρόβλημα: να βρεθούν εξισώσεις που μπορούν να λυθούν με αθροίσματα της μορφής

$$x = \sqrt[m]{a_1} + \sqrt[m]{a_2} + \ldots + \sqrt[m]{a_n}.$$

7.2 Vandermonde

Ο Vandermonde βασιζόμενος στις γνωστές λύσεις των τετραγωνικών και κυβικών εξισώσεων, κατασκευάζει γενικές αρχές πάνω στις οποίες πρέπει να βασίζεται η επίλυση των εξισώσεων "*Sur la resolution des equations*" (1770). Γράφει τη λύση των **τετραγωνικών εξισώσεων** στη μορφή

$$\frac{1}{2}[x_1+x_2+\sqrt{(x_1-x_2)^2}]$$

Παίρνοντας για την τετραγωνική εξίσωση τα δύο πιθανά πρόσημα, βγαίνουν οι δύο ρίζες της εξίσωσης. Μετά γράφει τον παραπάνω τύπο σαν

$$\frac{1}{2}[(x_1+x_2)+\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}]$$

παρουσιάζοντας έτσι τις θεμελιώδεις συμμετρικές συναρτήσεις των ριζών.

Εν συνεχεία ρωτά αν η γενική εξίσωση **n-οστού βαθμού** μπορεί να επιλυθεί με μία παρόμοια έκφραση

$$\frac{1}{n}\cdot[(x_1+\ldots+x_n)+\sqrt[n]{(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)^n}+\sqrt[n]{(p_1^2x_1+\ldots+p_n^2x_n)^n}+\ldots+\sqrt[n]{(p_1^{n-1}x_1+\ldots+p_n^{n-1}x_n)^n}]$$

στην οποία τα $p_1,\ldots,p_n$ είναι οι n-οστές ρίζες της μονάδας.

Στις **κυβικές εξισώσεις** η μέθοδος του Vandermonde δίνει την λύση άμεσα. Εάν i και j είναι οι αρχικές τρεις ρίζες της μονάδας, έχουμε

$$(x_1+ix_2+jx_3)^3=S+3iX+3jY$$

με

$$S=x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3$$
$$X=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$$
$$Y=x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2.$$

Τα S, X+Y και XY είναι συμμετρικές συναρτήσεις των ριζών επομένως X και Y είναι οι ρίζες μιας τετραγωνικής εξίσωσης. Εκφράσεις όπως $x_1+ix_2+jx_3$ μπορούν να αποκτηθούν σαν κυβικές ρίζες, και τα x_1,x_2,x_3 να βρεθούν. Η ίδια προσέγγιση γίνεται και στις **τεταρτοβάθμιες εξισώσεις.**

Για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4, ο Vandermonde δεν μπορεί να γενικεύσει σε μια γενική λύση γιατί η μέθοδός του δουλεύει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Επιλύει όμως την **κυκλοτομική εξίσωση** $x^n-1=0$ **για n=11**,

$$x^{11}-1=0.$$

Αρχικά μειώνει την εξίσωση σε μία άλλη 5ου βαθμού, παίρνοντας τις ρίζες

$$p+p^{-1}\ ,\ p^2+p^{-2}\ ,\ p^3+p^{-3}\ ,\ p^4+p^{-4}$$

όπου το p είναι μια πρωταρχική ενδέκατη ρίζα της μονάδας. Μετά λύνει αυτήν την 5ου βαθμού εξίσωση εισάγοντας τις γνωστές του εκφράσεις $p_1x_1+...+p_nx_n$ οι οποίες μπορούν να γραφούν ως $L=x_1+ax_2+a^2x_3+a^3x_4+a^4x_5$ όπου το a είναι μια πρωταρχική πέμπτη ρίζα της μονάδας, καθώς $x_1,...,x_5$ είναι οι ρίζες της 5βάθμιας εξίσωσης. Για να εκφραστεί λογικά το L^5, πρέπει να πάρουμε τις ρίζες x_i με ορισμένη σειρά. Στην ειδική περίπτωση των έντεκα ριζών της μονάδας αυτή η σειρά μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο της δοκιμής-λάθους, αλλά για την γενική περίπτωση χρειάζεται μια απόδειξη. Αυτός που το απέδειξε ήταν ο Gauss. Ο Vandermode ισχυρίστηκε για την γενική περίπτωση της κυκλοτομικής εξίσωσης, $x^n-1=0$, ότι η λύση με τη μέθοδό του θα είναι πάντα εύκολη. Αυτό δείχνει ότι δεν είχε δει την δυσκολία, να θεμελιωθεί μια κατάλληλη σειρά των ριζών ([6], σελ.77-78).

7.3 Lagrange

Η δουλειά του Lagrange πάνω στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων εμπεριέχεται στο έργο του *"Reflections sur la resolution algebrique des equations"* (1771), ([6], σελ.79-81).

7.3.1 Κυβικές εξισώσεις

Η μορφή πάνω στην οποία δουλεύει ο Lagrange είναι

$$x^3+nx+p=0 \quad (1)$$

της οποίας η λύση είναι γνωστή από τον Cardano, και γράφεται στη μορφή $x=r+s$, όπου τα r^3 και s^3 είναι οι ρίζες μιας τετραγωνικής εξίσωσης. Ο Lagrange αποδεικνύει ότι τα r και s μπορούν να γραφτούν συναρτήσει των τριών ριζών a, b και c της εξίσωσης (1)

$$r=\frac{1}{3}(a+ab+a^2c) \quad (2)$$

και

$$s=\frac{1}{3}(a+a^2b+ac) \quad (3)$$

όπου το a είναι μια πρωταρχική τρίτη ρίζα της μονάδας έτσι ώστε

$$a^2+a+1=0 \quad (4)$$

Τα ίδια αποτελέσματα (2) και (3) επιτυγχάνονται και με μία άμεση μέθοδο κατά τον Lagrange. Ξεκινά με μια αυθαίρετη γραμμική συνάρτηση των ριζών a, b και c

$$y=Aa+Bb+Cc \quad (5)$$

Αντιμεταθέτοντας τις ρίζες προκύπτει ένα σύνολο έξι εκφράσεων, που είναι οι ρίζες μιας εξίσωσης 6ου Βαθμού. Αν απαιτηθεί η εξίσωση αυτή να περιέχει μόνο δυνάμεις του y^3 , μπορεί να δειχθεί ότι οι συντελεστές A, B, C είναι αναγκαστικά ανάλογοι στα $1, a, a^2$ ή $1, a^2, a$. Έτσι προκύπτουν ακόμη μία φορά οι εκφράσεις (2) και (3). Οι εκφράσεις (3) και (4), σχηματισμένες με χρήση ριζών της μονάδας, ονομάζονται "Αναπτύγματα Lagrange" και είναι πολύ χρήσιμα.

7.3.2 Τεταρτοβάθμιες εξισώσεις

Η μορφή της τεταρτοβάθμιας που παίρνει ο Lagrange είναι

$$x^4+nx^2+px+q=0 \quad (6)$$

Με τη μέθοδο του Ferrari η λύση της (6) προκύπτει επιλύοντας πρώτα μια κυβική εξίσωση

$$y^3-\frac{1}{2}ny^2-qy+\frac{1}{8}(4nq-p^2)=0 \quad (7)$$

Ο Lagrange αποδεικνύει ότι οι ρίζες της εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ριζών a, b, c, d της αρχικής εξίσωσης (6):

$$u=\frac{1}{2}(ab+cd),\ \ v=\frac{1}{2}(ac+bd),\ \ w=\frac{1}{2}(ad+bc) \quad (8)$$

Αν οι ρίζες μετατεθούν, από την συνάρτηση u προκύπτουν μόνο τρεις συναρτήσεις u, v, w. Αυτό εξηγεί γιατί το u είναι η ρίζα μιας κυβικής εξίσωσης.

