ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η συμβολή της γεωμετρικοποίησης και παραμετρικοποίησης στη διαχείρηση θεμάτων μαθηματικού περιεχομένου

ΓΕΩΡΓΙΑ ΤΖΟΒΑΡΙΔΟΥ

Δ201001

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
Ευστάθιος Βασιλείου

ΑΘΗΝΑ 2014

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η συμβολή της γεωμετρικοποίησης και παραμετρικοποίησης στη διαχείρηση θεμάτων μαθηματικού περιεχομένου

ΓΕΩΡΓΙΑ ΤΖΟΒΑΡΙΔΟΥ
Δ201001

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Ευστάθιος Βασιλείου

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ευστάθιο Βασιλείου (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν.Καθηγητής	…….
2) Διονύσιο Λάππα	Αν.Καθηγητής	……
3) Παναγιώτη Σπύρου	Αν.Καθηγητής	……

Ευχαριστίες

- Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευστάθιο Βασιλείου για την πολύτιμη βοήθειά του στη διαμόρφωση του συγκεκριμένου θέματος. Η αποτελεσματική του καθοδήγηση, οι επισημάνσεις και οι διορθώσεις συνέβαλαν ώστε η εργασία να αποκτήσει αρτιότερη μορφή.
- Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ. Διονύσιο Λάππα και κ. Παναγιώτη Σπύρου για την ενθάρρυνσή τους και τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.
- Ένα μεγάλο ευχαριστώ επίσης στους φίλους Στέφανο Ελευθερίου και Δημήτρη Μέρρη για τις πολύτιμες υποδείξεις τους και την άμεση συμπαράστασή τους και, βέβαια, στον Χρήστο Καλμούκο και στην Αλίκη Μπασιάκου, που μου πρόσφεραν τις γνώσεις και την εμπειρία τους ακριβώς τη στιγμή που τις είχα ανάγκη.
- Στην Ομάδα Μαθηματικών Δυτικής Αττικής οφείλω πολλά, καθώς αυτή, με γνώμονα τη συνέπεια και τη ποιότητα, αποτελεί, μοναδική ίσως στο είδος της, συλλογικότητα, που προσπαθεί να προβληματίσει τον εκπαιδευτικό σε κατευθύνσεις όπου συνδέονται οι ρίζες και η δυναμική εξέλιξη της γνώσης και του πολιτισμού. Κυρίως με βοήθησε στο να έχω στο μυαλό μου ξεκάθαρες τις κατευθύνσεις των προβληματισμών μου σχετικά με το ποιές είναι οι πραγματικές ανάγκες των μαθητών και άρα με το πού πρέπει να στοχεύει η διαδικασία της μάθησης.

Αφιερώνεται
στην
οικογένειά
μου

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ……IX

ΠΕΡΙΛΗΨΗ……XI

ABSTRACT……XIII

ΕΙΣΑΓΩΓΗ……XV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 1
Ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ 1

1.1 Ο ρόλος της Ιστορίας 2

1.2 Πέρασμα στην ερευνητική διαδικασία 2

1.3 Ένα πρόβλημα και η διαμόρφωση του ερευνητικού πεδίου από τις υποθέσεις του ... 5

1.4 Γύρω από την έννοια της συνάρτησης 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 15
Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

2.1 Εισαγωγή 15

2.2 Τα προβλήματα 16

2.2.1 Διατομές κύκλων 16

2.2.2 Περιστροφή ευθείας 16

2.2.3 Πολυώνυμο με δεδομένες τις κρίσιμες τιμές του. 17

2.3 Το πρόβλημα της διατομής των κύκλων 18

2.3.1 Βασική θεώρηση 18

2.3.2 Πρώτη προσέγγιση 18

2.3.3 Μελέτη της τομής δυο κώνων: 19

2.3.4 Αλλαγή πλαισίου 20

2.3.5 Ανάλυση του προβλήματος 23

2.3.6 Το πέρασμα στο όριο 23

2.4 Κίνηση μιας ευθείας. 25

2.4.1 Μια αναπάντεχη ταινία του Moebius 25

2.4.2 Διευκρινήσεις στη διατύπωση 26

2.4.3 Περιγραφή του μη επιτρεπτού συνόλου 27

2.4.4 Αποδείξεις 28

2.4.5 Η περίπτωση της Γ_1 30

2.5 Το πρόβλημα στα πολυώνυμα $4^{ου}$ βαθμού 31

2.5.1 Ένας φυσικός τρόπος να προσεγγίσουμε το πρόβλημα 31

2.5.2 Πρώτος μετασχηματισμός 32

2.5.3 Δεύτερος μετασχηματισμός 33
2.5.4 Μελέτη της Φ 33
2.5.5 Και για βαθμό d >4; 35
2.6 Συμπέρασμα 36
2.7 Μία εφαρμογή: Η διαδικασία της γεωμετρικοποίησης εξυπηρετεί στόχους μάθησης των δεκαδικών αριθμών στους μαθητές του δημοτικού 37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 39
ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ Ή Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ 39
3.1 Ιστορικά στοιχεία 39
3.2 Η φύση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. 41
3.3 Γραφική επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού 44
3.3.1 Μελέτη για τη διάκριση των ημιεπιπέδων 44
3.3.2 Μελέτη των προσήμων της $f(x, y) = y_0x + x_0y - x_0y_0$ στα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $f(x, y) = 0$. 45
3.4 Το εφικτό σύνολο και ο προσδιορισμός του βέλτιστου σημείου 47
3.5 Παραδείγματα 49
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 59
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΝΑΥΣΙΠΛΟΪΑ 59
4.1 Ναυσιπλοΐα και ραδιοναυτιλία 59
4.1.1 Γενικά περί χαρτών 59
4.1.2 Αποτύπωση της πραγματικής θέσης του πλοίου στο χάρτη χάραξη του πλου 61
4.2 Σχετικά με τη καμπυλότητα 66
4.2.1 Παρατηρήσεις αναφορικά με τις επίπεδες καμπύλες. 66
4.2.2 Για τη γεωμετρικοποίηση μιας επιφάνειας. Μια πρώτη προσέγγιση. 67
4.2.3 Μελέτη ελάχιστης διαδρομής στην επιφάνεια της σφαίρας 68
4.3 Σχετικά με την υπερβολική ναυτιλία 72
4.3.1 Λίγα ιστορικά στοιχεία που εξηγούν τη χρηστικότητα της μεθόδου 73
4.3.2 Ανάλυση της μεθόδου 73
4.3.3 Δημιουργία και άρση αμφιβολίας 75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 79
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΕΧΝΙΚΗΣ 79
5.1 Ενα πρόβλημα 79
5.1.1 Ανάλυση του προβλήματος 79
5.1.2 Μία κατασκευή 81
5.2 Προσαρμογή της εφαρμογής στα πραγματικά δεδομένα 82

Πρόλογος

Η Γεωμετρία, λόγω του πλούτου της σε αφηρημένες έννοιες και της καλλιέργειας της αφηρημένης σκέψης που προσφέρει, αλλά και λόγω της γνωσιολογικής της διακλαδικότητας, διαθέτει μια δυναμική ώστε να επεμβαίνει αναπόφευκτα στην αντιμετώπιση και στην μέσω μαθηματικοποίησης επίλυση προβλημάτων που προκύπτουν από διάφορες δραστηριότητες.

Ακριβώς χάρη στα χαρακτηριστικά αυτά, πιστεύουμε ότι προσφέρεται για παροχή στοιχείων παιδείας υψηλής ποιότητας προς τους μαθητές του λυκείου, καθώς στην ηλικία αυτή (15 – 18) έχουν πλέον αρχίσει να αναπτύσσουν τους απαραίτητους «εσωτερικούς μηχανισμούς» για συλλογισμούς που απαιτούν : οργάνωση συνθετικής και αναλυτικής σκέψης, αφαιρετικές διεργασίες, κριτική σκέψη και οικοδόμηση κριτιρίων που είναι απαραίτητα για τη διερεύνηση αποτελεσμάτων ή τη διαχείρηση προβλημάτων που έχουν σύνθετες δομές.

Επιπλέον, η Γεωμετρία, από τους πρώτους κλάδους γνώσης που οργανώθηκε επιστημονικά – κάτι που δεν είναι τυχαίο καθώς τα αρχικά της θεμέλια απορρέουν από τη βιολογική σχέση του ανθρώπου με τον χώρο, που είναι το αντικείμενό της - επειδή στη δομή της ενσωματώνει τη διαδικασία *υπόθεση – επεξεργασία – συμπέρασμα*, είναι απαραίτητη σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα και συμβάλλει καταλυτικά στη καλλιέργεια αυτού του τρόπου προσέγγισης των καταστάσεων.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, οι ενότητες που επιλέξαμε αναδεικνύουν τη Γεωμετρία ως διδακτικό αντικείμενο και ως πεδίο εφαρμογών. Η γεωμετρικοποίηση συνίσταται στη χρήση και επεξεργασία των γεωμετρικών εννοιών που ενυπάρχουν στις δομές των θεμάτων, που αποτελούν αντικείμενα μελέτης, μια διαδικασία που έχει σαν αποτέλεσμα να μεταφέρεται κανείς, μέσω ενός χάρτη, από το αρχικό πλαίσιο που ορίζει το πρόβλημα, σε χώρο που έχει μια γνώριμη γεωμετρική δομή. Ο χώρος αυτός καθορίζεται από ένα σύνολο παραμέτρων που αντιστοιχούν στις ιδιότητες του προβλήματος. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν μεταφέρονται με την αντίστροφη διαδικασία στο αρχικό πλαίσιο. Αναπτύσσεται, αρχικά, το γνωστικό υπόβαθρο, το οποίο απαιτείται να έχει ο μαθηματικός δάσκαλος, προκειμένου να αναδείξει τέτοια ζητήματα στο Λύκειο. Στη συνέχεια παρουσιάζονται υποδείγματα – διδακτικές προτάσεις, που προέρχονται από τους χώρους της γεωμετρίας (:γεωμετρία σε παραμετρικούς χώρους), της οικονομίας (:γραμμικός προγραμματισμός), της ραδιοναυτιλίας (:προσδιορισμός θέσης μέσω υπερβολικών γραμμών) και της τεχνικής (:προβολείς αυτοκινήτων – κωνικές τομές). Όλα τα παραδείγματα έχουν τα χαρακτηριστικά ανοιχτού προβλήματος, ώστε ο μαθητής να εργαστεί με ερευνητική διάθεση πάνω σε αυτά, γιατί πιστεύουμε ότι *η έρευνα* πάνω σ'ένα αντικείμενο είναι αυτή που καλλιεργεί τη σκέψη και διευρύνει ουσιαστικά και γόνιμα το γνωστικό υπόβαθρο. Παράλληλα, όπως αναλύουμε στο πρώτο κεφάλαιο, *η ιστορία* είναι εκείνη που πολλές φορές δείχνει τα περάσματα σε μια κατασταλαγμένη γνώση, συνεπικουρεί επομένως στην αποτελεσματικότητα των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν και, άρα, είναι βασική τους συνιστώσα.

Λέξεις κλειδιά: Ανοιχτό Πρόβλημα, Γεωμετρικοποίηση, Παράμετρος, Χάρτης, Αλλαγή Πλαισίου, Λύκειο, Γραμμικός Προγραμματισμός, Υπερβολική Ναυτιλία, Κωνικές Τομές.

Abstract

The sections selected in this study reveal Geometry as a teaching object and as an application area. Geometrization cosists in using and processing geometrical concepts inherent in the structures at issue, a process that results in the shifting, through a map, from the original framework that defines the problem to a space that has a familiar geometric structure. This space is defined by a set of parameters corresponding to the properties of the problem. The results thus obtained are transferred to the original context by the reverse processing. We initially develop the cognitive background that the teacher of mathematics is required to possess so as to bring forth such issues in Senior High School. Then we present teaching propositions derived from the areas of geometry (geometry in parametric spaces), of economics (linear programming) of radio navigation (defining a position through hyperbolic lines) and technology (car headlights – conic sections). All the examples presented bear the feature of an open – ended problem so that the student can approach them with an inquisitive attitude. Research on a topic is presented as the basic method that fosters thought and considerably broadens cognitive background in a fertile direction. In parallel, as we analyze in the first section, it is the historical perspective, which many times shows the passage to a solid knowledge, thus assisting in the effectiveness of the methods to be used; therefore, history is a basic constituent of the latter.

Key words: Open – Ended Problem, Geometrization, Parameter, Map, Change of Framework, Senior High School, Linear Programming, Hyperbolic Navigation, Conic Sections.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

«Η φιλοσοφία είναι γραμμένη σ'αυτό το μεγάλο βιβλίο – εννοώ το σύμπαν – που βρίσκεται μπροστά μας, αλλά δεν μπορεί να γίνει κατανοητό προτού αρχίσει κανείς να μαθαίνει τη γλώσσα στην οποία είναι γραμμένο.
Είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών, και τα γράμματά του είναι τρίγωνα, κύκλοι και τα υπόλοιπα γεωμετρικά σχήματα» Galileo Galilei, Il Saggiatore, 1623.

Με τον όρο γεωμετρικοποίηση (geometrization) εννοούμε τη χρήση γεωμετρικών εννοιών και την εφαρμογή τεχνικών από τη γεωμετρία με σκοπό τη μελέτη ενός διαφορετικού πεδίου, όταν ενυπάρχει ως υπόβαθρο μια γνώριμη μαθηματική δομή, οπότε, οι ιδιότητες του πεδίου αυτού μπορούν να περιγραφούν με βάση τη γεωμετρία.

Με μια ευρύτερη έννοια, γεωμετρικοποίηση εννούμε και τη περιγραφή ενός χώρου ως Γεωμετρία. Μέσα απο αυτή τη γενικευμένη θεώρηση, Γεωμετρικός Χώρος θεωρείται ένα μη κενό σύνολο X που μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο, συνεχές ή διακριτό. Τα στοιχεία του ονομάζονται Σημεία και τα υποσύνολά του Σχήματα. Ο χώρος γίνεται λειτουργικός μέσα από τους μετασχηματισμούς. Μετασχηματισμός του X είναι μια '*1-1 και επί*' απεικόνιση φ του X στον εαυτό του, $\varphi: X \to X$. Οι απεικονίσεις αυτές, στη Γεωμετρία, αποτελούν ένα είδος μετατόπισης - μετασχηματισμού των σχημάτων στον χώρο. Γίνεται όμως να θεωρούμε και μετασχηματισμούς ολόκληρου του χώρου X στον εαυτό του που συμπαρασύρουν και το σχήμα Σ σε ένα άλλο σχήμα Σ'.

Συνεπώς, με τον σύγχρονο *τρόπο* αντίληψης του όρου, θεωρείται ότι μια Γεωμετρία καθορίζεται από ένα βασικό σύνολο X (τον χώρο) και ένα σύνολο Γ, μετασχηματισμών του X.

Το αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι ο ορισμός και η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων Σ του χώρου X που μένουν αναλλοίωτες ως προς τους μετασχηματισμούς $\varphi \in \Gamma$, όπως λ.χ. το μήκος d ευθύγραμμου τμήματος Σ στο Ευκλείδειο επίπεδο X παραμένει αναλλοίωτο ως προς τον μετασχηματισμό φ της μεταφοράς.

Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται αρχικά ο ρόλος της ιστορίας στη διδακτική των μαθηματικών και σκιαγραφείται η φύση των ανοιχτών προβλημάτων καθώς και του τρόπου εργασίας του μαθητή – ερευνητή (πρώτο κεφάλαιο). Στη συνέχεια, ένα κλασσικό γεωμετρικό πρόβλημα χρησιμοποιείται ως υπόδειγμα ανοιχτού προβλήματος και αναπτύσσεται ο ερευνητικός τρόπος αντιμετώπισής του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θεωρούμε ένα σύνολο γεωμετρικών αντικειμένων (κύκλους, ευθείες, πολυώνυμα). Ενώ το καθένα απο αυτά έχει μια αρχική δομή, για να μπορέσουμε να εργαστούμε πάνω στο πρόβλημα, χρειάζεται να ορίσουμε μια *1-1* και επί αντιστοίχιση με σημεία ενός χώρου που έχει μια γεωμετρική δομή. Μέσα από αυτόν *τον χάρτη* μεταφέρουμε το αρχικό πρόβλημα και το προσαρμόζουμε σ'ένα

γνώριμο γεωμετρικό πλαίσιο. Ύστερα, μεταφέρουμε τα αποτελέσματα στο αρχικό πλαίσιο, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία.

Στο τρίτο κεφάλαιο η αναλυτική γεωμετρία αναδεικνύεται ως βασικό υπόβαθρο για την επίλυση προβλημάτων από το χώρο της οικονομίας. Αναπτύσσεται η γεωμετρική επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται το πρόβλημα της ναυσιπλοΐας και η λειτουργία του ναυτιλιακού χάρτη. Διαπιστώνουμε ότι για την αποτύπωση του στίγματος και τη χάραξη πορείας, παράλληλα με τη τεχνολογία που τις στηρίζει, κρίνεται απαραίτητη η παράλληλη συνδρομή της γεωμετρίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο η αντιμετώπιση ενός προβλήματος τεχνικής, που αφορά στη κατασκευή φωτιστικού σώματος, οδηγεί με φυσικό τρόπο στο παραβολοειδές εκ περιστροφής. Στη συνέχεια, προτείνεται ένας τρόπος σχεδιασμού - άρα και κατασκευής – που βασίζεται στα τεχνικά χαρακτηριστικά – προδιαγραφές, που καθορίζουν τις παραμέτρους του προβλήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Στο κείμενο «Geometrie und Erfahrung»[1] ο Albert Einstein διαχωρίζει τον θεωρητικό χαρακτήρα της γεωμετρίας απο την εμπειρία αφενός και περιγράφει αφετέρου τον τρόπο ένταξης της εμπειρίας στο θεωρητικό πλαίσιο της γεωμετρίας. Παραθέτουμε ένα απόσπασμα:

> «*Γενικά τα μαθηματικά, και ειδικότερα η γεωμετρία, οφείλουν την ύπαρξή τους στην συναισθηματική μας ανάγκη να μάθουμε κάτι για τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους τα πραγματικά αντικείμενα... Είναι φανερό ότι το εννοιολογικό σύστημα της αξιωματικής γεωμετρίας δεν μπορεί να διαβεβαιώσει τίποτε για τις σχέσεις των πραγματικών αντικειμένων, που γίνονται αντιληπτά μέσω της εμπειρίας. Για να μπορέσουμε να πούμε κάτι τέτοιο με βεβαιότητα, η γεωμετρία θα πρέπει να απογυμνωθεί από τον λογικό – τυπικό χαρακτήρα συμμορφώνοντας τα πραγματικά αντικείμενα της εμπειρίας με τα κενά εννοιολογικά σχήματα της αξιωματικής γεωμετρίας...*
>
> *...Αλλά (η γεωμετρία) μπορεί να διαβεβαιώσει κάτι μόνο σε συνδυασμό με τους φυσικούς νόμους και τότε θα ήταν δυνατό και λογικό να διατηρήσουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία – οποιαδήποτε κι αν μπορεί να είναι η φύση της πραγματικότητας... Έτσι συμπληρωμένη η γεωμετρία είναι προφανώς μια φυσική επιστήμη. Πραγματικά, μπορούμε να τη θεωρήσουμε σαν τον αρχαιότερο κλάδο της φυσικής...*
>
> *Φαίνεται δηλαδή ότι, χρησιμοποιώντας σύμβολα, μπορούμε να πούμε ότι μόνο το άθροισμα (G) (:=Γεωμετρία) + (P) (:=σύνολο φυσικών νόμων) υπόκειται στον έλεγχο της εμπειρίας. Έτσι μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα τόσο η (G) όσο και διάφορα μέρη του (P). Όλοι αυτοί οι νόμοι αποτελούν συμβάσεις. Θα πρέπει όμως να μην υπάρχουν αντιφάσεις ανάμεσα στη θεωρία και την εμπειρία. Εκείνο που χρειάζεται για να αποφευχθούν (*οι αντιφάσεις*) είναι να επιλεγεί από το P ότι απομένει ώστε η G μαζί με όλο το P να συμφωνεί με την εμπειρία...*»

[1] Μτφ. *«Γεωμετρία και Εμπειρία».* Αναγνώσθηκε στη Πρωσσική Ακαδημία Επιστημών στις 27 Ιανουαρίου 1921. Το ελληνικό κείμενο αποτελεί μετάφραση του Θάνου Χριστακόπουλου, εκδόσεις Βάνιας, Θεσσαλονίκη 1997. Ιανουαρίου 1921.

1.1 Ο ρόλος της Ιστορίας

Το να παρακινούμε τους μαθητές να περάσουν από τον στενά ορθολογικό τρόπο σκέψης στον επιστημονικό, τρόπο δηλαδή που απαιτεί κρίση και διορατική ικανότητα, σημαίνει ότι στη διδασκαλία πρέπει να δίνονται κίνητρα ώστε οι μαθητές να αναζητούν την εξήγηση μιας ιδέας. Και για να εξηγήσουμε μια ιδέα θα πρέπει να αναφερθούμε στη γένεσή της και να ανατρέξουμε στην ιστορική της διαμόρφωση, με στόχο:

- Να γίνει κατανοητό για ποιό λόγο διδάσκεται το συγκεκριμένο αντικείμενο
- Να αποτελέσει πεδίο για συνθετικές εργασίες των μαθητών
- Να εντοπιστούν μεθοδολογικά στοιχεία που οδήγησαν στις ανακαλύψεις και διαμόρφωσαν με αργά βήματα τη σημερινή όψη (ως αντίβαρο στα αντιπαιδευτικά τεχνάσματα που αξιοποιούν τη τελική επεξεργασμένη μορφή της γνώσης, αδιαφορώντας για τα προβλήματα που είχαν σταθεί αφορμή για την εξέλιξή της)
- Να αναδειχθεί το ουσιώδες του διδακτικού αντικειμένου

Έτσι, ο μαθητής παρακολουθεί την εξελικτική πορεία της έννοιας ή του αποτελέσματος ακολουθώντας τα στάδια της ίδιας της έρευνας όπως είχαν πραγματοποιηθεί στον ιστορικό τους χρόνο. Με αυτόν τον τρόπο ενθαρρύνεται να σκέπτεται ερευνητικά -τρόπος σκέψης που συντελλεί σημαντικά στη συνολικοποίηση της σκόρπιας γνώσης. Συντελλεί επίσης στην ανάδειξη της εσωτερικής διακλαδικότητας των Μαθηματικών και της διακλαδικότητας προς τις άλλες επιστήμες και τον πολιτισμό.

1.2 Πέρασμα στην ερευνητική διαδικασία

Η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης πρέπει να είναι βασική επιδίωξη της διδασκαλίας, ένας αυτονόητος στόχος της εκπαίδευσης. Τυπικά μιλώντας, η γνωστική επιστήμη όταν αναφέρεται στη κριτική σκέψη εννοεί τη νοητικο - συναισθηματική λειτουργία που ενεργοποιεί τις γνωστικές δεξιότητες και τις μεταγνωστικές στρατηγικές για την επεξεργασία δεδομένων, και που είναι απαλλαγμένη από προκαταλήψεις και προσωπικές πεποιθήσεις. (α)Τα τρία είδη συλλογισμών: ο επαγωγικός (iductio), ο παραγωγικός (diductio) και ο αναλογικός με τον οποίο συνδέεται η δημιουργική σκέψη και (β) οι διάφορες γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες αποτελούν τα δομικά της στοιχεία.

Προφανώς λοιπόν, η έννοια της κριτικής σκέψης δεν είναι μία έννοια αναγνωρίσιμη αφ’εαυτού, ακριβώς γιατί συσχετίζεται με άλλες γνωστικές λειτουργίες αλλά και με το περιβάλλον όπου αυτή καλλιεργείται. Αυτό όμως που είναι ουσιαστικό και πρέπει να μας απασχολεί είναι το «πού και πώς παράγεται» η κριτική σκέψη;. Ασφαλώς η κριτική σκέψη αναπτύσσεται όταν δίνονται στο μαθητή σημαντικά περιθώρια αυτενέργειας ώστε να μπορέσει να εργαστεί συστηματικά ενεργοποιώντας το σύνολο των λειτουργιών της νόησης δηλαδή τη μνήμη, τη σκέψη, την αντίληψη, τη παράσταση και τη φαντασία. Να μπορεί να υποστηρίξει τις σκέψεις του, να ελιχθεί, να

κινηθεί σε διαφορετικά πλαίσια, να αναστοχαστεί γενικεύοντας τις θεωρήσεις του και να αξιολογήσει τα συμπεράσματά του.

Συνεπώς ένα από τα συστατικά της «άσκησης» της κριτικής σκέψης είναι η αλλαγή επιπέδου όταν η «σκέψη» συσχετίζεται με το αφηρημένο.

Δηλαδή η κριτική σκέψη παράγεται κατά τις διαδικασίες που ακολουθεί ένας ερευνητής: όταν αυτός ανακαλύπτει κάτι, όταν παράγει γνώση την οποία κρίνει, τότε σίγουρα ασκεί τη κριτική του ικανότητα. Άρα αν ενθαρρύνουμε τους μαθητές να σκέπτονται όπως ένας ερευνητής θα αρχίσουν να σκέπτονται κριτικά.

Γνωρίζουμε ότι τα σύγχρονα πορίσματα της διδακτικής δε δέχονται πλέον το μοντέλο του μαθητή, ως εκείνου του ατόμου που αγωνίζεται να κατακτήσει ένα σώμα προκαθορισμένων εννοιών, κανόνων και φαινομένων. Αντίθετα, αναγνωρίζεται ότι ο μαθητευόμενος είναι ταυτόχρονα μέλος πολλών κοινοτήτων μέσα στις οποίες το περιεχόμενο και το νόημα των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας βρίσκεται υπό συνεχή διαπραγμάτευση, επιτελώντας ένα σημαντικό ρόλο στην όλη μαθησιακή διαδικασία. Τα νοήματα οικοδομούνται ερευνώντας, με αποτέλεσμα μάλιστα η έρευνα να θεωρείται περισσότερο υποκειμενικό παρά αντικειμενικό εγχείρημα (Cohen και Manion, 2000). Μια φαινομενογραφική προοπτική υποστηρίζει την άποψη ότι ο τρόπος που οι άνθρωποι μαθαίνουν και αποκτούν εμπειρία από μια συγκεκριμένη κατάσταση, τέτοια όπως ένα δεδομένο κείμενο ή η επίλυση ενός προβλήματος, αντανακλά τους τρόπους με τους οποίους αποκτούν εμπειρία των φαινομένων, τα οποία τους καθιστούν ικανούς να αισθητοποιήσουν την κατάσταση αυτή. Συνεπώς μια ερευνητική διαδικασία είναι κάτι πολύ περισσότερο από το να συγκεντρώνουν και να αναλύουν δεδομένα, ή, από την απλή επιλογή βημάτων και τεχνικών που είναι ή θεωρούνται ότι είναι σωστά.

Ο σκοπός ενός σύνθετου μαθησιακού έργου, όπως η επίλυση ενός προβλήματος με τα χαρακτηριστικά που έχουν περιγραφεί, απαιτεί από το μαθητή να αναπτύξει ένα σύνθετο συλλογισμό που θα τον βοηθήσει να επιλύσει ή να κατανοήσει τη δεδομένη κατάσταση. Επόμενο είναι τότε η εκτέλεση του έργου να εμπεριέχει και κάποιας μορφής μάθηση. Μάλιστα, ακόμα και ο ίδιος μαθητής την επόμενη φορά που θα εκτεθεί στο ίδιο ή σε παρόμοιο έργο δεν αναμένεται να το εκπληρώσει με τον ίδιο τρόπο (Cohen και Manion, 2000).

Η προσέγγιση αυτή οδηγεί σε διαδικασίες μάθησης και ανάπτυξης πολύ πιό σύνθετες από την απλή μετάδοση πληροφοριών ή την αντίδραση σε ερεθίσματα, όπως υποστηρίζουν οι συμπεριφοριστικές θεωρίες μάθησης.

Αυτή η εξέταση της γένεσης των νέων γνώσεων μέσα από τη λύση τόσο των εσωτερικών προβλημάτων (που προέρχονται απο τα μαθηματικά) όσο και των εξωτερικών προβλημάτων (που πηγάζουν από το πολιτισμικό περιβάλλον) εμπεδώνει την ολιστική ανάπτυξη της γνώσης.

Το σύνθετο μαθησιακό έργο αποκτά ακόμα μεγαλύτερο νόημα ιδιαίτερα σήμερα, όπου, με κάθε τρόπο, πολλοί πανεπιστημιακοί δάσκαλοι, σε κάθε ευκαιρία, υπογραμμίζουν την αποτυχία του εκπαιδευτικού συστήματος στο να παρέχει

επιστημονική εκπαίδευση. Ο *επιστημονικός αλφαβητισμός*[2], τουλάχιστον ο στοιχειώδης, είναι βασικός όρος για την αποτελεσματική λειτουργία μιας σύγχρονης δημοκρατικής πολιτείας στο πλαίσιο της οποίας οι πολίτες καλούνται να αποφασίσουν για ολοένα και περισσότερα ζητήματα μεγάλης κοινωνικής σημασίας που έχουν μια έντονα επιστημονική διάσταση (περιβαλλοντικά, οικονομικά).

Μας ενδιαφέρει επομένως η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης μέσα από τη καλλιέργεια της επιστημονικής αντίληψης που παρέχεται με την εμπλοκή του παιδιού σε μαθησιακές διαδικασίες που έχουν τα χαρακτηριστικά έρευνας.

Με αυτό τον τρόπο μέσα στη σχολική αίθουσα μπορεί να κερδιθεί η καλλιέργεια της επιστημονικής νοοτροπίας, που ισοδυναμεί με την αντίληψη ότι πάνω από τις γνώμες και τις πεποιθήσεις μας βρίσκονται τα ίδια τα γεγονότα και, άρα, οδηγεί με δημιουργικό τρόπο στη νοοτροπία του ότι πρέπει να είμαστε διαρκώς ανοιχτοί στο ενδεχόμενο να έχουμε κάνει λάθος. Συνεπώς έτσι καλλιεργείται αντίληψη που συστατικό της είναι *η δημιουργική αμφιβολία*, που είναι το πιο αποτελεσματικό αντίδοτο στον φανατισμό και τη μισαλλοδοξία που φαίνεται να απειλούν ξανά τον ανθρώπινο πολιτισμό όπως πολλές φορές στο παρελθόν.

Στόχος μας λοιπόν είναι να δημιουργήσουμε μια μαθησιακή ατμόσφαιρα η οποία θα ωθήσει τα παιδιά να εμπλακούν στην ερευνητική διαδικασία – και, συνεπώς, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες διδακτικές ενότητες. Τα *ανοικτά προβλήματα* είναι εκείνα που εμπεριέχουν τα χαρακτηριστικά που διέπουν το τρόπο με τον οποίο κάνει έρευνα ένας μαθηματικός και άρα ικανοποιούν το στόχο της ανάπτυξης της κριτικής σκέψης. Κατά τον *Bloom* (αλλά και κατά άλλους αναλυτές), υπάρχει ένας κατάλογος χαρακτηριστικών που πρέπει να έχουν αυτές οι ενότητες τόσο σε συναισθηματικό και γνωσιολογικό όσο και σε ψυχοκινητικό επίπεδο.

Βασικά χαρακτηριστικά των ανοιχτών προβλημάτων:

1. Κάθε πρόβλημα έχει διάφορες δυνατότητες ερμηνείας – επιδέχεται διάφορες διατυπώσεις.
2. Η διατύπωση δεν προδίδει τη μέθοδο προσέγγισης της λύσης.
3. Η διατύπωση είναι σε οικείες για το μαθητή έννοιες.
4. Από τη φύση τους, αποτελούν πηγή δημιουργικής αμφιβολίας, ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί στη διερεύνηση των αποτελεσμάτων του.

[2] Όπως περιγράφεται από τα National Science Education Standards των ΗΠΑ, ο *επιστημονικός αλφαβητισμός* περιλαμβάνει ειδικούς τύπους ικανοτήτων και σημαίνει πολλά πράγματα: Σημαίνει ότι ένα άτομο μπορεί να θέτει ερωτήματα, επίσης να βρίσκει ή να προσδιορίζει απαντήσεις σε ερωτήματα που προέρχονται από την περιέργεια για καθημερινές εμπειρίες. Σημαίνει ότι ένα πρόσωπο έχει την ικανότητα να περιγράφει, να εξηγεί και να προβλέπει φυσικά φαινόμενα. Ακόμη, ο επιστημονικός αλφαβητισμός συνεπάγεται την ικανότητα κάποιου να διαβάζει με κατανόηση επιστημονικά άρθρα του λαϊκού τύπου (εφημερίδες καθημερινής κυκλοφορίας, περιοδικά) και τη συμμετοχή του σε κοινωνικές συζητήσεις για την ισχύ των συμπερασμάτων. Κοινωνικός αλφαβητισμός σημαίνει ότι ένα πρόσωπο μπορεί να εντοπίζει επιστημονικά θέματα που υπογραμμίζουν εθνικές και τοπικές αποφάσεις και να εκφράζει θέσεις που είναι στοιχειοθετημένες επιστημονικά και τεχνολογικά. Ένας επιστημονικά εναλφάβητος πολίτης θα πρέπει να είναι ικανός να αξιολογεί την ποιότητα της επιστημονικής πληροφορίας στη βάση των πηγών και των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για να την παράγουν. Επίσης, ο επιστημονικός αλφαβητισμός υποδηλώνει την ικανότητα να θέτει και να αξιολογεί επιχειρήματα που βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα και να εξάγει συμπεράσματα με κατάλληλο τρόπο από τέτοια επιχειρήματα. Πηγή: http://www.literacynet.org/science/scientificliteracy.html.

5. Τα αποτελέσματα επιδέχονται προεκτάσεις: οι μέθοδοι έχουν εμβέλεια και γενικεύονται
6. Έχουν διάρκεια

Γενικά είδαμε ότι μια διδακτική ενότητα με ερευνητικά χαρακτηριστικά απαιτεί μεν πολύ χρόνο, αλλά κερδίζει σε ποιότητα, σε αντίθεση με μια πιό γρήγορη διαδικασία, που κινδυνεύει να μην αφήσει παιδευτικό «ίζημα»:

Πιστεύουμε λοιπόν ότι το ζήτημα του χρόνου δεν θα πρέπει να αντιμετωπιστεί με ευκολότερα προβλήματα. Η απαιτητική άσκηση - που μάλιστα δεν είναι απαραίτητο και να λυθεί - δίνει τις κατάλληλες ευκαιρίες για τη παροχή περισσότερων στοιχείων παιδείας. Όταν ο μαθητής συναντά δυσκολίες κατά τη διάρκεια της επίλυσης, ο καθηγητής θα πρέπει να παρεμβαίνει με ερωτήσεις αυξανόμενης πληροφορίας: ερωτήσεις συγκλίνουσες, αποκλίνουσες, ερωτήσεις συλλογής δεδομένων, οργάνωσης, ανάλυσης και υπέρβασης δεδομένων.

Κατά τη πορεία της διαπραγμάτευσης θα προκύψει απαραίτητα ανάγκη *αλλαγής αρχικού πλαισίου*, που σημαίνει αλλαγή στο τρόπο σκέψης, στο τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος, όπως ιστορικά αυτό έχει πολλές φορές συμβεί.

Για παράδειγμα, ο Αρχιμήδης εφάρμοσε κανόνες φυσικής στους υπολογισμούς του. Επίσης η εμφάνιση της Αναλυτικής Γεωμετρίας γύρω στο 1600 μΧ ήταν μια αλλαγή πλαισίου γιατί από το πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας περάσαμε στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, όπου εισάγονται οι άξονες, τα σημεία αλγεβροποιούνται, οι κύκλοι και οι ευθείες, γενικά τα γεωμετρικά σχήματα γίνονται εξισώσεις. Με αυτή την αλλαγή πλαισίου η Αναλυτική Γεωμετρία αναδεικνύει μία δομή που ενυπάρχει στην Ευκλείδια Γεωμετρία. Αυτή η αλγεβρική δομή της είναι που μας απελευθερώνει από την εποπτεία.

Με γνώμονα τις παραπάνω σκέψεις - αλλά και τα ζητήματα που μπορούμε να διαπραγματευτούμε στη τάξη - διαμορφώθηκαν οι ενότητες που ακολουθούν. Ο στόχος είναι να φέρουμε τους μαθητές σε επαφή με τη διερεύνηση της λύσης ενός πραγματικού προβλήματος με όρους γεωμετρίας. Πιστεύουμε ότι με τον τρόπο αυτόν, καθώς δεν εγκλωβίζεται στην εφαρμογή ενός θεωρήματος ή σε τεχνάσματα και μηχανισμούς επίλυσης, θα χρειαστεί να ακολουθήσει μια θεώρηση περισσότερο πειραματική, ανιχνεύοντας τις ιδιότητες των σχημάτων και αποκτώντας μια διαλλεκτική σχέση με το αντικείμενο μελέτης.

1.3 Ένα πρόβλημα και η διαμόρφωση του ερευνητικού πεδίου από τις υποθέσεις του

Θα δούμε τα παραπάνω χαρακτηριστικά κάνοντας το παράδειγμα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (G. Fagnano 1682-1766): «*Σε δεδομένο οξυγώνιο τρίγωνο να εγγραφεί τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου*»

1ο χαρακτηριστικό: Το ερώτημα που θέσαμε είναι σαφές αλλά δεν "προδίδει" τη μέθοδο επίλυσης.

2ο χαρακτηριστικό: Το πρόβλημα έχει να κάνει με ελάχιστο. Δε μπορεί να λυθεί με τη γενική μέθοδο: να θεωρήσουμε κατάλληλη συνάρτηση της οποίας να μελετήσουμε τη μονοτονία κ.ο.κ. Όμως η έννοια "ελάχιστο" συνδέεται με την

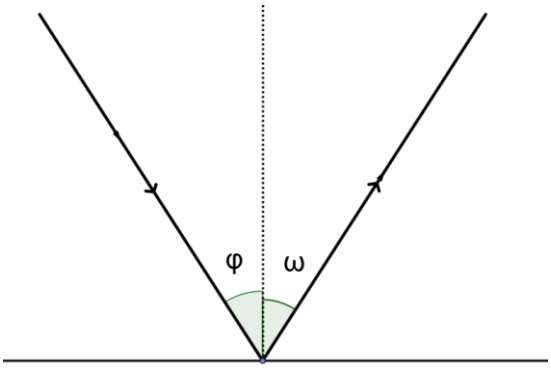
“οικονομία” της φύσης. Για να βρούμε λοιπόν τη κατάλληλη μέθοδο πρέπει *να αλλάξουμε πλαίσιο* και να διδαχθούμε από τη φύση.

