ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ»

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Στέλλα Βοσνιάδου (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Καθηγήτρια	…….
2) Θεοδόσης Ζαχαριάδης	Αναπλ. Καθηγητής	……..…
3) Βασιλική Φαρμάκη	Αναπλ Καθηγήτρια	……..…

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτριά μου Στέλλα Βοσνιάδου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε πολύ πριν ξεκινήσω να προετοιμάζω την παρούσα διπλωματική εργασία, όσο και για την βοήθεια που μού προσέφερε στα πρώτα μου βήματα στον χώρο της έρευνας. Πολλά στοιχεία που θα χαρακτηρίζουν τον τρόπο που αντιμετωπίζω τα πράγματα στο μέλλον θα οφείλονται ακριβώς στην δική της στάση, που αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για μένα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κο Θεοδόση Ζαχαριάδη και την κα Βασιλική Φαρμάκη για την βοήθεια που μου προσέφεραν κάθε φορά που τους το ζήτησα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στον Κωνσταντίνο Π. Χρήστου που ήταν πάντα κοντά μου για να με συμβουλεύει και να μου υποδεικνύει εκείνο που κάθε φορά χρειαζόταν να γίνει. Χωρίς την δική του βοήθεια, δεν θα είχα καταφέρει τόσα πολλά.

Ευχαριστώ επίσης τον κο Παναγιώτη Λιναρδάκη τόσο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, όσο και για την υπομονή που επέδειξε τα δύο τελευταία χρόνια.

Πολύτιμες ήταν οι συμβουλές και η βοήθεια που μου προσέφεραν με διάφορους τρόπους η Ειρήνη Σκοπελίτη, Σπυριδούλα Ευθυμίου, Στέλιος Γιαμαρέλος, Ερασμία Παντοτινού και η Αγγελική.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου και την αδερφή μου για την ηθική και ψυχολογική τους στήριξη.

Μία πρώιμη μορφή αυτής της εργασίας παρουσιάστηκε στο συνέδριο 7th EARLI SIG στο Leuven του Βελγίου τον Μάιο του 2010. Ευχαριστώ τους συμμετέχοντες για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τα καίρια σχόλια τους.

Αθήνα, Ιούνιος 2010

Κωνσταντίνος Αραμπατζής

Στους μαθητές μου

Πίνακας Περιεχομένων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 8

1.1 ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ – ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ.....8
1.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:ΘΕΜΑΤΑ ΟΡΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....15
1.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΟΡΙΣΜΟΥ.....20
1.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ Η' ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥΣ……..21
1.5 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ..……...22
1.6 ΣΚΟΠΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ……...……...24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 27

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ……27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 34

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ…….……..…....34

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 58

4.1 ΣΥΖΗΤΗΣΗ……..…….…….58
4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ……..66

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 70

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει την επίλυση και κατηγοριοποίηση αριθμητικών και αλγεβρικών εξισώσεων και ανισώσεων με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών στρατηγικών από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Οι εξισώσεις και ανισώσεις αποτελούν ιδιαίτερα σημαντικό μέρος των μαθηματικών, διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όλων των χωρών παγκοσμίως και η διεθνής βιβλιογραφία έχει καταγράψει μεγάλες δυσκολίες των μαθητών στην επίλυσή τους. Προηγούμενες έρευνες που επικεντρώθηκαν στη μελέτη των δυσκολιών και των λαθών που εμφανίζουν οι μαθητές στην επίλυση εξισώσεων επισήμαναν μεταξύ άλλων τη δυσκολία των μαθητών να ερμηνεύσουν τα γράμματα ως γενικευμένους αριθμούς και να επιλύουν εξισώσεις με μεταβλητή και στα δύο μέλη. Οι λιγοστές έρευνες που είχαν ως αντικείμενο την επίλυση ανισώσεων επισήμαναν την τάση των μαθητών να τις επιλύουν και να ερμηνεύουν τις λύσεις τους με τις ίδιες μεθόδους που επιλύουν εξισώσεις. Οι παλιότερες έρευνες έχουν αποδώσει τις δυσκολίες αυτές των μαθητών γενικότερα σε επιδράσεις της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών από το πλαίσιο της αριθμητικής. Στην παρούσα μελέτη υιοθετούμε το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008) για να εξηγήσουμε την δυσκολία των μαθητών να επιλύσουν εξισώσεις και ανισώσεις.

Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μιας εμπειρικής έρευνας στην οποία συμμετείχαν 81 μαθητές της Γ’ Γυμνασίου, το κεντρικό ερώτημα της οποίας ήταν εάν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών από την αριθμητική και ειδικότερα οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων δημιουργούν εμπόδια στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων.

Με βάση τα παραπάνω, υποθέτουμε ότι η αρχική γνώση των μαθητών για την επίλυση εξισώσεων, όπως αυτή έχει οργανωθεί στα πλαίσια της αριθμητικής, θα στεκόταν εμπόδιο στη επίλυση εξισώσεων στα πλαίσια της άλγεβρας αλλά και ανισώσεων. Επιπρόσθετα, αναμένεται να παρατηρηθούν δυσκολίες από την πλευρά των μαθητών κατά την κατηγοριοποίηση εξισώσεων και ανισώσεων. Αναμένεται επίσης να παρουσιαστεί συσχέτιση της επίδοσης των μαθητών στην κατηγοριοποίηση με την επίδοσή τους κατά την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων.

Θεωρώντας αριθμητικές τις εξισώσεις και ανισώσεις με μεταβλητή στο ένα μέλος και ως αλγεβρικές αυτές με μεταβλητή και στα δύο μέλη, από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στην επίλυση αριθμητικών εξισώσεων και ανισώσεων, παρά σε αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις. Η ανάλυση των λαθών δείχνει ότι τα περισσότερα οφείλονταν σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσης, όπως η αντικατάσταση της μεταβλητής από ακεραίους ή από την αντιμετώπιση των εξισώσεων ως ανισώσεις. Επιπρόσθετα, οι μαθητές έτειναν να κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις στηριζόμενοι σε αριθμητικές στρατηγικές ή με κριτήριο την ομοιότητα ως προς την μορφή μεταξύ των διαφόρων εξισώσεων ή ανισώσεων. Μάλιστα, όσοι κατηγοριοποιούσαν με κριτήριο την ομοιότητα ως προς την μορφή ή την χρήση αριθμητικών στρατηγικών χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους επίλυσης όταν επίλυαν εξισώσεις και ανισώσεις. Οι τελευταίοι είχαν χαμηλότερη επίδοση στις ερωτήσεις επίλυσης από τους μαθητές που βασίζονταν συστηματικά σε αλγεβρικές στρατηγικές για να απαντήσουν στις ερωτήσεις επίλυσης και κατηγοριοποίησης.

Κεφάλαιο 1

ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

1.1 Το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα – Επισκόπηση της βιβλιογραφίας

Η αριθμητική και η άλγεβρα μοιάζουν με δύο κόσμους διαφορετικούς (Van Ameron,2003). Η σχολική προσέγγιση των δύο αυτών μαθημάτων οδήγησε σε μια πρακτική διδασκαλίας καταρχήν της αριθμητικής και ακολούθως της άλγεβρας, δημιουργώντας την εντύπωση πως πρόκειται για δύο διαφορετικά μαθήματα (Κυλάφης, 2010). Εξάλλου, οι Lee και Wheeler (1989) έχουν δείξει ότι οι μαθητές λειτουργούν σαν η αριθμητική και η άλγεβρα να είναι δύο κοντινά συστήματα. Ίσως αυτό να οφείλεται όπως αναφέρει και ο Κυλάφης (2010) στην για πολλά χρόνια ερευνητική προσέγγιση των μαθημάτων στα αναπτυξιακά στάδια του Piaget, η οποία οδήγησε στην «κατηγοριοποίηση» των μαθηματικών σε «αριθμητική», «προ-άλγεβρα» και «τυπική άλγεβρα».

Είναι αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι η άλγεβρα είναι ένα θεμελιακό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης και για αυτόν το λόγο οι μαθητές πρέπει να το κατανοήσουν. Στην Ελλάδα, η εισαγωγή στην συμβολική Άλγεβρα πραγματοποιείται στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και κατά την είσοδο των παιδιών στο Γυμνάσιο (Αλιμπινίσης, Αντύπας, Ευσταθόπουλος, Κλαουδάτος, & Παπασταυρίδης, 1987· Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989a·Αλιμπινίσης και συνεργάτες, 1989b). Ωστόσο, όπως αναφέρει και ο Χρήστου (2009) έρευνες που έχουν διεξαχθεί τόσο στην Βρετανία (Hart 1981), όσο και στις ΗΠΑ (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981) δείχνουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση ακόμα και των πιο βασικών εννοιών της άλγεβρας (Kieran, 2006). Για αυτόν το λόγο και η άλγεβρα έχει προβληματίσει τους επιστήμονες της μαθηματικής εκπαίδευσης (Booth, 1984· Filloy & Rojano, 1989· Resnick, 1987· Sfard & Linchevski, 1994· Bednarz & Janvier, 1996· Chiappini & Lemut, 1991·Kirshner, McDonald, Awtry, & Gray, 1991· Lewis & Mayer, 1987).

Παλιότερες έρευνες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν την δομή της άλγεβρας οφείλεται στην τάση τους να μετατρέπουν μαθηματικές εκφράσεις σε εξισώσεις ώστε να καταλήγουν πάντα σε κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα, να δυσκολεύονται να κατανοήσουν και κατά συνέπεια να παρερμηνεύουν τα σύμβολα και τα γράμματα που χρησιμοποιούνται, να μην εφαρμόζουν αλγεβρικές ιδιότητες όταν λύνουν εξισώσεις και στην μη χρήση της άλγεβρας ως εργαλείο για απόδειξη μαθηματικών σχέσεων (Kieran, 1992).

1.1.2 Μαθηματικά σύμβολα

Υπάρχουν πολλά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στη αριθμητική και στην άλγεβρα, όπως είναι για παράδειγμα το σύμβολο της ισότητας “ = ”. Ο τρόπος που ερμηνεύονται αυτά τα σύμβολα μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας διαφέρει σε αρκετά σημεία. Σύμφωνα με την βιβλιογραφία, το σύμβολο της ισότητας είναι δυνατό να ερμηνευτεί ως ‘’το ζητούμενο αποτέλεσμα’’, ως ισοδυναμία ή ως προσδιορισμός για μια έννοια (Kieran, 1992· Cortes, Vergnaud & Kavafian, 1990).

Για πολλούς μαθητές το σύμβολο της ισότητας έχει την σημασία του ‘’υπολόγισε το αποτέλεσμα’’ των όρων που βρίσκονται συνήθως αριστερά του συμβόλου. Αυτή η ερμηνεία για το σύμβολο της ισότητας δίνεται από τους μαθητές κυρίως λόγω της αντίληψης που είναι κυρίαρχη στο Δημοτικό όπου διδάσκονται την αριθμητική. Στην αριθμητική το σύμβολο της ισότητας ερμηνεύεται συχνά με αυτό τον τρόπο καθώς πολλές φορές ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν το αποτέλεσμα διαφόρων πράξεων όπως για παράδειγμα 4+3= αλλά και να λύσουν απλές εξισώσεις της μορφής x+3=9 (Kieran, 1992). Επίσης, αυτή η αντίληψη πολλών μαθητών του δημοτικού ενισχύεται και από την καθημερινή τους εμπειρία με την χρήση υπολογιστών τσέπης. Το αποτέλεσμα των πράξεων που εκτελούν σε τέτοιους υπολογιστές προκύπτει πατώντας πλήκτρο με το σύμβολο της ισότητας. έτσι οι μαθητές αυτοί έχουν δυσκολίες να χειριστούν σχέσεις όπως 7+3=6+4 ή 3x+5=x+17 όπου το ‘=’ έχει τη σημασία της ισοδυναμίας.

Οι μαθητές επηρεαζόμενοι από την προηγούμενη γνώση τους στην αριθμητική ερμηνεύουν το σύμβολο της ισότητας ως εντολή για υπολογισμό αποτελέσματος και μετά κατά την εισαγωγή τους στην άλγεβρα δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι το σύμβολο αυτό αποτελεί μια έκφραση ισοδυναμίας (Kieran, 1992). Πιο συγκεκριμένα στις εξισώσεις

το σύμβολο της ισότητας εκφράζει την ισοδυναμία μεταξύ των όρων που υπάρχουν αριστερά και δεξιά από αυτό, για μια κατάλληλη τιμή της μεταβλητής ή των μεταβλητών που περιέχονται στην εξίσωση. Για παράδειγμα, στην εξίσωση 2x+3=x+5, το αριστερά μέλος είναι ισοδύναμο με το δεξιά όταν η μεταβλητή πάρει την τιμή 2.

Τέλος, κυρίως στην άλγεβρα το σύμβολο της ισότητας σε αρκετές περιπτώσεις χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό ή τον ορισμό μιας έκφρασης. Για παράδειγμα στην συνάρτηση f(x)= $3x^2 - 5x + 8$, το σύμβολο της ισότητας προσδιορίζει την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης f(x) (Λεμονίδης, 1996).

Ο τρόπος ερμηνείας των κοινών συμβόλων της αριθμητικής και της άλγεβρας έχει ιδιαίτερη σημασία κυρίως για τον σημαντικό ρόλο που αυτά παίζουν στην κατανόηση της άλγεβρας αλλά και στην κατάλληλη αντιμετώπισή τους από τους μαθητές ώστε να είναι σε θέση να επιλύουν αλγεβρικά προβλήματα. Όπως έχουν δείξει παλιότερες έρευνες η λανθασμένη ή ελλιπής ερμηνεία των συμβόλων είναι δυνατό να αποτελέσει εμπόδιο στην επιτυχή αντιμετώπιση μαθηματικών θεμάτων, όπως για παράδειγμα η μη επιτυχής επίλυση εξισώσεων από μαθητές Γυμνασίου που ορισμένες φορές οφείλεται στην ισχυρή αντίληψη τους ότι το σύμβολο της ισότητας είναι μια εντολή υπολογισμού ενός αποτελέσματος (Λεμονίδης, 1996).

1.1.3 Τα γράμματα

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα γράμματα ως αναπαράσταση τιμών στην άλγεβρα δυσκολεύουν ιδιαίτερα τους μαθητές. Στην αριθμητική η μόνη χρήση γραμμάτων που γίνεται είναι ως συντομογραφίες μονάδων αντικειμένων, για παράδειγμα 8μ. Ενώ, λοιπόν, στην αριθμητική το 8μ μπορεί να σημαίνει 8 μέτρα, στην άλγεβρα μπορεί να σημαίνει και 8 φορές τον αριθμό των μέτρων. Αυτή η κατάσταση είναι που δημιουργεί στους μαθητές το λεγόμενο κατά τον Booth (1984) «πρόβλημα της έλλειψης αριθμητικής αναφοράς» στην ερμηνεία της σημασίας των γραμμάτων στην άλγεβρα.

1.1.4 Μεταβλητή

Μια από τις πιο σημαντικές έννοιες στην άλγεβρα είναι η έννοια της μεταβλητής. Η διδασκαλία της μεταβλητής ξεκινά στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και κατασκευάζεται σαν έννοια για τους μαθητές μέχρι το Λύκειο. Η χρήση της μεταβλητής στην αριθμητική διαφέρει σε σχέση με την άλγεβρα. Η διαφορετική χρήση της μεταβλητής δημιουργεί στους μαθητές αντίστοιχες αντιλήψεις για την θεώρησή της. Στην αριθμητική η κύρια χρήση της μεταβλητής είναι ως άγνωστος αριθμός σε απλής μορφής εξισώσεων όπως είναι η 3+x =5. Τέτοιου είδους μαθηματικά προβλήματα οδηγούν τους μαθητές να σχηματίσουν την αντίληψη ότι η μεταβλητή εκφράζει ένα άγνωστο αλλά συγκεκριμένο αριθμό. Μεταβλητές επίσης χρησιμοποιούνται σε τύπους που διδάσκονται οι μαθητές στα μαθηματικά ή στην φυσική, όπως για παράδειγμα ο τύπος του εμβαδού ενός τριγώνου που είναι Ε=$\frac{1}{2}$βυ. Σε τέτοιες περιπτώσεις η μεταβλητή εκφράζει κάποιο συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος, αλλά οι μαθητές θεωρούν ότι συμβολίζει ένα συγκεκριμένο μέγεθος η τιμή του οποίου μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Τέλος, οι μεταβλητές εμφανίζονται και σε γενικευμένους κανόνες της αριθμητικής ή αλγεβρικές σχέσεις, όπως είναι η ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Όπως αναφέρει και ο Λεμονίδης (1996) η χρήση της μεταβλητής με διάφορους τρόπους στα πλαίσια της αριθμητικής και της άλγεβρας ωθεί τους μαθητές να σχηματίζουν διαφορετικές αντιλήψεις για τον τρόπο με τον οποίο οφείλουν να ερμηνεύουν την μεταβλητή. Οι αντιλήψεις αυτές συνυπάρχουν ταυτόχρονα ή ανεξάρτητα η μια από την άλλη μέσα σε αντιφατικά συμπλέγματα (Ε.Δεμίρη, Α.Μαρκέτος και Γ.Μπάρμπας,1994). Εξάλλου, σύμφωνα με τον Χρήστου (2009) «*η αρχική γνώση των μαθητών για τους αριθμούς, όπως αυτή έχει οργανωθεί στα πλαίσια της αριθμητικής, με την ιδιαίτερη θέση που επιφυλάσσει για τον φυσικό αριθμό, στέκεται εμπόδιο στη κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής ως σύμβολο πραγματικών αριθμών. κάποιοι μαθητές κατανοούν τις μεταβλητές στα πλαίσια του εναλλακτικού τους πλαισίου για τους αριθμούς, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών, αποδίδοντάς τους ιδιότητες των φυσικών αριθμών, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα συγκεκριμένα λάθη και παρερμηνείες σε διάφορα αλγεβρικά πλαίσια, όπως στην*

κατανόηση των τιμών που μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές».

Το πέρασμα από τον υπολογισμό με απλές αριθμητικές πράξεις αριθμών στον χειρισμό της μεταβλητής έχει ήδη περιγραφεί ως ‘’εννοιολογικό κενό’’ (Herscovics & Linchevski, 1994) ή ‘’cut-point’’ (Filloy & Rojano, 1989) μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας. Οι Herscovics και Linchevski (1994) υποστήριξαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν απλές διαδικασίες μέτρησης ή την αντίστροφη πράξη για να παράγουν ένα αποτέλεσμα σε προβλήματα που περιέχουν ένα άγνωστο, όπως 4+x=7. Οι Filloy και Rojano (1989) υποστήριξαν ότι η αριθμητική σκέψη εξελίσσεται πολύ αργά από συγκεκριμένες διαδικασίες σε περισσότερη αφηρημένη, αλγεβρική σκέψη και μίλησαν για την ύπαρξη ενός cut-point που χωρίζει ένα είδος σκέψης από άλλο (Κυλάφης, 2010). Υποστηρίζουν ότι η επίλυση μιας εξίσωσης με την μεταβλητή να παρουσιάζεται μόνο μια φορά δεν αποτελεί αλγεβρική διαδικασία, από την στιγμή που κάθε στάδιο επίλυσης περιέχει μόνο υπολογισμούς με γνωστούς αριθμούς. Για αυτούς, η πραγματική αλγεβρική διαδικασία επίλυσης με χρήση του αγνώστου είναι απαραίτητη στις εξισώσεις που η μεταβλητή παρουσιάζεται και στα δύο μέλη. Ερμηνεύουν την μεγάλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση εξισώσεων με μεταβλητή και στα δύο μέλη όπως την $\alpha x + \beta = \gamma x + \delta$ με αυτή την διαφορετική εννοιολογική απαίτηση.

Μια δεύτερη ασυνέχεια κατά το πέρασμα από την αριθμητικό τρόπο σκέψης στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης έχει υπάρξει θέμα μεγάλου θεωρητικού διαλόγου. Στο πλαίσιο της γενικευμένης αριθμητικής έχει γίνει διάκριση μεταξύ δύο τρόπων ερμηνείας μιας αλγεβρικής έκφρασης ή εξίσωσης. Ο πρώτος τρόπος ερμηνείας είναι ο ‘’διαδικαστικός’’ που έχει περιγραφεί από την Kieran (1992) και είναι ισοδύναμος με τον ‘’λειτουργικό’’ που έχει περιγραφεί από την Sfard (1991). Ο δεύτερος τρόπος ερμηνείας μιας αλγεβρικής σχέσης είναι ο ‘’κατασκευαστικός’’ που έχει περιγραφεί από την Kieran (1992) και την Sfard (1987) και είναι ισοδύναμος με τον ‘’conceptual’’ (Hiebert & Lefevre, 1986). Για παράδειγμα η μαθηματική έκφραση x+5 μπορεί να ερμηνευτεί ως μια διαδικασία πρόσθεσης του x στον αριθμό 5, αλλά μπορεί επίσης να ερμηνευτεί ως ένα αντικείμενο σε μια μαθηματική κατασκευή όπως για παράδειγμα το γινόμενο (x+5)(ψ+8). Οι εναλλακτικές ερμηνείες αναφέρονται ως ``διαδικασία και αντικείμενο" (Sfard, 1991), ή ``διαδικασία και παραγόμενο" (Tall & Thomas, 1991) ή ``διαδικασία και σκέψη" (Gray & Tall, 1991). Την δυσκολία αυτή της διάκρισης μεταξύ διαδικασίας και αντικειμένου στο πλαίσιο της άλγεβρας οι Matz και Davis την ονομάζουν «process-product dilemma».

1.1.5 Δυσκολίες στις εξισώσεις

Μία από τις βασικότερες έννοιες της Άλγεβρας είναι εκείνη της εξίσωσης. Από τις πολλές δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την μετάβασή τους από την αριθμητική στην άλγεβρα κάποιες αφορούν την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων (Kieran, 1985· Filloy & Rojano, 1989). Από τις δυσκολίες αυτές άλλες ξεπερνιούνται με την πάροδο του χρόνου και άλλες παραμένουν.

Οι εξισώσεις αποτελούν μέρος του προγράμματος σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όλων των χωρών παγκοσμίως. Σύμφωνα με τον Schmidt και συνεργάτες του (2001), κανένα άλλο αντικείμενο των μαθηματικών δεν διδάσκεται τόσο όσο οι εξισώσεις στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι εξισώσεις εισάγονται ήδη από το Δημοτικό, θίγονται ακροθιγώς στην Α΄ Γυμνασίου και διδάσκονται αναλυτικά από την Β΄ Γυμνασίου μέχρι την Γ΄ Λυκείου με διαρκώς αυξανόμενο βάθος και δυσκολία.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την τυπική επίλυση μιας εξίσωσης (Kieran 1992). Πρόσφατα έχουν διατυπωθεί νέες ιδέες για να διευκολύνουν αυτή την πρώτη επαφή με τις εξισώσεις, για παράδειγμα μέσω των συναρτήσεων (Farmaki, Klaoudatos & Verikios, 2005) ή άλλων εναλλακτικών προσεγγίσεων (Pirie & Martin, 1997). Είναι αμφίβολο όμως κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν την έννοια των συμβόλων, των εκφράσεων, των διαδικασιών αλλά τελικά και την ίδια την έννοια της εξίσωσης. Οι περισσότεροι δάσκαλοι και ερευνητές γνωρίζουν ότι η παρουσίαση της άλγεβρας αποκλειστικά ως μελέτης παραστάσεων και εξισώσεων μπορεί να θέσει σοβαρά εμπόδια στην πραγματική μάθηση γιατί οδηγεί σε επιφανειακή διαδικαστική κατανόηση και όχι σε ουσιαστική εννοιολογική κατανόηση (Kieran 1992).

Ένα πρώτο επίπεδο δυσκολίας που συναντούν οι μαθητές είναι να μεταφράσουν ένα πρόβλημα από την καθομιλουμένη στην αλγεβρική γλώσσα. Ένα δεύτερο επίπεδο είναι να επιλύσουν τυπικά την εξίσωση που ενδεχομένως προέκυψε από την μετάφραση του προβλήματος. Τέλος ένα τρίτο επίπεδο είναι να δώσουν μια φυσική ερμηνεία στην απάντηση που βρήκαν, δηλαδή να επανέλθουν στο πραγματικό πρόβλημα. Στο δεύτερο στάδιο οι δυσκολίες προέρχονται κυρίως από το πλήθος των γραμμάτων (αγνώστων ή παραμέτρων) που περιέχει η εξίσωση και από την πολυπλοκότητα των εμφανιζομένων παραστάσεων, όπως είναι οι παρενθέσεις και ύπαρξη ρητών αριθμών. Η σύγχυση επιτείνεται από το γεγονός ότι οι μαθητές συναντούν συχνά παραστάσεις που δεν είναι

εξισώσεις παρόλο που έχουν πολλά επιφανειακά κοινά γνωρίσματα, όπως για παράδειγμα παραστάσεις που πρέπει να απλοποιηθούν ή να παραγοντοποιηθούν.

