ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

ΑΤΤΑΡΤ ΓΕΩΡΓΙΑ

Α.Μ.222502

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :Ε.ΡΑΠΤΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν με την εύρεση των λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων στην περιοχή των αριθμών ακέραιων αριθμών είναι γνωστά από την πολύ αρχή των μαθηματικών.Με αφετηρία τον Διόφαντο μεγάλες προσωπικότητες των μαθηματικών όπως ο Fermat,ο Hilbert, ο

Euler, ο Legendre, ο Kummer, ο Davis ασχολήθηκαν με αυτές τις εξισώσεις.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η προσέγγιση των λύσεων τέτοιων εξισώσεων.Στο πρώτο μέρος γίνεται μία όσο το δυνατό αναλυτικότερη περιγραφή των σχετικών θεωρημάτων εμπλουτισμένη από εφαρμογές που δείχνουν την πρακτική αξία τους.Στο δεύτερο μέρος προτείνεται ένας τρόπος παρουσίασης στους μαθητές του λυκείου της διδακτικής ενότητας «Διοφαντικές Εξισώσεις» μέσω της επίλυσης του προβλήματος.

Στην παραπάνω μελέτη ήταν πολύ σημαντική η συνεργασία με τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος κ.Ράπτη που είχε την επίβλεψη της εν λόγω εργασίας τον οποίο και ευχαριστώ. Χωρίς την πολύτιμη καθοδήγηση του και το αμέριστο ενδιαφέρον του, η ολοκλήρωση της δε θα ήταν εφικτή.Επίσης ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος κ.Βάρσο και τον Επίκουρο Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος κ.Σπύρου που διέθεσαν μέρος του πολύτιμου χρόνου τους για την αρτιότερη εκτέλεση της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος θέλω να δώσω θερμές ευχαριστίες εκ βάθους καρδίας στην οικογένεια μου που με βοήθησε και με στήριξε ποικολοτρόπως στην επίτευξη των εκάστοτε υποχρεώσεων μου όλο αυτό το χρονικό διάστημα.

ΑΘΗΝΑ 18 ΜΑΙΟΥ 2005

ΑΤΤΑΡΤ ΓΕΩΡΓΙΑ

1.1. ΙΣΤΟΡΙΑ-HILBERT

Hilbert (1862 - 1943).

Το καλοκαίρι του 1900 οι μαθηματικοί συναντήθηκαν στο δεύτερο διεθνές συνέδριο στο Παρίσι. Ο Hilbert (1862-1943), ο διάσημος γερμανός μαθηματικός, καθηγητής του πανεπιστημίου του Goettingen (Γκέτινγκεν), κλήθηκε για να παραδώσει μιας από τις κύριες διαλέξεις. Σαν μέγιστος παγκόσμιος μαθηματικός έγινε διάσημος από τις εργασίες του στη θεωρία άλγεβρας.

Μετά από τις μακροχρόνιες σκέψεις ο Hilbert επέλεξε μια ασυνήθιστη μορφή της διάλεξης. Στην ομιλία του "μαθηματικά προβλήματα", αποφάσισε να διατυπώσει εκείνα τα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία, κατά την άποψή του, πρέπει να καθορίσουν την ανάπτυξη των μαθηματικών στον επερχόμενο αιώνα. Ο Hilbert περιέγραψε 23 σημαντικά μαθηματικά προβλήματα.

Δεν θα αναλύσουμε λεπτομερώς τα 23 προβλήματα του Hilbert. Θα μείνουμε μόνο σε ένα από αυτά:Το Δέκατο πρόβλημα του Hilbert. Η λαμπρή λύση του οποίου έγινε το (1970) από το ρώσσο μαθηματικό Yuri Matiyasevich

Δεδομένου ότι είναι ευρέως γνωστό, το δέκατο πρόβλημα του Hilbert θεωρείται **" καθοριστικό για τη λύση μιας διοφαντικής εξίσωσης"**. Για να

εξηγήσουμε την ουσία αυτού του προβλήματος, πρέπει να γυρίσουμε δεκαεπτά αιώνες στο παρελθόν στον παλαιό μαθηματικό Διόφαντο. Ξέρουμε πολύ λίγα για τον Διόφαντο, ο οποίος θεωρείται πολύ μεγάλος μαθηματικός .

Είναι γνωστό, ότι ένα από τα σημαντικότερα αλγεβρικά προβλήματα είναι η λύση των αλγεβρικών εξισώσεων, στις οποίες πολλά μαθηματικά προβλήματα ανάγονται. Οι λύσεις στις εξισώσεις του πρώτου και δεύτερου βαθμού δεν παρουσίασαν οποιεσδήποτε δυσκολίες για τους μαθηματικούς . Εντούτοις, η λύση των κυβικών εξισώσεων είναι πιό περίπλοκη, και ο γενικός τύπος για τη λύση μιας τέτοιας εξίσωσης βρέθηκε μόνο στο 16ο αιώνα από τους ιταλούς μαθηματικούς Ferro και Tartalia.

Ένα από τα πιό σημαντικά προβλήματα της θεωρίας των αλγεβρικών εξισώσεων τον 17ο και 18ο αιώνα έγινε στην προσπάθεια εύρεσης λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων $5^{ου}$ βαθμού . Αυτή η έρευνα ολοκληρώθηκε από τις εργασίες του γάλλου μαθηματικού Evarist Galois.

1.2 ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

Ποιες νέες ιδέες ο Διόφαντος εισήγαγε στην ανάπτυξη αυτής της περιοχής; Τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν με την εύρεση των λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων στην περιοχή των ακέραιων αριθμών είναι γνωστά από την αρχαιότητα.

Δεν γνωρίζουμε πως ακριβώς δημιουργήθηκε το θέμα στην αρχαιότητα. Ετυμολογικά,ο όρος προέρχεται από τον Διόφαντο που κατά επικρατέστερη
έκδοση έζησε γύρω στο 250 μ.Χ. Κλασσικό σύγγραμα του,είναι το γνωστό «Τα Αριθμητικά»,που σε ελληνική έκδοση περιέχονται τα 6 από τα 13 στα οποία ήταν γραμμένο το πρότυπο. Το 1971 σε Περσική βιβλιοθήκη βρέθηκαν 4 νέα βιβλία.

Ο Διόφαντος ασχολήθηκε με εξισώσεις της μορφής $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ όπου $f(x_1,x_2,...,x_n)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και ζητούσε λύσεις στους ακεραίους αριθμούς .Οι εξισώσεις αυτές σήμερα ονομάζονται Διοφαντικές εξισώσεις και η μελέτη αυτών των εξισώσεων Διοφαντική Ανάλυση.

Το θέμα των Διοφαντικών εξισώσεων δεν αρχίζει με τον Διόφαντο.Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ασχοληθεί με την εξίσωση $χ^2+ψ^2=z^2$ για να βρουν πυθαγόρειες τριάδες.Υπάρχουν ενδείξεις ότι η λύση αυτού του προβλήματος ήταν γνωστή και στους Βαβυλωνίους.Ο Ευκλείδης διατυπώνει το πρόβλημα στη μορφή: «Ευρείν δύο τετραγώνους αριθμούς,ώστε το συγκείμενον εξ αυτών είναι τετράγωνον».Το ίδιο πρόβλημα διατυπώνεται από τον Διόφαντο στα «Αριθμητικά»: «Τον επιταχθέντα τετράγωνον διελείν εις δύο τετραγώνους». Επίσης στα στοιχεία του Ευκλείδη υπάρχει η εξής εξίσωση $χ^2-2ψ^2=1$.Επίσης ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε με την $χ^2-dψ^2=1$,όπου d δεν είναι τέλειο τετράγωνο στο Βοεικό Πρόβλημα.Θ'ασχοληθούμε με αυτήν παρακάτω.

Για την εξίσωση $αχ+bψ=c$ δεν έχουμε στοιχεία,ότι οι αρχαίοι Έλληνες την έλυσαν.Πρέπει όμως να την γνώριζαν όπως συμπεραίνουμε από την μέθοδο της ανθυφαίρεσης που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη ,καθώς επίσης και από το γεγονός ότι ο Διόφαντος δεν ασχολείται καθόλου με αυτή,τη θεωρεί γνωστή ,και προχωράει στις εξισώσεις $2^{ου}$ μέχρι και $6^{ου}$ βαθμού.

1.3 FERMAT

.

Fermat (1601 - 1665).

Η μαθηματική έρευνα του γάλλου μαθηματικού Fermat έχει άμεση σχέση με τις εξισώσεις του Διόφαντου. Είναι ευρέως αποδεκτή άποψη ότι η έρευνα του Fermat άρχισε ένα νέο στάδιο στην ανάπτυξη της θεωρίας των αριθμών. Το σημαντικότερο τμήμα της εργασίας του είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat, το οποίο δηλώνει ότι η εξίσωση:

$$x^n + y^n = z^n$$

δεν έχει καμμία λύση διαφορετική από το μηδέν στην περιοχή των ακέραιων αριθμών για τα *x*,z,ψ όταν n> 2. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατη αυτή η εξίσωση για n > 2.Σημειώνει δε ο Fermat το εξής σχόλιο πάνω στο βιβλίο του Διόφαντου «Αριθμητικά» ,που μεταφράστηκαν και εκδόθηκαν το 1621 από τον Bachet: «Έχω μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης,αλλά το περιθώριο είναι πού στενό για να τη χωρέσει».Από αυτήν την υπόθεση, ένας από τους πιο συναρπαστικούς τομείς των μαθηματικών γεννήθηκε: η ιστορία "του τελευταίου θεωρήματος του Fermat". Ειρωνικά, κανένας δεν έμεινε έκπληκτος από το γεγονός ότι δεν βρέθηκε η απόδειξη αυτού του θεωρήματος, δεδομένου ότι επίσης δεν βρέθηκε οποιαδήποτε απόδειξη των αριθμητικών θεωρημάτων του Fermat.

Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί, όπως οι **Euler, Legendre, Kummer,** συμμετείχαν στην προσπάθεια να βρεθεί μια γενική λύση στο άλυτο **«Τελευταίο θεώρημα του Fermat»**, αλλά πέτυχαν μόνο την εύρεση των αποδείξεων αλλά για τις ιδιαίτερες μόνο περιπτώσεις. Στα 1985-86 οι FREY,Serre,Ribert απέδειξαν ότι το τελευταίο θεώρημα του Fermat είναι συνέπεια μίας πρότασης της Αριθμητικής Γεωμετρίας που αποδείχθηκε στις 19 Σεπτεμβρίου του 1994 από τον από τον άγγλο μαθηματικό Andrew Wiles.Έτσι οι υποθέσεις του Fermat αποδείχθηκαν μετά από 350 χρόνια.

Στο δέκατο πρόβλημά του, ο Hilbert ζητά μια καθολική μέθοδο για την επίλυση των διοφαντικών εξισώσεων.Το 1950 ο Martin Davis κάνει το πρώτο βήμα για να αποδείξει ότι το δέκατο πρόβλημα δεν λύνεται. Το πρόβλημα λύθηκε το 1970 από τον Yuri Matiyasevich ο οποίος στηρίχτηκε σε σημαντικές παρατηρήσεις της Julia Robinson .Σχετικά με το θεώρημα αυτό θ'ασχοληθούμε παρακάτω.

1.4. ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός:

Διοφαντική ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $f(x_1,x_2,...x_n)=0$ όπου $f(x_1,x_2,...,x_n)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και ζητούμε λύσεις στους ακέραιους αριθμούς.

Μια Διοφαντική εξίσωση θεωρείται ότι έχει λυθεί αν έχει δοθεί απάντηση στα εξής ερωτήματα:

1)΄Εχει η εξίσωση τουλάχιστον μία ακέραια λύση

2)Ο αριθμός των ακεραίων λύσεων είναι πεπερασμένος ή άπειρος

3)Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις

Μερική απάντηση στα προαναφερθέντα ερωτήματα είναι μια μερική λύση του προβλήματος.

Μία n-άδα ακεραίων αριθμών $(x_1,x_2,...,x_n)$ τέτοια ώστε $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ καλείται ρητή ακέραια λύση της παραπάνω εξίσωσης.

1.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Η Διοφαντική εξίσωση $2x=2\psi+1$, προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.

2.Γνωρίζουμε τέσσερις λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $x^3+\psi^3+z^3=3$.Τις $(x,\psi,z)=(1,1,1,),(4,4,-5),(4,-5,4),(-5,4,4)$.Αλλά δεν γνωρίζουμε πώς να βρούμε όλες τις λύσεις της.

3. Θα προσδιορίσουμε τις ακέραιες και ρητές λύσεις της εξίσωσης $2x^3+x\psi-7=0$.Η παραπάνω εξίσωση γράφεται $(-2x^3+7)/x=\psi$.
Επομένως το σύνολο των ρητών λύσεων αποτελείται από τα εξής ζεύγη: $(x,(-2x^3+7)/x)$,όπου x ρητός διάφορος του μηδενός.Αν το ζεύγος (x,ψ) είναι μια ακέραια λύση ,τότε θα έχουμε τα εξής:$x(2x^2+\psi)=7$ οπότε $x|7$ και επομένως $x=1$ ή $x=-1$ ή $x=7$ ή $x=-7$.

Συνεπώς οι ακέραιες λύσεις είναι τα ζεύγη $(1,5),(-1,-9),(7,-97),(-7,-99)$.

4.Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $15x^2-7\psi^2=9$ δεν έχει ακέραια λύση.
Πραγματικά αν (x,ψ) είναι μία ακέραια λύση, έχουμε $-7\psi^2=9 \pmod 5$, και απλοποιώντας παίρνουμε $\psi^2=3 \pmod 5$ που είναι άτοπο, γιατί ο ακέραιος 3 δεν είναι τετραγωνικό υπόλοιπο (mod5).΄Αρα η παραπάνω εξίσωση δεν έχει ακέραια λύση.

5.Θα δείξουμε ότι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $\psi^2=x^3-x$ είναι $\psi=0, x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

Έστω (x,ψ) μία ακέραια λύση.Αν $x<-1$,τότε έχουμε $x^3-x<0$ απ'όπου $\psi^2<0$ που είναι άτοπο.Άρα $x\geq-1$.

Έχουμε $\psi^2=x(x-1)(x+1)$.Καθώς ο ακέραιος x είναι πρώτος προς τον $(x-1)(x+1)$, υπάρχουν $A, B \in Z$, έτσι ώστε $x=A^2$ και $(x-1)(x+1)=B^2$.

Αν $d=(x-1,x+1)$,τότε $d=1$,αν ο x είναι άρτιος και $d=2$ αν ο x είναι περιττός.

Οπότε υπάρχουν $C,D\in Z$ ώστε:

$x-1=C^2$ $x+1=D^2$ αν ο x είναι άρτιος

$x-1=2C^2$ $x+1=2D^2$ αν ο x είναι περιττός.

Έτσι αν ο x είναι άρτιος έχουμε $1=D^2-x=D^2-A^2$και

αν ο x είναι περιττός, $2D^2-2C^2=2$ απ'όπου $D^2-C^2=1$.

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $u^2-v^2=1$ είναι $u=1$ και $v=0$ ή $u=-1$ και $v=0$.Άρα $D=1$ ή $D=-1$ και επομένως $x=0$ ή 1 .Συνεπώς οι μόνες ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι η $\psi=0$ $x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

6.Η $3x = 6$ έχει μοναδική λύση την $x = 2$.

7.Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε την εξίσωση $7x - 17y = 1$. Έχουμε : $x = (17y + 1)/7 = 2y + (3y + 1)/7$.
Ο αριθμός $(3y + 1)/7$ πρέπει να είναι ακέραιος και ας τον συμβολίσουμε με z. Άρα $3y + 1 = 7z$ και $x = 2y + z$.Έτσι φτάνουμε στην εξίσωση $3y - 7z = -1$ η οποία έχει μικρότερους συντελεστές απ'τη προηγούμενη εξίσωση.Άρα έχουμε $y = (7z - 1)/3 = 2z + (z - 1)/3$. Ομοίως ο $(z - 1)/3$ πρέπει να είναι ακέραιος και ας τον συμβολίσουμε με t. Έτσι $z = 3t + 1$, και $y = 2z + t = 7t + 2$,και τέλος $x = 2y + z = 2(7t + 2) + 3t + 1 = 17t + 5$.

8.Η εξίσωση $4x=8$ έχει μοναδική λύση την $x=2$.

9. Η εξίσωση $5x=10$ έχει μοναδική λύση την $x=2$.

1.6.ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σ'αυτή την παράγραφο γίνεται μελέτη εξισώσεων της μορφής $f(x_1,x_2,...x_n)=0$, όπου $f(x_1,x_2,...x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές,βαθμού 1.Τέ τοιες εξισώσεις καλούνται **γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.1

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,b \in Z$, $n\geq 2$, και $\alpha_i \neq 0$ και (i= 1,2,…n).Αν $d= (\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$,η εξίσωση $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...\alpha_nx_n=b$ έχει ακέραια λύση, αν και μόνο εάν, $d \mid b$.

Απόδειξη:

Επειδή $d= (\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$,υπάρχουν $c_1,c_2,...c_n, \in Z$ έτσι ώστε $\alpha_i=dc_i$ (i=1,…n).Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραια λύση,δηλα δή υπάρχουν $x_1,x_2,...x_n \in Z$ με $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...\alpha_nx_n=b$. Τότε ισχύει το εξής: $(c_1x_1+c_2x_2+...c_nx_n)d=b$ και κατά συνέπεια $d \mid b$.

Αντιστρόφως , ας υποθέσουμε ότι $d \mid b$.Τότε $b=d\,d'$, όπου $d' \in Z$. Από πρόταση 1.6.3 θα υπάρχουν ακέραιοι $c_1,c_2,...c_n$: $\alpha_1c_1+a_2c_2+...a_nc_n=d$. Επομένως θα έχουμε: $\alpha_1(d'c_1)+...a_n(d'c_n)=dd'=b$.Συνεπώς,οι ακέραιοι $x_i=d'c_i$ (i=1,2,…,n) είναι μία λύση της εξίσωσης $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...\alpha_nx_n=b$.

10.Η εξίσωση 6χ+8ψ+10z=1 δεν έχει ακέραια λύση ενώ η 6χ+8ψ+10z=2 έχει ακέραια λύση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.2

Έστω ότι έχουμε την εξίσωση : **αx+bψ=c**

Έστω $\alpha,b\in Z$ με $\alpha \neq 0$ και $b\neq 0$.Ας υποθέσουμε ότι το ζεύγος (x_0,ψ_0) είναι μια ακέραια λύση της εξίσωσης $\alpha x+b\psi=c$.Αν $d=(\alpha,b)$ τότε όλες οι ακέραιες λύσης της γραμμικής εξίσωσης δίνονται απ'τις σχέσεις $x=x_0+(b/d)t,\psi=\psi_0-(\alpha/d)t$,$t\in Z$.

Απόδειξη:

Καθώς $d=(\alpha, b)$, υπάρχουν α', $b' \in Z$, έτσι ώστε $\alpha=d\alpha'$ και $b=db'$ με $(\alpha',b')=1$.Θα δείξουμε πρώτα ότι οι ακέραιοι $x=x_0+b't,\psi=\psi_0-\alpha't$ $t\in Z$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x+b\psi=c$.Πραγματικά $\alpha x+b\psi= \alpha(x_0+b't)+b(\psi_0-\alpha't)=\alpha x_0+b\psi_0=c$.Έστω (x',ψ') μία ακέραια λύση της παραπάνω εξίσωσης.Τότε προφανώς έχουμε $\alpha x_0+b\psi_0=c= \alpha x'+b\psi'$ απ'όπου παίρνουμε $\alpha(x'-x_0)=b(\psi_0-\psi')$ και επομένως $\alpha'(x'-x_0)=b'(\psi_0-\psi')$.Άρα $\alpha' | b'(\psi_0-\psi')$.
Καθώς $(\alpha',b')=1$ παίρνουμε $\alpha' | \psi_0-\psi'$.Έτσι $\psi_0-\psi'=\alpha't$ και $x'-x_0= b't$,για κάποιο ακέραιο t.

- Στην περίπτωση όπου η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις μπορούμε εύκολα να τις προσδιορίσουμε.Πιο συγκεκριμένα αν $d=(\alpha,b)$ έχουμε από την πρόταση 1.6.1 $c=dc'$ με $c'\in Z$.Χρησιμοποιώντας τον Ευκλείδιο αλγόριθμο για την εύρεση του d,προσδιορίζουμε $x_0,\psi_0 \in Z$ έτσι ώστε $\alpha x_0+b\psi_0=c$. Επομένως οι ακέραιοι $x=c'x_0$ και $\psi= c'\psi_0$ είναι μία λύση της παραπάνω εξίσωσης.Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της πρότασης 1.6.2 παίρνουμε όλες τις ακέραιες λύσεις.

11.Θεωρούμε την εξίσωση $221\chi+340\psi=51$.Ο Ευκλείδιος αλγόριθμος δίνει
340=221+119
221=119+102
119=102+17
102=6*17
Επομένως (340,221)=17.Επειδή το 17 διαιρεί το 51 συνεπάγεται ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις.
Έχουμε 17= 119-102= 119- (221-119)= -221+ 2* 119= -221 + 2* (340-221)=

2*340-3*221 και επομένως 51=-9*221+6*340.Συνεπώς οι ακέραιοι x_0=-9 και $ψ_0$=6 είναι μία λύση της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης.οπότε όλες οι ακέραιες λύσεις δίνονται από τις σχέσεις x=-9+20t ,ψ-6-13t ,t∈ Z.

12.Η διοφαντική εξίσωση 41x+35ψ=8 έχει ακέραιες λύσεις επειδή ισχύει (41,35)=1.Από τον αλγόριθμο του Ευκλείδη προκύπτει ότι 1=41*6-35*7.Ισχύει:

41=35+6

35=6*5+5

6=5+1

5=5*1

Άρα 1=6-5=

6-(35-6*5)

=6*6-35

=6*(41-35)-35

=6*41-7*35

Συνεπώς 8=48*41-56*35

Άρα το ζεύγος (48,-56) είναι μία ακέραια λύση της εξίσωσης.Όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι τα ζεύγη (48+35t,-56-41t) με t ακέραιο.

13.Η διοφαντική εξίσωση 6χ+15ψ=4 δεν έχει ακέραια λύση επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 6 και 15 δεν διαιρεί τον 4.

- Η επίλυση μίας γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης με περισσότερες από δύο μεταβλητές ανάγεται εύκολα στην επίλυση μίας εξίσωσης δύο μόνο μεταβλητών.

1.6.3.Η Εξίσωση αx+βψ+γz= δ όπου α,β,γ,δ ∈ Z με αβγ≠0.

Έστω ε=(α,β).Τότε υπάρχουν α΄,β΄∈ Z έτσι ώστε α=εα΄,β=εβ΄,και (α΄,β΄)=1.Θέτουμε α΄x+β΄ψ=w.Οπότε εw+γz=δ.Έτσι,βλέπουμε ότι η τριάδα ($χ_0$,$ψ_0$,z_0) είναι μία ακέραια λύση της γραμμικής εξίσωσης αν και μόνο εάν οι ακέραιοι w_0=α΄x_0+β΄$ψ_0$ και z_0 επαληθεύουν την εw+γz=δ.Για να

προσδιορίσουμε λοιπόν τις ακέραιες λύσεις της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης τριών μεταβλητών,αρκεί να προσδιορίσουμε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος $\varepsilon w+\gamma\zeta=\delta$ και $\alpha' x+\beta'\psi=w$.

Έστω $d=(\alpha,\beta,\gamma)$.Τότε $d=(\varepsilon,\gamma)$.υποθέτουμε ότι $d|\delta$.Σύμφωνα με την πρόταση 1.6.1 οι εξισώσεις $\alpha x+\beta\psi+\gamma\zeta=\delta$ και $\varepsilon w+\gamma\zeta=\delta$ έχουν ακέραια λύση.Δουλεύοντας όπως παραπάνω βρίσκουμε τις ακέραιες λύσεις της $\varepsilon w+\gamma z=\delta$.Αν (w_0,z_0) είναι μία τέτοια λύση,τότε η πρόταση 1.6.2 δίνει $w=w_0+(\gamma/d)*t$, $\zeta=\zeta_0-(\varepsilon/d)*t, t\in Z$.

Έτσι για κάθε $t\in Z$ έχουμε $\alpha' \chi+\beta' \psi = w_0+(\gamma/d)*t$. Καθώς $(\alpha',\beta')=1$,αυτή η εξίσωση έχει ακέραια λύση.Προσδιορίζουμε $u,v \in Z$ έτσι ώστε $\alpha' u+\beta' v=1$.Οπότε οι ακέραιοι $x_0=u [w_0+(\gamma/d)*t]$ και $\psi_0=v*[w_0+(\gamma/d)*t]$ αποτελούν μία ακέραια λύση της παραπάνω εξίσωσης.Επομένως $x=x_0+\beta' s$ και $\psi=\psi_0-\alpha' s, s\in Z$.Συνεπώς οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $\alpha x+\beta\psi+\gamma\zeta=\delta$ δίνονται από τις σχέσεις $x= u [w_0+(\gamma/d)*t]+(\beta/d)*s$,$\psi_0= v*[w_0+(\gamma/d)*t]-(\alpha/d)*s$, $z=z_0-(\varepsilon/d)*t$, $t,s\in Z$

14. Έστω η εξίσωση $6\chi+4\psi+8z=2$. Παρατηρούμε ότι $(6,4,8)=2$.Επομένως σύμφωνα με την πρόταση 1.6.1 η εξίσωση έχει ακέραια λύση.Θέτοντας $w=3\chi+2\psi$,παίρνουμε $2w+8z=2$.Μία ακέραια λύση της είναι $w=5,z=-1$.Σύμφωνα με την πρόταση 1.6.2 , όλες οι ακέραιες λύσεις δίνονται από τις σχέσεις $w=5+4t$,$z=-1-t$,$t\in Z$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x+2\psi=5+4t$.Καθώς $(3,2)=1$,αυτή έχει ακέραια λύση για κάθε $t\in Z$.Μία τέτοια λύση είναι η $x=5+4t$ και $\psi=-(5+4t)$.Άρα όλες οι ακέραιες λύσεις της δίνονται από τις σχέσεις $x=5+4t+2s$,$\psi=-(5+4t)-3s$, $s\in Z$.