Πριν τη διδακτική ενότητα είναι χρήσιμο να προηγηθεί συνθετική εργασία που θα γίνει από ομάδες μαθητών και θα έχει σαν θέμα:

«Η εξέλιξη του νόμου ανάκλασης του φωτός»

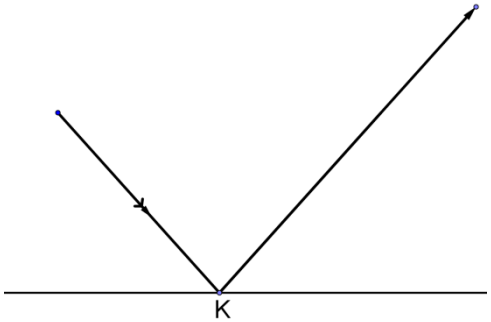
Συνοπτικά η εξέλιξη του νόμου ανάκλασης του φωτός πέρασε από τα εξής στάδια:

• Ο Αρχιμήδης φαίνεται να είναι ο πρώτος που συμπέρανε το νόμο ανάκλασης του φωτός, ότι δηλαδή το φώς ανακλάται έτσι, ώστε η γωνία πρόσπτωσης φ να ισούται με τη γωνία ανάκλασης ω. (Σχήμα 1.3.1)



Σχήμα 1.3.1

• Ο Ήρων (1ος αι) διατυπώνει την αρχή του ελαχίστου δρόμου για τη διάδοση των ακτίνων φωτός: «Ο δρόμος που ακολουθεί μια φωτεινή ακτίνα κατά τη διέλευσή της μεταξύ δύο σημείων, είναι ο συντομότερος δυνατός» και συμπεραίνει ότι η ανάκλαση του φωτός γίνεται σ’ εκείνο το σημείο Κ του κατόπτρου για το οποίο η φωτεινή ακτίνα κάνει τον ελάχιστο δρόμο. (Σχήμα 1.3.2)



Σχήμα 1.3.2

• Ολυμπιόδωρος ($5^{ος}$ αι): Η φύση δεν κάνει τίποτε περιττό και δεν παράγει κανένα μη αναγκαίο έργο.

• Ο Fermat ($17^{ος}$ αι) βελτιώνει την αρχή του ελαχίστου δρόμου σε *αρχή του ελαχίστου χρόνου*: το φώς μεταδίδεται ώστε να απαιτείται ελάχιστος χρόνος. Όταν το μέσον είναι ομοιογενές τότε ο ελάχιστος χρόνος πραγματοποιείται στο ελάχιστο μήκος. Αν δεν είναι ομοιογενές τότε ισχύουν οι νόμοι της διάθλασης.

• Maupertuis (Μοπερτυί, 1744): «...Η δράση είναι ανάλογη με το γινόμενο μάζα επί ταχύτητα επί μετατόπιση... Καθώς συντελούνται κάποιες μεταβολές στη φύση, η ποσότητα δράσης που απαιτείται για τις μεταβολές αυτές είναι πάντα ... η ελάχιστη δυνατή».

• Οι εργασίες πάνω στην αρχή της ελάχιστης δράσης των Lagrange και Euler (1755–1788), οδηγούν στη μαθηματική διατύπωση των συμπερασμάτων με αποκορύφωμα το έργο «Mechanique Analytique" (1788) του Lagrange.

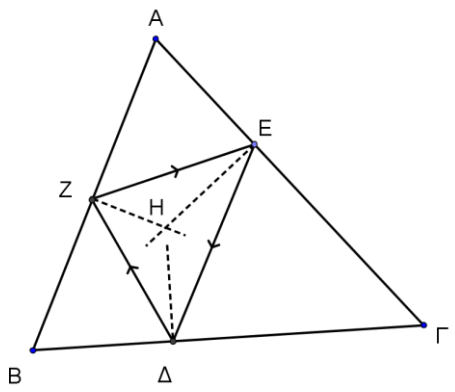
• Hamilton (~1830): Η κίνηση γίνεται έτσι ώστε το $\int_{t_0}^{t_1}(E_{\kappa\iota\nu} - E_{\delta\upsilon\nu})dt$ να είναι το ελάχιστο δυνατό. Από την αρχή αυτή ξεκινούν οι εξισώσεις του Hamilton.

Τελικά αυτό που περιμένουμε να συμβεί είναι να αποκομίσουν οι μαθητές θεμελιωμένη τη γνώση ότι <u>ο δρόμος που ακολουθεί η ακτίνα είναι ο ελάχιστος</u>, και να δούν, μέσα απο τη γνώση αυτή, τη συμβατότητα μεταξύ γεωμετρίας και εμπειρίας - μια μικρογραφία αυτού που περιγράφει ο Einstein στο κείμενο της πρώτης σελίδας αυτού του κεφαλαίου. Οδηγούμαστε λοιπόν στα εξής δύο «πορίσματα»:

1. Ο ελάχιστος δρόμος συνδέεται με τη γεωμετρία
2. Το ελάχιστο συνδέεται με την εκάστοτε συμμετρία

Θα ενθαρρύνουμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το πόρισμα της εργασίας στο πρόβλημα:

Άρα: *αν έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και η φωτεινή ακτίνα ξεκινά από το Ζ, το τρίγωνο με την ελάχιστη περίμετρο που ζητάμε θα είναι αυτό που θα σχηματιστεί από τη πορεία της φωτεινής ακτίνας*, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.3.



Σχήμα 1.3.3

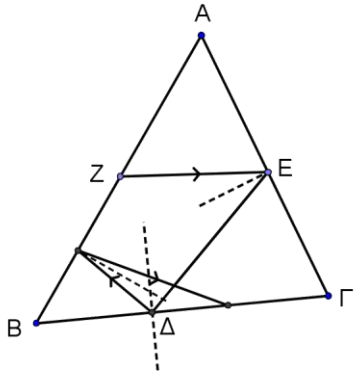
<u>Πρώτη διδακτική προσέγγιση - *Ανάλυση*</u>: Κατ'αρχάς όταν το φώς μπαίνει στο τρίγωνο από ένα τυχαίο σημείο *Ζ*, με τυχαία κατεύθυνση προς την απέναντι πλευρά, θα κινηθεί έτσι όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.4.

Σε κάποια ανάκλασή του όμως θα περάσει πάλι από τη θέση *Ζ* και θα σχηματιστεί το εσωτερικό τρίγωνο όπως στο Σχήμα 1.3.3.

Μελέτη αυτού του τριγώνου:

Έστω H το σημείο τομής της κάθετης στην AB στο Z και της κάθετης στην $AΓ$ στο E. Τότε από το H θα διέρχεται και η κάθετη της $BΓ$ στο $Δ$, γιατί οι ZH, HE, $HΔ$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του $ZEΔ$ άρα θα συντρέχουν.

Θα δείξουμε ότι η $ZHΓ$ είναι ευθεία άρα και ύψος του $ABΓ$.



Σχήμα 1.3.4

Κατ' αρχάς τα τετράπλευρα $HEΓΔ$ και $AEHZ$ είναι εγγράψιμα, διότι έχουν δύο γωνίες τους ορθές. Οπότε προκύπτει ότι:

$\widehat{HΓΔ} = \widehat{HEΔ}$ διότι $HEΓΔ$ εγγράψιμο

$\widehat{HEΔ} = \widehat{HEZ}$ από το νόμο της ανάκλασης του φωτός

$\widehat{HEZ} = \widehat{BAΔ}$ διότι $AEHZ$ εγγράψιμο.

Συνεπώς έχουμε διαδοχικά: $\widehat{ZHΔ} + \widehat{ΔHΓ} = \widehat{ZHΔ} + 90^0 - \widehat{HΓΔ} =$

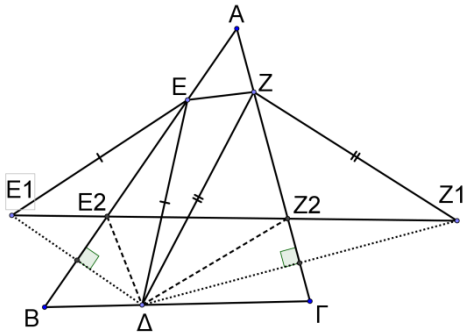
$\widehat{ZHΔ} + 90^0 - \widehat{BAΔ} = \widehat{ZHΔ} + \widehat{ABΓ} = 360^0 - (\widehat{HZB} + \widehat{HΔB}) = 180^0$

Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και $AΔ$, BE είναι ύψη του τριγώνου $ABΓ$.

Δηλαδή, το ζητούμενο τρίγωνο, αν υπάρχει, είναι το *ορθικό τρίγωνο* του $ABΓ$.

3ο χαρακτηριστικό (δημιουργική αμφιβολία): Είναι το μοναδικό τρίγωνο με αυτή την ιδιότητα;



Σχήμα 1.3.5

Αρχικά, για να δείξουμε ότι υπάρχει, θα πρέπει να προσδιορίσουμε πού θα εγγραφούν οι τρείς κορυφές του. Αυτό θα το επιχειρήσουμε σε δύο φάσεις: στη πρώτη φάση θα θεωρήσουμε τη μια κορυφή του εγγεγραμμένου τριγώνου, *Δ*, σταθερή και τις *Ε, Ζ* μεταβλητές και στη δεύτερη φάση θα εξετάσουμε τι γίνεται όταν η *Δ* μεταβάλλεται.

1η φάση: Θεωρούμε *Δ* σταθερό, *Ε, Ζ* μεταβλητά. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.5 οι πλευρές του *ΕΔΖ* συμποσούνται στη τεθλασμένη γραμμή E_1EZZ_1 η οποία ελαχιστοποιείται στην E_1Z_1. Άρα, με δεδομένο το *Δ*, το εγγεγραμμένο οξυγώνιο τρίγωνο με την ελάχιστη περίμετρο είναι το $E_2ΔZ_2$

2η φάση: το *Δ* μεταβάλλεται. Έστω ότι το Δ (Σχήμα 1.3.6) βρίσκεται σε μια τυχαία θέση στη *ΒΓ*.

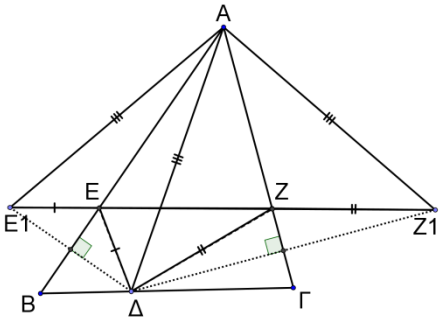
ΑΓ μεσοκάθετος άρα $AZ_1=AΔ$

ΑΒ μεσοκάθετος άρα $AΔ=AE_1$.

Η γωνία Α είναι σταθερή και το τρίγωνο E_1AZ_1 είναι ισοσκελές Οπότε:.

$$E_1Z_1 = 2ημA \cdot AZ_1 \text{ ή } E_1Z_1 = c \cdot AZ_1 \text{ . Άρα:}$$

E_1Z_1 *ελάχιστο* ⟺ AZ_1 *ελάχιστο* ⟺ *ΑΔ* ελάχιστο. Επομένως το *ΑΔ* είναι ύψος.



Σχήμα 1.3.6

1.4 Γύρω από την έννοια της συνάρτησης

Εδώ θα αναφερθούμε σε μερικά στοιχεία σχετικά με τις συναρτήσεις όπως αυτές ενυπάρχουν στα προβλήματα που θα συναντήσουμε. Θα χρειαστεί να γίνει με τους μαθητές μια συζήτηση γύρω από την έννοια της συνάρτησης, αφού αυτή αποτελεί τη κεντρική έννοια της μαθηματικής ανάλυσης. Είναι απαραίτητο να έχει αποκτήσει ένα σαφές νόημα που να μπορεί να περιγραφεί από τα παιδιά. Σκιαγραφούμε στη συνέχεια ένα πλαίσιο διαπραγμάτευσης της έννοιας με τους μαθητές, ώστε να καλλιεργηθεί ένα κλίμα εξοικείωσης με τα προβλήματα που θα ακολουθήσουν.

Αν ανατρέξουμε στην ιστορία, θα δούμε ότι η συνειδητοποίηση της έννοιας της συνάρτησης εξελίχθηκε με μεγάλη βραδύτητα. Οι πρώτες προσπάθειες για να περιγραφεί η έννοια της συνάρτησης γίνονται στα τέλη του 17ου αιώνα από τον Leibniz και τον Johann Bernoulli. Τον όρο συνάρτηση εισήγαγε ο Leibniz. Ο Bernoulli συνέδεσε με αυτό τον όρο την ιδέα «μιας έκφρασης που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές». Αργότερα, το 1748, ο L. Euler στο έργο *Introduction in analysin infinitorum* έδωσε ένα πιό απτό περιεχόμενο στην έννοια, ως μια «αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές», χρησιμοποίησε τον όρο και εισήγαγε μάλιστα

τον συμβολισμό $f(x)$. Έχουμε δηλαδή έναν σαφή ορισμό της στενής, υπολογιστικής έννοιας της συνάρτησης. Το 1755, ο Euler, στο έργο *Institutiones Calculi differentialis* έδωσε έναν ευρύτερο ορισμό της συνάρτησης φτάνοντας ουσιαστικά στη σύγχρονη έννοια «...αν μερικές ποσότητες εξαρτώνται από πολλές ποσότητες, ώστε αν οι δεύτερες μεταβληθούν μεταβάλλονται και οι πρώτες τότε οι πρώτες καλούνται συναρτήσεις των δευτέρων» Ακόμη, ο Euler πίστευε ότι όλες οι «ελεύθερα σχεδιασμένες καμπύλες» αποτελούν συναρτήσεις και μάλιστα συνιστούν μια κλάση συναρτήσεων ευρύτερη από τη κλάση εκείνων που ορίζονται μέσω «αναλυτικών εκφράσεων». Ο d'Alembert εναντιώθηκε στην άποψη αυτή του Euler και ισχυρίστηκε ότι οι δύο αυτές κλάσεις συμπίπτουν. Εντωμεταξύ η μελέτη των λύσεων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους αποκάλυψε ότι οι λύσεις αυτές ήταν συχνά συναρτήσεις «κακής συμπεριφοράς», συναρτήσεις που δεν δίνονταν από έναν αναλυτικό τύπο. Η συζήτηση που αναπτύχθηκε μεταξύ L. Euler, d'Alembert και D. Bernoulli, αλλά και το έργο του μεγάλου γάλλου μαθηματικού Joseph Fourier, κατέληξαν στην ανάγκη διεύρυνσης της έννοιας της συνάρτησης. Έτσι, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, άρχισε να αποκρυσταλλώνεται η άποψη που αντιμετώπιζε τη συνάρτηση ως αντιστοιχία, ως ένα νόμο βάσει του οποίου η ανεξάρτητη μεταβλητή x μετασχηματίζεται σε y, ανεξάρτητα από τη φύση της συγκεκριμένης αντιστοιχίας. Ένας από τους πρώτους επιστήμονες που υποστήριξαν την άποψη αυτή ήταν ο N. I. Lobatchewsky, ο οποίος υποστήριξε ότι :

> «*Αυτή η γενική έννοια απαιτεί με τον όρο συνάρτηση του x να εννοούμε τον αριθμό που δίνεται για κάθε x και ο οποίος μεταβάλλεται σταδιακά μαζί με το x. Η τιμή μιας συνάρτησης, μπορεί να ορίζεται από κάποια αναλυτική έκφραση ή από μια συνθήκη που παρέχει τη δυνατότητα να δοκιμάσουμε όλους τους αριθμούς και να επιλέξουμε έναν από αυτούς ή, τέλος, η εξάρτηση ενδέχεται να υπάρχει και να παραμένει άγνωστη.*
> *Η γενική μορφή της θεωρίας δέχεται την ύπαρξη μιας εξάρτησης μόνο υπό την έννοια ότι οφείλουμε να νοούμε τους σχετιζόμενους αριθμούς ως δεδομένους ομού*».

Με τη δημιουργία της θεωρίας των συνόλων, στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, που θεμελιώθηκε από τον Georg Cantor, η συνάρτηση ορίζεται πλέον ως εξής:

> *Εστω X και Y δύο σύνολα. Το σύνολο F των ζευγών (x, y), με $x \in X$ και $y \in Y$, καλείται συνάρτηση αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in Y$ τέτοιο, ώστε $(x,\ y) \in F$. Τότε γράφουμε $y = f(x)$.*

Βλέπουμε ότι το νόημα της τελευταίας πρότασης του Lobatchewsky είναι περαπλήσιο με αυτό που αποδίδεται μέσα από τη θεωρία των συνόλων.

Όσο αυστηρός και αν θελήσει να γίνει κανείς επιδιώκοντας τη πληρότητα του ορισμού της έννοιας της συνάρτησης, φαίνεται ότι μια σαφής περιγραφή της είναι επαρκής για τη διαχείρηση των απαιτήσεων που προκύπτουν από τις εφαρμογές των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες, στην οικονομία, τη τεχνολογία και γενικά στη λύση των διαφόρων προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Φαίνεται να είναι αρκετή η αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές, όπως αυτή άρχισε να

διαμορφώνεται στις πηγές της μαθηματικής ανάλυσης, όπως την είχε αντιληφθεί ο Bernoulli, δηλαδή ως «έκφραση που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές».

Βέβαια, οι συναρτήσεις διαφέρουν ως προς το πλήθος των μεταβλητών τους. Οι μαθητές έχουν ως τώρα εξοικειωθεί με τις συναρτήσεις της μίας μεταβλητής. Οι:

$F(x) = y = ax,\ y = ax + c,\ y = ax^2,\ y = \sqrt[n]{x} + c,\ y = \frac{(a+x)^2}{x},\ y = sin(ax - c)$

είναι μερικές από τις μορφές που μελετώνται στο σχολείο και είναι σημαντικές. Μάλιστα, για τις περισσότερες από αυτές, οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάσουν τη γραφική τους παράσταση στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και να εντοπίσουν κάποιες ιδιότητες, όπως, για παράδειγμα, ποιό είναι το πεδίο ορισμού τους, αν είναι αύξουσες ή όχι κλπ.

Ωστόσο, για τη μελέτη πιό σύνθετων προβλημάτων, οι συναρτήσεις της μιας μεταβλητής αποδεικνύονται ανεπαρκείς. Παρ'όλο που κατά τη διδασκαλία στο σχολείο δεν εμφανίζονται μορφές όπως $f(x, y)$ ή $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, οι μαθητές γνωρίζουν μεγέθη, όπως, για παράδειγμα, τη κινητική ενέργεια ή την ορμή ενός συστήματος που είναι συναρτήσεις παραπάνω απο μιας μεταβλητών. Πολύ περισσότερο, οι απλές αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση), στη πραγματικότητα, δεν είναι παρά αντιμετώπιση συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Και, ουσιαστικά, η πρώτη αντιμετώπιση τέτοιων συναρτήσεων ανάγεται σε γνωστικά επεισόδια της πρώιμης παιδικής ηλικίας που πραγματοποιήθηκαν από τον καθένα πριν ακόμη από τη συστηματική μάθηση του αλφάβητου (: έχω ένα μήλο και ο Τάσος μου δίνει άλλο ένα. Πόσα μήλα έχω;).

Έτσι λοιπόν, σε αυτό το πλαίσιο κινούμενοι, μπορούμε ασφαλώς να υποθέσουμε ότι οι μαθητές έχουν το γνωστικό υπόβαθρο να κάνουν αρχικά ένα βήμα προς τα εμπρός: Να θεωρήσουν συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα η πράξη της πρόσθεσης δύο αριθμών

$$z = x + y$$

Η *συνάρτηση της πρόσθεσης* αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x και y το άθροισμά τους z. Αντιστοιχίζει δηλαδή τον αριθμό *5* στο ζεύγος $(2, 3)$ αλλά επίσης και στο ζεύγος $(4, 1)$. Αντιστοιχίζει τον αριθμό 0 στο ζεύγος $(-1, 1)$ κ.ο. Αντίστοιχα ορίζονται και οι άλλες πράξεις. Ο πολλαπλασιασμός και η αφαίρεση ορίζονται, όπως και η πρόσθεση, για όλα τα ζεύγη των πραγματικών αριθμών x και y, ενώ η διαίρεση μόνο για τα ζεύγη (x, y) που ικανοποιούν τον περιορισμό $y \neq 0$.

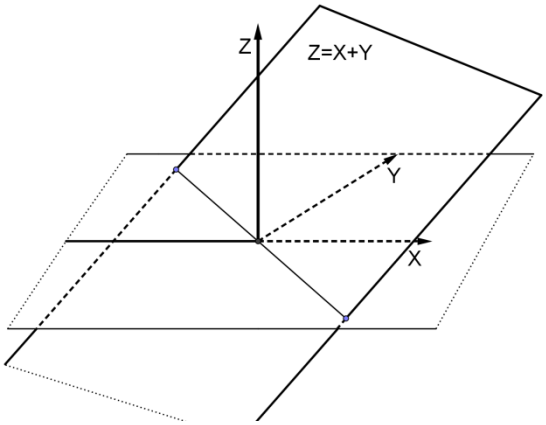
Οι συναρτήσεις των δύο μεταβλητών $z = f(x, y)$ μπορούν να παρασταθούν και γραφικά. Αυτό θα αποτελέσει μια αφορμή για να μπουν οι μαθητές στη διαδικασία της γεωμετρικής αναπαράστασης του χώρου $\mathbb{R}^3$:

Παριστούμε το επίπεδο (x, y) και υψώνουμε τον άξονα z κάθετα στο επίπεδο αυτό. Εντοπίζουμε το σημείο (x, y) στο επίπεδο (x, y), υπολογίζουμε το $f(x, y)$ και χαράσουμε ένα *προσανατολισμένο* ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλο προς τον άξονα των z, μήκους $f(x, y)$ με αρχή το σημείο (x, y). Με το τρόπο αυτόν, η γραφική παράσταση της συνάρτησης της πρόσθεσης $z = f(x, y) = x + y$ απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1.4.1). Προφανώς για τις διάφορες τιμές του z προκύπτει μια οικογένεια παράλληλων ευθειών, καθώς όλες έχουν τον ίδιο συντελεστή

διεύθυνσης: -1. Πρόκειται για συνάρτηση ομοπαραλληλική ή αφινική. Όλες οι γραμμικές συναρτήσεις

$$z = ax + by$$

απεικονίζονται σε *επίπεδα που διέρχονται από την αρχή των τριών αξόνων* και που *δεν* είναι κάθετα στο επίπεδο (x, y).

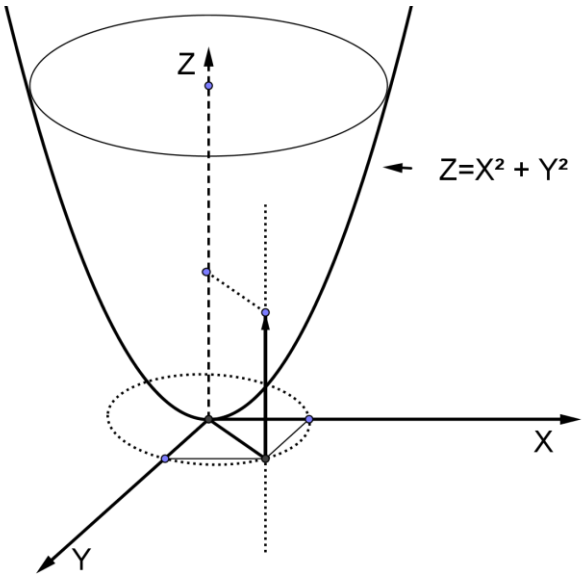


Σχήμα 1.4.1

Πρόκειται πάλι για ομοπαραλληλικές συναρτήσεις. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και μή μηδενικές σταθερές c ώστε να σχηματίζονται γραμμικές συναρτήσεις της μορφής $z = ax + by + c$ και να απεικονίζονται σε επίπεδα που δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Στη συνέχεια περνούμε στις αμέσως πιό πολύπλοκες συναρτήσεις με τύπο τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού:

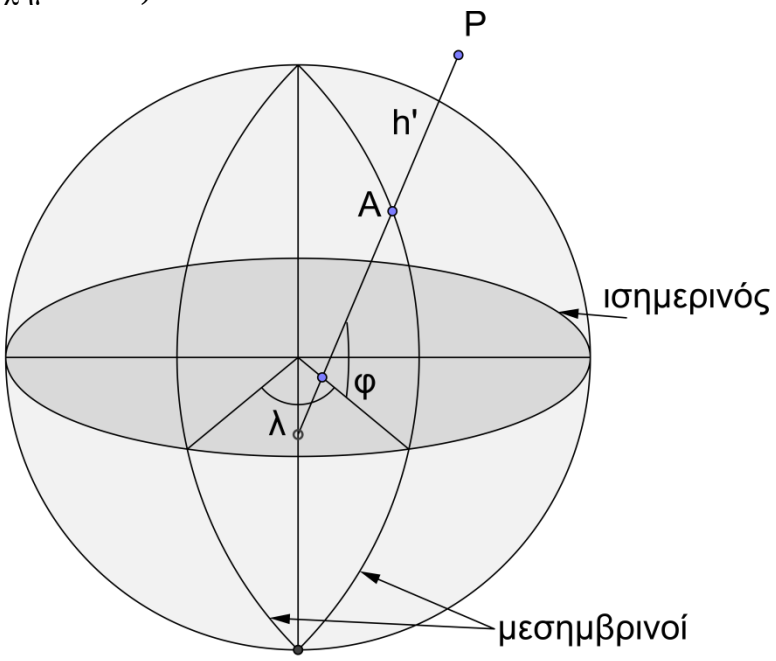
$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by + c$$



Σχήμα 1.4.2

Οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν, για παράδειγμα, στη κατασκευή της γραφικής παράστασης της $z = x^2 + y^2$: από τα σημεία (x, y) κάθε κύκλου, κέντρου *(0, 0, 0)* και ακτίνας $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ του επιπέδου (x, y), φέρουν τα κάθετα διανύσματα μήκους ρ^2. Επόμενο είναι να σχηματίζεται ένα *παραβολοειδές εκ περιστροφής* όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4.2.

Το πιό «απτό» παράδειγμα συνάρτησης δύο μεταβλητών βρίσκεται ακριβώς κάτω από τη *θέση* που έχει ο καθένας πατώντας στο έδαφος. Αυτή προσδιορίζεται πλήρως από τη τριάδα των αριθμών (φ, λ, h), όπου τα φ και λ δηλώνουν αντίστοιχα το γεωγραφικό πλάτος και μήκος, ενώ το h συμβολίζει το υψόμετρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Το υψόμετρο είναι συνάρτηση των φ και λ, δηλαδή $h = h(\varphi, \lambda)$. Όλα όσα βλέπουμε γύρω μας αποτελούν τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης (Σχήμα 1.4.3).



Σχήμα 1.4.3

Βιβλιογραφία 1ου κεφαλαίου

[1] Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ : Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και Επιφανειών (ΕΚΠΑ, 2010)

[2] A. EINSTEIN : Αιθέρας, Γεωμετρία και Εμπειρία (Βάνιας, 1997)

[3] Σ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ , Σ. ΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ, Ε. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΛΙΑΣ : Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι (Συμμετρία, 1999).

[4] Π. ΠΑΜΦΙΛΟΣ : Εισαγωγή στη Γεωμετρία (Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2004)

[5] V. M. TICHOMIROV : Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα (Κάτοπτρο, 1999)

[6] L. COHEN, L. MANION : Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Ερευνας, Αθήνα (Μεταίχμιο, 2000).

[7] Π. ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ: Προσωπικές σημειώσεις από τις διαλέξεις του σεμιναρίου «Ιστορία και Διδακτική των μαθηματικών» (ΕΚΠΑ 2005)

[8] Ι. ΘΩΜΑΪΔΗΣ : Προσωπικές σημειώσεις από τις παραδόσεις ΠΜΣ «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους» εαρινό εξάμηνο 2012.

[9] Η. ΜΑΤΣΑΓΓΟΥΡΑΣ : Στρατηγικές Διδασκαλίας: Η Κριτική Σκέψη στη διδακτική πράξη (Gutenberg, 2002).

[10] Α. Ι. ΚΑΣΣΕΤΑΣ : Η αρχή της ελάχιστης δράσης (http://users.sch.gr/kassetas/zzzzzzzzzzPrinscipeACTION.htm)

[11] D.J. WHITEHEAD, Δ. ΜΑΚΡΙΔΟΥ-ΜΠΟΥΣΙΟΥ : Οικονομική εκπαίδευση. Διδακτική των οικονομικών. Ένα εγχειρίδιο για τους καθηγητές των οικονομικών (Gutenberg, 1995).

[12] Σ. ΓΙΑΛΑΜΑΣ, S. KELLER, A. HANSEN: Χρησιμοποιώντας Καθοδηγούμενη Έρευνα στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Το *φ*-περιοδική έκδοση επικοινωνίας και διαλόγου στα Μαθηματικά, 4, σελ 127 -135).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ [3]

2.1 Εισαγωγή

Από την αρχή του 20^{ου} αιώνα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μετά τον Hilbert, η γεωμετρία αποτέλεσε ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό μέσο αναπαράστασης πολυάριθμων προβλημάτων απο το χώρο των μαθηματικών και διαφόρων άλλων επιστημών. Συχνά πρόκειται όχι για την Ευκλείδεια γεωμετρία των δύο ή τριών διαστάσεων, αλλά για τη γεωμετρία ενός χώρου προσαρμοσμένου στο πρόβλημα, γενικά ενός χώρου παραμέτρων που κατασκευάστηκε μέσα απο τα δεδομένα αυτού του προβλήματος.

Μια πολύ γενική περιγραφή της μεθόδου που εφαρμόζεται σ' αυτή τη *διαδικασία της γεωμετρικοποίησης*, που σημαίνει να μεταφερθούμε από το αρχικό πλαίσιο σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, είναι η ακόλουθη:

Διατυπώνουμε το αρχικό πρόβλημα με όρους αναζήτησης μιας διαμόρφωσης (μέσα στο πλαίσιο της αρχικής κατάστασης) που ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες. Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο όλων των διαμορφώσεων τέτοιου είδους. Ταυτοποιούμε στη συνέχεια το σύνολο αυτό με ένα υποσύνολο E ενός χώρου όπου έχουμε συνηθίσει να δουλεύουμε γεωμετρικά (συνήθως στο $\mathbb{R}^n$). Το σύνολο E παίζει επομένως το ρόλο του *χώρου παραμέτρων* για τις διαμορφώσεις που θεωρήσαμε. Το πρόβλημα τώρα ανάγεται *στη κατασκευή ενός σημείου του E* που ικανοποιεί συγκεκριμένες γεωμετρικές προϋποθέσεις.

Για να εξηγήσουμε αυτό που θέλουμε να πούμε, δίνουμε τρία παραδείγματα όπου εφαρμόζεται η παραπάνω μέθοδος:

(1) Μια ιδιότητα που έχουν τα σημεία τομής κύκλων.

(2) Δυνατότητα ή όχι να περιστραφεί μια ευθεία με τον περιορισμό να μην εφάπτεται σε μια δοθείσα καμπύλη.

(3) Ύπαρξη ή όχι πολυωνύμου τετάρτου βαθμού με γνωστές τις κρίσιμες τιμές.

Στα δύο πρώτα παραδείγματα το αρχικό πλαίσιο είναι ήδη γεωμετρικό, αλλά για να λυθεί το πρόβλημα κρίνεται αναγκαία (ή τουλάχιστον αποτελεσματική) μια μεταφορά σε ένα καινούριο γεωμετρικό πλαίσιο. Με άλλά λόγια, οδηγούμαστε στην αναγεωμετρικοποίηση ενός προβλήματος που είναι ήδη γεωμετρικό.

---

[3] Η εργασία αυτή βασίστηκε στο κείμενο που παρουσιάστηκε από τον Adrien Douady (Τμήμα Μαθηματικών - Πανεπιστήμιο του Νότιου Παρισιού) στο συμβούλιο ICME, στη Σεβίλλη το 1996, με τίτλο *Géometrie dans les éspaces de parametres: une méthode de géometrisation.* Στη παρουσίαση ο Douady χρησιμοποίησε τρία παραδείγματα. Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται το πρώτο και το τρίτο ενώ το δεύτερο επιλέξαμε να παρουσιαστεί αυτούσιο (μεταφρασμένο) για λόγους πληρότητας.

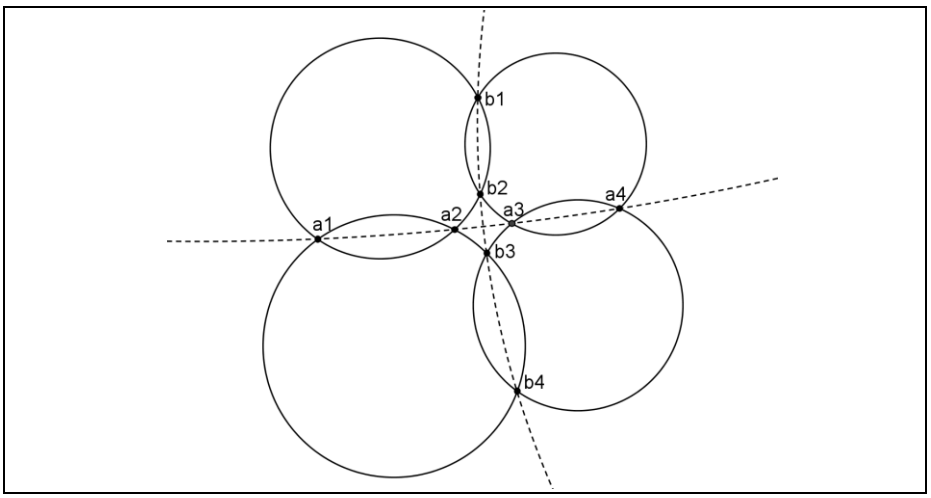
Στο τρίτο παράδειγμα το αρχικό πρόβλημα είναι αλγεβρικό. Είναι εύκολο να το διατυπώσουμε με γεωμετρικούς όρους, αλλά η γεωμετρική αναπαράσταση που θα χρησιμοποιηθεί δεν είναι η εκ των προτέρων προφανής.

Σε καθένα απο τα παραδείγματα αυτά ο παραμετρικός χώρος ανήκει στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$. Αυτό όμως δεν συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα, το σύνολο των τροχιών ενός πλανήτη είναι $5^{ης}$ διάστασης. Στη ρομποτική εξετάζεται το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων ενός στερεού: πρόκειται για μεταβλητή 6 διαστάσεων που ανήκει στον $\mathbb{R}^9$.

Πρώτα θα δώσουμε τη διατύπωση των τριών προβλημάτων :

2.2 Τα προβλήματα

2.2.1 Διατομές κύκλων[4]



σχήμα 2.2.1

Έστω C_1, C_2, C_3 και C_4 τέσσερις κύκλοι του επιπέδου. Υποθέτουμε ότι:

C_1 και C_2 τέμνονται στα a_1 και a_2.

C_3 και C_4 τέμνονται στα a_3 και a_4

C_1 και C_3 τέμνονται στα b_1 και b_2

C_2 και C_4 τέμνονται στα b_3 και b_4

Θα αποδείξουμε ότι αν τα a_i βρίσκονται πάνω σ'ένα κύκλο ή μια ευθεία, τότε και τα b_i βρίσκονται σε κύκλο ή ευθεία αντίστοιχα.

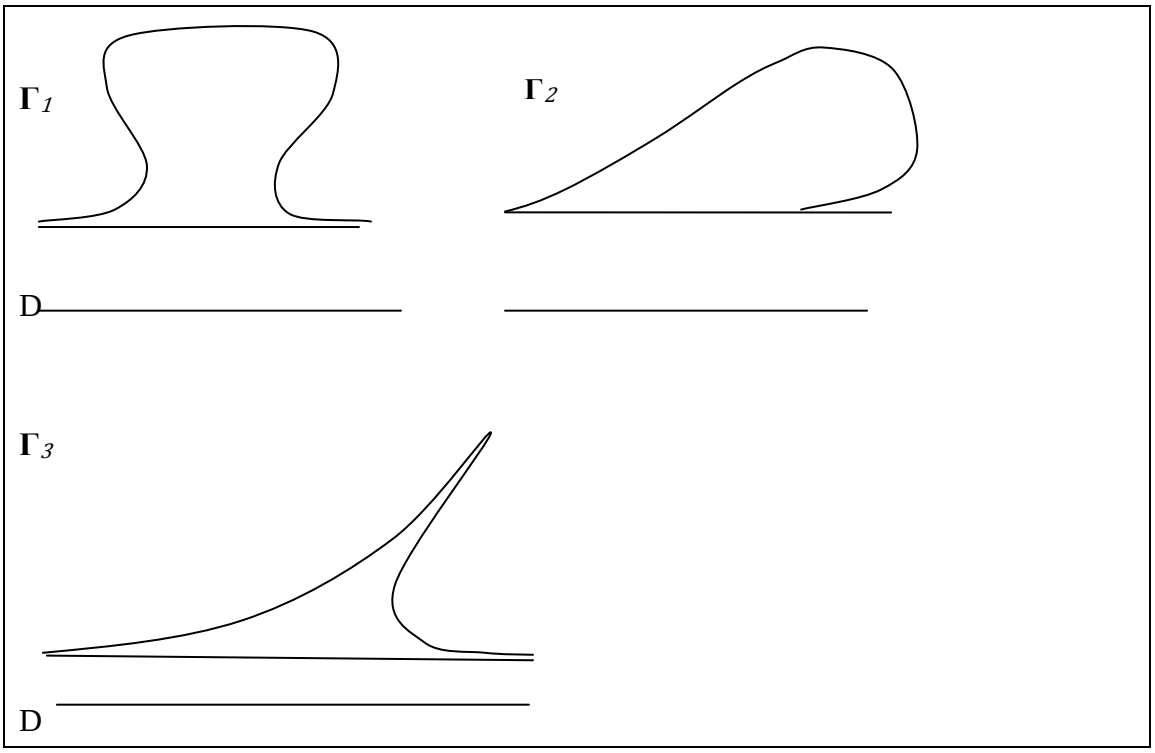
2.2.2 Περιστροφή ευθείας

(*το πρόβλημα είχε προταθεί από τον David Epstein*[5])

[4] Το πρόβλημα των κύκλων προορίζεται να αποδείξει ένα θεώρημα που υπέδειξε ο Marcel Berger. Η πρόκληση ήταν να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα Clifford ή αλλιώς «Θεώρημα του $6^{ου}$ κύκλου», χωρίς τη χρήση των μιγαδικών αριθμών.

Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται σε τρείς περιπτώσεις:

Θεωρούμε στο επίπεδο μια καμπύλη *Γ* που μπορείνα είναι μια από τις *Γ1*, *Γ2* ή *Γ3*, όπως φαίνονται στο Σχήμα 2.2.2. Μπορούμε να μετακινήσουμε την ευθεία *D* με συνεχή τρόπο έτσι, ώστε να ξαναοδηγηθεί στη θέση της αλλά με αντίθετο προσανατολισμό χωρίς ποτέ, κατά τη κίνησή της, να εφάπτεται στη καμπύλη *Γ*;



Σχήμα 2.2.2

Επισημαίνεται ότι η απάντηση δεν θα είναι η ίδια σε καθεμία από τις τρείς περιπτώσεις : υπάρχουν δύο ΝΑΙ και ένα ΟΧΙ, ή το αντίθετο.