Στην ενότητα 100 ο Lagrange θεωρεί ρητές συναρτήσεις $f(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ των ριζών γενικών εξισώσεων βαθμού n. Οι ρίζες θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές ή όπως λέμε σήμερα "απροσδιόριστες". Δύο συναρτήσεις t και y των ριζών ονομάζονται όμοιες εάν όλες οι μεταθέσεις των ριζών που αφήνουν το t αναλλοίωτο αφήνουν και το y αναλλοίωτο, και αντίστροφα. Ο Lagrange αποδεικνύει

σχετικά, ένα θεώρημα που ονομάζεται "Θεώρημα 100" και διατυπώνεται ως εξής:

"Εάν όλες οι μεταθέσεις που αφήνουν το t .., τότε το y μπορεί να εκφραστεί σαν μια ρητή συνάρτηση του t και των συντελεστών της δοθείσας εξίσωσης."

Απόδειξη:

Έστω $t', t'', \ldots, t^{(\pi)}$ οι διαφορετικές τιμές που η συνάρτηση παίρνει όταν οι ρίζες μετατίθενται, και έστω $y', y'', \ldots, y^{(\pi)}$ οι αντίστοιχες τιμές του y. Ο αριθμός π είναι διαιρέτης του n!, και το t ικανοποιεί μία εξίσωση θ=0 βαθμού π. Επομένως κάθε συνάρτηση T του t μπορεί να γραφτεί ως

$$T = N_0 + N_1 t + N_2 t^2 + \ldots + N_{\pi} - 1 t^{\pi - 1} \quad (9)$$

Έστω $T', T'', \ldots$ οι τιμές του T για $t', t'', \ldots$ του t. Ο Lagrange σχηματίζει το άθροισμα $T'y' + T''y'' + \ldots$ και το εκφράζει σαν γραμμική εξίσωση των απροσδιόριστων $N_0, N_{-1}, \ldots, N_{\pi-1}$:

$$T'y' + T''y'' + \ldots = M_0 N_0 + M_1 N_1 + \ldots + M_{\pi-1} t^{\pi-1}. \quad (10)$$

Για να υπολογιστεί το y' πρέπει να πρέπει να προσδιοριστούν οι συντελεστές $N_0, N_{-1}, \ldots, N_{\pi-1}$ με τρόπο ώστε τα $T'', T''', \ldots$ να μηδενιστούν. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο (9) απαιτείται για την εύρεση των ριζών $t'', t''', \ldots$ Αν αυτό το πολυώνυμο πολλαπλασιαστεί με το $t - t'$, πρέπει να διαιρείται με το πολυώνυμο θ. Επομένως έχουμε

$$(t - t')T = c \cdot \theta \quad (11)$$

με σταθερά c. Από αυτή την συνθήκη προκύπτει ένα πλήθος γραμμικών εξισώσεων για τα $N_0, N_{-1}, \ldots, N_{\pi-1}$, που μπορούν να λυθούν με στοιχειώδεις υπολογισμούς, provided το πολυώνυμο θ δεν έχει διπλές ρίζες. Ο Lagrange επιλέγει $N_0 = 1$, αλλά αυτό δεν είναι πάντα πιθανό, και δεν είναι απαραίτητο για την απόδειξη του. Το θεώρημα αυτό το εφαρμόζει σε εξισώσεις 2ου, 3ου και 4ου βαθμού.

Ο Lagrange ασχολήθηκε επίσης και με ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων όπως αυτή της "κυκλοτομικής εξίσωσης", $x^n - 1 = 0$. Έλυσε την εξίσωση $x^5 - 1 = 0 \quad (1)$ όπως ακολουθεί. Μία ρίζα είναι η x=1. Οι υπόλοιπες είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0 \quad (2)$$

που μετασχηματίζεται στην

$$(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})+1=0 \quad (3)$$

Θέτοντας το $x+x^{-1}=y \quad (4)$ στην (3) προκύπτει η τετραγωνική

$$y^2+y-1=0 \quad (5)$$

που λύνεται ως προς y και μετά η (4) ως προς x. Ο Lagrange εφαρμόζει την ίδια μέθοδο και για την κυκλοτομική εξίσωση 11ου βαθμού

$$x^{11}-1=0 \quad (6)$$

Για να μετασχηματίσει την (6) διαιρεί με x-1 και μετά με x^5 και προκύπτει

$$(x^5+x^{-5})+(x^4+x^{-4})+(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})+1=0 \quad (7)$$

Θέτοντας $x+x^{-1}=y$ προκύπτει μια κυβική εξίσωση για το y και εκεί ακριβώς ο Lagrange σταματάει. Η πλήρης επίλυση της $x^n-1=0$ πραγματοποιήθηκε από τον Galois όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

7.4 Malfatti

Ο Gianfrancesco Malfatti παρουσίασε το 1771 την πραγματεία του πάνω σε εξισώσεις 5ου βαθμού, ονόματι *"De aequationibus quadratocubisis dissertatio analytica".* Πρώτα εφαρμόζει την μέθοδό του σε εξισώσεις 3ου Βαθμού και μετά σε εξισώσεις 5ου Βαθμού, ([6], σελ.82-83).

7.4.1 Τρίτου βαθμού εξίσωση

Θεωρεί την εξίσωση

$$x^3+3ax+b=0 \quad (1)$$

και για τον άγνωστο x την γραμμική εξίσωση

$$x+m\sqrt[3]{f^2}+n\sqrt[3]{f}=0 \quad (2)$$

Για να μειωθούν οι τρίτες ρίζες, χρησιμοποιείται η μέθοδος Manfredi. Αντικαθιστώντας την $\sqrt[3]{f}$ με το $a\sqrt[3]{f}$ και το $a^2\sqrt[3]{f}$, όπου το a είναι μια τρίτη ρίζα της μονάδας, και πολλαπλασιάζοντας την (2) με τις δύο γραμμικές εξισώσεις που προέκυψαν, ο Malfatti παίρνει μια εξίσωση τρίτου βαθμού

$$x^3-3mnfx+m^3f^2+n^3f=0 \quad (3)$$

Για f=1, η (3) γίνεται

$$x^3-3mnfx+m^3+n^3=0 \quad (4)$$

Αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη στην (1), δεδομένου

$$\left\{ \begin{array}{c} mn=-a \\ m^3+n^3=b \end{array} \right\} \quad (5)$$

Από αυτό το ζεύγος εξισώσεων, βρίσκονται τα m^3, n^3 και επομένως τα m και n.

7.4.2 Πέμπτου βαθμού εξίσωση

Η ίδια μέθοδος εφαρμόζεται σε εξισώσεις της μορφής

$$x^5+5ax^3+5bx^2+5cx+d=0 \quad (6)$$

και το x θα αποκτηθεί από την εξίσωση

$$x+m\sqrt[5]{f^4}+p\sqrt[5]{f^3}+q\sqrt[5]{f^2}+n\sqrt[5]{f}=0 \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας την $\sqrt[5]{f}$ με $a\sqrt[5]{f}, a^2\sqrt[5]{f}, a^3\sqrt[5]{f}, a^4\sqrt[5]{f}$, όπου το a είναι μια πέμπτη ρίζα της μονάδας, και πολλαπλασιάζοντας την (7) με τις γραμμικές εξισώσεις που προκύπτουν από την αντικατάσταση, ο Malfatti αποκτά μια "κανονική εξίσωση" 5ου βαθμού ως προς x. Για f=1 και εξισώνοντας τους συντελεστές της κανονικής εξίσωσης με τους συντελεστές της (5) προκύπτουν συνθήκες για τα m, p, q, n τις οποίες ο Malfatti απλοποιεί θέτοντας

$$mn=y,\ pq=u$$

και

$$25uy-5a^2+5\frac{c}{3}=z.$$

Μετά από εξονυχιστικούς υπολογισμούς ο Malfatti καταλήγει σε μία εξίσωση 6ου βαθμού για το z. Στην γενική περίπτωση αυτή η εξίσωση δεν έχει ρητό παράγοντα 1ου, 2ου ή 3ου βαθμού, αλλά αν έχει, η δοσμένη εξίσωση (6) μπορεί να λυθεί με ριζικά. Μετά μπορεί να προσδιοριστεί το z και στη συνέχεια τα m, p, q, n και τελικά προκύπτουν οι ρίζες

$$\begin{aligned} x_0&=-(m+p+q+n)\\ x_1&=-(am+a^2p+a^3q+a^4n)\\ x_2&=-(a^2m+a^4p+aq+a^3n)\\ x_3&=-(a^3m+ap+a^4q+a^2n)\\ x_4&=-(a^4m+a^3p+a^2q+an) \end{aligned} \quad (8)$$

