ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΣΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΑΓΓΕΛΟΥ ΣΟΦΙΑ
Α.Μ. Δ200607

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΣΠΥΡΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

Αφιερώνεται στους γονείς μου, Ιωάννη & Αναστασία,
στην αδερφή μου, Επιστήμη
και στον μέλλοντα σύζυγό μου, Δημήτρη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα επίκουρο καθηγητή Παναγιώτη Σπύρου για τη βοήθεια, την καθοδήγηση, τη συνεργασία και τις συμβουλές που μου έδωσε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή Πανεπιστημίου Κύπρου Αθανάσιο Γαγάτση για τις γνώσεις που μου έδωσε και τους ορίζοντες που μου άνοιξε στη Διδακτική των Μαθηματικών. Επίσης, τον ευχαριστώ για τη συνεργασία του κατά τη διάρκεια επεξεργασίας και ανάλυσης των αποτελεσμάτων των ερωτηματολογίων με την μέθοδο Gras.

Επίσης, ευχαριστώ τον αναπληρωτή καθηγητή Λάππα Διονύσιο ως μέλος της Εξεταστικής Επιτροπής για τη βιβλιογραφία και το υλικό που μου έδωσε σχετικά με την εργασία μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Παναγιώτου (σχολικό σύμβουλο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Ευβοίας) , τον κ. Κοσπεντάρη, τους διευθυντές κ. Βέττα (Γυμνάσιο Αρτάκης), κ. Δομέτιο (6^{ο} Δημοτικό Σχολείο Χαλκίδας) και κ. Δάσκο (7^{ο} Δημοτικό Σχολείο Χαλκίδας), καθώς και τους εκπαιδευτικούς κ. Παρασκευά, κ. Μανή, κ. Μπαταργιά και κ. Μπολούκου για τον διδακτικό χρόνο που μου αφιέρωσαν.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Εισαγωγή ……..7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
1.1 Η έννοια της συμμετρίας……...……..10
1.2 Συμμετρία και ευθείες γραμμές ……...…….…… 12
1.3 Συμμετρικός μετασχηματισμός ……..……16

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
2.1 Η συμμετρία στη φύση ……..……19
2.2 Αντίληψη της συμμετρίας και χρόνος ……..……..20
2.3 Αντίληψη της συμμετρίας και επεξεργασία πληροφοριών ……..……...22
2.4 Ποιοτική και ποσοτική συμμετρία ……..……24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
3.1 Έρευνες σχετικές με τη συμμετρία ……..……27
3.1.1 Έρευνες στο εξωτερικό ……...27
3.1.2 Έρευνες στην Ελλάδα ……29
3.2 Η έννοια της συμμετρίας στα σχολικά βιβλία ……31
3.3 Η έρευνά μας – Σκοπός και τρόπος διεξαγωγής της έρευνας …….....38
3.3.1 Ερευνητικά ερωτήματα και διδακτικές μεταβλητές ……...41
3.3.2 Στατιστική ανάλυση μέσω R. Gras ……42
3.3.3 Ταξινόμηση λαθών ……44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
4.1 Αποτελέσματα και σχόλια πάνω στις απαντήσεις των μαθητών …….……48
4.2 Παρατηρήσεις πάνω στα διαγράμματα ομοιότητας ……76
4.3 Αναλύσεις συνεπαγωγικών διαγραμμάτων …….……..85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο
5.1 Συμπεράσματα ……90
5.2 Διδακτική πρόταση ……..……..94

Βιβλιογραφία ……100

Παράρτημα
Α. Ερωτηματολόγια ……..……..106
Β. Διαγράμματα ομοιότητας ……123
Γ. Συνεπαγωγικά διαγράμματα ……138

«Η συμμετρία είναι ένα τεράστιο αντικείμενο μελέτης, τόσο στην τέχνη όσο και στη φύση. Τα μαθηματικά βρίσκονται στην ρίζα της συμμετρίας και είναι δύσκολο να βρεις κάποια άλλη όπου θα στηρίξεις τη νόηση των μαθηματικών. Ελπίζω να μην έχω αποτύχει εντελώς στην προσπάθειά μου να σας δείξω τα παρακλάδια της και να σας ανεβάσω σε μία σκάλα από τις διαισθητικές έννοιες στις αφηρημένες ιδέες.»

Herman Weyl, ***Symmetry*** (Princeton, 1952)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία ήταν μία ξεχωριστή εμπειρία που μου έδωσε τη δυνατότητα να μελετήσω τον τρόπο σκέψης και αντίληψης των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου.

Η εργασία διαπραγματεύεται την έννοια της συμμετρίας. Η συμμετρία είναι ένα πολιτισμικό αντικείμενο βαθειά ριζωμένο στους πολιτισμούς που δέχτηκαν σημαντική επίδραση από τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό. Η ύπαρξη της συμμετρίας στον κόσμο γύρω μας είναι δεδομένη, καθώς και η μεγάλη ποικιλία των εφαρμογών της αρχής της συμμετρίας στην τέχνη, στην επιστήμη και στην ίδια τη φύση. Η ύπαρξη της συμμετρίας στον οργανικό και ανόργανο κόσμο είναι δεδομένη, καθώς και η μεγάλη ποικιλία των εφαρμογών της αρχής της συμμετρίας σε διάφορες επιστήμες.

Κατά τη γνώμη μας, η συμμετρία είναι μια σημαντική έννοια γιατί μπορεί να συνεισφέρει τόσο από μαθηματική σκοπιά στους μαθητές, όσο και από παιδαγωγική. Είναι έννοια οικεία στους μαθητές, όπως και άλλες έννοιες της γεωμετρίας, η οποία απαιτεί από τους μαθητές δραστηριότητες που συνδέονται με το περιβάλλον τους, τους δίνει τη δυνατότητα να δράσουν (μετρήσεις, χαράξεις), τους οδηγεί σε μορφές επεξήγησης και αιτιολόγησης και τους δίνει τα μέσα επιβεβαίωσης όχι μόνο οπτικά αλλά και κατασκευαστικά.

Επίσης, η έννοια της συμμετρίας αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην μελέτη της γεωμετρίας, βοηθάει σε τυποποιήσεις και οδηγεί σε συγκρίσεις, εύρεση σχέσεων ανάμεσα σε σχήματα, που είναι απαραίτητα για τη βαθύτερη κατανόηση της γεωμετρίας και του χώρου που μας περιβάλλει.

Η παρούσα διπλωματική εργασία χωρίζεται σε πέντε κεφάλαια ως εξής:
Στο **πρώτο κεφάλαιο** γίνεται εισαγωγή στην έννοια της συμμετρίας όπου δίνονται διάφοροι ορισμοί και εξετάζουμε γιατί τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Επίσης, γίνεται αναφορά στην έννοια του συμμετρικού μετασχηματισμού.
Στο **δεύτερο κεφάλαιο** αναφερόμαστε στη συμμετρία στη φύση, στην αντίληψη της συμμετρίας, καθώς και στο διαχωρισμό της συμμετρίας σε ποιοτική και ποσοτική.
Στο **τρίτο κεφάλαιο** περιγράφουμε τις έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με την έννοια της συμμετρίας, τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας στα σχολικά βιβλία και στον τρόπο διεξαγωγής της δικής μας έρευνας.
Στο **τέταρτο κεφάλαιο** παραθέτουμε τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των μαθητών και αναλύουμε τα διαγράμματα ομοιότητας και τα συνεπαγωγικά διαγράμματα που προκύπτουν.
Τέλος, στο **πέμπτο κεφάλαιο** γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση και κάνουμε τη δική μας διδακτική πρόταση.

Το **πρόβλημα** που μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία έχει σχέση με την αντίληψη (διαισθητική) της συμμετρίας και της εύρεσης των συμμετρικών απλών σχημάτων ως προς τριών ειδών άξονες συμμετρίας κατά την μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο. Η σύγκριση αυτή παίρνει ως μοναδικό κριτήριο την ηλικιακή διαφορά μεταξύ των μαθητών της έκτης τάξης του δημοτικού και της πρώτης τάξης του γυμνασίου. Σε ένα δεύτερο επίπεδο, μας ενδιαφέρει η επίδραση της διδασκαλίας στην Α΄ Γυμνασίου στην επιτυχία σε έργα εύρεσης συμμετρικών σχημάτων, καθώς και αξόνων συμμετρίας σε διάφορα σχήματα.

Επομένως, τα **ερευνητικά ερωτήματα** της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι τα παρακάτω:

1. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της επίδοσης των μαθητών του δημοτικού και γυμνασίου σε έργα εύρεσης συμμετρικών απλών σχημάτων ως προς τα τρία είδη αξόνων συμμετρίας (οριζόντιος, κατακόρυφος, πλάγιος)
2. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της επίδοσης των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου σε έργα εύρεσης αξόνων συμμετρίας σε διάφορα σχήματα (γεωμετρικά, σχήματα από την καθημερινή ζωή και σχήματα με χρωματισμούς).
3. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των δύο ομάδων έργων, δηλαδή στα έργα όπου ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός απλού σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας και σε έργα όπου οι μαθητές πρέπει να φέρουν τους άξονες συμμετρίας σε διάφορα σχήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Σύμφωνα με τον **G. Martin**, υπάρχουν μόνο δεκαεφτά διαφορετικά μαθηματικά μοντέλα συμμετρίας. Αυτό το συμπέρασμα παρουσιάστηκε το 1891 και ήταν εμπειρικά γνωστό στους Ισπανούς Moors του δέκατου πέμπτου αιώνα αλλά ήταν άγνωστο στον μαθηματικό Ευκλείδη. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη τοποθέτησαν τα μαθηματικά σε αξιωματική βάση και πιθανόν γράφτηκαν στην Αλεξάνδρεια λίγο μετά το 300 π.Χ. Επίσης, ο Ευκλείδης είπε στον Βασιλιά Πτολεμαίο ότι δεν υπάρχει βασιλικός δρόμος στη γεωμετρία. Από τις πρώτες προτάσεις του Ευκλείδη είναι εμφανές ότι , αν ζούσε σήμερα, θα παρουσίαζε το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών μέσω *μετασχηματισμών*. Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι μία λεπτή γραμμή κατά μήκος του βασιλικού δρόμου προς τη γεωμετρία.

Ο μετασχηματισμός στο επίπεδο είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία από το σύνολο των σημείων του επιπέδου στον εαυτό του. Για έναν δοσμένο μετασχηματισμό f, αυτό σημαίνει ότι για κάθε σημείο P υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Q τέτοιο ώστε να ισχύει f(P)=Q, και αντίστροφα, για κάθε σημείο R υπάρχει ένα μοναδικό σημείο S τέτοιο ώστε f(S)=R. Για να κατανοήσουμε πλήρως κάθε μαθηματικό σύστημα θα πρέπει να κατανοήσουμε τους μετασχηματισμούς του συστήματος και ειδικότερα εκείνους τους μετασχηματισμούς που αφήνουν ένα συγκεκριμένο μέρος του συστήματος σταθερό. Επειδή το σύνολο των μετασχηματισμών είναι αρκετά μεγάλο, μπορούμε να πάρουμε ένα μεγάλο υποσύνολο όπου η πρόταση 'το σημείο P είναι *κοντά* στο σημείο Q' δηλώνει ότι 'το f(P) είναι *κοντά* στο σημείο F(Q)'.

Ο G. **Martin** μελέτησε τους πιο κλασσικούς μετασχηματισμούς που έχουν την ιδιότητα: 'Αν l είναι μία ευθεία, τότε και η f(l) είναι μία ευθεία'. Ένας μετασχηματισμός f που έχει αυτή την ιδιότητα λέγεται *συγγραμμικός*. Λέγοντας ευθεία εννοούμε ένα σύνολο σημείων και η f(l) είναι το σύνολο όλων των σημείων f(P) όπου το σημείο P ανήκει στην ευθεία l. Για έναν δοσμένο συγγραμμικό μετασχηματισμό f, η f(l) είναι ευθεία και το σημείο f(P)

ανήκει στην ευθεία f(l) αν και μόνο αν το σημείο P ανήκει στην ευθεία l. Οι μετασχηματισμοί και οι περιστροφές είναι παραδείγματα συγγραμικότητας.

Η πρόταση για κάθε σημείο P υπάρχει ένα σημείο Q έτσι ώστε f(P)=Q είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι η f είναι μία *αντιστοίχηση* σε σύνολα σημείων. Η αντιστοίχηση f λέγεται *επί* όταν για κάθε σημείο P υπάρχει ένα σημείο Q τέτοιο ώστε f(Q)=P. Η αντιστοίχηση f είναι *ένα προς ένα* αν f(R)=f(S) , τότε R=S. Άρα, ένας μετασχηματισμός είναι μία τέτοια αντιστοίχηση σημείων που είναι και ένα προς ένα και επί.

Με τον παραπάνω ορισμό της συμμετρίας συμφωνούν και άλλοι μαθηματικοί όπως ο **Jones** (2000) που θεωρεί τη συμμετρία ως έναν μετασχηματισμό ενός μαθηματικού αντικειμένου, ο οποίος αφήνει κάποια ιδιότητα του αντικειμένου αναλλοίωτη. Επίσης, οι **Washburn & Crowe** (1988) θεωρούν τη συμμετρία ως ένα μετασχηματισμό του επιπέδου στον εαυτό του, έτσι ώστε να διατηρούνται οι αποστάσεις. Τέτοιοι μετασχηματισμοί είναι: η αξονική συμμετρία, η στροφή ως προς σημείο με βάση συγκεκριμένη γωνία ω και η μεταφορά ως προς διάνυσμα δ.
Επίσης, οι **Dreyfus & Eisenberg** (1990) αναφέρουν ότι η έννοια της συμμετρίας συσχετίζεται με την έννοια της συνάρτησης και η συσχέτιση αυτή πηγάζει από τη θεωρία των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

Όμως, και άλλοι ερευνητές έχουν δώσει παρόμοιους ορισμούς για την έννοια της συμμετρίας. Ο **Rosen** (1995) όρισε τη συμμετρία ως «η διατήρηση σε μια πιθανή αλλαγή». Συγκεκριμένα, διακρίνει δύο συστατικά στοιχεία της συμμετρίας: η πιθανότητα για μια αλλαγή και η διατήρηση κατά την αλλαγή. Αλλαγή θεωρείται ο μετασχηματισμός του γεωμετρικού αντικειμένου που διατηρεί όμως το αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες.

Σύμφωνα με τους **Dakin & Herbert** (1998), η συμμετρία είναι μια περίπλοκη ιδιότητα της εικόνας που παρατηρείται σε ένα μεγάλο εύρος από διάφορα είδη και παρατηρείται με απλούς οπτικούς μηχανισμούς. Οι μηχανισμοί αυτοί ποικίλλουν ανάλογα με τη γωνία

της συμμετρίας. Η ανίχνευση της συμμετρίας δεν απαιτεί υπολογιστικές ικανότητες και συναντάται σε μεγάλο φάσμα στη φύση.

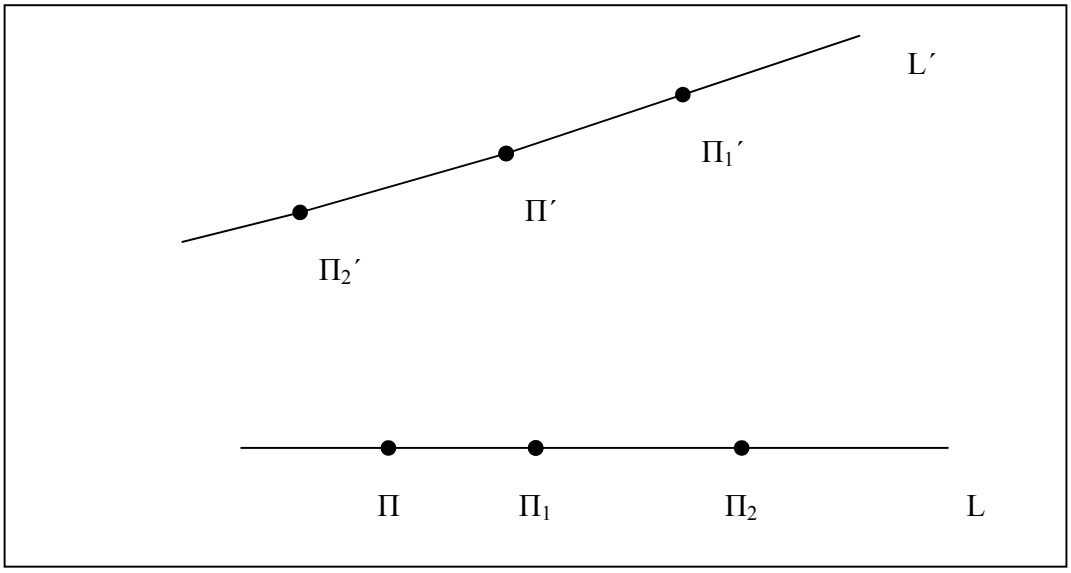
Εκτός από τους παραπάνω ορισμούς θα εξετάσουμε σε επόμενη παράγραφο τους ορισμούς που δίνονται στα σχολικά βιβλία για τα συμμετρικά σημεία και την αξονική συμμετρία. Θα δούμε τον διαφορετικό τρόπο παρουσίασης της έννοιας και τους διαφορετικούς ορισμούς που δίνονται από τους συγγραφείς των βιβλίων. Στους ορισμούς αυτούς δεν αναφέρεται η έννοια «μετασχηματισμός» αφού η διδασκαλία γίνεται σε μικρές τάξεις του γυμνασίου.

1.2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι το συμμετρικό μιας ευθείας γραμμής είναι πάλι μια ευθεία γραμμή. Βέβαια αυτό είναι απόλυτα λογικό και θα μπορούσε να το δείξει κάποιος χωρίς ιδιαίτερες γνώσεις. Όμως, εδώ θα το αποδείξουμε με αυστηρά μαθηματικά.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ισομετρία αντιστοιχίζει τρία διαφορετικά **συνευθειακά** σημεία σε τρία άλλα διαφορετικά **συνευθειακά** σημεία. Ας υποθέσουμε προς το παρών ότι ισχύει αυτή η πρόταση και θα αποδείξουμε πρώτα την εξής πρόταση: *'Κάθε συνάρτηση (**όχι** απαραίτητα ισομετρία!) που αντιστοιχίζει τρία συνευθειακά σημεία σε τρία συνευθειακά σημεία θα πρέπει επίσης να αντιστοιχίζει κάθε ευθεία γραμμή L σε (ένα **υποσύνολο** από) μία ευθεία γραμμή L΄'*. Αν το αποδείξουμε αυτό, τότε με τη διατήρηση των αποστάσεων μπορούμε να δείξουμε ότι η εικόνα της L πραγματικά 'γεμίζει' την L΄.

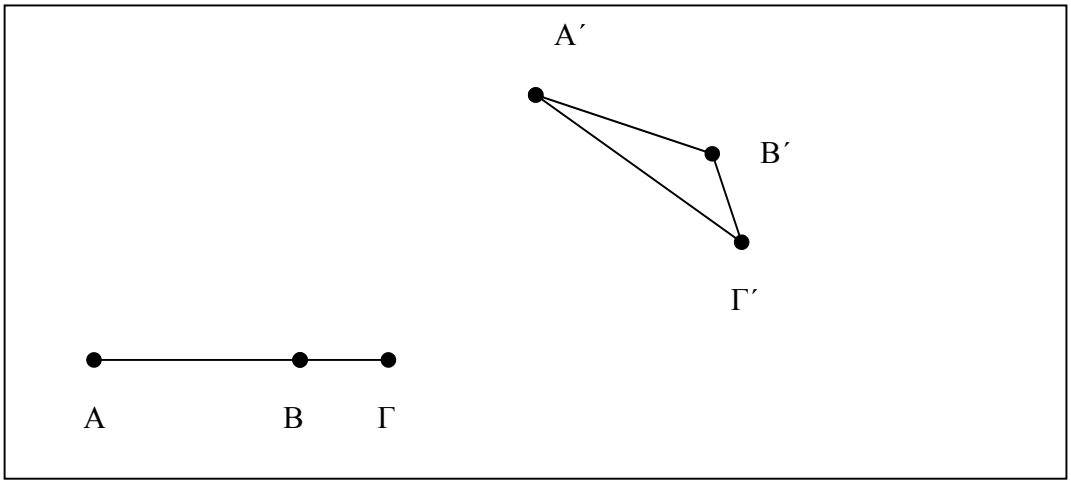
Παίρνουμε μια ευθεία γραμμή L και δύο διαφορετικά σημεία $Π_1$ και $Π_2$ πάνω σε αυτή. Αυτά τα δύο σημεία αντιστοιχίζονται από τη συνάρτησή μας σε δύο άλλα σημεία $Π_1$΄και $Π_2$΄ τα οποία ορίζουν μια άλλη ευθεία L΄. Τώρα, κάθε σημείο Π στην ευθεία L είναι συγγραμμικό με τα σημεία $Π_1$ και $Π_2$, οπότε (σύμφωνα με την πρώτη πρόταση που δεν έχουμε αποδείξει ακόμα) η εικόνα του Π΄ είναι συγγραμμική με τα σημεία $Π_1$΄ και $Π_2$΄. Επομένως, το σημείο Π΄ βρίσκεται πάνω στην ευθεία L΄ (**Σχήμα 1**). Άρα, κάθε σημείο Π της L αντιστοιχίζεται σε ένα σημείο Π΄ της L΄, δηλαδή η ίδια η L αντιστοιχίζεται 'μέσα' στην L΄.



Σχήμα 1

Τώρα θα αποδείξουμε την αρχική μας πρόταση, δηλαδή ότι *μία συμμετρία αντιστοιχίζει πάντα τρία συνευθειακά σημεία σε τρία συνευθειακά σημεία.* Έστω τρία συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ τα οποία αντιστοιχίζονται σε τρία σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ αντίστοιχα τα οποία δεν είναι απαραίτητα συνευθειακά (**Σχήμα 2**). Επειδή έχουμε ισομετρία ισχύει ότι $|Α΄Β΄| = |ΑΒ|$, $|Β΄Γ΄| = |ΒΓ|$ και $|Α΄Γ΄| = |ΑΓ|$.

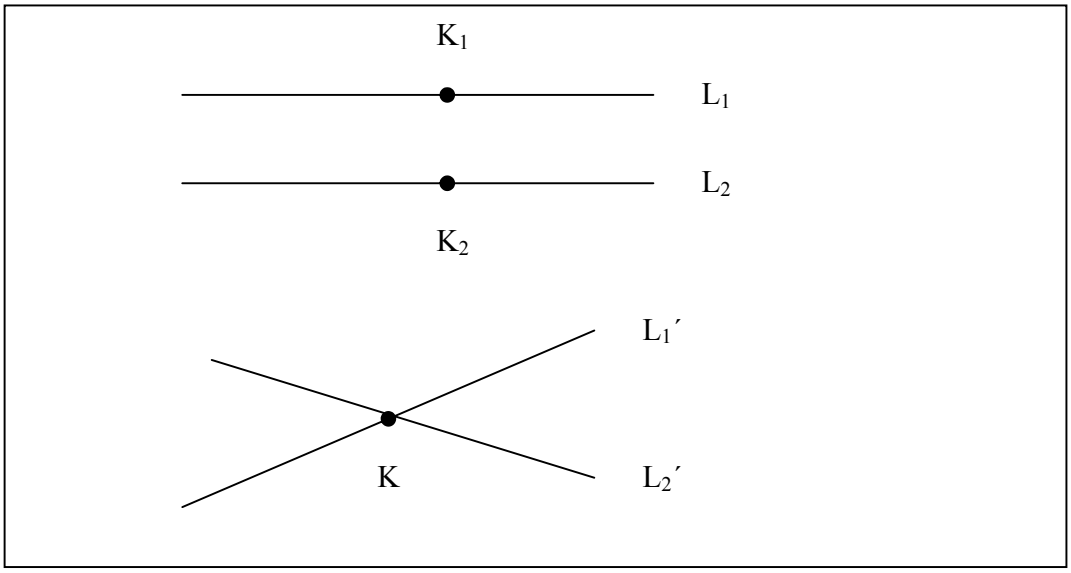
Αφού τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά θα ισχύει $|ΑΓ| = |ΑΒ| + |ΒΓ|$. Αλλά τότε ισχύει $|Α΄Γ΄| = |ΑΓ| = |ΑΒ| + |ΒΓ| = |Α΄Β΄| + |Β΄Γ΄|$. Υποχρεωτικά τα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ είναι συνευθειακά γιατί διαφορετικά μία πλευρά του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ θα ήταν ίση με το **άθροισμα** των άλλων δύο πλευρών , το οποίο δεν ισχύει λόγω της **τριγωνικής ανισότητας**.



Σχήμα 2

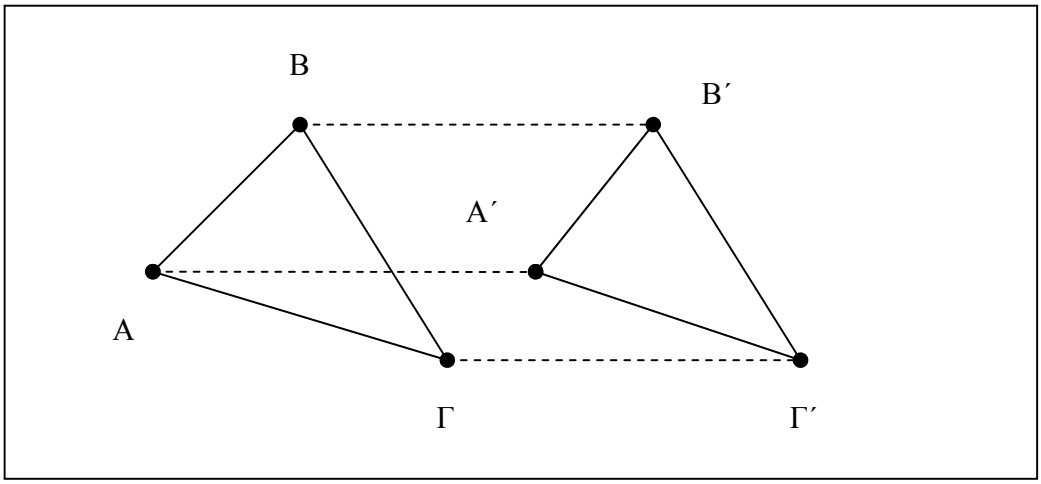
Επομένως, αποδείξαμε ότι πάντα μια ευθεία γραμμή αντιστοιχίζεται σε μια άλλη ευθεία γραμμή. Η πρόταση αυτή μας επιτρέπει να σχεδιάζουμε πολύ εύκολα το συμμετρικό μιας ευθείας. Δηλαδή, αρκεί να βρούμε τις εικόνες δύο σημείων της ευθείας και μετά να τα ενώσουμε για να φτιάξουμε τη συμμετρική της ευθεία. Όμως, η κατασκευή ενός ευθύγραμμου τμήματος μιας συνάρτησης που δεν είναι ισομετρία ή μιας καμπύλης οποιασδήποτε συνάρτησης δεν είναι τόσο απλό, χρειάζεται να βρούμε τις εικόνες αρκετών σημείων και στη συνέχεια να τα ενώσουμε με μια συνεχόμενη γραμμή.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι *εικόνες παράλληλων ευθειών είναι πάλι παράλληλες ευθείες*. Θα το αποδείξουμε με την εις άτοπο απαγωγή: έστω οι παράλληλες ευθείες L_1, L_2 οι οποίες αντιστοιχίζονται μέσω μιας συμμετρίας στις μη παράλληλες ευθείες L_1', L_2' οι οποίες τέμνονται στο σημείο Κ (**Σχήμα 3**). Τότε, τα σημεία K_1, K_2 των ευθειών L_1, L_2 αντίστοιχα έχουν την ίδια εικόνα Κ, άτοπο.



Σχήμα 3

Ας θεωρήσουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος 4.

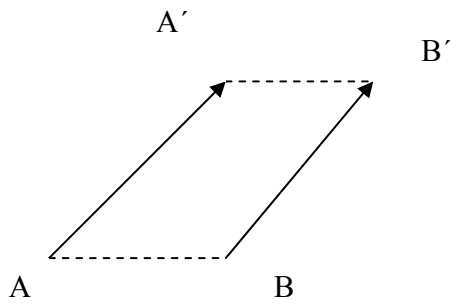


Σχήμα 4

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι οι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ είναι παράλληλες προς τις Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Α΄ αντίστοιχα. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση και στηρίζεται στην έννοια του **διανύσματος**. Έτσι, κάθε σημείο του τριγώνου ΑΒΓ κινείται νοτιοδυτικά-βορειοανατολικά κατά την ίδια απόσταση.

Με τη βοήθεια των διανυσμάτων μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συμμετρία διατηρεί τις αποστάσεις. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν τα σημεία Α, Β μετακινούνται κατά το ίδιο

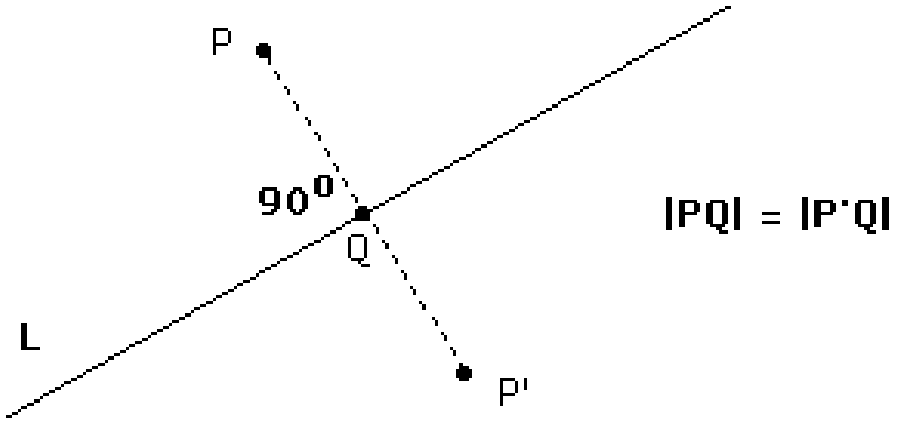
διάνυσμα $\vec{v}$ προς τα σημεία-εικόνες Α΄Β΄, τότε $|AB| = |A'B'|$. Επειδή τα ΑΑ΄ και ΒΒ΄ είναι εξ' ορισμού παράλληλα και ίσα , ισχύει λόγω του κανόνα του παραλληλογράμμου ότι και τα ΑΒ, Α΄Β΄ είναι παράλληλα και ίσα. (Σχήμα 5)



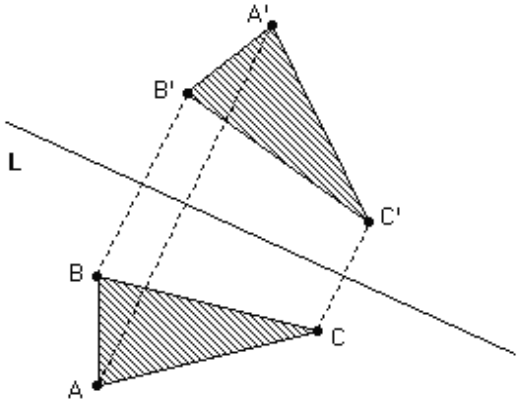
Σχήμα 5

1.4 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Όλοι γνωρίζουμε ότι αν σταθούμε μπροστά σε έναν καθρέπτη, τότε θα δούμε το είδωλό μας μέσα σε αυτόν και μάλιστα στο ίδιο βάθος όσο και η απόστασή μας από τον καθρέπτη. Αυτό το γνωρίζουν οι ιδιοκτήτες στα εστιατόρια και στις καφετέριες και χρησιμοποιούν τους καθρέπτες για να 'διπλασιάσουν' τον χώρο τους. Αν θέλουμε να ακουμπήσουμε το είδωλό μας στον καθρέπτη μπροστά μας, τότε σηκώνουμε το χέρι μας ώστε να σχηματίζει ορθή γωνία με τον καθρέπτη. Επομένως, η εικόνα Ρ΄ του σημείου Ρ μέσω συμμετρικού μετασχηματισμού γίνεται όπως φαίνεται στο σχήμα 6:

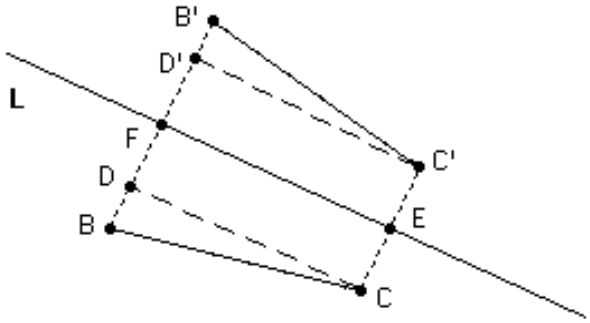


Τότε, για να βρούμε τον συμμετρικό μετασχηματισμό του τριγώνου ABC μέσω της ευθείας L, αρκεί να βρούμε τις εικόνες των σημείων A, B, C. (Σχήμα 7).



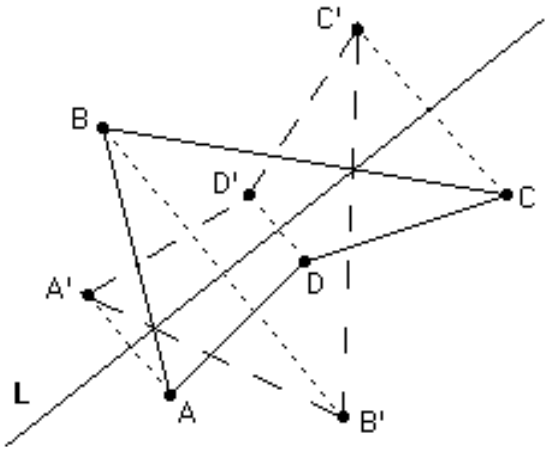
Σχήμα 7

Στο παραπάνω σχήμα, τα τρίγωνα ABC, A΄B΄C΄ φαίνονται να είναι ίσα. Πως θα το αποδείξουμε όμως αυτό; Αν αποδείξουμε ότι οι τρεις πλευρές τους είναι αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα θα είναι ίσα. Αρκεί να αποδείξουμε λοιπόν ότι $|BC| = |B'C'|$.



Χρειαζόμαστε να φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα CD, C΄D΄ (και τα δύο **παράλληλα** προς την ευθεία L και **κάθετα** προς τις BB΄, CC΄). Με τη βοήθεια των ορθογωνίων FECD και FEC΄D΄ έχουμε ότι: |DF| = |CE| = |C΄E| = |D΄F|, επομένως |DB| = |BF| - |DF| = |B΄ F| - |D΄F| = |D΄B΄|, ενώ |DC| = |FE| = |D΄C΄|. Επομένως, τα τρίγωνα DBC και D΄B΄C΄ είναι ίσα (επειδή |DB| = |D΄B΄| και |DC| = |D΄C΄|), επομένως |BC| = |B΄C΄|.

Τέλος, τον άξονα συμμετρίας μπορούμε να τον φανταστούμε σαν έναν καθρέπτη, αλλά η διαφορά με τη πραγματικότητα είναι ότι ο καθρέπτης αυτός μπορεί να **διασχίσει** το σχήμα που αντανακλάται σε αυτόν, και αντίστροφα. Ένα παράδειγμα τέτοιου σχήματος είναι το παρακάτω:



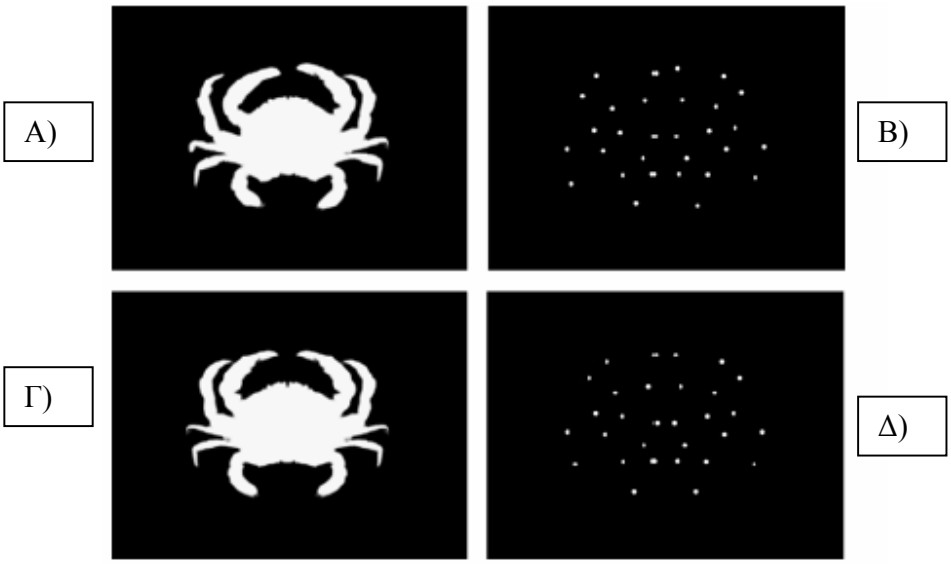
Επίσης, άξονα συμμετρίας έχουν τα παρακάτω γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου:
A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

2.1 Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗ ΦΥΣΗ

Σύμφωνα με τους **Evans**, **Wenderoth** & **Cheng**, ένα σχήμα έχει αμφίπλευρη συμμετρία όταν το μισό σχήμα αντικατοπτρίζεται μέσω καθρέπτη στο άλλο μισό. Στη φύση συναντούμε πολλά αντικείμενα με χαμηλό επίπεδο αμφίπλευρης συμμετρίας. Αρκετά φυτά και ζώα έχουν αναπτύξει δομές όπου η συμμετρία είναι σημαντικό χαρακτηριστικό τους (**Donoghue** et al , **Moller** and **Thornhill**, 1998). Έχει παρατηρηθεί ότι τα έντομα προτιμούν να επισκέπτονται λουλούδια που είναι συμμετρικά και έχουν μεγαλύτερη ποσότητα νέκταρ (**Moller**, 1998) και είναι προδιατεθειμένα να κάνουν συμμετρικές ουρές στις εργαστηριακές μελέτες (**Ciurfa** et al, 1996). Έχει παρατηρηθεί σε πολλά είδη ότι τα θηλυκά, συμπεριλαμβανομένου των χελιδονιών, των ζεμπρών, των σκορπιών και των ανθρώπων, προτιμούν αρσενικά που παρουσιάζουν αμφίπλευρη συμμετρία.

Οι παραπάνω ερευνητές έκαναν διάφορα πειράματα για να μελετήσουν αν η αντίληψη της αμφίπλευρης συμμετρίας συνδέεται με αντιληπτικά ή γνωστικά χαρακτηριστικά των ανθρώπων. Συγκεκριμένα, ζήτησαν από φοιτητές να αναγνωρίσουν αν υπάρχει συμμετρία σε περίπλοκες βιολογικές εικόνες και σε παρόμοια σχήματα με τελείες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στο σχήμα (Α) φαίνεται ένα καβούρι όπως υπάρχει στη φύση (ελαφρά ασύμμετρο) και στο σχήμα (Β) είναι το αντίστοιχό του με τελείες. Το σχήμα (Γ) είναι παρόμοιο με το (Α) αλλά με απόλυτη συμμετρία και το (Δ) είναι το αντίστοιχο του (Γ) με τελείες.

Στους φοιτητές του πειράματος αυτού δόθηκαν πολλές τέτοιες ανακατεμένες εικόνες και έπρεπε να απαντήσουν σε σύντομο χρονικό διάστημα αν παρουσιάζουν συμμετρία ή όχι. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα υποκείμενα αναγνώριζαν πολύ πιο εύκολα τη συμμετρία στις εικόνες με τα αντικείμενα από τη φύση παρά στις αντίστοιχες εικόνες με τις τελείες. Επίσης, παρατήρησαν ότι τα υποκείμενα αναγνώριζαν πολύ πιο εύκολα τα αντικείμενα που είχαν κατακόρυφη συμμετρία παρά τα αντικείμενα με οριζόντια ή πλάγια συμμετρία.

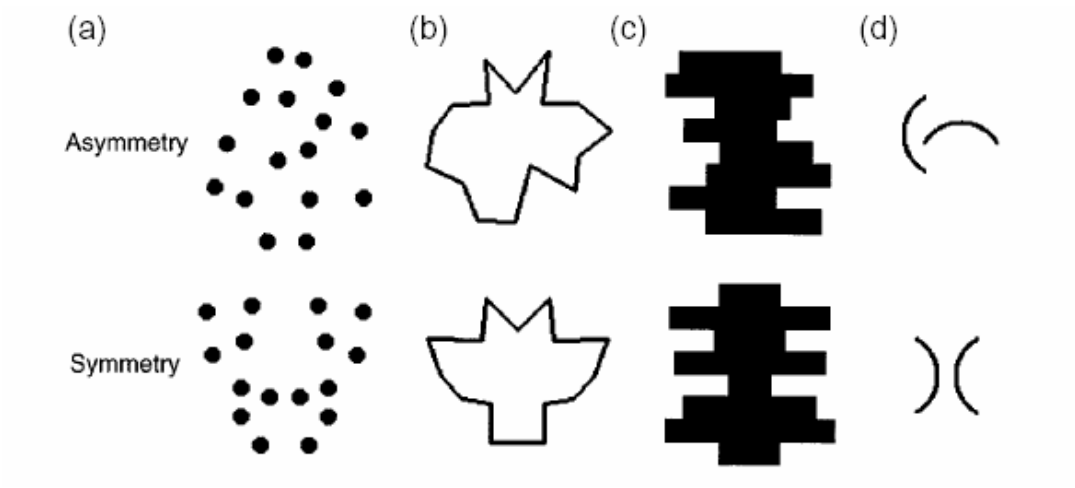
2.2 ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣ

Οι **Olivers** and **Van Der Helm** (1998) αναφέρουν ότι η αναγνώριση της συμμετρίας είναι μία φυσική ικανότητα που μπορεί να κωδικοποιηθεί χωρίς την ανάγκη της προσοχής. Ο **Julesz** (1981) ονομάζει *παθητική* αντίληψη οποιοδήποτε ερέθισμα διαρκεί 160 msec ή λιγότερο. Έχει παρατηρηθεί ότι πολλές μορφές συμμετρίας αναγνωρίζονται μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα.

Η συμμετρία θεωρείται εδώ και πολλά χρόνια ως μία από τις πιο αξιοπρόσεκτες οπτικές κανονικότητες. Ο **Pascal** έχει γράψει ότι «συμμετρία είναι αυτό που βλέπουμε με μια ματιά» (**Baylis** & **Driver**, 1994). Αυτό ακριβώς εξετάζει και η έρευνα των **Olivers** & Van Der **Helm**, δηλαδή αν η αναγνώριση της συμμετρίας γίνεται ασυναίσθητα με μια ματιά ή χρειάζεται μια πιο λεπτομερής εξέταση. Σύμφωνα με τον **Julesz**, η αναγνώριση της συμμετρίας δεν γίνεται με μία εξονυχιστική έρευνα της εικόνας κάθε σημείου αλλά με έναν παράλληλο μηχανισμό.

Οι **Olivers** & Van Der **Helm** έδωσαν στα υποκείμενα κάποιες εικόνες και έπρεπε να απαντήσουν αν τα σχήματα που έβλεπαν είναι συμμετρικά ή όχι. Τα σχήματα αυτά ήταν τεσσάρων ειδών: τελείες, πολύγωνα, σχήματα με περίγραμμα και σχήματα με

παρενθέσεις (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) και όσα ήταν συμμετρικά είχαν μόνο κατακόρυφη συμμετρία.



Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα υποκείμενα χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 562 msec για να αναγνωρίσουν τα μη συμμετρικά σχήματα και 536 msec για τα συμμετρικά.