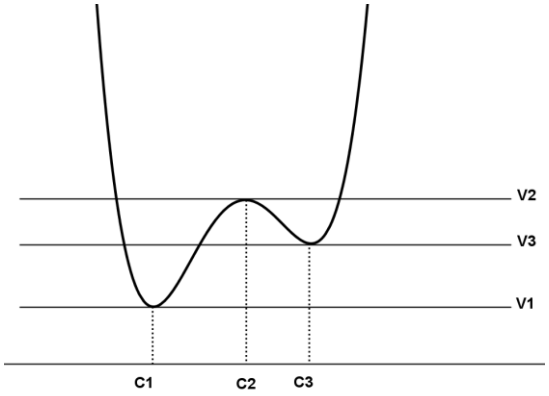
2.2.3 Πολυώνυμο με δεδομένες τις κρίσιμες τιμές του.

Έστω f ένα πολυώνυμο μονικό μιας μεταβλητής 4[ου] βαθμού με πραγματικούς συντελεστές:

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(«μονικό» σημαίνει $a_4=1$). Υποθέτουμε ότι η παράγωγος f' έχει 3 πραγματικές ρίζες $c_1 < c_2 < c_3$ (κρίσιμα σημεία). Οι κρίσιμες τιμές $v_i = f(c_i)$ επαληθεύουν τις σχέσεις $v_1 < v_2$ και $v_2 > v_3$ (Σχήμα 2.2.3).

[5] Πανεπιστήμιο Warwick, U.K.



Σχήμα 2.2.3

Ερώτημα 1: Δοθέντων τριών πραγματικών $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $\nu_1 < \nu_2$ και $\nu_2 > \nu_3$, μπορούμε να επιλέξουμε συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τέτοιους, ώστε οι κρίσιμες τιμές της f να είναι οι $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$;

Δεν υπάρχει μοναδικότητα: αν μετατοπίσουμε οριζόντια την f, δηλαδή την αντικαταστήσουμε με την $x \to f(x-b)$, οι κρίσιμες τιμές δεν αλλάζουν.

Ερώτημα 2: Ενα μονικό πολυώνυμο βαθμού 4 προσδιορίζεται μονοσήμαντα, ως προς την οριζόντια μετατόπισή του, από τις κρίσιμές τιμές του;

Το πρόβλημα αυτό μπαίνει με φυσικό τρόπο για όλους τους βαθμούς. Υπάρχει μια κλασσική απόδειξη που χρησιμοποιεί τη μιγαδική ανάλυση. Είχε προταθεί, ως πρόκληση, να βρεθεί μια απόδειξη που να παραμένει στο πραγματικό πλαίσιο. Η Pierrette Sentenac και ο Adrien Douady πρότειναν μια τέτοια. Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται η περίπτωση του 4^{ου} βαθμού, η πρώτη μη τετριμμένη.

2.3 Το πρόβλημα της διατομής των κύκλων

2.3.1 Βασική θεώρηση

Ας σταθούμε στο πρώτο πρόβλημα, εκείνο με τις διατομές των κύκλων. Πρόκειται για πρόβλημα κύκλων: Έχοντας από την υπόθεση ότι τα σημεία a_i ανήκουν σε κύκλο, διερευνούμε τη κατασκευή ένος άλλου κύκλου που να διέρχεται απο τα b_i (ή τουλάχιστον ν'αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου κύκλου).

Ακολουθώντας τη γενική μέθοδο, θα πρέπει να θεωρήσουμε το σύνολο C όλων των κύκλων του επιπέδου.

2.3.2 Πρώτη προσέγγιση

Θεωρούμε το σύνολο C:= «όλοι οι κύκλοι του επιπέδου»

Ένας κύκλος προσδιορίζεται από το κέντρο και την ακτίνα του. Ας συμβολίσουμε $C_{a,b,r}$ τον κύκλο του επιπέδου ακτίνας r που το κέντρο του έχει συντεταγμένες a, b. Κάθε τριάδα (a, b, r) αντιστοιχεί μονοσήμαντα στο σημείο (a, b, r) του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε λοιπόν μια *1-1* και επί απεικόνιση φ: $\mathsf{C} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$.

Αναπαριστώντας τον $C_{a,b,r}$ με το σημείο (a, b, r) του $\mathbb{R}^3$ ταυτοποιούμε το σύνολο C με τον ημί-χωρο $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ (τα σημεία του επιπέδου – συνόρου $(x'x, y'y)$ αντιστοιχούν σε σημειακούς κύκλους).

Συνέπειες της θεώρησης αυτής είναι:

1. Κάθε σημείο $P(x, y)$ του επιπέδου $(x'x, y'y)$ ισοδυναμεί με ένα σημειακό κύκλο $(x, y, 0)$
2. Όλοι οι ομόκεντροι με τον $(x, y, 0)$ κύκλοι απεικονίζονται στη κατακόρυφη ημιευθεία, παράλληλη προς τον ημιάξονα *Oz*, με αρχή το σημείο $(x, y, 0)$ του επιπέδου – συνόρου.
3. Προφανώς, για κάθε *r*, τα κέντρα (a, b) των κύκλων που διέρχονται από το σημείο *(x,y)* βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το (x, y) και ακτίνα r. Άρα για κάθε $r = d((x, y), (a, b)) \in \mathbb{R}_+$ τα σημεία (a, b, r) του $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ - δηλαδή οι απεικονίσεις όλων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο (x, y) - αποτελούν κύκλο που ανήκει σε επίπεδο παράλληλο προς το οριζόντιο $(x'x, y'y)$, σε απόσταση *r* από αυτό.
4. Καθώς το *r* κινείται παράλληλα προς τον θετικό κατακόρυφο ημιάξονα, όλοι οι παραπάνω κύκλοι διαμορφώνουν τη παράπλευρη επιφάνεια ενός *κώνου*
$$\{(\alpha, b, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ | r = d((x, y), (a, b))\}$$
με κορυφή το $P(x, y)$. Η προβολή ενός τυχαίου σημείου της παράπλευρης επιφάνειας στο οριζόντιο επίπεδο απεικονίζει το πραγματικό κέντρο κύκλου ακτίνας *r* που διέρχεται από το *P* . Επομένως καθένας από τους κώνους είναι ορθογώνιος.
5. Το σύνολο C (P, Q) των κύκλων που διέρχονται από δύο σημεία, τα $P(x, y)$ και $Q(x', y')$, αναπαρίσταται *στη τομή των αντίστοιχων δύο κώνων* με κορυφές τα σημεία $P(x, y, 0), Q(x', y', 0)$.

2.3.3 Μελέτη της τομής δυο κώνων:

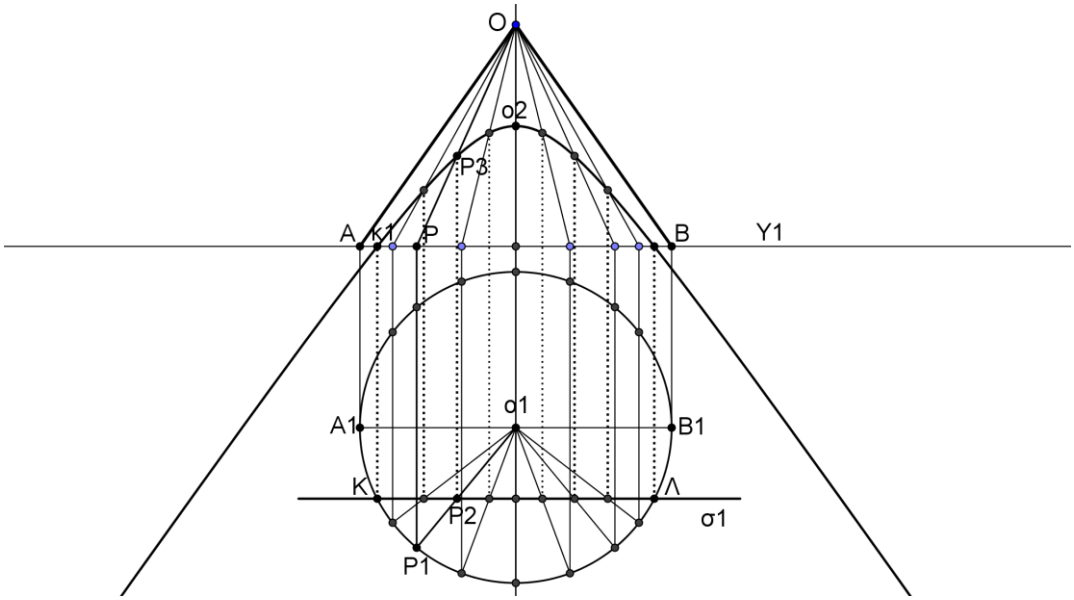
Έστω $M(a, b, r)$ ένα σημείο τομής. Τότε

(α) τα σημεία M, P, Q ορίζουν ένα επίπεδο, έστω *Σ*.

(β) Το (a, b) ισαπέχει από τα *P* και *Q* απόσταση *r*. Επομένως είναι $|MP| = |MQ| = r\sqrt{2}$. Οδηγούμαστε επομένως στο συμπέρασμα ότι το *M* ανήκει στο μεσοκάθετο επίπεδο *Π* του *PQ*. Συνεπώς το *Π* είναι παράλληλο προς τους άξονες των κώνων, οπότε, η τομή της παράπλευρης επιφάνειας απο το *Π είναι μια υπερβολή (*ο ένας κλάδος) (βλέπε Σχήμα 2.3.1).

Καθώς τα σημεία είναι τέσσερα, οδηγείται κανείς φυσιολογικά στη μελέτη της διατομής δύο υπερβολών στον $\mathbb{R}^3$. Η θεώρηση αυτή σύντομα γίνεται εξαιρετικά περίπλοκη και φαίνεται να συγκρούεται με το αίτημα μιας λιτής λύσης που θα αναδεικνυόταν μέσα από τις έννοιες, χάνοντας επομένως και τον παιδαγωγικό της χαρακτήρα .

Οδηγείται λοιπόν κανείς στην αναζήτηση μιας πιο κατάλληλης αναπαράστασης του C.



Σχήμα 2.3.1

2.3.4 Αλλαγή πλαισίου

Η εξίσωση του κύκλου $C_{a,b,r}$είναι

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ ή}$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad (*)$$

όπου $c=a^2+b^2-r^2$.

Η εξίσωση *(*)* παριστάνει κύκλο, αρκεί $c \leq a^2+b^2$ (δεχόμαστε και τους σημειακούς κύκλους). Αναπαριστάνοντας τον $C_{a,b,r}$ με το σημείο (a,b,c) του $\mathbb{R}^3$, ταυτοποιούμε το C με τη περιοχή E του $\mathbb{R}^3$ που είναι το εξωτερικό ενός παραβολοειδούς Σ, με εξίσωση $c=a^2+b^2$ (βλέπε υποενότητα 2.3.4α). Τα σημεία του παραβολοειδούς $(r=0)$ παριστάνουν κύκλους σημειακούς (τα σημεία στο εσωτερικό παριστάνουν φανταστικούς κύκλους χωρίς πραγματικά σημεία).

Τι κερδίσαμε και τι χάσαμε μ'αυτή τη καινούρια αναπαράσταση;

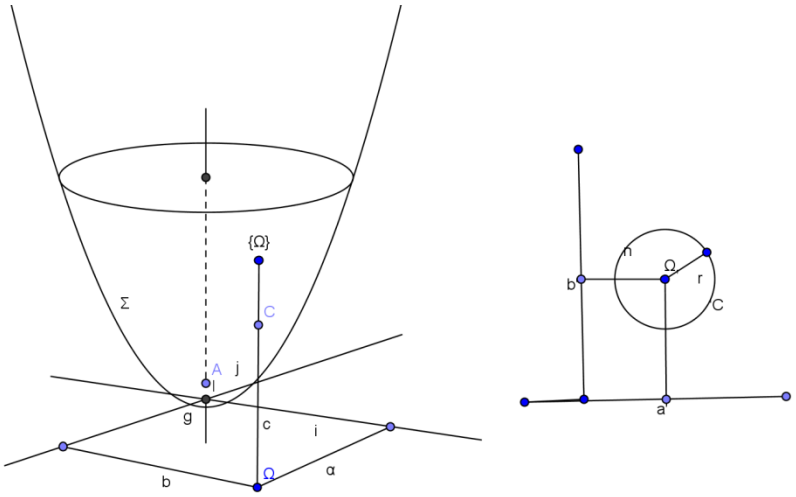
Μειονεκτήματα: Έχει ένα χαρακτήρα λιγότερο φυσικό. Ακόμη, έχουμε μια περιοχή του $\mathbb{R}^3$ που είναι λιγότερο εύκολο να περιγραφεί.

Πλεονεκτήματα: Για κάθε $P(x,y)$, το σύνολο $\mathsf{C}(P)$, (:των κύκλων που διέρχονται από αυτό), τώρα είναι ένα επίπεδο, αυτό που έχει εξίσωση την *(*)*, όπου εδώ οι μεταβλητές είναι τα a,b,c ενώ οι x,y είναι (παραμετρικές) σταθερές.

Αυτό το επίπεδο εφάπτεται στο παραβολοϊδές Σ στο σημείο όπου αναπαρίσταται ο σημειακός κύκλος *P*. Όλα τα υπόλοιπα σημεία του επιπέδου είναι εξωτερικά του Σ (βλ. υποενότητα 2.3.4β). Δοθέντων δύο σημείων P και Q, το σύνολο $\mathsf{C}(P,Q)$ γίνεται *η διατομή δύο τέτοιων επιπέδων*: είναι μια ευθεία εξ ολοκλήρου εξωτερική του Σ (βλ. 2.3.4γ)

Παρατήρηση: Η αναπαράσταση αυτή θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στη θεωρία δεσμών και δικτύων των κύκλων.

2.3.4α. Ο παραμετρικός χώρος Ε



Σχήμα 2.3.2

Ένας κύκλος C ακτίνας r του οποίου το κέντρο Ω έχει συντεταγμένες *(a, b)*, αναπαριστάνεται με το σημείο *(a, b, c)* όπου $c = a^2 + b^2 - r^2$. Αν κρατήσουμε το Ω σταθερό και μεταβάλουμε το r, το σημείο αναπαράστασης διατρέχει μια κατακόρυφη ημιευθεία της οποίας το άκρο παριστάνει τον σημειακό κύκλο $\{\Omega\}$. Όταν το Ω και η ακτίνα μεταβάλονται, το σημείο αναπαράστασης περιγράφει τη περιοχή E του $\mathbb{R}^3$ που βρίσκεται στο εξωτερικό του παραβολοϊδούς Σ που έχει εξίσωση $c = a^2 + b^2$. Η προβολή ενός σημείου C στο επίπεδο Oab δίνει το κέντρο Ω του κύκλου που παρίσταται με $\boldsymbol{C}$. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο Σ παριστάνουν σημειακούς κύκλους. Τα σημεία που βρίσκονται ακριβώς πάνω από το Σ δεν παριστάνουν τίποτα ή, αν θέλετε, παριστάνουν φανταστικούς κύκλους χωρίς πραγματικά σημεία.

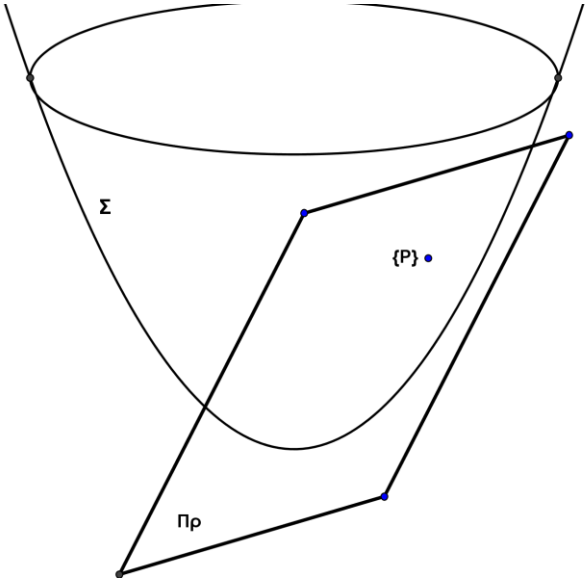
2.3.4β. Επίπεδο κύκλων που διέρχονται από ένα σημείο

Τα σημεία που αναπαριστούν κύκλους που περνούν από ένα σημείο με συντεταγμένες (x, y), είναι τα σημεία $(a, b, c) \in E$ τέτοια ώστε $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, που *σημαίνει* ότι:

$$c = 2xa + 2yb - (x^2 + y^2).$$

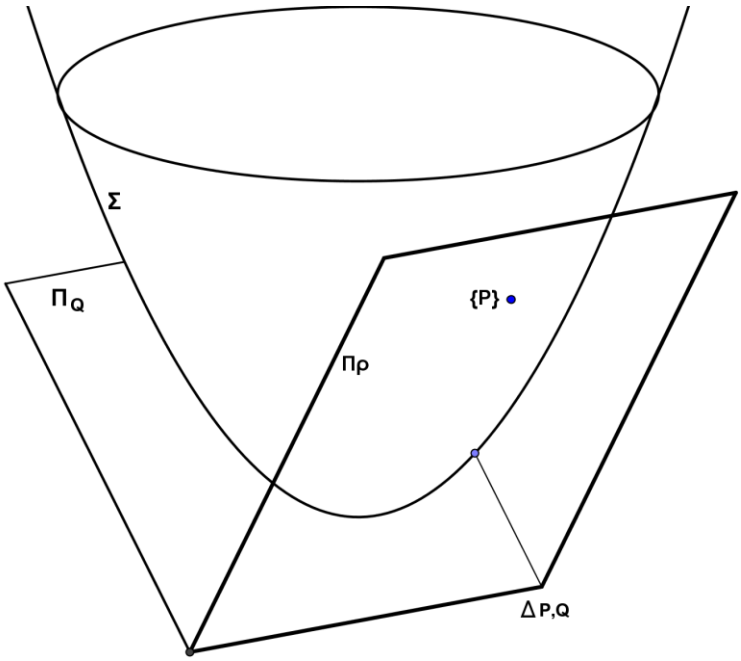
Στην εξίσωση αυτή τα a, b, c είναι οι μεταβλητές και x, y είναι οι σταθερές. Είναι η εξίσωση ενός επιπέδου Π_P. Το επίπεδο αυτό περιέχει το σημείο P του Σ που αναπαριστάνει τον σημειακό κύκλο *{P}*, και πάνω από κάθε σημείο Ω του $\mathbb{R}^2$ περιέχει ένα σημείο του E (το σημείο που αναπαριστάνει τον κύκλο κέντρου Ω που

διέρχεται από το *P*). Το επίπεδο Π_ρ είναι λοιπόν εφαπτόμενο στο *Σ* στο σημείο που αναπαρίσταται ο *{P}*.



Σχήμα 2.3.3

2.3.4γ. Κύκλοι που διέρχονται από δύο σημεία.



Σχήμα 2.3.4

Έστω δύο διαφορετικά σημεία *P* και *Q*. Οι κύκλοι που διέρχονται από αυτά αναπαριστάνονται από τα σημεία *της ευθείας* Δ_{PQ} που είναι η τομή των Π_P και Π_Q. Η ευθεία αυτή είναι ολόκληρη εξωτερική του *Σ*.

2.3.5 Ανάλυση του προβλήματος

Ερχόμαστε λοιπόν στη δεύτερη αναπαράσταση και ταυτίζουμε τον C με τη περιοχή E του $\mathbb{R}^3$ εξωτερική του *Σ*. Ένας κύκλος C του $\mathbb{R}^2$ αναπαριστάνεται με ένα σημείο του E που το συμβολίζουμε επίσης *C*. Θεωρώντας δύο σημεία C και C' του $\mathbb{R}^3$ συμβολίζουμε με $D_{CC'}$: *την ευθεία που διέρχεται από τα C και C΄.*

Μία ευθεία $D_{CC'}$ έχει τις εξής δυνατότητες:

(1) Εφάπτεται στο *Σ* έστω στο σημείο *A*. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι *C και C΄* έχουν κοινό σημείο το *A* το οποίο είναι μοναδικό άρα πρόκειται για *εφαπτόμενους στο A κύκλους*.

(2) Διαπερνά την επιφάνεια *Σ*. Τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει την $D_{CC'}$ και να εφάπτεται στο παραβολοειδές *Σ*. Στη περίπτωση αυτή, επομένως, οι δύο κύκλοι *δεν έχουν κοινό σημείο*.

(3) Είναι εξωτερική της *Σ*. Όμως από κάθε ευθεία εκτός παραβολοειδούς διέρχονται δύο εφαπτόμενα στο παραβολοειδές επίπεδα (σε αντιστοιχία των δύο εφαπτομένων μιας παραβολής c που διέρχονται από ένα σημείο εξωτερικό της *c*).

Προφανώς, οι ευθείες που ορίζουν οι κύκλοι *C1, C2, C3* και *C4*, εφόσον αυτοί τέμνονται, είναι εξωτερικές της *Σ* (περίπτωση (3)) Αν a_1, a_2, a_3, a_4 είναι σημεία ενός κύκλου *Γ* τότε υπάρχει σημείο *Γ*∈ *E* που ανήκει ταυτόχρονα στις ευθείες $D_{c_1c_2}$ και $D_{c_3c_4}$ που σημαίνει ότι οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται. Αυτό οδηγεί στο ότι τα σημεία *C1, C2, C3* και *C4* ανήκουν στο ίδιο επίπεδο εφ' όσον οι ευθείες $D_{C_1C_3}$ και $D_{C_2C_4}$ είτε τέμνονται είτε είναι παράλληλες. Αν αυτές συντρέχουν σε ένα σημείο έστω *Γ΄*, το σημείο παριστάνει ένα κύκλο που διέρχεται από τα *b1, b2, b3* και *b4.*

Απομένει να δούμε ότι αν οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες, τα σημεία b_i είναι συνευθειακά. Εδώ προτείνουμε ένα επιχείρημα που στηρίζεται στα όρια.

2.3.6 Το πέρασμα στο όριο

Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες $D_{C_1C_3}$ και $D_{C_2C_4}$ είναι παράλληλες ορίζοντας έτσι ένα επίπεδο *H*. Μετακινούμε ελάχιστα το σημείο *C4* στο επίπεδο *H* σ'ενα σημείο *C4(ε)* έτσι που τώρα οι ευθείες να τέμνονται. Ορίζονται έτσι 4 ομοκυκλικά σημεία *b1, b2, b3(ε)* και *b4(ε)*. Όταν το *ε* τείνει προς το *0*, τα σημεία *b3(ε)* και *b4(ε)* τείνουν προς τα *b3* και *b4* αντίστοιχα (βλ. 2.3.6α), ενώ τα *b1* και *b2* παραμένουν ακίνητα. Οι γωνίες των ευθειών *(b1 b3(ε), b1 b4(ε))* και *(b2 b3(ε), b2 b4(ε))* είναι μεταξύ τους ίσες. Η ισότητα αυτή μεταφέρεται και στο όριο, οπότε οι γωνίες *(b1b3, b1b4)* και *(b2 b3, b2 b4)* είναι ίσες. Επομένως προκύπτει ότι τα *b1, b2, b3* και *b4* βρίσκονται είτε σε κύκλο είτε σε μία ευθεία. Αλλά γνωρίζουμε ότι δεν ανήκουν σε κύκλο αφού οι ευθείες της υπόθεσης δεν τέμνονται. Επομένως τα σημεία b_i είναι συνευθειακά.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το αντίστροφο. Εφαρμόζοντάς το στα a_1, a_2, a_3, a_4 βλέπουμε ότι αν τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά, οι ευθείες $D_{C_1C_2}$ και $D_{C_3C_4}$ είναι παράλληλες και, κατα συνέπεια, τα σημεία *C1, C2, C3* και *C4* ανήκουν

στο ίδιο επίπεδο. Έχουμε δεί ότι αυτό οδηγεί στο ότι τα σημεία $b_1,\ldots, b_4$ είναι είτε ομοκυκλικά είτε συνευθειακά.

2.3.6α. Η συνέχεια της διατομής

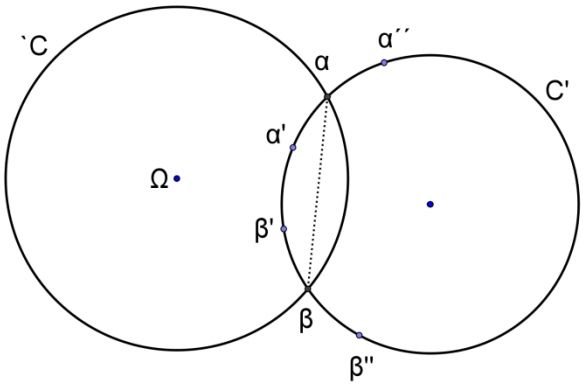
Για το πέρασμα στο όριο στο 2.3.6 χρησιμοποιήσαμε σιωπηρά το ακόλουθο συμπέρασμα:

Λήμμα: *Έστω C (Ω, r) και C' (Ω', r') δύο κύκλοι που τέμνονται σε δύο διακεκριμένα σημεία, a και b. Έστω C_n (Ω_n, r_n) μία ακολουθία κύκλων που τείνουν στον C (: $\Omega_n \to \Omega$* και $r_n \to r$). *Τότε, για αρκετά μεγάλο n, ο C_n και ο C' τέμνονται σε δύο σημεία a_n και b_n, με $a_n \to a$ και $b_n \to b$.*

Διευκρίνηση: Η έννοια του ορίου είναι αυτή που υπήρχε και στην αναπαράσταση της πρώτης προσέγγισης. Αλλά η ίδια υπάρχει και στη δεύτερη, την «αλγεβρική» αναπαράσταση. Πράγματι, τα r και c συνδέονται με τη σχέση:

$$c = a^2 + b^2 - r^2,\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ε τέτοιο, ώστε $0 < \varepsilon < {}^1\!/_2\, d(a,b)$. Έστω α' και α'' τα δύο σημεία του C' που απέχουν απο το α απόσταση ε, με το α' στο εσωτερικό του C και το α'' στο εξωτερικό του C. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τα β' και β''. Με αυτό τον τρόπο τα τόξα (α', α'') και (β', β'') δεν έχουν κοινά σημεία.



Σχήμα 2.3.5

Έστω δ ο μικρότερος από τους 4 αριθμούς:

$$r - d(\Omega, a'), \qquad r - d(\Omega, \beta'), \qquad d(\Omega, a'') - r, \qquad d(\Omega, \beta'') - r$$

που είναι όλοι θετικοί. Για n αρκετά μεγάλο έχουμε $d(\Omega, \Omega_n) + (r_n - r) < \delta$. Οπότε το a' βρίσκεται στο εσωτερικό του C_n και το α'' στο εξωτερικό του. Υπάρχει επομένως ένα σημείο α_n του τόξου (α', α'') του C' που ανήκει στον C_n και για το οποίο $d(\alpha, \alpha_n) < \varepsilon$. Όμοια, υπάρχει ένα σημείο β_n στη τομή $C' \cap C_n$ με $d(\beta, \beta_n) < \varepsilon$.

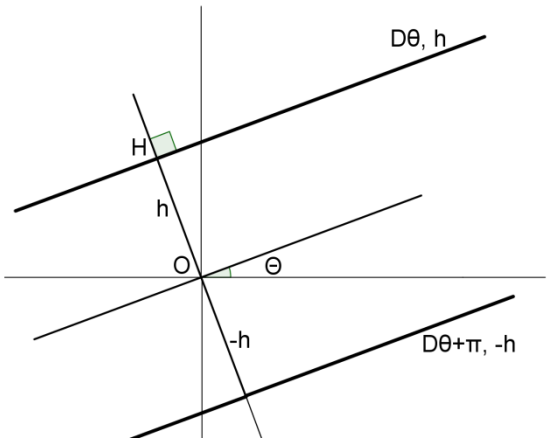
2.4 Κίνηση μιας ευθείας.

2.4.1 Μια αναπάντεχη ταινία του Moebius

Το πρόβλημα που τέθηκε από τον D. Epstein αφορά ευθείες του $\mathbb{R}^2$. Θα πρέπει επομένως να θεωρήσουμε ***το σύνολο Ɗ των ευθειών του επιπέδου***. Μία ευθεία *D* θα προσδιορίζεται από τη διεύθυνσή της και την απόσταση της αρχής *O* από τη *D*. Πιό συγκεκριμένα: αν δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί θ και h , θα συμβολίζουμε με $D_{\theta,h}$ την ευθεία εκείνη που σχηματίζει γωνία θ με το άξονα *Ox* και η προβολή Η της αρχής Ο πάνω στην ευθεία να έχει τετμημένη *h*, σχηματίζοντας (η *OH*) με τον Ox γωνία ίση με $\theta + \frac{\pi}{2}$ (Σχήμα 2.4.1). Κάθε ευθεία του επιπέδου μπορεί να γραφεί ως

$D_{\theta,\,h.}$ Για κάθε θ και *h*, η ευθεία $D_{\theta,h}$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα στο $\mathbb{R}^2$. Είναι:

$$D_{\theta',\,h'} = D_{\theta,\,h}\ \gamma\iota\alpha\ (\theta', h') = (\theta + \kappa\pi, (-1)^{k}h).$$



Σχήμα 2.4.1

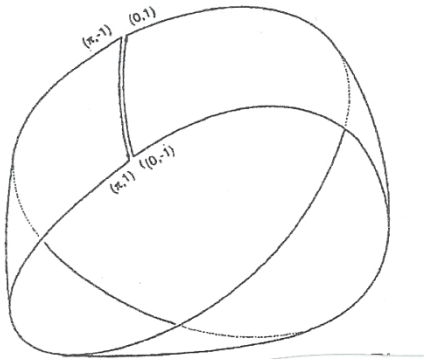
Μπορεί λοιπόν να θεωρήσει κανείς το $\mathcal{D}$ ως χώρο πηλίκο του $\mathbb{R}^2$ μέσα από τη σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται με το τρόπο αυτό ή ακόμη ως την *ταινία* $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ μέσα στην οποία ταυτίζουμε το $(0, h)$ με το $(\pi, -h)$.

Ας επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι ο $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφος με το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$ και ότι μπορούμε πάντα να επιλέξουμε έναν ομοιομορφισμό φ τέτοιον, ώστε $\varphi(-h) = -\varphi(h)$. Η ταινία λοιπόν $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφη με το ορθογώνιο $[0, \pi] \times (-1, 1)$ και τελικά μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathcal{D}$ με το $[0, \pi] \times (-1, 1)$ όπου τα $(0, y)$ και $(\pi, -y)$ ταυτίζονται, δηλαδή με μια ταινία του Moebius χωρίς το άκρο της. (Σχήμα 2.4.2α, β).

Θα μπορούσε να θεωρήσει κανείς το σύνολο $\mathcal{D}$ των προσανατολισμένων ευθειών που ταυτίζεται με τον κύλινδρο πηλίκο του $\mathbb{R}^2$ μέσα από τη σχέση ισοδυναμίας που αντιστοιχίζει το (θ, h) στο $(\theta + 2\pi,\ h)$ και τη συνάρτηση *σ:* $\mathcal{D}\sim \to \mathcal{D}\sim$ που υπάρχει για να αντιστρέψει τον προσανατολισμό.

Πραγματικά, απο τεχνική άποψη, όλη η διαδικασία ολοκληρώνεται μέσα στον $\mathbb{R}^2$, αλλά αφού πάρει κανείς υπόψη τις σχέσεις ισοδυναμίας που περιγράφηκαν παραπάνω.

Σχήμα 2.4.2α[6]



Σχήμα 2.4.2β

2.4.2 Διευκρινήσεις στη διατύπωση

Μέχρι εδώ, το $\mathcal{D}$ έχει οριστεί μόνο ως σύνολο. Αλλά στη διατύπωση του προβλήματος περιλαμβάνεται σιωπηρά μια τοπολογία πάνω στο $\mathcal{D}$, αφού έχει να κάνει με μία συνεχή κίνηση μιας ευθείας, δηλαδή ενός σημείου του συνόλου $\mathcal{D}$. Για να είμαστε αυστηροί, θα έπρεπε να ορίζαμε μία τοπολογία πάνω στο $\mathcal{D}$ και να βεβαιωνόμασταν ότι οι προσδιορισμοί που περιγράψαμε είναι ομοιομορφισμοί. Εδώ κρίνουμε σκόπιμο να αναγνωρίζουμε απλά ότι το να έχουμε μια συνεχή κίνηση $t \to D_t$ παραμετροποιημένη στο $[0,1]$, σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε $D_t = D_{\theta(t),h(t)}$ με $\theta(t)$ και $h(t)$ να εξαρτώνται με συνεχή τρόπο από το t, και ότι η συνθήκη ότι το D_t επιστρέφει στην αρχική θέση με αντιστροφή του προσανατολισμού σημαίνει ότι $\theta(1) = \theta(0) + k\pi$ όπου k ακέραιος περιττός, και ότι $h(1) = -h(0)$.

Το ζήτημα, επομένως, είναι να γνωρίσουμε κατά πόσο είναι δυνατόν να έχουμε μια τέτοια κίνηση αποφεύγοντας το μη επιτρεπτό σύνολο: το σύνολο των

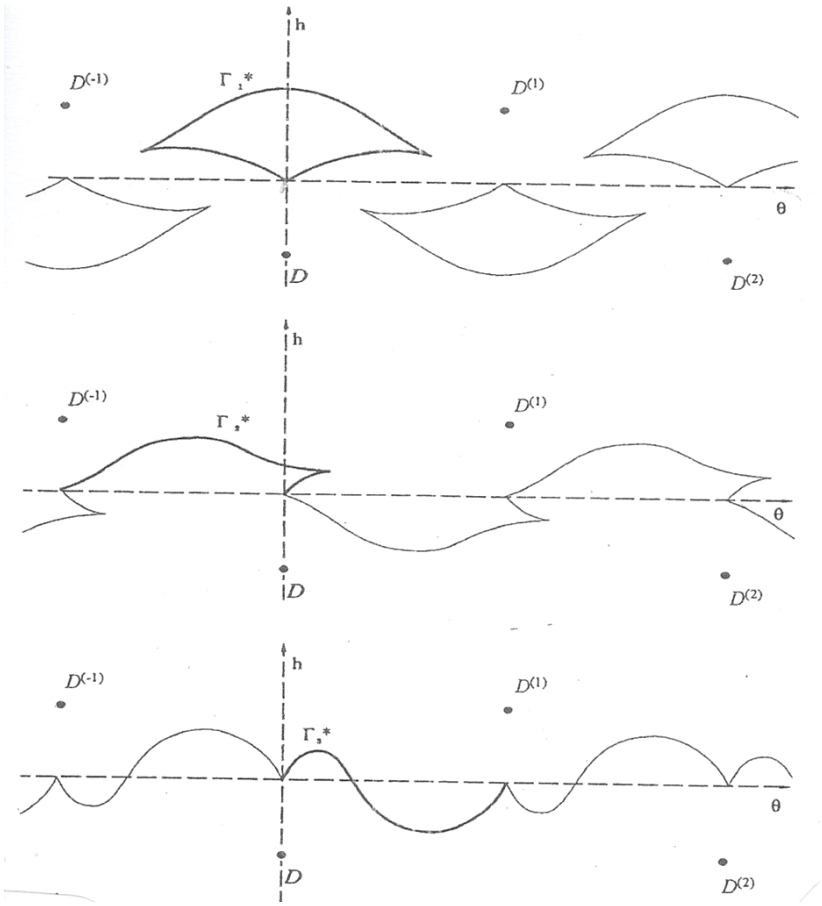
[6] Το σχήμα 2.4.2α δείχνει τη ταινία Moebius ως μια ευθειογενή επιφάνεια και ανακτήθηκε από τη διεύθυνση: http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=95&t=30729

εφαπτομένων στη *Γ.* Χρειαζόμαστε λοιπόν τη περιγραφή καθενός από τα μη επιτρεπτά σύνολα στη καθεμία από τις τρείς περιπτώσεις $\Gamma = \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$

2.4.3 Περιγραφή του μη επιτρεπτού συνόλου

Ας θεωρήσουμε ως αρχή το μέσο του διανύσματος *AB*, όπου *A* και *B* είναι τα άκρα του τόξου *E*, και ως αρχικό άξονα, την ευθεία *AB*.

Έστω *M(s)* ένα σημείο που διατρέχει τη *Γ* καθώς το s παίρνει τιμές από *0* ως *1*. Ας συμβολίσουμε με $D_{\theta^*(t),\ h^*(t)}$ την εφαπτόμενη στη *Γ*, όπου θ^* και h^* συνεχείς μεταβλητές. Επομένως το *(θ*(s), h*(s))* περιγράφει στον $\mathbb{R}^2$ ένα τόξο *Γ**. Αλλά αν *(θ, h)* είναι μη επιτρεπτό, δεν είναι και το $(\theta + \pi, -h)$, επειδή τα $D_{\theta,\ h}$ και $D_{\theta+\pi,-h^*}$, περιγράφουν την ίδια ευθεία. Κατά συνέπεια το μη επιτρεπτό σύνολο στον $\mathbb{R}^2$ είναι ένα σύνολο *Γ*** που είναι η ένωση των μετασχηματισμών του *Γ** μέσω της απεικόνισης $(\theta, h) \to (\theta + \kappa\pi,\ (-1)^{\kappa} h)$, για $\kappa \in \mathbb{Z}$. Η μορφή των συνόλων Γ_i^* και Γ_i^{**} για *i=1, 2, 3* φαίνεται στο Σχήμα 2.4.3.



Σχήμα 2.4.3

Το ερώτημα είναι να γνωρίσουμε αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο D μ'ένα απο τα σημεία $D^{(k)}$, με κ περιττό, χωρίς να συναντήσει τη Γ_i^{**}. Από το σχήμα φαίνεται ότι είναι εφικτό για $i = 1$ και αδύνατο για $i = 2$ και $i = 3$.

