ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

ΑΝΤΩΝΗΣ ΤΣΙΓΩΝΙΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΡΑΠΤΗΣ

Αθήνα
Ιούλιος , 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών"

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1. Ράπτη Ευάγγελο (επιβλέπων Καθηγητής)	**Καθηγητής**	**……..……..…**
2. Λάππα Διονύσιο	**Αν. Καθηγητής**	**……..……..…….**
3. Βάρσο Δημήτριο	**Καθηγητής**	**…..……..…….**

Αφιερώνεται στον πατέρα μου

Σπύρο Τσιγώνια

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ……...…3

<u>ΜΕΡΟΣ 1:</u> ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- ✓ **ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ..….…….4**
- ✓ **ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ …….5-9**
- ✓ **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ…….…..10-17**
- ✓ **ΟΜΟΓΕΝΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ 3 ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ……17-22**

<u>ΜΕΡΟΣ 2:</u> ΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- ✓ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ……...……23**
- ✓ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ**

  (επίλυση , μεταβολές συντελεστών , πρόσημο ριζών)…….24-28
- ✓ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ……...….……..29**
- ✓ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΤΟΥ 2^{ου}**
  Παραγοντοποίηση-Σχ. Horner-Διώνυμες-Άθροισμα άρτιων δυνάμεων-
  Μετασχηματισμοί (Διτετράγωνες , Αντίστροφες)…….…..…...30-37
- ✓ **ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 3^{ου} , 4^{ου} ΒΑΘΜΟΥ…....37-42**
- ✓ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ**
  (Ρητές , Άρρητες)…….…….....42-45
- ✓ **ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ…….….…....46**

  Περίπτωση 1 : Ύπαρξη <u>ν τουλάχιστον</u> ριζών…….…….....47-62

  Περίπτωση 2 : Ύπαρξη <u>ν το πολύ</u> ριζών…….…….....62-67

  Περίπτωση 3 : Ύπαρξη <u>ν ακριβώς</u> ριζών……...67-71

  Περίπτωση 4 : Το <u>Πλήθος</u> των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης
  και η εύρεσή τους……...71-78

ΜΕΡΟΣ 3: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- ✓ **Γενικά…….……79-80**
- ✓ **Λύση Συστήματος με Αντίστροφο Πίνακα…….…….……80-81**
- ✓ **Λύση Συστήματος με Επαυξημένο Πίνακα (συστήματα νxν , ομογενή , νxμ με ν > μ , νxμ με ν < μ)…….……....82-87**
- ✓ **Λύση Συστήματος με Ορίζουσες (συστήματα νxν , νxμ με ν > μ , νxμ με ν < μ , ομογενή)……...……....88-100**
- ✓ **Λύση Συστήματος με παράμετρο – Απαλείφουσα Συστήματος……...101-104**
- ✓ **Λύση Συστήματος με ειδικές τεχνικές……104-108**

ΜΕΡΟΣ 4: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- ✓ **Σύστημα δυο Εξισώσεων 2ου βαθμού με έναν άγνωστο…….……109-112**
- ✓ **Σύστημα μιας Εξίσωσης 1ου βαθμού και μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με δυο αγνώστους (σχετική θέση ευθείας και κωνικής)……..……..113-118**
- ✓ **Σύστημα Εξισώσεων βαθμού ν με 1 άγνωστο (ν ≥ 2)…….….……119-120**
- ✓ **Σύστημα ν Εξισώσεων βαθμού ν με ν αγνώστους (ν ≥ 2)……...……..121-127**

ΜΕΡΟΣ 5: ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

- ✓ **1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ : ΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ (FUNCTION PROBE)…….……128-138**
- ✓ **2η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ : ΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (GEOGEBRA)……..139-153**

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΤΩΝ…….…….154-155

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…….……156-157

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική αυτή εργασία υλοποιήθηκε στα πλαίσια της απόκτησης του Μεταπτυχιακού Διπλώματος του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών ΄΄Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών΄΄ του Μαθηματικού τμήματος της σχολής θετικών επιστημών του Ε.Κ.Π.Α. Στόχος της , η παρουσίαση των πολυωνυμικών εξισώσεων και των συστημάτων αυτών καθώς επίσης και μια προσπάθεια παρουσίασης της διδασκαλίας τους με τη βοήθεια σχεδίων μαθήματος μέσω μαθηματικών λογισμικών στο χώρο διδασκαλίας.

Η εργασία αποτελείται από πέντε μέρη:
Στο πρώτο μέρος , παρουσιάζονται συνοπτικά η θεωρία πολυωνύμων και οι πολυωνυμικές εξισώσεις. Στο δεύτερο , δίνονται με λεπτομέρεια η λύση πολυωνυμικών εξισώσεων , το πλήθος και η ύπαρξη των ριζών τους. Στο τρίτο μέρος παρουσιάζονται τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων και οι δημοφιλέστεροι μέθοδοι επίλυσής τους , ενώ στο τέταρτο κεφάλαιο τα μη γραμμικά συστήματα.Το πέμπτο και τελευταίο μέρος περιέχει δυο σχέδια μαθήματος για τη διδασκαλία επίλυσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και ενός μη γραμμικού συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων. Όλα τα μέρη συνοδεύονται από τα απαραίτητα θεωρήματα , πορίσματα , ορισμούς και ιστορικά σημειώματα. Παρότι στην παρούσα εργασία , όπως είναι φυσικό , δεν μπορούν να καλυφθούν όλα τα είδη και όλες οι περιπτώσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων και των συστημάτων τους , εντούτοις γίνεται μια προσπάθεια λεπτομερούς παρουσίασής τους , στα πλαίσια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πιο συγκεκριμένα στο Γενικό Λύκειο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του Ε.Κ.Π.Α. , κ. Βάρσο Δημήτριο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Λάππα Διονύσιο τόσο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή , όσο και για τις συνεχείς προσπάθειες που καταβάλλουν τα τελευταία χρόνια προκειμένου η εκπαιδευτική διαδικασία του τμήματος να παραμείνει σε υψηλό επίπεδο. Ευχαριστώ όμως ιδιαίτερα τον Καθηγητή κ. Ράπτη Ευάγγελο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για τον πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσε.
Τόσο το περιεχόμενο του μαθήματος που διδάσκει όσο και οι συζητήσεις που είχαμε ήταν οδηγός στο παρόν εγχείρημα. Η αφοσίωσή του στο εκπαιδευτικό έργο και η διαθεσιμότητά του απέναντι στους φοιτητές είναι αξιέπαινη.
Ευχαριστώ επίσης τον καλό συνάδελφο και φίλο Νίκο Σιώμο για τη συνεργασία μας στο Γενικό Λύκειο Λαυρίου. Τέλος , θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα μου Σπύρο Τσιγώνια συνάδελφο και δάσκαλο των Μαθηματικών , για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε , την υποστήριξή του και τις συμβουλές του.

ΜΕΡΟΣ 1

ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

►ΓΕΝΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Παρακάτω δίνουμε την έννοια ενός πολυωνύμου $P(x)$ και της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$, όπως και ότι έχει σχέση με τη θεωρία των πολυωνύμων και των πολυωνυμικών εξισώσεων. Καταγράφεται ό,τι ισχύει για τα πολυώνυμα τα οποία ισχύουν και για τις πολυωνυμικές εξισώσεις.

Ορισμός: Ακέραιο πολυώνυμο (ή πιο απλά πολυώνυμο) μιας μεταβλητής , ονομάζεται κάθε έκφραση της μορφής $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$, όπου $\alpha_o,\alpha_1,...\alpha_\nu\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}$.

Ορισμός: Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ το εξισώσουμε με το 0 , έχουμε την **πολυωνυμική εξίσωση** $P(x)=0$, δηλαδή την $\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o=0}$, όπου $\alpha_o,\alpha_1,...\alpha_\nu\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις – Ορισμοί:

1. Βαθμός ενός πολυωνύμου ή μιας πολυωνυμικής εξίσωσης , λέγεται ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής x , της οποίας ο συντελεστής είναι μη μηδενικός.

2. Όταν αναφερόμαστε στη ΄΄μεταβλητή x΄΄ του πολυωνύμου , εννοούμε ένα σύνολο που αντιπροσωπεύει ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου αριθμών , πράγμα διαφορετικό από τον ΄΄άγνωστο x΄΄ μιας πολυωνυμικής εξίσωσης , όπου ο άγνωστος x έχει προσδιοριστέα τιμή.

3. Για το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$, έχουμε :

i) Αν ν = 0 , έχουμε το **σταθερό πολυώνυμο** $P(x)=\alpha_o$.
Επειδή $P(x)=\alpha_o=\alpha_o\cdot x^o$, το P είναι βαθμού 0.

ii) Αν όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι μηδέν , τότε το πολυώνυμο P λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο** ή **πολυώνυμο εκ ταυτότητος μηδέν** και γράφεται $P(x)\equiv 0$
Δηλαδή $P(x)\equiv 0\Leftrightarrow \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}=...=\alpha_1=\alpha_o=0$.
Για χάρη απλότητας , θα γράφουμε $P(x)=0$ για κάθε x.
Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

iii) Το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές , συμβολίζεται με $\mathbb{R}[x]$.

iv) Ένα πολυώνυμο λέγεται **ανηγμένο ,** όταν έχουν γίνει όλες οι πράξεις και οι αναγωγές ομοίων όρων.

v) Αν $\alpha_\nu=1$, τότε το πολυώνυμο ονομάζεται **μονικό**.

4. Δυο πολυώνυμα $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$, $Q(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\beta_1 x+\beta_o$ θα λέγονται **ίσα** , αν $\nu=\mu$ και $\alpha_\nu=\beta_\mu,\alpha_{\nu-1}=\beta_{\mu-1},...,\alpha_1=\beta_1,\alpha_o=\beta_o$.

►ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Α. Δακτύλιος πολυωνύμων $\left(\mathbb{R}[x],+,\cdot\right)$

1.i) Το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ είναι **κλειστό** ως προς την πρόσθεση , δηλαδή το άθροισμα δυο πολυωνύμων του $\mathbb{R}[x]$, είναι πολυώνυμο του $\mathbb{R}[x]$.

ii) Για την πρόσθεση πολυωνύμων ισχύει η **μεταθετική** και η **προσεταιριστική** ιδιότητα.

iii) Υπάρχει **ουδέτερο στοιχείο** ως προς την πρόσθεση , το μηδενικό πολυώνυμο $\varphi(x)=0$, αφού $f(x)+\varphi(x)=f(x)+0=f(x)$.

2.i) Το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ είναι **κλειστό** ως προς τον πολλαπλασιασμό , δηλαδή το γινόμενο δυο πολυωνύμων του $\mathbb{R}[x]$, είναι πολυώνυμο του $\mathbb{R}[x]$.

ii) Για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων ισχύει η **μεταθετική** και η **προσεταιριστική** ιδιότητα.

iii) Υπάρχει **ουδέτερο στοιχείο** ως προς τον πολλαπλασιασμό , το σταθερό πολυώνυμο $\varphi(x)=1$, αφού $f(x)\cdot\varphi(x)=f(x)\cdot 1=f(x)$.

3. Ισχύει η **επιμεριστική** ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Αν $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$ και $g(x)\neq 0$, τότε $f(x)\cdot g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$ και $g(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\beta_1 x+\beta_o\neq 0$.

$(\Rightarrow)$ Αν ήταν $f(x)\neq 0$, τότε $\alpha_\nu\neq 0$ και αφού $g(x)\neq 0$, θα είναι και $\beta_\mu\neq 0$ επομένως το γινόμενο $f(x)\cdot g(x)$ θα έχει όρο τον $\alpha_\nu\beta_\mu x^{\nu+\mu}$, με $\alpha_\nu,\beta_\mu\neq 0$.
Άρα $f(x)\cdot g(x)\neq 0$, που είναι άτοπο , αφού $f(x)\cdot g(x)=0$.Δηλαδή $f(x)=0$.

$(\Leftarrow)$ Αν $f(x)=0$, τότε θα είναι και $f(x)\cdot g(x)=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Αν $f(x),g(x),h(x)\in\mathbb{R}[x]$, και $h(x)\neq 0$, τότε $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έχουμε: $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x)=0\Leftrightarrow h(x)\cdot\left[f(x)-g(x)\right]=0\overset{\Theta.1}{\Leftrightarrow}$
$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$ τότε $f(x)\cdot g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ ή $g(x)=0$.

Ορισμός: Ο δακτύλιος πολυωνύμων και τα Θεωρήματα 1 και 2 , χαρακτηρίζουν το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ που ονομάζουμε ΄΄**ακέραια περιοχή**΄΄.

Β. Στοιχεία Διαιρετότητας

α. Τέλεια Διαίρεση

Ορισμός: Ένα πολυώνυμο $P(x)$ θα λέμε ότι **διαιρείται ακριβώς** από το πολυώνυμο $\varphi(x) \neq 0$, αν και μόνο αν υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x) \in \mathbb{R}[x]$, ώστε $P(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x)$.
Δηλαδή, $\boldsymbol{\varphi(x) / P(x) \Leftrightarrow \exists \pi(x) \in \mathbb{R}[x] : P(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Το μηδενικό πολυώνυμο διαιρείται ακριβώς από κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο, με πηλίκο μηδέν.

2. Κάθε πολυώνυμο, διαιρείται ακριβώς από κάθε σταθερό, μη μηδενικό πολυώνυμο, αφού

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = c \cdot \underbrace{\left(\frac{\alpha_\nu}{c} x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{c} x^{\nu-1} + \ldots + \frac{\alpha_1}{c} x + \frac{\alpha_o}{c} \right)}_{\pi(x)}, \ c \neq 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Αν $\varphi(x) / P(x)$, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $\pi(x) \in \mathbb{R}[x]$, ώστε $P(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ότι υπάρχει και δεύτερο πολυώνυμο $\pi'(x) \in \mathbb{R}[x]$, ώστε $P(x) = \varphi(x) \cdot \pi'(x)$ (1).
Ισχύει $\varphi(x) / P(x) \Rightarrow P(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x)$ (2).
Από τις (1),(2) είναι $\varphi(x) \cdot \pi'(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) \cdot [\pi'(x) - \pi(x)] = 0$ και αφού $\varphi(x) \neq 0$, θα είναι $\pi'(x) - \pi(x) = 0 \Leftrightarrow \pi'(x) = \pi(x)$, δηλαδή το $\pi(x)$ είναι μοναδικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Αν $\varphi(x), P(x), t(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $\varphi(x) / P(x) \Rightarrow \varphi(x) / P(x) \cdot t(x)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού $\varphi(x) / P(x) \Rightarrow P(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x) \Leftrightarrow P(x) \cdot t(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x) \cdot t(x) \Leftrightarrow P(x) \cdot t(x) = \varphi(x) \cdot h(x)$ όπου $h(x) = \pi(x) \cdot t(x)$. Άρα $\varphi(x) / P(x) \cdot t(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Αν $\left.\begin{array}{l}\varphi(x)/P_1(x)\\ \varphi(x)/P_2(x)\end{array}\right\}$, τότε : $\begin{array}{l}\text{i)}\ \varphi(x)/P_1(x)\pm P_2(x)\\ \text{ii)}\ \varphi(x)/P_1(x)\cdot P_2(x)\end{array}$.

<u>Απόδειξη:</u>

i) Αφού $\left.\begin{array}{l}\varphi(x)/P_1(x)\Rightarrow P_1(x)=\varphi(x)\cdot\pi_1(x)\\ \varphi(x)/P_2(x)\Rightarrow P_2(x)=\varphi(x)\cdot\pi_2(x)\end{array}\right\}\Rightarrow P_1(x)\pm P_2(x)=\varphi(x)\cdot\left[\pi_1(x)\pm\pi_2(x)\right]$,
που σημαίνει ότι $\varphi(x)/P_1(x)\pm P_2(x)$.

ii) Όμοια , $\left.\begin{array}{l}\varphi(x)/P_1(x)\Rightarrow P_1(x)=\varphi(x)\cdot\pi_1(x)\\ \varphi(x)/P_2(x)\Rightarrow P_2(x)=\varphi(x)\cdot\pi_2(x)\end{array}\right\}\Rightarrow P_1(x)\cdot P_2(x)=\varphi^2(x)\cdot\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)$,
που σημαίνει ότι $\varphi(x)/P_1(x)\cdot P_2(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Αν $\varphi(x)/P(x)$, τότε $\varphi(x)/P^{\nu}(x)$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

<u>Απόδειξη:</u>

Επαγωγή στο $\mathbb{N}^*$:
i) Για $\nu=1$, $\varphi(x)/P(x)$, που ισχύει.
ii) Για $\nu=\kappa$, δεχόμαστε ότι ισχύει $\varphi(x)/P^{\kappa}(x)$.
iii) Για $\nu=\kappa+1$, θα αποδείξουμε ότι $\varphi(x)/P^{\kappa+1}(x)$.
Πράγματι , $\varphi(x)/P^{\kappa+1}(x)\Leftrightarrow\varphi(x)/P^{\kappa}(x)\cdot P(x)$, που ισχύει λόγω του Θ.3 ii).
Άρα $\varphi(x)/P^{\nu}(x)$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: Αν $\varphi(x),P(x)\in\mathbb{R}[x]$, τότε: $\left.\begin{array}{l}\varphi(x)/P(x)\\ P(x)/\varphi(x)\end{array}\right\}\Rightarrow P(x)=c\cdot\varphi(x)$, $c\in\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού $\varphi(x)/P(x)\Rightarrow P(x)=\varphi(x)\cdot\pi_1(x)$ (1) και $P(x)/\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)=P(x)\cdot\pi_2(x)$ (2)
Η (1) λόγω της (2) , γράφεται $P(x)=P(x)\cdot\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)$ και επειδή $P(x)\neq 0$, θα είναι :
$\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)=1$ δηλαδή τα πολυώνυμα $\pi_1(x),\pi_2(x)$ πρέπει να είναι μηδενικού βαθμού , δηλαδή να είναι σταθερά πολυώνυμα. Η (1) δίνει : $P(x)=c_1\cdot\varphi(x)$ και η (2) δίνει
$\varphi(x)=c_2\cdot P(x)\Leftrightarrow\quad P(x)=\dfrac{1}{c_2}\varphi(x)$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $P(x)=c\cdot\varphi(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος , έχουμε: $\left.\begin{array}{l}\varphi(x)/P(x)\\ P(x)/\varphi(x)\end{array}\right\}\Rightarrow P(x)=c\cdot\varphi(x)$
και άρα $c\cdot\varphi(x)/P(x)$. Οι διαιρέτες $\varphi(x)$ και $c\cdot\varphi(x)$ με $c\neq 0$ είναι **ισοδύναμοι**.
Από όλους τους ισοδύναμους διαιρέτες του $P(x)$, αυτός που έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα , λέγεται **κύριος διαιρέτης.**

β. Ατελής διαίρεση

Έχουμε την **ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης** , που αποδεικνύεται στο παρακάτω :

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αλγοριθμική Διαίρεση

Για δυο πολυώνυμα $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$ βαθμού ν , μ αντίστοιχα , **υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα** $\pi(x), \upsilon(x) \in \mathbb{R}[x]$, για τα οποία είναι βαθμός $\upsilon(x) <$ βαθμός $\varphi(x)$ ώστε $\mathbf{f(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω τα πολυώνυμα : $\begin{array}{l} f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o \,, \alpha_o \neq 0 \\ \varphi(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_o \,, \beta_o \neq 0 \end{array}$

i) ΥΠΑΡΞΗ: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν ν < μ τότε το θεώρημα ισχύει και θα έχουμε $\pi(x) = 0$, $\upsilon(x) = f(x)$.
Δηλαδή $f(x) = \varphi(x) \cdot 0 + f(x)$.

β) Αν $\nu \geq \mu$ τότε διαιρώντας με τον μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha_\nu x^\nu$ του $f(x)$ με τον μεγιστοβάθμιο όρο $\beta_\mu x^\mu$ του $\varphi(x)$, έχουμε το μονώνυμο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} x^{\nu-\mu} = \pi_1(x)$. Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρέτη με το $\pi_1(x)$.Τότε $\varphi(x) \cdot \pi_1(x) = \alpha_\nu x^\nu + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} x^{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_o x^{\nu-\mu}$.

Τα πολυώνυμα $f(x)$ και $\varphi(x) \cdot \pi_1(x)$ έχουν τον ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha_\nu x^\nu$, οπότε

$$f(x) - \varphi(x) \cdot \pi_1(x) = \left(\alpha_{\nu-1} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} \right) x^{\nu-1} + \left(\alpha_{\nu-2} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \right) x^{\nu-2} + \ldots .$$

Αν θέσουμε $\left(\alpha_{\nu-1} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-1} \right) x^{\nu-1} + \left(\alpha_{\nu-2} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu} \beta_{\mu-2} \right) x^{\nu-2} + \ldots = \upsilon_1(x)$, έχουμε τελικά ότι

$f(x) - \varphi(x) \cdot \pi_1(x) = \upsilon_1(x) \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot \pi_1(x) + \upsilon_1(x)$, με βαθμό $\upsilon_1(x) \leq \nu - 1$.

- Αν $\nu - 1 < \mu$, ισχύει το θεώρημα.
- Αν $\nu - 1 \geq \mu$, εργαζόμαστε όμοια για τα $\upsilon_1(x), \varphi(x)$.

Επομένως , $\upsilon_1(x) = \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + \upsilon_2(x)$, με βαθμό $\upsilon_2(x) \leq$ βαθμό $\upsilon_1(x)$.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο , παίρνουμε τις ισότητες:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) \cdot \pi_1(x) + \upsilon_1(x) \\ \upsilon_1(x) = \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + \upsilon_2(x) \\ \upsilon_2(x) = \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + \upsilon_3(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_\kappa(x) = \varphi(x) \cdot \pi_{\kappa+1}(x) + \upsilon_{\kappa+1}(x) \\ \text{με βαθμό } \upsilon_{\kappa+1}(x) < \text{βαθμό } \varphi(x) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) = \varphi(x) \cdot \left[\pi_1(x) + \pi_2(x) + \ldots + \pi_{\kappa+1}(x) \right] + \upsilon_{\kappa+1}(x) .$$

Θέτουμε $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \ldots + \pi_{\kappa+1}(x) = \pi(x)$ και $\upsilon_{\kappa+1}(x) = \upsilon(x)$.
Έτσι , $f(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$ με βαθμό $\upsilon(x) <$ βαθμό $\varphi(x)$.

ii) ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ:

Ισχύει $f(x)=\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$ και έστω ότι $f(x)=\varphi(x)\cdot\pi'(x)+\upsilon'(x)$.
Τότε $\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)=\varphi(x)\cdot\pi'(x)+\upsilon'(x)\Leftrightarrow\varphi(x)\cdot\left[\pi(x)-\pi'(x)\right]=\upsilon'(x)-\upsilon(x)$.
Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $\left.\begin{matrix}\pi(x)-\pi'(x)=0\\ \upsilon(x)-\upsilon'(x)=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\pi(x)=\pi'(x)\\ \upsilon(x)=\upsilon'(x)\end{matrix}\right\}$,
που σημαίνει ότι τα πολυώνυμα $\pi(x),\upsilon(x)$, είναι μοναδικά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Η εύρεση των $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ λέγεται αλγοριθμική ή **Ευκλείδεια διαίρεση**.

2. Αν $\upsilon(x)=0$ τότε προκύπτει η ταυτότητα της τέλειας διαίρεσης.

3. Από τη σχέση $f(x)=\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$ έχουμε $f(x)-\upsilon(x)=\varphi(x)\cdot\pi(x)$,
που σημαίνει ότι $\varphi(x)/f(x)-\upsilon(x)$.

4. Ο βαθμός του πηλίκου ισούται με τη διαφορά των βαθμών του διαιρετέου και του διαιρέτη.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το διώνυμο $\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$, είναι $\upsilon=f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ισχύει $P(x)=(\alpha x+\beta)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$. Επειδή ο διαιρέτης είναι $1^{ου}$ βαθμού , το υπόλοιπο θα είναι μηδενικού βαθμού , δηλαδή σταθερός αριθμός υ. Άρα $P(x)=(\alpha x+\beta)\cdot\pi(x)+\upsilon$.
Για $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, έχουμε : $P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left[\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta\right]\cdot\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon=0\cdot\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon=\upsilon$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με $x-\alpha$ είναι $\upsilon=P(\alpha)$.

►ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός: Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης (ή ενός πολυωνύμου) , λέγεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει (ή το μηδενίζει).

Ισχύουν : **i)** Αν ρ ρίζα του $P(x)$, τότε $P(\rho)=0$.
ii) Αν $P(\rho)=0$, τότε ρ ρίζα του $P(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$, **αν και μόνο αν** το ρ είναι ρίζα του.

<u>Απόδειξη:</u>

($\Rightarrow$) Αν $x-\rho$ παράγοντας του $P(x)$ τότε θα έχουμε $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$, οπότε για $x=\rho$, είναι $P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0$, που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

($\Leftarrow$) Αν ρ είναι ρίζα του $P(x)$, τότε $P(\rho)=0$ οπότε η σχέση $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$, αφού $\upsilon=P(\rho)=0$, δίνει $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$, που σημαίνει ότι $x-\rho$ παράγοντας του $P(x)$.

ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ P(x)

ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ P(x) = 0

Για τις ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης (ή ενός πολυωνύμου) , ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με τα διώνυμα $x-\rho_1, x-\rho_2, ..., x-\rho_\nu$, όπου $\rho_1 \neq \rho_2 \neq ... \neq \rho_\nu \neq \rho_1$, τότε θα διαιρείται και με το γινόμενό τους $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot...\cdot(x-\rho_\nu)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ισχύουν $P(\rho_1)=0, P(\rho_2)=0, ..., P(\rho_\nu)=0$. Είναι $x-\rho_1 / P(x) \Rightarrow P(x)=(x-\rho_1)\pi_1(x)$ (1)
Για $x=\rho_2$ η (1) δίνει $P(\rho_2)=(\rho_2-\rho_1)\pi_1(\rho_2) \Leftrightarrow 0=(\rho_2-\rho_1)\pi_1(\rho_2) \Leftrightarrow \pi_1(\rho_2)=0$, οπότε
$x-\rho_2 / \pi_1(x) \Rightarrow \pi_1(x)=(x-\rho_2)\pi_2(x)$ και έτσι η (1) , δίνει $P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\pi_2(x)$.
Συνεχίζοντας έτσι για $x=\rho_3, ..., x=\rho_\nu$, τελικά παίρνουμε
$P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot...(x-\rho_\nu)\cdot\pi_\nu(x)$, που σημαίνει ότι $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot...\cdot(x-\rho_\nu) / P(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$ έχει ρίζες τις $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$, τότε το P(x) γράφεται στη μορφή $\alpha_\nu(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot...\cdot(x-\rho_\nu)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ ρίζες του $P(x)$, αυτό θα έχει παράγοντες τους $x-\rho_1,x-\rho_2,...,x-\rho_\nu$ και επομένως θα διαιρείται με το γινόμενό τους. Έτσι $P(x)=(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot...\cdot(x-\rho_\nu)\pi(x)$.
Στο 1° μέλος ο συντελεστής του x^ν είναι α_ν, οπότε στο 2° μέλος ο συντελεστής του x^ν πρέπει να είναι σταθερός αριθμός και έτσι $\pi(x)=\alpha_\nu$, που σημαίνει ότι
$P(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdot...\cdot(x-\rho_\nu)$.

Ορισμός: Μια ρίζα ρ ενός πολυωνύμου $P(x)$, λέγεται **πολλαπλή τάξης κ** ή **βαθμού πολλαπλότητας τάξης κ**, όταν ισχύει $P(x)=(x-\rho)^\kappa\cdot\varphi(x)$ και $\varphi(\rho)\neq 0$, $\kappa\in\mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Αν ρ είναι πολλαπλή ρίζα τάξης κ ενός πολυωνύμου $P(x)$, τότε **<u>υπάρχει ένα πολυώνυμο</u>** $\varphi(x)\neq 0$, ώστε $P(x)=(x-\rho)^\kappa\varphi(x)$, με $\varphi(\rho)\neq 0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού ρ πολλαπλή ρίζα τάξης κ του $P(x)$, δηλαδή $(x-\rho)^\kappa / P(x)$, υπάρχει πολυώνυμο $\varphi(x)\neq 0$, ώστε $P(x)=(x-\rho)^\kappa\varphi(x)$ (1). Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\varphi(\rho)\neq 0$. Αν ήταν $\varphi(\rho)=0$, τότε $(x-\rho)/\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)=(x-\rho)\pi(x)$, οπότε η (1) δίνει $P(x)=(x-\rho)^\kappa\cdot(x-\rho)\pi(x)\Leftrightarrow$ $P(x)=(x-\rho)^{\kappa+1}\pi(x)$, που σημαίνει ότι $(x-\rho)^{\kappa+1}/P(x)$ που είναι άτοπο. Άρα $\varphi(\rho)\neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με $x-\alpha$, το πολυώνυμο $P_1(x)$ διαιρείται με $x-\alpha$, το $P_2(x)$ διαιρείται με $x-\alpha$ κ.λ.π το $P_\nu(x)$ διαιρείται με $x-\alpha$, όπου τα $P_1,P_2,...,P_\nu$ είναι αντίστοιχα τα πηλίκα των διαιρέσεων $P(x):(x-\alpha),P_1(x):(x-\alpha),...,P_\nu(x):(x-\alpha)$, τότε το $P(x)$ διαιρείται με $(x-\alpha)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ισχύουν: $P(\alpha)=0,P_1(\alpha)=0,...,P_\nu(\alpha)=0$, έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}P(x)=(x-\alpha)P_1(x)\\ P_1(x)=(x-\alpha)P_2(x)\\ P_2(x)=(x-\alpha)P_3(x)\\ \dots\dots\dots\dots\\ P_{\nu-1}(x)=(x-\alpha)P_\nu(x)\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}P(x)=(x-\alpha)^\nu\cdot P_\nu(x)$$, άρα το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $(x-\alpha)^\nu$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6: Αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$ μηδενίζεται για $\nu+1$ τιμές διαφορετικές μεταξύ τους , τότε αυτό είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu,\rho_{\nu+1}$ οι $\nu+1$ διαφορετικές μεταξύ τους τιμές που μηδενίζουν το $P(x)$.
Άρα $P(x)=\alpha_\nu\left(x-\rho_1\right)\cdot\left(x-\rho_2\right)\cdot...\cdot\left(x-\rho_\nu\right)$ και για $x=\rho_{\nu+1}$ παίρνουμε:
$P(\rho_{\nu+1})=\alpha_\nu\left(\rho_{\nu+1}-\rho_1\right)\cdot\left(\rho_{\nu+1}-\rho_2\right)\cdot...\cdot\left(\rho_{\nu+1}-\rho_\nu\right)$ και αφού $P(\rho_{\nu+1})=0$ και $\rho_1\neq\rho_2\neq...\neq\rho_\nu\neq\rho_1$, θα είναι $\alpha_\nu=0$ δηλαδή $P(x)=\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο , φτάνουμε στο $\alpha_{\nu-1}=0$ και συνεχίζοντας έτσι , παίρνουμε $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}=...=\alpha_1=\alpha_o=0$, δηλαδή το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1:

Κάθε πολυώνυμο ν βαθμού , έχει ν το πολύ διαφορετικές (μιγαδικές) ρίζες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Κάθε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$ βαθμού $\nu\geq 1$, αναλύεται σε γινόμενο ν πρωτοβάθμιων παραγόντων , άρα έχει **το πολύ** ν διαφορετικές ρίζες.

Έστω ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τις $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu,\rho_\kappa$, με $\kappa\leq\nu$ και βαθμούς πολλαπλότητας $\mu_1,\mu_2,...,\mu_\kappa$ αντίστοιχα.
Άρα $P(x)=\alpha_\nu\left(x-\rho_1\right)^{\mu_1}\cdot\left(x-\rho_2\right)^{\mu_2}\cdot...\cdot\left(x-\rho_\kappa\right)^{\mu_\kappa}$, με $\mu_1+\mu_2+...+\mu_\kappa=\nu$.
Έτσι , κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $\nu\geq\kappa$ έχει κ διαφορετικές ρίζες $\kappa\leq\nu$ με βαθμούς πολλαπλότητας $\mu_1,\mu_2,...,\mu_\kappa$ αντίστοιχα , όπου $\mu_1+\mu_2+...+\mu_\kappa=\nu$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2: Αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$ μηδενίζεται για άπειρες τιμές του x , είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3: Αν δυο πολυώνυμα $P(x),Q(x)$ βαθμού ν παίρνουν τις ίδιες τιμές για ν + 1 διαφορετικές τιμές του x , τότε τα πολυώνυμα είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7: Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα την $\alpha+\sqrt{\beta}$, θα έχει ρίζα και την $\alpha-\sqrt{\beta}$, $\beta \neq 0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού $\varphi(x)=\left[x-\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)\right]\left[x-\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)\right]$ (1)

Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $\varphi(x)$, δίνει πηλίκο $\pi(x)$ και πρωτοβάθμιο υπόλοιπο $\gamma x+\delta$.

Άρα $P(x)=\varphi(x)\pi(x)+\gamma x+\delta$ (2).

Η (1) δίνει $\varphi\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)=0$, $\varphi\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)=0$, ενώ η (2) για $x=\alpha+\sqrt{\beta}$, γίνεται

$P\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)=\varphi\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)\pi\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)+\gamma\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)+\delta$ και επειδή $P\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)=0$, έχουμε :

$$0=0+\gamma\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)+\delta \Leftrightarrow \alpha\gamma+\delta+\gamma\sqrt{\beta}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\gamma+\delta=0\\ \gamma\sqrt{\beta}=0\end{cases} \overset{\beta\neq 0}{\Rightarrow} \gamma=0\ ,\ \delta=0\ .$$

Έτσι η (2) γίνεται : $P(x)=\varphi(x)\pi(x)$, η οποία με τη σειρά της για $x=\alpha-\sqrt{\beta}$, δίνει :

$P\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)=\varphi\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)\pi\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right) \Leftrightarrow P\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)=0$, αφού $\varphi\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)=0$.

Άρα $\alpha-\sqrt{\beta}$ ρίζα του $P(x)$.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΡΙΖΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ (Viete)

Έστω $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ ρίζες του πολυωνύμου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$, με $\alpha_\nu\neq 0$, θα έχουμε :

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o=\alpha_\nu\left(x-\rho_1\right)\cdot\left(x-\rho_2\right)\cdot...\cdot\left(x-\rho_\nu\right)\Leftrightarrow$$

$$x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}x^{\nu-1}+...+\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}x+\frac{\alpha_o}{\alpha_\nu}=\left(x-\rho_1\right)\cdot\left(x-\rho_2\right)\cdot...\cdot\left(x-\rho_\nu\right)$$

Από την ταυτότητα του Νεύτωνα στο 2ο μέλος , έχουμε :

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o=x^\nu-\left(\rho_1+\rho_2+...+\rho_\nu\right)x^{\nu-1}+\left(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+...+\rho_{\nu-1}\rho_\nu\right)x^{\nu-2}-...+\left(-1\right)^\nu\rho_1\rho_2\cdot...\cdot\rho_\nu$$

Έχουμε έτσι τους τύπους του Viete :

$$S_1=\rho_1+\rho_2+...+\rho_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}.$$

$$S_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+...+\rho_1\rho_\nu+\rho_2\rho_3+...\rho_2\rho_\nu+...+\rho_{\nu-1}\rho_\nu=\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}.$$

$$S_3=\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+...+\rho_1\rho_2\rho_\nu+...+\rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}.$$

.....

$$S_\nu=\rho_1\rho_2\cdot...\cdot\rho_\nu=\left(-1\right)^\nu\frac{\alpha_o}{\alpha_\nu}.$$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Francois Viete (1540 – 1603)

Γεννήθηκε στη Γαλλία και σπούδασε νομικά. Εργάστηκε ως δικηγόρος και μετά ως σύμβουλος της Βρεττάνης. Συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων με μεθόδους και πορίσματα μεγάλης αξίας. Δεν απέκτησε ποτέ καθηγητική έδρα.

Στο έργο του , φαίνεται καθαρά η επίδραση του **Διόφαντου** και του **Cardano**.
Οι υπολογιστικές μέθοδοί του , αξιοποιήθηκαν και στην Αστρονομία. Στο θέμα αυτό , αφιέρωσε μεγάλο μέρος των δυνάμεών του γιατί όπως υποστήριζε , η Αστρονομία αποτελεί τη μέγιστη δόξα των Μαθηματικών.

Η ενασχόλησή του με την Τριγωνομετρία και τις κυκλικές συναρτήσεις , τον οδήγησαν στο να ασχοληθεί με τον τετραγωνισμό του κύκλου , όπως και με τον υπολογισμό του π , όπου πέτυχε την αξιοσημείωτη προσέγγισή του 3,1415926536.

Έργα του Viete:

- ✓ ΄΄Εισαγωγή στην αναλυτική επιστήμη΄΄ , όπου θέτει τα θεμέλια της Άλγεβρας.
- ✓ ΄΄Πρότερα μορφολογικής Λογιστικής΄΄ , φυσική προέκταση του προηγούμενου έργου.
- ✓ ΄΄Ζητητικά΄΄ , 5 βιβλία όπου αναφέρονται οι μέθοδοι του πρώτου του έργου.

Μετά το θάνατο του Viete και με βάση τις σημειώσεις του , γράφτηκαν και τυπώθηκαν τα έργα :

- ✓ ΄΄Περί αναγνωρίσεως των εξισώσεων΄΄.
- ✓ ΄΄Περί μετασχηματισμού των εξισώσεων΄΄.
- ✓ ΄΄Μέθοδοι προσέγγισης των ριζών των αριθμητικών εξισώσεων οποιουδήποτε βαθμού΄΄.
- ✓ ΄΄Γεωμετρικών κατασκευών κανονική απογραφή΄΄.
- ✓ ΄΄Συμπλήρωμα Γεωμετρίας΄΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

D ’ ALEMBERT-GAUSS

ΚΑΘΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΒΑΘΜΟΥ ν ΕΧΕΙ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ , ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Στο παραπάνω θεώρημα , είναι $\nu \geq 1$.

2. Όπως θα εξετάσουμε παρακάτω , σχετικά με την ύπαρξη της λύσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης στο $\mathbb{R}$, ισχύουν :

΄΄ Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού , έχει <u>μια τουλάχιστον ρίζα</u> στο $\mathbb{R}$ ΄΄

΄΄ Κάθε πολυωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού , έχει <u>ν το πολύ ρίζες</u> στο $\mathbb{R}$ ΄΄

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Jean Le Rond D' Alembert (1717 – 1783)

Γεννήθηκε στη Γαλλία και σπούδασε Νομικά , όμως δεν ασχολήθηκε πότε με τη δικηγορία. Ασχολήθηκε με τις μελέτες του και έγινε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών. Προσκλήθηκε στις αυλές της Ευρώπης , αλλά αρνήθηκε.

Έργα του D' Alembert:

- ΄΄Πρόλογος΄΄ περίφημο έργο που τον έκανε ευρέως γνωστό και μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας.
- Εγγραφή μεγάλου αριθμού άρθρων στη διάσημη ΄΄Μεθοδική Εγκυκλοπαίδεια΄΄.
- ΄΄Πραγματεία Δυναμικής΄΄ , σύγγραμμα που τον έφερε στην κορυφή της δόξας.
- Μεγάλη θεωρείται η προσφορά του για τη διατύπωση και απόδειξη της θεμελιώδους πρότασης της θεωρίας των αλγεβρικών εξισώσεων.
- Ασχολήθηκε πρώτος με συστήματα διαφορικών εξισώσεων και έδειξε ότι μπορούν να ολοκληρωθούν ορισμένες συναρτησιακές εξισώσεις.
- Στη θεωρία των παλλόμενων χορδών , έδωσε πλήρως ικανοποιητικό περιεχόμενο , εκφράζοντάς την με διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων.

Το ΘΕΩΡΗΜΑ D ΄ ALEMBERT , λέγεται και **θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας** και διατυπώθηκε από τον **D ΄ Allembert** το 1764, χωρίς όμως αυστηρή απόδειξη. Η πρώτη αυστηρή απόδειξη έγινε από τους **Gauss** και **Cauchy.** Το θεώρημα αυτό , εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας πολυωνυμικής εξίσωσης , δεν δίνει όμως μέθοδο εύρεσης της ρίζας. Οι μέθοδοι για την εύρεση των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης , είναι η εύρεση γενικών τύπων με τους οποίους οι ρίζες της εξίσωσης εκφράζονται από παραστάσεις των συντελεστών της εξίσωσης. Αποδεικνύεται ότι έχουμε τύπους για εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού (**Μέθοδος Cardano**).
Ο **Abel** απέδειξε το 1824 ότι δεν είναι δυνατόν να βρεθούν γενικοί τύποι για εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του $4^{ου}$.

Το 1831 ο Ιταλός μαθηματικός και γιατρός **Πάολο Ρουφίνι** (Paolo Ruffini) απέδειξε οριστικά ότι μια γενική αλγεβρική εξίσωση τέταρτου βαθμού και πάνω, δεν ήταν επιλύσιμη μέσω ριζικών, δηλαδή μέσω της κατασκευής των τιμών των λύσεων, ξεκινώντας από τους συντελεστές και ύστερα από μια σειρά πράξεων, να φτάσει κανείς στην εξαγωγή της ρίζας.

Ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός **Εβαρίστ Γκαλουά** διαισθάνθηκε ιδιοφυώς την οδό μέσω της οποίας μπορούσε να διευκρινιστεί το πρόβλημα της γενικής επιλυσιμότητας εξισώσεων και επίσης διατύπωσε ορθά τις τρεις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας , δηλαδή :

1. Της ομάδας μεταθέσεων (που σήμερα καλείται ομάδα του Γκαλουά).

2. Της κανονικής υποομάδας.

3. Της επιλύσιμης ομάδας.

Όμως αυτό δεν σημαίνει πως ήταν σε θέση να τις διατυπώσει με πλήρη και αυστηρό τρόπο. Η ολοκληρωμένη και τυπικώς ορθή ανασύνθεση της θεωρίας του Γκαλουά έγινε το 1862 από τον μαθηματικό **Ενρίκο Μπέτι** (Enrico Betti).Μέχρι την εποχή εκείνη αιωρούνταν – θεμιτή με τη στενή έννοια - η υποψία πως η θεωρία ήταν ασύστατη και αστήρικτη και ότι το πρόβλημα που αντιμετώπισε ο Γκαλουά ήταν άλυτο , ακριβώς όπως και το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Στην ίδια κατηγορία θα μπορούσε να ανήκει και το πρόβλημα για τη γενική επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων. Έθετε τέτοια προβλήματα υπολογισμού - όσο αυξανόταν ο αριθμός των εξισώσεων - ώστε κανείς δεν μπορούσε να πει αν υπήρχε ένα θεωρητικό εμπόδιο που καθιστούσε κατ' αρχήν αδύνατο τον καθορισμό του εάν και κάτω από ποιες συνθήκες είναι γενικώς επιλύσιμη μια εξίσωση. Σήμερα , ακριβώς χάρη στις εργασίες του Γκαλουά , ξέρουμε πως αυτό το εμπόδιο δεν υπάρχει , ότι η δυσκολία του προβλήματος ήταν ουσιαστικά πρακτική και συνίστατο στους άπειρους και περίπλοκους υπολογισμούς που έπρεπε ν' αντιμετωπίσει κανείς , αν ακολουθούσε την παραδοσιακή προσέγγιση. Στη διάρκεια τριών περίπου αιώνων , πριν από την εποχή του Γκαλουά , οι μαθηματικοί δεν είχαν κατορθώσει να σημειώσουν καμιά πρόοδο σε αυτόν τον τομέα. Ας έχουμε υπόψη μας ότι πρόκειται για εξισώσεις αλγεβρικές , που πρέπει να επιλυθούν με τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής (πρόσθεση , αφαίρεση , πολλαπλασιασμό και διαίρεση) , συν την εξαγωγή της ρίζας. Οι εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού είχαν ήδη επιλυθεί από την εποχή των Βαβυλωνίων , που είχαν προσδιορίσει ότι για την πρωτοβάθμια εξίσωση αρκούν οι τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις , ενώ η επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης απαιτεί την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας μιας συνάρτησης των συντελεστών της. Όλα έδειχναν πως η επίλυση μιας εξίσωσης νιοστού βαθμού δεν απαιτούσε πράξεις πιο περίπλοκες από την εξαγωγή νιοστών ριζών.

Κανένας όμως δεν μπόρεσε ποτέ να αποδείξει (όσο κι αν η απόδειξή του δεν είχε τύχει γενικής αποδοχής , μέχρι που την επιβεβαίωσε ο **Άμπελ** το 1824) ότι μια γενική αλγεβρική εξίσωση βαθμού ανώτερου του τέταρτου δεν επιλύεται μέσω ριζικών. Αυτό όμως δεν σήμαινε πως είχαν φτάσει σε ένα τελεσίδικο όριο. Πράγματι , το θεώρημα Ρουφίνι–Άμπελ ισχύει μόνο για τις γενικές αλγεβρικές εξισώσεις , όταν δηλαδή οι συντελεστές της εξίσωσης είναι γενικοί , αλλά δεν ισχύει για ειδικές εξισώσεις. Ήταν γνωστό πως υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων πέμπτου ή και ανώτερου βαθμού που λύνονται μέσω τεχνασμάτων τα οποία επιτρέπουν τον υποβιβασμό σε τέταρτο ή και ακόμα πιο κάτω. Με δυο λόγια , δεν υπήρχε ένα κριτήριο που θα επέτρεπε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν μια εξίσωση πέμπτου ή και ανώτερου βαθμού μπορούσε ή όχι να λυθεί μέσω ριζικών. Μια αρκετά διαδεδομένη άποψη οδηγούσε τον ενδιαφερόμενο να πιστέψει ότι κατά κανόνα ήταν αδύνατον , και πως οι σποραδικά εντοπισμένες λύσεις για εξισώσεις πέμπτου ή και εβδόμου βαθμού ήταν μάλλον ασήμαντες εξαιρέσεις. Το αποτέλεσμα που πέτυχαν οι Ρουφίνι και Αμπέλ , έμοιαζε να ενισχύει την πεποίθηση αυτή.

Η σημασία της θεωρίας του Γκαλουά έγκειται στο γεγονός ότι κατάφερε να εντοπίσει οριστικά κριτήρια για το αν οι λύσεις μιας δεδομένης εξίσωσης μπορούσαν ή όχι να αναζητηθούν μέσω ριζικών. Κατάφερε δηλαδή να προσδιορίσει τις γενικές συνθήκες για την επιλυσιμότητα ή μη των εξισώσεων.

Για να φτάσει στο αποτέλεσμα αυτό , ο Γκαλουά ακολούθησε μια ιδιοφυή οδό:
Αντί να επιχειρήσει να αντιμετωπίσει τη λύση των εξισώσεων του ενός ή του άλλου βαθμού , επινόησε μια γενική θεωρία ομάδων εξισώσεων βασισμένη σε πράξεις μετάθεσης μεταξύ των συντελεστών των ίδιων των εξισώσεων. Ομαδοποίησε όλες τις εξισώσεις που προκύπτουν από διαφορετικούς συνδυασμούς των ίδιων συντελεστών. Άλλωστε , η θεωρία προβλέπει – και επιτρέπει - την ανάλυση των υποομάδων , που μπορούμε κατά κάποιον τρόπο να τη συγκρίνουμε με τη διαδοχική «αποσύνθεση» μιας ρώσικης μπαμπούσκας : μέσα από τον προοδευτικό μηδενισμό των συντελεστών φτάνουμε σε μια ελάχιστη εξίσωση , που να είναι το πολύ τέταρτου βαθμού , δηλαδή ασφαλώς επιλύσιμη. Εντέλει , ξεκινώντας απ' αυτή την εξίσωση προσπαθούμε να κάνουμε αναγωγή στην κύρια ομάδα. Επιχειρούμε δηλαδή να αποδείξουμε πως η κύρια ομάδα μπορεί να σχηματισθεί με αφετηρία την εξίσωση αυτή. Αν πετύχει το εγχείρημα , τότε η εξίσωση νιοστού βαθμού (όπου ν μεγαλύτερο του 4) είναι επιλύσιμη , δηλαδή ανάγεται σε εξισώσεις που μπορούν να λυθούν μέσω εξαγωγής ρίζας. Όταν όμως δεν είναι δυνατόν να αναχθούμε από την επιλύσιμη υποομάδα στην κύρια ομάδα , η εξίσωση δεν είναι γενικά επιλύσιμη. Η ιδέα ήταν επαναστατική και δίχως άλλο , θα πρέπει να φάνηκε ενδιαφέρουσα με την πρώτη ματιά ακόμα και στον Πουασόν , αλλά μέχρι να αποδειχτεί η θεωρία σε όλα της τα σημεία , δεν επιτρεπόταν να την αποδεχτούν. Οφείλουμε να θυμίσουμε ότι , σε πρώτη φάση , τόσο ο Άμπελ όσο και ο Γκαλουά ήταν βέβαιοι πως είχαν αποδείξει τη γενική - μέσω ριζικών - επιλυσιμότητα των εξισώσεων πέμπτου βαθμού , που κατόπιν αποδείχθηκε αδύνατη.

►ΟΜΟΓΕΝΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ 3 ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ορισμός: Ακέραιο πολυώνυμο τριών μεταβλητών x , y , z , λέγεται κάθε άθροισμα ακέραιων μονωνύμων των x , y , z (δυο τουλάχιστον ανόμοια) :

$$\mathbf{f(x,y,z) = \alpha_1 x^{\kappa_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{\kappa_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \ldots + \alpha_\nu x^{\kappa_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu}},$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ και $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{N}$, με $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όπως στα πολυώνυμα $P(x)$ μιας μεταβλητής , έτσι και στα πολυώνυμα $f(x,y,z)$ τριων μεταβλητών ισχύουν:

1. Αν $\left.\begin{array}{c} f(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z)=0 \\ \text{και} \\ \varphi(x,y,z)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y,z)=0.$

2. Αν $\left.\begin{array}{c} f(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z)=g(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z) \\ \text{και} \\ \varphi(x,y,z)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y,z)=f(x,y,z).$

Διαιρετότητα πολυωνύμων τριών μεταβλητών

Ορισμός: Ένα πολυώνυμο $f(x,y,z)$ διαιρείται με το $\varphi(x,y,z)\neq 0$, αν υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x,y,z)$ τέτοιο ώστε $f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)\cdot\pi(x,y,z)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Αν το πολυώνυμο $f(x,y,z)$ διαιρείται με $x-y$, τότε $f(y,y,z)=0$ και αντίστροφα.

