ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Γωνία στην Ευκλείδεια και Μετρική Γεωμετρία

Βασιλική Μπακέττα

Επιβλέπων: Διονύσιος Λάππας,
Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικού Τμήματος ΕΚΠΑ

Αθήνα
Ιούνιος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Διονύσιος Λάππας (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	.....
2) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αν. Καθηγητής	.....
3) Παναγιώτης Σπύρου	Επ. Καθηγητής	.....

ΒΑΣΙΛΙΚΗ ΜΠΑΚΕΤΤΑ, Ιούνιος 2008

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, Σχολή Θετικών Επιστημών
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Η ΓΩΝΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(σελ. 171)

Η έννοια της γωνίας εμφανίζεται σχεδόν ταυτόχρονα με τα πρώτα ψήγματα της Γεωμετρίας στην ιστορία των Μαθηματικών και ακόμη και σήμερα αποτελεί αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών που ασχολούνται με τα θεμέλια της Γεωμετρίας. Είναι, επομένως, αρκετά ενδιαφέρον να μελετηθεί η εξέλιξη της έννοιας αυτής από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπως αυτή παρουσιάζεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη, μέχρι και τις πιο σύγχρονες θεωρήσεις της Γεωμετρίας, ως εσωτερικής Γεωμετρίας ενός Μετρικού χώρου.

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην αναπαράσταση της κλασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας στο επίπεδο και τη μελέτη της μέσω των μετασχηματισμών του επιπέδου. Επιχειρείται μια αμιγώς αλγεβρική προσέγγιση της γωνίας, ουσιαστικά απαλλαγμένη από την εποπτεία. Στη συνέχεια, η έννοια της γωνίας επεκτείνεται στον τυχαίο μετρικό χώρο και στην περίπτωση ενός διανυσματικού χώρου συνδέεται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Η πορεία αυτή καθ' αυτή αποτελεί μία πρόταση για τη διδασκαλία της γωνίας στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας σε επίπεδο ανώτερων σπουδών και γιατί όχι σε λυκειακό επίπεδο με τις κατάλληλες απλοποιήσεις.

Η ΓΩΝΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ
ΚΑΙ ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Βασιλική Μπακέττα

Υποβλήθηκε στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ελλάδα
Ιούνιος, 2008

© Βασιλική Μπακέττα, 2008

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της έννοιας της γωνίας, και μια συγκριτική παρουσίαση αυτής από την εποχή του Ευκλείδη έως και τις πρόσφατες θεωρήσεις για τη Γεωμετρία ως εσωτερικής Γεωμετρίας ενός Μετρικού χώρου.

Η εργασία αποτελείται από οκτώ κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας της γωνίας από τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά έως και τις πιο σύγχρονες αντιλήψεις για τη Γεωμετρία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην παρουσίαση αυτής της έννοιας στα Στοιχεία του Ευκλείδη και στις πιο πρόσφατες αξιωματικές θεμελιώσεις για τη Γεωμετρία, όπως αυτή του Hilbert. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνονται όλες εκείνες οι απαραίτητες βασικές αλγεβρικές έννοιες που θα μας οδηγήσουν στην αναλυτική θεμελίωση του Ευκλείδειου χώρου, ειδικότερα του Ευκλείδειου επιπέδου και τη μελέτη της Γεωμετρίας του, μέσω της ομάδας των ισομετριών του. Το Ευκλείδειο επίπεδο θα αποτελέσει την πλατφόρμα ώστε, στο τρίτο κεφάλαιο, να ορίσουμε τη γωνία ως ένα στοιχείο μιας προσθετικής ομάδας, αυτής των στροφών. Αναλύονται οι έννοιες γωνία ημιευθειών, διανυσμάτων και ευθειών. Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα μας απασχολήσει η μέτρηση των γωνιών. Το εγχείρημα αυτό προϋποθέτει βαθιές τοπολογικές έννοιες, στην εργασία αυτή, όμως, παραθέτουμε μόνο τα απαραίτητα στοιχεία, ώστε να θεμελιώσουμε τη μέτρηση στο σύνολο των γωνιών. Στα τέσσερα τελευταία κεφάλαια επεκτείνουμε την έννοια της γωνίας σε ένα Μετρικό χώρο. Ειδικότερα, στο πέμπτο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός της γεωδαισιακής, η οποία, όταν υπάρχει, παίζει το ρόλο της ευθείας στον τυχαίο μετρικό χώρο. Η γωνία ορίζεται κατά Alexandrov και στο έκτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι αυτή ταυτίζεται με την Ευκλείδεια, Σφαιρική και Υπερβολική γωνία στους χώρους M_0^n, M_1^n και M_{-1}^n, οι οποίοι αποτελούν μοντέλα της Ευκλείδειας, Σφαιρικής και Υπερβολικής Γεωμετρίας αντίστοιχα. Τα συμπεράσματα, στη συνέχεια, επεκτείνονται στους χώρους M_κ^n, οι οποίοι εξυπηρετούν ως χώροι μοντέλα, όσον αφορά στη σύγκρισή τους με πιο γενικούς γεωδαισιακούς χώρους. Όταν ο μετρικός χώρος είναι διανυσματικός, η ύπαρξη της γωνίας ταυτίζεται με την ισχύ του κανόνα του παραλληλογράμμου, όπως αναλύεται στο έβδομο κεφάλαιο. Τέλος, στο όγδοο κεφάλαιο εξετάζονται οι χώροι με εσωτερική μετρική και διατυπώνονται συνθήκες, ώστε αυτοί να είναι γεωδαισιακοί.

Θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου κ. Διονύσιο Λάππα που με βοήθησε με τρόπο ουσιαστικό σε όλη την πορεία συγγραφής της παρούσας εργασίας, καθώς επίσης και το Γιώργο ο οποίος μου συμπαραστάθηκε σε αυτή την προσπάθεια.

Βασιλική Μπακέττα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ iii

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ v

1. Ιστορική Αναζήτηση 1
   - 1.1. Η γωνία πριν τον Ευκλείδη 1
   - 1.2. Η γωνία στα Στοιχεία του Ευκλείδη και άλλες απόψεις κατά την αρχαιότητα 4
   - 1.3. Σύγχρονες αντιλήψεις για τη γωνία 12
2. Ο Ευκλείδειος Χώρος 17
   - 2.1. Βασικές αλγεβρικές έννοιες 17
   - 2.2. Ευθείες και υπερεπίπεδα ενός διανυσματικού χώρου 24
   - 2.3. Προσανατολισμός επιπέδου 30
   - 2.4. Ευκλείδειος χώρος – Ομοιότητες και Ισομετρίες του Ευκλείδειου Χώρου 36
   - 2.5. Ευκλείδειο επίπεδο 50
3. Η Γωνία στο Ευκλείδειο Επίπεδο 65
   - 3.1. Η ομάδα των γωνιών 65
   - 3.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 67
   - 3.3. Γωνία ημιευθειών 70
   - 3.4. Γωνία διανυσμάτων 73
   - 3.5. Διάταξη στο σύνολο των γωνιών 74
   - 3.6. Η ομάδα A_0 των ευθειών γωνιών – Γωνία μεταξύ ευθειών 80
4. Μέτρο Γωνίας 85
   - 4.1. Το σύνολο των Μιγαδικών αριθμών 85
   - 4.2. Μέτρηση στο σύνολο των γωνιών Α 89
5. Η Γωνία στη Μετρική Γεωμετρία 97
   - 5.1. Μετρικός Χώρος – Γεωδαισιακές 97
   - 5.2. Η Γωνία Alexandrov 102
6. Οι Μετρικοί Χώροι $\underline{M_\kappa^n}$ 109
   - 6.1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{E}^n = M_0^n$ 109
   - 6.2. Η Σφαίρα $S^n = M_1^n$ 110
   - 6.3. Ο Υπερβολικός Χώρος $\mathbb{H}^n = M_{-1}^n$ 116

6.4. Οι Χώροι M_{κ}^{n} 125
6.5. Οι ομάδες ισομετρίας $\mathrm{Isom}(M_{\kappa}^{n})$ 131
6.6. Ομάδα ισομετριών του $\mathbb{E}^{n}$ 136
6.7. Ομάδα ισομετριών της S^{n} 137
6.8. Ομάδα ισομετριών του $\mathbb{H}^{n}$ 137
7. Χώροι με Νόρμα 139
7.1. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο – Χώροι με νόρμα 139
7.2. Οι χώροι Hilbert $\ell^{2}(S)$ 145
7.3. Οι χώροι ℓ_{n}^{p} 148
7.4. Ισομετρίες στους χώρους με νόρμα 152
8. Χώροι με Εσωτερική Μετρική 159
8.1. Καμπύλη μετρικού χώρου – Μήκος Καμπύλης 159
8.2. Χώροι με εσωτερική μετρική 164
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 171

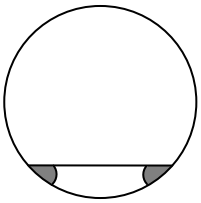
1. Ιστορική Αναζήτηση

1.1. Η γωνία πριν τον Ευκλείδη

Η έννοια της γωνίας κάνει την εμφάνισή της σχετικά νωρίς στην ιστορία των μαθηματικών και ουσιαστικά εξελίσσεται μαζί με αυτά. Οι γωνίες φαίνεται να εμπλέκονται αρχικά σε προβλήματα της αστρονομίας αλλά και προβλήματα αναφορικά με την κατασκευή κτιρίων. Ο πάπυρος Rhind, ένα από τα αρχαιότερα μαθηματικά κείμενα που έχουν βρεθεί και χρονολογείται γύρω στο 1800 π.Χ., περιέχει 84 προβλήματα, πέντε από τα οποία ασχολούνται με τις πυραμίδες. Και στα πέντε αυτά προβλήματα αναφέρεται ο όρος σεϊκέτ, άλλοτε ζητείται και άλλοτε δίνεται, ο οποίος από τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων αυτών προκύπτει να είναι η συνεφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η βάση της πυραμίδας με την τριγωνική έδρα της. Βέβαια, σε καμία περίπτωση δεν αντιμετωπίζεται αλλά ούτε και χρησιμοποιείται με αυτή την έννοια.

Στη Μεσοποταμία, οι **Βαβυλώνιοι** αστρονόμοι κρατούσαν σχολαστικά αρχεία για την ανατολή και τη δύση κάποιων αστέρων, για την κίνηση των πλανητών, καθώς και για τις ηλιακές και σεληνιακές εκλείψεις. Όλες αυτές οι παρατηρήσεις είχαν να κάνουν με τη μέτρηση των γωνιακών αποστάσεων πάνω στον ουράνιο θόλο, δηλαδή

ένα συνδυασμό μετρήσεων απόστασης και χρόνου. Οι Σουμέριοι, πριν από τους Βαβυλώνιους είχαν ως μονάδα μέτρησης το «μίλι» που αντιστοιχεί σε 10 χιλιόμετρα. Η μονάδα αυτή έγινε και μονάδα χρόνου καθώς ήταν ο χρόνος που χρειαζόταν κάποιος να διανύσει μια απόσταση ενός μιλίου. Αυτές οι μονάδες αργότερα ανεξαρτητοποιήθηκαν μερικώς. Στο πρώτο μέρος της πρώτης χιλιετίας, οι Βαβυλώνιοι μετέφεραν αυτό το «μίλι» στη μέτρηση των ουράνιων γεγονότων δεχόμενοι ότι ο αριθμός των μιλίων που περιείχε μία ημέρα είναι ίσος με μία περιστροφή των ουρανών. Μία ημέρα περιείχε 12 μίλια και επομένως και ο ουρανός περιείχε επίσης 12 μίλια. Κάθε ένα από αυτά τα μίλια διαιρείτο σε 30 «μήκη» τα οποία παρήγαγαν 360 μέρη όλου του ουρανού. Αυτές φαίνονται να είναι οι απαρχές της αστρονομικής διαίρεσης του χρόνου σε 360° και επομένως και της διαίρεσης του κύκλου σε 360°. Αυτές οι «μοίρες» ήταν οι θεμελιώδεις μονάδες για τη μέτρηση όχι μόνο των τόξων αλλά και του χρόνου. Αυτός ο τρόπος μέτρησης του χρόνου με τη χρήση μιας μονάδας απόστασης επηρέασε τόσο τους Έλληνες όσο και τους Ρωμαίους. Ο Ηρόδοτος, αναφέρει ότι η χρήση του γνώμονα, ενός οργάνου για τη μέτρηση του χρόνου με βάση τη σκιά που δημιουργεί μια κατακόρυφη ράβδος, ήταν γνωστή στους Βαβυλωνίους οι οποίοι τη μετέδωσαν και στους Έλληνες. Βέβαια, θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι σε κανένα από τα γραπτά αυτής της περιόδου που έχουν βρεθεί δεν αναφέρεται καν ο όρος γωνία, πόσο μάλλον ο ορισμός αυτής της έννοιας. Όπως αναφέρει ο Πλάτωνας, οι Έλληνες γεωμέτρες ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν τη λέξη γωνία και μάλιστα για να τις διακρίνουν σε οξείες, ορθές και αμβλείες.



Στον **Αριστοτέλη**, ειδικότερα στο έργο του Αναλυτικά Ύστερα, συναντάμε μια άλλη απόδειξη της πρότασης Ι.5 των Στοιχείων, «Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται», στην οποία αποδεικνύεται ότι οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, από όπου διαφαίνεται η διευρυμένη έννοια που είχαν οι αρχαίοι Έλληνες για τη γωνία. Γωνίες δεν σχηματίζουν μόνο οι ευθείες γραμμές, αλλά γωνία είναι και το επίπεδο σχήμα που περικλείεται από την περιφέρεια του κύκλου και μια χορδή του κύκλου (μικτή γωνία) όπως φαίνεται στο

σχήμα.

Ένα πρωτεύον θέμα κατά τον Αριστοτέλη είναι ο καθορισμός της φύσης των γεωμετρικών αντικειμένων. Χαρακτηριστικά, στο έργο του *Κατηγορίαι* αναφέρει:
«Τῶν κατὰ μηδεμίαν συμπλοκὴν λεγομένων ἕκαστον ἤτοι οὐσίαν σημαίνει **ἢ ποσὸν** ἢ **ποιὸν** ἢ **πρός τι** ἢ ποὺ ἢ ποτὲ ἢ οὐσίαν σημαίνει ἢ ποσὸν ἢ ποιὸν ἢ πρός τι ἢ ποὺ ἢ ποτὲ ἢ κεῖσθαι ἢ ἔχειν ἢ ποιεῖν ἢ πάσχειν.» [1b25–28]

Σύμφωνα με τον ίδιο, το μήκος είναι ποσότητα (ποσὸν), η παραλληλία σχέση (πρός τι) και το τρίγωνο ποιότητα (ποιὸν).Σύμφωνα με τον Πρόκλο, στα σχόλιά του στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων, ο Εύδημος, μαθητής του Αριστοτέλη, ασπαζόταν την άποψη ότι η γωνία είναι ποιότητα. Για τον Αριστοτέλη, η γωνία, ευθύγραμμη ή μεικτή, φαίνεται να είναι ένα είδος σχήματος ενώ μάλλον συμφωνεί με την επικρατούσα αντίληψη της εποχής του ότι η επίπεδη γωνία είναι ό,τι σχηματίζεται από μια «κεκαμμένην» γραμμή, γεγονός που προκύπτει από τη συχνότητα της χρήσης της λέξης «κλάσις» καθώς και άλλων μορφών του αρχαίου ρήματος «κλαν».

Αναφορικά, τώρα, με την σχέση που έχουν οι γωνίες μεταξύ τους, ο Αριστοτέλης διερωτάται αν η ορθή είναι πρότερη της οξείας γωνίας ή το αντίστροφο. Έτσι στο έργο του, *Μετά τα Φυσικά* χαρακτηριστικά αναφέρει:
«καὶ ἔστι μὲν ὡς ἡ ὀρθὴ προτέρα τῆς ὀξείας,ὅτι ὥρισται καὶ διαιρεῖται. ὡς μὲν δὴ ὕλη ἡ ὀξεῖα καὶ τὸ στοιχεῖον καὶ ἡ μονὰς πρότερον, ὡς δὲ κατὰ τὸ εἶδος καὶ τὴν οὐσίαν τὴν κατὰ τὸν λόγον ἡ ὀρθὴ καὶ τὸ ὅλον τὸ ἐκ τῆς ὕλης καὶ τοῦ εἴδους· ἐγγύτερον γὰρ τοῦ εἴδους καὶ οὗ ὁ λόγος τὸ ἄμφω, γενέσειδ' ὕστερον. πῶς οὖν ἀρχὴ τὸ ἕν; ὅτι οὐ διαιρετόν, φασίν· ἀλλ' ἀδιαίρετον καὶ τὸ καθόλου καὶ τὸ ἐπὶμέρους καὶ τὸ στοιχεῖον. ἀλλὰ τρόπον ἄλλον, τὸ μὲν κατὰ λόγον τὸ δὲ κατὰ χρόνον. ποτέρως οὖν τὸ ἓν ἀρχή; ὥσπερ γὰρ εἴρηται, καὶ ἡ ὀρθὴ τῆς ὀξείας καὶ αὕτη ἐκείνης δοκεῖ προτέρα εἶναι, καὶ ἑκατέρα μία. ἀμφοτέρως δὴ ποιοῦσι τὸ ἓν ἀρχήν. ἔστι δὲ ἀδύνατον· τὸ μὲν γὰρ ὡς εἶδος καὶ ἡ οὐσία τὸ δ' ὡς μέρος καὶ ὡς ὕλη. ἔστι γάρ πως ἓν ἑκάτερον» [1084b 7–20].

Κατά μία άποψη η ορθή γωνία είναι πρότερη της οξείας γιατί η ορθή είναι ορισμένη και είναι κατά τον οριστικό λόγο πρότερη αλλά κατά μία άλλη άποψη η οξεία είναι πρότερη γιατί η οξεία είναι μέρος της ορθής και η ορθή διαιρείται σε οξείες γωνίες. Για τον Αριστοτέλη, επομένως, η οξεία γωνία είναι πρότερη ως ύλη

ενώ η ορθή είναι πρότερη από την άποψη του είδους και της ουσίας και το από την ύλη και το είδος συνθεμένο σύνολο.

1.2. Η γωνία στα Στοιχεία του Ευκλείδη και άλλες απόψεις κατά την αρχαιότητα

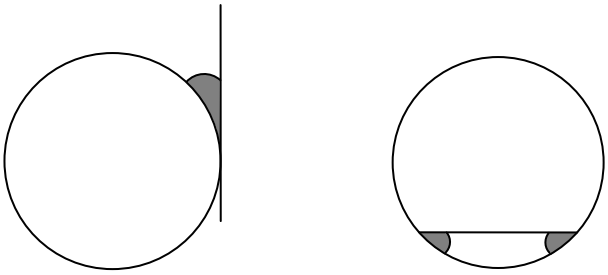
Ο **Ευκλείδης** στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων παραθέτει τους ορισμούς των βασικών γεωμετρικών εννοιών ανάμεσα στους οποίους είναι και ο ορισμός της επίπεδης γωνίας. Πιο συγκεκριμένα, στον ορισμό (η), αναφέρει:

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Ο Ευκλείδης ορίζει τη γωνία να είναι η κλίση μεταξύ δύο γραμμών στο επίπεδο που δεν βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας και άπτονται. Να σημειώσουμε εδώ ότι η λέξη «κλίσις» δεν απαντάται στον Αριστοτέλη παρά μάλλον εμφανίζεται για πρώτη φορά στα Στοιχεία. Βέβαια, όπως και ο Αριστοτέλης, έτσι και ο Ευκλείδης δέχεται ότι μία γωνία μπορεί να σχηματίζεται από καμπύλες και όχι μόνο από ευθείες. Για να το διευκρινίσει αυτό, δίνει στη συνέχεια (όρος θ), τον ορισμό της ευθύγραμμης γωνίας τον οποίο και παραθέτουμε από το αρχαίο κείμενο.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Αν, λοιπόν, οι γραμμές που περιέχουν τη γωνία είναι ευθείες η γωνία θα λέγεται ευθύγραμμη γωνία.

Κατά μήκος των Στοιχείων οι επίπεδες γωνίες που συναντάμε με σημερινή ορολογία σχηματίζονται είτε από ευθείες, είτε από μία ευθεία και την περιφέρεια ενός κύκλου (κερατοειδής γωνία, γωνία τμήματος).



Από τον πρώτο ορισμό, φαίνεται ότι ο Ευκλείδης μάλλον θεωρεί τη γωνία ως ένα σύνολο δύο γραμμών με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, ενώ ο δεύτερος από τους δύο παραπάνω ορισμούς προσδίδει στη γωνία την έννοια της περιοχής που περικλείεται

από δύο γραμμές οι οποίες στον συγκεκριμένο ορισμό είναι ευθείες. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τους άλλους τρεις ορισμούς που έπονται για την ορθή, την αμβλεία και την οξεία γωνία.

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, **ὀρθὴ** ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

Διαφαίνεται, λοιπόν, η ιδέα ότι η γωνία είναι μέγεθος, δηλαδή οι γωνίες δύναται να έχουν λόγο μεταξύ τους, και αφού έχουν λόγο μεταξύ τους, καθεμιά πολλαπλασιαζόμενη να μπορεί να υπερέχει της άλλης, κάτι που επιβεβαιώνεται και από την πρόταση VI.33 η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

και σε ελεύθερη μετάφραση αποδίδουμε ως:

«Σε ίσους κύκλους, οι γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο προς τα τόξα στα οποία βαίνουν, είτε αυτές είναι επίκεντρες είτε εγγεγραμμένες.»

Παρά το γεγονός ότι ο ορισμός (η) αναφέρεται σε γραμμές γενικά και όχι απαραίτητα σε ευθείες, εμπεριέχει την έκφραση «καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων» γεγονός που κατά πολλούς προβληματίζει. Για τον Ευκλείδη, η γωνία δεν είναι το αποτέλεσμα της κλάσεως (του σπασίματος) μιας ευθείας, δηλαδή οι πλευρές της δεν προέρχονται από την ίδια ευθεία. Θα μπορούσαμε όμως να θεωρήσουμε ότι σε αυτό το σημείο ο Ευκλείδης θέλησε να αποκλείσει από τον ορισμό της γωνίας την ευθεία γωνία δηλαδή τη γωνία που ισούται με δύο ορθές. Γενικά, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι κατά τον Ευκλείδη μία γωνία και εν γένει το μέτρο της, δεν μπορεί να υπερβαίνει τις δύο ορθές. Επιβεβαίωση αυτού του ισχυρισμού μπορεί να αποτελέσει η πρόταση III.20 των Στοιχείων,

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ,

ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

στην οποία αποδεικνύεται ότι η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια από την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο. Κατά την απόδειξη της πρότασης αυτής, εξετάζεται μόνον η περίπτωση κατά την οποία η εν λόγω γωνία είναι

μικρότερη από δύο ορθές, ενώ μια πλήρης απόδειξη θα έπρεπε να εξετάζει και την περίπτωση που η γωνία ξεπερνά τις δύο ορθές. Αυτό το γεγονός θα μας οδηγήσει να ενστερνιστούμε την άποψη του T. L. Heath (vol.2, p.275), ο οποίος στα σχόλια του στην πρόταση VI.33 αναφέρει ότι ο Ευκλείδης, πιθανώς, δεν θεωρούσε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο μιας γωνίας ως μία γωνία καθώς αυτό δύναται να υπερβεί τις δύο ορθές. Ο **Ήρωνας** στα σχόλιά του αναφορικά στην πρόταση III.20, θεωρεί και την περίπτωση που η επίκεντρη γωνία είναι μεγαλύτερη από δύο ορθές όμως σε αυτή την περίπτωση μιλάει για γωνίες και όχι για μία γωνία.

Και φυσικά η γωνία ως μέγεθος υπόκειται σε μέτρηση με την έννοια της μέτρησης που υπάρχει στα Στοιχεία για τα ευθύγραμμα τμήματα, για τα εμβαδά και γενικότερα για τα μεγέθη. Αν ανατρέξουμε στα Στοιχεία του Ευκλείδη, θα παρατηρήσουμε ότι όπου εμφανίζονται γωνίες σε προτάσεις, αυτές εκφράζονται σε μέρη ή πολλαπλάσια της μιας ορθής γωνίας. Έτσι, για παράδειγμα, στην απόδειξη της πρότασης IV.15 (κατασκευή εξαγώνου εγγεγραμμένου σε δοθέντα κύκλο) χρησιμοποιείται το γεγονός ότι κάθε μία από τις ίσες γωνίες ισόπλευρου ισούται με το ένα τρίτο των δύο ορθών, αλλά ακόμα και στο λήμμα που έπεται της τελευταίας πρότασης του τελευταίου βιβλίου των Στοιχείων (πρόταση XIII.18) αποδεικνύεται ότι η γωνία του κανονικού πενταγώνου ισούται με ένα και ένα πέμπτο της ορθής γωνίας. Εν συντομία, λοιπόν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι γενικότερα στα Στοιχεία οι γωνίες εκφράζονται ή καλλίτερα μετρούνται σε ρητά πολλαπλάσια της ορθής.

Βέβαια, αν λάβουμε υπόψιν τον ορισμό της αναλογίας που βρίσκεται στο βιβλίο V (ορισμός ε) και αποδίδεται στον Εύδοξο κατά πληθώρα ερευνητών, τότε θα διαπιστώσουμε ότι η γενίκευση αυτή του (Πυθαγόρειου) ορισμού της αναλογίας, η οποία επεκτείνεται και στα ασύμμετρα μεγέθη, μπορεί να εφαρμοστεί και στις γωνίες, οι οποίες νοούνται ως μεγέθη. Δηλαδή, δύο γωνίες μπορεί να έχουν τον ίδιο λόγο με δύο άλλα μεγέθη όπως για παράδειγμα δύο τόξα κύκλου (πρόταση VI.33), δύο ευθύγραμμα τμήματα ή ακόμη και δύο αριθμοί. Ιδιαιτέρως δε, αν η δεύτερη γωνία είναι η ορθή, τότε οποιαδήποτε γωνία μπορεί να εκφραστεί ως «γινόμενο» ενός πραγματικού αριθμού επί την ορθή. Η περίπτωση βέβαια όπου ο λόγος δύο γωνιών ισούται με το λόγο δύο αριθμών δεν εμφανίζεται άμεσα στα Στοιχεία και για αυτό το λόγο έχει αμφισβητηθεί από πολλούς ότι ο Ευκλείδης δεν το είχε κατά νου. Κύριο επιχείρημα αυτής της άποψης, είναι το γεγονός ότι οι λόγοι αριθμών αποτελούν

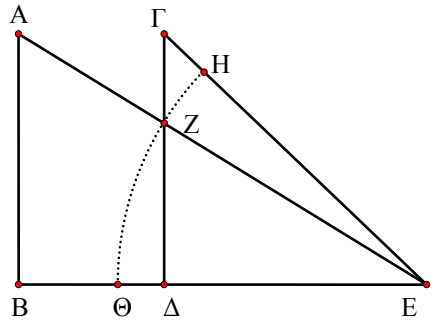
αντικείμενο μελέτης αποκλειστικά του βιβλίου VII των Στοιχείων. Εξάλλου σε αυτό το πνεύμα κινείται και η πρόταση στην οποία αποδεικνύεται ότι τα σύμμετρα μεγέθη έχουν λόγο ίσο με λόγο αριθμού προς αριθμό ενώ τα ασύμμετρα μεγέθη δεν δύναται να έχουν λόγο ίσο με λόγο αριθμού προς αριθμό. Από την άλλη, το μέγεθος είναι κάτι πιο γενικό από τον αριθμό και επομένως ο αριθμός όπως αυτός ορίζεται στο βιβλίο VII είναι μέγεθος. Για να επιχειρηματολογήσουμε περισσότερο επ'αυτού σημειώνουμε ότι και ο Αριστοτέλης στο έργο του «Αναλυτικά Ύστερα» (I.5, 74a 17) σημειώνει ότι η ιδιότητα εναλλάξ (ιδιότητα αναλογιών) αποδείχτηκε χωριστά για αριθμούς, γραμμές χρόνους και στερεά παρά το ότι ήταν δυνατό να αποδειχτεί για όλα εφάπαξ. Ο Ευκλείδης πραγματεύεται το ίδιο αντικείμενο, την αναλογία δηλαδή, σε δύο διαφορετικά βιβλία, πιθανώς, τιμώντας την παράδοση, αποδίδοντας τις θεωρίες όπως τις βρήκε και με σκοπό να αποδώσει φόρο τιμής σε αυτούς που τις διετύπωσαν, όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται στο σχόλιο στον Πάππο (VII. p.678).

Και προχωρώντας στο βιβλίο VI και πιο συγκεκριμένα στην πρόταση 33 παρατηρεί κανείς ότι επιχειρείται μια προσπάθεια μέτρησης όλων των γωνιών, όμως η πρόταση αυτή δεν χρησιμοποιείται σε κανένα άλλο σημείο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Φυσικά γεννάται λοιπόν το ερώτημα ποιο το νόημα ο Ευκλείδης να καταγράψει αυτή την πρόταση, καθώς η πορεία αυτού του θαυμαστού έργου θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι διακατέχεται από το σκοπό δηλαδή οι αποδειχθείσες προτάσεις οδηγούν στην απόδειξη μιας πιο σημαντικής πρότασης. Το γεγονός βέβαια ότι αυτή η πρόταση είναι η τελευταία αυτού του βιβλίου μπορεί να σημαίνει ότι αυτή η πρόταση είναι ο σκοπός του βιβλίου VI. Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι υπήρξε αργότερα και μια προσθήκη του ***Θέωνα*** όπως δηλώνει ο ίδιος στα σχόλιά του πάνω στο «Μαθηματική Σύνταξις» του Πτολεμαίου. Έτσι, σύμφωνα με αυτό το πρόσθετο θεώρημα, *σε ίσους κύκλους οι επίκεντρες (αντίστοιχα εγγεγραμμένες) γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο προς τους αντίστοιχους κυκλικούς τομείς*. Το θεώρημα αυτό συνοδεύεται και από ένα πόρισμα που είναι ουσιαστικά το αντίστροφο του θεωρήματος. Το πόρισμα αυτό χρησιμοποιήθηκε από τον Ζηνόδωρο στο «Περί Ισομέτρων Σχημάτων» το οποίο σώζεται από το Θέωνα, πάλι, στα σχόλιά του πάνω στο «Μαθηματική Σύνταξις» του Πτολεμαίου. Και ενώ η πρόταση αυτή δεν χρησιμοποιείται ξανά στα Στοιχεία, την συναντάμε σε ένα άλλο από τα διασωθέντα έργα του Ευκλείδη, τα Οπτικά. Πιο συγκεκριμένα, η πρόταση

VI.33 και για την ακρίβεια η προσθήκη του Θέωνα, χρησιμοποιείται στην απόδειξη της πρότασης 8 η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Τὰ ἴση μεγέθη καὶ παράλληλα ἄνισον διεστηκότα ἀπὸ τοῦ ὄμματος οὐκἀναλόγως τοῖς διαστήμασιν ὁρᾶται.

και την οποία θα μπορούσαμε να αποδώσουμε ως: «Τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα απέχουν, όμως, άνιση απόσταση από τον οφθαλμό, δεν φαίνονται ανάλογα με τα διαστήματα (της αποστάσεώς τους)». Η απόδειξη της πρότασης αυτής έχει ως ακολούθως:



Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο ίσα και παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία απέχουν από τον οφθαλμό του παρατηρητή (σημείο Ε) αποστάσεις ΒΕ και ΔΕ αντίστοιχα και έστω ότι ΒΕ>ΔΕ. Τότε ο λόγος του ΒΕ προς το ΕΔ δεν είναι ίσος με το λόγο του ΑΒ προς το ΓΔ.

Έστω οι οπτικές ακτίνες ΑΕ και ΕΓ. Με κέντρο το Ε και ακτίνα το ΕΖ, γράφουμε τόξο κύκλου, το ΗΖΘ. Επειδή το τρίγωνο ΕΖΓ είναι μεγαλύτερο του κυκλικού τομέα ΕΖΗ, το δε τρίγωνο ΕΖΔ μικρότερο από τον κυκλικό τομέα ΕΖΘ, άρα το τρίγωνο ΕΖΓ προς τον τομέα ΕΖΗ έχει λόγο μεγαλύτερο από ότι το τρίγωνο ΕΖΔ προς τον τομέα ΕΖΘ. Με εναλλάξ, το τρίγωνο ΕΖΓ προς το τρίγωνο ΕΖΔ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι ο τομέας ΕΖΗ προς τον τομέα ΕΖΘ και με σύνθεση, το τρίγωνο ΕΓΔ προς το τρίγωνο ΕΖΔ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι ο τομέας ΕΗΘ προς τον τομέα ΕΖΘ. Αλλά όπως το τρίγωνο ΕΔΓ προς το τρίγωνο ΕΖΔ, έτσι και η ΓΔ προς τη ΔΖ. Η ΓΔ είναι ίση προς την ΑΒ και επομένως όπως η ΑΒ προς τη ΔΖ έτσι και η ΒΕ προς την ΓΔ. Άρα η ΒΕ προς την ΕΔ έχει λόγο μεγαλύτερο από ότι ο τομέας ΕΗΘ προς τον τομέα ΕΖΘ. ***Όπως δε ο τομέας ΕΗΘ προς τον τομέα ΖΕΘ, έτσι η γωνία ΗΕΘ προς τη γωνία ΖΕΘ***. Επομένως η ΒΕ προς την ΕΔ έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι η γωνία ΗΕΘ προς τη γωνία ΖΕΘ. Και από τη μεν γωνία ΗΕΘ φαίνεται το ΓΔ, από δε τη ΖΕΘ το ΑΒ. Συνεπώς τα ίσα μεγέθη δεν φαίνονται ανάλογα με την απόστασή τους.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι ο λόγος της ΒΕ προς την ΕΔ καθόλου τυχαίος δεν είναι καθώς θα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι με σύγχρονη γραφή είναι:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\measuredangle HE\Theta)}{\varepsilon\varphi(\measuredangle ZE\Theta)} = \frac{BE}{\Delta E} > \frac{\measuredangle HE\Theta}{\measuredangle ZE\Theta}.$$

Έτσι λοιπόν ο λόγος δύο γωνιών συνδέεται με το λόγο των εφαπτομένων των γωνιών αυτών και πέρα ίσως από την εμφάνιση των πρώτων ψηγμάτων τριγωνομετρίας στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά με μια επαναδιατύπωση της παραπάνω σχέσης φαίνεται να εισάγεται η έννοια της συνάρτησης, στη συγκεκριμένη περίπτωση της $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$.

Ο **Πρόκλος**, τώρα, στα σχόλιά του στο πρώτο βιβλίο των στοιχείων έρχεται να επιβεβαιώσει τη σύγχυση που επικρατεί για την έννοια της γωνίας στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Προσπαθεί να εξετάσει σε ποια κατηγορία ανήκει η γωνία. Είναι ποσότητα, ποιότητα ή σχέση; Η προσπάθεια αυτή πιθανώς έχει ως αφετηρία το έργο του Αριστοτέλη *Κατηγορίαι* απόσπασμα από το οποίο παραθέσαμε παραπάνω.

Υποστηρίζει ότι η γωνία εφόσον διαιρείται σε επιφάνειες από τη γραμμή ή σε στερεά από το επίπεδο δεν μπορεί παρά να είναι μέγεθος και μάλιστα όχι γραμμικό διότι η γραμμή διαιρείται από το σημείο. Θα πρέπει λοιπόν να είναι επιφάνεια ή στερεό. Αλλά αν είναι μέγεθος θα πρέπει όπως όλα τα ομογενή μεγέθη να είναι πεπερασμένα όντα και να έχουν λόγο μεταξύ τους, και αφού έχουν λόγο μεταξύ τους καθένα πολλαπλασιαζόμενο να μπορεί να υπερέχει του άλλου. Όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει για όλες τις ομογενείς γωνίες. Ο Πρόκλος σαν αντιπαράδειγμα φέρει την κερατοειδή και την ευθύγραμμη γωνία οι οποίες παρ' ότι είναι ομογενείς είναι αδύνατον η κερατοειδής να υπερβεί της ευθύγραμμης και αυτό διότι έχει αποδειχτεί ότι είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται στην πρόταση III.16 των Στοιχείων του Ευκλείδη. Άρα δεν υπάρχει αριθμός φυσικός τέτοιος ώστε όταν πολλαπλασιάσει την κερατοειδή γωνία αυτή να γίνει μεγαλύτερη οποιασδήποτε ευθύγραμμης γωνίας. Αυτό λοιπόν αντιβαίνει στην ιδιότητα « τὰ δὲ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δύναται ἀλλήλων ὑπερέχειν πολλα–πλασιαζόμενα» που είναι μια ελάχιστα διαφορετική διατύπωση του όρου [δ] του βιβλίου V των Στοιχείων του Ευκλείδη (ιδιότητα «Ευδόξου – Αρχιμήδους»). Ο όρος [δ] του βιβλίου V έχει ως εξής:

«Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα

ἀλλήλων ὑπερέχειν.»

και θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε με σύγχρονη ορολογία ως εξής: «Αν Α, Β δύο ομογενή μεγέθη με Α<Β, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος, ώστε νΑ>Β». Επομένως καταλήγει ο Πρόκλος ότι η γωνία δεν μπορεί να είναι μόνο μέγεθος.

Όμως η γωνία, σύμφωνα με το Πρόκλο, ούτε ποιότητα μόνο μπορεί να είναι αφού διχοτομείται – η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει την ποσότητα – και επιπλέον επειδή τα χαρακτηριστικά της ποιότητας δεν είναι το ίσο και το άνισο – κάτι που αναφέρεται περισσότερο στα μεγέθη – αλλά το λιγότερο και το περισσότερο. Έτσι, αν η γωνία ήταν μόνο ποιότητα δεν θα έπρεπε να λέμε αυτές οι γωνίες είναι άνισες και η μία είναι μεγαλύτερη από την άλλη αλλά ότι είναι ανόμοιες και η μία είναι περισσότερο γωνία και η άλλη λιγότερο κάτι που είναι ξένο προς τη φύση της γεωμετρίας διότι κάθε γωνία πρέπει να εμπίπτει στον ίδιο ορισμό για τη γωνία. Η άποψη ότι η γωνία είναι ποιότητα, ποιότητα με την έννοια της μορφής της (σχήμα), ενδεχομένως προέρχεται από τον Αριστοτέλη, ο οποίος μάλιστα χρησιμοποιεί και τον όρο όμοιες γωνίες.