Είναι εύκολο να λυθούν οι γραμμικές εξισώσεις (8) ως προς m, p, q, n. Ακολούθως τα m, p, q, n είναι γραμμικές εξισώσεις των ριζών και το z είναι τεταρτοβάθμια συνάρτηση των ριζών.

7.5 Ruffini-Cauchy-Abel

Ο Ruffini ήταν μαθητής του Lagrange, και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούσε ήταν κυρίως αυτές του δασκάλου του. Εξέδωσε διάφορες εργασίες (1798-1813) ισχυριζόμενος ότι θα αποδείξει πως η γενική εξίσωση 5ου ή μεγαλύτερου βαθμού δεν μπορεί να λυθεί με χρήση ριζικών. Θεωρούσε ρητές συναρτήσεις των ριζών μιας γενικής εξίσωσης βαθμού n. Εάν το p είναι ο αριθμός των μεταθέσεων που αφήνει μια τέτοια συνάρτηση αναλλοίωτη, το p είναι διαιρέτης του n!, και ο αριθμός των διαφορετικών τιμών που δίνει η συνάρτηση αν οι ρίζες μετατεθούν είναι n!/p. Όπως είχε ήδη δείξει ο Lagrange, μια τέτοια συνάρτηση είναι η ρίζα μιας εξίσωσης n!/p βαθμού. Ο Ruffini μελέτησε λεπτομερώς το σύνολο των p μεταθέσεων που αφήνουν την συνάρτηση αναλλοίωτη. Ειδικότερα, απέδειξε ότι στην περίπτωση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού, ο βαθμός n!/p μπορεί να είναι 2 ή 5 ή 6, αλλά ποτέ 3 ή 4, το οποίο σημαίνει ότι μια επίλυση με την έννοια του Lagrange που να ικανοποιεί μια εξίσωση 3ου ή 4ου βαθμού είναι αδύνατο. Εάν το n!/p δεν είναι το 2, πρέπει να διαιρείται από το 5. Εάν το n!/p είναι το 5, υπάρχουν 5ου βαθμού επιλύσιμες εξισώσεις, που δεν μπορούν όμως να μειωθούν σε διωνυμικές εξισώσεις

$$z^5 - m = 0.$$

Ο Ruffini ισχυρίστηκε ότι απέδειξε ότι η γενική εξίσωση 5ου βαθμού δεν μπορεί να λυθεί με ριζικά, αλλά η απόδειξή του δεν είναι πειστική, γιατί βασίζεται στην υπόθεση ότι αυτά τα ριζικά μπορούν να εκφραστούν σαν ρητές συναρτήσεις των ριζών. Ο πρώτος που ολοκλήρωσε την απόδειξη αυτή, αποδεικνύοντας ότι τα ριζικά που χρειάζονται για να επιλυθεί μια εξίσωση μπορούν πάντα να επιλεχθούν σαν ρητές συναρτήσεις των ριζών της εξίσωσης αυτής και συγκεκριμένων ριζών της μονάδας, ήταν ο Abel.

Ο Cauchy γενίκευσε το αποτέλεσμα του Ruffini ότι το πλήθος διαφορετικών τιμών που φτάνει μια μη-συμμετρική συνάρτηση, δεν γίνεται να είναι μικρότερος του 5 εκτός και αν είναι 2, σε συναρτήσεις n μεταβλητών. Η γενίκευση αυτή διατυπώνεται ως εξής:

"Έστω n ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών και p ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που περιέχεται στο n. Το πλήθος των διαφορετικών τιμών μιας μη-συμμετρικής ρητής συνάρτησης n μεταβλητών δεν μπορεί να παίρνει τιμή μικρότερη του p, εκτός και αν είναι 2."

Ο Abel απέδειξε όπως είπαμε ότι μια συνάρτηση 5ου βαθμού είναι αδύνατο να επιλυθεί με ριζικά. Στην απόδειξή του χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα που απέδειξαν οι Lagrange και Cauchy σχετικά με το πλήθος των τιμών που αποκτά μια συνάρτηση n μεταβλητών ύστερα από μεταθέσεις των μεταβλητών. Το πρώτο και σημαντικότερο βήμα της απόδειξης του Abel παρουσιάζεται παρακάτω.

Παίρνει την εξίσωση

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \quad (1)$$

που έχει γενικούς συντελεστές, δηλαδή είτε γράμματα είτε ανεξάρτητες μεταβλητές. Υποθέτει ότι το y μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση των συντελεστών με χρήση ριζικών, και γράφει το y

$$y = p + p_1 R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \ldots + p_{m-1} R^{(m-1)/m} \quad (2)$$

$$m : \text{πρώτος αριθμός}$$

Οι ποσότητες $R, p, p_1, \ldots, p_{m-1}$ υποτίθεται ότι είναι εκφράσεις της ίδιας μορφής με το y, που περιέχουν άλλα ριζικά, και ούτω καθεξής μέχρι να φτάσουμε σε ρητές συναρτήσεις των συντελεστών της αρχικής εξίσωσης (1). Ανάμεσα στις σταθερές

μεταβλητές ο Abel πάντα συμπεριλαμβάνει τις m-βαθμού ρίζες της μονάδας, όπου το m είναι οποιοσδήποτε από τους πρώτους εκθέτες που χρησιμοποιούνται στην λύση (2).

Έστω ότι το $R^{1/m}$ δεν εκφράζεται σαν ρητή συνάρτηση των $a, b, \ldots, p, p_1, p_2, \ldots$ γιατί αλλιώς η προσθήκη του ριζικού θα ήταν περιττή. Έστω επίσης ότι δεν είναι όλοι οι συντελεστές στην (2) ίσοι με το μηδέν και μάλιστα $p_1 \neq 0$.

$$\text{η}(2) \ \text{για} R = \frac{R}{p_1^m} \text{πάιρνει} p_1 = 1 \ \text{και} \ \text{για} R^{1/m} = z \ \text{έχουμε:}$$

$$y = p + z + p_2 z^2 + \ldots + p_{m-1} z^{m-1} \ (3).$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) έχουμε

$$q + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_{m-1} z^{m-1} = 0 \ (4)$$

$$\text{όπου τα} q, q_1, q_2, \ldots \text{είναι πολυώνυμα του} a, b, \ldots, p_1, p_2, \ldots \text{και} R.$$

Ο Abel ισχυρίζεται ότι για να έχει νόημα η (4) πρέπει $q = 0, q_1 = 0, \ldots, q_{m-1} = 0$.