Συνεπώς οι ακέραιες λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $6\chi+4\psi+8z=2$ δίνονται από τις σχέσεις $x=5+4t+2s$,$\psi=-(5+4t)-3s$, $z=-1-t$ $t,s\in Z$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.3 :

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$,$m>1$ ακέραιοι και ένας τουλάχιστον από τους α_i, $i=1,2\ldots,m$ είναι διαφορετικός από το μηδέν. Τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $x_1,x_2,\ldots x_m$,τέτοιοι ώστε να ισχύει $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_mx_m$.

1.7 ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ

Οι Πυθαγόρειοι συνδέανε τους αριθμούς με την Γεωμετρία.Μία σύνδεση είναι αυτή που προκύπτει από το πυθαγόρειο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.1 (Πυθαγόρα) :

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του μήκους της υποτείνουσας,είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο κάθετων πλευρών του.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Καλούμε **πυθαγόρεια τριάδα** ,κάθε τριάδα θετικών ακέραιων (a,b,c)που είναι λύση της εξίσωσης $\chi^2+\psi^2=z^2$.

15. Η τριάδα (3,4,5) είναι πυθαγόρεια . Προφανώς μία τριάδα θετικών ακεραίων (x,ψ,z) είναι Πυθαγόρεια, αν και μόνον εάν, οι ακέραιοι αυτοί είναι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την z . Αν ο μ.κ.δ. των (x,ψ,z) είναι 1,τότε η πυθαγόρεια τριάδα καλείται **αρχική.**

Παρατηρούμε ότι αν η τριάδα (x,ψ,z) είναι πυθαγόρεια,τότε και κάθε τριάδα (nx,nψ,nz) με n θετικό ακέραιο,είναι επίσης πυθαγόρεια.

Αντιστρόφως αν (x,ψ,z) είναι πυθαγόρεια και d ο μ.κ.δ. των (x,ψ,z).τότε η (χ/d,ψ/d,z/d) είναι μία αρχική πυθαγόρεια τριάδα.

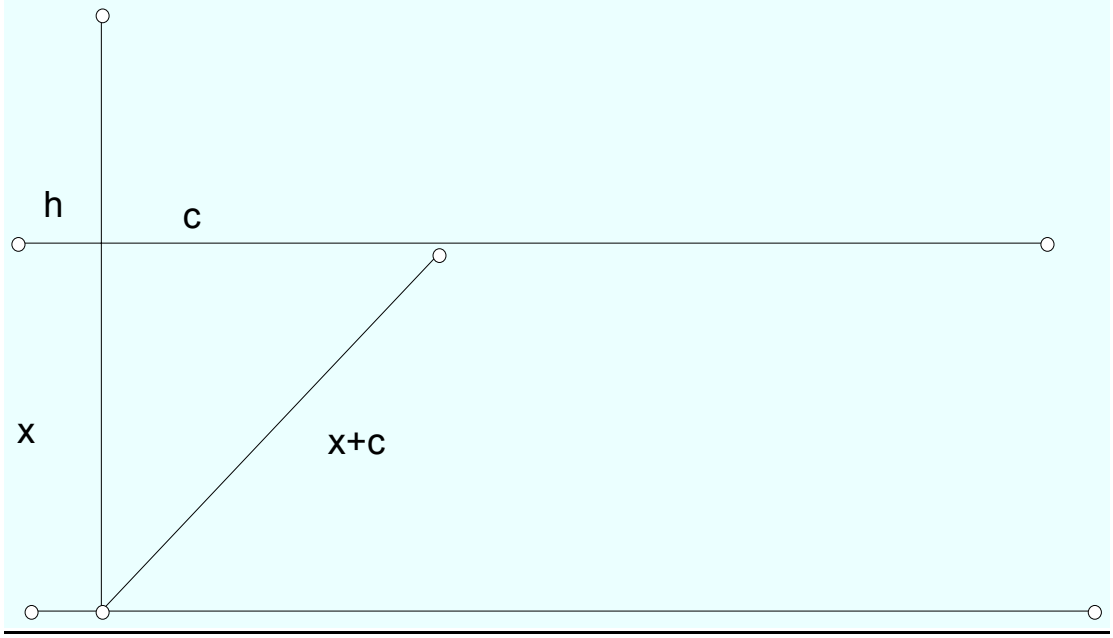
Συνεπώς οι τριάδες (nx,nψ,nz) ,με n θετικό ακέραιο και (x,ψ,z) αρχική πυθαγόρεια τριάδα,δίνουν όλες τις πυθαγόρειες τριάδες.

1.7.2 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΚΑΛΑΜΙΟΥ ΤΩΝ ΒΑΒΥΛΩΝΙΩΝ

Ένα καλάμι που έχει φυτρώσει στον πυθμένα ενός ποταμού προεξέχει απόσταση h πάνω από τη στάθμη του νερού.Αν το καλάμι υποστεί μία κλίση σε σχέση με την κατακόρυφο του,ώστε η κορυφή του να βρεθεί στο ίδιο

επίπεδο με τη στάθμη του νερού.η απόσταση της κορυφής στη νέα αυτή θέση,από τη κατακόρυφο του είναι c.Να βρεθεί το βάθος του ποταμού.

ΛΥΣΗ:



Από το σχήμα έχουμε $(x+h)^2=x^2+c^2$.Επομένως $x=(c^2-h^2)/2h'$. Το ύψος του καλαμιού είναι $x+h=(c^2+h^2)/2h$.Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκος $x=(c^2-h^2)/2h$,$c=c$, $x+h=(c^2+h^2)/2h$.Πολλαπλασιάζοντας τις πλευρές του τριγώνου με 2h προκύπτει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές που έχουν μήκος $x'= c^2-h^2$,$c'=2hc$ και $(x+h)'=c^2+h^2$.Αν c,h, είναι θετικοί ακέραιοι με $c>h$ τότε η τριάδα $(c^2-h^2,2hc, c^2+h^2)$ είναι **πυθαγόρεια**.

Αν t είναι αυθαίρετος θετικός ακέραιος αριθμός, τότε και η τριάδα $[(c^2-h^2)t,2thc, (c^2+h^2)t]$ είναι πυθαγόρεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια πυθαγόρεια τριάδα (χ,ψ,z) λέγεται **πρωτογενής** αν ισχύει $(x,\psi)=(\psi,z)=(z,x)=1$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.2:

΄Ολες οι πρωτογενείς λύσεις της $x^2+y^2=z^2$ δίνονται από τους τύπους: $x=c^2-h^2$, $y=2hc$ και $z=c^2+h^2$ (1) όπου c,h αυθαίρετοι θετικοί με c>h ενώ (h,c)=1 και επιπλέον ο ένας από τους c,h είναι περιττός ενώ ο άλλος άρτιος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αν η τριάδα (α,β,γ) είναι πρωτογενής λύση της $x^2+y^2=z^2$ και δ αυθαίρετος φυσικός αριθμός τότε η τριάδα (δα,δβ,δγ) είναι θετική ακέραια λύση της τελευταίας εξίσωσης.

Αντίστροφα αν η τριάδα (x,ψ,z) είναι λύση της τελευταίας εξίσωσης στους φυσικούς αριθμούς και θέσουμε (x,ψ,z)=δ και x=δα,ψ=δβ,z=δγ όπου (α,β,γ)=1,τότε η τριάδα (α,β,γ) είναι πρωτογενής λύση της εξίσωσης.

Υποθέτουμε ότι η τριάδα (x,ψ,z) είναι πρωτογενής λύση της εξίσωσης.Θα αποδείξουμε ότι ένας από τους φυσικούς αριθμούς x,ψ είναι άρτιος ενώ ο άλλος είναι περιττός.Αν και οι δύο είναι άρτιοι τότε ο z είναι άρτιος. Άρα (x,ψ,z)=2 που είναι άτοπο επειδή η τριάδα (x,ψ,z) είναι πρωτογενής.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του τετραγώνου ενός περιττού φυσικού αριθμού με το 8 είναι 1.Επομένως το άθροισμα των τετραγώνων δύο περιττών αριθμών είναι της μορφής 2+8Α.

΄Αρα αν οι δύο φυσικοί αριθμοί x,ψ είναι περιττοί,τότε ο z δεν είναι περιττός αλλά ούτε και άρτιος,άρα άτοπο.

΄Εστω ότι ο x είναι περιττός,ενώ ο ψ είναι άρτιος και η τριάδα (x,ψ,z) είναι λύση της εξίσωσης. Τότε η διοφαντική εξίσωση γράφεται ως εξής: $ψ^2=(z+x)(z-x)$.Οι αριθμοί z+x και z-x είναι άρτιοι ,άρα z+x=2l και z-x=2w όπου l,w είναι φυσικοί αριθμοί.Συνεπώς z=l+w,x=l-w.Οι φυσικοί αριθμοί είναι l,w είναι πρώτοι μεταξύ τους και από την υπόθεση ότι ο ψ είναι άρτιος φυσικός θα καταλήξουμε τους τύπους (1).

Αντίστροφα αν οι τυχαίοι φυσικοί αριθμοί c,h με c>h ,είναι πρώτοι μεταξύ τους και επιπλέον ο ένας από τους c,h είναι περιττός ενώ ο άλλος είναι άρτιος, τότε οι φυσικοί αριθμοί x,ψ,z που δίνονται από τις: $x=c^2-h^2$, $y=2hc$ και $z=c^2+h^2$ είναι πρωτογενής λύση της εξίσωσης.

Ακολουθεί ο πίνακας πρωτογενών πυθαγορείων τριάδων που κατασκευάστηκε βάσει του προηγούμενου θεωρήματος για c=2,3,…10.

c	h	x	ψ	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
10	7	51	140	149
10	9	19	180	181

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. 7. 3:

Όλες οι ακέραιες θετικές λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης $x^2+ψ^2=z^2$ δίνονται από τους τύπους $x=(c^2-h^2)t$, $ψ=2hct$, $z=(c^2+h^2)t$: t θετικόςακέραιος, h,c, θετικοί ακέραιοι με c>h,(c,h)=1 και επιπλέον ο ένας από τους c,h είναι περιττός ενώ ο άλλος είναι άρτιος.

1.8. Η ΕΞΙΣΩΣΗ χψ=zt

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.1 :

Υποθέτουμε ότι οι x,ψ,z,t είναι φυσικοί αριθμοί,τότε όλες οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων χψ=zt δίνονται από τους τύπους : x = ac, y = bd, z = ad και t = bc onou a, b, c, d είναι αυθαίρετοι φυσικοί αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Υποθέτουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί x,ψ,z,t ικανοποιούν την εξίσωση και (x,z)=α.Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί c,d, με x=αc z=αd.Αντικαθιστούμε τις τελευταίες ισότητες στην εξίσωση και έχουμε cψ=dt αρα d|ψc και επειδή (c,d)=1,έπεται ότι d|ψ.Επομένως υπάρχει φυσικός αριθμός b με ψ=db,οπότε t=bc.

Αντίστροφο:

΄Οταν δίνονται αυθαίρετοι φυσικοί αριθμοί α,b,c,d ορίζουμε τα x,ψ,z,t, από τους τύπους x = ac, y = bd, z = ad και t = bc επομένως ισχύει η χψ=zt.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αν ισχύει και η (c,d)=1,τότε κάθε λύση προκύπτει από τις τελευταίες σχέσειςς .Για να βρούμε την λύση της εξίσωσης εργαζόμαστε ως εξής:

Ξεκινάμε με αυθαίρετους φυσικούς αριθμούς x,z και διαιρούμε με (x,z) την εξίσωση άρα θα έχουμε :[x/(x,z)]*ψ=[z/(x,z)]*t.Επομένως [z/(x,z)] | [x/(x,z)]*ψ

και επειδή $[x/(x,z)],z/(x,z)]=1$ προκύπτει ότι $[z/(\chi,z)] \mid \psi$.Άρα $\psi=u[z/(\chi,z)]$,οπότε $t=u[x/(x,z)]$.Ισχύει και το αντίστροφο.

Αντιστρόφως:

Αν πάρουμε αυθαίρετους φυσικούς αριθμούς x,z,u και ορίσουμε $\psi= u[z/(\chi,z)]$, $t=u[\chi/(\chi,z)]$ βρίσκουμε λύση της εξίσωσης στους φυσικούς αριθμούς.Επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης στους φυσικούς δίνονται από τους τύπους $\psi= u[z/(x,z)]$, $t=u[x/(x,z)]$.

16. Όλες οι ακέραιες λύσεις της $\chi\psi=z^2$ στους φυσικούς αριθμούς x,ψ,z δίνονται από τους τύπους $x=u^2t,\psi=v^2t$ $z=uvt$ όπου u,v,t είναι αυθαίρετοι φυσικοί αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Υποθέτοντας ότι οι x,ψ,z ικανοποιούν την $x\psi=z^2$.Αν $(x,z)=\alpha$ τότε $x=u\alpha$ $z=v\alpha$ με $(u,v)=1$.Επομένως από την εξίσωση προκύπτει ότι $u\psi=v^2\alpha$,άρα $v^2 \mid u\psi$ και επειδή $(u,v^2)=1$ τότε $v^2 \mid u$.Επομένως $\psi= v^2t$,όπου t φυσικός αριθμός,οπότε $\alpha=ut$.Συνεπώς $x=u^2t$, $z=uvt$.Ισχύει και το αντίστροφο.

Αντιστρόφως:

Αν u,v,t είναι αυθαίρετοι φυσικοί αριθμοί,θέτουμε $x=u^2t,\psi=v^2t$ $z=uvt$ οπότε ισχύει η αρχική εξίσωση.

1.9.ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FERMAT

Το πιο διάσημο πρόβλημα στον κλάδο των διοφαντικών εξισώσεων στο οποίο αναφερθήκαμε και πριν είναι το ακόλουθο το :Η διοφαντική εξίσωση $x^n +\psi^n =z^n$ δεν έχει ακέραια λύση (χ,ψ,z) με $x\psi z\neq 0$ για $n\geq 3$.

Θ'αποδείξουμε το τελευταίο θεώρημα του Fermat για κάθε n της μορφής 4m (m=1,2,3…).Αυτό είναι συνέπεια του ακόλουθου θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9.1.

Η διοφαντική εξίσωση $x^4+\psi^4=z^2$ δεν έχει ακέραια λύση (x,ψ,z) με $x\psi\neq 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Καθώς οι δυνάμεις των x, y και z είναι άρτιες, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z που να ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο S, των ακεραίων λύσεων (x, y, z), $x > O$, $y > O$ και $z > O$, είναι μη κενό. Αν $(x, y, z)\in S$, καλούμε **ύψος** της λύσης (x, ψ, z) τον θετικό ακέραιο $h(x, \psi, z) = x\psi z$. Τα ύψη των στοιχείων του S αποτελούν ένα μη κενό σύνολο από θετικούς ακέραιους.Επομένως,υπάρχει στοιχείο (x_o, y_o, z_o) του S με ελάχιστο ύψος, δηλαδή, $h(x_o, y_o, z_o) \leq h(x, y, z)$ για κάθε $(x, y, z)\in S$.

Αν $(x_o, y_o)= d >1$, τότε $d^2 \mid z_0$ και επομένως $(x_o/d, y_o/d, z_0/d^2)$ είναι ένα στοιχείο του S με ύψος $h(x_o/d, y_o/d, z_0/d^2) = x_0 y_0 z_o/ d^4 < x_o y_o z_o = h(\chi_o, y_o, z_o)$.

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η λύση $(x_0, \psi o, zo)$ είναι ένα στοιχείο του S με ελάχιστο ύψος.Τότε $(x_o,\psi_o,)=1$,απ'όπου έπεται ότι οι ακέραιοι x_0^2, ψ_0^2, z_0 είναι πρώτοι μεταξύ τους. Συνεπώς, η τριάδα (x_0^2, ψ_0^2, z_0) είναι μια αρχική Πυθαγόρεια τριάδα. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι ο x_0^2 είναι άρτιος (οπότε οι ψ_0^2, z_0 είναι περιττοί). Έχουμε $x_o=2uv, \psi_o^2=u^2-v^2, z_o=u^2+v^2$ όπου u, v είναι ακέραιοι όχι και οι δυο περιττοί με $u > v > 0$ και $(u,v)= 1$. Επομένως ισχύει $u^2=v^2 +\psi_o^2$ με $(u, v, \psi_o) = 1$ και ψ_o περιττό.

Οπότε η τριάδα (v,ψ_o,u) είναι μια αρχική Πυθαγόρεια τριάδα. Επειδή ο ακέραιος ψ_o είναι περιττός, έπεται οτι ο v είναι άρτιος.Υπάρχουν ακέραιοι με r , s όχι και οι δύο περιττοί, με $r > s > 0$ και $(r, s) = 1$ έτσι,ώστε να έχουμε:$v = 2rs$ $\psi_o= r-s^2$, $u =r+s^2$ άρα ισχύει $xo^2 =4rs(r^2+s^2)$ απ'όπου $(\chi_o/2)^2 = rs(r^2+s^2)$.Καθώς $(r, s)=1$, ισχύει $(r,r^2+s^2) \leq (r^2, r^2+s^2) = (r^2, s^2) = (r, s)^2 = 1$.

Αρα $(r, r^2 +s^2) = 1$. Ομοίως παίρνουμε $(s, r+s^2) = 1$.

Επειδή οι ακέραιοι r, s, $r^2 +s^2$ είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο και το γινόμενο τους ισούται με το τετράγωνο ενός ακεραίου, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1, \psi_1, z_1 \in N$ ώστε $r=x_1^2$ $s=\psi_1^2$ $r^2+s^2=z_1^2$.Οπότε $x_1^4 +\psi_1^4 =z_1^2$

Η τριάδα (x_1,ψ_1,z_1) είναι ένα στοιχείο του S με ύψος:

$h(x_1,\psi_1,z_1) = x_1\psi_1z_1 = \sqrt{rs(r^2+s^2)} = \sqrt{(x_o)}/2^2 = x_0/2 < x_o y_o z_o = h(xo, \psi o, z_0)$

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί η λύση $(x_o y_o z_o)$ είναι ένα στοιχείο του S με ελάχιστο ύψος. Συνεπώς η εξίσωση εξίσωση $x^4+\psi^4=z^2$ δεν έχει ακέραια λύση (x, y, z) με $xy \neq 0$.

Πόρισμα 1.9.2.

Έστω m θετικός ακέραιος. Η διοφαντική εξίσωση $x^{4m}+\psi^{4m}=z^{4m}$ δεν έχει ακέραια λύση (x, y, z) με $xy \neq 0$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι (u,v,w) είναι μία ακέραια λύση της εξίσωσης $\chi^{4m}+\psi^{4m}=z^{4m}$ *με* $uv \neq 0$.Τότε η τριάδα (u^m,v^m,w^{2m}) είναι μία ακέραια λύση της εξίσωσης $x^4+\psi^4=z^2$ και $u^mv^m \neq 0$.Σύμφωνα όμως με το θεώρημα 1.9.1 αυτό είναι άτοπο.

1.10. Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax^2+by^2+cz^2 = 0$

Εδώ θ' ασχοληθούμε με τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $ax^2+by^2+cz^2=0$. Θ' αρχίσουμε μ' ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον Legendre.Πρώτα όμως ας υπενθυμίσουμε ότι ένας ακέραιος n καλείται **ελεύθερος τετραγώνου**, αν δεν διαιρείται από το τετράγωνο κανενός πρώτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10.1.

Έστω a, b, c μη μηδενικοί ακέραιοι, πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο και ελεύθεροι τετραγώνου.Τότε η εξίσωση $f(x, y, z) = ax^2+by^2+cz^2 = 0$ έχει μία ακέραια λύση $(x, y,z) \neq (0, 0, 0)$, αν και μόνον αν, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) οι ακέραιοι a, b, c δεν έχουν το ίδιο πρόσημο,

(β) οι ακέραιοι -ab, -bc και -ac είναι αντίστοιχα τετραγωνικά υπόλοιπα

mod|c|, mod|a| και mod|b| (όταν αντίστοιχα $|c| \neq 1$, $|a| \neq 1$, $|b| \neq 1$).

Πόρισμα 1.10.2.

Α ς υποθέσουμε ότι η εξίσωση $ax^2+by^2+cz^2= 0$ έχει μία ακέραια λύση $\neq (0,0, 0)$. Τότε αυτή έχει μία ακέραια λύση $(x_1,\psi_1,z_1) \neq (0,0,0)$ με $x_1,\psi_1,z_1 \in N$ και $\max\{\chi_1,\psi_1,z_1\} < 2\max(a^2,b^2,c^2)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Από το Θεώρημα 1.10.1, έχουμε ότι αν οι συντελεστές της εξίσωσης $ax^2+by^2+cz^2 = 0$ πληρούν τις συνθήκες (α) και (β), τότε υπάρχουν x_0, yo, $z_0 \in Z$, όχι όλοι μηδέν,με $|x_o| < \sqrt{|bc|}$, $|yo| < \sqrt{|ac|}$ και $z_0 < \sqrt{|ab|}$ και έτσι, ώστε f(xo,yo, zo) = 0 ή επιπλέον $f(x_0zo+byo,\ yozo-axo,\ z_0^2+ab)=0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2\sqrt{uv} \leq u+v$, για κάθε $u,v \in R$, παίρνουμε την ακόλουθη σχέση $|x_0zo+byo| \leq |x_0zo|+|byo| < \sqrt{|bc|}\sqrt{|ab|}+b\sqrt{ac}= 2b\sqrt{|ac|} \leq (b^2+|ac| \leq 2\max(a^2, b^2, c^2|$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ισχυεί και η σχέση: $|y_0 z_0-ax_0| \leq 2\max\{a^2, b^2, c^2\}$ και $|z_0^2+ab| \leq 2\max\{a^2, b^2,c^2\}$.

17.Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $9x^2+35\psi^2-721z^2 = 0$ έχει ακέραια λύση έτσι ώστε $(x, y,z) \neq (0, 0, 0)$. Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της δεν πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.10.1 (π.χ. οι 35 και 721 διαιρούνται από 7). Θα μετασχηματίσουμε αυτή την εξίσωση σε μία άλλη που θα μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 1.10.1.

Έχουμε $(3x)^2+35\psi^2-721z^2 =0$ και πολλαπλασιάζοντας με 7 παίρνουμε $7(3x)^2+ 5(7\psi)^2- 103 (7z)^2 =0$. Θέτουμε $X=3x$, $\Psi=7\psi$, $Z=7z$ και καταλήγουμε στην εξίσωση $7X^2+5Y^2-103Z^2 = 0$, η οποία πληρεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.10.1. Εδώ χρησιμοποιούμε το σύμβολο Legendre ο ορισμός του οποίου δίνεται

ως εξής:Έστω p περιττός πρώτος.Αν $n \not\equiv 0 \pmod p$,τότε ορίζουμε το σύμβολο του Legendre (n/p) ως εξής:

$$(n/p)=1 \text{ αν } n\underline{R}p$$
$$(n/p)=-1 \text{ αν } nRp$$

Αν $n \equiv 0 \pmod p$,ορίζουμε (n/p)=0.Είναι φανερό ότι (m/p)=(n/p),αν $m \equiv n \pmod p$,οπότε το σύμβολο (n/p) είναι μία περιοδική συνάρτηση του n με περίοδο p.

Οι συντελεστές της εξίσωσης δεν έχουν το ίδιο πρόσημο και έχουμε τότε τα εξής:

(-35/103) = (68/103) = (4/103)(17/103) = (17/103) = (103/17) = (1/17) = 1, (515/7) = (4/7) = 1 και (721/5) = (1/5) = 1, απ' όπου έπεται ότι οι ακέραιοι -5*7= -35 103*5 =515 και 103*7 = 721 είναι αντίστοιχα τετραγωνικά υπόλοιπα (mod 103), (mod7) και (mod5). Επομένως οι συνθήκες (α) και (β) του θεωρήματος 1.10.1 ικανοποιούνται και συνεπώς υπάρχει μία ακέραια λύση (u, v, w) $\neq$ (0, 0, 0) της παραπάνω εξίσωσης.

Π.χ η τριάδα (11,4, 3) είναι μία τέτοια λύση. Οι ρητοί αριθμοί x = u/3, y = v/7 και z = w/7 επαληθεύουν την εξίσωση $9x^2+35y^2-721z^2=0$ και επομένως η τριάδα (7u, 3v, 3w) είναι μία ακέραια λύση της.

ΓΕΝΙΚΕΥΟΝΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Γραμμική περίπτωση: A = B = C = 0

Η εξίσωση είναι τώρα: **Dx + Ey + F = 0**. Αυτή η περίπτωση έχει μελετηθεί στην 1.6 παράγραφο.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ $B^2 - 4AC < 0$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0$.Αυτή έχει λύσεις

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \mathrm{sqrt}[(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F)]}{2C} \quad (*)$$

Για οποιαδήποτε τιμή του χ θα υπάρξουν δύο τιμές του ψ εκτός από τα άκρα της έλλειψης. Σε αυτήν την περίπτωση θα υπάρξει μόνο μια τιμή . Για να καθορίσουμε τη θέση των αριστερών και δεξιών άκρων πρέπει του ψ να θέσουμε την τετραγωνική ρίζα με μηδέν, έτσι η προηγούμενη έκφραση δίνει :

$$(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = 0$$

Εάν οι ρίζες δεν είναι πραγματικές, δεν θα υπάρξει καμία λύση στην αρχική εξίσωση, αλλιώς, όλες οι τιμές ακέραιων αριθμών του χ πρέπει να αντικατασταθούν στην εξίσωση (*) προκειμένου να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του ψ στην εξίσωση .

Ας δούμε ένα παράδειγμα:$42x^2 + 8xy + 15y^2 + 23x + 17y - 4915 = 0$ Παρατηρούμε ότι $B^2 - 4AC = 8^2 - 4*42*15 = -2456 < 0$ άρα έχουμε την περίπτωση της έλλειψης.Τα άκρα της έλλειψης θα είναι ρίζες της:

$(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = 0$ **ή ισοδύναμα**

$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF) = -2456x^2 - 1108x + 295189 = 0$.Οι ρίζες είναι οι -11.19... και 10.74..., έτσι πρέπει να ελένξουμε τις ακέραιες τιμές του χ από -11 έως 10. Η μόνη τιμή του χ που αντικαθιστώντας της στην

(*) δίνει ακέραια τιμή του ψ εμφανίζεται για χ = -11, οπότε ψ = -1, επομένως αυτό είναι η μόνη λύση σε αυτό το πρόβλημα.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ: $B^2 - 4AC = 0$

Ας συμβολίσουμε με **g = gcd(A,C)**, **a = A/g >= 0**, **b = B/g**, **c = C/g >= 0**.

