ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΕΙΡΗΝΗΣ ΑΓΓΕΛΙΔΗ
Α.Μ. Δ 200405

ΘΕΜΑ : ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΘΕΟΔΟΣΗΣ ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ

Η παρούσα **Διπλωματική Εργασία**
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στην

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

που απονέμει το:

Τμήμα Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την …….. από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο:	**Βαθμίδα:**	**Υπογραφή:**
……(Επιβλέπων Καθηγητής)	**……**	**…….....**
…….	**…….....**	**…….**
…….	**……**	**…….**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, που ο καθένας με βοήθησε με τον δικό του ξεχωριστό τρόπο. Ιδιαίτερα όμως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη για τις σημαντικές υποδείξεις του για την συγγραφή και παρουσίαση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ πολύ όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού προγράμματος για την σωστή καθοδήγηση σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου και για την ευκαιρία που μου έδωσαν να δω την γνώση με άλλα μάτια .Θα ήθελα επίσης ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τους καθηγητές που μας συνόδευσαν στο Θερινό σχολείο στην Κύπρο το καλοκαίρι του 2004, γιατί εκεί μου δόθηκε η ευκαιρία να γνωρίσω τον άντρα μου Βαγγέλη!

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου, που περάσαμε αρκετό χρόνο μαζί συζητώντας τους προβληματισμούς μας ,ανταλλάσσοντας ιδέες .

Θα επιθυμούσα επίσης να ευχαριστήσω και τους συναδέλφους μου στην Ρόδο όπου υπηρέτησα, που με προθυμία με έβαλαν μέσα στις τάξεις τους για να δώσω στους μαθητές τους τα ερωτηματολόγια, ώστε να πραγματοποιηθεί αυτή η έρευνα .

Τέλος, θα ήθελα να πω ένα ευχαριστώ στην οικογένειά μου, που με στήριξε αυτά τα δύο χρόνια και υπήρξε αρωγός σε κάθε προσπάθειά μου.

Αύγουστος 2005

Ειρήνη Αγγελίδη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Πρόλογος ……...6

2. Ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου……...12

2.1 Η αξία μιας ιστορικής προσέγγισης……..12

2.2 Το όριο στην αρχαιότητα……..12

2.3 Η γέννηση του Απειροστικού Λογισμού και το όριο: $16^{ος}$ – $17^{ος}$ αιώνας……14

2.4 Τα απειροστά – σύγχυση και διαμάχη……..16

2.5 $18^{ος}$ αιώνας: Προσπάθειες για μια αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου…….18

2.6 $19^{ος}$ αιώνας: Αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου……20

3. Δυσκολίες κατανόησης της έννοιας του ορίου……..24

3.1 Γενικά……24

3.2 Οι πεποιθήσεις/αντιλήψεις φοιτητών-μαθητών ως αιτίες μη κατανόησης της έννοιας του ορίου…….30

3.2.1 Μοντέλα κατανόησης ορίων……36

3.2.2 Ο ρόλος της συνήθους γλώσσας στην κατανόηση των ορίων…….39

3.3 Γνωστικά και επιστημολογικά εμπόδια……...44

3.4 Οι δυσκολίες στον ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών……53

3.4.1 Η διατύπωση του ορισμού του ορίου μιας ακολουθίας πραγματικών με ένα επεξηγηματικό γράφημα…….53

3.4.2 Μια συζήτηση για την κατανόηση του ορισμού του ορίου ακολουθίας…….56

3.4.3 Εναλλακτική προσέγγιση για την διδασκαλία του ορίου ακολουθίας…….61

3.4.4 Όρια συναρτήσεων……..68

4. Η έρευνα……72

4.1 Μεθοδολογία της έρευνας…….72

4.2 Αποτελέσματα της έρευνας……...72

4.3 Στατιστική επεξεργασία αποτελεσμάτων……81

5. Συμπεράσματα…….87

Παράρτημα …….....89

Βιβλιογραφία……93

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Είναι επιστημονικά αποδεκτό ότι η έννοια του ορίου αποτελεί μία από τις πιο δύσκολες έννοιες στην Ανάλυση. Ένας από τους λόγους είναι ότι η έννοια αυτή προϋποθέτει τη γνώση προαπαιτούμενων εννοιών, μεταξύ των οποίων μια από τις πιο σημαντικές είναι εκείνη του *πραγματικού αριθμού*. Επειδή συνήθως οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, οι διαισθητικές τους πεποιθήσεις είναι ευρύτατες στο θέμα αυτό (E.Fischbein, 1999).

Κάποιοι ερευνητές (Tall, Sullivan) έχουν σχολιάσει τις διδακτικές επιπτώσεις της μη εισαγωγής μη-τυπικών μοντέλων. Από την άλλη πλευρά, εγχειρίδια όπως του Gardiner είναι διαθέσιμα για να βοηθήσουν τους μαθητές να αποκτήσουν μια αυστηρότερη εικόνα των πραγματικών πριν ξεκινήσουν τα συμβατικά μαθήματα Πραγματικής Ανάλυσης. Η πεποίθηση ότι τα απειροστά υπάρχουν, θα έδειχνε πολύ σημαντική στο πώς νοούνται τα όρια, αλλά μια πρόσφατη εργασία (Szydlik, 2000) ισχυρίζεται ότι διαθέτει κάποια στοιχεία ενάντια σ' αυτό.

Μια άλλη προαπαιτούμενη έννοια είναι εκείνη της *συνάρτησης*. Οι ακολουθίες θεωρούνται σπάνια από τους μαθητές ως συναρτήσεις στο (Mamona, 2001) και συνεπώς τείνουν να θεωρούνται ως διαδικασίες μάλλον, παρά ως μαθηματικά αντικείμενα. Επίσης, η *συνέχεια* των πραγματικών συναρτήσεων τείνει να αντιμετωπίζεται γεωμετρικά, θεωρώντας ότι η γραφική παράσταση είναι μια καμπύλη που «δεν κόβεται» (Cottrill et al., 1996).

Οι διατυπώσεις των τυπικών ορισμών του ορίου προϋποθέτουν επίσης κάποιες υπάρχουσες δεξιότητες. Μία είναι ο επιτυχής χειρισμός των ποσοδεικτών, οι οποίοι ταλαιπωρούν πολλούς μαθητές (Dubinsky et al., 1988). Επίσης η εφαρμογή και η έλλειψη επαρκούς κατανόησης των απολύτων τιμών και ανισοτήτων προξενούν προβλήματα σε πολλούς μαθητές (βλ. πάλι Cottrill et al., 1996).

Η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης παρέχει ένα ελκυστικό πλαίσιο για τη μελέτη των μαθηματικών πεποιθήσεων και διαισθήσεων. Η έννοια αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική από μαθηματική άποψη. Αποτελεί την θεμελιώδη έννοια του Απειροστικού Λογισμού και είναι δύσκολη στην κατάκτησή της από τους μαθητές (Davis & Vinner, 1986, Sierpinska, 1987, Tall & Vinner, 1981). Οι μαθητές εξακολουθούν να διατηρούν ατελείς και εναλλακτικές αντιλήψεις για το όριο ακόμη κι έπειτα από προσεγμένη διδασκαλία σχεδιασμένη για να τις εξαλείψει (Davis & Vinner, 1986, Williams, 1991). Για τους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω, το πεδίο αυτό έχει αποσπάσει ουσιαστική προσοχή από ερευνητές της διδακτικής. Πολλά μοντέλα του ορίου (τα οποία ο Cornu, 1991, αποκάλεσε *αυθόρμητα μοντέλα* των μαθητών) έχουν καταγραφεί: το όριο είναι

άφθαστο (Tall & Schwarzenberger, 1978), το όριο ως κίνηση (Tall & Vinner, 1981), και το όριο ως ένα φράγμα που δε μπορεί να ξεπεραστεί (Cornu, 1991). Από τα μοντέλα αυτά, το όριο ως άφθαστο και ως φράγμα είναι και τα δύο ασυνεπή με τον τυπικό ορισμό και επομένως αποτελούν πραγματικά παρανοήσεις. Η αντίληψη του ορίου ως κίνηση αν και είναι ένα λογικό και συχνά χρήσιμο μοντέλο του ορίου, δεν είναι ακριβής και μπορεί να επηρεάσει την κατανόηση του τυπικού ορισμού από τους φοιτητές. Οι οριακές διαδικασίες δεν είναι πάντα διαισθητικές, και επομένως ένα τυπικό πλαίσιο παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο για τη σκέψη και τον υπολογισμό ορισμένων ορίων. Η Sierpinska και ο Williams (1991) έχουν και οι δύο προτείνει ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά μπορούν να εμποδίσουν την κατανόηση του πεδίου αυτού.

Βάσει εμπειρικών δεδομένων, η Sierpinska (1987) πρότεινε ότι τα κύρια επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται με τα όρια αφορούν τις έννοιες των πραγματικών αριθμών, του απείρου και της συνάρτησης. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού τα αξιώματα του Απειροστικού Λογισμού είναι παραδοχές σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς, οι οριακές διαδικασίες αντιμετωπίζονται συχνά ως άπειρες διαδικασίες, και οι συναρτήσεις είναι τα κύρια αντικείμενα ενδιαφέροντος.

Στους Davis και Vinner (1986), ένα τεστ αποκάλυψε ένα κατάλογο συνήθων παρανοήσεων στην έννοια του ορίου τις οποίες συνοψίζουμε παρακάτω:

1. Μια ακολουθία «δεν πρέπει να φθάνει το όριό της».
2. Εξυπακουόμενη μονοτονία της (α_v).
3. Σύγχυση του ορίου με φράγμα.
4. Υπόθεση ότι η ακολουθία έχει έναν «τελευταίο όρο».
5. Υπόθεση ότι με κάποιον τρόπο μπορείς να «περάσεις από απείρως πολλούς όρους» της ακολουθίας.
6. Σύγχυση του $f(x_0)$ με το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
7. Υπόθεση ότι οι ακολουθίες πρέπει να έχουν κάποιο προφανή, συνεπή τύπο.
8. Παραμέληση του σημαντικού ρόλου της σειράς με την οποία εμφανίζονται το ε και το N, όπως διαβάζουμε τον ορισμό από τα αριστερά.
9. Σύγχυση μεταξύ του γεγονότος ότι το v δε φθάνει το άπειρο και του ερωτήματος του αν το α_v μπορεί πιθανώς να «φθάσει» το όριο L.

Ο ακόλουθος χαρακτηρισμός, που παρατίθεται από τον Williams (1991), συνοψίζει με χρήσιμο τρόπο τις διαφορετικές διαισθητικές προσεγγίσεις ή περιγραφές που δίνονται από μαθητές για τα όρια συναρτήσεων:

Τύπος Προσέγγισης	**«Συνήθης» Άτυπη Διατύπωση**
Δυναμική – Θεωρητική	Ένα όριο περιγράφει πώς μια συνάρτηση κινείται, καθώς το x κινείται προς ένα ορισμένο σημείο
Σύνορο	Ένα όριο είναι ένας αριθμός ή σημείο πέρα από το οποίο μια συνάρτηση δε μπορεί να πάει
Τυπική	Ένα όριο είναι ένας αριθμός, στον οποίο οι y-τιμές μιας συνάρτησης μπορούν να γίνουν αυθαίρετα κοντινές μέσω του περιορισμού των x-τιμών
Άφθαστο	Ένα όριο είναι ένας αριθμός ή σημείο το οποίο η συνάρτηση πλησιάζει αλλά ποτέ δε φθάνει
Προσέγγιση	Ένα όριο είναι μια προσέγγιση η οποία μπορεί να γίνει οσοδήποτε ακριβής επιθυμούμε
Δυναμική - Πρακτική	Ένα όριο προσδιορίζεται με τοποθέτηση αριθμών ολοένα πιο κοντά σε ένα δεδομένο αριθμό μέχρι να φθάσουμε το όριο.

Παρ' όλο που μερικές εργασίες αναφέρονται στις πολλές προσεγγίσεις στις οποίες οι μαθητές είναι προετοιμασμένοι να αποδεχθούν, οι περισσότερες εργασίες προτείνουν ότι οι ισχυρότερες εικόνες είναι οι δυναμικές. Λόγου χάρη, στους Tall και Vinner (1981) τα δυναμικά επιχειρήματα τέθηκαν εναντίον εκείνων που βασίζονταν στον τυπικό ορισμό. Τέτοιες θεωρήσεις μπορούν «να οδηγήσουν στην πιθανότητα ώστε η υπόθεση $f(x) \neq c$ (το όριο της f στο x_0) να είναι ένα δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης». Εδώ, απλοϊκές διαισθήσεις βασιζόμενες στην κίνηση προς το σημείο όπου το όριο πρέπει να ληφθεί, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Ειδικότερα αυτή η περίπτωση συχνά μοιάζει να διαχωρίζει γνωσιακά τη σχέση που αναπαρίσταται από μια συνάρτηση, έτσι ώστε κάποιος να φαντάζεται δύο ξεχωριστές διαδικασίες, μία κατά μήκος του x-άξονα και μία στην καμπύλη του γραφήματος, οι οποίες κατόπιν πρέπει να συντονιστούν .

Η ποικιλία των αντιλήψεων, η απαραίτητη κατανόηση προαπαιτούμενων εννοιών (όπως των πραγματικών αριθμών, του απείρου και της συνάρτησης) και τα γνωστικά εμπόδια καθιστούν τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου εξαιρετικά δύσκολη. Πολυάριθμες προσπάθειες έχουν καταβληθεί, αλλά το πρόβλημα παραμένει άλυτο! Κατά την εξέταση αυτών των προσπαθειών, μπορούμε να εστιάσουμε σε ορισμένα θεμελιώδη σημεία και να θέσουμε ουσιαστικά ερωτήματα .

Κατ' αρχήν, υπερβολικά πολλοί καθηγητές φαίνονται να θεωρούν επαρκές το να παρουσιάσουν με σαφήνεια την έννοια του ορίου για να γίνει αυτή κατανοητή από τους μαθητές. Είναι πολύ σημαντικότερο οι μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση της πολυπλοκότητας της έννοιας και να αναστοχαστούν στις δικές τους ιδέες και τα επιστημολογικά εμπόδια . Η μέχρι τώρα έρευνα παρουσιάζει σαφώς ότι οι αντιλήψεις των μαθητών ποικίλουν ιδιαίτερα, ότι διαπράττουν θεμελιώδη λάθη και ότι δεν υπερνικούν απαραιτήτως τα επιστημολογικά εμπόδια. Είναι απαραίτητο να υπάρξει εκπαίδευση των καθηγητών ώστε να βοηθηθούν στο να αποκτήσουν επίγνωση των σχετικών προβλημάτων. Είναι εξίσου σημαντικό για τους μαθητές να αντιληφθούν πλήρως τις ουσιαστικές δυσκολίες. Έχουν πραγματοποιηθεί πειράματα στα οποία, πριν ξεκινήσει το μάθημα για την έννοια του ορίου, δόθηκαν στους μαθητές κατάλληλες δραστηριότητες για να τους βοηθήσουν να αντιληφθούν τις δικές τους αυθόρμητες ιδέες, εικόνες, διαισθήσεις και εμπειρίες που κατείχαν πριν και που θα έπαιζαν απαραιτήτως ρόλο κατά τη διαδικασία μάθησης. Ειδικότερα, ενημερώθηκαν για τα διαφορετικά νοήματα των λέξεων που επρόκειτο να χρησιμοποιήσουν. Αυτή αποδείχθηκε πολύτιμη τεχνική και τους επέτρεψε να δομήσουν πάνω στη δική τους γνώση και κατανόηση. (Cornu, Robert).

Ένα περαιτέρω πρόβλημα είναι εκείνο του πλαισίου στο οποίο πραγματοποιείται η μάθηση. Μια αποτελεσματική μάθηση πρέπει να πραγματοποιείται σ’ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος. Η έννοια του ορίου πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Είναι επομένως απαραίτητο να παρουσιαστούν καταστάσεις στις οποίες ο μαθητής μπορεί να δει ότι το όριο αποτελεί χρήσιμο εργαλείο. Καταστάσεις στις οποίες το όριο παρουσιάζεται ως μέρος της απάντησης σε ερωτήματα που ίδιος ο μαθητής έχει θέσει στον εαυτό του. Αυτό συχνά λείπει από τη σύγχρονη διδασκαλία. Δίνεται ένας ορισμός της έννοιας του ορίου, ακολουθούμενος από μια αλυσίδα προβλημάτων και ασκήσεων, συνήθως βασισμένων αποκλειστικά στο χειρισμό της άλγεβρας της έννοιας του ορίου όπως π.χ. το όριο ενός αθροίσματος, της σύνθεσης δύο συναρτήσεων κ.α.

Είναι σημαντικό να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται η έννοια του ορίου. Δεν αρκεί να γίνει μόνο ένας σωστός από μαθηματική άποψη σχεδιασμός της διδασκαλίας, αλλά να ελεγχθεί και η γνωστική καταλληλότητα των στόχων του

αναλυτικού προγράμματος και των προβλημάτων που πρέπει να λυθούν. Έχει πλέον εδραιωθεί το γεγονός ότι κατά τη μετάβαση στην ανώτερη μαθηματική σκέψη μια καθαρά λογική ακολουθία θεμάτων, στην οποία οι μαθηματικές έννοιες εισάγονται μέσω ορισμών και λογικών συλλογισμών, είναι μάλλον ανεπαρκής.

Ο Tall (1986), θεώρησε ότι τα στοιχεία από έρευνες πάνω στις δυσκολίες των μαθητών με την έννοια ταυ ορίου κατέστησαν εντελώς ακατάλληλη την προσέγγισή της είτε μέσω του τυπικού ορισμού ή ακόμα και (στην περίπτωση της παραγώγου) μέσω της γεωμετρικής εμπειρίας μιας τέμνουσας «που τείνει σε μια εφαπτομένη».

Υπέθεσε ότι η διαδικασία του ορίου πρέπει να χρησιμοποιηθεί *σιωπηρά* στον απειροστικό λογισμό ως τμήμα μιας διαδικασίας μεγέθυνσης για να «δούμε» την κλίση μιας καμπύλης και να αποκτήσουμε εμπειρία της έννοιας εν δράσει πριν η έννοια καταστεί το επίκεντρο τυπικής μελέτης. Με αυτή την έννοια ακολουθεί παρόμοια πορεία με εκείνη της Douady στη διαλεκτική της μέθοδο «εργαλείου-αντικειμένου», στην οποία η έννοια αρχικά χρησιμοποιείται σιωπηρά και μη τυπικά ως εργαλείο για την απόκτηση των κατάλληλων γνωστικών εμπειριών πριν καταστεί το κέντρο της προσοχής ως μαθηματικό αντικείμενο.

Σύμφωνα με έρευνες, ο Η/Υ μπορεί θαυμάσια να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην παροχή ενός περιβάλλοντος στο οποίο ο μαθητής μπορεί να αποκτήσει κατάλληλες εμπειρίες ώστε να κατασκευάσει την έννοια του ορίου. Εντούτοις, τέτοιες προσεγγίσεις είναι πολύ πιθανό να περιέχουν δικά τους ιδιαίτερα επιστημολογικά εμπόδια (Tall & Winkelmann 1988) και είναι απαραίτητο να αναλογιστούμε σοβαρά τις εμπειρίες των μαθητών στο νέο περιβάλλον για να δούμε ακριβώς τι μαθαίνεται και με ποια μορφή συγκρατείται η γνώση στο νου. Η αλληλεπίδραση με τον Η/Υ μπορεί να περιλαμβάνει τον προγραμματισμό, ώστε ο μαθητής να κατασκευάσει διαδικασίες Η/Υ οι οποίες, μέσω του αναστοχασμού, μπορούν να επιτρέψουν την απόκτηση και την τέλεια κατανόηση των αντίστοιχων μαθηματικών κατασκευών. Μπορεί να περιλαμβάνει έτοιμο λογισμικό, ώστε να επιτραπεί στο μαθητή να αποκτήσει την εμπειρία προσεκτικά επιλεγμένων περιβαλλόντων που μοντελοποιούν την ιδέα του ορίου. Είναι εξίσου δυνατό να φανταστούμε ένα είδος «εργαλειοθήκης» Η/Υ για τη μάθηση της έννοιας ορίου: ένα περιβάλλον Η/Υ που θα επιτρέψει στους μαθητές να χειριστούν αντικείμενα και να κατασκευάσουν τη γνώση: να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν ακολουθίες, να

δράσουν πάνω σ' αυτές, κατασκευάζοντας νέες ακολουθίες, μετασχηματίζοντάς τις και κάνοντας πράξεις με αυτές, μελετώντας τη συμπεριφορά τους και τη φύση της σύγκλισής τους.

Ποικίλες άλλες προσεγγίσεις είναι δυνατές. Σ' ένα πλαίσιο όπως αυτό της μελέτης των ορίων είναι ζωτικής σημασίας ο σχεδιασμός του λογισμικού εντός των πλαισίων μιας διδακτικής στρατηγικής βασισμένης στην προσεκτική ανάλυση της έννοιας που πρέπει να κατανοηθεί. Οι αυθόρμητες αντιλήψεις, οι εικόνες των εννοιών, τα εμπόδια, η αναστοχαστική αφαίρεση, αποτελούν όλα εννοιολογικά εργαλεία που μπορούν να βοηθήσουν στο σχεδιασμό τέτοιων παιδαγωγικών στρατηγικών.

Στην εργασία αυτή ξεκινάμε με μια ιστορική αναδρομή στην έννοια του ορίου, τονίζοντας τις δυσκολίες στην εξέλιξή της, ώστε να δικαιολογήσουμε τις παρανοήσεις των μαθητών και φοιτητών στην κατανόηση της έννοιας.

Στην συνέχεια επιδιώκουμε να παραθέσουμε τις δυσκολίες και τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και φοιτητές αφού διδαχτούν την έννοια του ορίου. Γίνεται προσπάθεια να αναζητήσουμε τις αιτίες αυτής της δυσκολίας και πώς αυτή εκφράζεται, καθώς και να ερμηνεύσουμε τις διαισθήσεις τους και τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις τους γύρω από την έννοια. Γι' αυτό το λόγο παρουσιάζουμε ένα μεγάλο αριθμό ερευνών, που έχουν γίνει από αξιόλογους επιστήμονες της Διδακτικής σε παγκόσμιο επίπεδο μέχρι τις μέρες μας. Γνωρίζοντας την υπάρχουσα κατάσταση, είμαστε σε θέση ως καθηγητές των Μαθηματικών, κατά τη διδασκαλία να δίνουμε έμφαση στις έννοιες και όχι στις διαδικασίες και στις πολύπλοκες ασκήσεις.

Τέλος, επιχειρούμε μια προσωπική έρευνα σε μαθητές Γ'Λυκείου, με στόχο να ελέγξουμε ποια είναι η ελληνική πραγματικότητα .Το δείγμα μας είναι 95 μαθητές, αρκετά μικρό για να εξάγουμε γενικά συμπεράσματα. Μπορούμε όμως να δούμε μια τάση στο κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε βασικά ερωτήματα σχετικά με την έννοια του ορίου, καθώς και αν μπορούν να βρουν κάποια όρια, είτε με αλγεβρικές μεθόδους, είτε από μια γραφική παράσταση.

2. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

2.1. Η ΑΞΙΑ ΜΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Σύμφωνα με όλες τις σχετικές μελέτες, οι μαθητές έχουν πολύ σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του ορίου. Αυτό δε θα πρέπει να μας προξενεί ιδιαίτερη έκπληξη, μια και η «τελική» μορφή της, όπως παρουσιάζεται στα σύγχρονα διδακτικά εγχειρίδια, είναι αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης διεργασίας, διάρκειας πάνω από δύο χιλιετίες. Στο χρονικό αυτό διάστημα παράλληλα με τις γόνιμες ιδέες υπήρξαν λάθη και οπισθοδρομήσεις (ακόμη και από μεγάλους μαθηματικούς), που τονίζουν πόσο «βαθιά» και σύνθετη είναι η έννοια του ορίου στα Μαθηματικά. Είναι λοιπόν αναγκαίο για το σχεδιασμό της διδασκαλίας της θεμελιώδους αυτής έννοιας να επισημανθούν τα βασικά *εμπόδια* που προέκυψαν στην εξέλιξή της, καθώς και ο τρόπος αντιμετώπισής τους, ώστε να μελετηθεί η πιθανή σχέση τους με τις δυσκολίες που έχουν οι σημερινοί μαθητές. Επιπλέον, η προσέγγιση αυτή μπορεί να είναι ελκυστικότερη και για τους μαθητές, αφού θα γίνουν κοινωνοί της πορείας προς τη σημερινή μορφή της έννοιας του ορίου, και όχι παθητικοί δέκτες μιας «έτοιμης» γνώσης, αποκομμένης από την εμπειρική πραγματικότητα.

Όπως επισημαίνει ο Cornu (1991), η εισαγωγή της έννοιας του ορίου αποσκοπούσε κυρίως στην επίλυση τριών τύπων προβλημάτων:

- Γεωμετρικά προβλήματα (υπολογισμοί εμβαδών και μηκών με τη μέθοδο της «εξάντλησης»),
- υπολογισμοί απείρων αθροισμάτων (σύγκλιση σειρών),
- προβλήματα παραγώγισης (όπου εμφανίζεται το πηλίκο δύο ποσοτήτων που τείνουν στο μηδέν).

Στη σύντομη ιστορική αναδρομή που ακολουθεί, θα παρουσιάσουμε την εξέλιξη της έννοιας του ορίου μέσα από την προσπάθεια επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων.

2.2. ΤΟ ΟΡΙΟ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Παρά τα εξαιρετικά τους επιτεύγματα, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν ασχολήθηκαν ουσιαστικά με την αυστηρή έννοια του ορίου. Μία εξήγηση που μπορεί να δοθεί είναι ότι αυτή συνδέεται με τις έννοιες του απείρου και του απειροστού, για τις

οποίες είχαν δυσκολίες βαθιάς φιλοσοφικής υφής (ας θυμηθούμε το «παράδοξο» του Ζήνωνα και την προσπάθεια των Πυθαγορείων να αποφύγουν απείρως επαναλαμβανόμενες διαδικασίες στην προσέγγιση της $\sqrt{2}$).

Στην προσπάθειά τους να παρακάμψουν την έννοια του απείρου οι αρχαίοι Έλληνες επινόησαν μεθόδους εξαιρετικής ευφυΐας, ανάμεσα στις οποίες ξεχωριστή θέση κατέχει η περίφημη *«μέθοδος της εξάντλησης»* του Ευδόξου. Όπως επισημαίνει ο Cajori (1923), η μέθοδος χρησιμοποιεί όλα τα «εργαλεία» της μοντέρνας θεωρίας του ορίου. Η ιδέα του υπολογισμού του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου με χρήση εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με όλο και μεγαλύτερο πλήθος πλευρών (που αποδίδεται στον Αντιφώντα) αποτέλεσε τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης, που διατυπώθηκε πρώτα από τον Εύδοξο και στη συνέχεια εφαρμόστηκε αριστοτεχνικά από τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η διατύπωσή της στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (Χ, 1) έχει ως εξής:

«Δύο μεγεθών ανίσων εκκειμένων, εάν από του μείζονος αφαιρεθή μείζον ή το ήμισυ και του καταλειπομένου μείζον ή το ήμισυ, και τούτο αεί γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ό έσται έλασσον του εκκειμένου ελάσσονος μεγέθους».

Η αρχή της εξάντλησης μπορεί να αποδοθεί σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα ως εξής: Έστω δύο άνισα μεγέθη α και ε, με $\alpha > \varepsilon$. Αν από το α αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται επ' άπειρον, τότε θα μείνει κάποιο μέγεθος μικρότερο του ε. Με άλλα λόγια, αν α_κ είναι το αφαιρούμενο μέγεθος στο κ βήμα της παραπάνω διαδικασίας και θέσουμε $\sigma_\kappa = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i$ για $\kappa = 1, 2, \ldots$, τότε σ_κ είναι το συνολικά αφαιρούμενο μέγεθος μέχρι και το κ βήμα και η αρχή της εξάντλησης λέει ότι υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος, ώστε $\alpha - \sigma_\nu < \varepsilon$. Αυτό όμως σημαίνει (με σύγχρονο συμβολισμό) ότι $\lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu = \alpha$ ή, ισοδύναμα, ότι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha .$$

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της εξάντλησης *δεν* θεωρούσαν ότι η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβανόταν για άπειρο αριθμό βημάτων, ώστε να «εξαντληθεί» πλήρως το αρχικό

μέγεθος. Αντίθετα, θεωρούσαν ότι πάντοτε υπήρχε μια υπολειπόμενη ποσότητα, η οποία όμως μπορούσε να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε (Boyer, 1939). Ως παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου της εξάντλησης, αναφέρουμε την ακόλουθη Πρόταση από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (Βιβλίο XII, 2):

«Ο λόγος των εμβαδών δύο κυκλικών δίσκων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των αντιστοίχων διαμέτρων τους».

