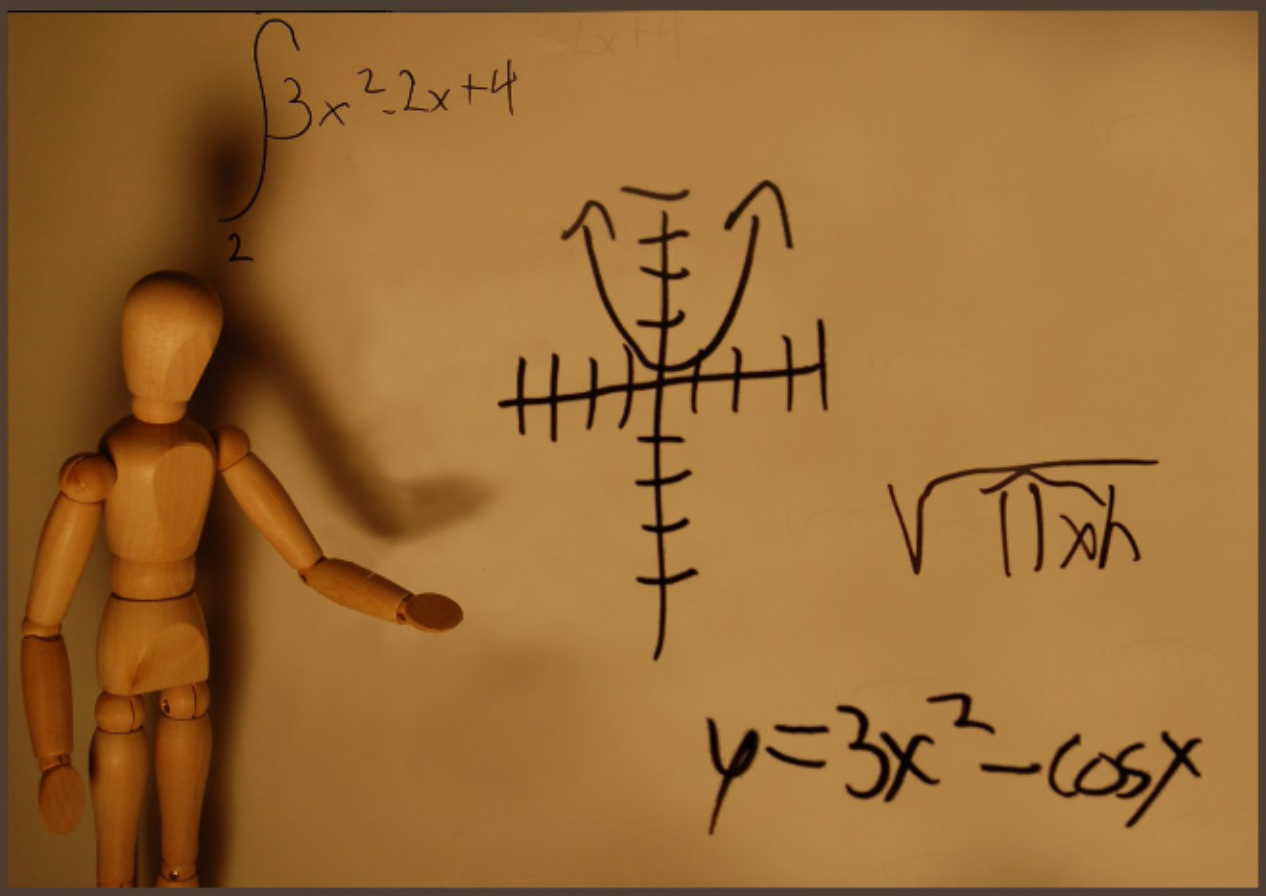
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"



Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΡΟΛΟΥ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ

ΤΣΟΥΝΗ ΓΕΩΡΓΙΑ
Α.Μ. Δ200824

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΡΟΛΟΥ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ

ΤΣΟΥΝΗ ΓΕΩΡΓΙΑ

Α.Μ. Δ200824

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 5η Ιουλίου 2012 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Πόταρη Δέσποινα (Επιβλέπουσα)	Αναπλ. Καθηγήτρια	…….
2) Ζαχαριάδη Θεοδόσιο	Καθηγητή	……
3) Σπύρου Παναγιώτη	Επίκ. Καθηγητή	……

στη Δέσποινα που χωρίς αυτήν

το πρόγραμμα θα ήταν λίγο

στους δασκάλους που με γοήτευσαν

στους μαθητές μου, που με εμπνέουν

στους συναδέλφους μου που κουβάλησαν κάτι από

 το φορτίο μου και μου ‘δωσαν από το δικό τους

στην Αγγελική και στην Τίνα που ξέρω ότι είναι πάντα εδώ

στον Αλέκο που σιωπηλά με ενθάρρυνε

στους γονείς μου που μου ‘μαθαν να παλεύω

στον Άγγελο, το Νίκο. τη Δήμητρα και τη Σοφία

γιατί απλά υπάρχουν

στο Δημήτρη που κατέθεσε ψυχή και

βρήκε τη δύναμη να αντέξει

στον Ευθύμη και στην Ανθή,

 τους μικρούς πρωταγωνιστές της ζωής μου,

 που τόσο πολύ τους έλειψα

ένα μεγάλο ευχαριστώ

μαζί με τη

διαβεβαίωση ότι άξιζε τον κόπο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	Σελ. 7
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	Σελ. 8
2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	Σελ. 13
2.1 Προγράμματα Σπουδών και Διδακτικά Εγχειρίδια ……	Σελ. 13
2.1.1 Πρόγραμμα Σπουδών για την Α΄ Λυκείου ……..	Σελ. 13
2.1.2 Αρχές και Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά (Principles and Standards for School Mathematics) NCTM ……..	Σελ. 15
Η ανάγκη για μαθηματικά σύμφωνα με το NCTM ……	Σελ. 15
Οι Αρχές και τα Πρότυπα του NCTM ……..	Σελ. 16
Πρότυπα για τις συναρτήσεις στις τάξεις 9 -12 ……..	Σελ. 19
2.1.3 Τα σχολικά εγχειρίδια ……..	Σελ. 21
Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων ……	Σελ. 22
Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών ……..	Σελ. 24
Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών στον κόσμο ……..	Σελ. 32
2.2 Τα Παραδείγματα και η Διαχείρισή τους ……	Σελ. 38
2.2.1 Τι είναι μαθηματικό παράδειγμα……	Σελ. 38
2.2.2 Παιδαγωγικός ρόλος των παραδειγμάτων ……	Σελ. 40
2.2.3 Παρουσία και διαχείριση των παραδειγμάτων: Μια ιστορική οπτική	Σελ. 45
2.2.4Διαχείριση των παραδειγμάτων στις θεωρίες μάθησης μαθηματικών	Σελ. 48

2.2.5 Είδη παραδειγμάτων ……..	Σελ. 51
2.2.6 Διαχείριση των παραδειγμάτων στη διδασκαλία ……..	Σελ. 55
2.2.7 Ο ρόλος των επεξεργασμένων (λυμένων) παραδειγμάτων …….	Σελ. 60
2.2.8 Κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές …….	Σελ. 65
2.2.9 Χώροι παραδειγμάτων …….	Σελ. 67
2.2.10 Διαθέσιμος χώρος παραδειγμάτων ……..	Σελ. 70
2.2.11 κατασκευή παραδειγμάτων και εμπλουτισμός χώρου παραδειγμάτων …….	Σελ. 70
2.3 Μαθηματική Δραστηριότητα ……..	Σελ. 72
2.4 Συναρτήσεις ……..	Σελ. 77
2.4.1 Επιστημολογικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις για την έννοια της συνάρτησης Sierpinska (1992) …….	Σελ. 77
2.4.2 Σχετικά με τις αναπαραστάσεις συναρτήσεων ……..	Σελ. 88
2.4.3 Οι αναπαραστάσεις και οι συνδέσεις τους στα προγράμματα σπουδών …….	Σελ. 90
3 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ …….	Σελ. 92
3.1 Ερευνητικό Πρόβλημα – Ερευνητικά Ερωτήματα …….	Σελ. 92
3.2 Μέθοδος Έρευνας …….	Σελ. 94
3.3 Συλλογή Δεδομένων ……..	Σελ. 96
3.3.1 Το υλικό μας ……..	Σελ. 96
3.3.2 Μονάδα ανάλυσης. Τι αποτελεί για μας παράδειγμα ……..	Σελ. 97
3.4 Ο Τρόπος Ανάλυσης …….	Σελ. 101
4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ …….	Σελ. 104

4.1 Είδος και Διαχείριση Παραδείγματος ……	Σελ. 104
4.1.1 Είδος παραδείγματος ……..	Σελ. 104
4.1.2 Διαχείριση των παραδειγμάτων ……..	Σελ. 112
4.2 Μαθηματικά Χαρακτηριστικά των Παραδειγμάτων ……	Σελ. 119
4.2.1 Αναπαραστάσεις – Συνδέσεις Αναπαραστάσεων ……..	Σελ. 119
4.2.2 Το πλαίσιο (Context) των παραδειγμάτων ……	Σελ. 124
4.2.3 Ιδιότητες της έννοιας (τι κουβαλούν τα παραδείγματα) ……	Σελ. 130
Πεδίο ορισμού ……	Σελ. 131
Η κρίσιμη ιδιότητα «πολλά ένα» ……..	Σελ. 134
Μορφή και ιδιότητες των παραδειγμάτων συνάρτησης ……	Σελ. 137
4.2.4 Αναμενόμενη μαθηματική δραστηριότητα ……	Σελ. 140
Είδος της μαθηματικής δραστηριότητας ……	Σελ. 141
Στάση ως προς τα μαθηματικά (Disposition) ……..	Σελ. 152
5 ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	Σελ. 158
5.1 Ο Ορισμός και τα Παραδείγματα στα Εγχειρίδια και στα αντίστοιχα Προγράμματα Σπουδών ……	Σελ. 158
5.2 Διαχείριση των Παραδειγμάτων ……..	Σελ. 160
5.3 Τα Μαθηματικά Χαρακτηριστικά των Παραδειγμάτων ……	Σελ. 162
5.4 Περιορισμοί και δυσκολίες της έρευνας – Προτάσεις ……	Σελ. 168
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	Σελ. 172
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	Σελ. 177

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα παραδείγματα έχουν κεντρική θέση σε διάφορες διεργασίες που σχετίζονται με τη γέννηση της μαθηματικής γνώσης. Αποτελούν την πρώτη ύλη για διεργασίες γενίκευσης και οριοθέτησης εννοιών. Συγχρόνως αποτελούν το περιβάλλον στο οποίο κατασκευάζεται η γνώση από τους μαθητές. Η μελέτη των παραδειγμάτων για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης, μας αποκαλύπτει τις μαθηματικές εμπειρίες μέσω των οποίων οι μαθητές δομούν την έννοια. Δυο σχολικά εγχειρίδια, ένα ελληνικό και ένα αμερικάνικο, αναλύονται ως προς τα παραδείγματα που χρησιμοποιούν για να εισάγουν στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης μας φέρνουν μπρος στο γεγονός ότι οι δυο ομάδες μαθητών που χρησιμοποιούν τα συγκεκριμένα εγχειρίδια βιώνουν την έννοια σε διαφορετικά πλαίσια και εμπλέκονται σε ποιοτικά διαφορετική μαθηματική δραστηριότητα.

Λέξεις κλειδιά: παράδειγμα, οριοθέτηση έννοιας, συνάρτηση, αναπαραστάσεις, μαθηματική δραστηριότητα.

ABSTRACT

Examples are central to various processes associated with the birth of mathematical knowledge. They are used as raw material for the processes of generalization and conceptualization. They also constitute the environment in which knowledge is constructed by students. The study of examples, concerning the introduction of students to the concept of the function, reveals the mathematical experiences through which students construct meaning. Two textbooks, a Greek and an American one, are being analyzed from the perspective of the examples employed to introduce the concept and the representations of the function. The results of our analysis bring forth the fact that the two groups of students using these textbooks are experiencing the concept in different contexts and engage in a qualitatively different mathematical activity.

Key words: example, conceptualization, function, representations, mathematical activity.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στον εκπαιδευτικό κόσμο και τον κόσμο της έρευνας, κυρίαρχη είναι η αναζήτηση τρόπων για τη βελτίωση των μαθησιακών ευκαιριών, ώστε όλοι οι μαθητές να μελετούν σημαντικά μαθηματικά. Παρότι χρυσή οδός για την επίτευξη αυτού του στόχου δεν υπάρχει, τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, θέτουν κατευθυντήριες γραμμές για το σχεδιασμό υψηλής ποιότητας προγραμμάτων σχολικών μαθηματικών. Ένας τρόπος για την ενδυνάμωση αυτών των προγραμμάτων είναι η χρήση υψηλής ποιότητας σχολικών εγχειριδίων.

Ερευνητικά δεδομένα συγκλίνουν στο ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια ως κύρια ή και μοναδική πηγή για την οργάνωση της διδασκαλίας τους και την ανάθεση εργασιών στους μαθητές. Έτσι οι μαθηματικές ιδέες στις οποίες εκτίθενται οι μαθητές εξαρτώνται από το περιεχόμενο του σχολικού εγχειριδίου, τις μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες εστιάζει, και τον τρόπο χρήσης του από τους εκπαιδευτικούς.

Παρά τον κεντρικό ρόλο των εγχειριδίων στην καθημερινή εκπαιδευτική πρακτική, λίγες έρευνες έχουν εστιάσει στα μαθηματικά εγχειρίδια σε σχέση με το μαθηματικό τους περιεχόμενο. Οι περισσότερες εξετάζουν τη χρήση των εγχειριδίων από τους εκπαιδευτικούς. Όμως αν θέλουμε να διερευνήσουμε τη φύση των μαθηματικών που μελετούν οι μαθητές στο σχολείο, θα πρέπει παράλληλα με τη χρήση των εγχειριδίων να εξετάσουμε και το περιεχόμενο αυτών, καθώς σύμφωνα με τη Mesa (2004) αυτά «καθορίζουν τι είναι σχολικά μαθηματικά», «αναπτύσσουν το σώμα της αποδεκτής γνώσης», «αποτελούν έκφραση του Προγράμματος Σπουδών».

Η έννοια της συνάρτησης είναι από τις πιο σημαντικές στα μαθηματικά. Η μακρά της ιστορική πορεία, και οι διαμάχες μεταξύ των μαθηματικών για τη διαμόρφωση της έννοιας, αναδεικνύουν θέματα που μπορούν να ερμηνεύσουν γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται τόσο πολύ κατά τη πραγμάτευση της έννοιας αυτής στο σχολείο. Από τους αριθμητικούς πίνακες αντιστοιχίσεων των Βαβυλωνίων, η συνάρτηση έγινε εξίσωση (για το Euler), αποτέλεσε πεδίο διαμάχης των μαθηματικών στο δεύτερο μισό του 18^{ου}

αιώνα, έγινε αντιστοίχιση αριθμών (για το Dirichlet) το 19° αιώνα, και τέλος αντιστοίχιση όχι απαραίτητα αριθμών με τον ορισμό των Bourbaki.

Και ενώ η συνάρτηση και οι περιπέτειές της, μέχρι τη διαμόρφωση της έννοιας, απασχολούσε κυρίως τους κύκλους των μαθηματικών, το 1908 ο Felix Klein την ανέβασε σε βάθρο (Sierpinska, 1992 σελ.32), υποστηρίζοντας ότι ο συναρτησιακός τρόπος σκέψης θα πρέπει να διαπερνά όλα τα μαθηματικά και οι μαθητές στο σχολείο θα πρέπει να μυούνται στο συναρτησιακό λογισμό.

Η ενσωμάτωση του θεωρητικού ορισμού της συνάρτησης στα σχολικά μαθηματικά δημιούργησε προβλήματα στους μαθητές, και οι έρευνες που ακολούθησαν οδήγησαν στη διαμόρφωση σχημάτων για την περιγραφή της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών που αναπτύσσουν οι μαθητές. Η συνάρτηση αποτέλεσε περίπτωση μαθηματικής έννοιας για διάφορες έρευνες (Sfard, 1991, 1992˙ Vinner, 1983 είναι μερικά παραδείγματα).

Η δική μας έρευνα επιχειρεί να διερευνήσει το ρόλο που παίζουν τα εγχειρίδια στην κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές γύρω από την έννοια της συνάρτησης, εξετάζοντας πώς αυτή παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια που αναλύουμε. Η διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας στο σχολείο, δε μπορεί να περιοριστεί στη σημασία που της αποδίδεται μέσα στη σφαίρα των ακαδημαϊκών μαθηματικών. Είναι απαραίτητο να ενσωματωθεί σε δραστηριότητες διδασκαλίας. Οι οπτικές της έννοιας που αναδεικνύονται στα έργα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, μαζί με τους χειρισμούς, τις αναπαραστάσεις και τις μεταγνωστικές στρατηγικές που απαιτούνται για να οργανώσουν τη δουλειά τους οδηγούν σε διαφορετικούς χαρακτηρισμούς της έννοιας.

Καθώς η σημασία μιας μαθηματικής έννοιας διαφέρει σε διαφορετικά πλαίσια το ερευνητικό πρόβλημα που μας απασχόλησε απέκτησε τη μορφή συγκεκριμένων ερωτημάτων : ποια μαθηματικά χαρακτηριστικά της έννοιας της συνάρτησης εγείρονται μέσω των παραδειγμάτων τα οποία παρουσιάζουν τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών που αναλύουμε; Ποιο είναι το πλαίσιο των παραδειγμάτων μέσω των οποίων αναδεικνύεται η έννοια και ποιές είναι οι πιθανές μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές; Ποιές οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις για να επεξεργαστούν την έννοια οι

μαθητές; Πώς διαχειρίζεται το εγχειρίδιο ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μέσα στην όλη εννοιολογική δομή;

Προηγούμενες έρευνες στα παραδείγματα έχουν εστιάσει στο ρόλο τους στο σχηματισμό και την αναίρεση γενικεύσεων (Potari et al.2010, Zazkis et al. 2008), στην πρόκληση και την επίλυση γνωστικής σύγκρουσης (Zazkis & Chernoff 2008), στα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί στις τάξεις τους (Zodik & Zaslavsky 2008), στην επεξηγηματική τους δύναμη και τις απαιτήσεις για την κατασκευή τους από τους εκπαιδευτικούς (Zaslavsky 2010). Άλλες πάλι έρευνες κατέδειξαν τη δύναμη των παραδειγμάτων ως ερευνητικό εργαλείο, που παρέχουν στους ερευνητές ένα παράθυρο για να δουν τη σκέψη των συμμετεχόντων στην έρευνα (Watson & Shipman 2008, Zazkis & Leikin 2007 και 2008). Τα παραδείγματα που κατασκεύασαν οι συμμετέχοντες σε έρευνα, μαθητές ή εκπαιδευτικοί, αξιοποιήθηκαν ως καθρέφτης των μαθηματικών και παιδαγωγικών (για τους εκπαιδευτικούς) αντιλήψεών τους για τα μαθηματικά αντικείμενα, που αφορούσαν τα προς κατασκευή παραδείγματα και έδιναν και πληροφορίες για το χώρο των παραδειγμάτων τους.

Σχετικά με τις συναρτήσεις πλήθος ερευνών εστιάζουν στις δυσκολίες των μαθητών που συνδέονται είτε με τον ορισμό της είτε με τις αναπαραστάσεις της (Duval 1988 και 2006, Vinner & Dreyfus 1989, Dudinsky & Harel 1992, Sfard 1992, Sierpinska 1992, Hitt 1998, Gagatsis and Monoyiou 2011, αποτελούν μόνο μέρος από αυτές).

Η δική μας έρευνα επιχειρεί να καλύψει το κενό, στη διερεύνηση του ρόλου που μπορούν να παίξουν τα παραδείγματα των σχολικών εγχειριδίων, για την κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές στη συνάρτηση. Προηγούμενες έρευνες πάνω στα παραδείγματα, χρησιμοποίησαν υλικό που προέκυψε από παρατηρήσεις τάξεων, ή παραδείγματα προσεκτικά σχεδιασμένα από ερευνητές που συναντά κανείς στη βιβλιογραφία. Εμείς χρησιμοποιήσαμε το σύνολο των παραδειγμάτων των δυο εγχειριδίων που αναλύουμε, ως ένα παράθυρο, μέσω του οποίου εξετάζουμε τις μαθηματικές εμπειρίες στις οποίες αποκτούν πρόσβαση όλοι οι μαθητές που τα χρησιμοποιούν για τη μελέτη της έννοιας της συνάρτησης.

Θεωρούμε ότι τα συγκεκριμένα παραδείγματα της έννοιας, στα οποία εκτίθενται οι μαθητές, αποτελούν μέρος της εμπειρίας τους και επηρεάζουν

την εικόνα της έννοιας (concept image), η οποία δεν παραμένει σταθερή, αλλά αναπτύσσεται και αλλάζει με την εμπειρία, και διάφορα μέρη της μπορούν να αναπτύσσονται σε διαφορετικές στιγμές και με διαφορετικούς τρόπους. Επιχειρούμε να χτίσουμε γέφυρες που συνδέουν τα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου, ως περιβάλλον στο οποίο η γνώση κατασκευάζεται, με τις αντιλήψεις που εγείρονται τόσο για τη συνάρτηση όσο και για τα μαθηματικά γενικότερα, μέσω των μαθηματικών δραστηριοτήτων στις οποίες οι μαθητές εμπλέκονται.

Επιλέγουμε δυο διαφορετικά εγχειρίδια το ένα το σχολικό εγχειρίδιο για την Α΄ Λυκείου στο ελληνικό σχολείο και το άλλο ένα εγχειρίδιο που προορίζεται για το High School σε σχολεία των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Κάνουμε ανάλυση όλων των παραδειγμάτων που αναφέρονται στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης, και επιχειρούμε να αποκαλύψουμε πιθανές ομοιότητες ή διαφορές στις εμπειρίες που προσφέρουν τα συγκεκριμένα εγχειρίδια στους μαθητές που τα χρησιμοποιούν, για να μελετήσουν τη συνάρτηση από αυτά.

Δεν αγνοούμε το ρόλο του εκπαιδευτικού ως διαμεσολαβητή μεταξύ του εγχειριδίου και της μάθησης από το μαθητή, αλλά συγχρόνως έχουμε κατά νου και τα πορίσματα ερευνών που τεκμηριώνουν ότι οι εκπαιδευτικοί βασίζονται στα σχολικά εγχειρίδια για να οργανώσουν τη διδασκαλία τους και να αναθέσουν εργασίες στους μαθητές τους.

Τα εγχειρίδια που επιλέξαμε να αναλύσουμε προέρχονται από δυο χώρες με τεράστιες διαφορές στην ιστορία, την κουλτούρα και το εκπαιδευτικό σύστημα. Το ελληνικό εγχειρίδιο, είναι το δικό μας εγχειρίδιο, σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα που επιβάλλει τη χρήση του συγκεκριμένου εγχειριδίου για όλους τους μαθητές που φοιτούν στην Α΄ Λυκείου. Το εγχειρίδιο αυτό υπακούει σε ένα εθνικό πρόγραμμα σπουδών που καθορίζει τους στόχους της διδασκαλίας ανά ενότητα, το χρόνο που θα διατεθεί και προτείνει δραστηριότητες. Το αμερικάνικο εγχειρίδιο είναι ένα από τα προτεινόμενα που γράφτηκε στη βάση των Principles *and* Standards *for* School Mathematics (NCTM 2000), σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα του οποίου κυρίαρχος εμφανίζεται ο αποκεντρωτικός του χαρακτήρας και η αυξανόμενη πολυμορφία. Το σχολικό εγχειρίδιο επιλέγεται μεταξύ προτεινόμενων από το σχολείο ή και πιο ευρύτερα την πολιτεία και υπηρετεί ένα πρόγραμμα

σπουδών που υιοθετείται μεταξύ διαφόρων τέτοιων. Το πιο αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό του αμερικάνικου εκπαιδευτικού συστήματος ήταν και παραμένει, το γεγονός ότι η ομοσπονδιακή κυβέρνηση δε διαχειρίζεται ένα εθνικό πρόγραμμα σπουδών. Επιτροπές ανά πολιτεία θέτουν τα standards για τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς, εγκρίνουν το πρόγραμμα σπουδών και συχνά επανεξετάζουν τις επιλογές των σχολικών εγχειριδίων. Τα δημόσια σχολεία των πολιτειών χρηματοδοτούνται και από τοπικές και ιδιωτικές πηγές με όποιες συνέπειες μπορεί αυτό να έχει στις διακρίσεις μεταξύ εύπορων και μη περιοχών. Η ομοσπονδιακή κυβέρνηση παρέχει την έρευνα και την υποστήριξη στο σύνολο των πολιτειών αλλά η ευθύνη της εκπαίδευσης αποτελεί τοπική υπόθεση.

Σε αυτό το πλαίσιο, δυο εκπαιδευτικών συστημάτων αντιθετικών ως προς τον προσανατολισμό τους, το ελληνικό ισχυρά συγκεντρωτικό και το αμερικάνικο αποκεντρωτικό, και σε δυο λαούς με διαφορετική ιστορία και κουλτούρα, αποφασίσαμε να αναλύσουμε τα παραδείγματα των εγχειριδίων των μαθηματικών για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης, και να αναζητήσουμε το είδος, το πλαίσιο και τη διαχείριση των παραδειγμάτων, καθώς και τα μαθηματικά χαρακτηριστικά που εγείρουν τα παραδείγματα αυτά στα δυο εγχειρίδια.

Το πρώτο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει μια ανασκόπηση ως προς τέσσερις άξονες: τα σχολικά εγχειρίδια και τα αναλυτικά προγράμματα με τα οποία ευθυγραμμίζονται, τα παραδείγματα και τη διαχείριση τους, τη μαθηματική δραστηριότητα και την έννοια της συνάρτησης. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει την ανάλυση των παραδειγμάτων των σχολικών εγχειριδίων «Άλγεβρα – Στοιχεία Πιθανοτήτων» και «Discovering Algebra» στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης και κάποια συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση αυτή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

2.1 Προγράμματα Σπουδών και Διδακτικά Εγχειρίδια

2.1.1 Πρόγραμμα Σπουδών για την Α΄ Λυκείου

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α΄Λυκείου στο ελληνικό σχολείο, σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών (2011) έχει δυο κεντρικούς στόχους:

1) Την ολοκλήρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης που οι μαθητές απέκτησαν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο και ταυτόχρονα
2) το πέρασμα σε έναν πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Βασικά στοιχεία αυτού του τρόπου σκέψης είναι :

- η «αυστηρή» χρήση μαθηματικής ορολογίας και συμβολισμού,
- οι ορισμοί των εννοιών και
- η θεωρητική απόδειξη των ισχυρισμών.

Στην προσέγγιση αυτών των στόχων συμβάλλουν:

- Η ένταξη των προϋπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων των μαθητών σ' ένα θεωρητικό πλαίσιο, η επέκταση και η εμβάθυνσή τους.
- Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική).
- Η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά.
- Οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών.
- Η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.
- Η θεώρηση των Μαθηματικών ως πολιτισμικό, ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα.

Αναγκαία προϋπόθεση για την προσέγγιση αυτών των στόχων σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών είναι η προσπάθεια για εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών σε αντίθεση με την απλή εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών για τη λύση ασκήσεων. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών μέσα από την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων τους, καθώς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων.

Το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της Α΄ Λυκείου αποτελείται από τις ενότητες:

«Άλγεβρα – Στοιχεία Πιθανοτήτων» και **«Γεωμετρία».**

Ένα από τα κεφάλαια της πρώτης ενότητας αφορά στις βασικές έννοιες των συναρτήσεων. Διευκρινίζεται ότι οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει την έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο, κυρίως με εμπειρικό τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται, μέσω των αντίστοιχων ορισμών, στην έννοια, στα βασικά στοιχεία και στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Παραθέτουμε τους πίνακες με τους στόχους ανά θεματική ενότητα και τους προτεινόμενους χρόνους για τις ενότητες που αναλύουμε όπως παρουσιάζονται στο πρόγραμμα σπουδών.

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες (Διατιθέμενος Χρόνος)**
ΒΣ1. Εισάγονται στην έννοια της συνάρτησης μέσα από πραγματικές καταστάσεις αντιστοίχισης διαφόρων ειδών ώστε να αποκτήσει νόημα ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης. **ΒΣ2**. Επιχειρηματολογούν αν μια αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι και εξοικειώνονται με το συμβολισμό και την ορολογία. **ΒΣ3.** Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συναρτήσεων (και δίκλαδων). **ΒΣ4**. Διερευνούν αν μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.	Η έννοια της συνάρτησης. (3 ώρες)
ΒΣ5. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση). **ΒΣ6**. Ερμηνεύουν μια δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.	Γραφική παράσταση συνάρτησης. (3 ώρες)

ΒΣ7. Προσδιορίζουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους άξονες και τη σχετική της θέση με το χχ΄, επιλύοντας εξισώσεις και ανισώσεις.	

2.1.2 Αρχές και Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά (Principles and Standards for School Mathematics) NCTM

Η ανάγκη για μαθηματικά σύμφωνα με το NCTM.

Η ανάγκη για μαθηματικά σε ένα μεταβαλλόμενο κόσμο όπως παρουσιάζεται στο Principles and Standards for School Mathematics (2000) :

Ζούμε σε μια εποχή εξαιρετικών και επιταχυνόμενων αλλαγών. Νέα γνώση, εργαλεία και τρόποι να επικοινωνούμε τα μαθηματικά μας, εμφανίζονται και εξελίσσονται. Υπολογιστές πολύ ακριβοί για κοινή χρήση στη δεκαετία του 80, είναι πια διαθέσιμοι χωρίς πολλά έξοδα και με πολλές δυνατότητες. Το πλήθος των πληροφοριών στο οποίο όλοι έχουμε πρόσβαση από τα μέσα ενημέρωσης τεράστιο, και δεν περιορίζεται όπως παλαιότερα σε μια ομάδα ανθρώπων οι οποίοι μόνο είχαν πρόσβαση σε αυτές.

Η ανάγκη να κατανοούμε και να είμαστε ικανοί να χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και στους χώρους εργασίας δεν ήταν ποτέ μεγαλύτερη και θα συνεχίσει να αυξάνεται. Για παράδειγμα :

Μαθηματικά για τη ζωή. Τα θεμέλια της καθημερινής ζωής είναι όλο και περισσότερο μαθηματικά και τεχνολογικά. Λαμβάνουμε αποφάσεις αγορών, επιλέγουμε πρόγραμμα σταθερής ή κινητής τηλεφωνίας με βάση τις δικές μας ανάγκες, παρακολουθούμε οικονομικούς δείκτες.

Μαθηματικά ως ένα μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς. Τα μαθηματικά αποτελούν ένα από τα μεγαλύτερα πολιτισμικά και διανοητικά επιτεύγματα της ανθρωπότητας, και ως πολίτες θα πρέπει να αναπτύξουμε μια εκτίμηση και κατανόηση αυτού, συμπεριλαμβανομένης και της αισθητικής τους ομορφιάς.

Μαθηματικά για το χώρο εργασίας. Όπως το επίπεδο των μαθηματικών που απαιτούνται για το νοήμονα πολίτη έχει αυξηθεί δραματικά, έτσι και το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης και της ικανότητας λύσης προβλήματος που απαιτούνται στους χώρους εργασίας διαπερνά όλα τα επίπεδα.

Μαθηματικά για την επιστημονική και τεχνολογική κοινότητα. Πέρα από το επίπεδο μαθηματικής γνώσης του καθενός, ανεξάρτητα από τη σταδιοδρομία του, κάποιοι θα επιδιώξουν μια σταδιοδρομία που απαιτεί υψηλή γνώση μαθηματικών για να προετοιμαστούν να εργαστούν ως μαθηματικοί, στατιστικολόγοι, μηχανικοί, επιστήμονες.

Σε αυτό το μεταβαλλόμενο κόσμο αυτοί που κατανοούν και μπορούν να κάνουν μαθηματικά θα έχουν σημαντικά περισσότερες ευκαιρίες και επιλογές να διαμορφώσουν το μέλλον τους. Το NCTM αμφισβητεί την υπόθεση ότι τα μαθηματικά είναι για λίγους και εκλεκτούς. Αντίθετα όλοι οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία και την υποστήριξη που τους είναι απαραίτητη, για να κάνουν σημαντικά μαθηματικά.

Οι Αρχές και τα Πρότυπα του NCTM.

Οι **«Αρχές»** (Principles) είναι θέσεις που αντανακλούν βασικές παραινέσεις οι οποίες θεωρούνται θεμελιώδεις για μια υψηλής ποιότητας μαθηματική εκπαίδευση. Μπορούν να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες ως οπτικές πάνω στις οποίες θεμελιώνουν οι παιδαγωγοί τις επιλογές που αφορούν τα σχολικά μαθηματικά. Εδώ συζητούνται αξίες, βασικές παραδοχές και αποδεικτικά στοιχεία στα οποία θεμελιώνονται οι Αρχές αυτές.

Οι αποφάσεις που λαμβάνονται από τους εκπαιδευτικούς, τους διευθυντές σχολείων και άλλους επαγγελματίες που εμπλέκονται με θέματα εκπαίδευσης, γύρω από το περιεχόμενο και το χαρακτήρα των σχολικών μαθηματικών, έχουν σημαντικές συνέπειες τόσο για τους μαθητές όσο και για την κοινωνία. Οι αποφάσεις αυτές θα πρέπει να πατάνε σε στέρεη επαγγελματική καθοδήγηση.

Οι Αρχές και τα Πρότυπα των σχολικών μαθηματικών έχουν στόχο να παρέχουν αυτές τις οδηγίες. Οι Αρχές περιγράφουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά μιας υψηλής ποιότητας μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα Πρότυπα περιγράφουν το μαθηματικό περιεχόμενο και τις διεργασίες που οι μαθητές πρέπει να μάθουν. Μαζί Αρχές και Πρότυπα οραματίζονται να καθοδηγήσουν τους παιδαγωγούς καθώς επιδιώκουν συνεχώς τη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στις αίθουσες διδασκαλίας.

Οι έξι **αρχές** που ακολουθούν αντιμετωπίζουν θεμελιώδη θέματα της σχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης σύμφωνα με το NCTM.

- **Δικαιοσύνη**. Υψηλές προσδοκίες και ισχυρή υποστήριξη για όλους τους μαθητές.
- **Πρόγραμμα σπουδών.** Ένα πρόγραμμα σπουδών δεν είναι απλά μια συλλογή δραστηριοτήτων. Οφείλει να είναι συνεκτικό, εστιασμένο στα σημαντικά μαθηματικά και αρθρωμένο στις διάφορες τάξεις.
- **Διδασκαλία**. Η αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών απαιτεί κατανόηση του τι γνωρίζουν και τι πρέπει να μάθουν οι μαθητές και στη συνέχεια πρόκληση και καθοδήγηση ώστε να τα μάθουν.
- **Μάθηση.** Οι μαθητές πρέπει να μάθουν μαθηματικά με κατανόηση, χτίζοντας τη νέα γνώση πάνω στην εμπειρία και την προηγούμενη γνώση.
- **Αξιολόγηση.** Η αξιολόγηση θα πρέπει να υποστηρίζει την εκμάθηση σημαντικών μαθηματικών, παρέχοντας χρήσιμες πληροφορίες τόσο στους καθηγητές όσο και στους μαθητές.
- **Τεχνολογία.** Η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας και της μάθησης μαθηματικών, επηρεάζει τα μαθηματικά που διδάσκονται και ενδυναμώνει τη μάθηση των μαθητών.

Τα «Πρότυπα» (Standards) παρουσιάζουν την πρόταση του National Council of Teachers of Mathematics για το τι θα πρέπει να αποτιμάται στην εκπαίδευση στα μαθηματικά. Τα δέκα Πρότυπα που ακολουθούν παρουσιάζουν ένα συνεκτικό σώμα από μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, ως απαιτούμενα θεμέλια για όλους τους μαθητές, παρά ως ένα μενού από το οποίο μπορούν να γίνουν οι επιλογές σπουδών. Τα πρότυπα περιγράφουν αυτά που η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να καταστήσει ικανούς τους μαθητές να γνωρίζουν και να κάνουν. Καθορίζουν την κατανόηση, τις γνώσεις και τις δεξιότητες που θα πρέπει οι μαθητές να αποκτήσουν στα μαθηματικά, κατά τη φοίτησή τους από το νηπιαγωγείο μέχρι και την 12^{η} τάξη.

Τα πρότυπα περιεχομένου (Content Standards) περιγράφουν το μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο θα πρέπει να μελετήσουν οι μαθητές και περιλαμβάνουν:

- *Αριθμούς και πράξεις*
- *Άλγεβρα*
- *Γεωμετρία*

- *Μέτρηση*
- *Ανάλυση δεδομένων και πιθανότητα.*

Τα πρότυπα των διεργασιών (process Standards) τονίζουν τρόπους απόκτησης και χρήσης της γνώσης του μαθηματικού περιεχομένου και περιλαμβάνουν:

- *Λύση προβλήματος*
- *Αιτιολόγηση και απόδειξη*
- *Επικοινωνία*
- *Συνδέσεις*
- *Αναπαραστάσεις*

Καθένα από τα δέκα πρότυπα εφαρμόζεται σε όλες τις τάξεις από το Νηπιαγωγείο μέχρι τη 12η τάξη και προτείνει τα μαθηματικά τα οποία θα έχουν την ευκαιρία να μάθουν οι μαθητές. Καθένα από τα πρότυπα περιλαμβάνει ένα μικρό αριθμό στόχων που διέπουν όλες τις τάξεις και εστιάζουν στην ανάπτυξη της γνώσης των μαθητών και επιπλέον στα πρότυπα του περιεχομένου καταγράφονται τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα στις αντίστοιχες θεματικές περιοχές. Δεν αναμένεται ότι ένα θέμα θα αντιμετωπιστεί σε μια μόνο τάξη. Μάλλον οι μαθητές θα φτάσουν σε ένα επίπεδο κατανόησης των εννοιών και σε μια ευχέρεια εκτέλεσης των προβλεπόμενων διαδικασιών, όπως περιγράφονται από το αναλυτικό πρόγραμμα, και θα επανέλθουν για να αξιοποιήσουν και να χτίσουν πάνω σε αυτή τη γνώση και τη διαδικαστική ευχέρεια.

Αν και τα πρότυπα διέπουν όλες τις τάξεις η έμφαση διαφοροποιείται μέσα σε μια τάξη αλλά και μεταξύ των τάξεων. Για παράδειγμα, η έμφαση στον αριθμό είναι μεγαλύτερη στο νηπιαγωγείο και στις δυο πρώτες τάξεις παρά στις τάξεις 9 – 12. Ο διδακτικός χρόνος επίσης κατανέμεται ανισομερώς στις ζώνες των μαθημάτων μέσα στις τάξεις ανάλογα με τις ιδιαίτερες ανάγκες καθεμιάς. Για παράδειγμα, στις μεσαίες τάξεις ο περισσότερος διδακτικός χρόνος αφιερώνεται σε θέματα άλγεβρας και γεωμετρίας.

Καθώς τα μαθηματικά είναι ιδιαίτερα συνδεδεμένα μεταξύ τους οι περιοχές που περιγράφονται από τα πρότυπα αλληλεπικαλύπτονται και δε μπορούν να χωριστούν σε μη τεμνόμενα υποσύνολα. Οι διεργασίες μπορούν

να μελετηθούν μέσα στο περιεχόμενο που θέτουν τα πρότυπα και το περιεχόμενο μπορεί να μαθευτεί στο πλαίσιο της διεργασίας.

Πρότυπα για τις συναρτήσεις στις τάξεις 9 -12.

Στις τάξεις 9 -12 οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να χρησιμοποιούν ένα ευρύ φάσμα συναρτήσεων που ορίζονται ρητά ή αναδρομικά για να μοντελοποιούν καταστάσεις του κόσμου γύρω τους. Να κατανοούν όψεις των μαθηματικών δομών, όπως ότι οι τετραγωνικές συναρτήσεις μοιράζονται κοινές ιδιότητες, καθώς και οι συναρτήσεις άλλων κλάσεων (γραμμικές, περιοδικές ή εκθετικές). Με τη βοήθεια των εμπειριών τους από τις προηγούμενες τάξεις, να αναπτύξουν βαθύτερη κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης.

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη γνώση τους να μελετήσουν ποικίλες και πιο πολύπλοκες τεχνικές λύσεις προβλήματος. Θα πρέπει να βελτιώσουν την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να αναλύουν καταστάσεις με μαθηματικούς όρους. Να γίνουν καλύτεροι στο να αιτιολογούν ισχυρισμούς, να αποδεικνύουν εικασίες και να χρησιμοποιούν συμβολισμό στη συλλογιστική τους. Θα πρέπει να συνεχίσουν να χρησιμοποιούν τεχνολογικά εργαλεία που τους επιτρέπουν να λύνουν προβλήματα για τα οποία αν τα έκαναν με το χέρι θα ξόδευαν πολύ χρόνο.

Με έμφαση στις θεμελιώδεις ιδέες της σκέψης και της αιτιολόγησης, της μοντελοποίησης και της επικοινωνίας τίθενται τα θεμέλια για τη μάθηση πιο απαιτητικών μαθηματικών.

Ένα κεντρικό θέμα που εμφανίζεται στις Αρχές και τα Πρότυπα των σχολικών μαθηματικών είναι οι συνδέσεις. Οι μαθητές κατανοούν βαθύτερα τα μαθηματικά και τις εφαρμογές τους όταν μπορούν να δουν ένα μαθηματικό φαινόμενο από διαφορετικές οπτικές.

Παραθέτουμε τον **πίνακα των στόχων για τις συναρτήσεις στις τάξεις 9 -12.**

Προσδοκίες

Το διδακτικό πρόγραμμα πρέπει να καθιστά όλους τους μαθητές ικανούς να	Στις τάξεις 9 -12 όλοι οι μαθητές θα πρέπει να
Κατανοούν κανονικότητες, σχέσεις και συναρτήσεις	•Γενικεύουν κανονικότητες χρησιμοποιώντας συναρτήσεις που ορίζονται γενικά ή αναδρομικά. •Κατανοούν σχέσεις και συναρτήσεις και χρησιμοποιούν διάφορες αναπαραστάσεις για αυτές. •Αναλύουν συναρτήσεις μιας μεταβλητής διερευνώντας ρυθμούς μεταβολής, τομές με τους άξονες, ασύμπτωτες και τοπική και ολική συμπεριφορά. •Κατανοούν και εκτελούν μετασχηματισμούς όπως αριθμητικούς συνδυασμούς, σύνθεση και αντίστροφη κοινών συναρτήσεων, και με χρήση τεχνολογίας για πιο πολύπλοκες συμβολικές εκφράσεις. •Κατανοούν και συγκρίνουν τις ιδιότητες κλάσεων συναρτήσεων, όπως εκθετικές, πολυωνυμικές, ρητές, λογαριθμικές και περιοδικές συναρτήσεις.
Αναπαριστούν και αναλύουν μαθηματικές καταστάσεις και δομές χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό	•Χρησιμοποιούν συμβολική άλγεβρα για να αναπαραστήσουν και να εξηγήσουν μαθηματικές σχέσεις. •Χρησιμοποιούν μια ποικιλία συμβολικών αναπαραστάσεων, περιλαμβανομένων αναδρομικών και παραμετρικών εξισώσεων, για συναρτήσεις και σχέσεις. •Κρίνουν την έννοια, τη χρησιμότητα, και το κατά πόσο είναι λογικά τα αποτελέσματα των συμβολικών χειρισμών, περιλαμβανομένων και όσων εκτελούνται με χρήση τεχνολογίας.
Χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα για να αναπαραστήσουν και να κατανοήσουν ποσοτικές σχέσεις	•Εντοπίζουν βασικές ποσοτικές σχέσεις σε μια κατάσταση και καθορίζουν την κλάση, ή τις κλάσεις των συναρτήσεων που μοντελοποιούν τις σχέσεις αυτές. •Χρησιμοποιούν συμβολικές εκφράσεις, περιλαμβανομένων αναδρομικών, επαναληπτικών μορφών, για να αναπαραστήσουν σχέσεις που προκύπτουν σε διάφορα πλαίσια. •Καταλήγουν σε λογικά συμπεράσματα για την κατάσταση που διαμορφώθηκε.
Αναλύουν τις αλλαγές σε διάφορα πλαίσια	•Προσεγγίζουν και ερμηνεύουν ρυθμούς μεταβολής από γραφικά και αριθμητικά δεδομένα.

2.1.3 Τα σχολικά εγχειρίδια

Οι ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν ότι τα διδακτικά υλικά διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στις τάξεις των μαθηματικών, επηρεάζοντας ταυτόχρονα το τι αλλά και το πώς οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν. Η χρήση τους είναι καθημερινή, αποτελούν μέρος της ρουτίνας όσων διαδραματίζονται μέσα στις τάξεις, επηρεάζουν το τι κάνουν εκπαιδευτικοί και μαθητές. Ερευνητές προειδοποιούν για τον κίνδυνο να είναι αναποτελεσματικές προσπάθειες βελτίωσης της διδασκαλίας οι οποίες είναι απομονωμένες από αντίστοιχες προσπάθειες βελτίωσης του εκπαιδευτικού υλικού.

Το σχολικό εγχειρίδιο, ένα από τα κύρια διδακτικά υλικά, είναι στο επίκεντρο της εκπαιδευτικής πρακτικής. Αποτελεί μια από τις παραμέτρους για την επιτυχή εφαρμογή κάθε εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης. Το Principles and Standards for School Mathematics (NCTM 2000) αλλά και όλα τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, παρέχουν κατευθυντήριες γραμμές για το σχεδιασμό υψηλής ποιότητας προγραμμάτων σχολικών μαθηματικών προκειμένου να παρέχουμε ευκαιρίες μελέτης των μαθηματικών για όλους τους μαθητές. *«Ένας τρόπος για την ενίσχυση των προγραμμάτων αυτών είναι μέσω επιλογής και εφαρμογής υψηλής ποιότητας διδακτικών υλικών, (textbooks)* (Tarr et al, 2006).

Οι ερευνητές σημειώνουν ότι τα εγχειρίδια παίζουν σημαντικό ρόλο στις σχολικές τάξεις των μαθηματικών, και αναδεικνύουν την ανάγκη να δίνεται μεγάλη προσοχή τόσο στο περιεχόμενο τους, όσο και στον τρόπο που το παρουσιάζουν. Σχεδόν τα ¾ των καθηγητών στην 8η τάξη στις Ηνωμένες Πολιτείες, χρησιμοποιούν σε καθημερινή βάση το εγχειρίδιό τους (Grows & Smith, αναφορά σε Tarr et al, 2006). Τα 2/3 των καθηγητών μαθηματικών χρησιμοποιούν ένα μόνο μαθηματικό εγχειρίδιο σε όλο ή τον περισσότερο διδακτικό χρόνο και καλύπτουν τουλάχιστον τα ¾ του εγχειριδίου σε κάθε σχολική χρονιά (Weiss et al, αναφορά αναφορά σε Tarr et al, 2006).

Οι προηγούμενες έρευνες έχουν ιδιαίτερη σημασία σε χώρες όπου δεν υπάρχει επίσημο διδακτικό εγχειρίδιο ίδιο για όλους τους μαθητές που φοιτούν στην ίδια τάξη. Ο κεντρικός ρόλος του εγχειριδίου καθιστά επιτακτική την ανάγκη καθορισμού και επιλογής των κατάλληλων μαθηματικών

εγχειριδίων, που υποστηρίζουν τους δασκάλους και βοηθούν τους μαθητές, να μάθουν σημαντικά μαθηματικά και να τα μάθουν καλά.

Παρόλο τον κεντρικό τους όμως ρόλο, ελάχιστες έρευνες έχουν εστιάσει την προσοχή τους στα μαθηματικά εγχειρίδια σε σχέση με το μαθηματικό τους περιεχόμενο. Σύμφωνα με τη Mesa (2004) μια ερμηνεία για αυτό θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε τη φύση των μαθηματικών τα οποία μαθαίνουν οι μαθητές, εστιάσαμε περισσότερο στο πώς χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί τα εγχειρίδια. Η ίδια δεν αρνείται τη σπουδαιότητα της χρήσης τους, αλλά τονίζει και την αξία της εστίασης στο περιεχόμενό τους.

<u>Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων.</u>

Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων είναι πολυδιάστατος:

«καθορίζουν το σώμα της αποδεκτής γνώσης» (Kuhn, αναφορά σε Mesa (2004)).

«καθορίζουν το τι συνιστά σχολικά μαθηματικά» (Dorfler & McLone, αναφορά σε Mesa (2004)).

«είναι σημαντικά εργαλεία για τη διδασκαλία και τη μάθηση» (Tanner, αναφορά σε Mesa (2004)), αλλά συγχρόνως «*εξυπηρετούν και τη λειτουργία ελέγχου των μαθητών στις διάφορες εξετάσεις και αξιολογήσεις τους»* (Woodward, αναφορά σε Mesa (2004)) .

«*ενισχύουν τα Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά, στο σχεδιασμό υψηλής ποιότητας μαθηματικής εκπαίδευσης» (*Tarr et al, 2006).

«αντιπροσωπεύουν για κάθε γενιά μαθητών την κοινωνικά εγκεκριμένη, εξουσιοδοτημένη έκδοση της ανθρώπινης γνώσης και του πολιτισμού» (Castell et al. αναφορά σε κολέζα, 2006)

«εκτός από παιδαγωγικά εργαλεία, είναι συγχρόνως ένα μέσο πρόσβασης στην ακαδημαϊκή γνώση και φορείς ιδεολογικών και πολιτιστικών μηνυμάτων. Απεικονίζουν τις κοινά παραδεκτές κοινωνικές πεποιθήσεις» (Κολέζα, 2007).

Οι καθηγητές μαθηματικών στην Ιαπωνία είναι ισχυρά εξαρτημένοι από το εγχειρίδιό τους, το οποίο καθορίζεται από το National Course of Study και εγκρίνεται από το Υπουργείο Παιδείας. Έρευνα των Hino, Kaiser, Knipping (2005) επιβεβαιώνει ότι συνήθως οι καθηγητές μαθηματικών βασίζονται στο

εγχειρίδιο τους σε κάθε ευκαιρία διδασκαλίας : για να εισάγουν σε ένα νέο κεφάλαιο του εγχειριδίου, για να εισάγουν νέες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, για να συνοψίσουν και να βοηθήσουν στην εμπέδωση του περιεχομένου που μελετήθηκε.

Οι Reys, Reys, and Chavez (2004) περιγράφουν την ισχυρή επίδραση των εγχειριδίων στον εκπαιδευτικό και στις στρατηγικές διδασκαλίας. Ισχυρίζονται ότι τα εγχειρίδια μαθηματικών στην Αμερική, χρησιμοποιούνται «*ως πλάνο διδασκαλίας από τους εκπαιδευτικούς*». Ειδικότερα,

- *οι δάσκαλοι των μαθηματικών στην Αμερική διδάσκουν ακολουθώντας τη σειρά με την οποία παρουσιάζεται το υλικό στο εγχειρίδιο.*
- *τα εγχειρίδια υπαγορεύουν την ύλη που θα καλύψουν οι εκπαιδευτικοί.*
- *υποδεικνύουν τις συγκεκριμένες δραστηριότητες τις οποίες χρησιμοποιούν οι δάσκαλοι στην τάξη και καθορίζουν και τη ροή αυτών.*

Ενώ η Κολέζα (2006, σελ. 21) σχολιάζει πάνω στο θέμα : «*τα εγχειρίδια μπορούν μεν να καθοδηγήσουν τους δασκάλους σχετικά με:*

- *ποια θέματα να διδάξουν*
- *πόσος χρόνος να διατεθεί σε κάθε θέμα*
- *με ποια σειρά να διδαχθεί κάθε θέμα,*

αλλά οι τελικές επιλογές σχετικά με τη διδασκαλία ανήκουν στους δασκάλους. Οι επιλογές αυτές προϋποθέτουν συνεχή επαγγελματική κατάρτιση με διάφορους τρόπους».

Τα σχολικά εγχειρίδια έχουν καθοριστικό ρόλο και στις μεταρρυθμίσεις των Προγραμμάτων Σπουδών. «*Θεωρούνται εργαλείο για την εφαρμογή των ιδεών του νέου προγράμματος*» (Valverde, αναφορά σε Κολέζα, 2006). «*Η συγγραφή εγχειριδίων και η ανάπτυξη του συνοδευτικού υλικού μπορεί να θεωρηθεί ως γρήγορος και εύκολος τρόπος για τη βελτίωση του τρόπου διδασκαλίας*» (Κολέζα, 2006). Η ίδια σχετικά με το ρόλο των εγχειριδίων σε εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις τονίζει αλλού: «*το σχολικό εγχειρίδιο είναι προφανώς ένα κρίσιμο συστατικό της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης, υπό την προϋπόθεση ότι δε θα λειτουργεί ως υποκατάστατο της προσωπικής ευθύνης,*

πρωτοβουλίας και δημιουργικής συνεισφοράς των δασκάλων, αλλά ως ένα εργαλείο που θα τους επιτρέπει να οργανώσουν καλύτερα τη διδασκαλία τους». (Κολέζα, 2006 σελ. 20)

Τα εγχειρίδια σύμφωνα με την Κολέζα (2006) είναι κατά κάποιο τρόπο, *«εξουσία μέσα στην εξουσία»:*

- *παρουσιάζουν τα μαθηματικά θέματα με μια συγκεκριμένη σειρά,*
- *υπογραμμίζουν κάποιες ιδιαίτερες αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών, και*
- *αναδεικνύουν ως σημαντικές κάποιες συγκεκριμένες ικανότητες ή δεξιότητες.*

Σύμφωνα με την ίδια, ένα εγχειρίδιο είναι μια κωδικοποιημένη έκφραση του μαθηματικού περιεχομένου, που θεωρείται από τη μαθηματική κοινότητα ή την πολιτική εξουσία ως σημαντικό για τους μαθητές σε μια δεδομένη χρονική περίοδο. Επιπλέον μέσω του βιβλίου του δασκάλου γίνονται προτάσεις για τον τρόπο οργάνωσης της τάξης –άρα έμμεσα για το πώς θα οργανωθεί η κοινωνική συμπεριφορά των μαθητών- και για το πώς θα διδαχθούν οι μαθηματικές έννοιες.

Σύμφωνα με τους Reys, Reys, and Chavez (2004) *«ο μεγαλύτερος περιορισμός των σχολικών εγχειριδίων είναι η παρουσίαση των μαθηματικών ιδεών ως έτοιμο προϊόν για να απομνημονεύσει κανείς, παρά ως ένα δίκτυο νοηματοδοτημένων σχέσεων».* Τα νέα αμερικάνικα εγχειρίδια, ειδικά αυτά που αναπτύχθηκαν από το National Science Foundation, διορθώνουν το παραπάνω μειονέκτημα. Η νέα διδακτική προσέγγιση προκαλεί τους μαθητές να σκεφτούν και τους εμπλέκει στην ανακάλυψη μαθηματικών σχέσεων.

<u>Ανάλυση σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών.</u>

Από τις αρχές της δεκαετίας του ΄90 σημαντικός αριθμός ερευνών έδειξε ότι οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό τα εγχειρίδια για να σχεδιάσουν τη διδασκαλία τους. Οι δάσκαλοι -κυρίως οι αρχάριοι- χρησιμοποιούν το εγχειρίδιο ως κύρια ή και μοναδική πηγή για την οργάνωση της διδασκαλίας και την ανάθεση εργασιών. Έτσι το περιεχόμενο των εγχειριδίων συνδέθηκε με τη μάθηση των μαθητών, και προέκυψε η ανάγκη να αναλυθούν ως προς την καταλληλότητά τους.

Το ενδιαφέρον για την ανάλυση των εγχειριδίων είναι ακόμα μεγαλύτερο σε χώρες όπου δεν υπάρχει επίσημο εγχειρίδιο οπότε οι εκπαιδευτικοί, οι γονείς, αυτοί που ασκούν εκπαιδευτική πολιτική, αυτοί που εμπλέκονται σε θέματα εκπαίδευσης και τέλος οι εκδοτικοί οίκοι, για λόγους εμπορικής προώθησης, έχουν λόγους να ασχοληθούν με το θέμα.

Μια έρευνα ξεκίνησε το 1989 στο πλαίσιο της Third International Math and Science Study (TIMSS) και επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη μεθοδολογίας ανάλυσης των εγχειριδίων και των προγραμμάτων σπουδών χωρών με διαφορετικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα. Η έρευνα είχε τελικό στόχο να δημιουργήσει δείκτες που θα βοηθούσαν στο σχεδιασμό ερωτημάτων προκειμένου να αξιολογηθεί η επίδοση των μαθητών των χωρών αυτών. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 241 προγράμματα σπουδών και 318 εγχειρίδια μαθηματικών.

Τα εγχειρίδια και το υλικό του προγράμματος σπουδών διερευνήθηκαν ως προς τρεις παραμέτρους (Robitaille et al. αναφορά σε Κολέζα, 2007):

- το μαθηματικό περιεχόμενο
- τις προσδοκίες απόδοσης
- τις μεταγνωστικές προοπτικές.

Το μαθηματικό περιεχόμενο ομαδοποιήθηκε σε δέκα κατηγορίες καθεμιά από τις οποίες περιελάμβανε υποκατηγορίες (όπως Αριθμοί, Μέτρηση, Γεωμετρία, Κλάσματα κ.λ.π.)

Οι προσδοκίες απόδοσης αναφέρονται στο είδος των γνώσεων και ικανοτήτων που αναμένεται να αποκτήσουν οι μαθητές μέσα από τη μελέτη του περιεχομένου.

Οι μεταγνωστικές προοπτικές αναφέρονται στην εστίαση των προγραμμάτων σπουδών ή των εγχειριδίων σε σημεία που δημιουργούν κίνητρα, θετική στάση, εγείρουν το ενδιαφέρον και προκαλούν ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία.

Την ίδια περίπου περίοδο, 1999, το American Association for the Advancement of Science (AAAS) παρατηρώντας ότι οι περισσότερες αναλύσεις σχολικών εγχειριδίων ήταν βιαστικές και αναξιόπιστες ξεκίνησε το project 2061 με στόχο να προσφέρει μια εναλλακτική πρόταση στην διαδικασία αξιολόγησης των εγχειριδίων. Το project 2061 συγκρότησε ομάδες

καθηγητών μαθηματικών, οι οποίοι ανέπτυξαν ένα εργαλείο αξιολόγησης αμερικάνικων εγχειριδίων βασισμένο σε συγκεκριμένα κριτήρια. Η διαδικασία αξιολόγησης εφαρμόστηκε ομοιόμορφα και αυστηρά, βασίστηκε στην τεκμηριωμένη ανάλυση, εντόπισε βασικές μαθηματικές ιδέες, και αξιολόγησε κάθε εγχειρίδιο με βάση 24 κριτήρια που σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση.

Σύμφωνα με το μοντέλο αξιολόγησης εγχειριδίων του project 2061 το πρώτο βήμα για την αξιολόγηση ενός εγχειριδίου είναι να εντοπιστούν οι στόχοι μάθησης, οι οποίοι παρουσιάζονται στο Πρόγραμμα Σπουδών και με τους οποίους τα εγχειρίδια θα πρέπει να ευθυγραμμίζονται. Από την αξιολόγηση 12 επιλεγμένων μαθηματικών εγχειριδίων οι κριτές κατέληξαν, μεταξύ άλλων, στο ότι τα εγχειρίδια δεν ευθυγραμμίζονται με τις δεξιότητες σκέψης που προσδιορίζονταν από τα πρότυπα των Προγραμμάτων Σπουδών και ότι μερικά παρουσίαζαν ελλείψεις και στο περιεχόμενο. Παρατήρησαν επίσης έλλειψη διδακτικών προτάσεων που να εστιάζουν στις παρανοήσεις ή τις εσφαλμένες αντιλήψεις που μπορεί να αναπτύξουν οι μαθητές, όπως προκύπτουν από τα πορίσματα ερευνών.

Η κολέζα (2007) επιχειρεί μια σύγκριση των δυο μοντέλων αξιολόγησης εγχειριδίων και καταλήγει στο ότι:

«το μοντέλο της AAAS υπερτερεί του μοντέλου της TIMSS καθώς το δεύτερο παρέχει στοιχεία για τον τρόπο παρουσίασης των θεμάτων, αλλά δεν παρέχει πληροφορίες για το πόσο καλά τα εγχειρίδια ευθυγραμμίζονται με τους στόχους του προγράμματος σπουδών ή τους προκαθορισμένους δείκτες απόδοσης».

Η ίδια αιτιολογεί την παραπάνω αδυναμία του μοντέλου της TIMSS καθώς πρόκειται για μια διεθνή συγκριτική αξιολόγηση οπότε θα ήταν παρακινδυνευμένο να οριστεί εκ των προτέρων ως σημείο αναφοράς ένα πλαίσιο σπουδών. Και επανέρχεται με τη σημαντικότερη αδυναμία του μοντέλου της TIMSS : «*δεν αντιμετωπίζει το κρίσιμο ζήτημα των εκπαιδευτικών στρατηγικών που υιοθετούν τα εγχειρίδια».*

Και στην έρευνα της AAAS αλλά και γενικότερα αναγνωρίζεται η ανάγκη οποιαδήποτε ανάλυση εγχειριδίων να λαμβάνει υπόψη το πρόγραμμα σπουδών και το ρόλο του στη διδασκαλία. Σχετικά ερωτήματα θέτει κείμενο

της UNESCO (Guidebook On Text Research and Textbook Revision, αναφορά Κολέζα, 2006):

Πως έχει σχεδιαστεί το πρόγραμμα σπουδών; Καθορίζει μόνο τους γενικούς σκοπούς της εκπαίδευσης, ή διευκρινίζει τους ιδιαίτερους στόχους του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου; Αιτιολογείται στο πρόγραμμα σπουδών πόσος χρόνος διατίθεται σε κάθε θέμα και σε ποιο ηλικιακό επίπεδο πρέπει να διδαχθεί;

Ποιος αποφασίζει σχετικά με την έγκριση ενός εγχειριδίου; Ποια ιδρύματα ή πρόσωπα έχουν την ευθύνη του προγράμματος σπουδών και ποιος πρέπει να ερωτηθεί αν απαιτούνται αλλαγές – οι συγγραφείς των εγχειριδίων, οι γονείς ή οι ακαδημαϊκοί ερευνητές; Ποιος είναι αρμόδιος και ικανός να επιχειρήσει αλλαγές στο εκπαιδευτικό υλικό και τις μεθόδους διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται;

Τα εγχειρίδια καλύπτουν εξολοκλήρου το θέμα που προσδιορίζεται στο πρόγραμμα σπουδών; Αιτιολογούνται επιστημονικά οι οποιεσδήποτε επιλογές τους; Οι δάσκαλοι έχουν εύκολη πρόσβαση στο πρόσθετο υλικό ή εξαρτώνται αποκλειστικά από το βιβλίο; Το εγχειρίδιο είναι το μόνο μέσο διδασκαλίας ή ένα μέσο μεταξύ άλλων; (Κολέζα, 2006 σελ. 12)

Η Κολέζα (2006) προτείνει δυο βασικούς άξονες για την ανάλυση των εγχειριδίων:

- Τον άξονα της δομής και του περιεχομένου τους
- Τον άξονα του τρόπου εφαρμογής τους στις τάξεις.

Στον άξονα της δομής και του περιεχομένου του εγχειριδίου διακρίνει τέσσερις διαστάσεις : μια μαθηματική, μια γνωστική, μια διδακτική και μια παιδαγωγική διάσταση, τις οποίες συνοψίζει σε δυο ευρύτερες κατηγορίες :

- Μια Γνωσιολογική/ Εννοιολογική διάσταση που περιλαμβάνει τις μαθηματικές, γνωσιακές και διδακτικές προθέσεις των εγχειριδίων, και
- Μια παιδαγωγική διάσταση που περιλαμβάνει τις κοινωνιολογικές και πολιτισμικές προθέσεις των εγχειριδίων.

Η μαθηματική διάσταση ενός σχολικού εγχειριδίου περιλαμβάνει στοιχεία που σχετίζονται με την επιλογή και την οργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου, τον τρόπο παρουσίασης της γνώσης, (γλώσσα,

αναπαραστασιακά συστήματα κ.λπ.), τις υπονοούμενες πεποιθήσεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών.

Η γνωστική διάσταση προσδιορίζει τις διαδικασίες σκέψης που θεωρούνται σημαντικές και θα πρέπει να υποστηρίζονται από κατάλληλες δραστηριότητες των εγχειριδίων, όσο και από τις διδακτικές επιλογές των δασκάλων. Αυτές οι διαδικασίες σκέψεις θα πρέπει να ευθυγραμμίζονται με τα προγράμματα σπουδών στα οποία τα εγχειρίδια οφείλουν να στηρίζονται.

