ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Μια διδακτική πρόταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια Δυναμικών εργαλείων των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας.»

Αικατερίνη Γ. Αγγέλου
Δ 200302

Επιβλέποντες καθηγητές:
ΡΑΠΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ (Καθηγητής)
ΛΑΠΠΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ (Αν. Καθηγητής)
ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ (Αν. καθηγητής)

Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Ιούνιος 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) ΡΑΠΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	
2) ΛΑΠΠΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ	Αναπλ. Καθηγητής	
3) ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ	Αναπλ. Καθηγητής	

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή

Ιστορική Επισκόπηση

Είναι κοινός τόπος ότι η αρχαία ελληνική φιλοσοφία είναι ο θεμέλιος λίθος πάνω στον οποίο στηρίζεται ολόκληρο το πνευματικό οικοδόμημα της Δύσης των νεοτέρων χρόνων. Από την Αναγέννηση ακόμη έως τις μέρες μας οι έλληνες φιλόσοφοι της κλασικής εποχής, διαχρονικοί και αξεπέραστοι, έγιναν αντικείμενο θαυμασμού και συστηματικής μελέτης, από τους νεότερους ευρωπαϊκούς λαούς. Βεβαίως στην ιστορία της φιλοσοφίας δεν μπορούμε να παραβλέψουμε και την προσφορά των χωρών της Ανατολής (Ινδία - Ιαπωνία - Κίνα). Όμως ο φιλοσοφικός στοχασμός των λαών αυτών, έχοντας άμεση σχέση με την θρησκεία, απέχει σημαντικά από την διάφανη καθαρότητα της αρχαίας ελληνικής σκέψης. Συνακόλουθα η σκέψη αυτή έγινε η «τροφός Μητέρα» όλης της νεότερης ευρωπαϊκής παιδείας.

Η Ελληνική φιλοσοφία έγινε η γενεάρχης ολόκληρης της ευρωπαϊκής φιλοσοφίας. Όλα τα βασικά ζητήματα της φιλοσοφίας, της θεωρητικής όσο και της πρακτικής, τα έθεσαν και απήντησαν με την χαρακτηριστική για το ελληνικό πνεύμα διάφανη καθαρότητα. Οι πρωτοπόροι Έλληνες φιλόσοφοι έζησαν κιόλας πάντα ως φιλόσοφοι. Αυτό που ο Νίτσε το είπε « θαρρετή ξαστεριά φιλοσοφικής ζωής » και το είχε παράπονο που αυτό δεν το βρίσκει στους φιλοσόφους των νέων χρόνων.

Το μεγάλο δώρο που ο Πυθαγόρας ο Σάμιος –ένας από τους 7 σοφούς [1]της αρχαίας Ελλάδος έκανε στους ανθρώπους, είναι η λέξη «φιλόσοφος». Στον κύκλο των Πυθαγορείων αναδύεται η λέξη «φιλόσοφος», δημιούργημα ελληνικό, το οποίο θα παραμείνει, περνώντας μέσα στους αιώνες και στους περισσότερους λαούς, ως λέξη ελληνική και συνήθως αμετάφραστη. Η σοφία δεν ανήκει στον άνθρωπο τείνει προς αυτήν ως ένα ιδεώδες, και επειδή, είναι ιδεώδες ,ποτέ δεν την αγγίζει. Φωτίζεται έτσι καθαρά η περατότητα του ανθρώπου, τα όρια που ποτέ δεν μπορεί να ξεπεράσει.

Για τον Πυθαγόρα , το υιό του Μνήσαρχου, τον Σάμιο, ξέρουμε λίγα. Γεννήθηκε στην Σάμο κατά το έτος 586 π.Χ. Επισκέφθηκε αρχικά την Αίγυπτο, και περί το έτος 540

[1] Οι 7 σοφοί της αρχαίας Ελλάδος ήταν Σόλων ο Αθηναίος, Περίανδρος ο Κορίνθιος, Κλεόβουλος ο Ρόδιος , Πυθαγόρας ο Σάμιος , Θαλής ο Μιλήσιος , Χίλων ο Λακεδαιμόνιος, Πιττακός ο Μυτιληναίος.

πήγε στη Μεγάλη Ελλάδα. Στον Κρότωνα ίδρυσε την «ιδιότυπον» οργάνωση, από την οποία δεν αποκλείοντο γυναίκες. Επονομάστηκε Ελεατική Σχολή και απέβλεπε όχι μόνον σε επιστημονική έρευνα αλλά και σε πολιτικοθρησκευτικούς σκοπούς.

Όταν αναφερόμαστε σε ευρήματα του Πυθαγόρα, δεν πρέπει να αποκλείουμε καθόλου το ενδεχόμενο να πρόκειται περί εργασιών στις οποίες έλαβαν μέρος και οι μαθητές του. Υπάρχουν δύο διεξοδικές βιογραφίες του, αυτές όμως γράφτηκαν αργότερα, από τους νεοπλατωνικούς Πορφύριο και Ιάμβλιχο και ξαναπιάνουν τον πυθαγορικό μύθο, την αρχή του οποίου τη συναντούμε στα λίγα κατάλοιπα της πραγματείας «Περί Πυθαγορείων» και που άνθισε από τα χρόνια του νεοπυθαγορισμού.[2] Μισόν αιώνα μετά τον θάνατό του ο Ηρόδοτος τον ονομάζει έναν από τους σημαντικότερους σοφούς της Ελλάδος.

Η σχολή του Πυθαγόρα στηριζόταν σε προφορικά αποφθέγματά του «ούτος έφα» .Τα «ακούσματα» ή «σύμβολα» ήταν κανόνες που προέρχονταν από την προφορική διδασκαλία του Πυθαγόρα και σχετίζονταν με την διατροφή, την συμπεριφορά στο ιερό, την καθημερινή ζωή και τις συναναστροφές.[3]

Τα «μαθήματα» ή τα «μαθηματικά» είναι αυτά που μαθαίνονται. Η επιστήμη των αριθμών αποκαλείται «μαθηματική» από τα μέσα του 4^{ου} αιώνα π.Χ. Η ζωή για τους Πυθαγορείους είναι κάτι το εξαιρετικά σοβαρό και για να τη ζήσει κανείς όπως πρέπει χρειάζεται συστηματική προπαιδεία.[4]

Στα βασικά στοιχεία της πνευματικής κάθαρσης ανήκουν ακόμα η μουσική και η γυμναστική. Έδωσαν μεγάλη σημασία και στην διαιτητική. Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τους παλαιότερους Πυθαγορείους ως την διάλυση του συλλόγου, στο δεύτερο μισό του 5^{ου} αιώνα, από τους νεότερους, που στην αρχή του 4^{ου} αιώνα, αρχηγό είχαν τον Αρχύτα στην πόλη του Τάραντα. Με αυτούς ήλθε σε στενή σχέση ο Πλάτων, κι αυτούς εννοεί ο Αριστοτέλης όταν γράφει οι «λεγόμενοι Πυθαγόρειοι» .

Σύμφωνα με ρητή μαρτυρία,[5] έως τον Φιλόλαο δεν υπήρχαν συγγράμματα για την πυθαγορική φιλοσοφία. Πρώτος ο Φιλόλαος δημοσιεύει σε τρεις τόμους την διδασκαλία του Πυθαγόρα και τους ακριβοπληρώνει ο Πλάτων, για να τους αποκτήσει. Στον Πυθαγόρα επίσης οφείλεται η διαίρεση των μαθημάτων (σε τέσσερις κλάδους), τα οποία ήταν :

---

[2]Τσέλλερ-Νέστλε *Ιστορία της ελληνικής φιλοσοφίας*, Β΄ έκδοση (μετάφραση από την 13^{η} έκδοση) , Βιβλ. Εστίας Αθήναι 1955, σελ.38

[3] Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικού Βίου* , εκδόσεις Ζήτρος ,Αθήναι 1975, σελ 474.

[4] ό.π.. *Το ημερίσιο πρόγραμμα των Πυθαγορείων, &96-100*

Αριθμητική , Μουσική , Γεωμετρία, Αστρονομία.

Εκείνο όμως που διακρίνει τους Πυθαγορείους από όλους τους άλλους, είναι η οδός μέσω της οποίας πίστευαν ότι ελάμβανε χώρα η ανύψωση της ψυχής και η ένωσή της με τον Θεό. Η οδός αυτή ήταν: τα μαθηματικά .Η διδασκαλία τους πρέσβευε ότι ο Θεός είναι ενότητα, ο κόσμος είναι πολλαπλότητα και συνίσταται από αντιτιθέμενα στοιχεία.

Η αρμονία είναι εκείνη που αποκαθιστά την ενότητα ανάμεσα στα αντιτιθέμενα μέρη και τα συγκροτεί σε Κόσμο. Η αρμονία είναι θεία και συνίσταται από αριθμητικούς λόγους. Όποιος επιτυγχάνει να κατανοήσει πλήρως αυτήν την αριθμητική αρμονία γίνεται ο ίδιος θείος και αθάνατος. Μουσική, Αρμονία και Αριθμοί είναι άρρηκτα ενωμένα στη διδασκαλία των Πυθαγορείων.

Κατά τον Ιάμβλιχο,ο Πυθαγόρας παρέμεινε στην Βαβυλώνα για επτά έτη, κατά την διάρκεια των οποίων διδάχθηκε από τους μάγους την θεωρία των αριθμών, και έμαθε την «τελειοτάτη αναλογία»

A : H = P : B

(Αυτό είναι δυνατό αλλά όχι και βέβαιο) όπου Η είναι ο αρμονικός και Ρ ο αριθμητικός μέσος των Α και Β.

Σημασία πολύ έχουν οι έρευνες των πυθαγορείων επί των αναλογιών: αριθμητικής, γεωμετρικής και αρμονικής, που προκύπτουν εάν θέσουμε τον λόγον $\frac{(\alpha-\beta)}{(\beta-\gamma)}$ διαδοχικά ίσον προς τους τρεις λόγους $\frac{\alpha}{\alpha},\frac{\alpha}{\beta},\frac{\alpha}{\gamma}$ και προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις :

β = $\frac{(\alpha+\beta)}{2}$ αριθμητικός

β = $\sqrt{\alpha\gamma}$ γεωμετρικός

β = $\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma})$ αρμονικός

[5] Διογένης Λαέρ. *VIII85*

«Είμαι πεπεισμένος ότι ο ίδιος ο Πυθαγόρας ήταν αυτός που μεταλαμπάδευσε τις γνώσεις των Βαβυλωνίων (στον τότε ελληνικό κόσμο)», ισχυρίζεται ο Van de Waerden[6].

Η κοσμογονία των Πυθαγορείων είχε αριθμητικό χαρακτήρα. Σύμφωνα με αυτήν το σύμπαν δημιουργήθηκε από το ένα μετά από διαίρεσή του, που πραγματοποιήθηκε από εισπνοή του απείρου. Το άπειρο εισβάλλει στο αδιαφοροποίητο είναι, και το διασπά δημιουργώντας τη δυάδα .

Ο κόσμος κυριολεκτικά δημιουργείται από το δίπολο «πέρας – άπειρο».[7] Αρχικά υπήρχε το δίπολο. Το είναι ήταν αδιαφοροποίητο, ενιαίο πεπερασμένο, για τους Πυθαγορείους ταυτόσημο με τον αριθμό ένα. Το μη είναι ήταν ισχυρότατα συνδεδεμένο με το κενό. Το πεπερασμένο αδιαφοροποίητο όν περιορίζεται από το κενό που εκτείνεται έπ' άπειρον . Αυτό το άπειρο και οριοθετούν - κενό εισβάλλει στην αρχή της πυθαγόρειας κοσμογονίας, και διασπά το πεπερασμένο είναι, παρεμβαλλόμενο ανάμεσα στα δύο του κομμάτια. Δημιουργείται από την μονάδα η δυάδα, από αυτήν η τριάδα κ.τ.λ. με τρόπο ώστε το πυθαγόρειο σύμπαν να αποτελεί ένα αντίγραφο αυτού που σήμερα θα λέγαμε σύνολο φυσικών αριθμών. Για τους Πυθαγορείους ήταν «φυσιολογικό» να αναμένουν να υπακούει ο κόσμος που αποτελείται από διακριτές ψηφίδες σε σχέσεις, νόμους και αρμονίες εκφράσιμες με λόγους της μορφής α / β, όπου α, β φυσικοί αριθμοί και β όχι μηδέν.

Δεν χρησιμοποιούσαν συνεχή μεγέθη και παρίσταναν γεωμετρικά σχήματα με μικρούς λίθους, ώστε κάθε πλευρά ενός συγκεκριμένου τριγώνου, να αποτελείται από συγκεκριμένο αριθμό χαλικιών.[8]

Κατά την μετά Χριστόν εποχή ο Πρόκλος [410-485μ. Χ.] στα σχόλιά του στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, δίνει μια περιγραφή ενός (σωστού) αλγορίθμου εύρεσης συγκεκριμένων τριάδων αριθμών, στους οποίους ο πρώτος είναι περιττός και οι άλλοι σαν τριάδες αποτελούν τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Η περιγραφή βεβαίως δεν αποτελεί απόδειξη.

Ένα παράδειγμα που στηρίζεται στην Πυθαγόρεια μέθοδο αρχίζει με τον αριθμό τρία. Το τετράγωνό του είναι το εννέα, από αυτό αφαιρείται μία μονάδα αφήνοντας ως υπόλοιπο το οχτώ, το μισό του οποίου είναι το τέσσερα. Αν προστεθεί μια μονάδα στο

---

[6] Van der Waerden *Αφύπνιση της Επιστήμης,* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης 2000, *σελ. 102*

[7] Αναπολιτάνος, Δ. *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, εκδόσεις Νεφέλη, , Αθήναι 1985, *σελ. 114*.

[8] Αναπολιτάνος, Δ. *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, σελ.15

τέσσερα παίρνουμε πέντε κι έτσι έχουμε βρει ένα ορθογώνιο τρίγωνο πλευρών τρία, τέσσερα και πέντε.

Σε σύγχρονη αναπαράσταση βλέποντας τη διαδικασία που περιγράφει ο Πρόκλος, εάν η N ο δεδομένος περιττός αριθμός, τότε :

$(N^2-1) / 2$ και $(N^2+1) / 2$ είναι οι άλλες δύο πλευρές του τριγώνου, και τότε έχουμε την σωστή αριθμητική σχέση:

$$N^2 + [(N^2 - 1) / 2]^2 = [(N^2 + 1)/2]^2$$

Οι έννοιες «περιττός» και «άρτιος» αριθμός ήταν συνδεδεμένες με το βασικό εννοιολογικό δίπολο των Πυθαγορείων «πέρας – άπειρον». Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη[9], μία βασική πυθαγόρεια δοξασία ήταν ότι ο κόσμος στηριζόταν σε δέκα αρχές. Αυτές τις Αρχές της συστοιχούσαν και τις εμφάνιζαν με την μορφή εννοιολογικών διπόλων, ώστε τα μέρη των διπόλων, τα οποία ανήκαν στην ίδια συστοιχία, να αποτελούν μία απόλυτα συγγενική κλάση.

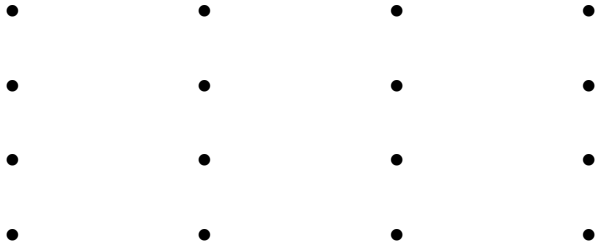
Οι αρχές αυτές ήταν :

Πέρας	Άπειρον
Περιττόν	Άρτιον
Έν	Πλήθος
Δεξιόν	Αριστερόν
Άρρεν	Θήλυ
Ηρεμούν	Κινούμενον
Ευθύ	Καμπύλον
Φως	Σκότος
Αγαθόν	Κακόν
Τετράγωνον	Ετερόμηκες

Όπως αναφέρθηκε οι Πυθαγόρειοι συνήθιζαν να αναπαριστούν τους αριθμούς με μικρούς λίθους τοποθετημένους κατάλληλα σε κάποια επίπεδη επιφάνεια. Χρησιμοποιούσαν δύο ειδών σχηματισμούς: έναν για την αναπαράσταση των περιττών αριθμών κι έναν για αυτήν των αρτίων.

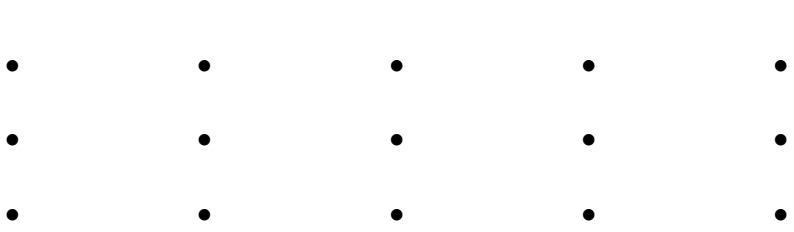
[9] Αναπολιτάνος, Δ. *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών* , σελ.14, Αριστοτέλη, *Μετά τα Φυσικά , Α5,985,Β23-986 Β8*

Έστω για τον αριθμό 7. Ξεκινούσαν με τον αριθμό 1 τον οποίον παρίσταναν με ένα χαλίκι. Τοποθετούσαν εν συνεχεία έναν γνώμονα που αναγκαστικά κάλυπτε δύο πλευρές του χώρου ολόγυρα από το χαλίκι. Μετά τοποθετούσαν τρία χαλίκια, ένα σε κάθε πλευρά του γνώμονα κι ένα στην κορυφή του κι ακολουθούσε νέος γνώμονας, τις πλευρές του οποίου κάλυπταν με πέντε χαλίκια, ένα από τα οποία τοποθετούσαν σε ένα νέο γνώμονα και ο αριθμός επτά παριστάνονταν με επτά χαλίκια τοποθετημένα ανά τρία στις δύο πλευρές του γνώμονα κι ένα στην κορυφή του. Αναλόγως έπρατταν και για τους αρτίους.[10]



ΣΧΗΜΑ 1

1 ,3 ,5. ,7…….



ΣΧΗΜΑ 2

2, 4, 6, 8 , ……

Η έννοια του «περιττού» ήταν συνδεδεμένη με την έννοια του «τετραγώνου» όπως στο ΣΧΗΜΑ 2, όπου έχουμε τελικά αναπαράσταση του αριθμού 16, που είναι το τετράγωνο του 4. λ.χ. η προσθήκη του 9, οδηγεί στην αναπαράσταση του αριθμού 25. Σε σύγχρονη γλώσσα ο παραπάνω αλγόριθμος εκφράζεται:

[10] Ε. Βασιλείου *σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος της διδακτικής της Γεωμετρίας, εισαγωγικά.*

$1+3+5+7+ \ldots\ldots\ldots+[2(N-1)+1] = N^2$

Η έννοια του «περιττού» ήταν επίσης συνδεδεμένη με την έννοια του «πέρατος», διότι η διαδικασία προσθήκης συνεχόμενων περιττών αριθμών στις πλευρές επαλλήλων γνωμόνων οδηγεί πάντα στο ίδιο σχήμα, δηλαδή σε τετράγωνο. Ο λόγος των πλευρών είναι πάντα ίσος με τον αριθμό 1. Αντιθέτως, όταν συνεχόμενοι άρτιοι αριθμοί, ξεκινώντας από τον αριθμό 2 τοποθετούνται στις πλευρές επαλλήλων γνωμόνων, έχουμε ως αποτέλεσμα ένα ετερόμηκες σχήμα. Ο λόγος των πλευρών του είναι συνεχώς μεταβαλλόμενος και ίσος αντίστοιχα *με* $\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots.$

Αυτή η μεταβολή που χαρακτηρίζεται ως «αέναος» από τον Δ. Αναπολιτάνο[11] είναι αναγκαστικά μη φραγμένη, με την έννοια πως δεν υπάρχει άρτιος αριθμός Ν μετά από τον οποίο να σταθεροποιείται ο λόγος των πλευρών του προκύπτοντος ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Θα πρέπει εδώ να τονισθεί, ότι ο λόγος των πλευρών του σχήματος που προκύπτει υπολογίζεται, ως λόγος των αριθμών των χαλικιών που βρίσκονται στις αντίστοιχες πλευρές, αφού εξαιρεθεί το χαλίκι το τοποθετούμενο στην κορυφή του αντίστοιχου γνώμονα. Συνεπώς η έννοια του «αρτίου» συνδέεται για τους Πυθαγορείους με τις έννοιες του “ετερομήκους” και του “απείρου”.

Η τετράδα 1,2,3,4 που συναθροιζόμενη δίνει τον αριθμό 10, ήταν η περίφημη πυθαγόρεια τετρακτύς. Η γραφική αναπαράστασή της δίνεται παρακάτω:

ΣΧΗΜΑ 3

Η τετρακτύς και ο αριθμός 10, ήταν για τους Πυθαγορείους ιερές οντότητες. Ο Πυθαγόρειος όρκος, με τον οποίον δεσμεύονταν τα μέλη της σχολής ήταν:

[11] Αναπολιτάνος, Δ. *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 20*

«Ού μα τον αμετέρα γενεά παραδόντα τετρακτύν, παγάν αενάου φύσεως ρίζωμα τ ‘ έχουσαν»

“Μα τον Πυθαγόρα, που παρέδωσε στην γενεά μας την τετρακτύν, που περιέχει την ρίζα της αέναης φύσης, δεν θα προδώσω.”

Ο Αριστοτέλης (*στα Μετά τα φυσικά, Α5*) μας πληροφορεί ότι ταύτιζαν αφηρημένες έννοιες, όπως “η δικαιοσύνη” με καθορισμένους αριθμούς. Οι άρτιοι ονομάζονταν θήλεις, οι περιττοί άρρενες, και ο αριθμός 5 ως άθροισμα του πρώτου άρρενος και του πρώτου θήλεος, αριθμού, εθεωρείτο σύμβολο γάμου, κ.ο.κ. .Όμως αυτά δεν μας απασχολούν σε αυτήν την φάση της εργασίας.

Ο ορισμός του σημείου ως «μονάδος εχούσης θέσιν» ανήκει στον Πυθαγόρα.

Οι βασικοί φθόγγοι της τότε γνωστής μουσικής κλίμακας συνδέονταν με την τετρακτύν και οι λόγοι συχνοτήτων που δόθηκαν για τους συγκεκριμένους αυτούς φθόγγους ήταν λόγοι μεταξύ των αριθμών 1,2,3,4. Οι λόγοι που βρέθηκαν υπήρξαν αποτέλεσμα εμπειρικών παρατηρήσεων πάνω σε μήκη παλλομένων χορδών ή πάνω στα βάρη συγκεκριμένων συμπαγών, μεταλλικών αντικειμένων που χρησιμοποιούνταν για σφυριά από τους μεταλλουργούς της αρχαιότητας.

Η παράσταση του αριθμού 10, ως 1 + 2 + 3 + 4, οδηγούσε σε γεωμετρικά προβλήματα. Από τα σημεία έβγαζαν γραμμές, από τις γραμμές επιφάνειες, και από αυτές σώματα.

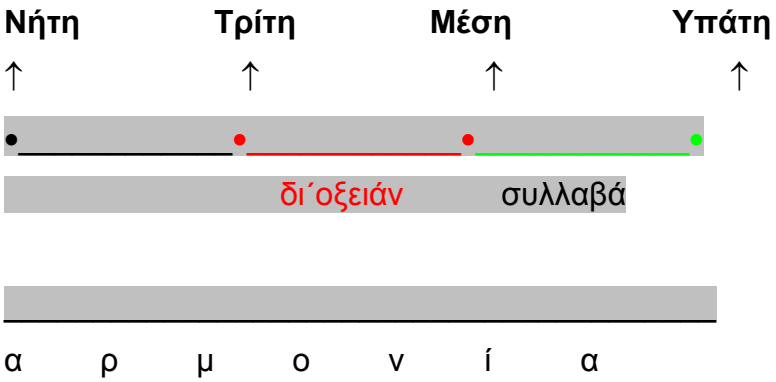
Το Πυθαγόρειο τρίγωνο, δηλαδή ένα ορθογώνιο τρίγωνο, που οι πλευρές του έχουν αναλογία 3: 4 : 5 θυμίζουν τον πρωτόγονο τρόπο που μετρούσαν οι αιγύπτιοι “σκοινομέτρες”.

Η διδασκαλία για την κίνηση των πλανητών και για την αρμονία των σφαιρών ανήκει στους παλαιότερους Πυθαγορείους. Την έννοια της αρμονίας που είχαν ανακαλύψει στη μουσική, προσπαθούσαν να την εφαρμόσουν στη φύση. Ο Φιλόλαος τον 5° π.Χ. αιώνα έγραψε ένα απόσπασμα στη δωρική διάλεκτο περί αρμονίας.(fragmentum) Σύμφωνα με αυτόν η αρμονία αποτελείτε από δι΄οξειάν και συλλαβά(-η):

δι΄ οξειάν = συλλαβά + επόγδοον $(\frac{9}{8})$.

Υπάρχουν 4 βασικές νότες : νήτη, τρίτη, μέση, υπάτη.

Τα όργανα που πειραματίζονταν ήταν τετράχορδα.



Από μέση έως υπάτη είναι συλλαβή.

Από μέση μέχρι τρίτη είναι οξεία.

Από τρίτη μέχρι μέση είναι επόγδοον.

Η συλλαβή είναι 4 προς τρία 3 και η οξεία είναι 3 προς 2

Δια πασών είναι η αρμονία, είναι 2 /1.[12]

Το κείμενο περί μουσικής συμπληρώνεται από τον Boethius περίπου χίλια χρόνια μετά στο De Innstitutione musica 118p (στα λατινικά):

Αρμονία = 5$(\frac{9}{8})$ ⊕2 διέσεις

Αρμονία = δι΄οξειάν ⊕ συλλαβή

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{2} \oplus \frac{4}{3} \qquad (1)$$

οξεία = 3$(\frac{9}{8})$ ⊕ 1 δίεση

συλλαβή=2$(\frac{9}{8})$ ⊕1 δίεση

Αρμονία = 1 συλλαβή ⊕ 2 τόνοι

Κόμμα = 1 τόνος ⊕ διέσεις

Τόνος = 2 διέσεις ⊕ κόμμα

Από την (1) σχέση η πρόσθεση της μουσικής είναι γινόμενο αριθμών.

Μουσική σύνθεση είχαν, όταν πατούσαν ταυτοχρόνως δύο χορδές. Διαιρούσαν τα διαστήματα, αφού πρώτα τα έκαναν συγκρίσιμα, ώστε να έχουν κοινή αρχή. Δύο

[12] Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικού Βίου, ό.π., σελ.256*

άνισες χορδές πληττόμενες συγχρόνως δίνουν ένα μουσικό αποτέλεσμα. Ένα ζεύγος χορδών είναι ισοδύναμο με ένα άλλο, εάν έχουν το ίδιο μουσικό αποτέλεσμα.

(1) αρμονία =δι΄ οξειάν $\oplus$ συλλαβή

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{2} \oplus \frac{4}{3}$$

(2) δι΄οξειάν= συλλαβή $\oplus$τόνος $(\frac{9}{8})$

(3) συλλαβή = 2 τόνοι$\oplus$ 1δίεση

$$\frac{4}{3} = (\frac{9}{8})^2(\frac{256}{243})$$

(4) τόνος = 2 διέσεις$\oplus$κόμμα

$$\frac{9}{8} = (2^{16}) / (3^{10}) *(3^{12}) / (2^{19})$$

Όλες οι άλλες σχέσεις είναι παράγωγες αυτών.

Σε αυτό το σημείο αναφερόμαστε στην πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της αρχικής δυάδας $\frac{2}{1} \succ \frac{3}{2}$. Η ανθυφαίρεση της μουσικής οδήγησε στην ανθυφαίρεση των αριθμών (πεπερασμένη), οπότε προκύπτει το 7^{ο} βιβλίο, των Στοιχείων του Ευκλείδη της θεωρίας των λόγων των αριθμών.

Αντιθέτως η άπειρη ανθυφαίρεση των μεγεθών οδήγησε στην ανακάλυψη των ασυμμέτρων μεγεθών. Το 10^{ο} βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη το οποίο είναι του Θεαίτητου κατά τον Πρόκλο και κατά τον Πάππο[13].

Υπάρχουν κείμενα νέο-Πυθαγορείων που αναλύουν την μετάβαση και σύνθεση λόγων αριθμών και μουσικής (:Θέων ο Σμυρνεύς 59,9-60,11 Ιάμβλιχος, Σχόλια εις Νικόμαχον 118-125,13,Ιάμβλιχος ,Πυθαγόρειος Βίος 26-125, 13 Ανώνυμο σχόλιο στον Φαίδωνα 108d1-14, Γλαύκου τέχνη).

Καλό θα ήταν σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι τα στάδια της θεωρίας αριθμών είναι δύο:

1^{ο} Στάδιο : Δεν υπάρχει ορισμός και ούτε αυστηρές αποδείξεις για τις προτάσεις του 2^{ου} σταδίου. Άρα ο ορισμός θα είναι εμπειρικός και έχουμε σύνθεση με την μουσική.

[13] *σημειώσεις προσωπικές από το μάθημα Ιστορία των αρχαίων Μαθηματικών κ. Νεγρεπόντη*

2° Στάδιο : Ορισμός της αναλογίας από τον Ευκλείδη. στο βιβλίο VII4,των Στοιχείων .

Η εναλλάξ ιδιότητα των αναλογιών αντιστοιχεί στην αντιμεταθετικότητα των μουσικών διαστημάτων. Στον Ευκλείδη η εναλλάξ χρησιμοποιείται για να αποδείξει την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού επιβεβαιώνοντας την μουσική ιδιότητα.

Επέκτεινε ο Πυθαγόρας το πείραμα σε ποικίλα όργανα, κρούοντας αγγεία, παίζοντας αυλούς, μονόχορδα, τρίχορδα και όλα τα παρόμοια, και διαπίστωνε ότι αυτό που κατανόησε μέσω των αριθμών συμφωνούσε σε όλα[14].

Έτσι λοιπόν λέγεται ότι ο Πυθαγόρας βρήκε και ανακάλυψε τη μουσική την οποία αφού την συστηματοποίησε, την παρέδωσε στους μαθητές του ως το ανώτερο από όλα τα αγαθά[15]. Από τους Πυθαγορείους κρατάει η έννοια της συμμετρίας, που ο περίφημος γλύπτης Πολύκλειτος ο Αργείος την έβαλε ως βάση του στις μελέτες για τις αναλογίες του ανθρωπίνου σώματος στο σύγγραμμά του «ΚΑΝΩΝ».

Μια άλλη ισχυρή ένδειξη της βαθιάς πίστης των Πυθαγορείων στην αριθμητική δομή του κόσμου αποτελεί η αντίληψη τους για την απονομή δικαιοσύνης. Η απονομή δικαιοσύνης κατά τον Αριστοτέλη, έπρεπε να ακολουθεί τον κανόνα εύρεσης του γεωμετρικού μέσου. Ο γεωμετρικός μέσος β και η αντίστοιχη σχέση εκφράζει την ιδέα απονομής δικαιοσύνης όχι κάτω από κριτήρια απόλυτης, αλλά σχετικής ισότητας.

Ο Αριστοτέλης, για να εξηγήσει την Πυθαγόρεια αυτή αντίληψη χρησιμοποιεί το παράδειγμα που σχετίζεται με την ποσότητα τροφής που θα μπορούσε κάποιος να καταναλώσει. Η κατάλληλη ποσότητα σχετίζεται πάντα με τον αντίστοιχο καταναλωτή και δεν πρέπει να υπολογίζεται, ως ο μέσος όρος μεγίστης και ελαχίστης κατανάλωσης. Εάν για παράδειγμα ένας καταναλωτής α έχει ανάγκη τροφής ποσότητας 10 μονάδων και δεύτερος β 8 , τότε θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$\frac{X}{\Psi} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{8}.$$

Αξίζει να επισημάνουμε ότι για τους Πυθαγορείους ο κόσμος δομείται κατά τρόπο ρητό. Όλες οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος είναι σχέσεις λόγων θετικών ακεραίων αριθμών. Κάθε δυάδα συκρινομένων μηκών δίνει για αυτούς σύμμετρο αποτέλεσμα. Η πυθαγόρεια πίστη για σύμμετρη (ρητή) δομή του κόσμου έμελλε να διαψευσθεί .

[14] Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικού Βίου, ό.π., σελ.258*
[15] Ό.π.

Κατά τον Von Fritz, είναι πιθανόν η ανακάλυψη της ύπαρξης ασυμμέτρων μεγεθών να έγινε από τον πυθαγόρειο Ίππασο. Ο Ίππασος ενδιαφερόταν, πιθανότατα, για το κανονικό δωδεκάεδρο και κατ΄ επέκταση για τις έδρες του που είναι κανονικά πεντάγωνα. Κάτι τέτοιο κατά Von Fritz, είναι απόλυτα δικαιολογημένο, διότι η Κάτω Ιταλία είναι γεμάτη από κρυστάλλους πυριτίου, οι οποίοι είναι κανονικά δωδεκάεδρα ,και οι Πυθαγόρειοι ενδιαφέρονταν για αριθμητικές αναλύσεις γεωμετρικών επιπέδων σχημάτων και στερεών.

Ο Fritz συνδέει την ανακάλυψη ασυμμέτρων μεγεθών με την άμεση συνειδητοποίηση, πως ασυμμετρία σημαίνει αδυναμία αλγοριθμικής περάτωσης στης διαδικασία εύρεσης κοινού μέτρου δύο δεδομένων συγκρινομένων μηκών.

Σύμφωνα με τον Von Fritz το πρόβλημα είναι το εξής: δεδομένου ενός κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ μιας πλευράς του και της διαγωνίου του.

Η πυθαγόρεια λοιπόν πίστη στην αριθμητική δομή και φύση του κόσμου προσέκρουσε στην ανακάλυψη ύπαρξης ασυμμέτρων μεγεθών με δραματικά αποτελέσματα. (κατά την άποψή μου όμως δεν ήταν μόνο μαθηματικής φύσεως). Οι πυθαγόρειοι, κάτω από το βάρος της κρίσης, δεν μπόρεσαν να αναθεωρήσουν την οντολογία τους.

Οι Πυθαγόρειοι «έτρεμαν» τον αριθμό 17, διότι βρίσκεται ακριβώς ανάμεσα στον 16, που είναι τετράγωνος και στον αριθμό 18,που είναι το διπλάσιον τετραγώνου. Και οι δύο αυτοί αριθμοί είναι μοναδικοί που παριστάνουν χωρία τέτοια, ώστε η περίμετρος να ισούται με το εμβαδόν τους.

Οι Νεοπυθαγόρειοι, όπως ο Νικόμαχος, ο Γερασηνός (100 μ.Χ.) και ο Ιάμβλιχος (300 μ.Χ.) αρέσκονταν στον αριθμητικό μυστικισμό.

Στα τρία αριθμητικά βιβλία του Ευκλείδη (VII,VIII,IX των Στοιχείων) βρίσκουμε μια άλλη πηγή για την πυθαγόρεια θεωρία των αριθμών, και είναι εντελώς επιστημονικά, χωρίς την ύπαρξη μυστηριακού στοιχείου, με αποδείξεις, επιμέλεια και προσοχή. Ενώ ο Νικόμαχος έζησε τέσσερις αιώνες μετά τον Ευκλείδη, δίνει την εντύπωση προγενέστερου. Βρίσκεται πλησιέστερα στον αρχικό αριθμητικό μυστικισμό του Πυθαγόρα και της σχολής του.

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν πολύ σημαντικό να ισούται ένας αριθμός με το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του, όπως $6 = 1 + 2 + 3$.

Αυτούς τους αριθμούς τους ονόμαζαν «τέλειους». Ο τύπος του αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{(v-1)} = 2^v - 1$, ανευρίσκεται ήδη σε πυθαγόρεια κείμενα, επομένως ο τύπος αυτός, πιθανόν, να ήταν γνωστός στον Πυθαγόρα.

Παρόμοιο ενδιαφέρον απέδιδαν στους φίλιους αριθμούς, όπως είναι ο 220 και 284, ο καθένας από τους οποίους ισούται με το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του άλλου.

1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284

Όταν κάποτε ρωτήθηκε ο Πυθαγόρας «τι εστί φίλος», απήντησε «έτερος εγώ» και ανέφερε τους φίλους αριθμούς 284, 220.

Πιστεύται ότι ο Πυθαγόρας διατύπωσε τον κανόνα για την εύρεση των αριθμητικών λύσεων της απροσδιόριστης εξίσωσης $\chi^2+\psi^2 = \zeta^2$ με την μορφή $\chi = \frac{1}{2}(\mu^2-1)$, $\psi = \mu$, $\zeta = \frac{1}{2}(\mu^2+1)$, όπου μ περιττός ακέραιος (σχόλια στο 1ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη , σελ 487, Πρόκλος)[16] .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Οι πυθαγόρειοι, και πιο συγκεκριμένα το όνομα του Πυθαγόρα, είναι συνδεδεμένο με το πυθαγόρειο θεώρημα. Η απόδειξη που συναντάει κανείς στα στοιχεία του Ευκλείδη[17] φαίνεται πως είναι αρκετά διαφορετική από την αρχική (Σύμφωνα με τα σχόλια του Πρόκλου, του Ευκλείδη κατά αυτόν είναι «εναργέστερη»). Είναι πολύ πιθανόν η αρχική απόδειξη να ήταν γνωστή στους πυθαγορείους και είχε την παρακάτω μορφή.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίανῥ λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.	Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με (το

[16] Van der Waerden *Αφύπνιση της Επιστήμης, ό.π., σελ. 108.*

[17] Σταμάτη, Ε.(*Ευκλείδου Γεωμετρία*, τόμος ΙΙ, ΟΕΔΒ Αθήναι 1975, Στοιχεία Ευκλείδου βιβλίο 1ο πρόταση 47

’

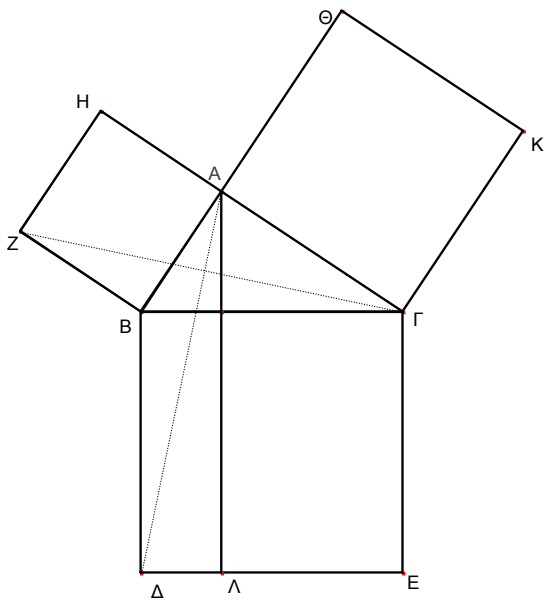
Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ
BDEG, ¢pÕ d□ tîn BA, AG t¦ HB,
QG, kaˆ di¦ toà
A Đpotšrv tîn BD, GE par£llhloj
½cqw ¹ AL· kaˆ
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα
τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ
μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν
ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσινῸ ἐπ’ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ
ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ’ εὐθείας.
καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑῸ ὀρθὴ
γὰρ ἑκατέραῸ κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓῸ ὅλη ἄρα
ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση
ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ,
ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέραῸ καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴσηῸ βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει
τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρί-
γωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσονῸ
καὶ [ἐστὶ] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμ-
μονῸ βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛῸ τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνονῸ βάσιν τε γὰρ

άθροισμα) των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή.

‘Εστω τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την ΒΑΓ. Ισχυρίζομαι ότι το τετράγωνο πλευράς ΒΓ είναι ίσο με (το άθροισμα) τα τετράγωνα πλευρών ΒΑ και ΑΓ. Γράφουμε τετράγωνο πλευράς ΒΓ το ΒΔΕΓ και στις ΒΑ, ΑΓ τα ΗΒ, ΘΓ και φέρουμε το από το Α παράλληλο στις ΒΔ, ΓΕ τμήμα ΑΛ. Φέρουμε επίσης τις ΑΔ και ΖΓ. Αφού οι ΒΑΓ και ΒΑΗ είναι ορθές η ΓΑ και ΑΗ είναι εφεξής με άθροισμα γωνιών δύο ορθές. Άρα οι ΑΗ, ΑΓ βρίσκονται επ ευθείας.Για τον ίδιο λόγο και οι ΒΑ, ΑΘ. Ακόμα οι ΔΒΓ και ΖΒΑ είναι ίσες ως ορθές άρα προστιθέμενη και στις δύο η ΑΒΓ δίνει ότι η ΔΒΑ είναι ίση με την ΖΒΓ και η ΔΒ με την ΒΓ και ΖΒ με την ΑΒ είναι ίσες άρα το τρίγωνο ΑΒΔ ίσο με το ΖΒΓ. Ακόμα το ΒΛ παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο(εμβαδό) του ΑΒΔ τριγώνου γιατί έχουν την ίδια βάση ΒΔ και είναι

πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι
τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ.
[τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίνῸ] ἴσον ἄρα
ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ.
ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ
τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳῸ
ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετρα-
γώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον
ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ,
AG. tÕ ¥ra ¢pÕ tÁj BG pleur©j tetr£gwnon ‡son ™stˆ
τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.
Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν
γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς
ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετρα-
γώνοιςῸ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μεταξύ των ιδίων παραλλήλων ΒΔ, ΑΛ. Το ΗΒ τετράγωνο είναι διπλάσιο του τριγώνου ΖΒΓ γιατί πάλι έχουν την ίδια βάση ΖΒ και βρίκονται μεταξύ των παραλλήλων ΖΒ, ΗΓ. Αφού διπλάσια ίσων είναι ίσα έπεται ότι το ΒΛ παραλληλόγραμμο είναι ίσο (εμβαδό) με το τετράγωνο ΗΒ. Όμοια αν φέρουμε τις ΑΕ και ΒΚ δείχνουμε ότι το ΓΛ παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το τετράγωνο ΘΓ.Και είναι το ΒΔΓΕ με πλευρά την ΒΓ και τα ΗΒ και ΘΓ με πλευρές τις ΒΑ, ΑΓ άρα το τετράγωνο πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων Βα, ΑΓ. Δηλαδή στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με τα τετράγωνα πλευρών τις περιέχουσες την ορθή, όπερ έδει δείξει.



Νέα εκδοχή (ευκλείδεια γεωμετρία Β΄ Λυκείου Ο.Ε.Δ.Β.)

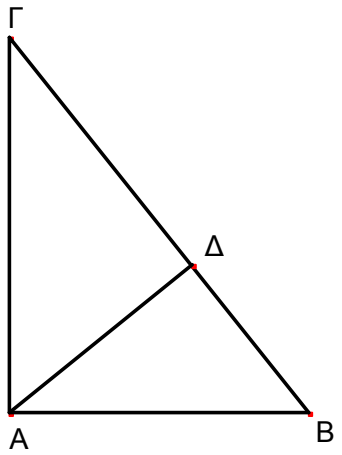
Θεώρημα 1

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να δείξουμε ότι $ΑΒ^2$= ΒΓ.ΒΔ και $ΑΓ^2$= ΒΓ.ΓΔ.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Gamma}{AB}$ δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού (γωνίες) $\widehat{A}=\widehat{\Delta}=1$ ορθή και η $\widehat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $ΑΓ^2$= ΒΓ.ΓΔ.



Θεώρημα 2 Πυθαγόρειο

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ ή $α^2 = β^2 + γ^2$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε: $ΑΒ^2 = ΒΓ.ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ.ΓΔ$

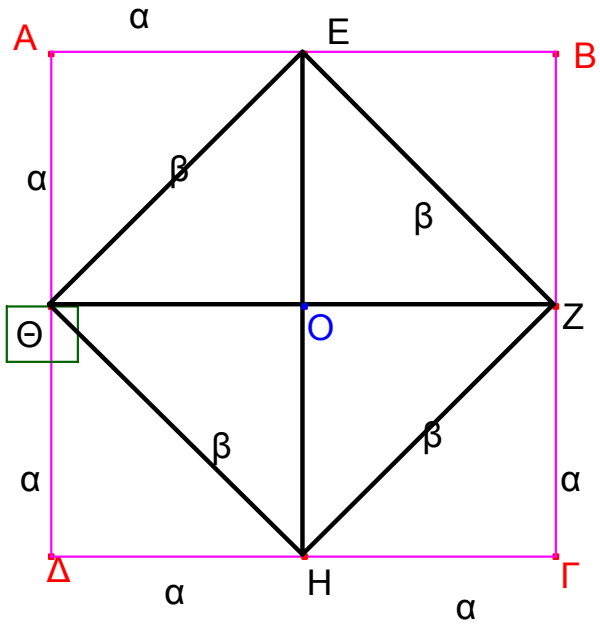
Με πρόσθεση των δύο αυτών ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ.ΒΔ+ΒΓ.ΓΔ= ΒΓ(ΒΔ+ΓΔ)=ΒΓ.ΒΓ=ΒΓ^2$

Πυθαγόρειοι

Οι πυθαγόρειοι ήταν γνώστες των 10 πρώτων προτάσεων του ΙΙ βιβλίου των στοιχείων του Ευκλείδη (Νεγρεπόντης, Heath , Αφύπνιση επιστήμης του Van der Waerden). Συνεπώς η θέση του Π.Θ. ήταν μεταξύ ΙΙ 8 και ΙΙ 9 στη σειρά των στοιχείων του Ευκλείδη Δύο είναι τα στάδια στην απόδειξη:

1ον Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές α και υποτείνουσα β



Το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο αφού έχει 4 πλευρές ίσες και τις γωνίες ορθές.

Το ΑΒΓΔ έχει εμβαδό 4 τετράγωνα σαν το ΑΕΟΘ (από τη μία)

Επίσης έχει εμβαδό το άθροισμα του τετραγώνου ΕΖΗΘ (πλευράς β) και τέσσερα ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα (ΑΘΕ,ΕΒΖ….),δηλαδή το ΕΖΗΘ και δύο τετράγωνα

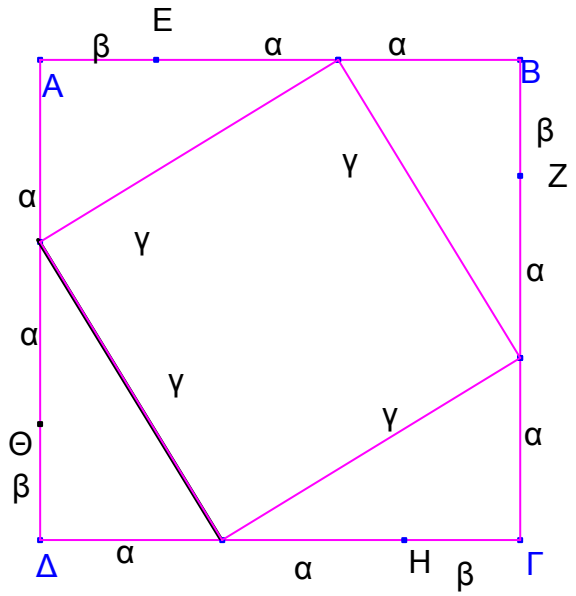
πλευράς α (δυό ορθογώνια ισοσκελή ένα τετράγωνο). Συνεπώς $4\alpha^2=\beta^2+2\alpha^2$ ή $2\alpha^2=\beta^2$. (το Π.Θ. δηλαδή για την περιπτωσή μας)

Μετά σκεφθήκαν τη γενική περίπτωση που βασιζόταν στη II 10

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

(ταυτότητα $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2(\alpha^2+(\alpha+\beta)^2)$

2ον Πήραν λοιπόν το παρακάτω σχήμα που είναι



Τετράγωνο πλευρά 2 α +β σχημάτισαν ορθογώνια τρίγωνα πλευρών β+α, α και βάφτισαν τις υποτείνουσες γ. Το μέσα τετράπλευρο είναι τετράγωνο γιατί έχει 4 ίσες πλευρές και 4 γωνίες ορθές.

Το ΑΒΓΔ έχει εμβαδό το τετράγωνο πλευράς γ και 4 ορθογώνια τρίγωνα ή το τετράγωνο και 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα πλευρών β+α, α

Δηλαδή

$$(2\alpha+\beta)^2=\gamma^2+2\alpha(\alpha+\beta)$$

Πρόσθεσαν και στα δύο μέλη το β^2 (τετράγωνο πλευράς β) και πήραν

$$(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=\gamma^2+2\alpha(\alpha+\beta)+\beta^2$$

εφαρμόζουν τη II10 στο πρώτο μέλος και έχουν

$$2(\alpha^2 +(\alpha+\beta)^2)= \gamma^2 + 2\,\alpha\,(\alpha+\beta) + \beta^2$$

στο δεύτερο μέλος εφαρμόζουν τη II 7

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

(δηλαδή $\alpha^2 +(\alpha+\beta)^2 =2\,\alpha(\alpha+\beta) +\beta^2$ και η κατάσταση γίνεται

$$2(\alpha^2 +(\alpha+\beta)^2)= \gamma^2 + \alpha^2 +(\alpha+\beta)^2$$ από όπου

$\alpha^2 +(\alpha+\beta)^2 =\gamma^2$ δηλαδή το Π.Θ. για το σχήμα μας

(παρατηρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα)

Έχει υποστηριχθεί ότι το θεώρημα δεν θα μπορούσε να είναι γνωστό την εποχή του Πυθαγόρα, όμως η αντίληψη αυτή συνεχώς χάνει έδαφος.

Στον κατάλογο του ο Πρόκλος αποδίδει στον Πυθαγόρα την κατασκευή των κανονικών πολυέδρων. Ένα όμως σχόλιο του Ευκλείδη αναφέρει, ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν μόνο τρία κανονικά πολύεδρα, (όπως και κατά τον Πάππο στην Σύνοψη) τον κύβο, το τετράεδρο, και το δωδεκάεδρο και ότι εκείνος που ανακάλυψε πρώτος τα δύο άλλα ήταν ο Θεαίτητος.

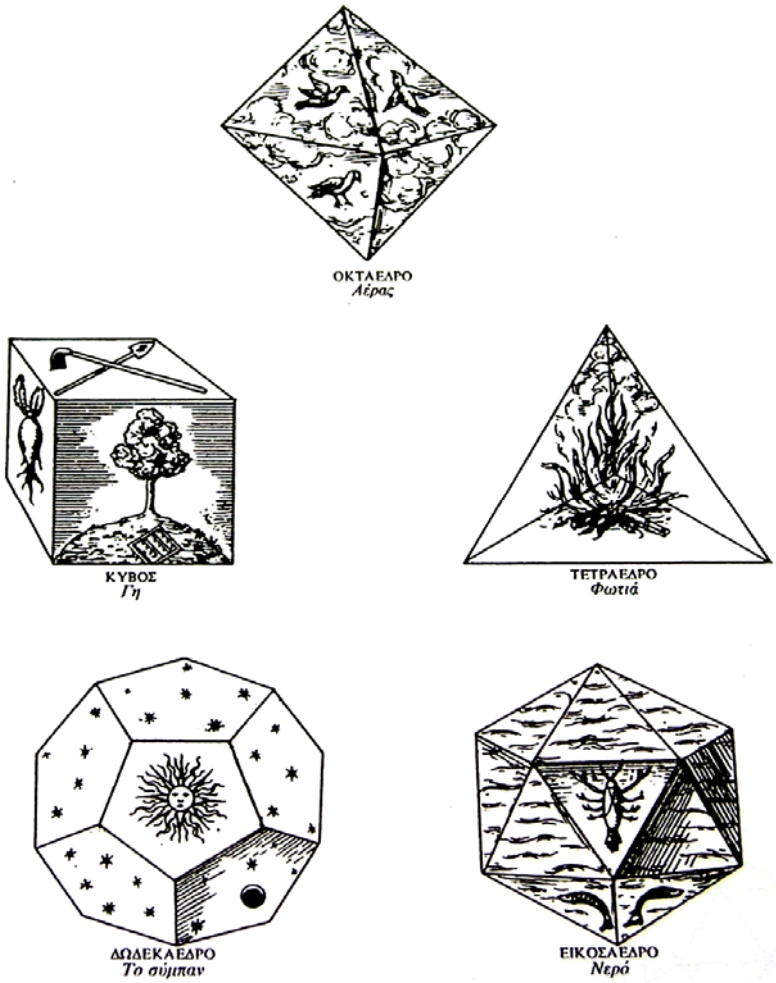
Οι έδρες του δωδεκαέδρου είναι κανονικά πεντάγωνα. Οι διαγώνιοι ενός τέτοιου πενταγώνου σχηματίζουν ένα αστεροειδές ως διακριτικό γνώρισμα των Πυθαγορείων. Το είχαν θεσπίσει ως συνθηματικό σημείο αμοιβαίας αναγνώρισης, το αστεροειδές πεντάγωνον, το άλλως λεγόμενο και πεντάγραμμα ή πεντάλφα.

Τα στερεά τα ονόμαζαν «κοσμικά στερεά» Η αντιστοιχία ήταν ως εξής[18]:

Τετράεδρον	Πυρ
Εξάεδρον- κύβον	Γη
Οκτάεδρον	Αήρ
Εικοσάεδρον	Ύδωρ
Δωδεκάεδρον	Κόσμος όλος -σύμπαν

[18] Loria G. *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμος Πρώτος, εκδόσεις ελληνικής μαθηματικής εταιρίας.(μετάφραση από του ιταλικού πρωτοτύπου Μιχαήλ Κ. Κωβαίου), Αθήναι 1971, , σελ. 44.

Στο διάλογο «Τίμαιος» επιχειρείται από τον Πλάτωνα η διατύπωση μιας θεωρίας για τη δομή του κόσμου με καθαρά γεωμετρικό περιεχόμενο. Την ίδια αντιστοιχία βρίσκουμε και στο ΙΙ βιβλίο του έργου του Johannes Kepler 'Αρμονίας του κόσμου' (Harmonice Mundi).



Το πρόβλημα της κατασκευής κανονικού πενταγώνου ισοδυναμεί κατά βάθος προς την διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος εις μέσον και άκρον λόγον, το καλούμενο «πρόβλημα της χρυσής τομής».

Κατά τον Πρόκλο η λύση του προβλήματος (του θεμελιώδους) αποτελεί ένα από τα εξοχώτερα επιτεύγματα της πυθαγορείου σχολής. Το πρόβλημα διακρινόταν σε τρεις μερικές περιπτώσεις, που καλούνταν «απλή παραβολή», «υπερβολική παραβολή», «και ελλειπτική παραβολή».

Η πρώτη έχει ως σκοπό να κατασκευάσει επί βάσεως δοθείσης α, ένα ορθογώνιο εμβαδού β^2. (I 44 πρόταση Στοιχεία Ευκλείδη)

Η υπερβολική παραβολή συνίσταται στην κατασκευή επί δοθείσης βάσεως α, καταλλήλως προεκτεινόμενης, ένα ορθογώνιο δοθέντος εμβαδού β^2 και ύψους ίσου προς την κατάλληλη προέκταση της α. Εάν χ είναι η προέκταση, αυτή πληροί την σχέση $\chi*(\alpha+\chi)= \beta^2$ (vi 29 Ευκλείδη)[19]. Και η ελλειπτική παραβολή που πληροί την σχέση:

$$\chi(\alpha-\chi) = \beta^2 \text{ (VI 28)}$$

Στην ειδική περίπτωση που β=α, έχουμε το πρόβλημα της διαιρέσεως ευθείας εις μέσον και άκρον λόγον (χρυσή τομή):

$$(\alpha-\chi):\chi = \chi:\alpha$$ [20]

Οι λύσεις που έδιδαν οι Πυθαγόρειοι εικάζεται ότι είναι αυτή του Ευκλείδη όπως αναφέρεται στα Στοιχεία.

Η καθ΄υπερβολήν έχει πάντα λύση (δηλαδή κατασκευάζεται πάντα) ενώ η VI 28[21] χρειάζεται μία συνθήκη που δίδεται στην VI 27 διορισμός του προβλήματος, σχέσεις που πρέπει να ισχύουν μεταξύ β^2=M και α. (VI27πρέπει $M \leq (\frac{\alpha}{2})^2$.

Το δεύτερο μισό των Στοιχείων του Ευκλείδη ανήκει στους Πυθαγορείους. Στον Πυθαγόρα ανήκει ο ορισμός του σημείου ως «μονάδος εχούσης θέσιν», η διάκριση των ευθυγράμμων γωνιών σε τρεις κατηγορίες και ότι το άθροισμα των γωνιών παντός τριγώνου είναι δύο ορθές και η απόδειξη. (I32 Στοιχεία Ευκλείδη)

---

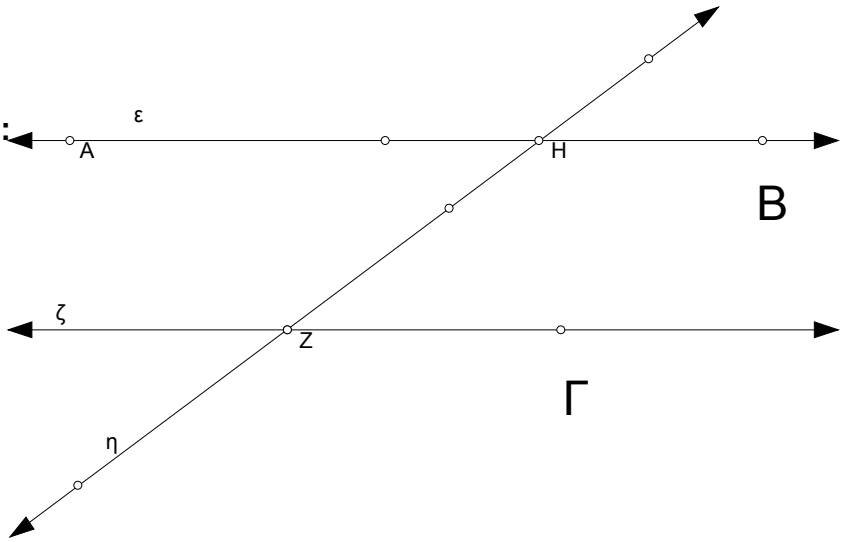
[19] **VI29** Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

- [20] Loria G. *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμος Πρώτος, εκδόσεις ελληνικής μαθηματικής εταιρίας., μετάφραση από του ιταλικού πρωτοτύπου Μιχαήλ Κ. Κωβαίου. page 45

[21] **VI 27** Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.
VI 28 Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντιῤ δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν].

Για τους Πυθαγορείους το αντίστοιχο του 5ου αιτήματος είναι:

Σχήμα 1:



εΗη γωνία= ΗΖζ΄ γωνία ⇔ ε // ζ

Ενώ η διατύπωση του 5ου αιτήματος, όπως βρίσκεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη:

Και εάν ευθεία τέμνουσα δύο ευθείας σχηματίζη τας εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίας μικροτέρας των δύο ορθών, όταν αι δύο ευθείαι προεκταθο΄τν ςπ΄άπειρον, θα συμπίπτουν προς τα μέρη όπου σχηματίζονται αι μικροτέραι των δύο ορθών γωνίαι[22].

Κατά τον Πρόκλο,. οι πυθαγόρειοι συσχέτιζαν την παραλληλία με την αναλογία. Ο όρος εναλλάξ αναφέρεται στην ιδιότητα των αναλογιών και στην ισότητα γωνιών. (διττή σημασία του όρου εναλλάξ). Οι προτάσεις Ι 41-45 [23] των στοιχείων του Ευκλείδη (2) είναι Πυθαγόρεια βάσει Ευδήμου όπως μαρτυρεί ο Πρόκλος.

---

[22] Σταμάτη ,Ε.(1975) Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία Τόμος Ι , (Ο.Ε.Δ.Β.)σελ. 41.

[23] **Ι.41** Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Ι.43 Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

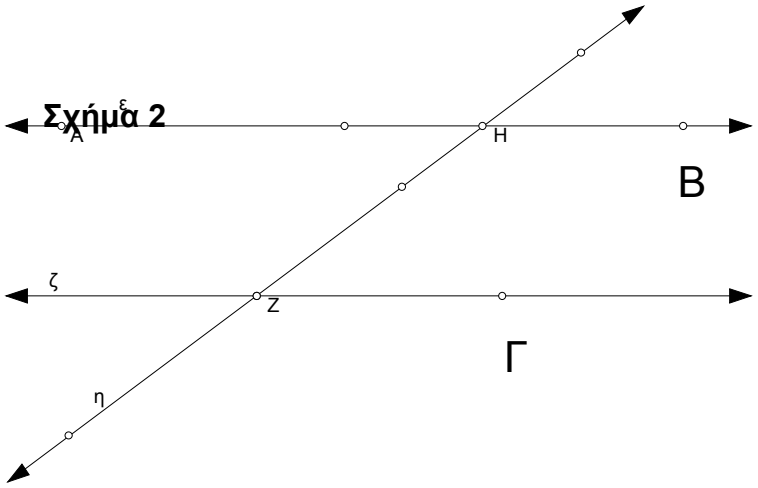
Ι.44 Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ι.*45* Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Εῥ δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον

Η Ι 29[24] των στοιχείων του Ευκλείδη αποτελεί πυθαγόρεια διατύπωση .

Σχήμα 2

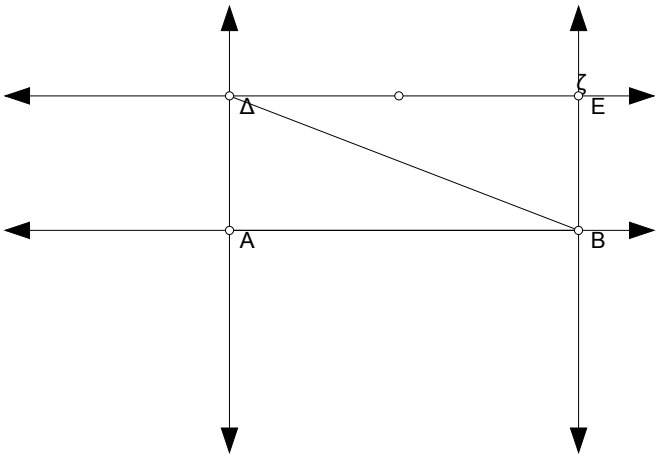


ε// ζ⇒ εΗΖ γωνία = ΗΖΓ γωνία και εΗΖγωνία+ ΗΖΓγωνία = 2 ορθές

Είναι η πρώτη πρόταση που χρησιμοποιεί το 5^{ο} αίτημα

Η πρόταση Ι 34 των στοιχείων του Ευκλείδη: Η διάμετρος διχοτομεί το ορθογώνιο και τα τρίγωνα είναι ισεμβαδικά. (Πυθαγόρεια)

Σχήμα 3



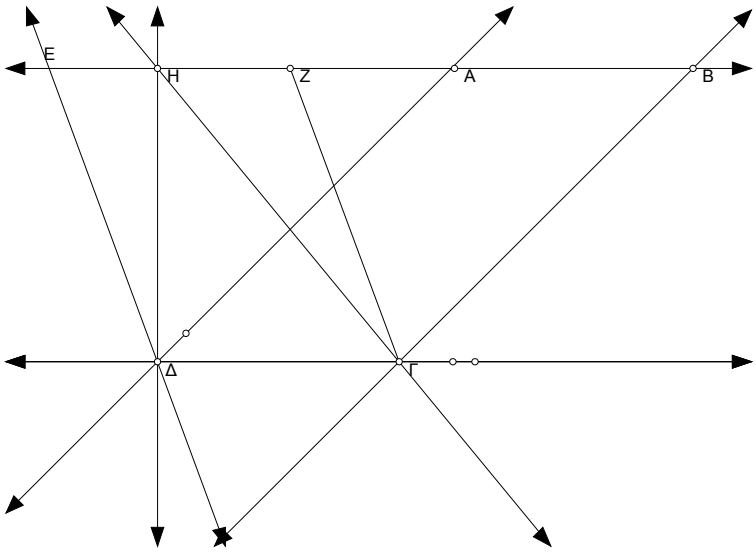
παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δο-
θείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

[24] Ι 29 Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εμβαδόν ΑΔΒ =εμβαδόν ΕΔΒ

(2) Οι προτάσεις Ι 41-45 των στοιχείων του Ευκλείδη αποδεικνύουν πως από ένα πολυγωνικό χωρίο μπορεί κάποιος να πάρει ένα ορθογώνιο.

Σχήμα 4



Εμβαδόν ΑΒΓΔ = Εμβαδόν ΕΖΓΔ

Εμβαδόν ΗΔΓ = 1/2εμβαδόν ΕΖΓΔ

[25]Σχόλιο

Ι 42 Πρόταση των στοιχείων του Ευκλείδη Προς το δοθέν τρίγωνο να κατασκευασθεί ίσο παραλληλόγραμμο επί δοθείσης ευθυγράμμου γωνίας.

Ι 43 Πρόταση των στοιχείων του Ευκλείδη. Παντός παραλληλογράμμου τα παραπληρώματα των παρά την διαγώνιον παραλληλογράμμων είναι μεταξύ τους ίσα.

Ι 44 Πρόταση των στοιχείων του Ευκλείδη: Παρά την δοθείσαν ευθείαν και υπό την δοθείσαν ευθύγραμμον γωνίαν να παραβληθεί παραλληλόγραμμον ίσον προς το δοθέν τρίγωνον.

[25] Σχόλιο: Εδώ σημειώνεται το παράδοξο να έχουμε παραλληλόγραμμα με άπειρη περίμετρο και με ίδιο εμβαδόν

Ι 45 Πρόταση των στοιχείων του Ευκλείδη: Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο ίσον προς το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, υπό την δοθείσαν ευθύγραμμον γωνίαν.

Σημείωση: Από τις προτάσεις ΙΙ 1 έως ΙΙ 8 δεν χρησιμοποιείται το Πυθαγόρειο θεώρημα. Γι΄ αυτό η πιθανή θέση του θα ήταν ανάμεσα στις προτάσεις ΙΙ8 ΚΑΙ ΙΙ9. Βασικότερη ενασχόληση των Πυθαγορείων ήταν η «αριθμοί » και όχι η γεωμετρία.

Στο ΙΧ βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη, συναντούμε μια διαδοχή προτάσεων (21-34) που σύμφωνα με τον Ο. Becker μαζί με την πρόταση ΙΧ 36 αποτελούν ένα αρχαϊκό, πραγματικά τυπικό Πυθαγόρειο δείγμα μαθηματικών, σύμφωνα άλλωστε και με τον Van der Waerden[26].

Σύμφωνα με τον Πάππο η θεωρία των ασυμμέτρων έλαβε την αρχή στη Σχολή ταυ Πυθαγόρα, και η θεωρία του περί του αρτίου και του περιττού έδωσε στους Πυθαγορείους τα μέσα να αποδείξουν την αρρητότητα του $\sqrt{2}$. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (~430 π.Χ.) απέδειξε την αρρητότητα των $\sqrt{3},\sqrt{5},...,\sqrt{17}$, παρέλειψε το $\sqrt{2}$ και άρα κατά τον Zeuthen ήταν γνωστό στην εποχή του. Κατά τον Van der Waerden, το VII βιβλίο του Ευκλείδη θα έπρεπε να αποδοθεί στους προγενέστερους από τον Αρχύτα Πυθαγορείους.

Ξεκινώντας από την ΙΙ 10 πρόταση των Σ.Ε. καταλήγει κανείς και στους πλευρικούς διαμετρικούς αριθμούς.

Πρόταση ΙΙ . 10 [27]

$[2(\alpha+\beta)]^2 + 2[\alpha^2 + (\alpha+\beta)$ (1)

$P_1 = 1$ $Q_1 = 1$

…….. ……

$P_n + 1 = P_n + Q_n$ $Q_n + 1 = 2P_n + Q_n$

$(Q_n)^2 = 2*(P_n)^2$ (2)

[26] Van der Waerden *Αφύπνιση της Επιστήμξης,* ό.π., σελ. 118.

[27] **ΙΙ.10** Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Από (1) και (2) μετά από μαθηματική ανάλυση βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι Πυθαγόρειοι εγνώριζαν την μαθηματική επαγωγή.

Στην κατηγορία των διαδόχων συνεχιστών του Πυθαγόρα είναι και ο Οινοπίδης ο Χίος που πέρασε στην ιστορία διότι δίδαξε πρώτος την κατασκευή καθέτου επί ευθείας από σημείο εκτός αυτής, ως και την επί δεδομένης πλευράς και κορυφής κατασκευή γωνίας δοθέντος μεγέθους.

Τον Ιπποκράτη τον Χίο (470 π.Χ.) ο οποίος είναι ο πρώτος που έγραψε βιβλίο γεωμετρίας και δυστυχώς δεν σώθηκε ίχνος αυτού. Με τον Ιπποκράτη κάνουν την είσοδό τους δύο από τα ενδοξότερα προβλήματα, ο διπλασιασμός του κύβου, και ο τετραγωνισμός του κύκλου. Η επίλυση ενός προβλήματος της νόσου του λοιμού, εδόθη από το μαντείο με την απόκριση:

«Πρώτα θα πρέπει να διπλασιασθεί ο κυβικός βωμός του μαντείου»

Από εκεί προήλθε ο όρος «Δήλιον Πρόβλημα».

Θα πρέπει ακόμα να αναφέρουμε και τον Αρχύτα τον Ταραντίνο (428-365 π.Χ.) τον τελευταίο των Πυθαγορείων, που και αυτός μελέτησε τον διπλασιασμό του κύβου.

Στον Πυθαγόρα λοιπόν ανήκει κατά αδιαφιλονίκητο δικαίωμα, ο τίτλος του γενάρχου της εκλεκτής οικογένειας των Μαθηματικών, η οποία πληθύνεται συνεχώς επί είκοσι αιώνες και η οποία όπως δείχνουν τα πράγματα πρόκειται να συνεχίσει «αεί πληθυνομένη» και στο μέλλον[28].

Η στεγνή διδασκαλία της επιστήμης δεν προσφέρει καμιά ωφέλεια στον άνθρωπο, αν μαζί με την άσκηση του νού, δεν καλλιεργείται ταυτόχρονα και η ψυχή του ανθρώπου. Η έξοχη ρήση του Πλάτωνα «πάσα επιστήμη χωριζομένης της αρετής, πανουργία ού σοφία φαίνεται», ιδιαίτερα στους χαλεπούς καιρούς μας, αποκτά απροσμέτρητες διαστάσεις.

Στο ερώτημα τι είναι Πυθαγορισμός, την απάντηση θα την αναζητήσουμε σύμφωνα με τα λεγόμενα της Τερέζας Πεντζοπούλου Βαλαλά στον πρόλογό του βιβλίο Περί Πυθαγορικού Βίου σε δύο λέξεις

Ά σ κ η σ η

και

π α ι δ ε ί α

[28] 1. G.Loria Ιστορία των Μαθηματικών, Τόμος πρώτος, σελ. 47

Κεφάλαιο 2ο

Η Εποχή της Πληροφορίας

Εισβολή των νέων τεχνολογιών στο σύνολο της ανθρώπινης δραστηριότητας...