2.4.4 Αποδείξεις

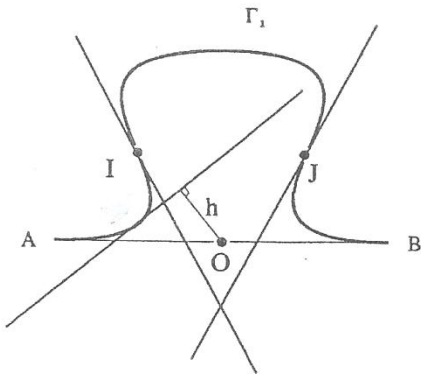
Ας προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε αυτή την οπτική εποπτεία σε απόδειξη. Ας ξεκινήσουμε από τη Γ_3 που είναι η ευκολότερη περίπτωση. Στη περίπτωση αυτή η θ^* μεταβάλλεται με μονότονο τρόπο από 0 ως π, είναι λοιπόν ένας ομοιομορφισμός του $[0,1]$ στο $[0,\pi]$. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η Γ^* είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $\eta: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $\eta(0) = \eta(\pi) = 0$, και η Γ^{**} είναι το γράφημα της ίδιας συνάρτησης που επεκτείνεται στο $\mathbb{R}$ μέσω της $\eta(0 + \kappa\pi) = (-1)^{\kappa}\eta(\theta)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε θ και h συνεχείς με $\theta(1) = \theta(0) + (2\kappa + 1)\pi$ και $h(1) = -h(0)$. Η συνάρτηση $h(t) - \eta(\theta(t))$ είναι συνεχής και παίρνει αντίθετες τιμές στο 0 και 1, πρέπει λοιπόν σε κάποιο σημείο να μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $t \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $(\theta(t), h(t)) \in \Gamma_3{}^{**}$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Ας δούμε τη Γ_2. Η ενδιαφέρουσα ιδιαιτερότητα είναι ότι η $\theta^*(s)$ μεταβάλεται με τρόπο συνεχή από το 0 ως το $-\pi$ (με τον ίδιο τρόπο θα δούλευε με $\kappa\pi$, $\kappa \neq 0$). Δεν θα χρησιμοποιήσουμε παρά μόνο το γεγονός αυτό.

2.4.4α. Πώς κατασκευάζουμε τη Γ*

Γράφουμε την εφαπτομένη T της Γ σε ένα σημείο $M(s)$ στη μορφή $D(\theta^*(s), h^*(s))$.



Σχήμα 2.4.4

Όταν το $M(s)$ διατρέχει τη Γ_1 από το A ως το σημείο καμπής I, η γωνία $\theta^*(s)$ αυξάνεται από 0 σε κάποια τιμή θ^*1 που βρίσκεται μεταξύ $\pi/2$ και π, και η $h^*(s)$ παραμένει >0. Στη συνέχεια, όταν το $M(s)$ πηγαίνει από το I στο J, το άλλο σημείο καμπής, η γωνία $\theta^*(s)$ μειώνεται από θ^*1 σε $-\theta^*1$ και η $h^*(s)$ παραμένει >0. Τέλος, όταν το $M(s)$ πηγαίνει από το J στο B μεγαλώνει για μία ακόμη φορά μέχρι το 0, με το $h^*(s)$ να διατηρείται πάντα >0 ($=0$ για το B).

Τα σχήματα που παριστάνουν τις Γ^*_1 και Γ^*_2 γίνονται με τον ίδιο τρόπο.

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα σημεία καμπής της Γ αντιστοιχούν στα σημεία αιχμής στη Γ^*. Αλλά αυτό είναι κάτι που δεν θα χρησιμοποιήσουμε.

2.4.4β. Λήμμα της τομής[7]

Έστω $s \to M_1(s)$ και $t \to M_2(t)$ δύο συνεχείς απεικονίσεις του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε

ότι υπάρχει μία σταθερά m τέτοια, ώστε $y_1(s) < m$ και $x_2(t) < m$, για οποιαδήποτε s και t, και ότι:

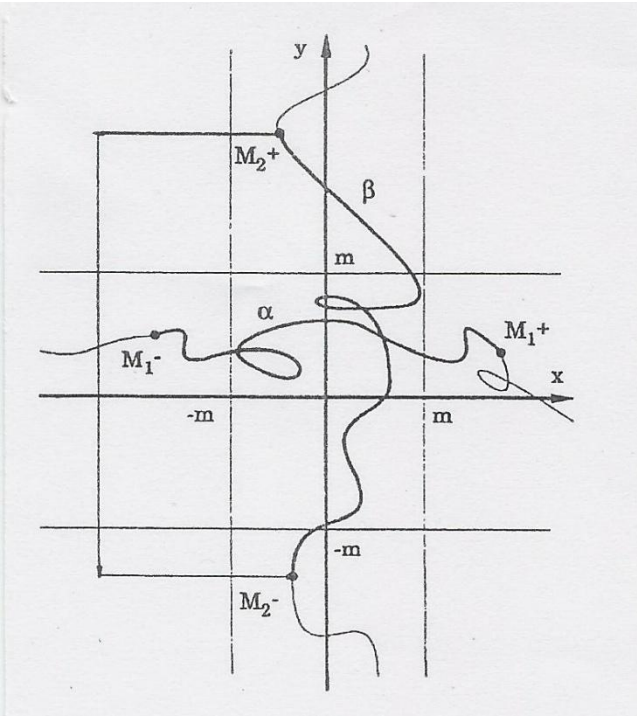
$$x_1(s) \to -\infty \; \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \, s \to -\infty$$

$$x_1(s) \to +\infty \text{ καθώς } s \to +\infty$$

$$y_2(t) \to -\infty \text{ καθώς } t \to -\infty$$

$$y_2(t) \to +\infty \text{ καθώς } t \to +\infty$$

Μπορούμε να βρούμε s^-, s^+, t^-, t^+ τέτοια, ώστε $x_1{}^- < -m$, $x_1{}^+ > m$, $y_2{}^- < -m$, $y_2{}^+ > m$ όπου $x_1{}^- = x_1(t^-)$ κτλ. Συμβολίζουμε με $M_1{}^-$ το σημείο $(x_1{}^-, y_1{}^-)$ κτλ. Έστω β το γράφημα της $t \to M_2(t)$ από το $M_2{}^-$ στο $M_2{}^+$. θεωρούμε τη γραμμή β' από το $M_2{}^+$ στο $M_2{}^-$ που σχηματίζεται από ένα διάνυσμα οριζόντιο σε ύψος $y_2{}^+$, από ένα κάθετο διάνυσμα τετμημένης $x^- < inf\, x_1(s)$ $\mu\varepsilon$ $s \in [t^-, t^+]$ και από ένα οριζόντιο διάνυσμα στη θέση $y_2{}^-$.



Σχήμα 2.4.5

Βάζοντας κορυφή προς κορυφή τα β και β΄παίρνουμε μια «δαντέλλα» γ. Η δαντέλλα αυτή μπορεί να μεταμορφωθεί σε βρόγχο (σε δαντέλα ορθογώνια) χωρίς να περνά από το $M_1{}^-$ ούτε από το $M_1{}^+$, άρα χωρίς να αλλάξει ο δείκτης σε σχέση με τα σημεία αυτά. Κατά συνέπεια ο δείκτης της γ είναι 1 ως προς το $M_1{}^-$ και 0 ως προς το $M_1{}^+$.

[7] Η διατύπωση του λήμματος βρίσκεται στο τέλος της παραγράφου 2.4.4, για λόγους πιστότητας στο πρωτότυπο κείμενο.

Κατά συνέπεια, η γραμμή α, που διαγράφει το $M_1(s)$ από το M_1^- στο M_1^+, συναντάει τη γ. Καθώς δεν μπορεί να συναντήσει τη β', συναντά αναγκαστικά τη β. Οπότε φτάσαμε σε αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Επέκτεινουμε τις συναρτήσεις θ^* και h^* στο $\mathbb{R}$ με: $\theta^*(s+k) = \theta^*(s) - k\pi$, $h^*(s+k) = (-1)^k h^*(s)$. Επομένως το σύνολο Γ** είναι η απεικόνιση του $\mathbb{R}$ μέσω της $s \to (\theta^*(s), h^*(s))$. Οι συναρτήσεις $s \to \theta^*(s) + \pi s$ και $h*$ είναι συνεχείς και περιοδικές, άρα φραγμένες.

Από την υπόθεση, η $D = D_{\theta(0),h(0)}$ δεν συναντάει τη Γ, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $D_{\theta(0),h}$ δεν συναντά τη Γ για $h \leq h(0)$. Ας επεκτείνουμε τη $t \to (\theta(t), h(t))$ με την

$(\theta(t), h(t)) = (\theta(0), h(0) + t)$, για $t \leq 0$ και $(\theta(1), h(1) + t - 1)$, για $t \geq 1$

Το αποτέλεσμα προκύπτει απο το ακόλουθο λήμμα [που το εφαρμόζουμε για $(-\theta^*, h^*, -\theta, h)$]:

Λήμμα της τομής: *Έστω $s \to (x_1(s), y_1(s))$ και $t \to (x_2(t), y_2(t))$ δύο απεικονίσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις x_1 και y_2 είναι φραγμένες και ότι οι y_1 και x_2 κινούνται από το $-\infty$ ως το $+\infty$. Τότε οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται, δηλαδή υπάρχει ζεύγος (s, t) τέτοιο, ώστε $(x_1(s), y_1(s)) = (x_2(t), y_2(t))$.*

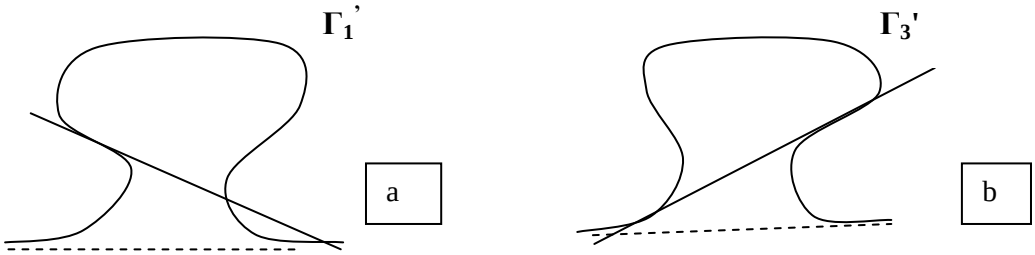
Πρόκειται για βασικό λήμμα της τοπολογίας. Η συνήθης απόδειξη περιλαμβάνει την έννοια του δείκτη ενός βρόγχου (αριθμός γύρων) γύρω από ένα σημείο (βλέπε 2.4.4β).

2.4.5 Η περίπτωση της Γ_1

Για τη καμπύλη Γ_1 στο σχήμα Ω η μετακίνηση είναι εφικτή. Αρκεί να εμφανίσουμε το αρχικό πλαίσιο.

Στο Σχήμα 2.4.4, οι δύο εφαπτόμενες στα σημεία καμπής ορίζουν μαζί με την ευθεία AB ένα τρίγωνο που βρίσκεται κάτω από την AB. Μπορούμε να μετατοπίσουμε την ευθεία D παράλληλα προς τον εαυτό της με τρόπο που να περάσει από ένα σημείο αυτού του τριγώνου και στη συνέχεια απλά να τη περιστρέψουμε.

Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε μια καμπύλη Γ_1' ίδιας μορφής με τη Γ_1, αλλά τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία καμπής να διαπερνούν τη Γ (Σχήμα α), θα είχαμε διαφορετικό αποτέλεσμα: Θα υπήρχε τότε μια διπλή εφαπτόμενη L και θα προέκυπτε μια καμπύλη Γ_3' από τη ένωση $\Gamma_1' \cup L$ (Σχήμα b) ίδιας μορφής με τη Γ_3 (που περιέχει όμως ένα ευθύγραμμο τμήμα) και η απάντηση τότε θα ήταν ΟΧΙ, όπως και για τη Γ_3.



2.5 Το πρόβλημα στα πολυώνυμα 4ου βαθμού

2.5.1 Ένας φυσικός τρόπος να προσεγγίσουμε το πρόβλημα

Το σύνολο των μονικών πολυωνύμων 4ου βαθμού ($\alpha_4 = 1$) ορίζεται με φυσικό τρόπο στον χώρο $\mathbb{R}^4$ μέσω της απεικόνισης $f \to (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Μέσα στο σύνολο αυτό, τα πολυώνυμα, που έχουν 3 κρίσιμα σημεία πραγματικά και διάφορα ανά δύο, αποτελούν ένα ανοιχτό σύνολο που προσδιορίζεται απο μια ανισότητα.

Ενδιαφερόμαστε για τα πολυώνυμα που παράγονται με τον μετασχηματισμό της οριζόντιας μετατόπισης. Μπορούμε να περιοριστούμε στα *κεντρικά* πολυώνυμα δηλαδή εκείνα όπου $\alpha_3 = 0$. Πράγματι κάθε κλάση πολυωνύμων με οριζόντια ισοϋπόλοιπα έχει ένα *κεντρικό* πολυώνυμο και είναι μοναδικό:

Στο πολυώνυμο $f(t) = t^4 + A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$ εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $t \to x - \frac{A_3}{4}$, που οδηγεί στη μορφή $f(x) = x^4 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Εδώ, ο όρος «κεντρικό» χρησιμοποιείται για να δηλώσει την εξής ιδιότητα της παραγώγου $f'(x) = 4x^3 + 2a_2 x + \alpha_1$: το κέντρο συμμετρίας της, που διαθέτει ως πολυώνυμο τρίτου βαθμού, είναι το σημείο $(0, f'(0) = \alpha_1)$. Δηλαδή, όταν $\alpha_3 = 0$, το σημείο καμπής της f' είναι σημείο του άξονα $y'y$. Αυτό προσδιορίζεται αμέσως λύνοντας ως προς x_0 την εξίσωση:

$$\frac{f'(x_0 - \varepsilon) + f'(x_0 + \varepsilon)}{2} = f'(x_0)$$

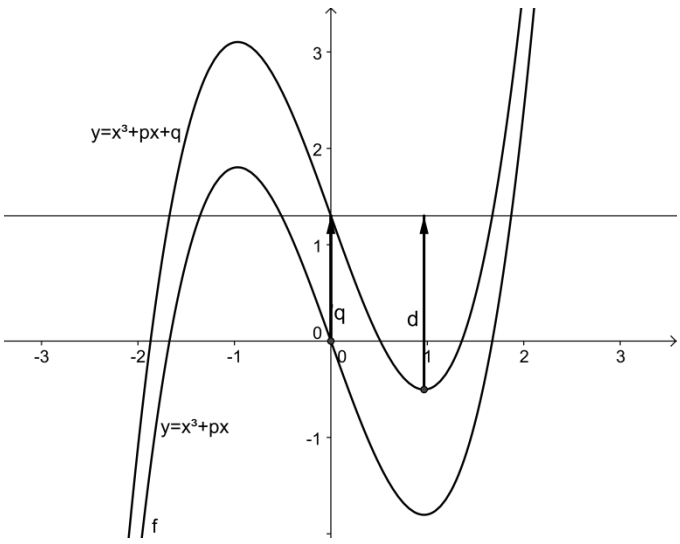
απ'όπου προκύπτει ότι $x_0 = 0$.

Οι θέσεις των κρίσιμων σημείων είναι οι ρίζες της παραγώγου. Θα πρέπει οι τρείς ρίζες της εξίσωσης

$$(1) \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3 + \frac{a_2}{2}x + \frac{\alpha_1}{4} = 0$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί, διάφοροι ανά δύο. Το γεωμετρικό ισοδύναμο του να έχει ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο, της μορφής $g(x) = x^3 + px + q$, τρείς πραγματικές ρίζες, είναι η γραφική του παράσταση να τέμνει τον $x'x$ σε 3 διαφορετικά σημεία.
Αυτό εξαρτάται από το q σε συνδιασμό με την απόσταση d των ακροτάτων της g, $\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}, g\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\right)$, από τη παράλληλη προς τον $x'x$ ευθεία, που διέρχεται από το σημείο καμπής. Θα πρέπει να είναι: $p < 0$ και $|q| < |d|$. Το Σχήμα 2.5.1, που ακολουθεί, αποτελεί τη γεωμετρική εποπτεία αυτού του ισχυρισμού.

$$\begin{aligned}
|q| < |d| &\Leftrightarrow q^2 < d^2 \\
&\Leftrightarrow q^2 < \left(-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_1}{4}\right)^2 + \frac{4}{27}\left(\frac{a_2}{2}\right)^3 < 0 \\
&\Leftrightarrow 8{\alpha_2}^3 + 27{\alpha_1}^2 < 0
\end{aligned}$$



Σχήμα 2.5.1

Επομένως: τα μονικά κεντρικά πολυώνυμα $4^{ου}$ βαθμού αποτελούν τον χώρο $\mathbb{R}^3$. Από αυτά, εκείνα που έχουν 3 πραγματικά κρίσιμα σημεία, σχηματίζουν έναν ανοιχτό υπόχωρο Ω που προσδιορίζεται από την ανίσωση

$$8{\alpha_2}^3 + 27{\alpha_1}^2 < 0$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση $f \to (v_1, v_2, v_3)$ του Ω στο

$$\{(v_1, v_2, v_3) \in R^3 |\, v_2 > v_1, \qquad v_2 > v_3\}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Είναι ένας φυσικός τρόπος να προσεγγίσει κανείς το πρόβλημα, αλλά οδηγεί σε δυσκολίες: δεν έχουμε έναν απλό τύπο που να δίνει τα v_i ως συνάρτηση των συντελεστών της f, ούτε έναν απ'ευθείας τρόπο να μελετήσουμε την αλληλεπίδρασή τους. Θα ακολουθήσουμε μια μέθοδο κάπως διαφορετική.

2.5.2 Πρώτος μετασχηματισμός

Παρατηρούμε κατ'αρχήν ότι το πρόβλημα δεν μεταβάλλεται με τη κατακόρυφη μετατόπιση. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο f τέτοιο, ώστε να ισχύουν σε αυτό οι διαφορές $v_2 - v_1$ και $v_2 - v_3$ των επιθυμητών τιμών, δεν θα δυσκολευτούμε να το ρυθμίσουμε, προσθέτοντας μια σταθερά, μέχρι τα v_1, v_2, v_3 να γίνουν οι τιμές που έχουν δοθεί.

Ενδιαφερόμαστε λοιπόν για πολυώνυμα f που προκύπτουν με κατακόρυφη μετατόπιση, οπότε οδηγούμαστε στη μελέτη της παραγώγου

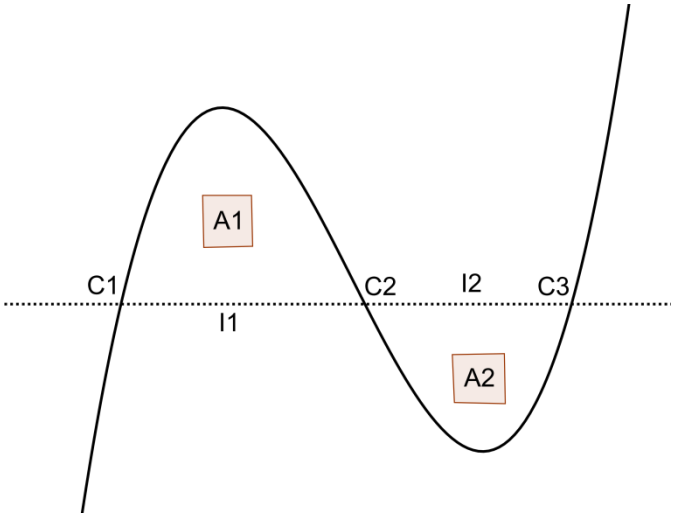
$$f'(x) = 4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

Οι θέσεις των κρίσιμων τιμών είναι οι ρίζες της f'. Ζητάμε να υπάρχουν 3: $c_1 < c_2 < c_3$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τα $v_2 - v_1$ και $v_2 - v_3$ σαν περιοχές (Σχήμα 2.5.2):

$v_2 - v_1 = A_1 = \int_{c_1}^{c_2} f'$ και $v_2 - v_3 = A_2 = \int_{c_2}^{c_3} |f'|$

Τώρα θα επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα με διατύπωση ισοδύναμη της αρχικής:

Ερώτημα: Αν δίνονται $A_1 > 0$ και $A_2 > 0$, υπάρχει πολυώνυμο



Σχήμα 2.5.2

$g(x\,) = 4x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ με τρείς ρίζες πραγματικές $c_1 < c_2 < c_3$ τέτοιες, ώστε:

$$\int_{c_1}^{c_2} g = A_1 \text{ και } \int_{c_2}^{c_3} |g| = A_2.$$

Ένα τέτοιο πολυώνυμο είναι μοναδικό ως προς την οριζόντια μετατόπιση;

2.5.3 Δεύτερος μετασχηματισμός

Επισημαίνουμε ότι η $g = f'$ προσδιορίζεται από τα $c_1,\ c_2,\ c_3$: δίνεται από τον τύπο

$$g(x) = 4(x - c_1)(x - \ c_2)(x - \ c_3)$$

Αυτό επιτρέπει να εκφράσουμε τα A_1 και A_2 ως συναρτήσεις των c_i και βλέπουμε ότι τα χωρία A_i είναι συνεχείς συναρτήσεις των c_i. Παίρνουμε τώρα υπόψη την αμεταβλητότητα κατά την οριζόντια κατεύθυνση και παίρνουμε για αγνώστους τους

$$l_1 = \ c_2 - c_1,\ l_2 = \ c_3 - c_2.$$

Οι αριθμοί αυτοί προσδιορίζουν τη g και όλες τις οριζόντιες μετατοπίσεις της. Επιτρέπουν λοιπόν τον υπολογισμό των A_1 και A_2 και μπορούμε να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό: $\Phi\colon (\,l_1,\ l_2) \to (A_1, A_2)$ απο τον R_+^2 στον εαυτό του. Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής. Η ερώτηση τώρα γίνεται:

Η απεικόνιση Φ είναι αμφιμονοσήμαντη; Ομοιομορφισμός;

2.5.4 Μελέτη της Φ

Λημμα 1. *Η εικόνα μιας ημιευθείας με άκρο το O μέσω του Φ είναι πάλι ημιευθεία με άκρο το O.*

Απόδειξη: Η ημιευθεία με αρχή το O που διέρχεται από το $(\,l_1,\ l_2)$ σχηματίζεται από τα $(\,{l_1}^*,\ {l_2}^*)$ με ${l_1}^* = \lambda l_1$ και ${l_2}^* = \lambda l_2 > 0$.

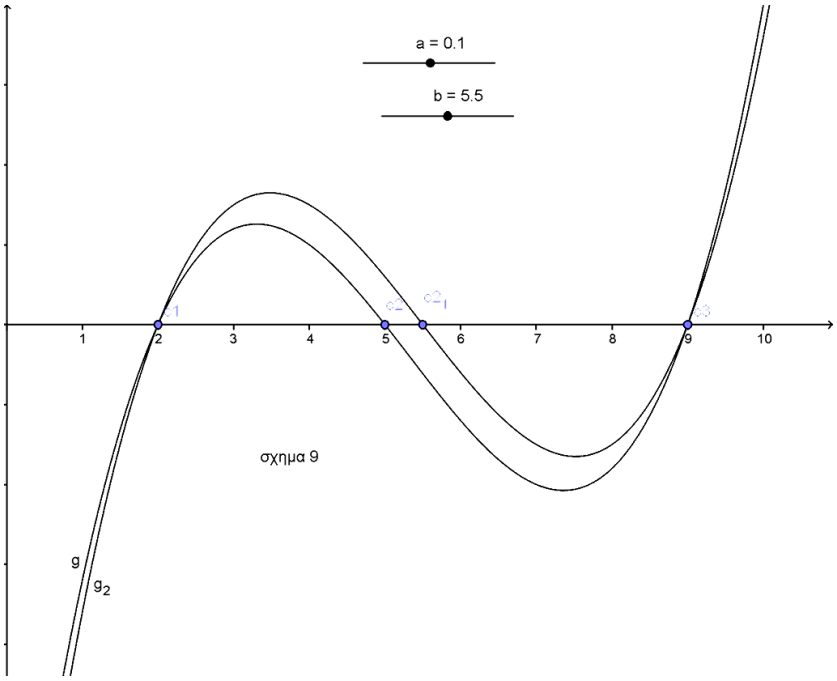
Για να υπολογιστούν τα αντίστοιχα ${A_1}^*$ και ${A_2}^*$ επιλέγουμε g^* που ορίζεται απο το τύπο:

$$g^*(x) = 4(x - {c_1}^*)(x - {c_2}^*)(x - {c_3}^*).$$

Θέτοντας $x^* = \lambda x$, παίρνουμε $g^*(x^*) = \lambda^3\, g(x)$.

Επομένως το γράφημα της $g*$ προκύπτει απο το γράφημα της g μέσω του *μετασχηματισμού* $x \to \lambda x,\ y \to \lambda^3 y$. Κατά συνέπεια ${A_1}^* = \lambda^4 A_1$ και ${A_2}^* = \lambda^4 A_2$. Καθώς το λ μεταβάλλεται, το σημείο $({A_1}^*,\ {A_2}^*)$ γράφει μια ημιευθεία που ξεκινάει από το Ο και διέρχεται από το (A_1, A_2). Οπότε η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Λημμα 2. *Αν αυξήσουμε το l_1 και μειώσουμε το l_2 έτσι, ώστε το άθροισμα $l_1 + l_2$ να παραμείνει σταθερό, το A_1 θα αυξηθεί και το A_2 θα μειωθεί.*



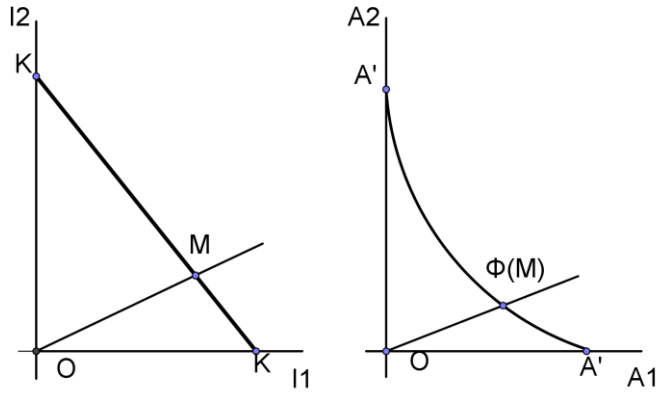
Σχήμα 2.5.3

Απόδειξη: Θεωρούμε ${c_1}^* = c_1$, ${c_2}^* > c_2$ και ${c_3}^* = c_3$ και ορίζουμε τη g^* από τα ${c_i}^*$ (Σχήμα 2.5.3). Οπότε το $h = g^* - g$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που μηδενίζεται στα c_1 και c_3. Διατηρεί επομένως το πρόσημο στο διάστημα (c_1, c_3). Εφόσον στο c_2 είναι θετικό, το σταθερό αυτό πρόσημο είναι το θετικό. Κατά συνέπεια:

$$A_1{}^* = \int_{c_1}^{{c_2}^*} g^* > \int_{C1}^{C2} g^* > A_1$$

$$A_2{}^* = \int_{{c_2}^*}^{C3} |g^*| < \int_{C2}^{C3} |g| < A_2.$$

Οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη.



Σχήμα 2.5.4

Σταθεροποιούμε το $k > 0$. Ενώ το $M = (l_1, l_2)$ διατρέχει το τμήμα l που ορίζεται στο R_+^2 απο τη σχέση $l_1 + l_2 = k$, το σημείο $\Phi(M)$ διατρέχει με συνεχή τρόπο μια καμπύλη Γ από το $\Phi(O, k) = (O, \hat{A})$ στο $\Phi(k, O) = (\hat{A}, O)$ (Σχήμα 2.5.4). Λόγω του λήμματος 2, η ημιευθεία $\Phi(OM) = (O\ \Phi(M))$ έχει μια κλίση που μικραίνει, με άλλα λόγια σαρώνει το τεταρτημόριο του επιπέδου γυρίζοντας πάντα προς την ίδια κατεύθυνση.

Συμπεραίνουμε έτσι ότι ο Φ είναι ομοιομορφισμός δηλαδή μια συνεχής αντιστοίχιση αμφιμονοσήμαντη όπως και η αντίστροφή της.

2.5.5 Και για βαθμό d >4;

Για $d > 4$, το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ακολουθώντας τις ίδιες αρχές, όμως πρέπει να χρησιμοποιηθούν πιό δυναμικά εργαλεία.

Ορίζουμε, όπως και πριν, μια απεικόνιση Φ από το ${\mathbb{R}_+}^{d-2}$ στον εαυτό του. Από ένα σημείο στο εσωτερικό του ${\mathbb{R}_+}^{d-2}$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση Λ, εφαπτόμενη της Φ στο σημείο αυτό.

Θα δείξουμε ότι η Λ είναι μονοσήμαντη: σε μια μεταβολή (δc_i) των c_i αντιστοιχεί μια μεταβολή $h = \delta g$ της g και η μεταβολή δA_i των A_i δίνεται (πρώτης τάξης) από:

$\delta A_i = \int_{Ci}^{Ci+1} h$

Αλλά μια μεταβολή (δl_i) των l_i μπορεί πάντα να πραγματοποιηθεί μέσω μιας μεταβολής (δc_i) έτσι, ώστε το κέντρο βάρους να μη μετακινηθεί, δηλαδή $\Sigma \delta c_i = 0$.

Οπότε το πολυώνυμο είναι βαθμού $\leq d - 3$. Αν τα δc_i δεν είναι όλα μηδενιικά, το πολυώνυμο h είναι μη μηδενικό και υπάρχει τουλάχιστον ένα διάστημα $(c_i, c_i + 1)$ στο οποίο διατηρεί το πρόσημο. Έχουμε λοιπόν $\delta A_i = \int_{Ci}^{Ci+1} h \neq 0$

Εφόσον το A πηγαίνει από τον R^{d-2} στον εαυτό του, είναι ισομορφισμός.
Κατά συνέπεια ο Φ είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός. Χρησιμοποιώντας την ομοιογένεια και την επέκταση των άκρων, βλέπουμε ότι ο Φ επάγει πάνω στο εσωτερικό του ${\mathbb{R}_+}^{d-2}$ μια μονοσήμαντη απεικόνιση.

Η απεικόνιση αυτή είναι ένας επικαλύπτων χώρος. Καθώς το $\mathbb{R}_+{}^{d-2}$ είναι απλά συνεκτικό, η απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός.

2.6 Συμπέρασμα

Στα παραδείγματα που μελετήσαμε εδώ, θεωρήσαμε ένα σύνολο αντικειμένων (κύκλους ευθείες, πολυώνυμα) που εμφανίζονται στο πρόβλημα. Πρόκειται για ένα σύνολο που η αρχική του δομή μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Για να μπορέσουμε όμως να εργαστούμε σ'αυτό, πρέπει να φτιάξουμε ένα **χάρτη**, δηλαδή να ορίσουμε μια αντιστοίχιση με ένα σύνολο σημείων ενός χώρου που έχει ήδη μια γεωμετρική δομή, ή με ένα αριθμητικό σύνολο (συνήθως ένα μέρος του $\mathbb{R}^{\eta}$). Χάρη σ'ενα τέτοιο χάρτη μπορούμε να μεταφέρουμε το πρόβλημα προσαρμοσμένο σ'ενα πλαίσιο γεωμετρικό, και τα αποτελέσματα που παίρνουμε να μεταφερθούν με την αντίστροφη διαδικασία στο αρχικό πλαίσιο.

Η επιλογή του χάρτη είναι καθοριστική. Ο Douady ισχυρίζεται ότι εκεί είναι που φαίνεται η εμπειρία. Έχει να κάνει με δεξιότητα που μπορεί να αποκτηθεί μέσα απο τις προσπάθειες και τις σκέψεις πάνω στα αποτελέσματα. Πρόκειται για μάθηση που ίσως θέλει χρόνο αλλά που μπορεί να ξεκινήσει στοχευμένα πολύ νωρίς (στο τέλος της παραγράφου παρατίθεται μια εφαρμογή για μαθητές μεσαίων τάξεων δημοτικού σχολείου).

Η πιό αποδοτική επιλογή δεν είναι πάντα εκείνη που φαίνεται περισσότερο φυσική, όπως είδαμε στα παραδείγματα 1και 3. Για την αντιστοίχιση δεν έχουμε όλες τις φορές πολλές επιλογές: έτσι στο παράδειγμα 2, καθώς το σύνολο των ευθειών του επιπέδου ταυτίζεται με ένα κλάσμα του $\mathbb{R}^2$ ομοιόμορφο με μια ταινία του Moebius, η εργασία ολοκληρώνεται μέσα στο υπερσύνολό του, τον $\mathbb{R}^2$.

Στο παράδειγμα 1, μπορούμε να μεταφέρουμε στο σύνολο των κύκλων τη συσχετισμένη δομή του $\mathbb{R}^3$: οι ευθείες αντιστοιχούν «*στις δέσμες κύκλων*» και τα επίπεδα «*στα δίκτυα*». Είναι ένας επιτυχής τρόπος να εισάγει κανείς τη θεωρία δεσμών των κύκλων.

Σταθερά θα πρέπει να φροντίζει κανείς να αξιοποιεί τα μη μεταβλητά στοιχεία του προβλήματος για να μειώνει τη διάσταση του χώρου που μελετά, όπως στο παράδειγμα 3, όπου τη μειώσαμε από 4 σε 2.

Στα παραδείγματα που επιλέχτηκαν, η εργασία μπορεί να θεωρηθεί σχετικά εύκολη αφού η γεωμετρικοποίηση πραγματοποιήθηκε ικανοποιητικά. Βέβαια, δεν είναι πάντοτε έτσι, αλλά η γεωμετρικοποίηση που ακολουθούμε σ'αυτή τη μέθοδο προσφέρει τουλάχιστον συχνά ένα μέσο για να συλλάβει κανείς το πρόβλημα. Ας πάρουμε υπόψη ότι τουλάχιστον στο παράδειγμα 2, χωρίς αυτή τη μέθοδο είμασταν εντελώς απροστάτευτοι.

Σχόλιο

Ο Lagrange, στο Memoire sur la théorie de variations des élements des planètes (1808), περιγράφει το σύνολο των Κεπλερικών τροχιών που είναι δυνατόν να διαγράψει ένας πλανήτης γύρω από τον ήλιο. Με σύγχρονους όρους πρόκειται για μία μεταβλητή διάστασης 5.

Ανάμεσα στους μαθηματικούς που το όνομά τους έχει συνδεθεί με αντικείμενα ή αποτελέσματα που σχετίζονται με τους παραμετρικούς χώρους θα αναφέρουμε τους Riemann, Malus, Chasles, Plücker, Klein, S. Lie, Hausdorff, Grasssmann, Hilbert, Poincaré, E. Cartan, Fléchet, Banach, Chow, Teichmuller, Alfors, Bers, Kuranishi, Cromov, και άλλους.

2.7 Μία εφαρμογή: Η διαδικασία της γεωμετρικοποίησης εξυπηρετεί στόχους μάθησης των δεκαδικών αριθμών στους μαθητές του δημοτικού

Σε διδακτικό επίπεδο, στο εγχειρίδιο για τη διδασκαλία των δεκαδικών η Regine Douady και η Marie-jeanne Perrin, προτείνουν στο δημοτικό σχολείο, στο στάδιο της μάθησης των δεκαδικών αριθμών, μια σειρά προβλημάτων με ορθογώνια και τρίγωνα, που οδηγούν τους μαθητές να διαπραγματευτούν σύνολα σχημάτων προκειμένου να περάσουν από τη κλασματική έκφραση σύμμετρων μεγεθών στην ισοδύναμη δεκαδική.

Κάθε ορθογώνιο εκπροσωπείται από ένα ζεύγος αριθμών α, β, όπου α είναι το μήκος και β το πλάτος του. Στη συνέχεια το (α, β) γίνεται σημείο του επιπέδου.

Στην αρχή της διαδικασίας οι μαθητές βρίσκονται στο στάδιο όπου έχουν ήδη διαπιστώσει ότι οι πράξεις με τα δεκαδικά κλάσματα είναι ευκολότερες απ'ότι με τα υπόλοιπα κλάσματα, ειδικά όταν στα τελευταία οι παρονομαστές είναι μεγάλοι αριθμοί. Καθώς όμως η γραφή τους παραμένει δύσχρηστη, ο δάσκαλος *προτείνει* στους μαθητές να αναζητήσουν μια ευκολότερη γραφή όπου δεν θα υπάρχει η ανάγκη να γράφονται τόσα μηδενικά.

Στη συνέχεια οι μαθητές εμπλέκονται στη δεκαδική προσέγγιση ενός ρητού ή ενός αρρήτου: προτείνεται μια κατάσταση *διερεύνησης* των ορθογωνίων που έχουν εμβαδόν, λόγου χάριν, 27. Σε ένα γράφημα κάθε ορθογώνιο αναπαρίσταται με το ζεύγος (α, β). Ο δάσκαλος θέτει στους μαθητές το ερώτημα: *σ'αυτή την οικογένεια των ορθογωνίων, υπάρχει κάποιο που να είναι τετράγωνο;*

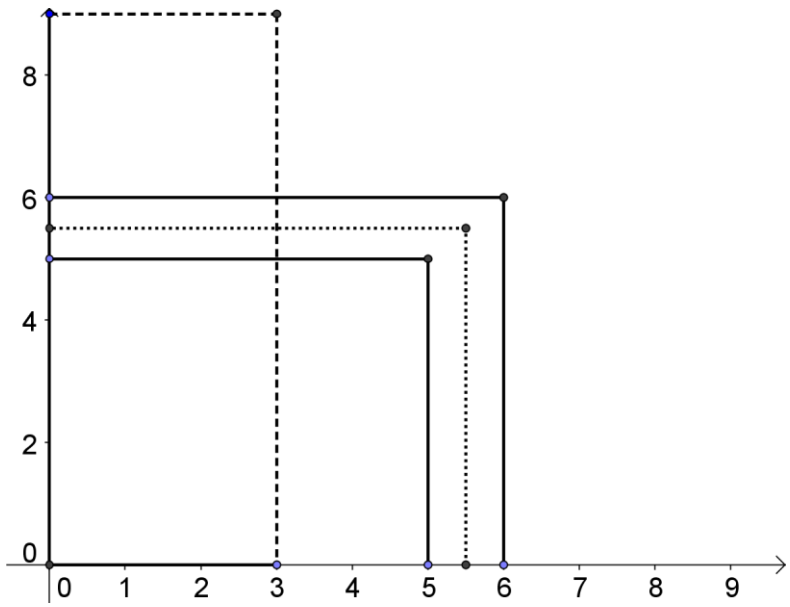
Οι μικροί μαθητές προχωρούν ονομάζοντας το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, για παράδειγμα X και προσπαθούν να πλησιάσουν το X:

$5 \times 5 = 25,\ 6 \times 6 = 36$ άρα $5 < X < 6$.

Το πρόβλημα είναι να πλησιάσουν όσο το δυνατόν περισσότερο με τέτοιο X ώστε $X \times X = 27$.

Πρώτο βήμα: μοιράζουν σε δύο μέρη το διάστημα αβεβαιότητας, με τη συνέπεια όμως οι υπολογισμοί να αρχίσουν να γίνονται σύνθετοι.

Δεύτερο βήμα: περνούν στη προσέγγιση του $1/10$. Εδώ, όπως διηγούνται οι δύο συγγραφείς, γινόμαστε μάρτυρες μιας σύγκρουσης ανάμεσα σε δύο απόψεις ως προς το κατά πόσο θέλουμε να συνεχίσουμε αποτελεσματικά: Να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς επιλέγοντας το $1/10$ ή να συντομεύσουμε τη διαδικασία της διερεύνησης διαιρώντας δια δύο.