Η διδακτική διάσταση αφορά στη διερεύνηση των διδακτικών αρχών που διέπουν το σχολικό εγχειρίδιο και μπορεί να σχετίζονται είτε με το περιεχόμενο του κειμένου, είτε με τις μεθόδους που επιλέγει να χρησιμοποιήσει. Ωθεί τους μαθητές να κατασκευάσουν τη γνώση; Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες ή η γνώση παρατίθεται ως έτοιμο προϊόν; Για ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα επιλέγει τις πλέον κατάλληλες μαθηματικές δραστηριότητες; και πώς τις δομεί; από το εύκολο στο δύσκολο; Ποιο διδακτικό μοντέλο υιοθετεί και πως το υπηρετεί; Αν το διδακτικό του μοντέλο είναι κονστρουκτιβιστικό θα πρέπει οι έννοιες να δομούνται στο πλαίσιο δραστηριοτήτων προς διερεύνηση από τους μαθητές. Ενώ οι αλγοριθμικές διαδικασίες θα πρέπει να στοχεύουν πέρα από την απλή τους εκτέλεση, στην κατανόηση, την εκτίμηση του αποτελέσματος, και τη χρήση σε λύση μαθηματικών ή μη μαθηματικών προβλημάτων.

Η διδακτική διάσταση του εγχειριδίου λοιπόν αξιολογείται και ως προς το αν παρέχει στήριξη στον εκπαιδευτικό για την οργάνωση της διδασκαλίας του. Αλλά επιπλέον αξιολογείται ως προς το αν συμβάλλει στη δημιουργία θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, και τη διάθεση για ενεργή εμπλοκή τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Η παιδαγωγική διάσταση των εγχειριδίων αφορά σε μια κοινωνιολογική ανάλυση των εγχειριδίων και στη διερεύνηση της γλώσσας και των μηνυμάτων που αυτή μεταφέρει. Εδώ τα σχολικά μαθηματικά εκλαμβάνονται ως μια διαδικασία αναπλαισίωσης, και συγκροτούνται στη βάση της αναπλαισίωσης της επιστημονικής γνώσης κάτω από συγκεκριμένους κανόνες. Οι κανόνες ρυθμίζουν τί και πώς από την επιστημονική γνώση θα διδαχθεί. Η ανάλυση αυτή δε στοχεύει στο να κρίνει ένα εγχειρίδιο ως προς την καταλληλότητά του αλλά να αναδείξει γλωσσικές, πολιτισμικές τάσεις και αξίες που προωθεί.

Από την **Γνωσιακή/ Εννοιολογική ανάλυση της δομής και του περιεχομένου** ενός σχολικού εγχειριδίου μαθηματικών μπορεί να προκύψουν στοιχεία για τη δομή των κεφαλαίων του εγχειριδίου. Κατά την Κολέζα (2007) η δομή και το περιεχόμενο των κεφαλαίων ακολουθεί συνήθως ένα από τα πρότυπα:

- Παρουσίαση θέματος – παραδείγματα – ασκήσεις: Στην παρουσίαση του θέματος οι συγγραφείς παρουσιάζουν υλικό ή καταστάσεις επεξεργασμένες σε κάποιο βαθμό, πάνω στις οποίες θα εργαστούν οι μαθητές για να συγκροτήσουν νοητικά στη σκοπούμενη έννοια. Η διδακτική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η καθοδηγούμενη ανακάλυψη. Τα παραδείγματα που ακολουθούν προσφέρονται ως πρότυπα για να μιμηθούν οι μαθητές στο μέρος των ασκήσεων. Οι ασκήσεις συχνά είναι διαβαθμισμένες από το απλό στο σύνθετο.
- Δραστηριότητες – μάθημα – ασκήσεις : Οι δραστηριότητες έχουν συχνά το χαρακτήρα της διερεύνησης από τους μαθητές και μέσω αυτών παρουσιάζεται στους μαθητές η προς διδασκαλία έννοια. Το μάθημα περιγράφει το αντικείμενο διδασκαλίας με παραδείγματα. Οι ασκήσεις στοχεύουν στην εφαρμογή των ιδεών του κεφαλαίου, την εξοικείωση με το λεξιλόγιο, τις εκφράσεις, το μαθηματικό συμβολισμό, την επικοινωνία των νέων μαθηματικών νοημάτων, αλλά και τη επίλυση προβλημάτων που απαιτούν αναστοχασμό και λήψη πρωτοβουλίας.

Ένα πλαίσιο ανάλυσης μαθηματικών εγχειριδίων μας δίνουν και οι Tarr, Reys, Barker & Billstein, (2006). Περιγράφουν ποιοτικά χαρακτηριστικά οργανωμένα γύρω από τρεις διαστάσεις –έμφαση στο μαθηματικό περιεχόμενο, διδακτική εστίαση, υποστήριξη στον εκπαιδευτικό- για την ανάλυση και την επιλογή μαθηματικών εγχειριδίων.

Έμφαση στο μαθηματικό περιεχόμενο: Προτείνουν μια σειρά από παράγοντες που σχετίζονται με το μαθηματικό περιεχόμενο των εγχειριδίων και οι οποίοι θα πρέπει να εξεταστούν ως προς τα ποιοτικά τους

χαρακτηριστικά για την ανάλυση των εγχειριδίων. Μεταξύ άλλων ζητούν να εξετάζεται :

- Σε ποιο βαθμό τα μαθηματικά του εγχειριδίου είναι ευθυγραμμισμένα με τις προσδοκίες μάθησης που παρουσιάζονται στο Principles and Standards for School Mathematics ή οποιουδήποτε Προγράμματος Σπουδών έχει υιοθετήσει το σχολείο, η περιοχή ή η χώρα;
- Υπάρχει κατάλληλη ισορροπία μεταξύ εννοιολογικής κατανόησης, ανάπτυξης δεξιοτήτων και μαθηματικών διεργασιών;
- Είναι οι μαθηματικές ιδέες συνδεδεμένες και συνυφασμένες στους διάφορους κλάδους ή μελετώνται ανεξάρτητα στον ένα από τον άλλο;
- Τα μαθηματικά θέματα παρουσιάζονται σε βάθος μέσα στο εγχειρίδιο και με αυξανόμενη πολυπλοκότητα από τάξη σε τάξη στις σειρές βιβλίων;
- Προσφέρονται προβλήματα στους μαθητές, στο συγκείμενο των οποίων, όπου είναι εφικτό, εγείρονται οι μαθηματικές ιδέες;
- Το διδακτικό υλικό διατηρεί υψηλές προσδοκίες για όλους τους μαθητές;

Διδακτική εστίαση : Οι ποιοτικές εκτιμήσεις για τη διδακτική εστίαση των μαθηματικών εγχειριδίων αναζητούν κατά πόσο το υλικό, οι δραστηριότητες και τα προβλήματα του εγχειριδίου ασκούν τους μαθητές στη μαθηματική σκέψη. Οι Tarr et al. (2006) προτείνουν για την ανάλυση των εγχειριδίων ως προς τη διδακτική τους εστίαση, να επιλέγονται συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα που παρουσιάζονται στο εγχειρίδιο και να αναλύονται προσεκτικά οι τρόποι παρουσίασής τους αλλά και το τι ζητείται να κάνουν οι μαθητές. Μερικές από τις εκτιμήσεις που προτείνουν να γίνονται είναι:

- Σε ποιό βαθμό οι προτεινόμενες δραστηριότητες καταδεικνύουν την ανάπτυξη των μαθηματικών ως μια ανθρώπινη προσπάθεια και ως τρόπο σκέψης;
- Προάγουν το διάλογο στην τάξη και απαιτούν ρητά οι μαθητές να μοιράζονται τις σκέψεις και τις στρατηγικές τους;

- Τα μαθηματικά έργα με τα οποία καταπιάνονται οι μαθητές τους κινητοποιούν και τους προκαλούν να σκεφτούν μαθηματικά;
- Τα μαθήματα ενσωματώνουν, όπου προσφέρεται, διδακτικά εργαλεία και τεχνολογία, ώστε να βοηθούνται οι μαθητές να οπτικοποιούν έννοιες, να προσλαμβάνουν και να αναλύουν πληροφορίες και να επικοινωνούν λύσεις;
- Οι δραστηριότητες είναι τέτοιες ώστε να προκαλούν διερεύνηση, συλλογισμό, κριτική σκέψη, λύση προβλήματος και αίσθηση νοήματος;

Υποστήριξη στον εκπαιδευτικό : Κατά τους Tarr et al. ένα ποιοτικό εγχειρίδιο δε μπορεί να είναι μόνο οδηγός πορείας του τι να διδάξει κανείς. Οφείλει να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς ιδέες και υλικά τέτοια, που να βοηθούν τους μαθητές να εικάζουν να παράγουν και να γενικεύουν μαθηματικούς συλλογισμούς, καθώς και υποστηρικτικά υλικά στους καθηγητές για να σχεδιάσουν και να εφαρμόσουν τη διδασκαλία τους. Σχετικά με την υποστήριξη που προσφέρει το εγχειρίδιο στον εκπαιδευτικό μερικές εκτιμήσεις που μπορούν να γίνουν είναι :

- Ποια εργαλεία παρέχει για την αξιολόγηση της πορείας της διδασκαλίας και τη λήψη αποφάσεων (π.χ. δραστηριότητες, ανοικτές ερωτήσεις, τεστ);
- Τα υλικά που παρέχει, δίνουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να αυξήσει τη δική του κατανόηση γύρω από τις μεγάλες ιδέες των μαθηματικών που μελετούν οι μαθητές;
- Υπάρχουν προτάσεις για τη διδακτική προσαρμογή των δραστηριοτήτων ώστε να είναι κατάλληλες για μαθητές με ιδιαίτερες ανάγκες;
- Παρέχονται πληροφορίες σχετικά με τις μαθηματικές ιδέες που πρέπει ήδη να γνωρίζουν οι μαθητές, καθώς και κοινές παρανοήσεις και λανθασμένες αντιλήψεις που μπορεί να προκληθούν κατά τη διδασκαλία;
- Υπάρχει ποικιλία προβλημάτων, ασκήσεων και προτάσεων project που μπορούν να δοθούν ως εργασία για το σπίτι;

Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών στον κόσμο.

Το να δημιουργήσουμε τάξεις μαθηματικών όπου οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά στη μελέτη σημαντικών μαθηματικών είναι μια πρόκληση για καθένα από μας τους εκπαιδευτικούς και την πολιτεία. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί συχνά διδάσκουν όπως έχουν οι ίδιοι διδαχθεί. Η μετάβαση από πρακτικές του τύπου «λέω και δείχνω» σε πρακτικές που ενθαρρύνουν τους μαθητές στη μελέτη μέσω μαθηματικής διερεύνησης είναι μια δύσκολη μετατόπιση στη φιλοσοφία και την πρακτική.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και η χρήση τους στην Αμερική

Στη δεκαετία του ΄90 στις Ηνωμένες Πολιτείες το National Science Foundation (NSF) χρηματοδότησε 12 projects για την ανάπτυξη σειρών μαθηματικών εγχειριδίων που ενσωμάτωναν την οπτική των προτύπων του NCTM (NCTM 1989, 1991, 1995). Τα 12 αυτά projects δημιούργησαν σειρές εγχειριδίων για όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης (elementary, middle and high school level). Επιπρόσθετα τα 12 projects συνεργάστηκαν με τους εκδότες εμπορικών εγχειριδίων, οι οποίοι συνέγραψαν τα εγχειρίδιά τους διαθέσιμα για χρήση στα αμερικάνικα σχολεία. Κάθε σειρά εγχειριδίων που υποστηρίχθηκε από το NSF σχεδιάστηκε για να αποτελέσει ένα συνεκτικό σύνολο υλικών που αναπτύσσει τις μαθηματικές ιδέες διαμέσου προσεγγίσεων που στηρίζονται σε προβλήματα. Συνεπώς η διδακτική διαδικασία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ενεργό εμπλοκή των μαθητών σε διερευνήσεις και την κατασκευή νοήματος, και λιγότερο σε διδακτικά μοντέλα τύπου «επιδεικνύω κάτι και μετά οι μαθητές το επαναλαμβάνουν» που αποτελούσε το προηγούμενο μοντέλο διδασκαλίας.

Υπάρχουν ερευνητικά στοιχεία που δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν αυτού του τύπου τα εγχειρίδια για τη μελέτη των μαθηματικών επωφελούνται τόσο ως προς την κατανόηση που αναπτύσσουν, όσο και ως προς τις αποδόσεις τους σε σταθμισμένα τεστ (Riordin & Noyce 2001, αναφορά σε Arbaugh et al.2006). Ταυτόχρονα υπάρχουν και έρευνες που υποστηρίζουν πως το τι θα πετύχουν οι μαθητές με αυτά τα εγχειρίδια εξαρτάται και από τον τρόπο που τα χρησιμοποιούν οι δάσκαλοί τους (Tarr, Reys, Chavez & Shih, 2006). Τα επιτεύγματα των μαθητών δεν εξαρτώνται

μόνο από το διδακτικό υλικό που τους παρέχεται αλλά κυρίως από τις πρακτικές που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί στις τάξεις τους.

Οι Arbaugh et al.(2006) υποστηρίζουν ότι εφοδιάζοντας τους εκπαιδευτικούς με νέα βιβλία δε έχουμε απαραίτητα ως αποτέλεσμα, τη χρήση τους όπως είναι στις προθέσεις των συγγραφέων. Σε έρευνα σχετικά με τη χρήση της σειράς εγχειριδίων Core - Plus από 26 καθηγητές και τις πρακτικές που αυτοί υιοθετούν στις τάξεις τους, κατέληξαν ότι η χρήση εγχειριδίων δομημένων στη βάση προβλημάτων δεν είναι από μόνη της αρκετή ώστε να έχει επίδραση στις διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζονται στην τάξη.

Η πρόκληση για τους σχεδιαστές των αλλαγών και την πολιτεία, είναι ο τρόπος με τον οποίο θα υποστηρίξουν τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά εγχειρίδια όπως είναι στις προθέσεις των συγγραφέων τους, και σε συνέπεια με αυτά που το Πρόγραμμα Σπουδών επιβάλλει.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και η χρήση τους στην Ελλάδα

Στην Ελλάδα δεν έχουμε πολλές έρευνες με αντικείμενο την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών. Το 2009 δημοσιεύτηκε ένα τεύχος με τα ευρήματα πανελλαδικής έρευνας του Ινστιτούτου Παιδαγωγικών Ερευνών – Μελετών (Ι.Π.Ε.Μ) και της Διδασκαλικής Ομοσπονδίας Ελλάδας (Δ.Ο.Ε.) για τα νέα σχολικά βιβλία του Δημοτικού που χρησιμοποιούνται από το σχολικό έτος 2007-2008. Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών αξιολογήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς που τα χρησιμοποίησαν ως προς τη χρηστικότητα, την εικονογράφηση, την επιτυχή διάταξη του περιεχομένου, τη γλώσσα, τη διάταξη των ενοτήτων, το επίπεδο δυσκολίας των παραδειγμάτων και των ασκήσεων και το κατά πόσο το πλαίσιο των παραδειγμάτων και των ασκήσεων είναι προσαρμοσμένα στα ενδιαφέροντα των μαθητών. Δυο ακόμα έρευνες έχουμε σε σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών Δημοτικού, μια των Μαστρογιάννη και Μαλέτσο σχετικά με τη δομή και τη γλώσσα του διδακτικού εγχειριδίου μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού και μια ανάλυση του μαθηματικού λόγου στα νέα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών για τις τάξεις Ε΄ και ΣΤ΄.

Οι Haggarty & Pepin (2002) διερεύνησαν τα εγχειρίδια των Μαθηματικών και τη χρήση τους σε αγγλικές, γαλλικές και γερμανικές τάξεις. Ενώ οι Hino, Kaiser, Knipping (2005) έκαναν μια μετα-ανάλυση δυο προηγούμενων συγκριτικών ερευνών και μια ανάλυση του περιεχομένου των εγχειριδίων μαθηματικών στην Ιαπωνία και προτείνουν ένα πλαίσιο ανάλυσης της μαθηματικής εκπαίδευσης σε Ανατολή και Δύση. Τα συμπεράσματα των Haggarty & Pepin, όπως τα συνοψίζουν οι ίδιοι οι συγγραφείς (σελ. 586-588) και των Hino et al., όπως αναγνώσαμε στην έρευνα που προαναφέραμε, ακολουθούν:

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και η χρήση τους στη Γαλλία

Στη Γαλλία, παραδοσιακά αλλά και σήμερα υποστηρίζεται η φορμαλιστική διάσταση των Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά θεωρούνται ως ένα δομημένο σώμα προ-ανακαλυφθείσας γνώσης. Η πρόθεση φαίνεται να είναι να ενισχυθούν οι μαθητές, μέσω καθοδηγούμενης ανακάλυψης, να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και μέσω της πρακτικής να επιτύχουν ευχέρεια στη χρήση αυτών των εννοιών.

Οι Hino et al. τονίζουν την εστίαση των σχολικών μαθηματικών στη δομή. Η θεωρία τίθεται ρητά μέσω εννοιών, θεωρημάτων και τύπων. Το αναλυτικό πρόγραμμα στη βάση του οποίου οργανώνονται τα μαθήματα είναι δομημένο σε θεματικές περιοχές των μαθηματικών. Οι έννοιες και οι μέθοδοι διδάσκονται με μια σειρά που δομείται βάσει των θεματικών περιοχών και όπως περιγράφονται στο εθνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Το μάθημα ξεκινά με γενικές έννοιες και κανόνες και προχωρά με συμπεράσματα και εφαρμογές. Τα θεωρήματα και οι αποδείξεις τους τυγχάνουν ιδιαίτερης προσοχής και αυτό καταδεικνύεται καλύτερα στην περιοχή της Γεωμετρίας. Για την εισαγωγή των νέων μαθηματικών εννοιών δε χρησιμοποιούνται παραδείγματα προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Οι νέες έννοιες και μέθοδοι εισάγονται συνήθως μέσα από δραστηριότητες με ενδομαθηματικό κυρίως πλαίσιο που έχουν στόχο να δείξουν την αξία της νέας γνώσης στην επίλυση προβλημάτων.

Η όλη διδασκαλία έχει στο κέντρο της τις ασκήσεις και την ατομική εργασία των μαθητών στο σχολείο και στο σπίτι. Η επικοινωνία λαμβάνει χώρα διαμέσου του καθηγητή. Οι έννοιες και οι μέθοδοι σχηματίζονται στη

βάση ορισμών και θεωρημάτων και γράφονται στον πίνακα. Οι μαθητές ασκούνται ιδιαίτερα σε διαδικασίες και αλγορίθμους και καλούνται να λύσουν ασκήσεις ιδιαίτερα απαιτητικές. Σε αυτές οι αιτιολογήσεις οφείλουν να είναι σε θεωρητικό γενικό επίπεδο. Ισχυρισμοί βασισμένοι σε παραδείγματα σπάνια γίνονται δεκτοί.

Στη γεωμετρία οι αποδείξεις στηρίζονται στο γεωμετρικό σχήμα. Οι συλλογισμοί που οδηγούν στη λύση απαιτούν γενική διατύπωση που αφορούν το γενικό και όχι το στιγμιότυπο του σχήματος που σχεδιάστηκε.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και η χρήση τους στη Γερμανία

Στα γερμανικά εγχειρίδια, τα Μαθηματικά, σε γενικές γραμμές, θεωρούνται, όπως και στα αντίστοιχα γαλλικά, ως ένα δομημένο προ-ανακαλυφθέν σώμα γνώσης, μια στατική επιστήμη που αναπτύσσεται σε αφηρημένο επίπεδο. Θεωρείται ότι η επιστήμη των Μαθηματικών αποτελείται από σύμβολα και κανόνες που είναι αδιαμφισβήτητα αληθείς.

Γενικά, στα γερμανικά εγχειρίδια, το μήνυμα είναι ότι τα Μαθηματικά είναι σωστά, λογικά, ουδέτερα, δύσκολα, αλλά επίσης, χρήσιμα για την επιστήμη, την τεχνολογία και τον εργασιακό χώρο. Η πρόθεση είναι να γίνουν κατανοητές οι μαθηματικές έννοιες μέσω της παρουσίασης θεωρητικών μαθηματικών ιδεών και εξάσκηση σε ασκήσεις.

Και οι Hino et al.τονίζουν την έμφαση των γερμανικών εγχειριδίων στη δομή των μαθηματικών και τη μαθηματική θεωρία η οποία συχνά περιορίζεται σε κανόνες και αλγορίθμους. Δεν υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ θεματικών περιοχών και το πρόγραμμα σπουδών αναπτύσσεται σε θεματικές περιοχές που μπορεί να διαρκούν μήνες χωρίς να επανέρχεται ξανά σε αυτές.

Οι νέες έννοιες και οι μέθοδοι εισάγονται με συζήτηση στην τάξη, κάποιες φορές η συζήτηση γίνεται και μεταξύ μαθητών. Για την εισαγωγή των νέων εννοιών χρησιμοποιείται το πλαίσιο πραγματικών προβλημάτων, τα οποία δεν είναι συνήθως αυθεντικά πραγματικά προβλήματα, αλλά φτιαγμένα για να επεξηγήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο, ή αποτελούν περιβάλλον για πρακτική των μαθηματικών μεθόδων.

Η όλη διδασκαλία είναι προσανατολισμένη στη χρήση κανόνων και αλγορίθμων, η ακριβής εκτέλεση των οποίων θεωρείται σημαντική, και οι μαθητές ασκούνται στην εκτέλεση και τους μετασχηματισμούς τους με πλήθος

ασκήσεων. Στις μεγάλες τάξεις (Gymnasium) δίνεται έμφαση και στις αποδείξεις των θεωρημάτων ειδικά στη Γεωμετρία.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και η χρήση τους στην Αγγλία

Στα σχολικά εγχειρίδια της Αγγλίας, τα Μαθηματικά εμφανίζονται ως ένα σύνολο ανεξάρτητων, αλλά χρηστικών κανόνων και γεγονότων. Υπάρχει βέβαια, μια διάχυτη τάση να συμπεριληφθούν δεξιότητες που αφορούν όχι απλά το μαθηματικό προϊόν αλλά και τη διαδικασία, όπου οι μαθητές καλούνται να εκτελέσουν στοιχειώδεις ερευνητικές διαδικασίες, αλλά αυτή η τάση διατηρείται στο περιθώριο και δεν θεωρείται απαραίτητο συστατικό για τη μάθηση των Μαθηματικών.

Επιπλέον, αν και υπάρχει στο πρόγραμμα σπουδών απαίτηση για έμφαση στη γλώσσα των Μαθηματικών, αυτό δεν τηρείται συνήθως στα εγχειρίδια. Στην πραγματικότητα, η γλώσσα είναι περιορισμένη, και μερικές φορές δεν υπάρχει καμία λέξη σε κάποιες σελίδες. Στην Αγγλία, η πρόθεση είναι να αποκτήσουν οι μαθητές άνεση στη χρήση στερεότυπων δεξιοτήτων μέσω της επαναλαμβανόμενης πρακτικής σε ασκήσεις.

Οι Hino et al. εστιάζουν στις προθέσεις των αγγλικών μαθηματικών εγχειριδίων, για μια ρεαλιστική κατανόηση της θεωρίας, που δε βάζει στο προσκήνιο την ίδια τη μαθηματική δομή. Οι τύποι οι κανόνες και τα θεωρήματα δεν έχουν μεγάλη σημασία, αλλά η κατασκευή των μαθηματικών εργαλείων. Έτσι θεωρήματα όπως για παράδειγμα, το Πυθαγόρειο θεώρημα, που αποτελεί κεντρικό θέμα διδασκαλίας στις γαλλικές και γερμανικές τάξεις εδώ καλείται κανονικότητα (pattern) ή μπορεί και να μη διδάσκεται καθόλου. Το αναλυτικό πρόγραμμα είναι σπειροειδές. Έννοιες εισάγονται και επανέρχονται σε μεγαλύτερες τάξεις με αυξανόμενη πολυπλοκότητα.

Οι νέες μαθηματικές έννοιες δεν εισάγονται ρητά, αλλά μέσω μιας ακολουθίας δραστηριοτήτων σε ένα πλαίσιο συζήτησης στην τάξη ή και σε ατομική εργασία από το εγχειρίδιο. Η εστίαση είναι στα παραδείγματα από τον πραγματικό κόσμο, τα οποία άλλοτε είναι χρήσιμα για την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, και άλλοτε για να δείξουν τη δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών στη λύση προβλημάτων έξω από αυτά.

Παρατηρούνται δυο στυλ διδασκαλίας, το πιο παραδοσιακό στο οποίο εναλλάσσονται η συζήτηση στην τάξη με την ατομική εργασία, και ένα

περισσότερο μαθητοκεντρικό. Στο τελευταίο οι μαθητές εμπλέκονται και σε διερευνητικές δραστηριότητες καθώς λύνουν προβλήματα. Οι λύσεις διαμορφώνονται πάνω στο συγκεκριμένο παράδειγμα και λόγω της μη έμφασης σε αλγορίθμους και τεχνικές οι μαθητές δεν εκτίθενται σε γενικές μεθόδους λύσης με ονόματα (π.χ. μέθοδος του τριωνύμου). Η γενίκευση δε θεωρείται σπουδαία.

Οι μαθητές δεν εμπλέκονται σε διαδικασίες απόδειξης θεωρημάτων. Τις περισσότερες φορές αυτές προκύπτουν από τη χρήση παραδειγμάτων. Συχνά και οι ίδιοι οι καθηγητές χρησιμοποιούν τον όρο απόδειξη (proof) για να αναφερθούν σε αιτιολόγηση με χρήση παραδειγμάτων. Ως αποτέλεσμα οι μαθητές δε συνηθίζουν να αναζητούν γενικές εξηγήσεις όταν διερευνούν κάτι ή ελέγχουν μια λύση τους αλλά βασίζονται σε παραδείγματα.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και η χρήση τους στην Ιαπωνία

Στην Ιαπωνία το National Course of Study θέτει τους στόχους και το περιεχόμενο για τα σχολικά μαθηματικά. Η θεωρία τίθεται ρητά μέσω εννοιών, τύπων και θεωρημάτων και με χρήση κανόνων και αλγορίθμων παρόλο που η πρακτική της τάξης είναι διαπραγμάτευση της θεωρίας στο πλαίσιο δραστηριοτήτων για τη λύση προβλήματος. Η μαθηματική δραστηριότητα σύμφωνα με το Course of Study θεωρείται η οδός για τη μελέτη των μαθηματικών. Οι στόχοι δεν αφορούν μόνο το περιεχόμενο διδασκαλίας αλλά ορίζουν και στόχους σκέψης ορίζοντας τέσσερα επίπεδα : γνώση, κατανόηση, διεργασίες και χρήση.

Η εισαγωγή των νέων μαθηματικών εννοιών και μεθόδων ωθείται με τη χρήση παραδειγμάτων του πραγματικού κόσμου (όχι τεχνητά) και στο πλαίσιο καταστάσεων λύσης προβλήματος. Μετά την εισαγωγή των εννοιών ακολουθούν ασκήσεις -όχι απαραίτητα πολλές- στο εγχειρίδιο. Οι αλγόριθμοι και οι τύποι έχουν τη σπουδαιότητά τους και οι μαθητές έχουν να τους απομνημονεύσουν καθώς απαιτούνται για τις εισαγωγικές εξετάσεις σε ανώτερο επίπεδο.

Τα εγχειρίδια ενθαρρύνουν τους μαθητές, να κάνουν εικασίες ενώ παρατηρούν, πειραματίζονται και διερευνούν, και να διατυπώνουν και να αποδεικνύουν τις εικασίες τους. Κάποια εγχειρίδια ζητούν από τους μαθητές να δουλέψουν με παραδείγματα και να κάνουν εικασία για τη γενική ισχύ

κάποιου κανόνα. Την ανάγκη για απόδειξη δεν την αναγνωρίζουν πάντα οι ιάπωνες μαθητές. Το εγχειρίδιο επιχειρώντας να δώσει έμφαση σε αυτό επαναλαμβάνει συχνά φράσεις όπως: «αιτιολόγηση του φαινομένου», «εξήγηση χωρίς υπολογισμούς» ειδικά στις μικρές τάξεις. Στις μεγαλύτερες τάξεις οι αποδείξεις θεωρούνται σημαντικές για να εισάγουν τους μαθητές στο θεωρητικό τρόπο σκέψης ειδικά στο πλαίσιο της Γεωμετρίας.

Συνήθως οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες λύσης προβλήματος στην αρχή ατομικά και μετά παρουσιάζουν τη λύση τους στον πίνακα και τη συζητούν. Ο καθηγητής καθοδηγεί τη συζήτηση με όλη την τάξη ενώ στα πρώτα βήματα της ατομικής εργασίας ο καθηγητής βρίσκεται ανάμεσα στους μαθητές παρέχοντας υποστήριξη και βοήθεια.

Η διδασκαλία στη Ιαπωνία στηρίζεται πολύ στο σχολικό εγχειρίδιο. Τα παραδείγματα που αυτό χρησιμοποιεί και το πλαίσιό τους επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών. Όμως η χρήση και η ενσωμάτωση αυτών στη διδακτική διαδικασία εξαρτάται από τον καθηγητή. Μια πρακτική ιδιαίτερα σημαντική που συνηθίζουν να χρησιμοποιούν οι ιάπωνες εκπαιδευτικοί είναι να παρακολουθεί ο ένας τη διδασκαλία του άλλου. Να σχεδιάζουν, να υλοποιούν διδασκαλίες να συζητούν μεταξύ τους και να επανασχεδιάζουν τη διδασκαλία τους. Επιπλέον τη συγγραφή των εγχειριδίων έχουν αναλάβει έμπειροι καθηγητές μαθηματικών και ακαδημαϊκοί. Οι Hino et al. βρίσκουν τη δομή των εγχειριδίων να αντικατοπτρίζει τη δομή της τάξης, που μοιάζει με τη ροή του ποταμού : «*ξεκινάει καλλιεργώντας το ενδιαφέρον των μαθητών και προχωράει στη λύση προβλημάτων από τους ίδιους. Στη συνέχεια εξηγεί το μαθηματικό περιεχόμενο και τελειώνει με ασκήσεις».*

2.2 Τα παραδείγματα και η διαχείριση τους

2.2.1 Τι είναι μαθηματικό παράδειγμα;

Ο όρος παράδειγμα χρησιμοποιείται στη μαθηματική εκπαίδευση με μια ευρεία ποικιλία τρόπων. Η χρήση των παραδειγμάτων στη διδασκαλία είναι συνυφασμένη σε τέτοιο βαθμό με αυτό που οι καθηγητές μαθηματικών κάνουν, ώστε να είναι δύσκολο να πάει κανείς πίσω και να απομονώσει τι

εννοεί με τον όρο «παράδειγμα», παρόλο που μοιάζει να είναι σχεδόν προφανές. Θα προσπαθήσουμε να δούμε τις διαφορετικές χρήσεις του όρου και να τονίσουμε διακρίσεις μεταξύ διαφορετικών χρήσεων αυτού.

Παραδείγματα επεξεργασμένα για τη λύση προβλημάτων (worked examples) έχουν πραγματικά καίρια θέση σε κάθε διδακτική εξήγηση, και παραδείγματα όλων των ειδών είναι από τα βασικά τεχνάσματα που χρησιμοποιούνται μεταξύ καθηγητών και μαθητών για να διευκρινίσουν και να επικοινωνήσουν έννοιες. Είναι ουσιώδη για τη γενίκευση, την αφαίρεση και τον αναλογικό συλλογισμό. Διαγράμματα, σύμβολα και συλλογισμοί αντιμετωπίζονται ως ειδικά ακόμα και αν, από τον καθηγητή τουλάχιστον, τίθενται ως γενικά.

Τα παραδείγματα μας εισάγουν διαισθητικά στην ίδια τη φύση των μαθηματικών, μέσω της χρήσης τους σε πολύπλοκα έργα που παρουσιάζουν μεθόδους, στην ανάπτυξη έννοιας, καθώς υποδεικνύουν σχέσεις, και στις επεξηγήσεις και τις αποδείξεις. Το ζητούμενο βέβαια είναι αν δάσκαλοι και μαθητές «πιάνουν το ίδιο» μέσα από αυτά.

Σύμφωνα με τους Watson & Mason (2002a, 2002b) παράδειγμα είναι, οτιδήποτε χρησιμοποιείται ως πρώτη ύλη για γενίκευση, περιλαμβάνοντας διαισθητικές σχέσεις και επαγωγικό συλλογισμό, διευκρινίσεις εννοιών και αρχών. Τονίζουν μια ευρύτερη κλάση, κινητοποιούν, εκθέτουν σε δυνατές μεταβολές και αλλαγές και προσδίδουν ευχέρεια σε τεχνικές.

Κατά τους Bills et al. (2006) ο όρος επεξήγηση μέσω παραδείγματος (exemplification) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κατάσταση εκείνη, στην οποία κάτι συγκεκριμένο προσφέρεται για να αναπαραστήσει μια γενική τάξη, στην οποία θα πρέπει να εστιαστεί η προσοχή των μαθητών. Κρίσιμο χαρακτηριστικό αποτελεί το γεγονός ότι τα παραδείγματα επιλέγονται μέσα από ένα εύρος δυνατοτήτων και είναι ζωτικής σημασίας η εκτίμηση του εύρους αυτού από τους μαθητές.

Οι Zodik και Zaslavsky (2008) σχετικά με το τι συνιστά παράδειγμα θέτουν :

> *«Θεωρητικά, κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να ειδωθεί ως ένα παράδειγμα, δηλαδή ως μια ειδική περίπτωση μιας ευρύτερης τάξης. Έχουμε τη θέση ότι για να γίνει ένα μαθηματικό (ή άλλο) αντικείμενο ένα παράδειγμα για κάτι, θα πρέπει να υπάρξει μια νοητική αλληλεπίδραση*

ανάμεσα στο πρόσωπο και το αντικείμενο η οποία την καταγράφει στα μάτια του προσώπου ως ένα παράδειγμα μιας ευρύτερης τάξης». (σελ. 169)

Το παράδειγμα είναι μια νεφελώδης οντότητα. Θα μπορούσε να είναι μια απλή έκφραση ή ένα σύνθετο πρόβλημα που αποτελείται από πολλά στάδια. Οι διαφορετικές σημασίες που αποδίδονται στα μαθηματικά παραδείγματα προκύπτουν από τις διαφορετικές οπτικές των καθηγητών μαθηματικών, των ερευνητών, των μαθητών. Ένα παράδειγμα μπορεί να υπάρχει ως ένα αντικείμενο ή να χρησιμοποιείται για να ορίσει, να χαρακτηρίσει ή να δηλώσει μια μαθηματική έννοια ή ιδέα. Μια πρακτική άσκηση, όπως η λύση μιας εξίσωσης, γενικά δεν μπορεί να θεωρηθεί παράδειγμα εκτός αν ο καθηγητής ή ο μαθητής ρητά αναφερθεί σε αυτό ως ένα παράδειγμα μιας πιο γενικής τάξης εξισώσεων, ή ως μια επεξήγηση μιας πιο γενικής διαδικασίας.

Όπως αναφέρει η Zaslavsky, (2010) παρόλο που πολλά αντικείμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παραδείγματα είναι σαφές ότι από παιδαγωγική άποψη μερικά από αυτά έχουν μεγαλύτερη επεξηγηματική δύναμη από άλλα, είτε γιατί αυτά υπογραμμίζουν τα ειδικά χαρακτηριστικά του αντικειμένου, είτε γιατί δείχνουν πώς να φτιάξει κανείς άλλα παραδείγματα της κεντρικής έννοιας, ιδέας, αρχής ή διαδικασίας.

Άλλωστε η επιλογή των παραδειγμάτων είναι η τέχνη της διδασκαλίας μαθηματικών.

2.2.2 Παιδαγωγικός ρόλος των παραδειγμάτων

«*Τα παραδείγματα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής σκέψης , μελέτης και διδασκαλίας, ιδίως όσο αφορά την οριοθέτηση εννοιών (conceptualization), τη γενίκευση την αφαίρεση, την επιχειρηματολογία, και τον αναλογικό συλλογισμό*», αναφέρουν οι Zodik και Zaslavky (2008, σελ. 165). Όταν τα παραδείγματα εκπληρώνουν αυτό το ρόλο, τότε παραδειγματοποιούν (exemplify). Όμως αυτός ο προφανής σκοπός των παραδειγμάτων πρέπει να ειδωθεί ως τέτοιος και από τους μαθητές. Γιατί όπως καταθέτουν οι Goldenberg και Mason (2008)

«τα μαθηματικά αντικείμενα γίνονται παραδείγματα μόνο όταν γίνονται αποδεκτά ως 'παραδείγματα από κάτι': εικασίες και έννοιες, εφαρμογές

τεχνικών ή μεθόδων και κατασκευές υψηλότερων δομών όπως τύπους αποδείξεων, χρήση διαγραμμάτων, ειδικό συμβολισμό ή άλλη υποστήριξη, και ούτω καθεξής» (σελ. 184).

Ο όρος «διδακτικά παραδείγματα» αναφέρεται από τη Zaslavsky (2010), προκειμένου να παραπέμψει σε παραδείγματα που προσφέρονται από το δάσκαλο των μαθηματικών ή ένα μαθητή, σε ένα πλαίσιο μελέτης ενός συγκεκριμένου θέματος. Ο ρόλος τους στη μελέτη των μαθηματικών παραμένει σπουδαίος, και πηγάζει από τον κεντρικό ρόλο που έτσι κι αλλιώς διατηρούν τα παραδείγματα στα μαθηματικά και τη μαθηματική σκέψη.

Όπως ήδη αναφέραμε οι Watson και Mason θέτουν τα παραδείγματα ως ειδικές περιπτώσεις μιας ευρείας κλάσης (ιδέας, έννοιας, τεχνικής), από την οποία οι μαθητές μπορούν να σκέφτονται και να γενικεύουν. Κάθε παράδειγμα τίθεται σε ένα πλαίσιο (context) και μεταφέρει κάποια χαρακτηριστικά τα οποία προορίζονται για παραδειγματοποίηση, και άλλα που είναι άσχετα. Ο Dorfler (1991) αναπτύσσει έναν ευρύ προβληματισμό σχετικά με το πώς να διακρίνει κανείς σε διάφορα παραδείγματα, ποιο είναι το προς γενίκευση χαρακτηριστικό και να εστιάσει σε αυτό. Ο δάσκαλος των μαθηματικών θα πρέπει να έχει επίγνωση του γεγονότος ότι οι μαθητές μπορεί να μην βλέπουν τι αντιπροσωπεύει το παράδειγμα ή πια γενική κλάση αναπαριστά, και να εγκλωβίζονται σε μη σχετικά χαρακτηριστικά.

Οι Bills et al. (2006) σε ανασκόπηση της χρήσης των παραδειγμάτων, προτείνουν δυο βασικά γνωρίσματα που καθιστούν παιδαγωγικά χρήσιμο ένα παράδειγμα, από την οπτική της διδασκαλίας.

(1) Η διαφάνειά του για το σπουδαστή: δηλαδή το κατά πόσο καθιστά σχετικά εύκολο το να κατευθύνει την προσοχή του κοινού στο οποίο απευθύνεται, στα χαρακτηριστικά που το καθιστούν υποδειγματικό.

(2) Το κατά πόσο ενθαρρύνει τη γενίκευση. Ένα «καλό» διδακτικά παράδειγμα θα πρέπει να υπογραμμίζει τα αναγκαία ειδικά χαρακτηριστικά ενός παραδείγματος της περίπτωσης που διευκρινίζεται, και την ίδια στιγμή να δείχνει και τα αυθαίρετα και μεταβλητά χαρακτηριστικά. Τα παραδείγματα που έχουν μερικά από τα παραπάνω χαρακτηριστικά, είναι πιθανό να εξυπηρετήσουν ως παραδείγματα αναφοράς, με τα οποία μπορεί κανείς να αιτιολογήσει και σε άλλες παρόμοιες καταστάσεις.

Ασφαλώς ο βαθμός στον οποίο ένα παράδειγμα είναι διάφανο ή χρήσιμο, ο τρόπος με τον οποίο ερμηνεύεται και τα χαρακτηριστικά τα οποία κανείς θεωρεί αξιοσημείωτα, είναι υποκειμενικά και σχετίζονται και με τα συμφραζόμενα. Για παράδειγμα, προκειμένου να εξηγήσει κάποιος μέσω παραδείγματος «μια συνάρτηση που παίρνει την τιμή -2 όταν x=3» μπορεί να φέρει ως παράδειγμα τη συνάρτηση με τύπο $f(x)= -2$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση αν και ικανοποιεί την απαιτούμενη συνθήκη δεν μεταφέρει το εύρος παραδειγμάτων τέτοιων συναρτήσεων. Συνεπώς ενώ πολλά αντικείμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παραδείγματα, είναι ξεκάθαρο ότι από παιδαγωγική άποψη μερικά από αυτά έχουν περισσότερη επεξηγηματική δύναμη από άλλα. Είτε γιατί υπογραμμίζουν τα ειδικά χαρακτηριστικά του αντικειμένου, είτε γιατί σου δείχνουν πώς να κατασκευάσεις πολλά άλλα που εστιάζουν στην ιδέα, την έννοια, την αρχή ή τη διαδικασία που παραδειγματοποιείται.

Έτσι, ο ρόλος του δασκάλου είναι να προσφέρει ευκαιρίες μελέτης που περιλαμβάνουν μεγάλη ποικιλία «χρήσιμων» παραδειγμάτων, (αλλά όχι τόσο μεγάλη ώστε να προκαλείται σύγχυση) για να αντιμετωπίσει τις διαφορετικές ανάγκες και τα χαρακτηριστικά των μαθητών του.

Η Zaslavsky ορίζει την έννοια της διαφάνειας στη μελέτη και την κατανόηση των μαθηματικών συνδεδεμένη τόσο με μαθηματικά αντικείμενα όσο και με διαδικασίες. Τη θεωρεί συνυφασμένη με δυο συναφείς σημασίες: «βλέποντας μέσω, και όντας εμφανές» (seeing through and being visible).

Για να γίνει περισσότερο σαφής η αναφορά στη διαφάνεια ενός παραδείγματος ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα των Zaslavsky και Lavie που περιλαμβάνει τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας τετραγωνικής συνάρτησης (Zaslavsky, 2010).

$y = (x +1) (x -3)$ $\quad$ $y=(x -1)^2 - 4$ $\quad$ $y= x^2 -2 x-3$

Καθεμιά από τις προηγούμενες μορφές είναι περισσότερο διάφανη γύρω από κάποια χαρακτηριστικά της συνάρτησης και πιο αδιαφανής γύρω από άλλα (π.χ. ρίζες, θέση της κορυφής και των ακρότατων, τομή με τον άξονα ψψ΄ , μορφή της γραφικής παράστασης). Αλλά όλα αυτά δεν αναμένουμε να είναι προφανή στο μαθητή, χωρίς κάποια καθοδήγηση, στο πώς να διαβάζει ή να ερμηνεύει τις εκφράσεις. Επιπλέον δεν είναι δεδομένο ότι όλοι οι μαθητές μπορούν να κάνουν αποδεκτές τις τρεις παραπάνω

μορφές ως παραδείγματα τετραγωνικών συναρτήσεων, καθώς η τετραγωνική δύναμη της πρώτης και δεύτερης μορφής, είναι λιγότερο προφανής και η τετραγωνική συνάρτηση έχει οριστεί με έκφραση της μορφής του τρίτου παραδείγματος. Μπορεί ο καθηγητής να επιλέξει να διαπραγματευθεί τη συνάρτηση μόνο με αναπαραστάσεις της τρίτης μορφής αλλά είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις για να δείξει πως οι αλγεβρικοί χειρισμοί οδηγούν από τη μια μορφή στην άλλη ώστε να ασχοληθούν οι μαθητές του και με την έννοια των ισοδύναμων εκφράσεων.

Στα παραδείγματα που παρουσιάζονται υπάρχουν και χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί να μεταβάλλονται (είναι άνευ σημασίας) όπως για παράδειγμα η χρήση των μεταβλητών x και y τα οποία μπορεί να αντικατασταθούν από άλλα, για παράδειγμα, από t και f(t) αντίστοιχα. Υπάρχει περίπτωση ο μαθητής να αντλήσει από το παράδειγμα ότι είναι υποχρεωτική η χρήση των γραμμάτων x και y στο ρόλο των μεταβλητών στις τετραγωνικές συναρτήσεις. Ένα άλλο μη γενικεύσιμο χαρακτηριστικό που παρουσιάζουν οι τρεις αναπαραστάσεις που είδαμε, είναι ότι όλοι οι αριθμοί ήταν ακέραιοι. Επιπρόσθετα μπορεί κάποιος να γενικεύσει ότι για κάθε τετραγωνική συνάρτηση υπάρχουν και οι τρεις αναπαραστάσεις, ενώ η πρώτη από αυτές εξαρτάται από το αν η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει ή όχι πραγματικές ρίζες. Ο μαθητής μπορεί να θεωρήσει σχετικά με τις τετραγωνικές συναρτήσεις τα παραπάνω χαρακτηριστικά, εκτός και αν εκτεθεί σε πιο πλούσιο χώρο παραδειγμάτων. Αλλά και αντίθετα, μπορεί ένα παράδειγμα που αναφέρεται για να καταδείξει μια γενική περίπτωση ή αρχή να γίνει αντιληπτό από το μαθητή ως ειδική περίπτωση, παραγνωρίζοντας τη γενικότητά του.

Κάθε διαφορετική αναπαράσταση επικοινωνεί διαφορετικές σημασίες και δίνει διαφορετικές μαθηματικές διευθετήσεις, αλλά επιπλέον υπάρχουν και διαφορές στην αντίληψη. Το τι βλέπει ο μαθητής σε κάθε παράδειγμα ξεχωριστά και τι στα τρία ως ολότητα, εξαρτάται από τα συμφραζόμενα, τις δραστηριότητες της τάξης που πλαισιώνουν τα παραδείγματα αυτά, τις προηγούμενες εμπειρίες και τη διάθεσή του. Ο μαθητής που μαθαίνει να εκτιμά τις ιδιαίτερες πληροφορίες που προέρχονται από κάθε αναπαράσταση μαθαίνει να είναι σε επαγρύπνηση και στο μέλλον, ώστε να χρησιμοποιεί τις διαφορετικές ιδιότητες αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα, ως φόρμες αναφοράς όταν διερευνά άλλες συναρτήσεις.

Παρά τον κρίσιμο ρόλο που παίζουν τα παραδείγματα στη διδασκαλία και στη μελέτη των μαθηματικών υπάρχει μόνο μικρός αριθμός μελετών που εστιάζουν στο πως επιλέγουν και διαχειρίζονται οι καθηγητές τα παραδείγματα. Μια από αυτές των Rowland, Thwaites & Huckstep (2003) προσδιόρισε τρεις τύπους κακής επιλογής παραδειγμάτων από δασκάλους που δίδασκαν παιδιά δημοτικού :

- Περιπτώσεις παραδειγμάτων που δεν αποκαλύπτουν το ρόλο των μεταβλητών (για παράδειγμα, στην εκμάθηση της ώρας, χρήση του παραδείγματος έξι και μισή ή σε σύστημα συντεταγμένων χρήση ζευγαριών με ίσες τιμές και στις δυο συντεταγμένες).
- Άστοχες επιλογές αριθμών για να εξηγήσουν μια αριθμητική διαδικασία, τη στιγμή που μια άλλη διαδικασία θα ήταν πιο λογική για τους επιλεγμένους αριθμούς (για παράδειγμα, χρήση του 49x4 για να εξηγήσουν τον συμβατικό πολλαπλασιασμό).
- Τυχαία επιλεγμένα παραδείγματα, ενώ θα έπρεπε να έχει γίνει προσεκτική επιλογή τους.

Προφανώς, η επιλογή παραδειγμάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι πιο σύνθετη και περιλαμβάνει ευρεία θεώρηση παραγόντων. Μεταξύ αυτών περιλαμβάνονται:

- Η ορθότητά τους. Μερικοί τύποι λαθών σχετικά με τη χρήση παραδειγμάτων καταγράφονται από τους Zodik και Zaslavsky (2008). Χρήση του περιοδικού αριθμού 0,33… ως παράδειγμα άρρητου αριθμού. Παράδειγμα ισοσκελούς τριγώνου, ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών 5,5 και 10, όταν τέτοιο τρίγωνο δεν υφίσταται. Χρήση ενός παραδείγματος, ως αντιπαράδειγμα ενός ισχυρισμού, ενώ στην πράξη δεν αντικρούει τον ισχυρισμό.
- Θέματα που σχετίζονται με την επεξηγηματική δύναμη των παραδειγμάτων. Η Zaslavsky (2010) σχετικά αναφέρει:

i. Αν μεταφέρουν γενικότητα και αναλλοίωτα.
ii. Αν εξηγούν και δικαιολογούν συμβολισμό και συμβάσεις
iii. Αν θεσπίζουν το κύρος των εικασιών και των ισχυρισμών των μαθητών, επιλύουν την αβεβαιότητα.
iv. Αν συνδέουν τις μαθηματικές έννοιες με εμπειρίες της καθημερινής ζωής.

Καθώς η συγκεκριμένη επιλογή παραδειγμάτων μπορεί να διευκολύνει ή να εμποδίσει τη μελέτη των μαθητών, ο καθηγητής επιφορτίζεται με το προκλητικό έργο του να σταθμίζει τις επιλογές των παραδειγμάτων του, μετά από σκέψη και θεώρηση του τι αυτές οι επιλογές συνεπάγονται. Όμως πολλά πανεπιστημιακά προγράμματα δεν προετοιμάζουν συστηματικά τους μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών να αντιμετωπίσουν το θέμα της επιλογής και χρήσης διδακτικών παραδειγμάτων στη διδακτική πράξη. Έτσι η ικανότητα της αποτελεσματικής χρήσης παραδειγμάτων επαφίεται στην εμπειρία και την μαεστρία του διδάσκοντα.

Τρεις πτυχές της γνώσης των εκπαιδευτικών συνδέονται ισχυρά με την χρήση παραδειγμάτων στη μαθηματική εκπαίδευση. Η γνώση του περιεχομένου, η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (εδώ περιλαμβάνονται θέματα που σχετίζονται με τους μαθητές, όπως παρανοήσεις που μπορεί να κάνουν) και η γνώση του αναλυτικού προγράμματος (Shulman, 1986). Σαφώς τα παραδείγματα είναι αναπόσπαστα από τις αναπαραστάσεις των αντίστοιχων εννοιών που εμπλέκονται και φέρονται στην τάξη προκειμένου να κάνουν τα μαθηματικά πιο κατανοητά στους μαθητές.

Ένα κεντρικό μέρος την δουλειάς των καθηγητών περιλαμβάνει και τη λήψη αποφάσεων, σε απάντηση καταστάσεων που συμβαίνουν στην τάξη, κάποιες από τις οποίες μπορεί να είναι και απροσδόκητες. Διάφορες αλληλεπιδράσεις μέσα στην τάξη μπορεί να απαιτήσουν την επιλογή ή την παραγωγή παραδειγμάτων, ως ανάγκη της στιγμής. Είναι ένα είδος γνώσης που έχει περιγραφεί από ερευνητές ως γνώση του πώς να ενεργήσεις αποτελεσματικά σε απροσδόκητα γεγονότα και συνδέεται και με αυτό που έχει περιγραφεί ως ευελιξία στη λύση προβλημάτων, μέσα στην τάξη.

2.2.3 Παρουσία και Διαχείριση των παραδειγμάτων: Μια Ιστορική οπτική

Ο βαθύτερος λόγος για να παρέχουμε επεξεργασμένα παραδείγματα είναι για να τα προσεγγίσουν αυτοί που τα μελετούν ως γενεσιουργά, να τα εσωτερικεύσουν ως πρότυπα, έτσι ώστε να έχουν γενικά εργαλεία για να

λύνουν κλάσεις προβλημάτων. Δυστυχώς όμως στη διδακτική πορεία συχνά η χρήση τους περιορίζεται σε μια απλή πρακτική ακολουθίας ενεργειών, αντί μιας πιο διερευνητικής προσέγγισης που επιτρέπει στους μαθητές να βιώνουν τη μαθηματικοποίηση καταστάσεων ως πρακτική, και με κατάλληλη καθοδήγηση να ξανακατασκευάζουν από μόνοι τους αφηρημένες γενικές αρχές.

Οι πρώτες μαθηματικές καταγραφές για χρήση επεξεργασμένων λύσεων σε προβλήματα δοσμένα σε ένα πλαίσιο, προκειμένου να διευκρινίσουν διαδικασίες, είναι αυτές σε Αιγυπτιακούς παπύρους, πίνακες Βαβυλωνίων και αργότερα αντίγραφα από κινέζικα χειρόγραφα. Με αυτά προσπαθούσαν να εξηγήσουν κανόνες ή αλγορίθμους, όπως αλλιώς τους αποκαλούσαν κατά το μεσαίωνα και την αναγέννηση. Επιδίωκαν να τονίσουν μια γενικότητα και μάλιστα κάποιες φορές συνοδεύονταν και με σχόλια όπως: 'κάντο έτσι' ή 'με αυτόν τον τρόπο λύνονται όμοια προβλήματα'.

Από το 16^{ο} αιώνα ήταν εμφανής η παρουσία των παραδειγμάτων και σε ευρωπαϊκά μαθηματικά κείμενα, και μάλιστα ο Cardano σχολιάζει σχετικά με το ρόλο που αυτά μπορούν να παίξουν για τον αναγνώστη: «μέσα από την ποικιλία των παραδειγμάτων που δώσαμε κατανοεί ο αναγνώστης ότι το ίδιο μπορεί να κάνει και σε άλλες περιπτώσεις».

Προς τα τέλη του 19^{ου} και τον 20^{ο} αιώνα οι παιδαγωγικές αρχές είχαν καταφέρει να ενσωματώσουν περισσότερο συνειδητά στους κόλπους τους τη χρήση παραδειγμάτων. Διάφοροι συγγραφείς διαχειρίζονταν τα προβλήματα με δυο τρόπους. Κάποιοι ανακάτευαν διαφορετικούς τύπους προβλημάτων (ή τουλάχιστον προβλήματα που έμοιαζαν διαφορετικά) πιθανόν για να απασχολήσουν τον αναγνώστη με την αναγνώριση του τύπου, ενώ άλλοι συγκέντρωναν παρόμοιες ως προς την τεχνική ασκήσεις προκειμένου να στηρίξουν τον αναγνώστη στην απόκτηση αίσθησης της γενικής τάξης ή για να αποκτήσει ευχέρεια στην εκτέλεση.

Ο σχεδιασμός της αλληλουχίας των παραδειγμάτων είναι ένα κεντρικό θέμα στη διδακτική τους χρήση, το οποίο επηρεάζει μαζί επαγωγικές και παραγωγικές πτυχές της μάθησης. Ο Polya για παράδειγμα, παρείχε μια μεγάλη σειρά ασκήσεων χτίζοντας στις γενικεύσεις που μπορεί να κάνει κανείς από μια απλή αρχικά ιδέα. Ο ίδιος πρότεινε ότι : «αν δε μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα υπάρχει τότε ένα ευκολότερο που μπορείς να λύσεις. Βρες το!».

Η ιδέα ότι, η παραγωγή δικών μας παραδειγμάτων και ερωτήσεων μπορεί να είναι σημαντική βοήθεια για τη διδασκαλία δεν αποτελεί σημερινή καινοτομία. Ο Cardano καλούσε τον αναγνώστη να φτιάξει τα δικά του παραδείγματα.

Ιστορικά εμφανίζονται δυο διαφορετικές προσεγγίσεις σχετικά με τη χρήση των παραδειγμάτων, οι οποίες το 18^{ο} αιώνα διακρίνονται με τους όρους αναλυτική και συνθετική μέθοδος, ανάλογα με το αν οι γενικοί κανόνες παρουσιάζονται πριν ή μετά (ή ακόμα και καθόλου) από τα επεξεργασμένα παραδείγματα. Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα υποστηρίζεται από τον Pestalozzi η επαγωγική μέθοδος προτείνοντας ότι: «όταν κάποιος συναντά μια δυσκολία στο να επιλύσει ένα ερώτημα μπορεί να την προσπεράσει, παίρνοντας ένα μικρό παράδειγμα του ίδιου είδους και παρατηρώντας πως γίνεται αυτό, παρά να προσφεύγει σε κανόνες». Ο Herbert Spencer αργότερα επεκτείνει, προσδοκώντας από τους σπουδαστές να συνάγουν το γενικό από την προσεκτική παρατήρηση του ειδικού. Μάλιστα ο ίδιος αποποιείται τη διδασκαλία μέσω κανόνων, τονίζοντας ότι το να διδάσκουμε τα αποτελέσματα της διερεύνησης χωρίς την ίδια τη διερεύνηση είναι ταυτόχρονα και αποδυναμωτικό και αναποτελεσματικό. Πρώτα τα ειδικά και μετά οι γενικεύσεις είναι η νέα μέθοδος που προτείνει, ισχυριζόμενος ότι οι γενικές αλήθειες για να είναι μόνιμες και υποχρεωτικές θα πρέπει να κερδηθούν από τους ίδιους τους μαθητές. Ο Whitehead προσθέτει ότι στόχος της επιστημονικής σκέψης θα πρέπει να είναι να βλέπουμε το γενικό μέσα στο ειδικό καθώς και τι είναι μόνιμο μέσα από το τι είναι παροδικό.

Για τον Polya όταν κάνουμε μαθηματικά πρέπει να υιοθετήσουμε την επαγωγική συμπεριφορά, η οποία απαιτεί μια ανάβαση από παρατηρήσεις σε γενικεύσεις και μια κάθοδο από τις πιο υψηλές γενικεύσεις στην πιο απτή παρατήρηση.

Πέρα από τη χονδροειδή διάκριση μεταξύ επαγωγικής και παραγωγικής μεθόδου, ως ‘το γενικό μετά’ ή ‘το γενικό πριν’ υπάρχουν πιο λεπτές διακρίσεις και προσεγγίσεις στις οποίες οι δυο μέθοδοι διασταυρώνονται. Επαγωγικές και παραγωγικές προσεγγίσεις συμπορεύονται με υποθέσεις κατασκευής της γνώσης και βασίζονται στην παραδειγματοποίηση. Η επαγωγική μάθηση προϋποθέτει ότι ο μαθητής θα κάνει γενικεύσεις γύρω από κάποιες ενέργειες ή έννοιες ενώ δουλεύει με ένα

εύρος παραδειγμάτων (θα δει το γενικό μέσα από το ειδικό). Η παραγωγική μάθηση, αντίθετα υποδηλώνει ότι ο μαθητής είναι ικανός να αποκτήσει προσωπική αίσθηση ενός ορισμού ή μιας γενικής αρχής και μπορεί να την προσαρμόσει για ακριβή χρήση στο μέλλον (βλέπει τις ειδικές περιπτώσεις μέσα από το γενικό).

Τα παραδείγματα μπορεί από μόνα τους να αποτελέσουν ερεθίσματα που παρακινούν τους μαθητές για αυτο-εξηγήσεις και οι οποίες εν τέλει οδηγούν σε κατανόηση. Μερικές φορές το να τεθεί μια γενική μέθοδος προκαλεί σύγχυση και προτείνεται να παρέχεται εξήγηση μέσω παραδείγματος. Ο Feynman σχολιάζει για τον εαυτό του: «μου είναι αδύνατο να κατανοήσω οτιδήποτε γενικό, εκτός και αν φέρω στο μυαλό μου ένα συγκεκριμένο παράδειγμα και το παρακολουθήσω πως προχωράει».

Αντίθετα, η Zazkis (2001, αναφορά στους Bills et al, 2006) παρατηρεί ότι ξεκινώντας από πιο σύνθετες προβληματικές καταστάσεις και πολύπλοκα νούμερα όχι μόνο παρέχουμε την ευκαιρία στο μαθητή να την απλοποιήσει από μόνος του προκειμένου να δει πως προχωράει και μετά να γυρίσει στην αρχική πολύπλοκη κατάσταση, αλλά επιπρόσθετα του παρέχουμε και την ευκαιρία να προσεγγίσει ευρύτερα το πεδίο εφαρμογής της γενικότητας που υπονοείται από τα ειδικά υποδείγματα.

2.2.4 Διαχείριση των παραδειγμάτων στις θεωρίες μάθησης μαθηματικών

Όταν ο μαθηματικός αντιμετωπίζει μια κατάσταση που δεν είναι προφανής, το πιο φυσικό πράγμα που κάνει είναι να κατασκευάσει ή να ανακαλέσει ένα παράδειγμα έτσι ώστε να δει το γενικό μέσα από την οικειότητα που του προσφέρει η εμπειρία του ειδικού. Όταν εγείρεται μια εικασία, η συνηθισμένη πρακτική είναι εναλλάξ, να ψάξει ένα αντιπαράδειγμα, και να χρησιμοποιήσει ένα παράδειγμα όπως το αντιλαμβάνεται γενικά, για να δει γιατί μπορεί να είναι σωστή η εικασία. Συχνά ένας μαθηματικός μπορεί να εντοπίσει και να εκφράσει μια δομική υπόσταση που υποβόσκει πίσω από φαινομενικά διαφορετικές καταστάσεις. Από αυτές εγείρεται μια ενοποιημένη έννοια μαζί με μια συλλογή από ορισμούς και θεωρήματα. Μερικές φορές ένα ειδικό παράδειγμα μπορεί να προτείνει χαρακτηριστικά που μπορούν να

αλλάξουν, οδηγώντας σε μια πιο πλούσια ή πιο ενοποιημένη έννοια, ή τουλάχιστον εμπλουτίζεται η επίγνωση της τάξης των αντικειμένων που περιβάλλονται από τη συγκεκριμένη θεωρία. Δεν είναι τα παραδείγματα καθαυτά τα οποία είναι σημαντικά για τους μαθηματικούς αλλά το τι κάνουν με αυτά, πως εξετάζονται, γενικεύονται και γίνονται αντιληπτά.

Η σπουδαιότητα των παραδειγμάτων έχει καταγραφεί ως σταθερό χαρακτηριστικό στις διάφορες θεωρίες μάθησης μαθηματικών. Η ανασκόπηση των Bills et al (2006) μας εκθέτει τους τρόπους με τον οποίους οι διάφορες θεωρίες μάθησης έχουν χρησιμοποιήσει τα παραδείγματα. Ο κλάδος της ψυχολογίας έχει ασχοληθεί ειδικά με το πώς οι άνθρωποι αποσπούν ή εξάγουν μια έννοια από τα παραδείγματα, πως τα διάφορα παραδείγματα και μη παραδείγματα επηρεάζουν τη διάκριση των εννοιών. Στην Τεχνητή Νοημοσύνη η προσοχή εστιάστηκε σε διάφορες παραμέτρους, όπως προσδοκίες και υποθέσεις που πυροδοτούν πλαίσια συμπεριφοράς, και δοκιμάστηκε να χρησιμοποιηθούν για την απόκτηση εννοιών.

Η Γενετική επιστημολογία υποθέτει ότι τα άτομα ενεργητικά επιχειρούν να αποκτήσουν αίσθηση του κόσμου της εμπειρίας μέσα στην κοινωνική ομάδα στην οποία ανήκουν. Αυτό βρίσκεται στη βάση πολλών θεωριών για τη μάθηση των μαθηματικών που λαμβάνουν υπόψη τις επιπτώσεις ενός νέου παραδείγματος στο υπάρχον γνωστικό σχήμα μέσω της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης. Η θεωρία της αναστοχαστικής αφαίρεσης του Piaget, ερμηνεύει, πως οι ενέργειες που εκτελούνται από το άτομο συνεπάγονται εμπειρίες, μέσω των οποίων η αφαίρεση είναι δυνατή. Επιστήμονες χτίζοντας πάνω στην ιδέα του γνωστικού σχήματος τόνισαν τη σημασία της επιλογής των παραδειγμάτων που θα παρουσιάσει ο δάσκαλος στο μαθητή, καθώς μέσα από αυτά, μέσω αφαίρεσης θα οδηγηθεί ο μαθητής στο να δομήσει τις έννοιες. Τονίζουν την αξία της θεώρησης των μη ουσιωδών χαρακτηριστικών που εμφανίζουν τα παραδείγματα, για την έννοια που πάει να δομηθεί, καθώς και θεώρηση μη-παραδειγμάτων, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν στο να εστιάσουν την προσοχή, στη διάκριση μεταξύ ουσιωδών και μη ουσιωδών χαρακτηριστικών της έννοιας, και άρα να θέσουν τα όριά της. Από τη στιγμή που θα σχηματιστεί η έννοια, παραδείγματα μπορούν να αφομοιωθούν μέσα σε αυτή, και να σχηματιστεί μια πιο πολύπλοκη εικόνα της έννοιας (concept image, Vinner and Tall). Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες

αναπτύσσονται διχοτομικές αντιλήψεις, λόγω συγκρούσεων ανάμεσα στην εικόνα μιας έννοιας και στον ορισμό της ίδιας, κατά τη μελέτη των μαθηματικών. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι ο νους του μαθητή (αλλά και ο δικός μας) τείνει να στηρίζεται στις εικόνες των εννοιών, και όχι στους ορισμούς αυτών, στη διαδικασία σκέψης, θα πρέπει να βάλλουμε τα δυνατά μας ώστε να βοηθήσουμε τους μαθητές να σχηματίσουν τις κατάλληλες εικόνες των εννοιών. Και εδώ ο ρόλος των παραδειγμάτων είναι καθοριστικός.