Στη συνέχεια, το πείραμα αυτό επαναλήφθηκε αλλά με το χρονικό όριο των 120 msec για κάθε εικόνα. Τότε, παρατηρήθηκε μεγάλη αύξηση των λάθος απαντήσεων των υποκειμένων. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν οι **Olivers** & Van Der **Helm** είναι ότι τελικά η αναγνώριση της συμμετρίας δεν γίνεται με μια ματιά αλλά είναι ένας (μη προσεκτικός) μηχανισμός που σχετίζεται με την προσοχή, την ομαδοποίηση και το χωρισμό σε τμήματα.

Μία άλλη έρευνα έγινε από τον **Wenderoth** (1994) για να αποδείξει ότι η προσοχή παίζει σημαντικό ρόλο στην αντίληψη της συμμετρίας. Ο Wenderoth πιστεύει ότι παρατηρούνται περισσότερες σωστές απαντήσεις όταν τα σχήματα έχουν κατακόρυφη συμμετρία *μόνο* επειδή αυτού του είδους η συμμετρία συναντάται πιο συχνά. Έτσι, έκανε ένα πείραμα όπου έδωσε σε υποκείμενα σχήματα όπου μόνο το 3% είχαν κατακόρυφη συμμετρία και όλα τα υπόλοιπα είχαν οριζόντια ή πλάγια συμμετρία. Τα

αποτελέσματα έδειξαν ότι τα υποκείμενα είχαν πολύ μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα σχήματα με οριζόντια ή πλάγια συμμετρία παρά στα σχήματα με κατακόρυφη συμμετρία.

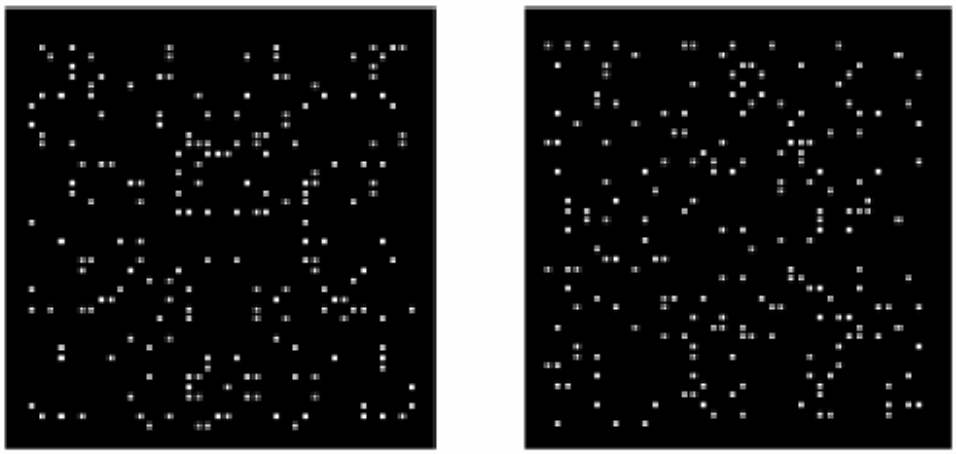
Ο **Driver** et al (1992) έκανε ένα πείραμα για να αποδείξει και αυτός τη σπουδαιότητα της προσοχής στην αναγνώριση της συμμετρίας. Ο Driver έδειξε σε ένα άτομο έξι σχήματα με πράσινο χρώμα και έξι με κόκκινο χρώμα. Στις μισές δοκιμές τα πράσινα σχήματα ήταν συμμετρικά και τα κόκκινα μη συμμετρικά, ενώ στις άλλες μισές δοκιμές ήταν αντίστροφα. Όταν ρωτούσαν το υποκείμενο ποια σχήματα ήταν συμμετρικά, τότε αυτός απαντούσε σωστά ότι ήταν τα πράσινα σχήματα ή τα κόκκινα σχήματα. Όμως, όταν του έδειχναν ένα συγκεκριμένο σχήμα οποιουδήποτε χρώματος για να εξηγήσει αν είναι συμμετρικό ή όχι, τότε το υποκείμενο απαντούσε τυχαία και δεν έδινε ολοκληρωμένη απάντηση.

2.3 ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ

Όπως είδαμε υπάρχουν δύο μοντέλα για την αναγνώριση της συμμετρίας. Σύμφωνα με αυτά τα μοντέλα, σε πρώτη φάση, το υποκείμενο μπορεί να διακρίνει ένα συμμετρικό σχήμα ανάμεσα σε άλλα μη συμμετρικά με μία γρήγορη ματιά. Όμως, για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα θα πρέπει το υποκείμενο να εξετάσει προσεκτικότερα το σχήμα που του δίνεται. Διάφορες μελέτες έχουν δείξει ότι κάποιος μπορεί να διακρίνει τη συμμετρία σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα σε εύκολα και απλά σχήματα (**Barlow & Reeves**, 1979; **Locher & Wagemans**, 1993), ενώ για σωστότερα αποτελέσματα και σε δυσκολότερα σχήματα χρειάζεται μια πιο λεπτομερής εξέταση (**Barlow & Reeves**, 1979; **Royer**, 1981; **Foster**, 1991; **Wenderoth**, 1997).

Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι η ευκολία διάκρισης της συμμετρίας σε ένα σχήμα εξαρτάται από τον προσανατολισμό της γωνίας συμμετρίας. Οι **Huang & Pashler** έκαναν μία έρευνα για να εξετάσουν αν η αντίληψη της συμμετρίας χειροτερεύει όταν αυξάνονται οι πληροφορίες που πρέπει να διερευνηθούν σε ένα σχήμα. Στην έρευνα αυτή πήραν μέρος 48 φοιτητές οι οποίοι έπρεπε να διακρίνουν αν υπάρχει συμμετρία στις

διακόσιες κουκίδες που εμφανίζονταν στην οθόνη του υπολογιστή τους (παρακάτω σχήμα).



Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν δύο: SIM (Simultaneously) και SUCC (Successively). Στην πρώτη μέθοδο εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή όλο το σχήμα μόνο για 100 msec ώστε να μην επιτρέψει την κίνηση του ματιού του παρατηρητή. Στη δεύτερη μέθοδο, το σχήμα χωρίζεται σε κομμάτια ως εξής: είτε χωρισμένο στη μέση από μία οριζόντια γραμμή όπου το δεύτερο κομμάτι παρουσιαζόταν 500 msec μετά από το πρώτο ή εμφανίζονται οι μισές κουκίδες και αμέσως μετά οι άλλες μισές.

Αν υπάρχει κάποιο όριο στις πληροφορίες που μπορεί να επεξεργαστεί το ανθρώπινο μυαλό, τότε θα πρέπει τα υποκείμενα να έχουν καλύτερα αποτελέσματα στην μέθοδο SUCC. Διαφορετικά, οι ερευνητές ανέμεναν παρόμοια αποτελέσματα και στις δύο μεθόδους.

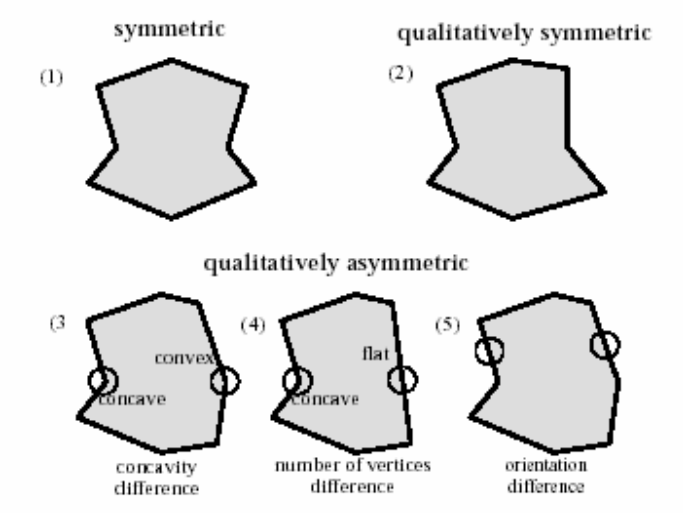
Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι δεν υπήρχαν σημαντικές διαφορές στις δύο μεθόδους. Οι απαντήσεις των υποκειμένων κυμαίνονταν ανάλογα με την πυκνότητα των κουκίδων και την πολυπλοκότητα του σχήματος και δεν επηρεάζονταν από την ποσότητα των πληροφοριών που έπρεπε να επεξεργαστούν κάθε φορά. Επίσης, συμπέραναν ότι η αντίληψη της συμμετρίας δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές είτε το σχήμα είναι καθαρά συμμετρικό είτε δεν έχει απόλυτη συμμετρία.

2.4 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Σύμφωνα με τους **Ferguson**, **Aminoff** & **Gentner**, η αντίληψη της συμμετρίας είναι σημαντική και ουσιαστική στην γνωστική διαδικασία. Η συμμετρία χρησιμεύει ως μια αρχή οργάνωσης διαφορετικών περιοχών της αντίληψης και της γνώσης, συμπεριλαμβανομένου της σχηματοποίησης του Gestalt (**Garner**, 1974; **Palmer**, 1991) και της οπτικής ανακατασκευής σε τρισδιάστατο σχήμα (**McBeath**, **Schiano** & **Trevsky**, 1994).

Σύμφωνα με την έρευνα των **Ferguson**, **Aminoff** & **Gentner**, η ανακάλυψη της συμμετρίας είναι μια διαδικασία αυτο-σύγκρισης που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια συγχώνευση παρόμοιων υποσυνόλων των δομικών σχέσεων ενός σχήματος. Δηλαδή, η αντιληπτική ομοιότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας τις ίδιες διαδικασίες κατασκευής – σχεδίασης που χρησιμοποιούνται και στην αναλογία (**Felkenhainer**, **Forbus** & **Gentner**, 1989; **Goldstone**, **Medin** & **Gentner**, 1991; **Markman** & **Gentner**, 1993; **Medin**, **Goldstone** & **Gentner**, 1993). Έτσι, δημιούργησαν ένα υπολογιστικό μοντέλο ανακάλυψης της συμμετρίας που ονομάζεται MAGI (**Ferguson**, 1994) και μπορεί να κάνει αυθόρμητες αναφορές του μισού σχήματος πάνω στο άλλο μισό.

Οι παραπάνω ερευνητές εξέτασαν τη σχέση ανάμεσα σε συμμετρικά σχήματα και σε *ποιοτικά συμμετρικά* (δηλαδή σχήματα που έχουν διαφορές ως προς τις πλευρές ή την καμπυλότητα), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στο παραπάνω σχήμα, το πρώτο αριστερά πολύγωνο(1) είναι *ποσοτικά συμμετρικό* γιατί οι πλευρές αριστερά και δεξιά έχουν το ίδιο μήκος. Στο πολύγωνο (2) οι πλευρές στο δεξιό μέρος είναι μεγαλύτερες από τις πλευρές στο αριστερό μέρος. Επειδή οι διαφορές αυτές είναι ποσοτικές και όχι ποιοτικές, λέμε ότι το πολύγωνο (2) είναι *ποιοτικά συμμετρικό* ή *ποσοτικά ασύμμετρο* με το πολύγωνο (1). Το πολύγωνο (3) διαφέρει ως προς την καμπυλότητα των γωνιών (η αριστερή είναι κοίλη και η δεξιά κυρτή), οπότε είναι *ποιοτικά ασύμμετρο*. Το πολύγωνο (4) έχει διαφορές ως προς τις γωνίες αφού η αριστερή γωνία είναι κοίλη και δεξιά δεν υπάρχει γωνία. Τέλος, το πολύγωνο (5) έχει διαφορές ως προς τον προσανατολισμό αφού οι δύο σημειωμένες πλευρές κλίνουν προς το ίδιο μέρος.

Οι ερευνητές εξετάζουν πότε μπορεί να γίνει πιο εύκολα η αντίληψη της ασυμμετρίας (και όχι της συμμετρίας) και υποθέτουν ότι τα σχήματα που έχουν ποιοτικές διαφορές μπορούν πιο εύκολα να θεωρηθούν ως ασύμμετρα. Επομένως, τα σχήματα που παρουσιάζουν ποιοτικές διαφορές όπως αυτές που εξετάσαμε, είναι πιο εύκολο να βρεθούν ότι είναι ασύμμετρα. Αυτό αποδείχθηκε με την παρακάτω έρευνα.

Στην έρευνα αυτή δόθηκαν στα υποκείμενα διάφορα πολύγωνα και έπρεπε να απαντήσουν αν είναι συμμετρικά ή όχι. Η ασυμμετρία που παρουσίαζαν μερικά ήταν ποιοτική ή ποσοτική. Το αποτέλεσμα της έρευνας έδειξε ότι τα υποκείμενα είχαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στα σχήματα που είχαν ποιοτικές διαφορές. Επομένως, οι

ποιοτικές σχέσεις είναι σημαντικές στην ανθρώπινη αντίληψη της συμμετρίας. Όπως είναι πιο εύκολο να βρεθεί η κατακόρυφη συμμετρία, έτσι είναι πιο εύκολο να βρεθούν τα ασύμμετρα σχήματα με ποιοτικές διαφορές σε σχέση με τα ασύμμετρα με ποσοτικές διαφορές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

3.1 ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Έχουν γίνει πολλές έρευνες για τη διδασκαλία και εισαγωγή της έννοιας της συμμετρίας τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό. Διάφοροι ερευνητές έχουν διαφορετικές απόψεις για την σύνδεση της έννοιας της συμμετρίας με άλλες έννοιες. Ο **Malkevitch** (1998) αναφέρει ότι η έννοια της συμμετρίας συνδέεται συχνά με την τέχνη και το σχέδιο ενώ ο **Meyer** (1998) πιστεύει ότι η έννοια της συμμετρίας συνδέεται με άλλες έννοιες, όπως τα πολύγωνα, τα πολύεδρα και η επικάλυψη του επιπέδου.

Θα αναφέρουμε παρακάτω κάποιες έρευνες και τα συμπεράσματά τους που έχουν γίνει στην Ελλάδα και στο εξωτερικό.

3.1.1 ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

Έχουν γίνει διάφορες έρευνες σχετικά με την αντίληψη των μαθητών της έννοιας της συμμετρίας. Θα παραθέσουμε μερικές από αυτές:

Οι πρώτες έρευνες που έγιναν πάνω στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς βασίστηκαν στο αν οι μαθητές έλαβαν ή όχι υπ' όψιν τους τις αναλλοίωτες ενός μετασχηματισμού όπως: διατήρηση των μηκών (**Thomas** 1979, **Kidder** 1978), διατήρηση των ιδιοτήτων σύμπτωσης σε ασκήσεις κατασκευής της εικόνας ενός συγκεκριμένου σχήματος ή σε μια άσκηση σύγκρισης ανάμεσα στο σχήμα του αντικειμένου και στο σχήμα της εικόνας του.

Στην Αγγλία, η **Hart** (1981) περιγράφει τα αποτελέσματα μαθητών 13-15 χρονών σε τεστ πάνω στην ορθογώνια συμμετρία. Οι ερωτήσεις του τεστ ταξινομούνται ανάλογα με τη δυσκολία τους. Όμως, δεν δίνει καμιά περιγραφή των διαδικασιών επίλυσης και έτσι τα αποτελέσματά της δεν μπορούν να ερμηνευτούν εύκολα. Ο κύριος στόχος της Hart ήταν ο προσδιορισμός επιπέδων κατανόησης στο βιβλίο της. Η έρευνα αυτή είναι πολύ μεγάλη και σαν σύνολο έχει μεγάλη αξία, όμως η ανάλυση περιορισμένων ερωτήσεων είναι μάλλον μη επιτρεπτή.

Στη Γαλλία έχουν γίνει αρκετές έρευνες γι' αυτή την έννοια. Καταρχήν, ο **Grass** (1983) παρουσιάζει μια σειρά διδασκαλιών σε μαθητές 13-14 χρονών γύρω από την έννοια του μετασχηματισμού και ιδιαίτερα γύρω από την έννοια της ορθογώνιας συμμετρίας. Το ενδιαφέρον του Grass ήταν κυρίως να περιγράψει και να συγκρίνει διάφορους τύπους ταξινόμησης των θεμάτων που προτάθηκαν κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών, όμως δίνει και ορισμένα αποτελέσματα πάνω στις διαδικασίες των μαθητών σε σχέση με τις υποθέσεις πάνω στην εξέλιξη των αντιλήψεών τους.

Τέλος, αναφέρουμε μία έρευνα η οποία διενεργήθηκε από τον **Birgs** (1987) και κατέληξε στις δέκα βασικές δυσκολίες των παιδιών σχετικά με τη συμμετρία ως προς άξονα:
α) το συμμετρικό ενός οριζόντιου αντικειμένου είναι ένα οριζόντιο είδωλο,
β) το συμμετρικό ενός κατακόρυφου αντικειμένου είναι ένα κατακόρυφο είδωλο,
γ) το συμμετρικό ενός κατακόρυφου/οριζόντιου αντικειμένου είναι ένα οριζόντιο/ κατακόρυφο είδωλο,
δ) η αξονική συμμετρία συνδέεται με ζεύγη λέξεων, οι οποίες είναι αντίθετες,
ε) αν ένα αντικείμενο βρίσκεται στο σημείο τομής των γραμμών ενός πλέγματος, τότε και το συμμετρικό του θα έχει την ίδια ιδιότητα,
στ) το νόημα της έκφρασης 'προχώρα κάθετα' εξαρτάται από τη φύση του αντικειμένου και/ή την παρουσία πλέγματος και/ή την κλίση του άξονα συμμετρίας, ζ) το συμμετρικό ενός σχήματος δεν είναι μοναδικό,
η) το συμμετρικό ενός σχήματος είναι παρόμοιο και όχι ίσο με το αρχικό σχήμα,
θ) ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, εάν αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη ακόμη και αν αυτά αναστραφούν ή μετατεθούν
ι) μόνο το περίγραμμα ενός σχήματος είναι ενδιαφέρον, το χρώμα και οι λεπτομέρειες του σχήματος μπορεί να αγνοηθούν.

3.1.2 ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

1η έρευνα

Η έρευνα αυτή διενεργήθηκε από τους **Γαγάτση** Α. και **Ντίνα** Α.(1986) σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών και καθηγητών για την αξονική συμμετρία. Στην έρευνα αυτή ρωτήθηκαν μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου με ερωτηματολόγιο που περιείχε 49 ερωτήσεις κατασκευής άξονα συμμετρία ή συμμετρικού σχήματος. Επίσης, έγιναν συνεντεύξεις σε καθηγητές σχολείων Γυμνασίου για να εξετάσουν πως διδάσκουν την ορθογώνια συμμετρία.

Το έργο αποτελούνταν από τέσσερα μέρη:

- Α΄: σχεδιασμός συμμετρικού σε λευκό χαρτί.
- Β΄: σχεδιασμός συμμετρικού σε τετραγωνισμένο χαρτί.
- Γ΄: σχεδιασμός αξόνων συμμετρίας (όταν υπάρχουν).
- Δ΄: εύρεση συμμετρικού με συντεταγμένες

Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν τα εξής:

Οι μαθητές συχνά θεωρούσαν ότι ο άξονας μπορεί να έχει διεύθυνση οριζόντια ή κατακόρυφη μόνο, με αποτέλεσμα να παρατηρούνται οι διαδικασίες οριζόντιας και κατακόρυφης μεταφοράς αλλά τα κατάφεραν πολύ καλύτερα στις ανάλογες εργασίες όπου τους είχε δοθεί τετραγωνισμένο χαρτί.

Οι καθηγητές έδιναν μεγάλη σημασία στην εύρεση συμμετρικού σημείου με συντεταγμένες και δεν αναφέρονταν καθόλου στην έννοια του μετασχηματισμού. Παρότρυναν τους μαθητές τους για τη χρήση της δίπλωσης στην εύρεση άξονα συμμετρίας.

2η έρευνα

Η έρευνα αυτή διενεργήθηκε από τους **Τσελεπίδη** Κ. και **Μαρκόπουλο** Χ. και παρουσιάστηκε στο 1ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Αθήνα, 2005). Η έρευνα έγινε σε Α-ετείς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος

Δημοτικής Εκπαίδευσης και περιλάμβανε δραστηριότητες που εμπεριείχαν την έννοια της συμμετρίας.

Η έρευνα έγινε σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση, οι φοιτητές ασχολήθηκαν με ιδιότητες σχημάτων που προέκυπταν από την έννοια της συμμετρίας και έλυσαν διάφορα γεωμετρικά προβλήματα. Στη δεύτερη φάση, έγιναν ατομικές συνεντεύξεις και στην τρίτη φάση οι φοιτητές καλούνταν να αντιμετωπίσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα με τη βοήθεια της συμμετρίας στα πλαίσια των γραπτών εξετάσεων του μαθήματος των μαθηματικών.

Τα συμπεράσματα της έρευνας ήταν τα εξής:
Οι φοιτητές φαίνεται ότι δεν θεωρούν ως μοναδικό κριτήριο την ισότητα του αρχικού και τελικού γεωμετρικού αντικειμένου, παρόλο που σε κάποιες περιπτώσεις δεν τηρείται για όλα τα σημεία του αρχικού αντικειμένου η 1-1 αντιστοίχηση. Επίσης, κατά την κατασκευή του άξονα συμμετρίας σε γεωμετρικά σχήματα, έγινε εμφανής η εμμονή τους στη θεώρηση του άξονα συμμετρίας ως μέσου διχοτόμησης ενός γεωμετρικού αντικειμένου.

3η έρευνα

Η έρευνα αυτή διενεργήθηκε από τους **Μαστρογιάννη** Α. και **Κορδάκη** Μ. σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών του Δημοτικού για την αμφίπλευρη συμμετρία. Η έρευνα αυτή παρουσιάστηκε στο 2ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Αλεξανδρούπολη, 2007).

Στην έρευνα αυτή δόθηκαν στους μαθητές του δημοτικού τρεις κατηγορίες σχημάτων: α) μη γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής, τα οποία προέρχονταν από τον κόσμο της εμπειρίας των μαθητών, β) γεωμετρικά σχήματα της καθημερινής ζωής και γ) τυπικά γεωμετρικά σχήματα.

Τα συμπεράσματα της έρευνας αυτής ήταν ότι οι μαθητές του Δημοτικού ήταν σε θέση να κατανοήσουν την έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας και μπορούσαν να αναγνωρίσουν τα συμμετρικά σχήματα κυρίως μέσω της δίπλωσης. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αναγνώρισαν ευκολότερα τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας από τον οριζόντιο ή τους πλάγιους άξονες.

3.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

Η έννοια της συμμετρίας παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στα ελληνικά σχολικά βιβλία το 1935 με τον τίτλο «Συμπλήρωμα Γεωμετρίας» του Νικολάου Δ.Ν. Το 1964 έγινε μια αλλαγή του Αναλυτικού Προγράμματος και στα σχολικά βιβλία («Μαθηματικά για την Α΄ Γυμνασίου» του Κ.Γ. Μπούσγου) κατά τα έτη 1964 – 1968 γίνεται σύνδεση της γλωσσικής ετυμολογίας και γραμματικής σημασίας με λειτουργική για τα Μαθηματικά σημασία. Τα σχολικά έτη 1969 – 1979 η διδασκαλία της γεωμετρίας περιορίζεται στο γυμνάσιο και στα πρακτικά λύκεια με το σχολικό βιβλίο του Γ.Σ. Κανέλου.

Από το 1980 η συμμετρία στο Γυμνάσιο διδάσκεται στη Β΄ Γυμνασίου αλλά από τη φετινή σχολική χρονιά διδάσκεται στην Α΄ Γυμνασίου με την εισαγωγή των νέων σχολικών βιβλίων. Στο Δημοτικό, η έννοια της συμμετρίας διδάσκεται σε μία μόνο παράγραφο όπου παρουσιάζεται με διαισθητικό τρόπο ως αντανάκλαση. Στο Λύκειο, η συμμετρία διδάσκεται στη Β΄ Λυκείου και από το 1990 στην Α΄ Λυκείου. Η διδασκαλία της συμμετρίας στο Λύκειο δεν γίνεται αναλυτικά, απλά γίνεται μια υπενθύμιση για να γίνει η χρήση αυτού ως εργαλείο για άλλα θέματα. Παρακάτω, θα αναφέρουμε αναλυτικά πως εισάγεται η έννοια της αξονικής συμμετρίας σε κάθε ένα από τα σχολικά βιβλία.

Σύμφωνα με το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα, η Γεωμετρία ως μέρος της μαθηματικής γνώσης έχει στόχο να βάλει τάξη στο πλήθος των μορφών που μας περιβάλλουν. Ήταν το πρώτο σύστημα γνώσεων που έκανε το άλμα από την εμπειρική συλλογή δεδομένων και μεθόδων στο στάδιο της επιστημονικής θεωρίας (και επί αιώνες το μοναδικό) και στηρίχθηκε στη διαμορφωμένη αίσθηση του χώρου που έχει ο άνθρωπος, οργανώνοντάς

την σε θεωρητικό σύστημα με πρακτικές εφαρμογές. Βασικό εργαλείο της είναι η αφαιρετική-συνθετική σκέψη, τόσο με ακριβή προσδιορισμό των εννοιών, όσο και με τη χρήση της λογικής στην αποδεικτική διαδικασία.

Συνεχίζοντας αναφέρει ότι το αντίστοιχο μάθημα στο Λύκειο οφείλει να διατηρεί αυτά τα χαρακτηριστικά: οφείλει να οδηγήσει τους μαθητές στον επιστημονικό τρόπο σκέψης , τον *ορθό λόγο*, εφαρμοσμένο σε ένα προνομιακό αντικείμενο , κοινό σε όλους, την αίσθηση και οργάνωση του χώρου. Οι μαθητές έχουν ήδη διαμορφωμένη αίσθηση του χώρου, είτε από σχολικά είτε από εξωσχολικά ερεθίσματα. Το μάθημα δεν μπορεί να αγνοήσει αυτό το υπόβαθρο ούτε βέβαια να το καταπολεμήσει. Σκοπός του είναι να το φωτίσει με νέο φως, διεξοδικά, συστηματικά, ξεκαθαρίζοντας ενδεχομένως λαθεμένες ή συγκεχυμένες αντιλήψεις που προϋπάρχουν. Οι μαθητές πρέπει από την αρχή να καταλάβουν τους κανόνες του παιχνιδιού με το *γνωστό – άγνωστο*: ο κύκλος ή η ορθή γωνία, για παράδειγμα, είναι έννοιες γνωστές σε όλους, αλλά η Γεωμετρία δεν ασχολείται με αυτές πριν δοθεί ο αντίστοιχος ορισμός τους και δε θεωρεί γνωστές τις ιδιότητές τους πριν να αποδειχθούν.

Όμως, οι παραπάνω στόχοι του αναλυτικού προγράμματος δεν είναι εύκολο να επιτευχθούν αφού στη διδασκαλία της συμμετρίας υπάρχουν πολλά κενά. Μερικά από τα κύρια χαρακτηριστικά του νέου τρόπου παρουσίασης και διδασκαλίας της γεωμετρίας είναι τα παρακάτω:

- Αποκλεισμός των συνόλων.
- Ελάχιστος ως ανύπαρκτος συμβολισμός.
- Διαισθητική–ενορατική παρουσίαση των εννοιών.
- Θεωρητική θεμελίωση: μόνο αν θεωρηθεί απαραίτητη.
- Οδηγίες από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
- Έμφαση στις καθημερινές εμπειρίες, σε συγκεκριμένες καταστάσεις και στα εποπτικά (ψαλίδι, γεωμετρικά όργανα, τετραγωνισμένο χαρτί κτλ.).

Μεταξύ των στόχων που έχουν τεθεί από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο να επιτευχθούν σε σχέση με τη διδασκαλία του παραπάνω κεφαλαίου είναι:
i) Να μπορούν να αναγνωρίζουν οι μαθητές σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας.
ii) Να γνωρίζουν πότε δύο σημεία λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία.
iii) Να μπορούν να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός σημείου ή ενός ευθυγράμμου τμήματος ή ενός πολυγώνου ή ενός κύκλου ως προς ευθεία.
(Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003 Τεύχος Β΄).

Η έννοια της συμμετρίας στα σχολικά βιβλία (1980-1987) παρουσιάζεται ως διμελής σχέση και κατ' επέκταση ως μετασχηματισμός άπειρων σημείων. Συγκεκριμένα, δίνεται ο εξής ορισμός:
Αφού οι απεικονίσεις είναι διμελείς σχέσεις, καταλαβαίνουμε ότι θα υπάρχουν απεικονίσεις της μορφής φ: Α➔Α οι οποίες θα αντιστοιχούν κάθε στοιχείο ενός ορισμένου συνόλου Α ένα στοιχείο του ίδιου συνόλου. Μια τέτοια απεικόνιση λέγεται και μετασχηματισμός του Α. Συνήθως ο όρος «**μετασχηματισμός του Α**» χρησιμοποιείται πιο πολύ όταν το Α είναι σύνολο σημείων. Ορισμένοι χαρακτηριστικοί μετασχηματισμοί του συνόλου Ε των σημείων του επιπέδου ονομάζονται αξονική συμμετρία, κεντρική συμμετρία και μεταφορά... Ας θεωρήσουμε το σύνολο Ε των σημείων του επιπέδου, και μια ευθεία του επιπέδου, που την ονομάζουμε «άξονα». Με τη βοήθεια της ευθείας ε μπορούμε να ορίσουμε ένα μετασχηματισμό του συνόλου Ε των σημείων του επιπέδου με τον ακόλουθο τρόπο: Σε κάθε σημείο Α αντιστοιχίζουμε το σημείο Α΄ που βρίσκεται, όταν φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και πάρουμε στην προέκτασή του τμήμα ΚΑ΄=ΚΑ.

Συγκεκριμένα, στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της **Β΄ Γυμνασίου** (**Συγγραφείς: Αλιμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ., Ευσταθόπουλος Ε., Κλαουδάτος Ν., Παπασταυρίδης Σ. και Σβέρκος Α.**) όπου διδασκόταν η έννοια της συμμετρίας μέχρι το προηγούμενο σχολικό έτος η εισαγωγή της έννοιας γίνεται ως εξής:

Αρχικά παρουσιάζονται σχήματα από την καθημερινή ζωή που έχουν έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας και δίνεται ο εξής ορισμός:

*«Η ευθεία που χωρίζει ένα σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ευθείας αυτής, τα μέρη αυτά να ταυτιστούν, τότε η ευθεία λέγεται **άξονας συμμετρίας**»*

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι άξονες συμμετρίας των εξής γεωμετρικών σχημάτων: ισοσκελές τρίγωνο, ισοσκελές τραπέζιο, ρόμβος, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και κύκλος. Σε κάθε περίπτωση αναφέρονται και επεξηγούνται οι ιδιότητες που έχουν τα σχήματα αυτά λόγω της ύπαρξης άξονα συμμετρίας.

Στην επόμενη παράγραφο, γίνεται αναφορά στα σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς ευθεία και δίνονται οι εξής ορισμοί:

*«Δύο **σημεία** Μ και Μ΄ είναι **συμμετρικά ως προς ευθεία ε**, όταν η ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΜ΄»*

Και

*«Δύο **σχήματα** ($Σ_1$) και ($Σ_2$) λέγονται **συμμετρικά ως προς ευθεία ε,** όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ευθεία ε»*

Στην ίδια παράγραφο, γίνεται γεωμετρική κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς ευθεία:

Συμμετρικό σημείου, συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος, συμμετρικό τριγώνου και συμμετρικό κύκλου.

Στην επόμενη παράγραφο, γίνεται αναφορά στα σχήματα με κέντρο συμμετρίας. Παρουσιάζονται πάλι διάφορα σχήματα (τόσο από την καθημερινή πραγματικότητα όσο και καθαρά γεωμετρικά σχήματα) και δίνονται οι εξής ορισμοί:

*«Δύο **σημεία** Μ και Μ΄ είναι **συμμετρικά ως προς σημείο** Ο, όταν το Ο είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΜΜ΄»*

Και

*«Δύο **σχήματα** λέγονται **συμμετρικά ως προς σημείο** Ο, όταν το καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς το Ο»*

Τέλος, γίνονται πάλι γεωμετρικές κατασκευές συμμετρικών σχημάτων ως προς σημείο.

Δυστυχώς, η διδασκαλία αυτού του κεφαλαίου γινόταν κάθε σχολική χρονιά πολύ γρήγορα και περιληπτικά. Η διδασκαλία ήταν περισσότερο κατασκευαστική και λιγότερο αξιωματική με κύριο χαρακτηριστικό τα σχήματα.

Από το σχολικό έτος 2007 – 2008 η έννοια της συμμετρίας διδάσκεται στο βιβλίο της **Α΄ Γυμνασίου** (**Συγγραφείς: Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν. και Φερεντίνος Σ**.). Το κεφάλαιο της συμμετρίας χωρίζεται στις παρακάτω παραγράφους:

- Συμμετρία ως προς άξονα
- Άξονας Συμμετρίας
- Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος
- Συμμετρία ως προς σημείο
- Κέντρο συμμετρίας
- Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

Στο βιβλίο αυτό, η εισαγωγή της έννοιας της συμμετρίας γίνεται με …. ποιητικό τρόπο! Συγκεκριμένα, ξεκινάει ως εξής:

«Τι είναι συμμετρία; Ο ποιητής θα έλεγε: ό,τι φοριέται από την ανάποδη. Ό,τι διπλώνει και ταιριάζει, ό,τι στρίβει και 'συμπίπτει'. Μόνο η φαντασία δεν έχει καθόλου συμμετρία. Γι' αυτό η συμμετρία χρειάζεται και λίγη φαντασία. Αν αυτή ακριβώς τη φαντασία τη φορέσουμε ανάποδα, θα μας βγει όλη η Γεωμετρία».

Οι ορισμοί που δίνονται σε αυτό το βιβλίο για τον άξονα και το κέντρο συμμετρίας είναι περίπου οι ίδιοι με το προηγούμενο βιβλίο. Η διαφορά είναι ότι δίνονται πολύ περισσότερα σχήματα (τόσο γεωμετρικά όσο και από την καθημερινότητα) και περισσότερες λυμένες εφαρμογές.

Όμως, και πάλι δεν γίνεται καμία προσπάθεια εκβάθυνσης της έννοιας και η συμμετρία εξετάζεται απλά κατασκευαστικά χωρίς καμία αναφορά σε έννοιες όπως συνάρτηση, μετασχηματισμός.

Επίσης, γίνεται μία απλή αναφορά στην έννοια της συμμετρίας στο βιβλίο της **Β΄ Γυμνασίου** (**Συγγραφείς: Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ**.) στην παράγραφο που αναφέρεται στις καρτεσιανές συντεταγμένες και στη γραφική

παράσταση συνάρτησης. Στην παράγραφο αυτή δεν δίνεται ο ορισμός της έννοιας της συμμετρίας (γιατί μάλλον θεωρείται γνωστή από την προηγούμενη τάξη) και ζητείται από τους μαθητές να βρουν το συμμετρικό ενός σημείου (του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες) ως προς τον άξονα χ΄χ, ως προς τον άξονα ψ΄ψ και ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

Στο Ενιαίο Λύκειο, η έννοια της συμμετρίας διδάσκεται μόνο στην **Α΄ Λυκείου** σε περιορισμένη έκταση. Συγκεκριμένα, από το σχολικό έτος 1990-1991 διδασκόταν το βιβλίο Θεωρητική Γεωμετρία (**Συγγραφείς: Αλιμπινίσης Α., Δημάκος Γ., Εξαρχάκος Θ., Κοντογιάννης Δ. και Τασσόπουλος Γ.**). Στο βιβλίο αυτό γίνεται αναφορά στο συμμετρικό σημείου με τον εξής ορισμό:
*«Αν δοθεί σημείο Μ, τότε για κάθε σημείο Α υπάρχει μοναδικό σημείο Β, ώστε το Μ να είναι μέσο του τμήματος ΑΒ. Αρκεί για αυτό, στην αντικείμενη ημιευθεία της ΜΑ να πάρουμε τμήμα ΜΒ=ΜΑ. Το σημείο Β λέγεται **συμμετρικό** του Α ως προς το Μ».*
Στη συνέχεια, η έννοια της συμμετρίας συναντάται στο παράρτημα στο τέλος του βιβλίου. Στην παράγραφο που αναφέρει τη συμμετρία ως προς κέντρο δίνει τον ορισμό και αποδεικνύει τα εξής:

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του
- Το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Στην αξονική συμμετρία, δίνει τον ορισμό και βρίσκει τους άξονες συμμετρίας του ευθύγραμμου τμήματος, του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου.

Το σχολικό έτος 2000-2001 διδάσκεται για μία μόνο χρονιά το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία (**Συγγραφείς: Θωμαΐδης Γ., Ξένος Θ., Παντελίδης Γ., Πούλος Α., Στάμου** Γ.). Στο βιβλίο αυτό η έννοια της συμμετρίας διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου σε μία μόνο παράγραφο. Στην παράγραφο αυτή δίνονται πάλι οι γνωστοί ορισμοί και καταλήγει στα εξής:

- Η γωνία είναι σχήμα συμμετρικό με άξονα συμμετρίας τη διχοτόμο της

- Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι σχήμα συμμετρικό με δύο άξονες συμμετρίας, τη μεσοκάθετό του και το φορέα του
- Ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας
- Το σκαληνό τρίγωνο δεν έχει κανέναν άξονα συμμετρίας
- Το ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας το φορέα της διχοτόμου (του ύψους, της διαμέσου) της κορυφής
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις άξονες συμμετρίας

Την επόμενη σχολική χρονιά το βιβλίο της γεωμετρίας αλλάζει και διδάσκεται το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία (**Συγγραφείς: Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ. και Σίδερης Π**.). Η κεντρική συμμετρία παρουσιάζεται ως στροφή ενός σχήματος κατά 180° γύρω από ένα σημείο. Επίσης, αναφέρονται τα εξής:

I. Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του
II. Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της
III. Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του

Στην επόμενη παράγραφο, γίνεται αναφορά στην αξονική συμμετρία. Η εισαγωγή γίνεται πάλι με απλή αναφορά σε σχήματα και δίνεται ο ορισμός που υπήρχε στο προηγούμενο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου. Τέλος, αναφέρει και δείχνει τους άξονες συμμετρίας ευθύγραμμου τμήματος, ευθείας, κύκλου, ισοσκελούς τριγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου η διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας είναι πολύ περιορισμένη και επιφανειακή. Όπως και στο Γυμνάσιο, δεν γίνεται καμία αναφορά στη συμμετρία ως γεωμετρικού μετασχηματισμού.

Τέλος, ας εξετάσουμε τον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συμμετρίας στο εξωτερικό και ειδικότερα στη **Γαλλία**. Εκεί το αντικείμενο της διδασκαλίας της συμμετρίας σαν μετασχηματισμός του επιπέδου γνώρισε ένα ιδιαίτερο πλάτος στα προγράμματα της δεκαετίας του 1970 και διατηρήθηκε ως τον Οκτώβριο του 1986 σε τέτοιο βαθμό που όταν δίνονταν ο ορισμός του συμμετρικού ενός σημείου φαίνονταν περιττό για ορισμένα

σχολικά βιβλία να προσδιορίσουν τα συμμετρικά των συνηθισμένων σχημάτων, επειδή ένα σχήμα τελικά είναι ένα σύνολο σημείων. Χαρακτηριστικά έγραφαν «η εικόνα ενός συγκεκριμένου σχήματος σε μια ορθογώνια συμμετρία είναι το σύνολο των εικόνων του αρχικού σχήματος (το μετασχηματισμένο σχήμα ενός συγκεκριμένου σχήματος σε μια ορθογώνια συμμετρία είναι το σύνολο των μετασχηματισμένων σημείων του αρχικού σχήματος)».

Με τα προγράμματα που μπήκανε σε ισχύ το 1986 για την 6η τάξη (11-12 ετών) ο μετασχηματισμός εγκαταλείπεται για να αφήσει τη θέση σε πιο διαλεκτικούς δεσμούς ανάμεσα στην κατασκευή και απόδειξη. Η **Laborde** αναφέρει: «*Δεν πρόκειται πια τόσο να αποδείξουμε τις ιδιότητες του αναλλοίωτου ορισμένων στοιχείων αλλά με βάση χειρωνακτικές εργασίες, σχέδια, μετρήσεις, κατασκευές να βγάζουμε και να χρησιμοποιήσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες*».

3.3 Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ – ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα που πραγματοποιήσαμε είχε σκοπό να διερευνήσει τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της συμμετρίας και τον προσδιορισμό μερικών από τις αντιλήψεις των μαθητών για την αξονική συμμετρία. Ο τρόπος που χρησιμοποιήσαμε για την επίτευξη των παραπάνω σκοπών είναι η χρήση γραπτών ερωτηματολογίων σε μαθητές ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου (συνολικά 182 μαθητές). Το ερωτηματολόγιο δόθηκε και συμπληρώθηκε ταυτόχρονα από όλους τους μαθητές του κάθε σχολείου, στο χώρο του σχολείου τους κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας με την επιτήρηση των διδασκόντων την ώρα εκείνη. Μετά διορθώθηκε προσεκτικά και αφού καθορίστηκαν οι αντίστοιχες μεταβλητές (κωδικοποίηση), τα αποτελέσματα καταχωρήθηκαν στο Excel.

Συγκεκριμένα, φτιάξαμε δύο ερωτηματολόγια. Το πρώτο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 60 μαθητές ΣΤ΄ Δημοτικού και σε 50 μαθητές Α΄ Γυμνασίου **πριν** τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας. Η κατασκευή του ερωτηματολογίου αυτού έγινε μετά από συζήτηση και διαπραγμάτευση με τους καθηγητές των μαθητών αυτών. Το ερωτηματολόγιο δεν δόθηκε αμέσως στους μαθητές αλλά προηγήθηκε συζήτηση με τους

μαθητές. Συγκεκριμένα, τους έδειξα πρώτα ένα συμμετρικό σχήμα από την καθημερινή ζωή (μία βάρκα που αντανακλάται σε μια ήσυχη λίμνη) και τους ζήτησα να μου πουν τι παρατηρούν. Συζήτησα με τους μαθητές την έννοια της συμμετρίας και τους ζήτησα να μου πουν κάποια συμμετρικά σχήματα που έβλεπαν γύρω τους. Έτσι, μου έδειξαν τον πίνακα, το θρανίο τους και τα παράθυρα της αίθουσας.

Στη συνέχεια, είχα σχεδιάσει σε διαφανές χαρτί ένα τυχαίο σχήμα και είχα φέρει στο μέσο του χαρτιού μία κόκκινη γραμμή. Δίπλωσα το χαρτί κατά μήκος της κόκκινης γραμμής και είδαμε την εικόνα του σχήματος αυτού στο άλλο μισό χαρτί. Τότε, τους έδωσα τον ορισμό του άξονα συμμετρίας και του συμμετρικού σχήματος. Μετά, τους έδειξα ένα άλλο σχήμα σε διαφανές χαρτί όπου είχα φέρει με διακεκομμένες γραμμές τα συμμετρικά δύο σημείων. Ουσιαστικά, με αυτόν τον τρόπο τους έδειξα πώς να βρίσκουν το συμμετρικό ενός σημείου ως προς άξονα συμμετρίας.