<u>Απόδειξη:</u>

$(\Rightarrow)$ Έστω $\pi(x,y,z)$ το πηλίκο της διαίρεσης $f(x,y,z):(x-y)$. Τότε $f(x,y,z)=(x-y)\cdot\pi(x,y,z)$, οπότε για $x=y$, παίρνουμε: $f(y,y,z)=(y-y)\cdot\pi(y,y,z)\Leftrightarrow f(y,y,z)=0$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $f(y,y,z)=0$ (1).

Για τη διαίρεση $f(x,y,z):(x-y)$ θα έχουμε ένα πηλίκο $\pi(y,y,z)$ και υπόλοιπο μηδενικού βαθμού ως προς x, $\upsilon(y,z)$ οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:

$f(x,y,z)=(x-y)\cdot\pi(x,y,z)+\upsilon(y,z)$ (2).

Για $x=y$ η (2) γίνεται : $f(y,y,z)=(y-y)\cdot\pi(y,y,z)+\upsilon(y,z)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\upsilon(y,z)=0$.

Άρα η (2) δίνει $f(x,y,z)=(x-y)\cdot\pi(x,y,z)\Rightarrow(x-y)/f(x,y,z)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Αν το πολυώνυμο $f(x,y,z)$ διαιρείται με τα $x-y$, $y-z$, $z-x$, τότε θα διαιρείται και με το γινόμενό τους $(x-y)\cdot(y-z)\cdot(z-x)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού $(x-y)/f(x,y,z)\Rightarrow f(x,y,z)=(x-y)\pi(x,y,z)$ (1)

Για $y=z$, η (1) γίνεται: $f(x,z,z)=(x-z)\cdot\pi_1(x,z,z)$ (2)

Επειδή $(y-z)/f(x,y,z)\Rightarrow f(x,z,z)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}\pi_1(x,z,z)=0$. Άρα $(y-z)/\pi_1(x,z,z)$,

που σημαίνει ότι $\pi_1(x,z,z)=(y-z)\cdot\pi_2(x,y,z)$ (3), και έτσι η (1) λόγω της (3) δίνει

$f(x,y,z)=(x-y)(y-z)\pi_2(x,y,z)$ (4)

Για $z=x$, η (4) γίνεται $f(x,y,x)=(x-y)(y-x)\pi_2(x,y,x)$ (5)

Επειδή $(z-x)/f(x,y,z)\Rightarrow f(x,y,x)=0\overset{(5)}{\Rightarrow}\pi_2(x,y,x)=0$.

Αφού $\pi_2(x,y,x)=0\Leftrightarrow(z-x)/\pi_2(x,y,z)$.

Έτσι $\pi_2(x,y,z)=0\Leftrightarrow(z-x)/\pi(x,y,z)$ (6)

Οπότε η (4) λόγω της (6), δίνει $f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)\pi(x,y,z)$.

Άρα $(x-y)(y-z)(z-x)/f(x,y,z)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν το πολυώνυμο $f(x,y,z)$ διαιρείται με :

i) Τα $x+y, y+z, z+x$, τότε θα διαιρείται και με το $(x+y)(y+z)(z+x)$.

ii) Τα x, y, z τότε θα διαιρείται και με το xyz.

iii) Τα $x+y-z, y+z-x, z+x-y$, τότε θα διαιρείται και με το $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

Ορισμοί:

1. Ένα πολυώνυμο $P(x,y,z)$ ονομάζεται **ομογενές** , αν όλοι οι όροι του έχουν τον ίδιο βαθμό ως προς x , y , z.

2. Ένα πολυώνυμο $P(x,y,z)$ ονομάζεται **ομογενές βαθμού ν** , αν $P(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\nu}\cdot P(x,y,z)$ με $\lambda, z, y, z \neq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Το γινόμενο δυο ομογενών πολυωνύμων , είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού ίσου με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω τα ομογενή πολυώνυμα $f(x,y,z),\varphi(x,y,z)$ με βαθμό ομοιογένειας ν , μ αντίστοιχα , τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\nu}\cdot f(x,y,z) \\ \varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\mu}\cdot\varphi(x,y,z)\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow} f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\nu+\mu} f(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z)$$

Δηλαδή το γινόμενο είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού ν + μ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το γινόμενο ενός ομογενούς και ενός μη ομογενούς πολυωνύμου , είναι πολυώνυμο μη ομογενές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης δυο ομογενών πολυωνύμων , είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού ίσου με τη διαφορά των βαθμών των πολυωνύμων.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω τα πολυώνυμα $f(x,y,z),\varphi(x,y,z)$ με βαθμούς ομοιογένειας ν , μ (ν > μ) αντίστοιχα.

Είναι $\left.\begin{array}{l} f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\nu}\cdot f(x,y,z) \\ \varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\mu}\cdot\varphi(x,y,z)\end{array}\right\}$ και $f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)\cdot\pi(x,y,z)\Leftrightarrow\pi(x,y,z)=\dfrac{f(x,y,z)}{\varphi(x,y,z)}$ (1)

Επίσης , $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\Leftrightarrow\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\dfrac{f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)}{\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)}\Rightarrow$

$\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\nu-\mu}\cdot\dfrac{f(x,y,z)}{\varphi(x,y,z)}$ (2)

Από τις (1) , (2) $\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{\nu-\mu}\cdot\pi(x,y,z)$ δηλαδή το πηλίκο είναι ομογενές πολυώνυμο με βαθμό ν – μ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το άθροισμα και η διαφορά δυο ομογενών πολυωνύμων , **δεν είναι πάντα** ομογενές πολυώνυμο.

Ορισμός 1 : Ένα πολυώνυμο $f(x,y,z)$ λέγεται **συμμετρικό** , όταν με οποιαδήποτε μετάθεση [(1)] των μεταβλητών του , προκύπτει πολυώνυμο ίσο με το αρχικό.

Ορισμός 2: Ένα πολυώνυμο $f(x,y,z)$ λέγεται **κυκλικά συμμετρικό** , όταν με οποιαδήποτε **κυκλική μετάθεση** [(2)] των μεταβλητών του , προκύπτει πολυώνυμο ίσο με το αρχικό.

Για παράδειγμα , τα πολυώνυμα $P(x,y,z)=x+y+z$ και $Q(x,y,z)=xy+xz+yz$ είναι συμμετρικά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Είναι φανερό ότι κάθε συμμετρικό πολυώνυμο , είναι και κυκλικά συμμετρικό.
Το αντίστροφο δεν ισχύει.

2. Στην περίπτωση πολυωνύμων δυο μεταβλητών , οι δυο παραπάνω έννοιες , ταυτίζονται.

[(1)] **Μετάθεση** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ για την οποία ισχύει
$$p(n)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}.$$

[(2)] **Κυκλική μετάθεση** , ονομάζουμε κάθε μετάθεση της μορφής $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Το άθροισμα , η διαφορά και το γινόμενο δυο συμμετρικών πολυωνύμων , είναι πάντα συμμετρικό πολυώνυμο.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω τα συμμετρικά πολυώνυμα $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$.
Ισχύει $f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)=t(x,y,z)$ (1)
Για οποιαδήποτε μετάθεση των x , y , z π.χ την $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$, είναι $f(y,z,x)+\varphi(y,z,x)=t(y,z,x)$ (2)
Όμως f , φ συμμετρικά πολυώνυμα , δηλαδή $f(x,y,z)=f(y,z,x)$ και $\varphi(x,y,z)=\varphi(y,z,x)$
οπότε από τις (1) και (2) παίρνουμε $t(x,y,z)=t(y,z,x)$, δηλαδή το άθροισμα t ,
είναι συμμετρικό πολυώνυμο. Όμοια εργαζόμαστε και για τις άλλες δυο περιπτώσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης δυο συμμετρικών πολυωνύμων με ίδιες μεταβλητές , είναι συμμετρικό πολυώνυμο.

Απόδειξη:

Έστω τα συμμετρικά πολυώνυμα $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z) \neq 0$ και το πηλίκο $\pi(x,y,z)$ της διαίρεσης $f(x,y,z):\varphi(x,y,z)$.Τότε η ταυτότητά της , δίνει : $f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)\cdot\pi(x,y,z)$ (1)

Για οποιαδήποτε μετάθεση των x , y , z π.χ την $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$, είναι $f(y,z,x)=\varphi(y,z,x)\cdot\pi(y,z,x)$ (2)

Όμως τα f , φ είναι συμμετρικά πολυώνυμα , δηλαδή $f(x,y,z)=f(y,z,x)$ και $\varphi(x,y,z)=\varphi(y,z,x)$ οπότε από τις (1) και (2) παίρνουμε $\pi(x,y,z)=\pi(y,z,x)$, δηλαδή το πηλίκο π , είναι συμμετρικό πολυώνυμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Αν το συμμετρικό πολυώνυμο $f(x,y)$ διαιρείται με το $x-y$, τότε θα διαιρείται και με το $(x-y)^2$.

Απόδειξη:

Αφού $(x-y)/f(x,y)$, θα είναι $f(x,y)=(x-y)\cdot\pi(x,y)$ (1).

Με εναλλαγή των γραμμάτων x , y έχουμε $f(y,x)=(y-x)\cdot\pi(y,x)$ (2).

Όμως f συμμετρικό πολυώνυμο , δηλαδή $f(x,y)=f(y,x)$, οπότε από τις (1) , (2) , έχουμε:

$(x-y)\cdot\pi(x,y)=(y-x)\cdot\pi(y,x) \Leftrightarrow (x-y)\cdot\left[\pi(x,y)+\pi(y,x)\right]=0 \overset{x-y\neq 0}{\Leftrightarrow} \pi(x,y)+\pi(y,x)$ και για $x=y$, $\pi(y,y)+\pi(y,y)=0 \Leftrightarrow \pi(y,y)=0 \Rightarrow (x-y)/\pi(x,y) \Rightarrow \pi(x,y)=(x-y)\cdot\varphi(x,y)$.

Έτσι , η (1) γίνεται $f(x,y)=(x-y)^2\cdot\varphi(x,y)$ που σημαίνει ότι το $(x-y)^2$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x,y)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Αν το συμμετρικό πολυώνυμο $f(x,y,z)$ διαιρείται με το $\varphi(x,y,z) \neq 0$ (όχι κατ' ανάγκη συμμετρικό) , τότε θα διαιρείται και με οποιοδήποτε πολυώνυμο που προκύπτει από το $\varphi(x,y,z)$, με οποιαδήποτε μετάθεση των μεταβλητών του.

Απόδειξη:

Αφού $\varphi(x,y,z)/f(x,y,z)$, θα έχουμε $f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)\cdot\pi(x,y,z)$ (1)

Μια τυχαία μετάθεση των x , y , z είναι η $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$, οπότε έχουμε:

$f(y,x,z)=\varphi(y,x,z)\cdot\pi(y,x,z)$ (2)

Όμως f συμμετρικό πολυώνυμο , δηλαδή $f(x,y,z)=f(y,x,z)$, οπότε η (2) , γίνεται :

$f(x,y,z)=\varphi(y,x,z)\cdot\pi(y,x,z)$, απ' όπου $\varphi(y,x,z)/f(x,y,z)$.

Όμοια δείχνουμε ότι το $f(x,y,z)$ διαιρείται με κάθε άλλο πολυώνυμο που προκύπτει από το $\varphi(x,y,z)$, με οποιαδήποτε άλλη μετάθεση των x , y , z.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Όλα τα παραπάνω που αναφέρονται στα συμμετρικά πολυώνυμα , ισχύουν και στα κυκλικά συμμετρικά πολυώνυμα.

2. Ένα πολυώνυμο , μπορεί να είναι ομογενές χωρίς να είναι συγχρόνως και κυκλικά συμμετρικό και αντίστροφα ένα πολυώνυμο , μπορεί να είναι κυκλικά συμμετρικό χωρίς να είναι συγχρόνως ομογενές. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που ένα πολυώνυμο είναι **ομογενές και κυκλικά συμμετρικό** που προκύπτει από ένα κυκλικά συμμετρικό πολυώνυμο αν παραλειφθούν οι όροι που ΄΄καταστρέφουν΄΄ την ομογένεια.

Τα μοναδικά ομογενή και συμμετρικά κυκλικά πολυώνυμα , ανάλογα με το βαθμό τους , είναι:

$1^{ου}$ βαθμού : $\alpha\left(x+y+z\right)$, με $\alpha \neq 0$.

$2^{ου}$ βαθμού : $\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)+\beta\left(xy+yz+zx\right)$, με α , $\beta \neq 0$.

$3^{ου}$ βαθμού : $\alpha\left(x^3+y^3+z^3\right)+\beta\left(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\right)+\gamma xyz$, με α , β , $\gamma \neq 0$.

ΜΕΡΟΣ 2

ΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

►ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ αx + β = 0

Έστω η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $\alpha\neq 0$, τότε $\alpha x+\beta=0\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει **μοναδική ρίζα** , την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha=0$, τότε $\alpha x+\beta=0\Leftrightarrow 0\cdot x=-\beta$ (1)

  i) Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη , δηλαδή δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

  ii) Αν $\beta=0$, τότε η (1) , δίνει $0\cdot x=0$ και η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
  (**Αόριστη ή ταυτότητα**)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι **παραμετρικές πρωτοβάθμιες εξισώσεις** , όπου διερευνούμε για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου την εξίσωση , μετατρέποντάς την στη μορφή $\alpha x=-\beta$ όπου τα α , β είναι σε μορφή γινομένου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να διερευνηθεί , για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $\lambda^2(x-1)+1=\lambda x$.

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση γράφεται $\lambda(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$ (1)

- Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε η (1) έχει μοναδική λύση , την $x=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}\Leftrightarrow x=\frac{\lambda+1}{\lambda}$.
- Αν $\lambda(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$

  i) Αν $\lambda=0$ η (1) δίνει $0x=-1$ που είναι αδύνατη.

  ii) Αν $\lambda=1$ η (1) δίνει $0x=0$ που είναι αόριστη.

►ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Ορισμός: Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, λέγεται **εξίσωση 2ου βαθμού** με άγνωστο τον x.

Ελλειπείς μορφές εξισώσεων 2ου βαθμού :

1. $\alpha x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (διπλή ρίζα)

2. $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

3. $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\gamma}{\alpha} > 0 \ (\alpha \cdot \gamma < 0)$, τότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες αντίθετες : $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.
- Αν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow -\frac{\gamma}{\alpha} < 0 \ (\alpha \cdot \gamma > 0)$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Πλήρης μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Η παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ συμβολίζεται με **Δ** και ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ , χαρακτηρίζει το είδος των ριζών της εξίσωσης.

i) Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει δυο ίσες ρίζες (μια διπλή ρίζα) στο $\mathbb{R}$, τις $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$.

iii) Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$, τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Για το είδος των ριζών μιας εξίσωσης 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η εξίσωση να έχει δυο **ρίζες ρητές** , είναι $\Delta = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 : Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η εξίσωση να έχει δυο **ρίζες άρρητες** της μορφής $\kappa \pm \sqrt{\lambda}$, είναι $\Delta > 0$ με $\Delta \neq \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 : Ικανή συνθήκη ώστε η εξίσωση να έχει δυο **ρίζες πραγματικές και άνισες** , είναι $\alpha \cdot \gamma < 0$.

Η συνθήκη δεν είναι αναγκαία , δηλαδή αν $\Delta > 0$, δεν προκύπτει πάντα ότι $\alpha \cdot \gamma < 0$.
Για παράδειγμα , η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει $\Delta = 4 > 0$, ενώ $\alpha \cdot \gamma = 3 > 0$.

Λύση Εξίσωσης 2ου βαθμού :

Για να βρούμε τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, κάνουμε πράξεις , ώστε να φτάσουμε στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, βρίσκουμε τη διακρίνουσα Δ και τις ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να λυθεί η εξίσωση $x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x+\sqrt{3}=0$.

<u>Λύση:</u>

Είναι $\Delta=\left[-\left(\sqrt{3}+1\right)\right]^2-4\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2-4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, οπότε

$$\rho_{1,2}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\pm\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\begin{cases}\rho_1=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\sqrt{3}\\ \rho_2=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=1\end{cases}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Να λυθεί η εξίσωση $x^2-\dfrac{\alpha\beta}{4}=\dfrac{\alpha-\beta}{2}x$.

<u>Λύση:</u>

$x^2-\dfrac{\alpha\beta}{4}=\dfrac{\alpha-\beta}{2}x\Leftrightarrow 4x^2-2\left(\alpha-\beta\right)x-\alpha\beta=0$.

Είναι $\Delta=\left[-2\left(\alpha-\beta\right)\right]^2-4\cdot 4\cdot\left(-\alpha\beta\right)=4\left(\alpha-\beta\right)^2+16\alpha\beta=4\left(\alpha+\beta\right)^2$.

$$\rho_{1,2}=\frac{2\left(\alpha-\beta\right)\pm 2\left(\alpha+\beta\right)}{8}=\begin{cases}\rho_1=\dfrac{\left(\alpha-\beta\right)+\left(\alpha+\beta\right)}{4}=\dfrac{\alpha}{2}\\ \rho_2=\dfrac{\left(\alpha-\beta\right)-\left(\alpha+\beta\right)}{4}=-\dfrac{\beta}{2}\end{cases}.$$

Μεταβολές των συντελεστών και συνέπειες στις ρίζες :

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ (1) με ρίζες $\rho_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $\rho_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

1. Αν πολλαπλασιάσουμε τους συντελεστές της (1) με $\lambda\neq 0$, έχουμε την εξίσωση :
$\lambda\alpha x^2+\lambda\beta x+\lambda\gamma=0$, η οποία είναι ισοδύναμη με την (1) , **οπότε έχουν τις ίδιες ρίζες**.

2. Αν αλλάξουμε το πρόσημο του β στην (1) , έχουμε την εξίσωση $\alpha x^2-\beta x+\gamma=0$ η οποία έχει ρίζες $x_1=\dfrac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\rho_2$, $x_2=\dfrac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\rho_1$ δηλαδή :
οι ρίζες x_1 , x_2 είναι αντίθετες των ριζών ρ_1 , ρ_2 της (1).

3. Αν αλλάξουμε τα α , γ μεταξύ τους στην εξίσωση (1) , προκύπτει η $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$,

η οποία έχει ρίζες $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\gamma}$, $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\gamma}$ οπότε :

$x_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\gamma} \cdot \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{(-\beta)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4\alpha\gamma} = \dfrac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha\gamma} = \dfrac{4\alpha\gamma}{4\alpha\gamma} = 1$ και όμοια $x_2 \cdot \rho_1 = 1$

δηλαδή **οι ρίζες x_1 , x_2 είναι αντίστροφες των ριζών ρ_1 , ρ_2** της (1).

4. Αν αλλάξουμε τα α , γ μεταξύ τους και το πρόσημο στην εξίσωση (1) , προκύπτει η εξίσωση $\gamma x^2 - \beta x + \alpha = 0$ η οποία λόγω των **2.** και **3.** έχει ρίζες $x_1 = -\dfrac{1}{\rho_2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{\rho_1}$

δηλαδή **οι ρίζες x_1 , x_2 είναι αντίθετα αντίστροφες των ριζών ρ_1 , ρ_2** της (1).

5. Αν πολλαπλασιάσουμε το β με $\lambda \neq 0$ και το γ με $\lambda^2 \neq 0$ στην εξίσωση (1) , προκύπτει η εξίσωση $\alpha x^2 + \lambda\beta x + \lambda^2\gamma = 0$ που έχει ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\lambda\beta \pm \sqrt{\lambda^2\beta^2 - 4\lambda^2\alpha\gamma}}{2\alpha} = \lambda \cdot \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \lambda \cdot \rho_{1,2}$

δηλαδή **οι ρίζες x_1 , x_2 είναι πολλαπλάσιες κατά λ των ριζών ρ_1 , ρ_2** της (1).

6. Αν πολλαπλασιάσουμε το β με $\lambda \neq 0$ και το α με $\lambda^2 \neq 0$ στην εξίσωση (1) , προκύπτει η εξίσωση $\lambda^2\alpha x^2 + \lambda\beta x + \gamma = 0$ που έχει ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\lambda\beta \pm \sqrt{\lambda^2\beta^2 - 4\lambda^2\alpha\gamma}}{2\lambda^2\alpha} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \rho_{1,2}$

δηλαδή **οι ρίζες x_1 , x_2 είναι πολλαπλάσιες κατά 1/ λ των ριζών ρ_1 , ρ_2** της (1).

7. Αν πολλαπλασιάσουμε το α με $\lambda \neq 0$ και διαιρέσουμε το γ με $\lambda \neq 0$ στην εξίσωση (1) , προκύπτει η εξίσωση $\lambda\alpha x^2 + \beta x + \dfrac{1}{\lambda}\gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda^2\alpha x^2 + \lambda\beta x + \gamma = 0$, δηλαδή έχουμε την **περίπτωση 6.**

8. Αν διαιρέσουμε το α με $\lambda \neq 0$ και πολλαπλασιάσουμε το γ με $\lambda \neq 0$ στην εξίσωση (1) , προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{1}{\lambda}\alpha x^2 + \beta x + \lambda\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + \lambda\beta x + \lambda^2\gamma = 0$, δηλαδή έχουμε την **περίπτωση 5.**

Πρόσημο των ριζών :

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (1) σε ότι αφορά το πρόσημο των ριζών της. Συμπεράσματα για την εξίσωση (1) , βγαίνουν από τις σχέσεις

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, $\boxed{S = \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}}$, $\boxed{P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$ **(Τύποι Viete)** , χωρίς την επίλυση της εξίσωσης.

Έτσι , έχουμε :

1. Δ > 0 $\Rightarrow \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 \neq \rho_2$

- **P > 0** $\Rightarrow \rho_1, \rho_2$ **ετερόσημες.**

  S > 0 $\Rightarrow \rho_1, \rho_2 > 0$
  S = 0 Αδύνατο
  S < 0 $\Rightarrow \rho_1, \rho_2 < 0$

- **P = 0** $\Rightarrow \rho_1 = 0$ ή $\rho_2 = 0$

  S > 0 $\Rightarrow \rho_1 = 0$, $\rho_2 > 0$
  S = 0 Αδύνατο
  S < 0 $\Rightarrow \rho_1 < 0$, $\rho_2 = 0$

- **P < 0** $\Rightarrow \rho_1, \rho_2$ **ετερόσημες** με $\rho_1 < 0$, $\rho_2 > 0$

  S > 0 $\Rightarrow |\rho_2| > |\rho_1|$
  S = 0 $\Rightarrow \rho_1, \rho_2$ **αντίθετες.**
  S < 0 $\Rightarrow |\rho_1| > |\rho_2|$

2. Δ = 0 $\Rightarrow \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 = \rho_2$

S > 0 $\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 > 0$
S = 0 $\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 0$
S < 0 $\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 < 0$

3. Δ < 0 Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για τις ασκήσεις σε διερευνητικές διαδικασίες , έχουμε δυο ζητήματα :

α) Αν ζητάμε το **είδος των ριζών της εξίσωσης** , υπολογίζουμε μόνο το πρόσημο του Δ.

β) Αν ζητάμε το **πρόσημο των ριζών της εξίσωσης** , υπολογίζουμε τα πρόσημα των Δ , P , S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να βρεθεί το είδος των ριζών της εξίσωσης

$$(\beta-\gamma-\alpha)x^2+2\gamma x+(\alpha-\beta-\gamma)=0 \text{ με } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \text{ και } \beta-\gamma\neq\alpha.$$

<u>Λύση:</u>

$$\Delta=(-2\gamma)^2-4(\beta-\gamma-\alpha)(\alpha-\beta-\gamma)=4\gamma^2-4\left[\gamma+(\alpha-\beta)\right]\left[\gamma-(\alpha-\beta)\right]=4\gamma^2-4\left[\gamma^2-(\alpha-\beta)^2\right]=$$

$=4(\alpha-\beta)^2\geq 0$. Άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες και ειδικότερα ,

i) Αν $\alpha\neq\beta\Rightarrow\Delta>0$ οι ρίζες είναι άνισες.

ii) Αν $\alpha=\beta\Rightarrow\Delta=0$ οι ρίζες είναι ίσες με $\rho_1=\rho_2=\dfrac{2\gamma}{2(\beta-\gamma-\alpha)}\overset{\alpha=\beta}{=}\dfrac{2\gamma}{-2\gamma}=-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Να βρεθεί το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

<u>Λύση:</u>

Είναι $\Delta=\left[-(\lambda+1)\right]^2-4\lambda^2=(\lambda-1)^2\geq 0$, $P=\lambda^2>0$ και $S=\lambda^2+1>0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $\lambda\neq\pm1$, $\Delta>0$, $P>0$, $S>0$ οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές , άνισες , ομόσημες και θετικές.
- Αν $\lambda=\pm1$, $\Delta=0$, $P>0$, $S>0$ οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές , ίσες και θετικές.

►ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ

ΘΕΜΑ 1 : Αν η εξίσωση είναι **κλασματική** , πρέπει πρώτα να βρούμε το σύνολο στο οποίο ορίζεται η εξίσωση , ώστε να έχουμε τους πιθανούς περιορισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$.

<u>Λύση:</u>

$\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$.

Το Ε.Κ.Π της εξίσωσης είναι το $x(x-1)$ και πρέπει $x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 1$.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε

$x(3x-1)-3(x-1)=2x^2+x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, με Δ = 4 οπότε

$$\rho_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\rho_1=3 \text{ (Δεκτή)}\\ \rho_2=1 \text{ (Απορρίπτεται)}\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 : Αν η εξίσωση **έχει απόλυτες τιμές** , προσδιορίζουμε το πρόσημο των παραστάσεων που είναι στα απόλυτα , ώστε διακρίνοντας περιπτώσεις για τις τιμές του x , να προκύπτει σε κάθε περίπτωση εξίσωση χωρίς απόλυτα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση $2x^2-3\sqrt{1-2x+x^2}+x+2=0$

<u>Λύση:</u>

$2x^2-3\sqrt{1-2x+x^2}+x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2-3\sqrt{(1-x)^2}+x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2-3|1-x|+x+2=0$ (1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$, τότε η (1) γίνεται $2x^2-3(1-x)+x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+4x-1=0$,

  απ'όπου $\rho_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{4}<1$. (Δεκτές)

- Αν $1-x<0 \Leftrightarrow x>1$, τότε η (1) γίνεται $2x^2+3(1-x)+x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+5=0$,

  με $\Delta=-36<0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

►ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΤΟΥ 2^{ου}

Ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης κάθε φορά διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

Περίπτωση 1 : Εξισώσεις που λύνονται με παραγοντοποίηση

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα : Α · Β · Γ · … = 0 ⇔ Α = 0 ή Β = 0 ή Γ = 0 …

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

<u>Λύση:</u>

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 - 7x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) - 7x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = 1 \text{ ή } x = 4 \end{cases}$$

Περίπτωση 2 : Εξισώσεις που λύνονται με Σχήμα Horner

Από τη θεωρία πολυωνύμων , χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα (ρητών ριζών) :

ΘΕΩΡΗΜΑ : Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$ με **ακέραιους συντελεστές** έχει λύση το **ανάγωγο κλάσμα κ / λ , δηλαδή (κ , λ) = 1** , τότε :
Το κ είναι διαιρέτης του α_o και το λ είναι διαιρέτης του α_ν.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού το $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι λύση της εξίσωσης , θα έχουμε :

$$\alpha_\nu \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^\nu + \alpha_{\nu-1}\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \frac{\kappa}{\lambda} + \alpha_o = 0 \Leftrightarrow \alpha_\nu \kappa^\nu + \alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}\lambda + \ldots + \alpha_1 \kappa \lambda^{\nu-1} + \alpha_o \lambda^\nu = 0 \quad (1)$$

Από την (1) , έχουμε $\kappa\left(\alpha_\nu \kappa^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-2}\lambda + \ldots + \alpha_1 \lambda^{\nu-1}\right) = -\alpha_o \lambda^\nu$ και επειδή το κ διαιρεί το 1° μέλος θα διαιρεί και το 2° μέλος , δηλαδή $\kappa / -\alpha_o \lambda^\nu$ και αφού (κ , λ) = 1 , θα έχουμε ότι κ / α_o .
Από την (1) , επίσης θα έχουμε $\alpha_\nu \kappa^\nu = -\lambda\left(\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda^{\nu-2}\kappa + \alpha_o \lambda^{\nu-1}\right)$ και επειδή το λ διαιρεί το 2° μέλος θα διαιρεί και το 1° μέλος , δηλαδή $\lambda / \alpha_\nu \kappa^\nu$ και αφού (κ , λ) = 1 , θα έχουμε ότι λ / α_ν .

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση με το σχήμα Horner , κάνουμε τα εξής:

- Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου α_o .
- Βρίσκουμε τους διαιρέτες του μεγιστοβάθμιου όρου α_ν .
- Σχηματίζουμε όλα τα ανάγωγα κλάσματα $\frac{\kappa}{\lambda}$ που είναι πιθανές ρίζες της εξίσωσης.
- Παραγοντοποιούμε με το σχήμα Horner και λύνουμε την εξίσωση.

∗ Το σχήμα Horner , ουσιαστικά εκτελεί τη διαίρεση $P(x):(x-\rho)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $2x^3+13x^2+13x-10=0$. **(*)**

<u>Λύση:</u>

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_o=-10$ είναι : ±1 , ±2 , ±5 , ±10
Οι διαιρέτες του μεγιστοβάθμιου όρου $\alpha_3=2$ είναι : ±1 , ±2

Πιθανές ρίζες της εξίσωσης είναι τα ανάγωγα κλάσματα ±1 , ±2 , ±5 , ±10 , $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$.

2	13	13	–10	$\rho=\frac{1}{2}$
	1	7	10	
2	14	20	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται :
$2x^3+13x^2+13x-10=0 \Leftrightarrow$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2x^2+14x+20\right)=0 \Leftrightarrow$
$x=\frac{1}{2}$ ή $x=-2$ ή $x=-5$

<u>Σχήμα Horner με διαιρέτη τον $x^2-\rho$</u>

Ας δούμε ένα παράδειγμα επίλυσης πολυωνυμικής εξίσωσης μέσω της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-\rho\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $2x^5+13x^4-x^3-101x^2-91x+70=0$.

<u>Λύση:</u>

Ο ρ = 7 είναι ένας διαιρέτης του σταθερού όρου 70.
Εκτελούμε τη διαίρεση $\left(2x^5+13x^4-x^3-101x^2-91x+70\right):\left(x^2-7\right)$ χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner (το 7 είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 της εξίσωσης) και έχουμε το παρακάτω σχήμα :

2	13	–1	–101	–91	70	7
		14	91	91	–70	
2	13	13	–10	0	0	

Η ταυτότητα της διαίρεσης $\left(2x^5-13x^4+10x^3+82x^2-168x+63\right):\left(x^2-7\right)$ είναι η $2x^5+13x^4-x^3-101x^2-91x+70=\left(x^2-7\right)\left(2x^3+13x^2+13x-10\right)$, οπότε η αρχική μας εξίσωση , μετατρέπεται στην : $\left(x^2-7\right)\left(2x^3+13x^2+13x-10\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7=0 \\ 2x^3+13x^2+13x-10=0 \end{cases}$

η οποία δίνει τις λύσεις $\begin{cases} x=\pm\sqrt{7} \\ x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=-5 \text{ λόγω της}(*) \end{cases}$

<u>Σχήμα Horner με διαιρέτη τον $x^3 - \rho$</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 20x + 24 = 0$.

<u>Λύση:</u>

Ο ρ = – 4 είναι ένας διαιρέτης του σταθερού όρου 24.
Εκτελούμε τη διαίρεση $\left(x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 20x + 24\right) : \left(x^3 + 4\right)$(το – 4 είναι ρίζα πολλαπλότητας 3 της εξίσωσης) χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner και έχουμε το παρακάτω σχήμα:

1	– 5	6	4	– 20	24	– 4
			– 4	20	– 24	
1	– 5	6	0	0	0	

Η ταυτότητα της διαίρεσης $\left(x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 20x + 24\right) : \left(x^3 + 4\right)$ είναι η
$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 20x + 24 = \left(x^3 + 4\right) \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right)$, οπότε η αρχική εξίσωση ,
μετατρέπεται στην :

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + 4\right) \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 4 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{4} \\ x = 2 \text{ ή } x = 3 \end{cases}$$

Γενίκευση σχήματος Horner

<u>Σχήμα Horner με διαιρέτη τον $x^\kappa - \rho$</u>

Η τέλεια διαίρεση $\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o\right) : \left(x^\kappa - \rho\right)$, έχει ταυτότητα την
$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = \left(x^\kappa - \rho\right) \cdot \left(\beta_{\nu-\kappa} x^{\nu-\kappa} + \beta_{\nu-\kappa-1} x^{\nu-\kappa-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_o\right)$, όπου :

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{\nu-\kappa+1} = \beta_{\nu-2\kappa+1} \\ \vdots \\ \alpha_{\nu-1} = \beta_{\nu-\kappa-1} \\ \alpha_\nu = \beta_{\nu-\kappa} \end{array}\right\} \kappa \text{ σχέσεις ,} \quad \left.\begin{array}{r} \alpha_\kappa = -\rho\beta_\kappa + \beta_o \\ \alpha_{\kappa+1} = -\rho\beta_{\kappa+1} + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu-\kappa} = -\rho\beta_{\nu-\kappa} + \beta_{\nu-2\kappa} \end{array}\right\} (\nu - 2\kappa + 1) \text{σχέσεις ,}$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_o + \rho\beta_o = 0 \\ \alpha_1 + \rho\beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{\kappa-1} + \rho\beta_{\kappa-1} = 0 \end{array}\right\} \kappa \text{σχέσεις , με } \nu \geq 2\kappa - 1.$$

►ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : Πολυωνυμικές Εξισώσεις με Άρρητες Ρίζες

Αν κανένας από τους διαιρέτες μιας πολυωνυμικής εξίσωση δεν είναι ρίζα της τότε η εξίσωση αυτή , δεν έχει ρητή ρίζα. Όπως έχει αποδειχτεί στο Θεώρημα 7 (Σελίδα 13) , αν η εξίσωση έχει ρίζα τον άρρητο $\alpha+\sqrt{\beta}$, θα έχει ως ρίζα και τον $\alpha-\sqrt{\beta}$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί , γίνεται χρήση και του παραπάνω θεωρήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να λύσετε την εξίσωση $2x^4+x^3-x^2-2x-6=0$.

<u>Λύση:</u>

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου -6 , είναι : ±1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 ενώ οι διαιρέτες του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου 2 είναι : ± 1 , ± 2. Έτσι , οι πιθανές ρίζες της εξίσωσης είναι όλα τα πηλίκα $\frac{\kappa}{\lambda}$, (όπου κ ο διαιρέτης του σταθερού όρου και λ ο διαιρέτης του μεγιστοβάθμιου) , δηλαδή οι αριθμοί : ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 , ± $\frac{1}{2}$, ±$\frac{3}{2}$.

Μετά από δοκιμές , **διαπιστώνουμε ότι κανένας από τους αριθμούς αυτούς δεν είναι ρίζα της εξίσωσης**. Άρα η εξίσωση $2x^4+x^3-x^2-2x-6=0$ **δεν έχει ρητές ρίζες**.

Παρατηρούμε ότι για $x=\sqrt{2}$, έχουμε :

$2\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^3-\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}-6=2\cdot 4+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-6=0$.

Άρα η εξίσωση έχει ρίζα το $\sqrt{2}$ και λόγω του θεωρήματος και το $-\sqrt{2}$. Έτσι , η εξίσωση έχει παράγοντα το $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=x^2-2$.

Από το σχήμα Horner , έχουμε:

2	1	−1	−2	−6	2
		4	2	6	
2	1	3	0	0	

και έτσι , η εξίσωση γίνεται: $\left(x^2-2\right)\cdot\left(2x^2+x+3\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=0 \\ 2x^2+x+3=0 \ \ (\text{Δεν έχει ρίζες στο } \mathbb{R}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$.

Περίπτωση 3 : Διώνυμες Εξισώσεις

Ορισμός: Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax^{\kappa} + Bx^{\mu} = 0$ με $A, B \neq 0$ και $\kappa, \mu \in \mathbb{N}$ λέγεται **διώνυμη εξίσωση.**

$$\boxed{\text{Η εξίσωση } Ax^{\kappa} + Bx^{\mu} = 0}$$

Έστω $\kappa > \mu \geq 0$.Τότε $Ax^{\kappa} + Bx^{\mu} = 0 \Leftrightarrow x^{\mu}\left(Ax^{\kappa-\mu} + B\right) = 0$.

Άρα $\begin{cases} x^{\mu} = 0 \\ Ax^{\kappa-\mu} + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ (\text{με βαθμό πολλαπλότητας } \mu) \\ x^{\kappa-\mu} = -\dfrac{B}{A} \ (1) \end{cases}$

Αν $\kappa - \mu = \nu$ και $-\dfrac{B}{A} = \alpha$ η (1) γίνεται : $x^{\nu} = \alpha$ (2)

Οι νιοστές ρίζες του α που είναι και ρίζες της εξίσωσης , υπολογίζονται από τον τύπο του De Moivre και είναι μιγαδικές και επομένως δε θα μας απασχολήσουν.

Έστω γ η πρωτεύουσα νιοστή ρίζα του $|\alpha|$, δηλαδή $\gamma = \sqrt[\nu]{|\alpha|} \Leftrightarrow \gamma^{\nu} = |\alpha|$ (3)

- Αν $\alpha > 0$ τότε η (3) γίνεται $\gamma^{\nu} = \alpha$ και επομένως η (2) γράφεται $x^{\nu} = \gamma^{\nu} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{\nu} = 1$ (4)
- Αν $\alpha < 0$ τότε η (3) γίνεται $\gamma^{\nu} = -\alpha$ και επομένως η (2) γράφεται

  $x^{\nu} = -\gamma^{\nu} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{\nu} = -1$ (5)

Αν θέσουμε $\dfrac{x}{\gamma} = y$ από τις (4) και (5) έχουμε τελικά ότι $y^{\nu} = 1$, $y^{\nu} = -1$ που σημαίνει ότι η λύση της εξίσωσης $Ax^{\kappa} + Bx^{\mu} = 0$ ανάγεται τελικά στην επίλυση των εξισώσεων $y^{\nu} = 1$, $y^{\nu} = -1$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω , αν θέλαμε να βρούμε τις τιμές του x , για τις οποίες είναι $2x^5 + 3x^2 = 0$, θα κάναμε τα εξής :

$$2x^5 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(2x^3 + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2x^3 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ (\text{διπλή ρίζα}) \\ x^3 = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

(Οι άλλες δυο ρίζες της εξίσωσης είναι μιγαδικές)

Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν ν άρτιος , τότε:

  Για α < 0 , η εξίσωση είναι αδύνατη.

  Για α > 0 , η εξίσωση έχει δυο λύσεις , τις $x_{1,2} = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$.

- Αν ν περιττός , τότε η εξίσωση έχει μια ακριβώς λύση , τη $x = \begin{cases} \sqrt[\nu]{|\alpha|} \text{ , αν } \alpha > 0 \\ -\sqrt[\nu]{|\alpha|} \text{ , αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Περίπτωση 4 : Εξισώσεις που αποτελούνται από αθροίσματα άρτιων δυνάμεων

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα :
Αν α , β , … , γ άρτιοι και $x \in \mathbb{R}$, τότε $x_1^{\alpha} + x_2^{\beta} + ... + x_{\nu}^{\gamma} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ και $x_2 = 0$, ... , $x_{\nu} = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^2 - 2x\right)^4 = -x^4 + 8x^2 - 16$

<u>Λύση:</u>

$$\left(x^2 - 2x\right)^4 = -x^4 + 8x^2 - 16 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\right)^4 + x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\right)^4 + \left(x^2 - 4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-2\right) = 0 \\ \text{και} \\ \left(x-2\right)\left(x+2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 2 \\ \text{και} \\ x = -2 \text{ ή } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Περίπτωση 5 : Εξισώσεις που λύνονται με μετασχηματισμούς

α) Διτετράγωνες Εξισώσεις :

Ορισμός: Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^{2\nu} + \beta x^{\nu} + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (1) ονομάζεται **διτετράγωνη** και λύνεται με τον μετασχηματισμό $x^{\nu} = \omega$, οπότε η εξίσωση ανάγεται στη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ η οποία ονομάζεται επιλύουσα της (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται : $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = 4$.
Αν $\omega = 1$ τότε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.
Αν $\omega = 4$ τότε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$.
Η εξίσωση έχει 4 διακεκριμένες ρίζες τις $x = -2$ ή $x = -1$ ή $x = 1$ ή $x = 2$

β) Αντίστροφες Εξισώσεις :

Ορισμός: Αντίστροφη εξίσωση (ως προς x) , ονομάζεται κάθε εξίσωση που αν έχει ρίζα το $\rho \neq -1, 0, 1$, θα έχει ρίζα και τον αντίστροφο του ρ δηλαδή τον $\frac{1}{\rho}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0, \alpha \neq 0$ είναι αντίστροφες.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ έχει ρίζα το $\rho \neq 0$, τότε $\alpha\rho^4 + \beta\rho^3 + \gamma\rho^2 + \beta\rho + \alpha = 0$ (1)
Για $x = \frac{1}{\rho}$, η εξίσωση δίνει $\alpha\left(\frac{1}{\rho}\right)^4 + \beta\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0$ την οποία πολλαπλασιάζουμε με ρ^4 και παίρνουμε $\alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2 + \beta\rho^3 + \alpha\rho^4 = 0$ η οποία ισχύει λόγω της (1)
Άρα εκτός από τον ρ και ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης και η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

1. Το παραπάνω θεώρημα πρακτικά σημαίνει ότι αν θέσουμε σε μια αντίστροφη εξίσωση στη θέση του x το $\frac{1}{x}$, η εξίσωση δε θα μεταβληθεί.

2. Αποδεικνύεται ότι μια εξίσωση είναι αντίστροφη , αν και μόνο αν είναι ίσοι ή αντίθετοι οι συντελεστές των όρων που ισαπέχουν απ'τα άκρα. Η επίλυση μιας αντίστροφης εξίσωσης , ανάγεται τις περισσότερες φορές σε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού , όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε την εξίσωση $2x^4+3x^3-10x^2+3x+2=0$.

<u>Λύση:</u>

Διαιρούμε την εξίσωση με $x^2 \neq 0$ και έχουμε : $2x^2+3x-10+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$ (1)

Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=\omega$ και λόγω της ταυτότητας $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ γίνεται

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\frac{1}{x}=\omega^2-2$ οπότε τελικά η (1) γίνεται :

$2(\omega-2)^2+3\omega-10=0 \Leftrightarrow 2\omega^2+3\omega-14=0 \Leftrightarrow \omega=2$ ή $\omega=-\frac{7}{2}$

$\omega=2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ (διπλή ρίζα).

$\omega=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$.

Εξίσωση έχει όντως αντίστροφες ρίζες , αφού :

$x_1\cdot x_2=1\cdot 1=1$ και $x_1\cdot x_2=\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\cdot\frac{-7-\sqrt{33}}{4}=\frac{(-7)^2-\sqrt{33}^2}{16}=\frac{49-33}{16}=\frac{16}{16}=1$.

► ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 3ου – 4ου ΒΑΘΜΟΥ

(Μέθοδος Cardano)

α. Λύση Εξίσωσης 3ου Βαθμού

Έστω η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1)

- Θέτουμε $x=y-\frac{\alpha}{3}$, οπότε η (1) , γράφεται : $\left(y-\frac{\alpha}{3}\right)^3+\alpha\left(y-\frac{\alpha}{3}\right)^2+\beta\left(y-\frac{\alpha}{3}\right)+\gamma=0$,

  η οποία μετά από πράξεις , δίνει την $\boxed{y^3+\left(-\frac{\alpha^2}{3}+\beta\right)y+\left(\frac{2\alpha^3}{27}-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma\right)=0 \ (2)}$

- Θέτουμε $\beta-\frac{\alpha^2}{3}=\kappa$ και $\frac{2\alpha^3}{27}-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma=\lambda$ και η (2) γράφεται $\boxed{y^3+\kappa y+\lambda=0 \ (3)}$
- Θέτουμε $y=z+\omega$ οπότε η (3) , γίνεται $(z+\omega)^3+\kappa(z+\omega)+\lambda=0$, η οποία μετά από πράξεις , δίνει την :

$$\boxed{z^3+\omega^3+\lambda+(3z\omega+\kappa)(z+\omega)=0 \ (4)}$$

• Για να ισχύει η (4) , αρκεί $\left.\begin{array}{r} z^3+\omega^3+\lambda=0 \\ 3z\omega+\kappa=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z^3+\omega^3=-\lambda \\ z\omega=-\dfrac{\kappa}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z^3+\omega^3=-\lambda \\ z^3\omega^3=-\dfrac{\kappa}{3} \end{array}\right\}$,

που σημαίνει ότι τα z^3 , ω^3 θα είναι ρίζες της εξίσωσης $t^2+\lambda t-\dfrac{\kappa^3}{27}=0$, $t\in\mathbb{R}$, η οποία

έχει ρίζες $t_{1,2}=\dfrac{-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+\dfrac{4\kappa^3}{27}}}{2}=-\dfrac{\lambda}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\kappa^3}{27}}$.

Επομένως , $z^3=-\dfrac{\lambda}{2}+\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\kappa^3}{27}}\Rightarrow z=\sqrt[3]{-\dfrac{\lambda}{2}+\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\kappa^3}{27}}}$ και

$$\omega^3=-\frac{\lambda}{2}-\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\kappa^3}{27}}\Rightarrow \omega=\sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2}-\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\kappa^3}{27}}}$$

Λόγω του μετασχηματισμού $y=z+\omega$, έχουμε $\boxed{y=\sqrt[3]{-\dfrac{\lambda}{2}+\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\kappa^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{\lambda}{2}-\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}+\dfrac{\kappa^3}{27}}}}$.

Έτσι από τον αρχικό μετασχηματισμό $x=y-\dfrac{\alpha}{3}$, παίρνουμε τελικά ότι :

$$\boxed{x=\sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\kappa^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2}-\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\kappa^3}{27}}}-\frac{\alpha}{3}.}$$ **(Τύπος του Cardano)**

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Κάθε μια από τις κυβικές ρίζες , έχει τρεις τιμές που βρίσκονται γράφοντας τους αριθμούς στην τριγωνομετρική τους μορφή. Βρίσκουμε έτσι εννέα ζεύγη τιμών των z , ω από τις οποίες , απορρίπτουμε όσες δεν πληρούν τη σχέση $3z\omega+\kappa=0$.
Ενδιαφερόμαστε μόνο για τις πραγματικές ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση $x^3+3x+8=0$.

<u>Λύση:</u>

Στην εξίσωση $x^3+3x+8=0$ (1) , που είναι στη μορφή $y^3+\kappa y+\lambda=0$ (3) της παραπάνω μεθόδου , θέτουμε $x=z+\omega$ οπότε η (1) γράφεται $(z+\omega)^3+3(z+\omega)+8=0$ η οποία μετά από πράξεις , δίνει
$(z^3+\omega^3+8)+(3z\omega+3)\cdot(z+\omega)=0$ και η οποία για να ισχύει , αρκεί :

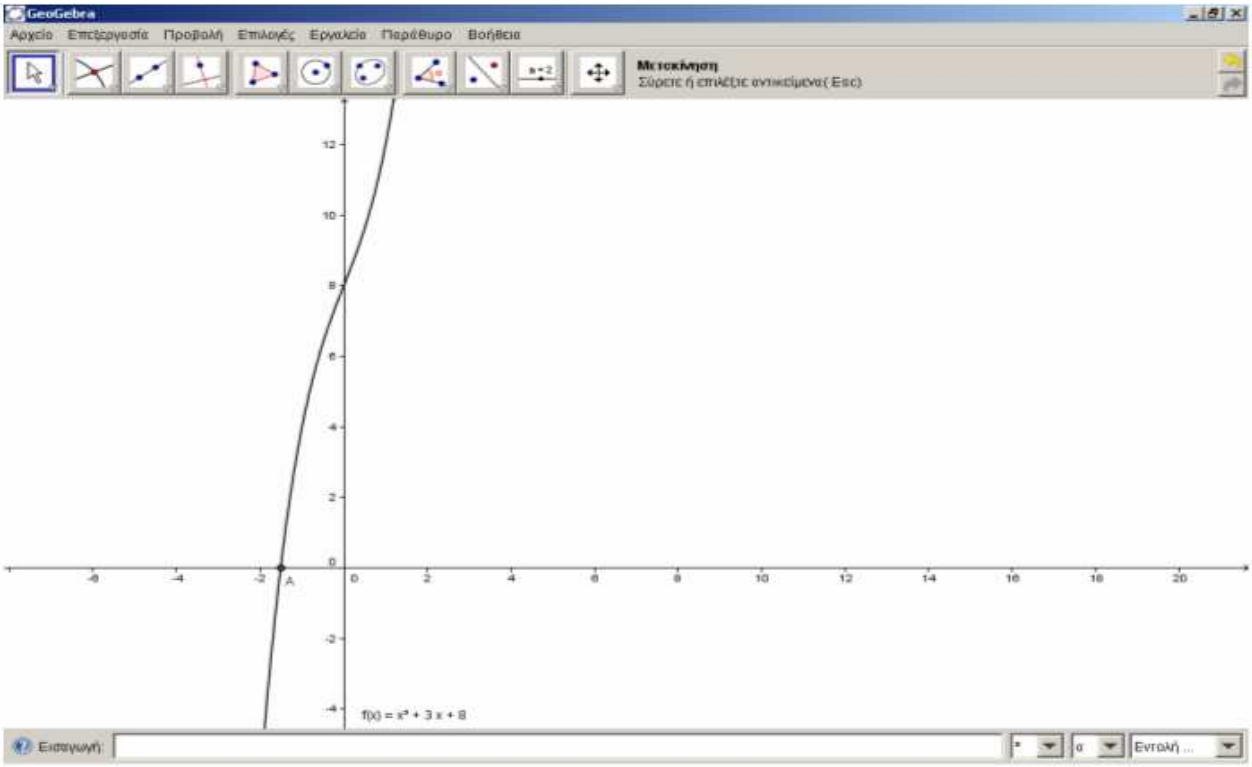
$\left.\begin{array}{r} z^3+\omega^3+8=0 \\ 3z\omega+3=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} z^3+\omega^3=-8 \\ z\omega=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} z^3+\omega^3=-8 \\ z^3\omega^3=-1 \end{array}\right\}$, άρα οι z^3,ω^3 είναι ρίζες της εξίσωσης

$t^2+8t-1=0$, η οποία δίνει $t_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{68}}{8}=-4\pm\sqrt{17}$.