Οι Μπιχεβιοριστές χρησιμοποίησαν παραδείγματα ως ερεθίσματα για να προκαλέσουν μαθησιακές αντιδράσεις. Η έμφασή τους ήταν σε παραδείγματα εξάσκησης για να ενεργοποιηθεί ο μηχανισμός δοκιμής-λάθους και να ενισχυθεί η θετική συμπεριφορά.

Οι Watson και Mason (2005) προσέγγισαν τον ορισμό της μάθησης εννοιών ως απόκτηση επίγνωσης των διαστάσεων μεταβολής που ένα παράδειγμα μπορεί να επιδείξει. Καθώς δάσκαλοι και μαθητές δεν προσεγγίζουν κατ' ανάγκη την ίδια διάσταση της μεταβολής οι συγγραφείς προτείνουν για κάθε διάσταση ένα εύρος επιτρεπτών αλλαγών μέσα στο οποίο ένα αντικείμενο παραμένει παράδειγμα της έννοιας.

Πρόσφατα κείμενα συνδέουν τη γέννηση της μαθηματικής γνώσης με διεργασίες που βάζουν σε κεντρική θέση τα παραδείγματα, ως πρώτη ύλη για διεργασίες γενίκευσης και οριοθέτησης εννοιών (conceptualizing) νέων αντικειμένων. Η Sfard θέλει τους σπουδαστές να κινούνται από μια λειτουργική, σε μια δομική κατανόηση των εννοιών, μέσω της εσωτερίκευσης και της συμπύκνωσης που οδηγούν σε εκπραγμάτωση. Η εσωτερίκευση και η συμπύκνωση είναι αργές, βαθμιαίες διαδικασίες, που λαμβάνουν χώρα με το χρόνο, μέσω της επαναλαμβανόμενης συνάντησής τους με παραδείγματα. Ο Dubinsky εισάγει τη θεωρία της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης σε προπτυχιακό τουλάχιστον επίπεδο την οποία αποκαλεί APOS θεωρία (actions, processes, objects, schemas). Η θεωρία αυτή προβλέπει ότι η αντιμετώπιση παραδειγμάτων μπορεί να αποτελέσει μέρος της διαδικασίας μέσω της οποίας διαμορφώνονται οι έννοιες. Οι ενέργειες (actions) ασκούνται σε αντικείμενα (objects) και προσλαμβάνονται ως ιδέες μιας συνολικής διαδικασίας (process), ενώ τελικά ενσωματώνονται (encapsulated) ως ένα νοητικό αντικείμενο που αργότερα θα ενταχθεί σε ένα νοητικό σχήμα (schema), ένα δίκτυο σχετικών εννοιών.

Η Kieran αναφερόμενη στην ανάπτυξη κατανόησης, εστιάζει στην κατασκευή εικόνας και αναγνωρίζει ότι είναι η άμεση εμπειρία παραδειγμάτων που συνεισφέρει στο σχηματισμό προσωπικής εικόνας και γνώσης (knowing).

Ο Dreyfus εστιάζει στο ρόλο των παραδειγμάτων στην αφαίρεση. Τονίζει ότι για ένα σχετικά έμπειρο μαθητή, μπορεί ένας ορισμός και ένα απλό παράδειγμα να είναι αποτελεσματικά, ενώ για ένα λιγότερο έμπειρο μπορεί να απαιτείται ένας μεγαλύτερος αριθμός προσεκτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων μέχρι να καταστεί ικανός να αποσπά από αυτά τις ιδιότητες της έννοιας.

2.2.5 Είδη παραδειγμάτων

Μέσα στον ευρύ όρο παραδείγματα υπάρχουν σύμφωνα με τους Bills et al (2006) τρεις περιγραφικές ετικέτες: «**γενικό παράδειγμα**», «**μη παράδειγμα**» και «**αντιπαράδειγμα**». Τα γενικά παραδείγματα είναι κυρίως παραδείγματα εννοιών ή διαδικασιών ή μπορεί να αποτελούν τον πυρήνα μιας γενικής απόδειξης. Τα μη παραδείγματα εξυπηρετούν στο να αποσαφηνίζουν τα όρια τόσο για έννοιες, όσο και για περιπτώσεις όπου μια διαδικασία δε μπορεί να εφαρμοστεί ή αποτυγχάνει να παράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα ή ακόμα και για να καταδείξει ότι οι υποθέσεις ενός θεωρήματος είναι αναγκαίες. Τα αντιπαραδείγματα τίθενται για να αντισταθμίσουν ένα ισχυρισμό ή μια υπόθεση και μπορεί να το κάνουν αυτό στο πλαίσιο μιας έννοιας, μιας διαδικασίας ή και μιας επιχειρούμενης απόδειξης. Στην πραγματικότητα οι τρεις ετικέτες έχουν να κάνουν με το πώς το άτομο (καθηγητής ή μαθητής) αντιλαμβάνεται το προς διερεύνηση μαθηματικό αντικείμενο, και όχι με τις ιδιότητες του ίδιου του αντικειμένου.

Σχετικά με τα είδη παραδειγμάτων θα διατηρήσουμε τη χρήση του όρου όπως προτείνεται από τους Zodik και Zaslavsky (2008), οι οποίοι αναφέρουν :

«Με τον όρο παραδείγματα εννοούμε μια συγκεκριμένη περίπτωση μιας ευρείας κλάσης, από την οποία μπορεί κανείς να συμπεράνει και να γενικεύσει. Στη μεταχείριση του όρου παραδείγματα, περιλαμβάνουμε επίσης και μη παραδείγματα (non-examples), τα οποία συνδέονται με την οριοθέτηση εννοιών και ορισμών, και εξυπηρετούν για να τονίσουν κρίσιμα

χαρακτηριστικά μιας έννοιας, αλλά και αντιπαραδείγματα (counter-examples) τα οποία εξυπηρετούν στο να οξύνουν διαφοροποιήσεις, και να βαθαίνουν την κατανόηση των μαθηματικών οντοτήτων» (σελ. 165).

Ποιος θα μπορούσε να είναι ο ρόλος των μη- παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων; Εικάζεται από ερευνητές ότι τα μη- παραδείγματα είναι πιο διδακτικά για τη μελέτη δύσκολων εννοιών, ενώ τα παραδείγματα είναι πιο διδακτικά για τη μελέτη των πιο εύκολων εννοιών. Από έρευνες έχει προκύψει ότι οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν ένα αντιπαράδειγμα ως μια εξαίρεση, η οποία στην πραγματικότητα δεν αναιρεί την υπό διερεύνηση κατάσταση. Οι Zazkis και Chernoff (2008) τονίζουν ότι, αν ένα αντιπαράδειγμα δεν ταιριάζει με το χώρο παραδειγμάτων του μαθητή μπορεί να χαρακτηριστεί ως ειδική περίπτωση ή ως εξαίρεση, παρά ως γεγονός που ακυρώνει μια γενίκευση.

Υπάρχει ένα είδος παραδειγμάτων που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *ιδανικά παραδείγματα*. Τα ιδανικά παραδείγματα για να χρησιμοποιήσει κανείς στη διδασκαλία, είναι αυτά που είναι *μόλις* παραδείγματα, και μια αλλαγή τα μετατρέπει σε μη παραδείγματα, ενώ τα *ιδανικά μη-παραδείγματα* είναι αυτά που είναι *παραλίγο* παραδείγματα και μια μικρή διευθέτηση τα κάνει παραδείγματα.

Οι Watson και Mason στις έρευνές τους ανέπτυξαν την ιδέα των *οριακών παραδειγμάτων (boundary examples)*. Για παράδειγμα, η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας γραμμής είναι η $y=\alpha x+\beta$, αλλά ο τύπος αυτός αποκλείει από την εμπειρία των μαθητών ευθείες της μορφής $x=c$. Λόγω της μη συμπερίληψής τους αυτής, οι καθηγητές σκόπιμα εισάγουν τη μορφή αυτή, ως κάτι έξτρα για να θυμούνται οι μαθητές.

Τα οριακά παραδείγματα διακρίνονται μεταξύ αυτών που έχουν και αυτών που δεν έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Οι μαθηματικές έννοιες δεν έχουν πάντα ξεκάθαρα τα όρια τους, οι οποίες θα έπρεπε να διαμορφωθούν σε ορισμούς μέσω συνθηκών και ιδιοτήτων. Όλοι ξέρουμε ότι οι μαθητές τείνουν να διατηρούν τις αρχικές εσφαλμένες διαισθητικές τους αντιλήψεις των πρώτων σχολικών χρόνων γύρω από τη διαίρεση για παράδειγμα, (αν διαιρέσουμε δυο αριθμούς, το πηλίκο είναι πάντα μικρότερο από το διαιρετέο). Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τη συνέχεια αργότερα, παρότι έχουν εισαχθεί και είναι ικανοί να χρησιμοποιούν τους τυπικούς ορισμούς αυτής. Αν κατά τη μελέτη της Ανάλυσης, προσφέρουμε στους μαθητές μας μόνο παραδείγματα

με ‘ομαλή’ συμπεριφορά, ή παραδείγματα με επιπρόσθετα άσχετα χαρακτηριστικά, δεν υπάρχει κανείς λόγος για αυτούς να ψάχνουν αν ικανοποιούνται οι συνθήκες ενός θεωρήματος πριν το εφαρμόσουν. Αντί για τον ορισμό μιας έννοιας ανατρέχουν σε ένα πρωτοτυπικό παράδειγμα αυτής ή καταφεύγουν σε αρχικές διαισθητικές αντιλήψεις τους για αυτή.

Στην ανασκόπηση των Bills et al (2006) τίθεται η έννοια του *γενεσιουργού* και *πρωτοτυπικού* παραδείγματος, ως όψεις της σχέσης μεταξύ παραδειγμάτων και σχετικών εννοιών ή διαδικασιών. Αναφέρουν ότι σύμφωνα με το Balacheff ένα γενεσιουργό παράδειγμα κάνει σαφείς τους λόγους για τους οποίους ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μέσω λειτουργιών ή μετασχηματισμών πάνω σε ένα αντικείμενο το οποίο δεν υπάρχει από μόνο του, αλλά ως ένα αντιπροσωπευτικό χαρακτηριστικό μιας κλάσης. Τέτοια παραδείγματα περιγράφονται από το Freudenthal ως *παραδειγματικά (paradigms).* Ψυχολόγοι ερευνητές αναζήτησαν πως χρησιμοποιούνται τα πρωτοτυπικά παραδείγματα (αντιπροσωπευτικά κατηγοριών) στο συλλογισμό. Η Hershkowitz (1990, αναφορά σε Bills et al. 2006) παρατηρεί μια τάση να συλλογιζόμαστε από τα πρωτοτυπικά παραδείγματα παρά από τους ορισμούς στα μαθηματικά, και αναφέρεται σε λάθη που αυτό το είδος συλλογισμού μπορεί να παράγει. Συχνά οι εικόνες των εννοιών που φτιάχνουν οι μαθητές καθορίζονται από ένα περιορισμένο αριθμό πρωτοτυπικών παραδειγμάτων, γι αυτό είναι σημαντικό να πηγαίνουμε πέρα από τα πρωτοτυπικά, χρησιμοποιώντας και μη τυπικά παραδείγματα για να ωθήσουμε προς την κατεύθυνση αλλά και πέρα από τα όρια που επιτρέπεται από τον ορισμό, παρέχοντας επίγνωση των ορίων (εύρος επιτρεπτής αλλαγής).

Οι zodik και Zaslavsky (2008) διακρίνουν μεταξύ *προσχεδιασμένων* (*pre-planned*) παραδειγμάτων από τη μια, και *αυθόρμητα* (*spontaneous*) από την άλλη. Τα προσχεδιασμένα είναι παραδείγματα που ο εκπαιδευτικός προσεκτικά σχεδιάζει και επιλέγει να χρησιμοποιήσει κατά την προετοιμασία της διδασκαλίας και προτίθεται να τα ενσωματώσει σε αυτή. Είναι αυτά που μπορεί να εμφανίζονται σε σημειώσεις διδασκαλίας ή σε φύλλα εργασίας και μπορεί να ανασύρονται από εγχειρίδια ή από το χώρο παραδειγμάτων του δασκάλου. Τα αυθόρμητα είναι τα παραδείγματα με τα οποία ο εκπαιδευτικός καλείται να αντιμετωπίσει μια κατάσταση της στιγμής. Αυτό περιλαμβάνει

περιπτώσεις στις οποίες γίνεται επιλογή ενός μη προσχεδιασμένου παραδείγματος (είτε οικείο στο δάσκαλο ή και εντελώς νέο) ή ακόμα και τροποποίηση ενός παραδείγματος που είχε εισαχθεί στην τάξη (από το δάσκαλο ή μαθητή). Συχνά παράγονται σε απάντηση ερωτημάτων ή ισχυρισμών των μαθητών. Κάποιες φορές το πλάνο του μαθήματος μπορεί να μην περιλαμβάνει συγκεκριμένα παραδείγματα, αλλά αυτά να κατασκευάζονται ενώπιον των μαθητών βήμα- βήμα μέχρι να ικανοποιούν την ανάγκη για την οποία εισάγονται. Άλλη περίπτωση που απαιτεί τη χρήση αυθόρμητου παραδείγματος είναι η κατάσταση στην οποία πρέπει να αντιμετωπιστεί ένας απροσδόκητος λανθασμένος ισχυρισμός ενός μαθητή, οπότε ένα αντιπαράδειγμα πρέπει να παραχθεί ή να επιλεγεί από κατάλληλα, και μάλιστα τέτοιο που να έχει επεξηγηματική δύναμη.

Οι Peled και Zaslavsky (1997) διαφοροποιούν τρεις τύπους αντι-παραδειγμάτων, που χρησιμοποιούνται από τους καθηγητές μαθηματικών, ανάλογα με την επεξηγηματική τους δύναμη : *ειδικά, ημιγενικά και γενικά παραδείγματα*. Υποστηρίζουν ότι τα γενικά και ημιγενικά παραδείγματα προσφέρουν εξήγηση και παρέχουν κατά κάποιο τρόπο ενόραση γύρω από ένα φαινόμενο, καθώς και ιδέες γύρω από το πώς μπορούν να παραχθούν περισσότερα παραδείγματα του φαινομένου αυτού. Επομένως η παραγωγή τέτοιων παραδειγμάτων προϋποθέτει συνύπαρξη μαθηματικών και παιδαγωγικών θεωρήσεων.

Επιπλέον οι Zazkis και Chernoff (2008) ισχυρίζονται ότι ένας επιπλέον ρόλος που καλούνται να παίξουν τα παραδείγματα είναι να αλλάξουν τη γνώμη κάποιου για ένα θέμα ή τους τρόπους λειτουργίας του. Τα αντιπαραδείγματα μπορεί να βοηθήσουν το μαθητή να επαναδιευθετήσει τις αντιλήψεις του και τα πιστεύω του γύρω από τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων, αλλά και να προκαλέσουν γνωστική σύγκρουση. Θεμελιώδης στόχος της διδακτικής είναι η χρήση τέτοιων αντιπαραδειγμάτων που όχι μόνο βοηθούν στο να προκληθεί γνωστική σύγκρουση αλλά είναι και αποτελεσματικά στο να τη διαλύουν. Όταν παρουσιάζεται σε ένα μαθητή ένα μόνο αντιπαράδειγμα δεν είναι σίγουρο ότι αυτό είναι ικανό να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση. Μπορεί απλά να παραβλεφτεί ή να αντιμετωπιστεί ως εξαίρεση. Αυτό που απαιτείται είναι ένα *καίριο (pivotal) αντιπαράδειγμα*.

Ένα παράδειγμα είναι καίριο για το μαθητή, αν μπορεί να αποτελέσει σημείο καμπής της προσέγγισής του στη λύση που ακολουθούσε. Αν τον βοηθά να αντιμετωπίσει ένα λανθασμένο μαθηματικό συλλογισμό προκαλώντας του γνωστική σύγκρουση, που ίσως την επιλύσει κιόλας. Με άλλα λόγια τα παραδείγματα αυτά οδηγούν το μαθητή σε εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou και Verschaffel 2004). Όταν ένα καίριο παράδειγμα βοηθά και στην επίλυση της σύγκρουσης τότε μιλάμε για ένα *γεφυρωτικό (pivotal-bridging example) παράδειγμα*, δηλαδή, ένα παράδειγμα που εξυπηρετεί ως μια γέφυρα από τις αρχικές (αφελείς, λανθασμένες ή ατελείς) αντιλήψεις στις κατάλληλες μαθηματικές αντιλήψεις.

Οι Giannakoulias et al (2010) διερεύνησαν την επιχειρηματολογία που ανέπτυξαν καθηγητές μαθηματικών προκειμένου να πείσουν τους μαθητές τους ότι ένας ισχυρισμός τους σε πλαίσιο υπολογισμών δεν ήταν έγκυρος. Τα ευρήματά τους δείχνουν ότι οι καθηγητές χρησιμοποίησαν δυο βασικές προσεγγίσεις για να ανασκευάσουν τους λανθασμένους ισχυρισμούς των μαθητών τους. Τη χρήση της θεωρίας και τη χρήση αντιπαραδειγμάτων. Σχετικά με τη χρήση αντιπαραδειγμάτων, η έρευνα έδειξε ότι λίγοι καθηγητές τα χρησιμοποιούν στην επιχειρηματολογία τους και μάλιστα υποεκτιμούν την αξία τους ως μια αποδεικτική μέθοδο.

2.2.6 Διαχείριση των παραδειγμάτων στη διδασκαλία

Διάφοροι συγγραφείς έχουν ταξινομήσει τα παραδείγματα σύμφωνα με τη χρήση για την οποία είναι κατάλληλα. Μεταξύ αυτών αξίζει να αναφέρουμε αυτή της Michener. Η Michener όπως αναφέρουν οι Watson Mason (2002b) αναζητώντας τους ρόλους που παίζουν τα παραδείγματα μαθηματικών αντικειμένων, για τους μαθηματικούς διακρίνει μεταξύ τεσσάρων (όχι κατ΄ ανάγκη ξένων) τύπων παραδειγμάτων:

- *Παραδείγματα εκκίνησης* που χρησιμοποιούνται για να εγείρουν το ενδιαφέρον, για κινητοποίηση και εισαγωγή σε ένα θέμα και να προτείνουν πως μπορεί να δομηθεί η θεωρία.
- *Παραδείγματα αναφοράς*, τα οποία χρησιμοποιούνται ως πρότυπες περιπτώσεις μιας έννοιας ή ένα αποτέλεσμα, μοντέλο και

αντιπαράδειγμα και αναφέρεται κατ΄ επανάληψη, σαν να μαθαίνεται. Αναφέρονται ευρέως κατά τη δόμηση μιας θεωρίας.

- *Υποδείγματα* (παραδειγματικά, γενεσιουργά παραδείγματα).
- *Αντιπαραδείγματα* που καταδεικνύουν τα όρια θεωριών ή τεχνικών, δείχνουν τη σπουδαιότητα των υποθέσεων και των συνθηκών σε θεωρήματα, ορισμούς και τεχνικές, και συνεισφέρουν στην αντιμετώπιση τυπικών παρανοήσεων.

Η Michener τάσσεται υπέρ του να εισάγονται οι μαθητές στην κυρίαρχη κουλτούρα των μαθηματικών με το να τους τίθενται μεταγνωστικά ερωτήματα, βασισμένα στους διαφορετικούς ρόλους των παραδειγμάτων που προαναφέραμε. Είναι σαν να παίρνει ως δεδομένο ότι τα παραδείγματα στην πλειονότητά τους σώζονται στη κυρίαρχη μαθηματική κουλτούρα και μεταφέρονται στους μαθητές από τις αυθεντίες- καθηγητές, σχολικά εγχειρίδια. Παρόλο που αυτό είναι αληθές για εκπληκτικά παραδείγματα, δεν είναι απαραίτητο όλα τα παραδείγματα να προέρχονται από εξωτερικές αυθεντίες.

Υπάρχει αρκετό έδαφος ανάμεσα σε ένα απλό παράδειγμα που τίθεται ως γενεσιουργό από τον ειδικό, και το απλό παράδειγμα που ο μαθητής το βλέπει ως κάτι που έχει να μάθει. Για παράδειγμα, μπορεί ο δάσκαλος να δίνει κάποιους πολλαπλασιασμούς διαφορετικών αριθμών με το 0,2 για να δείξει γενικά, ότι ο πολλαπλασιασμός με αριθμούς μεταξύ 0 και 1 καθιστά τους θετικούς αριθμούς με τους οποίους πολλαπλασιάζεται μικρότερους. Έχει όμως ο μαθητής επίγνωση ότι η επιλογή του 0,2 είναι ένα από τα παραδείγματα ενός μεγάλου εύρους δυνατών αριθμών; Μπορεί οι καθηγητές να δίνουν ανέκαθεν ως παράδειγμα συνεχούς και μη παραγωγίσιμης συνάρτησης σε όλο το πεδίο ορισμού της, τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=|x|$ έχουν όμως οι μαθητές επίγνωση ότι αυτή είναι μια από την κλάση τους, και ότι από το παράδειγμα αυτό μπορεί να παραχθεί μια κλάση συναρτήσεων που έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

Οι Bills et al (2006) διακρίνουν μεταξύ *παραδειγμάτων μιας έννοιας*, (τρίγωνο, πολυώνυμο, συνάρτηση κ.τ.λ.) και *παραδειγμάτων εφαρμογής μιας διαδικασίας* (υπολογισμός εμβαδού τριγώνου, εύρεση ριζών πολυωνύμου, σχεδιασμός γραφικής παράστασης δοθείσης συνάρτησης κ.τ.λ.). Στη δεύτερη

κατηγορία διακρίνουν επιπλέον μεταξύ *επεξεργασμένων παραδειγμάτων*, στα οποία η διαδικασία εφαρμόζεται από κάποια αυθεντία, καθηγητή, εγχειρίδιο ή πρόγραμμα συχνά συνοδευόμενη με κάποιες εξηγήσεις ή σχόλια, και *ασκήσεις* όπου τα έργα παρατίθενται για να ολοκληρωθούν από το σπουδαστή.

Ο Rowland (2008) αναφερόμενος στο τι κερδίζουν οι μαθητές από τα παραδείγματα κάνει μια διάκριση μεταξύ των χρήσεων των παραδειγμάτων στη διδασκαλία:

- *Παροχή παραδειγμάτων για κάτι*, (ή κινητοποίηση των μαθητών για να τα παρέχουν οι ίδιοι) ως πρώτη ύλη για επαγωγικό συλλογισμό. 'Το κάτι' είναι γενικό (π.χ. η έννοια του άξονα συμμετρίας ή το γεγονός ότι τα άθροισμα δυο περιττών είναι άρτιος). Τα παραδείγματα είναι ειδικές περιπτώσεις μιας γενικότητας.
- Αυτά που συχνά καλούμε *'ασκήσεις'*, διευκρινίζουν και είναι προσανατολισμένα στην πρακτική. Οι 'ασκήσεις' είναι παραδείγματα επιλεγμένα από μια κλάση τέτοιων δυνατών παραδειγμάτων.

Στην πρώτη περίπτωση η χρήση των παραδειγμάτων, σκοπεύει στην ενσωμάτωση αφηρημένων εννοιών και στο συμβολισμό γενικών διαδικασιών, και είναι κοινή παιδαγωγική πρακτική. Διδάσκουμε μια γενική διαδικασία μέσω ειδικής εκτέλεσης αυτής της διαδικασίας. Για παράδειγμα, για να διδάξει την κάθετη αφαίρεση 'με δανεισμό' ο δάσκαλος μπορεί να δώσει το παράδειγμα 62-38 σε στήλη. Η επιλογή των συγκεκριμένων ψηφίων πρέπει να γίνει με προσοχή, και ο ίδιος θα πρέπει να έχει επίγνωση των δυνατών μεταβολών και να κάνει τις επιλογές του μέσα σε αυτό το πλαίσιο. Στην περίπτωση των εννοιών, ο ρόλος των παραδειγμάτων είναι να διευκολύνουν και να προκαλέσουν αφαίρεση. Από τη στιγμή που μια ομάδα παραδειγμάτων έχουν ενοποιηθεί μέσω του σχηματισμού της έννοιας, μετέπειτα τα παραδείγματα μπορούν να αφομοιωθούν από την έννοια αυτή. Αφότου η έννοια σχηματιστεί και ονομαστεί από καθέναν, αυτός είναι πια ικανός να την κατατάξει στο βασίλειο των εννοιών του, μπορεί να την ανακαλεί και να τη χρησιμοποιεί όποτε του είναι απαραίτητη, έξω από την εποπτεία των συγκεκριμένων παραδειγμάτων.

Στη δεύτερη περίπτωση τα παραδείγματα αξιοποιούνται στη διδασκαλία, ως περιβάλλον για πρακτική. Οι ασκήσεις είναι παραδείγματα επιλεγμένα και ενδεικτικά μιας κλάσης πιθανών επιλογών. Στην περίπτωση της αφαίρεσης διψήφιων ο δάσκαλός επιλέγει κάποια από ένα πλήθος συνδυασμών διψήφιων κάτω από κάποια κριτήρια. Όταν ο μαθητής έχει μελετήσει μια διαδικασία (π.χ. να προσθέτει 9 σε δοθέν αριθμό, να βρίσκει ισοδύναμα κλάσματα, να λύνει εξίσωση) τη δοκιμάζει σε διάφορες τέτοιες ασκήσεις παραδείγματα. Ο αρχικός στόχος είναι η συγκράτηση της διαδικασίας μέσω της επανάληψης, και απώτερος η απόκτηση ευχέρειας στην εκτέλεσή της. Όταν ο δάσκαλος επιδεικνύει κατ΄ επανάληψη πως εκτελείται η διαδικασία πάνω σε ασκήσεις παραδείγματα, τότε ενεργοποιείται ένας μηχανισμός μελέτης όμοιος με αυτόν που διευκολύνεται από τη μελέτη επεξεργασμένων παραδειγμάτων. Και εδώ η επιλογή των παραδειγμάτων δεν είναι ούτε ασήμαντη ούτε αυθαίρετη. Τα πρώτα παραδείγματα είναι σκόπιμο να είναι τέτοια που να προσφέρουν εμπειρία επιτυχίας, πριν τεθούν τα περισσότερο απαιτητικά. Τα παραδείγματα για πρακτική θα πρέπει να εκθέτουν το μαθητή στο εύρος των τύπων των προβλημάτων που θα αντιμετωπίσει γενικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αφαίρεσης ‘με δανεισμό’ σκόπιμο είναι να τίθενται και παραδείγματα που κάποιο ψηφίο του μειωτέου είναι μηδέν. Γενικά τα παραδείγματα που τίθενται από το δάσκαλο θα πρέπει να είναι αποτέλεσμα σκόπιμης και συνειδητής επιλογής από τα προσφερόμενα, το ένα να δίνει κάτι παραπάνω από το προηγούμενο με την έννοια που το σκιαγραφήσαμε και πριν.

Πολλές από τις έρευνες που καταπιάστηκαν με ομάδες παραδειγμάτων καταλήγουν ότι η αλληλουχία τους έχει επίδραση στη μάθηση. Ειδικότερα συνιστάται να γίνεται συνδυασμός παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων σε μια αλληλουχία, ώστε να εστιάζεται η προσοχή στα κρίσιμα χαρακτηριστικά των σχετικών παραδειγμάτων. Υπάρχει μια συζήτηση σχετικά με το ότι τα παραδείγματα πρέπει να είναι κλιμακούμενης δυσκολίας, ώστε οι μαθητές να δοκιμάζουν επιτυχία με παραδείγματα ρουτίνας πριν δοκιμάσουν τα πιο απαιτητικά. Αν και υπάρχει και ο αντίλογος που αρθρώνεται από την Tsamir (2003) ότι η αλληλουχία από το εύκολο στο δύσκολο δεν είναι πάντα αποτελεσματική. Επιπλέον τα παραδείγματα - ασκήσεις που σχεδιάζονται προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια είναι πιθανό να είναι

διαφορετικά δομημένα από αυτά που σχεδιάστηκαν για να προκαλέσουν γενίκευση.

Οι Zodik και Zaslavsky (2008) βασισμένοι στις παρατηρήσεις καθηγητών που δίδασκαν αλλά και στους διαλόγους που είχαν κατόπιν μαζί τους, προσδιόρισαν έναν αριθμό αλληλένδετων και επικαλυπτόμενων αρχών που τους οδηγούν στην επιλογή ή την παραγωγή παραδειγμάτων. Κάποιες από αυτές συνδέονται με μαθηματική γνώση, άλλες απαιτούν παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου ενώ κάποιες δείχνουν την τάση των καθηγητών να λαμβάνουν υπόψη τους κατά το σχεδιασμό των παραδειγμάτων το πώς σκέφτονται οι μαθητές τους. Κατά φθίνουσα σειρά συχνότητας οι αρχές αυτές είναι:

- εκκίνηση με μια απλή και οικεία περίπτωση
- ποια είναι τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών
- επίταξη της προσοχής στα συναφή χαρακτηριστικά του παραδείγματος που δεν είναι γενικεύσιμα
- μεταφορά γενικότητας μέσω τυχαίας επιλογής παραδειγμάτων (συνειδητή τυχαία επιλογή, με επίγνωση ότι μπορεί να οδηγήσει στο να χαθεί ο στόχος)
- συμπερίληψη ασυνήθιστων περιπτώσεων
- περιορισμό της μη χρήσιμης δουλειάς στο ελάχιστο (για παράδειγμα, διευκρίνιση μιας στρατηγικής λύσης προβλήματος χωρίς να γίνουν όλοι οι υπολογισμοί)

Τα προαναφερόμενα υποδεικνύουν ποικιλία προσεγγίσεων στα παραδείγματα κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση. Η αλληλουχία των παραδειγμάτων αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό της χρήσης τους. Η ομοιότητες και οι διαφορές τους, οι αριθμοί, η ποικιλία που επιδεικνύουν και η αυξανόμενη πολυπλοκότητά τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προωθήσουν την επαγωγική μάθηση. Σε άλλες περιπτώσεις ένα απλό παράδειγμα προορίζεται ως ένα γενικό πρότυπο για μια γενική έκφραση έννοιας, αντικειμένου ή διαδικασίας για να υποστηρίξει την παραγωγική σκέψη.

2.2.7 Ο ρόλος των επεξεργασμένων (λυμένων) παραδειγμάτων

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα καταπιάστηκε με το να μελετά επεξεργασμένα παραδείγματα, ιδιαίτερα σε χώρους όπως μαθηματικά, φυσική, προγραμματισμός. Αν και δεν υπάρχει ακριβής ορισμός, τα επεξεργασμένα παραδείγματα είναι διδακτικά κατασκευάσματα τα οποία παρέχουν στους σπουδαστές λύσεις προβλημάτων από ειδικούς, με στόχο να μελετήσουν και να μιμηθούν το μοντέλο λύσης τους. Συνήθως περιλαμβάνουν τη διατύπωση του προβλήματος και μια διαδικασία για τη λύση του. Καθώς αυτά δένονται μεταξύ τους στοχεύουν στο να παρουσιάσουν πως λύνονται άλλα παρόμοια προβλήματα. Οι λύσεις των προβλημάτων παρουσιάζονται βήμα – βήμα και κάποιες φορές τα λυμένα περιλαμβάνουν και οπτικές αναπαραστάσεις του δοθέντος προβλήματος όπως για παράδειγμα διαγράμματα.

Παρόλο το πρόσφατο ενδιαφέρον για τα λυμένα παραδείγματα η ιδέα της μελέτης τους είναι παλιά. Μέσω παραδειγμάτων προσπάθησαν να ελέγξουν και να περιγράψουν τις διαδικασίες που υπεισέρχονταν στο σχηματισμό εννοιών, γνωστικοί και εκπαιδευτικοί ψυχολόγοι από τις δεκαετίες του 50 και του 60 ακόμα. Θεμελιώδης στόχος των ερευνών εκείνων –αλλά και των σημερινών- είναι η αναζήτηση μιας αρχής ή μιας κανονικότητας. Μια τυπική έρευνα στο τι μελετά ο μαθητής από τα παραδείγματα περιλαμβάνει μέτρηση της ικανότητας τους να ταυτοποιούν μια έννοια στόχο, μετά από την έκθεσή τους σε περιπτώσεις και μη περιπτώσεις αυτής, και μελέτη του αν οι μαθητές μπορούν επιτυχώς να αποκομίσουν την υποβόσκουσα κοινή έννοια σε παραδείγματα. Επιπλέον οι έρευνες μπορούν να προσφέρουν και στην εκπαιδευτική ψυχολογία, παρέχοντας στοιχεία σχετικά με την συλλογή, την παρουσίαση και την αλληλουχία των παραδειγμάτων.

Τα λυμένα παραδείγματα στη βιβλιογραφία έχουν συνδεθεί με προγράμματα που στοχεύουν στην απόκτηση δεξιοτήτων, ένας στόχος που τίθεται σε διάφορα περιβάλλοντα εξάσκησης καθώς και σε διδακτικά προγράμματα σε περιοχές όπως σκάκι, μουσική, αθλητισμός, προγραμματισμός και βασικά μαθηματικά. Από αυτή την άποψη, η μελέτη από επεξεργασμένα παραδείγματα έχει μεγάλη σημασία, τουλάχιστον στα αρχικά στάδια της απόκτησης γνωστικών δεξιοτήτων. Άλλωστε στη

βιβλιογραφία επίσης καταγράφεται ότι η μελέτη από λυμένα παραδείγματα προτιμάται από αρχάριους σε ένα θέμα.

Οι Anderson, Fincham, and Douglass (1997), (αναφορά σε Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000) τόνισαν ότι η απόκτηση δεξιοτήτων περιλαμβάνει 4 επικαλυπτόμενα στάδια. Στο πρώτο στάδιο οι μαθητές λύνουν δια μέσου αναζήτησης αναλογίας, αναφέρονται σε γνωστά προβλήματα και προσπαθούν να τα συσχετίσουν με το πρόβλημα που λύνουν. Στο δεύτερο αναπτύσσουν αφηρημένους κανόνες οι οποίοι οδηγούν λεκτικά τη λύση τους. Μετά από εξάσκηση μετακινούνται στο τρίτο στάδιο, όπου δεν χρειάζεται πια να ακολουθούν τους λεκτικούς κανόνες που μελέτησαν, μπορούν να αντιμετωπίσουν οικεία προβλήματα αυτόματα. Στο τελευταίο στάδιο αυτοί που έχουν εξασκηθεί σε πολλούς τύπους προβλημάτων έχουν πολλά παραδείγματα στο μυαλό τους και μπορούν να ανακτήσουν μια λύση γρήγορα από τη μνήμη τους.

Παρόλα αυτά το να παρέχει κανείς επεξεργασμένα παραδείγματα χωρίς επιπλέον εξηγήσεις ή άλλη εννοιολογική υποστήριξη μπορεί να είναι αναποτελεσματικό. Οι σπουδαστές συχνά θεωρούν αυτά τα παραδείγματα, ως ειδικό υπόδειγμα που δεν είναι εφαρμόσιμο όταν λύνουν προβλήματα ελαφρώς διαφοροποιημένα από αυτά στο επεξεργασμένο. Οι περισσότερες από τις έρευνες εστίασαν στη μέτρηση της απόδοσης σε τεχνικές και στη λύση λεκτικών προβλημάτων παρά σε μελέτη εννοιολογικής κατανόησης ή μαθηματικής διερεύνησης.

Οι Watson & Mason (2002a, 2002b) συζητούν ότι τα επεξεργασμένα προβλήματα μπορεί να αναχαιτίσουν την ικανότητα των σπουδαστών να γενικεύουν πέρα από το αναγνωρίζουν το συντακτικό πρότυπο. Μια ερμηνεία για τούτο θα μπορούσε να είναι το ότι δίνεται προσοχή στα βήματα λύσης κι ελαχιστοποιείται η εστίαση στις διαδικασίες συνδυασμού και μετασχηματισμών. Επιπλέον θεωρείται σημαντικό να διασαφηνίζονται σε ένα επεξεργασμένο παράδειγμα ποιά βήματα και γιατί κάνουμε, ώστε να εστιάζεται η προσοχή.

Ο Renkl (1997) καταγράφει ότι για να μπορεί να μελετήσει κανείς αποτελεσματικά από λυμένα παραδείγματα, θα πρέπει να εξηγεί τα βήματα λύσης στον εαυτό του, γιατί δεν περιλαμβάνονται σε ένα λυμένο όλες οι πληροφορίες γύρω από τη λογική των βημάτων λύσης. Η χρήση ατελών

παραδειγμάτων είναι χαρακτηριστικό όχι μόνο σε επεξεργασμένα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται στην έρευνα, αλλά και στα κοινά σχολικά εγχειρίδια.

Σύμφωνα με τους Atkinson, et al. (2000) υπάρχουν παράγοντες που μετριάζουν την αποτελεσματικότητα των επεξεργασμένων παραδειγμάτων. Αυτοί μπορεί να σχετίζονται με εσωτερικά χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων ή με μεταξύ των παραδειγμάτων χαρακτηριστικά, αλλά και με ατομικές διαφορές μέρους των σπουδαστών στην επεξεργασία των παραδειγμάτων, όπως για παράδειγμα ο τρόπος με τον οποίο τα αυτό-εξηγούν.

Έτσι τονίζουν ως σημαντικό χαρακτηριστικό μέσα σε ένα παράδειγμα το να ολοκληρώνονται όλες οι πηγές πληροφοριών (διαγράμματα, πίνακες και οπτικές αναπαραστάσεις) σε μια ολότητα, καθώς η διάσπαση της προσοχής των σπουδαστών σε μη ολοκληρωμένες πηγές πληροφορίας, προκαλεί γνωστική υπερφόρτωση. Επιπλέον προτείνουν να ονοματίζεται ή να διαχωρίζεται οπτικά κάθε βήμα στην περίπτωση που ένα σύνθετο έργο χωρίζεται σε υποστόχους.

Σχετικά με χαρακτηριστικά μεταξύ παραδειγμάτων προτείνουν ότι ενδυναμώνεται η μεταφορά διαδικασιών και μεθόδων όταν παρουσιάζονται τουλάχιστον δυο παραδείγματα για κάθε τύπο προβλήματος που διδάσκεται. Επιπλέον τονίζουν ότι τα μαθήματα στα οποία υπάρχουν ζευγάρια επεξεργασμένο πρόβλημα που ακολουθείται από πρόβλημα εξάσκησης, μπορούν να παράγουν καλύτερα αποτελέσματα, από αυτά στα οποία μια σειρά παραδειγμάτων δίνονται, και ακολουθεί μια σειρά από προβλήματα εξάσκησης. Ποικιλία προβλημάτων, υπο-είδη σε μια διδακτική ακολουθία είναι ωφέλιμα, αλλά υπό την προϋπόθεση ότι το μάθημα έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε η χρήση των λυμένων παραδειγμάτων να ελαχιστοποιεί το γνωστικό φορτίο.

Η έρευνά τους σχετικά με την επίδραση των αυτό-αιτιολογήσεων στη διάρκεια μελέτης επεξεργασμένων παραδειγμάτων έδειξε ότι υπάρχουν διαφορετικοί τύποι αυτό- αιτιολογήσεων. Διορατική επεξήγηση και βασισμένη σε κανόνες και αρχές. Οι μαθητές που χαρακτηρίζονται ως διορατικοί στην αυτό-αιτιολόγηση προβλέπουν το επόμενο βήμα στη λύση του παραδείγματος, και καθώς προχωράνε αυτό-ελέγχουν σε ποια από τα βήματα, αυτό που προέβλεψαν, ταιριάζει με το προτεινόμενο. Αντίθετα οι

μαθητές που στηρίζουν την αιτιολόγησή τους σε κανόνες και αρχές, προσπαθούν να εκφράσουν την εννοιολογική δομή του προβλήματος εξηγώντας τις εννοιολογικές δομές, υποστόχους, και αναπτύσσοντας τις θεμελιώδεις αρχές πάνω στις οποίες βασίστηκε η λύση. Εμείς θα πρέπει να ενθαρρύνουμε και τους δυο τύπους εξηγήσεων. Η εκπαίδευση σε δομικούς μετασχηματισμούς των παραδειγμάτων, όπως το να θέτουν βήματα υποστόχους, ή η χρήση ατελών παραδειγμάτων εμφανίζονται ως ιδιαίτερα αποτελεσματικές. Σχετικά με τη βελτίωση των αυτό- αιτιολογήσεων (και τη λύση προβλημάτων) τα δεδομένα δίνουν λιγότερες υποσχέσεις επιτυχίας. Η εισαγωγή των μαθητών στο να διδάσκουν άλλους, σχετίζεται και με κοινωνικές πρακτικές του να εξηγούμε. Ιδιαίτερα οι μαθητές που δεν έχουν εμπειρία στο να διδάσκουν και είναι στην αρχή της επαφής τους με ένα τέτοιο πεδίο, έχουν άγχος όταν τους ζητείται να δώσουν διδακτικές εξηγήσεις.

Οι Atkinson et al. (2000) πρότειναν τρεις βασικές κατηγορίες παραγόντων που επηρεάζουν τη μελέτη από τα επεξεργασμένα παραδείγματα. Οι τρείς αυτές κατηγορίες παραγόντων οδήγησαν σε αρχές που αφορούν (1) το πώς πρέπει να κατασκευαστούν τα παραδείγματα, (2) πως πρέπει να σχεδιαστούν τα μαθήματα που περιλαμβάνουν παραδείγματα, (3) πως θα ενδυναμωθεί η διαδικασία σκέψης την οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν μελετούν παραδείγματα.

Οι κριτικές για τη διδασκαλία με επεξεργασμένα παραδείγματα εγείρουν το θέμα ότι αυτά δεν μπορούν να βοηθήσουν την κοινότητα της τάξης να πετύχει τους στόχους της, καθώς η αποτελεσματικότητά τους περιορίζεται στο να εκπαιδεύει τους μαθητές να χρησιμοποιούν μια συγκεκριμένη διαδικασία, κάτω από στενά ορισμένες συνθήκες. Αποτέλεσμα αυτής της θεώρησης είναι ότι οι μαθητές που εκτίθενται σε επεξεργασμένα παραδείγματα δεν καθίσταται ικανοί να λύνουν προβλήματα τα οποία παρεκκλίνουν από τα λυμένα. Δεν αναγνωρίζουν τις κατάλληλες περιπτώσεις στις οποίες οι διαδικασίες μπορούν να εφαρμοστούν, και έχουν δυσκολία να λύσουν προβλήματα στα οποία δεν έχουν επεξεργασμένα παραδείγματα. Με αυτή την κριτική κατά νου, τίθεται το ερώτημα, αν τα παραδείγματα είναι κατάλληλα για διδασκαλία στην τάξη αφού αυτά δεν παρέχουν κάτι πάνω από μια επιφανειακή μελέτη για να μιμηθούν διαδικασίες. Και αυτός ο τύπος

μελέτης είναι αυτός που αποκλείει την ευέλικτη προσαρμογή σε ασυνήθιστα προβλήματα και συμφραζόμενα.

Σήμερα οι ερευνητές σε θέματα εκπαίδευσης, ψάχνουν πως μπορούν να δημιουργήσουν αυθεντικό περιβάλλον μελέτης στην κοινότητα της τάξης που χρησιμοποιεί ως τεχνική διδασκαλίας ένα πλαίσιο λύσης πραγματικού προβλήματος. Οι έρευνες για τα επεξεργασμένα συνδέθηκαν με ελεγχόμενες ρυθμίσεις σε σχετικά απλά προβλήματα και για αυτό μπορεί τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών να αγνοηθούν από τους ερευνητές που υποστηρίζουν διδακτικά τα αυθεντικά προβλήματα. Επιπλέον τα επεξεργασμένα συνδέθηκαν και με γνωστικά-θεωρητικά προγράμματα πειραματικών μελετών για τη σπουδαιότητα της ενδυνάμωσης της μελέτης, μέσω λύσης προβλήματος, και μελέτης παραδειγμάτων από καλή λύση προβλήματος. Το αν τελικά επιτυγχάνεται ή όχι, η ενδυνάμωση της μελέτης σε αυθεντικά πλαίσια λύσης προβλήματος, μένει να απαντηθεί από έρευνες στην τάξη.

Οι Atkinson et al, (2000) προτείνουν ότι τα επεξεργασμένα μπορούν να βοηθήσουν τους παιδαγωγούς να πετύχουν το στόχο της προαγωγής προσαρμοστικότητας, ευέλικτης μεταβίβασης στρατηγικών στους σπουδαστές. Μέσα από την έρευνά τους, στα μεταξύ των παραδειγμάτων χαρακτηριστικά, στο σχεδιασμό μαθημάτων, σημειώνουν τη σπουδαιότητα του να παρέχουμε, εύρος παραδειγμάτων, (και να αφήνουμε τους σπουδαστές να τα μιμούνται), τα οποία καταδεικνύουν πολλαπλές στρατηγικές και προσεγγίσεις σε παρόμοια προβλήματα, και προάγουν ευρεία μεταβίβαση και γνωστική ευελιξία. Επιπλέον προτείνουν ότι είναι δυνατό να δομηθούν παραδείγματα σε περιβάλλον εφαρμογών υπολογιστή με χρήση πολυμέσων, ώστε να εξηγείται μια διαδικασία σκέψης από τον ειδικό που εκείνη τη στιγμή σκέφτεται φωναχτά καθώς λύνει ένα πρόβλημα. Ένα πρότυπο τέτοιων παραδειγμάτων είναι τα διδακτικά (tutorials) που έχουν σχεδιαστεί σε περιβάλλοντα υπολογιστών. Κάποια από αυτά ενσωματώνουν και γραφικές λύσεις και αναπαριστούν δυναμικά τις επεξεργασμένες λύσεις δίνοντας συγχρόνως ακουστική και οπτική σχεδίαση της λύσης από τον ειδικό.

Συμπερασματικά από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας για τα επεξεργασμένα παραδείγματα, προκύπτει ότι μέρος της κριτικής για τους

περιορισμούς που θέτει μια διδασκαλία βασισμένη σε αυτά, μπορεί να αρθεί, καθώς φαίνεται να παρέχονται στοιχεία για ότι:

Σπουδαστές ήταν ικανοί να λύνουν προβλήματα των οποίων οι διαδικασίες αποκλίνουν από αυτά που παρουσίαζαν τα επεξεργασμένα (έρευνα των Catrambone και Holyoak 1990, αναφορά σε Atkinson et al, 2000).

Σπουδαστές μπορούσαν να αναγνωρίσουν τις κατάλληλες διαδικασίες που έπρεπε να εφαρμόσουν από αυτές που απεικονίζονταν σε παραδείγματα (έρευνα των Quilici και Mayer 1996, αναφορά σε Atkinson et al, 2000).

Σπουδαστές ήταν ικανοί στη λύση προβλημάτων για τα οποία δεν τους παρέχονταν επεξεργασμένα παραδείγματα (έρευνα των Reed και Bolstad 1991, αναφορά σε Atkinson et al, 2000).

Τουλάχιστον τα επεξεργασμένα σε ένα θεμελιώδες επίπεδο προάγουν τον τύπο ευέλικτης μεταβίβασης που αναζητούν οι παιδαγωγοί στις τάξεις τους.

2.2.8 Κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές

Αυτό που συνήθως παρατηρούμε στις σχολικές τάξεις είναι οι αυθεντίες (σχολικά εγχειρίδια ή δάσκαλοι) να κατέχουν την ευθύνη να παράγουν παραδείγματα και οι μαθητές την ευθύνη να αντλήσουν από αυτά. Οι Watson και Mason (2005) θέτουν τα *μαθηματικά ως κατασκευαστική δραστηριότητα* και εστιάζουν στην παραγωγή μαθηματικών παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές. Αυτό αντιτίθεται στην ακόμα και σήμερα κοινή πρακτική τα παραδείγματα, καθώς και ερωτήσεις και προβλήματα να δίνονται στους μαθητές, και οι ίδιοι να παίρνουν ως δεδομένο ότι δεν μπορούν να παράγουν και να διερευνήσουν μαθηματικά παραδείγματα, τουλάχιστον σημαντικά τέτοια. Σε μια αντιστροφή της συνηθισμένης τάξης πραγμάτων, «*τα παραδείγματα των μαθητών*», είναι μια στρατηγική μελέτης, στην οποία ζητάς από τους μαθητές να κατασκευάσουν δικά τους παραδείγματα μαθηματικών αντικειμένων, κάτω από δοσμένους περιορισμούς. Οι Watson και Mason (2002) όρισαν (για τη μελέτη τους) το πλαίσιο χρήσης των παραδειγμάτων που φτιάχνονται από μαθητές. Το πλαίσιο αυτό δεν περιλαμβάνει σκοπούς αξιολόγησης και κινητοποίησης οι οποίοι είχαν ήδη καταγραφεί. Αλλά εστιάζει

στο πως δομείται το μαθηματικό νόημα, στη διάρκεια και λόγω της κατασκευής παραδειγμάτων. Οι πέντε τύποι χρήσης που περιλαμβάνονται στο πλαίσιο είναι:

- Δοκιμάζοντας τη δομή
- Δοκιμάζοντας και επεκτείνοντας το εύρος μεταβολής
- Δοκιμάζοντας τη γενικότητα
- Δοκιμάζοντας τους περιορισμούς και τα νοήματα των συνθηκών
- Επεκτείνοντας τους χώρους παραδειγμάτων και διερευνώντας τα όρια.

Οι ίδιοι ισχυρίζονται και στοιχειοθετούν ότι τα παραδείγματα που φτιάχνονται από μαθητές λειτουργούν ως ισχυρό παιδαγωγικό εργαλείο, για την ενδυνάμωση της μελέτης μαθηματικών σε κάθε επίπεδο.

Σε έρευνα των Zazkis και Leikin (2007) προτείνεται ότι αυτό το παιδαγωγικό εργαλείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ερευνητικό εργαλείο. Υπογραμμίζουν το διαφορετικό ρόλο που μπορούν να παίξουν τα παραδείγματα συγκρινόμενα με τα επεξεργασμένα, μέσω της αλλαγής θέσεων μεταξύ αυτών που τα παρέχουν και αυτών που μελετούν από αυτά. Ενώ στα επεξεργασμένα ρητές λύσεις παρουσιάζονται από κάποια αυθεντία, (δάσκαλο ή εγχειρίδιο) και οι μαθητές μαθαίνουν από αυτά, στη δική τους περίπτωση οι ερευνητές μαθαίνουν από τα παραδείγματα που παράγονται από τους συμμετέχοντες στην έρευνα, οι οποίοι μπορεί να είναι μαθητές ή μαθητές και δάσκαλοι ή και ασκούμενοι δάσκαλοι.

Ισχυρίζονται ότι από το ρεπερτόριο των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούν οι συμμετέχοντες στην έρευνα, μπορούν να αντλήσουν στοιχεία σχετικά με την παιδαγωγική και μαθηματική τους γνώση. Τονίζουν ότι:

> «*τα παραχθέντα παραδείγματα από τους συμμετέχοντες στην έρευνα - αν τους παροτρύνουμε κατά κάποιο τρόπο να τα παράγουν- καθρεπτίζουν τις αντιλήψεις τους γύρω από τα μαθηματικά αντικείμενα που εμπλέκονται στο έργο, το παιδαγωγικό τους ρεπερτόριο, τις δυσκολίες και τις πιθανές ανεπάρκειες στις προσλήψεις τους*» (σελ. 15).

Οι ίδιοι μάλιστα παρέχουν και ένα θεωρητικό πλαίσιο για την εκτίμηση των παραδειγμάτων που φτιάχνουν οι συμμετέχοντες στην έρευνα.

Προτείνουν κριτήρια τα οποία παρέχουν ένα φακό μέσω του οποίου τα παραχθέντα παραδείγματα εξετάζονται ως προς το σκοπό της έρευνας. Στα κριτήρια αυτά κάνουν αναφορά στη θεωρητική έννοια του *«χώρου παραδειγμάτων»* (Watson και Mason, 2005) .

2.2.9 Χώροι παραδειγμάτων

Όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με το θέμα της δημιουργίας δικών τους παραδειγμάτων, βιώνουν την ανακάλυψη, την κατασκευή ή τη συναρμολόγηση αντικειμένων από ένα χώρο, μαζί με τις σχέσεις τους. Οι Watson και Mason (2005) εισάγουν την έννοια του χώρου παραδειγμάτων ως εξής: «*τα παραδείγματα που παράγουν οι μαθητές προκύπτουν από μια μικρή δεξαμενή ιδεών η οποία εμφανίζεται ως απάντηση σε ειδικά έργα και σε ειδικές καταστάσεις. Καλούμε αυτές τις δεξαμενές, χώρους παραδειγμάτων*». Οι ίδιοι συγγραφείς σημειώνουν στη σελίδα 51:

> «*Τα παραδείγματα δεν είναι συνήθως απομονωμένα, μάλλον γίνονται αντιληπτά ως περιπτώσεις μιας κλάσης δυνητικών παραδειγμάτων. Ως τέτοια συνιστούν αυτό που καλούμε ένα χώρο παραδειγμάτων. Παίρνοντας σα μέτρο τις μέχρι τώρα παρατηρήσεις η εμπειρία βοηθάει τους μαθητές να φτάσουν σε ένα χώρο παραδειγμάτων ο οποίος αναδύεται ως απάντηση σε κατάσταση, υπενθύμιση, τάση… Οι χώροι παραδειγμάτων δεν είναι ακριβώς λίστες, έχουν μια εσωτερική ιδιοσυγκρασιακή δομή… και μέσω αυτής της δομής παράγονται τα παραδείγματα. Οι δομές και τα περιεχόμενά τους είναι ατομικά και προκύπτουν για την περίσταση. Ομοίως δομημένοι χώροι μπορεί να είναι προσιτοί με διαφορετικούς τρόπους*».

Έτσι οι χώροι παραδειγμάτων έχουν βασικά χαρακτηριστικά: 1) είναι δυναμικοί, δηλαδή μπορούν να αναπτυχθούν και να αλλάξουν 2) έχουν μια εσωτερική δομή και 3) η δομή τους είναι προσωπική.

Οι Watson και Mason προτείνουν διάφορες μεταφορές για το χώρο παραδειγμάτων: ως τοπίο, με την έννοια ότι ψάχνοντας για ένα παράδειγμα, είναι σαν να εξερευνώ και να αναζητώ τα λιβάδια και τους βοσκοτόπους ενός τοπίου. Ως χώρος εργαλείων, ή ως τροφοθήκη με την έννοια ότι το να αναζητάς ένα παράδειγμα συγκρίνεται με το να ψάχνεις για ένα συγκεκριμένο

πράγμα που είναι απαραίτητο για συγκεκριμένο σκοπό. Η τελευταία μεταφορά υπογραμμίζει το γεγονός ότι ταυτόχρονα οργανώνεις και κατηγοριοποιείς ξανά τα άλλα πράγματα στην εργαλειοθήκη ή την τροφοθήκη, κάτι που τονίζει ότι το ψάξιμο παραδειγμάτων αποφέρει και μια αναδόμηση του χώρου παραδειγμάτων.

Ανεξάρτητα από το ποια μεταφορά θα προτιμήσει κανείς, όλες δείχνουν πως η θεώρηση παραδειγμάτων δεμένα με το χώρο τους, παρέχουν μια γέφυρα μεταξύ των ιδιαίτερων ατομικών παραδειγμάτων και της ευρείας μαθηματικής γενικότητας. Κάθε μεταφορά εμφανίζει τα παραδείγματα ως μη απομονωμένα, μη ξεκομμένες οντότητες, και καθεμιά παρουσιάζει την αναζήτηση παραδειγμάτων ως μια διαδικασία οργάνωσης εκ νέου της ευρύτερης δομής που τα περιέχει.

Οι Watson και Mason (2005) διακρίνουν μεταξύ διαφόρων ειδών χώρων παραδειγμάτων :

- *Τοπικός (situated), προσωπικός χώρος παραδειγμάτων* που προκλήθηκε μέσω μιας εργασίας, νύξεων και του περιβάλλοντος, καθώς και από την πρόσφατη εμπειρία.
- *Προσωπικός, δυνητικός χώρος παραδειγμάτων* από τους οποίους ένας τοπικός χώρος σχεδιάζεται, αποτελούμενος από την προηγούμενη εμπειρία του προσώπου (ακόμα και δεν μπορεί ρητά να την ανακαλέσει), η οποία μπορεί να μην έχει δομηθεί με τρόπους που παρέχουν εύκολη προσέγγιση.
- *Θεσπισμένος (conventional) – συμβατικός χώρος παραδειγμάτων* όπως γίνεται αντιληπτός από τους μαθηματικούς και παρατίθεται στα εγχειρίδια, στα οποία οι καθηγητές ελπίζουν να εισάγουν τους μαθητές τους.
- *Συλλογικός και (situated) χώρος παραδειγμάτων* τοπικός για μια τάξη ή άλλη ομάδα σε ένα συγκεκριμένο χρόνο, στον οποίο ενεργεί ως τοπικός συνηθισμένος χώρος.

Οι Zazkis και Leikin (2007) συμπληρώνουν ότι με την ανάλυση και τη σύγκριση του προσωπικού με το θεσπισμένο (conventional) χώρο παραδειγμάτων μπορούν να βγουν συμπεράσματα για τη γνώση του συμμετέχοντος σε έρευνα.

Ένας χώρος παραδειγμάτων περιλαμβάνει ομάδες μαθηματικών αντικειμένων με κάποιες σχέσεις μεταξύ τους:

> *«ένας χώρος παραδειγμάτων είναι η εμπειρία από το να έρχεται στο μυαλό μας μια ή περισσότερες ομάδες αντικειμένων μαζί με τις μεθόδους κατασκευής και τις συσχετίσεις τους. Μπορεί να υπάρχει εσωτερική δομή με τη μορφή των συνδέσεων μεταξύ των αντικειμένων ή μεταξύ ομάδων, και μπορεί να υπάρχουν δεσμοί συνάφειας μεταξύ εννοιών, διαδικασιών, θεωρημάτων και ούτω καθεξής»* (Goldenberg και Mason 2008, σελ. 189).

Τα παραδείγματα μαθηματικών αντικειμένων εμφανίζονται ως κλάσεις, παρόλο που κάποιες κλάσεις μπορεί να έχουν μόνο ένα ή δύο στοιχεία. Για παράδειγμα αν ζητήσουμε από κάποιον να σκεφτεί έναν άρρητο αριθμό ο πρώτος αριθμός που του έρχεται στο μυαλό είναι ο π ή ο √2. Αν δε προκληθεί περεταίρω συζήτηση μπορεί να θεσπιστεί ως επίσημος χώρος παραδειγμάτων ο προηγούμενος. Παρόλα αυτά οι μαθητές έχουν συνήθως επίγνωση ότι αλλάζοντας παραμέτρους μπορείς να πετύχεις και άλλα παραδείγματα. Στην περίπτωση των άρρητων οι μαθητές μάλλον αναγνωρίζουν ότι πολλαπλασιάζοντας με ένα μη μηδενικό ρητό ή προσθέτοντας οποιοδήποτε ρητό διατηρείται η αρρητότητα. Επίσης μπορεί να έχουν συνειδητοποιήσει ότι αλλάζοντας το 2 στο √2 μπορεί να πετύχουν άρρητο ακόμα και αν δεν έχουν επίγνωση των αντιπαραδειγμάτων 4, 9, 16 … στο γενικό συλλογισμό.

Οι Alcock και Inglis (2008) αναφέρουν ότι οι χώροι παραδειγμάτων μπορεί να περιλαμβάνουν ακόμα και διαγράμματα ή άλλα είδη αντικειμένων.

Όταν η έννοια του χώρου παραδειγμάτων επεκτείνεται σε μετα-μαθηματικά, οι αποδείξεις μπορεί να ειδωθούν ως παραδείγματα σχήματος ή δομής της μαθηματικής αιτιολόγησης. Συγκεκριμένες μορφές έργων, ως παραδείγματα τρόπων να δουλέψει κανείς στα μαθηματικά. Οι ορισμοί ως παραδείγματα διαδικασιών ορισμού. Και άρθρα με έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση, ως περιπτώσεις παραδειγματοποίησης διαφορετικών προσεγγίσεων και διερευνήσεων σε θέματα αποτελεσματικής μελέτης και διδασκαλίας.

2.2.10 Διαθέσιμος χώρος παραδειγμάτων

Μπορεί στο πίσω μέρος του μυαλού κάποιου να υπάρχει μια τεράστια συλλογή παραδειγμάτων, αλλά σε μια συγκεκριμένη στιγμή ένας περιορισμένος αριθμός αυτών είναι διαθέσιμα. Για άλλα πάλι, μπορεί να είναι στην επιφάνεια, αλλά να απαιτείται κάποια προσπάθεια για να κατασκευαστούν ξανά με λεπτομέρεια. Μερικές φορές έχουμε μια γενική αίσθηση των παραδειγμάτων χωρίς πολλές λεπτομέρειες, και άλλες φορές λίγα ξεκάθαρα παραδείγματα έρχονται αμέσως στο μυαλό μας και ξεκινούν μια τροχιά από μεταφορές, μετωνυμίες, πυροδοτήσεις συνδεδεμένων εννοιών, τεχνικών ή άλλων χαρακτηριστικών αυτών των παραδειγμάτων.

Οι Watson και Mason (2005) πρότειναν τη μεταφορά της τροφοθήκης για τον τρόπο με τον οποίο τα παραδείγματα αποθηκεύονται και είναι προσβάσιμα: κάποια από αυτά είναι μπροστά και χρησιμοποιούνται συχνά ενώ άλλα είναι πίσω περιμένοντας μια ευκαιρία για να χρησιμοποιηθούν. Κάποια μπορεί να έχουν αποκτηθεί όταν ένα ενδιαφέρον θέμα αντιμετωπίστηκε, ενώ άλλα μπορεί να έχουν αποκτηθεί κατά τη συνάντηση για πρώτη φορά με ένα νέο όρο, θεώρημα ή τεχνική. Πάντως διαφορετικά παραδείγματα είναι διαθέσιμα σε διαφορετικές στιγμές, ανάλογα με τι τα πυροδοτεί. Τι εμφανίζεται μπροστά στην τροφοθήκη εξαρτάται από την κατάσταση και την πρόσφατη χρήση. Οι Goldenberg & Mason, (2008) συνδέουν τον όρο *διαθέσιμος χώρος παραδειγμάτων* με ότι έρχεται σε μια συγκεκριμένη στιγμή στο μυαλό μας, το οποίο έχει να κάνει με την περίσταση και εξαρτάται από πολλούς παράγοντες μεταξύ αυτών από τα συμφραζόμενα και την ιδιαίτερη κατάσταση του καθενός. Μπορεί να έρθουν πρώτοι στο μυαλό των μαθητών μας οι άρρητοι π και √2 αλλά εδώ είμαστε για να αλλάξουμε την κατάσταση και να δώσουμε πρόσβαση και σε άλλους, ακόμα και αλγεβρικούς άρρητους.

2.2.11 Κατασκευή παραδειγμάτων και εμπλουτισμός χώρου παραδειγμάτων

Οι χώροι παραδειγμάτων εμπλουτίζονται πληρέστερα σε συνθήκες τάξης, όπου οι κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες είναι συμβατές με την

αλληλεπίδραση και την κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές. Κατάλληλες συνθήκες είναι εκείνες που προωθούν τη διατύπωση εικασιών περισσότερο από την εστίαση σε λίγα παραδειγματικά ή γενεσιουργά παραδείγματα. Τα παραδείγματα αναλύονται ως προς τα χαρακτηριστικά τα οποία συνεισφέρουν στην κατασκευή και τη σταδιακή βελτίωσή τους, και τους τρόπους να παράγονται ευρύτερες κλάσεις παραδειγμάτων. Σύμφωνα με τους Goldenberg και Mason (2008): *«οι μαθητές που ξέρουν πως οτιδήποτε λέγεται ως εικασία, είναι δυνατό να υποστεί τροποποίηση, αναπτύσσουν την τάση, όχι μόνο να αναζητούν ταυτόχρονα, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, αλλά και να χρησιμοποιούν αυτά για να τροποποιήσουν εικασίες».* Επιπλέον οι προηγούμενοι ερευνητές τονίζουν πως οι μαθητές οι οποίοι έχουν επίγνωση του ότι αναζητώντας τί είναι ίδιο και τί διαφέρει ως στρατηγική μελέτης, αναπτύσσουν πλούσιους χώρους παραδειγμάτων, ενώ αυτοί που κατέχουν μόνο τα παραδείγματα που τους δόθηκαν ως πρότυπα, είναι καταδικασμένοι σε ένα περιορισμένο και ίσως παραπλανητικό χώρο παραδειγμάτων.