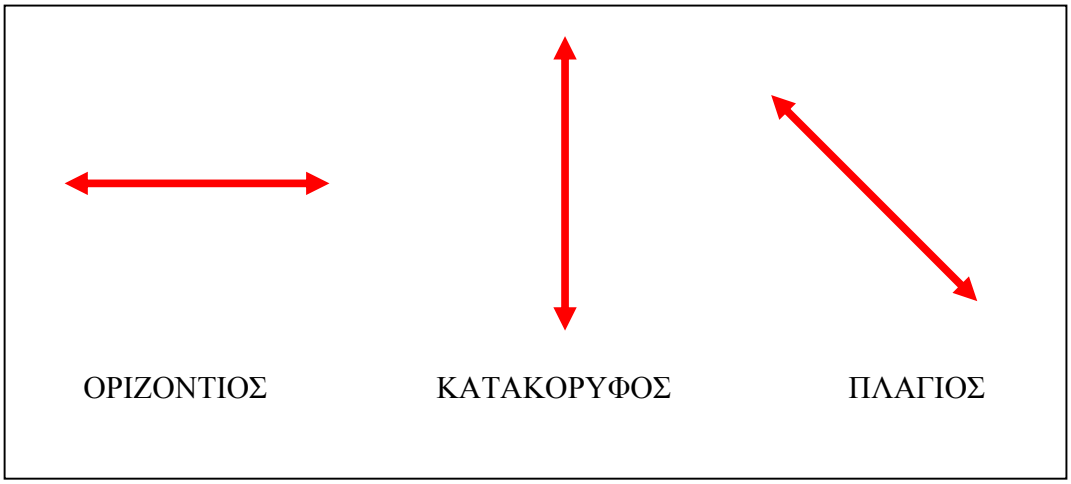
Μετά από αυτή τη συζήτηση, μοίρασα στους μαθητές το ερωτηματολόγιο και τους ζήτησα να συμπληρώσουν τα στοιχεία τους και να διαβάσουν προσεκτικά τις οδηγίες της πρώτης σελίδας. Οι μαθητές (τόσο του δημοτικού όσο και του γυμνασίου) έδειξαν ιδιαίτερη δυσκολία στο πρώτο σχήμα γιατί δεν είχαν ακόμα αντιληφθεί τι έπρεπε ακριβώς να κάνουν. Μετά το δεύτερο σχήμα δεν χρειάστηκαν καμία βοήθεια.
Το δεύτερο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 72 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου **μετά** τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας. Το ερωτηματολόγιο αυτό περιείχε μόνο δύο ίδιες ερωτήσεις με το προηγούμενο ερωτηματολόγιο και τα υπόλοιπα σχήματα είχαν μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας.

Τα ερωτηματολόγια αυτά περιλαμβάνουν συνολικά 39 σχήματα και δόθηκαν σε κάθε μαθητή υπό μορφή βιβλιαρίου. Παρακολουθούσαμε τα παιδιά κατά τη διάρκεια της επίλυσης των προβλημάτων αυτών, προσπαθώντας να αποσπάσουμε τις δικές τους ξεχωριστές διαδικασίες επίλυσης. Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι μαθητές δεν είχαν στη διάθεσή τους κανένα γεωμετρικό όργανο (όπως χάρακα, διαβήτη). Αυτό το θεωρήσαμε σκόπιμο για να μην αποσπαστεί η προσοχή των μαθητών σε διαδικασίες τοποθέτησης και χρήσης των οργάνων (η τοποθέτηση παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες). Συγκεκριμένα, οι

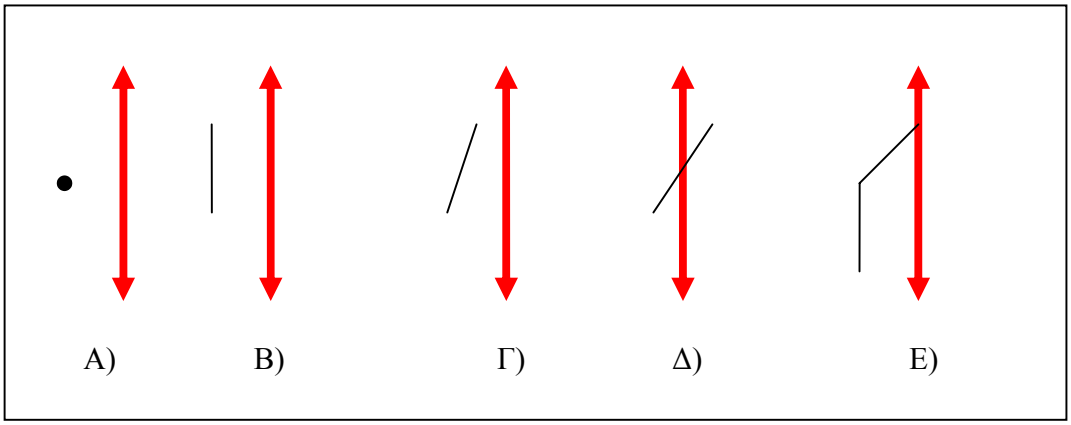
καθηγητές μου είπαν ότι οι μαθητές θα έβρισκαν μεγάλη δυσκολία στο να φέρουν κάθετο τμήμα προς τον άξονα συμμετρίας με τη χρήση χάρακα.

Ας δούμε αναλυτικότερα τα ερωτηματολόγια αυτά. Πρώτον, ήταν χωρισμένα σε δύο μέρη Α και Β. Στο **μέρος Α**, τους δίνονταν ένα σχήμα (σημείο, ευθύγραμμο τμήμα, τετράπλευρο, κύκλος) και ο άξονας συμμετρίας (ο οποίος ήταν πάντα σχεδιασμένος με έντονη κόκκινη γραμμή) και ζητούσαμε από τους μαθητές να βρουν το συμμετρικό του σχήματος αυτού ως προς τον άξονα συμμετρίας. Στο **μέρος Β**, τους δίνονταν κάποια σχήματα (τα περισσότερα γεωμετρικά και μερικά από την καθημερινή ζωή) και ζητούσαμε από τους μαθητές να φέρουν τον/τους άξονες συμμετρίας (εδώ αναφέραμε στους μαθητές ότι ένα σχήμα μπορεί να μην έχει κανέναν άξονα συμμετρίας).

Οι **άξονες συμμετρίας** ήταν τριών ειδών:



Τα **σχήματα** ήταν πέντε ειδών:



Α) Το σχήμα είναι μόνο ένα σημείο

Β) Το σχήμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας (όποια κι αν είναι η κλίση αυτού)

Γ) Το σχήμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας

Δ) Το σχήμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που τέμνει τον άξονα συμμετρίας

Ε) Ένα οποιοδήποτε σχήμα που να αποτελείται τουλάχιστον από δύο ευθύγραμμα τμήματα

3.3.1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι τα παρακάτω:

1. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της επίδοσης των μαθητών του δημοτικού και γυμνασίου σε έργα εύρεσης συμμετρικών απλών σχημάτων ως προς τα τρία είδη αξόνων συμμετρίας (οριζόντιος, κατακόρυφος, πλάγιος)

2. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της επίδοσης των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου σε έργα εύρεσης αξόνων συμμετρίας σε διάφορα σχήματα (γεωμετρικά, σχήματα από την καθημερινή ζωή και σχήματα με χρωματισμούς).

3. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των δύο ομάδων έργων, δηλαδή στα έργα όπου ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός απλού σχήματος ως προς

άξονα συμμετρίας και σε έργα όπου οι μαθητές πρέπει να φέρουν τους άξονες συμμετρίας σε διάφορα σχήματα.

Οι διδακτικές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην παρούσα μελέτη είναι οι εξής:

1) *Η μορφή του άξονα*

Αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στη σωστή εύρεση του συμμετρικού σχήματος και στη διατύπωση πιθανών λανθασμένων διαδικασιών που χρησιμοποιούνται. Οι διαδικασίες αυτές μπορεί να είναι σωστές όταν ο άξονας είναι οριζόντιος ή κατακόρυφος και λανθασμένες όταν είναι πλάγιος.

2) *Η μορφή του σχήματος*

Είναι φανερό ότι η μορφή του σχήματος επιδρά όχι μόνο στην ορθότητα των απαντήσεων, αλλά ενδεχομένως και στις στρατηγικές που ακολουθούνται για να φτάσουν οι μαθητές σε αυτές.

3) *Η ηλικιακή ωρίμανση*

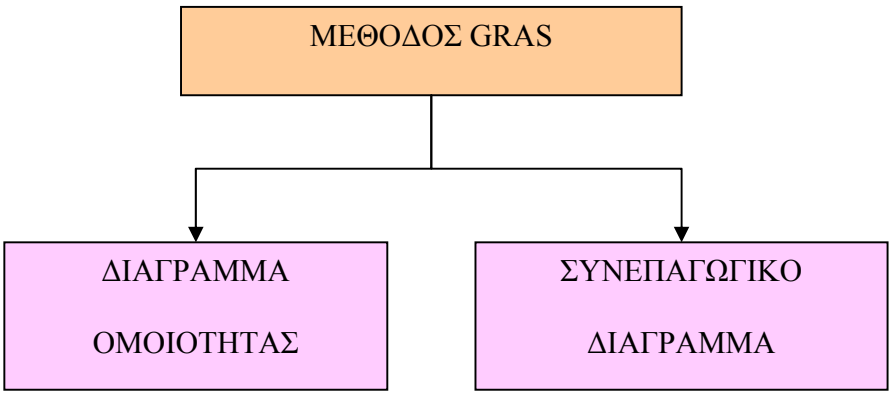
Η έννοια της συμμετρίας είναι μια εμπειρική έννοια αφού οι μαθητές συναντούν συμμετρικά σχήματα στην καθημερινή τους ζωή. Έτσι, εξετάζουμε αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται καλύτερα την έννοια αυτή (χωρίς ποτέ να την έχουν διδαχτεί) από το δημοτικό στο γυμνάσιο

4) *Η διδασκαλία της έννοιας*

Οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου διδάσκονται την έννοια της συμμετρίας και ελέγχουμε κατά πόσο η διδασκαλία επιδρά τελικά στην καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αξονικής συμμετρίας.

3.3.2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΩ R. GRAS

Την έρευνα την επεξεργαστήκαμε στατιστικά με τη βοήθεια του EXCEL και με τη μέθοδο Gras. Από τη μέθοδο Gras χρησιμοποιήσαμε δύο διαγράμματα, το διάγραμμα ομοιότητας και το συνεπαγωγικό διάγραμμα.



Το **διάγραμμα ομοιότητας** παρουσιάζει τις διάφορες μεταβλητές του ερωτηματολογίου σε ομάδες. Κάθε ομάδα περιέχει μεταβλητές, τις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή πετυχαίνουν ή αποτυχαίνουν σε αυτές ταυτόχρονα. Αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να οφείλεται στον εννοιολογικό χαρακτήρα της κάθε ομάδας μεταβλητών.

Η κατασκευή του διαγράμματος ομοιότητας βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία: δύο μεταβλητές ενός συνόλου μεταβλητών, που είναι οι πιο όμοιες μεταξύ τους σε σχέση με τους δείκτες ομοιότητας της μεθόδου, συνδέονται μεταξύ τους σε μια ομάδα στο υψηλότερο (πρώτο) επίπεδο ομοιότητας. Μετά, αυτή η ομάδα μπορεί να συνδέεται με μια μεταβλητή σε ένα χαμηλότερο επίπεδο ομοιότητας ή δυο άλλες που συνδυάζονται μεταξύ τους και δημιουργούν μια άλλη ομάδα σε χαμηλότερο επίπεδο
κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία ομαδοποίησης συνεχίζεται έως ότου η ομοιότητα ή η συνοχή (cohesion) μεταξύ των μεταβλητών ή των ομάδων των μεταβλητών γίνει πολύ ασθενής.

Το **συνεπαγωγικό διάγραμμα** συνδέει διάφορες μεταβλητές με βέλη. Για παράδειγμα η 'συνεπαγωγή' Pr → S3 σημαίνει ότι όσοι έχουν επιτυχία στο έργο στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή Pr θα έχουν επιτυχία και στο έργο στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή S3. Το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχει να κάνει με συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση που

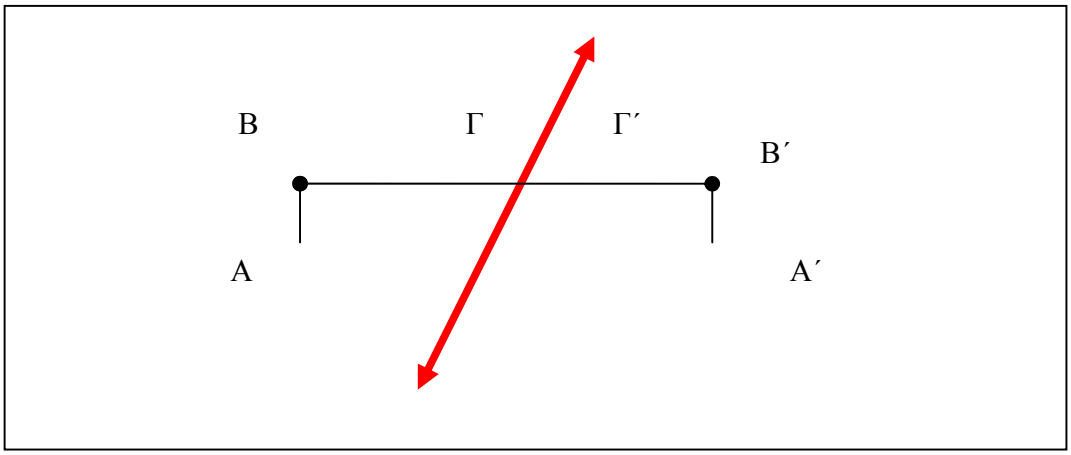
σκοπό έχει να δώσει στατιστικό νόημα σε εκφράσεις σαν την: «Αν παρατηρούμε τη μεταβλητή a σε ένα θέμα τότε παρατηρούμε
(και) τη μεταβλητή b στο ίδιο θέμα». Έτσι η υποκείμενη αρχή της συνεπαγωγικής ανάλυσης στηρίζεται στην μερική συνεπαγωγή (quasiimplication):
«Αν a είναι αληθής τότε b είναι περισσότερο ή λιγότερο αληθής».
Ένα συνεπαγωγικό διάγραμμα αναπαριστάνει γραφικά το δίκτυο των μερικών συνεπαγωγικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών ενός συνόλου μεταβλητών.

3.3.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΛΑΘΩΝ

Για να γίνει δυνατή η επεξεργασία των γραπτών και η στατιστική τους μελέτη, τα λάθη που παρατηρήθηκαν ομαδοποιήθηκαν σε επτά κατηγορίες στις οποίες περιλαμβάνονται τα πιο σημαντικά λάθη. Η ομαδοποίηση των λαθών έγινε για το πρώτο μέρος και των δύο ερωτηματολογίων στα οποία ζητείται η εύρεση του συμμετρικού ενός σχήματος.

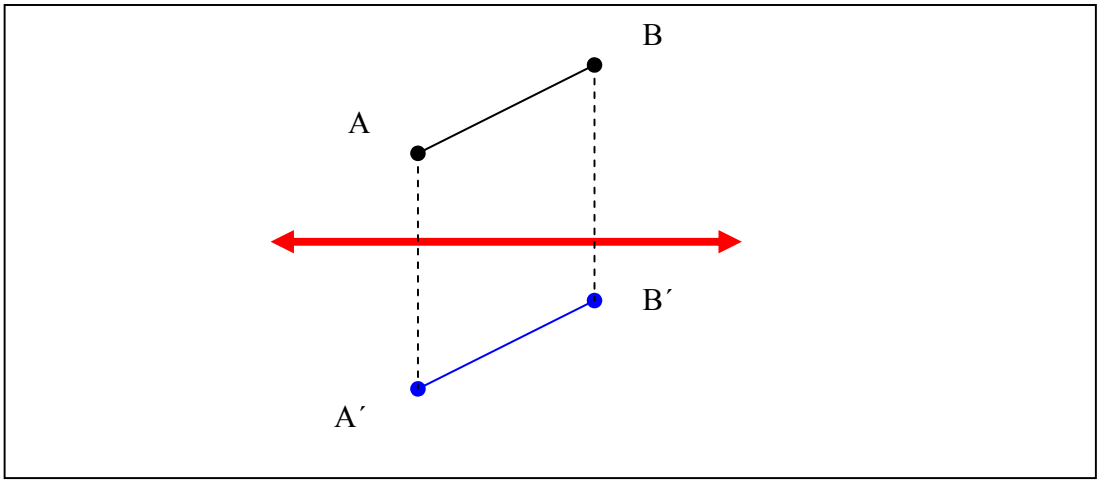
1. *Προέκταση*

Εδώ το σχήμα – εικόνα που παίρνουμε προέρχεται από προέκταση του τμήματος ΒΓ και κατόπιν μεταφορά του ΑΒ.



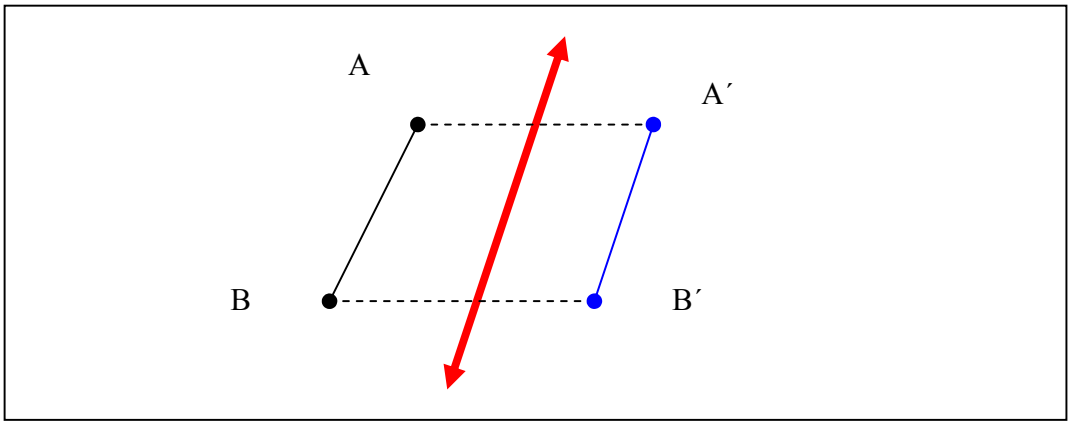
2. *Κατακόρυφη μεταφορά*

Εδώ παρατηρείται μια κατακόρυφη μεταφορά του αρχικού σχήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας.



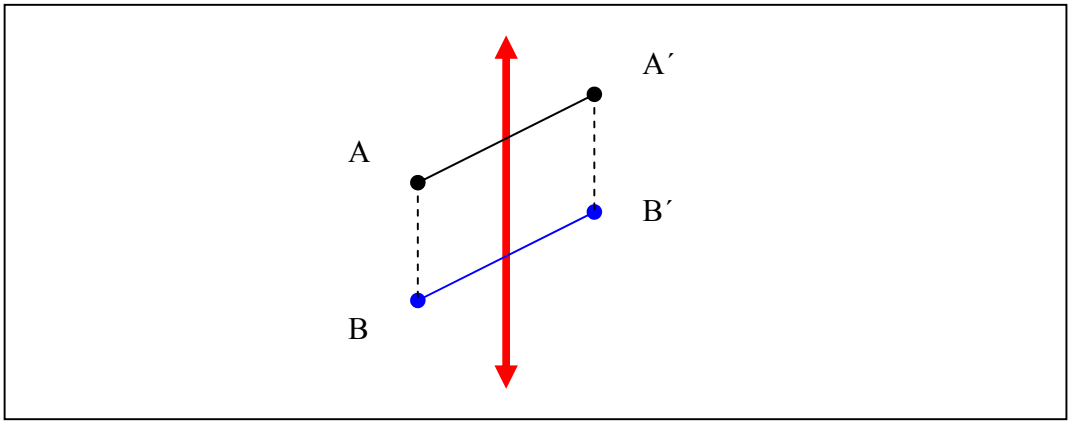
3. *Οριζόντια μεταφορά*

Εδώ παρατηρείται διαδικασία οριζόντιας μεταφοράς.



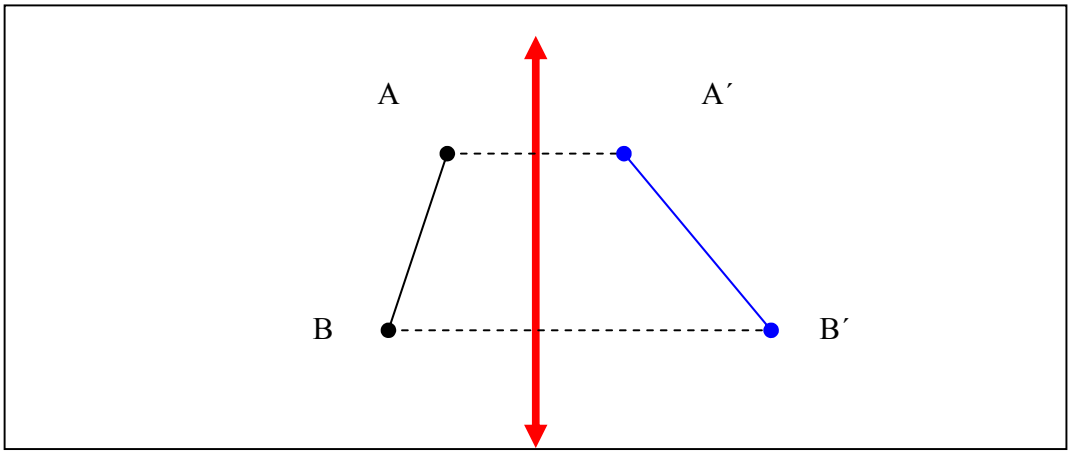
4. *Παράλληλη μεταφορά*

Το συμμετρικό του τμήματος ΑΒ προκύπτει από παράλληλη μεταφορά.



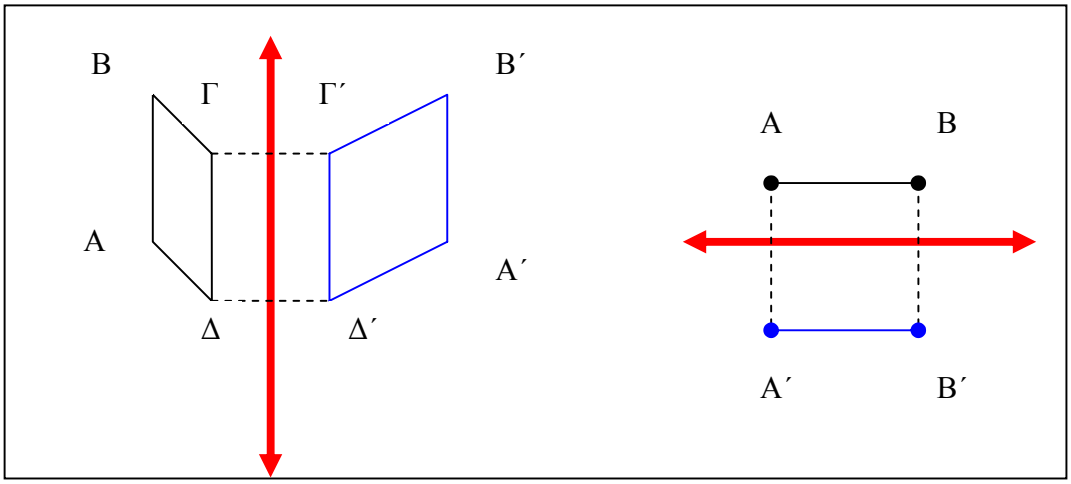
5. *Κλίση*

Το συμμετρικό σχήμα έχει λανθασμένη κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας.



6. *Διατήρηση αποστάσεων – μηκών*

Στο πρώτο σχήμα τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων του συμμετρικού είναι διαφορετικά από αυτά του αρχικού. Στο δεύτερο σχήμα, το μήκος του Α΄Β΄ είναι ίσο με το μήκος του ΑΒ, αλλά η απόστασή του από τον άξονα συμμετρίας είναι διαφορετική.

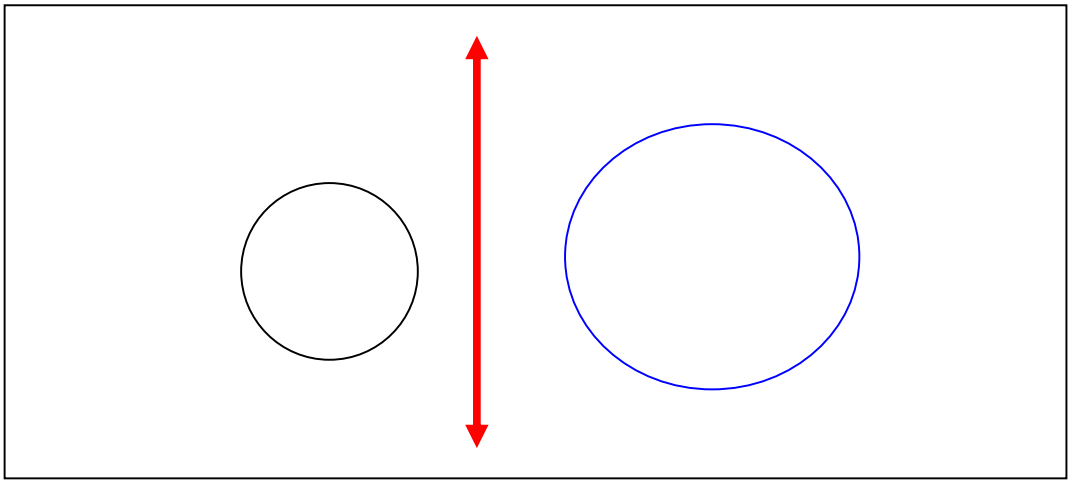


7. *Διάφορα λάθη*

Εδώ περιλαμβάνονται ημιτελή σχήματα, αναπάντητα και σχήματα με λάθη που δεν προκύπτουν από τις παραπάνω διαδικασίες.

8. *Διατήρηση ακτίνας του κύκλου*

Σε αυτή την περίπτωση το συμμετρικό του κύκλου δεν έχει την ίδια ακτίνα με τον αρχικό κύκλο.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

4.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΠΑΝΩ ΣΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

1^{ο} Ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Α, σελίδα 106)

1^{η} Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός σημείου ως προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Αυτή ήταν η απλούστερη ερώτηση από όλες τις υπόλοιπες αλλά οι μαθητές (τόσο του δημοτικού όσο και του γυμνασίου) δυσκολεύτηκαν αρχικά και χρειάστηκαν τη δική μου καθοδήγηση.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho1**

Τα συνηθέστερα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν η διατήρηση αποστάσεων (προεκτείνανε περισσότερο ή λιγότερο από όσο έπρεπε) και τα ημιτελή σχήματα (δηλαδή προεκτείνανε αλλά τελικά δεν σημείωναν το σημείο που είναι συμμετρικό του Α). Συγκεκριμένα, 37 μαθητές γυμνασίου (ποσοστό 74%) έλυσαν σωστά την άσκηση και 54 μαθητές δημοτικού (ποσοστό 93%). Το 12% και το 7% αντίστοιχα των μαθητών γυμνασίου και δημοτικού έκαναν λάθος στη διατήρηση αποστάσεων.

2^{η} Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Οι μαθητές δεν χρειάστηκαν καμία δική μου παρέμβαση και κατάφεραν να βρουν σχετικά εύκολα το συμμετρικό του τμήματος.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho2**

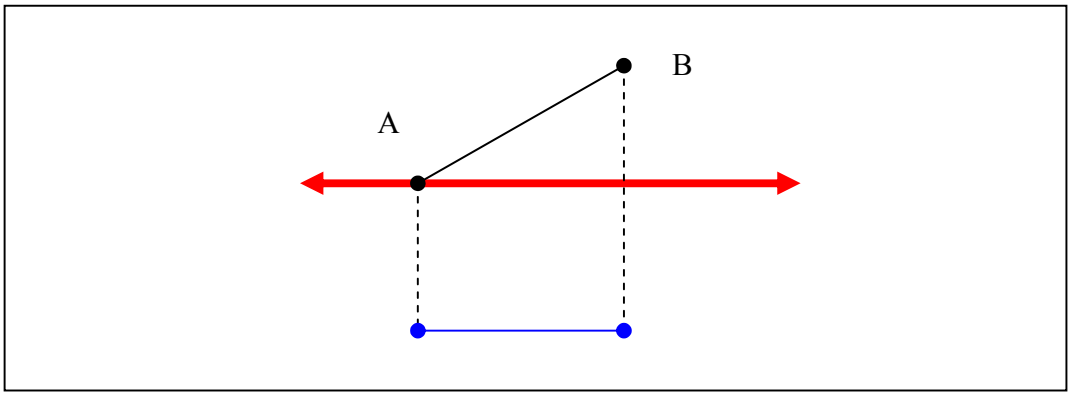
Τα λάθη που παρατηρήθηκαν σε αυτή την ερώτηση ήταν: διατήρηση αποστάσεων ή μηκών (δηλαδή είτε δεν προεκτείνανε κατά ίση απόσταση από τον άξονα συμμετρίας είτε δεν κατασκευάζανε ένα τμήμα ίσο με το αρχικό), ημιτελή σχήματα (βρίσκανε τα συμμετρικά των Α και Β αλλά δεν φέρνανε το συμμετρικό τμήμα Α΄Β΄). Συγκεκριμένα, το 74% των μαθητών γυμνασίου και το 92% των μαθητών δημοτικού έλυσαν σωστά την άσκηση. Τα περισσότερα λάθη αφορούσαν τη διατήρηση αποστάσεων και παρατηρήθηκαν στο 14% των μαθητών γυμνασίου και στο 12% των μαθητών δημοτικού.

3η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Εδώ οι μαθητές έπρεπε να βρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει ένα κοινό σημείο με οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Εδώ οι μαθητές φάνηκε να προβληματίζονται για το συμμετρικό του σημείου Α που ανήκει στον άξονα συμμετρίας.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho3**

Τα περισσότερα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν: κατακόρυφη μεταφορά, παράλληλη μεταφορά και κλίση. Παράδειγμα κατακόρυφης μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 46% για τους μαθητές γυμνασίου και 62% για τους μαθητές δημοτικού. Στους μαθητές γυμνασίου παρατηρήθηκαν τα εξής λάθη: το 16% (αντίστοιχα 15% για τους μαθητές δημοτικού) έκαναν κατακόρυφη μεταφορά, το 6% (αντίστοιχα

8%) έκαναν λάθος στη διατήρηση αποστάσεων και το 16% (αντίστοιχα 14%) έκαναν διάφορα λάθη.

4η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος με κλίση και χωρίς κοινά σημεία με τον άξονα συμμετρίας.

Τα λάθη που έγιναν ήταν: διατήρηση αποστάσεων, κλίση και κατακόρυφη μεταφορά.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟ-ΛΟΓΙΟ	**ΣΩΣΤΗ ΛΥΣΗ**	**ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ**	**ΠΑΡΑΛΛΗ-ΛΗ ΜΕΤΑΦΟ-ΡΑ**	**ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΝ**
ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	34%	24%	10%	14%
ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	60%	17%	10%	10%

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho4**

5η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Εδώ οι μαθητές πρέπει να φέρουν το συμμετρικό ενός σημείου ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Οι μαθητές σημείωσαν υψηλό ποσοστό επιτυχίας και τα μόνα λάθη που έγιναν ήταν: διατήρηση αποστάσεων και ημιτελή σχήματα (δηλαδή προεκτείνανε κάθετα προς τον άξονα συμμετρίας αλλά δεν σημείωναν το συμμετρικό του σημείου Α).Εδώ τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών ήταν παρόμοια: 68% για τους μαθητές γυμνασίου και 78% για τους μαθητές δημοτικού.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve5**

6η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Οι μαθητές πρέπει να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Η επιτυχία εδώ ήταν αρκετά υψηλή με εξαίρεση κάποια λάθη όπως: διατήρηση αποστάσεων και μηκών.

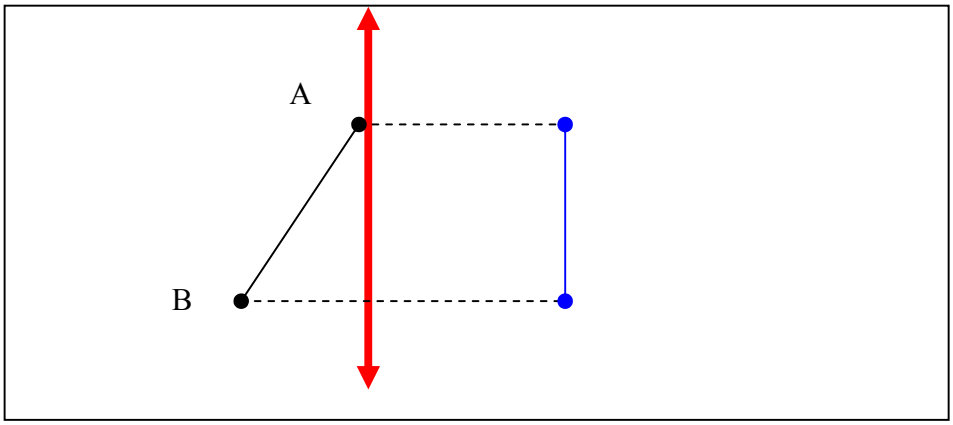
Τα ποσοστά για τους μαθητές γυμνασίου και δημοτικού αντίστοιχα είναι:

Σωστό σχήμα 50% και 80%, λάθος στη διατήρηση αποστάσεων 40% και 24%. Από τα ποσοστά αυτά είναι εμφανής ότι οι μαθητές του δημοτικού έκαναν πολύ λιγότερα λάθη από τους μαθητές του γυμνασίου.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve6**

7η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή ζητείται να φέρουν οι μαθητές το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας. Εδώ παρατηρήθηκαν αρκετά λάθη: κλίση, οριζόντια μεταφορά, παράλληλη μεταφορά και διατήρηση αποστάσεων. Παράδειγμα οριζόντιας μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Τα ποσοστά επιτυχίας και λαθών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ	ΣΩΣΤΟ ΣΧΗΜΑ	ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ	ΚΛΙΣΗ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	54%	14%	14%	16%
ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	67%	9%	9%	18%

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve7**

8η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Εδώ ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Στην ερώτηση αυτή παρατηρήθηκαν πάρα πολλά λάθη: οριζόντια μεταφορά, παράλληλη μεταφορά, κλίση και διατήρηση αποστάσεων – μηκών.

Εδώ τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών ήταν πολύ χαμηλά: 36% για τους μαθητές γυμνασίου και 47% για τους μαθητές δημοτικού. Τα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν αντίστοιχα: Οριζόντια μεταφορά 14% και 10%, κλίση 18% και 18%, διατήρηση αποστάσεων 20% και 20%, διάφορα λάθη 12% και 7%.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve8**

9η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

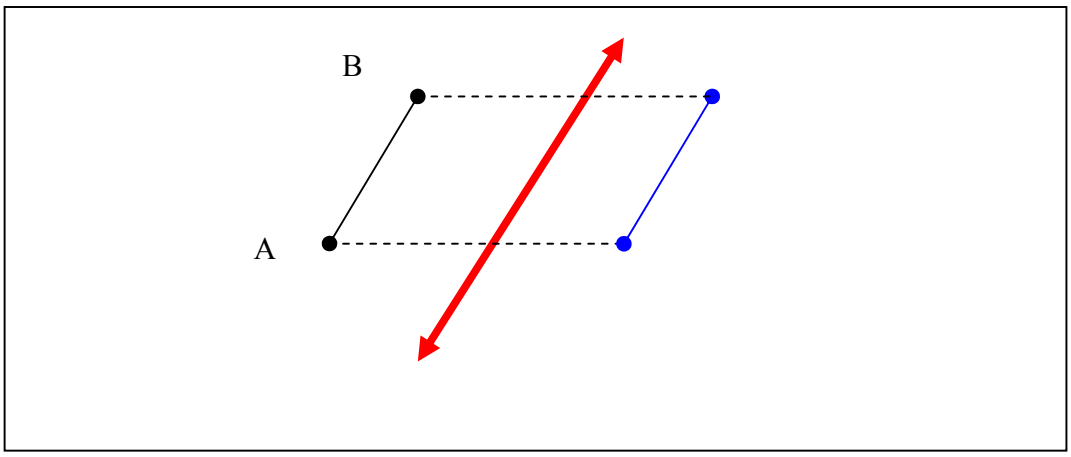
Οι μαθητές εδώ πρέπει να βρουν το συμμετρικό ενός σημείου ως προς πλάγιο άξονα συμμετρίας. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών το βρήκε σωστά με εξαίρεση κάποια λάθη: Προέκταση και διατήρηση αποστάσεων. Οι μαθητές γυμνασίου έλυσαν σωστά την άσκηση με ποσοστό 72% ενώ οι μαθητές του δημοτικού έφτασαν στο 80%.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob9**

10η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ως προς πλάγιο άξονα συμμετρίας. Παρατηρήθηκαν αρκετά λάθη όπως: παράλληλη μεταφορά, κλίση και διατήρηση αποστάσεων – μηκών.

Παράδειγμα παράλληλης μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 44% για τους μαθητές γυμνασίου και 67% για τους μαθητές δημοτικού. Τα περισσότερα λάθη παρατηρήθηκαν στη διατήρηση αποστάσεων και ήταν αντίστοιχα 38% και 34%.

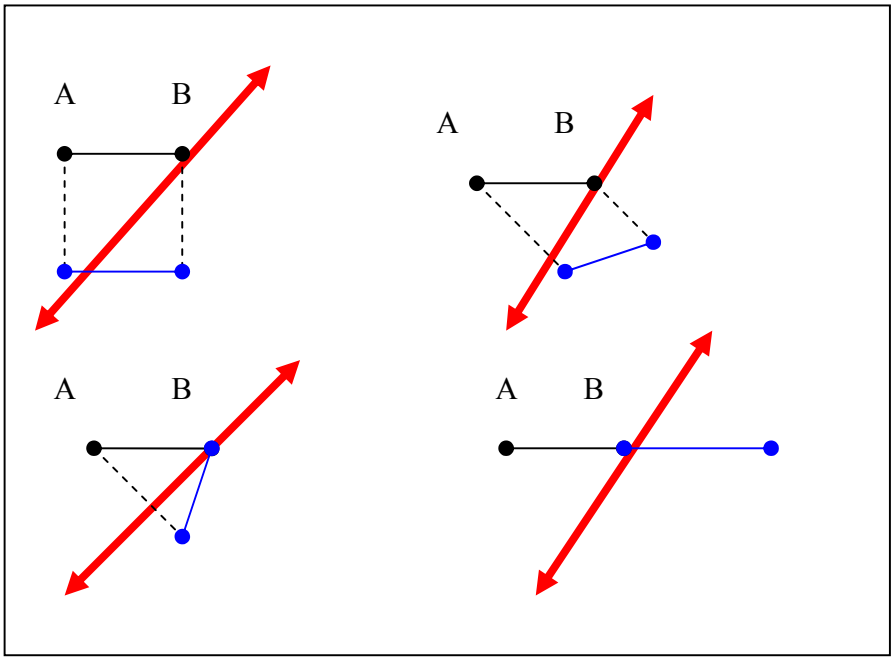
Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob10**

11η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Εδώ οι μαθητές πρέπει να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα κοινό σημείο με πλάγιο άξονα συμμετρίας. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν πάρα πολύ σε αυτή την ερώτηση και οι περισσότεροι ζήτησαν τη βοήθειά μου. Το πιο συνηθισμένο λάθος ήταν η προέκταση αλλά παρατηρήθηκε και η κατακόρυφη μεταφορά, η κλίση και η διατήρηση μηκών.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob11**

Ενδεικτικά, παραθέτουμε μερικά από τα πιο χαρακτηριστικά λάθη των μαθητών στην ερώτηση αυτή:



Τα ποσοστά επιτυχίας και λαθών των μαθητών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΕΡΩΤΗΜΑ-ΤΟΛΟΓΙΟ	**ΣΩΣΤΟ ΣΧΗΜΑ**	**ΠΡΟΕΚ-ΤΑΣΗ**	**ΠΑΡΑΛ-ΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟ-ΡΑ**	**ΚΛΙΣΗ**	**ΔΙΑΤΗΡΗ-ΣΗ ΑΠΟΣΤΑ-ΣΕΩΝ**
ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	14%	30%	24%	12%	0%
ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ	43%	14%	17%	10%	19%

Εδώ παρατηρήσαμε πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας των μαθητών του γυμνασίου και για αυτόν τον λόγο επιλέξαμε την ίδια ερώτηση και στο δεύτερο ερωτηματολόγιο. Τα νέα ποσοστά επιτυχίας φαίνονται στην 9^{η} ερώτηση του δεύτερου ερωτηματολογίου.

1η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

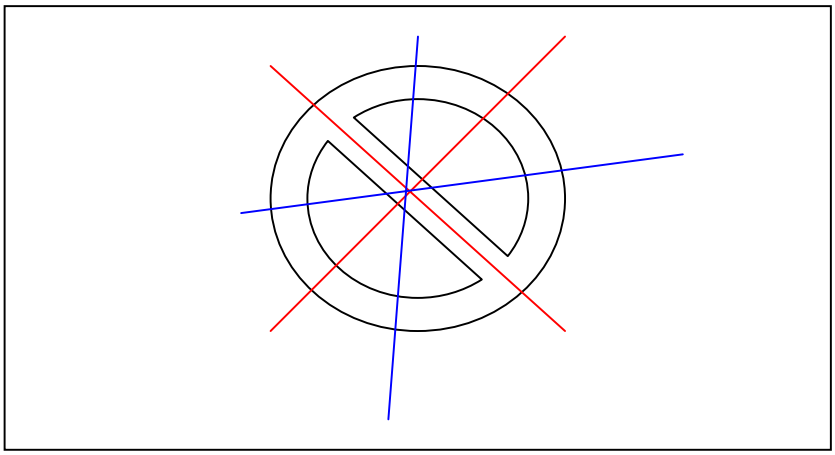
Στην ερώτηση αυτή δίνεται μία έλλειψη και ζητείται από τους μαθητές να φέρουν τους άξονες συμμετρίας. Το συνηθέστερο σφάλμα των μαθητών ήταν ότι έφερναν μόνο έναν άξονα συμμετρίας και σταματούσαν. Μετά από δική μου προτροπή έψαχναν και για άλλους άξονες συμμετρίας (αν υπήρχαν).

Οι περισσότεροι μαθητές έφεραν σωστά τους δύο άξονες συμμετρίας (οριζόντιο και κατακόρυφο) αλλά μερικοί μαθητές έφεραν και δύο πλάγιους άξονες. Συγκεκριμένα, το 78% των μαθητών του δημοτικού έφεραν σωστά και τους δύο άξονες συμμετρίας, το 13% έφερε μόνο τον έναν άξονα και το υπόλοιπο 12% έφεραν επιπλέον λάθος άξονες συμμετρίας. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους μαθητές του γυμνασίου ήταν 66% (και τους δύο άξονες), 26% (τον έναν άξονα) και 8% (λάθος σχήμα).

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax1**

2η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Εδώ δίνεται στους μαθητές ένα κυκλικό σχήμα. Αρκετοί μαθητές φέρνουν σωστά τους δύο άξονες συμμετρίας αλλά μερικοί φέρνουν άλλους δύο πλάγιου που δεν είναι σωστοί. Ένα χαρακτηριστικό λάθος σχήμα είναι το παρακάτω (λάθος είναι οι μπλε γραμμές):



Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	ΔΥΟ ΑΞΟΝΕΣ	ΕΝΑΝ ΑΞΟΝΑ	ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	48%	26%	25%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	40%	30%	30%

Στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι οι μαθητές του δημοτικού είχαν μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας ενώ αρκετοί μαθητές γυμνασίου έφεραν μόνο έναν άξονα συμμετρίας. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax2**

3η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Στο σχήμα αυτό σε μορφή σταυρού επαναλαμβάνονται τα ίδια λάθη. Δηλαδή μερικοί μαθητές φέρνουν σωστά τους δύο άξονες συμμετρίας (οριζόντιο και κάθετο) αλλά φέρνουν επιπλέον άλλους δύο πλάγιους άξονες που είναι λάθος.