Άρα $z^3=-4+\sqrt{17}\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{-4+\sqrt{17}}$ και $\omega^3=-4-\sqrt{17}\Leftrightarrow \omega=-\sqrt[3]{4+\sqrt{17}}$ και επειδή $x=z+\omega$, έχουμε τελικά ότι $x=\sqrt[3]{-4+\sqrt{17}}-\sqrt[3]{4+\sqrt{17}}\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

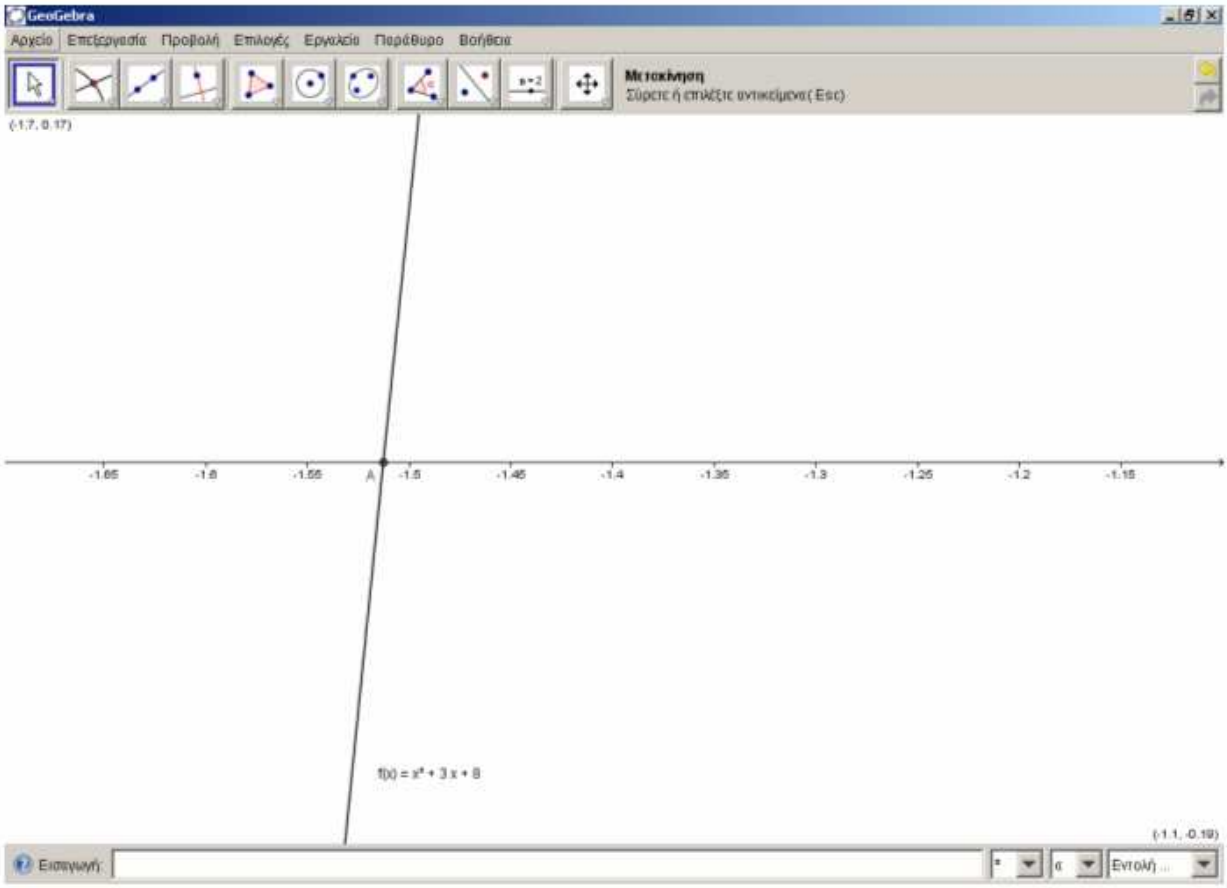
Επειδή η συγκεκριμένη αλγεβρική μέθοδος είναι αρκετά πολύπλοκη και η συγκεκριμένη αλγεβρική αναπαράσταση δύσκολη , με τη χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού μαθηματικών (για παράδειγμα του Geogebra) που θα παρουσιάσουμε στους μαθητές , θα έχουν την ευκαιρία να αντιληφθούν τη **διαφορά αλγεβρικής και γραφικής επίλυσης** και να κατανοήσουν την έννοια του άρρητου αριθμού ως λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης .



Αν με τη βοήθεια του Geogebra μεγεθύνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+3x+8$ κατάλληλα ώστε να πετύχουμε την καλύτερη για εμάς προσέγγιση , βρίσκουμε ότι το σημείο τομής της γραφικής παράσταση της f με τον άξονα xx΄ , δηλαδή η **πραγματική** λύση της εξίσωσης $x^3+3x+8=0$ είναι η τετμημένη του , $-1,512745327$.

Έτσι , $x=\sqrt[3]{-4+\sqrt{17}}-\sqrt[3]{4+\sqrt{17}}\cong -1,51$

΄΄ Μεγέθυνση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x + 8$ ΄΄



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Gerolamo Cardano (1501 – 1576)

Γεννήθηκε στην Ιταλία όπου έκανε τις βασικές του σπουδές και συνέχισε στο Πανεπιστήμιο της Πάντοβα ώστε να γίνει γιατρός. Αργότερα , του δόθηκε έδρα στην Ακαδημία του Μιλάνου , όπου και έγραψε το έργο ΄΄Γεωμετρίας Εγκώμιον΄΄. Έπειτα από οικογενειακά προβλήματα , πέτυχε να του δοθεί καθηγητική έδρα στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια , όπου έγινε και μόνιμος πολίτης.

Κατηγορήθηκε για ΄΄μαγεία΄΄ και φυλακίστηκε. Σύντομα , ελευθερώθηκε με την προϋπόθεση να μην ξαναδιδάξει. Έτσι , πήγε στη Ρώμη όπου απέκτησε μεγάλη φήμη ως γιατρός κερδίζοντας την εύνοια του Πάπα , επιχορηγούμενος μέχρι το θάνατό του.

Έργα του Cardano:

- ✓ ΄΄Περί των ιδιοτήτων των αριθμών΄΄ , μια σύντομη μονογραφία που περιέχει τα βιβλία 7-9 του Ευκλείδη.

- ✓ ΄΄Εφαρμογές της Αριθμητικής΄΄ , μια περιγραφή (όχι πάντα σωστή) της επιστήμης των αριθμών. Αναφέρει τις πράξεις μεταξύ ακέραιων , κλασμάτων , ασύμμετρων αριθμών.

Μεταξύ των τεχνικών που προτείνει είναι αυτή που μετατρέπει τον πολλαπλασιασμό σε αφαίρεση σύμφωνα με τον τύπο : $\alpha \cdot \beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$.

- ✓ Αφιερώνει πολλές σελίδες στις εξισώσεις $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού και ειδικά για τις τελευταίες θεωρεί ξεχωριστές τις περιπτώσεις : $x^2 = px + q$ (1), $x^2 + px = q$ (2), $x^2 + q = px$ (3) με p , q > 0 , μη δεχόμενος τις μηδενικές ρίζες.

- ✓ Αναφέρει και συστήματα εξισώσεων , χωρίς απόδειξη των μεθόδων που χρησιμοποιεί.

- ✓ Ασχολείται με απλές εφαρμογές συνδυαστικής και πιθανοτήτων.

- ✓ Προς διευκόλυνση του υπολογισμού επιφανειών και όγκων , δίνει πίνακα χορδών και αποστημάτων μερικών κανονικών πολυγώνων , όπως και κάποιες ιδιότητές τους.

- ✓ Γνωρίζει να μετασχηματίζει τις εξισώσεις για την επίλυσή τους και με τους αλγεβρικούς αυτούς χειρισμούς , βοηθήθηκε ο Ferrari για να μπορέσει να λύσει εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού.

β. Λύση Εξίσωσης $4^{ου}$ Βαθμού

Έστω η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$ (1)

- Θέτουμε $x = y - \frac{\beta}{4\alpha}$, οπότε η (1) , γράφεται :

  $\alpha\left(y - \frac{\beta}{4\alpha}\right)^4 + \beta\left(y - \frac{\beta}{4\alpha}\right)^3 + \gamma\left(y - \frac{\beta}{4\alpha}\right)^2 + \delta\left(y - \frac{\beta}{4\alpha}\right) + \varepsilon = 0$, η οποία μετά από πράξεις και κατάλληλους μετασχηματισμούς τελικά δίνει την $y^4 + \kappa y^2 + \lambda y + \mu = 0$ (2).

- Θέτουμε $y = z + \omega + \varphi$, οπότε από την (2) προκύπτει σύστημα ως προς z^2, ω^2, φ^2 που είναι :

$$\left.\begin{aligned} z^2 + \omega^2 + \varphi^2 &= -\frac{\kappa}{2} \\ z^2\omega^2 + \omega^2\varphi^2 + \varphi^2 z^2 &= \frac{\kappa}{16} - \frac{\mu}{4} \\ z^2\omega^2\varphi^2 &= \frac{\lambda^2}{64} \end{aligned}\right\}.$$

Έτσι , τα z^2, ω^2, φ^2 είναι ρίζες της εξίσωσης $t^3 + \frac{\kappa}{2}t^2 + \left(\frac{\kappa}{16} - \frac{\mu}{4}\right)t - \frac{\lambda^2}{64} = 0$,

οπότε αναγόμαστε σε εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Lodovico Ferrari (1522 – 1565)

Γεννήθηκε στην Ιταλία και πήγε στο Μιλάνο , όπου βρήκε προστασία από τον Cardano. Από ένα πρόβλημα που του προτάθηκε , οδηγήθηκε στην αναζήτηση των λύσεων $4^{ου}$ βαθμού κάτι που του εξασφάλισε παγκόσμια φήμη. Πήρε καθηγητική έδρα στο Μιλάνο , όπου του ανατέθηκε το έργο της απογραφής του Δουκάτου της Μάντοβας. Έπειτα , πήγε στην Μπολόνια όπου έγινε διδάκτωρας της Φιλοσοφίας και αργότερα καθηγητής του τοπικού Πανεπιστημίου. Όμως δεν πρόλαβε να διδάξει , αφού πέθανε καθώς όπως λένε οι φήμες δηλητηριάστηκε από την αδελφή του για λόγους κληρονομιάς.

Έργα του Ferrari:

- ✓ ΄΄IV πρόκληση΄΄ , μια δημοσίευση στην οποία αναφέρει στον Cardano ότι οι πρώτες λύσεις μερικών προβλημάτων που μελετούσε , αν και αληθοφανείς , δεν είναι σωστές και τα προβλήματα όχι σωστά λυμένα.

- ✓ ΄΄V πρόκληση΄΄ , που αποτελείται από 3 μέρη: Το πρώτο μέρος είναι εριστικό και αγενές το δεύτερο περιέχει κριτική των λύσεων του Tartaglia από το δίδυμο Cardano-Ferrari ενώ το τρίτο μέρος περιέχει τη λύση προβλημάτων που τέθηκαν από τον Tartaglia.

- ✓ ΄΄VI πρόκληση΄΄ συνεχίζεται η εριστική συμπεριφορά του. Ο Ferrari χαρακτηρίζει τον Cardano ως πολύ σπουδαίο , αφού έχει λύσει την τριτοβάθμια εξίσωση.

- ✓ Ασχολήθηκε και με Γεωμετρικά προβλήματα (κατασκευή διχοτόμου γωνίας)

- ✓ Ασχολήθηκε και με αριθμητικά προβλήματα (προβλήματα του Γερμανού Μαθηματικού Stiefen)

►ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ (ΡΗΤΕΣ – ΑΡΡΗΤΕΣ)

Ορισμοί :

1. Ρητή λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x)$ όπου $P(x), Q(x), R(x)$ πολυώνυμα και $Q(x) \neq 0$.

2. Άρρητη λέγεται κάθε εξίσωση που έχει την μεταβλητή μέσα σε ριζικό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

1. Στις ρητές εξισώσεις , κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών χρησιμοποιώντας το **Ε**λάχιστο **Κ**οινό **Π**ολλαπλάσιο των παρονομαστών παίρνοντας περιορισμούς. (Είναι δυνατόν οι περιορισμοί αυτοί να μη γίνονται από την αρχή , αλλά σε ενδιάμεσα βήματα της λύσης της εξίσωσης.)

2. Στις άρρητες εξισώσεις , για να απαλλαγούμε από τα ριζικά χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\sqrt{x^2} = |x|$ ή την $\sqrt[\nu]{x^\nu} = |x|$ ή υψώνουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης στην κατάλληλη δύναμη.

3. Ορισμένες φορές , πριν τα βήματα **2.** ή **3.** , κάνουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{x^2}{x^2-x-2}+\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{-x}{x^2-3x+2}$. **(Ρητή Εξίσωση)**

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση γράφεται : $\dfrac{x^2}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-x}{(x-1)(x-2)}$,

με Ε.Κ.Π = $(x-2)(x-1)(x+1)\neq 0$, απ'όπου $x\neq -1$, $x\neq 1$, $x\neq 2$.

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π και έχουμε:

$x^2(x-1)+2x(x-2)=-x(x+1) \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x=0$, που είναι **εξίσωση πολυωνυμική**.

Επομένως , $x\cdot(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-3 \end{cases}$.

Οι x = 0 και x = – 3 είναι δεκτές , ενώ η x = 1 απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x^2-x-2}+x=2$. **(Άρρητή Εξίσωση)**

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση γράφεται : $\sqrt{x^2-x-2}=2-x$ και για να έχει αυτή νόημα , πρέπει να ισχύουν :

$\begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty) \\ x\in(-\infty,2] \end{cases}$, δηλαδή η εξίσωση έχει νόημα για κάθε $x\in(-\infty,-1]\cup\{2\}$. Οπότε για κάθε $x\in(-\infty,-1]\cup\{2\}$, η εξίσωση γράφεται :

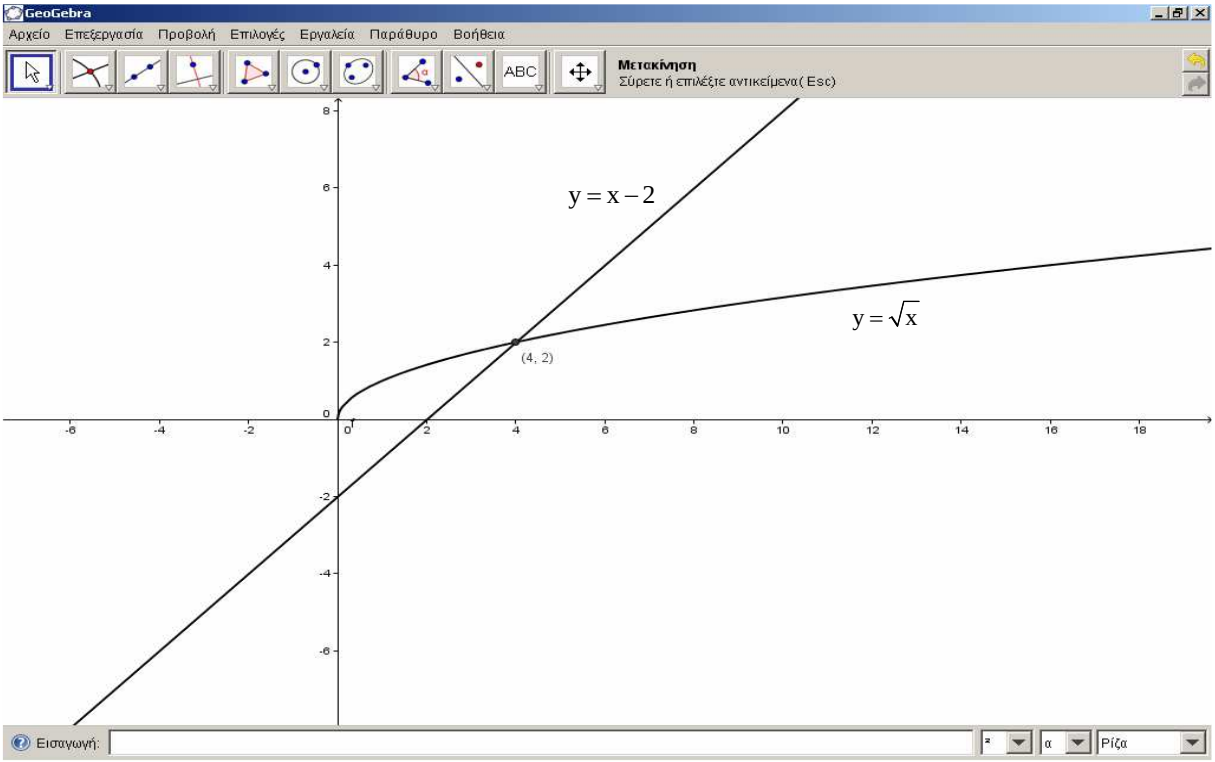
$\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2=(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2-x-2=4-4x+x^2 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$, που είναι δεκτή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

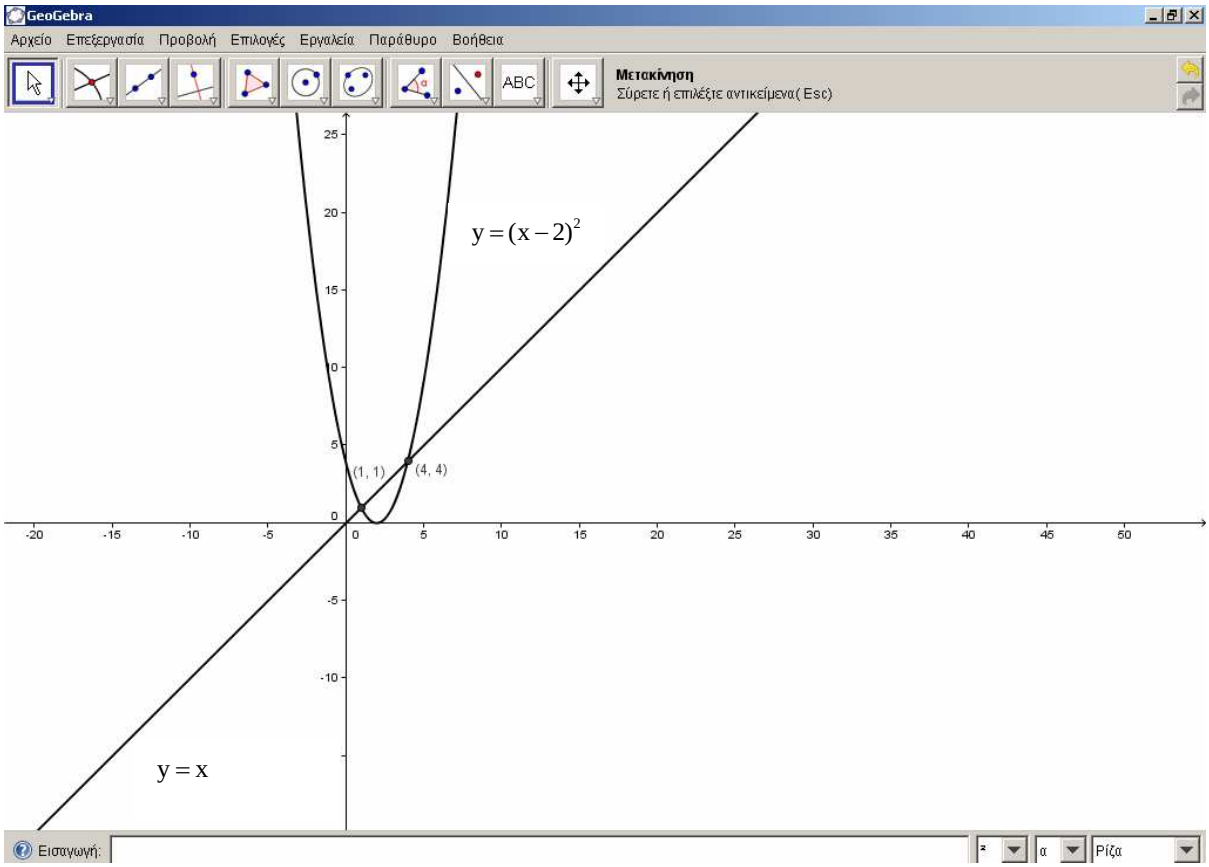
Οι εξισώσεις $\sqrt{x} = x - 2$ και $x = (x-2)^2$ **δεν είναι ισοδύναμες** , δηλαδή **δεν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.**

Πράγματι , η εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$ έχει νόημα για $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ και γίνεται $x = (x-2)^2$ που δίνει δυο λύσεις , τις $x = 1, x = 4$ από τις οποίες , λόγω του περιορισμού , δεκτή είναι μόνο η x = 4 οπότε το σύνολο λύσεών της είναι το μονοσύνολο $S_1 = \{4\}$, ενώ η εξίσωση $x = (x-2)^2$ έχει σύνολο λύσεων το $S_2 = \{1, 4\}$.

Η γραφική αναπαράσταση της παρατήρησης αυτής , απεικονίζεται στα ακόλουθα σχήματα :



Τετμημένη σημείου τομής : x = 4



Τετμημένες σημείων τομής : x = 1 , x = 4

►ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΓΕΝΙΚΑ :

Από τη θεωρία πολυωνύμων , υπενθυμίζουμε τα παρακάτω που είναι απαραίτητα σε θέματα πολυωνυμικών εξισώσεων.

Ορισμός : Ονομάζουμε **ακέραιο πολυώνυμο του x** , κάθε έκφραση της μορφής
$\mathbf{f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o}$, όπου $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ..., \alpha_1, \alpha_o \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Κάθε ακέραιο πολυώνυμο νιοστού βαθμού έχει **ν το πολύ διαφορετικές ρίζες**.

<u>Απόδειξη:</u>

Κάθε πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$ βαθμού $\nu \geq 1$ αναλύεται σε γινόμενο ν πρωτοβάθμιων παραγόντων , άρα έχει **το πολύ** ν διαφορετικές (μιγαδικές) ρίζες.
Έστω ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τις $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu, \rho_\kappa$, με $\kappa \leq \nu$ και βαθμούς πολλαπλότητας $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\kappa$ αντίστοιχα. Άρα $P(x) = \alpha_\nu (x - \rho_1)^{\mu_1} \cdot (x - \rho_2)^{\mu_2} \cdot ... \cdot (x - \rho_\kappa)^{\mu_\kappa}$,
με $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_\kappa = \nu$.
Έτσι , κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $\nu \geq \kappa$ έχει κ διαφορετικές ρίζες $\kappa \leq \nu$ με βαθμούς πολλαπλότητας $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\kappa$ όπου $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_\kappa = \nu$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Κάθε ακέραιο πολυώνυμο νιοστού βαθμού που έχει **ν + 1 ρίζες** , είναι το **μηδενικό πολυώνυμο.**

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu, \rho_{\nu+1}$ οι $\nu + 1$ διαφορετικές μεταξύ τους τιμές που μηδενίζουν το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$.
Άρα $P(x) = \alpha_\nu (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2) \cdot ... \cdot (x - \rho_\nu)$ και για $x = \rho_{\nu+1}$ παίρνουμε:
$P(\rho_{\nu+1}) = \alpha_\nu (\rho_{\nu+1} - \rho_1) \cdot (\rho_{\nu+1} - \rho_2) \cdot ... \cdot (\rho_{\nu+1} - \rho_\nu)$ και αφού $P(\rho_{\nu+1}) = 0$ και $\rho_1 \neq \rho_2 \neq ... \neq \rho_\nu \neq \rho_1$, θα είναι $\alpha_\nu = 0$ δηλαδή $P(x) = \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο , φτάνουμε στο $\alpha_{\nu-1} = 0$ και συνεχίζοντας έτσι , παίρνουμε $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = ... = \alpha_1 = \alpha_o = 0$,
δηλαδή το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$.
Σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούμε ένα μόνο y , τέτοιο ώστε $y = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$,
ορίζοντας έτσι την **πολυωνυμική συνάρτηση** $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$.
Αν εξισώσουμε ένα πολυώνυμο με το μηδέν , έχουμε την **πολυωνυμική εξίσωση**
$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$.

Οι ρίζες του πολυωνύμου P(x) είναι ρίζες και της πολυωνυμικής συνάρτησης f(x) και της πολυωνυμικής εξίσωσης f(x) = 0.

Περίπτωση (1) : Πολυωνυμικές εξισώσεις με 1 ή 2 ή … τουλάχιστον ρίζες.

Α. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **1 τουλάχιστον ρίζα στο ανοιχτό διάστημα (α,β)** , κάνουμε τα εξής :

✓ Θεωρούμε το $1^{ο}$ μέλος ως συνάρτηση f.

✓ Για τη συνάρτηση f , εξετάζουμε αν ισχύει το **θεώρημα Bolzano** και συμπεραίνουμε για την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο (α,β).

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο [α,β]. Αν :

- Η f είναι συνεχής στο [α,β].
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o) = 0$, **<u>δηλαδή</u> :**

<u>Υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f (x) = 0 στο διάστημα (α,β).</u>

Για την απόδειξη του Θεωρήματος , χρειαζόμαστε τα παρακάτω:

Ορισμός 1 : Μια ακολουθία διαστημάτων (α_ν,β_ν), με ν = 1 , 2 , … αποτελεί **κιβωτισμό** , αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_\nu \le \alpha_{\nu+1} < \beta_{\nu+1} \le \beta_\nu$, με ν = 1 , 2 , …
Είναι προφανές ότι $(\alpha_{\nu+1},\beta_{\nu+1}) \subseteq (\alpha_\nu,\beta_\nu)$, με ν = 1 , 2 , …

Ορισμός 2 : Ένας κιβωτισμός των διαστημάτων (α_ν,β_ν), με ν = 1 , 2 , … λέγεται **κιβωτισμός Cantor** , αν ισχύει $\beta_\nu - \alpha_\nu \to 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΥ (CANTOR – DEDEKIND)

Αν (α_ν,β_ν), με ν = 1 , 2 , … είναι ένας κιβωτισμός του Cantor , τότε υπάρχει **ένα ακριβώς** σημείο $x_o \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha_\nu \le x_o \le \beta_\nu$, με ν = 1 , 2 , …

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού (α_ν,β_ν), με ν = 1 , 2 , … είναι ένας κιβωτισμός (του Cantor) , θα ισχύει :
$\alpha_\nu \le \alpha_{\nu+1} < \beta_{\nu+1} \le \beta_\nu$ που σημαίνει ότι για τις ακολουθίες (α_ν), (β_ν) θα ισχύει $(\alpha_\nu)\uparrow$, $(\beta_\nu)\downarrow$.
Επομένως , υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = x_o$, $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \beta_\nu = x_o'$.
Επειδή $\beta_\nu - \alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \beta_\nu = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_\nu \Leftrightarrow x_o = x_o'$.
Δηλαδή υπάρχει ένα ακριβώς $x_o \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha_\nu \le x_o \le \beta_\nu$, με ν = 1 , 2 , …

Απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano :

Αφού $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, υποθέτουμε ότι $f(\alpha)<0<f(\beta)$. Θέτουμε $\alpha_o=\alpha$, $\beta_o=\beta$ και έστω $\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}$ το μέσο του διαστήματος (α_o,β_o).

Αν $f\left(\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}\right)=0$, τότε ισχύει το θεώρημα.

Αν $f\left(\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}\right)\neq 0$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- $f\left(\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}\right)<0$, τότε θέτουμε $\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}=\alpha_1$ και $\beta_o=\beta_1$.
- $f\left(\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}\right)>0$, τότε θέτουμε $\alpha_o=\alpha_1$ και $\frac{\alpha_o+\beta_o}{2}=\beta_1$.

Έτσι από τα παραπάνω , έχουμε $\begin{cases}\alpha_o\le\alpha_1<\beta_1\le\beta_o\\ f(\alpha_1)<0<f(\beta_1)\\ \beta_1-\alpha_1=\frac{\beta_o-\alpha_o}{2^1}\end{cases}$ και με επαγωγή στο $\mathbb{N}^*$, έχουμε γενικά ότι

$\begin{cases}\alpha_o\le\alpha_\nu<\beta_\nu\le\beta_o\\ f(\alpha_\nu)<0<f(\beta_\nu)\\ \beta_\nu-\alpha_\nu=\frac{\beta_o-\alpha_o}{2^\nu}\end{cases}$. Με αυτό τον τρόπο ορίζονται και τα σημεία $\alpha_{\nu+1},\beta_{\nu+1}$ ώστε να ισχύουν :

$$\begin{cases}\alpha_o\le\alpha_{\nu+1}<\beta_{\nu+1}\le\beta_o\\ f(\alpha_{\nu+1})<0<f(\beta_{\nu+1})\\ \beta_{\nu+1}-\alpha_{\nu+1}=\frac{\beta_o-\alpha_o}{2^{\nu+1}}\end{cases}.$$

Έτσι , οι οριζόμενες ακολουθίες (α_ν), (β_ν) με $(\alpha_\nu)\uparrow$, $(\beta_\nu)\downarrow$ και ν = 1 , 2 , … , αποτελούν ένα κιβωτισμό του Cantor.

Άρα υπάρχει x_o με $\alpha_\nu\le x_o\le\beta_\nu$ με ν = 1 , 2 , … και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_\nu=\lim\limits_{x\to+\infty}\beta_\nu=x_o$.

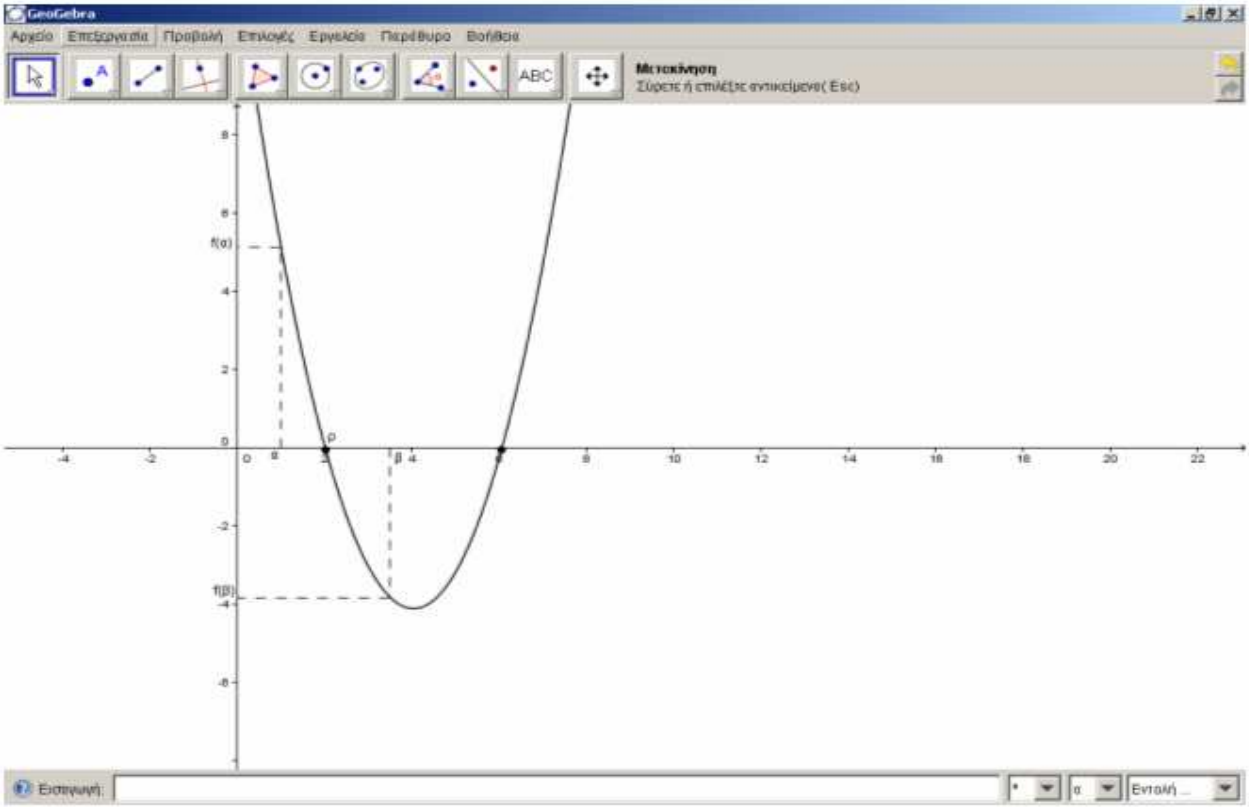
Αφού η f είναι συνεχής , θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(\alpha_\nu)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(\beta_\nu)=f(x_o)$.

Όμως $\left.\begin{array}{l}f(\alpha_\nu)<0\Rightarrow f(x_o)\le 0\\ f(\beta_\nu)>0\Rightarrow f(x_o)\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_o)=0.$

ΣΧΟΛΙΟ :

Η παραπάνω απόδειξη , δίνει τον τρόπο **προσέγγισης της ρίζας** οπουδήποτε ανάμεσα στα α , β. Υπάρχουν στη βιβλιογραφία τουλάχιστον άλλοι δυο τρόποι με τους οποίους προσεγγίζουμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης αντίστοιχα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

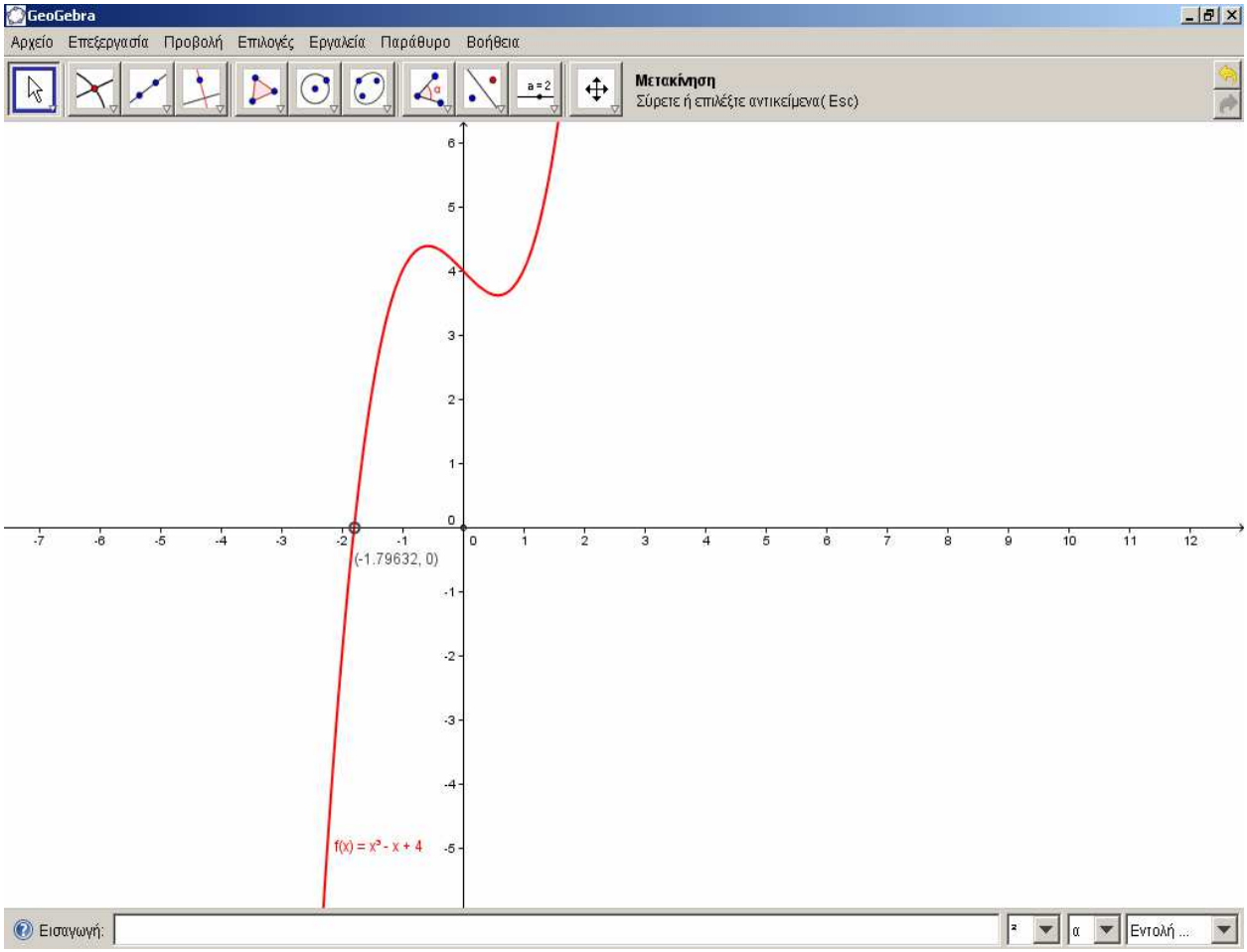


Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο [α,β] το γινόμενο των f(α) , f(β) είναι αρνητικό (δηλαδή οι τιμές f(α) , f(β) είναι αριθμοί ετερόσημοι) , τότε η γραφική παράσταση της f , τέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα τουλάχιστον σημείο (ρ,0) όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$

Να βρείτε τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $x^3 - x - 4 = 0$.

Προσέγγιση της Ρίζας με το Εκπαιδευτικό Λογισμικό GEOGEBRA

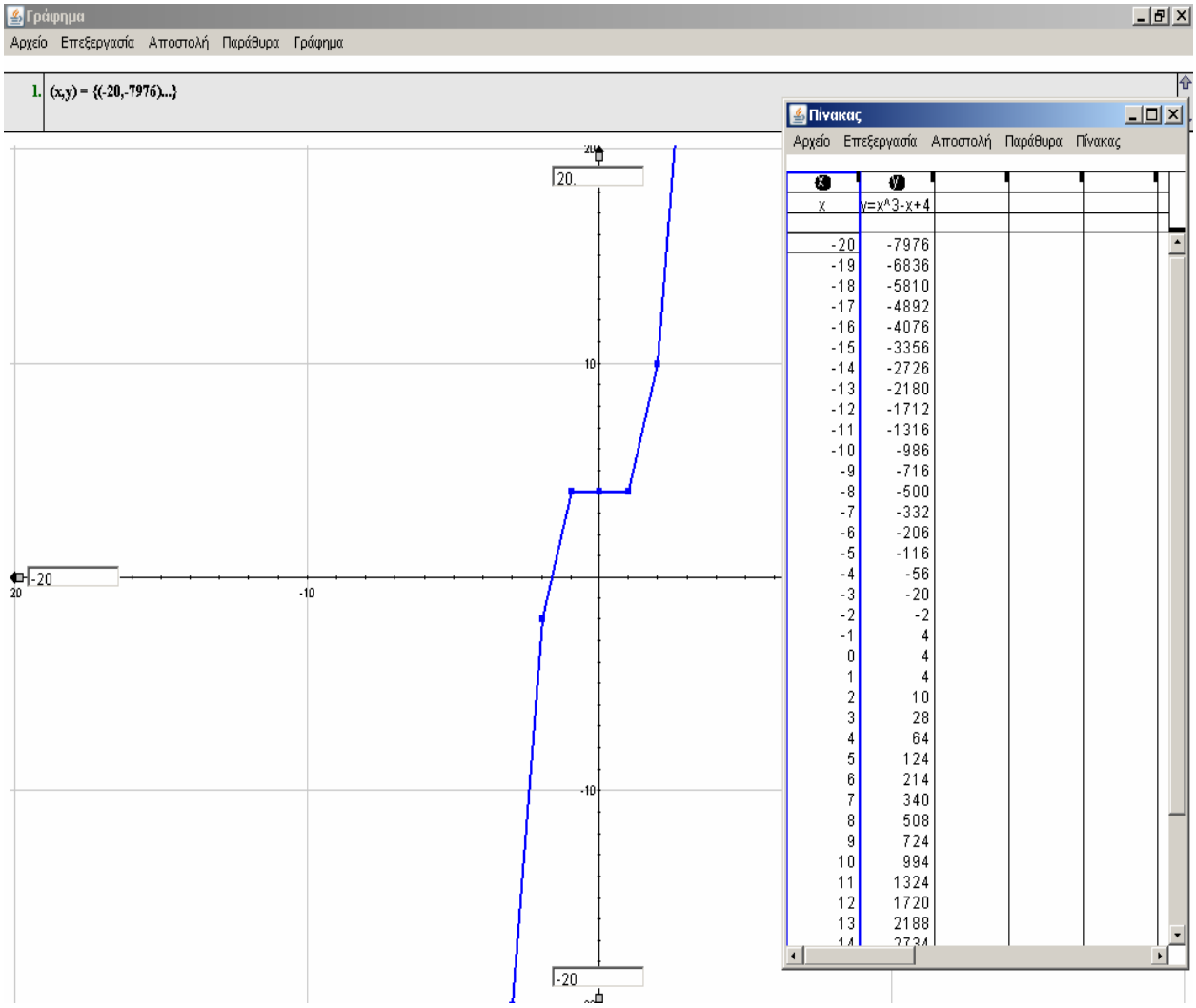
Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - x + 4 = 0$.
Θα βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα xx΄.



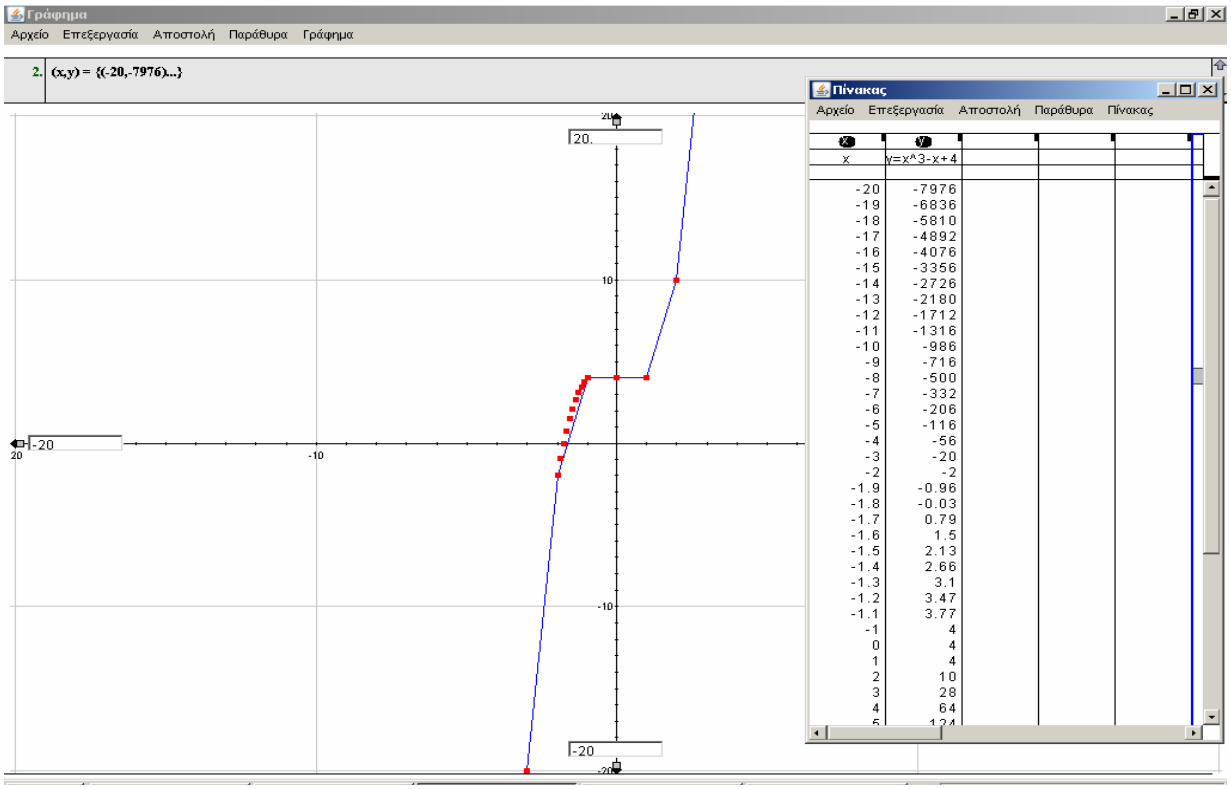
Η λύση της εξίσωσης είναι η x = – 1.79632 με προσέγγιση 5 δ.ψ.

Προσέγγιση της Ρίζας με το Εκπαιδευτικό Λογισμικό FUNCTION PROBE

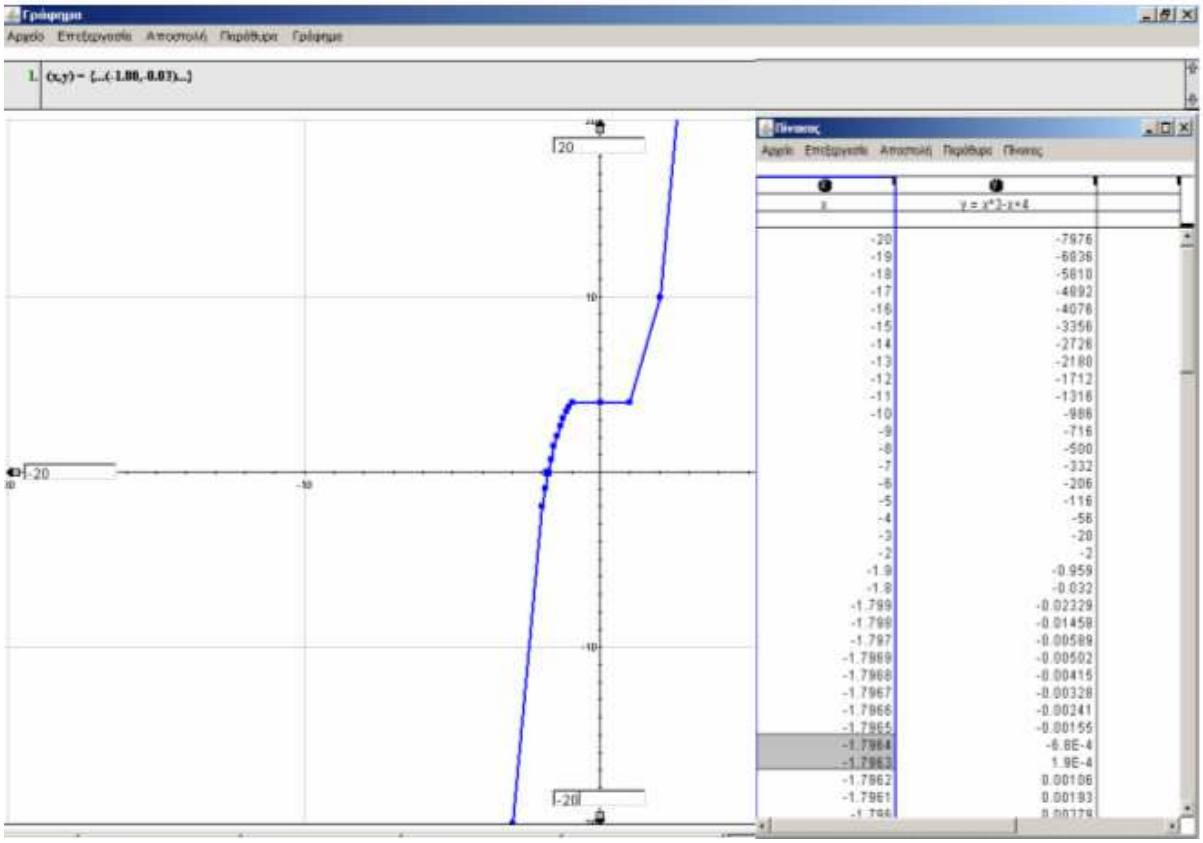
Βήμα 1^{ο} : Παίρνουμε τιμές για το x από το –20 ως το 20 και παρατηρούμε ότι υπάρχει ρίζα στο διάστημα $(-2,-1)$.



Βήμα 2^{ο} : Παρεμβάλουμε τιμές στο διάστημα $(-2,-1)$ με βήμα 0.1 (προσέγγιση 1 δ.ψ) για να πάρουμε καλύτερη προσέγγιση της ρίζας και διαπιστώνουμε ότι η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(-1.8,-1.7)$



Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο , καταλήγουμε τελικά ότι η ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται στο διάστημα $(-1.7964,-1.7963)$



Παρατήρηση :

Το λογισμικό **Function Probe** μας δίνει μια πληρέστερη εικόνα για το **πώς καταλήξαμε στη ρίζα** σε αντίθεση με το **Geogebra** με το οποίο απλώς **βρίσκουμε τη ρίζα**.

Προσέγγιση της Ρίζας με το Live Math (1)

Δίνουμε την εξίσωση , πατάμε διπλό ΄΄κλικ΄΄ και παίρνουμε κατευθείαν το αποτέλεσμα.