Σχήμα 2.6.1

Τρίτο βήμα: πέρασμα στη προσέγγιση του 1/100 και εγκατάληψη του γραφήματος. Απομένει η διαχείρηση της γραφής μιας ογκώδους παράστασης, αφού πρόκειται για υπολογισμό του τετραγώνου ενός πολύπλοκου αριθμού αλλά και της γραφής του αποτελέσματος.

Η μέθοδος αυτή, που στοχεύει αποτελεσματικά στην ανάδειξη των δεκαδικών σαν καλά εργαλεία για τις προσεγγίσεις - καθώς επιτρέπουν να πραγματοποιούμε απλούστερα υπολογισμούς και καθώς αποφεύγονται οι δυσκολίες που συνδέονται με τη παρεμβολή καινούριων κλασμάτων ανάμεσα σε δύο άλλα, προκειμένου να ολοκληρώσουμε τον προσδιορισμό μιας προσέγγισης - χρησιμοποιεί με σαφή και γόνιμο τρόπο τη γεωμετρία για να επιτύχει το **πέρασμα σε διαφορετικό πλαίσιο**.

Βιβλιογραφία 2ου κεφαλαίου

[1] A. DOUADY : géometrie dans les éspaces de parametres: une méthode de géometrisation.

[2] R.W.D NICKALLS: A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed (Mathematical Gazette 77 (1993), 354-359).

[3] R. DOUADY, G. M.J PERRIN . : Nombres décimaux (IREM de Paris 7, 1986).

[4] R. DOUADY : Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (Recherches en didactique des mathématiques vol. 1/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1980)

[5] E. RODITI : les nombres entiers, les rationnels et les décimaux (διαδίκτυο : http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/S3%20nombres.pdf)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ Ή Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

«*Στο κόσμο δεν συμβαίνει τίποτε του οποίου η σημασία να μη συμπίπτει με εκείνη κάποιου μεγίστου ή ελαχίστου*». L. Euler

Εδώ ο μαθητής εμπλέκεται στη μαθηματικοποίηση προβλημάτων διατυπωμένων σε γλώσσα πεδίου. Στη συνέχεια το γραμμικό μοντέλο που δημιουργεί τον οδηγεί στην επεξεργασία του προβλήματος με μεθόδους αναλυτικής γεωμετρίας, όπου διαπιστώνει ότι το πέρασμα από τη γεωμετρία είναι αναγκαίο, γόνιμο και δίνει λύση.

Για κάθε παράδειγμα επιχειρείται λειτουργική ανάλυση των εννοιών που χρησιμοποιούνται, ώστε να γίνεται κατανοητή η αναγκαιότητα της χρήσης τους.

3.1 Ιστορικά στοιχεία

Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να συμβάλει στον εμπλουτισμό του διδακτικού υλικού των μαθηματικών της Α λυκείου με περιεχόμενο που πηγάζει από θέματα ευρύτερου ενδιαφέροντος ιδιαίτερα από το χώρο της οικονομίας, όπου εκεί ο αντικειμενικός σκοπός των δραστηριοτήτων είναι να δοθεί η βέλτιστη δηλαδή η ταχύτερη ή η οικονομικότερη λύση. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα **ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης** από τη περιοχή της οικονομίας:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κέντρα διανομής ενός συγκεκριμένου προϊόντος κάποια καταστήματα και έναν αριθμό φορτηγών. Πώς πρέπει ο συντονιστής των φορτηγών να οργανώσει τη διανομή του προϊόντος στα καταστήματα ώστε να πετύχει τη μέγιστη οικονομία; [Πρόκειται για ένα από τα λεγόμενα **προβλήματα μεταφοράς**].

Για να επιλύσουμε τέτοια προβλήματα, η συνδρομή των μαθηματικών είναι απαραίτητη. Πρόκειται για ένα είδος προβλήματος ακροτάτων.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε για να επιλύσουμε και να διερευνήσουμε τα ποικίλα προβλήματα ακροτάτων συνιστούν ιδιαίτερα κεφάλαια της μαθηματικής ανάλυσης. Από το μνημειώδες έργο του Νεύτωνα, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687) που πραγματεύεται τους βασικούς νόμους της μηχανικής , τους νόμους της πλανητικής κίνησης και άλλα θεμελιώδη ζητήματα, αλλά και μετά από τις επιμέρους και πρωτογενείς ανακαλύψεις των νόμων της φύσης (: το γεωμετρικό πρόβλημα του συντομότερου δρόμου του Ήρωνα του Αλεξανδρέως, το νόμο της διάθλασης του φωτός από τον Fermat, εδραιωμένο πειραματικά από τον Snell, το ισοπεριμετρικό πρόβλημα της Διδούς, το εμβαδομετρικό πρόβλημα του Kepler, οι πειραματικές αναζητήσεις του Γαλιλαίου γύρω από τη βραχυστόχρονη καμπύλη και η

επίλυσή της από τους Johann Bernoulli, Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli και de l'Hospital είναι μερικά μόνο από αυτά) διαμορφώθηκε σταδιακά το θεωρητικό πλαίσιο του λογισμού μεταβολών. Έτσι τα περισσότερα προβλήματα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης των συναρτήσεων έχουν αντιμετωπιστεί κύρια με τη βοήθεια του διαφορικού λογισμού. Η προσέγγιση αυτή προϋποθέτει ότι η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση είναι συνεχής και έχει μερικές παραγώγους οποιασδήποτε επιθυμητής τάξης. Όμως η μορφή των προβλημάτων, παρόμοιων με το παραπάνω πρόβλημα μεταφοράς, που επέβαλε ο βιομηχανικός τρόπος παραγωγής στον μεταπολεμικό κόσμο και η πολυπλοκότητά τους απαιτούσαν διαφορετική προσέγγιση. Μεταξύ άλλων διαπιστώθηκε και ο κεντρικός ρόλος που διαδραματίζει σε πολλά προβλήματα της οικονομίας η έννοια της *κυρτότητας*. Σύντομα η εξέλιξη αυτή αντιμετώπισης προβημάτων της σύγχρονης ζωής (οικονομικών, τεχνικών, κοινωνικών) οδήγησε σε νέα κατεύθυνση θεώρησης προβλημάτων ακροτάτων και στην ανάπτυξη της σχετικής μεθοδολογίας που είναι γνωστή σαν *Μαθηματικός Προγραμματισμός* (δηλαδή η θεωρία προβλημάτων βελτιστοποίησης πεπερασμένων διαστάσεων) και ειδικότερα σαν *Γραμμικός Προγραμματισμός* (Γ.Π.) (ο τομέας όπου μελετώνται προβλήματα βελτιστοποίησης που περιγράφονται από γραμμικές συναρτήσεις και γραμμικά σύνολα που υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς). Εδώ ο όρος *προγραμματισμός* δηλώνει τον *προγραμματισμό λειτουργίας* ενός συστήματος με την έννοια της λήψης των κατάλληλων αποφάσεων έτσι ώστε η απόδοσή του να βελτιστοποιείται.

Στο πρόβλημα που διατυπώθηκε παραπάνω δεν εμφανίστηκε κανένας τύπος. Κατά παράδοση, τα προβλήματα που αναφύονται στα μαθηματικά, στις φυσικές επιστήμες ή σε πρακτικές δραστηριότητες διατυπώνονται αρχικά στην ορολογία πεδίου όπου εμφανίστηκαν και χωρίς να χρησιμοποιούνται τύποι. Για να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε μια γενική θεωρία, χρειάζεται να επιτύχουμε τη *μετάφραση* των διατυπώσεων των προβλημάτων από την ιδιαίτερη γλώσσα, στην οποία τέθηκαν αρχικά, στη γλώσσα των μαθηματικών. Μια τέτοια μετάφραση λέγεται *τυποποίηση*.

Η μεθοδολογία της τυποποίησης των προβλημάτων του Γ.Π. έχει τις ρίζες της στη θεωρία των γραμμικών ανισώσεων, η μελέτη των οποίων είχε ήδη ξεκινήσει από το 1826 με τον Fourier. Ο Fourier προσπάθησε να βρεί τη μικρότερη απόκλιση απο ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων και πρότεινε

> *«μια λύση μετάβασης απο κορυφή σε κορυφή ενός πολυέδρου μέχρι την εύρεση του ελαχίστου».*

Σε αυτή την αρχή βασίζεται και η αλγοριθμική 'μέθοδος Simplex' που εμφανίστηκε αργότερα.

Ωστόσο τη βάση του Γ.Π. αποτέλεσαν τα θεωρητικά μοντέλα οικονομικής ισορροπίας και βέλτιστης κατανομής πόρων που αναπτύχθηκαν κατά τη δεκαετία του 1930. Μεταξύ αυτών προέχουσα θέση έχουν το γραμμικό μοντέλο μιας αναπτυσσόμενης οικονομίας του John von Neumann (1935-36) και το μοντέλο εισροών –εκροών (input-output model) του Leontief (1951), όπου περιγράφεται η σχέση αλληλεξάρτησης μεταξύ των παραγωγικών κλάδων μιας οικονομίας.

Το μοντέλο εισροών - εκροών έτυχε σημαντικής θεωρητικής ανάπτυξης σε πολλά προβλήματα οικονομικού προγραμματισμού, με αποτέλεσμα το 1973 να απονεμηθεί στον Leontief το βραβείο Nobel Οικονομίας. Θα πρέπει όμως να

παρατηρήσουμε ότι το μοντέλο Leontief δεν απαιτούσε τη βελτίωση κάποιας συνάρτησης αλλά μόνο την επεξεργασία ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Η σημερινή μορφή μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού καθώς και η βασική τεχνική για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, ο αλγόριθμος simplex, οφείλονται σε μια πραγματικά μεγαλοφυή έμπνευση του G. Dantzig από το 1947, η οποία δημοσιεύτηκε 4 χρόνια αργότερα σε βιβλίο που επιμελήθηκε ο Koopmans (1951). Την ίδια χρονιά που ο Dantzig ανακάλυπτε τη μέθοδο simplex, ο Koopmans έδειχνε ότι ο Γ.Π. παρέχει το κατάλληλο μοντέλο για την ανάλυση των κλασικών οικονομικών θεωριών ο δε von Newmann αναπτύσσει τη θεωρία της δυϊκότητας.

Ωθηση στη θεωρητική ανάπτυξη του Γ.Π. *ως μέθοδο βελτιστοποίησης* έδωσαν οι έρευνες κατά τη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου, προκειμένου να βρεθεί ένα μαθηματικό πρότυπο που θα προγραμμάτιζε τις στρατιωτικές δαπάνες ώστε να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή μείωσή τους με ταυτόχρονη τη βέλτιστη αποτελεσματικότητα των επιθετικών δυνάμεων. Στη συνέχεια, μεταπολεμικά, πολλές βιομηχανίες τον χρησιμοποιήσαν στο καθημερινό προγραμματισμό τους.

Το αρχικό παράδειγμα του Dantzig, για την καλύτερη ανάθεση 70 εργασιών σε 70 ανθρώπους, δίνει επίσης μια εικόνα της χρησιμότητας του γραμμικού προγραμματισμού. Η δύναμη υπολογισμού που απαιτείται για να εξετάσει κανείς όλους τους συνδιασμούς ώστε να επιλεγεί η καλύτερη ανάθεση, είναι τεράστια αφού ο αριθμός πιθανών διαμορφώσεων είναι ασύλληπτα μεγάλος. Εντούτοις, αρκεί μόνο μια στιγμή για να βρεθεί η βέλτιστη λύση με την τοποθέτηση του προβλήματος ως γραμμικού προγράμματος και με την εφαρμογή του μονοκατευθυντικού αλγορίθμου (simplex). Η θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού μειώνει δραστικά τον αριθμό πιθανών βέλτιστων λύσεων που πρέπει να ελεγχθούν. Σημερα χρησιμοποιείται στο χώρο της εφαρμοσμένης μηχανικής, σε προβλήματα μεταφορών, τηλεπικοινωνίας-δικτύων και κατασκευών.

Εδώ πρέπει πάντως να αναφέρουμε ότι ο πρώτος αλγόριθμος για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων Γ.Π. είχε αναπτυχθεί σχεδόν 10 χρόνια νωρίτερα και συγκεκριμένα το 1939 από τον Kantorovich, παρέμεινε όμως για πολλά χρόνια άγνωστος στη Δύση και πέρασε απαρατήρητος στην Ανατολή.

Ωστόσο, αν και ο Γ.Π.ταυτίστηκε με τη μέθοδο simplex και τον Dantzig, το 1975 η Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Σουηδίας απένειμε το βραβείο Nobel Οικονομίας στους Kantorovich και Koopmans για τη συμβολή τους στη «θεωρία της βέλτιστης κατανομής πόρων». Φαίνεται ότι η Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Σουηδίας θεώρησε την εργασία του Dantzig πολύ μαθηματική για βραβείο οικονομίας και, όπως είναι γνωστό, δεν υπάρχει βραβείο Nobel μαθηματικών.

3.2 Η φύση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Τα προβλήματα αυτά χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη δύο ή περισσοτέρων δραστηριοτήτων που ανταγωνίζονται για τα ίδια περιορισμένα μέσα (παραγωγικούς συντελεστές ή πόρους). Απο τη σκοπιά του οικονομολόγου, το πρόβλημα εδώ συνίσταται στο να καταμεριστούν τα περιορισμένα μέσα μεταξύ των δραστηριοτήτων έτσι ώστε να έχουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Σε όρους Γ.Π. το πρόβλημα

αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: να προσδιοριστεί το επίπεδο χρησιμοποίησης (βαθμός λειτουργίας) κάθε δραστηριότητας έτσι ώστε να βελτιστοποιείται (μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται) η απόδοση του συστήματος κάτω από τους περιορισμούς που θέτουν οι διαθέσιμοι πόροι.

Η λήψη αποφάσεων με σκοπό τον βέλτιστο τρόπο λειτουργίας ή την βέλτιστη δομή ενός συστήματος δεν γίνεται με αυτό το ίδιο το σύστημα αλλά με ένα **μοντέλο** του. Το μοντέλο είναι μια αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος η οποία πρέπει να το απεικονίζει όσο το δυνατόν πιό πιστά.

Η εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας ή της δομής ενός συστήματος προϋποθέτει τη περιγραφή του με ένα **μαθηματικό μοντέλο**. Η μοντελοποίηση του συστήματος επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων, οι οποίες περιγράφουν τόσο τη δομή του όσο και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δομικών στοιχείων του συστήματος.

Έτσι, η απόδοση του συστήματος μαθηματικοποιείται με μία **γραμμική συνάρτηση Z** που ονομάζεται **συνάρτηση αντικειμενικού σκοπού**. Οι μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ της Z ικανοποιούν ένα σύστημα **γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων** που αποτελεί την μαθηματικοποίηση των περιορισμών στους οποίους υπόκεινται οι δραστηριότητες.

Στόχος είναι η εύρεση των **μη αρνητικών τιμών** των μεταβλητών που βελτιστοποιούν (μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν) την γραμμική συνάρτηση Z:

$$(1) \quad Z = c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n$$

Χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ο μεγάλος αριθμός λύσεων που ικανοποιούν τους περιορισμούς κάθε προβλήματος από τις οποίες επιλέγεται η καταλληλότερη που βελτιστοποιεί την συνάρτηση (1)**.**

Ο Gilbert Strang στο βιβλίο του “Linear Algebra and its Applications”, θέλοντας να υπογραμμίσει την αποτελεσματικότητα της μεθοδολογίας αυτής, γράφει:

> «Συνήθως, η διαφορά μεταξύ Αλγεβρας και Ανάλυσης είναι λίγο ως πολύ ταυτόσημη με τη διαφορά μεταξύ των εξισώσεων και ανισώσεων. Παλιότερα η διαχωριστική γραμμή μεταξύ αυτών των δύο φαινόταν να είναι σαφής. Τελικά όμως ο γραμμικός προγραμματισμός φαίνεται να αποτελεί ένα αντιπαράδειγμα: Αφορά ανισότητες, αλλά είναι μέρος της γραμμικής άλγεβρας και μάλιστα εξαιρετικά χρήσιμο – οι αποφάσεις στις επιχειρήσεις φαίνεται να χρειάζονται περισσότερο τον γραμμικό προγραμματισμό, παρά τις ορίζουσες ή τις ιδιοτιμές».

Συνοπτικά το **υπόδειγμα του προβλήματος του Γ.Π.** περιγράφεται:

- $\min$ ή $\max(Z) = c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n$
- $\alpha_{i1} \cdot x_1 + \cdots + \alpha_{in} \cdot x_n =$ ή $\leq$ ή $\geq \beta_i,\ i = 1,2,..,m$

έχουμε *n* μεταβλητές (απόφασης) κάτω από *m* περιορισμούς (δομής)

- με $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Υποθέτουμε βέβαια ότι οι ανισότητες δεν εξαρτώνται γραμμικά γιατί διαφορετικά θα μπορούσαμε να απορρίψουμε μία ή περισσότερες από αυτές.

Για την εφαρμογή κάποιου υποδείγματος γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να υιοθετήσουμε αρχικά κάποιες περιοριστικές υποθέσεις. Οι υποθέσεις αυτές υπαγορεύονται από τη μη στοχαστική (δηλαδή τη προσδιοριστική) φύση του υποδείγματος και από τη γραμμικότητα τόσο της συνάρτησης αντικειμενικού σκοπού όσο και των περιορισμών. Οι βασικότερες προϋποθέσεις - παραδοχές είναι:

(α) Το υπόδειγμα είναι ***προσδιοριστικό***. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι συντελεστές του προβλήματος είναι γνωστοί με βεβαιότητα και σταθερά προσδιορισμένοι. Πρακτικά, σε πολλές περιπτώσεις, η παραδοχή αυτή δε πληρούται είτε γιατί οι τιμές των συντελεστών δεν είναι σταθερές είτε γιατί είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια τυχαία κατανομή πιθανότητας. Όμως για προβλήματα τέτοιας μορφής έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές, όπως ανάλυση ευαισθησίας, παραμετρικός προγραμματισμός, στοχαστικός προγραμματισμός.

(β) Ισχύει η ***αρχή της αναλογικότητας***. Σημαίνει ότι π.χ. ο διπλασιασμός της παραγόμενης ποσότητας (δηλαδή της τιμής της συνάρτησης αντικειμενικού σκοπού) μπορεί να γίνει μόνο με διπλασιασμό των ποσοτήτων των παραγωγικών συντελεστών. Όμως αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει στη πράξη. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το επίπεδο λειτουργίας των δραστηριοτήτων επηρεάζει τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς κι έτσι παραβιάζεται η αρχή της αναλογικότητας. Οπότε τότε θα πρέπει να καταφύγουμε σε μεθόδους μη γραμμικού προγραμματισμού.

(γ) ισχύει η ***αρχή της προσθετικότητας***. Η υπόθεση της προσθετικότητας εξασφαλίζει ότι η ολική συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στη συνάρτηση αντικειμενικού σκοπού και στους περιορισμούς ισούται με το απλό άθροισμα της συνεισφοράς των επιμέρους δραστηριοτήτων. Στη πραγματικότητα αυτό δεν είναι πάντα αληθές.

(δ) ισχύει η ***αρχή διαιρετότητας***. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να παίρνουν κλασματικές τιμές. Στη περίπτωση που το πρόβλημα απαιτεί ακέραιες λύσεις και πρέπει να γίνουν προσεγγίσεις, θα χρειαστεί να ελέγξουμε αν η λύση είναι εφικτή και αν επιπλέον είναι η βέλτιστη. Στη περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται το υπόδειγμα του ακέραιου προγραμματισμού.

Παρατήρηση:

Στη συνάρτηση αντικειμενικού σκοπού δεν υπάρχει σταθερός όρος, αφού οι τιμές των μεταβλητών x_j που βελτιστοποιούν τη Z είναι ανεξάρτητες οποιασδήποτε προσθετικής σταθεράς. Αν υπάρχει μια τέτοια σταθερά μπορεί να αγνοηθεί κατά τη διαδικασία προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης και να προστεθεί στη Z, αφού βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Σύμφωνα με το πλαίσιο αυτό μπορούμε τώρα να επιχειρήσουμε την **τυποποίηση του προβλήματος μεταφοράς** που τέθηκε στην αρχή της παραγράφου 3.1:

Ας συμβολίσουμε με a_i τον αριθμό μονάδων εμπορεύματος στο $\boldsymbol{i}$-στό κέντρο διανομής και με m τον αριθμό των κέντρων. Έστω ότι το $b_j, j = 1, \dots, n$, δηλώνει τον αριθμό μονάδων εμπορεύματος που χρειάζονται για να καλυφθούν οι ανάγκες του $\boldsymbol{j}$-

οστού καταστήματος. Τέλος, έστω ότι με $\boldsymbol{c_{ij}}$ συμβολίζουμε το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας εμπορεύματος από το **i**-οστό κέντρο διανομής στο j-οστό κατάστημα. Η συνολική ποσότητα εμπορεύματος που μεταφέρθηκε από το i-οστό κέντρο διανομής ισούται με $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}$ και δεν μπορεί να υπερβαίνει το a_i (κανένα κέντρο διανομής δεν μπορεί να προμηθεύσει ποσότητα μεγαλύτερη από αυτή που διαθέτει). Η ποσότητα που μεταφέρθηκε στο j-οστό κατάστημα ισούται με $x_{1j} + \cdots + x_{mj}$ και πρέπει να συμπίπτει με την ανάγκη $\boldsymbol{b_j}$ του καταστήματος. Έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη τυποποίηση για το πρόβλημα μεταφοράς:

$$Z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + \cdots c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} \leq a_i, \qquad i = 1, \dots m$$

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} = b_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad 1 \leq \iota \leq m, \qquad 1 \leq j \leq n$$

3.3 Γραφική επίλυση μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού

Πρώτη διδακτική προσέγγιση

Το κλειδί του γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται στη γεωμετρική ερμηνεία των γραμμικών ανισώσεων.

Μια ανίσωση με η μεταβλητές διαιρεί τον η-διάστατο χώρο σε δύο ημίχωρους: στον ένα ημίχωρο η ανίσωση ικανοποιείται ενώ στον άλλον δεν ικανοποιείται.

Παράδειγμα στον $\mathbb{R}^2$ η $x + 2y \geq 4$. Το σύνορο μεταξύ των δύο ημιχώρων είναι η ευθεία $x + 2y = 4$ όπου η ανισότητα ισχύει οριακά.

Είδαμε ότι εκτός από τις ανισότητες αυτού του είδους υπάρχει και ένας άλλος περιορισμός, που είναι θεμελιώδης για τον γραμμικό προγραμματισμό: Τα x και y απαιτείται να είναι μη αρνητικά:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Επομένως έχουμε δύο ακόμη ημίχωρους, των οποίων τα σύνορα είναι οι θετικοί ημιάξονες.

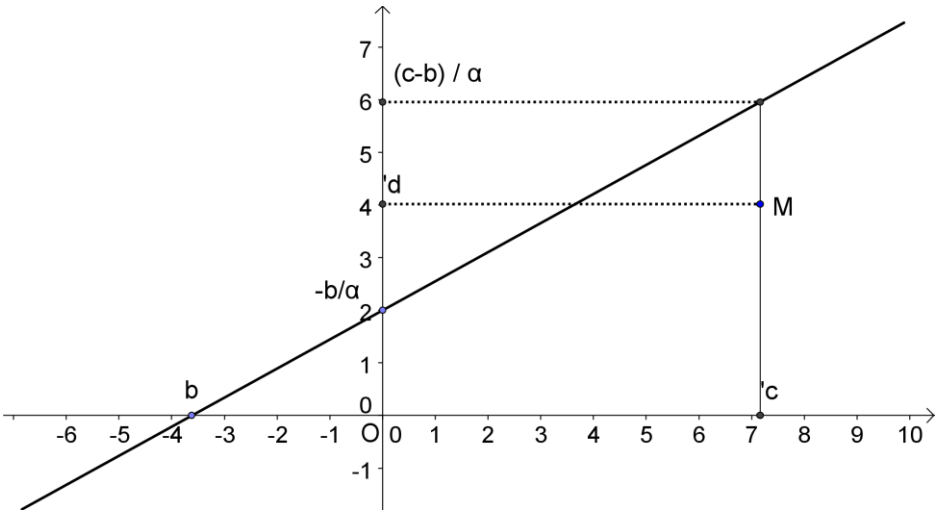
Τα αντίστοιχα ισχύουν και στις τρείς διαστασεις, όπου το σύνορο γίνεται ένα επίπεδο, όπως για παράδειγμα το $\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + \mathrm{z} = 4$, ενώ από «πάνω» του είναι ο ημίχωρος $\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + \mathrm{z} \geq 4$.

3.3.1 Μελέτη για τη διάκριση των ημιεπιπέδων

Υποθέτουμε ότι η ευθεία $x = ay + b$ δεν είναι κάθετη στον άξονα x, δηλαδή ισχύει $\alpha \neq 0$ (αν είναι κάθετη, η διάκριση των δύο ημιεπιπέδων που ορίζει η ευθεία γίνεται ανάλογα με τη x-συντεταγμένη του σημείου που θεωρούμε εκάστοτε).

Αν θέλουμε να δούμε σε ποιό από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία αυτή βρίσκεται το τυχόν σημείο (c, d) που δεν ανήκει σ'αυτήν, εργαζόμαστε ως εξής :
Η ευθεία $x = c$ (:η κατακόρυφη η οποία περνάει από το σημείο που μας ενδιαφέρει) τέμνει την ευθεία μας στο σημείο $\left(c, \frac{c-b}{a}\right)$ (:έχουμε υποθέσει $\alpha \neq 0$). Επομένως το

σημείο (c, d) θα βρίσκεται στο ***άνω ημιεπίπεδο***, αν ισχύει $d > \frac{c-b}{a}$, και στο ***κάτω ημιεπίπεδο*** (όπως στο Σχήμα 3.3.1) , αν ισχύει $d < \frac{c-b}{a}$.



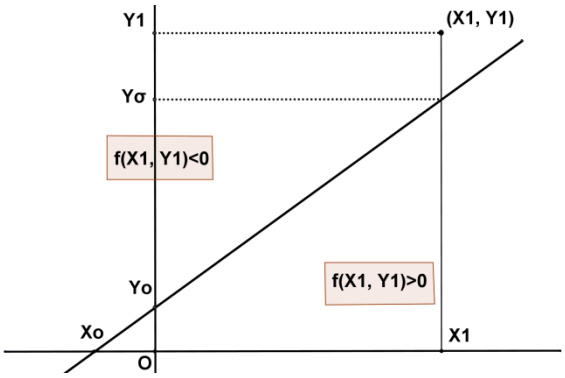
Σχήμα 3.3.1

3.3.2 Μελέτη των προσήμων της $f(x, y) = y_0x + x_0y - x_0y_0$ στα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $f(x, y) = 0$.

Σ'ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων η εξίσωση

$$(1) \quad y_0x + x_0y - x_0y_0 = 0$$

ορίζει μια ευθεία του επιπέδου που τέμνει τον άξονα των x στο x_0 και τον άξονα των y στο y_0. Για να βρούμε αν ισχύει $f(x, y) > 0$, ή όχι, σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που η εν λόγω ευθεία χωρίζει το $\mathbb{R}^2$, πρέπει να βρούμε τις συνθήκες που μας το βεβαιώνουν. Μια απλή τέτοια συνθήκη προκύπτει ως εξής:



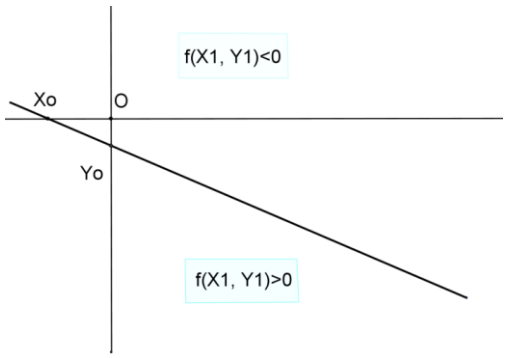
Σχήμα 3.3.2

Αν δοθεί ένα σημείο (x_1, y_1) που δεν ανήκει στην ευθεία, τότε η κάθετη από αυτό προς τον άξονα των x, η $x = x_1$, τέμνει την (1) στο σημείο $(x_1, \frac{x_0y_0 - x_1y_0}{x_0} = y_\sigma)$.

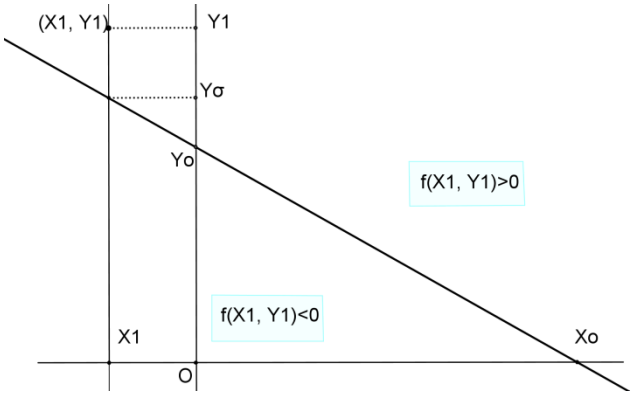
Με $y_1 > \frac{x_0y_0 - x_1y_0}{x_0}$ τότε:

- Όταν $x_0 < 0$ είναι
- $y_1 x_0 < x_0 y_0 - x_1 y_0 \Longrightarrow$

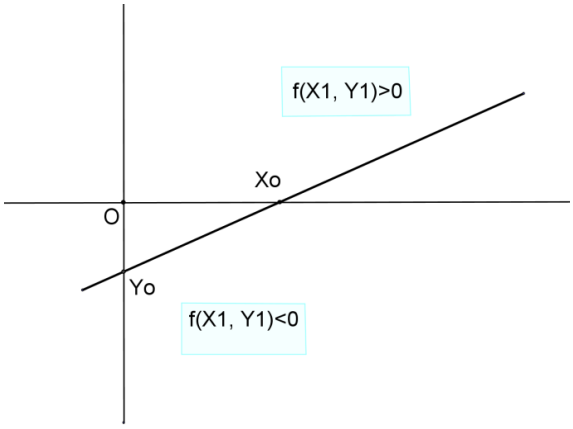
  $y_0 x_1 + x_0 y_1 - x_0 y_0 < 0 \Longrightarrow f(x_1, y_1) < 0$ [Σχ 3.3.1, 2]
- Αν $x_0 > 0$ τότε εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι $f(x_1, y_1) > 0$ [Σχ. 3.3.3, 4]



Σχήμα 3.3.3



Σχήμα 3.3.4



Σχήμα 3.3.5

Με $y_1 < \frac{x_0 y_0 - x_1 y_0}{x_0}$, επαναλαμβάνοντας τους ίδιους απλούς υπολογισμούς όπως παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι:

όταν $x_0 < 0$ τότε είναι $f(x_1, y_1) > 0$ (Σχήμα 3.3.2, 3.3.3) ενώ όταν $x_0 > 0$ τότε είναι $f(x_1, y_1) < 0$ (Σχήμα 3.3.4, 3.3.5)

3.4 Το εφικτό σύνολο και ο προσδιορισμός του βέλτιστου σημείου

Δεύτερη διδακτική προσέγγιση

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με **δύο μόνο μεταβλητές** επιδέχεται **γραφική επίλυση**. Η συναλήθευση όλων των περιορισμών αποτελεί το **εφικτό σύνολο**. Βέβαια, στον Γ.Π. μας ενδιαφέρει όχι όλο το σύνολο των εφικτών σημείων αλλά ένα ειδικό σημείο που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Ο προσδιορισμός της μορφής του εφικτού συνόλου, όταν αυτό υπάρχει, μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο συζήτησης με τα παιδιά, ώστε να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι όταν αυτό είναι φραγμένο, θα είναι ένα **κυρτό πολύγωνο** και όταν είναι μη φραγμένο (*αφαιρώντας ίσως έναν περιορισμό*) θα είναι ένα μη φραγμένο πολύπλευρο, το οποίο ωστόσο εξακολουθεί να είναι κυρτό. Η έννοια του **κυρτού σχήματος** στη γεωμετρία είναι γνωστή στους μαθητές μέσα από την έννοια της κυρτής γωνίας. Θυμίζουμε ότι:

Ένα σχήμα ονομάζεται κυρτό αν περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δυο οποιαδήποτε σημεία του. Η έννοια του κυρτού συνόλου $C \subset \mathbb{R}^n$ είναι επέκταση του προηγούμενου ορισμού όπως περιγράφεται στον πίνακα της επόμενης σελίδας.

Μια **εποπτική προσέγγιση** της μορφής του εφικτού συνόλου μπορεί να αποτελέσει το εξής σκεπτικό: οι μαθητές γνωρίζουν ότι *η περιοχή αλήθευσης μιας γραμμικής ανίσωσης* $ax + by \leq ή \geq c$ είναι <u>*ένα ημιεπίπεδο*</u> με όριο την ευθεία $ax + by = c$. *Η συναλήθευσή της* με μια άλλη ανίσωση, επόμενο είναι να ***περιορίσει το ημιεπίπεδο*** *σε μία κυρτή πλέον γωνία με πλευρές τις δύο ευθείες*.(Βέβαια υπάρχει και η περίπτωση η δεύτερη ευθεία να είναι παράλληλη προς τη πρώτη, κάτι που θα περιορίσει το αρχικό ημιεπίπεδο χωρίς όμως - και πάλι- να δημιουργείται μη κυρτή γωνία). Έτσι ο αλλεπάλληλος περιορισμός του αρχικού ημιεπιπέδου από τις διαδοχικές γραμμικές ανισώσεις θα αποτελέσει *το εφικτό σύνολο, που, είτε είναι φραγμένο είτε όχι, θα είναι κυρτό με πλευρές τα τμήματα που ορίζονται απο τη τομή των ευθειών-συνόρων* $ax + by = c$.

Με όρους αναλυτικής γεωμετρίας προσεγγίζουμε τις παραπάνω έννοιες. Έτσι, σε αυτά που ακολουθούν, η αναφορά σε σημείο ενός χώρου ανάγεται στη χρήση της διανυσματικής του ακτίνας:

Κυρτό είναι ένα σύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$ όταν:

- $\forall x_1, x_2 \in C$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$

Κυρτό σύνολο (γενίκευση)

- $\forall\, p \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, p,\ x_i \in C$
- $\forall\, \lambda_i \in \mathbb{R} :\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \ \in C$

Ακρότατα σημεία (Extreme Points):

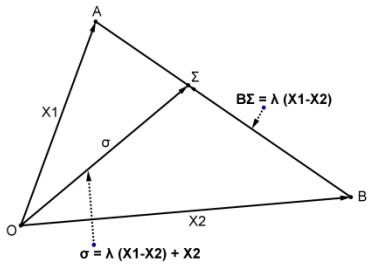
Ένα σημείο x είναι ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου C εαν:

$\exists\, x_1, x_2 \in C :$

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \neq x$

$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ \lambda \in (0,1)$

Στο $\mathbb{R}^2$:



Θεώρημα:

Έστω κυρτό πολύγωνο P με ακρότατα (κορυφές) $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$. Κάθε σημείο $x \in P$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των ακροτάτων του P, δηλαδή:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i\,,\ \lambda_i \in [0,1]$$

Στη συνέχεια, οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι είναι λογικό, η πρώτη επαφή της αντικειμενικής συνάρτησης με τον εφικτό χώρο να συμβεί κατά μήκος του συνόρου του , επιπλέον δε σε μια κορυφή του και πάντως όχι στο εσωτερικό του. Αυτό εξασφαλίζεται από τη γεωμετρία, όπως περιγράφει ο ακόλουθος συλλογισμός :

Η αντικειμενική συνάρτηση $\mathrm{Z} = \alpha\mathrm{x} + b\mathrm{y}$, για τις διάφορες τιμές του Z, ορίζει μία οικογένεια **παραλλήλων** ευθειών, καθώς αυτές έχουν **τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης** ($\lambda = -\alpha/\mathrm{b}$). Μετακινούνται, επομένως, διαρκώς παράλληλα μέχρι να τμήσουν το εφικτό σύνολο. Και αυτό θα συμβεί είτε σε μία κορυφή (*μία βέλτιστη λύση*) είτε κατά μήκος μιας πλευράς (*άπειρες βέλτιστες λύσεις*), στη περίπτωση που ο συντελεστής διεύθυνσης της αντικειμενικής συνάρτησης συμπίπτει με εκείνον του συνόρου κάποιου περιορισμού.

Οι συντεταγμένες (x, y) του σημείου (ή των σημείων) που δίνουν το $Z_{\min}$ (ή $Z_{\max}$) είναι η βέλτιστη λύση.

Το παρακάτω θεώρημα τεκμηριώνει τη προηγούμενη διαπίστωση :

Θεώρημα βελτίστου

Έστω κυρτό πολύγωνο P και $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ τα ακρότατά του. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο P και $x^* \in P$ το σημείο που τη βελτιστοποιεί (πχ μεγιστοποιεί) στο P: $f(x^*) \geq f(x),\ \forall x \in P$.

Σύμφωνα με το θεώρημα της προηγούμενης σελίδας το x^* γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των y_i :

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_{i,}\ \mu\varepsilon\ \lambda_i \in [0,1]\ \kappa\alpha\iota\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\ = 1$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν και έχουμε διαδοχικά:

$$f(x^*) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i\,) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(y_i\,)\ \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i max f(y_i\,) =$$

$$max f(y_i\,) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq max f(y_i\,) =\ f({y_i}^*)$$

Λόγω γραμμικότητας είναι $x^* = {y_i}^*$

Έτσι αποδείχτηκε, σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με αντικειμενική συνάρτηση f, σε εφικτό χωρίο που προσδιορίζεται από γραμμικούς περιορισμούς, ότι ισχύει το επόμενο συμπέρασμα:

Όταν το χωρίο αυτό είναι κυρτό και συνεκτικό και αν η f έχει το επιθυμητό βέλτιστο τότε ***η βέλτιστη αυτή τιμή επιτυγχάνεται σε μια από τις κορυφές του.***

Το θεώρημα βέβαια δεν εγγυάται λύση όταν το χωρίο είναι μη φραγμένο αλλά ούτε μοναδικότητα λύσης, όταν το χωρίο είναι είτε φραγμένο είτε όχι. Έτσι, στο σημείο αυτό, οδηγούμαστε στον ισχυρισμό ότι:

Κάθε πρόβλημα Γ.Π. εντάσσεται σε μια από τις τέσσερις δυνατές κατηγορίες:

(1) Έχει μια βέλτιστη λύση (η συνάρτηση αντικειμενικού σκοπού τέμνει το εφικτό σύνολο σε μια κορυφή)

(2) Έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις (η τομή της συνάρτησης με το εφικτό σύνολο είναι μια πλευρά του κυρτού πολυγώνου)

(3) Η τιμή της βέλτιστης λύσης τείνει στο άπειρο (το εφικτό σύνολο είναι μη φραγμένο και η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται οσοδήποτε μεγάλη)

(4) Δεν υπάρχει λύση (οι περιορισμοί του προβλήματος είναι ασύμβατοι, με αποτέλεσμα το εφικτό σύνολο να είναι κενό).