Τα παραδείγματα δένονται μεταξύ τους ως ένωση, όχι μόνο με κριτήριο το αν ανήκουν σε μια ή περισσότερες κλάσεις συγγενικών παραδειγμάτων, ή αν αποτελούν αντιπροσωπευτικό δείγμα του ίδιου ή παρόμοιου θέματος αλλά επίσης και με το αν παράγουν μεθόδους κατασκευής που πάνε πέρα από τις διαστάσεις δυνατών μεταβολών. Έτσι σημαντικές πτυχές ή στοιχεία του χώρου παραδειγμάτων είναι η κατασκευή μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σχηματίσουν τάξεις και τροποποιήσεις τάξεων, ανάλογα με τις ανάγκες. Οι Watson και Mason (2005) παρουσιάζουν έναν αριθμό από διαφορετικές δομές εργασιών που εμπλέκουν τους μαθητές στην κατασκευή παραδειγμάτων.

Οι Watson και Shipman (2008) δείχνουν, ότι μέσα από κατάλληλα έργα στην τάξη, είναι δυνατό με χρήση διερευνητικών έργων κατασκευής, να προκαλούν τους μαθητές στο να αντιμετωπίζουν βασικές οπτικές μιας έννοιας ή ενός θέματος. Δίνουν μεγάλη σπουδαιότητα στην παραγωγή παραλλαγών, και συνδέουν αυτή τη διαδικασία με αυτό που ο Simon και οι συνεργάτες του περιγράφουν, ως αντανάκλαση της σχέσης μεταξύ της δραστηριότητας και της επίδρασής της σε αυτά που προσλαμβάνει κανείς (Simon, Tzur, Heinz και Kinzel, αναφορά σε Goldenberg και Mason, 2008).

Συγκεκριμένα οι Watson και Shipman τονίζουν:

«ο προσωπικός έλεγχος των μεταβλητών συνεισφέρει στο να αντιληφθούμε, να θεσπίσουμε και να κατανοήσουμε τις σχέσεις που παραδειγματοποιούνται. Οι Simon, Tzur, Heinz και Kinzel το περιγράφουν ως μια διαδικασία αντανάκλασης της σχέσης μεταξύ της δραστηριότητας και της επίδρασής της σε αυτά που προσλαμβάνει κανείς. Αυτό σημαίνει ότι αν οι μαθητές δημιουργούν παραδείγματα, ο προβληματισμός πάνω σε αυτά τα παραδείγματα, θα μπορούσε, αν αντιληφτούν την επίδραση των παραλλαγών που έφτιαξαν, να οδηγήσει σε επίγνωση της υποβόσκουσας μαθηματικής δομής». (σελ.98)

Όταν έχεις τον έλεγχο πάνω σε ένα εύρος παραδειγμάτων βλέποντάς τα ως περιπτώσεις μιας γενικότητας, ή ως συστατικά με τα οποία παράγονται επιπλέον παραδείγματα η σχέση σου με το θέμα αλλάζει. Ξεκινώντας με οικεία παραδείγματα και μέσω σταδιακής βελτίωσης μπορείς να παράγεις ένα παράδειγμα που διέπεται από ειδικούς περιορισμούς.

2.3 Μαθηματική Δραστηριότητα

Τους ερευνητές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης απασχόλησε και εξακολουθεί να απασχολεί η αναζήτηση στόχων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Μερικοί από τους στόχους αυτούς προσανατολίζονται προς τη μετάβαση από τα μαθηματικά «ως έτοιμο προϊόν» στις «διαδικασίες μαθηματικοποίησης» που περιλαμβάνουν διερεύνηση, πειραματισμό, διατύπωση εικασιών και έλεγχο αυτών. Η παραπάνω στόχευση εκφράστηκε και στα αναλυτικά προγράμματα για τα μαθηματικά με όρους «μαθηματικού εγγραμματισμού (mathematical literacy)» ή μαθηματικής επάρκειας (mathematical proficiency)».

Οι παραπάνω αναζητήσεις υποδεικνύουν μια κυρίαρχη ανάγκη, τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο να αντανακλούν την πορεία συγκρότησης της ίδιας της επιστήμης των μαθηματικών, ως μια προσπάθεια

ερμηνείας και κατανόησης του κόσμου και να αποθαρρύνουν την έμφαση στην εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών.

Μια άλλη εστίαση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η αναγνώριση της ανάγκης για αξιοποίηση της εκτεταμένης άτυπης γνώσης που οι μαθητές φέρουν στο σχολείο από το περιβάλλον τους, και η ενθάρρυνσή τους να χτίσουν πάνω σε αυτή .

Στην Αμερική έχει συσταθεί από το 1916 το National Research Council (NRC) του οποίου μέρος των μελετών που διενεργεί αφορούν σε επιστημονικά και τεχνολογικά θέματα. Τα τελευταία χρόνια απασχολήθηκε και με θέματα εκπαιδευτικής έρευνας και πολιτικής. Βασικός στόχος του NRC Mathematics Learning Study ήταν η σύνθεση των ερευνητικών δεδομένων ώστε να μπορεί να παρέχει προτάσεις για καλύτερες πρακτικές. Μια επιτροπή ορίστηκε στις αρχές του 2000 αποτελούμενη από ειδικούς στα μαθηματικά, στην έρευνα γύρω από τη μαθηματική εκπαίδευση, στην έρευνα για τις γνωστικές επιστήμες και επιφορτίστηκε εκτός των άλλων και με το έργο της περιγραφής του πλαισίου σχετικά με τι σημαίνει επιτυχής μελέτη μαθηματικών. Έπρεπε να βρει κάποιο τρόπο να χαρακτηρίσει την «επιτυχή μελέτη μαθηματικών». Η επιτροπή αυτή υιοθέτησε ως όρο για την περιγραφή της επιτυχούς μελέτης των μαθηματικών τον όρο *μαθηματική επάρκεια* (mathematical proficiency) αν και εξέτασε και άλλους, μεταξύ αυτών και τον όρο *μαθηματικός εγγραμματισμός* (mathematical literacy) ο οποίος αν και δεν υιοθετήθηκε, ταιριάζει στη θεώρηση της μαθηματικής επάρκειας της επιτροπής.

Η *μαθηματική επάρκεια* (Kilpatrick, 2001) καθορίστηκε με όρους πέντε συνυφασμένων σκελών που αναπτύσσονται από κοινού, και χρησιμοποιήθηκε για να ορίσει τους στόχους μελέτης των μαθηματικών για όλους τους μαθητές, κάθε ηλικίας και τάξης και οι οποίοι μπορούν αν κριθούν ως επαρκείς ή όχι σύμφωνα με τους στόχους αυτούς. Τα πέντε σκέλη της μαθηματικής επάρκειας είναι:

- *Εννοιολογική κατανόηση (conceptual understanding)* η οποία αναφέρεται στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, πράξεων και σχέσεων.

- *Διαδικαστική ευχέρεια (procedural fluency)* που αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να εκτελούν μαθηματικές διαδικασίες ευέλικτα, αποτελεσματικά, κατάλληλα και με ακρίβεια.
- *Επιδεξιότητα στρατηγικής (strategic competence),* την ικανότητα των μαθητών να διατυπώνουν, να αναπαριστούν και να λύνουν μαθηματικά προβλήματα.
- *Προσαρμοστική επιχειρηματολογία (adaptive reasoning),* η επιδεξιότητα για λογική σκέψη και αναστοχασμό, στην εξήγηση και τη δικαιολόγηση των μαθηματικών επιχειρημάτων.
- *Στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά (productive disposition)*, η οποία περιλαμβάνει ως συνήθη θέση οι μαθητές να βλέπουν τα μαθηματικά ως χρήσιμα και θέμα που αξίζει τον κόπο να μελετηθεί, σε συνδυασμό με την πεποίθηση στην αξία της δουλειάς και στην επιμονή αυτού που κάνει μαθηματικά.

Η ήδη υπάρχουσα έρευνα συνηγορούσε στο ότι το περιβάλλον λύσης προβλήματος προσφέρει ένα πλαίσιο στο οποίο όλες οι πτυχές της μαθηματικής επάρκειας, όπως ορίστηκαν από την επιτροπή, μπορούν να αναπτυχθούν μαζί.

Στο πρόγραμμα σπουδών για την Α΄Λυκείου αναφορικά με τη δραστηριότητα στην τάξη διαβάζουμε.

Στην προσέγγιση των στόχων συμβάλλουν:

- «Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική)».
- «Η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των αναπαραστάσεων των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά».
- «Οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών».

- «Η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου».
- «Η θεώρηση των Μαθηματικών ως πολιτισμικό, ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα».

Αντίστοιχα στο Principles and Standards for School Mathematics τίθενται οι διεργασίες με τις οποίες οι μαθητές μπορούν να φτάσουν στο μαθηματικό περιεχόμενο. Μεταξύ των διεργασιών τονίζονται: η λύση προβλήματος, η αιτιολόγηση και η απόδειξη, η επικοινωνία και οι συνδέσεις.

Η διεργασία της λύσης προβλήματος θεωρείται αναπόσπαστο μέρος όλης της μαθηματικής μελέτης. Με τον όρο λύση προβλήματος εννοούν την ενασχόληση με ένα έργο του οποίου η μέθοδος λύσης δεν είναι γνωστή από την αρχή. Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών οι μαθητές όλων των τάξεων θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία να χτίσουν νέα μαθηματική γνώση μέσω λύσης προβλήματος, να ασχοληθούν με προβλήματα που εγείρονται σε μαθηματικό ή άλλο πλαίσιο, να εφαρμόσουν και να προσαρμόσουν ποικιλία στρατηγικών για να τα λύσουν, να παρακολουθήσουν και να προβληματιστούν σχετικά με τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων.

Σχετικά με τις συνδέσεις τονίζεται ότι οι μαθητές όλων των τάξεων θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία να αναγνωρίσουν και να χρησιμοποιήσουν συνδέσεις μαθηματικών ιδεών μέσα στα μαθηματικά αλλά και έξω από αυτά, μεταξύ μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου. Να κατανοήσουν ότι οι ιδέες χτίζουν η μια πάνω στην άλλη για να παράγουν ένα συμπαγές όλο.

Στη σελίδα 64 διαβάζουμε: «με το να δίνουν οι εκπαιδευτικοί έμφαση στις μαθηματικές συνδέσεις μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές τους να χτίσουν τη θέση της χρήσης συνδέσεων στη λύση μαθηματικών προβλημάτων, περισσότερο από το να βλέπουν τα μαθηματικά ως σύνολο από ασύνδετες, απομονωμένες έννοιες και δεξιότητες. Η στάση αυτή μπορεί να ενδυναμωθεί με χρήση καθοδηγούμενων ερωτήσεων που μπορούν να θέτουν οι εκπαιδευτικοί, όπως ‘πως η σημερινή μας δουλειά σχετίζεται με τη συζήτηση που είχαμε την προηγούμενη … εβδομάδα, γύρω από …’. Υπάρχει ανάγκη να προβλεφθεί ρητά πώς οι μαθητές θα αποκτήσουν επίγνωση των μαθηματικών συνδέσεων».

Στην καταγραφή των στόχων για τις τάξεις 9 -12 σταχυολογούμε:

- «Οι μαθητές των τάξεων αυτών μπορούν να χτίσουν πάνω στην προηγούμενη γνώση τους μελετώντας ποικίλες και πιο πολύπλοκες τεχνικές λύσης προβλήματος. Θα αυξήσουν την ικανότητά τους να περιγράφουν και να αναλύουν καταστάσεις με μαθηματικούς όρους». (σελ. 288)
- «αναπτύσσουν τις ικανότητές τους στη δικαιολόγηση και την απόδειξη ισχυρισμών και στη χρήση συμβόλων κατά την αιτιολόγηση. Θα ασκηθούν στο να κάνουν και να ερμηνεύουν γραπτούς και προφορικούς ισχυρισμούς έτσι, ώστε να επικοινωνούν αποτελεσματικά με τους άλλους ενώ δουλεύουν και να καταστούν ικανοί να πείθουν για την ισχύ των αποτελεσμάτων της δουλειάς τους».
- «Ένα κεντρικό θέμα είναι και το θέμα των συνδέσεων. Οι μαθητές θα αναπτύξουν μια πιο πλούσια κατανόηση των μαθηματικών και των εφαρμογών τους, όταν μπορούν να δουν το ίδιο φαινόμενο από πολλές μαθηματικές οπτικές. Ένας τρόπος να το πετύχεις αυτό είναι με το να σχεδιάζεις διδακτικά υλικά των οποίων το περιεχόμενο υφαίνει μεταξύ διαφόρων αξόνων. Ένας άλλος για την ολοκλήρωση του περιεχομένου είναι με το να δούμε ότι περιεχόμενα που είναι προσανατολισμένα προς ένα κλάδο των μαθηματικών (όπως άλγεβρα ή γεωμετρία) περιέχουν ενοποιητικά προβλήματα, που αντλούν από μια ποικιλία πτυχών των μαθηματικών, είναι επιλύσιμα με μια ποικιλία μεθόδων και μπορούν οι μαθητές να τα προσεγγίσουν με διαφορετικούς τρόπους».
- «οι μαθητές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα μαθηματικά μπορούν να προχωρήσουν πέρα από τα προαναφερόμενα με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος είναι μέσα σε ετερογενείς τάξεις να παρέχονται διδακτικά υλικά στα οποία οι ιδέες που περικλείονται έχουν βάθος και μεγαλύτερη πολυπλοκότητα. Οι μαθητές που τα αντιμετωπίζουν δοκιμάζουν και διαφορετικά επίπεδα κατανόησης. Με το χρόνο, θα μάθουν νέους τρόπους σκέψης από τους συνομήλικους τους. Και ένας άλλος τρόπος είναι με τα

συμπληρωματικά τμήματα μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να γραφτούν σε επιπλέον μαθήματα μέσα στο πρόγραμμα».

2.4 Συναρτήσεις

Στη βιβλιογραφία πλήθος ερευνών έχει καταγράψει τις δυσκολίες των μαθητών γύρω από την έννοια της συνάρτησης. Επιπλέον οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα στη σύνδεση των αναπαραστάσεων της συνάρτησης αλλά και στο χειρισμό των συμβόλων που συνδέονται με αυτές. Το παιδαγωγικό ερώτημα που ανακύπτει είναι πώς να βοηθήσουμε τους μαθητές να τα «βγάλουν πέρα» με τις συναρτήσεις. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια επιστημολογική οπτική της έννοιας όπως αναπτύσσεται από τη Sierpinska (1992).

2.4.1 Επιστημολογικές και παιδαγωγικές αρχές για την έννοια της συνάρτησης Sierpinska (1992)

Η Sierpinska (1992) προτείνει ένα πλαίσιο συζήτησης για το τι σημαίνει κατανοώ κάτι στα μαθηματικά γενικά, και τι ιδιαίτερα σημαίνει κατανοώ τις συναρτήσεις ώστε να βοηθήσουμε τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που σχετίζονται με την έννοια αυτή.

Σχετικά με την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας γενικά η Sierpinska αναρωτιέται: «Πώς κατανοούμε μια μαθηματική έννοια; Μελετώντας τον ορισμό της; Δύσκολα κάποιος που εμπλέκεται με θέματα εκπαίδευσης θα έλεγε ναι». Και συνεχίζει

> «*μόνο όταν έχουμε δει περιπτώσεις και μη περιπτώσεις του αντικειμένου που πάει να οριστεί, όταν μπορούμε να αποφανθούμε τι είναι και τι δεν είναι το αντικείμενο αυτό, όταν έχουμε επίγνωση των σχέσεών του με άλλες έννοιες, όταν παρατηρήσουμε ότι αυτές οι σχέσεις έχουν ομοιότητες με άλλες οικείες σε μας, όταν έχουμε αντιληφθεί ότι το αντικείμενο έχει οριστεί μέσα σε μια θεωρία και τις πιθανές εφαρμογές του, τότε μπορούμε να πούμε ότι κατανοήσαμε κάτι γύρω από αυτό*» (σελ. 26)

Η ίδια συνδέει τα εμπόδια που παρατηρούνται στους μαθητές γύρω από την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης με αντίστοιχα εμπόδια που παρατηρήθηκαν κατά την ανάπτυξη της έννοιας ιστορικά (επιστημολογικά εμπόδια). Καταγράφει 16 τέτοια *επιστημολογικά εμπόδια* E(f) και τις αντίστοιχες *ενέργειες κατανόησης* K(f) που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Παρακάτω αναφέρουμε μερικά από τα επιστημολογικά εμπόδια και τις αντίστοιχες ενέργειες κατανόησης, συνοδευόμενα με τον προβληματισμό που αναπτύσσει η ίδια.

Η Sierpinska, κάνει αναφορά στους τρόπους με τους οποίους μπορεί κάποιος να ορίσει τη συνάρτηση. Ένας τρόπος είναι με τον τυπικό συμβολικό τρόπο, σχεδόν χωρίς τη χρήση λέξεων. Περιοριζόμενοι σε αυτά ακριβώς που λέει ο ορισμός, τη σχέση των στοιχείων του με άλλες μαθηματικές έννοιες και θεωρίες. Την ίδια στιγμή όμως η μαθηματική έννοια εφαρμόζεται σε ένα πλαίσιο (context), μαθηματικό ή μαθηματικοποιημένο, οπότε χρησιμοποιείται άτυπη γλώσσα η οποία μεταφέρει σημασίες που υπερβαίνουν την απλή λογική του ορισμού. Έτσι μπορεί να δούμε τη συνάρτηση *ως σχέση μεταξύ μεταβλητών μεγεθών* στις επιστήμες ή στην οικονομία. Και μιλάμε για νόμους της φυσικής ή της αγοράς. Στα μαθηματικά θεωρούμε τις καμπύλες σε σύστημα συντεταγμένων οπότε βλέπουμε τη συνάρτηση ως *σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των σημείων της καμπύλης.* Σε κάποια διαστήματα αυτές οι σχέσεις ικανοποιούν την απαίτηση του μονότιμου της συνάρτησης. Και μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις, η σχέση δίνεται με μια *ισότητα* που περιγράφει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα σημείο ανήκει στην καμπύλη. Η εικόνα που έχουμε εδώ για τη συνάρτηση είναι 'στατική' με την έννοια ότι οι 'νόμοι' δεν φτιάχνονται από μας, αλλά μάλλον ανακαλύπτονται από μας. Στην περίπτωση που η συνάρτηση ορίζεται όπως περιγράψαμε πριν, η απάντηση στην ερώτηση: «τι μας λέει ο ορισμός της συνάρτησης;» θα μπορούσε να είναι: «μια διατεταγμένη τριάδα (X, Y, f) όπου τα X και Y είναι σύνολα και η f είναι υποσύνολο του XxY ώστε αν (χ, y) ανήκει στην f και (χ, y') ανήκει στην f θα πρέπει y=y'». Αλλά απάντηση στην ερώτηση «με τι σχετίζεται ο ορισμός;» είναι δύσκολο να δοθεί. Εδώ η ερώτηση αναφέρεται σε μια πραγματικότητα που βρίσκεται πίσω από το μαθηματικό φορμαλισμό. Αναφέρεται στις αλληλεπιδράσεις και τις εφαρμογές της έννοιας και αυτό

περιλαμβάνει τουλάχιστον όλους τους διαφορετικούς τρόπους σκέψης και συζήτησης γύρω από τις συναρτήσεις. Είναι προφανές ότι η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης συνδέεται με την ικανότητα να μπορούμε να δώσουμε απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα. Τουλάχιστον θα πρέπει να θέτουμε στον εαυτό μας το ερώτημα σε ποια πραγματικότητα αναφέρεται ο ορισμός.

Καθώς αναζητάμε απάντηση στο ερώτημα «ποια είναι η αναφορά του ορισμού της συνάρτησης;» θα μπορούσαμε να φτιάξουμε εικόνα αν περιγράφαμε με απλά λόγια αντί για συμβολική γλώσσα τα Χ και Ψ ως τον κόσμο των αλλαγών, ή των αντικειμένων που αλλάζουν, οπότε το σύμβολο f αναφέρεται στον κόσμο των σχέσεων μεταξύ των αλλαγών, ή στον κόσμο των διαδικασιών που μετασχηματίζουν αντικείμενα σε άλλα. Οι σχέσεις ή οι διαδικασίες πρέπει να είναι καλά ορισμένες και αυτό αναφέρεται στον κόσμο των κανόνων, των κανονικοτήτων, των νόμων.

Φαίνεται ότι η πρώτη συνθήκη για την κατανόηση των συναρτήσεων είναι να συνειδητοποιήσουμε την παρουσία των παραπάνω κόσμων. Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει αλλαγές και σχέσεις μεταξύ των αλλαγών, ως κάτι που αξίζει να μελετηθεί. Οι αλλαγές στον κόσμο γύρω μας ήταν πάντα πηγή προβλημάτων και αγωνίας. Η αντίληψη των σχέσεων μεταξύ αυτών, των κανονικοτήτων που τις διέπει, είναι ένα εργαλείο για να ανταπεξέλθουμε στις αλλαγές αυτές.

Εν τέλει η έννοια της συνάρτησης μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της προσπάθειας του ανθρώπου να συμφιλιωθεί με τις αλλαγές που παρατηρεί στον κόσμο γύρω του. Θεμελιώδεις πράξεις για την κατανόηση Κ(f) είναι:

Κ(f)-1: προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί.

Κ(f)-2: προσδιορισμός κανονικοτήτων στις σχέσεις μεταξύ των αλλαγών ως ένα μέσο για να ασχοληθούμε με τις αλλαγές.

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω πρέπει όμως να υπερπηδηθούν τα εξής επιστημολογικά εμπόδια Ε(f):

Ε(f)-1: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών): Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα.

Ε(f)-2: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών) Υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πινάκων που παρουσιάζουν αριθμητικές σχέσεις δεν είναι αντικείμενο άξιο μελέτης στα μαθηματικά.

Ο προσδιορισμός των δυο παραπάνω ενεργειών κατανόησης και των αντίστοιχων επιστημολογικών εμποδίων έχει κάποιες σημαντικές συνέπειες στη διδακτική των συναρτήσεων. Οι σπουδαστές θα πρέπει να αποκτήσουν ενδιαφέρον για τη μεταβλητότητα και να ψάξουν για κανονικότητες πριν εισαχθούν σε παραδείγματα καλά συμπεριφερόμενων στοιχειωδών συναρτήσεων και ορισμούς στην τάξη. Ίσως, στη διδασκαλία, θα πρέπει να παρουσιάζονται οι συναρτήσεις ως μοντέλα σχέσεων. Έτσι όπως εμφανίστηκαν και ιστορικά, ως εργαλεία για περιγραφή και πρόβλεψη. Αν εμείς υποθέτουμε ότι η σημασία της έννοιας βρίσκεται στα προβλήματα και τις ερωτήσεις που αυτά γεννούν και ότι οι μαθητές μας θα πιάσουν το νόημα της συνάρτησης μέσω αντιμετώπισης αυτών, τότε αυτό ακριβώς πρέπει να εφαρμόζουμε και στη διδασκαλία μας. Όμως σε κάποια εγχειρίδια η σειρά αντιστρέφεται. Σχέσεις μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων παρουσιάζονται ως απλά παραδείγματα μαθηματικών συναρτήσεων και είναι μάλιστα τόσο ιδεατά ώστε να ταυτίζονται με τις συναρτήσεις των οποίων αποτελούν μοντέλα. Ακόμα και όταν οι συναρτήσεις εμφανίζονται ως μοντέλα σχέσεων που ανακαλύφθηκαν από την εμπειρία, αργότερα εξιδανικεύονται στο βαθμό που να προκαλούν παραμόρφωση των εικόνων τους στο μυαλό των μαθητών. Μια τέτοια παιδαγωγική χρήση μπορεί να καταστήσει για τους μαθητές δύσκολη τη διάκριση μεταξύ σχέσεων που ανακαλύπτονται από την εμπειρία και των μαθηματικών μοντέλων αυτών.

Άλλη μια πράξη κατανόησης είναι η:

Κ(f)-3: Ο προσδιορισμός αυτών που αλλάζουν κατά τη μελέτη των αλλαγών.

Με αντίστοιχο επιστημολογικό εμπόδιο:

Ε (f)-3: (Ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Η θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα· εστιάζοντας στο τρόπο που τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας τις αλλαγές αυτές καθαυτές.

Πριν οι μαθητές αρχίσουν να μαθαίνουν τις συναρτήσεις, η εμπειρία που έχουν με τις μεταβλητές είναι η σχετική με τη διάκριση μεταξύ γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων. Όταν πρόκειται για τις συναρτήσεις πρέπει να

κάνουν μια μετατόπιση στην διάκριση μεταξύ των σταθερών και των μεταβλητών ποσοτήτων. Ακόμα κι αν κάποια πράγματα στις εξισώσεις και τις συναρτήσεις είναι κοινά, η προσοχή στρέφεται στις διαφορετικές όψεις τους, και τους αναθέτει διαφορετικούς ρόλους. Για παράδειγμα, η εξίσωση δεν είναι πλέον μια σχέση πάνω στον άγνωστο που επιτρέπει να προσδιοριστεί η τιμή του. Στο πλαίσιο των συναρτήσεων παρουσιάζεται ως ο νόμος σύμφωνα με τον οποίο κάποιες μεταβλητές συμμεταβάλλονται.

Και άρα η αντίστοιχη πράξη κατανόησης:

Κ(f)-4: η διάκριση μεταξύ των δυο τρόπων μαθηματικής σκέψης: η μια με όρους γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων, η άλλη με όρους μεταβλητών και σταθερών ποσοτήτων.

Και αντίστοιχα:

Ε(f)-4: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Η σκέψη πρέπει να εξάγεται με όρους εξισώσεων κι αγνώστων.

Η αντίληψη ότι οι συναρτήσεις είναι ένα κατάλληλο εργαλείο για τη μοντελοποίηση ή τη μαθηματικοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών (ή άλλων) ποσοτήτων είναι μια συνθήκη για να αποκτήσει νόημα η έννοια της συνάρτησης γενικά.

Ε(f)-8: (Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Οι νόμοι στη Φυσική και οι συναρτήσεις στα μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό · ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές της σκέψης.

Κ(f)-8: Η σύνθεση των εννοιών των νόμων στη φυσική και της έννοιας της συνάρτησης· ειδικά, η επίγνωση της δυνατής χρήσης των συναρτήσεων για τη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών και άλλων μεγεθών.

Μια προνομιούχα σχέση – Η αναλογία

Εδώ μελετάμε το τρίτο στοιχείο της τριάδας : μετά τα **X** και **Y** είναι η σειρά της f.

Η αναλογία ήταν μια σχέση που για πολύ καιρό είχε εξέχουσα θέση. Η θεωρία των αναλογιών αναπτύχτηκε στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και διασφάλισε μια σταθερή βάση. Δεν είναι τυχαίο που αναζητούσαν την αναλογία στα πάντα. Μια τέτοια θεώρηση μπορεί να θεωρηθεί εμπόδιο:

Ε(f)-9:(Ασυνείδητο σχήμα της σκέψης) Η αναλογία είναι μια προνομιούχα μορφή σχέσης.

Ωστόσο, όπως και όλα τα επιστημολογικά εμπόδια, έχει επίσης ένα θετικό ρόλο στη σκέψη μας. Η αντίληψη των αναλογικών σχέσεων είναι η ουσία αυτή καθεαυτή οποιασδήποτε αναλογικής σκέψης. Η αναλογία είναι η ισότητα δυο λόγων και συναντάται παντού : στη φύση, στο σπίτι, στο ανθρώπινο σώμα, στη ζωγραφική, στη χρήση της γλώσσας.

Η απουσία γνώσης της άλγεβρας κάνει πολύ δύσκολη την κατανόηση των συναρτήσεων. Έτσι αναφορικά με το ρόλο της άλγεβρας στα μαθηματικά βρήκαμε δυο εμπόδια:

Ε(f)-10: (Μια πεποίθηση αναφορικά με τις μαθηματικές μεθόδους) Η ισχυρή πεποίθηση της ισχύος των τυπικών πράξεων στις αλγεβρικές εκφράσεις.

Ε(f)-11: (Μια αντίληψη για τη συνάρτηση) Μόνο οι σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους αξίζει να ονομαστούν συναρτήσεις.

Οι μαθηματικοί πάντα αναζητούσαν τρόπους για να περιγράψουν σχέσεις, και κατά το 17° και το 18° αιώνα απέκτησαν μεγάλη σχετική εμπειρία. Ιδιαίτερη όμως ώθηση έδωσαν στα μαθηματικά τα αναλυτικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφή των σχέσεων. Από τότε και στο εξής τα αναλυτικά αυτά εργαλεία (τύποι) έγιναν πιο σημαντικά και από τις σχέσεις καθαυτές.

Τα παραπάνω εμπόδια Ε(f)-9, Ε(f)-10 και Ε(f)-11, εισηγούνται μια άλλη πράξη κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης.

Κ(f)-9: Η διάκριση μεταξύ της συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον κανόνα της.

Αυτή η διάκριση μπορεί να περάσει στους μαθητές φέρνοντάς τους παραδείγματα όπου μια συνάρτηση περιγράφεται με δυο διαφορετικούς τύπους (πχ. έναν αναδρομικό και ένα γενικό , όπως ο τύπος του Binet για την ακολουθία Fibonacci). Αλλά βέβαια αυτή η ενέργεια κατανόησης δε μπορεί να συμβεί πριν ο μαθητής καταφέρει να συνθέσει τη γενική έννοια της συνάρτησης. Η γενική έννοια επιτρέπει μια τέτοια ποικιλία δυνατοτήτων, ώστε πολύ λίγες συναρτήσεις να μπορούν να περιγραφούν με αναλυτικό τύπο.

Αλλά η σύνθεση της γενικής έννοιας της συνάρτησης είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί από τους μαθητές. Και αυτό μπορεί να ερμηνευτεί αν εξετάσει κανείς προσεκτικά το πλαίσιο στο οποίο η γενική έννοια της

συνάρτησης εμφανίζεται. Για να δει κανείς την ανάγκη για μια τέτοια γενική έννοια, δεν αρκεί να έχει δει τις χρήσεις των ειδικών παραδειγμάτων. Η ανάγκη θα πρέπει να γίνεται αισθητή για καταστάσεις σχετικές με κλάσεις ή χώρους συναρτήσεων. Η εννοιολόγηση της συνάρτησης θα πρέπει να πηγαίνει πέρα από το στάδιο της διεργασίας (με όρους Dubinsky) και η έννοια θα πρέπει να γίνεται αντικείμενο το οποίο θα μπορεί να το χειριστεί ο μαθητής ως ένα στοιχείο.

Ο ορισμός Dirichlet για τη συνάρτηση περιλαμβάνει και περίεργες συναρτήσεις, κάποιες από τις οποίες δε μπορούν να παρασταθούν με καμπύλη σχεδιασμένη με κίνηση του χεριού, άλλες οι οποίες είναι παντού συνεχείς αλλά πουθενά παραγωγίσιμες. Οι συναρτήσεις αυτές είναι λογικές συνέπειες του ορισμού που υιοθετούμε. Προκειμένου να μπορεί κανείς να αποδεχθεί τα παραδείγματα αυτά, ως παραδείγματα συναρτήσεων, θα πρέπει να είναι αρκετά ώριμος στη μαθηματική κουλτούρα, ώστε να μπορεί να αποδεχτεί το ρόλο των ορισμών στα μαθηματικά ως λογική δέσμευση. Είθισται τα πρώτα παραδείγματα συναρτήσεων που αντιμετωπίζονται από τους μαθητές να είναι παντού συνεχείς και μη παραγωγίσιμες το πολύ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, των οποίων η γραφική τους αναπαράσταση αποτελείται από μια καμπύλη, δοσμένη με έναν απλό τύπο. Τέτοια παραδείγματα συνιστούν τα πρωτοτυπικά παραδείγματα συναρτήσεων στο μυαλό των μαθητών. Όταν ο ορισμός επιτρέπει την παρουσία παραδειγμάτων τα οποία δεν είναι όμοια με τα πρωτοτυπικά, τότε αυτό που είναι πιθανό να συμβεί είναι να εγκαταλειφθεί ο ορισμός παρά να αλλάζουν τα πρωτοτυπικά παραδείγματα.

Ε(f)-12: (Η αντίληψη του ορισμού) Ο ορισμός είναι η περιγραφή ενός αντικειμένου που αλλιώς γίνεται αντιληπτό με τις αισθήσεις ή την ενόραση. Ο ορισμός δεν προσδιορίζει το αντικείμενο · μάλλον το αντικείμενο προσδιορίζει τον ορισμό. Ο ορισμός δεν είναι λογική δέσμευση.

Κ(f)-10: Η διάκριση μεταξύ μαθηματικών ορισμών και περιγραφές αντικειμένων

Κ(f)-11: Η σύνθεση της γενικής αντίληψης της συνάρτησης ως αντικείμενο.

Η πεποίθηση ότι όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες σχεδόν παντού, συχνά αναφέρεται ως μια σοβαρή παρανόηση ή ακόμα και

ως ένα επιστημολογικό εμπόδιο. Αλλά κατά τη Sierpinska δε συνιστά επιστημολογικό εμπόδιο καθώς ίσως είναι το αποτέλεσμα του ότι οι μαθητές εκτίθενται σε παραδείγματα γραμμικών, τετραγωνικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων ως εισαγωγικά παραδείγματα συναρτήσεων, άρα συνδέεται με τα πρωτοτυπικά παραδείγματα, και μπορεί να διαφέρει από τάξη σε τάξη. Οποιαδήποτε επιλογή από ιδιότητες που αποδίδονται στις συναρτήσεις ενδέχεται να μην είναι πλήρης. Το παιδαγωγικό συμπέρασμα αυτών των παρατηρήσεων είναι ότι μια πρώιμη εισαγωγή του ορισμού της συνάρτησης δεν έχει νόημα· είτε θα αγνοηθεί είτε θα οδηγήσει σε παρανοήσεις.

Επιστημολογικά ερωτήματα σχετικά με τον ορισμό συνάρτησης του Peano : είναι οι συναρτήσεις μόνο ειδικές κατηγορίες σχέσεων;

Ο ορισμός του Dirichlet ήταν ευρέως αποδεκτός και χρησιμοποιήθηκε ως τα μέσα του 20^{ου} αι. και μετέπειτα, τουλάχιστον από τους συγγραφείς των εγχειριδίων. Στην αλλαγή του αιώνα άρχισε να προκαλεί συζητήσεις και διαφωνίες στους κύκλους των κονστρουκτιβιστών, εμπειριστών και των φορμαλιστών. Οι μεν γιατί ήθελαν ένα κανόνα που να επιτρέπει να βρίσκουν ένα y που να αντιστοιχεί σε ένα x σε πεπερασμένο χρόνο ή πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Οι δε, θεωρούσαν ότι ο ορισμός δεν ήταν αρκετά αυστηρός.

Ο ορισμός του Peano, («η συνάρτηση είναι ένα ιδιαίτερο είδος σχέσης με την οποία κάθε τιμή μιας μεταβλητής αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή μιας άλλης μεταβλητής») εισήχθη στην διδασκαλία στη β-θμια εκπαίδευση κατά την μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών. Αυτό οδηγεί σε μια περαιτέρω προϋπόθεση για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Κ(f)-12: η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης.

Ενέργειες για την κατανόηση σχετιζόμενες με τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων

Πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, πίνακες τιμών, γραφικές παραστάσεις και αναλυτικοί τύποι χρησιμοποιούνται ευρέως στο σχολείο. Η επίγνωση των περιορισμών καθεμιάς από αυτές τις αναπαραστάσεις και του γεγονότος ότι αυτές αναπαριστούν την ίδια γενική έννοια είναι θεμελιώδεις συνθήκες για την κατανόηση της συνάρτησης. Η ικανότητα να ερμηνεύει κανείς μια γραφική παράσταση ή έναν πίνακα δεν

είναι γενικά εύκολο να αποκτηθεί. Θεμελιώδεις ενέργειες κατανόησης μπορεί να βοηθήσουν σημαντικά όταν συμβαίνουν στις αίθουσες διδασκαλίας.

Πίνακες τιμών. Οι πίνακες είναι από τους παλαιότερους τρόπους αναπαράστασης σχέσεων. Αν οι πίνακες ταυτιστούν με τις συναρτήσεις τότε είναι πιθανό ότι όλες οι συναρτήσεις θα εκληφθούν ως ακολουθίες.

Ε(f)-13: (Η αντίληψη της συνάρτησης) Οι συναρτήσεις είναι ακολουθίες.

Οι ακολουθίες είναι ένα προνομιούχο είδος συνάρτησης. Ίσως επειδή θεωρείται σιωπηρά ότι οι μεταβλητές παίρνουν διαδοχικά ένα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος τιμών.

Κ(f)-13: Η διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και ακολουθίας.

Συναρτήσεις και καμπύλες. Η μελέτη καμπύλων έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην ιστορία της έννοιας της συνάρτησης. Παρείχαν το πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκαν εργαλεία για την περιγραφή των σχέσεων.

Ε(f)-15: (Η αντίληψη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο. Δεν είναι απαραίτητο να είναι αξιόπιστη, μπορεί να περιλαμβάνει σημεία (χ, y) τέτοια που η συνάρτηση να μην ορίζεται στα χ.

Οι μαθητές συχνά ταυτίζουν τις συναρτήσεις με τα διαγράμματα που χρησιμοποιούμε για να τις αναπαραστήσουμε. Μερικοί μαθητές βλέπουν τα διαγράμματα με ένα συνθετικό και συμπαγή τρόπο. Δηλαδή βλέπουν τις συναρτήσεις ως γεωμετρικά αντικείμενα, εξιδανικεύσεις γραμμών στο χαρτί, ή τροχιών κινούμενων σημείων. Ταξινομούν τις συναρτήσεις σύμφωνα με το σχήμα αυτών των αντικειμένων, χωρίς να έχουν συνειδητοποιήσει ότι αυτό αποτελεί αναπαράσταση της συνάρτησης (τα σχήματα των βασικών συναρτήσεων μπορεί να είναι πρωτοτυπικά στην έννοια).

Άλλοι μαθητές μπορεί να αντιλαμβάνονται αυτή την αναπαράσταση με πιο αναλυτική οπτική, παρόλο που την έχουν ταυτίσει με την ίδια τη συνάρτηση, ως να αποτελείται από τα (x,y), όπου τα x,y σχετίζονται με κάποιο τρόπο μεταξύ τους. Αυτή η σχέση μπορεί να δίνεται με μια εξίσωση. Αλλά η γραμμή δεν αντιπροσωπεύει τη σχέση. Μάλλον αντιπροσωπεύεται από αυτήν. Η εστίαση αντιστρέφεται. Η συνάρτηση είναι η γραμμή και όχι η σχέση.

Η έννοια της γραφικής παράστασης είναι δύσκολη. Μερικοί μαθητές δε θα χρησιμοποιούσαν ποτέ μια δισδιάστατη γραφική παράσταση αυθόρμητα για να αναπαραστήσουν μια συναρτησιακή σχέση.

Οι Συναρτήσεις και οι αναπαραστάσεις τους –διάκριση και σύνθεση.

Η αναπαράσταση δεν είναι η ίδια όπως το αντικείμενο που αναπαρίσταται.

Κ(f)-15: Η διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων.

Καθώς οι συναρτήσεις εφαρμόζονται σε διαφορετικά πλαίσια, χρησιμοποιούνται διαφορετικοί όροι των ίδιων πραγμάτων. Λέμε: η τιμή της συνάρτησης , ο όρος της ακολουθίας, η εικόνα του σημείου. Στη φυσική λέμε: στη θερμοκρασία των 273Κ ο όγκος ενός mol ενός αερίου είναι 22l. Η συνάρτηση εκχωρεί κάτι σε ένα αριθμό· μια ακολουθία διατάσσει ένα διακριτό σύνολο, μια αντιστοίχιση χαρτογραφεί, ένας νόμος συσχετίζει δυο ή περισσότερα μεγέθη.

Κ(f)-16: η σύνθεση των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να δοθεί μια συνάρτησης, αναπαριστώντας τις συναρτήσεις και μιλώντας για αυτές.

Ένα παιδαγωγικού περιεχομένου συμπέρασμα της Sierpinska: «εάν δεν παρουσιαστεί η έννοια της συνάρτησης στους μαθητές ως ένα από τα εργαλεία που διαθέτουν για να απαντήσουν στις ερωτήσεις τους για την μεταβλητότητα του κόσμου τούτου, τότε αυτή θα παραμείνει χωρίς νόημα για αυτούς έξω από την τάξη των μαθηματικών».

Μερικά συμπεράσματα διδακτικού περιεχομένου της Sierpinska

1. Αναφορικά με την κινητοποίηση: οι μαθητές πρέπει να ενδιαφέρονται να εξηγήσουν τις αλλαγές, βρίσκοντας κανονικότητες μεταξύ αυτών. Θα πρέπει να αντιλαμβάνονται τις αλλαγές και τις σχέσεις μεταξύ των αλλαγών ως ένα πρόβλημα που αξίζει επιστημονικής εξήγησης. Θα πρέπει να τους δίνονται ευκαιρίες να χρησιμοποιούν τη γνώση τους γύρω από τις συναρτήσεις για να εξηγούν φαινόμενα της καθημερινής, της οικονομικής και κοινωνικής ζωής. Οι συναρτήσεις μπορεί να παρουσιάζονται ως μοντέλα συγκεκριμένων σχέσεων που παρατηρούν. Αλλά πρέπει επίσης να παρουσιάζονται ως εργαλεία

αναπαράστασης ενός συστήματος με ένα άλλο (τότε θα μιλούσαμε για αντιστοιχήσεις).

2. Αναφορικά με τα εισαγωγικά πλαίσια: οι συναρτήσεις στην αναλυτική μορφή θα πρέπει αρχικά να παρουσιάζονται ως εργαλεία μοντελοποίησης συγκεκριμένων καταστάσεων στην καθημερινή ζωή ή τη φυσική. Καλό θα ήταν η παρουσίαση της πραγματικής κατάστασης να μην ήταν ιδεατή, με αποτέλεσμα τη μετατροπή της κατασκευής του μοντέλου σε ένα τυπικό πρόβλημα. Η επιλογή του μοντέλου θα πρέπει να αποτελεί αντικείμενο συζήτησης στην τάξη.
3. Αναφορικά με αναπτυξιακά πλαίσια: μέθοδοι που παρεμβάλλονται στην κατασκευή των πινάκων τιμών, βοηθούν στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.
4. Αναφορικά με την ανάπτυξη ενός πιο λεπτομερούς επιπέδου κατανόησης των συναρτήσεων: οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να πουν όχι μόνο *πώς αλλάζει* αλλά *και τι αλλάζει.*
5. Αναφορικά με προαπαιτούμενες γνώσεις: χρειάζεται μια αλγεβρική επίγνωση δομικού επιπέδου για την κατανόηση των συναρτήσεων. Δεν έχει νόημα η εισαγωγή του γενικού ορισμού της συνάρτησης πριν την ανάπτυξη μιας συγκεκριμένης μαθηματικής κουλτούρας. Ειδικά πριν να έχουν οι μαθητές επίγνωση του ρόλου που παίζουν οι ορισμοί στα μαθηματικά.
6. Αναφορικά με τις αναπαραστάσεις: πρέπει να παρέχεται στους μαθητές ένα ευρύ φάσμα παρουσίασης της συνάρτησης, μιλώντας για αυτές (αντιστοιχήσεις, μετασχηματισμούς,…) και αναπαριστώντας τις συναρτήσεις ώστε να αποφευχθεί η ταύτιση των συναρτήσεων με μια μόνο από αυτές. Στους μαθητές θα πρέπει να δίνεται η ευκαιρία να αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση αυτών των τρόπων έκφρασης και των αναπαραστάσεων.
7. Αναφορικά με τους ορισμούς: η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης θεωρητικά ως ένα ειδικό είδος σχέσης (Peano), δεν δικαιολογείται ούτε από διδακτική ούτε από επιστημολογική άποψη. Οι άτυποι ορισμοί της συνάρτησης, της μορφής του Dirichlet, επαρκούν για την β-θμια εκπαίδευση. (Όταν μια μεταβλητή ψ σχετίζεται με μια μεταβλητή χ έτσι ώστε όταν αποδίδεται μια αριθμητική τιμή στο χ υπάρχει ένας κανόνας

σύμφωνα με τον οποίο καθορίζεται μια μοναδική τιμή στο ψ, τότε το ψ καλείται συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής χ).

8. Αναφορικά με τη διάκριση της έννοιας της συνάρτησης και άλλων γενικών εννοιών : συζητήσεις στην τάξη για ομοιότητες και διαφορές μεταξύ συναρτησιακών και αιτιωδών σχέσεων συνάφειας μπορούν να συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση των δυο εννοιών.

2.4.2 Σχετικά με τις αναπαραστάσεις συναρτήσεων

Ένα από τα θέματα που η μαθηματική κοινότητα αποδέχεται ως κεντρικό, στη διδασκαλία και τη μελέτη της συνάρτησης, είναι και τα διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων της.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι καμιά αναπαράσταση δε μπορεί από μόνη της να περιγράψει πλήρως μια μαθηματική έννοια, όπως η συνάρτηση, και ότι καθεμιά από τις αναπαραστάσεις της έχει συγκεκριμένες δυνατότητες αλλά και περιορισμούς, αναδεικνύεται ως κεντρικό θέμα στη διδασκαλία το είδος και οι συνδέσεις των αναπαραστάσεων αυτής.

Σύμφωνα με το Duval (2006) η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική κατάσταση βρίσκεται στην κορυφή της μαθηματικής κατανόησης.

Οι Gagatsis & Monoyiou (2011) τονίζουν ότι:

- Η αναγνώριση της ίδιας έννοιας σε πολλαπλά συστήματα αναπαράστασης,
- Η ικανότητα χειρισμού της έννοιας μέσα σε αυτές τις αναπαραστάσεις
- Και η ικανότητα ευέλικτης μετακίνησης από ένα αναπαραστασιακό πλαίσιο σε ένα άλλο

είναι απαραίτητες για την απόκτηση της έννοιας και

επιτρέπουν στους μαθητές να δουν πλούσιες συνδέσεις και σχέσεις.

Έρευνα του Hitt (1998) ανέδειξε ως παράγοντα δυσκολίας που συνδέεται με τη μελέτη των συναρτήσεων την ποικιλία των αναπαραστάσεών της. Σχετικά με τη σύνδεση διαφόρων μορφών αναπαραστάσεων καταγράφηκαν 5 επίπεδα οικοδόμησης της έννοιας (σελ. 125):

Επίπεδο 1: έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συνεκτικό μίγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).

Επίπεδο 2: είναι σε θέση να αναγνωρίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας.

Επίπεδο 3: μπορούν να μεταφερθούν από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο με ταυτόχρονη διατήρηση του νοήματος.

Επίπεδο 4: μπορούν να συνδέουν δυο αναπαραστάσεις.

Επίπεδο 5: Μπορούν να συνδέσουν αναπαραστάσεις και να επιλύουν προβλήματα.

Η έλλειψη ελαστικότητας στο χειρισμό των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης που καταγράφηκε από τη δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν την ομοιότητα μεταξύ ερωτήσεων σε διαφορετικά αναπαραστασιακά πλαίσια ή από την αδυναμία σύνδεσης διαφορετικών αναπαραστάσεων, αποτελούν ένδειξη ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης αποτελούν για τους μαθητές αυτόνομα και διαχωρισμένα μαθηματικά αντικείμενα.

Έρευνα στη διπλωματική εργασία της Γραββάνη σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης κατέληξε στην ύπαρξη δυο τουλάχιστον, ιεραρχικά δομημένων επιπέδων.

Το πιο υψηλό επίπεδο θα μπορούσε να είναι η επιτυχής λύση προβλήματος, και ένα χαμηλότερο επίπεδο θα μπορούσε να περιλαμβάνει τη σύνθεση ικανοτήτων που αναφέρονται στις διαστάσεις της παροχής ενός ορθού ορισμού της συνάρτησης, την παροχή ενός σωστού παραδείγματος συνάρτησης και την ευέλικτη χρήση διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας.

Ο Dreyfus (1991) έχει τη θέση ότι διεργασίες μελέτης υψηλού επιπέδου εξελίσσονται μέσω των σταδίων

- Χρήση μιας μόνο αναπαράστασης
- Χρήση περισσότερων της μιας αναπαράστασης παράλληλα
- Δημιουργία συνδέσεων μεταξύ παράλληλων αναπαραστάσεων
- Ευέλικτη μετακίνηση μεταξύ αναπαραστάσεων.

Τη θέση της Sierpinska (1992) σχετικά με την επίγνωση των περιορισμών καθεμιάς από τις αναπαραστάσεις παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Ο χειρισμός και η επεξεργασία μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης απαιτεί και διαφορετικό τρόπο επεξεργασίας των παρεχόμενων πληροφοριών σύμφωνα με τις Καλδρυμίδου & Μορόγλου (2006). Για παράδειγμα, ο τύπος μιας συνάρτησης απαιτεί σειριακή επεξεργασία των δεδομένων, ενώ στη γραφική παράσταση τα δεδομένα δίνονται με ολιστικό τρόπο. Σχετικά με τη μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη, σύμφωνα με τους Kaldrimidou & Ikonomou (1998),(αναφορά στο Καλδρυμίδου & Μορόγλου, 2006) δεν απαιτείται απλά μετάφραση ενός συμβολικού συστήματος σε άλλο, αλλά και ένας μετασχηματισμός από τον οποίο προκύπτουν νέες πληροφορίες, οι οποίες στη συνέχεια εκφράζονται σε άλλο συμβολικό σύστημα. Οπότε η ικανότητα να αναγνωριστεί και να αναπαρασταθεί η ίδια έννοια σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης και η σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστασιακών πλαισίων είναι σημαντική για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Στις διδακτικές προτάσεις της η Sierpinska (1992), εστιάζοντας στις αναπαραστάσεις καταλήγει: «είναι πολύ σημαντικό να παρέχεται στους μαθητές ένα ευρύ φάσμα παρουσίασης της συνάρτησης. Συζητώντας για συναρτήσεις (αντιστοιχίσεις, μετασχηματισμούς,…) και αναπαριστώντας τις συναρτήσεις με διάφορους τρόπους ίσως αποτρέψουμε το να ταυτίσουν τη συνάρτηση με μια μόνο από τις αναπαραστάσεις της. Θα πρέπει να δοθεί ευκαιρία στους μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια στον τρόπο έκφρασης και αναπαράστασης αυτών».

2.4.3 Οι αναπαραστάσεις και οι συνδέσεις τους στα προγράμματα σπουδών

Οι αναπαραστάσεις και οι συνδέσεις τους αποτελούν σταθερή στόχευση κάθε αναλυτικού προγράμματος σπουδών, ειδικά σε μεγάλες τάξεις.

Στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών για την Α΄λυκείου γράφεται: «Στην προσέγγιση των στόχων συμβάλλει και η κατανόηση και χρήση της μαθηματικής γλώσσας, των συμβόλων και των **αναπαραστάσεων** των μαθηματικών αντικειμένων, η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να επικοινωνούν μαθηματικά».

Στο Principles and Standards for School Mathematics (2000) ένα από τα 5 **πρότυπα των διεργασιών** για την προσέγγιση της γνώσης είναι και αυτό των αναπαραστάσεων. Η σημασία που αποδίδει στις αναπαραστάσεις καταγράφεται σε αρκετές σελίδες, στην παράγραφο «representation standards for grades 9-12» και ξεκινά ως εξής: «αν τα μαθηματικά είναι η 'επιστήμη των κανονικοτήτων (patterns)', οι αναπαραστάσεις είναι τα μέσα με τα οποία οι κανονικότητες αυτές καταγράφονται και αναλύονται. Καθώς οι μαθητές αναπτύσσουν πιο σύνθετη γνώση, αυξάνεται και το πλήθος των μαθηματικών αναπαραστάσεων και η γνώση για το πώς να τις χρησιμοποιούν αποτελεσματικά. Η γνώση αυτή περιλαμβάνει και επιλογή της κατάλληλης από τις αναπαραστάσεις που τους προσφέρει ενόραση σε μια κατάσταση ή επίτευξη συγκεκριμένων συμπερασμάτων».

Ειδικά για τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων τονίζει ότι η γραφική αναπαράσταση μεταφέρει κυρίως οπτικές πληροφορίες, ενώ ο τύπος μπορεί να είναι πιο εύκολος στο χειρισμό, την ανάλυση και τους μετασχηματισμούς.

Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις υποστηρίζουν διαφορετικούς τρόπους σκέψης γύρω από το χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων. Στις τάξεις 9-12 που οι μαθητές δουλεύουν με αφηρημένες οντότητες, όπως οι συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις τους μπορούν να αναγνωρίζουν κοινές μαθηματικές δομές σε διάφορα πλαίσια. Για παράδειγμα, το εμβαδό ενός τετραγωνικού κήπου και η απόσταση που διανύει ένα κινητό που ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό, μπορούν να αναπαρασταθούν με συναρτήσεις που έχουν τύπο της μορφής $f(x)= ax^2$. Το γεγονός ότι οι καταστάσεις αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν με συναρτήσεις ίδιας κλάσης, υπονοεί ότι έχουν κάποια θεμελιώδη κοινά χαρακτηριστικά. Οι μαθητές των τάξεων 9-12 είναι έτοιμοι να δουν την ομοιότητα που εμφανίζεται στη δομή των δυο μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία αν και έχουν διαφορετικό συγκείμενο η αναπαράσταση του αναλυτικού τύπου αποκαλύπτει ομοιότητες.

Σχετικά με το ρόλο των δασκάλων στο χτίσιμο των αναπαραστάσεων, το Principles and Standards for School Mathematics έχει τη θέση ότι οι δάσκαλοι θα πρέπει να εισάγουν τους μαθητές στις θεσπισμένες αναπαραστάσεις και να τους βοηθούν να συνειδητοποιήσουν ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου μεταφέρουν διαφορετικές

πληροφορίες. Υποστηρίζει ότι η έμφαση θα πρέπει να δίνεται στην επιλογή των αναπαραστάσεων που ταιριάζουν στο έργο με το οποίο οι μαθητές καταπιάνονται. Παραδειγματοποιεί με τους πίνακες τιμών, οι οποίοι συχνά είναι βολικοί για γρήγορη συμπλήρωση αλλά ελάχιστα αποκαλυπτικοί για τη φύση της συνάρτησης που αναπαριστούν, ειδικά αν συγκριθούν με τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης. Παρόμοια, γραφικές και αλγεβρικές αναπαραστάσεις συναρτήσεων μας παρέχουν διαφορετικές πληροφορίες. Ολικές ιδιότητες της συνάρτησης, όπως η ασυμπτωτική συμπεριφορά ή ο ρυθμός μεταβολής των τιμών της είναι πιο ευανάγνωστες από τις γραφικές αναπαραστάσεις τους. Την ίδια στιγμή όμως, συγκεκριμένες πληροφορίες όπως, η ακριβής τιμή f(π) ή το χ για το οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο, καθορίζονται ακριβέστερα με τον τύπο της συνάρτησης. Παράλληλα με τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης g(x) = f(x) +1 για παράδειγμα, αποκαλύπτεται η ομοιότητα των σχημάτων τους, μια πληροφορία που ο τύπος τους δε μπορεί να μας αποκαλύψει.

Το Principles and Standards for School Mathematics καταλήγει στο ότι τα μαθηματικά είναι από τα μεγαλύτερα πολιτιστικά επιτεύγματα του ανθρώπου. Είναι «η γλώσσα της επιστήμης», μας παρέχουν μέσα με τα οποία μπορούμε να ερμηνεύουμε και να κατανοούμε τον κόσμο γύρω μας. Οι αναπαραστάσεις που μελετούν οι μαθητές στις τάξεις 9-12 τους παρέχουν την ευκαιρία να δουν τη δύναμη και την ομορφιά των μαθηματικών και τους εξοπλίζουν ώστε να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στην προσωπική τους ζωή, στη δουλειά, στις σπουδές τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Ερευνητικό Πρόβλημα – Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα σχολικά εγχειρίδια έχουν κεντρικό ρόλο στην καθημερινή διδακτική πρακτική. Αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει τη διδασκαλία του και αναθέτει εργασίες στους μαθητές του, αλλά και σημείο αναφοράς για το μαθητή. Η ανάλυση του περιεχομένου του σχολικού

εγχειριδίου μαθηματικών μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για τη φύση των μαθηματικών που μελετούν οι μαθητές στο σχολείο.

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια δύσκολη έννοια στα μαθηματικά. Και η διδακτική μας εμπειρία, αλλά και πλήθος ερευνών, καταδεικνύουν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη πραγμάτευση της έννοιας αυτής στο σχολείο. Αναλύοντας το σχολικό εγχειρίδιο ως προς τον τρόπο που παρουσιάζει την έννοια της συνάρτησης μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για την κατανόηση που είναι πιθανό να αναπτύξουν οι μαθητές.

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης έχουν καθοριστική σημασία για την εικόνα που αναπτύσσουν οι μαθητές για την έννοια. Η επιλογή των συγκεκριμένων παραδειγμάτων μπορεί να διευκολύνει ή να εμποδίσει τη μάθηση. Οι οπτικές της έννοιας που αναδεικνύονται μέσα από τα παραδείγματα στα οποία εκτίθενται οι μαθητές, μαζί με τους χειρισμούς, τις αναπαραστάσεις και τις μεταγνωστικές στρατηγικές που προάγουν, αποτελούν κομμάτι της εμπειρίας των μαθητών γύρω από την έννοια. Τα συγκεκριμένα παραδείγματα αποτελούν το περιβάλλον στο οποίο κατασκευάζεται η γνώση και στο σύνολό τους εκθέτουν σε ένα εύρος κρίσιμων για την έννοια χαρακτηριστικών. Ο σχεδιασμός, η αλληλουχία και η διαχείριση των παραδειγμάτων αποτελούν κεντρικά θέματα και επηρεάζουν τη διδακτική τους αξία. Η μαθηματική δραστηριότητα που τα παραδείγματα εγείρουν, εσωκλείει σε ένα βαθμό το τι αποτελεί αποδεκτή γνώση της συνάρτησης για την επιστημονική κοινότητα. Τι πρέπει να γνωρίζει για τη συνάρτηση ένα άτομο μαθηματικά εγγράμματο. Επιπλέον η μαθηματική δραστηριότητα που εγείρουν τα παραδείγματα μας αφήνει ένα παράθυρο να διερευνήσουμε τη στάση που μπορεί να διαμορφώσουν οι μαθητές ως προς τα μαθηματικά.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο του ευρύτερου προβληματισμού αναλύσαμε τα παραδείγματα των δυο σχολικών εγχειρίδιων για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης επιχειρώντας να απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα:

I. Ποιο είναι το είδος των παραδειγμάτων που χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο για να εισαγάγει τους μαθητές στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης; Πώς διαχειρίζεται το εγχειρίδιο τα συγκεκριμένα παραδείγματα;

II. Ποια μαθηματικά χαρακτηριστικά της έννοιας της συνάρτησης εγείρονται μέσω των συγκεκριμένων παραδειγμάτων και σε ποια πιθανή μαθηματική δραστηριότητα εμπλέκονται οι μαθητές;

3.2 Μέθοδος έρευνας

Η έρευνά μας είναι μιας μορφής ανάλυση περιεχομένου τμημάτων δυο σχολικών εγχειριδίων. Το πρώτο είναι το σχολικό εγχειρίδιο ***«ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου»*** με το οποίο γίνεται η διδασκαλία των μαθηματικών σε όλους τους μαθητές που φοιτούν στην πρώτη Λυκείου, στα ελληνικά σχολεία. Το εγχειρίδιο αυτό περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας και των Πιθανοτήτων που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου. Το μέρος της Άλγεβρας προήλθε από μια αναμόρφωση το 2010, την οποία διαδέχθηκε μια επόμενη το 2011, της πρώτης έκδοσης (1990) του βιβλίου «ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ».

Το δεύτερο είναι το εγχειρίδιο «***Discovering Algebra, An investigative approach, 2nd edition»,*** ένα αμερικάνικο εγχειρίδιο που γράφτηκε το 2007 με τη χρηματοδότηση του National Science Foundation, και στηρίζεται στις αρχές και τα πρότυπα του National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), αλλά και σε αποτελέσματα ερευνών σχετικών με τη διδασκαλία με χρήση τεχνολογίας. Το εγχειρίδιο αυτό προορίζεται για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές που φοιτούν στο High School (Grades 9 – 12). Είναι μέρος μιας σειράς βιβλίων που χρησιμοποιούνται από μαθητές που φοιτούν στο High School, και το συγκεκριμένο διαμορφώθηκε με την εμπειρία της προγενέστερης δημοσίευσης των *Advanced Algebra,* προηγούμενες εκδόσεις των *Discovering Algebra, Discovering Advanced Algebra,* και μετά από συνεργασία των συγγραφέων με εκπαιδευτικούς, μαθητές και γονείς που αναζητούσαν ένα βιβλίο που να δίνει νόημα στα μαθηματικά. Εμείς το επιλέξαμε μεταξύ αμερικάνικων εγχειριδίων που μελετήσαμε γιατί ικανοποιούσε το κριτήριο της έμφασης στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης που μας ενδιέφερε, στηρίζονταν στα πρότυπα του NCTM (2000), και είναι σειρά βιβλίων ώστε να μπορεί να

επιλέγεται από αμερικάνικα σχολεία για μαθητές που φοιτούν στο High School.

Ήταν ξεκάθαρο ότι θα αναλύαμε τα παραδείγματα στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης, η οποία διαπερνά το αναλυτικό πρόγραμμα όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης. Επιλέξαμε να δουλέψουμε με το εγχειρίδιο της Α΄ Λυκείου στο ελληνικό σχολείο, όπου η έννοια της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης αυτής, σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών, εισάγονται στους μαθητές μέσω των αντίστοιχων ορισμών. Ανατρέξαμε στο Principles and Standards for School Mathematics (NCTM 2000) για να αναζητήσουμε στοιχεία σχετικά με τη διδασκαλία της συνάρτησης στα αμερικάνικα σχολεία. Στη συνέχεια επιλέξαμε το συγκεκριμένο, μεταξύ αρκετών αμερικάνικων σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών που μελετήσαμε, γιατί εκτός αυτών που αναφέραμε παραπάνω, είναι ευθυγραμμισμένο – σύμφωνα με τους συγγραφείς του- με τις αρχές και τα πρότυπα του NCTM 2000.

Από τα συγκεκριμένα εγχειρίδια **αναλύσαμε το σύνολο των παραδειγμάτων τους,** στις παραγράφους που εισάγουν την έννοια της συνάρτησης και τις αναπαραστάσεις της. Πρόκειται για μια θεμελιωμένη ανάλυση περιεχομένου **(grounded content analysis)** που βασίστηκε στο περιεχόμενο των ίδιων των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούν τα εγχειρίδια για να εισάγουν στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Τα παραδείγματα αυτά εμείς καταγράψαμε ένα προς ένα, κρατώντας στην αρχή για το καθένα έναν κωδικό που αποτελούνταν από ένα γράμμα και έναν αριθμό, και μια σύντομη περιγραφή ως ταυτότητά του. Για τα παραδείγματα του ελληνικού εγχειριδίου οι κωδικοί ήταν Π1, Π2, … Για τις δραστηριότητες του προγράμματος σπουδών κρατήσαμε τους κωδικούς όπως ήταν γραμμένοι στο πρόγραμμα Δ1, Δ2, ... Για τα παραδείγματα του αμερικάνικου εγχειριδίου χρησιμοποιήσαμε τους κωδικούς Ε1, Ε2, … Αν σε ένα παράδειγμα υπήρχαν υποερωτήματα χρησιμοποιούσαμε έναν ακόμα αλφαβητικό δείκτη. Για παράδειγμα, Π8α, Π8β, …

Το ελληνικό εγχειρίδιο για τους μαθητές της πρώτης Λυκείου έχει προκύψει από την αναμόρφωση του προηγούμενου σχολικού εγχειριδίου, ώστε να περιλαμβάνει την ύλη Άλγεβρας και Πιθανοτήτων που προβλέπεται από το νέο πρόγραμμα σπουδών της Α’ τάξης του Γενικού Λυκείου.