Η απόδειξη γίνεται εγγράφοντας στον κύκλο κανονικά πολύγωνα με 2^{ν} πλευρές, $\nu = 2, 3, \ldots$. Σύμφωνα με την αρχή της εξάντλησης, μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων η διαφορά του εμβαδού του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου θα γίνει μικρότερη από μια (οσοδήποτε μικρή) προκαθορισμένη τιμή. Αυτή είναι ακριβώς η διαδικασία με την οποία αντιστοιχίζουμε σε μια ακολουθία (των εμβαδών των κανονικών πολυγώνων) το *όριό* της (το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου). Είναι αξιοσημείωτο, όμως, ότι ο Ευκλείδης δεν επιχειρεί το «πέρασμα» στο όριο για να ολοκληρώσει την απόδειξη, αλλά χρησιμοποιεί μια «έμμεση» απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι αρχαίοι Έλληνες διέθεταν τα εργαλεία της θεωρίας των ορίων αλλά για φιλοσοφικούς πιθανότατα λόγους απέφυγαν να τα χρησιμοποιήσουν με (τον κατ' εμάς) άμεσο τρόπο.

2.3. Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΟΡΙΟ: 16ος - 17ος ΑΙΩΝΑΣ

Μέχρι το 16ο αιώνα οι αντιλήψεις και οι μέθοδοι των αρχαίων Ελλήνων σχετικά με τις οριακές διαδικασίες κυριαρχούσαν και εφαρμόζονταν χωρίς ουσιαστικές διαφοροποιήσεις. Η πρώτη προσπάθεια να αποσαφηνιστεί κάπως η έννοια του ορίου γίνεται το 16ο αιώνα από τον Ιταλό Luca Valerio και τον Φλαμανδό Simm Stevin, οι οποίοι αποφεύγουν τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης σε συνδυασμό με απαγωγή σε άτοπο.

Ο 17ος αιώνας φέρνει πληθώρα νέων ιδεών και ανακαλύψεων στον Απειροστικό Λογισμό. Τα νέα προβλήματα από τη Μηχανική και την Αστρονομία (π.χ. εύρεση της εφαπτομένης μιας καμπύλης, υπολογισμός μεγίστων και ελαχίστων τιμών) απαιτούν νέες μεθόδους, οι οποίες δε θα αργήσουν να εμφανιστούν. Όσο αφορά την έννοια του ορίου, το 1656 ο Wallis εκδίδει το έργο «Arithmetica Infinitorum», στο οποίο γίνεται χρήση

κάποιας έννοιας ορίου. Ο Ιταλός Piero Megnoli στο έργο του «Geometrica Speciosa» (1659) βελτιώνει τη μέθοδο του Luca Valerio για τον υπολογισμό εμβαδών κάτω από συγκεκριμένες καμπύλες. Σημαντική επίδραση στη γενικότερη ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού έχει το σύγγραμμα «Geometria Indivisibilibus…» (1635) του Bonaventura Cavalieri, στο οποίο κεντρική έννοια είναι το αδιαίρετο. Σχεδόν ταυτόχρονα (1634), ο Pierre de Fermat χρησιμοποιεί την ίδια έννοια, ενώ το 1638 διατυπώνει μία γενική μέθοδο για τον προσδιορισμό μεγίστων και ελαχίστων τιμών. Στη μέθοδο του Fermat, η βασική ιδέα είναι η εισαγωγή μιας απειροστής αύξησης ε της μεταβλητής και η απαίτηση να *«εξαφανίζεται»*, μετά από πράξεις. Ο Isaac Barrow (1650) έχει την ίδια ιδέα, που μοιάζει με τη σύγχρονη, αλλά την τοποθετεί σε γεωμετρικό πλαίσιο.

Διακρίνονται δύο τάσεις στους ερευνητές της εποχής αυτής: η γεωμετρική (Cavalieri, Toricelli, Barrow) και η αλγεβρική (Fermat, Descartes, Wallis). Η πρόοδος στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων (υπολογισμοί εμβαδών και όγκων, προσδιορισμός εφαπτομένης δοθείσας καμπύλης) είναι αξιοσημείωτη. Εντούτοις, λείπει το θεωρητικό υπόβαθρο: μόλις στα 1670 ο Barrow δίνει για πρώτη φορά τη γεωμετρική απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, δίχως όμως να αντιληφθεί ότι το πρόβλημα της εφαπτομένης και αυτό του εμβαδού συνδέονται μέσω μιας αντίστροφης διαδικασίας.

Η θεμελίωση ενός λειτουργικού Απειροστικού Λογισμού θα επιτευχθεί στο τελευταίο τέταρτο του 17^{ου} αιώνα από τον Isaac Newton και τον Gottfried Wilhelm Leibniz, οι οποίοι, εργαζόμενοι ανεξάρτητα, επινόησαν ταυτόχρονα το Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Κεντρική θέση στις εργασίες τους έχουν η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Για τον Newton, η παράγωγος είναι ένας ρυθμός μεταβολής («fluxion» - «ροή») και το ολοκλήρωμα («fluent» - «ρέον») μια αντίστροφη έννοια. Η πρωτοτυπία του Newton έγκειται στο γεγονός ότι για πρώτη φορά υπολόγισε το εμβαδόν μιας επιφάνειας από το λόγο μεταβολής σε ένα μόνο σημείο, δηλαδή με αντιδιαφόριση.

Για τον Leibniz, η παράγωγος είναι ένα «πηλίκο απειροστών διαφορών» και το ολοκλήρωμα ένα «άθροισμα απειροστών». Και οι δύο χρησιμοποιούν *απειροστά*, δηλαδή απειροελάχιστα μικρές ποσότητες, οι οποίες μπορούν να παραλειφθούν όταν είναι «συγκριτικά μικρές». Είναι αξιοπερίεργο το ότι αυτή η μάλλον ασαφής διαδικασία

υιοθετήθηκε τόσο από τον Newton όσο και από τον Leibniz, παραβλέποντας τις θεωρίες του ορίου στη γεωμετρία (Stevin, L. Valerio,…) και στην άλγεβρα (Wallis). Όπως αναφέρει ο Cajori (1923) κάποτε ο Leibniz, προσπαθώντας να απαντήσει σε έναν επικριτή των μεθόδων του, προσέγγισε πολύ την έννοια του ορίου – ακόμα και γι' αυτόν το όριο αποτελούσε την καλύτερη άμυνα! Εντούτοις, ποτέ δε θεμελίωσε τον Απειροστικό Λογισμό στην έννοια του ορίου.

2.4. ΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ – ΣΥΓΧΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΜΑΧΗ

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τόσο ο Newton όσο και ο Leibniz θεμελίωσαν τον Απειροστικό Λογισμό τους στην έννοια του *απειροστού*. Η επιτυχία των μεθόδων τους ως προς τα αποτελέσματα υπήρξε αδιαμφισβήτητη: αποκαλύφθηκε ο δρόμος για την εκτέλεση πάρα πολλών υπολογισμών χωρίς να είναι εκ των προτέρων γνωστό το αποτέλεσμα, όπως απαιτούσε η μέθοδος της εξάντλησης. Ο ενθουσιασμός του μαρκησίου de l' Hospital στον πρόλογο του συγγράμματός του *"Analyse des Infiniment Pettis"* (Ανάλυση των απειροστών) του 1696 είναι έκδηλος:

«Η έκταση του Απειροστικού Λογισμού είναι απέραντη. Είναι εξίσου εύκολος τόσο για τις μηχανικές καμπύλες όσο και για τις γεωμετρικές.…Επεκτείνεται σε οσεσδήποτε μεταβλητές επιθυμεί κανείς. Οι συγκρίσεις όλων των ειδών των απειροστών είναι εξίσου εύκολες. Επιπλέον μια απειρία εκπληκτικών ανακαλύψεων προέκυψε απ' αυτόν».

Εντούτοις, οι μέθοδοι των Newton και Leibniz που βασίζονται στη χρήση απειροστών μεγεθών δέχονται σκληρή κριτική ως προς τη σαφήνεια και την αυστηρότητά τους. Για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσει ο Newton τη «ροή» (παράγωγο) της συνάρτησης $y = x^{\nu}$ (όπου ν θετικός ακέραιος), συμβολίζει με ο την απειροελάχιστη μεταβολή (λ.χ. αύξηση) της μεταβλητής x, θέτει $x + \mathrm{o}$ στη θέση του x, και υπολογίζει τη διαφορά $(x+\mathrm{o})^{\nu} - x^{\nu}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο του διωνύμου που φέρει το όνομά του:

$$(x+\mathrm{o})^{\nu} - x^{\nu} = x^{\nu} + \nu \cdot x^{\nu-1} \cdot \mathrm{o} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} x^{\nu-2} \cdot \mathrm{o}^2 + \cdots + \mathrm{o}^{\nu} - x^{\nu} =$$

$$= \nu \cdot x^{\nu-1} \cdot \mathrm{o} + \mathrm{o} \cdot \left\{ \frac{\nu(\nu-1)}{2} x^{\nu-2} \cdot \mathrm{o} + \cdots + \mathrm{o}^{\nu-1} \right\}$$

Στη συνέχεια, διαιρώντας και τα δύο μέλη με o βρίσκει ότι

$$\frac{\text{μεταβολή του } x^{\nu}}{\text{μεταβολή του } x} = \nu \cdot x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} x^{\nu-2} \cdot o + \cdots + o^{\nu-1}$$

Τώρα, σύμφωνα με τον Newton, οι όροι που περιέχουν ως παράγοντα το o στο δεξί μέλος της παραπάνω έκφρασης μπορούν να παραλειφθούν, αφού το o είναι απειροελάχιστα μικρό. Έτσι, καταλήγει ότι

$$\frac{\text{μεταβολή του } x^{\nu}}{\text{μεταβολή του } x} = \nu \cdot x^{\nu-1}$$

Η διαδικασία είναι εντελώς όμοια με αυτήν που ακολουθούμε σήμερα για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $y = x^{\nu}$, με τη διαφορά ότι λείπει η θεώρηση του ορίου του λόγου μεταβολής. Ο Newton ονομάζει το αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας *«έσχατο λόγο»* (ultimate ratio) των μεταβολών αντί για όριο του λόγου διαφορών. Αυτή η έννοια δεν ήταν απολύτως σαφής και αποτέλεσε αντικείμενο δριμείας κριτικής, μεταξύ άλλων από τον επίσκοπο George Berkeley:

«Τι είναι ακριβώς το o*; Είναι μηδέν, ή όχι; Αν είναι μηδέν, πώς επιτρέπεται να διαιρέσουμε με αυτό; Αν δεν είναι μηδέν, πώς επιτρέπεται να το παραλείψουμε;*

Αυτός ο συλλογισμός δε φαίνεται ούτε σωστός ούτε τίμιος. Όταν κάποιος λέει ότι οι αυξήσεις είναι πλέον μηδενικές ή ότι δεν υπάρχουν άλλες αυξήσεις, η προηγούμενη υπόθεση που έλεγε ότι οι αυξήσεις ήταν κάτι ή ότι υπήρχαν αυξήσεις χάνεται, ενώ μια συνέπεια αυτής της υπόθεσης διατηρείται ακόμα. Αυτό είναι ένας λανθασμένος συλλογισμός».

Στη συνέχεια, ο Berkeley δίνει το «τελειωτικό χτύπημα» στους Μαθηματικούς:

«Οι επιστήμονες επιτίθενται στη θρησκεία, βρίσκοντάς την παράλογη. Ας βελτιώσουν, λοιπόν, τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι σκέπτονται. Μια ποσότητα είτε είναι μηδέν είτε δεν είναι – δεν υπάρχει τίποτα ενδιάμεσο.

Οι μαθηματικοί μου φαίνονται άνθρωποι συνηθισμένοι να υπολογίζουν αντί να σκέπτονται».

Στη διάρκεια του 18ου αιώνα, πολλοί μαθηματικοί επιχείρησαν να αντικρούσουν την κριτική του Berkeley, δίχως όμως ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Η κατάσταση περιγράφεται από τον D'Alembert στο σπουδαίο άρθρο του *"Différentiel"* στην *Encyclopédie* του Diderot (1754) ως εξής:

«Το ζήτημα δεν είναι το πώς κάποιος αναφέρεται στις απειροελάχιστες ποσότητες στο Διαφορικό Λογισμό. Υπάρχει όμως ζήτημα για τα όρια πεπερασμένων ποσοτήτων. Κατά συνέπεια, η μεταφυσική του απείρου και κάποιων απειροελάχιστων ποσοτήτων που γίνονται μεγαλύτερες ή μικρότερες από άλλες είναι συνολικά άχρηστη. Ο όρος απειροστό χρησιμοποιείται μόνο για συντόμευση των εκφράσεων. Δε θα λέγαμε επομένως, όπως κάνουν πολλοί γεωμέτρες, ότι μια ποσότητα είναι απείρως μικρή ούτε προτού αυτή εξαφανιστεί ούτε αφότου εξαφανίζεται, αλλά την ίδια τη στιγμή κατά την οποία εξαφανίζεται. Γιατί αυτό δε θα αποτελούσε ένα λανθασμένο ορισμό, εκατό φορές πιο δυσνόητο από αυτό που κάποιος επιθυμεί να ορίσει;»

2.5. 18^{ος} ΑΙΩΝΑΣ: ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΑΥΣΤΗΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Η σύγχυση και η διαμάχη για τη φύση και το ρόλο των απειροστών μεγεθών γέννησε έναν πλούσιο προβληματισμό γύρω από την ακριβή έννοια του ορίου. Κατ' αρχάς, έγινε αντιληπτό ότι οι υπολογιστικές – γεωμετρικές θεωρήσεις των Newton και Leibniz έδιναν μεν τα σωστά αποτελέσματα, αδυνατούσαν όμως να αποτελέσουν αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για τον Απειροστικό Λογισμό. Για παράδειγμα, ο Newton εννοούσε ως «όριο» ένα «αξεπέραστο σύνορο», πράγμα που δεν επαρκούσε για την απόδειξη γενικών θεωρημάτων σχετικών με τα όρια.

Στη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα παρατηρείται μια προσπάθεια για διατύπωση του ορισμού του ορίου με χρήση του *αλγεβρικού* λογισμού και συγκεκριμένα των *ανισοτήτων*. Στο άρθρο του στην *Encyclopédie* (1754) , ο D'Alembert επιχειρεί για πρώτη φορά τη θεμελίωση του Λογισμού του Leibniz στην έννοια του ορίου. Διατυπώνει τα θεωρήματα της μοναδικότητας του ορίου και του ότι το όριο του γινομένου ισούται με το γινόμενο των ορίων. Δίνει έμφαση στο όριο του πηλίκου αντί για το πηλίκο δύο ορίων ίσων με μηδέν και αποβάλει την έννοια του απειροστού από τη θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού:

«Νιώθει κανείς ότι η υπόθεση ύπαρξης άπειρα μικρών ποσοτήτων γίνεται εδώ μόνο για διόρθωση και απλοποίηση του συλλογισμού, ότι στην ουσία ο διαφορικός λογισμός δεν απαιτεί την ύπαρξη αυτών των ποσοτήτων και ότι ο λογισμός αυτός συνίσταται μόνο στον αλγεβρικό προσδιορισμό του ορίου ενός πηλίκου».

Σύμφωνα με τον D'Alembert:

«Ένα μέγεθος καλείται όριο ενός άλλου μεγέθους όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίσει το πρώτο πλησιέστερα από ένα οσοδήποτε μικρό δοσμένο μέγεθος, χωρίς ωστόσο το προσεγγίζον μέγεθος να υπερβεί το μέγεθος που προσεγγίζεται».

Από την παραπάνω διατύπωση και τις επεξηγήσεις που την ακολουθούν γίνεται σαφές ότι, κατά τον D'Alembert, μια ποσότητα δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη ή ίση από το όριό της. Επίσης, ο χειρισμός της «απροσδιόριστης μορφής» 0/0 από δεν είναι ικανοποιητικός, μια και χρησιμοποιεί ξανά το «δεκανίκι» των απειροστών! Γενικά στο έργο του D'Alembert και των συγχρόνων του παρατηρείται μια πληθώρα νέων συμπερασμάτων και εξαγομένων, που όμως συνάγονται με ελλιπή, ασαφή και πολλές φορές τελείως λανθασμένη επιχειρηματολογία. Η ελευθεριότητα στη χρήση άπειρων διαδικασιών φαίνεται και από την αποδιδόμενη στον D'Alembert παρότρυνση: *«τραβήξτε μπροστά και η πίστη θα σας έρθει».*

Ο Joseph Louis Lagrange είναι ο άλλος πρωταγωνιστής στην προσπάθεια μιας αυστηρής θεμελίωσης του Απειροστικού Λογισμού. Το 1772 επιχειρεί να θεμελιώσει το Λογισμό χρησιμοποιώντας άλγεβρα και το θεώρημα του Taylor. Προφανώς δεν ήταν ικανοποιημένος από την προσπάθειά του αυτή, μια και ως Πρόεδρος της Ακαδημίας του Βερολίνου το 1784 θέσπισε βραβείο για μια ικανοποιητική και αυστηρή παρουσίαση του Απειροστικού Λογισμού.

Το βραβείο δόθηκε δυο χρόνια αργότερα στον S.A.J. Lhuilier, ο οποίος επιχείρησε τη θεμελίωση σε μια παραλλαγή της μεθόδου της εξάντλησης των αρχαίων Ελλήνων. Με τον ορισμό του ορίου κατά τον Lhuilier, η μεταβλητή ποσότητα είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή πάντοτε μικρότερη από το όριό της (δεν μπορεί δηλαδή να ταλαντώνεται άλλοτε πάνω και άλλοτε κάτω από το όριό της). Το ερώτημα αν η μεταβλητή ποσότητα μπορεί ή όχι να γίνει ίση με το όριό της δεν απασχολεί τον Lhuilier. Παρ' όλα αυτά, αποδεικνύει μια σειρά θεωρημάτων πάνω στα όρια με μια προσοχή πρωτόγνωρη για την εποχή του, αν και κάποιες αποδείξεις του με χρήση άπειρων σειρών είναι ανεπαρκείς. Επιπλέον, δεν χρησιμοποιεί απειροστά και εισάγει την παράγωγο αλγεβρικά, θεωρώντας την ως όριο μιας μεταβλητής ποσότητας (του λόγου μεταβολής) και όχι ως πηλίκο δύο μηδενικών ορίων, όπως ο D'Alembert. Είναι αξιοσημείωτο ότι η μονογραφία του Lhuilier δεν έτυχε της πρέπουσας υποδοχής από τους μαθηματικούς της εποχής.

Το 1797 έχουμε τρεις σημαντικές δημοσιεύσεις πάνω στο Λογισμό από τον Lagrange (*Théorie des fonctions),* τον Lazare Carnot και τον S.F.Lacroix αντίστοιχα. Ο Lagrange απορρίπτει τόσο την έννοια του ορίου όσο και αυτήν του απειροστού, επιχειρεί να αποδείξει αλγεβρικά το θεώρημα του Taylor και να θεμελιώσει πάνω του το Λογισμό. Για τον Lagrange η έννοια – πράξη «μετάβαση στο όριο» είναι εντελώς ξένη προς το πνεύμα της Μαθηματικής Ανάλυσης και γι' αυτό τα όρια πρέπει να αποβληθούν εντελώς (Ο Cauchy επεσήμανε το 1821 ότι το σκεπτικό του Lagrange δεν μπορεί να υλοποιηθεί, αφού η άλγεβρα των πεπερασμένων ποσοτήτων δεν επεκτείνεται αυτόματα στις άπειρες διαδικασίες). Ο Carnot υιοθετεί έναν πολεμικό τόνο για την έννοια του ορίου και το έργο του, αν και δημοφιλές στην εποχή του, δεν συνεισφέρει στη βαθύτερη κατανόηση του Λογισμού.

Πιο φιλικός στην έννοια του ορίου είναι ο Lacroix, ο οποίος υποστηρίζει ότι *«αυτή καλύτερα συμφιλιώνει τη συντομία με την αυστηρότητα στους συλλογισμούς».* Παρά το ότι το έργο του υπήρξε εξαιρετικά δημοφιλές στη Γαλλία για πάνω από 75 χρόνια, ο Lacroix δεν απέφυγε κάποια από τα λάθη των προγενεστέρων του. Για παράδειγμα, εισάγοντας την έννοια της παραγώγου δεν αποφεύγει την παγίδα του πηλίκου δύο μηδενικών ορίων. Επιπλέον, η έμφαση που δίνει στο «μυστηριώδες» σύμβολο 0/0 δίνει τροφή στην κριτική για τη μη επαρκή θεμελίωση του Λογισμού.

2.6. 19ος ΑΙΩΝΑΣ: ΑΥΣΤΗΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Με την έναρξη του 19ου αιώνα οι συνθήκες για μια αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου, απαλλαγμένη από τις ασάφειες των απειροστών, είχαν πια ωριμάσει. Οι βασικότεροι λόγοι που συνετέλεσαν σ' αυτό ήταν οι ακόλουθοι:

1. Η γενική απαίτηση για αυστηρότητα στη διατύπωση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων.
2. Η ανάπτυξη της άλγεβρας των ανισοτήτων και η συνειδητοποίηση ότι μπορεί να αποτελέσει το στέρεο θεμέλιο του Λογισμού.
3. Η σωρευμένη εμπειρία στη χρήση και η καλύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της Ανάλυσης (σύγκλιση, συνέχεια, παράγωγος, ολοκλήρωμα).

4. Η γενίκευση της διδασκαλίας των Ανώτερων Μαθηματικών στις πανεπιστημιακές σχολές, που άρχισαν να ιδρύονται με γοργούς ρυθμούς στην Ευρώπη. Πολλά βασικά ερωτήματα τέθηκαν και απαντήθηκαν κατά τη διάρκεια παραδόσεων από μεγάλους μαθηματικούς στις σχολές αυτές. Για παράδειγμα, ο Cauchy θεμελίωσε την Ανάλυση στο περίφημο σύγγραμμά του *Cours d' Analyse* (1821), που χρησιμοποίησε ως διδακτικό εγχειρίδιο για τις διαλέξεις του στην *Ecole Polytechnique* του Παρισιού. Ο Dedekind ξεκίνησε να ασχολείται με το πρόβλημα της συνέχειας διδάσκοντας στη Ζυρίχη. Τέλος, ο Weierstrass εισήγαγε τα «θεμέλιά» του για τη Ανάλυση στις διαλέξεις του στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

Ο Augustin Louis Cauchy τοποθετεί την έννοια του ορίου στη βάση της θεμελίωσης του απειροστικού Λογισμού. Στην αρχή του *Cours d' Analyse* δίνει περιφραστικά τον ορισμό του ορίου, απαλλάσσοντάς τον από κάθε «γεωμετρική» ή «φυσική» επίδραση και τονίζοντας την καθαρά αριθμητική του φύση:

«Όταν οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής πλησιάζουν απεριόριστα μια σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτή όσο λίγο θέλουμε, τότε η σταθερή αυτή τιμή λέγεται όριο όλων των άλλων».

Ο Cauchy εξηγεί την έννοια του απειροστού ως εξής:

«Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται διαρκώς ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν».

Με αυτό τον τρόπο δίνει τέλος στη μυστηριώδη και μεταφυσική χρήση των απειροστών, που προβλημάτισε έντονα τους μαθηματικούς μετά τους Newton και Leibniz.

Για να αποσαφηνίσει την έννοια του ορίου, θεωρεί έναν άρρητο αριθμό ως το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών (π.χ. των δεκαδικών του προσεγγίσεων). Επιπλέον, ορίζει ως άπειρο τη μεταβλητή εκείνη ποσότητα, της οποίας οι τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε, οσοδήποτε μεγάλο, αριθμό.

Η συνεισφορά του Cauchy στη θεωρία της σύγκλισης είναι καθοριστική. Αναδιατυπώνοντας τον ορισμό του MacLaurin ότι το άθροισμα μιας άπειρης σειράς είναι το όριο των μερικών αθροισμάτων της, ο Cauchy λέει ότι:

«Για δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος, ώστε κάθε μερικό άθροισμα της σειράς με περισσότερους από ν όρους να διαφέρει από το άθροισμα της σειράς λιγότερο από ε».

Έτσι δημιουργεί, αξιοποιώντας και τις προηγηθείσες εργασίες των D'Alembert και Lagrange, την πρώτη αυστηρή θεωρία της σύγκλισης. Ακόμη, ο Cauchy δίνει τον εξής ορισμό της συνέχειας:

«Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής αν μια απείρως μικρή μεταβολή h της μεταβλητής x προκαλεί μια απείρως μικρή μεταβολή $f(x+h)-f(x)$ της τιμής της».

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση f λέγεται συνεχής όταν για κάθε σημείο a του πεδίου ορισμού της ισχύει $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Με τον τρόπο αυτό, ο Cauchy μαθηματικοποίησε για πρώτη φορά την έννοια της συνέχειας, δείχνοντας την άμεση σύνδεσή της με την έννοια του ορίου.

Παρά την αδιαμφισβήτητη συμβολή του Cauchy στην αυστηρή θεμελίωση των κυρίων εννοιών του Απειροστικού Λογισμού, οι περιφραστικοί ορισμοί του περιείχαν κάποιες ασάφειες. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι εκφράσεις όπως «πλησιάζει απεριόριστα» ή «όσο λίγο θέλουμε» παραπέμπουν για άλλη μια φορά στα ανεπιθύμητα απειροστά (αν και στον προσδιορισμό ορίων ο Cauchy είναι απολύτως σαφής και αποφεύγει τελείως τα απειροστά, χρησιμοποιώντας ανισοτικές σχέσεις). Ένα σοβαρότερο πρόβλημα ήταν η απουσία μιας αυστηρής θεμελίωσης της αρχικής έννοιας του *αριθμού*, η οποία επιτεύχθηκε μετά το 1870 χάρη στις συντονισμένες προσπάθειες των Méray, Weierstrass, Dedekind και άλλων.

Αν ο Cauchy ήταν εκείνος που έδωσε την απαραίτητη ώθηση στον Απειροστικό Λογισμό, ορίζοντας σωστά τις βασικές του έννοιες με κέντρο την έννοια του ορίου, εκείνος που είπε την τελευταία λέξη στην αυστηρή θεμελίωση του Λογισμού ήταν ο Karl Weierstrass. Με στόχο την αποκάθαρση των Μαθηματικών από τις ασάφειες του παρελθόντος και με έμφαση στην ακρίβεια και αυστηρότητα της διατύπωσης, ο Weierstrass δόμησε την Ανάλυση πάνω σε μια καθαρά τυπική αριθμητική βάση, εντελώς απαλλαγμένη από τη γεωμετρική εποπτεία.

Ο σύγχρονος ορισμός του ορίου συνάρτησης, που δόθηκε πρώτα από τον Weierstrass και στην τελική του «στατική» μορφή από το μαθητή του Heine, είναι ο ακόλουθος:

*«Ο πραγματικός αριθμός ℓ είναι **όριο** της συνάρτησης f στο x_0 αν, δοθέντος ενός οσοδήποτε μικρού θετικού αριθμού ε, μπορεί να βρεθεί ένας άλλος θετικός αριθμός δ (εν γένει εξαρτώμενος από το ε και το x_0) τέτοιος, ώστε για όλες τις τιμές του x που διαφέρουν από το x_0 λιγότερο από δ (με την εξαίρεση του x_0), οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης να διαφέρουν από το ℓ λιγότερο από ε».*

Συμβολικά γράφουμε $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$

Επιπλέον, ο Weierstrass τόνισε ότι για να έχει έννοια ο παραπάνω ορισμός θα πρέπει το x_0 να είναι *σημείο συσσώρευσης* του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f. Έτσι έδωσε μεγάλη ώθηση όχι μόνο στη θεμελίωση του συνόλου **R** των πραγματικών αριθμών αλλά και στη μελέτη των τοπολογικών ιδιοτήτων του. Τέλος, διαμόρφωσε την έννοια της συνάρτησης στην τελική της μορφή και διέλυσε την ψευδαίσθηση ότι κάθε συνεχής καμπύλη πρέπει να έχει «σχεδόν παντού» εφαπτομένη, κατασκευάζοντας το περίφημο παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης που δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Με τον Weierstrass οι θεμελιώδεις έννοιες της Ανάλυσης αποκτούν την τελική μορφή τους: η επίμονη ιδέα του απειροστού φάνηκε να ανήκει στο παρελθόν. Η ιστορία, όμως, δεν τελειώνει εδώ: τη δεκαετία του 1960 ο λογικολόγος Abraham Robinson αναζωογόνησε τα απειροστά με τη θεωρία της Μη Κανονικής Ανάλυσης (Non-standard Analysis) και έδειξε ότι μπορούν να αποτελέσουν ένα στέρεο θεμέλιο για τον Απειροστικό Λογισμό. Η προσέγγιση του Robinson, χρησιμοποιώντας την τυπική λογική, αποφεύγει εντελώς τις αντιρρήσεις που προέβαλε ο Berkeley, αν δηλαδή τα απειροστά υπάρχουν με κάποιον αντικειμενικό τρόπο. Οι μέθοδοι απόδειξης με απειροστά, που υπήρξαν γόνιμες πριν ακόμη από την εποχή του Αρχιμήδη, επανέρχονται στο οπλοστάσιο των μαθηματικών και είναι εξίσου νόμιμες όσο και οποιεσδήποτε άλλες στην Ανάλυση.

3. ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η μαθηματική έννοια του ορίου είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη έννοια, χαρακτηριστική του είδους σκέψης που απαιτείται στα ανώτερα μαθηματικά. Κατέχει κεντρική θέση που διεισδύει σε ολόκληρη τη μαθηματική ανάλυση, ως θεμέλιο της θεωρίας προσέγγισης, της συνέχειας, του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μια από τις μεγαλύτερες δυσκολίες στη διδασκαλία και τη μάθηση της έννοιας του ορίου βρίσκεται όχι μόνο στην αφθονία και την πολυπλοκότητά της, αλλά και στο βαθμό στον οποίο οι γνωστικές πτυχές δεν μπορούν να παραχθούν καθαρά από το μαθηματικό ορισμό. Η διάκριση μεταξύ του ορισμού και της ίδιας της έννοιας (που εξετάζεται λεπτομερώς από τον Vinner (1991) είναι πολύ σημαντική από διδακτική σκοπιά. Η απομνημόνευση του ορισμού του ορίου και η κατανόηση της θεμελιώδους έννοιας είναι δύο τελείως διαφορετικά θέματα. Ένα τμήμα αποτελεί η ιδέα της προσέγγισης, που συναντάται συνήθως για πρώτη φορά μέσω μιας δυναμικής έννοιας του ορίου, και ο τρόπος με τον οποίο η έννοια του ορίου εφαρμόζεται για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων που δε βασίζονται στον ορισμό αλλά σε πολλές διαφορετικές ιδιότητες της διαισθητικής έννοιας. Ξεκινώντας οι μαθητές από μια τέτοια άποψη συχνά πιστεύουν ότι «κατανοούν» τον ορισμό του ορίου χωρίς να πραγματικά να κατανοούν όλες τις συνέπειες της τυπικής έννοιας. Οι μαθητές είναι συχνά ικανοί να ολοκληρώσουν πολλές από τις ασκήσεις που τους ζητείται να λύσουν χωρίς να είναι υποχρεωμένοι να κατανοήσουν καθόλου το φορμαλισμό του ορισμού. Εν τω μεταξύ, οι ποσοδείκτες «για κάθε», «υπάρχει τουλάχιστον ένα» καθώς και ο συνδυασμός τους, που υπάρχει στον έψιλον - δέλτα ορισμό, έχουν τις δικές τους σημασίες στην καθημερινή γλώσσα που είναι διαφορετικές από εκείνες που συναντώνται στον ορισμό του ορίου. Από αυτή την αφετηρία ανακύπτουν εννοιολογικά εμπόδια που μπορούν να προκαλέσουν σοβαρές δυσκολίες.

Τα πιο πολλά βιβλία Μαθηματικών αφιερώνουν ένα κεφάλαιο στη γενική έννοια του ορίου (συμπεριλαμβανομένου ενός τυπικού ορισμού), μια πρόταση για τη μοναδικότητά του, και θεωρήματα για τις αριθμητικές πράξεις που εφαρμόζονται στα

όρια. Οι ασκήσεις, εντούτοις, δεν επικεντρώνονται στην *έννοια* του ορίου, αλλά σε ανισότητες, στη έννοια της απόλυτης τιμής, στην ιδέα μιας ικανής συνθήκης και προπάντων στις *πράξεις:* το όριο αθροίσματος, γινομένου, κλπ. Αυτές οι ασκήσεις σχετίζονται πολύ περισσότερο με την άλγεβρα και τις διαδικασίες τυπικής διαφόρισης και ολοκλήρωσης παρά με την ανάλυση. Με δεδομένη μια τέτοια τάση στην αποδιδόμενη έμφαση, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι μαθητές αποκτούν υπονοούμενες πεποιθήσεις για τον τρόπο με τον οποίο αναμένονται να δράσουν.

Οι διάφορες έρευνες που έχουν διεξαχθεί παρουσιάζουν σαφέστατα ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου, ακόμη και σε ανώτερο στάδιο των σπουδών τους. Αυτό δεν τους αποτρέπει από το να λύνουν ασκήσεις, να επιλύουν προβλήματα και να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις τους!

Ο ανθρώπινος νους δεν είναι μια αμιγώς λογική οντότητα. Ο σύνθετος τρόπος με τον οποίο λειτουργεί συχνά διαφέρει από τη λογική των μαθηματικών. Δεν είναι πάντοτε η καθαρή λογική εκείνη που μας παρέχει την ενόραση, ούτε είναι η τύχη εκείνη που μας αναγκάζει να κάνουμε λάθη. Για να αντιληφθούμε πώς εμφανίζονται αυτές οι διαδικασίες, τόσο επιτυχημένα όσο και εσφαλμένα, πρέπει να διατυπώσουμε μια διάκριση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών όπως ορίζονται τυπικά και των γνωσιακών διεργασιών μέσω των οποίων αυτές συλλαμβάνονται.

Πολλές έννοιες που πρόθυμα χρησιμοποιούμε δεν είναι καθόλου τυπικά ορισμένες. Τις μαθαίνουμε μέσω της εμπειρίας και της χρήσης τους σε κατάλληλα πλαίσια. Αργότερα οι εν λόγω έννοιες μπορούν να εκλεπτυνθούν ως προς το νόημά τους και να ερμηνευθούν με αυξανόμενη πολυπλοκότητα με ή δίχως την πολυτέλεια ενός ακριβούς ορισμού. Συνήθως σ' αυτή τη διεργασία αποδίδεται στην έννοια ένα σύμβολο ή ένα όνομα το οποίο της δίνει τη δυνατότητα να μεταφερθεί μέσω της επικοινωνίας και συμβάλλει στο νοητικό της χειρισμό. Αλλά η πλήρης γνωσιακή δομή που χρωματίζει το νόημα της έννοιας είναι πολύ ανώτερη από την απλή ανάκληση ενός απλού συμβόλου. Είναι κάτι πολύ περισσότερο από οποιαδήποτε νοητική απεικόνιση, είτε εικονιστική ή συμβολική ή άλλη. Κατά τις νοητικές διεργασίες της ανάκλησης και του χειρισμού μιας έννοιας, πολλές συσχετιζόμενες διεργασίες ενεργοποιούνται, τόσο ενσυνείδητα όσο και ασυνείδητα και επηρεάζουν το νόημα και τον τρόπο χρήσης.

Ο D.Tall και ο S. Vinner (1981) χρησιμοποίησαν στις έρευνές τους τον όρο *εννοιοεικόνα* για να περιγράψουν την πλήρη γνωσιακή δομή που συσχετίζεται με την έννοια, η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές απεικονίσεις και τις σχετικές ιδιότητες και διεργασίες. Δομείται με την πάροδο του χρόνου μέσω εμπειριών κάθε είδους, και μεταβάλλεται καθώς ο άνθρωπος συναντά νέα ερεθίσματα και ωριμάζει.

Επίσης ονόμασαν το τμήμα της *εννοιοεικόνας* που ενεργοποιείται σε μια ορισμένη στιγμή, *προκαλούμενη εννοιοεικόνα.* Σε διαφορετικές στιγμές μπορεί να προκληθούν φαινομενικά συγκρουόμενες εικόνες. Μόνο όταν προκαλούνται συγκρουόμενες πτυχές *ταυτόχρονα* μπορεί να υπάρχει κάποια πραγματική έννοια σύγκρουσης ή σύγχυσης. Τα παιδιά που κάνουν μαθηματικά χρησιμοποιούν συχνά διαφορετικές διαδικασίες ανάλογα με το πλαίσιο, διαπράττοντας διαφορετικά σφάλματα ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουν.

Έτσι σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές ο ορισμός μιας έννοιας (αν η έννοια διαθέτει έναν ορισμό) αποτελεί ένα πολύ διαφορετικό ζήτημα. Θα θεωρήσουμε ότι ο ορισμός της έννοιας είναι ένα σχήμα λέξεων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει εκείνη την έννοια. Μπορεί να τον μάθει ένας άνθρωπος μηχανικά ή με απόδοση βαθύτερου νοήματος, να τον μάθει και να τον συσχετίσει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με την έννοια στο σύνολό της. Μπορεί επίσης να είναι μια προσωπική ανακατασκευή ενός ορισμού από το μαθητή. Τότε αποτελεί το σχήμα λέξεων που ο μαθητής χρησιμοποιεί για τη δική του εξήγηση της δικής του (προκαλούμενης) εικόνας της έννοιας. Είτε ο ορισμός της έννοιας του δίνεται είτε κατασκευάζεται από τον ίδιο, ο ίδιος μπορεί να τον μεταβάλλει χρονικά. Κατ' αυτό τον τρόπο ένας *προσωπικός* ορισμός της έννοιας μπορεί να διαφέρει από έναν *τυπικό* ορισμό της έννοιας, καθώς ο τελευταίος είναι ένας ορισμός της έννοιας που είναι γενικά αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα.

Για κάθε άνθρωπο ένας ορισμός της έννοιας παράγει τη δική του εικόνα της έννοιας (ο οποίος θα μπορούσε να ονομαστεί «εικόνα του ορισμού της έννοιας»). Αυτό, φυσικά, είναι τμήμα της *εννοιοεικόνας*. Σε ορισμένους ανθρώπους μπορεί να είναι κενό, ή κατ' ουσίαν ανύπαρκτο. Σε άλλους μπορεί να συσχετίζεται, ή να μη συσχετίζεται, κατά συνεπή τρόπο με άλλα τμήματα της *εννοιοεικόνας* .

Ένας δάσκαλος μπορεί να δώσει τον τυπικό ορισμό και να εργαστεί με τη γενική έννοια για λίγο πριν να περάσει μεγάλες περιόδους στις οποίες όλα τα παραδείγματα δίνονται μέσω τύπων. Σε μια τέτοια περίπτωση η εικόνα της έννοιας μπορεί να εξελιχθεί σε μια πιο περιορισμένη έννοια, που περιλαμβάνει μόνο τύπους, ενώ ο ορισμός της έννοιας είναι κατά μέγα μέρος ανενεργός στη γνωσιακή δομή. Αρχικά ο μαθητής στη θέση αυτή μπορεί να λειτουργήσει πολύ ευχαρίστως με την περιορισμένη του έννοια που είναι επαρκής στο περιορισμένο του πλαίσιο. Μπορεί ακόμη να έχει διδαχθεί να απαντά με τον σωστό τυπικό ορισμό ενώ διαθέτει μια ακατάλληλη εικόνα της έννοιας.

Οι εικόνες των εννοιών του ορίου και της συνέχειας είναι πολύ πιθανό να περιέχουν παράγοντες που συγκρούονται με τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Κάποιοι από αυτούς είναι περίπλοκοι και μπορεί να μην παρατηρηθούν καν συνειδητά από το άτομο, αλλά μπορούν να προκαλέσουν σύγκρουση κατά τη μελέτη της τυπικής θεωρίας. Η τελευταία ασχολείται μόνο με εκείνο το τμήμα της εικόνας του ορισμού της έννοιας το οποίο είναι γενικά κοινώς αναγνωρισμένο από τους μαθηματικούς. Λόγου χάρη, ο λεκτικός ορισμός ενός ορίου «$s_n \rightarrow s$» ο οποίος λέει «μπορούμε να κάνουμε το s_n να βρίσκεται όσο κοντά στο s θέλουμε, αρκεί να πάρουμε το n αρκετά μεγάλο» περιλαμβάνει σε πολλούς ανθρώπους την ιδέα ότι το s_n δε μπορεί να ισούται με το s (βλ. Schwarzenberger & Tall, 1978). Σε έναν τέτοιο άνθρωπο, αυτή η ιδέα αποτελεί μέρος της δικής του εικόνας του ορισμού της έννοιας, αλλά δεν είναι αναγνωρισμένη από τους μαθηματικούς ως μέρος της τυπικής θεωρίας.

Οι D.Tall και ο S.Vinner (1981) ονόμασαν ένα τμήμα της εικόνας της έννοιας ή του ορισμού της έννοιας που μπορεί να συγκρούεται με ένα άλλο τμήμα της εικόνας της έννοιας ή του ορισμού της έννοιας, *δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης*. Τέτοιοι παράγοντες δε χρειάζεται ποτέ να προκληθούν σε περιστάσεις που προκαλούν πραγματική γνωσιακή σύγκρουση, αλλά αν προκληθούν, οι εν λόγω παράγοντες θα ονομαστούν τότε *παράγοντες γνωσιακής σύγκρουσης*.

Σε ορισμένες περιστάσεις οι παράγοντες γνωσιακής σύγκρουσης μπορούν να προκληθούν υποσυνείδητα και η σύγκρουση να εμφανίζεται μόνο μέσα από μια αδρή αίσθηση ανησυχίας. Προτείνουμε ότι αυτή είναι η υποκείμενη αιτία για τέτοια αισθήματα στην επίλυση προβλημάτων ή την έρευνα όταν το άτομο αισθάνεται ότι κάτι δεν είναι σωστό. Μπορεί να περάσει πολύς χρόνος μέχρι να γίνει (αν ποτέ γίνει)

συνειδητά κατανοητός ο λόγος της σύγκρουσης. Οι ιδέες που οι ερευνητές έχουν περιγράψει ως εδώ, εμφανίζονται σαφώς στις διάφορες έννοιες του ορίου και της συνέχειας.

Πώς επιτυγχάνεται η κατανόηση μιας έννοιας;

Όταν γίνεται αναφορά σε μια διαδικασία ή ένα αντικείμενο, σχηματίζεται γι' αυτό μια *νοητική αναπαράσταση* (Dreyfus, 1991). Κάποιοι μαθητές προτιμούν να σκέπτονται και να περιλαμβάνουν εικόνες στις νοητικές τους αναπαραστάσεις, ενώ άλλοι έχουν σύμβολα ή παραδείγματα για να είναι σε θέση να σκεφτούν τις έννοιες. Μια έννοια μπορεί να αναπαρασταθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, ενώ μπορεί ακόμη να υπάρχουν συγκρουόμενες αναπαραστάσεις οι οποίες προκαλούνται σε διαφορετικές στιγμές ανάλογα με το πλαίσιο. Αν οι αναπαραστάσεις δεν συγκρούονται, τότε μπορούν να συγχωνευθούν σε μία όταν το άτομο είναι σε θέση να διαπιστώσει τις συνδέσεις. Ένας συντονισμός ή μια σύνθεση μπορεί να είναι το αποτέλεσμα. Αν είναι ασυνεπείς τότε μπορεί να προκύψει σύγκρουση. Όσο περισσότερες συνδέσεις υπάρχουν μεταξύ των νοητικών αναπαραστάσεων, τόσο καλύτερα κατανοεί το άτομο την έννοια. Τότε μπορεί να μεταβεί από τη μία στην άλλη, ανάλογα με τις απαιτήσεις του έργου.

Ο Piaget (Tall, 1991) ονόμασε τη διαδικασία της πρόσληψης νέων δεδομένων *αφομοίωση* και την αναδιάταξη παλαιών δεδομένων ώστε να ενσωματωθούν στα νέα, *προσαρμογή*. Αυτές οι δύο έννοιες είναι συμπληρωματικές. Αν η προσαρμογή δεν έχει εκτελεστεί ικανοποιητικά, μπορεί να συμβαίνει νέα δεδομένα να βρίσκονται σε σύγκρουση με παλαιά, αλλά και οι δύο αναπαραστάσεις εξακολουθούν να είναι παρούσες την ίδια στιγμή.

Η γνώση μιας έννοιας είναι, σύμφωνα με τον Dubinsky (1991), η τάση του ατόμου να φέρνει στο νου του ένα σχήμα ώστε να είναι σε θέση να χειριστεί, να οργανώσει ή να κατανοήσει μια προβληματική κατάσταση. Μπορεί να είναι δύσκολο να κρατηθεί η μαθηματική γνώση χωριστά από τη μαθηματική κατασκευή. Σε μια προσπάθεια να κάνουμε κάτι τέτοιο, μπορούμε να παρατηρήσουμε άτομα που λύνουν προβλήματα. Αυτό δε θα αποκαλύψει σαφώς τα αντικείμενα, τις διαδικασίες και τα σχήματα, αλλά μπορεί να δείξει πώς δημιουργείται η γνώση. Ένα άτομο μπορεί να ανταποκρίνεται σε

κάποιο είδος προβλημάτων με παρόμοιο τρόπο, κάθε φορά που τα συναντά. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με σχήματα. Αν το άτομο επιτύχει, τα προβλήματα έχουν αφομοιωθεί στο σχήμα. Αν όχι, τότε το υπάρχον σχήμα μπορεί να έχει προσαρμοστεί ώστε να αντιμετωπίσει τη νέα κατάσταση. Μπορεί επίσης να μην έχει συμβεί τίποτε.

Ένα μέρος της μάθησης, σύμφωνα με τον Dubinsky (1991), εφαρμόζει την αναστοχαστική αφαίρεση σε υπάρχοντα σχήματα για να δημιουργήσει νέα που παρέχουν μια κατανόηση των υπό εξέταση εννοιών. Σημαίνει αυτό ότι η μάθηση δε μπορεί να λάβει χώρα μέχρις ότου σχηματιστούν τουλάχιστον πολύ απλουστευτικά σχήματα; Διαφορετικά το αποτέλεσμα μπορεί να είναι ότι οι μαθητές γνωρίζουν μόνο πώς να εκτελούν έργα ρουτίνας και αγνοούν το πραγματικό εύρος μιας έννοιας. Μπορούν επίσης να δημιουργήσουν σχήματα τα οποία είναι ασυνεπή και εσφαλμένα. Περίοδοι σύγχυσης είναι απαραίτητες όταν πρέπει η νέα γνώση να συναρμοστεί με την υπάρχουσα και τούτο αποτελεί τμήμα της μαθησιακής διαδικασίας (Cornu, 1991). Η σύγχυση είναι εκείνη που δημιουργεί ανάγκη για τάξη και οι μαθητές αρχίζουν να προσαρμόζουν τα σχήματά τους.

Οι James Hiebert και Thomas P. Carpenter (1992) ορίζουν την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ως κάτι που το άτομο έχει επιτύχει, όταν μπορεί να χειριστεί την έννοια ως τμήμα ενός νοητικού δικτύου. Ο βαθμός κατανόησης αποφασίζεται μέσω της ισχύος των συνδέσεων στο δίκτυο και του πλήθους των συνδέσεων.

Ο Vinner (1991) αναφέρει ότι η κατανόηση μιας έννοιας δεν είναι το ίδιο με το να είναι κανείς σε θέση να σχηματίσει τυπικά τον ορισμό της, αλλά αν ένα άτομο διαθέτει μια εικόνα της έννοιας τότε μπορεί να κατανοήσει την έννοια.

3.2 ΟΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ/ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ-ΜΑΘΗΤΩΝ ΩΣ ΑΙΤΙΕΣ ΜΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Για τις περισσότερες μαθηματικές έννοιες η διδασκαλία δεν ξεκινά σε παρθένο έδαφος. Στην περίπτωση των ορίων, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία γι' αυτό το θέμα ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις, που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως οι κοινές σημασίες των όρων που χρησιμοποιούνται. Οι αντιλήψεις αυτές περιγράφονται ως ιδέες, που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία, ως *αυθόρμητες αντιλήψεις* (Spontaneous Conceptions, Cornu 1981, 1983). Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σ' ένα μάθημα μαθηματικών, αντίθετα με αυτό που μπορεί να φαντάζονται οι περισσότεροι καθηγητές, αυτές οι ιδέες δεν εξαφανίζονται Αυτές οι αυθόρμητες ιδέες αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών. Ξέρουμε ότι προκειμένου να επιλυθεί ένα πρόβλημα, γενικά δε στηριζόμαστε μόνο στην επαρκή επιστημονική θεωρία, αλλά και στο φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό, ο οποίος είναι θεμελιωμένος στις αυθόρμητες αυτές ιδέες. Τούτο το φαινόμενο είναι γνωστό στην εμπειρική και θεωρητική ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών από την εποχή του Bachelard στη δεκαετία του 1930, αλλά μόνο τον τελευταίο καιρό έχει πλήρως συνειδητοποιηθεί ότι ακριβώς οι ίδιες δυνάμεις δρουν και στην προφανή λογική των μαθηματικών.

Σύμφωνα με την Jennifer Earles Szydlik (2000) οι πεποιθήσεις των φοιτητών για το περιεχόμενο που λογικά αποτελεί τη βάση της έννοιας του ορίου (πεποιθήσεις για τους πραγματικούς αριθμούς, το άπειρο, και τις συναρτήσεις) αποκαλούνται με τον όρο *πεποιθήσεις περιεχομένου* (content beliefs), ενώ οι πεποιθήσεις σχετικά με το πώς η μαθηματική αλήθεια και εγκυρότητα εδραιώνονται, αποκαλούνται *πηγές βεβαιότητας* (sources of conviction) (Frid, 1994).

Ο Cobb (1986) όρισε τις *πεποιθήσεις* ως τις προσωπικές υποθέσεις ενός ατόμου σχετικά με τη φύση της πραγματικότητας. Αυτές οι υποθέσεις αποτελούν τη βάση της προσανατολισμένης σε στόχους δραστηριότητας. Οι πεποιθήσεις είναι διακεκριμένες από

τις στάσεις ή τα συναισθήματα ως προς το ότι έχουν την ελάχιστη συναισθηματική εμπλοκή και είναι οι πιο σταθερές στο χρόνο (McLeod, 1992). Οι πεποιθήσεις ενός ατόμου για τη φύση των μαθηματικών, περιλαμβάνουν υποθέσεις που αφορούν τα αποδεκτά αποδεικτικά στοιχεία και τα μέσα για την απόδοση εγκυρότητας.

Τα αντιπαραδείγματα δεν πείθουν τους φοιτητές να μεταβάλουν τα ασυνεπή ή ατελή μοντέλα τους για το όριο (Sierpinska, 1987, Williams, 1991). Μάλιστα, πολλοί φοιτητές μπορεί να μη βασίζονται στη συνέπεια, τη λογική, ή ακόμη και τα εμπειρικά δεδομένα για την εγκυρότητα στα μαθηματικά, αλλά να βασίζονται αντιθέτως στην *αυθεντία* ενός διδάσκοντος ή ενός εγχειριδίου (Carpenter, Lindquist, Matthews & Silver, 1983, Frid & Olson, 1993, Schoenfeld, 1989). Οι εκκλήσεις στην αυθεντία για τον προσδιορισμό της μαθηματικής αλήθειας αποκαλούνται με τον όρο *εξωτερικές* πηγές βεβαιότητας, και οι εκκλήσεις σε εμπειρικά δεδομένα, στη διαίσθηση, τη λογική, ή τη συνέπεια ονομάζονται *εσωτερικές* πηγές βεβαιότητας (Frid, 1994).

Ο Schoenfeld (1988) έχει παρατηρήσει ότι η φαινομενικά επιτυχής διδασκαλία των μαθηματικών (όπως αποδεικνύεται από υψηλούς βαθμούς φοιτητών σε τυποποιημένες εξετάσεις) μπορεί να καλλιεργήσει αντιλήψεις σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών αντίθετες με εκείνες που έχουν οι μαθηματικοί. Ο ίδιος πρότεινε ότι, λόγου χάρη, η εστίαση της τάξης στην ακρίβεια και το ύφος μπορεί να δημιουργεί στους φοιτητές την αντίληψη ότι τα μαθηματικά επιχειρήματα είναι άσχετα κατά την ανακάλυψη γεωμετρικών κατασκευών από αυτούς. Η έμφαση στις διαδικασίες μπορεί να διδάξει στους φοιτητές ότι «η κατανόηση δεν είναι απαραίτητη κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων – απλά ακολουθούμε τη διαδικασία, είτε έχει νόημα είτε όχι».

Με άλλα λόγια, οι φοιτητές μπορεί να φθάσουν να πιστέψουν ότι το να πεισθούν από τη λογική ή τη συνέπεια στα Μαθηματικά δεν είναι σημαντικό, αλλά το να απομνημονεύουν και να υπακούουν στους κανόνες που τίθενται από το βιβλίο, το διδάσκοντα και τη μαθηματική κοινότητα είναι σημαντικά!

Οι πεποιθήσεις των μαθητών για τις συναρτήσεις μπορούν επίσης να δημιουργήσουν φραγμούς στην κατανόηση του ορίου. Ο Williams (1991) πρότεινε ότι οι μαθητές μπορεί να μην καταφέρουν να αναγνωρίσουν μη οικείες συναρτήσεις ως γνήσιες συναρτήσεις και έτσι να αρνηθούν να τις δεχθούν ως αντιπαραδείγματα στις παρανοήσεις τους για το όριο. Κάποιοι μαθητές αποδίδουν στις συναρτήσεις χαρακτηριστικά όπως η

αντιστρεψιμότητα και η συνέχεια. Μερικοί μπορεί να δέχονται μια συνάρτηση μόνο αν αυτή εκφράζεται μέσω ενός αλγεβρικού τύπου. Οι μαθητές μπορεί επίσης να παρουσιάσουν «σημειακές» κατανοήσεις των συναρτήσεων.

Ο Monk (1994) ισχυρίστηκε ότι η διαχρονική κατανόηση της συνάρτησης από τους φοιτητές σχετίζεται με την κατανόηση εννοιών του απειροστικού λογισμού. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν πώς μια μεταβολή σε μια μεταβλητή οδηγεί σε μεταβολή μιας άλλης. Αυτά τα προϊόντα διανοητικής σύνθεσης θεωρούνται ότι αποτελούν τη βάση της έννοιας του ορίου.

Ο S.Williams (2001) εξέτασε κυρίως άτυπες αντιλήψεις των σπουδαστών για το όριο, από απαντήσεις που προκλήθηκαν από την παρουσίαση κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Σε μια προσπάθεια να εξερευνήσει λεπτομερέστερα αυτό που ο Cornu κάλεσε *«αυθόρμητα πρότυπα των σπουδαστών για το όριο»* και να μελετήσει τα μέσα με τα οποία αυτά τα πρότυπα μπορούν να αλλάξουν και να γίνουν αυστηρότερα, αρχικά ερεύνησε διάφορες απόψεις φοιτητών για το όριο. Παρουσίασε περιγραφές και παραδείγματα ορίων που ήταν σε σύγκρουση με τις απόψεις τους. Αυτή η μελέτη είχε σαν επιδίωξη:

(α) να περιγράψει την ύπαρξη διαφόρων προτύπων ορίου.

(β) να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα παραδείγματα που θα ενθάρρυναν μια αλλαγή στην κατανόηση του ορίου από τους μαθητές προς την κατεύθυνση του τυπικού ορισμού.

(γ) να τεκμηριώσει τους παράγοντες που έχουν επιπτώσεις σε μια τέτοια αλλαγή.

Ο Williams έδωσε ένα συνοπτικό ερωτηματολόγιο σχετικά με τα όρια σε 341 φοιτητές που παρακολούθησαν μαθήματα Απειροστικού Λογισμού στο πανεπιστήμιο. Οι σπουδαστές κλήθηκαν να χαρακτηρίσουν κάθε μια από έξι προτάσεις που τους δόθηκαν για τα όρια ως αληθή ή ψευδή, να διαλέξουν μία πρόταση που θεωρούσαν ότι περιγράφει καλύτερα το όριο και να γράψουν μερικές δικές τους προτάσεις που εξηγούν τι σκέφτονται ότι είναι ένα όριο. Ο Williams , από τα αποτελέσματα αυτού του ερωτηματολογίου, επέλεξε δέκα θέματα τα οποία παρουσίαζαν με σαφήνεια κάποιες από τις συνηθισμένες άτυπες απόψεις για το όριο. Μεταξύ αυτών περιέχονται αντιλήψεις που περιλαμβάνουν τη δυνατότητα μια συνάρτηση να φθάσει το όριο της, δυναμικές ή με προσανατολισμένη κίνηση απόψεις για το όριο, έννοιες του ορίου ως φράγμα αλλά και πιο στατικές απόψεις. Παραθέτουμε τα πρότυπα αυτά που περιγράφουν ένα μεγάλο

μέρος των **αντιλήψεων των μαθητών** για το όριο μιας συνάρτησης και τον τυπικό ορισμό της (Willíams, 2001) .

1) Ένα όριο είναι ένα είδος εκτίμησης μιας δεδομένης τιμής που η συνάρτηση επιτυγχάνει με ένα δεδομένο σφάλμα. Μπορεί να πάρει κανείς (για x→s) ολοένα καλύτερες εκτιμήσεις περιορίζοντας το x κοντά στο s και μικραίνοντας το αποδεκτό σφάλμα, αλλά η συνάρτηση δε φθάνει ποτέ στο όριό της.

Ένα όριο είναι στην πραγματικότητα μια προσέγγιση και όχι ένα ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα. Παίρνοντας τιμές κοντά στο s, μπορείτε να πλησιάσετε το όριο αλλά όχι να πάτε πέρα από αυτό.

2) Ένα όριο είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο κοντά στο οποίο η συνάρτηση παίρνει τιμές αλλά ποτέ ακριβώς ίσες με αυτό. Εάν βρείτε το όριο της f(x) καθώς x→s, μπορείτε να κάνετε τη συνάρτηση να πάει όσο κοντά θέλετε στο όριο, αλλά δεν θα γίνει ποτέ πραγματικά ίση με αυτό, ακριβώς όπως το x ποτέ πραγματικά δεν γίνεται ίσο με s.

Όταν παίρνετε ένα όριο, δεν ενδιαφέρει εάν το x γίνει ίσο με s, απλώς ότι είναι κοντά στο s. Ομοίως και με την f(x). Δεν υπάρχει ζήτημα εάν η f(x) είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το όριο, αλλά μόνο ότι είναι κοντά σε αυτό. Εάν η f(x) κάποτε γίνει ίση με το όριο, τότε δεν έχετε πραγματικά ένα όριο.

3) Το όριο είναι το μέγιστο (ή ελάχιστο) μιας συνάρτησης καθώς το x πλησιάζει κάποιο αριθμό. Καθώς πλησιάζει αυτόν τον αριθμό, οι τιμές της συνάρτησης φράσσονται από την αριθμητική τιμή του ορίου.

Παραδείγματος χάριν, όπως όταν αυξάνεται μια συνάρτηση πολύ γρήγορα φθάνοντας στο επίπεδο μιας οριζόντιας ασύμπτωτης, το όριο είναι η τιμή που δείχνει αυτή η οριζόντια ευθεία.