Επίλυση της εξίσωσης

Δώσε την εξίσωση: $x^3 - x + 4 = 0$

Υπολογισμός (διπλό κλίκ εδώ) OK

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

$x^3 - x + 4 = 0$
$-x + x^3 + 4 = 0$
$x^3 - x + 4 = 0$

$x^3 - x + 4 = 0$

$(x - 0.89816 + 1.1917i)(x - 0.89816 - 1.1917i)(x + 1.7963) = 0$

$x - 0.89816 + 1.1917i = 0$ $x = 0.89816 - 1.1917i$	$x - 0.89816 - 1.1917i = 0$ $x = 0.89816 + 1.1917i$	$x - 0.89816 - 1.1917i = 0$ $x = 0.89816 + 1.1917i$	$x + 1.7963 = 0$ $x = -1.7963$	$x + 1.7963 = 0$ $x = -1.7963$

Προσέγγιση της Ρίζας με το Live Math (2)

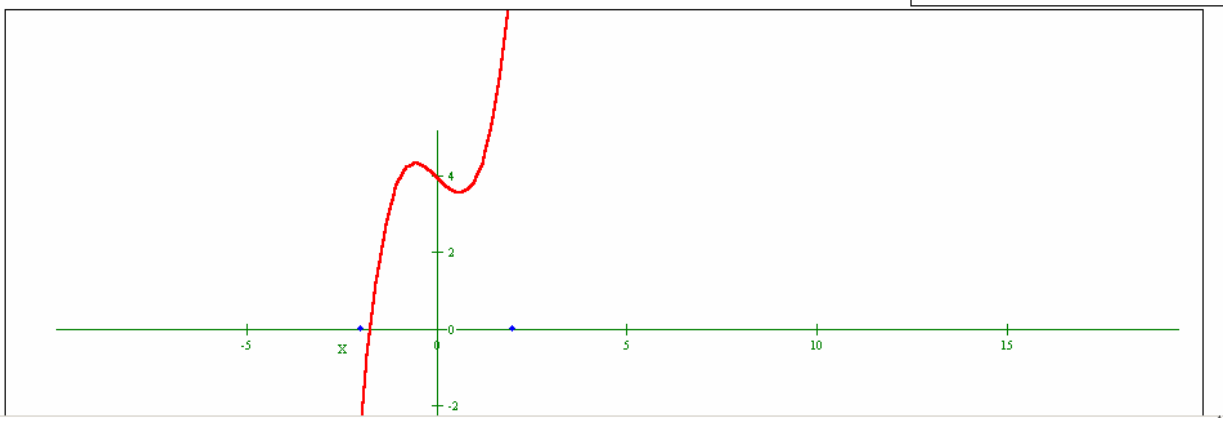
Έλεγχος της ύπαρξης της ρίζας της εξίσωσης και προσδιορισμός της με το Θ. Bolzano

Δώσε την συνάρτηση : $f(x) = x^3 - x + 4$
Εξέτασε αν έχει η παραπάνω εξίσωση ρίζα στο διάστημα [α,β]με: $\alpha = -2$ $\beta = 2$
Προσδιορισμός ρίζας με το θεώρημα των Bolzano - Weirstrass

Υπολογισμός (διπλό κλίκ εδώ) OK

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

2.Υπολογισμός του f(α) $f(\alpha) = f(-2)$ $f(\alpha) = (-2)^3 - (-2) + 4$ $f(\alpha) = -2$ $f(\alpha) = -8 + 6$	2.Υπολογισμός του f(β) $f(\beta)$ $f(\beta) = f(2)$ $f(\beta) = 2^3 - 2 + 4$ $f(\beta) = 10$ $f(\beta) = 10$	3.Υπολογισμός του f(α)f(β) $f(\alpha)f(\beta)$ $f(\alpha)f(\beta) = f(-2)f(2)$ $f(\alpha)f(\beta) = -20$ $f(\alpha)f(\beta) = -20$	4.Εφαρμόζεται το θεώρημα των Bolzano - Weirstrass στο [α,β]; Απαντηση = ΝΑΙ



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4+\left(\lambda^2-4\right)x^2+\left(\lambda-2\right)^2x-\lambda^2=0,\lambda\neq 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,1\right)$.

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=5x^4+\left(\lambda^2-4\right)x^2+\left(\lambda-2\right)^2x-\lambda^2$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} f\left(0\right)=-\lambda^2<0\ \left(\lambda\neq 0\right) \\ f\left(1\right)=\lambda^2-4\lambda+5>0\ \left(\Delta>0\right)\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(0\right)\cdot f\left(1\right)<0$.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση
$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow 5x^4+\left(\lambda^2-4\right)x^2+\left(\lambda-2\right)^2x-\lambda^2=0$, θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,1\right)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ : Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **2 , ή , 3 ή … τουλάχιστον ρίζες στο (α , β)** χωρίζουμε το διάστημα αυτό σε 2 , ή , 3 ή , … υποδιαστήματα (ανάλογα με το πλήθος των ριζών που μας ζητείται) και εξετάζουμε αν ισχύει σ' αυτά το θεώρημα Bolzano.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta=0$, με $\beta>0$ και $\alpha+\beta+1<0$, έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-1,1\right)$.

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta$.

- Η f είναι συνεχής στα $\left[-1,0\right],\left[0,1\right]$ ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} f(-1)=-1+\alpha+\beta=-2+\left(1+\alpha+\beta\right)<0 \\ f(0)=\beta>0 \\ f(1)=1+\alpha+\beta<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} f(-1)\cdot f(0)<0 \\ f(0)\cdot f(1)<0\end{array}\right\}$

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3+\alpha x^2+\beta=0$, θα έχει από μια τουλάχιστον ρίζα στα $\left(-1,0\right),\left(0,1\right)$ και επομένως , δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-1,1\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+\alpha_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+\alpha_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=0$$

με $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0$ και $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+\alpha_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+\alpha_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$.

- Η f είναι συνεχής στα $[\lambda_1,\lambda_2],[\lambda_2,\lambda_3]$ ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} f(\lambda_1)=\alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3) \\ f(\lambda_2)=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) \\ f(\lambda_3)=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)<0 \\ f(\lambda_2)\cdot f(\lambda_3)<0 \end{array}\right\}$

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει από μια τουλάχιστον ρίζα στα $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ και επομένως , δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

B. Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **1 τουλάχιστον ρίζα στο κλειστό διάστημα [α,β]** , τότε εμφανίζεται στο Θ. Bolzano το γινόμενο : **f (α) · f (β) ≤ 0**
Στην περίπτωση αυτή , διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- ✓ Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$. Άρα $x=\alpha$ ή $x=\beta$, ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
- ✓ Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε ισχύει το Θ. Bolzano.

Ανάλογα εργαζόμαστε και στα διαστήματα **[α , β)** , **(α , β]**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3=\alpha(2-x)$ με $\alpha\in[0,1]$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,1].

<u>Λύση:</u>

Είναι $x^3=\alpha(2-x)\Leftrightarrow x^3-\alpha x-2\alpha=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x-2\alpha$, $0\le\alpha\le1$.

- Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} f(0)=-2\alpha\le0 \\ f(1)=1-\alpha\ge0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)\le0$, αφού $0\le\alpha\le1$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- ✓ Αν $f(0)\cdot f(1)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(1)=0$. Άρα $x=0$ ή $x=1$, ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
- ✓ Αν $f(0)\cdot f(1)<0$, ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1). Επομένως σε κάθε περίπτωση , η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [-1,1].

Γ. Αν **δεν δίνεται διάστημα** για την ύπαρξη της ρίζας , δηλαδή αν θέλουμε μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$, τότε :

- ✓ Υπολογίζουμε τα όρια της f στο $\pm\infty$ (ή στα άκρα ανοιχτού διαστήματος).

  Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει α < 0 ώστε $f(\alpha) < 0$.

  Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει β > 0 ώστε $f(\beta) > 0$.

  Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει α < 0 ώστε $f(\alpha) > 0$.

  Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει β > 0 ώστε $f(\beta) < 0$.

- ✓ Αν ο υπολογισμός των ορίων στο $\pm\infty$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα τότε ο μόνος τρόπος που έχουμε είναι να ΄΄μαντέψουμε΄΄ με δοκιμές ένα διάστημα στο οποίο να εφαρμόζεται το Θ. Bolzano.

ΚΑΘΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ <u>ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ</u> ,

ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ ΣΤΟ $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ και ν περιττός. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) Αν $\alpha_\nu > 0$, τότε :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha_\nu x^\nu = -\infty$, αφού ν περιττός. Άρα υπάρχει λ < 0 , ώστε $f(\lambda) < 0$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_\nu x^\nu = +\infty$, αφού ν περιττός. Άρα υπάρχει μ > 0 , ώστε $f(\mu) > 0$.
  Έτσι ισχύει $f(\lambda)\cdot f(\mu) < 0$.
- Η f είναι συνεχής στο [λ,μ] ως πολυωνυμική.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (λ,μ) άρα και στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν $\alpha_\nu < 0$, τότε :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha_\nu x^\nu = +\infty$, αφού ν περιττός. Άρα υπάρχει κ < 0 , ώστε $f(\kappa) > 0$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_\nu x^\nu = -\infty$, αφού ν περιττός. Άρα υπάρχει ρ > 0 , ώστε $f(\rho) < 0$.
  Έτσι ισχύει $f(\kappa)\cdot f(\rho) < 0$.
- Η f είναι συνεχής στο [κ,ρ] ως πολυωνυμική.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (κ,ρ) άρα και στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + 2x^4 = 100$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x^4 - 100$ είναι $5^{ου}$ (άρα περιττού) βαθμού , οπότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση , θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Εναλλακτικά , μπορούμε να ενεργήσουμε , ως εξής :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ και άρα υπάρχει $\alpha < 0$, ώστε $f(\alpha) < 0$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ και άρα υπάρχει $\beta > 0$, ώστε $f(\beta) > 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) άρα και στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^8 = 7\cdot(x+1)(x^2 - x + 1)$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Είναι : $x^8 = 7(x+1)(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^8 - 7x^3 - 7 = 0$.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^8 - 7x^3 - 7$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano.

- Με δοκιμές , έχουμε τελικά ότι : $\left.\begin{array}{l} f(0) = -7 < 0 \\ f(2) = 198 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(2) < 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,2] \subseteq \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$ άρα και στο $\mathbb{R}$.

Γ. Θεωρητικά Θέματα : Εδώ , δίνεται η πολυωνυμική εξίσωση $f(x)=0$ και όχι ο τύπος της. Για τη συνάρτηση f , ισχύουν όλα τα προηγούμενα και για την εφαρμογή του Θ. Bolzano. Επίσης , παίρνουμε σαν δεδομένο ότι η πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.Αν για την πολυωνυμική εξίσωση $f(x)=0$ ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

<u>Λύση:</u>

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} f(\alpha)=f(\alpha) \\ f(\beta)=-f(\alpha), \text{αφού } f(\alpha)+f(\beta)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\alpha)\cdot f(\beta)=-\left[f(\alpha)\right]^2\le 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

✓ Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$. Άρα x = α ή x = β ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

✓ Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Σταθερό σημείο Banach (για πολυωνυμικές συναρτήσεις)

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$.

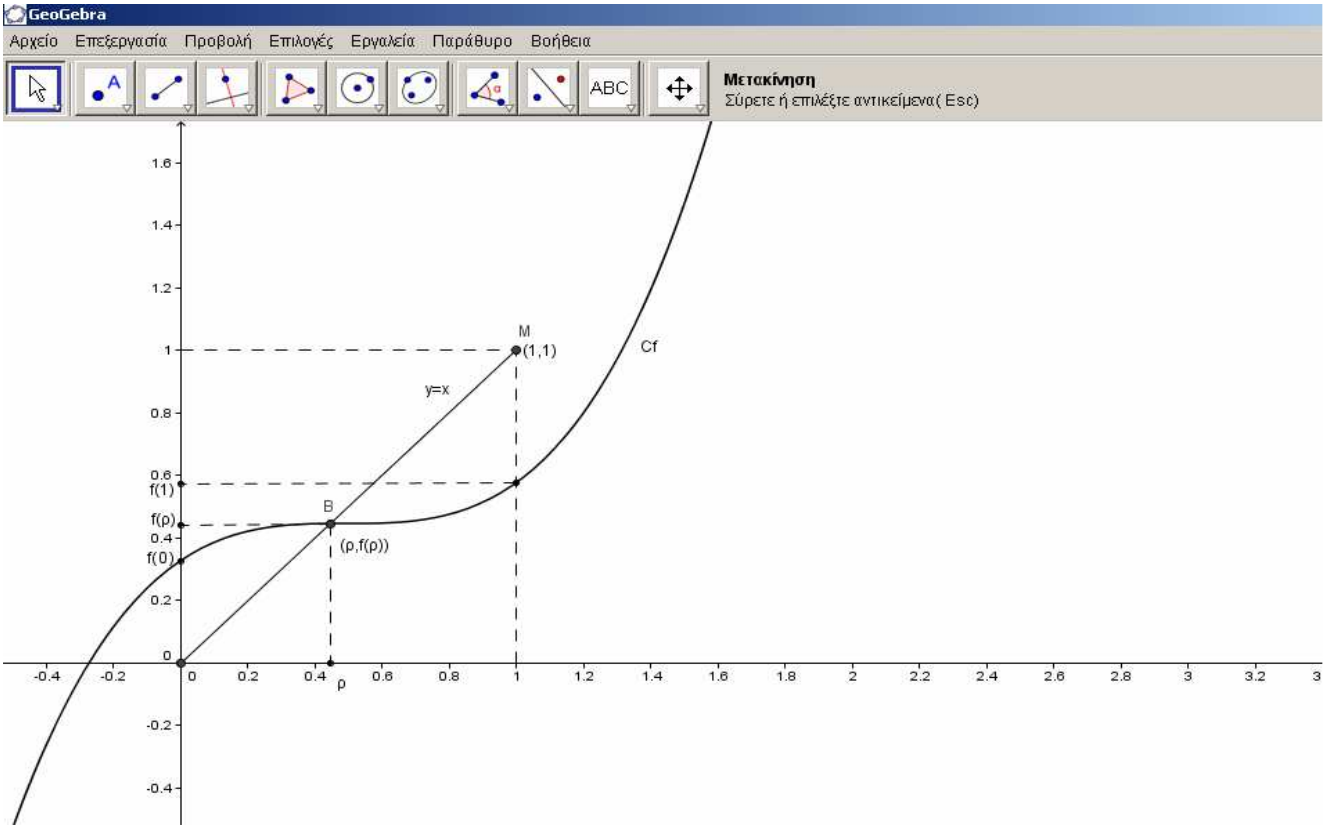
- Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} h(0)=f(0)>0 \\ h(1)=f(1)-1<0, \text{αφού } f(1)<1 \end{array}\right\} \Rightarrow h(0)\cdot h(1)<0$.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $h(x)=0$, δηλαδή η $f(x)=x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο (0,1).

ΣΧΟΛΙΟ : Η γενίκευση του σταθερού **σημείου Banach** , δίνει το σταθερό **σημείο Brower** :

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ BANACH



Το $\rho \in (0,1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ και καθορίζει το σημείο B (σημείο Banach).

Είναι προφανές ότι $f(0) > 0$, $f(1) < 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f : A \to (-\infty, 0)$ και $g : B \to (0, +\infty)$, με $f(1) = -1$ και $g(-3) = 3$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) + g(x) + x = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (– 3,1).

Λύση:

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x) + x$.

- Η h είναι συνεχής στο [–3,1] ως πολυωνυμική. (άθροισμα πολυωνυμικών συναρτήσεων)
- $h(-3) = f(-3) + g(-3) - 3 = f(-3) + 3 - 3 = f(-3) < 0$, αφού $f(-3) \in (-\infty, 0)$.
  $h(1) = f(1) + g(1) + 1 = -1 + g(1) + 1 = g(1) > 0$, αφού $g(1) \in (0, +\infty)$.

Έτσι ισχύει $h(-3) \cdot h(1) < 0$. Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $h(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x) + g(x) + x = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (–3,1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu} - 4x^{\nu-2} + 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(x+1)$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

<u>Λύση:</u>

Είναι : $f(0) = 1$.

$f(1) = 1 - 4 \cdot 1 + 1 = -2$.

$f(2) = 2^{\nu} - 4 \cdot 2^{\nu-2} + 1 = 2^{\nu} - 4 \cdot \frac{2^{\nu}}{4} + 1 = 1$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x+1)$.

- Η h είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά πολυωνυμικών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{array}{l} h(0) = f(0) - f(1) = 1 - (-2) = 3 > 0 \\ h(1) = f(1) - f(2) = -2 - 1 = -3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$.

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $h(x) = 0$, δηλαδή η $f(x) = f(x+1)$,
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύει
$f \circ g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ g)(x) = x$,
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x) - x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

- Η h είναι συνεχής στο [α,β] ως διαφορά πολυωνυμικών συναρτήσεων (fog συνεχής).
- $\left.\begin{array}{l} h(\alpha) = (f \circ g)(\alpha) - \alpha \geq 0 \text{ , αφού } (f \circ g)(\alpha) \in [\alpha, \beta] \\ h(\beta) = (f \circ g)(\beta) - \beta \leq 0 \text{ , αφού } (f \circ g)(\beta) \in [\alpha, \beta] \end{array}\right\} \Rightarrow h(\alpha) \cdot h(\beta) \leq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- ✓ Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) = 0 \Leftrightarrow h(\alpha) = 0$ ή $h(\beta) = 0$, τότε x = α ή x = β ρίζες της εξίσωσης $h(x) = 0$.
- ✓ Αν $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$, τότε ισχύει το θεώρημα Bolzano και η εξίσωση $h(x) = 0$,
  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Άρα σε κάθε περίπτωση , η εξίσωση $h(x) = 0$, δηλαδή η $(f \circ g)(x) = x$,
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Bernard Bolzano (1791 – 1848)

Γεννήθηκε στην Πράγα (από Ιταλούς γονείς) και με προτροπή του πατέρα του έγινε ιερέας και σπούδασε Φιλοσοφία. Έγινε καθηγητής της επιστήμης των Θρησκευμάτων.

Έργα του Bolzano:

- ✓ ΄΄Γεωμετρία΄΄ , όπου γίνεται προσπάθεια να εξηγήσει πλήρως την Ευκλείδεια θεωρία των παραλλήλων.
- ✓ Έγραψε εργασίες όπου εξήγησε έννοιες και εφάρμοσε μεθόδους. Καθιέρωσε τις έννοιες της συνεχούς συνάρτησης , της διαφόρισης δυναμοσειράς και έδωσε κριτήριο σύγκλισης σειράς κατακτώντας την έννοια του ΄΄ανώτερου ορίου΄΄
- ✓ Έγραψε εργασία πάνω στην Ανάλυση , χωρίς γεωμετρική εποπτεία διατυπώνοντας το γνωστό θεώρημα Bolzano.
- ✓ ΄΄Θεωρία των Συναρτήσεων΄΄ , όπου αναφέρεται σε συνεχή συνάρτηση που δεν έχει εφαπτομένη σε όλα τα σημεία της.

Georg Cantor (1845-1918)

Δανέζικης καταγωγής , γεννημένος στην Πετρούπολη. Επιστρέφει με την οικογένειά του στην Φρανκφούρτη όπου φοίτησε στο Γυμνάσιο. Γράφεται στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης και γίνεται μηχανικός. Γύρισε στο Βερολίνο και συνέχισε τις σπουδές του στα ΄΄καθαρά΄΄ Μαθηματικά.Γίνεται καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Halle.

Έργα του Cantor:

- ✓ Δημοσίευσε τις εργασίες του πάνω στη θεωρία αριθμών.
- ✓ Έγραψε δυο σημαντικά υπομνήματα για τις τριγωνομετρικές σειρές. Στο δεύτερο αποδεικνύει , ότι είναι αδύνατον δυο τέτοιες σειρές να παριστάνουν την ίδια συνάρτηση.
- ✓ ΄΄Τα στοιχεία της θεωρίας των συναρτήσεων΄΄ , ένα υπόμνημα , στο οποίο αναπτύσσεται η θεωρία των ασύμμετρων αριθμών που φέρει και το όνομά του.
- ✓ Εισάγει σε εργασία του την έννοια ΄΄Δύναμη ενός συνόλου΄΄.
- ✓ ΄΄Θεωρία Συνόλων΄΄ , βασικό κομμάτι των νεότερων Μαθηματικών.

Richard Dedekind (1831 – 1916)

Γεννήθηκε στη Γερμανία και σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Γκέτιγκεν. Έγινε τακτικός καθηγητής των Μαθηματικών στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης.

Έργα του Dedekind:

- ✓ ΄΄Μαθήματα θεωρίας Αριθμών΄΄ , όπου ενημερώνει για τις μέχρι τότε γνώσεις σε αυτό τον κλάδο των Μαθηματικών.
- ✓ ΄΄Συνέχεια και Ασύμμετροι αριθμοί΄΄ , όπου εξηγεί τα θεμέλια της Ανάλυσης και αναφέρεται ο περίφημος ορισμός των ασύμμετρων αριθμών μέσω των τομών **(Τομές Dedekind)**
- ✓ ΄΄Τι είναι και τι νομίζονται οι αριθμοί΄΄ , μια εργασία πάνω στη θεωρία αριθμών.

Περίπτωση (2) : Πολυωνυμικές εξισώσεις με 1 ή 2 ή … το πολύ ρίζες.

Για να δείξουμε ότι μια πολυωνυμική εξίσωση έχει **1 ή 2 ή … το πολύ ρίζες** σε ένα διάστημα ή στο $\mathbb{R}$, υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μια παραπάνω ρίζα και εφαρμόζοντας το **Θ. Rolle** στο διάστημα που σχηματίζουν οι ρίζες αυτές , καταλήγουμε σε **άτοπο**.
Έτσι , συμπεραίνουμε ότι η πολυωνυμική εξίσωση $f(x)=0$, έχει **1 ή 2 ή … το πολύ ρίζες.**

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE :

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν :

- Είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β].
- Είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β).
- $f(\alpha)=f(\beta)$.

Τότε , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\rho)=0$, δηλαδή :

<u>Η εξίσωση f ΄(x) = 0 , έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο διάστημα (α,β).</u>

Για να αποδείξουμε το θεώρημα Rolle , χρειαζόμαστε δυο βασικά θεωρήματα της πραγματικής ανάλυσης :

1. Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής

Αν f μια οριζόμενη και συνεχής συνάρτηση στο [α,β] , τότε η f παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο [α,β] , δηλαδή $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

2. Θεώρημα Fermat

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_o \in (\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε ισχύει $f'(x_o) = 0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_o. Τότε υπάρχει δ > 0 ώστε $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subseteq (\alpha,\beta)$ και $f(x_o + h) \le f(x_o)$, για κάθε $h \in (-\delta,\delta)$.

✓ Αν $0 < h < \delta$ τότε $\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \le 0 \Rightarrow f'(x_o) \le 0$ (1).

✓ Αν $-\delta < h < 0$ τότε $\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \ge 0 \Rightarrow f'(x_o) \ge 0$ (2).

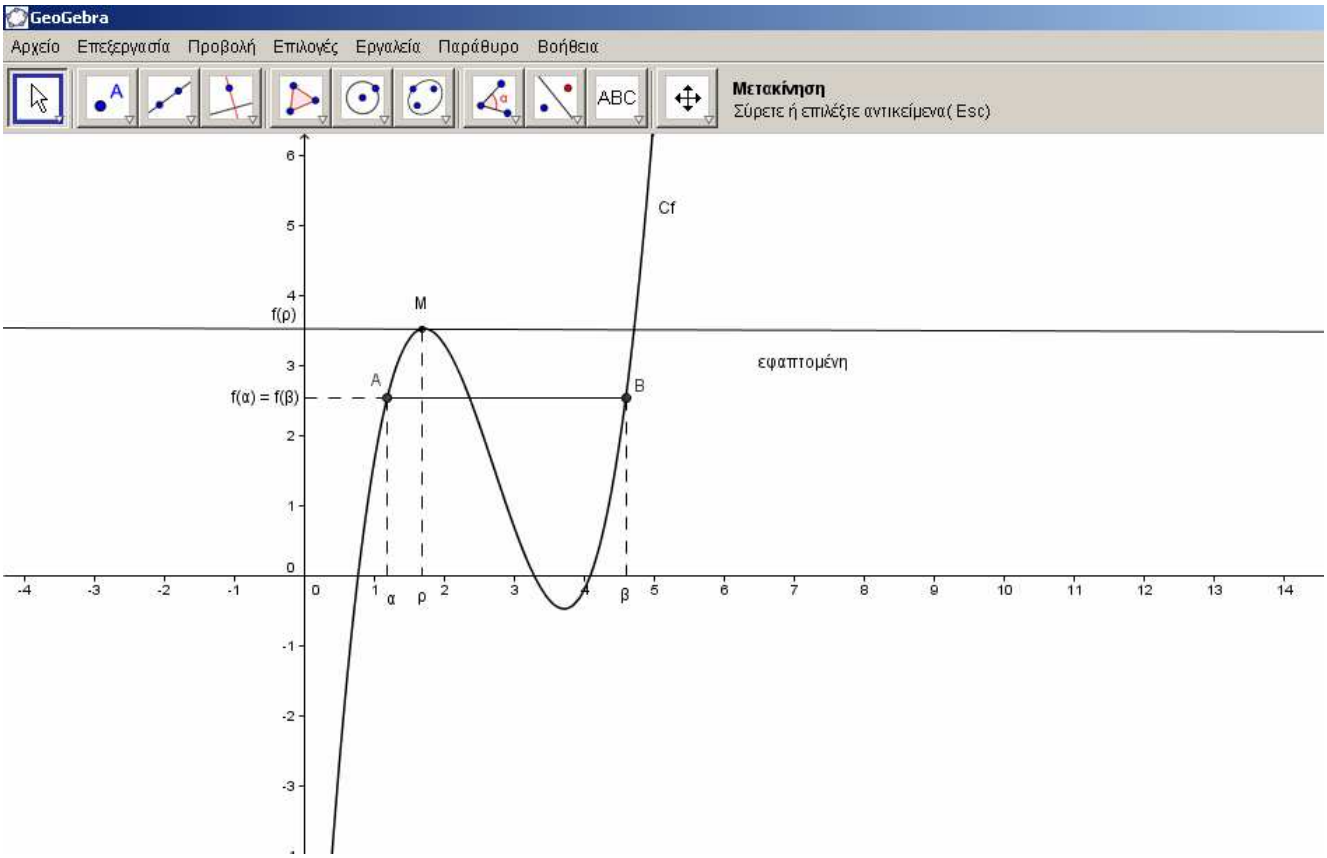
Επομένως από τις (1) , (2) έχουμε $f'(x_o) = 0$.

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος Rolle:</u>

✓ Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή , τότε $f'(\rho) = 0$ για κάθε $\varepsilon \in (\alpha,\beta)$.

✓ Αν η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή , τότε αφού είναι συνεχής , από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής , θα υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu \in [\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_\varepsilon) \le f(x) \le f(x_\mu)$.
Τα x_ε, x_μ δε μπορούν να είναι ταυτόχρονα τα άκρα του [α,β] , γιατί τότε , αν για παράδειγμα ήταν $x_\varepsilon = \alpha, x_\mu = \beta$ θα είχαμε $f(\alpha) = f(x_\varepsilon) < f(x_\mu) = f(\beta)$, που είναι άτοπο , αφού $f(\alpha) = f(\beta)$.
Άρα , ένα τουλάχιστον από τα x_ε, x_μ , θα είναι εσωτερικό σημείο του [α,β] , έστω το x_ε.
Επειδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_\varepsilon \in (\alpha,\beta)$, θα ισχύει το θεώρημα του Fermat σύμφωνα με το οποίο $f'(x_\varepsilon) = 0$. Έτσι το x_ε είναι το ζητούμενο σημείο ρ ώστε $f'(\rho) = 0$.

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ROLLE



Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] , παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx' και στην ευθεία AB με $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+2\alpha^2x-100=0$, $\alpha\neq 0$, έχει μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+2\alpha^2x-100$, με $\alpha\neq 0$.
Υποθέτουμε ότι η f έχει δυο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$, με $\rho_1<\rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+2\alpha^2$.
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$, αφού ρ_1,ρ_2 ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$.
Δηλαδή $3\xi^2+2\alpha\xi+2\alpha^2=0$, που είναι άτοπο γιατί $3\xi^2+2\alpha\xi+2\alpha^2>0$, εφόσον $\Delta=-20\alpha^2<0$.
Άρα η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+2\alpha^2x-100=0$, έχει μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda-1)x^3-\lambda x^2-1=0$, με $0<\lambda<1$, έχει το πολύ δυο θετικές ρίζες.

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\lambda-1)x^3-\lambda x^2-1=0$, με $0<\lambda<1$.
Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbb{R}$, με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

- Η f είναι συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3)$ με $f'(x)=3(\lambda-1)x^2-2\lambda x$.
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, αφού ρ_1,ρ_2,ρ_3 ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει από ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ ώστε :
$f'(\xi_1)=0$, $f'(\xi_2)=0$ (1).
Για την $f'(x)=3(\lambda-1)x^2-2\lambda x$, έχουμε :

- Η f ΄ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με $f''(x)=6(\lambda-1)x-2\lambda$.
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ λόγω της (1).

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε :
$f''(\xi)=0\Leftrightarrow 6(\lambda-1)x-2\lambda=0$
που είναι άτοπο , αφού $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(0,+\infty)\Rightarrow\xi>0$ και επειδή $0<\lambda<1\Rightarrow\lambda>0$, $\lambda-1<0$, που σημαίνει ότι $6(\lambda-1)x-2\lambda<0$.
Άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ δυο ρίζες στο $(0,+\infty)$.

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Michel Rolle (1652 – 1719)

Γεννήθηκε στη Γαλλία και χωρίς σπουδές , θεωρήθηκε ΄΄επιδέξιος χειριστής των αριθμών΄΄. Ανέλαβε κυβερνητικές θέσεις όμως σύντομα έφυγε , για να αφοσιωθεί εξ'ολοκλήρου σε αλγεβρικές μελέτες και έγινε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών.

Έργα του Rolle:

- ✓ ΄΄Άλγεβρα΄΄ , όπου αναφέρεται και αλγόριθμους λύσης πρωτοβάθμιας εξίσωσης με δυο αγνώστους. Το έργο συμπληρώθηκε με ένα μικρότερο : ΄΄Μέθοδος λύσης των απροσδιόριστων αλγεβρικών εξισώσεων΄΄. Εδώ αναφέρεται και η λεγόμενη πρόταση Rolle : **΄΄Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης f ΄(x) = 0 , υπάρχει μια μόνο ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 ΄΄**.

- ✓ ΄΄Διευκρινήσεις επί της φύσης των ισοτήτων΄΄ που είναι κριτική στις ιδέες του Descartes.

Pierre De Fermat (1601 – 1665)

Γεννημένος στη Γαλλία , σπουδάζει Νομική και γίνεται σύμβουλος του κοινοβουλίου της Τουλούζης.Αναπτύσσει τη Μαθηματική του σκέψη , από τη μελέτη των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών και του Viete. Γνωρίζουμε ελάχιστα από τη ζωή του. Όλα όσα αναφέρονται σχετικά με το έργο του δεν είναι από τον ίδιο , αλλά από σημειώσεις (ακόμα και στα περιθώρια των βιβλίων) από τις οποίες αρκετές έχουν χαθεί , όπως και οι επιστολές του.

Έργα του Fermat:

- ✓ Εργασίες στη Γεωμετρία :

  1) Πάνω στους ΄΄Επίπεδους τόπους΄΄ του Απολλώνιου.

  2) Πάνω στα ΄΄Πορίσματα΄΄ του Ευκλείδη.

  3) Πάνω στις ΄΄Σφαιρικές επαφές΄΄.

  4) Πάνω στις ΄΄Κυκλικές επαφές΄΄ του Απολλώνιου.

- ✓ Εργασίες στην Αναλυτική Γεωμετρία :

  1) ΄΄Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους΄΄ που τον τοποθετεί σε θέματα συντεταγμένων , στο ίδιο επίπεδο με τον Descartes.

  2) ΄΄Επί της λύσης Γεωμετρικών προβλημάτων , μέσω των απλούστερων δυνατών καμπύλων ΄΄μια διατριβή που συμπληρώνει την εργασία του Descartes.

- ✓ Εργασίες στην Άλγεβρα :

  Συμπληρωματικές παρατηρήσεις στις λύσεις διάφορων προβλημάτων του Viete.

- ✓ Εργασίες στη θεωρία Αριθμών

  1) Σχολιασμός στα ΄΄Αριθμητικά΄΄ του Διόφαντου.

  2) Η διάσημη υπόθεση του Fermat δηλαδή ότι η εξίσωση $x^{\nu} + y^{\nu} = z^{\nu}$ με ν > 2 είναι αδύνατη στο $\mathbb{Z}$, που αποδείχτηκε τελικά από τον Sir Andrew John Wiles το 1993 , μέσω ανακοίνωσης σε μία σειρά διαλέξεων που παραδόθηκαν στο ινστιτούτο για την επιστήμη των μαθηματικών "Ισαάκ Νεύτωνας" στις 21 , 22 και 23 Ιουνίου.

  3) Ανακάλυψε πολλές ιδιότητες των πρώτων αριθμών της μορφής 4ν + 1.

  4) Κατέληξε σε σπουδαία συμπεράσματα , όπως :
     Κάθε ακέραιος είναι ή τριγωνικός ή άθροισμα 2 ή 3 τριγωνικών αριθμών.
     Κάθε ακέραιος είναι ή τετράγωνος ή άθροισμα 2 , 3 ή 4 τετραγωνικών αριθμών.
     Κάθε ακέραιος είναι ή πενταγωνικός ή άθροισμα 2 , 3 , 4 ή 5 πενταγωνικών αριθμών.

5) Θεωρεί ότι οι αριθμοί της μορφής $2^{2^{\nu}}+1$ είναι πρώτοι για ν = 1 , 2 , 3 , 4. Θεωρεί επίσης (εσφαλμένα κατά τον Euler) ότι το ίδιο ισχύει και για ν = 5 , 6 αφού προκύπτουν σύνθετοι αριθμοί. Εξετάζει επίσης και απροσδιόριστες εξισώσεις της μορφής $\alpha x^2+1=\beta^2$ με $\alpha \in \mathbb{Z}$ και μη τετράγωνο.

6) Εξέτασε τους τέλειους αριθμούς του Ευκλείδη , τα μαγικά τετράγωνα και τους μαγικούς κύβους.

✓ Εργασίες στον Απειροστικό Λογισμό :

1) Ασχολήθηκε με ζητήματα μέγιστων και ελάχιστων. Σε σύγχρονη διατύπωση , εμφανίζεται ο κανόνας με τον οποίο ΄΄**Κάθε σημείο μέγιστου ή ελάχιστου μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής , πρέπει να μηδενίζει την πρώτη παράγωγό της**΄΄.

2) Προσδιόρισε τα εφαπτόμενα επίπεδα καμπύλης με τρόπο που δε διαφέρει από τα παραπάνω ζητήματα.

3) Ασχολήθηκε με ζητήματα ολοκληρωτικού λογισμού. Εργάστηκε πάνω στον τετραγωνισμό της παραβολής ανώτερης τάξης , στον κυβισμό του στερεού εκ περιστροφής παραβολής όπως και στις υπερβολές ανώτερης τάξης και τον προσδιορισμό των εμβαδών όλων των υπερβολών.

4) Αντιμετώπισε το πρόβλημα της ευθειοποίησης της παραβολής (τετραγωνισμός παραβολής) εξαρτώμενο από ολοκλήρωμα εκφρασμένο με λογάριθμους.

Περίπτωση (3) : Πολυωνυμικές εξισώσεις με 1 ή 2 ή … ακριβώς ρίζες. (Μοναδικότητα Ρίζας)

Α. Για να δείξουμε ότι μια πολυωνυμική εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 ή 2 ή … ακριβώς ρίζες σε διάστημα ή στο $\mathbb{R}$, κάνουμε τα εξής:

✓ Εξετάζουμε αν η f έχει 1 ή 2 ή … **<u>τουλάχιστον</u>** ρίζες στο διάστημα ή στο $\mathbb{R}$ με το **Θ. Bolzano**.

✓ Θεωρούμε ότι η f έχει μια παραπάνω ρίζα και με εφαρμογή του **Θ. Rolle** καταλήγουμε σε **άτοπο.** Συμπεραίνουμε τελικά ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 ή 2 ή … **<u>ακριβώς</u>** ρίζες. **(μοναδικές)**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Δείξτε ότι η εξίσωση $x^5 - \alpha x^3 - \alpha x + 1 = 0$, με $\alpha < 0$,
έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 - \alpha x^3 - \alpha x + 1 = 0$, με $\alpha < 0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$, άρα υπάρχει $\kappa < 0$ ώστε $f(\kappa) < 0$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$, άρα υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $f(\lambda) > 0$.
  Έτσι ισχύει $f(\kappa)\cdot f(\lambda) < 0$.
- Η f είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda] \subseteq \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Άρα ισχύει το Θ. Bolzano και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [κ,λ] , άρα και στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι η f έχει δυο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, με $\rho_1 < \rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = 5x^4 - 3\alpha x^2 - \alpha$.
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ.Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε
$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 5\xi^4 - 3\alpha\xi^2 - \alpha = 0$, που είναι άτοπο , αφού $5\xi^4 - 3\alpha\xi^2 - \alpha > 0$, γιατί $\alpha < 0$.
Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΣΧΟΛΙΟ: Το παραπάνω παράδειγμα , μπορεί να αντιμετωπιστεί και ως εξής :

Η εξίσωση $f(x) = x^5 - \alpha x^3 - \alpha x + 1 = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική περιττού βαθμού) και έχει θετική πρώτη παράγωγο ($f'(x) = 5x^4 - 3\alpha x^2 - \alpha > 0$, γιατί $\alpha < 0$.)
Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική , σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ : Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Α ,
τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in A$ με $\rho_1 < \rho_2$ όπου $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.
Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α τότε $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow f(\rho_1) < f(\rho_2)$ αδύνατο.
Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α τότε $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow f(\rho_1) > f(\rho_2)$ αδύνατο.
Άρα η εξίσωση δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες στο Α οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο Α.

B. Αν δεν εφαρμόζεται το **Θ. Bolzano** για την εξίσωση $f(x)=0$ σε κάποιο διάστημα , τότε χρησιμοποιούμε το Θ. Rolle για την αρχική συνάρτηση (παράγουσα) F της f.

Με τον τρόπο αυτό συμπεραίνουμε ότι $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$, δηλαδή ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Αν $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$ και $\alpha\cdot\beta>0$, δείξτε ότι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,1).

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.
Είναι $f(0)=\gamma$, $f(1)=\alpha+\beta+\gamma$, οπότε $f(0)\cdot f(1)=\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$.

Δε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Bolzano , αφού δε γνωρίζουμε το πρόσημο του $f(0)\cdot f(1)$.

Η παράγουσα F της f , είναι : $F(x)=\frac{\alpha}{3}x^3+\frac{\beta}{2}x^2+\gamma x$.

- Η F είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $F'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=f(x)$.
- $\left.\begin{array}{l} F(0)=0 \\ F(1)=\alpha+\beta+\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(0)=F(1)$.

Άρα ισχύει το Θ.Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ ώστε $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

<u>Μοναδικότητα Ρίζας:</u>

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$, με $\rho_1<\rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f'(x)=2\alpha x+\beta$.
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)$, αφού ρ_1,ρ_2 ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ.Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi'\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi')=0 \Leftrightarrow 2\alpha\xi'+\beta=0 \Leftrightarrow$ $\xi'=-\frac{\beta}{2\alpha}$ που είναι άτοπο , γιατί $\alpha\cdot\beta>0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{2\alpha}<0$. Έτσι , $\xi'<0$ αδύνατο αφού $\xi'\in(0,1)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,1).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

Η μοναδικότητα ρίζας είναι προτιμότερο να αποδεικνύεται με τη μονοτονία ,

παρά με το Θ. Rolle και άτοπο.

Γ. Αν η πολυωνυμική εξίσωση δίνεται με συγκεκριμένο τύπο , τότε εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας με τους εξής τρόπους:

- ✓ Με όλες τις περιπτώσεις του **Θ. Bolzano**.
- ✓ Με τη χρήση της **παράγουσας**.
- ✓ Με τον **περιττό βαθμό**.
- ✓ Με τη διαπίστωση ότι **0 Є f (A)**.

ΠΡΟΤΑΣΗ : Αν f (A) είναι το **Σύνολο Τιμών** της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A και ισχύει **0 Є f (A)** , τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A.

ΓΕΝΙΚΑ : Η εξίσωση f (x) = κ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A , αν κ Є f (A).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4-2x^2+\lambda=0$, με $\lambda\in(0,1)$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,1).

<u>Λύση:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+\lambda$, $0<\lambda<1$.

- Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.
- $\left.\begin{array}{l} f(0)=\lambda>0, \text{αφού } 0<\lambda<1 \\ f(1)=\lambda-1<0, \text{αφού } 0<\lambda<1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0$.

Άρα ισχύει το Θ. Bolzano και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Είναι $f(x)=x^4-2x^2+\lambda \Rightarrow f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f , από τον οποίο έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] , που σημαίνει ότι η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (0,1) , είναι μοναδική.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f ΄	–	+	–	+	
f	↘	↗	↘	↗	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$, έχει μια μόνο ρίζα στο (-1,1).

Λύση:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f ΄	+	−	+	
f	↗	↘	↗	

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.
Από τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1,1].
Το Σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = [f(1), f(-1)] = [-1, 3]$, αφού $f(1) = -1$, $f(-1) = 3$.
Επειδή $0 \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-1,1) και αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1,1] , η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Περίπτωση (4) : Το Πλήθος των ριζών πολυωνυμικής εξίσωσης και η εύρεσή τους.

Κάθε πολυώνυμο νιοστού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές , έχει ν το πολύ πραγματικές ρίζες

Απόδειξη:

Έστω $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_o$ πολυώνυμο με $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu \geq 1$ και $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., \nu$.
Αν το P(x) είχε ν +1 πραγματικές ρίζες , τότε :

⇨ Το $P'(x)$ θα είχε ν ρίζες (πρόταση 3 σελ.72) , με $P'(x) = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2} + ... + \alpha_1$.
⇨ Το $P''(x)$ θα είχε $\nu - 1$ ρίζες (όμοια) , με $P''(x) = \nu(\nu-1)\alpha_\nu x^{\nu-2} + (\nu-1)(\nu-2)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-3} + ... + \alpha_2$.
……..
⇨ Το $P^{(\nu)}(x)$ θα είχε $\nu - (\nu - 1) = 1$ ρίζα (όμοια) που είναι **<u>άτοπο</u>** , γιατί
$P^{(\nu)}(x) = \nu \cdot (\nu-1) \cdot (\nu-2) \cdot ... \cdot \alpha_\nu \cdot x^{\nu-\nu} = \alpha_\nu \cdot \nu! \neq 0$.
Επομένως το P(x) έχει ν το πολύ πραγματικές ρίζες.

Για την πολυωνυμική εξίσωση f (x) = 0 ισχύουν τα εξής :

1. Μεταξύ δυο ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, υπάρχει **<u>μια τουλάχιστον</u>** ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

Απόδειξη:

Έστω ότι η f έχει δυο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$.

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πολυωνυμική.
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(\rho) = 0$,
δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

2. Μεταξύ δυο **διαδοχικών** ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$, υπάρχει **<u>μια το πολύ</u>** ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω ότι η f' έχει δυο διαδοχικές ρίζες τις $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 < \xi_2$ και έστω ότι η f έχει δυο ρίζες $x_1, x_2 \in (\xi_1,\xi_2)$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πολυωνυμική.
- $f(x_1)=f(x_2)=0$, αφού x_1, x_2 ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq (\xi_1,\xi_2)$ που είναι **άτοπο** , γιατί ξ_1,ξ_2 διαδοχικές ρίζες της f'.

3. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει κ διαφορετικές ρίζες , τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει κ – 1 **<u>τουλάχιστον</u>** ρίζες.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $x_1, x_2, ...x_\kappa$ οι κ διαφορετικές ρίζες της f με $x_1 < x_2 < ... < x_\kappa$.

- Η f είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{\kappa-1}, x_\kappa)$ ως πολυωνυμική.
- $f(x_1)=f(x_2)=...=f(x_\kappa)=0$, αφού $x_1, x_2, ...x_\kappa$ ρίζες της f.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει από ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3), \ldots, \xi_{\kappa-1} \in (x_{\kappa-1}, x_\kappa)$ ώστε $f'(\xi_1)=0$, $f'(\xi_2)=0, \ldots, f'(\xi_{\kappa-1})=0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ρίζες τις $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{\kappa-1}$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει κ – 1 τουλάχιστον ρίζες.

4. Αν η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει κ διαφορετικές ρίζες , τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει κ + 1 **<u>το πολύ</u>** ρίζες.

<u>Απόδειξη:</u>

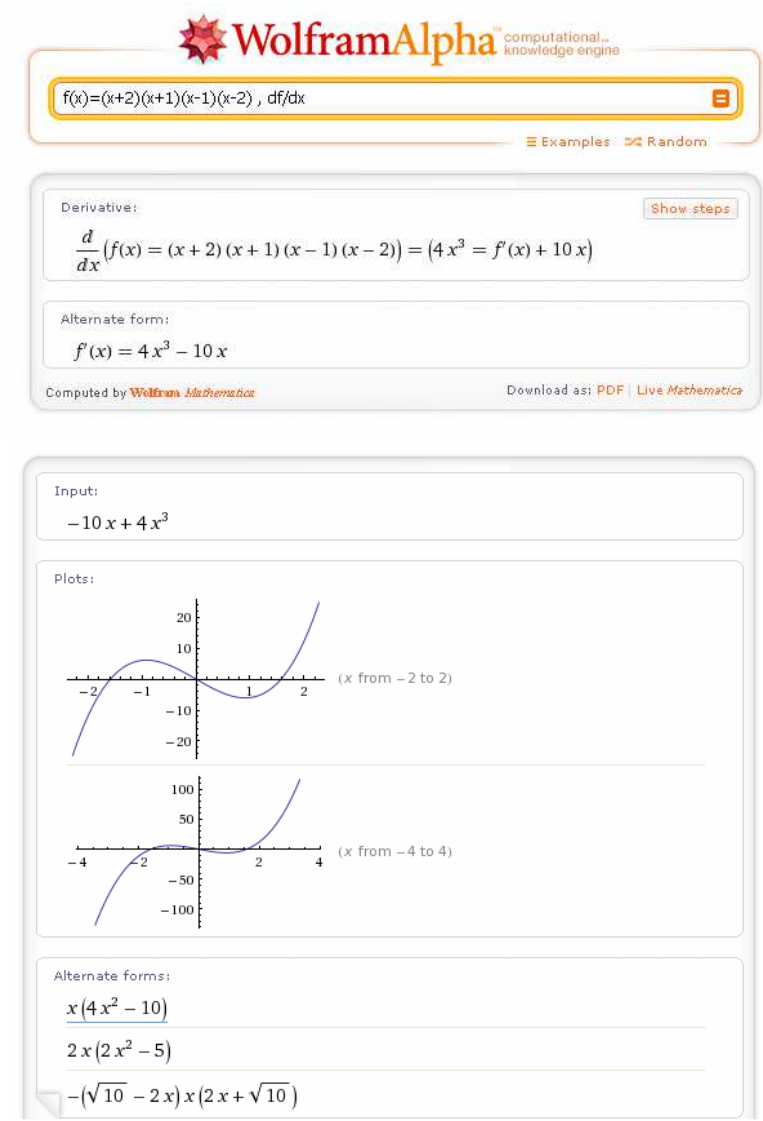
Έστω $x_1, x_2, ...x_\kappa$ οι κ διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$. Λόγω του **2.** , έχουμε από μια το πολύ ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{\kappa-1}$ της εξίσωσης $f(x)=0$ στα διαστήματα $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{\kappa-1} x_\kappa)$, δηλαδή έχουμε κ – 1 το πολύ ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
Η εξίσωση $f(x)=0$ μπορεί να έχει δυο ακόμα ρίζες , τις $\rho_o < x_1$ και $\rho_\kappa > x_\kappa$, που σημαίνει ότι το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι κ – 1 + 2 = κ + 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Δίνεται συνάρτηση $f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$.
Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$.

<u>Λύση:</u>

Είναι $f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) \Rightarrow f(x)=x^4-5x^2+4$, με 4 διαφορετικές ρίζες -2, -1, 1, 2.
Λόγω του **3.**, η εξίσωση $f'(x)=0$, θα έχει 3 <u>τουλάχιστον</u> ρίζες.
Επειδή η εξίσωση $f'(x)=4x^3-10x$ είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού, θα έχει 3 <u>το πολύ</u> ρίζες.
Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$, έχει <u>ακριβώς</u> 3 ρίζες.

<u>Γεωμετρική επίλυση με τη χρήση του WolphramAlpha</u>



Για τη διώνυμη εξίσωση $\alpha \cdot x^{\kappa} + \beta \cdot x^{\mu} = 0$, $\alpha , \beta \neq 0$ ισχύουν τα εξής :

1. Κάθε διώνυμη εξίσωση **περιττού** βαθμού , έχει **<u>μια ακριβώς μη μηδενική ρίζα</u>** στο $\mathbb{R}^*$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η διώνυμη εξίσωση περιττού βαθμού $Ax^{2\nu+1} + B = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = Ax^{2\nu+1} + B$, $x \neq 0$.
Η εξίσωση $f(x) = 0$, ως πολυωνυμική περιττού βαθμού , θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}^*$.
Είναι $f'(x) = \left(Ax^{2\nu+1} + B\right)' = (2\nu+1) \cdot Ax^{2\nu} > 0$, αφού $x \neq 0$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}^*$.

2. Κάθε διώνυμη εξίσωση **άρτιου** βαθμού , έχει **<u>δυο το πολύ μη μηδενικές ρίζες</u>** στο $\mathbb{R}^*$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η διώνυμη εξίσωση άρτιου βαθμού $Ax^{2\nu} + B = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = Ax^{2\nu} + B$, $x \neq 0$.
Είναι $f'(x) = \left(Ax^{2\nu} + B\right)' = 2\nu \cdot Ax^{2\nu-1}$, που είναι εξίσωση περιττού βαθμού , και λόγω του **1.** θα έχει μια ρίζα στο $\mathbb{R}^*$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$, θα έχει το πολύ δυο ρίζες $\mathbb{R}^*$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha x^{2\nu} + \beta x + \gamma = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει δυο το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^{2\nu} + \beta x + \gamma$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

- Η f είναι συνεχής στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(x) = 2\nu\alpha x^{2\nu-1} + \beta$.
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$, αφού ρ_1, ρ_2, ρ_3 ρίζες της f.