Τέταρτον **δὲ γένος ποιότητος σχῆμά τε καὶ ἡ περὶ ἕκαστον ὑπάρχουσα μορφή**,ἔτι δὲ πρὸς τούτοις εὐθύτης καὶ καμπυλότης καὶ εἴ τι τούτοις ὅμοιόν ἐστιν· καθ' ἕκαστον γὰρ τούτων ποιόν τι λέγεται·τῷ γὰρ τρίγωνον ἢ τετράγωνον εἶναι ποιόν τι λέγεται, καὶ τῷ εὐθὺ ἢ καμπύλον. καὶ κατὰ τὴν μορφὴν δὲ ἕκαστον ποιόν τι λέγεται. [Αριστοτέλης, *Κατηγορίαι*, 10a11–16]

Ὅτι δὲ φέρεται καὶ πρὸς τὸ τῆς γῆς μέσον, σημεῖον ὅτι τὰ φερόμενα βάρη ἐπὶ ταύτηνοὐ παρ' ἄλληλα φέρεται ἀλλὰ πρὸς **ὁμοίας γωνίας**, ὥστε πρὸς ἓν τὸ μέσον φέρεται, καὶ τὸ τῆς γῆς. [Αριστοτέλης, *Περί Ουρανού*, 296b20–23]

Τέλος ο Πρόκλος, αναφέρει ότι η γωνία δεν μπορεί να είναι μόνο κλίση δηλαδή μια σχέση γραμμών ή επιπέδων διότι έτσι σε μία κλίση αντιστοιχούν περισσότερες από μία γωνίες (δηλαδή δεν ορίζεται μονοσήμαντα). Για να τεκμηριώσει τον ισχυρισμό του αυτό, φέρει το ακόλουθο παράδειγμα:

Αν τμήσουμε ένα κώνο κατά ένα τρίγωνο που να διέρχεται από την κορυφή του και να είναι κάθετο στη βάση του τότε οι πλευρές του τριγώνου που βρίσκονται στην μικτή επιφάνεια του κώνου ορίζουν μία κλίση αλλά δύο γωνίες μία επίπεδη αυτή του τριγώνου και μία στην επιφάνεια του κώνου.

Αφού λοιπόν καταλήγει στο ότι η γωνία δεν είναι ούτε μόνο ποσότητα, ούτε μόνο ποιότητα και ούτε μόνο σχέση, ο Πρόκλος καταλήγει στο ότι είναι κάτι και από τα τρία γένη όπως ακριβώς πίστευε και ο δάσκαλός του, ο Συριανός. Χρειάζεται την ποσότητα που σχετίζεται με τα μεγέθη ώστε να μπορούμε να μιλάμε για ισότητα και ανισότητα, χρειάζεται την ποιότητα ειδικότερα το γένος αυτής που έχει να κάνει με τη μορφή (σχήμα) και τέλος χρειάζεται την σχέση των γραμμών ή των επιπέδων που την περιέχουν. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το τρίγωνο.

Ο Πρόκλος φαίνεται να διαφωνεί με τον Ευκλείδειο ορισμό καθώς ισχυρίζεται ότι σύμφωνα με αυτό τον ορισμό μια γωνία δεν μπορεί να σχηματιστεί μόνο από μια γραμμή και φέρει σαν παράδειγμα την κισσοειδή γραμμή, η οποία σχηματίζει γωνία με τον εαυτό της. Επιπλέον θεωρεί ότι η γωνία ορίζεται μόνο ως κλίση ενώ ο ίδιος θεωρεί ότι είναι και ποιότητα και ποσότητα. Τέλος, ο ορισμός περιέχει τη συνθήκη «μὴ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι» την οποία δεν θεωρεί αναγκαία καθώς οι περιφέρειες δεν είναι δυνατόν να βρίσκονται στην ίδια ευθεία αλλά πλεονάζουσα αφού η κλίση δύο γραμμών σχηματίζει γωνία.

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι από τον Πρόκλο μαθαίνουμε και άλλες απόψεις των αρχαίων για το τι είναι γωνία ενώ στο ίδιο εδάφιο προχωρεί σε μια κατηγοριοποίηση των γωνιών. Έτσι,

τοῦ δὲ Ἀπολλωνίου συναγωγὴν ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ πρὸς ἑνὶ σημείῳ ὑπὸ κεκλασμένῃ γραμμῇ ἢ ἐπιφανείᾳ– δοκεῖ γὰρ οὗτος καθόλου πᾶσαν ἀφορίζεσθαι γωνίαν

σύμφωνα με τον **Απολλώνιο** (περίπου 262–190 π.Χ) γωνία είναι η «συναγωγή», θα μπορούσαμε να πούμε η συστολή ή σύγκλιση, μιας επιφάνειας ή ενός στερεού προς ένα σημείο κάτω από μια κεκλασμένη γραμμή ή επιφάνεια. Με πιο σύγχρονη ορολογία θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε, σύμφωνα με αυτή την άποψη, τη γωνία ως τομή γραμμών, επιπέδων ή επιφανειών.

Ο **Εύδημος** ($4^{ος}$–$3^{ος}$ αι. π.Χ) θεωρεί ότι η γωνία είναι ποιότητα καθώς η ευθύτητα είναι ποιότητα και η γωνία είναι η «κλάσις» των γραμμών, ένας ορισμός που συμβαδίζει με τη άποψη του Αριστοτέλη. Χαρακτηριστικά, για τον Εύδημο ο Πρόκλος γράφει:

Εὔδημος μὲν ὁ περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γράψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι

συνεχώρησεν. γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπινοῶν οὐκ ἄλλην εἶναί φησιν ἢ τὴν κλάσιντῶν γραμμῶν–εἰ δὲ ἡ εὐθύτης ποιότης καὶ ἡ κλάσις ποιότης–ἐν ποιότητι οὖν ἔχουσαν αὐτὴν τὴν γένεσιν πάντως εἶναι ποιότητα.

Ο **Πλούταρχος**, πάλι από τα σχόλια του Πρόκλου, θεωρεί τη γωνία ως το πρώτο διάστημα υπό το σημείο σε συμφωνία με τον ορισμό της γωνίας από τον Απολλώνιο. Διαφαίνεται μια τάση θεώρησης της γωνίας ως την απόκλιση των γραμμών που σχηματίζουν τη γωνία.

ποσότητα δὲ εἰρήκασιν αὐτήν, ὅσοι φασὶ τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν, ὧν καὶ ὁ Πλούταρχός ἐστιν, εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν Ἀπολλώνιον.

Ο **Κάρπος ο Αντιοχεύς**, φαίνεται να θεωρεί τη γωνία ως την απόσταση των γραμμών ή των επιφανειών που την περιέχουν, άποψη που μάλλον συμφωνεί σε ένα βαθμό με αυτή του Πλούταρχου, αλλά παραδόξως δεν θεωρούσε αυτή την απόσταση ως ευθεία.

Κάρπος δὲ ὁ Ἀντιοχεὺς ποσὸν μὲν εἶναί φησι τὴν γωνίαν καὶ διάστημα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν.

Τίποτε άλλο δεν γνωρίζουμε, όμως, για τις απόψεις αυτές πέρα από τα σχόλια του Πρόκλου.

1.3. Σύγχρονες αντιλήψεις για τη γωνία

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι η έννοια της γωνίας απασχόλησε αρκετά τους αρχαίους καθώς εγείρονταν παράλληλα και φιλοσοφικά ζητήματα. Η κερατοειδής γωνία ιδιαιτέρως αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών μέχρι πρόσφατα στην ιστορία των Μαθηματικών καθώς δεν υπακούει στην αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδους δηλαδή χρειάστηκε η θεωρία των απειροστών για να γίνει αντιληπτή η ιδιαιτερότητά της. Ένας από τους σημαντικότερους λόγους για την σύγχυση γύρω από την έννοια της γωνίας είναι η στενή σχέση που είχε η γεωμετρία με την εποπτεία. Όταν, μόλις τον $20^{ο}$ αιώνα, κυριαρχεί η τάση αποδέσμευσης της γεωμετρίας από το σχήμα, αναπτύσσονται δύο νέες αντιλήψεις για τη γωνία.

Ο **Hilbert** (1862–1943), εκπρόσωπος της Σχολής των Φορμαλιστών, σε μια απόπειρα αξιωματικής θεμελίωσης της γεωμετρίας, η οποία κατά γενική ομολογία

κινείται στο πνεύμα του Ευκλείδη, δεν συμπεριλαμβάνει σε αυτό το οικοδόμημα την οντολογική ανάλυση των θεμελιακών εννοιών και κατηγορηματικά απορρίπτει την εποπτεία. Εισάγει πολύ προσεκτικά την έννοια της γωνίας ενώ παράλληλα θεσμοθετεί την «μεταφορά» τους.

Το αξίωμα του **Pasch** –ένα από τα αξιώματα της δεύτερης ομάδας αξιωμάτων, αυτών του «μεταξύ»– είναι αυτό που ουσιαστικά καθορίζει την έννοια του ημιεπιπέδου, ενώ ανάλογα ορίζεται η έννοια της ημιευθείας. Η γωνία, σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, είναι το σύστημα δύο ημιευθειών με κοινή αρχή. Οι ημιευθείες αυτές καλούνται πλευρές της γωνίας, ενώ ως εσωτερικό της γωνίας ορίζουμε να είναι η τομή δύο ημιεπιπέδων καθένα από τα οποία καθορίζεται από την ευθεία που περιέχει μία πλευρά της γωνίας και ένα σημείο της άλλης πλευράς της γωνίας.

Η τρίτη ομάδα αξιωμάτων, δηλαδή τα αξιώματα της «συμφωνίας» που αντιστοιχούν στην ισότητα αλλά την ισότητα με την ευρεία έννοια (όχι απαραίτητα την ταυτότητα), κατοχυρώνουν τη μεταφορά τόσο των ευθυγράμμων τμημάτων όσο και των γωνιών που ενδιαφέρει περισσότερο. Ανάμεσα στις γωνίες δεχόμαστε ότι υπάρχει μια σχέση ισοδυναμίας και θα λέμε ότι δύο γωνίες θα είναι «σύμφωνες» ή «ίσες» όταν συνδέονται με αυτή τη σχέση. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας και για αυτή την ενότητα τη σχέση αυτή θα τη συμβολίζουμε απλά με «=». Η έννοια του αθροίσματος δύο γωνιών ορίζεται μόνο για διαδοχικές γωνίες, δηλαδή εκείνες τις γωνίες που έχουν κοινή πλευρά αλλά κανένα άλλο κοινό εσωτερικό σημείο. Ανάλογα, το ν–πολλαπλάσιο μιας γωνίας είναι η γωνία που προκύπτει από το άθροισμα ν ίσων γωνιών προς τη δοθείσα γωνία (μεταφέροντας πάντα κατάλληλα τη γωνία ώστε να έχει νόημα το άθροισμα). Τέλος, το πρώτο από τα δύο αξιώματα της συνέχειας, που είναι το αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδους, θεσμοθετεί τη δυνατότητα μέτρησης των γωνιών. Το αξίωμα αυτό για τις γωνίες μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

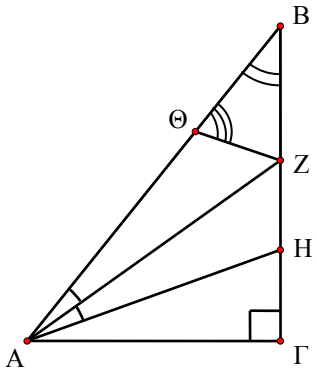
Αν δοθούν δύο γωνίες, τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός λ έτσι ώστε το 2^{λ}–πολλαπλάσιο της μιας γωνίας να είναι γωνία μεγαλύτερη από την άλλη.

Βέβαια το αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδους δεν είναι τόσο προφανές ότι ισχύει για τις γωνίες. Θεωρούμε σκόπιμο, λοιπόν, σε αυτό το σημείο να παραθέσουμε μια απόδειξη για την ισχύ του αξιώματος αυτού για τις γωνίες, αφού πρώτα αποδείξουμε ένα λήμμα το οποίο θα μας χρειαστεί.

Λήμμα

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\measuredangle\Gamma = 1$ ορθή και Η ένα σημείο της πλευράς ΒΓ. Αν $\measuredangle HAZ = \measuredangle ZAB$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ, τότε ΗΖ<ΖΒ.

Απόδειξη



Μεταφέρουμε το ΑΗ στην ημιευθεία ΑΒ έτσι, ώστε ΑΗ=ΑΘ. Τότε το Θ είναι μεταξύ των Α και Β (Α–Θ–Β), αφού στο τρίγωνο ΑΗΒ είναι ΑΒ>ΑΗ διότι $\measuredangle AHB = \measuredangle ABH$. Από τα «σύμφωνα» τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΘΖ έχουμε ότι $\measuredangle AZH = \measuredangle AZ\Theta$, οπότε

$\measuredangle \Theta BZ < \measuredangle AZH = \measuredangle AZ\Theta < \measuredangle B\Theta Z$ (η $\measuredangle AZH$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΖ και η $\measuredangle B\Theta Z$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΘ) και επομένως ΗΖ=ΘΖ<ΖΒ.

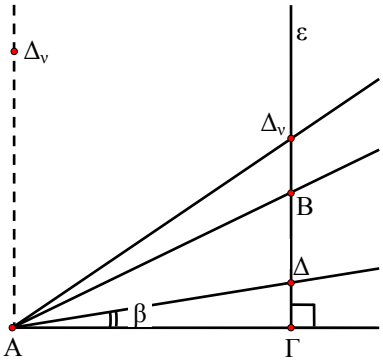
Αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδους για γωνίες

Αν α και β δύο γωνίες, τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός λ έτσι ώστε $\alpha<2^{\lambda}\cdot\beta$.

Απόδειξη

Η ύπαρξη μοναδικού μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος μας εξασφαλίζει την ύπαρξη αλλά και τη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας γωνίας. Επομένως η γωνία α διχοτομείται και αν $\frac{1}{2}\alpha < \beta$, τότε η σχέση $\alpha<2^{\lambda}\cdot\beta$ ισχύει για λ=1, ενώ αν $\frac{1}{2}\alpha = \beta$ σχέση $\alpha<2^{\lambda}\cdot\beta$ ισχύει για λ=2.

Έστω ότι $\frac{1}{2}\alpha > \beta$. Μεταφέρουμε κατάλληλα τις γωνίες α και β ώστε να ισχύει $\frac{1}{2}\alpha = \measuredangle B\Gamma A$ και $\beta = \measuredangle \Gamma A\Delta$, όπως ακριβώς φαίνεται στο διπλανό σχήμα δηλαδή η ευθεία των Β και Γ, έστω ε, να είναι κάθετη στην ευθεία των Α και Γ). Αν η ημιευθεία $A\Delta_\nu$ είναι τέτοια ώστε η $\measuredangle \Gamma A\Delta_\nu$ να είναι το ν–πλάσιο της $\beta = \measuredangle \Gamma A\Delta$, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:



Αν η ευθεία των Α και Δ_ν, για κάποιο ν, είναι παράλληλη προς την ε, τότε το εσωτερικό της $\measuredangle \Gamma A\Delta_\nu$ περιέχει σημεία που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς

την ευθεία των Α, Γ με το Β. Επιπλέον, τα σημεία που ανήκουν στην ημιευθεία ΑΒ βρίσκονται στο εσωτερικό της $\measuredangle \Gamma A \Delta_\nu$. Επομένως,

$$\nu \cdot \beta = \nu \cdot (\measuredangle \Delta A \Gamma) = \measuredangle \Delta_\nu A \Gamma > \measuredangle B A \Gamma .$$

Αν, τώρα, κάθε ημιευθεία $A\Delta_\nu$ έχει κοινά σημεία με την ε, χωρίς βλάβη μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Δ_ν είναι σημείο της ευθείας ε. Τότε, για κάθε $\nu>1$ ισχύει $\Gamma\Delta_\nu>\nu\cdot\Gamma\Delta$ σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα. Από το αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδους για τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΓΒ, υπάρχει ν τέτοιο ώστε $\nu\cdot\Gamma\Delta>\Gamma B$, δηλαδή $\Gamma\Delta_\nu>\Gamma B$, επομένως το Β θα είναι μεταξύ των Γ και Δ_ν ($\Gamma-B-\Delta_\nu$), άρα

$$\nu \cdot \beta = \nu \cdot (\measuredangle \Delta A \Gamma) = \measuredangle \Delta_\nu A \Gamma > \measuredangle B A \Gamma .$$

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, αν επιλέξουμε λ τέτοιο, ώστε $\nu<2^{\lambda-1}$, έχουμε $\frac{1}{2}\alpha < \nu \cdot \beta < 2^{\lambda-1} \cdot \beta$, δηλαδή $\alpha<2^{\lambda}\cdot\beta$.

Όπως προαναφέραμε, το παραπάνω θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα μέτρησης. Έτσι, λοιπόν, αν θέλουμε να μετρήσουμε τη γωνία α με μονάδα μέτρησης τη γωνία β ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Προσδιορίζουμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό λ_0 για τον οποίο ισχύει $\alpha < 2^{\lambda_0} \cdot \beta$, οπότε τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε $\alpha = (2^{\lambda_0} - 1) \cdot \beta$, είτε $\alpha > \left(2^{\lambda_0} - 1\right) \cdot \beta$. Στην πρώτη περίπτωση το μέτρο της γωνίας α είναι $2^{\lambda_0} - 1$. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $(2^{\lambda_0} - 1) \cdot \beta < \alpha < 2^{\lambda_0} \cdot \beta$ και ακολουθούμε τώρα την ίδια διαδικασία μετρώντας τη γωνία α με μονάδα μέτρησης τη γωνία $\frac{1}{2}\beta$, δηλαδή προσδιορίζουμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό μ_0 για τον οποίο ισχύει $\alpha < 2^{\mu_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\beta\right)$, οπότε τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε $\alpha = (2^{\mu_0} - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\beta\right)$, οπότε το μέτρο της γωνίας α είναι $\frac{2^{\mu_0} - 1}{2}$ είτε $\alpha > (2^{\mu_0} - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\beta\right)$, κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο, ο οποίος ομοιάζει με τη μέθοδο της εξάντλησης, το μέτρο της γωνίας α, αν η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έπ' άπειρον, προκύπτει να είναι το όριο μιας ακολουθίας ρητών προσεγγίσεων του μέτρου της.

Αφού, λοιπόν, περιγράψαμε με λακωνικό τρόπο την έννοια της γωνίας κατά

Hilbert, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όπως και στον Ευκλείδη η γωνία δεν δύναται να υπερβεί τις δύο ορθές. Και φυσικά με τον τρόπο που ορίζεται η γωνία σε αυτό το αξιωματικό σύστημα αποκλείουμε την περίπτωση της κερατοειδούς γωνίας μιας και αυτή δεν υπακούει στο αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδους. Η προσέγγιση αυτή, ίσως βέβαια όχι τόσο αυστηρά θεμελιωμένη αξιωματικά, ακολουθείται από το αναλυτικό πρόγραμμα στα σχολεία της χώρας μας και όχι μόνο.

Ο **Klein** (1848–1925), πάλι σε μια προσπάθεια να απαλλάξει τη γεωμετρία από την εποπτεία οδηγείται σε αυτό που σήμερα καλούμε «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας. Έτσι, λοιπόν, η «Γεωμετρία» κατά Klein σε ένα σύνολο X, όπως αυτή διατυπώθηκε το 1870 στα πλαίσια του προγράμματος Erlagen, είναι ένα ζεύγος (X,G) όπου G είναι μια υποομάδα των ένα προς ένα και επί απεικονίσεων από το X στο X. Περιεχόμενο της θεωρίας μιας τέτοιας γεωμετρίας είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των «σχημάτων» (τα σχήματα είναι μη κενά υποσύνολα του X) που είναι αναλλοίωτες ως προς την G. Ουσιαστικά λοιπόν αυτό που διαφοροποιεί τις Γεωμετρίες είναι η ομάδα G δηλαδή οι μετασχηματισμοί τους.

Αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος και G η ομάδα των επί ισομετριών από τον X στον X τότε το ζεύγος (X,G) είναι μια Γεωμετρία κατά Klein, η Γεωμετρία των μετρικών χώρων. Ειδικότερα, η Ευκλείδεια Γεωμετρία κάτω από αυτή την οπτική, είναι το ζεύγος (X,G), όπου X είναι το $\mathbb{R}^2$ και G οι επί ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή η G αποτελείται από τους μετασχηματισμούς εκείνους που έχουμε συνηθίσει να ονομάζουμε στερεές κινήσεις).

Οι σύγχρονες απόψεις για την έννοια της γωνίας είναι προφανώς επηρεασμένες από το έργο του Klein και κάνουν χρήση αυτής της αλγεβρικής προσέγγισης. Έτσι, όπως θα δούμε και στη συνέχεια της εργασίας αυτής, ο **Dieudonne** όπως και πολλοί άλλοι, ορίζουν την ομάδα των γωνιών ως μια προσθετική ομάδα ισόμορφη με την ομάδα των στροφών του Ευκλείδειου επιπέδου.

2. Ο Ευκλείδειος Χώρος

Στο κεφάλαιο αυτό επιλέγουμε να παρουσιάσουμε μια όσο το δυνατόν σύντομη περιγραφή της πορείας προς τη θεμελίωση του Ευκλείδειου χώρου και πιο συγκεκριμένα του Ευκλείδειου Επιπέδου, το οποίο, στα επόμενα κεφάλαια θα αποτελέσει το πλαίσιο στο οποίο θα ορίσουμε την έννοια της γωνίας. Η δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών θεωρείται δεδομένη, επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι θα ακολουθήσουμε μια αναλυτική προσέγγιση. Απαραίτητο εργαλείο σε αυτή τη πορεία αποτελεί η γραμμική άλγεβρα με τη βοήθεια της οποίας απαλλασσόμαστε από την εποπτεία αλλά συγχρόνως δεν καταργούμε και την ισχύ του σχήματος.

2.1. Βασικές αλγεβρικές έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε όλες εκείνες τις έννοιες αλλά και τον απαιτούμενο συμβολισμό από την γραμμική άλγεβρα, που είναι απαραίτητα για την κατανόηση του υπόλοιπου κεφαλαίου. Ο λόγος που επιλέγουμε να παρεμβάλλουμε αυτή την παράγραφο, είναι η πληρέστερη εικόνα της πορείας που ακολουθούμε. Ουσιαστικά, λοιπόν, αυτό που θα κάνουμε είναι να δώσουμε τους ορισμούς που θα χρησιμοποιούμε καθώς και μερικές προτάσεις και παρατηρήσεις, οι αποδείξεις των

οποίων ενίοτε θα παραλείπονται καθώς δεν αποτελούν στόχο της παρούσας εργασίας.

Ορισμός 2.1.1

Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση φ από τον V στον W θα λέγεται ***γραμμική***, αν για όλα τα x, y$\in$V και κάθε λ$\in$IR, είναι:

[1] φ(x+y)=φ(x)+φ(y) και

[2] φ(λx)=λφ(x)

Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον W συμβολίζεται με **Hom(V,W)**. Το σύνολο Hom(V,W) εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού οι οποίες ορίζονται ως:

$+ :\mathrm{Hom}(V,W)\times\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathrm{Hom}(V,W)$ με $(\varphi,\theta)\mapsto\varphi+\theta$, και

$\cdot :\mathbb{R}\times\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathrm{Hom}(V,W)$ με $(\lambda,\varphi)\mapsto\lambda\cdot\varphi$

είναι διανυσματικός χώρος.

Παρατηρήσεις

[1] Από τις δύο σχέσεις του παραπάνω ορισμού προκύπτει ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση είναι φ(0)=0, δηλαδή κάθε γραμμική απεικόνιση «στέλνει» το μηδέν στο μηδέν ή διαφορετικά κάθε γραμμική απεικόνιση έχει σταθερό σημείο το μηδέν.

[2] Η εικόνα ενός υπόχωρου E του V μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης φ από τον V στον W, είναι ένας υπόχωρος του W, ο οποίος καλείται υπόχωρος εικόνα της φ. Αν φ(E)=W τότε η φ είναι ***επί***. Προφανώς η γραμμική απεικόνιση φ από τον E στο φ(E) είναι επί.

Ορισμός 2.1.2

Έστω V διανυσματικός χώρος και έστω α$\in$V. Η απεικόνιση t_α:V→V με

$$x\mapsto t_\alpha(x)=x+\alpha$$

καλείται ***μεταφορά*** κατά α.

Παρατηρήσεις

[1] Το σύνολο όλων των μεταφορών του V με πράξη τη σύνθεση είναι μια ομάδα ισομορφική προς την προσθετική ομάδα του V.

[2] Η εικόνα ενός υπόχωρου E του V μέσω μιας μεταφοράς t_α αποτελείται από όλα τα διανύσματα της μορφής α+x, όπου x$\in$E, γράφεται ως α+E και καλείται

γραμμική συσχετισμένη πολλαπλότητα (ή απλά ***γραμμική πολλαπλότητα***) του V. Αν το $\alpha \in E$, τότε $\alpha+E=E$ και θα λέμε ότι η πολλαπλότητα $\alpha+E$ διέρχεται από το 0. Ο E καλείται ***κατεύθυνση*** της γραμμικής πολλαπλότητας.

[3] Δύο γραμμικές πολλαπλότητες $\alpha+E_1$ και $\beta+E_2$ θα λέγονται ***παράλληλες*** αν είτε είναι ξένες είτε μία από αυτές περιέχεται στην άλλη.

Ορισμός 2.1.3

Μια γραμμική απεικόνιση φ από τον V στον W, καλείται ***ισομορφισμός*** του V στον W αν η φ είναι ένα προς ένα και επί. Σε αυτή τη περίπτωση και η αντίστροφη της φ, η φ^{-1}, θα είναι γραμμική, ένα προς ένα και επί, δηλαδή είναι ένας ισομορφισμός του W στον V.

Από τον παραπάνω ορισμό και την παρατήρηση [2] που έπεται του ορισμού 3.1.1, προκύπτει ότι αν φ είναι μια γραμμική απεικόνιση ένα προς ένα από τον διανυσματικό χώρο V στον W, τότε ο διανυσματικός χώρος φ(V) είναι πάντα ισομορφικός προς τον V.

Ορισμός 2.1.4

Μια γραμμική απεικόνιση από τον V στον εαυτό του καλείται ***ενδομορφισμός*** (ή ***μετασχηματισμός***) του V ή ***γραμμικός τελεστής*** επάνω στον V.

Το σύνολο όλων των ενδομορφισμών του V συμβολίζεται με **End(V)** και είναι ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο το γινόμενο δύο ενδομορφισμών ορίζεται ως η σύνθεση αυτών των ενδομορφισμών. Το σύνολο End(V) είναι λοιπόν ένας δακτύλιος όχι απαραίτητα αντιμεταθετικός.

Παράδειγμα

Η απεικόνιση $h_\alpha:V\to V$ με $x\mapsto h_\alpha(x)=\alpha x$, όπου α είναι ένα βαθμωτό, είναι μια γραμμική απεικόνιση του V στον εαυτό του, δηλαδή ένας ενδομορφισμός του V. Καλείται δε, ***γραμμικός ομοιοθετικός μετασχηματισμός με λόγο α***.

Τα αντιστρέψιμα στοιχεία του End(V) είναι οι ένα προς ένα και επί ενδομορφισμοί του V, δηλαδή οι ισομορφισμοί του V στον εαυτό του. Μια τέτοια απεικόνιση καλείται ***αυτομορφισμός*** του V, ενώ το σύνολο των αυτομορφισμών του V συμβολίζεται με **GL(V)**. Το GL(V) είναι ομάδα (γενικά όχι αντιμεταθετική) και καλείται ***γραμμική ομάδα*** του V.

Ορισμός 2.1.5

Τα στοιχεία φ του End(V) για τα οποία είναι $\varphi^2=\mathbf{1}_V$ καλούνται ***ενελίξεις*** του V.

Οι ενελίξεις του V, είναι οι ενδομορφισμοί του V που έχουν ως αντίστροφο τον εαυτό τους. Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι ανήκουν στην GL(V).

Αν $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ είναι μια βάση του V, τότε κάθε γραμμική απεικόνιση $u:V\to W$ καθορίζεται πλήρως από τα διανύσματα $u(\varepsilon_1)$ και $u(\varepsilon_2)$, αφού αν $x\in V$, τότε

$$u(x)= u(\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2)=\xi_1u(\varepsilon_1)+\xi_2u(\varepsilon_2)$$

Η απεικόνιση $u\mapsto(u(\varepsilon_1),u(\varepsilon_2))$ είναι ένας ισομορφισμός του διανυσματικού χώρου Hom(V,W) στο $W\times W$.

Παρατήρηση

Σε πολλές από τις προτάσεις και τους ορισμούς που ακολουθούν ο διανυσματικός χώρος V θεωρείται διάστασης δύο, αφενός για απλοποίηση του συμβολισμού και αφετέρου διότι στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε αυτή τη διάσταση, που είναι και η διάσταση του Ευκλείδειου επιπέδου.

Ορισμός 2.1.6

Ο 2×2 πίνακας που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των $u(\varepsilon_1)$ και $u(\varepsilon_2)$ αναφορικά με μια βάση του W καλείται ***πίνακας της γραμμικής απεικόνισης*** u και συμβολίζεται με M(u).

Αν v είναι άλλη μία γραμμική απεικόνιση από τον V στον W με πίνακα M(v), αποδεικνύεται ότι

[1] $M(u+v)=M(u)+M(v)$ και

[2] $M(\lambda u)=\lambda M(u)$

Αν $u:V\to W$ και $u':W\to F$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε αποδεικνύεται ότι

$$M(u'\circ u)=M(u')M(u)$$

Όταν V=W και θεωρήσουμε ως βάση το $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, τότε ο πίνακας M(u) καλείται ***πίνακας του ενδομορφισμού u*** αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Παρατηρήσεις

[1] Ο δακτύλιος End(V) είναι ισομορφικός με το δακτύλιο των 2×2 πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή τον $M_2(\mathbb{R})$.

[2] Αν u μια ενέλιξη του V και U=M(u) ο πίνακας της αναφορικά με τη βάση

$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, τότε προφανώς θα πρέπει να ισχύει $U^2=I_2$, όπου I_2 ο μοναδιαίος πίνακας.

[3] Αν $u\in End(V)$ με $u^2=-id_V$, και $U=M(u)$ ο πίνακας της αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, τότε προφανώς για τον πίνακά της είναι $U^2=-I_2$.

[4] Αν $u\in End(V)$ με πίνακα $M(u)$ αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, $\{\varepsilon_1',\varepsilon_2'\}$ μια άλλη βάση του V και P ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ στην $\{\varepsilon_1',\varepsilon_2'\}$, τότε αποδεικνύεται ότι ο πίνακας $M'(u)$ του u αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1',\varepsilon_2'\}$ είναι ο

$$M'(u)=P^{-1}M(u)P.$$

Ορισμός 2.1.7

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι. Μια ***συσχετισμένη απεικόνιση*** (ή ***συσχετισμένη γραμμική απεικόνιση***) $u:V\to W$ είναι η σύνθεση των απεικονίσεων

$$u=t_b\circ v$$

όπου $v:V\to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και t_b είναι μια μεταφορά του W (b είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του W.

Παρατηρήσεις

[1] Αν $u:V\to W$ είναι μια συσχετισμένη απεικόνιση, τότε:

$$u(0)=(t_b\circ v)(0)=t_b(v(0))=t_b(0)=b$$

επομένως $v=t_{-b}\circ u$, δηλαδή η u γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $u=t_b\circ v$.

Οι απεικονίσεις t_b και v καλούνται αντίστοιχα ***μεταφορά*** και ***γραμμική απεικόνιση που συνδέονται με τη συσχετισμένη απεικόνιση*** u. Εφόσον, κάθε μεταφορά είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι η u θα είναι ένα προς ένα (ή επί, ή ένα προς ένα και επί) αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για την v.

[2] Αν L=a+E μια γραμμική πολλαπλότητα του V στη κατεύθυνση του E, τότε και η u(L) είναι μια γραμμική πολλαπλότητα τουW στη κατεύθυνση του u(E).

[3] Τόσο οι γραμμικές απεικονίσεις από τον V στον W όσο και οι μεταφορές από τον V στον εαυτό του, είναι συσχετισμένες απεικονίσεις.

[4] Οι ένα προς ένα και επί συσχετισμένες απεικονίσεις του V στον V σχηματίζουν μια ομάδα, η οποία καλείται ***συσχετισμένη ομάδα*** του V και συμβολίζεται με **GA(V)**.

[5] Οι συσχετισμένες απεικονίσεις του V στον εαυτό του οι οποίες αφήνουν αναλλοίωτο το α, είναι οι απεικονίσεις $t_\alpha v t_\alpha^{-1}$, όπου $v\in End(V)$.

Ορισμός 2.1.8

Μια γραμμική απεικόνιση από τον V στο IR καλείται ***γραμμικό συναρτησοειδές*** ή ***γραμμική μορφή*** πάνω στον V.

Ορισμός 2.1.9

Έστω V, W, F διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $u:V\times W\to F$ λέγεται ***διγραμμική*** αν για κάθε $x\in V$ ο περιορισμός της $y\mapsto u(x,y)$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και αν για κάθε $y\in W$ ο περιορισμός της $x\mapsto u(x,y)$ είναι επίσης γραμμική. Ισοδύναμα μια απεικόνιση $u:V\times W\to F$ λέγεται ***διγραμμική*** αν για κάθε $x, x'\in V$, $y, y'\in W$ και για οποιαδήποτε βαθμωτά α, β, γ, δ ισχύει:

$$u(\alpha x+\beta x',\gamma y+\delta y')=\alpha\gamma u(x,y)+\alpha\delta u(x,y')+\beta\gamma u(x',y)+\beta\delta u(x',y')$$

Το σύνολο όλων των διγραμμικών απεικονίσεων από το $V\times W$ στον F συμβολίζεται με $\mathcal{B}(V,W;F)$.

Ορισμός 2.1.10

Μια διγραμμική απεικόνιση $u: V\times V\to F$ καλείται ***συμμετρική*** αν $u(x,y)=u(y,x)$, για όλα τα $x,y\in V$.

Ορισμός 2.1.11

Μια διγραμμική απεικόνιση $u:V\times V\to F$ καλείται ***αντισυμμετρική*** αν $u(x,y)=-u(y,x)$, για όλα τα $x,y\in V$, ισοδύναμα, αν $u(x,x)=0$, για όλα τα $x\in V$.

Ορισμός 2.1.12

Μια διγραμμική απεικόνιση $u:V\times W\to F=IR$ καλείται ***διγραμμική μορφή***.

Ορισμός 2.1.13

Αν $u:V\times V\to W$ είναι μια διγραμμική απεικόνιση και $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια βάση του V, τότε η u καθορίζεται πλήρως από τα $u(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $u(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $u(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ και $u(\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ και αντιστρόφως, αν δοθούν τέσσερα διανύσματα β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22} του W, υπάρχει μια μοναδική διγραμμική απεικόνιση u από το $V\times V$ στον W τέτοια ώστε: $\beta_{11}=u(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\beta_{12}=u(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\beta_{21}=u(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ και $\beta_{22}=u(\varepsilon_2,\varepsilon_2)$. Επομένως, η απεικόνιση $u\mapsto(u(\varepsilon_1,\varepsilon_2), u(\varepsilon_1,\varepsilon_2), u(\varepsilon_2,\varepsilon_1), u(\varepsilon_2,\varepsilon_2))$ είναι ένας ισομορφισμός του διανυσματικού χώρου $\mathcal{B}(V,V;W)$ στο

W×W×W×W. Ο πίνακας $M(u)=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix}$ καλείται ***πίνακας της διγραμμικής απεικόνισης*** αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Ειδικότερα, αν φ είναι μια διγραμμική μορφή πάνω στο V×V και $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια βάση του V, τότε αυτή καθορίζεται από τα τέσσερα βαθμωτά $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\varphi(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ και $\varphi(\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ και αντιστρόφως, ενώ η τιμή της στο $(x,y)=(\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2,\eta_1\varepsilon_1+\eta_2\varepsilon_2)\in V\times V$, δίνεται από:

$$\varphi(x,y)=\xi_1\eta_1\beta_{11}+\xi_1\eta_2\beta_{12}+\xi_2\eta_1\beta_{21}+\xi_2\eta_2\beta_{22}$$

που μπορεί να γραφεί και ως:

$$\varphi(x,y)=(M(x))^tM(\varphi)M(y)$$

όπου $M(\varphi)$ είναι ο πίνακας της διγραμμικής μορφής φ αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Από τα παραπάνω, εύκολα προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

[1] Η φ είναι συμμετρική αν και μόνο αν $(M(\varphi))^t=M(\varphi)$, δηλαδή ο πίνακας $M(\varphi)$ είναι συμμετρικός.

[2] Η φ είναι αντισυμμετρική αν και μόνο αν $\beta_{11}=\beta_{22}=0$ και $\beta_{12}=-\beta_{21}\Leftrightarrow (M(\varphi))^t=-M(\varphi)$, δηλαδή ο πίνακας $M(\varphi)$ είναι αντισυμμετρικός.

[3] Αν φ μια διγραμμική μορφή πάνω στον V×V και $M(\varphi)$, $M'(\varphi)$ οι πίνακές της αναφορικά με τις $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, $\{\varepsilon_1',\varepsilon_2'\}$ αντίστοιχα, τότε $M'(\varphi)=P^tM(\varphi)P$, όπου P ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ στην $\{\varepsilon_1',\varepsilon_2'\}$.

Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο όλων των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών πάνω στον V×V το οποίο και συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(V,V;\mathbb{R})$.

Ορισμός 2.1.14

Αν $u\in End(V)$, υπάρχει ένα μοναδικό βαθμωτό το οποίο ονομάζουμε ***ορίζουσα*** της u και συμβολίζουμε με det(u), τέτοιο ώστε για κάθε αντισυμμετρική διγραμμική μορφή ψ του V×V να ισχύει:

$$\psi(u(x),u(y))=\det(u)\psi(x,y).$$

Παρατηρήσεις

[1] Αποδεικνύεται ότι αν g είναι ένας ισομορφισμός από τον V στο διανυσματικό επίπεδο V΄, τότε $\det(gug^{-1})=\det(u)$.

[2] Αν $u, v\in End(V)$, τότε $\det(v\circ u)=\det(v)\det(u)$.

[3] Αν $u \in End(V)$, τότε $\det(u) \neq 0 \Leftrightarrow$ ο u είναι ένα προς ένα και επί.

[4] Αν $u \in End(V)$ με πίνακα $M(u) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Τότε:

$$\det(u) = \det\left(M(u)\right) = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}.$$

2.2. Ευθείες και υπερεπίπεδα ενός διανυσματικού χώρου

Στην ενότητα αυτή, ουσιαστικά κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση της συσχετισμένης γεωμετρίας, εισάγοντας τις έννοιες της ευθείας, του επιπέδου, της παραλληλίας και της κυρτότητας σε ένα διανυσματικό χώρο. Οι δυνατότητές μας, σε αυτό το σημείο περιορίζονται μόνο σε κάποιες μετατοπίσεις, και στη σύγκριση, συσχέτιση των σχημάτων μέσω της παραλληλίας.

Ορισμός 2.2.1

Αν $V \neq \{0\}$ ένας διανυσματικός χώρος και α ένα μη μηδενικό διάνυσμα του V, τότε η εικόνα του IR μέσω της γραμμικής απεικόνισης $\xi \mapsto \xi\alpha$ στον V είναι ένας υπόχωρος D τον οποίο θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως το *μικρότερο* υπόχωρο του V που περιέχει το α. Ο υπόχωρος D είναι η ***διανυσματική ευθεία*** που διέρχεται από το α και θα συμβολίζεται με $D_{0\alpha}$.

Παρατηρήσεις

[1] Η διανυσματική ευθεία, όπως ορίστηκε παραπάνω, διέρχεται και από οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του D.

[2] Η εικόνα μιας διανυσματικής ευθείας μέσω μιας ένα προς ένα γραμμικής απεικόνισης είναι επίσης μια διανυσματική ευθεία.