Είναι κοινή διαπίστωση, ότι η εποχή που διανύουμε χαρακτηρίζεται από τη ραγδαία εξέλιξη των νέων τεχνολογιών και όλοι συμφωνούν ότι οι υπολογιστικές και δικτυακές τεχνολογίες, λόγω του εγκάρσιου χαρακτήρα τους, διαπερνούν σταδιακά το σύνολο της ανθρώπινης δραστηριότητας και είναι πλέον παρούσες σε μεγάλο μέρος των καθημερινών μας δραστηριοτήτων. Θέτουν κατ' αυτό τον τρόπο πολύ σημαντικά ζητήματα που άπτονται του καθεστώτος της οργάνωσης και διαχείρισης της πληροφορίας, της διαμεσολάβησης μέσω των ψηφιακών τρόπων μετάδοσης της γνώσης, της οργάνωσης και του καταμερισμού της εργασίας, της επικοινωνίας από απόσταση, του προβλήματος της ταυτότητας των υποκειμένων κλπ.

Νέα δεδομένα από την ολοκλήρωση των νέων τεχνολογιών σε ενιαίο μέσο ...

Καθώς τρεις, μέχρι πρόσφατα διακριτοί τεχνολογικοί κλάδοι, της πληροφορίας, της επικοινωνίας και των οπτικοακουστικών μέσων τείνουν να ενοποιηθούν, η εκπαίδευση, η επικοινωνία και πολλές πτυχές της εργασίας και της ψυχαγωγίας, αποκτούν νέες διαστάσεις και νέα πεδία κοινής δράσης. Η ενοποίηση αυτών των τεχνολογιών, σε μέσα και μεθόδους, αναμένεται να οδηγήσει σε διαφορετικές και πολύ πιο σφαιρικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών προβλημάτων, αλλά και πολύ πιο σύνθετες στη διαχείριση τους.

Και οι επιπτώσεις τους στην εκπαίδευση ...

Παράλληλα οι νέες τεχνολογίες βρίσκονται σε μια διαδικασία συγκρότησης της ιδιαίτερης τους κουλτούρας, γεγονός που δημιουργεί τον κίνδυνο, το εκπαιδευτικό σύστημα να βρεθεί προ τετελεσμένων γεγονότων. Οφείλει επομένως το εκπαιδευτικό σύστημα, να προετοιμασθεί κατάλληλα ώστε να αντεπεξέλθει στις σύγχρονες απαιτήσεις μόρφωσης και κατάρτισης και να ανταποκριθεί ανάλογα ώστε οι νέες τεχνολογίες να μην κατευθύνουν αλλά να υπηρετούν τους γενικότερους στόχους και σκοπούς της παιδείας μας.

Κοινωνική απαίτηση ο αλφαβητισμός στις νέες τεχνολογίες ...

Η σταδιακά αυξανόμενη χρήση των υπολογιστικών και δικτυακών τεχνολογιών, επηρεάζει την κοινωνία και οδηγεί αναπόφευκτα στην αντίληψη ότι κάθε νέος στα πλαίσια της γενικής του εκπαίδευσης πρέπει να αποκτήσει βασικές γνώσεις αλλά και δεξιότητες σε αυτές τις τεχνολογίες. Κάτω από αυτό το πρίσμα, η εκπαίδευση στην πληροφορική θα πρέπει να προσφέρει στους σημερινούς μαθητές και αυριανούς πολίτες, όλες τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες ώστε να μπορούν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας. Έτσι θα αποφευχθούν νέες ανισότητες, νέες μορφές κοινωνικού αποκλεισμού (που τώρα θα είναι βαθύτερες και ταχύτερες) και πρόσθετες δυσκολίες ένταξης στον κόσμο της εργασίας.

Οι επαγγελματικές προοπτικές των μαθητών θα εξαρτηθούν και από την ικανότητα τους στη χρήση των νέων τεχνολογιών

Ο χώρος της εργασίας επίσης, γνωρίζει καταλυτικές αλλαγές και βρίσκεται μπροστά σε μια εντελώς νέα κατάσταση. Η ανάδυση νέων επαγγελμάτων στους τομείς αιχμής, καθώς και η διείσδυση των νέων τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας, στο σύνολο σχεδόν των επαγγελματικών δραστηριοτήτων, συνιστούν μια εντελώς νέα πραγματικότητα και συνεπώς πρέπει να δίνεται στους νέους μας η δυνατότητα να προσανατολισθούν, εφόσον το επιθυμούν, προς τα επαγγέλματα αυτά.

Ο υπολογιστής αντικείμενο γνώσης αλλά και γνωστικό εργαλείο ...

Είναι γεγονός ότι ο υπολογιστής και τα μέσα που τον συνοδεύουν, πέρα από τη χρησιμότητα τους ως εργαλεία διεκπεραίωσης καθημερινών εργασιών, ανατρέπουν την ισχύουσα κατάσταση στην εκπαιδευτική διαδικασία και συμβάλλουν τόσο στην καλλιέργεια μιας νέας παιδαγωγικής αντίληψης, διευκολύνοντας νέους ενεργητικούς τρόπους μάθησης, όσο και στην ανάπτυξη νέων στάσεων και δεξιοτήτων. Ο υπολογιστής κάτω από το πρίσμα αυτό καθίσταται διεπιστημονικό εργαλείο προσέγγισης της γνώσης σε όλο σχεδόν το φάσμα του προγράμματος σπουδών.

«Ο υπολογιστής μπορεί να κάνει αυτό που δεν μπορούν οι ταχύτητες, είναι ο Πρωτέας των μηχανών. Η ουσία του είναι η παγκοσμιότητά του, η δύναμή του να προσομοιώνει, να εξυπηρετήσει χίλιες λειτουργίες, να ικανοποιήσει χίλιες προτιμήσεις.»

Ο Papert στις παραπάνω λίγες γραμμές προσπαθεί να συνοψίσει τις σκέψεις του για τους υπολογιστές:[29]

Λίγοι μίλησαν για τον υπολογιστή ως μηχάνημα διδασκαλίας, και πως θα επηρεάσουν (οι υπολογιστές)τον τρόπο που οι άνθρωποι σκέπτονται και μαθαίνουν, ενώ ταυτόχρονα πολλά μορφωτικά εμπόδια δεν επιτρέπουν στα παιδιά να κάνουν κτήμα τους την επιστημονική γνώση. Οι υπολογιστές μπορούν να γίνουν φορείς των σπερμάτων μορφωτικής αλλαγής και δυναμικών ιδεών, στο πώς μπορούν να βοηθήσουν τους ανθρώπους να διαμορφώσουν νέες σχέσεις με τη γνώση και να κόψουν τις παραδοσιακές γραμμές που χωρίζουν ανθρωπιστικές από τις θετικές επιστήμες .

Βεβαίως υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ αυτού που μπορεί να κάνει ο υπολογιστής και αυτού που θα διαλέξει η κοινωνία να κάνει με αυτούς. Από την οπτική γωνία του Papert το παιδί προγραμματίζει τον υπολογιστή και, προγραμματίζοντάς τον αποκτά μια αίσθηση κυριαρχίας πάνω σε ένα κομμάτι της πιο σύγχρονης και δυναμικής τεχνολογίας και , μαζί ,καθιερώνει μια στενή επαφή με τις βαθύτερες ιδέες της επιστήμης, των μαθηματικών και της τέχνης της δημιουργίας διανοητικών μοντέλων.

Η μάθηση της επικοινωνίας με τον υπολογιστή μπορεί να αλλάξει τον τρόπο άλλων μαθήσεων. Ο υπολογιστής μπορεί να γίνει μια αλφαβητικά και μαθηματικά εκφραζόμενη οντότητα. Μαθαίνουν μαθηματικά ως ζωντανή γλώσσα.

Η ιδέα του να «μιλάς μαθηματικά» με έναν υπολογιστή είναι σαν να μαθαίνεις μαθηματικά όπως μαθαίνεις γαλλικά ζώντας στη Γαλλία. Τα περισσότερα από αυτά που σήμερα θεωρούμε ως «πολύ τυπικά « ή «πολύ μαθηματικά» θα μαθαίνονται πολύ εύκολα όταν τα παιδιά μεγαλώνουν στον πληροφοριακά πλούσιο κόσμο του άμεσου μέλλοντος. Έχουν γίνει πολλές εκπαιδευτικές έρευνες και τείνουν να εστιαστούν στους τρόπους βελτίωσης της διδασκαλίας στην τάξη.

[29] Papert ,Seymour (1991)*Νοητικές θύελλες* εκδόσεις Οδυσσέας , μετάφραση , Αίγλη Σταματίου.σελ.14

Η παρουσία των υπολογιστών θα επιτρέψει να τροποποιηθεί το περιβάλλον μάθησης εκτός των σχολικών τάξεων με έναν τέτοιο τρόπο ώστε να πάρουν τα παιδιά την περισσότερη αν όχι όλη την γνώση, την οποία προσπαθούν τα σχολεία να διδάξουν με τόσους κόπους και έξοδα και τόσο περιορισμένη επιτυχία , με τον τρόπο που το παιδί μαθαίνει να μιλάει, ανώδυνα, επιτυχημένα και χωρίς οργανωμένη διδασκαλία. Αυτό προφανώς υποδουλώνει ότι τα σχολεία δεν έχουν θέση στο μέλλον , έτσι όπως τα ξέρουμε [30] ισχυρίζεται ο Papert.

Παραμένει ακόμα το ερώτημα αν τα σχολεία θα προσαρμοσθούν μετατρεπόμενα σε κάτι νέο ή θα εξαφανιστούν και θα αντικατασταθούν. Έχει παρατηρηθεί ότι η κατηγορία των παιδιών που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά και στην επιστημονική μόρφωση περιλαμβάνει πολλά παιδιά των οποίων το περιβάλλον φαίνεται να είναι σχετικά φτωχό σε μαθηματικά εκφραζόμενους ενήλικες. Με την βοήθεια των υπολογιστών τα μαθηματικά γίνονται διασκεδαστικά . Μαθαίνουν την γλώσσα των σχημάτων και των μεταλλαγών των σχημάτων , των ταχυτήτων και των βαθμών αλλαγής των διεργασιών και διαδικασιών ,όπως να μιλούν μαθηματικά και αποκτούν μια νέα εικόνα των εαυτών τους ως μαθηματικών.

Ορισμένες χρήσεις πολύ δυναμικής τεχνολογίας των υπολογιστών και υπολογιστικών ιδεών μπορούν να δώσουν στα παιδιά νέες δυνατότητες μάθησης, σκέψης και ανάπτυξης συναισθηματικής όσο και γνωστικής. Δημιουργείται ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο , δουλεία του παιδιού δεν είναι να μάθει ένα σύνολο τυπικών κανόνων αλλά να αποκτήσει αρκετή επίγνωση για τον τρόπο που κινείται στο χώρο ώστε να μπορέσει να μεταφέρει αυτήν την αυτογνωσία σε δυναμικά περιβάλλοντα.

Η κεντρική ιδέα πίσω από τα μαθητικά περιβάλλοντα είναι ότι τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιούν δυναμικές ιδέες από τα μαθηματικά και την επιστήμη ως εργαλεία προσωπικής δύναμης. Η φράση «υπολογιστής και μολύβι» προκαλεί το είδος της χρήσης υπολογιστή που θα κάνουν τα παιδιά στο μέλλον. Τα μολύβια χρησιμοποιούνται τόσο για γράψιμο όσο και για ζωγραφική, τόσο για αθέμιτες σημειώσεις όσο και για επίσημα έγγραφα.

Ο υπολογιστής θα μπορεί να χρησιμοποιείται το ίδιο απλά και προσωπικά για μια μεγάλη ποικιλία σκοπών. Ο Papert βγήκε ενθουσιασμένος και εντυπωσιασμένος

[30] ό.π .σελ 23-24

από τον τρόπο που ο Piaget αντιμετώπιζε τα παιδιά ως ενεργούς δημιουργούς των δικών τους διανοητικών δομών.[31]

Η μεταφορά του υπολογιστή ως μαθηματικά εκφραζόμενη οντότητα , βάζει τον μαθητή σε ένα ποιοτικά νέο είδος σχέσης με μια σημαντική σφαίρα γνώσης.

Η εκπαίδευση θα γίνει περισσότερο προσωπική πράξη και άνθρωποι με καλές ιδέες , διαφορετικές ιδέες ,εξαιρετικές , δεν θα αντιμετωπίζουν πια το δίλημμα να υποχρεωθούν να «πουλήσουν» τις ιδέες τους στη συντηρητική γραφειοκρατία ή να τις βάλουν στο ράφι. Θα μπορούν να τις προσφέρουν σε μια ελεύθερη αγορά, κατ' ευθείαν στους καταναλωτές. Θα υπάρξουν νέες ευκαιρίες για φαντασία και πρωτοτυπία. Ίσως να έρθει μια αναγέννηση στην σκέψη σχετικά με την εκπαίδευση. Οι νέοι έχουν πολλές πιθανότητες να κερδίσουν από την αλλαγή των συνθηκών μάθησης.

[31] Γενεύη 1964,στο κέντρο Γενετικής Επιστημολογίας.

Αλλαγές στην εκπαίδευση και νέες τεχνολογίες

«Στην εκπαίδευση η μεγαλύτερη επιτυχία δεν είναι να βρεις μιμητές , αλλά να εμπνεύσεις άλλους ανθρώπους να κάνουν κάτι διαφορετικό.»

Papert, Seymour, The children's machine

Οι κοινωνικές επιπτώσεις από την νέα παραγωγική δύναμη των Νέων Τεχνολογιών , είναι σημαντικές, σύνθετες, αντιφατικές και απρόβλεπτες και παρατηρούνται αλλαγές και στην εκπαίδευση. Η εξέλιξη της Νέας Τεχνολογίας δημιούργησε την ανάγκη της ανάπτυξης της νέας εκπαιδευτικής τεχνολογίας,[32] (είναι η θεωρία και πρακτική σχεδιασμού ,ανάπτυξης, αξιοποίησης, διαχείρισης, και αξιολόγησης διαδικασιών και πηγών με στόχο τη μάθηση- Seels and Richey, 1994- .

Η έννοια αυτή δεν περιορίζεται επομένως στα τεχνολογικά μέσα, αλλά αφορά τις εφαρμογές της επιστημονικής γνώσης ως προς τον τόπο αντιμετώπισης της εκπαιδευτικής πραγματικότητας γενικότερα οποία είναι δυνατόν να επιφέρει επιθυμητές αλλαγές στην εκπαίδευση.)

Οι Custer and Walker (1996,Module 1,6) , στην κοινωνία της πληροφορίας και της γνώσης διαπιστώνουν ότι απαιτούνται και επαγγελματικές δεξιότητες οι οποίες είναι:

1. Διαχείριση πόρων
2. Διαπροσωπική επικοινωνία και συνεργασία συλλογική δράση.
3. Αναζήτηση , οργάνωση και αξιοποίηση πληροφοριών με σύγχρονες μεθόδους και τεχνικές.
4. Εμπλοκή σε κοινωνικά και τεχνολογικά συστήματα.
5. Διαχείριση τεχνολογίας.

Τα νέα τεχνολογικά περιβάλλοντα επηρεάζουν τις ανάγκες εκπαίδευσης και αυτό αναλύουν πολλοί ερευνητές όπως ο A. Pair , ο οποίος σημειώνει ότι « ο σύγχρονος εργαζόμενος πρέπει να κατέχει συμβολικές γλώσσες, να διαβάζει και να ερμηνεύει σχηματοποιημένα δεδομένα , να ξέρει να ενεργοποιεί , να μεταφέρει να συνδυάζει και

[32] Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ. 46

να συνθέτει τις γνώσεις του, να δουλεύει ομαδικά , να συνεργάζεται και να επικοινωνεί.[33]

Είναι ανάγκη να αλλάξουν τα πρότυπα των διδακτικών και μαθησιακών συμπεριφορών όπως αλλάζουν και τα πρότυπα της οργάνωσης της παραγωγής και εργασίας. Θεωρητικά και μέχρι στιγμής οι απαιτήσεις ικανοτήτων του ανθρώπινου δυναμικού παρατηρείται ότι συγκλίνουν με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της επιστημολογίας., με δυσκολίες στην επίτευξη του στόχου.

Αυτό που θα προσδώσει αξία στις Ν.Τ. είναι η παιδαγωγική χρήση των δυνατοτήτων και όχι η τεχνολογική διάστασή τους διότι:

- Ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως δυναμικό εργαλείο γνωστικής ανάπτυξης, ευνοώντας την λειτουργία και την ανάπτυξη όλων –των μαθητών και των εκπαιδευτικών -- σε ανώτερα επίπεδα μάθησης και επικοινωνίας, όπως και την εφαρμογή πολλών σύγχρονων διδακτικών στόχων, που είναι πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθούν στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας.
- Τα «έξυπνα» εργαλεία όχι μόνον απαιτούν εξυπνότερους και ικανότερους χειριστές , από ότι τα συμβατικά αλλά και σε μεγαλύτερο βαθμό μπορούν να συμβάλλουν στην καλλιέργεια και την επίσπευση της ανάπτυξης ικανοτήτων , που παρέμεναν ανεκμετάλλευτες με την χρήση άλλων μέσων και εργαλείων.

Οι Ν.Τ. στην εκπαίδευση αποτελούν μία αναμφισβήτητη πραγματικότητα, αυτό δεν σημαίνει απλώς την εισαγωγή ενός νέου εργαλείου , αλλά την ανάπτυξη μιας νέας διάστασης στην εκπαιδευτική τεχνολογία.

Οι ενσωμάτωση των Ν.Τ. στην εκπαίδευση και η παιδαγωγική αξιοποίηση των επιτευγμάτων έχει σημαντικές επιπτώσεις στον τρόπο οικοδόμησης της γνώσης, στο περιεχόμενο διδασκαλίας, στη σχέση δασκάλου – μαθητή ,στην διαμόρφωση μοντέλων διδακτικής επικοινωνίας και κοινωνικής συνείδησης και στην διασύνδεση της θεωρίας με την πράξη.

[33] Καλαβάσης, Μ. (1997 «Η επίδραση του Νέου Τεχνολογικού Περιβάλλοντος στους Στόχους της Εκπαίδευσης» στο: Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών ΙΙΙ, Πρακτικά 4ης Διεθνούς Επιστημονικής Διημερίδας στην Διδακτική των Μαθηματικών , που οργανώθηκε από τα Παιδαγωγικά Τμήματα του Πανεπιστημίου Αιγαίου, σελ. 297-317 εκδόσεις Ατραπός.

Ο υπολογιστής ως διδακτικό μέσο

Ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκπαίδευση, ως πολυαισθητηριακό και δυναμικό μέσο διδασκαλίας, σε όλα τα μαθήματα από την γλώσσα και τα μαθηματικά έως τις τέχνες. Μιλούμε πλέον όχι μόνον για διδακτικό μέσον, αλλά για την δημιουργία πολλών ειδών διδακτικού περιβάλλοντος. ΄΄Ένα μέλημα του σχολείου και κάθε εκπαιδευτικού είναι η βελτίωση της ποιότητας της μαθησιακής διαδικασίας, η αξιοποίηση των ευεργετημάτων όλων των διαθέσιμων μέσων και μεθόδων της εκπαιδευτικής τεχνολογίας και ο προβληματισμός σχετικά με τα ζητήματα αυτά. Με την βοήθεια των Ν. Τ. θα επιτευχθούν διδακτικοί στόχοι όπως :

- Εξατομικευμένη διδασκαλία
- Ενεργός συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης
- Αύξηση της παραγωγικότητας
- Επικοδομιστική μάθηση.[34]
- Διευκόλυνση των μαθητών ώστε να λειτουργούν σε πιο προωθημένα επίπεδα συμβολικής , κριτικής και δημιουργικής σκέψης , ώστε να αναπτύσσουν την προσωπικότητά τους ολόπλευρα.

Όλα τα παραπάνω εάν και εφ΄ όσον ταιριάζουν με την φιλοσοφία των διδασκόντων, των διδασκομένων και της κυρίαρχης ιδεολογίας όπως και η βούληση και η ετοιμότητα για την υιοθέτηση σχετικών καινοτομιών.

Με την γραμμική διάταξη του λόγου και την ουσιαστική συμμετοχή της εικόνας και του ήχου ,τα πολυαισθητηριακά κείμενα καθώς και τα δυναμικά εργαλεία διευκολύνουν την χρήση πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης της πληροφορίας και της γνώσης και την οικοδόμηση προσωπικού νοήματος , σε αντίθεση με άλλες παραδοσιακές εκπαιδευτικές πρακτικές, που χαρακτηρίζεται από έμφαση στον αφηρημένο και λεκτικό κυρίως τρόπο αναπαράστασης της γνώσης.

Η δυναμική μοντελοποίηση ή προσομοίωση των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία και δεδομένα ενός φαινομένου ή προβλήματος αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα κατανόησης εννοιών και μάθησης μέσω του υπολογιστή .Ο μαθητευόμενος δεν είναι απλά ένας αναγνώστης ,αλλά γίνεται μέτοχος στη διαδικασία οργάνωσης μηνυμάτων και διαδικασιών σκέψης. Αυτό ευνοεί την ανάπτυξη της αυτόνομης μάθησης και ανάπτυξης του μαθητευομένου. Η δυναμική της

[34] Χτίσιμο μάθησης κατά τρόπο ώστε η μαθητές να αφομοιώνουν και να δημιουργούν την νέα γνώση.

αλληλεπίδρασης ανθρώπου και εργαλείου ευνοεί την ανάπτυξη νοητικών διεργασιών, όπως:

- Την παρατήρηση πάνω σε φαινόμενα
- Την επαγωγική πορεία για την οικοδόμηση των λογικο-μαθηματικών υποθέσεων
- Τις εννοιολογικές κατηγοριοποιήσεις
- Τις γενικεύσεις
- Τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων

Ο υπολογιστής αλλάζει με τον τρόπο διδασκαλίας , είναι όμως δυνατόν , αν εμείς δεν έχουμε αλλάξει διδακτικά, να επαναφέρει, αντί να αλλάξει, τον παλιό τρόπο διδασκαλίας και την παραδοσιακή κατάσταση του πειθαρχημένου σχολείου.

Η αξία του κάθε μέσου, όπως και του υπολογιστή έγκειται στο κατά πόσον συμβάλλει στην επίτευξη των επιθυμητών αναπτυξιακών στόχων της εκπαίδευσης. Η αξία των υπολογιστών καθώς και της δικτυακής τεχνολογίας βρίσκεται στην δυνατότητα της να χρησιμοποιηθεί ως γνωστικό εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και των μαθητών και λιγότερο στην ελκυστικότητα ή τον εντυπωσιασμό των ίδιων μέσων καθ' εαυτών. Σημασία δεν έχει τόσο αν οι μαθητές ασχολούνται με το να πατούν ενθουσιασμένοι διάφορα κουμπιά στον υπολογιστή, όσο το τι συμβαίνει όταν το κάνουν αυτό.[35]

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν ότι ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γνωστικό εργαλείο[36] σε όλα τα σχολικά μαθήματα και να ευνοήσει την επιδίωξη προωθημένων μαθησιακών στόχων, την εφαρμογή σημαντικών παιδαγωγικών αρχών και την υιοθέτηση καινοτόμων μεθόδων διδασκαλίας. Οι εμπειρίες των για την συμβολή του υπολογιστή στην οργάνωση των σχολικών δραστηριοτήτων αναφέρονται κυρίως στην επεξεργασία δεδομένων, όπως είναι οι βαθμολογίες των μαθητών, η μισθοδοσία των εκπαιδευτικών, η δημιουργία προγραμμάτων, η πλοήγηση

---

[35] Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ. 65

[36] Νοητικά ή γνωστικά εργαλεία ονομάζουμε τα μαθησιακά εργαλεία που εμπεριέχουν γνωστικές δομές και διαδικασίες , με την βοήθεια των οποίων μπορεί να διευκολυνθεί η ανάπτυξη της δημιουργικής μάθησης. Τα εργαλεία αυτά έχουν γίνει πολύ δημοφιλή από διάφορες εφαρμογές και κυρίως με την δουλειά του Papert συνεργάτη του Piaget, που πρότεινε την ενεργό εποικοδομιστική μάθηση με την χρήση γραφικών μέσων της γλώσσας Logo. Σύμφωνα με την προσέγγιση του Vygotsky αυτού του είδους η μάθηση προϋποθέτει την δημιουργική συμμετοχή της σκέψης του χρήστη .Ένα γνωστικό εργαλείο , επομένως , δεν μπορεί να είναι αποτελεσματικό παρά όταν λειτουργεί σε σχέση με το πολυδιάστατο και

στο διαδίκτυο κ.ά. Αντί να λάβουν υπ΄όψιν τους τις γενικές επιδράσεις στην παιδεία, επικεντρώνουν την προσοχή τους στην χρήση του υπολογιστή ως συσκευής για προγραμματισμένη διδασκαλία,[37] και ως όργανο διδασκαλίας. Η κατάσταση είναι παράδοξη. Η επανάσταση των υπολογιστών μόλις που άρχισε αλλά γαλουχεί ήδη τον συντηρητισμό της. Ο συντηρητισμός στην εκπαίδευση έγινε ένα αυτοδιαιωνιζόμενο κοινωνικό φαινόμενο.[38]

Η ιδέα του υπολογιστή ως οργάνου για εξάσκηση και πρακτική, που αρέσει στους δασκάλους επειδή μοιάζει με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, αρέσει και στους μηχανικούς που σχεδιάζουν συστήματα υπολογιστών. Οι εφαρμογές εξάσκησης και πρακτικής είναι προβλέψιμες, απλές στην περιγραφή, αποτελεσματικές στη χρήση των εφοδίων της μηχανής. Έτσι το καλύτερο μηχανολογικό ταλέντο πηγαίνει στην ανάπτυξη συστημάτων υπολογιστών που μεροληπτούν για να διευκολύνουν αυτό το είδος των εφαρμογών.

Η μεροληψία λειτουργεί με πανουργία! Οι σχεδιαστές των υπολογιστών δεν είναι στην πραγματικότητα αυτοί που αποφασίζουν για το τι θα γίνεται μέσα στην τάξη. Βέβαια δεν υπάρχει τρόπος να μετρηθούν τα αναμφίβολα αληθινά αποτελέσματα της μεροληψίας που κτίζεται μέσα στις μηχανές.

Γι' αυτό οι εκπαιδευτικοί νεωτεριστές πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι για να γίνουν πετυχημένοι οφείλουν να ευαισθητοποιηθούν σε όσα συμβαίνουν στην περιβάλλουσα παιδεία και να χρησιμοποιήσουν τις πολιτικές τάσεις ως μέσα μεταφοράς των εκπαιδευτικών τους παρεμβάσεων. Ο υπολογιστής δεν είναι ο ίδιος μια παιδεία αλλά μπορεί να εξυπηρετήσει την προώθηση πολύ διαφορετικών μορφωτικών και φιλοσοφικών απόψεων.

Ο εκσυγχρονισμός στην εκπαίδευση με την αξιοποίηση των Ν.Τ. προϋποθέτει και προσδοκά ουσιαστικές αλλαγές στη φύση της παραδοσιακής διδασκαλίας και στην σχολική κουλτούρα της μάθησης, οι οποίες είναι δυνατόν να επιφέρουν θετικά και επιθυμητά από εκπαιδευτική άποψη αποτελέσματα, που αφορούν την γνωστική ανάπτυξη και το μοντέλο του εκπαιδευόμενου και αυριανού πολίτη.

Η δημιουργική αξιοποίηση των δυνατοτήτων των Ν.Τ. στην εκπαίδευση είναι δυνατόν να προκαλέσει την απαρχή μιας περιόδου παιδαγωγικής αναγέννησης στην

συνεχώς εξελισσόμενο πολιτισμικό πλαίσιο του παιδαγωγικού περιβάλλοντος, όπως είναι η γλώσσα, από την μία πλευρά, και τις αρχές της τεχνολογίας από την άλλη., ό π. σελ.65

[37] Papert ,Seymour (1991)*Νοητικές θύελλες* εκδόσεις Οδυσσέας , μετάφραση , Αίγλη Σταματίου.σελ. 42

[38] ό. π. σελ.55

σχολική πραγματικότητα και να συμβάλει στη μείωση ορισμένων παραδοσιακών χαρακτηριστικών της εκπαίδευσης της Ελλάδος, υπό ορισμένες συνθήκες. Η βελτίωση των μεθόδων διδασκαλίας εμπεριέχει στοιχεία , που επηρεάζουν θετικά την ολόπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας των μαθητών και επιφέρει μια επιθυμητή αλλαγή του κλίματος στην σχολική τάξη, μέσα από την αλλαγή του ρόλου του διδάσκοντος και των δομών επικοινωνίας στο πλαίσιο των εποικοδομιστικών δραστηριοτήτων και της εργασίας με τον υπολογιστή.

Οι δημιουργικές δραστηριότητες με τον υπολογιστή και με την ενεργό συμμετοχή όλων των μαθητών ελπίζεται ότι θα «λύσουν τα χέρια» του δασκάλου, που, αντί να εξαντλείται στη διατήρηση της ησυχίας και την αντιμετώπιση των παρενεργειών της μαθησιακής αποξένωσης, θα μπορεί να βρίσκεται στο πλευρό των μαθητών και να παίζει έναν άλλο ρόλο, πιο προωθημένο από παιδαγωγική άποψη, πρωτόγνωρο και για αυτό ίσως και πιο δύσκολο. Έναν διευκολυντικό ρόλο, για τον οποίο πολλά ακούγονται, αλλά μπορεί να γίνουν μέσα από την παραδοσιακή ρουτίνα και τη μαζικότητα του σχολείου, με την αυστηρή διάταξη των θρανίων και τη συγκεντρωτική δομή του ελέγχου της μαθησιακής διαδικασίας.

Οι βασικές λειτουργίες της εκπαίδευσης είναι η ατομική λειτουργία (ανάπτυξη προσωπικότητας) και η κοινωνική λειτουργία(ανάπτυξη της κουλτούρας μιας κοινωνίας μέσω της οποίας λειτουργεί η κοινωνική αναπαραγωγή και ο μετασχηματισμός). Δεν θα πρέπει να αγνοείται ο ρόλος της τεχνολογίας στη λειτουργία της πολιτιστικής αναπαραγωγής καθώς και του κοινωνικού μετασχηματισμού.

Η σημασία της διαμεσολάβησης του δασκάλου αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο και ενισχύεται με την ιστορική εμπειρία της σταδιακής ενσωμάτωσης των Ν.Τ. .

Ο υπολογιστής ως γνωστικό εργαλείο

Στην σύγχρονη εκπαιδευτική τεχνολογία, όταν γίνεται αναφορά στον υπολογιστή , αυτός δεν θεωρείται απλώς ένα διδακτικό μέσο, αλλά και ένα εν δυνάμει «γνωστικό εργαλείο» ή ακόμα καλύτερα μια πηγή γνωστικών εργαλείων. Στον χώρο της Διδακτικής με την βοήθεια του υπολογιστή γνωστικά εργαλεία ονομάζουμε εκείνα που λειτουργούν με ορισμένες γνωστικές δομές, οντότητες και διαδικασίες, με την βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν και να μάθουν από τις σκέψεις τους διευκολύνοντας έτσι τη γνωστική τους ανάπτυξη. Ο Vigotsky, υποστηρίζει ότι ένα γνωστικό εργαλείο δεν μπορεί να είναι αποτελεσματικό ,μόνον όταν λειτουργεί σε σχέση με τον πολυδιάστατο και συνεχώς εξελισσόμενο πολιτισμικό πλαίσιο του μαθησιακού περιβάλλοντος.[39]

Πώς όμως η υποστηριζόμενη μάθηση από τον υπολογιστή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την γνωστική ανάπτυξη του παιδιού;

Οι δραστηριότητες που στόχο έχουν την νοητική ανάπτυξη των παιδιών, εκτός από εκείνες που αποσκοπούν στην απόκτηση μηχανιστικής γνώσης, μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες:

1. Αυτές που χρησιμεύουν για την εμπέδωση ενός συνόλου θεμελιωδών γνώσεων και δεξιοτήτων .
2. Αυτές που απαιτούν την μεταφορά και εφαρμογή των δεξιοτήτων σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων.

Ένας στόχος βαθύτερος της δεύτερης προσέγγισης (μαθησιακής) είναι να μάθουν τα παιδιά πώς να μαθαίνουν και πώς να σκέφτονται .

Παραδείγματα τέτοιων ευκαιριών είναι και οι σύνθετες δραστηριότητες που έχουν σχέση με την συστηματική χρήση δυναμικών εργαλείων ή ακόμα των επεξεργαστών κειμένων, του προγραμματισμού μέσω μιας γλώσσας όπως είναι η Logo ,κ.α.

Τα πλεονέκτημα των εργαλείων αυτών είναι η ενασχόληση με τα ανοιχτά προβλήματα και την διερεύνηση ιδεών, περισσότερο , παρά με την ανταπόκρισή τους σε προκαθορισμένα βήματα διδακτικής καθοδήγησης.

Αντίθετα με τις αυτοποιημένες γνωστικές δραστηριότητες, η διαδικασία επίλυσης προβλήματος προϋποθέτει τη δημιουργική παρέμβαση της σκέψης και μια πιο περίπλοκη νοητική λειτουργία.

---

[39] Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ.69

Όταν τα παιδιά εργάζονται σε ένα δυναμικό περιβάλλον παρέχονται ευκαιρίες εμπλοκής στην ανάπτυξη των απαιτούμενων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, επινόηση ιδεών, δοκιμές, εντοπισμός των λαθών τους, και ανάπτυξη εμπιστοσύνης στην κρίση τους. Η κατασκευή για παράδειγμα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ένα γνωστικό και όχι τεχνικό πρόβλημα.

Συνεπώς η παιδαγωγική αξία των γνωστικών εξερευνητικών δραστηριοτήτων που απαιτούν σκέψη, είναι ότι βοηθούν το παιδί να μάθει να σκέφτεται και άλλες περιπτώσεις επίλυσης προβλημάτων γενικότερα, είτε με την υιοθέτηση πιο ευέλικτης στάσης και σκέψης , είτε με την μετάβαση σε προωθημένα νοητικά στάδια(όπως την μελέτησε ο Piaget) ή συστήματα σκέψης(κατά τον Bruner).

Κατά τον Papert η μάθηση από αντικείμενο πειθαρχίας και ταλαιπωρίας γίνεται διαδικασία ανακάλυψης και ενθουσιασμού. Έτσι ο υπολογιστής είναι ένα εργαλείο με την οποία ο χρήστης αναπτύσσει διανοητική σχέση, αναζητεί πληροφορίες, οργανώνει την προσωπική του γνώση με νέους τρόπους ενεργοποιώντας την σκέψη του όχι μόνον εμπειρικά αλλά και αναστοχαστικά (αυτή είναι περισσότερο ενεργή, συνειδητή και βουλητική).

Οι πλέον συζητημένες και άμεσες ιδιότητες του υπολογιστή, μεταξύ άλλων είναι:

- Η προγραμματισιμότητά [40]
- Η αλληλεπιδραστικότητά του με τον μαθητευόμενο.[41]
- Η προσαρμοστικότητα του διδακτικού προγράμματος, στους ρυθμούς μάθησης.[42]

Η δημιουργία προσομοιώσεων και άλλων ανοιχτών περιβαλλόντων μάθησης, ευνοούν την εφαρμογή σημαντικών παιδαγωγικών αρχών, οι οποίες απορρέουν από τις γνωστότερες μαθητοκεντρικές θεωρίες της μάθησης, όπως είναι η ανακαλυπτική θεωρία του Bruner, οι εποικοδομιστικές προσεγγίσεις του Piaget και των συνεχιστών του η κοινωνικοπολιτική θεωρία του Vygotsky κ.ά.

[40] με στόχους διδακτικούς, μαθησιακούς, οργανωτικούς, επικοινωνιακούς.
[41] Ενεργός συμμετοχή των παιδιών στην μαθησιακή διαδικασία
[42] Επίτευξη εξατομικευμένης διδασκαλίας, και δυνατότητα αναδομησιμότητας.(ιδιότητα προγράμματος να επιτρέπει παρεμβάσεις στην λειτουργία του χωρίς τις γνώσεις του σχεδιαστή της εφαρμογής, αλλά των κανόνων χρήσης του εν λόγω λογισμικού.)

Κεφάλαιο 3ο

Θεωρίες Μάθησης

Μπιχεβιοριστική Θεωρία

Η μπιχεβιοριστική θεωρία μάθησης ή μπιχεβιορισμός (behaviorism) ή συμπεριφορισμός είναι το θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο αναπτύχθηκε στην ψυχολογία από τον Αμερικανό ψυχολόγο John Watson[43]στις αρχές του εικοστού αιώνα στις Η.Π.Α., με γνωστότερους υποστηρικτές του τους Clark Hull & Skinner και η θεωρία στηρίζεται στην άποψη ότι η μάθηση και η απόκτηση γνώσης είναι αποτελέσματα της αλληλεξάρτησης ανάμεσα στα ερεθίσματα, που δέχεται το άτομο από το περιβάλλον του και τις αντιδράσεις του στα ερεθίσματα αυτά.[44]

Κλασικό παράδειγμα στη διαδικασία μάθησης, σύμφωνα με τη μπιχεβιοριστική θεωρία είναι το γνωστό πείραμα του Pavlov. Ο Ρώσος φυσιολόγος Pavlov έδινε τροφή σε ένα σκύλο καθημερινά, αφού χτυπούσε ένα καμπανάκι. Η προσφορά, δηλαδή, τροφής συνοδευόταν από ένα συγκεκριμένο ήχο. Μετά από πολλές επαναλήψεις της ίδιας διαδικασίας, ο Pavlov παρατήρησε πως ο σκύλος, μόλις άκουγε το γνωστό -πλέον- ήχο, είχε έκκριση σιέλου. Το πείραμα αυτό έγινε και σε άλλα ζώα, όπως γάτες, ποντίκια, χιμπατζήδες κ.λ.π., με διαφορετικά, όμως, ερεθίσματα. Τα αποτελέσματα ήταν τα ίδια με την περίπτωση του σκύλου.

Παραλληλίζοντας, λοιπόν, οι μπιχεβιοριστές την ανθρώπινη μάθηση με εκείνη των ζώων, πιστεύουν πως τα πάντα είναι συνδέσεις της μορφής ερέθισμα- αντίδραση. Ο άνθρωπος λειτουργεί ως παθητικός δέκτης ερεθισμάτων από το γύρω περιβάλλον του, στα οποία αντιδρά με κάποιο τρόπο. Αν η αντίδραση αυτή συσχετιστεί με μια -κατά κάποιο τρόπο- αμοιβή και αν η όλη διαδικασία επαναληφθεί αρκετές φορές, τότε ο άνθρωπος έχει μάθει. Για παράδειγμα, στην ερώτηση του δασκάλου (ερέθισμα) «πόσο κάνει 5+6» ο μαθητής δίνει μια απάντηση (αντίδραση). Αν η απάντηση αυτή είναι «11», τότε ο δάσκαλος θα τον επιβραβεύσει (αμοιβή). Με την επανάληψη της ίδιας ερώτησης και της ίδιας απάντησης, η αμοιβή δεν είναι πια απαραίτητη και ο μαθητής έχει μάθει ότι «5+6=11».

---

[43] Βοσνιάδου , Σ *Εισαγωγή στη ψυχολογία* εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 2001σελ.117

[44] Ο μηχανισμός της συντελεστικής εξάρτησης ανακαλύφθηκε από Αμερικανό ψυχολόγο E. Thorndike και αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Skinner- λειτουργική εξάρτηση-

Ο μπιχεβιορισμός έχει χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών για πολλά χρόνια και εξακολουθεί να χρησιμοποιείται ακόμη, λόγω των εντυπωσιακών αποτελεσμάτων του στην εκμάθηση των μηχανικών πράξεων. Το βασικό μειονέκτημα, όμως, αυτής της θεωρίας είναι το ότι δεν ερμηνεύει ικανοποιητικά τη μάθηση σύνθετων μορφών. Υποστηρίζει πως κάθε τέτοια μορφή αποτελείται από ένα σύνολο απλών καταστάσεων, των οποίων η κατανόηση ερμηνεύει και την πιο σύνθετη συμπεριφορά. Δεν μπορεί, όμως, κανείς να αναλύσει την ανακάλυψη ενός νέου θεωρήματος ή την επίλυση ενός πρωτότυπου προβλήματος σε απλά βήματα.

Γι' αυτό το λόγο είναι από όλους παραδεκτό πως η μπιχεβιοριστική προσέγγιση παρεμποδίζει την ανάπτυξη ανώτερης μαθηματικής σκέψης και πως η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν θα πρέπει να στηρίζεται μόνο σε αυτή τη θεωρία μάθησης. Σήμερα ο συμπεριφορισμός βρίσκεται σε γενική παρακμή στο χώρο της ψυχολογίας, πολλές όμως από τις αρχές του συνεχίζουν να έχουν μεγάλη επίδραση στην εκπαίδευση , και ιδιαίτερα στη διδασκαλία των μαθηματικών.[45]

Η βασική έννοια του συμπεριφορισμού του Skinner είναι η συντελεστική εξαρτημένη μάθηση όπου ένας οργανισμός μαθαίνει μια νέα αντίδραση λειτουργώντας στο περιβάλλον του. Ο Skinner ενδιαφέρθηκε να μελετήσει όχι μόνο τα διάφορα ερεθίσματα που προκαλούν μια συμπεριφορά αλλά και τα γεγονότα που την ακολουθούν και που έχουν ως αποτέλεσμα να την ενδυναμώνουν ή να την μειώνουν.

Όταν ένας οργανισμός μαθαίνει να εκδηλώνει μια συγκεκριμένη αντίδραση στην παρουσία ενός ορισμένου ερεθίσματος αλλά όχι άλλου, τότε έχει συμβεί η διάκριση των ερεθισμάτων. Γενικά, η διάκριση των ερεθισμάτων επιτρέπει στους ανθρώπους ή στα ζώα να μαθαίνουν τι είναι κατάλληλο και τι ακατάλληλο σε συγκεκριμένες συνθήκες. Παραλληλίζοντας, λοιπόν, οι μπιχεβιοριστές την ανθρώπινη μάθηση με εκείνη των ζώων, πιστεύουν πως τα πάντα είναι συνδέσεις της μορφής «ερέθισμα – αντίδραση». Ο άνθρωπος λειτουργεί ως παθητικός δέκτης ερεθισμάτων από το γύρω περιβάλλον του, στα οποία αντιδρά με κάποιο τρόπο.

Οι επιδράσεις του συμπεριφορισμού στην εκπαίδευση είναι :

- Συγκεκριμένη, σαφής διδασκαλία
- Έμφαση στην εξάσκηση, λύση ασκήσεων
- Αξιολόγηση με βάση την ίδια την πληροφορία που δίνεται στο μάθημα (όχι στην παραγωγική, δημιουργική σκέψη)

- Ατομική, όχι συνεργατική μάθηση
- Η ιδέα ότι η γνώση είναι σαφής και αναμφισβήτητη, ότι υπάρχουν πάντα σωστές απαντήσεις αν ακολουθηθούν οι σωστές διαδικασίες.

Η επιστημονική μελέτη της λειτουργικής εξάρτησης έχει δημιουργήσει σε αναρίθμητα θεραπευτικά προγράμματα για την τροποποίηση της προβληματικής συμπεριφοράς και ιδιαίτερα στις περιπτώσεις των νοητικά καθυστερημένων ατόμων, των αυτιστικών παιδιών και των δύστροπων εφήβων. [46]

Αναπτυξιακή Θεωρία

Μέχρι τις αρχές του 20ού αιώνα επικρατούσε η άποψη ότι τα παιδιά, ανεξαρτήτως ηλικίας, μπορούν να σκέφτονται όπως οι μεγάλοι. Έτσι, η διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολεία, τόσο στους μικρότερους, όσο και στους μεγαλύτερους μαθητές, ήταν παρόμοια. Περιελάμβανε, δηλαδή, παρουσίαση του μαθήματος με τη μέθοδο της διάλεξης, σημειώσεις από τους μαθητές και στο τέλος επίλυση ασκήσεων.

Όλα αυτά, όμως, άλλαξαν, όταν έκανε την εμφάνισή του ο Ελβετός γενετικός επιστημολόγος Jean Piaget (1896 - 1980) με το έργο του για τα στάδια της νοητικής ανάπτυξης. Διαφαίνεται μια τελείως διαφορετική αντιμετώπιση των μαθηματικών μέσα από την ψυχολογική του θεωρία, δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη μηχανισμών μάθησης όπως αυτών της αυτορύθμισης, της εξισορρόπησης, της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης, που επιτρέπουν στον άνθρωπο να προσαρμόζεται στο περιβάλλον του,[47] προκάλεσε επανάσταση επιστημονική στο χώρο της ψυχολογίας της ανάπτυξης.

Ο Piaget, μελετώντας τα αποτελέσματα ενός τεστ ευφυΐας, που έκανε στο πειραματικό σχολείο του Παρισιού, παρατήρησε ότι τα παιδιά μιας ορισμένης ηλικίας έκαναν παρόμοια λάθη, τα οποία ήταν ποιοτικά διαφορετικά από τα λάθη των παιδιών μεγαλύτερης ή μικρότερης ηλικίας. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα πως η νοητική ανάπτυξη του ανθρώπου εξελίσσεται σε τέσσερα στάδια, των οποίων η σειρά διαδοχής παραμένει αμετάβλητη.

---

[45] Βοσνιάδου, Σ. *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών* Gutenberg Αθήνα 1998 σελ. 15
[46] Βοσνιάδου, Σ.(2001*) Εισαγωγή στη ψυχολογία* εκδόσεις Gutenberg Αθήνα σελ. σελ. 132
[47] Βοσνιάδου, Σ.(1998) Η Ψυχολογία των Μαθηματικών Gutenberg Αθήνα σελ. σελ. 15

Τα στάδια αυτά είναι τα εξής: [48]

α) Αισθησιοκινητικό Στάδιο (0-2 χρόνια).

Στο στάδιο αυτό, το παιδί αντιλαμβάνεται το περιβάλλον του μέσω των αισθήσεων του (κυρίως όραση, ακοή και αφή). Δεν μπορεί, όμως, να εκφράσει με λέξεις οτιδήποτε βρίσκεται γύρω του και για αυτό αρκείται μόνο στην παρατήρηση. Τέλος, σκέφτεται εγωκεντρικά και δεν μπορεί να αντιληφθεί τις διάφορες καταστάσεις από άλλη οπτική γωνία.

β) Προσυλλογιστικό Στάδιο (2-7 χρόνια).

Στο στάδιο αυτό, το παιδί αρχίζει να διαμορφώνει τη γλώσσα επικοινωνίας και να μαθαίνει κάποιες στοιχειώδεις έννοιες. Ταξινομεί τα διάφορα αντικείμενα με βάση τις ομοιότητες τους, όμως δεν μπορεί ακόμα να συγκεντρώσει την προσοχή του σε περισσότερες από μία καταστάσεις. Επίσης, ενώ γνωρίζει τη σημασία των εννοιών μακρύ, κοντό, βαρύ, ελαφρύ, ψηλό, χαμηλό, πλατύ, στενό, δεν έχει την αίσθηση της ποσότητας. Έτσι, αν βάλουμε την ίδια ποσότητα νερού σε ένα ψηλό ποτήρι, το παιδί θα νομίσει πως το νερό είναι περισσότερο. Οι μαθηματικές γνώσεις του παιδιού στο προσυλλογιστικό στάδιο περιορίζονται σε αυτές που προέρχονται μέσα από πρακτικές δραστηριότητες. Έτσι, το παιδί αναγνωρίζει τον κύκλο, το τρίγωνο, το τετράγωνο, αλλά δεν μπορεί να διατυπώσει τις ιδιότητές τους.

γ) Στάδιο των Συγκεκριμένων Συλλογισμών (7-12 χρόνια).

Στην ηλικία αυτή, το παιδί διαμορφώνει πιο συστηματική και πιο λογική σκέψη. Έτσι, αρχίζει να αντιλαμβάνεται σχέσεις μεταξύ πραγμάτων ή προσώπων, εκτελεί αντιστρέψιμες πράξεις, αποδέχεται την αντιστροφή κάποιων ενεργειών και συνεργάζεται με άλλα άτομα. Αντιλαμβάνεται, επίσης, τη διατήρηση της ποσότητας, συγκρίνει και συσχετίζει αντικείμενα και καταστάσεις, ταξινομεί πράγματα με βάση κάποια χαρακτηριστικά τους και αναπτύσσει την ικανότητα της νοητικής αναπαράστασης. Στο στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών ενεργημάτων, το παιδί

[48] Βοσνιάδου , Σ.(2001*) Εισαγωγή στη ψυχολογία* εκδόσεις Gutenberg Αθήνα σελ. σελ. 96

αρχίζει να επεξεργάζεται κάποιες απλές μαθηματικές έννοιες, όπως αυτές του συνόλου, της διάταξης, του μήκους, του βάρους, του εμβαδού, κ.α.. Δεν έχει, όμως, ακόμη την ικανότητα να κατανοήσει πιο πολύπλοκες έννοιες, οι οποίες συνδέονται με την αφαιρετική σκέψη.

δ) Στάδιο των Αφηρημένων Συλλογισμών (12 χρόνων και πέρα).

Το κυρίαρχο χαρακτηριστικό αυτής της περιόδου είναι η ανάπτυξη της αφαιρετικής σκέψης, της σκέψης, δηλαδή, που δε στηρίζεται σε άμεσες εποπτείες. Ο έφηβος δε χρειάζεται πια συγκεκριμένα παραδείγματα, για να κατανοήσει μια έννοια, αλλά μπορεί να βασίζεται σε υποθέσεις, τόσο πραγματικές, όσο και φανταστικές. Η χρήση των αφηρημένων συλλογισμών επιτρέπει στον έφηβο να κάνει κριτική και να επινοεί θεωρίες. Αυτός είναι κι ένας από τους βασικούς λόγους που οι έφηβοι οραματίζονται και ζουν στο μέλλον κι όχι μόνο στο παρόν.

Στην ηλικία των 15-16 χρόνων, η νοημοσύνη αρχίζει να παίρνει την τελική της ισορροπία. Έτσι, δημιουργείται ένα νέο είδος κρίσης, η οποία δε στηρίζεται πλέον σε αντικείμενα, αλλά σε καταστάσεις και υποθέσεις. Οι συλλογισμοί του εφήβου κατά την περίοδο αυτή παρουσιάζουν δύο βασικά χαρακτηριστικά. Τη συνδυαστικότητα και τη δυνατότητα αντιστροφής και αμοιβαιότητας. Η συνδυαστικότητα κάνει τους συλλογισμούς να αποκτήσουν ευελιξία και να μπορούν πια να απομακρυνθούν από τις πρώτες συνδέσεις τους. Η αντιστροφή και η αμοιβαιότητα έχουν ως αποτέλεσμα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας συλλογισμός, είτε ως αντίστροφος, είτε ως αμοιβαίος.

Ο έφηβος στο στάδιο των αφηρημένων συλλογισμών μπορεί, επίσης, να επεξεργαστεί συστήματα τριών ή περισσότερων μεταβλητών, καθώς και να εργαστεί με τύπους, όπως E=a*b, στους οποίους κάθε γράμμα αντιπροσωπεύει ένα μοναδικό αριθμό. Τέλος, μετά την ηλικία των 16-17 χρόνων, είναι σε θέση να δουλέψει με τύπους, χωρίς, όμως, να αντιστοιχεί κάθε γράμμα σε έναν αριθμό, και μπορεί να εργαστεί σε νέα μαθηματικά συστήματα, όπως είναι το σύνολο των πινάκων, οι διανυσματικοί χώροι, κ.α..

Τα παραπάνω τέσσερα στάδια νοητικής ανάπτυξης χαρακτηρίζονται από την ιεραρχία τους. Σύμφωνα με τον Piaget, η σειρά διαδοχής παραμένει αναλλοίωτη. Είναι, όμως, δυνατό το πέρασμα από το ένα στάδιο στο άλλο να επιταχυνθεί, ανάλογα με το περιβάλλον του παιδιού, την κοινωνική του τάξη, κ.λ.π.. Αυτό που θα πρέπει να

συγκρατήσουμε καλά στο μυαλό μας είναι ότι, για να φθάσουμε σε ένα ορισμένο στάδιο, πρέπει να έχουμε περάσει πρώτα από τα προηγούμενα, ώστε να έχουμε την προκαταρκτική υποδομή, η οποία θα επιτρέψει την περαιτέρω πρόοδο.

Παρά το προφανές γεγονός της έντονης αλληλοσύνδεσης ανάμεσα στη Γενετική Επιστημολογία και Ψυχολογία, κατά τον Metraux (1986) οι ψυχολόγοι που επηρεάστηκαν από τον Piaget κάπου έχασαν το «νήμα» της σύνδεσης περιορίζοντας τον ορίζοντάς τους στα στάδια της νοητικής ανάπτυξης καθ΄εαυτά, με αποτέλεσμα να παραμείνει υπό διερεύνηση το ζήτημα της μετάβασης από το ένα στάδιο στο άλλο.[49]

Ο Piaget έβλεπε τη γνώση σαν μια διαδικασία προσαρμογής του ατόμου προς το περιβάλλον του. Ο άνθρωπος και το περιβάλλον του αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η νόηση είναι η ισορροπία αυτής της αλληλεπίδρασης. Για να φτάσει, όμως, κάποιος στη νόηση, είναι απαραίτητο να υπάρχει αφομοίωση. Το άτομο θα πρέπει, δηλαδή, να μεταβάλλει μια καινούργια εμπειρία με κατάλληλο τρόπο, ώστε να μπορέσει να την απορροφήσει.

Η μεταβολή αυτή της εμπειρίας γίνεται από μία ανθρώπινη λειτουργία, τη συμμόρφωση. Χωρίς τη συμμόρφωση και την αφομοίωση δεν υπάρχει προσαρμογή. Και βέβαια, όλα αυτά δεν τελούνται χωρίς κάποια ώθηση. Η κινητήρια δύναμη, λοιπόν, για τη νοητική ανάπτυξη είναι η τάση που έχει κάθε οργανισμός να δημιουργεί αρμονική σχέση με το περιβάλλον του. Η θεωρία του Piaget για τη μάθηση αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά έργα, που μελετούνε αυτό το αντικείμενο, και έχει επηρεάσει άμεσα τη διαδικασία διδασκαλίας - μάθησης σε πολλές χώρες.

Ορισμένοι ψυχολόγοι ερμηνεύουν τα ευρήματα όπου η μάθηση λαμβάνει χώρα δίχως ενίσχυση ή αντίδραση ως αποτέλεσμα δημιουργίας συνδέσεων ανάμεσα στις νοητικές αναπαραστάσεις δύο ερεθισμάτων.[50]

Θεωρία της Ανακάλυψης

Μετά την αναπτυξιακή θεωρία του Piaget, πολλοί ψυχολόγοι και παιδαγωγοί προσπάθησαν να μελετήσουν ακόμη περισσότερο το φαινόμενο της μάθησης. Ένας από αυτούς ήταν και ο Jerome Bruner, ο οποίος έδωσε έμφαση στη σημασία της ανακάλυψης και της διαίσθησης.

---

[49] Κλαουδάτος, Ν.(2004)Συμπληρωματικές Σημειώσεις Η θεωρία Κατασκευής της γνώσης σελ.9
[50] Βοσνιάδου , Σ.(2001*) Εισαγωγή στη ψυχολογία* εκδόσεις Gutenberg Αθήνα σελ. σελ. 133

Ο Bruner πίστευε πως ο βασικός ρόλος του καθηγητή είναι να βοηθάει τους μαθητές του να ανακαλύπτουν μόνοι τους τη γνώση. Φυσικά, υπάρχουν ποικίλοι τρόποι ανακάλυψης, όπως :

- η μαιευτική μέθοδος του Σωκράτη
- η εξερεύνηση κάποιων προβληματικών καταστάσεων, που σχετίζονται άμεσα με το μαθητή
- η κατασκευή ειδικών προβλημάτων, μέσα από τα οποία μπορεί το παιδί να κατανοήσει κάποιες έννοιες και να βγάλει κανόνες, κ.α..

Η σημασία της ανακάλυψης δεν εντοπίζεται τόσο στο αποτέλεσμά της, όσο στην ίδια τη διαδικασία εξερεύνησης.

Ο Bruner, όπως και ο Piaget, επέμενε πολύ στο ρόλο της ενεργητικότητας του ατόμου. Πίστευε πως η μάθηση δε μεταδίδεται, αλλά κατασκευάζεται - οικοδομείται - και κατακτάται από το μαθητή. Η μάθηση απαιτεί εξερεύνηση, πειραματισμό, ανακατασκευή της γνώσης, ανακάλυψη. Η παθητική στάση του μαθητή παρεμποδίζει τις παραπάνω διαδικασίες και αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα της απόκτησης γνώσης. Βέβαια, η μέθοδος της ανακάλυψης παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες. Για παράδειγμα, απαιτεί πολύ χρόνο και κάποιες ιδιαίτερες ικανότητες από τους μαθητές. Αυτά, όμως, δεν είναι τίποτα άλλο, παρά τεχνικά προβλήματα, τα οποία, σε σχέση με την προσφορά της ανακαλυπτικής μεθόδου στη μάθηση, φαίνονται ασήμαντα και μπορούν να αντιμετωπιστούν.

Ο Bruner τόνιζε στη θεωρία του, εκτός των άλλων, και τη σημασία της διαίσθησης για την κατανόηση των Μαθηματικών. Η διαισθητική σκέψη, σε αντίθεση με την αναλυτική, δεν προχωρά με προσεκτικά, σαφή βήματα. Η διαισθητική σκέψη είναι συμπληρωματικής φύσεως. Επιτρέπει ελευθερία, μεγάλα άλματα, χρήση της σύντομης οδού και κατασκευάζει κατά κάποιο τρόπο ένα δρόμο, πάνω στον οποίο θα κινηθεί με καθορισμένα, βαθμιαία βήματα η αναλυτική σκέψη. Η διαίσθηση, επομένως, είναι πολύ σημαντική για τη μάθηση και η καλλιέργειά της θα πρέπει να είναι ένας από τους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Η άποψη του Bruner σχετικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία ήταν πολύ προοδευτική για την εποχή εκείνη (δεκαετία 1950-1960) και αποτέλεσε βασικό κίνητρο για τη μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης, που έγινε λίγο αργότερα. Ο Bruner πίστευε πως οποιοδήποτε θέμα μπορεί να γίνει κατανοητό από τους μαθητές, εάν ο καθηγητής λάβει υπόψη του το στάδιο νοητικής ανάπτυξης του παιδιού και

προσαρμόσει κατάλληλα το θέμα στο επίπεδο του μαθητή. Τίποτα δεν είναι από τη φύση του δυσνόητο. Η δυσκολία βρίσκεται στο να βρεθεί η σωστή προσέγγιση και ο ανάλογος τρόπος για την παρουσίασή του. Άμεση συνέπεια των παραπάνω απόψεων του Bruner ήταν η εφαρμογή του σπειροειδούς προγράμματος ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου. Το πρόγραμμα αυτό, που εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα, έχει ως κεντρική ιδέα τη διδασκαλία των βασικών εννοιών, προσαρμοσμένων, όμως, στο ανάλογο στάδιο νοητικής ανάπτυξης, από πολύ νωρίς και την επανάληψή τους στις μεγαλύτερες τάξεις με συνεχή εμπλουτισμό, κάθε φορά, με νέα στοιχεία.

Σε αυτό ήρθαν να βοηθήσουν οι υπολογιστές οι οποίοι έδειξαν ότι θα μπορούσαν να αναπαραστήσουν τις εσωτερικές διαδικασίες με λογική μορφή. Οι σύγχρονες θεωρήσεις επικεντρώνονται στον ολιστικό τρόπο δόμησης του πληροφοριακού υλικού για κάθε γνωστικό αντικείμενο. Βασικό στοιχείο αποτελεί η μαθησιακή δραστηριότητα με προβλήματα της καθημερινής ζωής, η οποία σχετίζεται με τα ενδιαφέροντα του μαθητή, επικεντρώνεται στην κατανόηση των βασικών εννοιών που δομούν κάθε γνωστικό αντικείμενο και απαιτεί κατανόηση μιας σύνθεσης εννοιών για την επίλυσή της. (Vygotsky).

Στη πρώτη τριακονταετία του αιώνα μας προβάλλεται και υποστηρίζεται «η αρχή της εποπτείας» και « η αρχή της αυτενέργειας». Γι' αυτό επιδιώκεται πρώτα από όλα η δραστηριοποίηση και η αυτενέργεια των μαθητών με κατάλληλα εποπτικά μέσα (learning by doing). Μέχρι τη δεκαετία του 1950 σκοπός ήταν η εποπτικοποίηση του περιεχομένου της διδασκαλίας έτσι ώστε να γινόταν αποτελεσματικότερη. Ο μαθητής προόδευε στη μάθηση. Τα σπουδαιότερα «εποπτικά μέσα διδασκαλίας» ήταν τα πραγματικά αντικείμενα, οι εικόνες, οι χάρτες, τα βιβλία κ.τ.λ.

Μετά το 1950, χάρη στην πρόοδο της τεχνολογίας, διαδόθηκαν τα μέσα μαζικής επικοινωνίας (ραδιόφωνο και τηλεόραση) κι άρχισαν να επηρεάζουν σε όλο και μεγαλύτερο βαθμό την δημόσια και την ιδιωτική ζωή. Η χαμηλή επίδοση των αδυνάτων μαθητών πίστευαν ότι οφειλόταν στις πολλές ώρες που έβλεπαν τηλεόραση.

Η εκπαιδευτική τεχνολογία αναφέρεται στη χρησιμοποίηση τεχνικών συσκευών στη διδασκαλία – μάθηση. Ως ιδιαίτερος επιστημονικός κλάδος άρχισε να αναπτύσσεται στο τέλος της δεκαετίας του 1960. Ενώ στην παραδοσιακή διδακτική τα εποπτικά μέσα είχαν συνήθως σκοπό να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία, στην εκπαιδευτική τεχνολογία η διαδικασία της διδασκαλίας – μάθησης ρυθμίζεται ολικά ή μερικά από τα τεχνικά μέσα.

Κάθε μαθησιακή κατάσταση ή διδακτική αλληλεπίδραση έχει στόχο να επιτρέψει στο μαθητή να οικειοποιηθεί μια καθορισμένη γνώση.

Η διδακτική αλληλεπίδραση οργανώνεται από τον καθηγητή και έχουμε μια επικοινωνιακή κατάσταση μεταξύ μαθητή και καθηγητή. Η γνώση είναι το ζητούμενο. Αυτή η αλληλεπίδραση μπορεί να οδηγήσει σε δυσλειτουργίες που αλλοιώνουν τη σημασία της υπο κατασκευή γνώσης γιατί ο μαθητής ψάχνοντας, θέλει μάλλον να ικανοποιήσει τον καθηγητή του, και δεν σκέφτεται την κατάκτηση της γνώσης καθ΄ εαυτής.

Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία η οποία δημιουργείται με την άμεση αλληλεπίδραση μαθητή – καθηγητή, προσανατολιζόμαστε ώστε η αλληλεπίδραση να μετατοπιστεί μεταξύ μαθητή και γνώσης. Είναι προφανές ότι, προκειμένου να εισαχθεί η υπολογιστική τεχνολογία στη μαθηματική εκπαίδευση, πρέπει να αποδειχθεί η ανωτερότητά της στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών, σε σχέση με τις παραδοσιακές τεχνικές.

Εποικοδομισμός – Δομητισμός

Θα αποφεύγουμε τη λέξη « κονστρουκτιβιμός» ώστε να αποφευχθεί η εισαγωγή αμετάφραστων , ξενόηχων λέξεων στη γλώσσα μας.[51]

Οι απόψεις του Piaget για τη μάθηση είχαν μεγάλη απήχηση και επέδρασαν άμεσα στη διαμόρφωση των αντιλήψεων και των διδακτικών προσεγγίσεων των παιδαγωγών. Η αναπτυξιακή θεωρία, στην οποία αναφερθήκαμε σε προηγούμενη παράγραφο, αποτέλεσε την αφετηρία μιας νέας κατεύθυνσης στην ψυχοπαιδαγωγική, της θεωρίας του εποικοδομισμού Οι Piaget, Dienes, Singlair, κύριοι εκφραστές της κατασκευαστικής θεωρίας, όπως αλλιώς ονομάζεται ο εποικοδομισμός, έδωσαν με τις εργασίες τους μια νέα διάσταση στην έννοια της μάθησης.

Η βασική παραδοχή του εποικοδομισμού είναι ότι ο άνθρωπος κατασκευάζει τη γνώση και δεν τη δέχεται παθητικά. Η κινητήρια δύναμη για την κατασκευή της νέας γνώσης είναι πάντα μια προβληματική κατάσταση, την οποία οι υπάρχουσες γνώσεις του ατόμου δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν. Αυτή η ασυμφωνία και αστάθεια οδηγεί τον άνθρωπο σε ενεργοποίηση των ήδη υπαρχουσών γνωστικών δομών, σε

[51] Ράπτης Α.- Ράπτη Α. .(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας* τόμος Α΄σελ 84 εκδόσεις Α. Ράπτη

τροποποίησή τους και σε κατασκευή νέων γνώσεων, προκειμένου να ερμηνευτεί και να επιλυθεί το πρόβλημα.

Αναφέρουμε συνοπτικά τις βασικές αρχές της μάθησης σύμφωνα με τη θεωρία αυτή:

- Κάθε άτομο σχηματίζει τις δικές του αναπαραστάσεις για τη γνώση (Kant, Dewey)
- Το άτομο μαθαίνει, όταν μέσα από τις δικές του διερευνήσεις αντιληφθεί ότι υπάρχει ασυνέπεια μεταξύ της αναπαράστασης της γνώσης του και της εμπειρίας του (Slavin, 1994).
- Η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα σε κοινωνικό περιβάλλον (Vygotsky 1978).

Ο διαλεκτικός εποικοδομισμός δίνει έμφαση στον κοινωνικό και συμβολικό χαρακτήρα της γνώσης την οποία οικοδομεί το άτομο μέσα σε ρεαλιστικές συνθήκες τόσο σε συνεργασία με το δάσκαλο όσο και με τους συμμαθητές του. Ειδικότερα υποστηρίζει ότι:

α. «Η γνώση είναι το αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης μαθητή – περιβάλλοντος».

β. «Η μάθηση είναι η διαδικασία οικοδόμησης εσωτερικών μοντέλων ή αναπαραστάσεων εξωτερικών δομών μέσα από το φιλτράρισμα προηγούμενων εμπειριών, πεποιθήσεων, αλληλεπίδρασης, διδασκαλίας και μοντελοποίησης»[52]

Οι παραπάνω θέσεις για τα μαθηματικά συνοψίζονται από τη φράση του S. Pappert: "*doing mathematics*". Ο μαθητής μαθαίνει κυρίως αυτά που ανακαλύπτει μέσα στο κοινωνικό περιβάλλον που ζει. Όσο πλουσιότερο είναι αυτό σε ερεθίσματα και αλληλεπιδράσεις τόσο περισσότερες ευκαιρίες θα έχει ο μαθητής για την ανάπτυξη των μαθηματικών του ικανοτήτων.

Το παραδοσιακό μοντέλο της τάξης κρίνεται εξαιρετικά φτωχό και παρωχημένο. Ο δάσκαλος δεν μπορεί πια να αποτελεί τη μόνη πηγή της γνώσης. Οι ιλιγγιώδεις ρυθμοί με τους οποίους αυτή αναπτύσσεται κι εξαπλώνεται είναι τέτοιοι που μάλλον δύσκολα μπορεί να τους ακολουθήσει. Έχει χρέος να προετοιμάσει το μαθητή ώστε να την αναζητά, αυτόνομα πια, να την επιβεβαιώνει, να την εφαρμόζει ή και να την προσαρμόζει στις απαιτήσεις που ορίζει το περιβάλλον του.

Το μάθημα πρέπει να είναι ελκυστικό και να πείθει για τη χρησιμότητά του. Τα παιδιά έχουν πλέον πολλά ενδιαφέροντα και επιλέγουν τα ίδια που θα αφιερώσουν το χρόνο τους. Το στοίχημα είναι κατά πόσο το σύγχρονο σχολείο μπορεί να γίνει πόλος

έλξης γι' αυτά. Οι *«βασικές αρχές» του Goldenberg* είναι προσανατολισμένες στη σωστή κατεύθυνση.

Η θεωρία του εποικοδομισμού περιλαμβάνει, εκτός των παραπάνω, τρεις βασικές ιδέες:

α. Οι μαθητές επινοούν προσωπικές μεθόδους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων,

β. Η μάθηση των Μαθηματικών συντελείται μέσα από την επίλυση προβλημάτων,

γ. Ο ρόλος της κοινωνικής ομάδας για τη μάθηση είναι καθοριστικός.

Όσον αφορά στην πρώτη ιδέα της κατασκευαστικής θεωρίας, έχει παρατηρηθεί ότι τα παιδιά προτιμούν να επινοούν και να κατασκευάζουν δικούς τους τρόπους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, παρά να ακολουθούν τις υποδείξεις των καθηγητών. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι μαθητές βασίζονται στις προηγούμενες μαθηματικές τους γνώσεις. Έτσι, η διαφορά αυτών των μεθόδων είναι ουσιαστικά η διαφορά των προϋπαρχουσών γνώσεων.

Σχετικά με τη δεύτερη ιδέα του εποικοδομισμού είναι γεγονός πως οι καταστάσεις, τις οποίες οι μαθητές βρίσκουν προβληματικές, προσελκύουν κατά πολύ το ενδιαφέρον τους. Τα παιδιά, ανάλογα με τη μαθηματική τους ωριμότητα και με το στάδιο νοητικής τους ανάπτυξης, προσπαθούν να επιλύσουν εκείνα τα προβλήματα που τους κάνουν αίσθηση. Με αυτό τον τρόπο ενεργοποιείται η μάθηση και οι μαθητές αποκτούν τις διάφορες γνώσεις.

Η θεωρία του εποικοδομισμού δίνει, τέλος, μεγάλη έμφαση στο ρόλο και τη συμβολή της κοινωνικής ομάδας στην κατασκευή της γνώσης. Η διαφορά των ιδεών και των απόψεων των μελών της ομάδας προκαλεί αστάθεια, με αποτέλεσμα να γίνεται αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης και κατάκτηση της νέας μέσα σε κλίμα επικοινωνίας και συνεργασίας.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ο εποικοδομισμός αποτελεί την πιο αποδεκτή θεωρία για τη μάθηση και τη διδασκαλία. Παρόλο που δεν έχει αναπτύξει διδακτικές τεχνικές και μεθόδους, προσεγγίζει τη διδασκαλία, περιγράφοντας τους σκοπούς και τις επιδιώξεις της. Βασική, λοιπόν, επιδίωξη της διδασκαλίας, σύμφωνα με την κατασκευαστική θεωρία, είναι η παροχή ευκαιριών και η ενθάρρυνση του μαθητή να κατασκευάζει μόνος του τις μαθηματικές γνώσεις, μέσα από την εξερεύνηση τον

[52] Σημειώσεις Χρίστου οι Ν.Τ. στην εκπαίδευση2004

πειραματισμό, το σχηματισμό υποθέσεων, τη γενίκευση, την αιτιολόγηση, κ.λ.π.. Μόνο έτσι μπορεί να εδραιωθεί η κατανόηση και να επέλθει η ουσιαστική μάθηση.