Έτσι ένα όριο είναι ένα σημείο ή ένας αριθμός μετά από τον οποίο οι τιμές της συνάρτησης δεν μπορούν να πάνε. Στην πραγματικότητα, οι τιμές της ποτέ δεν φθάνουν στο όριο, αλλά μπορούν να πλησιάζουν κοντά.

4) Μια συνάρτηση f έχει ένα όριο L καθώς x →s, εάν οι αριθμητικές τιμές της για x κοντά στο s είναι κοντά στο L. Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε πολύ μικρό διάστημα γύρω από το L, μπορείτε να βρείτε ένα διάστημα γύρω από το s έτσι ώστε όλες οι τιμές του x στο διάστημα γύρω από το s αντιστοιχούν σε τιμές της συνάρτησης κάπου στο διάστημα γύρω από το L.

5) Ένα όριο έχει την έννοια ότι όταν το x κινείται όλο και πιο κοντά προς κάποιο αριθμό s, οι τιμές f(x) κινούνται πιο κοντά προς το όριο.

6) Όταν μια συνάρτηση κινείται προς έναν ορισμένο αριθμό και πηγαίνει όλο και πιο κοντά του, εκείνος ο αριθμός είναι το όριο της.

Έτσι, ένα όριο είναι ένας αριθμός ή ένα σημείο προς το οποίο μια συνάρτηση πηγαίνει, αλλά δεν το ξεπερνά. Είναι σαν να διασχίσετε την μισή απόσταση από ένα τοίχο, κατόπιν την μισή από την υπολειπόμενη και ούτω καθ'εξής. Συνεχίζετε να πλησιάζετε πιο κοντά και ο τοίχος είναι όπως το όριο. Τελικά, το να φθάσετε στο όριο, είναι ακριβώς σαν να φθάσετε στον τοίχο.

7) Αυτό που είναι σημαντικό για τα όρια είναι η ιδέα της «εγγύτητας». Όταν λέτε το όριο καθώς το x προσεγγίζει το s, σημαίνει ότι εάν το x είναι κοντά στο s, τότε η f(x) είναι κοντά στο όριο. Αυτό είναι που ο ορισμός προσπαθεί να πει. Η ιδέα του ορισμού είναι να αποδείξει ότι μπορείτε να πάτε τόσο κοντά όσο θέλετε. Λέει ότι μπορεί να κάνει το f(x) να πάει τόσο κοντά όσο θέλει στο όριο με την επιλογή x αρκετά κοντά στο s και το αποδεικνύει λέγοντας πόσο κοντά το x πρέπει να είναι στο s όποτε να πείτε πόσο κοντά θέλετε το f(x) να είναι στο όριο. Αυτή είναι περίπου όλη η ουσία του ε-δ ορισμού.

8) Δεν μπορείτε να υπολογίσετε ένα όριο μόνο με το να επιλέγετε σημεία κοντά σε ένα αριθμό, επειδή μπορείτε μόνο να πάρετε έναν πεπερασμένο πλήθος σημείων και αυτό δεν είναι αρκετό να σας πει τι ακριβώς κάνει η συνάρτηση πραγματικά. Μπορεί να βρείτε κάτι διαφορετικό όταν φτάσετε πιο κοντά από το προηγούμενο σημείο. Πρέπει πραγματικά να αποδείξετε ότι μπορείτε να πηγαίνετε τόσο κοντά όσο θέλετε στον αριθμό και ταυτόχρονα η συνάρτηση θα εξακολουθεί να είναι ακόμα κοντά στο όριο. Αυτό εξηγεί γιατί χρειάζεστε τα θεωρήματα ορίου.

Ο S.Williams κατόπιν επιλέγοντας κάποιους μαθητές μέσω συνεντεύξεων τους ζήτησε να εξηγήσουν τις απόψεις τους για το όριο σε σχέση με τις προτάσεις που παρουσιάστηκαν από τον ερευνητή οι οποίες συχνά ήταν και αλληλοσυγκρουόμενες. Επίσης τους παρουσίασε περιπτώσεις ορίων που ερχόντουσαν σε αντίθεση με τις απόψεις τους παρέχοντας τους κίνητρα για να τις αλλάξουν, εξηγώντας όμως ταυτόχρονα το γιατί. Από αυτές τις συνεντεύξεις, ο S.Williams (1991) έβγαλε διάφορα συμπεράσματα για τις απόψεις των μαθητών σχετικά με τα όρια. Μεταξύ άλλων παρατηρεί ότι:

Οι μαθητές συχνά θεωρούν την ευκολία και την πρακτικότητα ενός προτύπου για το όριο σημαντικότερη από τη μαθηματική τυπικότητα. Αυτό σημαίνει ότι επιλέγουν τα

πρότυπα του ορίου που τους επιτρέπουν να αντιμετωπίσουν τα τυποποιημένα είδη ασκήσεων που βλέπουν στα τεστ. Τέτοια πρότυπα τείνουν να θεωρηθούν ικανοποιητικά για τους σκοπούς των περισσότερων μαθητών.

Τα στοιχεία αυτής της μελέτης επίσης επιβεβαιώνουν και τη διαδικαστική, δυναμική άποψη των σπουδαστών για το όριο, όπως π.χ. να υπολογίζουν τιμές της συνάρτησης σε διαδοχικά σημεία καθώς αυτά πλησιάζουν όλο και πιο κοντά σε ένα σημείο που μας ενδιαφέρει. Επί πλέον φάνηκε να υπάρχουν πολυάριθμες ιδιοσυγκρασιακές παραλλαγές σε αυτό το θέμα, μερικές από τις οποίες είναι εξαιρετικά δύσκολο να εκτοπιστούν. Λαμβάνοντας υπόψη τη σύνθετη φύση μιας γνωστικής αλλαγής, δεν αποτελεί έκπληξη ότι οι μαθητές απέτυχαν και σε αυτήν την ερευνητική προσπάθεια τελικά να υιοθετήσουν μια πιο τυπική άποψη του ορίου. Τα στοιχεία της μελέτης δείχνουν ότι οι απόψεις των σπουδαστών για την μαθηματική αλήθεια, η αξία που δίνουν στην πρακτικότητα και την απλότητα στα πρότυπα του ορίου, οι καθημερινές απαιτήσεις της τάξης στον Απειροστικό Λογισμό, η προηγούμενη εμπειρία τους με γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και η πίστη τους για την a priori ύπαρξη τους, συνδυαζόμενα κάνουν δύσκολο για αυτούς να εκτιμήσουν την ανάγκη για έναν τυπικό ορισμό του ορίου και παρεμποδίζουν την εννοιολογική αλλαγή. Το τελικό συμπέρασμα για τους σπουδαστές σε αυτήν την μελέτη είναι η διαπίστωση μιας έλλειψης εκτίμησης για τη τυπική σκέψη, η οποία τους αφαίρεσε αποτελεσματικά οποιοδήποτε κίνητρο να μάθουν αυτό που είναι τελικά ένας τυπικός ορισμός του ορίου.

Ο Williams σημειώνει:

«Όλα αυτά προτείνουν ότι η βελτίωση της κατανόησης των ορίων από τους σπουδαστές από μια τυπική άποψη, απαιτεί μια προσεκτική διδασκαλία η οποία παίρνει υπόψη της την πλούσια ποικιλία από τα πρότυπα ορίου που οι σπουδαστές φέρνουν στην τάξη όπως και τα είδη της γνώσης που εκτιμούν. Υπό κάποια έννοια, η προγενέστερη γνώση τους περί γραφικών παραστάσεων και συναρτήσεων πρέπει να αφαιρεθεί για να φανούν βασικές υποθέσεις που οι τυπικοί ορισμοί προσπαθούν να εξετάσουν.»

3.2.1 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΟΡΙΩΝ

Η Aline Robert (1982) έχει μελετήσει τα διαφορετικά πρότυπα που οι μαθητές μπορούν να έχουν για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας. Παρά το γεγονός ότι στους μαθητές έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός της έννοιας, όταν τους ζητείται να την περιγράψουν, ενεργούν σα να μη τους είχε δοθεί και έχουν την τάση να δημιουργούν αντιλήψεις που σχετίζονται με διάφορες πτυχές της πρότερης εμπειρίας τους.

Μερικοί μαθητές πρότειναν στοιχειώδη μοντέλα, όπως:

σταθερή: «Οι τελικοί όροι έχουν πάντα την ίδια τιμή»,

φράγμα: "Οι τιμές δεν μπορούν να περάσουν το *l*»

Επιπλέον υπήρξαν και άλλα μοντέλα που προέκυψαν από την τυπική διδασκαλία:

Μονοτονικά* και *δυναμικά-μονοτονικά μοντέλα

«μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα ακολουθία άνω φραγμένη (ή φθίνουσα κάτω φραγμένη»

«μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα (ή φθίνουσα) ακολουθία που πλησιάζει ένα όριο».

Δυναμικά μοντέλα:

«η u_n τείνει στο *l*»

«η u_n πλησιάζει το *l*»

«η απόσταση της u_n από το *l* γίνεται μικρή»

«οι τιμές πλησιάζουν έναν αριθμό όλο και περισσότερο».

Στατικά μοντέλα:

«τα u_n βρίσκονται σ' ένα διάστημα κοντά στο *l*»

«τα u_n είναι συγκεντρωμένα γύρω από το *l* »

«τα στοιχεία της ακολουθίας καταλήγουν να βρίσκονται σε μια γειτονιά γύρω από το *I*».

Μικτά μοντέλα:

«ένα μίγμα των ανωτέρω ».

Η Robert βρήκε ότι τα μοντέλα αυτά επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι φοιτητές του πανεπιστημίου έλυναν τα προβλήματα. Σαφώς δεν υπάρχει μια μοναδική έννοια του ορίου στο νου των μαθητών. Είναι εμφανές ότι οι φοιτητές διαθέτουν ποικίλες εικόνες της έννοιας.

Επιπλέον, είναι επίσης προφανές ότι η αρχική διδασκαλία τείνει να δίνει έμφαση στη *διαδικασία* προσέγγισης, παρά στην ίδια την έννοια του ορίου. Το σύνολο των εικόνων της έννοιας που συνδέονται μ' αυτή τη διαδικασία, περιέχει πολλούς παράγοντες που συγκρούονται με τον τυπικό ορισμό («πλησιάζει αλλά δε μπορεί να φθάσει», «δε μπορεί να το περάσει», «τείνει», κ .λ π.). Κατά συνέπεια οι μαθητές αναπτύσσουν εικόνες των ορίων και του απείρου που σχετίζονται με παρανοήσεις *που* αφορούν τη διαδικασία «της προσέγγισης» ή «της αύξησης» ή «της επ' άπειρον συνέχισης».

Σε μια εθνογραφική μελέτη για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τα όρια και το άπειρο, η Sierpinska (1987) ανέλυσε τις εικόνες έννοιας 31 δεκαεξάχρονων μαθητών μαθηματικών και φυσικής πριν διδαχθούν απειροστικό λογισμό. Έπειτα τους ταξινόμησε σε ομάδες στις οποίες έδωσε ξεχωριστές ονομασίες:

Ο Michael και ο Christopher είναι **ασυνείδητοι απειριστές** (τουλάχιστον στην αρχή): λένε "άπειρο", αλλά θεωρούν "πολύ μεγάλο". Και για τους δύο το όριο πρέπει να είναι η τελευταία τιμή του τελευταίου όρου... για τον Michael η τελευταία τιμή αυτή είναι είτε συν άπειρο (ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός) είτε πλην άπειρο. Δεν είναι έτσι για τον Christopher που είναι πιο δεκτικός στις δυναμικές μεταβολές των τιμών των όρων. Η τελευταία τιμή δεν τείνει πάντα στο άπειρο, μπορεί να τείνει σε κάποιο μικρό και γνωστό αριθμό.

Ο George είναι **συνειδητός απειριστής**: Το άπειρο είναι κάτι μεταφυσικό, δύσκολο να γίνει κατανοητό με ακριβείς ορισμούς. Αν τα μαθηματικά πρέπει να είναι μια ακριβής επιστήμη τότε πρέπει να αποφεύγουμε να μιλάμε για το άπειρο και να μιλάμε μόνο για πεπερασμένους αριθμούς. Στη διατύπωση γενικών νόμων μπορούμε να χρησιμοποιούμε γράμματα για να συμβολίζουμε συγκεκριμένους αλλά αυθαίρετους πεπερασμένους αριθμούς. Στην περιγραφή της συμπεριφοράς των ακολουθιών *το σημαντικότερο πράγμα είναι να χαρακτηριστεί ο νιοστός όρος* με τη γραφή του γενικού τύπου. Τότε για ένα δεδομένο ν μπορεί κανείς να υπολογίσει την ακριβή τιμή του όρου ή να δώσει μια προσέγγιση αυτής της τιμής.

Ο Paul και ο Robert είναι **κινητικοί απειριστές:** γι' αυτούς η ιδέα του απείρου συνδέεται με την ιδέα του χρόνου. Ο Paul είναι δυνητιστής: Για να σκεφτούμε κάποια ολότητα, ένα σύνολο ή μια ακολουθία πρέπει να διατρέξουμε νοητά κάθε στοιχείο του. Είναι αδύνατον να σκεφτούμε μ' αυτό τον τρόπο για ένα άπειρο πλήθος στοιχείων. Η κατασκευή ενός άπειρου συνόλου ή μιας ακολουθίας δεν μπορεί ποτέ να ολοκληρωθεί. Το άπειρο υπάρχει μόνο δυνητικά. Ο Robert είναι *δυνητικός πραγματιστής:* είναι δυνατό [γι' αυτόν] να γίνει νοητικά ένα «άλμα στο άπειρο»: το άπειρο μπορεί εν δυνάμει να πραγματοποιηθεί τελικά. Και για τους δυο, τον Paul και τον Robert, το σημαντικό είναι να δούμε πώς οι όροι της ακολουθίας μεταβάλλονται, αν υπάρχει μια τάση να προσεγγίσουν κάποια σταθερή τιμή. Για τον Paul, ακόμη κι αν οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν ο ένας τον άλλο ολοένα περισσότερο ώστε να διαφέρουν λιγότερο από οποιαδήποτε δεδομένο αριθμό *δεν θα φθάσουν ποτέ αυτή την τιμή.* Ο Robert σκέφτεται *θεωρητικά* ότι οι όροι *θα φθάσουν τελικά αυτή την τιμή στο άπειρο.*

Με αυτό το τρόπο η Sierpinska εκθέτει τις διαχρονικές συγκρούσεις για τα όρια και το άπειρο που υπήρχαν ανέκαθεν και *που* συνεχίζουν να υπάρχουν στους μαθητές μας σήμερα.

Άλλες διαδικασίες του ορίου, όπως η έννοια της συνέχειας και της ολοκλήρωσης, αν και επιφανειακά δείχνουν πολύ διαφορετικές, *από* γνωστική άποψη παρουσιάζουν παρόμοιες δυσκολίες. Λόγου χάρη, η συνέχεια πάσχει *από* το γεγονός ότι υφίσταται μια αυθόρμητη αντίληψη *που* προκαλείται *από* τη χρήση της καθημερινής γλώσσας σε φράσεις όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» (δηλαδή, δεν υπήρξε διακοπή στη

βροχόπτωση) ή «η σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη» (δεν υπάρχουν κενά στις ράγες). Αυτή η άποψη ενισχύεται συχνά από τις προσπάθειες του δασκάλου να δώσει μια απλή ενόραση στην έννοια της συνέχειας λέγοντας ότι η γραφική παράσταση «είναι μονοκόμματη» ή «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί», συγχέοντας μ' αυτό τον τρόπο τις μαθηματικές έννοιες της συνέχειας .

3.2.2 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΗΘΟΥΣ ΓΛΩΣΣΑΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Οι λέξεις και οι φράσεις που οι μαθηματικοί θεωρούν συνώνυμες μπορούν να έχουν πολύ διαφορετικές σημασίες για τους φοιτητές. Ο Monaghan (1991) μελέτησε συστηματικά τα αποτελέσματα της γλώσσας που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία για την εκμάθηση των ορίων. Παρατήρησε ότι στις λέξεις που λαμβάνονται από τη φυσική γλώσσα και έχουν γνωστές καθημερινές έννοιες, δίνονται λεπτά διαφορετικά νοήματα καθώς τις χρησιμοποιούμε σε μαθηματικό επίπεδο. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση στους φοιτητές.

Ο J.Monaghan ασχολήθηκε συγκεκριμένα με τις έμφυτες ασάφειες στις τέσσερις λέξεις: ***τείνει, προσεγγίζει, συγκλίνει,*** και ***όριο*** σε γραφικό αλλά και αριθμητικό πλαίσιο. Αυτές οι φράσεις χρησιμοποιούνται στα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού και οι μαθηματικές σημασίες τους θεωρούνται ισοδύναμες από τους διδάσκοντες.

Αν και για ένα μαθηματικό προτάσεις όπως *«Η καμπύλη τείνει στο 0», «η καμπύλη προσεγγίζει το 0», «η καμπύλη συγκλίνει στο 0» και «η καμπύλη έχει το 0 ως όριο»,* όλες σημαίνουν το ίδιο πράγμα, οι μαθητές συμφώνησαν συχνά με τη μία, αλλά διαφώνησαν με την άλλη , αναφερόμενοι στην ίδια καμπύλη ή ακολουθία.

Με βάση και τις προτάσεις που γράφτηκαν με τους τέσσερις όρους στηριγμένες την καθημερινή εμπειρία των μαθητών προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

ΟΡΙΟ: *Το όριο* θεωρήθηκε συχνά ως φράγμα εφικτό να το φτάσεις ή και όχι. Μερικά παραδείγματα περιέλαβαν τα νόμιμα όρια, όπως τα όρια ταχύτητας. Είναι δυνατό να ξεπεραστεί ένα όριο ταχύτητας, αν και απαγορεύεται. Μετά από το όριο ταχύτητας εμφανίστηκαν τα φυσικά όρια και διανοητικά όρια. Τα φυσικά όρια είναι σύνορα που είναι

τεχνικά ιδιαίτερα απίθανο να ξεπεραστούν, όπως το ύψος που κάποιος μπορεί να υπερπηδήσει. Τέτοια όρια δεν αφορούν μόνο τους ανθρώπους. Τα αεροπλάνα έχουν ένα όριο (ανώτατο όριο), το ραντάρ έχει ένα όριο ανίχνευσης κτλ. Αυτά τα όρια υπονοούν ένα φράγμα. Μπορούν να αντιπροσωπεύσουν την πιο ακραία πραγματοποίηση ή το σημείο ακριβώς μετά από το εφικτό.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΕΙ: *Το προσεγγίζει* έγινε αντιληπτό με ένα δυναμικότερο τρόπο. Περιέλαβε αντικείμενα που κινούνται προς άλλα αντικείμενα, μερικές φορές με την ιδέα θα μπορούσαμε να φθάσουμε τελικά το αντικείμενο που προσεγγίζεται (*«Το τραίνο προσέγγισε τον σταθμό»)* και μερικές φορές με την θεώρηση ότι το κινούμενο αντικείμενο δεν θα φθάσει το αντικείμενο που προσεγγίζεται, ούτε καν ιδιαίτερα κοντά.

ΤΕΙΝΕΙ: Στις απαντήσεις σχεδόν όλα τα παραδείγματα για το *τείνει* περιελάμβαναν προσωπικές προτιμήσεις. Π.χ *«τείνει να πιει πολύ»*, *«ο καιρός στις διακοπές τείνει να είναι κακός»*. Στα μαθηματικά παραδείγματα, οι σπουδαστές χρησιμοποίησαν το *τείνει* με την ίδια έννοια με *το προσεγγίζει*. Και τα δύο θεωρούνται δυναμικά ότι προκαλούν μετακίνηση και γενικά αναφέρονται στην κίνηση ενός αντικειμένου που συνήθως δεν φθάνει στο σημείο που πλησιάζει.

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ : *Το «συγκλίνει»* θεωρήθηκε επίσης δυναμικά, αλλά συνήθως περιέλαβε δύο συνεχή αντικείμενα, όπως *«οι δρόμοι μας συγκλίνουν»* ή *«οι ακτίνες φωτός συγκλίνουν»*. Άλλες αναφορές περιέλαβαν διακριτά αντικείμενα που ίσως έρθουν σε επαφή όπως *«ο ποδοσφαιριστής συγκλίνει στη μπάλα»* Ένας σπουδαστής είπε ότι δύο ακολουθίες θα μπορούσαν ίσως να συγκλίνουν η μία στην άλλη, όπως οι ακτίνες φωτός, αλλά δεν έχει ιδιαίτερο νόημα να μιλήσει κάποιος για σύγκλιση μίας αριθμητικής ακολουθίας σε μια άλλη ακολουθία. Στις γραφικές παραστάσεις (συνεχείς καμπύλες) κάτι τέτοιο έχει περισσότερο νόημα. Όμως λέγοντας π.χ. ότι η $\psi=1/\chi$ συγκλίνει στο 0 όταν το χ τείνει στο άπειρο, μπορούμε να σκεφτούμε το 0 ως την ευθεία $\psi = 0$ και όχι ως έναν αριθμό. Επίσης ο όρος *«συγκλίνω»* συχνότερα λαμβανόταν ως φτάνω ή αγγίζω, παρά φτάνω πιο κοντά χωρίς να αγγίξω, όπως υπονοούσαν λέγοντας *τείνει* και *προ-*

σεγγίζει.

Όσον αφορά τις διαφορές-ομοιότητες των αντιλήψεων και την πιθανή σύγχυση που προκαλούν αυτές οι φράσεις όταν χρησιμοποιούνται, μπορούν να σημειωθούν τα εξής:

Το πρώτο πράγμα που παρατηρείται είναι ότι τα τρία ρήματα *τείνει, προσεγγίζει* και *συγκλίνει* δημιουργούν μια διαφορετική αίσθηση από το ουσιαστικό *όριο.* Αυτό δεν προκαλεί έκπληξη δεδομένου ότι τα ρήματα είναι «λέξεις δράσης». Η δράση σε αυτό το μαθηματικό πλαίσιο είναι ότι «φτάνουμε ή πλησιάζουμε σε ένα όριο», κάτι που οδηγεί σε μια δυναμική ερμηνεία. Από τα τρία ρήματα, εντούτοις, το *συγκλίνει φαίνεται διαφορετικό,* επειδή οι εικόνες που προκαλεί δεν ισχύουν πάντα σε μαθηματικά πλαίσια. *Τείνει* και *προσεγγίζει* πολύ συχνά θεωρήθηκαν ως ίδιο πράγμα. Αντιπροσωπεύουν μια μετακίνηση προς ένα τέρμα, χωρίς πάντα να φθάνουμε εκεί. Η ασάφεια των ρημάτων (ειδικά *τείνει* και *προσεγγίζει)* προκύπτει από το ότι τα ρήματα αντιπροσωπεύουν τη μετακίνηση προς το τέρμα ενώ το όριο είναι το τέρμα.

Η ομοιότητα στις σημασίες των φράσεων προκαλεί αφ' εαυτής σύγχυση. Για παράδειγμα ο όρος συγκλίνει μπορεί να σημαίνει πολλά διαφορετικά πράγματα και ανάλογα με ποια σημασία χρησιμοποιείται η απάντηση σε μία ερώτηση μπορεί να διαφέρει. Ο όρος «τείνει» προκαλεί και αυτός κάποια σύγχυση, αλλά φαίνεται να είναι παρόμοιος με το «έχει σαν όριο». Ο Monaghan θεωρεί ότι από μαθηματική άποψη οι συνώνυμοι όροι οδηγούν σε διαφορετικά συμπεράσματα και απαντήσεις με την ερμηνεία τους στην φυσική γλώσσα και έτσι προκαλούν διαφορετικές νοητικές αναπαραστάσεις για την ίδια μαθηματική έννοια.

Ο Monaghan καταλήγει στο συμπέρασμα ότι :

«Οι φοιτητές πρέπει να οδηγηθούν να ερευνήσουν και να συζητήσουν τις αντιλήψεις τους με στόχο να συνειδητοποιήσουν πώς οι καθημερινές έννοιες των μαθηματικών φράσεων μπορούν να τους οδηγήσουν σε εσφαλμένες ερμηνείες».

Σύμφωνα με τον Cornu (1991) οι έρευνες έχουν δείξει πολλές διαφορετικές σημασίες για την έκφραση «τείνει προς»:

→ πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του) - [to approach]

→ πλησιάζει ... χωρίς να το φθάνει - [to approach... without reaching it]

→ πλησιάζει ... μέχρι σχεδόν να το φθάσει - [to approach... just reaching it]

→ μοιάζει (χωρίς οποιαδήποτε παραλλαγή, όπως «αυτό το μπλε τείνει προς το βιολετί»)- [to resemble]

Ο Cornu (1991) επισημαίνει ότι η ίδια η λέξη όριο μπορεί να έχει διαφορετική σημασία για διαφορετικούς ανθρώπους σε διαφορετικές στιγμές. Συχνότερα θεωρείται ως ένα «αξεπέραστο όριο», αλλά μπορεί επίσης να είναι:

► ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φθάσουμε – [an impassible limit which is reachable],

►ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι αδύνατο, αξεπέραστο – [an impassible limit which is impossible to reach],

►ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε, χωρίς να το φθάνουμε – [a point which one approaches, without reaching it],

► ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε και το φθάνουμε – [a point which one approaches and reaches],

►ένα ανώτερο (ή κατώτερο) όριο,

► ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο,

► ένα διάστημα,

►αυτό που έπεται «αμέσως μετά από» εκείνο ως το οποίο μπορούμε να φθάσουμε,

►ένας περιορισμός, μια απαγόρευση, ένας κανόνας,

► το τέλος, το τέρμα.

Η Lucia Grugnetti και η Angela Rizza (2002) ερεύνησαν τις σημασίες που δίνονται στις λέξεις «όριο» και «άπειρο» και το πώς πιθανόν αυτές οι σημασίες έρχονται σε μια αντιπαράθεση επηρεάζοντας η μία την άλλη. Συνοπτικά τα αποτελέσματα απαντήσεων ενός δείγματος μαθητών για το τι σημαίνει η λέξη όριο ήταν τα εξής:

1. Η ιδέα ενός εμποδίου, φράγματος, κανόνα περιορισμού.	44%
2. Η ιδέα ενός συνόρου, κλεισίματος.	30%
3. Η ιδέα ενός άκρου - ακραίου σημείου.	19%
4. Άλλες έννοιες - σημασίες (και μαθηματικές).	3%
5. Καμία απάντηση.	4%

Η ισχυρή ιδέα ενός ορίου ως εμπόδιο-φράγμα αντιπροσωπεύει με τη σειρά της ένα εμπόδιο στη διαδικασία κατανόησης της έννοιας του ορίου. Είναι ένα εμπόδιο που μπορεί να προκαλέσει τουλάχιστον δύο τύπους δυσκολιών:

α) Δυσκολία στη σύνδεση του ορίου με την ιδέα μιας διαδικασίας συνεχούς επανάληψης (και ως εκ τούτου και με μια διαδικασία που συνεχίζεται επ' άπειρον).

β) Δυσκολία στην αποδοχή της δυνατότητας ενός «άπειρου» ορίου.

Η παρουσία ενός είδους αντίθεσης μεταξύ της ιδέας του ορίου και του απείρου εμφανίστηκε με μεγάλη συχνότητα στην απάντηση της ερώτησης *«εξηγείστε τι σημαίνει για σας η λέξη άπειρο».*

Η συνήθης απάντηση είναι: *«Το άπειρο είναι κάτι που δεν έχει κανένα όριο»*. Φαίνεται πώς ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών συνδέει τον όρο «όριο» με μια ιδέα του «πεπερασμένου» στο χρόνο και στο χώρο, κάτι που τους οδηγεί να θεωρήσουν το όριο ως αντίθετο του άπειρου. Άρα έχουμε την εμφάνιση αντιλήψεων όπως:

«Μια διαδικασία που έχει κάποιο όριο πρέπει να είναι πεπερασμένη».

«Όριο και άπειρο είναι δύο ασυμβίβαστες έννοιες και άρα το όριο για παράδειγμα μιας συνάρτησης δεν μπορεί να απειρίζεται».

Όπως υπογραμμίζουν οι Letizia και Marchini (1997), είναι απαραίτητο να ληφθούν πληροφορίες για τα προβλήματα που ορισμένοι όροι μπορούν να προκαλέσουν στο μυαλό των μαθητών, ώστε να είναι δυνατόν να επιτευχθεί μια σύνδεση με την εμπειρική κατανόηση του υποβάθρου τους. Αυτό μπορεί να βοηθήσει να αποφευχθεί η δημιουργία

εκείνου του τύπου εμποδίου που αφορά την αδυναμία επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή για το ίδιο το θέμα και είναι ένα από το χειρότερα του είδους του.

Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου, παρατηρούμε ότι οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν αρχίσουν οποιαδήποτε μαθήματα (Schwarzenberger & Tall, 1978) και οι μαθητές συνεχίζουν να βασίζονται σ' αυτές τις σημασίες και αφότου τους έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός. Από τον ένα μαθητή στον άλλο η σημασία που αποδίδεται στις λέξεις ποικίλλει. Για ένα μαθητή μια λέξη μπορεί να έχει διάφορες σημασίες, ανάλογα με τις περιστάσεις. Οι αυθόρμητες ιδέες παραμένουν για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Οι έρευνες δείχνουν ότι μπορούν να παραμείνουν και σε μαθητές σε πολύ πιο προχωρημένο στάδιο μάθησης. Εν όψει της ποικιλίας αυθόρμητων εννοιών και της αυξανόμενης συνειδητοποίησης του φορμαλισμού από τον μαθητή συμβαίνει συχνά να υπάρχουν ταυτόχρονα στο μυαλό ενός ατόμου αντιφατικές ιδέες, που οδηγούν σε μια καθολική εννοιοεικόνα που περιέχει πιθανούς συγκρουόμενους παράγοντες με την έννοια των Tall & Vinner.