[3] Αν $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ είναι οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα του V, κάθε εξίσωση της διανυσματικής ευθείας $D_{0\alpha}$, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\psi(\alpha,x)=0,$$

όπου ψ είναι μια μη μηδενική αντισυμμετρική διγραμμική μορφή του $V \times V$.

Πράγματι· έστω $x=(x_1,x_2) \in V$ και ψ είναι μια μη μηδενική αντισυμμετρική διγραμμική μορφή του $V \times V$, η οποία, όπως έχουμε αναφέρει, καθορίζεται

πλήρως από το $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=-\psi(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=\lambda\neq 0$.

$$\psi(\alpha,x)=0\Leftrightarrow\lambda\alpha_1x_2-\lambda\alpha_2x_1=0\Leftrightarrow\lambda(\alpha_1x_2-\alpha_2x_1)=0\Leftrightarrow\alpha_1x_2=\alpha_2x_1,$$

επομένως αν θεωρήσουμε ότι $\alpha_1\neq 0$ και $\alpha_2\neq 0$, τότε

$\xi=\dfrac{x_1}{\alpha_1}=\dfrac{x_2}{\alpha_2}$, και έχουμε $x=\xi\alpha\Leftrightarrow x\in D_{0\alpha}$. Στην περίπτωση που ένα από τα α_1, α_2 είναι μηδέν το συμπέρασμα είναι πάλι προφανές.

Ορισμός 2.2.2

Μια γραμμική πολλαπλότητα που έχει ως κατεύθυνση μια διανυσματική ευθεία καλείται ***συσχετισμένη ευθεία*** (ή απλά ***ευθεία***). Οι διανυσματικές ευθείες, επομένως, είναι οι ευθείες που διέρχονται από το 0. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα β που περιέχεται στη κατεύθυνση μιας ευθείας D καλείται ***κατευθύνον διάνυσμα*** της D.

Παρατήρηση

Αν β είναι ένα κατευθύνον διάνυσμα της D, τότε και όλα τα άλλα είναι διανύσματα της μορφής λβ με $\lambda\neq 0$. Η απεικόνιση $\xi\mapsto\alpha+\xi\beta$ απεικονίζει το IR ένα προς ένα και επί της D, οποτεδήποτε $\alpha\in D$ και η συλλογή όλων αυτών των απεικονίσεων καλείται το σύνολο των παραμετρικών αναπαραστάσεων της D. Η εικόνα του IR μέσω οποιασδήποτε ένα προς ένα και επί απεικόνισης $\xi\mapsto\alpha+\xi\beta$ είναι η μοναδική ευθεία που διέρχεται από το α και έχει ως κατευθύνον διάνυσμα το β. Επομένως:

Πρόταση 2.2.3

Από δύο διαφορετικά σημεία ενός διανυσματικού χώρου V διέρχεται μια και μοναδική ευθεία. Θα συμβολίζουμε με $D_{\alpha,\alpha'}$ ή $D_{\alpha',\alpha}$ τη μοναδική ευθεία που διέρχεται από τα α, $\alpha'\in V$.

Παρατήρηση

Εφόσον, ένα κατευθύνον διάνυσμα της ευθείας $D_{\alpha,\alpha'}$ είναι το $\alpha'-\alpha$, η $D_{\alpha,\alpha'}$ είναι το σύνολο των ένα προς ένα και επί απεικονίσεων $\xi\mapsto\alpha+\xi(\alpha'-\alpha)$, όπου το ξ διατρέχει το IR.

Ορισμός 2.2.4

Δύο ***ευθείες*** θα είναι ***παράλληλες*** αν και μόνο αν έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Επομένως, αν δοθεί μια ευθεία και ένα οποιοδήποτε σημείο, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι παράλληλη προς τη

δοθείσα ευθεία.

Ορισμός 2.2.5

Αν δοθεί ένα διάνυσμα $\alpha \in V$, τότε το σύνολο Δ που περιέχει τα διανύσματα $\xi\alpha$ με $\xi \geq 0$ καλείται ***διανυσματική ημιευθεία*** (ή ***κλειστή διανυσματική ημιευθεία***) που διέρχεται από το α. Συμβολίζεται με $\mathbf{\Delta_{0\alpha}}$ (ή με Δ) και προφανώς είναι η διανυσματική ημιευθεία που διέρχεται από οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα β του συνόλου $\Delta_{0\alpha}$.

Παρατήρηση

Η διανυσματική ευθεία $D_{0\alpha}$ που διέρχεται από το α είναι προφανώς η μοναδική ευθεία που περιέχει το $\Delta_{0\alpha}$ και η οποία περιέχει ακριβώς δύο διανυσματικές ημιευθείες, τις $\Delta_{0\alpha}$ και $-\Delta_{0\alpha}$ με την τελευταία να περιέχει τα σύνολο των διανυσμάτων $-x$, όπου $x \in \Delta_{0\alpha}$, να διέρχεται από το $-\alpha$ και να λέγεται ***αντίθετη*** της $\Delta_{0\alpha}$. Η ευθεία $D_{0\alpha}$ είναι η ένωση των $\Delta_{0\alpha}$ και $-\Delta_{0\alpha}$ και $\Delta_{0\alpha} \cap -\Delta_{0\alpha} = \{0\}$.

Ορισμός 2.2.6

Το σύνολο των διανυσμάτων $\xi\alpha$ με $\xi > 0$, είναι η ***ανοικτή διανυσματική ημιευθεία*** που διέρχεται από το α και προφανώς είναι το συμπλήρωμα $\Delta^{\circ}_{0\alpha}$ (ή Δ°) του $\{0\}$. Επίσης το σύνολο $-\Delta^{\circ}_{0\alpha}$ (το σύνολο των διανυσμάτων $-x$, όπου $x \in \Delta^{\circ}_{0\alpha}$) καλείται ***αντίθετη ανοικτή διανυσματική ημιευθεία*** της $\Delta^{\circ}_{0\alpha}$.

Η $D_{0\alpha}$ περιέχει ακριβώς δύο ανοικτές διανυσματικές ημιευθείες, τις $\Delta^{\circ}_{0\alpha}$ και $-\Delta^{\circ}_{0\alpha}$, οι οποίες λέγονται και ***προσανατολισμοί*** της $D_{0\alpha}$. Τα σύνολα $\Delta^{\circ}_{0\alpha}$, $-\Delta^{\circ}_{0\alpha}$ και $\{0\}$ διαμερίζουν την $D_{0\alpha}$.

Ορισμός 2.2.7

Η εικόνα μιας κλειστής διανυσματικής ημιευθείας $\Delta_{0\alpha}$ (ανοικτής διανυσματικής ημιευθείας $\Delta^{\circ}_{0\alpha}$) μέσω μιας μεταφοράς t_a: $x \mapsto a+x$ καλείται ***κλειστή*** (***ανοικτή***) ***συσχετισμένη ημιευθεία*** (ή απλά ***ημιευθεία***) με αρχή το a και κατεύθυνση $\Delta_{0\alpha}$ ($\Delta^{\circ}_{0\alpha}$). Συμπίπτει με το σύνολο των διανυσμάτων $a+x$ με $x \in \Delta_{0\alpha}$ ($x \in \Delta^{\circ}_{0\alpha}$) και συμβολίζεται επίσης με $a+\Delta_{0\alpha}$ ($a+\Delta^{\circ}_{0\alpha}$). Οι διανυσματικές ημιευθείες, επομένως, είναι οι ημιευθείες που έχουν ως αρχή το 0. Οποιοδήποτε διάνυσμα $b \neq 0$ του $\Delta_{0\alpha}$ ($\Delta^{\circ}_{0\alpha}$) καλείται ***κατευθύνον διάνυσμα*** της ***ημιευθείας*** $a+\Delta_{0\alpha}$ ($a+\Delta^{\circ}_{0\alpha}$). Από τα παραπάνω

έπεται ότι αυτή η ημιευθεία αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $a+\xi b$ με $\xi\geq 0$ ($\xi>0$).

Παρατήρηση

Κάθε ημιευθεία περιέχεται σε μια μοναδική ευθεία, και αντιστρόφως, αν D είναι μια ευθεία και $a\in D$, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο κλειστές (ανοικτές) ημιευθείες με αρχή το a που περιέχονται σε αυτή· αυτές οι δύο ημιευθείες είναι αμοιβαίως αντίθετες. Οι ημιευθείες που έχουν την ίδια (αντίθετη) κατεύθυνση λέγονται **παράλληλες με την ίδια φορά** (**παράλληλες με αντίθετη φορά**).

Ορισμός 2.2.8

Έστω α, β δύο διαφορετικά σημεία του V. Τότε κάθε σημείο της $D_{\alpha\beta}$ μπορεί να εκφραστεί μοναδικά στη μορφή $\alpha+\xi(\beta-\alpha)=(1-\xi)\alpha+\xi\beta$ με $\xi\in\mathbb{R}$. Το σύνολο των σημείων της $D_{\alpha\beta}$ που προκύπτουν για $0\leq\xi\leq 1$ (αντίστοιχα $0<\xi<1$, $0<\xi\leq 1$, $0\leq\xi<1$) καλείται ***κλειστό τμήμα*** (αντίστοιχα ανοικτό τμήμα, τμήμα ανοικτό στο α και κλειστό στο β, τμήμα κλειστό στο α και ανοικτό στο β) με άκρα τα α και β. Προφανώς το κλειστό (ανοικτό) τμήμα με άκρα τα τα β και α είναι το ίδιο με το κλειστό (ανοικτό) τμήμα με άκρα τα α και β. Το σημείο $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ καλείται ***μέσο*** αυτού του ***τμήματος***.

Πρόταση 2.2.9

Κάθε συσχετισμένη απεικόνιση $u:V\to W$ απεικονίζει την ευθεία του V σε ευθεία του W, το τμήμα του V σε τμήμα του W και το μέσο του τμήματος στο μέσο της εικόνας του.

Απόδειξη

Έστω $u:V\to W$ μια συσχετισμένη απεικόνιση και έστω $D_{\alpha\beta}$ μια ευθεία του V. Από τα παραπάνω, κάθε σημείο x αυτής της ευθείας γράφεται στη μορφή

$$x=(1-\xi)\alpha+\xi\beta, \text{ όπου } \xi\in\mathbb{R}.$$

Η u γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $u=t_b\circ v$, όπου οι απεικονίσεις t_b και v είναι αντίστοιχα η μεταφορά και η γραμμική απεικόνιση που συνδέονται με τη συσχετισμένη απεικόνιση u. Έχουμε, λοιπόν,

$$u(x)=u((1-\xi)\alpha+\xi\beta)=t_b(v((1-\xi)\alpha+\xi\beta))=v((1-\xi)\alpha+\xi\beta)+b=(1-\xi)v(a)+\xi v(\beta)+b=$$
$$(1-\xi)v(a)+\xi v(\beta)+b-\xi b+\xi b=(1-\xi)(v(a)+b)+\xi(v(\beta)+b)=(1-\xi)u(a)+\xi u(\beta).$$

Επομένως η u απεικονίζει την ευθεία D του V στην u(D), ευθεία του W.

Όμοια αποδεικνύεται ότι η u απεικονίζει το τμήμα αβ στο τμήμα u(α)u(β).

Ειδικότερα, για το μέσο $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ του αβ έχουμε:

$$u\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)=t_b\left(v\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\right)=v\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)+b=\frac{1}{2}\big(v(\alpha)+v(\beta)\big)+b=$$

$$=\frac{1}{2}\big(v(\alpha)+b\big)+\frac{1}{2}\big(v(\beta)+b\big)=\frac{1}{2}\big(u(\alpha)+u(\beta)\big)$$

επομένως το μέσο του τμήματος αβ απεικονίζεται στο μέσο της εικόνας του u(α)u(β).

Ορισμός 2.2.10

Ένα ***διανυσματικό υπερεπίπεδο*** ενός διανυσματικού χώρου V, είναι ένας υπόχωρος H του V, ο οποίος είναι συμπληρωματικός κάποιας διανυσματικής ευθείας στον V.

Παρατήρηση

Κάθε διανυσματικό υπερεπίπεδο H δεν περιέχεται σε κανέναν άλλο υπόχωρο του V εκτός από τον ίδιο τον V και τον εαυτό του H.

Ορισμός 2.2.11

Ένα ***συσχετισμένο υπερεπίπεδο*** (ή απλά ***υπερεπίπεδο***) είναι μια γραμμική πολλαπλότητα που έχει ως κατεύθυνση ένα διανυσματικό υπερεπίπεδο.

Επομένως τα διανυσματικά υπερεπίπεδα είναι υπερεπίπεδα που διέρχονται από το 0.

Πρόταση 2.2.12

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια γραμμική πολλαπλότητα $L\neq V$ να είναι ***παράλληλη*** με ένα υπερεπίπεδο H είναι η κατεύθυνση της L να περιέχεται σε αυτήν του H.

Πόρισμα 2.2.13

Δύο ***υπερεπίπεδα*** είναι ***παράλληλα*** αν και μόνο αν έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Πρόταση 2.2.14

[1] Έστω f μια γραμμική μορφή πάνω στο διανυσματικό χώρο V, η οποία δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε, για όλα τα βαθμωτά α, το σύνολο H_α που αποτελείται από όλα τα $x\in V$ τέτοια ώστε f(x)=α είναι ένα υπερεπίπεδο. Όλα τα υπερεπίπεδα H_α είναι παράλληλα μεταξύ τους.

[2] Αν H ένα υπερεπίπεδο του V τότε, υπάρχει μια γραμμική μορφή g πάνω στον V και ένα βαθμωτό β, τέτοια ώστε το H να είναι το σύνολο όλων των $x\in V$ που

ικανοποιούν την $g(x)=\beta$. Επιπλέον, αν h είναι οποιαδήποτε άλλη γραμμική μορφή πάνω στον V και γ ένα βαθμωτό τέτοιο ώστε το H να είναι το σύνολο των λύσεων της $h(x)=\gamma$, τότε, υπάρχει ένα μη μηδενικό βαθμωτό λ τέτοιο ώστε $h=\lambda g$ και $\gamma=\lambda\beta$.

Παρατήρηση

Οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $g(x)=\beta$, όπου g μια γραμμική μορφή πάνω στον V και η οποία «επαληθεύεται» από τα σημεία ενός υπερεπιπέδου H καλείται ***εξίσωση*** του H.

Ορισμός 2.2.15

Έστω H ένα υπερεπίπεδο και $g(x)=\beta$ μια εξίσωση του H. Τα σύνολα F^+ και F^- που ορίζονται από τις $g(x)\geq\beta$ και $g(x)\leq\beta$ αντίστοιχα, καλούνται ***κλειστοί ημίχωροι*** που καθορίζονται από το H. Τα συμπληρώματα του H ως προς τα F^+ και F^- καλούνται αντίστοιχα ***ανοικτοί ημίχωροι*** που καθορίζονται από το H και είναι τα σύνολα U^+, U^- των στοιχείων x του V για τα οποία ισχύει $g(x)>\beta$ και $g(x)<\beta$, αντίστοιχα. Δύο σημεία που ανήκουν στον ίδιο ημίχωρο που καθορίζεται από το H, λέμε ότι βρίσκονται ***προς το ίδιο μέρος*** του H. Αν ανήκουν σε διαφορετικούς κλειστούς (ανοικτούς) ημίχωρους, λέμε ότι βρίσκονται ***εκατέρωθεν*** του H.

Πρόταση 2.2.16

Μια ευθεία η οποία δεν είναι παράλληλη προς ένα υπερεπίπεδο έχει με αυτό ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Πρόταση 2.2.17

Έστω H ένα υπερεπίπεδο του διανυσματικού χώρου V.

[1] Αν δύο διαφορετικά σημεία α και β ανήκουν στον ίδιο ανοικτό ημίχωρο U που καθορίζεται από το H, τότε όλα τα σημεία του τμήματος αβ ανήκουν στον U.

[2] Αν δύο διαφορετικά σημεία α και β βρίσκονται αυστηρά εκατέρωθεν του H, τότε υπάρχει ακριβώς ένα σημείο του H στο τμήμα αβ.

Ορισμός 2.2.18

Ένα υποσύνολο K ενός (πραγματικού) διανυσματικού χώρου V, καλείται ***κυρτό*** αν για κάθε $x_1, x_2\in K$ το $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ με $\lambda_1, \lambda_2\geq 0$ και $\lambda_1+\lambda_2=1$, ανήκει στο K, ισοδύναμα αν το κλειστό τμήμα με άκρα τα x_1, x_2 περιέχεται στο K.

2.3. Προσανατολισμός επιπέδου

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι η θεμελίωση ενός προσανατολισμένου επιπέδου. Η πορεία που επιλέξαμε να ακολουθήσουμε είναι λίγο επίπονη και μακροσκελής, όμως δεν προϋποθέτει τις έννοιες του εσωτερικού, εξωτερικού και μικτού γινομένου. Σε αυτή την ενότητα ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μία βάση του V.

Πρόταση 2.3.1

Το σύνολο $\mathcal{A}(V,V;\mathbb{R})$ των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών πάνω στον $V\times V$, είναι διανυσματικός χώρος και μάλιστα είναι μια διανυσματική ευθεία.

Απόδειξη

Έστω $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μία βάση του V και $\psi\in\mathcal{A}(V,V;\mathbb{R})$, τότε αυτή καθορίζεται πλήρως από το μοναδικό βαθμωτό $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=-\psi(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=\lambda\in\mathbb{R}$, καθώς $\psi(x,y)=\lambda\xi_1\eta_2-\lambda\xi_2\eta_1=\lambda(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$, για κάθε $(x,y)=(\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2,\eta_1\varepsilon_1+\eta_2\varepsilon_2)\in V\times V$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{A}(V,V;\mathbb{R})$ όλων των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών πάνω στον $V\times V$, ο οποίος από την προηγούμενη πρόταση είναι μια διανυσματική ευθεία, μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση του $\{0\}$ με δύο ανοικτές διανυσματικές ημιευθείες, τις $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$ (παρατήρηση στον ορισμό 2.2.5). Καλούμε τις $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$ ***προσανατολισμούς*** του V και τα ζεύγη $(V,\mathcal{A}')$, $(V,\mathcal{A}'')$ ***προσανατολισμένα διανυσματικά επίπεδα με βάση το χώρο V***.

Ορισμός 2.3.2

Έστω $(V,\mathcal{A}')$ ένα προσανατολισμένο διανυσματικό επίπεδο και έστω ψ μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή που ανήκει στο $\mathcal{A}'$. Ένα ***ζεύγος*** (α,β) γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V, δηλαδή μια βάση του V, θα λέγεται ***θετικό*** (αντίστοιχα ***αρνητικό***) στο προσανατολισμένο επίπεδο $(V,\mathcal{A}')$, αν $\psi(\alpha,\beta)>0$ (αντίστοιχα $\psi(\alpha,\beta)<0$).

Παρατηρήσεις

[1] Ο παραπάνω ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της ψ στο $\mathcal{A}'$, αφού

κάθε άλλο στοιχείο του $\mathcal{A}'$ είναι της μορφής $\gamma\psi$ με $\gamma>0$.

[2] Αν το ζεύγος (α,β) είναι θετικό στο $(V,\mathcal{A}')$, το ίδιο είναι και το ζεύγος $(-\alpha,-\beta)$, ενώ το ζεύγος (β,α) είναι αρνητικό σε αυτό το επίπεδο.

[3] Ο προσανατολισμός στο $(V,\mathcal{A}')$ είναι αντίθετος από αυτόν στο $(V,\mathcal{A}'')$, δηλαδή αν το ζεύγος (α,β) έχει θετικό προσανατολισμό στο $(V,\mathcal{A}')$, τότε στο $(V,\mathcal{A}'')$ έχει αρνητικό προσανατολισμό.

Ορισμός 2.3.3

Θεωρούμε δύο διανυσματικές ημιευθείες Δ_1 και Δ_2 και δύο μη μηδενικά διανύσματά τους α_1 και α_2, αντίστοιχα. Το ζεύγος (Δ_1,Δ_2) θα λέγεται ***θετικά*** (αντίστοιχα ***αρνητικά***) ***προσανατολισμένο*** στο $(V,\mathcal{A}')$, αν το ζεύγος (α_1,α_2) είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) προσανατολισμένο.

Παρατήρηση

Το κριτήριο που αναφέραμε στον παραπάνω ορισμό είναι καλά ορισμένο αφού είναι ανεξάρτητο της επιλογής των α_1 και α_2. Πράγματι, κάθε άλλο μη μηδενικό διάνυσμα της Δ_1 είναι της μορφής $\lambda_1\alpha_1$ με $\lambda_1>0$, ενώ κάθε άλλο μη μηδενικό διάνυσμα της Δ_2 είναι της μορφής $\lambda_2\alpha_2$ με $\lambda_2>0$.

Ορισμός 2.3.4

Έστω $u\in GL(V)$ και $\psi\in\mathcal{A}'$, η αντισυμμετρική διγραμμική μορφή

$$\psi_u: (x,y)\mapsto\psi(u(x),u(y))=\det(u)\psi(x,y)$$

καλείται ***μετασχηματισμός της ψ από την u*** και ανήκει στο $\mathcal{A}'$ αν $\det(u)>0$ ενώ ανήκει στο $\mathcal{A}''$ αν $\det(u)<0$.

Παρατήρηση

Γίνεται εμφανές, λοιπόν, ότι οι αυτομορφισμοί u του V που διατηρούν τον προσανατολισμό $\mathcal{A}'$ (ή $\mathcal{A}''$) είναι εκείνοι ακριβώς για τους οποίους είναι $\det(u)>0$. Αυτοί οι αυτομορφισμοί καλούνται ***αυτομορφισμοί του προσανατολισμένου επιπέδου*** $(V,\mathcal{A}')$ (ή του $(V,\mathcal{A}'')$) και σχηματίζουν μια κανονική υποομάδα της $GL(V)$, την οποία συμβολίζουμε με $\mathbf{GL^+(V)}$. Αν το ζεύγος (α,β) είναι θετικά

προσανατολισμένο σε κάποιο προσανατολισμό του V, τότε στον ίδιο προσανατολισμό του V, το $(u(\alpha),u(\beta))$ είναι θετικά προσανατολισμένο αν $\det(u)>0$ και αρνητικά αν $\det(u)<0$.

Έστω, τώρα, ένας προσανατολισμός του V και ψ μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή που ανήκει σε αυτόν. Αν α είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε η εξίσωση

$$\psi(\alpha,x)=0$$

είναι η εξίσωση της ευθείας $D_{0\alpha}$ (παρατήρηση [3], ορισμός 2.1.1) Τα διανύσματα β για τα οποία το ζεύγος (α,β) είναι θετικά προσανατολισμένο, δηλαδή τα διανύσματα β για τα οποία είναι $\psi(\alpha,\beta)>0$, σχηματίζουν το ένα από τα δύο ανοικτά ημιεπίπεδα που καθορίζονται από την $D_{0\alpha}$, ενώ τα διανύσματα β για τα οποία το ζεύγος (α,β) είναι αρνητικά προσανατολισμένο σχηματίζουν το άλλο ημιεπίπεδο. Με αυτό τον τρόπο, ουσιαστικά έχουμε ένα εναλλακτικό ορισμό του ημιεπιπέδου.

Ορισμός 2.3.5

Έστω Δ_0, Δ_1, Δ_2 τρεις διανυσματικές ημιευθείες στον V (είτε όλες κλειστές είτε όλες ανοικτές) και α_0, α_1 και α_2 τρία διανύσματα σε αυτές αντίστοιχα. Θα λέμε ότι ***η τριάδα*** $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ είναι ***θετικά προσανατολισμένη*** αν τουλάχιστον δύο από τους τρεις αριθμούς $\psi(\alpha_0,\alpha_1)$, $\psi(\alpha_1,\alpha_2)$, $\psi(\alpha_2,\alpha_0)$ είναι θετικοί.

Παρατηρήσεις

[1] Η παραπάνω συνθήκη, είναι μια συνθήκη η οποία δεν εξαρτάται από την επιλογή των α_0, α_1 και α_2.

[2] Αν η τριάδα $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ είναι θετικά προσανατολισμένη τότε οι τρεις διανυσματικές ημιευθείες είναι διαφορετικές.

[3] Αν η τριάδα $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ είναι θετικά προσανατολισμένη, το ίδιο ισχύει και για τις τριάδες $(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_0)$ και $(\Delta_2,\Delta_0,\Delta_1)$, ενώ οι τριάδες $(\Delta_0,\Delta_2,\Delta_1)$, $(\Delta_2,\Delta_1,\Delta_0)$ και $(\Delta_1,\Delta_0,\Delta_2)$ δεν είναι θετικά προσανατολισμένες.

Ορισμός 2.3.6

Έστω Δ_1, Δ_2 δύο ανοικτές διανυσματικές ημιευθείες στον V. Καλούμε ***ανοικτό τομέα*** που ξεκινά με τη Δ_1 και τελειώνει με τη Δ_2 και συμβολίζουμε με $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$, την ένωση όλων των διανυσματικών ημιευθειών Δ, τέτοιων ώστε η τριάδα $(\Delta_1,\Delta,\Delta_2)$ να είναι θετικά προσανατολισμένη.

Προφανώς, όταν $\Delta_1=\Delta_2$ ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι κενός, ενώ όταν

$\Delta_2=-\Delta_1$, ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων x τέτοια ώστε $\psi(\alpha_1,x)>0$, δηλαδή ένα από τα ανοικτά ημιεπίπεδα που καθορίζονται από την ευθεία D που περιέχει τις Δ_1 και Δ_2. Σε αυτή τη περίπτωση ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_2,\Delta_1)$ είναι το άλλο ημιεπίπεδο.

Όταν $\Delta_2\neq\Delta_1$ και $\Delta_2\neq-\Delta_1$, δηλαδή $\psi(\alpha_1,\alpha_2)\neq0$, προκύπτουν δύο περιπτώσεις:

[α] Αν $\psi(\alpha_1,\alpha_2)>0$, λέμε ότι ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι ένας ***ελάσσων τομέας***. Σε αυτή τη περίπτωση ο $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων x τέτοια ώστε $\psi(\alpha_1,x)>0$ και $\psi(\alpha_2,x)<0$ συγχρόνως. Με άλλα λόγια ένας ελάσσων τομέας είναι η ***τομή δύο ανοικτών ημιεπιπέδων*** που καθορίζονται από δύο διαφορετικές ευθείες.

[β] Αν $\psi(\alpha_1,\alpha_2)<0$, λέμε ότι ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι ένας ***μείζων τομέας***. Σε αυτή τη περίπτωση ο $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων x τέτοια ώστε να ισχύει μία τουλάχιστον από τις $\psi(\alpha_1,x)>0$, $\psi(\alpha_2,x)<0$. Με άλλα λόγια ένας μείζων τομέας είναι ***η ένωση δύο ανοικτών ημιεπιπέδων*** που καθορίζονται από δύο διαφορετικές ευθείες.

Όταν $\Delta_2=-\Delta_1$, λέμε ότι οι δύο τομείς $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ και $S^o(\Delta_2,\Delta_1)$ σχηματίζουν ***ευθεία γωνία***.

Σε όλες τις περιπτώσεις όπου $\Delta_1\neq\Delta_2$, το επίπεδο είναι η ένωση των ακόλουθων πέντε υποσυνόλων: $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$, $S^o(\Delta_2,\Delta_1)$, Δ_1, Δ_2 και $\{0\}$ που ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους.

Ορισμός 2.3.7 (Διάταξη στο σύνολο όλων των ανοικτών διανυσματικών ημιευθειών)

Έστω Δ_0 μια διανυσματική ημιευθεία και έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των ανοικτών διανυσματικών ημευθειών που είναι διαφορετικές από την Δ_0. Θεωρούμε τη σχέση $R(\Delta_1,\Delta_2)$ στο $\mathcal{F}$ ως:

$R(\Delta_1,\Delta_2)$ αν και μόνο αν $\Delta_1=\Delta_2$ ή $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ θετικά προσανατολισμένη.

Πρόταση 2.3.8

Η $R(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι μια σχέση ολικής διάταξης στο σύνολο $\mathcal{F}$.

Παρατήρηση

Αυτό το αποτέλεσμα μας παρέχει μια άλλη πλευρά της έννοιας του ανοικτού τομέα. Αν Δ_1, Δ_2 δύο διαφορετικές ανοικτές ημιευθείες και Δ_0 μια ημιευθεία η οποία

φτιάχνει μια θετικά προσανατολισμένη τριάδα $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$, δηλαδή $\Delta_0 \in S^o(\Delta_2,\Delta_1)$,τότε η σχέση που περιγράψαμε μας παρέχει μια διάταξη στο σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των ανοικτών ημιευθειών που είναι διαφορετικές από τη Δ_0 την οποία μπορούμε να γράφουμε και ως $\Delta_1 \leq \Delta_2$. Έτσι, ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι η ένωση όλων των ανοικτών ημιευθειών Δ_3 του $\mathcal{F}$ που ικανοποιούν την

$$\Delta_1 < \Delta_3 < \Delta_2$$

Θα μπορούσαμε να πούμε, επομένως, ότι οι ανοικτές ημιευθείες που περιέχονται στον ανοικτό τομέα $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ αντιστοιχούν στο «ανοικτό διάστημα» με αρχή το σημείο Δ_1 και πέρας το σημείο Δ_2· αυτό το διάστημα είναι σχεδόν ανεξάρτητο της επιλογής του $\Delta_0 \in S^o(\Delta_1,\Delta_2)$.

Έστω, τώρα ότι οι Δ_1, Δ_2 είναι κλειστές διανυσματικές ημιευθείες στον V. Ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, η ένωση όλων των κλειστών διανυσματικών ημιευθειών Δ που ικανοποιούν μία από τις τρεις συνθήκες $\Delta=\Delta_1$, $\Delta=\Delta_2$, $(\Delta_1,\Delta,\Delta_2)$ θετικά προσανατολισμένη, καλείται ***κλειστός τομέας*** με αρχικό άκρο τη Δ_1 και τελικό άκρο τη Δ_2 και συμβολίζεται με $S(\Delta_1,\Delta_2)$. Αν θεωρήσουμε Δ_1°, Δ_2° τις ανοικτές ημιευθείες στις Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα, προφανώς ισχύει

$$S(\Delta_1,\Delta_2)=S^o(\Delta_1^\circ,\Delta_2^\circ)\cup\Delta_1\cup\Delta_2$$

Τέλος, μπορούμε πάλι να ορίσουμε μια σχέση $R(\Delta_1,\Delta_2)$ στο σύνολο των κλειστών ημιευθειών με τον ίδιο τρόπο που ορίστηκε η $R(\Delta_1^\circ,\Delta_2^\circ)$. Επιπλέον, αυτές οι σχέσεις είναι ισοδύναμες και επομένως η $R(\Delta_1,\Delta_2)$ ορίζει μια ολική διάταξη στο σύνολο των κλειστών ημιευθειών που είναι διαφορετικές από την Δ_0. Αν πάρουμε τη Δ_0 ως μια κλειστή ημιευθεία που περιέχεται στον κλειστό τομέα $S(\Delta_2,\Delta_1)$ αλλά διαφορετική από τις Δ_1 και Δ_2, μπορούμε να πούμε ότι ο κλειστός τομέας $S(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι η ένωση όλων των κλειστών ημιευθειών Δ_3 που ικανοποιούν την

$$\Delta_1 \leq \Delta_3 \leq \Delta_2$$

Θα μπορούσαμε να πούμε, επομένως, ότι οι κλειστές ημιευθείες που περιέχονται στον κλειστό τομέα $S(\Delta_1,\Delta_2)$ αντιστοιχούν στο «κλειστό διάστημα» με αρχή το σημείο Δ_1 και πέρας το σημείο Δ_2.

Ο ***κλειστός τομέας*** ορίζεται να είναι ***ευθύς***, ***ελάσσων*** ή ***μείζων*** ανάλογα με το αν ο ανοικτός τομέας $S^o(\Delta_1,\Delta_2)$ είναι ευθύς, ελάσσων ή μείζων. Επομένως, ένας ευθύς

κλειστός τομέας είναι ένα κλειστό ημιεπίπεδο, ένας κλειστός ελάσσων τομέας είναι η τομή ενός ζεύγους κλειστών ημιεπιπέδων που καθορίζονται από διαφορετικές ευθείες και ένας μείζων κλειστός τομέας είναι η ένωση ενός ζεύγους κλειστών ημιεπιπέδων που καθορίζονται από διαφορετικές ευθείες.

Εφόσον ο ευθύς κλειστός τομέας περιέχει ακριβώς μία διανυσματική ευθεία, αυτή που τον καθορίζει, και αυτή η ευθεία δεν περιέχεται σε κανένα άλλο ημιεπίπεδο εκτός μόνο από αυτά που καθορίζει η ίδια, για τον κλειστό τομέα $S(\Delta_1,\Delta_2)$, έχουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

[1] Ο S ελάσσων $\Leftrightarrow$ ο S δεν περιέχει καμία διανυσματική ευθεία

[2] Ο S ευθύς $\Leftrightarrow$ ο S περιέχει μία και μόνον μία διανυσματική ευθεία

[3] Ο S μείζων $\Leftrightarrow$ ο S περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές διανυσματικές ευθείες

Οι τομείς που ορίσαμε αναφέρονται και ως τομείς με κορυφή το 0. Αν ο S είναι ένας τομέας (ανοικτός ή κλειστός), οποιαδήποτε μεταφορά α+S καλείται (***ανοικτός*** ή ***κλειστός***) ***τομέας με κορυφή το α***. Το σύνολο α+S είναι ευθύς, ελάσσων ή μείζων τομέας ανάλογα με το τι είναι ο S, ενώ οι ημιευθείες αρχής και πέρατος του α+S είναι η εικόνες των αντίστοιχων ημιευθειών του S μέσω της μεταφοράς.

Παρατήρηση

Ο τρόπος που ορίσαμε τον κλειστό τομέα ομοιάζει σε μεγάλο βαθμό με την προσέγγιση της έννοιας της γωνίας με βάση το αξιωματικό σύστημα του Hilbert. Το ίδιο ισχύει και για τη διάταξη που ορίζεται στις γωνίες του επιπέδου, αφού για να συγκρίνουμε δύο γωνίες αρκεί να μεταφέρουμε τη μία ώστε να έχει κοινή κορυφή και κοινή πλευρά με την άλλη και τα εσωτερικά τους σημεία να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η κοινή πλευρά με ένα σημείο της άλλης πλευράς οποιασδήποτε από τις δύο γωνίες. Μεγαλύτερη είναι εκείνη η γωνία η οποία έχει ως εσωτερικά σημεία όλα τα εσωτερικά σημεία της άλλης γωνίας. Βέβαια, τίποτε άλλο δεν μπορούμε να πούμε για τις γωνίες μιας και δεν έχουμε ούτε την έννοια της καθετότητας αλλά και δεν έχουμε ακόμα τη δυνατότητα μέτρησης.

2.4. Ευκλείδειος χώρος – Ομοιότητες και Ισομετρίες του Ευκλείδειου Χώρου

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε διανυσματικούς χώρους εφοδιασμένους με μια διγραμμική μορφή θετικά ορισμένη, ή όπως αλλιώς τους ονομάζουμε χώρους με εσωτερικό γινόμενο. Θα γίνει φανερό ότι ο διανυσματικός χώρος πλέον γίνεται μετρικός χώρος και ενώ μέχρι τώρα είχαμε μόνο την έννοια της παραλληλίας, εισάγουμε την έννοια της καθετότητας με άμεση συνέπεια το Πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό των Ευκλείδειων χώρων. Θα αναφερθούμε επίσης σε όλες εκείνες τις απεικονίσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται ως Ευκλείδειες αλλά και ως στερεές κινήσεις και οι οποίες διατηρούν τόσο την καθετότητα όσο και τις αποστάσεις. Σε κάθε διανυσματικό χώρο υπάρχει πάντα μια διγραμμική μορφή θετικά ορισμένη (εσωτερικό γινόμενο) και επιπλέον αν φ είναι μια τέτοια μορφή τότε και η απεικόνιση $(x,y)\mapsto\varphi(u(x),u(y))$, όπου u είναι ένας αυτομορφισμός του V, είναι επίσης μια θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή ($u(x)=0\Leftrightarrow x=0$).

Είναι γεγονός, λοιπόν, ότι Ευκλείδεια δομή αποκτά ένας χώρος όταν εφοδιάζεται με ένα εσωτερικό γινόμενο, όμως αν θεωρήσουμε έναν διανυσματικό χώρο V και δύο διαφορετικές θετικά ορισμένες διγραμμικές μορφές φ και φ΄, εγείρεται το ερώτημα πότε αυτή η Ευκλείδεια δομή μένει αναλλοίωτη, δηλαδή πότε οι έννοιες όπως η καθετότητα και η συμμετρία είναι πάντοτε ίδιες σε αυτές τις δύο Ευκλείδειες δομές. Η φ΄ μπορεί να προσδιοριστεί σε βαθμό αναλογίας, δηλαδή ενός βαθμωτού πολλαπλασίου $\lambda\cdot\varphi$ ($\lambda>0$).

Ορισμός 2.4.1

Ένα ***εσωτερικό γινόμενο*** σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο V είναι μια συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $V\times V\to\mathbb{R}$ που γράφεται

$$(v,w)\mapsto\langle v,w\rangle$$

με την ιδιότητα $\langle v,v\rangle>0$ για όλα τα $v\neq0$.

Παρατηρήσεις

[1] Αν $\langle v,v\rangle>0$ για όλα τα $v\neq0$, λέμε ότι η διγραμμική απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι ***θετικά ορισμένη***.

[2] Κάθε εσωτερικό γινόμενο έχει πίνακα συμμετρικό, δηλαδή αν $M(\varphi)$ ο πίνακας

του εσωτερικού γινομένου $\varphi(v,w)=\langle v,w\rangle$, τότε $(M(\varphi))^t=M(\varphi)$.

Ορισμός 2.4.2

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Έστω ότι υπάρχει μια απεικόνιση $\|\cdot\|:V\to IR$ με $v\mapsto\|v\|$, τέτοια ώστε:

[1] $\|v\|>0$, αν $v\neq 0$ και $\|0\|=0$

[2] $\|\lambda v\|=|\lambda|\cdot\|v\|$, για όλα τα $v\in V$ και $\lambda\in IR$

[3] $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$, για όλα τα $v, w\in V$

Η απεικόνιση αυτή θα λέμε ότι είναι μία ***νόρμα*** πάνω στον V, ο αριθμός $\|v\|$ θα καλείται ***μήκος*** του v, ενώ το ζεύγος $(V, \|\cdot\|)$ θα λέγεται ***χώρος με νόρμα***.

Ορισμός 2.4.3

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Μια ***μετρική*** στον V είναι μια απεικόνιση $d:V\times V\to IR$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες, για όλα τα $u, v, w\in V$.

[1] $d(u,v)>0$ αν $u\neq v$ και $d(u,u)=0$

[2] $d(u,v)=d(v,u)$

[3] $d(u,v)\leq d(u,w)+d(w,v)$ (***τριγωνική ανισότητα***)

Θα αναφερόμαστε στο $d(u,v)$ ως την ***απόσταση ανάμεσα στα σημεία*** u και v, ενώ το ζεύγος (V, d) θα λέγεται ***μετρικός χώρος***.

Παρατήρηση

Κάθε χώρος με νόρμα είναι ένας μετρικός χώρος αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι αν $(V, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η απεικόνιση $d:V\times V\to IR$, με

$$d(v,w):=\|v-w\|$$

ορίζει μία μετρική πάνω στον V. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ***η μετρική d επάγεται από τη νόρμα*** $\|\cdot\|$.