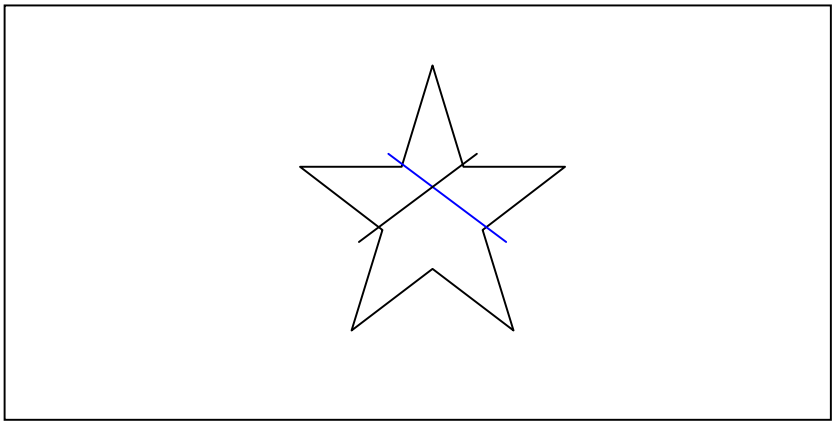
Τα αποτελέσματα μετά από την ανάλυση φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	ΔΥΟ ΑΞΟΝΕΣ	ΕΝΑΝ ΑΞΟΝΑ	ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	48%	13%	39%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	42%	20%	38%

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax3**

4η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Εδώ δίνεται στους μαθητές ένα αστέρι με πέντε κορυφές. Εδώ παρατηρήσαμε τα εξής λάθη: αρκετοί μαθητές έφεραν μόνο έναν από τους πέντε άξονες συμμετρίας που υπάρχουν. Επίσης, μερικοί μαθητές έφεραν 3 ή 4 άξονες και δεν έφεραν τους υπόλοιπους αν και ήταν αρκετά εμφανές. Ένα άλλο λάθος που παρατηρήθηκε σε αυτό το σχήμα φαίνεται με την μπλε γραμμή παρακάτω:



Το σχήμα αυτό δόθηκε ξανά στους μαθητές του γυμνασίου μετά από τη διδασκαλία της έννοιας. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω στην 18η ερώτηση του δεύτερου ερωτηματολογίου.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax4**

5η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Οι μαθητές εδώ πρέπει να φέρουν τους άξονες συμμετρίας σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Το συνηθέστερο λάθος είναι να φέρνουν μόνο τον ένα κατακόρυφο άξονα ή να φέρνουν και έναν οριζόντιο.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	ΤΡΕΙΣ Α.Σ.	**ΔΥΟ Α.Σ.**	**ΕΝΑΣ Α.Σ.**	**ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ**
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	35%	0%	53%	12%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	26%	4%	60%	8%

Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών έφερε μόνο έναν άξονα συμμετρίας και πολύ μικρότερο ποσοστό των μαθητών έφερε και τους τρεις άξονες συμμετρίας.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax5**

6η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Εδώ το σχήμα είναι ένα μισοφέγγαρο και οι περισσότεροι μαθητές έφεραν σωστά τον οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Ένα άλλο λάθος που παρατηρήθηκε μόνο στο δημοτικό είναι μία καμπύλη γραμμή στο εσωτερικό του σχήματος που είναι 'παράλληλο' προς τις πλευρές του σχήματος. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές του δημοτικού δεν έχουν κατανοήσει ότι ο άξονας συμμετρίας είναι πάντα μία ευθεία γραμμή.

Συγκεκριμένα, το 95% των μαθητών του δημοτικού και το 88% των μαθητών του γυμνασίου έφεραν σωστά τον άξονα συμμετρίας.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax6**

7η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Τα τρία τελευταία σχήματα συναντώνται στην καθημερινή μας ζωή και δεν είναι απλά γεωμετρικά σχήματα. Το πρώτο σχήμα από αυτά είναι μία λάμπα. Η πλειοψηφία των μαθητών έφερε σωστά τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας με εξαίρεση λίγους μαθητές που έφεραν και οριζόντιο άξονα. Στο σχήμα αυτό όλοι οι μαθητές του δημοτικού (100%) έφεραν σωστά τον μοναδικό άξονα συμμετρίας και σχεδόν όλοι οι μαθητές του γυμνασίου (98%).

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax7**

8η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Εδώ δίνεται ένα σχήμα σε μορφή φωτογραφικής μηχανής. Οι μαθητές προβληματίστηκαν αρκετά με αυτό το σχήμα γιατί τελικά δεν είχε κανέναν άξονα συμμετρίας. Έτσι, αρκετοί μαθητές έκαναν το λάθος να φέρουν κατακόρυφο ή οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Μία μαθήτρια του δημοτικού έγραψε χαρακτηριστικά δίπλα στο σχήμα: «Δεν έχει ευθεία. Αν το διπλώσουμε το μισό σχήμα δεν θα συμπιεστεί με το άλλο μισό». Άλλο σχόλιο μαθητή του δημοτικού ήταν το εξής: «Η φωτογραφική μηχανή δεν

έχει άξονα συμμετρίας. Αν δεν είχε το κουμπάκι όμως θα είχε έναν κάθετο άξονα συμμετρίας».

Τα ποσοστά των μαθητών φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

	ΚΑΝΕΝΑΣ Α.Σ.	**ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ**
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	85%	15%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	52%	48%

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax8**

9η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Το τελευταίο σχήμα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο που όμως είναι χωρισμένο σε οριζόντιες χρωματισμένες λωρίδες. Εδώ οι περισσότεροι μαθητές έφεραν τον μοναδικό κατακόρυφο άξονα αλλά μερικοί έφεραν και οριζόντιο άξονα, δηλαδή δεν πήραν υπ' όψη τους τις χρωματικές διαφορές του σχήματος αυτού. Τα ποσοστά των μαθητών είναι:

	ΕΝΑΣ Α.Σ.	**ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ**
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	87%	13%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ	80%	20%

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax9**

Επομένως, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου για το πρώτο ερωτηματολόγιο φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	**ΔΗΜΟΤΙΚΟ**	**ΓΥΜΝΑΣΙΟ**
Ho1	93%	74%
Ho2	92%	74%
Ho3	62%	46%
Ho4	60%	34%
Ve5	78%	68%
Ve6	80%	50%

Ve7	67%	54%
Ve8	47%	36%
Ob9	80%	72%
Ob10	67%	44%
Ob11	43%	14%
Ax1	78%	66%
Ax2	48%	34%
Ax3	48%	42%
Ax4	27%	38%
Ax5	35%	26%
Ax6	95%	88%
Ax7	100%	98%
Ax8	85%	52%
Ax9	87%	80%

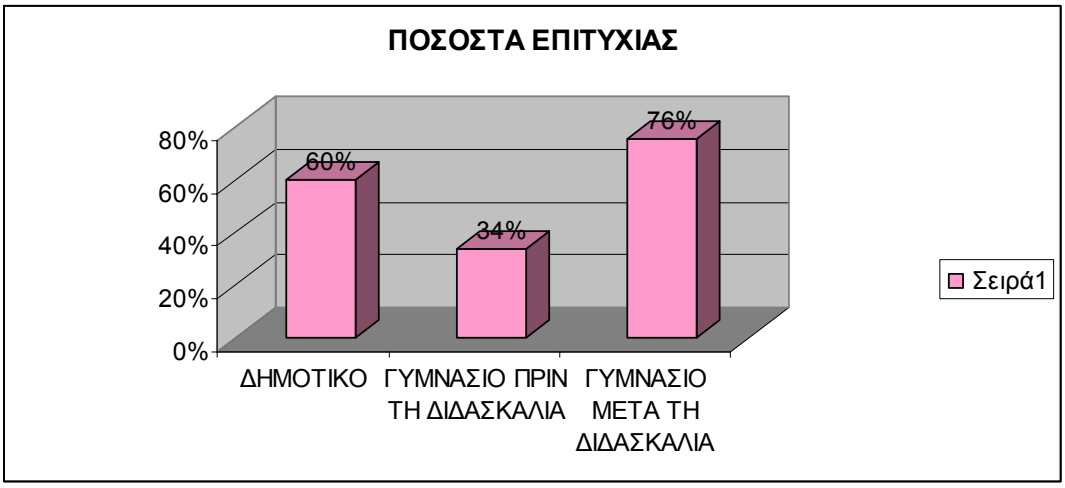
2ο Ερωτηματολόγιο (Παράρτημα Α, σελίδα 115)

1η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Η ερώτηση αυτή είναι ίδια με την 4η ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου. Δηλαδή, οι μαθητές πρέπει να βρούνε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας.

Οι περισσότεροι μαθητές το έλυσαν σωστά αλλά παρατηρήθηκαν ορισμένα λάθη (σε περιορισμένη έκταση) όπως: διατήρηση αποστάσεων και μηκών, κλίση.

Αν συγκρίνουμε τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών γυμνασίου (πριν και μετά τη διδασκαλία) και των μαθητών του δημοτικού παίρνουμε το παρακάτω ραβδόγραμμα:



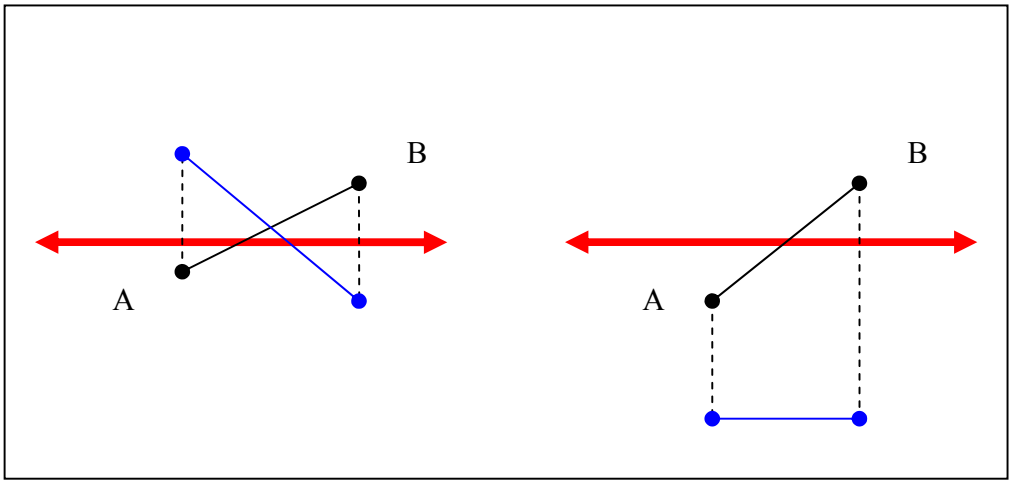
Στο παραπάνω γράφημα παρατηρούμε την μεγάλη βελτίωση των μαθητών του γυμνασίου από 34% πριν τη διδασκαλία σε 76% μετά τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας.

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho1**

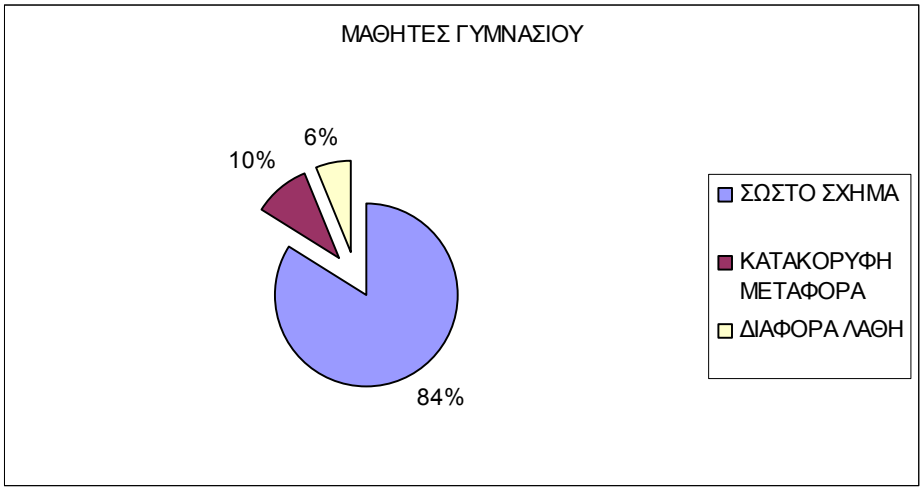
2η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές πρέπει να σχηματίσουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα κοινό σημείο με οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Η πλειονότητα των μαθητών κατάφερε να το σχηματίσει σωστά με τη διαφορά ότι σε μερικά σχήματα το σημείο τομής του αρχικού τμήματος ΑΒ και του συμμετρικού Α΄Β΄ δεν ανήκει στον άξονα συμμετρίας. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί και από το γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν χρησιμοποιούσαν χάρακα και δεν μπορούσαν να έχουν απόλυτη ακρίβεια. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho2**

Τα λάθη που παρατηρήθηκαν σε αυτή την ερώτηση ήταν: διατήρηση αποστάσεων, κλίση και κατακόρυφη μεταφορά. Μερικά χαρακτηριστικά λάθη φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



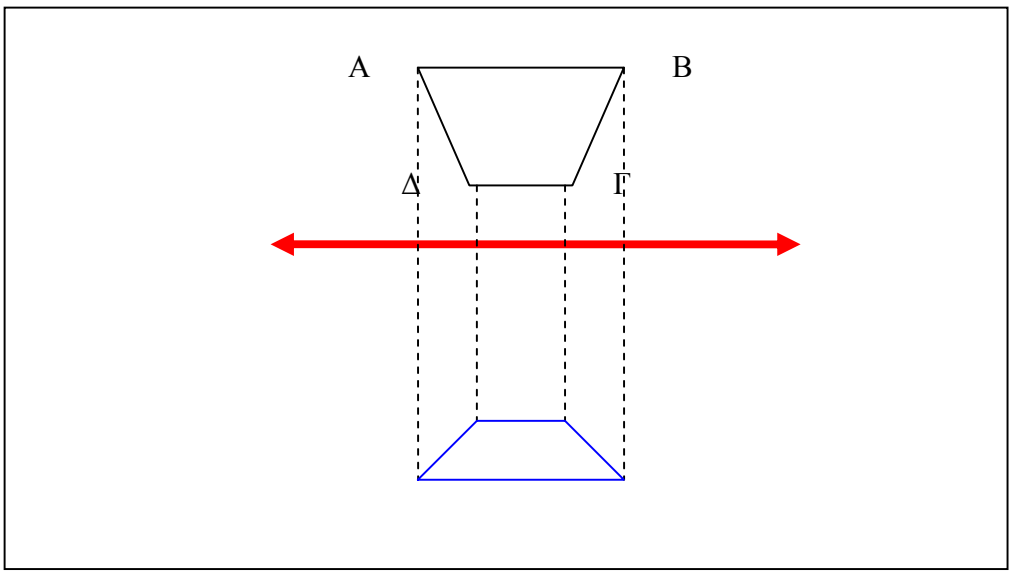
Συγκεκριμένα, τα ποσοστά των μαθητών γυμνασίου φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



3η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Εδώ ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός τραπεζίου, του οποίου οι βάσεις είναι παράλληλες ως προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Το σχήμα αυτό προβλημάτισε αρκετά τους μαθητές αφού έπρεπε να φέρουν πρώτα τα συμμετρικά των σημείων Α, Β, Γ, Δ και στη συνέχεια να ενώσουν τα συμμετρικά σημεία Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ που θα προκύψουν. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho3**

Το λάθος που παρατηρήθηκε σε πολλές περιπτώσεις είναι η διατήρηση αποστάσεων και μηκών, με αποτέλεσμα να μην σχηματίζουν ένα τραπέζιο που να είναι ίσο με το αρχικό. Μια χαρακτηριστική περίπτωση λάθους είναι η παρακάτω:

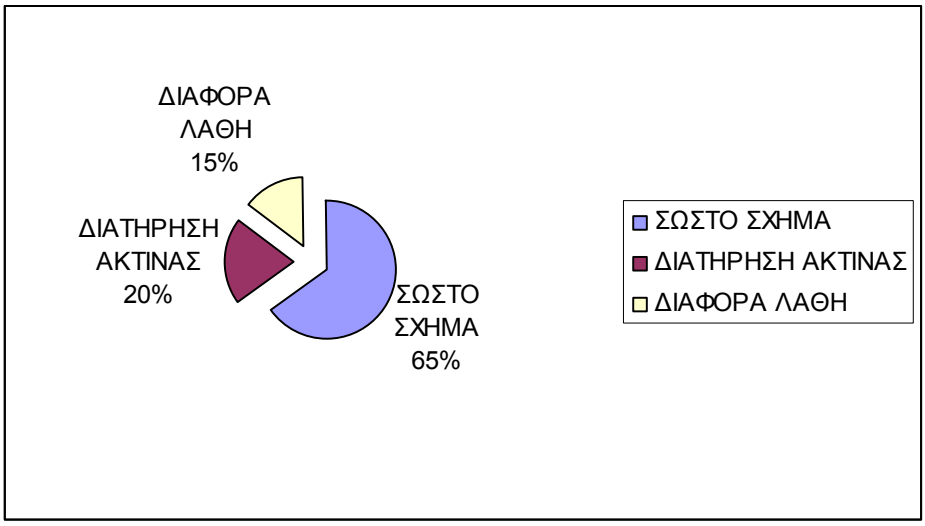


Τα ποσοστά των μαθητών ήταν: σωστό σχήμα 56%, λάθος στη διατήρηση αποστάσεων 45% και διάφορα λάθη 12%. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το κύριο λάθος των μαθητών ήταν η διατήρηση των αποστάσεων από τον άξονα συμμετρίας και των μηκών των πλευρών του τραπεζίου.

4η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός κύκλου που έχει δύο κοινά σημεία με τον οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Αν και οι μαθητές είχαν κάνει ανάλογη άσκηση στο σχολικό βιβλίο δυσκολεύτηκαν αρκετά και τους τόνισα ότι θα πρέπει να σκεφτούν ποιο θα είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου που θα προκύψει. Οι μαθητές έκαναν αρκετά λάθη και ως προς τα δύο αυτά στοιχεία του κύκλου, δηλαδή είτε δεν βρήκαν το συμμετρικό του κέντρου του κύκλου (διατήρηση αποστάσεων), ή δεν έφεραν τον νέο κύκλο με την ίδια ακτίνα (διατήρηση ακτίνας), είτε έκαναν λάθος και τα δύο.

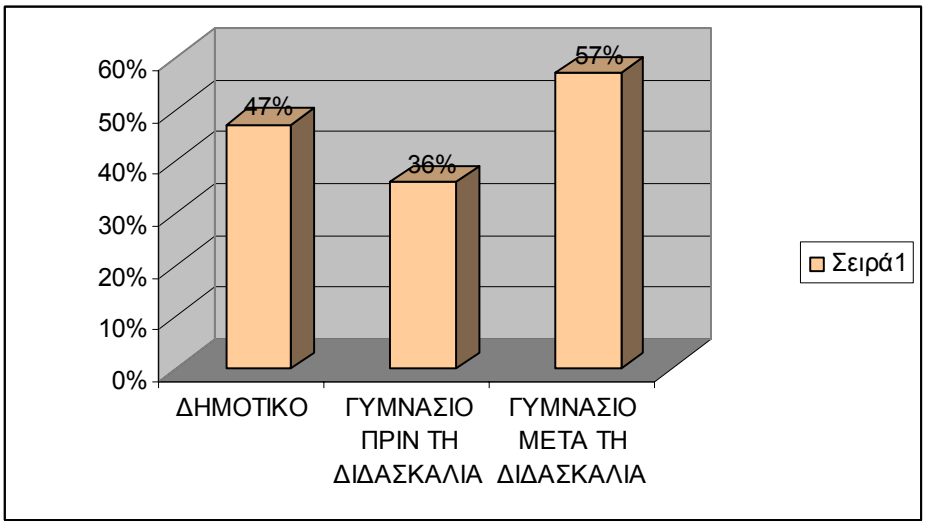
Συγκεκριμένα, τα ποσοστά των μαθητών φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ho4**

5η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

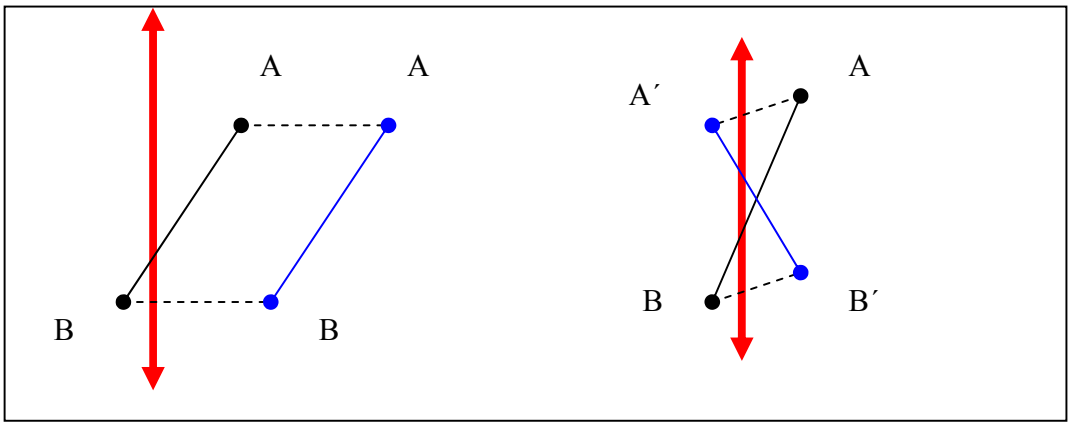
Εδώ οι μαθητές καλούνται να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Η άσκηση αυτή είχε ζητηθεί και στο πρώτο ερωτηματολόγιο με σκοπό να ελέγξουμε αν οι μαθητές θα ξανακάνουν τα ίδια λάθη. Παρατηρήθηκαν και πάλι λάθη, όπως: διατήρηση αποστάσεων – μηκών, οριζόντια μεταφορά και κλίση αλλά πολύ λιγότερα σε σχέση με το πρώτο ερωτηματολόγιο. Η σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



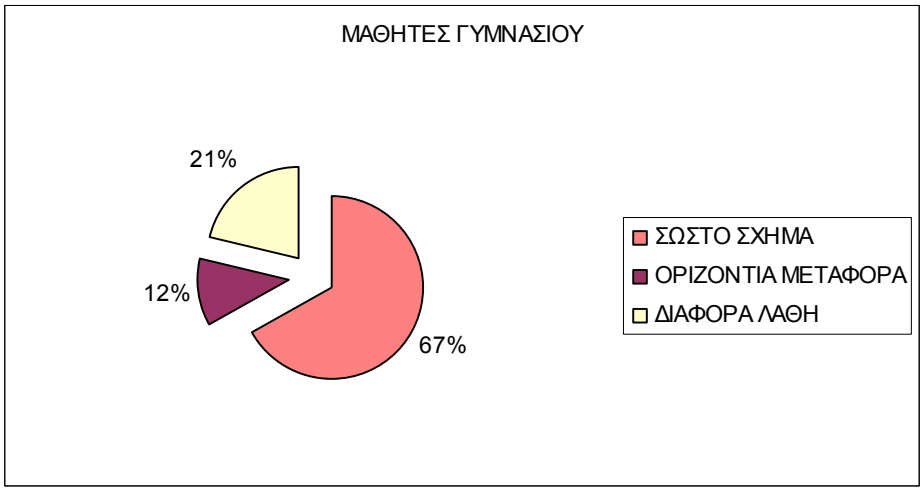
Στο παραπάνω γράφημα φαίνεται η αύξηση επιτυχίας των μαθητών του γυμνασίου από 36% σε 67% πριν και μετά τη διδασκαλία. Παρατηρούμε, δηλαδή, μια σημαντική αύξηση του ποσοστού επιτυχίας των μαθητών του γυμνασίου μετά τη διδασκαλία που ξεπερνάει το ποσοστό των μαθητών του δημοτικού. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve5**

6η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές καλούνται να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει ένα κοινό σημείο με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Τα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν: οριζόντια μεταφορά και διατήρηση μηκών.



Το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών ήταν 67% και τα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν η οριζόντια μεταφορά (12%) και διάφορα άλλα λάθη (18%).



Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve6**

7η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

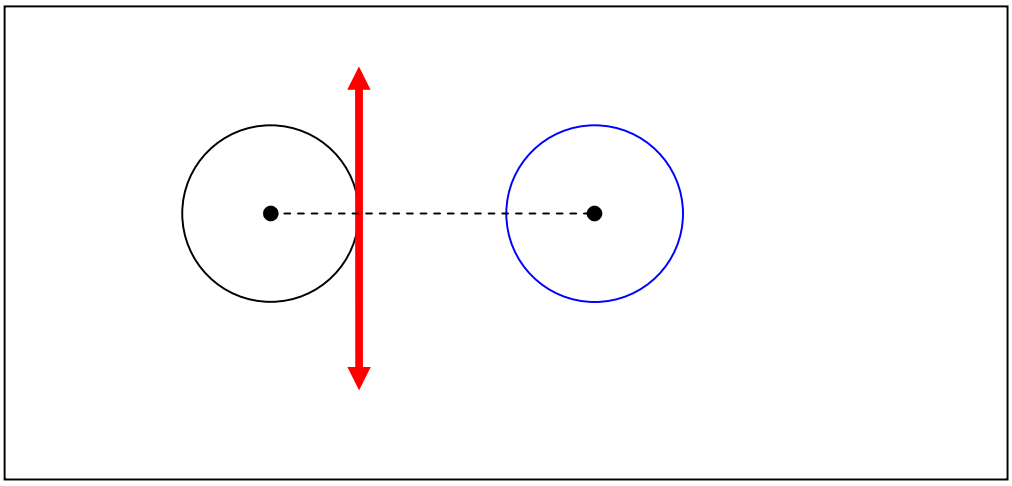
Εδώ ζητείται από τους μαθητές να βρουν το συμμετρικό ενός παραλληλογράμμου ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά σε αυτό το σχήμα αφού έπρεπε πρώτα να βρουν τα συμμετρικά των σημείων Α, Β, Γ, Δ και μετά να τα ενώσουν για να σχηματιστεί το συμμετρικό παραλληλόγραμμο. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve7**

Εδώ παρατηρήθηκαν αρκετά λάθη όπως: διατήρηση αποστάσεων και μηκών (53%), οριζόντια μεταφορά (7%) και διάφορα λάθη (14%). Το ποσοστό επιτυχίας ήταν 28%.

8η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Σε αυτήν την ερώτηση οι μαθητές πρέπει να φέρουν το συμμετρικό ενός κύκλου ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Εδώ τόνισα στους μαθητές ότι τα κύρια χαρακτηριστικά ενός κύκλου είναι το κέντρο του και η ακτίνα του.

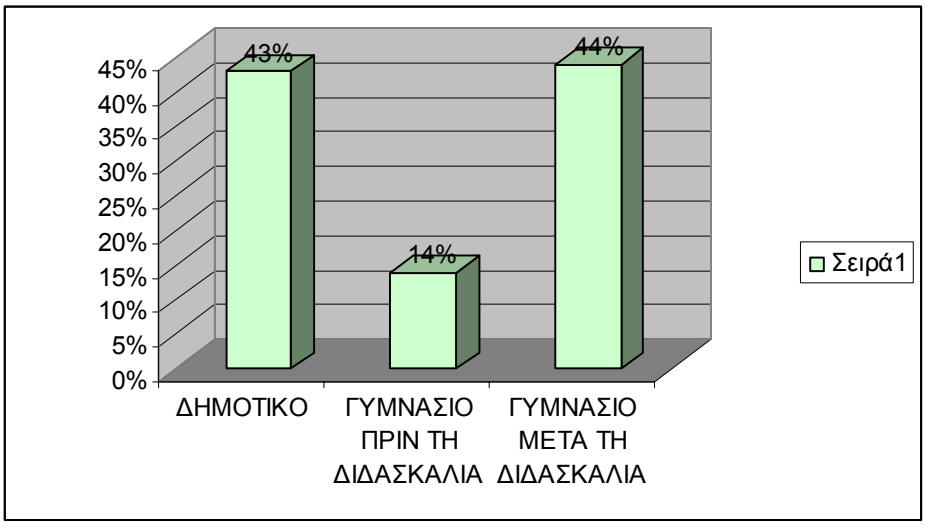
Οι περισσότεροι μαθητές έκαναν λάθος στην εύρεση του συμμετρικού του κέντρου του κύκλου (διατήρηση αποστάσεων) αλλά έφεραν τον συμμετρικό κύκλο με ίση ακτίνα με τον αρχικό. Παράδειγμα τέτοιου λάθους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Το 76% των μαθητών έλυσε σωστά την άσκηση ενώ το 10% έφερε κύκλο με διαφορετική ακτίνα και το 14% έκανε άλλα λάθη ή ημιτελή σχήματα. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ve8**

9η Ερώτηση Α΄ Μέρος

Η ερώτηση αυτή είναι ίδια με την 11η ερώτηση του πρώτου ερωτηματολογίου. Επιλέχθηκε να μπει ξανά στο δεύτερο ερωτηματολόγιο γιατί οι μαθητές είχαν κάνει πάρα πολλά λάθη στο συγκεκριμένο σχήμα, όπως: προέκταση, κλίση και παράλληλη μεταφορά. Τα ίδια λάθη παρατηρήθηκαν και σε αυτό το ερωτηματολόγιο αλλά σε περιορισμένη έκταση. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά επιτυχίας φαίνονται στο παρακάτω γράφημα:



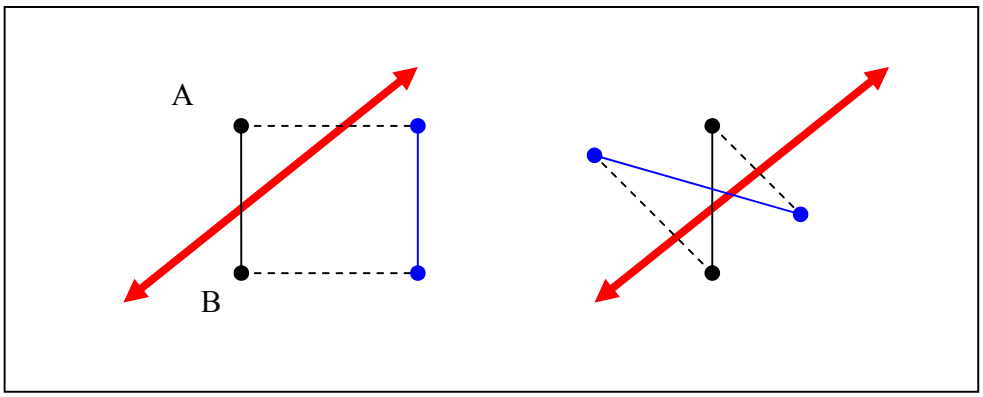
Στο παραπάνω γράφημα, παρατηρούμε τη θεαματική αύξηση των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών του γυμνασίου από 14% σε 44% μετά τη διδασκαλία της έννοιας. Επίσης, τα λάθη που παρατηρήθηκαν στους μαθητές γυμνασίου πριν και μετά τη διδασκαλία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	**ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ**	**ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ**	**ΚΛΙΣΗ**	**ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΝ**
ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ	30%	24%	12%	0%
ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ	31%	12%	0%	0%

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα ποσοστά λάθους στην προέκταση παρέμειναν στο ίδιο ποσοστό αλλά το λάθος της παράλληλης μεταφοράς μειώθηκε στο μισό. Επίσης, το λάθος της κλίσης και της διατήρησης αποστάσεων εκμηδενίστηκε. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob9**

10η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

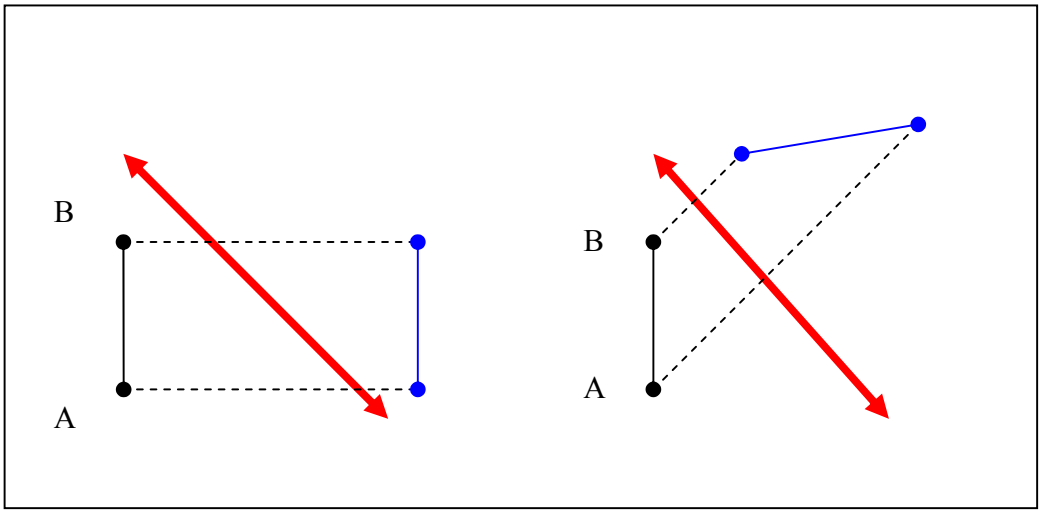
Εδώ ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα κοινό σημείο με πλάγιο άξονα συμμετρίας. Τα λάθη που παρατηρήθηκαν ήταν: διατήρηση αποστάσεων και μηκών, κλίση και παράλληλη μεταφορά. Μερικά χαρακτηριστικά λάθη φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Τα ποσοστά των μαθητών είναι: σωστό σχήμα 43%, λάθος με οριζόντια μεταφορά 12% και διάφορα λάθη 35%. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob10**

11η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Σε αυτή την ερώτηση οι μαθητές πρέπει να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και κανένα κοινό σημείο με πλάγιο άξονα συμμετρίας. Οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα όταν ο άξονας συμμετρίας είναι πλάγιος και έκαναν πολλά λάθη, όπως: κλίση, παράλληλη μεταφορά και διατήρηση αποστάσεων. Τα λάθη αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

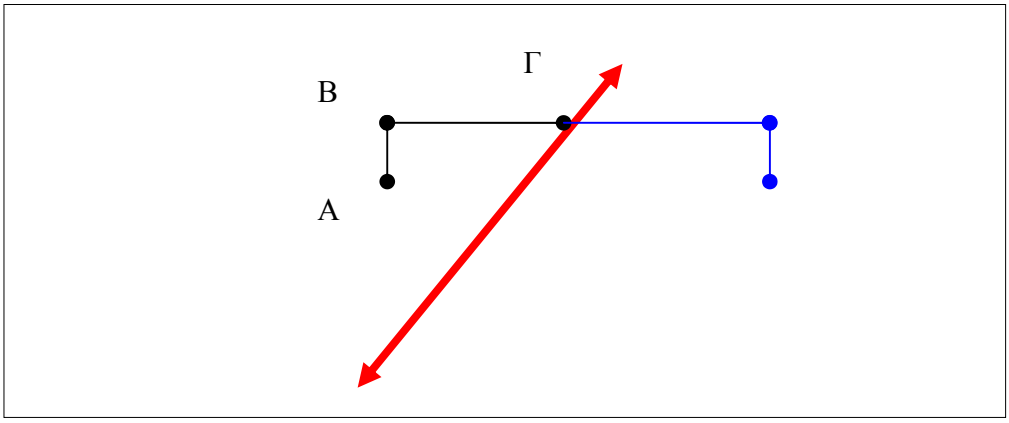


Τα ποσοστά των μαθητών είναι:

Σωστό σχήμα 25%, λάθος με οριζόντια μεταφορά 31%, παράλληλη μεταφορά 28%, κλίση 14% και διατήρηση αποστάσεων 12%. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob11.**

12η Ερώτηση, Α΄ Μέρος

Εδώ ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός σχήματος που αποτελείται από δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα που έχουν ένα κοινό σημείο με πλάγιο άξονα συμμετρίας. Εδώ παρατηρήθηκαν πολλά λάθη, όπως: προέκταση, κλίση και διατήρηση αποστάσεων και μηκών. Παράδειγμα προέκτασης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



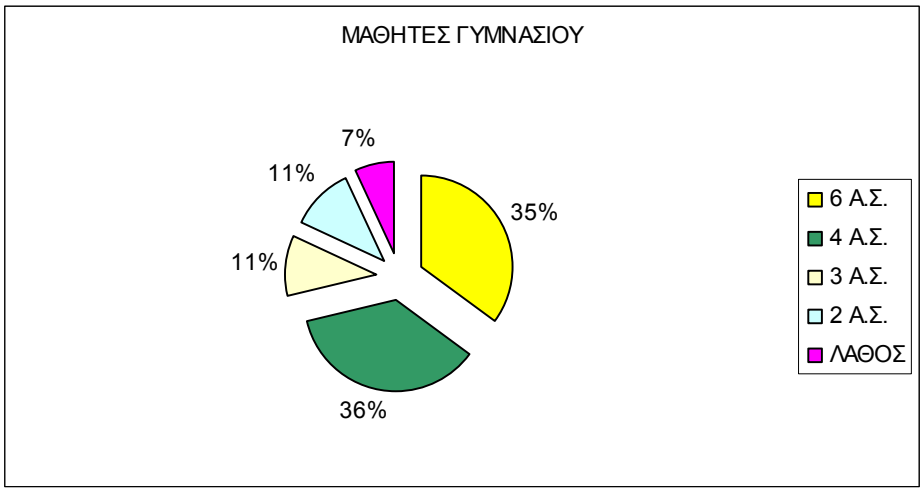
Συγκεκριμένα, έχουμε τα εξής ποσοστά:

Σωστό σχήμα 28%, προέκταση 44%, διατήρηση αποστάσεων 14% και διάφορα λάθη 20%. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ob12**

14η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Στις επόμενες ερωτήσεις δίνονται κάποια σχήματα και ζητείται από τους μαθητές να φέρουν τον/τους άξονες συμμετρίας. Το πρώτο σχήμα είναι ένα κανονικό πεντάγωνο και έχει έξι άξονες συμμετρίας (τρεις άξονες σχηματίζονταν από την ένωση των απέναντι κορυφών και οι άλλοι τρεις από την ένωση των μέσων των απέναντι πλευρών). Οι μαθητές βρήκαν τους περισσότερους άξονες συμμετρίας (κυρίως αυτούς που κατασκευάζονται με την ένωση των απέναντι κορυφών) αλλά λίγοι κατάφεραν να φέρουν όλους τους άξονες συμμετρίας που έχει αυτό το σχήμα. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax1.**

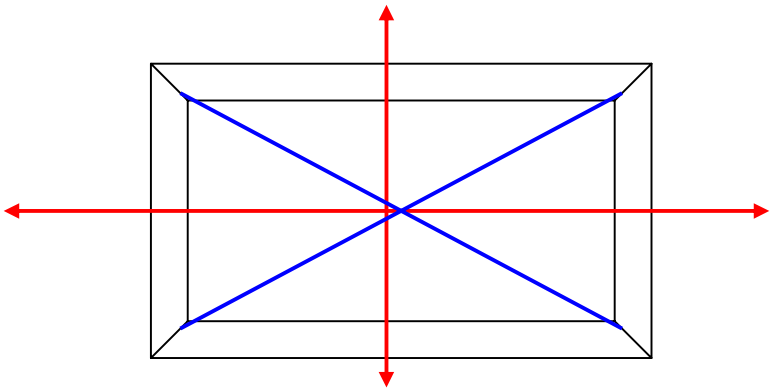
Τα αποτελέσματα των μαθητών φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



15η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Εδώ δίνεται ένα σχήμα που είναι ορθογώνιο. Το σχήμα αυτό έχει έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Όμως, πολλοί μαθητές έκαναν το λάθος να φέρουν και τις διαγώνιους του ορθογωνίου που δεν είναι άξονες συμμετρίας. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax2.**

Το 69% των μαθητών έφερε σωστά τους δύο άξονες συμμετρίας (οριζόντιο και κατακόρυφο), το 2% έφερε μόνο τον έναν άξονα και το υπόλοιπο 30% έκανε λάθος σχήμα όπως αυτό που φαίνεται παρακάτω:



16η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Το σχήμα αυτό είναι ουσιαστικά ένα ανθρώπινο πρόσωπο και είχε έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Μερικοί μαθητές ήταν διστακτικοί για το αν έχει και οριζόντιο άξονα συμμετρίας και προβληματίστηκαν για το ποια θα ήταν τότε η προβολή των ματιών τους στο πρόσωπό τους. Έτσι, κατάλαβαν ότι δεν είχε οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Το 93% των μαθητών έφερε σωστά τον κατακόρυφο άξονα ενώ το υπόλοιπο 7% έφερε και οριζόντιο ή έκανε άλλα λάθη. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax3.**

17η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Το σχήμα αυτό αποτελείται από δύο ομόκεντρους κύκλους. Όλοι οι μαθητές ήξεραν από τη θεωρία ότι ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας και οι περισσότεροι το έγραψαν δίπλα στο σχήμα αφού πρώτα έφεραν αρκετούς άξονες συμμετρίας. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	ΑΠΕΙΡΟΙ Α.Σ.	**1-2 Α.Σ.**	**ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ**
ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	93%	4%	3%

Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax4.**

18η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Το σχήμα αυτό είναι ένα αστέρι και υπάρχει και στο πρώτο ερωτηματολόγιο. Επιλέξαμε να το βάλουμε και στο δεύτερο ερωτηματολόγιο για να εξετάσουμε αν οι μαθητές θα έφερναν τώρα και τους πέντε άξονες συμμετρίας που υπάρχουν. Οι περισσότεροι μαθητές κατασκεύασαν σωστά και τους πέντε άξονες συμμετρίας αλλά εξακολούθησαν να υπάρχουν ορισμένοι που έφεραν λιγότερους από πέντε. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax5.**

Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

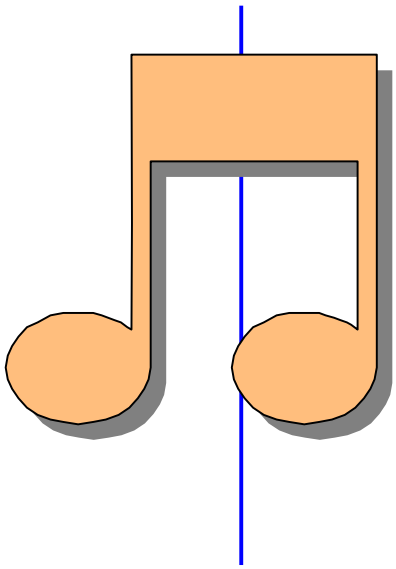
	ΠΕΝΤΕ Α.Σ.	**ΤΕΣΣΕΡΙΣ Α.Σ.**	**ΤΡΕΙΣ Α.Σ.**	**ΕΝΑΝ Α.Σ.**	**ΛΑΘΟΣ ΣΧΗΜΑ**
ΔΗΜΟΤΙΚΟ	27%	13%	5%	48%	7%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ	38%	12%	16%	22%	12%
ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ	51%	0%	17%	21%	11%

19η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

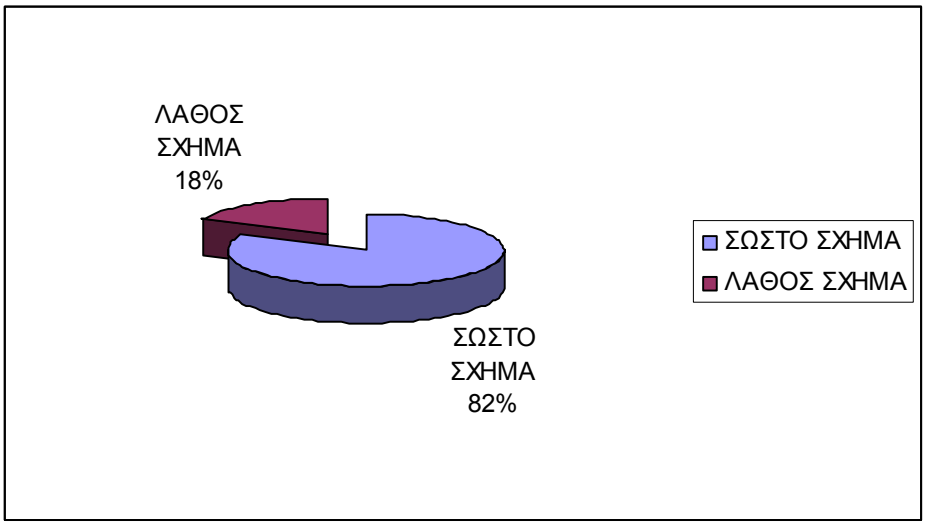
Εδώ δίνεται ένα καθημερινό σχήμα με χρώμα, μια κλειδαριά. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών έφερε σωστά τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας με ελάχιστες εξαιρέσεις που έφεραν και οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Συγκεκριμένα, το ποσοστό των μαθητών που έφεραν σωστά τον άξονα είναι 88%. Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax6.**

20η Ερώτηση, Β΄ Μέρος

Το τελευταίο σχήμα είναι μια μουσική νότα με χρωματισμό που δεν έχει άξονα συμμετρίας. Οι περισσότεροι μαθητές έφεραν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας όπως φαίνεται στο σχήμα:



Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών του γυμνασίου φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων ήταν:**Ax7.**

Συμπερασματικά, τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών του γυμνασίου στα έργα του δεύτερου ερωτηματολογίου είναι:

ΔΕΥΤΕΡΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ	**ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ**
Ho1	76%
Ho2	82%
Ho3	56%
Ho4	65%
Ve5	57%
Ve6	76%
Ve7	28%
Ve8	76%
Ob9	44%
Ob10	42%
Ob11	25%
Ob12	28%

Ax1	33%
Ax2	69%
Ax3	93%
Ax4	93%
Ax5	51%
Ax6	88%
Ax7	82%

4.2 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β)

1. Τα πέντε πρώτα επίπεδα ταξινόμησης (classification at level) για το **δημοτικό** με την αντίστοιχη ομοιότητα (similarity) είναι (Παράρτημα Β, σελίδα 123):

Classification at level : 1 : (Ax4 Ax5) similarity : 0.999807
Classification at level : 2 : (Ob11 (Ax4 Ax5)) similarity : 0.978889
Classification at level : 3 : (Ho3 Ve7) similarity : 0.969894
Classification at level : 4 : ((Ho3 Ve7) Ho4) similarity : 0.904561
Classification at level : 5 : (Ax1 Ax2) similarity : 0.815591

Παρατηρούμε ότι η πιο σημαντική ομοιότητα είναι μεταξύ των μεταβλητών Ax4 και Ax5, δηλαδή σε ασκήσεις όπου οι μαθητές πρέπει να φέρουν περισσότερους από δύο άξονες συμμετρίας. Η ομοιότητα είναι πολύ μεγάλη (0.999807) και είναι φυσιολογικό αφού στις συγκεκριμένες ασκήσεις τα σχήματα είχαν αρκετούς άξονες συμμετρίας.