3.3 ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

Η έννοια του *γνωστικού εμποδίου* έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί, ώστε να βοηθήσει να προσδιοριστούν οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία, και να καθοριστούν καταλληλότερες στρατηγικές για τη διδασκαλία. Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις διαφορετικούς τύπους εμποδίων: τα *γενετικά* και *ψυχολογικά* εμπόδια που εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της προσωπικής ανάπτυξης του μαθητή, *τα διδακτικά* εμπόδια που εμφανίζονται εξαιτίας του δασκάλου και της φύσης της διδασκαλίας και τα *επιστημολογικά* εμπόδια που εμφανίζονται λόγω της φύσης των ίδιων των μαθηματικών εννοιών. Κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας μιας μαθηματικής έννοιας έχει ύψιστη σημασία ο προσδιορισμός των πιθανών εμποδίων, ιδιαίτερα των επιστημολογικών εμποδίων.

Ο όρος του *εμποδίου* εισήχθη από τον Gaston Bachelard (1938), ο οποίος λέει :

«Πρέπει να θέσουμε το πρόβλημα της επιστημονικής γνώσης από την άποψη των εμποδίων. Δεν αρκεί μόνο να λαμβάνουμε υπόψη τα εξωτερικά εμπόδια, όπως η πολυπλοκότητα και η προσωρινότητα των επιστημονικών φαινομένων, ούτε να θρηνούμε την αδυναμία των ανθρώπινων αισθήσεων και του πνεύματος. Είναι μέρος της δράσης της απόκτησης της ίδιας της γνώσης, το να γνωρίσουμε βαθιά, εκείνο που εμφανίζεται, ως αναπόφευκτο αποτέλεσμα της λειτουργικής ανάγκης, να καθυστερεί την ταχύτητα της μάθησης και να προκαλεί γνωστικές δυσκολίες. Εδώ μπορούμε να βρούμε τις αιτίες της στασιμότητας ,ακόμη και της οπισθοδρόμησης και ίσως να αντιληφθούμε τους λόγους της αδράνειας, τους οποίους ονομάζουμε επιστημολογικά εμπόδια».

Συνεχίζει λέγοντας:
«Αντιμετωπίζουμε νέα γνώση που έρχεται σε αντίθεση με την προϋπάρχουσα γνώση και έτσι πρέπει να καταστρέψουμε τις προϋπάρχουσες λανθασμένες ιδέες».

Έδειξε λοιπόν ότι τα επιστημολογικά εμπόδια εμφανίζονται στην ιστορική ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης και στην εκπαιδευτική πρακτική. Γι' αυτόν, τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν δύο ουσιαστικά χαρακτηριστικά:

- Αποτελούν αναπόφευκτα και ουσιαστικά συστατικά της αποκτώμενης γνώσης,
- Βρίσκονται, τουλάχιστον εν μέρει, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας.

Πολλοί άλλοι συγγραφείς έχουν ενδιαφερθεί επίσης για τα επιστημολογικά εμπόδια. Ο Guy Brousseau (1983) ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά για μια ορισμένη περιοχή δραστηριότητας και επομένως εδραιώνεται, αλλά κατόπιν αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ' ένα άλλο πλαίσιο και οδηγεί στις αντιφάσεις. Επομένως καθίσταται αναγκαίο να καταστραφεί η αρχική ανεπαρκής και λανθασμένα σχηματισμένη γνώση και να αντικατασταθεί με τη νέα έννοια που λειτουργεί ικανοποιητικά στο νέο πεδίο. Η απόρριψη και η διευκρίνιση ενός τέτοιου εμποδίου αποτελεί ουσιαστικό μέρος της ίδιας της γνώσης. Ο μετασχηματισμός δεν

μπορεί να γίνει χωρίς την αποσταθεροποίηση των αρχικών ιδεών, με την τοποθέτηση τους σ' ένα νέο πλαίσιο όπου φαίνεται σαφώς ότι αποτυγχάνουν. Αυτό επομένως απαιτεί μια μεγάλη προσπάθεια γνωστικής ανακατασκευής.

Σύμφωνα με τον Cornu (1991), στην ιστορία της έννοιας ορίου εμφανίζονται τέσσερα σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια:

1) *Η αποτυχία σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς.*

Πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί η έννοια του ορίου δεν αποσαφηνίστηκε την περίοδο 400-300 π.Χ., όταν οι αρχαίοι Έλληνες εκδήλωσαν ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου, λόγου χάρη, παρείχε μια ευκαιρία για την ανάπτυξη εργαλείων που μοιάζουν εξαιρετικά με την έννοια του ορίου. Ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 π.Χ.) θέλησε να αποδείξει ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Ενέγραψε κανονικά πολύγωνα στους κύκλους και αυξάνοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών, προσέγγισε τα εμβαδά των δύο κύκλων. Σε κάθε βήμα ο λόγος των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων και από αυτό προέκυψε ότι «οριακά» αυτό θα ίσχυε επίσης για τα εμβαδά των κύκλων.

Αυτή η μετάβαση προς το όριο, που εξηγείται πολύ λιτά, θα καθορίζονταν ένα έτος αργότερα, μέσω της μεθόδου της εξάντλησης, που πιστώνεται στον Εύδοξο τον Κνίδιο (408-255 π.Χ.). Η μέθοδος βασίζεται στην αρχή του Ευδόξου *(Στοιχεία* Ευκλείδη, Βιβλίο Χ, Πρόταση Ι) που αναφέρει:

Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέρος μεγαλύτερο από το μισό του, κατόπιν από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέρος μεγαλύτερο από το μισό του, και η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, τότε θα μείνει κάποια στιγμή κάποιο μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους.

Με άλλα λόγια, με τη διαδοχική διχοτόμηση μπορούμε να επιτύχουμε ένα μέγεθος τόσο μικρό όσο επιθυμούμε. Από αυτό έπεται η μέθοδος της εξάντλησης που μας

επιτρέπει να πούμε ότι για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο που εγγράφεται σε κύκλο και του οποίου το εμβαδόν διαφέρει από το εμβαδόν του κύκλου λιγότερο από ε. Αν ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι $\frac{A_1}{A_2}$ και ο λόγος των τετραγώνων των ακτινών είναι $\frac{r_1^2}{r_2^2}$, έχουμε μία από τις τρεις περιπτώσεις:

$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \text{ή} \qquad \frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \text{ή} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Απορρίπτουμε τις δύο πρώτες με τη μέθοδο της εξάντλησης και ως εκ τούτου συνάγουμε την αλήθεια της επιθυμητής ισότητας.

Παρά το γεγονός ότι η μέθοδος της εξάντλησης φαίνεται εξαιρετικά κοντά στην έννοια του ορίου, δεν μπορούμε να δηλώσουμε υπεύθυνα ότι οι Έλληνες κατείχαν τη σύγχρονη έννοια του ορίου. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι κατ' ουσία μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του απείρου. Εφαρμόζεται σε γεωμετρικά μεγέθη, όχι στους αριθμούς. Κάθε περίπτωση αντιμετωπίζεται μεμονωμένα με τη χρήση ενός συγκεκριμένου επιχειρήματος προσαρμοσμένου στο γεωμετρικό πλαίσιο. Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μια καθαρώς αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του ορίου των αριθμών απουσιάζει. Η γεωμετρική ερμηνεία, και η επιτυχία της στην επίλυση των συναφών προβλημάτων, επομένως, φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε τη μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

Ένα δεύτερο επιστημολογικό εμπόδιο που αναφέρει ο B.Cornu (1991) είναι:

2) *Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού.*

Σε όλη την ιστορία της έννοιας του ορίου συναντάμε την υπόθεση της ύπαρξης απειροελάχιστων ποσοτήτων. Είναι πιθανό να έχουμε ποσότητες που να είναι τόσο μικρές ώστε να είναι σχεδόν μηδενικές, κι όμως να έχουν ένα συγκεκριμένο «προσδιορίσιμο» μέγεθος; Τι συμβαίνει τη στιγμή που μια από αυτές τις ποσότητες

μηδενίζεται; Τέτοια φιλοσοφικά προβλήματα έστρεψαν την προσοχή πολυάριθμων μαθηματικών που, όπως ο Newton, μίλησαν για την «ψυχή των εκλιπόντων ποσοτήτων» τη στιγμή που αυτές εξαφανίζονται για να του επιτρέψουν να υπολογίσει τον «έσχατο λόγο» τους. Ο Euler χρησιμοποίησε ελεύθερα την έννοια του απείρως μικρού ως μια ποσότητα που μπορεί, όταν απαιτείται, να θεωρηθεί ίση με μηδέν. Ο D' Alembert εναντιώθηκε στη χρήση των απείρως μικρών ποσοτήτων και επιδίωξε να τις απομακρύνει από το διαφορικό λογισμό. Έδωσε το επιχείρημα ότι μια ποσότητα είναι είτε κάτι ή τίποτε. Αν είναι κάτι τότε δε μπορεί να γίνει μηδέν και αν είναι τίποτε τότε είναι ήδη μηδέν.

Ο Cauchy χρησιμοποίησε επίσης τη έννοια του απείρως μικρού. Στο *Cours d' analyse de I' Ecole Polytechnique* (1821), εξήγησε την ιδέα του απειροστού ως εξής:

«Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική της τιμή μειώνεται διαρκώς κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει στο όριο μηδέν». (Boyer, 1939).

Η ιδέα μιας ενδιάμεσης κατάστασης μεταξύ εκείνου που είναι τίποτε και εκείνου που δεν είναι, συναντάται συχνά στους σύγχρονους μαθητές. Θεωρούν συχνά ότι το σύμβολο ε αναπαριστά έναν αριθμό που δεν είναι μηδέν αλλά ταυτόχρονα είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό. Με τον ίδιο τρόπο κάποιοι μπορεί να πιστεύουν ότι το 0,999... είναι ο τελευταίος αριθμός πριν από το l, αλλά που δεν είναι ίσος με ένα.

Ένα τρίτο επιστημολογικό εμπόδιο που οφείλεται στην ιστορία της έννοιας του ορίου είναι κατά τον B. Cornu (1991) :

3) Η μεταφυσική άποψη της έννοιας του ορίου.

Η έννοια του ορίου είναι δύσκολο να εισαχθεί στα μαθηματικά επειδή φαίνεται πιο συναφής με τη μεταφυσική ή τη φιλοσοφία. Οι μαθηματικοί συχνά επιφυλάσσονται να μιλήσουν για τέτοιες έννοιες, από τον καιρό των αρχαίων Ελλήνων μέχρι τον D'Alembert που έγραψε ότι «κάποιος μπορεί να τα καταφέρει εύκολα στο Διαφορικό Λογισμό χωρίς όλα τα υπόλοιπα μεταφυσικά του άπειρου». Ο Lagrange εξέφρασε παρόμοιο τρόμο για τις μεταφυσικές πτυχές. Αν και στις αρχές της σταδιοδρομίας του πίστευε ότι θα

μπορούσε να καταστήσει αυστηρή τη χρήση των απειροελάχιστων, αργότερα θεώρησε ότι τα απειροστά του Leibniz δεν έχουν καμία ικανοποιητική μεταφυσική βάση και προσπάθησε να θέσει εκ νέου τα θεμέλια του Απειροστικού Λογισμού χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των άπειρων σειρών. Απέτυχε, όμως, γιατί η άλγεβρα της εποχής του, όπως του παραδόθηκε από τον L.Euler, ήταν θεμελιωμένη σε μια λανθασμένη άποψη του απείρου. Έτσι, με οποιονδήποτε τρόπο κι αν στράφηκαν οι μαθηματικοί στην ιστορική εξέλιξη του θέματος, ήρθαν αντιμέτωποι με βαθιές θεωρητικές δυσκολίες.

Η μεταφυσική σκοπιά της έννοιας του ορίου αποτελεί ένα από τα κύρια εμπόδια και για τους σημερινούς μαθητές. Αυτό το εμπόδιο καθιστά την κατανόηση της έννοιας του ορίου ιδιαίτερα δύσκολη, ιδιαίτερα όταν ένα όριο δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με τη χρήση γνωστών μεθόδων άλγεβρας και αριθμητικής.

Τέλος, σύμφωνα πάντα με τον B. Cornu (1991), ένα τέταρτο επιστημολογικό εμπόδιο που συναντάμε στην ιστορία της έννοιας του ορίου είναι το παρακάτω:

4) *Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι;*

Αυτό είναι μια αντιπαράθεση που διήρκεσε σε όλη την ιστορία της έννοιας. Λόγου χάρη, ο Robins (1697-1751) ισχυρίστηκε ότι το όριο δεν μπορεί ποτέ να επιτευχθεί, ακριβώς όπως τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στο κύκλο δε μπορούν ποτέ να είναι ίσα με αυτόν. Υποστήριξε ότι: «Δίνουμε την ονομασία έσχατο μέγεθος στο όριο το οποίο μια μεταβλητή μπορεί να προσεγγίσει όσο πολύ εμείς θέλουμε, αλλά με το οποίο ποτέ δεν μπορεί να γίνει απολύτως ίση».

Από την άλλη πλευρά, ο Jurin (1685-1750), είπε ότι «ο έσχατος λόγος δύο ποσοτήτων είναι ο λόγος που επιτυγχάνεται τη στιγμή που αυτές εξουδετερώνονται», «το ζήτημα δεν είναι αν η αύξηση είναι μηδενική, αλλά το ότι εξαφανίζεται, ή ότι είναι στο σημείο της εξαφάνισης», «υπάρχει ένας έσχατος λόγος των αυξήσεων που εξαφανίζονται», «μια αύξηση που γεννάται είναι μια αύξηση που αρχίζει να υπάρχει από το τίποτε, ή που αρχίζει να παράγεται, αλλά που πρέπει να φθάσει ένα μέγεθος το οποίο μπορεί να αποδοθεί σε μια τόσο μικρή ποσότητα».

Ο D' Alembert επέμεινε ότι μια ποσότητα δεν πρέπει ποτέ να γίνει ίση με το όριό της: «Για να μιλήσουμε σωστά, το όριο δεν συμπίπτει ποτέ, ή δεν γίνεται ποτέ ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά πλησιάζει πάντα και μπορεί να διαφέρει κατά

μια ποσότητα τόσο μικρή όσο κάποιος επιθυμεί». Αυτή η διαφωνία παραμένει ζωντανή και στους μαθητές μας, που συχνά αναρωτιούνται: «Όταν το x τείνει στο μηδέν, τότε δεν είναι ίσο με μηδέν;»

Ο ακόλουθος διάλογος μεταξύ των μαθητών παρουσιάζει σαφώς το επιστημολογικό εμπόδιο:

- Όσο περισσότερο αυξάνει το n, τόσο περισσότερο το 1/n προσεγγίζει το μηδέν.
- Οσοδήποτε θέλουμε;
- Όχι, επειδή κάποτε θα συναντηθούν!

Υπάρχουν βεβαίως πολλά άλλα εμπόδια στην έννοια του ορίου εκτός από αυτά τα τέσσερα. Τα λάθη που διαπράττουν οι μαθητές είναι πολύτιμες ενδείξεις για τον εντοπισμό των εμποδίων. Επομένως, η κατασκευή παιδαγωγικών στρατηγικών για τη διδασκαλία των μαθητών πρέπει να λάβει υπόψη τέτοια εμπόδια. Το ζήτημα δεν είναι να τα αποφύγουμε αλλά, αντίθετα να οδηγήσουμε το μαθητή να τα συναντήσει και για να τα υπερπηδήσει, αντιμετωπίζοντας τα εμπόδια ως συστατικά των αναθεωρημένων μαθηματικών εννοιών που πρόκειται να αποκτηθούν.

Η Artique (1998) αναφέρει σχετικά με τα επιστημολογικά εμπόδια ότι μπορούμε να μελετήσουμε τις δυσκολίες που προκύπτουν από συναφείς και μόνο τοπικά επαρκείς γνώσεις που εμφανίζονται κατά την ιστορική εξέλιξη των εννοιών και κατά την τρέχουσα διδασκαλία, ακόμη και αν δεν έχουν την ίδια μορφή λόγω φανερών πολιτισμικών διαφορών.

Όσον αφορά την έννοια του ορίου η Artique (1998) σημειώνει ότι οι διάφοροι ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν στα παρακάτω επιστημολογικά εμπόδια:

- Στο κοινό νόημα της λέξης «όριο» το οποίο προκαλεί έντονες αντιλήψεις της έννοιας του (ορίου) ως ένα φράγμα ή ως τον τελευταίο όρο μιας διαδικασίας ή τείνει να περιορίσει τη σύγκλιση στη μονότονη σύγκλιση.
- Στην υπεργενίκευση των ιδιοτήτων των πεπερασμένων διαδικασιών στις άπειρες διαδικασίες σύμφωνα με την αρχή του συνεχούς, όπως δόθηκε από τον Leibniz.
- Στη δύναμη της Γεωμετρίας των μορφών η οποία εμποδίζει τον ακριβή καθορισμό των αντικειμένων που εμπλέκονται στη διαδικασία του ορίου. Αυτό κάνει δύσκολο το αδιόρατο παιχνίδι μεταξύ του ρόλου των αριθ-

μητικών και γεωμετρικών πλαισίων στη διαδικασία εύρεσης του ορίου.

Όπως έχει δειχτεί από πολλούς ερευνητές όλα αυτά τα εμπόδια, που μπορούν να ανιχνευτούν κατά την ιστορική ανάπτυξη της έννοιας, κατά κάποιο τρόπο εμπόδισαν, αλλά και ταυτόχρονα υπήρξαν αναγκαίο και ουσιαστικό συστατικό στοιχείο της ανάπτυξής της. Μέσα από μια διαλεκτική σύνθεση οδήγησαν και πιθανόν θα οδηγήσουν και στο μέλλον σε νέες μορφές αντιλήψεων και προσεγγίσεών της.

Μια πρώτη οργανωμένη προσπάθεια παρουσίασης των βασικών επιστημολογικών εμποδίων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου έχουμε από την Sierpinska (1987). Παρουσιάζει τις εξής περιπτώσεις επιστημολογικών εμποδίων μέσα στα οποία σημαντικό ρόλο παίζουν και οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το άπειρο, την έννοια της συνάρτησης και του πραγματικού αριθμού:

1) Το *«Ευρετικού χαρακτήρα εμπόδιο»,* το οποίο χαρακτηρίζεται από μία έλλειψη αυστηρότητας. Σύμφωνα με αυτό, η κίνηση προς το όριο είναι μια μέθοδος ευρετικού χαρακτήρα και δεν σχετίζεται με κάποια μαθηματική πράξη ή διαδικασία. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε αποτέλεσμα με την χρήση μιας συμπερασματολογίας που στηρίζεται σ'ένα είδος ατελούς επαγωγής και στην εποπτεία. Ανάλογα με την εποπτεία που χρησιμοποιούμε διακρίνουμε δύο κατηγορίες στο εμπόδιο αυτό:

1α) Το *«Στατικό ευρετικό εμπόδιο»* στο οποίο η εύρεση του ορίου στηρίζεται σε μια εποπτεία ξένη προς την ιδέα της κίνησης. Συγκεκριμένα «η εύρεση του ορίου είναι η εύρεση κάποιου αντικειμένου για το οποίο μόνο προσεγγίσεις είναι δυνατό να γνωρίζουμε». Έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε την ύπαρξη μιας αντίληψης, ότι η διαδικασία υπολογισμού του ορίου κάπου σταματά (σε μια ικανοποιητική προσέγγιση), ενώ είναι εμφανής η απουσία της έννοιας του απείρου.

Επίσης όταν είναι παρούσα η έννοια της συνάρτησης στη διαδικασία αυτή, η εστίαση επικεντρώνεται κυρίως στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, μια και το όριο θεωρείται συνήθως μια τιμή της που προσεγγίζει ικανοποιητικά τον στόχο της εύρεσης του.

1β) Το *«Κινητικό ευρετικό εμπόδιο»* στο οποίο η εποπτεία συνδέεται με την ιδέα της κίνησης. Έτσι «η εύρεση του ορίου συνδέεται με την εύρεση κάποιου αντικειμένου καθώς κινούμαστε συνεχώς και προσεγγίζουμε το άπειρο». Εδώ αντίθετα με την περί-

πτωση (1α) είναι εμφανής η παρουσία της έννοιας του δυνητικού (εν δυνάμει) απείρου, ενώ συχνά η διαδικασία συνδέεται με την έννοια του χρόνου ως μεταβλητής ή και η κίνηση ταυτίζεται με το υποκείμενο που εκτελεί τη διαδικασία.

Και στις δύο περιπτώσεις (1α) και (1β) μπορούμε να διακρίνουμε μια θεώρηση των μαθηματικών με βάση μια εμπειρική - υπολογιστική λογική. Επίσης και τα δύο είδη ευρετικών εμποδίων παρουσιάζονται και σε αριθμητικά και σε γεωμετρικά πλαίσια ανάλογα με το είδος της προσέγγισης που ακολουθείται. Ειδικά στην περίπτωση του γεωμετρικού πλαισίου παρατηρείται μία έλλειψη ομοιόμορφης αντίληψης καθώς και προβλήματα κατανόησης σχετικά με την έννοια των πραγματικών αριθμών.

2) Το *εμπόδιο που σχετίζεται με την αυστηρότητα.* Αυτό σχετίζεται με αντιλήψεις που χαρακτηρίζονται είτε από υπερβολική αυστηρότητα, είτε από αυστηρότητα που είναι στραμμένη σε λάθος κατεύθυνση.

Έτσι έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

2α) Το *«εμπόδιο τύπου Ευδόξου»,* σύμφωνα με το οποίο κυριαρχεί η αντίληψη ότι η κίνηση προς το όριο είναι μια αυστηρή μέθοδος απόδειξης συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Μια τέτοια αντίληψη μπορεί να δημιουργηθεί καθώς κάποιος δουλεύει μέσω του ε-δ τυπικού ορισμού χρησιμοποιώντας και αποδεικνύοντας σχέσεις μεταξύ μεταβλητών και αριθμητικών παραστάσεων.

2β) Το *«εμπόδιο τύπου Fermat»,* σύμφωνα με το οποίο η κίνηση προς το όριο είναι μια αυστηρή μαθηματική διαδικασία, που έχει σαν βασικά χαρακτηριστικά της την συσχέτιση αριθμών με μεταβλητές και την παράλειψη των αριθμητικών τιμών που θεωρούνται αμελητέες αφ' εαυτές ή σε σχέση με κάποιες άλλες.

Στους παραπάνω τύπους (2α) και (2β) επιστημολογικών εμποδίων κυριαρχεί μια φορμαλιστική αντίληψη για τα μαθηματικά και παρατηρείται μια ευρεία χρήση τυπικών συμβολικών χειρισμών. Απουσιάζει επίσης κάθε μεταφυσική χρήση της έννοιας του απείρου. Τα μαθηματικά σχετίζονται άμεσα με την διατύπωση και απόδειξη θεωρημάτων. Ειδικά στην περίπτωση του εμποδίου τύπου Fermat αναγόμαστε σχεδόν πάντα στην αναλυτική έκφραση μιας συνάρτησης

3.4 ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η Joanna Mamona-Downs (2001) πρότεινε να σκεφτούμε απευθείας τη διατύπωση του ορισμού του ορίου ακολουθίας για να αποκτήσουμε μια νοητική εικόνα η οποία να είναι συνεπής με τον ορισμό. Δύο παράγοντες εμπλέκονται εδώ. Ο ένας είναι το να προσδιορίσουμε έναν κεντρικό πυρήνα του ορισμού και κατόπιν να δομήσουμε τον ορισμό σταδιακά από αυτόν. Ο δεύτερος είναι να υποστηρίξουμε την υπάρχουσα διαίσθηση για την έννοια, ώστε να πάρουμε μια «ερμηνεία» του ορισμού που είναι γνωσιακά προσβάσιμη.

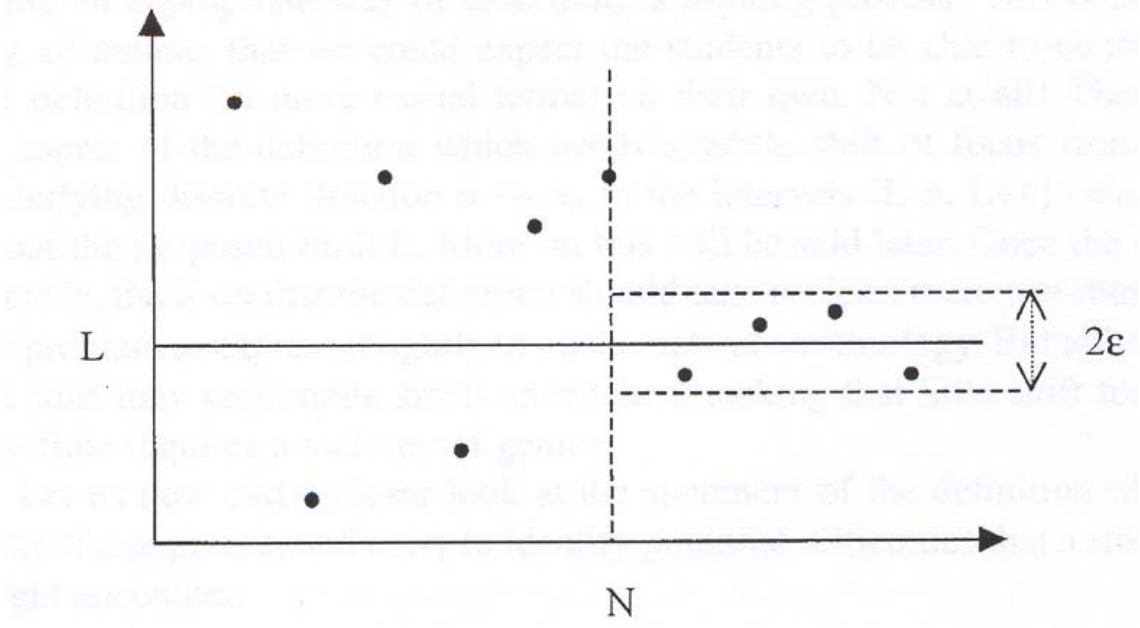
3.4.1 Η διατύπωση του ορισμού του ορίου μιας ακολουθίας πραγματικών με ένα επεξηγηματικό γράφημα

Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (με δείκτες $n \in \mathbb{N}$).

Η ακολουθία (a_n) έχει όριο $L \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$

Δίνεται το παρακάτω επεξηγηματικό γράφημα:



Το επεξηγηματικό γράφημα μπορεί να νοηθεί είτε ως ένα βοήθημα στην κατανόηση του ορισμού ή ως ένα βοήθημα για τη μνήμη στη μορφή μιας νοητικής εικόνας από την οποία μπορεί να ανακατασκευαστεί ο ορισμός.

Πιθανώς κάθε μαθητής που συναντά για πρώτη φορά τον ορισμό του ορίου (μιας ακολουθίας) θα θέλει να αναφερθεί σε κάποιο επεξηγηματικό γράφημα. Παρά το ότι η τυπική έκφραση που περιλαμβάνεται στον ορισμό μπορεί να αντιμετωπιστεί συλλογιστικά στις γραμμές που μόλις έχουμε περιγράψει, πρέπει να λεχθεί ότι είναι πολύ απίθανο ένας μαθητής να μπορεί να πραγματοποιήσει αυτούς τους συλλογισμούς χωρίς κάποια βοήθεια. Το γεωμετρικό πλαίσιο του επεξηγηματικού γραφήματος, παρ' όλο που μπορεί να είναι μόνο ενδεικτικό μάλλον, παρά να δίνει κάποια προοπτική, παρέχει ένα πολύ πιο φιλικό περιβάλλον σε σύγκριση με την τρομακτική στην όψη τυπική διατύπωση με ανισότητες και ποσοδείκτες που παρέχει ο ορισμός.

Ειδικότερα, όπως τονίζει η J.Mamona-Downs (2001) η χρήση του γραφήματος ενδυναμώνει το αίσθημα ότι η ακολουθία (a_n) είναι μια συνάρτηση και η διάταξή της (που επάγεται από τη διάταξη των θετικών ακεραίων) υποδηλώνεται σαφώς από την εξέταση του γραφήματος από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η παράμετρος ε φαίνεται να έχει μια πιο σαφή εμφάνιση στη μορφή των δύο περιοριστικών ευθειών γύρω από την ευθεία y=L. Τέλος, το γράφημα παρέχει ένα καλό μέσο για να μεταβάλλουμε το ε όπως νομίζουμε ότι είναι πιο βολικό, οπότε η δυνητική δυσκολία σχετικά με τον όρο «$\forall \varepsilon > 0$» μπορεί να δείξει λιγότερο προβληματική.

Ωστόσο το γράφημα πρέπει να κατανοηθεί σωστά, ειδικά καθώς από τη φύση του είναι κάτι στατικό, ενώ είναι σαφές ότι θέλουμε να υποδηλώνει κάτι δυναμικό. Συνεπώς θα πρέπει να κατανοηθεί ότι τα σημεία που παριστάνουν τα στοιχεία της (a_n) και η ευθεία y=L πρέπει να θεωρηθούν ως σταθερά χαρακτηριστικά, ενώ οι δύο οριζόντιες περιοριστικές ευθείες και η ευθεία x=N είναι μεταβλητά χαρακτηριστικά.