Σε αυτή την περίπτωση, προφανώς είναι

$$d(\lambda u,\lambda v)=|\lambda|\cdot d(u,v)$$

$$d(u+w,v+w)=d(u,v)$$

το οποίο σημαίνει ότι το μήκος είναι αμετάβλητο μέσω της μεταφοράς. Επιπλέον, η τριγωνική ανισότητα για τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα είναι ισοδύναμη με τη δήλωση:

$$\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|, \text{ για όλα τα } v, w\in V.$$

Με βάση τη παρατήρηση αυτή, ο ορισμός 2.4.2 ισοδύναμα γράφεται:

Ορισμός 2.4.4

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια ***νόρμα*** που συμβολίζεται με $\|\cdot\|$, είναι μια απεικόνιση $V \to \mathbb{R}$ με $v \mapsto \|v\|$, τέτοια ώστε:

[1] η $d(v,w):=\|v-w\|$ ορίζει μία μετρική πάνω στον V και

[2] $\|\lambda v\|=|\lambda|\cdot\|v\|$, για όλα τα $v\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.4.5

Έστω $(V,<\cdot,\cdot>)$ ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Άμεσα συνδεδεμένη με το εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$, είναι η απεικόνιση $\|\cdot\|:V\to \mathbb{R}$ με $\|v\|:=<v,v>^{\frac{1}{2}}$ η οποία είναι μια νόρμα πάνω στον V.

Απόδειξη

Προφανώς είναι $\|v\|=<v,v>^{\frac{1}{2}}>0$, αν $v\neq 0$ και $\|0\|=0$, ενώ $\|\lambda v\|=|\lambda|\cdot\|v\|$, για όλα τα $v\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, αφού

$$\|\lambda v\|:=<\lambda v,\lambda v>^{\frac{1}{2}}=\left(\lambda^2<v,v>\right)^{\frac{1}{2}}=|\lambda|\cdot<v,v>^{\frac{1}{2}}=|\lambda|\cdot\|v\|$$

Τέλος, για την τριγωνική ισότητα, έχουμε:

$$0\le\|v-\lambda w\|^2=<v-\lambda w,v-\lambda w>=<v,v>-2\lambda<v,w>+\lambda^2<w,w>.$$

Αν, τώρα, θέσουμε όπου $\lambda=\dfrac{<v,w>}{<w,w>}$ τότε έχουμε:

$$\frac{<v,w>^2}{<w,w>}-2\frac{<v,w>^2}{<w,w>}+\frac{<v,w><w,w>}{<w,w>}\ge 0\Leftrightarrow$$
$$<v,w>^2\le<v,v><w,w>\Leftrightarrow$$
$$\left|<v,w>\right|\le<v,v>^{\frac{1}{2}}<w,w>^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$
$$\left|<v,w>\right|\le\|v\|\cdot\|w\|$$

Η ανισότητα που μόλις αποδείξαμε είναι η περίφημη ***ανισότητα Cauchy – Schwarz***, ενώ η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα v, w είναι γραμμικά εξαρτημένα. Με χρήση αυτής της ανισότητας έχουμε:

$$\|v+w\|^2=<v+w,v+w>=\|v\|^2+2<v,w>+\|w\|^2\le$$
$$\le\|v\|^2+2\left|<v,w>\right|+\|w\|^2\le\|v\|^2+2\|v\|\cdot\|w\|+\|w\|^2=\left(\|v\|+\|w\|\right)^2$$

άρα

$$\|v+w\| \le \|v\|+\|w\|, \text{ για όλα τα } v, w \in V.$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι γνωστή και ως ***ανισότητα Minkowski***.

Παρατήρηση

[1] Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος με νόρμα.

[2] Από την διαδικασία της παραπάνω απόδειξης προκύπτει ότι

$$\| v+w \|^2 = < v+w, v+w > = \| v \|^2 + 2 < v, w > + \| w \|^2, \qquad (2.4.5.1)$$

γεγονός που μας επιτρέπει να εκφράζουμε το εσωτερικό γινόμενο με βοήθεια της νόρμας που επάγει, δηλαδή:

$$< v, w > = \frac{1}{2}\left(\| v+w \|^2 - \| v \|^2 - \| w \|^2\right)$$

Επίσης, από την ανισότητα Cauchy – Schwarz, έχουμε:

$$\left| < v, w > \right| \le \| v \| \cdot \| w \| \Leftrightarrow \frac{\left| < v, w > \right|}{\| v \| \cdot \| w \|} \le 1 \Leftrightarrow \left| \frac{< v, w >}{\| v \| \cdot \| w \|} \right| \le 1$$

Ορισμός 2.4.6

Έστω $(V,<\cdot,\cdot>)$ ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Δύο διανύσματα $v, u \in V$ θα λέγονται ***κάθετα*** αν $<v,u>=0$ και θα γράφουμε $v \perp u$.

Από τη σχέση (2.4.5.1) άμεσα έπεται ότι

$$v \perp u \Leftrightarrow \|v+u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 \quad (\textbf{\textit{Πυθαγόρειο θεώρημα}}).$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο IR^n με το σύνηθες Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή,

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{για κάθε } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR^n,\ y=(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in IR^n.$$

Η απεικόνιση $\|\cdot\|_2$: $IR^n \to IR$ η οποία ορίζεται ως

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{για κάθε } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR^n$$

είναι η νόρμα που παράγεται από το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Η μετρική που επάγεται από την παραπάνω νόρμα είναι η $d(x,y)=\|x-y\|$, ενώ ο παραγόμενος μετρικός χώρος, συμβολίζεται με IE^n (για n=2, έχουμε το Ευκλείδειο επίπεδο IE^2).

Στη συνέχεια, στόχος μας είναι η μελέτη όλων εκείνων των γραμμικών απεικονίσεων οι οποίες καθορίζουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αυτές είναι οι συσχετισμένες ομοιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να μιλάμε για ομοιότητα σε έναν Ευκλείδειο χώρο. Στο αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη, η ομοιότητα θεμελιώνεται με το $5^{ο}$ αίτημα ενώ μας δίνει τη δυνατότητα σύγκρισης μεγεθών όπως τα ευθύγραμμα τμήματα και τα εμβαδά σχημάτων. Η ισότητα, που επίσης είναι κεντρική έννοια στην Ευκλείδεια Γεωμετρία θα είναι, επομένως, μια ειδική περίπτωση ομοιότητας, δηλαδή θα είναι εκείνη η ομοιότητα με πολλαπλασιαστή (ή πιο απλά με λόγο ομοιότητας) τη μονάδα. Έτσι, θα μας απασχολήσουν οι ισομετρίες ενός Ευκλείδειου χώρου, δηλαδή εκείνες οι ομοιότητες που διατηρούν τόσο τις αποστάσεις όσο και την ορθογωνιότητα. Στο πνεύμα της άποψης του Klein για τη γεωμετρία, οι μετασχηματισμοί και ειδικότερα η ομάδα των μετασχηματισμών, είναι αυτή που καθορίζει τη δομή της εκάστοτε γεωμετρίας και τη διαφοροποιεί από τις άλλες γεωμετρίες, ενώ την ίδια στιγμή η μελέτη αυτής της γεωμετρίας γίνεται ανεξάρτητα από την εποπτεία.

Έστω, λοιπόν, $(V,<\cdot,\cdot>)$ ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 2.4.7

Ένας ενδομορφισμός u του διανυσματικού χώρου V καλείται ***γραμμική ομοιότητα*** (ή απλά ***ομοιότητα***) αν υπάρχει ένα βαθμωτό μ τέτοιο, ώστε για όλα τα x, $y\in V$ να ισχύει:

$$<u(x),u(y)>=\mu<x,y> \qquad (2.4.7.1)$$

Παρατηρήσεις

[1] Από τον παραπάνω ορισμό ισοδύναμα έχουμε ότι ένας ενδομορφισμός u του διανυσματικού χώρου V είναι γραμμική ομοιότητα αν υπάρχει ένα βαθμωτό μ τέτοιο ώστε για όλα τα $x\in V$ να ισχύει:

$$||u(x)||^2=\mu||x||^2 \qquad (2.4.7.2)$$

[2] Επειδή στον V υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα, είναι προφανές ότι ο αριθμός μ καθορίζεται μοναδικά από την απεικόνιση u και για αυτό το λόγο θα τον συμβολίζουμε με μ(u), ενώ καλείται ***πολλαπλασιαστής*** της u.

[3] Από τη σχέση (2.4.7.2) προκύπτει ότι $\mu(u)\geq 0$, ενώ αν $\mu(u)>0$, τότε $u(x)=0$ αν και μόνο αν $x=0$, επομένως όταν $\mu(u)>0$ η u είναι ένα προς ένα. Αν, τώρα, $\mu(u)=0$,

τότε η u είναι η μηδενική απεικόνιση.

[4] Αν u, v ομοιότητες, τότε για τη σύνθεσή τους $w=v\circ u$, είναι:

$$<w(x),w(y)>=\mu(v)<u(x),u(y)>=\mu(v)\mu(u)<x,y>$$

δηλαδή η $w=v\circ u$ είναι μια ομοιότητα με πολλαπλασιαστή το γινόμενο των πολλαπλασιαστών των v, u, άρα $\mu(w)=\mu(v)\mu(u)$. Αν επιπλέον η u είναι ομοιότητα επί τότε είναι:

$$<x,y>=\mu(u)<u^{-1}(x),u^{-1}(y)>\Leftrightarrow <u^{-1}(x),u^{-1}(y)>=(\mu(u))^{-1}<x,y>$$

δηλαδή η u^{-1} όταν η u είναι επί είναι επίσης ομοιότητα με πολλαπλασιαστή τον αντίστροφο του πολλαπλασιαστή της u, άρα $\mu(u^{-1})=(\mu(u))^{-1}$.

[5] Από τη σχέση (2.4.7.1) προκύπτει ότι αν τα διανύσματα x και y είναι ορθογώνια, τότε και τα διανύσματα u(x) και u(y) είναι ορθογώνια. Οι ομοιότητες επομένως διατηρούν την καθετότητα. Επιπλέον, αν u μια γραμμική ομοιότητα με πολλαπλασιαστή $\mu(u)>0$ τότε

$$||u(x-y)||=(\mu(u))^{1/2}||x-y||,$$

δηλαδή, $d(u(x),u(y))=(\mu(u))^{1/2}d(x,y)$.

Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $(x,y)\mapsto\varphi(x,y)=<u(x),u(y)>$, όπου u είναι μια ομοιότητα του V με $\mu(u)>0$, αυτή είναι επίσης μια θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή, αφού είναι $\varphi(x,x)=0\Leftrightarrow<u(x),u(x)>=0\Leftrightarrow u(x)=0\Leftrightarrow x=0$ (λόγω της παρατήρησης [1]). Στον Ευκλείδειο χώρο με αυτό το εσωτερικό γινόμενο διατηρείται η καθετότητα ενώ οι αποστάσεις σε σχέση με τον αρχικό Ευκλείδειο χώρο είναι πολλαπλασιασμένες όλες με τον θετικό αριθμό $(\mu(u))^{1/2}$, αφού:

$$d'^2(x,y)=\varphi(x-y,x-y)=<u(x-y),u(x-y)>=\mu(u)<x-y,x-y>=\mu(u)d^2(x,y).$$

Από τα παραπάνω έπεται άμεσα ότι το σύνολο των επί ομοιοτήτων του διανυσματικού χώρου V, είναι μια ομάδα και μάλιστα είναι μια υποομάδα της γραμμικής ομάδας GL(V). Αυτή η υποομάδα των ομοιοτήτων ενός διανυσματικού χώρου V καλείται ***ομάδα των γραμμικών ομοιοτήτων*** του Ευκλειδείου χώρου V, συμβολίζεται με **GO(V)**, ενώ η απεικόνιση $u\mapsto\mu(u)$ είναι ένας ομομορφισμός της GO(V) επί της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{R}_+^*$. Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού είναι μια κανονική υποομάδα της GO(V) που αποτελείται από τις ομοιότητες που

έχουν πολλαπλασιαστή το 1 και συμβολίζεται με O(V) ενώ καλείται ***ορθογώνια ομάδα*** του Ευκλειδείου χώρου V. Τα στοιχεία της O(V) καλούνται ***ορθογώνιοι μετασχηματισμοί*** ή ***γραμμικές ισομετρίες*** του V. Συμπερασματικά, οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί του V θα λέμε ότι είναι οι επί γραμμικές απεικονίσεις που ικανοποιούν μία από τις δύο παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

$$<u(x),u(y)>=<x,y>, \text{ για τυχαία } x, y\in V \qquad (2.4.7.3)$$

$$||u(x)||^2=||x||^2, \text{ για τυχαίο } x\in V \qquad (2.4.7.4)$$

Είναι προφανές, λοιπόν, ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν τις αποστάσεις αλλά και την καθετότητα.

Πρόταση 2.4.8

Κάθε γραμμικός ομοιοθετικός μετασχηματισμός είναι γραμμική ομοιότητα.

Απόδειξη

Έστω $h_\lambda:V\to V$ ένας γραμμικός ομοιοθετικός μετασχηματισμός με $x\mapsto h_\lambda(x)=\lambda x$.

Προφανώς είναι: $<u(x),u(y)>=\lambda^2<x,y>$, για κάθε $x, y\in V$, δηλαδή ο h_λ είναι μια ομοιότητα με πολλαπλασιαστή λ^2.

Πρόταση 2.4.9

Κάθε γραμμική ομοιότητα επί, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού με ένα γραμμικό ομοιοθετικό μετασχηματισμό.

Απόδειξη

Έστω u μια οποιαδήποτε γραμμική ομοιότητα επί, με πολλαπλασιαστή μ(u). Εφόσον, από την παρατήρηση [3] στον ορισμό (2.4.7), είναι μ(u)>0, ορίζεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda=\sqrt{\mu(u)}$ και είναι θετικός. Τότε η απεικόνιση $v=h_\lambda^{-1}\circ u$ είναι γραμμική ομοιότητα (ως σύνθεση γραμμικών ομοιοτήτων) και λόγω της παρατήρησης [5] στον ορισμό (2.4.7), έχει πολλαπλασιαστή

$$\mu(v)=\mu\left(h_\lambda^{-1}\circ u\right)=\mu\left(h_\lambda^{-1}\right)\cdot\mu(u)=\left(\mu(h_\lambda)\right)^{-1}\cdot\mu(u)=\frac{1}{\left(\sqrt{\mu(u)}\right)^2}\cdot\mu(u)=1,$$

επομένως ο v είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Από την $v=h_\lambda^{-1}\circ u$ έχουμε, λοιπόν, ότι $u=h_\lambda\circ v$, όπου λ>0 και $v\in O(V)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αυτή η γραφή δεν είναι μοναδική και έστω ότι η u γράφεται και ως $u=h_{\lambda'}\circ v'$ με λ΄>0 και $v'\in O(V)$. Τότε

$$h_\lambda \circ v = h_{\lambda'} \circ v' \Leftrightarrow h_\lambda \circ v \circ (v')^{-1} = h_{\lambda'} \circ v' \circ (v')^{-1} \Leftrightarrow$$
$$(h_\lambda)^{-1} \circ h_\lambda \circ v \circ (v')^{-1} = (h_\lambda)^{-1} \circ h_{\lambda'} \Leftrightarrow$$
$$v \circ (v')^{-1} = h_{\lambda' \cdot \lambda^{-1}}$$

Εφόσον όμως v, v΄∈O(V) είναι και $v \circ (v')^{-1} \in O(V)$, άρα και $h_{\lambda' \cdot \lambda^{-1}} \in O(V)$ οπότε θα πρέπει $(\lambda' \cdot \lambda^{-1})^2 = 1$ και επειδή λ, λ΄>0 θα πρέπει $\lambda' \cdot \lambda^{-1} = 1 \Leftrightarrow \lambda' = \lambda$. Αφού όμως λ΄=λ θα είναι και $v' = h_{\lambda'}^{-1} \circ u = h_\lambda^{-1} \circ u = v$, επομένως η u γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $u = h_\lambda \circ v$, όπου λ>0 και v∈O(V).

Παρατήρηση

Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι η GO(V) είναι το ευθύ γινόμενο των κανονικών υποομάδων Z^+ (όπου Z^+ η ομάδα των ομοιοθετικών μετασχηματισμών με θετικό λόγο λ, η οποία είναι ισόμορφη προς την $\mathbb{R}_+^*$) και της O(V), είναι δηλαδή

$$GO(V) = Z^+ \otimes O(V) = \mathbb{R}_+^* \otimes O(V)$$

Ειδικότερα, αν ο V είναι μια διανυσματική ευθεία, κάθε ενδομορφισμός του V είναι ομοιοθετικός, επομένως, γραμμική ομοιότητα και οι μόνες γραμμικές ομοιότητες με πολλαπλασιαστή 1, είναι οι $\mathbf{1}_V$, $-\mathbf{1}_V$, συνεπώς έχουμε ότι: $O(V)=\{\mathbf{1}_V, -\mathbf{1}_V\}$.

Ορισμός 2.4.10

Αν V, V΄ δύο Ευκλείδειοι χώροι, θα λέμε ότι μια γραμμική απεικόνιση g από τον V στον V΄ είναι μια ***ισομετρία*** αν

$$\langle g(x),g(y)\rangle = \langle x,y\rangle \text{ για τυχαία } x, y \in V.$$

Μια ισομετρία είναι απαραίτητα ένα προς ένα και αν επιπλέον είναι και επί θα λέμε ότι είναι ένας ***ισομορφισμός*** ανάμεσα στους Ευκλειδείους χώρους V και V΄. Αν η g είναι ένας ισομορφισμός, τότε προφανώς το ίδιο είναι και η g^{-1}. Όταν υπάρχει ένας τέτοιος ισομορφισμός ανάμεσα στους χώρους V και V΄, λέμε ότι οι V και V΄ είναι ***ισόμορφοι Ευκλείδειοι χώροι***. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε θεώρημα στον V που εμπεριέχει έννοιες που ορίζονται μέσω αθροίσματος, βαθμωτού πολλαπλασιασμού και εσωτερικού γινομένου, μεταφέρεται με τρόπο φυσικό σε ένα αντίστοιχο θεώρημα στον V΄ θεωρώντας απλά τις εικόνες μέσω του ισομορφισμού των στοιχείων και των υποσυνόλων του V που εμπλέκονται στο θεώρημα. Το να λέμε

ότι μια g επί από τον V στον V΄ είναι ένας ισομορφισμός Ευκλείδειων χώρων είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι η πρόσθεση, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός και το εσωτερικό γινόμενο στον V΄ συμπίπτουν με αυτά που μεταφέρονται στον V΄ μέσω της g. Η εικόνα ενός Ευκλείδειου χώρου μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού είναι ένας ισόμορφος Ευκλείδειος χώρος.

Πρόταση 2.4.11

Αν η g είναι μια ισομετρία επί από τον V στον V΄, τότε η gug^{-1} είναι μια ομοιότητα στον V΄, όταν η u είναι μια ομοιότητα στον V. Επιπλέον είναι

$$\mu(gug^{-1})=\mu(u).$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $(V,<\cdot,\cdot>)$ και $(V',<\cdot,\cdot>')$ δύο Ευκλείδειοι χώροι και $x, y\in V'$ τότε

$$<gug^{-1}(x),gug^{-1}(y)>'=<ug^{-1}(x),ug^{-1}(y)>=\mu(u)<g^{-1}(x),g^{-1}(y)>=\mu(u)<x,y>'.$$

Επομένως, αν η u είναι μια ομοιότητα στον V τότε η ομοιότητα του V΄ με τον ίδιο πολλαπλασιαστή είναι η gug^{-1}, όπου η g είναι μια ισομετρία επί από τον V στον V΄.

Στην προσπάθειά μας να προσδιορίσουμε πλήρως τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς, σκόπιμο είναι εν πρώτοις να καθορίσουμε τις ενελίξεις u της ομάδας των ομοιοτήτων ενός διανυσματικού χώρου V, δηλαδή της GO(V). Η παρακάτω πρόταση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αυτές δεν είναι άλλες από την κανονική της υποομάδα O(V) δηλαδή την ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών του V.

Πρόταση 2.4.12

Αν η u είναι μια ενέλιξη στην GO(V), τότε $u\in O(V)$ και ο V είναι το ευθύ άθροισμα δύο ορθογώνιων υπόχωρων W και F.

Απόδειξη

Επειδή η $u\in GO(V)$ και u είναι ενέλιξη, δηλαδή $u^2=id_V$, ισχύει $(\mu(u))^2=1$. Όμως η u είναι ένα προς ένα, άρα, από την παρατήρηση [3] που έπεται του ορισμού 2.4.7, $\mu(u)>0$ και επομένως $\mu(u)=1$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι αν u ενέλιξη της GO(V), τότε $u\in O(V)$.

Επιπλέον, αφού η u έχει ιδιοτιμές τις 1 και −1, γνωρίζουμε ότι ο V είναι το ευθύ άθροισμα των ιδιοχώρων V(1;u) και V(−1;u). Επιπλέον αν $x\in V(1;u)$ και $y\in V(-1;u)$, εφόσον είναι $u(x)=x$ και $u(y)=-y$, έχουμε:

$$<u(x),u(y)>=<x,y>\Leftrightarrow<x,-y>=<x,y>\Leftrightarrow-<x,y>=<x,y>\Leftrightarrow<x,y>=0$$

και επομένως οι W=V(1;u) και F=V(−1;u) είναι ορθογώνιοι.

Αντιστρόφως, αν ο V είναι το ευθύ άθροισμα δύο ορθογώνιων υπόχωρων W και F, τότε αν u είναι η ενέλιξη στην GO(V) η οποία ορίζεται ως u(x)=x στον W και u(x)=−x στον F, τότε για όλα τα x=y+z ($y\in W$, $z\in F$) είναι:
$||u(x)||^2=||u(y+z)||^2=||u(y)+u(z)||^2=||y-z||^2=||y||^2+||z||^2=||x||^2$ (από Πυθαγόρειο θεώρημα), επομένως $u\in O(V)$.

Επιπλέον είναι u(x)=u(y)+u(z), άρα u(x)=y−z. Όμως είναι και x=y+z, συνεπώς

$$y=\frac{1}{2}\left(x+u(x)\right)$$

Η προβολή y του x στον W, είναι το μέσο του τμήματος με άκρα τα x και u(x). Καλούμε την u ***ορθογώνια συμμετρία*** (ή ***συμμετρία*** ή ***ανάκλαση***) ως προς W.

Παρατήρηση

Η −u είναι η ορθογώνια συμμετρία ως προς τον F και οι μόνες διανυσματικές ευθείες που μένουν αναλλοίωτες μέσω της u είναι εκείνες που περιέχονται στους ιδιόχωρους W και F καθώς αυτές περιέχουν τα ιδιοδιανύσματα της u.

Παρατήρηση

Ειδικότερα, αν ο W είναι μια ευθεία D και α ένα μη μηδενικό διάνυσμα της D, ο F είναι ένα υπερεπίπεδο H με εξίσωση <α,x>=0. Αν u είναι η συμμετρία ως προς το H τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, αφού y είναι η προβολή του x στο H, είναι

$$y=\frac{1}{2}\left(x+u(x)\right) \qquad (2.4.12.1)$$

Όμως είναι γνωστό ότι αν V=D+H και z, y οι αντίστοιχες προβολές του x στους D και H, δηλαδή x=z+y, τότε $z=\frac{<x,\alpha>}{||\alpha||^2}\alpha$ και $y=x-\frac{<x,\alpha>}{||\alpha||^2}\alpha$ (2.4.12.2)

επομένως

$$\frac{1}{2}\left(x+u(x)\right)=x-\frac{<x,\alpha>}{||\alpha||^2}\cdot\alpha$$

ισοδύναμα $$u(x)=x-2\frac{<x,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\cdot\alpha. \qquad (2.4.12.3)$$

Αποδείξαμε, επομένως ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι οι συμμετρίες ως

προς υπερεπίπεδα. Ειδικότερα αν ο Ευκλείδειος χώρος έχει διάσταση 2 οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι οι συμμετρίες ως προς ευθείες.

Πρόταση 2.4.13

Αν $H\neq\{0\}$ ένα υπερεπίπεδο του V με εξίσωση $<\alpha,x>=0$, τότε η συμμετρία ως προς H είναι η μοναδική ομοιότητα διαφορετική της ταυτοτικής 1_V η οποία σταθεροποιεί όλα τα σημεία του H.

Απόδειξη

Έστω u είναι μια ομοιότητα η οποία σταθεροποιεί όλα τα σημεία του H και $x\neq 0$ ένα σημείο του H, τότε θα πρέπει $u(x)=x$, για κάθε $x\in H$, άρα

$$||x||^2=||u(x)||^2=\mu(u)||x||^2$$

και επομένως $\mu(u)=1$. Επιπλέον, επειδή το $u(\alpha)$ πρέπει να είναι ορθογώνιο προς όλα τα διανύσματα του H ($<\alpha,x>=0\Leftrightarrow<u(\alpha),u(x)>=0\Leftrightarrow<u(\alpha),x>=0$, για κάθε $x\in H$), θα πρέπει να ισχύει $u(\alpha)=\lambda\alpha$. Όμως είναι $||u(\alpha)||=||\alpha||$ άρα $||\lambda\alpha||=||\alpha||$ και επομένως έπεται ότι $|\lambda|=1$. Αν όμως $\lambda=1$, τότε η u είναι η ταυτοτική 1_V, επομένως $\lambda=-1$ και η u είναι η συμμετρία ως προς H.

Ορισμός 2.4.14

Έστω $u=t_\alpha\circ v$ ένας συσχετισμένος ένα προς ένα και επί ενδομορφισμός του V, όπου t_α είναι η μεταφορά κατά το διάνυσμα $\alpha\in V$ και $v\in GL(V)$. Θα λέμε ότι ο u είναι μια ***συσχετισμένη ομοιότητα*** (ή ***ομοιότητα***) αν για τυχαία $x, y\in V$ ισχύει

$$d(u(x),u(y))=\lambda d(x,y) \qquad (2.4.14.1)$$

για κάποιο θετικό βαθμωτό λ.

Παρατηρήσεις

[1] Εφόσον οι μεταφορές διατηρούν τις αποστάσεις, δηλαδή $d(t_\alpha(x),t_\alpha(y))=d(x,y)$, η σχέση (2.4.14.1) του παραπάνω ορισμού ισοδύναμα γράφεται:

$$d(v(x),v(y))=\lambda d(x,y)$$

Ειδικότερα, αν θέσουμε $y=0$, και αφού $v(0)=0$, έχουμε:

$$||v(x)||=\lambda||x||, \text{ για όλα τα } x\in V$$

$$||v(x)||^2=\lambda^2||x||^2, \text{ για όλα τα } x\in V$$

($v(0)=0$), επομένως η v είναι μια γραμμική ομοιότητα με πολλαπλασιαστή $\lambda^2\neq 0$.

Αντίστροφα, τώρα, αν η v είναι μια γραμμική ομοιότητα με πολλαπλασιαστή

$\lambda^2 \neq 0$, τότε ικανοποιεί και την $\|v(x-y)\|=\lambda\|x-y\|$, δηλαδή $d(v(x),v(y))=\lambda d(x,y)$, οπότε ικανοποιείται και η (2.4.14.1). Καλούμε το λ^2 ***πολλαπλασιαστή της ομοιότητας*** u και τον συμβολίσουμε με μ(u). Τότε , προφανώς είναι μ(u)=μ(v). Αυτό σημαίνει ότι κάθε συσχετισμένη ομοιότητα γράφεται ως η σύνθεση μιας γραμμικής ομοιότητας με μία μεταφορά. Από την παρατήρηση αυτή, έπεται άμεσα ότι οι γραμμικές ομοιότητες είναι συσχετισμένες ομοιότητες και μάλιστα με τον ίδιο πολλαπλασιαστή.

[2] Από τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι οι ομοιότητες σχηματίζουν μια ομάδα, την οποία συμβολίζουμε με **Sm(V)** και είναι υποομάδα της συσχετισμένης ομάδας **GA(V)**, ενώ η απεικόνιση $u \mapsto \mu(u)$ είναι ένας ομομορφισμός της Sm(V) στην ομάδα $\mathbb{R}_+^*$. Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού είναι η κανονική υποομάδα της Sm(V) που περιέχει όλες τις ομοιότητες με πολλαπλασιαστή τη μονάδα, δηλαδή τις συσχετισμένες απεικονίσεις που **διατηρούν τις αποστάσεις**. Αυτή η ομάδα συμβολίζεται με Is(V) και καλείται ομάδα των ***συσχετισμένων ισομετριών*** (ή ***ισομετριών***) του V.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι τα στοιχεία της Is(V) γράφονται ως σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού v και μιας μεταφοράς, δηλαδή τα στοιχεία της Is(V) είναι οι ενελίξεις u της Sm(V), εκείνες δηλαδή οι ομοιότητες u που ικανοποιούν την $u^2=1_V$.

Πρόταση 2.4.15

Κάθε ενέλιξη $u \in Sm(V)$ έχει σταθερό σημείο το $\alpha = \frac{1}{2}u(0)$ και γράφεται ως η σύνθεση μιας ενέλιξης της GO(V), δηλαδή ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού, και μιας μεταφοράς κατά 2α.

Απόδειξη

Έστω $u \in Sm(V)$ και $u^2=id_V$. Είναι:

$$u(\alpha) = u\left(\frac{1}{2}u(0)\right) = u\left(\frac{1}{2}(0+u(0))\right) = \frac{1}{2}\left(u(0)+u^2(0)\right) = \frac{1}{2}u(0) = \alpha$$

(λόγω της πρότασης 2.2.9) και επομένως η u έχει σταθερό σημείο το $\alpha = \frac{1}{2}u(0)$, ενώ u(0)=2α.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $u=t_{2\alpha}\circ v$, όπου $v\in O(V)$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $u(\alpha)=t_{2\alpha}(v(\alpha))\Leftrightarrow\alpha=2\alpha+v(\alpha)\Leftrightarrow v(\alpha)=-\alpha$.

Επομένως,

$$u^2(x)=x\Leftrightarrow x=u(u(x))\Leftrightarrow x=(t_{2\alpha}\circ v)(u(x))\Leftrightarrow x=2\alpha+v(u(x))\Leftrightarrow x=2\alpha+v(2\alpha+v(x))\Leftrightarrow$$

$$x=2\alpha+2v(\alpha)+v^2(x)\Leftrightarrow x=2\alpha-2\alpha+v^2(x)\Leftrightarrow x=v^2(x).$$

Άρα, είναι $v^2(x)=x$, δηλαδή $v\in O(V)$.

Αφού λοιπόν $v\in O(V)$, από την πρόταση 2.4.12, ο V είναι το ευθύ άθροισμα δύο ορθογώνιων υπόχωρων W και F και η v είναι η ορθογώνια συμμετρία ως προς τον W, άρα είναι $v(x)=x$, για κάθε $x\in W$, και

$$u(\alpha+x)=2\alpha+v(\alpha+x)=2\alpha+v(\alpha)+v(x)=2\alpha-\alpha+v(x)=\alpha+v(x)=\alpha+x, \text{ για κάθε } x\in W$$

δηλαδή η u σταθεροποιεί όλα τα σημεία της γραμμικής πολλαπλότητας $\alpha+W$ και για κάθε $x\in V$, η γραμμική πολλαπλότητα $x+F$ η οποία είναι παράλληλη προς τον F και διέρχεται από το x, συναντά την $\alpha+W$ στο μοναδικό σημείο $\frac{1}{2}\left(x+u(x)\right)$.

Καλούμε την u ***συμμετρία*** ή ***ορθογώνια συμμετρία*** ή ***ανάκλαση ως προς την γραμμική πολλαπλότητα*** $\alpha+W$.

Παρατηρήσεις

[1] Μπορούμε να επιλέξουμε το α να ανήκει στον ορθογώνιο υπόχωρο F, για παράδειγμα το α να είναι η ορθογώνια προβολή του 0 στον $\alpha+W$.

[2] Για όλα τα $x=y+z$ με $y\in W$ και $z\in F$, έχουμε:

$$u(x)=u(y+z)=2\alpha+v(y+z)=2\alpha+y-z.$$

[3] Από τα παραπάνω άμεσα έπεται ότι για κάθε διάνυσμα c που ανήκει στο W, είναι $u\circ t_c=t_c\circ u$. Πράγματι·

$$(u\circ t_c)(x)=u(x+c)=u(y+c+z)=2\alpha+y-z+c, \text{ και } (t_c\circ u)(x)= t_c(u(x))=u(x)+c=2\alpha+y-z+c.$$

Αποδείξαμε, επομένως, ότι οι ισομετρίες είναι οι συμμετρίες ως προς γραμμικές πολλαπλότητες ουσιαστικά δηλαδή η σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού, και μιας μεταφοράς, ειδικότερα αν ο διανυσματικός χώρος έχει διάσταση 2 οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι η σύνθεση μιας συμμετρίας ως προς μια ευθεία και μιας μεταφοράς κατά ένα διάνυσμα. Να σημειώσουμε ακόμα, σε αυτό το σημείο,

ότι οι ισομετρίες είναι ακριβώς εκείνες οι στερεές κινήσεις οι οποίες αφήνουν αναλλοίωτα τα σχήματα (ευθείες, τμήματα, κτλ) και μας εξασφαλίζουν τη δυνατότητα μεταφοράς απαραίτητο εργαλείο για την εγκαθίδρυση της ισότητας σε έναν Ευκλείδειο χώρο.

Πρόταση 2.4.16

Αν u_1, u_2 είναι δύο συμμετρίες ως προς δύο γραμμικές πολλαπλότητες α_1+V και α_2+V, με την ίδια διεύθυνση (τα α_1 και α_2 είναι στον ορθογώνιο υπόχωρο F του V), τότε αν θέσουμε $u=u_1\circ u_2$, η u είναι η μεταφορά κατά το διάνυσμα $2(\alpha_1-\alpha_2)\in F$ και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Αν u_1, u_2 είναι δύο συμμετρίες ως προς δύο γραμμικές πολλαπλότητες α_1+V και α_2+V, με την ίδια διεύθυνση (τα α_1 και α_2 είναι στον ορθογώνιο υπόχωρο F του V) τότε αν θέσουμε $u=u_1\circ u_2$ και θεωρήσουμε $x=y+z$, με $y\in W$και $z\in F$ έχουμε

$$u(x)=(u_1\circ u_2)(x)=u_1(2\alpha_2+y-z)=u_1(y+2\alpha_2-z)=2\alpha_1-2\alpha_2+y+z=x+2(\alpha_1-\alpha_2),$$

δηλαδή η u είναι η μεταφορά κατά το διάνυσμα $2(\alpha_1-\alpha_2)\in F$.

Αντιστρόφως, αν δοθεί ένα διάνυσμα $\beta\in F$, τότε εφόσον

$$(t_\beta\circ u_1)(x)=\beta+u_1(x)=\beta+2\alpha_1+y-z=2(\alpha_1+\frac{1}{2}\beta)+y-z,$$

η $t_\beta\circ u_1$ είναι η συμμετρία ως προς την γραμμική πολλαπλότητα $\alpha_1+\frac{1}{2}\beta+V$. Όμοια, προκύπτει ότι η $u_1\circ t_\beta$ είναι η συμμετρία ως προς την γραμμική πολλαπλότητα $\alpha_1-\frac{1}{2}\beta+V$. Άρα η $u=(t_\beta\circ u_1)\circ(u_1\circ t_\beta)=t_\beta\circ t_\beta=t_{2\beta}$, δηλαδή κάθε μεταφορά κατά το διάνυσμα $2\beta\in F$ μπορεί να γραφεί ως η σύνθεση δύο συμμετριών ως προς δύο παράλληλες γραμμικές πολλαπλότητες.

Παρατήρηση

Από την παραπάνω πρόταση άμεσα προκύπτει ότι η σύνθεση δύο συμμετριών ως προς παράλληλες πολλαπλότητες είναι μια μεταφορά αλλά και ότι κάθε μεταφορά αναλύεται σε δύο συμμετρίες ως προς παράλληλες πολλαπλότητες.

2.5. Ευκλείδειο επίπεδο

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα μεταφέρουμε τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας στον διδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή στο Ευκλείδειο επίπεδο, και θα προσδιορίσουμε πλήρως τις ομοιότητες και τις ισομετρίες αυτού. Η Γεωμετρία αυτού του επιπέδου είναι η Ευκλείδεια Επίπεδη Γεωμετρία και μέσα σε αυτό το πλαίσιο θα επιχειρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο να δώσουμε την έννοια της γωνίας.

Αν λοιπόν, θεωρήσουμε ότι ο διανυσματικός χώρος V για τον οποίο διατυπώθηκαν όλα τα συμπεράσματα της ενότητας 2.4 είναι διδιάστατος, τότε ο Ευκλείδειος χώρος που προκύπτει καλείται ***Ευκλείδειο επίπεδο***. Ένα μοντέλο Ευκλείδειου επιπέδου, όπως θα δούμε πιο αναλυτικά στη συνέχεια είναι το Καρτεσιανό επίπεδο, όπου ο V είναι ο IR^2.

Ορισμός 2.5.1

Μια ***βάση*** $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ του V θα λέγεται ***ορθογώνια*** αν τα διανύσματα ε_1, ε_2 είναι ορθογώνια, και ***ορθοκανονική*** αν τα διανύσματα ε_1, ε_2 είναι ορθογώνια και είναι και τα δύο μοναδιαία.

Αν λοιπόν $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του V, το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την σχέση

$$<x,y>=x_1y_1+x_2y_2, \text{ για κάθε } x=(x_1, x_2)\in V,\ y=(y_1, y_2)\in V$$

καλείται ***σύνηθες Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο***, ενώ η νόρμα που επάγεται, ορίζεται από τη σχέση

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2, \text{ για κάθε } x=(x_1, x_2)\in V.$$

Πρόταση 2.5.2

Αν $u\in End(V)$ και $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ είναι μια βάση του V, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

[1] Η u είναι ένα προς ένα

[2] Η u είναι επί

[3] Η u είναι ένα προς ένα και επί

[4] Τα $u(\varepsilon_1)$ και $u(\varepsilon_2)$ αποτελούν μια βάση του V.

Στην παρατήρηση [4] του ορισμού 2.4.7 είδαμε ότι μια γραμμική ομοιότητα είναι

είτε η 0 είτε ένα προς ένα, αλλά στο Ευκλείδειο επίπεδο (σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση) κάθε ένα προς ένα ενδομορφισμός είναι ένα προς ένα και επί και επομένως για μια ομοιότητα είναι u=0 όταν μ(u)=0 και η u είναι ένα προς ένα και επί όταν μ(u)≠0.

Πρόταση 2.5.3

Αν $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του V, τότε οι επόμενες συνθήκες χαρακτηρίζουν τις γραμμικές ομοιότητες u με πολλαπλασιαστή μ(u)

$$<u(\varepsilon_1),u(\varepsilon_1)>=\mu(u),\ <u(\varepsilon_2),u(\varepsilon_2)>=\mu(u) \text{ και } <u(\varepsilon_1),u(\varepsilon_2)>=0.$$

Απόδειξη

Οι παραπάνω συνθήκες είναι αναγκαίες και όταν ικανοποιούνται είναι

$\|u(x)\|^2 = \|x_1u(\varepsilon_1)+x_2u(\varepsilon_2)\|^2 = \mu(u)\left(x_1^2+x_2^2\right) = \mu(u)\|x\|^2$, για κάθε $x=(x_1, x_2)\in V$.