3.5 Παραδείγματα

Ενα καλό παράδειγμα που προσφέρεται για πρώτη επαφή με το αντικείμενο είναι αυτό του προγραμματισμού παραγωγής:

- **Παράδειγμα 1**

Υποθέτουμε ότι μια βιομηχανία παράγει δύο είδη προϊόντων Π1 και Π2 και χρησιμοποιεί δύο διαφορετικούς τύπους μηχανών Μ1 και Μ2. Για την επεξεργασία του κάθε προϊόντος ακολουθείται συγκεκριμένη παραγωγική διαδικασία που απασχολεί και τις δύο μηχανές. Επίσης υποθέτουμε ότι η διαδικασία είναι συνεχής και

ότι κάθε προϊόν περνάει διαδοχικά από τη Μ1 στη Μ2. Τέλος, υποθέτουμε ότι όλα τα προΪόντα που θα παραχθούν θα διατεθούν στην αγορά και θα πουληθούν. Να προσδιοριστεί η εβδομαδιαία παραγωγή των προϊόντων Π1 και Π2 ώστε να αποφέρει το μεγαλύτερο κέρδος.

Πίνακας Ι

Τύπος Μηχανής	Π ρ ο ϊ ό ν τ α		Διαθεσιμότητα κάθε μηχανής σε Ώρες/εβδομάδα
	Π1	Π2	
Μ1	2	3	12
Μ2	2	1	8
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος	6	7	

Ο πίνακας Ι δείχνει τα ακόλουθα στοιχεία:

(α) Τις *ώρες επεξεργασίας που χρειάζεται* μια μονάδα κάθε προϊόντος σε κάθε τύπο μηχανής

(β)Το σύνολο των εβδομαδιαίων ωρών λειτουργίας *που είναι διαθέσιμες* για κάθε τύπο μηχανής και

(γ) *το κέρδος*, σε χρηματικές μονάδες, που πραγματοποιείται από τη πώληση μιας μονάδας οποιουδήποτε προϊόντος. (Υποτίθεται ότι το κέρδος είναι ανάλογο προς τον αριθμό των μονάδων που πωλούνται).

Τα 3 αυτά στοιχεία θα αποτελέσουν τις *παραμέτρους* του μοντέλου αποτυπώνοντας τις συνθήκες λειτουργίας της παραγωγής. Ο καθορισμός των παραμέτρων αποτελεί μια κρίσιμη φάση της όλης διαδικασίας για τη διαμόρφωση του μοντέλου. Θα πρέπει επίσης να προσδιορίζονται με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια προκειμένου το μαθηματικό μοντέλο που θα διαμορφωθεί να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν πιό πιστά στο πραγματικό σύστημα.

Η επόμενη φάση της μαθηματικής διατύπωσης του προβλήματος περιλαμβάνει τον *καθορισμό των μεταβλητών* (variables). Στα προβλήματα Γ.Π. οι μεταβλητές ποσοτικοποιούν τις αποφάσεις που πρόκειται να ληφθούν και για το λόγο αυτόν ονομάζονται μεταβλητές απόφασης (decision variables). Εδώ οι μεταβλητές είναι οι μονάδες x_1, x_2 των προϊόντων $\Pi 1$ και $\Pi 2$ που παράγονται αντίστοιχα.

Τώρα με τη βοήθεια παραμέτρων και μεταβλητών του προβλήματος μπορούμε να διαμορφώσουμε μια μαθηματική σχέση που να περιγράφει το *κριτήριο απόδοσης* του συστήματος. Εδώ κριτήριο απόδοσης του συστήματος *(performance criterion ή*

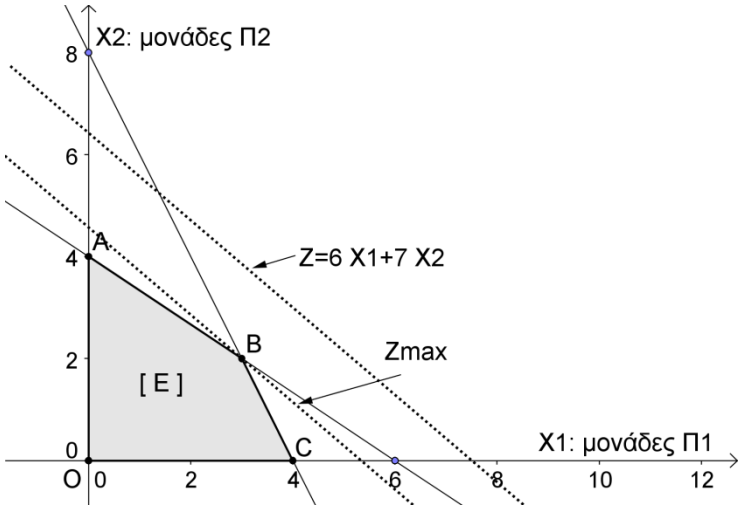
measure) έχει οριστεί *το κέρδος από τη διάθεση προϊόντων* και *στόχος είναι η μεγιστοποίηση (maximization) του κριτηρίου αυτού*.

Η συνάρτηση αυτή της οποίας αναζητείται το μέγιστο και που περιγράφει την απόδοση του συστήματος αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση (objective function) του μοντέλου. Δηλαδή:

$$Z = 6x_1 + 7x_2 \ .$$

Η αντικειμενική συνάρτηση μαζί με τους περιορισμούς συναποτελούν το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Δηλαδή να μεγιστοποιηθεί (maximize) η $Z = 6x_1 + 7x_2$ κάτω απο τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \ , \ 2x_1 + x_2 \leq 8 \ , \ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$



Σχήμα 3.4.1

Το εφικτό χωρίο είναι το OABC. Κάτω από τους συγκεκριμένους περιορισμούς, η βέλτιστη λύση είναι να παράγονται 3 μονάδες *Π1* και 2 μονάδες *Π2* την εβδομάδα. Η παραγωγή αυτή θα αποφέρει κέρδος $6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 32$ χρηματικές μονάδες.

Εαν τροποποιήσουμε το κέρδος ανά μονάδα *Π2* από 7 σε 9 χρηματικές μονάδες, προφανώς η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης θα ταυτιστεί με τον φορέα του AB. Τότε **βέλτιστες λύσεις είναι άπειρες**: κάθε σημείο του AB. Λόγω της φύσης του προβλήματος όμως, δεχόμαστε μόνο τα σημεία εκείνα που αντιστοιχούν σε ακέραια μονάδα προϊόντος, οπότε τότε θα περιλαμβάνεται και η λύση $(0, 4)$. Θα είχαμε λοιπόν, δύο βέλτιστες λύσεις που οδηγούν στην ίδια τιμή μέγιστου κέρδους: $Z = 6 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 36$ για τη λύση $(3,2)$ και $Z = 6 \cdot 0 + 9 \cdot 4 = 36$ για τη λύση $(0, 4)$. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το πρόβλημα έχει **εναλλακτική βέλτιστη λύση**.

- **Παράδειγμα 2**

Μια εταιρία ανεύρεσης μετάλλων, χρειάζεται να βρει τουλάχιστον 12 κιλά χαλκό και τουλάχιστον 18 κιλά σίδηρο για να πληρώσει το μηνιαίο της ενοίκιο. Υπάρχουν δύο ορυχεία στα οποία η εταιρία μπορεί να βρει χαλκό και σίδηρο. Κάθε μέρα που σκάβει η εταιρία στο ορυχείο Α, βρίσκει 2 κιλά χαλκό και δύο κιλά σίδηρο.

Κάθε μέρα που σκάβει η εταιρία στο ορυχείο Β, βρίσκει 1 κιλό χαλκό και τρία κιλά σίδηρο. Ζητάμε*:*

α. Τη δημιουργία ενός γραμμικού μοντέλου για να καλύψει η εταιρία τις ανάγκες της, ξοδεύοντας όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο στα ορυχεία.

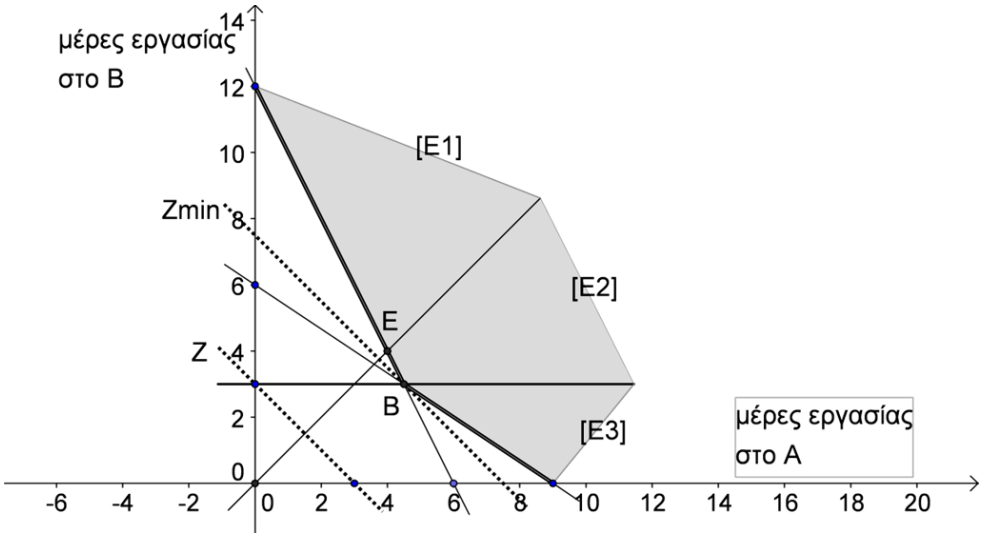
β, Να λυθεί το πρόβλημα γραφικά.

γ. Αν οι μέρες εργασίας στο ορυχείο Β πρέπει να είναι τουλάχιστον όσες στο ορυχείο Α, πώς επηρεάζεται η λύση του προβλήματος;

δ. Αν λόγοι ασφάλειας επιβάλλουν η εταιρία να μπορεί να εργαστεί το πολύ 3 ημέρες στο ορυχείο Β (στο αρχικό πρόβλημα (α)), πώς επηρεάζονται οι επιλογές της εταιρίας, και πώς στο πρόβλημα γ;

Αν σ'ένα μήνα η εταιρία σκάψει x μέρες στο ορυχείο Α και y μέρες στο ορυχείο Β, η συνάρτηση αντικειμενικού σκοπού είναι $Z = x + y$ και θέλουμε το min(Z) με τους περιορισμούς

$$2x + y \geq 12\ ,\ \ 2x + 3y \geq 18\ ,\ \ x + y \leq 30\ ,\ \ x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0$$



Σχήμα 3.4.2

Το γραμμικό μοντέλο οδηγεί στο εφικτό χωρίο $(E1)U(E2)U(E3)$. Θα σκάβει 4,5 μέρες στο ορυχείο Α και 3 μέρες στο ορυχείο Β. Μ' αυτό το τρόπο θα παράγει $2 \cdot 4{,}5 + 1 \cdot 3 = 12$ κιλά χαλκό και $2 \cdot 4{,}5 + 3 \cdot 3 = 18$ κιλά σίδηρο. Με τη παραγωγή αυτή η εταιρία θα πληρώνει το ενοίκιό της, έχοντας και την ευχέρεια,αν το επιθυμεί, να αυξήσει τις μέρες παραγωγής ώστε να δημιουργήσει απόθεμα.

Αν επιπλέον ισχύει ο περιορισμός της προϋπόθεσης (γ) $y \geq x$, τότε το εφικτό χωρίο περιορίζεται στο (Ε1) και η βέλτιστη λύση απεικονίζεται στο Ε(4,4). Οπότε τότε η μηνιαία παραγωγή είναι $2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 12$ κιλά χαλκός και $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$ κιλά σίδηρος.

Αν, επιπλέον της υπόθεσης (α), ισχύσει ο περιορισμός (δ), δηλαδή $y \leq 3$, τότε ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι ο (Ε3). Εδώ η βέλτιστη λύση απεικονίζεται στο σημείο Β αλλά στη περίπτωση αυτή είναι οριακή (οριακά πληρώνει το ενοίκιό της). Ίσως, για να διασφαλίσει τη βιωσιμότητά της, θα πρέπει να θυσιάσει τον παράγοντα

χρόνο σκάβοντας στο ορυχείο Α ώστε να μπορέσει να δημιουργήσει απόθεμα ασφαλείας.

Στη περίπτωση που ισχύσουν όλοι οι περιορισμοί, η εταιρία δε θα μπορέσει να πληρώσει το ενοίκιο γιατί το ***εφικτό χωρίο είναι κενό***: $(E1) \cap (E3) = \emptyset$.

- **Παράδειγμα 3**

Διαιτολόγος ετοιμάζει πρόγραμμα διατροφής ασθενών. Σύμφωνα με την οδηγία RDA (Recommended Daily Allowance) κάθε μερίδα πρέπει να περιέχει 45g πρωτεϊνες και 0,02g σίδηρο. Μία μερίδα κρέας περιέχει 45g πρωτεϊνες, 0,01g σίδηρο και 4g λιπαρά. Μία μερίδα λαχανικά περιέχει 9g πρωτεϊνες, 0,006g σίδηρο και 2g λιπαρά.

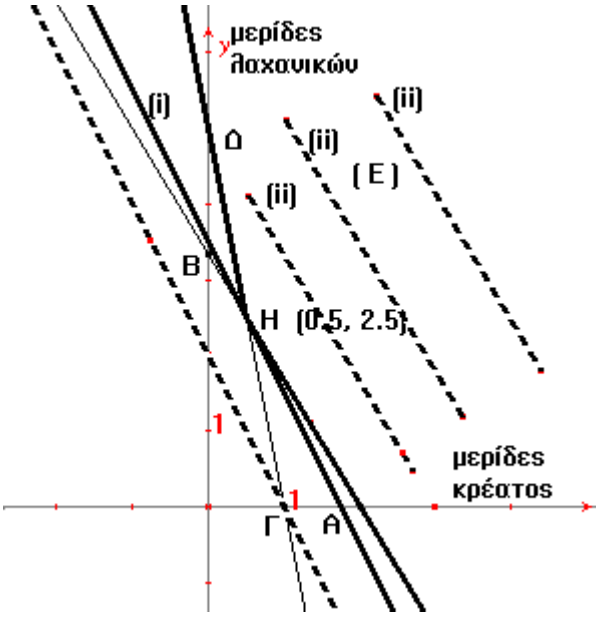
Θέλουμε να βρούμε τον ιδανικό αριθμό μερίδων από το κάθε είδος ώστε (i) να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα των λιπαρών, (ii) να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα του σιδήρου. Επομένως ζητάμε

(ι) την ελαχιστοποίηση της $Z_1 = 4x + 2y$

(ιι) τη μεγιστοποίηση της $Z_2 = 0{,}01x + 0{,}006y$

κάτω από τους περιορισμούς:

$45x + 9y \geq 45$ (πρωτεϊνες), $10x + 6y \geq 20$ (σίδηρος), $x \geq 0$, $y \geq 0$



Σχήμα 3.4.3

Παρατηρούμε ότι εδώ δεν υπάρχει άνω όριο στο χώρο των δυνατών λύσεων. Επίσης στη περίπτωση (ii) η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της δεν παύει να έχει κοινά σημεία με το χώρο των εφικτών λύσεων. Έτσι η Z μπορεί να γίνει απεριόριστα μεγάλη. Κατά συνέπεια το πρόβλημα, στη περίπτωση αυτή, έχει **μη πεπερασμένη λύση.**

Ένα πρόβλημα όπου αποτυπώνεται η έννοια του εφικτού χωρίου με περιορισμούς τους τρείς **συντελεστές παραγωγής: Γη, Εργασία, Κεφάλαιο** είναι το εξής:

- **Παράδειγμα 4**

Ένας κτηματίας πρέπει να καθορίσει πόσα στρέμματα καλαμποκιού και σιταριού να φυτέψει αυτή τη χρονιά. Ένα στρέμμα σιταριού αποφέρει 25 τόνους σιταριού και απαιτεί 10 ώρες εργασία την εβδομάδα. Ένα στρέμμα καλαμποκιού αποφέρει 10 τόνους καλαμποκιού και απαιτεί 4 ώρες εργασίας την εβδομάδα. Όλο το σιτάρι μπορεί να πουληθεί στα 4 € ο τόνος και όλο το καλαμπόκι μπορεί να πουληθεί στα 3 € ο τόνος. Η μέγιστη έκταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι 7 στρέμματα, ενώ μπορούν να διατεθούν 40 ώρες εργασίας την εβδομάδα. Οι κανονισμοί της κυβέρνησης απαιτούν την παραγωγή τουλάχιστον 30 τόνων καλαμποκιού για αυτή τη χρονιά. Να βρεθεί η καλύτερη λύση, ώστε ο κτηματίας να μεγιστοποιήσει τα έσοδα του. Τα σημεία (2,3), (4,3), (2,-1), (3,2) είναι στην περιοχή εφικτών λύσεων του προβλήματος;

Αν καλλιεργηθούν x στρέμματα σιταριού και y στρ. καλαμποκιού τότε το πρόβλημα οδηγεί στο παρακάτω γραμμικό μοντέλο:

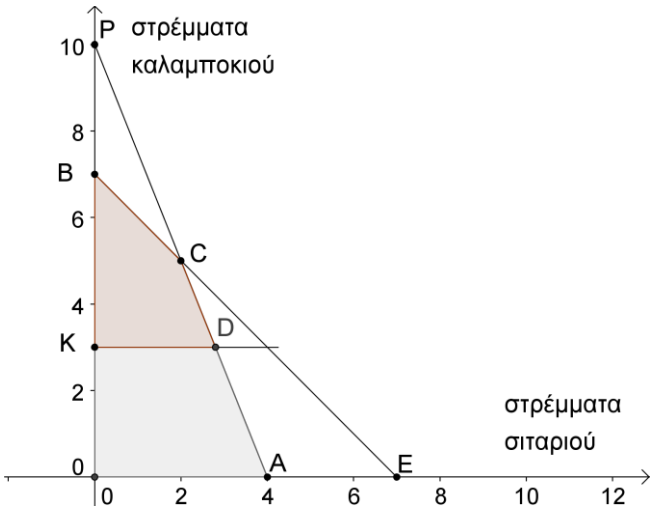
$$x + y \leq 7$$
$$10x + 4y \leq 40$$
$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

Ζητάμε τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης αντικειμενικού σκοπού (μεγιστοποίηση κέρδους)

$$Z = 25x \cdot 4 + 10y \cdot 3$$

Η Z πρέπει να παίρνει ολοένα μεγαλύτερες τιμές. Σταματάμε όταν η Z τμήσει για τελευταία φορά το εφικτό σύνολο. Υπολογισμός του Z όταν διέρχεται από το:

$$B(0,7): 100 \cdot 0 + 30 \cdot 7 = 210 = Z_B$$
$$A(4,0): 100 \cdot 4 + 30 \cdot 0 = 400 = Z_A$$
$$C(2,5): 100 \cdot 2 + 30 \cdot 5 = 350 = Z_C$$



Σχήμα 3.4.4

Άρα το μέγιστο κέρδος πραγματοποιείται όταν καλλιεργεί 4 στρέμματα σιτάρι.
Αλλά με τον περιορισμό $10y \geq 30$ ή $y \geq 3$ το εφικτό χωρίο είναι το κυρτό πολύγωνο KDCB.

Είναι $x_D = (40 - 4 \cdot 3)/10 = 2.8$.

Υπολογίζουμε τη τιμή της Z όταν αυτή διέρχεται από το σημείο $D(2{,}8, 3)$: $100 \cdot 2.8 + 30 \cdot 3 = 370 = Z_D$. Παρατηρούμε ότι:

$$Z_D = max\{ Z_A, Z_B, Z_C, Z_D \} .$$

Επομένως το μέγιστο κέρδος πραγματοποιείται όταν καλλιεργούνται 2,8 στρέμματα σιτάρι και 3 στρέμματα καλαμπόκι, ενώ μένουν ελεύθερα 1,2 στρέμματα καλλιεργήσιμης γής.

- **Παράδειγμα 5 (υπόδειγμα στον 3-διάστατο χώρο)**

Να βρεθούν τα ακρότατα σημεία του πολυεδρικού κυρτού συνόλου Χ που δίνεται από τους περιορισμούς :

$$x + y + z \leq 3$$

$$2x + 2y + z \leq 4$$

$$x - y \leq 0$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ορισμός: Σημείο $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι ακρότατο του πολυεδρικού κυρτού συνόλου Χ, αν και μόνο αν είναι τομή τριών φραγμένων επιπέδων του Χ.

Μελέτη του προβλήματος:

Υπάρχουν $\binom{5}{3} = 10$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε 3 από τα 5 φραγμένα επίπεδα. Για παράδειγμα:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{κλπ}$$

Καθένα από τα συστήματα αυτά έχει το πολύ μια λύση:

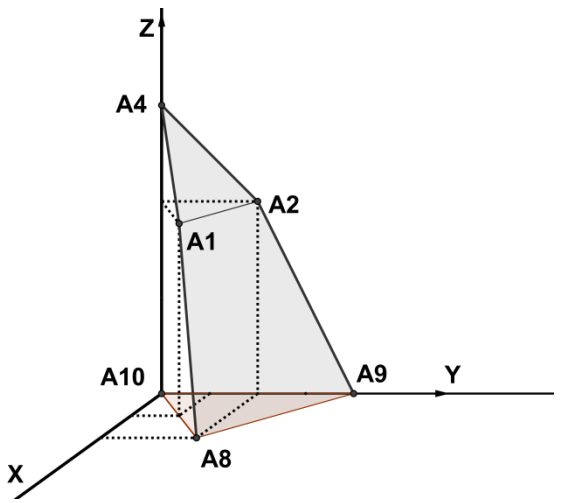
$A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $A_2 = (0, 1, 2)$, το σύστημα $A_3 = \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ δεν δίνει λύση

$A_4 = (0, 0, 3)$, $A_5 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $A_6 = (0, 3, 0)$, $A_7 = (0, 0, 4)$

$A_8 = (1, 1, 0)$, $A_9 = (0, 2, 0)$ και $A_{10} = (0, 0, 0)$ (Σχήμα 3.4.5).

Αλλά:

Το A_5 δεν ικανοποιεί τη $2x + 2y + z \leq 4$, το A_6 επίσης, το A_7 τη $x + y + z \leq 3$. Συνεπώς ακρότατα είναι μόνο τα σημεία A_1, A_2, A_4, A_8, A_9, A_{10}. Το πολυεδρικό κυρτό σύνολο είναι το $A_{10}A_8A_9A_2A_1A_4$ και είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων



Σχήμα 3.4.5

Πρόβλημα:

Αν $m = 4x - 2y - z$ η αντικειμενική συνάρτηση με τους παραπάνω περιορισμούς, να υπολογιστεί (α) το max(m) και (β) το min(m). Εύκολα υπολογίζουμε ότι είναι:

max(m)= 2 στο $A_8 = (1, 1, 0)$

min(m)=- 4 στο $A_2 = (0, 1, 2)$

Το τελευταίο παράδειγμα, που ακολουθεί, εισάγει ένα **πρόβλημα μεταφοράς** όπου οι μαθητές αναμένεται να μαθηματικοποιήσουν τα δεδομένα του με γραμμικές ανισώσεις και εξισώσεις (12 μεταβλητών) ώστε να φτάσουν σε τυποποίηση όπως αναλύθηκε στη γενική της μορφή στο τέλος της παραγράφου 3.2. Στη συνέχεια **με δοκιμές** μπορούν να δόσουν ένα σχέδιο διανομής που να ανταποκρίνεται στους περιορισμούς του προβλήματος. Φυσικά κάθε σχέδιο θα αντιστοιχεί σε μια διαφορετική τιμή της συνάρτησης αντικειμενικού σκοπού:

- **Παράδειγμα 6**

Μια εταιρία μεταφορών τροφίμων, μεταφέρει μια πρώτη ύλη για την παρασκευή τροφίμων, από τρεις πόλεις, την Αθήνα, την Θεσσαλονίκη και την Πάτρα. Οι τρεις αυτές πόλεις έχουν αντίστοιχα τη δυνατότητα να παράγουν 75, 125 και 100 τόνους πρώτης ύλης κάθε μήνα. Η πρώτη ύλη αυτή μεταφέρεται σε τέσσερις άλλες πόλεις, την Αλεξανδρούπολη, τα Γιάννενα, τη Ρόδο και το Ηράκλειο. Η ζήτηση πρώτης ύλης σε αυτές τις πόλεις είναι 80, 65, 70 και 85 τόνοι αντίστοιχα, κάθε μήνα. Το κόστος μεταφοράς πρώτης ύλης από τις πηγές παραγωγής στα σημεία ζήτησης δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Κέντρα Παραγωγής	Σημεία Ζήτησης			
	Αλεξαν/λη	Γιάννενα	Ρόδος	Ηράκλειο
Αθήνα	50	20	25	30
Θεσσαλονίκη	15	10	20	70
Πάτρα	60	15	30	55

Δώστε ***ένα σχέδιο διανομής*** *της πρώτης ύλης από τα κέντρα παραγωγής στα σημεία ζήτησης και υπολογίστε το συνολικό κόστος μεταφοράς της πρώτης ύλης με το σχέδιο αυτό. Δίνει αυτό το σχέδιο το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς της πρώτης ύλης*;

Βιβλιογραφία 3ου κεφαλαίου

G. STRANG : Γραμμική άλγεβρα και εφαρμογές (Π.Ε.Κ)
TARO YAMANE, ΑΝΔ. ΚΙΝΤΗΣ : Μαθηματικά για Οικονομολόγους, Β τόμος (Gutemberg)
Ι. ΡΑΣΙΑΣ : Γραμμική άλγεβρα και γραμμικός προγραμματισμός
Διάλεξη eclass: Εφαρμογή γραμμικού προγραμματισμού στη γεωργική παραγωγή, ΤΕΙ Θεσσαλονίκης
Χ. ΜΠΟΤΣΑΡΗΣ : Σημειώσεις γραμμικού προγραμματισμού (Πανεπιστήμιο Πάτρας)
V. M. TICHOMIROV : Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα (Κάτοπτρο, 1999)
B.KOLMAN , R.BECK : Elementary Linear Programming with applications (Academic Press, 1980)
S.VAJDA : An Introduction to Linear Programming and the theory of Games (Methuen and Co.Ltd, 1968)
Διαδίκτυο :
http://en.wikipedia.org/wiki/Polytope
http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_method

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΝΑΥΣΙΠΛΟΪΑ-Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΝΑΥΤΙΛΙΑΣ

4.1 Ναυσιπλοΐα και ραδιοναυτιλία

Στο χώρο της ναυσιπλοΐας οι παραδοσιακές μέθοδοι και οι σύγχρονες συνυπάρχουν. Διανύουμε, βέβαια, την εποχή της δορυφορικής ναυσιπλοΐας, όπου οι μέθοδοι της παραδοσιακής για τη **προετοιμασία, σχεδίαση και εκτέλεση του πλού** έχουν εκσυγχρονιστεί και αυτοματοποιηθεί. Όμως οι βασικές αρχές και ανάγκες της ναυσιπλοΐας παραμένουν διαχρονικά αναλλοίωτες και συνοψίζονται στην αποφυγή προσάραξης, αποφυγή σύγκρουσης και αποφυγή ζημιών λόγω δυσμενών καιρικών συνθηκών.

Από τα διάφορα σύγχρονα κείμενα της ναυσιπλοΐας αναδύεται η εξής αρχή: οι εξελίξεις και οι προοπτικές της τεχνολογίας αξιώνονται σε συνδυασμό με τις πάγιες και διαχρονικά αναλλοίωτες αρχές και ανάγκες της λειτουργίας που αυτή υπηρετεί. Ο χώρος της ναυσιπλοΐας, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι αντιπροσωπευτικό παράδειγμα χώρου εφαρμογής του αξιώματος αυτού. Η παρατηρητικότητα και η μεθοδικότητα που πρέπει να διακρίνει τον ναυτικό δημιουργεί αυτή την αναγκαιότητα.

Στο κεφάλαιο αυτό, μαζί με τη σαφή σχέση με τη γεωμετρία που έχει η αποτύπωση της **πραγματικής (απόλυτης) θέσης ενός πλοίου** στο χάρτη, προσπαθούμε να αναδείξουμε και το μέρος της γεωμετρίας με το οποίο συνδέεται **η υπερβολική ναυτιλία,** που είναι ο μεγαλύτερος κλάδος της **παραδοσιακής ραδιοναυσιπλοΐας.**

4.1.1 Γενικά περί χαρτών

Στις συνήθεις απεικονίσεις η αναπαράσταση της γής είναι σφαιρική. Στη πραγματικότητα το σχήμα της είναι ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Είναι δηλαδή ένα ελλειψοειδές με άξονα περιστροφής τον άξονα βορρά – νότου και με επίπεδο συμμετρίας να τη τέμνει κατά μέγιστο κύκλο (τον κύκλο του ισημερινού). Το ελλειψοειδές δεν είναι αναπτυκτή επιφάνεια και οποιαδήποτε μέθοδος χαρτογράφισής της είναι προσεγγιστική.

Τι είναι χάρτης; Μπορούμε, γενικά μιλώντας, να πούμε ότι χάρτης είναι η προβολή, δηλαδή η απεικόνιση, μέρους της γης στο επίπεδο.

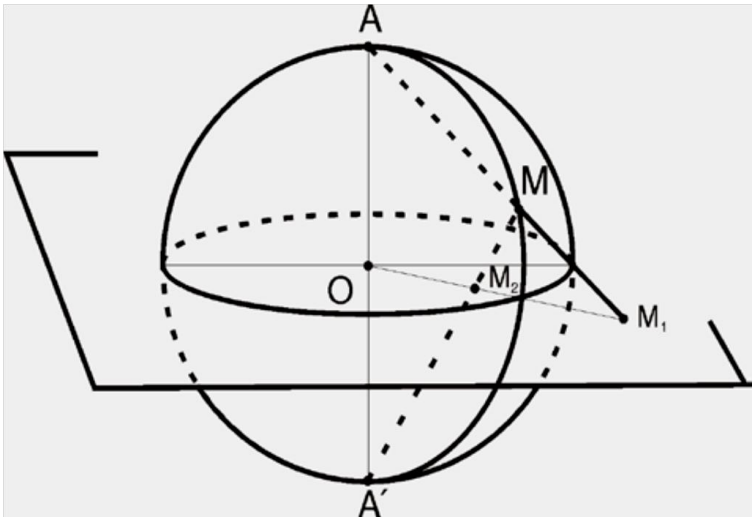
Η σημασία που έχει για τον ναυτικό η θέση του πλοίου πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας την κάθε χρονική στιγμή, στάθηκε η κύρια αφορμή για τη κατασκευή επίπεδων χαρτών. Οι γεωγράφοι από την αρχαιότητα ασχολήθηκαν με τη κατασκευή τους. Έπρεπε στη χαρτογράφηση να αντιμετωπιστεί σωστά *το πρόβλημα της σφαιρικότητας της γής*, ώστε ο εντοπισμός της θέσης και η χάραξη της πορείας να

μπορεί να γίνεται με ακρίβεια μεσα από απλούς υπολογισμούς. Στη συνέχεια, οι μεγάλες εξερευνήσεις οδήγησαν στη συστηματικότερη μελέτη των επιφανειών.

Ένας χάρτης στη γνωστή και συμβατική του μορφή είναι επίπεδος. Ένα σημείο πάνω στο επίπεδο μπορεί να χαρακτηριστεί μονοσήμαντα από τις καρτεσιανές συντεταγμένες του. Συνήθως άξονας τεταγμένων (Y) θεωρείται η διεύθυνση του Βορρά (η οποία ταυτίζεται με τη διεύθυνση του μεσημβρινού). Το γεωμετρικό πρόβλημα που συναντάται είναι η απεικόνιση της γης (μέρους ή όλης) σε ένα χάρτη δηλαδή η απεικόνιση του ελλειψοειδούς σε ένα επίπεδο. Στο επίπεδο ανάπτυγμα η απεικόνιση της επιφάνειας πρέπει να είναι (κατά προσέγγιση) ισομετρική.

Όπως αποδεικνύεται μόνο οι επιφάνειες με μηδενική καμπυλότητα Gauss (δες 4.2.4) μπορούν να απεικονιστούν ισομετρικά στο επίπεδο, δηλαδή είναι *αναπτύξιμες*. Επομένως, σε κάθε άλλη περίπτωση, η απεικόνιση αυτή θα οδηγήσει σε *παραμόρφωση των σχημάτων του ελλειψοειδούς*, αφού αυτό είναι μια μη αναπτυκτή επιφάνεια. Για αυτό το λόγο, η διαδικασία απεικόνισης (δηλαδή *η συνάρτηση*) στο προβολικό σύστημα που χρησιμοποιείται, εκτός από τη *μετατροπή των γεωγραφικών συντεταγμένων σε καρτεσιανές και αντίστροφα*, πρέπει να παρέχει και τη πληροφορία για το πόσο παραμορφώνονται τα μεγέθη (διαστάσεις, γωνίες, εμβαδόν) ενός σχήματος στο ελλειψοειδές κατά την απεικόνισή του στο επίπεδο.

Το παράδειγμα της στερεογραφικής προβολής.



σχήμα 4.1.1

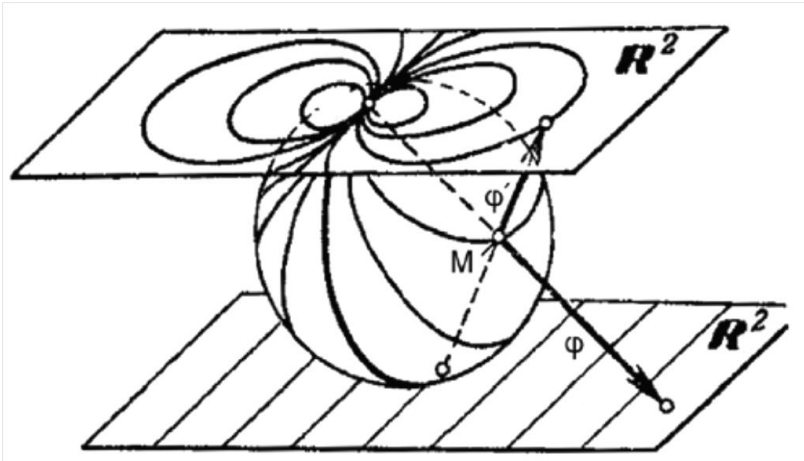
Στερεογραφικές προβολές της σφαίρας από το βόρειο και νότιο πόλο της στο ισημερινό επίπεδο

Η στερεογραφική προβολή αποδίδεται στον Ίππαρχο (2^{ο} αι. π.Χ.) που τη χρησιμοποίησε για τη κατασκευή αστρονομικών χαρτών. Πρόκειται για απεικόνιση η οποία πρακτικά δίνει μάλλον ατελείς χάρτες. Η απεικόνιση την οποία ορίζει είναι διαφορίσιμη 1-1 και επί:

$$S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

με αντίστροφη την επίσης διαφορίσιμη

$$\mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\} : (u,\ v)\ \to\ \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-u^2+v^2}{1+u^2+v^2}\right)$$



Σχήμα 4.1.2[8]

Οι κυκλικές τροχιές στην επιφάνεια της σφαίρας που διέρχονται από το βόρειο πόλο χαρτογραφούνται στον άνω χάρτη ως εφαπτόμενοι κύκλοι σε ένα κοινό σημείο και στον κάτω χάρτη ως παράλληλες ευθείες

4.1.2 Η αποτύπωση της πραγματικής θέσης του πλοίου στο χάρτη και η χάραξη του πλου

Η σχεδίαση και η εκτέλεση του πλου στηρίζεται στην επίλυση των δύο θεμελιωδών προβλημάτων της ναυσιπλοΐας : του ευθέος και του αντιστρόφου.

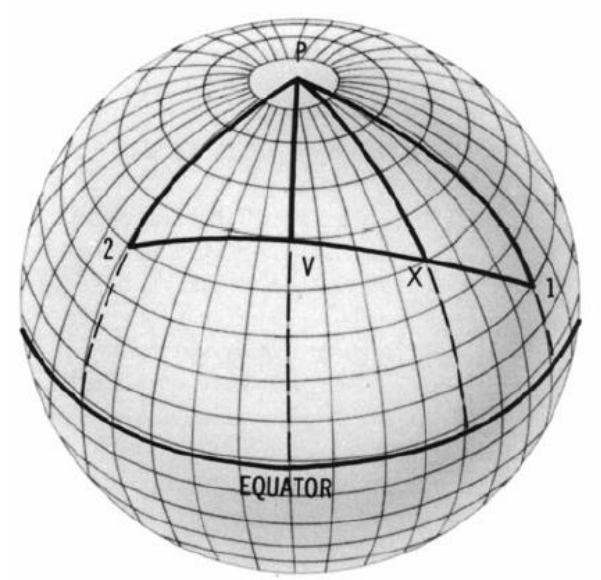
Στο ευθύ πρόβλημα είναι γνωστές οι γεωγραφικές συντεταγμένες (φ_A, λ_A) του σημείου αναχώρησης A, η απόσταση D του πλου από το A στο σημείο προορισμού B καθώς και η διεύθυνση (αζιμούθιο) ζ του σημείου Β από το Α. Υπολογίζονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες (φ_B, λ_B) του σημείου Β (βλέπε και Σχήμα 4.1.8 σελ 67).

Στο αντίστροφο πρόβλημα είναι γνωστές οι γεωγραφικές συντεταγμένες των σημείων Α και Β και υπολογίζονται το αζιμούθιο ζ και η απόσταση D.

Η πορεία που θα ακολουθήσει το πλοίο μπορεί να είναι σταθερή ή όχι και, επίσης, η διαδρομή να είναι η συντομότερη ή όχι. Στα σχήματα της επόμενης σελίδας βλέπουμε μια σκιαγράφηση της πορείας ενός πλεούμενου επάνω στη γήινη επιφάνεια όπου απεικονίζονται αυτές οι περιπτώσεις.