Δεδομένου ότι $b^2 = 4ac$ είναι θετικό, μπορούμε να επιλέξουμε να έχει το g με το ίδιο πρόσημο με το A. Κατ' αυτό τον τρόπο το α και το c θα είναι θετικά (ή ένας από τους μηδέν). Η έκφραση $b^2 - 4ac=0$ συνεπάγεται ότι $b^2/4=ac$.Επειδή gcd (α, c) = 1, και α και c είναι τέλεια τετράγωνα.

Πολλαπλασιασμός της αρχική εξίσωση με $\sqrt{a}$ και αντικαθιστώντας τα A,B,C:

$$\sqrt{a}\,g(ax^2 + bxy + cy^2) + \sqrt{a}\,Dx + \sqrt{a}\,Ey + \sqrt{a}\,F = 0$$

$\sqrt{a}\,g(\sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y)^2 + \sqrt{a}\,Dx + \sqrt{a}\,Ey + \sqrt{a}\,F = 0$.Το $\sqrt{c}$ έχει το πρόσημο του B/A.Προσθαφαιρώντας $\sqrt{c}\,Dy$:

$$\sqrt{a}\,g(\sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y)^2 + D(\sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y) - \sqrt{c}\,Dy + \sqrt{a}\,Ey + \sqrt{a}\,F = 0$$

Ας συμβολίσουμε με $u = \sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y$: **(i)**

$$\sqrt{a}\,gu^2 + Du + (\sqrt{a}\,E - \sqrt{c}\,D)y + \sqrt{a}\,F = 0$$

$$(\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E)y = \sqrt{a}\,gu^2 + Du + \sqrt{a}\,F \quad \textbf{(ii)}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: $\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E = 0$ (δύο παράλληλες ευθείες) ή $\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E \neq 0$ (παραβολή). Στην πρώτη περίπτωση, $\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E = 0$. Από την (ii): $\sqrt{a}\,gu^2 + Du + \sqrt{a}\,F = 0$.Δεδομένου ότι τα χ ,ψ πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί, η εξίσωση (ι) υπονοεί ότι το u (η ρίζα της ανωτέρω εξίσωσης) πρέπει να είναι επίσης ακέραιος αριθμός. Έστω u_1 και u_2 οι ρίζες της ανωτέρω εξίσωσης. Από την (i) έχουμε: $\sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y - u_1 = 0$ and $\sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y - u_2 = 0$ η οποία λύνεται με τις μεθόδους της γραμμικής εξίσωσης.

Στην δεύτερη περίπτωση,η $\sqrt{a}\,gu^2 + Du + \sqrt{a}\,F$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E$. Έστω u_0, u_1,... οι τιμές του **u** στη σειρά με **0**

$<= u < |\sqrt{c}D - \sqrt{a}E|$ όπου ισχύει η παραπάνω συνθήκη. Έτσι $u = u_i + (\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)t$, όπου t είναι οποιοσδήποτε ακέραιος. **(iii)**

Αντικαθιστώντας την (iii) στην (ii):

$$(\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)y = \sqrt{a}g[u_i + (\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)t]^2 + D[u_i + (\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)t] + \sqrt{a}F$$

$$y = \sqrt{a}g(\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)t^2 + (D + 2\sqrt{a}gu_i)t + \frac{\sqrt{a}gu_i^2 + Du_i + \sqrt{a}F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}$$

Από (i) και (iii):

$$u = \sqrt{a}x + \sqrt{c}y = u_i + (\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)t$$

$$\sqrt{a}x = \sqrt{a}\sqrt{c}g(\sqrt{a}E - \sqrt{c}D)t^2 + (\sqrt{c}D - \sqrt{a}E - 2\sqrt{a}\sqrt{c}gu_i - \sqrt{c}D)t + u_i - \sqrt{c}\frac{\sqrt{a}gu_i^2 + Du_i + \sqrt{a}F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}$$

$$\sqrt{a}x = \sqrt{a}\sqrt{c}g(\sqrt{a}E - \sqrt{c}D)t^2 + (-\sqrt{a}E - 2\sqrt{a}\sqrt{c}gu_i)t + \frac{u_i(\sqrt{c}D - \sqrt{a}E) - \sqrt{a}\sqrt{c}gu_i^2 + \sqrt{c}Du_i + \sqrt{a}\sqrt{c}F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}$$

$$\sqrt{a}x = \sqrt{a}\sqrt{c}g(\sqrt{a}E - \sqrt{c}D)t^2 + (-\sqrt{a}E - 2\sqrt{a}\sqrt{c}gu_i)t - \frac{\sqrt{a}\sqrt{c}gu_i^2 + \sqrt{a}Eu_i + \sqrt{a}\sqrt{c}F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}$$

$$x = \sqrt{c}\,g(\sqrt{a}\,E - \sqrt{c}\,D)t^2 - (E + 2\sqrt{c}\,gu_i)t - \frac{\sqrt{c}\,gu_i^2 + Eu_i + \sqrt{c}\,F}{\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E}$$

$$y = \sqrt{a}\,g(\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E)t^2 + (D + 2\sqrt{a}\,gu_i)t + \frac{\sqrt{a}\,gu_i^2 + Du_i + \sqrt{a}\,F}{\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E}$$

Για παράδειγμα έστω η **$8x^2 - 24xy + 18y^2 + 5x + 7y + 16 = 0$,**της οποίας ζητάμε τις ακέραιες λύσεις. Πρέπει να υπολογίσουμε τα **g**, **a**, **c**, $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E$ και $\sqrt{a}\,gu^2 + Du + \sqrt{a}\,F$.

$g = \gcd(8, 18) = 2$

$a = 8/2 = 4$

$c = 18/2 = 9$

$\sqrt{a} = 2$

$\sqrt{c} = -3$ (επειδή **$B/A = -24/8 < 0$**)

$\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E = -3 * 5 - 2 * 7 = -29$ (δεύτερη περίπτωση)

$\sqrt{a}\,gu^2 + Du + \sqrt{a}\,F = 4u^2 + 5u + 32$

Πρέπει να καθορίσουμε τις τιμές του u στη σειρά, $0 <= u < 29$ για τις οποίες $4u^2 + 5u + 32$ είναι πολλαπλάσιο του 29. Οι τιμές του u είναι : $u_0 = 2$, $u_1 = 4$.

Για $u_0 = 2$:

$$x = -174\,t^2 - 17\,t - 2$$
$$y = -116\,t^2 - 21\,t - 2$$

Για $u_0 = 4$:

$$x = -174\,t^2 - 41\,t - 4$$
$$y = -116\,t^2 - 37\,t - 4$$

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ $A = C = 0, B \neq 0$

Επειδή **A = C = 0** η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξής εξίσωση: **Bxy + Dx + Ey + F = 0**, έτσι έχουμε:

Bxy + Dx + Ey + F	**= 0**
Bxy + Dx + Ey	**= -F** .Πολλαπλασιάζοντας με B
$\mathbf{B^2xy + BDx + BEy}$	**= -BF** Προσθαφαιρώντας DE
$\mathbf{B^2xy + BDx + BEy + DE}$	**= DE - BF**
Με παραγοντοποίηση:**(Bx + E) (By + D)**	**= DE - BF**

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: DE - BF = 0 (δύο γραμμές παράλληλες στους άξονες X και Y αντίστοιχα) ή DE - BF ≠0 (υπερβολή της οποίας οι ασύμπτωτοι είναι παράλληλες στους άξονες X και Y). Στην πρώτη περίπτωση μια αναγκαία συνθήκη για να έχει λύσεις εμφανίζεται όταν μια από τις παρανθέσεις είναι ίση με μηδέν, δηλαδή, Bx + E = 0 ή By + D = 0. Αν B ≠0, έχουμε τις λύσεις για:

$$x = -\frac{E}{B}, \quad y = \text{οποιοσδηποτε ακέραιος}$$ (εάν **το E** είναι πολλαπλάσιο **του B**)

$$x = \text{οποιοσδήποτε ακέραιος}, \quad y = -\frac{D}{B}$$

(αν το **D** είναι πολλαπλάσιο του **B**)

Στην δεύτερη περίπτωση οι τιμές των x και ψ βρίσκονται με την εύρεση όλων των διαιρετών DE - BF. Ας συμβολίσουμε με $d_1, d_2, ..., d_n$ το σύνολο διαιρετών του DE - BF.Έτσι:

$$Bx + E = d_i \qquad By + D = (DE - BF) / d_i$$

$$Bx = d_i - E \qquad By = (DE - BF) / d_i - D$$

$x = \dfrac{d_i - E}{B}$	$y = \dfrac{(DE - BF) / d_i - D}{B}$

Ας δούμε το εξής παράδειγμα:**2xy + 5x + 56y + 7 = 0**.

Εδώ οι διαιρέτες του DE - BF = 5*56 - 2*7 = 266 είναι: ±1, ±2, ±7, ±14, ±19, ±38, ±133, ±266.

Επειδή **(2x + 56) (2y + 5) = 266** λαμβάνουμε:

- d_1 = 1: x = (1-56)/2 = -55/2, y = (266/1-5)/2 = 261/2
- d_2 = -1: x = (-1-56)/2 = -57/2, y=[266/(-1)-5]/2 = 271/2
- d_3 = 2: **x** = (2-56)/2 = **-27**, **y** = (266/2-5)/2 = **64**
- d_4 = -2: **x** = (-2-56)/2 = **-29**, **y** = [266/(-2)-5]/2 = **-69**
- d_5 = 7: x = (7-56)/2 = -49/2, y = (266/7-5)/2 = 33/2
- d_6 = -7: x = (-7-56)/2 = -63/2, y = [266/(-7)-5]/2 = -43/2
- d_7 = 14: **x** = (14-56)/2 = **-21**, **y** = (266/14-5)/2 = **7**
- d_8 = -14: **x** = (-14-56)/2 = **-35**, **y** = [266/(-14)-5]/2 = **-12**
- d_9 = 19: x = (19-56)/2 = -37/2, y = (266/19-5)/2 = 9/2
- d_{10} = -19: x = (-19-56)/2 = -75/2, y = [266/(-19)-5]/2 = -19/2
- d_{11} = 38: **x** = (38-56)/2 = **-9**, **y** = (266/38-5)/2 = **1**
- d_{12} = -38: **x** = (-38-56)/2 = **-47**, **y** = [266/(-38)-5]/2 = **-6**
- d_{13} = 133: x = (133-56)/2 = 77/2, y = (266/133-5)/2 = -3/2
- d_{14} = -133: x = (-133-56)/2 = -189/2, y = [266/(-133)-5]/2 = -7/2

■d_{15} = 266: **x** = (266-56)/2 = **105**, **y** = (266/266-5)/2 = **-2**

■d_{16} = -266: **x** = (-266-56)/2 = **-161**, **y** = [266/(-266)-5]/2 = **-3**

Οι μόνες 8 ακέραιες λύσεις στις ζητούμενες εξισώσεις είναι χαρακτηρισμένες ανωτέρω με κόκκινο.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$

Αν F = 0 έχουμε την τετριμμένη λύση x = 0 και y = 0. Τώρα θα ερευνήσουμε εάν υπάρχουν περισσότερες λύσεις: $\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 = -F}$

Πολλαπλασιάζοντας με **4A**:

$\mathbf{4A^2x^2 + 4ABxy + 4ACy^2 = -4AF}$

$\mathbf{4A^2x^2 + 4ABxy + B^2y^2 - B^2y^2 + 4ACy^2 = -4AF}$

$\mathbf{(2Ax + By)^2 - (B^2 - 4AC)y^2 = -4AF}$

Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως διαφορά των τετραγώνων: **(2Ax + By + sqrt(B^2 - 4AC) y) (2Ax + By - sqrt(B^2 - 4AC) y) = -4AF (2Ax + (B + sqrt(B^2 - 4AC))y) (2Ax + (B - sqrt(B^2 - 4AC))y) = -4AF**

Αν **-4AF = 0**, η προυπόθεση για να έχει περισσότερες λύσεις είναι ότι η $\mathbf{B^2 - 4AC}$ πρέπει να είναι ένα τέλειο τετράγωνο.

Τώρα η ίδια μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη γραμμική εξίσωση (δεδομένου ότι η εξίσωση αντιπροσωπεύεται από δύο γραμμές στο επίπεδο xy που διατέμνεται στο σημείο (0, 0)) μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να βρεθούν οι λύσεις.

Αν F $\neq$0 και B^2 - 4AC = k^2 για μερικές τιμές ακέραιες του k, οι παρενθέσεις στην ανωτέρω εξίσωση πρέπει να είναι παράγοντες του -4AF. Ας

συμβολίσουμε με $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,... τους θετικούς και αρνητικούς διαιρέτες του **-4AF**. Έτσι έχουμε το ακόλουθο σετ των δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\mathbf{2Ax + (B+k)y = u_i}$$
$$\mathbf{2Ax + (B-k)y = -4AF/u_i}$$

Άρα έχουμε:

$$\mathbf{y = (u_i + 4AF/u_i) / (2k)}$$
$$\mathbf{x = (u_i - (B+k)y) / (2A)}$$

Πρέπει να απορρίψουμε τις τιμές u_i που δίνουν x ή y όχι ακέραιο.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $F \neq 0$ και $B^2 - 4AC$ όχι τέλειο τετράγωνο.

Αν F δεν είναι ένα πολλαπλάσιο gcd(A, B, C), η εξίσωση δεν έχει καμία λύση, διαφορετικά μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους συντελεστές της εξίσωσης με το gcd.

Αν $4 F^2 < B^2 - 4AC$, οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι μεταξύ των ορίων των συνεχών κλασμάτων των ριζών της εξίσωσης.Η έκφραση των συνεχών κλασμάτων μίας άρρητης τετραγωνικής ρίζας είναι περιοδική

Αν $\mathbf{B^2 - 4AC}$ δεν είναι ένα τέλειο τετράγωνο το σύνολο των λύσεων θα είναι είτε άπειρο ή δεν θα έχει καμμία λύση.

Από την άλλη μεριά , εάν $4 F^2 >= B^2 - 4AC$ οι λύσεις μπορούν να ληφθούν ως εξής:

Έστω G = gcd(x,y), x = Gu και y = Gv.

Η αρχική εξίσωση γίνεται $AG^2u^2 + BG^2uv + CG^2v^2 + F = 0$, έτσι το F θα είναι πολλαπλάσιο του G^2.

Διαιρώντας την εξίσωση με $\mathbf{G^2}$:

$Au^2 + Buv + Cv^2 + F/G^2 = 0$ (1).

Μόλις βρεθούν οι τιμές των u , v , μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε τα $x = Gu$ και $y = Gv$.

Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε $\gcd(x,y) = 1$.

Ας θέσουμε $x = sy - Fz$ (2).

Αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση:

$A(sy - Fz)^2 + B(sy - Fz)y + Cy^2 + F = 0$

$As^2y^2 - 2AFsyz + AF^2z^2 + Bsy^2 - BFyz + Cy^2 = -F$

$(As^2 + Bs + C)\, y^2 + (-2As - B)Fyz + AF^2z^2 = - F$

Διαιρώντας με -F:

$-(As^2 + Bs + C)\, y^2 / F + (2As + B)yz - AFz^2 = 1$ (3)

Τώρα πρέπει να καθορίσουμε τις τιμές του s ανάμεσα σε 0 και F - 1 έτσι ώστε $As^2 + Bs + C \equiv 0 \pmod F$. Θα.Από τη θεωρία των συνεχών κλασμάτωνγια το $-(As^2 + Bs + C)\, t^2 / F + (2As + B)t - AF = 0$, και την (2), βρίσκουμε το x . Αν δεν βρεθούν λύσεις μεταξύ των ορίων δεν θα υπάρξει καμία λύση της(1).

Τότε αν , $\gcd(B,C,F) = 1$ πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση $y = sx - Fz$ (4), έτσι αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση:

$\mathbf{Ax^2 + Bx(sx - Fz) + C(sx - Fz)^2 + F = 0}$

$\mathbf{Ax^2 + Bsx^2 - BFxz + Cs^2x^2 - 2CFsxz + CF^2z^2 = -F}$

$\mathbf{(Cs^2 + Bs + A)\, x^2 + (-2Cs - B)Fxz + CF^2z^2 = - F}$

Διαιρώντας με -F:

$\mathbf{-(Cs^2 + Bs + A)\, x^2 / F + (2Cs + B)xz - CFz^2 = 1}$ **(5)**.

Τώρα πρέπει να καθορίσουμε τις τιμές του s ανάμεσα στο 0 και F - 1 έτσι ώστε $Cs^2 + Bs + A \equiv 0 \pmod F$.Από τη θεωρία των συνεχών κλασμάτων για το $-(Cs^2 + Bs + A)\, t^2 / F + (2Cs + B)t - CF = 0$,και την σχέση(4),μπορούμε να βρούμε την τιμή του y. Αν δεν βρεθούν καθόλου λύσεις μεταξύ των ορίων των συνεχών κλασμάτων των ριζών της εξίσωσης, δεν θα υπάρχουν καθόλου λύσεις στην (1).

Οι εξισώσεις (4) and (5) δεν έχουν καμία λύση όταν και οι δύο gcd(A,B,F) και gcd(B,C,F) είναι μεγαλύτεροι του 1. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε την ακόλουθη προσέγγιση:

Έστω i, j, m και n τέσσερις ακέραιοι έτσι ώστε in - jm = 1 (6).

Αν x = iX + jY και y = mX + nY (7) λαμβάνουμε X = nx - jy και Y = -mx + iy (8).

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε να μετατρέψουμε οποιοδήποτε (x,y) σε (X,Y) και αντίστροφα. Έτσι θα εργαστούμε με (X,Y) και με αυτές τις λύσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές (x,y) που ικανοποιούν την αρχική εξίσωση.

$$\begin{aligned} &\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 =} \\ &\mathbf{= A(iX+jY)^2 + B(iX+jY)(mX+nY) + C(mX+nY)^2 =} \\ &\mathbf{= aX^2 + bXY + cY^2} \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{a = Ai^2 + Bim + Cm^2} \quad \mathbf{(9)}$$
$$\mathbf{b = 2Aij + Bin + Bjm + 2Cmn} \quad \mathbf{(10)}$$
$$\mathbf{c = Aj^2 + Bjn + Cn^2} \quad \mathbf{(11)}$$

Έτσι έχουμε να βρούμε τις τιμές των i και m έτσι ώστε $a = Ai^2 + Bim + Cm^2$ είναι σχετικά πρώτος προς τον F.

Αν gcd(C, F) > 1 έχουμε $\gcd(Ai^2 + Bim + Cm^2, C) = 1$, έτσι gcd(i, C) = 1 και gcd(Ai+Bm, C) = 1.

Αν gcd(A, F) > 1 έχουμε gcd(Ai^2 + Bim + Cm^2, A) = 1, έτσι gcd(m, A) = 1 και gcd(Bi+Cm, A) = 1.

Από (6), gcd(i, m) = 1.

Αν F ≡0 (mod p) (p πρώτος):

A	**B**	**C**	**i, m**	**Παραδείγματα**
A ≡0	**B ≡0**	**C ≡0**	Μη εφαρμόσιμος (**gcd(A, B, C) = 1**)	
A ≡0	**B ≡0**	**C ≠0**	**m ≠0**	**i ≡0, m ≡1**
A ≡0	**B ≠0**	**C ≡0**	**i ≠0, m ≠0**	**i ≡1, m ≡1**
A ≡0	**B ≠0**	**C ≠0**	**m ≠0, i ≠-Cm/B**	**i ≡1-C, m ≡B**
A ≠0	**B ≡0**	**C ≡0**	**i ≠0**	**i ≡1, m ≡0**
A ≠0	**B ≡0**	**C ≠0**	**i ≠0** or **m ≠0**	**i ≡1, m ≡1**
A ≠0	**B ≠0**	**C ≡0**	**i ≠0, m ≠-Ai/B**	**i ≡B, m ≡1-A**
A ≠0	**B ≠0**	**C ≠0**	**i ≠0** or **m ≠0**	**i ≡1, m ≡1**

Εφόσον είναι δυνατό να παραχθούν οι τιμές **i** και **m** από τις τιμές διαφορετικών modulo πρώτων είναι πολύ κουραστικό και δεν είναι απαραίτητο, επειδή από τον πίνακα ανωτέρω, σχεδόν όλες οι τιμές **i** και **m** μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Έτσι είναι καλύτερο να χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος ψευδοκώδικας προκειμένου να βρεθούν και οι δύο τιμές:

```
for i=0 to |F|-1

    for m=0 to i+1
      if gcd(i, m) = 1 and gcd(Ai^2 + Bim + Cm^2, F) = 1, end.
    next m
  next i
```

Μόλις βρούμε τις τιμές i και m ,μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των j και n από (6) χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της γραμμικής εξίσωσης . Κατόπιν πρέπει να υπολογίσουμε a, b και c χρησιμοποιώντας τις (9), (10) και

(11),από τις οποίες μπορούμε να βρούμε το σύνολο λύσεων (X,Y) . Με την (7) μπορούμε να βρούμε το σύνολο λύσεων (x,y).

Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα: $\mathbf{18\,x^2 + 41\,xy + 19\,y^2 - 24 = 0}$

Καταρχήν πρέπει να καθορίσουμε **gcd** από όλους τους συντελεστές εκτός του σταθερού όρου, ο οποίος είναι: **gcd**(18, 41, 19) = 1.

Διαιρώντας την εξίσωση με το μέγιστο κοινό διαιρέτη λαμβάνουμε: $\mathbf{18\,x^2 + 41\,xy + 19\,y^2 - 24 = 0}$

Ας θέσουμε **x = sy - fz**, έτσι $\mathbf{[-(as^2 + bs + c)/f]y^2 + (2sa + b)yz - afz^2 = 1}$. Έτσι το $\mathbf{18\,s^2 + 41\,s + 19}$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του **24**. Αυτό ισχύει για s = 19.

- Αν s = 19. Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω εξίσωση:

$\mathbf{304\,y^2 + 725\,yz + 432\,z^2 = 1}$

Από την θεωρία των συνεχών κλασμάτων για την εξίσωση $\mathbf{304\,t^2 + 725\,t + 432 = 0}$, έχουμε:Η μία ρίζα είναι η: (sqrt(313) - 725) /608.Άρα: -2 + //1, 5, **8, 5, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 5, 8, 1, 2, 17, 2, 1**//

Όπου το περιοδικό μέρος είναι με έντονα γράμματα (η περίοδος έχει 19 συντελεστές). Από τον ακόλουθος πίνακα φαίνεται πώς βρίσκονται οι τιμές Y_0 και Z_0 (η τρίτη στήλη είναι οι τιμές για το $\mathbf{304\,y^2 + 725\,yz + 432\,z^2}$):

c_n	y_n	z_n	
	1	0	
-2	-2	1	198

1	-1	1	11
5	-7	6	-2
8	-57	49	3
5	-292	251	-12
1	-349	300	4
3	-1339	1151	-9
1	-1688	1451	8
1	-3027	2602	-6
2	-7742	6655	6
2	-18511	15912	-8
1	-26253	22567	9
1	-44764	38479	-4
3	-160545	138004	12
1	-205309	176483	-3
5	-1 187090	1 020419	2
8	-9 702029	8 339835	-11
1	-10 889119	9 360254	6
2	-31 480267	27 060343	-1
17	-546 053658	469 386085	6
2	-1123 587583	965 832513	-11
1	-1669 641241	1435 218598	2
8	-14480 717511	12447 581297	-3
5	-74073 228796	63673 125083	12
1	-88553 946307	76120 706380	-4
3	-339735 067717	292035 244223	9
1	-428289 014024	368155 950603	-8
1	-768024 081741	660191 194826	6

2	-1 964337 177506	1 688538 340255	-6
2	-4 696698 436753	4 037267 875336	8
1	-6 661035 614259	5 725806 215591	-9
1	-11 357734 051012	9 763074 090927	4
3	-40 734237 767295	35 015028 488372	-12
1	-52 091971 818307	44 778102 579299	3
5	-301 194096 858830	258 905541 384867	-2
8	-2461 644746 688947	2116 022433 658235	11
1	-2762 838843 547777	2374 927975 043102	-6
2	**-7987 322433 784501**	**6865 878383 744439**	**1**
17	-138547 320217 884294	119094 860498 698565	-6
2	-285081 962869 553089	245055 599381 141569	11
1	-423629 283087 437383	364150 459879 840134	-2

Σημειώνουμε ότι $\mathbf{y_n = c_n\, y_{n-1} + y_{n-2}}$ και $\mathbf{z_n = c_n\, z_{n-1} + z_{n-2}}$.

Τα πρόσημα στην τρίτη στήλη εναλλάσσονται, έτσι οι αριθμοί θα επαναλαμβάνονται μετά από ένα ομαλό αριθμό συγκλίσεων. Με αυτές τις λύσεις και τη σχέση επανάληψης που αναπτύσσεται στο επόμενο τμήμα μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης.

Y_0 = -7987 322433 784501 (16 ψηφία)
Z_0 = 6865 878383 744439 (16 ψηφία)
Αν $X_0 = 19\, Y_0 + 24\, Z_0$:

X_0 = 13021 954967 961017 (17 ψηφία)
Y_0 = -7987 322433 784501 (16 ψηφίο)

Αν η εξίσωση $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ δεν αλλάζει όταν το x αντικαθίσταται με -x και y με το -y ταυτόχρονα έχουμε μια άλλη λύση:

X_0 = -13021 954967 961017 (17 ψηφία)
Y_0 = 7987 322433 784501 (16 ψηφία)

Για την άλλη ρίζα : (-sqrt(313) - 725) /608,έχουμε:

-2 + //1, 3, 1, 1, **17, 2, 1, 8, 5, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 5, 8, 1, 2**// (η περίοδος έχει 19 συντελεστές).