Παρατηρήσεις

[1] Ειδικότερα, η συμμετρία ως προς μια ευθεία D συμβολίζεται με s και χαρακτηρίζεται από τις σχέσεις

$$s(\varepsilon_1)=\varepsilon_1 \text{ και } s(\varepsilon_2)=-\varepsilon_2$$

αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ε_1 είναι το μοναδιαίο στην κατεύθυνση της D ενώ το ε_2 είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο στη D.

[2] Από τα παραπάνω και τον ορισμό 2.4.10, συμπεραίνουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση g από τον V επί ενός οποιουδήποτε άλλου Ευκλείδειου επιπέδου E είναι μια ισομετρία αν και μόνο αν

$$\|g(\varepsilon_1)\|=\|\varepsilon_1\|,\ \|g(\varepsilon_2)\|=\|\varepsilon_2\| \text{ και } <g(\varepsilon_1),g(\varepsilon_2)>=0.$$

Η ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων (όπως αυτές που κατασκευάζονται με τη διαδικασία Gram–Schmidt) έπεται ότι οποιαδήποτε δύο Ευκλείδεια επίπεδα είναι ισόμορφα. Για αυτό το λόγο, η ομάδα GO(V) (αντίστοιχα η ομάδα O(V)) συμβολίζεται και με $GO_2(IR)$ ή GO(2,IR) (αντίστοιχα $O_2(IR)$ ή O(2,IR)).

Η τελευταία παρατήρηση αυτή μας οδηγεί σε ένα πολύ σπουδαίο συμπέρασμα, ότι δηλαδή, η γεωμετρία του επιπέδου δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης και επομένως δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια 1–1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των διγραμμικών απεικονίσεων και των ενδομορφισμών του V.

Πρόταση 2.5.4

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{B}(V,V;\mathbb{R})$ των διγραμμικών μορφών πάνω στον $V\times V$ είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο End(V).

Απόδειξη

Έστω φ μια διγραμμική μορφή πάνω στον $V\times V$. Για οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα $y\in V$, η απεικόνιση:

$$x\mapsto\varphi(x,y)$$

είναι μια γραμμική μορφή πάνω στον V, αφού αν $x_1, x_2\in V$ είναι

$$\varphi(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y),$$

επομένως υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $d_\varphi(y)$ στον V, που εξαρτάται από το y, τέτοιο ώστε για όλα τα $x\in V$ να ισχύει:

$$\varphi(x,y)=\langle x,d_\varphi(y)\rangle \qquad (2.5.4.1)$$

Η απεικόνιση $y\mapsto d_\varphi(y)$ είναι ένας ενδομορφισμός του V, δηλαδή, αν αν y, $z\in V$ και α, $\beta\in\mathbb{R}$ είναι: $d_\varphi(\alpha y+\beta z)=\alpha d_\varphi(y)+\beta d_\varphi(z)$. Πράγματι·

Είναι

$$\varphi(x,\alpha y+\beta z)=\alpha\varphi(x,y)+\beta\varphi(x,z)$$

και επομένως

$$\langle x,d_\varphi(\alpha y+\beta z)\rangle=\alpha\langle x,d_\varphi(y)\rangle+\beta\langle x,d_\varphi(z)\rangle\Leftrightarrow$$

$$\langle x,d_\varphi(\alpha y+\beta z)\rangle-\alpha\langle x,d_\varphi(y)\rangle-\beta\langle x,d_\varphi(z)\rangle=0\Leftrightarrow$$

$$\langle x,d_\varphi(\alpha y+\beta z)-\alpha d_\varphi(y)-\beta d_\varphi(z)\rangle=0$$

και επειδή το 0 είναι το μοναδικό διάνυσμα που είναι ορθογώνιο στον V, έχουμε το ζητούμενο.

Ο ενδομορφισμός d_φ είναι ο ***ενδομορφισμός*** του V **που *συνδέεται με τη φ από δεξιά***.

Αντίστροφα, τώρα, αν u είναι ένας ενδομορφισμός του V, υπάρχει μια μοναδική διγραμμική μορφή φ τέτοια ώστε $u=d_\varphi$, δηλαδή $\varphi(x,y)=\langle x,u(y)\rangle$.

Έτσι, λοιπόν, η απεικόνιση $\varphi\mapsto d_\varphi$ είναι ένας ισομορφισμός από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{B}(V,V;\mathbb{R})$ των διγραμμικών μορφών πάνω στον $V\times V$ επί του διανυσματικού χώρου End(V).

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται επίσης ότι αν $x\in V$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα, η απεικόνιση:

$$y\mapsto\varphi(x,y)$$

είναι μια γραμμική μορφή πάνω στον V και επομένως υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $s_\varphi(x)$ στον V, που εξαρτάται από το x, τέτοιο ώστε για όλα τα $y\in V$ να ισχύει:

$$\varphi(x,y)=<s_\varphi(x),y> \qquad (2.5.4.2)$$

Η απεικόνιση $x\mapsto s_\varphi(x)$ είναι ένας ενδομορφισμός του V και είναι ο ***ενδομορφισμός*** του V που ***συνδέεται με τη φ από αριστερά***.

Προφανώς, η $\varphi\mapsto s_\varphi$ είναι επίσης ένας ισομορφισμός του από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{B}(V,V;\mathbb{R})$ των διγραμμικών μορφών πάνω στον $V\times V$ επί του διανυσματικού χώρου End(V).

<u>*Παρατήρηση*</u>

Ο ενδομορφισμός $s_\varphi(x)$ είναι ο ενδομορφισμός του V που συνδέεται με τη διγραμμική μορφή

$$(x,y)\mapsto\varphi(y,x)$$

από δεξιά.

Ορισμός 2.5.5

Έστω u είναι ένας τυχαίος ενδομορφισμός του V. Ο u συνδέεται από αριστερά με τη διγραμμική μορφή

$$(x,y)\mapsto<u(x),y>$$

και υπάρχει τότε ένας αντίστοιχος ενδομορφισμός u^* του V ο οποίος συνδέεται με την παραπάνω διγραμμική μορφή από δεξιά. Είναι προφανές, λοιπόν, ότι ο u^* είναι ο ενδομορφισμός του V για τον οποίο ισχύει

$$<u(x),y>=<x,u^*(y)>,\ \text{για όλα τα } x,\ y\in V. \qquad (2.5.5.1)$$

Ο u^* καλείται ***προσαρτημένος ενδομορφισμός*** του u.

<u>*Παρατήρηση*</u>

Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι:

$$(u^*)^*=u$$

αφού για όλα τα x, $y\in V$, είναι

$$<u^*(x),y>=<x,(u^*)^*(y)>\Leftrightarrow<y,u^*(x)>=<x,(u^*)^*(y)>\Leftrightarrow$$
$$<u(y),x>=<x,(u^*)^*(y)>\Leftrightarrow<x,u(y)>=<x,(u^*)^*(y)>$$

και επομένως η απεικόνιση $u\mapsto u^*$ είναι μια ενέλιξη του διανυσματικού χώρου των ενδομορφισμών του End(V).

Από τον ορισμό εύκολα προκύπτει ότι ισχύουν:

$$(v\circ u)^*=u^*\circ v^*$$

Έτσι, λοιπόν, για κάθε διγραμμική μορφή φ, είναι φανερό ότι είναι:

$$s_\varphi^* = d_\varphi \text{ και } d_\varphi^* = s_\varphi$$

Ορισμός 2.5.6

Ένας ενδομορφισμός u του V θα λέγεται ***συμμετρικός*** ή ***ερμιτιανός*** αν $u^*=u$, ενώ θα λέγεται ***αντισυμμετρικός*** αν $u^*=-u$.

Παρατηρήσεις

[1] Αν u συμμετρικός $\Leftrightarrow$ η φ: $\varphi(x,y)=<u(x),y>$ είναι συμμετρική, δηλαδή $<u(x),y>=<u(y),x>$.

[2] Αν u αντισυμμετρικός $\Leftrightarrow$ η φ: $\varphi(x,y)=<u(x),y>$ είναι αντισυμμετρική, δηλαδή $<u(x),y>=-<u(y),x>$.

[3] Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στον ορισμό 2.1.13, αν η φ είναι μια διγραμμική μορφή πάνω στον $V\times V$ με πίνακα M(φ) αναφορικά με μια ορθοκανονική βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ του V, τότε

$$\beta_{ij}=\varphi(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=<\varepsilon_i,d_\varphi(\varepsilon_j)>, \text{ για όλα τα } i, j\in\{1, 2\}.$$

Είναι προφανές λοιπόν ότι $M(d_\varphi)=M(\varphi)$. Όμως, εφόσον ο s_φ είναι ο ενδομορφισμός του V που συνδέεται με τη διγραμμική μορφή $(x,y)\mapsto\varphi(y,x)$ από δεξιά, θα έχουμε ότι $M(s_\varphi)=(M(\varphi))^t$, από το οποίο προκύπτει ότι για κάθε ενδομορφισμό u του V ισχύει:

$$M(u^*)=(M(u))^t. \qquad (2.5.6.1)$$

[4] Αποδεικνύεται επίσης ότι $\det(u^*)=\det(u)$, για κάθε $u\in GL(V)$. (2.5.6.2)

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε με ποιο τρόπο συνδέονται οι γραμμικές ομοιότητες με τους προσαρτημένους ενδομορφισμούς.

Πρόταση 2.5.7

Μια απεικόνιση u είναι μια γραμμική ομοιότητα με πολλαπλασιαστή λ, αν και μόνο αν ο πίνακάς της αναφορικά με μια ορθοκανονική βάση είναι τέτοιος ώστε:

$$(M(u))^t=\lambda(M(u))^{-1}.$$

Για συντομία μπορούμε να θέσουμε M(u)=U, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$U^t=\lambda U^{-1} \text{ (ή ισοδύναμα } U^tU=\lambda I_2).$$

Ο u είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός αν και μόνο αν ο πίνακάς του αναφορικά με μια ορθοκανονική βάση είναι τέτοιος ώστε:

$$U^t=U^{-1} \text{ (ή ισοδύναμα } U^tU=I_2).$$

Απόδειξη

Έστω μια γραμμική ομοιότητα u με πολλαπλασιαστή λ. Τότε, γνωρίζουμε ότι για κάθε x, y∈V είναι

$$<u(x),u(y)>=\lambda<x,y>$$

Από τη σχέση (2.5.5.1) όμως, ισοδύναμα έχουμε:

$$<x,u^*(u(y))>=<x,\lambda y>, \text{ για κάθε } x, y\in V$$

και επομένως

$$u^*\circ u=\lambda\cdot 1_V \qquad (2.5.7.1)$$

η οποία λόγω της (2.5.6.1), ισοδύναμα γράφεται:

$$(M(u))^t\cdot M(u)=\lambda I_2,$$

ενώ αν θέσουμε M(u)=U, είναι $U^tU=\lambda I_2$,

ή ισοδύναμα

$$U^t=\lambda U^{-1} \qquad (2.5.7.2)$$

Ειδικότερα, αν η ομοιότητα u είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, δηλαδή λ=1, τότε θα είναι $u^*\circ u=1_V \Leftrightarrow u^*=u^{-1}$ ενώ η (2.5.7.2) γράφεται:

$$U^tU=I_2 \Leftrightarrow U^t=U^{-1} \qquad (2.5.7.3)$$

Πόρισμα 2.5.8

Ένας ενδομορφισμός u είναι μια γραμμική ομοιότητα με πολλαπλασιαστή μ(u) αν και μόνο αν

$$u^*\circ u=\mu(u)\cdot 1_V$$

ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$(\det(u))^2=(\mu(u))^2 \qquad (2.5.8.1)$$

Ορισμός 2.5.9

Οι ομοιότητες για τις οποίες ισχύει det(u)=μ(u) καλούνται ***ευθείες ομοιότητες***, ενώ αυτές για τις οποίες ισχύει det(u)=−μ(u) καλούνται ***αντίστροφες ομοιότητες***. Ειδικότερα, οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί με ορίζουσα 1, καλούνται ***στροφές***.

Παρατηρήσεις

[1] Μια συμμετρία ως προς μια ευθεία έχει ορίζουσα −1 και επομένως είναι μια αντίστροφη ομοιότητα (παρατήρηση 3.4.2).

[2] Οι ομοιοθετικοί μετασχηματισμοί με λόγο λ, έχουν πολλαπλασιαστή λ^2, αλλά και ορίζουσα λ^2, επομένως είναι ευθείες ομοιότητες.

[3] Από τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις, υπάρχουν μη μηδενικές αντίστροφες ομοιότητες και η απεικόνιση u↦(det(u))/μ(u) είναι ένας ομομορφισμός της GO(V) επί της πολλαπλασιαστικής ομάδας {−1.1}. Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού είναι μια κανονική υποομάδα της GO(V) και αποτελείται από τις αντιστρέψιμες ευθείες ομοιότητες. Αυτή την ομάδα τη συμβολίζουμε με $\mathbf{GO^+(V)}$. Αν τώρα θεωρήσουμε την ομάδα O(V) των ορθογώνιων μετασχηματισμών τότε η απεικόνιση u↦det(u) είναι ένας ομομορφισμός της O(V) επί της πολλαπλασιαστικής ομάδας {−1.1}. Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού είναι μια κανονική υποομάδα της O(V) και αποτελείται από τις στροφές. Αυτή την ομάδα τη συμβολίζουμε με $\mathbf{O^+(V)}$ ή SO(V)ή $O_2^+(\mathbb{R})$ ή SO(2,IR). Τελικά ισχύει:$O^+(V)=O(V)\cap GO^+(V)$.

[4] Από την παρατήρηση 2.3.4 έπεται ότι οι στροφές διατηρούν τον προσανατολισμό ενώ οι συμμετρίες τον αντιστρέφουν.

[5] Όπως αποδείξαμε στην πρόταση 2.4.9, κάθε γραμμική ομοιότητα επί, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως η σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού με ένα ομοιοθετικό μετασχηματισμό επομένως αν u μια μη μηδενική ομοιότητα τότε η u γράφεται μοναδικά στη μορφή $u=h_\lambda\circ v$, όπου v είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός και λ>0. Εφόσον η h_λ είναι μια ευθεία ομοιότητα,

παρατηρούμε ότι η u θα είναι ευθεία ομοιότητα αν ο v είναι μια στροφή, ενώ θα είναι μια αντίστροφη ομοιότητα αν ο v είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός με ορίζουσα ίση με -1. Για να μελετήσουμε επομένως την ομάδα των γραμμικών ομοιοτήτων μπορούμε να περιοριστούμε στην ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών.

Πρόταση 2.5.10

Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός με ορίζουσα -1 είναι μια συμμετρία ως προς μια διανυσματική ευθεία. Κάθε στροφή (δηλαδή κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός με ορίζουσα 1) μπορεί να εκφραστεί ως ένα γινόμενο δύο τέτοιων συμμετριών.

Απόδειξη

Έστω u ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός και a ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Θέτουμε $b=u(a)$.

Αν $b=a$, τότε ο u σταθεροποιεί όλα τα σημεία της ευθείας $D=D_{0a}$, εφόσον για κάθε $x\in D_{0a}$, είναι $u(x)=u(\lambda a)=\lambda u(a)=\lambda b=\lambda a$, δηλαδή $u=1_V$ στην D_{0a}.

Έτσι η ορθογώνια ευθεία D΄ παραμένει ολικά αμετάβλητη μέσω της u. Ο περιορισμός της u στην D΄ είναι επίσης ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός και επομένως από την παρατήρηση που έπεται της πρότασης 2.4.9 είναι $O(D')=\{\mathbf{1}_{D'}, \mathbf{-1}_{D'}\}$ δηλαδή ο περιορισμός της u στην D΄ θα είναι είτε η ταυτοτική απεικόνιση είτε ο ομοιοθετικός μετασχηματισμός με λόγο -1. Επομένως για την u θα είναι

είτε $u(x)=x$ για κάθε $x\in D_{0a}$ και $u(x)=x$ για κάθε $x\in D'$, δηλαδή $u=1_V$,

είτε $u(x)=x$ για κάθε $x\in D_{0a}$ και $u(x)=-x$ για κάθε $x\in D'$, δηλαδή η u είναι η συμμετρία ως προς την ευθεία D.

Έστω, τώρα, ότι $b\neq a$, οπότε $c=a-b\neq 0$. Έστω s η συμμετρία ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο c. Τότε από τη σχέση (2.4.12.3) είναι

$$s(b) = b - 2\frac{<b,c>}{<c,c>}\cdot c$$

Όμως ισχύει

$$2<b,c>=||b+c||^2-||b||^2-||c||^2=||a||^2-||b||^2-||c||^2.$$

Επειδή όμως ο u είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, είναι

$$||u(a)||=||a||\Leftrightarrow||b||=||a||,$$

επομένως, η παραπάνω σχέση γράφεται $2<b,c>=-||c||^2$ και συνεπώς είναι:

$$s(b)=b+c \Leftrightarrow s(b)=a.$$

Αν τώρα θέσουμε $v=s\circ u$ έχουμε:

$$v(a)=s(u(a))=s(b)=a$$

και αφού ο v είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, θα είναι είτε $v=1_V$, είτε συμμετρία ως προς μια ευθεία (με βάση το πρώτο σκέλος της απόδειξης). Τέλος, αφού $s=s^{-1}$ έχουμε $u=s^{-1}\circ v=s\circ v$, γεγονός που αποδεικνύει την πρόταση καθώς η 1_V μπορεί να θεωρηθεί ως το τετράγωνο οποιασδήποτε συμμετρίας ως προς ευθεία.

Παρατήρηση

Αν a, b δύο μη μηδενικά διανύσματα με $\|a\|=\|b\|$, τότε υπάρχει μια συμμετρία s ως προς μια διανυσματική ευθεία, τέτοια ώστε $s(a)=b$ και επομένως και $s(b)=s^2(a)=a$. Επιπλέον, αυτή η συμμετρία είναι μοναδική (αφού τα σταθερά σημεία αυτής της συμμετρίας ανήκουν σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από το μέσο του τμήματος ab και είναι ορθογώνια στο διάνυσμα $(b-a)$.

Πρόταση 2.5.11

Έστω $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του V και u ένας ενδομορφισμός του V με πίνακα M(u) αναφορικά με τη βάση$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Ο u είναι ***ευθεία ομοιότητα*** αν και μόνο αν ο πίνακάς του M(u) είναι της μορφής

$$M(u)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

Τόσο ο πολλαπλασιαστής όσο και η ορίζουσα του u τότε είναι $\alpha^2+\beta^2$.

Η ομάδα $GO^+(V)=GO^+(2,IR)$ των μη μηδενικών ευθείων ομοιοτήτων είναι αβελιανή.

Απόδειξη

Αν $u=0$, προφανώς είναι $M(u)=\mathbf{O_2}$, όπου $\mathbf{O_2}$ είναι ο μηδενικός πίνακας διάστασης 2×2 και έχει την απαιτούμενη μορφή.

Έστω λοιπόν ότι $u\neq0$ είναι μια ευθεία ομοιότητα. Θα είναι επομένως

$$u^*\circ u=(\det(u))1_V \text{ και άρα } u^*=(\det(u))u^{-1}, \text{ ενώ } \det(u)=\mu(u) \qquad (2.5.11.1)$$

Αν ψ είναι μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή, όχι ταυτοτικά μηδέν, τότε μπορούμε να θέσουμε $\psi(x,y)=\langle w(x),y\rangle$ με $w^*=-w$ (παρατήρηση [2] στην πρόταση 2.5.6). Από τον ορισμό 2.1.14, για κάθε ενδομορφισμό u του V είναι

$$\psi(u(x),u(y))=\det(u)\psi(x,y)$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$<w(u(x)),u(y)>=\det(u)<w(x),y>$$

$$<(u^{*}\circ w\circ u)(x)),y>=\det(u)<w(x),y>$$

και επειδή κανένα μη μηδενικό διάνυσμα δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο προς ολόκληρο το χώρο, στον διανυσματικό χώρο End(V) θα ισχύει:

$$u^{*}\circ w\circ u=(\det(u))\cdot w \qquad (2.5.11.2)$$

και λόγω της (2.5.11.1), έχουμε:

$$w\circ u=u\circ w. \qquad (2.5.11.3)$$

Αντιστρόφως, αν $w\circ u=u\circ w$ τότε η σχέση (2.5.11.2) γράφεται

$$u^{*}\circ u\circ w=(\det(u))\cdot w$$

και αφού η w αντιστρέφεται, έχουμε

$$u^{*}\circ u=(\det(u))\cdot 1_{V}.$$

Επομένως, οι ευθείες ομοιότητες του End(V) χαρακτηρίζονται από τη σχέση (2.5.11.3), γεγονός που επιβεβαιώνει ότι η ομάδα $GO^{+}(V)=GO^{+}(2,IR)$ των μη μηδενικών ευθείων ομοιοτήτων είναι αβελιανή.

Εφόσον η ψ είναι μια οποιαδήποτε αντισυμμετρική διγραμμική μορφή χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$M(\psi)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

αναφορικά με τη βάση$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $M(w)=(M(\psi))^{t}=-M(\psi)$ (αφού $w=s_{\psi}$). Αν τώρα θεωρήσουμε ότι ο πίνακας της ευθείας ομοιότητας u είναι ο

$$M(u)=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $M(w)M(u)=M(u)M(w)$ από την οποία άμεσα προκύπτει ότι $\gamma=-\beta$ και $\delta=\alpha$, δηλαδή ο πίνακας του υπρέπει να είναι της μορφής

$$M(u)=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Αν, τώρα, u΄ είναι μία ακόμη ευθεία ομοιότητα η οποία έχει πίνακα

$$M(u') = \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix},$$

τότε

$$M(u \circ u') = M(u)M(u') = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\beta' & -(\alpha\beta' + \beta\alpha') \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' & \alpha\alpha' - \beta\beta' \end{pmatrix} = M(u')M(u) = M(u' \circ u)$$

και επομένως $u \circ u' = u' \circ u$.

Τέλος, είναι προφανές ότι τόσο ο πολλαπλασιαστής όσο και η ορίζουσα του u τότε είναι $\alpha^2+\beta^2$.

Πρόταση 2.5.12

Έστω $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του V και u ένας ενδομορφισμός του V με πίνακα M(u) αναφορικά με τη βάση$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Ο u είναι αντίστροφη ομοιότητα αν και μόνο αν ο πίνακάς του M(u) είναι της μορφής

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Τόσο ο πολλαπλασιαστής όσο και η ορίζουσα του u τότε είναι $\alpha^2+\beta^2$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της προηγούμενης πρότασης. Η μόνη διαφορά είναι ότι για τις αντίστροφες ομοιότητες του End(V) είναι $\det(u)=-\mu(u)$, επομένως αυτές χαρακτηρίζονται από τη σχέση:

$$w \circ u = -u \circ w. \qquad (2.5.12.1)$$

Πρόταση 2.5.13

Έστω $a \in V$ μοναδιαίο διάνυσμα. Για κάθε $x \in V$, υπάρχει μια μοναδική ευθεία γραμμική ομοιότητα u η οποία αντιστοιχίζει το a στο x.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το a είναι το πρώτο διάνυσμα ε_1 μιας ορθοκανονικής βάσης $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ του V. Αν $x=\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2 \in V$, θεωρούμε την ευθεία γραμμική ομοιότητα u με πίνακα M(u) αναφορικά με αυτή τη βάση τον $M(u) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Τότε $u(a)=u(\varepsilon_1)=\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2=x$ και επειδή η γραφή αυτή είναι

μοναδική και η u είναι μοναδική.

Παρατήρηση

Μια ευθεία ομοιότητα διάφορη της ταυτοτικής δεν έχει άλλο σταθερό σημείο εκτός από το μηδέν.

Πόρισμα 2.5.14

Έστω a, $z\in V$ μοναδιαία διανύσματα. Τότε, υπάρχει μια μοναδική στροφή u η οποία αντιστοιχίζει το a στο z.

Αν τώρα θεωρήσουμε τις συσχετισμένες ομοιότητες του V, ανάλογα έχουμε:

Ορισμός 2.5.15

Μια συσχετισμένη ομοιότητα $u=t_b\circ v$, $v\in GO(V)$, καλείται ***ευθεία*** (αντίστοιχα ***αντίστροφη***) ***συσχετισμένη ομοιότητα***, αν η v είναι μια ευθεία (αντίστοιχα αντίστροφη) γραμμική ομοιότητα. Οι ευθείες (αντίστοιχα αντίστροφες) ισομετρίες καλούνται ***ευθείες*** (αντίστοιχα ***αντίστροφες***) ***μεταθέσεις***. Το σύνολο των ευθείων μεταθέσεων είναι μια υποομάδα της ομάδας Is(V) των ισομετριών του V.

Πρόταση 2.5.16

Αν η u είναι μια συσχετισμένη ομοιότητα με πολλαπλασιαστή διάφορο του 1, τότε η u έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο α. Επιπλέον, είναι:

$$u(x)-\alpha=v(x-\alpha) \qquad (2.5.16.1)$$

όπου v είναι η γραμμική ομοιότητα που σχετίζεται με την u.

Απόδειξη

Έστω u μια συσχετισμένη ομοιότητα με πολλαπλασιαστή διάφορο του 1 και v η γραμμική ομοιότητα που σχετίζεται με την u. Τότε $u=t_b\circ v$, όπου $v\in GO(V)$. Αν α είναι σταθερό σημείο της u, τότε $u(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow b+v(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow\alpha-v(\alpha)=b$.

Για να δείξουμε ότι το α είναι μοναδικό, αρκεί να θεωρήσουμε την $w=1_v-v$ και να δείξουμε ότι είναι ένα προς ένα και επί. Επειδή, εξ ορισμού, η w είναι επί ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι η w είναι ένα προς ένα το οποίο είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $v(x)=x$ αν και μόνο αν $x=0$. Αν όμως $v(x)=x$, έχουμε ότι:

$$||x||=||v(x)||=\mu(v)||x||$$

και επειδή $\mu(v)\neq 1$, έπεται ότι $x=0$.

Επιπλέον, είναι:

$$u(x)=b+v(x)\Leftrightarrow u(x)=\alpha-v(\alpha)+v(x)\Leftrightarrow u(x)-\alpha=-v(\alpha)+v(x)\Leftrightarrow u(x)-\alpha=v(x-\alpha).$$

Ορισμός 2.5.17

Το μοναδικό σταθερό σημείο α της συσχετισμένης ομοιότητας u καλείται ***κέντρο της ομοιότητας***.

Παρατήρηση

Ο τύπος (2.5.16.1) ισοδύναμα γράφεται:

$$u = t_\alpha \circ v \circ t_\alpha^{-1} \qquad (2.5.17.1)$$

αφού $\left(t_\alpha \circ v \circ t_\alpha^{-1}\right)(x) = \left(t_\alpha \circ v\right)(\alpha - x) = \alpha + v(\alpha - x) = u(x)$.

Η παραπάνω παρατήρηση μας επιτρέπει να πούμε ότι η μελέτη των συσχετισμένων ομοιοτήτων με πολλαπλασιαστή διάφορο του 1 καλύπτεται αποτελεσματικά από τη μελέτη των γραμμικών ομοιοτήτων την οποία και παραθέσαμε αναλυτικά προηγουμένως. Απομένει, λοιπόν, να δούμε τι συμβαίνει με εκείνες τις συσχετισμένες ομοιότητες που έχουν πολλαπλασιαστή τη μονάδα, δηλαδή τις συσχετισμένες ισομετρίες.

Πρόταση 2.5.18

Αν u είναι μια συσχετισμένη ισομετρία τότε η u μπορεί να έχει έναν από τους ακόλουθους τύπους:

[1] Η u είναι η ταυτοτική 1_V.

[2] Η u είναι μια μεταφορά t_b κατά ένα μη μηδενικό διάνυσμα b.

[3] Η u έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο α και ισχύει $u = t_\alpha \circ v \circ t_\alpha^{-1}$, όπου v είναι μια στροφή.

[4] Υπάρχει μια μοναδική ευθεία D και ένα μοναδικό διάνυσμα b΄ στην κατεύθυνση της D τέτοιο ώστε $u = t_{b'} \circ s = s \circ t_{b'}$, όπου s είναι η συμμετρία ως προς την ευθεία D.

Απόδειξη

Έστω u μια συσχετισμένη ισομετρία. Το ότι η u μπορεί να είναι είτε η ταυτοτική είτε μια μεταφορά κατά ένα μη μηδενικό διάνυσμα b είναι προφανές (τόσο η ταυτοτική όσο και η μεταφορά είναι ισομετρίες). Θα αποδείξουμε, λοιπόν, ότι η u μπορεί επίσης να έχει έναν από τους τύπους [3] και [4].

Έστω, λοιπόν, u μια συσχετισμένη ισομετρία διάφορη της ταυτοτικής. Τότε

$u=t_b\circ v$, όπου $v\in GO(V)$ και $v\neq 1_V$.

Αρχικά, εξετάζουμε την περίπτωση όπου η u έχει σταθερά σημεία. Αν λοιπόν α είναι ένα σταθερό σημείο της u τότε $u(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow b+v(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow\alpha-v(\alpha)=b$ και ισχύουν οι τύποι (2.5.16.1) και (2.5.17.1). Υπάρχουν, τώρα, δύο περιπτώσεις: είτε η v να είναι μία στροφή είτε η v να είναι μια συμμετρία ως προς μία ευθεία D_0.

Αν η v είναι μία στροφή (επομένως ευθεία ομοιότητα) τότε δεν έχει άλλα σταθερά σημεία εκτός από το 0 και έτσι η εξίσωση $b=x-v(x)$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$, επομένως η u έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο α και ισχύει $u=t_\alpha\circ v\circ t_\alpha^{-1}$, όπου v είναι μια στροφή, δηλαδή η u έχει τον τύπο [3].

Αν η v είναι η συμμετρία ως προς μια ευθεία D_0 (επομένως αντίστροφη ομοιότητα), είναι $\alpha\in D_0$ και ο τύπος $u=t_\alpha\circ v\circ t_\alpha^{-1}$ (λόγω της παρατήρησης [3] της πρότασης 2.4.15) δίνει

$$u(x)=\left(t_\alpha\circ v\circ t_\alpha^{-1}\right)(x)=\left(t_\alpha\circ s\circ t_\alpha^{-1}\right)(x)=\left(s\circ t_\alpha\circ t_\alpha^{-1}\right)(x)=s(x)$$

δηλαδή υπάρχει μια μοναδική ευθεία D_0 και ένα μοναδικό διάνυσμα $b'=0$ στην κατεύθυνση της D_0 τέτοιο ώστε $u=t_{b'}\circ s=s\circ t_{b'}=s$, όπου s είναι η συμμετρία ως προς την ευθεία D_0 και επομένως η u έχει τον τύπο [4].

Τέλος, αν η u δεν έχει σταθερά σημεία, από την απόδειξη της πρότασης 2.5.16 προκύπτει ότι η $w=1_v-v$ δεν είναι ένα προς ένα και επομένως υπάρχει $x\neq 0$ τέτοιο ώστε $v(x)=x$. Για να συμβαίνει αυτό όμως θα πρέπει η v να είναι μια συμμετρία ως προς κάποια διανυσματική ευθεία D_0, έστω s_0. Αν γράψουμε το $b=b'+b''$, όπου $b'\in D_0$ και b'' είναι ορθογώνιο προς τη D_0, τότε $u=t_b\circ s_0=t_{b'+b''}\circ s_0=t_{b'}\circ t_{b''}\circ s_0=t_{b'}\circ s$, όπου η $s=t_{b''}\circ s_0$ είναι η συμμετρία ως προς την ευθεία $D=-\frac{1}{2}b''+D_0$, ενώ $u=t_{b'}\circ s=s\circ t_{b'}$, αφού το $b'\in D_0$ (παρατήρηση [3], πρόταση 2.4.15).

Όσον αφορά τη μοναδικότητα που ισχυριζόμαστε στον τύπο [4], αυτή προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση [1] που διέπει τον ορισμό 2.1.7 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η s μπορεί να γραφεί στη μορφή $t_c\circ s_0$ κατά μοναδικό τρόπο, όπου s_0 είναι η συμμετρία ως προς την κατεύθυνση D_0 της D και c ανήκει στο συμπληρωματικό

υπόχωρο της D_0 (παρατήρηση [1] στην πρόταση 2.4.15).

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που η u έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο α και ισχύει $u = t_\alpha \circ v \circ t_\alpha^{-1}$, όπου v είναι μια στροφή, θα λέμε ότι η u είναι μια ***στροφή με κέντρο α***. Οι στροφές που ήδη έχουμε εξετάσει ουσιαστικά είναι οι στροφές με κέντρο το 0 και η ταυτοτική. Εφόσον, λοιπόν, η u μπορεί να γραφεί στη μορφή $u = t_\alpha \circ v \circ t_\alpha^{-1}$, η μελέτη της ομάδας των στροφών με τυχαίο κέντρο ουσιαστικά ανάγεται στη μελέτη της ομάδας $O^+(V)$ των στοφών.

Κλείνουμε επομένως την παράγραφο αυτή έχοντας προσδιορίσει πλήρως τις ισομετρίες ενός διδιάστατου διανυσματικού χώρου τον οποίο εφοδιάσαμε με ένα εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή όλες εκείνες τις ένα προς ένα και επί απεικονίσεις που μας εξασφαλίζουν τη δυνατότητα μεταφοράς και θεμελιώνουν τις έννοιες της ομοιότητας και της ισότητας στο Ευκλείδειο επίπεδο. Οι ισομετρίες είναι λοιπόν είτε στροφές με κέντρο α, είτε η σύνθεση μιας συμμετρίας ως προς μια ευθεία και μιας μεταφοράς κατά ένα διάνυσμα της ευθείας. Επιπλέον προσδιορίσαμε τη μορφή που μπορεί να έχει ο πίνακας μιας ισομετρίας γεγονός που μας δίνει μια εικόνα για την ομάδα Is(V).

3. Η Γωνία στο Ευκλείδειο Επίπεδο

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε έναν ορισμό για τη γωνία απαλλαγμένο από την εποπτεία στα πλαίσια μιας περισσότερο αλγεβρικής προσέγγισης. Η γωνία θα είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση από ένα Ευκλείδειο επίπεδο στον εαυτό του.

3.1. Η ομάδα των γωνιών

Όπως είδαμε στην πρόταση 2.5.11, η ομάδα $O^+(V)$ των στοφών με πράξη τη σύνθεση είναι μια αβελιανή ομάδα. Εισάγουμε, λοιπόν, μια προσθετική ομάδα, την οποία θα συμβολίζουμε με A (ή A(V)), ισόμορφη προς την $O^+(V)$. Την ομάδα αυτή θα καλούμε ***ομάδα των γωνιών των ημιευθειών*** (ή ***ομάδα των γωνιών***). Έστω r ένας ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων A και $O^+(V)$ ο οποίος θα είναι ο ίδιος εφάπαξ. Αν, λοιπόν, $\theta \in A$ και $r(\theta)$ είναι η στροφή που αντιστοιχεί στη γωνία θ μέσω του r, τότε θα καλούμε τη στροφή αυτή ***στροφή κατά γωνία θ***. Από τον τρόπο λοιπόν που ορίστηκαν οι παραπάνω έννοιες είναι προφανές ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

[1] $r(0)=1_V$, δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας των γωνιών ή αλλιώς η

μηδενική γωνία όπως θα την καλούμε, είναι η ταυτοτική απεικόνιση από τον V στον V.

[2] $r(-\theta)=(r(\theta))^{-1}=(r(\theta))^{*}$

[3] $r(\theta+\theta')=r(\theta)\circ r(\theta')= r(\theta')\circ r(\theta)$, δηλαδή η πρόσθεση δύο γωνιών αντιστοιχεί στη σύνθεση των αντίστοιχων στροφών στην $O^{+}(V)$.

Εκτός της ταυτοτικής, η $u=-1_V$ (συμμετρία ως προς την αρχή) είναι η μοναδική ενέλιξη της $O^{+}(V)$, οπότε κατά αντιστοιχία υπάρχει ένα μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της A το οποίο θα συμβολίζουμε με $\tilde{\omega}$ που ικανοποιεί την:

$$2\tilde{\omega} = 0 \tag{3.1.1}$$

και

$$r(\tilde{\omega}) = -1_V \tag{3.1.2}$$

Αυτή η γωνία καλείται ***ευθεία γωνία***.

Θα εξετάσουμε τώρα όλες εκείνες τις στροφές u για τις οποίες ισχύει:

$$u^2=-1_V \tag{3.1.3}$$

Εφόσον η u είναι μια στροφή, τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.5.11 ο πίνακάς της αναφορικά με μια ορθοκανονική βάση πρέπει να είναι της μορφής

$$M(u) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ με } \alpha^2+\beta^2=1. \tag{3.1.4}$$

Όμως αφού $u^2=-1_V$, έχουμε ότι $M(u^2)=(M(u))^2=M(-1_V)=-I$ και επομένως θα πρέπει επιπλέον να ισχύουν:

$$\alpha^2-\beta^2=-1 \text{ και } 2\alpha\beta=0 \tag{3.1.5}$$

Από τις σχέσεις (3.1.4) και (3.1.5) εύκολα προκύπτει ότι θα πρέπει $\alpha=0$ και $\beta=\pm1$. Οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν σε εκείνες τις στροφές u΄ και u΄΄ που ικανοποιούν την:

$$u''=-u'=(u')^{-1} \tag{3.1.6}$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι για κάθε $u\in O^{+}(V)$ επιπλέον ισχύει:

$$u^{*}=u^{-1} \tag{3.1.7}$$

επομένως σε συνδυασμό με τη σχέση (3.1.3) παίρνουμε:

$$u^{*}=-u$$

Από την τελευταία σχέση όμως έπεται ότι:

$$\langle x,u(x)\rangle=\langle u^{*}(x),x\rangle=-\langle u(x),x\rangle=-\langle x,u(x)\rangle$$

από την οποία προκύπτει ότι $2<x,u(x)>=0 \Leftrightarrow <x,u(x)>=0$,

δηλαδή οι εικόνες $u'(x)$ και $u''(x)=-u'(x)$ του x μέσω των στροφών u' και u'' αντίστοιχα, είναι πάντα διανύσματα ορθογώνια προς το x και επιπλέον οι στροφές u' και u'' είναι οι μόνες στροφές με αυτή την ιδιότητα. Μεταφέροντας τώρα τα παραπάνω αποτελέσματα στην ομάδα A, βλέπουμε ότι η εξίσωση

$$2\theta = \tilde{\omega} \tag{3.1.8}$$

έχει δύο αντίθετες μεταξύ τους λύσεις, τις δ' και $\delta''=-\delta'$ τις οποίες καλούμε ***ορθές γωνίες***.

Παρατηρούμε, επομένως, ότι στα πλαίσια αυτή της προσέγγισης τόσο η ευθεία γωνία, όσο και η ορθή γωνία αποτελούν λύσεις μιας εξίσωσης στην ομάδα A των γωνιών.