Επομένως , ισχύει το Θ. Rolle και υπάρχει από ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δυο (τουλάχιστον) ρίζες που είναι άτοπο , εφόσον η εξίσωση αυτή είναι διωνυμική περιττού βαθμού και άρα σύμφωνα με τα παραπάνω , θα έχει μια ακριβώς ρίζα. Έτσι , η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να αποδείξετε ότι :

1. Η εξίσωση $x^{2\nu}+\alpha x+\beta=0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ έχει δυο το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu}+\alpha x+\beta$, με $f'(x)=2\nu\cdot x^{2\nu-1}+\alpha$ που είναι διώνυμη περιττού βαθμού και άρα θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.
Επομένως , η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^{2\nu}+\alpha x+\beta=0$, θα έχει δυο το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

2. Η εξίσωση $x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta=0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ έχει τρεις το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta$, με $f'(x)=(2\nu+1)\cdot x^{2\nu}+\alpha$ που είναι διώνυμη άρτιου βαθμού και άρα θα έχει δυο το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.
Επομένως , η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta=0$, θα έχει τρεις το πολύ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση του πλήθους των ριζών μιας Πολυωνυμικής Εξίσωσης

Για να βρούμε το πλήθος των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $f(x)=0$, κάνουμε τα εξής:

- ✓ Εξετάζουμε τη συνάρτηση f ως προς τη **<u>μονοτονία</u>** και στον πίνακα μεταβολών στα διαστήματα που προκύπτουν βρίσκουμε το σύνολο τιμών και ελέγχουμε αν **0∈f(A)**.
- ✓ Αν υπάρχει ρίζα σε κάποιο από τα διαστήματα , αυτή θα είναι **<u>μοναδική</u>** σ αυτό , λόγω μονοτονίας. Έτσι έχουμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3-6x^2+12x-3=0$.

<u>Λύση:</u>

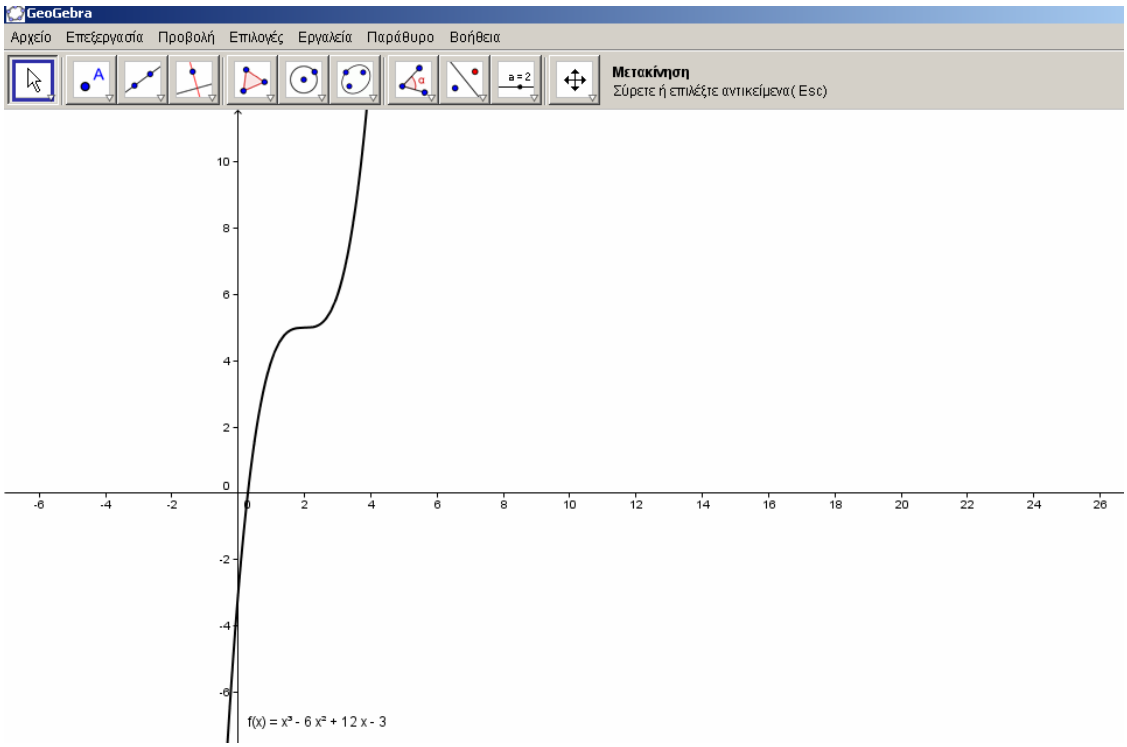
Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$.
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.
$f'(x)=\left(x^3-6x^2+12x-3\right)'=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow 3(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$ (διπλή ρίζα)

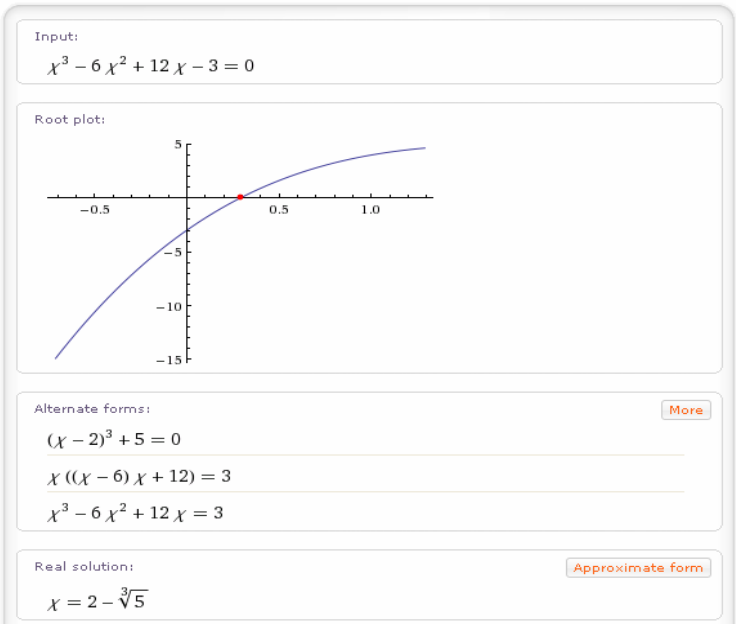
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f ΄	+		+
f	↗		↗
	$-\infty$	$f(2)=3$	$+\infty$

Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε :

- Για $x \in (-\infty, 2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της το :
  $f((-\infty, 2]) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), f(2)\right) = (-\infty, 3]$ και αφού $0 \in f(A)$, και η f $\nearrow$, η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(-\infty, 2]$.

- Για $x \in (2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της το :
  $f((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \to 2^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (3, +\infty)$ και αφού $0 \notin f(A)$, δεν έχει ρίζα στο $(2, +\infty)$.
  Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.





ΣΧΟΛΙΟ : Το παραπάνω παράδειγμα , αντιμετωπίζεται και ως εξής :
Η f είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού οπότε θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $3x^4+8x^3-6x^2-24x+1=0$;

<u>Απάντηση:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+1$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4=+\infty$

$f'(x)=\left(3x^4+8x^3-6x^2-24x+1\right)'=12x^3+24x^2-12x-24$

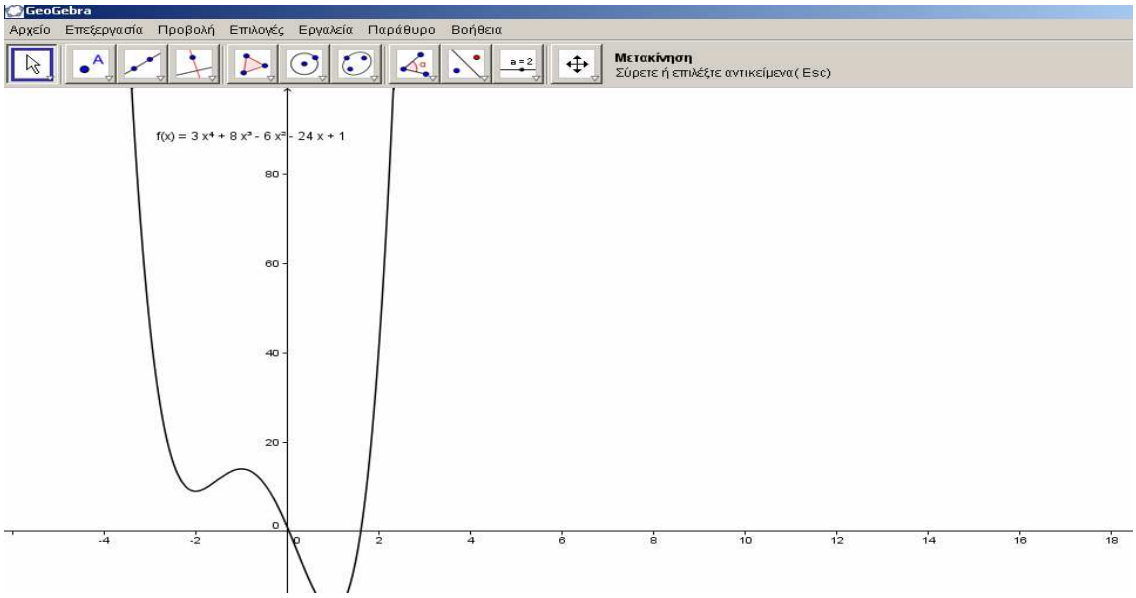
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3+24x^2-12x-24=0$ και μετά από πράξεις παίρνουμε : $x=-2$, $x=-1$, $x=1$.

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
f ΄	$-$	$+$	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$+\infty$	$f(-2)=9$	$f(-1)=14$	$f(1)=-18$	$+\infty$

Παίρνουμε έτσι τον διπλανό πίνακα μεταβολών , από τον οποίο έχουμε :

- Για $x\in(-\infty,-2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών το :
  $f\left((-\infty,-2]\right)=\left[f(-2),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=[9,+\infty)$ και αφού $0\notin f(A)$, η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,-2]$.
- Για $x\in(-2,-1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το :
  $f\left((-2,-1]\right)=\left(\lim\limits_{x\to-2^+} f(x),f(-1)\right]=(9,14]$ και αφού $0\notin f(A)$, η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $(-2,-1]$.
- Για $x\in(-1,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών το :
  $f\left((-1,1]\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\right)=[-18,14)$ και αφού $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα ,
  η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(-1,1]$.
- Για $x\in(1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το :
  $f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-18,+\infty)$ και αφού $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα ,
  η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$, έχει δυο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.



Ο ΄΄κανόνας των προσήμων΄΄ του Descartes για τον προσδιορισμό του πλήθους των πραγματικών ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης:

Το πλήθος των πραγματικών (και μιγαδικών) ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης , μπορεί να προσδιοριστεί με τον εξής τρόπο :

Μια πολυωνυμική εξίσωση , μπορεί να έχει τόσες πραγματικές ρίζες , όσες και οι αλλαγές του προσήμου από + σε – ή από – σε + που περιέχει.
(και αντίστοιχα τόσες μιγαδικές ρίζες , όσες φορές βρίσκονται σε διαδοχή δυο πρόσημα + ή δυο πρόσημα –)

Έτσι , για την πολυωνυμική εξίσωση $3x^4+8x^3-6x^2-24x+1=0$ του παραπάνω παραδείγματος , έχουμε 2 αλλαγές προσήμου $\left(3x^4+\underbrace{8x^3-6x^2}_{1^{\eta}\text{ εναλλαγή}}\underbrace{-24x+1}_{2^{\eta}\text{ εναλλαγή}}=0\right)$ που σημαίνει ότι έχουμε 2 πραγματικές ρίζες.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Rene Descartes (1596 - 1650)

Ο Καρτέσιος γεννήθηκε το 1596, στην Λα Άι αν Τουραίν (La Haye en Touraine , σήμερα μετονομασμένη σε Ντεκάρτ) της Γαλλίας. Πρόθεσή του ήταν να δει τον κόσμο και να ανακαλύψει την αλήθεια. Συναντά τον Ισαάκ Μπήκμαν (Isaac Beeckman) , ο οποίος έστρεψε το ενδιαφέρον του προς τα Μαθηματικά και τη νέα (τότε) Φυσική. Στις 10 Νοεμβρίου 1619 , ταξιδεύοντας προς τη Γερμανία και σκεπτόμενος πώς θα χρησιμοποιήσει τα μαθηματικά για να επιλύσει προβλήματα της φυσικής , ο φιλόσοφος είχε ένα όραμα σε ένα όνειρο , μέσω του οποίου «ανακάλυψε τα θεμέλια μιας θαυμαστής επιστήμης». **Σημείο αναφοράς στη ζωή του νεαρού Καρτέσιου , το όραμα έγινε το θεμέλιο πάνω στο οποίο ανέπτυξε την αναλυτική Γεωμετρία.** Αφιέρωσε το υπόλοιπο της ζωής του ερευνώντας τη σχέση μαθηματικών και φύσης. Το 1622 επέστρεψε στη Γαλλία , και για τα επόμενα χρόνια μοίρασε τον χρόνο του ανάμεσα στο Παρίσι και άλλα σημεία της Ευρώπης. Έφθασε στη Λα Αι το 1623 , για να πουλήσει όλη την περιουσία του και να επενδύσει τα χρήματά του σε ομόλογα , που του εξασφάλισαν καλό εισόδημα για το υπόλοιπο της ζωής του. Ο Καρτέσιος ήταν παρών στην πολιορκία της Λα Ροσέλ από τον Αρμάν Ζαν ντυ Πλεσί , Καρδινάλιο Ρισελιέ το 1627. Έφυγε για την Ολλανδία το 1628, όπου έζησε αλλάζοντας συχνά τόπο διαμονής έως το 1649.

Συνέχισε να εκδίδει έργα σχετικά με τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία για το υπόλοιπο της ζωής του. Το 1643 , η Καρτεσιανή φιλοσοφία καταδικάστηκε στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης και ο Καρτέσιος ξεκίνησε τη μακρά αλληλογραφία του με την Ελισάβετ της Βοημίας. Απεβίωσε στις 11 Φεβρουαρίου του 1650 στη Στοκχόλμη όπου είχε προσκληθεί ως διδάσκαλος της βασίλισσας Χριστίνας της Σουηδίας. Ως αιτία του θανάτου του φέρεται η πνευμονία , αν και επιστολές που ανακαλύφθηκαν πρόσφατα προς και από τον ιατρό Άικ Πάις (Eike Pies) υποδεικνύουν ότι ο Καρτέσιος πιθανώς δηλητηριάστηκε από τη χρήση αρσενικού.

(Μαθηματικά) Έργα του Καρτέσιου

- ✓ Compendium Musicae (1618). Πραγματεία επί της μουσικής θεωρίας και της αισθητικής της μουσικής γραμμένη για τον πρώτο συνεργάτη του Ισαάκ Μπήκμαν (Isaac Beeckman).

- ✓ La Géométrie (Γεωμετρία) (1637). Το μείζον έργο του Ντεκάρτ στα Μαθηματικά.

ΜΕΡΟΣ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

►Γενικά

Ορισμοί :

1. **Γραμμική εξίσωση** , λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_\nu x_\nu = \beta}$,

όπου $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}$.

2. **Γραμμικό σύστημα (I)** , λέγεται κάθε σύστημα της μορφής

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ ..... \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + ... + \alpha_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu \end{cases}, \nu, \mu \in \mathbb{N}^* \quad (I)$$

δηλαδή το σύστημα του οποίου κάθε εξίσωση είναι γραμμική.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

Α. Ανάλογα με τις τιμές των ν , μ έχουμε κάθε φορά διαφορετική μορφή συστήματος.

Β. Αν S είναι το σύνολο λύσεων ενός γραμμικού συστήματος , τότε:

- Αν $S = \varnothing$, το σύστημα ονομάζεται **Αδύνατο**.
- Αν $S \neq \varnothing$, το σύστημα ονομάζεται **Συμβιβαστό**.

Γ. Δυο συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων , λέγονται **ισοδύναμα**.

3. **Πίνακα του γραμμικού συστήματος (I)** , ονομάζουμε τον πίνακα που έχει στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος , δηλαδή τον πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2\mu} \\ ..... \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & ... & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix}.$$

4. $\boxed{\textbf{Επαυξημένο Πίνακα του γραμμικού συστήματος (I)}}$, ονομάζουμε τον πίνακα που σχηματίζεται από τον πίνακα του συστήματος που έχει συμπληρωθεί με τους σταθερούς όρους δηλαδή τον πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\mu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\mu} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\mu} & \beta_\nu \end{bmatrix}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Το σύστημα **(I)** με τη βοήθεια των πινάκων γράφεται $\boxed{A \cdot X = B}$, όπου :

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\mu \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}}$$

►Λύση Συστήματος (ν x ν) με Αντίστροφο Πίνακα

Έστω το γραμμικό (νxν) σύστημα $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \dots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{cases}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_\nu \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$, το σύστημα γράφεται $A \cdot X = B$. **(I I)**

Η λύση της εξίσωσης **(I I)** , δίνει και τη λύση του συστήματος.

Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος , αν και μόνο αν , D(A) ≠ 0 .
(D(A) είναι η ορίζουσα του πίνακα A)

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}) , τότε έχουμε :

$\boxed{A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B}$, που είναι η ζητούμενη λύση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

Η επίλυση συστήματος με τη χρήση αντίστροφου πίνακα , **δεν ενδείκνυται** , γιατί :

1. Είναι επίπονη διαδικασία , ακόμα και με τη χρήση Η/Υ.

2. Μπορούμε να διαπιστώσουμε μόνο αν το σύστημα έχει μια ή περισσότερες λύσεις και όχι αν το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

3. Πρακτικά καλύπτεται μόνο η περίπτωση (2 x 2) γραμμικού συστήματος , γιατί η ύπαρξη και ο τύπος αντίστροφου πίνακα 3x3 και πάνω , είναι δύσκολο να υπολογιστεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε με τη μέθοδο του αντίστροφου πίνακα το σύστημα $\left.\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ x+3y=-2 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Είναι $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, οπότε το σύστημα γράφεται $A\cdot X=B$.

Η ορίζουσα του Α , είναι $D(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0$.

Από τη θεωρία των πινάκων , είναι γνωστό ότι :

$$\boxed{\text{Αν } A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \text{ με } D(A)\neq 0 \text{ , τότε } A^{-1}=\frac{1}{D(A)}\cdot\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}}$$

οπότε $A^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ και η $A\cdot X=B$, δίνει την :

$$A\cdot X=B \; X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right\}.$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση , την $(x,y)=(1,-1)$.

►Λύση Συστήματος με Επαυξημένο πίνακα (Μέθοδος Gauss – Jordan)

Μέθοδος : Χρήση πινάκων

Σε ισοδύναμα γραμμικά συστήματα , αντιστοιχούν ισοδύναμοι επαυξημένοι πίνακες.

Ο τρόπος επίλυσης γραμμικών συστημάτων με πίνακες , στηρίζεται στο γεγονός ότι , αν σε ένα πίνακα εκτελέσουμε πράξεις μεταξύ των γραμμών του **(γραμμοπράξεις)** και των στηλών του **(στηλοπράξεις)** , προκύπτει ισοδύναμος με τον αρχικό πίνακας.

α) Συστήματα (ν x ν)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x,y,z)=4x-y-3z+2$,

$g(x,y,z)=2x-2y-z-9$ και $h(x,y,z)=2x+y-z-2$.

Να λύσετε το σύστημα $\left.\begin{array}{r} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Το σύστημα μετατρέπεται στο $\left.\begin{array}{l} 4x-y-3z=-2 \\ 2x-2y-z=9 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\}$ με επαυξημένο πίνακα τον

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη $2^{η}$ και την $3^{η}$ στήλη επί -2 και τις προσθέτουμε στην $1^{η}$ στήλη ,

οπότε προκύπτει ο πίνακας $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & -20 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$. Πολλαπλασιάζουμε τώρα την $2^{η}$ στήλη επί 3 και την $3^{η}$ στήλη επί -5 και προσθέτουμε , οπότε παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 2 & -30 \end{bmatrix}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο , παίρνουμε τελικά $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{bmatrix}$.

Έτσι , $(x,y,z)=(-10,7,-15)$.Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το $S=\{(-10,7,-15)\}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Γεννήθηκε στη Γερμανία και από μικρός διακρίθηκε ιδιαίτερα στον Αριθμητικό Λογισμό. Με την προστασία του Δούκα του Ανόβερου , ο νεαρός Gauss σπούδασε και δημοσίευσε εργασίες του. Ύστερα πήγε στο Γκέτιγκεν για σπουδές στα Μαθηματικά. Μελέτησε τα έργα των Euler και Lagrange. Έγινε μέλος της Ακαδημίας της Πετρούπολης.

Είχε επαφές με αστρονόμους της εποχής και έλαβε την έδρα της Αστρονομίας στο Γκέτιγκεν για κάποια χρόνια. Θεωρούσε τα Μαθηματικά τη βασίλισσα των επιστημών και την Αριθμητική τη βασίλισσα των Μαθηματικών.Θεωρείται ο πιο παραγωγικός μαθηματικός , καθώς και ένας από τους 3 μεγαλύτερους όλων των εποχών (μετά τον Αρχιμήδη και τον Νεύτωνα)

Έργα του Gauss:

- ✓ Δημοσίευσε όταν συνέλαβε τη ΄΄Μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων΄΄ για τον προσδιορισμό σφαλμάτων.

- ✓ ΄΄Αριθμητικές έρευνες΄΄ στις οποίες δεν αναφέρονται όλες οι ανακαλύψεις του στο πεδίο της θεωρίας αριθμών , λόγω του μεγάλου του πλήθους.

- ✓ ΄΄Θεωρία περί της κίνησης των ουρανίων σωμάτων΄΄ , στο οποίο μελετά τις τροχίες των πλανητών.

- ✓ ΄΄Ημερολόγιο΄΄ , όπου καταχωρούνται εν συντομία οι μεγαλύτερες ανακαλύψεις του.

- ✓ Στην Αριθμητική :

  1) ΄΄Αριθμητική΄΄ σε 7 μέρη.
     Στα μέρη 1 – 4 αναφέρεται στην ήδη γνωστή θεωρία αριθμών και εισάγει την έννοια των ισοϋπόλοιπων αριθμών (modulo)
     Στα μέρη 5 – 6 εξετάζονται οι τετραγωνικές μορφές και η ανάλυση αριθμού σε πρώτους παράγοντες.
     Στο μέρος 7 αναφέρεται η λύση διώνυμων εξισώσεων.

  2) Έγραψε υπόμνημα σχετικά με τους μιγαδικούς αριθμούς.

  3) Έγραψε εργασία , χάρη στην οποία , το όνομά του δίνεται συχνά στους λογάριθμους αθροίσματος και διαφοράς.

- ✓ Στην Άλγεβρα :

  1) Η διδακτορική του διατριβή , είναι μια προσπάθειά του να εκφράσει τη θεωρία των εξισώσεων.

  2) Έγραψε μελέτες για την απόδειξη του κανόνα των σημείων του Descartes και επί της αριθμητικής λύσης των τριώνυμων εξισώσεων.

- ✓ Στην Ανάλυση :

  1) ΄΄Γενικές διερευνήσεις επί απείρου σειράς΄΄ , όπου μελετά διάφορες συναρτήσεις.

  2) Έγραψε υπόμνημα για την ολοκλήρωση ειδικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

  3) ΄΄Νέα Μέθοδος κατά προσέγγιση υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων ΄΄ , όπου εμφανίζεται μια μέθοδος παρεμβολής.

  4) ΄΄Γενικές αρχές της θεωρίας του σχήματος σε κατάσταση ισορροπίας ρευστών΄΄ , μια μελέτη στο λογισμό των μεταβολών.

- ✓ Στη Γεωμετρία :

  1) Έγραψε υπόμνημα για τη θεωρία των παραλλήλων.

  2) ΄΄Γεωμετρία θέσης΄΄ όπου αναφέρεται η γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών σε Ευκλείδεια μορφή.

  3) Έγραψε υπόμνημα με απόδειξη της ΄΄αλληλοτομίας των τριών υψών τριγώνου΄΄. Έδωσε και μια νέα απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

  4) Έγραψε εργασίες σχετικά με :
     α) Τρόπους εύρεσης των συντεταγμένων αξιόλογων σημείων τριγώνου.
     β) Προβλήματα γεωδεσίας και Αστρονομίας και με τη σφαιρική τριγωνομετρία.
     γ) Το εμβαδόν πολυγώνου από τις συντεταγμένες των κορυφών του.
     δ) Τις κωνικές τομές με μεθόδους Αναλυτικής Γεωμετρίας.

- ✓ Στην Απειροστική Γεωμετρία :

  1) Έγραψε υπόμνημα που αποδεικνύει τη δυνατότητα αναγωγής κάθε γραμμικού στοιχείου κάθε επιφάνειας σε συγκεκριμένη μορφή με αποτέλεσμα να εισάγονται στα μαθηματικά οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες σε επιφάνεια.

  2) ΄΄Γενικές έρευνες στη θεωρία των επιφανειών΄΄ , όπου έχουμε εφαρμογές της Ανάλυσης στη Γεωμετρία.

  3) Έγραψε υπόμνημα , όπου παρουσίασε τη γενική περίπτωση των γεωδεσιακών γραμμών σε καρτεσιανές και καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ (ν x ν)

Ομογενές ονομάζουμε το σύστημα , που οι σταθεροί του όροι είναι ίσοι με το 0.

Το ομογενές σύστημα , έχει πάντα λύση : Τη μηδενική λύση ή άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+4z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Ο επαυξημένος πίνακας του ομογενούς συστήματος , είναι ο $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, ο οποίος μετά από γραμμοπράξεις , δίνει τον

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, οπότε τελικά έχουμε

$\left.\begin{array}{l} x-z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=z \\ y=-2z \end{array}\right\}$. Έτσι , $(x,y,z)=(z,-2z,z), z\in\mathbb{R}$.

Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το $S=\{(z,-2z,z), z\in\mathbb{R}\}$.

⇨ Για $z=0$, έχουμε τη μηδενική λύση $(x,y,z)=(0,0,0)$.

β) Συστήματα (ν x μ) με ν > μ

- ✓ Αν λύνοντας το σύστημα έχουμε γραμμή της μορφής $0\ 0\ ...\ 0 \vdots \kappa$ με $\kappa \neq 0$, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- ✓ Αν λύνοντας το σύστημα έχουμε γραμμή της μορφής $0\ 0\ ...\ 0 \vdots 0$ τότε η γραμμή αυτή παραλείπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το σύστημα $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ 4x+5y=6 \\ 6x+7y=12 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ και μετά από γραμμοπράξεις , μετατρέπεται στον $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ και λόγω της τελευταίας γραμμής , το σύστημα είναι αδύνατο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το σύστημα $\left.\begin{array}{r} -2x+13y=-1 \\ x+y=3 \\ x-2y=2 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} -2 & 13 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ και μετά από γραμμοπράξεις μετατρέπεται στον $\begin{bmatrix} 2 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και λόγω της τελευταίας γραμμής που παραλείπεται , έχουμε : $\begin{bmatrix} 2 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 16 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

‘Ετσι , $(x,y)=\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$.Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το $S=\left\{\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$.

γ) Συστήματα (ν x μ) με ν < μ

Στην περίπτωση αυτή έχουμε **άπειρες λύσεις** , που δίνονται ως συνάρτηση ελεύθερων μεταβλητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x+y-z+\omega+2\varphi=1 \\ x+y+z+3\omega-\varphi=-2 \\ x-2y+z+\varphi=4 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Συμπληρώνουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{r} x+y-z+\omega+2\varphi=1 \\ x+y+z+3\omega-\varphi=-2 \\ x-2y+z+0\omega+\varphi=4 \end{array}\right\}$ και παίρνουμε τον πίνακα

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, ο οποίος μετά από γραμμοπράξεις , δίνει τον

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & -2 & -2 \end{bmatrix}$, που σημαίνει ότι $\left.\begin{array}{r} x+\frac{6}{7}\omega-\varphi=1 \\ y+\frac{5}{7}\omega-\varphi=-2 \\ z+\frac{4}{7}\omega-2\varphi=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=1-\frac{6}{7}\omega+\varphi \\ y=-2-\frac{5}{7}\omega+\varphi \\ z=-2-\frac{4}{7}\omega+2\varphi \end{array}\right\}$.

'Ετσι , $(x,y,z,\omega,\varphi)=\left(1-\frac{4}{7}\omega+\varphi\ ,\ -2-\frac{5}{7}\omega+\varphi\ ,\ -2-\frac{4}{7}\omega+2\varphi\ ,\ \omega\ ,\ \varphi\right), \omega,\varphi\in\mathbb{R}$.

Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το

$S=\left\{\left(1-\frac{4}{7}\omega+\varphi\ ,\ -2-\frac{5}{7}\omega+\varphi\ ,\ -2-\frac{4}{7}\omega+2\varphi\ ,\ \omega\ ,\ \varphi\right), \omega,\varphi\in\mathbb{R}\right\}$.

►Λύση Συστήματος με Ορίζουσες (Μέθοδος Cramer)

α) Συστήματα (ν x ν)

Για να λύσουμε ένα σύστημα (ν x ν) με τη μέθοδο του Cramer , υπολογίζουμε τις ορίζουσες $D, D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_\nu}$ και έχουμε τα εξής :

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_1, x_2, ..., x_\nu) = \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, ..., \frac{D_{x_\nu}}{D}\right)$.
- Αν $D = 0$, τότε :
  - ✓ Αν $D_{x_1} \neq 0$, ή $D_{x_2} \neq 0, ...,$ ή $D_{x_\nu} \neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο**.
  - ✓ Αν $D_{x_1} = D_{x_2} = ... = D_{x_\nu} = 0$, τότε :

    1. Αν **μια τουλάχιστον** ελάσσονα (*) ορίζουσα της D είναι $\neq 0$, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

    2. Αν **όλες** οι ελάσσονες ορίζουσες της D είναι 0 , τότε :

    i) Αν **μια τουλάχιστον** ελάσσονα ορίζουσα με σταθερούς όρους είναι $\neq 0$, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

    ii) Αν **όλες** οι ελάσσονες ορίζουσες με σταθερούς όρους είναι 0 , τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

(*) **Ελάσσονα ορίζουσα** του στοιχείου α_{ij} είναι η ορίζουσα που προκύπτει αν από την αρχική αφαιρέσουμε τη i γραμμή και τη j στήλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{r} 4x - y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - z = 9 \\ 2x + y - z = 2 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες : $D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ... = 2$, $D_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 9 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ... = -20$,

$D_y = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = ... = 14$, $D_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ... = -30$.

Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα έχει **μοναδική λύση** , την

$(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = \left(\frac{-20}{2}, \frac{14}{2} \frac{-30}{2}\right) = (-10, 7, -15)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-6 \\ x+y-2z=2 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Αν υπολογίσουμε τις ορίζουσες , θα έχουμε ότι $D=0$, $D_x=-9\neq 0$.
Άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=2 \\ 2x-y-z=-4 \\ -x+2y-z=6 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Αν υπολογίσουμε τις ορίζουσες , θα έχουμε ότι $D=0$, $D_x=0$, $D_y=0$, $D_z=0$.

Θα εξετάσουμε τις ελάσσονες ορίζουσες της $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, την $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$.

Έτσι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , που βρίσκονται από το σύστημα που αντιστοιχεί στην ελάσσονα ορίζουσα : $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=2 \\ 2x-y-z=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{3}+z \\ y=\dfrac{8}{3}+z \end{array}\right\}, z\in\mathbb{R}$.

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=\left(-\dfrac{2}{3}+z\ ,\ \dfrac{8}{3}+z\ ,\ z\right)$, $z\in\mathbb{R}$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Γεννήθηκε στην Ελβετία , σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης και πήρε την έδρα των Μαθηματικών και Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου. Ταξίδεψε σε Αγγλία , Ολλανδία και Γαλλία , όπου και τιμήθηκε από την Ακαδημία των Παρισίων.

Έργα του Cramer:

- ✓ ΄΄Εισαγωγή στην Ανάλυση των Αλγεβρικών καμπύλων΄΄, όπου αποδεικνύει ότι η Άλγεβρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην έρευνα επίπεδων καμπύλων. Εξηγεί πώς βρίσκεται η εξίσωση μιας καμπύλης από (επαρκή) στοιχεία της. Έτσι , δίνει ένα κανόνα (που φέρει το όνομά του) για τη λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων.

- ✓ Οι πληροφορίες για το έργο του , περιέχονται σε έναν ΄΄Άτλαντα΄΄ 33 πινάκων που εκφράζουν όλο το έργο του , όπου εξηγούνται με ακρίβεια οι ανωμαλίες των καμπύλων.

1η ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (2 x 2)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (2 x 2)

Γραφική μέθοδος

Έστω το γραμμικό σύστημα 2x2 (δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους x , y)

της μορφής $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι οι $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ δεν είναι όλοι ταυτόχρονα 0 γιατί τότε το σύστημα θα ήταν το $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$ (αόριστο με άπειρες λύσεις) και οι εξισώσεις του δεν θα παρίσταναν ευθείες.

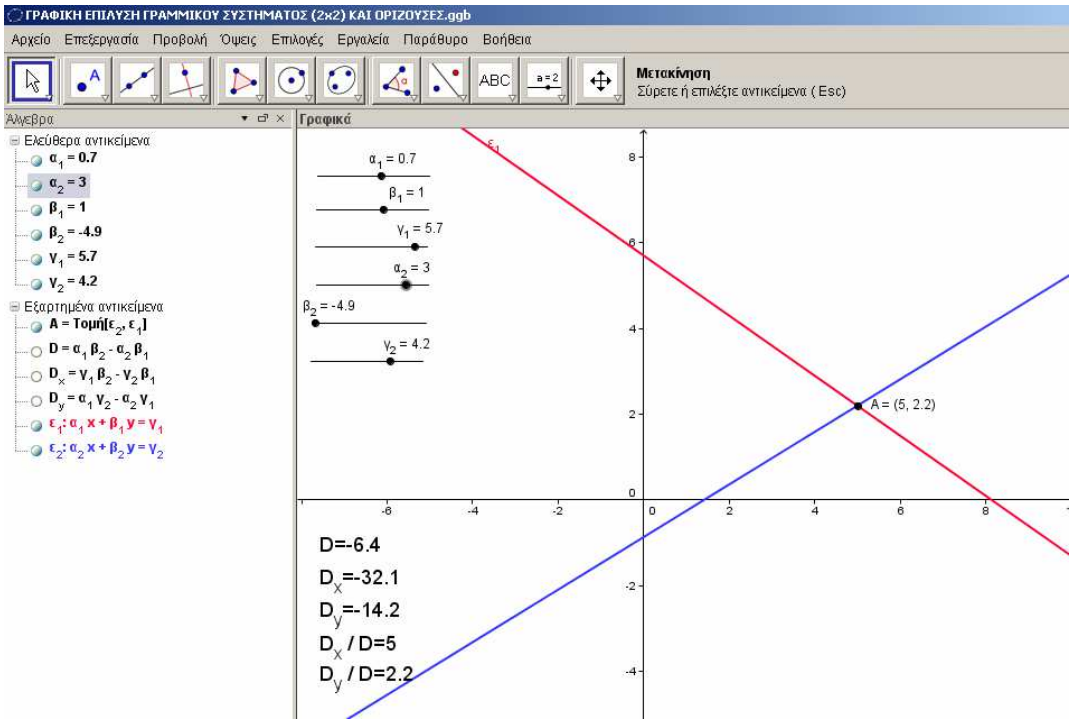
Σε διαφορετική λοιπόν περίπτωση , οι δύο εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν **ευθείες**.

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών αυτών στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις :

1. Αν οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο , τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** , τη δυάδα που δίνεται από τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

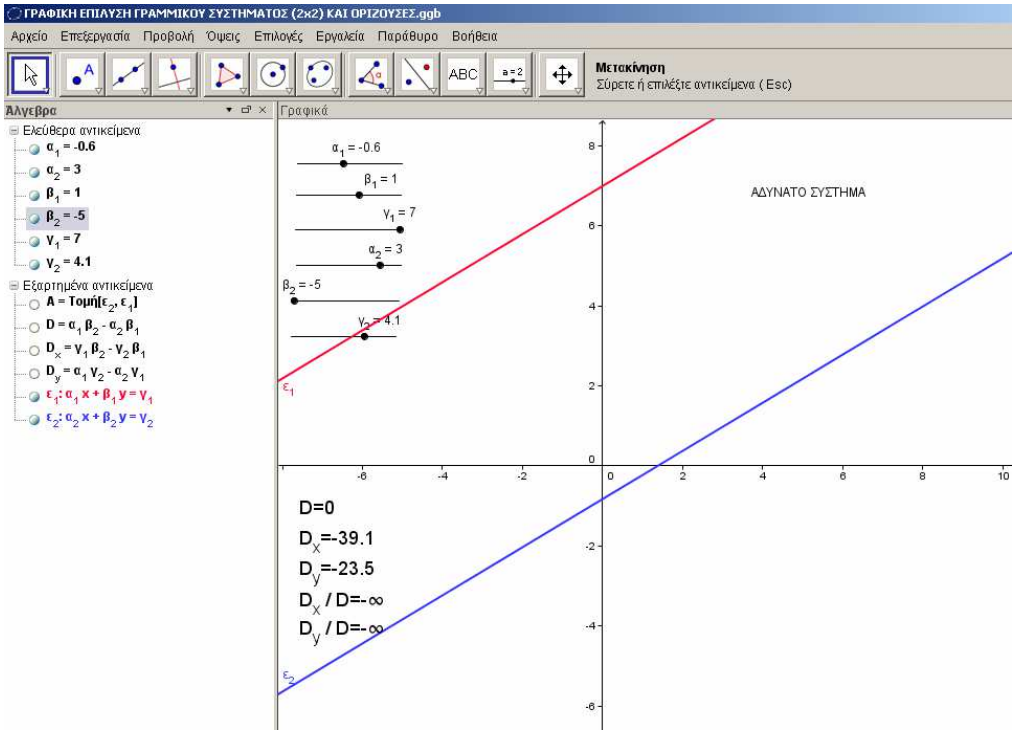
Οι ευθείες τέμνονται όταν : $\boxed{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \dfrac{\beta_1}{\beta_2}.}$



2. Αν οι ευθείες είναι παράλληλες , τότε το σύστημα είναι **<u>αδύνατο</u>**.

Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (<u>κλίση</u>) και δεν ταυτίζονται , δηλαδή όταν :

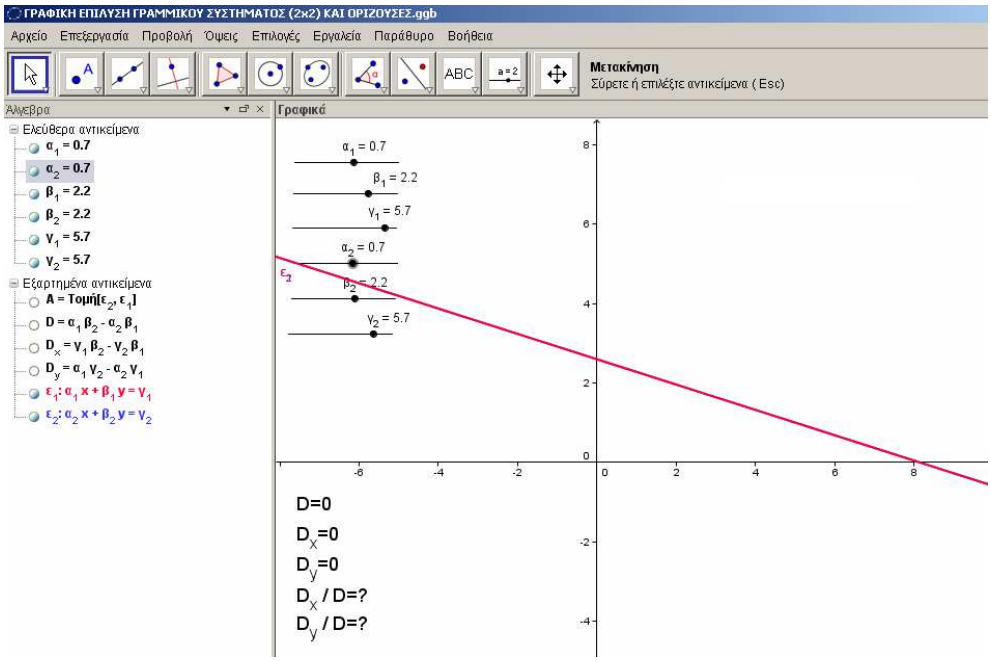
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$



3. Αν οι ευθείες ταυτίζονται , τότε το σύστημα έχει **<u>άπειρες λύσεις</u>**.

Οι ευθείες ταυτίζονται όταν μπορούμε να κάνουμε πράξεις και να καταλήξουμε σε ισοδύναμο σύστημα που θα έχει :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$



Αλγεβρικές Μέθοδοι

1. Μέθοδος Αντικατάστασης :

Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 & (1) \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 & (2) \end{cases}$. Λύνουμε μια από τις δυο εξισώσεις (π.χ την 1) ως προς έναν άγνωστο (π.χ ως προς y) και αντικαθιστούμε στην άλλη.
Τότε αν $\beta_1 \neq 0$, το σύστημα είναι ισοδύναμο με το :

$$\begin{cases} y = \dfrac{\gamma_1 - \alpha_1 x}{\beta_1} \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\gamma_1 - \alpha_1 x}{\beta_1} \\ \alpha_2 x + \beta_2 \dfrac{\gamma_1 - \alpha_1 x}{\beta_1} = \gamma_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\gamma_1 - \alpha_1 x}{\beta_1} \\ x = \dfrac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2} \end{cases}, \text{ με } \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{x = \dfrac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}} \\ \boxed{y = \dfrac{\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}} \end{cases}, \text{ με } \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \neq 0$$

2. Μέθοδος Σύγκρισης :

Λύνουμε και τις δυο εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο και εξισώνουμε τις παραστάσεις. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

3. Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών :

Η πιο διαδεδομένη και ασφαλέστερη μέθοδος αλγεβρικής επίλυσης γραμμικών (2x2) συστημάτων. Επιλέγουμε δυο αριθμούς ώστε πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους αγνώστους. Έτσι , προσθέτοντας κατά μέλη , απαλείφουμε τον άγνωστο και μένει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία λύνουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} 6x - 2y = 11 \\ 9x - 3y = 15 \end{matrix}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

$$\left.\begin{matrix} 6x - 2y = 11 \\ 9x - 3y = 15 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 18x - 6y = 33 \\ -18x + 6y = -30 \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} 0x + 0y = 3 \\ 9x - 3y = 15 \end{matrix}\right\}$$

. Το σύστημα είναι **αδύνατο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x-3y=9 \\ 2x-6y=18 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

$\left.\begin{array}{l} x-3y=9 \\ 2x-6y=18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2x+6y=-18 \\ 2x-6y=18 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x-3y=9 \\ 0x+0y=0 \end{array}\right\}$. Το σύστημα έχει **άπειρες λυσεις**.

Η μορφή τους είναι η $(x,y)=(3y+9,y), y\in\mathbb{R}$.

4. Μέθοδος Οριζουσών : (Cramer)

Για το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases}$, ορίζουμε τις ορίζουσές του D, D_x, D_y ως εξής:

$D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, $D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1$, $D_y=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1$.

- Αν $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$.
- Αν $D=0$ το σύστημα ή θα είναι **αδύνατο** , ή θα έχει **άπειρες λύσεις**.
  Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να λύσουμε το σύστημα για να διαπιστώσουμε τι από τα δυο συμβαίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3$, $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3$, $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$.

Αφού $D=3\neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση , την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(1,1)$.

ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ CRAMER

(*) Αν για το γραμμικό (2x2) σύστημα με αγνώστους x , y ισχύει η σχέση $(D-1)^2+(D_x+3)^2+D_y{}^2=0$, να βρείτε τους αγνώστους του συστήματος.

<u>Λύση:</u>

Η σχέση $(D-1)^2+(D_x+3)^2+D_y{}^2=0$ είναι ισοδύναμη με την $\left.\begin{array}{r} D-1=0 \\ D_x+3=0 \\ D_y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} D=1 \\ D_x=-3 \\ D_y=0 \end{array}\right\}, \text{ απ' όπου } x=\frac{D_x}{D}=\frac{-3}{1}\Leftrightarrow x=-3 \text{ και } y=\frac{D_y}{D}=\frac{0}{1}\Leftrightarrow y=0 .$$

2η ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (ν x ν) (Cramer)

Μέθοδος του Bezout

Η μέθοδος του Bezout , πετυχαίνει τη μείωση της τάξης των οριζουσών (στην περίπτωση νxν γραμμικού συστήματος με ν > 3) κατά 1. Για να είμαστε ακριβείς , η μέθοδος αυτή για ένα 4 x 4 γραμμικό σύστημα , αποτελείται από τα εξής βήματα :

1. Πολλαπλασιάζουμε τις 3 πρώτες εξισώσεις με λ , μ , ν αντίστοιχα.

2. Προσθέτουμε τις 3 εξισώσεις που προκύπτουν μαζί με την 4η κατά μέλη.

3. Μηδενίζουμε τους συντελεστές των αγνώστων , εκτός αυτού που θέλουμε να υπολογίσουμε τον οποίο βρίσκουμε συναρτήσει των λ , μ , ν.

4. Από το σύστημα που προκύπτει , βρίσκουμε τα λ , μ , ν και άρα τον αντίστοιχο άγνωστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+y+z+\omega=1 \\ 2x+3y+4z+5\omega=3 \\ x-y+2z+3\omega=4 \\ x+3y-2z+4\omega=7 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

Πολλαπλασιάζουμε τις 3 πρώτες εξισώσεις με τους λ , μ , ν αντίστοιχα και το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} \lambda x+\lambda y+\lambda z+\lambda\omega=\lambda \\ 2\mu x+3\mu y+4\mu z+5\mu\omega=3\mu \\ \nu x-\nu y+2\nu z+3\nu\omega=4\nu \\ x+3y-2z+4\omega=7 \end{cases}$, όπου με πρόσθεση κατά μέλη όλων των εξισώσεων ,

παίρνουμε :

$$x(\lambda+2\mu+\nu+1)+y(\lambda+3\mu-\nu+3)+z(\lambda+4\mu+2\nu-2)+\omega(\lambda+5\mu+3\nu+4)=\lambda+3\mu+4\nu+7 \quad (\text{ I })$$

Για να υπολογίσουμε τον x , θέτουμε : $\left.\begin{array}{r} \lambda+3\mu-\nu+3=0 \\ \lambda+4\mu+2\nu-2=0 \\ \lambda+5\mu+3\nu+4=0 \end{array}\right\}$, οπότε η (I) δίνει την

$$x=\frac{\lambda+3\mu+4\nu+7}{\lambda+2\mu+\nu+1} \ (*) .$$

Λύνουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{r} \lambda+3\mu-\nu+3=0 \\ \lambda+4\mu+2\nu-2=0 \\ \lambda+5\mu+3\nu+4=0 \end{array}\right\}$ (3x3) με τη βοήθεια των οριζουσών

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=...=-2\ ,\ D_\lambda=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 2\\ -4 & 5 & 3\end{vmatrix}=...=-30\ ,\ D_\mu=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -4 & 3\end{vmatrix}=...=23$$

και $D_\nu=\begin{vmatrix}1 & 3 & -3\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 5 & -4\end{vmatrix}=...=-11$. Άρα , $(\lambda,\mu,\nu)=\left(\frac{D_\lambda}{D},\frac{D_\mu}{D},\frac{D_\nu}{D}\right)=\left(15,-\frac{23}{2},\frac{11}{2}\right)$.

Η (*) , τώρα δίνει $x=-\frac{19}{3}$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο , υπολογίζουμε και τους υπόλοιπους αγνώστους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η Μέθοδος αυτή αναφέρεται για ιστορικούς κυρίως λόγους , αφού είμαστε αναγκασμένοι να υπολογίζουμε πολλές ορίζουσες , εκτελώντας κάθε φορά επίπονες πράξεις , οπότε η μέθοδος αυτή δε συνίσταται.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Stefan Bezout (1731 – 1783)

Γεννήθηκε στη Γαλλία και όπως όλοι οι Μαθηματικοί της εποχής του , προσπάθησε να λύσει παραμετρικές εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού. Δεχόμενος ότι κάθε διώνυμη εξίσωση έχει λύση , προσπάθησε να αναγάγει κάθε εξίσωση σε διώνυμη.

Έργα του Bezout:

- ✓ Σε υπόμνημα κάνει αναφορά στις γενικές εξισώσεις. Πέτυχε το σκοπό του στην περίπτωση εξίσωσης $4^{ου}$ βαθμού , αλλά όταν εξέτασε την εξίσωση $5^{ου}$ βαθμού , σταμάτησε μπροστά σε δύσκολους υπολογισμούς.

- ✓ Τελειοποίησε τον κανόνα του Cramer για την εύρεση των αγνώστων σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

- ✓ ΄΄Γενική θεωρία των Αλγεβρικών εξισώσεων΄΄. Με το έργο του αυτό , αποκτά εξέχουσα θέση στη θεωρία των οριζουσών.

- ✓ Δυο σπουδαία συγγράμματα : Ένα εξάτομο για μελλοντικούς ναυτικούς και ένα τετράτομο για τους αξιωματικούς του πυροβολικού.

β) Συστήματα (ν x μ) , με ν > μ

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε την ορίζουσα ή τις ορίζουσες στις οποίες περιέχονται σταθεροί όροι.

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- Αν $D = 0$, τότε :

  1. Αν μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι $\neq 0$, το σύστημα έχει **μοναδική λύση**.

  2. Αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων είναι 0 , τότε :

  i. Αν μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα με σταθερούς όρους είναι $\neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο**.

  ii. Αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες με σταθερούς όρους είναι 0 , το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το (3x2) γραμμικό σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x-2y=2 \\ 2x-13y=1 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Είναι : $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -13 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -13 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-40+2\cdot(6-1)+2\cdot(2+13)$

$=-40+10+30=0$.

Εξετάζουμε τις ελάσσονες ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων :

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -13 \end{vmatrix}=-9\neq 0$, οπότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που προκύπτει από το αντίστοιχο στην ελάσσονα ορίζουσα σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x-2y=2 \\ 2x-13y=1 \end{array}\right\}$, απ' όπου $(x,y)=\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το (3x2) γραμμικό σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \\ 3x+3y=3 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Είναι $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$.

- ✓ Οι ελάσσονες ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων είναι όλες 0.
- ✓ Οι ελάσσονες ορίζουσες των σταθερών όρων του συστήματος είναι επίσης όλες 0.

Επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** που η μορφή τους προκύπτει από μια απ΄τις εξισώσεις του συστήματος : $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$, οπότε $(x,y)=(x,1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Συστήματα (ν x μ) , με ν < μ

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε τις ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων.