Η άποψη ότι «διδασκαλία» σημαίνει μετάδοση γνώσεων, συντελεί στο να αποδίδονται δύο γενικές λειτουργίες στις πράξεις και στα λόγια του εκπαιδευτικού. Πρώτον, τα λόγια και οι πράξεις του μεταφέρουν αυτοφυή νοήματα τα οποία πρόκειται να γίνουν αντικείμενο κατανόησης από τους μαθητές. Δεύτερο, οι πράξεις και τα λόγια του εκπαιδευτικού υποβοηθούν στο να προσελκυστεί η προσοχή του μαθητή σε μαθηματικές δομές του περιβάλλοντος, οι οποίες είναι ενσωματωμένες σε συμπαγή υλικά, εικόνες, διαγράμματα ή εκφωνήσεις προβλημάτων. Ο πυρήνας της άποψης ότι η μάθηση και η διδασκαλία είναι μετάδοση γνώσεων, είναι ότι τα νοήματα είναι σύμφυτα με τα λόγια και τις πράξεις του εκπαιδευτικού ή με αντικείμενα του περιβάλλοντος.

Η υπόθεση αυτή φαίνεται να επαληθεύεται σε αρκετές καθημερινές καταστάσεις, είχε δε για πολλά χρόνια αποτελέσει τη κλίμακα (άξονα)[53] στη δόμηση της μάθησης πάνω στην οποία αναπτύχθηκαν πολλά αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών ανά την υφήλιο. Ο εποικοδομισμός στοχεύει στο να θέσει υπό αμφισβήτηση αυτή την υπόθεση.

Σύμφωνα με τον εποικοδομισμό, η μαθηματική γνώση δεν είναι μόνο θέμα αντίληψης, διαίσθησης ή ευφυΐας αλλά κατασκευάζεται με αναστοχαστική αφαίρεση και με αναδιοργάνωση αισθητικοκινητικής και εννοιολογικής δραστηριότητας. Η μαθηματική γνώση αποτελεί επινόηση του ανθρώπινου νου. Κατά συνέπεια, ο εκπαιδευτικός ο οποίος επικεντρώνει την προσοχή του (και των μαθητών του) σε μαθηματικές δομές, αναστοχάζεται συνειδητά σε προκατασκευασμένα γι' αυτόν μαθηματικά αντικείμενα.

Στην προσπάθεια λοιπόν του εκπαιδευτικού και των μαθητών να κατασκευάσουν ο καθένας τα δικά του νοήματα για τις λέξεις και τις πράξεις, κατά τη διαδικασία μιας συνεχούς αλληλεπίδρασης, δημιουργείται συνήθως ένα χάσμα επικοινωνίας.

Μια άλλη σημαντική διάσταση του εποικοδομισμού αφορά τον τρόπο με τον οποίο αναλύουν οι εποικοδομιστές το ρόλο της γλώσσας στη μαθηματική παιδεία. Κάθε άτομο διερμηνεύει και κατανοεί υποκειμενικά τα νοήματα των λέξεων και των φράσεων που του διαβιβάζονται μέσω διαφορετικών επικοινωνιακών καναλιών. Ο Von Glasersfeld (1991) υποστήριξε ότι:

Η γλώσσα συχνά δημιουργεί την ψευδαίσθηση ότι οι ιδέες, οι έννοιες και ακόμα ολόκληρα τμήματα γνώσης μεταφέρονται από τον ομιλητή στους ακροατές. Η ψευδαίσθηση αυτή είναι ισχυρότατη γιατί πηγάζει από την πεποίθηση ότι τα νοήματα

[53] Ράπτης Α.& Ράπτη Α(1996).*Η Πληροφορική στην εκπαίδευση* εκδόσεις Συμεών Αθήνα σελ.68

των λέξεων και των φράσεων υφίστανται παγιωμένα σε κάποιο σημείο του χωροχρόνου ανεξάρτητα από τους χρήστες της γλώσσας.

Από τη στιγμή που θα συνειδητοποιήσουμε την υποκειμενικότητα των λεξικολογικών νοημάτων, είναι αδύνατο – σύμφωνα με τον εποικοδομισμό – να υποστηρίξουμε την άποψη ότι οι λέξεις μεταφέρουν ιδέες και ότι οι εννοιολογική κατανόηση του ακροατή μας θα πρέπει να ταυτίζεται με τη δική μας.

Στις αίθουσες διδασκαλίας των μαθηματικών πολλές συζητήσεις στρέφονται συνήθως σε θέματα που απαιτούν ενεργοποίηση μιας αφαιρετικής διαδικασίας και δεν περνάει πολλή ώρα μέχρις ότου κάποιες εννοιολογικές ασυμφωνίες να δημιουργήσουν διαταραχές κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης.

Όταν μια εμπειρία δεν μπορεί να ενσωματωθεί στα ήδη υπάρχοντα σύνολα των σχημάτων δράσης, δημιουργείται μια διαταραχή, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε ένα μετασχηματισμό του υφισταμένου συστήματος κατηγοριών ή σχημάτων. Με τον τρόπο αυτό τα ήδη υπάρχοντα συστήματα δράσεων μπορεί να αναδιοργανωθούν ή να δημιουργηθούν καινούργια σχήματα. Η διαδικασία του μείζονος αυτού μετασχηματισμού ονομάζεται προσαρμογή (Piaget 1971).

Σύμφωνα με τον εποικοδομισμό, μόνο όταν ο δάσκαλος των μαθηματικών γνωρίζει το επίπεδο γνώσεων του μαθητή, μπορεί να εξευρεθούν τρόποι που θα καθοδηγήσουν το μαθητή να ενεργοποιήσει τη διαδικασία προσαρμογής, ούτως ώστε οι απαντήσεις του σε ένα μαθηματικό διάλογο, να μπορούν να είναι συμβατές με τους στόχους του Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών και του διδάσκοντα.

Στο θέμα της επικοινωνίας στα μαθηματικά έχουν εκφραστεί και διαφωνίες όσον αφορά τη θέση των εποικοδομιστών ότι οι μαθηματικές παραστάσεις δεν μπορούν να μεταδοθούν από ένα άτομο σε ένα άλλο, μέσω των λέξεων.

Οι Ellerton και Clements (1991) διεξήγαγαν έρευνα με στόχο να εξετάσουν την εικασία, αν η ανάγνωση του προβλήματος μπορεί να μεταδώσει μαθηματικές έννοιες στον αναγνώστη. Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η μετάδοση μαθηματικών παραστάσεων, αρκεί ο αναγνώστης να κατέχει την ορολογία και τις έννοιες στις οποίες αναφέρεται το πρόβλημα.

Ρεαλιστικά μαθηματικά και εποικοδομισμός

Μεταξύ της ρεαλιστικής προσέγγισης και της διδακτικής φαινομενολογίας αφ' ενός και του εποικοδομισμού αφ' ετέρου, υπάρχουν ομοιότητες και διαφορές.

Για τον εποικοδομισμό, η χρήση συγκεκριμένων αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία είναι μια επιλογή αμφιβόλου ωφελείας, τουλάχιστον όσο τα παιδιά δεν συσχετίζουν αυτές τις αναπαραστάσεις με τις έννοιες τις οποίες υποτίθεται ότι αναπαριστούν. Σύμφωνα μ' αυτή την αντίληψη, μόνο αν κάποιος έχει ήδη σχηματίσει μια νοητική αναπαράσταση (εσωτερική αναπαράσταση) μπορεί και να την «δει» μέσα στο συγκεκριμένο υλικό (εξωτερική αναπαράσταση).

Κάτι που οδηγεί ενδεχομένως στην άποψη ότι η «ροή» των αναπαραστάσεων (εσωτερικών και εξωτερικών) κατά τη διδασκαλία δεν πρέπει να είναι μονοσήμαντη.

Η ρεαλιστική προσέγγιση αποφεύγει τον ύφαλο με το να αφήνει τους μαθητές ελεύθερους, στη φάση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης, να επιλέξουν τις μεθόδους και τα εργαλεία που θεωρούν ότι εκφράζουν καλύτερα τις άτυπες ιδέες και στρατηγικές τους, σε ένα γενικότερο πλαίσιο επανακατασκευής της μαθηματικής γνώσης. Ο Μαθηματικός Ρεαλισμός μπορεί να παρουσιαστεί είτε ως Πλατωνικός ιδεαλισμός είτε ως Αριστοτελικός Εμπειρισμός, έχει ως αποτέλεσμα το διαχωρισμό του υποκειμένου από τη γνώση. Η γνώση είναι εξωτερική ως προς τον γνώστη.[54]

Η ιδέα της επανακατασκευής της μαθηματικής γνώσης απ' το μαθητή υιοθετείται και από τις δύο θεωρίες. Η διάκριση που κάνει ο κονστρουκτιβισμός μεταξύ «οπτικής γωνίας ηθοποιού» και «οπτικής γωνίας θεατή» - κάτι που οδηγεί στη σκέψη ότι πρέπει να προσπαθούμε να δούμε τα πράγματα με τα μάτια των μαθητών – γίνεται επίσης αποδεκτή από τη ρεαλιστική προσέγγιση. Αυτός είναι ο λόγος που κατά την οριζόντια μαθηματικοποίηση δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις άτυπες παραγωγές και κατασκευές των παιδιών.

Σύμφωνα με τη βασική, όμως, φιλοσοφική θέση του εποικοδομισμού είναι αδύνατο να γνωρίσουμε μια αντικειμενική πραγματικότητα. Οι γνώσεις μας για την πραγματικότητα είναι στην ουσία «θεωρίες» γύρω από αυτήν και η φροντίδα μας για συνέπεια και λογική στη διατύπωσή τους, ούτε συνεπάγεται την αλήθεια τους, ούτε αποκλείει εναλλακτικές θεωρίες.

[54] Κλαουδάτος, Ν.(2004)Συμπληρωματικές Σημειώσεις Μαθηματικός Ρεαλισμός σελ 14

Έτσι οι διάφορες «παρανοήσεις» των μαθητών είναι, για τον εποικοδομισμό αποτέλεσμα της ύπαρξης εναλλακτικών θεωριών. Κάτω απ' αυτή την οπτική γωνία, σύμφωνα με τον εποικοδομισμό, οι θεωρίες των μαθητών έχουν ίση αξία με εκείνες των δασκάλων. Επομένως οι μαθητές θα έπρεπε να αφήνονται ελεύθεροι να επιλέξουν την κατεύθυνση προς την οποία θα αναπτύξουν τις θεωρίες. αυτές.

Σύμφωνα με τις απόψεις της Ευγ. Κολέζα «η ρεαλιστική διδασκαλία των Μαθηματικών εστιάζει την προσοχή στο προσεκτικό, μακρόχρονο σχεδιασμό των μαθησιακών διαδικασιών, αποδίδοντας συγχρόνως την πρέπουσα αξία και σημασία στις ιδέες των ίδιων των μαθητών».

Φορμαλισμός

Με τη λέξη "φορμαλισμός" εννοούμε το πλαίσιο «νομιμοποίησης» της γνώσης, σύμφωνα με τα standards που ορίζει σε κάθε εποχή η μαθηματική κοινότητα.[55]Εκείνο το ύφος γραφής, σχεδιασμού και παρουσίασης που στηρίζεται στην απομνημόνευση, στην υπέρμετρη επιμονή στη Μαθηματική αυστηρότητα, στην τυποποίηση, στην απουσία πρωτοβουλίας και ουσιαστικής σκέψης, στη μίμηση, στην αποσύνδεση των Μαθηματικών από την πράξη.

. Ο φορμαλισμός εκδηλώνεται κυρίως με τους εξής τρόπους:

α. Ανάπτυξη της θεωρίας με τη χρήση αντιπαιδαγωγικών μεθόδων. Τυπική είναι η προσκόλληση στα Μαθηματικά μέσω της αυστηρής αλλά αντιπαιδαγωγικής δομής ΘΕΩΡΗΜΑ - ΑΠΟΔΕΙΞΗ - ΠΟΡΙΣΜΑ. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα παρουσιάζονται ουρανοκατέβατα και δεν εξηγείται η ουσία τους. Πρέπει να τονίσουμε πως, όσον αφορά τη συγγραφή ενός βιβλίου, το φορμαλιστικό ύφος γραφής είναι η εύκολη λύση: οποιοσδήποτε Μαθηματικός μπορεί να γράψει ένα φορμαλιστικό, αντιπαιδαγωγικό βιβλίο.

β. Απουσιάζουν τα παραδείγματα ή αναφέρονται παραδείγματα υποτυπώδη που αποτελούν απλές αντικαταστάσεις συγκεκριμένων αριθμών σε τύπους. Τα όποια παραδείγματα υπάρχουν δεν βοηθούν στην εμπέδωση της θεωρίας, αλλά απλώς αποτελούν υποδειγματική επίλυση ασκήσεων. Το χαρακτηριστικό αυτό εμφανίζεται σχεδόν σε όλα τα βιβλία Μαθηματικών, σχολικά ή μη και υπογραμμίζει τη λανθασμένη εντύπωση πως "μαθαίνουμε Μαθηματικά για να λύνουμε ασκήσεις".

[55] ό.π. σελ.14

γ. Απουσιάζουν τα σχήματα ή χρησιμοποιούνται με λανθασμένο τρόπο. Κλασική είναι πλέον η δομή βιβλίων που αναλώνονται στο πώς θα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μέσω μιας αλυσίδας υπολογισμών. Κανένα βιβλίο δεν αφιερώνει έστω και λίγες γραμμές για τη σημασία αυτών των γραφικών παραστάσεων, πώς δηλαδή θα αντλήσουμε πληροφορίες από μια γραφική παράσταση.

δ. Απουσιάζουν τα Μαθηματικά μοντέλα, δηλαδή οι απλές Μαθηματικές κατασκευές που δεν σχετίζονται άμεσα με την υπό εξέταση έννοια αλλά, που οδηγούν αβίαστα στη βαθιά κατανόησή της.

ε. Τίθενται σε πρώτο πλάνο οι τύποι και δίνεται η εντύπωση πως τα Μαθηματικά δεν είναι τίποτα άλλο από ασκήσεις που λύνονται όλες με τύπους. Η τυπολατρία αυτή έχει την κύρια ευθύνη για τον παπαγαλισμό και την απομνημόνευση.

στ. Απουσιάζουν τα προβλήματα που έχουν ευθείες αναφορές στην καθημερινή ζωή ή είναι κακώς κατασκευασμένα ή εξορισμένα στις "γενικές ασκήσεις" ως παρείσακτα και αταίριαστα με το υπόλοιπο περιεχόμενο του βιβλίου.

ζ. Η γενικότερη παρουσίαση είναι ανιαρή και μονότονη, χωρίς πρωτοτυπία και χωρίς να προσπαθεί να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών.

Οι αποτυχίες των μαθητών στις αρχές του 1970 ανάγκασαν τους ερευνητές να επανεξετάσουν την υπόθεση της «μεταφοράς» της γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα που διατυπώθηκε ήταν το εξής:

Στο «δίπολο» του παρακάτω σχήματος ,

Δάσκαλος-----►(μεταφορά γνώσης) -----►Μαθητής «κάτι» δεν πρέπει να «μεταφέρεται» .Τι είναι αυτό που δεν μπορεί να μεταφέρει ο δάσκαλος στο μαθητή;[56]

Ο φορμαλισμός ευθύνεται για τη μετατροπή ενός θαυμάσιου μαθήματος, όπως τα Μαθηματικά, σε μισητό για εκατομμύρια μαθητές.

[56] ό.π. σελ.15

Θεωρίες μάθησης και υπολογιστής

Κριτική της συμπεριφοριστικής προσέγγισης

Η πραγματικότητα είναι πολύ πιο πολύπλοκη από αυτή που εμφανίζεται στη συμπεριφοριστική φιλοσοφία και πρακτική. Η αγνόηση της σχέσης που αναπτύσσεται μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή καθώς και η επικέντρωση μόνον στην παρατηρήσιμη και μετρήσιμη εξωτερική συμπεριφορά του μαθητευόμενου, είναι ένα σοβαρό μειονέκτημα. Σε ορισμένες περιπτώσεις οι εξωτερικές ενισχύσεις κατέστρεψαν τα εσωτερικά κίνητρα για μάθηση. Η μάθηση μπορεί να ερμηνευθεί καλύτερα από τις προσδοκίες του ατόμου ,παρά από την ενίσχυση[57] και ότι η λανθάνουσα μάθηση, χωρίς τη διαμεσολάβηση της ενίσχυσης είναι εξίσου δυνατή.[58]

Η αξία της μάθησης έγκειται συχνά στο απρόβλεπτο και σε αποτελέσματα σύνθετα, που δεν μπορούν να αναλυθούν εκ των προτέρων από τον εκπαιδευτή με μία γραμμική μορφή προκατασκευασμένων ως την τελευταία λεπτομέρεια διδακτικών σταδίων ή βημάτων.

Η φιλοσοφία της άποψης «ή μου επιδεικνύεις αυτή τη συγκεκριμένη συμπεριφορά ή δεν παίρνεις αμοιβή», θεωρείται αυταρχική και μερικές φορές επικίνδυνη, ιδιαίτερα στην σύγχρονη πλουραλιστική και με γοργούς ρυθμούς εξελισσόμενη , απρόβλεπτη εποχή με ανοιχτά προβλήματα.

Φαίνεται ότι η θεωρία των συμπεριφοριστών δεν προσφέρεται για προωθημένες μορφές μάθησης, όπου η προσωπική άποψη, η απρόβλεπτη κριτική επιχειρηματολογία, η δημιουργικότητα και η πρωτοβουλία η ιδιαιτερότητα της κάθε κουλτούρας και η πρωτότυπη έκφραση έχουν μεγάλη αξία. Βεβαίως δεν μπορεί κανείς να αγνοήσει την συμβολή του στην θεωρία μάθησης και την διδακτική πρακτική, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι πολλές έρευνες απέδειξαν τα παρωθητικά αποτελέσματα της ενίσχυσης, ιδιαίτερα της θετικής, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.[59]

Ενώ εξαίρεται ο στόχος της ανάπτυξης γνωστικών δεξιοτήτων ανωτέρου επιπέδου, εν τούτοις δεν πρέπει να παραβλέπονται και οι δεξιότητες χαμηλότερης τάξης

---

[57] Bolles 1972:,Κολιάδης, 1991: 173 Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ 80

[58] Bantura, 1973, Bantura , and Schunk , 1981

[59] Κολιάδης 1991

,διότι είναι πολύ σημαντικές, αφού διαμορφώνουν γερές βάσεις για παραπέρα ανάπτυξη.

Στοιχεία συμπεριφορισμού στη διδασκαλία με υπολογιστές

Με την διδασκαλία μέσω του υπολογιστή μπορούν να αξιοποιηθούν ορισμένα θετικά στοιχεία του συμπεριφορισμού, όπως δυνατότητα του μαθητή να ακολουθήσει το δικό του ρυθμό μάθησης και το «δικαίωμα» να κάνει λάθη, σε μία διαδικασία δοκιμής και πλάνης.

Η αξιολόγηση των αντιδράσεων τους μπορεί με τον προγραμματισμό να είναι άμεση, για την καθοδήγηση προς την επίτευξη του μαθησιακού στόχου, αφού η ενίσχυση που δεν συσχετίζεται άμεσα με την σωστή απάντηση, δεν λειτουργεί ικανοποιητικά. Αυτή η αμεσότητα είναι πολύ δύσκολη στην παραδοσιακή διδασκαλία της τάξης, είναι όμως εφικτή σε ένα προσεκτικά σχεδιασμένο πρόγραμμα υπολογιστή. Με αυτόν τον τρόπο και οι προχωρημένοι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με πιο δύσκολες δραστηριότητες και όσοι βρίσκονται πιο πίσω δεν θα μένουν στάσιμοι και άπραγοι .

Μέσα από το εκπαιδευτικό λογισμικό με πολλά προαπαιτούμενα σχήματα του τύπου Ερέθισμα – Αντίδραση – Ενίσχυση και οι αδύνατοι μαθητές έχουν ευκαιρίες να βιώσουν μικρές επιτυχίες και να αναπτερώσουν την αίσθηση της αυτό-αποτελεσματικότητας τους, από ό,τι τους παρέχει το παραδοσιακό περιβάλλον μάθησης.

Οι νέοι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τις αρνητικές αντιδράσεις των μηχανών (ήχοι ή εικόνες αποδοκιμασίας στη ανατροφοδότηση για τη λάθος απάντηση) - τις οποίες δεν ντρέπονται – και γνωρίζουν από τα ηλεκτρονικά τους παιχνίδια ότι με περισσότερη εξάσκηση θα καταφέρουν να «φτάσουν στο τέλος» του προγράμματος.
Το κυριότερο μειονέκτημα της συστηματικής ενίσχυσης ή «τιμωρίας» των απαντήσεων των μαθητών από ένα ηλεκτρονικό πρόγραμμα είναι η κοινωνικοποίηση του εκπαιδευόμενου στην αξία και την συνήθεια της εξάρτησής τους από τον εξωτερικό έλεγχο της μαθησιακής διδασκαλίας.

Οι κατασκευαστές των λογισμικών δεν θα πρέπει να επαναλαμβάνουν τεχνικές ενίσχυσης που έχουν πολυχρησιμοποιηθεί και να επινοούν τρόπους με τους οποίους θα δίνονται με την ανάδραση περισσότερες της μιας ευκαιρίες αυτοδιόρθωσης ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας του μαθητή.

Πολλά συμπεριφοριστικά προγράμματα έχουν δεχθεί κριτική από τους επικοδομιστές, οι οποίοι έχουν διαφορετική αντίληψη για το λάθος και τους ενδεδειγμένους τρόπους της αξιοποιήσεως του κατά την διαδικασία της μάθησης, ώστε να κατηγορούν τα προγράμματα αυτά ότι ενισχύουν το συντηρητικό σχολείο με την ενασχόληση των μαθητών με χαμηλού επιπέδου γνωστικές λειτουργίες και αναπαραγωγικές διεργασίες. Οι οπαδοί της Κριτικής Παιδαγωγικής τονίζουν επί πλέον τον κίνδυνο να καταντήσουν οι χρήστες αυτών των προγραμμάτων ικανοί στις εξετάσεις αλλά φτωχοί στην κρίση και μη σκεπτόμενοι άνθρωποι.

Ο χαρακτηρισμός ενός εκπαιδευτικού λογισμικού ως «μπηχεβιοριστικού» αποτελεί αρνητική αξιολογική κρίση, αφού τα λεγόμενα ανοιχτά πακέτα λογισμικού , που διαθέτουν «έξυπνα εργαλεία», αφήνουν στο χρήστη υψηλό βαθμό αυτονομίας στη διαδικασία της μάθησης και βασίζονται στην δημιουργική παρέμβαση του εκπαιδευτικού, οπότε και θεωρούνται από παιδαγωγική άποψη περισσότερο αξιόλογα και πολλά υποσχόμενα, αρκεί να αναπτυχθεί περισσότερο η γνώση στον τομέα αυτό τόσο από την τεχνολογική, όσο και από την παιδαγωγική σκοπιά.

Βεβαίως είναι δυνατόν στοιχεία ακόμη και αντιθέτων προσεγγίσεων να συνυπάρχουν στα σύνθετα προγράμματα εκπαιδευτικού λογισμικού, ώστε να αντλεί κανείς ό,τι καλύτερο μπορεί να πάρει από την κάθε προσέγγιση, χωρίς όμως να δημιουργούνται ιδεολογικές αντιφάσεις.

Εφαρμογές του γνωστικού εποικοδομισμού στη μάθηση μέσω του υπολογιστή

Οι νέες τεχνολογίες των υπολογιστών στην εκπαίδευση, εύκολες στην χρήση τους, ευέλικτες και πολυδύναμες, παρέχουν αρκετές δυνατότητες για την εξασφάλιση μαθησιακών περιβαλλόντων στα σχολεία, όπως δείχνουν οι μέχρι τώρα δοκιμασμένες διδασκαλίες.

Η παιδαγωγική φιλοσοφία του εποικοδομισμού παρουσιάζει άνθηση τα τελευταία χρόνια στον τομέα της διδακτικής και της εκπαιδευτικής τεχνολογίας με την βοήθεια του υπολογιστή και σε αυτό έχει συμβάλει η νέα ώθηση που έχει γνωρίσει η φιλοσοφία αυτή με την υιοθέτηση της συνεπούς προς τις αρχές της αξιοποίησης των εκπαιδευτικών δυνατοτήτων των Ν.Τ. στην εκπαίδευση.

Ο χαρακτηρισμός και μόνον ενός εκπαιδευτικού λογισμικού ως «εποικοδομητικού» αποτελεί θετικό κριτήριο σήμερα για την ποιότητά του και συνώνυμο

του καλού λογισμικού. Παρέχουν εξαιρετικές εκπαιδευτικές δυνατότητες εποικοδομιστικής διδασκαλίας και μάθησης όπως:

- Οι δυνατότητες προσομοίωσης
- Μοντελοποίηση προβλημάτων
- Διαδικασία επίλυσης προβλημάτων
- Δημιουργία γνωστικών «μικροκόσμων»[60]
- Δημιουργία ανοιχτών περιβαλλόντων μάθησης.

Οι οποίες απορρέουν από τις γνωστότερες μαθητοκεντρικές θεωρίες μάθησης όπως:

- Η ανακαλυπτική θεωρία του Bruner
- Οι εποικοδομιστικές προσεγγίσεις του Piaget
- Η κοινωνικοπολιτική θεωρία του Vygotsky
- Η αυθεντική μάθηση

Αυτό συμβαίνει χάρις στη δυνατότητα παιδαγωγικού σχεδιασμού ενός ηλεκτρονικού, ανοιχτού (ως έναν βαθμό) μαθησιακού περιβάλλοντος, που παρέχει στο μαθητή χειροπιαστά αντικείμενα, οικείους διαδικαστικούς όρους και εργαλεία σκέψης και του επιτρέπει να τα χειρίζεται αυτόνομα και δυναμικά, να δρά πάνω σε αυτά, να πειραματίζεται με αυτά και, καθώς το περιβάλλον αυτό ανταποκρίνεται κατάλληλα στις πειραματικές του προσπάθειες, να αυτό-ελέγχεται και να αυτοδιορθώνεται. Επίσης δίνεται η δυνατότητα

---

[60] Με τον όρο «μικρόκοσμος» προσδιορίζουμε τα υπολογιστικά περιβάλλοντα τα οποία ενσωματώνουν συγκεκριμένες έννοιες ενός γνωστικού αντικειμένου από τη μορφή δυναμικών αναπαραστάσεων (Edwards, 1995). Ανάλογα με την γνωστική περιοχή που θέλουμε να διδάξουμε στους μαθητές δομούμε και το αντίστοιχο υπολογιστικό περιβάλλον ωστόσο πουθενά μέσα σε αυτό δεν αναγράφεται , αναφέρεται , διδάσκεται – με την κλασική , συμβατική έννοια του όρου – η γνώση αυτή. Αυτό ακριβώς αποτελεί το βασικό χαρακτηριστικό των εφαρμογών αυτών.

Κυνηγός Χ. ,Δημαράκη, Ε.(επιμέλεια), Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα,3. Μιχάλης Αργύρης , Διερευνητική μάθηση με χρήση υπολογιστικών εργαλείων : Μία εναλλακτική πρόταση διδασκαλίας σελ 99

Η κατασκευή μικροκόσμων και συνόλων εργαλείων αντιμετωπίζεται περισσότερο ως μία εμπειρία προσωπικής εξέλιξης , παρά ως μία διαδικασία δημιουργίας λογισμικών για μαθητές. Για παράδειγμα , οι Nossand Hoyles (1996) συζήτησαν τους τρόπους με τους οποίους οι εμπειρίες των εκπαιδευτικών από την κατασκευή μικροκόσμων για τα μαθηματικά, τους οδήγησε σε προβληματισμό και αλλαγή των επιστημολογικών τους απόψεων σε σχέση με το αντικείμενο των μαθηματικών , των πεποιθήσεών τους για διδασκαλία και τη μάθηση και με τους ρόλους τους , ειδικά στην τάξη και ευρύτερα στο επάγγελμά τους. Ο diSessa(1997) συζήτησε την ιδέα καλλιέργειας κοινοτήτων εκπαιδευτικών που κατασκευάζουν εργαλεία άλλων αξιοποιώντας τη δυνατότητα επαναχρησιμοποίησής τους. Προτείνει την δημιουργία των «μερεμέτηδων» (“Bricoleurs” όρος του Papert ,1980, στη Logo) που ενεργά συζητούν , προβληματίζονται και σχεδιάζουν διδασκαλίες, εργαλεία και υλικό και με τον τρόπο αυτό εξελίσσονται και οι ίδιοι ως επαγγελματίες. Ό.π σελ. 238

- ομαδοσυνεργατικής μορφής εργασίας γύρω από τον υπολογιστή.
- Η διαπραγμάτευση των ιδεών
- Η ανάπτυξη εναλλακτικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων
- Η «ανακάλυψη» της νέας γνώσης(με τα προϋπάρχοντα νοητικά σχήματα και την βοήθεια του δασκάλου.[61]

Ένα από τα πρώτα αξιόλογα παραδείγματα εφαρμογής του νέο-πιαζετιανού εποικοδομισμού στη διδασκαλία με τη βοήθεια του υπολογιστή, το οποίο αποτέλεσε σταθμό για την παραπέρα εξέλιξη των ιδεών ανάπτυξης εκπαιδευτικού λογισμικού είναι ο Papert. Αυτός έδωσε την ευκαιρία σε άλλους σχεδιαστές να αξιοποιήσουν τις τεχνολογικές και παιδαγωγικές ιδέες του (Papert) επεκτείνοντας τις εφαρμογές τους σε άλλες γνωστικές περιοχές.

\Σελ 109 για 32.

Ωστόσο οι δυνατότητες που παρέχει το υπολογιστικό περιβάλλον και η εν γένει αλληλεπίδραση των μαθητών με τον υπολογιστή , δεν εγγυώνται από μόνες τους την επίτευξη μάθησης. Η παιδαγωγική παρέμβαση του εκπαιδευτικού , ο σχεδιασμός των καταλλήλων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων , δυναμική της ομάδας στην οποία συμμετέχει ο μαθητής, (Cobb,Yackel & Wood , 1992) πολλαπλασιάζουν και συμβάλλουν αποφασιστικά στην μετάβαση του παιδιού από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο (Hoyles & Noss, 1992).[62]

Κριτική προσέγγιση

Η κριτική είναι η νέα σχολή σκέψης που αποκαλείται και χειραφετική ή μετασχηματιστική. Και έρχεται σε αντιπαράθεση με τον παραδοσιακό θετικισμό, τον ορθολογισμό, την τεχνοκρατία.[63] Στο επίκεντρό της δικής της οπτικής τίθενται τα σημαντικά προβλήματα του ατόμου και της κοινωνίας., όπως και η κοινωνικοπολιτική λειτουργία της μάθησης. Η κριτική σχολή συνέβαλε ώστε να αναδειχθεί ο κοινωνικός ρόλος του σχολείου και των εκπαιδευτικών και η σημασία της κοινωνικής και πολιτικής διάστασης της ανάπτυξης της προσωπικότητας του ατόμου που εκπαιδεύεται.

---

[61] Bantura, 1973, Bantura , and Schunk , 1981από Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ 96

[62] Κυνηγός Χ. ,Δημαράκη, Ε.(επιμέλεια), Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα, σελ 109

[63] (Bantura, 1973, Bantura , and Schunk , 1981) από Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ 133

Η κριτική παιδαγωγική δεν διαφέρει πολύ από εκείνες του εποικοδομισμού Δίνεται όμως έμφαση όχι μόνον στο τι μαθαίνουν τα παιδιά, αλλά και στο τι άτομα διαμορφώνονται μέσα από τις σημασίες και τους γλωσσικούς κώδικες, που επικρατούν σχετικά με την αντίληψη της γνώσης και της μάθησης, του ρόλου που παίζουν οι Ν.Τ. κ.ά., μέσα σε τι είδους κοινωνία λειτουργούν τα άτομα και πως αυτά συμβάλλουν στο μετασχηματισμό της ίδιας της κοινωνίας.

Οι μεθοδολογίες και οι εφαρμογές που υποστηρίζονται από τις αρχές του εποικοδομισμού για την αξιοποίηση των Ν.Τ., είναι κατάλληλες και για την κριτική προσέγγιση, υπό τον όρο όμως ότι δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να ασχοληθούν και με ζητήματα κοινωνικής, κριτικής, πολιτιστικής αυτογνωσίας, ανάληψης οργανωμένων πρωτοβουλιών για την εξάλειψη των κακώς εχόντων στο κοινωνικό περιβάλλον κτλ. Για παράδειγμα ,οι συζητήσεις γύρω από τον υπολογιστή, η μάθηση του διαλόγου στις ομάδες εργασίας τα projects, οι αναλύσεις του ηλεκτρονικού λόγου, οι διασυνδέσεις, οι τηλεσυνεργασίες κτλ., είναι δραστηριότητες που τις δέχονται και οι οπαδοί της κριτικής παιδαγωγικής.

Χαρακτηριστικά του παραδοσιακού σχολείου

Ο δάσκαλος είναι υποχρεωμένος να παίρνει συνεχώς αποφάσεις. Αποφάσεις για την παρουσία και τον ρόλο του στην τάξη, για τον τρόπο που θα αντιμετωπίσει τους μαθητές του, για τον τρόπο που θα ερμηνεύσει και θα αξιολογήσει τις απαντήσεις τους.[64]

Τα σημεία στα οποία ασκείται κριτική (στη σχετική βιβλιογραφία) και την οποία υποστηρίζει μεγάλη μερίδα εκπαιδευτικών αναφέρεται στα παρακάτω χαρακτηριστικά του παραδοσιακού σχολείου, τα οποία θεωρούνται αρνητικά τόσο από θεωρητική (σκοπιά) όσο και από την σκοπιά των απαιτήσεων των κοινωνικοπολιτικών εξελίξεων.: [65]

- Δασκαλοκεντρική διαδικασία – παθητική μη ενεργή.
- Παρουσίαση της γνώσης.
- Ελάχιστη αλληλεπιδραστική διδακτική.

[64] Κλαουδάτος, Ν.(2004)Συμπληρωματικές Σημειώσεις , 3.1 *Η ανεπάρκεια του «παραδοσιακού μοντέλου»* σελ 14

[65] Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ. 141

- Γνώση / γλώσσα μη οικεία προς τους μαθητές.
- Χαμηλός βαθμός αφομοίωσης.
- Γνώση δεδομένη - κλειστή-έτοιμη.
- Ύπαρξη μόνον σχολικού εγχειριδίου.
- Προσανατολισμός στην ύλη του σχολείου μόνον.
- Το λάθος τιμωρείται – έμφαση στο αποτέλεσμα.
- Αγνόηση / υποβάθμιση του συναισθηματικού & ψυχοκοινωνικού τομέα.
- Παράδοση ,εξέταση, οδηγίες, ανάθεση εργασιών (ρουτίνα).
- Περιορισμένα κριτήρια ➔αναποτελεσματική και άδικη.
- Αδυναμία σεβασμού στην ιδιαιτερότητα του κάθε μαθητή.
- Μειωμένες εμπειρίες για προσωπική και συναισθηματική ανάπτυξη
- Απουσία όρων συμβουλευτικής υποστήριξης για μαθητές--εκπαιδευτικούς.

Ιδανικός κριτής σημαίνει ότι είναι συγχρόνως όσο γίνεται περισσότερο δίκαιος απέναντι στα ¨δεδομένα¨, χωρίς φανατισμούς, μεροληψίες και στερεότυπα αλλά και ελεύθερος.

Όταν μιλούμε για ανάπτυξη κριτικής σκέψης στο ανώτερο της επίπεδο , εννοούμε συγχρόνως και την ανάπτυξη της ικανότητας για μεταφορά της πρότερης γνώσης σε νέες καταστάσεις, για μεταγνώση, για παραγωγή γνώσης και λόγου, για αυτόνομη επίλυση προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Lipman(1994:116), δύο είναι τα βασικότερα χαρακτηριστικά της κριτικής σκέψης: [66]

- Η ικανότητα της για αυτό-διόρθωση
- Η ευαισθησία της στα δεδομένα του περιβάλλοντος πλαισίου

Χαρακτηριστικά της κριτικής σκέψης ανωτέρου επιπέδου

Σύμφωνα με τον Resnik (1987β:3) η κριτική σκέψη είναι:

- Μη αλγοριθμική
- Οδηγεί σε περισσότερες από μία λύσεις.
- Εμπλέκει κρίσεις – αξιολογήσεις και ερμηνείες
- Συνδέεται με την εφαρμογή πολλαπλών κριτηρίων
- Συνήθως ενέχει αβεβαιότητα

[66] ό. π. σελ.143α

- Προϋποθέτει αυτό-ρύθμιση της διαδικασίας της σκέψης
- Εμπεριέχει επιβολή νοήματος, επινόηση δομής σε φαινομενική αταξία.
- Είναι επίπονος. Αυτού του είδους η παραγωγή κρίσεων και εμπεριστατωμένου έργου συνεπάγεται αξιοσημείωτη νοητική εργασία.

Αναφέρθηκε παραπάνω πως ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γνωστικό και αναπτυξιακό εργαλείο και πως οι παιδαγωγικές του χρήσεις συνδέονται με τις σημαντικότερες θέσεις και αρχές των βασικών θεωριών της μάθησης. Μία αναμόρφωση λοιπόν των αναλυτικών προγραμμάτων θα έπρεπε να δώσει περισσότερη σημασία, καθώς και χώρο και χρόνο σε δασκάλους και μαθητές για ενασχόληση. Προς αυτήν την κατεύθυνση συμβάλλουν οι Ν.Τ. με το κατάλληλο λογισμικό, ιδιαίτερα το ανοιχτό λογισμικό, όπου ο χρήστης έχει την δυνατότητα σημαντικής παρέμβασης και αλληλεπίδρασης τόσο με την διεπιφάνεια χρήσης, όσο και με τους διδάσκοντές, τους συνομηλίκους του και άλλους έμπειρους ειδικούς.

Συνεργατική μάθηση

Όλες οι θεωρίες της γνωστικής ανάπτυξης, καθώς και οι ψυχοκοινωνικές και κοινωνιολογικές προσεγγίσεις της σχολικής μάθησης, δίνουν μεγάλη σημασία στο κοινωνικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η μάθηση γνώσεων, δεξιοτήτων, στάσεων, κινήτρων, ρόλων και αξιών.

Η συνεργατική μάθηση προκύπτει από «….μια συντονισμένη , σύγχρονη νοητική δραστηριότητα, αποτέλεσμα μιας συνεχούς προσπάθειας δόμησης και διατήρησης μιας κοινής αντίληψης ενός προβλήματος». Απαιτεί την «αμοιβαία εμπλοκή των συμμετεχόντων σε μια συντονισμένη προσπάθεια, προκειμένου να λύσουν το πρόβλημα από κοινού…»[67]

Στην συνεργατική μάθηση οι άνθρωποι μαθαίνουν :[68]

- Μοντελοποιώντας τις ενέργειες και τις ικανότητες ενός ομότιμού τους με περισσότερες γνώσεις.

---

[67] Roschelle & Teasley, 1995 από . Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου Με Διεθνή Συμμετοχή Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση από Απόσταση Πανεπιστήμιο Κρήτης Σχολή Επιστημών Αγωγής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης 8-10 Ιουνίου 2001 Ρέθυμνο .”Ποιοι παράγοντες επηρεάζουν τη μάθηση μέσω συνεργατικών δραστηριοτήτων από απόσταση και πως αυτοί διαμορφώνουν την συνεργατική τεχνολογία;”
σελ. 318 Αργυρούλα Πέτρου-Μπακίρη&Αγγελική Δημητροπούλου

[68] Gurwin, Star & Greenberg, 1995 ό.π.σελ. 320

- Αναγνωρίζοντας και επιλύοντας διαφορές μεταξύ συγκρουομένων ιδεών και θεωριών.
- Με ομότιμη διδασκαλία, όπου ένας μαθητής βοηθάει ή δίδει οδηγίες σε κάποιον άλλο, όποτε είναι απαραίτητο.

Η συνεργατική μάθηση λοιπόν, απαιτεί αλληλεπιδράσεις κατά την διαδικασία της μάθησης, τόσο για την επίτευξη των στόχων, όσο και για την ανάπτυξη της αίσθησης ότι οι συμμετέχοντες ανήκουν σε μία κοινότητα.

Πολλές έρευνες έδειξαν ότι η μάθηση σε όλα τα σχολικά αντικείμενα με συνεργασία σε ομάδα είναι σαφώς ανώτερη από την ανταγωνιστική εργασία σε ομάδα, ενώ σε σχέση με την ατομική προσπάθεια, είτε είναι αποδοτικότερη, είτε δεν παρουσιάζει σημαντικές διαφορές.[69] Μέσα από την συνεργασία οι μαθητές μπορούν να πετύχουν καλύτερα μαθησιακά και διαπροσωπικά αποτελέσματα.[70] Μέσω της συνεργασίας και της επικοινωνίας αναπτύσσονται γνωστικές στρατηγικές που αφορούν την παρουσίαση επιχειρημάτων προκειμένου να λυθεί μία διαφωνία. [71] Η εξασφάλιση όσο το δυνατόν μεγαλύτερης αλληλεπίδρασης, αμοιβαίων ανταλλαγών και εκτενών συζητήσεων, σε αντίθεση με δραστηριότητες και οδηγίες που περιορίζουν και τυποποιούν την αλληλεπίδραση, προωθούν την κατανόηση εννοιών και συμβάλλουν στην ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης.[72] Ο ανταγωνισμός διαμορφώνει άτομα επιθετικά, ματαιόδοξα και εχθρικά μεταξύ τους και αποθαρρύνει όσους δεν έχουν μεγάλες πιθανότητες πρωτιάς και διάκρισης. Παραθέτεται ο συγκριτικός πίνακας ανάμεσα στις παραδοσιακές ατομιστικές – ανταγωνιστικές μεθόδους διδασκαλίας και των συνεργατικών, ώστε να διαμορφωθεί μια εικόνα σχετική με τις διαφορές τους:

---

[69] Γεώργας, 1984, Sherif, 1966, Johnson and Johnson, 1994 και 1996 από Ράπτης Α.- Ράπτη Α. .(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας* τόμος Α΄σελ . 155 εκδόσεις Α. Ράπτη

[70] McGrene, J. L., (1996), Design:Educational Electonic Multi – Player Gamew, A Literature Review , Department of Computer Science The University of british Columbia.

[71] Nastasi, B.K., and Clements D.H.(1993)Motiviational and social outcomes of cooperative computer education . Journal of Computing in Childhood Education 4,1,5-

[72] Cohen , E.G.(1994) , Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups . Review of Educational Research 64, 1, 1-35.

Διαπροσωπικές διεργασίες και στρατηγικές που επηρεάζουν τη μάθηση

ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΕΣ ΑΤΟΜΙΣΤΙΚΕΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ	ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΙΚΡΩΝ, ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΚΑΙ ΕΥΕΛΙΚΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ
• Απουσία αλληλεπιδράσεων • έλλειψη επικοινωνίας των μαθητών	• Πλούσια αλληλεπίδραση • Ανταλλαγή ιδεών • Συγκρούσεις - ζυμώσεις
• Ατομική εργασία • Τα μέλη της ομάδας απεύχονται και εμποδίζουν την επίδοση του άλλου.	Τα μέλη ενδιαφέρονται και ενθαρρύνουν τη επίδοση του άλλου
• Έμφαση στην έτοιμη γνώση • Μη προβληματική η δεδομένη γνώση • Υποχρεωτική η διδακτέα ύλη για όλους	• Οι μαθητές παράγουν πληροφόρηση • Θέμα μελέτης υπό μορφή προβλήματος • δυνατότητα επιλογής της ύλης
Οι ερωτήσεις επικεντρώνονται στον έλεγχο της κατανόησης του θέματος από τους μαθητές.	Οι ερωτήσεις επικεντρώνονται στο να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις εμπειρίες τους, τις διαδικασίες , τον εαυτό τους και τους άλλους.
• Δάσκαλος + βιβλίο➔μοναδική πηγή γνώσης • Γνωρίζει όλες τις απαντήσεις (δάσκαλος). • Όχι απόκλιση από την ύλη.	Δάσκαλος=έμπειρος +συγκροτημένος Δεν είναι παντογνώστης Συντονιστής εργασιών Συνεργάτης και μαθητής
• έχει λίγα κριτήρια • ιεραρχεί, (βάσει αρίστου) • συγκρίνει	• Πολλά κριτήρια • Σεβασμός στην διαφορετικότητα • Αξιολόγηση με στόχο την βελτίωση από τον ίδιο τον μαθητή ή την ομάδα

Οι μαθητές είναι σε καθορισμένη και σταθερή διάταξη στην αίθουσα διδασκαλίας.	• Τάξη – εργαστηρίου ελευθερία κίνησης • πηγή μάθησης και το εξωτερικό περιβάλλον.
Η γνώση παρέχεται, είναι εξωτερική και «τελειώνει».	• δοκιμασία ιδεών και υποθέσεων • εναλλακτικές ιδέες • γνώση – διάλογος • ανοικτά προβλήματα
Η ανάπτυξη του μαθητή θεωρείται πρόοδος κυρίως ακαδημαϊκή.	Η ανάπτυξη βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος και είναι κοινωνική και σφαιρική.

Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία επέρχεται μετά από προσπάθειες τόσο του εκπαιδευτή όσο και των μαθητών και εφόσον συντρέχουν οι παρακάτω προϋποθέσεις[73] :

- θετική ανεξαρτησία μεταξύ των μελών της ομάδας
- άμεση προσωπική επικοινωνία μεταξύ των μαθητών
- ατομική και συλλογική ευθύνη
- συνεχής εξάσκηση σε διαπροσωπικές δεξιότητες επικοινωνίας και συλλογικής εργασίας
- ανομοιογένεια στη σύνθεση της ομάδας, ως προς τις μαθησιακές ικανότητες, το στυλ μάθησης, το φύλο και τους άλλους τομείς που επηρεάζουν τη μάθηση
- αποκέντρωση της εξουσίας

Θα πρέπει να έχει εδραιωθεί στους μαθητές και στους διδάσκοντες η ανοιχτή προσδοκία για την ύπαρξη ικανοτήτων σε όλα τα παιδιά, έστω κάποιοι έχουν τις δικές τους αδυναμίες.

Τονίζεται από τους σύγχρονους παιδαγωγούς η ανάγκη να αναπτύξουν οι μαθητές την ικανότητα να διερευνούν την ποιότητα των ίδιων τους των κοινωνικών

[73] Ματσαγγούρας, 1989:507-508 από Ράπτης Α.- Ράπτη Α. .(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας* τόμος Α΄σελ . 155 εκδόσεις Α. Ράπτη σελ.158

αλληλεπιδράσεων με τους άλλους κατά τη διάρκεια της διατομικής εργασίας, ώστε να μπορέσουν να αναπτύξουν σταδιακά τόσο την κριτική και συνθετική τους σκέψη , όσο και την ψυχοκοινωνική τους αυτογνωσία, που και αυτή έχει , ούτως ή άλλως, κοινωνική θεμελίωση. Η μεν κριτική σκέψη εκ φύσεως ενέχει και την έννοια της γνωστικής σύγκρουσης, η δε συνθετική σκέψη την έννοια της εννιαιοποίησης και της ολοκλήρωσης (Intergration).

Συνεργατική μάθηση και υπολογιστές

Όταν το μάθημα υποβοηθείται από τον υπολογιστή και ακολουθεί τη μη παραδοσιακή προσέγγιση όπως αναφέρθηκε στον παραπάνω πίνακα, προσλαμβάνει χαρακτήρα εργαστηριακό. Αλλάζει η διάταξη της θέσης των μαθητών μέσα στην τάξη και αλλάζουν οι δομές της επικοινωνίας και οι κοινωνικές σχέσεις μέσα στην τάξη, όπως αλλάζει - λόγω της διαμεσολάβησης του ιδίου του υπολογιστή – και ο ρόλος του δασκάλου. Οι μαθητές:

- εργάζονται σε μικρές ομάδες
- μοιράζονται την γνώση
- επικοινωνούν
- συνεργάζονται
- μιλούν την δική τους γλώσσα
- ανταλλάσσουν γνώσεις

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Κεντρικός θεωρείται ο ρόλος του καθηγητή ως «ενορχηστρωτή»των μαθητών για την επίτευξη των διδακτικών στόχων του μαθήματος. Παρακολουθεί και υποστηρίζει τη μαθησιακή διδασκαλία διαμορφώνοντας ένα κλίμα συνεργασίας, απαλλαγμένος από τον ρόλο της αυθεντίας και του μοναδικού κατόχου της γνώσης. Στην διαδικασία αυτή η τεχνολογία τον υποστηρίζει χωρίς να παρεμβαίνει, καθώς αποτελεί μόνο το μέσο.[74]

Οι εκπαιδευόμενοι δεν αντιμετωπίζονται ατομοκεντρικά, αλλά ενθαρρύνεται η συνεργασία και η ομαδικότητά στην οικοδόμηση της νέας γνώσης αξιοποιώντας τις προσωπικές τους γνώσεις και δεξιότητες, καθώς και την δυναμική της ομάδος. Η

[74] Κυνηγός Χ. ,Δημαράκη, Ε.(επιμέλεια), Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα.σελ. 121

συνεργατική διάσταση στη μάθηση δεν βοηθά μόνον στην οικοδόμηση της γνώσης αλλά αποτελεί επίσης ένα μέσο καλλιέργειας της ομαδικής σκέψης, της αλληλεγγύης και γενικά της σύσφιξης των κοινωνικών σχέσεων.[75]

Από παροχέας γνώσεων, λαμβάνει τον νέο και όχι εύκολο ρόλο του εκπαιδευτικού συμβούλου συνεργαζομένων μελών. Θα πρέπει να παρέχει υποστήριξη κατά την διάρκεια των συζητήσεων, να ενθαρρύνει τον εκπαιδευόμενο να επιβεβαιώσει τις υποθέσεις του συγκρίνοντας τες με τις απόψεις των άλλων εκπαιδευομένων, να τους παροτρύνει για περαιτέρω έρευνα με κατάλληλες ερωτήσεις (λ.χ. «Γιατί;» «Τι σημαίνει αυτό;» (Wilson 1995).

Ο ρόλος του διδάσκοντος είναι πλέον διαφορετικός, αλλά όχι λιγότερο δύσκολος, διότι απαιτείται μεγαλύτερη ευελιξία, δημιουργικός σχεδιασμός, εγρήγορση, και ετοιμότητα για εποικοδομητική αξιοποίηση των ευκαιριών που αναδύονται κ.ά. **.** Κατ' επέκταση τα άτομα μπορούν να λειτουργήσουν σύμφωνα με το επιδιωκόμενο μοντέλο του ενεργού και συμμετοχικού πολίτη του αύριο (τουλάχιστον από τον επίσημο λόγο της εκπαιδευτικής πολιτικής). Επί πλέον ότι οι Ν.Τ θα προκαλέσουν την κοινωνική απομόνωση των μαθητών είναι μάλλον αβάσιμη και ατεκμηρίωτη.

Παράγοντες που επηρεάζουν την συνεργατική μάθηση

Πολλές μελέτες έχουν γίνει προκειμένου να απαντηθεί το ερώτημα «είναι η συνεργατική μάθηση ποιο αποδοτική από το να μαθαίνει κανείς μόνος του;». Τα αποτελέσματα είναι πολλές φορές αντιφατικά, γεγονός που οδήγησε τους ερευνητές να αναζητήσουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνεργατική μάθηση είναι ποιο αποδοτική. Η συνεργασία από μόνη της δεν είναι ούτε αποδοτική ούτε μη αποδοτική. Η απόδοση εξαρτάται από πολλούς παράγοντες οι οποίοι θα πρέπει επίσης να ληφθούν υπ΄όψιν κατά το σχεδιασμό των υπολογιστικών περιβαλλόντων συνεργατικής μάθησης.[76]

---

[75] Μακράκης , Β. Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου Με Διεθνή Συμμετοχή Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση από Απόσταση Πανεπιστήμιο Κρήτης Σχολή Επιστημών Αγωγής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης 8-10 Ιουνίου 2001 Ρέθυμνο ."Πυθέας : ¨ένα διαδικτυακό περιβάλλον εκπαίδευσης από απόσταση των εκπαιδευτικών της ελληνικής ως δεύτερης / ξένης γλώσσας. Σελ.18

[76] Kummar, 1996, όπ σελ.320

Αλληλεξάρτηση μεταξύ των μελών της ομάδας

Για να έχουμε επιτυχία με τις συνεργατικές ομάδες θα πρέπει να έχουμε αλληλεξάρτηση (Salomon,1995) . Η αλληλεξάρτηση χαρακτηρίζεται από:

- Την ανάγκη να μοιράζονται απαραίτητες πληροφορίες , έννοιες, ιδέες και συμπεράσματα μεταξύ των μελών της ομάδας.
- Την διαίρεση της εργασίας των μελών της ομάδας, όπου οι ρόλοι συμπληρώνουν ο ένας τον άλλο και όπου το τελικό προϊόν απαιτεί την συνεργασία των διαφορετικών ρόλων.
- Την από κοινού δραστηριότητα της σκέψης

Για ποιόν λόγο άλλωστε δύο ομάδες θα επέμεναν στην συνεργασία αν οι πληροφορίες που ελάμβαναν από τους άλλους δεν τους ήταν απαραίτητες;

Και γιατί τα μέλη της ομάδας θα συνεργάζονταν μεταξύ τους αν το έργο που τους ανατέθηκε αποτελείται ουσιαστικά από ανεξάρτητα έργα;

Το αφηρημένο με το συγκεκριμένο διαπλέκονται

«Τα μαθηματικά θα παραμείνουν ισχυρά όσο διατηρούν επαφή με τον πραγματικό κόσμο, που είναι το στέρεο έδαφος στην γέννησή τους . Μόλις σηκωθούν ψηλά στον περιβάλλοντα αέρα της καθαρής αφαίρεσης, τότε διατρέχουν τον κίνδυνο να αποδυναμωθούν. Πρέπει απαραίτητα , τουλάχιστον κατά καιρούς, να επιστρέφουν στον πραγματικό κόσμο για να ανανεώσουν την δύναμή τους.»

Howard Eves

Ένα από τα πιο σημαντικά επιστημολογικά βήματα , που έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια με τις ποιοτικές έρευνες και τις εφαρμογές του Papert και των ομοϊδεατών του (οι οποίοι δοκίμασαν διδακτικές πρακτικές υιοθετώντας σύγχρονες εποικοδομιστικές προσεγγίσεις με την χρήση ανοιχτού και δυναμικού λογισμικού) είναι ότι έδειξαν πως με ένα εμπνευσμένο εκπαιδευτικό λογισμικό μπορεί ο δάσκαλος να διδάξει μαθηματικά κάνοντας το αφηρημένο συγκεκριμένο και για πολλούς αδύνατους μαθητές.

Μερικοί ερευνητές όπως ο Hughes υποστηρίζουν, αντίθετα με τον Piaget, ότι η μαθηματική παιδεία πρέπει να αρχίζει νωρίς στην προσχολική ηλικία και να έχει ως στόχο της να εισάγει το παιδί στην αφηρημένη γλώσσα των μαθηματικών με τέτοιους

τρόπους που να επιτρέπουν στο παιδί να καταλαβαίνει τις διασυνδέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις αφηρημένες αριθμητικές αναπαραστάσεις και στις συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις αυτές μπορούν να αναφέρονται.[77]

Οι Noss και Hoyles (1991:43-47) υποστηρίζουν ότι υπάρχουν διαβαθμίσεις στο αφηρημένο, καθώς και συνεχής αλληλεπίδραση αυτού με το συγκεκριμένο σε όλα τα στάδια ανάπτυξης του παιδιού, γι' αυτό το πιθανολογούμενο άλμα από τους ¨πρόποδες στην κορυφή της αφηρημένης σκέψης ίσως να είναι ένας μύθος, που νομιμοποιεί την κοινωνική ιεράρχηση της γνώσης. Ο υπολογιστής μέσω των δυνατοτήτων που παρέχει δείχνει ότι τα μαθηματικά του σχολείου δεν διαχωρίζονται από τα μαθηματικά της ζωής.(υπο συνθήκες) Το αφηρημένο δεν είναι ιδιότητα ενός αντικειμένου. Είναι μάλλον η ποιότητα της σχέσης του σκεπτόμενου ατόμου με το αντικείμενο. Τα πιο διευκολυντικά διαμεσολαβητικά αντικείμενα θα γίνουν το «όχημα» που θα κουβαλά τα σπέρματα του αφηρημένου μέσα στις συγκεκριμένες δραστηριότητες ενός «έξυπνου» λογισμικού.

Είναι πλέον παραδεκτό μια από τις εν δυνάμει καινοτόμες χρήσεις του υπολογιστή είναι και η ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας των μαθητών. Με την χρήση του υπολογιστή στο σχολείο μπορεί να αλλάξει η κουλτούρα της μάθησης κατά τρόπο που δεν το κατάφερε όσο θα ήθελε κανείς η παραδοσιακή διδασκαλία. (Δεν καταργούνται τα παραδοσιακά μαθηματικά, απλώς η εποικοδομιστική προσέγγιση τα διευρύνει και τα ζωντανεύει).

Μαθηματικά και μαθησιακές δυσκολίες

Οι ελάχιστες δεξιότητες που πρέπει να κατέχει ένας μαθητής για να μπορεί να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των μαθηματικών , είναι στην συντριπτική πλειοψηφία τους κοινές συνιστώσες για όλα τα μαθήματα. [78]

1. Ευχέρεια ανάγνωσης και σωστή χρήση του συντακτικού της γλώσσας.
2. Πλούτο παραστάσεων από το περιβάλλον του, την καθημερινότητα και την επικαιρότητα.
3. Ικανότητα στην έκφραση.

[77] Βοσνιάδου,Σ.(1998) η Ψυχολογία των Μαθηματικών Gutenberg -Αθήνα σελ. σελ18
[78] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21° Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004, σελ. 685 «Μαθησιακές δυσκολίες και μαθηματικά» Π., Πουλάκης & Γ., Διακουμάτος.

4. Κριτική σκέψη, ώστε να μπορεί να αξιολογεί και να ιεραρχεί κατά σειρά βαρύτητας τα δεδομένα ενός θέματος.
5. Ικανότητα αφαιρετικής και συνθετικής σκέψης.
6. Ευχέρεια στην χρήση αλγορίθμων και πράξεων.
7. Ικανότητα χρήσης εναλλακτικών τρόπων αντίληψης και παρουσίασης του προβλήματος(πίνακες, σχήματα, διαγράμματα, σκίτσα).
8. Να είναι οργανωτικός και να μπορεί να αυτοαξιολογεί τις μεθόδους που ακολουθεί , τα επιμέρους αλλά και το τελικό αποτέλεσμα.
9. Να κατέχει σε βάθος τις διάφορες μαθηματικές έννοιες , αλλά και τα σύμβολα που χρησιμοποεί.

Μαθησιακές δυσκολίες και υπολογιστές

Η μάθηση είναι συνυφασμένη με δυσκολίες και δεν είναι το ίδιο εύκολη για όλα τα άτομα. Οι δυσκολίες μπορούν να αποδοθούν στο ίδιο το αντικείμενο μάθησης , στις συνθήκες, και στον τρόπο με τον οποίο επιδιώκεται ή επιτυγχάνεται η μάθηση και σε διάφορα χαρακτηριστικά του ιδίου του αναπτυσσόμενου ατόμου, όπως είναι οι φυσικές και πνευματικές αδυναμίες και αναπηρίες, τα κοινωνικά ή συναισθηματικά και, γενικότερα , ψυχολογικά εμπόδια, καθώς και διάφορες ιδιαιτερότητες.

Η χρήση των Ν.Τ. έχει αποδειχθεί ότι παρέχει εξαιρετικές ευκαιρίες και μέσα για την ανάπτυξη των ατόμων με ειδικές ανάγκες.Ανοίγονται νέοι ορίζοντες νέοι ορίζοντες και μπορούν να επινοηθούν καλύτερα – ηλεκτρονικά συστήματα και χειριστήρια που υποκαθιστούν τις φυσικές τους αδυναμίες.

Ο υπολογιστής αποτελεί ένα εργαλείο δημιουργίας, παρακάμπτοντας πολλές πιθανές αδυναμίες ή αναπηρίες, υπό τον όρο ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να παρακολουθούν τις εξελίξεις στον τομέα του εκπαιδευτικού λογισμικού και να μάθουν να δοκιμάζουν τα διάφορα εργαλεία και τις σχετικές εφαρμογές.[79](εννοείται ότι το υλικό και το λογισμικό είναι ειδικά προσαρμοσμένο στις ιδιαίτερες ανάγκες των ατόμων με μαθησιακές δυσκολίες).

Έχει αποδειχθεί ότι παιδιά με ελαφρές , αλλά ακόμη και με σοβαρές δυσκολίες, μπορούν να μάθουν να εργάζονται τόσο με την logo ,όσο και με δυναμικά λογισμικά

[79] Biklen, 1990 and Nolan 1990, Ράπτης Α.- Ράπτη Α. .(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας* τόμος Α΄σελ 223 εκδόσεις Α. Ράπτη

ώστε να κατανοούν γεωμετρικές και αριθμητικές έννοιες με μετρήσεις και σχήματα.[80]. Μαθαίνουν στοιχειώδεις κανόνες ποσοτικών σχέσεων, στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, αναπτύσσουν τη λογική σκέψη, καθώς και το επίπεδο των κοινωνικών τους αλληλεπιδράσεων.

Τα διάφορα κέντρα αποκατάστασης των δυσλεκτικών παιδιών βασίζονται πολύ στις ιδιότητες του υπολογιστή, αν και δεν έχει ακόμη αναπτυχθεί σε ικανοποιητικό βαθμό το κατάλληλο λογισμικό για τα παιδιά αυτά.[81]

Αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού

Η εισαγωγή των υπολογιστών στην εκπαίδευση για την υποστήριξη της μάθησης είναι κοινός τόπος. Η ένταξη της χρήσης της υπολογιστικής τεχνολογίας στην εκπαιδευτική διαδικασία συνιστά καινοτομία ως προς τις ανθρώπινες διαδικασίες. Για τον λόγο αυτόν, είναι απαραίτητο να αναπτυχθεί ένα πλέγμα από υποστηρικτικές δραστηριότητες μεταξύ των οποίων σημαντικό βάρος έχουν αυτές που αφορούν στον εκπαιδευτικό και στην κατάλληλη επιμόρφωσή του.(Hoylew & Noss 1992)[82]

Η διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης της μαθηματικής σκέψης ως τρόπος με τον οποίο προσεγγίζουμε καταστάσεις και φαινόμενα στην καθημερινή μας ζωή και διανόηση, μπορεί να υποστηριχθεί από την κατάλληλη αξιοποίηση εξειδικευμένων εκπαιδευτικών λογισμικών με ιδιαίτερους τρόπους.

Όμως ο αριθμός των πακέτων λογισμικού συνεχώς αυξάνεται και τα κριτήρια καθώς και το επίπεδο της ποιότητάς τους εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία, η αξιολόγηση του εκπαιδευτικού λογισμικού έχει εξελιχθεί σε μία όχι και τόσο απλή διαδικασία. Τα κριτήρια με τα οποία αξιολογούνται τα πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού εντάσσονται σε δύο ομάδες.:

1ον κριτήρια παιδαγωγικού περιεχομένου που έχουν σχέση με τα ερωτήματα:

- καλύπτεται η διδακτέα ύλη επαρκώς;
- ο χρόνος που απαιτείται είναι διαθέσιμος;
- ανταποκρίνεται το διδακτικό υλικό στο επίπεδο των μαθητών;

[80] Haigh 1990.ό π. σελ 225
[81] Singleton, 1991, ό.π σελ 226
[82] Κυνηγός Χ. ,Δημαράκη, Ε.(επιμέλεια), Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα.σελ. 234

- είναι οι δραστηριότητες ενδιαφέρουσες ή η παρουσίαση ελκυστική;
- είναι προσεγμένο από παιδαγωγική άποψη, δίχως ανεπιθύμητες παρενέργειες;
- προσφέρεται για συνεργατικές και συνθετικές δραστηριότητες;
- τι είδους δεξιότητες , στάσεις και αξίες καλλιεργεί;
- συνοδεύεται από επαρκείς οδηγίες και υλικό στήριξης του δασκάλου;

2ον κριτήρια τεχνολογικής φύσης και απαντούν στα ερωτήματα:

- έχουν αξιοποιηθεί οι αλληλεπιδραστικές δυνατότητες του υπολογιστή σε ικανοποιητικό βαθμό;
- αφήνει το λογισμικό περιθώρια για έλεγχο της μαθησιακής διαδικασίας από μέρους του μαθητή και του εκπαιδευτικού;
- είναι σε θέση το πρόγραμμα να χειριστεί σωστά τα εισερχόμενα που εισάγονται από τους μαθητές , ώστε να αποφεύγονται δυσάρεστα διαδικαστικά φαινόμενα, από τεχνικής άποψης;
- προσφέρονται ορισμένα χαρακτηριστικά του λογισμικού για εποικοδομητική μάθηση ή λειτουργούν απλώς για εντυπωσιασμό, γραφικά, ήχος, κίνηση κ.ά);
- η διόρθωση των λαθών γίνεται με παιδαγωγικά προσεγμένο τρόπο ή βασίζεται σε παραδοσιακές νοοτροπίες;
- η ενίσχυση των αντιδράσεων και της απόδοσης του μαθητή είναι αποτελεσματική και γίνεται με κατάλληλο τρόπο;
- είναι το πρόγραμμα φιλικό και εύκολο στη χρήση του;
- αξίζει τις απαιτούμενες δαπάνες;
- κάνει χρήση το λογισμικό των νέων τεχνολογικών εξελίξεων;(ζητήματα προγραμματισμού, ευρηματικότητα ανάλυσης , εργαλεία χρήσης)

Βεβαίως τα ερωτήματα που θα μπορούσαν να τεθούν, δεν εξαντλούνται στους παραπάνω πίνακες και η κατηγοριοποίησή τους γίνεται με πολλούς τρόπους.

Οι τεχνολογίες γενικά, δεν επιβάλλουν από μόνες τους έναν τρόπο διδασκαλίας ούτε ένα τρόπο μάθησης και συλλογισμού. Το καλύτερο και πιο καινοτομικό λογισμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί με παραδοσιακό τρόπο, οπότε ένα λογισμικό που

σχεδιάστηκε για οικοδόμηση και ανακάλυψη γνώσης να μετατραπεί σε μέσο μετάδοσης πληροφοριών.[83]

[83] ό.π. σελ.81.

Κεφάλαιο 4ο

Πυθαγόρας την περί
αυτήν (γεωμετρίαν)
φιλοσοφίαν εις σχήμα παιδείας ελευθέρου
μετέστησεν.

Πλάτων

Ο Πυθαγόρας μετέβαλε την
επιστήμη της γεωμετρίας σε
μορφή ελεύθερης παιδείας.
Πλάτων

Γεωμετρία

Η αριθμητική είναι η επιστήμη της ποσότητας ενώ η γεωμετρία είναι η επιστήμη του χώρου. Αντικείμενο της πρώτης είναι οι αριθμοί, ενώ της δεύτερης είναι η μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων.

Η γεωμετρία είναι αρκετές θεωρίες μαζί. Είναι ένα σύνολο από χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αντικειμένων. Είναι μία ανεξάρτητη πηγή ¨μοντέλων¨ της φυσικής ή τεχνικής πραγματικότητας [84].. Μπορεί επίσης να αποτελέσει μοντέλο για την ερμηνεία και επεξεργασία καταστάσεων από άλλες γνωστικές περιοχές.

Ο ελάχιστος σκοπός της γεωμετρίας είναι η παροχή πρακτικών γνώσεων όπως η αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων, και ο μέγιστος σκοπός είναι η παροχή μαθηματικής παιδείας [85] Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο, στις περισσότερες χώρες δίνει έμφαση στην εξερεύνηση, ονομασία περιγραφή, ομαδοποίηση, σχεδιασμό και κατά-μέτρηση συγκεκριμένων φυσικών αντικειμένων στο επίπεδο ή στο χώρο.

Οι γεωμετρικές προσεγγίσεις παίζοντας έναν ρόλο του «δούρειου ίππου» με Τροία την γνώση, συνδέονται με άλλα μαθηματικά αντικείμενα όπως η θεωρία αριθμών,

[84] Niss 1998 , σελ. 302.από Κολέζα & Ντζιαχρήστου ,Β: (1990), Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.,σελ.263
[85] Τζανάκης 1998, σελ 101-102 ο.π

η θεωρία ομάδων και η ανάλυση. Ακόμα συνδέονται με κάθετες ιδέες όπως αυτήν των ορίων και των συναρτήσεων.[86]

Η Γεωμετρία βασίζεται σε κάποιες αρχές που διέπουν τον τρόπο σκέψης και αναγνωρίζονται περισσότερο μέσα στα μαθηματικά αλλά ακόμα είναι εμφανείς και έξω από αυτά. Συγκεκριμένα μια σύντομη λίστα αυτών όπως δίνεται στο άρθρο του Goldenberg είναι:

1. Απεικονίζοντας: να κάνουμε εικόνα (ή ζωγραφιά) ό,τι είναι αρχικά ορατό και ακόμα ό,τι δεν είναι (είτε γιατί αποτελεί αφηρημένο αντικείμενο ή σχέση, είτε γιατί δεν έχει ακόμα δημιουργηθεί).
2. Να χρησιμοποιούμε ακριβή γλώσσα (φυσική ή φορμαλιστική) για την περιγραφή και ανάλυση. Να δίνουμε ορισμούς με σκοπό την ακρίβεια ή για να ονομάσουμε νέες κατηγορίες. Η ανάλυση της γλώσσας περιλαμβάνει το να εξετάζει και να κάνει κανείς ορισμούς.
3. Να θέτουμε και να κριτικάρουμε προβλήματα και λύσεις.
4. Να αναμιγνύουμε στην απόδειξη τον πειραματισμό. Να δούμε την ανεξαρτησία μέσα από πειράματα και να κτίζουμε τις θεωρίες.
5. Να αιτιολογούμε για τα διακριτά φαινόμενα. Αυτό είναι η σύνδεση μεταξύ της αλγεβρική γλώσσας και των μαθηματικών
6. Να αιτιολογούμε με βάση τη συνέχεια. Αυτό είναι η σύνδεση μαθηματικών και γλώσσας της ανάλυσης.
7. Να προσεγγίζουμε τις ιδέες με διάφορους τρόπους.
8. Να σκεφτόμαστε με συναρτησιακή γλώσσα. Να προσπαθούμε να δούμε τις συναρτήσεις.
9. Να αναζητούμε τις αναλλοίωτες. (Ο Klein έχει την ίδια άποψη)
10. Να αναζητήσουμε λογικές συνδέσεις, εξηγήσεις για το πως δουλεύουν τα πράγματα και απόδειξη.

Ο συγγραφέας του άρθρου διευκρινίζει πως σε μια εποπτική αναπαράσταση η αναλλοίωτη είναι αυτό που δεν βλέπει να αλλάζει το μάτι ακόμα και όταν το σχήμα μεταβάλλεται.