3.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Πρόταση 3.2.1

Έστω u μια στροφή στον V και x, y ένα ζεύγος μοναδιαίων διανυσμάτων. Τότε $<x,u(x)>=<y,u(y)>$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.14, υπάρχει μία στροφή v τέτοια ώστε $y=v(x)$ και επειδή η $O^+(V)$ είναι αβελιανή, έχουμε

$$<y,u(y)>=<v(x),u(v(x))>=<v(x),v(u(x))>=<x,u(x)>.$$

Άρα

$$<x,u(x)>=<y,u(y)> \tag{3.2.1.1}$$

Ορισμός 3.2.2

Αν $u=r(\theta)$, τότε ο αριθμός $<x,u(x)>$, ο οποίος είναι ανεξάρτητος της επιλογής του μοναδιαίου διανύσματος x, καλείται ***συνημίτονο της γωνίας θ*** και συμβολίζεται με ***cosθ***.

Στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{A}(V,V;\mathbb{R})$ όλων των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών πάνω στον $V\times V$, υπάρχουν δύο αντίθετες μεταξύ τους διγραμμικές μορφές ψ' και $\psi''=-\psi'$ τέτοιες ώστε για κάθε ορθοκανονική βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ του V να ισχύει

$$\psi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\pm 1.$$

Πράγματι,

αν $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια ορθοκανονική βάση και $\psi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\pm 1$, τότε $\psi'(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=-\psi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ και $M(\psi')=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ή $M(\psi'')=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-M(\psi')$ επομένως υπάρχουν δύο αντίθετες μεταξύ τους αντισυμμετρικές διγραμμικές μορφές ψ' και $\psi''=-\psi'$ τέτοιες ώστε $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\pm 1$.

Αν τώρα θεωρήσουμε μία άλλη ορθοκανονική βάση του V, τότε αυτή είναι της μορφής $\{u(\varepsilon_1),u(\varepsilon_2)\}$ για κάποιο ορθογώνιο μετασχηματισμό u του V. Όμως,

$$\psi(u(\varepsilon_1),u(\varepsilon_2))=\det(u)\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

για κάθε αντισυμμετρική διγραμμική μορφή ψ, και αφού $\det(u)=\pm 1$, είναι:

$$\psi'(u(\varepsilon_1),u(\varepsilon_2))=\pm\psi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\pm 1.$$

Πρόταση 3.2.3

Έστω u μια στροφή στον V και x, y ένα ζεύγος μοναδιαίων διανυσμάτων. Τότε $\psi'(x,u(x))=\psi'(y,u(y))$, όπου ψ' οποιαδήποτε από τις δύο αντισυμμετρικές διγραμμικές μορφές που είναι τέτοιες ώστε για κάθε ορθοκανονική βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ του V να ισχύει $\psi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\pm 1$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.14, υπάρχει μία στροφή v τέτοια ώστε $y=v(x)$ και επομένως είναι:

$$\psi'(y,u(y))=\psi'(v(x),u(v(x)))=\psi'(v(x),v(u(x)))=\psi'(x,u(x)),\ \text{αφού } \det(v)=1.$$

Άρα

$$\psi'(x,u(x))=\psi'(y,u(y)) \qquad (3.2.3.1)$$

ενώ με όμοιο τρόπο παίρνουμε ότι:

$$\psi''(x,u(x))=\psi''(y,u(y)) \qquad (3.2.3.2)$$

όπου $\psi''=-\psi$ η δεύτερη από τις αντισυμμετρικές διγραμμικές μορφές που είναι τέτοιες ώστε για κάθε ορθοκανονική βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ του V να ισχύει $\psi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\pm 1$.

Αν λοιπόν, θεωρήσουμε ότι το επίπεδο V είναι ένα προσανατολισμένο επίπεδο και έστω ότι ψ συμβολίζει εκείνη από τις αντισυμμετρικές διγραμμικές μορφές ψ' και ψ'' που ανήκει σε αυτόν τον προσανατολισμό, τότε, έχουμε:

Ορισμός 3.2.4

Αν $u=r(\theta)$, τότε ο αριθμός $\psi(x,u(x))$, ο οποίος είναι ανεξάρτητος της επιλογής του

μοναδιαίου διανύσματος x, καλείται ***ημίτονο της γωνίας θ αναφορικά με τον προσανατολισμό που περιέχει την ψ*** και συμβολίζεται με ***sinθ*** όταν ο προσανατολισμός είναι σταθεροποιημένος.

Για κάθε θετικά προσανατολισμένο ζεύγος (α,β) που σχηματίζει μια ορθοκανονική βάση, μία από τις δύο λύσεις u της εξίσωσης

$$u^2=-1_V$$

είναι τέτοια ώστε u(α)=β (από τον τρόπο που ορίστηκαν οι ορθές γωνίες). Εξ ορισμού, όμως, είναι:

$$\psi(\alpha,\beta)=\psi(\alpha,u(\alpha))=1$$

και λόγω της πρότασης 3.2.3 έπεται ότι η u είναι ανεξάρτητη της επιλογής του α.

Η γωνία δ που είναι τέτοια ώστε r(δ)=u καλείται ***θετική ορθή γωνία*** (αναφορικά με τον επιλεγμένο προσανατολισμό), ενώ η –δ καλείται ***αρνητική ορθή γωνία***. Προφανώς, αν αλλάξουμε τον προσανατολισμό εναλλάσσονται η θετική και η αρνητική ορθή γωνία.

Έστω $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ ένα θετικό ζεύγος το οποίο επίσης αποτελεί και μια ορθοκανονική βάση. Το ζεύγος αυτό θα καλείται ***θετική ορθοκανονική βάση***. Αν u είναι μια στροφή και $u(\varepsilon_1)=\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2$, τότε ο πίνακας της u αναφορικά με τη βάση $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ είναι ο πίνακας

$$M(u)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},\ \text{με } \alpha^2+\beta^2=1,$$

ενώ $<\varepsilon_1,u(\varepsilon_1)>=\alpha$ και $\psi(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1))=\psi(\varepsilon_1,\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2)=\alpha\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+\beta\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\beta$.

Από τους ορισμούς 3.2.2 και 3.2.4, όμως, εύκολα προκύπτει ότι

$$M(r(\theta))=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (3.2.4.1)$$

αναφορικά με οποιαδήποτε θετική ορθοκανονική βάση.

Από το γεγονός ότι το $u(\varepsilon_1)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, προκύπτει ότι

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1. \qquad (3.2.4.2)$$

Με βάση τα παραπάνω εύκολα προκύπτουν οι γνωστοί τύποι της τριγωνομετρίας για το συνημίτονο και το ημίτονο αθροίσματος γωνιών. Έτσι:

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta' \qquad (3.2.4.3)$$

$$\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta' \qquad (3.2.4.4)$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(0)=1,\ \cos(\tilde{\omega})=-1,\ \cos(\delta)=0$$

$$\sin(0)=0,\ \sin(\tilde{\omega})=0,\ \sin(0)=1$$

$$\cos(\theta+\tilde{\omega})=-\cos\theta,\ \cos(\theta+\delta)=\sin\theta \qquad (3.2.4.7)$$

$$\sin(\theta+\tilde{\omega})=-\sin\theta,\ \sin(\theta+\delta)=\cos\theta \qquad (3.2.4.8)$$

αφού $M(r(\theta+\theta'))=M(r(\theta)r(\theta'))=M(r(\theta))M(r(\theta'))$, $M(r(-\theta))=M((r(\theta))^*)=(M(r(\theta))^t$, το $<\cdot,\cdot>$ συμμετρική διγραμμική μορφή και η ψ αντισυμμετρική διγραμμική μορφή.

Ειδικότερα αν $\theta=\theta'$ οι τύποι (3.2.4.3) και (3.2.4.4) δίνουν:

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta \qquad (3.2.4.5)$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \qquad (3.2.4.6)$$

Ορισμός 3.2.5

Για $\theta\neq\pm\delta$, θέτουμε $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ και καλούμε αυτό τον πραγματικό αριθμό ***εφαπτομένη της γωνίας θ***.

Ορισμός 3.2.6

Για $\theta\neq 0,\tilde{\omega}$, θέτουμε $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ και καλούμε αυτό τον πραγματικό αριθμό ***συνεφαπτομένη της γωνίας θ***.

Παρατηρούμε ότι οι γωνίες, δηλαδή τα στοιχεία της ομάδας Α, πληρούν όλες τις τριγωνομετρικές ταυτότητες που ισχύουν για τις «γνωστές» μας γωνίες. Όμως ταυτίζονται τελικά αυτές οι δύο έννοιες για τη γωνία; Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα στις επόμενες ενότητες.

3.3. Γωνία ημιευθειών

Επειδή κάθε κλειστή (αντίστοιχα ανοικτή) διανυσματική ημιευθεία περιέχει ακριβώς ένα μοναδιαίο διάνυσμα, υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των κλειστών (αντίστοιχα ανοικτών) διανυσματικών ευθειών και των μοναδιαίων διανυσμάτων (ή των σημείων του μοναδιαίου κύκλου. Επίσης, από την πρόταση 2.5.14, έχουμε ότι αν δοθεί ένα ζεύγος κλειστών (αντίστοιχα ανοικτών)

διανυσματικών ημιευθειών Δ_1, Δ_2 τότε υπάρχει μία μοναδική στροφή u, τέτοια ώστε $u(\Delta_1)=\Delta_2$. Καλούμε τη γωνία αυτής της στροφής, ***γωνία του ζεύγους (Δ_1,Δ_2)*** (ή ***γωνία που σχηματίζουν η Δ_2 με την Δ_1***) και τη συμβολίζουμε με $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_2)$. Η γωνία αυτή είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού που έχει επιλεγεί, ενώ άμεσα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

[1] $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_1) = 0$

[2] $(\Delta_2 \hat{,} \Delta_1) = -(\Delta_1 \hat{,} \Delta_2)$ (αφού αν $u(\Delta_1)=\Delta_2$, τότε $u^{-1}(\Delta_2)=\Delta_1$)

[3] $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_2) + (\Delta_2 \hat{,} \Delta_3) = (\Delta_1 \hat{,} \Delta_3)$

[4] $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_2) = \tilde{\omega} \Leftrightarrow \Delta_2 = -\Delta_1$

[5] $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_2) = \delta \Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2$ ορθογώνιες και το ζεύγος (Δ_1, Δ_2) είναι θετικό.

Ορισμός 3.3.1

Αν Δ, Δ΄ είναι δύο τυχαίες ημιευθείες (με τυχαίες αρχές, είτε διαφορετικές είτε όχι) στον V και Δ_0, Δ_0' οι κατευθύνσεις τους, τότε ορίζουμε ως ***γωνία που σχηματίζεται από το ζεύγος (Δ,Δ΄)***, και συμβολίζουμε με $(\Delta \hat{,} \Delta')$, να είναι η γωνία $(\Delta_0 \hat{,} \Delta_0')$.

Πρόταση 3.3.2

Έστω Δ_1, Δ_2, Δ_1', Δ_2' τέσσερις κλειστές (αντίστοιχα ανοικτές) διανυσματικές ημιευθείες. Οι επόμενες ιδιότητες είναι όλες ισοδύναμες.

[1] $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_2) = (\Delta_1' \hat{,} \Delta_2')$

[2] $(\Delta_1 \hat{,} \Delta_1') = (\Delta_2 \hat{,} \Delta_2')$

[3] Υπάρχει μία μοναδική στροφή u τέτοια ώστε $u(\Delta_1)=\Delta_1'$ και $u(\Delta_2)=\Delta_2'$.

[4] Υπάρχει μια μοναδική συμμετρία s ως προς μια ευθεία τέτοια ώστε $s(\Delta_1)=\Delta_2'$ και $s(\Delta_2)=\Delta_1'$.

Απόδειξη

[1]⇔[2] Από τις ιδιότητες που έπονται του ορισμού της γωνίας ενός ζεύγους κλειστών (αντίστοιχα ανοικτών) ημιευθειών έχουμε:

$$(\Delta_1'\hat{,}\Delta_2') = (\Delta_1'\hat{,}\Delta_1) + (\Delta_1\hat{,}\Delta_2) + (\Delta_2\hat{,}\Delta_2') \Leftrightarrow (\Delta_1'\hat{,}\Delta_2') - (\Delta_1\hat{,}\Delta_2) = (\Delta_2\hat{,}\Delta_2') - (\Delta_1\hat{,}\Delta_1')$$

Επομένως, αν $(\Delta_1\hat{,}\Delta_2) = (\Delta_1'\hat{,}\Delta_2') \Leftrightarrow (\Delta_1\hat{,}\Delta_1') = (\Delta_2\hat{,}\Delta_2')$.

[2]⇔[3] Η ισοδυναμία αυτή είναι προφανής μιας και αποτελεί αναδιατύπωση του ορισμού της γωνίας ενός ζεύγους κλειστών (αντίστοιχα ανοικτών) ημιευθειών.

[3]⇒[4] Από την παρατήρηση στην πρόταση 2.5.10 έπεται ότι υπάρχει μια συμμετρία s΄ ως προς μια ευθεία τέτοια ώστε $s'(\Delta_1')=\Delta_2'$ και $s'(\Delta_2')=\Delta_1'$. Αν, λοιπόν υπάρχει μία στροφή u τέτοια ώστε $u(\Delta_1)=\Delta_1'$ και $u(\Delta_2)=\Delta_2'$, τότε η $s=s'\circ u$ είναι μια συμμετρία για την οποία είναι:

$$s(\Delta_1)=s'(u(\Delta_1))=s'(\Delta_1')=\Delta_2'$$

$$s(\Delta_2)=s'(u(\Delta_2))=s'(\Delta_2')=\Delta_1'.$$

[4]⇒[3] Αν υπάρχει μια συμμετρία s ως προς μια ευθεία τέτοια ώστε $s(\Delta_1)=\Delta_2'$ και $s(\Delta_2)=\Delta_1'$, τότε $u=s'\circ s$ είναι μια στροφή (πρόταση 2.5.10) για την οποία είναι:

$$u(\Delta_1)=s'(s(\Delta_1))=s'(\Delta_2')=\Delta_1'$$

$$u(\Delta_2)=s'(s(\Delta_2))=s'(\Delta_1')=\Delta_2'.$$

Παρατηρήσεις

[1] Από την παραπάνω πρόταση, άμεσα έπεται ότι:

$$(-\Delta_1\hat{,}-\Delta_2) = (\Delta_1\hat{,}\Delta_2).$$

[2] Αν στην παραπάνω πρόταση θεωρήσουμε $\Delta_1'=\Delta_2'=\Delta$, τότε η ισοδυναμία των [2] και [4] δίνει το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.3.3

Μια ημιευθεία Δ ικανοποιεί την $(\Delta\hat{,}\Delta_1) = -(\Delta\hat{,}\Delta_2)$ αν και μόνο αν η συμμετρία ως προς την ευθεία D που περιέχει την Δ είναι η μοναδική συμμετρία που εναλλάσσει τις Δ_1 και Δ_2.

Ορισμός 3.3.4

Αν μια ημιευθεία Δ να ικανοποιεί την

$$(\Delta\hat{,}\Delta_1) = -(\Delta\hat{,}\Delta_2),$$

τότε η ευθεία D και οι ημιευθείες Δ και –Δ που περιέχονται σε αυτή καλούνται ***διχοτόμοι*** *του ζεύγους* (Δ_1,Δ_2).

Αν θέσουμε $\varphi = (\Delta_1 \hat{,} \Delta_2)$, τότε η γωνία $\theta = (\Delta_1 \hat{,} \Delta)$ (δηλαδή η γωνία που σχηματίζεται από τη Δ_1 και μία από τις ημιευθείες διχοτόμους, την Δ) ικανοποιεί την εξίσωση:

$$2\theta=\varphi \qquad (3.3.4.1)$$

Η γωνία μεταξύ της Δ_1 και της άλλης ημιευθείας διχοτόμου, δηλαδή της $-\Delta$, είναι $\theta + \tilde{\omega}$ και αυτές οι δύο γωνίες είναι οι μοναδικές λύσεις της εξίσωσης (3.3.4.1) στο Α. Πράγματι·

αν θ_1 και θ_2 είναι δύο διαφορετικές λύσεις της (3.3.4.1), τότε είναι $2\theta_1=\varphi$ και $2\theta_2=\varphi$, ενώ η διαφορά τους ικανοποιεί την $2(\theta_1-\theta_2)=0$ και από την σχέση (3.1.1), έπεται ότι $\theta_1 - \theta_2 = \tilde{\omega} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + \tilde{\omega}$.

Αν τώρα $\varphi \neq \tilde{\omega}$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.4.5) και (3.2.4.6) λόγω της (3.3.4.1), έχουμε:

$$\tan\theta = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}, \text{ ή } \tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} \qquad (3.3.4.2)$$

3.4. Γωνία διανυσμάτων

Ορισμός 3.4.1

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα x, y στον V. Η ***γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα x και y*** είναι η γωνία $(\Delta_{Ox} \hat{,} \Delta_{Oy})$ και θα συμβολίζεται με $(x \hat{,} y)$.

Παρατήρηση

Τα διανύσματα $\frac{x}{\|x\|}$ και $\frac{y}{\|y\|}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των Δ_{Ox} και Δ_{Oy} αντίστοιχα, και επομένως, από τον ορισμό του συνημιτόνου και του ημιτόνου γωνίας, αν u η στροφή για την οποία είναι $u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$, έπεται ότι:

$$\cos(x \hat{,} y) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \frac{< x, y >}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

και

$$\sin(x\hat{,}y) = \psi\left(\frac{x}{\|x\|}, u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) = \psi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{\psi(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \qquad (3.4.1.1)$$

Παρατήρηση

Κατά την απόδειξη της πρότασης 2.4.5 είχαμε επισημάνει ότι

$$\left|\frac{<x,y>}{\|x\|\cdot\|y\|}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \cos(x\hat{,}y) \le 1,$$

συνεπώς υπάρχει πραγματικός αριθμός α, τέτοιος ώστε

$$\cos(x\hat{,}y) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots = \cos\alpha,$$

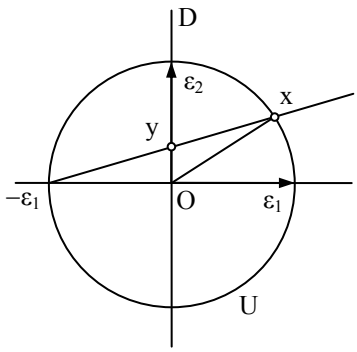
όπου φυσικά cosα είναι η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης συνημιτόνου μιας «γωνίας» α, όχι όμως με την έννοια που την αναπτύσσουμε σε αυτή την ενότητα αλλά της γωνίας ως έναν πραγματικό αριθμό, ουσιαστικά δηλαδή το μέτρο μιας γωνίας για το οποίο δεν έχουμε μιλήσει ακόμη. Για άλλη μια φορά η γωνία όπως την ορίζουμε πληροί μια γνωστή μας έκφραση αλλά δεν είμαστε σε θέση να εξισώσουμε ακόμη της έννοιες $\cos(x\hat{,}y)$ και cosα.

3.5. Διάταξη στο σύνολο των γωνιών

Αν θεωρήσουμε μια ορθοκανονική βάση του V, έστω την$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, τότε οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $x=\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2$ αναφορικά με αυτή τη βάση εκφράζονται με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου, από τους τύπους:

$$\xi_1 = \|x\|\cos(\varepsilon_1\hat{,}x) = -\|x\|\sin(\varepsilon_2\hat{,}x)$$

$$\xi_2 = \|x\|\cos(\varepsilon_2\hat{,}x) = \|x\|\sin(\varepsilon_1\hat{,}x) \quad (3.5.1)$$



Έστω, λοιπόν, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του V και έστω U ο μοναδιαίος κύκλος. Αν συμβολίσουμε με D την ευθεία $D_{O\varepsilon_2}$, συνδέουμε κάθε σημείο x του U, διαφορετικό του $-\varepsilon_1$, με εκείνο το σημείο y που αποτελεί το σημείο τομής της $D_{-\varepsilon_1,x}$ και της D. Το σημείο y καλείται ***στερεογραφική προβολή***

του x στην D. Αν $x=\xi_1\varepsilon_1+\xi_2\varepsilon_2$ τότε, κάθε σημείο στην ευθεία $D_{-\varepsilon_1,x}$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$-\varepsilon_1+\lambda(x+\varepsilon_1)=(\lambda(\xi_1+1)-1)\varepsilon_1+\lambda\xi_2\varepsilon_2$$

και αν απαιτήσουμε η πρώτη συντεταγμένη του να είναι μηδέν τότε βρίσκουμε ότι

$$y=\frac{\xi_2}{1+\xi_1}\cdot\varepsilon_2 \tag{3.5.2}$$

Αντιστρόφως, τώρα, με παρόμοιους υπολογισμούς έχουμε ότι αν $y=\zeta\varepsilon_2\in D$, τότε η ευθεία $D_{-\varepsilon_1,y}$ συναντά τον U σε ένα δεύτερο σημείο x διαφορετικό από το $-\varepsilon_1$, για το οποίο είναι:

$$x=\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\cdot\varepsilon_1+\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}\cdot\varepsilon_2 \tag{3.5.3}$$

Πράγματι, κάθε σημείο της $D_{-\varepsilon_1,y}$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$-\varepsilon_1+\lambda(y+\varepsilon_1)=(\lambda-1)\varepsilon_1+\lambda\zeta\varepsilon_2. \tag{3.5.4}$$

Όμως $x\in U$, επομένως $(\lambda-1)^2+(\lambda\zeta)^2=1\Leftrightarrow\lambda^2(1+\zeta^2)=2\lambda$ και εφόσον $x\neq-\varepsilon_1$ είναι και $\lambda\neq0$, άρα

$$\lambda=\frac{2}{1+\zeta^2},$$

οπότε με αντικατάσταση του λ στην έκφραση (3.5.4) προκύπτει η σχέση (3.5.3).

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη μία ή την άλλη ημιευθεία της $D_{-\varepsilon_1,x}$ με την $\Delta_{O\varepsilon_1}$, τότε $\theta=(\varepsilon_1\hat{,}x+\varepsilon_1)$. Όμως $x=\frac{2}{1+\zeta^2}\cdot\varepsilon_1+\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}\cdot\varepsilon_2$, ενώ από τις σχέσεις (3.5.1) έχουμε ότι:

$$\tan\theta=\frac{\sin(\varepsilon_1\hat{,}x+\varepsilon_1)}{\cos(\varepsilon_1\hat{,}x+\varepsilon_1)}=\frac{\frac{2\zeta}{1+\zeta^2}}{\frac{2}{1+\zeta^2}}=\zeta,\ \text{δηλαδή } y=\tan\theta\cdot\varepsilon_2 \tag{3.5.5}$$

και

$$x=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\varepsilon_1+\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\varepsilon_2$$

επομένως με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, εύκολα παίρνουμε ότι

$$x=\cos2\theta\cdot\varepsilon_1+\sin2\theta\cdot\varepsilon_2. \tag{3.5.6}$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι $(\varepsilon_1 \hat{,} x) = 2\theta$, επομένως η κατεύθυνση της $D_{-\varepsilon_1, y}$ είναι η ευθεία D που διχοτομεί το ζεύγος των ημιευθειών $\Delta_{O\varepsilon_1}$ και Δ_{Ox}.

Παρατήρηση

Στα πλαίσια αυτής της στερεογραφικής προβολής, επιτυγχάνουμε μια ένα προς ένα και επί ***αντιστοιχία ανάμεσα στην D και το σύνολο U΄***, το συμπλήρωμα του $\{-\varepsilon_1\}$ στο U. Αλλά το σύνολο U΄ είναι σε μια κανονική ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των ανοικτών διανυσματικών ημιευθειών με αρχή το O που είναι διαφορετικές από την $\Delta_0 = \Delta^{\circ}_{O,-\varepsilon_1} = -\Delta^{\circ}_{O,\varepsilon_1}$. Αυτή η αντιστοιχία μας παρέχει μια πολύ απλή περιγραφή της σχέσης ολικής διάταξης $R(\Delta_1,\Delta_2)$ που είχαμε ορίσει στο $\mathcal{F}$ (πρόταση 2.3.7) ως:

$R(\Delta_1,\Delta_2)$ αν και μόνο αν $\Delta_1=\Delta_2$ ή $(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)$ θετικά προσανατολισμένη

την οποία μπορούμε να μεταφέρουμε στο σύνολο των γωνιών, όπως υποδεικνύουν οι επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 3.5.1

Αν Δ΄, Δ΄΄ είναι ένα ζεύγος ημιευθειών που ανήκουν στο $\mathcal{F}$ και $\zeta'\varepsilon_2$ και $\zeta''\varepsilon_2$ τα αντίστοιχα σημεία της D, τότε:

$$\Delta' \le \Delta'' \Leftrightarrow \zeta' \le \zeta''$$

Απόδειξη

Έστω ένας προσανατολισμός του V τέτοιος ώστε η $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ να είναι μια θετική ορθοκανονική βάση και ψ εκείνη η αντισυμμετρική διγραμμική μορφή που ανήκει σε αυτόν με $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=1$. Αν x΄, x΄΄ τα σημεία του U΄ των οποίων οι στερεογραφικές προβολές είναι $y'=\zeta'\varepsilon_2$ και $y''=\zeta''\varepsilon_2$ αντίστοιχα τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της παραπάνω σχέσης διάταξης R, λέγοντας $\Delta' \le \Delta''$ θα πρέπει τουλάχιστον δύο από τους τρεις αριθμούς $\psi(-\varepsilon_1,x')$, $\psi(x',x'')$, $\psi(x'',-\varepsilon_1)$ να είναι θετικοί.

Όμως

$$\psi(-\varepsilon_1, x') = \psi\left(-\varepsilon_1, \frac{1-\zeta'^2}{1+\zeta'^2}\cdot\varepsilon_1 + \frac{2\zeta'}{1+\zeta'^2}\cdot\varepsilon_2\right) = \frac{2\zeta'}{1+\zeta'^2}\cdot\psi(-\varepsilon_1,\varepsilon_2) = -\frac{2\zeta'}{1+\zeta'^2}$$

και ανάλογα προκύπτει ότι:

$$\psi(x'',-\varepsilon_1)=\frac{2\zeta''}{1+\zeta''^2}\text{, ενώ } \psi(x',x'')=\frac{2(\zeta''-\zeta')(1+\zeta'\zeta'')}{(1+\zeta'^2)(1+\zeta''^2)}$$

δηλαδή το πρόσημο των αριθμών $\psi(-\varepsilon_1,x')$, $\psi(x',x'')$, $\psi(x'',-\varepsilon_1)$ είναι ίδιο με το πρόσημο των

$$-\zeta',\ (\zeta''-\zeta')(1+\zeta'\zeta''),\ \zeta''\ .$$

Έτσι, αν $\zeta'<\zeta''$ τότε, είτε $\zeta'\zeta''\geq 0$ και ισοδύναμα $\zeta'\geq 0$ και $\zeta''>\zeta'\geq 0$, είτε $\zeta'\zeta''<0$ και ισοδύναμα $-\zeta'>0$ και $\zeta''>0$. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές άμεσα προκύπτει ότι τουλάχιστον δύο από τους εν λόγω αριθμούς είναι θετικοί.

Επομένως

$$\Delta'\leq\Delta''\Leftrightarrow\zeta'\leq\zeta''.$$

Επιπλέον, τα σύνολα $\mathcal{F}$ και U' είναι σε μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο A' όλων των γωνιών που είναι διαφορετικές από την $\tilde{\omega}$. Κάθε σημείο $x\in U'$ αντιστοιχεί επομένως σε μια γωνία και μάλιστα στη γωνία $(\varepsilon_1\hat{,}x)$. Κατά συνέπεια μπορούμε να μεταφέρουμε τη σχέση διάταξης του συνόλου $\mathcal{F}$ στο σύνολο A', ώστε:

$$\theta'\leq\theta''\text{ στο } A'\text{, να σημαίνει } \Delta'\leq\Delta''\text{ στο } \mathcal{F}$$

όπου $\theta'=(-\Delta_0\hat{,}\Delta')=(\Delta_{O,\varepsilon_1}\hat{,}\Delta')$ και $\theta''=(-\Delta_0\hat{,}\Delta'')=(\Delta_{O,\varepsilon_1}\hat{,}\Delta'')$.

Αν, με αυτή τη σύμβαση, έχουμε $\theta'\leq\theta''$, τότε ο τομέας $S^o(\Delta',\Delta'')$ είναι η ένωση όλων εκείνων των ανοικτών ημιευθειών Δ που είναι τέτοιες ώστε αν θέσουμε $\theta=(-\Delta_0\hat{,}\Delta)=(\Delta_{O,\varepsilon_1}\hat{,}\Delta)$, να είναι:

$$\theta'<\theta<\theta''\text{ («ανοικτό διάστημα» στο σύνολο } A').$$

Πόρισμα 3.5.2

Αν θ', θ'' δύο γωνίες του A', τότε

$$\theta'\leq\theta''\text{ στο } A'\Leftrightarrow\tan\frac{\theta'}{2}\leq\tan\frac{\theta''}{2}\qquad(3.5.2.1)$$

όπου $\frac{\theta}{2}$ συμβολίζει μία από τις δύο γωνίες ψ τέτοιες ώστε $2\psi=\theta$.

Απόδειξη

Από την πρόταση 3.5.1, έχουμε:

$$\theta' \le \theta'' \text{ στο } A' \Leftrightarrow \Delta' \le \Delta'' \text{ στο } \mathcal{F} \Leftrightarrow \zeta' \le \zeta'' \text{ στο } U' \Leftrightarrow \tan\frac{\theta'}{2} \le \tan\frac{\theta''}{2}$$

αφού $\theta' = (\Delta_{O,\varepsilon_1} \hat{,} \Delta')$, $\theta'' = (\Delta_{O,\varepsilon_1} \hat{,} \Delta'')$ και παρατηρήσαμε ότι οι κατευθύνσεις των $D_{-\varepsilon_1,y'}$, $D_{-\varepsilon_1,y''}$ είναι οι ευθείες που διχοτομούν τα ζεύγη $(\Delta_{O,\varepsilon_1},\Delta')$ και $(\Delta_{O,\varepsilon_1},\Delta'')$ αντίστοιχα. Δεν έχει σημασία ποια από τις λύσεις της εξίσωσης 2ψ=θ θα θεωρήσουμε αφού $\tan(\psi+\tilde{\omega}) = \tan(\psi)$ (ορισμός 3.3.4 και τύποι (3.2.4.7) και (3.2.4.8)).

Παρατήρηση

Σύμφωνα με τη σχέση διάταξης επομένως που ορίσαμε είναι:

$$-\delta<0<\delta \qquad (3.5.2.2)$$

και για τις γωνίες του συνόλου Α΄, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.5.3

Αν θ∈Α΄ και 0<θ<δ, τότε η θ είναι μια ***θετική οξεία γωνία***.

Αν θ∈Α΄ και –δ<θ<0, τότε η θ είναι μια ***αρνητική οξεία γωνία***.

Αν θ∈Α΄ και θ>δ, τότε η θ είναι μια ***θετική αμβλεία γωνία***.

Αν θ∈Α΄ και θ<–δ, τότε η θ είναι μια ***αρνητική αμβλεία γωνία***.

Τα παραπάνω τέσσερα διαστήματα του συνόλου Α΄, αντιστοιχούν στα διαστήματα 0<ζ<1, –1<ζ<0, ζ>1 και ζ<–1 στο IR, αντίστοιχα, όπου $\zeta = \tan\frac{\theta}{2}$, με $\frac{\theta}{2}$ να συμβολίζει μία από τις δύο γωνίες ψ τέτοιες ώστε 2ψ=θ.

Επιπλέον, εφόσον γνωρίζουμε ότι $\sin\theta = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}$, $\cos\theta = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} = 2 - \frac{1}{1+\zeta^2}$ και ότι $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, μπορούμε να βρούμε τα πρόσημα και τις μεταβολές των συναρτήσεων sinθ και cosθ.

Πρόταση 3.5.4

Αν υποθέσουμε ότι δύο γωνίες, οι θ΄ και θ΄΄ ανήκουν στο διάστημα (–δ,δ) και η γωνία φ στο διάστημα [–δ,δ], τότε οι γωνίες θ΄+φ και θ΄΄+φ ανήκουν στο Α΄ και ισχύει:

$$\theta' \le \theta'' \Leftrightarrow \theta'+\varphi \le \theta''+\varphi \qquad (3.5.4.1)$$

Απόδειξη

Αν θέσουμε $\zeta' = \tan\frac{\theta'}{2}$, $\zeta'' = \tan\frac{\theta''}{2}$ και $\eta = \tan\frac{\varphi}{2}$, έχουμε:

$-1<\zeta'<1$, $-1<\zeta''<1$ και $-1\le\eta\le1$ και επομένως $\zeta'\eta<1$ και $\zeta''\eta<1$.

$$\theta'+\varphi \le \theta''+\varphi \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\theta'+\varphi}{2}\right) \le \tan\left(\frac{\theta''+\varphi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{\theta'}{2}+\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan\frac{\theta'}{2}\cdot\tan\frac{\varphi}{2}} \le \frac{\tan\frac{\theta''}{2}+\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan\frac{\theta''}{2}\cdot\tan\frac{\varphi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\zeta'+\eta}{1-\zeta'\eta} \le \frac{\zeta''+\eta}{1-\zeta''\eta} \Leftrightarrow (1-\zeta''\eta)(\zeta'+\eta) \le (1-\zeta'\eta)(\zeta''+\eta) \Leftrightarrow (\zeta''-\zeta')(1+\eta^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\zeta' \le \zeta''$$

Παρατήρηση

Ειδικότερα, αν $0<\theta<\delta$, τότε $2\theta>0$. Από την άλλη δεν μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν τον κανόνα σε μεγαλύτερα διαστήματα, για αυτό το λόγο θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί σε υπολογισμούς που αφορούν ανισότητες γωνιών στο Α΄. Θα πρέπει, λοιπόν, να τονίσουμε ότι ενώ η πρόσθεση των γωνιών είναι ουσιαστικά σύνθεση στροφών υπάρχει περίπτωση το «άθροισμα» δύο θετικών γωνιών (με την έννοια της παραπάνω διάταξης, η θ είναι μια θετική γωνία αν $\zeta>0$) να είναι μια αρνητική γωνία, για παράδειγμα αν $\theta>\delta$, τότε $2\theta<0$.

Ορισμός 3.5.5

Αν Δ΄, Δ΄΄ είναι δύο ημιευθείες στο $\mathcal{F}$, με αντίστοιχες γωνίες θ΄ και θ΄΄ στο Α΄ τέτοιες ώστε θ΄<θ΄΄, τότε καλούμε τη γωνία θ΄΄−θ΄ ***τόξο του τομέα*** $S^o(\Delta',\Delta'')$.

Παρατήρηση

Ουσιαστικά το τόξο του τομέα $S^o(\Delta',\Delta'')$, είναι η γωνία $(\widehat{\Delta',\Delta''})$.

Πράγματι,

$r(\theta''-\theta')(\Delta')=(r(\theta'')\circ r(-\theta'))(\Delta')=(r(\theta'')\circ(r(\theta'))^{-1})(\Delta')=r(\theta'')(\Delta_{O,\varepsilon_1})=\Delta''$.

Πρόταση 3.5.6

Ο τομέας $S^o(\Delta',\Delta'')$ είναι ελάσσων (αντίστοιχα μείζων) αν και μόνο αν το τόξο του $\theta''-\theta'>0$ (αντίστοιχα $\theta''-\theta'<0$).

Απόδειξη

Αν x΄, x΄΄ τα μοναδιαία διανύσματα των Δ΄, Δ΄΄ από την προηγούμενη

παρατήρηση είναι $\theta'' - \theta' = (x' \hat{,} x'')$ και επομένως

$S^o(\Delta',\Delta'')$ ελάσσων$\Leftrightarrow \psi(x',x'')>0 \Leftrightarrow \sin(\theta''-\theta')>0 \Leftrightarrow (\theta''-\theta')>0$

$S^o(\Delta',\Delta'')$ μείζων$\Leftrightarrow \psi(x',x'')<0 \Leftrightarrow \sin(\theta''-\theta')<0 \Leftrightarrow (\theta''-\theta')<0$.

Ορισμός 3.5.7

Αν $\theta''-\theta'>0$, τότε ο τομέας $S^o(\Delta',\Delta'')$ θα καλείται ***οξύς***, ***αμβλύς*** ή ***ορθογώνιος τομέας*** ανάλογα με το αν η γωνία $\theta''-\theta'$ είναι οξεία, αμβλεία ή ορθή αντίστοιχα.

Ορισμός 3.5.8

Η ***διχοτόμος του τομέα*** $S^o(\Delta',\Delta'')$ είναι εκείνη από τις δύο ημιευθείες που διχοτομούν το ζεύγος (Δ',Δ'') η οποία περιέχεται στον τομέα $S^o(\Delta',\Delta'')$. Είναι προφανές ότι αυτή η ημιευθεία είναι εκείνη της οποίας η αντίστοιχη γωνία θ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\theta-\theta'=\theta''-\theta>0 \text{ στο } A'.$$

Κλείνοντας αυτή τη παράγραφο είναι πολύ σημαντικό να σημειώσουμε ότι για κάθε γωνία θ_0, η μεταφορά $\theta \mapsto \theta + \theta_0 + \tilde{\omega}$ μετασχηματίζει το Α΄ στο συμπλήρωμα του $\{\theta_0\}$ στο Α και αυτή η μεταφορά, «μεταφέρει» τη σχέση διάταξης του Α΄ σε αυτό το συμπλήρωμα. Όπως και να έχει όμως αυτή η σχέση διάταξης δεν μπορεί να οριστεί σε όλο το σύνολο Α των γωνιών από τη στιγμή που υπάρχουν στοιχεία στο Α με πεπερασμένη τάξη, όπως για παράδειγμα η τάξη του δ είναι 4 (4δ=0).

3.6. Η ομάδα A_0 των ευθειών γωνιών – Γωνία μεταξύ ευθειών

Αν θεωρήσουμε δύο μη παράλληλές ευθείες οι οποίες να διέρχονται από το 0, είναι λογικό να σκεφτούμε ότι υπάρχουν δύο στροφές μέσω των οποίων η μία ευθεία απεικονίζεται στην άλλη, επομένως για να ορίσουμε τη γωνία μεταξύ δύο ευθειών η αντιμετώπιση θα πρέπει να είναι λίγο διαφορετική σε σχέση με τη γωνία δύο ημιευθειών.

Θεωρούμε, λοιπόν, το σύνολο A_0 όλων των υποσυνόλων της ομάδας των γωνιών Α με δύο στοιχεία της μορφής:

$$\{\theta, \theta + \tilde{\omega}\}$$

Αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε τέτοια ζεύγη $\{\theta, \theta + \tilde{\omega}\}$ και $\{\theta', \theta' + \tilde{\omega}\}$, τότε κάθε ένα από τα τέσσερα αθροίσματα που επιτυγχάνονται παίρνοντας κάθε φορά ένα στοιχείο

του πρώτου συνόλου με ένα στοιχείο του δεύτερου συνόλου ισούται πάντα με ένα από τα διαφορετικά στοιχεία θ+θ΄ και $\theta+\theta'+\tilde{\omega}$, αφού $2\tilde{\omega}=0$, τα οποία ως ζεύγος έχουν πάλι τη μορφή $\{\theta,\theta+\tilde{\omega}\}$. Μπορούμε επομένως στο σύνολο A_0 να ορίσουμε μια πρόσθεση των στοιχείων του, θέτοντας

$$\{\theta,\theta+\tilde{\omega}\}+\{\theta',\theta'+\tilde{\omega}\}=\{\theta+\theta',\theta+\theta'+\tilde{\omega}\}$$

Η πρόσθεση αυτή, είναι φανερά προσεταιριστική και αντιμεταθετική με ουδέτερο στοιχείο το $\{0,0+\tilde{\omega}\}=\{0,\tilde{\omega}\}$. Επιπλέον είναι $\{\theta,\theta+\tilde{\omega}\}+\{-\theta,-\theta+\tilde{\omega}\}=\{0,\tilde{\omega}\}$, επομένως κάθε στοιχείο του A_0 έχει αντίθετο. Είναι προφανές λοιπόν ότι το σύνολο A_0 με την πράξη της πρόσθεσης όπως την ορίσαμε παραπάνω είναι μια αβελιανή ομάδα την οποία καλούμε ***ομάδα των ευθείων γωνιών*** στον V.