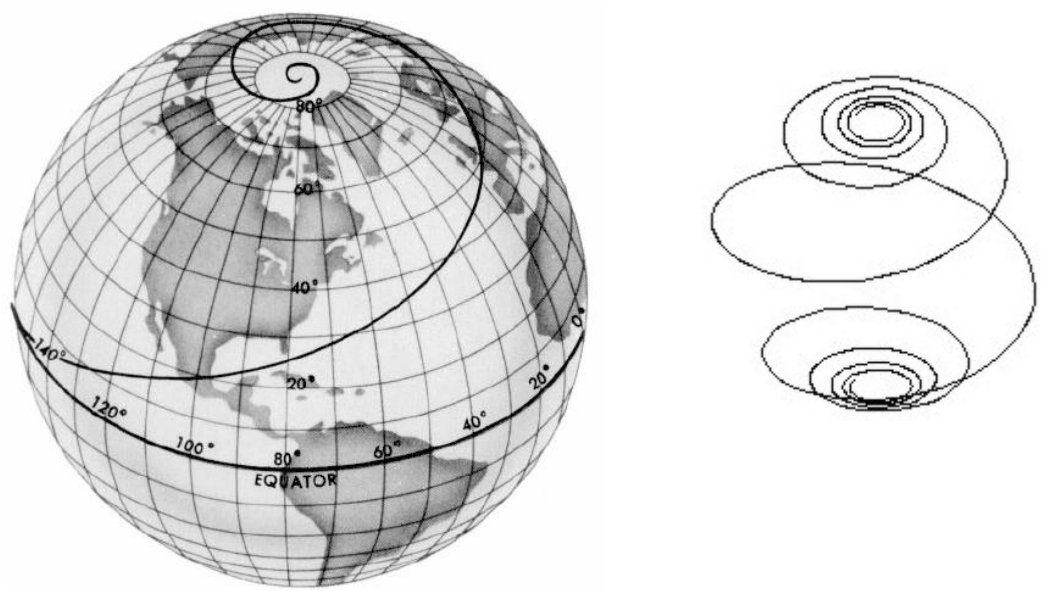
Στην ειδική περίπτωση όπου τα σημεία αναχώρησης Α και προορισμού Β βρίσκονται στον ισημερινό ή επάνω στον ίδιο μεσημβρινό, προφανώς, το μεταξύ τους ορθοδρομικό τόξο συμπίπτει με τη μεταξύ τους λοξοδρομία. Για οποιαδήποτε άλλη σχετική θέση των σημείων αναχώρησης και προορισμού, τα δρομολόγια λοξοδρομικού και ορθοδρομικού πλου διαφέρουν.

[8] Το σχήμα ανακτήθηκε από το [7] (Σ. Πνευματικός)



Σχήμα 4.1.3α[9]

Σχήμα 4.1.3α: Στον *ορθοδρομικό πλου* διανύεται η συντομότερη απόσταση αλλά δεν τηρείται σταθερή πορεία. Το ίχνος του ορθοδρομικού πλου είναι τόξο (: *ορθοδρομικό τόξο*) του μοναδικού μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία. Αλλά ένας μέγιστος κύκλος τέμνει με διαφορετική γωνία τον κάθε μεσημβρινό οπότε η πορεία μεταβάλλεται.



Σχήμα 4.1.3β

Σχήματα 4.1.3β: Στο *λοξοδρομικό πλου* τηρείται σταθερή πορεία, αλλά δεν διανύεται η συντομότερη απόσταση. Το ίχνος του λοξοδρομικού πλου στην επιφάνεια της σφαίρας ή του

[9] Τα σχήματα 4.1.3α,β, 4.1.4α, β και 4.1.5 ανακτήθηκαν από [6] (Αθ. Παλληκάρης)

ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ονομάζεται *ρυμβοειδής γραμμή* (Rhumbline) ή *λοξοδρομία*. Η μη επίπεδη σπειροειδής αυτή γραμμή τέμνει με την ίδια γωνία όλους τους μεσημβρινούς.

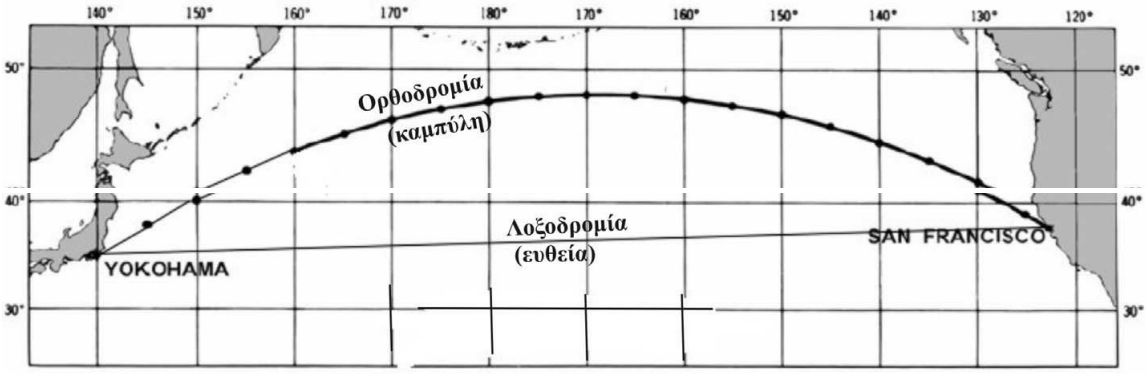
Η σχεδίαση του λοξοδρομικού πλού (πλους με σταθερή πορεία) γίνεται στο μερκατορικό ναυτικό χάρτη (χάρτη μερκατορικής προβολής) με την αξιοποίηση της βασικής του ιδιότητας να απεικονίζει τη λοξοδρομία με ευθεία γραμμή (βλ. Σχήμα 4.1.4α)

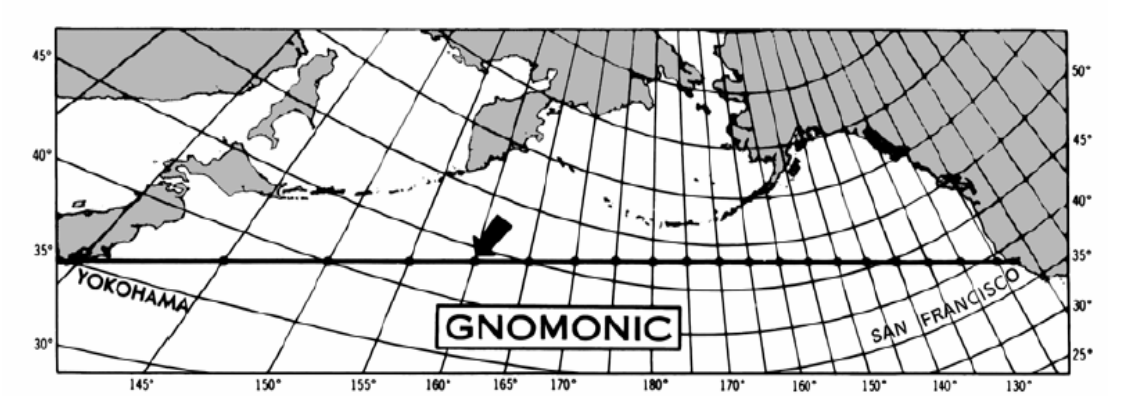
Η σχεδίαση του ορθοδρομικού πλού (πλούς ελάχιστης διαδρομής) γίνεται στο γνωμονικό χάρτη (χάρτη γνωμονικής προβολής) με την αξιοποίηση της βασικής του ιδιότητας να απεικονίζει την ορθοδρομία με ευθεία γραμμή (βλ. Σχήμα 4.1.4β).

Στον μερκατορικό χάρτη (Σχήμα 4.1.4α) ο λοξοδρομικός πλούς απεικονίζεται με ευθεία ενώ ο ορθοδρομικός με καμπύλη. Αυτό σημαίνει ότι το πραγματικό μήκος της καμπύλης είναι μικρότερο από το πραγματικό μήκος του τμήματος που ενώνει τα άκρα της!

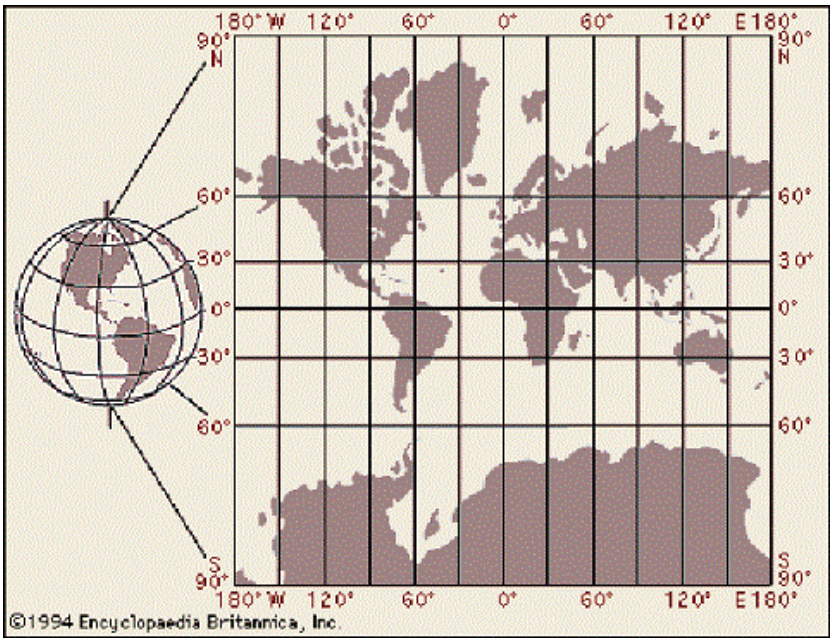
Στον γνωμονικό χάρτη (Σχήμα 4.1.4β) ο ορθοδρομικός πλούς απεικονίζεται με μία ευθεία.

Σχήμα 4.1.4α-4β





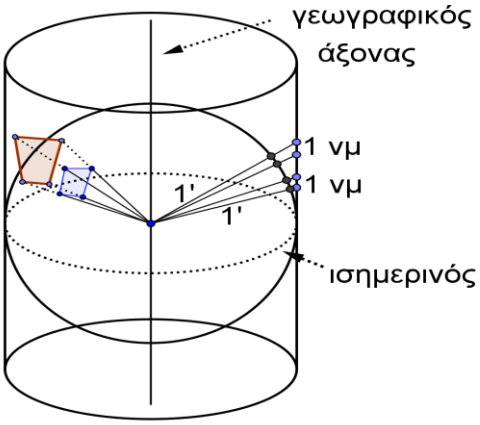
.



Σχήμα 4.1.5

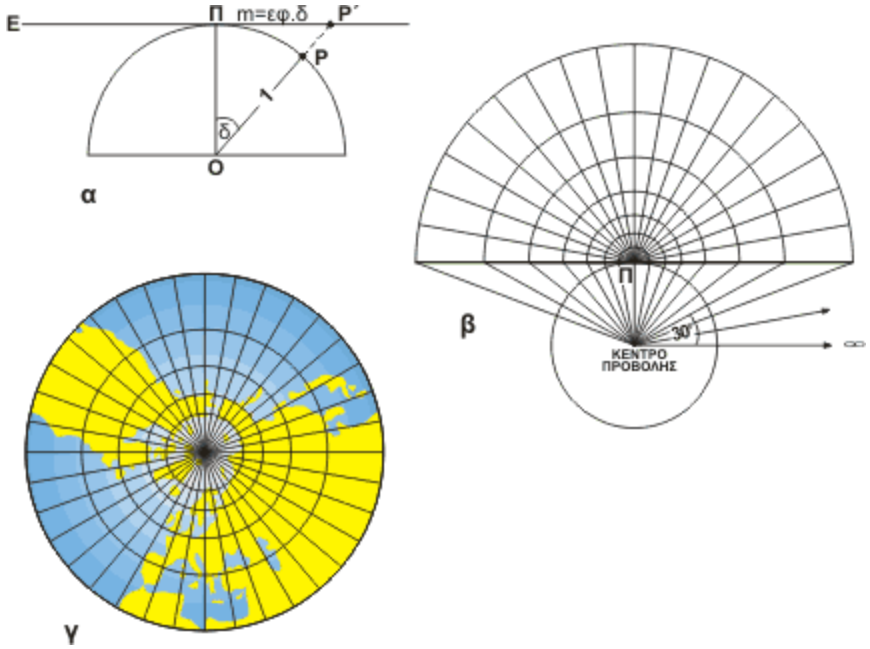
Ο *μερκατορικός χάρτης*, που προαναφέρθηκε, είναι το ανάπτυγμα της κυλινδρικής επιφάνειας που περιβάλλει τη γήινη σφαίρα και της οποίας ο κατακόρυφος άξονας συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής της γης (Σχήμα 4.1.5) . Το τυχόν σημείο Α της επιφάνειας της γής προβάλλεται ώς το ίχνος Α' της γήινης ακτίνας που αντιστοιχεί στο Α, επάνω στη κυλινδρική επιφάνεια. Με τον τρόπο αυτόν, στον μερκατορικό χάρτη οι μεσημβρινοί απεικονίζονται στις τομές των επιπέδων των μεσημβρινών με την επιφάνεια του κυλίνδρου. Είναι δηλαδή παράλληλες (κατακόρυφες) ισαπέχουσες ευθείες. Οι παράλληλοι απεικονίζονται στις τομές των κωνικών επιφανειών (που έχουν κορυφή το γήινο κέντρο, άξονα τον γήινο άξονα περιστροφής και γενέτειρα την ακτίνα της γης που αντιστοιχεί στον παράλληλο) με τη κυλινδρική επιφάνεια. Επομένως στο ανάπτυγμα εμφανίζονται ως παράλληλα (οριζόντια) τμήματα που η μεταξύ τους απόσταση μεγαλώνει όσο απομακρύνονται από το τμήμα που απεικονίζει τον Ισημερινό.

Είναι προφανείς, και εύκολο να παρατηρήσει κανείς στο χάρτη, τις σημαντικές παραμορφώσεις σχημάτων και αποστάσεων που γίνονται εντονότερες όσο πηγαίνουμε προς τους πόλους. Όμως η παραμόρφωση δεν αλλάζει τις γωνίες ενώ για τη μέτρηση των αποστάσεων αρκεί να «παραμορφώνεται» και η μονάδα μέτρησης (:το ναυτικό μίλι (νμ): =μήκος τόξου μέγιστου κύκλου της γήινης σφαίρας που αντιστοιχεί σε γωνία 1' (ενός πρώτου λεπτού) της μοίρας) *ανάλογα με τη περιοχή* που μας ενδιαφέρει (Σχήμα 4.1.6).



Σχήμα 4.1.6

Στον *γνωμονικό χάρτη* το επίπεδο προβολής εφάπτεται στον πόλο, που αποτελεί το κέντρο του χάρτη. Το τυχόν σημείο Ρ της γήινης σφαίρας απεικονίζεται στο επίπεδο αυτό με το σημείο Ρ΄, που είναι η τομή της γήινης ακτίνας που διέρχεται από το Ρ με αυτό το εφαπτόμενο επίπεδο. Με τον τρόπο αυτόν οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως δέσμη ακτίνων, η δε γωνία α, την οποία σχηματίζουν δύο μεσημβρινοί στο κέντρο του χάρτη *είναι ίση* με τη γωνία που σχηματίζουν οι αντίστοιχοι μεσημβρινοί στη σφαίρα. Προφανώς οι παράλληλοι κύκλοι είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το κέντρο του χάρτη (Σχήμα 4.1.7)



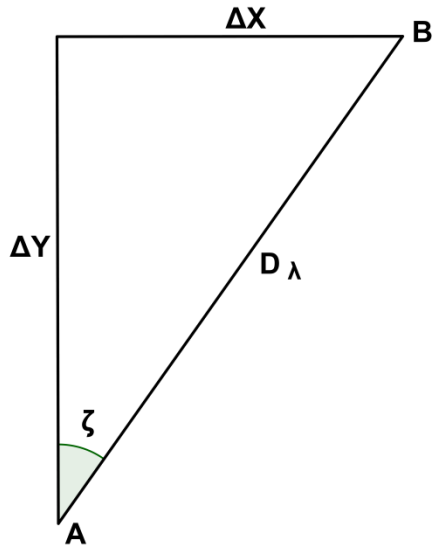
Σχήμα 4.1.7[10]

Στον γνωμονικό χάρτη δεν γίνονται μετρήσεις. Στη πράξη ο ναυτικός έχει στη διάθεσή του και τους δύο χάρτες. Για τη χάραξη του λοξοδρομικού πλου χρειάζεται μόνο ο μερκατορικός όπου γίνονται και οι μετρήσεις. Η χάραξη του ορθοδρομικού πλου

[10] Βαβλιάκης, ανάκτηση από [11]

γίνεται στον γνωμονικό χάρτη. Στη συνέχεια επιλέγονται αρκετά ενδιαμέσα σημεία της ορθοδρομίας, εντοπίζονται οι γεωγραφικές τους συντεταγμένες, που, με τη σειρά τους, προσδιορίζονται επάνω στον μερκατορικό χάρτη. Τα σημεία αυτά συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα στον μερκατορικό χάρτη, που, κατά συνέπεια, αντιπροσωπεύουν λοξοδρομικούς πλόες και με τον τρόπο αυτόν ο ορθοδρομικός πλούς προσεγγίζεται με μια σειρά διαδοχικών λοξοδρομικών πλεύσεων. Η προσέγγιση αυτή θεωρείται ικανοποιητική (: χωρίς δηλαδή να δημιουργεί αξιοσημείωτα για τις ανάγκες της ναυτιλίας σφάλματα) όταν οι αποστάσεις των ενδιάμεσων σημείων δεν είναι μεγαλύτερες από 150 ν.μ.

Στη συνέχεια, ο υπολογισμός της λοξοδρομίας, έγκειται στην επίλυση ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το τμήμα λ της λοξοδρομίας, κατακόρυφη κάθετη πλευρά τη διαφορά των γεωγραφικών πλατών ΔY των δύο άκρων (εκφρασμένα σε λεπτά της μοίρας) και οριζόντια κάθετη πλευρά τη διαφορά ΔX των γεωγραφικών τους μηκών (εκφρασμένα σε ναυτικά μίλια). Η κατεύθυνση (αζιμούθιο) είναι η γωνία ζ μεταξύ της υποτείνουσας λ και της καθέτου ΔY.



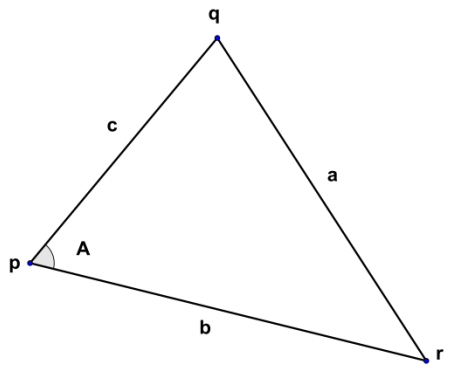
Σχήμα 4.1.8

4.2 Σχετικά με τη καμπυλότητα

Η καμπυλότητα μιας επιφάνειας σχετίζεται με τη δυνατότητά της να χαρτογραφηθεί, δηλαδή να απεικονιστεί στο επίπεδο, χωρίς ή με *παραμόρφωση* των *γεωμετρικών χαρακτηριστικών* των σχημάτων της (: αποστάσεις, γωνίες, διευθύνσεις, εμβαδά).

4.2.1 Παρατηρήσεις αναφορικά με τις επίπεδες καμπύλες.

Στο ευκλείδειο επίπεδο έχουμε αποστάσεις μεταξύ σημείων και γωνίες μεταξύ ομαλών καμπυλών εκεί που συναντώνται οι καμπύλες . Κάθε φορά που έχουμε ένα σχηματισμό σημείων, όπως στο Σχήμα 4.2.1, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι ισχύει η ισότητα $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$



Σχήμα 4.2.1

Και κάθε φορά που η τρίτη πλευρά είναι απρόσιτη, μετρούμε τοπικά τη γωνία και μπορούμε να υπολογίσουμε την άγνωστη πλευρά, εφόσον γνωρίζουμε τις άλλες δύο πλευρές.

Η διαδρομή ανάμεσα σε δύο σημεία είναι μια συνεχής καμπύλη με άκρα τα σημεία αυτά. Το μήκος της είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) των περιμέτρων των πολυγώνων που εγγράφονται στη καμπύλη. Το supremum δεν είναι πάντα πεπερασμένο, όπως, για παράδειγμα, στη fractal (μορφοκλασματική) καμπύλη της νιφάδας του χιονιού. Αλλά αν η καμπύλη, c(t), είναι αρκετά ομαλή, δηλαδή έχει πρώτη παράγωγο - πιό σωστό είναι να λέμε ευθυγραμμίσιμη - τότε έχει πεπερασμένο μήκος $\int \|c'(t)\| dt$.

Έχουμε μια επίπεδη καμπύλη με ένα σημείο $c(t)$ να τρέχει κατά μήκος της, μια συνάρτηση ως προς μια παράμετρο t, όσο ομαλή θέλουμε (: διαφορίσιμη όσες φορές χρειάζεται). Η ταχύτητα αυτής της καμπύλης c είναι $c'(t)$. Όπως είπαμε το μήκος της c από το α στο β είναι $\int_{\alpha}^{\beta} \|c'(t)\| dt$. Αυτό αντιπροσωπεύει μια απόσταση στη καμπύλη, που είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί η διαδρομή από $c(a)$ μέχρι $c(b)$ με μοναδιαία ταχύτητα. Αυτή η εσωτερική γεωμετρία είναι η ίδια με τη γεωμετρία ενός διαστήματος. Λέγοντας εσωτερική εννοούμε ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για ότι συμβαίνει επάνω στη καμπύλη, και όχι για το τι συμβαίνει εκτός. Συνεπώς όλες οι καμπύλες που έχουν το ίδιο μήκος είναι *ισομετρικές*, δηλαδή είναι ίδιες ως μετρικοί χώροι. Ισοδύναμα, υπάρχει ένας **1-1 χάρτης** που είναι μια ισομετρία μεταξύ τους (για παράδειγμα, διατηρεί τις αποστάσεις). Επιπλέον, όλες αυτές είναι ισομετρικές με ένα τμήμα ίδιου μήκους μιας Ευκλείδειας ευθείας. Όμως, με τις επιφάνειες τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά.

4.2.2 Για τη γεωμετρικοποίηση μιας επιφάνειας. Μια πρώτη προσέγγιση.

Ας μελετήσουμε την *εσωτερική γεωμετρία* μιας επιφάνειας.[11] Ας φανταστούμε όντα που ζούν στην επιφάνεια M και αγνοούν οτιδήποτε συμβαίνει έξω απο αυτήν. Τα όντα αυτά μετακινούνται επάνω στην επιφάνεια και θέλουν να ορίσουν την απόσταση από ένα σημείο p σε ένα σημείο q επάνω στη M. Ορίζουμε ως απόσταση απο το

[11] [8], σελίδες 36-38

σημείο p στο σημείο q της M ως το μεγαλύτερο κάτω φράγμα (infimum) των μηκών όλων των καμπυλών που έχουν άκρα τα p και q στη M και το συμβολίζουμε με $d(p,q)$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $d(p,q)$ είναι μια μετρική στο σύνολο M (εφ'όσον το M είναι συνεκτικό). Μερικές φορές η μετρική αποκαλείται *εσωτερική μετρική*. Εδώ, πρέπει να τονιστεί ότι η d δεν είναι η μετρική που επάγει ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος στην επιφάνεια M. Οι μόνες επιφάνειες M, για τις οποίες η επαγόμενη μετρική και η εσωτερική μετρική συμπίπτουν, είναι τμήματα επιπέδου. Αυτή η εσωτερική μετρική προσδιορίζεται μέσα απο τις ευκλείδειες δομές, από το σύνολο των εφαπτόμενων στο m επιπέδων καθώς το m διατρέχει την M.

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S^2 \subset R^3$. Ο βασικός τύπος της σφαιρικής τριγωνομετρίας

$$cosa = cosb\ cosc\ +\ sinb\ sinc\ cosA$$

είναι το ανάλογο του ευκλείδειου τύπου για κάθε σφαιρικό τρίγωνο $\{p,q,r\}$ με μήκη πλευρών $a = d(q,r)$, $b = d(r,p)$, $c = d(p,q)$ και A τη (δίεδρη) γωνία στο διάνυσμα p. Πώς όμως υπολογίζουμε το $d(p,q)$; Θα πρέπει να βρούμε τις μικρότερες διαδρομές. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε ή ότι κάναμε τη σωστή υπόθεση: Οι μικρότερες διαδρομές στη σφαίρα είναι τόξα μέγιστων κύκλων (οι τομές της σφαίρας με επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της). Με βάση αυτό, η απόσταση είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$d(p,q) = arc\ cos(p,q) \in [0,\pi]$$

Για να αποδείξουμε ότι οι μικρότερες διαδρομές είναι, πράγματι, τόξα μέγιστων κύκλων, θεωρούμε ένα τέτοιο τόξο, μικρότερο απο το μισό ενός μέγιστου κύκλου, που, περιστρέφοντάς το, το οδηγούμε να γίνει τμήμα ενός μεσημβρινού, χωρίς όμως αυτό να περιέχει ούτε τον νότιο ούτε τον βόρειο πόλο. Το γεωγραφικό πλάτος, εκφρασμένο σε ακτίνια, αυξάνει κατά μία μονάδα καθώς διασχίζουμε τον μεσημβρινό με μοναδιαία ταχύτητα, δηλαδή η μεταβολή μήκους είναι μήκος τόξου. Τώρα, απομένει να δούμε ότι ο ρυθμός αύξησης του μήκους κατά μήκος μιας αποιασδήποτε καμπύλης μοναδιαίας ταχύτητας είναι μικρότερος από το μήκος τόξου, εκτός αν η καμπύλη εφάπτεται σε έναν μεσημβρινό (με κατεύθυνση προς το νότο). Συμπεραίνουμε ότι το συνολικό μήκος τόξου πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τη μεταβολή του μήκους στον μεσημβρινό, εκτός αν η κίνηση γίνεται κατά μήκος ενός μεσημβρινού. Άν έχουμε ένα τόξο μεσημβρινού και οποιαδήποτε άλλη διαδρομή με τα ίδια άκρα, τότε η άλλη διαδρομή έχει την ίδια μεταβολή πλάτους, οπότε θα πρέπει να έχει μεγαλύτερο μήκος.

Αυτή είναι μια βασική ιδέα που στηρίζει τον ισχυρισμό ότι οι γεωδαισιακές ελαχιστοποιούν το μήκος σε τυχαίες επιφάνειες.

4.2.3 Μελέτη ελάχιστης διαδρομής στην επιφάνεια της σφαίρας

Θεωρούμε δύο σημεία E και Δ στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Από τα σημεία αυτά διέρχονται άπειρα επίπεδα που τέμνουν κάθε φορά την επιφάνεια της σφαίρας κατά ένα κύκλο. Από αυτούς τους κύκλους, εκείνος που ορίζεται από το επίπεδο που

διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας είναι ο μοναδικός μέγιστος που διέρχεται από τα E και Δ.

Θεωρούμε λοιπόν έναν από τους μικρούς κύκλους που διέρχονται από τα E, Δ.

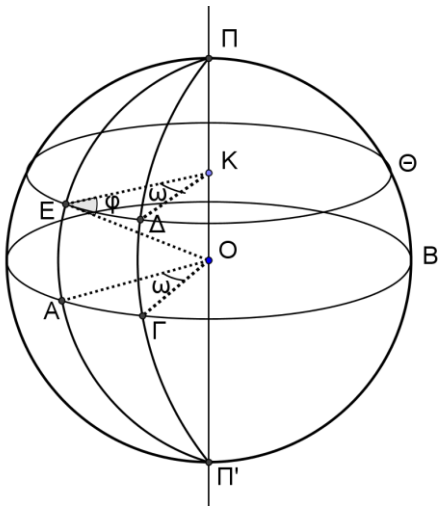
Έστω ο μέγιστος κύκλος, παράλληλος του πρώτου, πάνω στον οποίο ορίζονται και τα σημεία A, Γ με τον τρόπο που φαίνονται στο σχήμα:

Αν $\Pi\Pi'$ η κοινή κατακόρυφη που διέρχεται από τα κέντρα των δύο κύκλων τότε τα μέγιστα ημικύκλια $\Pi E\Pi', \Pi\Delta\Pi'$ τέμνουν κάθετα τον μέγιστο κύκλο στα A και Γ αντίστοιχα.

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$E\Delta = \omega \cdot KE = \omega \cdot OE \cdot cos\varphi \ = \omega \cdot OA \cdot cos\varphi \ = A\Gamma \cdot cos\varphi \Rightarrow$$

$$E\Delta = A\Gamma \cdot cos\varphi < A\Gamma$$



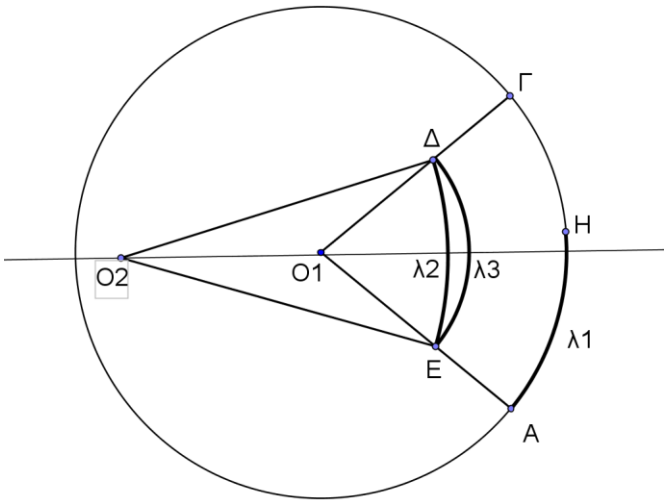
Σχήμα 4.2.2

Για τη καλύτερη εποπτεία της σύγκρισης των τόξων, Αποτυπώνουμε τον παραπάνω σχηματισμό στο επίπεδο (σχήμα 4.2.3): Το μήκος του λ_1 είναι ίσο με το μήκος του λ_3. Δηλαδή, το τόξο ΓH παριστάνει τη διαφορά $A\Gamma - E\Delta = A\Gamma(1 - cos\varphi)$.

Το καμπυλόγραμμο τρίγωνο $OE\Delta$ του Σχήματος 4.2.2 μεταφέρεται στο $O_2E\Delta$, του Σχήματος 4.2.3. Επομένως το τόξο λ_2 είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου με ίδια άκρα με το λ_3. Η καμπυλότητα του λ_3 είναι $K_1 = 1/O_1\Delta$[12] και η καμπυλότητα του λ_2 είναι $K_2 = 1/O_2\Delta$.

Όμως $O_1\Delta/O_2\Delta = cos\varphi < 1$. Συνεπώς $K_2 < K_1$. Άρα η διαδρομή λ_2 διαφέρει λιγότερο από την ευθεία, επομένως έχει μικρότερο μήκος.

[12] [1], σελίδες 84-86



Σχήμα 4.2.3

4.2.4 Η γεωμετρία της σφαιρικής επιφάνειας και ο γεωμετρικός ορισμός του χάρτη.

Η σφαίρα είναι επιφάνεια σταθερής θετικής καμπυλότητας. Ο H. F. Minding είχε αποδείξει ότι σε μία επιφάνεια σταθερής καμπυλότητας τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να αλλάζουν θέση, χωρίς αυτή η κίνηση να μεταβάλλει ορισμένα μεγέθη, όπως λόγου χάρη τις γωνίες. Μάλιστα, στην ιδιότητα της σταθερής καμπυλότητας είχε στηρίξει ο Beltrami τον ισχυρισμό του ότι *η ψευδόσφαιρα* (:η επιφάνεια που προκύπτει από τη περιστροφή της καμπύλης που ονομάζεται *έλκουσα*) είναι κατάλληλο μοντέλο για την Υπερβολική Γεωμετρία: Ήταν ήδη γνωστό (στον Minding από το 1839) ότι η επιφάνεια αυτή έχει σταθερή αρνητική καμπυλότητα.

Περί το 1760, ο L. Euler, όρισε τις *πρωτεύουσες καμπυλότητες* μιας επιφάνειας: πρόκειται για δύο αριθμούς που μπορεί να είναι θετικοί, αρνητικοί ή μηδέν και να μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο μιας επιφάνειας. Ο ορισμός του Euler απαιτούσε μια τρισδιάστατη εξωτερική προοπτική για την επιφάνεια, αυτήν που έχουμε όταν σχεδιάζουμε για παράδειγμα μια σφαίρα ή μια ψευδόσφαιρα. Το 1828 ο Carl Friedrich Gauss - πιθανότατα ο πρώτος που είχε αντιληφθεί ότι η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι εξίσου έγκυρη με την Ευκλείδεια - δημοσίευσε το αποκαλούμενο Theorema Egregium (:Εξαιρετικό Θεώρημα), το οποίο αφορούσε την καμπυλότητα. Σημείωνε ότι το γινόμενο των δύο πρωτευουσών καμπυλοτήτων σε ένα σημείο είχε ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Αυτό το γινόμενο ονομάζεται σήμερα *καμπυλότητα Gauss* και προσδιορίζεται με μετρήσεις πάνω στην επιφάνεια. Συγκεκριμένα, συγκρίνεται το άθροισμα των γωνιών με το εμβαδόν μικροσκοπικών τριγώνων που περιβάλλουν το σημείο, κάνοντας χρήση της έννοιας του ορίου, δηλαδή η καμπυλότητα του *Gauss* στο σημείο P ισούται με την *οριακή τιμή* του λόγου

$$\frac{\pi}{180} \cdot \frac{S-180}{A}$$

όπου A είναι το εμβαδόν και S το άθροισμα των γωνιών μικρών τριγώνων γύρω από το P. Το όριο το παίρνουμε αφήνοντας τα τρίγωνα να γίνονται όλο και μικρότερα.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της καμπυλότητας εξαρτάται από τη διαφορά $S - 180$. Στη σφαίρα επομένως η καμπυλότητα είναι παντού θετική, ιδιότητα που χαρακτηρίζει γενικά ένα χώρο καμπύλο και κλειστό στον εαυτό του, άρα πεπερασμένο.

Έχει επικρατήσει να λέγεται επιφάνεια με *απλή καμπυλότητα* μία επιφάνεια της οποίας η καμπυλότητα Gauss είναι παντού ίση με μηδέν (περίπτωση επίπεδης επιφάνειας) οπότε, στη περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούνται απλές μέθοδοι για την απεικόνισή της στο επίπεδο, με χρήση της αναλυτικής και της προβολικής γεωμετρίας.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση μιας διδιάστατης επιφάνειας, όπως είναι η σφαίρα. Ο *Gauss* ισχυρίστηκε ότι αυτή μπορεί να οριστεί χωρίς αναφορά στην εμφύτευσή της στον τριδιάστατο χώρο. Είχε σημειώσει ότι κάτι τέτοιο γίνεται με την εισαγωγή ενός συστήματος συντεταγμένων, που βασίζεται σε κάποιο πλέγμα τεμνόμενων καμπυλών επάνω στην επιφάνεια. Η γεωμετρία της επιφάνειας μπορεί τότε να προσδιοριστεί εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η απόσταση μεταξύ γειτονικών σημείων από μεταβολές στις τιμές των δύο συντεταγμένων.

Έτσι, στη μελέτη των επιφανειών η καμπυλότητα Gauss είναι θεμελιώδες μέγεθος. Περιγραφικά, σε κάθε σημείο μετράει την απόκλιση της επιφάνειας από το να είναι επίπεδο. Ο Euler είχε υπολογίσει τη καμπυλότητα με τη βοήθεια του κάθετου διανύσματος N, δηλαδή έλαβε υπόψη του το ότι η επιφάνεια είναι εμβαπτισμένη στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε όλα τα επίπεδα Π, που περιέχουν το κάθετο διάνυσμα N στο σημείο ρ της επιφάνειας S και είναι κάθετα στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο ρ. Κάθε τέτοιο επίπεδο τέμνει την S κατά μήκος μιας καμπύλης γ με αντίστοιχη καμπυλότητα κ_γ. Στο σύνολο των καμπυλοτήτων που λαμβάνονται με αυτό τον τρόπο, υπάρχει μια ελάχιστη τιμή κ_1 και μία μέγιστη κ_2. Τότε η καμπυλότητα Gauss στο ρ είναι το μέγεθος

$$K := \kappa_1 . \kappa_2 .$$

Δηλαδή ο Gauss, παρακινούμενος από γεωδαιτικές μελέτες, υπολόγισε τη καμπυλότητα μιας επιφάνειας S με μετρήσεις επί της S και κατέληξε στο εξής βασικό θεώρημα:

Θεώρημα Gauss*: Η καμπυλότητα Gauss είναι ισομετρική αναλλοίωτη*, με το παρεπόμενο συμπέρασμα:

Πόρισμα*: Κάθε επιφάνεια S διαθέτει μια εσωτερική γεωμετρία. Δηλαδή η γεωμετρία της S δεν εξαρτάται από την εμβάπτισή της στον* $\mathbb{R}^3$.

Το πλέον ποσοτικό συμπέρασμα που μετρά την απόκλιση της Σφαιρικής Γεωμετρίας από την Ευκλείδεια είναι το εξής:

Θεώρημα*: Σε σφαίρα ακτίνας R, αν ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν A και άθροισμα γωνιών S, τότε*

$$A = \frac{\pi}{180} \cdot \mathrm{R}^2 \cdot (S - 180)$$

Η θετική ποσότητα $S - 180$ ονομάζεται *υπεροχή* του τριγώνου. Δηλαδή, για μια ορισμένη σφαίρα, ο λόγος *Εμβαδόν/Υπεροχή* είναι σταθερός για όλα τα τρίγωνα. Αυτό επιπλέον σημαίνει ότι δύο τρίγωνα με το ίδιο άθροισμα γωνιών (ή, ακόμα περισσότερο, με τις ίδιες γωνίες) έχουν το ίδιο εμβαδόν. Εδώ, επομένως, δεν υπάρχει

η έννοια της ομοιότητας τριγώνων όπως την έχουμε γνωρίσει στη Ευκλείδια Γεωμετρία.

Με βάση, λοιπόν, τη θεώρηση αυτή, η Σφαιρική Γεωμετρία θεωρείται διδιάστατη διότι *τοπικά* μπορεί να ανοιχτεί προς τα έξω ομοιάζοντας έτσι με διδιάστατο επίπεδο: μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα με δύο συντεταγμένες για να *παραμετρηθεί* μια περιοχή γύρω από ένα τυχαίο σημείο της σφαίρας.

Σε κάθε περίπτωση, εξασφαλίζεται η απεικόνιση όλων των σημείων της καμπύλης επιφάνειας επί του επιπέδου του χάρτη, με μια «1-1 και επί» αντιστοίχιση, όπως είδαμε και στο παράδειγμα της στερεογραφικής προβολής.

Επομένως κάθε χάρτης εισάγει ένα σύστημα συντεταγμένων και παραμετρικοποιεί ένα τμήμα της επιφάνειας, δηλαδή την περιγράφει μέσω μιας απεικόνισης. Οδηγούμαστε έτσι στον ακόλουθο ορισμό:

> Μια *παραμέτρηση ή σύστημα συντεταγμένων ή* ***χάρτης μιας επιφάνειας*** $S \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι ένα ζεύγος (U, r) όπου: το $U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό και η διαφορίσιμη απεικόνιση $r: U \to \mathbb{R}^3$ είναι ομοιομορφισμός.

4.3 Σχετικά με την υπερβολική ναυτιλία.