Απόδειξη του ισχυρισμού:
Η εξίσωση (4) και η εξίσωση

$$z^m - R = 0 \ (5)$$

έχουν μια κοινή ρίζα, την z. Εάν $q, q_1, q_2, \ldots \neq 0$ ο αριθμός των κοινών τους ριζών είναι τουλάχιστον m-1. Έστω k ο αριθμός αυτός. Τότε, υπολογίζοντας τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων της (4) και της (5), προκύπτει μια εξίσωση k βαθμού

$$r + r_1 z + r_2 z^z + \ldots + r_k z^k = 0 \ (6).$$

Αν το πολυώνυμο στα αριστερά της (6) παραγοντοποιηθεί, ένας από τους παράγοντες πρέπει να είναι το μηδέν. Έτσι προκύπτει μια εξίσωση ως προς z, που δεν μπορεί να μειωθεί ο βαθμός της

$$t_0 + t_1 z + \ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^{\mu} = 0 \ (7)$$

Κάποιος μπορεί να υποθέσει κατά τον Abel ότι είναι αδύνατο να βρεθεί μια

εξίσωση της ίδιας μορφής με χαμηλότερο βαθμό. Οι μ ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι ίδιες με τις ρίζες της (5). Τώρα όλες οι ρίζες της ύστερης αυτής εξίσωσης είναι στην μορφή $a \cdot z$. Ο βαθμός μ είναι τουλάχιστον 2, γιατί διαφορετικά το z θα ήταν μια ρητή συνάρτηση των $a, b, p, p_1, p_2, \ldots$ Ακολούθως η εξίσωση (7) έχει τουλάχιστον δύο ρίζες z και $a \cdot z$

$$\left\{\begin{array}{l} t_0+t_1z+t_2z^2+\ldots+t_{\mu-1}z^{\mu-1}+z^{\mu}=0 \\ t_0+at_1z+a^2t_2z^2+\ldots+a^{\mu-1}t_{\mu-1}z^{\mu-1}+a^{\mu}z^{\mu}=0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το a^{μ} και αφαιρώντας το από την δεύτερη, προκύπτει μια εξίσωση με μικρότερο βαθμό του μ, το οποίο είναι αδύνατο. Έτσι όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης (4) πρέπει να είναι μηδέν

$$q=0, q_1=0, \ldots, q_{m-1}=0.$$

Η εξίσωση (4) όπως είδαμε παραπάνω προέκυψε από αντικατάσταση της (3) στην (1) και χρησιμοποιώντας την (5). Τώρα η (5) ικανοποιείται όχι μόνο από το z αλλά και από τα

$$az, a^2z, \ldots, a^{m-1}z$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην (2) το $R^{1/m}$ με το $a^kR^{1/m}, \ldots,$ προκύπτουν πάντα ρίζες της εξίσωσης (1). Αυτές οι ρίζες είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, καθώς το m δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του 5, και αν οι ρίζες που προκύπτουν συμβολιστούν με $y_1, y_2, \ldots, y_m$ έχουμε

$$\begin{array}{l} y_1=p+z+p_2z^2+\ldots+p_{m-1}z^{m-1} \\ y_2=p+az+a^2p_2z^2+\ldots+a^{m-1}p_{m-1}z^{m-1} \\ \ldots \\ y_m=p+a^{m-1}z+a^{m-2}p_2z^2+\ldots+ap_{m-1}z^{m-1}. \end{array}$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν εύκολα να λυθούν για $p, z, p_2z^2, \ldots, p_{m-1}z^{m-1}$. Επομένως τα $p, p_2, \ldots, p_{m-1}$ και το $z=R^{1/m}$ είναι ρητές συναρτήσεις των ριζών $y_1, \ldots, y_5$ της εξίσωσης (1). Επιπλέον, το $R=z^m$ είναι επίσης μια ρητή συνάρτηση των ριζών. Η ποσότητα R μπορεί να δίνεται σαν μια ρητή συνάρτηση του $v^{1/n}$. Αυτή η συνάρτηση μπορεί να γραφεί

$$R=S+v^{1/n}+S_2v^{2/n}+...+S_{n-1}v^{(n-1)/n} \quad (9)$$

Αν αυτή η ποσότητα μεταχειριστεί με τον ίδιο τρόπο όπως και το y της εξίσωσης (2), φαίνεται ότι είτε η επέκταση του $v^{1/n}$ είναι περιττή, είτε οι ποσότητες $v^{1/n}, S, S_2, ...$ μπορούν να εκφραστούν σαν ρητές συναρτήσεις των ριζών $y_1, ..., y_5$. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο ισχυρισμό προκύπτει το συμπέρασμα ότι όλες οι άρρητες ποσότητες που προκύπτουν στην έκφραση των ριζών y είναι ρητές συναρτήσεις αυτών των ριζών.

Αυτή ακριβώς είναι η υπόθεση από την οποία ξεκίνησε ο Ruffini στην απόδειξή του για την μη επιλυσιμότητα των εξισώσεων 5ου βαθμού και ο Abel απέδειξε πλήρως. Από το σημείο αυτό, ο Abel, ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσει όλα τα αποτελέσματα στα οποία είχαν καταλήξει οι Lagrange, Ruffini, και Cauchy. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποίησε το αποτέλεσμα του Cauchy σύμφωνα με το οποίο το πλήθος των τιμών που μπορεί να πάρει μια ρητή συνάρτηση δεν μπορεί να είναι 3 ή 4 που υπονοεί ότι ο αριθμός m μπορεί να είναι 2 ή 5 μόνο. Ο Abel διερευνά τις περιπτώσεις m=5 και m=2 ξεχωριστά και συμπεραίνει ότι και στις δύο περιπτώσεις η επίλυση της εξίσωσης 5ου βαθμού με ριζικά είναι αδύνατη.

Τέλος, ο Abel καταπιάστηκε και με μια συγκεκριμένη κλάση εξισώσεων οποιουδήποτε βαθμού που επιλύονται με χρήση ριζικών. Σε αυτήν την κλάση ανήκει και η κυκλοτομική εξίσωση $x^n-1=0$. Ο Abel απέδειξε το παρακάτω θεώρημα: Αν οι ρίζες μιας εξίσωσης είναι τέτοιες ώστε όλες οι ρίζες να μπορούν να εκφραστούν σαν ρητές συναρτήσεις μιας από αυτές, έστω της x, και αν οποιεσδήποτε 2 από τις ρίζες, έστω οι θx και $\theta_1 x$, $(\theta, \theta_1$ ρητές συναρτήσεις$)$ συνδέονται έτσι ώστε $\theta\theta_1 x=\theta_1\theta x$, τότε η εξίσωση μπορεί να λυθεί με ριζικά.

7.6 Gauss

Ο Gauss ήταν ο πρώτος που έδωσε την **πλήρη λύση της κυκλοτομικής εξίσωσης** $x^n-1=0 \quad (1)$ με χρήση ριζικών. Η εξίσωση αυτή λέγεται κυκλοτομική γιατί η λύση της συνδέεται με την κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών εγγεγραμμένου σε δοσμένο κύκλο. Αυτό φαίνεται εύκολα αν λάβουμε υπόψη μας ότι η (1) έχει n μιγαδικές ρίζες: $\cos(2\pi k/n)+i\cdot\sin(2\pi k/n)$ με $k=0,1,2,...,n-1 \quad (2)$.

Μέθοδος επίλυσης της $x^n-1=0$.