Η μελέτη της γεωμετρίας εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες

1. Διαδικασίες οπτικοποίησης

[86] **Goldenberg, P(1999), Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry, International Journal of Computers for Mathematical Learning 4: 191-224 Kluewer**

2. Διαδικασίες κατασκευής
3. Διαδικασίες συλλογισμού

Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος εμπεριέχει τρεις κατηγορίες νοητικών οντοτήτων (Fischbein 1993)

- Τον ορισμό
- Την εικόνα
- Την σχηματική έννοια

Το Γεωμετρικό σχήμα είναι η ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο, η αφηρημένη, ιδεατή και εξαϋλωμένη . Η νοητική εικόνα ενός γεωμετρικού σχήματος σχηματίζεται από το σύνολο όλων των εικόνων που έχουν συσχετισθεί στο νου ενός ατόμου σχετικά με το σχήμα.

Το θέμα της γεωμετρίας μπορεί να αντιμετωπισθεί στα πλαίσια της διδασκαλίας και μάθησης , κάτω από δύο οπτικές γωνίες: ερμηνεύοντας την γεωμετρία ως επιστήμη του χώρου και ως μία λογική δομή

Τα επίπεδα Van Hiele[87] --επίπεδα γεωμετρικής σκέψης— (1957)

1. **Αναγνώριση (Visualization)–Πρώτο επίπεδο (ή βασικό επίπεδο)**

Τα σχήματα αναγνωρίζονται από την συνολική τους εμφάνιση. Οι ιδιότητες και τα σχήματα δεν αναγνωρίζονται, ούτε οι σχέσεις μεταξύ των συστατικών του σχήματος και μεταξύ σχημάτων γίνονται αντιληπτές.

2. **Ανάλυση(Analysis) –Δεύτερο επίπεδο**

Στο επίπεδο αυτό τα συστατικά της εικόνας διακρίνονται και αναλύονται οι σχέσεις μεταξύ τους, οι ιδιότητες του σχήματος εδραιώνονται πειραματικά, με μετρήσεις, σχεδιάσεις, τοποθετήσεις σχημάτων πάνω σε άλλα ή διπλώσεις εικόνων. Τα σχήματα είναι φορείς των ιδιοτήτων τους και το παιδί αναγνωρίζει τα σχήματα από τις ιδιότητές του. Η συσχέτιση των σχημάτων και των ιδιοτήτων δεν είναι σαφής.

---

[87] Κολέζα & Ντζιαχρήστου ,Β: (1990), Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.,σελ.267

3. **Άτυπη αφαίρεση (Informal deduction)–Τρίτο επίπεδο ή Διάταξη ταξινόμηση**.

Ο μαθητής που έχει φτάσει σε αυτό το επίπεδο, έχει κατανοήσει τις σχέσεις τόσο μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος, όσο και μεταξύ των σχημάτων. Είναι ικανός να αντιληφθεί, ότι μία ιδιότητα είναι συνέπεια κάποιας άλλης και αρχίζει να καταλαβαίνει τον ρόλο του ορισμού. Μπορεί να αλληλοσυσχετίσει σχήματα και ιδιότητες, αλλά δεν μπορεί δεν έχει οργανωμένη σειρά απόψεων στη δικαιολόγηση των παρατηρήσεων.

4. **Τυπική αφαίρεση(Formal deduction) –Τέταρτο επίπεδο (Γενίκευση – Επαγωγή).**

Όταν το επίπεδο αυτό ολοκληρωθεί , ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει την σημασία της επαγωγής Μπορεί να διακρίνει ένα αξίωμα από ένα θεώρημα και να συμπεράνει, ότι μία πρόταση είναι λογικό επακόλουθο μίας άλλης πρότασης. Ο συλλογισμός του είναι συμπερασματικός, και παραγωγικός σε ένα αξιωματικό σύστημα.

5. **Αυστηρότητα (Rigour)– Πέμπτο επίπεδο**

Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές καταλαβαίνουν την σπουδαιότητα της ακρίβειας της διατύπωσης των Γεωμετρικών θεωριών και μπορούν να αναλύουν γενικότερα επαγωγικά συστήματα.

Αν και τα παραπάνω επίπεδα βοήθησαν στην διδασκαλία της Γεωμετρίας, ο Van Hiele σημειώνει ότι η διδασκαλία και η εκμάθηση άλλων αντικειμένων μπορούν να βελτιωθούν εξίσου αποτελεσματικά με την χρησιμοποίηση των επιπέδων .. Σαν παράδειγμα δίνει τα επίπεδα για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού (Van Hiele, 1986). Ο Van Hiele δηλώνει, ότι αν η διδασκαλία βασίζεται σε επίπεδα, είναι δυνατόν να αρχίσει η μάθηση της Γεωμετρίας από την ηλικία των 12 ετών, όπως γινόταν συνήθως.[88]

Οι υπολογιστές με τα σύγχρονα προγράμματα εκπαιδευτικού λογισμικού, εισάγουν μία νέα μέθοδο διδασκαλίας της Γεωμετρίας και στηρίζονται στην αλληλεπίδραση μαθητή με υπολογιστή, τη σύνδεση των φυσικών αντικειμένων με τα

[88] Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου Με Διεθνή Συμμετοχή Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση από Απόσταση Πανεπιστήμιο Κρήτης Σχολή Επιστημών Αγωγής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης 8-10 Ιουνίου 2001 Ρέθυμνο «.Η επίδραση δραστηριοτήτων με υπολογιστή βασισμένες στην θεωρία Van Hiele σε μαθητές που παρουσιάζουν δυσκολία στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών», Ζαράνης ,Ν. σελ. 657

Γεωμετρικά σχήματα, την αυτόνομη, ανακαλυπτική, ενεργό και συμμετοχική μάθηση.[89] Αυτά τα χαρακτηριστικά βοηθούν το μαθητή να κάνει συσχετισμούς και πειραματισμούς, δημιουργώντας ολοκληρωμένες γεωμετρικές έννοιες, μέσα από τις γενικεύσεις που έχει τη δυνατότητα να πραγματοποιεί με τον υπολογιστή.

Το παραπάνω μοντέλο κατασκευάσθηκε για να περιγράψει την γεωμετρική σκέψη των μαθητών της Πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.[90]

Επί πλέον ο Usiskin(1982) ανακάλυψε ότι τα επίπεδα van Hiele βοηθούν τον δάσκαλο να εκτιμήσει και να προβλέψει καλύτερα την απόδοση των μαθητών κατά την αξιολόγησή τους στη Γεωμετρία. Όσο υψηλότερο είναι το παραπάνω επίπεδο των μαθητών, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να επιτύχουν σε γραπτή αξιολόγησή τους στο συγκεκριμένο μάθημα.[91]

Χαρακτηριστικά των επιπέδων από τον Van Hiele (1959)[92]

1) Τα επίπεδα είναι συνεχόμενα, με την έννοια ότι ο μαθητής δεν μπορεί να ολοκληρώσει ένα επίπεδο σκέψης, χωρίς να έχει περάσει από τα προηγούμενα.
2) Οι έννοιες που υπάρχουν σε λανθάνουσα κατάσταση σε ένα επίπεδο, δηλώνονται σαφώς στο επόμενο επίπεδο.
3) Κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα, τα δικά του σύμβολα και το δικό του πλέγμα σχέσεων που τα συνδέει.
4) Δύο άτομα που σκέπτονται σε διαφορετικά επίπεδα δεν μπορούν να καταλάβουν ο ένας τον άλλον. Η δυσπροσαρμοστικότητα μεταξύ των επιπέδων εμφανίζεται, όταν ο δάσκαλος προσπαθεί να επικοινωνήσει με τους μαθητές του μιλώντας τους στο δικό τους επίπεδο.
5) Η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν είναι μία φυσική διαδικασία αλλά εξαρτάται περισσότερο από το πρόγραμμα διδασκαλίας μάθησης.

---

[89] Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα

[90] Burger, W.F., & Shaughnessy, J. M.," Characterizing the van Hiele levels of development in geometry", Journal for Research in Mathematics Education, 1986b,17,pp31-48

[91] Usiskin, Z. "Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry" (Final report Chicago, IL. University of Chicago , Department of Education 1982,(Eric document Reproduction Service No . ED220 228)

[92] Van Hiele P.M., "Structure and insight'', Academic Press, 1986

Χωρίς την κατάλληλη διδασκαλία και τις ειδικά προγραμματισμένες δραστηριότητες, υψηλότερα επίπεδα από αυτά που βρίσκονται οι μαθητές είναι δύσκολο να επιτευχθούν.

Στάδια διδασκαλίας της Γεωμετρίας

Ο ίδιος (Van Hiele) διακρίνει τρεις φάσεις κατά την διάρκεια της διδασκαλίας της γεωμετρίας

1. Πρώτη φάση Στόχος της διδασκαλίας πρέπει να είναι τα σχήματα να γίνουν φορείς των ιδιοτήτων τους.
2. Δεύτερη φάση Στόχος της διδασκαλίας πρέπει να είναι ¨η αφομοίωση των σχέσεων που συνδέουν τις ιδιότητες των σχημάτων.
3. Τρίτη φάση Στόχος της διδασκαλίας πρέπει να είναι να καταλάβουν οι μαθητές τι σημαίνει λογική διάταξη.

Ο Piaget αναφέρεται στη γεωμετρία κυρίως ως επιστήμη του χώρου, ενώ ο Van Hiele αντιμετωπίζει την γεωμετρία όχι μόνο ως επιστήμη του χώρου αλλά και ως εργαλείο ανάδειξης της δομής της μαθηματικής επιστήμης.

Επίπεδα δραστηριοτήτων

Οι Φιλίππου και Χρίστου (1995)[93] περιγράφουν τέσσερα επίπεδα δραστηριοτήτων:

1. Δραστηριότητα 1η (Αρχικό επίπεδο) Ποιο είναι το σχήμα (ταξινομήσεις)
2. Δραστηριότητα 2η (Αρχικό επίπεδο) Σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν τα αντικείμενα.
3. Δραστηριότητα 3η (Μεσαίο επίπεδο) Κορυφές, ακμές και έδρες
4. Δραστηριότητα 4η Προχωρημένο επίπεδο.

[93] **Χρίστου. Παραδόσεις-Σημειώσεις Μαθημάτων του μαθήματος Νέες Τεχνολογίες της Διδακτικής των Μαθηματικών(2004)**

Διδακτικοί στόχοι των μαθηματικών

Διατυπώνεται η άποψη ότι οποιοδήποτε σύστημα συνεπές, συμβολικό και λογικό είναι μέρος των μαθηματικών.[94]

Ένας από τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών:

- Για λογική σκέψη και διατύπωση εικασιών
- Για ερμηνεία συλλογισμών
- Για αντίληψη αφηρημένων εννοιών
- Για αναγνώριση νόμων ή σχέσεων

Οι γενικοί στόχοι που τέθηκαν με σαφήνεια της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης στο Ε.Π.Π.Σ.είναι:[95]

1) Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας.
2) Η κατανόηση της δομής των μαθηματικών.
3) Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.
4) Η ανάδειξη της δυνατότητας εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών.
5) Η εξοικείωση με την διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
6) Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης(ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών).
7) Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά.
8) Η αξιοποίηση των σύγχρονων τεχνολογιών.

Με την ανάδειξη των Μαθηματικών με τους άλλους επιστημονικούς και μη κλάδους, καταδεικνύεται η συνεισφορά, η χρησιμότητα και η αναγκαιότητα τους για τις άλλες επιστήμες και τέχνες. Αυτό αποτελεί και έναν από τους ειδικούς σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης.[96] Απαραίτητη επίσης είναι η σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Τονίζουμε ότι οι παραπάνω θέσεις δεν εκφράζουν το ρόλο των μαθηματικών ως επιστήμη, αλλά ως πολιτισμικού εργαλείου που συμβάλει στην εκπαίδευση. Όμως τα

---

[94] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004 σελ. 681

[95] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο .(1998)Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. Η εισήγηση του Π.Ι., 133.

[96] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο .(2002) τ.Α΄. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο σελ.311

αναλυτικά προγράμματα στην Ελλάδα κι ιδιαίτερα στο Λύκειο ενισχύουν την τάση προς το φορμαλισμό και παραμελούν τη κοινωνική διάσταση των μαθηματικών. Η ακαταλληλότητα της ύλης και ο αντιπαιδαγωγικός τρόπος που αυτή διδάσκεται, αποτυπώνεται στις διεθνείς έρευνες όπου η χώρα μας καταλαμβάνει σταθερά χαμηλές θέσεις και αποδεικνύει ότι η πλειοψηφία των μαθητών αδυνατεί να επιτύχει τους στόχους που θέτει το πρόγραμμα σπουδών.

Στάσεις μαθητών

Έχει εξακριβωθεί ιστορικά ότι πολλοί μαθητές έχουν μία αρνητική και αγχώδη στάση απέναντη στη Γεωμετρία . οι λόγοι που προκαλούν αυτήν την ανησυχία κατά τον Buerk, είναι ο μεγάλος βαθμός αποστήθισης, η ελλιπής σύνδεση του αντικειμένου με τον πραγματικό κόσμο και η άκαμπτη στάση των εκπαιδευτικών απέναντι σε εναλλακτικές προσεγγίσεις (Farrell, 1987).

Άλλοι θεωρούν ότι μερίδιο της ευθύνης στην μειωμένη απόδοση των μαθητών, έχουν τα αναλυτικά προγράμματα τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς την εφαρμογή τους (Clemments & Battista, 1992)[97]

Τροποποίηση του μοντέλου από τον Alan Hoffer

Στο άρθρο «Η Γεωμετρία είναι κάτι πολύ περισσότερο από μία απόδειξη» ο A.Hoffer (1981) υπογραμμίζει ότι: «πολλές φορές είναι σημαντικότερο να σχεδιάσει ο μαθητής ένα γεωμετρικό αντικείμενο, παρά να αποδείξει το θεώρημα. Στη μέση εκπαίδευση δίνεται έμφαση στις «τυπικές» αποδείξεις, με αποτέλεσμα να ελαχιστοποιείται η δυνατότητα για την ανάπτυξη άλλων γεωμετρικών δεξιοτήτων.» Ο Hoffer πρότεινε πέντε βασικές δεξιότητες – ικανότητες στη Γεωμετρία:

1) Οπτικές ικανότητες

Η Γεωμετρία εξετάζει σε πρώτο στάδιο τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται από την οπτική πλευρά.

2) Λεκτικές ικανότητες

[97] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004σελ.15-16

Η Γεωμετρία περισσότερο από κάθε άλλον τομέα των μαθηματικών , τονίζει την χρησιμοποίηση των λεκτικών εκφράσεων. Υπάρχουν πολλοί ορισμοί , αξιώματα , θεωρήματα, τα οποία καλούνται οι μαθητές να μάθουν και να χρησιμοποιούν.

3) Ικανότητες Σχεδίασης

Η Γεωμετρία βοηθάει να εκφράσουν τις ιδέες τους με σχήματα. Στη μετέπειτα ζωή τους μερικοί από αυτούς , θα χρειαστεί περισσότερο να σχεδιάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα παρά να αποδείξουν ένα θεώρημα.

4) Λογικές ικανότητες

Κατά την επίλυση ασκήσεων της Γεωμετρίας οι μαθητές προσπαθούν να αναλύσουν το πρόβλημα και να αναγνωρίσουν αν κάποια υπόθεση είναι «αληθής» ή «ψευδής». Η διαδικασία αυτή αυξάνει τη λογική και κριτική ικανότητα των παιδιών και επίσης προωθεί την ελεύθερη και δημιουργική σκέψη.

5) Ικανότητες Εφαρμογής

Οι τροποποιήσεις που πρότεινε ο A. Hoffer, συμπληρώνουν τα επίπεδα με τις πέντε ικανότητες που πρέπει να αναπτύσσουν οι μαθητές σε κάθε επίπεδο κατά την διάρκεια του μαθήματος[98]

Ο Polya[99] επισημαίνει επί πλέον την θετική επίδραση ενός σχήματος σχεδιασμένου με ακρίβεια στην επίλυση ασκήσεων:

I. Στους αρχάριους μαθητές, οι οποίοι πρέπει να κατασκευάζουν πολλά σχήματα όσο ακριβέστερα μπορούν, για να αποκτήσουν μία καλή πειραματική βάση

II. Στους περισσότερους προχωρημένους, στους οποίους τα σχήματα που έχουν σχεδιαστεί με ακρίβεια «μπορούν να υπενθυμίσουν γεωμετρικά θεωρήματα»

[98] Hoffer A.,” Geometry is More than Proof “,Mathematics Teacher, Jan 1981, p.11-18

[99] Polya G., (1994) Πώς να το λύσω, Ελληνική απόδοση , εκδόσεις Σπηλιώτη, Αθήνα. Σελ. 218

Η έννοια της απόδειξης

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον για την μαθηματική απόδειξη και την θέση της στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η απόδειξη έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην πορεία εξέλιξης των μαθηματικών. Από αιώνες η μαθηματική απόδειξη αποτελεί το βασικό μέσο επιβεβαίωσης και αποδοχής της εγκυρότητας των μαθηματικών προτάσεων. Η απόδειξη ενός θεωρήματος αποτελεί αιτία προβληματισμού για αρκετά μέλη της μαθηματικής κοινότητας. Η μαθηματική γνώση εξελίσσεται από την ανακάλυψη νέων θεωρημάτων και την αμφισβήτηση ή την επέκτασή τους.[100] Ουσιαστικά η μαθηματική γνώση ταυτίζεται με το σχήμα: αξίωμα, θεώρημα, και απόδειξη [101]

Η τυπική απόδειξη είναι μία ακολουθία βημάτων με αφετηρία ένα σύνολο ορισμών και αξιωμάτων. Κάθε βήμα της ακολουθίας πηγάζει με λογικό τρόπο από ένα θεώρημα, που έχει ήδη αποδειχθεί ή στηρίζεται σε προηγούμενα βήματα , με αφετηρία ένα σύνολο ορισμών και αξιωμάτων .[102]

Από τον καιρό του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη επιστέγασμα κάθε μαθηματικής δημιουργίας ήταν η αποδεικτική αιτιολόγηση. Κάθε θεώρημα του Ευκλείδη τελειώνει με την καθιερωμένη φράση «όπερ έδει δείξαι» ή τα αρχικά ό.έ.δ.

Δίκαια λοιπόν ***η μαθηματική απόδειξη κατέχει μία ξεχωριστή θέση στην συνείδηση των παιδαγωγών****, όπως το αναφέρει η Hoyles "**είναι στην καρδιά των μαθηματικών**"* [103]

Η Hanna υποστηρίζει ότι η απόδειξη πρέπει να αποτελεί αναπόσπαστο μέρος κάθε αναλυτικού προγράμματος, εφ΄όσον η όλη διαδικασία κατασκευής και τεκμηρίωσης της γνώσης συμβάλλει στην κατανόηση ή ακόμα ταυτίζεται με την γνώση στην εξελικτική πορεία αλλαγής και ανάπτυξης.[104]

Είναι γενικώς αποδεκτό σήμερα ότι η εκμάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας αλλά και η αντιμετώπιση πολλών μαθηματικών προβλημάτων μπορούν να υποβοηθηθούν αποτελεσματικά από την χρήση των Η/Υ, μέσα από την διαδικασία της

---

[100] Hanna G.(1991) Mathematical proof. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (54-61). Kluwer Academic publishers.
[101] Ό.π
[102] National Council of teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. USA
[103] Hoyles , C. &Jones , K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C.
[104] Hanna , G. (1995) Challenges to the importace of proof, For the learning of Mathematics, 15(3), 42-49

διερεύνησης περιπτώσεων και χρησιμοποίησης διαφορετικών μοντέλων, όπως αυτά μπορούν να πραγματοποιηθούν με κατάλληλο λογισμικό.

Η Αγγλική μαθηματική Εταιρεία προτείνει την χρησιμοποίηση κατάλληλου λογισμικού, ώστε να διατίθεται περισσότερος διδακτικός χρόνος για τη διδασκαλία βαθύτερων ιδιοτήτων τους όπως και την χρήση πακέτων «δυναμικής γεωμετρίας»για την μελέτη γεωμετρικών προβλημάτων.[105]

Είναι επίσης χαρακτηριστικό ότι η τελευταία δεκαετία ο όρος «πειραματικά μαθηματικά» (ο οποίος περιλαμβάνει την χρήση Η/Υ για την διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών, προγράμματα για την απόδειξη θεωρημάτων τους κ.ά., έχει γίνει μέρος της τρέχουσας μαθηματικής πραγματικότητας παράλληλα με την ύπαρξη επιστημονικών περιοδικών, ερευνητικών ιδρυμάτων (λ.χ. το περίφημο Geometry Center στην Minessota) κ.α., δημοσιεύσεις άρθρων που χρησιμοποιούν τις μεθόδους κτλ.[106]

Οι Davis , P.J.,- Hersh R. στο άρθρο τους ΑΠΟΔΕΙΞΗ υποστηρίζουν ότι η απόδειξη χρησιμεύει σε πολλούς σκοπούς ταυτόχρονα. Όταν εκτίθεται στην εξονυχιστική έρευνα και την κρίση ενός νέου ακροατηρίου, υπόκειται σε μία σταθερή διαδικασία κριτικής και επανεξέτασης. Με την σταθερή έκθεση διαλευκαίνονται τα λάθη –σφάλματα, αμφιβολίες και παρανοήσεις. Απόδειξη σημαίνει ευ-υποληψία. η απόδειξη είναι η σφραγίδα της αυθεντίας, γίνεται έναυσμα για νέα μαθηματικά, είναι μαθηματική δύναμη.

Αν και δεν πρέπει να ταυτίζεται η δραστηριότητα των μαθητών με την προσπάθεια των ερευνητών – μαθηματικών, η συμπερίληψη της μαθηματικής απόδειξης στην διδασκαλία των μαθηματικών δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να κατανοήσουν σταδιακά τον τρόπο σκέψης και εργασίας των ερευνητών – μαθηματικών και να έρθουν σε επαφή με την δημιουργία των μαθηματικών. Παρέχεται με τον τρόπο αυτόν στους μαθητές η ευκαιρία συνειδητοποίησης του γεγονότος ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα που βρίσκεται σε συνεχή εξέλιξη και προβάλλεται η σημασία της τεκμηρίωσης της ανθρώπινης σκέψης.

---

[105] The Office for Standarts in Education report HMI 705(2002), ICT in schools: Effects of government initiatives secondary mathematics and The Mathematical Association, ICT and Mathematics : a guide to learning and teaching mathematics 11-19

[106] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21° Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004 « Κάποιοι προβληματισμοί πάνω στην έννοια της απόδειξης» Ν., Μεταξά σελ.36

Η απόδειξη πρέπει να είναι η βάση της διδασκαλίας των μαθηματικών εφ΄ όσον τα κύρια στοιχεία της, που είναι οι υποθέσεις και οι λογικές τους συνέπειες, είναι τα συστατικά στοιχεία της δημιουργίας της μαθηματικής γνώσης.[107]

Οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης φανερώνουν ότι ο στόχος είναι να αποκτήσει ο μαθητής εμπειρίες ανάλογες με ένα μαθηματικό για να αναπτύξει ενδιαφέρον και κίνητρα διερεύνησης και οικοδόμηση της γνώσης. Η εμπλοκή του μαθητή στη διαδικασία διερεύνησης μίας ιδέας μεγιστοποιεί τις δυνατότητες κατανόησής της και ενισχύει την αυτοπεποίθηση ότι και ο ίδιος μπορεί να είναι δημιουργός μαθηματικών ιδεών και να αξιολογεί τις ιδέες και τις αποδείξεις που προτείνουν άλλοι.[108]

Όπως είναι γνωστό μέχρι σήμερα έχουν προταθεί μερικές εκατοντάδες αποδείξεις του Π.Θ., μερικές από τις οποίες από διάσημους μαθηματικούς. Μία κλιμάκωση μερικών από αυτές στη διδασκαλία των μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης, θα μπορούσε να αποτελέσει πρόκληση και κίνητρο για τους μαθητές. Για παράδειγμα σε πρώτο επίπεδο θα μπορούσαν να παρουσιασθούν αποδείξεις διαίρεσης εμβαδών που προτάθηκαν κατά την κλασική περίοδο, να ακολουθήσουν αναλυτικές αποδείξεις, μετά γενικεύσεις (λ.χ. εκείνη του Πάππου), και σε πιο προχωρημένο στάδιο να συζητηθεί η ιδέα του Polya για αναλογική προσέγγιση της απόδειξης.

Πριν από τον Πυθαγόρα δεν είχε γίνει σαφές ότι η απόδειξη πρέπει να προχωρά ξεκινώντας από υποθέσεις. Ο Πυθαγόρας , υπήρξε ο πρώτος που ήθελε τα αξιώματα να προτίθενται στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας, και την εξέλιξη να βασίζεται σε εφαρμογές του κλειστού απαγωγικού συλλογισμού πάνω στα αξιώματα. Ο Πυθαγόρας εισήγαγε την απόδειξη στα Μαθηματικά. Αυτό υπήρξε το μεγαλύτερό του επίτευγμα.[109]

Τελικά η **απόδειξη είναι τελετουργία και μία γιορτή για την δύναμη της καθαρής λογικής.** Αφαίρεση, τυποποίηση, αξιωματικοποίηση, παραγωγή –αυτά είναι τα συστατικά της απόδειξης, και δεν υπάρχει κανένας σίγουρος δρόμος….[110]

---

[107] Tall, D.(1995). Cognitive development, representations and proof, Justifying and Proving in School mathematics (27-38). London: Institute of Education.

[108] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002'
«Η σημασία της ιστορίας στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης» . σελ.157
Παναούρα, Α.& Φιλίππου , Γ.

[109] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002, Μαθηματικά – Ιστορική εξέλιξη ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευσης, Εθύμογλου, Ε. σελ.259-260

[110] Davis,P.J. – Hersh,R. Η Μαθηματική εμπειρία «Απόδειξη». εκδόσεις τροχαλία Εξωτερικά θέματα.

Ένα ρίγος θα διέτρεχε την σπονδυλική μας στήλη αν πιστεύαμε ότι με λίγες μαγικές γραμμές απόδειξης εξαναγκάσαμε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα στο σύμπαν να συμπεριφέρονται με έναν κανονικό πυθαγόρειο τρόπο.

«Μόνο ο Ευκλείδης κοίταξε την γυμνή ομορφιά» λέει σε έναν στοίχο της η ποιήτρια Edna Millay.

Κεφάλαιο 5ο

Παραδοσιακή Γεωμετρία – Δυναμική Γεωμετρία

Μέσα από το πρίσμα πολλών αιώνων οι μαθητές διδάσκονταν γεωμετρία με έναν παραδοσιακό τρόπο. Με την διδασκαλία αποδείξεων, θεωρημάτων, πορισμάτων και λημμάτων, με απώτερο σκοπό την επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων. Τα εργαλεία για ένα τέτοιο μάθημα ήταν τα καθιερωμένα : χαρτί μολύβι, κανόνας και διαβήτης. Όμως τα μηχανικά μειονεκτήματα των παραπάνω εργαλείων πολλές φορές περιορίζουν την σχεδίαση και συγκαλύπτουν ζωτικής σημασίας γεωμετρικές αρχές .

Τι είναι Δυναμική Γεωμετρία

Η **ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (Δ.Γ.)**, ***ξαναζωντανεύει*** την γεωμετρία των **Στοιχείων του Ευκλείδη** με την βοήθεια και χρήση του Η/Υ. Έτσι για μια ακόμη φορά αποδεικνύεται ότι όχι μόνον ***ο Ευκλείδης δεν πέθανε*** αλλά οι νέες γενεές θα τον δεχθούν ζωντανά μέσα από την δυναμικότητα που κρύβει το περιβάλλον των διαφόρων μαθηματικών προγραμμάτων, υπερβαίνοντας την στατικότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας .Τα εργαλεία που παρέχει η τεχνολογία στον τομέα της γεωμετρίας είναι τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας όπως Euclidraw, Sketchpad, Cabri, Euklid, Geolog, Thales.κ.ά.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

1. Δυναμικός χειρισμός α)χειρονακτικός β) χειρισμός δυναμικός ,συνεχής και όχι διακριτός.Σε ελάχιστο χρόνο οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να κατασκευάσουν άπειρα σχήματα με μεγάλη ακρίβεια.

2. Μαθηματική χρήση των ***κανόνων της γεωμετρίας***, οι οποίοι αποτελούν και τους κανόνες λειτουργίας του προγράμματος. Τα εργαλεία της Δ.Γ. είναι νοητικά εργαλεία λειτουργούν με κανόνες συμβάλλοντας στην μάθηση.

3. Στην Δ.Γ. αναφέρεται ο χρήστης *σε **ιδεατές κλάσεις*** και παραστάσεις των κλάσεων και όχι σε συγκεκριμένα αντικείμενα (instance) ,έτσι ώστε να λειτουργεί η αφαιρετική διαδικασία των σχημάτων.[111]

4. Η ευκλείδεια γεωμετρία απαιτεί **παραγωγιγοτάτη σκέψη** και υλοποιείται μέσα από την Δ.Γ.. Μέσα από τις μαθηματικές αιτιολογήσεις και αποδείξεις ενισχύεται ο παραγωγικός συλλογισμός.[112] Τοιουτοτρόπως η τεχνολογία του δυναμικού λογισμικού με την μαθηματική διάσταση **προάγει την έρευνα**.

5. Μέσα από την περιήγηση ενός προγράμματος Δ.Γ. των επαναλαμβανομένων δοκιμών και εικασιών «**ξεθάβονται**» γεωμετρικές ιδιότητες και άλλες δεν μεταβάλλονται .Οι μαθητές μετρούν συγκρίνουν και αλλάζουν σχήματα.[113]

6. Μπορούν να δημιουργηθούν καλά και ευκρινή **σχέδια μαθημάτων** και να χρησιμοποιηθούν ως καθοριστικά εργαλεία για τους μαθητές, συμπεριλαμβάνοντας μία πλήρη συνδυαστικοί δραστηριότητα στην σφαίρα της αιτιολογήσεως και τεκμηριώσεως.

7. **Η αισθητική** και εικονική αναπαράσταση μέσα από την ομορφιά την κομψότητα και την δύναμη αλλάζει τις πεποιθήσεις και αντιλήψεις των αντικειμένων σε κλάσεις.

8. Οι μαθητές αποκτούν κίνητρο και αυτοπεποίθηση, διότι τους επιτρέπει η Δ.Γ. να κάνουν δικές τους υποθέσεις και να τις εξετάζουν.εύκολα και γρήγορα. Συχνά ο έλεγχος αυτός οδηγεί σε εκπλήξεις. Μετά τον πειραματισμό και την εξερεύνηση οδηγείται ο μαθητευόμενος στην **γενίκευση** (άτυπη , υπονοούμενη =implicit ή γενικευμένη) με το χαρακτηριστικό ερώτημα **what if or what if not**. Ο de Villiers περιγράφει πώς μέσα από περιβάλλοντα Δ.Γ. μπορεί να καλλιεργηθεί η διερεύνηση με ερωτήσεις του τύπου «τι θα

---

[111] Πάμφιλος Πάρης Περιοδικό Ευκλείδης Β΄λζ΄τ.3/5 ,Το βήμα του Ευκλείδη Δυναμική Γεωμετρία

[112] Jones , K. (2000) Providing a foundation for deductive reasoning : Students; interpretations when using dynamic Geometry software and their evolving Mathematical explanations . Educational Studies in Mathematics,44,55-85.

[113] Arcavi, A., & Hadas, N. (2000) , Computer mediated learning : an example of an approach . International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5 , 25-45.

γίνει αν « ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν σε γενικεύσεις και ανακαλύψεις. [114]. Συνεπώς οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν όλες τις λειτουργίες της απόδειξης και να την χρησιμοποιήσουν για αιτιολόγηση, επεξήγηση, διερεύνηση, ανακάλυψη και συστηματοποίηση προτάσεων μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα. Και την **επαγωγική σκέψη** ώστε μετά την διερεύνηση πάνω στην γεωμετρία να βρεθεί μπροστά από ένα θεώρημα και ποιος ξέρει και σε νέα θεωρήματα ή ακόμα σε διαφορετικές λύσεις και προσεγγίσεις και κίνητρα για διερεύνηση και μαθηματική παραγωγική σκέψη.[115] Πράγματι καλλιεργεί στους μαθητές τόσο τον παραγωγικό, όσο και τον επαγωγικό τρόπο σκέψης.[116]

Έτσι η Δ.Γ. δίδει το έναυσμα για παραπάνω γνώση και λειτουργεί ως καταλύτης για να σκεφθεί ο χρήστης μαθηματικά και να ενισχυθούν οι απόψεις του για ότι υποστηρίζει και μελετά. με απώτερο στόχο την θεωρητική σκέψη.

9. Δεν υπάρχει διαχωρισμός **ηλικιών** .

10. Αναπτύσσεται **πνεύμα** συνεργασίας και ομαδικότητας δίνοντας ευκαιρίες για διάλογο και συζητήσεις.

11. **Αλλαγή πεποιθήσεων** και συμπεριφοράς διδασκάλου διότι και ο ίδιος είναι εξερευνητής.

12. Δίδεται ένας ευκλείδειος τρόπος για να παίξουν [117], να διερευνήσουν οι μαθητές και να μάθουν **πώς να μαθαίνουν** γεωμετρία .

13. Αναφέρεται σε όλα τα ανάλογα πολιτισμικά και σχολικά πλαίσια που έχουν οικονομικό υπόβαθρο.

14. Η Δ.Γ αναφέρεται σε ένα σύγχρονο μέσο διδασκαλίας που τείνει να καθιερωθεί παγκοσμίως.

15. Εκτός των σχεδιαστικών προγραμμάτων της Δ.Γ συμπεριλαμβάνονται πολλές φορές και **περιβάλλοντα προγραμματισμού**, προς χρήση πεπειραμένων χρηστών.

16. **Ζωντανεύουν** τα σχήματα στην Δ.Γ. Υπάρχει η δυνατότητα της κίνησης των σχημάτων με το σύρσιμο (drag) που επιτρέπει στους μαθητές να χειριστούν τα σχήματα

---

[114] Ράπτης ,Α. Βοσνιάδου, Σ. ,Γρηγοριάδου, Μ., Κυνηγός, Χ. Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση Τόμος Α΄ , Β΄ Ελληνική Ένωση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση Αθήνα , 29 Σεπτεμβρίου έως 3 Οκτωβρίου ,2004, «Δυναμική Γεωμετρία: Η περίπτωση της διδασκαλίας εμβαδού και απόδειξης μέσω μετασχηματισμού.» Σελ.225

[115] Κλαουδάτος , Ν. Συμπληρωματικές Σημειώσεις. Παραδόσεις (2004)

[116] Χρίστου. Παραδόσεις-Σημειώσεις Μαθημάτων του μαθήματος Νέες Τεχνολογίες της Διδακτικής των Μαθηματικών(2004) σελ. 179-188.

[117] Arcavi, A., & Hadas, N. (2000) , Computer mediated learning : an example of an approach . International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5 , 25-45.

και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των χειρισμών τους σχεδόν στιγμιαία, καθιστώντας την κατασκευή και την εξέταση των υποθέσεων μία ευχάριστη και δημιουργική δραστηριότητα.[118]

17. Συμβάλλει στην **αναζωπύρωση** του ενδιαφέροντος για την γεωμετρία και αποτελεί κέντρο αναφοράς αυτής. Αυτής που αποτελεί μία από τις κορυφαίες εκδηλώσεις του ελληνικού πνεύματος και πολιτισμού.

18. Παρουσιάζονται **νέες θέσεις εργασίας**, επιστημονική πρόοδος και νέες ανακαλύψεις ,οικονομική ευμάρεια στον χώρο της τεχνολογίας , δημιουργία ανταγωνιστικών λογισμικών στα προγραμματιστικά περιβάλλοντα, στην τεχνική υποστήριξη, στις μεταφράσεις των προγραμμάτων, στην μελέτη νέων δυναμικών λογισμικών άρα νέοι οικονομικοί πόροι και νέος συνδυασμός επιστημονικών ειδικοτήτων.

19. Τα θεωρήματα και τα αντικείμενα των μαθηματικών μετατρέπονται από απλές προτάσεις που πρέπει να αποδειχθούν σε αντικείμενα διερεύνησης Η διατύπωση υποθέσεων και ο έλεγχος αποτελούν βασικά στοιχεία της διερευνητικής μάθησης.

20. Τα λογισμικά Δ.Γ. παρέχουν ευκαιρίες για την κατασκευή προβλημάτων που οδηγούν τους μαθητές στην αναζήτηση εξηγήσεων.[119]

Τα περιβάλλοντα της δυναμικής γεωμετρίας είναι «**ανοικτά»**, διότι παρέχουν ένα σύνολο από υπολογιστικά εργαλεία, τα οποία επιτρέπουν στο χρήστη την ενεργοποίηση και τον χειρισμό τους, κατά τρόπο, που ταιριάζει με το παράδειγμα της εποικοδομιστικής μεθοδολογίας.

Η ουσιαστική αξιοποίησή τους για γνωστική επεξεργασία μαθηματικών γίνεται μέσα από την ενεργητική χρήση των εργαλείων αυτών από τους μαθητές και την παρέμβαση του δασκάλου μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες και ερωτήσεις.[120] Επί πλέον το ανοιχτό περιβάλλον έχει τις παρακάτω δυνατότητες:[121]

---

[118] Ράπτης ,Α. Βοσνιάδου, Σ. ,Γρηγοριάδου, Μ., Κυνηγός, Χ. Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση Τόμος Α΄ , Β΄ Ελληνική Ένωση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση Αθήνα , 29 Σεπτεμβρίου έως 3 Οκτωβρίου ,2004, «Δυναμική Γεωμετρία: Η περίπτωση της διδασκαλίας εμβαδού και απόδειξης μέσω μετασχηματισμού.» Σελ.224

[119] Hadas , N. Hershkowitz, R,. 7 Schwarz, b. (2000) , The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. Educational Studies in Mathematics, 44, 127-150

[120] D.O'Reilly et al, 1997, A.Chronaci 1995 kai R. Noss & C. Hoylew, 1996 από Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ.210

[121] Χρίστου. Παραδόσεις-Σημειώσεις Μαθημάτων του μαθήματος Νέες Τεχνολογίες της Διδακτικής των Μαθηματικών(2004)

- Διερευνητική μάθηση
- Απεριόριστο αριθμό εφαρμογών
- Επίλυση προβλημάτων με πειραματισμό
- Διευρύνει τη φαντασία
- Κίνητρο για μάθηση
- Εμπλουτίζει τις γνωστικές και μεταγνωστικές ικανότητες των μαθητών.
- Αποτελείται από «εικόνες» οι οποίες παίζουν το ρόλο «φυσικών μεταφορών» ή «οπτικών αναπαραστάσεων» μαθηματικών εννοιών με δυνατότητες διαβάθμισης της γνωστικής τους επεξεργασίας(λ.χ. διαισθητική, πρακτική και φορμαλιστική επεξεργασία εννοιών).
- Η χρήση της γεωμετρίας γίνεται μέσω οπτικών και λεκτικών κωδίκων οι οποίοι με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση βοηθούν στην οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών.
- Επικοινωνία των εμπειριών και των προσπαθειών των μαθητών στην προσέγγιση των γεωμετρικών εννοιών.

Πρόσφατες έρευνες τεκμηριώνουν ότι η Δ.Γ. καθιστά την απόδειξη αναγκαία και προσιτή, προωθώντας συνδέσμους μεταξύ εμπειρικής και παραγωγικής απόδειξης.[122]

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

1. Δεν έχει ακόμα γίνει μέτρηση εάν και τι μαθηματικά μαθαίνουν οι μαθητές, ποια εμπόδια αντιμετωπίζουν και πως μπορεί ο δάσκαλος να βοηθήσει.
2. Οι εμπειρίες στην Δ.Γ. μπορούν να δουλέψουν θετικά ή αρνητικά ανάλογα με τον διδακτικό χειρισμό και τις δραστηριότητες οι οποίες είναι εξαρτώμενες του δασκάλου.
3. Απαιτείται μικρότερος αριθμός μαθητών άρα υψηλότερο κόστος, στην διδακτική ώρα.
4. Απαιτεί πολύ χρόνο για όλους, μαθητές-δασκάλους διότι μόνο η αρχή της γνώσης του πειραματισμού είναι δεδομένη.
5. Απευθύνονται σε κοινωνίες με υψηλό πολιτισμικό και κοινωνικό πλαίσιο λόγω κόστους (αγορά προγραμμάτων, Η/Υ, τεχνολογικής υποστηρίξεως, μερικής εκπαίδευσης δασκάλων, επί πλέον αιθουσών, αναβαθμίσεων κ.τ.λ.

[122] Bruckheimer,M., & Arcavi,A. (2001), A herrick among mathematicians or dynamic geometry as an aid to proof. International journal of Computers for mathematical Learning,6, 113-126.

6. Απαιτεί αρκετό μαθηματικό υπόβαθρο αν οι στόχοι μας είναι μεγάλοι.
7. Εύκολα μπορεί κανείς να ξεφύγει από τους διδακτικούς στόχους.
8. Θεωρείται δεδομένη η ευχέρεια στους Η/Υ. βεβαίως σήμερα τα περισσότερα παιδιά την έχουν.
9. Τάξη πολλών ταχυτήτων.

The Geometer's Sketchpad

Το πακέτο The Geometer's Sketchpad είναι ένα εργαλείο δυναμικής Γεωμετρίας προϊόν συνεργασίας μεταξύ του Προγράμματος Οπτικής Γεωμετρίας στο Κολέγιο Swarthmore και του Εκδοτικού Οίκου Key Curriculum Press .[123]

The Geometer's Sketchpad και η Dynamic Geometry αποτελούν σήματα κατατεθέντα της Key Curriculum Press, Inc.(http://www.keypress.com)

Το παραπάνω εκπαιδευτικό λογισμικό εξελληνίστηκε και χρησιμοποιείται σε σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που παρέχουν στην Οδύσσεια –Ελληνικά Σχολεία της Κοινωνίας της Πληροφορίας.

Φορέας σχεδιασμού , επιστημονικής τεχνικής υποστήριξης και παρακολούθησης: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών(Ι.Τ.Υ.)

Το SKETCHPAD, επιλύει πολλά προβλήματα, είναι ένα από τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, με την βοήθεια, του οποίου η σχεδίαση γίνεται γρήγορα και με ακρίβεια, και ταυτόχρονα αποκαλύπτονται σχέσεις και σχήματα που κρύβονται με ευκολία και σαφήνεια. Καθώς μετασχηματίζονται τα τμήματα του σχήματος όλα τα συσχετιζόμενα μέρη προσαρμόζονται διαρκώς,[124] ώστε να είναι δυνατή η εξέταση ενός πολύ μεγάλου συνόλου παρόμοιων περιπτώσεων. Τα σχέδια απεικονίζουν συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές και δίνουν έμφαση στη λογική του χώρου, ενώ τα αρχεία εντολών[125] περιγράφουν τις κατασκευές λεκτικά και θεωρητικά. Τόσο λόγω της λειτουργικότητας του, όσο και της δυναμικότητάς του (που παρουσιάζει το SKETCHPAD), αποτελεί ένα εργαλείο που απευθύνεται σε ένα ευρύ ηλικιακό φάσμα,

[123] The Geometer's Sketchpad Οδηγός χρήσης (Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών),(2000)
The Geometer's Sketchpad Μαθαίνοντας Γεωμετρία με το Sketchpad Βιβλίο Μαθητή Δυναμική Γεωμετρία για τον 21^{ο} Αιώνα Παιδαγωγικό ινστιτούτο .
[124] Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004)*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Β΄ εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα σελ.263
[125] Τα αρχεία εντολών αποτελούν γενικές περιγραφές κατασκευών.

εξυπηρετώντας ταυτόχρονα τους διδακτικούς στόχους της Γεωμετρίας τόσο του Λυκείου όσο και του Γυμνασίου.

Με το εργαλείο αυτό μπορείτε , αλληλεπιδρώντας να παρουσιάσετε τη γεωμετρία ως δυναμικό μαυροπίνακα!

Το μέσον για την διδασκαλία δεν είναι το παν, κατά την άποψη του Goldenberg Στην περίπτωση της δυναμικής γεωμετρίας όμως, υπάρχει η αίσθηση της συνέχειας και της κίνησης αντικειμένων, ώστε να παρατηρείται τι μένει σταθερό και τι αλλάζει. Τέτοια επιχειρήματα μπορούν πολύ δύσκολα να δοθούν και να αναπαρασταθούν σε πίνακα ή σε χαρτί.[126].

Επίσης (στο ίδιο βιβλίο) ο Κώστας Γαβρίλης αναφέρεται πως «ο χειρισμός μεταβλητών με το χέρι δημιουργεί στο χρήστη την αίσθηση μιας πραγματικής ανεξαρτησίας της κίνησης και του προσφέρει βιωματικές εμπειρίες για την αντίστοιχη μαθηματική έννοια της μεταβλητής με άμεσο αντίκτυπο στην κατανόηση της έννοιας»

Ο Rudolf Staesser αναφέρει ότι υπολογιστές και λογισμικό (c+s=computer+softwore) προσφέρουν νέες ευέλικτες αναπαραστάσεις .[127]

Το παραπάνω λογισμικό δίνει την δυνατότητα της καταπληκτικής ποικιλίας σχημάτων:

- Απλά σχήματα
- Λειτουργικά μοντέλα του Πυθαγορείου Θεωρήματος
- Προοπτικά σχέδια
- Εφέ μωσαϊκού στυλ Escher
- Φράκταλ
- Κινούμενα ημιτονοειδή κύματα
- Γραφήματα
- Καμπύλες

Κάθε κατασκευή οδηγεί με φυσικό τρόπο σε γενικεύσεις καθώς παρατηρείται ποια χαρακτηριστικά της γεωμετρίας μεταβάλλονται και ποιά διατηρούνται αμετάβλητα. ***Η ανακάλυψη της γεωμετρίας δεν υπήρξε ποτέ τόσο συναρπαστική***! (δεν είναι πλέον μόνον για τους μυημένους)

---

[126] Arzello et all., 1998,στο Κυνηγός Χ., Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα.

[127] Σημειώσεις από το Summer school στους Δελφούς τον Ιούλιο του 2004 (της Διδακτικής των Μαθηματικών)

Η χρήση ενός τέτοιου δυναμικού εργαλείου βοηθά τους μαθητές να κάνουν υποθέσεις και να ελέγχουν την ορθότητά τους με μεγάλη ευελιξία. Ωστόσο ο *Mason (1993)* επικρίνει αυτή τη δυνατότητα λέγοντας ότι υπάρχει κίνδυνος να απομακρυνθεί ο μαθητής από την απόδειξη και να βασιστεί στην εποπτεία και μόνο. Η θέση αυτή θα είχε νόημα αν ο διδάσκων ενθαρρύνει τέτοιες τακτικές. Η χρήση του λογισμικού δεν έχει σκοπό την απόδειξη, αλλά την διερεύνηση η οποία οδηγεί στην ανακάλυψη [128]

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ εποπτικών μέσων και μαθηματικών.

ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Επιλέχθηκε το SKETCHPAD διότι εκτός των άλλων (των προαναφερθέντων) είναι ένα φιλικό ευχάριστο πρόγραμμα επειδή οι πρώτες ιδέες των παιδιών μπορούν να πάρουν μορφή και σχήμα πάνω στην οθόνη και αυτό τους παρέχει μια πρόσθετη ικανοποίηση.

Επιπλέον ο δεύτερος υποσκοπός σε αυτήν την φάση είναι ότι οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν ότι τα μαθηματικά θέματα που δεν φαίνεται να είναι γεωμετρικά , έχουν μέσα τους πολύ γεωμετρία και δεν υπάρχουν στεγανά ανάμεσα σε μαθηματικά αντικείμενα. Έτσι μπορεί να προκληθεί το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά ενός μεγάλου πλήθους μαθητών και να παρουσιάσουν ενδιαφέρον μαθητές που μπορεί να συνεχίσουν σε ανώτερα μαθηματικά ή όχι.

Επομένως το εκπαιδευτικό λογισμικό Sketchpad δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές

1. Να οπτικοποιήσουν τις ιδέες τους
2. Να αλλάξουν δυναμικά τιμές μεταβλητών και θέσεις σημείων.
3. Να πειραματιστούν και να μάθουν από τα λάθη τους εύκολα.

[128] G. Gaganides, J. Gaganides, K. Schindler; (2003).

4. Ενθαρρύνει την πρωτοβουλία των μαθητών.
5. Παρέχει τη δυνατότητα καταγραφής μακροεντολών οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε άλλες ανάλογες δραστηριότητες.

Στην παραδοσιακή τάξη το μάθημα αρχίζει με μια εξέταση των προηγούμενων εννοιών και συνεχίζεται με εισαγωγή των νέων κατευθείαν από το διδάσκοντα. Μια τέτοια είδους πρακτική μπορεί να οδηγεί τους μαθητές στην αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα είδους κανόνων και αλγορίθμων συνεπώς καλό είναι να τα αποστηθίσει κάποιος.(Skemp, 1976).

Ακόμα μια τέτοια αντίληψη προϋποθέτει την ύπαρξη μίας αυθεντίας (ο δάσκαλος, ή ο συγγραφέας του εκπαιδευτικού εγχειριδίου) η οποία θα αποκαλύψει στους μαθητές τους κανόνες. (Scoenfeld, 1985, Garofalo,1989 από τη διπλωματική της Βούλγαρη Νυμφωδώρας)

Οι καινούργιες παιδαγωγικές πρακτικές βλέπουν την τάξη ως ένα εργαστήριο επεξεργασίας της γνώσης όπου δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να πειραματίζεται και να ερευνά μαθηματικές έννοιες συνεργαζόμενος με τους συμμαθητές του.(Papert, Νοητικές θύελλες)

Την προσέγγιση αυτή ακολουθούμε λοιπόν αναβαθμίζοντας το ρόλο των μαθητών από σφουγγάρια απορρόφησης πληροφοριών σε ερευνητές και τον καθηγητή από το ρόλο της αυθεντίας στο ρόλο του συνεργάτη και μέντορα των μαθητών, (όπως έχει προαναφερθεί στις θεωρίες μάθησης) Δεν καταργεί ο υπολογιστής τα παραδοσιακά μαθηματικά! Δημιουργεί νέα κουλτούρα στα μαθηματικά.

Στόχος της διδασκαλίας είναι:[129]

Διαπιστώσεις:

1. η γνωστική ενότητα που σημαίνει ταύτιση του μαθηματικού ορισμού , της αντίληψης των μαθητών για το μαθηματικό ορισμό και την απεικόνιση της έννοιας στη σκέψη των μαθητών.
2. Η έλλειψη γνωστικής ενότητας δημιουργεί παρανοήσεις
3. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία δημιουργούνται πρωτοτυπικά φαινόμενα.

[129] **Χρίστου. Παραδόσεις -Σημειώσεις Μαθημάτων του μαθήματος Νέες Τεχνολογίες της Διδακτικής των Μαθηματικών(2004)**

Η Διδακτική μεθοδολογία

Η μεθοδολογία διδασκαλίας των μαθηματικών, θα πρέπει να προωθεί, να ενισχύει και να ενθαρρύνει:

- την ενεργοποίηση του μαθητή.
- τη δημιουργική δράση.
- την ανακαλυπτική μάθηση και τον πειραματισμό.
- τη συνεργατική μάθηση.
- την ανάπτυξη ικανοτήτων και δεξιοτήτων μεθοδολογικού χαρακτήρα.
- τη συζήτηση, τον προβληματισμό και την ανάπτυξη κριτικής σκέψης.
- την καλλιέργεια ελεύθερης σκέψης και έκφρασης.
- τη μάθηση πάνω στο πώς μαθαίνουμε.
- την αλλαγή του ρόλου του εκπαιδευτικού από απλό «αναμεταδότη γνώσεων» σε:
  - συνεργάτη και σύμβουλο του μαθητή για την ανακάλυψη της γνώσης.
  - οργανωτή της διδασκαλίας και της διαδικασίας της μάθησης.

Τα μαθήματα της γεωμετρίας θα πρέπει να έχουν σαφή εργαστηριακό προσανατολισμό. Στο εργαστήριο υπολογιστών και στο πλαίσιο ποικίλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές, χρησιμοποιώντας υπολογιστικά εργαλεία και τεχνικές, πειραματίζονται, δραστηριοποιούνται, δημιουργούν και ανακαλύπτουν τη γνώση. Έτσι εμπλέκονται σε ποικίλες δραστηριότητες οι οποίες:

- Διευκολύνουν την ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να δημιουργεί.
- Ενεργοποιούν διάφορα μαθησιακά μοντέλα, μέσα από ποικίλες διδακτικές στρατηγικές και με τη χρήση πολλαπλών μέσων.
- Υπογραμμίζουν το συμμετοχικό - συνεργατικό χαρακτήρα της μάθησης.
- Αξιοποιούν τις υπολογιστικές και δικτυακές τεχνολογίες ως εργαλείο μάθησης και σκέψης.
- Ευνοούν την ανάπτυξη δεξιοτήτων μοντελοποίησης και τεχνικών επίλυσης προβλημάτων.
- Παρέχουν ευχέρεια στη χρήση συμβολικών μέσων έκφρασης και διερεύνησης.

- Ενθαρρύνουν την αναλυτική και τη συνθετική σκέψη.
- Καλλιεργούν διαχρονικές δεξιότητες στη χρήση λογισμικού.
- Λειτουργούν μέσα σε ένα κλίμα αμοιβαίου σεβασμού.
- Δίνουν μια συνολική εικόνα της γεωμετρίας και αποκαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ των επιμέρους εφαρμογών, ασκήσεων με την βοήθεια των εργαλείων, κ.λ π.

Τα προβλήματα που αφορούν το Πυθαγόρειο θεώρημα οι εργασίες και οι δραστηριότητες θα πρέπει να δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην ανάλυση και στο σχεδιασμό της λύσης.Ο Δαμασκηνός θεωρεί το **Πυθαγόρειο θεώρημα και την ομοιότητα των τριγώνων ως τα σημαντικότερα εργαλεία της ευκλείδειας γεωμετρίας.** [130]

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα βασικότερα στοιχεία της κλασσικής εκπαίδευσης.Η ανάλυση και ο σχεδιασμός θα είναι η βάση της δουλειάς χωρίς την χρήση του Η/Υ στο σπίτι ή στην αίθουσα. Στην αίθουσα θα γίνεται επίσης, η εισαγωγή και η ανάπτυξη των διαφόρων εννοιών, παράλληλα με την πρακτική άσκηση στο εργαστήριο.

Η εισαγωγή και επεξεργασία των εννοιών πρέπει να γίνεται με αναφορές στις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών. Έχει ιδιαίτερη σημασία να εξασφαλίζεται η εμπειρική γνώση πριν την εισαγωγή των εννοιών και της σχετικής ορολογίας.

Κατάλληλα παραδείγματα ή προβλήματα αναδεικνύουν την αναγκαιότητα της εισαγωγής των εννοιών που πρόκειται να διδαχθούν και έτσι ο μαθητής εντάσσει σταδιακά τις καινούργιες έννοιες στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες του. Επίσης οι γενικεύσεις θα πρέπει να υποστηρίζονται από παραδείγματα τα οποία θα αντλούν ιδέες από τις προσωπικές εμπειρίες και το περιβάλλον των μαθητών.

Γενικά η ανάπτυξη της ύλης θα πρέπει να γίνεται:

- από το ειδικό στο γενικό.
- από το απλό στο σύνθετο.
- από το εύκολο στο δύσκολο.

[130] Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004 «Μερικά Στοιχεία Γεωμετρίας στη Ελλάδα και την Κύπρο του 19^{ου} αι.» σελ. 635

Τα προβλήματα - εργασίες και οι δραστηριότητες (project) που θα προτείνονται:

- θα είναι σαφώς ορισμένες και θα αντλούν ιδέες από πραγματικές καταστάσεις και από τις εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών.
- θα συνδέονται και θα «διαπερνούν» όλο το πρόγραμμα σπουδών (μαθηματικά, φυσική, ιστορία, γλώσσα, γεωγραφία, βιολογία, κ.κλπ.) ώστε να προωθούν την αντίληψη, ότι ο υπολογιστής δεν είναι αυτοσκοπός αλλά εργαλείο.
- θα είναι δομημένες ώστε να ολοκληρώνονται τμηματικά.
- θα δίνουν έμφαση στην ανάλυση και στο σχεδιασμό της λύσης.
- θα προκαλούν το ενδιαφέρον για περαιτέρω προβληματισμό, έρευνα και μελέτη.

Επίσης θα δίδονται, προσεκτικά επιλεγμένες ερωτήσεις (διαφόρων τύπων) που δεν θα αναφέρονται σε θεωρητικά θέματα αλλά θα σχετίζονται άμεσα με δημιουργικές εργασίες και δραστηριότητες.

Ο σκοπός αυτών των εργασιών είναι να διευκολύνουν την ικανότητα του μαθητή να δημιουργεί και να υπογραμμίσουν το συμμετοχικό και συνεργατικό χαρακτήρα της μάθησης. Αξιοποιούν τις υπολογιστικές και δικτυακές τεχνολογίες ως εργαλείο μάθησης και σκέψης, καλλιεργώντας συγχρόνως τις διαχρονικές δεξιότητες στη χρήση του λογισμικού. Ενθαρρύνουν την αναλυτική και συνθετική σκέψη. Η έμφαση στα πλαίσια αυτά δίνεται στις γνωστικές και κοινωνικές διαστάσεις της χρήσης της πληροφορικής την εκπαιδευτική διαδικασία. Η χρήση των Η/Υ μπορεί να θεωρηθεί μια δυνητικά αστείρευτη πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας με τον κόσμο της γνώσης.

Με την κατάλληλη παιδαγωγική τους χρήση είναι από μόνη της μια καινοτόμος παιδαγωγική μεθοδολογία που μετασχηματίζει τις παραδοσιακές δομές επικοινωνίας και ευνοεί την εφαρμογή πολλών άλλων παιδαγωγικών αρχών, που ήταν δύσκολο μέχρι τώρα να εφαρμοστούν. Μαθαίνουν τα παιδιά να λειτουργούν σε κλίμα αμοιβαίου σεβασμού και τέλος αποκαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ των επιμέρους εφαρμογών, εργαλείων, κ.λ π.

Λογισμικό ανοιχτού κώδικα

Η στενή έννοια του λογισμικού ανοιχτού κώδικα αναφέρεται σε ένα πρόγραμμα ή τμήμα προγράμματος (λ.χ. βιβλιοθήκη), ο πηγαίος κώδικας του οποίου διατίθεται ελεύθερα.[131] Με τον τρόπο αυτόν , αν κάποιος διαθέτει τα απαραίτητα εργαλεία μεταγλώττισης / διερμήνευσης και γνωρίζει την αντίστοιχη γλώσσα προγραμματισμού, μπορεί να τροποποιήσει το συγκεκριμένο πρόγραμμα, εξελίσσοντάς το με σκοπό την βελτίωσή του , ή την τροποποίηση με σκοπό την δημιουργία ενός νέου προγράμματος. Πρόκειται για τμήματα λογισμικού που είναι προϊόντα συλλογικής εργασίας μίας μεγάλης βάσης συμμετεχόντων που έχουν πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα μέσω διαδικτύου .

Η διάχυση της γνώσης και εξέλιξης του κώδικα ενός προϊόντος καταργεί τις ανισότητες, επιτρέποντας την άμεση τροποποίηση, διόρθωση και μετάφραση.[132] Κάθε προϊόν μπορεί να προσαρμοστεί στα τοπικά εθνικά δεδομένα , εμποδίζοντας την έμμεση επιρροή σε κοινωνικό, πολιτικό και πολιτισμικό επίπεδο. Από την άλλη μεριά δίνεται η δυνατότητα της ενεργούς συμμετοχής όλης της βάσης των εκπαιδευτικών στην διαδικασία ανάπτυξης –εξέλιξης-βελτίωσης ενός τμήματος εκπαιδευτικού λογισμικού.[133]

Το λογισμικό ανοικτού κώδικα μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο στην αναβάθμιση της διδακτικής εργασίας, και αποτελεί μία πρόκληση που μπορεί να αξιοποιηθεί εποικοδομητικά, αξιοποιώντας τις ΤΠΕ.[134]

Στην κατηγορία των Μαθηματικών έχουν καταγραφεί 33 πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού με ποικίλους προσανατολισμούς. Συμπεριλαμβάνονται εκπαιδευτικά περιβάλλοντα για την διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που επιτρέπουν μεταξύ άλλων την σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων , τον υπολογισμό των μεγεθών κ.α.

---

[131] Webbink M.(2003).”Κατανοώντας το λογισμικό ανοιχτού κώδικα’’(μετάφραση του Θάνου Κυρίτση) http://members.hellug.gr/djart/articlew/understandingOpenSource

[132] Szulik,m. J.(2002). Open schools to source ,Linux Magazine, http://edge-mag.com/2002-02/trench_01.html.

[133] Bull,G., Bell , R. , Garogalo, J., & Sigmon , T.(2002)The case for open source software. . leading and Learning with Technology, 30(2), 10-17.

[134] Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση Τόμος Α΄ Ελληνική Ένωση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση Αθήνα , 29 Σεπτεμβρίου έως 3 Οκτωβρίου ,2004“Εκπαιδευτικές εφαρμογές ελεύθερου λογισμικού και λογισμικού ανοιχτού κώδικα’’

APPLET

Τα applet είναι μικρά λογισμικά, που αποτελούν μαθηματικές εφαρμογές τόσο γεωμετρικές όσο και αριθμητικές.

Παρέχουν μια σειρά μαθημάτων που σκοπό έχουν, να βελτιώσουν και να βοηθήσουν την διδασκαλία και την παράδοση ενός μαθηματικού αντικειμένου στους μαθητές οποιασδήποτε ηλικίας.

Η διαφώτιση “illumination” γίνεται εφικτή μέσω του διαδικτύου internet και είναι αποτέλεσμα σκληρής δουλειάς του N.C.T.M.,της μαθηματικής κοινότητας της Αμερικής. Είναι μια ερευνητική και πρακτική διαδικασία που διεξήχθη κατά τα την διάρκεια των ετών 1989-2000.

Παρουσιάζονται «ζωντανές» εφαρμογές και ιδέες που αναφέρονται σε μαθηματικά πρότυπα του NCTM..

Συντελούν στην επαγγελματική εξέλιξη των δασκάλων των μαθηματικών. Τέλος συμβάλλουν στην επικοινωνία κατά την διάρκεια της διδασκαλίας.

Αν κάποιος σε ώριμη ηλικία χάσει το ενδιαφέρον του και εγκαταλείψει τα Μαθηματικά, η απώλεια μάλλον δεν θα είναι πολύ σημαντική ούτε για τα Μαθηματικά ούτε για τον ίδιο. Κανείς μαθηματικός δεν πρέπει να επιτρέψει στον εαυτό του να ξεχάσει ότι τα Μαθηματικά, περισσότερο απ’ οποιαδήποτε άλλη τέχνη ή επιστήμη, είναι παιγνίδι για νεαρή ηλικία.

G.H.HARDY

Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα παρακάτω άρθρα περιγράφουν μια σειρά δραστηριοτήτων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας(" Geometer's Sketchpad" ;ή Cabri ή " Euclidraw".) ή Logo. και αποτελούν **Μελέτες-Έρευνες** ή **Φύλλα Εργασίας**

- Η περίπτωση της διδασκαλίας του εμβαδού και απόδειξης μέσω μετασχηματισμού.Των Λ. Τσούκκα κ.α (Παν/μιο Κύπρου)

Πρόκειται για εισήγηση στο 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο της "Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης ΤΠΕ στην Εκπαίδευση" - ΕΤΠΕ (Αθήνα, 29 Σεπ. - 3 Οκτ. 2004). Πρακτικά σελ. 222

- Νέες προοπτικές στη διδασκαλία της γεωμετρίας.: Η περίπτωση του εμβαδού πολυγώνων.Των Μ. Πιττάλη Ν. Μουσουλίδης, Κ. Χρίστου Παν/μιο Κύπρου

Πρόκειται για εισήγηση στο 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο της "Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης ΤΠΕ στην Εκπαίδευση" - ΕΤΠΕ (Αθήνα, 29 Σεπ. - 3 Οκτ. 2004).Πρακτικά σελ. 213

- Δραστηριότητες και Φύλλα Εργασίας για Γεωμετρία (Sketchpad). Του Ζαράνη Κ.

Πρόκειται για εισήγηση που παρουσιάστηκε στο *"1ο Συνέδριο για την αξιοποίηση των ΤΠΕ στη Διδακτική πράξη. Εκπαιδευτικό λογισμικό και διαδίκτυο", Σύρος 11, 12, 13 Μαϊου 2001*

- Σχέσεις Εμβαδών δύο Τριγώνων. Των Νικολουδάκη Μ. & Ιωάννου Σ.

Πρόκειται για εισήγηση που παρουσιάστηκε στο 2ο Συνέδριο Σύρου, 9-10-11 Μαΐου 2003.

Κάνω Γεωμετρία σε πληροφοριακό περιβάλλον, σχεδιάζω και υπολογόζω , των Ηλιόπουλου Λ. & Δαπόντες.

Περιγραφή: Μελέτη γεωμετρικών εννοιών με τη βοήθεια του λογισμικού Sketchpad

http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=article&sid=78

Μαθηματικά και τέχνη : Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμού. Των Τουμάση Μ. & Αρβανίτη Τ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 19° Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002 σελ. 605

- Οι Νέες Τεχνολογίες εργαλείο για διερεύνηση μοντέλων συμπεριφοράς .Των Μαραγκού, Κ.. & Δ., Κοντογεωργίου. Ό. π. σελ.656.

- Έχει κάποια αξία το μαθηματικό λογισμικό για την κατασκευή μίας απόδειξης;. Του Τουμάζη Μ. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21° Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004 σελ. 251.

- Φύλλα εργασιών και δραστηριοτήτων για την διδασκαλία των συναρτήσεων στη Γ΄ Γυμνασίου με την βοήθεια υπολογιστή. Του Ζαράνη Ν., Ελληνική Μαθηματική

Εταιρεία 22° Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Λαμία 18-20 Νοεμβρίου 2005 σελ. 586.

- Τα Fractals ως πλαίσιο κατανόησης ακολουθίας και ορίων μέσω της έννοιας του εμβαδού σε περιβάλλον δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων. Της Σ. Πατσιομίτου ό.π. σελ. 310.

- Μετασχηματισμοί και επαναληπτικές διαδικασίες στις κατασκευές σπειρών στο Geometer's Sketchpad. Η δυναμική γεωμετρία ως εργαλείο – μέσο για αναζήτηση και έρευνα.Της Σ., Πατσιομίτου ό.π. σελ.798.

- Αξιοποίηση της Νέας Τεχνολογίας (Ν.Τ.) στη διδασκαλία των μαθηματικών. Της Α., Μητρογιαννοπούλου. Ό.π. σελ.793.

- Το πρόβλημα της γκαραζόπορτας Μία δραστηριότητα σε περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας. . Των Μ., Τουμάση & Τ., Αρβανίτη ό.π. σελ. 396:

- TI : Η μοντελοποίηση στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων για την μάθηση του θεωρήματος του Θαλή στο περιβάλλον Cabri Geometry II της Μ. Κορδάκη

- Δυναμικά συστήματα γεωμετρίας : Μαθησιακές δραστηριότητες των μ. Κορδάκη, Χ. Κυνηγού, Κ. Γαβρίλη, Αθ. Μπαλωμένου γ. Σόλο

- TI: Pythagorean triples Served for Dessert. Author Thomas G. Edwards

SO : Mathematics Teaching in the Middle school. V5 n7 p420-423 mar 2000.

- Using Dynamic Geometry Software to Teach Graph Theory: Author Anne Larson Quinn

So : Mathematics Teacher v 90 n 4 April 1997 p328-331

- Ti : Using Interactive – Geometry Software for right – Angle trigonometry.

Author Embse and Engebretsen

So : Mathematics Teacher v89 n 7 October 1996 p602-605

- Ti : Theorem in Motion : Using Dynamic Geometry to Gain Fresh Insights.

So : Mathematics Teacher v 89 n 4 April 1996 p330-332

- Ti : Don't Teach Technology, Teach with technology author Ben V. Flora

So : : Mathematics Teacher v 93 n 7 October 2000 p564-567

- Ti : Mathematics with Interactive geometry Software author Tingyau Zheng

So : Mathematics Teacher v95 n 7 October 2002 p492-497.

- Διερευνητική μάθηση με χρήση υπολογιστικών εργαλείων : μία εναλλακτική πρόταση διδασκαλίας. Του Μιχάλη Αργύρη. Κυνηγός, Χ.- Δημαράκη, (επιμέλεια) Ε. *Νοητικά εργαλεία & πληροφοριακά μέσα.* Εκδόσεις Καστανιώτη. Αθήνα σελ. 101-117.

- Μάθηση και διδασκαλία της γεωμετρίας σε υπολογιστικά περιβάλλοντα. Του Κ., Γαβρίλη . ό.π. *Νοητικά εργαλεία & πληροφοριακά μέσα* σελ.163-197.

- Ο ρόλος των ανοιχτών περιβαλλόντων μάθησης σε υπολογιστή στην έκφραση των ατομικών και ενδοατομικών διαφορών των μαθητών στη μάθηση γεωμετρικών εννοιών. της Μ., Κορδάκη Μπαρκάτσας,Α. Ν.(2004). *Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας*. Εκδόσεις Κωστόγιαννος. σελ. 227-244.

- Η ανάπτυξη της μάθησης κατά τη διαπραγμάτευση μαθηματικών θεμάτων με αλληλεπίδραση στην οθόνη του υπολογιστή. Του Κ., Γαβρίλη Μπαρκάτσας,Α. Ν.(2004). *Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας*. Εκδόσεις Κωστόγιαννος. σελ. 247-272.

- Εκπαιδευτικό λογισμικό μαθηματικών : νέες δυνατότητες διδασκαλίας και μάθησης. Μπαρκάτσας,Α. Ν.(2004). *Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας*. Εκδόσεις Κωστόγιαννος. σελ. 49-65.

- Οι νέες τεχνολογίες στη διδακτική των μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης. Των Δ., Κοντογιώργου 7 Κ., Μαραγκού

- Η συμβολή φυσικών και υπολογιστικών εργαλείων που αξιοποιούνται σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Των Σ., Κεϊσογλου & Π., Σπύρου

- Exploring the interconnectedness between student confidence and engagement in learning mathematics with technology : Development and validation of an instrument. A., Barkatsas.

- Πυθαγόρειο θεώρημα για την Β΄γυμνασίου σε εφαρμογή multimedia του Ι. Σταμέλου πρακτικά 15^{ου} πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας. Σελ. 286

- Η θεωρία του εποικοδομητισμού , η γλώσσα Logo και η συμβολή της στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. πρακτικά 15^{ου} πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας.

- Εκπαιδευτικό λογισμικό για την στήριξη της διδασκαλίας : η περίπτωση του project Πυθαγόρας των Δαγδιδέλης Β., και Μ., Σατρατζέμη.

Τα παρακάτω άρθρα με ανάλογο αντικείμενο βρέθηκαν στην ιστοσελίδα με διεύθυνση www.e-yliko.sch.gr

- «Βοηθήστε τους αρχαιολόγους » του Καμπράνη Νίκου
- «Η κληρονομιά.» του Καμπράνη Νίκου
- «Εμβαδόν παραλληλογράμμου» του Ιωάννου Στέλιου
- «Ο τροχός .» του Αναμίδη Γρ.
- «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου» του Βαλσαμά Κ.
- «Πολύγωνα» του Παναγιώτη Ζάφειρα
- «Σχήματα συμμετρικά ως προς την ευθεία» του Κατσή Δ.