Σύμφωνα με την J.Mamona-Downs, ένας σωστός τρόπος είναι να σκεφθούμε την κατάσταση ως εξής:

Αν η ακολουθία *έχει* όριο το L, τότε φανταζόμαστε ότι κάνουμε την περιοριστική λωρίδα γύρω από την ευθεία y=L προοδευτικά στενότερη (μειώνοντας το ε). Σε *ανταπόκριση* αναμένουμε ότι η κατακόρυφη ευθεία που περιγράφεται από την x=N θα μετακινηθεί προς τα δεξιά (δηλαδή το N μεγαλώνει) ώστε να «απομακρύνει»

οποιαδήποτε σημεία τα οποία ξαφνικά πέφτουν έξω από τη λωρίδα καθώς αυτή στενεύει. Αν η ακολουθία *δεν έχει* όριο το L τότε καθώς στενεύουμε την περιοριστική λωρίδα, σε κάποιο στάδιο θα φθάσουμε στην περίπτωση όπου, *οσοδήποτε* μακριά και αν μετακινήσουμε την ευθεία x=N προς τα δεξιά, θα εξακολουθούν να υπάρχουν όροι της ακολουθίας που βρίσκονται πιο πέρα προς τα δεξιά (δηλαδή, τα a_n με n>N) εκτός των φραγμάτων. Η τελευταία έκφραση σε σχέση με το επεξηγηματικό γράφημα αποτελεί μια καλή βάση για να σχηματίσουμε την άρνηση της διατύπωσης του ορισμού, η οποία θα είναι πολύ πιο δύσκολη στην επίτευξή της από τους μαθητές χωρίς αυτή την συλλογιστική πορεία μέσω του γραφήματος.

Η έρευνα (ειδικότερα της Pinto, 1996) προτείνει ότι κάποιοι μαθητές νοητικά διατηρούν το περιεχόμενο του ορισμού μέσω γραφημάτων, ενώ άλλοι απλώς απομνημονεύουν την τυπική διατύπωση. Αυτό ωστόσο δεν μας πληροφορεί σχετικά με την επιρροή των γραφημάτων όταν οι μαθητές *αρχίζουν* να ασχολούνται με το νόημα του ορισμού.

Το επεξηγηματικό γράφημα μπορεί βεβαίως να θεωρείται ως μια «πιστή αναπαράσταση» στο ότι *ολόκληρο* το περιεχόμενο του ορισμού έχει πλήρως μεταφερθεί και ενσωματωθεί στο γεωμετρικό πλαίσιο. Ωστόσο, από γνωσιακή σκοπιά δεν πρέπει να υποθέσουμε αμέσως ότι η προκύπτουσα νοητική εικόνα θα είναι πάντοτε περισσότερο αποτελεσματική από εκείνες που εξάγονται από τον ορισμό πιο άμεσα.

Ένα παράδειγμα μπορεί να βρεθεί σε μια έρευνα των Pinto και Tall (2001), όπου ένας συγκεκριμένος μαθητής αδυνατούσε να ταιριάσει την οριακή συμπεριφορά μιας σταθερής ακολουθίας μέσα στο πλαίσιο του επεξηγηματικού γραφήματος, ενώ μπορούσε να την προσαρμόσει στον ορισμό. Αυτή η συμπεριφορά είναι κατανοητή καθώς η γραφική εικόνα του ορίου υποστηρίζει γνωσιακά μια δυναμική άποψη προσέγγισης του ορίου, ενώ η σταθερή ακολουθία δεν αντιστοιχεί σ' αυτή την εικόνα. Τούτο σημαίνει ότι η αυθαίρετη επιλογή μιας τιμής για το N οποιαδήποτε τιμή κι αν πάρει το ε είναι ευκολότερα αποδεκτή από τον ορισμό, παρ' όλο που η ίδια πληροφορία, φυσικά, θα μπορούσε να προκύψει μέσα στο πλαίσιο του γραφήματος.

3.4.2 Μια συζήτηση για την κατανόηση του ορισμού του ορίου ακολουθίας

Ένα πρώτο μάθημα στον Απειροστικό Λογισμό, όπως συχνά παρουσιάζεται τα τελευταία χρόνια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε πολλές χώρες, μπορεί να διδαχθεί ωφέλιμα στο άτυπο επίπεδο. Αυτά τα μαθήματα όμως συνήθως εστιάζουν σε διαδικαστικές μεθόδους και δίνουν μικρή βαρύτητα στη σημασία της κατανόησης των ορισμών και της θεωρίας που αποτελούν τη βάση των μεθόδων. Ωστόσο, αν θέλουμε οι μαθητές να γίνουν πιο ευέλικτοι στην επίλυση προβλημάτων, πρέπει να έχουν μια σαφή και συνεπή ιδέα για τις εμπλεκόμενες έννοιες. Πιθανώς για πρώτη φορά στη μαθηματική τους εμπειρία, υπάρχει ανάγκη να εργαστούν με πλήρως τυπικούς ορισμούς για να εκκαθαρίσουν την ομίχλη που δημιουργείται από τις αβεβαιότητες και τις διαισθητικές πεποιθήσεις. Οι ορισμοί δεν είναι, ωστόσο, απαραίτητα σχεδιασμένοι για να αντικαταστήσουν την αρχική διαίσθηση. Μάλλον δίνουν έναν τρόπο πρόσβασης και μάλιστα ενίσχυσης της διαίσθησης. Επομένως οι ορισμοί των ορίων πρέπει να κατανοηθούν, αλλά πώς;

Σύμφωνα με όσα υποστηρίζει η J.Mamona-Downs (2001), όταν ο μαθητής βλέπει τις λίγες πρώτες φορές τον ορισμό ενός ορίου, προσπαθεί ταυτόχρονα να κατανοήσει το συμβολισμό και πώς αυτό το νόημα ταιριάζει με οποιεσδήποτε προϋπάρχουσες άτυπες εικόνες που μπορεί να έχει. Ο συμβολισμός είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα φανεί παράξενος και αποθαρρυντικός. Αν και κάποιοι ελάχιστοι μαθητές φαίνονται να διαθέτουν μια φυσική δεξιότητα να είναι σε θέση να αφομοιώνουν τέτοιες διατυπώσεις όπως δίνονται στον ορισμό σε αξιοσημείωτα μικρό χρόνο, οι περισσότεροι μαθητές χρειάζονται σημαντικό χρόνο για να νοιώσουν άνετα με τον ορισμό ενώ αρκετοί τρομοκρατούνται και ποτέ δεν τον κατανοούν πλήρως. Αν τελικά ο ορισμός κατανοηθεί γίνεται συνήθως εύκολα αποδεκτός ως ένας κατάλληλος τρόπος για την περιγραφή μιας οριακής διαδικασίας. Μ' αυτό, φυσικά, δε μπορούμε να πούμε ότι αναμένουμε ότι οι μαθητές θα είναι σε θέση να κατασκευάσουν τον ορισμό (σε περισσότερο ανεπίσημους όρους) μόνοι τους. Καθόλου μάλιστα!

Ας ρίξουμε τώρα μια κοντινότερη ματιά στη διατύπωση του ορισμού του ορίου μιας ακολουθίας, και ας προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε **δυσκολίες** που ένας μαθητής θα μπορούσε να συναντήσει.

Προσδιορίζουμε την συνιστώσα του δεξιού μέλους της διατύπωσης του ορισμού ως $|a_n - L| < \varepsilon$. Όλες οι άλλες πληροφορίες απλώς αναλύουν αυτή την ανισότητα. Συνεπώς υπάρχει ένα ερώτημα σχετικά με το αν κάποιος θα πρέπει να διαβάσει την έκφραση από τα αριστερά ή από τα δεξιά. Η συνήθης πρακτική ανάγνωσης (τουλάχιστον στην Ευρώπη) θα ενθάρρυνε την εσωτερίκευση της έκφρασης από τα αριστερά προς τα δεξιά. Ομοίως οι μαθηματικοί διατηρούν αυτή την πρακτική ανάγνωσης από τα αριστερά προς τα δεξιά αλλά νοερά αναστέλλουν τις πληροφορίες μέχρι να φθάσουν στον πυρήνα του ορισμού. Αυτό το κοινό χαρακτηριστικό στους τυπικούς ορισμούς όπου κατά μια έννοια κάτι προσδιορίζεται πριν μάθουμε τι ακριβώς είναι αυτό το κάτι ή τι συμβολίζει, μπορεί να είναι δύσκολο για έναν μαθητή.

Αλλά πώς πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές την ανισότητα $|a_n - L| < \varepsilon$ *;*

Σύμφωνα πάντα με την Mamona-Downs (2001) συσχετίζουμε απλώς τρεις πραγματικούς αριθμούς που δίνονται από τα τρία σύμβολα a_n, L, ε (υποθέτοντας προσωρινά ότι το n είναι σταθερό). Ακόμη και σ' αυτό το επίπεδο δε μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές θα αισθάνονταν άνετα με μια έκφραση η οποία είναι και ανισότητα και περιέχει απόλυτες τιμές. Αυτό, όμως, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως αποτυχία της διδασκαλίας σε προηγούμενα χρόνια. Πρόκειται ίσως για έλλειψη κατανόησης τόσο της έννοιας του αριθμού όσο και της έννοιας του συμβόλου αν οι μαθητές σ' αυτό το στάδιο που μας απασχολεί δε μπορούν άμεσα να ερμηνεύσουν τη διατύπωση σε κάτι πιο διαισθητικό όπως «η απόσταση του a_n από το L είναι μικρότερη από ε». Μάλιστα μπορεί να είναι πιο ευχάριστο γι' αυτούς να αντικαταστήσουν τη

φράση $|a_n - L| < \varepsilon$ με την $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, παρ' όλο που η τελευταία είναι περισσότερο συνολοθεωρητική. (Από την άλλη πλευρά, η ανισοτική μορφή έχει ένα πλεονέκτημα έναντι της μορφής με το διάστημα, ως προς το ότι αντικατοπτρίζει καλύτερα την ιδέα της απόστασης η οποία είναι σημαντική στην επέκταση της θεωρίας σε μετρικούς χώρους.)

Είναι τώρα σημαντικό για το μαθητή να προβλέψει το χαρακτήρα των συμβόλων a_n, L, ε. Το L παριστάνει την προτεθείσα τιμή του ορίου, οπότε σίγουρα έχει το χαρακτήρα *σταθεράς*. Το σύμβολο a_n (όπου τώρα επιτρέπεται να μεταβάλλεται το n) παριστάνει έναν όρο της ακολουθίας που διερευνούμε. Θέλουμε να ελέγξουμε αν το a_n πλησιάζει το L καθώς μεγαλώνει το *n*, οπότε είναι φυσικό να θέλουμε να θεωρήσουμε το a_n ως *μεταβλητή*. Τέλος το ε είναι πρωτίστως ένα επινόημα για τη μέτρηση της εγγύτητας των όρων της ακολουθίας (a_n) στο L. Σαφώς μέσα στη δομή της ανισότητας το ε έχει το ρόλο σταθεράς αλλά πρέπει επίσης να φέρει το *δυναμικό* της μεταβολής. Διαφορετικά δε μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της ακολουθίας καθώς αυτή έρχεται αυθαίρετα κοντά στο όριό της. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι το ε έχει χαρακτήρα παρόμοιο με μιας *παραμέτρου*.

Επίσης είναι σημαντικό οι μαθητές να καταλάβουν το ρόλο της ανισότητας στον ορισμό. Δεν είναι μια αληθής πρόταση, αλλά η βάση μιας διαδικασίας ορισμού. Αυτό το ζήτημα έχει να κάνει περισσότερο με μια γενική κατανόηση των ορισμών παρά με το συγκεκριμένο θέμα μας, αλλά η πολυπλοκότητα του δεξιού μέλους της διατύπωσης του ορισμού μας μπορεί να αποκρύψει το πώς η φράση «αν και μόνο αν» ταιριάζει εκεί. (Υπάρχει ένας παραλληλισμός εδώ με το κοινό φαινόμενο των μαθητών που υποθέτουν ως δεδομένη μια πρόταση ενώ αποδεικνύουν την ίδια *εκείνη* πρόταση.)

Το υπόλοιπο μέρος του δεξιού μέλους της έκφρασης του ορισμού απλώς προσδιορίζει ποιους όρους της (a_n) θα πρέπει να θεωρήσουμε όταν εστιάζουμε στην ανισότητα. Τούτο καθιστά ακριβή την αποφαντική διαδικασία που βασίζεται στην ανισότητα.

Τώρα το a_n (ως μεταβλητή) θα μεταβάλλεται ενώ το ε (η παράμετρος) είναι σταθερό. Συνεπώς πρέπει να θεωρήσουμε τις συνθήκες πρώτα για το a_n και έπειτα για το ε. Αυτό αντικατοπτρίζεται από τον προσδιοριστικό όρο για το a_n που προηγείται αμέσως πριν

την ανισότητα. Αυτός ο όρος εισάγει ένα νέο σύμβολο N, το οποίο πάντοτε συμβολίζει κάποιο θετικό ακέραιο. Η εμφάνιση του συμβόλου N προκαλεί πιθανώς σύγχυση σε πολλούς μαθητές, και κάνει τον ορισμό να μοιάζει περισσότερο δύσκολος στην κατανόησή του από ό,τι πραγματικά είναι. Υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους οι μαθητές μπορεί να νοιώθουν άβολα με το N. Ο πρώτος είναι ότι καθώς το N δεν εισάγεται ρητά στο εστιακό χαρακτηριστικό, δηλαδή, την ανισότητα, προκαλούμε μια ανεξάρτητη δευτερεύουσα εστία (μέσα στην περιγραφή των προσδιορισμών της πρώτης εστίας) να εξηγήσει το ρόλο του N. Οι μαθητές πρέπει να συντονίσουν τις δύο εστίες. Ο δεύτερος λόγος για τον οποίο οι μαθητές μπορεί να ενοχληθούν από το N είναι ότι μπορεί να αναζητήσουν μια σαφή ένδειξη του πώς πρέπει να βρεθεί η τιμή του N. Η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών στα μαθηματικά είναι πολύ πιθανό να είναι κυρίως αλγοριθμικής φύσεως. Τότε είναι δύσκολο γι' αυτούς στο στάδιο αυτό να διακρίνουν μεταξύ ενός κανόνα για μια διαδικασία και ενός ορισμού.

Είναι ενδιαφέρον εδώ ότι κάποια λεκτική απόδοση μπορεί να βοηθήσει την κατάσταση. Το N απλώς συμβολίζει μια θέση στην ακολουθία και ως τέτοιο το N δεν είναι απαραίτητο να αναφερθεί ρητά στην ομιλία. Θεωρήστε την ακόλουθη άτυπη περιγραφή: «δοθέντος του ε, υπάρχει μια ορισμένη θέση πέρα από την οποία όλοι οι περαιτέρω όροι της ακολουθίας βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη του ε από το L». Τέτοιες λεκτικές αποδόσεις δε θα πρέπει να αντικαθιστούν τον ορισμό, αλλά μπορούν να βοηθήσουν εξαιρετικά στο να τονιστεί η σχετική σημασία των ποικίλων διαφορετικών «παικτών» που εμπλέκονται. Συγκεκριμένα τείνουν να τονίζουν το περισσότερο εννοιολογικό περιεχόμενο του ορισμού μάλλον, παρά το πρακτικό περιεχόμενο.

Από όλα τα σύμβολα που εισέρχονται στη διατύπωση του ορισμού, το ε είναι το μόνο το οποίο δεν έχει απτή σύνδεση με την ακολουθία. Καθώς το όριο της ακολουθίας σίγουρα εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες της ίδιας της ακολουθίας, ποιος είναι ο ρόλος αυτής της «ξένης» παραμέτρου στον ορισμό; Λοιπόν, θα ασχοληθούμε με αυτό το ερώτημα αργότερα, όταν θα συζητήσουμε το γιατί ο ορισμός έχει τη μορφή που έχει. Ωστόσο τώρα θα ασχοληθούμε με ένα δεύτερο ερώτημα: Με δεδομένο ότι η μορφή του ορισμού είναι αποδεκτή, πώς πρέπει να ερμηνεύσουμε το ρόλο του ε;

Στην πραγματικότητα ο ρόλος που παίζει το ε έχει ήδη συζητηθεί μερικώς. Μας παρέχει έναν τρόπο για να αναλύσουμε ποιοι όροι της ακολουθίας (a_n) βρίσκονται εντός

μιας προδιαγεγραμμένης απόστασης από το προταθέν όριο L. Η μεταβλητότητα του ε χρειάζεται για να επιτρέψει να γίνει αυτή η ανάλυση για αυθαίρετα μικρές αποστάσεις. Ωστόσο, το ε δε φαίνεται να αντιστοιχεί σε ο,τιδήποτε συγκεκριμένο. Είναι απλώς ένας αριθμός ο οποίος μπορεί να μεταβληθεί ενώ βρίσκεται ανεξάρτητος μέσα στη διατύπωση. Τούτο μπορεί να είναι δύσκολο να το αποδεχθούμε.. Εκείνο που θα μπορούσαμε να αναμένουμε είναι, μιλώντας μη αυστηρά, ο ορισμός να οδηγεί με κάποιο τρόπο στο να μειώνεται το ε σε τιμή και με τέτοιο τρόπο ώστε το ε να γίνεται αυθαίρετα μικρό. Αυτός είναι ο τρόπος για να ελέγξουμε αν τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας θα έρθουν αυθαίρετα κοντά στο L.

Η διατύπωση του ορισμού με τον όρο «$\forall \varepsilon > 0$» μπορεί να ληφθεί ώστε να είναι συμβατή με τα διαισθητικά μας αισθήματα για το πώς πρέπει να χρησιμοποιηθεί το ε. Αλλά αυτή η συμφιλίωση χρειάζεται συλλογισμό πάνω στη μορφή του ορισμού. Αυτό δείχνει πώς οι ορισμοί δε θα πρέπει να θεωρούνται ως απλώς τυπικές διατυπώσεις αλλά βάσεις στις οποίες μπορεί να δομηθεί η διαίσθηση. Δείχνει επίσης πως ότι φαίνεται να έχει έναν πολύ στατικό χαρακτήρα (δηλαδή, ο ορισμός) μπορεί να χρησιμοποιηθεί νοητικά ώστε να παραγάγει ένα πολύ πιο δυναμικό διαισθητικό νόημα. Ένας λόγος για να μην επιχειρήσουμε να εισάγουμε αυτό το περισσότερο διαισθητικό νόημα άμεσα στον ορισμό είναι ότι σίγουρα αυτό θα έκανε τη διατύπωση πολύ πιο άκομψη. Ένας άλλος λόγος, ίσως, είναι ότι δε θα έπρεπε να εισαγάγουμε ρητά στον ορισμό μια δευτερεύουσα άπειρη διαδικασία στο ε όταν το όλο θέμα του ορισμού είναι να αποσαφηνίσουμε τι εννοούμε με το όριο της αρχικής ακολουθίας (a_n). Θα υπήρχε ο πειρασμός να δεχθούμε διαισθητικές προκαταλήψεις στο πώς το ε θα έπρεπε να συμπεριφέρεται στο όριο που με τη σειρά του θα επηρέαζε επιβλαβώς την κατανόηση του ορισμού από τους μαθητές. Τέλος σε εφαρμογές του ορισμού είναι οπωσδήποτε βολικό να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή του ε σε μια απόδειξη.

Η κατανόηση της φράσης «για κάθε ε>0» σίγουρα εισάγει μεταγνωσιακές πτυχές (βλ. Schoenfeld, 1992, για μια έκθεση στη μεταγνώση), καθώς και γνωσιακές, διότι εδώ υπεισέρχονται και άλλοι παράγοντες πέρα από τους απλώς εννοιολογικούς. Τελικά πολλοί μαθητές μαθαίνουν λειτουργικούς τρόπους για το πώς θα πρέπει να χειρίζονται το ε σε διάφορους τύπους περιστάσεων, αλλά αυτό φαίνεται να γίνεται ανεξάρτητα από μια εκτίμηση του ρόλου της φράσης. Ισχυριζόμαστε ότι πρέπει να γίνει μια προσπάθεια

να εξηγηθεί το σκεπτικό της φράσης σε διδακτικό πλαίσιο, καθώς διαφορετικά ο ορισμός δεν μπορεί να καταστεί μια κύρια έκφραση της έννοιας του ορίου σε γνωσιακούς όρους.

Τέλος, υπάρχει ένα κάπως διαφορετικό χαρακτηριστικό του ορισμού το οποίο θα μπορούσε επίσης τελικά να επιφέρει κάποια σύγχυση. Είναι φυσικό να πιστέψουμε ότι καθώς μειώνουμε το ε, το N θα πρέπει είτε να παραμείνει ως έχει ή να αυξηθεί. Ωστόσο δεν υπάρχει τίποτε στον ορισμό που να ενισχύει αυτή τη συνθήκη. Γνωσιακά η έλξη είναι να πάρουμε τη μικρότερη δυνατή τιμή για το N. Μεταγνωσιακά, ο ορισμός είναι σχεδιασμένος ώστε να μην εμμένει σ' αυτό διότι διαφορετικά η εφαρμογή του ορισμού θα περιοριστεί σοβαρά.

3.4.3 Εναλλακτική προσέγγιση για τη διδασκαλία του ορίου ακολουθίας

Όπως αναφέρουν οι D. Tall και S.Vinner (1981) οι ακολουθίες μπορούν να εισαχθούν μερικές φορές χωρίς τυπικό ορισμό. Λόγου χάρη, το Βιβλίο 1 του SMP, στο κεφάλαιο 2 (σελ. 31) γράφει:

> Υποθέστε ότι θέλετε να βρείτε την τιμή του 2^7. Πώς θα το κάνατε αυτό; Πιθανώς θα απαριθμούσατε την ακολουθία των αριθμών
> 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.
> Και ίσως θα μετρούσατε επίσης
> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
> με τα δάκτυλά σας ταυτοχρόνως, κάτι που θα σας βοηθούσε να θυμάστε τη θέση του κάθε αριθμού στην ακολουθία. Οπότε όταν θα είχατε μετρήσει n δάκτυλα θα είχατε υπολογίσει τον αριθμό 2^n.

Κατόπιν συνεχίζει και εξηγεί πώς μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία με έναν υπολογιστή, περνώντας μέσα από επαγωγικούς ορισμούς, απόδειξη με επαγωγή και πολλά άλλα ενδιάμεσα θέματα πριν ορίσει την έννοια της συνάρτησης στο κεφάλαιο 4. Μετά από μια σύντομη συνολοθεωρητική συζήτηση που υπενθυμίζει προηγούμενες γνώσεις για τις σχέσεις, ορίζεται η έννοια της συνάρτησης (SMP, Βιβλίο 1, κεφάλαιο 4, σελ. 83):

Θα παρατηρηθεί ότι η σχέση *M*={είναι ο σύζυγός της} έχει μια ιδιαίτερη ιδιότητα, τουλάχιστον στις Χριστιανικές χώρες: ότι κάθε έγγαμος άνδρας έχει ακριβώς μία σύζυγο. Τούτο σημαίνει ότι κάθε μέλος του συνόλου *M* συσχετίζεται με ένα και μόνο ένα μέλος του άλλου συνόλου. Οι σχέσεις που έχουν αυτή την ιδιότητα εμφανίζονται πολύ συχνά και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά. Είναι γνωστές ως «συναρτήσεις».

Μετά υπενθυμίζεται η έννοια της ακολουθίας και επανερμηνεύεται ως μέρος της έννοιας της συνάρτησης (SMP, Βιβλίο 1, κεφάλαιο 4, σελ. 95):

Κάποιες φορές έχουμε συναντήσει αλληλουχίες αριθμών όπως η

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots$$

και έχουμε χρησιμοποιήσει τη λέξη «ακολουθία» για να τις περιγράψουμε. Οι διακεκριμένοι αριθμοί ονομάζονται «όροι» της ακολουθίας: οπότε ο πρώτος όρος είναι το 0, ο δεύτερος όρος είναι το ½, κ.ο.κ. Βλέπουμε αμέσως ότι με αυτή την ακολουθία συσχετίζεται μια αντιστοίχιση, που περιγράφεται από τον πίνακα:

Θέση του όρου		Τιμή του όρου
1	$\rightarrow$	0
2	$\rightarrow$	1/2
3	$\rightarrow$	2/3
4	$\rightarrow$	3/4

Επομένως είναι δυνατό να οριστεί μια ακολουθία ως μια συνάρτηση που έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών {1,2,3,4,…}. Η εικόνα *f(n)* του αριθμού *n* περιγράφεται ως ο *n*-οστός όρος της ακολουθίας.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται ποικίλες επαναληπτικές διαδικασίες για την προσέγγιση ορισμένων αριθμών, λόγου χάρη η τεχνική Newton – Raphson για τη ρίζα

μιας εξίσωσης ή η βήμα-προς-βήμα μέθοδοι για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Μόνο στο τελευταίο κεφάλαιο του τέταρτου και τελευταίου βιβλίου του προγράμματος συζητείται με κάποια τυπική μορφή η έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας. Πρώτα υπάρχει μια συζήτηση με τη διαδικασία «πρόκλησης και απάντησης» στην ειδική περίπτωση (SMP, Βιβλίο 4, κεφάλαιο 43, σελ. 1309):

$1/2, 1/4, 1/8, \ldots, (1/2)^i, \ldots$

Κανένας όρος αυτής της ακολουθίας δεν είναι μηδέν, αλλά αν προγραμματίζαμε έναν υπολογιστή να τους υπολογίσει, οι όροι σύντομα θα τυπώνονταν ως μηδενικά, αφού θα ήταν μικρότεροι από το μικρότερο αριθμό που θα μπορούσε να χειριστεί η μηχανή. Περαιτέρω, τούτο θα ήταν αληθές οσαδήποτε δεκαδικά ψηφία και αν μπορούσε να τυπώσει το μηχάνημα. Προκαλούμενοι να παραγάγουμε έναν αριθμό N ο οποίος θα μας έδινε τη δυνατότητα να πούμε «όλοι οι όροι από το N-οστό και μετά θα είναι μηδενικοί ως τα πρώτα 50 δεκαδικά τους ψηφία», μπορούμε σίγουρα να βρούμε έναν τέτοιο αριθμό. Και τούτο μπορούμε να το κάνουμε, όποιον αριθμό και αν μας δώσουν στη θέση του 50. Παρατηρήστε δύο πράγματα: δεν είμαστε υποχρεωμένοι να παραγάγουμε τον ελάχιστο τέτοιο αριθμό N, αλλά μόνο ένα βολικό N. Δευτερευόντως, δε μπορούμε να βρούμε έναν μοναδικό αριθμό N άπαξ και δια παντός, ο οποίος θα μας απαλλάξει από την πρόκληση οποιοσδήποτε αριθμός κι αν τεθεί στη θέση του 50. Η απάντησή μας εξαρτάται από την πρόκληση που αντιμετωπίζουμε.

Τυπικά, μπορούμε να εκφράσουμε την κατάσταση ως εξής: Δοθέντος οποιουδήποτε αριθμού p, μπορεί να βρεθεί ένας αριθμός N τέτοιος ώστε:

$\left|\frac{1}{2^i}\right| < 10^{1-p}$ για όλα τα i>N.

Όταν αυτό αληθεύει, λέμε ότι το όριο του $1/2^i$ είναι μηδέν, ή ότι το $1/2^i$ συγκλίνει στο μηδέν καθώς το i αυξάνει απεριόριστα. Αυτό γράφεται

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{2^i}=0\,.$$

Δεν υπάρχει, φυσικά, κανένα ιδιαίτερο πλεονέκτημα στη δεκαδική αναπαράσταση. Από μαθηματική σκοπιά το μόνο που είναι απαραίτητο είναι να πούμε ότι

Για κάθε θετικό αριθμό k, υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε $\left|\frac{1}{2^i}\right|<k$ για όλα τα i>N.

Περαιτέρω δίνονται παραδείγματα (στα οποία οι συναρτήσεις δίνονται όλες κομψά μέσω τύπων) τόσο συγκλινουσών όσο και αποκλινουσών ακολουθιών, ώσπου μετά από περίπου πέντε σελίδες συζήτησης φθάνουμε (SMP, Βιβλίο 4, κεφάλαιο 43, σελ. 1312) στον ορισμό:

Ορισμός: Αν για κάθε θετικό αριθμό k υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε

$$i>\mathrm{N}\Rightarrow|f(i)-c|<k,$$

η ακολουθία $\{f(i)\}$ έχει *όριο c*, και γράφουμε

$$f(i)\to c \text{ καθώς } i\to\infty, \text{ ή } \lim_{i\to\infty}f(i)=c\,.$$

Με άλλα λόγια, εφαρμόζουμε μια «σπειροειδή» παρουσίαση του ορισμού. Η έννοια εισάγεται πρώτα με συγκεκριμένα παραδείγματα. Κατόπιν προσεγγίζεται σε αυξανόμενα επίπεδα πολυπλοκότητας, μέχρι να επιτευχθεί ένας τυπικός ορισμός στο τέλος του μαθήματος.