Η απεικόνιση:

$$\theta\mapsto\{\theta,\theta+\tilde{\omega}\}$$

είναι ένας ομομορφισμός από το A επί του A_0, του οποίου ο πυρήνας αποτελείται από τις δύο γωνίες 0 και $\tilde{\omega}$ του A.

Ορισμός 3.6.1

Αν D και D΄, δύο οποιεσδήποτε διανυσματικές ευθείες στον V και Δ, Δ΄ είναι δύο ανοικτές διανυσματικές ημιευθείες που περιέχονται στις D και D΄ αντίστοιχα, με $\theta=(\Delta\hat{,}\Delta')$. Καλούμε λοιπόν το σύνολο

$$\theta_0=\{\theta,\theta+\tilde{\omega}\}$$

γωνία που σχηματίζεται από το ζεύγος των ευθειών (D,D΄) και γράφουμε $\theta_0=(D\hat{,}D')$.

Η γωνία του ζεύγους (D,D΄), είναι καλά ορισμένη, αφού αν εναλλάξουμε μία ή και δύο από τις ημιευθείες Δ, Δ΄ με την αντίθετή τους, τότε αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα είτε την αλλαγή της γωνίας τους από θ σε $\theta+\tilde{\omega}$ είτε η γωνία τους θα μείνει αμετάβλητη. Προφανώς η γωνία θ_0 είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού που έχουμε επιλέξει.

Από τα παραπάνω αλλά και από τον ορισμό της γωνίας ζεύγους ημιευθειών που έχουμε αναφέρει προηγουμένως, για οποιεσδήποτε τρεις διανυσματικές ευθείες D, D΄ και D΄΄, άμεσα προκύπτουν τα ακόλουθα:

[1] $(D,\hat{}D) = 0$

[2] $(D',\hat{}D) = -(D,\hat{}D')$

[3] $(D,\hat{}D') + (D',\hat{}D'') = (D,\hat{}D'')$ (3.6.1.1)

Όταν, τώρα, η γωνία που σχηματίζεται από ένα ζεύγος ευθειών είναι η $\delta_0 = \{\delta, \delta + \tilde{\omega}\} = \{\delta, -\delta\}$, τότε η δ_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης 2φ=0 στο A_0 και καλούμε τη γωνία δ_0 ***ορθή γωνία*** στο A_0.

Ανάλογα με την πρόταση 3.3.2, έχουμε την πρόταση:

Πρόταση 3.6.2

Έστω D_1, D_2, D_1', D_2' τέσσερις ευθείες. Οι επόμενες ιδιότητες είναι όλες ισοδύναμες.

[1] $(D_1,\hat{}D_2) = (D_1',\hat{}D_2')$

[2] $(D_1,\hat{}D_1') = (D_2,\hat{}D_2')$

[3] Υπάρχει μία στροφή u τέτοια ώστε $u(D_1)=D_1'$ και $u(D_2)=D_2'$.

[4] Υπάρχει μια συμμετρία s ως προς μια ευθεία τέτοια ώστε $s(D_1)=D_2'$ και $s(D_2)=D_1'$.

Παρατήρηση

Η διαφορά μεταξύ της παραπάνω πρότασης και της αντίστοιχης για τις διανυσματικές ημιευθείες είναι ότι στα [3] και [4] της πρότασης 3.6.2 η εν λόγω στροφή και συμμετρία δεν είναι απαραίτητα μοναδικές, κάτι που επισημάναμε εξάλλου και στην αρχή της ενότητας. Αυτό ισχύει καθώς μια ευθεία μετασχηματίζεται στον εαυτό της μέσω δύο στροφών της 1_V αλλά και της -1_V, ενώ αν μια συμμετρία s ως προς μια ευθεία L απεικονίζει την ευθεία D στην ευθεία D΄, το ίδιο κάνει και η συμμετρία –s, δηλαδή η συμμετρία ως προς την ευθεία L΄ η οποία είναι ορθογώνια προς την L (παρατήρηση στην πρόταση 2.4.12). Οι ευθείες L και L΄ καλούνται ***διχοτόμοι του ζεύγους των ευθειών (D,D΄)***.

Ορισμός 3.6.3

Αν D, D΄ είναι δύο τυχαίες ευθείες στον V και D_0, D_0' οι ευθείες με τις ίδιες κατευθύνσεις αλλά που διέρχονται από το 0, τότε ορίζουμε ως ***γωνία που***

σχηματίζεται από το ζεύγος (D,D΄), και συμβολίζουμε με $(D,\hat{}D')$, να είναι η γωνία $(D_0,\hat{}D_0')$.

Ορισμός 3.6.4

Αν $\theta_0 = \{\theta, \theta + \tilde{\omega}\}$ είναι η γωνία που σχηματίζεται από ένα ζεύγος ευθειών D, D΄ και $\theta_0 \neq \delta_0$, τότε οι αριθμοί tanθ και $\tan(\theta + \tilde{\omega})$ είναι ίσοι, καλούνται δε ***εφαπτομένη της γωνίας θ_0*** και γράφουμε ***tanθ_0***.

Παρατήρηση

Η εξίσωση 2θ=φ στο σύνολο A, έχει δύο λύσεις, τις θ και $\theta + \tilde{\omega}$. Το σύνολο λύσεων, επομένως, της παραπάνω εξίσωσης είναι μία γωνία ενός ζεύγους ευθειών, δηλαδή μια γωνία του A_0, την οποία με παραφορά του συμβολισμού θα γράφουμε με $\frac{\varphi}{2}$, έτσι ώστε η σχέση (3.3.4.2) να γράφεται:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

Στην πρόταση 2.5.10 είδαμε ότι κάθε στροφή αναλύεται σε σύνθεση δύο συμμετριών ως προς ευθείες. Η παρακάτω πρόταση έρχεται να δώσει περισσότερες πληροφορίες για τις συμμετρίες αυτές.

Πρόταση 3.6.5

Αν r είναι μία στροφή κατά γωνία φ, τότε υπάρχει ένα ζεύγος συμμετριών s΄, s΄΄ ως προς δύο διανυσματικές ευθείες D΄ και D΄΄ αντίστοιχα, τέτοιο ώστε

$$s' \circ s'' = r \text{ και } (D',\hat{}D'') = \frac{\varphi}{2}$$

και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Από την πρόταση 2.5.10 έχουμε ότι αν r είναι μία στροφή κατά γωνία φ, τότε υπάρχει ένα ζεύγος συμμετριών s΄, s΄΄ ως προς δύο διανυσματικές ευθείες D΄ και D΄΄ αντίστοιχα, τέτοιο ώστε

$$s' \circ s'' = r$$

Αρκεί , επομένως, να αποδείξουμε ότι η γωνία του ζεύγους των ευθειών (D΄,D΄΄) είναι ίση με $\frac{\varphi}{2}$ και αντιστρόφως.

Έστω Δ΄, Δ΄΄ δύο ημιευθείες με αρχή το 0 οι οποίες περιέχονται στις D΄ και D΄΄ αντίστοιχα. Αν Δ μια τυχαία ημιευθεία με αρχή το 0, τότε (αφού s΄ συμμετρία ως προς τη διανυσματική ευθεία D΄) έχουμε:

$$(\Delta \hat{,} \Delta') = (\Delta' \hat{,} s'(\Delta)) \qquad (3.6.5.1)$$

και (αφού s΄΄ συμμετρία ως προς τη διανυσματική ευθεία D΄΄)

$$(s'(\Delta) \hat{,} \Delta'') = (\Delta'' \hat{,} s''(s'(\Delta))) \Leftrightarrow (s'(\Delta) \hat{,} \Delta'') = (\Delta'' \hat{,} r(\Delta)) \qquad (3.6.5.2)$$

επομένως, λόγω της (3.6.1.1), και των (3.6.5.1) και (3.6.5.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi &= (\Delta \hat{,} r(\Delta)) = (\Delta \hat{,} s'(\Delta)) + (s'(\Delta) \hat{,} r(\Delta)) = \\
&= (\Delta \hat{,} \Delta') + (\Delta' \hat{,} s'(\Delta)) + (s'(\Delta) \hat{,} \Delta'') + (\Delta'' \hat{,} r(\Delta)) = \\
&= 2(\Delta' \hat{,} s'(\Delta)) + 2(s'(\Delta) \hat{,} \Delta'') = \\
&= 2(\Delta' \hat{,} \Delta'').
\end{aligned}$$

Άρα η γωνία $(\Delta' \hat{,} \Delta'')$ είναι λύση της εξίσωσης 2ψ=φ και επομένως σύμφωνα με τον συμβολισμό που υιοθετήσαμε παραπάνω έχουμε και $(D' \hat{,} D'') = \frac{\varphi}{2}$.

Παρατήρηση

Από την παραπάνω πρόταση είναι εμφανές ότι η σύνθεση δύο συμμετριών ως προς δύο ευθείες που σχηματίζουν γωνία ψ είναι στροφή κατά γωνία 2ψ και αντιστρόφως. Άμεσα, επίσης, έπεται ότι η εικόνα μιας ευθείας μέσω μιας στροφής κατά γωνία 2ψ είναι η ίδια με την εικόνα της μέσω μιας συμμετρίας ως προς μια ευθεία η οποία σχηματίζει με την ευθεία, γωνία ψ.

4. Μέτρο Γωνίας

Το επόμενο ερώτημα που ανακύπτει είναι το κατά πόσο οι γωνίες μπορούν να μετρηθούν. Το ερώτημα αυτό, ουσιαστικά, είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μιας απεικόνισης μ μεταξύ του συνόλου των γωνιών και του συνόλου (ή ενός υποσυνόλου) των πραγματικών αριθμών έτσι ώστε

[1] $\mu(\theta)\geq 0$, για κάθε $\theta\in A$

[2] αν $\theta_1, \theta_2\in A$ με $\theta_1=\theta_2$, τότε $\mu(\theta_1)=\mu(\theta_2)$

[3] αν $\theta_1, \theta_2\in A$ και $\theta=\theta_1+\theta_2$, τότε $\mu(\theta)=\mu(\theta_1)+\mu(\theta_2)$.

Για να καθιερώσουμε αυτή την αντιστοιχία θα χρειαστεί να εισάγουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το οποίο είναι σώμα. Έχοντας θεωρήσει, λοιπόν, το σύνολο των γωνιών A ως μια ομάδα (προσθετική) ισόμορφη προς την πολλαπλασιαστική ομάδα $O^+(IR\times IR)$ των στροφών θα επιχειρήσουμε αρχικά να θεμελιώσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ της $O^+(IR\times IR)$ και του μοναδιαίου κύκλου U στο μιγαδικό επίπεδο ώστε στη συνέχεια να εξασφαλίσουμε της ύπαρξη ενός ισομορφισμού του U με ένα διάστημα του IR, ο οποίος να μπορεί να επεκταθεί σε ένα ομομορφισμό μεταξύ των τοπολογικών ομάδων IR και U.

4.1. Το σύνολο των Μιγαδικών αριθμών

Πρόταση 4.1.1

Αν V ένα Ευκλείδειο επίπεδο, τότε το υποσύνολο $C(V)=GO^+(V)\cup\{0\}$ του End(V) που αποτελείται από τις ευθείες γραμμικές ομοιότητες του V είναι ένα αντιμεταθετικό υπόσωμα του End(V).

Απόδειξη

Από την πρόταση 2.4.9, γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμική ομοιότητα επί, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού με ένα γραμμικό ομοιοθετικό μετασχηματισμό, επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της ευθείας ομοιότητας αλλά και των παρατηρήσεων που έπονται αυτού, κάθε ευθεία γραμμική ομοιότητα θα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως σύνθεση μιας στροφής με ένα γραμμικό ομοιοθετικό μετασχηματισμό. Είναι, δηλαδή, $C(V)=\mathbb{R}\otimes O^{+}(V)$. Το γεγονός ότι η $O^{+}(V)$ είναι αβελιανή, αλλά και το ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του C(V) έχει αντίστροφο (αφού κάθε στροφή έχει αντίστροφο), μας οδηγεί στο αποδεικτέο ότι δηλαδή το C(V) είναι ένα αντιμεταθετικό υπόσωμα του End(V).

Αν V, V΄, δύο Ευκλείδεια επίπεδα και g ένας ισομορφισμός από το V στο V΄ (υπάρχει πάντα), τότε από την πρόταση 2.4.11 τότε $C(V')=gC(V)g^{-1}$ δηλαδή τα C(V΄)=C(V) είναι ισόμορφα. Μπορούμε, επομένως, να επιλέξουμε ως V το IR×IR και την Ευκλείδεια δομή που ορίζεται από το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $<(x_1,x_2),(y_1,y_2)>=x_1y_1+x_2y_2$ θεωρώντας ως ορθοκανονική βάση του IR×IR την $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ με $\varepsilon_1=(1,0)$ και $\varepsilon_2=(0,1)$.

Η απεικόνιση

$$u\mapsto u(\varepsilon_1)$$

είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση του C(IR×IR) επί του IR×IR και επομένως μέσω αυτής της απεικόνισης μπορούμε να μεταφέρουμε τη δομή σώματος στο IR×IR.

Πράγματι, αν z, z΄ είναι δύο σημεία του IR×IR και u, u΄ οι αντίστοιχες αντίστροφες εικόνες τους, τότε

$$z+z'=(u+u')(\varepsilon_1)$$

$$zz'=(u\circ u')(\varepsilon_1)$$

Αν $z=\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2$ και $z'=\alpha'\varepsilon_1+\beta'\varepsilon_2$, η πρόσθεση στο IR×IR (από πρόταση 2.5.11), θα ορίζεται ως

$$z+z'=(\alpha+\alpha')\varepsilon_1+(\beta+\beta')\varepsilon_2$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός ως

$$zz'=(\alpha\alpha'-\beta\beta')\varepsilon_1+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\varepsilon_2.$$

Το σώμα αυτό θα συμβολίζεται με C και τα στοιχεία του καλούνται ***μιγαδικοί***

αριθμοί.

Παρατήρηση

Από τον τρόπο που ορίστηκε το C έπεται ότι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το (0,0) ενώ το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι εκείνο που αντιστοιχεί στην $1_{C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$, δηλαδή το $\varepsilon_1=(1,0)$. Ο ισομορφισμός

$$\xi\mapsto\xi\varepsilon_1$$

του IR επί ενός υποσώματος του C (εκείνου που αποτελείται από τα στοιχεία $\xi\varepsilon_1$), μας επιτρέπει να γράφουμε ξ αντί για $\xi\varepsilon_1$ και 1 αντί του ε_1. Όσο για το στοιχείο ε_2 του IR×IR είναι εκείνο που αντιστοιχεί στην $u\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ και για το οποίο είναι $u(\varepsilon_1)=\varepsilon_2$. Θα το συμβολίζουμε με i και επειδή ο πίνακας αυτής της ευθείας ομοιότητας αναφορικά με την $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ είναι ο $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και ισχύει $(M(u))^2=-I_2$ έπεται ότι $i^2=-1$ στο C.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν μοναδικά στη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Ο α καλείται ***πραγματικό μέρος*** του z και συμβολίζεται με ***Re(z)***, ενώ ο β καλείται ***φανταστικό μέρος*** του z και συμβολίζεται με ***Im(z)***.

Αν, τώρα, $u\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ και u^* είναι η προσαρτημένη ευθεία γραμμική ομοιότητα της u, τότε ο μιγαδικός αριθμός $u^*(\varepsilon_1)$ γράφεται $\overline{z}$ και καλείται ***συζυγής του z***. Ο πίνακας του u^*, γνωρίζουμε ότι ισούται με τον ανάστροφο του πίνακα της ομοιότητας u, επομένως αν $z=\alpha+\beta i$, τότε είναι $\overline{z}=\alpha-\beta i$. Η σχέση $u^*u=(\det(u))1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ στο $C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ γράφεται $z\overline{z}=\alpha^2+\beta^2$, το οποίο ισούται με την ορίζουσα της γραμμικής ομοιότητας u και είθισται να συμβολίζουμε με $|z|^2$ αφού είναι και το τετράγωνο της Ευκλείδειας νόρμας του $u(\varepsilon_1)$. Το $|z|$ θα το καλούμε ***μέτρο*** του z.

Αν με C^* συμβολίσουμε τη ομάδα των μη μηδενικών στοιχείων του C, τότε η απεικόνιση

$$u\mapsto u(\varepsilon_1)$$

είναι ένας ισομορφισμός της ομάδας των ομοιοτήτων $GO^+(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ επί του C^*. Το $\mathbb{R}^*$ είναι η εικόνα της ομάδας των μη μηδενικών ομοιοθετικών μετασχηματισμών του IR×IR και U (η ομάδα των μιγαδικών αριθμών με μέτρο 1) είναι η εικόνα της ομάδας

των στροφών $O^+(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Επομένως το C^* είναι το ευθύ γινόμενο του $\mathbb{R}_+^*$ και του U, δηλαδή

$$C^* = \mathbb{R}_+^* \otimes U.$$

Έτσι, λοιπόν, κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$z=|z|\cdot\zeta, \text{ όπου } |\zeta|=1.$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον τρόπο που ορίσαμε το σύνολο των γωνιών A, η απεικόνιση

$$\theta\mapsto r(\theta)(\varepsilon_1)$$

είναι ένας ισομορφισμός της προσθετικής ομάδας A των γωνιών επί της πολλαπλασιαστικής ομάδας U.

Αν, τώρα, αντί για $r(\theta)(\varepsilon_1)$ γράψουμε $s(\theta)$, τότε για τον κανονικό προσανατολισμό του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ που κάνει το ζεύγος $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ θετικό, έχουμε ότι

$$s(\theta)=\cos\theta+i\cdot\sin\theta, \text{ για κάθε } \theta\in A$$

Έτσι, λοιπόν, η απεικόνιση

$$\theta\mapsto s(\theta)=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$$

είναι ένας ισομορφισμός της προσθετικής ομάδας A των γωνιών επί της πολλαπλασιαστικής ομάδας U.

Ορισμός 4.1.2

Αν $z\in U$, η μοναδική γωνία $\theta\in A$ τέτοια ώστε $s(\theta)=z$ καλείται ***όρισμα του z*** και συμβολίζεται με ***arg(z)***.

Γενικά, αν $z\in C^*$ τότε το όρισμά του, ορίζεται να είναι το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\zeta = \frac{z}{|z|} \in U$, ενώ ο z γράφεται $z=|z|\cdot s(\arg(z))$, ενώ αν z, $z'\neq 0$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$$

$$\arg(\overline{z}) = \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$$

στην ομάδα των γωνιών A.

Επιπλέον, από όλα τα παραπάνω, άμεσα προκύπτουν οι τύποι:

$$s(\theta+\theta')=s(\theta)\cdot s(\theta')$$

$$s(-\theta) = \overline{s(\theta)}$$

$$|s(\theta)|=1 \text{ και } \arg(s(\theta))=\theta$$

$$s(0)=1,\ s(\delta)=i,\ s(\tilde{\omega}) = -1,\ s(-\delta)=-i$$

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(s(\theta)) = \frac{1}{2}\big(s(\theta)+s(-\theta)\big) \text{ και } \sin\theta = \mathrm{Im}(s(\theta)) = \frac{1}{2i}\big(s(\theta)-s(-\theta)\big)$$

Παρατήρηση

Η πρόσθεση γωνιών μπορεί να ερμηνευτεί και μέσω του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών.

4.2. Μέτρηση στο σύνολο των γωνιών Α

Ορισμός 4.2.1

Μια ομάδα G θα λέγεται ***τοπολογική ομάδα*** αν έχει επιπλέον τις ιδιότητες τοπολογικού χώρου (έτσι ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν οι ιδιότητες της συνέχειας, της συνεκτικότητας και της συμπάγειας).

Παρατηρήσεις

[1] Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι τοπολογική ομάδα.

[2] Η απεικόνιση $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha+i\beta$ του $\mathbb{R}^2$ επί του C είναι ένα προς ένα και επί και επομένως η τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ «μεταφέρεται» στο C. Έτσι, η S^1 (μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$) «ταυτίζεται» με το U.

[3] Η τοπολογία που επάγεται στην πολλαπλασιαστική ομάδα C^* είναι συμβατή με τη δομή της ομάδας C^*. Οι πολλαπλασιαστικές ομάδες $\mathbb{R}_+^*$, $U=\{z\in C/|z|=1\}$ είναι τοπολογικές υποομάδες του C^* ενώ η U επιπλέον είναι και συμπαγής. Τέλος, από τα παραπάνω, έπεται ότι η τοπολογική ομάδα C^* είναι ισόμορφη με το γινόμενο των τοπολογικών ομάδων $\mathbb{R}_+^*$ και U (αφού $C^* \ni z \mapsto \left(|z|, \zeta = \frac{z}{|z|}\right) \in \mathbb{R}_+^* \times U$).

Παραθέτουμε στη συνέχεια δύο προτάσεις που θα είναι χρήσιμες για την περαιτέρω ανάπτυξη της ενότητας παραλείποντας όμως τις αποδείξεις τους καθώς αυτές δεν αποτελούν το πρωτεύον αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Πρόταση 4.2.2

Κάθε κλειστή υποομάδα της $(\mathbb{R},+)$ διαφορετική από την $\mathbb{R}$ και την $\{0\}$ είναι μια

διακριτή ομάδα της μορφής $\alpha\mathbb{Z}$, όπου α>0.

Πρόταση 4.2.3

Κάθε Hausdorff ομάδα πηλίκο της (IR,+) είναι της μορφής $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$, α≥0 και είναι ισόμορφη προς την ομάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Ορισμός 4.2.4

Η τοπολογική ομάδα $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z}$ (α>0) καλείται ***προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών modulo α***, ενώ η τοπολογική ομάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ συμβολίζεται με T. Ως τοπολογικός χώρος, ο T καλείται ***μοναδιαίος τόρος***.

Παρατήρηση

Ένας τοπικός ισομορφισμός f του T με το IR δεν μπορεί να επεκταθεί πάντα σε ένα ομομορφισμό του T στο IR.

Πράγματι,

αν V μια γειτονιά του 0∈T και f: V→IR ισομορφισμός, τότε αφού η f ορίζεται στη γειτονιά V του 0, υπάρχει ένας ακέραιος p>0, έτσι ώστε η κλάση x(mod$\mathbb{Z}$) του $\frac{1}{p}$, να ανήκει στη V. Εφόσον $px = p\frac{1}{p} = 1 = 0(\mathrm{mod}\,\mathbb{Z})$ το x έχει τάξη p στο T, η εικόνα του μέσω κάθε ομομορφισμού του T στο IR θα είναι απαραίτητα το 0 και επομένως θα έχουμε:

$$f(px)=f(p)f(x)$$

$$f(0)= f(p)f(x)$$

$$0=pf(x)$$

$$0=f(x)$$

άτοπο, καθώς x∈V και x≠0.

Όμως, ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 4.2.5

Αν I είναι ένα διάστημα του IR το οποίο περιέχει το 0 και τουλάχιστον ένα ακόμη στοιχείο και f μια συνεχής απεικόνιση του I σε μια τοπολογική ομάδα G (πολλαπλασιαστική) τέτοια ώστε

$$f(x+y)=f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y\in I \text{ με } x+y\in I, \qquad (4.2.5.1)$$

τότε υπάρχει ένας μοναδικός συνεχής ομομορφισμός του IR στην G ο οποίος επεκτείνει την f.

Απόδειξη

Έστω n ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε αν $x\in I$ και $nx\in I$. Τότε, με επαγωγή και εφόσον $f(x+y)=f(x)f(y)$, για κάθε $x, y\in I$ με $x+y\in I$, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$f(nx)=(f(x))^n \qquad (4.2.5.2)$$

Αν θέσουμε $J=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nI$, τότε το J είναι είτε ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών IR είτε κάποιο από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ ή $[0,+\infty)$, ανάλογα με το αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του I ή όχι. Αν $x\in J$ τότε $(x/n)\in I$ οποτεδήποτε το n είναι ένας επαρκώς μεγάλος θετικός ακέραιος. Έστω, λοιπόν, $x\in J$ και m, n δύο θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $(x/n)\in I$ και $(x/m)\in I$. Τότε $(x/mn)\in I$ και επομένως, λόγω της σχέσης (4.2.5.2), είναι:

$$f\left(\frac{x}{m}\right)=\left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^n \text{ και } f\left(\frac{x}{n}\right)=\left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^m$$

από τις οποίες έπεται ότι

$$\left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n=\left(\left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^m\right)^n=\left(\left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^n\right)^m=\left(f\left(\frac{x}{m}\right)\right)^m$$

δηλαδή το στοιχείο $\left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$ της G είναι το ίδιο για όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους είναι $(x/n)\in I$. Αν συμβολίσουμε αυτό το στοιχείο με $f_1(x)$, όπου f_1 είναι μια απεικόνιση από το J επί της G, η οποία ταυτίζεται με την f στο I και επομένως είναι συνεχής στο 0 (του J).

Έστω, τώρα, $x, y\in J$ και έστω n ένας επαρκώς μεγάλος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $(x/n)\in I$, $(y/n)\in I$ και $\frac{x+y}{n}\in I$. Τότε είναι:

$$f\left(\frac{x+y}{n}\right)=f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{y}{n}\right)=f\left(\frac{y}{n}\right)f\left(\frac{x}{n}\right)$$

δηλαδή τα $f\left(\frac{x}{n}\right)$ και $f\left(\frac{y}{n}\right)$ αντιμετατίθενται.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η f_1, έχουμε:

$$f_1(x+y)=f_1(x)f_1(y) \qquad (4.2.5.3)$$

Αν το J είναι ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών IR, έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη ενός συνεχούς ομομορφισμού f_1 του C στην G ο οποίος επεκτείνει την f.

Αν $J=[0,+\infty)$ και ορίσουμε για κάθε $x<0$ να είναι $f_1(x)=(f_1(-x))^{-1}$, τότε η σχέση (4.2.5.3) εξακολουθεί να ισχύει για κάθε $x\in IR$ και $y\in IR$ αφού προφανώς ισχύει αν $x<0$ και $y<0$, ενώ αν $x\geq 0$, $y<0$ και $x+y\geq 0$ τότε

$$f_1(x)=f_1(x+y)f_1(-y)$$

και επομένως

$$f_1(x+y)=f_1(x)(f_1(-y))^{-1}=f_1(x)f_1(y).$$

Αν, τέλος $x\geq 0$, $y<0$ και $x+y<0$ τότε

$$f_1(-y)=f_1(-x-y)f_1(x)$$

και επομένως

$$f_1(x+y)=(f_1(-(x+y)))^{-1}=f_1(x)(f_1(-y))^{-1}=f_1(x)f_1(y).$$

Επομένως η f_1 είναι ένας ομομορφισμός του IR στην G με $f_1(0)=e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G. Εφόσον η f_1 είναι συνεχής στο J, έχει δεξί πλευρικό όριο στο 0 ίσο προς e και εφόσον $f_1(-x)=(f_1(x))^{-1}$ η f_1 έχει αριστερό πλευρικό όριο στο 0 ίσο επίσης προς e, άρα η f_1 είναι συνεχής στο 0.

Το ότι αυτή η επέκταση της f είναι μοναδική προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το I γεννά την ομάδα IR. Αν λοιπόν f και f΄ δύο ομομορφισμοί από το I στο IR οι οποίοι δίνουν τις ίδιες τιμές σε κάθε σημείο του I και ικανοποιούν την (4.2.5.1), τότε αυτοί ταυτίζονται.

Πρόταση 4.2.6

Κάθε συνεκτική ομάδα G τοπικά ισομορφική με το IR είναι ισομορφική είτε με το IR είτε με το T.

Πρόταση 4.2.7

Μια τοπολογική ομάδα G στην οποία υπάρχει μια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου ομοιομορφική προς ένα ανοικτό διάστημα του IR είναι τοπικά ισόμορφη με το IR.

Πρόταση 4.2.8

Μια συνεκτική ομάδα G στην οποία υπάρχει μια γειτονιά του ταυτοτικού

στοιχείου ομοιομορφική προς ένα ανοικτό διάστημα του IR είναι ισόμορφη είτε με το IR είτε με το T.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση με συνδυασμό των προτάσεων 4.2.6 και 4.2.7.

Παρατήρηση

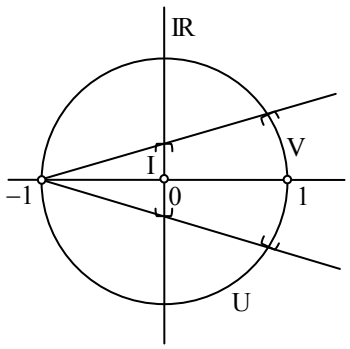
Προκειμένου να εξετάσουμε αν η ομάδα G είναι ισόμορφη με το IR ή με το T, αρκεί να εξετάσουμε αν είναι συμπαγής. Στην περίπτωση που είναι, η G θα είναι ισόμορφη με το T, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η G θα είναι ισόμορφη με το IR.

Πρόταση 4.2.9

Η πολλαπλασιαστική τοπολογική ομάδα U των μιγαδικών αριθμών με μέτρο 1 είναι ισόμορφη με την προσθετική τοπολογική ομάδα T των πραγματικών αριθμών mod1.

Απόδειξη

Επειδή η τοπολογική ομάδα $U=S^1$ είναι συνεκτική, αρκεί, σε πρώτο στάδιο, να αποδείξουμε ότι έχει μια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου 1 ομοιομορφική προς ένα ανοικτό διάστημα του IR. Αν πάρουμε V μια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου 1, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, και αν θεωρήσουμε την απεικόνιση της στερεογραφικής προβολής, όπως αυτή ορίστηκε στην ενότητα 3.5, δηλαδή την



$$f: V \to I \subset IR \text{ με } f(\zeta) = f(\zeta_1 + i\zeta_2) = \frac{\zeta_2}{1+\zeta_1},$$

αυτή, είναι ένας ομοιομορφισμός (ένα προς ένα, επί, συνεχής με συνεχή αντίστροφο) του V σε ένα ανοικτό διάστημα του IR. Επομένως, η τοπολογική ομάδα $U=S^1$, είναι συνεκτική και έχει μια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου 1 ομοιομορφική προς ένα ανοικτό διάστημα του IR, επομένως από την πρόταση 4.2.8 θα είναι ισόμορφη είτε με το IR είτε με το T. Επειδή όμως είναι και συμπαγής θα είναι ισόμορφη με το T.

Παρατήρηση

Από την πρόταση 4.2.7, έπεται ότι η τοπολογική ομάδα U είναι τοπικά ισόμορφη με το IR, επομένως υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση, έστω ε, ενός διαστήματος I του

IR, το οποίο περιέχει το 0 και τουλάχιστον ένα ακόμη στοιχείο, στην (πολλαπλασιαστική) τοπολογική ομάδα U τέτοια ώστε

$$\varepsilon(x+y)=\varepsilon(x)\varepsilon(y), \text{ για κάθε } x, y\in I \text{ με } x+y\in I$$

η οποία σύμφωνα με την πρόταση 4.2.5 επεκτείνεται σε ένα μοναδικό συνεχή ομομορφισμό του IR στην U.

Υπάρχουν μόνο δύο διαφορετικοί ισομορφισμοί της ομάδας T επί της U.

Πράγματι,

αν g, g΄είναι δύο ισομορφισμοί από το T επί της U και $(g')^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του g΄, τότε ο $(g')^{-1}\circ g$ είναι ένας αυτομορφισμός του T και επομένως θα είναι $(g')^{-1}\circ g=id$ ή $(g')^{-1}\circ g=-id$, ισοδύναμα $g'(x)=g(x)$ ή $g'(x)=g(-x)$.

Αν λοιπόν g: T→U ισομορφισμός, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η g είναι τέτοια ώστε $g\left(\frac{1}{4}\bmod 1\right)=i$. Επιπλέον, το T είναι ομοιομορφικό με ένα διάστημα I=[a,a+1) του IR μέσω της κανονικής απεικόνισης φ του IR επί του T, όπου $\varphi(x)=x-[x-a]$.

Κάθε μορφισμός της προσθετικής ομάδας IR επί του U είναι της μορφής $x\mapsto g(\varphi(x/a))$, όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός διάφορος του 0. Το ευρύτερο συμμετρικό ανοικτό διάστημα του IR το οποίο απεικονίζεται επί της εικόνας του μέσω αυτού του μορφισμού είναι το $\left(-\frac{1}{2}|a|,\frac{1}{2}|a|\right)$, ενώ $g\left(\varphi\left(\frac{1}{4}\right)\right)=i$. Αν συμβολίσουμε με $\varepsilon(x)=g(\varphi(x))$, τότε κάθε μορφισμός της προσθετικής ομάδας IR επί του U είναι της μορφής $x\mapsto\varepsilon(x/a)$, όπου $a\neq 0$. Η συνάρτηση ε(x) είναι συνεχής στο IR, παίρνει τιμές στο C και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$|\varepsilon(x)|=1$$

$$\varepsilon(x+y)=\varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

$$\varepsilon(0)=1,\ \varepsilon\left(\frac{1}{4}\right)=i,\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)=-1,\ \varepsilon\left(\frac{3}{4}\right)=-i,\ \varepsilon(1)=1$$

Επιπλέον προκύπτουν

$$\varepsilon(-x)=\frac{1}{\varepsilon(x)}=\overline{\varepsilon(x)}$$

$$\varepsilon(x+1)=1$$

δηλαδή η ε(x) είναι περιοδική με περίοδο το 1.

Αποδεικνύεται ότι ένας τέτοιος μορφισμός είναι η συνάρτηση $\varepsilon(x)=e^{2\pi ix}$, όπου $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Από τα παραπάνω, έπεται ότι κάθε μορφισμός του IR επί του A επιτυγχάνεται συνθέτοντας τον ισομορφισμό $z\mapsto\arg(z)$ του U επί του A με ένα μορφισμό του IR επί του U.

Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εφόσον η απεικόνιση $\theta\mapsto s(\theta)=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$ είναι ένας ισομορφισμός της προσθετικής ομάδας A των γωνιών επί της πολλαπλασιαστικής ομάδας U, η απεικόνιση

$$x\mapsto x/a\mapsto e^{2\pi i(x/a)}\mapsto\arg(e^{2\pi i(x/a)})$$

είναι ένας αυστηρός μορφισμός του IR επί της προσθετικής ομάδας A των γωνιών.

Άρα κάθε γωνία μέσω αυτού του ομομορφισμού αντιστοιχεί σε μία κλάση πραγματικών αριθμών modulo a το οποίο θα καλείται ***μέτρο της γωνίας αναφορικά με τη βάση a***. Ο πραγματικός αριθμός εκείνος που ανήκει στο διάστημα [0,a) θα καλείται ***πρωτεύον μέτρο*** της γωνίας. Συνήθως επιλέγουμε βάσεις a>1, οπότε για κάθε a>1 αντιστοιχεί μια γωνία $\omega=\arg(e^{2\pi i(x/a)})$ της οποίας το πρωτεύον μέτρο είναι 1 και το οποίο καλείται ***μονάδα του γωνιακού μέτρου*** αναφορικά με τη βάση a. Αντιστρόφως, σε κάθε γωνία $\omega\neq0$ αντιστοιχεί μια μοναδική βάση a>1 τέτοια ώστε $\arg(e^{2\pi i(1/a)})=\omega$, επομένως η γνώση της μονάδας του γωνιακού μέτρου καθορίζει πλήρως τη βάση a>1.

Οι Βαβυλώνιοι φαίνεται να είχαν εισαγάγει ως a=360. Όσον αφορά τους λόγους που επέλεξαν αυτόν τον αριθμό μόνο εικασίες μπορούμε να κάνουμε. Μία από τις επικρατέστερες απόψεις είναι ότι ταίριαζε πολύ με το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούσαν, δηλαδή το εξηνταδικό. Άλλοι πάλι υποστηρίζουν ότι ένας κύκλος διαιρείται με κανόνα και διαβήτη σε έξι ίσα μέρη και κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί σε χορδή μήκους όσο η ακτίνα του κύκλου, ενώ και η άποψη ότι το 360 δεν αποκλίνει πολύ από το πλήθος των ημερών ενός έτους που είναι 365 αποτελεί ακόμη μία εικασία για την προέλευση αυτού του αριθμού. Τέλος, δεν μπορούμε να μην παρατηρήσουμε ότι το 360 έχει πολλούς το πλήθος διαιρέτες. Αν επιλέξουμε ως

a=360, η αντίστοιχη μονάδα του γωνιακού μέτρου είναι η ***μοίρα***. Η λέξη degree στα αγγλικά που μεταφράζουμε ως μοίρα προέρχεται κατά τον David Eugene Smith, ιστορικό των μαθηματικών, από τους Έλληνες. Η λέξη μοίρα που χρησιμοποιούν μέχρι και σήμερα οι Έλληνες, είχε μεταφραστεί από τους Άραβες ως daraja (συγγενεύει με το εβραϊκό dar'ggah που σημαίνει σκαλοπάτι), το οποίο με τη σειρά του έγινε de gradus στα λατινικά και εξελίχθηκε στο αγγλικό degree.

Το πυροβολικό χρησιμοποιεί ως a=6400 καθώς ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2^8 (αρκετά μεγάλη δύναμη του 2) και το 10.

Έχει επίσης προταθεί ως a=1, αλλά αυτή η σύμβαση δεν χρησιμοποιείται πουθενά.

Μια άλλη εισήγηση θέλει το a=400, γεγονός που αντιστοιχεί στο τεταρτοκύκλιο μέτρο 100 το οποίο είναι σε συμφωνία με τη γενικότερη τάση για χρήση του δεκαδικού συστήματος.

Τέλος, στην ανάλυση η βάση a καθορίζεται από τη συνθήκη $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\pi i(x/a)}-1}{x}=i$, οπότε a=2π. Σε αυτή την περίπτωση η μονάδα του γωνιακού μέτρου είναι το ***ακτίνιο*** (rad) ενώ το μέτρο καλείται ***κυκλικό μέτρο***. Η επιλογή αυτή διευκολύνει πολύ στους υπολογισμούς. Χαρακτηριστικά, μπορούμε να αναφέρουμε ότι όταν μία γωνία θ μετριέται σε ακτίνια και είναι πολύ μικρή τείνει να ταυτιστεί με το ημίτονό της, δηλαδή είναι $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$. Ουσιαστικά, σήμερα έχει επικρατήσει να ορίζουμε το ακτίνιο ως το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ενός κύκλου που αντιστοιχεί σε τόξο με μήκος όσο η ακτίνα του κύκλου. Η επιλογή λοιπόν του ακτινίου ως μονάδα μέτρησης, έχει ένα ακόμα πλεονέκτημα: απαλλάσσει πολλούς τύπους από τον παράγοντα $\frac{\pi}{180}$. Έτσι, όταν μία γωνία θ μετριέται σε ακτίνια το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο $E=\frac{r^2\cdot m(\theta)}{2}$, όπου m(θ) το μέτρο της γωνίας θ σε ακτίνια και r η ακτίνα του κύκλου, σε αντίθεση με τον τύπο $E=\frac{\pi r^2\cdot m'(\theta)}{360}$, όπου m΄(θ) το μέτρο της γωνίας θ σε μοίρες.