Στην αρχή της απόδειξής του, ([6], σελ.91-94), ο Gauss δείχνει ότι η γενική μορφή (1) μετασχηματίζεται στην ειδική περίπτωση στην οποία το **n** είναι **πρώτος** αριθμός, γράφοντας το n σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια η (1) διαιρείται με το x-1 και προκύπτει η εξίσωση

$$X=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=0 \quad (2)$$

Υποθέτοντας ότι το n είναι πρώτος αριθμός, ο Gauss αποδεικνύει πρώτα ότι το πολυώνυμο X είναι μη ανατάξιμο σε ρητή μορφή. Μετά γνωστοποιεί το βασικό του αποτέλεσμα: **εάν n-1 είναι ένα γινόμενο παραγόντων, $n-1=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\ldots$,η εξίσωση (1) μπορεί να λυθεί λύνοντας εξισώσεις α, β, γ,... βαθμού**. Για παράδειγμα εάν n=17 έχουμε

$$n-1=2^4 \quad ,$$

και έτσι η εξίσωση $x^{17}-1=0$ μπορεί να λυθεί λύνοντας 4 τετραγωνικές εξισώσεις, και έτσι το 17-γωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη το οποίο ο Gauss ήξερε από την ηλικία των 19 χρόνων. Γενικότερα, εάν το n-1 είναι δύναμη του 2, που συμβαίνει για

$$n=3,5,17,257,65537 \quad (3)$$

το κανονικό n-γωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη. Οι πρώτοι αριθμοί στην (3) ήταν γνωστοί στον Gauss.

Επιμένοντας στην υπόθεση ότι το n είναι περιττός, ο Gauss υποδηλώνει με r τις ρίζες της (2). Έτσι οι ρίζες είναι

$$r,r^2,\ldots,r^{n-1} \quad (4)$$

Δύο δυνάμεις r^λ και r^μ πολλαπλασιάζονται προσθέτοντας τους εκθέτες και ανάγοντας το άθροισμα σε $\lambda+\mu$ modulo n.

Ο Gauss στη συνέχεια τονίζει ότι κάθε ρητή συνάρτηση των ριζών μπορεί να γραφεί ως

$$A+A'r+A''r^2+\ldots+A^{(n-1)}r^{(n-1)} \quad (5)$$

Για να απλοποιηθεί η σημειογραφία, ο Gauss συμβολίζει με [λ] το r^λ . Επομένως οι ρίζες της (4) ξαναγράφονται

$$[1],[2],\ldots[n-1] \quad (6)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα που έχει αποδείξει ο Gauss: "Εάν το n είναι πρώτος, η πολλαπλασιαστική ομάδα των ακεραίων modulo n είναι κυκλική, δηλαδή υπάρχει ένα πρωταρχικό στοιχείο g τέτοιο ώστε όλοι οι εκθέτες που δεν διαιρούνται με το n είναι ισοδύναμοι με δυνάμεις του g", οι λύσεις στην (6) γράφονται

$$[1],[g],[g^2],\dots,[g^{n-2}] \quad (7)$$

Αυτή η ανακατανομή στο (7) είναι σημαντικό σημείο στην θεωρία του Gauss. Οι εκθέτες του g παίζουν τον ρόλο των λογαρίθμων: δύο δυνάμεις του g πολλαπλασιάζονται προσθέτοντας του εκθέτες τους (mod n-1).

Έστω e οποιοσδήποτε διαιρέτης του n-1. Θέτοντας

$$n-1=e\cdot f \quad \text{και} \quad g^e=h,$$

ο Gauss θεωρεί το σύνολο των ριζών

$$[\lambda],[\lambda\cdot h],[\lambda\cdot h^2],\dots,[\lambda\cdot h^{f-1}] \quad ,$$

όπου λ είναι ένας αυθαίρετος ακέραιος διάφορος του μηδενός (mod n), που σχηματίζει το άθροισμα

$$(f,\lambda)=[\lambda]+[\lambda\cdot h]+[\lambda\cdot h^2]+\dots+[\lambda\cdot h^{f-1}] \quad (8)$$

Αυτά τα αθροίσματα είναι ανεξάρτητα της επιλογής του g και ονομάζονται περίοδοι.

Ο Gauss αποσαφηνίζει την διαμόρφωση των περιόδων δουλεύοντας το παράδειγμα n=17. Σαν πρωταρχικό στοιχείο επιλέγει το g=3. Έτσι οι εκθέτες (mod 16) της μορφής (7)

$$i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15$$

δημιουργούν τις δυνάμεις του 3 (mod 17)

$$\mu=g^i=1,3,9,10,13,5,15,11,16,14,8,7,4,12,2,6$$

και στις ρίζες

$$[\mu]=r^\mu=r,r^3,r^9,r^{10},\dots,r^6 \quad .$$

Οι διαιρέτες του n-1 είναι

$$e=1,2,4,8,16$$

αντιστοιχίζοντας στα

$$f=16,8,4,2,1 \quad .$$

Υπάρχει μόνο μία περίοδος (16,1), δηλαδή το άθροισμα όλων τω ριζών.

Υπάρχουν δύο περίοδοι με f=8,

$$(8,1)=[1]+[9]+[13]+[15]+[16]+[8]+[4]+[2]$$

και

$$(8,3)=[3]+[10]+[5]+[11]+[14]+[7]+[12]+[6].$$

Υπάρχουν τέσσερις περίοδοι με f=4,

$$(4,1)\ ,\ (4,3)\ ,\ (4,9)\ ,\ (4,10).$$

Υπάρχουν οχτώ περίοδοι με f=2, όπως

$$(2,1)=[1]+[16]= r+\ r^{-1}\ ,$$

και υπάρχουν 16 περίοδοι με f=16, δηλαδή οι μονές ρίζες. Ο Gauss συμπεριλαμβάνει επίσης και την περίοδο (f,0) , που είναι ένα άθροισμα f μονάδων και επομένως ίσο με το f.

Ο Gauss αποδεικνύει ένα γενικό θεώρημα από το οποίο προκύπτει ότι ένα γινόμενο $(f,\lambda)\cdot(f,\mu)$ μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα περιόδων, συνεπώς:

$$(f,\lambda)\cdot(f,\mu)=(f,\lambda+\mu)+(f,\lambda'+\mu)+(f,\lambda''+\mu)+\ldots \quad (9)$$

Αν εφαρμοστεί ο τύπος (9) στο παράδειγμα για n=17 έχουμε: Το άθροισμα

$$(8,1) + (8,3)$$

είναι το άθροισμα όλων των ριζών και επομένως ίσο με το -1. Το γινόμενο

$$(8,1)\cdot(8,3)$$

υπολογίζεται από τον τύπο (9) και βγαίνει ίσο με -4. Επομένως τα (8,1) και (8,3) είναι οι ρίζες της τετραγωνικής εξίσωσης

$$y^2+y-4=0 \quad (10)$$

την οποία λύνοντας προκύπτουν τα (8,1) και (8,3). Εν συνεχεία υπολογίζονται τα (4,1) και (4,9) με την ίδια μέθοδο. Το άθροισμα τους είναι (8,1) και το γινόμενο -1, επομένως είναι ρίζες της τετραγωνικής εξίσωσης

$$x^2-(8,1)x-1=0 \quad (11)$$

Ομοίως, τα (4,3) και (4,10) είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-(8,3)x-1=0 \quad (12)$$

Με την ίδια μέθοδο, οι περίοδοι (2,λ) και τελικά οι ρίζες [μ] μπορούν να βρεθούν σαν ρίζες μιας τετραγωνικής εξίσωσης.

Στην γενική περίπτωση, πρέπει να παραγοντοποιηθεί το n-1

$$\mathbf{n-1=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\ldots}$$

και να **λυθούν εξισώσεις α, β, γ, ... βαθμού**. Ο Gauss αποδεικνύει ότι αυτές οι εξισώσεις λύνονται **με χρήση ριζικών**.