Μπορεί δικαιολογημένα να αναρωτηθεί κανείς ποια εικόνα της έννοιας παράγεται μέσω αυτών των τακτικών και αν ο τυπικός ορισμός της έννοιας ενσωματώνεται λεπτομερώς σ' αυτή την εικόνα. Επ' αυτού του θέματος προς το παρόν έχουμε μόνο στοιχεία που συνελέγησαν από μαθητές που πέρασαν σε ένα πανεπιστήμιο έχοντας παρακολουθήσει μια ποικιλία διαφορετικών μαθημάτων «ανώτερου επιπέδου» στα τελευταία δύο χρόνια του σχολείου.

Σε ένα ερωτηματολόγιο για τα μαθηματικά που δόθηκε από τους D. Tall και S. Vinner (1981) σε μαθητές που πέρασαν σε μαθηματική σχολή του πανεπιστημίου, οι μαθητές ρωτήθηκαν αν είχαν συναντήσει την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$

στο σχολείο, είτε με έναν ακριβή ορισμό, άτυπα ή καθόλου. Κατόπιν ζητήθηκε από όλους να βρουν τα όρια ορισμένων ακολουθιών, συμπεριλαμβανομένου και του

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n}\right).$$

Αφού τους ζητήθηκε να γράψουν τον ορισμό ενός ορίου (αν γνώριζαν κάποιον), τους ζητήθηκε να πουν αν το $0,\dot{9}$ (η κουκίδα συμβολίζει επαναλαμβανόμενα εννιάρια) ήταν ίσο με 1, ή μόλις μικρότερο, δίνοντας αιτιολόγηση της απάντησής τους. Οι λεπτομέρειες των απαντήσεών τους συζητούνται από τον David Tall. Ένα πλήθος απαντήσεων περιείχε δυνητικές συγκρούσεις. Ένας μαθηματικός ίσως θα θεωρούσε ότι ο υπολογισμός του παραπάνω ορίου ήταν ένα παρόμοιο πρόβλημα με το ερώτημα για το $0,\dot{9}$. Αντιθέτως, 14 από τους 36 μαθητές ισχυρίστηκαν ότι :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+...+\frac{9}{10^n}\right)=2\ , \qquad \text{αλλά ότι } 0,\dot{9}<1.$$

Οι απαντήσεις στο τελευταίο τμήμα συχνά δίνονταν με όρους «απειροστών»:

> «Είναι μόλις μικρότερο από ένα, επειδή η διαφορά μεταξύ αυτού και του ένα είναι απείρως μικρή.»
>
> «Μόλις μικρότερο από ένα, επειδή ακόμη και στο άπειρο ο αριθμός, αν και είναι πολύ κοντά στο ένα, ουσιαστικά δεν είναι ένα.»

Σαφώς οι δύο ερωτήσεις προκάλεσαν διαφορετικά μέρη της εικόνας της έννοιας της διαδικασίας του ορίου. Σε ένα επόμενο τεστ, στους ίδιους μαθητές ζητήθηκε να γράψουν τους παρακάτω δεκαδικούς ως κλάσματα:

$$0.25,\quad 0.05,\quad 0.3,\qquad 0.\dot{3}=0.333...,\ 0.\dot{9}=0.999....$$

Δεκατρείς από τους δεκατέσσερις μαθητές που προηγουμένως έλεγαν ότι $0,\dot{9}<1$ τώρα έλεγαν ότι $0,\dot{9}=1$. Πολλοί βίωναν τώρα μια πραγματική <u>γνωσιακή σύγκρουση</u>, που φαίνεται στις απαντήσεις για τους δύο τελευταίους δεκαδικούς:

A) $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$

$0.\dot{9}=3\times 0.\dot{3}=3\times\frac{1}{3}=$ ανοησία.

B) $0.333\ldots=\frac{1}{3}$ όχι κλάσμα

C) $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$

$0,\dot{9}=1$ ή

D) $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$

$0.\dot{9}=0.999$

E) $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$

$0,\dot{9}\approx 1$

Άλλοι δυνητικοί παράγοντες γνωσιακής σύγκρουσης που εμφανίστηκαν, συζητούνται (αν και δε χρησιμοποιείται αυτή η ορολογία) από τους Schwarzenberger & Tall (1978) και Tall (1977b). Ένας με μεγάλη σημασία είναι ότι οι μαθητές συχνά σχηματίζουν μια εικόνα της έννοιας του «$s_n \to s$» για να εννοήσουν ότι το s_n πλησιάζει το s, αλλά στην πραγματικότητα ποτέ δεν το φθάνει, όπως το θέτει ένας μαθητής:

> «Το $s_n \to s$ σημαίνει ότι το s_n πλησιάζει το s καθώς μεγαλώνει το n, αλλά δε φθάνει πραγματικά το s μέχρι το άπειρο.»

Έτσι το «μηδέν κόμμα εννέα επαναλαμβανόμενο» δεν είναι ίσο με τη μονάδα, διότι η διαδικασία της προσέγγισης στη μονάδα *συνεχίζεται επ' άπειρον* χωρίς ποτέ να ολοκληρώνεται.

Ο σχηματισμός της εικόνας της έννοιας δε βοηθείται όταν τα περισσότερα παραδείγματα ορίου αποτελούνται από ακολουθίες που δίνονται από κανονικούς τύπους που ποτέ δε γίνονται πραγματικά ίσοι με το όριο. Αν ένας μαθητής έχει μια εικόνα της έννοιας που δεν επιτρέπει στο s_n να ισούται με το s (επειδή διαρκώς «πλησιάζει το s καθώς το n αυξάνει) τότε εικάζουμε ότι αυτός δε μπορεί να αφομοιώσει ένα κατασκευασμένο παράδειγμα όταν του παρουσιαστεί.

Όταν σε μια ομάδα τεσσάρων τέτοιων μαθητών δόθηκε το παράδειγμα

$$s_n = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ \dfrac{1}{2n}, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

αυτοί επέμειναν ότι δεν επρόκειτο για μία ακολουθία, αλλά για δύο. Οι άρτιοι όροι *έτειναν* στο μηδέν και οι περιττοί ήταν *ίσοι* με μηδέν. Οπότε δεν επρόκειτο για ένα αυθεντικό παράδειγμα ακολουθίας της οποίας κάποιοι όροι ισούνται με το όριο! Όταν σε ένα μαθητή δίνεται ένας τυπικός ορισμός της έννοιας, η εικόνα του ορισμού της έννοιας που αυτός ο ορισμός σχηματίζει στη γνωσιακή δομή του μαθητή μπορεί να είναι πολύ ασθενική. Έχουμε παρατηρήσει, λόγου χάρη, ότι οι μαθητές έχουν μεγάλες αρχικές δυσκολίες με τη χρήση των ποσοδεικτών «όλοι» και «κάποιοι» και οι συνήθεις ορισμοί των ορίων και της συνέχειας μπορούν όλοι να παρουσιάσουν προβλήματα για το μαθητή. Η εικόνα της έννοιάς του καθιστά προφανές γι' αυτόν ότι αν το s_n πλησιάζει το s τότε το $1/s_n$ πλησιάζει το 1/s (αρκεί το τελευταίο να μην είναι μηδέν). Αλλά μια ασθενική κατανόηση του ορισμού της έννοιας μπορεί να κάνει την τυπική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος πολύ δύσκολη για το μαθητή. Τούτο είναι ένα συνηθισμένο φαινόμενο που εμφανίζεται με μια ισχυρή εικόνα έννοιας και μια ασθενική εικόνα του ορισμού της έννοιας που διαποτίζει ολόκληρη την πανεπιστημιακή μελέτη της ανάλυσης, ειδικά όταν υπάρχουν δυνητικοί παράγοντες σύγκρουσης μεταξύ των δύο.

3.4.4 Όρια συναρτήσεων

Όρια συναρτήσεων της μορφής $\lim_{x \to a} f(x) = c$ προσεγγίζονται επίσης με διαισθητικό τρόπο, με μια άτυπη επεξήγηση, και κατόπιν σε κάποιο επόμενο στάδιο μπορεί να δοθεί ένας τυπικός ορισμός. Συχνά η οριακή διαδικασία εισάγεται αρχικά όταν συζητείται η διαφόριση, περίπτωση στην οποία η εικόνα της έννοιας ενός ορίου μπορεί να περιλαμβάνει τη νοητική εικόνα μιας χορδής που τείνει σε μια εφαπτομένη. Άλλες προσεγγίσεις της διαφόρισης μπορεί να καλλιεργούν την εικόνα της έννοιας μέσω του παράγοντα μεγέθυνσης ή της στιγμιαίας ταχύτητας. Όπως με το όριο μιας ακολουθίας, το όριο μιας συνάρτησης συχνά θεωρείται ως μια δυναμική διαδικασία, όπου το x προσεγγίζει το α, κάνοντας το f(x) να πλησιάζει το c. Και πάλι οι μαθητές μπορεί να θεωρήσουν την ανισότητα $f(x) \neq c$ ως μέρος της δικής τους εικόνας της έννοιας. Από την άλλη μεριά ο τυπικός ορισμός της έννοιας μπορεί να δίνεται σε ανακριβή μορφή. Στο κείμενο του βιβλίου 4 του SMP, συζητείται το παράδειγμα του

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

όπου η συνάρτηση $f(x) = \left(x^2 - 1\right) / \left(x - 1\right)$ δεν ορίζεται για x=1. Γίνεται ο υπαινιγμός ότι δε θεωρούμε την περίπτωση x=1, οπότε συνάγεται ότι (SMP, Βιβλίο 4, Κεφάλαιο 43, σελ. 1325):

Για κάθε θετικό αριθμό h, υπάρχει ένας αριθμός k, τέτοιος ώστε

$$|x - 1| < k \Rightarrow |f(x) - 2| < h$$

Από αυτό ο τυπικός ορισμός του ορίου είναι (SMP, Βιβλίο 4, Κεφάλαιο 43, σελ. 1325):

Ορισμός. Αν για κάθε θετικό αριθμό h υπάρχει ένας αριθμός k, τέτοιος ώστε

$$|x - a| < k \Rightarrow |f(x) - c| < h,$$

τότε γράφουμε

$$f(x) \to c \text{ καθώς } x \to a \text{, ή } \lim_{x \to a} f(x) = c \,.$$

Σαφώς ο ορισμός θα έπρεπε τουλάχιστον να προσδιορίζει ότι x≠α, ώστε να γράφει:

Δοθέντος ενός h>0, υπάρχει k>0 τέτοιο ώστε

$$0 < |x - a| < k \Rightarrow |f(x) - c| < h \,.$$

Σιωπηρά αυτό μπορεί να αποτελεί τμήμα της εικόνας της έννοιας. Θα εικάζαμε ότι η διαισθητική προσέγγιση που προηγείται του ορισμού (αν αυτός δίνεται ποτέ) είναι συχνά τόσο ισχυρή ώστε το αίσθημα των μαθητών είναι δυναμικό:

καθώς το x πλησιάζει το α, το *f(x)* πλησιάζει το *c*

με ένα σίγουρο αίσθημα κίνησης.

Σε πρωτοετείς φοιτητές δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο στο οποίο τους ζητούνταν να εξηγήσουν τι σημαίνει η έκφραση

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \,.$$

Στην επόμενη σελίδα του ερωτηματολογίου τους ζητούνταν να γράψουν έναν ορισμό του $\lim_{x \to a} f(x) = c$, αν γνώριζαν κάποιον.

Εβδομήντα φοιτητές απάντησαν (όλοι τους είχαν βαθμό «Α» ή «Β» στα μαθηματικά). Εκείνοι που απάντησαν στη δεύτερη ερώτηση, τον ορισμό της έννοιας για το «$\lim_{x \to a} f(x) = c$» μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

	σωστά	λάθος
τυπικός	4	14
δυναμικός	27	4

Μόνο τέσσερις έδωσαν έναν σωστό τυπικό ορισμό, από τους οποίους ένας ήταν τοπολογικός και τρεις ήταν της μορφής που δόθηκε παραπάνω.

Οι δεκατέσσερις λανθασμένες προσπάθειες για τυπικό ορισμό, περιλάμβαναν επτά που είχαν σχέση με άλλες έννοιες όπως:

Καθώς το $x \to a$, $c - \varepsilon \le f(x) \le c + \varepsilon$ για όλα τα $n > n_0$

ή

$|f(n) - f(n+1)| < \varepsilon$ για κάθε n μεγαλύτερο από δοθέν N_0

και επτά ήταν ημιτελείς ή ανακριβείς, όπως

$|f(x) - c| < \varepsilon$ για όλες τις θετικές τιμές του ε με x αρκετά κοντά στο α.

Από τις ημιτελείς, δύο παρέλειπαν τη συνθήκη x≠α.
Οι δυναμικές απαντήσεις περιλάμβαναν τυπικές απαντήσεις όπως

η τιμή που το f(x) πλησιάζει καθώς οι τιμές του x λαμβάνονται πλησιέστερα στο α είναι c

ή

καθώς το x τείνει προς το α, η τιμή του f(x) τείνει προς το c.

Λανθασμένες δυναμικές απαντήσεις περιλάμβαναν:

Καθώς το x έρχεται ολοένα κοντύτερα στο α, η τιμή της συνάρτησης ισούται με c,ή εκδοχές ανάμεικτες με άλλες οριακές διαδικασίες:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c .$$

Το προηγούμενο ερώτημα που απαιτούσε την εξήγηση του

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

αποκάλυψε ότι οι περισσότεροι φοιτητές μπορούσαν να κάνουν μια προσπάθεια με ένα παράδειγμα παρά το ότι δε μπορούσαν να δώσουν ένα ορισμό της έννοιας. Εκείνοι που δεν έδωσαν ένα ορισμό της έννοιας απάντησαν στο παράδειγμα αυτό ως εξής:

	σωστά	λάθος
χρησιμοποίησαν δυναμική ιδέα	11	1
Άλλη	6	3

Εκείνοι που χρησιμοποίησαν μια δυναμική ιδέα ουσιαστικά είπαν ότι το $\left(x^3-1\right)/\left(x-1\right)$ πλησιάζει το 3 καθώς το x πλησιάζει το 1, ενώ κάποιοι από αυτούς διαίρεσαν το $\left(x^3-1\right)$ δια του x-1 και υπολόγισαν το όριο ως $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$. Οι άλλες προσεγγίσεις περιλάμβαναν ιδέες της συνέχειας («συμπλήρωση του σημείου που λείπει από το γράφημα») και τον κανόνα του L' Hôpital,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{1}=3.$$

Ενδιαφέρον είχε το πότε εκείνοι που έδωσαν έναν ορισμό της έννοιας χρησιμοποίησαν πραγματικά αυτό τον ορισμό στο παράδειγμα. Τρεις από τους τέσσερις που έδωσαν ένα σωστό τυπικό ορισμό εφάρμοσαν την ίδια μέθοδο στο παράδειγμα, και ο τέταρτος χρησιμοποίησε μια δυναμική μέθοδο. Εν τω μεταξύ από τους 14 που έδωσαν λανθασμένους τυπικούς ορισμούς 10 έδωσαν δυναμικούς (από τους οποίους 2 ήταν και πάλι εσφαλμένοι) και 4 χρησιμοποίησαν τον λανθασμένο τυπικό ορισμό. Όλοι οι φοιτητές που έδωσαν δυναμικό ορισμό χρησιμοποίησαν τη δυναμική μέθοδο με διαφορετικά επίπεδα ακρίβειας. Συνολικά 54 από τους 70 χρησιμοποίησαν μια δυναμική προσέγγιση στο παράδειγμα.

Πολλοί από αυτούς χρησιμοποίησαν τις λέξεις «πλησιάζει», «έρχεται πλησιέστερα στο», «τείνει στο», που οδηγούν στο ενδεχόμενο ότι η υπόθεση ότι $f(x)\neq c$ είναι ένα δυνητικός παράγοντας σύγκρουσης.

4.Η ΕΡΕΥΝΑ

4.1 Στόχος και μεθοδολογία της έρευνας

Οι στόχοι της παρούσας έρευνας είναι:

- Να αποτυπώσει κάποιες ενδεικτικές αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές της Γ΄Λυκείου για την έννοια του ορίου.
- Να επισημάνει κάποιες από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, τόσο στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, όσο και στον υπολογισμό ορίων με ποικίλες μεθόδους (αλγεβρικά, γραφικά, με πίναικα τιμών).

Η έρευνα έγινε σε 94 μαθητές Γ'Λυκείου, από τους οποίους 50 είναι αγόρια και 44 είναι κορίτσια. Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν σε 19 μαθητές Θετικής κατεύθυνσης (20%) και σε 75 μαθητές Τεχνολογικής (80%). Οι μαθητές προέρχονταν από δημόσια Ενιαία Λύκεια της Ρόδου. Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν προς το τέλος των μαθημάτων της σχολικής χρονιάς (Απρίλιος 2005) και αποτελούνται από 9 ερωτήσεις με πολλά υποερωτήματα. Υπάρχουν ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, σωστού - λάθους, συμπλήρωσης κενού και σύντομης απάντησης (επισυνάπτεται στο παράρτημα). Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου και τη στατιστική τους επεξεργασία χρησιμοποιήσαμε το στατιστικό πακέτο SPSS, από το οποίο παρουσιάζουμε μόνο τις πληροφορίες που αφορούν τα ποσοστά επιτυχίας των διαφόρων ερωτήσεων, και τη μέθοδο του Gras (συνεπαγωγικό διάγραμμα και διάγραμμα ομοιότητας).

4.2 Αποτελέσματα της έρευνας

<u>Για το ερώτημα 1</u>

Στο ερώτημα «τι σημαίνει για σας όριο συνάρτησης» οι μαθητές κατά 26% έχουν σωστή αντίληψη της έννοιας και προτιμούν τη δυναμική ερμηνεία, ενώ το 74% ή έχουν εντελώς λάθος αντίληψη (37%) ή δεν απαντούν καθόλου (37%). Τα παραπάνω αποτελέσματα ήταν αναμενόμενα, όπως επιβεβαιώνει και η διεθνής βιβλιογραφία .

Χαρακτηριστικό είναι ότι στο ερώτημα αυτό οι μαθητές προσπάθησαν να δώσουν κάποιον ορισμό. Ακόμη και οι μαθητές που φαίνεται ότι αντιλαμβάνονται σωστά την

έννοια έχουν την σύγχυση ότι το όριο φτάνει πολύ κοντά στο l, χωρίς ποτέ να ισούται με αυτό. Πάντως οι περισσότεροι επιχειρούν να επεξηγήσουν την έννοια χρησιμοποιώντας τις λέξεις πλησιάζει πολύ κοντά , προσεγγίζει, τείνει, περιοχή του x_0 κ.τ.λ. Μερικοί δε εμπλέκουν και την έννοια της συνέχειας. Άλλοι λένε ότι το όριο είναι μια τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση. Κάποιοι είπαν ότι το όριο είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση. Ένας από τους μαθητές έγραψε ότι το όριο είναι κάτι το αόριστο!!! Ένα αγόρι θετικής κατεύθυνσης έγραψε ότι γι'αυτόν το όριο είναι μια χρήσιμη μέθοδος με την οποία είμαστε ικανοί να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες δεν ορίζεται η συνάρτηση.

<u>Για τα ερωτήματα 2α και 2β</u>

Το 97% των μαθητών, ενώ συμπλήρωσαν σωστά τον πίνακα τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, εντούτοις μόνο το 42% ήταν σε θέση να παρατηρήσει από τον πίνακα τιμών ότι οι τιμές της τείνουν στο 1. Κάποιοι δε από αυτούς υπολόγισαν το όριο της συνάρτησης στο $+\infty$ και το βρήκαν 1. Το 21% είδε ότι οι τιμές αυξάνουν ή είπε ότι πρόκειται για μια αύξουσα συνάρτηση. Εντύπωση κάνει που το 37% των μαθητών (παρόλο που τελειώνουν το Λύκειο) είτε μπερδεύτηκαν στη διάταξη των πραγματικών αριθμών λέγοντας ότι οι τιμές της συνάρτησης μικραίνουν και χαρακτήρισαν την συνάρτηση ως φθίνουσα, είτε δεν απάντησαν καθόλου.

<u>Για το 3^0 ερώτημα</u>

α) Μόνο το 36% των μαθητών γνωρίζει ότι είναι λάθος ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ σημαίνει ότι καθώς το x μεγαλώνει το $f(x)$ πλησιάζει στο l , αλλά δεν το ''φθάνει'' ποτέ. Δηλαδή οι μαθητές δεν έχουν λάβει υπόψη τους π.χ. ότι μπορεί η συνάρτηση να είναι η σταθερή, οπότε η $f(x)= l$.

β) Ενώ στο ερώτημα αν όριο μιας συνάρτησης είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση, 70 μαθητές (ποσοστό 74%) έχουν συνειδητοποιήσει ότι το όριο και τα ακρότατα της συνάρτησης είναι γενικά ανεξάρτητα.

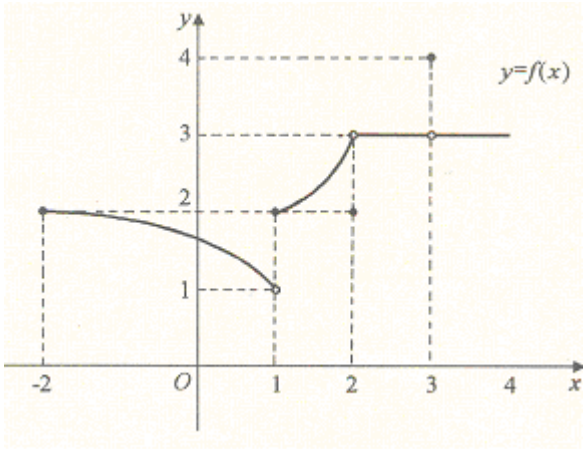
γ) Δυστυχώς το 59% των μαθητών υποστηρίζουν ότι: Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 έναν πραγματικό αριθμό l, τότε αναγκαστικά το x_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Φαίνεται καθαρά ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν γνωρίζουν ότι το x_0 μπορεί είτε να ανήκει είτε όχι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

<u>Για το 4^0 ερώτημα</u>

Σε αυτό το ερώτημα δόθηκαν στους μαθητές κάποια όρια με τα αποτελέσματα και τους καλέσαμε με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να πουν αν καθένα είναι σωστό ή λάθος .

Και στα τέσσερα όρια τους δόθηκαν λάθος αποτελέσματα. Τα ποσοστά αυτών που βρήκαν ότι οι απαντήσεις είναι λάθος δίνονται στον επόμενο πίνακα :

ΟΡΙΑ			ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$	Σ	Λ	73%
$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$	Σ	Λ	55%
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$	Σ	Λ	52%
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$	Σ	Λ	62%



Όπως φαίνεται, οι μαθητές είχαν την μεγαλύτερη επιτυχία στο πρώτο όριο και την μεγαλύτερη αστοχία στο τρίτο. Αυτό είναι παράξενο, αφού δείχνουν οι μαθητές να γνωρίζουν (73%) ότι το δεξί πλευρικό όριο στο ένα δεν είναι 1, εντούτοις 20 από αυτούς ισχυρίζονται ότι το όριο στο 1 είναι 2 (52%)!

Η αλήθεια είναι ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για τον τρόπο σκέψης τους. Δεν ξέρουμε αν αυτό συμβαίνει από άγνοια ή από αμέλεια .Όσο για το όριο στο 3, σχεδόν οι μισοί το μπερδεύουν με την τιμή της συνάρτησης στο 3. Επίσης το 62% ξέρει ότι το όριο στο $+\infty$ δεν είναι $+\infty$. Βλέπουμε ότι τα παιδιά ενώ υπολογίζουν σωστά κατά 95% την τιμή της συνάρτησης στο -2, δεν τα καταφέρνουν εξίσου στις τιμές στο 1 και στο 2.

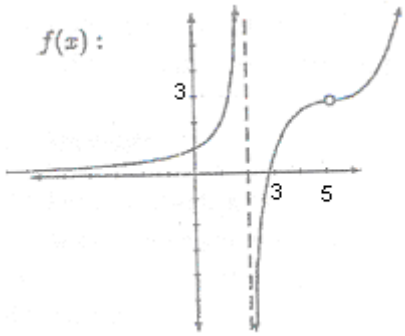
<u>Για το 5^0 ερώτημα</u>

Ο υπολογισμός των ορίων από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι δυσκολεύει τους μαθητές, με εξαίρεση τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ που το ποσοστό επιτυχίας των σωστών απαντήσεων ήταν 80%.

Για το $\lim_{x\to 2} f(x)$ μόνο 31% των μαθητών είδαν ότι δεν υπάρχει, δικαιολογώντας ότι τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά .

Για το $\lim_{x\to 5} f(x)$ περίπου οι μισοί μαθητές (52%) βρήκαν ότι ισούται με 3, ενώ κάποιοι από τους υπόλοιπους θεώρησαν ότι το όριο δεν υπάρχει, αφού δεν ορίζεται η συνάρτηση στο 5.

Μεγάλη είναι η αποτυχία για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ της τάξης του 59%. Τα περισσότερα παιδιά είπαν ότι το όριο αυτό είναι $-\infty$, αντί 0 !



<u>Για το 6^0 ερώτημα</u>

Το 63% των μαθητών υπολόγισε σωστά το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$, ενώ μόλις το 5% μπόρεσε να αιτιολογήσει, έστω μερικώς, τις ενέργειες που κάνει. Οι μαθητές αυτοί παραγοντοποίησαν τον αριθμητή και απλοποίησαν το κλάσμα, χωρίς όμως κανένας να εξηγεί γιατί, ενώ το πεδίο ορισμού της προκύπτουσας συνάρτησης αλλάζει, το όριο παραμένει το ίδιο. Χαρακτηριστικό είναι επίσης ότι αρκετοί μαθητές της Γ΄ Λυκείου δεν μπόρεσαν να εφαρμόσουν την ταυτότητα της διαφοράς κύβων!

Το όριο $\lim_{x\to -\infty}\frac{|x^3-x-1|-x^3}{x^2-1}$ φάνηκε να δυσκολεύει πολύ τους μαθητές, αφού μόλις το 31% μπόρεσε να το υπολογίσει, εκ των οποίων το 29% δικαιολόγησε αναλυτικά πώς απαλλάχτηκε ο τύπος από την απόλυτη τιμή και πώς απλοποιήθηκε το κλάσμα. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού η έννοια της απόλυτης τιμής μπερδεύει τους μαθητές από την Α΄Λυκείου. Κάποιοι μαθητές σημείωσαν ότι δε γίνεται να απαλλαχτούν από την απόλυτη τιμή γιατί δεν παραγοντοποιείται το πολυώνυμο τρίτου βαθμού! Δεν

μπόρεσαν να σκεφτούν ότι σημασία έχει η εύρεση του προσήμου του πολυωνύμου σε μια περιοχή του πλην απείρου.

Το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x-2|-3x+3}{x-1}$ το υπολόγισαν ακόμη λιγότεροι μαθητές (26%).

Φυσικά το πρόβλημά τους ήταν να απαλλαχτούν από την απόλυτη τιμή, οπότε ήρθαν αντιμέτωποι με το πρόσημο του τριωνύμου (ουσιαστικά ύλη Α΄ Λυκείου).Φαίνεται ότι περίπου ένας στους τρεις δεν είναι σε θέση να βρει το πρόσημο του τριωνύμου γύρω από το 1! Επίσης κάποιοι από τους μαθητές που βρήκαν τα πλευρικά όρια δεξιά και αριστερά από το 1 διαφορετικά, δεν σκέφτηκαν να πουν ότι δεν υπάρχει αυτό το όριο.

<u>Για το 7^0 ερώτημα</u>

Το 83% των μαθητών υπολόγισε σωστά το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}$, ενώ για το όριο $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$ το αντίστοιχο ποσοστό ήταν 86%.Παρατηρούμε όμως ότι μόνο το 51% μπόρεσε να βρει το $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ και το 50% να αποδείξει ότι το $\lim_{x\to 0}\frac{|x|+x}{x}$ δεν υπάρχει. Εδώ παρατηρούμε ότι οι μαθητές μπόρεσαν να εκτελέσουν τις «προφανείς» απλοποιήσεις, αλλά δυσκολεύτηκαν περισσότερο όταν βρέθηκαν αντιμέτωποι με ένα άπειρο όριο ή με ένα όριο που δεν υπάρχει.

<u>Για το 8^0 πρόβλημα</u>

Παρατηρούμε ότι το 71% των μαθητών απαντούν διαισθητικά ότι τα τρίγωνα που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι άπειρα και το 55% απαντά ότι το άθροισμα των περιμέτρων τους είναι πεπερασμένος αριθμός .Μόνο όμως το 4% είναι σε θέση να δικαιολογήσει την απάντησή του. Δηλαδή από τους 97 μαθητές μόνο πέντε μπόρεσαν να προσεγγίσουν μια απάντηση, εκ των οποίων μόνο ένας έκανε μαθηματική απόδειξη με άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου!