Οι μαθητές του Γυμνασίου συχνά αντιμετωπίζουν τις εξισώσεις ως αλγόριθμους υπολογισμού, αντίληψη που έχουν σχηματίσει από επίλυση ασκήσεων διαφόρων ειδών στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. Γνωρίζουν να εκτελούν αυτούς τους αλγόριθμους αντικαθιστώντας τιμές στις μεταβλητές και έχουν την τάση να νιώθουν ότι εκτελούν υπολογισμούς για εύρεση του επιθυμητού αποτελέσματος (Stacey & MacGregor, 2000). Στην ίδια έρευνα φάνηκε ότι οι μαθητές έχουν σχηματίσει τρεις κεντρικές αντιλήψεις για το τι είναι μια εξίσωση. Κάποιοι από αυτούς θεωρούν τις εξισώσεις ως ένα αλγόριθμο μέσω του οποίου καταλήγουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα, άλλοι πιστεύουν ότι οι εξισώσεις είναι ένας τρόπος περιγραφής πράξεων που οδηγούν σε κάποιο αποτέλεσμα, ενώ υπάρχουν και κάποιοι μαθητές που έχουν την αντίληψη ότι η εξίσωση αποτελεί μια περιγραφή βασικών σχέσεων. Επίσης, πολλοί μαθητές εφαρμόζουν ‘’τυφλά’’ τον κανόνα ‘’αλλάζω μέλος-αλλάζω πρόσημο’’ όταν επιλύουν εξισώσεις, χωρίς να θεωρούν την εξίσωση που επιλύουν ένα μαθηματικό αντικείμενο (Kieran, 1988, 1989, 1992). Ο Greeno (1982) αναφέρει ότι σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές δεν φαίνεται να γνωρίζουν ότι αν η λύση της εξίσωσης αντικατασταθεί στην θέση της μεταβλητής θα προκύψουν ισοδύναμες τιμές για τα δύο μέλη της εξίσωσης.

1.1.5 Δυσκολίες στις ανισώσεις

Παρά το γεγονός ότι λίγες έρευνες στην διδακτική των μαθηματικών αφορούν τις ανισώσεις, οι έννοιες που έχουν σχέση με αυτές είναι σημαντικές όχι μόνο στο χώρο των μαθηματικών αλλά και στην καθημερινή ζωή κάθε ανθρώπου. Ενώ, το σύνολο των πραγματικών αριθμών χαρακτηρίζεται από σημαντικές ιδιότητες διάταξης και παρά το γεγονός ότι οι ανισώσεις διδάσκονται στις περισσότερες χώρες παγκοσμίως στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η προσοχή που δίνεται και ο βαθμός κατανόησής τους από τους μαθητές είναι μικρός. Εξάλλου, η σύνδεση των ανισώσεων με καταστάσεις της καθημερινής ζωής με στόχο την καλύτερη κατανόησή τους εκ μέρους των μαθητών συμβαίνει μόνο στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όταν μελετώνται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές συναρτήσεων (Ανδρεαδάκης, Κατσαργύρης, Μέτης, Μπρουχούτας, Παπασταυρίδης & Πολύζος, 2008).

Σύμφωνα με την ίδια μελέτη του Schmidt και των συνεργατών του που αναφέρθηκε προηγουμένως οι ανισώσεις δεν συμπεριλήφθησαν στα σημαντικότερα θέματα που διδάσκονται στα σχολεία σε διάφορες χώρες αλλά εντάσσονται σε ενότητες όπως είναι οι εξισώσεις ή οι πραγματικοί αριθμοί. Επίσης, παρά το γεγονός ότι πολλές μελέτες έχουν ως αντικείμενο τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας των εξισώσεων (Kieran, 1992· Kieran & Chalouh, 1993· Wagner & Parker, 1993), ελάχιστες είναι αυτές που έχουν ως αντικείμενο τις ανισώσεις. Για παράδειγμα οι Filloy και Sutherland (1996) στο κεφάλαιο της άλγεβρας του *International Handbook of Mathematics Education* δεν γίνεται καμία αναφορά στις ανισώσεις πρώτου βαθμού. (Vaiyavutjamai & Clements, 2006).

Πρόσφατα έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες διερεύνησης του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις ανισώσεις (Tsamir & Almog, 2001· Tsamir & Bazzini, 2001· Arampatzis, Skiadaresis & Christou, 2007). Η Tsamir και οι συνεργάτες της, στις προαναφερθείσες μελέτες αναφέρουν ότι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης χρησιμοποιούν διαισθητικά ως πρότυπο ένα αλγοριθμικό μοντέλο που στηρίζεται στις εξισώσεις για να επιλύουν ανισώσεις και όταν ερωτώνται για ποιο λόγο το κάνουν αυτό, οι μαθητές αναφέρονται σε ένα ‘’μοντέλο ισορροπίας’’ το οποίο θεωρούν ότι τους επιτρέπει να κάνουν τις ίδιες ενέργειες στα δύο μέλη μιας εξίσωσης ή μιας ανίσωσης. Εξάλλου, πολλοί ερευνητές συμφωνούν στο ότι όταν οι μαθητές επιλύουν μια ανίσωση την αντιμετωπίζουν σαν εξίσωση και πολλές φορές παρά το γεγονός ότι την επιλύουν σωστά αγνοούν ότι έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Μάλιστα, πολλοί από τους μαθητές φαίνεται να αγνοούν τρόπους επαλήθευσης των λύσεων μιας ανίσωσης (Linchevski & Sfard, 1991· Tsamir & Almog, 2001· Tsamir & Bazzini, 2001· Vaiyavutjamai & Clements, 2006).

1.2 Εξισώσεις: Θέματα ορισμού και στρατηγικές επίλυσης

Μια εξίσωση είναι μια μαθηματική δήλωση που βεβαιώνει την ισότητα δύο εκφράσεων και πιο συγκεκριμένα κάθε ισότητα $p(x_1, x_2, \ldots x_n)=0$, όπου το $p(x_1, x_2, \ldots x_k)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού με κ μεταβλητές, όπως για παράδειγμα το $p(x)= x^4 - 3x^2 + 5x + 7$ (κ=1,ν=4) ή το $p(x_1, x_2, x_3)= x_2^6 - 3x_1x_3^3 + 5x_3x_1^{15} - 1$ (κ=3,ν=16).

Τα αρχικά γράμματα της αλφαβήτου όπως τα α, β, γ χρησιμοποιούνται για να δηλώσουμε τις σταθερές που περιλαμβάνονται στην εξίσωση, ενώ τα γράμματα από το τέλος του λατινικού αλφάβητου, όπως το x, y, z χρησιμοποιούνται συνήθως για να

δηλώσουμε τις μεταβλητές της εξίσωσης, μια σύμβαση που υιοθετήθηκε πρώτη φορά από τον Καρτέσιο. Τέλος, το σύμβολο της ισότητας εκφράζει ισοδυναμία μεταξύ των εκφράσεων που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτού.

Μια χρήση των εξισώσεων είναι στις μαθηματικές ταυτότητες, σχέσεις οι οποίες ισχύουν ανεξάρτητα από τις τιμές που είναι δυνατό να λάβουν οι μεταβλητές που περιλαμβάνονται σε αυτές. Για παράδειγμα, για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x ισχύει ότι $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Εντούτοις, κάποιες εξισώσεις είναι δυνατό να επαληθεύονται μόνο για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σε αυτήν την περίπτωση, οι εξισώσεις πρέπει να λυθούν έτσι ώστε να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι επαληθεύουν την ισότητα και αποτελούν τις λύσεις της εξίσωσης. Για παράδειγμα η εξίσωση $x^2 - 4x = 0$, επαληθεύεται μόνο για τις τιμές 0 και 4.

1.2.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού

Εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής θεωρούμε τις ισότητες της μορφής αx=β όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Στα σχολικά μαθηματικά, εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής πολλές φορές απαντούν και στις μορφές αx+β=γ, αx+β=γx και αx+β=γx+δ με α, β, γ, δ πραγματικούς αριθμούς. Η λύση τους ανάγεται στην επίλυση της βασικής μορφής εξισώσεων πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής, της αx=β. Η μεταβλητή x λαμβάνεται ως το σύμβολο του γενικευμένου αριθμού, που δεν έχει μια συγκεκριμένη αξία, αλλά παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή των ακέραιων αριθμών. Βέβαια, η εξίσωση αx=β παρουσιάζεται με διαφορετικό τρόπο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (και συγκεκριμένα στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού στο πλαίσιο της αριθμητικής) από ότι στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (όπου η αx=β παρουσιάζεται στο πλαίσιο της άλγεβρας).

Στο πλαίσιο της αριθμητικής, οι τιμές των α και β στην εξίσωση αx=β είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί και μάλιστα τις περισσότερες φορές και θετικοί, δηλαδή φυσικοί αριθμοί. Ειδικότερα, το α είναι πάντα διάφορο του 0 και συνήθως ο αριθμός 1, ενώ ο αριθμός β βρίσκεται τις περισσότερες φορές στο ίδιο μέλος με αυτό στο οποίο βρίσκεται η μεταβλητή. Έτσι, τις περισσότερες φορές στην αριθμητική ως εξίσωση πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής θεωρείται η εξίσωση της μορφής x+β=0 ή x+β=γ. Στην αριθμητική ο λύτης της αx=β αναζητά ακέραιες λύσεις που είναι δυνατό να πάρει η μεταβλητή x και για αυτό το λόγο το α δεν παίρνει ποτέ την τιμή 0, καθώς τότε η εξίσωση θα έχει λύση το

σύνολο των πραγματικών αριθμών ή το κενό σύνολο. Εξάλλου, για τον ίδιο λόγο, η εξίσωση 2x+7=0 δεν αληθεύει στην αριθμητική, καθώς ο αριθμός -7/2 δεν είναι ακέραιος. Επιπρόσθετα, στις εξισώσεις που συνήθως διαπραγματεύονται οι μαθητές, η μεταβλητή x εμφανίζεται μια ή πιο σπάνια δύο φορές, πάντοτε όμως στο ένα μόνο μέλος της ισότητας. Οι εξισώσεις $x=10\cdot 3$, x+3=9 και 2+x+3=8 αποτελούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα εξισώσεων που απαντούν στην αριθμητική.

Στην άλγεβρα που διδάσκεται στις σχολικές τάξεις οι τιμές που παίρνουν οι α και β στην εξίσωση αx=β είναι από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ η μεταβλητή x εμφανίζεται συχνά παραπάνω από μια φορά - και όχι μόνο στο ένα μέλος της ισότητας αλλά και στα δύο. Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στην αριθμητική, το ζητούμενο εδώ για την εξίσωση αx=β είναι οι πραγματικές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x και λύνεται ως εξής: Αν α=0 και β=0 η μεταβλητή x είναι δυνατό να λάβει τιμές από όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ενώ αν α=0 και $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση χαρακτηρίζεται ως αδύνατη και δεν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός που να την επαληθεύει. Τέλος, αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον πραγματικό αριθμό –β/α. Εξάλλου, σε αντίθεση με την αριθμητική, η εξίσωση 2x+7=0 έχει λύση όταν επιλύεται στο πλαίσιο της άλγεβρας καθώς ο πραγματικός αριθμός -7/2 την επαληθεύει.

1.2.2 Στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων

Πολλές έρευνες που έγιναν στο παρελθόν είχαν ως αντικείμενο μελέτης τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις πρώτου βαθμού. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι μαθητές από την ηλικία των 10 έως και 14 ετών συχνά επιλύουν τις εξισώσεις με μεθόδους που δε διδάσκονται στο σχολείο (Kieran, 1992). Εξάλλου, από την παραπάνω περιγραφή των εξισώσεων πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής που διαπραγματεύονται στην αριθμητική, καθίσταται σαφές ότι πρόκειται για μαθηματικά προβλήματα τα οποία είναι πιθανό να λυθούν και με χρήση άτυπων μεθόδων εκτέλεσης μαθηματικών υπολογισμών που υποστηρίζονται από την ανθρώπινη καθημερινή λογική και έχουν ελάχιστη σχέση με τις διαδικασίες επίλυσης που διδάσκονται στο σχολείο.

Πιο συγκεκριμένα, οι στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων στις οποίες καταφεύγουν ως επί το πλείστον οι μαθητές επηρεαζόμενοι σε μεγάλο βαθμό από την καθημερινή τους εμπειρία ή την πρώιμη αριθμητική γνώση τους είναι οι εξής (Kieran, 1992):

Πίνακας 1

Αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων

	Στρατηγική επίλυσης	**Εξίσωση**	**Παρουσίαση σκέψης-τρόπου επίλυσης**
α)	χρήση γνωστών πράξεων	x+4=10	Γνωρίζω ότι 6+4=10, άρα x=6
β)	τεχνικές μέτρησης	x+4=10	Μετρώ από το 4 μέχρι το 10, οπότε x=6
γ)	cover-up	2x+10=7x	Επειδή 7x=2x+5x, συμπεραίνω ότι 10=5x, επομένως x=2
δ)	«δουλεύω προς τα πίσω»	2x+4=10	Το «αποτέλεσμα» δεξιά είναι το 10, οπότε αν μειωθεί κατά 4 προκύπτει 6, το οποίο με την σειρά του προκύπτει αν πολλαπλασιαστεί με 2 ο αριθμός x=3
ε)	δοκιμές αριθμών και επαλήθευση	2x+4=10	Αντικαθιστώ την μεταβλητή με διάφορες τιμές μέχρι να διαπιστώσω ότι η x=3 επαληθεύει την εξίσωση

Εξάλλου, στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, στο πλαίσιο της αριθμητικής οι μαθητές διδάσκονται να λύνουν τις εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής χρησιμοποιώντας τις στρατηγικές (γ), (δ) και (ε) [Πίνακας 1] προκειμένου να λειτουργήσουν αυτές ως ένας «ενισχυτής των διεργασιών της σκέψης» των μαθηματικών και της λογικής (Bruner, 1972). Η αποκλειστική, όμως, χρήση αυτών των μεθόδων για επίλυση εξισώσεων δεν βοηθά τον μαθητή να γενικεύει τα συμπεράσματά του (Petitto, 1979) αλλά και να συνειδητοποιεί τον ρόλο του συμβόλου της ισότητας ως προς την ισοδυναμία. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές στην ηλικία των δέκα έως δώδεκα ετών που χρησιμοποιούν τρόπους επίλυσης εξισώσεων, όπως αυτούς που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1, συνεχίζουν και τα επόμενα χρόνια να θεωρούν το σύμβολο της ισότητας ως μια εντολή υπολογισμού την ίδια στιγμή που αντιμετωπίζουν τις εξισώσεις ως μια διαδικασία με φορά κίνησης από αριστερά προς τα δεξιά. Η πλειοψηφία των μαθητών συνήθως χρησιμοποιεί την στρατηγική της δοκιμής πραγματικών αριθμών και της επαλήθευσης της εξίσωσης από αυτούς, ενώ έρευνα της Kieran (1988) έδειξε ότι οι μαθητές που

χρησιμοποιούν αυτό τον τρόπο επίλυσης είναι πιο πιθανό μελλοντικά να κατανοήσουν τον ρόλο της ισοδυναμίας του συμβόλου της ισότητας και την ισορροπία που υπάρχει σε κάθε εξίσωση ανάμεσα στα δύο μέλη της.

Στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, οι μαθητές διδάσκονται τις πρώτες έννοιες της άλγεβρας και διαπραγματεύονται για πρώτη φορά εξισώσεις με μεταβλητή και στα δύο μέλη της σχέσης ή με λύσεις και μη ακέραιους αριθμούς. Γι' αυτό τον λόγο, διδάσκονται και καινούριες στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων κατάλληλες για την επίλυση αυτών που συναντούν πλέον στο πλαίσιο της άλγεβρας (Πίνακας 2).

Πίνακας 2

Αλγεβρικές στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων

	Στρατηγική επίλυσης	**Εξίσωση**	**Τρόπος σκέψης – επίλυσης**
α)	κάνω την ίδια πράξη και στα δύο μέλη	3x+4=10	Αφαιρώ το 4 και στα δύο μέλη, οπότε προκύπτει 3x=6. Διαιρώ με 3 και τα δύο μέλη, άρα x=2
β)	αλλαγή μέλους-αλλαγή πρόσημου	3x+4=10-3x	«Μαζεύω» τις μεταβλητές αριστερά και τους αριθμούς δεξιά, αλλάζοντας πρόσημο σε όποιον όρο της εξίσωσης αλλάξω μέλος. Προκύπτει 6x=6, οπότε διαιρώντας με 6 έχω την λύση x=1

Οι περισσότεροι καθηγητές θεωρούν αυτούς τους δύο τρόπους επίλυσης εξισώσεων παραπλήσιους και ότι ο τρόπος «αλλαγή μέλους-αλλαγή πρόσημου» οδηγεί συντομότερα στην εύρεση της λύσης. Στην πραγματικότητα, όμως, οι δύο τρόποι επίλυσης γίνονται αντιληπτοί διαφορετικά από μαθητές οι οποίοι διαπραγματεύονται για πρώτη φορά αλγεβρικές εξισώσεις (Kieran 1988,1989). Οι μαθητές που εφαρμόζουν την μέθοδο επίλυσης «κάνω την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της εξίσωσης» συνειδητοποιούν πιο εύκολα την συμμετρία μιας εξίσωσης, κάτι το οποίο δεν ισχύει για αυτούς που επιλέγουν ως τρόπο λύσης αλγεβρικών εξισώσεων την «αλλαγή μέλους-αλλαγή πρόσημου». Έχει φανεί ότι οι μαθητές που αλλάζουν μέλος στους όρους της εξίσωσης, αλλάζοντας συγχρόνως το πρόσημό τους, δεν αντιμετωπίζουν συνήθως την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο, παρά εφαρμόζουν τυφλά την μέθοδο την οποία έχουν διδαχτεί (Kieran, 1992).

1.3 Ανισώσεις

Ως ανισώσεις στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται οι ανισοτικές σχέσεις της μορφής α<β. Σε καθημερινές καταστάσεις συναντούμε πιο συχνά τέτοιες ανισοτικές σχέσεις όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και οι οποίες υποδηλώνουν ότι ο αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον α, όπως για παράδειγμα 3<7 ή $\frac{3}{5} < 10$. Στην σχολική βιβλιογραφία συνήθως ως ανισώσεις αναφέρονται οι ανισοτικές σχέσεις της μορφής $p(x_1, x_2, \ldots x_n)<0$, όπου το $p(x_1, x_2, \ldots x_k)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού με κ μεταβλητές.

1.3.1 Ανισώσεις πρώτου βαθμού

Στα σχολικά μαθηματικά ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής θεωρούμε τις ισότητες της μορφής αx<β όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Οι ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής πολλές φορές απαντούν και στις μορφές αx+β<γ, αx+β<γx και αx+β<γx+δ με α, β, γ, δ πραγματικούς αριθμούς. Η λύση τους ανάγεται στην επίλυση της βασικής μορφής εξισώσεων πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής, της αx<β. Η μεταβλητή x λαμβάνεται ως το σύμβολο του γενικευμένου αριθμού, που δεν έχει μια συγκεκριμένη αξία, αλλά παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή των ακέραιων αριθμών. Η ανίσωση αx<β διδάσκεται για πρώτη φορά στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα πλαίσια της άλγεβρας.

Στο πλαίσιο της αριθμητικής, οι μαθητές διδάσκονται ανισοτικές σχέσεις της μορφής α<β, με α,β πραγματικούς αριθμούς με μοναδικό σκοπό την σύγκριση αριθμών. Αντίθετα με ότι συμβαίνει με τις εξισώσεις στο δημοτικό δεν διδάσκονται ανισώσεις που να περιέχουν μεταβλητή. Αντίθετα, στην δεύτερη και τρίτη τάξη του Γυμνασίου στα πλαίσια της άλγεβρας οι μαθητές διδάσκονται την επίλυση ανισώσεων μιας μεταβλητής πρώτου βαθμού. Το ζητούμενο για την ανίσωση αx<β είναι οι πραγματικές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x και λύνεται ως εξής: Αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει ως λύση το σύνολο των πραγματικών αριθμών με άκρα τον αριθμό β/α και το $+\infty$ ή το $-\infty$ ανάλογα με την φορά της ανισότητας. Εξάλλου, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στις εξισώσεις, η διαίρεση μιας ανίσωσης κατά μέλη με αρνητικό αριθμό συνοδεύεται και από αλλαγή της φοράς της ανισότητας. Αν α=0 και $\beta \neq 0$ τότε προκύπτει η έκφραση 0x<β η οποία αν β>0 επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό ενώ αν β<0 δεν υπάρχουν λύσεις

για την ανίσωση. Τέλος αν α=0 και β=0 τότε η εξίσωση χαρακτηρίζεται ως αδύνατη και δεν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός που να την επαληθεύει.

1.3.2 Στρατηγικές επίλυσης ανισώσεων

Οι λιγοστές έρευνες που έχουν γίνει όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο επιλύουν οι μαθητές ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής έχουν δείξει ότι χρησιμοποιούν ακριβώς τις ίδιες αριθμητικές και αλγεβρικές μεθόδους που χρησιμοποιούν και για την επίλυση εξισώσεων [Πίνακες 1 και 2] γεγονός που όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω τους ωθεί σε λανθασμένες απαντήσεις.

1.4 Αριθμητικές και αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις

Στην παρούσα μελέτη ονομάζουμε «αριθμητικές» τις εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής στις οποίες η μεταβλητή παρουσιάζεται μόνο στο ένα μέλος της ισότητας ή της ανισοτικής σχέσης αντίστοιχα. «Αλγεβρικές» ονομάζουμε τις εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής στις οποίες η μεταβλητή παρουσιάζεται και στα δύο μέλη της ισότητας ή της ανισοτικής σχέσης αντίστοιχα (Filloy & Rojano, 1989). Επίσης, «αλγεβρικές» θεωρούμε και τις εξισώσεις και ανισώσεις εκείνες οι οποίες ενώ έχουν μεταβλητή στο ένα μέλος περιέχουν και τουλάχιστον δύο κλασματικούς αριθμούς με διαφορετικούς μεταξύ τους παρανομαστές.

1.4.1. Αριθμητικός - αλγεβρικός τρόπος επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων

Ονομάζουμε τους πέντε τρόπους επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής του Πίνακα 1 ‘’αριθμητικούς’’ ενώ τους δύο τρόπους επίλυσης εξισώσεων του Πίνακα 2 ως ‘’αλγεβρικούς’’.

Θεωρούμε ότι οι αριθμητικοί τρόποι επίλυσης, με αντιπροσωπευτικότερο αυτόν της δοκιμής και επαλήθευσης πραγματικών αριθμών [Πίνακας 1], δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να επιλύουν χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες αριθμητικές εξισώσεις. Αντιθέτως, θεωρούμε ότι οι αλγεβρικοί τρόποι επίλυσης [Πίνακας 2] ενδείκνυνται για την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων με μεταβλητή και στα δύο μέλη της ισότητας ή με συντελεστές ρητούς αριθμούς, ενώ ωθούν τους μαθητές να μην στηρίζονται μονάχα στη διαίσθησή

τους, αλλά και να αντιμετωπίζουν την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο παρά ως μια διαδικασία εκτέλεσης πράξεων.

1.5 Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής

Ο Thomas Kuhn (1970) ήταν αυτός που καθιέρωσε τον όρο «εννοιολογική αλλαγή». Όπως αναφέρει η Βοσνιάδου (2007), με τον όρο αυτό ήθελε να δηλώσει ότι στις επιστημονικές θεωρίες το νόημα των εννοιών μπορεί να μεταβάλλεται, όποτε αλλάζει και η θεωρία. Η λογική του στηρίζεται στο γεγονός ότι υπάρχουν θεωρητικά πλαίσια μέσα στα οποία εντάσσονται έννοιες και διαμέσου των οποίων λαμβάνουν το νόημά τους οι έννοιες αυτές.