Το νέο εγχειρίδιο έρχεται να αποτελέσει το επίσημο διδακτικό υλικό για την υλοποίηση των στόχων όπως τίθενται στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄τάξης Γενικού Λυκείου που δημοσιεύτηκε στην εφημερίδα της Κυβερνήσεως (Αρ. φύλλου 1168, 8 Ιουνίου 2011, τεύχος δεύτερο) και οι στόχοι αυτοί παρουσιάζονται αναλυτικά στο θεωρητικό μέρος της εργασίας. Στο ανωτέρω Πρόγραμμα Σπουδών παρουσιάζονται οι βασικοί μαθησιακοί στόχοι κάθε κεφαλαίου καθώς και ενδεικτικές δραστηριότητες που μπορούν να βοηθήσουν στην προσέγγιση αυτών των στόχων, με την προτροπή να επιλέξει ο εκπαιδευτικός μεταξύ των προτεινόμενων, αλλά και άλλων δραστηριοτήτων τις πλέον κατάλληλες για την προσέγγιση των εκάστοτε στόχων. Επειδή λοιπόν το σχολικό εγχειρίδιο στην αρχική του μορφή είχε γραφτεί πριν τον καθορισμό του προγράμματος σπουδών και στην τελική αναμόρφωση απλώς μεταφέρθηκαν κεφάλαια από μια τάξη σε άλλη, χωρίς αλλαγές στο περιεχόμενό τους, αποφασίσαμε να συμπεριλάβουμε στην ανάλυση των παραδειγμάτων του ελληνικού σχολικού εγχειριδίου και τα παραδείγματα που προτείνονται στις ενδεικτικές δραστηριότητες του προγράμματος σπουδών, καθώς αυτές αποτελούν διδακτικό υλικό που ευθυγραμμίζεται με τους στόχους που τίθενται στο πρόγραμμα σπουδών.

Το αμερικάνικο εγχειρίδιο γράφτηκε στη βάση των αναλυτικών προγραμμάτων Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) οπότε στην ανάλυσή μας παραμείναμε στα παραδείγματα του εγχειριδίου.

3.3 Συλλογή δεδομένων

3.3.1 Το υλικό μας

Από το ελληνικό εγχειρίδιο αναλύσαμε συνολικά 33 παραδείγματα στις ενότητες «Η έννοια της συνάρτησης» και «Γραφική παράσταση συνάρτησης». Τα είκοσι από αυτά περιέχονται στο εγχειρίδιο του μαθητή και τα δεκατρία είναι προτεινόμενες δραστηριότητες για τις αντίστοιχες ενότητες στο πρόγραμμα σπουδών. Η παράγραφος «Η έννοια της συνάρτησης» αναπτύσσεται σε έξι σελίδες περίπου και σε αυτή παρουσιάζονται και στοιχεία

συμβολισμού συνάρτησης αλλά και κάποιες από τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Ακολουθούν πέντε προτεινόμενες ασκήσεις οι οποίες δεν αποτελούν μέρος του υλικού μας. Η παράγραφος «Γραφική παράσταση συνάρτησης» εκτείνεται σε δύο σελίδες και εδώ παρουσιάζονται οι αναπαραστάσεις διατεταγμένο ζεύγος και γραφική παράσταση. Ακολουθούν τέσσερις ασκήσεις τις οποίες και πάλι δεν αναλύσαμε. Συνολικά στο σχολικό εγχειρίδιο οι παράγραφοι που αφορούν στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης εκτείνονται σε δεκατέσσερις σελίδες.

Από το αμερικάνικο εγχειρίδιο αναλύσαμε συνολικά πενήντα δυο παραδείγματα που παρουσιάζονται στις τέσσερις παραγράφους που αφορούν στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Η πρώτη παράγραφος «Secret Codes**»** εκτείνεται σε τέσσερις σελίδες, η δεύτερη «Functions and Graphs» και η Τρίτη «Graphs of Real-World Situations» επίσης αναπτύσσονται σε τέσσερις σελίδες η καθεμιά, και η τέταρτη «Function Notation» σε δυόμισι σελίδες περίπου. Σε κάθε παράγραφο προσφέρονται δεκαπέντε ασκήσεις περίπου χωρισμένες σε κατηγορίες εξάσκησης, αιτιολόγησης και εφαρμογής, ή review (σύνδεση με προηγούμενες γνώσεις και ανασκόπηση) και οι οποίες εκτείνονται σε αρκετές σελίδες ανά παράγραφο. Οι ασκήσεις όπως και στο αντίστοιχο ελληνικό εγχειρίδιο δεν αποτελούν μέρος του υλικού μας.

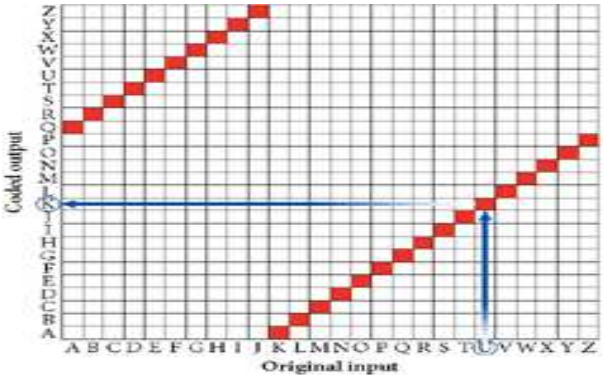
3.3.2 Μονάδα ανάλυσης. Τι αποτελεί για μας παράδειγμα

Σχετικά με το τι συνιστά παράδειγμα οι Zodik και Zaslavsky (2008) συζητούν: «*Θεωρητικά, κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να ειδωθεί ως ένα παράδειγμα, δηλαδή ως μια ειδική περίπτωση μιας ευρύτερης τάξης*». Θα μπορούσε να είναι μια απλή έκφραση ή ένα σύνθετο πρόβλημα που αποτελείται από πολλά στάδια. Σύμφωνα με τους Watson & Mason (2002a, 2002b) παράδειγμα είναι, οτιδήποτε χρησιμοποιείται ως πρώτη ύλη για γενίκευση, διαισθητικές σχέσεις, διευκρινίσεις εννοιών που τονίζουν μια ευρύτερη κλάση, κινητοποιούν, εκθέτουν σε δυνατές μεταβολές και αλλαγές και προσδίδουν ευχέρεια σε τεχνικές.

Εμείς θεωρήσαμε παράδειγμα οτιδήποτε προσφέρθηκε για να εισαχθούν οι μαθητές στην έννοια και τις ιδιότητές της ή στο συμβολισμό της συνάρτησης με οποιαδήποτε αναπαράσταση και αν δόθηκε. Θεωρήσαμε

επίσης παράδειγμα κάθε επεξεργασμένο παράδειγμα είτε ήταν έννοιας είτε διαδικασίας. Στο ελληνικό εγχειρίδιο είχαμε παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας λεκτικά, με αναλυτικό τύπο, με βελοδιάγραμμα και με γραφική παράσταση. Στο αμερικάνικο εγχειρίδιο είχαμε επιπλέον και με πίνακα τιμών. Καθένα από αυτά αποτέλεσε και ένα παράδειγμα. Μεταξύ των παραδειγμάτων υπήρξαν περιπτώσεις όπου μια απλή έκφραση αποτελούσε το προς παραδειγματοποίηση αντικείμενο, και άλλες στις οποίες περισσότερες αναπαραστάσεις, ίδιου τύπου, δίνονταν ως υποερωτήματα στην ίδια εκφώνηση. Καθένα από αυτά τα υποερωτήματα μετρήθηκε ως ξεχωριστό παράδειγμα. Με τον ίδιο τρόπο διαχειριστήκαμε κάθε παράδειγμα αυτού του τύπου. Όπου υπήρχαν ερωτήματα της μορφής εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες τιμών, ή γραφικές παραστάσεις ή αναλυτικές εκφράσεις παριστάνουν συνάρτηση, αναλύαμε κάθε στοιχείο ξεχωριστά.

Το αμερικάνικο εγχειρίδιο ήταν δομημένο στη βάση λυμένων παραδειγμάτων και διερευνητικών δραστηριοτήτων χωρισμένων σε βήματα. Σε μια δραστηριότητα, στην παράγραφο συμβολισμού συνάρτησης, όλη η δραστηριότητα μετρήθηκε ως ένα παράδειγμα (Ε24) καθώς δόθηκε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν τιμές παραστάσεων που περιελάμβαναν τιμές της συνάρτησης αυτής, και στη συνέχεια, με μια αντιστοίχιση που τους δόθηκε, να βρουν το όνομα ενός μαθηματικού που συνδέθηκε με το συμβολισμό της συνάρτησης. Η προηγούμενη δραστηριότητα είναι δραστηριότητα μιας διδακτικής ώρας αλλά μέτρησε ως ένα παράδειγμα. Σε άλλη δραστηριότητα στην εισαγωγική παράγραφο στην έννοια της συνάρτησης η δραστηριότητα κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης που είχε χωριστεί σε 11 βήματα μας έδωσε συνολικά 9 παραδείγματα. Ως πρώτο παράδειγμα μετρήσαμε τον πίνακα αντιστοίχισης κάθε γράμματος σε άλλο, που δόθηκε και στην αναπαράσταση πλέγματος που ακολουθεί.



Ως παράδειγμα μετρήσαμε και την προτροπή του πρώτου βήματος να κωδικοποιήσει κάθε μαθητής ένα μήνυμα 2 ή 3 λέξεων. Επίσης παράδειγμα θεωρήσαμε και την προτροπή του δεύτερου βήματος να ανταλλάξουν οι μαθητές τα μηνύματά τους και να αποκωδικοποιήσει ο ένας το μήνυμα του άλλου. Να πως παρατίθενται τα βήματα της δραστηριότητας από όπου αντλήσαμε τα παραδείγματα.

Step 1 Use the coding grid to write a two-word or three-word message.

Step 2 Exchange your coded message with a partner. Use this grid to decode each other's messages.

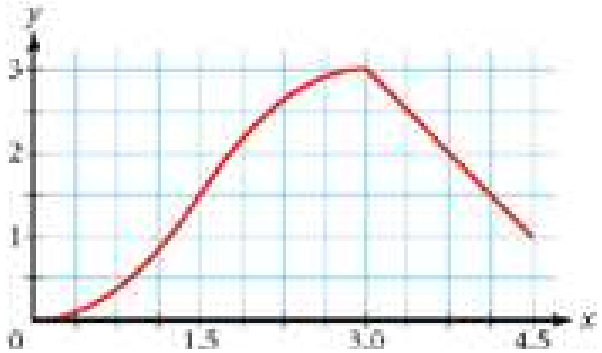
Next you'll invent your own letter-shift code.

Ως παράδειγμα μετρήσαμε και την προτροπή του τρίτου βήματος να φτιάξει κάθε μαθητής το δικό του κώδικα μετατόπισης γράμματος κατά κάποιες θέσεις. Σε κάποιο επόμενο βήμα της ίδιας δραστηριότητας ζητήθηκε από τους μαθητές να συγκρίνουν τον κώδικα που έφτιαξαν με τον κώδικα του συμμαθητή τους και να παρατηρήσουν πώς διαφέρουν. Να απαντήσουν σε μεταγνωστικά ερωτήματα, όπως, πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν για να δώσουμε έξοδο σε ένα συγκεκριμένο γράμμα της αλφαβήτου, και πόσοι τρόποι υπάρχουν για να αποκωδικοποιήσουμε ένα συγκεκριμένο γράμμα της αλφαβήτου. Το βήμα αυτό της δραστηριότητας το μετρήσαμε ως παράδειγμα αφού επιτρέπει στους μαθητές να εκτεθούν σε κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας και μάλιστα να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο κατασκευής του πλέγματος αντιστοίχισης, να δοκιμάσουν το εύρος των δυνατών αλλαγών και να εκτεθούν σε πλήθος παραδειγμάτων, δοκιμάζοντας την εμπειρία να παράγουν ευρύτερες κλάσεις παραδειγμάτων.

Τα τέσσερα επόμενα βήματα της δραστηριότητας αναφέρονται σε δοθέν πλέγμα στο οποίο κάποια γράμματα εισόδου δεν έχουν μοναδική έξοδο. Ζητά να κωδικοποιήσουν ένα μήνυμα και στη συνέχεια να το δώσουν

στο συμμαθητή τους για αποκωδικοποίηση. Με τη ερώτηση αν ο συμμαθητής τους αποκωδικοποίησε σωστά το μήνυμά τους ή όχι, και γιατί, καθώς και με την προτροπή να κωδικοποιήσουν τη λέξη «function» εκτίθενται οι μαθητές στο πρώτο μη παράδειγμα της έννοιας. Μετρήσαμε και αυτά τα στάδια της δραστηριότητας ως ένα παράδειγμα (μη παράδειγμα), αυτό του πλέγματος που δεν πληροί την ιδιότητα του μονοσήμαντου. Ένα ακόμα λυμένο παράδειγμα, που στοχεύει στα χαρακτηριστικά της συνάρτησης, καταγράφεται παρακάτω:

Describe this graph, telling how the quantities in the graph relate to each other.



Σε αυτό το εγχειρίδιο λοιπόν αναλύσαμε παραδείγματα και μη παραδείγματα. Κάποια από αυτά δόθηκαν από το εγχειρίδιο κάποια αφέθηκαν να κατασκευαστούν από τους μαθητές. Θεωρήσαμε παραδείγματα, και τα αναλύσαμε ως προς τα χαρακτηριστικά τους, και τα παραδείγματα των μαθητών, καθώς οι μαθητές στη διάρκεια και λόγω κατασκευής των δικών τους παραδειγμάτων, δόμησαν το μαθηματικό νόημα. Τα προς κατασκευή παραδείγματα από τους μαθητές, διέπονταν από συγκεκριμένους περιορισμούς που καταγράφονταν στο εγχειρίδιο πράγμα που μας διευκόλυνε στην ανάλυση των χαρακτηριστικών τους.

Στο ελληνικό εγχειρίδιο μερικά από τα παραδείγματα που δόθηκαν για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης είναι και τα Π1, Π2, Π3 (βλ. παράρτημα). Καθένα από αυτά μετρήθηκε ως ξεχωριστό παράδειγμα. Κάθε υποερώτημα της Δ.23 δραστηριότητας επίσης ξεχωριστά. Αντίθετα και τα 6 υποερωτήματα που αναφέρονταν στη δραστηριότητα Δ.26 μέτρησαν ως ένα παράδειγμα αφού όλα είχαν να κάνουν με την αναγνώριση χαρακτηριστικών της γραφικής παράστασης, και τη μεταφορά και ερμηνεία του νοήματός τους, σε άλλο αναπαραστασιακό πλαίσιο.

3.4 Ο τρόπος ανάλυσης

Σε ένα πρώτο στάδιο είδαμε την έννοια της συνάρτησης και τη θέση της μέσα στο εγχειρίδιο λαμβάνοντας υπόψη μας τι προηγείται αυτής, ώστε να μπορούμε να ερμηνεύσουμε το στόχο που υπηρετούν τα παραδείγματα και τις διδακτικές επιλογές. Για το σκοπό αυτό συμβουλευτήκαμε και το αναλυτικό πρόγραμμα των δύο χωρών αλλά και κάθε εγχειρίδιο ενότητα - ενότητα μέχρι και το κεφάλαιο που αφορά στις συναρτήσεις. Ασχοληθήκαμε μόνο με την έννοια και τις αναπαραστάσεις της καθώς τα δυο εγχειρίδια είχαν διαφορετική οπτική στη μελέτη συγκεκριμένων μορφών συναρτήσεων και διαφορετικό τρόπο προσέγγισής τους. Για παράδειγμα, το αμερικάνικο εγχειρίδιο θεωρούσε ότι οι μαθητές διέθεταν graphing calculator, που χρησιμοποιούσαν για να κάνουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, και μάλιστα είχαν εξασκηθεί στη χρήση του σε προηγούμενο κεφάλαιο κατά τη διδασκαλία γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων.

Αφού ορίσαμε τι συνιστά για μας παράδειγμα (περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα) καταγράψαμε και αριθμήσαμε ένα – ένα τα παραδείγματα κάθε εγχειριδίου ξεχωριστά, κρατώντας μια σύντομη περιγραφή για καθένα, που να αποτελεί την ταυτότητα του παραδείγματος στα επόμενα στάδια της επεξεργασίας τους. Στη συνέχεια αναλύσαμε σε βάθος καθένα, ακολουθώντας όπου ήταν εφικτό, την παρουσίαση που προηγούνταν ή έπονταν του παραδείγματος, στο εγχειρίδιο. Για καθένα κρατήσαμε στοιχεία όσο μπορούσαμε περισσότερα που απαντούσαν στις ερωτήσεις:

Ποιο είναι το είδος του παραδείγματος και με ποια αναπαράσταση δίνεται;

Ποιο είναι το πλαίσιο (context) στο οποίο εμφανίζεται;

Πώς διαχειρίζεται το εγχειρίδιο το συγκεκριμένο παράδειγμα;

Ποιά είναι τα μαθηματικά χαρακτηριστικά – ιδιότητες του παραδείγματος;

Ποιο είδος μαθηματικής δραστηριότητας προκαλεί;

Ποιές συνδέσεις επιτυγχάνονται;

Συμβάλλει στη δημιουργία θετικής στάσης του μαθητή ως προς τα μαθηματικά;

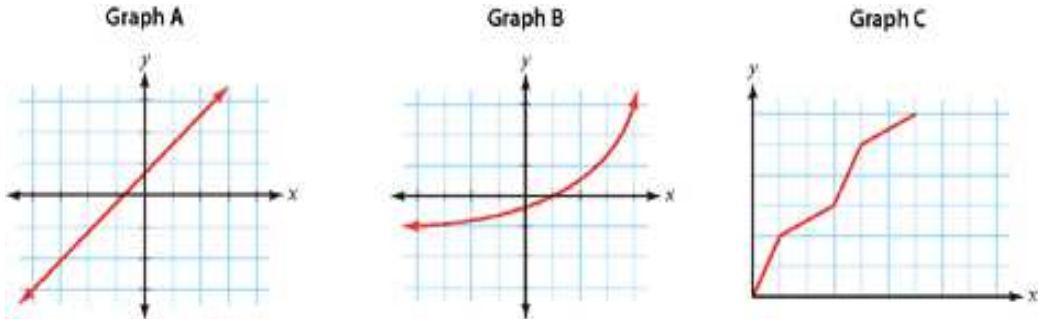
Οι απαντήσεις μας σε αυτά τα ερωτήματα αποτέλεσαν τη βάση για να αναπτυχθούν οι άξονες ανάλυσης. Τα ερωτήματα αυτά αναδύθηκαν τόσο από τις αναγνώσεις άρθρων στη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής, αλλά και σε όλη τη διάρκεια της φοίτησης στο μεταπτυχιακό, όσο και από τα ίδια τα παραδείγματα. Βασιστήκαμε λοιπόν στο περιεχόμενο των ίδιων των παραδειγμάτων (grounded content analysis) και με τη συνεπικουρία των ερευνητικών δεδομένων διαμορφώσαμε αρχικά ένα πρώτο επίπεδο ανάλυσης που περιελάμβανε τις διαστάσεις: **είδος και διαχείριση του παραδείγματος**, και **μαθηματικά χαρακτηριστικά του παραδείγματος**. Σε επόμενο επίπεδο διαμορφώσαμε για κάθε διάσταση άξονες ανάλυσής του. Για παράδειγμα, ένας από τους άξονες ανάλυσης στον κλάδο μαθηματικά χαρακτηριστικά του παραδείγματος, είναι ο άξονας *πλαίσιο (context*), του οποίου διαμορφώσαμε τις κατηγορίες, «*πραγματικό πλαίσιο*», «*μαθηματικό πλαίσιο», «άλλου επιστημονικού χώρου»,* και δεν αναλύσαμε για παράδειγμα, αν είναι από το χώρο της φυσικής, της οικονομίας ή αλλού, στην προσπάθειά μας να καταλήξουμε σε ένα εύκολο στη διαχείριση σχήμα. Με αντίστοιχο τρόπο διαχειριστήκαμε κάθε άξονα για κάθε διάσταση. Τους άξονες και τις κατηγορίες τους θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων.

Σε κάποιες περιπτώσεις η διάκριση των κατηγοριών υπήρξε δύσκολη, όπως για παράδειγμα, στον άξονα *διαχείριση του παραδείγματος* όπου οι κατηγορίες που διαμορφώσαμε ήταν: *εισαγωγικό, εφαρμογή (περιβάλλον για πρακτική) και διερεύνηση του μαθητή.* Κάποια παραδείγματα μπορεί να αποτελούσαν περιβάλλον διερεύνησης από το μαθητή και συγχρόνως να εισήγαγαν στην έννοια ή άλλα να έδιναν την ευκαιρία για πρακτική. Στην αρχή καταγράψαμε κάθε χρήση, επιτρέποντας αλληλεπικαλύψεις, αλλά σε επόμενη θεώρηση αποφασίσαμε να αναζητήσουμε την κυρίαρχη χρήση του παραδείγματος. Ανατρέξαμε και πάλι στο εγχειρίδιο από όπου το πήραμε, μελετήσαμε προσεκτικά και το παράδειγμα και το κείμενο που προηγούνταν και έπονταν αυτού, ώστε να βρούμε τις διδακτικές προθέσεις του.

Την τακτική να ανατρέχουμε στο εγχειρίδιο εφαρμόσαμε αρκετές φορές κατά την επεξεργασία των παραδειγμάτων. Μελετούσαμε ξανά και ξανά την εκφώνηση του, καθώς και το κείμενο που το συνόδευε για να του αποδώσουμε στο τέλος αξία. Τα όρια μεταξύ των κατηγοριών δεν ήταν πάντα διάφανα και συχνά συνυπήρχαν. Αυτό συνέβη και στον άξονα *είδος της*

μαθηματικής δραστηριότητας, στο οποίο το συγκεκριμένο παράδειγμα εισάγει το μαθητή. Σε κάποια παραδείγματα ο μαθητής εμπλέκονταν όχι μόνο σε μια μαθηματική δραστηριότητα. Όπως στο παράδειγμα Ε21 το οποίο ακολουθεί:

«These are graphs of *increasing functions.* What do the three graphs have in common? How would you describe the rate of change in each?»



Ως προς τη διαχείρισή του είναι ένα εισαγωγικό παράδειγμα στην αύξουσα συνάρτηση. Ως προς τη μαθηματική του δραστηριότητα όμως είναι ένα παράδειγμα που εκθέτει το μαθητή στην εμπειρία να *αναγνωρίζει μια αύξουσα συνάρτηση,* όταν αυτή δίνεται γραφικά, να *διατυπώνει συμπεράσματα* και να *αιτιολογεί τις σκέψεις του. Μεταγνωστικά* μπορεί να αποφανθεί ως προς τα κοινά και τις διαφορές αυξουσών συναρτήσεων. Οι κατηγορίες: *αναγνώριση της έννοιας ή ιδιοτήτων της, διατύπωση κανόνα ή συμπεράσματος, αιτιολόγηση της σκέψης και μεταγνωστική ενημερότητα* συνυπάρχουν στο ίδιο παράδειγμα.

Και σε άλλες περιπτώσεις οι κατηγορίες αλληλεπικαλύπτονταν. Για παράδειγμα, στον άξονα «Στάση» που διαμορφώνει ο μαθητής, οι κατηγορίες που δημιουργήσαμε ήταν: *συνεργασία μεταξύ μαθητών, ενεργός εμπλοκή, προσωπικό κίνητρο* (που εκφράστηκε ως *οικείο πλαίσιο ή ενδιαφέρον*). Στην παράγραφο κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης στο αμερικάνικο εγχειρίδιο, ένα από τα παραδείγματα που καταγράψαμε είναι αυτό στο οποίο εκτίθενται οι μαθητές όταν τους ζητείται να ανακαλύψουν τον κώδικα του συμμαθητή τους. Το συγκεκριμένο παράδειγμα ωθεί σε συνεργασία μεταξύ των δυο τουλάχιστον μαθητών, απαιτεί την ενεργό εμπλοκή τους, αλλά ενισχύει και το προσωπικό κίνητρο, μέσω του οικείου πλαισίου και του ενδιαφέροντος που έχει να βρει τι μήνυμα έγραψε ο συμμαθητής του.

Και σε αυτό αλλά και σε άλλα παραδείγματα κάναμε τη διάκριση των κατηγοριών στους διάφορους άξονες με την παραδοχή ότι οι μαθητές ακολουθούν τα κείμενα (οδηγίες, προτροπές) όταν εργάζονται σε μια δραστηριότητα. Η κατηγοριοποίηση έγινε με βάση τις δράσεις στις οποίες ζητείται να μετέχει ο μαθητής σε κάθε βήμα της δραστηριότητας ή παρουσιάζονται σε κείμενο πριν από τη δραστηριότητα.

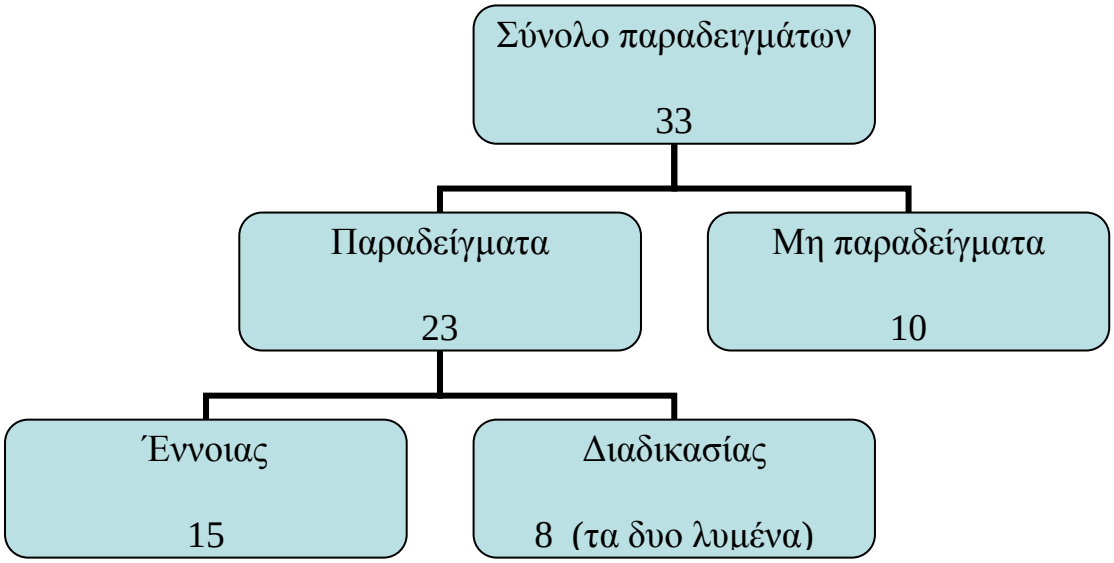
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Είδος και Διαχείριση των παραδειγμάτων

4.1.1 Είδος παραδείγματος

Από την ανάλυση των παραδειγμάτων ως προς το είδος τους παρατηρήσαμε **παραδείγματα** και **μη παραδείγματα συνάρτησης.** Επειδή το υλικό μας είναι η έννοια και οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης δεν εντοπίσαμε αντιπαραδείγματα, καθώς τα αντιπαραδείγματα εμφανίζονται όταν υπάρχει ένας ισχυρισμός για να απορριφθεί. Το μαθηματικό περιεχόμενο των ενοτήτων που επεξεργαστήκαμε αφορούσε στην έννοια της συνάρτησης οπότε τα παραδείγματα που εμφανίζονται στα εγχειρίδια εξυπηρετούν ως παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας αυτής. Τα παραδείγματα βοήθησαν στο να εισαχθεί διαισθητικά η έννοια της συνάρτησης και ιδιότητες αυτής, με διάφορες αναπαραστάσεις, και χρησιμοποιήθηκαν από τα εγχειρίδια για να επικοινωνήσουν την έννοια με τους μαθητές. Τα μη παραδείγματα βοήθησαν στο να αποσαφηνιστούν τα όρια της έννοιας και να εκθέσουν στα κρίσιμα χαρακτηριστικά της.

Ελληνικό εγχειρίδιο



Στα παραδείγματα έννοιας εντοπίσαμε στο εγχειρίδιο 5 παραδείγματα, (3 που περιγράφονται με αναλυτικό τύπο και 2 για τα οποία δεν υπάρχει, ή τουλάχιστον δε γνωρίζουμε αν υπάρχει τύπος που περιγράφει τη διαδικασία αντιστοίχισης), μέσω των οποίων οδηγείται στον τυπικό ορισμό της συνάρτησης. Είναι τα παραδείγματα Π1, Π2, Π3 και το εγχειρίδιο συνεχίζει, περιγράφοντας ότι σε κάποιες περιπτώσεις, η διαδικασία αντιστοίχισης δεν περιγράφεται (ή δε γνωρίζουμε αν περιγράφεται) με κάποιο τύπο παραθέτοντας τα παραδείγματα:

Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους . Και

Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Μέχρι και τον ορισμό της συνάρτησης το σχολικό εγχειρίδιο δεν παρέχει ούτε ένα μη παράδειγμα. Στα 5 αυτά παραδείγματα που οδηγούν στον ορισμό της συνάρτησης έρχονται να προστεθούν και οι δραστηριότητες Δ.22 και Δ.23 του προγράμματος σπουδών. Από αυτές η Δ.22 είναι ένα παράδειγμα αντιστοίχισης κάθε μήνα ενός συγκεκριμένου έτους στη μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία που παρατηρήθηκε στην πόλη της Θεσσαλονίκης. Και ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν και να αιτιολογήσουν αν η αντιστοίχιση αυτή αποτελεί συνάρτηση. Η δραστηριότητα Δ.23 περιλαμβάνει 4 λεκτικές αντιστοιχίσεις (βλ. παράρτημα).

Με τη Δ.23 μπαίνουν τα πρώτα μη παραδείγματα της έννοιας. Με αυτά και μέσω αυτών τονίζεται το κρίσιμο χαρακτηριστικό του μονοσήμαντου στον ορισμό της συνάρτησης. Η απαίτηση για αιτιολόγηση, μας κάνει να υποθέτουμε, ότι ο ρόλος που προσδίδεται στο παράδειγμα είναι για χρήση μετά τον ορισμό, και εστίαση στο μονοσήμαντο, ως κριτήριο για την απόφανση αν η αντιστοίχιση αποτελεί συνάρτηση ή όχι. Η προστιθέμενη αξία της δραστηριότητας βρίσκεται, στη φύση των μεγεθών που μεταβάλλονται. Για παράδειγμα, στην αντιστοίχιση:

Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα

εισάγουμε μια ημερομηνία και μας εξάγει ονόματα ανθρώπων που γεννήθηκαν τη συγκεκριμένη ημερομηνία. Τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το σύνολο τιμών ξεφεύγουν από τα πρωτοτυπικά παραδείγματα να είναι διαστήματα ή αριθμητικά σύνολα.

Θα παρουσίαζε μεγάλο ενδιαφέρον η διερεύνηση αν και οι αντίστροφες αντιστοιχίσεις αποτελούν συναρτήσεις, πράγμα που θα συντελούσε και στο να γίνει διάκριση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής σε κάθε αντιστοίχιση. Επιπλέον θα βοηθούσε στο να γίνει ξεκάθαρο ότι οι «πολλά ένα» αντιστοιχίσεις ικανοποιούν την απαίτηση του μονοσήμαντου και αποτελούν περιπτώσεις συναρτήσεων, σε αντίθεση με τις «ένα - πολλά» αντιστοιχίσεις που δεν είναι συναρτήσεις.

Τα υπόλοιπα παραδείγματα έννοιας (που έπονται του ορισμού), δίνουν 5 αντιστοιχίσεις με βελοδιαγράμματα στο σχολικό, (από τα οποία 3 είναι μη παραδείγματα) και δυο καμπύλες σε σύστημα αξόνων, η μια γραφική παράσταση συνάρτησης και η άλλη ο κύκλος, ως παράδειγμα γνωστού γεωμετρικού σχήματος σε σύστημα συντεταγμένων, που όμως δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης. Άλλα 4 τέτοια γραφήματα (1 παράδειγμα, 3 μη παραδείγματα) για να εξετάσουν οι μαθητές αν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, δίνονται και στη δραστηριότητα Δ.24 του προγράμματος σπουδών.

Στα **παραδείγματα διαδικασίας** προσμετρήσαμε παραδείγματα συμβολισμού της μεταβλητής ή των τιμών της συνάρτησης, καθώς και τον υπολογισμό αυτών, και παραδείγματα που εστιάζουν στην εύρεση του πεδίου ορισμού συνάρτησης της οποίας δίνεται ο τύπος της. Ένα τέτοιο παράδειγμα του σχολικού εγχειριδίου είναι και το ακόλουθο:

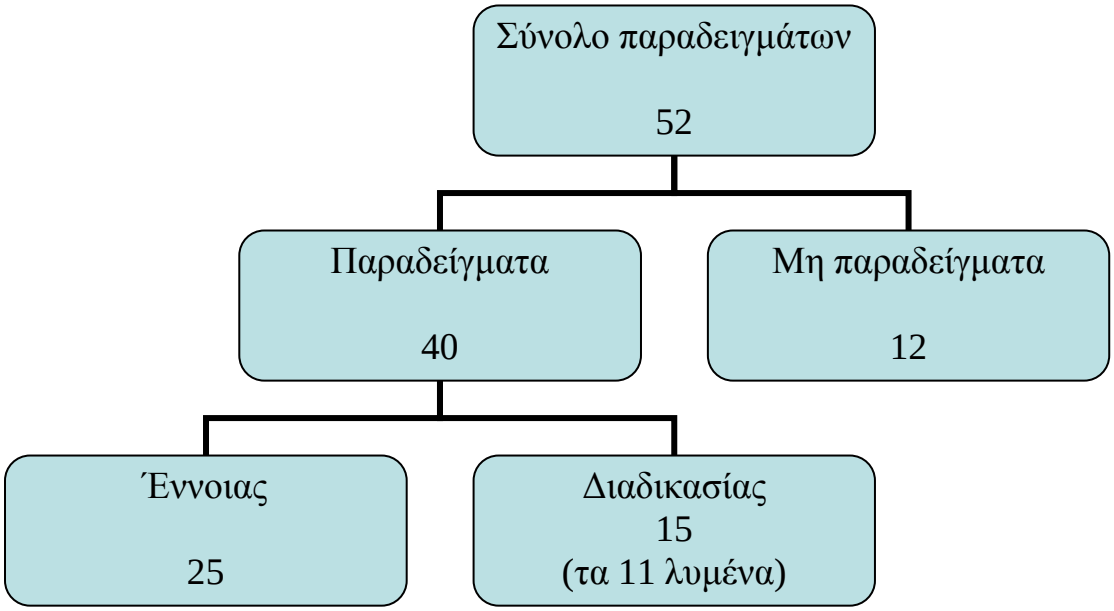
Έτσι για παράδειγμα, οι $f(x) = x^2-4x+7$, $g(t)= t^2-4t+7$ $h(s)= s^2-4s+7$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση. Επομένως το χ στον τύπο της συνάρτησης παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό η συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$f(\ ) = (\ )^2 – 4(\ ) + 7,$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος. Έτσι για να υπολογίσουμε το f(-2) απλά τοποθετούμε το -2 στις θέσεις που ορίζουν οι παρενθέσεις.

Τα δυο **λυμένα παραδείγματα** του εγχειριδίου εκθέτουν σε διαδικασία εύρεσης του πεδίου ορισμού συνάρτησης της οποίας δίνεται ο τύπος της το πρώτο, και το δεύτερο, στη γραφική λύση εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής f(x) =0, f(x) = 2, f(x) =g(x) και ανισώσεις αντίστοιχων μορφών, όταν δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

Αμερικάνικο εγχειρίδιο

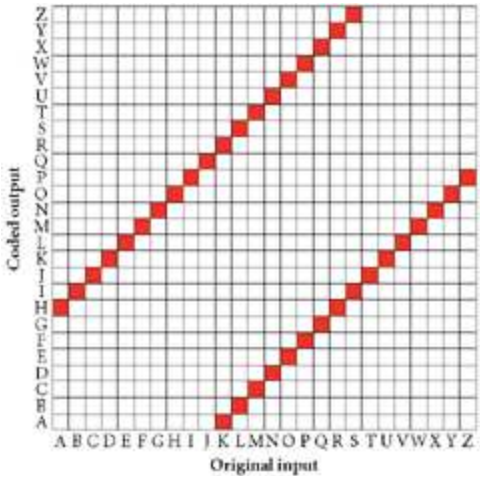


Τα πρώτα 9 παραδείγματα έχουν εμφανιστεί στο πλαίσιο της διερευνητικής δραστηριότητας της κρυπτογραφίας, όπου οι μαθητές μελετούν στρατηγικές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, ως παραδείγματα της έννοιας της συνάρτησης. Με 8 παραδείγματα και 1 μη παράδειγμα οδηγείται

στον ορισμό της συνάρτησης, ο οποίος δεν εμφανίζεται ανεξάρτητος από τη δραστηριότητα μέσα στην οποία αναδείχθηκε, αλλά αποτελεί κατάληξη αυτής.

Τα παραδείγματα που οδηγούν στον ορισμό έχουν τη δομή:

- Δίνεται αρχικά ένας κώδικας μετατόπισης γράμματος με πίνακα και με πλέγμα (Ε1 παράδειγμα).
- Ζητείται να χρησιμοποιήσουν τον κώδικα και να γράψουν ένα μήνυμα 2 ή 3 λέξεων ($2^{ο}$ παράδειγμα, εφαρμογή της έννοιας).
- Ανταλλάσσουν μηνύματα και τα αποκωδικοποιούν ($3^{ο}$ παράδειγμα)
- Κατασκευάζουν δικό τους κώδικα περιγράφοντάς τον λεκτικά και αναπαριστώντας τον σε πλέγμα, και δεν επιτρέπουν στο διπλανό τους να τον δει ($4^{ο}$ παράδειγμα, κατασκευή παραδείγματος από μαθητές).
- Κωδικοποιούν ξανά το $1^{ο}$ μήνυμά τους ($5^{ο}$ παράδειγμα).
- Ανταλλάσσουν μηνύματα και ανακαλύπτει ο ένας τον κώδικα του άλλου ($6^{Ο}$ παράδειγμα).
- Συγκρίνουν τα παραδείγματά τους και αναστοχάζονται σχετικά με το πλήθος των δυνατών εξόδων που μπορούν να δώσουν σε ένα συγκεκριμένο γράμμα, αλλά και με πόσους τρόπους μπορούν να αποκωδικοποιήσουν ένα γράμμα. Με τον προβληματισμό αυτό εισαγάγει τους μαθητές σε επίγνωση της υποβόσκουσας μαθηματικής δομής. ($7^{ο}$)
- Δίνει στη συνέχεια το παρακάτω πλέγμα,



και μέσα από στοχευμένα ερωτήματα (όπως «γράψε μήνυμα και ζήτα να σου το αποκωδικοποιήσει ο διπλανός σου». Τα κατάφερε; Αν όχι γιατί; Πώς μοιάζει και πώς διαφέρει με το αρχικό πλέγμα; Ποια γράμματά του μπορούν να αποκωδικοποιηθούν και ποια όχι;) θέτει το πρώτο μη παράδειγμα στην έννοια. ($8^{ο}$ παράδειγμα).

- Ζητά να φτιάξουν ξανά παράδειγμα κώδικα με απαίτηση του μονοσήμαντου. (9° παράδειγμα, παράδειγμα μαθητών). Να η πλήρης διατύπωση του αιτήματος:

  Create a new coding scheme by shading squares that don't touch each other on the grid. Make the grid so that there is exactly one output for each input. How is it similar to the grid in Step 1? How is it different?

  Μετά από την έκθεση στα παραπάνω παραδείγματα ακολουθεί ο ορισμός:

  Letter-shift codes are relationships—any relationship between two variables is called a **relation.** You can also think of a relation as a set of ordered pairs. Codes that have exactly one output letter for every input letter are examples of **functions.** The set of values that are inputs for a relation or function is called its **domain.** In the investigation the domain is the set of all letters of the alphabet. The **range** of a relation or function is the set of all its possible output values for these codes. The range happens to be all the letters of the alphabet as well. But often the domain contains many values different from those in the range.

Και έπεται παράδειγμα όπου κάθε γράμμα αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένο αριθμό, με το σχόλιο ότι τα computers αποθηκεύουν τα γράμματα ως αριθμούς.

Ακολουθούν 3 παραδείγματα (2 παραδείγματα στην έννοια, το ένα σταθερής συνάρτησης, και 1 μη παράδειγμα) τα οποία δίνονται και με πίνακα τιμών και με διάγραμμα. Η πρώτη παράγραφος κλείνει με αναφορά στις δυνατές αναπαραστάσεις μιας σχέσης, με πίνακα, με γράφημα, με ισότητα, με γραφική παράσταση ή ακόμα και με λεκτική περιγραφή. Ολοκληρώνει συνδέοντας ότι πολλές από τις σχέσεις που μελέτησες στα προηγούμενα κεφάλαια είναι συναρτήσεις.

Στην επόμενη παράγραφο «συναρτήσεις και γραφήματα», έχουμε μια μετατόπιση από το πραγματικό στο μαθηματικό πλαίσιο εισάγοντας τη συνάρτηση που «σε κάθε αριθμό προσθέτει ένα» με όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις της.

Ακολουθεί διερευνητική δραστηριότητα με στόχο να εξεταστούν 4 σχέσεις δοσμένες, με πίνακα τιμών, με ισότητα και με γραφική παράσταση αν αποτελούν συναρτήσεις. Με αυτό το μοτίβο τεσσάρων σχέσεων στα τρία αναπαραστασιακά πλαίσια έχουμε ένα σύνολο 12 παραδειγμάτων στην έννοια. Τα 6 από αυτά είναι μη παραδείγματα. Ειδικά από τη γραφική αναπαράσταση κατευθύνει στη διατύπωση του κανόνα της κατακόρυφης γραμμής, ως κριτήριο ελέγχου αν δοσμένο γράφημα αποτελεί γράφημα συνάρτησης. Μετά θέτει 3 παραδείγματα και 2 μη παραδείγματα συνάρτησης στα οποία εφαρμόζει τον κανόνα της κατακόρυφης γραμμής.

Μετά από 31 συνολικά παραδείγματα στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της δίνει ένα λυμένο παράδειγμα με τα 8 υποερωτήματα

a. $y = 1 - 3x$ ***b.*** $y = 0.5x + 2$ ***c.*** $y = \frac{3}{4}x$ ***d.*** $2x + 3y = 6$

e. $y = 5 + 2(x - 8)$ ***f.*** $y = 7$ ***g.*** $x = 9$ ***h.*** $2x - 4y \leq 12$

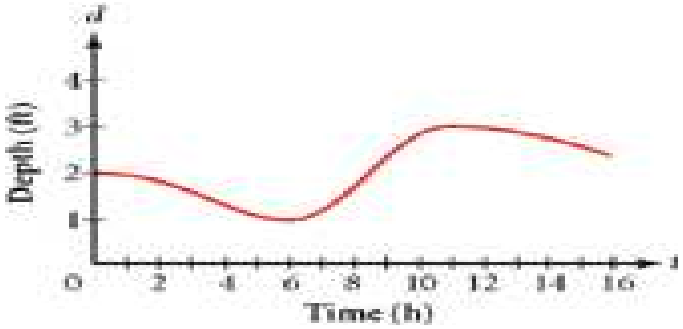
όπου τους ζητά να καθορίσουν τη μορφή της γραμμικής εξίσωσης ή ανίσωσης (τις έχουν μελετήσει σε προηγούμενο κεφάλαιο), να κάνουν το γράφημα (με χρήση graphing calculator) και να παρατηρήσουν ποιες «περνούν» το τεστ της κατακόρυφης γραμμής. Καταλήγει στη γενίκευση:

> *In fact, graphs of all vertical lines and linear inequalities fail the vertical line test, and are therefore not functions.* ***All non vertical lines are functions****.*

Στο προηγούμενο λυμένο παράδειγμα μετρήσαμε τα 8 υποερωτήματα ως παραδείγματα διαδικασίας. Είναι τα πρώτα παραδείγματα διαδικασίας του εγχειριδίου. Με αυτά διευκρινίζει ένα τρόπο ελέγχου αν δοθείσα σχέση, με αναλυτικό τύπο, αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Η τρίτη παράγραφος φέρει τον τίτλο «Γραφικές παραστάσεις καταστάσεων του πραγματικού κόσμου» και δίνει έμφαση στην ανάγκη να ερμηνεύουμε, να σχεδιάζουμε γραφήματα, αλλά και να επικοινωνούμε το μήνυμά τους.

Ξεκινά με ένα λυμένο παράδειγμα για να υποδείξει πως αντλούμε και καταγράφουμε πληροφορίες από γράφημα, και πως τις ερμηνεύουμε, συσχετίζοντας τις ποσότητες που μεταβάλλονται και παρέχοντας εξηγήσεις που στηρίζονται σε πραγματικά γεγονότα. Η διαδικασία παραδειγματοποιείται με χρήση ενός διαγράμματος που δείχνει το ύψος της στάθμης του νερού σε μια τρύπια πισίνα σε σχέση με το χρόνο.



Μετά την ολοκλήρωση της λύσης συζητά μέσα στο πλαίσιο του παραδείγματος, τους όρους ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή και τη θέση τους στο σύστημα συντεταγμένων, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της

συνάρτησης, τη μορφή της γραφικής παράστασης και το ρυθμό μεταβολής των τιμών της, καθώς και σχόλια σχετικά με ακρότατες τιμές.

Στη διερεύνηση που ακολουθεί εκθέτει τους μαθητές σε μια ακόμα βασική ιδιότητα της συνάρτησης, τη μονοτονία της. Δίνει γραφικά, 3 παραδείγματα αυξουσών (Ε21) και 3 παραδείγματα φθινουσών συναρτήσεων (Ε22), ζητώντας από τους μαθητές να παρατηρήσουν ομοιότητες και να καταγράψουν διαφορές ως προς το ρυθμό μεταβολής των τιμών τους.

Στη συνέχεια παραθέτει περιγραφές 4 πραγματικών καταστάσεων να τις ταιριάζουν με το κατάλληλο από 6 δοθέντα διαγράμματα (Ε23 στο παράρτημα).

Κατάσταση Α : *πριν μερικά χρόνια ο πληθυσμός των ελαφιών σε ένα νησί αυξάνονταν με σταθερό ποσοστό. Καθώς το φαγητό δεν ήταν πια άφθονο ο ρυθμός αύξησης άρχισε να επιβραδύνεται και τώρα ο ρυθμός γεννήσεων και θανάτων είναι περίπου ίδιος.*

Κατάσταση Β : *στο βόρειο ημισφαίριο η διάρκεια της μέρας αυξάνεται αργά κατά τους μήνες Ιανουάριο και Φεβρουάριο, γρηγορότερα μέχρι τα μέσα Μαΐου, και ξανά αργότερα μέχρι τη μέγιστη διάρκειά της τον Ιούνιο. Μετά μειώνεται σιγά μέχρι τον Ιούλιο, γρηγορότερα από τον Αύγουστο μέχρι τα μέσα Νοεμβρίου και τέλος αργά μέχρι το τέλος της χρονιάς.*

Κατάσταση Γ : *αν έχεις συγκεκριμένο μήκος φράχτη για ένα ορθογώνιο κήπο, το πλάτος του καθορίζει και το εμβαδό του. Αν έχει μικρό πλάτος ο κήπος δε θα έχει μεγάλη επιφάνεια, αν αυξάνεται το πλάτος θα αυξάνεται και το εμβαδό, μέχρι να φτάσει σε μια μέγιστη τιμή. Αν συνεχίσει να αυξάνεται το πλάτος τότε το εμβαδό αρχίζει να μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί.*

Κατάσταση Δ *: το τσάι σου στην κούπα είναι πολύ ζεστό. Το τσάι σου κρυώνει στην αρχή γρήγορα καθώς αποβάλλει θερμότητα στο περιβάλλον και στη συνέχεια καθώς οι δυο θερμοκρασίες πλησιάζουν η μια την άλλη ο ρυθμός μειώνεται. Στην πραγματικότητα θα πάρει πολύ χρόνο στο τσάι να πιάσει τη θερμοκρασία του δωματίου.*

Στόχος της δραστηριότητας είναι να μυήσει τους μαθητές στη χρήση ορολογίας *γραμμική ή μη γραμμική συνάρτηση, αύξουσα ή φθίνουσα, ρυθμός μεταβολής, μέγιστη ή ελάχιστη τιμή* και να ταιριάξουν τις καταστάσεις, στα διαγράμματα που τις περιγράφουν, αφού πρώτα εντοπίσουν τις *ποσότητες που μεταβάλλονται* και τη θέση καθεμιάς στους άξονες. Κάνει επίσης αναφορά σε συναρτήσεις με διακριτές τιμές (καταστάσεις Α και Β), και σε συνεχείς συναρτήσεις (καταστάσεις Γ και Δ), και σχόλια για τις γραφικές τους παραστάσεις. Την αντιστοίχιση την καταγράψαμε ως παράδειγμα διαδικασίας.

Το τελευταίο της παραγράφου είναι ένα ακόμα λυμένο παράδειγμα (παράδειγμα διαδικασίας) που σε δοθέν γράφημα συζητά τη μονοτονία και τη μορφή της γραφικής παράστασης (γραμμική ή μη γραμμική, ρυθμός μεταβολής των τιμών της).

Η τελευταία παράγραφος «Συμβολισμός συνάρτησης» μας δίνει 4 παραδείγματα διαδικασίας συμβολισμού τιμών και υπολογισμού τους, είτε δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, είτε η γραφική της παράσταση. Το τελευταίο (E52), δίνει τη συνάρτηση f(x)=1,8x + 32 που μετατρέπει τους βαθμούς Celsius σε βαθμούς Fahrenheit , και εκτελεί μετατροπές από τη μια κλίμακα στην άλλη. Η επιλογή του συγκεκριμένου παραδείγματος αν τη δούμε διαδικαστικά δεν έχει μεγάλη αξία. Πιστεύουμε όμως πως η αξία του βρίσκεται στο ότι μέσω του συγκεκριμένου παραδείγματος οι μαθητές εκτίθενται σε παραδείγματα συναρτήσεων που δεν είχαν δει μέχρι τώρα. Τις συναρτήσεις που μετατρέπουν μετρήσεις από μια μονάδα μέτρησης σε άλλη. Παραδείγματα τέτοιων μετατροπών, όταν δε δίνεται η σχέση μετατροπής, δεν αναγνωρίζονται από όλους τους μαθητές ως παραδείγματα συναρτήσεων σύμφωνα με το Hartter (2009).

Ίσως να είχε μεγαλύτερη αξία να ζητούνταν από τους μαθητές να εξετάσουν, αν αποτελεί παράδειγμα συνάρτησης, η μετατροπή δοθείσης θερμοκρασίας από βαθμούς Celsius σε βαθμούς Fahrenheit χωρίς την ταυτόχρονη παροχή τύπου μετατροπής. Γιατί όταν δίνεται η συναρτησιακή σχέση που μετατρέπει τις μετρήσεις από τη μια μονάδα στην άλλη η αναγνώριση της συνάρτησης καθίσταται πιο εύκολη.

4.1.2 Διαχείριση των παραδειγμάτων

Όπως αναφέρουμε και στο θεωρητικό μέρος της εργασίας αρκετοί σύγχρονοι ερευνητές συνδέουν τη γέννηση της μαθηματικής γνώσης με διεργασίες που σχετίζονται με το πώς φτάνουμε σε αυτή . Στα κείμενά τους δίνεται ξεκάθαρα κεντρική θέση στα παραδείγματα, ως πρώτη ύλη για διεργασίες γενίκευσης και εννοιολόγησης (conceptualizing) νέων αντικειμένων.

Η Sfard θεωρεί ότι οι διαδικασίες της εσωτερίκευσης και της συμπύκνωσης λαμβάνουν χώρα, μέσω της επαναλαμβανόμενης συνάντησης της έννοιας σε παραδείγματα.

Ο Dubinsky εισάγει την APOS θεωρία για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Η θεωρία αυτή προβλέπει ότι η αντιμετώπιση παραδειγμάτων μπορεί να αποτελέσει μέρος της διαδικασίας μέσω της οποίας διαμορφώνονται οι έννοιες.

Η Kieran αναφερόμενη στην ανάπτυξη κατανόησης, εστιάζει στην κατασκευή εικόνας και αναγνωρίζει ότι είναι η άμεση εμπειρία παραδειγμάτων που συνεισφέρει στο σχηματισμό προσωπικής εικόνας και γνώσης (knowings).

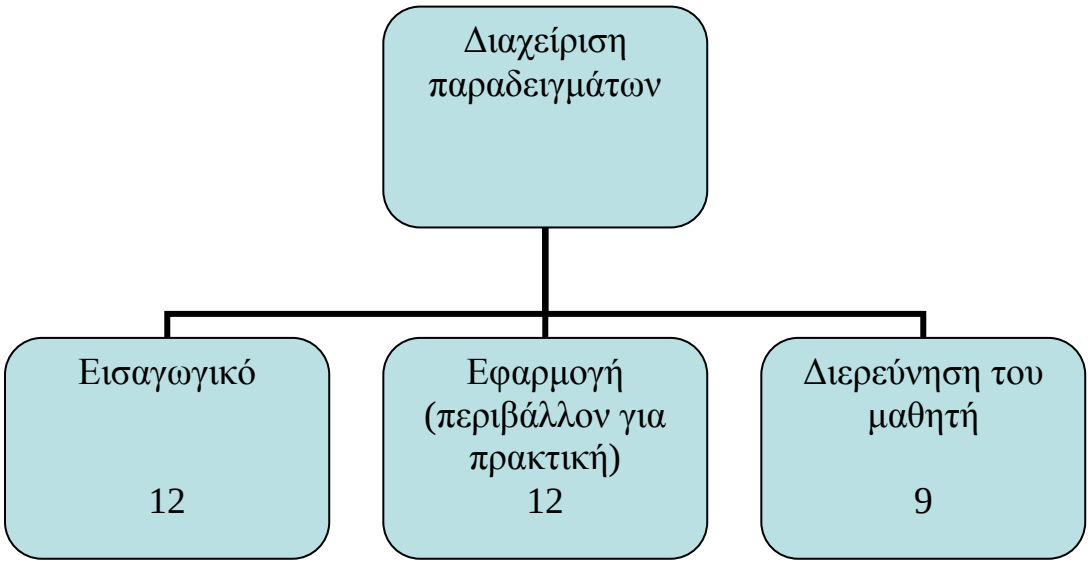
Συνεπώς τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται σε μια διδασκαλία τυγχάνουν ιδιαίτερης προσοχής. Το να δίνουμε προσοχή στα παραδείγματα προσφέρει συγχρόνως μια πρακτικά χρήσιμη και σημαντική θεωρητική οπτική πάνω στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων διδασκαλίας και στην προσέγγιση της εμπειρίας που αυτά προσφέρουν στους μαθητές. Η σπουδαιότητά τους δεν εξαρτάται ούτε από τον όρο που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τον τύπο διδασκαλίας ως: «επαγωγική», «παραγωγική», «μηχανιστική (παπαγαλία) μελέτη», «διδασκαλία με κατανόηση» ή «διερευνητική». Έχουν τη θέση τους σε καθεμιά από αυτές.

Εμείς λαμβάνοντας υπόψη και τη διάκριση των Rowland, Thwaites & Huckstep (2003) ως προς τη χρήση των παραδειγμάτων στη διδασκαλία, αλλά και το τι κάνουν οι μαθητές με αυτά διακρίναμε:

Ελληνικό εγχειρίδιο

Όπως τονίσαμε και στη μεθοδολογία μας, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι εισαγωγικό και να προσφέρεται σε ένα περιβάλλον διερεύνησης. Στο ελληνικό εγχειρίδιο όμως δεν υπήρξαν τέτοια παραδείγματα. Τα παραδείγματά του ή ήταν εισαγωγικά στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της ή χρησιμοποιούνταν ως περιβάλλον πρακτικής της έννοιας. Έτσι από τα 20 συνολικά παραδείγματα του εγχειριδίου τα 10 ήταν εισαγωγικά στη έννοια και τα 10 πρακτική σε αυτή. Όμως κάποια από τα παραδείγματα του προγράμματος σπουδών έδιναν μια εστίαση στην αναγνώριση κρίσιμων

χαρακτηριστικών της έννοιας, την απόφανση αν διάφορες αναπαραστάσεις αποτελούν ή όχι συνάρτηση με ταυτόχρονη αιτιολόγηση της απάντησης. Τέτοια παραδείγματα τα κατατάξαμε στην κατηγορία «διερεύνηση του μαθητή». Στο σύνολο των παραδειγμάτων εγχειριδίου και προγράμματος σπουδών είχαμε:

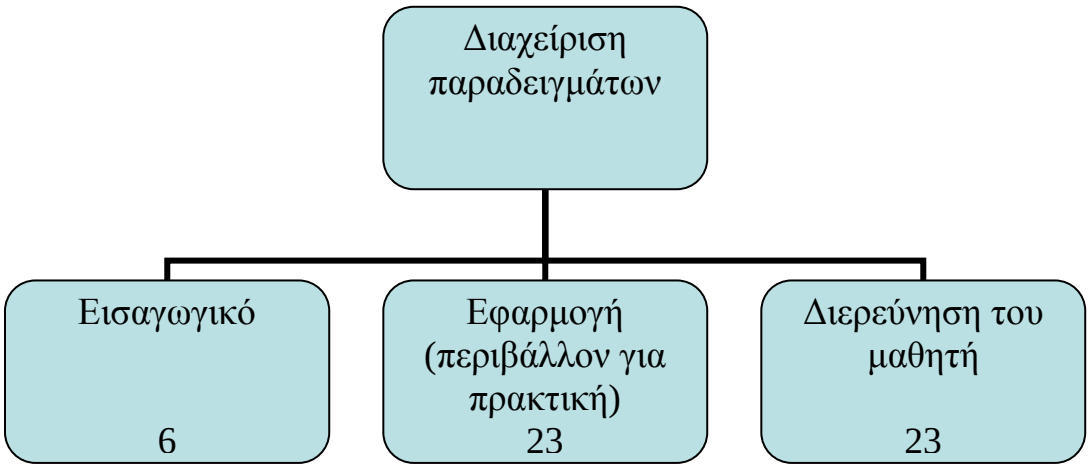


Για παράδειγμα, η δραστηριότητα Δ.22 του προγράμματος σπουδών που δίνει τον πίνακα αντιστοίχισης της μέγιστης μηνιαίας θερμοκρασίας (σε βαθμούς Κελσίου) στην πόλη της Θεσσαλονίκης αν είχε δοθεί πριν τον ορισμό της συνάρτησης, ως συγκεκριμένη περίπτωση της γενικότητας που πάει να χτιστεί, θα το μετρούσαμε ως εισαγωγικό. Αν είχε δοθεί μετά τον ορισμό για να εστιάσουν στο ότι σε κάθε μήνα αντιστοιχούμε μια ακριβώς θερμοκρασία και ότι μπορεί διαφορετικοί μήνες να έχουν την ίδια μέγιστη θερμοκρασία, θα το μετρούσαμε ως παράδειγμα εφαρμογής της έννοιας. Ενώ με τη διατύπωση που τίθεται από το πρόγραμμα σπουδών, «Είναι η αντιστοιχία Μήνας → Θερμοκρασία, συνάρτηση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας», εμείς το μετρήσαμε ως διερεύνηση του μαθητή. Καθώς ο μαθητής θα πρέπει να διερευνήσει τα κρίσιμα χαρακτηριστικά που το καθιστούν συνάρτηση, ή αν η απάντησή του ήταν αρνητική να αποφανθεί ποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό του παραδείγματος το καθιστά μη παράδειγμα της έννοιας.

Παρόμοια και τα υποερωτήματα της δραστηριότητας Δ.23 τα μετρήσαμε ως 4 παραδείγματα προς διερεύνηση από το μαθητή. Και εδώ ο μαθητής σε κάθε αντιστοίχιση θα πρέπει να διερευνήσει τα κρίσιμα χαρακτηριστικά που

καθιστούν καθένα από αυτά, παράδειγμα ή μη παράδειγμα της έννοιας. Μάλιστα για το μη παράδειγμα, με την απαίτηση της αιτιολόγησης, θα αναγκαστεί να βρει αντιπαράδειγμα για να τεκμηριώσει τον ισχυρισμό του (π.χ. στην αντιστοίχιση: «Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που γεννήθηκαν εκείνη τη μέρα».

Αμερικάνικο εγχειρίδιο



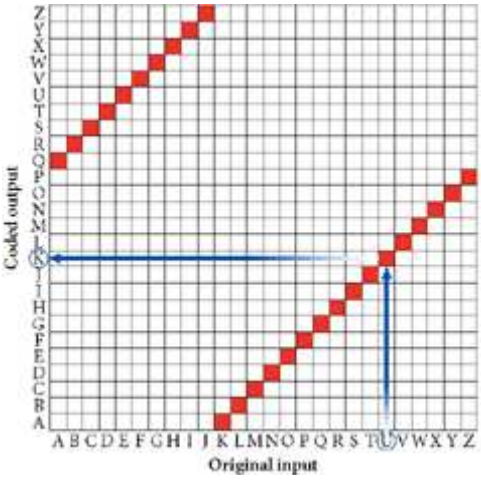
Και σε αυτό το εγχειρίδιο, όπως και στο ελληνικό το κριτήριο για την κατάταξη ενός παραδείγματος σε μια από τις 3 κατηγορίες (αποκλειστικά), ήταν αυτό που ζητείται να κάνει ο μαθητής. Εδώ υπήρχαν εισαγωγικά παραδείγματα που δίνονταν σε διερευνητική βάση. Ένα τέτοιο παράδειγμα, για εισαγωγή στη μονοτονία συνάρτησης είναι το Ε21, του οποίου η διατύπωση ακολουθεί :

«*Οι παραπάνω είναι γραφικές παραστάσεις αυξουσών συναρτήσεων. Τι κοινό έχουν όλες οι παραπάνω; Πώς θα μπορούσες να περιγράψεις το ρυθμό μεταβολής σε καθεμιά;*»

Το παράδειγμα εισάγει στην ιδιότητα «αύξουσα συνάρτηση» όμως αυτό που ζητάει να κάνει ο μαθητής είναι να διερευνήσει τι κοινό έχουν, και σε τι διαφέρουν οι 3 αύξουσες συναρτήσεις. Τέτοια παραδείγματα στο ελληνικό εγχειρίδιο δεν είχαμε ώστε να επιτρέψουμε την παράλληλη τοποθέτησή τους και στις δυο κατηγορίες. Οπότε στα πλαίσια της προσπάθειας να τα χειριστούμε με όμοιο τρόπο κατατάξαμε τα 3 παραδείγματα αυξουσών και τα 3 επόμενα φθινουσών που ακολουθούν, στην κατηγορία «Διερεύνηση του μαθητή».

Όπως φαίνεται ξεκάθαρα από τις συχνότητες, στις κατηγορίες «περιβάλλον για πρακτική» και «Διερεύνηση του μαθητή» η έμφαση δίνεται στο τι μπορούμε να κάνουμε με την καινούρια έννοια, αλλά και στο να διερευνήσουν οι μαθητές, και όχι να τους δοθεί έτοιμη γνώση. Είναι χαρακτηριστικό ότι στην παράγραφο «κώδικες», την πρώτη παράγραφο στην έννοια της συνάρτησης, από τα συνολικά 9 παραδείγματα που σχεδιάστηκαν στο πλαίσιο της κρυπτογραφίας, μόνο 1, το πρώτο, που δίνει τον κώδικα «μετατόπιση γράμματος» είναι εισαγωγικό, και τα υπόλοιπα αποτελούν «περιβάλλον πρακτικής» ή προσφέρονται για διερεύνηση.

Εισαγωγικό είναι το παράδειγμα Ε1 :



Ο κώδικας μετατόπισης γράμματος δόθηκε και στο πλέγμα που βλέπετε αριστερά αλλά και με πίνακα αντιστοίχισης. Το κείμενο που το εισήγαγε έλεγε: «*ο πίνακας δείχνει ότι το γράμμα Α κωδικοποιείται στο γράμμα Q, το Β στο γράμμα R και έτσι συνεχίζουμε. Ο κώδικας αυτός είναι ένα παράδειγμα κώδικα μετατόπισης γράμματος.*»

Ως **εφαρμογή** κατατάξαμε το παράδειγμα που ακολουθεί, που είχε τη διατύπωση: «*κωδικοποιήστε ένα μήνυμα δύο ή τριών λέξεων*».

Τέλος το παράδειγμα: «*Με το πλέγμα που σας δίνεται, γράψτε ένα μήνυμα δύο ή τριών λέξεων, ανταλλάξτε το με το συμμαθητή σας και αποκωδικοποιήστε ο ένας το μήνυμα του άλλου. Το αποκωδικοποίησε σωστά; Γιατί ή γιατί όχι; Σε τι διαφέρει ο κώδικας αυτός από τον προηγούμενο; Κωδικοποίησε τη λέξη συνάρτηση για να βοηθηθείς να απαντήσεις.*» το προσμετρήσαμε στην κατηγορία «**Διερεύνηση του μαθητή**». Να σημειώσουμε ότι το παράδειγμα το περιγράψαμε εμείς τόσο πυκνά για λόγους συντομίας. Τα προηγούμενα ερωτήματα διατυπώνονται σε τέσσερα βήματα της διερευνητικής δραστηριότητας.

Στο τέλος της δραστηριότητας της κρυπτογραφίας το εγχειρίδιο καταλήγει ότι «*οι κώδικες που έχουν μια μόνο έξοδο για κάθε γράμμα εισόδου αποτελούν παραδείγματα συνάρτησης*». Βλέπουμε λοιπόν ότι 9 συνολικά

παραδείγματα (1 εισαγωγικό, 4 εφαρμογής και 4 διερεύνησης) οδηγούν επαγωγικά στο ότι κώδικες με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά αποτελούν παραδείγματα συναρτήσεων. Κάνει νύξεις για το εύρος των δυνατών αλλαγών και εκθέτει στο πλήθος των παραδειγμάτων, αλλά και στο ότι αποτελούν **παράδειγμα συνάρτησης**.