Στο επίπεδο ομοιότητας 3 (classification at level 3) παρατηρείται σημαντική ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών Ho3, Ve7. Στις ασκήσεις αυτές ζητείται το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας (οριζόντιος ή κατακόρυφος). Η ομοιότητα αυτή είναι λογική αφού η διαδικασία εύρεσης του συμμετρικού είναι παρόμοια και αλλάζει μόνο η μορφή του άξονα.

Σημαντική ομοιότητα παρατηρείται στο τέταρτο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 4) με ομοιότητα 0.904561 μεταξύ των μεταβλητών Ho3, Ve7, Ho4. Αυτό είναι λογικό αφού στις συγκεκριμένες ασκήσεις ζητείται από τους μαθητές να βρουν το συμμετρικό ενός σημείου που έχει κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας. Το ευθύγραμμο τμήμα στις ασκήσεις αυτές έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας (οριζόντιο ή κατακόρυφο).

Η επόμενη σημαντική ομοιότητα παρατηρείται στο πέμπτο επίπεδο (classification at level 5) μεταξύ των μεταβλητών Ax1, Ax2. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι άξονες συμμετρίας που πρέπει να φέρουν οι μαθητές στα σχήματα αυτών των ασκήσεων είναι δύο που είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Συνεχίζοντας στο διάγραμμα ομοιότητας του δημοτικού παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική ομοιότητα στο έκτο επίπεδο ομοιότητας:

Classification at level : 6 : (Ve6 Ob10) similarity : 0.81162

Αυτό είναι λογικό και οφείλεται στο γεγονός ότι στις αντίστοιχες ασκήσεις των μεταβλητών Ve6, Ob10 ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας. Εδώ ο άξονας συμμετρίας είναι κατακόρυφος ή πλάγιος.

Τέλος, σημαντική ομοιότητα παρατηρείται και στο δέκατο επίπεδο ομοιότητας:

Classification at level : 10 : (((Ho3 Ve7) Ho4) (Ve8 (Ob11 (Ax4 Ax5)))) similarity : 0.646512

Οι μεταβλητές Ho3, Ve7, Ho4, Ve8, Ob11 αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας (σε μερικές ασκήσεις το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας και σε άλλες δεν έχει). Τις τελευταίες δύο μεταβλητές Ax4, Ax5 τις συναντήσαμε στο πρώτο επίπεδο ομοιότητας. Επίσης, σε αυτή την ομάδα ομοιότητας παρατηρούμε ότι έχουμε και τις τρεις μορφές του άξονα συμμετρίας: οριζόντιος, κατακόρυφος και πλάγιος.

Μία ομάδα ομοιότητας είναι αυτή που παρουσιάζεται στο δέκατο τρίτο επίπεδο:

Classification at level : 13 : ((Ho1 Ob9) (Ve6 Ob10)) similarity : 0.433922

Οι μεταβλητές Ho1, Ob9 αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον άξονα συμμετρίας (οριζόντιος ή πλάγιος). Οι μεταβλητές Ve6, Ob10 αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας (κατακόρυφος ή πλάγιος).

Επομένως, παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών που αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου το ευθύγραμμο τμήμα έχει κλίση ή είναι παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας. Δηλαδή, φαίνεται ότι δεν επηρεάζεται από το αν το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας ούτε από την μορφή του άξονα (οριζόντιος, κατακόρυφος ή πλάγιος). Επίσης, η πιο σημαντική ομοιότητα παρατηρείται στις ασκήσεις όπου οι μαθητές πρέπει να φέρουν περισσότερους από δύο άξονες συμμετρίας.

2. Τα πέντε πρώτα επίπεδα ταξινόμησης (classification at level) για το **γυμνάσιο (πριν τη διδασκαλία)** με την αντίστοιχη ομοιότητα (similarity) είναι (Παράρτημα Β, σελίδα 126):

Classification at level : 1 : (Ho4 Ve8) similarity : 0.997291

Classification at level : 2 : (Ax2 Ax5) similarity : 0.996024

Classification at level : 3 : ((Ax2 Ax5) Ax4) similarity : 0.989947

Classification at level : 4 : (Ho3 (Ho4 Ve8)) similarity : 0.973076

Classification at level : 5 : ((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) similarity : 0.935475

Παρατηρούμε ότι η πιο μεγάλη ομοιότητα (similarity 0.997291) παρατηρείται μεταξύ των μεταβλητών Ho4, Ve8 που αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας (οριζόντιος ή κατακόρυφος) χωρίς κανένα κοινό σημείο με αυτόν.

Το επόμενο σημαντικό επίπεδο ομοιότητας είναι το τρίτο (classification at level 3) μεταξύ των μεταβλητών Ax2, Ax4, Ax5. Στις ασκήσεις αυτές αντιστοιχούν σχήματα όπου οι μαθητές πρέπει να φέρουν δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Πράγματι, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά σε αυτές τις ασκήσεις αφού οι περισσότεροι έφεραν μόνον έναν ή δύο άξονες συμμετρίας ενώ έπρεπε να φέρουν τρεις ή πέντε.

Στο επίπεδο ομοιότητας 5 (classification at level 5) παρατηρείται σημαντική ομοιότητα (0.935475) μεταξύ των μεταβλητών Ho3, Ho4, Ve8, Ve7. Αυτό είναι φυσιολογικό αφού στις ασκήσεις αυτές το σχήμα του οποίου ζητείται το συμμετρικό είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας. Το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας και ο άξονας συμμετρίας είναι οριζόντιος ή κατακόρυφος.

Σημαντική ομοιότητα παρατηρείται και στο ένατο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 9):
Classification at level : 9 : (Ax1 ((Ax2 Ax5) Ax4)) similarity : 0.815686
Οι ασκήσεις των παραπάνω μεταβλητών περιέχουν σχήματα που έχουν δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας.

Μία ομάδα ομοιότητας παρατηρείται στο δέκατο τρίτο επίπεδο (classification at level 13):
Classification at level : 13 : (((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) (Ob11 Ax8)) similarity : 0.61418

Οι παραπάνω μεταβλητές αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται να κατασκευαστεί το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας. Το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας. Επίσης, είναι η πρώτη ομάδα ομοιότητας που περιλαμβάνει και τις τρεις μορφές του άξονα συμμετρίας: οριζόντιο, κατακόρυφο και πλάγιο.

Στο επόμενο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 14) παρατηρούμε τα εξής:
Classification at level : 14 : ((Ax6 Ax9) Ax7) similarity : 0.306145
Οι μεταβλητές αυτές αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου τα σχήματα έχουν <u>έναν</u> άξονα συμμετρίας. Επίσης, τα σχήματα αυτά προέρχονται από την καθημερινή ζωή και έχουν <u>χρωματισμούς</u>.

Μία μεγαλύτερη ομάδα ομοιότητας παρατηρείται στο δέκατο έκτο επίπεδο (classification at level 16):
Classification at level : 16 : ((((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) (Ob11 Ax8)) (Ob9 (Ob10 Ax3)))
similarity : 0.252751
Η πρώτη υποομάδα είναι ίδια με αυτή του δέκατου τρίτου επιπέδου και επιπλέον περιλαμβάνονται οι μεταβλητές Ob9, Ob10, Ax3. Οι μεταβλητές αυτές αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ο άξονας συμμετρίας είναι <u>πλάγιος</u> και είτε ζητούμε το συμμετρικό ενός σημείου ή το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι <u>παράλληλο</u> προς τον άξονα συμμετρίας.

Επομένως, από το διάγραμμα ομοιότητας των μαθητών γυμνασίου (πριν τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας) παρατηρούμε ότι η πιο σημαντική ομοιότητα παρατηρείται στις ασκήσεις που έχουν <u>κλίση</u> ως προς τον άξονα συμμετρίας. Όπως και στο δημοτικό, η ομοιότητα είναι πιο έντονη όταν ο άξονας συμμετρίας είναι οριζόντιος ή κατακόρυφος. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου ζητείται το συμμετρικό μπορεί να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας.
Στο Β΄ μέρος του ερωτηματολογίου όπου οι μαθητές πρέπει να φέρουν τους άξονες συμμετρίας (μεταβλητές Ax1 ως Ax9), παρατηρείται μεγάλη ομοιότητα στις ασκήσεις όπου τα σχήματα έχουν δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι στους μαθητές γυμνασίου υπάρχουν επίπεδα ομοιότητας με <u>μία μορφή</u> του άξονα κάθε φορά. Δηλαδή, στο έβδομο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 7) έχουμε μόνο τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας (μεταβλητές Ve5, Ve6 με ομοιότητα 0.834012) και στο δέκατο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 10) υπάρχει μόνο ο οριζόντιος άξονας (μεταβλητές Ho1, Ho2 με ομοιότητα 0.811362).

3. Τώρα θα αναλύσουμε τα επίπεδα ομοιότητας για **όλους τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου <u>πριν</u> από τη διδασκαλία** που απάντησαν στο πρώτο ερωτηματολόγιο. Σε αυτή τη στατιστική ανάλυση έχουμε προσθέσει δύο ακόμα μεταβλητές: Pr για τους μαθητές του δημοτικού και Sec για τους μαθητές του γυμνασίου (Παράρτημα Β, σελίδα 130).

Τα πέντε πρώτα επίπεδα ομοιότητας (classification at level) είναι τα εξής:
Classification at level : 1 : (Ax4 Ax5) similarity : 0.999894

Classification at level : 2 : (Ho3 Ho4) similarity : 0.997497

Classification at level : 3 : ((Ho3 Ho4) Ob11) similarity : 0.990501

Classification at level : 4 : (Ve7 Ve8) similarity : 0.988201

Classification at level : 5 : (Ax2 (Ax4 Ax5)) similarity : 0.985668

Στο πρώτο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 1) εμφανίζονται οι μεταβλητές Ax4, Ax5 με ομοιότητα 0.999894. Οι μεταβλητές αυτές αντιστοιχούν σε σχήματα που έχουν <u>περισσότερους</u> από δύο άξονες συμμετρίας. Αυτή η ομοιότητα εμφανίστηκε στο πρώτο επίπεδο των μαθητών του δημοτικού και στο τρίτο επίπεδο των μαθητών του γυμνασίου. Η μεταβλητή Pr δεν είναι σημαντική σε αυτό το επίπεδο.

Το επόμενο σημαντικό επίπεδο ομοιότητας είναι το τρίτο (classification at level 3) όπου εμφανίζονται οι μεταβλητές Ho3, Ho4, Ob11. Εδώ έχουμε ασκήσεις όπου το ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου ζητείται το συμμετρικό, έχει <u>κλίση</u> ως προς τον άξονα συμμετρίας. Το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας ο οποίος είναι οριζόντιος ή πλάγιος. Σε αυτό το επίπεδο η μεταβλητή Pr συνεισφέρει σημαντικά.

Η πρώτη σημαντική ομάδα ομοιότητας παρουσιάζεται στο έκτο επίπεδο:
Classification at level : 6 : (((Ho3 Ho4) Ob11) (Ve7 Ve8)) similarity : 0.968694

Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει ασκήσεις όπως και στο τρίτο επίπεδο με τη διαφορά ότι περιλαμβάνει και τις τρεις μορφές του άξονα: οριζόντιος, πλάγιος και κατακόρυφος. Εδώ η μεταβλητή Pr εμφανίζεται με πιθανότητα 0.0227.

Η επόμενη σημαντική ομάδα ομοιότητας είναι η ένατη:
Classification at level : 9 : (Ax1 (Ax2 (Ax4 Ax5))) similarity : 0.804928
Εδώ εμφανίζονται οι μεταβλητές Ax1, Ax2, Ax4, Ax5 που αντιστοιχούν σε σχήματα που έχουν 2 ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Η ομοιότητα είναι αρκετά σημαντική και είναι λογικό αφού αυτές οι ασκήσεις έχουν την ίδια μεθοδολογία ως προς την εύρεση των αξόνων συμμετρίας.

Σημαντική ομοιότητα παρουσιάζεται και στο δωδέκατο επίπεδο:
Classification at level : 12 : ((((Ho3 Ho4) Ob11) (Ve7 Ve8)) (Ax1 (Ax2 (Ax4 Ax5)))) similarity : 0.715271
Οι μεταβλητές που παρουσιάζονται αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου το ευθύγραμμο τμήμα έχει κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας και σε ασκήσεις όπου τα σχήματα έχουν δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Η μεταβλητή Pr είναι σημαντική σε αυτό το επίπεδο.

Η επόμενη σημαντική ομάδα εμφανίζεται στο δέκατο έκτο επίπεδο:
Classification at level : 16 : ((Ho1 Ho2) (Ve6 (Ob9 Ob10))) similarity : 0.194368
Οι μεταβλητές που παρουσιάζονται εδώ αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός <u>σημείου</u> ή ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι <u>παράλληλο</u> προς τον άξονα συμμετρίας. Παρόμοια ομάδα είναι στο δημοτικό στο δέκατο τρίτο επίπεδο (ομοιότητα 0.433922) και στο γυμνάσιο στο δέκατο πέμπτο επίπεδο (ομοιότητα 0.267933).

Η τελευταία ομάδα ομοιότητας παρουσιάζεται στο δέκατο όγδοο επίπεδο:
Classification at level : 18 : (((Ho1 Ho2) (Ve6 (Ob9 Ob10))) ((((Ho3 Ho4) Ob11) (Ve7 Ve8)) (Ax1 (Ax2 (Ax4 Ax5))))) similarity : 0.0402385

Εδώ εμφανίζονται όλες οι μεταβλητές που αναλύσαμε στα προηγούμενα επίπεδα και περιλαμβάνουν και τις τρεις μορφές του άξονα συμμετρίας. Η μεταβλητή Pr συνεισφέρει με πιθανότητα 0.0228.

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι οι ομάδες που σχηματίζονται όταν αναλύουμε όλους τους μαθητές μαζί, επηρεάζονται κυρίως από το δημοτικό. Επίσης, σε αρκετά επίπεδα ομοιότητας εμφανίζεται μόνο η μία μορφή του άξονα. Δηλαδή, στο δεύτερο επίπεδο έχουμε τις μεταβλητές Ho3, Ho4 που αντιστοιχούν σε οριζόντιο άξονα συμμετρίας και στο τέταρτο επίπεδο οι μεταβλητές Ve7, Ve8 αφορούν τον κατακόρυφο άξονα. Επιπλέον, υπάρχουν τέσσερα επίπεδα ομοιότητας όπου εμφανίζονται μόνο μεταβλητές της μορφής Ax, αυτό είναι λογικό αφού αντιστοιχούν σε ασκήσεις στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στη διαμόρφωση των διαφόρων ομάδων ομοιότητας συνεισφέρει σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις ο πληθυσμός του δημοτικού σχολείου. Με άλλα λόγια, η συνέπεια με την οποία απαντούν στα διάφορα έργα οι μαθητές του δημοτικού είναι αυτή που συμβάλλει κυρίως στην ύπαρξη ομοιοτήτων.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β)

1. Τα πέντε πρώτα επίπεδα ταξινόμησης (classification at level) για το **γυμνάσιο μετά τη διδασκαλία** με την αντίστοιχη ομοιότητα (similarity) είναι (Παράρτημα Β, σελίδα 134):

Classification at level : 1 : (Ob9 Ob12) similarity : 0.996741

Classification at level : 2 : (Ob10 Ob11) similarity : 0.991189

Classification at level : 3 : ((Ob9 Ob12) Ax1) similarity : 0.985879

Classification at level : 4 : (Ve5 (Ob10 Ob11)) similarity : 0.96926

Classification at level : 5 : (Ho3 Ve7) similarity : 0.961358

Στο πρώτο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 1) παρουσιάζονται οι μεταβλητές Ob9, Ob12 με πολύ υψηλή ομοιότητα (similarity 0.996741). Οι μεταβλητές αυτές αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν το συμμετρικό ενός σχήματος (ένα ή δύο ευθύγραμμα τμήματα) ως προς πλάγιο άξονα συμμετρίας. Η άσκηση Ob9 υπήρχε και στο πρώτο ερωτηματολόγιο και την είχαμε επιλέξει και στο δεύτερο ερωτηματολόγιο γιατί είχε δυσκολέψει αρκετά τους μαθητές και είχαν παρατηρηθεί πολλά λάθη.

Στο δεύτερο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 2) παρατηρούμε σημαντική ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών Ob10, Ob11. Οι μεταβλητές αυτές αντιστοιχούν πάλι σε ασκήσεις εύρεσης συμμετρικού ενός ευθύγραμμου τμήματος που τέμνει έχει κλίση ως προς πλάγιο άξονα συμμετρίας. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η πιο μεγάλη ομοιότητα παρατηρείται μεταξύ μεταβλητών που αντιστοιχούν σε ασκήσεις με πλάγιο άξονα συμμετρίας.

Στο τέταρτο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 4) εμφανίζεται και η μεταβλητή Ve5 μαζί με τις Ob10, Ob11. Δηλαδή, εδώ εμφανίζονται ασκήσεις όπου ζητείται το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος τέμνει ή έχει κλίση ως προς πλάγιο ή κατακόρυφο άξονα.

Επίσης, σημαντική ομοιότητα παρουσιάζεται και στο πέμπτο επίπεδο ομοιότητας (classification at level 5) μεταξύ των μεταβλητών Ho3, Ve7 που αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται το συμμετρικό ενός σχήματος (τραπέζιο ή παραλληλόγραμμο) ως προς οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό αφού τα σχήματα αυτά ήταν πιο περίπλοκα και απαιτούσαν προσεκτικό σχεδιασμό.

2. Η επόμενη σημαντική ομοιότητα παρουσιάζεται στο ένατο επίπεδο:

Classification at level : 9 : (Ho2 Ve6) similarity : 0.849046

Οι μεταβλητές Ho2, Ve6 αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που τέμνει τον άξονα συμμετρίας.

3. Η πρώτη σημαντική ομάδα ομοιότητας παρουσιάζεται στο ενδέκατο επίπεδο:

Classification at level : 11 : ((Ho4 Ax5) ((Ve5 (Ob10 Ob11)) ((Ob9 Ob12) Ax1))) similarity : 0.722537

Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει ασκήσεις με όλες τις μορφές του άξονα συμμετρίας, καθώς και σχήματα που έχουν πολλούς άξονες συμμετρίας.

4. Μία άλλη ομάδα ομοιότητας παρουσιάζεται στο δέκατο πέμπτο επίπεδο ομοιότητας:

Classification at level : 15 : ((Ho1 (Ho3 Ve7)) ((Ho4 Ax5) ((Ve5 (Ob10 Ob11)) ((Ob9 Ob12) Ax1)))) similarity : 0.352968

Εδώ έχουμε ασκήσεις όπου ο άξονας συμμετρίας είναι κυρίως οριζόντιος ή πλάγιος. Επίσης, οι μεταβλητές Ax1, Ax5 αντιστοιχούν σε σχήματα που έχουν πολλούς άξονες συμμετρίας.

4.3 ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ, ΣΕΛ. 138,139)

Το συνεπαγωγικό αυτό διάγραμμα έχει κατασκευαστεί με κλασσικό τρόπο εφαρμογής της συνεπαγωγικής ανάλυσης, δηλαδή ισχύουν μόνο οι ευθείες συνεπαγωγές και όχι οι αντιθετοαντίστροφες.

Παρατηρούνται οι εξής προφανείς σχέσεις:

Α) Οι πιο σημαντικές συνεπαγωγές (σε επίπεδο 99%) εμφανίζονται μεταξύ των εξής μεταβλητών:

Ax4→ Ax5 & Ho3→ Ve7

Οι δύο πρώτες μεταβλητές αντιστοιχούν σε έργα όπου τα σχήματα έχουν δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας. Άλλωστε, και στα διαγράμματα ομοιότητας παρατηρήσαμε πολύ μεγάλη ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών αυτών.

Οι μεταβλητές Ho3, Ve7 αντιστοιχούν σε ασκήσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να φέρουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας. Έτσι, ένας μαθητής που έχει φέρει σωστά το συμμετρικό όταν ο άξονας συμμετρίας είναι οριζόντιος, τότε καταφέρνει να λύσει σωστά την ίδια άσκηση όταν ο άξονας συμμετρίας είναι κατακόρυφος.

Β) Άλλες σημαντικές συνεπαγωγές είναι οι εξής:

1. Ax4 → Ax5 → Ob11 → Ho4 → Ho3
2. Ho3 → Ve7 → Ob9 → Ho1

Από την πρώτη ομάδα συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές που έλυσαν σωστά την άσκηση που αντιστοιχεί στην μεταβλητή Ax4 (οι μαθητές πρέπει να φέρουν πέντε άξονες συμμετρίας), τότε λύνουν σωστά και την άσκηση με μεταβλητή Ax5 (σχήμα με τρεις άξονες συμμετρίας). Επίσης, καταφέρνουν να λύσουν σωστά την άσκηση με μεταβλητή Ob11 όπου ζητείται το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος με κλίση ως προς πλάγιο άξονα συμμετρίας . Τότε, οι μαθητές φυσικά έλυσαν και τις πιο απλές ασκήσεις που αντιστοιχούν στις μεταβλητές Ho4, Ho3.

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τις μεταβλητές Ho3 και Ve7 που αντιστοιχούν στην εύρεση του συμμετρικού ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα σημείο τομής με τον άξονα συμμετρίας (οριζόντιος και κατακόρυφος αντίστοιχα). Οι μαθητές που λύνουν σωστά αυτές τις ασκήσεις καταφέρνουν να λύσουν και τις ασκήσεις με μεταβλητές Ob9, Ho1 όπου ζητείται το συμμετρικό ενός σημείου.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ) (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ, ΣΕΛ. 140)

Εδώ παρατηρούμε δύο σημαντικές συνεπαγωγές σε επίπεδο 95%:

1. Ho4 → Ve8 → Ho3 → Ve7 → Ax6
2. Ax5→ Ax2 → Ax4 → Ax1

Στην πρώτη ομάδα παρατηρούμε ότι ένας μαθητής που βρήκε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση ως προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας, τότε λύνει την ίδια άσκηση όταν ο άξονας είναι κατακόρυφος. Στη συνέχεια, μπορεί να λύσει ανάλογες ασκήσεις όπου το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα.

Η δεύτερη ομάδα (που είναι απομονωμένη από τις υπόλοιπες) περιλαμβάνει ασκήσεις όπου δίνονται τα σχήματα και πρέπει οι μαθητές να φέρουν τους άξονες συμμετρίας. Εδώ παρατηρούμε ότι όταν ένας μαθητής λύσει σωστά την άσκηση Ax5 με τρεις άξονες συμμετρίας, τότε λύνει και την άσκηση Ax2 με δύο άξονες συμμετρίας. Στη συνέχεια, επιτυγχάνει και στις υπόλοιπες ασκήσεις που έχουν περισσότερους άξονες συμμετρίας. Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά με τους μαθητές του δημοτικού όπου το συνεπαγωγικό διάγραμμα ξεκινάει με την μεταβλητή Ax4 όπου το σχήμα έχει τους περισσότερους άξονες συμμετρίας (πέντε).

Η ύπαρξη της δεύτερης αυτής ομάδας συνεπαγωγών με μεταβλητές μόνο της μορφής Axi, μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι φαίνεται να υπάρχει κάποιο είδος στεγανοποίησης εφόσον εκτός από δύο ασκήσεις εύρεσης άξονα συμμετρίας, οι άλλες ασκήσεις συνδέονται μόνο μεταξύ τους. Με τον όρο στεγανοποίηση εννοούμε την κατάσταση κατά την οποία ο μαθητής εργάζεται σε ένα πεδίο αναπαράστασης χωρίς να είναι σε θέση να επικοινωνεί τις ιδέες του με επιτυχία σε ένα άλλο πεδίο αναπαράστασης.

Τέλος, σε χαμηλότερο επίπεδο (90%) συνδέονται οι μεταβλητές Ve6 → Ve5. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό αφού ο μαθητής που μπορεί να βρει το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας,

τότε μπορεί να βρει και το συμμετρικό ενός σημείου ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ) (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ, ΣΕΛ. 141)

Α) Στο παραπάνω συνεπαγωγικό διάγραμμα οι πιο ισχυρές συνεπαγωγές (επίπεδο 99%) είναι οι εξής:

1. Ve8 → Ho4 → Ho3 → Ve7
2. Ax5 → Ax4
3. Ax2 → Ax1

Η πρώτη ομάδα δείχνει ότι αν ο μαθητής βρει το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν έχει κοινό σημείο με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας(Ve8), τότε μπορεί να λύσει την ίδια άσκηση όταν ο άξονας συμμετρίας είναι οριζόντιος(Ho4). Στη συνέχεια, μπορεί να λύσει την ίδια άσκηση όπου το ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα κοινό σημείο με τον οριζόντιο άξονα(Ho3) και με κατακόρυφο άξονα (Ve7).

Η δεύτερη ομάδα συνεπαγωγών συνδέει σχήματα που έχουν περισσότερους από δύο άξονες συμμετρίας. Αυτό το είχαμε διαπιστώσει και στο διάγραμμα ομοιότητας. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει ασκήσεις όπου το σχήμα έχει μόνο δύο άξονες συμμετρίας οι οποίοι είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Β) Σε επίπεδο 95% παρατηρούνται οι εξής συνεπαγωγές:

1. Ob11 → Ax8 → Ve5
2. Ob10 → Ve6 → Ob9

Στην πρώτη ομάδα, περιλαμβάνεται η εύρεση του συμμετρικού ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει ένα κοινό σημείο με πλάγιο άξονα συμμετρίας (Ob11), η εύρεση του συμμετρικού ενός σημείου ως προς κατακόρυφο άξονα(Ve8) και η μη ύπαρξη άξονα συμμετρίας σε ένα σχήμα(Ax8).

Στη δεύτερη ομάδα, αν ο μαθητής σχεδιάσει το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο προς πλάγιο άξονα(Ob10), τότε μπορεί να κάνει το ίδιο και με κατακόρυφο άξονα(Ve6). Στη συνέχεια, μπορεί να βρει σωστά και το συμμετρικό ενός σημείου ως προς πλάγιο άξονα(Ob9).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ <u>ΜΕΤΑ</u> ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 99% (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ, ΣΕΛ. 142)

1. Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, δεν υπάρχει σχέση μεταξύ ασκήσεων ευρέσεως συμμετρικών και εύρεση άξονα συμμετρίας. Δηλαδή, όσο μεγάλη επιτυχία και αν έχουν σε ασκήσεις Hoi, Vei, Obi δεν είναι σίγουρο ότι θα πετύχουν σε ασκήσεις Axi.
2. Σε όλες τις αλυσίδες οι ασκήσεις Hoi βρίσκονται στο κάτω άκρο των αλυσίδων – εκτός από την Ho3- που δείχνουν αυτό που ήδη γνωρίζαμε, ότι δηλαδή οι ασκήσεις με οριζόντιο άξονα είναι οι πιο απλές.
3. Ένας μαθητής που βρίσκει το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που τέμνει τον πλάγιο άξονα συμμετρίας (Ob10), τότε μπορεί να λύσει την ίδια άσκηση και με οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα (Ho2, Ve6).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ <u>ΜΕΤΑ</u> ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 99% <u>ΚΑΙ</u> 95% (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ)

1. Σε επίπεδο 95% φαίνεται ότι επιτυχία σε ασκήσεις με πλάγιο άξονα συνεπάγεται επιτυχία σε ασκήσεις εύρεσης άξονα (Ob11 → Ob10 → Ax5 και Ob12 → Ax1).
2. Όμως, υπάρχουν τρεις ασκήσεις (Ax7, Ax6, Ax2) που είναι απομονωμένες από τις υπόλοιπες. Οι ασκήσεις αυτές αντιστοιχούν σε σχήματα που έχουν <u>δύο</u> ή <u>λιγότερους</u> άξονες συμμετρίας.
3. Από τις συνεπαγωγές Ob11 → Ho3 → Ve8 και Ob10 → Ve5 → Ho1 συμπεραίνουμε ότι επιτυχία σε ασκήσεις με πλάγιο άξονα συνεπάγεται επιτυχία σε ασκήσεις με οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

5.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω στατιστική ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας και των συνεπαγωγικών διαγραμμάτων μπορούμε να τα συνοψίσουμε ως εξής:

Α. Η μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο συνοδεύεται από μεγάλη πτώση των ποσοστών επιτυχίας σε όλες τις ερωτήσεις. Αν λάβουμε υπόψη ότι υπάρχει μια σχετική ωρίμανση λόγω της διαφοράς ηλικίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αντίστοιχη διδασκαλία του δημοτικού σχολείου δεν πετυχαίνει τους στόχους της αφού οι δεξιότητες – γνώσεις των μαθητών δεν παραμένουν στο μυαλό των μαθητών λίγο διάστημα μετά τη διδασκαλία.

Β. ***Εξέλιξη των τριών διαγραμμάτων ομοιότητας***

Αν συγκρίνουμε το διάγραμμα ομοιότητας του δημοτικού σχολείου με αυτό του γυμνασίου πριν τη διδασκαλία και αυτό του γυμνασίου μετά τη διδασκαλία, παρατηρούμε ότι υπάρχουν μερικές ουσιαστικές διαφορές:

α) Στο διάγραμμα ομοιότητας του δημοτικού υπάρχουν τέσσερις ομάδες ομοιότητας οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Η τέταρτη ομάδα αποτελείται από πέντε έργα της μορφής Axi, που δείχνει ότι για τους μαθητές του δημοτικού η εύρεση αξόνων συμμετρίας διαισθητικά ή με δίπλωση είναι άλλης φύσης έργο από τα έργα εύρεσης συμμετρικών σημείων η απλών σχημάτων ως προς διάφορων μορφών άξονες.

β) Στο διάγραμμα ομοιότητας του γυμνασίου πριν τη διδασκαλία όπου έχουμε ακριβώς τις ίδιες ασκήσεις υπάρχει μεγάλη συνοχή μεταξύ των τεσσάρων ειδών έργων αφού σχηματίζονται μόνο δύο ομάδες. Επιπλέον, τα διάφορα έργα Axi δεν στεγανοποιούνται υπό την μορφή μιας ξεχωριστής ομάδας αλλά αναμιγνύονται σε διάφορες ομάδες. Άρα,

αν και τα ποσοστά όλων των έργων μειώνονται στην Α΄ γυμνασίου, εν τούτοις η δομή των δεξιοτήτων και γνώσεων παρουσιάζεται με μεγαλύτερη συνοχή.
γ) Στο διάγραμμα ομοιότητας του γυμνασίου μετά τη διδασκαλία παρατηρούμε πάλι δύο ομάδες, όμως η μία ομάδα με τα πέντε έργα Axi στεγανοποιείται από την άλλη ομάδα. Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι η διδασκαλία της συμμετρίας στην Α΄ Γυμνασίου συμβάλλει στην ενίσχυση του φαινομένου στεγανοποίησης, με συνέπεια το διάγραμμα αυτό της δεύτερης φάσης να μοιάζει με το διάγραμμα ομοιότητας του δημοτικού σχολείου ως προς το σχηματισμό ξεχωριστών ομάδων των έργων Axi.
Γ. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στη διαμόρφωση των διαφόρων ομάδων ομοιότητας συνεισφέρει σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις ο πληθυσμός του δημοτικού σχολείου. Επομένως, η συνέπεια με την οποία απαντούν στα διάφορα έργα οι μαθητές του δημοτικού είναι αυτή που συμβάλλει κυρίως στην ύπαρξη ομοιοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα, τα συμπεράσματα που προκύπτουν μετά την επεξεργασία των απαντήσεων των μαθητών σε συγκεκριμένα έργα των δύο ερωτηματολογίων, είναι τα παρακάτω:

1. Η εύρεση συμμετρικού ενός σημείου ως προς άξονα συμμετρίας δυσκολεύει τους μαθητές, κυρίως όταν ο άξονας συμμετρίας είναι οριζόντιος ή πλάγιος. Οι μαθητές κάνουν διάφορα λάθη τα οποία τα ομαδοποιήσαμε και τα εξετάσαμε. Εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις, παρατηρήσαμε την ίδια μορφή λάθους σε συγκεκριμένες ασκήσεις τόσο στους μαθητές του δημοτικού όσο και του γυμνασίου.
2. Παρατηρήσαμε σημαντική διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας μεταξύ των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου. Οι μαθητές του δημοτικού είχαν περισσότερες σωστές απαντήσεις και μερικές φορές είχαν θεαματικά πολύ μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας. Όμως, οι μαθητές του γυμνασίου κατάφερναν να τους ξεπεράσουν στο δεύτερο ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν μετά τη διδασκαλία της έννοιας. Εδώ είναι φανερή η σημασία της διδασκαλίας και η συνεισφορά της στη γνώση και κατανόηση των εννοιών.

3. Στο Β΄ Μέρος των Ερωτηματολογίων όπου οι μαθητές έπρεπε να φέρουν τους άξονες συμμετρίας, παρατηρήθηκε ότι πολλοί μαθητές έφερναν μόνον έναν ή δύο άξονες και δεν έφερναν και τους υπόλοιπους. Από την άλλη πλευρά, μερικοί μαθητές έφεραν τυχαίες ευθείες που δεν ήταν άξονες συμμετρίας. Αυτό φανερώνει ότι ουσιαστικά δεν είχαν εμπεδώσει την έννοια της αξονικής συμμετρίας.
4. Στα σχήματα του Β΄ Μέρους που προέρχονταν από την καθημερινή ζωή παρατηρήσαμε τα εξής: οι μαθητές δεν τα βρήκαν πιο εύκολα από τα υπόλοιπα και στο τέλος της διδακτικής ώρας μου ανέφεραν ότι δυσκολεύτηκαν αρκετά. Εντυπωσιακή είναι η περίπτωση όπου το σχήμα είναι ένα ανθρώπινο πρόσωπο και πολλοί μαθητές αναρωτιόντουσαν αν υπήρχε και οριζόντιος άξονας συμμετρίας.
5. Τα χρώματα στα σχήματα του Β΄ Μέρους δεν επηρέασαν τον τρόπο επίλυσης των μαθητών. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι τους δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο και στο τέλος δίνεται πάλι ένα ισόπλευρο τρίγωνο αλλά με οριζόντιες χρωματιστές λωρίδες. Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές έφεραν και στα δύο τρίγωνα τρεις άξονες συμμετρίας παρόλο που το δεύτερο σχήμα είχε μόνον έναν λόγω των χρωματικών διαφορών.
6. Οι μαθητές τόσο του δημοτικού όσο και του γυμνασίου (πριν και μετά τη διδασκαλία) έχουν πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στις ασκήσεις με πλάγιο άξονα συμμετρίας. Εκεί παρατηρήθηκε πολύ έντονα το λάθος της προέκτασης αφού οι μαθητές δεν έφερναν τις βοηθητικές διακεκομμένες γραμμές κάθετα προς τον άξονα συμμετρίας. Αυτό φανερώνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην έννοια της καθετότητας.
7. Τα σχήματα που είχαν κλίση ως προς τον άξονα συμμετρίας δημιούργησαν προβλήματα στους μαθητές και αρκετοί δεν έφερναν το συμμετρικό σχήμα με την ίδια κλίση.
8. Οι μαθητές δεν ήταν αρκετά ακριβείς στις ασκήσεις όπου το ευθύγραμμο τμήμα είχε ένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας. Σε πολλές περιπτώσεις το συμμετρικό σχήμα δεν διέρχεται από το ίδιο σημείο πάνω στον άξονα συμμετρίας. Όμως, αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν επιτρέψαμε

στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά όργανα, οπότε δεν μπορούσαν να πετύχουν ακρίβεια χιλιοστού που χρειαζόταν.

9. Τα σχήματα που περιείχαν κύκλο προβλημάτισαν αρκετά τους μαθητές γυμνασίου. Οι μαθητές είτε δεν έβρισκαν σωστά το συμμετρικό του σημείου του κύκλου (λάθος στη διατήρηση αποστάσεων) ή δεν έφερναν τον συμμετρικό κύκλο με την ίδια ακτίνα.
10. Τα σχήματα που αποτελούνται από περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα (τραπέζιο και παραλληλόγραμμο) ήταν πηγή πολλών λαθών. Οι μαθητές δεν ακολουθούσαν την ίδια μεθοδολογία όπως στα προηγούμενα σχήματα, δηλαδή να βρουν πρώτα τα συμμετρικά των σημείων Α,Β,Γ,Δ και στη συνέχεια να τα ενώσουν. Αντίθετα, προσπαθούσαν να βρουν το συμμετρικό ολόκληρου του σχήματος με αποτέλεσμα να κάνουν πολλά λάθη, όπως διατήρηση αποστάσεων, κλίση και μεταφορά.
11. Τα σχήματα που δεν είχαν κανέναν άξονα συμμετρίας παραπλάνησαν αρκετά τους μαθητές. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι το σχήμα με τις νότες στο δεύτερο ερωτηματολόγιο όπου πολλοί μαθητές έφεραν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Σε κάποιες περιπτώσεις συζήτησα με τους μαθητές για το συγκεκριμένο σχήμα και επέμεναν ότι έχει κατακόρυφο άξονα συμμετρίας.
12. Τα σχήματα που είχαν άπειρους άξονες συμμετρίας δεν προβλημάτισαν τους μαθητές και πέτυχαν υψηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων. Όλοι οι μαθητές γνώριζαν ότι ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας και τους έφεραν χωρίς καμία δυσκολία.
13. Από τα διαγράμματα ομοιότητας είναι φανερό ότι οι μαθητές ομαδοποίησαν τις ασκήσεις ανάλογα με το αν το σχήμα, του οποίου ζητείται το συμμετρικό, είναι παράλληλο ή έχει κλίση ή έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα συμμετρίας. Δηλαδή, οι ομάδες δεν δημιουργήθηκαν ανάλογα με την μορφή του άξονα (οριζόντιος, κατακόρυφος και πλάγιος).
14. Όταν ένας μαθητής έβρισκε σωστά το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς πλάγιο άξονα, τότε συνήθως είχε επιτυχία και σε ασκήσεις με κατακόρυφο άξονα και σίγουρα σε ασκήσεις με οριζόντιο άξονα.

15. Όταν ένας μαθητής έβρισκε όλους τους άξονες συμμετρίας σε ένα σχήμα (περισσότερους από δύο), τότε είχε επιτυχία και σε άλλα σχήματα που είχαν έναν ή δύο άξονες συμμετρίας.
16. Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα των μαθητών του δημοτικού είναι φανερό ότι όταν ένας μαθητής βρίσκει με επιτυχία το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που έχει κλίση και ένα κοινό σημείο ως προς οριζόντιο άξονα συμμετρίας, τότε λύνει με επιτυχία ανάλογη άσκηση ως προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας.
17. Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα όλων των μαθητών για το πρώτο ερωτηματολόγιο, συμπεραίνουμε ότι όταν ένας μαθητής βρίσκει σωστά το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος που είναι παράλληλο ως προς πλάγιο άξονα συμμετρίας, τότε λύνει σωστά και την ίδια άσκηση με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας.

5.2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Η έννοια της συμμετρίας είναι ένα κεφάλαιο στα σχολικά βιβλία όπου δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα τόσο από τους καθηγητές όσο και από τους μαθητές. Στο γυμνάσιο το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο προτείνει στους καθηγητές να διδάξουν τη συμμετρία σε τρεις διδακτικές ώρες. Όμως, οι καθηγητές αφιέρωσαν το πολύ δύο ώρες λόγω των πολλών χαμένων διδακτικών ωρών και την πίεση του χρόνου για την ολοκλήρωση της ύλης. Μου ανέφεραν χαρακτηριστικά ότι η έννοια της συμμετρίας δεν είναι σημαντική και δεν έχουν σκοπό να διαθέσουν τρεις διδακτικές ώρες.

Η συγκεκριμένη έννοια δεν είναι πολύ δύσκολη για να την αντιληφθούν οι μαθητές αφού καθημερινά γύρω τους βλέπουν πολλά συμμετρικά σχήματα. Η διδακτική μου προσέγγιση σε πρώτη φάση αφορά τον τρόπο διδασκαλίας γενικά.