Από τον ακόλουθο πίνακα βλέπουμε πώς βρίσκονται οι τιμές Y_0 και Z_0 (η τρίτη στήλη είναι οι τιμές για το 304 y^2 + 725 yz + 432 z^2):

c_n	y_n	z_n	
	1	0	
-2	-2	1	198
1	-1	1	11
3	-5	4	12
1	-6	5	-6
1	**-11**	**9**	**1**
17	-193	158	-6
2	-397	325	11
1	-590	483	-2
8	-5117	4189	3
5	-26175	21428	-12

Y_0 = 11

Z_0 = -9

Αν X_0 = 19 Y_0 + 24 Z_0:

X_0 = -7
Y_0 = 11

$X_0 = 7$
$Y_0 = -11$

Από τη στιγμή που το 2 * 2 είναι ένας διαιρέτης του σταθερού όρου (-24), οι λύσεις πρέπει να είναι 2 φορές οι λύσεις του $18 u^2 + 41 uv + 19 v^2 - 6 = 0$.

Ομοίως με πρίν εργαζόμαστε για τις ρίζες της $18 t^2 + 41 t + 19 = 0$.Η μία ρίζα είναι : (sqrt(313) - 41) / 38.Άρα έχουμε:

-1 + //2, 1, 5, 8, 1, 2, **17, 2, 1, 8, 5, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3**//

όπου το περιοδικό μέρος είναι χαρακτηρισμένο με έντονους μαύρους χαρακτήρες (η περίοδος έχει 19 συντελεστές).

Από τον ακόλουθο πίνακα βλέπουμε πώς βρίσκονται οι τιμές U_0 και V_0 (η τρίτη στήλη είναι οι τιμές για $18 u^2 + 41 uv + 19 v^2$):

c_n	u_n	v_n	
	1	0	
-1	-1	1	-4
2	-1	2	12
1	-2	3	-3

5	-11	17	2
8	-90	139	-11
1	**-101**	**156**	**6**
2	-292	451	-1
17	**-5065**	**7823**	**6**
2	-10422	16097	-11
1	-15487	23920	2
8	-134318	207457	-3
5	-687077	1 061205	12
1	-821395	1 268662	-4
3	-3 151262	4 867191	9
1	-3 972657	6 135853	-8
1	**-7 123919**	**11 003044**	**6**
2	-18 220495	28 141941	-6
2	-43 564909	67 286926	8
1	-61 785404	95 428867	-9
1	-105 350313	162 715793	4
3	-377 836343	583 576246	-12
1	-483 186656	746 292039	3
5	-2793 769623	4315 036441	-2
8	-22833 343640	35266 583567	11
1	-25627 113263	39581 620008	-6
2	-74087 570166	114429 823583	1
17	-1 285115 806085	1 984888 620919	-6
2	-2 644319 182336	4 084207 065421	11
1	-3 929434 988421	6 069095 686340	-2
8	-34 079799 089704	52 636972 556141	3

5	-174 328430 436941	269 253958 467045	-12
1	-208 408229 526645	321 890931 023186	4
3	-799 553119 016876	1234 926751 536603	-9
1	-1007 961348 543521	1556 817682 559789	8
1	-1807 514467 560397	2791 744434 096392	-6
2	**-4622 990283 664315**	**7140 306550 752573**	**6**
2	-11053 495034 889027	17072 357535 601538	-8
1	-15676 485318 553342	24212 664086 354111	9
1	-26729 980353 442369	41285 021621 955649	-4
3	-95866 426378 880449	148067 728952 221058	12

Όπως εξηγείται ανωτέρω, x = 2u και y = 2v,έτσι :

X_0 = -202
Y_0 = 312

X_0 = 202
Y_0 = -312

X_0 = -10130
Y_0 = 15646

X_0 = 10130
Y_0 = -15646

X_0 = -14 247838 (8 ψηφία)
Y_0 = 22 006088 (8 ψηφία)

X_0 = 14 247838 (8 ψηφία)
Y_0 = -22 006088 (8 ψηφία)

X_0 = -9245 980567 328630 (16 ψηφία)
Y_0 = 14280 613101 505146 (17 ψηφία)

X_0 = 9245 980567 328630 (16 ψηφία)
Y_0 = -14280 613101 505146 (17 ψηφία)

Η άλλη ρίζα της εξίσωσης $18\ t^2 + 41\ t + 19 = 0$ είναι (-sqrt(313) - 41) / 38

Έχουμε από τα συνεχή κλάσματα:

-2 + //2, **1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 5, 8, 1, 2, 17, 2, 1, 8, 5, 1, 3, 1**//

όπου το περιοδικό μέρος είναι χαρακτηρισμένο με μαύρους χαρακτήρες (η περίοδος έχει 19 συντελεστές).

Από τον ακόλουθο πίνακα βλέπουμε πώς βρίσκονται οι τιμές U_0 και V_0 (η τρίτη στήλη είναι οι τιμές για $\mathbf{18\ u^2 + 41\ uv + 19\ v^2}$):

c_n	u_n	v_n	
	1	0	
-2	-2	1	9
2	-3	2	-8
1	**-5**	**3**	**6**
2	-13	8	-6
2	-31	19	8
1	-44	27	-9
1	-75	46	4
3	-269	165	-12
1	-344	211	3
5	-1989	1220	-2
8	-16256	9971	11
1	-18245	11191	-6
2	-52746	32353	1
17	-914927	561192	-6
2	-1 882600	1 154737	11
1	-2 797527	1 715929	-2
8	-24 262816	14 882169	3

5	-124 111607	76 126774	-12
1	-148 374423	91 008943	4
3	-569 234876	349 153603	-9
1	-717 609299	440 162546	8
1	-1286 844175	789 316149	-6
2	**-3291 297649**	**2018 794844**	**6**
2	-7869 439473	4826 905837	-8
1	-11160 737122	6845 700681	9
1	-19030 176595	11672 606518	-4
3	-68251 266907	41863 520235	12
1	-87281 443502	53536 126753	-3
5	-504658 484417	309544 154000	2
8	-4 124549 318838	2 529889 358753	-11
1	**-4 629207 803255**	**2 839433 512753**	**6**
2	-13 382964 925348	8 208756 384259	-1
17	**-232 139611 534171**	**142 388292 045156**	**6**
2	-477 662187 993690	292 985340 474571	-11
1	-709 801799 527861	435 373632 519727	2
8	-6156 076584 216578	3775 974400 632387	-3
5	-31490 184720 610751	19315 245635 681662	12
1	-37646 261304 827329	23091 220036 314049	-4
3	-144428 968635 092738	88588 905744 623809	9
1	-182075 229939 920067	111680 125780 937858	-8

Όπως εξηγείται ανωτέρω, x = 2u και y = 2v, έτσι:

X_0 = 10
Y_0 = -6

X_0 = -10

Y_0 = 6

X_0 = 6582 595298 (10 ψηφία)

Y_0 = -4037 589688 (10 ψηφία)

X_0 = -6582 595298 (10 ψηφία)

Y_0 = 4037 589688 (10 ψηφία)

X_0 = 9 258415 606510 (13 ψηφία)

Y_0 = -5 678867 025506 (13 ψηφία)

X_0 = -9 258415 606510 (13 ψηφία)

Y_0 = 5 678867 025506 (13 ψηφία)

X_0 = 464 279223 068342 (15 ψηφία)

Y_0 = -284 776584 090312 (15 ψηφία)

X_0 = -464 279223 068342 (15 ψηφία)

Y_0 = 284 776584 090312 (15 ψηφία)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Τώρα που βρέθηκαν μερικές λύσεις της αρχικής εξίσωσης, θα βρούμε άλλες λύσεις, στην πραγματικότητα, μια οικογένεια άπειρων λύσεων, όπου:

$X_{n+1} = P X_n + Q Y_n$

$Y_{n+1} = R X_n + S Y_n$

όπου **P**, **Q**, **R** και **S** πρέπει να καθοριστούν.

Έστω $M(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = M$ και $N(u, v) = u^2 + Buv + ACv^2 = N$.

$M(p, q) = Ap^2 + Bpq + Cq^2$

$M(p, q)/A = p^2 + (B/A)pq + (C/A)q^2$

$M(p, q)/A = p^2 + Dpq + Eq^2$

$M(p/q, 1)/A = (p/q)^2 + D(p/q) + E$ **(12)**

Οι ρίζες του $M(p/q, 1)/A = (p/q - J)(p/q - J') = 0$ **(13)** είναι:

$$J = \frac{-B + \mathrm{sqrt}(B^2 - 4AC)}{2A} \quad \text{και} \quad J' = \frac{-B - \mathrm{sqrt}(B^2 - 4AC)}{2A}$$

Μπορεί να παρουσιαστεί εύκολα εξισώνοντας τις (12) και (13) ότι :

$J^2 = -DJ - E$ **(14)**

$J'^2 = -DJ' - E$ **(15)**

$J + J' = -D$ **(16)**

$JJ' = E$ **(17)**

Οι ρίζες της $N(p/q, 1) = (p/q - K)(p/q - K') = 0$ είναι:

$$K = \frac{-B + \mathrm{sqrt}(B^2 - 4AC)}{2} \quad \text{και} \quad K' = \frac{-B - \mathrm{sqrt}(B^2 - 4AC)}{2}$$

έτσι **K = AJ**, **K' = AJ'** (18)

M(p, q)/A = (p - Jq)(p - J'q) = M (19)

N(r, s) = (r - Ks)(r - K's) = N (20)

Από (18) λαμβάνουμε:

$$(p - Jq)(r - Ks) = (p - Jq)(r - AJs) = (pr - AJps - Jqr + AJ^2qs)$$

Από (14) λαμβάνουμε:

$$[pr - AJps - Jqr + A(-DJ - E)qs] = (pr - AEqs) - (Aps + qr + AEqs)J = (pr - Cqs) - (Aps + qr + Bqs)J \quad (21)$$

Από (18) λαμβάνουμε:

$$(p - J'q)(r - K's) = (p - J'q)(r - AJ's) = (pr - AJ'ps - J'qr + AJ'^2qs)$$

Από (15) λαμβάνουμε:

$$[pr - AJ'ps - J'qr + A(-DJ' - E)qs] = (pr - AEqs) - (Aps + qr + AEqs)J' = (pr - Cqs) - (Aps + qr + Bqs)J' \quad (22)$$

Αν **X = pr - Cqs** και **Y = Aps + qr + Bqs** (23).

Πολλαπλασιάζοντας την (21) με την (22) λαμβάνουμε:

$$(M(p, q)/A)\, N(r, s) = (X - YJ)\,(X - YJ') = X^2 - (J + J')XY + JJ'Y^2$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (16) και (17) λαμβάνουμε: $(M(p, q)/A)\, N(r, s) = X^2 + DY + EY^2$

Πολλαπλασιάζοντας με **A** παίρνουμε (από (19) και (20)):

$$\mathbf{AX^2 + BXY + CY^2 = MN}$$

Αν M = -F και N = 1 βλέπουμε ότι τα X και Y είναι επίσης λύσεις της αρχικής εξίσωσης. Αν r και s λύση της $N(r, s) = r^2 + Brs + ACs^2 = 1$, $X_n = p$, $Y_n = q$, $X_{n+1} = X$ και $Y_{n+1} = Y$ (από τη στιγμή που τα τελευταία δύο ζευγάρια των αριθμών είναι λύσεις στην αρχική εξίσωση). Από (23) λαμβάνουμε:

$$\mathbf{X_{n+1} = rX_n - CsY_{n+1}}$$
$$\mathbf{Y_{n+1} = AsX_n + rY_{n+1} + BsY_{n+1}}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$X_{n+1} = P\,X_n + Q\,Y_n$ $Y_{n+1} = R\,X_n + S\,Y_n$	$P = r$ (24) $Q = -Cs$ (25) $R = As$ (26) $S = r + Bs$ (27) **όπου** $r^2 + Brs + ACs^2 = 1$ (28)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με **4A**:

$$\mathbf{4A^2x^2 + 4ABxy + 4ACy^2 + 4ADx + 4AEy + 4AF = 0}$$
$$\mathbf{(2Ax + By + D)^2 - (By + D)^2 + 4ACy^2 + 4AEy + 4AF = 0}$$
$$\mathbf{(2Ax + By + D)^2 + (4AC - B^2)y^2 + (4AE - 2BD)y + (4AF - D^2) = 0}$$

Αν $\mathbf{x_1 = 2Ax + By + D}$

και $\mathbf{g = gcd(4AC - B^2, 2AE - BD)}$.

Πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{(4AC - B^2)/g}$:

$$\frac{4AC - B^2}{g} x_1^2 + \frac{(4AC - B^2)^2}{g} y^2 + \frac{2(4AC - B^2)(2AE - BD)}{g} y + \frac{(4AC - B^2)(4AF - D^2)}{g} = 0$$

$$\frac{4AC - B^2}{g} x_1^2 + g\, y_1^2 + \frac{(4AC - B^2)(4AF - D^2) - (2AE - BD)^2}{g} = 0$$

$$\frac{4AC - B^2}{g} x_1^2 + g\, y_1^2 + \frac{4A(4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - CD^2)}{g} = 0$$

όπου:

$$y_1 = \frac{4AC - B^2}{g} y + \frac{2AE - BD}{g}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΛΥΣΕΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Θα υποθέσουμε ότι οι λύσεις θα έχουν τη μορφή:

$$X_{n+1} = P X_n + Q Y_n + K$$
$$Y_{n+1} = R X_n + S Y_n + L$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση το x με Px + Qy + K και το y με Rx + Sy + L:

$$A(Px + Qy + K)^2 + B(Px + Qy + K)(Rx + Sy + L) + C(Rx + Sy + L)^2 + D(Px + Qy + K) + E(Rx + Sy + L) + F = 0$$

$$(AP^2 + BPR + CR^2)x^2 + (2APQ + B(PS+QR) + 2CRS)xy + (AQ^2 + BQS + CS^2)y^2 + (2ABP + B(KR+LP) + 2CLR + DP + ER)x + (2AKQ + B(KS+LQ) + 2CLS + DQ + ES)y + (AK^2 + BKL + CL^2 + DK + EL + F) = 0 \quad (29)$$

Τώρα θα ερευνήσουμε τις τιμές μέσα στις παρενθέσεις.

- Από (24) και (26) λαμβάνουμε:

  $$AP^2 + BPR + CR^2 = Ar^2 + BrAs + CA^2s^2 = A(r^2 + Brs + ACs^2)$$

  Από την εξίσωση (28) λαμβάνουμε:

  $$AP^2 + BPR + CR^2 = A \quad (30)$$

- Από (24) έως (27) λαμβάνουμε:

  $$2APQ + B(PS+QR) + 2CRS = 2Ar(-Cs) + B[r(r+Bs)+(-Cs)As] + 2CAs(r+Bs) = -2ACrs + B(r^2+Bs-ACs^2) + 2ACrs + 2ABCs^2 = B(r^2+Bs+ACs^2)$$

  Από την εξίσωση (28) λαμβάνουμε:

$$2APQ + B(PS+QR) + 2CRS = B \quad (31)$$

- Από (25) και (27) λαμβάνουμε:

$$AQ^2 + BQS + CS^2 = AC^2s^2 + B(-Cs)(r+Bs) + C(r+Bs)^2 = AC^2s^2 - BCrs - B^2Cs^2 + Cr^2 + 2BCrs + B^2Cs^2 = AC^2 + BCrs + Cr^2 = C(r^2 + Brs + ACs^2)$$

Από την εξίσωση (28) λαμβάνουμε:

$$AQ2 + BQ + CS2 = \gamma \quad (32)$$

Αυτό σημαίνει ότι $2AKP + B(KR+LP) + 2CLR + DP + ER = D$ και $2AKQ + B(KS+LQ) + 2CLS + DQ + ES = E$.

Αυτές οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες με:

$$(2AP+BR)K + (BP+2CR)L = -D(P-1) - ER$$

και $(2AQ+BS)K + (BQ+2CS)L = -DQ - E(S-1)$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων για τα **K** και **L**:

$$K = \frac{D[BQ - 2C(PS-QR-S)] + E[B(PS-RQ-P) - 2CR]}{4AC\,(PS - QR) + B^2\,(QR - PS)}$$

$$L = \frac{D[B(PS-RQ-S) - 2AQ] + E[BR - 2A(PS-RQ-P)]}{4AC\,(PS - QR) + B^2\,(QR - PS)}$$

Αν $PS - QR = r(r+Bs) - (-Cs)As = r^2 + Brs + ACs^2 = 1$, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να απλοποιηθούν:

$$\boxed{K = \frac{D[BQ - 2C(1-S)] + E[B(1-P) - 2CR]}{4AC - B^2}}$$

$$L = \frac{D[B(1-S) - 2AQ] + E[BR - 2A(1-P)]}{4AC - B^2}$$

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι η έκφραση μέσα στις δεξιές παρενθέσεις (29) είναι ίση με F. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αποδείξουμε ότι οι τιμές K και L που μόλις βρέθηκαν επαληθεύνουν την εξίσωση $\mathbf{Z = AK^2 + BKL + CL^2 + DK + EL = 0}$ **(33)**.

Η επέκταση είναι πολύ περίπλοκη και δεν θα την αναπαράγουμε , αλλά ευτυχώς είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{4AC-B^2}$, έτσι ακυρώνει το τετράγωνο στον παρονομαστή, αν είναι $\mathbf{(4AC-B^2)^2}$.

Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{Z(4AC-B^2)}$ είναι ένας αριθμός ακέραιος και είναι ίσος με:

$$\mathbf{AD^2Q^2 - 2ADEPQ + AE^2P^2 - AE^2 + BD^2QS - BDEPS - BDEQR + BDE + BE^2PR + CD^2S^2 - CD^2 - 2CDERS + CE^2R^2}$$

Αλλάζοντας την σειρά των όρων

$$\mathbf{AD^2Q^2 + BD^2QS + CD^2S^2 - CD^2 - 2ADEPQ - BDEPS - BDEQR - 2CDERS + BDE + AE^2P^2 + BE^2PR + CE^2R^2 - AE^2}$$

$$\mathbf{D^2(AQ^2 + BQS + CS^2) - CD^2 - DE(2APQ + BPS + BQR + 2CRS) + BDE + E^2(AP^2 + BPR + CR^2) - AE^2}$$

Από (30), (31) και (32): $\mathbf{Z(4AC-B^2) = CD^2 - CD^2 - BDE + BDE + AE^2 - AE^2 = 0}$

Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{Z = 0}$, έτσι η (33) ισχύει και η (29) επίσης.

$$K = \frac{K_D D + K_E E}{4AC - B^2} \qquad L = \frac{L_D D + L_E E}{4AC - B^2} \qquad \textbf{(34)}$$

Πρέπει να σημειώσουμε τα εξής: $K_D = BQ - 2C(1 - S)$

$K_D = B(-Cs) - 2C(1 - r - Bs)$

$K_D = -BCs - 2C + 2Cr + 2BCs$

$K_D = C(-2 + 2r + Bs)$ (35)

$K_D = C(P + S - 2)$

$L_E = BR - 2A(1 - P)$

$L_E = ABs - 2A + 2Ar$

$L_E = A(-2 + 2r + Bs)$

$L_E = A(P + S - 2)$

$K_E = B(1 - P) - 2CR$

$K_E = B(1 - r) - 2ACs$

$K_E = B - Br - 2ACs$ (36)

$L_D = B(1 - S) - 2AQ$

$L_D = B(1 - r - Bs) + 2ACs$

$L_D = B - Br - B^2s + 2ACs$

$L_D - K_E = (4AC - B^2)s$ (37)

Έτσι:

$$K = \frac{CD(P+S-2) + E(B-Br-2ACs)}{4AC - B^2}$$

$$L = \frac{D(B-Br-2ACs) + AE(P+S-2)}{4AC - B^2} + Ds$$

Γενικά οι αριθμητές δεν θα είναι πολλαπλάσιο του $4AC - B^2$, έτσι χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο δεν μπορούμε να βρούμε μια επανάληψη για όλες τις τιμές του D και E.

Για μερικές τιμές D και E θα υπάρξουν λύσεις, όπως παρουσιάζονται κατωτέρω. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (24) - (27):

$$K_DL_E - K_EL_D = 4ACr^2 + 4ABCrs + 4A^2C^2s^2 - B^2r^2 - B^3rs - AB^2Cs^2 - 4ABCs - B^3s + 4AC - B^2 - 8ACr + 2B^2r =$$

$$= (4AC - B^2)(r^2 + Brs + ACs^2) - (4AC - B^2)Bs + (4AC - B^2) - (4AC - B^2)2r =$$

$$= (4AC - B^2)(2 - 2r - Bs)$$

Οι ισότητες που παρουσιάζονται κάτω είναι σύμφωνα με mod $4AC - B^2$.

$$K_DL_E - K_EL_D = 0 \Rightarrow K_D/K_E = L_D/L_E \quad (38)$$

Επειδή οι K και L πρέπει να είναι ακέραιοι πρέπει να είναι (από (34)):

$$K_DD + K_EE = 0 \Rightarrow E = (-K_D/K_E)D \quad (39)$$

$$L_DD + L_EE = 0 \Rightarrow E = (-L_D/L_E)D$$

Αυτές οι εξισώσεις είναι συνεπείς λόγω της εξίσωσης (38).

Σε μερικές περιπτώσεις (παράδειγμα α)μπορούμε να βρούμε μια επανάληψη με τη χρησιμοποίηση των λύσεων -r και -s λόγω $(-r)^2 + B(-r)(-s) + AC(-s)^2 = r^2 + Brs + ACs^2 = 1$.

Εάν καμία λύση δεν βρέθηκε (όπως μέσα στο παράδειγμα β), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το επόμενο ζευγάρι των λύσεων (r_1, s_1) της $r^2 + Brs + ACs^2 = 1$ επειδή θα υπάρξουν πάντα λύσεις όπως παρουσιάζονται κατωτέρω. Πρώτα πρέπει να βρούμε r_1 και s_1 από το r και s. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (24) - (28).

$$r_1 = r\,r + (-ACs)s = r^2 - ACs^2$$
$$s_1 = s\,r + (r + Bs)s = 2rs + Bs^2$$

Τώρα οι τιμές r και s πρέπει να αντικατασταθούν με r_1 και s_1.

Από (24): $P_1 = r_1 = r^2 - ACs^2$

Από (25): $Q_1 = -Cs_1 = -C(2rs + Bs^2)$

Από (26): $R_1 = As_1 = A(2rs + Bs^2)$

Από (27): $S_1 = r_1 + Bs_1 = r^2 + 2Brs + (B^2 - AC)s^2$

Από (35):

$K_{1D} = C(-2 + 2r_1 + Bs_1)$

$K_{1D} = C[-2 + 2(r^2 - ACs^2) + B(2rs + Bs^2)]$

$K_{1D} = C[-2 + 2(r^2 + Brs + ACs^2) - 4ACs^2 + B^2s^2]$

$K_{1D} = C[-2 + 2 + (B^2 - 4AC)s^2]$

$K_{1D} = (B^2 - 4AC)Cs^2$

Από την (36): $K_{1E} = B - Br_1 - 2ACs_1$

$K_{1E} = B - Br^2 + ABCr^2 - 4ACrs - 2ABCr^2$

$K_{1E} = B - B(r^2 + ACs^2) - 4ACrs$

$K_{1E} = B - B(r^2 + ACs^2 + Brs - Brs) - 4ACrs$

$K_{1E} = B - B(1 - Brs) - 4ACrs$

$K_{1E} = (B^2 - 4AC)rs$

Από την (37): $L_{1D} - K_{1E} = (4AC - B^2)s_1$

$L_{1D} = (B^2 - 4AC)(rs - 2rs - Bs^2)$

$L_{1D} = (B^2 - 4AC)(-rs - Bs^2)$

Έτσι

$$K_1 = \frac{K_{1D}D + K_{1E}E}{4AC - B^2} = -CDs^2 - Ers$$

$$L_1 = \frac{L_{1D}D + L_{1E}E}{4AC - B^2} = Ds(r + Bs) - AEs^2$$

Έτσι, τελικά:

$$X_{n+1} = (r^2 - ACs^2)X_n - Cs(2r+Bs)Y_n - CDs^2 - Ers \quad (40)$$

$$Y_{n+1} = As(2r+Bs)X_n + [r^2 + 2Brs + (B^2-AC)s^2]Y_n + Ds(r+Bs) - AEs^2 \quad (41)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, προκειμένου να βρεθεί η λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συνεχούς μέρους , θα πρέπει να υπολογίσουμε δύο ολόκληρες περιόδους εάν το μήκος περιόδου είναι ακόμα και τέσσερα αν είναι περίεργο.

Παράδειγμα Α: $3x^2 + 13xy + 5y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Η πρώτη λύση $r^2 + Brs + ACs^2 = r^2 + 13\,rs + 15\,s^2 = 1$ με χρηση της συνεχούς μεθόδου μέρους είναι $r = -8351$ και $s = 6525$.

P = r = -8351
Q = -Cs = -32625
R = As = 19575
S = r + Bs = 76474

$$K = \frac{CD(P+S-2) + E(B-Br-2ACs)}{4AC-B^2} = \frac{-340605}{109} D + \frac{87174}{109} E$$

$$L = \frac{D(B-Br-2ACs) + AE(P+S-2)}{4AC - B^2} + Ds = \frac{798399}{109} D - \frac{204363}{109} E$$

Ο αριθμητής K (ή L) δεν είναι ένα πολλαπλάσιο του παρονομαστή ($4AC - B^2 = -109$), έτσι δεν υπάρχει καμία επανάληψη με τις τιμές P, Q, R, S όπως παρουσιάζονται ανωτέρω, εκτός από ειδικές περιπτώσεις (σύμφωνα με (39), όταν $E \equiv 93\,D \pmod{109}$).

Με χρήση της λύσης **r = 8351**, **s = -6525** παίρνουμε:

P = r = 8351

Q = -Cs = 32625

R = As = -19575

S = r + Bs = -76474

$$K = \frac{CD(P+S-2) + E(B-Br-2ACs)}{4AC-B^2} = 3125\,D - 800\,E$$

$$L = \frac{D(B-Br-2ACs) + AE(P+S-2)}{4AC - B^2} + Ds = -7325\,D + 1875\,E$$

Έτσι, η επαναλαμβανόμενη σχέση μεταξύ των λύσεων είναι:

$$X_{n+1} = 8351\,X_n - 32625\,Y_n + (3125\,D - 800\,E)$$

$$Y_{n+1} = -19575\,X_n - 76474\,Y_n + (-7325\,D + 1875\,E)$$

Έλεγχος: Ξέροντας ότι x = 2, y = 3 είναι μια λύση $3x^2 + 13xy + 5y^2 - 11x - 7y - 92 = 0$, βρίσκονται άλλες δύο λύσεις.