Η δεύτερη σημαντική συνεισφορά του Gauss στην θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων, μετά την επίλυση της κυκλοτομικής εξίσωσης, είναι η απόδειξη ότι κάθε **πολυώνυμο μίας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές είναι γινόμενο γραμμικών και τετραγωνικών παραγόντων**. Αυτό το θεώρημα υπονοεί στην ουσία αυτό που καλούμε σήμερα "Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας": Κάθε πολυώνυμο f(x) με μιγαδικούς συντελεστές είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συμβολογραφία του Gauss, κάθε αλγεβρική εξίσωση m βαθμού γράφεται σαν

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+M=0 \quad \text{ή} \quad X=0$$

Το "Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας" λέει ότι κάθε πολυώνυμο X με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε πρώτους παράγοντες στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Είναι αρκετό να αποδειχθεί το θεώρημα για πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, γιατί εάν το X έχει μιγαδικούς συντελεστές, το γινόμενο $X\cdot\bar{X}$ είναι πραγματικό, και η παραγοντοποίηση του υπονοεί την παραγοντοποίηση των παραγόντων X και $\bar{X}$. Επομένως ο Gauss είναι δικαιολογημένος να περιορίζεται σε πραγματικά πολυώνυμα X.

8. Η άλγεβρα του Galois.

Η μοντέρνα άλγεβρα ξεκινά με τον Evariste Galois (1811-1832). Πριν τον Galois, οι προσπάθειες των μαθηματικών στόχευαν στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Όπως είδαμε παραπάνω οι Scipione del Ferro, Tartaglia και Cardano έδειξαν πως λύνονται οι κυβικές εξισώσεις, ενώ ο Ferrari πέτυχε την επίλυση εξισώσεων 4ου Βαθμού. Το θεώρημα που απέδειξε ο Abel σχετικά με το πότε μια εξίσωση λύνεται με ριζικά είναι ειδική περίπτωση ενός βασικού θεωρήματος στη θεωρία Galois που λέει: Μια εξίσωση είναι επιλύσιμη με ριζικά αν και μόνο αν η ομάδα Galois του G είναι επιλύσιμη που συμβαίνει όταν το G κατέχει μια σειρά υποομάδων $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_m = E$ όπου όλοι οι εκθέτες είναι πρώτοι αριθμοί. Ο Gauss απέδειξε ότι η κυκλοτομική εξίσωση $x^n - 1 = 0$ μπορεί να επιλυθεί πλήρως με ριζικά και ότι κάθε αλγεβρική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί με μιγαδικούς αριθμούς $a + b \cdot i$. Ο Galois από την άλλη μελέτησε την δομή των σωμάτων και των ομάδων, και έδειξε ότι αυτές οι δύο δομές είναι στενά συνδεδεμένες. Αν κάποιος θέλει να ξέρει αν μια εξίσωση είναι επιλύσιμη με ριζικά πρέπει να αναλύσει την δομή της ομάδας Galois του. Παρακάτω θα δούμε τη δουλειά του Galois ([6], σελ.106-109), πάνω στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων με χρήση ριζικών με βάση το χρονικό που έστειλε ο Galois το 1831 στην Ακαδημία των Επιστημών του Παρισιού.

Ο Galois ξεκινά με την εξίσωση f(x)=0. Οι συντελεστές θεωρούνται γνωστοί, και μπορεί να είναι ρητοί ή άρρητοι αριθμοί ή απλώς γράμματα. Όλες οι ρητές συναρτήσεις των συντελεστών καλούνται ρητές. Μπορούν επίσης να επισυναφθούν άλλες ποσότητες, για παράδειγμα m-οστές ρίζες ρητών ποσοτήτων, και να θεωρηθούν ρητές υπό μία γενικότερη έννοια, όλες οι ρητές συναρτήσεις των ποσοτήτων αυτών λέει ο Galois. Σε μοντέρνα ορολογία θα λέγαμε ότι ένα συγκεκριμένο σώμα προκαθορίζεται και μπορεί να επεκταθεί με προσθήκες στο στάδιο της έρευνας. Εάν ένα πολυώνυμο f(x) μπορεί να παραγοντοποιηθεί χωρίς να αφήνει το σώμα, λέγεται ανατάξιμο αλλιώς ανάγωγο. Ο Galois θεωρεί ομάδες αντικαταστάσεων που ικανοποιούν την συνθήκη: εάν το S και το T ανήκουν στην ομάδα, τότε και το ST ανήκει και διατυπώνει το πρώτο του λήμμα

<u>Λήμμα 1</u>: Εάν ένα πολυώνυμο f έχει μια κοινή ρίζα με ένα ανάγωγο πολυώνυμο g, τότε το g διαιρεί το f.

Το λήμμα υπαινίσσεται ότι η επέκταση του σώματος K(V) που προέκυψε επισυνάπτοντας μια ρίζα V ενός ανάγωγου πολυωνύμου g(x), είναι πλήρως γνωστή

από τη στιγμή που το σώμα K και το πολυώνυμο g είναι γνωστά. Σε μοντέρνα ορολογία το σώμα K(V) είναι ισόμορφο με τον δακτύλιο υπόλοιπο κλάση $K[x]/(g)$. Εν συνεχεία αποδεικνύει το δεύτερό του λήμμα

<u>Λήμμα 2</u>: Εάν μια εξίσωση $g(x)$ δεν έχει πολλαπλές ρίζες και εάν a, b, c, … είναι οι ρίζες της, μπορεί πάντα να σχηματιστεί μια συνάρτηση V των ριζών έτσι ώστε όλες οι τιμές της V που προκύπτουν από μετάθεση των ριζών να είναι διαφορετικές.

Για παράδειγμα, θα μπορούμε να πάρουμε

$$V = Aa + Bb + Cc + \ldots \quad (1)$$

με κατάλληλα επιλεγμένους ακεραίους A, B, C, … σύμφωνα με τον Galois.

Από αυτό το λήμμα ο Galois συμπεραίνει μια ειδική περίπτωση αυτού που σύγχρονα καλούμε "Θεώρημα του Πρωταρχικού Στοιχείου" διατυπώνοντας το επόμενο λήμμα

<u>Λήμμα 3</u>: Εάν επιλέξουμε το V όπως στην (1), όλες οι ρίζες a, b, c, … εκφράζονται σαν ρητές συναρτήσεις του V.

Για να αποδείξει ο Galois το σημαντικότατο αυτό λήμμα θέτει

$$V = \varphi(a, b, c, \ldots)$$

και μεταθέτει τις ρίζες b, c, … με όλους τους πιθανούς τρόπους, κρατώντας σταθερή μόνο την ρίζα a και σχηματίζει το αποτέλεσμα

$$[V - \varphi(a, b, c, \ldots)] \cdot [V - \varphi(a, c, b, \ldots)] \cdot \ldots$$

Αυτή είναι μια συμμετρική συνάρτηση των b, c, … που είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$g(x)/(x - a)$$

επομένως μπορεί να εκφραστεί σαν ρητή συνάρτηση του a. Έτσι προκύπτει η εξίσωση

$$F(V, a) = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) και η εξίσωση

$$g(a)=0 \quad (3)$$

έχουν μόνο μία κοινή ρίζα α, γιατί δεν μπορεί να συμβεί για παράδειγμα το $F(V,b)$ να είναι μηδέν, λέει ο Galois.

Τώρα εάν δύο εξισώσεις όπως η (2) και (3) έχουν μόνο μία ρίζα α κοινή, αυτή η ρίζα μπορεί να υπολογιστεί ρητά. Επομένως η α είναι ρητή συνάρτηση του V.

Σε μοντέρνα ορολογία μπορούμε να γράψουμε

$$K(a,b,c,\ldots)=K(V) \quad (4)$$
$$K: \text{υποκείμενο σώμα}$$

Το πρωταρχικό στοιχείο V είναι η ρίζα μιας ανάγωγης εξίσωσης. Έστω

$$V, V', V'', \ldots, V^{(n-1)}$$

οι ρίζες αυτής της εξίσωσης. Το επόμενο λήμμα λέει

<u>Λήμμα 4</u>: Εάν $a=\varphi(V)$ είναι μια ρίζα της αρχικής εξίσωσης, φ(V') θα είναι επίσης μια ρίζα.