Υπάρχουν διάφορες απόψεις για το πώς επιτυγχάνεται η εννοιολογική αλλαγή (Chi, 1992). Στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε με μια συγκεκριμένη προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής των Βοσνιάδου, Βαμβακούσση & Σκοπελίτη (2008), σύμφωνα με την οποία κάθε φορά που αλλάζει το θεωρητικό πλαίσιο, αλλάζει και το νόημα των εννοιών που εντάσσονται σε αυτό και βρίσκεται σε σχέση αλληλεξάρτησης με αυτό.

Σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό, προκειμένου να κατανοήσει μια νέα έννοια, ο μαθητής χρησιμοποιεί τις προϋπάρχουσες γνώσεις του. Μέσω αυτής της δράσης του μαθητή, επιτυγχάνεται η μάθηση και κατανόηση της νέας έννοιας. Οι αρχικές γνώσεις αποτελούν την βάση πάνω στην οποία ερμηνεύεται κάθε νέα πληροφορία που αφομοιώνεται στην προϋπάρχουσα γνωστική δομή (Vosniadou, 1999· 2001). Σύμφωνα με τον Χρήστου (2009), όταν συγκρούεται η νέα πληροφορία με την αρχική θεωρία των μαθητών, για να επέλθει μάθηση απαιτείται αναδιοργάνωση του ισχύοντος εννοιολογικού πλαισίου, που χαρακτηρίζεται ως αλλαγή θεωρίας. Η διαδικασία αυτή, που περιγράφεται ως εννοιολογική αλλαγή, είναι μια αργή διαδικασία που απαιτεί αλλαγές σε μια σειρά από έννοιες και σχέσεις μεταξύ τους, που συγκροτούν το ισχύον εννοιολογικό πλαίσιο (Smith, Solomon & Carey, 2005· Vosniadou, 1999· Vosniadou & συνεργάτες, 2007· Vosniadou & συνεργάτες, 2008).

Όπως στη φυσική, έτσι και στα μαθηματικά οι μαθητές διδάσκονται μη διαισθητικές έννοιες που συχνά έρχονται σε σύγκρουση με έννοιες που είχαν διδαχθεί συστηματικά στο σχολείο νωρίτερα ή με απόψεις που έχουν σχηματίσει από τις εμπειρίες της καθημερινής τους ζωής (π.χ. άρρητοι μετά από τους πραγματικούς). Όπως αναφέρει ο

Χρήστου (2009), χαρακτηριστικό παράδειγμα από το πεδίο των μαθηματικών αποτελεί η θεώρηση των ρητών αριθμών από τους μαθητές ως φυσικών. Οι μαθητές μικρότερης ηλικίας διδάσκονται στις πρώτες τάξεις του δημοτικού στο πλαίσιο της αριθμητικής μόνο τους φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς, η έννοια του φυσικού αριθμού όπως έχει γίνει κατανοητή στους μαθητές από τις καθημερινές εμπειρίες τους επιβεβαιώνεται από την διδασκαλία στο σχολείο. Στην ηλικία περίπου των οκτώ ετών, οι περισσότεροι μαθητές έχουν σχηματίσει μια ισχυρή άποψη για την έννοια του αριθμού, που βασίζεται στην μέτρηση και εμπεριέχει όλα τα βασικά χαρακτηριστικά του φυσικού αριθμού. Αυτή η θεώρηση του αριθμού ως φυσικού αριθμού λειτουργεί αργότερα ως εμπόδιο στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του ρητού αριθμού από τους μαθητές, το οποίο για να ξεπεραστεί απαιτεί μια ανακατασκευή της αρχικής θεώρησης της έννοιας του αριθμού (Χρήστου, 2009).

Εξάλλου, όπως αναφέρουν οι Βοσνιάδου & συνεργάτες (2007), το γεγονός ότι οι μαθηματικές έννοιες περιλαμβάνονται τόσο σε συστήματα καθημερινών εμπειριών όσο και σε επιστημονικά συστήματα δημιουργεί την μεγάλη αυτή σύγχυση και δυσκολία στους μαθητές. Οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί ότι τα μαθηματικά λειτουργούν με διαφορετικά επεξηγηματικά πλαίσια στην καθημερινότητα και στον χώρο της επιστήμης. Έτσι οδηγούνται σε λανθασμένες μεθόδους, μιας και εντάσσουν τις υπάρχουσες γνωστές σε αυτούς μαθηματικές γνωστικές πληροφορίες των προσωπικών τους εμπειριών στους σύνθετους επιστημονικούς μηχανισμούς.

Κατά συνέπεια, αυτό που γίνεται αντιληπτό μέσα από όλη αυτήν την προσέγγιση τόσο της έννοιας της «εννοιολογικής αλλαγής», όσο και των δυσκολιών που υπάρχουν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών σε επιστημονικό επίπεδο είναι ότι τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν είδη μάθησης με εννοιολογική αλλαγή. Αυτό είναι δυνατό επιτευχθεί μέσα από την συστηματική διδασκαλία (Inagaki & Hatano, 2002). Από τη στιγμή που κατά την διδασκαλία των μαθηματικών η εισαγωγή μιας γνώσης είναι δυνατό να συγκρούεται με τις υπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις όπως αυτές διαμορφώθηκαν είτε μέσα από την εμπειρία είτε μέσα από την διδασκαλία της αριθμητικής, τότε εκείνο που πρέπει να γίνει είναι να διαταραχθεί η συνοχή της προϋπάρχουσας γνώσης, ώστε να καλλιεργηθεί πρόσφορο έδαφος για να αναπτυχθεί η νέα γνώση.

Στην παρούσα μελέτη, θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία πλαισίου για την εννοιολογική αλλαγή για να προβλέψουμε και να εξηγήσουμε τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές όταν επιλύουν ή κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις.

1.6 Σκοποί και υποθέσεις της παρούσης έρευνας

Προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις στηριζόμενοι στην πρώιμη αριθμητική γνώση που μπορεί να έχουν αποκτήσει από το σχολείο ή από την καθημερινή τους εμπειρία (Kieran, 1992· Herscovics & Linchevski, 1994· Sfard, 1991· Wagner & Parker, 1993). Όταν, όμως, οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν εξισώσεις στο πλαίσιο της άλγεβρας συναντούν εμπόδια που οφείλονται στην θεώρηση του αριθμού ως φυσικού (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004· 2007· Χρήστου, 2009), στην ύπαρξη μεταβλητών και στα δύο μέλη της εξίσωσης (Filloy & Rojano, 1989), ή στην ερμηνεία που αποδίδουν στα σύμβολα (Kieran, 1992· Λεμονίδης, 1996). Ενώ οι γνώσεις αυτές επαρκούν για την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων, έρχονται σε σύγκρουση με μεθόδους επίλυσης εξισώσεων που διδάσκονται στα πλαίσια της άλγεβρας (Kieran, 1992· Λεμονίδης, 1996). Μελετώντας λοιπόν την βιβλιογραφία, διαπιστώνουμε ότι πολλοί ερευνητές έχουν ισχυριστεί στο παρελθόν ότι οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών γύρω από την αριθμητική επηρεάζουν την κατανόηση νέων εννοιών και την επιτυχή αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων στα πλαίσια της άλγεβρας.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, εστιάσαμε στις μεθόδους επίλυσης που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την αντιμετώπιση εξισώσεων και ανισώσεων και σχεδιάσαμε μια μελέτη για να ελέγξουμε πιο συστηματικά αν οι μαθητές στηρίζονται στις αριθμητικές τους γνώσεις για να επιλύουν εξισώσεις. Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, υποθέσαμε ότι οι μαθητές θα μπορούν να επιλύουν εξισώσεις οι οποίες αντιμετωπίζονται εύκολα με αριθμητικές μεθόδους. Θα συναντούν όμως εμπόδια στην επίλυση εξισώσεων για την επίλυση των οποίων απαιτείται εφαρμογή αλγεβρικών ιδιοτήτων. Σε τέτοιου είδους εξισώσεις, όπως αναφέραμε και προηγουμένως η μεταβλητή εμφανίζεται και στα δύο μέλη της σχέσης, οπότε για την επίλυσή τους δεν επαρκεί η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων, όπως είναι η μέθοδος της αντικατάστασης. Έτσι, θεωρήσαμε ότι η πρώιμη αριθμητική γνώση των μαθητών θα γεννά εμπόδια κατά την

επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων και ανισώσεων, καθώς αυτές δύσκολα λύνονται με αριθμητικές μεθόδους στις οποίες καταφεύγουν συνήθως οι μαθητές.

Παρά το γεγονός ότι κατά το παρελθόν πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την κατανόηση και τις μεθόδους επίλυσης των εξισώσεων πρώτου βαθμού από τους μαθητές (Kieran, 1992· Kieran &Chalouh, 1993· Wagner & Parker, 1993) αλλά και τον τρόπο διδασκαλίας τους και εναλλακτικών προτάσεων για αυτή (Farmaki, Klaoudatos & Verikios, 2005· Pirie & Martin, 1997), λίγες έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί με αντικείμενο την κατανόηση των ανισώσεων πρώτου βαθμού από τους μαθητές (Bazzini & Tsamir, 2004· Tsamir & Almog, 2001· Vaiyavutjamai & Clements, 2006· Arampatzis, Skiadaresis & Christou, 2007). Σύμφωνα με αυτές οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα αλγοριθμικό μοντέλο επίλυσης ανισώσεων που στηρίζεται στην επίλυση εξισώσεων (Bazzini & Tsamir, 2004· Tsamir & Almog, 2001), ενώ συναντούν δυσκολίες στην επίλυση ανισώσεων και στο να περιγράψουν το σύνολο λύσεων τους (Vaiyavutjamai & Clements, 2006· Arampatzis, Skiadaresis & Christou, 2007).

Με βάση τα παραπάνω, προχωρώντας στο σχεδιασμό της έρευνας θελήσαμε να ελέγξουμε αν όντως οι μαθητές βασίζονται στις προηγούμενες γνώσεις τους γύρω από την επίλυση εξισώσεων για την επίλυση ανισώσεων. Υποθέσαμε ότι οι μαθητές θα επιλύουν με επιτυχία εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής, αλλά θα δυσκολεύονται να επιλύσουν αντίστοιχης μορφής ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής, καθώς θα χρησιμοποιούν τις ίδιες μεθόδους με τις οποίες επιλύουν εξισώσεις.

Επίσης, επιχειρώντας ένα περαιτέρω βήμα και κατ' αντιστοιχία με την υπόθεσή μας ότι οι μαθητές στηρίζονται στις γνώσεις τους γύρω από την επίλυση εξισώσεων στο πλαίσιο της αριθμητικής για να επιλύουν αλγεβρικές εξισώσεις, υποθέσαμε ότι οι μαθητές θα συναντούν μεγαλύτερα εμπόδια κατά την επίλυση αλγεβρικών παρά αριθμητικών ανισώσεων. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αναμέναμε ότι το προϋπάρχον εννοιολογικό πλαίσιο για την επίλυση εξισώσεων, που είναι οργανωμένο στα πλαίσια της αριθμητικής, θα εμπόδιζε τους μαθητές να επιλύουν ανισώσεις που απαιτούν εφαρμογή αλγεβρικών ιδιοτήτων παρά αριθμητικών.

Η εννοιολογική αλλαγή είναι μια δύσκολη διαδικασία που δε γίνεται από τη μια στιγμή στην άλλη, αλλά απαιτεί χρόνο και συντελείται σταδιακά (Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007· Vlassis, 2004· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Σύμφωνα με τις Chi (1992) και Βοσνιάδου και συνεργάτες (2008), μέσα από αλλαγές στην κατηγοριοποίηση επιτελούνται και οντολογικές αλλαγές, κατά συνέπεια η εννοιολογική

αλλαγή χαρακτηρίζεται από αλλαγές σε κατηγοριοποιήσεις. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι έννοιες της δύναμης και του αριθμού. Υπάρχουν άνθρωποι που ισχυρίζονται ότι η δύναμη είναι το χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου, ενώ εκείνοι που έχουν κατανοήσει από την επιστημονική σκοπιά την έννοια ισχυρίζονται ότι είναι αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων. Εξάλλου, όπως προαναφέραμε πολλοί είναι αυτοί που θεωρούν και αντιμετωπίζουν τον αριθμό μόνο ως φυσικό αριθμό, σε αντίθεση με άλλους που θεωρούν ότι ένας αριθμός μπορεί να λάβει τιμές από όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Με βάση τα παραπάνω, θεωρήσαμε ότι ο τρόπος κατηγοριοποίησης των εξισώσεων και ανισώσεων που επιλέγει κάθε μαθητής φανερώνει το αν βασίζεται στην πρώιμη αριθμητική του γνώση ή σε εφαρμογή αλγεβρικών ιδιοτήτων. Τέλος, υποθέσαμε ότι ο τρόπος που οι μαθητές κατηγοριοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις θα σχετίζεται με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν και για την επίλυση αυτών. Πιο συγκεκριμένα, αναμέναμε ότι οι μαθητές που βασίζονται στην πρώιμη αριθμητική τους γνώση για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, θα έκαναν το ίδιο για να κατηγοριοποιήσουν ισοδύναμες εξισώσεις και ανισώσεις, ανεξαρτήτως του εάν αυτές είναι αριθμητικές ή αλγεβρικές. Αντιστοίχως, αναμέναμε σύμφωνα με την υπόθεση μας οι μαθητές που επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις στηριζόμενοι σε αλγεβρικές μεθόδους να βασίζονται σε αυτές και για την κατηγοριοποίηση εξισώσεων και ανισώσεων.

Κεφάλαιο 2

Μεθοδολογία

2.1 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 81 Έλληνες μαθητές και μαθήτριες από έξι δημόσια σχολεία της Αθήνας. Οι μαθητές παρακολουθούσαν την Γ' Γυμνασίου, ήταν μέσης ηλικίας 14,3 ετών και είχαν διδαχθεί τον τρόπο επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων και αριθμητικών ή αλγεβρικών ανισώσεων για πρώτη φορά στη Β' Γυμνασίου. Η επιλογή μαθητών της Γ' Γυμνασίου έγινε επειδή το βασικό αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο μάθημα των μαθηματικών σε αυτήν την τάξη είναι η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Το δείγμα αποτελούταν από 38 κορίτσια και 43 αγόρια.

2.2 Υλικά

Σχεδιάσαμε τρία ερωτηματολόγια: το ερωτηματολόγιο επίλυσης εξισώσεων ΕΡ/Αα, το ερωτηματολόγιο επίλυσης ανισώσεων ΕΡ/Αβ και το ερωτηματολόγιο κατηγοριοποίησης εξισώσεων και ανισώσεων ΕΡ/Β.

<u>Ερωτηματολόγια επίλυσης</u>

Στο ερωτηματολόγιο επίλυσης εξισώσεων ΕΡ/Αα [Πίνακας 3], ζητήσαμε από τους μαθητές να λύσουν δεκατέσσερις εξισώσεις από τις οποίες οι οκτώ ήταν αριθμητικές και οι έξι αλγεβρικές. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι αριθμητικές εξισώσεις είχαν μεταβλητές μόνο στο πρώτο μέλος της σχέσης και μπορούσαν να λυθούν εύκολα με αριθμητικές μεθόδους, ιδιαίτερα με την μέθοδο της αντικατάστασης της μεταβλητής με ακέραιους αριθμούς [Πίνακας 1]. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο πρώτες εξισώσεις ήταν χαρακτηριστικής ευκολίας, ενώ στις δύο επόμενες εμφανιζόταν η μεταβλητή δύο φορές στην μια πλευρά της εξίσωσης. Η πέμπτη εξίσωση είχε ως λύση τον πραγματικό αριθμό 0, ενώ στην έκτη εξίσωση ο συντελεστής της μεταβλητής ήταν αρνητικός αριθμός. Τέλος, οι δύο τελευταίες αριθμητικές εξισώσεις περιείχαν και κλασματικούς αριθμούς. Η επιλογή αυτών των οκτώ αριθμητικών εξισώσεων [Πίνακας 3] έγινε με σκοπό να περιέχονται στο ερωτηματολόγιο όλες οι συνήθεις περιπτώσεις αριθμητικών εξισώσεων που συναντούν οι

μαθητές στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και στις τάξεις του Γυμνασίου και να μπορέσουμε να διαπιστώσουμε αν όντως οι μαθητές τις επιλύουν με μεγάλη επιτυχία.

Πίνακας 3
Ερωτηματολόγιο επίλυσης εξισώσεων **(ΕΡ/Αα)**

Για ποιες τιμές του x ισχύουν οι παρακάτω ισότητες;

E1	5x=10
E2	4=2x
E3	4x+2+3x=9
E4	- 8x-2x-3=7
E5	2x+4+2x=4
E6	4+3x-5x=-10
E7	$\frac{x}{5}=3$
E8	$\frac{x}{2}-\frac{11}{2}=0$
E9	5x+2=-6-3x
E10	x+2=2x+1
E11	-5x-7=-5x+10
E12	x+4=2x+4
E13	$\frac{x}{5}=\frac{3}{9}$
E14	$\frac{x}{2}-\frac{10}{3}=0$

Το κύριο χαρακτηριστικό των έξι αλγεβρικών εξισώσεων ήταν ότι υπήρχαν μεταβλητές και στα δύο μέλη της σχέσης. Επιπλέον, κάποιες από αυτές είτε δεν είχαν ως λύση κάποιο πραγματικό αριθμό είτε είχαν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Κοινό χαρακτηριστικό των αλγεβρικών εξισώσεων ήταν ότι η αντικατάσταση της μεταβλητής με ακέραιο αριθμό δεν οδηγούσε άμεσα και απρόσκοπτα στην εύρεση λύσης [Πίνακας 5]. Οι δύο πρώτες αλγεβρικές εξισώσεις [εξισώσεις 9 & 10, Πίνακες 3 & 5] ήταν εξισώσεις με την μεταβλητή να εμφανίζεται και στα δύο μέλη και είχαν ως λύση ακέραιο αριθμό. Οι δύο

επόμενες εξισώσεις είχαν ως λύση το κενό σύνολο (η πρώτη) και το σύνολο των πραγματικών αριθμών (η δεύτερη - εξισώσεις 11 & 12, Πίνακες 3 & 5).

Πίνακας 4
Ερωτηματολόγιο επίλυσης ανισώσεων **(ΕΡ/Αβ)**

Για ποιες τιμές του x ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες;

Av1	$6x<18$
Av2	$12>4x$
Av3	$x+2+3x<9$
Av4	$5x-3x+2<-8$
Av5	$2x+7+2x<7$
Av6	$-8x-2x-3<7$
Av7	$\frac{x}{7}<4$
Av8	$\frac{x}{2}-\frac{7}{2}<0$
Av9	$4x+2<7+3x$
Av10	$5x+4<12-3x$
Av11	$-8x+4>-8x+2$
Av12	$2x+5<2x+5$
Av13	$\frac{x}{7}<\frac{4}{3}$
Av14	$\frac{x}{2}-\frac{18}{4}<0$

Τέλος, η πέμπτη και έκτη αλγεβρική εξίσωση του ΕΡ/Αα (εξισώσεις 13 & 14, Πίνακες 3 & 5) περιείχαν κλασματικούς αριθμούς με διαφορετικό παρανομαστή και στα δύο μέλη. Η επιλογή των συγκεκριμένων εξισώσεων έγινε με σκοπό να ελέγξουμε τον τρόπο που επιλύουν οι μαθητές αλγεβρικές εξισώσεις με τον άγνωστο και στα δύο μέλη που έχουν λύση ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό ή το κενό σύνολο ή το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι οκτώ αριθμητικές ανισώσεις του ΕΡ/Αβ [Πίνακας 4] είχαν μεταβλητή μόνο στο πρώτο μέλος της σχέσης. Οι δύο πρώτες αριθμητικές ανισώσεις ήταν χαρακτηριστικής ευκολίας, ενώ στις δύο επόμενες η μεταβλητή εμφανιζόταν δύο φορές στο ένα μέλος, όπως

συνέβαινε αντίστοιχα και στις τέσσερις πρώτες αριθμητικές εξισώσεις (Πίνακες 4 & 6). Η πέμπτη ανίσωση είχε ως λύση το σύνολο των αρνητικών πραγματικών αριθμών, ενώ στην έκτη ανίσωση ο συντελεστής της μεταβλητής ήταν αρνητικός αριθμός.

Πίνακας 5
Είδη εξισώσεων που περιελήφθησαν στο ΕΡ/Αα

	Εξίσωση από ΕΡ/Αα	**Μορφή εξίσωσης**
	Ε1 & Ε2	$\alpha x=\beta$
Αριθμητικές	Ε3 & Ε4	$\alpha x+\beta x+\gamma=\delta$
	Ε5	με λύση $x=0$
	Ε6	$-\alpha x=\beta$
	Ε7 & Ε8	$\frac{ax}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=0$
	Ε1 & Ε2	$\alpha x+\gamma=\beta x+\delta$
Αλγεβρικές	Ε3	$0x=\alpha$
	Ε4	$0x=0$
	Ε5 & Ε6	$\frac{ax}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=0$

Η μορφή της πέμπτης και έκτης ανίσωσης στην οποία κατέληγε κάποιος αν εφάρμοζε αλγεβρικές ιδιότητες ήταν σε πλήρη αντιστοιχία με τις αριθμητικές εξισώσεις 5 και 6 του ΕΡ/Αα [Πίνακες 5 & 6]. Τέλος, οι δύο τελευταίες αριθμητικές ανισώσεις περιείχαν και κλασματικούς αριθμούς [ανισώσεις 7 & 8, Πίνακες 4 & 6].

Οι έξι αλγεβρικές ανισώσεις είχαν μεταβλητές και στα δύο μέλη της σχέσης. Επιπρόσθετα, κάποιες από αυτές δεν είχαν ως λύση κάποιο πραγματικό αριθμό ή είχαν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Κοινό χαρακτηριστικό των αλγεβρικών ανισώσεων ήταν ότι η αντικατάσταση της μεταβλητής με ακέραιο αριθμό δεν οδηγούσε άμεσα και απρόσκοπτα στην εύρεση λύσης [Πίνακας 6]. Οι δύο πρώτες αλγεβρικές ανισώσεις (ανισώσεις 9 & 10, Πίνακες 4 & 6) ήταν ανισώσεις με την μεταβλητή να εμφανίζεται και στα δύο μέλη και είχαν ως λύση ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, της μορφής $[\alpha, +\infty)$. Οι δύο επόμενες ανισώσεις είχαν ως λύση το σύνολο των πραγματικών αριθμών η πρώτη, ενώ η δεύτερη δεν είχε καμία λύση (ανισώσεις 11 & 12, Πίνακες 4 & 6). Τέλος, η πέμπτη και έκτη αλγεβρική ανίσωση του ΕΡ/Αβ (ανισώσεις 13 & 14, Πίνακες 4 & 6) περιείχαν και ρητούς αριθμούς.

Πίνακας 6

Είδη ανισώσεων που περιλήφθησαν στο ΕΡ/Αβ

	Ανίσωση από ΕΡ/Αβ	**Μορφή ανίσωσης**
	Αν1 & Αν 2	$\alpha x<\beta$
Αριθμητικές	Αν 3 & Αν 4	$\alpha x+\beta x+\gamma<\delta$
	Αν 5	$x<0$
	Αν 6	$-\alpha x<\beta$
	Αν7 & Αν8	$\frac{\alpha x}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}<0$
	Αν1 & Αν2	$\alpha x+\gamma<\beta x+\delta$
Αλγεβρικές	Αν 3	$0x<\alpha$
	Αν 4	$0x<0$
	Αν 5 & Αν 6	$\frac{\alpha x}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}<0$

Η επιλογή των συγκεκριμένων ανισώσεων έγινε με σκοπό να ελέγξουμε τον τρόπο που επιλύουν οι μαθητές ανισώσεις με τον άγνωστο και στα δύο μέλη που έχουν λύση ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ή το ίδιο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή το κενό σύνολο.