Αντικαθιστώντας D = -11 και E = -7 στις προηγούμενες εξισώσεις:

$$X_{n+1} = 8351\,X_n - 32625\,Y_n - 28775$$

$$Y_{n+1} = -19575\,X_n + 76474\,Y_n + 67450$$

Έτσι, αντικαθιστώντας εδώ $X_0 = 2$ και $Y_0 = 3$, βρίσκουμε $X_1 = 85802$ και $Y_1 = -201122$.Και αντικαθιστώντας $X_1 = 85802$ και $Y_1 = -201122$, βρίσκουμε $X_2 = -5845\,101523$ και $Y_2 = 13701\,097128$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην αρχική εξίσωση μπορούμε να ελέγξουμε ότι αυτές οι τιμές είναι σωστές.

Παράδειγμα Β: $3x^2 + 14xy + 6y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Η πρώτη λύση $r^2 + Brs + ACs^2 = r^2 + 14\,rs + 18\,s^2 = 1$ χρησιμοποιώντας της συνεχούς μεθόδου ι μέρους $s\,r = -391$ και $s = 273$.

P = r = -391

Q = -Cs = -1638

R = As = 819

S = r + Bs = 3431

$$K = \frac{CD(P+S-2) + E(B-Br-2ACs)}{4AC-B^2} = -147\,D + 35\,E$$

$$L = \frac{D(B-Br-2ACs) + AE(P+S-2)}{4AC - B^2} + Ds = 308\,D - \frac{147}{2}\,E$$

Ο αριθμητής του L δεν είναι πολλαπλάσιο του παρονομαστή ($4AC - B^2 = -124$), έτσι δεν υπάρχει καμία επανάληψη με τις τιμές των P, Q, R, S που παρουσιάζονται ανωτέρω, εκτός από τις ειδικές περιπτώσεις (όταν είναι ακόμη και το E). Χρησιμοποιώντας τη λύση $r = 391$, $s = -273$ παίρνουμε:

P = r = 391

Q = -Cs = 1638

R = As = -819

S = r + Bs = -3431

$$K = \frac{CD(P+S-2) + E(B-Br-2ACs)}{4AC-B^2} = \frac{-4563}{31}\,D - \frac{1092}{31}\,E$$

$$L = \frac{D(B-Br-2ACs) + AE(P+S-2)}{4AC - B^2} + Ds = \frac{4563}{62}\,D - \frac{9555}{31}\,E$$

Ο αριθμητής του K (ή L) δεν είναι ένα πολλαπλάσιο του παρονομαστή ($4AC - B^2 = -124$), έτσι δεν υπάρχει καμία επανάληψη με τις τιμές των P, Q, R, S που παρουσιάζονται ανωτέρω, εκτός από τις ειδικές περιπτώσεις. Χρησιμοποιώντας (40) και (41):

$\mathbf{P_1 = r^2 - ACs^2 = -1188641}$

$\mathbf{Q_1 = -Cs(2r+Bs) = -4979520}$

$\mathbf{R_1 = As(2r+Bs) = 2489760}$

$\mathbf{S_1 = r^2 + 2Brs + (B^2-AC)s^2 = 10430239}$

$\mathbf{K_1 = -CDs^2 - Ers = -106743\ D + 447174\ E}$

$\mathbf{L_1 = Ds(r+Bs) - AEs^2 = 936663\ D - 223587\ E}$

Έτσι, η επαναλαμβανόμενη σχέση μεταξύ των λύσεων είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} X_{n+1} &= -1188641\ X_n - 4979520\ Y_n + (106743\ D - 447174\ E) \\ Y_{n+1} &= 2489760\ X_n + 10430239\ Y_n + (936663\ D - 223587\ E) \end{aligned}}$$

Έλεγχος: Ξέροντας ότι **x = 4, y = 7** είναι μια λύση του $\mathbf{3x^2 + 14xy + 6y^2 - 17x - 23y - 505 = 0}$, βρείτε άλλες δύο λύσεις.

Αντικαθιστώντας **D = -17** και **E = -23** στις προηγούμενες εξισώσεις:

$\mathbf{X_{n+1} = -1188641\ X_n - 4979520\ Y_n + 5146869}$

$\mathbf{Y_{n+1} = 2489760\ X_n + 10430239\ Y_n - 10780770}$

Έτσι, αντικαθιστώντας εδώ $\mathbf{X_0 = 4}$ και $\mathbf{Y_0 = 7}$, βρίσκουμε $\mathbf{X_1 = -34\ 464335}$ και $\mathbf{Y_1 = 72\ 189943}$.

και αντικαθιστώντας $\mathbf{X_1 = -34\ 464335}$ και $\mathbf{Y_1 = 72\ 189943}$, βρίσκουμε $\mathbf{X_2 = -318\ 505538\ 201756}$ και $\mathbf{Y_2 = 667\ 150425\ 396007}$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην αρχική εξίσωση μπορούμε να ελέγξουμε ότι αυτές οι τιμές είναι σωστές

20. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω θα προσδιορίσουμε όλα τα ρητά σημεία της κωνικής $f(x, y) = 2x^2+xy+y^2+x+4y-11 = 0$. Θέτουμε $x = x_1-y_1/4$, $y = y_1$ και παίρνουμε $2x_1^2+7/8y_1^2+x_1+15/4y_1-11=0$.Στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός $x_1 = x_2-1/4$, $y_1 = \psi_2-15/7$ δίνει την ακόλουθη εξίσωση:

$$7(4x_2)^2+(7y_2)^2-848 = 0.$$

Θέτοντας $X = 4x_2$, $Y = 7y_2$ παίρνουμε

$$F(X,Y) = 7X^2+Y^2-848 = 0$$

Καθώς έχουμε

$$848\equiv 1(\mathrm{mod}7) \quad \text{και} \quad -7 \equiv 841 = 29^2 \ (\mathrm{mod}848)$$

το θεώρημα 1.10.1 συνεπάγεται ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μία ρητή λύση και κατά συνέπεια η $f(x, y) = 0$ έχει μία ρητη λύση. Θα ποοσδιρίσουμε ολες τις ρητές λύσεις της $F(X,\Psi)= 0$.

Παρατηρούμε οτι μια ρητή λύση της είναι προφανώς το ζεύγος (1,29). Η ευθεία $Y-29 = m(X-1)$ με $m\in Q$, τέμνει την κωνική $F(X,Y)=0$ στα σημεία (X,Y)έτσι ώστε να έχουμε:$7X^2+(29+m(X-1))^2-848=0$ απ'όπου παίρνουμε την σχέση που ακολουθεί :

$$7(X^2-1)+(X-1)^2 m^2+58m(X-1)=0.$$

Οπότε $X=1$ ή $7(X+1)+(X-1)m^2+58m=0$.

Επομένως αν $(X, \Psi) \neq (1, \pm 29)$ έχουμε ότι $X= (m^2-58m-7) / (7+m^2)$ και $\Psi=(-29m^2-14m=203)/ (7+m^2)$ και καθώς $x=(7X-\Psi+8)/28$ και $\psi=(\Psi-15)/7$ έχουμε $(x,\psi)= (-1/2,2), (11/7,-44/7)$ και

$x=(11m^2-98m-49)/7(7+m^2)$,$\psi=(-44m^2-14m+98)/7(7+m^2)$ για κάθε $m\in Q$.

1.12.Η εξίσωση $x^2-dy^2 = 1$

Έστω d ένας ακέραιος > 1 που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Ο γάλλος μαθηματικός Fermat πρότεινε την διοφαντική εξίσωση $x^2-dy^2 = 1$ στους άγγλους μαθηματικούς της εποχής του. Διετύπωσε την εικασία ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος ακεραίων $x \neq \pm 1$, $y \neq 0$ που την επαληθεύει. Στα 1768 ο Lagrange εδημοσίευσε πρώτος μία απόδειξη αυτής της εικασίας.

Συνήθως η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται ως εξίσωση του **Pell**. Αυτό όμως οφείλεται σε λάθος του Euler. Ο J. Pell δεν είχε καμμιά συνεισφορά στη μελέτη αυτής της εξίσωσης.

Θεώρημα 1.12.1:

Έστω $d>1$ ένας ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.Τότε η παραπάνω διοφαντική εξίσωση έχει άπειρο πλήθος ακεραίων λύσεων.Έστω (x_1,ψ_1) μία ακέραια λύση με $x_1>1$ $\psi_1>1$ έτσι ώστε για κάθε άλλη ακέραια λύση (x,ψ) με $x>1,\psi>0$ να ισχύει $x> x_1$.Τότε όλες οι ακέραιες λύσεις (x,ψ) της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από την σχέση $x+\psi\sqrt{d}=\pm(x_1+\psi_1\sqrt{d})^n$ $n\in Z$.

Επομένως για την εύρεση των ακέραιων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης αρκεί να προσδιορίσουμε την ακέραια λύση (x_1,ψ_1) με $x_1>1$ $\psi_1>0$ με την ιδιότητα ο ακέραιος x_1 να είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $S=\{u\in N/u>1$ και υπάρχει $v\in N$ με $u^2-dv^2=1\}$.Το ζεύγος (x_1,ψ_1) **καλείται βασική λύση** της εξίσωσης.Για πολύ μικρές τιμές του d είναι αρκετά εύκολο να πριοσδιορίσουμε την βασική λύση.

18. Θα προσδιορίσουμε όλους τους τριγωνικούς αριθμούς που είναι τετράγωνα ακεραίων.Υπενθυμίζουμε ότι **τριγωνικός** ονομάζεται κάθε φυσικός της μορφής $T_n= 1+2+\ldots+n$.Εύκολα αποδεικνύεται ότι $T_n=n(n+1)/2$.

Έστω λοιπόν Tn ένας τριγωνικός αριθμός έτσι ώστε $T_n=\psi^2$ με $\psi\in Z$.Τότε $n(n+1)/2=\psi^2$.Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με 8 και προσθέτοντας 1 παίρνουμε $4n^2+4n+1=8\psi^2+1$.

Θέτοντας $x=2n+1$ έχουμε $x^2-8\psi^2=1$.Μία προφανής λύση είναι $x=3$ και $\psi=1$.Για $x=2$ παίρνουμε $8\psi^2=3$ που είναι άτοπο.

Επομένως η βασική λύση είναι $x=3$ και $\psi=1$.Σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 όλες οι λύσεις (x_n,ψ_n) της παραπάνω εξίσωσης σε ακέραιοιυς $x_n>1$ $\psi_n>0$ δίνονται από την σχέση $x_n+\psi_n\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^n$ $(n=1,2,3\ldots)$ Επομένως, οι ζητούμενοι τριγωνικοί αριθμοί >1 είναι οι T_η με $n = (x_n-1)/2$.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

2.1. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ο νους, είναι το αναγκαίο νοητικό υπόστρωμα,πάνω στο οποίο θα σπαρθεί,θα βλαστήσει και θα καρποφορήσει ο σπόρος της μάθησης.Ο νους είναι αυτός που θα αξιολογήσει,θα αξιοποιήσει,θα σημασιοδοτήσει και θα συστηματοποιήσει όλα όσα με την μάθηση δέχεται ο άνθρωπος.Αξία έχει όχι η τυπική αλλά η ουσιαστική μάθηση,που απορρέει από τις διεργασίες του νου και κατευθύνεται από την λογική.

Στενά συνδεδεμένη με την λογική είναι η μαθηματική σκέψη που είναι μια λειτουργία την οποία συνθέτουν νοητικές και μαθηματικές ικανότητες,εμπειρίες και ψυχολογικές λειτουργίες.Ο μαθηματικός τρόπος σκέψης καθορίζεται από ένα πλήθος αλληλεπιδρώντων διαδικασιών.Μαθηματική σκέψη σημαίνει ικανότητα για παραγωγικούς συλλογισμούς, αφαιρετική σκέψη,αναλυτικές και συνθετικές ικανότητες,διαίσθηση,φαντασία, γνώση ,και ανάπτυξη αναπαραστασιακών συστημάτων,ικανότητα για γενίκευση και σύνθεση.

Το να μάθουμε να χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά ως μέσο,καθημερινά, επικοινωνίας δεν είναι το ίδιο με το να μάθουμε να χρησιμοποιούμε την μητρική μας γλώσσα.Την μητρική μας γλώσσα την χρησιμοποιούμε όλη την ώρα και για την μεγάλη πλειοψηφία των ανθρώπων έρχεται αβίαστα. Τα μαθηματικά όμως δεν έρχονται αβίαστα, αλλά πρέπει να διδαχθούν κα μάλιστα προσεκτικά.Λάθη διατύπωσης , ψηφίων, συμβόλων κ.τ.λ. αλλάζουν τελείως το νόημα και δίνουν διαφορετικές πληροφορίες από αυτές που θέλουμε να διαβιβάσουμε.Τα μαθηματικά μεταβιβάζουν πληροφορίες με σαφή και σύντομο τρόπο κάτι που δεν συμβαίνει με τον προφορικό & τον γραπτό λόγο.

Μέχρι πρότινος , όπως όλοι γνωρίζουμε ο συνήθης τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών είναι ο παραδοσιακός, δηλαδή η γνώση μεταφέρεται από το δάσκαλο (που την κατέχει) προς τον μαθητή (που πρέπει να την αφομοιώσει).

Τα τελευταία χρόνια παρατηρήθηκε στο χώρο της μαθηματικής κοινότητας έντονος προβληματισμός για την αλλαγή των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών. Και αυτό έγινε γιατί θεωρούσαν ότι ο

μαθητής μόνος του πρέπει να οικοδομήσει την γνώση του σε αντίθεση με τον παραδοσιακό τρόπο που ήταν απλός δέκτης ενός πακέτου γνώσης που είχε μοναδικό στόχο να αναπαραχθεί και να εφαρμοστεί. Μία από τις σπουδαιότερες ανανεωτικές προτάσεις είναι η επίλυση προβλήματος.

Πρακτικά τι σημαίνει επίλυση προβλήματος;Είναι ένα σύνολο δραστηριοτήτων και στρατηγικών που επιτρέπει στους μαθητές να αναλάβουν οι ίδιοι την ευθύνη για τις διάφορες φάσεις της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος. Διευκρινίζοντας οι διάφορες φάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας που πρέπει να κάνουν οι μαθητές είναι:

- Να επεξεργαστούν το πρόβλημα
- Να το αναδιατυπώσουν στη γλώσσα τους
- Να υποθέσουν ένα αποτέλεσμα
- Να εξετάσουν την εικασία με ένα παράδειγμα
- Να κάνουν δοκιμές, επαληθεύσεις ,χρησιμοποιώντας εργαλεία πχ Η/Υ
- Να ελέγξουν τα αποτελέσματα που βρήκαν.

Τα θετικά αποτελέσματα από την εφαρμογή επίλυσης προβλήματος στον ευαίσθητο χώρο της εκπαίδευσης απαιτούν αρκετό χρόνο προκειμένου να διαπιστωθούν, γιατί η πρόοδος συντελείται με αργό ρυθμό.

Σχετικοί προβληματισμοί εκφράζονται σε ένα άρθρο του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών των Μαθηματικών της Β.Αμερικής (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM) όπου διαβάζουμε μεταξύ άλλων:

«Η επίλυση προβλήματος πρέπει να είναι ο στόχος των σχολικών μαθηματικών ...Η απόδοση στην επίλυση προβλήματος, θα αποτελέσει μέτρο του πόσο εις βάθος κατέχουμε σε προσωπικό και εθνικό επίπεδο τα μαθηματικά. Η επίλυση προβλήματος περιλαμβάνει την εφαρμογή των

μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο (στην καθημερινή ζωή)...» Από μία παιδαγωγική θεώρηση, η ουσία της επίλυσης προβλήματος επικεντρώνεται στο να

- Ν'αναγνωρίζουν τα βασικά στοιχεία των προβλημάτων & να λύνουν λεκτικά προβλήματα μιας πράξης.

- Να λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές.

- Να ελέγχουν και να αξιολογούν τις απαντήσεις που βρίσκουν σε προβλήματα.

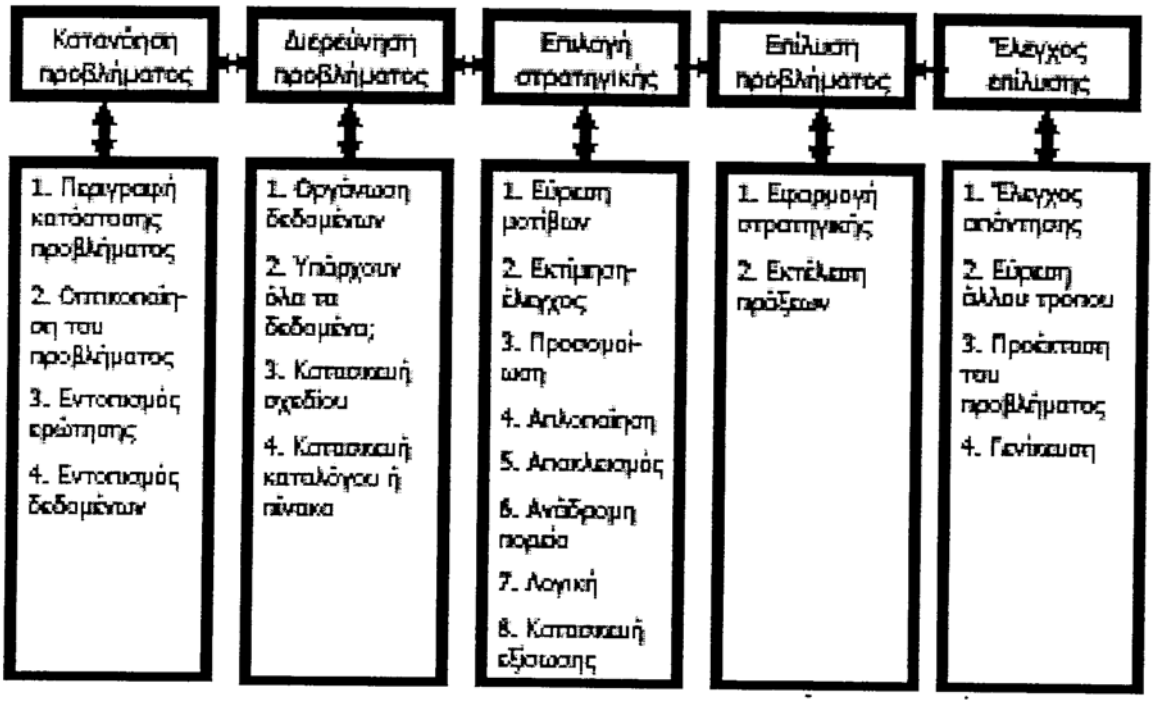
- Να χρησιμοποιούν τη λύση προβλήματος σε περιπτώσεις διαθεματικής προσέγγισης, εντός και εκτός των μαθηματικών.

2.2 ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Βασική αρχή της κατάστασης προβλήματος είναι ότι μαθητής συμμετέχοντας σε μία δραστηριότητα οικοδόμησης της γνώσης μέσω ενός προβλήματος προς λύση, έρχεται αντιμέτωπος με κάποιο εμπόδιο και μέσω της σύγκρουσης που αναφύεται μεταξύ της πρωταρχικής ημιτελούς γνώσης και της νέας,την ανακατασκευάζει έτσι ώστε να μπορέσει να προχωρήσει.

Η έννοια της "κατάστασης προβλήματος" είναι βασισμένη στη θεωρία των καταστάσεων που αναπτύχθηκε από τον G. Brousseu και τα έργα των G. Arsac, G. Germain και M. Mante του IREM (Ινστιτούτο Έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης) στη Λυών (1988).

Μοντέλο επίλυσης Προβλήματος των Krulik και Rudnick



Η χρήση της κατάστασης προβλήματος παρουσιάζει μερικές δυσκολίες

- Απαιτεί αρκετό χρόνο προετοιμασίας-σχεδιασμού από την πλευρά του δασκάλου

- Απαιτείται ένας εκ των προτέρων έλεγχος της

- Χρειάζεται προσοχή στη διαχείριση της τάξης

Μία κατάσταση προβλήματος δε μπορεί να αυτοσχεδιαστεί και ούτε τελειώνει σε μερικά λεπτά.Χρειάζεται χρόνο και αρκετή προσπάθεια.Αρχικές της εφαρμογές έγιναν στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο στην εισαγωγή των ρητών,υπολογισμό εμβαδών και στις αναλογίες. Τώρα προσαρμόζεται κατάλληλα για να εφαρμοστεί και στο Λύκειο.Οι χρονικοί όμως περιορισμοί και οι πιέσεις που δημιουργεί το υπάρχον σχολικό σύστημα είναι ανασταλτικοί παράγοντες εφαρμογής της.

2.3.1 ΝΕΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Τα εργαστήρια μαθηματικών, οι εκθέσεις και τα προγράμματα, οι διαγωνισμοί, η ομαδική εργασία και η πρακτική εργασία είναι μερικές από τις νέες προσεγγίσεις που γίνονται δεκτές στη δευτεροβάθμια διδασκαλία.

Είναι γνωστός ο έξυπνος τρόπος με τον οποίο ο Gauss αντιμετώπισε το άθροισμα:1+2+...+100.Ο Gauss ζήτησε από τους μαθητές του να βρουν διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού αυτού του αθροίσματος.Οι λύσεις που παρουσίασαν ήταν ποικίλες

Ανάμεσα στους αναμενόμενους και μη τύπους στους οποίους κατέληξαν υπήρχαν και μπερδεμένοι καθώς και ογκώδεις.

Πολλοί μαθητές προτιμούσαν όμως, όπως φάνηκε από την συζήτηση που ακολούθησε, αυτούς τους «αλλόκοτους» τύπους και η εξήγηση βρίσκεται απλά στο ότι ήταν δικά τους επιτεύγματα. Αυτό σήμαινε ότι περισσότερο ήθελαν να κρατήσουν στη μνήμη τους την προσπάθεια παρά το «ραφιναρισμένο» τελικό προϊόν.Αυτό που παρουσιάζεται μέσα από αυτό το παράδειγμα, είναι η αξία της προσωπικής επίγνωσης ως στόχος που επιτυγχάνεται, όταν αυτός βασίζεται στη μαθηματική εμπειρία.

Οι καθηγητές αντί να επιβάλλουν πρότυπα του τι είναι μια σωστή διατύπωση ενός προβλήματος και να κρίνουν την ορθότητα μιας απόδειξης, οφείλουν να δίνουν σημασία στην διαδρομή της σκέψης των μαθητών. Οι μαθητές παράλληλα, όταν εξερευνούν μία ιδέα, αντιμετωπίζουν διλήμματα τα οποία είναι ανάλογα με αυτά που, ιστορικά, οι ειδικοί αντιμετώπισαν όταν για πρώτη φορά ήρθαν σε επαφή με τις ίδιες ιδέες.

Ενώ οι μαθητές μας εξερευνούν, μπορούμε να τους κατευθύνουμε όχι μόνο να συνεργάζονται αλλά και να αναρωτιούνται πως αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, όταν:

- αποφασίζουν αν αξίζει τον κόπο να ασχοληθούν με μια ιδέα
- εκφράζουν χαρά για μια ανακάλυψη και απογοήτευση για περιπλοκές που εμφανίζονται
- αλλάζουν τη γνώμη τους για το ποιου η συνεισφορά ήταν σημαντική και ποιες ερωτήσεις ήταν αξιόλογες.

Το να δίνεις προσοχή στο συναισθηματικό, διανοητικό και κοινωνικό κλίμα στην τάξη απαιτεί από τον καθηγητή να αναπτύξει στρατηγικές που επιτρέπουν στους μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση του πότε και πως λειτουργούν. Στο βαθμό που συμμετέχουν σ' αυτή τη διαδικασία, οι μαθητές βιώνουν και αναστοχάζονται πάνω στις ιδιότητες που σχετίζονται με τις μαθηματικές ιδέες.

Η σύγχρονη τάση στα μαθηματικά είναι να αντικατασταθεί το "διδάσκω" από το "μανθάνω", και συνεπώς, να συσταθούν πιο ποικίλες προσεγγίσεις στα θέματα, βασισμένες στα ενδιαφέροντα των μαθητών και στα κίνητρα τους. Αυτές οι νέες προσεγγίσεις χαρακτηρίζονται από ένα μεταβαλλόμενο ρόλο για το δάσκαλο και από μεταβαλλόμενες συμβάσεις για τους μαθητές, από τις ομαδικές εργασίες και από την χρήση των εργαλείων και των πηγών δεδομένων εκτός από τα επιστημονικά κείμενα.

Οι καθηγητές δεν μπορούν να αγνοούν τις νέες πηγές μαθηματικών προβλημάτων, δεδομένου ότι εδώ βρίσκουν τις δραστηριότητες που καταρρέουν με τις παραδοσιακές προσεγγίσεις και που συμπληρώνουν τις ασκήσεις και τους στόχους που συνδέονται με τους εννοιολογικούς στόχους των σχεδίων μελέτης τους(St.Brown)

Αν και οι διαγωνισμοί και οι επιθεωρήσεις δεν σχεδιάζονται ως αναπόσπαστο τμήμα του προγράμματος σπουδών ούτε των προσεγγίσεων διδασκαλίας, τα αποτελέσματα τους στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι αμελητέα, ιδιαίτερα από την άποψη των νέων ιδεών και των ανοιγμάτων που εμπνέουν: ιστορικές συνεισφορές, ψυχαγωγικές δραστηριότητες,προκλήσεις ,άρθρα που εκλαϊκεύουν τα μαθηματικά(Jaquet).

Οι προσεγγίσεις εργασίας σε ομάδες γίνονται αυτήν την περίοδο πιο διαδεδομένες, όχι μόνο σε σχολεία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και σε δευτεροβάθμιο επίπεδο. Η έρευνα στην θεωρία μάθησης αλλά και στον τομέα της εκπαίδευσης ενηλίκων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη ενός ενδιαφέροντος για την αλληλεπίδραση των μαθητών στην κατασκευή της νέας γνώσης.

Οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι οι άμεσα ενδιαφερόμενοι για τη διείσδυση νέων εργαλείων υπολογισμού στη διδακτική των μαθηματικών αλλά μερικοί έχουν αρχίσει να αμφισβητούν το ρόλο τους στην τάξη.

Γνωρίζουν τη δυνατότητα αυτών των εργαλείων που εντούτοις, δεν μπορούν να αντικαταστήσουν τις γνωστικές δυνατότητες των σπουδαστών. Αντιλαμβάνονται σαφώς, ότι η διάδοση της χρήσης αυτών των εργαλείων είναι μία μη αναστρέψιμη διαδικασία.

Δεν τίθεται πλέον θέμα της αποδοχής ή απόρριψης της νέας τεχνολογίας, όσο μάλλον το να προσδιορίσουμε την θέση της στη διδασκαλία των μαθηματικών και να προσπαθήσουμε να αξιολογήσουμε το αποτέλεσμα στη διδακτική πρακτική και στη μάθηση των σπουδαστών. Υπάρχουν εντούτοις ερωτήματα που αφορούν τις απαραίτητες συνθήκες γι' αυτή τη διαδικασία της ολοκλήρωσης και τα εμπόδια που αντιμετωπίζει.

2.3.2 Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ Η/Υ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Τα λογισμικά προγράμματα για υπολογισμό, γεωμετρικό σχεδιασμό και αναπαράσταση συναρτήσεων έχουν αναπτυχθεί για τη διδασκαλία των μαθηματικών και είναι επομένως, πολύ κατάλληλα για τα σχολικά προγράμματα. Προσφέρουν δυνατότητες και εξελίξεις που θα ήταν ασύλληπτες χωρίς τη χρήση τους όπως: μια πειραματική προσέγγιση στις διάφορες συναρτήσεις, εξερεύνηση, επικύρωση εικασιών, τρόπους επίλυσης προβλήματος (αριθμητικούς, αλγεβρικούς, γραφικούς).

Η χρήση τους στην τάξη παρέχει έναν εμπλουτισμό και μια διεύρυνση του πεδίου των μαθηματικών δραστηριοτήτων που μπορούν να προσφερθούν στον μαθητή. Αυτές οι εξελίξεις έχουν πολλές συνέπειες για τα προγράμματα σπουδών.Στις μέρες μας, τα νέα εργαλεία υπολογιστών αυξάνουν την αυτονομία των σπουδαστών. Προσαρμόζονται καλύτερα στις ιδιαίτερες ατομικές ανάγκες, εκτελούν ορισμένες τεχνικές εργασίες και καμπύλες γραφικών παραστάσεων που θα μπορούσαν να παρουσιάσουν αλγεβρικές και αριθμητικές δυσκολίες για το μαθητή, και επιτρέπουν συνεπώς τη βελτίωση του συλλογισμού και την κατανόηση της έννοιας των στόχων. Τα λάθη είναι λιγότερο ενοχλητικά και η επικοινωνία με τον υπολογιστή είναι μόνιμη και εξατομικευμένη.

Ο καθηγητής πρέπει επομένως να τροποποιήσει τη στάση του και την τοποθέτηση του και να γίνει ένας σύμβουλος, αφήνοντας τις επαναληπτικές εργασίες στον υπολογιστή.Όμως οι σπουδαστές μπορούν γρήγορα να αποκτήσουν ευχέρεια στη βασική λειτουργία των υπολογιστών τους,

μπορούν επίσης γρήγορα να αναπτύξουν κακές συνήθειες και οι δάσκαλοι πρέπει να φροντίσουν να τους προειδοποιήσουν για ορισμένες παγίδες (Arnaud et al., 1995).

2.4. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, η ιστορική προσέγγιση προσφέρει την δυνατότητα να παρουσιάσουμε τα μαθηματικά ως μια συνεχή διαδικασία βελτίωσης, αντί για μία συλλογή αληθειών, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες στο πέρασμα του χρόνου. Εάν η μάθηση δεν είναι μόνο συσσώρευση στοιχείων γνώσης, αλλά ένα σύνολο από κριτικές στάσεις σχετικά με τη γνώση, τότε το θέμα δεν έχει να κάνει με την ποσότητα της γνώσης που μεταβιβάζουμε αλλά με την ποιότητα της.Η παραδοσιακή άποψη ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών είναι καθαρώς συσσωρευτική είναι κατά ένα μεγάλο μέρος ξεπερασμένη(St.Brown). Οι δραστηριότητες διδασκαλίας-μάθησης, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη την ιστορία και την επιστημολογία, επιτρέπουν την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Στις μέρες μας υπάρχει σε εξέλιξη ένας διάλογος σχετικά με το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση. Η ιστορική προσέγγιση των μαθηματικών περιλαμβάνει τη μετάβαση από μια επιστημονική σε μια διεπιστημονική επεξεργασία με την ευρύτερη έννοια της λέξης. Όπως υπενθυμίζει ο Pepe (1990), η "συνάντηση" της ιστορίας και της διδακτικής των μαθηματικών πρέπει να αναπτυχθεί λαμβάνοντας υπόψη τις αρνητικές επιρροές που μπορεί να έχει η μια στην άλλη. Μία πιθανή αρνητική επίδραση της ιστορίας πάνω στη διδακτική είναι η ανάπτυξη θεμάτων ενδιαφερόντων από ιστορικής άποψης χωρίς όμως να προσφέρουν ουσιαστική μαθηματική γνώση.

Χρησιμοποιώντας αρχαία προβλήματα οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν τις στρατηγικές τους με τις αντίστοιχες πρωτότυπες. Αυτός είναι ένας ενδιαφέρον τρόπος για να κατανοήσουν την οικονομία και την αποτελε σματικότητα των σύγχρονων αλγεβρικών διαδικασιών.

Μόνο όταν, οι μαθητές γίνουν ικανοί να συγκρίνουν διαφορετικές στρατηγικές (για τη λύση προβλημάτων, αλλά επίσης και για την απόδειξη θεωρημάτων), τότε θα μπορέσουν να προχωρήσουν στη διαδικασία της γενίκευσης.Μία ενδιαφέρουσα πρόταση σχετικά με τα ιστορικά προβλήματα προέρχεται από τις ΗΠΑ.

Ο Swetz υποστηρίζει ότι, λύνοντας οι μαθητές κάποια μαθηματικά προβλήματα του παρελθόντος μεταφέρονται πίσω στην εποχή που τα προβλήματα αυτά τέθηκαν. Έτσι μπορούν να κατανοήσουν τις μαθηματικές ανησυχίες της περιόδου εκείνης, ανησυχίες που συχνά καταλαμβάνουν και τους σύγχρονους μαθητές των μαθηματικών.

Ταυτόχρονα μπορούν να κάνουν μία σύγκριση των σύγχρονων τρόπων λύσης προβλημάτων με αυτούς του παρελθόντος. Με αυτόν τον τρόπο,με την ιστορική και επιστημολογική προσέγγιση των μαθηματικών,κάποια θέματα των παρόντων αναλυτικών προγραμμάτων βρίσκουν την «δικαίωση» τους στην μαθηματική εκπαίδευση (Swetz).

2.5 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ-ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις εντάσσονται σαν ενότητα στο $4^{ο}$ κεφάλαιο των μαθηματικών της θετικής κατεύθυνσης της Β΄ Τάξης του Ενιαίου Λυκείου και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο «Θεωρία Αριθμών».Η διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας μπορεί να γίνει στα πλαίσια της «επίλυσης του προβλήματος»,που προαναφέρθηκε.

Οι απαιτούμενες γνώσεις που έχουν προηγηθεί και θα αποτελέσουν το θεμέλιο λίθο για τη νέα γνώση είναι οι ακόλουθες:

- Η μαθηματική επαγωγή
- Η ευκλείδια διαίρεση

Ιδιαίτερη σημασία έχει εδώ το εξής θεώρημα:Αν α,β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta\neq0$,τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ,τέτοιοι ώστε $\alpha=\kappa\beta+\upsilon, 0\leq\upsilon<\beta$. Αποδεικνύεται δε ότι το θεώρημα ισχύει για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β,με $\beta\neq0$ και διατυπώνεται ως εξής : Αν

α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$,τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ,τέτοιοι ώστε $\alpha=\kappa\beta+\upsilon, 0 \leq \upsilon < |\beta|$.

- Η διαιρετότητα.

Εδώ δίνεται ο ορισμός της διαιρετότητας δηλαδή:Έστω α,β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$.Θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α και θα γράφουμε $\beta | \alpha$,όταν η διαίρεση του α και β είναι τέλεια,δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ,τέτοιος ώστε $\alpha=\kappa\beta$.Επίσης επισημαίνονται βασικές ιδιότητες της διαιρετότητας και πιο συγκεκριμένα:

Αν α,β,γ ακέραιοι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Αν $\alpha | \beta$ και $\beta | \alpha$,τότε $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$

Αν $\alpha | \beta$ και $\beta | \gamma$,τότε $\alpha | \gamma$

Αν $\alpha | \beta$,τότε $\alpha | \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

Αν $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$,τότε $\alpha | (\beta+\gamma)$

Αν $\alpha | \beta$ και $\beta \neq 0$,τότε $|\alpha| \leq |\beta|$

- Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Δίνεται ο ορισμός του Μ.Κ.Δ. Έστω α και β δύο ακέραιοι, από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός. Ορίζουμε ως μέγιστο κοινό διαιρέτη (Μ.Κ.Δ.) των α και *β,* και τον συμβολίζουμε με (α,β), το μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Δηλαδή, ο Μ.Κ.Δ. δ, δύο ακεραίων α και β είναι ο μοναδικός θετικός ακέραιος που έχει τις επόμενες δύο ιδιότητες:

(1) $\delta \backslash \alpha$ και $\delta \backslash \beta$

(2) Αν $\chi \backslash \alpha$ και $\chi \backslash \beta$, τότε $\chi \leq \delta$.

Δίνονται τα βασικά θεωρήματα :

1.Αν α, β είναι δύο φυσικοί αριθμοί και *υ* είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β, τότε (α,β)=(β,υ).

2.Αν δ είναι ο Μ.Κ.Δ. των α,β,τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ,τέτοιοι ώστε $\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta$

Επίσης τα πορίσματα:

1.Δύο ακέραιοι α,β είναι πρώτοι μεταξύ τους,αν και μόνο εάν υπάρχουν ακέραιοι κ,λ τετοιοι ώστε κα+λβ=1.

2.Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων α και β είναι οι διαιρέτες του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους.

3.Αν για τους ακεραίους α,β,γ ισχύει α| βγ και (α,β)=1,τότε α| γ. Δηλαδή αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν,τότε διαιρεί τον άλλο.

- Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Ομοίως και εδώ γίνεται ο ορισμός του ΕΚΠ δηλαδή:Έστω δύο ακέραιοι α και β διαφορετικοί από το μηδέν.Ορίζουμε ως ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α,β και τον συμβολίζουμε με [α,β],το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α και β.

Ακολουθεί το θεώρημα:Αν α,β είναι δύο θετικοί ακέραιοι ,τότε(α,β)[α,β]=αβ

- Οι Πρώτοι Αριθμοί

Καταρχήν δίνεται ο ορισμός του πρώτου αριθμού:

Κάθ θετικός ακέραιος $\rho \neq 1$ λέγεται πρώτος αριθμός ή απλώς πρώτος, αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι οι 1 και |ρ|.

Ένας ακέραιος $\alpha \neq 1,-1$ που δεν είναι πρώτος,λέγεται σύνθετος.

Ακολουθούν τα θεωρήματα:

Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.

Πόρισμα:Αν α είναι ένας σύνθετος ακέραιος με $\alpha>1$,τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος αριθμός p,τέτοιος ώστε p|α και $p\leq \sqrt{\alpha}$.

Για να έρθουν οι μαθητές σε περισσότερη τριβή με την εν λόγω έννοια ,δίνεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.Πιο συγκεκριμένα:

ΤΟ ΚΟΣΚΙΝΟ ΤΟΝ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ

Μια έξυπνη τεχνική για τον προσδιορισμό των πρώτων που δεν υπερβαίνουν ένα θετικό ακέραιο $v>1$ στηρίζεται στο προηγούμενο θεώρημα και την οφείλουμε στον Αρχαίο Έλληνα μαθηματικό Ερατοσθένη (περίπου 250 π.Χ.) Η τεχνική λέγεται **κόσκινο του Ερατοσθένη** και είναι η εξής: Γράφουμε σε έναν πίνακα με αύξουσα σειρά τους ακεραίους από 2 μέχρι v. Αφήνουμε τον πρώτο 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του. Ο επόμενος πρώτος στον πίνακα μετά τον 2 είναι ο 3. Αφήνουμε τον 3 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του κτλ. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τον πρώτο ρ με $\rho \leq \sqrt{v}$. Οι ακέραιοι που απομένουν, δηλαδή όσοι δεν "έπεσαν" από το "κόσκινο", είναι οι πρώτοι μεταξύ 2 και *v.* Όλοι οι άλλοι "έπεσαν", διότι, ως σύνθετοι, είχαν διαιρέτη κάποιον πρώτο μικρότερο ή ίσο της $\sqrt{v}$ και ως πολλαπλάσια του διαγράφηκαν.Στον παρακάτω πίνακα έχουν προσδιοριστεί οι πρώτοι μεταξύ 1 και 100. Έχουν διαγραφεί τα πολλαπλάσια των πρώτων 2,3,5 και 7, αφού ο επόμενος πρώτος είναι ο αριθμός 11 και ισχύει 11> VIOO .

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

Στο σημείο αυτό πιθανόν να ερωτηθεί κανείς αν τελειώνουν κάπου οι πρώτοι αριθμοί.Υπάρχει δηλαδή μέγιστος πρώτος ή οι πρώτοι συνεχίζονται «επ’άπειρον;».Ακολουθεί το θεώρημα του Ευκλείδη:Υπάρχουν άπειροι θετικοί πρώτοι αριθμοί.Καθώς και τα ακόλουθα θεωρήματα:

1.Αν ένας πρώτος p διαιρεί το γινόμενο αβ δύο ακέραιων,τότε διαιρεί έναν τουλάχιστον από τους ακέραιοιυς αριθμούς.

2.Κάθε θετικός ακέραιος α>1 αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Με βάση λοιπόναυτές τις γνώσεις πώς μπορεί να διδαχτεί η έννοια των διοφαντικών εξισώσεων;

Αρχικά δίνουμε στους μαθητές να λύσουν τις ακόλουθες εξισώσεις αναζητώντας τις ακέραιες λύσεις τους:

3χ=9, 4χ=5

Εδώ στηριζόμενοι πάντα στα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος,πρέπει ν'αφήσουμε τους μαθητές να επεξεργαστούν καλά το πρόβλημα που τους δώσαμε.

Στη συνέχεια τους αφήνουμε να το αναδιατυπώσουν στην γλώσσα τους.Για παράδειγμα η 3χ=9 μπορεί να μεταφραστεί από τους μαθητές με πολλούς τρόπους όπως:Ψάχνουμε τους ακέραιους αριθμούς που όταν πολλαπλασιαστούν με τον 3 δίνουν αποτέλεσμα 9.΄Η άλλη διατύπωση:Ψάχνουμε να βρούμε τους αριθμούς που είναι η λύση της εξίσωσης ακολουθώντας τον κανόνα: «πηγαίνουμε το 3 στο άλλο μέλος της εξίσωσης εκτελώντας την αντίθετη πράξη από αυτή που σημειώνεται,δηλαδή κάνουμε διαίρεση».

Κατόπιν τους αφήνουμε να υποθέσουν το αποτέλεσμα των εξισώσεων.Αυτό είναι μία εύκολη διαδικασία για την πρώτη εξίσωση,η προφανής λύση είναι χ=3.

Για την δεύτερη,εύκολα πάλι μπορούν να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι ακολουθώντας τους κανόνες επίλυσης μίας πρωτοβάθμιας εξίσωσης,η μοναδική λύση είναι η χ=5/4 ,η οποία όμως δεν είναι ακέραια.Συνεπώς δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.Ο έλεγχος των αποτελεσμάτων τους μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με ένα κομπιουτεράκι τσέπης.

Έπειτα βάζουμε άλλον έναν άγνωστο στην εξίσωση.Έτσι δίνονται τα ακόλουθα παραδείγματα:

7χ-17ψ=1

2x=2ψ+1

Εδώ οι συλλογισμοί τροποποιούνται.Για παράδειγμα οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν τις ακόλουθες απόψεις:Θέλουμε να βρούμε τους ακέραιους χ,ψ που όταν πολλαπλασιαστούν με το 2,επαληθεύουν την δεύτερη εκ των εξίσωσεων.Για την άλλη οι απόψεις θα είναι ανάλογες:Θέλουμε να βρούμε τους ακέραιους χ,ψ που πολλαπλασιαζόμενοι με τους 7 και 17 επαληθεύουν την πρώτη από τις εξισώσεις.

Μερικοί μαθητές επεκτείνοντας μπορούν να δουν ότι οι εν λόγω εξισώσεις θυμίζουν εξισώσεις ευθειών,άρα λύνοντας την κάθε μια ως προς ψ,μπορούμε να φτιάξουμε πίνακα τιμών και να καθορίσουμε μέσα από τη γραφική παράσταση μερικές από τις ακέραιες λύσεις.Επιπλέον παροτρύνονται στο να ακολουθήσουν την μέθοδο των δοκιμών.Βάζοντας ακέραιες τιμές στους αγνώστους προσπαθούν να βρουν «πειραματικά»,ζεύγη ακέραιων τιμών που τις επαληθεύουν.Τα αποτελέσματα που βρίσκουν κάθε φορά μπορούν εύκολα να ελεγχθούν.Έτσι σταδιακά οι μαθητές αυτοδιορθώνοντας τα λάθη που οι ίδιοι κάνουν αρχίζουν να βγάζουν αποτελέσματα.

Επιπλέον μπορούν εύκολα να αντικαταστήσουν μία παράσταση με ένα γράμμα ορίζοντας με αυτό τον τρόπο μία μεταβλητή,διαδικασία με την οποία οι μαθητές έχουν εργαστεί στην επίλυση εξισώσεων στην Α' λυκείου.Παρατηρώντας οι μαθητές αρχίζουν να κατασκευάζουν την γνώση.Έτσι σχολιάζοντας κάθε σκέψη ακολουθούν τα βήματα που οδηγούν στην λύση:

$x = (17y + 1)/7 = 2y + (3y + 1)/7.$

Ο αριθμός $(3y + 1)/7$ πρέπει να είναι ακέραιος και ας τον συμβολίσουμε με z. Άρα $3y + 1 = 7z$ και $x = 2y + z$.Έτσι φτάνουμε στην εξίσωση $3y - 7z = -1$ η οποία έχει μικρότερους συντελεστές απ'τη προηγούμενη εξίσωση.

Άρα έχουμε $y = (7z - 1)/3 = 2z + (z - 1)/3$. Ομοίως ο $(z - 1)/3$ πρέπει να είναι ακέραιος και ας τον συμβολίσουμε με t.
Έτσι $z = 3t + 1$, $y = 2z + t = 7t + 2$, $x = 2y + z = 2(7t + 2) + 3t + 1 = 17t + 5$.

Για την δεύτερη εξίσωση ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία ή ακόμα και αυτή τη μέθοδο των δοκιμών μπορούν να καταλήξουν ότι δεν έχει ακέραιες λύσεις.Για αυτούς που «παρατηρούν» ακόμα περισσότερο βλέπουν ότι το πρώτο μέρος είναι άρτιος ενώ το δεύτερο περιττός,άρα δεν μπορούν τα δύο μέλη να είναι ίσα.

Μετά από την τελευταία διαδικασία είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι λύσεις που βρίσκουμε δεν είναι γενικές.Πως λοιπόν μπορούμε να βρίσκουμε τις γενικές λύσεις;

Αφού έχει γίνει αρκετή εξοικίωση των μαθητών με εξισώσεις ανάλογες των προαναφερθέντων,μπορούν οι μαθητές να βρουν κάποιες ομοιότητες μεταξύ των εξισώσεων.Έτσι για παράδειγμα μπορούν να παρατηρήσουν ότι μία εξίσωση $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = b$ έχει ακέραια λύση αν και μόνο εάν $d \mid b$,όπου $d = (\alpha_1, \alpha_2)$. Το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει ένας εννιαίος τρόπος για να βρίσκουν τις γενικές λύσεις τέτοιων εξισώσεων.Κάνοντας μία σειρά εικασιών και λογικών βημάτων μπορούν να καταλήξουν στο εξής βασικό θεώρημα:

Έστω ότι έχουμε την εξίσωση : **$\alpha x + b\psi = c$.**Έστω $\alpha, b \in Z$ με $\alpha \neq 0$ και $b \neq 0$.Ας υποθέσουμε ότι το ζεύγος (x_0, ψ_0) είναι μια ακέραια λύση της εξίσωσης $\alpha x + b\psi = c$.Αν $d = (\alpha, b)$ τότε όλες οι ακέραιες λύσης της γραμμικής εξίσωσης δίνονται απ'τις σχέσεις $x = x_0 + (b/d)t$, $\psi = \psi_0 - (\alpha/d)t$,$t \in Z$.

Κατόπιν σαν εφαρμογή μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να βρουν όλες οι γενικές λύσεις για παράδειγμα της εξίσωσης $221\chi + 340\psi = 51$.Ο Ευκλείδιος αλγόριθμος είναι πολύ σημαντικός όπως φαίνεται παρακάτω:

$340 = 221 + 119$
$221 = 119 + 102$
$119 = 102 + 17$

102=6*17

Επομένως (340,221)=17.Επειδή το 17 διαιρεί το 51 συνεπάγεται ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις.

Έχουμε 17= 119-102= 119- (221-119)= -221+ 2* 119= -221 + 2* (340-221)= 2*340-3*221 και επομένως 51=-9*221+6*340.Συνεπώς οι ακέραιοι x_0=-9 και $ψ_0$=6 είναι μία λύση της παραπάνω γραμμικής εξίσωσης.Οπότε όλες οι ακέραιες λύσεις δίνονται από τις σχέσεις x=-9+20t ,ψ-6-13t ,t$\in$ Z.

Για να δούμε και την πρακτική αξία του θεωρήματος στην εύρεση των ακέραιων λύσεων τέτοιων εξισώσεων μπορούμε να δώσουμε προβλήματα όπως τα παρακάτω:

1.Κάποιος που χρειάζεται να κάνει μία αγορά,ζητάει από την τράπεζα να του ανταλλάξει δύο χαρτονομίσματα των 500 ευρώ(συνολική αξία 1000 ευρώ) ,με χαρτονομίσματα των 100 ευρώ και των 50.Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η ανταλλαγή,αν ο αγοραστής θέλει οπωσδήποτε τα εν λόγω χαρτονομίσματα;

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Αν η ανταλλαγή μπορεί να γίνει με χ χαρτονομίσματα των 100 ευρώ και y χαρτονομίσματα των 50 ευρώ:

$$100χ +50y=1000 \text{ ή } 2χ + y =20.$$

Αναζητούμε προφανώς τις ακέραιες και θετικές λύσεις της (1).Επειδή (2,1)=1 έχουμε 1|20, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις. Για να βρούμε το σύνολο των λύσεων της πρέπει να βρούμε μια μερική λύση (x_o,y_o) της εξίσωσης ή όπως λέμε μία ειδική λύση της εξίσωσης.

Εκφράζουμε γραμμικά το Μ.Κ.Δ. των 2 και 1 και έχουμε:2(1)+1(-1)=1.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) με 20 και έχουμε 2(20)+1(-20)=20,που σημαίνει ότι ($χ_o$,$ψ_o$)=(2Ο,-2Ο). Επομένως, οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (1) δίνονται από τους τύπους:

$$x =20+1t, \quad ψ = -20-2t, \quad t \text{ ακέραιος}$$

Από τις λύσεις αυτές πρέπει να βρούμε εκείνες για τις οποίες ισχύει χ,ψ >0 δηλαδή πρέπει να βρούμε πού συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$20+1t >0 \text{ και } -20-2t>0, \text{ t ακέραιος}$$

Από την επίλυση του συστήματος των ανισώσεων προκύπτει η παρακάτω σχέση -20< t < -10 με t ακέραιο. Επομένως, t = -19,-18,-17,-16,-15,-14,-13,-12,-11 και οι αντίστοιχες τιμές χ και y φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Χ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ψ	18	16	14	12	10	8	6	4	2

2.Να βρείτε δύο κλάσματα με παρανομαστές 7 και 13 και με άθροισμα 33/91.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έστω χ,ψεN* οι αριθμητές των κλασμάτων.Τότε θα ισχύει χ/7+ψ/13=33/91 ή ισοδύναμα 13χ+7ψ=33.Αναζητούμε, επομένως, τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.Επειδή (13,7)=1, η (1) έχει ακέραιες λύσεις. Μια ειδική της λύση είναι (-33,66). Άρα, οι ακέραιες λύσεις, (χ, ψ), της (1) δίνονται από τους τύπους χ=-33+7t και ψ=66-13t,με t ακέραιο.Έτσι έχουμε χ>0.Άρα-33+7t>0 (1)ψ>0.Άρα 66-13t>0 (2).Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι 33/7<t<66/13.Καταλήγουμε δηλαδή στο ότι t=5.Άρα χ=2 και ψ=1 και επομένως 33/9=2/7+1/13.

3.Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία,με ακέραιες συντεταγμένες,της ευθείας αχ+βψ=γ,όπου α,β,γ ακέραιοι με (α,β)|γ.