- «Διασκεδάστε μαθαίνοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα» του Δ., Κατστανιώτη
- «Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου» του Πέτρου Βερύκιου
- «Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου» του Δομουχτσή Γ.
- «Είδη γωνιών τριγώνου» του Χατζηκυριάκου Ε.
- «Μήκος κύκλου» του Ι., Γλαβά
- «Ιδιότητες μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος» των Τιμ., Τσιρονίκου και Κ.,Μπουρανάζα
- «Επίκεντρες – εγγεγραμμένες γωνίες» των Μπουρανάζα Κ., και Αντ., Βέη
- «Μετρήσεις στον κύκλο» της Μ., Βαλαβάνη
- «Το τετράπλευρο των μέσων» της Β., Γουδέλη
- «Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος» του Δ., Κατσή
- «Πυθαγόρειο θεώρημα» των Κ., Ανδριανόπουλου και Γ., Ανδριανόπουλου
- «Το Πυθαγόρειο Θεώρημα» Τι: Πραγματικές διδασκαλίες μαθηματικών με Η/Υ. για το γυμνάσιο.

Τα παρακάτω άρθρα (από ξένη βιβλιογραφία)και βιβλία αναφέρονται σε εργασίες επί του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Record 2 of 68

AN: EJ678250

AU: Edwards,-Thomas-G

- TI: Pythagorean Triples Served for Dessert.

PY: 2000

SO: Mathematics Teaching in the Middle School. v5 n7 p420-23 Mar 2000

Record 3 of 68 -

AN: ED479573

AU: Hsu,-Ti; Wang,-Hsiu-Fei

- TI: Development of an Internet Collaborative Learning Behavior Scale--Preliminary Results.

PY: 2002

AV: Association for the Advancement of Computing in Education

Record 4 of 68

AN: EJ675351
AU: Pope,-Sue
- TI: Stressing and Ignoring--The Influence of Computer Software Environments.

PY: 2003
SO: Micromath. v19 n2 p4-6 Sum 2003

Record 5 of 68
AN: EJ673730
AU: DiDomenico,-Angelo-S; Tanner,-Randy-J
- TI: Pythagorean Triples from Harmonic Sequences.

PY: 2001
SO: Mathematics Teacher. v94 n3 p218-22 Mar 2001

Record 7 of 68 -
AN: EJ672127
AU: Shirley,-Lawrence-H
- TI: A Visit from Pythagoras--Using Costumes in the Classroom.

PY: 2000
SO: Mathematics Teacher. v93 n8 p652-55 Nov 2000
NT: Focus issue: History.

Record 8 of 68
AN: EJ670412
AU: Collingwood,-David-H; Stor,-Marilyn
- TI: Stretching Pythagoras Around the Corner: Linking and Modeling in Precalculus.

PY: 2001
SO: Mathematics Teacher. v94 n5 p369-79 May 2001

Record 10 of 68
AN: EJ666919
AU: Powell,-R-I
- TI: Triangular Nests!

PY: 2002
SO: Teaching Mathematics and Its Applications. v21 n3 p127-37 Sep 2002

Record 14 of 68 –
AN: EJ610501
AU: Thornton,-Steve

- TI: The Making of Mathematics.

PY: 2000

SO: Australian Mathematics Teacher. v56 n2 p14-16 Jun 2000

Record 16 of 68

AN: EJ598063

AU: Brinkworth,-Peter; Scott,-Paul

- TI: Chartres Remembers Pythagoras.

PY: 1999

Record 18 of 68 - The ERIC Database

AN: EJ590352

AU: Abramovich,-Sergei

- TI: Revisiting an Ancient Problem through Contemporary Discourse.

PY: 1999

SO: School Science and Mathematics. v99 n3 p148-55 Mar 1999

Record 19 of 68 –

AN: ED434029

- TI: Back to the Basics or Forward to the Basics--Which Philosophy Should We Embrace?

CS: National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.

Record 21 of 68

AN: EJ580514

AU: Horn,-Werner; Zakeri,-Gholam-Ali

- TI: The Pythagorean Theorem and Related Topics: A Resource for Geometry Teachers.

PY: 1998

SO: Primus. v8 n4 p365-83 Dec 1998

Record 23 of 68 -

AN: EJ566720

AU: Florence,-Hope

- TI: Pythagorean Triples Revisited.

PY: 1998

SO: Mathematics Teaching in the Middle School. v3 n7 p478-79 May 1998

AB: Presents a problem on Pythagorean triples and patterns to generate sets of triples. (ASK)

Record 24 of 68 -
AN: ED422180
AU: Baggett,-Patricia; Ehrenfeucht,-Andrzej
- TI: Breaking Away from the Math Book II: More Creative Projects for Grades K-8.

PY: 1998
AV: Technomic Publishing Co., Inc., 851 New Holland Avenue, Lancaster, PA 17604.

Record 25 of 68
AN: EJ560001
AU: Stephenson,-Paul
- TI: Concealing and Revealing the Difference of Two Squares.

PY: 1998
SO: Mathematics in School. v27 n1 p6-7 Jan 1998

Record 26 of 68
AN: EJ559984
AU: Chapin,-Suzanne-H
- TI: Mathematical Investigations--Powerful Learning Situations.

PY: 1998
SO: Mathematics Teaching in the Middle School. v3 n5 p332-38 Feb 1998

Record 27 of 68 -
AN: EJ556144
AU: Christensen,-Evelyn-B
- TI: Pythagorean Triples Served for Supper.

PY: 1997
SO: Mathematics Teaching in the Middle School. v3 n1 p60-62 Sep 1997

Record 28 of 68
AN: EJ552958
AU: Hoehn,-Larry
- TI: The Pythagorean Theorem: An Infinite Number of Proofs?

PY: 1997
SO: Mathematics Teacher. v90 n6 p438-41 Sep 1997

Record 30 of 68

AN: ED412113

AU: Cooney,-Thomas-J; Brown,-Stephen-I; Dossey,-John-A; Schrage,-Georg; Wittmann,-Erich-Ch

- TI: Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education.

PY: 1996

AV: Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912

Record 31 of 68 -

AN: ED410993

AU: Browne,-Joseph,-Ed

- TI: The AMATYC Review, Volume 18, Numbers 1-2, Fall 1996-Spring 1997.

CS: American Mathematical Association of Two-Year Colleges.

PY: 1997

SO: AMATYC Review. v18 n1-2 Fall-Spr 1996-1997

AV: AMATYC Office, State Technical Institute at Memphis, 5983 Macon Cove, Memphis, TN 38134 (2 issues free with $50 membership).

Record 32 of 68

AN: EJ545166

AU: Bonsangue,-Martin-Vern

- TI: A Geometrical Representation of Primitive Pythagorean Triples.

PY: 1997

SO: Mathematics Teacher. v90 n5 p350-54 May 1997

Record 34 of 68

AN: EJ541822

AU: Carter,-Claudia

- TI: Packing Them In.

PY: 1997

SO: Mathematics Teacher. v90 n3 p211-14,220-22 Mar 1997

Record 36 of 68 -

AN: EJ530002

AU: Bertrand,-Philip-V

- TI: Simply Proving Pythagoras's Theorem.

PY: 1996

SO: Teaching Mathematics and Its Applications. v15 n1 p10-11 Mar 1996

NT: Journal availability: Oxford Univ. Press, 2001 Evans Rd., Cary, NC 27513.

Record 37 of 68
AN: ED398072
AU: Jaramillo,-James; Brown,-Jonathan-Caius
- TI: Arriving at the Pythagorean Theorem.

PY: 1995

Record 38 of 68 -
AN: EJ523610
AU: Pollack,-Paul
- TI: The Thinking of Students: My Application of the Pythagorean Theorem.

PY: 1996
SO: Mathematics Teaching in the Middle School. v1 n10 p814-16 May 1996

Record 39 of 68
AN: EJ518929
AU: Lufkin,-Dan
- TI: The Incredible Three-by-Five Card!

PY: 1996
SO: Mathematics Teacher. v89 n2 p96-98 Feb 1996
AB: Describes how a 3-inch by 5-inch card can be used to develop properties of similar triangles and prove the Pythagorean theorem. (MKR)

Record 40 of 68
AN: EJ516958
AU: Ericksen,-Donna
- TI: Sharing Teaching Ideas: Bringing Pythagoras to Life.

PY: 1995
SO: Mathematics Teacher. v88 n9 p744-47 Dec 1995

Record 41 of 68 -
AN: ED387351
AU: Wiles,-Clyde-A-,-Ed; Schoon,-Kenneth-J-,-Ed
- TI: Mathematics Unit Plans. PACE '94.

CS: Indiana Univ. Northwest, Gary.; Indiana State Commission for Higher Education, Indianapolis.; Gary Community School Corp., IN.; Merrillville Community School Corp., IN.

PY: 1994
NT: For related documents, see SE 056 818-820.

Record 43 of 68
AN: EJ500240
AU: Woodward,-Ernest; Ferrell,-Dwayne
- TI: What Is the Unit?

PY: 1994
SO: School Science and Mathematics. v94 n5 p263-65 May 1994
Record 44 of 68
AN: EJ500132
AU: Rosenthal,-Jerome
- TI: The Converse of the Pythagorean Theorem.

PY: 1994
SO: Mathematics Teacher. v87 n9 p692-93 Dec 1994

Record 45 of 68
AN: EJ493823
AU: Plato-
- TI: The Classic Socratic Method.

PY: 1994
SO: Physics Teacher. v32 n3 p138-41 Mar 1994

Record 46 of 68
AN: EJ491816
AU: Sandefur,-James-T
- TI: Using Similarity to Find Length and Area.

Record 52 of 68
AN: EJ464701
AU: Naraine,-Bishnu
- TI: Activities.

PY: 1993
SO: Mathematics Teacher. v86 n2 p137-40,145-48 Feb 1993

Record 54 of 68
AN: EJ464607
AU: Dotseth,-Karen-A-,-Ed
- TI: Activities.

PY: 1993
SO: Mathematics Teacher. v86 n4 p302-08,313-14 Apr 1993

Record 55 of 68
AN: EJ463190
AU: Flores,-Alfinio
- TI: Pythagoras Meets Van Hiele.

PY: 1993
SO: School Science and Mathematics. v93 n3 p152-57 Mar 1993

Record 58 of 68
AN: EJ455006
AU: Panov,-Alexey
- TI: The Mystery of Figure No. 51. What Would Pythagoras Have Thought?

PY: 1992
SO: Quantum. v3 n1 p63-65 Sep-Oct 1992

Record 64 of 68
AN: EJ442080
AU: Nisbet,-Steven
- TI: Mathematics and Music.

PY: 1991
SO: Australian Mathematics Teacher. v47 n4 p4-8 Dec 1991

Record 66 of 68
AN: EJ441997
- TI: Sharing Teaching Ideas.

PY: 1992
SO: Mathematics Teacher. v85 n2 p112-17 Feb 1992

- TI: Mathematics didn't happen

SO: Mathematics Teacher. V94 n9 November 2001
- TI: Pythagorean party

SO: Mathematics Teacher.v85 n1 January 1992
- TI : My Application of the Pythagorean Theorem

Au: Paul.Pollack
Mathematics Teaching in the middle school.v1,n10, May 1996

Step by Step Solutions to problem in this Chapter, 21,“Pythagorean theorem and Applications. (problem397-421)

-

Στην ελληνική βιβλιογραφία στο περιοδικό Ευκλείδης Α΄ για το γυμνάσιο τα παρακάτω άρθρα αναφέρονται στο Πυθαγόρειο Θεώρημα :

- Ο Πυθαγόρας και το θεώρημα του ορθογωνίου Τριγώνου του Χ. Δάτσικα Νοέμβριος 1991 2 κε΄ τ.2/16
- Το Πυθαγόρειο Θεώρημα του Στ. Τσικοπούλου Δεκ. 1993 10 κζ΄. Τ.2/21-23
- Πυθαγόρειο , ένα σημαντικό θεώρημα του Τ., Πολυδώρου Δεκ. ΄94 Τ.κη΄ τευ 14
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα του Στ., Τσικόπουλου Δεκ. 2002 τ. 46 λστ΄τ2/2025
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα των Γ. Βασιλακοπούλου ,Αλ. & Δ Κωστογιάννη Κ. Παπούλια Σεπ. 2003 λζ΄Τ.1/28-29
- Εφαρμογές και ασκήσεις στο Πυθαγόρειο θεώρημα του Δ. Βαρόπουλου. Δεκέμβριος 2004 (54)λη΄τ.2/20-21
- Τετραγωνικές ρίζες και σπιράλ της Μαλ. Παπαδάκη Δεκ. 2004 λη΄τ.2/22-23
- Η « 371» Απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος του Γερ. Λεγάτου Ιούνιος 2005 (56) λη΄τ. 4/2
- «Απόδειξη» του Πυθαγορείου θεωρήματος του Γ. Μενδωνίδη Σεπτ. 2005 (57) λη΄τ. 4/2

Κεφάλαιο 6ο

Σκοπός– Στόχοι της έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση των αποτελεσμάτων και διαδικασιών μιας εναλλακτικής διδακτικής παρέμβασης με εποικοδομιστικά χαρακτηριστικά αξιοποιώντας το λογισμικό "The Geometer´s Sketchpad",και τις δυνατότητες των applets . για τη διδασκαλία της έννοιας του Πυθαγορείου θεωρήματος στην αντίστοιχη ύλη της Β΄ Γυμνασίου.

Χρησιμότητα της έρευνας

Η μέχρι τώρα έρευνα όπως διαπιστώνει ο συγγραφέας Wenglinski [135](1998), χαρακτηρίζεται από την **έλλειψη ισχυρών στοιχείων για τη βέβαιη αποτελεσματικότητα των Ν.Τ. στην εκπαίδευση**. Αρκετές έρευνες έχουν διεξαχθεί με μικρά δείγματα όπως ένα σχολείο ή μια μικρή περιοχή και όχι τόσο σε εθνικό επίπεδο. Σημειώνεται ακόμη ότι η πλειοψηφία των ερευνών, που έχουν βρει θετικά αποτελέσματα, είναι μικρής κλίμακας με σοβαρά μεθοδολογικά προβλήματα. Σε μελέτη των Jones-Paolucci, [136](1998) αναλύουν 156 άρθρα περιοδικών εκπαιδευτικής τεχνολογίας, για την αξιολόγηση των μαθησιακών επιτευγμάτων που προκύπτουν από την εισαγωγή των υπολογιστών στην τάξη. Από το σύνολο των άρθρων μόνο το 5% ήταν έρευνες που είχαν διεξαχθεί χρησιμοποιώντας τυπικές μεθόδους, όπως ομάδες ελέγχου με συγκρίσιμα μαθησιακά αποτελέσματα. Από τα ανωτέρω, διαπιστώνεται η ανάγκη περισσότερων δομημένων ερευνών (structured research) που να εξετάζουν την αποτελεσματικότητα της εκπαιδευτικής τεχνολογίας.[137]

Η μελέτη των αποτελεσμάτων της υιοθετούμενης από την παρούσα έρευνα διδακτικής προσέγγισης με τη βοήθεια εργαλείων του υπολογιστή, τα οποία ευνοούν την εφαρμογή ορισμένων χαρακτηριστικών της εποικοδομιστικής προσέγγισης της μάθησης (συμμετοχή στην οικοδόμηση εννοιών, επεξεργασία της εμπειρίας και των πεποιθήσεων που προϋπήρχαν, ενεργός διερεύνηση, έλεγχος και αναδόμηση των εννοιών, κ.ά.) θα συμβάλει στην **οικοδόμηση χρήσιμης εμπειρίας** στο εκπαιδευτικό πλαίσιο της χώρας μας, αφού από τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης θα διαπιστωθεί, μεταξύ άλλων, και

[135] **Wenglinski, H.,** 1998, Does it compute? The relationship between educational technology and student achievement in mathematics. ETS/1998, New Jersey.

[136] **Jones T., Paolucci R.,** 1998, The learning effectiveness of Educational Technology: A call for further research, Educational Technology Review, no.9/1998, p.10-14

αν αυτό το διδακτικό περιβάλλον, με την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών, παρέχει στους μαθητές αυξημένες ευκαιρίες μάθησης. Για το λόγο αυτό χρειάζονται ακόμα, περισσότερες πειραματικές εφαρμογές, που θα μελετήσουν και βελτιώσουν το «τεχνολογικό μαθησιακό περιβάλλον», λαμβάνοντας υπόψη τις αρχές της διδακτικής των μαθηματικών[138] (Καλαβάσης Φ, 1997).

Επίσης, οι περισσότερες μέχρι τώρα έρευνες έχουν γίνει σε ιδιωτικά σχολεία και περιοχές μέσης ή ανώτερης κοινωνικο-οικονομικής τάξης ενώ είναι λίγες οι έρευνες από δημόσια σχολεία. Ενδιαφέρον, λοιπόν, παρουσίαζε μια έρευνα σε δημόσιο σχολείο μιας από τις λιγότερο «προνομιούχες» περιοχές της Αθήνας, που μελετούσαν τις στάσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και την τεχνολογία και την πιθανότητα αυτά να επηρεάζουν την «μαθηματική παιδεία» των μαθητών.

Η εμπειρία αυτή είναι πολύ χρήσιμη για τους σχετικούς μελετητές και τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά και συγκεκριμένα, την έννοια του Πυθαγορείου θεωρήματος, η οποία παρουσιάζει δυσκολίες. Η παρατήρηση των συνθηκών και καταστάσεων, που δημιουργήθηκαν στην τάξη, μας βοήθησαν να συμπεράνουμε αν το είδος των δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν εμψύχωνε τους μαθητές γνωσιακά και μαθησιακά, τους οδηγούσε σε υποθετικούς συλλογισμούς, εικασίες για επαληθεύσεις, προβλέψεις, μετασχηματισμούς που χαρακτηρίζουν τις ερευνητικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Το γεγονός επίσης ότι οι εκπαιδευτικοί του σχολείου (ένας καθηγητής πληροφορικής και δύο μαθηματικοί) στην έρευνά μας συμμετείχαν στον σχεδιασμό και την εφαρμογή του διδακτικού μας προγράμματος είχε ιδιαίτερη σημασία, αφού η επιτυχία των προγραμμάτων σπουδών σε μεγάλο βαθμό εξαρτάται από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, που καλείται να τα υλοποιήσει με το να δημιουργήσει μια καινούργια γνώση, η οποία τον βοηθάει να φέρνει στην επιφάνεια λανθάνουσες δεξιότητες, να αντιμετωπίζει καινούργιες καταστάσεις, να γίνεται ο ίδιος ερευνητής των εκπαιδευτικών διαδικασιών στις οποίες εμπλέκεται με στόχο να τις βελτιώσει.

Ο τομέας της διδακτικής με την αξιοποίηση των δυνατοτήτων ορισμένων εργαλείων του υπολογιστή αναπτύσσεται ραγδαία, επομένως η διαλεύκανση κρίσιμων

---

[137] Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια υπολογιστή μέσα από μία διαθεματική δομητιστική προσέγγιση διατριβή της Ε., Λυκοσκούφη σελ. 13

[138] **Καλαβάσης Φ., Μειμάρης Μ.,**(επιμέλεια), 1997, Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ , Διδακτική Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες, εκδ. Gutemberg, Αθήνα 1997

ερωτημάτων που εγείρονται σχετικά με το διευκολυντικό και υποστηρικτικό τους ρόλο στη διδακτική πράξη και τη μαθησιακή διαδικασία χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

Η έρευνα που έγινε ήταν μια «μελέτη περίπτωσης» με στοιχεία συγκριτικής μελέτης, διδακτικού πειράματος και έρευνας δράσης .

Μεθοδολογία Έρευνας

Περί των μεθόδων έρευνας που χρησιμοποιήθηκαν

Ερευνητική προσέγγιση

Λόγω της φύσης των υπό διερεύνηση ερωτημάτων και στόχων της επιχειρούμενης έρευνας, που αναφέρονται στη μελέτη των αποτελεσμάτων και των διαδικασιών μιας παιδαγωγικά σχεδιασμένης διδακτικής παρέμβασης με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών στο πραγματικό και πολυδιάστατο εκπαιδευτικό περιβάλλον μιας σχολικής τάξης, το είδος της έρευνας, που υιοθετήθηκε, είναι **η μελέτη περίπτωσης** (case study) με στοιχεία συγκριτικής μελέτης (Bassey, 1999, Adelman et al, 1980), αφού η διδακτική μας παρέμβαση θα μελετηθεί σε σύγκριση με τη διδασκαλία σε ένα διδακτικό περιβάλλον χωρίς τη χρήση των νέων εργαλείων της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Επί πλέον εντάξαμε στοιχεία του **διδακτικού πειράματος** (teaching experiment) [139] καθώς και της **έρευνας δράσης** (action research)[140]

Μελέτη περίπτωσης («case study»)

Η μελέτη περίπτωσης στηρίζεται στην παρατήρηση των χαρακτηριστικών μιας μονάδας (στην περίπτωσή μας 2 τάξεων) με σκοπό να αναλύσει τα πολυσχιδή φαινόμενα, που συνθέτουν κάποιο κύκλο ζωής (πχ. διδασκαλία μιας έννοιας με χρήση λογισμικού ή χωρίς), προκειμένου να καταγραφεί ο τρόπος σκέψης και συμπεριφοράς τους, να κατανοηθούν σε βάθος τα φαινόμενα αυτά και να γίνουν αναγωγές σε συμπεράσματα **ποιοτικού χαρακτήρα** αλλά και σε πιθανές γενικεύσεις, που θα είναι χρήσιμες και για τη διδακτική του ευρύτερου πληθυσμού στον οποίο ανήκουν οι ομάδες που μελετούνται [141]

---

[139] **Cobb, P., Yackel, A., Wood, T.,** 1989, Constructivist approach to second grade Mathematics, in E. Von Glasersfeld (Eds), Constructivism in Mathematics Education, Dordrecht, Holland, Reidel

[140] **Carr & Kemmis** 1986, Elliot, 1992).

[141] **Cohen L., Manion L.,** 1997, Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας, μτφ. Μητσοπούλου Χρ. και Φιλοπούλου Μ., εκδ. Μεταίχμιο και εκδόσεις Έκφραση.

Επιλέξαμε τη **συμμετοχική παρατήρηση** της διαδικασίας, αφού ο ερευνητής συμμετείχε στο μάθημα. Τα πλεονεκτήματα που είχε αυτή η μεθοδολογική προσέγγιση ήταν η **ρεαλιστική καταγραφή μιας πραγματικότητας.** Παρείχε μια «φυσική βάση» για γενίκευση (Adelman, 1980). Επίσης δόθηκε προσοχή στη λεπτομέρεια και στην πολυπλοκότητα που μπορούσε να αναδειχτεί από την ίδια την περίπτωση που μελετούσαμε.

Για την εγκυρότητα της έρευνας μεθοδολογικά, γίνεται η επικύρωση των δεδομένων με τη χρήση της παρατήρησης της διδασκαλίας, με τη λήψη συνεντεύξεων από τους μαθητές και την καταγραφή ηχητικών αποσπασμάτων (διαλόγων των μαθητών κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος) και τη χρήση δύο γραπτών δοκιμασιών.

Διδακτικό πείραμα

Είναι μια τεχνική που σχεδιάστηκε για να ερευνήσει τη μαθηματική γνώση των παιδιών και τη μάθησή της[142] . Σ΄ ένα διδακτικό πείραμα ο ρόλος του ερευνητή αλλάζει και από παρατηρητής, που επιχειρεί να διαπιστώσει αντικειμενικά επιστημονικά γεγονότα, γίνεται **συμμέτοχος στην αλληλεπιδραστική συνομιλία τους**. Στόχος του ερευνητή είναι να ανακαλύψει τους τρόπους που βρίσκει ο μαθητής για να καλλιεργήσει τη μάθηση ή να αναλύσει τη μπερδεμένη γνώση της διδασκαλίας. Η δομή της συζήτησης μοιάζει με τον Σωκρατικό διάλογο. Οι μαθητές επαναληπτικά ρωτώνται με διερευνητικές ερωτήσεις ενώ ο ερευνητής προσπαθεί να εκμαιεύσει αιτιολογήσεις και σκέψεις γύρω από τα θέματα και τις δραστηριότητες που μελετούσαν, τι σκέφτονταν και πώς τα ερμήνευαν.

Ο ερευνητής δημιουργεί το χάρτη, όπως αναφέρει ο Hawkins, ή το μοντέλο της μαθηματικής γνώσης του κάθε παιδιού, όπως λέει ο Steffe. Η δραστηριότητα γίνεται σ΄ ένα πλαίσιο παιχνιδιού μέσα από συνθήκες που το παιδί αισθάνεται εμπιστοσύνη. Η διδασκαλία βιντεοσκοπείται ή μαγνητοφωνείται και αναδρομικά μελετάται στο τέλος κάθε μαθήματος. Ο στόχος του διδακτικού πειράματος είναι ο **ερευνητής να μάθει για τη μαθηματική γνώση των παιδιών και πώς την κατασκευάζουν,** προσφέροντας μια πιο αντικειμενική άποψη αυτών που συμβαίνουν.

Τα πλεονεκτήματα, που έχει αυτή η μεθοδολογική προσέγγιση, είναι ότι η επεξεργασία και ανάλυση των στοιχείων της έρευνας μπορεί να βοηθήσει

[142] Cobb & H. Bauersfeld (eds) The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures, pp.163-201.LEA.

υπογραμμίζοντας **σε ποια περίπτωση** (με χρήση υπολογιστικών εργαλείων ή χωρίς) **παρατηρήθηκε μεγαλύτερη πνευματική ανάπτυξη**.

Έρευνα δράσης

Η συνεργατική έρευνα δράσης είναι μια συστηματική διαδικασία μάθησης, η οποία διεξάγεται από ομάδες συμμετεχόντων, που εφαρμόζουν τις δικές τους πρακτικές δραστηριότητες και αξιολογούν τα αποτελέσματά τους σε επαναλαμβανόμενους κύκλους.

Βασικός σκοπός είναι **η βελτίωση και η αλλαγή μιας πρακτικής** [143]. Στην πράξη η όλη διαδικασία έχει ως αφετηρία έναν **αρχικό σχεδιασμό-προγραμματισμό ενεργειών,** που θα βοηθήσουν στην αναγνώριση του χώρου. Ακολουθούν **η δράση-«πράξη»,** η συστηματική **παρατήρηση της δράσης** και η **καταγραφή** κρίσεων, αντιδράσεων και εντυπώσεων, που θα αξιοποιηθούν σε επόμενο στάδιο, όταν θα ακολουθήσει η **κριτική σκέψη** πάνω στη συγκεκριμένη δράση και τα αποτελέσματά της. Πρόκειται ουσιαστικά για ένα κύκλο με τέσσερα στάδια, που επαναλαμβάνονται και εξελίσσονται χρονικά.

Σχεδιασμός – Δράση - Παρατήρηση- Κριτική Σκέψη

Τα τέσσερα στάδια δεν είναι ούτε ιεραρχημένα ούτε σαφώς διαχωρισμένα, αφού στη διαδικασία της ανθρώπινης σκέψης και δράσης δεν είναι εύκολο να γίνουν τέτοιοι διαχωρισμοί Είναι μια προσέγγιση, που **επιχειρεί να βελτιώσει την εκπαίδευση αλλάζοντάς την και αποκτώντας γνώσεις από τις συνέπειες της αλλαγής.**

Η εγκυρότητα της έρευνας βασίζεται σε αυτογνωσία υψηλής ποιότητας εκ μέρους των συνερευνητών[144] και αυξάνεται σημαντικά με τη συστηματική ανάδραση των συνεργατών και από την επαναληπτική φύση της όλης διαδικασίας. Οι μέθοδοι δεν καθορίζονται με αυστηρότητα αλλά τα δεδομένα προέρχονται από πολλές πηγές (εκπαιδευτικός- μαθητές-ερευνητής) και συσχετίζονται μεταξύ τους (**τριγωνισμός**).

Το μεγάλο ενδιαφέρον, που έχει η έρευνα δράσης σήμερα για τους ερευνητές, πηγάζει από:

---

[143] **Κεκές, Ι.,** 1996, Ο μαθητής ως ερευνητής στο χώρο του σχολείου. Μια συστημική προσέγγιση με συνεργατική Ενεργό έρευνα , (Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1996)

[144] **Κοσμίδου Χ., Μαρμαρινός Ι.,** 1994, Ο δάσκαλος και η ενεργός έρευνα, Σύγχρονη εκπαίδευση, τχ79, σελ 51-59

- ✓ Την πρόθεση βοήθειας στους εκπαιδευτικούς της τάξης.
- ✓ Την ανάπτυξη ερμηνευτικών μεθοδολογιών.
- ✓ Την ανάπτυξη συμμετοχικού και συνεργατικού αναλυτικού προγράμματος και αξιολόγησης της εκπαίδευσης.
- ✓ Το ενδιαφέρον για συμμετοχική έρευνα σε προβλήματα του άμεσου και γενικότερου ενδιαφέροντος[145].

Επιπρόσθετα, σήμερα η έρευνα δράσης χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλές χώρες για τη διερεύνηση ζητημάτων που σχετίζονται με την ανάπτυξη και βελτίωση των αναλυτικών προγραμμάτων, το σχεδιασμό και την εφαρμογή της εκπαιδευτικής πολιτικής.

Με βάση τα χαρακτηριστικά των ανωτέρω μεθοδολογικών προσεγγίσεων, καταλήξαμε ότι η έρευνά μας συνδύαζε στοιχεία τόσο της μελέτης περίπτωσης όσο και του διδακτικού πειράματος και της έρευνας δράσης.

Έρευνα Ποιοτική ή Ποσοτική;

Οι στόχοι της παρούσας έρευνας επιδιώκουν συλλογή και επεξεργασία δεδομένων σε βάθος, προϋποθέτουν καταγραφή και ανάλυση των αναπαραστάσεων και της σκέψης δύο τμημάτων μαθητών, της πραγματικής λεκτικής συμπεριφοράς τους (τρόποι και εξέλιξη της σκέψης, συχνότητα και ποιότητα των διαλογικών αλληλεπιδράσεων στο πλαίσιο της ομάδας κ.ά), των αντιλήψεων και των υποκειμενικών τους προδιαθέσεων (στάσεις, αυτοαντίληψη κ.ά). Επομένως στην έρευνα αυτή, υιοθετήσαμε ως επί το πλείστον τη μεθοδολογία της **ποιοτικής έρευνας,** χωρίς να αποκλεισθεί και η **ποσοτική επεξεργασία** ορισμένων δεδομένων. Σύμφωνα με τους Strauss και Corbin[146] η ποιοτική ανάλυση είναι η πλέον κατάλληλη για τη διερεύνηση φαινομένων που σχετίζονται με μικρές κοινωνίες, με την κατανόηση της ζωής των ανθρώπων, των αναπαραστάσεων και των τρόπων σκέψης τους, των αφηγημάτων τους για την πραγματικότητα που βιώνουν.

---

[145] **Kemmis S.,** 1988, Action researchin retrospect and prospect, in Kemmis, S & McTaggart R, (eds) The action research reader (3rd edition) Geelong (Australia): Deakin University

[146] **Strauss, A, Corbin, J,** 1990, Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedure and Techniques, Sage.

Ο υπό μελέτη πληθυσμός -Στρατηγική συγκρότησης του δείγματος

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν οι μαθητές Β΄ τάξης Γυμνασίου Τα κριτήρια για την επιλογή του ανωτέρω πληθυσμού ήταν:

Η υπό μελέτη γνωστική περιοχή η οποία διδάσκεται στη Β΄ τάξη του Γυμνασίου ,αποτελεί βασική ενότητα της κλασικής παιδείας και θα επαναληφθεί και στην Β΄ Λυκείου.

- Από κοινωνικο- πολιτιστική άποψη, το σχολείο ανήκει σε περιοχή μέτρια
- Διαπιστώθηκε ενδιαφέρον από μέρους των διδασκόντων και της διευθύνσεως καθώς και προοπτικές εποικοδομιστικής συνεργασίας αυτών με την ερευνήτρια.
- Το συγκεκριμένο σχολείο διέθετε εργαστήριο υπολογιστών, που πληρούσε τις τεχνικές προϋποθέσεις για να λειτουργήσει το εκπαιδευτικό λογισμικό για την έρευνα χωρίς προβλήματα.

Στην έρευνά μας χρησιμοποιήσαμε το σύνολο των μαθητών ενός τμήματος που χωριζόταν στα δύο κατά την διάρκεια του μαθήματος της πληροφορικής.. Η εφαρμογή έγινε σε αυτά τα δύο υποτμήματα του τμήματος της ίδιας τάξης, το ένα από τα οποία αποτελούσε την «πειραματική ομάδα » και το άλλο την κατά κάποιο τρόπο «ομάδα ελέγχου.» της συγκριτικής μελέτης περίπτωσης. Η πειραματική ομάδα λειτούργησε στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών στην αίθουσα πληροφορικής χρησιμοποιώντας Ν.Τ. ενώ η ομάδα ελέγχου εργάστηκε στην τάξη, κάνοντας τις ίδιες δραστηριότητες.

Οι μαθητές εργάζονταν σε ομάδες. Η επιλογή των μαθητών στις ομάδες έγινε από το δάσκαλο της τάξης ως εξής:

- Οι μαθητές συγκροτήθηκαν σε **ανομοιογενείς ολιγομελείς** ομάδες (2-3 άτομα)
- Όλες οι ομάδες είχαν **κοινό θέμα εργασίας.**

Βιβλιογραφική επισκόπηση των υπό μελέτη εννοιών 147

Η έρευνα στη Μαθηματική εκπαίδευση, έχει δείξει ότι η επιτυχία στη λύση μαθηματικών προβλημάτων συχνά εξαρτάται μεταξύ άλλων και από:

- **την κατανόηση** του σχετικού εννοιολογικού περιεχομένου που εκδηλώνεται με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων**,**

[147] Δεν χρησιμοποιούμε τον όρο μεταβλητή ο οποίος χρησιμοποιείται με αυστηρότητα στις ποσοτικές κυρίως έρευνες. Η έρευνά μας δεν είναι συσχετιστική αλλά περισσότερο εθνογραφική αφού κύρια

- **τα συναισθήματα** που νιώθει κάποιος που ασχολείται με ένα μαθηματικό θέμα (π.χ. άγχος, απόλαυση ή απογοήτευση) ,
- **τις πεποιθήσεις** που έχει **για την απόδοσή του/της στα Μαθηματικά και τη φύση των Μαθηματικών** [148]

Επιπλέον, η Fenemma[149] έκρινε από μια σειρά εμπειρικών ερευνών ότι **εσωτερικοί παράγοντες** (όπως η αυτοπεποίθηση, η εμπιστοσύνη για τις μαθηματικές γνώσεις, η αντιλαμβανόμενη χρησιμότητά τους, οι αποδιδόμενες αιτίες επιτυχίας ή αποτυχίας στα μαθηματικά καθώς και ο βαθμός συμφωνίας προτύπων φυλογενετικών ρόλων και επίδοσης του ατόμου στα μαθηματικά. (Wolleat et al., 1980, Armstrong, 1980)) καθώς και **εξωτερικοί παράγοντες** (όπως δομή και οργάνωση εκπαιδευτικού συστήματος, αλληλεπιδράσεις μαθητή-συμμαθητή, μαθητή-γονιού, μαθητή – δασκάλου) επηρεάζουν τη συμμετοχή του μαθητή σε διαδικασίες αυτόνομης μάθησης.[150]

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω στην έρευνά μας επιδιώξαμε να παρατηρήσουμε και να κάνουμε διαπιστώσεις σχετικά με :

- Την **εξέλιξη των αναπαραστάσεων** των μαθητών σχετικά με τις έννοιες που επρόκειτο να διδαχτούν, γιατί έχει παρατηρηθεί ότι η χρήση του υπολογιστή συμβάλλει στην εννοιολογική αλλαγή, την αύξηση της κατανόησης των μαθητών και την εσωτερίκευση των νοητικών τους λειτουργιών [151]
- Την **επίδοση** των μαθητών στα Μαθηματικά, αφού είναι ένας δείκτης επιτυχίας των στόχων του εκπαιδευτικού και της κατανόησης των μαθητών, μέσα από τον οποίο πηγάζουν πολύτιμα συμπεράσματα για τη μαθηματική πορεία των μαθητών.

εργαλεία είναι η ανάλυση διαλόγων, συνεντεύξεις κ.λπ με υιοθέτηση σχετικά ανοιχτής προσέγγισης στο πρόβλημα, η οποία είναι ευαίσθητη στο απρόβλεπτο.

[148] **Garofalo, J., Lester, J.,** 1985, Metacognition, cognitive Monitoring, and mathematical Performance, Journal for research in mathematics Education 16, pp163-176

McLeod, D, 1992, Research on affect in mathematics education: a reconceptualisation, In D.A. Crouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York: MacMillan, pp575-596.

Schoenfeld, A., 1992, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York: MacMillan, pp334-370.

[149] **Fennema, E.**, 1985, Girls and Mathematics. The crucial middle school, Mathematics in the Middle School (Year book) Reston: NCTB

Friedman, L, 1989, A meta-analysis of resent studies on sex differences in mathematical tasks, Review of Educational Research, 59, p 185-213

[150] Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια υπολογιστή μέσα από μία διαθεματική δομητιστική προσέγγιση διατριβή της Ε., Λυκοσκούφη σελ. 77

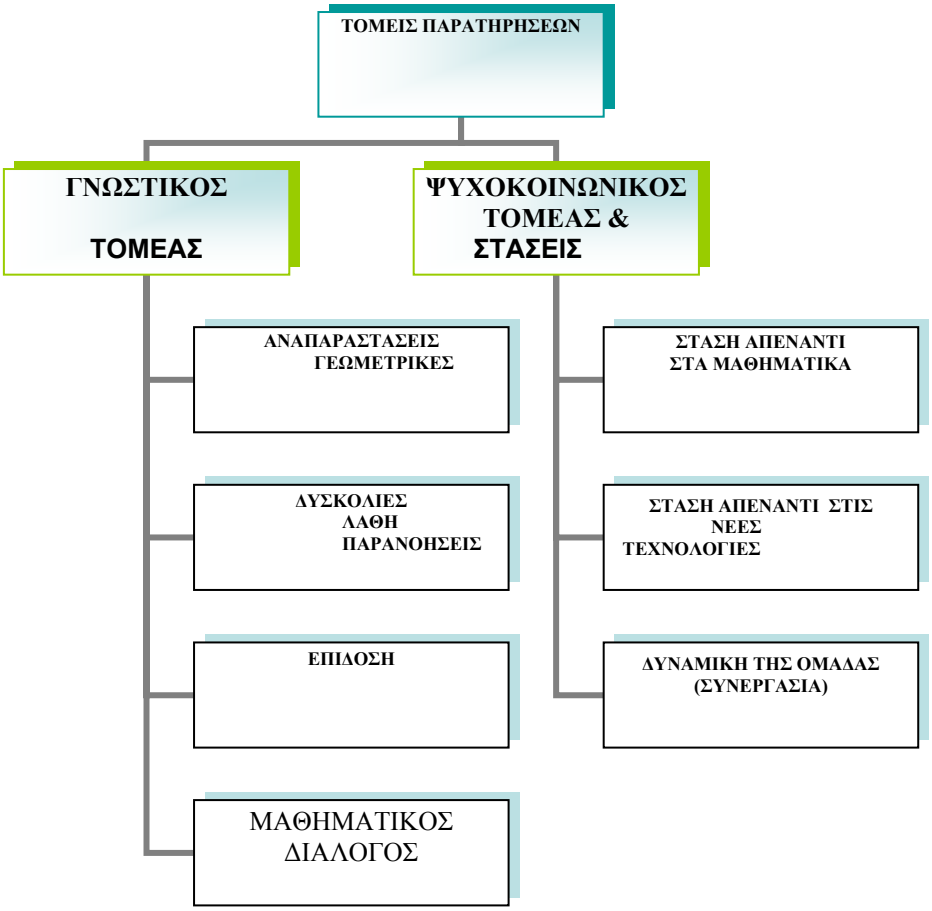
[151] **Βιδάκη Ε.,** 2002, Διαθεματική Προσέγγιση στη Διδασκαλία με τη Βοήθεια των Νέων Τεχνολογιών, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα ΠΤΔΕ

Vosniadou S., 2003, Using collaborative, Computer-Supported, Model Building to promote Conceptual Change in Science, Powerful Learning Environments: Travelling Basic Components and Dimensions, Chapter 11, Elsevier Science Ltd.

- **Το κλίμα της τάξης,** γιατί ο σχεδιασμός μιας εποικοδομιστικής διδακτικής παρέμβασης προβλέπει συνθήκες μάθησης σε ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο, αφού σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα εργασίας (Huber, 1997, Matsagouras, 1997, Dillenbourg, Traum, Okada, T., Simon, 1997, Good, T., Mulryan, C., McCaslin, 1996, Τριλιανός, 2002)[152], η εργασία των μαθητών είναι περισσότερο αποτελεσματική και ικανοποιητική, όταν γίνεται σε συνεργατικό πλαίσιο και η σχεσιοδυναμική της ομάδας είναι θετική και αρμονική [153]
- **Τις στάσεις** των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, γιατί οι διαμορφωμένες στάσεις και αντιλήψεις καθορίζουν τη σχέση του ατόμου με τα γνωστικά αντικείμενα και τη μάθησή τους, ιδιαίτερα στα σχολικά πλαίσια (Charlot, 1994, Lynda and Morse, 1963, Neale, 1969). Επιπλέον, από έρευνες παρατηρήθηκε ότι υψηλές επιδόσεις σχετίζονταν με θετικές στάσεις για το μάθημα, ενώ οι προσδοκίες και τα πιστεύω των μαθητών έπαιζαν καθοριστικό ρόλο στη διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών με βάση το φύλο[154]
- Τέλος παρατηρήθηκαν και κάποιοι άλλοι **εσωτερικοί παράγοντες** (όπως **αυτοπεποίθηση στα Μαθηματικά**, το **άγχος** για τα μαθηματικά και τις ΝΤ), λόγω της σημασίας της κοινωνικοσυναισθηματικής ανάπτυξης των μαθητών στην επίδοσή τους [155], καθώς και στη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά[156]

---

[152] **Τριλιανός, Θ.,** 2002, Η Παρώθηση του μαθητή για μάθηση, Αθήνα
[153] **Κλαουδάτος, Ν.,** 1996, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.
[154] **Fennema, E.**, 1985, Girls and Mathematics. The crucial middle school, Mathematics in the Middle School (Year book) Reston: NCTB
Friedman, L, 1989, A meta-analysis of resent studies on sex differences in mathematical tasks, Review of Educational Research, 59, p 185-213
[155] **Κουλουμπαρίτση Α.,** 2000, «Ομάδες Σχέσεων και συνεργασίας. –Ο σχεδιασμός και η Εφαρμογή ενός Προγράμματος για την ανάπτυξη Κοινωνικών δεξιοτήτων στο Δημοτικό σχολείο» , Σύγχρονη Εκπαίδευση 112, σελ 50-60
[156] **Μπαρκάτσας, Α.,** 1996, Η αξιολόγηση της επίλυσης προβλήματος στα Μαθηματικά της Γ΄Λυκείου, Πρακτικά ΕΜΕ, Αλεξανδρούπολη



Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω, η έρευνά μας θα επικεντρωθεί στη μελέτη:

1. Των αναπαραστάσεων των μαθητών σχετικά με την έννοια των τριγώνων και μάλιστα των ορθογωνίων
2. Της επίδοσης των μαθητών μετά την χρήση του λογισμικού.
3. Των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά και τους υπολογιστές.

Μέθοδοι και τεχνικές συλλογής και επεξεργασίας των δεδομένων

Η διδακτική μας παρέμβαση (Menchinskaya, 1969) είχε σχεδιαστεί με βάση την τυπική διαδικασία στις εξής φάσεις:

- Συμπλήρωση αρχικού ερωτηματολογίου (pretest), διερεύνηση των αρχικών αναπαραστάσεων των μαθητών σχετικά με το υπό μελέτη θέμα (έννοια του ορθογωνίου τριγώνου, των δυνάμεων, του εμβαδού και του τετραγώνου, καθώς και επίλυση προβλημάτων σχετικών και τις συναφείς έννοιες)

- Συνέντευξη λίγων μαθητών.
- Διδακτική παρέμβαση με το λογισμικό Sketchpad &Applet
- Ανάλογη γραπτή εξέταση ακολούθησε μετά την παρέμβαση (post- test) με σκοπό την καταγραφή της εξέλιξης των ανωτέρω στοιχείων.
- Οι συγκρίσεις, που έγιναν, αφορούσαν:
- Την εξέλιξη κάθε ομάδας, πριν και μετά την παρέμβαση.
- Την εξέλιξη της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την ομάδα ελέγχου.

Η καταγραφή, επεξεργασία και παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εξέλιξης των αναπαραστάσεων των μαθητών, έγινε απλά, διότι μια περαιτέρω στατιστική επεξεργασία δεν θεωρήθηκε απαραίτητη λόγω του ολιγάριθμου πληθυσμού της ποιοτικής έρευνας.

Η εξέλιξη της επίδοσής τους έγινε συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών στις 2 γραπτές εξετάσεις σε ανάλογα προβλήματα .

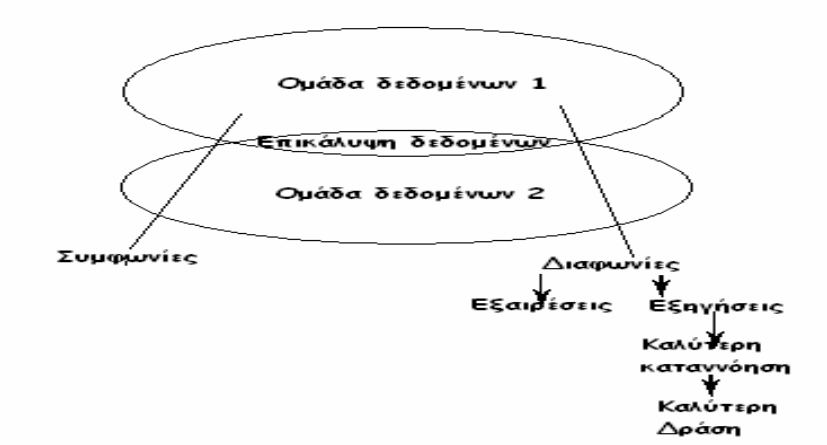
Καταγραφή των διαλόγων και της συμπεριφοράς των μαθητών: πραγματοποιήθηκε (με μαγνητοφώνηση της διαδικασίας) κατά την επίλυση προβλήματος στις ομάδες.

Μέθοδος ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων

Ως θεωρητικό πλαίσιο και ερευνητικό εργαλείο στη μεθοδολογία της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η λεγόμενη «θεμελιωμένη στην εμπειρία θεωρία» (grounded theory) 157των Strauss A. & Corbin J. (1990). Τα στάδια της προσέγγισης αυτής είναι η συλλογή ποιοτικών δεδομένων με παρατήρηση-συνέντευξη και η απομαγνητοφώνηση των διαλόγων.

Επειδή οι πληροφορίες, που αξιοποιεί η ερευνήτρια, είναι ποιοτικής φύσης, γι΄ αυτό (στους διάλογους των μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος και στη συνέντευξη) ξεκινά με γενικές ερωτήσεις ενώ σταδιακά προχωρεί σε βάθος. Η ερευνήτρια αναπτύσσει ψυχική επαφή με τους μαθητές, προσπαθεί να κατανοήσει την «πραγματικότητα που βιώνουν και αξιοποιεί τις απρόβλεπτες καταστάσεις που συναντά. Η ερευνήτρια προσεκτικά προχωρεί στη σύγκριση των δεδομένων που δεν στηρίζονται σε προκατασκευασμένους τρόπους θεώρησης, αποφεύγει δε να χρησιμοποιεί όρους που εκφράζουν απολυτότητα, όπως «ποτέ», «πάντα» κ.λπ.

[157] **Strauss, A, Corbin, J,** 1990, Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedure and Techniques, Sage.



Το παραπάνω διάγραμμα αποτελεί σχηματική απεικόνιση της εργασίας για την δημιουργία θεωρίας με την grounded theory

http://www.uq.net.au/action_research/arp/grounded.html#a_gt_index

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στην ανάλυση των διαλόγων αρχικά, χρησιμοποιήθηκε ως ερευνητικό εργαλείο :

- Η **εστιακή ανάλυση** (focal analysis)
- Το **αλληλεπιδραστικό διάγραμμα** (interactivity flowchart).

Ακολουθήθηκε η μεθοδολογική προσέγγιση ανάλυσης διαλόγου των Sfard and Kierran[158] Το κλίμα της συνεργασίας των ομάδων έγινε σύμφωνα με την θεωρία και την κλίμακα του Bales (Τσιπλητάρης Αθ., 1996,).[159]

Η διαδικασία της ερευνητικής εφαρμογής

Για την πραγματοποίηση των στόχων της έρευνας, ακολουθήθηκε μια πολιτική συνεργασίας με τον διευθυντή και τους συνεργαζόμενους εκπαιδευτικούς του Γυμνασίου (καθηγητής πληροφορικής και δύο μαθηματικούς), στους οποίους εξηγήθηκαν οι στόχοι και η διαδικασία της έρευνας καθώς και η σημασία της δικής τους συμμετοχής.

Έγινε συνεννόηση για την εξεύρεση των αναγκαίων διδακτικών ωρών, κυρίως με αξιοποίηση του χρόνου της ώρας της πληροφορικής και της ενισχυτικής διδασκαλίας.

Πριν από τη διδακτική εφαρμογή, προηγήθηκε μια αρχική γνωριμία και μια σύντομη ενημέρωση των μαθητών σχετικά με τους στόχους και τους όρους της συνεργασίας μαζί

[158] **Sfard,A., Kieran, C.,** 2001, Cognition as communication, Rethinking learning by talking through multifaceted analysis of students' mathematical interactions. Mind, Culture and Activity, 8(1), 42-76.
[159] **Τσιπλητάρης, Α.,** Ψυχοκοινωνιολογία της σχολικής τάξης, 2η έκδοση βελτιωμένη, Αθήνα.

τους, κατά την οποία παρασχέθηκαν κίνητρα (παιγνιώδεις δραστηριότητες, αποφυγή βαθμολόγησης, εξηγήθηκε η συμβολή τους στην πραγματοποίηση της έρευνας) για συμμετοχή και δραστηριοποίηση και στις δύο ερευνητικές ομάδες.

Διαβεβαιώθηκαν επίσης οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές ότι: υπάρχει απόρρητο των προσωπικών τους δεδομένων (είναι ανώνυμα), τις απαντήσεις τους δεν θα τις έβλεπε κανείς άλλος παρά μόνο η ερευνήτρια και τα αποτελέσματα δεν θα χρησιμοποιούνταν για άλλους σκοπούς αυτών της παρούσης έρευνας. Τέλος, ζητήθηκε να απαντούν με ειλικρίνεια και αυθορμητισμό, γιατί κανένας δεν θα μπορούσε να διασταυρώσει την ταυτότητά τους λόγω της ανωνυμίας στο τελικό κείμενο της έρευνας.

Προέρευνα

Στην προέρευνα, που προηγήθηκε, διερευνήθηκαν οι αρχικές γνώσεις των παιδιών πάνω στην έννοια του τριγώνου και του εμβαδού τριγώνου και τετραγώνου. Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκε ένα ερωτηματολόγιο που έκανε μια πρώτη αξιολόγηση της κατάστασης. Ακολούθησε ο απαιτούμενος έλεγχος για να αποσαφηνιστεί ότι οι μαθητές κατανοούσαν πλήρως τα ερωτήματα, τους μαθηματικούς συμβολισμούς και τις λέξεις που χρησιμοποιήθηκαν. Ειδικότερα:

I. Με το πρώτο διαγώνισμα (pre-test) και την προφορική συνέντευξη που ακολούθησε παρατηρήθηκε
   a. η **στάση** των μαθητών απέναντι στα **μαθηματικά,**
   b. η **αυτοεκτίμηση και αυτοαντίληψη** των μαθητών ως προς τις **ικανότητες** και την επίδοσή τους στα μαθηματικά,
   c. οι προαπαιτούμενες γνώσεις. Τα γνωστικά δομήματα των μαθητών στην **κατανόηση των λέξεων :τρίγωνο-εμβαδόν**
   d. οι δυσερμηνείες, τα γνωστικά κενά, οι δυσκολίες στην κατανόηση τόσο της έννοιας του τριγώνου και των αναπαραστάσεων όσο και των άλλων που σχετίζονταν με τα υπό επίλυση προβλήματα που ασχολήθηκαν οι μαθητές.
   e. οι ερμηνείες κατά περίπτωση

Παιδαγωγική προσέγγιση της χρήσης του εκπαιδευτικού λογισμικού.

Το θεωρητικό πλαίσιο της χρήσης του εκπαιδευτικού λογισμικού στηρίζεται:

- Στις γνωστικές θεωρίες του εποικοδομισμού (constructivism) και στις κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες του Vygotsky. Η Harel [160](1991) υποστηρίζει ότι η καλύτερη επιλογή για το σχεδιασμό του εκπαιδευτικού λογισμικού και των δραστηριοτήτων είναι ο συνδυασμός εποικοδομιστικών θεωριών με κοινωνικο-πολιτισμικές απόψεις για τη μάθηση.
- Στη διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση των Bruner & Gagne. Οι μαθητές ωθούνται στην αυτενεργό έρευνα, στη διατύπωση εικασιών και ερωτημάτων, στον πειραματισμό και την αξιολόγηση των πληροφοριών που συναντούν. Οι μαθητές διερευνούν τις ιδέες τους και τις αντιλήψεις τους μέσω του χειρισμού διαφορετικών παραστάσεων (Suthers, 1999).
- Στην ανάδειξη των γνωστικών συγκρούσεων ως προϋπόθεση για την ανοικοδόμηση της γνώσης [161]και (Κυνηγός 2004 παραδόσεις μαθημάτων περί Ν.Τ.)
- Στις αρχές της συνεργατικής μάθησης. Η οικοδόμηση των εννοιών εμφανίζεται σα μια δραστηριότητα στο πλαίσιο μιας κοινότητας ατόμων που μαθαίνουν (Scardamalia & Bereiter, 1994). Η συνομιλία των μαθητών τούς οδηγεί στη συνειδητοποίηση των αρχικών τους ιδεών και στη μετέπειτα επεξεργασία τους.

Στον εποικοδομισμό, καθοριστικό ρόλο παίζουν οι πρότερες γνώσεις και αναπαραστάσεις των μαθητών, γιατί πάνω σ΄ αυτές στηρίζονται οι νέες γνώσεις με συμπλήρωση ή αναπροσαρμογή των γνωστικών μοντέλων των μαθητών. Με την ενσωμάτωση των νέων γνώσεων στις παλιές και την καθοδήγηση του δασκάλου οι μαθητές προχωρούν στην «ζώνη επικείμενης ανάπτυξης» (zone of proximal development) και η μάθηση αποκτά νόημα.

Μεθοδολογική προσέγγιση

Με την χρήση του Sketchpad & Applet αυτή επιδιώκεται :

- Να ενεργοποιηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά

[160] **Harel, I.,** 1991, Children, Designers, Inderdisciplinary Constructions for learning and Knowing Mathematics in a computer-rich School Ablex Publishing Corporation Norwood New Jersey.
[161] **Μπασέτας Κ.,** 1981, Η **ευρετική** μέθοδος διδασκαλίας, Σχολείο και Ζωή τ. 2, 81-87.

- Να καλλιεργηθούν δεξιότητες δημιουργικής και κριτικής σκέψης
- Να προωθηθούν συνεργατικές δεξιότητες, η ενεργητική συμμετοχή στις ομάδες εργασίας και η λήψη αποφάσεων σε ομαδικά πλαίσια.
- Να αρθρώσουν μαθηματικό λόγο, να αιτιολογήσουν.
- Να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες που μελετώνται και αποτελούν προσδοκώμενο μαθησιακό στόχο της ενότητας
- Να ασκηθούν στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων ανάπτυξης στρατηγικών, εικασιών, κ.λπ.

Γνωριμία με το Geometer Sketchpad

Στους μαθητές έγινε μια ξενάγηση στο περιβάλλον του Geometer Sketchpad μία ανεξάρτητη ώρα διδασκαλίας . Λόγω του περιορισμένου χρόνου που θέλαμε να απασχοληθεί η ομάδα πειραματισμού, το περιβάλλον είχε απλοποιηθεί, έτσι ώστε να δημιουργεί τις λιγότερες δυσκολίες στους μαθητές

Η Επιλογή του σεναρίου για τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος με χρήση λογισμικού.

Από συζητήσεις μαθηματικών που υπηρετούν σε διαφορετικά σχολεία της Ελλάδος , είχαμε διαπιστώσει τις παρακάτω δυσκολίες που συναντούσαν οι μαθητές :

- 1^{ov} στην διάκριση των τριγώνων ως προς τις γωνίες
- 2^{ov} την ταύτιση του τετραγώνου με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
- 3^{ov} στην κατανόηση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Σκεφτήκαμε λοιπόν ότι, αν ο μαθητής ξεκινούσε κατανοώντας την έννοια του ορθογωνίου τριγώνου, του εμβαδού και την διάκριση του τετραγώνου από το ορθογώνιο θα είχε λιγότερες δυσκολίες στην κατανόηση του Π.Θ.. Επιπλέον, το Π.Θ.ως έννοια επελέγη διότι:

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ενότητα της κλασικής παιδείας.
- Υπήρχαν εσφαλμένες αναπαραστάσεις στους μαθητές.
- Οι υπάρχουσες αναπαραστάσεις τους ήταν ελλιπείς.

Επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τον υπολογιστή διότι:

- Η διδασκαλία Πυθαγορείου θεωρήματος με τον τρόπο που διδάσκεται (ακολουθώντας το αναλυτικό πρόγραμμα και το σχολικό βιβλίο με τη προτεινόμενη προσέγγιση και τις ασκήσεις-προβλήματα που τη συνοδεύουν)

δείχνει να συντηρεί τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση των ανωτέρω εννοιών.

- Μας απασχολούσε, λοιπόν, να ελέγξουμε την υπόθεση αν τελικά ο υπολογιστής με το κατάλληλο λογισμικό διευκόλυνε την κατανόηση του Π.Θ.με τη βοήθεια των οπτικών αναπαραστάσεων και τη μοντελοποίηση της έννοιας.
- Ο μαθητής ήταν σε θέση να αφιερώσει περισσότερο χρόνο στη διερεύνηση των καταστάσεων που δημιουργούσε.

Στο σχεδιασμό μας επιθυμούσαμε ο μαθητής να αναγνωρίσει τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή του

Στην προσέγγιση που επιχειρήσαμε, επιλέξαμε οι δραστηριότητες-προβλήματα να είναι «**ανοικτές / ά**». Στη διδακτική των Μαθηματικών «ανοιχτό» μπορεί να θεωρηθεί ένα πρόβλημα, όταν επιδέχεται διαφορετικές ερμηνείες που εξαρτώνται από τις υποθέσεις και τα συμπεράσματά του. Ένα ανοιχτό πρόβλημα δίνεται στους μαθητές με τη μορφή:

- Υποθέσεων, που οι μαθητές δεν γνωρίζουν αν ισχύουν.
- Προβληματισμού ή με ασαφείς υποθέσεις, που προτρέπουν τους μαθητές να διατυπώσουν εικασίες και να βρουν απάντηση.

Στην ελληνική σχολική πραγματικότητα, δεν δίνεται έμφαση στα ανοιχτά-κλειστά προβλήματα (ανοιχτές υποθέσεις και κλειστά συμπεράσματα ή κλειστές υποθέσεις και ανοιχτά συμπεράσματα), απουσιάζουν δε τα ανοιχτά προβλήματα και οι ερευνητικές δραστηριότητες [162].

Η σημασία των «ανοιχτών» προβλημάτων, ως χρήσιμα εργαλεία σε όλους τους τομείς της κοινωνικής ζωής, έχει τονιστεί από τον Κόσσυβα[163] που υποστηρίζει ότι παρέχει στα παιδιά ερευνητικά γόνιμο έδαφος και βιωματικό, για να ανακαλύψουν μια ξεχωριστή ομορφιά των Μαθηματικών και να βιώσουν ευχάριστες εμπειρίες.

Η δημιουργία συνοδευτικών φύλλων εργασίας στις δραστηριότητες (Μπακαλίδης και Σωτηρόπουλος, 2001), κρίθηκε απαραίτητη, γιατί προσφεροταν για διακριτικά καθοδηγούμενη ανακάλυψη και επέτρεπε μια περισσότερο εποικοδομιστική προσέγγιση και βαθύτερη κατανόηση των εκάστοτε εννοιών. Για τους ανωτέρω λόγους σχεδιάσαμε τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες που συνόδευαν το λογισμικό.

---

[162] **Κολέζα, Ε.,** 1996, Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών, Πρακτικά 14ου Πανελληνίου Συνεδρίου Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Μυτιλήνη.

[163] **Κόσσυβας, Γ.,** 1996, η Πρακτική του Ανοιχτού Προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο, Gutenberg.

Ο σχεδιασμός, η δημιουργία, η εφαρμογή και αναδιαμόρφωση των φύλλων εργασίας, στάθηκε μια χρονοβόρα διαδικασία. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στη διερεύνηση της προϋπάρχουσας γνώσης των παιδιών και των δυσκολιών που αντιμετώπιζαν.

Στόχος των δραστηριοτήτων ήταν η καλύτερη αξιοποίηση του λογισμικού, ώστε οι μαθητές να πετύχαιναν :

- καλύτερη κατανόηση της έννοιας σύμφωνα με την επιστημονική άποψη,
- ενεργή εμπλοκή μέσα από νοητικές διεργασίες (όπως η παρατήρηση, η σύγκριση, η αναζήτηση ομοιοτήτων και διαφορών ανάμεσα στις διαδοχικές φάσεις δοκιμών τους) και διερευνητικές καταστάσεις μάθησης,
- τόνωση του ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά και τη μάθηση γενικότερα,
- δημιουργία μαθηματικού διαλόγου και επικοινωνίας μεταξύ τους
- ανάδειξη της σύνδεσης και εφαρμογής των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή .

Κριτήρια των δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες ικανοποιούν τα παρακάτω κριτήρια:

1ον Εντάσσονται στο υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα

2ον Αξιοποιούνται οι δυνατότητες του SKETCHPAD, για την καλύτερη κατανόηση του πυθαγορείου θεωρήματος από την πλευρά των μαθητών.

3ον Αξιοποιούν δυνατότητες των applets .

4ον Βοηθούν στην ανακάλυψη των δυνατοτήτων και δεξιοτήτων των μαθητών.

Οι δραστηριότητες απευθύνθηκαν στους μαθητές της Β΄ τάξης Γυμνασίου και απώτερος σκοπός-στόχος ήταν να διαπιστώσουν την ισχύ του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του, καθώς και να το κατανοήσουν

Υπάρχει ένα πλέγμα από έννοιες – γνώσεις που περιέχονται στην έννοια του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Οι μαθητές κατά την εξερεύνηση θα χρειαστεί να χειριστούν ένα δίκτυο εννοιών όπως : Μεγαλύτερος / μικρότερος

υποτείνουσα, άθροισμα τετραγώνων

τέλειο τετράγωνο κάθετη πλευρά Ρητός / άρρητος Τετραγωνική ρίζα

Εμβαδόν Τετράγωνο Οξεία / αμβλεία γωνία Μέτρηση Ορθή γωνία

Οι μαθητές είναι δυνατόν να μην μπορούν να χειριστούν μερικές από αυτές τις έννοιες ή να κατασκευάσουν άλλες. Είναι στην ευθύνη του εκπαιδευτικού να κατευθύνει τους μαθητές του ώστε να επικεντρωθούν στα κομβικά σημεία του πλέγματος. Και αυτό είναι ένα από τα δύσκολα διδακτικά προβλήματα που έχει κάθε φορά να λύσει.

ΥΛΗ

3ο Κεφάλαιο – οι πραγματικοί αριθμοί

3.1 Το Πυθαγόρειο θεώρημα σελίδες 97-101

ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Επιλέχθηκε το SKETCHPAD και η χρήση των applet για τους λόγους που προαναφέρθηκαν.

Στόχοι

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά σειρά των διδακτέων παραγράφων είναι:

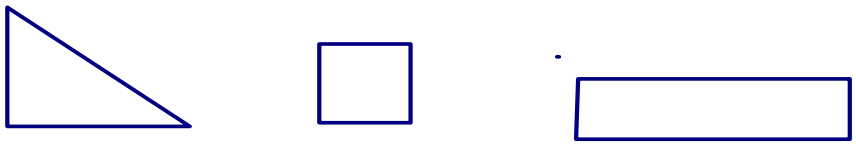
1. Να διακρίνουν τα είδη των τριγώνων και να ξεχωρίζουν το ορθογώνιο τρίγωνο .
2. Να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα για τον υπολογισμό διαφόρων μηκών.
3. Να διαπιστώνουν αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο όταν δίνονται οι πλευρές του.
4. Να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες αριθμών με δοκιμές ή από τον πίνακα των τετραγώνων.
5. Να υπολογίζουν μία πλευρά ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι άλλες δύο.
6. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να σχεδιάζουν ορθογώνια τρίγωνα
7. Να βρίσκουν την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα τετράγωνα των πλευρών

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ……ΤΑΞΗ ΟΝΟΜΑ:

……..ΕΠΙΘΕΤΟ……

- Ποιά από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

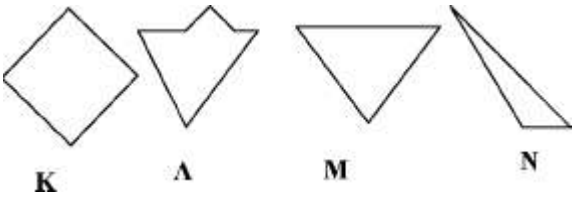
a. Το Κ είναι μόνο τετράγωνο
b. Το Λ είναι μόνο τετράγωνο
c. Το Μ είναι μόνο τετράγωνο
d. Το Λ και το Μ είναι τετράγωνα
e. Όλα είναι τετράγωνα.



Κ Λ Μ.

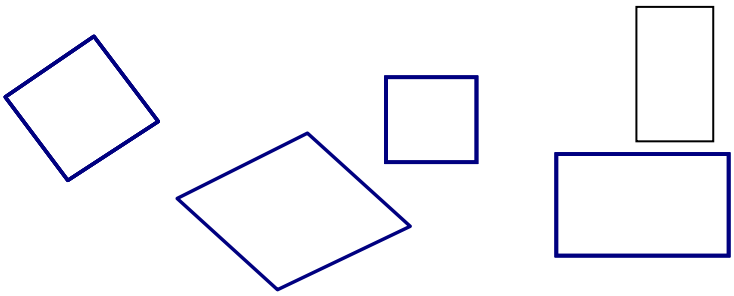
- Ποιά από τα παρακάτω σχήματα είναι τρίγωνα;

a. Κανένα από αυτά δεν είναι τρίγωνο.
b. Το Λ μόνο είναι τρίγωνο.
c. Το Μ μόνο τρίγωνο.
d. Το Μ και το Ν τρίγωνα
e. Το Λ και το Μ τρίγωνα



- Ποιό από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνο;

(Βάλτε σε κύκλο το ή τα σωστά σχήματα.)



- Περιγράψτε ένα τρίγωνο.Τι σκέψεις κάνετε σχετικά με αυτήν την έννοια.

……
……
……

- Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Γράψτε τα βήματα που ακολουθήσατε) .

- Ποιά από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια;.(κυκλώστε τα σωστά τρίγωνα.)

Βρείτε τα ζευγάρια των καθέτων πλευρών και τις υποτείνουσες.

Κάθετες πλευρές	Υποτείνουσα

- Πώς κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο ; Μπορείτε να γράψετε τα βήματα που απαιτούνται και να σχεδιάσετε ένα;

……
……
……
……
……
……
……..

- Αν σας δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα , με μήκος 3, 4, 5 cm , αντίστοιχα σχεδιάστε τα τετράγωνα με βάση αυτά τα τμήματα και βρείτε τα εμβαδά τους. Παρατηρείστε – Βρείτε - το άθροισμα των εμβαδών ανά δύο. Υπάρχει κάτι που σας κάνει εντύπωση ;

……
……
……
……
……

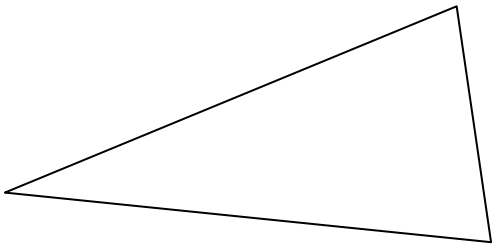
- Ένα τεράγωνο έχει πλευρά 4 m ., βρείτε την επιφάνειά του; (το εμβαδόν του)

……..

Μπορείτε να διατυπώσετε και να λύσετε το αντίστροφο του παραπάνω προβλήματος;

……
……
……

…**Δίδεται το τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε:**



1. Ποιά πλευρά είναι απέναντι από την κορυφή Β.
2. Ποιά πλευρά είναι απέναντι από την γωνία Γ.
3. Ποιές γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΑΒ;

- Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°). Δίδεται η πλευρά ΑΒ = 4 cm και η ΑΓ = 3 cm.

ΜεταβλητήΧ	**Μεταβλητή Ψ**	**X^2**	**$Ψ^2$**	**$Ψ^2$+ X^2**
1	2			
2	3			
3	4			
4	5			

Ποιοί αριθμοί της $5^{ης}$ στήλης γράφονται ως τέλεια τετράγωνα;

Αν $Ψ^2$+ X^2 = Z^2 Τότε = X^2=……. Και $Ψ^2$=……

Μετά την προσεκτική διόρθωση προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα

- Από τους 20 μαθητές οι 4 δεν είχαν ιδιαίτερες δυσκολίες στο μαθηματικό μέρισμα των εννοιών, όμως εντοπίστηκαν δυσκολίες στο γραπτό λόγο. Οι 15 μαθητές είχαν πολλές δυσκολίες, λανθασμένες αντιλήψεις και παρανοήσεις για πολλές μαθηματικές έννοιες όπως και γλωσσικά κενά. Μία μαθήτρια κάνοντας φιλότιμες προσπάθειες και χρησιμοποιώντας αρκετά καλά τον γραπτό λόγο ξεπέρασε κάποια μαθηματικά εμπόδια .
- Πολλοί μαθητές δεν βρίσκονταν ούτε στο πρώτο επίπεδο (βασικό επίπεδο) της αναγνώρισης των σχημάτων των επιπέδων Van Hiele. Αδυνατούσαν να διακρίνουν τα σχήματα. Δεν ξεχώριζαν το ορθογώνιο τρίγωνο από τα άλλα τρίγωνα, όπως και το τετράγωνο από ορθογώνιο. Τα σχήματα δεν αναγνωρίζονταν από την συνολική τους εμφάνιση.