Οι οκτώ αριθμητικές και έξι αλγεβρικές ανισώσεις που επιλέχθηκαν για το σχεδιασμό του ΕΡ/Αβ ήταν σε πλήρη αντιστοιχία με τις οκτώ αριθμητικές και έξι αλγεβρικές εξισώσεις που είχαν επιλεχθεί για το ΕΡ/Αα, όσο αφορά την αρχική μορφή της σχέσης αλλά και την τελική μορφή που πιθανόν να κατέληγε κάποιος για να επιλύσει την δοσμένη εξίσωση ή ανίσωση [Πίνακες 5 & 6]. Για παράδειγμα στην πέμπτη αριθμητική εξίσωση [Πίνακας 3 & 5] η λύση είναι $x=0$, ενώ στην πέμπτη αριθμητική ανίσωση [Πίνακες 4 & 6] η λύση είναι όλοι οι αρνητικοί αριθμοί καθώς $x<0$. Ενώ δηλαδή φαινομενικά έχουν παραπλήσιες λύσεις, ουσιαστικά η εξίσωση έχει λύση ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό, ενώ η ανίσωση έχει όλο το σύνολο των αρνητικών αριθμών. Ο σχεδιασμός των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ έγινε με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως γιατί σκοπός μας ήταν να ελέγξουμε, εκτός από τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, αν ένα ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων τους στην επίλυση ανισώσεων οφείλεται στο γεγονός ότι αντιμετωπίζουν τις ανισώσεις ως εξισώσεις.

Σε κάθε μία από τις δοσμένες σχέσεις το ερώτημα ήταν: «*Για ποιες τιμές της μεταβλητής x ισχύει η παρακάτω ισότητα/ανισότητα;*» [Πίνακες 3 και 4]. Στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ, οι μαθητές μπορούσαν να λύσουν με οποιοδήποτε τρόπο τις εξισώσεις και τις ανισώσεις και τους ζητήθηκε να τον καταγράψουν. Στις περιπτώσεις που η απάντηση των μαθητών κρίθηκε ελλιπής οι ερευνητές τούς ζητούσαν να τις συμπληρώσουν.

Ερωτηματολόγιο κατηγοριοποίησης

Το ερωτηματολόγιο της κατηγοριοποίησης εξισώσεων και ανισώσεων ΕΡ/Β [Πίνακας 7] περιείχε δύο εξισώσεις (την αριθμητική εξ/Α: 3x=9, την αλγεβρική εξ/Β: 10x+2=5x+7) και μία αριθμητική ανίσωση (αν/Α: 2x<6). Κάθε μία από αυτές συνοδευόταν αντίστοιχα από τις εξής οδηγίες: «*Σημείωσε ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις (ανισώσεις) εκφράζουν την ίδια μαθηματική σχέση με την εξίσωση (ανίσωση)…*» [Πίνακας 7].

Πίνακας 7

Ερωτηματολόγιο κατηγοριοποίησης εξισώσεων & ανισώσεων **(ΕΡ/Β)**

Σημείωσε ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζουν την ίδια μαθηματική σχέση με την εξίσωση 3x=9 (χωρίς να λυθούν οι εξισώσεις).

Α)	x=3	**Β)**	x= 9-3	**Γ)**	6x=18	**Δ)**	7x=8
Ε)	x=9/3	**ΣΤ)**	x=9+3	**Η)**	x/2=9/2	**Θ)**	9=5+3x
Ι)	9+8=3x+8	**Κ)**	3x-10=9-10	**Λ)**	3x-6=3	**Μ)**	3x-1=9-1

Σημείωσε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις εκφράζουν την ίδια μαθηματική σχέση με την ανίσωση 2x<6 (χωρίς να λυθούν οι ανισώσεις) .

Α)	x<3	**Β)**	x>3+6	**Γ)**	4x-1<12-1	**Δ)**	5x<6
Ε)	2x+5<6+5	**ΣΤ)**	6>2x	**Η)**	2x-8<6-2	**Θ)**	2x>-6-2
Ι)	6x<18	**Κ)**	2x+10<16	**Λ)**	2x/7<6/7	**Μ)**	6+5>2x+5

Σημείωσε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζουν την ίδια μαθηματική σχέση με την εξίσωση 10x+2=5x+7(χωρίς να λυθούν οι εξισώσεις).

Α)	x=1	**Β)**	5x+7=10x+2	**Γ)**	10x=5x	**Δ)**	10x+10=5x+15
Ε)	5x=5	**ΣΤ)**	10x-1=5x+4	**Η)**	13x+2=8x+7	**Θ)**	11x+6=9x+7
Ι)	10x+7+5x=5x+7	**Κ)**	20x+4=11x+14	**Λ)**	5=10x	**Μ)**	10x+2=5x

Σε κάθε περίπτωση, οι μαθητές είχαν να επιλέξουν μεταξύ δώδεκα εξισώσεων ή ανισώσεων. Από τις εναλλακτικές εξισώσεις ή ανισώσεις, μονάχα οι τέσσερις δεν ήταν

ισοδύναμες με τις εξ/Α ή αν/Α, ενώ στην περίπτωση της εξ/Β δεν ήταν ισοδύναμες οι έξι από τις δώδεκα εξισώσεις [Πίνακας 8].

Πίνακας 8

Είδη εξισώσεων και ανισώσεων που περιελήφθησαν στο ΕΡ/Β

Ερώτηση κατηγοριοποίησης	**Μορφή εξίσωσης/ανίσωσης**	**Πλήθος**	**Εξίσωση/Ανίσωση**
	αx=β ισοδύναμες	4	Α,Γ,Ε,Η
3x=9 (εξ/Α)	αx=β όχι ισοδύναμες	1	Δ
	αx+β=γ+δ ισοδύναμες	4	Ι,Κ,Μ,Λ
	αx+β=γ+δ όχι ισοδύναμες	3	Β,ΣΤ,Θ
	αx<β ισοδύναμες	4	Α,ΣΤ,Ι,Λ
2x<6 (αν/Α)	αx<β όχι ισοδύναμες	1	Δ
	αx+β<γ+δ ισοδύναμες	4	Ε,Κ,Μ,Γ
	αx+β<γ+δ όχι ισοδύναμες	3	Θ,Η,Β
	αx=β ισοδύναμες	2	Α,Ε
10x+2=5x+7 (εξ/Β)	αx=β όχι ισοδύναμες	2	Γ,Λ
	αx+β=γx+δ ισοδύναμες	4	Β,Δ,ΣΤ,Η
	αx+β=γx+δ όχι ισοδύναμες	4	Θ,Ι,Κ,Μ

2.3 Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη μορφή προσωπικής συνέντευξης και έλαβε μέρος στον τόπο κατοικίας του κάθε μαθητή. Στο πρώτο μέρος της συνέντευξης, ο μαθητής απαντούσε γραπτώς στα ερωτηματολόγια με τις εξισώσεις και τις ανισώσεις, αρχικά στο ΕΡ/Αα και ακολούθως στο ΕΡ/Αβ. Έπειτα, οι ερευνητές ζητούσαν από τους μαθητές να δώσουν συμπληρωματικές απαντήσεις σε επιμέρους επιλύσεις εξισώσεων ή ανισώσεων που είχαν καταγράψει. Το πρώτο μέρος της συνέντευξης διαρκούσε κατά μέσο όρο 20 με 30 λεπτά. Στο δεύτερο μέρος της συνέντευξης και εφόσον ο μαθητής είχε ήδη απαντήσει στα ερωτηματολόγια ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ συμπλήρωνε το ερωτηματολόγιο (ΕΡ/Β). Στους μαθητές ζητήθηκε να δώσουν τις απαντήσεις τους χωρίς να επιλύσουν γραπτώς την κάθε μία από τις δώδεκα εξισώσεις ή ανισώσεις οι οποίες δόθηκαν μαζί με κάθε μία από τις εξ/Α, εξ/Β και την αν/Α. Εφόσον ο κάθε μαθητής ολοκλήρωνε τις απαντήσεις του και στις τρείς ερωτήσεις του ΕΡ/Β, καλούταν να απαντήσει την εξής ερώτηση: «Με ποιά κριτήρια κατέληξες στις απαντήσεις της κάθε ερώτησης;». Η συμπλήρωση του ΕΡ/Β διαρκούσε κατά μέσο όρο 10 με 15 λεπτά.

Κεφάλαιο 3

Αποτελέσματα

3.1 Επίδοση των μαθητών στις εξισώσεις και ανισώσεις του ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ

Για να εξετάσουμε τις επιδόσεις των μαθητών στα δύο ερωτηματολόγια ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ, βαθμολογήσαμε τις λανθασμένες απαντήσεις με 0, ενώ τις ορθές απαντήσεις με 1 και υπολογίσαμε το βαθμό επίδοσης κάθε μαθητή στο σύνολο των δεκατεσσάρων ερωτήσεων του κάθε ερωτηματολογίου. Έπειτα, επειδή το πλήθος των αριθμητικών θεμάτων που υπήρχαν συνολικά στα ερωτηματολόγια ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ ήταν δεκαέξι ενώ το συνολικό πλήθος των αλγεβρικών θεμάτων αντίστοιχα ήταν μόλις δώδεκα, υπολογίσαμε την μέση επίδοση κάθε μαθητή διαιρώντας την συνολική του επίδοση με το πλήθος των ερωτήσεων σε κάθε περίπτωση. Έτσι, στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών στις οκτώ αριθμητικές εξισώσεις, στις οκτώ αριθμητικές ανισώσεις, στις έξι αλγεβρικές εξισώσεις και στις έξι αλγεβρικές ανισώσεις.

Η μέση επίδοση των μαθητών στις αριθμητικές εξισώσεις ήταν 0,89, S.D.=0,15, η υψηλότερη από κάθε άλλη περίπτωση [Πίνακας 9]. Επίσης, οι μαθητές έλυσαν με μεγαλύτερη επιτυχία τις αριθμητικές ανισώσεις (μέσος όρος επίδοσης 0,65, S.D.= 0,33) σε σύγκριση με τις αλγεβρικές εξισώσεις (μέσος όρος επίδοσης 0,75, S.D.= 0,23), ενώ ο μικρότερος μέσος όρος επίδοσης μετρήθηκε στην περίπτωση των αλγεβρικών ανισώσεων και ήταν 0,47, S.D=0,27.

Για να αξιολογηθούν οι διαφορές μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στις αριθμητικές και αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις έγινε ανάλυση διακύμανσης μονής κατεύθυνσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, [διαμέσου των υποκειμένων (αριθμητικές εξισώσεις*αλγεβρικές εξισώσεις*αριθμητικές ανισώσεις*αλγεβρικές ανισώσεις)]. Η ανάλυση έδειξε ότι συνολικά υπάρχει διαφορά μεταξύ των αριθμητικών εξισώσεων, αλγεβρικών εξισώσεων, αριθμητικών ανισώσεων και αλγεβρικών ανισώσεων [$F(3,80)=77,926$, $p<.001$]. Οι κύριες επιδράσεις έδειξαν πιο αναλυτικά ότι μεταξύ των αριθμητικών εξισώσεων και των αλγεβρικών εξισώσεων υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές υπέρ των πρώτων [$F(3,80)=62,52$, $p<.001$]. Επίσης, στατιστικά σημαντικές διαφορές υπήρχαν και υπέρ των αριθμητικών ανισώσεων σε σχέση με τις αλγεβρικές

ανισώσεις [F(3,80)=134,727, p<.001]. Τέλος, οι διαφορές που υπήρχαν υπέρ των αριθμητικών ανισώσεων σε σχέση με τις αλγεβρικές εξισώσεις δεν ήταν εξίσου σημαντικές [F(3,80)=8,401, p<.005] (Πίνακας 9).

Πίνακας 9

Ανάλυση διακύμανσης μονής κατεύθυνσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων

N=81	Ορθή απάντηση:1 Λανθασμένη απάντηση:0	**Πλήθος ερωτήσεων**	**Μέση επίδοση**	**Τυπική απόκλιση**	**Μέγιστη επίδοση**
Αριθμητικές εξισώσεις		8	0,89	0,15	1
Αλγεβρικές εξισώσεις		6	0,65	0,33	1
Αριθμητικές ανισώσεις		8	0,75	0,23	1
Αλγεβρικές ανισώσεις		6	0,47	0,27	1
Διαφορά μεταξύ υποκειμένων: [F(3,80)=77,926, p<.001]					

Επίσης, έγινε και ανάλυση διακύμανσης διπλής κατεύθυνσης [μεταξύ των υποκειμένων (αριθμητική*άλγεβρα)*(εξισώσεις*ανισώσεις)]. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 10, η μέση επίδοση των μαθητών στις αριθμητικές εξισώσεις και ανισώσεις ήταν 0,78, ενώ στις αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις ήταν 0,61 με την διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική [Πίνακας 10, Γράφημα 1].

Πίνακας 10

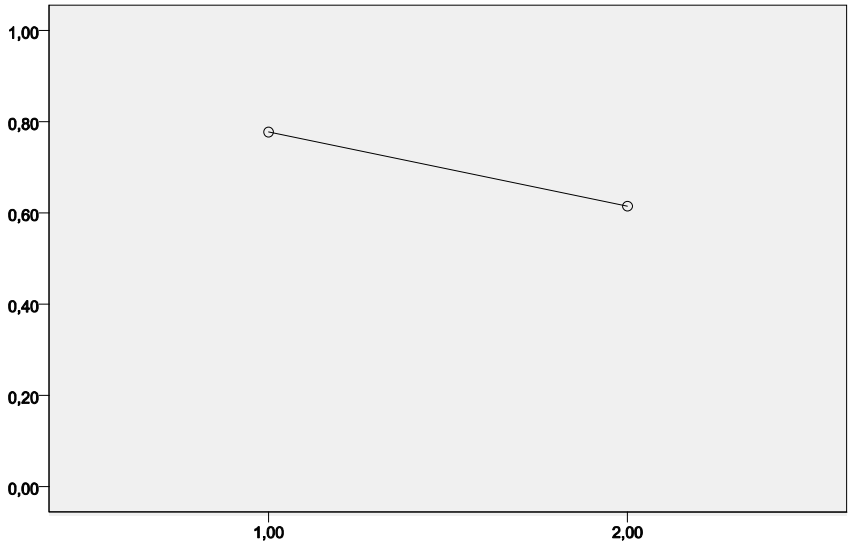
Αποτελέσματα ανάλυσης διακύμανσης διπλής κατεύθυνσης

Υποκείμενα	**Μέση επίδοση**	**Υποκείμενα**	**Διαφορά**
Αριθμητικές εξισώσεις & ανισώσεις	0,78	Αριθμητική*Άλγεβρα	[F(2,80)=32,504,p<.001]
Αλγεβρικές εξισώσεις & ανισώσεις	0,61		
Εξισώσεις	0,82	Εξισώσεις*Ανισώσεις	[F(2,80)=79,345,p<.001]
Ανισώσεις	0,57		
		(Αριθμητική_Άλγεβρα)* (Εξισώσεις_Ανισώσεις)	[F(2,80)=0,322,p<.571]

Επίσης, η μέση επίδοση στις εξισώσεις ήταν 0,82 ενώ στις ανισώσεις ήταν 0,57, διαφορά στατιστικά σημαντική [Πίνακας 10, Γράφημα 2]. Και στις δύο περιπτώσεις όμως δεν υπήρξαν στατιστικά σημαντικές αλληλεπιδράσεις [Πίνακας 10].

Γράφημα 1

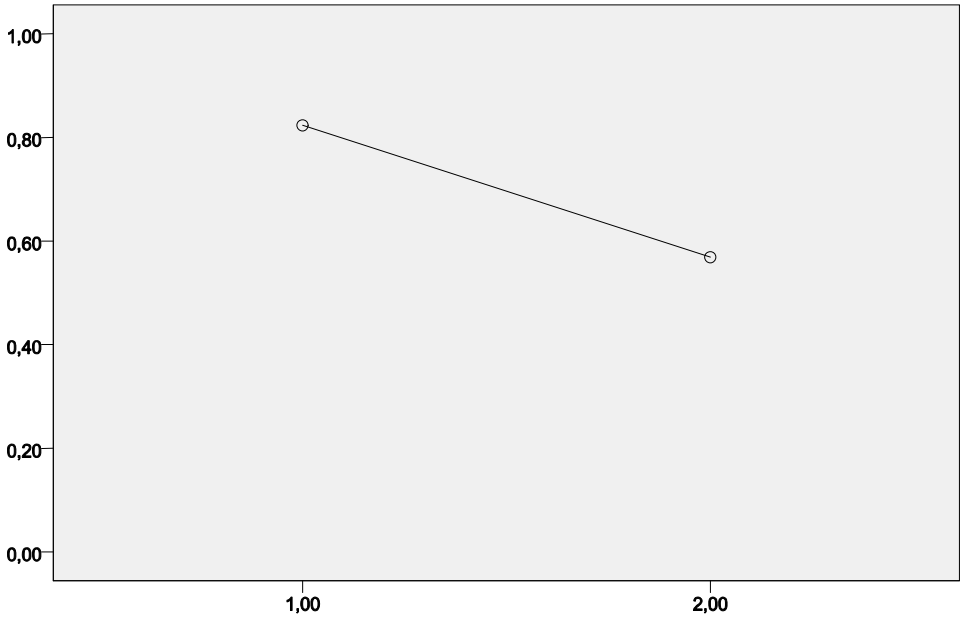
Διαφορά μέσης επίδοσης μεταξύ αριθμητικών & αλγεβρικών εξισώσεων/ανισώσεων



Αριθμητική (1,00) Άλγεβρα (2,00)

Γράφημα 2

Διαφορά μέσης επίδοσης μεταξύ εξισώσεων & ανισώσεων

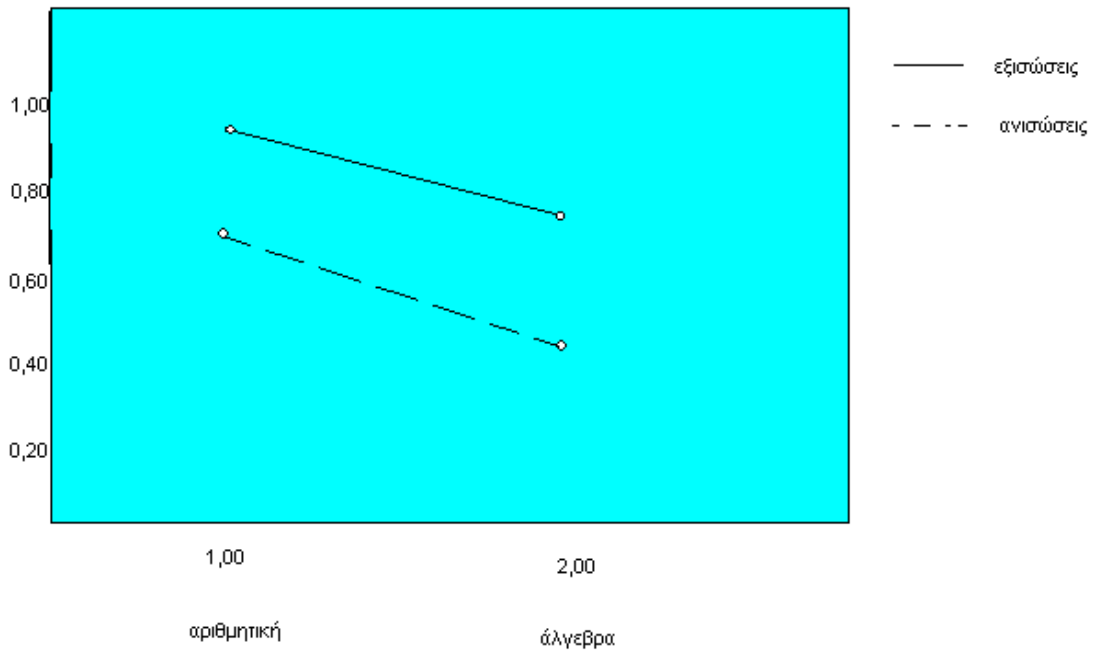


Εξισώσεις (1,00) Ανισώσεις (2,00)

Στο παρακάτω γράφημα 3, απεικονίζεται η διαφορά επίδοσης μεταξύ αριθμητικών (1,00) και αλγεβρικών ερωτημάτων (2,00) αλλά και μεταξύ εξισώσεων (ευθεία γραμμή) και ανισώσεων (διακεκομμένη γραμμή).

Γράφημα 3

Διαφορά μέσης επίδοσης μεταξύ (αριθμητικής*άλγεβρας)*(εξισώσεων*ανισώσεων)



3.2 Μελέτη λαθών σε εξισώσεις και ανισώσεις

Σε επόμενη ανάλυση, εστιάσαμε στην μελέτη των λαθών που έκαναν οι μαθητές κατά την επίλυση των εξισώσεων και ανισώσεων των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ. Για τις απαντήσεις στις οκτώ αριθμητικές από τις συνολικά δεκατέσσερις εξισώσεις του ΕΡ/Αα, επιλέξαμε την εξής κατηγοριοποίηση: α) <u>ορθή απάντηση</u> β) <u>λανθασμένη απάντηση διαφόρων ειδών</u> [Πίνακας 11]. Η κατηγοριοποίηση αυτή έγινε μόνο για τις οκτώ

αριθμητικές εξισώσεις, γιατί σύμφωνα με την υπόθεσή μας αναμέναμε οι μαθητές να τις επιλύσουν με επιτυχία, είτε χρησιμοποιήσουν αριθμητικές μεθόδους είτε όχι.

Πίνακας 11

Είδη λαθών στις απαντήσεις του ΕΡ/Αα

Αριθμητικές εξισώσεις	**Εξίσωση**	**Ορθές απαντήσεις**	**Λανθασμένες απαντήσεις**		**Σύνολο**
			Λανθασμένες απαντήσεις διαφόρων ειδών	**Λανθασμένες απαντήσεις σύμφωνα με υπόθεση**	
Εξίσωση 1	5x=10	98,8%	1,2%	*	100%
Εξίσωση 2	4=2x	96,3%	3,7%	*	100%
Εξίσωση 3	4x+2+3x=9	90,1%	9,9%	*	100%
Εξίσωση 4	-8x-2x-3=7	90,1%	9,9%	*	100%
Εξίσωση 5	2x+4+2x=4	88,9%	11,1%	*	100%
Εξίσωση 6	4+3x-5x=-10	91,4%	8,6%	*	100%
Εξίσωση 7	$\frac{x}{5}=3$	91,4%	8,6%	*	100%
Εξίσωση 8	$\frac{x}{2}-\frac{11}{2}=0$	70,4%	29,6%	*	100%
Αλγεβρικές εξισώσεις					
Εξίσωση 9	5x+2=-6-3x	84%	4,9%	11,1%	100%
Εξίσωση 10	x+2=2x+1	76,5%	2,5%	22,2%	100%
Εξίσωση 11	-5x-7=-5x+10	65,4%	7,4%	27,2%	100%
Εξίσωση 12	2x+4=2x+4	49,4%	6,2%	44,4%	100%
Εξίσωση 13	$\frac{x}{5}=\frac{3}{9}$	70,4%	-	29,6%	100%
Εξίσωση 14	$\frac{x}{2}-\frac{10}{3}=0$	49,4%	4,9%	45,7%	100%

∗ Είχαμε υποθέσει ότι οι μαθητές θα επιλύουν σωστά τις αριθμητικές εξισώσεις

Στις έξι αλγεβρικές εξισώσεις και όλες τις ανισώσεις ομαδοποιήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών σε τρείς κατηγορίες. Στην κατηγορία 'Ορθές απαντήσεις', τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν επιλύσει σωστά την εξίσωση ή την ανίσωση ανεξάρτητα από την μέθοδο που χρησιμοποίησαν. Στην κατηγορία 'Λανθασμένες απαντήσεις', τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που ήταν ημιτελείς ή δεν κατέληγαν σε σωστό αποτέλεσμα για την μεταβλητή.