<u>ΛΥΣΗ:</u>Έστω δ=(α,β). Επειδή δ\γ η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις Αν (χ_0,ψ_0) είναι μια ακέραια λύση της εξίσωσης, τότε οι ακέραιες λύσεις της (χ,ψ) δίνονται από τις σχέσεις :$x=x_o-(\beta/\delta)t$ και $y=y_o+(\alpha/\delta)t$ t ακέραιος..Ας θεωρήσουμε τώρα δύο λύσεις (x_1,y_1) και (x_2,y_2) της εξίσωσης .Τότε $\chi_1=\chi_0-(\beta/\delta)t_1$ και $\psi_1=\psi_0+(\alpha/\delta)t_1$ και $\chi_2=\chi_0-(\beta/\delta)t_2$ και $\psi_2=\psi_0+(\alpha/\delta)t_2$ με t_1, t_2 ακέραιους.Οπότε η απόσταση των $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ θα είναι ίση με

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\frac{\beta^2}{\delta^2}(t_2-t_1)^2+\frac{\alpha^2}{\delta^2}(t_2-t_1)^2}$$

$$=|t_2-t_1|\cdot\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\delta}.$$

Επομένως η απόσταση (ΑΒ) ελαχιστοποιείται όταν ελαχιστοποιηθεί η παράσταση η $|t_2-t_1|$, που αυτό συμβαίνει όταν $|t_2-t_1|=1$ οπότε η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας αχ+βψ=γ με ακέραιες συντεταγμένες είναι ίση με :$[(A^2+\beta^2)^{1/2}]/\delta$.

Αφού εξασκηθούν αρκετά οι μαθητές μπορούμε να τους βάλουμε να λύσουν την εξίσωση 6χ+8ψ+10ζ=1 προκειμένου να εισαχθούν στον τρόπο με τον οποίο λύνονται εξισώσεις γραμμικές με τρεις μεταβλητές.Με αρκετές δοκιμές μπορούν να καταλήξουν ότι αυτή δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Μπορούμε στη συνέχεια να δώσουμε μία άλλη που να έχει ακέραιες λύσεις όπως για παράδειγμα : Έστω η εξίσωση 6χ+4ψ+8z=2. Και σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές μπορούν να βρουν με ανάλογες διαδικασίες μερικές ακέραιες λύσεις.Γενικεύοντας δε την προηγούμενη πρόταση μπορούν να δουν τον καθοριστικό ρόλο που παίζει ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών στην ύπαρξη ή όχι ακέραιων λύσεων.Έτσι επειδή (6,4,8)=2, εργαζόμενοι ανάλογα με πριν μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση έχει ακέραια λύση.Παροτρύνοντας στη συνέχεια την μέθοδο της αντικατάστασης και συγκεκριμένα w=3χ+2ψ,παίρνουμε 2w+8z=2.Μία ακέραια λύση της είναι w=5,z=-1.Επιπλέον σύμφωνα με την πρόταση 1.6.2 , όλες οι ακέραιες λύσεις δίνονται από τις σχέσεις w=5+4t ,z=-1-t ,t∈Z.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης 3x+2ψ=5+4t.Καθώς (3,2)=1,αυτή έχει ακέραια λύση για κάθε t∈Z.Μία τέτοια λύση είναι η x=5+4t και ψ=-(5+4t).Άρα όλες οι ακέραιες λύσεις της δίνονται από τις σχέσεις x=5+4t+2s ,ψ=-(5+4t)-3s, s∈Z .

Συνεπώς οι ακέραιες λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης 6χ+4ψ+8z=2 δίνονται από τις σχέσεις x=5+4t+2s ,ψ=-(5+4t)-3s, z=-1-t t,s∈Z.

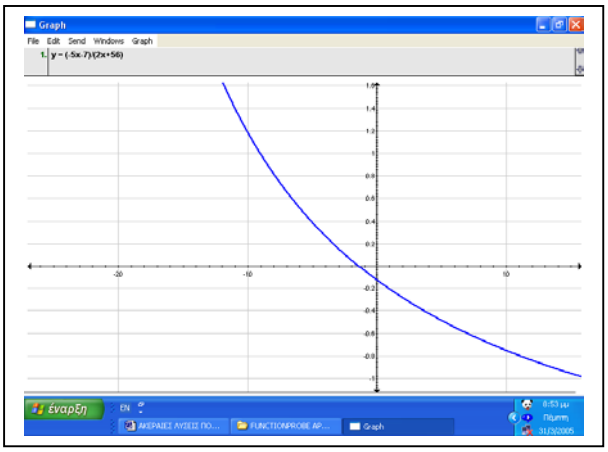
Μπορούνε λοιπόν οι μαθητές να <u>γενικεύσουν</u> :Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, b \in Z$, $n \geq 2$, και $\alpha_i \neq 0$ και (i= 1,2,…n).Αν d= $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$,η εξίσωση $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n = b$ έχει ακέραια λύση, αν και μόνο εάν, $d \mid b$.

Εργαζόμενοι δε ανάλογα με πριν μπορούν να βρίσκουν κάθε φορά τις γενικές λύσεις.

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ:</u> Ιδιαίτερη σημασία έχει εδώ η γεωμετρική ερμηνεία που μπορούν να βρουν οι μαθητές και που κρύβονται πίσω σπό αυτές τις εξισώσεις .Πιο συγκεκριμένα η εξίσωση αχ+βψ=γ με α διαφορετικό του μηδενός ή β διαφορετικό του μηδενός παριστάνει μία ευθεία στο επίπεδο.Στην περίπτωση που α,β,γ είναι ακέραιοι η ευθεία αυτή διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες,αν και μόνο εάν ο δ|γ,όπου δ=(α,β).

Για παράδειγμα η 2χ+3ψ=1 διέρχεται από άπειρο πλήθος σημείων με ακέραιες συντεταγμένες,ενώ η 6χ+4ψ=5 δε διέρχεται από κανένα .

Επεκτείνοντας πώς θα μπορούσε να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση : **2xy + 5x + 56y + 7 = 0**. Εδώ D=5, E=56, B=2, F=7..Από τη γραφική παράσταση μπορούν να εντοπιστούν μερικές από τις ακέραιες ρίζες της.



Αναζητούμε όμως ένα αλγεβρικό τρόπο που θα μας οδηγήσει στην εύρεση όλων των λύσεων της εξίσωσης.Ο στόχος εδώ είναι να γίνει η κατάλληλη παραγοντοποίηση.Οι διαδικασίες που πρέπει να ακολουθηθούν είναι πιο σύνθετες.Με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς οδηγούνται στην παρακάτω μορφή: (2x + 56) (2y + 5) = 266.Είναι φανερό ότι αν το δεύτερο μέλος ήταν μηδέν θα είχαμε δύο ευθείες παράλληλες στους άξονες χχ΄και ψψ΄.Εδώ όμως είναι διάφορο του μηδενός.Μπορούμε όμως να βρούμε τους διαιρέτες του 266.Εδώ οι διαιρέτες του 266 είναι: ±1, ±2, ±7, ±14, ±19, ±38, ±133, ±266. Με την εύρεση των διαιρετών μπορούν να θέσουν στη συνέχεια: $2\chi+56=d_i$ και $2\psi+5=266/d_i$.Αντικαθιστώντας κάθε φορά τους διαιρέτες παίρνουμε:

- d_1 = 1: x = (1-56)/2 = -55/2, y = (266/1-5)/2 = 261/2
- d_2 = -1: x = (-1-56)/2 = -57/2, y=[266/(-1)-5]/2 = 271/2
- d_3 = 2: **x** = (2-56)/2 = **-27**, **y** = (266/2-5)/2 = **64**
- d_4 = -2: **x** = (-2-56)/2 = **-29**, **y** = [266/(-2)-5]/2 = **-69**
- d_5 = 7: x = (7-56)/2 = -49/2, y = (266/7-5)/2 = 33/2
- d_6 = -7: x = (-7-56)/2 = -63/2, y = [266/(-7)-5]/2 = -43/2
- d_7 = 14: **x** = (14-56)/2 = **-21**, **y** = (266/14-5)/2 = **7**
- d_8 = -14: **x** = (-14-56)/2 = **-35**, **y** = [266/(-14)-5]/2 = **-12**
- d_9 = 19: x = (19-56)/2 = -37/2, y = (266/19-5)/2 = 9/2
- d_{10} = -19: x = (-19-56)/2 = -75/2, y = [266/(-19)-5]/2 = -19/2
- d_{11} = 38: **x** = (38-56)/2 = **-9**, **y** = (266/38-5)/2 = **1**
- d_{12} = -38: **x** = (-38-56)/2 = **-47**, **y** = [266/(-38)-5]/2 = **-6**
- d_{13} = 133: x = (133-56)/2 = 77/2, y = (266/133-5)/2 = -3/2

- d_{14} = -133: x = (-133-56)/2 = -189/2, y = [266/(-133)-5]/2 = -7/2

- d_{15} = 266: **x** = (266-56)/2 = **105**, **y** = (266/266-5)/2 = **-2**

- d_{16} = -266: **x** = (-266-56)/2 = **-161**, **y** = [266/(-266)-5]/2 = **-3**

Οι μόνες 8 ακέραιες λύσεις στις ζητούμενες εξισώσεις είναι χαρακτηρισμένες ανωτέρω με κόκκινο.

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και στις διοφαντικές εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$, όπου a, b,c,d,e,f $\in$Q.Οι μαθητές στο τρίτο κεφάλαιο έχουν διδαχτεί την ενότητα «κωνικές τομές».Πιο συγκεκριμένα έχουν ασχοληθεί με τον κύκλο,την παραβολή,την έλλειψη και την υπερβολή.Επιπλέον έχουν ασχοληθεί στο δεύτερο κεφάλαιο με την ευθεία.Έχοντας υπόψιν τους όλα αυτά μπορούν να βρουν τον σύνδεσμο ανάμεσα σε ευθείες-κωνικές τομές-ακέραιες λύσεις πολυωνιμικών εξισώσεων της μορφής $F(x, y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$, όπου a, b,c,d,e,f $\in$Q.

Μπορούμε να ξεκινήσουμε στην τάξη δίνοντας στα παιδιά να λύσουν μία εξίσωση όπως αυτή που ακολουθεί.

Οι μαθητές εδώ αφού «κοιτάξουν» προσεκτικά την εν λόγω εξίσωση προσπαθούν να την <u>αναδιατυπώσουν</u> στην γλώσσα τους χρησιμοποιώντας φράσεις όπως «η εξίσωση θυμίζει ταυτότητα».Εδώ οι μαθητές βρίσκονται στη φάση της <u>οικειοποίησης</u>.Στη συνέχεια αφήνοντας τους πάντα τον κατάλληλο χρόνο προσπαθούν να βρουν κάποιες στρατηγικές που πρέπει να ακολουθήσουν.Στην διαδικασία αυτή αναπτύσσουν από μόνοι τους νέες μεθόδους ή συνδυάζουν διάφορες διαδικασίες που τις έχουν εφαρμόσει στο παρελθόν.Αυτή την <u>ερευνητική φάση</u> του μαθητή την διαδέχεται η <u>φάση σχηματισμού</u> .Οι μαθητές ανακαλύπτοντας ότι η εξίσωση αυτή περιέχει δύο ταυτότητες,ωθούνται στο σχηματισμό τους.Εδώ λοιπόν και αφού γίνουν οι νέοι μετασχηματισμοί αρχίζει να «φαίνεται» πίσω από την αρχική εξίσωση η μορφή μίας κωνικής τομής,που στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι η έλλειψη.Εδώ λοιπόν οι μαθητές αρχίζουν έχοντας ανακαλύψει τη νέα γνώση ,να την <u>αποσαφηνίζουν</u> και να την <u>ισχυροποιούν</u>.Σε αυτό το σημείο και αφού έχουν εργαστεί οι μαθητές μόνοι τους πρέπει να επέμβουμε προκειμένου να

διευκρινίσουμε τη γνώση που πρέπει να διατηρηθεί.Είναι η φάση της δόμησης.Με άλλα λόγια ,τα βήματα που ακολούθησαν οι μαθητές μπορούν να «οριστούν» σαν διαδικασία που μπορεί να επαναληφθεί στην επίλυση τέτοιων εξισώσεων.Οι μαθητές ακολουθώντας και άλλα τέτοια παραδείγματα μπορούν τελικά να αφομοιώσουν τη νέα γνώση παιρνόντας με αυτό τον τρόπο στην φάση της δόμησης.

Έστω τώρα η εξίσωση $9\chi^2+4\psi^2-72\chi-24\psi+144=0$

Έχουμε διαδοχικά κάνοντας την ανάλογη παραγοντοποίηση:

$9(\chi^2-8\chi)+4(\psi^2-6\psi)=-144$

$9(\chi^2-2*4\chi+4^2)+4(\psi^2-2*3\psi+3^2)=9*4^2+4*3^2-144$

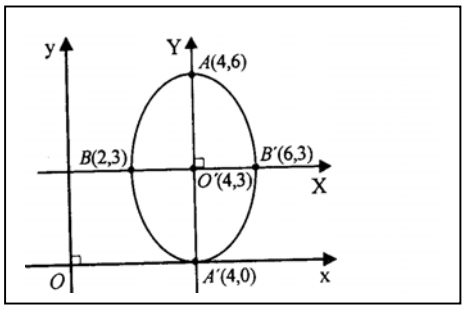
$9(\chi-4)^2+4(\psi-3)^2=36$

$\frac{(\chi-4)^2}{2^2}+\frac{(\psi-3)^2}{3^2}=1.$

Αν θέσουμε χ-4=Χ και ψ-3=Ψ,δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο Ο'(4,3) .τοτε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$\frac{X^2}{2^2}+\frac{\Psi^2}{3^2}=1.$

Επομένως η εξίσωση παριστάνει έλλειψη με κέντρο το Ο'(4,3) και με α=3,β=2 και $\gamma=(3^2-2^2)^{1/2}=5^{1/2}$.Τα άκρα του μεγάλου άξονα ως προς το νέο σύστημα είναι τα σημεία (Χ,Ψ)=(0,3) και (Χ,Ψ)=(0,-3),οπότε λόγω των σχέσεων χ-4=Χ και ψ-3=Υ,ως προς το αρχικό σύσημα,είναι τα σημεία Α(4,6) και Α΄(4,0).Ανάλογα βρίσκουμε και τα άκρα του μικρού άξονα και είναι τα σημεία Β(2,3) και Β΄(6,3).Επίσης οι εστίες είναι τα σημεία Ε(4,3√5),Ε΄(4, -3√5).



Το θέμα που τίθεται είναι ο τρόπος που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε μόνο τις ακέραιες λύσεις της παραπάνω εξίσωσης,ο γεωμετρικός τόπος της οποίας είναι η έλλειψη που έχει σχεδιαστεί.

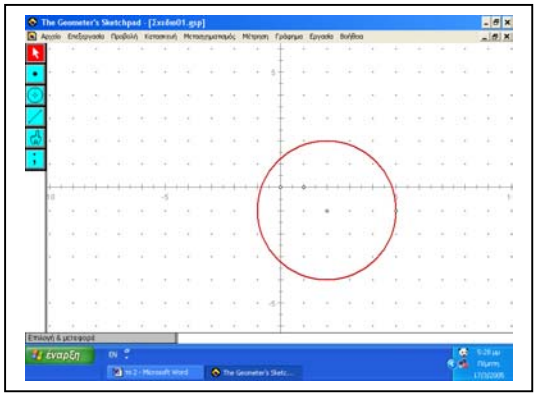
Οι μαθητές μπορούν να κάνουν διάφορες εικασίες για τις ακέραιες λύσεις.Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας μιλλιμετρέ χαρτί είναι δυνατόν να εντοπιστούν μερικές από αυτές.Επιπλέον από την αρχική εξίσωση είναι δυνατόν να βρουν τις τιμές του ψ με χρήση της διακρίνουσας.(Λύνοντας την εξίσωση ως προς ψ).Έπειτα δύνανται να βρουν τα άκρα της κωνικής τομής.Ουσιαστικά λοιπόν εφαρμόζεται η διαδικασία που αναφέρθηκε στο θεωρητικό υπόβαθρο.Πιο αναλυτικά έχουμε:
$B^2 - 4AC = -4*9*4<0$ άρα έχουμε την περίπτωση της έλλειψης.Τα άκρα της έλλειψης θα είναι ρίζες της:

$(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = 0$ ή ισοδύναμα

$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF) = -144x^2 + 1152x -1728 = 0$.Οι ρίζες είναι οι 2 και 6..., έτσι πρέπει να ελένξουμε τις ακέραιες τιμές του χ από χ=2 έως χ=6 . Οι τιμές του χ που αντικαθιστώντας της στην (*) δίνει ακέραια τιμή του ψ εμφανίζεται για χ = 2,4,5,6, οπότε ψ = 3,0,6, επομένως αυτές είναι οι ακέραιες λύσεις σε αυτό το πρόβλημα.(Δύο τιμές του ψ ταυτίζονται.

Εργαζόμενοι ακριβώς ανάλογα μπορούν να βρουν τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης: $χ^2-4χ+ψ^2+2ψ-4=0$.

Εκτελώντας ανάλογες διαδικασίες με αυτές που προαναφέρθηκαν εργαζόμενοι ανάλογες οι μαθητές μπορούν να καταλήξουν στην εξίσωση $(χ-2)^2+(ψ+1)^2=9$,που παριστάνει προφανώς κύκλο με Κ(2,-1) και ακτίνα ρ=3.Αν με παράλληλη μεταφορά των αξόνων η αρχή Ο(0,0) μετακινηθεί στο κέντρο του κύκλου,τότε οι καινούργιες συντεταγμένες (Χ,Ψ) ενός σημείου Μ του κύκλου είναι Χ=χ-2 και Ψ=ψ-(-1)=ψ+1.Επομένως η εξίσωση του κύκλου ως προς το νέο σύστημα αξόνων έχει τη μορφή $X^2+Ψ^2=9$.



Επιπλέον ,όπως και στην περίπτωση της έλλειψης είναι δυνατόν να εντοπιστούν μόνο οι ακέραιες ρίζες.Παρατηρούμε ότι εδώ A=1,B=0,C=1,D=-4,E=2,F=-4. Λύνουμε την εξίσωση $(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F) = 0$ ή ισοδύναμα $-\chi^2+4\chi+5=0$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι χ=5 ή χ=-1.Αναζητούμε όλες τις ακέραιες τιμές του χ από –1 έως 5 που αντικαθιστώντας στην (*) παίρνουμε ακέραιες τιμές του ψ.Τα ζητούμενα ζεύγη είναι:Α(2,-4) ,Β(-1,-1) ,Γ(2,2) ,Δ(5,-1).

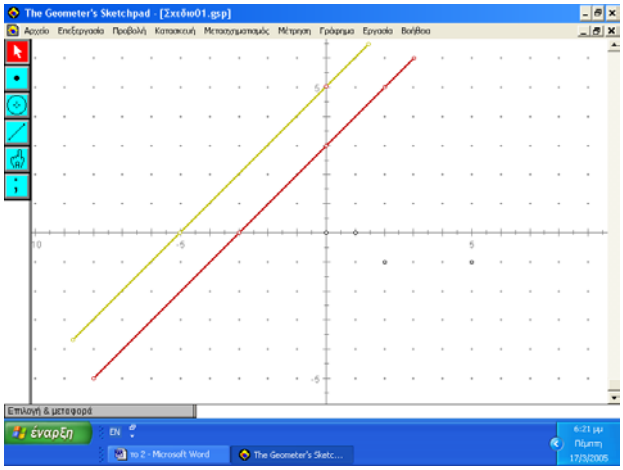
Έστω τώρα η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\chi\psi+8\chi-8\psi+15=0$.Οι μαθητές εδώ μπορούν να ακολουθήσουν κάποια άλλη διαδιακασία την οποία έχουν ξαναδεί στην παραγοντοποίηση στο Γυμνάσιο.Μπορούν να «σπάσουν» τους συντελεστές 8 και 2 σαν άθροισμα δύο αριθμών προκειμένου να μπορέσουν να κάνουν παραγοντοποίηση.Με διάφορες δοκιμές μπορούν να καταλήξουν ότι το κατάλληλο άθροισμα είναι το 8=5+3 και 2=1+1.Έσται έχουμε τα παρακάτω:$\chi^2+\psi^2-\chi\psi-\chi\psi+5\chi+3\chi-5\psi-3\psi+15=0$ ή

$(\chi^2-\chi\psi+3\chi)+(\psi^2-\chi\psi-3\psi)+(5\chi-5\psi+15)=0$ ή

$\chi(\chi-\psi+3)+\psi(\psi-\chi-3)+5(\chi-\psi+3)=0$ ή

$\chi(\chi-\psi+3)-\psi(-\psi+\chi+3)+5(\chi-\psi+3)=0$ ή

(χ-ψ+3)(χ-ψ+5)=0.Άρα ή (χ-ψ+3)=0 ή (χ-ψ+5)=0 ή αλλιώς ισοδύναμα έχουμε χ-ψ+3=0 ή ψ=χ+3 και για την άλλη εξίσωση χ-ψ+5=0 ή ισοδύναμα ψ=χ+5.Άρα σε αυτή την περίπτωση η διοφαντική εξίσωση μας οδήγησε σε δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.Μέσα από τη γραφική παράσταση των ευθειών αυτών μπορούμε να βρούμε πάλι μερικές ακέραιες ρίζες.



Προκειμένου να βρεθούν όλες οι ακέραιες τιμές που την επληθεύουν μπορούμε να τους καθοδηγήσουμε να ακολουθήσουν ανάλογες διαδικασίες με αυτές του θεωρητικού υπόβαθρου που προαναφέρθηκε και αφορά την περίπτωση της παραβολής και συγκεκριμένα όταν έχουμε: $\sqrt{c}\,\mathbf{D} - \sqrt{a}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ (δύο παράλληλες ευθείες) Στην περίπτωση αυτή, αντικαθιστώντας στην κατάλληλη εξίσωση έχουμε: $\sqrt{a}\,\mathbf{gu^2} + \mathbf{Du} + \sqrt{a}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$.Δεδομένου ότι τα χ ,ψ πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί, υπονοείται ότι το u (η ρίζα της ανωτέρω εξίσωσης) πρέπει να είναι επίσης ακέραιος αριθμός. Έστω $\mathbf{u_1}$ και $\mathbf{u_2}$ οι ρίζες της ανωτέρω εξίσωσης. Έχουμε: $\sqrt{a}\,\mathbf{x} + \sqrt{c}\,\mathbf{y} - \mathbf{u_1} = \mathbf{0}$ και $\sqrt{a}\,\mathbf{x} + \sqrt{c}\,\mathbf{y} - \mathbf{u_2} = \mathbf{0}$ η οποία λύνεται με τις μεθόδους της γραμμικής εξίσωσης.

Έστω η εξίσωση $χ^2-4χ+ψ^2-10ψ+29=0$.Ακολουθώντας όπως και πριν την ίδια διαδικασία προσπαθώντας να εμφανίσουμε αναπτύγματα τετραγώνων καταλήγουμε στην μορφή $(χ-2)^2+(ψ-5)^2=0$.Για να ισχύει η τελευταία θα πρέπει χ=3 και ψ=5.Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση η διοφαντική εξίσωση μας οδηγεί σε ένα σημείο και συγκεκριμένα στο Α(3,5).Θα μπορούσε να ακολουθηθεί εδώ και μία άλλη διαδιακασία γενικότερητερη και αρκετά οικεία στους μαθητές.Πιο συγκεκριμένα θέλοντας

να εμφανιστούν κάποια τεράγωνα ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας με 4:

$4 x^2 + 4 y^2 - 16 x - 40 y + 116 = 0$

$4 x^2 + (- 16)x + (4 y^2 - 40 y + 116) = 0$

Προσθαφαιρούμε το $16=(- 4)^2$

Κατόπιν η εξίσωση μετατρέπεται στην:
$(2 x - 4)^2 + (4 y^2 - 40 y + 116) - (16) = 0$

$(2 x - 4)^2 + (4 y^2 - 40 y + 100) = 0$

Τώρα εκτελούμε την αντικατάσταση:$x´ = 2 x - 4$

$x´^2 + 4 y^2 - 40 y + 100 = 0$

Δεδομένου ότι το χ^2 είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσος με το μηδέν, $4 y^2 - 40 y + 100$ πρέπει να είστε λιγότερο ή ίσος με το μηδέν. Αυτό ελέγχεται στο τμήμα που περιορίζεται από τις ρίζες. Οι ρίζες είναι:

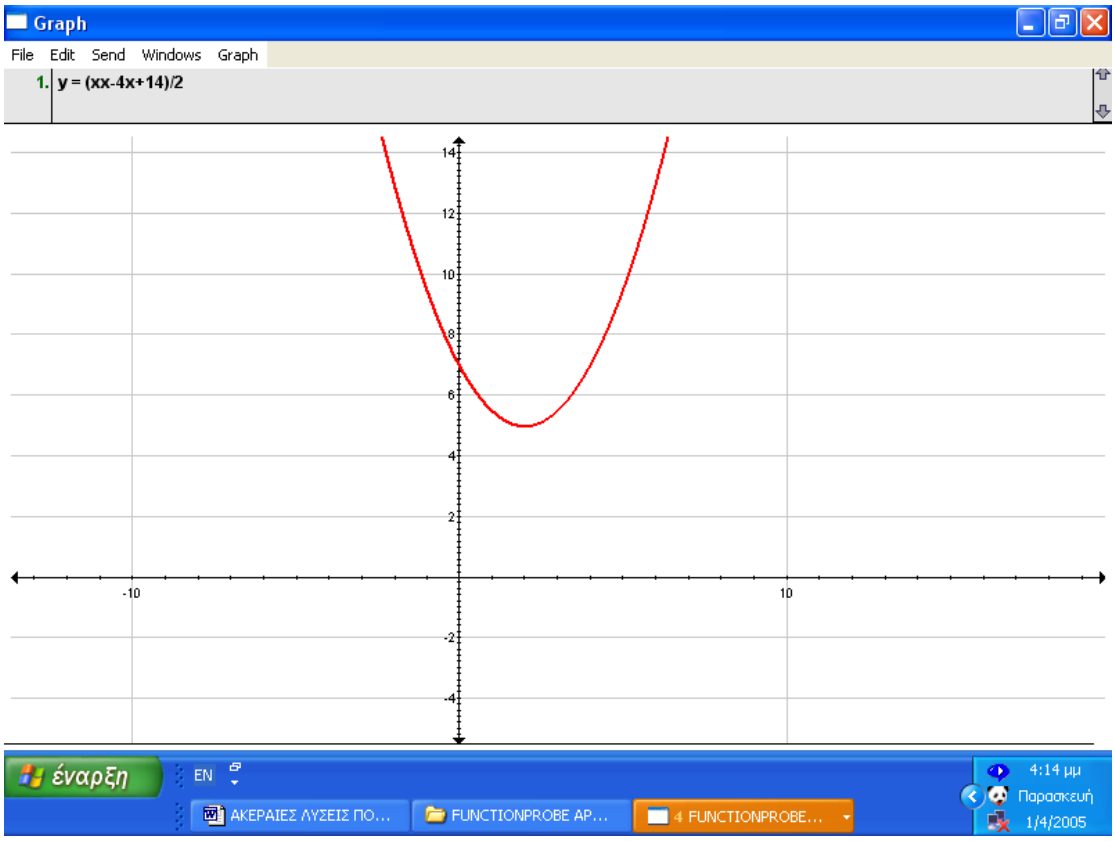
$(-(-40) - sqrt(-40^2 - 4 * 4 * 100)) / (2 * 4) = 5.0$
και: $(-(-40) + sqrt(-40^2 - 4 * 4 * 100)) / (2 * 4) = 5.0$

Όλες οι τιμές του ψ από 5 έως 5 πρέπει να αντικατασταθούν στην $4 y^2 - 40 y + 100$. Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι το αρνητικό ενός τέλειου τετραγώνου.Οι τιμές του ψ είναι: 5

- $y = 5$
  $x´ = 2 x - 4 = \pm sqrt(0) = \pm 0$
  - $2 x - 4 = 0$
    $2 x - 4 = 0$
    $2x = 4$
    $x = 2$

x = 2
y = 5

Έστω τώρα η εξίσωση: $x^2 - 4x - 2y + 14 = 0$.Οι μαθητές μπορούν να κάνουν τις κατάλληλες προσθαφαιρέσεις προκειμένου να εμφανίσουν για άλλη μια φορά την μορφή μίας κωνικής τομής.Έτσι σπάζοντας το 14 σε άθροισμα 4+10 και παραγοντοποιώντας βρίσκουν τη μορφή $(x-2)^2=2(ψ-5)$ η οποία παριστάνει την ακόλουθη παραβολή:



Από την γραφική παράσταση για άλλη μια φορά μπορούν να βρεθούν μερικές από τις ακέραιες τιμές που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.Για την εύρεση όλων των ακέραιων τιμών μπορούνε να παρατηρήσουν τα εξής:

$(x)^2 + (-4) (x) + (- 2 y + 14) = 0$ ή $χ^2-4χ+14=2ψ$.