- Λίγοι μαθητές –τρεις- έφτασαν στο τρίτο επίπεδο των Van Hiele αυτό της άτυπης αφαίρεσης και είχαν κατανοήσει τόσο τις ιδιότητες ενός σχήματος όσο και την σχέση μεταξύ των σχημάτων
- Σαφώς κανείς δεν ξεπέρασε το τρίτο επίπεδο ώστε να φτάσει στην τυπική αφαίρεση (γενίκευση – επαγωγή).
- Προτιμούσαν τις ερωτήσεις του τύπου «κυκλώστε το σωστό σχήμα» και δυσκολεύονταν στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.
- Παρουσιάστηκαν πολλές γλωσσικές δυσκολίες και δεν ήταν σε θέση να διατυπώσουν απλά την μαθηματική τους σκέψη.
- Παρουσιάστηκε άγχος σε πολλούς και τόνισαν ότι δεν «καταλαβαίνουν» και είναι πολύ «δύσκολα» τα μαθηματικά.
- Οι περισσότεροι ξεχώριζαν το ορθογώνιο τρίγωνο μόνο σε μία ορισμένη θέση και όταν μεταβαλλόταν η θέση του σχήματος δεν το αναγνώριζαν πλέον. Η ίδια δυσκολία υπήρξε και στο τετράγωνο.
- Οι περισσότεροι δεν θυμόνταν τι σημαίνει ο όρος υποτείνουσα και προσκείμενες πλευρές.
- Σχεδόν όλοι μπορούσαν να ζωγραφίσουν ένα τετράγωνο, όχι όμως να το κατασκευάσουν. Οι κατασκευές τους δυσκόλεψαν πολύ.
- Το πρόβλημα με το εμβαδόν του τετραγώνου τους δυσκόλεψε και πολλοί δεν μπόρεσαν να διατυπώσουν το αντίστροφο του προβλήματος. Κάποιοι μπέρδεψαν το εμβαδόν με την περίμετρο του τετραγώνου, ενώ αυτοί που το έλυσαν σωστά δεν συνόδευαν τον αριθμό- αποτέλεσμα- με τις μονάδες.
- Αρκετοί δυσκολεύονταν στο να βρίσκουν τα τετράγωνα των αριθμών. Ταύτιζαν το τετράγωνο ενός αριθμού με το διπλάσιό του.
- Μία μαθήτρια σε όλες σχεδόν τις ερωτήσεις απήντησε ότι δεν τις καταλαβαίνει.
- Πολλοί μπορούσαν να δείξουν με το μολύβι τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου όχι όμως και να τις ονομάσουν.
- Λίγοι δεν διέκριναν την διαφορά ανάμεσα στις λέξεις πλευρά και κορυφή. Όταν ζητήθηκε να δείξουν τις πλευρές έδειξαν τις κορυφές, - για αυτούς ήταν το ίδιο.

Ακολούθησε προφορική συνέντευξη δύο μαθητών με τυχαία επιλογή από το σύνολο των 15 μαθητών (αν και όλοι δήλωσαν την επιθυμία να δώσουν συνέντευξη). Θα ήταν χρονοβόρο να συμβεί με όλους τους μαθητές.

Παρακάτω παραθέτονται δύο διάλογοι
1ος διάλογος

Στην 2η ερώτηση έχει γίνει λάθος και η μαθήτρια ΚΜ δεν διέκρινε τα τρίγωνα από τα άλλα σχήματα.

Εκπαιδευτικός : Ε

Ε : Μπορείς να ξαναδιαβάσεις την ερώτηση;

ΚΜ :Ναι.

Ε : Μπορείς να δεις τι απήντησες;

ΚΜ.: Μ…,Μπερδεύτηκα….., μάλλον το ξέχασα……..Νόμιζα ότι ζητάτε μόνον τέτοια τρίγωνα (δείχνει αυτό που είχε σημειώσει), το Ν είναι ορθογώνιο, ενώ το Μ είναι κανονικό.

Ε : τι σημαίνει κανονικό ;

ΚΜ: ……τρεις ίσες γωνίες.

Ε: Ενώ το Ν;

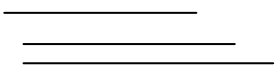
ΚΜ : Δεν έχει όλες τις γωνίες ίσες.

Στην 4η ερώτηση

Ε: τι σκέψεις κάνεις σχετικά με την έννοια του τριγώνου;

ΚΜ: είναι τρεις γραμμές

Ε : έτσι ;



ΚΜ: ΟΧΙ Εννοώ να ενώνονται……..

Ε : έτσι;;;

ΚΜ : ενώνονται αλλά όχι έτσι….

Ε : Πώς ; σχημάτισέ το

ΚΜ : αυτό ….

2ος διάλογος

Στην 1η ερώτηση

Ε: Ας ξαναδιαβάσουμε την εκφώνηση .

Μ: ποιά από τα παρακάτω σχήματα είναι τετράγωνα;

Α…….Το Λ είναι ορθογώνιο…..εγώ τα μπέρδεψα……

Ε: Τι σε μπέρδεψε;

Μ: Είχα την εντύπωση ότι κι εκείνο ήταν τετράγωνο……

Ε : Τώρα τι άλλαξε;

Μ : Τώρα το είδα καλύτερα, τότε το έκανα βιαστικά!

Στην 2η ερώτηση

Ποιο από τα παρακάτω σχήματα είναι τρίγωνο

Μ: Τρίγωνο είναι και το Λ. Είναι ένα τρίγωνο με καπελάκι…….

Ε: Το σχήμα που θα σου σχηματίσω τι είναι;

Μ: Είναι τρίγωνο ……ναι είναι….απλώς λείπει η πάνω γραμμούλα.

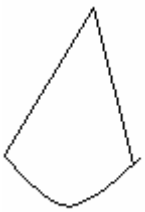
Ε : Όταν λες τα κάλαντα τι κρατάς;

Μ :τρίγωνο!

Ε: μπορείς να το σχεδιάσεις;

Μ: να αυτό είναι

Ε: Αυτό που θα σχεδιάσω είναι τρίγωνο;



Μ: Δεν νομίζω……δεν είμαι σίγουρη….

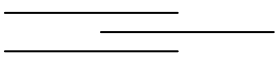
Ε: Αυτό;

Μ: Ναι αυτό είναι

Ε: Από την αρχή……Τι σκέφτεσαι σχετικά με την έννοια «τρίγωνο».

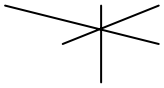
Μ: Ένα σχήμα με τρείς ευθείες γραμμούλες

Ε: Έτσι;

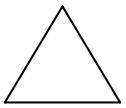


Μ: ΟΧΙ οι γραμμές να είναι ενωμένες.

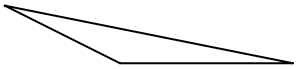
Ε: Έτσι;



Μ: ούτε έτσι , να είναι στραβές, με κορυφή επάνω , όπως το δένδρο… να



Ε: Αυτό είναι τρίγωνο;



Μ : ΝΑΙ

Στάδια επίλυσης Προβλήματος

«Γνωρίζω μαθηματικά δεν σημαίνει μόνον μαθαίνω ορισμούς και θεωρήματα, ώστε να αναγνωρίζω πότε να τα χρησιμοποιώ και να τα εφαρμόζω . Γνωρίζω καλά ότι κάνω μαθηματικά συνεπάγεται τι ασχολούμαι με προβλήματα»

Guy Brousseau ,1986

Η επίλυση προβλήματος έχει αποτελέσει θέμα προβληματισμού και συζήτησης, ενώ σήμερα κατέχει κεντρική θέση στη μαθηματική παιδεία των μαθητών. Μέσα από την επίλυση προβλήματος (της οποίας το αποτέλεσμα είναι αξιολογήσιμο), μπορούν να παρατηρηθούν και να εντοπισθούν ευρύτερα στοιχεία για τον τρόπο αξιοποίησης προηγούμενων εμπειριών και για τον τρόπο λειτουργικής ενεργοποίησης των αναπαραστάσεων, των εννοιών και των συλλογιστικών μοντέλων του υποκειμένου [164]

Ο Polya [165] (1945) πρώτος ασχολήθηκε με τις στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος (πίστευε ότι μπορούν να διδαχτούν) και διατύπωσε τα στάδια της επίλυσής του.

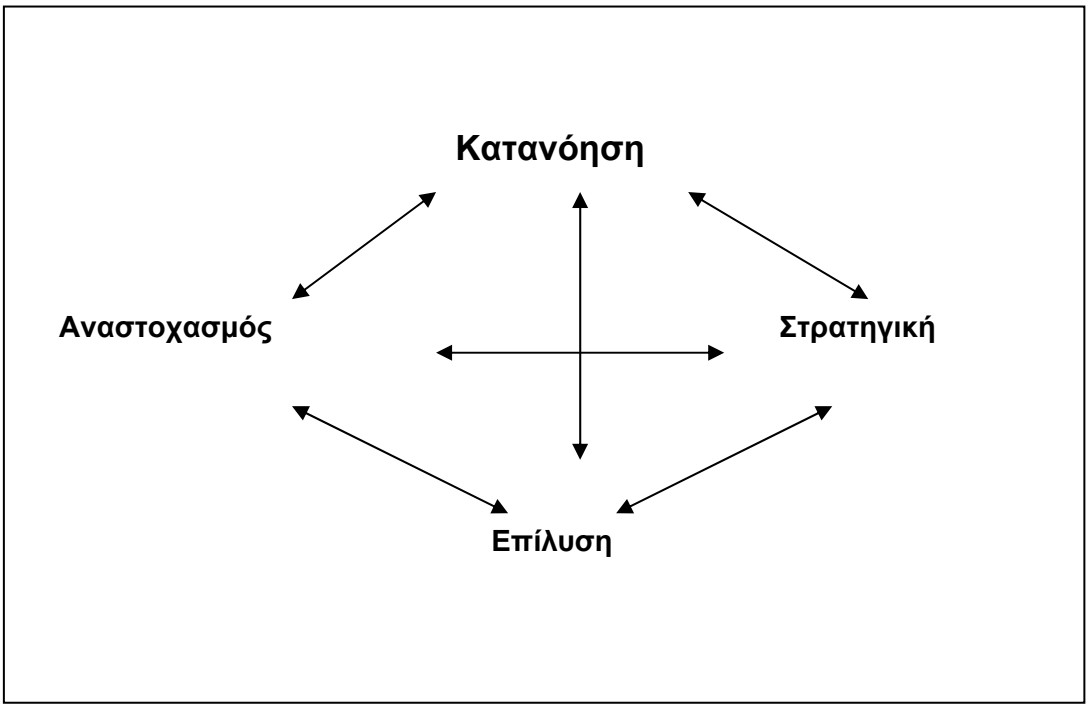
Στάδια επίλυσης προβλήματος

1. Κατανόηση και εξερεύνηση του προβλήματος.
2. Εύρεση στρατηγικών.
3. Χρήση στρατηγικών για την επίλυση προβλήματος.
4. Αναστοχασμός της λύσης
5. Επανεξέταση-Αναστοχασμός για τη λύση.

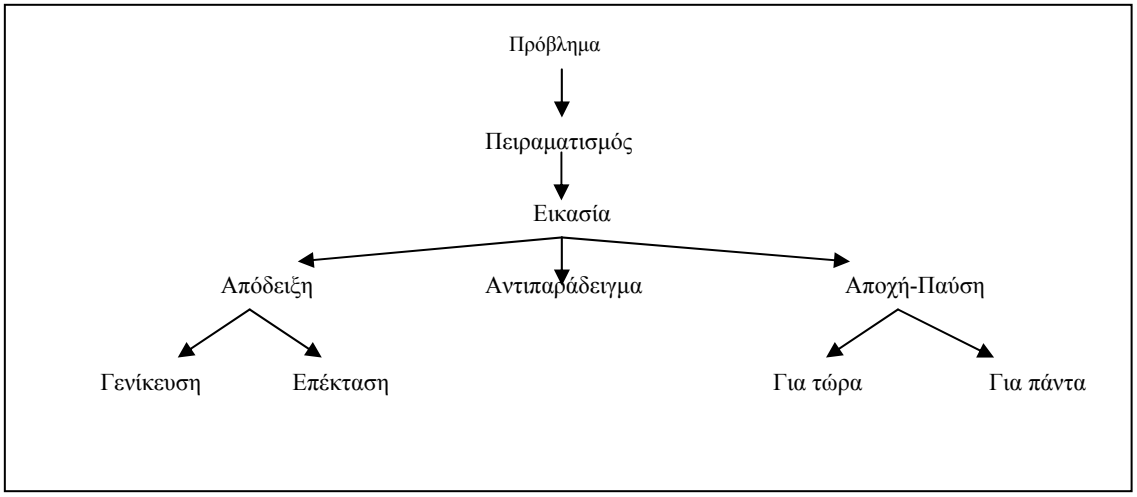
Τα τέσσερα στάδια δεν ακολουθούνται αυστηρά, αλλά έχει παρατηρηθεί ότι τα παιδιά συχνά πηγαίνουν μπρος-πίσω μεταξύ και τυχαία των βημάτων. Το παρακάτω διάγραμμα είναι περισσότερο κοντά σ΄ αυτό που γίνεται.

---

[164] **Παπαμιχαήλ Γ.,** 1994, Η γνωστική εκπαίδευση στην πρώτη σχολική ηλικία, Οδυσσέας
[165] **Polya, G.,** 1991, Πώς να το λύσω, Μεταφρ Ψυακκή Ξ., Επιμ Πατρώνης Τ., εκδ Καρδαμίτσα.



Εκτός από αυτή την προσέγγιση των σταδίων επίλυσης προβλήματος, υπάρχει και η επιστημονική προσέγγιση που περιγράφεται με το παρακάτω σχήμα:[166]



Πηγή: internet **http://www.nzmaths.co.nz/PS/Info/WhatIsPS.htm#Scientific_Approach**

Τα τελευταία είκοσι χρόνια, η προσοχή έχει στραφεί στους μαθητές και στις δεξιότητες που χρειάζονται ή αναπτύσσουν κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Η επίλυση προβλήματος υιοθετήθηκε αρχικά και από την εποικοδομιστική προσέγγιση, καθώς οι μαθητές αναπτύσσουν λειτουργικές δομές σκέψης, σε σχέση με τη γνωστική

[166] Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια υπολογιστή μέσα από μία διαθεματική δομητιστική προσέγγιση διατριβή της Ε., Λυκοσκούφη σελ. 185

περιοχή του προβλήματος [167]. Στη μελέτη μας, ασχοληθήκαμε όχι μόνο με την απάντηση (συνήθως στη μορφή ενός αριθμού) ως λύση στο πρόβλημα αλλά προσπαθήσαμε να κατανοήσουμε την όλη διαδικασία με την οποία φτάνει ο μαθητής στην απάντηση.

Ο Κόμης αναφέρει [168] ότι έρευνες στη διδακτική των Μαθηματικών έχουν καταστήσει φανερό ότι η πλήρη κατανόηση της έννοιας γίνεται μόνο μέσα από ένα πλαίσιο δραστηριοτήτων επίλυσης προβλημάτων [169]. Όσον αφορά τους **παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση** των μαθητών, αυτό σχετίζεται με τη διδασκαλία της έννοιας και τις δυσκολίες των μαθητών. Συνέπεια των ανωτέρω είναι οι στρατηγικές που επιλέγουν οι μαθητές για την επίλυση των προβλημάτων και τα λάθη που εμφανίζουν. Οι στρατηγικές που επιλέγουν οι μαθητές εξαρτώνται από το γενικό πλαίσιο των προβλημάτων (βλ. σχετικά Γαγάτσης, 2003, Singer and Resnick, 1992, Kuchemann, 1989, Kamon, 1993). Οι Schliemann και Pereira (1990 στο Γαγάτσης, 2003) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές επηρεάζονται από το γενικό πλαίσιο ανεξάρτητα αν το πρόβλημα σχετίζεται με καθημερινές εμπειρίες ή με πρακτικούς και εμπειρικούς τρόπους υπολογισμού ή εντελώς άγνωστο θέμα. [170]

Για να πετύχουν οι μαθητές την κατανόηση του Πυθαγορείου θεωρήματος πρέπει να συνδυάσουν τη διερεύνηση μοντέλων (έτοιμων ή κατασκευασμένων από τους ίδιους, ανάλογα βέβαια με τις εμπειρίες τους και το περιβάλλον που θα τους δοθεί) με την επίλυση προβλημάτων.

Οι σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδακτική των Μαθηματικών και τη Γνωσιακή Ψυχολογία προτείνουν οι μαθητές να ασχολούνται με προβλήματα που να ανήκουν στην ίδια κατηγορία, να τα κατανοούν και στη συνέχεια να γενικεύουν τουλάχιστον σ΄ αυτή την κατηγορία, πριν προχωρήσουν σε άλλες.

Η λέξη εμπόδιο ως έννοια (obstacle)

[167] **Thompson, A.G.,** 1984, The relationship of teachers; Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice, Educational Studies in Mathematics, 15, pp. 105-127

[168] **Κόμης Β.,** 1995, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, «Η Διδακτική της Πληροφορικής», Ηράκλειο, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[169] **Smith, D.,** 2002, "How people learn…Mathematics", 2nd International Conference on the teaching of mathematics

[170] Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια υπολογιστή μέσα από μία διαθεματική δομητιστική προσέγγιση διατριβή της Ε., Λυκοσκούφη σελ. 56

Ένα εμπόδιο δεν είναι έλλειψη γνώσης αλλά γνώση που επιτρέπει στον μαθητή να παράγει απαντήσεις προσαρμοσμένες σε ορισμένα προβλήματα ή κατηγορίες ενώ για άλλους τύπους προβλημάτων οδηγεί σε λάθος απαντήσεις. Έτσι επανεμφανίζεται να κυριαρχεί σε ορισμένες καταστάσεις, ακόμα και εάν αντικατασταθεί από μια καινούρια γνώση.[171]

Ένα εμπόδιο είναι μία αντίληψη, πιθανώς μία γνώση, η ποία , ενώ ήταν αποτελεσματική στην επίλυση ενός τύπου προβλημάτων , αποτυγχάνει στην επίλυση ενός άλλου τύπου προβλημάτων. Λόγω της προηγούμενης επιτυχίας «αντιστέκεται» σε προσπάθειες τροποποίησης ή απόρριψης με αποτέλεσμα να γίνεται εμπόδιο στην ανάπτυξη της νέας γνώσης.

Η παρουσία των εμποδίων γίνεται αντιληπτή από τα λάθη των μαθητών Τα λάθη συνήθως , προκαλούνται από την χρήση της προηγούμενης γνώσης σε νέες καταστάσεις στις οποίες δεν μπορεί να εφαρμοστεί.[172]

Τα εμπόδια διακρίνονται σε:

- **Εμπόδια επιστημολογικά** τα οποία αναφέρονται σε εσωτερικές αιτίες Έχουν σχέση με την ιστορία και την εξέλιξη των επιστημών. Είναι εμπόδια που έχουν σχέση με την διαδικασία ανάπτυξη της γνώσης, όπως η τάση να γενικεύουμε καταστάσεις με αποτέλεσμα να συσκοτίζεται μία ειδική περίπτωση., σύμφωνα με τον Bachelard

Σύμφωνα με την Sierpinska , υπάρχουν τρία επίπεδα Επιστημολογικών εμποδίων

- Στάσεις , πιστεύω, πεποιθήσεις.
- Σχήματα σκέψης , τρόποι προσέγγισης προβλημάτων .
- «τεχνική» γνώση δηλαδή η γνώση που θεωρείται επιστημονική.

1. **Τα γνωστικά εμπόδια** είναι το αντίστοιχο των επιστημολογικών εμποδίων σε προσωπικό – ατομικό επίπεδο.
2. **Τα διδακτικά εμπόδια** τα οποία προκύπτουν από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις.
   - Από την φορμαλιστική διδασκαλία.
   - Από την διδακτική μεταφορά
   - Από την αντίληψη ότι «ο καλός δάσκαλος ξεπερνά τα γνωστικά εμπόδια».

ΜΠΑΙΝΟΥΝ ΣΤΑ ΣΤΑΔΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Διαδικασίες που ακολουθούν και χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την επίλυση στοιχειωδών προβλημάτων.

Ο Greeno και οι συνεργάτες του κατέληξαν μετά από πολλά ερευνητικά προγράμματα σε 14 τύπους προβλημάτων. Και πρότειναν ένα θεωρητικό μοντέλο επίλυσης στοιχειωδών αριθμητικών προβλημάτων, στο οποίο η σημασιολογική

[172] Κλαουδάτος, Ν. Συμπληρωματικές σημειώσεις (2004) σελ.23

επεξεργασία του προβλήματος θεωρείται ως μία αποφασιστική συνιστώσα σε μία κοινή διαδικασία επίλυσης

Βασισμένοι στην δουλειά τους και στα αποτελέσματα των δικών μας ερευνών έχουμε αναπτύξει ένα μοντέλο επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, που περιλαμβάνει πέντε στάδια.(De Corte & Verschaffel, 1985a, 1985b)[173]

- Γίνεται μία σύνθετη σκόπιμη δραστηριότητα επεξεργασίας κειμένου:

Αρχίζοντας από το λεκτικό κείμενο, ο μαθητής κατασκευάζει μία σφαιρική , αφηρημένη , εσωτερική αναπαράσταση του προβλήματος, στα πλαίσια των συνόλων και των σχέσεων των συνόλων.

- Με βάση αυτήν την αναπαράσταση , ο λύτης του προβλήματος επιλέγει μια κατάλληλη τυπική αριθμητική πράξη ή μια άτυπη στρατηγική υπολογισμού για να βρεί το άγνωστο στοιχείο στην αναπαράσταση του προβλήματος.
- Η πράξη ή το έργο που έχει επιλεγεί εκτελείται.
- Ο λύτης επανενεργεί την αρχική αναπαράσταση του προβλήματος , αντικαθιστά το άγνωστο στοιχείο με το αποτέλεσμα της πράξης που έχει εκτελεστεί και διατυπώνει απάντηση.
- Εκτελούνται πράξεις επαληθεύσεις για να ελεγχθεί η ορθότητα της λύσης που βρέθηκε στο προηγούμενο στάδιο.

Ένα βασικό εύρημα που αφορά την επίδοση των παιδιών είναι ότι τα λεκτικά προβλήματα που επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη , αλλά διαφέρουν ως προς την σημασιολογική τους δομή , είναι δυνατόν να διαφέρουν πολύ στον βαθμό δυσκολία τους, οπότε και αποσπούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.

Μία μελέτη των De Corte, Verschaffel & Win , 1985 ;έδειξε ότι μια επαναδιατύπωση των λεκτικών προβλημάτων, όπου οι υπονοούμενες σημασιολογικές σχέσεις γίνονται πιο σαφείς, διευκολύνει την κατανόηση και την επίλυση αυτών των προβλημάτων στα μικρά παιδιά. Συνεπώς μια πηγή δυσκολίας στη λύση των λεκτικών προβλημάτων είναι η ίδια η γλώσσα με τη οποία εκφράζεται το πρόβλημα. Γλωσσικές παρερμηνείες συχνά μπορούν να οδηγήσουν σε λάθος αναπαραστάσεις.

Με τον ίδιο τρόπο που τα παιδιά επινοούν σωστές στρατηγικές , με τον ίδιο τρόπο επινοούν λανθασμένες έννοιες. και διαδικασίες για να λύσουν προβλήματα για τα οποία η γνώση και οι διαδικασίες, που διαθέτουν είναι ανεπαρκείς. Αυτές οι επινοήσεις των παιδιών, που πηγάζουν από τις προσπάθειές τους να λύσουν προβλήματα που είναι πάνω από τις δυνατότητες τους , μολονότι είναι λανθασμένες , υποστηρίζουν ωστόσο τη θέση ότι η μάθηση είναι μια επικοδομητική δραστηριότητα.[174]

Πολλοί ερευνητές και δάσκαλοι πιστεύουν ότι η βασική δυσκολία των παιδιών στα λεκτικά προβλήματα βρίσκεται στην επιλογή της κατάλληλης πράξης , για να βρεθεί το άγνωστο στοιχείο στην κατασκευή του προβλήματος.(Clements,1980 Zweg,1979). Τα λάθη στα δεδομένα όμως δείχνουν ότι η άποψη αυτή δεν αληθεύει για έναν μεγάλο αριθμό παιδιών , για τα οποία η μεγάλη δυσκολία βρίσκεται σε ένα προηγούμενο στάδιο, συγκεκριμένα στην κατασκευή της κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος.

Επιπλέον , η ανάλυση αυτών των λαθών έδειξε ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα λανθασμένων αντιλήψεων της κατάστασης του προβλήματος, που οφείλεται σε ανεπάρκεια της βάσης της αντιληπτικής γνώσης των παιδιών. Οι λανθασμένες

[173] [173] Βοσνιάδου Σ, Η Ψυχολογία των Μαθηματικών εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1998 sel. 71
[174] [174] Βοσνιάδου Σ, Η Ψυχολογία των Μαθηματικών εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1998 σελ. 83

αναπαραστάσεις μπορεί να είναι αποτέλεσμα αποτυχίας στη γλωσσική ερμηνεία του προβλήματος ή αποτέλεσμα ενεργοποίησης «σχήματος» ή υποδείγματος για τις αριθμητικές πράξεις που απαιτούνται.

Τα ευρήματα της γνωστικής ψυχολογίας δείχνουν ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν μπορεί να είναι μόνον μία μηχανική εξάσκηση αριθμητικών πράξεων και η διαδικασία ενός μαθηματικού προβλήματος αρχίζει με μία αναπαράσταση του προβλήματος, δηλαδή μία εσωτερική απεικόνιση της κρίσιμης πληροφορίας που περιέχεται στο πρόβλημα.

Τα ευρήματα των Carraher , Carraher και chliemann Luria, 1976, δείχνουν ότι τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο δεν συνδέονται με τους άτυπους, νοερούς μηχανισμούς επίλυσης προβλημάτων που τα άτομα αναπτύσσουν διαισθητικά για να καλύψουν ανάγκες της καθημερινής τους ζωής. Στον βαθμό που οι αριθμητικές πράξεις διδάσκονται με τρόπους αφηρημένους - που βασίζονται στο χειρισμό συμβόλων χωρίς να συνδέονται με συγκεκριμένες καταστάσεις - , οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να τις εφαρμόσουν πρακτικά.

Το αποτέλεσμα είναι ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν το νόημα των καταστάσεων για να περιορίσουν τα λάθη που κάνουν στην κατανόηση των τυπικών μαθηματικών συστημάτων, ενώ η τυπική μαθηματική γνώση – στο βαθμό που γίνεται κατανοητή – δεν χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

ΜΠΑΙΝΟΥΝ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΜΕΤΑ ΤΑ

Στάδια επίλυσης προβλήματος.

Οι στρατηγικές των μαθητών

Η εκμάθηση στρατηγικών είναι ο ζητούμενος σκοπός και στόχος για το μαθητή, αφού μέσα απ΄ αυτές κατανοεί, θυμάται, μαθαίνει νέες πληροφορίες και αποκτά ικανότητες [175]

Κάποιες στρατηγικές μπορούν να παρατηρηθούν όπως π.χ. μέσα από τις σημειώσεις που κρατά κάποιος ή το σχεδιασμό της λύσης του προβλήματος. Πολλές όμως δεν παρατηρούνται, αφού αποτελούν νοητική διεργασία λ..χ. η κατανόηση ή η ενεργοποίηση της προηγούμενης εμπειρίας. Στη βιβλιογραφία [176] γίνεται αναφορά σε 3 τύπους μαθησιακών στρατηγικών:

1. **γνωστικές στρατηγικές** (cognitive strategies): διαχείριση του υλικού προς μάθηση μέσα από διάφορους τρόπους π.χ. την επαναδιοργάνωση, την ομαδοποίηση, την ένταξη κάποιας νέας έννοιας και το συσχετισμό με τις ήδη γνωστές.

[175] **Weinstein** C.E , Mayer R.E, 1986, The teaching of learning strategies In M.R. Wittrock (Ed.) Handbook of research on teaching (pp. 315-327) 3rd ed. New YorkQ Macmillan.

[176] **Chamot A.**, **Dale M., O' Malley M., Spanos G.,**1992, Learning and Problem solving strategies of ESL student, Bilingual Research journal, 16-3&4 Summer/Fall, 1992

2. **μεταγνωστικές στρατηγικές** (metacognition strategies): για την παρακολούθηση και την εκτίμηση της μάθησης.
3. **κοινωνικοσυναισθηματικές στρατηγικές** (socio-affective strategies): ο μαθητής ζητά βοήθεια από τους συνομηλίκους του ή συνεργάζεται σε ομάδες με άλλους.

Στα Μαθηματικά οι στρατηγικές, που μπορεί να ακολουθήσει ο μαθητής, για την επίλυση προβλήματος, βασίζονται στο μοντέλο του Polya Οι σημαντικότερες στρατηγικές, που μπορούν να ακολουθηθούν για την επίλυση, είναι οι παρακάτω[177]

[177] **Polya, G.,** 1991, Πώς να το λύσω, σελ.68 Μεταφρ Ψυακκή Ξ., Επιμ Πατρώνης Τ., εκδ Καρδαμίτσα.

Στρατηγικές επίλυσης προβλήματος
1. Αναλογία 2. Απαγωγή σε άτοπο και έμμεση απόδειξη 3. Γενίκευση 4. Διάσπαση και Ανασύνθεση 5. Δουλεύοντας προς τα πίσω 6. Ειδίκευση (Μετάβαση από το γενικό στο ειδικό) 7. Επαγωγή 8. Σχηματική αναπαράσταση

Οι στρατηγικές, που παρατηρήθηκαν μετά την κωδικοποίηση των διαλόγων των μαθητών της ΠΟ, ήταν:

Οι μαθητές διατύπωσαν εικασίες, ενώ στη συνέχεια προσπάθησαν μέσα από τον πειραματισμό να τις επιβεβαιώσουν και να τις ερμηνεύσουν. Άλλες φορές στηρίχθηκαν σε στοιχεία από τη θεωρία ή σε δραστηριότητες που προηγήθηκαν και τις δοκίμασαν με το λογισμικό.

Συγκρίνοντας τις στρατηγικές των μαθητών θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

1. Αρχικά οι απαντήσεις των μαθητριών ήταν πιο λιτές, χωρίς αιτιολογήσεις, χρησιμοποιούσαν αριθμητικές πράξεις:

   Απαγωγική στρατηγική

2. Με το λογισμικό, οι μαθήτριες δοκίμασαν τις υποθετικές σκέψεις τους, πειραματίστηκαν, επαλήθευσαν τα δεδομένα τους, διαπίστωσαν κανονικότητες, έκαναν διαδικασίες προοδευτικών κατασκευών:

   Επαγωγική στρατηγική

Οι απαγωγικές στρατηγικές είναι συντομότερες από τις επαγωγικές, αλλά δε είναι εύκολο να προσεγγιστούν από τους αδύνατους μαθητές.[178](**Γι΄ αυτό από παιδαγωγική άποψη, οι εμπειρικές διαδικασίες των προοδευτικών κατασκευών, που υποστηρίζονται από το λογισμικό, βοηθούν περισσότερο και οδηγούν σε καλύτερη κατανόηση.**

[178] **Κόσσυβας, Γ.,** 1996, η Πρακτική του Ανοιχτού Προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο, Gutenberg.

Οι Στάσεις τους

Στάσεις των μαθητών για τα μαθηματικά.

[101] : Τα μαθηματικά δεν μου αρέσουν , με βοήθησε το μάθημα όπως έγινε να τα αγαπήσω λίγο.

10] : ΟΧΙ τα μαθηματικά δεν μου αρέσουν καθόλου…όχι το ρόγραμμα δεν με βοήθησε να τα αγαπήσω περισσότερο… αν λαζε κάτι σε μένα με τον υπολογιστή…θα γίνονταν λίγο πιο κολα……..

20]: εμένα δεν μου αρέσουν τα μαθηματικά και ούτε μου εσαν ποτέ….. άμα χρησιμοποιούσα πιο πολλές φορές Η/Υ. θα βοηθούσε να τα καταλάβω καλύτερα ….όχι όμως και να τα απήσω!!

09]: δεν μου άρεσαν τόσο πολύ τα μαθηματικά… γιατί έπρεπε κάνεις πολλές πράξεις, τώρα που είδα ότι ο υπολογιστής τορεί να με βοηθήσει νομίζω ότι αν είχα έναν υπολογιστή και ν χρησιμοποιούσα συχνότερα κάτι θα άλλαζε στην μπεριφορά μου για τα μαθηματικά!

04]:ΚΑΘΟΛΟΥ δεν αγαπώ τα μαθηματικά , αν δούλευα με τολογιστή θα είχα περισσότερη βοήθεια……

έλλειψη αγάπης για τα μαθηματικά

[102] : μου αρέσουν τα μαθηματικά.. αυτό το το πρόγραμμα βοήθησε αυτούς που τους αρέσουν λίγο να τους αρέσουν περισσότερο. Αλλά αυτούς που μισούν τα μαθηματικά δεν βοηθάει στα συναισθήματα, αλλά στην κατανόηση . Σε αυτούς που αρέσουν είναι το ίδιο. Για μένα πιστεύω

δεν θα άλλαζε κάτι. Τα μαθηματικά πρέπει να τα αγαπήσει κάποιος στο χαρτί! Ο υπολογιστής βεβαίως και βοηθάει , δεν αρκεί μόνον αυτός,(Η/Υ.) όσο ενδιαφέροντα πράγματα και να κάνεις , αν δεν σου αρέσουν δεν γίνεται τίποτα. Δεν γίνεται τίποτα με το ζόρι!!!

[106] Ναι , μου αρέσουν τα μαθηματικά αν χρησιμοποιούσα περισσότερο τον υοπολογιστή θα μάθαινα να λύνω πράγματα – προβλήματα- που θα ήταν χρήσιμα.

11] τα μαθηματικά μου αρέσουν αρκετά ,όμως αυτό το ρόγραμμα δεν με βοήθησε να τα αγαπήσω περισσότερο. ι με τις δύο μεθόδους διδασκαλίας δεν βρίσκω καμία σκολία…είναι εύκολα

[103] : μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά γιατί βάζεις το μυαλό σου να δουλέψει. Αν χρησιμοποιούσα συχνότερα υπολογιστή δεν θα άλλαζε κάτι, όμως θα ήθελα πιο πολύπλοκα πράγματα.

Αγάπη και ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

Μπαινουν μετα τις στρατηγικες των μαθητών

Η έννοια της αναπαράστασης

Δεδομένου ότι στην παρούσα μελέτη διερευνώνται οι αναπαραστάσεις των μαθητών σχετικά με τις υπό μάθηση έννοιες, θεωρούμε σκόπιμο να προβούμε σε ένα στοιχειώδη εννοιολογικό προσδιορισμό του όρου από τη σκοπιά της Γνωστικής Ψυχολογίας.

Η έννοια της αναπαράστασης (representation), που πολύ συχνά χρησιμοποιείται στον πληθυντικό με τη λέξη «αναπαραστάσεις», είναι όρος της γνωστικής Ψυχολογίας και υιοθετείται από τις γνωστικές και εποικοδομιστικές θεωρίες της μάθησης με βάση την οποία η γνώση προσεγγίζεται και οικοδομείται νοητικά μέσω των γνωστικών λειτουργιών και των γνωστικών σχημάτων.

Αναπαράσταση κατά τον Fort (1990) είναι ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ο κάθε άνθρωπος κινητοποιεί τις προηγούμενες γνώσεις του και διαμορφώνει μια

προσωπική νοητική εικόνα του κόσμου, δηλαδή ένα σύστημα αναπαραστάσεων, με βάση το οποίο σταδιακά αφομοιώνει νέες γνώσεις.

Σύμφωνα με τις εποικοδομιστικές προσεγγίσεις, οι μαθητές φιλτράρουν και επεξεργάζονται τα ερεθίσματα που δέχονται, επιλέγουν τι και πώς θα μάθουν. Οι μαθητές οικοδομούν τις γνώσεις τους στηριζόμενοι στην προϋπάρχουσα εμπειρία και ή συμπληρώνουν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις ή αμφισβητούν και απορρίπτουν τις πρότερες εμπειρίες τους, τις συγκρίνουν με τα νέα δεδομένα, αναθεωρούν και αναδιοργανώνουν τις απόψεις τους. Η έννοια λοιπόν της αναπαράστασης είναι κάποιες φορές μια μερική εικόνα της πραγματικότητας που ο μαθητής εξελίσσει, οικοδομώντας γνώσεις σύμφωνα με τη δική του πορεία μάθησης σε αλληλεπίδραση με το κοινωνικό περιβάλλον.

Μια διαφορετική προσέγγιση [179]υποστηρίζει ότι η αναπαράσταση μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα από το πενταπλό πρίσμα: η αναπαράσταση είναι ένα υποκατάστατο για το αντικείμενο που αναπαρίσταται, είναι η συζήτηση για τον τρόπο που σκεφτόμαστε για τον κόσμο, συγκροτεί μια αποσπασματική θεωρία της σκέψης, είναι ένα μέσο οργάνωσης πληροφοριών χρήσιμων για την εξαγωγή συμπερασμάτων και τέλος αποτελεί ένα μέσο έκφρασης.

Η προϋπάρχουσα γνώση μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στην κατανόηση καινούργιων εννοιών, γιατί οι μαθητές στηρίζονται σε γεγονότα που είναι άμεσα αντιληπτά με τις αισθήσεις ή τις περιορισμένες μη συστηματικές παρατηρήσεις[180] Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές δύσκολα αλλάζουν, αφού οι μαθητές αγνοούν πληροφορίες που ανατρέπουν τις απόψεις τους ή τείνουν να τις προσαρμόζουν, ώστε να μπορούν να τις εντάξουν στα εννοιολογικά σχήματα που ήδη κατέχουν [181] Η ανάδειξη και μελέτη των αναπαραστάσεων (αναλυτικά στο Baron, Bruillard and Dansac 1999) προσεγγίζεται μέσω:[182]

1. Της γλώσσας, μια καλή πρόσβαση στις γνωστικές αναπαραστάσεις (αν και εξαρτάται από τις γλωσσικές δεξιότητες του υποκειμένου που μελετάται).

---

[179] **Κόλλιας Α., Μαργετουσάκη Αθ., Κόμης Β., Γουμενάκης Γ.,** 2000, «Αναπαραστάσεις μαθητών του δημοτικού για τις νέες Τεχνολογίες όπως αναδύονται από τη χρήση εννοιολογικών χαρτών και κειμένων», Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της επικοινωνίας στην εκπαίδευση, 2^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή συμμετοχή, Πάτρα.

[180] **Driver, R., Guesne, E., & Tiberghien, A**, 1993, οι ιδέες των παιδιών στις Φυσικές Επιστήμες, Αθήνα: Τροχαλία, Ένωση Ελλήνων Φυσικών

[181] **Wandersee, J. H., Mintzes, J, J , Novak, J, D,** 1994, Research on alternative conception in science. Στο D. Gabel (Επιμ), Handbook of research on science teaching and learning, 177-210, New York: Macmillan

[182] Λυκοσκούφη Ε. σελ. 68

2. Της μελέτης σχεδίων και της ζωγραφικής γενικότερα, εστιάζοντας στην παρουσία ή απουσία ορισμένων χαρακτηριστικών του αντικειμένου που μελετάται.
3. Της εννοιολογικής χαρτογράφησης (concept mapping) που συνδυάζει την ελεύθερη έκφραση των ιδεών (με εικόνες, σχήματα και λέξεις) καθώς και τη σύνδεση ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες έννοιες. (Κόμης, Β., Φείδας, Χ., 2002).

Οι έρευνες για το θέμα των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά είναι πολλές. Οι έρευνες αυτές ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τομείς[183] (βλ σχετικά Γαγάτσης, 2003).

4. Θεωρία των αναπαραστάσεων ή αναπαραστάσεις και θεωρία μάθησης.
5. Αναπαραστάσεις και επίλυση προβλήματος.
6. Αναπαραστάσεις και ειδικές μαθηματικές έννοιες.
7. Αναπαραστάσεις και μεταφρασιμότητα μεταξύ τους.

Η δική μας έρευνα ασχολείται αρχικά με τη διερεύνηση των αναπαραστάσεων των μαθητών σχετικά με την έννοια του Πυθαγορείου θεωρήματος.[184] Επίσης, στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, οι μαθητές χειρίζονται πληροφορίες σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης (εικονικό, αριθμητικό, γεωμετρικό). Το πέρασμα και η μετάφραση από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο δεν είναι πάντα φυσικό και αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος [185](στο Γαγάτσης 2003: Ασβεστά, Γαγάτσης, 1995; Gagatsis, 1997; Duval, 1987; Janvier, 1987; Gagatsis & Michaelidou, 2002; Gagatsis, 2000).

[183] **Ασβεστά, Α., Γαγάτσης, Α.,** 1995, Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης σελ 84 Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Art of text.
[184] Άλλες εργασίες που επικεντρώνουν τη μελέτη των αναπαραστάσεων σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια είναι των Markou & Gagatsis,2002; 2003; Ioannou & Gagatsis, 2003.
[185] **Ασβεστά, Α., Γαγάτσης, Α.,** 1995, Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης. Στο Γαγάτσης (Ed.) Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Art of text.

Ο ρόλος των στάσεων

Ως στάσεις θεωρούνται τα αρνητικά ή θετικά συναισθήματα που μπορεί να έχει κάποιος ως προς «κάτι» (Koballa, 1988) και εκφράζεται μέσα από δηλώσεις όπως «μου αρέσει», ή «το απολαμβάνω». Κατά τον Thurstone η στάση αποτελεί το σύνολο των αισθήσεων, ιδεών, συναισθημάτων και πεποιθήσεων ενός υποκειμένου σε σχέση με κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο, ενώ για τους Allport (1964) και Stoetzel (1963) η στάση δεν έχει σχέση μόνο με το γνωστικό τομέα αλλά είναι και η προδιάθεση του υποκειμένου για δράση.[186]

Η έννοια «στάση»κατά τον Χασάπη [187]ορίζεται ως μια δομημένη από αντίστοιχες εμπειρίες νοητική και συναισθηματική κατάσταση του ατόμου, που ασκεί μια κατευθύνουσα επίδραση στις αντιδράσεις του απέναντι στο περιεχόμενο και τις δραστηριότητες των μαθηματικών.

Η σημασία των συναισθημάτων και των στάσεων των μαθητών σε ό,τι αφορά την επιτυχία τους στα Μαθηματικά τονίζεται σε όλα τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών και θεωρείται αναπόσπαστο μέρος κάθε προσπάθειας για εκσυγχρονισμό [188]

Αποτελέσματα ερευνών δηλώνουν ότι οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των μαθητών διαμορφώνουν τη μαθηματική τους συμπεριφορά, παίζουν σημαντικό ρόλο στη μάθηση των Μαθηματικών [189]και στη διατήρηση του ενδιαφέροντος για τα Μαθηματικά (Eccless et al, 1985) επίσης επηρεάζουν θετικά ή αρνητικά την επίδοσή τους[190].

Οι πεποιθήσεις και οι στάσεις των μαθητών διαμορφώνουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο εργάζονται, άλλες φορές δρώντας διευκολυντικά και άλλες επηρεάζοντας αρνητικά την προσπάθειά τους [191] Σε εμπειρική έρευνα του Δ. Χασάπη (1994) για «*Τις*

---

[186] Λυκοσκούφη Ε. σελ.69

[187] **Χασάπης, Δ.,** 1994, Στάσεις των αποφοίτων του Δημοτικού σχολείου απέναντι στα Μαθηματικά: Δεδομένα και διαπιστώσεις μιας Εμπειρικής Έρευνας, Σύγχρονη Εκπαίδευση, τχ 79

[188] **Χρίστου,Κ., Φιλίππου, Γ.,** 1999, «Άτυπα μοντέλα προβλημάτων αναλογίας», 16ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Λάρισα, εκδ ΕΜΕ, σελ. 138-151

[189] **Garofalo, J., Lester, J.,** 1985, Metacognition, cognitive Monitoring, and mathematical Performance, Journal for research in mathematics Education 16, pp163-176

[190] **Γιαλαμά Β., Κασιμάτη Αικ., Καραγεώργος, Δ.,** 1998, Η επίδραση του ψυχοκοινωνικού περιβάλλοντος της τάξης, στις στάσεις των μαθητών και την επίδοσή τους στο μάθημα των Μαθηματικών, Εκπαιδευτικά 49-50.

[191] **Cobb, P**., 1995, Mathematical learning and small-group interaction: four case studies. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures (pp.25-130). New Jersey: Hillsdale.

στάσεις των αποφοίτων του Δημοτικού σχολείου απέναντι στα Μαθηματικά» διαπιστώθηκε ότι:

- Το 40% των μαθητών θεωρεί το μάθημα **δύσκολο**, το 82% το βρίσκει **ενδιαφέρον**, το 70% **ευχάριστο** και **όχι κουραστικό**.
- Οι **στάσεις** των μαθητών διαφοροποιούνται σε μεγαλύτερο βαθμό με βάση το κριτήριο του κοινωνικο-οικονομικού επίπεδου των γονέων τους, απ΄ ό,τι με βάση το κριτήριο του φύλου.

Στη μη διαφοροποίηση ανάμεσα στα φύλα και στην ύπαρξη πολύ θετικών στάσεων και αντιλήψεων για τα Μαθηματικά, καταλήγουν και τα αποτελέσματα της Τρίτης Διεθνούς έρευνας για τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες[192]

Σε μελέτη του Παπακωνσταντίνου (1998) με δεδομένα της TIMS (1995) βρέθηκε ότι στην Ελλάδα, η διδασκαλία και τα κίνητρα επηρεάζουν τις στάσεις των μαθητών. Επίσης βρέθηκε ότι οι στάσεις και οι αντιλήψεις των μαθητών δεν έχουν επίδραση στην επίδοση.

Ο ρόλος του φύλου

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, σε όλο τον κόσμο υπήρχαν διαφορές στην εκπαίδευση των αγοριών και των κοριτσιών (Brusselmans-Dehairs C, Henry G., 1994). Σε πολλές περιπτώσεις έχει φανεί ότι οι γονείς, στο πλαίσιο της διαφοροποίησης των ρόλων των δύο φύλων, τονίζουν τη σπουδαιότητα ορισμένων τομέων ή μαθημάτων ή τείνουν να αναγνωρίζουν ορισμένες ικανότητες περισσότερο στα αγόρια, παρά στα κορίτσια και να τα ενθαρρύνουν προς διαφορετικές κατευθύνσεις σύμφωνα με τα κρατούντα στερεότυπα. Σε σχέση με το θέμα αυτό, η Hoffman (1972) συμπέρανε ότι οι γονείς ενθαρρύνουν την ανεξαρτησία στα αγόρια περισσότερο από ό,τι στα κορίτσια, ενώ οι MacCoby και Jacklin (1974) κατέληξαν στα συμπέρασμα ότι οι γονείς προσδοκούν στα χρόνια του δημοτικού σχολείου καλύτερη σχολική επίδοση από τα κορίτσια. Το αντίθετο ισχύει όμως για την εφηβεία. Σύμφωνα με τους Parsons et al (1976), οι γονείς φαίνεται να έχουν χαμηλότερες προσδοκίες για τα κορίτσια στην εφηβική ηλικία, παρά για τα αγόρια [193] Σήμερα, γίνονται προσπάθειες ώστε να δοθούν

[192] **Μουσταϊρας, Π., Σκαρτσίλα Π.,** 2002, Οι στάσεις, οι αντιλήψεις και η επίδοση των μαθητών του Δημοτικού σχολείου στα Μαθηματικά και στη μελέτη του Περιβάλλοντος και η διαφοροποίησή τους σε σχέση με το φύλο, τον τόπο της κατοικίας και ανάλογα με την προσπάθεια, Αντιτετράδια Εκπαίδευσης 2002, τχ 60-61, σελ 88-103

[193] **Φλουρής, Γ.,(1989)**, Αυτοαντίληψη σχολική επίδοση και επίδραση γονέων, Αθήνα: Μ.Π. Γρηγόρης σελ 29

σε όλους τους μαθητές ίσες ευκαιρίες ανάπτυξης των ικανοτήτων τους, ανεξάρτητα από το φύλο τους.[194]

Στην εκπαιδευτική βιβλιογραφία, το φύλο αναφέρεται ως μια σημαντική εξωγενής μεταβλητή. Από τις έρευνες, που έχουν γίνει, αναφέρουμε κάποια συμπεράσματα που σχετίζονται με το φύλο και την επίδοση των μαθητών:

1) Η επίδοση των αγοριών ήταν καλύτερη από αυτή των κοριτσιών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ενώ το μέγεθος της διαφοράς ποίκιλε σε μεγάλο βαθμό (Fennema, 1985, Maccoby & JJacklin 1974, Meece, Kaczala & Meece 1982).
2) Οι διαφορές εντοπίζονταν σε ορισμένες περιοχές των μαθηματικών (Husen, 1976, Hanna 1989).
3) Σε μελέτη της Hanna (1994), με δεδομένα της SIMS, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στο δημοτικό τα κορίτσια απέδιδαν το ίδιο με τα αγόρια αλλά αργότερα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αναδύονταν διαφοροποιήσεις, με τα κορίτσια να έχουν μικρότερες επιδόσεις (Miles & Middleton, 1990).
4) Μετα-αναλυτικές ανασκοπήσεις (Friedman, 1989, Frost, Hyde & Fennema, 1994, Hyde et al, 1990) για τις διαφορές των φύλων στα Μαθηματικά, αποκάλυψαν ότι οι διαφορές στην απόδοση ήταν πολύ μικρές ή μειώνονταν με το πέρασμα του χρόνου. Οι διαφορές σε σχέση με τις στάσεις και τις επιδόσεις ήταν επίσης μικρές (Frost et al., 1994). Τα αποτελέσματα της μετα-ανάλυσης των Ma & Kishor (1997), έδειξαν ότι οι διαφορές των φύλων σε σχέση με τις στάσεις και την επίδοση ήταν τόσο ασθενείς, ώστε δεν είχαν κάποια πρακτική εφαρμογή.
5) Τέλος, η επίδραση του φύλου στην επίδοση θεωρείται έμμεση και προσδιορίζεται από την προσπάθεια των μαθητών να πραγματοποιήσουν τις προσδοκίες τους όσον αφορά την επαγγελματική τους απασχόληση (Μουσταίρας Π, 2002).

Ο ρόλος της Αυτεπάρκειας - Αυτοπεποίθησης των μαθητών

Σύμφωνα με τη θεωρία της αντίληψης της επάρκειας του Εαυτού(που πρώτος διατύπωσε ο Bandura, 1977a), οι άνθρωποι αναπτύσσουν πεποιθήσεις για τις ικανότητες και τα χαρακτηριστικά τους σε σχέση με συγκεκριμένους τομείς. Οι

[194] Λυκοσκούφη Ε. σελ. 70

πεποιθήσεις αυτές καθοδηγούν τη συμπεριφορά τους προσδιορίζοντας τις προσωπικές τους επιδιώξεις, το επίπεδο των επιχειρούμενων επιτευγμάτων τους, το βαθμό της προσπάθειας που καταβάλλουν κατά την απόδοσή τους στη συγκεκριμένη κατάσταση ή στον συγκεκριμένο τομέα. Η αυτεπάρκεια καθορίζει πώς και σε ποιο βαθμό το άτομο θα εφαρμόσει τη γνώση που νομίζει ότι έχει, επομένως και σε ποιο βαθμό και σε ποια κατεύθυνση θα προσανατολίσει τις δυνατότητες και τις ευκαιρίες της προσωπικής του ανάπτυξης[195] (Κουγιουμτζάκης , 1995 επιμ., στο Ράπτη Αθ.).

Ο Bandura όρισε την «αυτεπάρκεια» ως μια υποκειμενική *εκτίμηση που κάνει το άτομο, όσον αφορά τη δυνατότητά του να οργανώσει και να εκτελέσει μια σειρά ενεργειών για την αποτελεσματική επίτευξη ενός έργου ή την αντιμετώπιση μιας κατάστασης*[196] Η αυτεπάρκεια, με άλλα λόγια, αναφέρεται στις πεποιθήσεις που έχουμε για το κατά πόσον θα μπορέσουμε να φέρουμε σε πέρας με επιτυχία μια δραστηριότητα ή να αντεπεξέλθουμε αποτελεσματικά στις απαιτήσεις ενός ρόλου ή μιας προβληματικής κατάστασης.

Όπως αναφέρει ο Bandura (Bandura 1989), η αυτεπάρκεια είναι ένας γνωστικός, ενδοπροσωπικός παράγοντας, που μαζί με άλλους, παίζει ρόλο στην άσκηση από μέρους του ατόμου ενός βαθμού προσωπικού ελέγχου πάνω στα κίνητρά του. Τα άτομα βασίζονται εν μέρει στις πεποιθήσεις τους σχετικά με την αυτεπάρκειά τους, προκειμένου να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως τι είδους εναλλακτικές λύσεις και στόχους-προκλήσεις έχουν να επιλέξουν, πόση προσπάθεια αξίζει να καταβάλουν, πόσο θα επιμείνουν σε περίπτωση αντιμετώπισης εμποδίων, ενώ από τις διεργασίες στις οποίες εμπλέκονται οι πεποιθήσεις αυτές επηρεάζεται ανάλογα και ο συναισθηματικός τομέας της προσωπικότητάς τους (π.χ., ο βαθμός στον οποίο τα άτομα γίνονται ευάλωτα στο στρες και στην αίσθηση της ανικανότητας να αντεπεξέλθουν σε διάφορες δυσκολίες).

Η συναισθηματική διάσταση της αυτεπάρκειας επηρεάζει καθοριστικά τη συμπεριφορά τους. Όταν οι άνθρωποι βλέπουν αρνητικά τον εαυτό τους μέσα σε μια κατάσταση, πιστεύουν ότι δεν είναι αποτελεσματικοί και ότι δεν έχουν την ικανότητα να αποδώσουν καλά. Τότε διεγείρονται συναισθηματικά και προκαταλαμβάνονται εναντίον του εαυτού τους, με αποτέλεσμα να αποσπώνται από την αποτελεσματική τους απόδοση.

---

[195] Λυκοσκούφη σελ.71

[196] **Bandura, A**, 1977b, Social learning theory, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Επιπλέον στην έννοια της αυτεπάρκειας μπορεί να υπεισέλθει ο παράγοντας «αυτοπεποίθηση», «αισιόδοξη ή απαισιόδοξη στάση απέναντι στις ποικίλες προκλήσεις έργου ή επιτευγμάτων». Σ΄ αυτή την περίπτωση, η αισιοδοξία με την οποία βλέπει το άτομο τον εαυτό του, επηρεάζει τον τρόπο που βιώνει τα προσδοκώμενα ή επιθυμητά επιτεύγματα. Η παραπάνω διαπίστωση σχετικά με την υποκειμενικότητα της αυτεπάρκειας και τη σημασία της αισιοδοξίας και της αυτοπεποίθησης του ατόμου έχει επαληθευθεί σε πληθώρα ερευνών αναφερομένων σε ποικιλία καταστάσεων.

Οι πεποιθήσεις των ατόμων περί αυτεπάρκειάς τους προέρχονται από το ιστορικό των επιτυχιών τους σε έναν τομέα, από την παρατήρηση και σύγκριση με όσα μπορούν να επιτύχουν οι άλλοι. Οι Bandura και Schunk (1981) έδειξαν επίσης ότι η αύξηση της αυτεπάρκειας μπορεί να βελτιώσει την ανάπτυξη των γνωστικών δεξιοτήτων των παιδιών και να προαγάγει το εσωτερικό ενδιαφέρον τους σε ακαδημαϊκά έργα. Η αυτεπάρκεια, με άλλα λόγια, αναφέρεται στις πεποιθήσεις που έχουν για το κατά πόσον θα μπορέσουν να φέρουν σε πέρας με επιτυχία μια δραστηριότητα ή να ανταπεξέλθουν αποτελεσματικά στις απαιτήσεις ενός ρόλου ή μιας προβληματικής κατάστασης και σχετίζεται με το βαθμό επιτυχούς έκβασης της σχολικής επίδοσης[197]

Η εμπειρική έρευνα έχει δώσει ενδιαφέροντα αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση της αυτοπεποίθησης στη μαθηματική επίδοση (Crosswhite, 1972, Fennema & Sherman, 1977, Armstrong, 1980). Οι μαθητές με αυτοπεποίθηση αισθάνονται καλύτερα με τον εαυτό τους, ενδιαφέρονται περισσότερο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, τείνουν να μαθαίνουν περισσότερα.[198]

Για τους παραπάνω λόγους, η ανάπτυξη της εμπιστοσύνης των μαθητών στις δυνάμεις τους, η αυτοπεποίθηση καθώς και η αισιόδοξη και ανοιχτή στάση απέναντι σε νέες καταστάσεις αποτελούν αναπτυξιακούς στόχους της σχολικής εκπαίδευσης εξίσου σημαντικούς και συνεπώς αξίζουν διερεύνησης.

Θα μελινει στο νέο κεφάλαιο

Ενίσχυση αυτοπεποίθησης

Άλλες φορές, μέσα από τα λόγια των μαθητών, βλέπαμε ότι: αισθάνονταν ότι «γνώριζαν» **και συνεπώς δεν έβλεπαν να τους βοηθάει ο υπολογιστής. Ας**

---

[197] **Helmke, A.,** 1992, Selbstvetrauen und schulische Leistung Gottingen: Hongrefe
[198] Λυκοσκούφη ,Ε. σελ.72

σημειωθεί ότι οι μαθητές, που είχαν πειραματιστεί με την σχετική δραστηριότητα με τις διάφορες κλίμακες, ένιωθαν σίγουροι (ενίσχυση αυτοπεποίθησης) **ότι το είχαν καταλάβει. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις** γνώσεις που είχαν **και τις συνέδεσαν με την άσκηση που έλυναν**

Δυσκολίες των μαθητών στην έννοια του Πυθαγορείου θεωρήματος

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η υπόσταση του λάθους στην μαθηματική κοινωνία. Στην τάξη η υπόσταση του λάθους αλλάζει ανάλογα με το εάν ο μαθητής βρίσκεται σε μία κατάσταση εκμάθησης δια προσαρμογής ή σε μία κατάσταση επανεπένδυσης. Αυτή η υπόσταση συνδέεται επίσης με την αντίληψη της εκμάθησης, κονστρουκτιβιστικής ή [199]εμπειρικής.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ
Παίρνουν άριστα στα λάθη τα γραπτά των μαθητών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ[200]

«Γολγοθάς» η Γεωμετρία

Σύμφωνα με τους ερευνητές παρατηρείται μια γενική δυσκολία απόδοσης στα θέματα που προέρχονται από τη Γεωμετρία, αν και φαίνεται μερικά από αυτά να συγκεντρώνουν μεγάλη προτίμηση για τους μαθητές όπως π.χ. το κλασικό Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αυτή η δυσκολία μεγαλώνει όταν τα θέματα αφορούν ασκήσεις και χρειάζεται να εφαρμοστεί η θεωρητική γνώση σε προβλήματα. Επίσης υπάρχει σημαντικός αριθμός μαθητών που δεν έχει αποσαφηνίσει βασικές έννοιες (όπως π.χ. ποια είναι η υποτείνουσα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ή το γεγονός ότι η εγγεγραμμένη σε διάμετρο κύκλου γωνία είναι ορθή) και επομένως δυσκολεύεται πάρα πολύ στην επίλυση σχετικών ασκήσεων. Η συμπεριφορά των μαθητών απέναντι σε θέματα που σχετίζονται με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δείχνει μια σαφή τάση αποφυγής κυρίως σε ό,τι αφορά θέματα θεωρίας.

---

[199] Claire Margol;inas Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των μαθηματικών,μετάφραση Ε. Τσιμπλικάκη εκδόσεις Σαββάλας, σελ.144

[200]ΕΘΝΟΣ 7/4/2005 http://www.xkatsikas.gr/typos/typos49.htm

Ο Shulman [201] τονίζει τη σημασία του παιδαγωγικού πλαισίου της μάθησης. Ο δάσκαλος οφείλει να ερευνά τι είναι εύκολο ή δύσκολο για τους μαθητές του μέσα από τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους και σκέψεις τους στις διάφορες ηλικίες και σύμφωνα με την κουλτούρα τους. Εάν υπάρχουν παρανοήσεις, οφείλει να ασχοληθεί με την αναδιοργάνωση των λαθεμένων σχημάτων που έχουν οι μαθητές.[202]

Για να πετύχει η αποτελεσματική διδασκαλία της έννοιας του Πυθαγορείου θεωρήματος, ο δάσκαλος πρέπει να λάβει υπόψη του τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες των μαθητών οι οποίες είναι οι παρακάτω:

- Αδυναμία στο εντοπισμό της υποτείνουσας.
- Αν αλλάξει η θέση του ορθογωνίου τριγώνου δεν «βρίσκουν» τις κάθετες πλευρές.
- Δυσκολία στην εύρεση των τετραγώνων των δοθέντων αριθμών.
- Το τετράγωνο ενός αριθμού δεν μπορούν να το ¨δουν ¨ως εμβαδόν.
- Δεν γνωρίζουν αν ένας αριθμός γράφεται ως τέλειο τετράγωνο (αναφερόμεθα σε μικρούς αριθμούς, π.χ.$9=3^2$, $16=4^2$)
- Αν και οι πλευρές αποτελούν φυσικά μεγέθη πολλές, φορές βάζουν και αρνητικό πρόσημο όταν βγάλουν μία τετραγωνική ρίζα.
- Έχουν γλωσσικές δυσκολίες όταν μελετούν ένα πρόβλημα.

Για έναν μαθηματικό το λάθος και η έννοια του λάθους είναι κομμάτι της έρευνας.

Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος περνάει από δύο αναγκαίες φάσεις εξέλιξης:

- 1^{ον} Τη σύνταξη μίας απάντησης
- 2^{ον} Την σκέψη εάν αυτή η απάντηση έχει έννοια. Θεωρητικά, εάν το πρώτο στάδιο μπορούσε να πραγματοποιηθεί με κάθε αυστηρότητα από ένα μυαλό προστατευμένο από το λάθος , το οποίο θα λειτουργούσε όπως ένας υπολογιστής, το δεύτερο στάδιο θα αποδεικνυόταν περιττό και άχρηστο. Πρακτικά , οι δύο φάσεις είναι απαραίτητες: τόσο τα ασήμαντα όσο και τα

[201] **Shulman, L.S.,** 1986, Those who understand: knowledge growth in teaching, Educational Researcher, 15, pp. 1-22

[202] Bell, A., Swan, M., Taylor, G., 1981, Choice on operation in verbal problems with decimal numbers, Educational studies in Mathematics, 12, 399-420.
Michailidou, C., Williams, J., 2003a, Children' s arguments in discussionof the difficult ratio problem: The role of the pictorial representation. Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME3).

σημαντικά λάθη πολλαπλασιάζονται και δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι δεν έμμεινε κανένα εάν δεν τα ελέγξουμε.(Barry Cibbra,1985)[203]

- Για να δώσουμε νόημα σε ένα λάθος ,σε μία συγκεκριμένη κατάσταση , πρέπει να αναφερόμαστε στην εκ των προτέρων ανάλυση. Μερικά λάθη θα προβλέπονται από την κατάσταση και θα είναι χαρακτηριστικά μιας κατάστασης της γνώσης που θα έπρεπε να ξεπεραστεί. Μπορεί να είναι βασικό να προκύπτουν λάθη για να επιτρέψουν να ξεπεραστούν συνειδητά οι λανθασμένες αντιλήψεις. Στο πλαίσιο καταστάσεων που προορίζονται για να προκαλέσουν μία εκμάθηση δια προσαρμογής, το λάθος είναι μία από τις κινητήριες δυνάμεις αυτών των καταστάσεων. η αναγνώριση αυτού του λάθους ανήκει στην αρμοδιότητα του ίδιου του μαθητή στη φάση επικύρωσης.

«Όποιος υπηρετεί την επιστήμη γνωρίζει καλά ότι η δύναμή της δεν οφείλεται σε κάποιο εσωτερικό αλάνθαστο, αλλά αντίθετα στην ικανότητά της να αυτοδιορθώνεται ασταμάτητα»

Cibra(1985)

Δυσκολίες των μαθητών με τις έννοιες λόγου και αναλογίας

Οι ερευνητές έχουν περιγράψει διάφορους παράγοντες που θεωρούν ότι συνδέονται με τις δυσκολίες που συναντούν τα παιδιά όταν λύνουν λεκτικά προβλήματα αριθμητικής. Η οικειότητα του περιεχομένου και το είδος των ποσοτήτων που χρησιμοποιούνται , καθώς και το μέγεθος των αριθμών μπορεί να επηρεάσουν την δυσκολία του προβλήματος. Ένα πρόβλημα μπορεί να είναι πιο δύσκολο αν οι αριθμοί είναι στην κλίμακα των εκατοντάδων ή και μεγαλύτεροι(Collins, 1975) , ;ή εάν είναι δεκαδικοί (Bell κ.ά. [204] Ένας άλλος παράγοντας είναι η σχέση ανάμεσα στην κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα και στην σωστή πράξη.

Μερικές φορές , η ενέργεια που υποδηλώνει ένα πρόβλημα συγκρούεται με την πράξη που χρειάζεται πραγματικά, όπως για παράδειγμα , όταν ένα πρόβλημα

[203] Claire Margol;inas Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των μαθηματικών.σελ145,μετάφραση Ε. Τσιμπλικάκη εκδόσεις Σαββάλας,
[204] Βοσνιάδου Σ, Η Ψυχολογία των Μαθηματικών εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1998 σελ.90

υποδηλώνει αφαίρεση αλλά λύνεται με πρόσθεση, η το αντίστροφο. (Nesher,Greeno &Riley, 1982. Nesher & Teubal, 1975).

Τα παιδιά μπορεί να έχουν δυσκολίες επειδή συνδέουν κατά απόλυτο τρόπο τις αριθμητικές πράξεις με ορισμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα μπορεί να πιστεύουν ότι ο «πολλαπλασιασμός μεγαλώνει έναν αριθμό» και η «διαίρεση μικραίνει έναν αριθμό» (Bell κ.ά , 1981). Ο Vergnaud (1983) έχει αναπτύξει μία θεωρία για τα επιστημολογικά εμπόδια που συναντούν τα παιδιά όταν μαθαίνουν πολλαπλασιαστικές δομές.[205]

Στην εκπαιδευτική έρευνα στο χώρο των μαθηματικών έχει καταγραφεί ύπαρξη λανθασμένων αντιλήψεων και δυσκολιών των μαθητών σχετικά με την έννοια της αναλογίας και του λόγου. Εξαιτίας λοιπόν της *σπουδαιότητας* του θέματος, οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας έγιναν στόχος εκπαιδευτικών ερευνών όπως :

1. Τα λάθη των μαθητών (Hart 1984).
2. Τις δυσκολίες στη λύση προβλημάτων λόγου/ αναλογίας (Karplus, Pulos & stage 1983).
3. Τις μεταβλητές που επιδρούν στην επιλογή στρατηγικών και τη λύση προβλημάτων (Hart , Behr, Post & Lesh 1991, Kaput & West 1994).

Αρκετές έρευνες (μεταξύ άλλων των Hart, 1984, Clarkson 1990, Schliemann and Nunes, 1990), *αναφέρονται* στις δυσκολίες που συναντούσαν οι μαθητές στις αναλογίες με την παραδοσιακή διδασκαλία.

Σύμφωνα με τον Streefland [206] οι δυσκολίες είναι:

1. Οι μαθητές σκέφτονταν **προσθετικά και όχι πολλαπλασιαστικά**. Είναι γνωστό ότι οι προσθετικές στρατηγικές, ως τρόπος σκέψης, επιμένουν στους μαθητές για πολλά χρόνια, γεγονός που ο Vergnaud το αποδίδει στο ότι πολλές μαθηματικές έννοιες (π.χ. μέτρηση, σύγκριση, μετασχηματισμοί, διαφορά, κ.λπ.) σχετίζονται με προσθετικές δομές. Η δυσκολία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα [207](Hart, 1984), οφείλεται στους εξής λόγους:

[205] Βοσνιάδου Σ, Η Ψυχολογία των Μαθηματικών εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1998 σελ. 91.
[206] **Streefland**, L.: 1984, Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards…a theory) Part I: Reflections on a teaching experiment., Educational Studies in Mathematics, 15(4), 327-348.
[207] **Hart, K.**, **M., Brown, M.,L., Kuchemann, D., E., Kerslake, D., Ruddock, G., McCartney, M.,** 1986, Children's understanding of Mathematics :11-16, John Murray

a. Για πολλούς μαθητές, ο πολλαπλασιαστικός κανόνας ήταν ένα «τέχνασμα» που δεν καταλάβαιναν το βάθος του. Οι μαθητές αρχικά χρησιμοποιούσαν πίνακες και ακολουθούσαν τις προσθετικές στρατηγικές, λειτουργώντας σε ένα ενδιάμεσο στάδιο, που τους βοηθούσε να περάσουν στον πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης. Πολλές φορές ανέτρεχαν σε εμπειρίες και δεξιότητες που χαρακτήριζαν προηγούμενα επίπεδα, ξεπερνώντας τις νοητικές δυσκολίες του τρέχοντος επιπέδου. Οι μαθητές, χρησιμοποιώντας τους πίνακες τιμών, μπορούσαν ευκολότερα να κατανοήσουν τον κανόνα του πολλαπλασιασμού, αφού αρχικά έκαναν αναγωγή στη μονάδα και στη συνέχεια πολλαπλασίαζαν με τον ανάλογο αριθμό.
b. Οι μαθητές έβρισκαν δυσκολία στους υπολογισμούς, λόγω της περιορισμένης κατανόησης στις πράξεις (πολλαπλασιασμού και διαίρεσης), στα κλάσματα και στους δεκαδικούς (Van de Brink, Streefland, 1979). Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές απέφευγαν να χρησιμοποιούν τα κλάσματα και ακολουθούσαν τη στρατηγική των ωραίων αριθμών (Harel et al, 1994).

2. Η λύση και οι μέθοδοι που εφάρμοζαν οι μαθητές είχε σχέση με το πρόβλημα που είχαν να λύσουν. Η **δυσκολία του προβλήματος** καθόριζε τις στρατηγικές που θα ακολουθούσαν οι μαθητές. Έτσι ένας μαθητής, ενώ χρησιμοποίησε την πολλαπλασιαστική στρατηγική σε ένα πρόβλημα με ακεραίους, στη συνέχεια, χρησιμοποίησε τον προσθετικό συλλογισμό σε πρόβλημα που δεν περιείχε ακεραίους (fall-back strategy). Κατά τον Tourniaire, το περιεχόμενο των προβλημάτων έπαιζε σημαντικό παράγοντα στην επίλυσή του. Τα ευκολότερα ήταν αυτά που παρουσίαζαν οικείες καταστάσεις για τα παιδιά και μπορούσαν να τα αντιμετωπίσουν χρησιμοποιώντας βοηθητικό υλικό, ενώ τα προβλήματα μίξης ήταν τα δυσκολότερα, διότι χρησιμοποιούσαν συνεχείς ποσότητες και ήταν δυσκολότερο να τα συλλάβουν σαν έννοια. Οι μαθητές συχνά αγνοούσαν μέρος από τα δεδομένα σ΄ ένα πρόβλημα (Tourniaire and Pulos, 1985).