Πίνακας 12

Είδη λαθών στις απαντήσεις του ΕΡ/Αβ

Αριθμητικές ανισώσεις	**Ανίσωση**	**Ορθές απαντήσεις**	**Λανθασμένες απαντήσεις**		**Σύνολο**
			Λανθασμένες απαντήσεις διαφόρων ειδών	**Λανθασμένες απαντήσεις σύμφωνα με υπόθεση**	
Ανίσωση 1	$6x<18$	95,1%	4,9%	-	100%
Ανίσωση 2	$12>4x$	82,7%	17,3%	-	100%
Ανίσωση 3	$4x+2+3x<9$	85,2%	2,5%	12,3%	100%
Ανίσωση 4	$5x-3x+2<-8$	81,5%	8,6%	9,9%	100%
Ανίσωση 5	$2x+7+2x<7$	75,3%	12,3%	12,3%	100%
Ανίσωση 6	$-8x-2x-3<7$	37%	-	63%	100%
Ανίσωση 7	$\frac{x}{7}<4$	79%	-	21%	100%
Ανίσωση 8	$\frac{x}{2}-\frac{7}{2}<0$	64,2%	4,9%	30,9%	100%
Αλγεβρικές ανισώσεις					
Ανίσωση 9	$4x+2<7+3x$	76,5%	1,2%	22,2%	100%
Ανίσωση 10	$5x+4<12-3x$	63%	9,9%	27,2%	100%
Ανίσωση 11	$-8x+4>-8x+2$	28,4%	6,2%	64,2%	100%
Ανίσωση 12	$2x+5<2x+5$	23,5%	-	76,5%	100%
Ανίσωση 13	$\frac{x}{7}<\frac{4}{3}$	53,1%	3,7%	43,2%	100%
Ανίσωση 14	$\frac{x}{2}-\frac{18}{4}<0$	43,2%	12,3%	44,4%	100%

Για τις ανάγκες μιας πιο λεπτομερούς παρουσίασης του εύρους των απαντήσεων τέτοιου είδους, η κατηγορία αυτή χωρίστηκε σε δύο επιμέρους υποκατηγορίες. Στην υποκατηγορία ‘Λανθασμένες απαντήσεις διαφόρων ειδών’, τοποθετήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών οι οποίες ήταν λανθασμένες εξαιτίας λανθασμένων πράξεων ή ήταν ημιτελείς. Στην υποκατηγορία ‘Λανθασμένες απαντήσεις σύμφωνα με την υπόθεση’, τοποθετήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών οι οποίες κατέληγαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα για την μεταβλητή, σύμφωνα με τις υποθέσεις μας. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτή την κατηγορία όσον αφορά τις αλγεβρικές εξισώσεις τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στις οποίες παρουσιάστηκαν λανθασμένες αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης, όπως είναι η αντικατάσταση συγκεκριμένων ακεραίων αριθμών στην μεταβλητή που δεν επαλήθευαν την σχέση [Πίνακας 12].

Για τις ανισώσεις, στην ίδια υποκατηγορία τοποθετήθηκαν λανθασμένες απαντήσεις που προήλθαν από χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης ή και από την αντιμετώπιση μιας ανίσωσης από ορισμένους μαθητές ως εξίσωσης [Πίνακας 12]. Σε τέτοιου είδους επίλυση οφείλονταν και λάθη όπως είναι η μη αλλαγή της φοράς μιας ανίσωσης όταν έχει προηγηθεί διαίρεση με αρνητικό αριθμό ή ο χαρακτηρισμός μιας ανίσωσης της μορφής $0x<\beta$ ως αδύνατη ανεξάρτητα από την τιμή του πραγματικού αριθμού β, που ισχύει μόνο για εξισώσεις της μορφής $0x=\beta$.

Σχολιασμός απαντήσεων στα ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ

Οι απαντήσεις και το είδος των λαθών των μαθητών όσον αφορά τις δεκατέσσερις εξισώσεις του ΕΡ/Αα παρουσιάζονται στον Πίνακα 11 και τις δεκατέσσερις ανισώσεις του ΕΡ/Αβ στον Πίνακα 12. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 11, οι μαθητές στην συντριπτική τους πλειοψηφία έλυσαν με επιτυχία τις αριθμητικές εξισώσεις. Μόνο την αριθμητική εξίσωση (8) δεν κατάφερε να επιλύσει σωστά αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών που ισοδυναμούσε με περίπου το ένα τρίτο του δείγματος της έρευνας. Από τις απαντήσεις των μαθητών στις διευκρινιστικές ερωτήσεις των ερευνητών που ακολούθησαν την συμπλήρωση των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ, φάνηκε ότι δυσκολεύτηκαν σε σχέση με τις υπόλοιπες αριθμητικές εξισώσεις εξαιτίας των κλασματικών αριθμών που περιείχε η συγκεκριμένη εξίσωση.

Στην περίπτωση των αλγεβρικών εξισώσεων, αρκετά μεγάλο ποσοστό των μαθητών χρησιμοποίησε αποκλειστικά αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης που δεν τους βοήθησαν να δώσουν την σωστή λύση για την κάθε εξίσωση [Πίνακας 11]. Τα μεγαλύτερα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων σύμφωνα με την υπόθεση παρατηρήθηκαν στις

αλγεβρικές εξισώσεις (12) και (14). Η πρώτη είχε ως σύνολο λύσεων το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ η δεύτερη περιείχε δύο ρητούς αριθμούς στο ίδιο μέλος της εξίσωσης, γεγονός που δυσκόλεψε τους μαθητές που δεν έκαναν χρήση αλγεβρικών ιδιοτήτων.

Στις αριθμητικές ανισώσεις, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 12, οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν με επιτυχία τις περισσότερες από αυτές, με τα ποσοστά όμως να είναι μειωμένα σε σχέση με αυτά των επιτυχών απαντήσεων στις αριθμητικές εξισώσεις. Περίπου τα δύο τρίτα του δείγματος έδωσαν λανθασμένη απάντηση στην ανίσωση (6), γεγονός που αναμέναμε, καθώς ο συντελεστής της μεταβλητής στην συγκεκριμένη ανίσωση είναι αρνητικός αριθμός, γεγονός που δημιουργεί προβλήματα στους διάφορους τρόπους επίλυσης που επιλέγουν οι μαθητές. Επίσης, το 24,3% των μαθητών έλυσε με αριθμητικές μεθόδους ή αντιμετώπισε την ανίσωση (8) ως εξίσωση, γεγονός που τους οδήγησε σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

Στις αλγεβρικές ανισώσεις του ΕΡ/Αβ παρατηρήθηκαν τα μεγαλύτερα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων από όλες τις άλλες περιπτώσεις εξισώσεων ή ανισώσεων. Σε κάθε μία από τις έξι αλγεβρικές ανισώσεις ποσοστό μεγαλύτερο του 20% των μαθητών δεν κατάφερε να επιλύσει σωστά [Πίνακας 10]. Πιο συγκεκριμένα, στις ανισώσεις (13) και (14) που είχαν ρητούς αριθμούς και στα δύο μέλη, ποσοστό 43,2% και 44,4% αντίστοιχα των μαθητών επίλυσαν με αριθμητικές στρατηγικές ή τις αντιμετώπισαν ως εξισώσεις. Τα μεγαλύτερα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων σύμφωνα με την υπόθεση παρατηρήθηκαν στις ανισώσεις (11) και (12), οι οποίες είχαν ως λύση το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το κενό σύνολο αντίστοιχα.

Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τα λάθη σε εξισώσεις και ανισώσεις

Προκειμένου να έχουμε μια συνολική εικόνα των απαντήσεων των μαθητών, καταγράψαμε το συνολικό πλήθος των λαθών που έγιναν κατά την επίλυση των αριθμητικών και αλγεβρικών εξισώσεων και ανισώσεων των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ [Πίνακας 13]. Πιο συγκεκριμένα, στις οκτώ αριθμητικές εξισώσεις και οκτώ αριθμητικές ανισώσεις, οι απαντήσεις που αναμέναμε από τους 81 μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν συνολικά 648 για κάθε περίπτωση. Από αυτές, στον Πίνακα 12 φαίνεται πόσες ήταν ορθές και πόσες λανθασμένες που οφείλονταν σε αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης για τις εξισώσεις και λανθασμένες που οφείλονταν σε αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης ή αντιμετώπισης των ανισώσεων ως εξισώσεις. Αντίστοιχα, στις περιπτώσεις των έξι

αλγεβρικών εξισώσεων και έξι αλγεβρικών ανισώσεων αναμέναμε σε κάθε περίπτωση συνολικά 486 απαντήσεις από τους 81 μαθητές. Τα ποσοστά των απαντήσεων στις αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις που τοποθετήθηκαν στις παραπάνω κατηγορίες φαίνονται στον Πίνακα 13 που ακολουθεί.

Πίνακας 13

Συγκεντρωτικές απαντήσεις στα ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ ανά κατηγορία

N=81	**Απαντήσεις**			**Ποσοστό επί των συνολικών απαντήσεων**
	Ορθές απαντήσεις	**Λανθασμένες απαντήσεις που ήταν συνεπείς**		
		σε χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης	**σε αντιμετώπιση ανίσωσης ως εξίσωση**	
	πλήθος απαντήσεων	πλήθος απαντήσεων		
Αριθμητικές εξισώσεις	583/648	-	-	90%
Αλγεβρικές εξισώσεις	319/486	146/486	-	95,67%
Αριθμητικές ανισώσεις	486/648	30/648	91/648	93,6%
Αλγεβρικές ανισώσεις	234/486	135/486	90/486	94,44%

Στις αριθμητικές εξισώσεις από τις συνολικά 648 απαντήσεις που δόθηκαν οι 583 (90%) από αυτές ήταν ορθές, κάτι που αναμέναμε σύμφωνα με την υπόθεσή μας. Επίσης, σε σύνολο 486 απαντήσεων που δόθηκαν στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων, οι 146 (30,05%) από αυτές ήταν λανθασμένες που οφείλονταν σε αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης, ενώ οι 319 (65,63%) ήταν ορθές. Στις αριθμητικές ανισώσεις, οι λανθασμένες απαντήσεις που οφείλονταν σε αριθμητικές στρατηγικές ήταν 30 σε σύνολο 648, ενώ 91 ήταν οι απαντήσεις στις οποίες η λύση που παρουσιάστηκε οφείλεται σε θεώρηση των ανισώσεων ως εξισώσεις. Τέλος, στις αλγεβρικές ανισώσεις σε σύνολο 486 απαντήσεων οι

225 (46,3%) ήταν λανθασμένες, όπως και αναμέναμε. Από αυτές, οι 135 οφείλονταν σε αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης, ενώ οι υπόλοιπες 90 οδήγησαν σε λανθασμένη επίλυση καθώς οι ανισώσεις επιλύθηκαν ως εξισώσεις [Πίνακας 13]. Παρατηρούμε ότι το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων επί του συνόλου αυτών που λάβαμε είναι μεγαλύτερο στις αλγεβρικές εξισώσεις σε σύγκριση με τις αριθμητικές ανισώσεις. Το μεγαλύτερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων παρατηρείται στην επίλυση αλγεβρικών ανισώσεων.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα του Πίνακα 13 ενισχύουν τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την μελέτη του Πίνακα 9. Πιο συγκεκριμένα, όπως η μέση επίδοση στις αριθμητικές εξισώσεις είναι καλύτερη από κάθε άλλη περίπτωση [Πίνακας 9], έτσι και το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων για τις συγκεκριμένες εξισώσεις είναι 10%, μικρότερο από το αντίστοιχο των αλγεβρικών εξισώσεων, αριθμητικών ανισώσεων ή αλγεβρικών ανισώσεων [Πίνακας 13]. Επίσης, η δεύτερη καλύτερη μέση επίδοση, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 9, ήταν στις αριθμητικές ανισώσεις, στις οποίες εξάλλου είχαμε και το δεύτερο μικρότερο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων [Πίνακας 13]. Από αυτές τις λανθασμένες απαντήσεις, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι περισσότερες από αυτές οφείλονταν σε θεώρηση των ανισώσεων ως εξισώσεις παρά στην επίλυση με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Εξάλλου, η επίδοση στις αλγεβρικές εξισώσεις ήταν χαμηλότερη από αυτή των αριθμητικών εξισώσεων ή ανισώσεων, διάταξη η οποία διατηρείται και αν συγκρίνουμε τα ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων στις αριθμητικές εξισώσεις, αριθμητικές ανισώσεις και αλγεβρικές εξισώσεις [Πίνακας 13]. Τέλος, στις αλγεβρικές ανισώσεις παρατηρείται η μικρότερη μέση επίδοση αλλά και το μικρότερο ποσοστό ορθών απαντήσεων [Πίνακας 9 & 13] από τις τέσσερις κατηγορίες εξισώσεων ή ανισώσεων. Σε αντίθεση με ότι συνέβη στις αριθμητικές ανισώσεις, στις αλγεβρικές το μεγαλύτερο ποσοστό λαθών έγιναν εξαιτίας των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές παρά στην αντιμετώπιση των ανισώσεων ως εξισώσεις.

3.3 Ομαδοποίηση απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο κατηγοριοποίησης ΕΡ/β

Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου κατηγοριοποίησης εξισώσεων και ανισώσεων, ΕΡ/Β [Πίνακας 7] που αφορούσαν τις εξ/Α (3x=9), αν/Α (2x<6) και την εξ/Β (10x+2-5x+7) ταξινομήθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες. Σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στις εξ/Α και αν/Α οι μαθητές ομαδοποιήθηκαν ως εξής: (0) Καμία απάντηση: όσοι μαθητές δεν επέλεξαν καμία από τις δοσμένες εξισώσεις ή ανισώσεις, (1) Ομοιότητα ως προς την μορφή: Όσοι επέλεξαν εξισώσεις/ανισώσεις

Πίνακας 14
Ομαδοποίηση απαντήσεων στο ΕΡ/Β για την εξ/Α

εξ/Α (3x=9)	**Κριτήριο** Απάντηση στην ερώτηση επιλογής ισοδύναμων εξισώσεων με την 3x=9 Σε όλες τις περιπτώσεις επιτρέψαμε να έχει επιλεγεί μέχρι μια μη ισοδύναμη εξίσωση	**Κριτήριο** Απάντηση στην ερώτηση για τρόπο κατηγοριοποίησης	**Παράδειγμα**
Καμία απάντηση (0)	Επιλογή καμίας εξίσωσης		
Ομοιότητα ως προς την μορφή (1)	Επιλογή • Έστω μιας εξίσωσης από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις της ίδιας μορφής	Μορφή ή Ίδιοι αριθμοί	3x=9 ισοδύναμη με την 7x=8 ή 3x=9 ισοδύναμη με την x=9-3
Ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές (2)	Επιλογή • έστω μιας από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις της ίδιας μορφής • και έστω μιας από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις με μεταβλητή και στα δύο μέλη	Μορφή & χρήση αριθμητικών στρατηγικών επίλυσης	3x=9 ισοδύναμη με την 7x=8 ή η λύση της 3x=9 επαληθεύει την 3x-6=3
αριθμητικές στρατηγικές (3)	Επιλογή • τουλάχιστον πέντε από τις οκτώ ισοδύναμες εξισώσεις	χρήση αριθμητικών στρατηγικών επίλυσης	η λύση της 3x=9 επαληθεύει την 3x-6=3
αλγεβρικές στρατηγικές (4)	Επιλογή • τουλάχιστον πέντε από τις οκτώ ισοδύναμες εξισώσεις	χρήση αλγεβρικών στρατηγικών επίλυσης	Διαίρεση κατά μέλη της 9x=18 με 3 και προκύπτει η 3x=9.

με κριτήριο την μορφή ή τους συντελεστές των μεταβλητών και επέλεξαν τουλάχιστον μία από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις/ανισώσεις της ίδιας μορφής, (2) Ομοιότητα ως προς την μορφή ή αριθμητικές στρατηγικές: Όσοι μαθητές επέλεξαν με κριτήριο την μορφή ή ακολουθώντας αριθμητικές στρατηγικές επιλογής ισοδύναμων εξισώσεων ή ανισώσεων. Έτσι, σε αυτή την ομάδα κατηγοριοποιήθηκαν οι μαθητές που επέλεξαν τουλάχιστον μια από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις/ανισώσεις της ίδιας μορφής και τουλάχιστον μία από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις/ανισώσεις που διέφεραν ως προς την μορφή. Η επόμενη κατηγορία ήταν (3) Αριθμητικές στρατηγικές: όσοι μαθητές επέλεξαν τουλάχιστον πέντε από τις συνολικά οκτώ ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις ακολουθώντας αριθμητικές στρατηγικές και τέλος η κατηγορία (4) Αλγεβρικές στρατηγικές: όσοι μαθητές επέλεξαν τουλάχιστον πέντε από τις συνολικά οκτώ ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις ακολουθώντας αλγεβρικές στρατηγικές. Σε όλες τις περιπτώσεις των απαντήσεων κατά την ομαδοποίηση τους επιτρέψαμε να έχει δοθεί μέχρι μία λανθασμένη επιλογή εξίσωσης ή ανίσωσης [Πίνακας 14 & 15]. Για την ταξινόμηση των αποτελεσμάτων εκτός από τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών στο ερωτηματολόγιο λάβαμε υπόψη και τις συμπληρωματικές απαντήσεις που πήραμε στην ερώτηση που αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές απάντησαν στις ερωτήσεις του ΕΡ/Β.

Σύμφωνα με τις απαντήσεις τους για την εξ/Β οι μαθητές κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής: (0) Καμία απάντηση: όσοι μαθητές δεν επέλεξαν καμία από τις δοσμένες εξισώσεις, (1) Ομοιότητα ως προς την μορφή: Όσοι επέλεξαν εξισώσεις με κριτήριο την μορφή ή τους συντελεστές των μεταβλητών και επέλεξαν τουλάχιστον μία από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις της ίδιας μορφής, (2) Ομοιότητα ως προς την μορφή ή αριθμητικές στρατηγικές: Όσοι μαθητές επέλεξαν με κριτήριο την μορφή ή ακολουθώντας αριθμητικές στρατηγικές επιλογής εξισώσεων ισοδύναμων με την εξ/Β. Έτσι, σε αυτή την ομάδα κατηγοριοποιήθηκαν οι μαθητές που επέλεξαν τουλάχιστον τέσσερις από τις έξι ισοδύναμες εξισώσεις της ίδιας ή και διαφορετικής μορφής, (3) Αριθμητικές στρατηγικές: όσοι μαθητές επέλεξαν τουλάχιστον τέσσερις από τις έξι ισοδύναμες εξισώσεις χρησιμοποιώντας αριθμητικές στρατηγικές, (4) Αλγεβρικές στρατηγικές: όσοι μαθητές επέλεξαν τουλάχιστον δύο από τις έξι ισοδύναμες εξισώσεις ακολουθώντας αλγεβρικές στρατηγικές [Πίνακας 16]. Κατά την ομαδοποίηση των περιπτώσεων των απαντήσεων, επιτρέψαμε να έχει δοθεί μέχρι και μία λανθασμένη επιλογή εξίσωσης ή ανίσωσης.

Πίνακας 15
Ομαδοποίηση απαντήσεων στο ΕΡ/Β για την αν/Α

***αν/Α* (2x<6)**	**Κριτήριο** Απάντηση στην ερώτηση για τρόπο κατηγοριοποίησης Σε όλες τις περιπτώσεις επιτρέψαμε να έχει επιλεγεί μέχρι μια μη ισοδύναμη ανίσωση	**Κριτήριο** Απάντηση στην ερώτηση επιλογής ισοδύναμων ανισώσεων με την 2x<6	**Παράδειγμα**
Καμία απάντηση (0)	Επιλογή καμίας ανίσωσης		
ομοιότητα ως προς την μορφή (1)	Επιλογή • Έστω μιας ανίσωσης από τις τέσσερις ισοδύναμες ανισώσεις της ίδιας μορφής	Μορφή ή Ίδιοι αριθμοί	2x<6 ισοδύναμη με την 6x<18 ή 2x<6 ισοδύναμη με την 2x>-6-3
ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές (2)	Επιλογή • έστω μιας από τις τέσσερις ισοδύναμες ανισώσεις της ίδιας μορφής • και έστω μιας από τις τέσσερις ισοδύναμες ανισώσεις με μεταβλητή και στα δύο μέλη	Μορφή & χρήση αριθμητικών στρατηγικών επίλυσης	2x<6 ισοδύναμη με την 6x<18 ή οι λύσεις της 2x<6, επαληθεύουν μια άλλη ανίσωση
αριθμητικές στρατηγικές (3)	Επιλογή • τουλάχιστον πέντε από τις οκτώ ισοδύναμες ανισώσεις	χρήση αριθμητικών στρατηγικών επίλυσης	οι λύσεις της 2x<6, επαληθεύουν μια άλλη ανίσωση
αλγεβρικές στρατηγικές (4)	Επιλογή • τουλάχιστον πέντε από τις οκτώ ισοδύναμες ανισώσεις	χρήση αλγεβρικών στρατηγικών επίλυσης	Πολλαπλασιασμός κατά μέλη της x<3 με 2 και προκύπτει η 2x<6.

Πίνακας 16
Ομαδοποίηση απαντήσεων στο ΕΡ/Β για την εξ/Β

εξ/Β **(10x+2=5x+7)**	**Κριτήριο** Απάντηση στην ερώτηση για τρόπο κατηγοριοποίησης Σε όλες τις περιπτώσεις επιτρέψαμε να έχει επιλεγεί μέχρι μια μη ισοδύναμη εξίσωση	**Κριτήριο** Απάντηση στην ερώτηση επιλογής ισοδύναμων εξισώσεων με την 10x+2=5x+7	**Παράδειγμα**
Καμία απάντηση (0)	Επιλογή καμίας εξίσωσης		
ομοιότητα ως προς την μορφή (1)	Επιλογή • έστω μιας εξίσωσης από τις τέσσερις ισοδύναμες εξισώσεις της ίδια μορφής	Μορφή Ή Ίδιοι αριθμοί	10x+2=5x+7 ισοδύναμη με την 13x+2=8x+7 ή 10x+2=5x+7 ισοδύναμη με την 10x+7+5x=5x+7
ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές (2)	Επιλογή • τουλάχιστον τεσσάρων από τις έξι ισοδύναμες εξισώσεις	Μορφή & χρήση αριθμητικών στρατηγικών επίλυσης	10x+2=5x+7 ισοδύναμη με την 13x+2=8x+7 ή οι λύσεις της 10x+2=5x+7, επαληθεύουν την x=1
αριθμητικές στρατηγικές (3)	Επιλογή • τουλάχιστον τεσσάρων από τις έξι ισοδύναμες εξισώσεις	χρήση αριθμητικών στρατηγικών επίλυσης	οι λύσεις της 10x+2=5x+7, επαληθεύουν την x=1
αλγεβρικές στρατηγικές (4)	Επιλογή • τουλάχιστον δύο από τις έξι ισοδύναμες εξισώσεις	χρήση αλγεβρικών στρατηγικών επίλυσης	Η 10x+2=5x+7 ισοδύναμη με την 5x=5 αν αφαιρέσουμε και από τα 2 μέλη το 2 και το 5x.

Είδη απαντήσεων που αναμέναμε στις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης του ΕΡ/Β

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, αναμέναμε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν κυρίως αριθμητικές στρατηγικές κατηγοριοποίησης των εξισώσεων και της ανίσωσης του ΕΡ/Β. Ιδιαίτερα στις ερωτήσεις της αριθμητικής εξίσωσης εξ/Α και ανίσωσης αν/Α αναμέναμε οι μαθητές να χρησιμοποιούν αριθμητικές στρατηγικές κατηγοριοποίησης και να επιλέγουν με επιτυχία τις ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις αντίστοιχα. Στην ερώτηση της αλγεβρικής εξίσωσης εξ/Β, αναμέναμε οι μαθητές να μην απαντήσουν με επιτυχία, καθώς οι 12 προς επιλογή εξισώσεις ήταν αλγεβρικές και, κατά συνέπεια, δεν είναι εύκολο να διαπιστωθεί ποιες εξισώσεις είναι ισοδύναμες στην δοσμένη $10x+2=5x+7$ με χρήση αριθμητικών στρατηγικών. Όπως προαναφέρθηκε, δεν επιτρέψαμε στους μαθητές να επιλύσουν τις 12 εξισώσεις και ανισώσεις της κάθε ερώτησης, με σκοπό να διαπιστώσουμε πόσοι από αυτούς, εφόσον δεν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τετριμμένες μεθόδους επίλυσης, θα εφαρμόσουν αλγεβρικές ιδιότητες ώστε να καταλήξουν στην απάντησή τους. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές ήταν πιθανόν να επιλύσουν την εξίσωση $10x+10=5x+15$, απομονώνοντας τις μεταβλητές στο δεξί μέλος και τους αριθμούς στο αριστερό και έπειτα να διαιρέσουν με τον συντελεστή της μεταβλητής καταλήγοντας στην απάντηση $x=1$. Έπειτα, εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο επίλυσης και για την δοσμένη $10x+2=5x+7$, να απαντούσαν ότι αυτές οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Με το να μην επιτρέψουμε όμως την επίλυση των εξισώσεων, θεωρήσαμε ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν αλγεβρικές στρατηγικές θα επέλεγαν να αφαιρέσουν και από τα δύο μέλη της εξίσωσης $10x+10=5x+15$ τον αριθμό 8 και να διαπιστώσουν ότι προκύπτει η εξίσωση $10x+2=5x+7$ που είχε δοθεί.