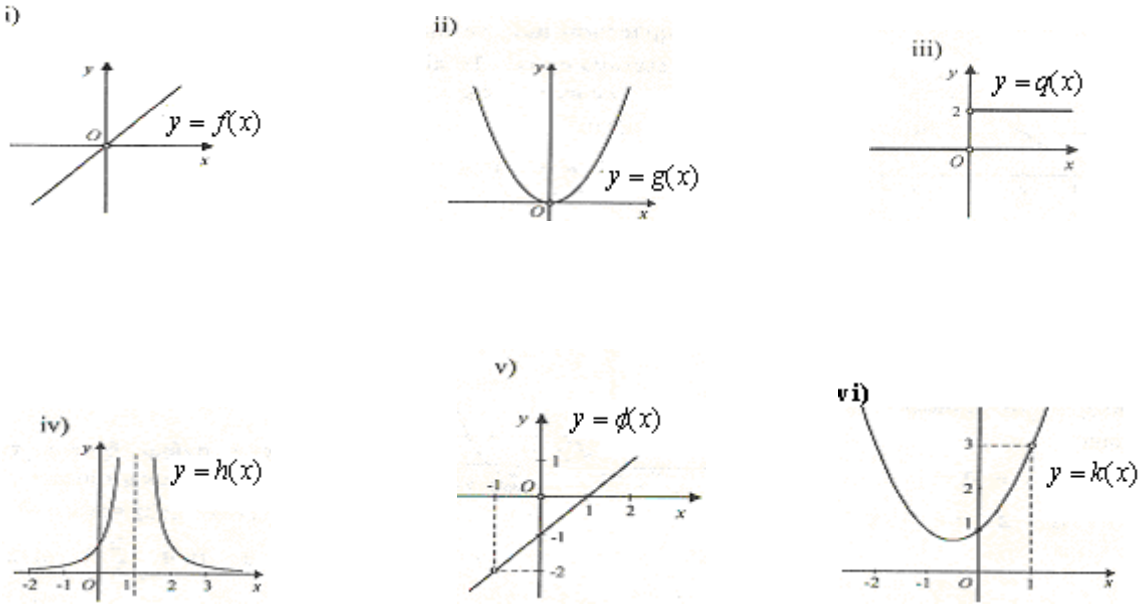
Σε αυτή την απάντηση φαίνεται καθαρά η αντίληψη πολλών μαθητών, ότι αφού τα τρίγωνα που προσθέτουμε είναι άπειρα, τότε και το άθροισμα των περιμέτρων τους θα

είναι άπειρο. Δηλαδή δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι μια άπειρη διαδικασία μπορεί να δώσει πεπερασμένο αποτέλεσμα.

<u>Για το 9^0 ερώτημα</u>

Τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας φαίνεται να πέτυχαν οι μαθητές σ'αυτή την ερώτηση. Τα αποτελέσματα επιτυχίας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΟΡΙΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$	83%
ii) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$	84%
iii) $\lim\limits_{x\to 0} q(x) =$	56%
iv) $\lim\limits_{x\to 1} h(x) =$	82%
v) $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x) =$	71%
vi) $\lim\limits_{x\to 1} k(x) =$	75%



Διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην εύρεση του ορίου iii) που τα πλευρικά όρια βγαίνουν διαφορετικά, όπου μόνο το 56% είπε ότι δεν υπάρχει. Ενώ το όριο iv) το βρήκαν το 82% των μαθητών παρόλο που το βρίσκουν με τον ίδιο τρόπο με το προηγούμενο όριο. Αυτό ίσως να οφείλεται στην μορφή της γραφικής παράστασης. Μεγάλο είναι το ποσοστό επιτυχίας στον υπολογισμό του i), ii) και iv) που και οι τρεις γραφικές παραστάσεις είναι παρόμοιες. Αξιοπερίεργο πάντως είναι που το v) το βρήκε το 71% των μαθητών, αν και η γραφική παράσταση έχει την ίδια μορφή με τις προηγούμενες.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι κάποια κοινά όρια ζητούνται στην 7η ερώτηση να υπολογιστούν αλγεβρικά και όχι γραφικά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα συγκριτικά αποτελέσματα επιτυχίας:

ΟΡΙΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ 7ης ΕΡΩΤΗΣΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ 9ης ΕΡΩΤΗΣΗΣ ΓΡΑΦΙΚΑ
α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=$	83%	84%
β) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=$	86%	71%
γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=$	51%	82%
δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lvert x\rvert+x}{x}=$	50%	56%

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του πρώτου και τελευταίου ορίου οι μαθητές είχαν περίπου τα ίδια ποσοστά επιτυχίας . Η μεγάλη διαφορά στα αποτελέσματα

εμφανίζεται στο όριο $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ όπου κατά την αλγεβρική επίλυση τα παιδιά έφεραν ποσοστό επιτυχίας 51%, ενώ τα κατάφεραν πολύ καλύτερα κατά ποσοστό 82% βλέποντας την γραφική παράσταση. Όσο για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$, 86% των μαθητών το υπολόγισε αλγεβρικά, ενώ κατά παράξενο τρόπο μόνο το 71% το υπολόγισε γραφικά. Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο ένας ή ο άλλος τρόπος αναπαράστασης βοηθάει περισσότερο τους μαθητές .

4.3 Στατιστική επεξεργασία αποτελεσμάτων με τη μέθοδο Gras

Η συνεπαγωγική στατιστική μέθοδος του Gras είναι κατά την άποψή μας μια πολύ σημαντική μέθοδος που δίνει, ανάμεσα σε άλλα, δύο σημαντικά διαγράμματα:

- Το **διάγραμμα ομοιότητας**, το οποίο παρουσιάζει τις διάφορες μεταβλητές σε σχέση με τα ερωτήματα σε ομάδες. Κάθε ομάδα περιέχει μεταβλητές τις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο, δηλαδή πετυχαίνουν ή αποτυγχάνουν σε αυτές ταυτόχρονα. Αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να οφείλεται στον εννοιολογικό χαρακτήρα της κάθε ομάδας μεταβλητών.
- Το **συνεπαγωγικό διάγραμμα**, το οποίο συνδέει διάφορες μεταβλητές με βέλη, π.χ. Va→Vb σημαίνει ότι όσοι πετύχουν τη Va θα πετύχουν σίγουρα και τη Vb, ενώ σε κάποια μορφή του προγράμματος που εμπλέκει έννοια 'εντροπίας', ισχύει και η αντιθετοαντίστροφη της συνεπαγωγής, δηλαδή όσοι αποτύχουν στο Vb, θα αποτύχουν και στο Va. Τέτοιου είδους συνεπαγωγικές σχέσεις είναι πολύ σημαντικές για την διδασκαλία των μαθηματικών, γιατί είμαστε σε θέση ως διδάσκοντες να γνωρίζουμε σε ποιες ασκήσεις θα πρέπει να δώσουμε έμφαση κατά τη διδασκαλία μας .

Ορισμός Μεταβλητών

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	
Te	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Th	ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
D1	ΕΡΩΤΗΣΗ 1 – DEFINITION - ΣΩΣΤΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ
D2	ΕΡΩΤΗΣΗ 1 – DEFINITION - ΛΑΘΟΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗ
D3	ΕΡΩΤΗΣΗ 1 – DEFINITION - ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΑ
Ta	ΕΡΩΤΗΣΗ 2α – TABLE - ΠΙΝΑΚΑΣ
Int1	ΕΡΩΤΗΣΗ 2β - INTUITION - ΟΡΘΗ ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ (ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ 1)
Int2	ΕΡΩΤΗΣΗ 2β - INTUITION - ΣΩΣΤΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ (ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ)
Int3	ΕΡΩΤΗΣΗ 2β - INTUITION - ΛΑΘΟΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗ / ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΑ
Co1- Co3	ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ 3α, 3β, 3γ – COGNITIONS - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ
V4 ga1 - V4 ga4	ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4α, 4β, 4γ, 4δ - GRAPHIC ALGEBRA- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ/ΛΑΘΟΥΣ
V4 val 1 -V4val3	ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ε, 4στ, 4ζ - VALUE – ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ
V5 ga1 - V5ga4	ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5α, 5β, 5γ, 5δ - GRAPHIC ALGEBRA- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ
V6c a1 - V6 a2	ΑΣΚΗΣΗ 6α - CALCULATION – ΣΩΣΤΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ / ΣΩΣΤΗ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ
V6c b1 - V6c b2	ΑΣΚΗΣΗ 6β - CALCULATION – ΣΩΣΤΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ / ΣΩΣΤΗ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ
V6c c1 - V6c c2	ΑΣΚΗΣΗ 6γ - CALCULATION – ΣΩΣΤΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ / ΣΩΣΤΗ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ
V7 c1 - V7 c4	ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7α, 7β, 7γ , 7δ – CALCULATION - ΣΩΣΤΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ
Pa	ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8α - PROBLEM
Pb	ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8β - PROBLEM
Ex pb	ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8β - EXPLANATION PROBLEM - ΣΩΣΤΗ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗ
V9 ga1 - V9 ga6	ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9α, 9β, 9γ, 9δ, 9ε, 9στ - GRAPHIC ALGEBRA- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ

Διάγραμμα Ομοιότητας

Similarity : C:\Documents and Settings\gagatsis\Desktop\aggeliki\ÁÐÏÔÅË.ÁÓÌÁÔÁ ÅÑÙÔÇÌÁÔÏÉÏÃÉÏÕ.csv

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

Παρατηρούμε ότι μια πρώτη ομάδα αποτελούν τα:

Ερώτηση 1 – Σωστή Αντίληψη (D1),

Άσκηση 6α – Σωστός Υπολογισμός (V6ca1),

Άσκηση 6β - Σωστός Υπολογισμός (V6cb1),

Άσκηση 6β – Σωστή Δικαιολόγηση (V6cb2),

Άσκηση 6γ - Σωστός Υπολογισμός (V6cc1) και

Άσκηση 6γ - Σωστή Δικαιολόγηση (V6cc2).

Δηλαδή οι μαθητές αντιμετώπισαν με τον ίδιο τρόπο την σωστή αντίληψη της έννοιας του ορίου, με την αλγεβρική επίλυση αυτών των ορίων και τη δικαιόλογησή τους .Αυτό σημαίνει ότι όσοι μαθητές φαίνεται να κατανοούν την έννοια του ορίου είναι σε θέση να υπολογίζουν αλγεβρικά τα πιο δύσκολα όρια του ερωτηματολογίου (με απόλυτες τιμές – ερώτηση 6) και να δίνουν μια πλήρη δικαιολόγηση. Επίσης από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων βρήκαμε ότι τα έργα

Άσκηση 6β - Σωστός Υπολογισμός (V6cb1) και

Άσκηση 6β – Σωστή Δικαιολόγηση (V6cb2)

καθώς και τα έργα

Άσκηση 6γ - Σωστός Υπολογισμός (V6cc1) και

Άσκηση 6γ - Σωστή Δικαιολόγηση (V6cc2)

έχουν δείκτη ομοιότητας 1.

Επίσης, τα έργα

Άσκηση 5β – Ερώτηση συμπλήρωσης Κενού (V5ga2) και

Άσκηση 5δ – Ερώτηση συμπλήρωσης Κενού (V5ga4)

έχουν δείκτη ομοιότητας 0.997972, ενώ τα έργα

{Άσκηση 6γ - Σωστός Υπολογισμός (V6cc1)

Άσκηση 6γ - Σωστή Δικαιολόγηση(V6cc2) }και

{Άσκηση 7δ – Σωστός υπολογισμός }

έχουν δείκτη ομοιότητας 0.990647 .

Μια δεύτερη ομάδα που παρατηρούμε είναι:

Ερώτηση 1 (D3), Ερώτηση 2β (Int3), Ερώτηση 3α (Co1), Άσκηση 9δ (V9ga4) και Ερώτηση 2β (Int1).

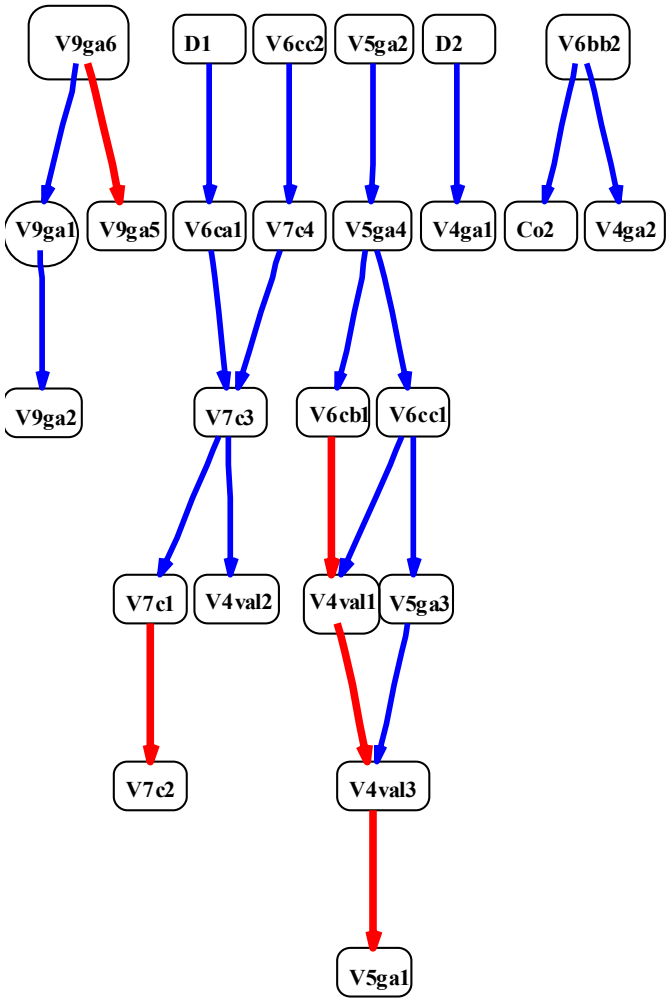
Δηλαδή οι μαθητές που δεν είχαν καμία άποψη για την έννοια του ορίου, φάνηκε να μην ξέρουν να απαντούν στις ερωτήσεις σωστού – λάθους που είχαν σχέση με την κατανόηση της έννοιας καθώς και να μην διαισθάνονται από την συμπλήρωση του πίνακα τιμών ότι η συνάρτηση τείνει στο ένα.

Μια τρίτη ομάδα που παρουσιάζεται αποτελείται από τις ασκήσεις :

Άσκηση 4στ (V4val2), Άσκηση 4ζ (V4val3), Άσκηση 5β (V5ga2), Άσκηση 5δ (V5ga4), Άσκηση 5γ (V5ga3), Άσκηση 7γ (V7c3) και Άσκηση 9ε (V9ga5).

Διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν με παρόμοιο τρόπο τις τιμές της συνάρτησης από την γραφική παράσταση καθώς και τον υπολογισμό κάποιων ορίων από αυτήν.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το **συνεπαγωγικό διάγραμμα**, από το οποίο παίρνουμε κάποιες αξιόλογες πληροφορίες.



Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται πέντε ομάδες μεταβλητών, το οποίο σημαίνει ότι κάποιες ερωτήσεις σχετίζονται μεταξύ τους περισσότερο με κάποιες άλλες. Δηλαδή αν ένας μαθητής πετύχει ένα δύσκολο ερώτημα, τότε είναι σίγουρο ότι μπορεί να πετύχει και κάποιο άλλο πιο εύκολο που ανήκει στην ίδια ομάδα .

Ένα άλλο αξιόλογο χαρακτηριστικό που προκύπτει από το συνεπαγωγικό διάγραμμα είναι ότι όποιος μαθητής μπόρεσε να πετύχει το έργο V9ga6 (δηλ. το όριο vi από το ερώτημα 9) , τότε σίγουρα πέτυχε και το έργο V9ga5 (δηλ. το όριο v από το ερώτημα 9).
Προφανώς αυτό ήταν αναμενόμενο γιατί και οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν την ίδια μορφή.

Επίσης όσοι μαθητές πέτυχαν την Άσκηση 7α (V7c1) , πέτυχαν οπωσδήποτε και την Άσκηση 7β (V7c2). Δηλαδή η επιτυχία υπολογισμού του ορίου $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}$ συνεπάγεται την επιτυχία υπολογισμού του ορίου $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$.Αυτό είναι απόλυτα λογικό γιατί αυτά είναι τα πιο εύκολα υπολογιστικά όρια που διδάσκονται οι μαθητές και επιπλέον αντιμετωπίζονται και τα δύο με παραγοντοποίηση και μετά απλοποίηση .

Επιπλέον παρατηρούμε ότι όσοι μαθητές έλυσαν την Άσκηση 6β (V6cb1) μπόρεσαν να βρουν τις τιμές της συνάρτησης από την γραφική παράσταση (V4val1, V4val3) και τέλος να υπολογίσουν την Άσκηση 5α (V5ga1).Δηλαδή όποιος μαθητής μπόρεσε να υπολογίσει το όριο $\lim_{x\to -\infty}\frac{\left|x^3-x-1\right|-x^3}{x^2-1}$ βρήκε και τις τιμές της συνάρτησης στο 4^{ο} ερώτημα από την γραφική παράσταση και ακόμη ήταν σε θέση να υπολογίσει το όριο $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ στο 5^{ο} ερώτημα .

Τέλος παρατηρούμε ότι κάποιες μεταβλητές δεν εμφανίστηκαν στο συνεπαγωγικό διάγραμμα, όπως οι Pa , Pb και Expb. Αυτό σημαίνει ότι η επιτυχής λύση του προβλήματος 8 είναι ανεξάρτητη από τον υπολογισμό κάποιων ορίων είτε αλγεβρικά, είτε γραφικά και από την κατανόηση ή μη της έννοιας του ορίου.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην μελέτη αυτή προσπαθήσαμε να καταγράψουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Γ' Λυκείου στην κατανόηση της έννοιας του ορίου και γενικότερα να παρατηρήσουμε πώς αντιλαμβάνονται την έννοια .

Η αλήθεια είναι ότι το δείγμα μας είναι σχετικά μικρό (94 μαθητές) για να μπορέσουμε να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα. Εντούτοις μπορούμε να δούμε την τάση που υπάρχει.

Τα περισσότερα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε και εμείς συμφωνούν με την παγκόσμια βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα έχουμε να σημειώσουμε τα ακόλουθα :

- Όσον αφορά την κατανόηση της έννοιας του ορίου, ένα πολύ μικρό ποσοστό είναι σε θέση να την καταλάβει. Οι περισσότεροι είτε δεν έχουν καθόλου άποψη, πράγμα που δηλώνει τουλάχιστον σύγχυση, είτε δηλώνουν λαθεμένες αντιλήψεις. Μια χαρακτηριστική λαθεμένη αντίληψη είναι ότι το όριο πλησιάζει πάρα πολύ την τιμή του, αλλά δεν την φτάνει .Μια άλλη παρανόηση είναι ότι πολλοί μαθητές ισχυρίζονται ότι η αναζήτηση του ορίου γίνεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Κάποιοι άλλοι πιστεύουν ότι το όριο αποτελεί τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης .

- Όσον αφορά την εύρεση ορίου μέσω γραφικής παράστασης, διαπιστώσαμε ότι οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται στα σημεία που αλλάζει τύπο η συνάρτηση. Αυτό μάλλον συμβαίνει γιατί δεν έχουν καθαρά στο μυαλό τους ότι για να υπάρχει το όριο σ' ένα σημείο, πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να είναι ίσα μεταξύ τους. Επίσης μπερδεύουν το όριο, με την τιμή του σε ένα σημείο. Όταν όμως τους ζητήσαμε να υπολογίσουν γραφικά όρια συναρτήσεων που αποτελούνται μόνο από ένα κλάδο τα ποσοστά επιτυχίας είναι μεγάλα .

- Ο αλγεβρικός υπολογισμός ορίων δεν φαίνεται να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές σε σχέση με τον υπολογισμό από την γραφική παράσταση. Κάποια κλασσικά όρια τα αντιμετωπίζουν με μεγάλη επιτυχία, ενώ στα όρια με απόλυτες τιμές σημειώνουν μεγάλη αποτυχία .

- Τέλος αξίζει να σημειώσουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές, ενώ διαισθάνονται ότι μια διαδικασία μπορεί να είναι άπειρη, εντούτοις αδυνατούν να πιστέψουν ότι το αποτέλεσμα του αθροίσματος άπειρων μεγεθών μπορεί να είναι πεπερασμένο!

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι για τις παραπάνω δυσκολίες δεν ευθύνονται κατά πρώτο λόγο οι μαθητές. Οι παρανοήσεις οφείλονται καταρχήν στην ίδια την έννοια του ορίου που από την φύση της παρουσιάζει δυσκολίες. Εξάλλου αυτό επιβεβαιώνεται και από την ιστορική αναδρομή της έννοιας, όπου για πολλά χρόνια υπήρχαν διαμάχες ανάμεσα σε μεγάλους επιστήμονες. Ίσως και ένας άλλος λόγος να είναι και ο τρόπος διδασκαλίας από εμάς τους καθηγητές .

Γνωρίζοντας λοιπόν τα σημεία στα οποία συναντούν τις δυσκολίες οι μαθητές, θα πρέπει κατά την διδασκαλία μας να εστιάζουμε σ' αυτά, φέρνοντας τους μαθητές μπροστά σε γνωστική σύγκρουση, ώστε να ανακαλύπτουν μόνοι τους το σωστό δρόμο. Αυτό μπορούμε ίσως να το πετύχουμε επιλέγοντας τα κατάλληλα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΕΠΩΝΥΜΟ:	ΟΝΟΜΑ:
ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ	ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:
ΦΥΛΟ:	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

1. Τι σημαίνει για σας η έννοια **όριο συνάρτησης** ;

……
……
……
……
……
……
……

2α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης με τύπο :

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

x	**1**	**2**	**10**	**100**	**1000**
$f(x)$					

2β)Τι παρατηρείτε για τις τιμές της συνάρτησης , καθώς ο x γίνεται όλο και μεγαλύτερος;

……
……
……
……

3. Είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

α) Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ σημαίνει ότι καθώς το x μεγαλώνει το $f(x)$ πλησιάζει στο l, αλλά δεν το ''φθάνει'' ποτέ. Σ Λ

β) Το όριο μιας συνάρτησης είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση. Σ Λ

γ) Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο χ_0 έναν πραγματικό αριθμό l, τότε αναγκαστικά το χ_0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ

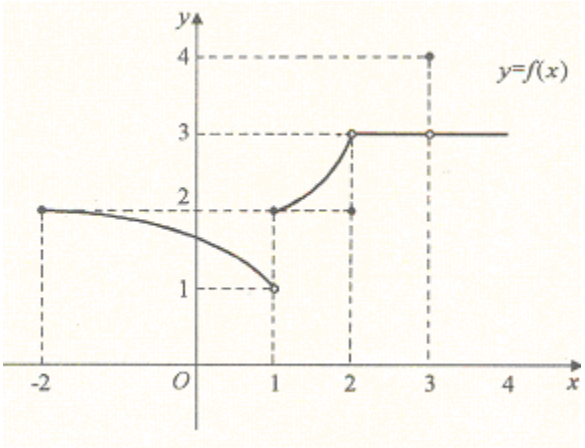
4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο [-2, $+\infty$) και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς

4α) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ Σ Λ

4β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ Σ Λ

4γ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ Σ Λ

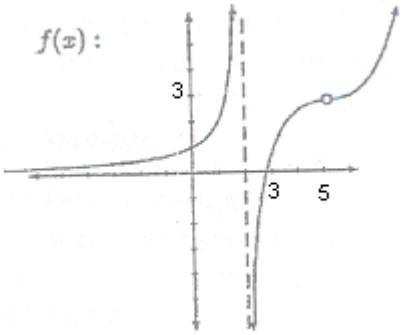
4δ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ Σ Λ



Στη συνέχεια συμπληρώστε τα κενά:4ε) f (-2)=…… 4στ) f(1) =….. 4ζ) f(2) =…..

5. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=....$ β) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=....$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=....$ δ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=....$



6. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια, αιτιολογώντας κάθε ισότητα που βρίσκετε κατά τον υπολογισμό:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=$……

……

……

……

……

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|x^3-x-1\right|-x^3}{x^2-1}=$ ……...

……

……

……

……

γ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|x^2+x-2\right|-3x+3}{x-1}=$ ……

……..

……

……

……

……

……

……

……

7. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

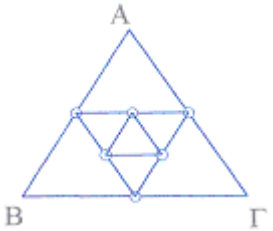
α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x}=$

β) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=$

γ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=$

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|+x}{x}=$

8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=1m. Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του και του τριγώνου που προκύπτει, ενώνουμε πάλι τα μέσα



των πλευρών του κ.ο.κ.

α) Πόσα τέτοια τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε;

……

β) Το άθροισμα των περιμέτρων όλων αυτών των τριγώνων είναι:

1) άπειρο **2)** πεπερασμένος αριθμός

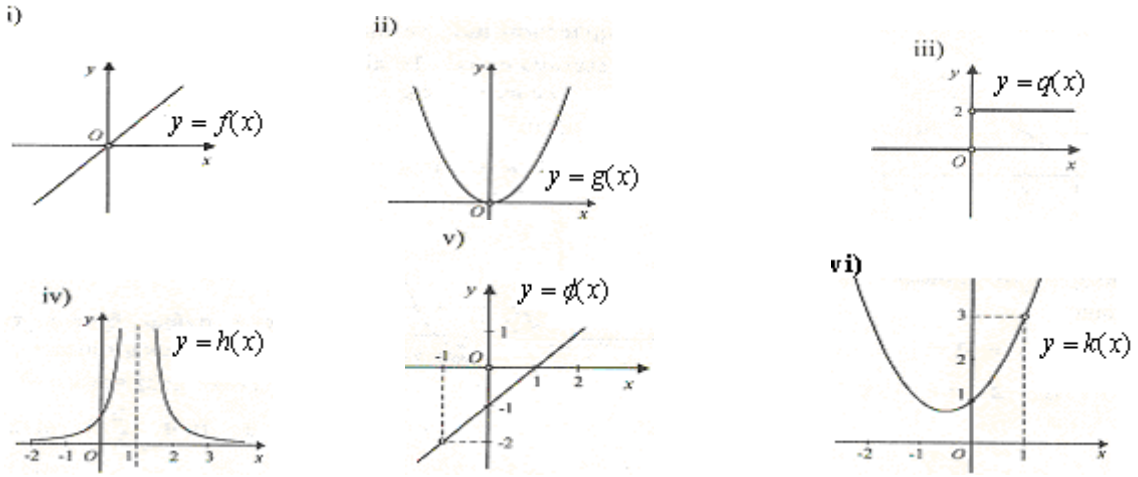
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

……
……
……

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν) από τις γραφικές τους παραστάσεις:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0} q(x) =$

iv) $\lim\limits_{x\to 1} h(x) =$ **v)** $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x) =$ **vi)** $\lim\limits_{x\to 1} k(x) =$



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M.(1991) “Analysis’’, in D.Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, p.168-198, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Artigue, M. (1998) “Teaching and Learning Elementary Analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution?”(First Mediterranean Conference on Mathematics 1997)

Artigue, M. (2002). “What can we learn from the past in order to think about the future?”

Boyer, C. B. (1939). “The History of Calculus and its Conceptual Development, reprinted by Dover, New York 1959”.

Brousseau, G. (1983). “Les obstacles epistimologiques et les problèmes en mathématiques” (Recherches in didactique des mathématiques, p. 165-198)

Cornu, B. (1991). “Limits”, In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 153-166.

Davis, R. & Vinner, S. (1986) . “The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages”. Journal of Mathematical Behaviour, 5, 281-303 .

Fischbein, E. (1999). “Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning”. Educational Studies in Mathematics 38: 11-50.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1993). "Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. Mathematics Teaching", 142 , 6-10.

Juter, K. "Limits of functions-How do students handle them?"

Mamona, J.-Downs. (2001) . "Letting the intuitive bear on the formal .A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence" Educational studies in mathematics, 48, 259-288.

Monaghan, J. (1986) . "Adolescent's understanding of limits and infinity." Unpublished Ph.D. Thesis, Warwick University, U.K.

Monaghan, J. (1991) . "Problems with the language of limits. For the Learning of Mathematics", 11, 3, 20-24.

Murphy, Lisa D. (1999). "Students' Conceptions of Limits". http://www.mste.uiuc.edu/users/Murphy/Papers.

Pinto, M. & Tall,D. (2002) "Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory". For the Learning of Mathematics, 22 ,2-10.

Robert, A.(1982). "L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans Enseignement Supérieur, Recherches en Didactique des Mathematiques" vol. no 3, 307-341.

Robinson, A. (1966). "Non-Standard Analysis" North Holland.

Sfard, A. (1992). “On the dual nature of mathematical conceptions: Reflexions on processes and objects as different sides of the same coin” Educational studies in mathematics, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). “ Humanities students and epistemological obstacles related to limits” Educational Studies in Mathematics, 18 , 371-397.

Sierpinska, A. (1990). “Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics”. International Journal of Mathematics Education, 10 ,24-36.

Schwarzenberger, R. L. E. (1980). “Why Calculus cannot be made easy.” Mathematical Gazette, 64 , 158-166.

Szydlik, J. E. (2000). “Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function”. Journal for Research in Mathematics Education, vol.31, no 3, 258-76.

Tall, D. & Schwarzenberger, R. L. E. (1978) .“Conflicts in the learning of real numbers and limits”. Mathematics Teaching, 83, 44-49.

Tall , D. (1980). “Mathematical intuition, with special reference to limiting processes” , Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, 170-176.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). “Concept image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity”. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. (1986). “A graphical approach to integration and the fundamental theorem”. Mathematics Teaching, 113, 48-51.

Tall, D. (1991). “Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus”, Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A. Notes No19, 105-119 .Summer meeting of the Mathematical Association of America (Michigan).

Tall, D. (1992b). “Student’s difficulties in Calculus”. Plenary presentation in working group 3, ICME Quebec August 1992.

Vinner, S.(1991). “The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics”, in D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 65-81.

Williams, S. (1991). “Models of Limit Held by College Calculus Students.” Journal for Research in Mathematics Education, 22, 219-236.

Williams, S. (2001). “ Predications of the limit concept: An Application of Repertory Grids.” Journal for Research in Mathematics Education, 32, 341-367.

Γιαννακούλιας, Ε.(2002) Σημειώσεις Μαθήματος Διδακτικής Απειροστικού Λογισμού .