- Αν μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα με σταθερούς όρους είναι $\neq 0$ το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.
- Αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων είναι 0 , τότε :

  1. Αν μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι $\neq 0$ το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

  2. Αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων είναι 0 , τότε :

  i. Αν μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα με σταθερούς όρους είναι $\neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο**.

  ii. Αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες με σταθερούς όρους είναι 0 , το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το (3x5) γραμμικό σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x-z+4\omega+5\varphi=4 \\ y-2\omega-\varphi=1 \\ -x+5z-12\omega-17\varphi=-4 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Συμπληρώνουμε το δοσμένο σύστημα στο $\left.\begin{array}{r} x+0y-z+4\omega+5\varphi=4 \\ 0x+y+0z-2\omega-\varphi=1 \\ -x+0y+5z-12\omega-17\varphi=-4 \end{array}\right\}$

και υπολογίζουμε τις ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων :

$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-4\neq 0$, οπότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** που προκύπτουν από

το σύστημα που αντιστοιχεί στην ορίζουσα D_1:

$\left.\begin{array}{r} x+0y-z=4-4\omega-5\varphi \\ 0x+y+0z=1+2\omega+\varphi \\ -x+0y+5z=-4+12\omega+17\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x-z=4-4\omega-5\varphi \\ y=1+2\omega+\varphi \\ -x+5z=-4+12\omega+17\varphi \end{array}\right\}$ και μετά από πράξεις ,

παίρνουμε: $(x,y,z,\omega,\varphi,)=(4-2\omega-2\varphi\ ,\ 1+2\omega+\varphi\ ,\ 2\omega+3\varphi\ ,\ \omega\ ,\ \varphi)$, $\omega,\varphi\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το (3x5) γραμμικό σύστημα : $\left.\begin{array}{r} 2x+y+2z+4\varphi=4 \\ 6x+3y+6z+3\omega+12\varphi=12 \\ 4x+2y+4z+2\omega+8\varphi=-3 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων οι οποίες μετά από πράξεις

είναι όλες 0 : π.χ η $D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 0-1\cdot 0+2\cdot 0=0$

(παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των αγνώστων είναι ανάλογοι).

Υπολογίζουμε τις ελάσσονες ορίζουσες που περιέχουν σταθερούς όρους , όπως την :

$\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-66\neq 0$ και αφού υπάρχει 1 τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα με σταθερούς

όρους είναι $\neq 0$, το σύστημα είναι **αδύνατο**.

δ) Συστήματα (ν x ν) ΟΜΟΓΕΝΗ

Προφανώς , όπως είδαμε και παραπάνω , για κάθε ομογενές (ν x ν) σύστημα , ισχύει : $D_{x_1} = D_{x_2} = ... = D_{x_\nu} = 0$, οπότε το σύστημα έχει **πάντα** τη μηδενική λύση: $(x_1, x_2, ..., x_\nu) = (0, 0, ..., 0)$.

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε ορίζουσα D του συστήματος.

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει **μόνο τη μηδενική λύση** $(x_1, x_2, ..., x_\nu) = (0, 0, ..., 0)$.
- Αν $D = 0$, τότε :

  1. Αν μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα της D είναι $\neq 0$ το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

  2. Αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες των της D είναι 0 , τότε :

  i. Αν ένας τουλάχιστον συντελεστής των αγνώστων είναι $\neq 0$, το σύστημα είναι **έχει άπειρες λύσεις**.

  ii. Αν όλοι οι συντελεστές των αγνώστων είναι 0 , το σύστημα είναι **αόριστο**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

Η διαφορά μεταξύ **αόριστου συστήματος** και **συστήματος με άπειρες λύσεις** , είναι θεμελιώδης :

✓ Ένα σύστημα (νxν) στο οποίο κάθε εξίσωσή του είναι της μορφής $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_\nu = 0$, είναι **αόριστο** , γιατί ισχύει **για κάθε** $x_1, x_2, ..., x_\nu \in \mathbb{R}$.

✓ Ένα σύστημα (γραμμικό 2x2 για λόγους απλότητας) στο οποίο μια απ΄τις εξισώσεις είναι η $0x + 0y = 0$ ή εμφανίζονται 2 ίδιες ή ισοδύναμες εξισώσεις , έχει **άπειρες λύσεις**. Στην περίπτωση του $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 9x + 6y = 0 \end{cases}$ έχουμε την $3x + 2y = 0$ που έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = \left(-\frac{2}{3}y, y\right), y \in \mathbb{R}$ όχι με την έννοια ότι ισχύει για **οποιαδήποτε** $x, y \in \mathbb{R}$, αλλά μόνο για τα σημεία (x , y) του επιπέδου που βρίσκονται στην ευθεία $y = -\frac{3}{2}x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το ομογενές (3x3) σύστημα : $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Είναι :

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot 3-1\cdot(-3)+1\cdot 3=-6+3+3=0$$

Υπολογίζουμε τις ελάσσονες ορίζουσες της D : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$.

Επειδή υπάρχει ελάσσονα ορίζουσα της D που είναι $\neq 0$, το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** που προκύπτουν από το αντίστοιχο στην ελάσσονα ορίζουσα σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y=-z \\ x-2y=-z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=z \\ y=z \end{array}\right\}.$$

Οι άπειρες λύσεις του συστήματος έχουν τη μορφή $(x,y,z)=(z,z,z), z\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το ομογενές (3x3) σύστημα : $\left.\begin{array}{r} 2x+2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Υπολογίζουμε την ορίζουσα D του συστήματος και βρίσκουμε μετά από πράξεις ότι $D=0$.
Επίσης , όλες οι ελάσσονες ορίζουσες της D είναι 0.
Επειδή όλοι οι συντελεστές των αγνώστων του συστήματος είναι $\neq 0$, το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** που η μορφή τους προκύπτει από μια εξίσωση του συστήματος :
$x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-y-z$, οπότε οι άπειρες λύσεις του συστήματος έχουν τη μορφή $(x,y,z)=(-y-z,y,z), y,z\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Να λυθεί το (3x3) ομογενές σύστημα , για το οποίο ισχύει:

$$D+D_x+D_y+D_z=\alpha \text{ , με } \alpha\neq 0.$$

<u>Λύση:</u>

Εφόσον το σύστημα είναι ομογενές , θα ισχύει : $D_x=D_y=D_z=0$, που σημαίνει ότι η δοσμένη σχέση γράφεται : $D=\alpha\neq 0$. Άρα το σύστημα έχει **μόνο** τη μηδενική λύση: $(x,y,z)=(0,0,0)$.

►Λύση Συστήματος με Παράμετρο

Η επίλυση παραμετρικών γραμμικών συστημάτων όλων των ειδών θα γίνει με τη μέθοδο των οριζουσών :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 :

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, το (3x3) σύστημα : $\left.\begin{array}{r} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

Θα υπολογίσουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y, D_z :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - \left(\lambda - 1\right) + \left(1 - \lambda\right) =$$

$$= \left(\lambda - 1\right)\left[\lambda\left(\lambda + 1\right) - 2\right] = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) = \left(\lambda - 1\right)^2 \cdot \left(\lambda + 2\right).$$

Όμοια , $D_x = \left(\lambda - 1\right)^2\left(\lambda + 1\right)$, $D_y = \left(\lambda - 1\right)^2$ και $D_z = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda + 1\right)^2$.

⇨ Αν $D \neq 0$, δηλαδή για $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 1$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση , την

$$\left(x, y, z\right) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right) = \left(-\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda + 2}, \frac{\left(\lambda + 1\right)^2}{\lambda + 2}\right).$$

⇨ Αν $D = 0$, τότε $\lambda = -2$ ή $\lambda = 1$, οπότε :

- Για $\lambda = -2$, έχουμε $D_x = 9 \neq 0$, $D_y = 9 \neq 0$, $D_z = 9 \neq 0$ άρα το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- Για $\lambda = 1$, έχουμε $D_x = D_y = D_z = 0$ και το σύστημα γίνεται $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$, δηλαδή

  $x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z$. Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής $\left(x, y, z\right) = \left(1 - y - z\ ,\ y\ ,\ z\right)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 :

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, το (3x4) σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + y + z + \omega = 1 \\ x + \lambda y + z + \omega = \lambda \\ x + y + \lambda z + \omega = \lambda^2 \end{array}\right\}.$$

<u>Λύση :</u>

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των συντελεστών των αγνώστων :

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = ... = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 2),\ D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ... = (\lambda - 1)^2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = ... = -(\lambda - 1)^2,\ D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = ... = (\lambda - 1)^2.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $\lambda \neq 1$, υπάρχει ορίζουσα των συντελεστών που είναι $\neq 0$ (έστω η D_2). Άρα το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** που προκύπτουν από το αντίστοιχο στην ορίζουσα σύστημα (3x3) :

  $$\left.\begin{array}{l} \lambda x + y + \omega = 1 - z \\ x + \lambda y + \omega = \lambda - z \\ x + y + \omega = \lambda^2 - \lambda z \end{array}\right\}$$ και αφού $D_2 \neq 0$, το σύστημα θα έχει λύση την

  $(x, y, z) = \left(z - \lambda - 1\ ,\ z - \lambda - 1\ ,\ (\lambda - 1)^2 + z(\lambda + 2)\right)$, $z \in \mathbb{R}$.

- Αν $\lambda = 1$, τότε $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$, το σύστημα γίνεται $\left.\begin{array}{r} x + y + z + \omega = 1 \\ x + y + z + \omega = 1 \\ x + y + z + \omega = 1 \end{array}\right\}$

  οπότε έχει άπειρες λύσεις η μορφή των οποίων δίνεται από μια εξίσωσή του $x + y + z + \omega = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z - \omega$, έτσι $(x, y, z) = (1 - y - z - \omega\ ,\ y,\ z,\ \omega)$, $y, z, \omega \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 :

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, το (3x3) **ομογενές** σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} x+\lambda y+2z=0 \\ -x+2y+\lambda z=0 \\ \lambda x-3y+(\lambda+1)z=0 \end{array}\right\}.$$

<u>Λύση:</u>

Υπολογίζουμε την ορίζουσα $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ -1 & 2 & \lambda \\ \lambda & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}=...(\lambda+2)\cdot\left(\lambda^2-\lambda+4\right)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$, αφού $\lambda^2-\lambda+4>0$ το σύστημα , ως ομογενές , θα έχει μοναδική λύση τη μηδενική : $(x,y,z)=(0,0,0)$.
- Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$, το σύστημα που για την τιμή αυτή γίνεται $\left.\begin{array}{r} x-2y+2z=0 \\ -x+2y-2z=0 \\ -2x-3y-z=0 \end{array}\right\}$,

  θα έχει και άλλες λύσεις (εκτός της μηδενικής).

Μια από τις ελάσσονες ορίζουσες της $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$, π.χ η $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=5\neq 0$, οπότε αφού υπάρχει μη μηδενική ελάσσονα ορίζουσα της D το σύστημα , θα έχει άπειρες λύσεις που προκύπτουν από το αντίστοιχο στην ελάσσονα ορίζουσα σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=-2z \\ -2x-3y=z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{8}{7}z \\ y=\dfrac{3}{7}z \end{array}\right\}. \text{ Άρα } (x,y,z)=\left(-\frac{8}{7}z\ ,\ \frac{3}{7}z\ ,\ z\right), z\in\mathbb{R}.$$

Απαλείφουσα Γραμμικού (ν x μ) Συστήματος με ν < μ

Αν σε παραμετρικό γραμμικό σύστημα (νxμ) με ν < μ , ζητείται να βρεθεί η **συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων** του συστήματος ώστε αυτό να είναι **συμβιβαστό** , τότε :

- ✓ Υπολογίζουμε την ορίζουσα D του συστήματος που περιέχει και τους σταθερούς όρους.
- ✓ Πρέπει D = 0 και ταυτόχρονα μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα να είναι $\neq 0$.
- ✓ Η σχέση που προκύπτει , δηλαδή μια παράσταση που περιέχει παραμέτρους του συστήματος ονομάζεται **απαλείφουσα του συστήματος**.

Η απαλείφουσα του (3x2) γραμμικού συστήματος $\left.\begin{array}{l}\alpha x+\beta y=1\\ \beta x+\alpha y=\alpha\beta\\ x+y=\alpha+\beta\end{array}\right\}$, είναι η

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-1=0$, αφού $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & 1\\ \beta & \alpha & \alpha\beta\\ 1 & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}=...=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-1)$ (1) και μια τουλάχιστον ελάσσονα ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων , π.χ η $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}$ πρέπει να είναι μη μηδενική οπότε έχουμε : $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha-\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 0$.

Έτσι , η σχέση (1) , δίνει $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-1=0$.

► Λύση Συστήματος με ειδικές τεχνικές

Τα γραμμικά συστήματα , λύνονται με τις κλασσικές μεθόδους που αναλύσαμε , όμως για να έχουμε όσο το δυνατόν πιο σύντομες λύσεις , όπου και όποτε χρειάζεται , χρησιμοποιούμε ειδικές τεχνικές όπως αυτές που αναφέρονται παρακάτω:

α) Τεχνική Πρόσθεσης

Όταν ο αριθμός των αγνώστων σε όλες τις εξισώσεις είναι ο ίδιος , χρησιμοποιούμε την τεχνική που περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα :

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα $\left.\begin{array}{l}2(x+z)+\omega=-5\\ x+2(y+\omega)=6\\ 2(y+\omega)+z=0\\ y+2(z+x)=-1\end{array}\right\}$.

<u>Λύση :</u>

Ονομάζουμε τις σχέσεις του συστήματος και έχουμε : $\left.\begin{array}{ll}2(x+z)+\omega=-5 & (1)\\ x+2(y+\omega)=6 & (2)\\ 2(y+\omega)+z=0 & (3)\\ y+2(z+x)=-1 & (4)\end{array}\right\}$.

Προσθέτουμε τις σχέσεις κατά μέλη και παίρνουμε :

$5(x+y+z+\omega)=0 \Leftrightarrow x+y+z+\omega=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=-y-\omega & (5)\\ y+\omega=-x-z & (6)\end{cases}$.

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στο σύστημα , το οποίο γίνεται :

$$\left.\begin{array}{l} 2(-y-\omega)+\omega=-5 \\ x+2(-x-z)=6 \\ 2(-x-z)+z=0 \\ y+2(-y-\omega)=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} \omega+2y=-5 & (7) \\ x+2z=-6 & (8) \\ 2x+z=0 & (9) \\ 2\omega+y=-1 & (10) \end{array}\right\}.$$

Επομένως , έχουμε δυο συστήματα :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \omega+2y=5 \\ 2\omega+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow (\omega, y)=(-1,3) \text{ και } \Sigma_2 : \begin{cases} x+2z=-6 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,z)=(2,-4)$$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Θυμαρίδας ο Πάριος (~ 500 π.χ)

Καταγόμενος από αρκετά ευκατάστατη οικογένεια , ο Θυμαρίδας ο Πάριος , γιος του εφοπλιστή και εμπόρου Τίμαιου , διακρίθηκε από μικρός για την ευστροφία του και την αντίληψή του με αποτέλεσμα τη συνεχή αλλαγή δασκάλων. Νεαρός , συνόδευσε τον πατέρα του στην κάτω Ιταλία και γνωρίζει τον Αλκίμαχο τον Πάριο , μαθητή του Πυθαγόρα , μυημένο στον ανώτερο βαθμό της Πυθαγόρειας διδασκαλίας. Έτσι , ο Θυμαρίδας , ακολουθεί τον Αλκίμαχο στον Κρότωνα , έδρα του Πυθαγόρειου Πανεπιστημίου.

Η προσήλωσή του στα Πυθαγόρεια δόγματα , τον οδηγεί στην υψηλότερη μύηση της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας. Αμέσως μετά τη διάλυση από τον Κύλωνα του Πυθαγόρειου Πανεπιστημίου και την εκδίωξη των Πυθαγορείων από τον Κρότωνα , ο Θυμαρίδας γυρίζει στην Πάρο. Στον τελευταίο , οφείλεται η μέθοδος υπολογισμού των ακέραιων αριθμών που παριστάνουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου , όπως δίνεται από τον τύπο $\alpha^2+\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2$, με α περιττό. Ο Θυμαρίδας , παντρεύτηκε στην Αθήνα την Ασπασία και απέκτησε ένα γιο τον Δείναρχο (επίσης Μαθηματικό). Προσπάθησε να ιδρύσει στην Αθήνα Νεοπυθαγόρεια σχολή όμως αντέδρασε η Δημοκρατική Αθήνα.

Το Θυμαρίδειο Επάνθημα

Ο τρόπος επίλυσης ορισμένων μορφών γραμμικών συστημάτων αποδίδεται στον Θυμαρίδα με τον τρόπο που ονομάστηκε προς τιμήν του ΄΄**Θυμαρίδειο Επάνθημα**΄΄. Σήμερα σώζονται 5 Θυμαρίδεια συστήματα , εκ των οποίων το βασικό δίνεται παρακάτω.

Η σύγχρονη διατύπωση ενός συστήματος που λύνεται με τη μέθοδο του Θυμαρίδα (Θυμαρίδειο Επάνθημα) είναι :

$$x+x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}=S \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+x_1=S_1 \\ x+x_2=S_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x+x_{\nu-1}=S_{\nu-1} \end{array}\right\} (2)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (2) κατά μέλη , και παίρνουμε :
$(\nu-1)x+(x_1+x_2+...+x_{\nu-1})=S_1+S_2+...+S_{\nu-1}$ (3)

Η (1) , δίνει $x_1+x_2+...+x_{\nu-1}=S-x$, οπότε η (3) γίνεται $(\nu-1)x+S-x=S_1+S_2+...+S_{\nu-1} \Leftrightarrow$

$$\boxed{x=\frac{(S_1+S_2+...+S_{\nu-1})-S}{\nu-2} \quad (4)}$$ **Έφοδος (Μέθοδος)**

Γνωρίζοντας το x από τη σχέση (4) , υπολογίζουμε τις $x_1, x_2, ..., x_{\nu-1}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+y+z+\omega=-10 \\ x+y=1 \\ x+z=2 \\ x+\omega=3 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

Το σύστημα είναι : $\begin{cases} x+y+z+\omega=-10 & (1) \\ x+y=1 \\ x+z=2 & (2) \\ x+\omega=3 \end{cases}$. Προσθέτουμε τις (2) κατά μέλη και έχουμε :
$3x+y+z+\omega=8$ (3) .

Η (1) δίνει την $y+z+\omega=10-x$, οπότε η (3) γίνεται $3x+10-x=8 \Leftrightarrow x=-1$
Για την τιμή αυτή του x , οι σχέσεις (2) , δίνουν : $y=2$, $z=3$, $\omega=4$.
Άρα , $(x,y,z,\omega)=(-1,2,3,4)$

β) Τεχνική των ίσων κλασμάτων

Εξισώνουμε όλα τα κλάσματα με έναν πραγματικό αριθμό $\kappa \in \mathbb{R}$ και από το κάθε κλάσμα βρίσκουμε τους αγνώστους συναρτήσει του κ. Αντικαθιστούμε στη γραμμική εξίσωση από την οποία βρίσκουμε το κ και μετά τους αγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{2} \\ x+y+2z=19 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

Η 1η σχέση του συστήματος , γίνεται :

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2} = \kappa \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{4} = \kappa \\ \dfrac{y+2}{3} = \kappa \\ \dfrac{z+1}{2} = \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\kappa+1 \\ y = 3\kappa-2 \\ z = 2\kappa-1 \end{cases}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στη 2η σχέση του συστήματος , παίρνουμε την εξίσωση: $4\kappa+1+3\kappa-2+4\kappa-2=19 \Leftrightarrow \kappa=2$.

Επομένως $\begin{cases} x = 4\kappa+1 \Rightarrow x=9 \\ y = 3\kappa-2 \Rightarrow y=4 \\ z = 2\kappa-1 \Rightarrow z=3 \end{cases}$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y,z)=(9,4,3)$.

γ) Τεχνική αντικατάστασης (βοηθητικού αγνώστου)

Θέτουμε το άθροισμα των αγνώστων ίσο με φ και αντικαθιστούμε στο σύστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+2(y+z)=1 \\ y+2(z+x)=-1 \\ 2z+(x+y)=2 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε $x+y+z=\varphi$ (1) απ' όπου παίρνουμε $\begin{cases} y+z=\varphi-x \\ z+x=\varphi-y \\ x+y=\varphi-z \end{cases}$.

Έτσι το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+2(\varphi-x)=1 \\ y+2(\varphi-y)=-1 \\ 2z+(\varphi-z)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2\varphi \\ y=1+2\varphi \\ z=2-\varphi \end{cases}$. (2)

Επομένως , η (1) από τις παραπάνω σχέσεις , γίνεται :
$1-2\varphi+1+2\varphi+2-\varphi=\varphi \Leftrightarrow \varphi=-1$

Οι σχέσεις (2) , δίνουν : $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=(-3,-1,3)$

ΜΕΡΟΣ 4

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

► Σύστημα δυο Εξισώσεων 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο

Ένα τέτοιο σύστημα , ανάγεται σε εξίσωση 2^{ου} βαθμού , επομένως θα έχει **2 το πολύ** λύσεις.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Για τα πολυώνυμα $f_1(x)=\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1$, $f_2(x)=\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2$ θεωρούμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0}\\ \boldsymbol{\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2=0}\end{array}\right\}.$$

Ορισμός : Απαλείφουσα του συστήματος $\left.\begin{array}{l}f_1(x)=0\\ f_2(x)=0\end{array}\right\}$ των εξισώσεων $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, ονομάζουμε την παράσταση

$$\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\gamma_1}\\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2}\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\beta_1}\\ \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\beta_2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\gamma_1}\\ \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\gamma_2}\end{vmatrix}=\left(\boldsymbol{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}\right)^2-\left(\boldsymbol{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}\right)$$

<u>Ιδιότητες της απαλείφουσας R :</u>

1. Αν οι συντελεστές των εξισώσεων του συστήματος είναι ανάλογοι , δηλαδή αν $\alpha_1=\lambda\alpha_2$, $\beta_1=\lambda\beta_2$, $\gamma_1=\lambda\gamma_2$ (1) , $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε οι εξισώσεις $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$ έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις και

$$R=\left(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1\right)^2-\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right)\cdot\left(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\right)\overset{(1)}{=}$$
$$=\left(\lambda\alpha_2\gamma_2-\alpha_2\lambda\gamma_2\right)^2-\left(\lambda\alpha_2\beta_2-\alpha_2\lambda\beta_2\right)\cdot\left(\lambda\beta_2\gamma_2-\beta_2\lambda\gamma_2\right)=0\ .$$

2. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0\\ \alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2=0\end{array}\right\}$ έχει **μια τουλάχιστον πραγματική λύση** , **αν και μόνο αν R = 0**.

3. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0\\ \alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2=0\end{array}\right\}$ έχει **μια ακριβώς πραγματική λύση** $\left(\text{την}\ \rho=\dfrac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right)$, **αν και μόνο αν R = 0 και $\alpha_1.\beta_2-\alpha_2.\beta_1\neq 0$**.

4. Τα τριώνυμα $f_1(x)=\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1$, $f_2(x)=\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2$ έχουν πραγματικές και άνισες ρίζες τις ρ_1,ρ_2 και x_1,x_2 αντίστοιχα (με $\rho_1<\rho_2$, $x_1<x_2$) , για τις οποίες μάλιστα ισχύει μια εκ των $x_1<\rho_1<x_2<\rho_2$, $<\rho_1<x_1<\rho_2<x_2$, αν **R < 0**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Αν στο σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0\\ \alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2=0\end{array}\right\}$ θέσουμε $x^2=y$, τότε αυτό μετατρέπεται στο $\left.\begin{array}{l}\alpha_1y+\beta_1x+\gamma_1=0\\ \alpha_2y+\beta_2x+\gamma_2=0\end{array}\right\}$, με $\alpha_1\cdot\alpha_2\neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Αν το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\\ \gamma x^2+\beta x+\alpha=0\end{array}\right\}$ με $\alpha,\gamma\neq 0$ έχει μοναδική λύση , να βρείτε τη λύση αυτή.

<u>Λύση:</u>

Χρήση απαλείφουσας:

Αφού έχει λύση το σύστημα , ισχύει :

$$R=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\alpha^2-\gamma^2\right)^2-\left(\alpha\beta-\beta\gamma\right)\left(\alpha\beta-\beta\gamma\right)=0\\ \alpha\beta-\beta\gamma\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\alpha+\gamma\right)^2-\beta^2=0\\ \beta\left(\alpha-\gamma\right)\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta\\ \beta\neq 0\text{ και }\alpha\neq\gamma\end{cases}\text{ ή }\begin{cases}\alpha+\gamma=-\beta\\ \beta\neq 0\text{ και }\alpha\neq\gamma\end{cases}.$$

- ✓ Αν α + γ = β με β ≠ 0 και α ≠ γ τότε η μοναδική λύση , είναι :

$$\rho=-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha\beta-\beta\gamma}=-\frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{\beta(\alpha-\gamma)}=-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}=-\frac{\beta}{\beta}=-1.$$

- ✓ Αν α + γ = – β με β ≠ 0 και α ≠ γ τότε η μοναδική λύση , είναι :

$$\rho=-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha\beta-\beta\gamma}=-\frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{\beta(\alpha-\gamma)}=-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}=-\frac{-\beta}{\beta}=1.$$

Μια διαφορετική οπτική του θέματος , είναι η εξής :

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος (ή πιο απλά εξισώνουμε τα πρώτα μέλη) και προκύπτει η $(\alpha-\gamma)x^2+\gamma-\alpha=0\Leftrightarrow\left(\alpha-\gamma\right)x^2=\left(\alpha-\gamma\right)$ και για να έχει λύση το σύστημα (άρα και η εξίσωση) , πρέπει $\alpha\neq\gamma$, γιατί αν ήταν α = γ θα είχαμε την **αόριστη εξίσωση** $0x=0$. Με αυτό τον περιορισμό λοιπόν , παίρνουμε τελικά ότι $x^2=1$, απ' όπου $x=-1$ ή $x=1$.

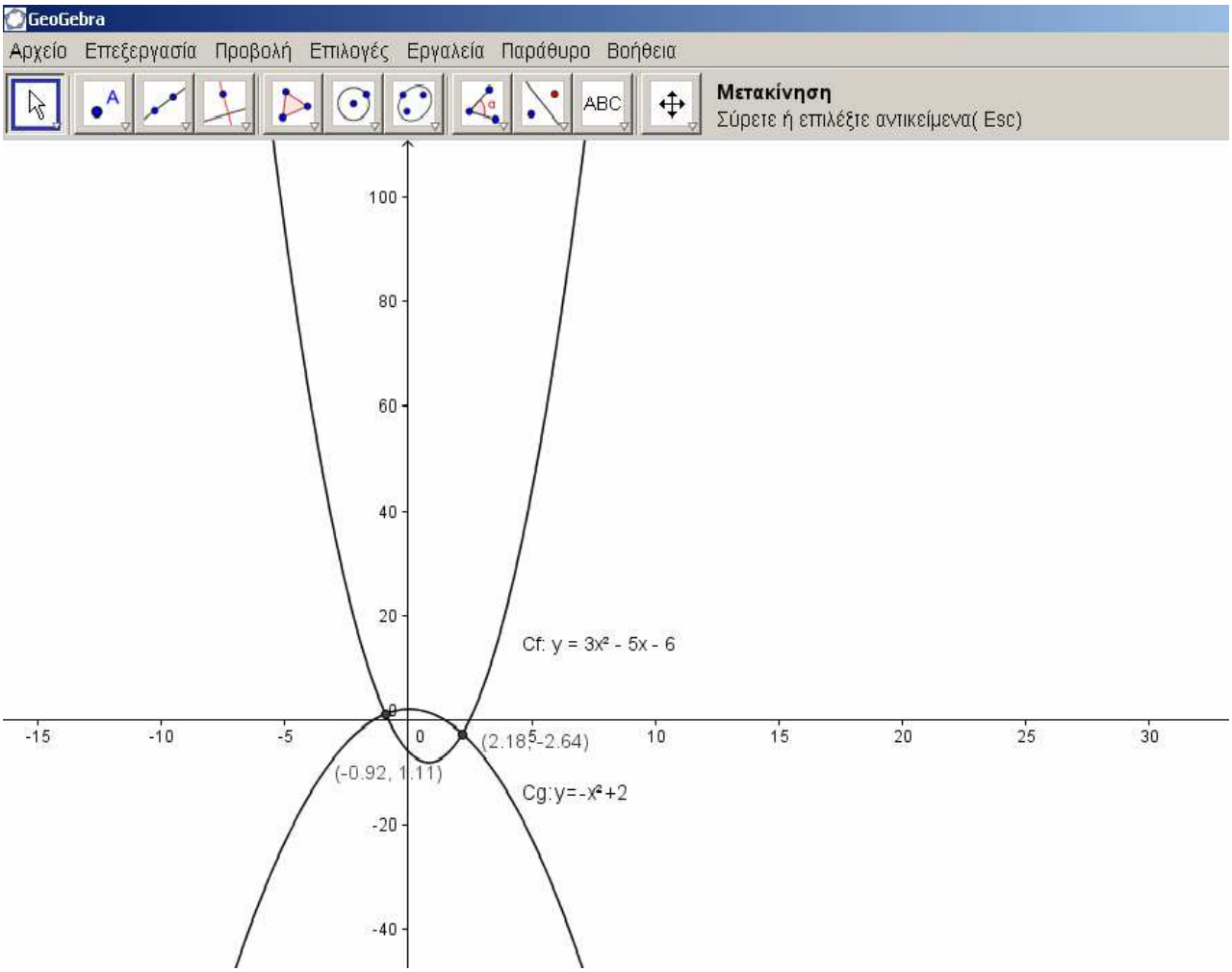
ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Για να λύσουμε γραφικά ένα σύστημα δευτεροβάθμιων εξισώσεων με έναν άγνωστο , χρησιμοποιούμε ένα κατάλληλο λογισμικό για να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Σαν παραλλαγή αυτού του τρόπου , μπορούμε εξισώνοντας τα αριστερά μέλη του συστήματος να προκύψει μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού , οπότε κάνοντας τη γραφική της παράσταση , βρίσκουμε τα σημεία τομής της με τον άξονα xx΄ και καταλήγουμε στη λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 6 = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \end{cases}$.

<u>Λύση :</u>

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$ και $g(x) = -x^2 + 2$.

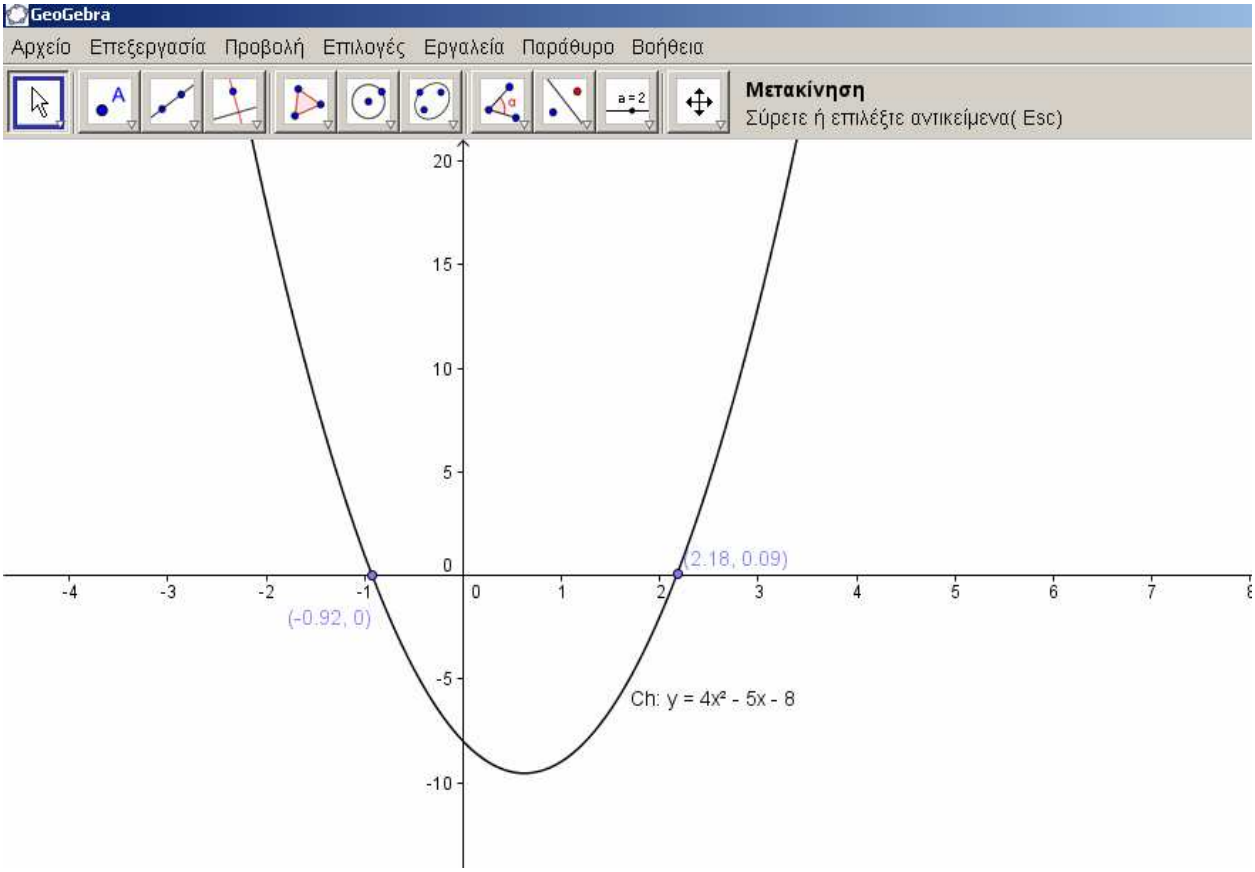


Το σύστημα είναι αδύνατο γιατί οι C_f, C_g δεν τέμνονται στον άξονα xx΄.

Μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής :

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x - 6 = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 6 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 8 = 0 .$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = 4x^2 - 5x - 8$ φαίνεται στο παρακάτω καρτεσιανό σύστημα αξόνων:



Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = 4x^2 - 5x - 8$ με τον άξονα xx΄ είναι $x = -0,92$ ή $x = 2,18$ που όμως δεν επαληθεύουν και τις δυο εξισώσεις του συστήματος.
Το σύστημα είναι αδύνατο.

► Σύστημα μιας Εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού (ευθεία) και μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού με δυο αγνώστους (κωνική)

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Έστω μια ευθεία ε με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ και μια κωνική τομή C με εξίσωση $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + H = 0$. Η ευθεία ε και η κωνική C έχουν **το πολύ δυο κοινά σημεία** , αφού το σύστημα $\begin{cases} y = \lambda x + \beta & (1) \\ Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + H = 0 & (2) \end{cases}$ έχει **το πολύ δυο** διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2) όπου $y = \lambda x + \beta$, οπότε προκύπτει μια εξίσωση $2^{ου}$ (ή και $1^{ου}$) βαθμού :

- ✓ Αν η εξίσωση αυτή έχει δυο ρίζες άνισες ($2^{ου}$ βαθμού με $\Delta = 0$) ή μια απλή ρίζα (αν είναι $1^{ου}$ βαθμού) , τότε η ευθεία και η κωνική **<u>τέμνονται</u>**.
- ✓ Αν η εξίσωση έχει δυο ρίζες ίσες (1 διπλή) , δηλαδή αν είναι $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 0$, τότε ευθεία **<u>εφάπτεται</u>** της κωνικής.
- ✓ Αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες , τότε η ευθεία και η κωνική **<u>δεν έχουν κοινά σημεία</u>**.

Τα συστήματα αυτά , **αλγεβρικά** επιλύονται με αντικατάσταση της γραμμικής στη μη γραμμική εξίσωση , καταλήγοντας σε δυο συστήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων , σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ : Κάθε σύστημα της μορφής $\begin{cases} \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0 \\ \kappa x + \lambda y = \mu \end{cases}$ με $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$ και $|\kappa| + |\lambda| \neq 0$, διασπάται σε συστήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων με αγνώστους x , y.

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $\lambda \neq 0$.Τότε η $\kappa x + \lambda y = \mu$ δίνει την $y = \dfrac{\mu - \kappa x}{\lambda}$ (1) και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0$ λόγω της (1) , γίνεται :

  $$\alpha x^2 + \beta x\left(\frac{\mu - \kappa x}{\lambda}\right) + \gamma\left(\frac{\mu - \kappa x}{\lambda}\right)^2 + \delta x + \varepsilon\left(\frac{\mu - \kappa x}{\lambda}\right) + \eta = 0 \ (2)$$

  Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα $\begin{cases} x = x_1 \\ \kappa x + \lambda y = \mu \end{cases}$ και $\begin{cases} x = x_2 \\ \kappa x + \lambda y = \mu \end{cases}$, όπου x_1, x_2 ρίζες της (2).

- Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο , αν $\kappa \neq 0$.

(*) Το σύστημα που θα μας απασχολήσει και στη διδακτική παρέμβαση , ανήκει στην παραπάνω κατηγορία και είναι της μορφής : $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{array}\right\}$

Αν $\beta \neq 0$, η γραμμική σχέση γίνεται : $y=\dfrac{\gamma-\alpha x}{\beta}$ και η οποία αντικαθίσταται στην πρώτη και δίνει $x^2+\left(\dfrac{\gamma-\alpha x}{\beta}\right)^2+Ax+B\cdot\dfrac{\gamma-\alpha x}{\beta}+\Gamma=0$.Μετά από πράξεις , έχουμε την εξίσωση $\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2+\left(A\beta^2-2\alpha\gamma-B\alpha\beta\right)x+\left(\Gamma\beta^2+B\beta\gamma+\gamma^2\right)=0$, που έχει διακρίνουσα την $\Delta=\left(A\beta^2-B\alpha\beta-2\alpha\gamma\right)^2-4\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\Gamma\beta^2+B\beta\gamma+\gamma^2\right)$ και αν $\Delta>0$, ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\left(A\beta^2-B\alpha\beta-2\alpha\gamma\right)\pm\sqrt{\Delta}}{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x+y=1 \end{cases}$.

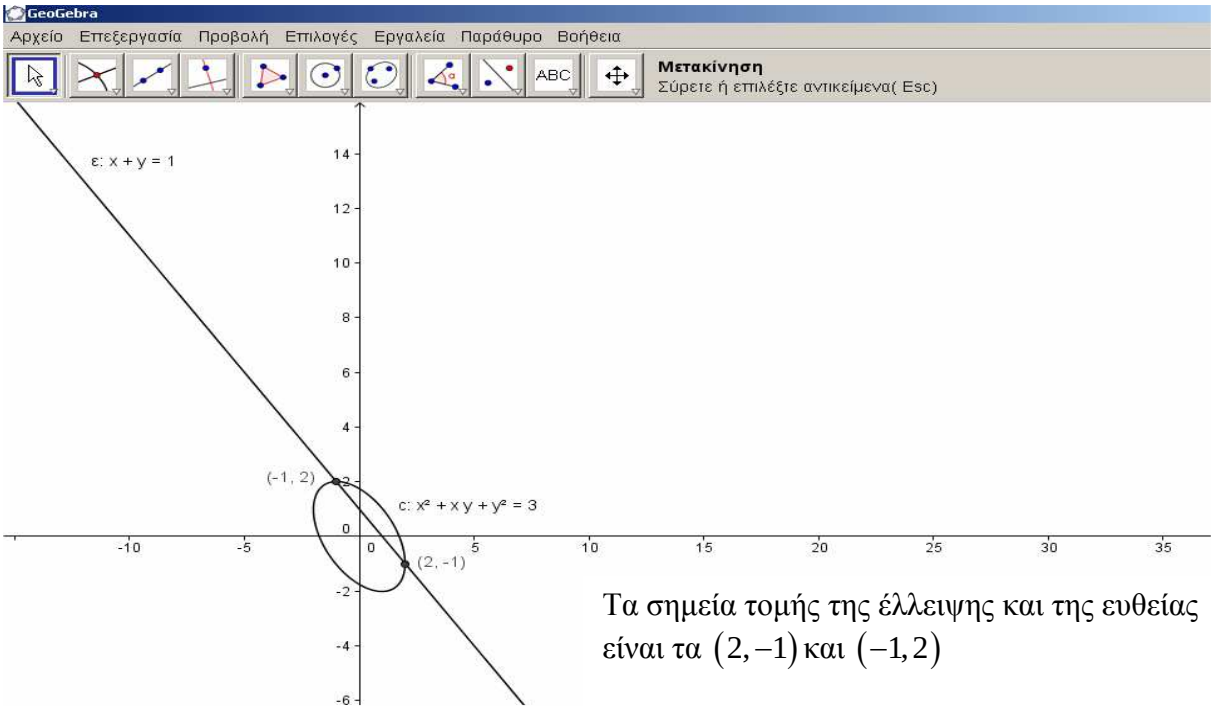
<u>Λύση:</u>

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x(1-x)+(1-x)^2=3 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2 \text{ ή } x=-1 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(2,-1)$ ή $(x,y)=(-1,2)$.

Γραφικά , το σύστημα εκφράζει μια έλλειψη και μια ευθεία. Οι γραφικές τους παραστάσεις και τα σημεία τομής τους , δηλαδή η λύση του συστήματος , δίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Τα σημεία τομής της έλλειψης και της ευθείας είναι τα $(2,-1)$ και $(-1,2)$

Το πρόβλημα της Βαβυλωνιακής Πινακίδας (~ 1800 π.χ)

Σε μια ορθογώνια πινακίδα , προσαρτάται η διαφορά του μήκους της από το πλάτος της. Το αποτέλεσμα είναι 183. Το μήκος και το πλάτος της είναι 27. Να βρεθούν οι διαστάσεις της επιφάνειας.

Σε σύγχρονη γραφή , το παραπάνω πρόβλημα διατυπώνεται αλγεβρικά ως εξής : $\left.\begin{array}{r} xy+x-y=183 \\ x+y=27 \end{array}\right\}$

όπου x > 0 το μήκος και y >0 το πλάτος της επιφάνειας.

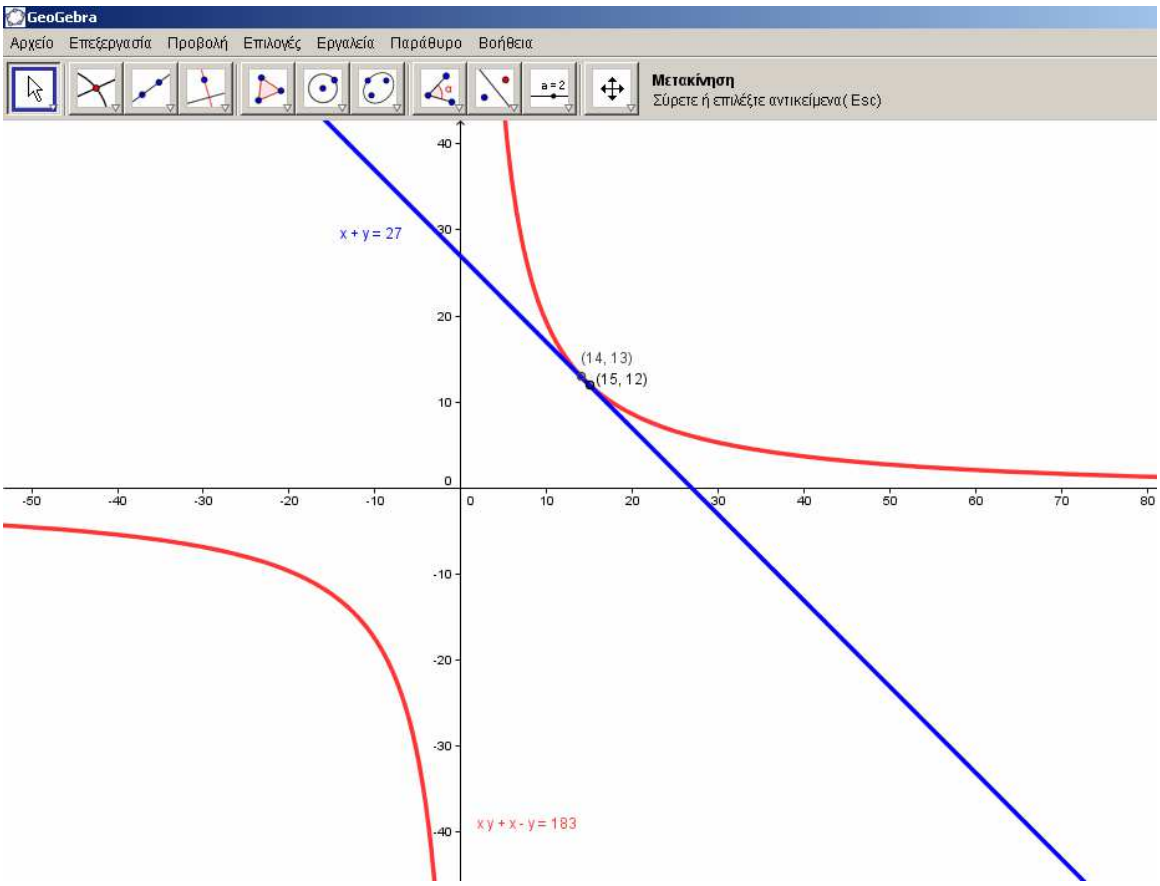
Αλγεβρική επίλυση:

$\left.\begin{array}{r} xy+x-y=183 \\ x+y=27 \end{array}\right\}$ Προσθέτουμε τις σχέσεις κατά μέλη και προσθέτουμε το 2 στη $2^{η}$ εξίσωση :

$\left.\begin{array}{l} xy+2x=210 \\ x+y+2=29 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(y+2)=210 \\ y+2=29-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(29-x)=210 \\ y=27-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-29x+210=0 \\ y=27-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=15 \text{ ή } x=14 \\ y=27-x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x=15 \\ y=12 \end{array}\right\}$ ή $\left.\begin{array}{l} x=14 \\ y=13 \end{array}\right\}$. Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις της επίπεδης επιφάνειας είναι $(15,12)$ ή $(14,13)$.

Γραφική επίλυση: Η ευθεία $x+y=27$ και η υπερβολή $xy+x-y=183$ τέμνονται στα σημεία $(15,12),(14,13)$



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι κωνικές τομές στην αρχαία Ελλάδα

Ο κύκλος , η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή λέγονται **κωνικές τομές**, γιατί μπορούν να προκύψουν από την τομή μιας ορθής κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο , το οποίο δε διέρχεται από την κορυφή της. Η σημασία αυτών των καμπυλών φαίνεται ότι αρχικά σχετίζονταν με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως για παράδειγμα το περίφημο πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου. Δηλαδή , δοθέντος ενός κύβου, να κατασκευαστεί ένας άλλος με διπλάσιο όγκο. Με αλγεβρικό συμβολισμό, αυτό σημαίνει ότι αν α είναι η πλευρά του αρχικού κύβου , να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα x που Θα είναι η πλευρά του κύβου με όγκο $2\alpha^3$ δηλαδή $x^3 = 2\alpha^3$.Ο Ιπποκράτης ο Χίος (~ 430 π.Χ.) ήταν ο πρώτος που ανήγαγε αυτό πρόβλημα στην κατασκευή δύο τμημάτων x και y, τέτοιων ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$.

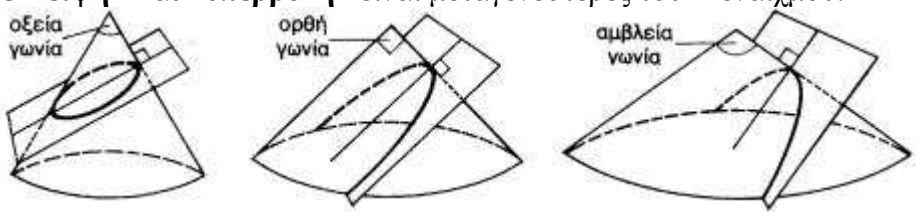
(κατασκευή δυο **μέσων αναλόγων** - από αυτές τις σχέσεις εύκολα προκύπτει $x^3 = 2\alpha^3$).
Μια από τις πολλές λύσεις που δόθηκαν κατά την αρχαιότητα είναι και του **Μεναίχμου** (~ 350 π.Χ.) με τη βοήθεια των κωνικών τομών.

Η λύση του Μεναίχμου περιγράφεται με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό, ως εξής:

Από τις $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$ προκύπτει ότι $y^2 = 2\alpha x$ (1) και $xy = 2\alpha^2$ ή $y = \frac{2\alpha^2}{x}$ (2) και επομένως τα μήκη των τμημάτων x , y μπορούν να θεωρηθούν ως οι συντεταγμένες του κοινού σημείου Μ των καμπύλων με εξισώσεις (1) και (2) , που είναι αντίστοιχα μια παραβολή και μια υπερβολή.

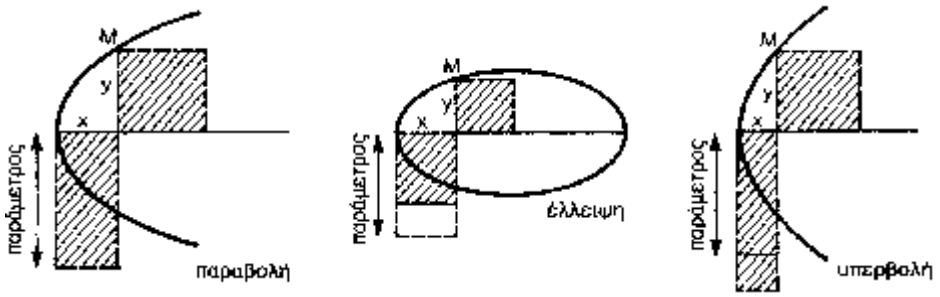
Στη γεωμετρική κατασκευή τον Μεναίχμου , τα τμήματα x , y κατασκευάζονται με τη βοήθεια των προβολών του σημείου τομής των 2 καμπύλων πάνω στις ασύμπτωτες της υπερβολής (η μια από τις οποίες είναι ταυτόχρονα και άξονας συμμετρίας της παραβολής) , αφού πρώτα κατασκευαστούν , σημείο προς σημείο , οι καμπύλες σύμφωνα με τα γεωμετρικά ισοδύναμα των (1) και (2). Το Μ π.χ. ως σημείο της παραβολής , προσδιορίζεται έτσι ώστε το τετράγωνο πλευράς ΜΚ να είναι ισοδύναμο προς ένα ορθογώνιο με πλευρές 2α και ΜΛ (δηλαδή $y^2 = 2\alpha x$) , ενώ ως σημείο της υπερβολής προσδιορίζεται έτσι ώστε το ορθογώνιο με πλευρές ΜΛ και ΜΚ να είναι ισοδύναμο προς ένα ορθογώνιο με πλευρές 2α και α (δηλ. $xy = 2\alpha^2$).