Εξάλλου, στις περιπτώσεις των εξ/Α και αν/Α σε ορισμένες περιπτώσεις ήταν εύκολο να διαπιστώσει κάποιος αν μια εξίσωση ή ανίσωση είναι ισοδύναμη με την δοσμένη εξίσωση ή ανίσωση αντίστοιχα. Για παράδειγμα, στην πρώτη ερώτηση του ΕΡ/Β [Πίνακας 7], αναμέναμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών θα επέλεγε την εξίσωση $x=3$ ως ισοδύναμη της δοσμένης $3x=9$, καθώς θα διαπίστωνε με σχετική ευκολία ότι όντως ο πραγματικός αριθμός 3 επαληθεύει την δεύτερη εξίσωση. Αν αυτή η στρατηγική υιοθετούνταν από ορισμένους μαθητές και για την επιλογή ή όχι των υπολοίπων εξισώσεων, θα μας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι πιθανότατα οι μαθητές αυτοί στηρίζονται σε αριθμητικές στρατηγικές για την κατηγοριοποίηση των εξισώσεων.

Μετά την συμπλήρωση του ΕΡ/Β από τους μαθητές, οι ερευνητές τους έκαναν διευκρινιστικές ερωτήσεις για να διαπιστώσουν με ποιες στρατηγικές κατέληξαν στις απαντήσεις τους σε κάθε μία από τις τρεις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου. Ανάλογα με την απάντηση που είχε δώσει ο κάθε μαθητής, του ζητούσαν να αιτιολογήσει και τον τρόπο με τον οποίο κατέληξε σε αυτή.

Στον Πίνακα 17, παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στις εξ/Α, αν/Α και εξ/Β του ΕΡ/Β ομαδοποιημένες κατά τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω και φαίνεται στους Πίνακες 14,15 και 16.

Πίνακας 17

Ποσοστά απαντήσεων μαθητών στο ΕΡ/Β

	Κατηγορία				
N=81	**Καμία απάντηση (0)**	**Ομοιότητα ως προς την μορφή (1)**	**Ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές (2)**	**Αριθμητικές στρατηγικές (3)**	**Αλγεβρικές στρατηγικές (4)**
εξ/Α (3x=9)	2,5%	11,1%	24,7%	44,4%	17,3%
αν/Α (2x<6)	4,9%	25,9%	28,4%	23,5%	17,3%
εξ/Β (10x+2=5x+7)	7,4%	42%	21%	12,3%	17,3%

<u>Αποτελέσματα απαντήσεων στο ΕΡ/Β</u>

Όπως αναμέναμε και όντως φαίνεται και στον Πίνακα 17, ο κύριος τρόπος κατηγοριοποίησης των ισοδύναμων εξισώσεων που επέλεξαν οι μαθητές στην περίπτωση της αριθμητικής εξ/Α είναι η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων (44,4%). Τις περισσότερες φορές, κατέφυγαν στην αντικατάσταση της μεταβλητής μιας εξίσωσης από τις δοσμένες με τον αριθμό 3, που είχαν διαπιστώσει με ευκολία ότι αποτελεί την λύση της 3x=9 (εξ/Α).

Ένα μικρό ποσοστό (17,3%) των μαθητών διαπίστωσε ότι τουλάχιστον πέντε από τις δώδεκα εξισώσεις ήταν ισοδύναμες με την εξ/Α εφαρμόζοντας αποκλειστικά αλγεβρικές ιδιότητες. Αυτό που δεν αναμέναμε ήταν ότι υπήρχαν αρκετοί μαθητές που απάντησαν στην πρώτη ερώτηση του ΕΡ/Α με απλοϊκά κριτήρια όπως είναι η μορφή των εξισώσεων ή την ύπαρξη ιδίων πραγματικών αριθμών με αυτούς που υπήρχαν στην εξ/Α, γεγονός που συμπεράναμε αφού μας ανέφεραν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν στις διευκρινιστικές ερωτήσεις που ακολούθησαν μετά την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου Β. Πιο συγκεκριμένα, ποσοστό 11,1% των μαθητών φάνηκε να δίνουν τις απαντήσεις τους στηριζόμενοι σε αυτές τις απλοϊκές στρατηγικές που μόλις αναφέραμε. Οι μαθητές αυτοί επέλεξαν ως ισοδύναμες με την 3x=9 (εξ/Α) κάποιες από τις εξισώσεις x=9-3, 7x=8 και 6x=18. Επιπρόσθετα, υπήρχε και ένα αρκετά υψηλό ποσοστό μαθητών (24,7%) που επέλεξαν τις ισοδύναμες προς την εξ/Α σε κάποιες περιπτώσεις με κριτήριο την απλή ομοιότητα ως προς την μορφή των εξισώσεων, ενώ σε κάποιες άλλες χρησιμοποιώντας αριθμητικές στρατηγικές [Πίνακας 17].

Από τα αποτελέσματα των απαντήσεων για την αριθμητική αν/Α παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση, παρά το γεγονός ότι δεν το αναμέναμε, πολλοί μαθητές (25,9%) κατηγοριοποίησαν τις ανισώσεις χρησιμοποιώντας ως κριτήριο το αν υπάρχει απλή ομοιότητα στην μορφή μεταξύ τους. Σχεδόν το ίδιο ποσοστό μαθητών (28,4%) είχε ως κριτήριο για την επιλογή των ισοδύναμων ανισώσεων επίσης την ομοιότητα ως προς την μορφή τους, αλλά και το αν αυτές επαληθεύονται από μια λύση από τις άπειρες που είχαν βρει επιλύοντας την αν/Α. Εξάλλου, αποκλειστικά αριθμητικές μεθόδους επαλήθευσης των ανισώσεων χρησιμοποίησε το 23,5% των μαθητών. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι ίδιοι μαθητές (17,3%) που κατηγοριοποίησαν την εξ/Α με αλγεβρικές μεθόδους, έκαναν το ίδιο και με την αν/Α, έχοντας την ίδια επιτυχία στις απαντήσεις τους [Πίνακας 17].

Οι μαθητές που κατηγοριοποίησαν την αλγεβρική εξ/Β με απλοϊκούς τρόπους έχοντας ως κύριο κριτήριο την απλή ομοιότητα της μορφής των εξισώσεων ήταν σε αυτή την ερώτηση οι περισσότεροι (42%). Θεωρούσαν για παράδειγμα ισοδύναμη της εξίσωσης 10x+2-5x+7 την εξίσωση 11x+6=9x+7. Το 21% των μαθητών χρησιμοποίησε ως κριτήριο την απλή ομοιότητα ως προς την μορφή των εξισώσεων αλλά και την αντικατάσταση της μεταβλητής αυτών με την λύση της εξίσωσης εξ/Β, ενώ εφαρμογή μόνο αριθμητικών μεθόδων φάνηκε να κάνει μόνο το 12,3% των μαθητών. Τέλος, παρά το γεγονός ότι η εξ/Β ήταν αλγεβρική, πάλι οι ίδιοι μαθητές (17,3%) οι οποίοι είχαν απαντήσει στις ερωτήσεις

για τις αριθμητικές εξ/Α και αν/Α εφαρμόζοντας αλγεβρικές μεθόδους, ενήργησαν με τον ίδιο τρόπο επιλέγοντας τουλάχιστον δύο ισοδύναμες εξισώσεις προς την εξ/Β [Πίνακας 17].

Σχολιασμός απαντήσεων στο ΕΡ/Β

Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι μεταξύ των εξ/Α και αν/Α υπάρχει μεγάλη διαφορά στα ποσοστά των μαθητών που κατηγοριοποίησαν τις δοσμένες εξισώσεις ή ανισώσεις με κριτήριο την ομοιότητα ως προς την μορφή ή τον αριθμητικό τρόπο. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν επιπλέον δυσκολίες στο να κατηγοριοποιήσουν μια αριθμητική ανίσωση πρώτου βαθμού σε σχέση με μια αριθμητική εξίσωση πρώτου βαθμού. Πιο συγκεκριμένα, όπως παρατηρούμε στον πίνακα 17, ενώ στην εξ/Α μόνο το 11,1% των μαθητών επέλεξε ισοδύναμες εξισώσεις με κριτήριο την ομοιότητα ως προς την μορφή, στην αν/Α το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών αυξάνεται στο 25,9%. Επίσης, ενώ το ποσοστό των μαθητών που φαίνεται να κατηγοριοποιούν με αριθμητικές μεθόδους την εξ/Α είναι 44,4%, αυτοί που κάνουν το ίδιο για την κατηγοριοποίηση της αν/Α είναι μόλις 23,5%. Η διαφορά μεταξύ των ποσοστών των μαθητών αυτών πιθανότατα οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονται όταν επιλύουν την αν/Α να επιλέξουν μια κατάλληλη τιμή από τις άπειρες λύσεις της που είναι το σύνολο (3,+oo), έτσι ώστε να ελέγξουν αν αυτή η τιμή επαληθεύει τις υπόλοιπες ανισώσεις, ενέργεια άλλωστε που δεν οδηγεί απαραίτητα σε ασφαλή συμπεράσματα. Έτσι, πολλοί από αυτούς καταφεύγουν στο να διαπιστώσουν πρώτα αν είναι όμοιες ως προς την μορφή οι ανισώσεις, για να τις χαρακτηρίσουν ισοδύναμες προς την αν/Α. Αντίθετα, από την επίλυση της εξ/Α προκύπτει διακριτή ακέραια λύση (x=3) η οποία αν αντικατασταθεί στην θέση της μεταβλητής των υπολοίπων εξισώσεων του ερωτήματος οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα για το ποιές από αυτές είναι ισοδύναμες με την εξ/Α.

Ακόμα περισσότεροι μαθητές 42% επιλέγουν ισοδύναμες εξισώσεις προς την εξ/Β με απλοϊκά κριτήρια, ενώ αυτοί που εφαρμόζουν αριθμητικές μεθόδους είναι σε αυτή την περίπτωση το 12,3% του δείγματος. Παρατηρούμε έτσι αυξημένα ποσοστά μαθητών που ανήκουν στις κατηγορίες ‘ομοιότητα ως προς την μορφή’ και ‘αριθμητικές στρατηγικές’ όσον αφορά την εξ/Β σε σχέση με αυτά των μαθητών που έχουν ομαδοποιηθεί στις ίδιες κατηγορίες όσον αφορά τις εξ/Α και αν/Α. Αυτές οι διαφορές πιθανότατα οφείλονται στο γεγονός ότι στην εξ/Β υπάρχει μεταβλητή και στα δύο μέλη, άρα είναι ακόμα δυσκολότερο να κατηγοριοποιηθεί από κάποιο μαθητή, ειδικά από αυτούς που από την συνέντευξη

προέκυψε ότι καταφεύγουν συνήθως στην μέθοδο της αντικατάστασης της μεταβλητής με πραγματικούς αριθμούς.

Επίσης, πολύ σημαντικό εύρημα είναι το γεγονός ότι ακριβώς οι ίδιοι μαθητές (17,3%) επιλέγουν αποκλειστικά με αλγεβρικές στρατηγικές ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις προς τις εξ/Α, εξ/Β ή αν/Α αντίστοιχα - και μάλιστα με ιδιαίτερη επιτυχία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αυτοί χρησιμοποιούσαν αλγεβρικές μεθόδους συστηματικά για να απαντούν στις ερωτήσεις του ΕΡ/Β. Χαρακτηριστικό είναι ότι οι μαθητές αυτοί, αφού ρωτήθηκαν από τους ερευνητές το πώς έκριναν ότι η εξίσωση x=3 είναι ισοδύναμη με την 3x=9, απάντησαν ότι η απόφασή τους προέκυψε αφού πολλαπλασίασαν και τα δύο μέλη της x=3 με τον κατάλληλο πραγματικό αριθμό 3, σε αντίθεση με πολλούς από τους υπόλοιπους μαθητές του δείγματος οι οποίοι ισχυρίστηκαν ότι «φαίνεται ότι και οι δύο εξισώσεις έχουν την ίδια λύση’’ ή ‘’ότι η τιμή 3 για το x επαληθεύει την 3x=9». Η απάντηση αυτή των μαθητών που κατηγοριοποιήθηκαν στην κατηγορία «αλγεβρικές στρατηγικές» σύμφωνα με τις απαντήσεις τους και στις τρείς ερωτήσεις του ΕΡ/Β, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι γνώριζαν πολύ καλά να εφαρμόζουν αλγεβρικές ιδιότητες και αντιμετώπιζαν κάθε εξίσωση και ανίσωση αλγεβρικά. Επιπρόσθετα, από το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στη κατηγορία «αλγεβρικές στρατηγικές» συμπεραίνουμε ότι οι υπόλοιποι μαθητές (86,7%) δεν κατηγοριοποίησαν τις εξ/Α, αν/Α και εξ/Β χρησιμοποιώντας αλγεβρικές μεθόδους, αλλά κατέφυγαν εξ ολοκλήρου σε άλλους τρόπους που στηρίζονται στην μορφή των δοσμένων εξισώσεων και ανισώσεων ή στην αριθμητική.

Επίσης, από τον Πίνακα 17 φαίνεται ότι τα ποσοστά των μαθητών που σύμφωνα με τις τρείς απαντήσεις τους στο ΕΡ/Α ομαδοποιήθηκαν στην κατηγορία «ομοιότητα ως προς την μορφή και αριθμητικές στρατηγικές» είναι περίπου ίσα. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ένα ποσοστό των μαθητών άνω του 20% σε κάθε περίπτωση στηρίζεται και στην πρώιμη αριθμητική του γνώση, αλλά και σε απλοϊκά κριτήρια για να κατηγοριοποιεί με επιτυχία εξισώσεις ή ανισώσεις.

Τρόπος κατηγοριοποίησης στο ΕΡ/Β και επίδοση στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ

Για να ελέγξουμε την κύρια υπόθεσή μας ότι ο τρόπος που οι μαθητές αναγνωρίζουν τις ισοδύναμες εξισώσεις και ανισώσεις στο ερωτηματολόγιο της κατηγοριοποίησης σχετίζεται με την συνολική επίδοση τους στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, ομαδοποιήσαμε τους μαθητές ανάλογα με τις απαντήσεις τους και στις τρείς ερωτήσεις κατηγοριοποίησης.

Πίνακας 18
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων στο ΕΡ/Β

Κατηγορία	**Κριτήριο**
	Οι μαθητές που και στις 3 ερωτήσεις του ΕΡ/Β:
ομοιότητα ως προς την μορφή (1)	κατηγοριοποίησαν με βάση απλοϊκές στρατηγικές
ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές (2)	κατηγοριοποίησαν με βάση απλοϊκές & αριθμητικές στρατηγικές
αριθμητικές στρατηγικές (3)	κατηγοριοποίησαν με βάση αριθμητικές στρατηγικές
αλγεβρικές στρατηγικές (4)	κατηγοριοποίησαν με βάση αλγεβρικές στρατηγικές

Οι μαθητές ομαδοποιήθηκαν στις εξής κατηγορίες: (1) Ομοιότητα ως προς την μορφή: Όσοι επέλεξαν ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις με μοναδικό κριτήριο την μορφή ή τους συντελεστές των μεταβλητών σε όλες τις ερωτήσεις του ΕΡ/Β, (2) Ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές: Όσοι μαθητές που φάνηκε να έδωσαν σε όλες τις περιπτώσεις τις απαντήσεις τους με κριτήριο την μορφή ή με χρήση αριθμητικών στρατηγικών, (3) Αριθμητικές στρατηγικές: όσοι μαθητές επέλεξαν συστηματικά σε κάθε ερώτηση τις ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις με αριθμητικά κριτήρια και (4) Αλγεβρικές στρατηγικές: όσοι μαθητές επέλεξαν σε όλες τις ερωτήσεις του ΕΡ/Β τις ισοδύναμες εξισώσεις ή ανισώσεις εφαρμόζοντας αλγεβρικές στρατηγικές [Πίνακας 18].

Για τους μαθητές της κάθε ομάδας από αυτές που προαναφέραμε, μετρήσαμε την μέση επίδοση τους στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ [Πίνακας 19]. Η μέση επίδοση των μαθητών στα ερωτηματολόγια ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων που

κατηγοριοποίησαν με βάση την ομοιότητα ως προς την μορφή ήταν μόλις 11,182, ενώ αυτών που κατηγοριοποίησαν με βάση την ομοιότητα ως προς την μορφή αλλά και αριθμητικές στρατηγικές ήταν 19,653. Οι μαθητές που κατηγοριοποίησαν στηριζόμενοι αποκλειστικά σε αριθμητικές στρατηγικές είχαν μέση επίδοση 24,143, ενώ, τέλος, οι μαθητές που κατηγοριοποίησαν χρησιμοποιώντας συστηματικά αλγεβρικές στρατηγικές είχαν την υψηλότερη μέση επίδοση 26,071 σε σύνολο 28 ερωτήσεων επίλυσης. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 19, η μέση επίδοση αυξάνει όταν μετακινούμαστε από την πρώτη έως την τέταρτη κατηγορία μαθητών.

Όσον αφορά την συνολική επίδοση των μαθητών στα ερωτηματολόγια επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων, τους ομαδοποιήσαμε σε τρείς κατηγορίες:

Πίνακας 19

Επίδοση στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ ανά κατηγορία μαθητών σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στο ΕΡ/Β

Κατηγοριοποίηση απαντήσεων στο ΕΡ/Β που δόθηκαν με βάση :	**N**	**(%)**	**Μέση επίδοση ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ**
ομοιότητα ως προς την μορφή (1)	11	13,58	11,182
ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές (2)	49	60,49	19,653
αριθμητικές στρατηγικές (3)	7	8,64	24,143
αλγεβρικές στρατηγικές (4)	14	17,28	26,071

(1) «Συστηματική κατηγοριοποίηση με βάση ομοιότητα μορφής & αριθμητικές μεθόδους επίλυσης»: όσοι μαθητές επίλυσαν τις 28 εξισώσεις και ανισώσεις χρησιμοποιώντας μόνο απλοϊκές ή και αριθμητικές μεθόδους επίλυσης, (2) «Συστηματική κατηγοριοποίηση με χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης»: όσοι μαθητές χρησιμοποίησαν αποκλειστικά αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τουλάχιστον για τις 25 από το σύνολο των 28 εξισώσεων και ανισώσεων, (3) «Συστηματική κατηγοριοποίηση με χρήση αλγεβρικών

μεθόδων επίλυσης»: όσοι μαθητές έκαναν συστηματικά χρήση αλγεβρικών μεθόδων για την επίλυση τουλάχιστον από τις 25 εξισώσεις και ανισώσεις [Πίνακας 20].

Πίνακας 20
Κατηγοριοποίηση απαντήσεων στα ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ

Κατηγορία	Κριτήριο
Συστηματική χρήση απλοϊκών & αριθμητικών μεθόδων επίλυσης	Όσοι χρησιμοποίησαν για τις ερωτήσεις των ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ απλοϊκές & αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης
Συστηματική χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης	Όσοι χρησιμοποίησαν για τουλάχιστον 25 ερωτήσεις των ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ αποκλειστικά αριθμητικές στρατηγικές επίλυσης
Συστηματική χρήση αλγεβρικών μεθόδων επίλυσης	Όσοι χρησιμοποίησαν για τουλάχιστον 25 ερωτήσεις των ΕΡ/Αα & ΕΡ/Αβ αποκλειστικά αλγεβρικές στρατηγικές επίλυσης

Για να ελέγξουμε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του τρόπου κατηγοριοποίησης στο ΕΡ/Β και της συνολικής επίδοσης των μαθητών στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ, κάναμε μια ποιοτική ανάλυση. Σχετικά με τον τρόπο κατηγοριοποίησης, οι μαθητές ομαδοποιήθηκαν με τον ίδιο τρόπο που φαίνεται στον παραπάνω Πίνακα 19, ενώ για την συνολική επίδοση των μαθητών στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ τους ομαδοποιήσαμε σύμφωνα με τα κριτήρια που προαναφέραμε [Πίνακας 20].

Έπειτα, κάναμε μια ανάλυση συσχέτισης (Spearman Correlation), η οποία έδωσε στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα [$r_s = 9{,}806; p < .001; N = 81$]. Στα επιμέρους αποτελέσματα της ανάλυσης, στατιστικά σημαντικά ήταν τα εξής ευρήματα: Η πλειονότητα των μαθητών απάντησε στα ερωτήματα κατηγοριοποίησης χρησιμοποιώντας απλοϊκές και αριθμητικές στρατηγικές. Από τους συνολικά 49 που κατηγοριοποίησαν με αυτές τις στρατηγικές, οι 36 έκαναν το ίδιο και όταν έλυσαν τις εξισώσεις και ανισώσεις των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ. Κανείς από αυτούς δεν χρησιμοποίησε αλγεβρικές μεθόδους για να απαντήσει στις ερωτήσεις επίλυσης. Εξάλλου, 11 μαθητές απάντησαν στις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης με χρήση απλοϊκών στρατηγικών και οι 10 από αυτούς χρησιμοποίησαν τις ίδιες στρατηγικές και για να απαντήσουν στα ερωτηματολόγια επίλυσης. Επίσης, 7 από

τους 81 μαθητές στηρίχτηκαν αποκλειστικά σε αριθμητικές μεθόδους για να απαντήσουν σε όλα τα ερωτηματολόγια που τους δόθηκαν. Τέλος, από τους 14 μαθητές που αναφέρθηκε και προηγουμένως ότι χρησιμοποίησαν συστηματικά αλγεβρικές στρατηγικές για να απαντήσουν στις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης, οι 13 από αυτούς χρησιμοποίησαν τις ίδιες στρατηγικές και για την επίλυση τουλάχιστον 25 εξισώσεων και ανισώσεων. Όλα τα παραπάνω ευρήματα ήταν στατιστικώς σημαντικά. [Πίνακας 21].

Πίνακας 21
Συσχέτιση τρόπου επίλυσης και κατηγοριοποίησης

Spearman Correlation [$r_s = 9{,}806; p < .001; N = 81$]		**Ομαδοποίηση μαθητών που επίλυαν συστηματικά με χρήση**			Σύνολο
		απλοϊκών & αριθμητικών μεθόδων επίλυσης	αριθμητικών μεθόδων επίλυσης	αλγεβρικών μεθόδων επίλυσης	
Ομαδοποίηση μαθητών που κατηγοριοποιούσαν συστηματικά με βάση	Ομοιότητα ως προς την μορφή	10	1	0	11
	ομοιότητα ως προς την μορφή & αριθμητικές στρατηγικές	36	13	0	49
	αριθμητικές στρατηγικές	0	7	0	7
	αλγεβρικές στρατηγικές	0	1	13	14
	Σύνολο	46	22	13	81

Κεφάλαιο 4

4.1 Συζήτηση

Σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό, η μάθηση αποτελεί το αποτέλεσμα της ενεργούς δράσης ενός μαθητή να κατανοήσει μια νέα πληροφορία κάνοντας χρήση των προηγούμενων γνώσεών του. Στην κατανόηση των νέων εννοιών που διδάσκονται στις σχολικές τάξεις, σημαντικό ρόλο παίζει η φύση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών καθώς και οι μηχανισμοί μάθησης. Οι έννοιες που διδάσκονται στις σχολικές τάξεις είναι δυνατό να κατανοηθούν σύμφωνα με δύο μηχανισμούς μάθησης. Σύμφωνα με τον πρώτο, ένας μαθητής είναι δυνατό να έχει κατακτήσει μόνο ένα μέρος της πρώιμης γνώσης σχετικά με τις έννοιες που πρόκειται να διδαχτεί, αλλά να συμπληρώνει μέσω της διδασκαλίας τα κενά γνώσης που έχει (Carey, 2001). Σε μια δεύτερη περίπτωση, ένας μαθητής είναι πιθανό να έχει επίκτητες γνώσεις είτε από το σχολείο, είτε από την καθημερινή του εμπειρία, οι οποίες έρχονται σε σύγκρουση με τις έννοιες που διδάσκεται (Vosniadou και συνεργάτες, 2004).

Το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou και συνεργάτες, 2008· Vosniadou & Verschaffel, 2004) υποστηρίζει ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών θα μπορούσε, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση μιας νέας έννοιας (Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Όπως αναφέρει και ο Χρήστου (2009), το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής δέχεται ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών είναι συχνά οργανωμένη σε έναν πλέγμα εννοιών και σχέσεων μεταξύ τους που έχουν τη μορφή θεωρίας (Carey, 1985· Vosniadou και συνεργάτες, 2007· Vosniadou και συνεργάτες, 2008). Στην περίπτωση των μαθηματικών, η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών είναι οργανωμένη γύρω από τον φυσικό αριθμό (Gallistel & Gelman, 1992· Gelman, 2000· Ni & Zhou, 2005· Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007· Χρήστου 2009), ενώ και ο τρόπος που διδάσκονται τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση ενθαρρύνει τους μαθητές στο να βασίζονται στις προηγούμενες γνώσεις τους για να κατανοήσουν μια νέα έννοια. Επομένως, η μαθηματική γνώση που αποκτούν οι μαθητές

στο δημοτικό είναι δυνατό να σταθεί εμπόδιο στις νέες μαθηματικές έννοιες που μαθαίνουν αργότερα. Εξάλλου, όταν μια νέα πληροφορία που προέρχεται από την συστηματική διδασκαλία έρθει σε σύγκρουση με τις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για μια έννοια, τότε συμβαίνουν τα συνθετικά λάθη που υποδηλώνουν την ύπαρξη συνθετικών μοντέλων.