Η θεωρητική θέση της διδακτικής προσέγγισης που θεωρώ αποτελεσματικότερη είναι η επικοινωνιακή προσέγγιση και συγκεκριμένα το διδακτικό μοντέλο ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΑΝΑΜΕΣΑ στα ΘΡΑΝΙΑ. Βασική υπόθεση του μοντέλου αυτού είναι η *μεταβίβαση μέρους της υπευθυνότητας του δασκάλου για την ανάπτυξη της γνώσης στους μαθητές.*

Γνωρίζουμε ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι μύηση και συμμετοχή στον μαθηματικό διάλογο. Για να επιτευχθεί η μάθηση απαραίτητη προϋπόθεση είναι η επικοινωνία. Η επικοινωνία αναφέρεται σε τρεις μορφές:

- Καθηγητή με μαθητή
- Καθηγητή με ομάδα μαθητών
- Καθηγητή με ολόκληρη την τάξη

Η επικοινωνιακή προσέγγιση ορίζει μια συγκεκριμένη πρακτική στην τάξη: Προϋποθέτει την 'μεταβίβαση' μέρους της υπευθυνότητας ανάπτυξης της γνώσης από τον καθηγητή στον μαθητή. Παράλληλα εξετάζεται η συμφωνία του μαθητή για την μεταβίβαση, καθώς και η ικανότητά του να την πραγματοποιήσει.

Οι βασικές αρχές της επικοινωνιακής προσέγγισης συνοψίζονται ως εξής:

Α) Η γνώση είναι το αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης μαθητή – περιβάλλοντος

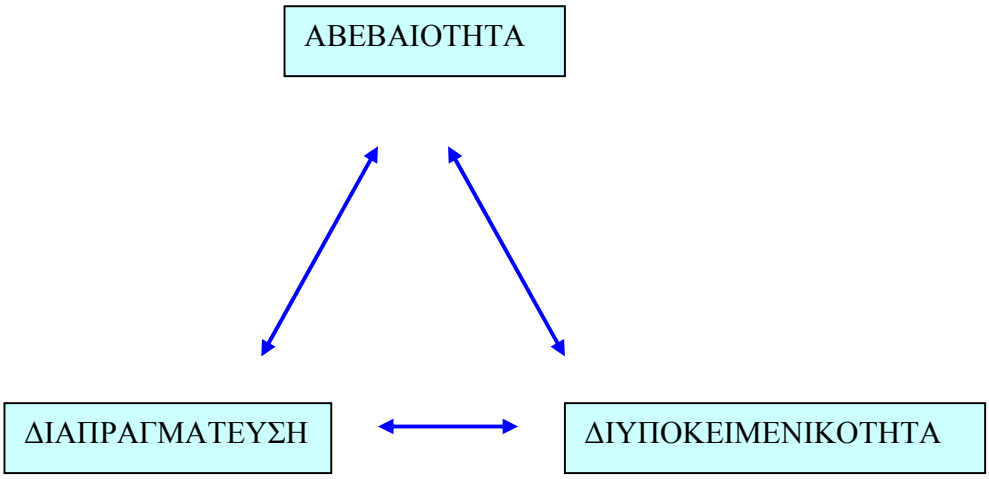
Β) Ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνουμε να επικοινωνούμε αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία μαθαίνουμε να σκεφτόμαστε

Γ) Η μάθηση είναι η διαδικασία οικοδόμησης εσωτερικών μοντέλων ή αναπαραστάσεων εξωτερικών δομών μέσα από το φιλτράρισμα προηγούμενων εμπειριών, πεποιθήσεων, αλληλεπίδρασης, διδασκαλίας και μοντελοποίησης.

Οι παραπάνω θέσεις για τα μαθηματικά συνοψίζονται από τη φράση του S. Pappert: "*doing mathematics*". Ο μαθητής μαθαίνει κυρίως αυτά που ανακαλύπτει μέσα στο κοινωνικό περιβάλλον που ζει. Όσο πλουσιότερο είναι αυτό σε ερεθίσματα και αλληλεπιδράσεις τόσο περισσότερες ευκαιρίες θα έχει ο μαθητής για την ανάπτυξη των μαθηματικών του ικανοτήτων. Το παραδοσιακό μοντέλο της τάξης κρίνεται εξαιρετικά φτωχό και παρωχημένο. Ο δάσκαλος δεν μπορεί πια να αποτελεί τη μόνη πηγή της

γνώσης. Οι ιλιγγιώδεις ρυθμοί με τους οποίους αυτή αναπτύσσεται κι εξαπλώνεται είναι τέτοιοι που μάλλον δύσκολα μπορεί να τους ακολουθήσει. Έχει χρέος να προετοιμάσει το μαθητή ώστε να την αναζητά, αυτόνομα πια, να την επιβεβαιώνει, να την εφαρμόζει ή και να την προσαρμόζει στις απαιτήσεις που ορίζει το περιβάλλον του.

Για να ξεκινήσει η επικοινωνία μέσα στην τάξη θα πρέπει να τεθεί στους μαθητές ένα ερώτημα ή πρόβλημα που θα προκαλέσει την παρακάτω 'αλυσίδα':



Αναλυτικότερα, η **αβεβαιότητα** αναφέρεται σε διάφορους τομείς:

- ✓ Στη διδασκαλία
- ✓ Στην επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης
- ✓ Στην αξιολόγηση των μαθητών
- ✓ Στο διδακτικό περιεχόμενο
- ✓ Στον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να βελτιώσουμε τη διδασκαλία μας
- ✓ Στο τι έχουν κατανοήσει οι μαθητές μας σε σχέση με τους στόχους

Ο **Zaslavsky** (2005) διακρίνει τρεις τύπους αβεβαιότητας:

1. Αντιθετικοί-ανταγωνιστικοί ισχυρισμοί
   (αντιθετικές δηλώσεις, 'πιστεύω', παρανοήσεις)

2. Άγνωστος τρόπος επίλυσης ή αμφίβολο αποτέλεσμα (έλλειψη γνώσης, εργαλείων ή προσπάθειας)
3. Μη άμεσα επαληθεύσιμα αποτελέσματα (μη διαθέσιμες μέθοδοι επαλήθευσης)

Ο όρος **διαπραγμάτευση** αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους αναπτύσσεται η μάθηση σε κοινωνικά πλαίσια. Η ανάγκη για διαπραγμάτευση συνδέεται με την παρουσία της αβεβαιότητας κατά τη διδακτική πρακτική.
Ο όρος **διυποκειμενικότητα** αναφέρεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών που έχουν κάποιο μαθησιακό στόχο.

Αυτοί οι τρεις όροι δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους αλλά συνδέονται έτσι ώστε να επιτευχθεί η μάθηση:
Απαραίτητη προϋπόθεση είναι ένα πρόβλημα που θα προκαλέσει αβεβαιότητα στους μαθητές. Προκειμένου να αρθεί η αβεβαιότητα απαιτείται η διαπραγμάτευση των ιδεών. Όμως, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η αλληλόδραση μεταξύ των μαθητών, δηλαδή η διυποκειμενικότητα. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζεται η γνώση από τους μαθητές.

Προκειμένου να ξεκινήσει η επικοινωνία μέσα στην τάξη ανάμεσα στους μαθητές είναι καλό να οργανώνονται σε ομάδες. Έτσι, η γνώση θα αποκτήσει κοινωνικό χαρακτήρα καθώς θα ανακαλύπτεται και θα επικυρώνεται από την επιστημονική κοινότητα της τάξης. Ο ρόλος του καθηγητή διαφοροποιείται αφού δεν ανακοινώνει πλέον τη γνώση, αλλά δημιουργεί κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις που υποστηρίζουν την οικοδόμησή της από την ίδια την τάξη.

Τα πλεονεκτήματα από την εργασία των μαθητών σε ομάδες είναι:

- Τα μέλη σε κάθε ομάδα ανταλλάσσουν απόψεις για τον τρόπο που αντιλαμβάνονται το πρόβλημα με αποτέλεσμα να διευρύνεται η οπτική με την οποία θα το αντιμετωπίσουν.
- Προωθείται ο εσωτερικός διάλογος στην κάθε ομάδα

- Κάθε ομάδα θέτει τα δικά της ερωτήματα τα οποία καλούνται να απαντηθούν από την κοινότητα της τάξης

Ας ασχοληθούμε τώρα ειδικότερα με τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας. Η συμμετρία είναι ένα κεφάλαιο της γεωμετρίας στο οποίο δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα. Επειδή η έννοια της συμμετρίας διδάσκεται από το τρέχον σχολικό έτος στην Α΄ Γυμνασίου, πιστεύουμε ότι θα ήταν καλύτερα να διδάσκεται σε πρώτο στάδιο με διαισθητικό-ενορατικό τρόπο και όχι με αυστηρή μαθηματική θεμελίωση. Η εισαγωγή της έννοιας της συμμετρίας μπορεί να γίνει πιο εύκολα κατανοητή αν ο καθηγητής χρησιμοποιήσει μοντέλα και εποπτικά μέσα για τη διδασκαλία της.

Όμως, αργότερα στις τάξεις του Λυκείου θα μπορούσε να γίνει αναφορά στην έννοια του μετασχηματισμού και η συμμετρία να χρησιμεύσει ως εργαλείο για αποδείξεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το εξής: στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές διδάσκονται ότι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες και το αποδεικνύουν συγκρίνοντας τα τρίγωνα που σχηματίζονται όταν φέρουμε τη διάμεσο από την κορυφή του τριγώνου. Η απόδειξη αυτή θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο εύκολα αν αποδείκνυαν ότι η διάμεσος συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας, οπότε η μία γωνία της βάσης ισούται με την άλλη. Ο ίδιος τρόπος απόδειξης θα μπορούσε να εφαρμοστεί και σε άλλα σχήματα, όπως ισοσκελές τραπέζιο, ρόμβος, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο.

Στην έρευνά μας παρατηρήσαμε ότι έγιναν πολλά λάθη στα σχήματα που είχαν ένα κοινό σημείο ή έτεμναν τον άξονα συμμετρίας. Αυτό εξηγείται ως εξής: ο άξονας συμμετρίας χωρίζει το χαρτί σε δύο ημιεπίπεδα και η κατασκευή του συμμετρικού είναι το *πέρασμα από το ένα ημιεπίπεδο στο άλλο*. Για το λόγο αυτό, πιστεύουμε ότι πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα σε σχήματα αυτής της μορφής κατά τη διδασκαλία της κατασκευής συμμετρικού σχήματος.

Επίσης, στην έρευνά μας παρατηρήσαμε ότι είχαμε υψηλά ποσοστά στα λάθη που αφορούσαν την οριζόντια και κατακόρυφη μεταφορά. Αυτό είναι ένα σημείο που πρέπει

να προσέξουμε ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας ώστε οι μαθητές να αποβάλλουν την αντίληψη ότι ο άξονας συμμετρίας έχει διεύθυνση *μόνο* οριζόντια ή κατακόρυφη.

Πιστεύουμε ότι ο καλύτερος και αποδοτικότερος τρόπος διδασκαλίας της έννοιας της συμμετρίας είναι ο εξής: Συζήτηση πάνω σε σχήματα με άξονα συμμετρίας → Ιδιότητες σχημάτων με άξονα συμμετρίας → Ορισμός συμμετρίας → Κατασκευές συμμετρικών σχημάτων. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται πρώτα η γνωριμία με σχήματα που έχουν άξονες συμμετρίας που διευκολύνει την κατανόηση της έννοιας και αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών. Έτσι, οι μαθητές αργότερα θα δεχτούν πιο εύκολα τις μαθηματικές έννοιες που ακολουθούν και θα εμπεδώσουν καλύτερα την καθαρά μαθηματική χρήση της έννοιας.

Επίσης, η έννοια της συμμετρίας θα πρέπει να συνδεθεί με το περιβάλλον των μαθητών, δηλαδή τη φύση και την τέχνη και να αποτελέσουν πηγή συζητήσεων και επεξηγήσεων για πολλά φαινόμενα που παρατηρούνε γύρω τους. Άλλωστε η διδασκαλία της συμμετρίας είναι η καλύτερη αφορμή για δράση μέσα στην τάξη: δίπλωση χαρτιού, χάραξη κάθετου τμήματος, μέτρηση με το υποδεκάμετρο. Η επιβεβαίωση για τη σωστή κατασκευή του συμμετρικού του σχήματος μπορεί να γίνει τόσο οπτικά όσο και κατασκευαστικά.

Η διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας στις τάξεις του Λυκείου θα μπορούσε να διαφοροποιηθεί και από ενορατική να γίνει πιο μαθηματική. Εκεί μπορεί να δοθεί έμφαση στην έννοια του μετασχηματισμού, να συνδεθεί με την έννοια της συνάρτησης και να χρησιμεύσει ως εργαλείο σε διάφορες αποδείξεις.

Επίσης, είναι απαραίτητο να γίνει συζήτηση και διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη ώστε να αρθούν τυχόν παρανοήσεις και να διευκρινιστούν απλές έννοιες που αφορούν τη συμμετρία, όπως:

- Ένας άξονας συμμετρίας είναι μία ευθεία γραμμή
- Υπάρχουν μη κατακόρυφοι και μη οριζόντιοι άξονες συμμετρίας

- Ένα σχήμα μπορεί να έχει πολλούς άξονες συμμετρίας ή κανέναν
- Το συμμετρικό ενός σημείου που ανήκει στον άξονα συμμετρίας είναι το ίδιο σημείο

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baloglou, G. (2007). *Isometrica: A geometrical introduction to planar crystallographic groups.* Suny Oswego

Barlow, H.B. & Reeves, B.C. (1979). *The versality and absolute efficiency of detective mirror symmetry in random dot display.* Vision Research, 19, 783-793

Baylis, G.C. & Driver, J. (1995). *Obligatory edge-assignment in vision: The role of figure and part-segmentation in symmetry detection*. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 21, 1323-1342

Birgs, D. (1987). *Reflection: A diagnostic teaching experiment.* Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham

Brousseau, G. (1986). *Fondements et methods de la Didactique des Mathematiques, Recherches en Didactique de Mathematique.* Vol. 72, pp. 33-115

Dakin, S.C & Herbert, A.M. (1998). *The spatial region of integration for visual symmetry detection.* The Royal Society

Donoghue, M.J., Ree, R.H. & Baun, D.A. (1998). *Phylogeny and the evolution of flower symmetry in the Asteridae.* Trends in Plant Science, 3, 311-314

Evans, C., Wenderoth, P. & Cheng, K. (2000). *Detection of bilateral symmetry in complex biological images.* Perception, 29, 31-42

Foster, D.H. (1991). *Operating on spatial operations.* In Watt R.J. (Ed), Pattern Recognition by Man and Machine, Basingstoke, UK: Macmillan Press

Gagatsis, A. & Patronis, T. (1990). *Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 21

Grass, R. (1983). *Instrumentation de notion mathematiques, Un example: la symmetrie.* Petit x, IREM de Grenoble, 1

Hart, K.M. (1981). *Children understanding of mathematics.* John Murray publishers, pp. 137-149

Jones, K. (2000). *Critical issues in the design of the school geometry curriculum.* In B. Barton (Ed), Readings in mathematics education (pp. 75-90). Ayckland, New Zealand – University of Auckland

Julesz, B. (1981). *Figure and ground perception in briefly presented isodipole textures.* Perceptual organization, pp. 27-54

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1990). *Symmetry in Mathematics Learning.* In ZDM – International Reviews on Mathematics Education, 22(2), 53-59

Duval, R. (1987). *Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών.* Διάσταση, 2, σελ. 56-74

Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking.* Basic issues for learning (ERIC: ED 466 379)

Duval, R. (2002). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics.* Mediterannean Journal for research in Mathematics Education, 1-16

Falkenhaier, B., Forbus, K.D. & Gentner, D. (1989). *The Structure-Mapping Engine: Algorithms and Examples.* Artificial Intelligence, 41(1), 1-63

Ferguson, W.R., Aminoff, A. & Gentner, D. (Being Prepared). *Modeling Qualitative Differences in Symmetry Judgements*

Fischbein, E. (1993). *The theory of figural concepts.* Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). *Concepts and figures in geometrical reasoning.* International Journal of Science Education, 20(10), 1193-1211

Goldstone, R.L., Medin, D.L. & Gentner, D. (1991). *Relational similarity and the nonindependence of features in similarity judgements, 23, 222-264*

Hershkowitz, R. (1989). *Visualization in geometry: Two sides of the coin.* Focus on learning Problems in Mathematics, 11(1), 61-76

Huang, L. & Pashler H. *Are there capacity limitations in symmetry perception?*. Running Head: Capacity Limit of Symmetry Perception

Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky, O. (1997). *Defining and Understanding Symmetry.* In E. Pehkonen (Ed.), Proccedings of th 21st International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 192-199

Lemonidis, C. (1997). *A few remarks regarding the teaching of geometry trough a theoretical analysis of geometrical figure.* onlinear Analysis, Theory, Methods and Application, 30(4), 2087-2095

Locher, P.J. & Wagemans, J, (1993). *Effects of element type and spatial grouping on symmetry detection.* Perception, 22, 565-587

Malkevitch, J. (1998). *Finding room in the curriculum for recent geometry.* In C. Mammana & V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century : An ICMI Study (pp. 18-25). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic

Markman, A.B. & Gentner, D. (1993). *Structural alignment during similarity comparisons.* Cognitive Psychology, 23, 431-467

Martin, G. *Transformation Geometry: An introduction to symmetry.* Springer – Verlag, New York, Heidelberg

McBeath, M., Schiano, D. & Trevsky, B. (1994). *Three-dimensional bilateral symmetry assumed in judgements of figural identity and orientation.* Paper presented at the 35th Annual Meeting of the Psychonomic Society, St. Louis, MO, Nov. 11-13

Medin, D.L., Goldstone, R.L. & Gentner, D. (1993). *Respects for similarity.* Psychological Review, 100(2), 254-278

Mesquita, A.L. (1989). *Le point de vue de validation: essai de synthese et d' analyse en didactique des mathematiques.* These de l' Universite Joseph Fourier, Laboratoire LSD2, Grenoble

Mesquita, A.L. (1998). *On conceptual Obstacles linked with external representation in geometry.* Journal of Mathematics Behavior, !7(2), 183-195

Meyer, W. (1998). *Recent applications of geometry.* In C. Mammana & V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century : An ICMI Study (pp. 100-105).Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic

Moller, A.P. & Pomiankowski, A. (1993). *Fluctuating asymmetry and sexual selection.* Genetica, 89, 267-279

Olivers, C. & Van der Helm, P. (1998). *Symmetry and selective attention: A Dissociation between effortless perception and special search.* Perception and Psychophysics, 60(7), 1101-1116

Rosen, J. (1995). *Symmetry in science: an introduction to the general theory.* New York: Springer Verlag

Royer, F.L. (1981). *Detection of symmetry.* Joyrnal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 7, 1186-1210

Washburn, D. & Crowe, D. (1988). *Symmetries of culture.* University of Washington Press

Wenderoth, P. (1994). *The salience of vertical symmetry.* Perception, 23, 221-236

Wenderoth, P. (1997). *The effects of bilateral symmetry detection of multiple symmetry, near symmetry and axis orientation.* Perception, 26, 891-904

Wilson, P.S. (1990). *Incosistent ideas related to definitions and examples.* Focus on Learning Problems in Mathematics, 12(3-4), 31-47

Β. ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βοσνιάδου, Σ. *Εισαγωγή στην Ψυχολογία.* Τόμος Α΄, Εκδόσεις Gutenberg

Γαγάτσης, Α. (2000). *Η διδασκαλία της στοιχειώδους γεωμετρίας ως μοντέλου του χώρου.* Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών, Εκδόσεις Αφοι Κυριακίδη

Γαγάτσης, Α., Αριστείδου, Ι., Αρσιώτου, Ι., Ερωτοκρίτου, Χ. & Μουρούζου, Α. (2005). *Η φύση της εξωτερικής αναπαράστασης στη γεωμετρία.* 7ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι. & Σπύρου, Π. (2004). *Αναπαραστάσεις και Γεωμετρία.* Τόμος ΙΙ, σελ. 37-49

Γαγάτσης, Α., Ντίνας, Α. *Αντιλήψεις των ελλήνων μαθητών και καθηγητών για την αξονική συμμετρία.*

Δεληγιάννη, Ε. & Γαγάτσης, Α. (2005). *Ο ρόλος της εξεικόνισης στην μάθηση της γεωμετρίας.* 7ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης

Μαστρογιάννης, Α. & Κορδάκη, Μ. (2007). *Αμφίπλευρη Συμμετρία: αντιλήψεις μαθητών δημοτικού.* 2ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, Αλεξανδρούπολη

Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003.

Τσελεπίδης, Κ. & Μαρκόπουλος, Χ. (2005). *Συμμετρία: σχέση ισότητας ή γεωμετρικός μετασχηματισμός;*. 1ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών

Γ. ΔΥΚΤΙΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

http://www.oswego.edu/baloglou/103

http://www.partnership.mmu.ac.uk/cme/Student_Writings/CDAE/Karen_Sherris/Karen_Sherris.html

http://ponce.inter.edu/cai/tesis/eaviles/cap2.htm

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1

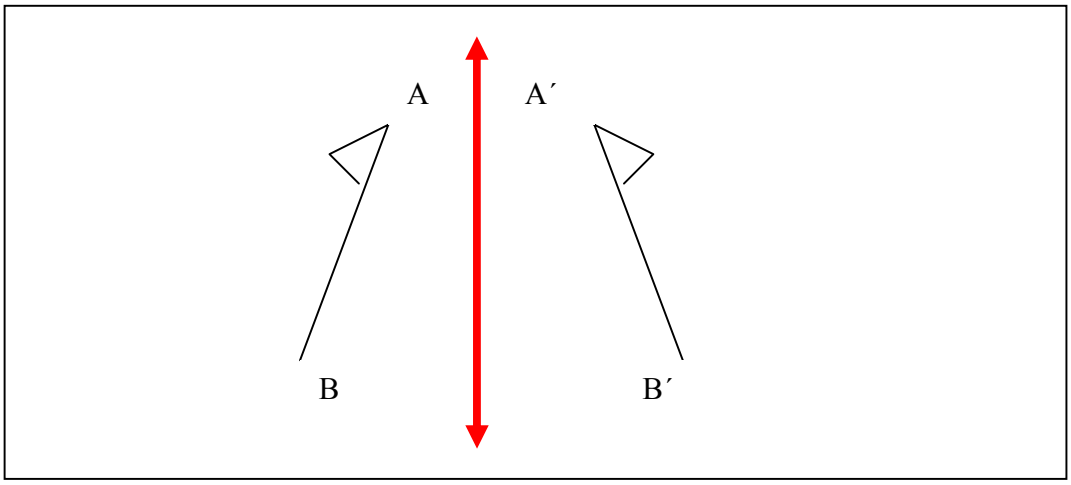
Ονοματεπώνυμο:……..

Σχολείο:……....

Τάξη:…….

Ημερομηνία:……

Α.



Φαντάσου ότι διπλώνεις αυτό το χαρτί κατά μήκος της ευθείας m.

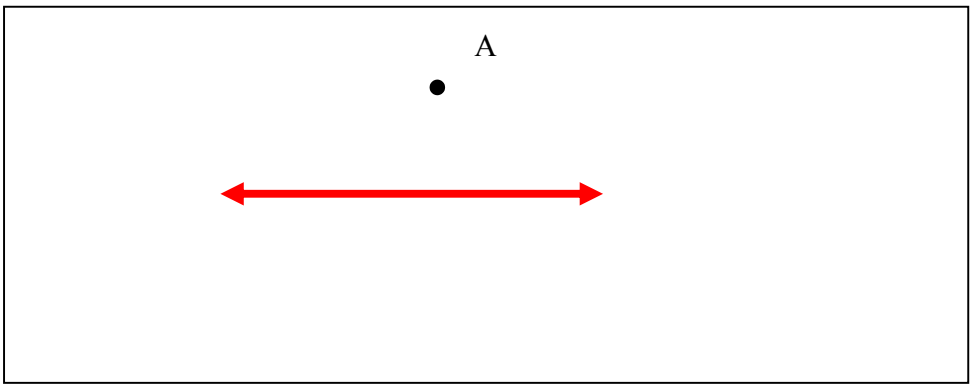
Η σημαία ΑΒ θα βρεθεί ακριβώς πάνω στη σημαία Α΄Β΄.

Θα λέμε ότι Α΄Β΄ είναι συμμετρικό του ΑΒ.

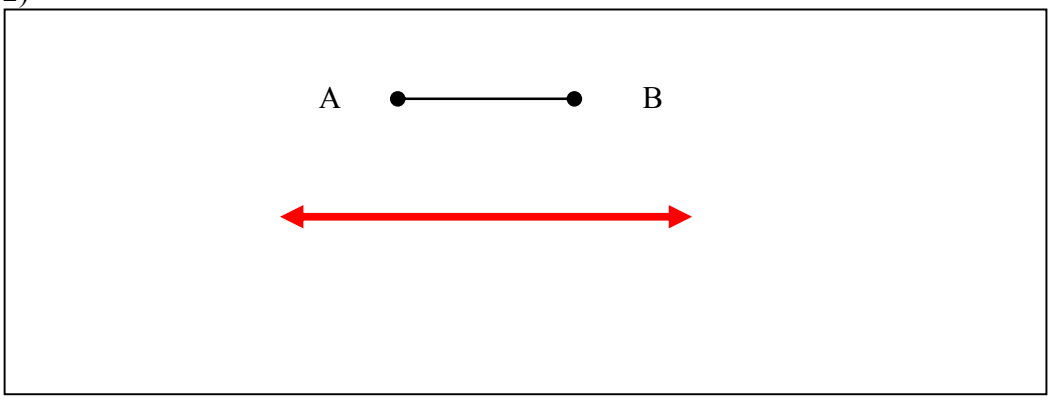
Η ευθεία m ονομάζεται άξονας συμμετρίας.

Στο τεστ που ακολουθεί θα σου ζητηθεί να βρεις και να σχεδιάσεις τα συμμετρικά σχημάτων. Σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει να διπλώσεις το χαρτί ή να χρησιμοποιήσεις χάρακα.

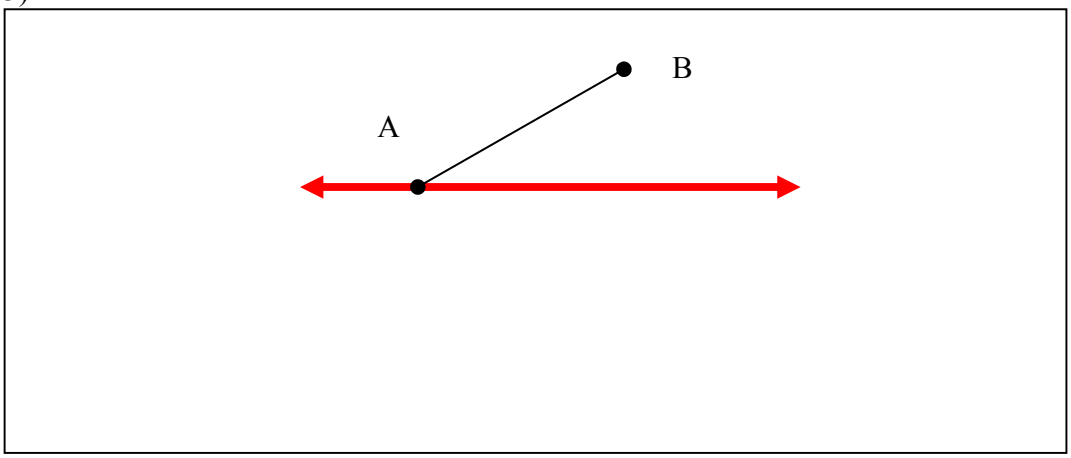
1)



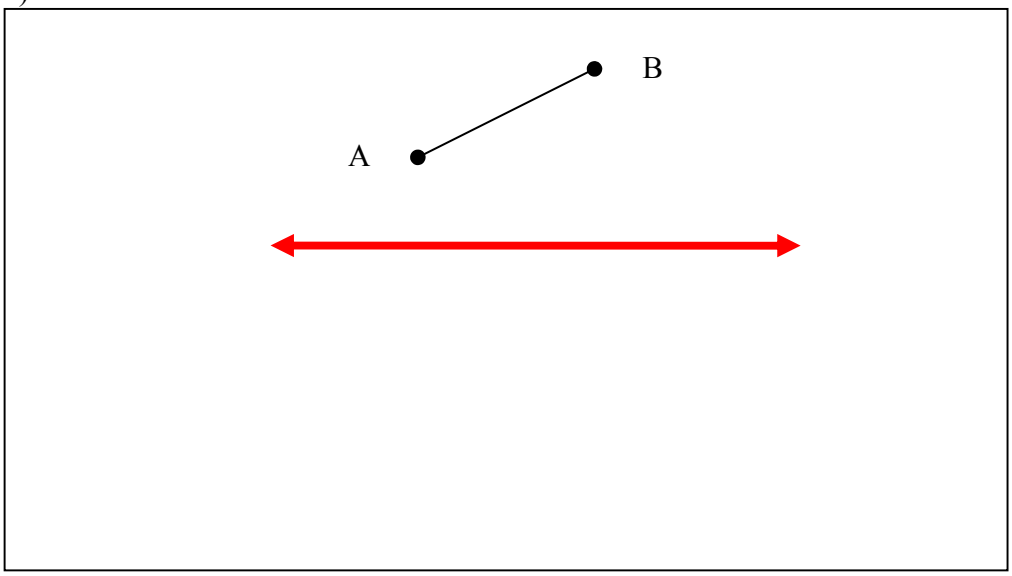
2)



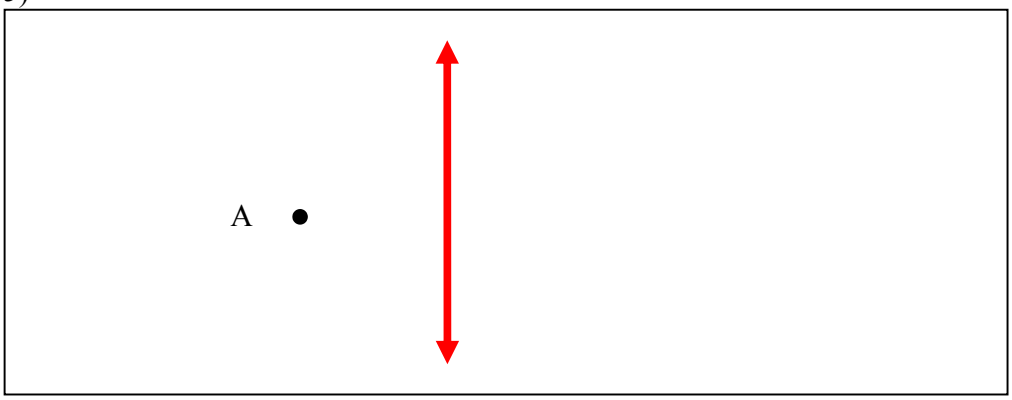
3)



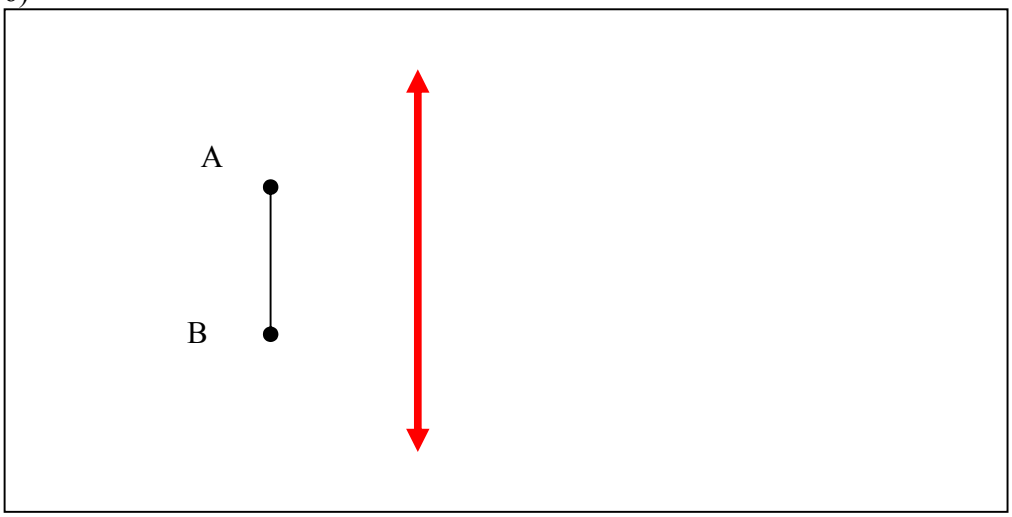
4)



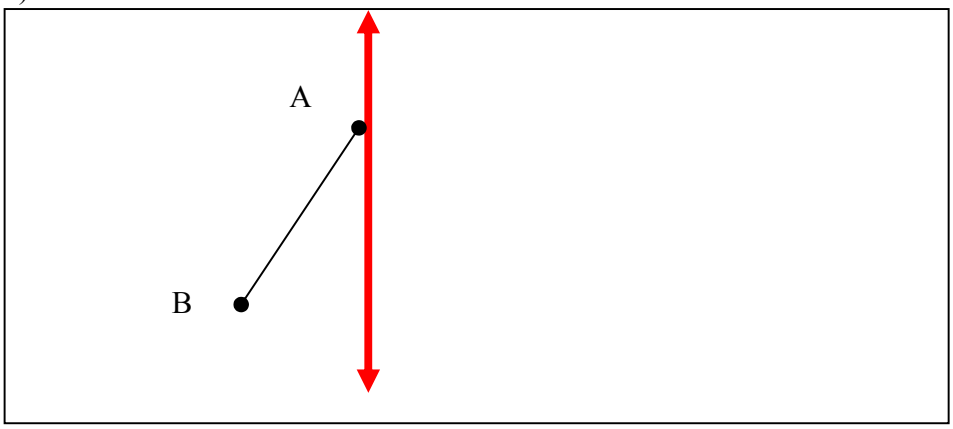
5)



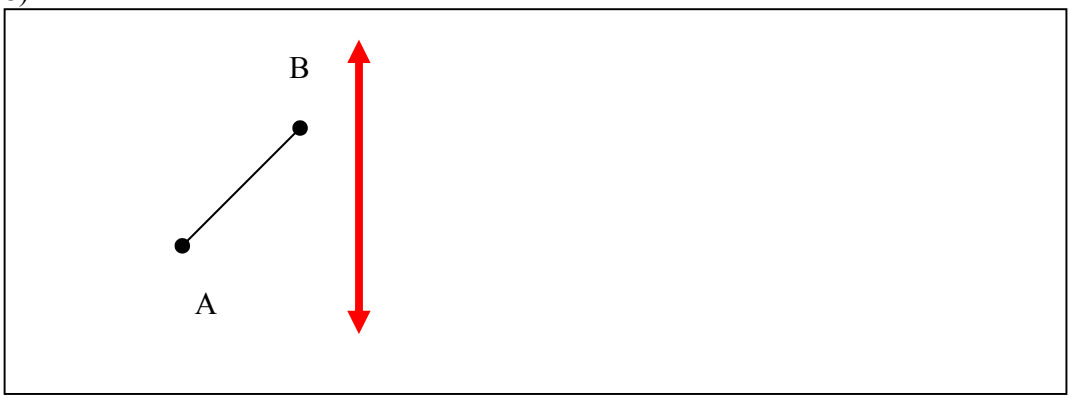
6)



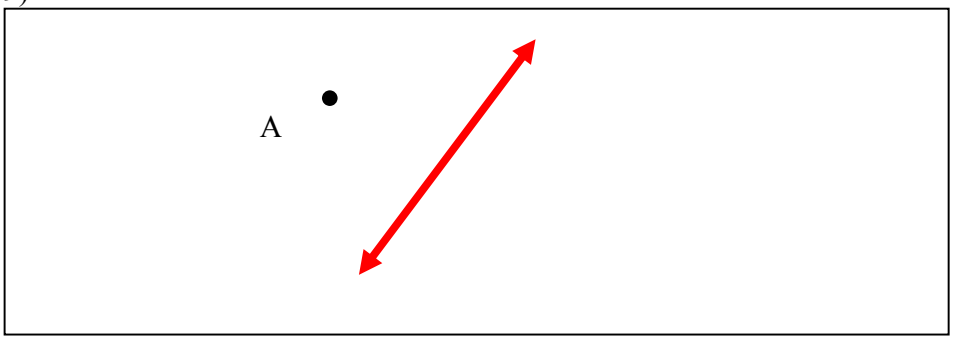
7)



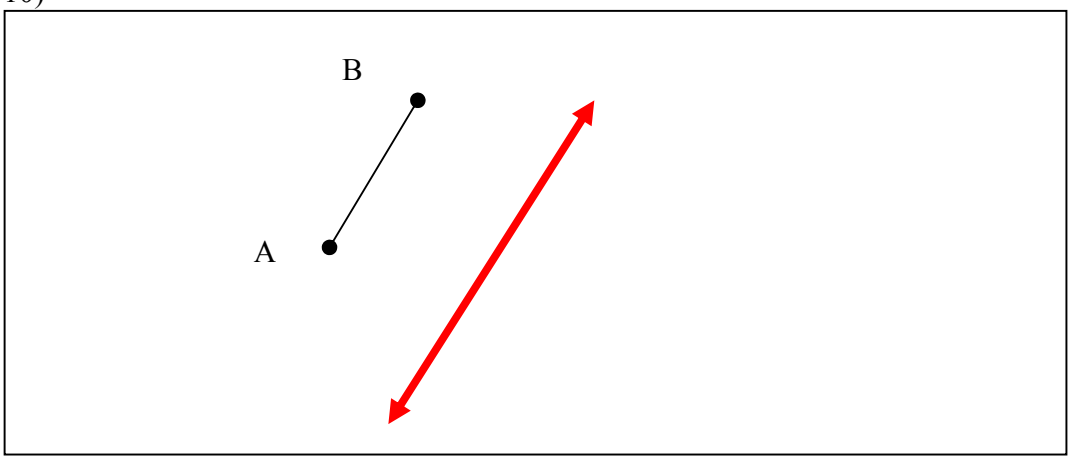
8)



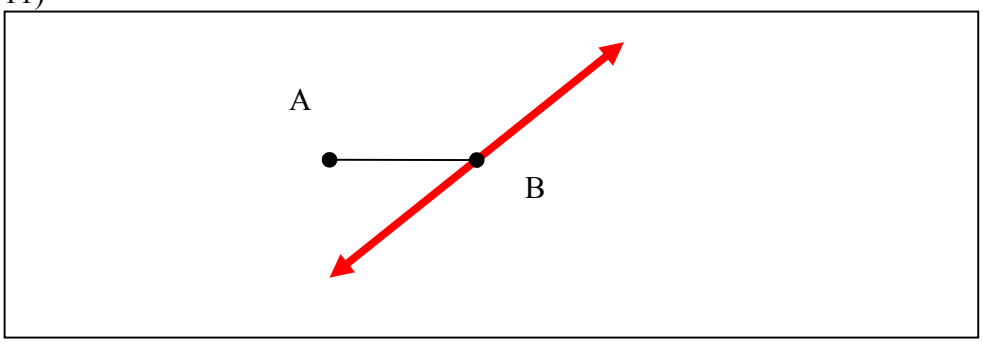
9)



10)

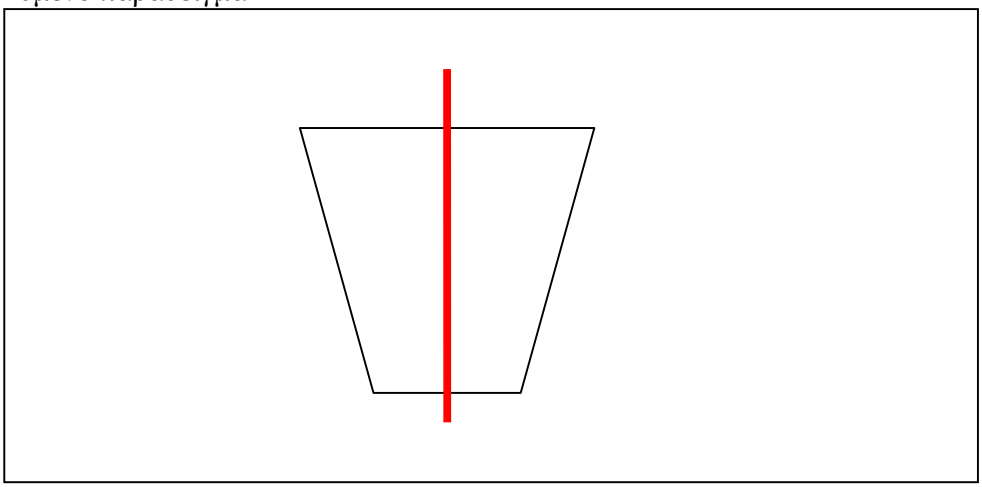


11)

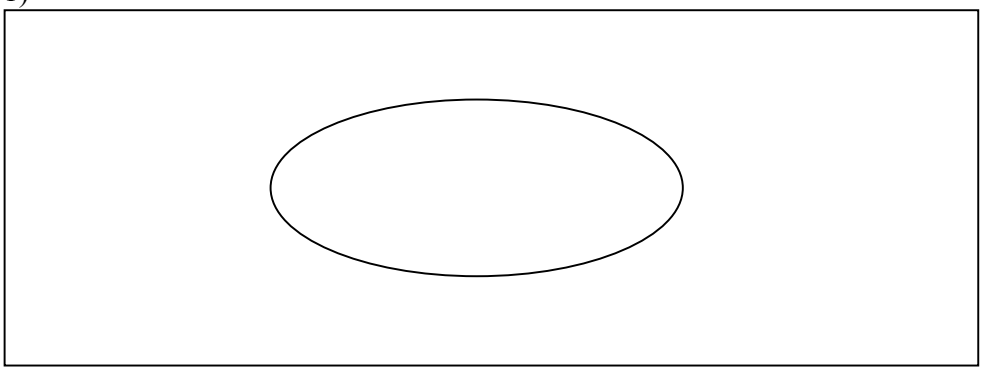


Β. Στα παρακάτω σχήματα, να φέρετε (αν υπάρχουν) τις ευθείες κατά τις οποίες θα μπορούσαμε να διπλώσουμε το χαρτί μας έτσι ώστε το μισό σχήμα να συμπέσει με το άλλο μισό.