Κατά τη μετακίνηση από το πραγματικό στο μαθηματικό πλαίσιο δίνει 3 **εισαγωγικά παραδείγματα** αντιστοιχήσεων με πίνακα τιμών. Στη συνέχεια παραθέτει τα αντίστοιχα διαγράμματα τονίζοντας το κρίσιμο χαρακτηριστικό του μονοσήμαντου και στόχο την αναζήτηση ποιες αντιστοιχήσεις παριστάνουν συνάρτηση.

Πίνακας Α

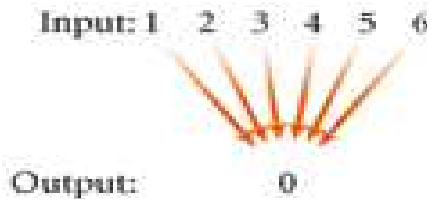
Input	Output
1	*2*
2	*4*
3	*6*

Πίνακας Β

Input	1	0	1
Output	1	2	5

Πίνακας C

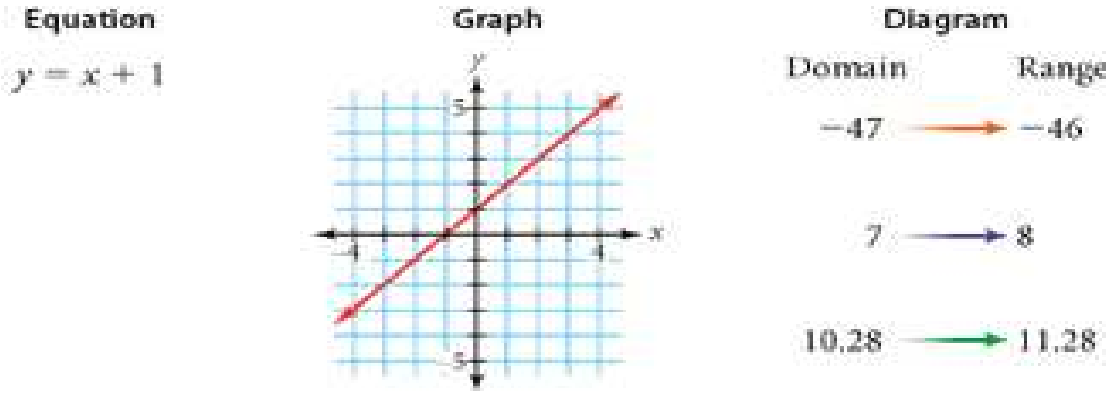
Input	1	2	3	4	5	6
Output	0	0	0	0	0	0



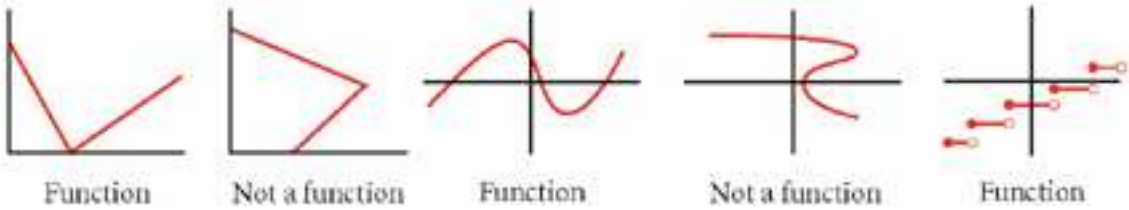
Ένα ακόμα **εισαγωγικό παράδειγμα** στις αναπαραστάσεις συνάρτησης είναι το παράδειγμα συνάρτησης που «*σε κάθε αριθμό προσθέτει ένα*» η οποία δίνεται και με τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

Πίνακας τιμών

Input x	**Output** y
7	8
-47	-46
10,28	11,28
χ	χ+1



Ως **παραδείγματα εφαρμογής** θεωρήσαμε και τα 5 γραφήματα που ακολουθούν τα οποία δίνονται μετά τη διατύπωση του «κανόνα της κατακόρυφης γραμμής», ως κριτήριο για να διακρίνουν αν ένα γράφημα αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.



Ως **παραδείγματα εφαρμογής**, στο συμβολισμό και τον υπολογισμό τιμών συνάρτησης καταγράψαμε και τα Ε25, Ε26 (βλ. παράρτημα).

Τέλος το παράδειγμα Ε23 που ζητά να αντιστοιχίσουν περιγραφές καταστάσεων του πραγματικού κόσμου, με κατάλληλη από δοσμένες γραφικές παραστάσεις προσμετρήθηκε ως **παράδειγμα προς διερεύνηση.**

4.2 Μαθηματικά Χαρακτηριστικά των Παραδειγμάτων

4.2.1 Αναπαραστάσεις – Συνδέσεις Αναπαραστάσεων

Ένα από τα θέματα που η μαθηματική κοινότητα αποδέχεται ως κεντρικό, στη διδασκαλία και τη μελέτη της συνάρτησης, και συνιστά και μια από τις δυσκολίες της, είναι και τα διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων της.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι καμιά αναπαράσταση δε μπορεί από μόνη της να περιγράψει πλήρως μια μαθηματική έννοια, όπως η συνάρτηση, και ότι καθεμιά από τις αναπαραστάσεις της έχει συγκεκριμένες δυνατότητες αλλά και περιορισμούς, αναδεικνύεται ως κεντρικό θέμα στη διδασκαλία το είδος και οι συνδέσεις των αναπαραστάσεων αυτής.

Μερικές βασικές ενέργειες κατανόησης που συνδέονται με τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης, προτείνει η Sierpinska (1992):

K(f)-9: Η διάκριση μεταξύ της συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τον κανόνα της.

K(f)-15: Η διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων.

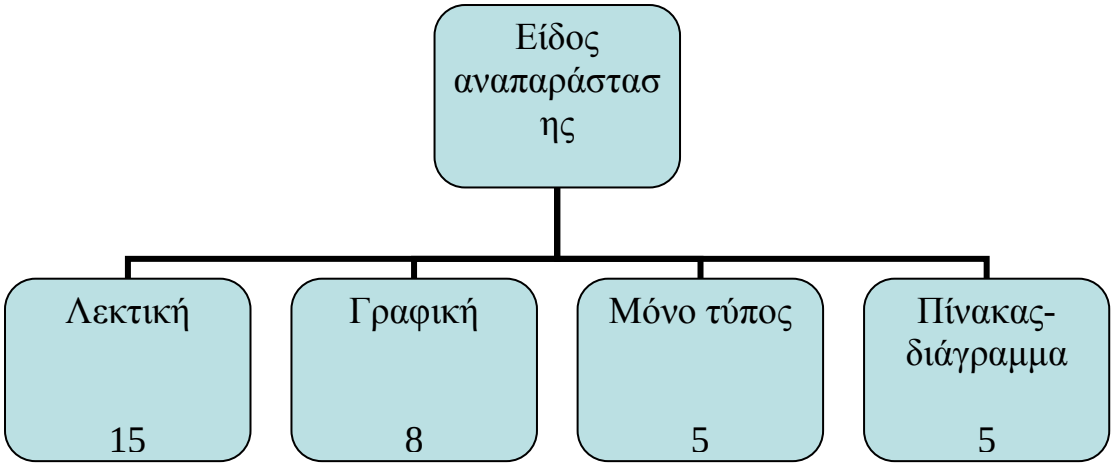
K(f)-16: η σύνθεση των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να δοθεί μια συνάρτησης, αναπαριστώντας τις συναρτήσεις και μιλώντας για αυτές.

Ενώ ένα επιστημολογικό εμπόδιο που πρέπει να υπερπηδηθεί είναι:

E(f)-11: (Μια αντίληψη για τη συνάρτηση) Μόνο οι σχέσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους αξίζει να ονομαστούν συναρτήσεις.

Ελληνικό εγχειρίδιο

Το πρόγραμμα σπουδών της Α΄Λυκείου κάνει ιδιαίτερη αναφορά στη συμβολή της κατανόησης των διαφόρων αναπαραστάσεων στην επίτευξη των στόχων του σχολικού προγράμματος, τους οποίους παραθέτουμε αναλυτικά στο θεωρητικό μέρος της εργασίας μας.



Στον προηγούμενο πίνακα καταγράψαμε την αναπαράσταση με την οποία αρχικά δόθηκε το παράδειγμα της συνάρτησης. Είναι χαρακτηριστικό ότι τα πρώτα 3 παραδείγματα του εγχειριδίου στα οποία η συνάρτηση περιγράφεται (λεκτική αναπαράσταση), συνεπικουρείται και από τον τύπο που συνδέει τις δυο μεταβλητές και είναι οικείος από τη φυσική ή τη γεωμετρία. Ακολουθούν 2 παραδείγματα συνάρτησης με λεκτική αναπαράσταση μόνο (για τα οποία όμως δε υπάρχει τύπος που να περιγράφει την αντιστοίχιση) και με αυτά οδηγείται στον ορισμό της συνάρτησης. Ο ορισμός τυγχάνει επισημοποίησης αφού γράφεται σε πλαίσιο και τονίζεται ο όρος ορισμός. Μετά τον ορισμό η έμφαση δίνεται πια στη συμβολική αναπαράσταση (τύπος). Εδώ το πρώτο παράδειγμα είναι αυτό της αντιστοίχισης των μη αρνητικών στις τετραγωνικές τους ρίζες που δίνεται αρχικά λεκτικά αλλά και με τύπο. Ακολουθεί η αντιστοίχιση των ημερών μιας εβδομάδας στην υψηλότερη θερμοκρασία τους που περιγράφεται αρχικά λεκτικά αλλά η ακριβής αντιστοίχιση παρουσιάζεται με βελοδιάγραμμα. Στη συνέχεια δίνονται 4 βελοδιαγράμματα για να εξεταστούν αν παριστάνουν συνάρτηση. Στην επόμενη παράγραφο «συντομογραφία συνάρτησης» δίνονται 5 παραδείγματα συναρτήσεων μόνο με συμβολική αναπαράσταση (τύπος) και δίνεται έμφαση στο συμβολισμό και τον υπολογισμό τιμών. Στην παράγραφο αυτή δεν επιδιώκεται καμιά σύνδεση του τύπου με άλλη αναπαράσταση. Εμφανίζεται από μόνη της ως ισχυρή αναπαράσταση.

Η γραφική παράσταση είναι από τις αναπαραστάσεις για την οποία το εγχειρίδιο επιφυλάσσει ειδική μεταχείριση. Της αφιερώνει ξεχωριστή παράγραφο αλλά δίνει μόνο δυο παραδείγματα (το ένα μη παράδειγμα – ο

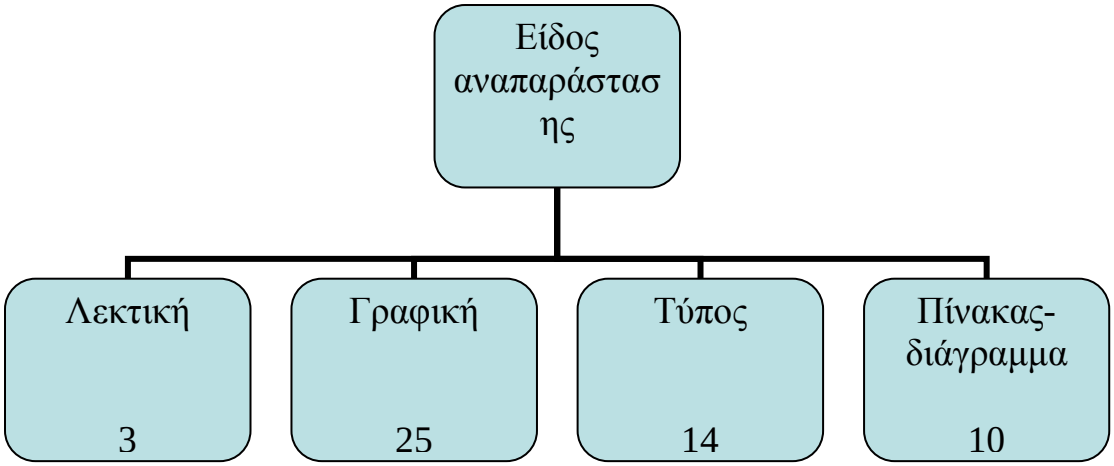
κύκλος) και μάλιστα χωρίς συνδέσεις με τις άλλες αναπαραστάσεις. Το πιο πλούσιο, ως προς τις αναπαραστάσεις του, παράδειγμα του εγχειριδίου, θα μπορούσε να θεωρηθεί το παράδειγμα της αντίθετης μιας συνάρτησης που δίνεται και λεκτικά και γραφικά και με διατεταγμένα ζεύγη.

Αντίστοιχα είναι και τα παραδείγματα του προγράμματος σπουδών, δε διαφοροποιούνται ως προς τις αναπαραστάσεις τους. Κάποια ζητούν από τους μαθητές να βρουν τον τύπο της συνάρτησης που υπολογίζει την περίμετρο ή το εμβαδό ενός τραπεζίου του οποίου οι πλευρές του δίνονται με αλγεβρικές εκφράσεις. Κάποια είναι παραδείγματα και μη παραδείγματα συναρτήσεων που δίνονται μόνο λεκτικά ή μόνο γραφικά. Και τέλος σε άλλα ζητείται να ερμηνεύσουν δοθείσα γραφική παράσταση και να απαντήσουν σε ερωτήματα.

Αμερικάνικο εγχειρίδιο

Στο Principles and Standards for School Mathematics (2000) τονίζεται ότι ένα από τα 5 **standards των διεργασιών** για την προσέγγιση της γνώσης είναι οι αναπαραστάσεις. Για τη σημασία που αποδίδει στις αναπαραστάσεις μεταφέρουμε το επόμενο χωρίο: «αν τα μαθηματικά είναι η ‘επιστήμη των κανονικοτήτων (patterns)’, οι αναπαραστάσεις είναι τα μέσα με τα οποία οι κανονικότητες αυτές καταγράφονται και αναλύονται. Καθώς οι μαθητές αναπτύσσουν πιο σύνθετη γνώση, αυξάνεται και το πλήθος των μαθηματικών αναπαραστάσεων και η γνώση για το πώς να τις χρησιμοποιούν αποτελεσματικά. Η γνώση αυτή περιλαμβάνει και επιλογή της κατάλληλης από τις αναπαραστάσεις που τους προσφέρει ενόραση σε μια κατάσταση ή επίτευξη συγκεκριμένων συμπερασμάτων».

Και εδώ όπως και στο αντίστοιχο ελληνικό εγχειρίδιο καταγράψαμε στον πίνακα την αναπαράσταση με την οποία αρχικά δόθηκε το παράδειγμα της συνάρτησης ή της αντιστοίχισης. Στη συνέχεια, και στην παράγραφο της μαθηματικής δραστηριότητας θα συζητήσουμε εκτενέστερα και τις συνδέσεις αναπαραστάσεων που επιδιώχθηκαν μέσω των παραδειγμάτων.



Όπως έχουμε συζητήσει και στο πλαίσιο των παραδειγμάτων, αυτό που είναι κυρίαρχο στο αμερικάνικο εγχειρίδιο είναι η διατήρηση του πλαισίου σε όλη τη δραστηριότητα μιας παραγράφου. Από το πρώτο παράδειγμα της συνάρτησης «μετατόπιση γράμματος κατά συγκεκριμένο αριθμό θέσεων» παρατηρούμε μέσα στα βήματα της δραστηριότητας μια εναλλαγή αναπαραστασιακών πλαισίων μεταξύ πίνακα τιμών και πλέγματος και καθένα από αυτά τα πλαίσια συνεπικουρείται και από συνδέσεις με τα υπόλοιπα πλαίσια. Εμφανίζεται ένας κύκλος των πλαισίων πίνακας τιμών – πλέγμα – λεκτική περιγραφή, που αξιοποιείται σταθερά στα πρώτα 6 παραδείγματα μέχρι να οδηγηθεί σε πιο απαιτητικές ερωτήσεις όπως αυτές της σύγκρισης δυο παραδειγμάτων από τους μαθητές, ώστε να αναδειχθούν κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας.

Στη συνέχεια εμφανίζεται μια στόχευση σε κατάλληλη κάθε φορά αναπαράσταση ώστε να προκύψουν πιο ευέλικτα τα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Έτσι για παράδειγμα, όταν ζητά από τους μαθητές να φτιάξουν ένα δικό τους κώδικα μετατόπισης γράμματος με έμφαση στο μονοσήμαντο, ζητά να το αναπαραστήσουν σε πλέγμα όπου αναδεικνύεται καλύτερα η επιθυμητή ιδιότητα.

Τα παραδείγματα και μη παραδείγματα συναρτήσεων (από αντιστοιχίσεις) τα δίνει και με πίνακα τιμών και με διάγραμμα μετά από τον άτυπο ορισμό που παρέχει για τη συνάρτηση («οι κώδικες που έχουν ακριβώς ένα γράμμα εξόδου για κάθε γράμμα εισόδου αποτελούν παραδείγματα συναρτήσεων»). Οπότε οι μαθητές αποκτούν εικόνα για την απαίτηση του

μονοσήμαντου της συνάρτησης και στην αναπαράσταση του πίνακα τιμών και στο διάγραμμα.

Καθώς μετακινείται από το πραγματικό στο μαθηματικό πλαίσιο αναφέρεται σε συναρτήσεις οι οποίες μετασχηματίζουν αριθμούς σε άλλους αριθμούς. Δίνει πρώτο παράδειγμα τη συνάρτηση που προσθέτει σε κάθε αριθμό μια μονάδα. Ξεκινά με τη λεκτική αναπαράσταση της συνάρτησης αυτής, αλλά στη συνέχεια παραθέτει και όλες τις άλλες δυνατές, ως πίνακα τιμών, ως ισότητα, ως γραφική παράσταση και ως διάγραμμα. Με το παράδειγμα αυτό εστιάζει στις αναπαραστάσεις ως διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να δοθεί μια συνάρτηση και ίσως αποτρέπει την ταύτιση μιας από αυτές με την ίδια τη συνάρτηση (K(f) 15 Sierpinska).

Στη συνέχεια διερευνά σχέσεις που δίνονται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις αν αποτελούν περιπτώσεις συναρτήσεων. Αυτό το κάνει στο αναπαραστασιακό πλαίσιο αρχικά πίνακα τιμών, μετά τύπων και τέλος γραφικών παραστάσεων. Αυτό που είναι ενδιαφέρον να καταγράψουμε είναι ότι επιτυγχάνει και συνδέσεις στα 3 βήματα μεταξύ τους (όσα και τα αναπαραστασιακά πλαίσια) διατηρώντας τις 4 σχέσεις σταθερές και αλλάζοντας μόνο το αναπαραστασιακό πλαίσιο κάθε φορά.

Έτσι οι 4 πίνακες τιμών που διερευνήθηκαν είναι:

Πίνακας 1

Input ***x***	**Output** ***y***
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

Πίνακας 2

Input ***x***	**Output** ***y***
4	-2
1	-1
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Πίνακας 3

Input ***x***	**Output** ***y***
-2	0,44
-1	0,67
0	1
1	1,4
2	2,25
3	3,37
4	5,06

Πίνακας 4

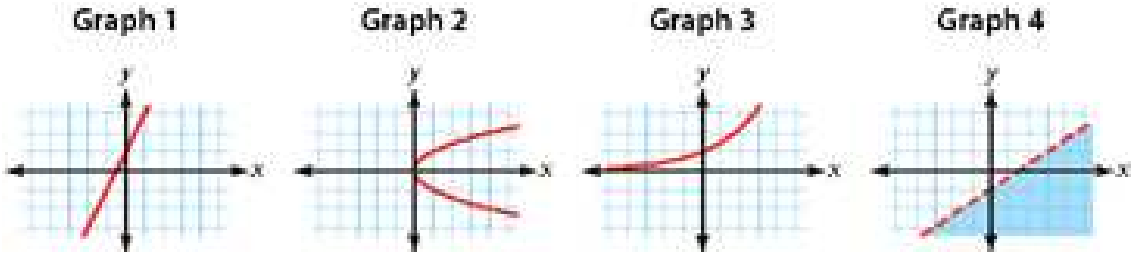
Input ***x***	**Outpt** ***y***
-2	-3
-1	-5
1	-1
1	-3
2	-10
3	-2
3	-8

Οι 4 εξισώσεις που δόθηκαν ήταν:

Εξίσωση 1 **Εξίσωση 2** **Εξίσωση 3** **Εξίσωση 4**

$y = 1 + 2x$ $\qquad$ $y^2 = x$ $\qquad$ $y = 1.5^x$ $\qquad$ $y < -1 + \frac{2}{3}x$

και οι 4 γραφικές παραστάσεις:



Μετά από την προηγούμενη διερεύνηση που οδηγεί στη διατύπωση του κανόνα της κατακόρυφης γραμμής, ως κριτήριο ελέγχου αν η δοσμένη γραφική παράσταση αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, επιδιώκεται η σύνδεση των αναπαραστάσεων: τύπος – γραφική παράσταση, όπου αξιοποιεί την προηγούμενη γνώση γραφικής παράστασης γραμμικών σχέσεων και με τη βοήθεια της τεχνολογίας (graphing calculators) καταλήγει μέσω της παραπάνω σύνδεσης των αναπαραστάσεων στο συμπέρασμα ότι: «οι μη κατακόρυφες ευθείες γραμμές αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων».

Από αυτό το σημείο και μετά δεν παρατηρούμε πλέον στόχευση στη σύνδεση των αναπαραστάσεων αλλά εστίαση σε μια μόνο από αυτές τη γραφική αναπαράσταση μέσω της οποίας διαπραγματεύεται ιδιότητες της συνάρτησης (ανεξάρτητη – εξαρτημένη μεταβλητή, μονοτονία, ακρότατα, συνέχεια, είδος της καμπύλης) με αναφορά στο πλαίσιο στο οποίο αναδεικνύονται αυτές.

Στην τελευταία παράγραφο η εστίαση είναι στο συμβολισμό και υπολογισμό τιμών στις δυο αναπαραστάσεις γραφική και με τύπο.

4.2.2 Το πλαίσιο (context) των παραδειγμάτων

Οι μαθητές μέσω του εγχειριδίου θα πρέπει να εκτεθούν σε σημαντικά μαθηματικά (NCTM 2000). Τι είναι αυτό που μπορεί να θεωρηθεί σημαντικό; Αυτό οφείλουν να ορίσουν τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Το Principles and Standards for School Mathematics έχει τη θέση ότι τα μαθηματικά θέματα μπορεί να θεωρηθούν σημαντικά για διάφορους λόγους. Όπως για παράδειγμα, για τη χρησιμότητά τους στην ανάπτυξη μαθηματικών

ιδεών, στη σύνδεση διαφορετικών περιοχών των μαθηματικών, ή στην προσέγγιση των μαθηματικών ως πειθαρχία και ως ανθρώπινο δημιούργημα. Ως εκ τούτου θα πρέπει να διαφαίνεται μέσα στο εγχειρίδιο ο σκοπός για τη μελέτη των μαθηματικών. Το πλαίσιο στο οποίο τίθεται ένα πρόβλημα μπορεί να εγείρει σημαντικές μαθηματικές ιδέες οι οποίες μάλιστα έχουν το δυναμικό να υποστηρίξουν τα μαθηματικά ως ανθρώπινη προσπάθεια και να φωτίσουν την οπτική της δύναμης και της χρησιμότητά τους.

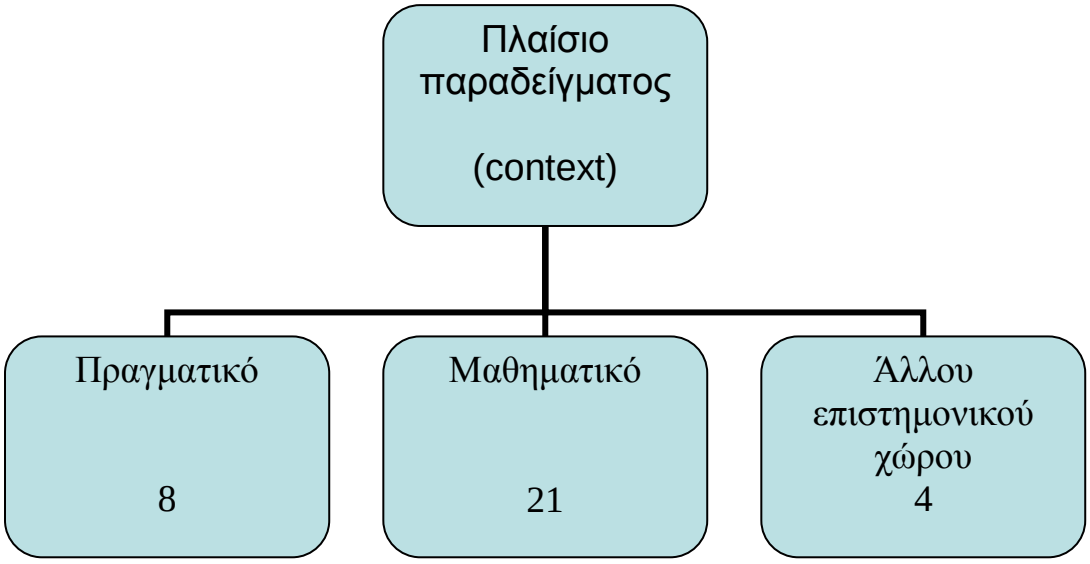
Τα εγχειρίδια παίζουν σημαντικό ρόλο στο να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να διαμορφώσουν ένα περιβάλλον μελέτης στο οποίο οι μαθητές μοντελοποιούν φαινόμενα του πραγματικού κόσμου και αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως τρόπο σκέψης. Ένα σχολικό εγχειρίδιο κατά τους Tarr et al (2006) θα πρέπει να παρέχει στους εκπαιδευτικούς σε κάθε μάθημα, προβλήματα, δραστηριότητες και διερευνήσεις τέτοιες που να ασκούν τους μαθητές σε διερευνητική μάθηση, να ενθαρρύνουν συζήτηση στην τάξη και να προάγουν το μαθηματικό διάλογο. Μια τέτοια διδακτική εστίαση ευθυγραμμίζεται και με τις αρχές που θέτουν τα Principles and Standards for School Mathematics ότι η κατανόηση των μαθηματικών χτίζεται από τους μαθητές στη διάρκεια της σχολικής τους ζωής, αν οι ίδιοι εμπλέκονται σε έργα και εμπειρίες που είναι σχεδιασμένα ώστε να βαθαίνουν και να συνδέουν τις γνώσεις τους.

Επιπλέον η εστίαση του εγχειριδίου ως προς την αλληλεπίδραση στην τάξη μπορεί «να επιτρέπει στους μαθητές να διατυπώνουν τις σκέψεις τους, να κάνουν εικασίες, να μάθουν να αξιολογούν τόσο τη δική τους όσο και τη σκέψη των άλλων, και να αναπτύξουν ικανότητα μαθηματικού συλλογισμού» (NCTM 2000, σελ. 21). Οι αρχές αυτές υποστηρίζονται από τα παραδείγματα του εγχειριδίου «Discovering Algebra» που μελετήσαμε.

Μια από τις αρχές του προγράμματος σπουδών, που διευκολύνει στην προσέγγιση των στόχων της διδασκαλίας μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου, του δικού μας σχολείου είναι και η «*Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική)».(Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών για την Α΄ Λυκείου, 2011)*

Πολλοί από τους στόχους αυτούς δεν υποστηρίζονται από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο. Άλλωστε το υλικό για τη διδασκαλία των συναρτήσεων που χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο, γράφτηκε πολλά χρόνια πριν, και πολύ πριν σχεδιαστεί το πρόγραμμα σπουδών. Πράγμα που σημαίνει ότι το εγχειρίδιο δεν υποστηρίζει τους Έλληνες εκπαιδευτικούς στην υλοποίηση στόχων του αναλυτικού προγράμματος.

Ελληνικό εγχειρίδιο



Στο σχολικό μας εγχειρίδιο τα μόνα παραδείγματα στην έννοια της συνάρτησης που έχουν αναφορά σε πλαίσιο οικείο στους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή (πραγματικό πλαίσιο) είναι οι αντιστοιχίσεις :

- *Ώρες της μέρας και αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.*
- *Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. δολαρίου).*
- *Κάθε μέρα μιας ορισμένης εβδομάδας με την υψηλότερη θερμοκρασία της (δίνεται και με αναπαράσταση βελοδιαγράμματος).*

Σε αυτά προστίθενται και 5 παραδείγματα του προγράμματος σπουδών. Τα ακόλουθα:

- *Μήνας με μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία (Δ22, δίνεται με πίνακα τιμών)*

Και τα 4 υποερωτήματα της δραστηριότητας Δ.23

Ως παραδείγματα που φέρουν πλαίσιο άλλου επιστημονικού χώρου καταγράψαμε τα δυο πρώτα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου, τα Π1, Π2 με τα οποία εισάγει στο ότι σε καθημερινά φαινόμενα υπάρχουν μεγέθη, τα

οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει και την τιμή του άλλου. Και για να εκφράσει αυτή τη συμμεταβολή χρησιμοποιεί το context:

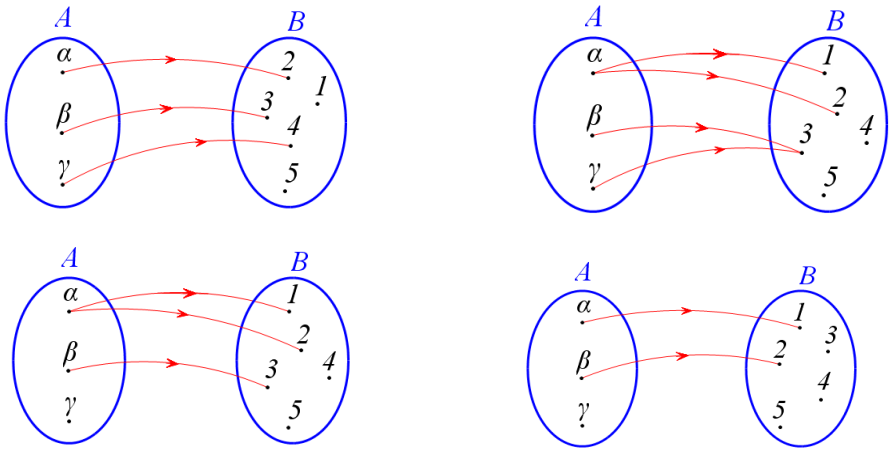
- *Του τόκου Τ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%.*
- *Το διάστημα S σε χιλιόμετρα που διανύει ένας ποδηλάτης σε χρονικό διάστημα 2 h με μέση ταχύτητα υ Km/h.*

Το τελευταίο παράδειγμα του εγχειριδίου χρησιμοποιεί ένα πλαίσιο από τη φυσική, για να εξηγήσει ότι άλλοι επιστημονικοί χώροι συμβολίζουν τις συναρτήσεις τους, χωρίς να αναγράφουν στο συμβολισμό της συνάρτησης, την ανεξάρτητη μεταβλητή, και παραδειγματοποιεί με την έκφραση $s= \frac{1}{2} gt^2$ αντί της έκφρασης $s(t) = \frac{1}{2} gt^2$.

Στο πρόγραμμα σπουδών υπάρχει παράδειγμα που δίνει τη γραφική παράσταση της απόστασης ενός κινητού από δοθέν σημείο Α σε σχέση με το χρόνο και ζητά, ερμηνεύοντας τη γραφική παράσταση, οι μαθητές να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως: Ποιά είναι η διάρκεια της κίνησης; Πόσες φορές έκανε στάση το κινητό και πόση ώρα; κ.τ.λ.

Όλα τα υπόλοιπα παραδείγματα και του εγχειριδίου και του προγράμματος σπουδών αναπτύσσονται σε καθαρά μαθηματικό πλαίσιο.

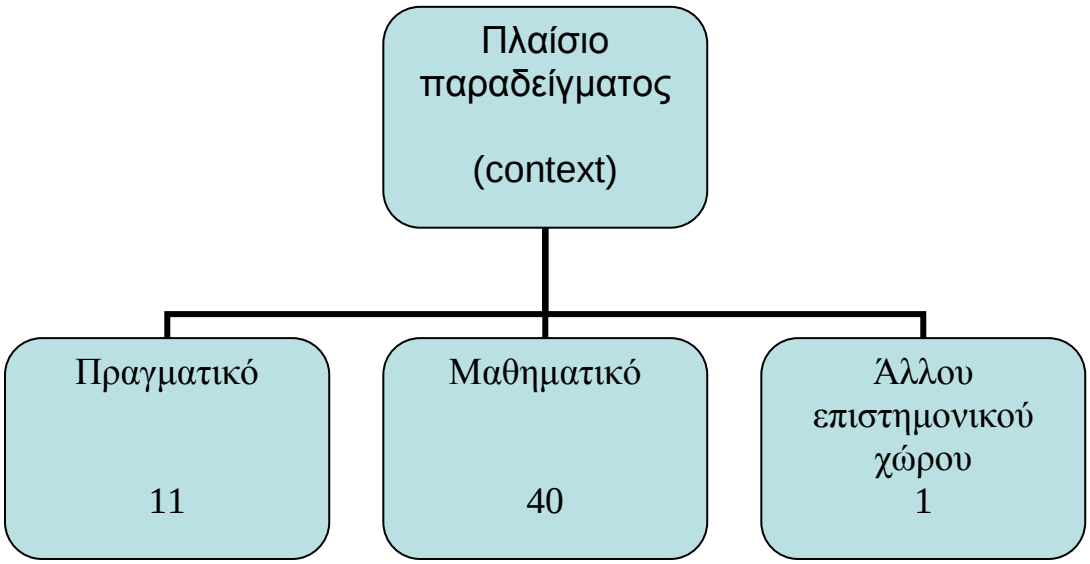
Ένα τέτοιο παράδειγμα με 4 υπερωτήματα σε αναπαράσταση βελοδιαγράμματος για να εξετάσουν αν είναι συνάρτηση, από το εγχειρίδιο είναι το ακόλουθο:



Και ένα λυμένο παράδειγμα στο οποίο ζητείται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}.$$

Αμερικάνικο εγχειρίδιο



Τα πρώτα 9 παραδείγματα που οδηγούν στον ορισμό της συνάρτησης χρησιμοποιούν σταθερά το πλαίσιο της κρυπτογραφίας. Ολόκληρη η πρώτη παράγραφος στήνεται στη βάση της διερευνητικής δραστηριότητας κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης. Μετά τον ορισμό δίνει το πρώτο παράδειγμα σε μαθηματικό πλαίσιο με το οποίο αντιστοιχίζει (μέσω πίνακα τιμών) τα γράμματα της αλφαβήτου σε αριθμούς. Συνεχίζει με λυμένο παράδειγμα όπου τρεις πίνακες τιμών που παριστάνουν συνάρτηση μελετώνται ως προς το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους. Η επόμενη παράγραφος «συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις» χρησιμοποιεί παραδείγματα αποκλειστικά σε μαθηματικό πλαίσιο.

Στην τρίτη παράγραφο «γραφικές παραστάσεις καταστάσεων του πραγματικού κόσμου» ξεκινά με το λυμένο παράδειγμα, γραφικής παράστασης σε σχέση με το χρόνο, της στάθμης του νερού σε τρύπια πισίνα, όπου έμφαση δίνεται στη χρήση κατάλληλου λεξιλογίου για την περιγραφή και την ερμηνεία αυτών που φαίνονται στο γράφημα.

Με παραδείγματα σε μαθηματικό πλαίσιο παρουσιάζει τις ιδιότητες αύξουσα, φθίνουσα συνάρτηση και στη συνέχεια ζητά να τις ενσωματώσουν στο λεξιλόγιό τους μαζί με άλλες για να αντιστοιχίσουν και να περιγράψουν δοσμένα γραφήματα σε κάθε κατάσταση (πραγματικό πλαίσιο αναφοράς) από αυτές που περιγράφονται. Σε αυτή την παράγραφο έχουμε εναλλαγή στο

πλαίσιο αναφοράς. Ξεκινά με λυμένο σε πραγματικό πλαίσιο (πισίνα), όπου συζητά την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Συνεχίζει με 3 παραδείγματα αυξουσών και 3 παραδείγματα φθινουσών συναρτήσεων σε μαθηματικό πλαίσιο (γραφικές παραστάσεις). Προχωρά με το ταίριασμα κάθε κατάστασης που περιγράφεται με το κατάλληλο γράφημα (πραγματικό πλαίσιο) και κλείνει με λυμένο όπου περιγράφεται ένα γράφημα συνάρτησης με χρήση λεξιλογίου που αφορά στις ιδιότητες μιας συνάρτησης (μαθηματικό πλαίσιο).

Η τελευταία παράγραφος αφορά στο συμβολισμό συνάρτησης και υπολογισμό τιμών της, και τα παραδείγματα είναι σε μαθηματικό πλαίσιο εκτός από το λυμένο παράδειγμα συνάρτησης $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ που μετατρέπει θερμοκρασίες από κλίμακα Celsius, σε κλίμακα Fahrenheit. Αυτό είναι και το μόνο παράδειγμα από άλλο επιστημονικό χώρο αν και η έμφαση δίνεται στον υπολογισμό τιμών αφού τα ερωτήματα έχουν τη μορφή:

Βρες την τιμή

a. *f (15)* ***b.*** *f (–10)*
c. *x when f (x) = 41* ***d.*** *x when f (x) = −4*

Το εγχειρίδιο δίνει έμφαση στη διαδικασία μοντελοποίησης μιας κατάστασης παρά δανείζεται έτοιμα μοντέλα από άλλους επιστημονικούς χώρους για να παραδειγματοποιήσει τις έννοιες του.

Παρατηρήσαμε μια αξιοσημείωτη διαφορά των δυο εγχειριδίων ως προς το πλαίσιο των παραδειγμάτων. Το ελληνικό εγχειρίδιο παραθέτει παραδείγματα τα οποία δε συνδέονται μεταξύ τους. Μάλιστα σε μια προσπάθεια για ευρύτερη κατανόηση συμμεταβολής μεγεθών δανείζεται παραδείγματα σχέσεων από τη Φυσική την Οικονομία και τη Γεωμετρία. Αντίθετα το αμερικάνικο εγχειρίδιο εφευρίσκει μια κατάσταση στο πλαίσιο της οποίας οι μαθητές θα χτίσουν την έννοια της συνάρτησης ως κώδικα μετατόπισης του γράμματος Α σε άλλο, του Β στο επόμενό του, κ.τ.λ. Μέσα στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές θα κάνουν παραδείγματα και μη παραδείγματα της έννοιας της συνάρτησης, συνολικά 9 τέτοια, και μετά θα μετακινηθούν σε μαθηματικό πλαίσιο ώστε να μελετήσουν αναπαραστάσεις και ιδιότητες της συνάρτησης. Παρατηρήσαμε το pattern τα πρώτα παραδείγματα στην έννοια και στις ιδιότητές της να είναι σε πραγματικό πλαίσιο και στη συνέχεια να

συστηματοποιείται η μελέτη σε μαθηματικό πλαίσιο. Εξαίρεση είχαμε στη μονοτονία όπου πρώτα δόθηκαν γραφήματα αυξουσών και φθινουσών συναρτήσεων και μετά εφαρμόστηκε το λεξιλόγιο που αποκτήθηκε στην περιγραφή γραφημάτων.

4.2.3 Ιδιότητες της Έννοιας (τι κουβαλούν τα παραδείγματα)

Θα διερευνήσουμε στη συνέχεια χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων της συνάρτησης που σχετίζονται με τη γενική έννοια αυτής. Τη συνάρτηση ως αντικείμενο.

Σύμφωνα με τη Sierpinska μια πρώτη συνθήκη που μπορεί να οδηγήσει στο να κατανοήσουμε τις συναρτήσεις, είναι να παρατηρήσουμε αλλαγές που συμβαίνουν γύρω μας, και σχέσεις μεταξύ αυτών των αλλαγών που αξίζει να μελετηθούν. Η συνειδητοποίηση της ύπαρξης σχέσεων μεταξύ των αλλαγών, και οι κανονικότητες που μπορεί να εμφανίζουν, μας παρέχουν ένα εργαλείο για να ανταπεξέλθουμε στις αλλαγές αυτές και καταλαγιάζουν τις αγωνίες που μας προκαλούν.

Έτσι λοιπόν η έννοια της συνάρτησης μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της προσπάθειας του ανθρώπου να συμφιλιωθεί με τις αλλαγές που παρατηρεί στον κόσμο γύρω του.

Η παραπάνω θεώρηση για τη συνάρτηση σύμφωνα με τη Sierpinska απαιτεί τη συνειδητοποίηση της ύπαρξης δυο κόσμων: *του κόσμου των αντικειμένων που αλλάζουν* και *του κόσμου των σχέσεων μεταξύ των αλλαγών*. Οι αντίστοιχες ενέργειες κατανόησης που προτείνει :

Κ(f)-1: προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί.

Κ(f)-2: προσδιορισμός κανονικοτήτων στις σχέσεις μεταξύ των αλλαγών ως ένα μέσο για να ασχοληθούμε με τις αλλαγές.

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω πρέπει όμως να υπερπηδηθούν τα εξής επιστημολογικά εμπόδια Ε(f):

Ε(f)-1: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών): Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με πρακτικά προβλήματα.

Ε(f)-2: (Η φιλοσοφία των μαθηματικών) Υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πινάκων που παρουσιάζουν αριθμητικές σχέσεις δεν είναι αντικείμενο άξιο μελέτης στα μαθηματικά.

Άλλη μια πράξη κατανόησης είναι :

Κ(f)-3: Ο προσδιορισμός αυτών που αλλάζουν κατά τη μελέτη των αλλαγών.

Με αντίστοιχο επιστημολογικό εμπόδιο:

Ε (f)-3: (Ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Η θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα· εστιάζοντας στο τρόπο που τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας τις αλλαγές αυτές καθαυτές.

Εμείς αναζητήσαμε την εστίαση των παραδειγμάτων των δυο εγχειριδίων *στον κόσμο των αντικειμένων που αλλάζουν* αλλά και *τον κόσμο των σχέσεων μεταξύ των αλλαγών,* διερευνώντας στα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται από τα εγχειρίδια, το πεδίο ορισμού, τη μορφή και τις ιδιότητες αυτών.

Τα αποτελέσματά μας ακολουθούν.

<u>Πεδίο Ορισμού.</u>

Ελληνικό εγχειρίδιο

Κατά τη μελέτη των παραδειγμάτων του εγχειριδίου της Α΄ Λυκείου διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές εισάγονται από την αρχή σε παραδείγματα στα οποία εμφανίζονται δυο μεγέθη, τα οποία συμμεταβάλλονται, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει και την τιμή του άλλου. Δεν επιδιώκεται εστίαση, στον «κόσμο των αντικειμένων που αλλάζουν». Οι μαθητές δεν εμπλέκονται στο να διερευνήσουν τι και πώς μεταβάλλεται αλλά τους παρουσιάζεται έτοιμη η σχέση που συνδέει δυο μεταβλητές ποσότητες. **Ο τύπος που συνδέει τα δυο μεγέθη που μεταβάλλονται ταυτίζεται με τη ίδια τη συνάρτηση της οποίας αποτελεί μοντέλο.**

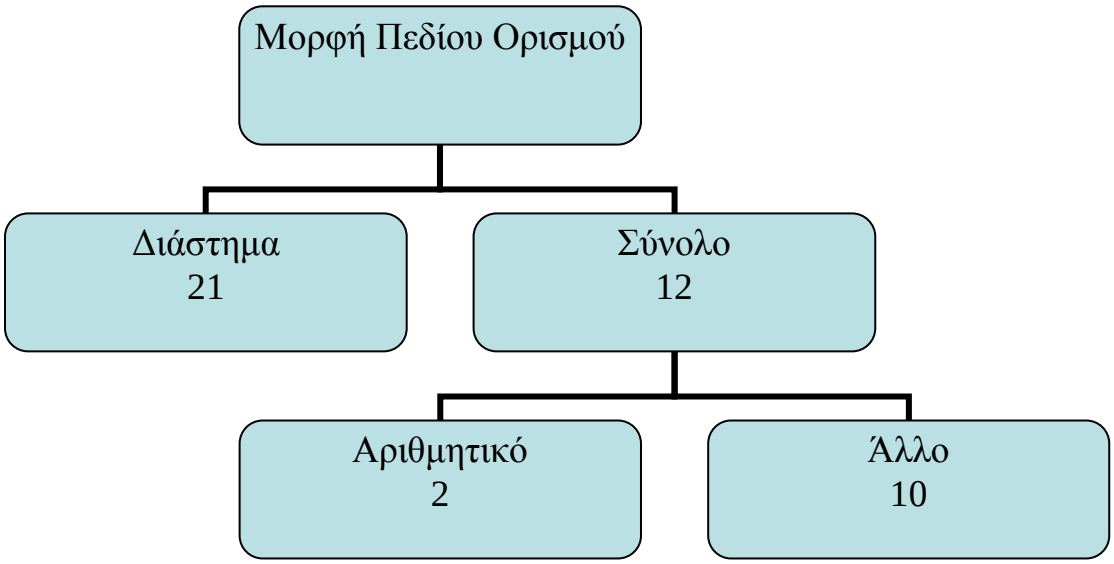
Στα 3 πρώτα παραδείγματα του εγχειριδίου, (βλ. Παράρτημα Π1, Π2, Π3) η διατύπωση είναι τέτοια που δεν αφήνει κανένα περιθώριο στους μαθητές να παρατηρήσουν ποιες είναι οι ποσότητες που αλλάζουν, γιατί έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τις αλλαγές (ποιο πρόβλημα μας λύνουν) και γιατί για τις αλλαγές αυτές υπάρχουν κανονικότητες που μπορούν να περιγραφούν με ένα κανόνα. Παρατίθεται έτοιμος ο κανόνας. Η συνάρτηση ως

εξιδανικευμένο μοντέλο σχέσης που δε συνδέεται με την εμπειρία. Η μορφή των παραδειγμάτων παραπέμπει στο επιστημολογικό εμπόδιο Ε (f)-3 της Sierpinska :

Ε (f)-3: (Ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Η θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα· εστιάζοντας στο τρόπο που τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας τις αλλαγές αυτές καθαυτές.

Το σχολικό εγχειρίδιο εμπλέκει τους μαθητές σε διαπραγμάτευση του πεδίου ορισμού, σε παραδείγματα όπου δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, για παράδειγμα, η f(x) = $\sqrt{1-4x}$ και θεωρεί ως πεδίο ορισμού αυτής το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο το f(x) έχει νόημα. Αλλά αυτό εμφανίζεται σε ένα αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο η μεταβλητή χ και η συνάρτηση f(x) δεν έχουν κάποια αναφορά. Το παράδειγμα είναι διαδικαστικής φύσης.

Συνολικά από τη μελέτη μας για το Πεδίου Ορισμού καταγράψαμε:

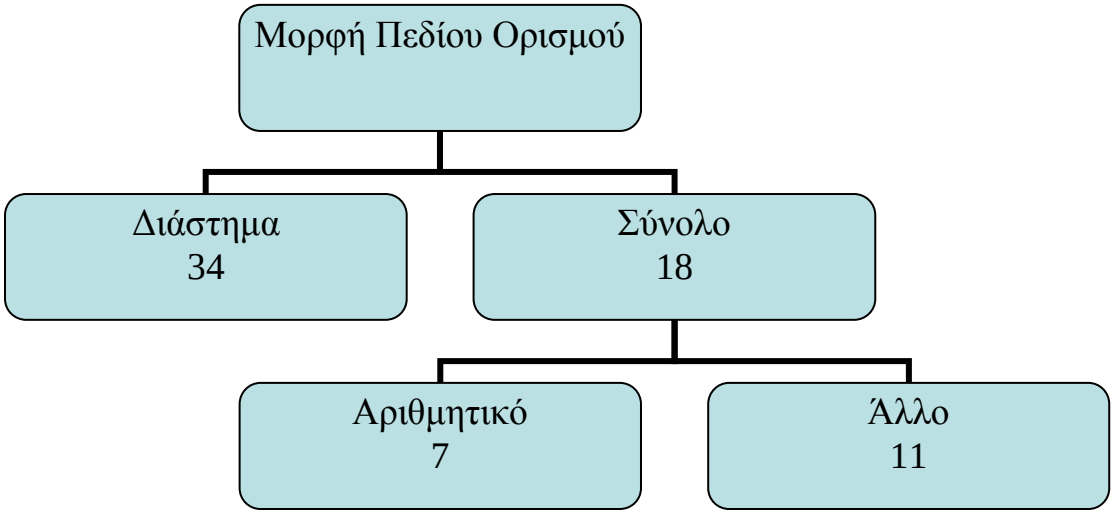


Τα 10 παραδείγματα των οποίων το ΠΟ καταχωρήθηκε ως «Άλλο σύνολο» είναι τα προς εξέταση βελοδιαγράμματα για να διερευνηθεί αν αποτελούν αναπαράσταση συνάρτησης και οι αντιστοιχίσεις του αναλυτικού προγράμματος και πάλι για να διερευνηθεί αν αποτελούν συναρτήσεις. Τέσσερις τέτοιες αντιστοιχίσεις προκύπτουν από τη δραστηριότητα Δ23.

Τα δυο παραδείγματα των οποίων το ΠΟ είναι αριθμητικό σύνολο είναι τα παραδείγματα συναρτήσεων για τα οποία δε γνωρίζουμε τύπο που να τα περιγράφει:

- *Οι ώρες της μέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.*
- *Οι ημέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος.*

Αμερικάνικο εγχειρίδιο



Τα 11 παραδείγματα των οποίων το ΠΟ έχει καταγραφεί στον πίνακα στην κατηγορία «Άλλο σύνολο» είναι όλα παραδείγματα της πρώτης ενότητας όπου η συνάρτηση παρουσιάζεται στο πλαίσιο της κωδικοποίησης. Γίνεται συζήτηση στην τάξη για αυτό που αλλάζει μέσω της κωδικοποίησης και οι μαθητές εμπλέκονται σε μια διαδικασία να υιοθετήσουν το περιβάλλον των αλλαγών ως ένα πρόβλημα το οποίο αξίζει τον κόπο να εμπλακούν και να λύσουν.

Τα 7 παραδείγματα των οποίων το ΠΟ είναι αριθμητικό σύνολο είναι οι 7 πίνακες τιμών που δίνονται για διερεύνηση αν αποτελούν πίνακες τιμών συναρτήσεων.

Όλα τα υπόλοιπα παραδείγματα έχουν πεδίο ορισμού διάστημα. Το πρώτο από τα παραδείγματα του οποίου το ΠΟ είναι διάστημα, είναι αυτό με το οποίο το εγχειρίδιο μεταβαίνει από το πραγματικό στο μαθηματικό πλαίσιο. Η συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε αριθμό τον κατά μια μονάδα μεγαλύτερό του. Ακολουθούν τα παραδείγματα και μη παραδείγματα που δίνονται με αναπαράσταση τύπου ή γραφική για να διερευνηθεί αν αποτελούν συναρτήσεις ή να συζητηθεί η μονοτονία τους. Τα παραδείγματα που

εστιάζουν σε αυτό που αλλάζει κάθε φορά, είναι κυρίως παραδείγματα γραφικών παραστάσεων καταστάσεων του πραγματικού κόσμου. Ένα τέτοιο είναι και το παράδειγμα της στάθμης του νερού στην τρύπια πισίνα. Στο παράδειγμα αυτό δίνεται η γραφική παράσταση της στάθμης του νερού σε σχέση με το χρόνο και ζητείται από τους μαθητές να προσδιορίσουν ποιες ποσότητες μεταβάλλονται και πώς σχετίζονται μεταξύ τους, δίνοντας και πιθανές ερμηνείες του πραγματικού κόσμου για αυτά που παρατηρούν.

Αντίστοιχη εστίαση έχουν και τα παραδείγματα στα οποία ζητείται να αντιστοιχίσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου (Δ23) με το κατάλληλο από τα γραφήματα που τις περιγράφει. Ζητείται ρητά : «In Situation A decide which quantities are varying. Also decide which variable is independent and which is dependent».

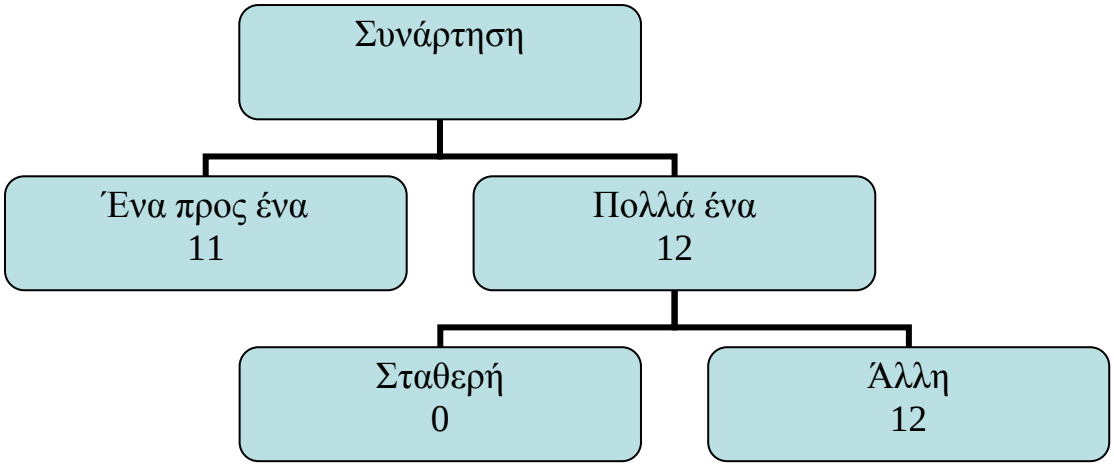
Η κρίσιμη ιδιότητα «πολλά – ένα».

Την ιδιότητα «πολλά - ένα» εξετάζουμε ξεχωριστά από άλλες ιδιότητες της συνάρτησης που θα δούμε στη συνέχεια. Η προνομιακή αυτή μεταχείριση της ιδιότητας σχετίζεται με την κρισιμότητα της κατανόησης της αμφιμονοσήμαντης («ένα προς ένα») συνάρτησης, ως **μια** περίπτωση συνάρτησης. Το ενδεχόμενο της ταύτισης της έννοιας της συνάρτησης με τις αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις συνδέεται και με τα πρώτα παραδείγματα στα οποία εκτίθεται ο μαθητής, τα οποία είναι παραδείγματα από την εμπειρία του και συχνά διατηρούν την «ένα προς ένα» ιδιότητα. Ταυτόχρονα η κρίσιμη συνθήκη που διακρίνει τις συναρτήσεις από τις αυθαίρετες σχέσεις είναι η συνθήκη του μονοσήμαντου. Με την έκθεση των μαθητών σε παραδείγματα συναρτήσεων που έχουν την ιδιότητα «πολλά – ένα» -παράλληλα με τα «ένα προς ένα» παραδείγματα- διακρίνεται η απαίτηση του μονότιμου του ορισμού της συνάρτησης από τις «ένα - πολλά σχέσεις» που δεν αποτελούν συναρτήσεις. Θα ήταν ενδιαφέρουσα μια επιστημολογική προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης ως απόβλεψη μέτρησης, που καθιστά σαφή την ανάγκη του μονότιμου για μια συνάρτηση και ταυτόχρονα θέτει μια πραγματολογική αναφορά στην απαίτηση του ορισμού.

Ελληνικό εγχειρίδιο

Από τα 33 παραδείγματα που μελετήσαμε συνολικά τα 10 ήταν μη παραδείγματα οπότε δεν περιλαμβάνονται στην ταξινόμηση. Τα πρώτα παραδείγματα Π1, Π2, Π3 που δίνεται η λεκτική τους περιγραφή και ο τύπος τους, είναι 1-1. Τα παραδείγματα για τα οποία δεν υπάρχει τύπος που να τα περιγράφει, όπως η αντιστοίχιση των ημερών στη μέγιστη θερμοκρασία τους έχουν την ιδιότητα πολλά ένα (λόγω της φύσης τους). Δεν περιλαμβάνεται μεταξύ των παραδειγμάτων κάποιο που να αντιστοιχεί σε σταθερή συνάρτηση. Σε μια από τις δραστηριότητες του προγράμματος σπουδών, τη Δ26, δίνεται η γραφική παράσταση της απόστασης ενός σώματος από σημείο Α σε σχέση με το χρόνο, σε κάποια χρονικά διαστήματα το σώμα παραμένει ακίνητο (σε διαστήματα σταθερή).

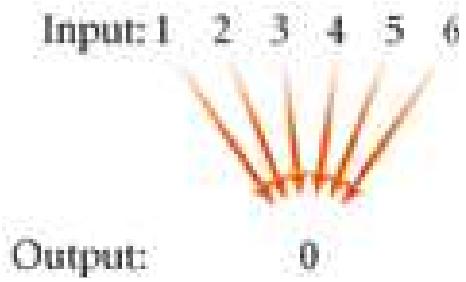
Αναλυτικά είχαμε :



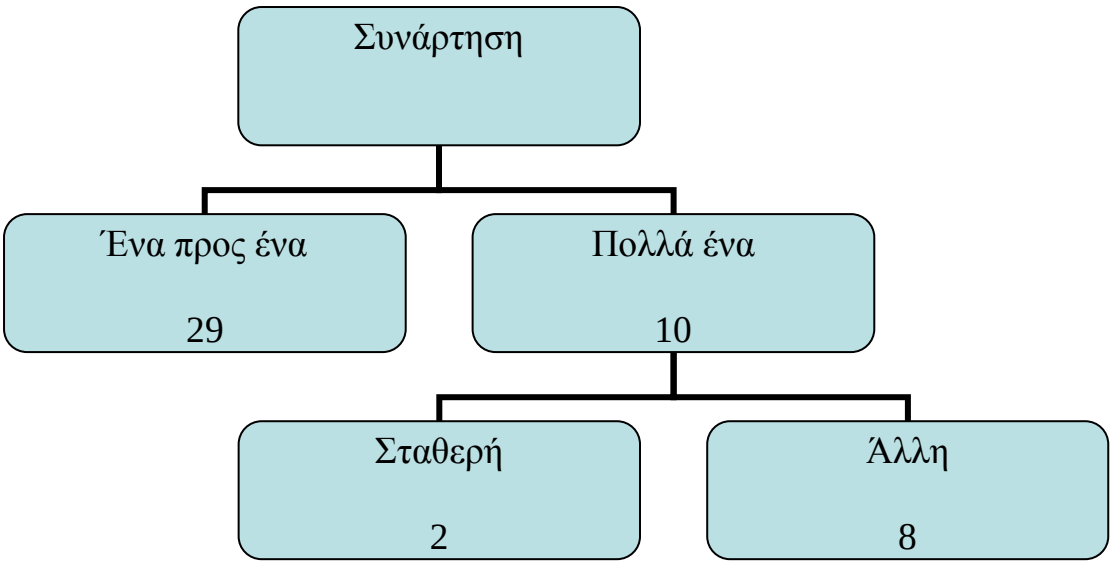
Αμερικάνικο εγχειρίδιο

Από τα 52 παραδείγματα του εγχειριδίου τα 12 ήταν μη παραδείγματα οπότε δεν ταξινομήθηκαν στον παρακάτω πίνακα. Από τα υπόλοιπα 40 δεν ταξινομήσαμε επίσης το παράδειγμα κώδικα που θα φτιάξουν οι μαθητές στο οποίο απαιτείται το μονοσήμαντο αλλά δεν μπορούμε να ξέρουμε πώς ακριβώς θα το κατασκευάσουν οι μαθητές. Τα παραδείγματα του εγχειριδίου στο πλαίσιο της κωδικοποίησης, αντιστοιχούν σε κάθε γράμμα ένα ακριβώς γράμμα και επειδή συχνά ζητείται και η αποκωδικοποίηση κωδικοποιημένου μηνύματος, έχουν και την ιδιότητα κάθε γράμμα να αποτελεί εικόνα ενός μόνο

γράμματος (1-1). Άρα η αλλαγή γίνεται ώστε κάθε γράμμα να κωδικοποιείται σε ένα άλλο και ανάποδα κάθε κωδικοποιημένο να μπορεί να αποκωδικοποιηθεί σε αυτό από το οποίο προέκυψε. Αυτό αποτελεί αντικείμενο συζήτησης στην τάξη και οι μαθητές εμπλέκονται στον κόσμο των αλλαγών των γραμμάτων. Τα παραδείγματα των καταστάσεων του πραγματικού κόσμου (Ε23) εμφανίζουν την ιδιότητα πολλά ένα, και ζητείται από τους μαθητές να παρατηρήσουν το πώς μεταβάλλονται οι ποσότητες που εμπλέκονται στις μεταβολές σε κάθε περίπτωση. Κατά τη διερεύνηση, αν μορφές γραμμικών εξισώσεων ή ανισώσεων αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (Ε19), ένα από τα παραδείγματα το (f), ήταν και η σταθερή συνάρτηση με εξίσωση, $y = 7$. Το παράδειγμα αυτό είναι σημαντικό γιατί εκθέτει σε ειδική μορφή μιας πολλά ένα συνάρτησης. Επίσης ένας από τους πίνακες τιμών που ζητήθηκε να διερευνήσουν αν αποτελεί πίνακα τιμών συνάρτησης αναφερόταν σε παράδειγμα σταθερής συνάρτησης. Σε αναπαράσταση διαγράμματος είναι αυτό που ακολουθεί :



Συνολικά



Μορφή και ιδιότητες των παραδειγμάτων συνάρτησης.

Όπως καταγράφει η Sierpinska (1992) «ως συνήθως τα πρώτα παραδείγματα συναρτήσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι συναρτήσεις παντού συνεχείς, μη παραγωγίσιμες το πολύ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, που η γραφική τους παράσταση είναι τμήμα καμπύλης και απλού τύπου. Αυτές οι συναρτήσεις, συνιστούν τα πρωτοτυπικά παραδείγματα συναρτήσεων, στο μυαλό των μαθητών». Από αυτό το σημείο μέχρι να φτάσει ο μαθητής να αποδέχεται ως συναρτήσεις και άλλες «παράξενες» οι οποίες όμως είναι συνέπειες του γενικού ορισμού συνάρτησης που υιοθετούμε, υπάρχει πολύς δρόμος. Το αν πρέπει να εισάγονται ή όχι οι μαθητές Λυκείου σε τέτοιες συναρτήσεις είναι κάτι που αξίζει συζήτησης και θα πρέπει να διερευνηθεί και ο σκοπός της εισαγωγής τους.

Η πεποίθηση ότι όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες σχεδόν παντού, συχνά αναφέρεται ως μια σοβαρή παρανόηση ή ακόμα και ως ένα επιστημολογικό εμπόδιο. Αλλά κατά τη Sierpinska δε συνιστά επιστημολογικό εμπόδιο καθώς ίσως είναι το αποτέλεσμα του ότι οι μαθητές εκτίθενται σε παραδείγματα γραμμικών, τετραγωνικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων ως εισαγωγικά παραδείγματα συναρτήσεων, άρα συνδέεται με τα πρωτοτυπικά παραδείγματα, και μπορεί να διαφέρει από τάξη σε τάξη. Άλλωστε οποιαδήποτε επιλογή από ιδιότητες που αποδίδονται στις συναρτήσεις ενδέχεται να μην είναι πλήρης.

Έχοντας αυτά κατά νου, θα αναζητήσουμε τα χαρακτηριστικά των εισαγωγικών παραδειγμάτων στις συναρτήσεις στα δυο σχολικά εγχειρίδια.