Ακολουθεί το βασικό θεώρημα

<u>Πρόταση 1</u>: Υπάρχει μια ομάδα μεταθέσεων των γραμμάτων a, b, c, … τέτοια ώστε

- Κάθε συνάρτηση των ριζών, αναλλοίωτη από τις μεταθέσεις της ομάδας, είναι ρητώς γνωστή.
- Αντιστρόφως, κάθε συνάρτηση των ριζών ρητώς γνωστή είναι αναλλοίωτη μέσα στην ομάδα.

Για να αποδείξει το θεώρημα αυτό ο Galois εκφράζει τις ρίζες σαν ρητές συναρτήσεις του V:

$$\varphi V, \varphi_1 V, \ldots, \varphi_{m-1} V$$

και μετά γράφει τις μεταθέσεις και

$$\begin{array}{llll} \varphi V, & \varphi_1 V, & \varphi_2 V, & \ldots, \varphi_{m-1} V \\ \varphi V', & \varphi_1 V', & \varphi_2 V', & \ldots, \varphi_{m-1} V' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi V^{(n-1)}, & \varphi_1 V^{(n-1)}, & \varphi_2 V^{(n-1)}, & \ldots, \varphi_{m-1} V^{(n-1)} \end{array}$$

δηλώνει ότι η ομάδα των μεταθέσεων ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες.

Εν συνεχεία ο Galois ερευνά πως η ομάδα της εξίσωσης αλλάζει όταν το ground σώμα επεκτείνεται με την προσθήκη μιας ρίζας ή όλων των ριζών μιας βοηθητικής εξίσωσης. Είναι ξεκάθαρο ότι μετά την προσθήκη η ομάδα Galois θα είναι μια υποομάδα H της αρχικής ομάδας G. Εάν H είναι μια κατάλληλη υποομάδα, το G μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$G = H + HS + HS' + \ldots \quad (5)$$

ή εναλλακτικά

$$G = H + TH + T'H + \ldots \quad (6)$$

Οι δύο αυτές αναλύσεις δεν συμπίπτουν πάντα, λέει ο Galois. Αν συμπίπτουν η ανάλυση καλείται "γνήσια". Σε μοντέρνα ορολογία, αυτή η περίπτωση είναι όταν η H είναι μία "αναλλοίωτη υποομάδα", ή "κανονικός διαιρέτης" της G. Πιο συγκεκριμένα

<u>Πρόταση 3</u>: Εάν όλες οι ρίζες μιας βοηθητικής εξίσωσης προστεθούν??, οι δύο αναλύσεις θα ταυτιστούν.

Στη συνέχεια ο Galois προσπαθεί να βρει λύση στο βασικό ερώτημά του, δηλαδή σε ποια περίπτωση λύνεται με ριζικά μια εξίσωση. Αν τεθεί ο περιορισμός για εξαγωγή ριζικών πρώτου βαθμού p, κάθε φορά που εξάγεται μια p-οστή ρίζα, ο Galois υποθέτει τις p-οστές ρίζες της μονάδας. Αυτός ο περιορισμός δεν είναι απαραίτητος επειδή ο Gauss έχει ήδη αποδείξει ότι οι p-οστές ρίζες της μονάδας μπορεί να εκφραστεί με ριζικά που έχουν βαθμό μικρότερο του p.

Υποθέτουμε ότι η επέκταση ενός ριζικού r, που είναι ρίζα μιας εξίσωσης

$$x^p - s = 0 \quad (7)$$

οδηγεί σε μια αναγωγή της ομάδας Galois. Επειδή οι p-οστές ρίζες της μονάδας

$$\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^p = 1$$

βρίσκονται στο υποκείμενο σώμα, η ίδια αναγωγή πραγματοποιείται προσθέτοντας όλες τις ρίζες της εξίσωσης (7). Από την πρόταση 3, η ανάλυση (5) θα είναι γνήσια που σημαίνει ότι η υποομάδα H είναι ένας κανονικός διαιρέτης. Ο Galois δήλωσε χωρίς να το αποδείξει, ότι το πλήθος των όρων στην ανάλυση (5) είναι ο πρώτος αριθμός p. Αντιστρόφως, εάν το G έχει έναν κανονικό διαιρέτη H πρώτου εκθέτη p, μπορεί να μειωθεί η Galois ομάδα στην υποομάδα H προσθέτοντας ένα ριζικό βαθμού p. Αυτό μπορούμε εμείς να το αποδείξουμε παίρνοντας μια συνάρτηση θ αναλλοίωτη στην υποομάδα H και σχηματίζοντας ένα "άθροισμα Lagrange"

$$z=\theta+\alpha\theta_1+\alpha^2\theta_2+\ldots+\alpha^{p-1}\theta_{p-1}$$

όπου το α είναι μια p ρίζα της μονάδας, ενώ $\theta_1,\theta_2,\ldots$ προκύπτουν από το θ από τις αντικαταστάσεις

$$S,S^2,\ldots,S^{p-1}$$

αντιπροσωπεύοντας τις ισοδυναμίες στην ανάλυση (5).

Μετά ακολουθεί ότι μια εξίσωση g(x)=0 είναι επιλύσιμη με ριζικά αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων

$$G\supset H_1\supset H_2\supset\ldots\supset H_m=E$$

τέτοια ώστε κάθε H_κ είναι κανονικός διαιρέτης του προηγούμενου $H_{\kappa-1}$ ή G, όταν όλοι οι εκθέτες είναι πρώτοι. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η ομάδα είναι επιλύσιμη.

Ο Galois στη συνέχεια υποθέτει ότι η εξίσωση f(x)=0 είναι ανάγωγη και πρώτου βαθμού n και αποδεικνύει ότι η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί με ριζικά εάν και μόνο αν κάθε μία από τις αντικαταστάσεις του G μετασχηματίζει το x_k στο x_k' μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού του k modulo n:

$$k'=ak+b(\mathrm{mod}\,n)$$

Για παράδειγμα η γενική εξίσωση 5ου βαθμού δεν είναι αυτής της μορφής και γιαυτό δεν είναι επιλύσιμη με ριζικά.

9.Διδακτικές προεκτάσεις

9.1 Συνέπειες της ιστορικής διάστασης της άλγεβρας στη διδασκαλία της.

Η ιστορία της άλγεβρας είναι πλούσια με πολλούς τρόπους. Το διδακτικό ερώτημα που τίθεται είναι *ποια είναι η χρησιμότητά οποιασδήποτε ιστορικής ανάλυσης στην διδασκαλία των μαθηματικών*. Όπως μπορούμε να καταλάβουμε και από τα ιστορικά παραδείγματα που έχουν παρουσιαστεί νωρίτερα στην παρούσα εργασία, η άλγεβρα χρειάστηκε ένα εξαιρετικά μεγάλο χρονικό διάστημα για να αναπτυχθεί, το οποίο υπολογίζεται να κατέχει διάστημα χιλιάδων ετών. Οι ερμηνείες συγκεκριμένων ιστορικών γεγονότων ποικίλλουν, αλλά από αυτό και μόνο μπορούμε να καταλάβουμε, αρχικά ότι συνολικά η ιστορική εξέλιξη ήταν σύνθετη, δυσδιάκριτη και μη διαισθητική και έπειτα ότι είναι λογικό να χρειαστεί ένα τέτοιο διάστημα ώστε να μπορέσουν να γεννηθούν και να ξεπεραστούν τόσες εξαιρετικά δύσκολες προκλήσεις όπως για παράδειγμα η επίλυση των κυβικών εξισώσεων. Αυτό ακριβώς μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε καλύτερα την πολυπλοκότητα των αλγεβρικών εννοιών και τις ανακαλύψεις που πραγματοποιήθηκαν κατά την δημιουργία τους.