Η πρώτη υπόθεση που εξετάστηκε στην παρούσα μελέτη και η οποία προέκυπτε από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής ήταν ότι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών επίλυσης αριθμητικών εξισώσεων πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής θα μπορούσε να σταθεί εμπόδιο στην επιτυχή επίλυση αντίστοιχου βαθμού και μεταβλητής αλγεβρικών εξισώσεων. Εξάλλου, σύμφωνα με παλαιότερες έρευνες, οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις στηριζόμενοι στην πρώιμη αριθμητική γνώση που μπορεί να έχουν αποκτήσει από το σχολείο ή από την καθημερινή τους εμπειρία (Kieran, 1992· Herscovics & Linchevski, 1994), ενώ τις περισσότερες φορές η επίδοση των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων είναι καλύτερη από την επίδοση που έχουν στην επίλυση ανισώσεων (Kieran, 1985· Filloy & Rojano, 1989).

Η υπόθεση αυτή υποστηρίχθηκε από τα αποτελέσματα της εμπειρικής μελέτης που αναλυτικά παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και που έδειξε μια ξεκάθαρη δυσκολία των μαθητών να επιλύουν αλγεβρικές εξισώσεις με την ίδια επιτυχία που επιλύουν αριθμητικές εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στις αριθμητικές εξισώσεις σε σχέση με τις αλγεβρικές εξισώσεις με την διαφορά στην επίδοση να είναι στατιστικά σημαντική [ΕΡ/Αα, ΕΡ/Αβ, Πίνακας 10, Αποτελέσματα].

Εξάλλου, για να ελέγξουμε εάν η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων οφείλεται στην προϋπάρχουσα γνώση επίλυσης αριθμητικών εξισώσεων προχωρήσαμε σε ανάλυση του είδους των λαθών που έκαναν οι μαθητές κατά την επίλυση. Από τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκε η υπόθεσή μας, καθώς τα συνολικά ποσοστά των λανθασμένων απαντήσεων είναι περισσότερα στις αλγεβρικές εξισώσεις σε σχέση με τις αντίστοιχες αριθμητικές. Πιο συγκεκριμένα, οι λανθασμένες απαντήσεις στις αριθμητικές εξισώσεις (5), (7) και (8) ήταν πολύ λιγότερες από τις λανθασμένες απαντήσεις που λάβαμε στις αλγεβρικές εξισώσεις (12), (13) και (14) αντίστοιχα. Οι διαφορές αυτές επιβεβαιώνουν ότι οι μαθητές συναντούσαν περισσότερα εμπόδια στην επίλυση αλγεβρικών παρά αριθμητικών εξισώσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η διαφορά μεταξύ των ορθών απαντήσεων στις εξισώσεις (7) και (13). Ενώ οι μαθητές επέλυαν και στις δύο περιπτώσεις με την αριθμητική μέθοδο της

αντικατάστασης της μεταβλητής από διάφορους ακέραιους αριθμούς, στην εξίσωση (7) απάντησε με επιτυχία το 91,4 % από αυτούς, ενώ μόλις το 70,4% έκανε το ίδιο στην εξίσωση (13). Οι περισσότεροι από τους μαθητές που απάντησαν λανθασμένα στην εξίσωση (13) δυσκολεύτηκαν να επιλύσουν εξαιτίας της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης που επέλεξαν [Πίνακες 13 & 14].

Επίσης, είχαμε υποθέσει ότι οι μαθητές επιλύουν με μεγαλύτερη επιτυχία τις εξισώσεις από τις ανισώσεις. Αυτό, εξάλλου, είχαν διαπιστώσει και στις έρευνές τους οι Bazzini και Tsamir (2004), Tsamir και Almog (2001) και οι Arampatzis, Skiadaresis και Christou (2007) για συγκεκριμένα είδη ανισώσεων.

Τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν καλύτερη μέση επίδοση στις οκτώ αριθμητικές εξισώσεις παρά στις οκτώ αριθμητικές ανισώσεις [ΕΡ/Αα, ΕΡ/Αβ, Πίνακας 9, Αποτελέσματα]. Εξάλλου, καλύτερη μέση επίδοση είχαν και στις έξι αλγεβρικές εξισώσεις σε σχέση με τις αντίστοιχες αλγεβρικές ανισώσεις [ΕΡ/Αα,ΕΡ/Αβ, Πίνακας 9, Αποτελέσματα]. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν την υπόθεσή μας ότι οι εξισώσεις επιλύονται με μεγαλύτερη επιτυχία από τις ανισώσεις ανεξάρτητα αν αυτές είναι αριθμητικές ή αλγεβρικές.

Η ανάλυση των ειδών των λαθών στις εξισώσεις και ανισώσεις επιβεβαιώνει την υπόθεσή μας: ότι δηλαδή η καλύτερη επίδοση των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων σε σχέση με την επίλυση ανισώσεων οφείλεται στην προϋπάρχουσα γνώση επίλυσης αριθμητικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, η μεγαλύτερη διαφορά παρατηρήθηκε μεταξύ της εξίσωσης (6) του ΕΡ/Αα και της παρόμοιας μορφής ανίσωσης (6) του ΕΡ/Αβ [Πίνακες 5 & 6], όπου τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων ήταν 91,4% και 37% αντίστοιχα [Πίνακες 11 & 12, Αποτελέσματα]. Λαμβάνοντας υπόψη τις απαντήσεις των μαθητών στις διευκρινιστικές ερωτήσεις που ακολούθησαν την επίλυση των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η διαφορά στην επίδοση μεταξύ της εξίσωσης (6) και ανίσωσης (6) οφείλεται στο γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν άλλαξε την φορά της ανίσωσης όταν κατέληξε στην ανισότητα $-10x<10$ και διαίρεσε με τον αρνητικό αριθμό -10. Αυτή η λανθασμένη κίνηση που έγινε από πολλούς μαθητές φανερώνει ότι επηρεάζονται από τον τρόπο λύσης των εξισώσεων, στην συγκεκριμένη περίπτωση της εξίσωσης (6), στην διαδικασία λύσης της οποίας δεν απαιτείται κάποια αλλαγή την στιγμή που κάποιος διαιρεί με αρνητικό αριθμό και τα δύο μέλη της σχέσης. Επίσης, μεγάλη διαφορά παρατηρήθηκε και μεταξύ των ορθών απαντήσεων στην εξίσωση (11) και την

αντίστοιχη ανίσωση (11). Τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων για την εξίσωση (11) ήταν 65,4%, ενώ για την ανίσωση (11) μόλις 28,4% [Πίνακες 11 & 12, Αποτελέσματα]. Οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις των ερευνητών που ακολούθησαν την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου έδειξαν ότι τα αυξημένα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων στην εξίσωση (11) οφείλονταν στο γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές, επιλύοντας την εξίσωση (11), κατέληγαν στην ισότητα -7=10, την οποία εύκολα χαρακτήριζαν αδύνατη. Όταν επίλυαν την ανίσωση (11) κατέληγαν στην ανισοτική σχέση 4>2 την οποία κατά αντιστοιχία με την εξίσωση (11) χαρακτήριζαν αδύνατη, γεγονός που δεν ίσχυε στην συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς είναι σαφές ότι ο πραγματικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του 2 για κάθε τιμή της μεταβλητής.

Επίσης, είχαμε υποθέσει ότι λόγω της πρώιμης αριθμητικής γνώσης των μαθητών θα μπορούν να επιλύουν με σχετική επιτυχία αριθμητικές ανισώσεις, αλλά θα συναντούν εμπόδια κατά την επίλυση αντίστοιχης μορφής αλγεβρικών ανισώσεων. Τα αποτελέσματα της εμπειρικής μελέτης που περιγράφηκε προηγουμένως υποστηρίζουν αυτή την υπόθεση σε μεγάλο βαθμό.

Οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στις αριθμητικές ανισώσεις του ΕΡ/Αα σε σχέση με την επίδοσή τους στις αλγεβρικές ανισώσεις του ΕΡ/Αβ με την διαφορά στην επίδοση να είναι στατιστικά σημαντική [ΕΡ/Αα, ΕΡ/Αβ, Πίνακας 9, Αποτελέσματα]. Εξάλλου, όπως και στις εξισώσεις, για να ελέγξουμε τους λόγους για τους οποίους οι αριθμητικές ανισώσεις επιλύονται με μεγαλύτερη επιτυχία από τις αλγεβρικές ανισώσεις, προχωρήσαμε σε ανάλυση του είδους των λαθών που έκαναν οι μαθητές κατά την επίλυση. Από τα αποτελέσματα από την κατηγοριοποίηση των ειδών των λαθών που έκαναν οι μαθητές ενισχύθηκε η υπόθεσή μας, καθώς η πλειοψηφία των λαθών των μαθητών στις αριθμητικές ανισώσεις οφείλονται στην αντιμετώπισή τους από τους μαθητές ως εξισώσεις. Αντίθετα, τα αυξημένα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων στις αλγεβρικές ανισώσεις φάνηκε ότι οφείλονται και στην αντιμετώπιση των συγκεκριμένων ανισώσεων από τους μαθητές ως εξισώσεις αλλά και από αριθμητικές μεθόδους επίλυσης τις οποίες χρησιμοποίησαν οι μαθητές [Πίνακας 13, Αποτελέσματα].

Αντίστοιχα αποτελέσματα προέκυψαν και όσον αφορά τις λανθασμένες απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο των ανισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι λανθασμένες απαντήσεις στις αριθμητικές ανισώσεις (5), (7) και (8) ήταν πολύ λιγότερες από τις λανθασμένες απαντήσεις που λάβαμε στις αλγεβρικές ανισώσεις (12), (13) και (14) αντίστοιχα. Όπως συνέβαινε και στις εξισώσεις, οι διαφορές αυτές επιβεβαιώνουν ότι οι μαθητές

συναντούσαν περισσότερα εμπόδια στην επίλυση αλγεβρικών παρά αριθμητικών ανισώσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η διαφορά μεταξύ των ορθών απαντήσεων στις ανισώσεις (5) και (12). Ενώ οι μαθητές επέλυσαν και στις δύο περιπτώσεις με την αριθμητική μέθοδο της αντικατάστασης της μεταβλητής από διάφορους αριθμούς, το 75,3 % από αυτούς απάντησε με επιτυχία στην ανίσωση (5), ενώ μόλις το 23,5% έκανε το ίδιο στην ανίσωση (12). Οι μαθητές που απάντησαν λανθασμένα στην ανίσωση (12) δυσκολεύτηκαν να επιλύσουν εξαιτίας αριθμητικών μεθόδων επίλυσης που εφάρμοσαν ή επειδή μετά την διαδικασία επίλυσης που ακολούθησαν κατέληξαν στην ανισοτική σχέση $0x<0$ δίνοντας λανθασμένα ως λύση της ανίσωσης το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Σε αυτή την περίπτωση, οι μαθητές που έδωσαν ως απάντηση το σύνολο των πραγματικών αριθμών, πιθανότατα βασίστηκαν στις γνώσεις τους για την επίλυση εξισώσεων σύμφωνα με τις οποίες η εξίσωση $0x=0$ έχει όντως ως σύνολο λύσεων τους πραγματικούς αριθμούς. Αντίστοιχα ευρήματα με ανισώσεις με σύνολο λύσεων το κενό ή τους πραγματικούς αριθμούς είχαν προκύψει και σε παλιότερη έρευνα των Αραμπατζή, Σκιαδαρέση και Χρήστου (2007). Από τις διευκρινιστικές απαντήσεις των μαθητών, φάνηκε ότι οι περισσότεροι δεν κατάφεραν με την αριθμητική μέθοδο της αντικατάστασης της μεταβλητής που επέλεξαν να καταλήξουν σε κάποιο συγκεκριμένο συμπέρασμα [Πίνακες 11 & 12, Αποτελέσματα].

Τέλος, υποθέσαμε ότι οι μαθητές θα χαρακτηρίζουν τις εξισώσεις ή ανισώσεις ως ισοδύναμες χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους, όπως είναι η αντικατάσταση της μεταβλητής με ακέραιους αριθμούς ή αλγεβρικές μεθόδους, όπως είναι η εφαρμογή αλγεβρικών ιδιοτήτων. Εξάλλου, οι αλλαγές στην κατηγοριοποίηση έχουν συνδεθεί με την εννοιολογική αλλαγή (Chi, 1992· Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008). Έτσι, θεωρήσαμε ότι ο τρόπος κατηγοριοποίησης των εξισώσεων και ανισώσεων που επιλέγει κάθε μαθητής, όταν δεν έχει δυνατότητα να εφαρμόσει αλγοριθμικές διαδικασίες επίλυσης, πιθανότατα φανερώνει το αν βασίζεται στην πρώιμη αριθμητική του γνώση ή σε εφαρμογή αλγεβρικών ιδιοτήτων.

Για να ελέγξουμε τα παραπάνω, δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο κατηγοριοποίησης εξισώσεων και ανισώσεων. Όπως αναμέναμε, η μειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιεί αλγεβρικές μεθόδους για την κατηγοριοποίηση εξισώσεων και ανισώσεων. Μάλιστα, όπως φάνηκε και από τα αποτελέσματα αυτοί οι μαθητές, χρησιμοποιούν συστηματικά αλγεβρικές μεθόδους για την κατηγοριοποίηση αλγεβρικών αλλά και αριθμητικών εξισώσεων και ανισώσεων. Σημαντικό στοιχείο για τους συγκεκριμένους 14 μαθητές

αποτελεί το γεγονός ότι δεν επηρεάστηκε η μέθοδος που χρησιμοποίησαν σε κάθε περίπτωση από την δυσκολία του κάθε ερωτήματος. Στην περίπτωση της αν/Α η δυσκολία προέκυπτε από το γεγονός ότι οι προς κατηγοριοποίηση σχέσεις ήταν ανισώσεις, ενώ στην εξ/Β οι προς κατηγοριοποίηση εξισώσεις ήταν αλγεβρικές με μεταβλητές και πραγματικούς αριθμούς και στα δύο μέλη. Εντούτοις, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν αλγεβρικές μεθόδους απάντησαν με χαρακτηριστική ευκολία και στις τρεις ερωτήσεις του ΕΡ/Β. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ορισμένοι από αυτούς τους μαθητές όταν τους ζητήθηκε να εξηγήσουν γιατί θεωρούν την x=3 ισοδύναμη με την 3x=9, απάντησαν με σιγουριά ότι η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την πρώτη αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό 3. Η απάντηση αυτή των μαθητών δείχνει ότι ενώ ήταν εύκολο να αντικαταστήσουν στην εξίσωση 3x=9 τον αριθμό 3 που είχαν άμεσα από την εξίσωση x=3 και να διαπιστώσουν εύκολα ότι την επαληθεύει, προτίμησαν να εφαρμόσουν την αλγεβρική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και των δύο μελών μιας εξίσωσης με τον ίδιο αριθμό για να δώσουν την απάντησή τους.

Στα επιμέρους αποτελέσματα για τις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης του ΕΡ/Β, παρατηρούμε ότι στην αριθμητική εξίσωση εξ/Α ποσοστό 44,4% των μαθητών χρησιμοποιεί αποκλειστικά αριθμητικές στρατηγικές, κάτι που θεωρείται αναμενόμενο, καθώς η εξ/Α είναι μια αριθμητική εξίσωση και επιλύεται εύκολα με την επιλογή τέτοιων μεθόδων επίλυσης. Στα αποτελέσματα για τις απαντήσεις στην αριθμητική ανίσωση αν/Α, παρατηρείται μια μείωση κατά το ήμισυ του ποσοστού των μαθητών που χρησιμοποιούν μόνο αριθμητικές μεθόδους, ενώ ελάχιστοι μαθητές φαίνεται να βασίζονται σε αριθμητικές μεθόδους για να κατηγοριοποιήσουν την αλγεβρική εξίσωση εξ/Β.

Τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις στο τρίτο ερωτηματολόγιο υποστηρίζουν την υπόθεσή μας ότι οι μαθητές βασίζονται σε αριθμητικές ή αλγεβρικές στρατηγικές για να κατηγοριοποιήσουν εξισώσεις και ανισώσεις. Μάλιστα φάνηκε ότι ορισμένοι μαθητές χρησιμοποιούν συστηματικά αλγεβρικές μεθόδους για να κατηγοριοποιούν, ενώ το ποσοστό των μαθητών που φαίνεται να βασίζονται σε αποκλειστικά αριθμητικές μεθόδους μειώνεται όταν η προς κατηγοριοποίηση σχέση είναι ανίσωση ή αλγεβρική εξίσωση.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπήρχε και μια ομάδα μαθητών οι οποίοι βασίζονται συστηματικά στην ομοιότητα ως προς την μορφή των δοσμένων εξισώσεων ή ανισώσεων για να τις κατηγοριοποιήσουν, γεγονός που δεν αναμέναμε. Επίσης, αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών φάνηκε να κατηγοριοποιεί τις εξισώσεις ή ανισώσεις που τους δόθηκαν στηριζόμενοι στην ομοιότητα ως προς την μορφή αλλά και σε αριθμητικές μεθόδους. Τα

ποσοστά των μαθητών που φάνηκε να κατηγοριοποιούν με τους δύο προαναφερθέντες τρόπους αυξάνονταν καθώς παρατηρούμε τα αποτελέσματα των απαντήσεων και μετακινούμαστε από την αριθμητική εξίσωση, στην αριθμητική ανίσωση και τέλος στην αλγεβρική εξίσωση.

Τα αποτελέσματα αυτά κάνουν φανερή μια δυσκολία των μαθητών να χρησιμοποιούν αριθμητικές στρατηγικές στην κατηγοριοποίηση των ανισώσεων. Τέλος, όπως υποδεικνύουν τα αποτελέσματα για τις απαντήσεις στην εξ/Β, οι μαθητές φάνηκε να κατηγοριοποιούν τις δοσμένες εξισώσεις βασιζόμενοι κυρίως αποκλειστικά στην ομοιότητα ως προς την μορφή ή και σε αριθμητικές στρατηγικές. Οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να εφαρμόσουν αλγεβρικές αλλά και αριθμητικές στρατηγικές σε αλγεβρικές εξισώσεις με μεταβλητές και στα δύο μέλη όπως είναι η εξ/Β [Πίνακας 17, Αποτελέσματα].

Ομαδοποιήσαμε τους μαθητές σύμφωνα με τις στρατηγικές στις οποίες φάνηκε να βασίζονται για να κατηγοριοποιήσουν και υπολογίσαμε την μέση επίδοση των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συνολική μέση επίδοση στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ επιτυγχάνεται από τους μαθητές που στηρίζονται σε αλγεβρικές στρατηγικές, ενώ η χαμηλότερη μέση επίδοση από αυτούς που κατηγοριοποιούν βασιζόμενοι στην ομοιότητα ως προς την μορφή [Πίνακας 19, Αποτελέσματα]. Η σύγκριση των μέσων επιδόσεων της κάθε κατηγορίας κάνει φανερό ότι όσο πιο απλοϊκές στρατηγικές κατηγοριοποίησης εξισώσεων και ανισώσεων φαίνεται να χρησιμοποιούν οι μαθητές, τόσο μικρότερη επίδοση είχαν στις ερωτήσεις επίλυσης των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ. Αντίθετα οι μαθητές που συστηματικά βασίστηκαν σε αλγεβρικές στρατηγικές για να απαντήσουν στις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης είχαν και υψηλή μέση επίδοση που ήταν 26,071 σε σύνολο 28 ερωτήσεων επίλυσης.

Για να ελέγξουμε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του τρόπου κατηγοριοποίησης στο ΕΡ/Β και της συνολικής επίδοσης των μαθητών στα ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ, κάναμε μια ποιοτική ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, ομαδοποιήσαμε τους μαθητές σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης του ΕΡ/Β αλλά και στις ερωτήσεις επίλυσης των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ.

Η ανάλυση συσχέτισης έδωσε στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, οι 10 από τους 11 μαθητές που κατηγοριοποίησαν με απλοϊκές στρατηγικές επέλυσαν τις εξισώσεις και ανισώσεις των ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ με κριτήριο την απλή ομοιότητα ως προς την μορφή ή χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους. Από τους 49

μαθητές που χρησιμοποίησαν απλοϊκές ή αριθμητικές στρατηγικές στην κατηγοριοποίηση, οι 36 χρησιμοποίησαν και στην επίλυση απλοϊκές ή αριθμητικές στρατηγικές, ενώ κανείς από αυτούς δεν χρησιμοποίησε αλγεβρικές μεθόδους. Επίσης, υπήρξαν 7 μαθητές που χρησιμοποίησαν συστηματικά αριθμητικές μεθόδους όταν τους ζητήθηκε να κατηγοριοποιήσουν αλλά και να επιλύσουν εξισώσεις και ανισώσεις. Τέλος, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως υπήρξαν 14 μαθητές που απάντησαν και στις 3 ερωτήσεις κατηγοριοποίησης, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά αλγεβρικές μεθόδους. Από αυτούς, οι 13 χρησιμοποίησαν αλγεβρικές μεθόδους και για να απαντήσουν στα ερωτηματολόγια επίλυσης ΕΡ/Αα και ΕΡ/Αβ [Πίνακας 21].

Τα παραπάνω αποτελέσματα της ανάλυσης συσχέτισης υποστηρίζουν έντονα την υπόθεσή μας ότι ο τρόπος που οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τον τρόπο που επιλύουν τέτοιες σχέσεις.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε την επίδοση των μαθητών όταν επιλύουν και κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής, αλλά και τις στρατηγικές που ακολουθούν για να δώσουν τις απαντήσεις τους. Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, υποθέσαμε ότι το αρχικό πλαίσιο των μαθητών για την επίλυση εξισώσεων, που είναι οργανωμένο γύρω από την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων, θα μπορούσε να σταθεί εμπόδιο στην επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων και αριθμητικών και αλγεβρικών ανισώσεων. Επίσης, υποθέσαμε ότι, λόγω της προηγούμενης γνώσης γύρω από την επίλυση εξισώσεων, οι μαθητές θα είχαν την τάση να κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις στηριζόμενοι σε αριθμητικές στρατηγικές. Εξάλλου, αναμέναμε ο τρόπος που οι μαθητές κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις να σχετίζεται με την επίδοσή τους στην επίλυση τέτοιων σχέσεων.

Οι υποθέσεις μας υποστηρίχθηκαν από τα αποτελέσματα της εμπειρικής μελέτης που πραγματοποιήσαμε σε 81 μαθητές της Γ’ Γυμνασίου. Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι οι μαθητές έχουν την τάση να διαπραγματεύονται τις αριθμητικές και αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις στηριζόμενοι στις στρατηγικές που διδάσκονται να χρησιμοποιούν από τις τελευταίες τάξεις του δημοτικού για να επιλύουν αριθμητικές εξισώσεις. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύθηκαν και από το γεγονός ότι ακόμα και στο ερωτηματολόγιο κατηγοριοποίησης εξισώσεων και ανισώσεων οι μαθητές έτειναν να απαντούν βασιζόμενοι κυρίως σε στρατηγικές που είχαν σχέση με αριθμητικές μεθόδους ή

την ομοιότητα ως προς την μορφή ανεξάρτητα με το αν έπρεπε να κατηγοριοποιήσουν αριθμητικές ή αλγεβρικές εξισώσεις.

Εξάλλου, σημαντικό ήταν το εύρημα ότι μόνο μια μικρή μειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε συστηματικά αλγεβρικές μεθόδους για να επιλύσει ή να κατηγοριοποιήσει τις εξισώσεις και τις ανισώσεις που περιλαμβάνονταν στα τρία ερωτηματολόγια της έρευνας. Επιπρόσθετα, από τα επιμέρους αποτελέσματα στις 3 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου της κατηγοριοποίησης, συμπεραίνουμε ότι πολλοί μαθητές δείχνουν να καταφεύγουν σε απλοϊκές στρατηγικές όταν πρέπει να κατηγοριοποιήσουν μια αλγεβρική εξίσωση ή μια ανίσωση.