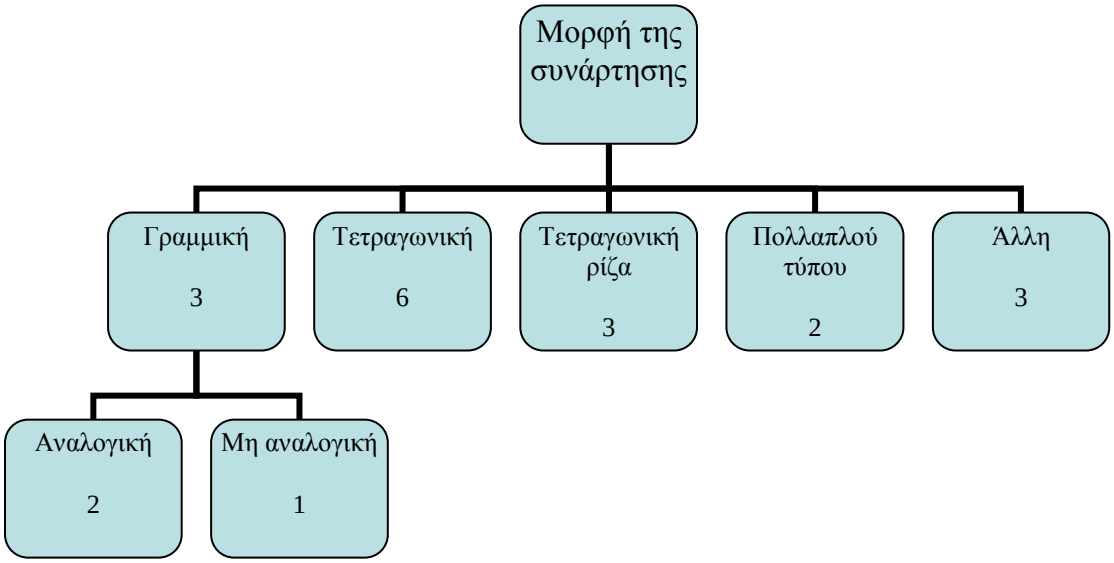
Ελληνικό εγχειρίδιο

Από τα 23 παραδείγματα συναρτήσεων τα 6 αποτελούσαν παραδείγματα αντιστοιχίσεων. Κάποια ήταν λεκτικές αντιστοιχίσεις όπως η αντιστοίχιση :

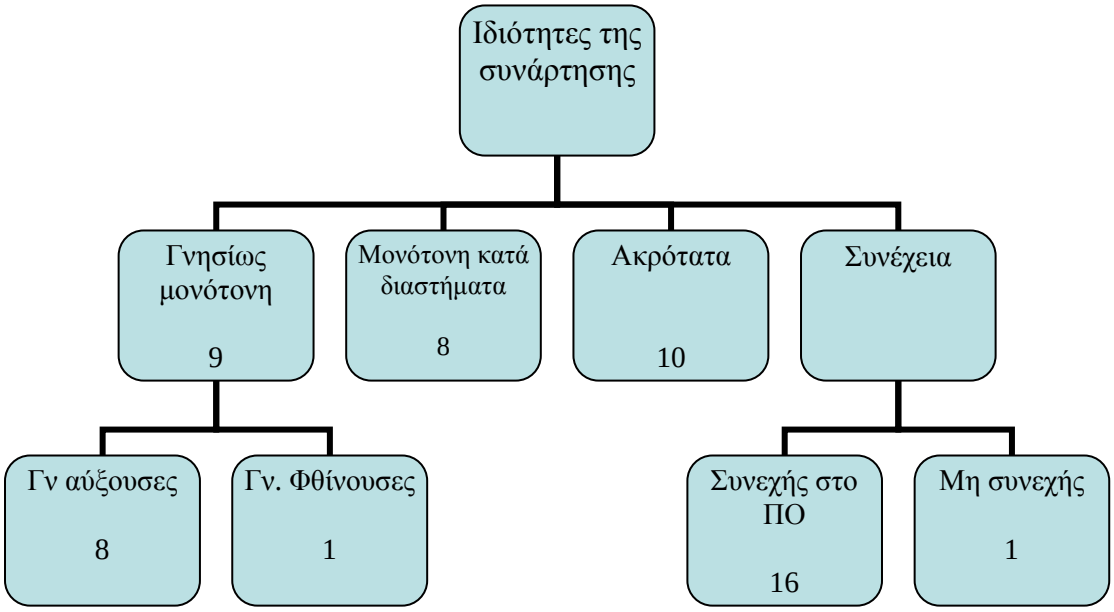
Άτομο $\rightarrow$ Ημέρα γενεθλίων.

Κάποια άλλα ήταν αντιστοιχίσεις με Venn διαγράμματα (βελοδιαγράμματα).

Για τα υπόλοιπα 17 παραδείγματα τα οποία δόθηκαν με λεκτική ή γραφική αναπαράσταση ή με τύπο είχαμε την κατανομή:

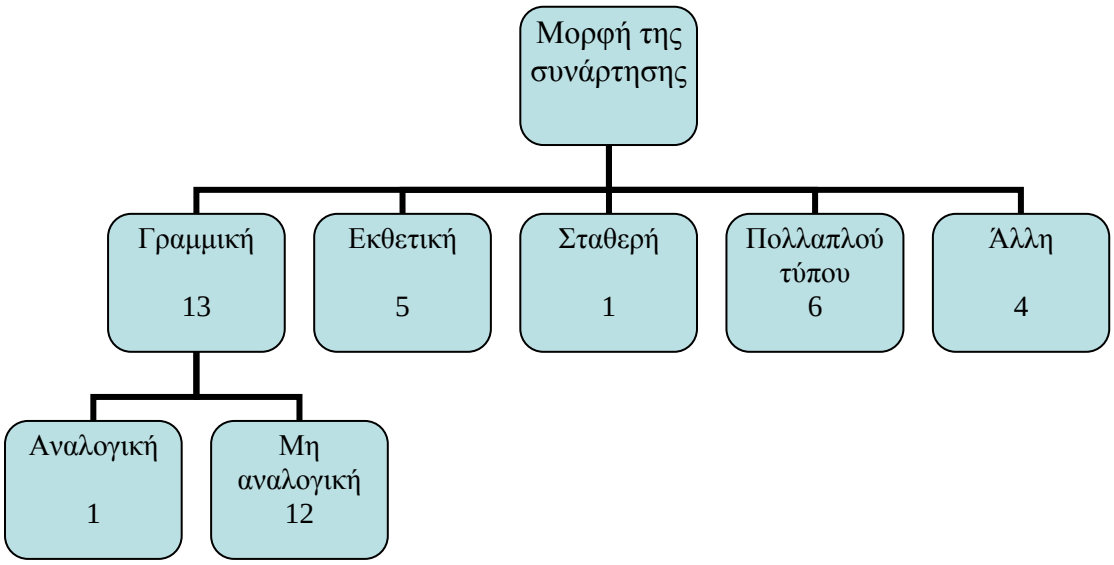


Και ως προς τις ιδιότητές της, καταγράψαμε ιδιότητες που συνδέονται με τη μονοτονία τα ακρότατα και τη συνέχεια. Η στόχευση του εγχειριδίου δεν ήταν η μελέτη των αντίστοιχων ιδιοτήτων αλλά τις καταγράφουμε ως ιδιότητες των πρωτοτυπικών παραδειγμάτων συνάρτησης στα οποία εκτίθενται οι μαθητές.



Αμερικάνικο εγχειρίδιο

Από το σύνολο των 40 παραδειγμάτων συνάρτησης (τα 12 ήταν μη παραδείγματα) ταξινομήσαμε ως προς τη μορφή τους τα 29 παραδείγματα που δόθηκαν σε οποιαδήποτε από τις αναπαραστάσεις λεκτική, τύπο ή γραφική και μεταξύ τους συνδέσεις. Τα υπόλοιπα 11 ήταν παραδείγματα συναρτήσεων στο πλαίσιο της κωδικοποίησης. Στον πίνακα φαίνεται η κατανομή τους.

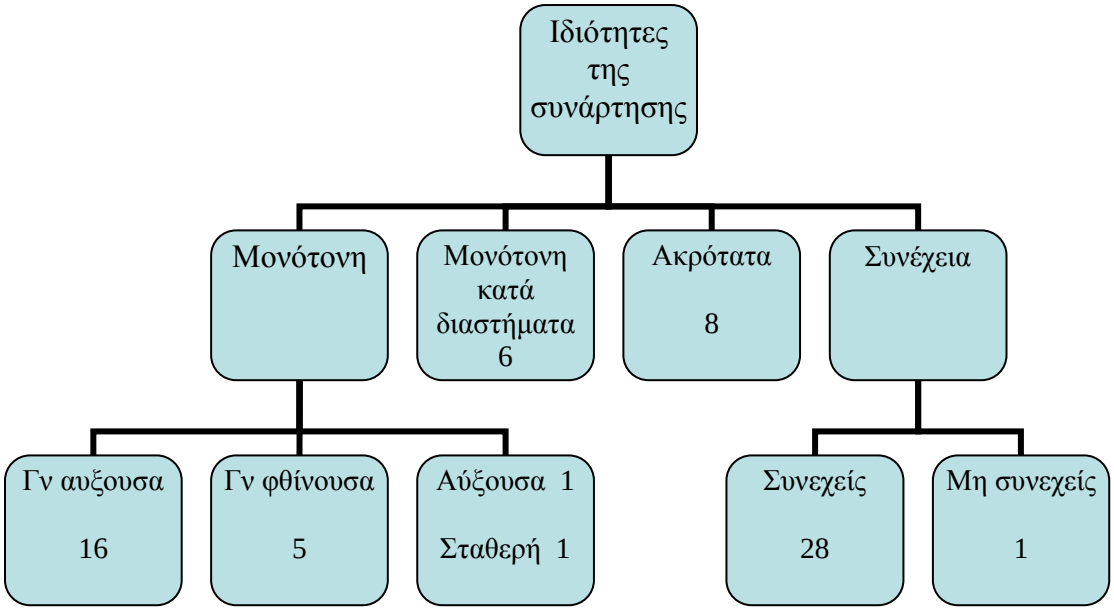


Από μια πρόχειρη ματιά μπορεί να παρατηρήσει κανείς μια έμφαση στις γραμμικές και τις εκθετικές μορφές, πράγμα που ερμηνεύεται αν δει κανείς τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών. Σε προηγούμενο κεφάλαιο είχαν εξοικειωθεί με γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις και με τη χρήση graphing calculators είχαν εικόνα της γραφικής τους απεικόνισης . Στο αμέσως προηγούμενο από το κεφάλαιο των συναρτήσεων, οι μαθητές είχαν ασχοληθεί με ταίριασμα (fitting) καμπύλης σε εκθετικά δεδομένα.

Σχετικά με τις ιδιότητες της συνάρτησης ασχοληθήκαμε όπως και στο ελληνικό εγχειρίδιο με μονοτονία ακρότατα και συνέχεια. Το συγκεκριμένο εγχειρίδιο στόχευε στη μελέτη της μονοτονίας μέσα από την αντίστοιχη γραφική παράσταση συνάρτησης και μάλιστα με αναστοχασμό σχετικά με το ρυθμό μεταβολής των τιμών της. Η μελέτη της μονοτονίας είχε τελικό σκοπό να μπορούν να ταιριάξουν κατάλληλο από δοσμένα γραφήματα σε

περιγραφές καταστάσεων του πραγματικού κόσμου ή σε άλλες περιπτώσεις ερμηνεία δοσμένου γραφήματος με αναφορά σε καταστάσεις πάλι από τον πραγματικό κόσμο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το γράφημα της στάθμης του νερού στην τρύπια πισίνα (Ε20), στο οποίο το ζητούμενο ήταν να εξηγήσουν το γράφημα αναφέροντας καταστάσεις όπως μπορεί να συμβαίνουν στη ζωή. Αντίστοιχα κατά το ταίριασμα κατάστασης με κατάλληλο γράφημα (Ε23), ζητούσε να χρησιμοποιήσουν για την αιτιολόγηση της επιλογής τους, όρους όπως γραμμική ή μη γραμμική συνάρτηση, αύξουσα ή φθίνουσα, ρυθμός μεταβολής τιμών, μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Οι ιδιότητες έχουν αναφορά στο πλαίσιο του προβλήματος και χωρίς δυσκολία (εκτιμούμε) ενσωματώνονται στο λεξιλόγιο των μαθητών σχετικά με τη συνάρτηση, τουλάχιστον όταν αυτή δίνεται με γραφική αναπαράσταση.

Στα 29 παραδείγματα συναρτήσεων καταγράψαμε:



4.2.4 Αναμενόμενη μαθηματική δραστηριότητα

Για το χαρακτηρισμό της μαθηματικής δραστηριότητας στην οποία εμπλέκονται οι μαθητές μέσω των παραδειγμάτων στα οποία εκτίθενται, ορίσαμε δυο άξονες, που περιλαμβάνουν: το **είδος της δραστηριότητας** το

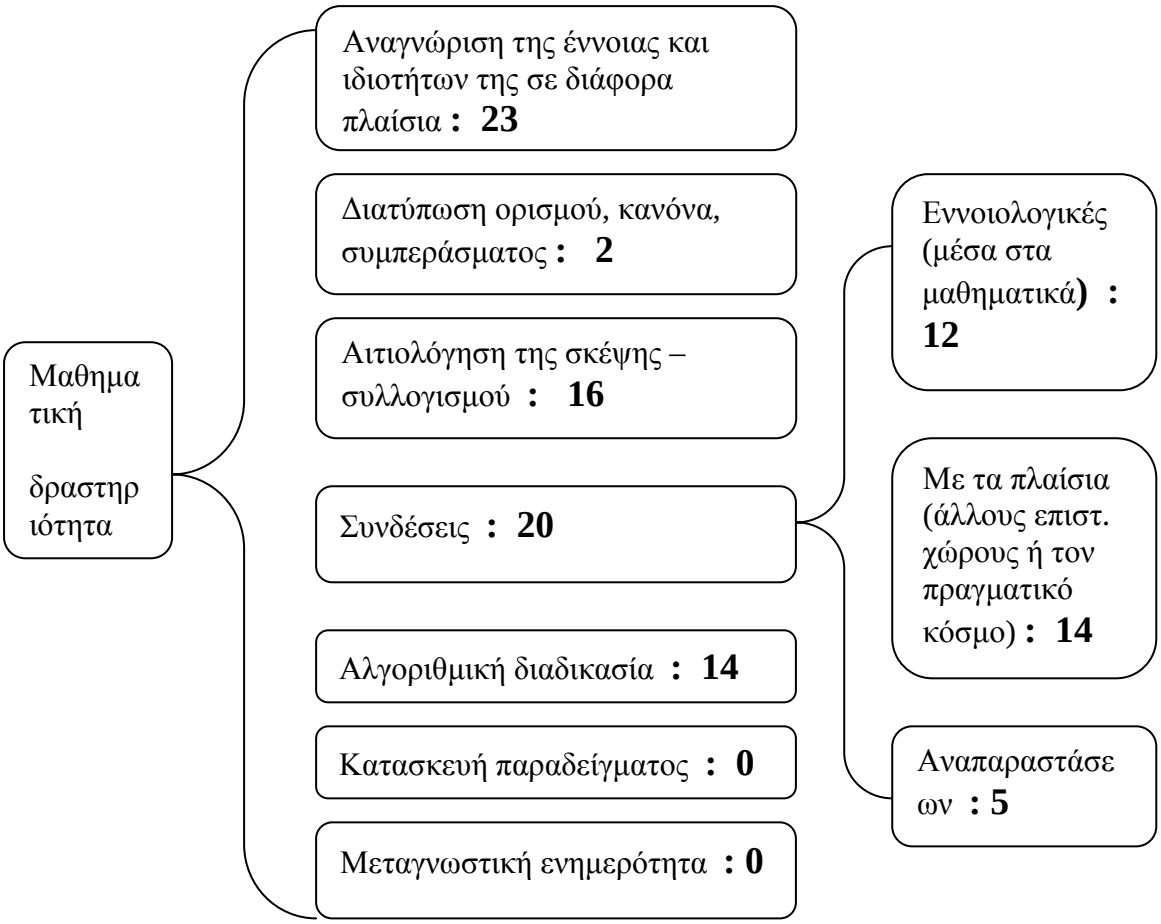
οποίο το παράδειγμα προκαλεί, και τη **στάση** που μπορεί να προκαλέσει στο μαθητή ως προς τα μαθηματικά.

Είδος της μαθηματικής δραστηριότητας.

Αναφορικά με τον πρώτο άξονα, το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας με την οποία καταπιάνονται οι μαθητές μέσω των παραδειγμάτων, στα δυο εγχειρίδια προέκυψαν επτά, όχι απαραίτητα ξένες κατηγορίες. Σε κάποια παραδείγματα η δραστηριότητα ενεργοποιούσε περισσότερες από μια κατηγορίες του άξονα. Άλλοτε το παράδειγμα αναδείκνυε την *αναγνώριση της έννοιας σε κάποιο πλαίσιο* και συγχρόνως ζητούσε *αιτιολόγηση της σκέψης*, ή *την αναγνώριση μιας ιδιότητας της συνάρτησης* όπως για παράδειγμα μονοτονία αυτής με ταυτόχρονη *αναζήτηση για διατύπωση συμπεράσματος*. Άλλοτε στο παράδειγμα είχαμε ταυτόχρονη παρουσία μαθηματικών δραστηριοτήτων όπου εκτός της *αναγνώρισης της έννοιας και ιδιοτήτων της* σε πραγματικό πλαίσιο απαιτούνταν και *αιτιολόγηση της επιλογής* με χρήση χαρακτηριστικών που προκύπτουν από τη γραφική παράσταση και μεταφορά και ερμηνεία τους σε φυσική γλώσσα. Οι *συνδέσεις* αποτελούν κεντρικό θέμα για τη διδασκαλία και τη μελέτη των μαθηματικών και ξεκάθαρη στόχευση και του ελληνικού προγραμμάτων σπουδών ως στοιχείο του μαθητικού τρόπου σκέψης. Συνδέσεις παρατηρήσαμε όχι μόνο μεταξύ μαθηματικών εννοιών, μέσα στα μαθηματικά, αλλά και συνδέσεις των μαθηματικών με άλλους επιστημονικούς χώρους και τον πραγματικό κόσμο. Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι συνδέσεις των αναπαραστάσεων που συζητήσαμε και στο κεφάλαιο των αναπαραστάσεων. Οι συνδέσεις συνυπήρχαν με άλλες μαθηματικές δραστηριότητες όπως αναγνώριση της έννοιας ή αλγοριθμική διαδικασία ή άλλη. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε διεξοδικά παραδείγματα τέτοιων συνδέσεων.

Πιο συγκεκριμένα από την ανάλυση προέκυψαν:

Ελληνικό εγχειρίδιο



Στην κατηγορία ***αναγνώριση της έννοιας και ιδιοτήτων αυτής*** σε διάφορα πλαίσια καταγράψαμε παραδείγματα αλλά και μη παραδείγματα της έννοιας στα οποία οι μαθητές αναζητούσαν τα κρίσιμα χαρακτηριστικά της (μονοσήμαντο) και τα οποία συναντήσαμε σε διάφορες αναπαραστάσεις, πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, λεκτική περιγραφή, τύπο.

Τα δυο παραδείγματα στα οποία οι μαθητές οδηγούνται σε ***διατύπωση κανόνα*** είναι μια καμπύλη και ένας κύκλος σε σύστημα συντεταγμένων από τα οποία η καμπύλη αποτελεί γράφημα συνάρτησης ενώ ο κύκλος μη παράδειγμα, και με τα δυο αυτά παραδείγματα και αναφορά στον ορισμό (μονοσήμαντο) διατυπώνει τον κανόνα της κατακόρυφης γραμμής: «κάθε κατακόρυφη γραμμή έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ ένα κοινό σημείο».

Σε *αιτιολόγηση σκέψης – συλλογισμού* οδηγούνται οι μαθητές με παραδείγματα σε αναπαράσταση βελοδιαγράμματος, γραφικής παράστασης, ή με λεκτική αντιστοίχιση όπου πρέπει με αναφορά στον ορισμό να

αιτιολογήσουν αν οι αναπαραστάσεις αυτές αποτελούν ή όχι περιπτώσεις συναρτήσεων. Ένα ακόμα παράδειγμα στο οποίο απαιτείται δικαιολόγηση του σκεπτικού είναι το παράδειγμα για την κατασκευή της γραφικής παράστασης της αντίθετης μιας δοσμένης συνάρτησης, όπου με λογικές σκέψεις και χρήση συμβολικής γλώσσας καταλήγει στο ότι η γραφική παράσταση της αντίθετης δοσμένης συνάρτησης είναι η συμμετρική ως προς τον άξονα χχ' της δοσμένης καμπύλης.

Στην κατηγορία ***αλγοριθμική διαδικασία*** μετρήσαμε παραδείγματα στα οποία με χρήση του τύπου υπολογίστηκαν τιμές της συνάρτησης σε συναρτήσεις με απλό τύπο ή και σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, ή από δοθέν γράφημα έπρεπε να βρεθεί ο τύπος συνάρτησης (τελευταίο ερώτημα της Δ26). Στην ίδια κατηγορία μετρήσαμε και παραδείγματα όπου ζητούνταν να βρεθεί το πεδίο ορισμού συνάρτησης.

Δεν εντοπίσαμε παραδείγματα στα οποία η έμφαση να ήταν στη διεργασία της ***μεταγνωστικής ενημερότητας*** και ούτε ***παραδείγματα που να τα φτιάχνουν οι ίδιοι οι μαθητές.***

Ένα παράδειγμα μπορεί να επιτυγχάνει ενός ή περισσότερων ειδών **συνδέσεις**. Για να γίνει αντιληπτό τι εννοούμε θα αναφερθούμε στις συνδέσεις που επιτυγχάνει με το πρώτο παράδειγμα του εγχειριδίου (Π1 στο παράρτημα). Έχουμε συνδέσεις:

Αναπαραστάσεων : λεκτική περιγραφή – τύπος.

Με το πλαίσιο : το πλαίσιο αναφοράς του παραδείγματος συνδέει τη συνάρτηση με την οικονομία ως επιστημονικό χώρο, και ταυτόχρονα με το περιβάλλον του μαθητή, έχει σχετικά ακούσματα στην οικογένεια, στην τηλεόραση, στη ζωή.

Εννοιολογικές : συνδέει τη συνάρτηση με την εξίσωση. Με το να θέτει τιμές στη μεταβλητή ε και να υπολογίζει τις αντίστοιχες τιμές του Τ, διαχειρίζεται τη συνάρτηση με όρους γνωστού – αγνώστου. Γενικότερα :

Εννοιολογικές συνδέσεις βρήκαμε μεταξύ εξίσωσης και συνάρτησης στην οποία αναφερθήκαμε και προηγουμένως. Υπήρχαν δυο ακόμα συνδέσεις εξίσωσης - συνάρτησης, μια με πλαίσιο αναφοράς τη Φυσική (ταχύτητα – διάστημα στο Π2) και μια τη Γεωμετρία (ακτίνα κύκλου – εμβαδό στο Π3).

Επίσης είχαμε εννοιολογικές συνδέσεις μεταξύ συνάρτησης και ανίσωσης ή εξίσωσης όταν δοθείσα συνάρτηση είχε στον τύπο της, μεταβλητή στον παρονομαστή ή σε ριζικό και για τον υπολογισμό του πεδίου ορισμού, που ζητούσε το παράδειγμα, έπρεπε να λυθεί εξίσωση, ανίσωση ή και τα δυο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το λυμένο στο εγχειρίδιο Π13:

να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}.$$

Άλλο λυμένο στο εγχειρίδιο (Π17 στο παράρτημα) είναι ένα παράδειγμα που προσφέρεται, κατά τη γνώμη μας, για εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης αφού απαιτεί την ικανότητα να μεταφράζει κανείς μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Θέματα εξισώσεων – ανισώσεων ισχυρά συνδεδεμένα με τον κλάδο της άλγεβρας στα μαθηματικά (και άρα αλγεβρικού χειρισμού για τη λύση τους) μπορούν να απαντηθούν και σε γεωμετρικό πλαίσιο, αν έχουμε πρόσβαση στη γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης ή των αντίστοιχων συναρτήσεων. Δεν παρέχεται στο παράδειγμα η επιλογή να εργαστεί κανείς αλγεβρικά αφού έχουμε πρόσβαση μόνο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, αλλά τουλάχιστον μπορεί να αποτελέσει αφορμή για εμπλουτισμό. Στο εν λόγω παράδειγμα είχαμε εννοιολογική σύνδεση γραφικής παράστασης συνάρτησης και εξισώσεων – ανισώσεων και ευρύτερα Άλγεβρας – Γεωμετρίας.

Στη δραστηριότητα Δ. 15 του προγράμματος σπουδών είχαμε εννοιολογικές συνδέσεις μεταξύ των εννοιών περιμέτρου και εμβαδού γεωμετρικού σχήματος και της συνάρτησης που τις εκφράζει.

Συνδέσεις με τα πλαίσια των παραδειγμάτων όπως φάνηκε και στα παραδείγματα που παραθέσαμε πριν, είχαμε τόσο με άλλους επιστημονικούς χώρους από τους οποίους αντλήθηκαν οι ιδέες της κατασκευής τους όσο και με τον πραγματικό κόσμο. Συγκεκριμένα μετρήσαμε ένα παράδειγμα με πλαίσιο αναφοράς το χώρο της οικονομίας (επιτόκιο – Τόκος) και τρία παραδείγματα με αναφορά στη Φυσική που αξιοποιήθηκαν διαφορετικά. Το ένα παράδειγμα από τη Φυσική αξιοποιήθηκε για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (ταχύτητα – διάστημα), ένα δεύτερο για το συμβολισμό συνάρτησης σε άλλες επιστήμες («αντί να λέμε η συνάρτηση $s(t) = ½ gt^2$, θα λέμε η συνάρτηση $s = ½ gt^2$, δηλαδή θα γράφουμε s υπονοώντας s(t)»). Και

το τρίτο (Δραστηριότητα Δ. 26) ως πλαίσιο για την ερμηνεία γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

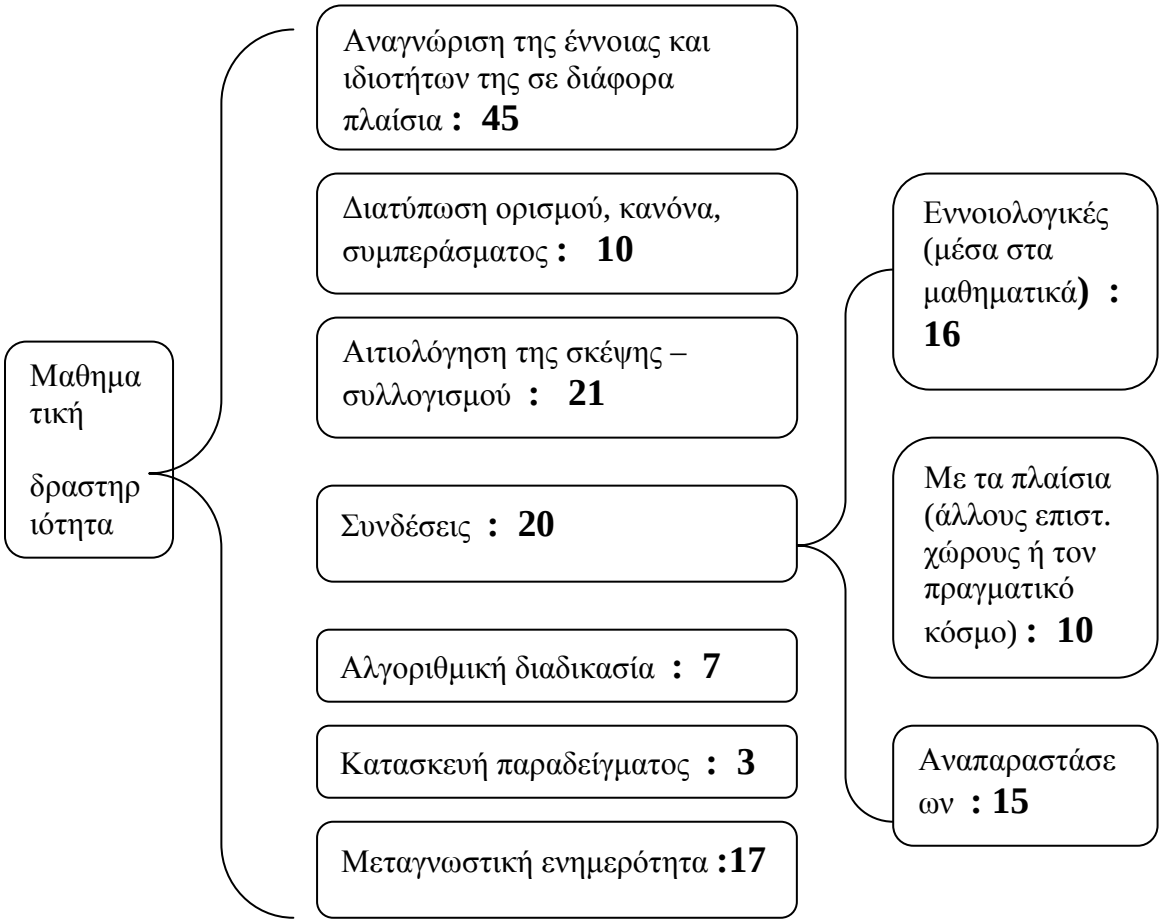
Τα ερωτήματα που θέτει η δραστηριότητα σχετίζονται με τη διάρκεια της κίνησης, αν έκανε στάσεις το κινητό και για πόσο χρόνο, πόσος χρόνος πέρασε μέχρι την πρώτη στάση, πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση και τα λοιπά.

Επιπλέον υπήρχαν παραδείγματα στα οποία επιδιώχθηκε σύνδεση με την καθημερινή ζωή και τις εμπειρίες των μαθητών, στη διερεύνηση αντιστοιχίσεων ως παραδείγματα ή μη παραδείγματα συναρτήσεων όπως η δραστηριότητα Δ. 23.

Σχετικά με τις **συνδέσεις αναπαραστάσεων**, θα λέγαμε ότι τα παραδείγματα δεν ήταν ιδιαίτερα πλούσια σε πολλαπλές αναπαραστάσεις. Τα τρία πρώτα παραδείγματα του εγχειριδίου δόθηκαν με λεκτική αναπαράσταση και τύπο, ένα ακόμα παράδειγμα της συνάρτησης f(x) = $\sqrt{x}$ δόθηκε λεκτικά (η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε μη αρνητικό αριθμό την τετραγωνική του ρίζα) και με αντιστοίχιση $x \rightarrow \sqrt{x}$. Τέλος η αντίθετη συνάρτησης f (γραφικά δοσμένης) δόθηκε με γραφική αναπαράσταση και με ζεύγη τιμών. Η χρήση περισσότερων της μιας αναπαράστασης περιορίστηκε στα πρώτα παραδείγματα στην έννοια της συνάρτησης, και μετά τα παραδείγματα εστίασαν στον τύπο από όπου έβρισκαν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και υπολόγισαν τιμές της. Η γραφική παράσταση δεν αξιοποιήθηκε από το εγχειρίδιο στην έννοια της συνάρτησης αλλά εισήχθη ώστε να αξιοποιηθεί κατά τη μελέτη κλάσεων συναρτήσεων σε επόμενες παραγράφους και τάξεις.

Η σημαντική όμως απόκλιση του εγχειριδίου, που υπολείπεται, και των ερευνητικών δεδομένων, και των στόχων που τίθενται στο πρόγραμμα σπουδών που υποτίθεται ότι υπηρετεί, είναι η **έλλειψη έμφασης στη λύση προβλήματος.** Δε δομείται σε πλαίσιο δραστηριοτήτων λύσης προβλήματος αλλά αντίθετα τείνει να παρουσιάζει τα μαθηματικά «ως έτοιμο προϊόν» παρά «διαδικασία μαθηματικοποίησης» που περιλαμβάνει διερεύνηση, πειραματισμό, διατύπωση εικασιών και έλεγχο αυτών.

Αμερικάνικο εγχειρίδιο



Όπως και πριν αναφέραμε οι κατηγορίες της μαθηματικής δραστηριότητας είναι επικαλυπτόμενες. Το ίδιο παράδειγμα μπορεί να εγείρει δυο ή και περισσότερες μαθηματικές διεργασίες. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα γραφήματα τριών αυξουσών (Ε21) και τριών φθινουσών συναρτήσεων (Ε22) στα οποία το έργο στο οποίο εμπλέκονταν οι μαθητές ήταν να εντοπίσουν τι κοινό παρουσίαζαν τα τρία γραφήματα, πώς διέφεραν από αυτά των τριών αυξουσών του προηγούμενου βήματος, και να συζητήσουν πως θα μπορούσαν να περιγράψουν το ρυθμό μεταβολής των τιμών σε καθένα από αυτά.

Εδώ οι μαθητές *αναγνώρισαν την ιδιότητα* «γνησίως φθίνουσα» συνάρτηση σε γραφικό πλαίσιο, *διατύπωσαν συμπέρασμα* μέσω του ερωτήματος «τι κοινό έχουν τα παραδείγματα», *αιτιολόγησαν το συλλογισμό* τους, και *μεταγνωστικά* μπορούμε να πούμε ότι απέκτησαν έλεγχο της δικής

τους μάθησης επιλέγοντας στρατηγική για να απαντήσουν στα ερωτήματα του ρυθμού μεταβολής των τιμών.

Σε καθένα από τα έξι παραδείγματα για τη μονοτονία της συνάρτησης (τρεις γνησίως αύξουσες και τρεις γνησίως φθίνουσες) καταγράψαμε ως μαθηματική δραστηριότητα και την *αναγνώριση της ιδιότητας* (της μονοτονίας), και τη *διατύπωση συμπεράσματος* (τι κοινό έχουν), και την *αιτιολόγηση του ισχυρισμού* (θα αναγκαστούν να αιτιολογήσουν στη συζήτηση του ρυθμού μεταβολής των τιμών) και τη *μεταγνωστική ενημερότητα* (σχεδιασμός και επιλογή στρατηγικής για να σχολιάσουν το ρυθμό μεταβολής σε κάθε περίπτωση, παρακολούθηση της ανάπτυξης των συλλογισμών).

Ένα παράδειγμα πολύ απλό στη δομή του, ο καθένας θα μπορούσε να το φτιάξει, μετατρέπεται σε πολύ πλούσια δραστηριότητα μέσω του τρόπου με τον οποίο τίθενται τα ερωτήματα. Τα ερωτήματα που εμπλέκουν το μαθητή σε πλήθος διεργασιών και του προσφέρουν επιπλέον την ευκαιρία να σκεφτεί μεταγνωστικά. Ίσως τελικά αυτό που έχει σημασία να μην είναι τόσο, το πιο είναι το παράδειγμα αλλά τι ζητείται να κάνει ο μαθητής με αυτό.

Στην πρώτη κατηγορία, ***αναγνώριση της έννοιας και ιδιοτήτων της***, προσμετρήσαμε παραδείγματα και μη παραδείγματα συνάρτησης σε όλα τα αναπαραστασιακά πλαίσια, αλλά και αναγνώριση ιδιοτήτων της συνάρτησης όπως η μονοτονία της. Σε κάποια από τα παραδείγματα η έννοια εντοπίζονταν στα παραδείγματα που έφτιαχναν οι ίδιοι οι μαθητές. Όπως, στο παράδειγμα *«φτιάξτε έναν δικό σου κώδικα στον οποίο για κάθε γράμμα εισόδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα γράμμα εξόδου».* Την έννοια της συνάρτησης αναγνώριζαν οι μαθητές και σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής (Ε23) οι οποίες περιγράφονταν και έπρεπε να τις αντιστοιχίσουν στο κατάλληλο γράφημα.

Σε ***διατύπωση του κανόνα*** της κατακόρυφης γραμμής οδηγήθηκαν οι μαθητές μετά την έκθεσή τους σε παραδείγματα και μη παραδείγματα συνάρτησης σε γραφική αναπαράσταση (Ε17). Μάλιστα τα τέσσερα γραφήματα συνόδευε η προτροπή. «*Μετακίνησε μια κατακόρυφη ευθεία πάνω στη γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης και της κατακόρυφης ευθείας βρες ποιες σχέσεις είναι συναρτήσεις και ποιες όχι».*

Και στο επόμενο βήμα της δραστηριότητας συνεχίζει «με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου βήματος διατύπωσε έναν κανόνα εξηγώντας πως μπορεί κάποιος να αποφασίσει αν μια σχέση είναι συνάρτηση βασιζόμενος μόνο στη γραφική παράσταση αυτής». Συμπέρασμα διατυπώνουν οι μαθητές και στα παραδείγματα των μονότονων συναρτήσεων Ε21 και Ε22.

Αιτιολόγηση της σκέψης τους έκαναν οι μαθητές σε όσα παραδείγματα έπρεπε να αποφανθούν αν σχέση ή αντιστοίχιση που δόθηκε με οποιαδήποτε αναπαράσταση αποτελούσε περίπτωση συνάρτησης. Το ίδιο έκαναν στα παραδείγματα των μονότονων συναρτήσεων για να συζητήσουν το ρυθμό μεταβολής των τιμών τους, αλλά και στις καταστάσεις από τον πραγματικό κόσμο για να τα αντιστοιχήσουν με κατάλληλο γράφημα αιτιολογώντας τις επιλογές τους.

Αλγοριθμική διαδικασία εντοπίσαμε σε 7 παραδείγματα. Τρία ήταν στο πλαίσιο της δραστηριότητας κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης με χρήση πλέγματος. Τα υπόλοιπα τέσσερα ήταν διαδοχικά παραδείγματα στην παράγραφο συμβολισμός συνάρτησης όπου υπολόγιζαν τιμές συνάρτησης όταν δίνονταν ο τύπος (Ε25)ή η γραφική παράσταση συνάρτησης (Ε26). Το τελευταίο μάλιστα ήταν το παράδειγμα της συνάρτησης f(x)=1,8x + 32 που βρίσκει σύμφωνα με τη διατύπωση του παραδείγματος τη θερμοκρασία f(x) σε βαθμούς Fahrenheit, για κάθε θερμοκρασία x σε βαθμούς Celsius. Η δραστηριότητα ζητούσε να βρουν τις συγκεκριμένες τιμές:

a. f (15) **b.** f (–10)
c. x when f (x) = 41 **d.** x when f (x) = −4

Οι μαθητές έφτιαξαν τρία ***δικά τους παραδείγματα***, όλα στην παράγραφο της κωδικοποίησης. Το πρώτο ήταν ένα παράδειγμα μετατόπισης γραμμάτων κατά συγκεκριμένο αριθμό θέσεων (οι μαθητές επέλεγαν πόσες θέσεις). Ένα ακόμα ήταν κατασκευή κώδικα από τους μαθητές με απαίτηση σε κάθε γράμμα εισόδου να αντιστοιχεί ακριβώς ένα γράμμα εξόδου.

Τέλος δεκαεπτά παραδείγματα ενεργοποίησαν ***διεργασίες μεταγνωστικής ενημερότητας.*** Πρόκειται για τα έξι παραδείγματα της μονοτονίας που προαναφέραμε, άλλα οκτώ παραδείγματα ήταν παραδείγματα γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων, της Ε19, που μέσω γραφικής αναπαράστασης οι μαθητές οδηγούνται σε γενικεύσιμα

συμπεράσματα ότι όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Και εδώ οι μαθητές σχεδιάζουν στρατηγική, (με graphing calculator σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης έχουν τον τύπο της), την αναπτύσσουν και μπορούν να αποφανθούν αν δοθείσα σχέση αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς τη μεταγνωστική τους αξία έχουν τα παραδείγματα στα οποία ζητείται οι μαθητές να συγκρίνουν τον κώδικα που έφτιαξαν με τον κώδικα του συμμαθητή τους. Να πουν πώς μοιάζουν και πώς διαφέρουν και να απαντήσουν στα μεταγνωστικά ερωτήματα: «για κάθε γράμμα του πλέγματος πόσες είναι οι δυνατές έξοδοι και πόσοι τρόποι υπάρχουν για να αποκωδικοποιήσουμε κάθε γράμμα σε ένα κωδικοποιημένο μήνυμα». (Οι μαθητές αποκτούν συνείδηση της γνωστικής διαδικασίας κατασκευής παραδείγματος συνάρτησης στο πλαίσιο της κωδικοποίησης, ελέγχουν και αξιολογούν το δικό τους τρόπο σκέψης.)

Ένα ακόμα παράδειγμα μεταγνωστικής ενημερότητας είναι το παράδειγμα πλέγματος που δεν αποτελεί περίπτωση συνάρτησης (δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη η αντιστοίχιση) στο οποίο με κατάλληλα ερωτήματα το εγχειρίδιο ωθεί το μαθητή να αποκτήσει έλεγχο των προβλημάτων στη διαδικασία κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, να εντοπίσει τα προβλήματα και να τα διορθώσει παρέχοντας ένα δικό του κώδικα (διορθώνοντας τα λάθη του προηγούμενου) ώστε για κάθε γράμμα εισόδου να αντιστοιχεί ακριβώς ένα γράμμα εξόδου. Στην προσπάθειά του το εγχειρίδιο να βάλει το μαθητή να περιγράψει το δικό του τρόπο σκέψης (μεταγνωστική ενημερότητα) ζητά από το μαθητή νε βρει πως μοιάζει και σε τι διαφέρει το νέο παράδειγμα κώδικα (μονοσήμαντα ορισμένο) με το αρχικό παράδειγμα κώδικα που δόθηκε.

Συνδέσεις : «Μέσω αυτών οι μαθητές θα αποκτήσουν μια πιο πλούσια κατανόηση των μαθηματικών και των εφαρμογών τους» σύμφωνα με το Principles and Standards for School Mathematics.

Κατηγοριοποιήσαμε τρεις τύπους -όχι απαραίτητα ξένων- συνδέσεων. Στην πρώτη παράγραφο όπου η έννοια της συνάρτησης εισήχθη στο πλαίσιο της κωδικοποίησης και της αποκωδικοποίησης ήταν κυρίαρχες *οι συνδέσεις με τα πλαίσια και οι συνδέσεις των αναπαραστάσεων.* Στη δεύτερη παράγραφο, «συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις», δεν παρατηρούμε

συνδέσεις με τα πλαίσια παρά *συνδέσεις αναπαραστάσεων και εννοιολογικές.* Τις συνδέσεις αναπαραστάσεων επιτυγχάνει στο πρώτο παράδειγμα εισάγοντας τη συνάρτηση: «*που μετασχηματίζει κάθε αριθμό στον κατά μια μονάδα μεγαλύτερό του*», με όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις. Λεκτικά που περιγράψαμε, με ισότητα, με γραφική παράσταση και με διάγραμμα. Συνεχίζει με τέσσερα παραδείγματα συναρτήσεων (τα δυο μη παραδείγματα) για τα οποία δίνει πρώτα τον πίνακα τιμών και στα τέσσερα, μετά τις ισότητές τους και τέλος τις γραφικές τους παραστάσεις. Διακρίνει έτσι τα κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας της συνάρτησης σε διαφορετικά αναπαραστασιακά πλαίσια. Στην αρχή εστιάζει στο αναπαραστασιακό πλαίσιο μέσα από το οποίο οι μαθητές διακρίνουν την έννοια καθώς εκτίθενται σε παραδείγματα και μη παραδείγματα αυτής, αλλά συγχρόνως διατηρώντας ίδια τα παραδείγματα μέσα στα πλαίσια επιτυγχάνει και συνδέσεις αναπαραστάσεων. Στην ίδια παράγραφο επιτυγχάνει εννοιολογικές συνδέσεις με αναδρομικές διαδικασίες, αναφέρει ότι: «*σε προηγούμενα κεφάλαια όταν διερευνήσαμε σχέσεις από αναδρομικές διαδικασίες χρησιμοποιήσαμε και γραφήματα και ισότητες για να συσχετίσουμε τα δεδομένα εισόδου και εξόδου των αναδρομικών διαδικασιών».* Επίσης επιδιώκει και εννοιολογικές συνδέσεις με εκθετικά μοντέλα που προηγήθηκαν στη μελέτη, αλλά και συνδέσεις με γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις που για τη μελέτη τους, σε κεφάλαιο που προηγείται των συναρτήσεων, οι μαθητές έκαναν το γράφημα της αντίστοιχης εξίσωσης με τη χρήση graphing calculators. Αξιοποιώντας την προηγούμενη γνώση για τις γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις και μέσω των γραφημάτων τους οδηγούνται με οκτώ παραδείγματα, της Ε19, (δυο από αυτά μη παραδείγματα) στο συμπέρασμα ότι: «*όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες γραμμές αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων*».

Στην παράγραφο «γραφικές παραστάσεις καταστάσεων του πραγματικού κόσμου» όπως δηλώνει και ο τίτλος της ενότητας έχουμε εστίαση σε μια μόνο από τις αναπαραστάσεις τη γραφική παράσταση και οι συνδέσεις που επιδιώκει η παράγραφος είναι με τα πλαίσια των παραδειγμάτων μέσα στα οποία ερμηνεύουν τα γραφήματα των καταστάσεων, αλλά και εννοιολογικές με διαστήματα πραγματικών αριθμών και ανισότητες που χρησιμοποιούν για να περιγράψουν τι συμβαίνει και σε ποιο διάστημα στο λυμένο παράδειγμα Ε24.

Στην τελευταία παράγραφο «συμβολισμός συνάρτησης» έχουμε παραδείγματα τα οποία δίνονται ή με τύπο Ε25, ή με γραφική παράσταση Ε26 και έμφαση δίνεται στον υπολογισμό τιμών και το συμβολισμό τους. Εδώ κυρίως επιδιώκονται εννοιολογικές συνδέσεις με εξισώσεις και με το λογισμό των πράξεων (προτεραιότητα, ιδιότητες). Αντίστοιχο είναι και το Ε27.

Συνολικά θα λέγαμε ότι το εγχειρίδιο εστιάζει στη **σύνδεση των αναπαραστάσεων** καθώς σε 15 από τα 52 παραδείγματα είχαμε συνδέσεις αναπαραστάσεων και μάλιστα περιπτώσεις που το ίδιο παράδειγμα δόθηκε με όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις του. Τούτο συνέβη τόσο σε παραδείγματα όσο και σε μη παραδείγματα συνάρτησης.

Σχετικά με τις **συνδέσεις με τα πλαίσια**, είχαμε συνδέσεις με την τεχνολογία και την ιστορία, με τη χρήση και τη διατήρηση του πλαισίου της κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης μηνυμάτων, σε όλη την πρώτη παράγραφο.

Επίσης υπήρχαν ισχυρές συνδέσεις με το πλαίσιο του πραγματικού κόσμου, ολόκληρη παράγραφος φέρει αυτό τον τίτλο «γραφήματα καταστάσεων του πραγματικού κόσμου» όπου το πλαίσιο δεν ήταν μαθηματικοποιημένο αλλά πραγματικό. Πραγματικά φαινόμενα στο Ε23 έπρεπε να αντιστοιχιστούν σε κατάλληλο γράφημα που τα περιγράφει, αιτιολογώντας τις επιλογές με χρήση λεξιλογίου που σχετίζονταν με τις ιδιότητες της αντίστοιχης συνάρτησης.

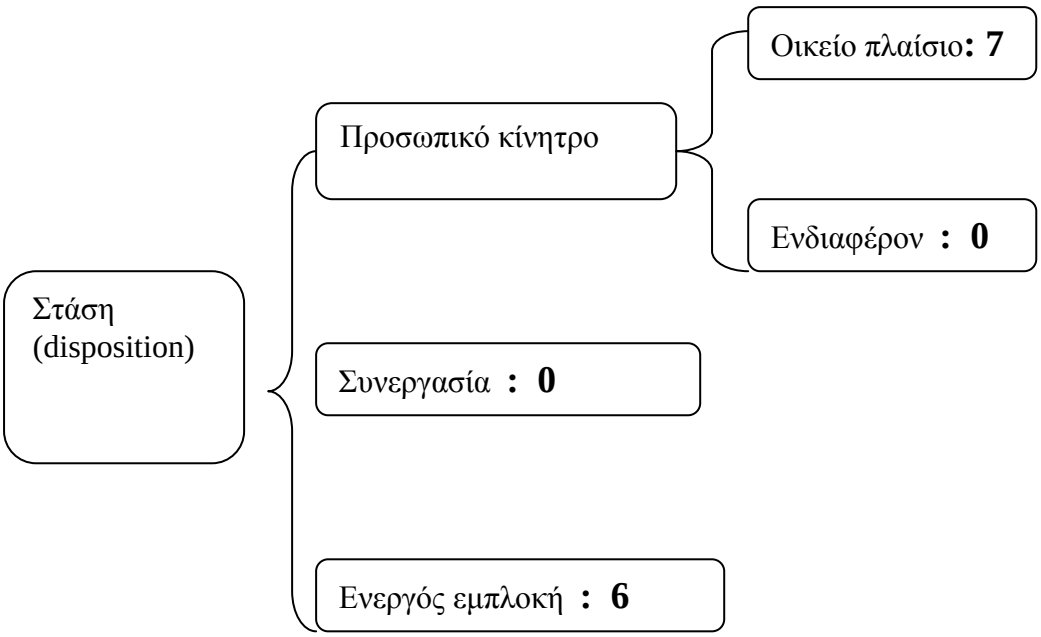
Εννοιολογικές συνδέσεις επιτεύχθηκαν κυρίως με τις γραμμικές εξισώσεις και τις ανισώσεις που είχαν διδαχθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο οι μαθητές. Χρησιμοποίησαν στο Ε19 graphing calculators για διάφορες μορφές γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων ώστε με τη βοήθεια της αντίστοιχης γραφικής παράστασής τους, να μπορούν να αποφανθούν αν οι αντίστοιχες μορφές αποτελούν περιπτώσεις συναρτήσεων. Μάλιστα μέσω της έκθεσής τους σε ποικιλία μορφών, κατέληξαν και σε γενίκευση σχετικά με τις μη κατακόρυφες ευθείες ως περιπτώσεις συναρτήσεων.

Εννοιολογικές συνδέσεις όμως επιτεύχθηκαν και με εξισώσεις σε παραδείγματα συναρτήσεων όπως αυτό με γραφική αναπαράσταση όπου ζητήθηκε να απαντήσουν για πιο χ ισχύει $f(x) = 10$ ή $f(x) = 0$ που περιγράψαμε λίγο πριν στον πίνακα του Ε19.

Στάση ως προς τα μαθηματικά (disposition).

Επιχειρώντας να διερευνήσουμε την πιθανή στάση που μπορεί να αναπτύξουν οι μαθητές ως προς τα μαθηματικά, μέσω του ρόλου που προορίζεται για αυτούς, από τις μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται, αναλύσαμε τα παραδείγματα των εγχειριδίων ως προς το αν δημιουργούν προσωπικό κίνητρο, και αν προκαλούν συνεργασία και ενεργό εμπλοκή των μαθητών. Τα αποτελέσματά μας ακολουθούν.

Ελληνικό εγχειρίδιο



Όπως ξεκάθαρα φαίνεται, και παρά την περί του αντιθέτου στόχευση του Προγράμματος Σπουδών: «Η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και πολλαπλών αποδεικτικών προσεγγίσεων, στην ανάπτυξη διάφορων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική)», το εγχειρίδιο δεν επιτυγχάνει να εμπλέξει ενεργά τους μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία. Τα πέντε παραδείγματα εμπλοκής των μαθητών που καταγράψαμε είναι σε κάποιες από τις δραστηριότητες του Προγράμματος Σπουδών στις οποίες ζητείται να εξετάσουν οι μαθητές αν αντιστοιχήσεις με λεκτική περιγραφή αποτελούν περιπτώσεις συναρτήσεων και να αιτιολογήσουν την όποια επιλογή τους (Δ.23). Λόγω του οικείου

πλαισίου καθεμιάς από τις αντιστοιχίσεις και της διατύπωσης αυτών οι μαθητές θα εμπλακούν στο να τις διερευνήσουν και να τις προσδιορίσουν καλύτερα. Για παράδειγμα, η αντιστοίχιση α) μπορεί να προκαλέσει και συζήτηση μεταξύ των μαθητών, ειδικά αν υπάρξουν μεταξύ αυτών, μαθητές που την εκλάβουν ως αντιστοίχιση μεταξύ ημερομηνίας γέννησης και συνόλου ανθρώπων που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα. Ή μπορεί να αξιοποιηθεί στην τάξη για να μετατραπεί από μη παράδειγμα σε παράδειγμα. Σίγουρα έχει ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι αποτελεί οικείο πλαίσιο και μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές σε δράση. Αντίστοιχα μπορεί να εμπλακούν οι μαθητές στη δραστηριότητα Δ. 26 της απόστασης του κινητού από σημείο Α σε σχέση με το χρόνο. Εδώ τα ερωτήματα, που έχουν να κάνουν με ερμηνεία του γραφήματος, προσφέρονται αφενός σε οικείο πλαίσιο, αλλά αφετέρου συνδυάζουν και στοιχεία της εμπειρίας των μαθητών και από την καθημερινή ζωή και από τις γνώσεις που απέκτησαν κατά την ενασχόληση με άλλες θεματικές περιοχές και σε προηγούμενες τάξεις.

Σε οικείο πλαίσιο θεωρήσαμε ότι εισάγονται και μερικά από τα πρώτα παραδείγματα στην έννοια της συνάρτησης όπως οι αντιστοιχίσεις:

ταχύτητας και διαστήματος που διανύεται σε χρονικό διάστημα δυο ωρών,
ώρες της μέρας και θερμοκρασίες τους ,
μέρες του έτους και τιμές ενός ξένου νομίσματος,
μέρες μιας συγκεκριμένης εβδομάδας και μέγιστη θερμοκρασία τους.

Αμερικάνικο εγχειρίδιο

«Οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά μέσω των εμπειριών που τους παρέχουν οι δάσκαλοί τους. Ως εκ τούτου η κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές στα μαθηματικά, η ικανότητά τους να χρησιμοποιούν αυτή την κατανόηση για να λύνουν προβλήματα, η αυτοπεποίθηση που νοιώθουν για αυτό και η διάθεση (disposition) απέναντι στα μαθηματικά, όλα σχηματίζονται μέσω της διδασκαλίας της οποίας τυγχάνουν στο σχολείο» (NCTM 2000, σελ. 16).

Στο Principles and Standards for School Mathematics (2000) μια από τις έξι αρχές (Principles) που αναλύονται εκτενώς είναι και η αρχή της διδασκαλίας. Διαβάζουμε σχετικά : «οι καθηγητές έχουν διαφορετικά στυλ και στρατηγικές για να βοηθήσουν τους μαθητές τους να μελετήσουν

συγκεκριμένες μαθηματικές ιδέες και δεν υπάρχει ένας σωστός δρόμος για να διδάξουν. Παρόλα αυτά οι αποτελεσματικοί εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν ότι οι αποφάσεις που λαμβάνουν σχηματοποιούν τις διαθέσεις (dispositions) των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και μπορούν να δημιουργήσουν πλούσιες διευθετήσεις για τη μάθηση. Η επιλογή και η χρήση κατάλληλου διδακτικού υλικού, η χρήση κατάλληλων εργαλείων και τεχνικών, η συμμετοχή σε αναστοχαστικές πρακτικές και η συνεχής αυτοβελτίωση είναι ενέργειες που οι καθηγητές κάνουν κάθε μέρα.

Μια από τις πολυπλοκότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι ότι αυτή θα πρέπει να ισορροπεί μεταξύ των εύστοχων, προγραμματισμένων μαθημάτων στην τάξη με τις αποφάσεις για τις ανάγκες της στιγμής, που θα πρέπει να λάβουν όταν εμφανίζονται απρόβλεπτες καταστάσεις και δυσκολίες που κάποιες φορές τους φέρνουν μπρος σε ανεξερεύνητο έδαφος. Η διδασκαλία μαθηματικών περιλαμβάνει τη δημιουργία, τον εμπλουτισμό και την προσαρμογή ιδεών προς την κατεύθυνση της επίτευξης των μαθηματικών στόχων, την ενσωμάτωση και τη διατήρηση του ενδιαφέροντος, την εμπλοκή των μαθητών στην οικοδόμηση μαθηματικής κατανόησης» (σελ. 18).

Η οπτική με την οποία το πρόγραμμα σπουδών βλέπει τις διαθέσεις που μπορεί να αναπτύξουν οι μαθητές ως προς τα μαθηματικά έχει συνδεθεί με την αρχή της διδασκαλίας. Η διδασκαλία, και οι δάσκαλοι διαμεσολαβούν μεταξύ του εγχειριδίου, από το οποίο εμείς αντλούμε το υλικό διδασκαλίας και πιο συγκεκριμένα τα παραδείγματα για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης, και της μάθησης από τους μαθητές. Ως εκ τούτου θεωρούμε ότι από τα παραδείγματα του εγχειριδίου, το οποίο μάλιστα έχει σχεδιαστεί στη βάση των αρχών του NCTM 2000, μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για τη στάση των μαθητών ως προς τα μαθηματικά. Από την ανάλυση αυτή είχαμε :

Έμφαση φαίνεται να δίνεται στο εγχειρίδιο στην αναζήτηση πλαισίου οικείου στους μαθητές για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης. Το πλαίσιο της κωδικοποίησης αποκωδικοποίησης μπορεί σε άλλους να είναι οικείο και σε άλλους όχι. Στην αρχή της παραγράφου γίνεται προσπάθεια εξοικείωσης των μαθητών με αυτό με αναφορά σε επιστημονικές περιοχές που έχει εμφανιστεί (Ιστορία, Τεχνολογία) αλλά και σημερινές εφαρμογές (applications of codes at ATMs, in communications, and on the Internet).

Η διαχείριση του πλαισίου της κωδικοποίησης αποκωδικοποίησης έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το πλαίσιο από μόνο του είναι ελκυστικό αλλά αυτό που προκαλεί και διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι αυτό που ζητείται να κάνουν οι μαθητές μέσα σε αυτό το πλαίσιο. Οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά στη διδασκαλία καθώς οι δραστηριότητες που θέτει το εγχειρίδιο τους βάζουν σε ρόλο συνδιαμορφωτή. Η δραστηριότητα της κωδικοποίησης είναι διαφορετική για κάθε μαθητή (αφού εξαρτάται από τον κώδικα που έφτιαξε ο συμμαθητής του), πράγμα που μεταθέτει την ευθύνη της ορθής ολοκλήρωσής της στον καθένα ατομικά. Επιπλέον η συνεργασία μεταξύ μαθητών γίνεται αναπόφευκτη και δεν επαφίεται στην ευρηματικότητα του δασκάλου να καθορίσει κατάλληλους ρόλους συνεργασίας. Με τη χρήση κώδικα που δίνει το εγχειρίδιο, κάθε μαθητής γράφει μήνυμα δυο ή τριών λέξεων και ο συμμαθητής του το

αποκωδικοποιεί. Η κωδικοποίηση κρύβει ένα μυστήριο που η αποκωδικοποίηση επιλύει, και έχει ενδιαφέρον, ακόμα και αν το μήνυμα είναι του εγχειριδίου προς όλους τους μαθητές, πόσο μάλλον όταν είναι ενός μαθητή προς ένα συγκεκριμένο συμμαθητή που μπορεί να έχει και ένα προσωπικό χαρακτήρα. Η σύγκριση που ζητά να κάνουν οι μαθητές σε διαφορετικούς κώδικες τους αναγκάζει να εστιάσουν στα κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας. Τα μεταγνωστικά ερωτήματα όπως : «πόσα μπορεί να είναι τα γράμματα εξόδου για κάθε γράμμα εισόδου;» ή «με πόσους τρόπους μπορεί να αποκωδικοποιηθεί ένα συγκεκριμένο γράμμα σε ένα κώδικα;» εκθέτουν τους μαθητές σε ποικιλία παραδειγμάτων και εστιάζουν στα μαθηματικά χαρακτηριστικά που διέπουν την αντιστοίχιση που κάνουν. Η όλη διαδικασία της εισαγωγής των μαθητών σε αντιστοιχίσεις γίνεται μέσα σε μια διαδικασία παιχνιδιού με κανόνες, που κρύβουν μαθηματικά χαρακτηριστικά, τα οποία στο τέλος κάθε δραστηριότητας εστιάζονται και καταγράφονται. Τη δραστηριότητα της κωδικοποίησης αποκωδικοποίησης συνοδεύουν τα σχόλια: «Letter-shift codes are relationships—any relationship between two variables is called a **relation.** You can also think of a relation as a set of ordered pairs. Codes that have exactly one output letter for every input letter are examples of **functions».**

Το πλαίσιο παραμένει σταθερό σε όλη την παράγραφο, όπως και το ενδιαφέρον και η εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία σε όλη την πρώτη παράγραφο της εισαγωγής στην έννοια. Από την επόμενη παράγραφο το πλαίσιο υποχωρεί και δίνει τη θέση του σε καθαρά μαθηματικές δραστηριότητες οι οποίες όμως έχουν αποκτήσει ήδη μια αναφορά και μπορούν πλέον να αναπτυχθούν περαιτέρω. Στην παράγραφο γραφικές παραστάσεις καταστάσεων του πραγματικού κόσμου επανέρχεται το εγχειρίδιο στην αναζήτηση επικουρίας προσωπικού κινήτρου και οικείου πλαισίου και ενδιαφέροντος για τους μαθητές. Επιπλέον επιδιώκει την εμπλοκή τους για την αντιστοίχιση καταστάσεων που περιγράφονται, με κατάλληλη από γραφικές παραστάσεις μέσω αιτιολόγησης των αντιστοιχίσεων τους.

Στην τελευταία παράγραφο στο συμβολισμό συνάρτησης, στο παράδειγμα Ε27 δίνεται συνάρτηση σε γραφική αναπαράσταση και ζητείται υπολογισμός τιμών μέσω συμπλήρωσης πίνακα. Τη συμπλήρωση που είναι

μια αμιγώς μαθηματική διαδικασία τη συνδυάζει με μια αντιστοίχιση των φυσικών 1, 2,…,26 στα γράμματα της αλφαβήτου με την οποία αποκωδικοποιείται το όνομα ενός μεγάλου μαθηματικού που το όνομά του εμπλέκεται στο συμβολισμό συνάρτησης. Το αρχικό πλαίσιο της αποκωδικοποίησης με το οποίο έγινε εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης επανέρχεται μετά από μια εκτενή αναφορά στην ίδια την έννοια, τις ιδιότητές της και τις αναπαραστάσεις της. Είναι σα να επανέρχεται και να κάνει πιο πλούσια την αντιστοίχιση καθώς αρχικά την κατέδειξε από αντιστοίχιση γραμμάτων σε γράμματα, μετά αντιστοίχιση γραμμάτων σε αριθμούς και τέλος αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών του συνόλου {1, 2, …,26} στα γράμματα, και όλα αυτά να συνδέονται σε ένα ενιαίο όλο. Τα πλεονεκτήματα της προσέλκυσης της προσοχής και της εμπλοκής των μαθητών αξιοποιούνται σε ένα παράδειγμα που αν έμενε στο επίπεδο της μαθηματικής δραστηριότητας «υπολογισμός τιμών συνάρτησης», θα μπορούσε να παραμείνει από αδιάφορη μέχρι ανιαρή. Με την επιλογή να θέσει αυτή τη δραστηριότητα αντιστοίχισης και το δένει με το αρχικό πλαίσιο στο οποίο αναδείχθηκε η έννοια της συνάρτησης και καθιστά ελκυστική μια δραστηριότητα που δεν έχει αναφορά και ενδιαφέρον από μόνη της.

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Ο ορισμός και τα Παραδείγματα στα Εγχειρίδια και στα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών

Θα ξεκινήσουμε τη συζήτησή μας γύρω από τα δυο εγχειρίδια συζητώντας το ρόλο του ορισμού της συνάρτησης σε καθένα από αυτά. Μέσα από τον ίδιο φακό θα εστιάσουμε στα παραδείγματα. Το ελληνικό εγχειρίδιο θέτει ρητά τον ορισμό. Είναι ξεκάθαρη η επιλογή των συγγραφέων του να συμπεριλάβουν στο υλικό για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης τον ορισμό που αποδέχεται η επιστημονική κοινότητα, βάζοντάς τον μάλιστα σε προεξέχουσα θέση μέσα σε χρωματισμένο πλαίσιο. Αυτό ευθυγραμμίζεται και με τους στόχους του προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά στην Α Λυκείου (2011) «*το πέρασμα σε ένα πιο προωθημένο, θεωρητικό μαθηματικό τρόπο σκέψης, βασικά στοιχεία του οποίου αποτελούν η 'αυστηρή' χρήση μαθηματικής ορολογίας και συμβολισμού, οι ορισμοί των εννοιών και η θεωρητική απόδειξη των ισχυρισμών*». Στο ίδιο το πρόγραμμα σπουδών δεν υπάρχει κάποια αναφορά στη σημασία χρήσης παραδειγμάτων από την εμπειρία του μαθητή. Τα παραδείγματα του εγχειριδίου προσανατολίζονται σε έργα που εμπεριέχουν δουλειά πάνω στον ορισμό των Dirichlet – Bourbaki για τη συνάρτηση. Στον ορισμό, η συνάρτηση παρουσιάζεται ως διαδικασία (κανόνας) με την οποία αντιστοιχίζεται κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α σε ένα ακριβώς στοιχείο ενός συνόλου Β. Γίνεται προσπάθεια να συμπεριληφθούν σε αυτόν διαφορετικές χροιές της συνάρτησης. Η λέξη 'κανόνας' του ορισμού μπορεί να παραπέμψει και στην ανάγκη τύπου για τη συνάρτηση. Το εγχειρίδιο επιχειρεί να αποτρέψει την παρανόηση ότι για κάθε συνάρτηση θα πρέπει να υπάρχει τύπος, παρέχοντας και παραδείγματα συνάρτησης για τα οποία δεν υπάρχει τύπος που να περιγράφει την αντιστοίχιση.