Δηλαδή το $x^2 - 4x + 14$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 2.Άρα ψάχνουμε να βρούμε όλες τις τιμές του χ από 0 έως 2 έτσι ώστε να ισχύει η παραπάνω συνθήκη. Η μοναδική τιμή του χ=0 Άρα γενικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι χ=2t.Έτσι θα έχουμε:

$$2y = (2t)^2 - 4(2t) + 14$$

$2y = 4t^2 - 8t + 14$

$y = 2t^2 - 4t + 7$.΄Αρα γενικά μπορούμε να πάρουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2u \\ y &= 2u^2 - 4u + 7 \end{aligned}}$$

΄Εστω τέλος η εξίσωση $9\chi^2-16\psi^2-36\chi-96\psi-252=0$.

΄Εχουμε διαδοχικά : $9(\chi^2-4\chi)-16(\psi^2+6\psi)=252$

$9(\chi-2)^2-16(\psi+3)^2=144$

$\frac{(\chi-2)^2}{4^2}-\frac{(\psi+3)^2}{3^2}=1$

Αν θέσουμε $\chi-2=X$ και $\psi+3=Y$,δηλαδή αν κάνουμε πα΄ραλληλημ εταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο Ο΄(2,-3),τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\frac{X^2}{4^2}-\frac{\Psi^2}{3^2}=1$

Επομένως η αρχική εξίσωση παριστάνει υπερβολή με κέντρο το Ο΄(2,-3).Με ανάλογο τρόπο,όπως και πριν βρίσκουμε ότι η υπερβολή αυτή έχει α=4 ,β=3,γ=5.Άρα η υπερβολή έχει κορυφές τα σημεία Α(6,-3) και Α΄(-2,-3) και εστίες Ε(7,-3) και Ε΄(-3,-3).

Οι μαθητές και σε αυτή την περίπτωση προκειμένου να βρουν όλες τις ακέραιες λύσεις μπορούν να κάνουν επιπλέον τα ακόλουθα βήματα:

$9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με 36:

$324x^2 - 576y^2 - 1296x - 3456y - 9072 = 0$

$324x^2 + (-1296)x + (-576y^2 - 3456y - 9072) = 0$

Για να συμπληρωθεί το τετράγωνο πρέπει να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε: $(-36)^2$

Κατόπιν η εξίσωση μετατρέπεται στην:

$(18 x - 36)^2 + (- 576 y^2 - 3456 y - 9072) - (1296) = 0$

$(18 x - 36)^2 + (- 576 y^2 - 3456 y - 10368) = 0$

Τώρα εκτελούμε την αντικατάσταση:

$x' = 18 x - 36$

Αυτή δίνει:

$x'^2 - 576 y^2 - 3456 y - 10368 = 0$

Πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με -1:

$- x'^2 + 576 y^2 + 3456 y + 10368 = 0$

$-x'^2 + 576(y^2 + 6 y) + 10368 = 0$

$-x'^2 + 576((-1)^2 y^2 + 2*(-1)*(-3) y) + 10368 = 0$

Προσθήκη και αφαίρεση $576 * (-3)^2$:

$-x'^2 + 576((-1)^2 y^2 + 2*(-1)*(-3) y + (-3)^2) + 10368 - 576 * (-3)^2 = 0$

$-x'^2 + 576(- y - 3)^2 + 5184 = 0$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y' = - y - 3$:

$- x'^2 + 576 y'^2 + 5184 = 0$

$(24 y' + x') (24 y' - x') = -5184$

Τώρα πρέπει να βρούμε όλους τους παράγοντες 5184.

1. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 1 (-5184), μπορούμε να θέσουμε:
   $24 y' + x' = 1$
   $24 y' - x' = -5184$
   Λύνοντας αυτό το σύστημα δεν λαμβάνουμε τιμές ακέραιες για x' και y'.
2. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 2 φορές -2592, μπορούμε να θέσουμε:

24 y´ + x´ = 2

24 y´ - x´ = -2592

Λύνοντας αυτό το σύστημα δεν λαμβάνουμε τιμές ακέραιες για τα χ´ και ψ ´.

3. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 3 φορές -1728, μπορούμε να θέσουμε:

   24 y´ + x´ = 3

   24 y´ - x´ = -1728

   Ομοίως δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές.

4. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 4 φορές -1296, μπορούμε να θέσουμε:

   24 y´ + x´ = 4

   24 y´ - x´ = -1296

   Ομοίως δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές.

5. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 6 φορές -864, μπορούμε να θέσουμε:

   24 y´ + x´ = 6

   24 y´ - x´ = -864

   Ομοίως δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές για τα χ´και ψ´.

6. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 8 φορές -648, μπορούμε να θέσουμε:

   24 y´ + x´ = 8

   24 y´ - x´ = -648

   Ούτε τώρα υπάρχουν ακέραιες τιμές.

7. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 9 φορές -576, μπορούμε να θέσουμε:

   24 y´ + x´ = 9

   24 y´ - x´ = -576

   Δεν υπάρχουν πάλι ακέραιες τιμές.

8. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 12 φορές -432, μπορούμε να θέσουμε:

   24 y´ + x´ = 12

   24 y´ - x´ = -432

   Δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές.

9. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 16 φορές -324, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 16$

$24\,y' - x' = -324$

Δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές.

10. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 18 φορές -288, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 18$

$24\,y' - x' = -288$

Δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές.

11. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 24 φορές -216, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 24$

$24\,y' - x' = -216$

$x' = 120$

$y' = -4$

12. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 27 φορές -192, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 27$

$24\,y' - x' = -192$

Δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.

13. Δεδομένου ότι το -5184 είναι 32 φορές το -162, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 32$

$24\,y' - x' = -162$

Δεν υπάρχουν ακέραιες τιμές.

14. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 36 φορές -144, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 36$

$24\,y' - x' = -144$

Καμμία ακέραια λύση.

15. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 48 φορές -108, μπορούμε να θέσουμε:

$24\,y' + x' = 48$

$24\,y' - x' = -108$

Καμμία ακέραια λύση .

16. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 54 φορές -96, μπορούμε να θέσουμε:

    24 y΄ + x΄ = 54

    24 y΄ - x΄ = -96

    Καμμία ακέραια λύση.

17. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 64 φορές -81, μπορούμε να θέσουμε:

    24 y΄ + x΄ = 64

    24 y΄ - x΄ = -81

    Καμμία ακέραια λύση.

18. Δεδομένου ότι -5184 είναι ίσο με 72 φορές -72, μπορούμε να θέσουμε:

    24 y΄ + x΄ = 72

    24 y΄ - x΄ = -72

    x΄ = 72

    y΄ = 0

    x = 6

    y = -3

    και επίσης:

    x = -2

    y = -3

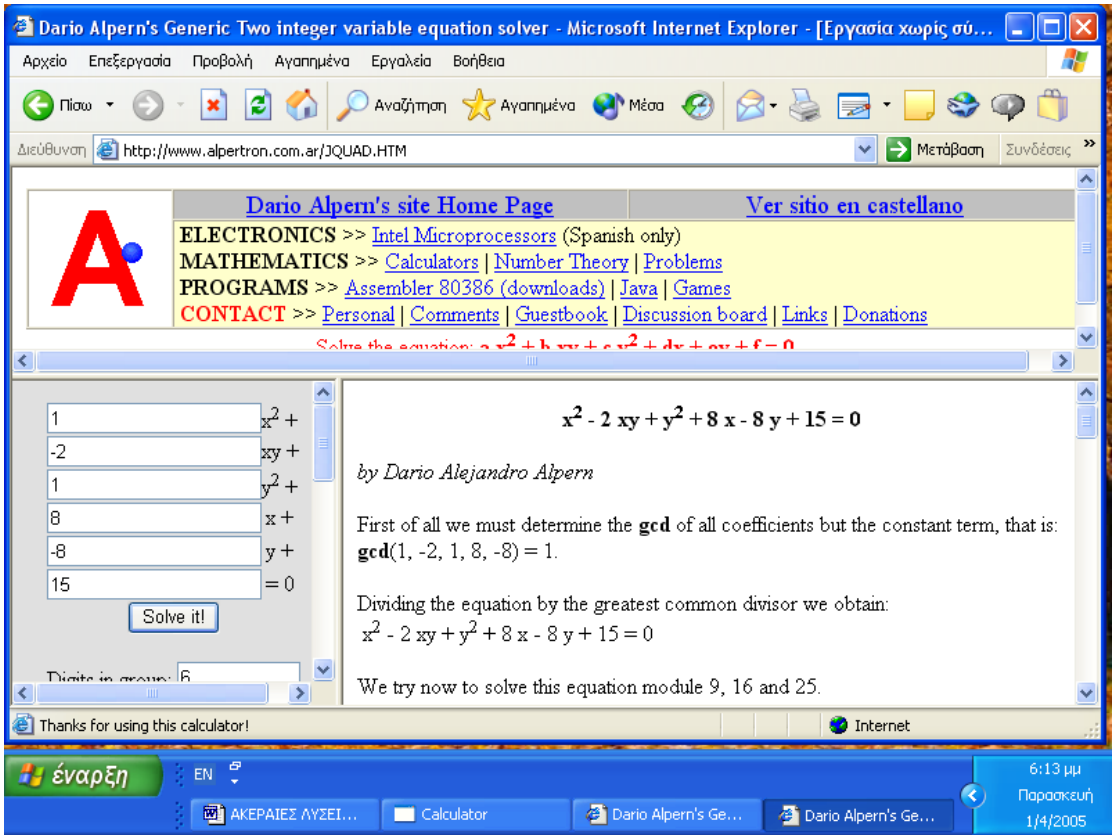
Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα αφού εξασκηθούν οι μαθητές και με άλλα παραδείγματα στη συνέχεια μπορούν να αρχίσουν να γενικεύουν και να προσπαθήσουν να εφαρμόσουν τα βήματα τους έχοντας γράμματα στις εξισώσεις αντί για αριθμούς.Με αυτό τον τρόπο μπορούν να καταλήξουν στις γενικές μορφές που αναφέρονται στο πρώτο μέρος της εργασίας.

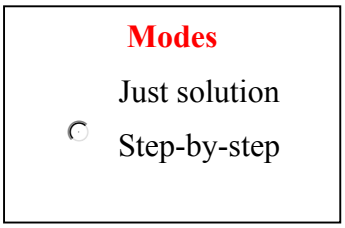
Για την καλύτερη επίτευξη του στόχου μας-δηλαδή την ουσιαστική κατανόηση των εξισώσεων αυτών-είναι καλύτερα να προτρέψουμε τους μαθητές να εργαστούν κατά ομάδες.Με την ομαδική εργασία μπορούν να ανταλάζουν ευκολότερα απόψεις αλλά και να διορθώνει ο ένας τα λάθη του άλλου και να θέτουν σταδιακά τους θεμέλιους λίθους της νέας γνώσης.

Για να γίνει πιο ευπρόσδεκτη στους μαθητές η νέα γνώση είναι σημαντικό να τους δώσουμε ορισμένα ιστορικά στοιχεία γύρω από τις εξισώσεις

αυτές.Είναι όπως προαναφέρθηκε πολύ σημαντικό να ασχοληθούμε στην διάρκεια του μαθήματος με εκτενείς αναφορές στην εργασία του Hilbert,του Fermat,του Martin Davis,του Wiles του Yuri Matiyasevich ,τηςJulia Robinson και φυσικά του Διόφαντου από τον οποίο και πήραν το «όνομα» τους.Τα ιστορικά στοιχεία κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών και τους παροτρύνουν να εργαστούν με περισσότερη διάθεση.

Τέλος στα πλαίσια της διδακτικής προσέγγισης της παραπάνω ενότητας με την «επίλυση του προβλήματος»,θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον για τους μαθητές η χρήση κάποιου λογισμικού προγράμματος,που θα τους επέτρεπε να υπολογίζουν απευθείας τις ακέραιες λύσεις διοφαντικών εξισώσεων.Είναι αρκετά χρήσιμο το πρόγραμμα που υπάρχει και σε αντίστοιχη ιστοσελίδα στον διαδυκτιακό χώρο και συγκεκριμένα στην διεύθυνση : http://www.alpertron.com.ar/JQUAD.HTM. Το πρόγραμμα αυτό επιτρέπει εύκολα και γρήγορα τον υπολογισμό των ακέραιων λύσεων οποιασδήποτε εξίσωσης.Οι μαθητές δεν έχουν παρά να «γράψουν» τους συντελεστές των εξισώσεων και με το «πάτημα» του ENTER παίρνουν άμεσα την λύση.Αν θελήσουν μπορούν να απαιτήσουν και την αναλυτική εμφάνιση των βημάτων που οδηγούν στην λύση.Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τον υπολογισμό των ριζών μιας διοφαντικής εξίσωσης με τη χρήση του προγράμματος.





Η αναλυτική εμφάνιση της λύσης η οποία αναγράφεται στον δεξιό πίνακα μπορούμε να την πάρουμε με την επιλογή του step-by step.Στην αριστερή δε στήλη βάζουμε τους συντελεστές της εξίσωσης που θέλουμε.Αν επιλέξουμε just solution παίρνουμε μόνο τις ακέραιες λύσεις.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Πολλοί από τους μαθητές χρειάζονται αρκετό χρόνο να εξοικιωθούν με τις μαθηματικές ιδέες ώστε να τις χρησιμοποιούν σωστά.Χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια από τους καθηγητές για ν'ανακαλύψουν και ν' ανακαλύπτουν συνέχεια τις αδυναμίες και τις ιδιαιτερότητες των μαθητών.΄Ετσι μόνο θα μπορέσουν να βοηθήσουν να χαίρονται όταν κάνουν κάποια μαθηματική ενέργεια.Πόσοι,άραγε,προβληματίζονται για το αν οι μαθητές τους συνειδητοποιούν τη συμβολική παράσταση των αριθμών και των μεταβλητων σε μια εξίσωση; Σκεφτήκανε ποτέ το φόβο και την αγωνία ενός μαθητή που δεν καταλαβαίνει τί λένε αλλά είναι υποψήφιος ν'απαντήσει στην ερώτηση τους;

Εδώ θα πρέπει ν'αναφερθεί και το μεγάλο μειονεκτημα του παραφορτωμένου συμβολισμού σε σχέση με τις εξισώσεις.Προκαλεί άγχος στα παιδιά και λειτουργεί αρνητικά στην ανάπτυξη τόσο της λειτουργικής σκέψης όσο και της φαντασίας.

Η εξήγηση των μεταβλητών,των αριθμών κ.τ.λ. απαιτεί εξαίρετη τέχνη.Οι ίδιες οι μεταβλητές μπορούν να είναι αυστηρά καθορισμένες δηλαδή το αποτέλεσμα μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα,οπότε το μοντέλο λέγεται προσδιοριστικό (deterministic).Μπορούν όμως να είναι τυχαίες μεταβλητές και το μοντέλο λέγεται στοχαστικό (stochastic).΄Ισως για την κατανόηση των μεταβλητών θα πρέπει να γίνει πρώτα μια εποπτική παρουσίαση στην τάξη γιατί η μεγαλύτερη ίσως αδυναμία τους συστήματος μας είναι η θεωρητικολογία και η παντελής έλλειψη σύνθεσης της θεωρίας με την πράξη και τις εφαρμογές.

«Στις σχέσεις του με τον μαθητή ο καθηγητής θα πρέπει να στοχεύει να αχρηστέψει τον εαυτό του. Αυτό είναι δύσκολο.Τότε όμως ο μαθητής μαθαίνει μόνος του ,γίνεται αυτόνομος και ο θρίαμβος του δασκάλου είναι να κάνει τον μαθητή αυθύπαρκτο και ανεξάρτητο» (Σωκράτης)

Ενεργώντας σύμφωνα με τον Piaget μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές του να εκφραστούν με το δικό τους τρόπο και να χτίσουν μόνοι τη γνώση τους.Μπορεί όμως να δράσει σαν - καθοδηγητής - και να τους δώσει εργαλεία για να διευρύνουν την σκέψη τους, κάτι εξαιρετικά χρήσιμο ιδιαίτερα για αδύνατους μαθητές.΄Ετσι οι μαθητές παρακινούνται να συζητήσουν τις απόψεις τους και να προτείνουν τρόπους υποστήριξης των επιχειρημάτων τους.Οι συλλογισμοί που ακολουθούν είναι συχνά ανεπαρκείς ή λανθασμένοι.Η διδακτική κατάσταση πρέπει να τους οδηγήσει στο να βελτιώσουν την τεχνική

τους,να αναθεωρήσουν τις ιδέες τους ,να αντικαταστήσουν τις λανθασμένες θεωρίες τους με άλλες σωστές ή πλησιέστερες. Αυτή η εξέλιξη της σκέψης έχει διαλεκτικό χαρακτήρα:η κάθε πρόταση ή υπόθεση πρέπει να αιτιολογείται επαρκώς είτε για να γίνει αποδεκτή είτε για να απορριφθεί τελικά (Brousseu 1997)

«Μπορούμε να διδάξουμε τους μαθητές οτιδήποτε και σε οποιαδήποτε ηλικία αρκεί να επιλέξουμε και να εφαρμόσουμε την κατάλληλη μέθοδο η οποία να ανταποκρίνεται στο πνευματικό τους επίπεδο».(Bruner).

Βέβαια άλλοι παράγοντες που προδιαθέτουν τον μαθητή είναι η ενθάρρυνση της διαισθητικής σκέψης, η καλλιέργεια της περιέργειας για έρευνα και αμφιβολία,η ενθάρρυνση της προσπάθειας και όχι απόρριψη σε ενδεχόμενη αποτυχία,ο κατάλληλος χρόνος και το περιβάλλον που θα του επιτρέψουν να σκεφτεί λογικά, να φαντασθεί,να οραματισθεί και να δράσει. (Bruner)

Μια νέα παιδαγωγική μέθοδος θα πρέπει να αναπτυχθεί μεταξύ δασκάλου και μαθητή.Ο δάσκαλος θα είναι ο καθοδηγητής, ο συντονιστής της έρευνας στην τάξη, ο εμψυχωτής και συνεργάτης του μαθητή στην ανακάλυψη της γνώσης. Συνεργασία και όχι από «καθ'έδρας» διδασκαλία.Πρέπει να δημιουργήσει συνθήκες να αγαπήσουν οι μαθητές το μάθημα,να είναι οι ίδιοι υποστηρικτικοί,να δίνουν έμφαση σε καταστάσεις προβληματισμού,οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες,να συζητούν για τα μαθηματικα και τις δυσκολίες που βρίσκουν και να εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες.Παράλληλα οι διάφορες ασκήσεις - εξισώσεις θα πρέπει να παρουσιάζονται με τρόπο « ελκυστικό », ώστε οι μαθητές να θέλουν να τις λύσουν. Δεν έχει καμία αξία να τους θέτουμε έξυπνα προβλήματα όταν εκείνοι δεν ενδιαφέρονται να αποσχοληθούν με αυτά.

Το ενδιαφέρον του δασκάλου για το μαθητή περιορίζει το άγχος που , κατέχει κυρίαρχη θεση ανάμεσα στους άλλους παράγοντες που καθορίζουν την στάση τους και αυξάνει την αυτοεκτίμησή τους. Η θετική στάση του δασκάλου απέναντι στον μαθητή δημιουργεί και θετική στάση του μαθητή απέναντι στα μαθηματικά.

Ο Μαξ Γκορκ τονίζει ότι ο καθηγητής πρέπει: «Ν' αγαπάει τα παιδιά αλλά να έχει απαίτηση να τους δείχνει καθημερινά τον καλύτερο εαυτό του». Αν συνειδητοποιήσει ότι κρατάει στα χέρια του την νεολαία,το μέλλον του τόπου,ότι επιτελεί το δυσκολότερο έργο ,το πιο υπεύθυνο,το ωραιότερο,τότε θα ανάψει τη φλόγα της μάθησης. Όταν ,λοιπόν, ο καθηγητής ξεχωρίσει τις διαφοροποιήσεις των παιδιών, προσέξει τον μαθητή, σεβαστεί το μέτριο, τον αδιάφορο,τον αδίαβαστο μαθητή,αν τιμωρήσει διακριτικά αλλά και να βραβεύσει σωστά, « Η επίπληξις να συνοδεύεται από δίκαιον έπαινον » (Μ.Βασίλειος), τότε η πρόοδος των παιδιών θα διατυμπανίζει την «αλήθεια» του λόγου του Βενιαμίν του Λεσβίου : «Η της παιδείας ευεργεσία είναι ασύγκριτη μείζων των άλλων ευεργεσιών».

Όπως στην επιστημονική διαδικασία και έρευνα η ερώτηση και ο προβληματισμός που την ακολουθεί είναι η λιδία λίθος για την χορεία της σκέψης του ερευνητή,έτσι και στην διδασκαλία η ερώτηση του δασκάλου θέτει το πλαίσιο της πνευματικής αναζήτησης της τάξης και της προώθησης των μαθητών για δραστηριοποίηση της σκέψης του.Ο καθηγητής πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι με τις ερωτήσεις του αποφασίζει ποιοι μαθητές θα συμμετάσχουν στην προφορική επικοινωνία που γίνεται στην τάξη,πότε θα συμμετάσχουν, πόσο συχνά κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης περιόδου, πόσο θα διαρκέσει η συμμετοχή,ποια μορφή θα έχει αυτή η συμμετοχή ή ποιο πρέπει να είναι το επίπεδο σκέψης του μαθητή (Dillon,1982).

Σε όλα αυτά θα πρέπει να προστεθεί ότι όσο κόπο κι αν κάνει ο καθηγητής για να βοηθήσει τον μαθητή,όσο αυθεντία κι αν είναι,όσο χρόνο κι αν αφιερώσει,όσο κι αν αφοσιώνεται στο έργο του,(G.Poyla) δεν θα μπορέσει να πετύχει τίποτα αν δεν υπάρχει θέληση από τον μαθητή. Οφείλει να υπακούει, να μην εκνευρίζεται, να ρωτάει, να σκέφτεται,να προσπαθεί.Ο Ντάγκλας Μάλλοχ τονίζει σχετικά: Να γίνουμε όλοι καπετάνιοι δεν μπορούμε,χρειάζεται και πλήρωμα,έχει δουλειά για όλους. Αν δεν μπορεί ο μαθητής να είναι ήλιος,να γίνει αστέρι αρκεί να είναι ο καλύτερος σε αυτό που είναι. Έτσι οι καθηγητές αλλά και οι μαθητές θα γιορτάζουν τα γενέθλια μιας επετείου.Την γέννηση της γνώσης,την πνευματική αναγέννηση που γίνεται στο χώρο της παιδείας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. « ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΔΑΣΚΑΛΟΣ» Σ.ΑΤΤΑΡΤ

2.«ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ» Π.Γ.ΤΣΑΓΚΑΡΗΣ

3. «ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ» Δ.ΠΟΥΛΑΚΗΣ

4. «ΑΝΩΤΕΡΑ ΑΛΓΕΒΡΑ» Χ.ΦΟΥΣΙΑΝΗΣ

5. «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ» ΣΤ.ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ

6. «ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΜΑΔΩΝ» ΣΤ.ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ

7.«ΓΝΩΣΙΟΛΟΓΙΚΗ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ» ΚΟΛΕΖΑ

8. «GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS» KENNETH IREL-M.KOYEN

9. «A FIRST COURSE IN ABSTRACT ALGEBRA» J.ROTMAN

10. «TOWARDS HUMANISTIC MATHEMATIC EDUCATION» ST.BROWN

11. «ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ» F.JAQUET

12. «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ» T.APOSTOL

13. «ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΘΥΕΛΛΕΣ» SEYMOUR PAPERT

14. «Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ» JEAN PIAGET

15.«ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΝΤΑΣ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ» LAUREN B. RESNICK
EVELYNE CAUZINILLE-MARMECHE & JACQUES MATHIEU

16. «ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΑΚΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΑΥΤΑ ΧΡΗΣΗΜΟΠΟΙΟΥΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ» ERIK DE CORTE & LIEVEN VERSCHAFFEL

17. «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 1» MICHEL HENRY