Επίσης, η ομαδοποίηση των μαθητών σε κατηγορίες σύμφωνα με την απάντησή τους στις ερωτήσεις κατηγοριοποίησης και η σύγκριση των μέσων επιδόσεων των μαθητών της κάθε κατηγορίας στα ερωτήματα επίλυσης, έκανε φανερό οι μαθητές που κατηγοριοποίησαν στηριζόμενοι σε απλοϊκές ή αριθμητικές στρατηγικές είχαν μικρότερη μέση επίδοση από αυτούς που χρησιμοποίησαν αποκλειστικά αριθμητικές στρατηγικές, οι οποίοι με την σειρά τους είχαν χαμηλότερη μέση επίδοση από αυτούς που έκαναν χρήση αποκλειστικά αλγεβρικών στρατηγικών.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έρχονται να υποστηρίξουν τις προβλέψεις που προέκυψαν από το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές επιλύουν και κατηγοριοποιούν εξισώσεις και ανισώσεις, υπό την επίδραση του αρχικού τους επεξηγηματικού πλαισίου για την επίλυση εξισώσεων που είναι οργανωμένο γύρω από την αριθμητική.

4.2 Εφαρμογές στην εκπαίδευση

Ο τρόπος με τον οποίο οργανώνεται και συστηματοποιείται η εκμάθηση των μαθηματικών στα σχολεία, στηρίζεται στην ύπαρξη της προηγούμενης γνωστικής δομής – διαισθητικής γνώσης των μαθητών και χρησιμοποιώντας αυτή ως «βάση», την εμπλουτίζει με νέες μαθηματικές γνώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η διδασκαλία του φυσικού αριθμού, όπου με την χρήση των αρχικών διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του αριθμού επιτυγχάνεται η εκμάθηση και της έννοιας τους ως μαθηματικής έννοιας πλέον.

Στα μαθηματικά όμως και στις φυσικές επιστήμες λόγω του τρόπου διδασκαλίας ορισμένες φορές δεν αντιμετωπίζεται με επιτυχία το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής

(Vosniadou, 2007a· Vosniadou και συνεργάτες, 2005), καθώς συχνά η μάθηση μιας έννοιας δεν υποστηρίζεται από τα προϋπάρχοντα εννοιολογικά πλαίσια των μαθητών (Resnick, 2006), με αποτέλεσμα η παραπάνω προσέγγιση να μην επιφέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης παρουσιάσαμε μια σειρά από εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων αποτελεί ένα πρόβλημα εννοιολογικής αλλαγής και ως τέτοιο πρέπει να προσεγγιστεί. Φάνηκε λοιπόν ότι, για να αναθεωρήσουν οι μαθητές τις πεποιθήσεις τους για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, πρέπει να αναδιοργανώσουν το αρχικό εννοιολογικό τους πλαίσιο για την επίλυση εξισώσεων που είναι οργανωμένο γύρω από την αριθμητική, μέσα από τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής. Η αναδιοργάνωση αυτή είναι δυνατό να συμβεί μέσα από την ίδια τη συστηματική διδασκαλία της άλγεβρας στο σχολείο. Στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν να επιλύουν εξισώσεις απλής μορφής όπως η x+6=9, ενώ όταν οι μαθητές εισάγονται στην άλγεβρα, ακόμα κι εκεί πολλές εξισώσεις είναι δυνατό να λυθούν με χρήση αριθμητικών μεθόδων (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007β), επιβεβαιώνοντας τις λανθασμένες πεποιθήσεις των μαθητών ότι οι εξισώσεις επιλύονται με χρήση κυρίως αριθμητικών μεθόδων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τέτοιες πεποιθήσεις να ισχυροποιούνται και να αλλάζουν δύσκολα. Προηγούμενες μελέτες, όπως αναφέρει και ο Χρήστου (2009) έχουν δείξει ότι το να αλλάξουν οι μαθητές αρχικές λανθασμένες πεποιθήσεις τους, που υποστηρίζονται από τα εναλλακτικά τους ερμηνευτικά πλαίσια, δεν είναι εύκολη υπόθεση αλλά απαιτεί διαρκή προσπάθεια και πολύ χρόνο (Vosniadou & Brewer, 1994· Vosniadou & Vamvakoussi, 2006· Vosniadou και συνεργάτες, 2008).

Ο σχεδιασμός των διδακτικών στρατηγικών που γίνονται προς αυτή την κατεύθυνση θα πρέπει να βασίζεται στα συμπεράσματα των μελετών που έχουν γίνει στο παρελθόν και αφορούν τα λάθη, τις παρερμηνείες των μαθητών, καθώς και τις προτάσεις που προτείνουν για την οργάνωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας που θα τις υποστηρίξουν. Σε παλιότερες έρευνες έχουν διατυπωθεί νέες ιδέες για να διευκολύνουν την πρώτη επαφή των μαθητών με την Άλγεβρα, για παράδειγμα μέσω των συναρτήσεων (Farmaki, Klaoudatos & Verikios, 2005) ή άλλων εναλλακτικών προσεγγίσεων (Pirie & Martin 1997).

Στα πλαίσια πιο άμεσα εφαρμόσιμων προτάσεων θα μπορούσαν τα αναλυτικά προγράμματα να ενσωματώσουν τα παραπάνω ευρήματα, προσφέροντας στους μαθητές

ευκαιρίες να διορθώσουν τις λανθάνουσες πεποιθήσεις τους που αφορούν τις εξισώσεις και ανισώσεις. Για παράδειγμα πρέπει να γίνει ξεκάθαρο σε όλους τους μαθητές ότι οι εξισώσεις έχουν μεν πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τις ανισώσεις, όπως η γενικότερη διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση τους, υπάρχουν όμως και σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Θα πρέπει να δίνονται κατάλληλα παραδείγματα στους μαθητές μέσα από την επίλυση των οποίων να συνειδητοποιούν αυτές τις διαφορές. Εξάλλου, κατά την διδασκαλία των ανισώσεων καλό θα ήταν να επιλύονται παραδείγματα φαινομενικά ‘’ίδιων’’ εξισώσεων και ανισώσεων όπως για παράδειγμα οι $-3x+9=0$ και η $-3x+9>0$, αλλά και οι $2x+5=2x+5$ και $2x+5>2x+5$

Επίσης, σημαντικό είναι οι καθηγητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν στις τάξεις του Γυμνασίου να είναι ενημερωμένοι για τα λάθη και τις παρερμηνείες των μαθητών όσο αφορά την αντιμετώπιση εξισώσεων και ανισώσεων, έτσι ώστε να επισημαίνουν τους τρόπους αποφυγής τους κατά την παρουσίαση κατάλληλα σχεδιασμένων ασκήσεων. Με βάση τα παραπάνω, τα συμπεράσματα από την παρούσα μελέτη θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα στους καθηγητές μαθηματικών καθώς γνωρίζοντας τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης που χρησιμοποιούν συχνά οι μαθητές, θα μπορούσαν να προσαρμόσουν την διδασκαλία τους με τέτοιο τρόπο ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι συχνά η χρήση αυτών των μεθόδων επίλυσης αποδεικνύεται ακατάλληλη για αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων στα πλαίσια της άλγεβρας.

Εξάλλου, η παντελής έλλειψη ασκήσεων κατηγοριοποίησης από την σχολική βιβλιογραφία θα έπρεπε να επανεξεταστεί. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχει σχέση του τρόπου που κατηγοριοποιούν οι μαθητές εξισώσεις και ανισώσεις με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθητές αλλά και της επίδοσής τους στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Έτσι, πιστεύουμε ότι η παρουσίαση θεμάτων κατηγοριοποίησης στις σχολικές τάξεις θα λειτουργήσει υποστηρικτικά στο να διευρύνουν τους εννοιολογικούς τους ορίζοντες των μαθητών, για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να αντιμετωπίζουν εξισώσεις και ανισώσεις και θα αποτελέσει και ένα καινούριο είδος ασκήσεων που ίσως κινητοποιήσει ορισμένους μαθητές που θα διαπιστώσουν ότι δεν έχουν να επιλύσουν ‘’ αλγοριθμικά’’ ακόμα μια εξίσωση ή ανίσωση και να καταλήξουν, όπως αυτοί πιστεύουν σε ένα ‘’υπολογισμό’’ της τιμής για την μεταβλητή x (Cortes, Vergnaud & Kavafian, 1990).

Εξάλλου, θεωρούμε ότι από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας γίνεται σαφής η χρησιμότητα των ασκήσεων κατηγοριοποίησης ως εργαλείο για πρόβλεψη αποτελεσμάτων από μέρους των καθηγητών. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι οι καθηγητές κρίνοντας την επίδοση των μαθητών σε ασκήσεις κατηγοριοποίησης είναι δυνατό να προβλέψουν τους τρόπους με τους οποίους πιθανότατα οι μαθητές επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις. Έτσι, με την χρήση ασκήσεων κατηγοριοποίησης θα μπορούν να κρίνουν ποιοι μαθητές χρειάζονται και σε ποιο βαθμό να εξοικειωθούν με τους αλγεβρικούς τρόπους επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων αλλά και πόσο έμφαση χρειάζεται να δώσουν στην διδασκαλία τους ώστε να γίνει σαφής στους μαθητές ο διαχωρισμός εξισώσεων και ανισώσεων.

Τέλος, θα πρέπει να τονίσουμε ότι πέρα από την έρευνα για το τι γνωρίζουν και αντιλαμβάνονται οι μαθητές μέσα από την καθημερινότητα και τις προσωπικές τους εμπειρίες, ιδιαίτερα σημαντική είναι και η προσέγγιση και η μελέτη των γνώσεων που έχουν οι καθηγητές για όλες αυτές τις εμπειρικές αντιλήψεις των μαθητών, για το πώς αυτή η γνώση τους μπορεί να επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο μεταλαμπαδεύουν σε αυτούς μια νέα μαθηματική έννοια και κυρίως πώς αντιμετωπίζουν τα λάθη των μαθητών. Μελέτες έχουν δείξει ότι όλη αυτή η στάση των εκπαιδευτικών μπορεί να είναι καταλυτική για τις επιδόσεις των μαθητών (Nathan & Koellner, 2007· Resnick, 2006). Για το λόγο αυτό είναι πάρα πολύ σημαντικό να μελετήσουμε τους τρόπους με τους οποίους αντιλαμβάνονται οι δάσκαλοι και καθηγητές ότι μπορούν αν βοηθήσουν τους μαθητές να διορθώσουν τυχόν παρερμηνείες και λανθασμένες εντυπώσεις που έχουν δημιουργήσει μέσα από την καθημερινότητα τους. Μια τέτοια προσέγγιση θα ήταν χρήσιμη, καθώς θα βοηθούσε στην αποτελεσματικότερη εκμάθηση και στην αποφυγή τυχόν νέων προκαταλήψεων και εμποδίων στον τρόπο αντίληψης των μαθηματικών εννοιών. Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται ποτέ μια μαθηματική έννοια μπορεί να γίνει κατανοητή με χρήση απλών μηχανισμών μάθησης, μιας και η προηγούμενη γνώση θα λειτουργεί υποστηρικτικά και πότε απαιτείται αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνωστικής δομής. Και για να το πετύχουν αυτό, θα πρέπει να είναι ενήμεροι για τον τρόπο που αντιμετωπίζουν τις έννοιες οι μαθητές. Για αυτό και θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να είναι γνώστες των προβλημάτων της εννοιολογικής αλλαγής προκειμένου να αποφευχθούν δυσκολίες στον τρόπο διδασκαλίας.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Arampatzis, K., Skiadaresis, P., & Christou, K. P. (2007). “Conceptual change in the shift from equations to inequalities.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο the 2nd National Conference of the Greek Association of Reserach in Mathematics Education, Alexandroupolis.

- Bazzini, L., & Tsamir, P. (2001). “Research based instruction: Widening students’ perspective when dealing with inequalities.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο 12th ICMI Study, *The future of teaching and learning of algebra*, Melbourne.

- Bazzini, L., & Tsamir, P. (2004). “RF02: Algebraic equations and inequalities:Issues for research and teaching.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.

- Bednarz, Nadine, & Janvier, Bernadette. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, & Lesley Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 115±136). Dordrecht: Kluwer.

- Booth, L. R. (1982). “Developing a teaching module in beginning algebra.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

- Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: Berkshire: NFER-Nelson.

- Booth, L. R. (1988). “Children's difficulties in beginning algebra.” Στο *The Ideas of Algebra, K-I2 (1988 Yearbook)* (σελ. 20-32). Reston,Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

- Booth, L. R. (1989). “A question of structure.” Στο C. Kieran & S. Wagner (επιμ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ. 57-60): Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

- Bruner, J. (1972). *Relevance of education*, London: Penquin

- Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge, MA: MIT Press.

- Carey, S. (2001). On the very possibility of discontinuities in conceptual development. Στο E. Dupoux (Εκδ.), *Language, brain, and cognitive development: Essays in honor of Jacques Mehler* (σελ. 303-324). Cambridge: MA: MIT Press.

- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S. J., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress*. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Chiappini, Giampaolo, & Lemut, Enrica. (1991). Construction and interpretation of algebraic models. In Fluvia Furinghetti (Ed.), Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. I, pp. 199±206). Assisi, Italy: PME.

- Cortes, Anibal, Vergnaud, Gerard, & Kavafian, Nelly. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. In George Booker, Paul Cobb, & Teresa de Mendicuti (Eds.), Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. II, pp. 27±34). Mexico: PME.

- Chi, M. T. H. (1992). "Conceptual change within and across ontological categories: examples from learning and discovery in science." Στο R. Giere (επιμ.), *Cognitive Models of Science: Minnesota Studies in the Philosophy of Science* (σελ. 129-186). Minneapolis: University of Minnesota Press.

- Driver, R. (1989). Students' conceptions and the learning of science. *International Journal for Science Education, 11*(Special Issue), 481-490.

- Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, P. (2005), Introduction of algebraic thinking: Connecting the concepts of linear function and linear equation, *Proccedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, Palermo, Italy, Vol II, 407-422.

- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). "Solving equations: the transition from arithmetic to algebra." *For the Learning of Mathematics 9* (2), 19-25.

- Filloy, E., & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 139–160). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation.

Cognition, 44, 43-74.

- Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied*

Developmental Psychology, 21, 27-37.

-Gray, E., & Tall, D. (1991). *Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italy.

- Greeno., J. G. (1982, March). *A cognitive learning analysis of algebra.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA.

- Hatano, G., & Inagaki, K. (2003). "When is conceptual change intended? A cognitivesociocultural view." Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (επιμ.), *Intentional conceptual change* (σελ. 407-427). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). "The cognitive gap between arithmetic and algebra". *Educational Studies in Mathematics 27* (1), 59-78. 148

- Hiebert, James, & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In James Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1±27). Hillsdale: Erlbaum.

- Inagaki, K., & Hatano, G. (2002). *Young children's naïve thinking about the biological world*. New York: Psychology Press.

- Ioannides, C., & Vosniadou, S. (2001). "The changing meanings of force: From coherence to fragmentation." *Cognitive Science Quarterly, 2*(1), 5-62.

- Kaput, J. J. (1989). “Linking representations in the symbol system of algebra.” Στο S. Wagner & C. Kieran (επιμ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ. 167-194). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics

- Kieran, C., (1981). “Concepts Associated with the Equality Symbol.” *Educational Studies in Mathematics 12*, 317-326.

- Kieran, C. (1981). “Pre-algebraic notions among 12-and 13-year-olds.” Στο Equipe de Recherche Pedagogique Laboratoire (επιμ.). *Proceedings of the annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (σσ. 158-164). Grenoble, France: Program Committee

- Kieran, C. (1985), Constructing meaning for equations and equation-solving. In A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick, *Theory, Research and Practice in Mathematical Education*, 243-248, University of Nottingham, UK.

- Kieran, Carolyn. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra. K-12 (pp. 91±96). Reston: NCTM.

- Kieran, C. (1989). “The early learning of algebra: A structural perspective.” Στο C. Kieran & S. Wagner (επιμ.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σελ.33-56): Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

- Kieran, C. (1990). “Cognitive processes involved in learning school algebra.” Στο P. Nesher & J. Kilpatrick (επιμ.), *Mathematics and Cognition* (σελ. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

- Kieran, C. (1992). “The learning and teaching of school algebra.” Στο D. Grouws (επιμ.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (σελ. 390-419). New York.

- Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In P. S.Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 119–139). New York: Macmillan.

- Kieran, C. (2006). “Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning.” Στο A. Gutiérrez & P. Boero (επιμ.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (σελ. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

- Kieran, C. (2007). “Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation.” Στο F. K. Lester Jr. (επιμ.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (σελ. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Kirshner, David, McDonald, Janet, Awtry, Thomas, & Gray, Elizabeth. (1991). The cognitivist caricature of mathematical thinking: The case of the students and professors problem. Paper presented at the 13th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Blacksburg, Va.

- Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions (2nd edition)* (First edition: 1962 ed.). Chicago: Chicago Press.

-Lewis, A. B., & Mayer, Richard E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 79(4), 363±371.

- Linchevski, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects—The case of equations and inequalities. *Proceedings of PME 15, Assisi, Italy, Vol. II*, 317–324.

- Lins, R., Kaput, J. (2004). “The early development of algebraic reasoning: The current state of the field.” Στο K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (επιμ.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (σσ. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.

- McCloskey, M. (1983). “Naive theories of motion.” Στο D. Gentner & A. L. Stevens (επιμ.), *Mental models* (σελ. 299-323). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Nathan, M. J., & Koellner, M. (2007). Introcuction: A Framework for Understanding and Cultivating the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 179-192.

- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

- Petitto, A. (1979). The role of formal and non-formal thinking in doing algebra. Journal of Children's Mathematical Behaviour, 2(2), 69-82

- Pirie, S. & Martin, L. (1997), The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations, in *Educational Studies in Mathematics*, 34, 159-181.

- Resnick, L. B. (1987). Understanding algebra. Στο J. A. Sloboda & D. Rogers (Εκδ.), *Cognitive Process in Mathematics* (σελ. 169-203). Oxford: Clarendon Press.

- Resnick, L. B. (2006). *The dilemma of mathematical intuition in learning.* Εργασία που παρουσιάστηκε στο 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Prague.

- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H.-C, Wiley, D. E., Cogan, L., et al. (Eds.). (2001). *Why schools matter:Across-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

- Sfard, Anna. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, Nicolas Herscovics, & Carolyn Kieran (Eds.), Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. III, pp. 162± 169). MontreÂal: UniversiteÂ de MontreÂal.

- Sfard, A., (1991). "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin." *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

- Sfard, A., Linchevski, L. (1994). "The Gains and the Pitfalls of Reification - The Case of Algebra." *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

- Sfard, A. (1995). "The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives." *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 15-39.

- Skopeliti, I., & Vosniadou, S. (2006). “The influence of refutational texts on children’s ideas about the earth.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο 28th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Vancouver, Canada.

- Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students’understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology* (51), 101-140.

- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). “Students’ understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach.” *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

- Tsamir, P., & Almog, N. (2001). “Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities.” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513-524.

- Tsamir, P., Almog, N., & Tirosh, D. (1998). “Students’ solutions of inequalities.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο PME 22, Stellenbosch, South Africa.

- Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). “Algorithmic models: Italian and Israeli students’ solutions to algebraic inequalities.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο Proceedings of PME26, Norwich, UK.

- Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). “Consistencies and inconsistencies in students’ solutions to algebraic ‘single-value’ inequalities.” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*(35), 793-812.

- Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). “Teaching for conceptual change: The case of infinite sets.” Στο S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (επιμ.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (σελ. 299-317). Oxford: Elsevier Press.

- Vaiyavutjamai, Pongchawee and Clements, M. A.(2006) 'Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear Equations and Linear Inequalities', Mathematical Thinking and Learning, 8: 2, 113 — 147

- Van Amerom, B.A. (2003). “Focusing on informal strategies when linking arithmetic to Early Algebra**.”** *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63-75.

- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). “Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach.” *Learning and Instruction, 14*, 453-467.

- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). “How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models, and the effect of the number line.” Στο S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (επιμ.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (σελ. 265-282). Oxford: Elsevier Press.

- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). “Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change.” *Learning and Instruction, 14*, 485-501.

- Verikios, P., & Farmaki, V. (2006). “Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: the case of the inequality.” Εργασία που παρουσιάστηκε στο 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic.

- Verschaffel, L., & Vosniadou, S. (επιμ.). (2004). *The conceptual change approach to mathematics learning and teaching. Special Issue of Learning and Instruction* (Τόμος 14).

- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and Instruction, 14*, 469-484.

- Vosniadou, S. (1994). “Capturing and modelling the process of conceptual change.” *Learning and Instruction, 4*, 45-69.

- Vosniadou, S. (1999). “Conceptual change research: State of the art and future directions. Στο W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (επιμ.), *New Perspectives on Conceptual Change*: Elsevier Sciences Ltd.

- Vosniadou, S. (2001). “On the nature of naive physics.” Στο M. L. a. L. Mason (επιμ.), *Reframing the processes of conceptual change* (σελ. 61-76). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Vosniadou, S. (2002a). “Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning.” Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (επιμ.), *Intentional conceptual change* (σελ. 377-406). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Vosniadou, S. (2002b). “Mental models in conceptual development.” Στο L. Magnani, N. J. Nerserssian & P. Thagard (επιμ.), *Model-based reasoning in scientific discovery* (σελ. 353-368): Kluwer Academic/Plenum Publishers.

- Vosniadou, S. (2003). “Exploring the Relationships Between Conceptual Change and Intentional Learning.” Στο G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (επιμ.), *Intentional Conceptual Change* (σελ. 377-406). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Vosniadou, S. (2007). “Conceptual change and education.” *Human Development, 50*, 47-54.

- Vosniadou, S. (υπό έκδοση). “Science education for young children: A conceptual change point of view.” *Society for Reserach in Science Development*.

- Vosniadou, S., Baltas, A., & Vamvakoussi, X. (επιμ.). (2007). *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction*. Oxford: Elsevier Press.

- Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). “Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood.” *Cognitive Psychology, 24*, 535–585.

- Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1994). “Mental models of the day/night cycle.” *Cognitive Science, 18*, 123-183.

- Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademitriou, E. (2001). “Designing learning environments to promote conceptual change in science.” *Learning and Instruction, 11*(4-5), 381-419.

- Vosniadou, S., Skopeliti, I., & Ikospentaki, K. (2004). “Modes of knowing and ways of reasoning in elementary astronomy.” *Cognitive Development, 19*, 203-222.

- Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2006). “Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments.” Στο L. Verschaffel, P. Dochy, M. Boekartz & S. Vosniadou (επιμ.), *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Eric De Corte*: Elsevier Press.

- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Christou, K. P. (2005). “What can we gain from a conceptual change approach to the learning and teaching of mathematics?” Εργασία που παρουσιάστηκε στο 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Palermo, Italy.

- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). “The framework theory approach to conceptual change.” Στο S. Vosniadou (επιμ.), *Handbook of research on conceptual change* (σελ. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). “Extending the conceptual change spproach to mathematics learning and teaching.” Στο L. Verschaffel & S. Vosniadou (επιμ.), *Learning and Instruction* (Τεύχος. 14, σελ. 445-451).

- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Wagner, S., & Parker, S. (1993). Advancing algebra. In P. S.Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 119–139). New York: Macmillan.

- Αλιμπινίσης, Α., Αντύπας, Ζ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., & Παπασταυρίδης, Σ. (1987). *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

- Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ., & Σβέρκος, Α. (1989a). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

- Αλιμπινίσης, Α., Γρηγοριάδης, Σ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ., & Σβέρκος, Α. (1989b). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

- Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. (2008). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007β). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

- Δεμίρη Ε., Μαρκέτος Α., Μπάρμπας Γ. (1994). *Οι αντιλήψεις των μαθητών της Α' Γυμνασίου για την μεταβλητή*. Διάσταση 4, (1994), Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη.

- Λεμονίδης, Χ., (1996). *Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.* ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ', Τόμος 13 (Τεύχος 45, σελ. 61-70).

- Λεμονίδης, Χ., (1996). *Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α' βαθμού από μαθητές Γυμνασίου.* Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών 1, Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη.

- Κυλάφης, Π., *Ο ρόλος των patterns στην μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα.* Διπλωματική εργασία, Αθήνα 2009.

- Χρήστου, Π. Κ., *Εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά: η περίπτωση της άλγεβρας.* Διδακτορική διατριβή, Αθήνα 2009.