Στο αμερικάνικο εγχειρίδιο ο ορισμός της συνάρτησης αναδεικνύεται μέσα από το πλαίσιο των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα μετά την έκθεση των μαθητών σε παραδείγματα και μη παραδείγματα συναρτήσεων στο πλαίσιο της κωδικοποίησης αποκωδικοποίησης τίθεται ότι: «*οι κώδικες οι οποίοι έχουν ακριβώς ένα γράμμα εξόδου για κάθε γράμμα εισόδου αποτελούν παραδείγματα συναρτήσεων*». Το Principles and Standards for School Mathematics (NCTM 2000) σχετικά με το θέμα των ορισμών διατυπώνει τη

θέση ότι είναι σημαντικό να παρέχουμε στους μαθητές εμπειρίες που τους βοηθούν να κατανοήσουν το ρόλο των μαθηματικών ορισμών και πρέπει να τους χρησιμοποιούν στις μαθηματικές εργασίες τους. Κάτι τέτοιο τονίζει θα πρέπει να επιδιώκεται στις μεγάλες τάξεις, ωστόσο επιβάλλεται να αποφεύγεται η βιασύνη της επιβολής της επίσημης μαθηματικής γλώσσας. Οι ίδιοι οι μαθητές θα πρέπει να αισθανθούν την ανάγκη για την ακρίβεια των ορισμών και τη δύναμη των συμβατικών μαθηματικών όρων αφού πρώτα επικοινωνήσουν με μη τυπικό τρόπο. Στους στόχους της διδασκαλίας της συνάρτησης που παραθέτουμε και στο θεωρητικό μέρος δεν υπάρχει αναφορά για την απαίτηση του ορισμού.

Σχετικά με το ρόλο των παραδειγμάτων στη διδασκαλία, το αμερικάνικο πρόγραμμα σπουδών έχει τη θέση ότι οι μαθητές όλων των τάξεων θα πρέπει να μάθουν να σκέφτονται επαγωγικά από κανονικότητες και συγκεκριμένες περιπτώσεις, καθώς και να απορρίπτουν εικασίες βρίσκοντας αντιπαραδείγματα. Ειδικά για την Άλγεβρα στις μεγάλες τάξεις τονίζει τη σημασία της έκθεσης σε πλήθος παραδειγμάτων σε διαφορετικά πλαίσια πραγματικών προβλημάτων. Για να μελετήσουν οι μαθητές χαρακτηριστικά συναρτήσεων προτείνει να χρησιμοποιούνται καταστάσεις οι οποίες μοντελοποιούνται από συναρτήσεις διαφορετικών κλάσεων.

Σε αυτό το πλαίσιο της διαφορετικής εστίασης των προγραμμάτων σπουδών στον ορισμό και τα παραδείγματα της συνάρτησης, ερμηνεύονται και τα ευρήματά μας σχετικά με το είδος και την αλληλουχία των παραδειγμάτων στα δυο εγχειρίδια.

Το ελληνικό εγχειρίδιο παραθέτει μόνο παραδείγματα στην έννοια μέχρι να οδηγηθεί στον ορισμό της συνάρτησης και στη συνέχεια στο πλαίσιο των αναπαραστάσεων του βελοδιαγράμματος και του γραφήματος, και με δεδομένο τον ορισμό, θέτει παραδείγματα και μη παραδείγματα συναρτήσεων. Μη παραδείγματα λεκτικών αντιστοιχίσεων προέκυψαν από την ανάλυση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων του προγράμματος σπουδών παρά από το ίδιο το εγχειρίδιο. Ίσως αυτό το κενό του εγχειριδίου επιχειρούν να καλύψουν οι προτεινόμενες δραστηριότητες.

Αντίθετα στο αμερικάνικο εγχειρίδιο έχουμε εναλλαγή σε παραδείγματα και μη παραδείγματα συνάρτησης μέσα στο ίδιο το πλαίσιο της διερευνητικής δραστηριότητας κωδικοποίησης – αποκωδικοποίησης. Ο συνδυασμός

παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων σε μια αλληλουχία λειτουργούν ως ένα ενιαίο όλο, τόσο στη δόμηση της έννοιας όσο και κατά τη μελέτη των διαφορετικών αναπαραστάσεών της. Τα παραδείγματα θέτουν την έννοια τα μη παραδείγματα βοηθούν στην οριοθέτησή της. Εξυπηρετούν στο να τονίσουν κρίσιμα χαρακτηριστικά της (Zodik και Zaslavsky, 2008).

Η Hershkowitz (1990, αναφορά σε Bills et al. 2006) παρατηρεί μια τάση να συλλογιζόμαστε από τα πρωτοτυπικά παραδείγματα παρά από τους ορισμούς, στα μαθηματικά, αναδεικνύοντας έτσι και τη σημασία τους στη δόμηση της έννοιας, αλλά και τη σχέση που αναπτύσσεται μεταξύ των παραδειγμάτων και της ίδιας της έννοιας.

5.2 Διαχείριση των Παραδειγμάτων

Αναζητώντας τί κάνει ο μαθητής με τα παραδείγματα στα εγχειρίδια που αναλύσαμε, φαίνεται μια διαφορετική διαχείρισή τους στα δυο εγχειρίδια.

Το ελληνικό εγχειρίδιο θέτει εισαγωγικά παραδείγματα στην έννοια ή στις αναπαραστάσεις αυτής, και παραδείγματα εφαρμογής της έννοιας, ενώ το πρόγραμμα σπουδών συμπληρώνει με διερευνητικά ερωτήματα. Λεκτικές αντιστοιχίσεις, πίνακες τιμών ή γραφήματα εξετάζονται ως προς το αν αποτελούν περιπτώσεις συναρτήσεων. Παρατηρείται μάλιστα μια «στεγανοποίηση» ως προς τη διαχείριση των παραδειγμάτων. Τα πρώτα παραδείγματα του εγχειριδίου είναι εισαγωγικά στην έννοια και με αυτά οδηγείται επαγωγικά στον ορισμό της συνάρτησης. Ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής του ορισμού ώστε διαφορετικές αναπαραστάσεις να εξεταστούν ως προς το αν παριστάνουν συνάρτηση. Μάλιστα κάθε αναπαράσταση μελετάται ξεχωριστά, χωρίς να τονίζεται ότι πρόκειται για διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης. Αντίστοιχα με παραδείγματα εισάγει στο συμβολισμό της συνάρτησης και την εύρεση του πεδίου ορισμού της και μετά δίνει παραδείγματα εφαρμογής σε αυτά. Η διεργασία της διερεύνησης από τους μαθητές, τίθεται μόνο σε δραστηριότητες που προτείνονται στο πρόγραμμα σπουδών και επαφίεται στην ικανότητα του εκπαιδευτικού να τις ενσωματώσει κατάλληλα στη διδασκαλία του. Η γνώση παρουσιάζεται ως έτοιμο προϊόν. Το εγχειρίδιο δεν επιτυγχάνει να θέσει

προβλήματα στο πλαίσιο της λύσης των οποίων να εμπλακούν οι μαθητές σε διερεύνηση και ανάπτυξη στρατηγικών λύσης, όπως στοχεύει το πρόγραμμα σπουδών.

Αντίθετα το αμερικάνικο εγχειρίδιο καταφέρνει να εμπλέξει τους μαθητές σε δραστηριότητες μαθηματικοποίησης καταστάσεων. Θέτει το πλαίσιο της αποκρυπτογράφησης μέσα στο οποίο με ένα εισαγωγικό παράδειγμα (έναν κώδικα κρυπτογράφησης) ενεργοποιεί και παραδείγματα εφαρμογής κώδικα και διερευνητικά για τις κρίσιμες ιδιότητες που πρέπει να έχει ένας κώδικας ώστε να εξυπηρετεί το σκοπό της κατασκευής του. Στο ίδιο πλαίσιο οι μαθητές κατασκευάζουν δικό τους κώδικα κρυπτογράφησης (παράδειγμα μαθητών) και δοκιμάζουν τη δομή του χώρου των παραδειγμάτων τους και το εύρος των δυνατών μεταβολών του κώδικα (Watson & Mason, 2005). Με αντίστοιχο τρόπο διαχειρίζεται το εγχειρίδιο και τα παραδείγματα που σχετίζονται με τις αναπαραστάσεις και τις ιδιότητες της συνάρτησης. Με λίγα μόνο εισαγωγικά παραδείγματα, 6 συνολικά στο σύνολο των 53, καταφέρνει μια συνύφανση μεταξύ διερεύνησης και εφαρμογής που απαιτεί εννοιολογική κατανόηση, αιτιολόγηση και μεταγνωστική ενημερότητα. Ταυτόχρονα αναπτύσσονται πτυχές εισαγωγής στην έννοια και εφαρμογής της έννοιας, παρά μια εστίαση πρώτα σε εισαγωγή και κατόπιν σε εφαρμογή αυτής όπως παρατηρήσαμε στο ελληνικό εγχειρίδιο.

5.3 Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων

Το αμερικάνικο εγχειρίδιο γράφτηκε στη βάση των προτύπων του NCTM και έλαβε υπόψη του πορίσματα ερευνών. Για μια αποτελεσματική διδασκαλία σύμφωνα με το NCTM (2000) θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μαθηματικά έργα που εισάγουν σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες και προκαλούν νοητικά τους μαθητές. Προσεκτικά επιλεγμένα έργα εξάπτουν την περιέργεια των μαθητών και τη διοχετεύουν μέσα στα μαθηματικά. Τα έργα αυτά μπορεί να είναι συνδεδεμένα με τις εμπειρίες των μαθητών από τον πραγματικό κόσμο ή μπορεί να εδράζονται σε καθαρά μαθηματικό πλαίσιο αλλά σίγουρα θα πρέπει να προκαλούν το ενδιαφέρον τους και να ενθαρρύνουν την απαιτητική εργασία. Οι σχολικές μαθηματικές εμπειρίες θα

πρέπει να περιλαμβάνουν ευκαιρίες να μαθαίνουν οι μαθητές μαθηματικά ενώ εργάζονται με προβλήματα που εγείρονται και σε πλαίσια έξω από τα μαθηματικά.

Στο περιβάλλον των συναρτήσεων το αμερικάνικο εγχειρίδιο αξιοποίησε τις προτάσεις του NCTM (2000) και παρείχε στους μαθητές την ευκαιρία να βιώσουν την έννοια μέσα σε ένα πλαίσιο. Διερευνήσεις και δραστηριότητες διαμόρφωσαν ένα περιβάλλον μελέτης στο οποίο οι μαθητές μοντελοποίησαν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, αξιοποίησαν την άτυπη γνώση τους που μεταφέρουν στο σχολείο, πέτυχαν να συνδέσουν μαθηματικές έννοιες με εμπειρίες της καθημερινής ζωής. Το εγχειρίδιο δίνει έμφαση στη διαδικασία μοντελοποίησης για να παραδειγματοποιήσει την έννοια σε αντίθεση με το ελληνικό που δανείζεται έτοιμα μοντέλα από τη φυσική την οικονομία και εσωτερικά στα μαθηματικά. Το Discovering Algebra εφευρίσκει μια κατάσταση, την κρυπτογραφία, στο πλαίσιο της οποίας οι μαθητές κατασκευάζουν την έννοια της συνάρτησης. Χρησιμοποιεί το πραγματικό πλαίσιο για να δώσει νόημα στην έννοια και στη συνέχεια μετακινείται σε καθαρά μαθηματικό πλαίσιο για να δώσει έμφαση στις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Το ίδιο μοτίβο ακολουθεί και στη μελέτη των ιδιοτήτων της συνάρτησης. Τις αναδεικνύει σε κάποιο πραγματικό πλαίσιο και συστηματοποιεί τη μελέτη τους σε μαθηματικό πλαίσιο.

Σε άρθρο των Atkinson et al. (2000) για τις διδακτικές αρχές που προτείνει η έρευνα σχετικά με τα λυμένα παραδείγματα, επισημαίνεται ότι μπορεί να υπάρχουν καλύτερα αποτελέσματα αν μετά από ένα λυμένο παράδειγμα έπεται ένα αντίστοιχο πρόβλημα πρακτικής, παρά όταν μια ομάδα λυμένων ακολουθεί μια αντίστοιχη ομάδα προβλημάτων εφαρμογής. Στο ίδιο άρθρο τονίζεται η αξία των αιτιολογήσεων που δίνουν οι μαθητές καθώς μελετούν επεξεργασμένα παραδείγματα.

Τα ευρήματα αυτά είναι σε συμφωνία με τον τρόπο που διαχειρίζεται το αμερικάνικο εγχειρίδιο τα παραδείγματα. Έχουμε μια αλληλουχία μεταξύ εισαγωγικού παραδείγματος που θέτει το εγχειρίδιο και εφαρμογή αυτού από τους μαθητές για να κωδικοποιήσουν και να αποκωδικοποιήσουν μηνύματα. Κατασκευή δικού τους παραδείγματος (εφαρμογή) αλλά και παράδειγμα κώδικα (μη παράδειγμα συνάρτησης) που δε μπορεί να εφαρμοστεί για αποκωδικοποίηση με αντίστοιχη αιτιολόγηση από τους μαθητές γιατί

αποτυγχάνει αυτό το παράδειγμα. Κατόπιν δραστηριοποίηση των μαθητών ώστε να φτιάξουν ο καθένας δικό του παράδειγμα που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποκρυπτογράφηση (διόρθωση των κρίσιμων χαρακτηριστικών του μη παραδείγματος). Σε όλα τα προηγούμενα βήματα είναι κυρίαρχη η εστίαση του εγχειριδίου στον αναστοχασμό και την ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών. Ένα σύνολο μαθηματικών δραστηριοτήτων συνυφαίνονται μέσα σε ένα έργο, με πλαίσιο αναφοράς την κρυπτογραφία. Διαφορετικά σκέλη της *μαθηματικής επάρκειας* (Kilpatrick, 2001) ή *του μαθηματικού εγγραμματισμού,* όπως και ο ίδιος και άλλοι ερευνητές αποδέχονται ως όρο, αναπτύσσονται ταυτόχρονα αν και όχι ισόρροπα όπως θα σχολιάσουμε παρακάτω. Τα παραδείγματα προσφέρονται για εννοιολογική κατανόηση, πολλαπλές συνδέσεις αναπαραστάσεων αλλά και συνδέσεις με τα πλαίσια, εξασκούν στην επιχειρηματολογία και συνεισφέρουν στην ανάπτυξη θετικής στάσης ως προς τα μαθηματικά (Kilpatrick, 2001). Δε δίνουν όμως έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων αλγεβρικής ευχέρειας. Η «διαδικαστική ευχέρεια» αποτελεί μια τις πτυχές του μαθηματικού εγγραμματισμού σύμφωνα με τον Kilpatrick. Το αμερικάνικο εγχειρίδιο δίνει πολλές ευκαιρίες για εννοιολογική κατανόηση αλλά είναι ελλιπές σε αλγεβρική ευχέρεια και έμφαση σε δεξιότητες.

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας αποτελεί στόχευση του προγράμματος σπουδών και είναι και ζητούμενο για την εκπαίδευση. Το εγχειρίδιο αξιοποιεί μόνο το graphing calculator και δεν προσφέρει δραστηριότητες για τη διδασκαλία με χρήση λογισμικών. Η χρήση graphing calculator για το σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων λύνει το πρόβλημα της εύκολης πρόσβασης στην οπτικοποίηση αλλά μπορεί και να εμποδίσει την ανάπτυξη αλγεβρικών δεξιοτήτων. Σε ένα λυμένο παράδειγμα αξιοποιεί τις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών από το χειρισμό επαναληπτικών διαδικασιών που οδήγησαν σε γραμμικές εξισώσεις, και κάνει το πέρασμα στη γραφική παράσταση γραμμικής συνάρτησης με χρήση graphing calculators. Καθένα ειδικό παράδειγμα εντάσσεται στη γενικότερη δομή και με το παράδειγμα αυτό καταλήγει στη γενίκευση: «όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες περνούν το test της κατακόρυφης γραμμής, άρα αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων».

Αναδεικνύεται κυρίαρχη η γραφική αναπαράσταση (τα 25 από τα 53 παραδείγματα δίνονται με γραφική αναπαράσταση). Μόνο στο πλαίσιο αυτής μελετώνται ιδιότητες της συνάρτησης (μονοτονία, ακρότατα) και ορολογία για την περιγραφή γραφημάτων (γραμμική ή μη γραμμική συνάρτηση, σταθερός ή μεταβλητός ρυθμός μεταβολής τιμών). Σε γραφικό μόνο πλαίσιο οι μαθητές αποκτούν εμπειρία συναρτήσεων πολλαπλού τύπου (καταγράψαμε 6 τέτοια παραδείγματα). Ακόμα και στην παράγραφο που το εγχειρίδιο εστιάζει στο συμβολισμό και τον υπολογισμό των τιμών συνάρτησης, που θα μπορούσε να αποτελέσει μια ευκαιρία για να αναπτύξουν οι μαθητές ευχέρεια σε αλγεβρικές στρατηγικές, τα παραδείγματα του εγχειριδίου για τον υπολογισμό τιμών είναι μια γραμμική συνάρτηση, που δίνεται με τύπο, και μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, που δίνεται με γραφική αναπαράσταση, στα οποία οι δεξιότητες που καλλιεργεί είναι καθαρά αριθμητικοί υπολογισμοί τιμών των συναρτήσεων.

Το ελληνικό εγχειρίδιο, αντίθετα με τα πορίσματα ερευνών, και παρά τη στόχευση του προγράμματος σπουδών για «*ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση προβλημάτων, στη δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών, την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος*», παραμένει σε απλή παράθεση παραδειγμάτων, που στοχεύουν να οδηγήσουν στον ορισμό και κατόπιν να εισάγουν στις αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Οι μαθητές δεν εμπλέκονται σε κάποιο έργο που να τους βοηθά να βιώσουν την έννοια. Έτοιμα μοντέλα συναρτήσεων παρουσιάζονται σε μαθηματικό ή εξωμαθηματικό πλαίσιο. Σε όλες τις περιπτώσεις το μη μαθηματικό πλαίσιο είναι παρένθετο καθώς οι μαθητές δεν κάνουν κάτι μέσα σε αυτό, απλά το εγχειρίδιο επικαλείται, για παράδειγμα, το πλαίσιο της οικονομίας για να θέσει ως παράδειγμα συνάρτησης, αυτή που σε κεφάλαιο 5000 ευρώ αποδίδει τόκο $5000\,\frac{\varepsilon}{100}$.

Σχετικά με τις αναπαραστάσεις, στο ελληνικό εγχειρίδιο παρατηρείται μια εστίαση στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης ως αυτόνομα και διαχωρισμένα μαθηματικά αντικείμενα. Δεν επιδιώκεται, τουλάχιστον εμφανώς, σύνδεση των αναπαραστάσεων, ως διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να δοθεί μια συνάρτηση, και ίσως αυτό να ενισχύει την τάση των μαθητών να ταυτίζουν τη συνάρτηση με μια μόνο από τις αναπαραστάσεις της. Δεν υποστηρίζεται από το εγχειρίδιο η ενέργεια

κατανόησης K(f)-15 της Sierpinska: «διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης των συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων». Το εγχειρίδιο μάλλον τονίζει ως κυρίαρχη την αναπαράσταση του τύπου, μέσω του οποίου καλλιεργεί στρατηγικές υπολογισμού τιμών και σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, και στρατηγικές εύρεσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Μέσα από παραδείγματα για την εύρεση του πεδίου ορισμού επιτυγχάνει πλούσιες εννοιολογικές συνδέσεις των συναρτήσεων με τις εξισώσεις – ανισώσεις. Η γραφική παράσταση δεν αξιοποιείται ιδιαίτερα για τη μελέτη της έννοιας της συνάρτησης. Οι μαθητές θα εκτεθούν στις γραφικές παραστάσεις κλάσεων συναρτήσεων καθώς τις μελετούν σε επόμενες παραγράφους και τάξεις.

Στον αντίποδα του ελληνικού, το αμερικάνικο εγχειρίδιο διατηρεί το πλαίσιο σε ολόκληρη τη δραστηριότητα μιας παραγράφου. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να δοθεί η ίδια συνάρτηση με διαφορετικές αναπαραστάσεις, στα διάφορα βήματα της δραστηριότητας, επιλέγοντας κάθε φορά να επεξεργαστεί εκείνη την αναπαράσταση που μπορεί να δώσει πιο ευέλικτα στις πληροφορίες που θέλει. Η επιλογή αυτή, αφενός βοηθά στη σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων της ίδιας συνάρτησης, και αφετέρου συνηγορεί στο να γίνει αντιληπτό στους μαθητές ότι κάθε διαφορετικός τύπος αναπαράστασης δίνει πληροφορίες για πλευρές της συνάρτησης αλλά δε μπορεί από μόνη της να την περιγράψει πλήρως. Η σύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων και η ευέλικτη μετακίνηση με ταυτόχρονη μεταφορά νοήματος από τη μια στην άλλη είναι αυτή που μπορεί να οδηγήσει στη συγκρότηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές.

Η μαθηματική δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές εμπλέκονται μέσω των παραδειγμάτων είναι ποιοτικά διαφορετική στα δυο εγχειρίδια. Το αμερικάνικο εγχειρίδιο επιδιώκει συνύφανση σκελών μαθηματικής δραστηριότητας μέσα σε ένα παράδειγμα. Παρατηρείται ιδιαίτερη εστίαση στις συνδέσεις τόσο των αναπαραστάσεων, όσο και με τα πλαίσια και κυρίως τα πλαίσια καταστάσεων του πραγματικού κόσμου μέσω των οποίων, σε γραφική αναπαράσταση μελετά τις ιδιότητες συναρτήσεων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνουν τα παραδείγματα στη δραστηριότητα της μεταγνωστικής ενημερότητας αλλά και στην καλλιέργεια θετικής στάσης ως προς τα μαθηματικά. Και αυτό δεν αποτελεί αμιγή μαθηματική δραστηριότητα του παραδείγματος.

Αναπτύσσεται παράλληλα με άλλες. Ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνονται τα ερωτήματα του έργου με το οποίο καταπιάνονται οι μαθητές, ο ρόλος των μαθητών στην εξέλιξη της διδασκαλίας, η επιδίωξη της μεταξύ των μαθητών συνεργασίας, αποτελούν συνιστώσες που καθορίζουν τη στάση τους ως προς τα μαθηματικά. Οι ιδέες για την επίτευξη των στόχων διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης φαίνεται να στοχεύουν παράλληλα και στην ενσωμάτωση και τη διατήρηση του ενδιαφέροντος των μαθητών ενώ ασχολούνται με το έργο. Εμπλέκουν τους μαθητές στη διαδικασία οικοδόμησης μαθηματικής κατανόησης.

Από την άλλη το ελληνικό εγχειρίδιο δεν επιτυγχάνει να εμπλέξει ενεργά τους μαθητές στο έργο της οικοδόμησης της δικής τους μαθηματικής γνώσης. Η μόνη εμπλοκή που καταγράψαμε στα παραδείγματα που μελετήσαμε περιορίζονταν σε περιπτώσεις αιτιολόγησης αν δοθείσες αναπαραστάσεις αποτελούσαν περιπτώσεις συναρτήσεων. Και αυτό συνέβη σε λεκτική αναπαράσταση, σε γράφημα, σε βελοδιάγραμμα και σε πίνακα αντιστοίχησης. Ιδιαίτερα πλούσια παρουσιάζεται στα παραδείγματα του ελληνικού εγχειριδίου η μαθηματική δραστηριότητα των εννοιολογικών συνδέσεων. Η μαθηματική ταυτότητα του εγχειριδίου είναι ισχυρή σε θέματα συμπερίληψης του επιστημονικά αποδεκτού μαθηματικού ορισμού για τη συνάρτηση και του τύπου αυτής, ως κυρίαρχη αναπαράσταση για την περιγραφή της συνάρτησης. Η χροιά αυτή για την έννοια της συνάρτησης, με έμφαση στον αναλυτικό της τύπο, εμφανίζεται και ιστορικά στην πορεία για την ανάπτυξη της έννοιας. Οι τύποι που χρησιμοποιεί το εγχειρίδιο περιλαμβάνουν τετραγωνικές συναρτήσεις, γραμμικές συναρτήσεις, συναρτήσεις με ριζικά στον τύπο τους, αλλά και συναρτήσεις πολλαπλού τύπου. Μάλιστα σε παράδειγμα που στοχεύει στην ερμηνεία δοθέντος γραφήματος με πραγματολογικές αναφορές, θέτει ως τελευταίο ερώτημα να βρουν οι μαθητές τον τύπο της συνάρτησης. Και πρόκειται για συνάρτηση πολλαπλού τύπου.

Συνδέσεις επιχειρήθηκαν και μεταξύ διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών, Άλγεβρα – Γεωμετρία, αλλά και των συναρτήσεων με εξισώσεις και ανισώσεις, με μετασχηματισμούς (αντίθετη συνάρτηση), και αξιοποιήθηκε κάθε ευκαιρία για εξάσκηση σε αλγεβρικούς χειρισμούς.

Στο εγχειρίδιο καταγράψαμε και πλήθος συνδέσεων με τα πλαίσια. Τα πλαίσια όμως δεν αξιοποιήθηκαν ως περιβάλλον μαθηματικοποίησης καταστάσεων, αλλά κυρίως για να δώσουν ένα μοντέλο που λειτουργεί σε αυτό το πλαίσιο και είναι ήδη γνωστό στους μαθητές είτε από την εμπειρία είτε από άλλους επιστημονικούς χώρους. Το πλαίσιο της φυσικής χρησιμοποιήθηκε περισσότερο από όλα και με διαφορετικούς τρόπους. Άλλοτε για να προετοιμάσει τον ορισμό, άλλοτε για να δείξει το συμβολισμό συναρτήσεων στο χώρο της φυσικής και άλλοτε ως πλαίσιο για την ερμηνεία γραφικής παράστασης συνάρτησης σε σχέση με το χρόνο. Η χρήση αυτή του πλαισίου υπολείπεται σημαντικά από το να αποτελεί περιβάλλον κατασκευής της γνώσης. Είναι εντελώς διαφορετική από αυτή που προτείνει NCTM (2000) και καταγράψαμε και στην αρχή αυτής της ενότητας. Επιπλέον, σύμφωνα με τη Sierpinska (1992) οι συναρτήσεις είναι ένα εργαλείο για τη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών και άλλων φαινομένων και στο πλαίσιό τους αποκτά νόημα και η έννοια. Η ενέργεια κατανόησης που προτείνει είναι η K(f) 8 : «σύνθεση των εννοιών των νόμων της φυσικής και της έννοιας της συνάρτησης». Το ελληνικό εγχειρίδιο παρουσιάζει τους νόμους της φυσικής ως παραδείγματα συναρτήσεων, αλλά αστοχεί στο να τους αναδείξει ως εργαλεία μοντελοποίησης φαινομένων. Η έμφαση μετατοπίζεται στο ήδη έτοιμο μοντέλο.

Από την άλλη όπως ήδη σχολιάσαμε πιο πριν οι συνδέσεις αναπαραστάσεων στο ελληνικό εγχειρίδιο ήταν φτωχές.

Το αμερικάνικο εγχειρίδιο χρησιμοποιεί το πλαίσιο της κρυπτογραφίας μέσα στο οποίο αναδεικνύει την έννοια της συνάρτησης, ως μετατόπιση γράμματος της αλφαβήτου κατά συγκεκριμένο αριθμό θέσεων. Τα πρωτοτυπικά παραδείγματα που συνδέονται με την έννοια είναι «ένα προς ένα» αντιστοιχίσεις. Στη συνέχεια επιδιώκει να άρει μια πιθανή παρανόηση ότι μόνο οι «ένα προς ένα» αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις παρέχοντας παραδείγματα και συναρτήσεων «πολλά ένα». Η μια μάλιστα από αυτές είναι η οριακή περίπτωση της σταθερής αντιστοίχισης όλων των στοιχείων στο μηδέν. Σε πραγματικό πλαίσιο αλλά σε γραφική αναπαράσταση μελετά συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα «πολλά ένα». Οι όποιες συναρτήσεις πολλαπλού τύπου καταγράφηκαν, δόθηκαν αποκλειστικά σε γραφική αναπαράσταση. Οι μορφές των συναρτήσεων που επιλέγει να

χρησιμοποιήσει έχουν να κάνουν με αξιοποίηση προηγούμενων γνώσεων των μαθητών και έτσι προτιμά γραμμικές και εκθετικές συναρτήσεις.

5.4 Περιορισμοί και δυσκολίες της έρευνας – Προτάσεις

Η ανάλυση μας αφορά στα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της συνάρτησης σε δυο σχολικά εγχειρίδια. Τα εγχειρίδια αυτά χρησιμοποιούνται από μαθητές λαών με διαφορές στην κουλτούρα, την ιστορία και το εκπαιδευτικό σύστημα.

Δυσκολία αντιμετωπίσαμε στο να αντιστοιχίσουμε τις βαθμίδες εκπαίδευσης σε δυο εκπαιδευτικά συστήματα τόσο διαφορετικά. Στο τελευταίο επίπεδο εκπαίδευσης, πριν το πανεπιστήμιο, εισάγονται οι μαθητές στην Αμερική στην $9^{η}$ τάξη (High School) που σε μας αντιστοιχεί στην $3^{η}$ Γυμνασίου. Η σειρά με την οποία παρουσιάζονται οι διάφορες θεματικές περιοχές και οι γνώσεις στις οποίες στηρίζονται είναι διαφορετικές. Εμείς επιλέξαμε το εγχειρίδιο της Α τάξης για το ελληνικό Λύκειο και της πρώτης τάξης στο High School στην Αμερική ($9^{η}$ τάξη) για να αναλύσουμε τα παραδείγματα με τα οποία εισάγουν στην έννοια και τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Η δομή του περιεχομένου των εγχειριδίων ήταν διαφορετική. Αυτό μας δημιούργησε δυσκολίες στον καθορισμό της μονάδας ανάλυσης (παράδειγμα). Το αμερικάνικο ήταν δομημένο στη βάση δραστηριοτήτων χωρισμένων σε βήματα ενώ το ελληνικό είχε τη μορφή «παρουσίαση θέματος – παραδείγματα – ασκήσεις». Παράδειγμα στο αμερικάνικο μπορεί να αποτέλεσε μια ολόκληρη δραστηριότητα ή μπορεί να ήταν ένα βήμα της δραστηριότητας. Άλλοτε πάλι ήταν ένα μόνο υποερώτημα ενός βήματος της δραστηριότητας. Αντίθετα στο ελληνικό εγχειρίδιο η μονάδα ανάλυσης ήταν ευδιάκριτη. Το πώς διαχειριστήκαμε τελικά τα παραδείγματα περιγράψαμε στο κεφάλαιο «τι συνιστά για μας παράδειγμα».

Ιδιαίτερα δύσκολο αποδείχθηκε το έργο του χαρακτηρισμού της μαθηματικής δραστηριότητας της μεταγνωστικής ενημερότητας καθώς και της ανάγνωσης εκείνων των χαρακτηριστικών που ενθαρρύνουν θετική στάση ως προς τα μαθηματικά.

Το αμερικάνικο εγχειρίδιο που αναλύσαμε έχει τη μορφή «τετραδίου εργασίας του μαθητή». Το εγχειρίδιο δεν είναι κατάλληλο για να «διαβαστεί» και να «μαθευτεί» από το μαθητή. Είναι ένα εγχειρίδιο που κατευθύνει το μαθητή να δράσει για να μάθει. Με τις δραστηριότητες και τα ερωτήματα που θέτει καθορίζει μια τροχιά μέσω της οποίας ο μαθητής οδηγείται στην κατασκευή της έννοιας. Την τροχιά αυτή ακολουθήσαμε και εμείς για να αναλύσουμε τα παραδείγματα ως προς τις μεταγνωστικές τους προθέσεις και την πιθανή στάση που μπορεί να διαμορφώσει ο μαθητής ως προς τα μαθηματικά.

Αντίστοιχη ανάγνωση δε μπορούσαμε να κάνουμε στα παραδείγματα του ελληνικού εγχειριδίου. Το ελληνικό εγχειρίδιο είναι πρωτίστως ένα επιστημονικό εγχειρίδιο μαθηματικών, το οποίο απαιτεί τη διαμεσολάβηση του εκπαιδευτικού για να μετασχηματιστεί σε εργαλείο κατασκευής της γνώσης. Το υλικό όπως παρατίθεται δεν προσφέρει δραστηριότητες για το μαθητή. Παρουσιάζει ένα έτοιμο σώμα προ- ανακαλυφθείσας γνώσης. Τα παραδείγματα του σε ένα τέτοιο πλαίσιο παρουσιάζονται.

Αναλύοντας τα παραδείγματα του ελληνικού εγχειριδίου παίρνουμε λίγες πληροφορίες για το είδος της δραστηριότητας που αναπτύσσεται στην τάξη. Τι κάνει ο εκπαιδευτικός με αυτά; τα μεταφέρει απλά; θέτει ερωτήματα γύρω από αυτά; εμπλέκει και τους μαθητές σε έργα ή τα εκτελεί ο ίδιος; Επιπλέον δεν υπάρχουν έρευνες που να μας δίνουν στοιχεία για το πώς χρησιμοποιούν οι έλληνες δάσκαλοι τα εγχειρίδια μαθηματικών στα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η ανάλυση των παραδειγμάτων ως προς τις μεταγνωστικές στρατηγικές που προάγουν και την πιθανή στάση που προκαλούν ως προς τα μαθηματικά, περνά μέσα από τη μελέτη του πώς αυτά χρησιμοποιούνται στην τάξη.

Το Discovering Algebra μας αφήνει παράθυρο στη χρήση των παραδειγμάτων. Θέτει έργα και ερωτήματα και ο μαθητής εμπλέκεται σε δουλειά για να απαντήσει. Τα παραδείγματα των έργων που θέτει μας αποκαλύπτουν τι είδους εμπειρίες δοκιμάζει ο μαθητής καθώς δουλεύει με αυτά.

Αντίθετα το ελληνικό εγχειρίδιο δεν επιτυγχάνει να εμπλέξει τους μαθητές ενεργητικά στη διδασκαλία. Αν αυτό επιτευχθεί θα είναι έργο του δασκάλου και όχι πρόθεση του εγχειριδίου. Για να δούμε μεταγνωστικά

χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων και στάση των μαθητών ως προς τα μαθηματικά θα έπρεπε να είχαμε πρόσβαση στις αίθουσες διδασκαλίας. Να δούμε πως χρησιμοποιούν τα παραδείγματα οι εκπαιδευτικοί και πιο ρόλο ορίζουν στους μαθητές τους. Αυτό δεν ήταν διάφανο στο εγχειρίδιο. Κάτι τέτοιο όμως ήταν έξω από τους στόχους αυτής της εργασίας, στο πλαίσιο ανάλυσης των παραδειγμάτων των εγχειριδίων. Αποτελεί όμως έναν περιορισμό ως προς την ανάλυση των παραδειγμάτων του ελληνικού εγχειριδίου.

Οι άξονες ανάλυσης όπως τελικά διαμορφώθηκαν έκαναν το θέμα πολύ ευρύ. Είδαμε τα εγχειρίδια σε σχέση με τα προγράμματα σπουδών τα οποία υπηρετούν, και μέσα σε αυτά τα παραδείγματα για μια έννοια δύσκολη, με πολλές πτυχές που αξίζει να μελετηθούν. Για κάθε παράδειγμα κάναμε πολλές και διαφορετικές αναγνώσεις. Αναγνώσεις επηρεασμένες από τη βιβλιογραφία των παραδειγμάτων για το είδος, τη διαχείρισή τους και το πλαίσιο εισαγωγής τους, αλλά και αναγνώσεις που αφορούν στη συνάρτηση ως έννοια. Στις δυσκολίες που η έρευνα μας δείχνει ότι αυτή θέτει και σε αντίστοιχες ερμηνείες των δυσκολιών. Επιπλέον για κάθε παράδειγμα αναγνώσαμε τη μαθηματική δραστηριότητα που αναμένεται να προκαλέσει και τη διάθεση των μαθητών ως προς τα μαθηματικά. Δεν αντισταθήκαμε στην πρόκληση να εξετάσουμε τη μορφή και τις ιδιότητες των παραδειγμάτων με τα οποία το εγχειρίδιο εισαγάγει στη συνάρτηση. Η μορφή και οι ιδιότητες των παραδειγμάτων, συμβάλλουν στην εικόνα της έννοιας που δομούν οι μαθητές. Όλα αυτά κάνουν τη μελέτη μας πλατιά και εμείς προσπαθήσαμε να μην είναι και ρηχή.

Πέρα από τις οποιεσδήποτε αναγνώσεις μπορεί να κάνει κανείς ως προς τα παραδείγματα και τα μαθηματικά χαρακτηριστικά που κουβαλούν, αυτό που αναδεικνύει παράλληλα η ανάλυσή μας, είναι η ανάγκη τα μαθηματικά εγχειρίδια να οργανώνονται γύρω από άξονες που δίνουν έμφαση στο μαθηματικό τους περιεχόμενο, στη διδακτική τους εστίαση και στην υποστήριξη στον εκπαιδευτικό. Σε αυτή την κατεύθυνση θα πρέπει να αξιοποιηθεί η υπάρχουσα έρευνα. Τα εγχειρίδια των σχολικών μαθηματικών θα πρέπει να ευθυγραμμίζονται με τους στόχους διδασκαλίας για τα μαθηματικά, που θέτει η πολιτεία, και να ενσωματώνουν αποτελέσματα

ερευνών, ώστε στις σχολικές τάξεις να διδάσκονται σημαντικά μαθηματικά και για όλους τους μαθητές.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Alcock, L. & Inglis, M. (2008), Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 111-129.

American Association for the Advancement of Science, Project 2061 (1991). *Middle Grades Mathematics Textbooks: Benchmarks – based Evaluation. Washington, DC:* American Association for the Advancement of Science.

Antonini, S. Presmeg, N. Mariotti, M. A. & Zaslavsky, O. (2011), On examples in Mathematicl thinking and learning. *Zdm Mathematics Education*, *43*(2), 191-194.

Arbaugh, F., Lannin, J., Jones, D. & Park – Rogers, M. (2006), Examining instructional practices in Core – Plus lessons: Implications for professional development. J*ournal of Mathematics Teacher Education, 9*, 517 – 550*.*

Arzarello, F. Ascari, M. & Sabena C. (2011). A model for developing students' example space: the key role of the teacher. *Zdm Mathematics Education*, 43(2), 295-306.

Atkinson, R., Derry, S., Renkl, A. & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, *70*(2), 181-214.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague, Czech Republic: PME.

Dorfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dreyfus, T. (1991), Advanced mathematical thinking processes. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*,103-131.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., (2011), Towards a comprehensive theoretical model of pre-service teachers' conceptual understanding of functions.

35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Ankara, Turkey.

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., Zachariades, T. (2010). Studying Teachers' Mathematical Argumentation in the Context of Refuting Students' Invalid Claims. *Journal of Mathematical Behavior, 29*, 160–168.

Goldenberg, P. & Mason, J. (2008), Shedding Light on and With Example Spaces. *Educational Studies in Mathematics*. 69, 183-194.

Haggarty, L., Pepin, B., (2002), An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal,* 28 (4), 567 – 590.

Hartter, J. B. (2009), A function or not a function? That is the Question. *Mathematics teacher, 103* (3), 201-205.

Hitt, F. (1998), Difficulties in the Articulation of Different Representation Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123 – 134.

Kaiser, G., Hino, K., & Knipping, C., (2005), Proposal for a framework to analyse mathematics in Eastern and Western traditions – looking at England, France, Germany and Japan. In K. D. Graf & F. Leung (Ed.), *ICMI Comparative Study on Mathematics Education in different cultural traditions: a comparative study of East Asia and the West,* Dordrecht: kluwer Academics.

Kilpatrick, J., (2001), Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics,* 47, 101–116.

Li,Y. (2000), A Comparison of Problems that Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for research in mathematics education 31* (2), 234 - 241.

Mesa,V. (2004), Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach. *Educational Studies in mathematics 56*, 255 – 286.

Murdock, J., Kamischke, E., Kamischke, E. (2007). *Discovering Algebra, An investigative approach (2nd ed.)*. USA: Key Curriculum Press.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM (2000).

National Research Council. (2004). *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations*. Washington, DC: National Academy Press.

Peled, I. & Zaslavsky, O. (1997), Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19(3), 49-61.

Potari, D., Zachariades, T., Zaslavsky, O.,(2010), Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Proceedings of CERME 6, January 28th – February 1st 2009, Lyon, France*.

Renkl, A. (1997), Learning from Worked – Out Examples: A Study on Individual Differences. *Cognitive Science* 21 (1), 1 -29.

Reys, B. J., Reys, R. E.& Chávez, O. (2004), Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61–66.

Rowland, T. (2008), The purpose, Design and Use of Examples in the Teaching of Elementary Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 149 – 163.

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003). Novices' choice of examples in the teaching of elementary mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education (*pp. 242-245). Brno, Czech Republic.

Shulman, S. L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4–14.

Sierpinska, A. (1992), On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Ed.), T*he concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Tarr, E., Reys, R., Chavez, O. & Shih (2006), A longitudinal study of mathematics curriculum & students achievement*. Paper presented at the research precession of the annual meeting of the national council of teachers of mathematics,* St. Louis, MO, April 2006.

Tarr, J., Reys, B., Barker, D. & Billstein, R.(2006), Selecting High–Quality Mathematics Textbooks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12* (1), 50 – 54.

Tsamir, P. (2003). From "easy" to "difficult" or vice versa: The case of infinite sets. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25,* 1-16.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004), Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. *Learning and Instruction*, *14*(5), 445–451.

Watson, A. & Mason, J. (2006) Seeing an Exercise as a Single Mathematical Object: Using Variation to Structure Sense-Making. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 91-111.

Watson, A. & Mason, J. (2005) Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples. *Zdm Mathematics Education*, 38(2), 209-211.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Watson, A., Mason, J., (2004). The exercise as mathematical object: Dimensions of possible variation in practice. McNamara, O., (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 24(2).

Watson, A., & Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377- 385). Norwich, UK: PME.

Watson, A., & Mason, J. (2002b). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249.

Watson, A., Shipman, S., (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 97-109.

Zaslavsky, O. (2008). What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples? *Paper submitted to WG2 of the Symposium for celebration of the centennial of ICMI,* Rome.

Zaslavsky, O., (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. In M. K. Stein and L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). Springer US.

Zazkis, R. Liljedahl, P.& Chernoff, E. J. (2008), The Role of Examples in Forming and Refuting Generalizations. *Zdm Mathematics Educations, 40*(1), 131 -141.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008), What Makes a Counterexample Exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, *68*(3), 195–208.

Zazkis, R., Leikin, R., (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*, 11 -17.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008), Characteristics of Teachers' Choice of Examples in and for the Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 165-182.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2011). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Γραββάνη Κ., (2006). *Αναπαραστάσεις συναρτήσεων και ο μετασχηματισμός τους από μαθητές Λυκείου*. Διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ, Αθήνα.

Ινστιτούτο Παιδαγωγικών Ερευνών – Μελετών (Ι.Π.Ε.Μ) και Διδασκαλική Ομοσπονδία Ελλάδας (Δ.Ο.Ε.) (2009). Νέα σχολικά βιβλία εμπειρίες των εκπαιδευτικών. *Συνοπτικό τεύχος με τα ευρήματα της έρευνας του Ι.Π.Ε.Μ. για τα νέα σχολικά βιβλία.*

Καλδρυμίδου, Μ. Μορόγλου, Ε. (2006). *Αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου*, Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.

Κεραμάρης, Κ., Μπαρμπαγιάννη Ε., (2011). Η γλώσσα των μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου. *ΕΛΕΤΟ – 8ο Συνέδριο «Ελληνική Γλώσσα και Ορολογία»* Αθήνα, 10-12 Νοεμβρίου 2011, 155 – 164.

Κολέζα, Ε., (2006). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Α΄ Μέρος : Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης. *Ευκλείδης γ΄,* 65.

Κολέζα, Ε., (2007). Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Β΄ Μέρος : Γνωστική και Κοινωνιολογική ανάλυση. *Ευκλείδης γ΄,* 66.

Μαστρογιάννης, Α., Μαλέτσκος, Α., Η Μαθηματική Γλώσσα στα νέα διδακτικά εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου. *2ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Γλώσσα, Σκέψη και Πράξη στην Εκπαίδευση,* 19 -21 Οκτωβρίου 2007, Ιωάννινα, 1 -12.

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου (2011). *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας τεύχος δεύτερο,* Αρ. Φύλλου 1168, 16673 – 16700.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

[Οι κωδικοί που χρησιμοποιούμε για τα παραδείγματα είναι αυτοί που προέκυψαν από την αρχική τους καταγραφή. Στο παράρτημα δε μεταφέραμε όλα τα παραδείγματα της έρευνάς μας, παρά αυτά στα οποία κάνουμε αναφορά στην εργασία**.]**

<u>Παραδείγματα του Ελληνικού εγχειριδίου</u>

Π1 : Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\,\frac{\varepsilon}{100}$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν ε = 3, τότε Τ=150, ενώ αν ε = 5, τότε Τ= 250 κτλ.

Π2 :Το διάστημα S σε χιλιόμετρα που διανύει ένας ποδηλάτης σε χρονικό διάστημα 2 h με μέση ταχύτητα υ Km/h, δίνεται από τον τύπο S = 2υ. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν υ = 60, τότε S =120, ενώ αν υ=70, τότε S = 140 κτλ.

Π3 :Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα αν ρ =1, τότε Ε = π, ενώ αν ρ = 2 , τότε Ε = 4π κτλ.

Π17 : (λυμένο παράδειγμα)

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g , που είναι ορισμένες σε όλο το R .

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία:

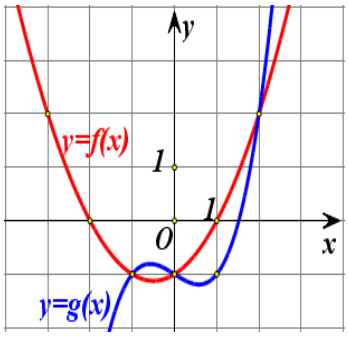
-3 , -2 , -1 , 0, 1 και 2

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

f (x) = 0 , f (x) = 2 & f (x) = g(x) .

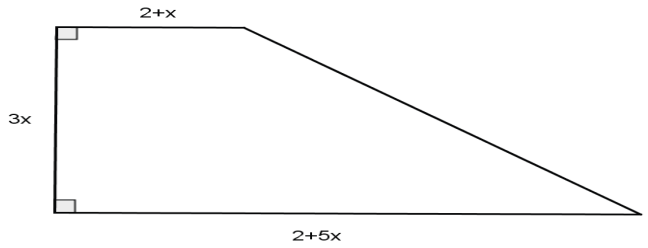
iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

f (x) > 0 και f (x) > g(x) .



Δ.15 *(*Δραστηριότητα στο πρόγραμμα σπουδών, αντιστοιχεί στους στόχους Α3 και ΒΣ3)

Στο παρακάτω τραπέζιο (οι πλευρές του είναι σε m):



α) Να εκφράσετε την περίμετρό του Π ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(x);

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);

γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39m και το εμβαδόν του το πολύ 99m2.

Δ.22 : (Δραστηριότητα στο πρόγραμμα σπουδών αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ2)

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία για την πόλη της Θεσσαλονίκης το έτος 2003.

ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠ	ΟΚΤ	ΝΟΕ	ΔΕΚ
-0,3	-0,8	4	11	13	20	20	25	20	15	12	7

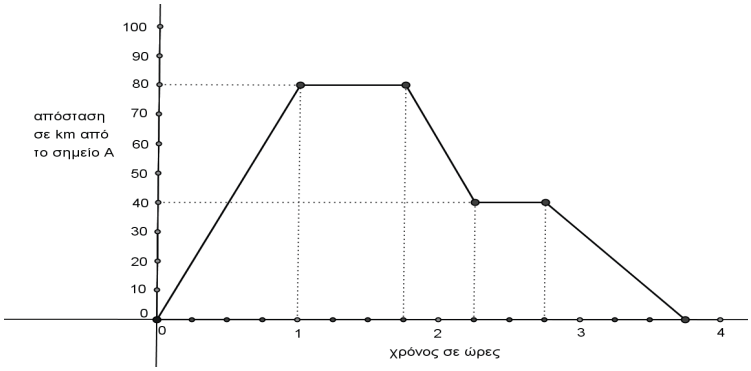
Είναι η αντιστοιχία Μήνας → *Θερμοκρασία, συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.*

Δ.23 : (Δραστηριότητα στο πρόγραμμα σπουδών, αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ2)

Είναι οι παρακάτω αντιστοιχίες συναρτήσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα
β) Άτομο → Ημέρα γενεθλίων
γ) Όνομα → Ταυτότητα
δ) Μαθητής της τάξης → Αριθμός τηλεφώνου.

Δ.26 *: (*Δραστηριότητα από Πρόγραμμα Σπουδών αντιστοιχεί στο στόχο ΒΣ6*)*

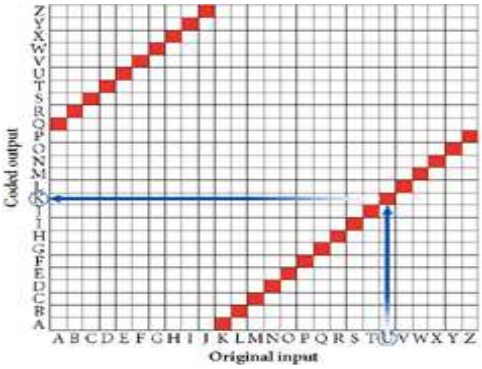


Ένα κινητό κινείται έτσι ώστε η απόσταση του σε km από το σημείο Α (που θεωρείται αρχή της κίνησης) σε σχέση με το χρόνο (σε ώρες) φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος απαντήστε στα ερωτήματα:
(α) Ποια ήταν η διάρκεια της κίνησης;
(β) Πόσα χιλιόμετρα ήταν η συνολική απόσταση;
(γ) Πόσες φορές το κινητό έκανε στάση και για πόση ώρα;
(δ) πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποια ήταν η ταχύτητά του σ' αυτό το χρονικό διάστημα;
(ε) Σε τι απόσταση από το Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά, 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες μετά την αρχή της μέτρησης;
(στ) Προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στο διάγραμμα.

Παραδείγματα από το αμερικάνικο εγχειρίδιο

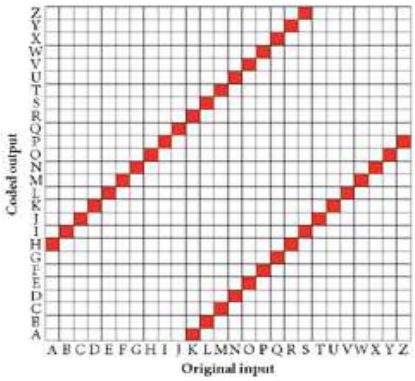
E1 : The table below shows that the letter A is coded into the letter Q, the letter B is coded into R, and so on. It also shows that the letter U is coded into the letter K. This code is an example of a *letter-shift code*. Can you see why? How would you use the code to write a message?

Original input	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
Coded output	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*

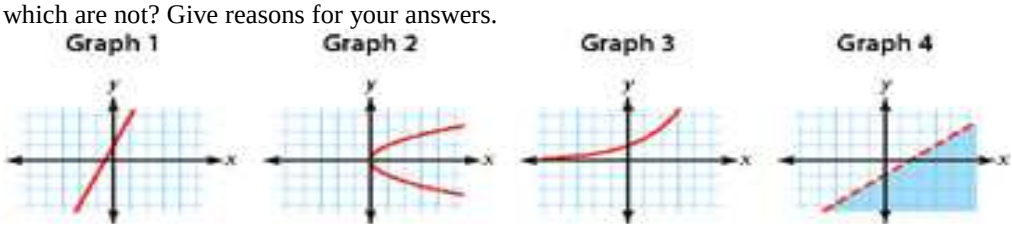


You can also represent the code with a grid.
Note that the input letters run across (horizontally).
To code a letter, look for the colored square directly above it. Then find the coded output by looking across to the letters that run up (vertically).

E8 : Use the grid to send a new two- or three-word message to your partner.
Exchange and decode each other's messages.
Did your partner successfully decode your message? Why or why not?
How is the grid above different from the grid in Step 1?
Code the word FUNCTION to help you answer this question.
Which grid makes it easier to decode messages? Which coded output letters are difficult to decode into their original input letters?



E17 : Each graph below represents a relation. Move a vertical line, such as the edge of a ruler, from side to side on the graph. Based on the graph and your vertical line, which relations are functions and which are not? Give reasons for your answers.



E19 : Name the form of each linear equation or inequality, and use a graph to explain why it is or is not a function.

a. $y = 1 - 3x$ **b.** $y = 0.5x + 2$ **c.** $y = \frac{3}{4}x$ **d.** $2x + 3y = 6$

e. $y = 5 + 2(x - 8)$ **f.** $y = 7$ **g.** $x = 9$ **h.** $2x - 4y < 12$

Solution

Each equation is written in one of the forms you have learned in this course.

If you graph the equations, you can see that all of them except the graphs for

parts g and h pass the vertical line test. So all the equations represent functions

except for the ones in parts g and h.

a. This equation is in the intercept form y = a + bx.

b. This equation is in the slope-intercept form y = mx + b.

c. This equation is a direct variation in the form y = kx.

d. This equation is in the standard form ax + by = c.

e. This equation is in the point-slope form y = y1 + b(x – x1).

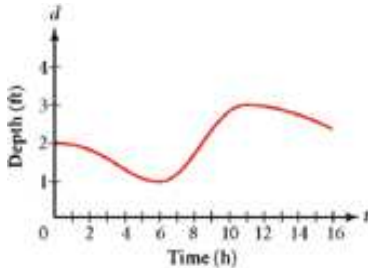
f. This equation is a horizontal line in the form y = k.

g. This equation is a vertical line in the form x = k.

h. The boundary of this inequality, 2x – 4y = 12, is in the standard form ax + by = c.

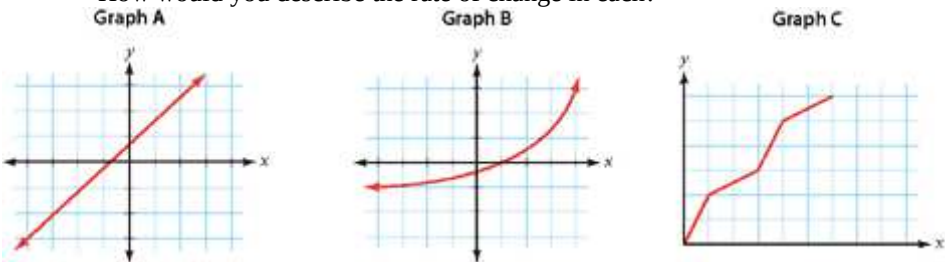
[Στη λύση στο εγχειρίδιο παρέχονται και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις που εμείς δε μεταφέραμε στο παράρτημα.]

E20 : This graph shows the depth of the water in a leaky swimming pool. Tell what quantities are varying and how they are related. Give possible real-world events in your explanation.

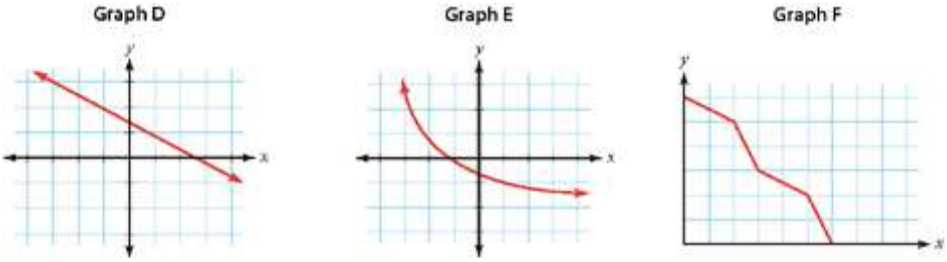


Solution The graph shows that the water level, or depth, changes over a 15-hour time period. At the beginning, when no time has passed, $t = 0$, and the water in the pool is 2 feet deep, so $d = 2$. During the first 6-hour interval ($0 \le t \le 6$), the water level drops. The leak seems to get worse as time passes. When $t = 6$ and $d = 1$, it seems that someone starts to refill the pool. The water level rises for the next 5 hours, during the interval $6 \le t \le 11$. At $t = 11$, the water reaches its highest level at just about 3 feet, so $d = 3$. At the 11-hour mark, the in-flowing water is apparently turned off. The pool still has a leak, so the water level starts to drop again.

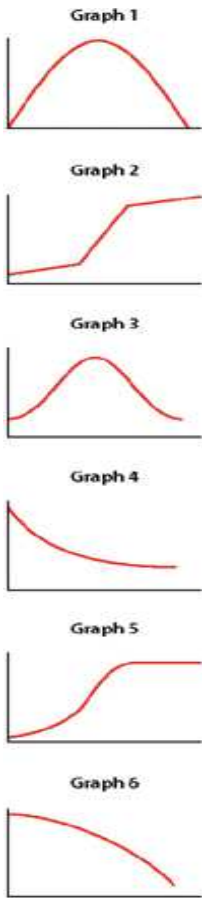
E21 : These are graphs of *increasing functions.* What do the three graphs have in common? How would you describe the rate of change in each?



E22 : These are graphs of *decreasing functions*. What do they have in common? How are they different from those in Step 1? How would you describe the rate of change in these graphs?



E23 : In Steps 3 to 5, you'll use this vocabulary (*increasing or decreasing functions)* to find and describe the graph that matches each of these real-world situations. Two of the graphs will not be used.



Situation A During the first few years, the number of deer on the island increased by a steady percentage. As food became less plentiful, the growth rate started slowing down. Now, the number of births and deaths is about the same.

Situation B In the Northern Hemisphere the amount of daylight increases slowly from January through February, faster until mid-May, and then slowly until the maximum in June. Then it decreases slowly though July, faster from August until mid-November, and then slowly until the year's end.

Situation C If you have a fixed amount of fencing, the width of your rectangular garden determines its area. If the width is very short, the garden won't have much area. As the width increases, the area also increases. The area increases more slowly until it reaches a maximum. As the width continues to increase, the area becomes smaller more quickly until it is zero.

Situation D Your cup of tea is very hot. The difference between the tea temperature and the room temperature decreases quickly at first as the tea starts to cool to room temperature. But when the two temperatures are close together, the cooling rate slows down. It actually takes a long time for the tea to finally reach room temperature.

Step 3
In Situation A decide which quantities are varying. Also decide which variable is independent and which is dependent.
Step 4
Match and describe the graph that best fits the situation. Write a description of the function and its graph using words such as *linear, nonlinear, increasing, decreasing, rate of change, maximum* or *greatest value,* and *minimum* or *least value.* Tell why you think the graph and your description match the situation.
Step 5
Repeat Steps 3 and 4 for the other three situations.

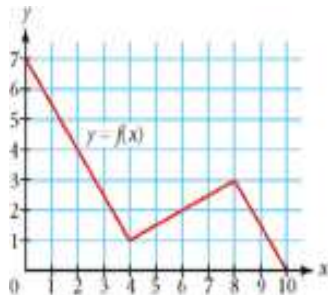
E24 : Describe this graph, telling how the quantities in the graph relate to each other.

Solution

Use the intervals marked on the x-axis to help you discuss where the function is increasing or decreasing and where it is linear or nonlinear.
On the interval $0 \le x < 3.0$, the function is nonlinear and increasing. As x increases steadily, y changes at a varying rate, so the graph is nonlinear. When read from left to right, the graph rises. So the y-values grow and the function is increasing.
On the interval $3.0 \le x \le 4.5$, the function appears linear and is decreasing.
Because y appears to change at a constant rate on the graph, the function is linear. When read from left to right, the graph falls. So the y-values drop and the function is decreasing.

E25 : You can show some functions with an equation. For example, the equation $y = 2x + 4$ represents a function, so you can write it as $\boldsymbol{f(x) = 2x + 4}$**.** The notation $f(3)$ tells you to substitute 3 for x in the equation $y = 2x + 4$. So, $f(3) = 2(3) + 4$. The value of $f(x)$ when $x = 3$ is 10. By itself, f is the name of the function. In this case, its rule is $2x + 4$.

E26 : Not all functions are expressed as equations.
The graph below shows a new function, $f(x)$.
No rule or equation is given, but you can still use function notation to find output values. For example, on the graph below, the point at $x = 4$ has the coordinates $(4, f(4))$ or $(4, 1)$. The value of y when x is 4 is $f(4)$. So, $f(4) = 1$. Check that $f(2)$ is 4. What is the value of $f(6)$?
Can you find two x-values for which $f(x) = 1$?



E27 : In this investigation you will apply function notation to learn the identity of the mathematician who introduced functions.

Step 1 Describe the domain and range of the function f in the graph.

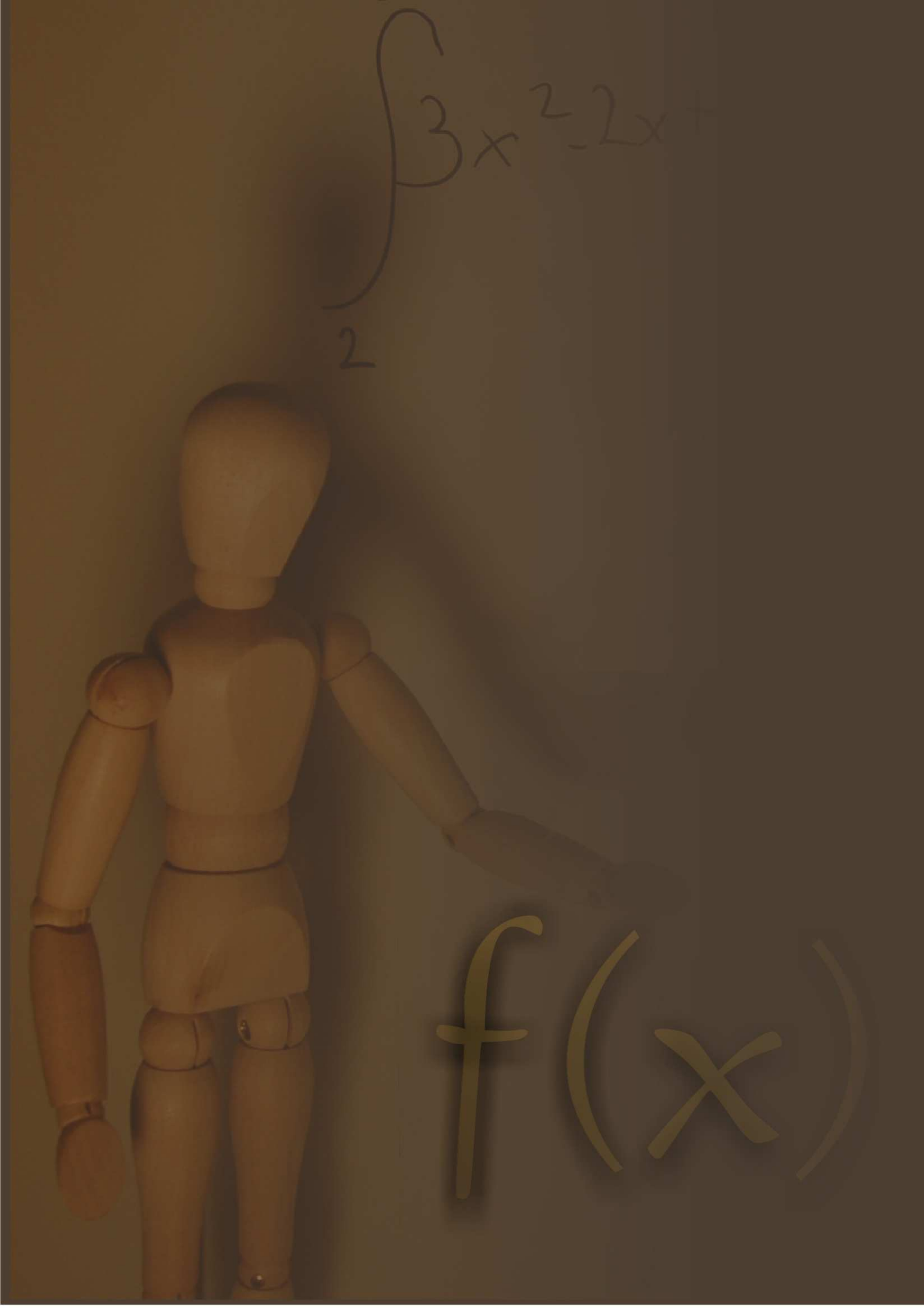
Notation	Value
$f(3)$	
$f(18) + f(3)$	
$f(5) \cdot f(4)$	
$f(15) / f(6)$	
$f(20) - f(10)$	

Step 2 Use the graph to find each function value in the table. Then do the indicated operations.

Step 3 Use the rules for the order of operations to evaluate these expressions that involve function values. Do any operations inside parentheses first. Then use the graph to find the function values before doing the remaining operations. Write your answers in a table.

Notation	**Value**
$f(0) + f(1) - 3$	
$5 \cdot f(9)$	
x when $f(x) = 10$	
$f(9 + 8)$	
x when $f(x) = 0$	
$f(8 \cdot 3) - 5 \cdot f(11)$	
$f(4 \cdot 5 - 1)$	
$f(12)$	

Step 4 Think of the numbers 1 through 26 as the letters A through Z. Find the letters that match your answers to Step 2 to learn the mathematician's last name. Find the letters that match your answers to Step 3 to discover the first name.


f(x)