Αυτή είναι η πρώτη γνωστή εμφάνιση των κωνικών τομών στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά. Πρέπει όμως να τονιστεί ότι τόσο ο όρος **«κωνική τομή»**, όσο και οι ειδικότερες ονομασίες **«παραβολή», «έλλειψη» και «υπερβολή»** είναι μεταγενέστερες του Μεναίχμου.



Οι καμπύλες αυτές , γύρω στο 300 π.Χ. ταυτίστηκαν για πρώτη φορά με τις τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο σε μια γενέτειρά του.

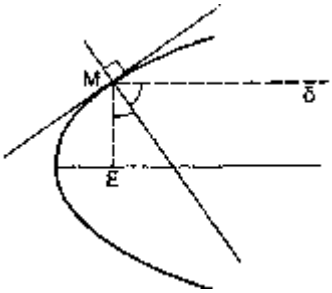
Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου , οι καμπύλες αυτές ορίστηκαν ως «οξυγωνίου κώνου τομή» (έλλειψη) , «ορθογωνίου κώνου τομή» (παραβολή) και «αμβλυγωνίου κώνου τομή» (υπερβολή). Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.) στα έργα του «Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής» και «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών».
Οι νέοι ορισμοί έδωσαν τη δυνατότητα μιας θεωρητικής μελέτης των τριών καμπύλων , με αποκορύφωμα τα περίφημα «Κωνικά» του Απολλώνιου (~ 250 π.Χ.).
Το έργο αυτό ήταν χωρισμένο σε 8 βιβλία που περιείχαν μια άψογη γεωμετρική θεωρία των κωνικών τομών και ένα ανεξάντλητο πλήθος νέων αποτελεσμάτων. Στα 7 πρώτα βιβλία που έχουν διασωθεί υπάρχουν 387 θεωρήματα ενώ στο 8ο, κατά μαρτυρία τον Πρόκλου , υπήρχαν άλλα 100. Μια βασική καινοτομία του Απολλώνιου υπήρξε ο ορισμός των τριών καμπύλων μέσω τριών διαφορετικών τομών ενός μόνο κώνου καθώς και η εισαγωγή των όρων **«παραβολή» , «έλλειψη» και «υπερβολή».**
Τα ονόματα αυτά έχουν άμεση σχέση με το τρόπο ορισμού των κωνικών τομών που εισήγαγε ο Απολλώνιος , σύμφωνα με τον οποίο , **σε κάθε τομή του πλευρά την κάθετη κώνου από το επίπεδο αντιστοιχεί ένα σταθερό μήκος (παράμετρος)**. Ο Απολλώνιος έδειξε ότι για κάθε καμπύλη , τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Το ένα από αυτά είναι το τετράγωνο με πλευρά την κάθετη y από ένα σημείο της καμπύλης προς τον άξονα συμμετρίας της το άλλο είναι ένα ορθογώνιο , με μια πλευρά την απόσταση x του ίχνους αυτής της κάθετης από την κορυφή της καμπύλης. Η σχέση της άλλης πλευράς του ορθογωνίου προς τη σταθερή παράμετρο της τομής είναι αυτή που καθορίζει τη μορφή και το όνομα της καμπύλης. Αν η άλλη πλευρά ισούται («παραβάλλεται») προς την παράμετρο, τότε η καμπύλη είναι μια παραβολή.
Όταν η άλλη πλευρά είναι μικρότερη («ελλείπει») από την παράμετρο, η καμπύλη είναι μια Έλλειψη , ενώ όταν είναι μεγαλύτερη («υπερβάλλει») , η καμπύλη είναι μια υπερβολή.



Η μελέτη των κωνικών τομών στην αρχαία Ελλάδα, όπως κυρίως εμφανίζεται στα «Κωνικά» , εντάσσεται μέσα στο γενικότερο πλαίσιο μελέτης των μαθηματικών που έδινε έμφαση στο θεωρητικό ενδιαφέρον και *όχι* στις πρακτικές εφαρμογές. Ο ίδιος ο Απολλώνιος , στους προλόγους του 4ου και 5ου βιβλίου , επισημαίνει ότι η αξία του έργου του βρίσκεται στα θεωρήματα αυτά καθεαυτά και τα κίνητρα που δίνουν για νέες έρευνες.

Οι κωνικές τομές στη νεότερη εποχή

Η μελέτη των κωνικών τομών συνεχίστηκε από τους Άραβες και ιδιαίτερα τους Ευρωπαίους μαθηματικούς της Αναγέννησης. Από καθαρά μαθηματική άποψη , η πλέον ουσιαστική εξέλιξη υπήρξε η εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων που οδήγησε βαθμιαία στην αποδέσμευση αυτών των καμπύλων από τον κώνο και στον ορισμό τους ως γεωμετρικών τόπων σημείων , οι συντεταγμένες των οποίων ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων ικανοποιούν μια εξίσωση 2ου βαθμού με 2 μεταβλητές. Εκείνο όμως που χαρακτηρίζει ιδιαίτερα τη νεότερη εποχή είναι οι πολλές εφαρμογές των κωνικών τομών σε διάφορους κλάδους της επιστήμης , της τέχνης και της τεχνολογίας.
Στην αστρονομία ο Kepler , με το έργο του "Astronomia nova" (1609) , έδωσε μια απλή ερμηνεία της κίνησης των πλανητών , αντικαθιστώντας το πολύπλοκο σύστημα των κυκλικών κινήσεων με ελλειπτικές τροχιές. Συγκεκριμένα, ο πρώτος νόμος του Kepler αναφέρει ότι : «Οι τροχιές των πλανητών είναι **ελλείψεις** , στη μία εστία των οποίων βρίσκεται ο ήλιος».
Η έλλειψη χρησιμοποιήθηκε επίσης στη ζωγραφική για την προοπτική αναπαράσταση του κύκλου , γεγονός που οδήγησε στην επινόηση νέων μεθόδων κατασκευής της από ζωγράφους της Αναγέννησης. Σημαντικές επίσης υπήρξαν οι εφαρμογές των κωνικών τομών στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό μεγάλων έργων , όπως θόλους εκκλησιών , γέφυρες κ.λ.π.
Ένας άλλος τομέας τον οποίο χρησιμοποιήθηκε η θεωρία των κωνικών τομών , ήταν η βαλλιστική και συγκεκριμένα το **πρόβλημα καθορισμού της τροχιάς των βλημάτων**. Με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν πολλοί επιστήμονες. Κατά το 16ο και 17ο αιώνα ο Γαλιλαίος , χρησιμοποιώντας ιδιότητες που είχαν αποδειχθεί από τον Απολλώνιο στα «Κωνικά» απέδειξε θεωρητικά το 1937 ότι η τροχιά ενός βλήματος είναι παραβολή.



Μια άλλη **ιδιότητα της παραβολής** , γνωστή από την αρχαιότητα , έχει αξιοποιηθεί από τη σύγχρονη τεχνολογία στην κατασκευή τηλεσκοπίων και φανών. Αν μια ευθεία δ , παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής , τέμνει την παραβολή στο Μ , τότε η κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες δ και ΜΕ (όπου Ε η εστία).
Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή και το νόμο της ανάκλασης , οι φωτεινές ακτίνες που προέρχονται από μια απομακρυσμένη πηγή όπως π.χ. ένα αστέρι (και είναι επομένως σχεδόν παράλληλες) , μετά την ανάκλασή τους σε μια παραβολική επιφάνεια στραμμένη προς την πηγή , θα συγκεντρωθούν γύρω από την εστία.
Η συγκέντρωση αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη σημαντική ενίσχυση ασθενών φωτεινών σημάτων. Αντίστροφα , η τοποθέτηση μιας φωτεινής πηγής στην εστία παραβολικής επιφάνειας έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας δέσμης παράλληλων ακτίνων.

► Σύστημα Εξισώσεων βαθμού ν με 1 άγνωστο (ν ≥ 2)

Εδώ τα συστήματα λύνονται αλγεβρικά με διάφορα τεχνάσματα και μεθόδους , καθώς και γραφικά.

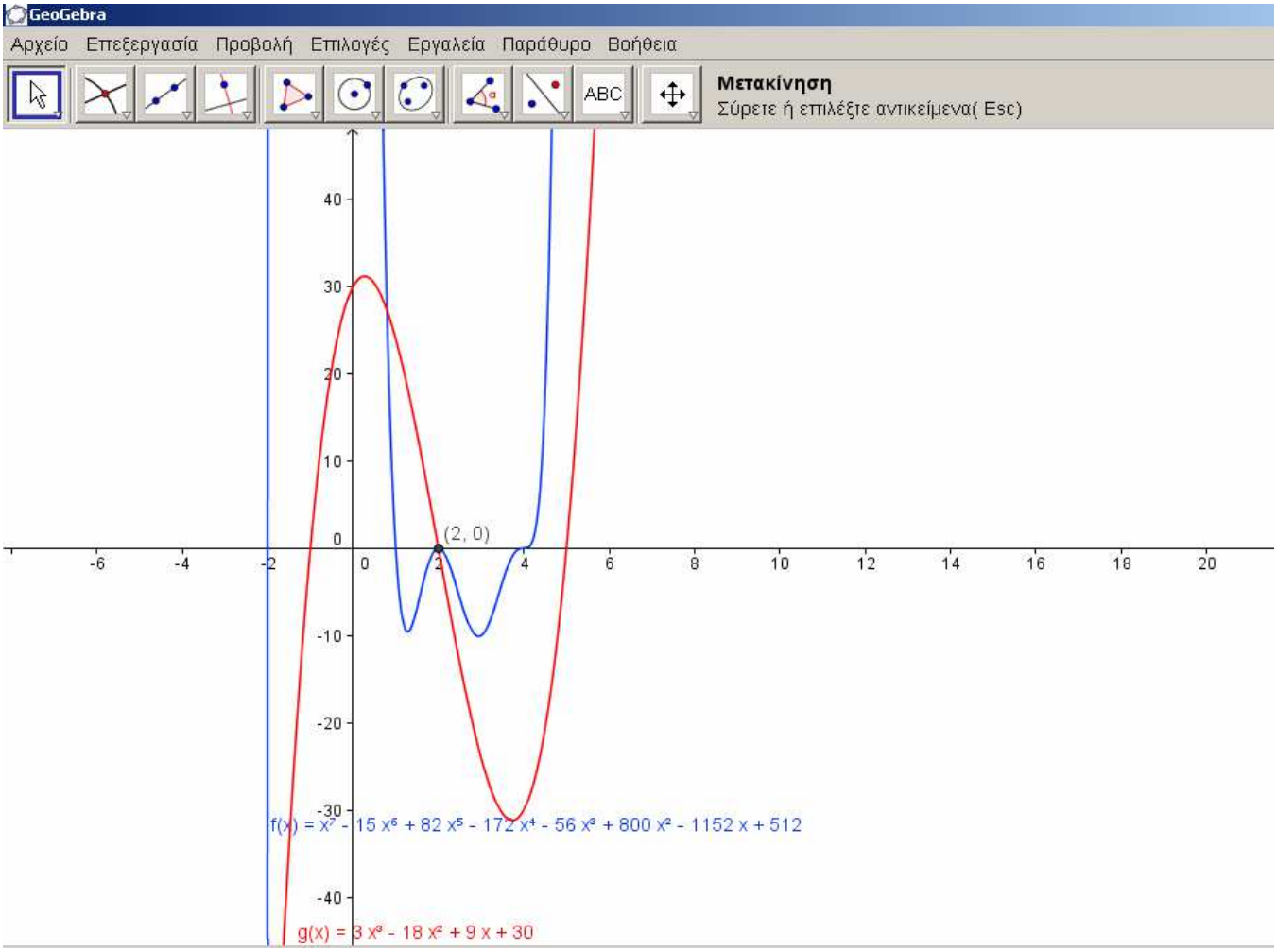
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Δίνονται τα πολυώνυμα : $f(x) = x^7 - 15x^6 + 82x^5 - 172x^4 - 56x^3 + 800x^2 - 1152x + 512 = 0$

και $g(x) = 3x^3 - 18x^2 + 9x + 30 = 0$. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

<u>Λύση:</u>

1. Γραφική Μέθοδος



Η μοναδική λύση του συστήματος είναι η x = 2.

<u>Παρατήρηση :</u>

Η αναγκαία συνθήκη $f(x) = g(x) = 0$ (απ'όπου προκύπτει η ρίζα x = 2) , προφανώς δεν είναι ισοδύναμη με την $f(x) = g(x)$ (απ'όπου προκύπτουν οι τετμημένες των άλλων δυο κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων $x \approx 0,795$ και $x \approx -2,0081$)

2. Αλγεβρική Μέθοδος

Εκτελούμε τη διαίρεση $f(x):g(x)$, όπου :

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^7-15x^6+82x^5-172x^4-56x^3+800x^2-1152x+512=0 \\ g(x)=3x^3-18x^2+9x+30=0 \end{array}\right\}$$ και βρίσκουμε :

$\pi(x)=\frac{1}{3}x^4-3x^3+\frac{25}{3}x^2-\frac{5}{3}x-\frac{71}{3}$ και $\upsilon(x)=139x^2-889x+1222$.

Δηλαδή , $x^7-15x^6+82x^5-172x^4-56x^3+800x^2-1152x+512=$

$$\left(3x^3-18x^2+9x+30\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x^4-3x^3+\frac{25}{3}x^2-\frac{5}{3}x-\frac{71}{3}\right)+\left(139x^2-889x+1222\right)$$

Συνεχίζουμε , στηριζόμενοι στην εξής ιδέα :

Αν ρ είναι η κοινή ρίζα των εξισώσεων $f(x)=0$, $g(x)=0$ του συστήματος $\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right\}$ (I)

και εκτελέσουμε τη διαίρεση $f(x):g(x)$, παίρνουμε $f(x)=g(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$.

- Αν $f(\rho)=g(\rho)=0$, τότε θα είναι και $\upsilon(\rho)=0$
- Αν $g(\rho)=\upsilon(\rho)=0$, τότε θα είναι και $f(\rho)=0$

Επομένως το σύστημα (I) , είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\left.\begin{array}{l} g(x)=0 \\ \upsilon(x)=0 \end{array}\right\}$.

Με τον τρόπο αυτό , καταφέρνουμε να μειώσουμε το βαθμό μιας εξίσωσης του συστήματος (I).

Επομένως το σύστημα $\begin{cases} x^7-15x^6+82x^5-172x^4-56x^3+800x^2-1152x+512=0 \\ 3x^3-18x^2+9x+30=0 \end{cases}$,

είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} 3x^3-18x^2+9x+30=0 \\ 139x^2-889x+1222=0 \end{cases}$ και λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$139x^2-889x+1222=0$, βρίσκουμε ότι $x=2$ ή $x=4,396$, από τις οποίες μόνο η x = 2 επαληθεύει την εξίσωση $3x^3-18x^2+9x+30=0$ και άρα είναι ρίζα της.

Άρα η x = 2 , είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

►Σύστημα ν Εξισώσεων βαθμού ν με ν αγνώστους (ν ≥ 2)

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση , έτσι και εδώ , τα συστήματα λύνονται αλγεβρικά με διάφορα τεχνάσματα και μεθόδους , καθώς και γραφικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x,y)=y^2-2xy+5y$ και $g(x,y)=x^2-4x-y+3$.

Να λυθεί το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\}$.

<u>Λύση:</u>

α) Έχουμε $\begin{cases} y^2-2xy+5y=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\cdot(y-2x+5)=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } y-2x+5=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases}$.

Έτσι , έχουμε τα συστήματα : $\begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases} (\Sigma_1)$ ή $\begin{cases} y-2x+5=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases} (\Sigma_2)$.

$(\Sigma_1): \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \text{ ή } x=3 \end{cases}$.

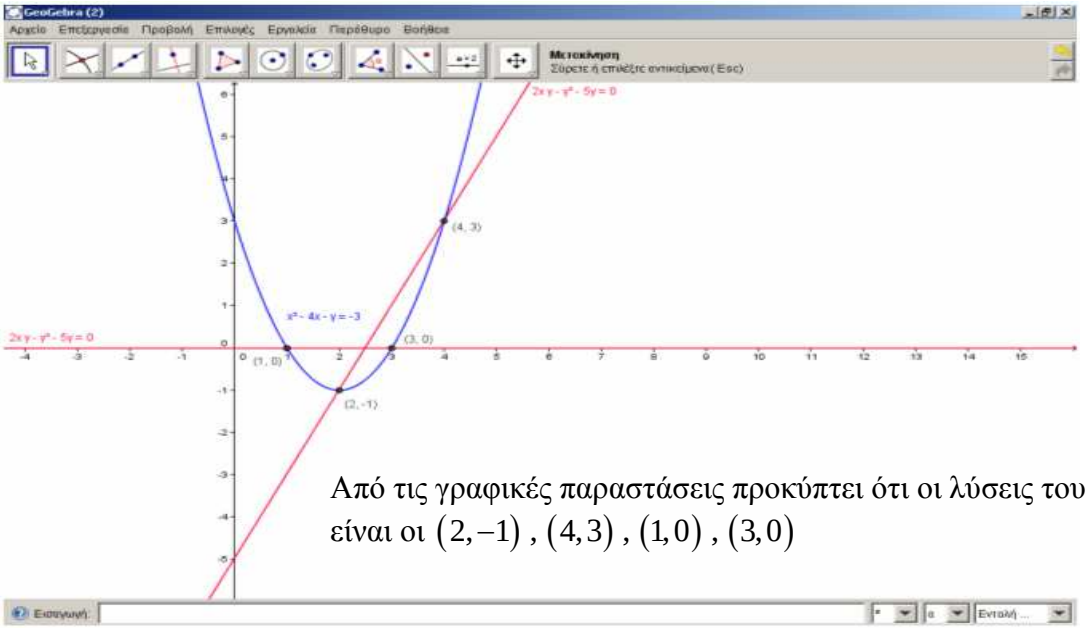
Άρα $(x,y)=(1,0)$ ή $(x,y)=(3,0)$

$(\Sigma_2): \begin{cases} y-2x+5=0 \\ x^2-4x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x^2-4x-2x+5+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x^2-6x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x=2 \text{ ή } x=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases}$. Άρα $(x,y)=(2,-1)$ ή $(x,y)=(4,3)$.

Τελικά το σύστημα έχει 4 λύσεις , τις $(2,-1)$, $(4,3)$, $(1,0)$, $(3,0)$.

β) Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x,y)=y^2-2xy+5y$ και $g(x,y)=x^2-4x-y+3$.

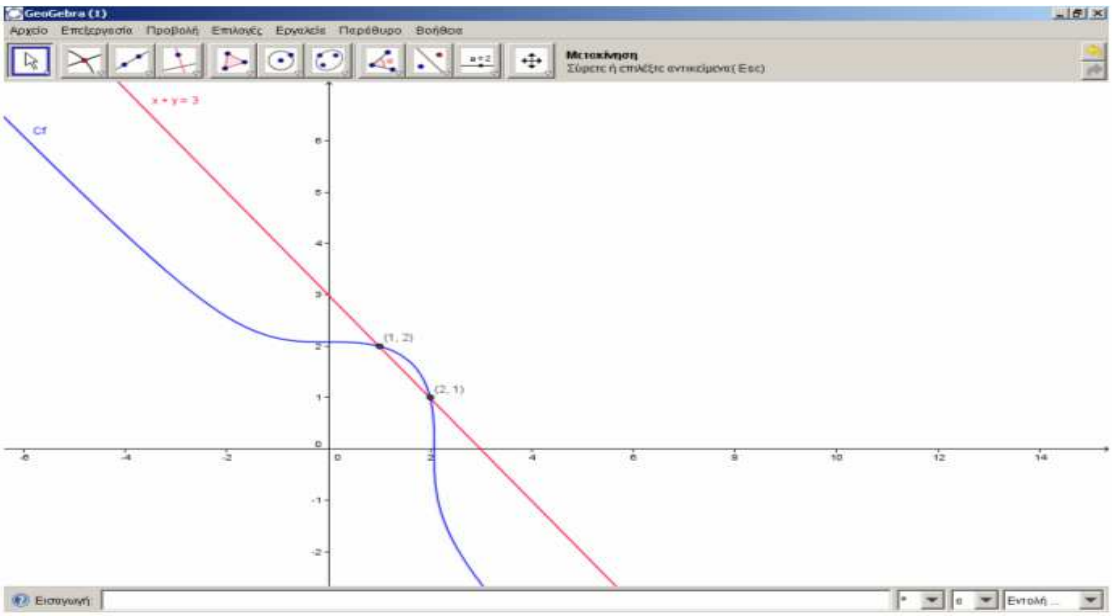


Από τις γραφικές παραστάσεις προκύπτει ότι οι λύσεις του συστήματος είναι οι $(2,-1)$, $(4,3)$, $(1,0)$, $(3,0)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

1ος Τρόπος : Σχεδιάζουμε την καμπύλη $x^3 + y^3 = 9$ και την ευθεία $x + y = 3$ και βρίσκουμε τα σημεία τομής τους.

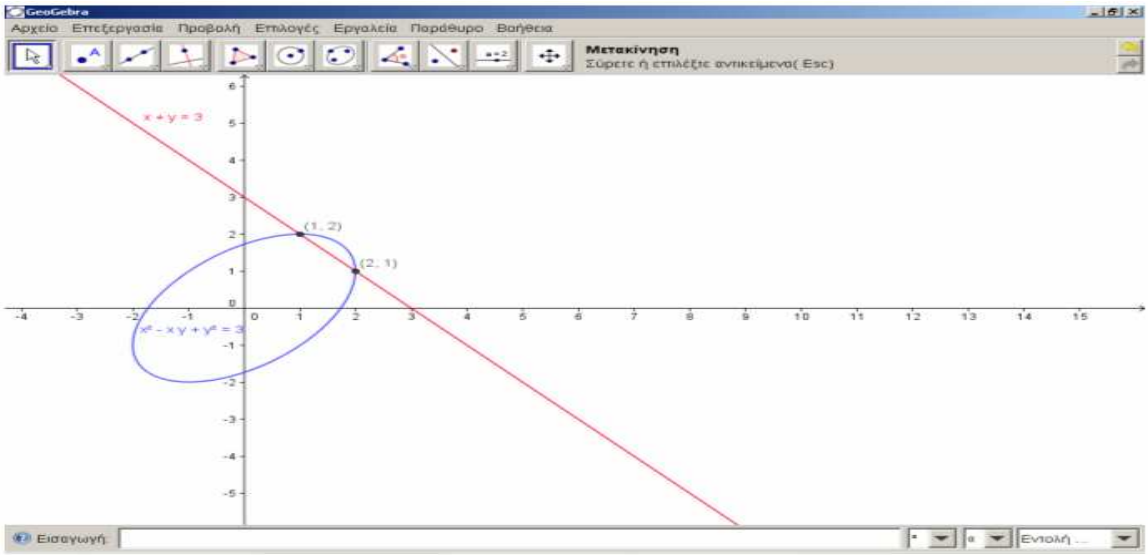


Οι λύσεις του συστήματος είναι οι $(x, y) = (1, 2)$ ή $(x, y) = (2, 1)$

2ος Τρόπος : Το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} (\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)\cdot(x^2 - xy + y^2) = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} (\mathrm{II})$$

Σχεδιάζουμε την έλλειψη $x^2 - xy + y^2 = 3$ και βρίσκουμε τα σημεία τομής της με την ευθεία $x + y = 3$



Οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(x, y) = (1, 2)$ ή $(x, y) = (2, 1)$.

3ος Τρόπος : Αλγεβρικά , ένα τέχνασμα είναι το εξής :

$$\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=9 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases}.$$

Αν S , P το άθροισμα και το γινόμενο δυο αριθμών αντίστοιχα (**τύποι Viete**) τότε οι αριθμοί αυτοί θα είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-S\omega+P=0$.

Έτσι τα x , y που ικανοποιούν τις $xy=2$ και $x+y=3$, είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2-3\omega+2=0$, απ' όπου ω = 1 ή ω = 2.
Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι $(x,y)=(1,2)$ ή $(x,y)=(2,1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ x^2+y^2+xy=12 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

α) Αλγεβρική επίλυση

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ x^2+y^2+xy=12 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-xy=6 \\ x^2+y^2+xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-xy=6 \\ (x+y)^2-xy=12 \end{cases}.$$

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $xy=\beta$, οπότε το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} \alpha-\beta=6 \\ \alpha^2-\beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\alpha-6 \\ \alpha^2-(\alpha-6)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\alpha-6 \\ \alpha^2-\alpha-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\alpha-6 \\ \alpha=3 \text{ ή } \alpha=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-8 \end{cases}.$$

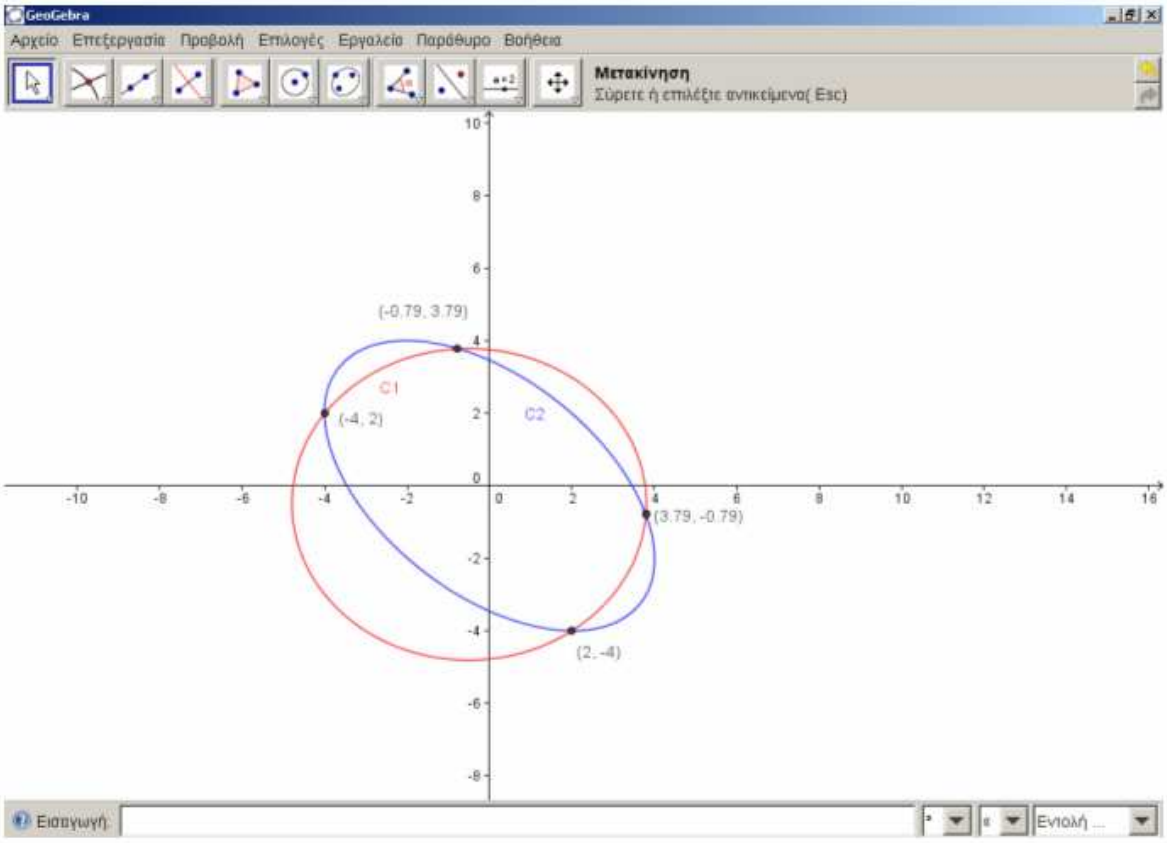
Άρα έχουμε τα συστήματα $(\Sigma_1):\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-3 \end{cases}$ και $(\Sigma_2):\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-8 \end{cases}$.

$(\Sigma_1):\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-3 \end{cases}$. Όπως προηγουμένως , τα x , y είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-3\omega-3=0$, απ' όπου ω = – 0,79 ή ω = 3,79 , οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι $(x,y)=(-0.79,3.79)$ ή $(x,y)=(3.79,-0.79)$.

$(\Sigma_2):\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-8 \end{cases}$. Τα x , y είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2+2\omega-8=0$, απ'όπου ω = 2 ή ω = – 4. Οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι οι $(x,y)=(2,-4)$ ή $(x,y)=(-4,2)$.
Τελικά το σύστημα έχει 4 διακεκριμένες λύσεις.

β) Γραφική επίλυση :

Ο κύκλος C_1 και η έλλειψη C_2 , τέμνονται σε 4 σημεία , τα οποία αποτελούν και τη λύση του συστήματος.



Η λύση του συστήματος , είναι :
$(x,y)=(2,-4)$ ή $(x,y)=(-4,2)$ ή $(x,y)=(-0.79,3.79)$ ή $(x,y)=(3.79,-0.79)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με εξίσωση $x^2+y^2=1$ και της υπερβολής C_2 με εξίσωση $2x^2+xy-4y^2=2$.

<u>Λύση:</u>

α) Αλγεβρική επίλυση :

Εδώ , έχουμε τα ομογενή πολυώνυμα (με βαθμό ομογένειας 2) :
$f(x,y)=2x^2+xy-4y^2-2$ και $g(x,y)=x^2+y^2-1$, που αποτελούν το σύστημα :
$\begin{cases}2x^2+xy-4y^2=2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$. Τότε $2x^2+xy-4y^2=2 \Leftrightarrow 2x^2+xy-4y^2=2\left(x^2+y^2\right)$,

αφού $x^2+y^2=1$. Διαιρούμε με $y^2\neq 0$ και έχουμε : $2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-4=2\left[\left(\frac{x}{y}^2+1\right)\right]$,

στην οποία θέτουμε $\frac{x}{y}=\omega$.

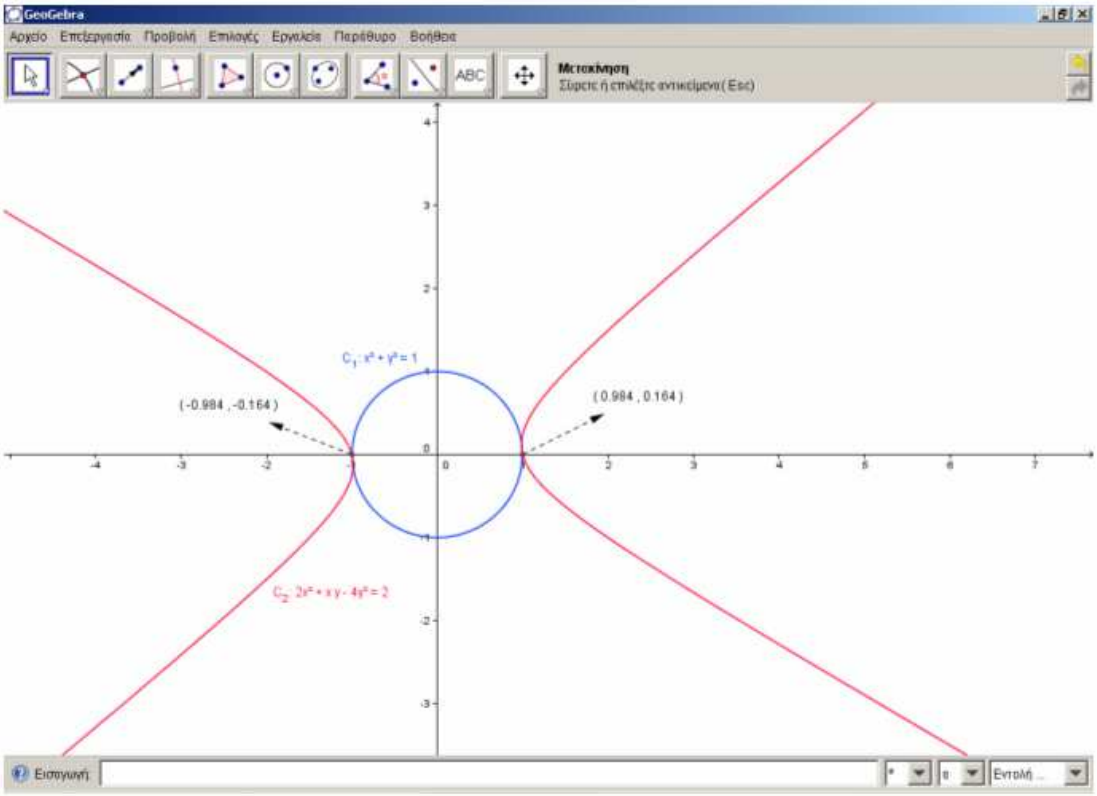
Η νέα εξίσωση που προκύπτει , είναι η $2\omega^2+\omega-4=2\left(\omega^2+1\right)$, απ 'όπου έχουμε $\omega=6$.
Έτσι , έχουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=6 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ 37y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ y=0.164 \text{ ή } y=-0.164 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=0.984 \\ y=0.164 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-0.984 \\ y=-0.164 \end{cases}.$$

Επομένως , οι λύσεις του συστήματος είναι :
$(x,y)=(0.984,0.164)$ ή $(x,y)=(-0.984,-0.164)$.

β) Γραφική Επίλυση



Οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία τομής του μοναδιαίου κύκλου και της υπερβολής , δηλαδή τα : $(x,y)=(0.984,0.164)$ ή $(x,y)=(-0.984,-0.164)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2 \\ x^3+y^3+z^3=\alpha^3 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

Το σύστημα είναι το $\begin{cases} x+y+z=\alpha & (1) \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2 & (2) \\ x^3+y^3+z^3=\alpha^3 & (3) \end{cases}$.

Η εξίσωση (2) γίνεται :

$(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\alpha^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha^2-2(xy+yz+zx)=\alpha^2 \Leftrightarrow xy+yz+zx=0$ (4)

Η (1) , δίνει : $x+y+z=\alpha \Leftrightarrow (x+y+z)^3=\alpha^3 \Leftrightarrow$

$x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz=\alpha^3 \underset{(3)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}$

$\alpha^3+3x^2(\alpha-x)+3y^2(\alpha-y)+3z^2(\alpha-z)+6xyz=\alpha^3 \Leftrightarrow$

$3\alpha(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)+6xyz=0 \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}} 3\alpha^3-3\alpha^3+6xyz=0 \Leftrightarrow xyz=0$ (5)

Οι (1) , (4) , (5) αποτελούν το σύστημα : $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ xy+yz+zx=0 \\ xyz=0 \end{cases}$, δηλαδή τα x , y , z

είναι λύσεις της εξίσωσης : $t^3-\alpha t^2+0t-0=0 \Leftrightarrow$ **(τύποι Viete)**

$t^3-\alpha t^2=0 \Leftrightarrow t^2(t-\alpha)=0 \Leftrightarrow t=0$ (διπλή ρίζα) ή $t=\alpha$.

Έτσι , οι λύσεις του συστήματος είναι : $(0,0,\alpha)$ ή $(0,\alpha,0)$ ή $(\alpha,0,0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} xy+yz=5 \\ yz+zx=9 \\ zx+xy=8 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} xy+yz=5 & (1) \\ yz+zx=9 & (2) \\ zx+xy=8 & (3) \end{cases}$. Προσθέτουμε τις εξισώσεις κατά μέλη και έχουμε :

$2xy+2yz+2zx=22 \Leftrightarrow xy+yz+zx=11$ (4).

$(4)-(1) \Rightarrow zx=6$

$(4)-(2) \Rightarrow xy=2$. Έτσι , έχουμε το σύστημα : $\begin{cases} xy=2 & (5) \\ yz=3 & (6) \\ zx=6 & (7) \end{cases}$.

$(4)-(3) \Rightarrow yz=3$

Πολλαπλασιάζουμε τις (5) , (6) , (7) , οπότε έχουμε : $x^2y^2z^2 = 36 \Leftrightarrow xyz = 6$ ή $xyz = -6$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $xyz = 6$ (8) , τότε : $\begin{array}{l} (8):(5) \Rightarrow z = 3 \\ (8):(6) \Rightarrow x = 2 \\ (8):(7) \Rightarrow y = 1 \end{array}$

  Άρα $(x, y, z) = (2,1,3)$.

- Αν $xyz = -6$ (9) , τότε : $\begin{array}{l} (9):(5) \Rightarrow z = -3 \\ (9):(6) \Rightarrow x = -2 \\ (9):(7) \Rightarrow y = -1 \end{array}$

  Άρα $(x, y, z) = (-2,-1,-3)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 : Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x\omega + x + \omega = 23 \\ xz + x + z = 41 \\ \omega z + \omega + z = 27 \end{cases}$.

<u>Λύση:</u>

$$\begin{cases} x\omega + x + \omega = 23 \\ xz + x + z = 41 \\ \omega z + \omega + z = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\omega + x + \omega + 1 = 24 \\ xz + x + z + 1 = 42 \\ \omega z + \omega + z + 1 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(\omega+1) = 24 = 2^3 \cdot 3 & (1) \\ (x+1)(z+1) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 & (2) \\ (\omega+1)(z+1) = 28 = 2^2 \cdot 7 & (3) \end{cases}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) , (2) , (3) κατά μέλη και έχουμε :
$(x+1)^2(z+1)^2(\omega+1)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \Leftrightarrow (x+1)(z+1)(\omega+1) = \pm 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $(x+1)(z+1)(\omega+1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ (4) , τότε :
  $(4):(1) \Rightarrow z + 1 = 7 \Leftrightarrow z = 6$
  $(4):(2) \Rightarrow \omega + 1 = 4 \Leftrightarrow \omega = 3$.
  $(4):(3) \Rightarrow x + 1 = 6 \Leftrightarrow x = 5$
  Άρα $(x, y, z) = (5,3,6)$.

- Αν $(x+1)(z+1)(\omega+1) = -2^3 \cdot 3 \cdot 7$ (5) , τότε :
  $(5):(1) \Rightarrow z + 1 = -7 \Leftrightarrow z = -8$
  $(5):(2) \Rightarrow \omega + 1 = -4 \Leftrightarrow \omega = -5$.
  $(5):(3) \Rightarrow x + 1 = -6 \Leftrightarrow x = -7$
  Άρα $(x, y, z) = (-7,-5,-8)$.

ΜΕΡΟΣ 5

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ

1ο ΣΕΝΑΡΙΟ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Λογισμικό: «Function Probe»

Χρόνος Υλοποίησης: 2 διδακτικές ώρες

1. Ταυτότητα του Σεναρίου

Συγγραφέας : Αντώνης Τσιγώνιας

Τίτλος : «Γραφική Επίλυση Πολυωνυμικής εξίσωσης».

Λογισμικό : Function Probe

Γνωστική περιοχή : Άλγεβρα Β΄Λυκείου.

Θέμα : Γραφική Επίλυση Πολυωνυμικής εξίσωσης με το εκπαιδευτικό λογισμικό Function Probe.

Το συγκεκριμένο σενάριο σχετίζεται με τη **γραφική επίλυση** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με τη χρήση του βασικού θεωρήματος συνεχών συναρτήσεων (χωρίς να αναφέρεται ο Bolzano και η συνέχεια συνάρτησης) που εμπλέκει τα πρόσημα των τιμών της συνάρτησης σε συγκεκριμένα σημεία της , για την εύρεση ριζών , **διαπραγματεύοντας** με αυτό τον τρόπο την έννοια της πολυωνυμικης συνάρτησης , του πίνακα τιμών της και της γραφικής της παράστασης , δηλαδή της διαφορετικές της **αναπαραστάσεις** (**αλγεβρικής** και **γεωμετρικής**) , με τη βοήθεια ενός κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού.

Οι μαθητές θα βρίσκουν διαδοχικά διάφορες τιμές y της συνάρτησης y = f(x) για τυχαίες τιμές του x και χρησιμοποιώντας το θεώρημα , θα βρίσκουν το διάστημα ή τα διαστήματα στο οποίο ή στα οποία τα πρόσημα των τιμών της f στις τετμημένες των σημείων , είναι αντίθετα. Στα διαστήματα αυτά , σύμφωνα με το θεώρημα αυτό , επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής (δε θα απασχολήσει αυτή τη στιγμή τους μαθητές αυτή η έννοια) , υπάρχει ρίζα της εξίσωσης (**το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx΄**) την οποία σε κάθε βήμα θα υπολογίζουν με **μεγαλύτερη προσέγγιση**.

Τεχνολογικά εργαλεία :

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του λογισμικού Function Probe.
Το λογισμικό αυτό , είναι σε θέση να υλοποιήσει με μοναδικό τρόπο όλους εκείνους τους **σκοπούς** και **στόχους** , **ωθώντας** τους μαθητές στον **πειραματισμό** , στην **ανακάλυψη** και στη **διερεύνηση** ιδιοτήτων και σχέσεων της **γραφικής** και της **αλγεβρικής αναπαράστασης.**

2. Το Σκεπτικό του Σεναρίου

Βασική ιδέα:

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας στηρίζεται στη **σύνδεση** μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με τον πίνακα τιμών της και με τη **γεωμετρική της αναπαράσταση.**
Το λογισμικό παρέχει την δυναμική ευχέρεια των συνδεδεμένων παραστάσεων με τις οποίες προβάλλονται συγχρόνως τόσο η γεωμετρική λύση , όσο και η εφαρμογή του θεωρήματος του Bolzano , με την οποία οι μαθητές θα μπορέσουν να βρούν τη ρίζα με προσέγγιση , οποιασδήποτε πολυωνυμικής εξίσωσης.

Η δραστηριότητα υλοποιείται ως εξής : Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό , θα σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της πολυωνυμικής εξίσωσης που θα τους δοθεί και θα εφαρμόσουν το θεώρημα Bolzano ΄΄ανακαλύπτοντας΄΄ τα σημεία του άξονα xx΄ στα οποία οι τιμές τις συνάρτησης f είναι ετερόσημες.

Με τη βοήθεια της δραστηριότητας , οι μαθητές αναμένεται να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ της αλγεβρικής και τις γεωμετρικής αναπαράστασης μιας συνάρτησης , με τη σύνδεση της συγκεκριμένης **αλγεβρικής μεθόδου** και της **αναπαράστασης των μαθηματικών αντικειμένων – εννοιών στο επίπεδο.**

Προστιθέμενη αξία :

Η διδακτική αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων είναι σίγουρο ότι μπορεί να δώσει νέες ευκαιρίες για δημιουργία μαθησιακού περιβάλλοντος που βελτιώνει τις **παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις** , αλλά κυρίως μπορεί να εισάγει νέες μορφές και ευκαιρίες μάθησης. Το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σενάριο , στόχο έχει να δώσει νέα οπτική στο **παραδοσιακό πλαίσιο** διδασκαλίας των Μαθηματικών και φιλοδοξεί να συμβάλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους , καθώς στις **παραδοσιακές διδασκαλίες** , τα μαθηματικά αντικείμενα , αναπαρίστανται με στατικό τρόπο σε χαρτί , στον πίνακα ή σε διαφάνειες.

Ο μαθητής με τη χρήση του κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού , αναμένεται να συνειδητοποιήσει ότι τα Μαθηματικά αποτελούν **αντικείμενο διερεύνησης** και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν **κοινωνική αποδοχή** (στο πλαίσιο της τάξης) και επιστημονική τεκμηρίωση. Επίσης ο διδάσκοντας , θα πρέπει να ωθήσει τους μαθητές να διατυπώσουν , να αναπτύξουν διάφορες εικασίες και να τις ελέγξουν.

Η **ομαδοσυνεργατική διδασκαλία** που θα επιχειρηθεί εδώ , αναμένεται να συμβάλει στην αλλαγή της στάσης των μαθητών απέναντι στη μάθηση. Ο εκπαιδευτικός που θα επιλέξει να διδάξει βασικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο αυτού του σεναρίου , απαιτείται , από **παραδοσιακός καθηγητής** μετωπικών διδασκαλιών , να γίνει **συνεργάτης των μαθητών του καθοδηγητής της έρευνας και της επιστημονικής εγκυρότητας των συμπερασμάτων τους αλλά και ερευνητής ο ίδιος.**

Για την εφαρμογή μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα , μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών , ώστε οι μαθητές να ενθαρρύνονται σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων στη μάθηση και στη διδασκαλία.

3. Πλαίσιο Εφαρμογής του Σεναρίου

Σε ποιους απευθύνεται :

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Β΄Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης :

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης :

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί στο εργαστήριο υπολογιστών. Η εφαρμογή – διερεύνηση σύμφωνα με το φύλλο εργασίας και με τη βοήθεια του λογισμικού Function Probe , απαιτεί εργαστήριο με 12 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν οι μαθητές να εργαστούν σε ομάδες 2 ή 3 ατόμων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις :

- ✓ Βασικές έννοιες για το καρτεσιανό επίπεδο.
  (συντεταγμένες , σημεία τομής με τους άξονες κ.α)
- ✓ Βασικές έννοιες πολυωνύμων και πολυωνυμικών εξισώσεων , πολυωνυμικών συναρτήσεων.
  (πίνακες τιμών , γραφικές αναπαραστάσεις κ.α)
- ✓ Η γνώση του θεωρήματος του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 77 και η γεωμετρική του ερμηνεία.
- ✓ Βασικές γνώσεις του λογισμικού Function Probe.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

- ✓ Τετράδιο για να καταγράφουν οι μαθητές τα συμπεράσματά τους.
- ✓ Το σχολικό βιβλίο για να παρακολουθούν και παράλληλα να ανατρέχουν σε αυτό για τις ήδη διδαγμένες έννοιες.
- ✓ Φύλλα εργασίας τα οποία θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό για όλες τις δραστηριότητες με στόχο την καθοδήγηση των μαθητών στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία : Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες ανά δύο (κατά προτίμηση όχι του ιδίου γνωστικού επιπέδου) και καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας , θα κατασκευάσουν και θα διερευνήσουν συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα , απαντώντας σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επιπλέον , θα είναι σε θέση να θέτουν ελεύθερα τα δικά τους ερωτήματα σχετικά με το θέμα και να απαντούν σε αυτά , υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού , ο οποίος θα ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών του , θα συνεργάζεται μαζί τους , θα τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και θα τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

4. Στόχοι:

Με βάση το Γνωστικό αντικείμενο :

1. Να επανεξετάσουν τα βασικά σχετικά με την έννοια της γραφικής αναπαράστασης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης , εφόσον διαθέτουν όλες τις κατάλληλες γνώσεις των εννοιών που υπάρχουν εδώ. (όπως σημεία τομής με τους άξονες , κ.α)

2. Να διαπιστώσουν ότι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, δεν είναι τίποτε άλλο , παρά τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx΄.

2. Να διερευνήσουν , πότε μια πολυωνυμική εξίσωση (σύμφωνα με τη γραφική της αναπαράσταση) έχει λύση , πόσες λύσεις έχει και πότε είναι αδύνατη.

3. Να διαπιστώσουν ότι ο πίνακας τιμών , είναι μια διαφορετική αναπαράσταση συνάρτησης.

4. Να έχουν την ευχέρεια να εφαρμόσουν το θεώρημα και να βρίσκουν με προσέγγιση τη ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης σε κάποιο διάστημα.

Με βάση την Παιδαγωγική πλευρά :

1. Να επιτευχθεί η προσωπική εμπλοκή του μαθητή σε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση της τεχνολογίας.

2. Να προσδιοριστούν οι ρόλοι για τους συμμετέχοντες και τα διαθέσιμα εργαλεία.

3. Να μάθουν να πειραματίζονται με τις μαθηματικές έννοιες διατυπώνοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες.

4. Να εξασκηθούν στην οργάνωση των δεδομένων τους από τη διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

5. Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας , να συζητούν τις παρατηρήσεις τους , να οργανώνουν τα συμπεράσματά τους , να διατυπώνουν κανόνες , να καταχωρούν τα δεδομένα τους , να κατασκευάζουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη και να παρουσιάζουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.

6. Να μάθουν να επικοινωνούν εποικοδομητικά με τα άλλα μέλη της ομάδας , με όλους τους συμμαθητές τους και με τον εκπαιδευτικό.

Από την πλευρά της τεχνολογίας :

Να μάθουν να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και σχήματα σε δυναμικά λογισμικά ώστε να μπορούν να πειραματιστούν πάνω σε αυτά.

5. Ανάλυση του Σεναρίου

Ροή εφαρμογής δραστηριοτήτων :

Στους μαθητές θα δοθεί προς επίλυση μια πολυωνυμική εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού. Οι μαθητές , αρχικά θα σχεδιάσουν τη γραφική της παράσταση και διαπιστώσουν το πλήθος των ριζών της. Έπειτα , θα εκτιμήσουν μέσω της οπτικοποίησης , τα διαστήματα στα οποία βρίσκονται οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης. Θα κατασκευάσουν τον πίνακα τιμών της συνάρτησης και θα εφαρμόσουν σταδιακά το θεώρημα για την εύρεση των ριζών με προσέγγιση , επιμερίζοντας τα διαστήματα αυτά σε επιμέρους υποδιαστήματα , εισάγωντας ενδιάμεσα κατάλληλα άκρα.
Όλα τα παραπάνω θα υλοποιηθούν με τη βοήθεια των οδηγιών φύλλου εργασίας και θα διερευνώνται τα αποτελέσματα. Ο διδάσκοντας , θα αναμείνει , η μαθητική κοινότητα που λειτουργεί σε **ομαδοσυνεργατικό** περιβάλλον , να σχηματίσει άποψη σχετικά με την αντιστοιχία των δυο αναπαραστάσεων.
Συγκεκριμένα οι μαθητές προβλέπεται να προβούν στις εξής ενέργειες :

1. Να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση τεταρτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης f.

2. Να διαπιστώσουν οπτικά το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

3. Να κατασκευάσουν τον πίνακα τιμών της συνάρτησης και να τον χρησιμοποιήσουν για την εύρεση κατάλληλων διαστημάτων , μέσα στα οποία βρίσκονται οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης.

4. Να ΄΄γεμίσουν΄΄ σταδιακά τα διαστήματα στα οποία διαπίστωσαν την ύπαρξη ρίζας με κατάλληλους αριθμούς , για να κατασκευαστούν έτσι νέα διαστήματα και άρα τη ρίζα με την επιθυμητή προσέγγιση.