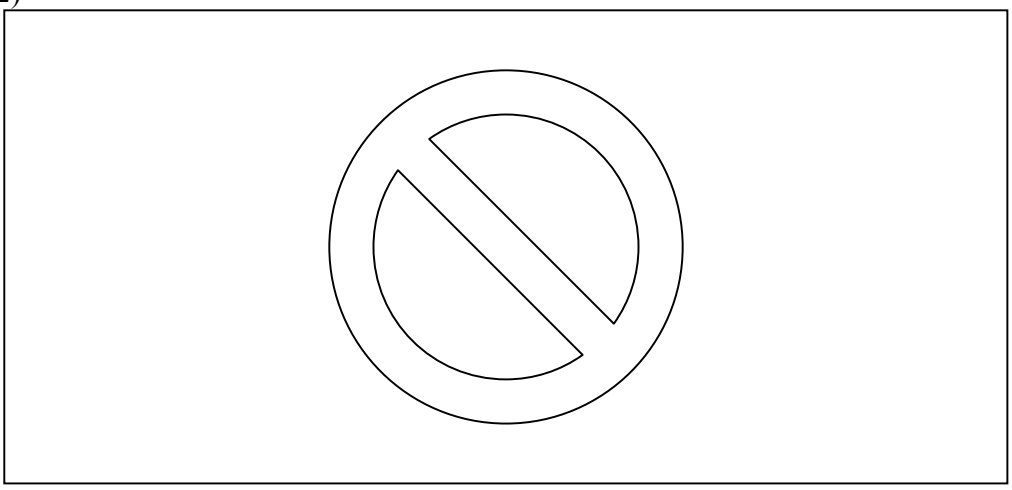
Λυμένο παράδειγμα



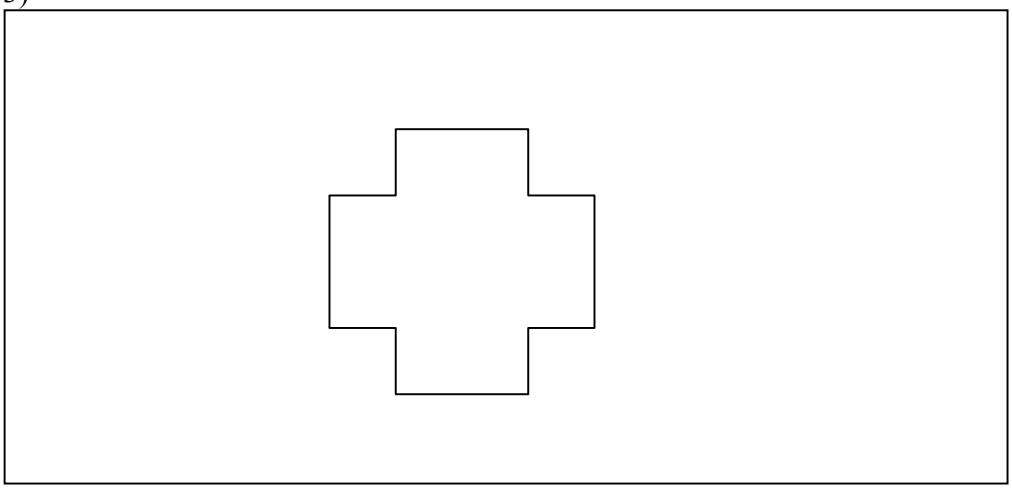
1)



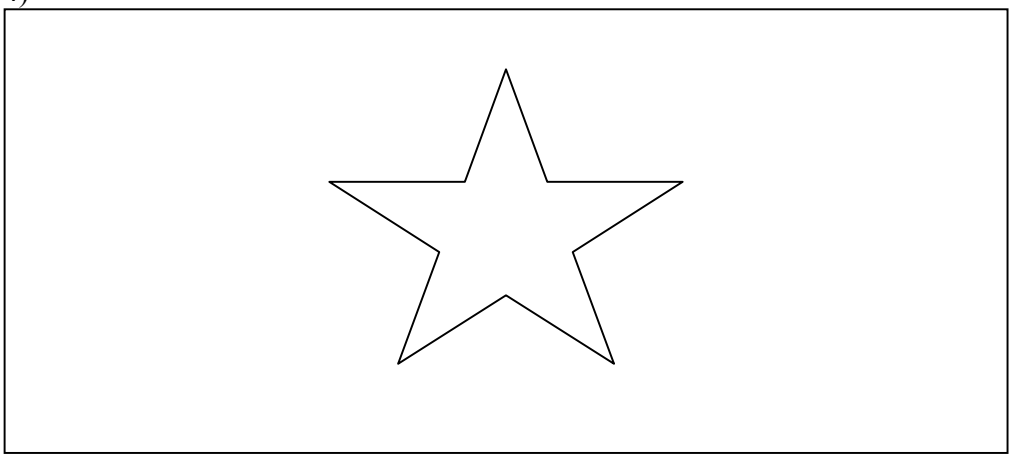
2)



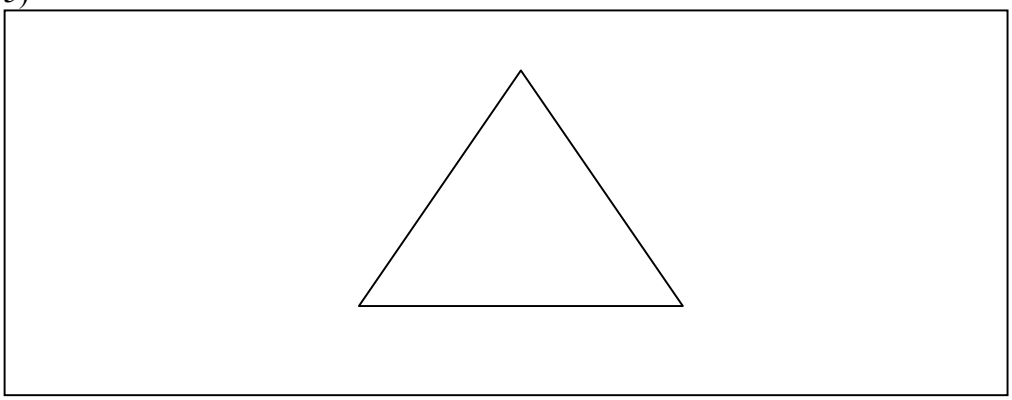
3)



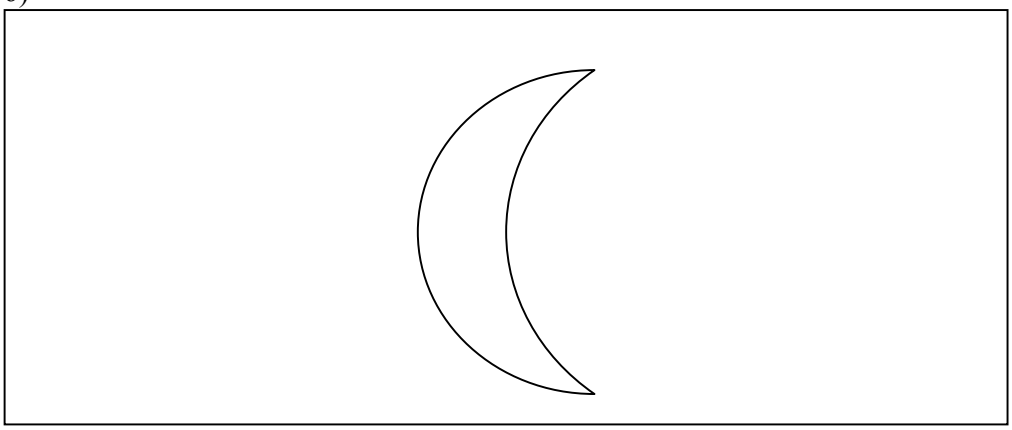
4)



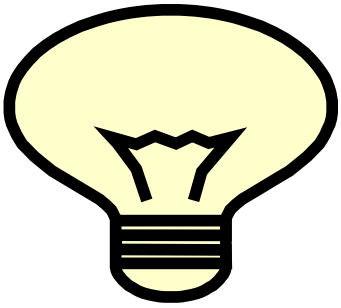
5)



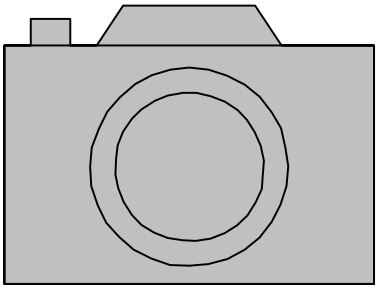
6)



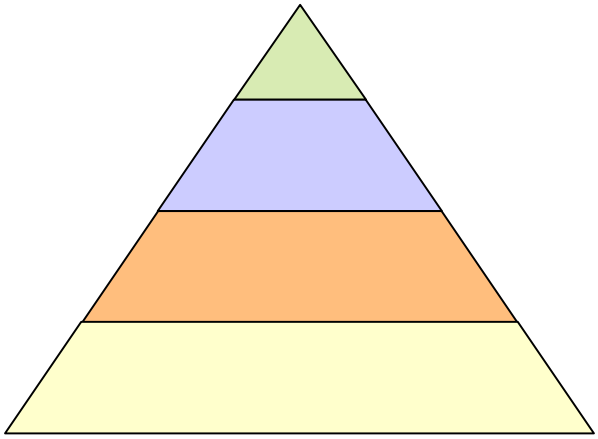
7)



8)



9)



ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 2

Ονοματεπώνυμο:……..

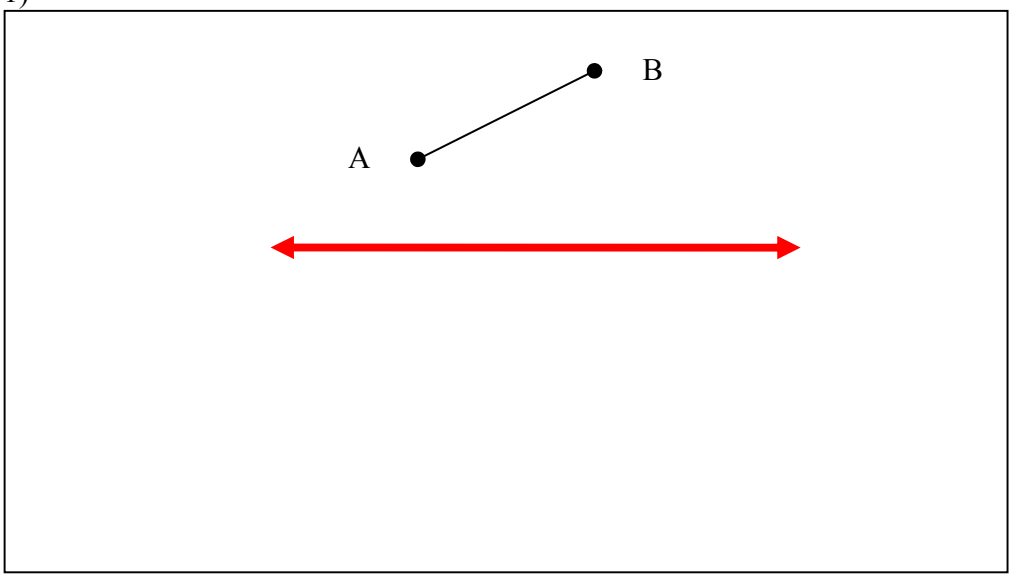
Σχολείο:……....

Τάξη:…….

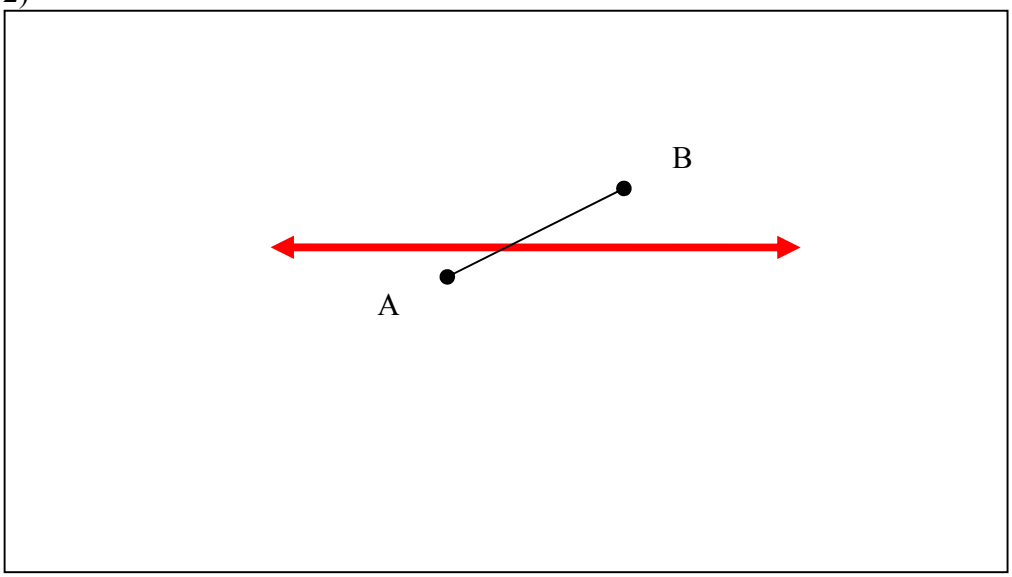
Ημερομηνία:…….

Α. Να βρείτε τα συμμετρικά των παρακάτω σχημάτων ως προς τον άξονα συμμετρίας.

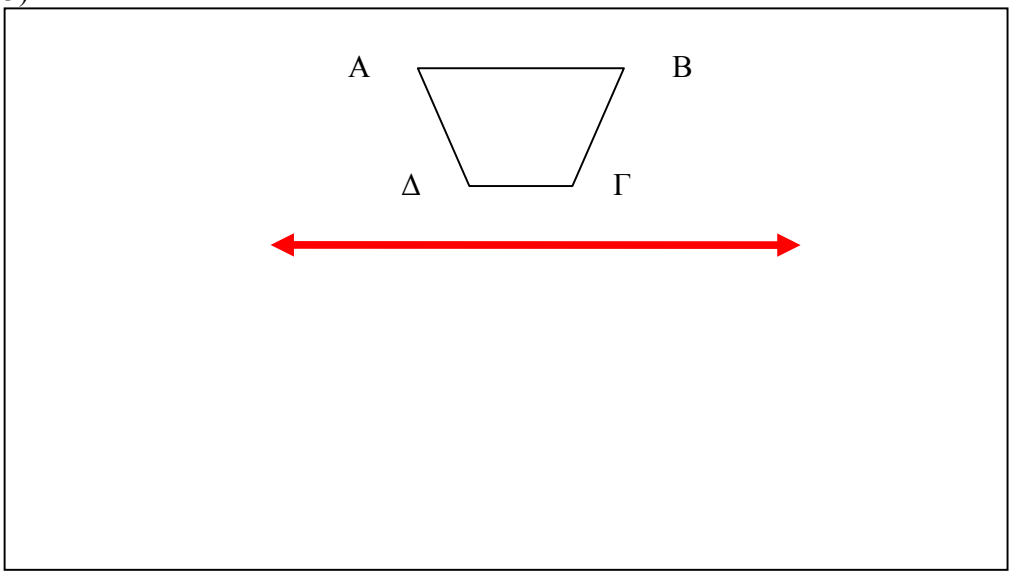
1)



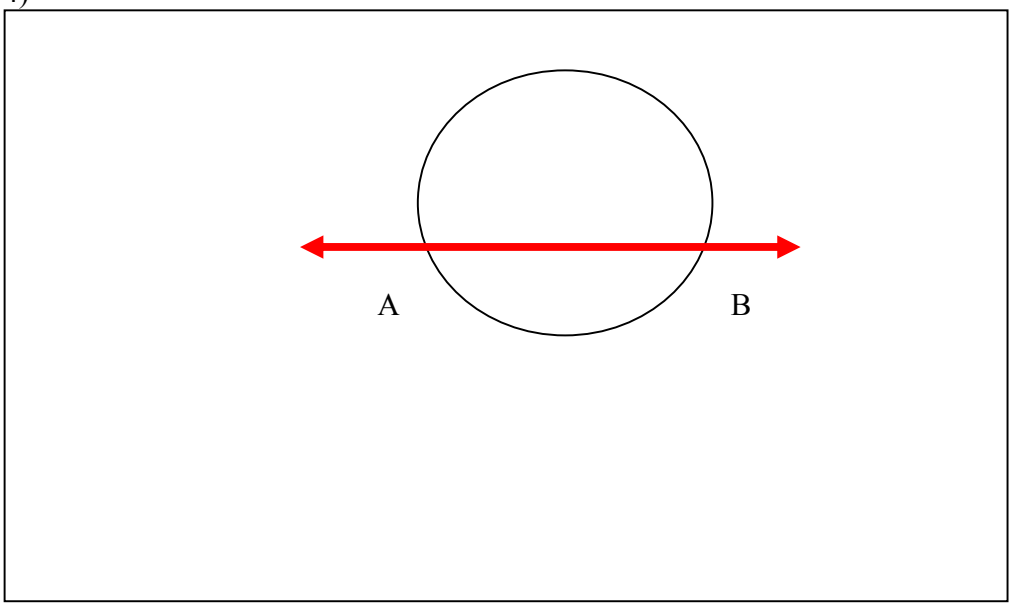
2)



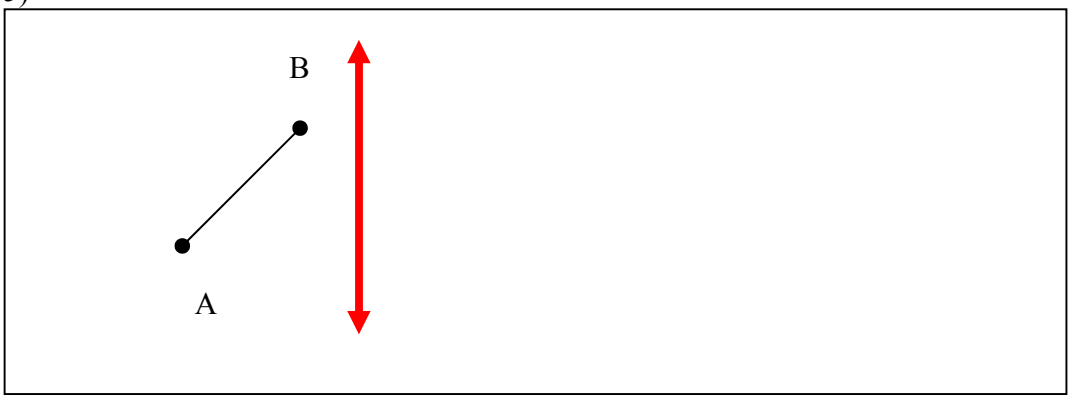
3)



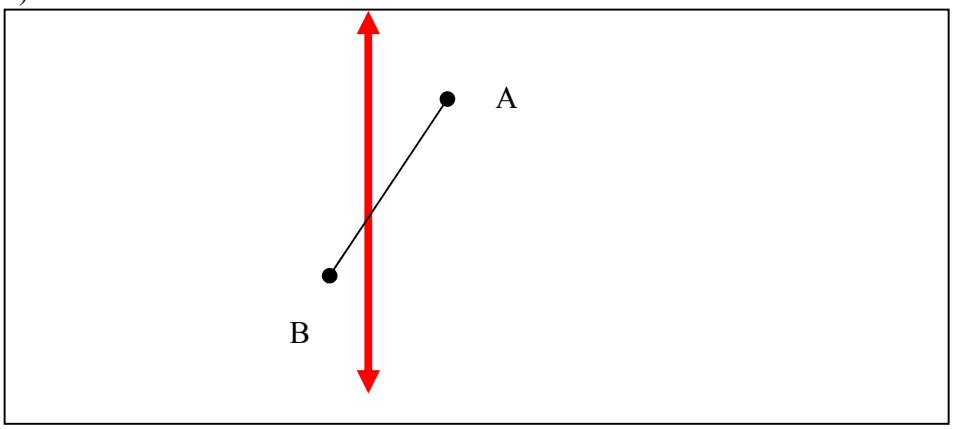
4)



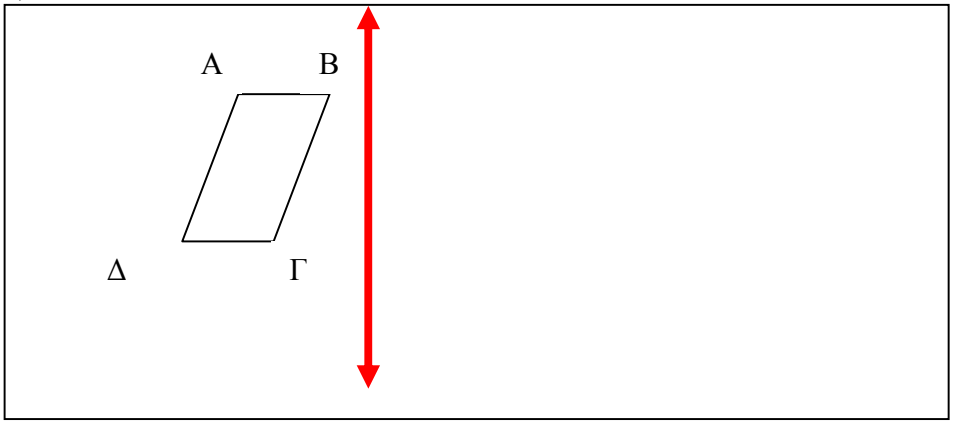
5)



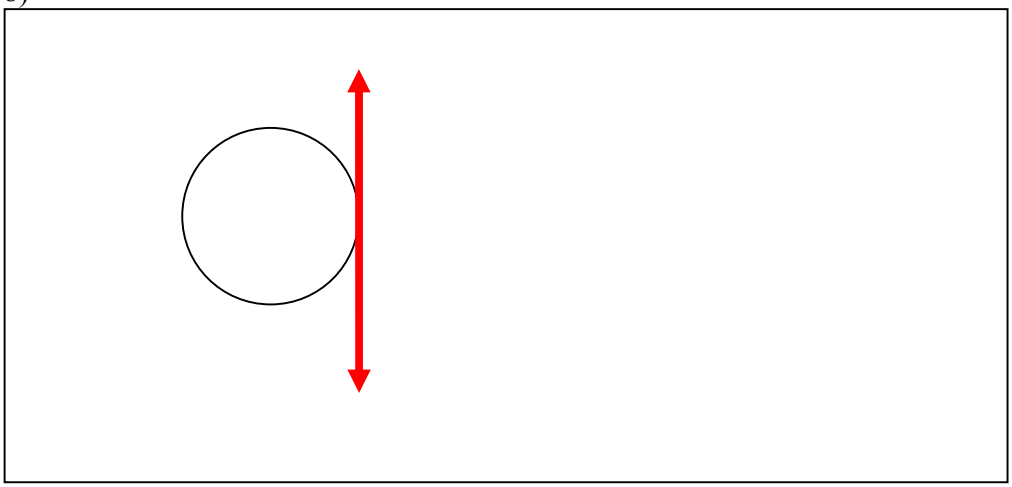
6)



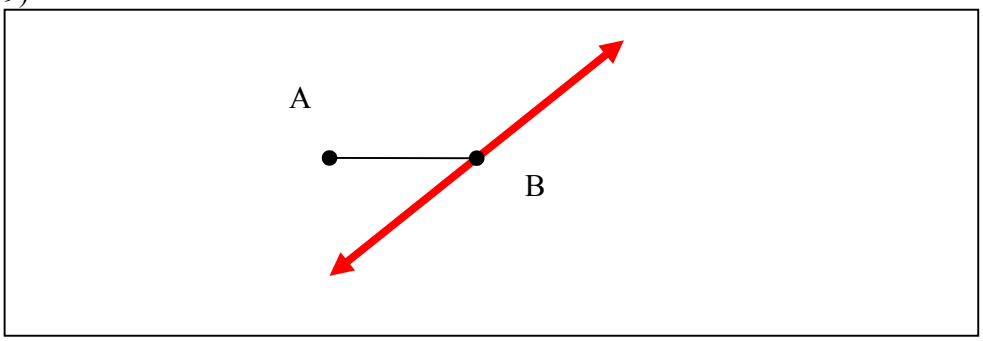
7)



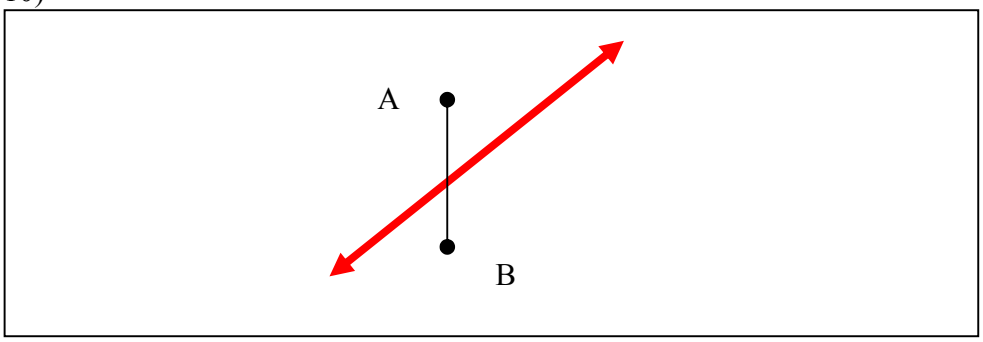
8)



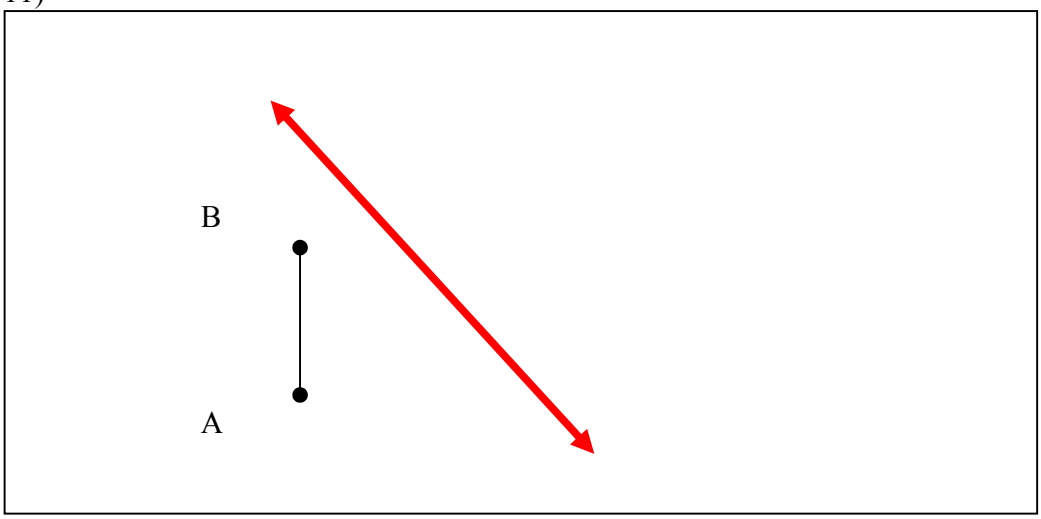
9)



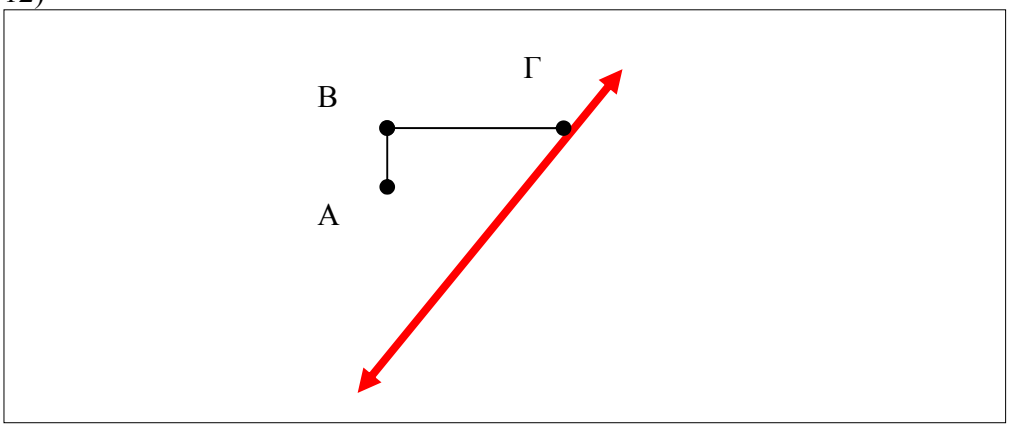
10)



11)

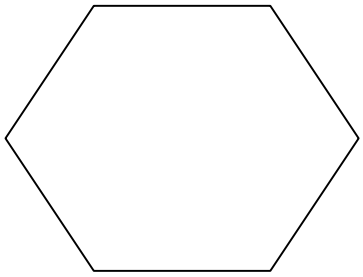


12)

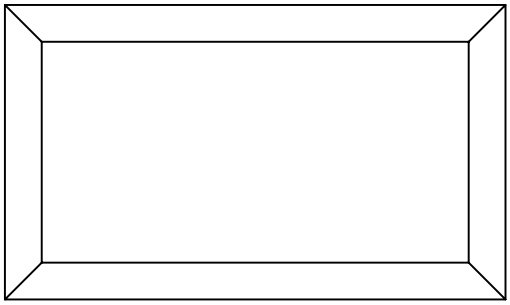


Β. Στα παρακάτω σχήματα να φέρετε τους άξονες συμμετρίας (αν υπάρχουν).

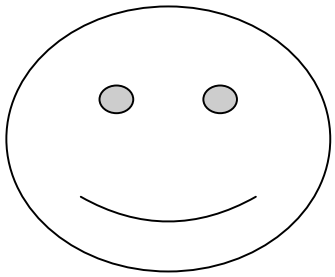
14)



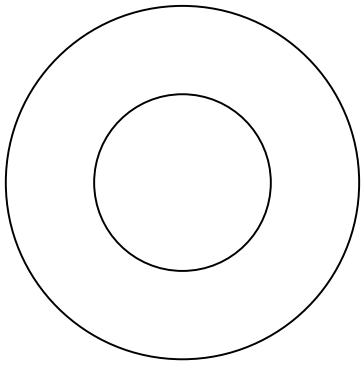
15)



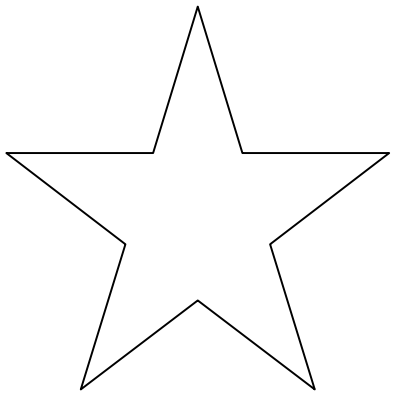
16)



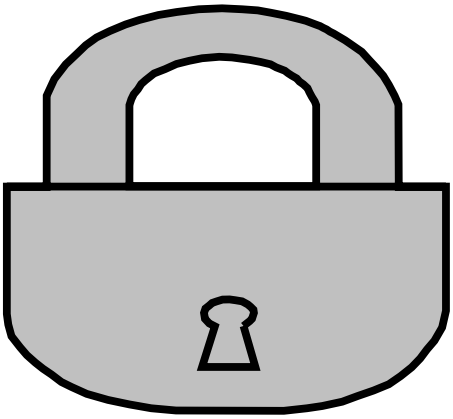
17)



18)



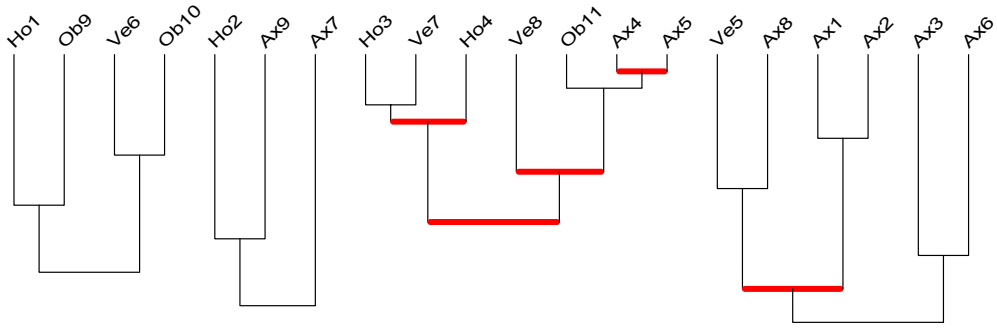
19)



20)

Β. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



Similarity : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\Students-athens-2008\sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

nb col : 20, nb lig : 60

	Occurrence	Average	Standard deviations:
Ho1	: 56.00	0.93	0.25
Ho2	: 55.00	0.92	0.28
Ho3	: 37.00	0.62	0.49
Ho4	: 36.00	0.60	0.49
Ve5	: 47.00	0.78	0.41
Ve6	: 48.00	0.80	0.40
Ve7	: 40.00	0.67	0.47
Ve8	: 28.00	0.47	0.50
Ob9	: 48.00	0.80	0.40
Ob10	: 40.00	0.67	0.47
Ob11	: 26.00	0.43	0.50
Ax1	: 47.00	0.78	0.41
Ax2	: 29.00	0.48	0.50
Ax3	: 29.00	0.48	0.50
Ax4	: 16.00	0.27	0.44
Ax5	: 21.00	0.35	0.48
Ax6	: 57.00	0.95	0.22
Ax7	: 60.00	1.00	0.00
Ax8	: 51.00	0.85	0.36
Ax9	: 52.00	0.87	0.34

Frequency of couples of variables: :

	Ho1	Ho2	Ho3	Ho4	Ve5	Ve6	Ve7	Ve8	Ob9	Ob10	Ob11	Ax1	Ax2	Ax3	Ax4	Ax5	Ax6	Ax7	Ax8	Ax9
Ho1		0.88	0.62	0.57	0.73	0.77	0.67	0.45	0.80	0.65	0.43	0.72	0.47	0.47	0.27	0.32	0.88	0.93	0.80	0.83
Ho2			0.58	0.53	0.70	0.75	0.63	0.43	0.75	0.62	0.42	0.72	0.47	0.45	0.27	0.32	0.87	0.92	0.77	0.82

Ho3 0.50 0.50 0.53 0.57 0.35 0.58 0.48 0.38 0.52 0.32 0.32 0.23 0.28 0.58 0.62 0.55 0.53
Ho4 0.55 0.52 0.50 0.35 0.55 0.47 0.35 0.52 0.32 0.30 0.22 0.32 0.58 0.60 0.55 0.47
Ve5 0.65 0.55 0.38 0.65 0.57 0.38 0.65 0.42 0.42 0.25 0.33 0.77 0.78 0.73 0.65
Ve6 0.58 0.43 0.72 0.62 0.38 0.62 0.40 0.38 0.23 0.30 0.78 0.80 0.68 0.70
Ve7 0.40 0.62 0.52 0.40 0.53 0.35 0.32 0.27 0.28 0.63 0.67 0.62 0.58
Ve8 0.42 0.35 0.28 0.38 0.25 0.18 0.18 0.23 0.47 0.47 0.43 0.40
Ob9 0.62 0.42 0.60 0.38 0.38 0.23 0.30 0.77 0.80 0.70 0.70
Ob10 0.35 0.55 0.33 0.30 0.23 0.27 0.65 0.67 0.57 0.62
Ob11 0.33 0.22 0.25 0.22 0.25 0.42 0.43 0.38 0.35
Ax1 0.45 0.38 0.23 0.32 0.75 0.78 0.70 0.70
Ax2 0.22 0.18 0.18 0.45 0.48 0.48 0.45
Ax3 0.08 0.12 0.47 0.48 0.40 0.42
Ax4 0.23 0.25 0.27 0.27 0.22
Ax5 0.33 0.35 0.35 0.23
Ax6 0.95 0.82 0.83
Ax7 0.85 0.87
Ax8 0.73
Ax9

Correlation indexes:

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6 Ax7 Ax8 Ax9

Ho1 0.40 0.34 0.05 0.02 0.20 0.38 0.12 0.53 0.24 0.23 -0.140.12 0.12 0.16 -0.08-0.060.00 0.07 0.29
Ho2 0.13 -0.12-0.160.15 0.17 0.04 0.15 0.04 0.14 -0.010.17 0.05 0.18 -0.03-0.070.00 -0.130.24
Ho3 0.55 0.08 0.21 0.68 0.26 0.46 0.32 0.48 0.17 0.08 0.08 0.32 0.29 -0.020.00 0.15 -0.01
Ho4 0.40 0.19 0.43 0.29 0.36 0.29 0.37 0.23 0.11 0.04 0.26 0.46 0.12 0.00 0.23 -0.32
Ve5 0.14 0.14 0.09 0.14 0.23 0.21 0.21 0.18 0.18 0.23 0.30 0.25 0.00 0.46 -0.21
Ve6 0.27 0.30 0.48 0.44 0.18 -0.060.07 -0.020.11 0.10 0.27 0.00 0.02 0.05
Ve7 0.38 0.44 0.33 0.48 0.06 0.12 -0.020.43 0.22 0.00 0.00 0.30 0.03
Ve8 0.22 0.17 0.33 0.09 0.10 -0.170.27 0.29 0.21 0.00 0.21 -0.03
Ob9 0.44 0.35 -0.16-0.02-0.020.11 0.10 0.08 0.00 0.14 0.05
Ob10 0.26 0.14 0.05 -0.090.27 0.15 0.16 0.00 0.00 0.24
Ob11 -0.030.03 0.16 0.46 0.42 0.05 0.00 0.08 -0.15
Ax1 0.35 0.02 0.13 0.22 0.06 0.00 0.23 0.15
Ax2 -0.070.25 0.06 -0.080.00 0.41 0.18
Ax3 -0.21-0.220.07 0.00 -0.06-0.01
Ax4 0.66 -0.030.00 0.25 -0.10
Ax5 0.01 0.00 0.31 -0.43
Ax6 0.00 0.12 0.13
Ax7 0.00 0.00
Ax8 -0.03
Ax9

Similarity indexes:

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6 Ax7 Ax8 Ax9

Ho1 1.00 0.59 0.66 0.53 0.51 0.57 0.67 0.57 0.68 0.61 0.64 0.45 0.57 0.57 0.61 0.45 0.49 0.50 0.52 0.58
Ho2 0.59 1.00 0.57 0.43 0.43 0.56 0.59 0.53 0.56 0.52 0.59 0.49 0.61 0.53 0.64 0.48 0.49 0.50 0.46 0.58
Ho3 0.66 0.57 1.00 0.95 0.57 0.67 0.97 0.82 0.84 0.81 0.96 0.65 0.60 0.60 0.91 0.87 0.49 0.50 0.61 0.50
Ho4 0.53 0.43 0.95 1.00 0.82 0.66 0.89 0.85 0.78 0.79 0.91 0.70 0.65 0.56 0.86 0.96 0.55 0.50 0.67 0.28
Ve5 0.51 0.43 0.57 0.82 1.00 0.59 0.62 0.59 0.59 0.68 0.72 0.64 0.68 0.68 0.76 0.81 0.58 0.50 0.74 0.39
Ve6 0.57 0.56 0.67 0.66 0.59 1.00 0.70 0.78 0.77 0.81 0.69 0.46 0.57 0.48 0.63 0.62 0.58 0.50 0.51 0.52
Ve7 0.67 0.59 0.97 0.89 0.62 0.70 1.00 0.89 0.81 0.80 0.95 0.55 0.65 0.47 0.95 0.79 0.50 0.50 0.70 0.52
Ve8 0.57 0.53 0.82 0.85 0.59 0.78 0.89 1.00 0.71 0.71 0.92 0.59 0.65 0.25 0.90 0.91 0.61 0.50 0.67 0.48
Ob9 0.68 0.56 0.84 0.78 0.59 0.77 0.81 0.71 1.00 0.81 0.82 0.40 0.48 0.48 0.63 0.62 0.52 0.50 0.57 0.52
Ob10 0.61 0.52 0.81 0.79 0.68 0.81 0.80 0.71 0.81 1.00 0.81 0.62 0.56 0.38 0.85 0.70 0.56 0.50 0.50 0.65
Ob11 0.64 0.59 0.96 0.91 0.72 0.69 0.95 0.92 0.82 0.81 1.00 0.47 0.55 0.75 0.99 0.97 0.52 0.50 0.58 0.37
Ax1 0.45 0.49 0.65 0.70 0.64 0.46 0.55 0.59 0.40 0.62 0.47 1.00 0.82 0.52 0.66 0.74 0.52 0.50 0.63 0.58
Ax2 0.57 0.61 0.60 0.65 0.68 0.57 0.65 0.65 0.48 0.56 0.55 0.82 1.00 0.39 0.88 0.61 0.46 0.50 0.81 0.65
Ax3 0.57 0.53 0.60 0.56 0.68 0.48 0.47 0.25 0.48 0.38 0.75 0.52 0.39 1.00 0.16 0.16 0.53 0.50 0.45 0.49
Ax4 0.61 0.64 0.91 0.86 0.76 0.63 0.95 0.90 0.63 0.85 0.99 0.66 0.88 0.16 1.00 1.00 0.48 0.50 0.74 0.41
Ax5 0.45 0.48 0.87 0.96 0.81 0.62 0.79 0.91 0.62 0.70 0.97 0.74 0.61 0.16 1.00 1.00 0.50 0.50 0.77 0.16
Ax6 0.49 0.49 0.49 0.55 0.58 0.58 0.50 0.61 0.52 0.56 0.52 0.52 0.46 0.53 0.48 0.50 1.00 0.50 0.53 0.53
Ax7 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 0.50 1.00 0.50 0.50
Ax8 0.52 0.46 0.61 0.67 0.74 0.51 0.70 0.67 0.57 0.50 0.58 0.63 0.81 0.45 0.74 0.77 0.53 0.50 1.00 0.49
Ax9 0.58 0.58 0.50 0.28 0.39 0.52 0.52 0.48 0.52 0.65 0.37 0.58 0.65 0.49 0.41 0.16 0.53 0.50 0.49 1.00

Classification at level : 1 : (Ax4 Ax5) similarity : 0.999807

Classification at level : 2 : (Ob11 (Ax4 Ax5)) similarity : 0.978889

Classification at level : 3 : (Ho3 Ve7) similarity : 0.969894

Classification at level : 4 : ((Ho3 Ve7) Ho4) similarity : 0.904561

Classification at level : 5 : (Ax1 Ax2) similarity : 0.815591

Classification at level : 6 : (Ve6 Ob10) similarity : 0.81162

Classification at level : 7 : (Ve8 (Ob11 (Ax4 Ax5))) similarity : 0.775683

Classification at level : 8 : (Ve5 Ax8) similarity : 0.739161

Classification at level : 9 : (Ho1 Ob9) similarity : 0.683707

Classification at level : 10 : (((Ho3 Ve7) Ho4) (Ve8 (Ob11 (Ax4 Ax5)))) similarity : 0.646512

Classification at level : 11 : (Ho2 Ax9) similarity : 0.576568

Classification at level : 12 : (Ax3 Ax6) similarity : 0.534161

Classification at level : 13 : ((Ho1 Ob9) (Ve6 Ob10)) similarity : 0.433922

Classification at level : 14 : ((Ve5 Ax8) (Ax1 Ax2)) similarity : 0.429463

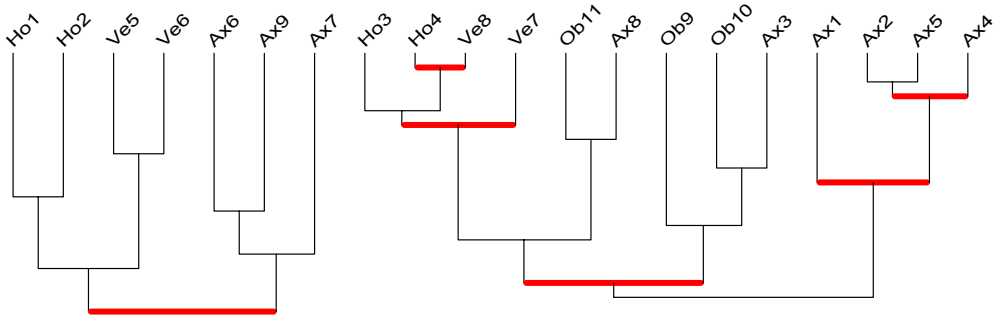
Classification at level : 15 : ((Ho2 Ax9) Ax7) similarity : 0.25

Classification at level : 16 : (((Ve5 Ax8) (Ax1 Ax2)) (Ax3 Ax6)) similarity : 0.0479432

The most significant node is at level : 10

Significant nodes
at level: 1
at level: 4
at level: 7
at level: 10
at level: 14

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ)



Similarity : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\Students-athens-2008\sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1 secondary.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ
nb col : 20, nb lig : 50

	Occurrence	Average	Standard deviations:
Ho1	: 37.00	0.74	0.44
Ho2	: 37.00	0.74	0.44
Ho3	: 23.00	0.46	0.50
Ho4	: 17.00	0.34	0.47
Ve5	: 34.00	0.68	0.47
Ve6	: 25.00	0.50	0.50

Ve7	: 27.00	0.54	0.50
Ve8	: 18.00	0.36	0.48
Ob9	: 36.00	0.72	0.45
Ob10	: 22.00	0.44	0.50
Ob11	: 7.00	0.14	0.35
Ax1	: 33.00	0.66	0.47
Ax2	: 17.00	0.34	0.47
Ax3	: 21.00	0.42	0.49
Ax4	: 19.00	0.38	0.49
Ax5	: 13.00	0.26	0.44
Ax6	: 44.00	0.88	0.32
Ax7	: 49.00	0.98	0.14
Ax8	: 26.00	0.52	0.50
Ax9	: 40.00	0.80	0.40

Frequency of couples of variables: :