3. Στη Γεωμετρία, σε θέματα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης, τα παιδιά συχνά ξεχνούσαν να ελέγξουν αν το σχήμα μετά το μετασχηματισμό ήταν το ίδιο με το αρχικό (Clarkson, 1989).
4. Τα παιδιά είχαν πρόβλημα με την έννοια της ομοιότητας. Φαίνεται να δυσκολεύονταν να συγκρίνουν δύο σχήματα και να ελέγξουν αν ήταν όμοια.

Οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα να αιτιολογούν, χρησιμοποιώντας αναλογικές σχέσεις με τον καιρό και μετά την ηλικία των 12 ετών. Η ικανότητα αυτή είναι τόσο μεγάλης σημασίας, που αξίζει οποιοσδήποτε χρόνος και προσπάθεια να ξοδευτεί για τη βέβαιη και προσεκτική ανάπτυξή της. [208]

Το να παρουσιάσεις στους μαθητές μια έννοια όπως ο λόγος, είναι το ίδιο δύσκολο όπως άλλωστε και άλλες (Oldham et al 1999, Frederik et al 1999). Οι δάσκαλοι, για να μπορέσουν να βοηθήσουν τους μαθητές τους στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, πρέπει να γυρίσουν το χρόνο στις δικές τους εμπειρίες, να θυμηθούν τα επίπεδα σκέψης που πέρασαν ως μαθητές, τις δυσκολίες που συνάντησαν και να επανα-ανακαλύψουν τις έννοιες με τους μαθητές τους. Οι γνώσεις που έχουν για τη σκέψη των παιδιών και τις αναπαραστάσεις τους για την έννοια της κλίμακας, θα τους βοηθήσουν να επιλέξουν ποιες παιδαγωγικές στρατηγικές θα εφαρμόσουν. Ο Grossman (1990) αναφέρει ότι οι επιλογές ενός δασκάλου οδηγούνται από τις γνώσεις του για :

1. Το περιεχόμενο της έννοιας.
2. Τις εκπαιδευτικές στρατηγικές.
3. Τις αναπαραστάσεις της σκέψης των παιδιών και των προηγούμενων γνώσεων που έχουν
4. Το γενικότερο Πρόγραμμα Σπουδών και το Πρόγραμμα Σπουδών του αντικειμένου.

Εξαιτίας της δυσκολίας που οι μαθητές συναντούν με τις ανωτέρω έννοιες, πραγματοποιήθηκε έρευνα όπου οι δάσκαλοι παρακολούθησαν μαθήματα όχι μόνο για να γνωρίσουν τις νέες προσεγγίσεις στη διδασκαλία του λόγου-αναλογίας αλλά και για να καταλάβουν σε βάθος τις έννοιες. Ο Streefland (1985) αναφέρει σαν κύριο

[208] **Λυκοσκούφη Ε.** Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με την βοήθεια υπολογιστή από μια διαθεματική – δομητιστική προσέγγιση. Διδακτορική διατριβή Αθήνα (2005) σελ. 59-60.

πρόβλημα των εμποδίων και των δυσκολιών που είχαν οι δάσκαλοι με τις αναλογίες την περιορισμένη μαθηματική γνώση, με αποτέλεσμα να κάνουν υπολογισμούς χωρίς να καταλαβαίνουν το γιατί.

Σε μια μελέτη του Johnson (1989), επισημαίνεται ότι οι δάσκαλοι αποτυγχάνουν, γιατί **δε λαμβάνουν υπόψη τους τις ιδέες και τις στρατηγικές των παιδιών πριν την έναρξη της διδασκαλίας.** Επιπλέον, το πρόβλημα εντοπίζεται και στην **έλλειψη σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης με την καθημερινή εμπειρία των μαθητών**. Η αναλογία είναι ένα θέμα που απαιτεί μάθηση για μεγάλο χρονικό διάστημα. **Η έννοια χτίζεται από διαισθητικές ιδέες σε λειτουργικές εφαρμογές, όπου μέσα από τη σύγκρουση και τη σκέψη οδηγείται ο μαθητής στη συνειδητοποίηση.**

Ο Thompson (1984) σημειώνει ότι τα πιστεύω των δασκάλων για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους επηρεάζονται από τις δικές τους εμπειρίες για τα μαθηματικά από το σχολείο. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις μελέτες των Zbiek (1998) και Tirosh (2000), που υποστηρίζουν ότι οι δάσκαλοι ταλαιπωρούνται και δυσκολεύονται με τα ίδια προβλήματα που είχαν και ως μαθητές. Επί πλέον, στο γνωστικό περιεχόμενο, οι δάσκαλοι **έχουν ανάγκη από παιδαγωγική στήριξη του περιεχομένου** (Shulman, 1986**) για το πώς να διδάξουν τις αναλογίες και τα κλάσματα**.

Μια έρευνα(1983) αναφέρεται στις « Στρατηγικές που ακολουθήθηκαν από τους καθηγητές των μαθηματικών για την επίλυση προβλημάτων αναλογιών». Από τα ευρήματα της έρευνας, διαπιστώθηκε ότι 74% των απαντήσεων ήταν ορθές. Οι *απαντήσεις ήταν σχεδόν όλες σωστές στα ευθέα θέματα*, ενώ *οι μισές ήταν ορθές στα αντίστροφα.* Δεν υπήρχε διαφοροποίηση, όταν χρησιμοποιούσαν αναλογικές στρατηγικές. Οι καθηγητές της κατώτερης βαθμίδας (middle school) είχαν λιγότερο επιτυχείς απαντήσεις από τους καθηγητές της ανώτερης (hight school) εξαιτίας των θεμάτων με τα αντίστροφα προβλήματα. Οι στρατηγικές, που ακολούθησαν, διαφοροποιούνταν ανάλογα με το πρόβλημα. Ο **τύπος της αναλογίας** χρησιμοποιήθηκε πολύ περισσότερο από κάθε άλλη αναλογική στρατηγική. Η προσθετική στρατηγική δεν χρησιμοποιήθηκε. Η πλειοψηφία έδειξε ότι **χρησιμοποιούσαν τους ίδιους τρόπους για να λύσουν και να διδάξουν**. Μερικοί επέλεγαν άτυπους τρόπους προσέγγισης. Οι περισσότερο μοναδικές και έξυπνες λύσεις επιχειρήθηκαν σε αντίστροφα προβλήματα για τα οποία πολλοί δεν είχαν έτοιμες λύσεις.

Ακόμη, πραγματοποιήθηκαν τρεις μικρού μεγέθους μελέτες σε δασκάλους (pre-service teachers)(Broekman, H., Ton van der valk, Wijers, M.). Η **πρώτη** αφορούσε τις γνώσεις των δασκάλων πάνω στην έννοια της αναλογίας. Η **δεύτερη** αφορούσε προετοιμασία μαθήματος για την κλίμακα. Δόθηκε προσοχή στη σχέση κλίμακας και λόγου καθώς και στη χρήση παραστάσεων και βοηθητικού υλικού. Η σχέση λόγου /αναλογίας με την έννοια της κλίμακας δεν ήταν αυτονόητη. Χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα ως εισαγωγή της έννοιας κλάσμα αναλογίας ή ήταν ένα ανεξάρτητο αντικείμενο που προϋποθέτει κάποια γνώση των ανωτέρω εννοιών;

Η **Τρίτη** αφορούσε μια συζήτηση μεταξύ δύο δασκάλων για το πώς χρησιμοποιούσαν τους πίνακες τιμών σε σχέσεις αναλογιών. Από τη μεταξύ τους συζήτηση καταλαβαίνουμε ότι γνώριζαν να τους χρησιμοποιούν, χωρίς να καταλαβαίνουν σε βάθος τη μεταξύ τους σχέση, γι αυτό άλλωστε ο Shulman (1986) μίλησε για παιδαγωγική στήριξη «***τρόποι αναπαράστασης και παρουσίασης του αντικειμένου ώστε να είναι κατανοητό στους άλλους***». Επί πλέον, εξαιτίας του «επιπέδου αφαίρεσης» (Van Hiele, 1986), ξεχνούσαν τις αρχικές βασικές γνώσεις. Για να εξηγήσουν το θέμα στους μαθητές τους και να κατανοήσουν τα εργαλεία (πίνακες αναλογιών) ή τις στρατηγικές που τα σχολικά βιβλία χρησιμοποιούν, ήταν ανάγκη να τις ξανασκεφτούν.

Ακόμη, παρατηρήθηκε ότι οι δάσκαλοι δεν αντιμετώπιζαν γνωστικό πρόβλημα. Όμως, από την άλλη όλοι είχαν το πρόβλημα ότι θεωρούσαν την έννοια αυτή αυταπόδεικτη και επί πλέον **είχαν τη δυσκολία να εκφράσουν τις ιδέες τους με λέξεις**. Αυτό ήταν και μια έκπληξη γι΄ αυτούς.

> « *Μια δασκάλα εξηγεί ότι δεν μπορούσε τίποτα άλλο να σκεφτεί παρά ότι λόγος ήταν ένα κλάσμα και δεν μπορούσε να θυμηθεί πώς εκείνη το είχε μάθει. Αναζήτησε να το διδάξει στους μαθητές της με τον τρόπο που εκείνη είχε διδαχθεί την έννοια του λόγου.* »

Κάποιοι παρατήρησαν ότι λόγος και κλάσμα δεν ήταν το ίδιο, αλλά δεν μπορούσαν να εκφράσουν τη διαφορά. Όλοι είχαν το πρόβλημα να μαντέψουν τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών για το λόγο. Όλοι οι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν παραδείγματα από την καθημερινή ζωή πχ συστατικά μιας συνταγής ή χρήματα. Μόνο ένας χρησιμοποίησε την ομοιότητα των σχημάτων (και εδώ ήταν η μόνη περίπτωση που χρησιμοποίησε οπτική βοήθεια μέσα από τη χρήση πίνακα και χάρτη). Άλλα εργαλεία,

όπως η αριθμογραμμή, ο πίνακας αναλογιών, κυκλικά διαγράμματα, δε χρησιμοποιήθηκαν.

Παρατηρήθηκε **έλλειψη στη χρήση αναπαραστάσεων και βοηθητικού υλικού (manipulative)**, καθώς και **γνώσεις πάνω στις προηγούμενες γνώσεις των παιδιών**. Ίσως οι μαθητές να είχαν περισσότερες γνώσεις αλλά να μην μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τους λόγους, γιατί ήταν έννοια αφηρημένη και γενική γι΄ αυτούς.

Οι έννοιες λόγου/ αναλογίας μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως γέφυρα που θα επέτρεπε στους μαθητές να σκεφτούν μαθηματικά σ΄ ένα ανώτερο επίπεδο (Lesh, Post and Behr, 1998). Οι δάσκαλοι δε, που χρησιμοποιούσαν μια ποικιλία αναπαραστάσεων και ευέλικτων τρόπων σκέψης, βοηθούσαν τους μαθητές τους να μεταβούν από άτυπες κατασκευαστικές στρατηγικές, σε λύσεις αλγεβρικές με ένα τρόπο πιο φυσικό. (Parker, M., 1999)

Οι Misailidou και Williams (2003) χρησιμοποίησαν σχηματικές αναπαραστάσεις (pictorial model) δηλαδή αναπαράσταση του προβλήματος με εικόνες και προτείνουν ότι αυτές διευκόλυναν τόσο την επιλογή της στρατηγικής τους (ζωγραφίζοντας ή ομαδοποιώντας) όσο και τη μεταξύ τους συζήτηση στη μικρή ομάδα.

Σε έρευνα των Κ. Χρίστου και Γ. Φιλίππου (1999), μελετήθηκαν τα άτυπα μοντέλα που οικοδομούσαν οι μαθητές της Δ΄ και Ε΄ τάξης για τη λύση προβλημάτων αναλογίας. Το άτυπο μοντέλο της αναγωγής στη μονάδα δοκιμάστηκε αυτόματα από τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων, ενώ για τους μικρότερους μαθητές το μοντέλο λειτούργησε περιοριστικά των προσπάθειών τους. **Η προ-αναλογική σκέψη επέτρεψε τη λύση προβλημάτων αναλογίας**, **χωρίς να σημαίνει αυτό ότι οι μαθητές είχαν κατανοήσει βασικές δομές σχέσεων που χαρακτήριζαν τον αναλογικό τρόπο σκέψης.**

Το μοντέλο (της αναγωγής στη μονάδα) δεν ήταν μηχανικό, με την έννοια της απομνημόνευσης κάποιου κανόνα, αλλά προϋπόθετε την κατανόηση τουλάχιστον μερικών δομών της αναλογίας και ήταν αποτελεσματικό, όταν η τιμή ενός αντικειμένου ήταν ακέραιος αριθμός.

Σε έρευνα των Ε. Παπαγεωργίου και Κ. Χρίστου (1999), μελετήθηκαν οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας από μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξεις Δημοτικού σχολείου στη Λευκωσία. **Η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διάφορες στρατηγικές ανάλογα με τη δομή και τους αριθμούς του προβλήματος.** Με μεγαλύτερη συχνότητα χρησιμοποιούσαν την αναγωγή στη

μονάδα, συνέπεια της προηγούμενης εμπειρίας τους σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Τέλος, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές δεν είχαν ολοκληρωμένη αντίληψη όλων των σχέσεων που διέπουν μια αναλογική σχέση, αφού **οι στρατηγικές που εφάρμοζαν σχετίζονταν με τις ποσοτικές διαφορές των αριθμών που βρίσκονταν στους όρους της αναλογίας**.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς οφείλονται κυρίως σε έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης. Γαγάτσης , 2004 σελ. 168.

Από έρευνα των Γαγάτση Αθ. , Λάμπη Στ. και Ντζιαχρήστου Ε. πάνω στις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων αναλογίας από Έλληνες μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, παρατηρήθηκαν τα εξής: οι μαθητές πετύχαιναν σε ερωτήσεις που αφορούσαν τις αναλογίες, ενώ αποτύγχαναν, όταν είχαν να εξετάσουν αν υπήρχε αναλογία ή όταν το γενικό πλαίσιο του προβλήματος ήταν περίπλοκο, ένδειξη της μη κατανόησης της έννοιας της αναλογίας. Οι μαθητές προοδευτικά αυξανόμενοι σε μεγαλύτερες τάξεις **χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο των τριών**, μέθοδο που δεν διδάσκεται στο Δημοτικό ή το Γυμνάσιο αλλά «ανεπίσημα» καλλιεργείται σε άλλα γνωστικά αντικείμενα όπως Φυσική, Χημεία, κλπ. Αυτό κατά τη γνώμη των ερευνητών ήταν ένδειξη της μη καλής κατανόησης των αναλογιών. Δηλαδή οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τη **μέθοδο αυτή που βασίζεται σε μνημονικούς κανόνες** και δεν συνδέεται καθόλου με την έννοια του λόγου. Η μέθοδος της αναγωγής στη μονάδα, αν και την καλλιεργούσαν στο δημοτικό σχολείο, δεν χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές στην επίλυση των προβλημάτων που τους δόθηκαν. Το σημαντικότερο στοιχείο στην έρευνα φάνηκε να ήταν **οι πηγές πολιτισμικού τύπου**(τα βιβλία και οι υποδείξεις του δασκάλου), **που επηρέασαν το περιεχόμενο διδασκαλίας αλλά και τις μεθόδους, πέρα των προβλημάτων κατανόησης και μάθησης των αναλογιών.**

Προηγούμενη ερευνητική εμπειρία έχει δείξει ότι τα παιδιά που χρησιμοποιούσαν υπολογιστικά εργαλεία **ακολουθούσαν διαφορετικές στρατηγικές** από τις συνηθισμένες, όταν δούλευαν με χαρτί και μολύβι (**di Sessa & Abelson**, 1981**, Harel & Papert**, 1991, **Hoyles & Noss**, 1996) και ειδικότερα με προβλήματα αναλογιών (**Hoyles & Sutherland**, 1989, **Hoyles & Noss**, 1989).

Πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις διδακτικές στρατηγικές που εφάρμοζαν οι μαθητές για τη λύση των προβλημάτων με αναλογίες. Η **Hart** (1981) παρουσίασε το ξερίζωμα της προσθετικής στρατηγικής με χρήση διδακτικού υλικού σε υπολογιστή. Η

έρευνά της σημείωσε επιτυχία παρέχοντας στο δάσκαλο μεθόδους χρήσης από τους μαθητές αλλά και αιτίες για χρήση.

Οι **Hoyles και Noss** (1996) ερεύνησαν τη χρήση του περιβάλλοντος της Logo σε προβλήματα αναλογίας. Θέλησαν να ερευνήσουν τον τρόπο που σκέφτονταν οι μαθητές, σε προβλήματα που δεν ήταν εύκολη η προσομοίωσή τους, παρά μόνο η παρακολούθηση μιας γραφικής παράστασης σε σχέση με τις αριθμητικές τιμές που χειρίζονταν. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι δουλεύοντας με τη Logo, **οι ιδέες έρχονται στους μαθητές πιο φυσικά και γίνονται μέρος του πολιτιστικού κόσμου τους**. Στη Logo δεν υπάρχει κενό ανάμεσα στην άτυπη και την τυπική αναπαράσταση της μεθόδου από τους μαθητές. Έτσι **τα παιδιά μπορούσαν να αναπτύξουν τα διαισθητικά τους σχήματα και να κάνουν γενικεύσεις και τυποποιήσεις** (**Sutherland**, R., 1989).

Δόθηκαν στους μαθητές όμοια σχήματα να κατηγοριοποιηθούν και να αιτιολογήσουν τις κατατάξεις τους. Θέλησαν να εξετάσουν την έννοια της ομοιότητας όπως τη χρησιμοποιούσαν στην καθημερινή γλώσσα και την ειδικότερη σημασία της στα μαθηματικά. Στην περίπτωση που τους δόθηκε ένα γράμμα και μεγεθύνσεις αυτού, παρατηρούσαν ότι προέκυπτε το ίδιο γράμμα, αφού αυτό είχε μεγαλύτερη σημασία στην καθημερινή ζωή, ενώ στη συνέχεια προχωρούσαν και σε μαθηματικούς συλλογισμούς π.χ. στη μεταξύ τους σχέση, τη σχέση των τμημάτων που σχηματίζουν το γράμμα, κ.λπ.

Η ενασχόληση με το δυναμικό περιβάλλον της Logo οδήγησε στη χρήση της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής, ενώ στις παραδοσιακές μεθόδους δεν είχαμε τα ίδια αποτελέσματα. Στη συνέχεια σε γραπτές απαντήσεις εμφάνιζαν μια ασυνέπεια δηλ χρησιμοποιούσαν προσθετικές και πολλαπλασιαστικές στρατηγικές. Δεν μπορούσαν ακόμη να διακρίνουν την αναγκαιότητα της πολλαπλασιαστικής λειτουργίας στη λύση προβλημάτων. Συμπερασματικά, σε **μη υπολογιστικό περιβάλλον, οι μαθητές δυσκολεύονταν να χρησιμοποιήσουν την πολλαπλασιαστική στρατηγική**.

Σύμφωνα με τον Vance (1986) μερικοί μαθητές δυσκολεύονται να τοποθετήσουν σε σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς. Θεωρούν οτι ο μεγαλύτερος αριθμός είναι αυτός που έχει τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Δυσκολίες επίσης παρουσιάζουν οι μαθητές όταν τους ζητείται να βρούν έναν αριθμό μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών . επί παραδείγματι δυσκολεύονται πολύ να βρούν έναν αριθμό ανάμεσα στο 0.1 και 0,2

ενώ δυσκολεύονται σαφώς λιγότερο όταν ο ζητούμενος αριθμός είναι ανάμεσα στον αριθμό 0,15 και στον αριθμό 0,20 (Thomson & Walker, 1996)[209]

Κατά την διαδικασία πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς εντοπίστηκε μετά από έρευνες και η εξής παρανόηση : όταν βάζεις 0 στο τέλος ενός δεκαδικού αριθμού τον κάνεις 10 φορές μεγαλύτερο(Bell, Swan &Taylor , 1981)

Ο τομέας των ρητών αριθμών ήταν πάντα δύσκολος για να τον χειριστούν οι μαθητές του δημοτικού και οι έρευνες δείχνουν ότι υπάρχει έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης και θέτουν σε αμφισβήτηση τις υπάρχουσες μεθόδους διδασκαλίας των συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών..(Moss & Case , 1999)

Η Νι (2001) μετά από έρευνα σχετικά με τους ρητούς αριθμούς κατέληξε στο συμπέρασμα ότι πηγή των δυσκολιών για την κατανόηση της ισοδυναμίας των ρητών αριθμών είναι η πολλαπλασιαστική φύση της έννοιας , αλλά και η απόδοση της ίδιας της έννοιας με διαφορετικές αναπαραστάσεις που προσφέρουν πληροφορίες με διαφορετικούς τρόπους και απαιτούν διαφορετικούς τρόπους ερμηνείας.(Γαγάτσης 2004, σελ.204)[210] Οι μαθητές μετά από αποτελέσματα ερευνών δεν έχουν οικοδομήσει συνδέσεις ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση κάτι που καταδεικνύει την αποσπασματικότητα των γνώσεων αναφορικά με την έννοια του ρητού αριθμού. (Γαγάτσης, 2004, σελ.206)

Σύμφωνα με την μελέτη του Yetgin, - Elif στο “ Student Difficulties in Learning Mathematics.”(2003)(1/91) οι δυσκολίες των μικρών μαθητών εστιάζονται στην εκμάθηση και χρήση των συμβόλων

Οι Tirish, - Dina; Graeber,-Anna στο «The Effect of Problem Type and Common Misconceptions on Preservice Elementery Teacheres, Thinking about Division”(1991) έκαναν έρευνα σε δασκάλους σχετικά με τις παρανοήσεις και στις σκέψεις των προβλημάτων που αναφέρονται στην διδακτική ενότητα της διαίρεσης. SO: School-Science- and- Mathematics: V91 n4 p157-63 Apr.1991.(4/91)

Επίσης οι Graeber, Anna ; Baker,Kay παρουσιάζουν στο άρθρο τους με τίτλο “Curriculum Materials and misconceptions concerning multiplication and division So : Focus on learning problems in mathematics. V13 n3 p25-38 Sum 1991 (88/91) και ερευνούν τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές του δημοτικού, στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με αριθμούς δεκαδικούς.

[209] Πατσιομύτογλου Σ., (2005) sel. 36-37
[210] Πατσιομύτογλου Σ., (2005) sel. 36-37

Η Graeber, - Anna-O στο άρθρο της Reacherch into practice: Misconceptions about Multiplication and Divition.(1993,76/91) SO: Arithmetic Teacher. V40 n7 p408-11 mar 1993, μελετά τις φράσεις “multiplications makes bigger» and “division makes smaller” και βοηθά τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους με την βοήθεια δραστηριοτήτων και την κατανόηση των εννοιών.

Ανάλογη μελέτη που αφορούσε την δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων με την βοήθεια του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δεκαδικών αριθμών σε δασκάλους διεξήχθη από τους Thiplong, - Siriporn; Davis,-Edward-J. Ti: Preservice Elementery Teachers Misconceptios in Interpreting and Applying Decimals. So : School and mathematics v91 n3 p93-99 Mar 1991.

Ο Relf, -Simon στο ti: “The story of Frank, Aged Eleven.” So : Mathematics in School; v19 n2 p40-41 Mar 1990 (12/91) περιγράφει τα λάθη που γίνονται στην μέτρηση της παράπλευρης επιφάνειας των στερεών και του όγκου αυτών. Στο τέλος προτείνει αλλαγές στο πρόγραμμα σπουδών ώστε η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση να είναι ομαλότερη.

Οι Happs , John-C Mnsfield, Helen στο “Students and Teachers Perceptions of cognitive and affective outcomes of some lessons in geometry”(1989 24/91) μελέτησαν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην έννοια των παραλλήλων ευθειών. Η έρευνα διεξήχθη από δύο εκπαιδευτικούς και 12 μαθητές.

Ανάλογη έρευνα διεξήχθη από τους Mansfield, Helen –M;Happs,- John-C στο άρθρο τους με τίτλο “Using Grade Eight Students Existing Knowledge to teach about parallel “ SO : School Science and mathematics. V92 48 p450-54 Dec 1992 (78/91). . Αναφέρουν δυσκολίες που έχουν οι μαθητές στην έννοια των παραλλήλων ευθειών και παρουσιάζουν στρατηγικές από μέρους του δασκάλου ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές και να αλλάξουν τις λανθασμένες τους αντιλήψεις.

Επίσης επί αναλόγου θέματος εργάστηκε και ο Parzysz, Bernard στο άρθρο του με τίτλο “ Representational of space and students conceptions at high school level. 1991(89/91) SO: Educational studies in mathematics v22n6 p575-93 Dec.1991 η μελέτη αναφέρεται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευση.

Ο Clement, -John στην μελέτη του με τίτλο : «The concept of variation and misconceptions in Cartesian Graphing"(1989 25/91) So: Focus on learning problemsin mathematics;v11 n1-2 p77-87 Win-Spr 1989 παρουσιάζει δύο διαφορετικούς τύπους λαθών που εντοπίζονται κατά την διάρκεια των γραφικών παραστάσεων.

Ο Monaghan, Frank στην έρευνά του με τίτλο «What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals" 2000,30/91 so: Educational studies of mathematics . v42 n2 p179-196 ,μελέτησε, στη δευτέρα τάξη του γυμνασίου, τις παρανοήσεις των μαθητών στην θεωρία των πολυγώνων και την διάκριση αυτών σε κατηγορίες.

Η Barnes, Mary στο "Dealing with Misconceptios about Probability" (1998 31/94) So: Austrralian Mathematics Teacher. V54 n1 p17-20 Mar 1998 περιγράφει μερικά συνήθη λάθη που κάνουν οι μαθητές, ως προς τον τρόπο που σκέφτονται , σχετικά με τις πιθανότητες. Υποδεικνύει τρόπους ώστε να ξεπεραστούν αυτά τα λάθη.

Ο Ward, -Robin-A στο "Dominoes as Fractions : Misconception and undertandings" 1999(36/91)SO: Mathematics Teaching in Middle school περιγράφει μια δραστηριότητα σχετικά με πέντε κλάσματα και καλούνται οι μαθητές να τα ταξινομήσουν κατά αύξουσα σειρά . Παρέχεται τέτοια υποστήριξη ώστε οι μαθητές να ξεπεράσουν εμπόδια και παρανοήσεις.

Οι Oberdorf, -Christine- D; Taylor-Cox,-Jennifer στο άρθρο τους " Shap up!" SO: Teaching Children Mathematics. V5 n6 p340-346 Feb1999(39/91), δίνουν μία αναλυτική πορεία διδασκαλίας στο μάθημα της Γεωμετρίας στην ενότητα των πολυγώνων, βοηθώντας τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες των , αναζητώντας την πηγή του λάθους.

Ο Ness, Harald . M. στο άρθρο του με τίτλο "What is mathematics and why don't they know that? 1992(40/91), SO: Humanistic Mathematics network journal n7 p77-80 Apr. 1992. Μελετά την εικόνα – άποψη-των περισσοτέρων ανθρώπων για τα μαθηματικά και προτείνει τρόπους να ξεπεραστούν οι παρανοήσεις σε μαθηματικές έννοιες.

Οι Stacey,-Kaye; MacGregor, Mollie στο άρθρο τους με τίτλο "Building Foundation for Algebra,1997(44/91) SO: Mathematics teaching in middle school. V2 n4 p252-60 Feb 1997 περιγράφουν μερικές βασικές δυσκολίες στην άλγεβρα για αρχάριους και παρουσιάζουν στρατηγικές ώστε να ξεπεραστούν αυτές. Σημειώνουν ότι μετρά η διαδικασία επίλυσης προβλήματος και όχι μόνον η απάντηση, η κατανόηση του

συμβόλου της ισότητας, η κατανόηση των ιδιοτήτων των αριθμών , η δυνατότητα χρήσης όλων των αριθμών, καθώς και η εργασία με δραστηριότητες .

Ανάλογη εργασία παρουσιάζει η Margulies , Susan στο άρθρο της ti: "Tips for beginners" 1993(77/91)SO: Mathematics Teacher v86 n1 p40-41 jan 1993, όπου στην αρχή της σχολικής χρονιάς μέσα από ένα λογιστικό φύλλο με ερωτήσεις τύπου σωστό – εσφαλμένο οι μαθητές εργάζονται ξεπερνώντας δυσκολίες στην άλγεβρα.(σε αρχικό στάδιο). Οι ερωτήσεις βασίζονται σε λάθη που συνήθως κάνουν οι μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ….ΝΕΟΝ

Η Αξιολόγηση

Στις 20/02/2006, δόθηκε στους μαθητές και των δύο ομάδων το τελικό τεστ αξιολόγησης. Με αυτό θέλαμε να δούμε τις γνωστικές αλλαγές των μαθητών μετά την παρέμβαση. Τα φύλλα αξιολόγησης συγκεντρώθηκαν, μελετήθηκαν και αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό.

Οι συνεντεύξεις

Την επόμενη ημέρα (21/02/2006), ξεκίνησαν οι συνεντεύξεις των ομάδων της πειραματικής ομάδας. Η επιλογή της συνέντευξης έγινε, γιατί :

- βοηθάει στη συλλογή των στοιχείων και επιτρέπει τη διερεύνηση των σκέψεων των μαθητών σε μεγαλύτερο βάθος. «Παρέχει μια πρόσβαση σε αυτό που βρίσκεται μέσα στο κεφάλι ενός ανθρώπου», δίνει τη δυνατότητα να μετρηθεί τι γνωρίζει ένα άτομο (γνώση ή πληροφόρηση), τι αρέσει ή δεν αρέσει (αξίες και προτιμήσεις) και τι σκέφτεται ένα άτομο (στάσεις και πεποιθήσεις)[211]
- ως ερμηνευτικό εργαλείο, βοηθά να εντοπισθούν οι μεταβλητές και οι μεταξύ τους σχέσεις.[212]

[211] **Tuckman, W**., 1972, Conducting Educational Research, Harcourt Brace Jovanovich, New York.
[212] **Cohen L., Manion L.,** 1997, Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας, μτφ. Μητσοπούλου Χρ. και Φιλοπούλου Μ., εκδ. Μεταίχμιο και εκδόσεις Έκφραση. Σελ. 374

Η επιλογή της μη δομημένης συνέντευξης έγινε, γιατί παρείχε μεγαλύτερη ευελιξία και ελευθερία. Όπως λοιπόν σημειώνει και ο Kerlinger (1969), το περιεχόμενο, η διατύπωση και η αλληλουχία βρίσκονται στα χέρια αυτού που παίρνει την συνέντευξη, ο οποίος οφείλει να την έχει προσεκτικά σχεδιάσει σύμφωνα με τους στόχους της έρευνας.

Κάθε ομάδα συγκεντρώθηκε στο χώρο του εργαστηρίου, όπου οι μαθητές σχολίασαν το μάθημα και είπαν τις εντυπώσεις τους. Σε κάποιες περιπτώσεις, εστιάσαμε στις υποκειμενικές απαντήσεις του ερωτώμενου μαθητή, αφού τον προτρέψαμε να θυμηθεί την εμπειρία του, χωρίς να επηρεάζεται από την παρουσία των συμμαθητών του, να βρεθεί αυτό που υπήρχε στη σκέψη αχρωμάτιστο και ανεπηρέαστο από το δάσκαλο.

Οι ερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ανοιχτές, ώστε να μπορούμε να διευκρινίσουμε τι πράγματι συνέβηκε και τι πίστευαν οι μαθητές, ενθαρρύνοντας τη συνεργασία και τη δημιουργία επαφής και με πιθανότητα απρόβλεπτων και μη αναμενόμενων απαντήσεων.

Όπως σχολιάζει ο Tuckman (1972), χρησιμοποιώντας μη εξειδικευμένες ερωτήσεις μπορεί οι μαθητές να οδηγηθούν σε πλαγίως επιθυμητές πληροφορίες, που προκαλούν λιγότερη ανησυχία στους ερωτώμενους. Επιπλέον η επιλογή ομαδικής συνέντευξης (με άτομα που δούλεψαν στην ίδια ομάδα) έδωσε τη δυνατότητα να αναπτυχθεί συζήτηση, καθώς το κάθε παιδί προκαλούσε και διεύρυνε το ένα τις ιδέες του άλλου.

Σύμφωνα με τους Watts και Ebbutt (1987) οι «τέτοιες συνεντεύξεις είναι χρήσιμες»,[213] όταν μια ομάδα ατόμων έχει εργαστεί μαζί για ένα χρονικό διάστημα ή για κάποιο κοινό σκοπό. Επίσης θεωρείται σημαντικό ό,τι εκφράζει -λέει ο καθένας στην ομάδα του [214]

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο τύπος της συνέντευξης ήταν **εστιασμένος**, μια και στόχος μας ήταν να περιορίσουμε τη συζήτηση σε **συγκεκριμένα τμήματα** της εμπειρίας του ερωτώμενου. Μετά την προηγηθείσα ανάλυση και, αφού προσδιορίσαμε τις κύριες περιοχές της έρευνας, καθορίσαμε τα σημαντικά στοιχεία

[213] **Watts, M., and Ebbutt, D.,** 1987, “More than the sum of the parts: Research methods in group interviewing”, British Educational Research Journal, 13,1 σελ. 25-34

[214] **Cohen L., Manion L.,** 1997, Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας, μτφ. Μητσοπούλου Χρ. και Φιλοπούλου Μ., εκδ. Μεταίχμιο και εκδόσεις Έκφραση. Σελ. 395

που θα αναζητούσαμε στη συνέντευξη και τέλος συντάξαμε ένα ενδεικτικό οδηγό συνέντευξης.

Έγινε προσπάθεια να μην απασχοληθούν οι μαθητές σημαντικά και να μη διαταραχθεί η ισορροπία και το πρόγραμμα του γυμνασίου. Οι συνεντεύξεις συνεχίστηκαν και ολοκληρώθηκαν στις 23/02/2006

Οι σκέψεις των μαθητών σχετικά με το λογισμικό

Μετά την εμπειρία των μαθητών με τις δραστηριότητες του λογισμικού και την σύγκριση που κάνουν με την παραδοσιακή διδασκαλία της έννοιας του πυθαγορείου θεωρήματος στην τάξη, διατυπώνουν τις παρακάτω σκέψεις.

[106]…. Ήταν ευκολότερα με τον υπολογιστή…μπορείς ακόμα να το λύσεις το πυθαγόρειο θεώρημα γρηγορότερα από ότι με το χέρι!

[101] …..με βοήθησε πάρα πολύ.. πολύ πιο εύκολα από τον πίνακα.

[102].. με τον υπολογιστή είναι καλύτερα., γιατί όλα τα παιδιά με σχήματα και χρωματισμένες περιοχές καταλαβαίνουν πιο εύκολα την θεωρία. Βέβαια πρέπει να ξέρουμε να εργαζόμαστε και στο χαρτί και στον πίνακα. ..ήταν τόσο εύκολα μερικές φορές που καταντούσαν λίγο βαρετά..

Ευκολία διευκόλυνση κατανόηση

Ερευνήτρια : στην τάξη δεν το είχατε κατανοήσει;

[120] …με βοήθησε ο υπολογιστής… **μου έβαλε μία τάξη τις σκέψεις μου σχετικά με το Π.Θ**….στην τάξη εκεί που μας τα έλεγε ο καθηγητής δεν τα είχα καταλάβει καλά , δυσκολευόμουν, ενώ τώρα που τα κατασκεύασα η ίδια τα κατάλαβα αυτά που έλεγε ο καθηγητής.

Αυτοέλεγχος πειραματισμός βοήθεια

[104] …ό,τι έκανα το έβλεπα και το δοκίμαζα…..

[120} ..ό,τι λέγαμε μπορούσαμε να το κατασκευάζουμε στο υπολογιστή.

Πειραματισμός ενεργή συμμετοχή

[101]..η πρώτη δραστηριότητα ήταν σαν παιχνίδι…μου άρεσε που μετέφερα το ένα μεγάλο τετράγωνο στα δύο μικρά!

[104] .. μεταφέραμε τα χρωματισμένα σχέδια και τα δύο τετράγωνα γίνονταν ένα!

Παιχνίδι πειραματισμός οπτικοποίηση

[120] καταλάβαμε καλά το Π.Θ .και μπορούμε τώρα να το χρησιμοποιήσουμε στα διάφορα προβλήματα που μας δίνονται. Το μάθαμε το Π.Θ.

αυτοπεποίθηση ικανοποίηση χαρά

[111].....ενώ η διδασκαλία που παρακολούθησα ήταν σχετικά ενδιαφέρουσα , το Π.Θ. το ήξερα τόσο καλά από πριν οπότε δεν βοηθήθηκα επί πλέον στην κατανόηση του ….όμως αν χρησιμοποιούσα συχνότερα τον Η/Υ θα άλλαζαν κάποια πράγματα κυρίως σε ό,τι αφορά την ακρίβεια στον σχεδιασμό των σχημάτων μου……

[103] θα ήθελα κάτι πιο πολύπλοκο. Όχι τόσο απλά.

Υψηλότεροι στόχοι Αυτοαξιολόγηση βελτίωση

[110]: …όταν μεγάλωναν οι δύο πλευρές του τριγώνου ,(η μία κάθετος και η υποτείνουσα) η άλλη υποθέταμε ότι θα έμενε σταθερή…και πράγματι το σχήμα με τις πολλές αλλαγές μας το επιβεβαίωνε!

[109] : μεγαλώνοντας το ένα τετράγωνο από τα τρία περιμέναμε να μεγαλώσουν και τα άλλα δύο…μεγάλωναν όςο θέλαμε ..πολύ …στον πίνακα έκανα μόνον ένα σχήμα.

Εικασία -οπτικοποίηση

[120]: ..τώρα μπορώ να χρησιμοποιώ το Π.Θ. σε διάφορα προβλήματα που μας δίνονται….

Γενίκευση-επαγωγή

Από τις σκέψεις των παιδιών που συμμετείχαν στην παρέμβαση, διαπιστώνεται ότι τα παιδιά διευκολύνθηκαν από τον πειραματισμό.

Ήταν μια ευκαιρία για αυτούς να ξεπεράσουν τα εμπόδια που είχαν και να εμπεδώσουν το Π.Θ. Κατά την άποψή τους η

διευκόλυνση οφείλονταν στην οπτική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών και στις πολλές μεταβολές που γίνονταν άμεσα ορατές και αντιληπτές

Μέσα από την συνεχή αλληλεπίδραση με τον Η/Υ. οι μαθητές περνούσαν από το στάδιο της ανατροφοδότησης και η διδασκαλία με την βοήθεια του εργαλείου του Η/Υ , απέκτησε περισσότερο ενδιαφέρον από τον παραδοσιακό τρόπο στην τάξη.

Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν τα παιδιά στο λογισμικό

Ερευνήτρια: Βρήκες δυσκολία στην χρήση του λογισμικού;

[101] .. στην αρχή είχα μία δυσκολία στην χρήση του προγράμματος , αλλά μετά έμαθα και ήταν πολύ εύκολο….

[109]:… δυσκολευόμουν να βρίσκω τα τετράγωνα των αριθμών , τότε ήταν πιο εύκολο με το κομπιουτεράκι…

Δυσκολία στην εκμάθηση του λογισμικού

Ερευνήτρια : υπήρξε κάτι που σας δυσκόλεψε;

[104] αυτό που με δυσκόλεψε ήταν η διατύπωση της θεωρίας…τι κάναμε στο πρόγραμμα…αυτό που έβλεπα δεν μπορούσα να το πω …όμως το καταλάβαινα ..

γλωσσική δυσκολία

Οι μαθητές δεν είχαν εξοικειωθεί πολύ με τις δυνατότητες του λογισμικού όπως την εύρεση του τετραγώνου των αριθμών, ενώ τις αποστάσεις σημείων τις έβρισκαν εύκολα. Κάποια παιδιά «χάθηκαν» για λίγο αλλά μετά την παρέμβαση και την βοήθεια των άλλων παιδιών , που αποτελούσαν την ομάδα τους ή ακόμα και από άλλη ομάδα ξεπέρασαν τα λίγα λειτουργικά εμπόδια του λογισμικού, ενώ είχε αφιερωθεί μία ώρα ως προς την χρήση του λογισμικού. Σίγουρα δεν ήταν αρκετός ο χρόνος.

Ένα εμπόδιο πραγματικά μεγάλο για τα παιδιά ήταν το πέρασμα από τα ευθύγραμμα τμήματα στα τετράγωνα που προκύπτουν από αυτά, και το αντίστροφο! Αυτό το ξεπέρασαν στο τέλος μέσα από τον δικό τους πειραματισμό , τις συνεχείς αλλαγές των σχημάτων και την αυξομειώσει των τετραγώνων .

Οι εικόνες και οι αναπαραστάσεις είναι γνωστό ότι διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην διδασκαλία και την μάθηση των μαθηματικών[215] θεωρούνται απαραίτητα εργαλεία στο έργο των μαθηματικών.[216].

Προσεγγίσεις της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στα μαθηματικά

Τα τελευταία χρόνια, η έρευνα της διδακτικής των Μαθηματικών έχει ασχοληθεί ιδιαίτερα με την επίδραση της «βιγκοτσιανής» παράδοσης και με τη μελέτη της επικοινωνίας των μελών μιας τάξης και έχουν προσδιοριστεί δύο ερευνητικές προσεγγίσεις: *η **επικοινωνιακή*** **και** ***η αλληλεπιδραστική*** [217] ενώ για την κάθε μια έχουν δημιουργηθεί μεθοδολογικά εργαλεία που επιτρέπουν την μελέτη της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη.

Στην **επικοινωνιακή προσέγγιση** (communicational approach), «η σκέψη» μπορεί να μελετηθεί ως μια περίπτωση επικοινωνίας, αν τη θεωρήσουμε ως ένα συνεχή εσωτερικό διάλογο του ατόμου. [218]

Η μάθηση του μαθητή πραγματοποιείται μέσα από τη συμμετοχή του μαθητή σε δραστηριότητες ενώ το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάζεται στις αλληλεπιδράσεις που παρακινούν την ανάπτυξη αυτή. Στην επικοινωνία των μαθητών μεσολαβητικά εργαλεία (mediating tools) θεωρούνται η γλώσσα (κυρίαρχο εργαλείο) και πρόσθετα στα Μαθηματικά τα γραφήματα, οι πίνακες, οι μαθηματικοί τύποι, κλπ. Θεωρείται ότι παίζουν σημαντικό ρόλο και έχουν άμεση σχέση με τον τρόπο που οι μαθητές κατασκευάζουν τις έννοιες ή χρησιμοποιούν τα σύμβολα.

Στην **αλληλεπιδραστική προσέγγιση** (interactionism), το ενδιαφέρον των ερευνητών εστιάζεται στη μελέτη των τύπων αλληλεπίδρασης που εγκαθιδρύονται

---

[215] **Θεοδούλου Ρ., Γαγάτσης Α.**, 2003, «Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις… Ποιο είδος όμως βοηθά στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος;», 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Απρίλιος 2003, Αθήνα

[216] **Rival, 1987**, Picture puzzling: mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning, The Sciences, 27, 40-46.

[217] **Χαβιάρης Π., Καφούση, Σ., Καλαβάσης Φ.,** 2003, «Εργαλεία για την ανάλυση της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη των Μαθηματικών», 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Απρίλιος 2003, Αθήνα

[218] **Sfard, A.**, 2001, There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. Educational Studies in Mathematics. 46, 13-57

στη σχολική τάξη. Σύμφωνα με τον Voigt [219]βασική παραδοχή της προσέγγισης αυτής στα Μαθηματικά είναι ότι τα αντικείμενα μιας μαθηματικής συζήτησης είναι ασαφή, διότι επιδέχονται ποικιλία ερμηνειών. Ο μαθητής χρησιμοποιεί την προϋπάρχουσα γνώση, ενώ η ποικιλία ερμηνειών για το ίδιο το μαθηματικό αντικείμενο δημιουργεί ευκαιρίες μάθησης. Δάσκαλος και μαθητές δεν μοιράζονται τη γνώση, αλλά τα μαθηματικά νοήματα που παράγονται και θεωρούνται σαν να είναι κοινά (taken as shared).

Ο κάθε συμμετέχων ρυθμίζει τη δράση του σε συνάρτηση με αυτό που πιστεύει ότι είναι οι προσδοκίες και οι γνώσεις των άλλων συμμετεχόντων. Οι αποδέκτες της δράσης, την ερμηνεύουν ανάλογα με αυτό που πιστεύουν ότι είναι οι γνώσεις και οι προσδοκίες του υποκειμένου που ενεργεί. Αλληλεπιδρώντας, οι μαθητές συνθέτουν ένα μαθηματικό θέμα που είναι προϊόν της συνεισφοράς τους, χωρίς να μπορεί να εξηγηθεί επαρκώς μέσα από τις σκέψεις και τις προθέσεις του κάθε συμμετέχοντος ξεχωριστά. Κι ενώ αρχικά εστίαζαν σε διαφορετικές καταστάσεις, στη συνέχεια, παρακινούμενοι από τις σκέψεις και τη θέση του συνομιλητή τους, κατασκευάζουν νόημα για το συγκεκριμένο θέμα, το οποίο πιθανώς δεν θα μπορούσε να κατασκευαστεί από το μαθητή χωρίς τη διαπραγμάτευση. Δηλαδή, μια μαθηματική εξήγηση είναι μια κοινωνική διαδικασία και όχι μια ατομική ενέργεια. Συγκρίνοντας διαφορετικές τάξεις, μπορούμε να αναγνωρίσουμε διαφορετικές μικροκουλτούρες που τις χαρακτηρίζουν και οφείλονται στις καθημερινές αλληλεπιδραστικές διαδικασίες, που συμβαίνουν και καθοδηγούνται κυρίως από τις ενέργειες που εφαρμόζει ο κάθε δάσκαλος στην τάξη του.[220]

Τύποι αλληλεπίδρασης

Ο Voigt (1995) διακρίνει τους κάτωθι τύπους αλληλεπίδρασης:

- Ο μαιευτικός (elicitation pattern):

  Ο δάσκαλος προτείνει ένα ανοιχτό μαθηματικό θέμα και οι μαθητές δίνουν απαντήσεις και λύσεις. Ο δάσκαλος μέσα από τις κατάλληλες ερωτήσεις «εκμαιεύει» τη μαθηματική γνώση (Σωκρατική μέθοδος) ενώ στη συνέχεια δάσκαλος και μαθητές αξιολογούν τη γνώση που αποκτήθηκε.

[219] **Voigt, J.,** 1995, Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. In P.Cobb & H. Bauersfeld (eds) The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures, pp.163-201.LEA.

- Ο διαλογικός (discussion pattern):

Παρατηρείται στις διερευνητικές προσεγγίσεις διδασκαλίας των μαθηματικών. Χαρακτηριστικά του είναι: η επίλυση προβλήματος σε μικρές ομάδες, κάποιος μαθητής ανακοινώνει τη λύση και την εξηγεί, ο δάσκαλος συμβάλλει με ερωτήσεις για μια κοινά αποδεκτή λύση ή εξήγηση. Ο δάσκαλος τέλος ρωτά για διαφορετικούς τρόπους λύσης του προβλήματος. (Wood, 1995).

Διαφορές ανάμεσα στον μαιευτικό και διαλογικό τύπο αλληλεπίδρασης

Μαιευτικός τύπος	***Διαλογικός τύπος***
Η λύση είναι βασικός στόχος	***Η λύση είναι η αρχή για διαπραγμάτευση***
Ακολουθούνται βήμα-βήμα οι υποδείξεις του δασκάλου	***Η επικοινωνία προωθείται από τις συνεισφορές των μαθητών***
Οι ικανότητες των παιδιών είναι αφανείς	***Οι ικανότητες των μαθητών δημοσιοποιούνται***
Επίλυση κατά τον τρόπο που αναμένει ο δάσκαλος	***Ευκαιρίες για επιχειρηματολογία***

Τι λάθη παρουσιάστηκαν στην τελική εξέταση.

- Λάθος στο 1^{ο} πρόβλημα διότι δεν διάβασαν καλά την εκφώνηση του.

Πέντε μαθητές το έλυσαν σωστά, ενώ τρις μαθητές δεν κατανόησαν ακριβώς τι ζητούσε το πρόβλημα, ή βιάστηκαν ή δεν το μελέτησαν σωστά (ενώ θα μπορούσαν να το επιλύσουν.)

Τέσσερις μαθητές εμφάνισαν το ίδιο λάθος και έγραψαν:

$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ άρα ΑΒ = ΑΓ+ ΓΒ

[220] Λυκοσκούφη,Ε. σελ.182

Μία μαθήτρια είπε «*όλα για μένα είναι δύσκολα όλα είναι εμπόδια δεν μπορώ να τα λύσω.»*

- Στο δεύτερο πρόβλημα

Οι 7 μαθητές το έλυσαν

Ένας μαθητής άθροισε τις δύο καθέτους (80+60=140) και αφού η ομπρέλα ήταν 100 εκατ. συμπέρανε ότι θα χωρούσε στην βαλίτσα. Παρανόηση του Π.Θ.

Ένας άλλος μαθητής έγραψε

$100^2 = 60^2 + 80^2$

10.000=360+640

10000>1000 άρα θα χωρέσει ……..

Μία μαθήτρια υποστήριξε ότι δεν την καταλάβαινε αυτήν την άσκηση!

Όπως και στο πρώτο πρόβλημα παρουσιάστηκε το ίδιο λάθος

$X^2 = 60^2 + 80^2$

X^2 =120 + 160 άρα X^2 = 280 Τα τετράγωνα των αριθμών τα ταυτίζουν με το διπλάσιο των αριθμών !

Στην Τρίτη άσκηση παρουσιάστηκαν πολλά λάθη στις πράξεις όπως:

[1104] $\mathbf{X^2} = 17^2 - 15^2$

2*X=289**+**225

2*X=**514**

2*X**=√263169**

άλλος μαθητής

$X^2 = 17^2 - \mathbf{15^2}$

X^2 = 289 - **229** (λάθος στην πράξη)

Ένας άλλος μαθητής

$X^2 = \mathbf{15^2} - 17^2$ άρα

X^2 = **325** –289

X^2 = √36 λάθη στις πράξεις όπως και σύγχυση των θετικών και αρνητικών αριθμών.

Κάποιος άλλος μαθητής έγραψε:

$X^2 = 17^2 - \mathbf{15^2}$

X^2 =320 **– 300**

X^2 = 620

X = √620

Ένας άλλος μαθητής έγραψε

$17^2 = X^2 + 15^2$

$286 = X^2 + 225$

$-X^2 = -286+225$

-X = 511

X=511 δυσκολία στην επίλυση εξίσωσης.

$X^2 = 64$ τότε χ=√8

√2837 = √2*10^3 + 837

Ομαδοποιώντας τα λάθη των μαθητών τα οποία παρουσιάστηκαν στην τελική εξέταση κατατάσσονται στις παρακάτω κατηγορίες.

1. Οι μαθητές μας βιάζονται και δεν διαβάζουν προσεκτικά τις εκφωνήσεις των ασκήσεων. Ενώ ο καθηγητής επαναλαμβάνει το πρόβλημα και το ξαναδιαβάζει, τα παιδιά δεν δείχνουν την απαραίτητη προσοχή.
2. Ενώ από πολλούς κατανοήθηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα παρουσιάζουν λάθη στις πράξεις , που μπορεί άλλα είναι απλά και μικρά, άλλα όμως δηλώνουν γνωστικά κενά και πλήρη σύγχυση ανάμεσα στους αρνητικούς και θετικούς αριθμούς.
3. Υπάρχει δυσκολία στην επίλυση εξίσωσης.
4. Μεγάλη δυσκολία και σύγχυση παρουσιάζεται στην διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στα τετράγωνα των αριθμών από τα διπλάσια αυτών δηλαδή το X^2 και 2*X. για τους περισσοτέρους είναι το ίδιο. Και ενώ διατυπώνουν τον τύπο του Πυθαγορείου Θεωρήματος , εν συνεχεία τα τετράγωνα γίνονται διπλάσια και συνεπώς έχουμε λάθη.

Οι διάλογοι των μαθητών στο εργαστήριο και τα σχόλια επί αυτών (των διαλόγων)

Παρατηρώντας τους μαθητές μας στο χώρο του εργαστηρίου, καταγράψαμε τους διαλόγους των , σε μία προσπάθεια διερεύνησης των αλλαγών που συμβαίνουν .

Αναλύθηκαν και παρακολουθήθηκαν οι μαγνητοφωνημένοι διάλογοι των μαθητών κατά την διάρκεια της εργασίας τους με την βοήθεια του φύλλου εργασίας , ώστε να καταλάβουμε βαθύτερα την σκέψη των παιδιών όταν συνεργάζονται και παράλληλα χρησιμοποιούν το λογισμικό, και αν υπάρχουν μεταβολές στον τρόπο σκέψεώς τους. Από την λεπτομερή παρατήρηση των διαλόγων – σχολίων και λεγομένων των μαθητών προέκυψαν οι παρακάτω κατηγορίες με τα χαρακτηριστικά τους.(open coding, grounded theory):

- **Συμβολικές μαθηματικές εκφράσεις**
- **Μετάφραση**
- **Έκταση και ποιότητα αιτιολόγησης-τεκμηρίωσης**
- **Εντοπισμός προβλήματος- Γνωστική διευκόλυνση**
- **Οι στρατηγικές των μαθητών**
- **Γνωστικές**
- **Μεταγνωστικές**
- **Κοινωνικοσυναισθηματικές**
- **Οι στάσεις τους**
- **Ενίσχυση αυτοπεποίθησης**

β Η μάθηση γίνεται παιχνίδι

Συμβολικές μαθηματικές εκφράσεις.

a. Μετάφραση & β. Έκταση και ποιότητα αιτιολόγησης-τεκμηρίωσης

[103]: Το τετράγωνο που γίνεται από την πλευρά που δεν είναι κάθετη…. θέλω να πω από την υποτείνουσα ,είναι μεγαλύτερο από τα άλλα τετράγωνα.

Παραγωγικός συλλογισμός

[106]: σκέφτηκα τα μεγέθη των ευθυγράμμων τμημάτων και μετά την σμίκρυνση! Τα 8 μέτρα δεν χωράνε στην οθόνη του Η/Υ μπορούμε όμως με κλίμακα ……, ας βάλουμε όπου 8 μ. 8εκατ.

Μεταγνωστική ικανότητα – βήματα σκέψεως

Με την χρήση του λογισμικού παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Π.Ο. όταν αναφέρονταν στην έννοια του Π.Θ. μετέφραζαν την συμβολική έκφραση **α^2=β^2+γ^2 μετατρέποντας την πληροφορία που υπήρχε στην συμβολική έκφραση, σε πληροφορίες που τις κατανοούσαν , μέσω των αναπαραστάσεων και μάλιστα ζωγραφίζοντας το αντίστοιχο ορθογώνια τρίγωνο και τα τετράγωνα που σχηματίζονται πάνω στις πλευρές αυτών. Αυτό ήταν συνέπεια της προσέγγισης με το δυναμικό εργαλείο .οι μαθητές από την αρχή έκαναν συγκρίσεις και παρατηρούσαν οι μετρούσαν τόσο τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου όσο και τα εμβαδά που προέκυπταν. Επίσης είχαν την ευκαιρία να προβούν σε διανοητικές διεργασίες σύγκρισης και συσχετισμού, εικασιών, πειραματισμού και συλλογισμού στα πλαίσια του διδακτικού σεναρίου στο οποίο εντάχθηκε η χρήση του sketchpad . Παράλληλα η οπτικοποίηση της έννοιας , επιβεβαίωνε τις σκέψεις τους και διευκόλυνε αυτούς δίνοντάς τους θάρρος και ενδιαφέρον.(όταν βίωναν τις επιτυχείς απαντήσεις τους) να συνεχίσουν να εκφράζονται και** να κάνουν εικασίες. **Κάποιες φορές** έκαναν και δικές τους υποθέσεις **και αιτιολόγησαν το πιθανό αποτέλεσμα . Αυτό ερμηνεύεται από την διευκολυντική διαμεσολάβηση του λογισμικού αυτού με σκοπό την**

προώθηση της σκέψης. Κάτι ανάλογο δεν παρατηρήθηκε στην ομάδα ελέγχου.

[104]: όταν μεγαλώνουν τα δύο μικρότερα τετράγωνα , μεγαλώνει και το μεγάλο τετράγωνο.

Ερευνήτρια : έχουν καμία σχέση μεταξύ τους τα τετράγωνα:;

[111] : το μεγάλο τετράγωνο είναι ίσο με τα άλλα δύο τετράγωνα. Για να δούμε **και άλλα τετράγωνα.**

[106] : Κοίταξε αν το σύρουμε πολύ το τρίγωνο χάνεται!

[102] : δες , τώρα το μεγαλώνουμε τόσο πολύ που δεν χωράει πλέον στην οθόνη

Οι μαθητές πειραματίστηκαν και σε πολλά άλλα τετράγωνα ,και προσπάθησαν να κάνουν πολλούς συνδυασμούς σέρνοντας τα διάφορα σημεία του σχήματος και αυξομειώνοντας τις πλευρές των σχημάτων .

Το ορθογώνιο τρίγωνο δεν ήταν πλέον για αυτούς μοναδικό , αλλά μπορούσαν να πάρουν πάρα πολλά ορθογώνια τρίγωνα σε διαφορετικές θέσεις και μεγέθη , χωρίς να χάνει την ιδιότητα του να έχει μια ορθή γωνία. Έτσι σιγά σιγά και χωρίς δυσκολία περνούσαν από το ειδικό στο γενικό, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο.

Δοκίμασαν να καταλήξουν σε συμπεράσματα και **παρατηρήθηκε** αλλαγή στην ποιότητα και την έκταση των εξηγήσεων τους **καθώς εργάζονταν βάσει της δραστηριότητας.**

Οι μαθητές έθεταν ερωτήματα που είχαν ενδιαφέρον για αυτούς , διότι σύμφωνα με τον γερμανό μαθηματικό Hilbert «*όποιος ψάχνει για μεθόδους χωρίς την ύπαρξη στο μυαλό του κάποιου συγκεκριμένου προβλήματος, τις περισσότερες φορές ψάχνει μάταια».*

[120]: μπορούσαν οι δύο πλευρές να ήταν ίδιες;

[111] : ποιες εννοείς, δεν νομίζω να εννοείς την υποτείνουσα. Η υποτείνουσα πάντα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

[120] : εννοούσα τι θα συνέβαινε αν οι δύο κάθετες πλευρές ήταν ίσες.

Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αλληλεπίδρασαν και η επικοινωνία τους ήταν σημαντική και ουσιαστική.

Η απεικόνιση ενεργειών στο περιβάλλον του λογισμικού βοηθούσε τους μαθητές να αναστοχάζονται και να αναπτύξουν τις γνωστικές τους δομές (Forman, G., 1988). Η αλληλεπίδραση με τον υπολογιστή έδωσε στους μαθητές τη δυνατότητα να μετατρέπουν τις ενέργειές τους σε συνειδητές πράξεις (Forman & Puffall, 1988).

Εκτός από τις περιπτώσεις, που τους ζητήθηκαν, πειραματίστηκαν, προχώρησαν σε σκέψεις και **συμπέραναν και για άλλες περιπτώσεις**, όπως π.χ. *τι θα συνέβαινε αν είχαμε τις δύο κάθετες πλευρές ίσες.*Είναι μια πρώτη προσπάθεια, που θα μπορούσε να οδηγήσει σε **ένα περισσότερο γενικευμένο συμπέρασμα.**. Οι μαθητές δηλ. **προχώρησαν και πέρα από τα ζητούμενα της άσκησης**. Μετά τον πειραματισμό με το λογισμικό, έκαναν παιχνίδι διαλόγου και έλυσαν ασκήσεις που ο ένας ρωτούσε τον άλλο. Στο τέλος κατέληξαν σε συμπέρασμα –γενίκευση σε οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο τα τετράγωνα που προκύπτουν από τις δύο κάθετες πλευρές, αν τα προσθέσουμε θα μας δώσουν το μεγάλο τετράγωνο που το παίρνουμε από την υποτείνουσα.

- **Εντοπισμός προβλήματος- Γνωστική διευκόλυνση**
    - Η γνώση της έννοιας του Π.Θ. στο επίπεδο της διατύπωσης του θεωρήματος , εμφανίζεται , στους περισσοτέρους μαθητές , χαμηλή, ελλιπής και μηχανιστική. Μόνον λίγοι από τους μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται βαθύτερα όσα γραπτά ή προφορικά διατυπώνεται στο Π.Θ. .
    - Οι μαθητές εμφανίζουν χαμηλή διαδικαστική και εννοιολογική γνώση της έννοιας του Π.Θ. . οι μαθητές υστερούν σε εννοιολογικά ζητήματα, ενώ αποδίδουν καλύτερα στις αλγοριθμικές διαδικασίες.
    - Πολλοί ξεχνούν το θεώρημα και εργάζονται με τα μήκη των πλευρών και όχι τα τετράγωνα αυτών .

- Κάποιοι άλλοι συγχέουν την υποτείνουσα με μία από τις κάθετες πλευρές και αυτό έχει ως συνέπεια κάποιες φορές ενώ αναζητούν την μία από τις δύο καθέτους να κάνουν πρόσθεση των τετραγώνων των άλλων πλευρών και όχι αφαίρεση, του τετραγώνου της μίας καθέτου από το τετράγωνο της υποτείνουσας.
- Επίσης υπάρχει μεγάλη αδυναμία των μαθητών στις πράξεις.

Η βασικότερη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση του Π.Θ. είναι η μετάβαση από τα μήκη των πλευρών στα τετράγωνά τους και κατ΄ επέκταση στα εμβαδά των τετραγώνων με αυτές τις πλευρές. Για να βρεθεί η μία από τις τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου , θα πρέπει να ακολουθήσουν το παρακάτω σχήμα, το οποίο όμως δύσκολα το εμπεδώνουν.

πλευρές → εμβαδά → (+ ή -) → πλευρά

α πλευρά α^2 εμβαδόν α πλευρά.

Η βασικότερη αιτία για τις δυσκολίες, που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση των ρητών οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο τους διδάσκονται, πρόβλημα που θα διαιωνίζεται, αν οι δάσκαλοι δεν λάβουν υπόψη τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές σκέφτονται,

αναφέρει η Μπούφη [221]Εντοπίζει δε τη δυσκολία, από τη μια, στις πολλές ερμηνείες του ρητού με τις οποίες οι μαθητές του Δημοτικού σχολείου έρχονται σε επαφή, από την άλλη, στην ερμηνεία του κλάσματος ως λόγου. Ο τρόπος διδασκαλίας δεν βοηθάει να συσχετίσουν οι μαθητές τις διάφορες ερμηνείες του ρητού, να κατασκευάσουν μόνοι τους σχήματα.

Προβληματιζόμενη από τα παραπάνω, οι δραστηριότητες, που σχεδιάσαμε, βοηθούσαν το μαθητή με την **ταυτόχρονη αναπαράσταση του Π.Θ με επανάληψη πολλών σχημάτων και σε μεταβαλλόμενη θέση του σχήματος,** ώστε και μόνοι τους να μπορούν να κατασκευάζουν σχήματα.

Δεν βρέθηκε άλλη έρευνα -- μελέτη επί του Π.Θ. ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των συμπερασμάτων.

[221] **Μπούφη, Α.,** 1995, Σημειώσεις διδακτικής Μαθηματικών ΙΙ, Πανεπιστήμιο Αθηνών ΠΤΔΕ, Αθήνα.

Οι στρατηγικές των μαθητών

Οι στρατηγικές, που παρατηρήθηκαν μετά την κωδικοποίηση των διαλόγων των μαθητών της Π.Ο, ήταν:

Στρατηγικές	Π.Ο.
Γνωστικές	1. Επαγωγική 2. Αξιοποίηση της προηγούμενης γνώσης (αναλογία)
Κοινωνικο-συναισθηματικές	3. Πραγματικός διάλογος 4. Ζητούσαν βοήθεια από τους συμμαθητές τους στην ομάδα
Μεταγνωστικές	5. Έλεγχος της ορθότητας της λύσης με τη βοήθεια του λογισμικού και των αλληλεπιδραστικών δραστηριοτήτων

Ε: Ποια πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντα η μεγαλύτερη;

[104]: Αυτή (δείχνει την υποτείνουσα)

Ε και πώς την ονομάζουνε;

[104] …. Υποτείνουσα….

Ε βρείτε τα εμβαδά των τετραγώνων που βλέπετε . Τι παρατηρείτε;

[111] αφού η μεγαλύτερη πλευρά είναι η υποτείνουσα , άρα το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι αυτό που έχει αυτήν την πλευρά, και μικρότερο αυτό με την μικρότερη πλευρά.(Δείχνει τα τετράγωνα)

[109] ; για να διευκολυνθούμε θα βγάζουμε από το μεγαλύτερο τετράγωνο αυτό που είναι μικρότερο.

Παρατηρεί ο ερευνητής ότι οι στρατηγικές των ανωτέρω μαθητών που ανήκουν στην Π.Ο. μπορούν να χαρακτηριστούν ως επαγωγικές ΄η διαδικασίες προοδευτικών κατασκευών.. με την βοήθεια του λογισμικού έκαναν υποθέσεις και κατέληξαν σε συμπεράσματα. Όπως επίσης σκέφτηκαν και άλλες περιπτώσεις προβλημάτων ,

υιοθετώντας πιο ευέλικτη στάση και σκέψη μεταβαίνοντας σε πιο προωθημένα νοητικά στάδια σκέψης.

Αξιοποίηση προηγούμενης γνώσης (αναλογία)

Οι μαθήτριες αναφέρθηκαν στην δραστηριότητα που είχε προηγηθεί με το λογισμικό, και προσπάθησαν να την χρησιμοποιήσουν για να επιλύσουν την άσκηση. (θυμάσαι αυτό που το είχαμε δεί…….)

[106] : δεν θυμάσαι που είχαμε μεταφέρει όλα τα χρωματιστά σχήματα από το μεγάλο τετράγωνο στα δύο μικρότερα;
[109] : το θυμάμαι …..
[106] : έτσι και το μεγάλο τετράγωνο αγροτεμάχιο θα το χωρίσουμε σε δύο μικρότερα άλλά όχι και ίσα.
[109] από δύο τετράγωνα ..ένα μεγαλύτερο τετράγωνο… μου θυμίζει Π.Θ.

Σχηματική αναπαράσταση – πειραματισμός.

Οι μαθητές βοηθήθηκαν να κατανοήσουν το Π.Θ. με τον πειραματισμό και τις αλληλεπιδραστικές δραστηριότητες επί του υπολογιστή.

[102] : έχουμε 2,5 στρέμματα δηλαδή 2500 εκατοστά. Όχι χιλιόμετρα, όχι ……..2500μέτρα. τώρα θα κάνουμε σμίκρυνση και θα βάλλουμε 2,5 εκ, και θα το σχεδιάσουμε με την βοήθεια του Η/Υ.

Βρίσκουν εμβαδόν 2,48 (περίπου 2,5) και προσπαθούν να βρούν με πειραματισμό πόσο θα είναι τα άλλα δύο ..

Το αφηρημένο επίπεδο σκέψης δεν το φτάνουν όλα τα παιδιά από μόνα τους. Επιπλέον σε άλλους γνωστικούς τομείς ο μαθητής μπορεί να λειτουργεί σε ένα ανώτερο γνωστικό επίπεδο και σε άλλους όχι. Πολλά εξαρτώνται από τις προηγούμενες εμπειρίες μάθησης αλλά και από το κοινωνικό και πολιτιστικό περιβάλλον του ατόμου[222]

Σύμφωνα με τις μαρτυρίες των μαθητών

[222] **Ράπτης Αρ. & Ράπτη Αθ.,** 2004, Μάθηση και Διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας, Ολική προσέγγιση, τόμος Α΄, Αθήνα.

Ε: Αν σας είχα δώσει στην τάξη τα ίδια προβλήματα , χωρίς τον υπολογιστή….
[121] ; πολύ δύσκολα, θα ήταν για μένα….με τα πολλά **παραδείγματα** βοηθήθηκα…….
[103] με **τα χρωματισμένα σχέδια** κατάλαβα και **συνέχεια έβλεπα τι έκανα..**
Ε : μήπως επειδή ό,τι κάνατε και ταυτόχρονα το βλέπατε σας βοήθησε;
[109] σίγουρα γιατί εγώ μπερδευόμουν και δυσκολευόμουν πάρα πολύ.

Ε: Τι θα άλλαζε αν την ίδια άσκηση προσπαθούσατε να την λύσετε στην τάξη ;
[109] δεν θα μπορούσαμε να βοηθάμε ο ένας τον άλλον και να συνεργαστούμε έτσι όπως εδώ…
[104] : και εγώ βοηθήθηκα…
[111] : εγώ δεν βοηθήθηκα ιδιαιτέρως , γιατί ήξερα πολύ καλά το .Π.Θ. είτε στην τάξη είτε εδώ μπορώ να λύνω προβλήματα με το Π.Θ .

Οι παιδαγωγοί των μαθηματικών επισημαίνουν ότι το πρόβλημα των μαθητών ξεκινά από το γεγονός ότι πολύ σύντομα οι μαθητές εισάγονται στο συμβολισμό και στους υπολογισμούς, πριν προλάβουν να δημιουργήσουν τις απαιτούμενες νοητικές εικόνες που θα υποβοηθούσαν τη σκέψη τους (Μπούφη, 1995).

Στις συνεντεύξεις, οι μαθητές προσπάθησαν να προσδιορίσουν τη βοήθεια που δέχτηκαν. Η γλώσσα του συγκεκριμένου παρέχει σκαλωσιές κατά την έκφραση του Papert για να ανέβει ο μαθητής πιο ψηλά από κει που βρίσκεται. Οι Noss & Hoyles υποστηρίζουν ότι υπάρχουν διαβαθμίσεις του αφηρημένου σε όλα τα στάδια ανάπτυξης του παιδιού. Ο κατάλληλος λοιπόν σχεδιασμός δραστηριοτήτων θα βοηθήσει στο ομαλό πέρασμα του μαθητή από το ένα στάδιο στο επόμενο της σκέψης του. Στην παρέμβασή μας, η χρήση των δραστηριοτήτων στον υπολογιστή ενθάρρυνε τους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις σκέψεις τους, να επιχειρηματολογήσουν, να διαπραγματευτούν και να εξηγήσουν τις μαθηματικές τους ιδέες. Η διαδικασία αυτή ήταν σημαντική για την

απόκτηση μεταγνωστικής ικανότητας και υποβοηθήθηκε από το περιβάλλον του υπολογιστή, αφού οι μαθητές προχωρούσαν στο να εξηγήσουν γιατί συνέβαιναν αυτά που παρατηρούσαν στην οθόνη τους, συνδυάζοντάς τα με τα μαθηματικά που γνώριζαν. Επιπλέον ο συνδυασμός παραγόντων, όπως η συνεργασία, η συμμετοχή τους στις ομάδες, η συζήτηση και η επικοινωνία που ανέπτυξαν, ο πειραματισμός και η ενεργοποίησή τους ήταν μερικοί από τους παράγοντες που συνέβαλαν στην ευκολότερη και καλύτερη κατανόηση.