Η εισαγωγή στην άλγεβρα μπορεί να γίνει μέσα από διάφορες κατευθύνσεις της διδασκαλίας. Μέσω μετασχηματισμών και επίλυση εξισώσεων, μέσω επίλυσης προβλημάτων ή συγκεκριμένης κατηγορίας προβλημάτων, μέσω της γενίκευσης των κανόνων που ορίζουν τους αριθμούς, μέσω των εννοιών της μεταβλητής και της συνάρτησης ή μέσω της μελέτης αλγεβρικών δομών. Άλλες κατευθύνσεις επικρατούν περισσότερο στα αναλυτικά προγράμματα και άλλες λιγότερο. Σύμφωνα με τους N. Bednarz, C. Kieran και L. Lee ([1] σελ. 3-12), η ιστορική ανάλυση μπορεί να βοηθήσει την απαρχή της αλγεβρικής διδασκαλίας και την καταλληλότητα των σχετιζομένων διδακτικών παρεμβάσεων, καθώς μας επιτρέπει:

- Να κατανοήσουμε καλύτερα τις προόδους, τα εμπόδια και τις καθυστερήσεις στην εξέλιξη ενός συστήματος γνώσεων.
- Να μελετήσουμε παρατηρήσιμα φαινόμενα των μαθηματικών που εμπεριέχουν ρήξεις ή αλλαγές σε μοντέλα και γλώσσες και καθιστούν δυνατή την κατανόηση των μαθησιακών δυσκολιών.
- Να αποκτήσουμε ένα πλαίσιο για την ανάλυση αυτών των καταστάσεων που οδήγησαν στην δημιουργία της αλγεβρικής γνώσης.

Πιο συγκεκριμένα, όπως είδαμε στην ιστορική ανάλυση που ξεκίνησε με την άλγεβρα των Βαβυλωνίων και την γεωμετρική σκοπιά των Αρχαίων Ελλήνων, υπάρχουν δεσμοί που ενώνουν την ανάπτυξη της άλγεβρας με αυτήν την γεωμετρίας. Έτσι παρόλο που είναι πιο εύκολο για εμάς να συνδέσουμε την στοιχειώδη άλγεβρα με την αριθμητική παρά με την γεωμετρία, η ιστορική αναδρομή μάλλον καταδεικνύει ότι η άλγεβρα αρχικά ξεκίνησε να χτίζεται πάνω σε γεωμετρικά θεμέλια. Για κάποια περίοδο, ειδικά την εποχή που βρίσκονταν στην ακμή τους τα Αραβικά μαθηματικά, αυτή ήταν η κατεύθυνση που φαινόταν ότι θα ακολουθήσει η ανάπτυξη της άλγεβρας και αυτή η πιθανότητα παρέμεινε ανοιχτή μέχρι την εποχή της Αναγέννησης. Σύμφωνα με τον D. Wheeler ([1] σελ.317-325) αυτή η ένδειξη προτείνει για κάποιους ότι το ξεκίνημα της άλγεβρας για τους μαθητές σήμερα, θα μπορούσε καταρχήν να ξεκινά από την γεωμετρική τους γνώση και την διαίσθηση αν και υπάρχει μικρή ένδειξη ότι αυτή η εναλλακτική προσέγγιση θα δούλευε πρακτικά σε ένα λεπτομερές διδακτικό πρόγραμμα καθώς θα προκαλούσε δραματική αποκοπή από την παιδαγωγική παράδοση και θα δημιουργούσε δυσκολίες προσαρμογής μέσα στο σύνολο του αναλυτικού προγράμματος. Η γεωμετρική αυτή προσέγγιση κατά τους N. Bednarz, C. Kieran και L. Lee ([1] σελ. 3-12) είναι πιθανός προάγγελος για την ανάδειξη της αναλυτικής σκέψης στην εκμάθηση της άλγεβρας και έχει το πλεονέκτημα να επανατοποθετεί σε ένα ευρύτερο περιεχόμενο τις ερωτήσεις που σχετίζονται με την ανάδειξη της άλγεβρας και κατασκευάζοντας την μη αμελητέα συμβολή της γεωμετρίας σε αυτήν την ανέλιξη.

Συνοψίζοντας, στο ερώτημα που τέθηκε ποιος μπορεί να είναι ο ρόλος που θα παίξει μια ιστορική ανάλυση στην σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών, θα μπορούσαμε να παραθέσουμε τα παρακάτω γενικά σημεία:

- Η ιστορική κατασκευή μαθηματικών ιδεών μπορεί να μας εφοδιάσει με μια πιο σαφή κατανόηση των τρόπων μέσω των οποίων οι μαθητές οικοδομούν την γνώση τους στα μαθηματικά
- Η επιστημολογία των μαθηματικών μπορεί να μας δώσει πληροφορίες που θα βοηθήσουν την βελτίωση των διδακτικών μεθόδων ([1] σελ.39-53)

Και πιο συγκεκριμένα να τεθούν τα παρακάτω ερωτήματα πάνω στην ιστορική ανάλυση που έγινε νωρίτερα:

- Θα αποτελούσε διδακτικό πλεονέκτημα να αναπτύξουμε συγκεκριμένα στοιχεία γεωμετρικών κατασκευών προς χρήση μέσα στην τάξη με σκοπό να διευκολύνουμε την απόκτηση των βασικών γεωμετρικών εννοιών;
- Θα ήταν διδακτικά αποτελεσματικό να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της δοκιμής και του λάθους πριν την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του

αγνώστου που χρησιμοποιείται σε εξισώσεις και λεκτικά προβλήματα;

- Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την αναλογική σκέψη σαν έναν χρήσιμο δεσμό με την αλγεβρική σκέψη;
- Μπορούν οι τρέχουσες διδακτικές μέθοδοι να εισάγουν μια κατάλληλη διάκριση μεταξύ της έννοιας του αγνώστου και της μεταβλητής, χρησιμοποιώντας τις ιστορικές ιδέες που παρουσιάστηκαν;

10.Βιβλιογραφία

- [1] Bednarz N. et al. (eds.), *"Approaches to Algebra"* Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996
- [2] Descartes Rene, *"The Geometry of Rene Descartes"*, μετάφραση David Eugene και Marcia L. Lantham, Dover, New York, 1954
- [3] Heath T., *"Euclid, The Thirteen Books of the Elements"* Τόμοι 3, Dover, New York, 1926
- [4] Neugebauer O., *"Mathematishe Keilschrift – Texte"*
- Τόμοι I, Berlin, Springer, 1935-1937
- [5] Thureau-Dangin F., *"Textes Mathematiques Babyloniens"* Leiden, Brill, 1938
- [6] Van de Waerden B.L., *"A History of Algebra"* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985
- [7] Van de Waerden B.L., *"Η αφύπνιση της επιστήμης"* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003

- [8] Εξαρχάκος Θεόδωρος Γ., *"Ιστορία των Μαθηματικών"* Τόμος Α', Αθήνα, 1997
- [9] Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., *"Ευκλείδη Στοιχεία"* Τόμος Ι, Αθήνα, 2001
- [10] Κοντογεώργης Π., *"Σχολιασμός του Βιβλίου VI των Στοιχείων σε συνδυασμό με τα Δεδομένα του Ευκλείδη"*, Τριμελής Επιτροπή: Στ. Νεγρεπόντης, Β.Φαρμάκη, Θ.Ζαχαριάδης
- [11] Νεγρεπόντης Στ., *"Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών-Στοιχεία του Ευκλείδη"* , Παραδόσεις μεταπτυχιακού μαθήματος. Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., 2008

11.Δικτυακοί τόποι

- [12] http://www.wikipedia.org/
- [13] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/