	Ho1	Ho2	Ho3	Ho4	Ve5	Ve6	Ve7	Ve8	Ob9	Ob10	Ob11	Ax1	Ax2	Ax3	Ax4	Ax5	Ax6	Ax7	Ax8	Ax9
Ho1		0.64	0.40	0.26	0.56	0.42	0.44	0.32	0.58	0.36	0.14	0.50	0.26	0.34	0.26	0.24	0.70	0.74	0.44	0.58
Ho2			0.38	0.30	0.52	0.40	0.42	0.28	0.58	0.34	0.10	0.54	0.30	0.30	0.28	0.24	0.70	0.74	0.42	0.62
Ho3				0.28	0.36	0.26	0.36	0.28	0.40	0.22	0.12	0.36	0.18	0.20	0.20	0.14	0.44	0.46	0.24	0.36
Ho4					0.24	0.14	0.24	0.26	0.28	0.18	0.06	0.26	0.18	0.10	0.18	0.12	0.30	0.34	0.18	0.28
Ve5						0.42	0.38	0.24	0.54	0.28	0.12	0.42	0.16	0.34	0.22	0.12	0.62	0.68	0.42	0.58
Ve6							0.34	0.20	0.42	0.24	0.08	0.26	0.10	0.26	0.16	0.10	0.50	0.50	0.28	0.42
Ve7								0.32	0.44	0.30	0.08	0.38	0.22	0.24	0.22	0.14	0.54	0.54	0.26	0.46
Ve8									0.30	0.24	0.10	0.26	0.16	0.16	0.14	0.10	0.36	0.36	0.20	0.30
Ob9										0.38	0.08	0.48	0.26	0.30	0.24	0.18	0.64	0.72	0.38	0.56
Ob10											0.08	0.32	0.14	0.24	0.16	0.10	0.40	0.44	0.30	0.38
Ob11												0.06	0.02	0.10	0.06	0.02	0.14	0.14	0.12	0.14
Ax1													0.30	0.28	0.34	0.26	0.60	0.66	0.34	0.52
Ax2														0.12	0.26	0.20	0.30	0.34	0.14	0.22
Ax3															0.16	0.06	0.42	0.42	0.26	0.40
Ax4																0.18	0.32	0.38	0.18	0.30
Ax5																	0.26	0.26	0.12	0.12
Ax6																		0.88	0.50	0.74
Ax7																			0.52	0.80
Ax8																				0.48
Ax9																				

Correlation indexes:

	Ho1	Ho2	Ho3	Ho4	Ve5	Ve6	Ve7	Ve8	Ob9	Ob10	Ob11	Ax1	Ax2	Ax3	Ax4	Ax5	Ax6	Ax7	Ax8	Ax9
Ho1		0.48	0.27	0.04	0.28	0.23	0.18	0.25	0.24	0.16	0.24	0.06	0.04	0.13	-0.10	0.25	0.34	0.24	0.25	-0.07
Ho2			0.18	0.23	0.08	0.14	0.09	0.06	0.24	0.07	-0.02	0.25	0.23	-0.05	-0.01	0.25	0.34	0.24	0.16	0.16
Ho3				0.52	0.20	0.12	0.45	0.48	0.31	0.07	0.32	0.24	0.10	0.03	0.10	0.09	0.22	0.13	0.00	-0.04

Ho4 0.04 -0.130.24 0.61 0.17 0.13 0.08 0.16 0.29 -0.180.22 0.15 0.01 0.10 0.01
0.04
Ve5 0.34 0.06 -0.020.24 -0.080.15 -0.13-0.320.24 -0.17-0.280.14 0.21 0.28 0.19
Ve6 0.28 0.08 0.27 0.08 0.06 -0.30-0.300.20 -0.12-0.140.37 0.14 0.08 0.10
Ve7 0.53 0.23 0.25 0.03 0.10 0.15 0.05 0.06 -0.000.40 0.15 -0.080.14
Ve8 0.19 0.34 0.30 0.10 0.17 0.04 0.01 0.03 0.28 0.11 0.05 0.06
Ob9 0.28 -0.130.02 0.07 -0.01-0.15-0.040.04 0.23 0.02 -0.09
Ob10 0.11 0.13 -0.040.23 -0.03-0.070.08 0.13 0.29 0.14
Ob11 -0.20-0.170.24 0.04 -0.110.15 0.06 0.27 0.20
Ax1 0.34 0.01 0.39 0.43 0.12 0.20 -0.01-0.04
Ax2 -0.100.57 0.54 0.01 0.10 -0.16-0.27
Ax3 0.00 -0.230.31 0.12 0.17 0.32
Ax4 0.38 -0.090.11 -0.07-0.02
Ax5 0.22 0.08 -0.07-0.50
Ax6 0.39 0.26 0.28
Ax7 0.15 0.29
Ax8 0.32
Ax9

Similarity indexes:

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6
Ax7 Ax8 Ax9

Ho1 1.00 0.81 0.76 0.55 0.71 0.72 0.67 0.77 0.68 0.67 0.79 0.55 0.55 0.64 0.39 0.78 0.67 0.55
0.74 0.46
Ho2 0.81 1.00 0.68 0.75 0.57 0.64 0.59 0.57 0.68 0.57 0.47 0.70 0.75 0.45 0.49 0.78 0.67 0.55
0.66 0.60
Ho3 0.76 0.68 1.00 0.99 0.72 0.67 0.94 0.98 0.80 0.61 0.94 0.77 0.66 0.54 0.67 0.66 0.65 0.54
0.50 0.46
Ho4 0.55 0.75 0.99 1.00 0.55 0.30 0.82 1.00 0.69 0.71 0.66 0.70 0.91 0.21 0.84 0.77 0.50 0.53
0.52 0.54
Ve5 0.71 0.57 0.72 0.55 1.00 0.83 0.56 0.47 0.69 0.40 0.72 0.38 0.15 0.76 0.30 0.17 0.58 0.55
0.79 0.64
Ve6 0.72 0.64 0.67 0.30 0.83 1.00 0.83 0.63 0.76 0.62 0.61 0.19 0.11 0.78 0.31 0.28 0.74 0.54
0.61 0.59
Ve7 0.67 0.59 0.94 0.82 0.56 0.83 1.00 0.98 0.72 0.82 0.55 0.61 0.73 0.58 0.59 0.50 0.75 0.54
0.39 0.62
Ve8 0.77 0.57 0.98 1.00 0.47 0.63 0.98 1.00 0.71 0.93 0.94 0.63 0.78 0.56 0.52 0.56 0.71 0.53
0.58 0.56
Ob9 0.68 0.68 0.80 0.69 0.69 0.76 0.72 0.71 1.00 0.79 0.32 0.52 0.59 0.49 0.32 0.45 0.52 0.55
0.53 0.44
Ob10 0.67 0.57 0.61 0.71 0.40 0.62 0.82 0.93 0.79 1.00 0.70 0.65 0.43 0.82 0.45 0.38 0.56 0.54
0.85 0.63
Ob11 0.79 0.47 0.94 0.66 0.72 0.61 0.55 0.94 0.32 0.70 1.00 0.23 0.19 0.89 0.58 0.27 0.63 0.52
0.89 0.72
Ax1 0.55 0.70 0.77 0.70 0.38 0.19 0.61 0.63 0.52 0.65 0.23 1.00 0.87 0.51 0.90 0.93 0.57 0.55
0.48 0.47
Ax2 0.55 0.75 0.66 0.91 0.15 0.11 0.73 0.78 0.59 0.43 0.19 0.87 1.00 0.33 0.99 1.00 0.50 0.53
0.27 0.24
Ax3 0.64 0.45 0.54 0.21 0.76 0.78 0.58 0.56 0.49 0.82 0.89 0.51 0.33 1.00 0.50 0.15 0.72 0.54
0.74 0.78
Ax4 0.39 0.49 0.67 0.84 0.30 0.31 0.59 0.52 0.32 0.45 0.58 0.90 0.99 0.50 1.00 0.97 0.43 0.54
0.39 0.48
Ax5 0.78 0.78 0.66 0.77 0.17 0.28 0.50 0.56 0.45 0.38 0.27 0.93 1.00 0.15 0.97 1.00 0.68 0.53
0.39 0.09

Ax6 0.67 0.67 0.65 0.50 0.58 0.74 0.75 0.71 0.52 0.56 0.63 0.57 0.50 0.72 0.43 0.68 1.00 0.55 0.67 0.62
Ax7 0.55 0.55 0.54 0.53 0.55 0.54 0.54 0.53 0.55 0.54 0.52 0.55 0.53 0.54 0.54 0.53 0.55 1.00 0.54 0.55
Ax8 0.74 0.66 0.50 0.52 0.79 0.61 0.39 0.58 0.53 0.85 0.89 0.48 0.27 0.74 0.39 0.39 0.67 0.54 1.00 0.76
Ax9 0.46 0.60 0.46 0.54 0.64 0.59 0.62 0.56 0.44 0.63 0.72 0.47 0.24 0.78 0.48 0.09 0.62 0.55 0.76 1.00

Classification at level : 1 : (Ho4 Ve8) similarity : 0.997291

Classification at level : 2 : (Ax2 Ax5) similarity : 0.996024

Classification at level : 3 : ((Ax2 Ax5) Ax4) similarity : 0.989947

Classification at level : 4 : (Ho3 (Ho4 Ve8)) similarity : 0.973076

Classification at level : 5 : ((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) similarity : 0.935475

Classification at level : 6 : (Ob11 Ax8) similarity : 0.891952

Classification at level : 7 : (Ve5 Ve6) similarity : 0.834012

Classification at level : 8 : (Ob10 Ax3) similarity : 0.818054

Classification at level : 9 : (Ax1 ((Ax2 Ax5) Ax4)) similarity : 0.815686

Classification at level : 10 : (Ho1 Ho2) similarity : 0.811362

Classification at level : 11 : (Ax6 Ax9) similarity : 0.619204

Classification at level : 12 : (Ob9 (Ob10 Ax3)) similarity : 0.618419

Classification at level : 13 : (((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) (Ob11 Ax8)) similarity : 0.61418

Classification at level : 14 : ((Ax6 Ax9) Ax7) similarity : 0.306145

Classification at level : 15 : ((Ho1 Ho2) (Ve5 Ve6)) similarity : 0.267933

Classification at level : 16 : ((((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) (Ob11 Ax8)) (Ob9 (Ob10 Ax3))) similarity : 0.252751

Classification at level : 17 : (((((Ho3 (Ho4 Ve8)) Ve7) (Ob11 Ax8)) (Ob9 (Ob10 Ax3))) (Ax1 ((Ax2 Ax5) Ax4))) similarity : 0.0332312

Classification at level : 18 : (((Ho1 Ho2) (Ve5 Ve6)) ((Ax6 Ax9) Ax7)) similarity : 0.026437

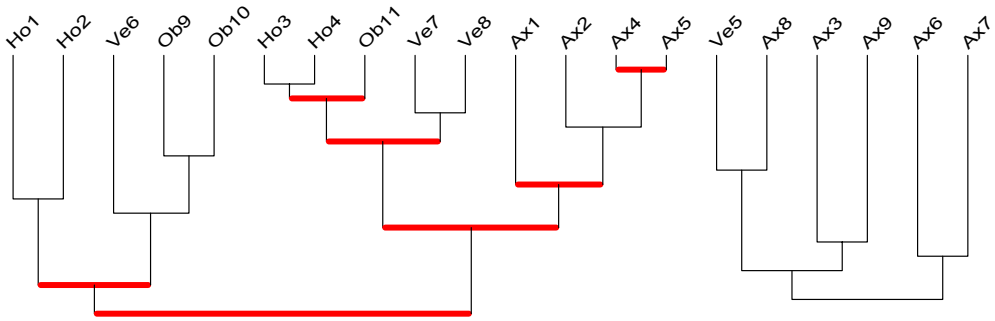
The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 3
at level: 5
at level: 9

at level: 16
at level: 18

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ)

Διάγραμμα ομοιότητας



Similarity : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\Students-athens-2008\sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1-PRIN-ALL.csv

nb col : 20, nb lig : 110

	Occurrence	Average	Standard deviations :
Ho1	: 93.00	0.85	0.36
Ho2	: 92.00	0.84	0.37
Ho3	: 60.00	0.55	0.50
Ho4	: 53.00	0.48	0.50
Ve5	: 81.00	0.74	0.44
Ve6	: 73.00	0.66	0.47
Ve7	: 67.00	0.61	0.49
Ve8	: 46.00	0.42	0.49
Ob9	: 84.00	0.76	0.42
Ob10	: 62.00	0.56	0.50
Ob11	: 33.00	0.30	0.46
Ax1	: 80.00	0.73	0.45
Ax2	: 46.00	0.42	0.49
Ax3	: 50.00	0.45	0.50
Ax4	: 35.00	0.32	0.47
Ax5	: 34.00	0.31	0.46
Ax6	: 101.00	0.92	0.27
Ax7	: 109.00	0.99	0.09
Ax8	: 77.00	0.70	0.46
Ax9	: 92.00	0.84	0.37
Pr s	: 60.00	0.55	0.50
Sec s	: 50.00	0.45	0.50

Frequency of couples of variables: :

	Ho1	Ho2	Ho3	Ho4	Ve5	Ve6	Ve7	Ve8	Ob9	Ob10	Ob11	Ax1	Ax2	Ax3	Ax4	Ax5	Ax6	Ax7	Ax8	Ax9
Ho1	0.77	0.52	0.43	0.65	0.61	0.56	0.39	0.70	0.52	0.30	0.62	0.37	0.41	0.26	0.28	0.80	0.85	0.64	0.72	

Ho2 0.49 0.43 0.62 0.59 0.54 0.36 0.67 0.49 0.27 0.64 0.39 0.38 0.27 0.28 0.79 0.84 0.61 0.73
Ho3 0.40 0.44 0.41 0.47 0.32 0.50 0.36 0.26 0.45 0.25 0.26 0.22 0.22 0.52 0.55 0.41 0.45
Ho4 0.41 0.35 0.38 0.31 0.43 0.34 0.22 0.40 0.25 0.21 0.20 0.23 0.45 0.48 0.38 0.38
Ve5 0.55 0.47 0.32 0.60 0.44 0.26 0.55 0.30 0.38 0.24 0.24 0.70 0.74 0.59 0.62
Ve6 0.47 0.33 0.58 0.45 0.25 0.45 0.26 0.33 0.20 0.21 0.65 0.66 0.50 0.57
Ve7 0.36 0.54 0.42 0.25 0.46 0.29 0.28 0.25 0.22 0.59 0.61 0.45 0.53
Ve8 0.36 0.30 0.20 0.33 0.21 0.17 0.16 0.17 0.42 0.42 0.33 0.35
Ob9 0.51 0.26 0.55 0.33 0.35 0.24 0.25 0.71 0.76 0.55 0.64
Ob10 0.23 0.45 0.25 0.27 0.20 0.19 0.54 0.56 0.45 0.51
Ob11 0.21 0.13 0.18 0.15 0.15 0.29 0.30 0.26 0.25
Ax1 0.38 0.34 0.28 0.29 0.68 0.73 0.54 0.62
Ax2 0.17 0.22 0.19 0.38 0.42 0.33 0.35
Ax3 0.12 0.09 0.45 0.45 0.34 0.41
Ax4 0.21 0.28 0.32 0.23 0.25
Ax5 0.30 0.31 0.25 0.18
Ax6 0.92 0.67 0.79
Ax7 0.70 0.84
Ax8 0.62
Ax9

Correlation indexes :

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6 Ax7 Ax8 Ax9

Ho1 0.49 0.32 0.11 0.20 0.28 0.28 0.21 0.35 0.23 0.28 0.02 0.11 0.14 -0.030.12 0.24 0.22 0.27 0.08
Ho2 0.19 0.13 0.01 0.21 0.15 0.08 0.22 0.11 0.13 0.17 0.23 0.01 0.04 0.14 0.23 0.22 0.14 0.20
Ho3 0.55 0.16 0.20 0.58 0.37 0.39 0.23 0.44 0.22 0.11 0.06 0.19 0.22 0.13 0.10 0.12 -0.01
Ho4 0.25 0.11 0.36 0.44 0.28 0.26 0.32 0.22 0.22 -0.040.20 0.34 0.09 0.09 0.19 -0.11
Ve5 0.27 0.11 0.05 0.20 0.10 0.21 0.05 -0.040.21 0.01 0.04 0.20 0.16 0.37 0.01
Ve6 0.30 0.21 0.37 0.30 0.21 -0.13-0.060.11 -0.050.02 0.35 0.13 0.16 0.10
Ve7 0.45 0.34 0.31 0.32 0.10 0.15 0.02 0.23 0.13 0.24 0.12 0.13 0.10
Ve8 0.21 0.26 0.33 0.11 0.14 -0.070.13 0.19 0.25 0.08 0.15 0.03
Ob9 0.37 0.18 -0.050.04 -0.01-0.030.05 0.07 0.17 0.10 -0.01
Ob10 0.26 0.16 0.04 0.07 0.09 0.07 0.14 0.11 0.22 0.21
Ob11 -0.040.01 0.20 0.23 0.25 0.12 0.06 0.26 0.02
Ax1 0.35 0.03 0.24 0.32 0.12 0.16 0.13 0.06
Ax2 -0.070.37 0.27 -0.020.08 0.15 -0.02
Ax3 -0.11-0.220.21 0.09 0.08 0.16
Ax4 0.51 -0.080.07 0.02 -0.07
Ax5 0.13 0.06 0.14 -0.45
Ax6 0.32 0.24 0.23
Ax7 0.15 0.22
Ax8 0.19
Ax9

Similarity indexes:

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6 Ax7 Ax8 Ax9

Ho1 1.00 0.79 0.81 0.63 0.66 0.75 0.76 0.75 0.76 0.74 0.83 0.52 0.63 0.66 0.46 0.66 0.61 0.54 0.73 0.55
Ho2 0.79 1.00 0.71 0.66 0.51 0.69 0.65 0.60 0.67 0.62 0.68 0.65 0.77 0.51 0.55 0.68 0.61 0.53 0.63 0.64
Ho3 0.81 0.71 1.00 1.00 0.72 0.79 0.99 0.98 0.91 0.86 1.00 0.79 0.72 0.63 0.87 0.90 0.60 0.53 0.68 0.49
Ho4 0.63 0.66 1.00 1.00 0.83 0.68 0.96 0.99 0.85 0.90 0.98 0.81 0.89 0.41 0.89 0.98 0.58 0.53 0.79 0.36
Ve5 0.66 0.51 0.72 0.83 1.00 0.80 0.65 0.58 0.70 0.64 0.83 0.56 0.44 0.80 0.52 0.58 0.62 0.53 0.86 0.51
Ve6 0.75 0.69 0.79 0.68 0.80 1.00 0.87 0.84 0.87 0.89 0.86 0.34 0.39 0.69 0.40 0.54 0.73 0.53 0.71 0.60
Ve7 0.76 0.65 0.99 0.96 0.65 0.87 1.00 0.99 0.86 0.91 0.96 0.63 0.77 0.54 0.89 0.77 0.67 0.53 0.67 0.60
Ve8 0.75 0.60 0.98 0.99 0.58 0.84 0.99 1.00 0.79 0.92 0.99 0.67 0.80 0.34 0.81 0.90 0.72 0.52 0.75 0.53
Ob9 0.76 0.67 0.91 0.85 0.70 0.87 0.86 0.79 1.00 0.90 0.78 0.44 0.56 0.49 0.44 0.58 0.54 0.53 0.61 0.49
Ob10 0.74 0.62 0.86 0.90 0.64 0.89 0.91 0.92 0.90 1.00 0.93 0.72 0.58 0.63 0.70 0.66 0.61 0.53 0.80 0.72
Ob11 0.83 0.68 1.00 0.98 0.83 0.86 0.96 0.99 0.78 0.93 1.00 0.42 0.52 0.90 0.96 0.97 0.62 0.52 0.89 0.53
Ax1 0.52 0.65 0.79 0.81 0.56 0.34 0.63 0.67 0.44 0.72 0.42 1.00 0.93 0.54 0.86 0.93 0.57 0.53 0.66 0.55
Ax2 0.63 0.77 0.72 0.89 0.44 0.39 0.77 0.80 0.56 0.58 0.52 0.93 1.00 0.34 0.99 0.96 0.49 0.52 0.75 0.47
Ax3 0.66 0.51 0.63 0.41 0.80 0.69 0.54 0.34 0.49 0.63 0.90 0.54 0.34 1.00 0.23 0.08 0.68 0.53 0.63 0.69
Ax4 0.46 0.55 0.87 0.89 0.52 0.40 0.89 0.81 0.44 0.70 0.96 0.86 0.99 0.23 1.00 1.00 0.42 0.52 0.54 0.41
Ax5 0.66 0.68 0.90 0.98 0.58 0.54 0.77 0.90 0.58 0.66 0.97 0.93 0.96 0.08 1.00 1.00 0.63 0.52 0.74 0.06
Ax6 0.61 0.61 0.60 0.58 0.62 0.73 0.67 0.72 0.54 0.61 0.62 0.57 0.49 0.68 0.42 0.63 1.00 0.54 0.65 0.61
Ax7 0.54 0.53 0.53 0.53 0.53 0.53 0.53 0.52 0.53 0.53 0.52 0.53 0.52 0.53 0.52 0.52 0.54 1.00 0.53 0.53
Ax8 0.73 0.63 0.68 0.79 0.86 0.71 0.67 0.75 0.61 0.80 0.89 0.66 0.75 0.63 0.54 0.74 0.65 0.53 1.00 0.67
Ax9 0.55 0.64 0.49 0.36 0.51 0.60 0.60 0.53 0.49 0.72 0.53 0.55 0.47 0.69 0.41 0.06 0.61 0.53 0.67 1.00

Classification at level : 1 : (Ax4 Ax5) similarity : 0.999894

Classification at level : 2 : (Ho3 Ho4) similarity : 0.997497

Classification at level : 3 : ((Ho3 Ho4) Ob11) similarity : 0.990501

Classification at level : 4 : (Ve7 Ve8) similarity : 0.988201

Classification at level : 5 : (Ax2 (Ax4 Ax5)) similarity : 0.985668

Classification at level : 6 : (((Ho3 Ho4) Ob11) (Ve7 Ve8)) similarity : 0.968694

Classification at level : 7 : (Ob9 Ob10) similarity : 0.895764

Classification at level : 8 : (Ve5 Ax8) similarity : 0.864827

Classification at level : 9 : (Ax1 (Ax2 (Ax4 Ax5))) similarity : 0.804928

Classification at level : 10 : (Ho1 Ho2) similarity : 0.793448

Classification at level : 11 : (Ve6 (Ob9 Ob10)) similarity : 0.791422

Classification at level : 12 : ((((Ho3 Ho4) Ob11) (Ve7 Ve8)) (Ax1 (Ax2 (Ax4 Ax5)))) similarity : 0.715271

Classification at level : 13 : (Ax3 Ax9) similarity : 0.688651

Classification at level : 14 : (Ax6 Ax7) similarity : 0.536564

Classification at level : 15 : ((Ve5 Ax8) (Ax3 Ax9)) similarity : 0.416699

Classification at level : 16 : ((Ho1 Ho2) (Ve6 (Ob9 Ob10))) similarity : 0.194368

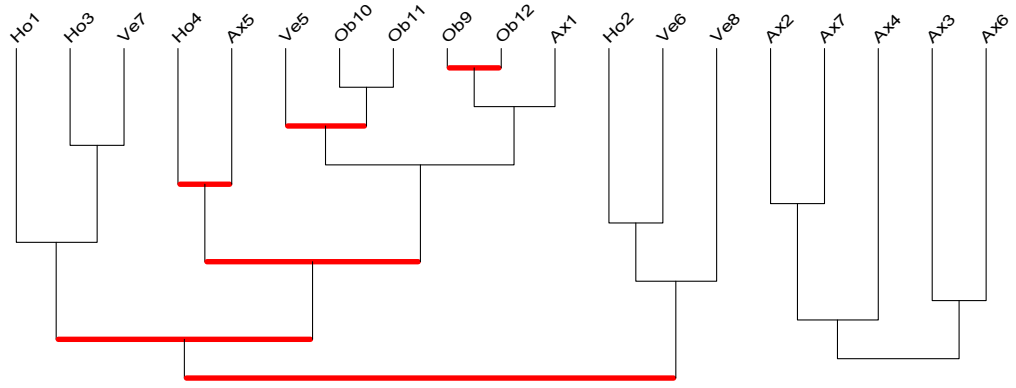
Classification at level : 17 : (((Ve5 Ax8) (Ax3 Ax9)) (Ax6 Ax7)) similarity : 0.0435417

Classification at level : 18 : (((Ho1 Ho2) (Ve6 (Ob9 Ob10))) ((((Ho3 Ho4) Ob11) (Ve7 Ve8)) (Ax1 (Ax2 (Ax4 Ax5))))) similarity : 0.0402385

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 3
at level: 6
at level: 9
at level: 12
at level: 16
at level: 18

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ)



Similarity : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\ΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 2-ΜΟΝΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ.csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ
nb col : 19, nb lig : 72

	Occurrence	Average	Standard deviations:
Ho1	: 55.00	0.76	0.42
Ho2	: 59.00	0.82	0.38
Ho3	: 40.00	0.56	0.50
Ho4	: 47.00	0.65	0.48
Ve5	: 41.00	0.57	0.50
Ve6	: 55.00	0.76	0.42
Ve7	: 20.00	0.28	0.45
Ve8	: 55.00	0.76	0.42
Ob9	: 32.00	0.44	0.50
Ob10	: 30.00	0.42	0.49
Ob11	: 18.00	0.25	0.43
Ob12	: 20.00	0.28	0.45
Ax1	: 24.00	0.33	0.47
Ax2	: 50.00	0.69	0.46
Ax3	: 67.00	0.93	0.25
Ax4	: 67.00	0.93	0.25
Ax5	: 37.00	0.51	0.50
Ax6	: 63.00	0.88	0.33
Ax7	: 59.00	0.82	0.38

Frequency of couples of variables: :

	Ho1	Ho2	Ho3	Ho4	Ve5	Ve6	Ve7	Ve8	Ob9	Ob10	Ob11	Ob12	Ax1	Ax2	Ax3	Ax4	Ax5	Ax6	Ax7
Ho1		0.67	0.53	0.54	0.54	0.67	0.28	0.65	0.38	0.42	0.22	0.25	0.28	0.57	0.71	0.69	0.43	0.67	0.63
Ho2			0.50	0.58	0.51	0.72	0.25	0.68	0.39	0.42	0.22	0.28	0.32	0.65	0.76	0.78	0.49	0.72	0.74
Ho3				0.43	0.43	0.49	0.24	0.50	0.31	0.31	0.21	0.19	0.22	0.44	0.51	0.54	0.33	0.50	0.47
Ho4					0.44	0.58	0.22	0.56	0.40	0.39	0.24	0.24	0.26	0.50	0.61	0.64	0.43	0.58	0.58
Ve5						0.53	0.24	0.47	0.33	0.36	0.21	0.18	0.19	0.43	0.53	0.56	0.36	0.49	0.50

Ve6 0.24 0.67 0.40 0.42 0.25 0.26 0.31 0.61 0.71 0.74 0.44 0.68 0.67
Ve7 0.25 0.10 0.17 0.04 0.10 0.13 0.21 0.25 0.28 0.15 0.24 0.24
Ve8 0.35 0.35 0.21 0.24 0.29 0.57 0.71 0.72 0.43 0.68 0.64
Ob9 0.28 0.21 0.24 0.18 0.36 0.40 0.42 0.28 0.40 0.38
Ob10 0.19 0.17 0.14 0.35 0.38 0.39 0.32 0.36 0.38
Ob11 0.13 0.10 0.19 0.21 0.22 0.15 0.21 0.19
Ob12 0.18 0.24 0.24 0.26 0.15 0.24 0.25
Ax1 0.28 0.31 0.33 0.18 0.31 0.29
Ax2 0.68 0.68 0.40 0.68 0.67
Ax3 0.89 0.47 0.86 0.79
Ax4 0.51 0.83 0.81
Ax5 0.47 0.47
Ax6 0.75
Ax7

Correlation indexes:

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ob12 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6 Ax7

Ho1 0.25 0.49 0.21 0.51 0.46 0.34 0.38 0.17 0.47 0.17 0.20 0.12 0.20 -0.02-0.150.18 -0.01-0.01
Ho2 0.23 0.26 0.25 0.59 0.13 0.33 0.13 0.40 0.10 0.29 0.26 0.47 0.01 0.16 0.34 0.04 0.44
Ho3 0.29 0.46 0.29 0.37 0.36 0.24 0.30 0.32 0.18 0.16 0.26 -0.020.20 0.19 0.08 0.09
Ho4 0.31 0.42 0.19 0.28 0.48 0.50 0.35 0.26 0.21 0.21 0.03 0.26 0.40 0.08 0.26
Ve5 0.44 0.35 0.18 0.33 0.51 0.31 0.10 0.02 0.15 -0.020.20 0.28 -0.070.18
Ve6 0.13 0.46 0.30 0.47 0.32 0.27 0.25 0.41 -0.020.23 0.24 0.09 0.25
Ve7 0.20 -0.120.23 -0.140.10 0.15 0.07 -0.070.17 0.04 -0.050.05
Ve8 0.04 0.14 0.09 0.13 0.18 0.20 -0.020.11 0.18 0.09 0.08
Ob9 0.38 0.45 0.51 0.14 0.23 -0.090.02 0.20 0.08 0.06
Ob10 0.42 0.23 0.00 0.25 -0.100.01 0.43 -0.020.18
Ob11 0.29 0.07 0.10 -0.22-0.090.11 -0.07-0.06
Ob12 0.42 0.21 -0.200.05 0.04 -0.050.13
Ax1 0.21 -0.040.19 0.04 0.09 0.10
Ax2 0.29 0.29 0.20 0.48 0.55
Ax3 0.36 -0.050.56 0.30
Ax4 0.28 0.23 0.44
Ax5 0.14 0.27
Ax6 0.26
Ax7

Similarity indexes:

Ho1 Ho2 Ho3 Ho4 Ve5 Ve6 Ve7 Ve8 Ob9 Ob10 Ob11 Ob12 Ax1 Ax2 Ax3 Ax4 Ax5 Ax6 Ax7

Ho1 1.00 0.67 0.91 0.70 0.92 0.82 0.89 0.78 0.70 0.93 0.73 0.76 0.65 0.68 0.49 0.43 0.70 0.49 0.50
Ho2 0.67 1.00 0.71 0.71 0.72 0.85 0.65 0.72 0.64 0.86 0.63 0.81 0.77 0.83 0.51 0.56 0.80 0.52 0.75
Ho3 0.91 0.71 1.00 0.83 0.96 0.79 0.96 0.84 0.84 0.90 0.94 0.81 0.77 0.79 0.49 0.61 0.78 0.57 0.58
Ho4 0.70 0.71 0.83 1.00 0.84 0.85 0.79 0.75 0.96 0.97 0.94 0.86 0.80 0.72 0.52 0.63 0.92 0.55 0.71
Ve5 0.92 0.72 0.96 0.84 1.00 0.88 0.95 0.68 0.91 0.98 0.93 0.68 0.54 0.68 0.49 0.62 0.86 0.44 0.66

Ve6 0.82 0.85 0.79 0.85 0.88 1.00 0.67 0.82 0.82 0.93 0.87 0.83 0.80 0.83 0.49 0.60 0.76 0.55 0.67
Ve7 0.89 0.65 0.96 0.79 0.95 0.67 1.00 0.76 0.26 0.90 0.19 0.73 0.82 0.62 0.44 0.63 0.59 0.45 0.56
Ve8 0.78 0.72 0.84 0.75 0.68 0.82 0.76 1.00 0.54 0.67 0.63 0.67 0.73 0.68 0.49 0.55 0.70 0.55 0.56
Ob9 0.70 0.64 0.84 0.96 0.91 0.82 0.26 0.54 1.00 0.97 0.99 1.00 0.76 0.79 0.44 0.52 0.81 0.57 0.56
Ob10 0.93 0.86 0.90 0.97 0.98 0.93 0.90 0.67 0.97 1.00 0.99 0.90 0.50 0.82 0.43 0.51 0.97 0.48 0.69
Ob11 0.73 0.63 0.94 0.94 0.93 0.87 0.19 0.63 0.99 0.99 1.00 0.96 0.66 0.66 0.33 0.43 0.72 0.43 0.42
Ob12 0.76 0.81 0.81 0.86 0.68 0.83 0.73 0.67 1.00 0.90 0.96 1.00 0.99 0.80 0.35 0.54 0.59 0.45 0.65
Ax1 0.65 0.77 0.77 0.80 0.54 0.80 0.82 0.73 0.76 0.50 0.66 0.99 1.00 0.79 0.47 0.64 0.58 0.59 0.62
Ax2 0.68 0.83 0.79 0.72 0.68 0.83 0.62 0.68 0.79 0.82 0.66 0.80 0.79 1.00 0.64 0.64 0.74 0.79 0.86
Ax3 0.49 0.51 0.49 0.52 0.49 0.49 0.44 0.49 0.44 0.43 0.33 0.35 0.47 0.64 1.00 0.58 0.47 0.67 0.61
Ax4 0.43 0.56 0.61 0.63 0.62 0.60 0.63 0.55 0.52 0.51 0.43 0.54 0.64 0.64 0.58 1.00 0.67 0.57 0.66
Ax5 0.70 0.80 0.78 0.92 0.86 0.76 0.59 0.70 0.81 0.97 0.72 0.59 0.58 0.74 0.47 0.67 1.00 0.61 0.75
Ax6 0.49 0.52 0.57 0.55 0.44 0.55 0.45 0.55 0.57 0.48 0.43 0.45 0.59 0.79 0.67 0.57 0.61 1.00 0.63
Ax7 0.50 0.75 0.58 0.71 0.66 0.67 0.56 0.56 0.56 0.69 0.42 0.65 0.62 0.86 0.61 0.66 0.75 0.63 1.00

Classification at level : 1 : (Ob9 Ob12) similarity : 0.996741

Classification at level : 2 : (Ob10 Ob11) similarity : 0.991189

Classification at level : 3 : ((Ob9 Ob12) Ax1) similarity : 0.985879

Classification at level : 4 : (Ve5 (Ob10 Ob11)) similarity : 0.96926

Classification at level : 5 : (Ho3 Ve7) similarity : 0.961358

Classification at level : 6 : ((Ve5 (Ob10 Ob11)) ((Ob9 Ob12) Ax1)) similarity : 0.941597

Classification at level : 7 : (Ho4 Ax5) similarity : 0.918229

Classification at level : 8 : (Ax2 Ax7) similarity : 0.863882

Classification at level : 9 : (Ho2 Ve6) similarity : 0.849046

Classification at level : 10 : (Ho1 (Ho3 Ve7)) similarity : 0.829866

Classification at level : 11 : ((Ho4 Ax5) ((Ve5 (Ob10 Ob11)) ((Ob9 Ob12) Ax1))) similarity : 0.722537

Classification at level : 12 : ((Ho2 Ve6) Ve8) similarity : 0.675903

Classification at level : 13 : (Ax3 Ax6) similarity : 0.670318

Classification at level : 14 : ((Ax2 Ax7) Ax4) similarity : 0.438278

Classification at level : 15 : ((Ho1 (Ho3 Ve7)) ((Ho4 Ax5) ((Ve5 (Ob10 Ob11)) ((Ob9 Ob12) Ax1)))) similarity : 0.352968

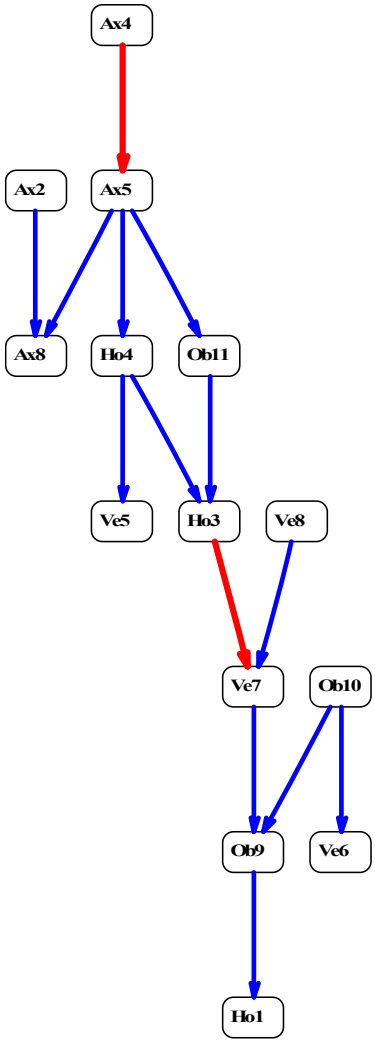
Classification at level : 16 : (((Ax2 Ax7) Ax4) (Ax3 Ax6)) similarity : 0.236376

Classification at level : 17 : (((Ho1 (Ho3 Ve7)) ((Ho4 Ax5) ((Ve5 (Ob10 Ob11)) ((Ob9 Ob12) Ax1)))) ((Ho2 Ve6) Ve8)) similarity : 0.092879

The most significant node is at level : 1
Significant nodes
at level: 1
at level: 4
at level: 7
at level: 11
at level: 15
at level: 17

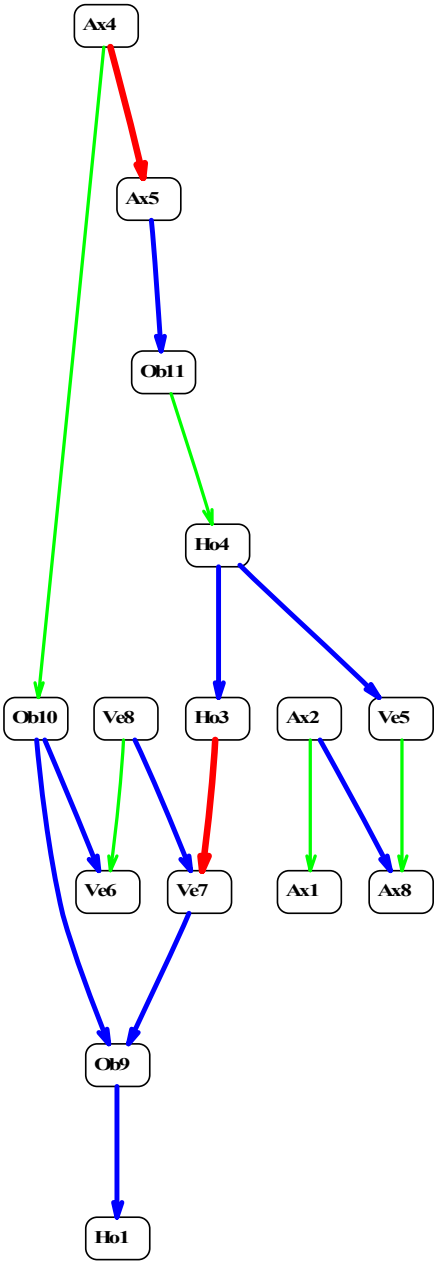
Γ. ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 99% ΚΑΙ 95%



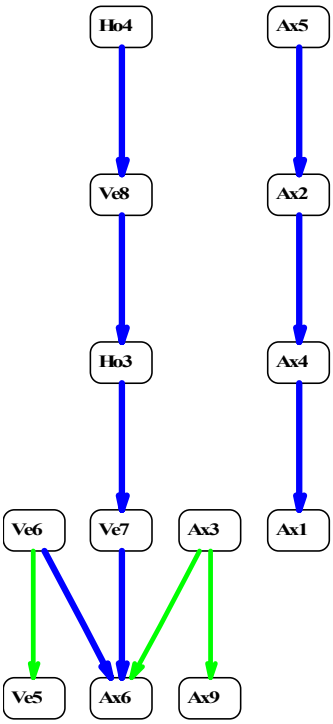
Graph : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktc99S951ι90ts85hens-2008\sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1.csv

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ <u>ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ</u>
ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 99% , 95% ΚΑΙ 90%



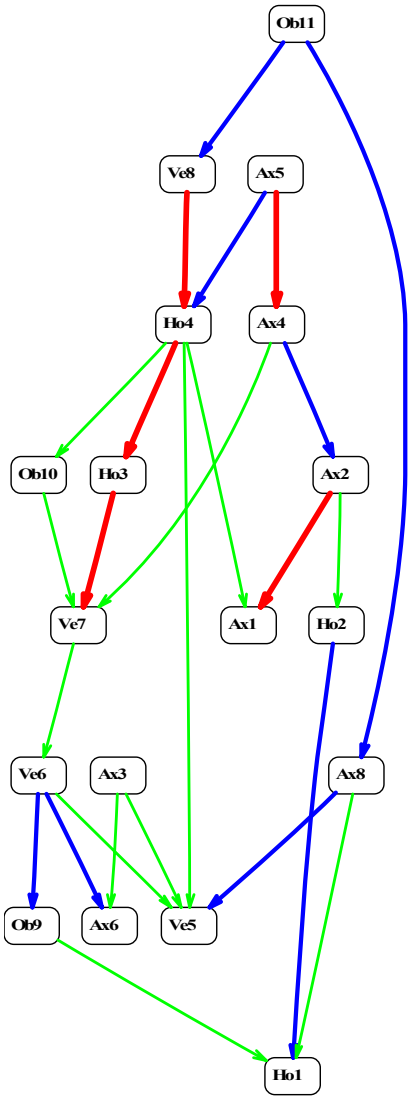
Graph : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\Stu99:r95-a90e:85-2008\sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1.csv

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ <u>ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ</u> (<u>ΠΡΙΝ</u> ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ) ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 95% ΚΑΙ 90%



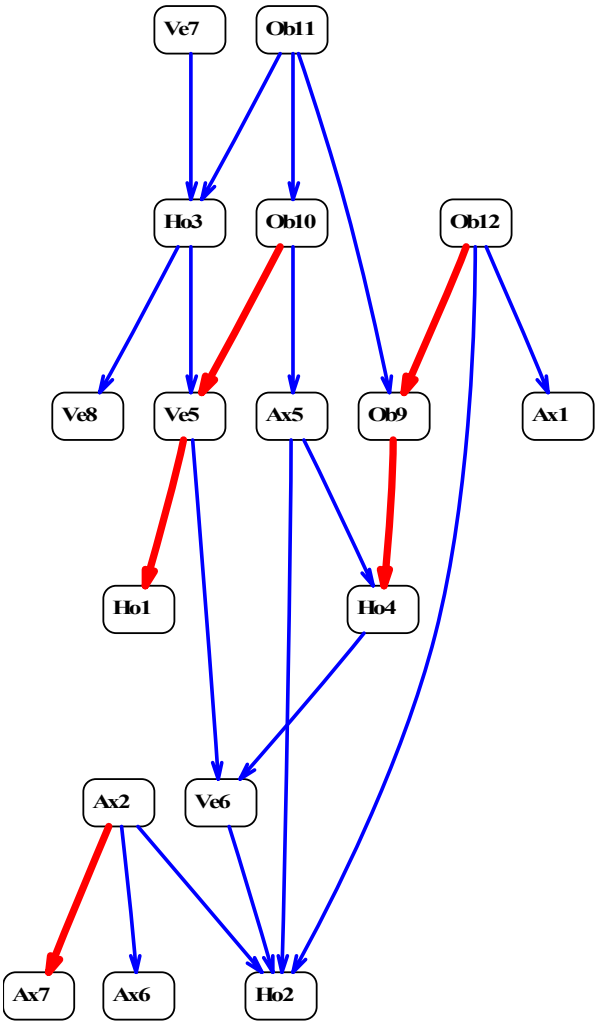
Graph : C:\Documents and Settings\skeeauser\Δ99κ95ρ\90μ85nts-athens-2008\sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1 secondary.csv

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ) ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 99%, 95% ΚΑΙ 90%



Graph : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\Students99tl95ts90\85sofia\ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1-PRIN-ALL.csv

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ) ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ 99% ΚΑΙ 95%



Graph : C:\Documents and Settings\epa\Desktop\ΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙ(99)-95)90)85ΥΜΝΑΣΙΟ.csv