Σήμερα οι μέθοδοι της παραδοσιακής ναυτιλίας καλούνται να λειτουργούν τουλάχιστον συμπληρωματικά, ενώ απαιτείται από τον ναυτικό κατάρτηση υψηλού βαθμού, εγρήγορση για την επιλογή, την αξιολόγηση και τη κατάλληλη αξιοποίηση των απαραίτητων στοιχείων και πληροφοριών που διατίθενται από τα σύγχρονα ολοκληρωμένα συστήματα ναυτιλίας.

Με τον όρο **Ραδιοναυτιλία** (*Radionavigation*) ή **Ηλεκτρονική ναυτιλία** (Electronic navigation), ονομάζεται το είδος εκείνο της ναυσιπλοΐας ή αεροναυσιπλοΐας, όπου η θέση του πλοίου/αεροσκάφους (στίγμα), η πορεία και οι αποστάσεις υπολογίζονται με ειδικά ηλεκτρονικά ναυτιλιακά ή αεροναυτιλιακά όργανα που έχουν ως βάση λειτουργίας την εκπομπή – λήψη ή μόνο λήψη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Η υπερβολική ναυτιλία, ο μεγαλύτερος κλάδος της ραδιοναυτιλίας, έλκει το όνομά της από το γεγονός ότι οι αναζητούμενες και χρησιμοποιούμενες γραμμές θέσης προσδιορισμού γεωγραφικού στίγματος είναι υπερβολικές καμπύλες.

Σε αδρές γραμμές, μπορούμε να περιγράψουμε το μηχανισμό που υποστηρίζει τη λειτουργία αυτή, ως εξής: Πρόκειται για ηλεκτρονική εγκατάσταση μιας συσκευής *LORAN* (:*Lo*_ng *Ra*_nge *N*_avigation) που είναι δέκτης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εκπέμπονται κατά διαστήματα από συγκεκριμένους σταθμούς εκπομπής. Οι σταθμοί αυτοί συνήθως είναι παράκτιοι ή και πλωτοί, και αποτελούν μεταξύ τους δίκτυο που αποτυπώνεται στους ναυτικούς χάρτες. Η συσκευή, **χρονομετρώντας την διακοπή** (διάλειμμα) των διαδοχικά λαμβανομένων σημάτων του κύριου και ενός δευτερεύοντος σταθμού προσδιορίζει τη γραμμή θέσης του πλοίου (ή αεροπλάνου) και η οποία γραμμή είναι μόνο κατά διόπτευση. Στη συνέχεια **επαναλαμβάνεται η χρονομέτρηση** με τον «κύριο» και τον άλλο «δευτερεύοντα σταθμό πομπό» οπότε προσδιορίζεται η δεύτερη γραμμή θέσης. Μεταφερόμενες αυτές οι ευθείες στο χάρτη, το σημείο τομής τους αποτελεί την ακριβή θέση του **γεωγραφικού στίγματος** του

πλοίου (ή αεροπλάνου) (: η τομή του παράλληλου πλάτους (φ) και του μεσημβρινού (λ) αυτού του σημείου, δηλαδή οι γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου αυτού).

4.3.1 Λίγα ιστορικά στοιχεία που εξηγούν τη χρηστικότητα της μεθόδου

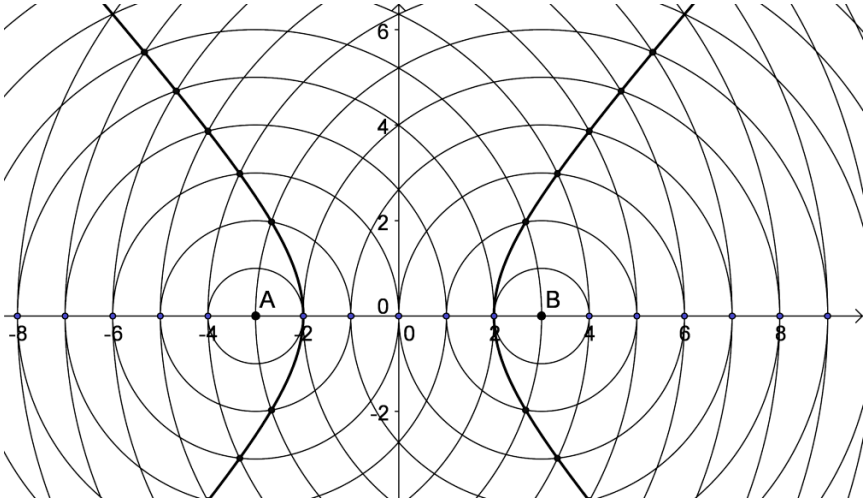
Έχει αρκετές φορές συμβεί, σε περιόδους πολέμου να κρίνεται η αποτελεσματικότητα τεχνικών και μηχανισμών. Έτσι και στη περίπτωση αυτή, η μέθοδος προσδιορισμού θέσης στη τομή δύο υπερβολικών γραμμών θέσεως ήταν γνωστή και χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία τουλάχιστον από τον Α παγκόσμιο πόλεμο, για τον εντοπισμό της θέσης των πυροβόλων του εχθρού, με τη καταγραφή των χρονικών στιγμών που ακουγόταν η βολή του πυροβόλου σε διαφορετικές θέσεις. Με τον τρόπο αυτόν η διαφορά του χρόνου διάδοσης του ηχητικού κύματος μετατρεπόταν σε διαφορά απόστασης, από την οποία προέκυπτε η αντίστοιχη υπερβολική γραμμή θέσης (βασική ιδιότητα της υπερβολής). Πάντως, τα πρώτα ραδιοναυτιλιακά βοηθήματα υπερβολικής ναυτιλίας αναπτύχθηκαν πολύ μεταγενέστερα και συγκεκριμένα κατά τον Β παγκόσμιο πόλεμο. Τα συστήματα αυτά έδωσαν τη δυνατότητα προσδιορισμού της θέσης (: στίγματος) του πλοίου με τη λήψη και επεξεργασία ραδιοσημάτων, τα οποία εκπέμπονται από κατάλληλους σταθμούς ξηράς καλύπτοντας αποστάσεις από τις ακτές, κατά πολύ μεγαλύτερες από την εμβέλεια του ραδιογωνιομέτρου και του ραντάρ.

Μετά το έτος 2000 βρίσκονται σε εξέλιξη πολύ ενδιαφέροντα ερευνητικά προγράμματα δημιουργίας ενός νέου αναβαθμισμένου συστήματος υπερβολικής ναυτιλίας, το οποίο θα αποτελεί εξέλιξη του συστήματος Loran. Το σύστημα αυτό γνωστό ως Loran-E (enhanced Loran) θα είναι δυνατόν να λειτουργεί τόσο αυτόνομα, όσο και συμπληρωματικά ως εφεδρικό των δορυφορικών συστημάτων. Με το τρόπο αυτό θα αξιοποιούνται τα βασικά πλεονεκτήματα των δορυφορικών συστημάτων (μεγάλη ακρίβεια θέσεως σε παγκόσμια κάλυψη), με ένα επίγειο σύστημα το οποίο θα εξασφαλίζει τη λήψη ισχυρών σημάτων LF (Low Frequency) για το προσδιορισμό της θέσης όταν για οποιοδήποτε λόγο δεν είναι δυνατή η λήψη των ασθενών δορυφορικών σημάτων UHF, τα οποία διανύουν τεράστιες αποστάσεις από τους δορυφόρους μέχρι τους δέκτες[13].

4.3.2 Ανάλυση της μεθόδου

Όπως είδαμε, στα συστήματα υπερβολικής ναυτιλίας η θέση του πλοίου βρίσκεται στη τομή δύο υπερβολικών γραμμών θέσεως. Αυτές προκύπτουν ως εξής (Σχήμα 4.3.1):

[13] Βλέπε [5], [10]

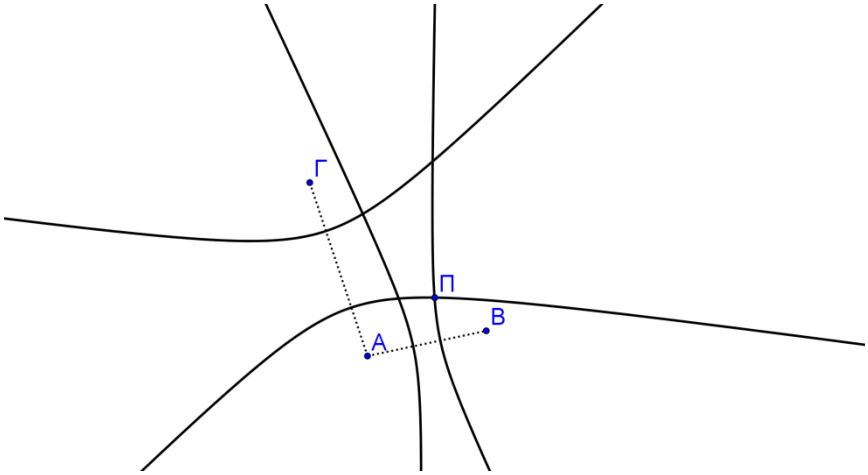


Σχήμα 4.3.1

Υπερβολή (γραφική κατασκευή)

Η πρώτη υπερβολική γραμμή θέσεως προκύπτει απο τη μέτρηση της διαφοράς των αποστάσεων του πλοίου απο τους σταθμούς **Α** και **Β**.

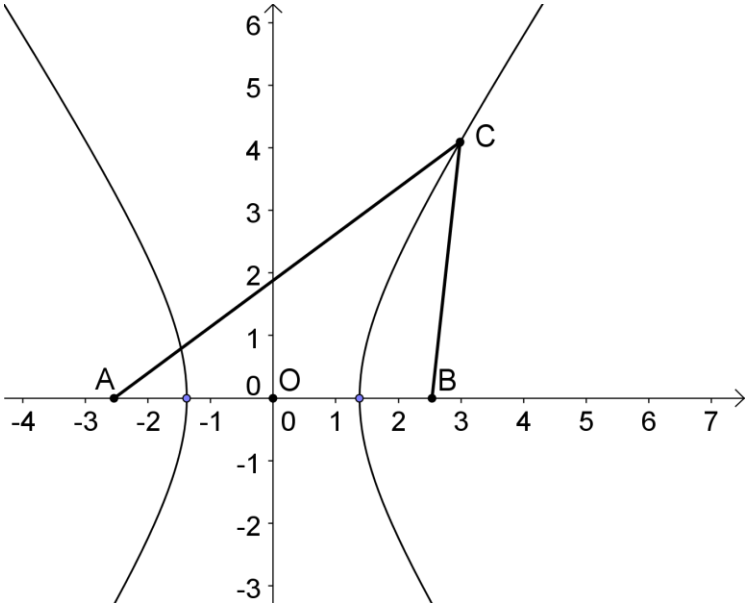
Η δεύτερη υπερβολική γραμμή θέσεως προκύπτει απο τη μέτρηση της διαφοράς των αποστασεων του πλοίου απο τους σταθμούς **Α** και **Γ** (Σχήμα 4.3.2).



Σχήμα 4.3.2

Η μέτρηση της διαφοράς των αποστάσεων μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: (α) με μέτρηση της διαφοράς χρόνου και (β) με μέτρηση της διαφοράς φάσεως. Εδώ αναπτύσσουμε τον (α) τρόπο.

Έστω ότι οι σταθμοί Α και Β ενός υπερβολικού συστήματος καθορισμού στίγματος εκπέμπουν ταυτόχρονα ένα παλμικό σήμα. Αν το πλοίο βρίσκεται στη θέση C, ο χρόνος t_{AC} που χρειάζεται να φτάσει στο δέκτη του πλοίου το σήμα που εκπέμπει ο σταθμός Α, ισούται με: $\boldsymbol{t_{AC} = \frac{AC}{c}}$,



Σχήμα 4.3.3

Προσδιορισμός υπερβολικής γραμμής θέσης

(: c είναι η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ατμόσφαιρα).

Αντίστοιχα, ο χρόνος t_{BC} που χρειάζεται να φτάσει στο δέκτη του πλοίου το σήμα που εκπέμπει ο σταθμός Β, ισούται με:

$$t_{BC} = \frac{BC}{c}$$

Στον δέκτη του υπερβολικού συστήματος που υπάρχει στο πλοίο μετράται το χρονικό διάστημα Δt που μεσολαβεί μεταξύ των χρονικών στιγμών λήψεως των σημάτων που προέρχονται από τους σταθμούς Α και Β. Το χρονικό αυτό διάστημα είναι ίσο με:

$$\Delta t = t_{AC} - t_{BC} = \frac{1}{c} \cdot (AC - BC)$$

Από τη παραπάνω σχέση προκύπτει, ότι η διαφορά των αποστάσεων του πλοίου απο τους σταθμούς είναι:

$$AC - BC = c \cdot \Delta t$$

4.3.3 Δημιουργία και άρση αμφιβολίας

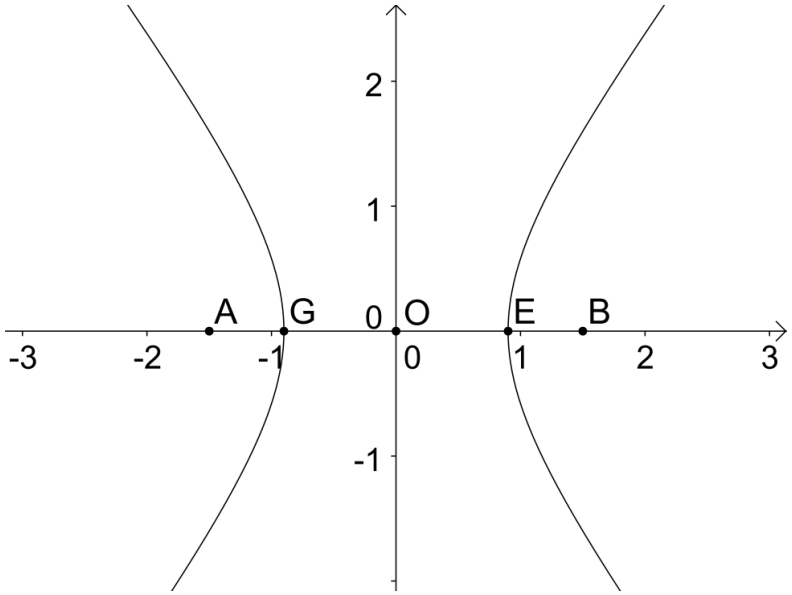
Έχοντας προσδιορίσει τη διαφορά αποστάσεων απο τους δύο σταθμούς, προσδιορίζουμε την υπερβολική γραμμή Υ1 επάνω στην οποία βρίσκεται το σκάφος μας. Εδώ όμως πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στη διαφορά που έχει μετρηθεί αντιστοιχούν δύο κλάδοι υπερβολικών γραμμών θέσης. Δημιουργείται δηλαδή μία **αμφιβολία** ως προς ποιανού σταθμού το σήμα έφτασε πρώτο άρα ως προς την επιλογή της μιας απο τις δύο υπερβολικές γραμμές θέσεως. Η αμφιβολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί αν οι δύο σταθμοί δεν εκπέμπουν ταυτόχρονα αλλά με κάποια **χρονική καθυστέρηση:**

Έστω ότι εκπέμπει πρώτος ο σταθμός Α και αφού το σήμα του φτάσει στο σταθμό Β, τότε εκπέμπει και ο Β. Με τον τρόπο αυτόν, ο δέκτης του πλοίου θα λαμβάνει πάντα πρώτο το σήμα του σταθμού A. Έτσι όλες οι υπερβολές που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο (ε, A) που ορίζει η μεσοκάθετος ε της γραμμής βάσης AB με το σημείο A, αντιστοιχούν σε διαφορετικές διαφορές χρόνου απο τις συμμετρικές τους, οπότε **αίρεται η αμφιβολία**.

Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι το μήκος της γραμμής βάσεως AB είναι $3km$ και ότι $AG = 600m = EB$. Στη περίπτωση αυτή είναι $AE = BG = 2400m$. Το σήμα που εκπέμπεται από το σταθμό A φτάνει στο σταθμό B μετά από χρόνο $10\mu sec$ $(= AB/3 \times 10^8 m.sec^{-1})$.

Ας υποθέσουμε ότι ο σταθμός B εκπέμπει *με καθυστέρηση* $15\mu sec$ απο την έναρξη εκπομπής του σταθμού Α.



Σχήμα 4.3.4

Δημιουργία και άρση αμφιβολίας προσδιορισμού υπερβολικής γραμμής θέσης

Ο χρόνος που χρειάζεται το σήμα του σταθμού A να φθάσει στα σημεία G και E είναι 2 και $8\mu sec$ αντίστοιχα. Επίσης ο χρόνος που χρειάζεται το σήμα του σταθμού B να φθάσει στα σημεία G και E είναι 8 και $2\mu sec$ αντίστοιχα.

Στο σημείο G η μετρούμενη διαφορά χρόνου είναι $15 + 8 - 2 = 21\mu sec$.

Στο σημείο Ε η μετρούμενη διαφορά χρόνου είναι $15 + 2 - 8 = 9\mu sec$.

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι οι διαφορές χρόνου που μετριούνται σε σημεία που ανήκουν σε συμμετρικούς κλάδους υπερβολής είναι διαφορετικές και επομένως δεν δημιουργείται αμφιβολία.

Βιβλιογραφία 4ου κεφαλαίου

[1] Ε.ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, Μ.ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ: Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και Επιφανειών

[2] D.M.DAVIS: Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών (Π.Ε.Κ., 2007)

[3] Φ. Ν. ΑΖΑΡΙΑΔΗΣ-ΤΟΠΑΛΟΓΛΟΥ: ανάπτυξη κατά προσέγγιση ισομετρικών απεικονίσεων τυχαίων τρισδιάστατων επιφανειών στο επίπεδο, διδακτορική διατριβή (Πάτρα 1999)

[4] ΑΘ.ΠΑΛΛΗΚΑΡΗΣ: Ραδιοναυτιλία, Ίδρυμα Ευγενίδου, 1995

[5] ΑΘ.ΠΑΛΛΗΚΑΡΗΣ & Γ.Θ.ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ:Ιστορική εξέλιξη και προοπτικές της ηλεκτρονικής ναυτιλίας, Nausivios Chora 2008, ΣΝΔ τεύχος 2

[6] ΑΘ.ΠΑΛΛΗΚΑΡΗΣ: Βελτιωμένες θέσεις επίλυσης θεμελιωδών προβλημάτων ναυσιπλοΐας, NCH-2010-A3, Nausivios Chora 2010, Hellenic Naval Academy

[7] Σ.ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ: Μαθηματική Φυσική Ι, Τοπολογία και Γεωμετρία των Θεσεογραφικών Χώρων, Πανεπιστήμιο Πατρών τμήμα Μαθηματικών 2011 -12

[8] M. BERGER: A Panoramic View of Riemannian Geometry, 6th September 2002, Springer, Berlin

[9] Wikipedia

[10] P. WILLIAMS and al.(2008) “e-Navigation and the case for e-Loran” journal of navigation”, vol 61 page 473-484.

[11] ΕΛ. ΒΑΒΛΙΑΚΗΣ: Μαθήματα Γεωγραφίας, ηλεκτρονικό βιβλίο, ΑΠΘ τμήμα Γεωλογίας. Ανάκτηση από: http://www.geo.auth.gr/322/chapter043.html

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

5.1 Ενα πρόβλημα

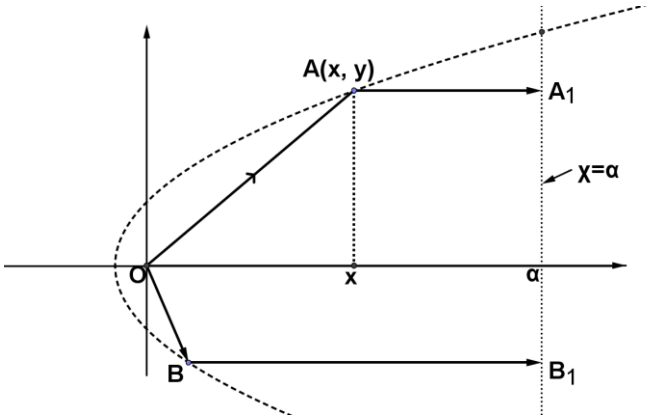
Στηριζόμενοι στο νόμο ανάκλασης του φωτός, να προτείνετε ανακλαστική επιφάνεια για τη κατασκευή φωτιστικού σώματος, τέτοια, ώστε οι ακτίνες που εκπορεύονται από μικρό λαμπτήρα, μετά την ανάκλαση, να σχηματίζουν δέσμη παραλλήλων. Ή, αλλιώς: Γιατί τα φανάρια των αυτοκινήτων είναι παραβολή εκ περιστροφής;

5.1.1 Ανάλυση του προβλήματος

Επειδή, το εσωτερικό του φωτιστικού σώματος πρέπει, προφανώς, να αποτελεί ομαλή ανακλαστική επιφάνεια, ώστε να μπορεί να πραγματοποιείται η ανάκλαση σε κάθε της σημείο, και μάλιστα ομοιότροπα, συμπεραίνουμε ότι σε κάθε σημείο δέχεται εφαπτομένη, άρα θα είναι τμήμα διαφορίσιμης συνάρτησης και, επιπλέον, ότι το τελικό στερεό σώμα έχει άξονα συμμετρίας**.**

Ας υποθέσουμε ότι στη θέση Ο της αρχής του συστήματος των αξόνων έχουμε τοποθετήσει τη φωτεινή πηγή Ο.

Πρώτη προσέγγιση:



Σχήμα 5.1.1

Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ ένα σημείο της ανακλαστικής επιφάνειας, $\mathrm{O}(0, 0)$ η αρχή των αξόνων πάνω στην οποία έχει τοποθετηθεί η φωτεινή πηγή και $\mathrm{O}xy$ το επίπεδο που περιέχει το σημείο Α, το σημείο Ο και είναι παράλληλο προς τη δέσμη των εξερχόμενων ακτίνων. Τοποθετούμε μια επίπεδη επιφάνεια στη θέση $x = \alpha$, κάθετα προς τη διεύθυνση των παράλληλων ακτίνων, καθώς αυτές εξέρχονται. Δηλαδή αφαιρούμε το ίδιο μήκος απ'όλους τους *οπτικούς δρόμους* OAA_1, OBB_1 κλπ. Σύμφωνα με την αρχή του Fermat, καθώς το φώς κινείται στο ίδιο μέσο, οι οπτικοί δρόμοι είναι ίσοι, δηλαδή:

$$OA + AA_1 = OB + BB_1 = \ldots = min = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}.$$

Επομένως: $OA + AA_1 = \sigma\tau\alpha\theta$

Άρα, $\sqrt{x^2+y^2} + \alpha - x = \sigma\tau\alpha\theta$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} - x = c$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c + x$$

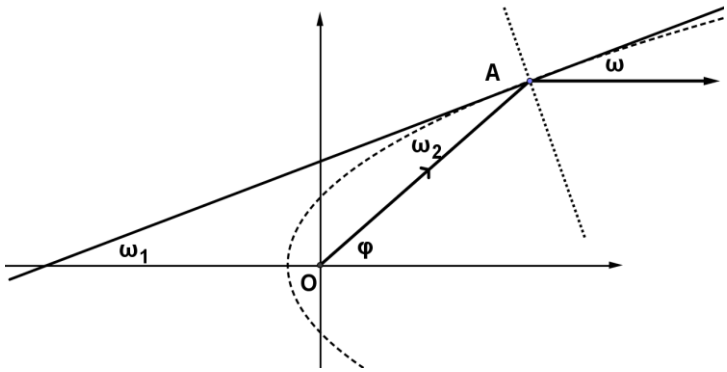
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = c^2 + x^2 + 2cx$$

$$\Longrightarrow y^2 = c(c+2x) \text{ ή } x = \frac{y^2}{2c} - \frac{c}{2}.$$

Δηλαδή οδηγούμαστε σε εξίσωση παραβολής με άξονα τον $x'x$ και με την εστία στο σημείο $(0,0)$.

Δεύτερη προσέγγιση:

Η $x'Ox$ είναι η επιθυμητή διεύθυνση των ανακλώμενων ακτίνων και $y = y(x)$ είναι η εξίσωση της καμπύλης, από τη περιστροφή της οποίας θα προκύψει το εσωτερικό του φαναριού.



Σχήμα 5.1.2

Ας μελετήσουμε την ανάκλαση σε σημείο $A(x,y)$ της καμπύλης αυτής. Θεωρούμε λοιπόν την εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Από το νόμο της ανάκλασης είναι $\omega=\omega_2$. Από τη παραλληλία ακτίνας και $x'Ox$ είναι $\omega = \omega_1$.

Αρα $\varphi = 2\omega$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi 2\omega$. Επομένως

$$\frac{y}{x} = \frac{2\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi^2\omega} \xRightarrow{\text{y } \delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta} \frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}$$

$$\Longrightarrow yy'^2 + 2xy' - y = 0$$

$$(1) \quad \Longrightarrow y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Θέτουμε $z = \sqrt{x^2+y^2}$, οπότε $z' = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και

$$(2) \quad y' = \frac{z'\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}.$$

Δηλαδή είναι:

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{z'\sqrt{x^2+y^2}-x}{y} \Rightarrow z' = \pm 1$$

Οπότε:

$$z(x) = x + c \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x + c \Rightarrow y^2 = 2xc + c^2$$

Καταλήγουμε δηλαδή πάλι ότι πρόκειται για τμήμα παραβολής με άξονα τον $x'x$ και με την εστία στο $(0,0)$.

Στο χώρο η παραβολή παίρνει το σχήμα *παραβολοειδούς εκ περιστροφής*. Η παράμετρος c εξαρτάται προφανώς από τα χαρακτηριστικά της κατασκευής.

<u>Σχόλιο</u>:

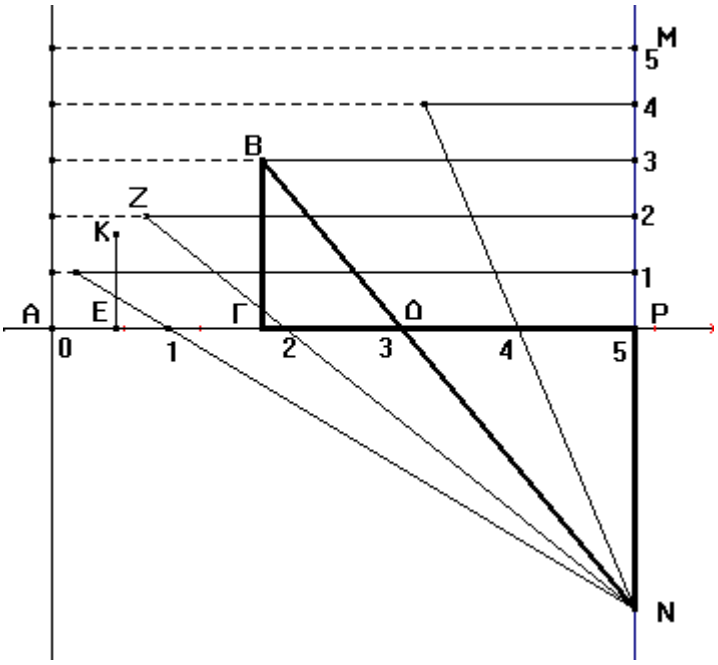
Παρατηρούμε ότι, για $x = 0$, η παραβολή τέμνει τον $y'y$ στις θέσεις $y_E = \pm c$

Επίσης, για $y = 0$, η κορυφή της παραβλολής τέμνει τον $x'x$ στη θέση $x_E = -\frac{c}{2}$.

5.1.2 Μία κατασκευή

Πώς ο τεχνίτης θα κατασκευάσει το παραβολοειδές από τα χαρακτηριστικά που έχουν δοθεί (μήκος, διάμετρος κυκλικής τομής) ;

Το μήκος και η διάμετρος της κυκλικής τομής καθορίζουν μονοσήμαντα το μέγεθος του φωτιστικού σώματος. Έστω AP το επιθυμητό μήκος του άξονα του παραβολοειδούς και PM η ημιδιάμετρος



Σχήμα 5.1.3

Χωρίζουμε το ΜΡ σε ίσα τμήματα (στο παράδειγμα τα τμήματα είναι 5). Χωρίζουμε το ΑΡ στον ίδιο αριθμό τμημάτων. Ορίζουμε το Ν συμμετρικό του Μ ως προς ΑΡ. Ενώνουμε το Ν με το άκρο από το καθένα τμήμα του ΑΡ που έχουν σχηματιστεί. Οι ημιευθείες τέμνουν τα οριζόντια τμήματα σε σημεία που σχηματίζουν παραβολή

Απόδειξη:

$$(1)\quad B\Gamma = \frac{3}{5}\cdot MP$$

$$B\Gamma\Delta \sim \Delta PN \Longrightarrow \frac{\Gamma\Delta}{\Delta P} = \frac{B\Gamma}{PN = MP} = \frac{3}{5} \Longrightarrow$$

$$(2)\quad \Gamma\Delta = \frac{3}{5}\cdot \Delta P = \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot AP\right) = \frac{6}{25}\cdot AP$$

$$(3)\quad A\Gamma = A\Delta - \Gamma\Delta \overset{(1),(2)}{=} \frac{3}{5}\cdot AP - \frac{6}{25}\cdot AP = \frac{9}{25}\cdot AP$$

Από την (1) προκύπτει: $\frac{B\Gamma^2}{MP^2} = \frac{9}{25} \overset{(3)}{=} \frac{A\Gamma}{AP} \Longrightarrow$

$$B\Gamma^2 = A\Gamma\cdot\frac{MP^2}{AP} \Longrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma\cdot\kappa$$

Καταλήξαμε, πράγματι, σε εξίσωση παραβολής.

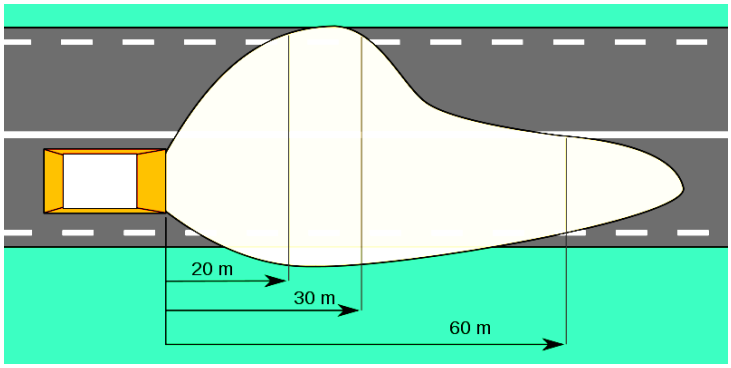
Πού θα μπεί η λάμπα;

Έστω E η θέση της λάμπας και έστω K το σημείο που τέμνει την παραβολή η κατακόρυφη από το E.

Από το προηγούμενο σχόλιο έχουμε ότι $AE = \frac{1}{2}EK$.

Οπότε $\kappa = \frac{EK^2}{EA} = \frac{4\cdot EA^2}{EA} \Longrightarrow AE = \frac{\kappa}{4}$, όπου $\kappa = \frac{MP^2}{AP}$.

5.2 Προσαρμογή της εφαρμογής στα πραγματικά δεδομένα



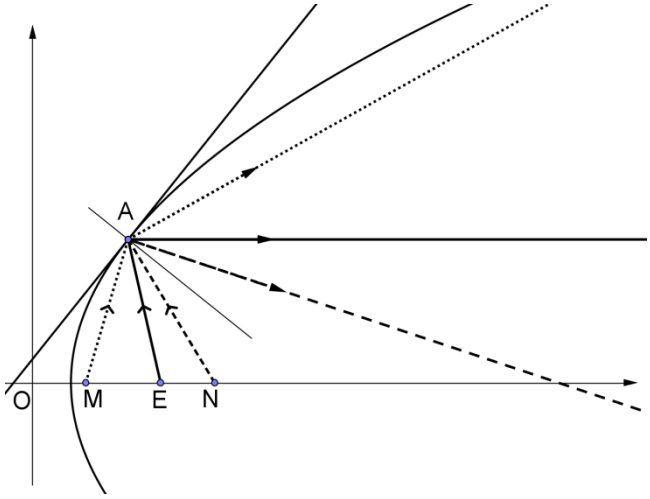
Σχήμα 5.2.1

Διαστάσεις της ασύμμετρης δέσμης φωτός των φώτων διασταύρωσης (μεσαία σκλαλα) στο οριζόντιο επίπεδο. Οδηγία ECE/324/5.10.2006 (Economic Commission for Europe)

Θα χρειαστεί να μελετήσουμε ευρύτερα το πρόβλημα γιατί, εφ'οσον πρόκειται για φως οδήγησης, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν την ασφαλή οδήγηση (: πρέπει να φωτίζεται ο περιβάλλων χώρος *με επάρκεια χωρίς να προκαλείται θάμβωση* στον απέναντι οδηγό που έρχεται αντίθετα, αλλά ούτε και στον περαστικό του διπλανού πεζοδρομίου).

Σε συνθήκες πυκνής κυκλοφορίας είναι αναγκαία η «βύθιση» της δέσμης του φωτός των προβολέων των διαφόρων οχημάτων, έτσι ώστε να μην θαμπώνονται οι οδηγοί των άλλων οχημάτων που κινούνται αντίθετα. Θα μελετήσουμε επομένως τη βασική λειτουργία της λεγόμενης «μεσαίας σκάλας» των προβολέων.

Για να διατηρήσουμε τη συμμετρία θα μελετήσουμε τον φωτισμό για τις διάφορες θέσεις του λαμπτήρα επάνω στον στον άξονα της παραβολής.

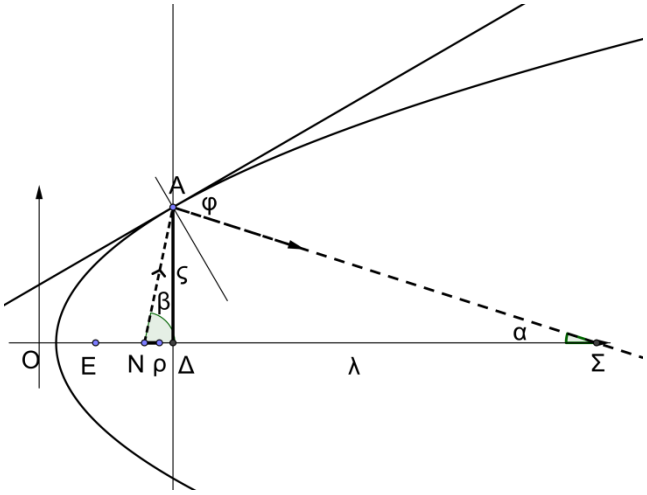


Σχήμα 5.2.2

Οι θέσεις ανάμεσα στην εστία και τη κορυφή (πχ M) δημιουργούν ανακλάσεις αποκλίνουσες ενώ στις θέσεις μετά από την εστία (πχ N) οι ανακλάσεις είναι συγκλίνουσες.

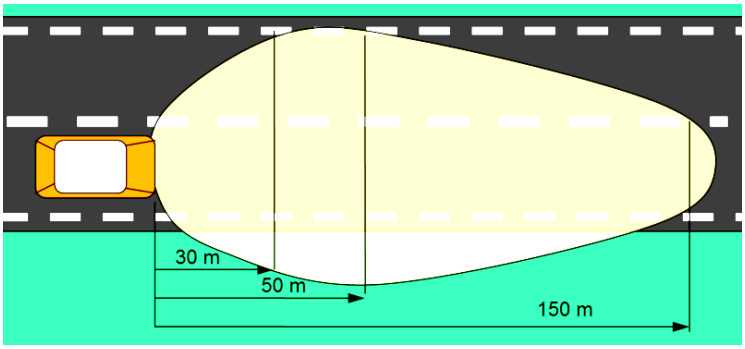
Το νήμα, επομένως, της μεσαίας σκάλας πρέπει να βρίσκεται μετά από το σημείο εστίασης του ανακλαστήρα. Έτσι η φωτεινή δέσμη, μετά την ανάκλασή της, έχει κλίση προς τον κύριο άξονα του παραβολοειδούς.

Μια καλύπτρα κάτω από το νήμα της μεσαίας σκάλας, εμποδίζει το φως να ανακλαστεί στο κάτω μέρος του κατόπτρου και να κατευθυνθεί, μετά την ανάκλαση, προς τα πάνω. Έτσι μόνο το πάνω μέρος του ανακλαστήρα είναι ενεργό και κατευθύνει το φως προς τα κάτω, με την προϋπόθεση ότι η διεύθυνση του κύριου άξονα του ανακλαστήρα, δηλαδή η ρύθμιση των φώτων, είναι σωστή. Στην επιφάνεια του δρόμου, η ύπαρξη της καλύπτρας γίνεται αντιληπτή σαν μια νοητή γραμμή διαχωρισμού της σκοτεινής από την φωτεινή περιοχή. Μέχρι αυτή τη νοητή γραμμή επιτυγχάνεται ψηλή ένταση του φωτός, ενώ ταυτόχρονα το θάμπωμα στην πλευρά της αντίθετης κυκλοφορίας παραμένει σε προκαθορισμένο ανεκτό επίπεδο.



σχήμα 5.2.3

Έστω ότι το Α είναι το άκρο του παραβολοειδούς, άρα εκεί βρίσκεται το τελευταίο σημείο ανάκλασης. Αν το λ $(:= \Delta\Sigma)$ αντιστοιχεί στην *επιθυμητή* εμβέλεια του φωτισμού, το ς $(:= A\Delta)$ είναι η ημιδιάμετρος του προβολέα και το Ν αντιστοιχεί στο πλησιέστερο προς την εστία άκρο του νήματος της μεσαίας σκάλας (άρα από κεί θα φύγει η ακτίνα με τη μεγαλύτερη απόκλιση) τότε, είναι φανερό ότι: $\lambda = \frac{\varsigma}{\varepsilon\varphi\alpha}$ και $\hat{\beta} = 2\hat{\varphi} - \hat{\alpha}$ οπότε $\rho = \frac{\varsigma}{\varepsilon\varphi\beta}$ όπου $\rho := N\Delta$. Δηλαδή η επιθυμητή εμβέλεια προσδιορίζει τα χαρακτηριστικά του προβολέα.



Σχήμα 5.2.4

Διαστάσεις της σύμμετρης δέσμης φωτός προβολέα στο οριζόντιο επίπεδο.
Οδηγία ECE/324/5.10.2006 (Economic Commission for Europe)

Βιβλιογραφία 5ου κεφαλαίου

[1] Χ. ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ: Προσωπικές σημειώσεις από τις διαλέξεις του σεμιναρίου «Ιστορία και Διδακτική των μαθηματικών» (ΕΚΠΑ 2005)
[2] ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ: θεώρημα 908 (κατασκευή ζυγού ατμομηχανής)
[3] ΧΑΡ. ΛΟΝΤΟΣ, Κυματική-Οπτική (ΕΚΠΑ, ιστοσελίδα φυσικής)
[4] Π. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΣ περιοδικό 4 τροχοί.
[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Headlamp