Οι παιδαγωγοί των μαθηματικών επισημαίνουν ότι το πρόβλημα των μαθητών ξεκινά από το γεγονός ότι πολύ σύντομα οι μαθητές εισάγονται στο συμβολισμό και στους υπολογισμούς, πριν προλάβουν να δημιουργήσουν τις απαιτούμενες νοητικές εικόνες που θα υποβοηθούσαν τη σκέψη τους (Μπούφη, 1995).

Στις συνεντεύξεις, οι μαθητές προσπάθησαν να προσδιορίσουν τη βοήθεια που δέχτηκαν. Η γλώσσα του συγκεκριμένου παρέχει σκαλωσιές κατά την έκφραση του Papert για να ανέβει ο μαθητής πιο ψηλά από κει που βρίσκεται. Οι Noss & Hoyles υποστηρίζουν ότι υπάρχουν διαβαθμίσεις του αφηρημένου σε όλα τα στάδια ανάπτυξης του παιδιού. Ο κατάλληλος λοιπόν σχεδιασμός δραστηριοτήτων θα βοηθήσει στο ομαλό πέρασμα του μαθητή από το ένα στάδιο στο επόμενο της σκέψης του. Στην παρέμβασή μας, η χρήση των δραστηριοτήτων στον υπολογιστή ενθάρρυνε τους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις σκέψεις τους, να επιχειρηματολογήσουν, να διαπραγματευτούν και να εξηγήσουν τις μαθηματικές τους ιδέες. Η διαδικασία αυτή ήταν σημαντική για την απόκτηση μεταγνωστικής ικανότητας και υποβοηθήθηκε από το περιβάλλον του υπολογιστή, αφού οι μαθητές προχωρούσαν στο να εξηγήσουν γιατί συνέβαιναν αυτά που παρατηρούσαν στην οθόνη τους, συνδυάζοντάς τα με τα μαθηματικά που γνώριζαν. Επιπλέον ο

συνδυασμός παραγόντων, όπως η συνεργασία, η συμμετοχή τους στις ομάδες, η συζήτηση και η επικοινωνία που ανέπτυξαν, ο πειραματισμός και η ενεργοποίησή τους ήταν μερικοί από τους παράγοντες που συνέβαλαν στην ευκολότερη και καλύτερη κατανόηση.

Σε κάποιες ομάδες παρατηρήθηκε η εμφάνιση χαρακτηριστικών που διακρίνουν τους σκεπτόμενους μαθητές, όπως[223]:

1. Αλλαγή στην ποιότητα και την έκταση των εργασιών και των εξηγήσεων που κάνουν οι μαθητές, καθώς δουλεύουν το πρόβλημα.
2. Έλεγχος της απόδοσή τους.
3. Ικανότητα στο να χρησιμοποιούν ό,τι έχουν μάθει για να λύσουν καινούργια παραδείγματα.

Κοινωνική - συναισθηματική στρατηγική

Κατά την προσπάθειά τους να μεταφέρουν σχήματα.

-πώς θα μεταφέρουμε τα σχέδια;
-Μετακινούμε αυτό στο μεγάλο τετράγωνο
-κάνουμε αντιγραφή και επικόλληση
-εγώ έκανα αποκοπή και επικόλληση
-είναι το ίδιο τελικά
-συνέχισε έτσι και για τα υπόλοιπα χρωματισμένα σχέδια
-τώρα μπορούμε να κάνουμε και το αντίστροφο!
- κάνε και συ το ίδιο

Οι μαθητές **αντάλλαζαν απόψεις** σχετικά με το πώς από το ένα τετράγωνο παίρνουν άλλα δύο μικρότερα. Ένας μαθητής, που δεν είχε αφομοιώσει την έννοια του Π.Θ προχώρησε στη σύγκριση και μεταφορά των σχημάτων

Η συνεργατική στρατηγική επίλυσης ενός προβλήματος ή η επίλυση προβλήματος σε μικρές ομάδες έχει θετικά αποτελέσματα στην επίλυση των προβλημάτων καθώς

[223] Σύμφωνα με έρευνες (των Chi κ.α. , 1981, Chi & Bassok, 1989, Chi, Bassok, Lewis, Reimann & Glaser, 1989) τα ανωτέρω χαρακτηριστικά διακρίνουν τους «καλούς» από τους «κακούς» μαθητές .Από την διδακτορική εργασία της Ε., Λυκοσκούφη. Σελ.174

και την ανάπτυξη μεταγνωστικής επίγνωσης της μαθηματικής τους σκέψης (Hyde & Bizar, 1989, Slavin & Madden, 1989).

Τα οφέλη από τη συνεργατική επίλυση προβλήματος περιλαμβάνουν το μοίρασμα των στρατηγικών, τη μαθηματική επικοινωνία και την καλλιέργεια ικανοτήτων που απαιτούνται για ανεξάρτητη μάθηση. (κοινωνικοσυναισθηματική στρατηγική)

Παρατηρήσαμε ότι κάποιοι μαθητές **έκαναν πραγματικό διάλογο**, δεν δίστασαν να διατυπώσουν τις απορίες τους και **να ζητήσουν βοήθεια** και **επεξηγήσεις** από τους συμμαθητές τους στην ομάδα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η γνωστική εξέλιξη σε μία μαθήτρια.

Το πρόβλημα θέλει Π.Θ. Όχι δεν θέλει τι δουλειά έχει το Π.Θ . με το αγροτεμάχιο; θέλει χιαστή… μάλλον μπερδεύτηκα.

Στα λόγια της μαθήτριας αναγνωρίσαμε τις δυσκολίες που είχε καθώς και τη σύγχυση Επιπλέον παρατηρούμε την τάση των μαθητών να χρησιμοποιήσουν τις αριθμητικές ενδείξεις που τους δίνονται, καταγραφή υπολογισμών χωρίς λογική συνοχή και φανερή σημασία. Σύμφωνα, λοιπόν, με το « διδακτικό συμβόλαιο» (άγραφο κανόνα), οι μαθητές να αξιοποιούν τις πιο πρόσφατες γνώσεις τους, η ανωτέρω μαθήτρια ωθήθηκε στον άστοχο συσχετισμό των δεδομένων που δεν έχουν λογική συνοχή.

Οι μαθητές διατύπωσαν εικασίες, ενώ στη συνέχεια προσπάθησαν μέσα από τον πειραματισμό να τις επιβεβαιώσουν και να τις ερμηνεύσουν. Άλλες φορές στηρίχθηκαν σε στοιχεία από τη θεωρία ή σε δραστηριότητες που προηγήθηκαν και τις δοκίμασαν με το λογισμικό.

Συγκρίνοντας τις στρατηγικές των μαθητών θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

3. Αρχικά οι απαντήσεις των μαθητριών ήταν πιο λιτές, χωρίς αιτιολογήσεις, χρησιμοποιώντας μόνο αριθμητικές πράξεις και χωρίς αυτοπεπίθεση (εκτός από την ύπαρξη μιας μαθήτριας που ήταν αριστούχος.)

Απαγωγική στρατηγική

4. Με το λογισμικό, οι μαθήτριες δοκίμασαν τις υποθετικές σκέψεις τους, πειραματίστηκαν, επαλήθευσαν τα δεδομένα τους, διαπίστωσαν κανονικότητες, έκαναν διαδικασίες προοδευτικών κατασκευών:

Επαγωγική στρατηγική

Οι απαγωγικές στρατηγικές είναι συντομότερες από τις επαγωγικές, αλλά δε είναι εύκολο να προσεγγιστούν από τους αδύνατους μαθητές[224].

[224] **Κόσσυβας, Γ.,** 1996, η Πρακτική του Ανοιχτού Προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο, Gutenberg.

Γι΄ αυτό από παιδαγωγική άποψη, οι εμπειρικές διαδικασίες των προοδευτικών κατασκευών, που υποστηρίζονται από το λογισμικό, βοηθούν περισσότερο και οδηγούν σε καλύτερη κατανόηση.

Οι Στάσεις των μαθητών

1ον ενίσχυση αυτοπεποίθησης

Μέσα από τα λόγια των μαθητών που αναγράφησαν παραπάνω στην συνέντευξη των μαθητών για το λογισμικό, διακρίνει κανείς ότι κάποιοι μαθητές γνώριζαν καλά το Π.Θ. και υποστήριξαν ότι ο Η/Υ δεν συνέβαλε καθόλου σε επί πλέον γνώση. Πολλοί όμως «αδύνατοι» μαθητές υποστήριξαν ότι η βοήθεια της χρήσης του λογισμικού ήταν καθοριστική τόσο για την κατανόηση του θεωρήματος όσο και την αλλαγή της αυτοπεποίθησης τους. Οι επιτυχίες που βίωσαν όπως σωστές απαντήσεις, συμμετοχή στην τάξη, επιβεβαίωση εικασιών και λύση προβλήματος, ενδυνάμωσαν την αυτοπεποίθησή τους. **Επί πλέον ήταν** πιο ήσυχοι και συγκεντρωμένοι στο έργο τους**. Μετά τον πειραματισμό ένιωθαν σίγουροι ότι το είχαν καταλάβει. Οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν τις γνώσεις που είχαν και τις συνέδεσαν με την συγκεκριμένη άσκηση που είχαν να επιλύσουν.**

2ον όταν η μάθηση γίνεται παιχνίδι**.**

Σχεδόν όλοι οι μαθητές αντιμετώπισαν το πρώτο μέρος της δραστηριότητας (με την μεταφορά των χρωματισμένων σχημάτων από το μεγάλο τετράγωνο στα μικρά και αντίστροφα) ως παιχνίδι.

Αλλαγές που παρατηρήθηκαν με τη χρήση του λογισμικού

Από τα παραπάνω διαπιστώθηκε ότι:

Ενώ οι μαθητές αρχικά σπάνια συνέδεαν τις εξηγήσεις τους με αρχές και έννοιες, τώρα:

i. προσπαθούσαν να συσχετίσουν τα αποτελέσματά τους ή τις εικασίες τους με προηγούμενες γνώσεις,
ii. παρήγαγαν ένα σαφώς μεγαλύτερο αριθμό επεξηγήσεων και διαδικασιών,
iii. φάνηκε να προβληματίζονταν όχι μόνο για το αποτέλεσμα αλλά και τη διαδικασία επίλυσης της άσκησης,
iv. δοκίμαζαν να αιτιολογήσουν κάθε τους βήμα,
v. συσχέτιζαν το αποτέλεσμα μιας ενέργειά τους με κάποιας άλλης,

δηλαδή άρχιζαν να εμφανίζουν χαρακτηριστικά που έχει ο τρόπος σκέψης των «καλών μαθητών». Αν και γνωρίζουμε ότι η πραγματική σημασία μιας τέτοιας

συμπεριφοράς φαίνεται μετά από πολλές παρατηρήσεις (δυνατότητα που δεν είχαμε στα πλαίσια της δικής μας μελέτης), είμαστε αισιόδοξοι ότι, αν συνεχιζόταν το μάθημα των μαθηματικών με ομάδες στο εργαστήριο, όχι συνεχώς άλλα περιοδικά και συχνά τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα πολλαπλασιάζονταν και με τον καιρό θα έτειναν να γίνουν μόνιμος τρόπος σκέψης για τους μαθητές.

Συνοψίζοντας, επισημαίνουμε ότι οι αλλαγές που παρατηρήθηκαν ήταν :

- **Αλλαγές στην επίδοση**, των μαθητών που είχαν χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά
- **Διαφοροποίηση στον τρόπο που εργάζονταν και συνομιλούσαν** οι μαθητές κατά την επίλυση του προβλήματος.
- **Τροποποίηση των αρχικών λανθασμένων απαντήσεων**.

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να υποστηρίξουμε οτι

Στην Π.Ο., η χρήση δραστηριοτήτων και ο πειραματισμός με τα εργαλεία του υπολογιστή έδειξαν ότι βοήθησαν τους μαθητές. Άλλωστε αυτό το υποστήριξαν τα ίδια τα παιδιά και στην συνέντευξη Τα θετικά αποτελέσματα, που παρατηρήθηκαν στη μάθηση, δεν εντοπίστηκαν μόνο στη κατανόηση αλλά και στην απόκτηση ενδιαφερόντων, στάσεων και ικανοτήτων που φέρνουν την επιτυχία στην πράξη.

Πίνακας εξέλιξης των μαθητών.

Μαθητές	φύλο	Βαθ.πληροφορικής	Βαθ.μαθηματικών	Πρώτο διαγώνισμα	Τελικό διαγώνισμα	Στάση μαθηματικά	Στάση Η/Υ	Αλλαγή στάσης
101	0	11	10	03	05	ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ	ΒΟΗΘΗΘΗΚΑ ΠΟΛΥ	ΘΑ ΤΑ ΑΓΑΠΟΥΣΑ
102	0	18	19	15	13	ΝΑΙ ΑΓΑΠΩ	ΒΟΗΘΑΕΙ Ο Η/Υ	ΤΙΠΟΤΑ ΜΕ ΤΟ ΖΟΡΙ
103	0	20	17	12	16	ΝΑΙ ΠΟΛΥ ΔΟΥΛΕΥΕΙ ΤΟ ΜΥΑΛΟ	ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ΜΕ ΧΑΡΤΙ ΚΑΙ ΜΟΛΥΒΙ	ΚΑΜΙΑ ΑΛΛΑΓΗ
104	0	18	15	14	05	ΚΑΘΟΛΟΥ	ΒΟΗΘΗΘΗΚΑ	ΘΑ ΕΊΧΑ ΕΠΙ

							ΑΡΚΕΤΑ	ΠΛΕΟΝ ΒΟΗΘΕΙΑ
106	0	17	18	16	19,5	ΝΑΙ	ΒΟΗΘΑ ΑΡΚΕΤΑ	ΘΑ ΣΥΝΕΧΙΖΑΝ ΝΑ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΑΛΛΑ ΘΑ ΜΑΘΑΙΝΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ
109	0	11	11	06	13	ΛΙΓΟ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ	ΒΟΗΘΗΘΗΚΑ ΠΟΛΥ	ΘΑ ΑΛΛΑΖΑ ΘΕΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ Η/Υ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
110	0	14	09	02	03	ΟΧΙ ΚΑΘΟΛΟΥ	ΒΟΗΘΗΘΗΚΑ	ΘΑ ΜΟΥ ΦΑΊΝΟΝΤΑΝ ΕΥΚΟΛΌΤΕΡΑ ΟΜΩΣ ΔΕΝ ΘΑ ΤΑ ΑΓΑΠΟΥΣΑ ΚΑΙ ΠΑΛΙ
111	0	19	18	16	19,5	ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΑΡΚΕΤΑ	ΒΟΗΘΗΘΗΚΑ	ΚΑΜΜΙΑ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΑΣΗ , ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΗΝ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ
114	0	09	09	03	02	ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ	ΟΥΔΕΤΕΡΗ	ΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΑ
120	0	19	15	10	12,5	ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ	ΒΟΗΘΗΘΗΚΑ	ΘΑ ΤΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΣΑ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ,ΟΜΩΣ ΔΕΝ ΘΑ ΤΑ ΑΓΑΠΟΥΣΑ

Μαθητές	φύλο	Βαθ.πληροφορικής	Βαθ.μαθηματικών	Πρώτο διαγώνισμα	Τελικό διαγώνισμα	Στάση μαθηματικά	Στάση Η/Υ	Αλλαγή στάσης
105	1	20	20	16	18,5	ΝΑΙ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ		
107	1	15	12	10	03	ΝΑΙ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ		
108	1	12	13	05	10	ΜΕ ΕΛΚΥΟΥΝ ΔΕΝ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΝΟΜΑΙ		
113	1	15	10	07	05	ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΔΥΣΚΟΛΕΥΟΜΑΙ ΝΑ ΤΑ ΚΑΤΑΛΑΒΩ		
114	0	09	09	03	02	ΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΑ ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ		
115	1	12	10	08	05	ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΟΥ		
116	0	11	09	03	02	ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΔΥΣΚΟΛΕΥΟΜΑΙ		
117	0	17	14	13	06	ΔΕΝ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΜΕ ΚΟΥΡΑΖΟΥΝ		
118	0	17	17	17,5	09	ΝΑΙ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΑ		
119	0	18	13	08	14,5	ΝΑΙ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ		
121	1	13	11	05	09	ΝΑΙ ΜΟΥ ΑΡΕΣΟΥΝ		

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές μπόρεσαν να δώσουν απαντήσεις και να εκφραστούν γραφικά με την δημιουργία εξωτερικών αναπαραστάσεων . ενώ πριν την παρέμβαση κάποιοι δεν κατανοούσαν το Π.Θ. μετά την παρέμβαση μπορούσαν να το εξηγήσουν με σχήμα.

Οι αλλαγές που παρατηρήθηκαν στην ΠΟ, σε αντίθεση με την ΟΕ, θα μπορούσαν να αποδοθούν στο διαμεσολαβητικό ρόλο των υπολογιστικών εργαλείων, στην αλληλεπίδραση που τους προσέφερε το περιβάλλον του υπολογιστή με τις εικόνες σε ρόλο υποστηρικτικό και συμπληρωματικό, σε μια συνολική αντιμετώπιση της έννοιας.

Από τα παραπάνω, και σύμφωνα με άλλους συγγραφείς και μελετητές σε θέματα διδακτικής [225] που ισχυρίζονται ότι «*μια γνώση χωρίς δυνατότητα έκφρασης λεκτικής ή σχηματικής απ΄ αυτόν που την κατέχει είναι μια γνώση χωρίς λειτουργικότητα στο ευρύτερο πλαίσιο των γνώσεων και της επικοινωνίας*». Και συνεχίζουν «*πρέπει να εντοπίσουμε αν υπάρχει κατανόηση και στη συνέχεια να επιδιώξουμε και τη δεύτερη σημαντική φάση, της έκφρασής της από το μαθητή.*» Η αδυναμία της λεκτικής διατύπωσης, χωρίς λοιπόν να είναι πάντα απόδειξη της έλλειψης κατανόησης, είναι ένδειξη της βοήθειας ή της άσκησης, που πρέπει να προσφέρουμε στους μαθητές προς αυτή την κατεύθυνση.

Επί πλέον, χρειάζεται να αποκτήσει ολοκληρωμένες παραστάσεις και όχι ατελείς, που προέρχονται από τη χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων, που χρησιμοποιούνται στα πρώτα βήματα κατανόησης της έννοιας.

Η μαθηματική γλώσσα είναι ένα ψηφιδωτό από αναπαραστάσεις και ο μαθηματικός τρόπος σκέψης δεν είναι στην ουσία, παρά το πέρασμα από τη μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη. Στα Μαθηματικά υπάρχει μια ανάγκη να δώσουμε στον άλλο να «καταλάβει καλύτερα». Αυτό έγινε με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων, με την χρήση του Η./Υ.χρησιμοποιώντας δηλ. σχήματα, κίνηση, παρεμφερείς εκφράσεις, με σκοπό την κατανόηση και την επικοινωνία.

Οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα μπορεί να περιγραφεί με το τρίπτυχο: αναπαράσταση -- πράξη -- ερμηνεία (Κολέζα Ε, 1994). Η αναπαράσταση είχε επιλεγεί κατάλληλα, ώστε να μην δημιουργήσει

---

[225] **Κολέζα Ε., Μακρής Κ., Σούρλας Κ**., 1999, Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών , εκδ Gutenberg, σελ.37. Αθήνα 1999

νέες δυσκολίες στους μαθητές αλλά να αποτελέσει ένα πραγματικό βοήθημα, εργαλείο προσέγγισης και ανάλυσης της έννοιας του Π.Θ. Για τους μαθητές της Π.Ο. που χρησιμοποίησαν το λογισμικό διαπιστώθηκε ότι υπήρξε αύξηση των σωστών απαντήσεων.

Συνολικά, παρατηρούμε βελτίωση στην επίδοση των μαθητών μετά τη διδασκαλία και για τις δύο ομάδες. Αξιοσημείωτο είναι το μέγεθος της αλλαγής μόνο για την πειραματική ομάδα.

Είναι φανερό ότι τα παιδιά που χρησιμοποίησαν το λογισμικό κατανόησαν καλύτερα την έννοια του Π.Θ. **Οι μαθητές βίωσαν το θεώρημα μέσα από τον χειρισμό του μοντέλου αναπαράστασης και παρουσίασαν βελτίωση στην επίλυση των σχετικών προβλημάτων, δίνοντας περισσότερες σωστές απαντήσεις.**

Οι αναπαραστάσεις βοήθησαν τους μαθητές να εκφραστούν και να εξωτερικεύσουν τη γνώση που δεν μπορούσαν να εκφράσουν, μια και δεν γνώριζαν την ακριβή ερμηνεία. Η ενασχόλησή τους με το λογισμικό τούς ανάγκασε να εκφραστούν. Οι αναπαραστάσεις, που απέκτησαν τελικά, τους βοήθησαν να γίνουν περισσότερο ακριβείς στις εκφράσεις τους.

Η διδασκαλία της παραπάνω έννοιας **ανέδειξε την χρησιμότητα ύπαρξης βοηθημάτων της σκέψης (εργαλείο sketchpad),** αφού με το συνήθη τρόπο προσέγγισης της έννοιας, **δεν διαφοροποιείται σημαντικά η κατανόηση μαθηματικών εννοιών σε μαθητές που έχουν δυσκολίες στα μαθηματικά.** (διατηρούνται οι λανθασμένες απαντήσεις, σημαντικά).

Η παροχή ευκαιριών για συζήτηση, ανταλλαγή ιδεών, προώθηση της σκέψης κ.κλπ. είναι εμφανής από την συνέντευξη και τον διάλογο που έγινε σχετικά με το λογισμικό. Η ανάδειξη της συμβολής αυτής των νέων υπολογιστικών εργαλείων συμφωνεί με τα πορίσματα και άλλων ευρημάτων της σχετικής βιβλιογραφίας.[226]

---

[226] **Littleton K., Light, P.,** 1999, Learning with computers Analysing productive interaction, Routedge

Ο Cobb (1995) υποστηρίζει ότι, όταν οι μαθητές εργάζονται συνεργατικά, αναπτύσσεται περισσότερος διάλογος, ενώ η χρήση των μεταγνωστικών ερωτήσεων εμπλουτίζει το «πάρε δώσε» των μαθηματικών εννοιών. Αυτό έγινε φανερό και μια μαθήτρια που ήταν πολύ διστακτική και με πολύ χαμηλή αυτό-εκτίμηση άρχισε να ρωτά και να συμμετέχει στην επίλυση του προβλήματος. Είχαν την ευκαιρία να συνομιλήσουν και να ωφεληθεί το «αδύνατο» άτομο από την γνωστική ανταλλαγή.

Αρκετοί ι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στον τρόπο έκφρασης. Μπορεί στην αρχή να δώσουν σωστή απάντηση και εν συνεχεία να μπερδευτούν. Μην έχοντας σταθεροποιήσει τις γνώσεις τους απαντούν στην αρχή σωστά (μπορεί και στην τύχη) και μετά καταλήγουν σε λάθος. Εδώ ήταν φανερή η ανάγκη της επέμβασης του ερευνητή ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να εντοπίσουν τα λάθη τους και τις αντιφάσεις και σιγά-σιγά να ξεπεράσουν τα μαθησιακά εμπόδια.

Ίσως όμως να είχαμε καλύτερα αποτελέσματα αν μελετούσαμε ομάδες «δυνατές» με υψηλή αυτοεκτίμηση χωριστά από αυτές που πραγματικά έχουν πολλές δυσκολίες . Όντας όλοι μαζί δίνονται ευκαιρίες για όλους , αλλά η καθυστέρηση είναι εις βάρος των «προχωρημένων» που δεν αρκούνται στα απλά ,με αποτέλεσμα να περιμένουν χάνοντας χρόνο. Πιστεύω ότι αν είχαμε τάξεις πολλών ταχυτήτων για όλους θα ήταν καλύτερα, ο αθλητής ενός αθλήματος σίγουρα δεν κερδίζει με την ίδια προπόνηση των ατόμων με δυσκολίες , όλοι θα έχουν δικαίωμα στον αθλητισμό . όμως με διαφορετικούς στόχους και χρόνους ο κάθε ένας.

Η οπτική βοήθεια και η άμεση ανάδραση, που προσφέρουν τα υπολογιστικά εργαλεία του υπολογιστή, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να ανακαλύψουν το λάθος τους, ενώ ο διάλογος που προέκυπτε από τη συνεργασία, με δραστηριότητες στον υπολογιστή, μπορούσε να προσφέρει διπλό όφελος σε μαθητές και δάσκαλο. Οι μαθητές, εργαζόμενοι συνεργατικά με τη βοήθεια του λογισμικού, δέχονται βοήθεια για την ανάπτυξη της σκέψης τους, που προκαλείται από το ενδιαφέρον, τις ερωτήσεις και τις ιδέες των άλλων (Cobb, 1995, Krummheur, 1995, Wood, 1995, Yackel, 1995) και επαληθεύεται από το λογισμικό, ενώ από την άλλη, ο δάσκαλος ξεκαθαρίζει τι καταλαβαίνουν οι μαθητές, τις ανάγκες τους και τις λάθος αναπαραστάσεις τους για να σχεδιάσει τη βοήθεια που χρειάζονται (Resnick, 1988).

Οι μαθητές που δεν ενδιαφέρονταν και απάντησαν αρχικά λάθος, δεν βοηθήθηκαν ουσιαστικά από τον τρόπο και τα μέσα διδασκαλίας που παραδοσιακά χρησιμοποιούνται στην τάξη, για να αλλάξουν την γνωστική τους κατάσταση. Σε αντίθεση με κάποιες μαθήτριες που εκδήλωσαν πολύ ενδιαφέρον.

Όλοι οι μαθητές τελικά βοηθήθηκαν από την χρήση του λογισμικού συμμετέχοντας στην επίλυση προβλήματος, συνέβαλλαν με τις ερωτήσεις των και με την επιθυμία τους να μαθαίνουν και να είναι χρήσιμοι με την συμμετοχή τους.

Με την ομάδα που εργαστήκαμε (τα παιδιά σχεδόν όλα ήταν κορίτσια) ενώ η στάση τους για τα μαθηματικά ήταν αρνητική στο τέλος παρουσιάστηκε μια αλλαγή στην θέση τους .

Πρακτικά προβλήματα της έρευνας

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης καταγράψαμε στοιχεία που λειτουργούσαν αρνητικά και καλό είναι να ληφθούν υπόψη σε ανάλογες περιπτώσεις. Παρατηρήθηκαν τα εξής:

- Ο χρόνος διεξαγωγής ενός τέτοιου προγράμματος με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών και με χαρακτηριστικά όπως είναι η ομαδοσυνεργατική διαδικασία, οι διερευνητικές διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, η ανάπτυξη μαθηματικού διαλόγου στις ομάδες κ.λ., απαιτεί **παρεμβάσεις**

μεγαλύτερης διάρκειας. Έτσι είναι δυνατόν να συλλεχτούν περισσότερα στοιχεία για την εξελικτική διαδικασία της σκέψης των μαθητών, να γίνει δηλαδή μεγαλύτερη διερεύνηση της σκέψης που οδηγούσαν σε συγκεκριμένες παρανοήσεις

Ένα πρόγραμμα μεγαλύτερης διάρκειας θα έδινε επίσης την ευκαιρία να αναπτυχθούν ακόμη περισσότερο οι διαπροσωπικές σχέσεις ερευνήτριας-μαθητών, θα δημιουργούσε κλίμα εμπιστοσύνης και έδαφος περισσότερο κατάλληλο για μάθηση.

- Το γεγονός ότι η παρέμβαση γινόταν μία φορά την εβδομάδα δημιουργούσε το πρόβλημα της μεγάλης απόστασης των μαθημάτων. Θα ήταν προτιμότερο οι μαθητές να έρχονταν σε **επαφή με τα θέματα** που συζητήθηκαν **χωρίς να μεσολαβεί διάστημα** μιας εβδομάδας. Το πρόβλημα αυτό προέκυψε μια και η παρέμβαση έγινε στα πλαίσια του μαθήματος της πληροφορικής όπου δίνεται η δυνατότητα εφαρμογής καινοτόμων προσπαθειών στο σχολείο. Όμως τέτοιου είδους διδακτικές παρεμβάσεις θα πρέπει να γίνονται στο πλαίσιο του κανονικού αναλυτικού προγράμματος, έστω και σε μερικές μόνο ενότητες. Έτσι η διδασκαλία θα είναι επικεντρωμένη στη διαδικασία, στη βιωματική μάθηση, στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων, στη μάθηση των μαθητών του «πώς να μαθαίνουν».

Τα ανωτέρω προβλήματα, που εντοπίσαμε, επισημάνθηκαν και από τους συναδέλφους του γυμνασίου. Επιπλέον από τις συζητήσεις που είχαμε με μαθητές πέρα από το διδακτικό πλαίσιο, διαπιστώσαμε ότι **η ύπαρξη ερευνητικών μέσων-εργαλείων καταγραφής στοιχείων,** όπως η κάμερα και το μαγνητόφωνο, δεν ήταν ευχάριστα στους μαθητές που, αν και προσπαθήσαμε να παραμείνουν «αθέατα» φαίνεται ότι κάποιους τους επηρέασαν με αποτέλεσμα να είναι λιγότερο αυθόρμητοι και σε κάποιες περιπτώσεις να διστάζουν να μιλήσουν. Κάποια μαθήτρια χαρακτηριστικά δυσανασχέτησε και είπε «τώρα γίνατε και δημοσιογράφος;»Οι συνθήκες της τάξης δεν ήταν οι «πραγματικές συνθήκες μαθήματος» και αυτό προκάλεσε αμηχανία στα παιδιά βγάζοντας τους από αυτό που γνωρίζουν και με το οποίο αισθάνονταν ασφαλείς. Το πρόβλημα αυτό θα περιοριζόταν σε παρέμβαση

μεγαλύτερης διάρκειας όπου τα ανωτέρω μέσα θα ήταν συνεχής πρακτική στην τάξη και το πρόσωπο του ερευνητή περισσότερο οικείο.

Όσον αφορά τις ομάδες που ήταν στην πλειοψηφία τους τριάδες ευνοούσαν τη δημιουργία μεγαλύτερης δυναμικής στο πλαίσιο της ομάδας. Η ομάδα των τεσσάρων μαθητών η οποία έχει κοινό έργο την επίλυση ενός προβλήματος θεωρείται ως η ιδανική λύση από πολλούς παιδαγωγούς και μαθηματικούς, επειδή επιτρέπει ανάδυση ποικιλίας και ποιότητας ιδεών και εξασφαλίζει τις προτιμήσεις των μαθητών.(Κόσσυβας, 1996, σελ.53).

Προεκτάσεις της έρευνας

Το εκπαιδευτικό λογισμικό, που σχεδιάσαμε, φάνηκε ότι συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση και ολοκληρωμένη προσέγγιση των υπό μελέτη εννοιών, συμπληρώνει τις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου και αποτελεί ένα νέο τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών. Θεωρούμε ότι αποτελεί κίνητρο για καλύτερη επικοινωνία των μαθητών, τους δίνει ευκαιρίες για ενεργή προσέγγιση της γνώσης, ανάπτυξη του μαθηματικού διαλόγου και γενικότερα ανάπτυξη νέων δεξιοτήτων.

Η έρευνά μας αποτελεί αφετηρία για προτάσεις και μελλοντικές εφαρμογές καθώς και προεκτάσεις. Μια λοιπόν από τις δυνατές επεκτάσεις είναι να χρησιμοποιηθεί για ένα διάστημα μεγαλύτερο της δικής μας έρευνας και σε περισσότερα σχολεία και τάξεις, όπου θα μπορεί να δώσει τη δυνατότητα μεγαλυτέρου φάσματος συμπερασμάτων.

Ακόμη θα μπορούσε να διερευνηθεί πώς η βοήθεια που δέχονται οι μαθητές με τη χρήση του λογισμικού σχετίζεται με το γνωστικό τρόπο μάθησής τους. Ποιες κατηγορίες μαθητών βοηθούνται ιδιαίτερα και ουσιαστικά; Επίσης, ενδιαφέρον θα είχε να μελετηθεί η διατήρηση των δεξιοτήτων και η μεταφορά των γνώσεων που αποκτούν οι μαθητές μετά από διάστημα χρήσης του λογισμικού και προσέγγισης της γνώσης με τον τρόπο που προτείνεται. Παράλληλα θα μπορούσε να δοθούν περισσότερες ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών σε μεταγνωστικές διαδικασίες, καθ' όλη τη διαδικασία και να μελετηθούν τα αποτελέσματα αυτής της διδακτικής μεθοδολογίας.

Τέλος, τα αποτελέσματα μεγαλύτερου εύρους δεδομένων θα μας βοηθούσαν να αξιολογήσουμε καλύτερα τις συνέπειες της χρησιμοποίησης του υπολογιστή στα μαθηματικά.

Με την παρούσα ερευνητική εργασία πιστεύουμε ότι συμβάλλουμε στην προσέγγιση του τρόπου σκέπτεσθαι των μαθητών, όταν εργάζονται με υπολογιστή στα μαθηματικά. Η συνεχής έρευνα, που θα συνδυάσει τα στοιχεία και αποτελέσματα της Διδακτικής των Μαθηματικών με το περιβάλλον των Νέων Τεχνολογιών, έχει ανοίξει νέους δρόμους έρευνας και έχει ανάγκη από περισσότερα στοιχεία για τη διαμόρφωση μιας ασφαλέστερης θεωρίας στο «πώς και πότε» τα υπολογιστικά εργαλεία συμβάλλουν στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών στη χώρα μας.

Ενδεικτικός Οδηγός Συνέντευξης

Άξονας	Ερωτήσεις
1. Οι δραστηριότητες	i. **Πώς σου φάνηκε η διδασκαλία που παρακολούθησες με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (Η/Υ.)** ii. Ήταν ενδιαφέρουσα; iii. Σε βοήθησαν οι δραστηριότητες να κατανοήσεις το Πυθαγόρειο θεώρημα; iv. Βρήκες δυσκολία στην χρήση του προγράμματος; v. Τι σε δυσκόλεψε ; Τι στάθηκε εμπόδιο; **vi. Κάνατε λάθη; Πώς τα διορθώσατε;**
2. Τρόπος εργασίας	• **Θα ήθελες να εργάζεςαι με χαρτί και μολύβι καθώς και στο πίνακα, ή με την βοήθεια του Η/Υ.** • Ποια μέθοδος πιστεύεις ότι σε βοήθησε περισσότερο. • Ό,τι έκανες το έβλεπες και το δοκίμαζες. Αυτό σε βοήθησε; • Ήταν ευκολότερα; • **Ποιος τρόπος νομίζεις ότι σε βοηθάει περισσότερο και γιατί;**
3. Η ομάδα	• Τι συνέβηκε στην ομάδα σας; • **Συνεργαστήκατε; Συζητούσατε;** • **Βοηθούσε ο ένας τον άλλο;** • **Δοκιμάζατε τις ιδέες Σας;** • **Πώς νιώθατε, όταν δουλεύατε στις ομάδες;**
4. Το μάθημα (τα Μαθηματικά)	• Σου αρέσουν τα Μαθηματικά; • **Αυτό το πρόγραμμα σε βοήθησε να αγαπήσεις λίγο περισσότερο τα μαθηματικά;** • **Αν χρησιμοποιούσες συχνότερα τον υπολογιστή στα μαθηματικά, πιστεύεις ότι θα άλλαζε κάτι σε σένα**

ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ Σχολικό έτος 2005-2006				
	ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2005	ΔΕΚΕΜΒΡ. **2005**	ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ **2006**	ΦΕΒ. **2006**
Ενημέρωση σχετικά με τους στόχους της έρευνας στους καθηγητές.	5 Νοεμβρίου			
Συζήτηση των υιοθετούμενων παιδαγωγικών αρχών.	20 Νοεμβρίου			
Διερεύνηση των αρχικών γνώσεων των παιδιών (Φύλλο εργασίας 1) pre-test		08		
Εξοικείωση με τη χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού-			11 (2h) 18(ΤΕΤ)	
Προσέγγιση της έννοιας του Πυθαγορείου θεωρήματος με χρήση Η/Υ. Μαγνητοφώνηση μαθήματος.			(3ωρες)	
Συνέντευξη – συζήτηση περί Η/Υ και του λογισμικού που χρησιμοποιήθηκε.				21-23
Τελικό φύλλο εργασίας –διαγώνισμα post test				20

Πίνακας 6.7 : Χρονοδιάγραμμα έρευνας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Διδακτικοί σκοποί και στόχοι:

- Οι μαθητές να ασκηθούν στη συλλογή ,παρατήρηση ,εκτίμηση και επεξεργασία των δεδομένων.
- Να μπορούν να ερμηνεύουν απλές παραστάσεις με γεωμετρικές έννοιες.
- Να συγκρίνουν εμβαδά (τετραγώνων) με την βοήθεια απλών σχημάτων
- Να μπορούν να υπολογίζουν την τρίτη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι άλλες δύο .
- Να μπορούν να διαπιστώνουν αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο όταν δίνονται οι τρις πλευρές του.

Α)Ι) Προαπαιτούμενες γνώσεις:Εμβαδόν τετραγώνου και σύγκριση τριγώνων.

ΙΙ)**Εργασίες και δυνατότητες με λογισμικό**

1. Πειραματισμός και δυναμική κίνηση των σχημάτων(μεταφορά, στροφή αυξομείωση)
2. Χρήση του μοντέλου του ορθογωνίου τριγώνου του οποίου μπορείτε να μεταβάλετε το μήκος των πλευρών.
3. Μετρήσεις και υπολογισμοί των πλευρών τριγώνου με τα εργαλεία του λογισμικού.
4. Παρατηρήσεις και συμπεράσματα μέσω λογισμικού.

ΙΙΙ)**Εργασίες στο χαρτί(ατομικά**)

Συμπλήρωση πινάκων και διατύπωση συμπερασμάτων

Β)Προετοιμασία υπολογιστή

1.**Ενεργοποιείστε το πρόγραμμα <u>The Geometer's Sketchpad.</u>**

1. **Ανοίξτε το <αρχείο Πυθαγόρα .gsp >**
   - Μπορείτε να μεταφέρετε τα σχήματα που έχουν διαφορετικά χρώματα από το ένα τετράγωνα στα άλλα δύο με αντιγραφή και επικόλληση; Ενεργείστε εν συνεχεία ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία.
     Τι παρατηρείτε ;μπορείτε να οδηγηθείτε σε κάποιο συμπέρασμα;

- Ας επισκεφτούμε τρεις διαφορετικούς δικτυακούς τόπους με κινούμενα σχέδια.(Η κάθε ομάδα παίρνει έναν διαφορετικό τόπο)

Http://www.davis-inc.com/pythagor/proof2.html

Http://www.in.gr/books/arxaia/puthagoreio.htm

http://www.nadn.navy.mil/MathDept/mdm/pyth.html

http://www.xperiment.se/store/pythagoraw_theorem.htm

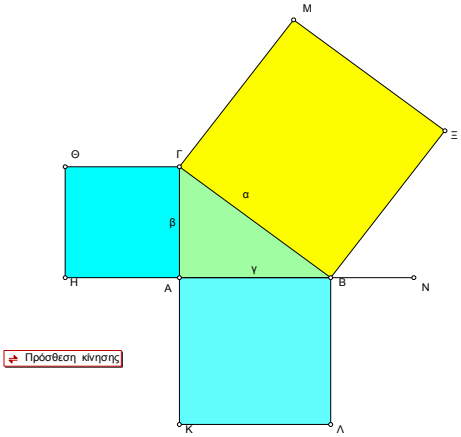
Τι παρατηρείτε:;…….

2. **Ανοίξτε το αρχείο <σχέδιοΠΘΟ1.gsp>**

Στην οθόνη φαίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα τετράγωνα πάνω στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Μετακινήστε με τη βοήθεια του ποντικιού το σημείο Β πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ ή κάνετε διπλό κλίκ στο πλαίσιο «**πρόσθεση κίνησης**».

Τι παρατηρείτε;



Γ) 1.(**Μετρήσεις-παρατηρήσεις-επαληθεύσεις**)

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και η γωνία Α είναι ίση με 90 μοίρες.

- Ι)Μετρήστε τα μήκη ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ με τα εργαλεία του λογισμικού. Με κλικ στα άκρα κάθε τμήματος πατώντας το **shift** συγχρόνως, κλικ στο μενού<**μέτρηση**>, κλικ στο<**απόσταση**>.
  (Στην οθόνη εμφανίζονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων).
- ΙΙ) Με τη βοήθεια του λογισμικού υπολογίστε τα $ΑΒ^2$ +$ΑΓ^2$,$ΒΓ^2$:Επιλέγουμε τα **ΑΒ, ΑΓ** πατώντας το **shift** ,μενου **<μέτρηση>** ,<**υπολογισμός**>,στον **υπολογιστή** κλικ στο<**τιμές**>

κλικ στο **ΑΒ^2+ΑΓ^2** κλικ στο **Ο.Κ** Στην οθόνη φαίνεται το αποτέλεσμα της μέτρησης.Ανάλογα κάνουμε για το ΒΓ. Αν θέλετε χρησιμοποιείστε αριθμομηχανή ή την αριθμομηχανή του Η/Υ.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι……..

……..

- ΙΙΙ) Μετακινήστε το σημείο Β σε δυο ή τρεις νέες θέσεις και καταγράψτε τις αντίστοιχες μετρήσεις στον παρακάτω πίνακα:Με πειραματισμό βρείτε τριάδες φυσικές (όπως ΑΒ=3, ΒΓ=4, ΑΓ=5)

ΑΒ	**ΑΓ**	**ΒΓ**	**$ΑΒ^2$+$ΑΓ^2$**	**$ΒΓ^2$**	**$ΒΓ^2$-$ΑΒ^2$**	**$ΑΓ^2$**

ΑΒ	**ΑΓ**	**ΒΓ**	**$ΑΒ^2$**	**$ΑΓ^2$**	**$ΒΓ^2$**	**$ΑΒ^2$+$ΑΓ^2$**	**ΒΓ $^{2-}$$ΑΒ^2$**		

(Οι παραπάνω πίνακες είναι ίδιοι αλλά με διαφορετική σειρά. Διαλέξτε όποιον θέλετε)

Εξακολουθεί να ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα;……..

……

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το λεγόμενο..**<u>Πυθαγόρειο Θεώρημα :</u>**

……

……

……..

……..

- 3)Από τον παραπάνω πίνακα και παρατηρώντας τα αθροίσματα και τις διαφορές τετραγώνων μπορείτε να συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις;

Ι)Αν γνωρίζουμε τις δυο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορούμε να βρούμε την …………………………………………………..

ΙΙ)Αν γνωρίζουμε την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά μπορούμε να βρούμε……………………………………………………………………

4) Σύμφωνα με τα παραπάνω (για περισσότερη ευχέρεια)να συμπληρώσετε τον δεύτερο πίνακα:

¨Εστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με Α γωνία ίση με 90 μοίρες τότε:

ΑΒ	**ΑΓ**	**ΒΓ**
6	8	……..
9	……..	15
……	0,9	1,5

Δ) Ι)το αντίστροφο του Π.Θ. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση **:** $\mathbf{AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2}$

Τότε ποιό είναι το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

Απάντηση………………………………………………………..

‚‚‚

Εφαρμογή: ΙΙ)Δυο τρίγωνα έχουν πλευρές με μήκη 12 ,20 και 16 εκατοστά το ένα,και 6 ,4 και 10 εκατοστά το άλλο .Μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα για αυτά τα τρίγωνα;-

Απάντηση:

…………………………………………………………………………………**Πρόβλη μα 1ον :**

Ο Αλέξανδρος κληρονόμησε από τον πατέρα του δύο τετραγωνικά οικόπεδα με πλευρές 50 μ. το ένα και 70 μ. το άλλο θέλει να το πουλήσει και να αγοράσει ένα τετραγωνικό οικόπεδο που το εμβαδόν του να ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο παραπάνω οικοπέδων. Προσπαθεί να βρεί την πλευρά του οικοπέδου. Μπορείτε να τον βοηθήσετε;

Σκέψη:

Λύση:

Απάντηση:

Πρόβλημα 2ον Ένας πατέρας έγραψε στα δυο του παιδιά ένα τετράγωνο αγροτεμάχιο 2,5 στρεμμάτων, με τον όρο να το πουλήσουν και να αγοράσουν δυο τετράγωνα αγροτεμάχια με πλευρές (σε μέτρα) όσο οι ηλικίες τους αντίστοιχα. Αν η ηλικία του μεγαλύτερου ήταν 40 έτη , τότε ποια θα ήταν η ηλικία του άλλου ;

΄Ονομα:………..Επίθετο ………………………..ημερομηνία………………

Βιβλιογραφία

Albert A. Cuoco Theorem in Motion : Using Dynamic Geometry to Gain Fresh Insights. So : *Mathematics Teacher v 89 n 4 April 1996p330-332*

Alfinio Flores Pythagoras meets Van Hiele . So : School *Science and mathematics v 93(3), March 1993 p 152-157*

Anne Larson Quinn Using Dynn amic Geometry Software to Teach Graph Theory. .So *Mathematics Teacher v 90 n 4 April 1997 p328-331* Learning and Teaching Indirect Proof .So: *Mathematics Teacher v 89 n6 September 1996 p474-481*

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5 , 25-45*.

Bell, A., Swan, M., Taylor, G., 1981, Choice on operation in verbal problems with decimal numbers, *Educational studies in Mathematics, 12, 399-420.*

Ben V Flora. Don't Teach Technology, Teach with technology. *Mathematics Teacher v 93 n 7 October 2000 p564-567*

Bennett, N., Dunne, E., 1992, Managing Classroom Groups. Hearts: Simon & Schuster.

Bruckheimer,M., & Arcavi,A. (2001), A herrick among mathematicians or dynamic geometry as an aid to proof,

International journal of Computers for mathematical Learning,6, 113-126.

Bull,G., Bell , R. , Garogalo, J., & Sigmon , T.(2002),The case for open source software. . L*eading and Learning with Technology,* 30(2), 10-17.

Burger, W.F., &Shaughnessy, J. M.," Characterizing the van Hiele levels of development in geometry", *Journal for Research in Mathematics Education, 1986b,17,pp31-48.*

Claire Margolinas *Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των μαθηματικών* .μετάφραση Ε. Τσιμπλικάκη εκδόσεις Σαββάλας

Cobb, P., Yackel, A., Wood, T., 1989, Constructivist approach to second grade Mathematics, in E. Von Glasersfeld (Eds), Constructivism in Mathematics Education, Dordrecht, Holland, Reidel

Cohen , E.G.(1994) , Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups, *Review of Educational Research 64, 1, 1-35.*

Cohen L., Manion L., 1997, *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας,* μτφ. Μητσοπούλου Χρ. και Φιλοπούλου Μ., εκδ. Μεταίχμιο και εκδόσεις Έκφραση.

Collis, K., F., 1975, *Concrete and formal operations in school mathematics*, Melbourn: Australian Council for Educational Research.

Davis, R., "Discovery in the teaching of mathematics" in L.Shulman & E. Keislar (Eds), Learning by discovery, pp.114-128, Chicago, IL:Raul McNally

Davis,P.J. – Hersh,R. Η Μαθηματική εμπειρία . Απόδειξη . εκδόσεις τροχαλία Εξωτερικά θέματα.

Edwards Thomas.,Pythagorean triples Served for Dessert. So *Mathematics Teaching in the Middle school*. V5 n7 p420-423 mar 2000.

Engebretsen A. & Embse E. Using Interactive – Geometry Software for right – Angle trigonometry. So : *Mathematics Teacher* v89 n 7 October 1996 p602-605.

Fennema, E., (1985), Girls and Mathematics. The crucial middle school, *Mathematics in the Middle School* (Year book) Reston: NCTB

Friedman, L, 1989, A meta-analysis of resent studies on sex differences in mathematical tasks, *Review of Educational Research, 59, p 185-213.*

Glasser, R., **Strauss, A.,** 1967, The discovery of grounded theory, Chicago: Albine Publication Company.

Gaganidis George, Janete Gaganidis, and Karen Schindler Factors Mediating the Use of Online Applets in the Lesson Planning of Preservice Mathematics Teachers

Garofalo, J., Lester, J., 1985, Metacognition, cognitive Monitoring, and mathematical Performance, *Journal for research in mathematics Education 16, pp163-176.*

Geometry and Proof Connecting Research To Teaching Portland State University Portland, OR 97202.

George Lakoff – Rafael E. Nunez, Where Mathematics come from (The Brain's Innate Arithmetic)

Goldenberg, P(1999), Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning 4: 191-224 Kluewer*

Hadas , N. Hershkowitz, R,. 7 Schwarz, b. (2000) , The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 127-150

Hanna , G . Proof, explanation and exploration : an overview

Hanna G.(1991) Mathematical proof. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (54-61). Kluwer Academic publishers.

Hanna , G. & Jahnke, N.(1993). Proof and application, *Educational Studies in Mathematics, 24,421-438.*

Hanna , G. (1995) Challenges to the importace of proof, For the learning of Mathematics,15(3), 42-49

Hardy, G. H. *Η απολογία ενός μαθηματικού* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

Harel, I., 1991, Children, Designers, Inderdisciplinary Constructions for learning and Knowing Mathematics in a computer-rich School Ablex Publishing Corporation Norwood New Jersey.

Harel, I., Papert, S., 1991, Constructionism: Research Reports and Essays, Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey

Hoffer A.," Geometry is More than Proof ",*Mathematics Teacher*, Jan 1981, p.11-18.

Hoyles , C. &Jones , K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C.

Hughes,(1999) *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών, Δυσκολίες στην εκμάθηση των μαθηματικών*, εκδόσεις Gutenberg

JI .of Computers in Mathematics and Science Teaching

Jones , K. (2000) Providing a foundation for deductive reasoning : Students; interpretations when using dynamic Geometry software and their evolving Mathematical explanations . *Educational Studies in Mathematics*,44,55-85.

Jones , K. (2000) Providing a foundation for deductive reasoning : Students; interpretations when using dynamic Geometry

software and their evolving Mathematical explanations . *Educational Studies in Mathematics*,44,55-85.

Jones T., Paolucci R., 1998, The learning effectiveness of Educational Technology: A call for further research, *Educational Technology Review*, no.9/1998, p.10-14

Kemmis S., 1988, Action researchin retrospect and prospect, in Kemmis, S & McTaggart R, (eds) The action research reader (3rd edition) Geelong (Australia): Deakin University

Lampert, Magdanele.(1988)Teachers' Thinking About Students' Thinking About Geometry : The Effects of new Teaching Tools. Technical Report. Cambridge, Ma: Educational Technology Center, Harvard Graduate school of Education.

Lawrence H. Shirly A visit from Pythagoras using costumes in the classroom. So: *Mathematics Teacher* v93 n 2 November 2000 p652-654

Lester, F., Garofalo, J., Kroll, D., 1989, self-confidence, interest, beliefs and metacognition: key influences on problem solving behavior. Στο D. McLeod &, V. Adams (Eds) Affect and mathematical problem solving. New York: Springer-Verlag

Martin Hughes, *Ποιά δυσκολία υπάρχει στη μάθηση της αριθμητικής*

Mathematics Didn't just happen So : *Mathematics Teacher* v 94, n 2001 p780 – 781

Matt E. Fluster Ti: Geometric meaning in the geometric mean means more meaningful mathematics, *Mathematics Teacher* v94 n 3 March 2001 p186-187.

McGrene, J. L., (1996), Design:Educational Electonic Multi – Player Gamew, A Literature Review , Department of Computer Science The University of british Columbia.

Michael de Villiers An Alternative Introduction to Proof in Dynamic Geometry-

Michael T. Battista and Douglas H. Clements

Miller, D. & Derek, Glover Information Technology in Childhood Education Annual(2002), 5-19 The Interactive Whiteboard as a Force for Pedagogic Change: The Experience of Five Elementery Schools in English Education Authority.

Morris Kline, (1990) *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης,* Εκδόσεις Βάνιας Θεσ/νίκη

Moyer Pa. & Wei Shen Hsia The Archaeological Dig Site : Using geometry to Reconstruct the past . So : *Mathematics Teacher* v94 n 3 march 2001 p 193-197

Nastasi, B.K., and **Clements D.H**.,(1993),Motiviational and social outcomes of cooperative computer education . *Journal of Computing in Childhood Education* 4,1,5-43.

National Council of teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. USA

Papert ,Seymour (1991)*Νοητικές θύελλες* εκδόσεις Οδυσσέας , μετάφραση , Αίγλη Σταματίου.

Peter Pereira De Paul, University Dynamic Geometry : Dilemmas of Teaching

Philinda Stern Denson, Pythagorean Party, *Mathematics Teacher* v 85 n 1 January 1992 p112-114

Piaget J., *The child's Conception of the World*

Polya, G., 1991, Πώς να το λύσω, Μεταφρ Ψυακκή Ξ., Επιμ Πατρώνης Τ., εκδ Καρδαμίτσα.

Puttnam D.Η νέα τεχνολογία θα φέρει επανάσταση στην εκπαίδευση B12771B161/Βήμα 28-11-1999 Βήμα 28-11-1999 Μαριλια Παπαθανασίου

Reston , Va Bringing Pythagoras to life. So : *Mathematics Teacher* v 88 , n 9 December 1995 p744-747

Rosenthal. A The converse of the Pythagorean Theorem So: *Mathematics Teacher* v 87 n 9 December 1994p692-693.(national Council of Teachers of mathematics)

Schoenfeld, A., (1985), Mathematical problem solving, Orlando, FL: Academic Press, pp375

Schoenfeld, A., (1986), Κίνητρα μάθησης ως σκοπός και προϋπόθεση για μια αποτελεσματική διδασκαλία, Παιδαγωγική επιθεώρηση.

Schoenfeld, A., (1987), What' s all the fuss about Metacognition? In cognitive science and mathematics Education, edited by Alan Schoenfeld, pp 189-216, Hillsdale, N, J.: Lawrence Erlbaum Accociates.

Schoenfeld, A., 1991, On mathematics as sense-making: an informal attack on the unfortunate divorce of formal and unformal mathematics. In J. F. Voss, D.N.Perkins & J.W..Segal (Eds), Informal reasoning and education (pp.311-343). Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Schoenfeld, A., 1992, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York: MacMillan, pp334-370.

Sfard, A., 2001, There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics. 46, 13-57.*

Sfard,A., Kieran, C., 2001, Cognition as communication, Rethinking learning by talking through multifaceted analysis of students' mathematical interactions. Mind, Culture and Activity, 8(1), 42-76.

Shulman, L.S., 1986, Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educational Researcher, 15, pp. 1-22*

Smith M., 1991, Toward a Unified Theory of Problem solving, Lawerence Erlbaum Associates Publishers.

Smith, D., 2002, "How people learn…Mathematics", 2nd International Conference on the teaching of mathematics

Steffe, L., 1991, The constructivist teaching experiment illustrations in E. von Glasersfeld (ed) Radical Constructivism in Mathematics Education, pp177-194, Kluwer Academic Publishers

Strauss, A, Corbin, J, 1990, Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedure and Techniques, Sage.

Sue Gerber and JI .of Using the Internet to Learn Mathematics *Computers in Mathematics and Science Teaching (1998) 17(2/3), 113-133*

Szulik,m. J. (2002). Open schools to source ,Linux Magazine,.

Tall, D Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking

Tall, D. Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking,

Tall, D.(1995). Cognitive development, representations and proof, Justifying and Proving in School mathematics (27-38). London: Institute of Education.

The Geometer's Sketchpad Οδηγός χρήσης (Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών)

The Geometer's Sketchpad Μαθαίνοντας Γεωμετρία με το Sketchpad Βιβλίο Μαθητή Δυναμική Γεωμετρία για τον 21^{ο} Αιώνα Παιδαγωγικό ινστιτούτο .

The Office for Standarts in Education report HMI 705(2002), ICT in schools: Effects of government initiatives secondary mathematics and The Mathematical Association, ICT and Mathematics : a guide to learning and teaching mathematic 11-19

Thomas , J, Cooney Conceptualizing Teachers' Ways of Knowning *Educational Studies in Mathematics 38:163-187,1999*

Thompson, A.G., 1984, The relationship of teachers; Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice, *Educational Studies in Mathematics, 15, pp. 105-127*

Tingyau Zheng Mathematics with Interactive geometry Software author So : *Mathematics Teacher v95 n 7 October 2002 p492-497*

Tirosh, D.(1999) Forms of Mathematical Knowledge :Learning and Reaching for Understanding, Kluwer Academic.

Tirosh, D.(1999),Forms of Mathematical knowledge: Learning and teaching for Mathematics , *Educational Studies in Mathematics 38 : 163-187*, Kluwer 40 of Computerws for Mathematical Learning 4.95-98 Kluewer.

Usiskin, Z. ”Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry” (Final report Chicago, IL. University of Chicago , Department of Education 1982,(Eric document Reproduction Service No . ED220 228)

Van Hiele P.,M “Structure and insight” , Academic Press, 1986

Webbink M.(2003).”Κατανοώντας το λογισμικό ανοιχτού κώδικα’ (μετάφραση του Θάνου Κυρίτση)

Wenglinski, H., 1998, Does it compute? The relationship between educational technology and student achievement in mathematics. ETS/1998, New Jersey.

Yerushalmy, M.(1999) Learning Big Ideas: Curriculum Reform and the use of Technology, *International Journal of Computers for Mathematical Learning 4 : 95-98 Kluwer*

Ελληνική βιβλιογραφία

Ασπιώτη Αρ. Α. (1964). *Από τα ψυχολογικά προβλήματα του παιδιού Το παιδί και το μάθημα* .Αθήναι

Βιδάκη Ε., (2002). Διαθεματική Προσέγγιση στη Διδασκαλία με τη Βοήθεια των Νέων Τεχνολογιών, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα ΠΤΔΕ

Βοσνιάδου ,Σ. (1995)*Η σκέψη των παιδιών* (επιμέλεια)Αθήνα εκδόσεις Gutenberg

Βοσνιάδου ,Σ. (2001).*Εισαγωγή στην ψυχολογία* – Τόμος Α', Gutenberg – Αθήνα

Βοσνιάδου ,Σ.(1998)*Η ψυχολογία των μαθηματικών* Αθήνα εκδόσεις Gutenberg

Βοσνιάδου, Σ.(1998)*Γνωσιακή ψυχολογία* .Αθήνα εκδόσεις Gutenberg

Γενικό Επιτελείο Στρατού, Διεύθυνση Εκπαίδευσης (1991). *Αρχές και Μέθοδοι Διδασκαλίας*, τόμος ΙΙ.

Δερτούζος Μ.. Οι νέες τεχνολογίες στην ζωή μας Β125131251/25-12-1998

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 21ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Τρίκαλα 19-21 Νοεμβρίου 2004

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 22ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή. Πρακτικά Λαμία 18-20 Νοεμβρίου 2005

Ελληνική Εταιρεία Επιστημόνων Η/Υ και Πληροφορικής. *Διημερίδα Πληροφορικής «Η Πληροφορική στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση», Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 4-5 Δεκεμβρίου 1998, Πρακτικά εισηγήσεων*.

Ευκλείδης Α΄ Αρ.54 Για το γυμνάσιο.

Ευκλείδης για μαθητές του δημοτικού.1ο τεύχος

Καλαβάσης Φ., Μειμάρης Μ.,(επιμέλεια), (1997), Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ , Διδακτική Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες, Αθήνα εκδ. Gutenberg,

Καλαβάσης,Φ.(1997).” Η Επίδραση του Νέου Τεχνολογικού Περιβάλλοντος στους Στόχους της Εκπαίδευσης ” στα Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ, Πρακτικά 4ης Διεθνούς Διημερίδας στη Διδακτική των Μαθηματικών Αιγαίου,.

Κεκές, Ι., (1996), Ο μαθητής ως ερευνητής στο χώρο του σχολείου. Μια συστημική προσέγγιση με συνεργατική Ενεργό έρευνα , (Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1996)

Κεκές, Ι., (2000), Εκπαιδευτική έρευνα και σχολείο: Προκλήσεις και αναγκαιότητες στην κοινωνία της πληροφορίας, Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών θεμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, τευχ. 3, σελ. 16-44.

Κλαουδάτος, Ν.(2004) Συμπληρωματικές πανεπιστημιακές σημειώσεις. -Παραδόσεις

Κλαουδάτος, Ν., (1996), Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

Κλαουδάτος, Ν., (1999), Τι σημαίνει για τη Μαθηματική Εκπαίδευση «Ενεργητική Στάση ως προς τα Μαθηματικά;», Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών θεμάτων, Α(2), 62-77

Κολέζα & Ντζιαχρήστου ,Β: (1990), *Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στα Σχολεία. Επίπεδα Van Hiele,* Μαθηματική Επιθεώρηση,37,6.11-23

Κολέζα Ε., Μακρής Κ., Σούρλας Κ., (1999). Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών , Αθήνα εκδ Gutemberg, **Κολέζα, Ε.,** (1994) Σκέψεις γύρω από το ρόλο της αναπαράστασης στη διαδικασία των Μαθηματικών, *Μαθηματική Επιθεώρηση, τχ. 41*.

Κολέζα Ε.,(2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*, Leader Books

Κολέζα, Ε., (1996), *Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών,* Πρακτικά 14ου Πανελληνίου Συνεδρίου Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Μυτιλήνη.

Κολιάδης, Ε.(1998*). Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη.* Αθήνα: Αθανασόπουλος-Παπαδάμης

Κόμης Β., (1995), «*Οι λογικές χρήσης και ο ανθρωπομορφισμός μέσα στις αναπαραστάσεις των μαθητών πάνω στις νέες τεχνολογίες της Πληροφορικής»,* Παιδαγωγικός Λόγος, 1995/2, σελ 82-86

Κόμης Β., (1995), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, «Η Διδακτική της Πληροφορικής», Ηράκλειο, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Κόμης Β., Δημητρακοπούλου Α., Πολίτης Π., (1999), «Δραστηριότητες στο χώρο των αναλογιών με χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού μοντελοποίησης», Πανελλήνιο Συνέδριο Πληροφορική & Εκπαίδευση , Μάϊος 1999, Ιωάννινα.

Κόμης Β., Μικρόπουλος, Α., (2001)**,** Πληροφορική στην Εκπαίδευση, Πάτρα: ΕΑΠ.

Κόμης Β., Φείδας, Χ., (2002), Παιδαγωγικές και τεχνολογικές αρχές σχεδίασης ενός λογισμικού συνεργατικής εννοιολογικής χαρτογράφησης βασισμένης στο διαδίκτυο, Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου στη Ρόδο με Διεθνή Συμμετοχή, Πανεπιστήμιο
Αιγαίου

Κόμης, Β., (2004), Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των επικοινωνιών, εκδ Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

Κόμης, Β., Κότσαρη Μ., Λαβίδας, Κ., Φείδας, Χ., Αβούρης, Ν., Δημητρακοπούλου, Α., Πολίτης, Π., (2001), «Εργαλεία αναπαράστασης και διαμεσολάβηση κατά τη συνεργατική επίλυση προβλήματος σε υπολογιστικό περιβάλλον», Τζεκάκη Μ., (επιμ.) 50 Πανελλήνιο Συνέδριο με διεθνή συμμετοχή «Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση», Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, σελ 500-507.

Κόμης, Β., Ράπτης, Α., (2002), Η υπολογιστική μοντελοποίηση στη διδασκαλία και τη μάθηση των θετικών επιστημών, 3ο Πανελλήνιο συνέδριο για τη Διδακτική των Φυσικών Επιστημών και την εφαρμογή των Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μάιος, 2002.

Κόσσυβας, Γ., (1996), η Πρακτική του Ανοιχτού Προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο, Gutenberg.

Κουλουμπαρίτση Α., (2000), «Ομάδες Σχέσεων και συνεργασίας. –Ο σχεδιασμός και η Εφαρμογή ενός Προγράμματος για την ανάπτυξη Κοινωνικών δεξιοτήτων στο Δημοτικό σχολείο» , Σύγχρονη Εκπαίδευση 112, σελ 50-60

Κυνηγός , Χ. (2004)Πλαίσιο σεναρίων για την παιδαγωγική αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών. (σημειώσεις)

Κυνηγός , Χ. κ.α (2002) Generating Communities of Practice for Educational Innovation: Experience from an Institutionally Distributed Authoring Community. 3^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση . Ελληνική Επιστημονική Ένωση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση». Πανεπιστήμιο Αιγαίου ,Ρόδος,26-29Σεπτεμβρίου.

Κυνηγός Χρ. (επιμέλεια)1ο Συνέδριο της ένωσης ερευνητών διδακτικής μαθηματικών « Η διδακτική ως πεδίο έρευνας στην κοινωνία της γνώσης» Πρακτικά εισηγήσεων

Κυνηγός, Χ.- Δημαράκη,Ε. *Νοητικά εργαλεία & πληροφοριακά μέσα.* Εκδόσεις Καστανιώτη. Αθήνα

Κυνηγός,Χ. (2004) παραδόσεις μαθημάτων Πλαίσιο σεναρίων για την Παιδαγωγική αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών

Κυνηγός,Χ.(1995). «Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί . Η υπολογιστική τεχνολογία ως εργαλείο έκφρασης και διερεύνησης στη γενική παιδεία ».Στο Α.Καζαμίας και Μ.Κασσωτάκης (επιμ.), Ελληνική Εκπαίδευση ,Προοπτικές Ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού .Αθήνα : Σείριος.

Λυκοσκούφη Ε., (2005) Διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια υπολογιστή μέσα από μία διαθεματική δομητιστική προσέγγιση διατριβή της

Μακράκης , Β. Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου Με Διεθνή Συμμετοχή Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση από Απόσταση Πανεπιστήμιο Κρήτης Σχολή Επιστημών Αγωγής Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης 8-10 Ιουνίου 2001 Ρέθυμνο .

Μαυρογιώργου Γ.(2003) 22(4) , 323 - 344

Μηχιώτης. Χαρ. Θ. ΝΕΩΤΑΤΟΝ ΛΕΞΙΚΟΝ ΤΗΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΗΣ (καθαρεούσης – δημοτικής) εκδόσεις ΚΑΣΤΑΛΙΑ

Μπαμπινιώτη Γ, Νέες Τεχνολογίες και ποιοτική παιδεία B13131B142/3-12-2000

Μπαρκάτσας, Α. Ν.(2003). Φωτοτυπίες άρθρων και σημειώσεων για το μάθημα Διδακτική ΙΙ: Σύγχρονες τάσεις στην αξιολόγηση της μάθησης και των προγραμμάτων σπουδών στα μαθηματικά, τόμος Α και τόμος Β.

Μπαρκάτσας, Α., (1996), Η αξιολόγηση της επίλυσης προβλήματος στα Μαθηματικά της Γ΄Λυκείου, Πρακτικά ΕΜΕ, Αλεξανδρούπολη

Μπαρκάτσας, Α., (1999), Η Θεωρία της Κατασκευής της γνώσης (Constructivism) και ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία και στη διδακτική των Μαθηματικών, Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, 4, 136-153.

Μπαρκάτσας,Α. Ν.(2004). *Τα Μαθηματικά στην εποχή των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας*. Εκδόσεις Κωστόγιαννος.

Μπαρκάτσας,Α.Ν.(2003). *Σύγχρονες διδακτικές και μεθοδολογικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά του 21^{ου} αιώνα*. εκδόσεις Κωστόγιαννος.

Μπασέτας Κ., (1981), Η ευρετική μέθοδος διδασκαλίας, Σχολείο και Ζωή τ. 2, 81-87.

Οι νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση Α17130Ν061/01-09-2001

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο .(1998)Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. Η εισήγηση του Π.Ι.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο .(2002) τ.Α΄. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Βιβλίο του καθηγητή. *Πληροφορική Γυμνασίου*. Αθήνα 2000.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο(1998). Η Πληροφορική στο σχολείο.. Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων

Πάμφιλος Πάρης Περιοδικό Ευκλείδης ,Το βήμα του Ευκλείδη Δυναμική Γεωμετρία

Παπαμιχαήλ Γ., (1994), Η γνωστική εκπαίδευση στην πρώτη σχολική ηλικία, Οδυσσέας

Ράπτης ,Α. Βοσνιάδου, Σ. ,Γρηγοριάδου, Μ., Κυνηγός, Χ. Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση Τόμος Α΄ και και τόμος Β΄ Ελληνική Ένωση Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση Αθήνα , 29 Σεπτεμβρίου έως 3 Οκτωβρίου ,2004

Ράπτης, Α.- Ράπτη, Α.(1996). Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση. *Αθήνα 4-5 Δεκεμβρίου 1998, Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή .Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση .*

Ράπτης, Α.- Ράπτη, Α.(1996). *Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση*. Εκδόσεις Συμεών Αθήνα

Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004).*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Α΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα

Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α.(2004).*Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας* Ολική Προσέγγιση Τόμος Β΄εκδόσεις Ράπτη Α. Αθήνα

Τα Μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου (Ο.Ε.Δ.Β.)

Τριλιανός, Θ., (2002), Η Παρώθηση του μαθητή για μάθηση, Αθήνα

Τσιπλητάρης, Α., Ψυχοκοινωνιολογία της σχολικής τάξης, 2η έκδοση βελτιωμένη, Αθήνα.

Χρίστου , Κ., & Πίττα Πανταζή, Δ.(2000) , «Έννοια και διδασκαλία της δυναμικής γεωμετρίας.» , Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών

Χρίστου. Κ, Παραδόσεις-Σημειώσεις Μαθημάτων του μαθήματος Νέες Τεχνολογίες της Διδακτικής των Μαθηματικών(2004)

Educational Mathematics Applet:
http://math.hws.edu/xFunctions/download-xFunctions.zip

http://edge-mag.com/2002-02/trench_01.html

http://math.hws.edu/javamath/

http://math.hws.edu/xFunctions/download-xFunctions.sit.hqx

http://math.hws.edu/xFunctions/download-xFunctions.tar.Z

http://members.hellug.gr/djart/articlew/understandingOpenSource

http://www.cut-the-knot.org/MailNotificationPage.shtml

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

http://www.epyna.gr/modules.php?name=News&file=article&sid=780

---

http://www.e-yliko.sch.gr

http://www.e-yliko.sch.gr/mathyliko/pythago.htm

http://www.geocities.com/kampranis/index.html
http://www.keypress.com/sketchpad/index.php

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/contactron.html
http://www.coe.missouri.edu/~jonassen/courses/CLE/index.html
http://mathforum.org/library/topics/ και
http://tapor1.mcmaster.ca/~sgs/maths/

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Pythag/pythag.html

http://www.sch.gr/

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet2/difsin2.html

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet3/sinbox.html

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet4/poly.html

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet4/poly.html

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet5/gp1.html

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet6/graphsinx.html

http://www.sikh-history.com/education/math/advance/applet7/pytha2.html

http://www.telemath.gr/

The Geometer's Sketchpad® - JavaSketchpad Links.htm

The Glossary of Mathematical Mistakes:
http://www.mathmistakes.com/

www.daskalos.gr

www.edHelper.com

www.google.gr

www.illuminations.nctm.org/imath

www.in.gr

www.pi-schools.gr

www.telemath.gr

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: http://geom.umn.edu/apps/gallery.html

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ: http://www.ocean98.org/vict1.htm

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ: www.hms.gr

ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: www.crocodile-clips.com/absorb/AM4/index.htm

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ: http://platon.ee.duth.gr/~soeist7t/Introduction/intro.htm

Μια Πύλη για τα Μαθηματικά με πλούσιο περιεχόμενο:

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ: http://www.in.gr/books/arxaia/puthagoreio.htm

ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ SKETCHPAD: http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html