5. Να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους ως προς την ακρίβεια των υπολογισμών , την εφαρμογή του θεωρήματος καθώς και την πρακτική διαφορά των δυο αναπαραστάσεων.

6. Επέκταση Σεναρίου

Άλγεβρα : Επίλυση όλων των πολυωνυμικών εξισώσεων ή εξισώσεων που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

Γεωμετρία : Σχετικές θέσεις ευθείας και κωνικής τομής ή δυο κωνικών.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

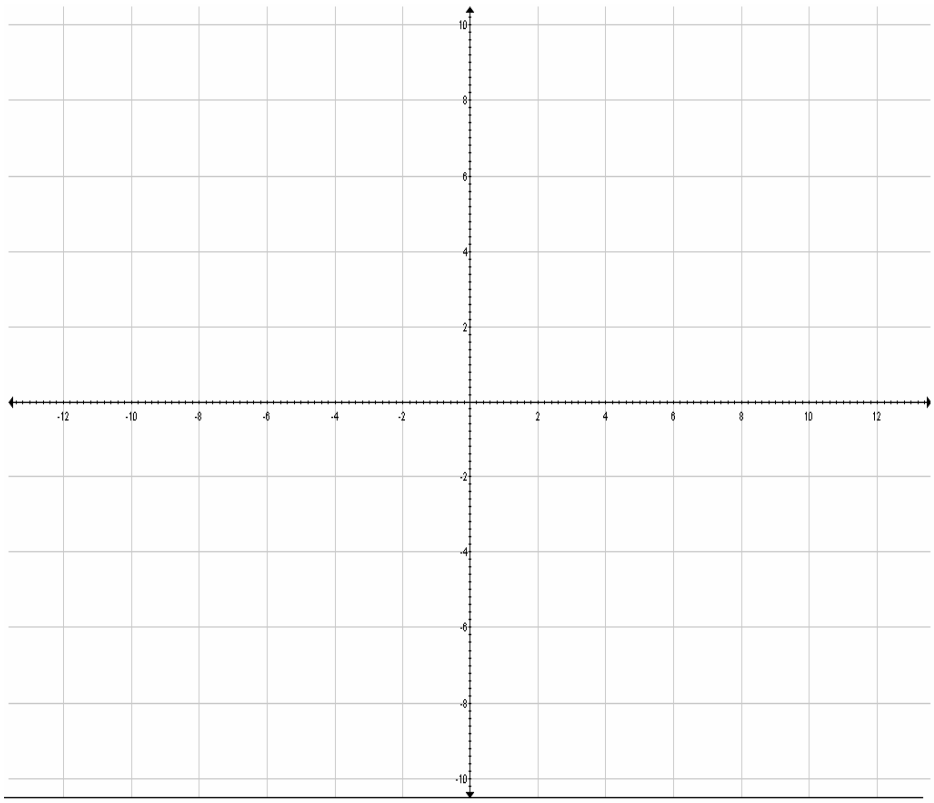
ΓΡΑΦΙΚΉ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $4^{ΟΥ}$ ΒΑΘΜΟΥ

(Περιβάλλον FUNCTION PROBE)

Διάρκεια : 2 Διδακτικές ώρες

Α. Δίνεται η εξίσωση $3x^4 - 20x^2 + 20x - 10 = 0$.
Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Function Probe , να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^4 - 20x^2 + 20x - 10$.

Κατασκευή:



Β. Να καταγράψετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = 0 και να εκτιμήσετε τα διαστήματα στα οποία βρίσκονται οι ρίζες αυτές.

Απάντηση:

……..

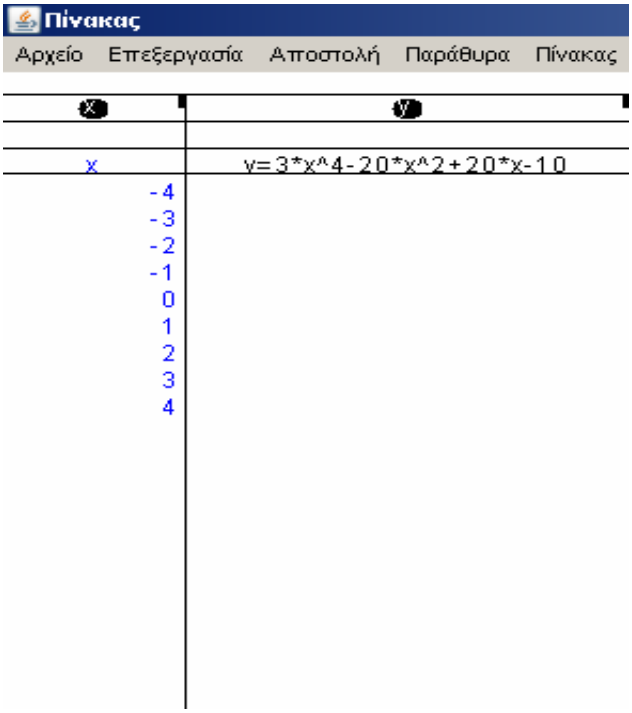
……..

……..

……..……

Γ. Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = 0. Προτιμήστε τις τιμές $-4 \le x \le 4$.

Απάντηση:



Δ. Με βάση τον παραπάνω πίνακα , τη στήλη των y και το θεώρημα του σχολικού σας βιβλίου στη σελίδα 77 , να ΄΄γεμίσετε΄΄ τα διαστήματα με κατάλληλες τιμές , χρησιμοποιώντας την εντολή ΄΄γέμισμα΄΄ , προσθέτοντας κάθε φορά 1 δεκαδικό ψηφίο , ώστε να προσδιορίσετε τις ρίζες με προσέγγιση 3 δεκαδικών ψηφίων. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

Απάντηση:

……

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Ε.

i) Ποια κατά τη γνώμη σας από τις δυο παραπάνω αναπαραστάσεις βοηθάει στο να βρεθεί η ρίζα μιας οποιασδήποτε πολυωνυμικής εξίσωσης με μεγαλύτερη ακρίβεια ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Οι αναπαραστάσεις αυτές , μπορούν να δράσουν από μόνες τους στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ; Αν είναι αλληλένδετες , θεωρείτε ότι μπορούν να φέρουν καλύτερα αποτελέσματα και με ποιο τρόπο ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

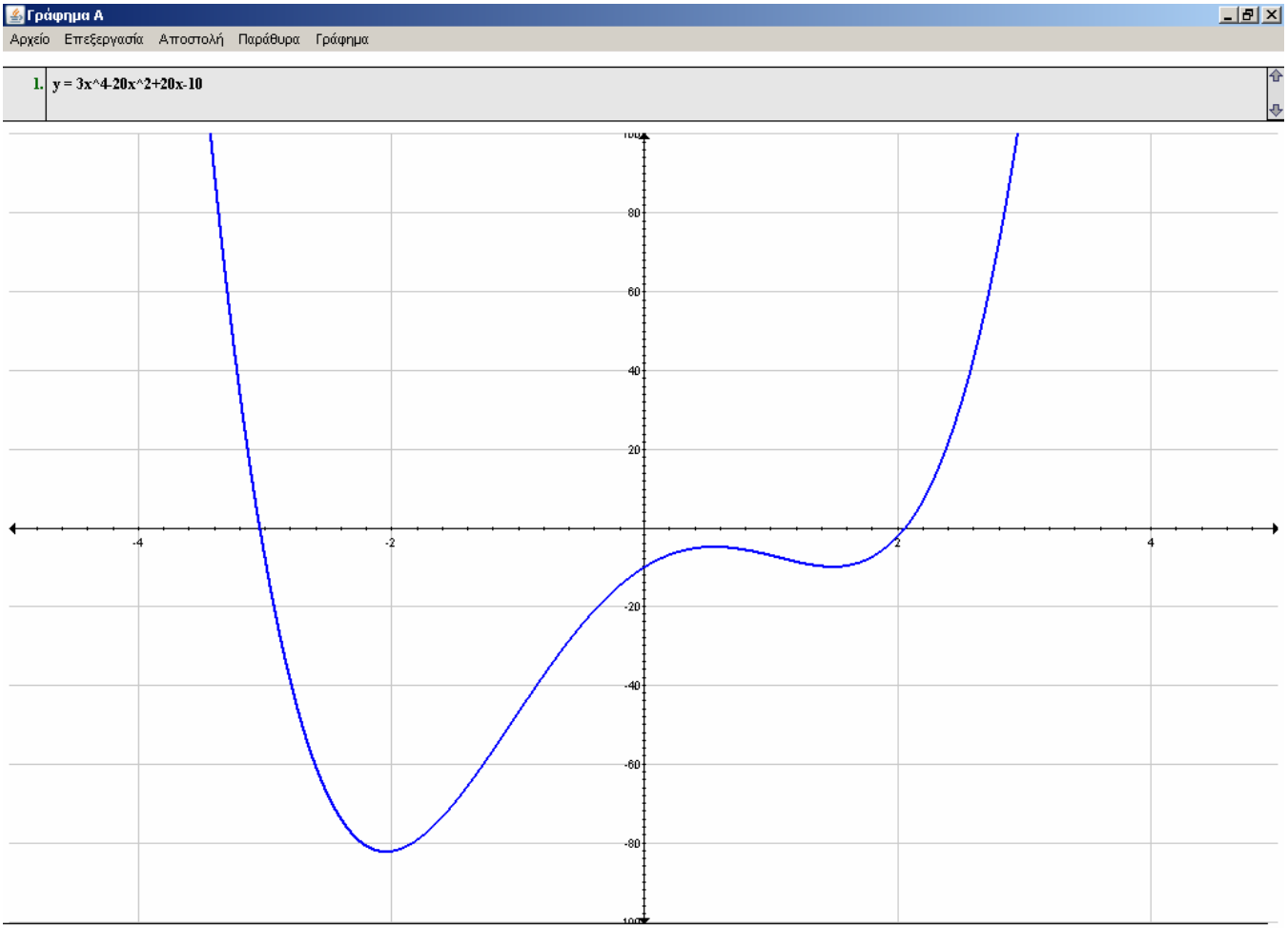
……

……

……

Ενέργειες που αναμένεται να κάνουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης με το λογισμικό.

΄΄Γραφική παράσταση της συνάρτησης και εύρεση του πλήθους των ριζών΄΄



΄΄Κατασκευή των διαστημάτων και εύρεση των ριζών με προσέγγιση 3 δ.ψ΄΄

1

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
-4	358
-3	-7
-2	-82
-1	-47
0	-10
1	-7
2	-2
3	113
4	518

2

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
-4	358
-3.9	301.83
-3.8	250.74
-3.7	204.45
-3.6	162.68
-3.5	125.19
-3.4	91.7
-3.3	61.98
-3.2	35.77
-3.1	12.86
-3	-7
-2	-82
-1	-47
0	-10
1	-7
2	-2
3	113
4	518

3

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
-4	358
-3.9	301.8323
-3.8	250.7408
-3.7	204.4483
-3.6	162.6848
-3.5	125.1875
-3.4	91.7008
-3.3	61.9763
-3.2	35.7728
-3.1	12.8563
-3.09	10.73664
-3.08	8.64735
-3.07	6.58822
-3.06	4.55901
-3.05	2.55952
-3.04	0.58951
-3.03	-1.35123
-3.02	-3.26291
-3.01	-5.14576
-3	-7

4

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
-4	358
-3.9	301.8323
-3.8	250.7408
-3.7	204.4483
-3.6	162.6848
-3.5	125.1875
-3.4	91.7008
-3.3	61.9763
-3.2	35.7728
-3.1	12.8563
-3.09	10.73664
-3.08	8.64735
-3.07	6.58822
-3.06	4.55901
-3.05	2.55952
-3.04	0.58951
-3.039	0.39412
-3.038	0.19903
-3.037	0.00423
-3.0369	-0.01524
-3.0368	-0.0347
-3.0367	-0.05416
-3.0366	-0.07361
-3.0365	-0.09306
-3.0364	-0.11251
-3.0363	-0.13196
-3.0362	-0.1514
-3.0361	-0.17085
-3.036	-0.19028
-3.035	-0.3845
-3.034	-0.57843
-3.033	-0.77206
-3.032	-0.96541
-3.031	-1.15846
-3.03	-1.35123
-3.02	-3.26291
-3.01	-5.14576
-3	-7

1

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
2	-2
2.1	2.1443
2.2	7.4768
2.3	14.1523
2.4	22.3328
2.5	32.1875
2.6	43.8928
2.7	57.6323
2.8	73.5968
2.9	91.9843
3	113

2

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
2	-2
2.01	-1.63478
2.02	-1.25901
2.03	-0.87255
2.04	-0.47526
2.05	-0.06698
2.06	0.35242
2.07	0.7831
2.08	1.22521
2.09	1.67889
2.1	2.1443
2.2	7.4768
2.3	14.1523
2.4	22.3328
2.5	32.1875
2.6	43.8928
2.7	57.6323
2.8	73.5968
2.9	91.9843
3	113

3

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
2	-2
2.01	-1.63478
2.02	-1.25901
2.03	-0.87255
2.04	-0.47526
2.05	-0.06698
2.051	-0.02554
2.052	0.016
2.053	0.05766
2.054	0.09944
2.055	0.14132
2.056	0.18332
2.057	0.22542
2.058	0.26764
2.059	0.30998
2.06	0.35242
2.07	0.7831
2.08	1.22521
2.09	1.67889
2.1	2.1443
2.2	7.4768
2.3	14.1523
2.4	22.3328
2.5	32.1875
2.6	43.8928
2.7	57.6323
2.8	73.5968
2.9	91.9843
3	113

4

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3x^4-20x^2+20x-10
2	-2
2.01	-1.63478
2.02	-1.25901
2.03	-0.87255
2.04	-0.47526
2.05	-0.06698
2.051	-0.02554
2.0511	-0.02139
2.0512	-0.01724
2.0513	-0.01309
2.0514	-0.00894
2.0515	-0.00478
2.0516	-6.3E-4
2.0517	0.00353
2.0518	0.00769
2.0519	0.01184
2.052	0.016
2.053	0.05766
2.054	0.09944
2.055	0.14132
2.056	0.18332
2.057	0.22542
2.058	0.26764
2.059	0.30998
2.06	0.35242
2.07	0.7831
2.08	1.22521
2.09	1.67889
2.1	2.1443
2.2	7.4768
2.3	14.1523
2.4	22.3328
2.5	32.1875
2.6	43.8928
2.7	57.6323
2.8	73.5968
2.9	91.9843
3	113

7. Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Η δραστηριότητα εκπονήθηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας , σε τμήμα της Β΄ Λυκείου του ΓΕΛ Λαυρίου. Αρχικά οι 22 μαθητές που συμμετείχαν , (11 ομάδες των 2 ατόμων) έμαθαν να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και πειραματίστηκαν με δυναμικό τρόπο πάνω σε αυτές. Επανεξέτασαν τα βασικά σχετικά με την έννοια της γραφικής αναπαράστασης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης και διαπίστωσαν ότι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx΄. Μετά το τέλος και της $2^{ης}$ ώρας , διαπίστωσαν αν και πότε μια πολυωνυμική εξίσωση έχει λύσεις (και πόσες) , σύμφωνα με τη γραφική της παράσταση , βρίσκοντάς την με προσέγγιση σε ένα διάστημα. Οι μαθητές , αφού διαπραγματεύτηκαν τις μαθηματικές έννοιες διατυπώνοντας ερωτήματα , έκαναν διάφορες εικασίες , συνεργάστηκαν με επιτυχία με τα άλλα μέλη της ομάδας , συζήτησαν τις παρατηρήσεις τους , κατέγραψαν τα δεδομένα τους και παρουσίασαν τα εξαγόμενα και στις υπόλοιπες ομάδες.

2^{ο} ΣΕΝΑΡΙΟ

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Λογισμικό: «Geogebra»

Χρόνος Υλοποίησης: 2 διδακτικές ώρες

1. Ταυτότητα του Σεναρίου

Συγγραφέας : Αντώνης Τσιγώνιας

Τίτλος : «Σχετική Θέση κύκλου και ευθείας – Γραφική επίλυση μη γραμμικού συστήματος».

Λογισμικό : Geogebra

Γνωστική περιοχή : Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄Λυκείου.

Θέμα : Σχετική Θέση κύκλου και ευθείας – Γραφική επίλυση μη γραμμικού συστήματος

Το θέμα περιλαμβάνει την **γραφική επίλυση** ενός μη γραμμικού συστήματος με ταυτόχρονη **διαπραγμάτευση** της έννοιας της σχετικής θέσης κύκλου και ευθείας , της γραφικής της **αναπαράστασης** και των σχετικών με αυτή εννοιών σε ένα καινούργιο περιβάλλον **δυναμικής μεταβολής**. Οι μαθητές θα **διερευνήσουν** τις σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν ένας κύκλος και μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο και αναμένεται η δραστηριότητα αυτή , να γίνει η αφετηρία μιας διερεύνησης που θα οδηγήσει στη γραφική επίλυση του συστήματος.
Οι μαθητές θα διερευνήσουν τις αριθμητικές τιμές που παίρνουν διάφορα μεγέθη που προσδιορίζουν τον κύκλο , την ευθεία και τη μεταξύ τους γραφική και αλγεβρική σχέση , το συσχετισμό τους με τις συντεταγμένες του σημείου τομής καθώς και την περιγραφή των περιπτώσεων περί της ύπαρξης ή όχι λύσεων. Επιπλέον οι μαθητές θα προχωρήσουν στην **αλγεβρική επίλυση** του συστήματος , πραγματοποιώντας την ισχυρή διασύνδεση των σχετικών **αναπαραστάσεων**.

Τεχνολογικά εργαλεία :

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra. Το προτεινόμενο λογισμικό μπορεί **να υλοποιήσει με δυναμικό τρόπο μαθηματικά αντικείμενα και να ωθήσει τους μαθητές στον πειραματισμό, στην ανακάλυψη και στη διερεύνηση ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων.**

2. Το Σκεπτικό του Σεναρίου

Βασική ιδέα:

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας στηρίζεται στη **σύνδεση** ενός μη γραμμικού συστήματος με τη **γεωμετρική του αναπαράσταση**. Το λογισμικό παρέχει την ευχέρεια των πολλαπλών δυναμικά συνδεδεμένων παραστάσεων με τις οποίες προβάλλονται συγχρόνως τόσο η γεωμετρική λύση , όσο και η αλγεβρική με τη μέθοδο της αντικατάστασης , που είναι και η ενδεδειγμένη μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων.

Η δραστηριότητα αποτελεί έναν πυρήνα πάνω στον οποίο ο διδάσκων μπορεί να αναπτύξει τη διδασκαλία των μη γραμμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα μπορεί να χρησιμοποιήσει ως εφαρμογή την δραστηριότητα μετά το τέλος της διδασκαλίας , μπορεί όμως να τη χρησιμοποιήσει και ως εισαγωγική δραστηριότητα. Στη συνέχεια , οι μαθητές θα διερευνήσουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις , προκειμένου να επιλύσουν ένα μη γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Οι μαθητές θα διερευνήσουν τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της εξίσωσης του κύκλου $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και της γραμμικής εξίσωσης ε: $\alpha x + \beta x = \gamma$ και θα ασχοληθούν με τη γραφική λύση ενός συστήματος που αποτελείται από δυο εξισώσεις : μια μη γραμμική και μια γραμμική , όταν οι συντελεστές τους μεταβάλλονται δυναμικά. Εδώ γίνεται η σύνδεση της συγκεκριμένης **αλγεβρικής μεθόδου** με την **αναπαράσταση των μαθηματικών αντικειμένων – εννοιών στο επίπεδο.**

Προστιθέμενη αξία :

Η διδακτική αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων δίνει νέες ευκαιρίες για δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία βελτιώνουν τις **παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις** , αλλά κυρίως εισάγουν νέες μορφές και ευκαιρίες μάθησης.
Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο αποτελεί καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών και φιλοδοξεί να συμβάλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους. Η εισαγωγή της τεχνολογίας στην μαθησιακή διαδικασία μετασχηματίζει τις διδακτικές πρακτικές και τα ίδια τα μαθηματικά ως αντικείμενο διερεύνησης (όπως δηλαδή πρέπει να είναι) και όχι ως στείρα γνώση , αφού στις παραδοσιακές διδασκαλίες , τα μαθηματικά αντικείμενα αναπαρίστανται με στατικό τρόπο σε χαρτί, στον πίνακα , ή σε διαφάνειες. Αντίθετα , κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό αντικείμενο στην οθόνη του υπολογιστή , το σύρσιμο του αντικειμένου , είτε απευθείας , είτε μέσω ενός μεταβολέα , δημιουργεί ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται δυναμικά , με βάση την κίνηση του αντικειμένου. Έτσι , ο μαθητής αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά αντικείμενα με δυναμικό τρόπο δηλαδή ως γεννήτορες μαθηματικών φαινόμενων , μέσα στα οποία μπορεί να αναζητήσει σχέσεις μεγεθών. Με τη χρήση του δυναμικού λογισμικού γίνεται πολύ γρήγορα η διερεύνηση για την ύπαρξη ή όχι λύσης αλλά και ο προσδιορισμός των λύσεων.

Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά όντως αποτελούν **αντικείμενο διερεύνησης** και να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και επιστημονική τεκμηρίωση. Επιπλέον , η δυνατότητα κίνησης των αντικειμένων θα δώσει την ευκαιρία στον διδάσκοντα να σχεδιάσει ανοικτές καταστάσεις προβλήματος οι οποίες επιτρέπουν την διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους. Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας αναμένεται να συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός που θα επιλέξει να διδάξει βασικές έννοιες των Μαθηματικών στο πλαίσιο αυτού του σεναρίου , απαιτείται από **παραδοσιακός καθηγητής** μετωπικών διδασκαλιών να γίνει **συνεργάτης των μαθητών του, καθοδηγητής της έρευνας και της επιστημονικής εγκυρότητας των συμπερασμάτων τους αλλά και ερευνητής ο ίδιος.**

Για την εφαρμογή μεθόδων διδασκαλίας με την βοήθεια της Ψηφιακής Τεχνολογίας απαιτείται απ' όλη τη σχολική κοινότητα μια ευρύτερη αποδοχή της αλλαγής των ρόλων των μαθητών και των εκπαιδευτικών , ώστε οι μαθητές να ενθαρρύνονται σε κάθε προσπάθεια χρήσης των τεχνολογικών μέσων στη μάθηση και στη διδασκαλία.

3. Πλαίσιο Εφαρμογής του Σεναρίου

Σε ποιους απευθύνεται :

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Β΄Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης :

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης :

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί στο εργαστήριο υπολογιστών. Η παρέμβαση αυτή και η διερεύνηση των μαθητών με τα φύλλα εργασίας και με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra , απαιτεί **εργαστήριο με 12 τουλάχιστον θέσεις , ώστε να μπορούν οι μαθητές να εργαστούν σε ομάδες 2 ή 3 ατόμων.**

(Η επιλογή του προτζέκτορα από τον διδάσκοντα μπορεί στην αρχή να είναι ενθαρρυντική αλλά μάλλον μακροπρόθεσμα , θα ακύρωνε μεγάλο μέρος της προστιθέμενης αξίας)

Προαπαιτούμενες γνώσεις :

- ✓ Βασικές έννοιες για το καρτεσιανό επίπεδο.
- ✓ Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, παριστάνει (υπό προϋποθέσεις) κύκλο.
- ✓ Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, παριστάνει (υπό προϋποθέσεις) ευθεία.
- ✓ Η μέθοδος της αντικατάστασης.
- ✓ Οι απαιτούμενες λειτουργίες και οι βασικές εντολές του λογισμικού Geogebra.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

- ✓ Οι μαθητές έχουν τετράδιο για να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους.
- ✓ Το σχολικό βιβλίο για να παρακολουθούν και παράλληλα να ανατρέχουν σε αυτό για τις ήδη διδαγμένες έννοιες.
- ✓ Φύλλα εργασίας τα οποία θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό για όλες τις δραστηριότητες με στόχο την καθοδήγηση των μαθητών στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία : Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες ανά δύο (κατά προτίμηση όχι του ιδίου γνωστικού επιπέδου) και καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας , θα κατασκευάσουν και διερευνήσουν συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα , απαντώντας σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επιπλέον , θα μπορούν να θέτουν ελεύθερα τα δικά τους ερωτήματα σχετικά με το θέμα και να απαντούν σε αυτά , υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού ο οποίος θα ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών του , θα συνεργάζεται μαζί τους , θα τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και θα τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

4. Στόχοι:

Με βάση το Γνωστικό αντικείμενο :

1. Να επανεξετάσουν τα βασικά σχετικά με την έννοια του κύκλου και της ευθείας , καθώς και την αναπαράστασή τους στο καρτεσιανό επίπεδο , εφόσον διαθέτουν όλες τις κατάλληλες αναπαραστάσεις των μεγεθών που σχετίζονται με αυτά. (σημεία τομής με τους άξονες , ειδικές περιπτώσεις κλπ)

2. Να πειραματιστούν με όλους τους μεταβολείς (δρομείς). Είναι σημαντικό να καταγράψουν την συμπεριφορά του κύκλου και της ευθείας όταν αλλάζουν οι συντελεστές των αγνώστων.

3. Να πειραματιστούν με τους μεταβολείς (δρομείς) του κύκλου και της ευθείας και να διατυπώσουν εικασίες για τη μεταξύ τους θέση στο καρτεσιανό επίπεδο.

4. Να διαπιστώσουν ότι μια συγκεκριμένη εξίσωση είναι ένα **«στιγμιότυπο»** της αντίστοιχης σχέσης (για τον κύκλο) ή συνάρτησης (για την ευθεία) και να εμπεδώσουν ότι οι εξισώσεις προκύπτουν από σχέσεις μεταξύ μεταβλητών (ή συναρτήσεις).

5. Να διερευνήσουν με την ήδη αποκτηθείσα εμπειρία , πότε έχει νόημα το σύστημα , πότε έχει λύση ή πότε είναι αδύνατο.

6. Να συνδέσουν τα διάφορα μεγέθη που προκύπτουν από την αλγεβρική επίλυση με τα συμπεράσματα του **5.** και να διερευνήσουν το ρόλο τους , σε σχέση με την ύπαρξη και το είδος των λύσεων ενός μη γραμμικού παραμετρικού συστήματος.

Με βάση την Παιδαγωγική πλευρά :

1. Να επιτευχθεί η προσωπική εμπλοκή του μαθητή σε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν τη χρήση της τεχνολογίας.

2. Να προσδιοριστούν οι ρόλοι για τους συμμετέχοντες και τα διαθέσιμα εργαλεία.

3. Να μάθουν να πειραματίζονται με τις μαθηματικές έννοιες διατυπώνοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες.

4. Να εξασκηθούν στην οργάνωση των δεδομένων τους από τη διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

5. Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας , να συζητούν τις παρατηρήσεις τους , να οργανώνουν τα συμπεράσματά τους , να διατυπώνουν κανόνες , να καταχωρούν τα δεδομένα τους , να κατασκευάζουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη και να παρουσιάζουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.

6. Να μάθουν να επικοινωνούν εποικοδομητικά με τα άλλα μέλη της ομάδας , με όλους τους συμμαθητές τους και με τον εκπαιδευτικό.

Από την πλευρά της τεχνολογίας :

Να μάθουν να κατασκευάζουν δυναμικά λογισμικά ώστε να μπορούν να πειραματιστούν πάνω σε αυτά.

5. Ανάλυση του Σεναρίου

Ροή εφαρμογής δραστηριοτήτων :

Η δραστηριότητα υλοποιείται ως εξής : Οι μαθητές θα διερευνήσουν τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης της εξίσωσης του κύκλου $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και της γραμμικής εξίσωσης ε : αx + βx = γ και θα ασχοληθούν με τη γραφική λύση ενός συστήματος που αποτελείται από δυο εξισώσεις : μια μη γραμμική και μια γραμμική , όταν οι συντελεστές τους μεταβάλλονται δυναμικά. Εδώ γίνεται η σύνδεση της συγκεκριμένης **αλγεβρικής μεθόδου** με την **αναπαράσταση των μαθηματικών αντικειμένων – εννοιών στο επίπεδο.**
Με τη βοήθεια των οδηγιών του φύλλου εργασίας οι μαθητές θα εισάγουν τα ελεύθερα αντικείμενα , τον κύκλο C και την ευθεία ε και θα διερευνήσουν τα αποτελέσματα .
Ο διδάσκων αναμένει τη μαθητική κοινότητα που λειτουργεί σε **ομαδοσυνεργατικό** περιβάλλον να σχηματίσει άποψη σχετικά με την αντιστοιχία των δυο αναπαραστάσεων.

Συγκεκριμένα οι μαθητές προβλέπεται να προβούν στις εξής ενέργειες :

1. Να κατασκευάσουν ένα κύκλο και μια ευθεία που περνά από δύο σημεία.

2. Να εισάγουν τα ελεύθερα αντικείμενα Α , Β , Γ , α , β , γ (δρομείς – μεταβολείς).

3. Να εισάγουν την εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και της ευθείας αx + βy = γ.

4. Να διερευνήσουν τί ιδιότητες έχουν ο κύκλος και η ευθεία και τις σχετικές θέσεις που μπορούν να πάρουν μεταξύ τους στο επίπεδο όταν μεταβάλλονται τα ελεύθερα αντικείμενα.

5. Να επιλύσουν αλγεβρικά ένα σύστημα και να αντιληφθούν με τι αντιστοιχεί στο επίπεδο.

6. Να επιλύσουν αλγεβρικά με τη βοήθεια της μεθόδου της αντικατάστασης το παραπάνω σύστημα .

7. Να εισάγουν διάφορα βοηθητικά αντικείμενα , όπως τη διακρίνουσα $\Delta = \left(A\beta^2 - B\alpha\beta - 2\alpha\gamma\right)^2 - 4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(\Gamma\beta^2 + B\beta\gamma + \gamma^2\right)$ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\left(\alpha^2 + \beta^2\right)x^2 + \left(A\beta^2 - B\alpha\beta - 2\alpha\gamma\right)x + \left(\Gamma\beta^2 + B\beta\gamma + \gamma^2\right) = 0$.

8. Να υπολογίσουν τις ρίζες της εξίσωσης (στην περίπτωση που ορίζεται σύστημα και με Δ>0).

9. Να εξετάσουν όλες τις ειδικές περιπτώσεις.

10. Να πειραματιστούν με τα αντίστοιχα εργαλεία , παρατηρώντας ταυτόχρονα και το παράθυρο της Άλγεβρας και το παράθυρο της Γεωμετρίας , να διαπιστώσουν ποια αντικείμενα που σχεδίασαν είναι εξαρτημένα και ποια ανεξάρτητα και να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους.

11. Τέλος , οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν τα συμπεράσματά τους για τις σχέσεις μεταξύ των λύσεων του συστήματος και των συντεταγμένων του σημείου τομής του κύκλου και της ευθείας.

6. Επέκταση Σεναρίου

Άλγεβρα : Επίλυση διαφόρων ειδών μη γραμμικών Συστημάτων.

Γεωμετρία : Σχετικές θέσεις : ευθείας και κωνικής και μεταξύ δυο κωνικών στο επίπεδο.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΓΡΑΦΙΚΉ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

(Περιβάλλον GEOGEBRA)

Διάρκεια : 2 Διδακτικές ώρες

Α. Εισάγετε τα **ελεύθερα** αντικείμενα Α , Β , Γ καθώς και το **εξαρτημένο** αντικείμενο $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.Τι παριστάνει η καμπύλη που εμφανίζεται ; Ποια τα χαρακτηριστικά της;

Απάντηση:

……

……

……

……

……

Β. Εισάγετε τα **ελεύθερα** αντικείμενα α , β , γ καθώς και το **εξαρτημένο** αντικείμενο $\alpha x + \beta y = \gamma$. Τι παρατηρείτε ;

Απάντηση:

……

……

……

……

……

Γ. Μεταβάλλετε τις τιμές των **ελεύθερων** αντικειμένων Α , Β , Γ , α , β , γ. Τι παρατηρείτε ;

Απάντηση:

……

……

……

Δ. Τί ιδιότητες έχουν ο κύκλος και η ευθεία και τι θέσεις μπορούν να πάρουν μεταξύ τους στο επίπεδο ;

Απάντηση:

……

……

……

……

……

Ε. Δίνεται το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2x+4y=4 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$.

i) Με τη βοήθεια των παραπάνω διαδικασιών , πως νομίζετε ότι είναι δυνατόν να λυθεί ;

ii) Ποια είναι η λύση του συστήματος ;

iii) Με τι αντιστοιχεί η λύση στο καρτεσιανό επίπεδο ;

Απάντηση:

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Ζ. Με τη βοήθεια της μεθόδου της αντικατάστασης να επιλύσετε αλγεβρικά το παραπάνω σύστημα.

<u>Λύση:</u>

Η. Στη γραμμή εισαγωγής συναρτήσεων εισάγετε τα βοηθητικά αντικείμενα :

$\Delta = \left(A\beta^2 - B\alpha\beta - 2\alpha\gamma\right)^2 - 4\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(\Gamma\beta^2 + B\beta\gamma + \gamma^2\right)$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma$.

Υπολογίστε τις παραστάσεις αυτές με βάση τις δεδομένες τιμές των ελεύθερων αντικειμένων. Τι παρατηρείτε ;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Θ. Να λύσετε με την ίδια μέθοδο τα συστήματα :

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 2y=3x-8 \\ x^2+y^2+2x-3y=22 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x^2+y^2+2x=1 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x^2+y^2+x+0.5y=0 \end{array}\right\}$$

Έχουν όλα τα συστήματα λύση ;

<u>Λύση:</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

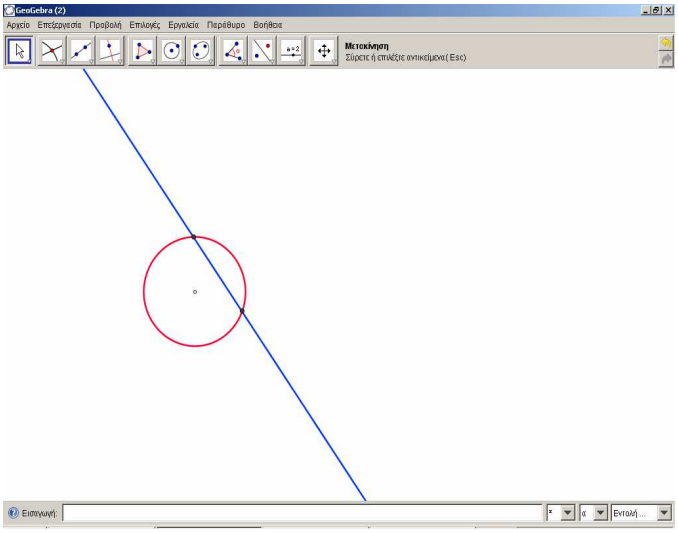
.....

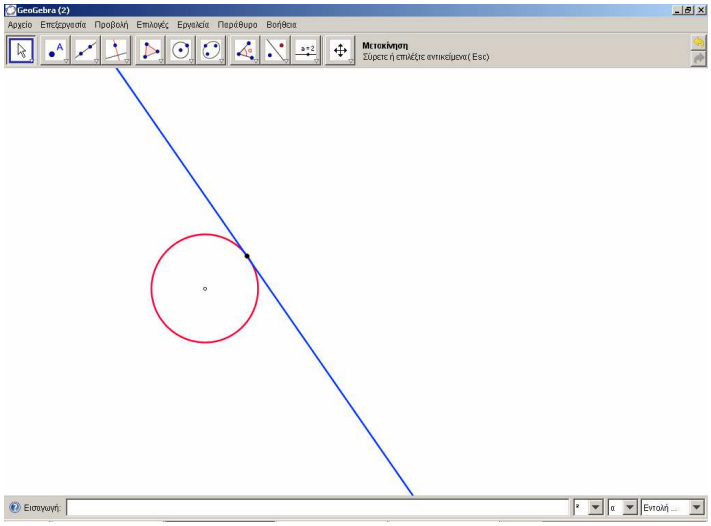
.....

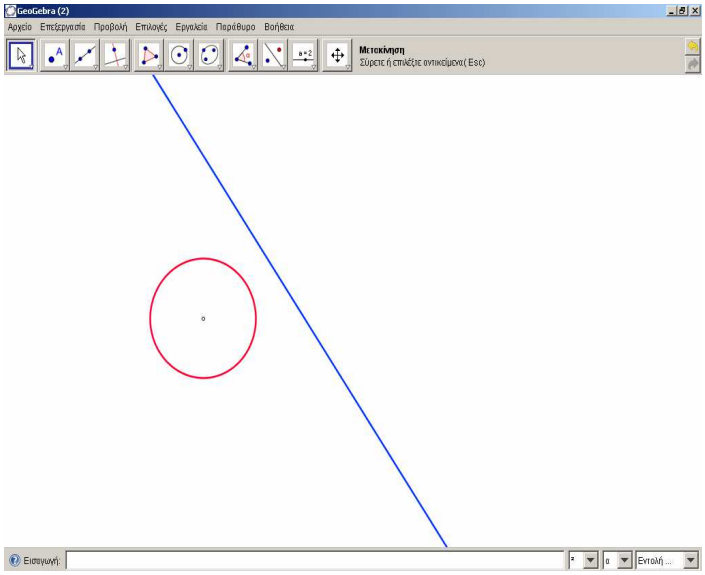
.....

.....

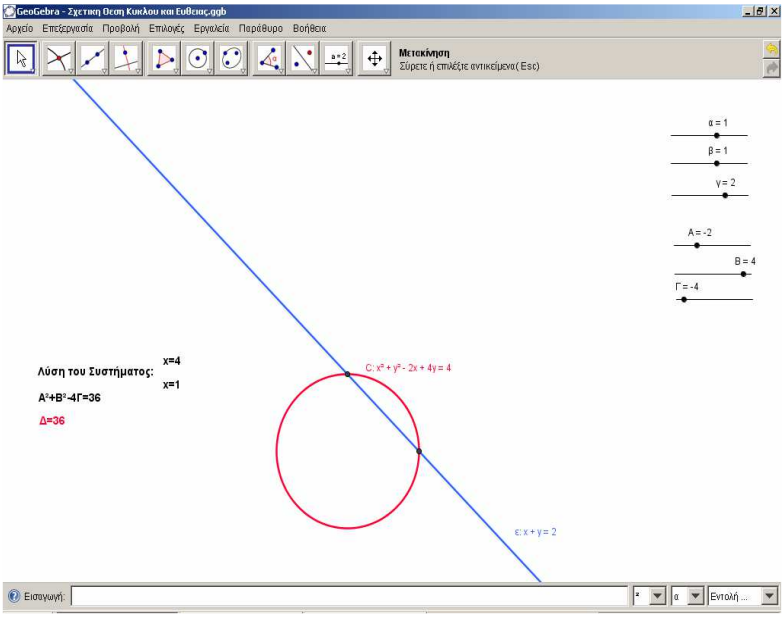
Ενέργειες που αναμένεται να κάνουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης με το λογισμικό.

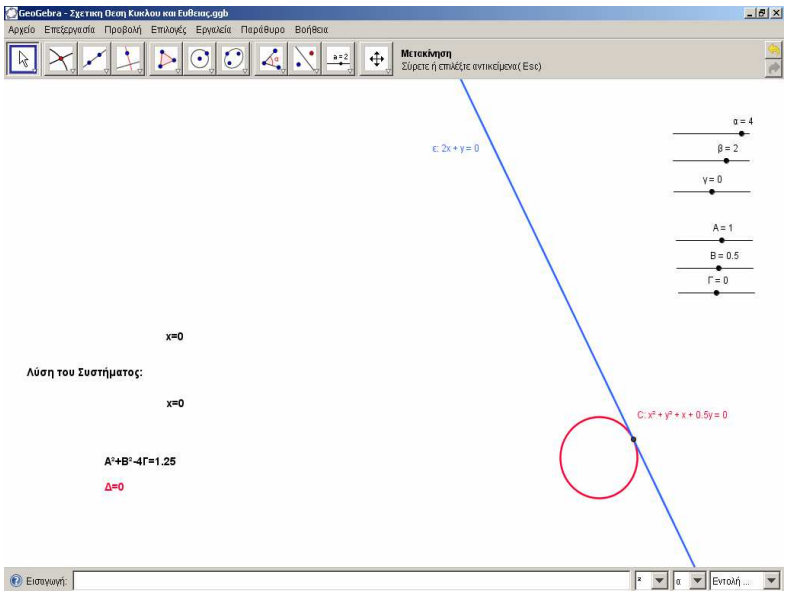


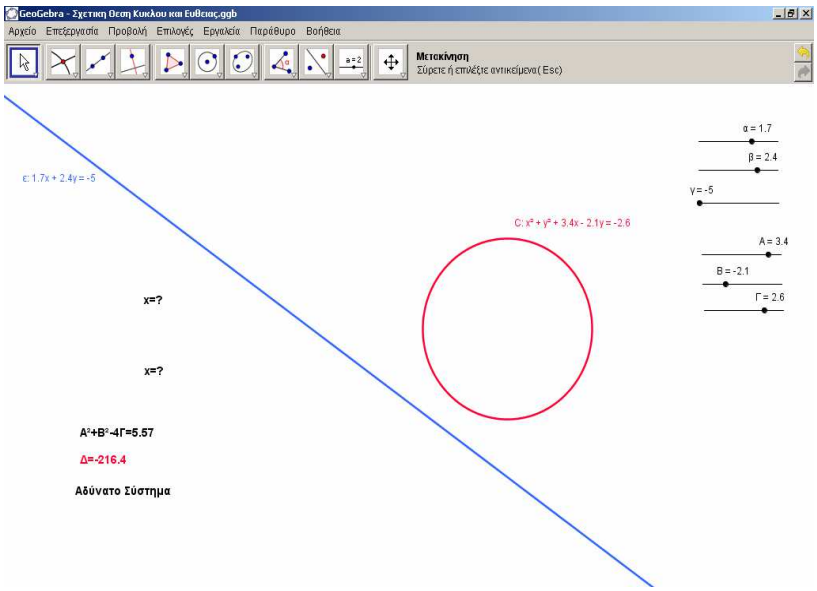




΄΄Εύρεση σχετικής θέσης ευθείας και κύκλου΄΄







΄΄Επίλυση μη γραμμικού συστήματος΄΄

7. Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Η δραστηριότητα εκπονήθηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας , στο τμήμα Θετικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου του ΓΕΛ Λαυρίου.
Αρχικά οι 16 μαθητές που συμμετείχαν , (8 ομάδες των 2 ατόμων) σχεδίασαν τις γραφικές παραστάσεις των ζητούμενων γραμμών σε δυναμικό περιβάλλον και επανεξέτασαν τα βασικά σχετικά με την έννοια του κύκλου και της ευθείας , καθώς και την αναπαράστασή τους στο καρτεσιανό επίπεδο. Χρησιμοποιώντας τους δρομείς , κατέγραψαν την συμπεριφορά του κύκλου και της ευθείας και τις μεταξύ τους θέσεις στο επίπεδο καθώς άλλαζαν οι συντελεστές των αγνώστων. Μετά το τέλος και της $2^{ης}$ ώρας , διαπίστωσαν τη σύνδεση μεταξύ των δυο αναπαραστάσεων (γραφική και αλγεβρική) και διερεύνησαν πότε έχει νόημα το σύστημα , πότε και αν έχει λύση και πόσες είναι αυτές. Με τον τρόπο αυτό , τους δόθηκε η ευκαιρία να διατυπώσουν ερωτήματα και να κάνουν διάφορες εικασίες. Τέλος , συνεργάστηκαν άψογα με τα άλλα μέλη της ομάδας , συζήτησαν τις παρατηρήσεις τους , καταχώρησαν τα δεδομένα τους και τα παρουσίασαν και στις υπόλοιπες ομάδες.

Ευρετήριο όρων και ονομάτων

B

Bezout Stefan 95
Bolzano Bernard 61

C

Cantor Georg 61
Cardano Gerolamo 40-41
Cramer Gabriel 89

D

D΄ Alembert Jean Le Rond 14,15,16,17
Dedekind Richard 62
Descartes Rene 78

F

Fermat Pierre 66,67
Ferrari Lodovico 42

G

Galois Evariste 15,16,17
Gauss Karl Friedrich 83,84

R

Rolle Michel 65

V

Viete Francois 14

Ευρετήριο όρων και ονομάτων

Α

Αντίστροφος πίνακας 80
Ακέραια περιοχή 6
Απαλείφουσα Συστήματος 103,109

Β

Βαθμός Πολλαπλότητας 11
Βαθμός Πολυωνύμου 4

Γ

Γραμμική Εξίσωση 79
Γραμμικό Σύστημα 79

Δ

Δακτύλιος Πολυωνύμων 5

Ε

Ελάσσονα ορίζουσα 88
Εξίσωση : 1ου βαθμού 23
2ου βαθμού 24
3ου βαθμού 37-40
4ου βαθμού 41
Αντίστροφη 36
Άρρητη 42,43
Διτετράγωνη 35
Διώνυμη 34,74
Ρητή 42,43

Θ

Θεώρημα : Bolzano 47,49
Fermat 63
Rolle 62,64
Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής 63
Θυμαρίδας ο Πάριος 105
Θυμαρίδειο Επάνθημα 105

Ι

Ίσα Πολυώνυμα 4
Ισοδύναμα Συστήματα 79

Κ

Κυκλική Μετάθεση 20
Κωνικές Τομές 116-118

Μ

Μετάθεση 20
Μέθοδος : Αντίθετων συντελεστών 92
Αντικατάστασης 92
Οριζουσών (Cramer) 93
Σύγκρισης 92
Bezout 94

Π

Πίνακας Γραμμικού Συστήματος 79
Πίνακας Επαυξημένος
Γραμμικού Συστήματος 80,82
Πολυώνυμο Ακέραιο 4,17,46
Πολυώνυμο Μηδενικό 4,46
Πολυώνυμο Ομογενές 19
Πολυώνυμο Σταθερό 4
Πολυώνυμο Μονικό 4
Πολυώνυμο Συμμετρικό 20,22
Πολυωνυμική Εξίσωση 4,46,71,78
Πολυωνυμική Συνάρτηση 46

Ρ

Ρίζα Πολυωνυμικής Εξίσωσης 10,46,75
Ρίζα Πολυωνύμου 10,46

Σ

Σημείο Banach 58,69
Σύνολο λύσεων 79
Σύστημα : Αδύνατο 79,86,88,93,96,97,99
Άπειρων Λύσεων 87,88,93,96,97,99
Ομογενές 85,99
Οριζουσών 88
Παραμετρικό 101
Συμβιβαστό 79,103
Σχήμα Horner 30,31,32

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Εκδόσεις για τη Μέση Εκπαίδευση :

Περιοδική έκδοση Ε.Μ.Ε	΄΄ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄΄
ΠΑΛΛΑ Α.	΄΄ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄΄ ΕΚΔ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΗΝΑ 1970
	΄΄ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄΄ ΕΚΔ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΗΝΑ 1970
ΜΑΝΤΑ Ι.	΄΄ΑΛΓΕΒΡΑ Ι΄΄ ΕΚΔ. ΠΟΤΑΜΙΤΗΣ – ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΘΗΝΑ 1971
	΄΄1000 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ΄΄ ΕΚΔ. ΜΑΝΤΑ ΑΘΗΝΑ 1971
ΜΑΓΕΙΡΑ Π.	΄΄ΑΛΓΕΒΡΑ Ι΄΄ ΕΚΔ. ΠΟΤΑΜΙΤΗΣ-ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΘΗΝΑ 1970
	΄΄ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ι Ι΄΄ ΕΚΔ. ΠΟΤΑΜΙΤΗΣ – ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΘΗΝΑ 1978
ΤΣΙΓΩΝΙΑ Σ.	΄΄ΠΙΝΑΚΕΣ – ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ΄΄ ΕΚΔ. Ε.Ο.Σ.Κ ΑΘΗΝΑ 1985
ΡΕΜΠΑΠΗ Χ. – ΤΣΙΓΩΝΙΑ Σ.	1.΄΄ΑΝΑΛΥΣΗ 1΄΄ ΕΚΔ. Ε.Ο.Σ.Κ 1994
	2.΄΄ΑΝΑΛΥΣΗ 2΄΄ ΕΚΔ. Ε.Ο.Σ.Κ 1994
ΝΤΖΙΩΡΑ Η.	΄΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄΄ ΕΚΔ. Ο.Ε.Δ.Β ΑΘΗΝΑ 1974
	΄΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ΄΄ ΕΚΔ. ΟΕΔΒ ΑΘΗΝΑ 2002
	΄΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ΄΄ ΕΚΔ. ΟΕΔΒ ΑΘΗΝΑ 2010
	΄΄ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ΄΄ ΕΚΔ. ΟΕΔΒ 2008

Εκδόσεις για τα Α.Ε.Ι :

ΚΑΠΠΟΥ Δ.	΄΄ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ΄΄ ΕΚΔ. ΕΥΡΩΠΗ ΑΘΗΝΑ 1962
	΄΄ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ΄΄ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΑΘΗΝΑ 1967
ΛΑΚΚΗ Κ.	΄΄ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ΄΄ ΕΚΔ. Α.Π.Θ. 1976
ΔΕΛΟΥΚΑ Σ.	΄΄ΜΗΤΡΩΑ΄΄ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΑΘΗΝΑ 1966
ΦΟΥΣΙΑΝΗ Χ.	΄΄ΑΝΩΤΕΡΑ ΑΛΓΕΒΡΑ΄΄ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΑΘΗΝΑ 1966
SPIVAK M.	΄΄ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ΄΄ ΕΚΔ. Π.Ε.Κ , 2004
BIRKHOFF – MAC LANE	΄΄ΝΕΟΤΕΡΗ ΑΛΓΕΒΡΑ΄΄ ΕΚΔ. ΚΑΡΑΒΙΑ ΑΘΗΝΑ 1971
FRALEIGH J.B	΄΄ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ΄΄ ΕΚΔ. ΠΕΚ 1999
VAN DER WAERDEN	΄΄Η ΑΦΥΠΝΙΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ΄΄ ΕΚΔ. ΠΕΚ 2003
LORIA G.	΄΄ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ΄΄ ΤΟΜΟΙ 1 , 2 , 3 ΕΚΔ. Ε.Μ.Ε 1972
ΡΑΠΤΗΣ Ε.	΄΄ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ΄΄ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΑΘΗΝΑ 2010