5. Η Γωνία στη Μετρική Γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό, επεκτείνουμε την έννοια της γωνίας σε ένα τυχαίο μετρικό χώρο με τέτοιο τρόπο ώστε όσα ήδη έχουμε αναφέρει για τους Ευκλείδειους χώρους να εξακολουθούν να ισχύουν. Στον τυχαίο μετρικό χώρο, τώρα, τις ευθείες αντικαθιστούν οι γεωδαισιακές, ενώ η γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών δεν υπάρχει πάντα.

5.1. Μετρικός Χώρος – Γεωδαισιακές

Ορισμός 5.1.1

Έστω X ένα σύνολο. Μια ***ψευδομετρική*** στον X είναι μια πραγματική συνάρτηση $d:X\times X\to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες, για όλα τα x, y, $z\in X$.

[1] $d(x,y)\geq 0$ και $d(x,x)=0$

[2] $d(x,y)=d(y,x)$

[3] $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

Μια ψευδομετρική καλείται ***μετρική*** αν είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή $d(x,y)>0$ αν $x\neq y$. Συχνά θα αναφερόμαστε στο d(x,y) ως την ***απόσταση ανάμεσα στα σημεία x και y***.

Ορισμός 5.1.2

Ένας ***μετρικός χώρος*** είναι ένα ζεύγος (X,d), όπου X είναι ένα σύνολο και d μια μετρική στον X.

Παρατήρηση

Στο κεφάλαιο 2 εξετάσαμε την περίπτωση που το σύνολο X είναι ένας διανυσματικός χώρος. Γενικά, όμως το X μπορεί να είναι οποιοδήποτε σύνολο.

Ορισμός 5.1.3

Ένας μετρικός χώρος θα καλείται ***πλήρης μετρικός χώρος*** αν κάθε ακολουθία Cauchy αυτού συγκλίνει σε ένα σημείο του.

Ορισμός 5.1.4

Ένας μετρικός χώρος θα καλείται ***κανονικός μετρικός χώρος*** αν στην τοπολογία που ορίζεται με βάση το σύνολο των ανοικτών μπαλών B(x,r), για κάθε $x\in X$ και κάθε $r>0$, η κλειστή μπάλα $\overline{B}(x,r)$ είναι συμπαγής.

Για να αποφύγουμε τους τετριμμένους μετρικούς χώρους με τη διακριτή μετρική από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε χώρους στους οποίους κάθε ζεύγος σημείων μπορεί να ενωθεί με μια γεωδαισιακή, η οποία ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 5.1.5

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Ένα ***γεωδαισιακό μονοπάτι*** που ενώνει το $x\in X$ με το $y\in X$ ή μια ***γεωδαισιακή*** από το x στο y, είναι μια απεικόνιση c από ένα κλειστό διάστημα $[0,\ell]\subset IR$ στον X τέτοια ώστε:

[1] $c(0)=x$, $c(\ell)=y$ και

[2] $d(c(t),c(t'))=|t-t'|$, για όλα τα $t, t'\in[0,\ell]$.

Ειδικότερα, είναι $\ell=d(x,y)$.

Αν $c(0)=x$, τότε λέμε ότι η c έχει ***αρχή*** το x. Η εικόνα a της c καλείται ***γεωδαισιακό τμήμα*** με άκρα τα x και y.

Παρατηρήσεις

[1] Κάθε γεωδαισιακό μονοπάτι c είναι μια συνεχής απεικόνιση από ένα κλειστό διάστημα $[0,\ell]\subset IR$ στον X

[2] Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα γεωδαισιακά μονοπάτια στον X και στα ζεύγη (a,x), όπου a είναι ένα γεωδαισιακό τμήμα στον X και x είναι ένα άκρο του a.

Ορισμός 5.1.6

Έστω $I\subseteq IR$ ένα διάστημα. Μια απεικόνιση $c:I\to X$ θα λέγεται ***γραμμική αναπαραμετρισμένη γεωδαισιακή*** ή ***γεωδαισιακή σταθερής ταχύτητας*** αν υπάρχει

μια σταθερά λ, τέτοια ώστε:

$$d(c(t),c(t')) = \lambda|t-t'|, \text{ για όλα τα } t, t' \in I.$$

Κάτω από την ίδια υπόθεση, λέμε ότι η c ***παραμετρικοποιεί την εικόνα της ανάλογα με το μήκος τόξου***.

Ορισμός 5.1.7

Μια ***γεωδαισιακή ακτίνα*** στον X είναι μια απεικόνιση $c:[0,\infty)\to X$, τέτοια ώστε

$$d(c(t),c(t')) = |t-t'|, \text{ για όλα τα } t, t' \geq 0.$$

Ορισμός 5.1.8

Μια ***γεωδαισιακή ευθεία*** στον X είναι μια απεικόνιση $c:\mathbb{R}\to X$, τέτοια ώστε

$$d(c(t),c(t')) = |t-t'|, \text{ για όλα τα } t, t' \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 5.1.9

Μια ***τοπικά γεωδαισιακή*** στον X είναι μια απεικόνιση από ένα διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$ στον X με την ιδιότητα ότι για κάθε $t\in I$, υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε

$$d(c(t'),c(t'')) = |t'-t''|, \text{ για όλα τα } t', t'' \in I \text{ με } |t-t'|+|t-t''| \leq \varepsilon.$$

Ορισμός 5.1.10

Ο (X,d) λέγεται ***μετρικός γεωδαισιακός χώρος*** ή απλά ***γεωδαισιακός χώρος*** αν κάθε δύο σημεία στον X ενώνονται με μια γεωδαισιακή. Θα λέμε ότι ο (X,d) είναι ***μοναδικά γεωδαισιακός χώρος*** αν υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή που ενώνει το x με το y, για όλα τα $x, y\in X$. Δοθέντος $r>0$, ένας μετρικός χώρος (X,d) θα λέγεται ***r–γεωδαισιακός*** αν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y\in X$ με $d(x,y)<r$ υπάρχει μια γεωδαισιακή που ενώνει το x με το y. Ο (X,d) θα λέγεται ***r–μοναδικά γεωδαισιακός*** αν υπάρχει ένα μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που ενώνει κάθε τέτοιο ζεύγος σημείων x και y.

Ορισμός 5.1.11

Ένα υποσύνολο C ενός μετρικού χώρου (X,d) θα λέγεται ***κυρτό*** αν κάθε ζεύγος σημείων $x, y\in C$ μπορεί να ενωθεί με μια γεωδαισιακή στον X και η εικόνα κάθε τέτοιας γεωδαισιακής περιέχεται στο C. Αν αυτή η συνθήκη ισχύει για όλα τα $x, y\in C$ με $d(x,y)<r$, τότε το C θα λέγεται ***r–κυρτό***.

Παράδειγμα

Ο $\mathbb{E}^n$ είναι μοναδικά γεωδαισιακός. Το μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που ενώνει δύο σημεία του x και y είναι το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει, δηλαδή το σύνολο

των σημείων

$$\{(1-t)x+ty/\ 0\leq t\leq 1\}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με το ορισμό 5.1.11, ένα υποσύνολο C του μετρικού χώρου $\mathbb{E}^n$ θα είναι κυρτό αν και μόνο αν είναι κυρτό με τη «γραμμική» έννοια, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει κάθε δύο σημεία του C να περιέχεται εξολοκλήρου στο C. Έτσι, ένας κύκλος στο $\mathbb{E}^2$ με την επαγόμενη μετρική δεν είναι γεωδαισιακός χώρος, ενώ ένας κυκλικός δίσκος στο $\mathbb{E}^2$ με την επαγόμενη μετρική, είναι.

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται άμεσα η αλήθεια της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 5.1.12

Ένα υποσύνολο ενός μοναδικά γεωδαισιακού χώρου εφοδιασμένο με την επαγόμενη μετρική, είναι ένας γεωδαισιακός χώρος αν και μόνο αν είναι κυρτό.

Όπως είδαμε στην παρατήρηση [1] του ορισμού 2.4.3, αν $(V,\|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η απεικόνιση $d:V\times V\to\mathbb{R}$, με $d(v,w):=\|v-w\|$ ορίζει μία μετρική πάνω στον V. Ειδικότερα, έχουμε:

Πρόταση 5.1.13

Κάθε διανυσματικός χώρος V με νόρμα, εφοδιασμένος με τη μετρική

$$d(v,w)=\|v-w\|,\ \text{για κάθε } v,\ w\in V,$$

είναι ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος. Ο V θα είναι μοναδικά γεωδαισιακός αν και μόνο αν η μοναδιαία κλειστή μπάλα στον V είναι αυστηρά κυρτή

(με την έννοια ότι αν u_1 και u_2 είναι δύο διαφορετικά διανύσματα στον V με νόρμα 1, τότε $\|(1-t)u_1+tu_2\|<1$, για όλα τα $t\in(0,1)$).

Απόδειξη

Αν $v,\ w\in V$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$t\mapsto c(t)=(1-t)v+tw,$$

η οποία ορίζει ένα μονοπάτι $c:\ [0,1]\to V$. Πράγματι, η παραπάνω απεικόνιση είναι μια αναπαραμετρισμένη γεωδαισιακή από το v στο w, εφόσον $c(0)=v$, $c(1)=w$ και

$$d(c(t),c(t')=\|c(t)-c(t')\|=\|(1-t)v+tw-(1-t')v-tw\|=\|(t-t')(v-w)\|=\|v-w\|\cdot|t-t'|=$$
$$=d(v,w)|t-t'|$$

οπότε αν θέσουμε $d(v,w)=\lambda$, έχουμε:

$$d(c(t),c(t')) = \lambda|t-t'|, \text{ για κάθε } t, t' \in [0,1].$$

Επομένως ο (V,d) είναι ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος αφού κάθε δύο σημεία του ενώνονται με μια γεωδαισιακή. Θα συμβολίζουμε την εικόνα αυτού του μονοπατιού με [v,w].

Ο V θα είναι μοναδικά γεωδαισιακός αν και μόνο αν, δοθέντων οποιονδήποτε v, v΄, v΄΄∈V, η ισότητα d(v,v΄)+d(v΄,v΄΄)=d(v,v΄΄) έπεται ότι v΄∈[v,v΄΄]. Αν λοιπόν θέσουμε $v_1=v'-v$ και $v_2=v''-v$, έχουμε ότι ο V είναι μοναδικά γεωδαισιακός αν και μόνο αν $\|v_1+v_2\|<\|v_1\|+\|v_2\|$, οποτεδήποτε τα v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Αν θεωρήσουμε $v_1=\alpha_1 u_1$ και $v_2=\alpha_2 u_2$, όπου $\alpha_1=\|v_1\|$ και $\alpha_2=\|v_2\|$, όπου u_1 και u_2 είναι δύο διαφορετικά διανύσματα (αφού v_1, v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) στον V με νόρμα 1 και θέσουμε $t=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$, τότε:

$$v_1+v_2=(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}u_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}u_2\right)=(\alpha_1+\alpha_2)\left(tu_1+(1-t)u_2\right)$$

επομένως

$$\|v_1+v_2\|<\|v_1\|+\|v_2\| \Leftrightarrow (\|v_1\|+\|v_2\|)\|tu_1+(1-t)u_2\|<\|v_1\|+\|v_2\| \Leftrightarrow \|tu_1+(1-t)u_2\|<1.$$

Παράδειγμα

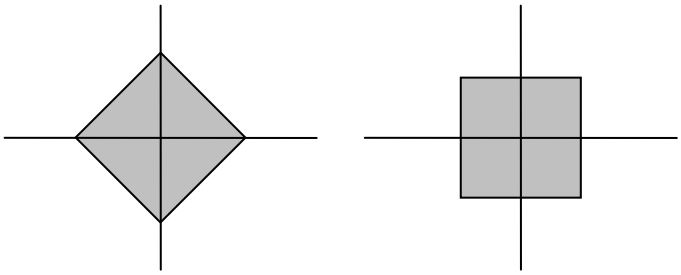
Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο IR^n και την απεικόνιση $\|\cdot\|_1:IR^n\to IR$ η οποία ορίζεται ως

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \text{ για κάθε } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in IR^n.$$

Προφανώς η παραπάνω απεικόνιση είναι μια νόρμα. Αν συμβολίσουμε με d_1 την επαγόμενη μετρική, τότε για $n\geq 2$, η μοναδιαία μπάλα στον (IR^n, d_1) δεν είναι αυστηρά κυρτή, επομένως ο (IR^n,d_1) δεν είναι μοναδικά γεωδαισιακός.

Το ίδιο ισχύει και για τον (IR^n,d_∞) όπου d_∞ είναι η μετρική που επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty:IR^n\to IR$, η οποία ορίζεται ως

$$\|x\|_\infty=\max_i|x_i|, \text{ για κάθε } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in IR^n.$$



Σχήμα 5.1 Η μοναδιαία κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^2$ με τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ αντίστοιχα.

Στην τελευταία παράγραφο της παρούσας εργασίας, θα δείξουμε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^n, d_p)$, όπου d_p είναι η επαγόμενη μετρική από τη νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι μοναδικά γεωδαισιακός αν $1<p<\infty$.

5.2. Η Γωνία Alexandrov

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε τον ορισμό, κατά Alexandrov, μιας γωνίας σε ένα τυχαίο μετρικό χώρο μεταξύ γεωδαισιακών που έχουν κοινή αρχή, ο οποίος θα αποτελέσει σημαντικό εργαλείο ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε τη γεωμετρία του τυχαίου μετρικού χώρου με αυτή του Ευκλειδείου επιπέδου.

Ορισμός 5.2.1

Έστω X ένας μετρικός χώρος. Ένα ***τρίγωνο σύγκρισης*** στον $\mathbb{E}^2$ για μια τριάδα σημείων (p, q, r) στον X είναι ένα τρίγωνο στο Ευκλείδειο επίπεδο με κορυφές $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ τέτοιες ώστε:

$$d(p,q) = d(\overline{p},\overline{q}),\ d(q,r) = d(\overline{q},\overline{r}) \text{ και } d(p,r) = d(\overline{p},\overline{r}).$$

Ένα τέτοιο τρίγωνο είναι μοναδικό σε επίπεδο ισομετρίας[1] και θα συμβολίζεται με $\overline{\Delta}(p,q,r)$. Η εσωτερική γωνία του $\overline{\Delta}(p,q,r)$ στο $\overline{p}$ καλείται ***γωνία σύγκρισης*** μεταξύ των q και r στο p και συμβολίζεται με $\overline{\angle}_p(q,r)$.

Παρατήρηση

Η γωνία σύγκρισης είναι καλά ορισμένη δεδομένου ότι τα q και r είναι και τα δύο διαφορετικά από το p.

Πρόταση 5.2.2 (Ο νόμος των συνημίτονων στον $\mathbb{E}^2$)

Σε ένα Ευκλείδειο τρίγωνο με διαφορετικές κορυφές A, B, C και πλευρές μήκους

[1] Οποιοδήποτε άλλο τρίγωνο ικανοποιεί τις ίδιες απαιτήσεις, είναι η εικόνα του τριγώνου σύγκρισης μέσω μιας ισομετρίας του $\mathbb{E}^2$.

a=d(B,C), b=d(A,C), c=d(A,B) και με εσωτερική γωνία γ στην κορυφή C (απέναντι από την πλευρά c) ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της γωνίας δύο διανυσμάτων έχουμε ότι $\cos\gamma = \dfrac{<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}>}{\|\overrightarrow{CA}\|\cdot\|\overrightarrow{CB}\|}$,

οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$\cos\gamma = \frac{<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}>}{\|\overrightarrow{CA}\|\cdot\|\overrightarrow{CB}\|} \Leftrightarrow \cos\gamma = \frac{<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}>}{a\cdot b} \Leftrightarrow$$
$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma = a^2+b^2-2<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}> \Leftrightarrow$$
$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma = \|\overrightarrow{CA}\|^2+\|\overrightarrow{CB}\|^2-2<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}> \Leftrightarrow$$
$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma = \|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma = \|\overrightarrow{BA}\|^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$$

Παρατήρηση

Για σταθερά a, b το μήκος c είναι μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του γ.

Ορισμός 5.2.3 (Γωνία Alexandrov)

Έστω X ένας μετρικός χώρος και έστω $c:[0,\alpha]\to X$ και $c':[0,\alpha']\to X$ δύο γεωδαισιακά μονοπάτια με $c(0)=c'(0)$. Αν δοθούν $t\in(0,\alpha]$ και $t'\in(0,\alpha']$, θεωρούμε το τρίγωνο σύγκρισης $\overline{\Delta}\big(c(0),c(t),c'(t')\big)$ και τη γωνία σύγκρισης $\overline{\angle}_{c(0)}\big(c(t),c'(t')\big)$. Η ***γωνία Alexandrov*** ή ***άνω γωνία*** μεταξύ των μονοπατιών c και c΄ είναι ο αριθμός $\angle(c,c')\in[0,\pi]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\angle(c,c') := \limsup_{t,t'\to 0}\overline{\angle}_{c(0)}\big(c(t),c'(t')\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0<t,t'<\varepsilon}\overline{\angle}_{c(0)}\big(c(t),c'(t')\big).$$

Αν το όριο $\lim\limits_{t,t'\to 0}\overline{\angle}_{c(0)}\big(c(t),c'(t')\big)$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η γωνία υπάρχει με την ***αυστηρή*** έννοια.

Παρατηρήσεις

[1] Μπορούμε να εκφράσουμε τη γωνία $\angle(c,c')$ με τη βοήθεια της συνάρτησης απόστασης, από το νόμο των συνημιτόνων, ως εξής:

$$\cos\Big(\overline{\angle}_{c(0)}\big(c(t),c'(t')\big)\Big) = \frac{1}{2tt'}\Big(t^2+t'^2-d\big(c(t),c'(t')\big)^2\Big). \qquad (5.2.3.1)$$

[2] Η γωνία μεταξύ δύο οποιωνδήποτε γεωδαισιακών τμημάτων που έχουν κοινό

άκρο (όχι απαραίτητα το 0) ορίζεται να είναι η γωνία μεταξύ των μοναδικών (σύμφωνα με την παρατήρηση [2] στον ορισμό 5.1.5) γεωδαισιακών οι οποίες ξεκινούν από αυτό το σημείο και των οποίων οι εικόνες είναι τα τμήματα που δίνονται.

[3] Αν ο X είναι μοναδικά γεωδαισιακός, $p \neq x$ και $p \neq y$, τότε η γωνία μεταξύ των γεωδαισιακών τμημάτων [p,x] και [p,y] μπορεί να συμβολιστεί με $\angle_p(x, y)$.

[4] Στον $\mathbb{E}^n$, η γωνία Alexandrov ταυτίζεται (είναι ίση) με τη συνήθη Ευκλείδεια γωνία.

[5] Η γωνία μεταξύ των c και c΄εξαρτάται μόνο από τα germs[2] αυτών των μονοπατιών στο 0, δηλαδή αν $c'':[0,\ell]\to X$ είναι οποιοδήποτε μονοπάτι για το οποίο υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $c''/_{[0,\varepsilon]}=c'/_{[0,\varepsilon]}$, τότε η γωνία μεταξύ των c και c΄΄ είναι ίδια με αυτή μεταξύ των c και c΄.

[6] Η γωνία μεταξύ των εισερχόμενων και εξερχόμενων germs μιας γεωδαισιακής σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο κατά μήκος της εικόνας της είναι π. Με άλλα λόγια, αν $c:[a,b]\to X$ είναι ένα γεωδαισιακό μονοπάτι με $a<0<b$, και αν ορίσουμε $c':[0,-a]\to X$ και $c'':[0,b]\to X$ με $c'(t)=c(-t)$ και $c''(t)=c(t)$, τότε $\angle(c', c'') = \pi$.

[7] Γενικότερα, η γωνία Alexandrov δεν υπάρχει πάντα με την αυστηρή έννοια. Όπως θα αποδείξουμε και στη συνέχεια, σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα οι γωνίες στο 0 υπάρχουν με την αυστηρή έννοια αν και μόνο αν η νόρμα προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο.

[8] Αν θεωρήσουμε τον $(\mathbb{R}^2,d_\infty)$, όπου $d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) = \max\{|x-x'|,|y-y'|\}$, τότε για κάθε ακέραιο $n>1$, η απεικόνιση:

$$t \mapsto \left(t,\left[t(1-t)\right]^n\right)$$

ορίζει ένα γεωδαισιακό μονοπάτι $\left[0,\frac{1}{n}\right]\to(\mathbb{R}^2,d_\infty)$. Όλες αυτές οι γεωδαισιακές έχουν κοινή αρχή και τα germ τους είναι ανά δύο ξένα αλλά η γωνία μεταξύ δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι 0, αφού

[2] Έστω Y ένα σύνολο και X ένας τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε το σύνολο από όλα τα ζεύγη (f,x), όπου $f: U\to Y$ και U είναι μια γειτονιά του $x\in X$. Θα λέμε ότι τα ζεύγη (f,x) και (f΄,x΄) είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν x=x΄ και f=f΄ σε κάποια γειτονιά του x. Η κλάση ισοδυναμίας του (f,x) καλείται germ της f στο x.

$$d(c(t),c'(t')) = \max\left\{\left|t-t'\right|,\left|t^n(1-t)^n - t'^n(1-t')^n\right|\right\} = \left|t-t'\right| \text{ και}$$

$$\cos\left(\overline{\angle}_{c(0)}\left(c(t),c'(t')\right)\right) = \frac{t^2+t'^2-d\left(c(t),c'(t')\right)^2}{2tt'} = \frac{t^2+t'^2-\left|t-t'\right|^2}{2tt'} = 1.$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η γωνία μεταξύ δύο διαφορετικών γεωδαισιακών με κοινή αρχή μπορεί να είναι μηδέν, ακόμα και αν τα germ τους είναι διαφορετικά. Γενικά λοιπόν, η απεικόνιση $(c,c') \mapsto \angle(c,c')$ δεν ορίζει μετρική στο σύνολο των (germ των) γεωδαισιακών με κοινή αρχή, αφού δύναται $\angle(c,c') = 0$ για c≠c΄. Η απεικόνιση αυτή ωστόσο είναι μια ψευδομετρική εφόσον ικανοποιεί τα αξιώματα [1] και [2] του ορισμού (5.1.1.). Όσον αφορά το [3] του ίδιου ορισμού αυτό ικανοποιείται, όπως υποδεικνύει και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.4

Έστω X ένας μετρικός χώρος και έστω c, c΄, c΄΄ τρία γεωδαισιακά μονοπάτια στον X με κοινή αρχή το σημείο p. Τότε:

$$\angle(c',c'') \le \angle(c,c') + \angle(c',c'').$$

Απόδειξη

Έστω ότι δεν ισχύει η $\angle(c',c'') \le \angle(c,c') + \angle(c',c'')$, τότε θα υπήρχε δ>0 τέτοιο ώστε:

$$\angle(c',c'') > \angle(c,c') + \angle(c',c'') + 3\delta. \qquad (5.2.4.1)$$

Από τον ορισμό όμως του limsup, μπορούμε να βρούμε ένα ε>0 τέτοιο ώστε:

[1] $\overline{\angle}_p\left(c(t),c'(t')\right) < \angle\left(c,c'\right) + \delta$, για όλα τα t, t΄<ε

[2] $\overline{\angle}_p\left(c(t),c''(t'')\right) < \angle\left(c,c''\right) + \delta$, για όλα τα t, t΄΄<ε

[3] $\overline{\angle}_p\left(c'(t'),c''(t'')\right) > \angle\left(c',c''\right) - \delta$, για όλα τα t΄, t΄΄<ε.

Έστω ότι τα t΄, t΄΄<ε ικανοποιούν την [3]. Θεωρούμε ένα τρίγωνο στον $\mathbb{E}^2$ με κορυφές τα σημεία 0, x΄, x΄΄ ώστε

$$d(0,x')=|x'-0|=d(p, c'(t'))=t',$$

$$d(0,x'')=|x''-0|=d(p,c''(t''))=t''$$

(αφού p=c(0)=c΄(0)=c΄΄(0)) και τέτοιες ώστε η γωνία α στην κορυφή 0 να ικανοποιεί την:

$$\overline{\angle}_p\left(c'(t'),c''(t'')\right) > \alpha > \angle\left(c',c''\right) - \delta.$$

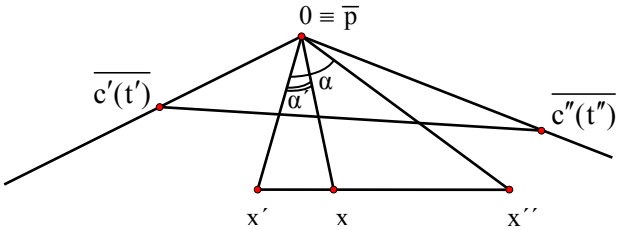
Ειδικότερα είναι 0<α<π, και επομένως το τρίγωνο δεν είναι εκφυλισμένο.

Η ανισότητα $\overline{\angle}_p\left(c'(t'),c''(t'')\right)>\alpha$ έπεται ότι

$$|x'-x''|<d\left(\overline{c'(t')},\overline{c''(t'')}\right)=d\left(c'(t'),c''(t'')\right), \qquad (5.2.4.2)$$

ενώ η ανισότητα $\alpha>\angle\left(c',c''\right)-\delta$ λόγω της [3] δίνει

$$\alpha>\angle\left(c',c''\right)-\delta>\angle\left(c,c'\right)+\angle\left(c',c''\right)+3\delta-\delta=\angle\left(c,c'\right)+\angle\left(c',c''\right)+2\delta,$$



επομένως υπάρχει ένα σημείο x∈[x′,x″], τέτοιο ώστε η γωνία α′ (αντίστοιχα α″) μεταξύ των Ευκλείδειων τμημάτων [0,x′] και [0,x] (αντίστοιχα των Ευκλείδειων τμημάτων [0,x″] και [0,x]) να είναι μεγαλύτερη από $\angle\left(c,c'\right)+\delta$ (αντίστοιχα $\angle\left(c,c''\right)+\delta$), δηλαδή

$$\alpha'>\angle\left(c,c'\right)+\delta.$$

Έστω t=d(0,x). Εφόσον t≤max{t′, t″}<ε, μπορούμε να εφαρμόσουμε την [1], οπότε:

$\angle\left(c(t),c'(t')\right)<\angle\left(c,c'\right)+\delta<\alpha'$ και επομένως $d\left(\overline{c(t)},\overline{c'(t)}\right)=d\left(c(t),c'(t)\right)<d(x,x')$.

Όμοια παίρνουμε $d\left(\overline{c(t)},\overline{c''(t)}\right)=d\left(c(t),c''(t)\right)<d(x,x'')$.

Από την (5.2.4.2), έχουμε:

$d\left(c'(t'),c''(t'')\right)>\left|x'-x''\right|=d(x',x'')=d(x',x)+d(x,x'')>d\left(c(t),c'(t')\right)+d\left(c(t),c''(t'')\right)$

άτοπο αφού αντιβαίνει στην τριγωνική ιδιότητα που ισχύει στον X.

Στη συνέχεια εισάγουμε ένα εναλλακτικό ορισμό της γωνίας μεταξύ δύο γεωδαισιακών με κοινή αρχή ο οποίος, όπως απέδειξε ο Alexandrov, είναι ισοδύναμος με αυτόν της γωνίας Alexandrov.

Ορισμός 5.2.5 (Ισχυρή άνω γωνία)

Έστω X ένας μετρικός χώρος και έστω c:[0,α]→X και c′:[0,α′]→X δύο γεωδαισιακά μονοπάτια με c(0)=c′(0)=p. Η ***ισχυρή άνω γωνία*** γ μεταξύ των μονοπατιών c και c′ είναι ο αριθμός $\gamma(c,c')\in[0,\pi]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(c,c'):=\limsup_{s\to 0;t\in(0,\alpha']}\overline{\angle}_p\left(c(s),c'(t)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{s\in(0,\varepsilon];t\in(0,\alpha']}\overline{\angle}_p\left(c(s),c'(t)\right).$$

Για να αποδείξουμε ότι τελικά αυτοί οι δύο ορισμοί για τη γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών με κοινή αρχή είναι ισοδύναμοι, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.2.6

Έστω $u_{s,t} = d\left(c(s), c'(t)\right)$ και έστω $\gamma_{s,t} = \overline{\angle}_p\left(c(s), c'(t)\right)$. Τότε:

$$\frac{t-u_{s,t}}{s} \le \cos\gamma_{s,t} \le \frac{t-u_{s,t}}{s} + \frac{s}{2t}.$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της $\gamma_{s,t} = \overline{\angle}_p\left(c(s), c'(t)\right)$ και τη σχέση (5.2.3.1), έχουμε

$$\cos\gamma_{s,t} = \frac{s^2+t^2-u_{s,t}^2}{2st} = \frac{t-u_{s,t}}{s} + \frac{s^2-(u_{s,t}-t)^2}{2st} \qquad (5.2.6.1)$$

ενώ από την τριγωνική ανισότητα είναι

$$\left|u_{s,t}-t\right| = \left|d\left(c(s), c'(t)\right) - d\left(c'(t), c'(0)\right)\right| \le d\left(c(s), c'(0)\right) = d\left(c(s), c(0)\right) = \left|s-0\right| = s,$$

επομένως $\left|u_{s,t}-t\right| \le s$, άρα

$$0 \le \frac{s^2-(u_{s,t}-t)^2}{2st} \le \frac{s}{2t} \qquad (5.2.6.2)$$

Από τις (5.2.6.1) και (5.2.6.2) τώρα, είναι προφανές ότι:

$$\frac{t-u_{s,t}}{s} \le \cos\gamma_{s,t} \le \frac{t-u_{s,t}}{s} + \frac{s}{2t}.$$

Πρόταση 5.2.7

Έστω X ένας μετρικός χώρος. Για όλες τις γεωδαισιακές $c:[0,\alpha]\to X$ και $c':[0,\alpha']\to X$ με $c(0)=c'(0)=p$ είναι:

$$\angle(c,c') = \gamma(c,c')$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της ισχυρής άνω γωνίας και της γωνίας Alexandrov, είναι προφανές ότι $\angle(c,c') \le \gamma(c,c')$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\gamma(c,c') \le \angle(c,c')$, ή αρκεί να αποδείξουμε ότι για σταθερό $t\in(0,\alpha']$, είναι:

$$\limsup_{s\to 0} \overline{\angle}_p\left(c(s), c'(t)\right) \le \angle(c,c').$$

Από το προηγούμενο λήμμα, όμως, έχουμε:

$$\liminf_{s\to 0} \cos\gamma_{s,t} = \liminf_{s\to 0} \frac{t-u_{s,t}}{s}, \text{ για κάθε σταθερό } t\in(0,\alpha'].$$

Αν t΄<t, τότε από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$d\left(c(s),c'(t)\right)\le d\left(c(s),c'(t')\right)+d\left(c'(t'),c'(t)\right)\Leftrightarrow u_{s,t}\le u_{s,t'}+\left|t'-t\right|\Leftrightarrow$$

$$u_{s,t}\le u_{s,t'}+t-t'\Leftrightarrow t'-u_{s,t'}\le t-u_{s,t}\Leftrightarrow\frac{t'-u_{s,t'}}{s}\le\frac{t-u_{s,t}}{s}$$

και επομένως

$$\liminf_{s,t'\to 0}\cos\gamma_{s,t'}\le\liminf_{s\to 0}\cos\gamma_{s,t}\,. \qquad (5.2.7.1)$$

Όμως, επειδή η συνάρτηση cos είναι φθίνουσα στο [0,π], είναι

$$\liminf_{s,t'\to 0}\cos\gamma_{s,t'}=\liminf_{s,t'\to 0}\cos\overline{\angle}_p\left(c(s),c'(t')\right)=\cos\left(\limsup_{s,t'\to 0}\overline{\angle}_p\left(c(s),c'(t')\right)\right)=\cos\angle\left(c,c'\right)$$

οπότε η (5.2.7.1) γίνεται:

$\cos\angle\left(c,c'\right)\le\liminf_{s\to 0}\cos\gamma_{s,t}$ και έχουμε:

$$\limsup_{s\to 0}\overline{\angle}_p\left(c(s),c'(t)\right)\le\angle\left(c,c'\right),\ \text{για κάθε } t\in(0,\alpha'],$$

επομένως $\gamma(c,c')\le\angle(c,c')$. Άρα $\angle(c,c')=\gamma(c,c')$.

6. Οι Μετρικοί Χώροι M_κ^n

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι χώροι M_κ^n, οι οποίοι μπορούν να εξυπηρετήσουν ως χώροι μοντέλα όσον αφορά τη σύγκρισή τους με πιο γενικούς γεωδαισιακούς χώρους. Σε αυτούς τους μετρικούς χώρους η γωνία Alexandrov υπάρχει πάντα γι' αυτό και θα τους εξετάσουμε λεπτομερειακά μέσω μοντέλων τους τα οποία συγχρόνως αντιπροσωπεύουν την Ευκλείδεια, τη Σφαιρική και την Υπερβολική Γεωμετρία. Έτσι, για κάθε ακέραιο n, οι χώροι M_κ^n υπάγονται σε τρεις ποιοτικά διαφορετικές κλάσεις ανάλογα με το αν το k είναι μηδέν, θετικό ή αρνητικό. Θα επικεντρωθούμε αρχικά στις τρεις βασικές ειδικές περιπτώσεις, δηλαδή τους χώρους $\mathbb{E}^n = M_0^n$, $S^n = M_1^n$ και $\mathbb{H}^n = M_{-1}^n$, ενώ στη συνέχεια θα αναλύσουμε πως κάθε χώρος M_κ^n μπορεί να επιτευχθεί από μία από αυτές τις τρεις περιπτώσεις. Τέλος, ένα σημαντικό συμπέρασμα αυτής της ενότητας θα αποτελέσει η ύπαρξη τριγώνων σύγκρισης και σε αυτούς τους χώρους.

6.1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{E}^n = M_0^n$

Έχουμε θεωρήσει ως $\mathbb{E}^n$ το μετρικό χώρο που προκύπτει αν εφοδιάσουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ με τη μετρική που συνδέεται με τη νόρμα που επάγεται από το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ ,$$

όπου $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Έχουμε μελετήσει διεξοδικά το χώρο αυτό, αλλά χάριν ομοιομορφίας στην ανάπτυξη της ενότητας, συνοπτικά αναφέρουμε ότι ο $\mathbb{E}^n$ είναι μοναδικά γεωδαισιακός ενώ τα γεωδαισιακά τμήματα στον $\mathbb{E}^n$ είναι τα υποσύνολα της μορφής:

$$[x,y]=\{ty+(1-t)x \ / \ 0\leq t\leq 1\}.$$

Από την παρατήρηση [4] του ορισμού 5.2.3 άμεσα έπεται ότι η γωνία Alexandrov στον $\mathbb{E}^n$ ταυτίζεται με την Ευκλείδεια γωνία και ισχύει ο νόμος των συμημιτόνων (η απόδειξη είναι ανάλογη της πρότασης 5.2.2).

Εξ' ορισμού ένα υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{E}^n$ είναι ένας συσχετισμένος υπόχωρος διάστασης n−1. Δοθέντος ενός σημείου $P\in H$ και ενός μοναδιαίου διανύσματος u ορθογώνιου προς το H, το H μπορεί να γραφεί ως:

$$H=\{Q\in \mathbb{E}^n \ / \ \langle Q-P,u\rangle=0\}.$$

Κάθε υπερεπίπεδο μπορεί να προκύψει με τον ακόλουθο τρόπο:

Αν δοθούν δύο διαφορετικά σημεία $A, B\in \mathbb{E}^n$, το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από τα A και B καλείται ***διχοτόμος του υπερεπιπέδου*** των A και B και είναι ένα υπερεπίπεδο που περιέχει το μέσο P του γεωδαισιακού τμήματος [A,B] και επιπλέον είναι ορθογώνιο προς το διάνυσμα A−B.

Όπως είδαμε στην πρόταση 2.4.12, άμεσα συνδεδεμένη με κάθε υπερεπίπεδο, είναι μια ισομετρία r_H του $\mathbb{E}^n$, που καλείται ***συμμετρία*** ή ***ανάκλαση*** ως προς H. Αν P είναι ένα σημείο του H και u ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο προς το H, τότε για όλα τα $A\in \mathbb{E}^n$, έχουμε:

$$r_H(A)=A-2\langle A-P,u\rangle u.$$

Το σύνολο των σταθερών σημείων της r_H είναι το H. Αν $A\in \mathbb{E}^n$ και δεν ανήκει στο H, τότε το H είναι η διχοτόμος του υπερεπιπέδου των A και $r_H(A)$. Αντιστρόφως, αν H είναι η διχοτόμος του υπερεπιπέδου των A και B, τότε $r_H(A)=B$.

6.2. Η Σφαίρα $S^n = M_1^n$

Η n−διάστατη σφαίρα S^n είναι το σύνολο:

$$S^n=\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \langle x,x\rangle=1\}$$

όπου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι το (σύνηθες) Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 6.2.1

Στη n–διάστατη σφαίρα S^n, ορίζουμε την απεικόνιση $d:S^n\times S^n\to IR$ η οποία σε κάθε ζεύγος $(x,y)\in S^n\times S^n$ αντιστοιχίζει τον μοναδικό πραγματικό αριθμό $d(x,y)\in[0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\cos d(x,y)=<x,y>.$$

Παρατήρηση

Θα αποδείξουμε, στη συνέχεια, ότι η απεικόνιση αυτή είναι μία μετρική, προς το παρόν όμως η d δεν είναι παρά μια απεικόνιση για την οποία ισχύουν:

[1] $d(x,y)=d(y,x)\geq 0$, για κάθε $x, y\in S^n$ και

[2] $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

Για να αποδείξουμε ότι είναι μετρική, απομένει να δείξουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα, πρωτίστως όμως θα εισάγουμε τις έννοιες του σφαιρικού τριγώνου αλλά και της γωνίας κορυφής.

Θεωρούμε την Ευκλείδεια δομή του IE^{n+1} ο οποίος περιέχει την S^n και εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική είναι ένας μετρικός χώρος μοναδικά γεωδαισιακός.

Ορισμός 6.2.2

Ένας ***μέγιστος κύκλος*** στην S^n είναι η τομή της S^n με ένα διδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο του IE^{n+1} (δηλαδή ένα επίπεδο που διέρχεται από το 0).

Παρατήρηση

Μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε τα τόξα των μεγίστων κύκλων με ένα «φυσικό» τρόπο. Έτσι, αν δοθεί ένα σημείο $x\in S^n$, ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u\in IE^{n+1}$ με $<u,x>=0$ και ένας αριθμός $\alpha\in[0,\pi]$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$c: [0,\alpha]\to S^n$$

που ορίζεται ως:

$$c(t)=(\cos t)x+(\sin t)u.$$

Είναι $d\left(c(t),c(t')\right)=\left|t-t'\right|$, για όλα τα $t, t'\in[0,\alpha]$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\cos d\left(c(t),c(t')\right) &=<c(t),c(t')>=<(\cos t)x+(\sin t)u,(\cos t')x+(\sin t')u>=\\ &=\cos t\cos t'+\sin t\sin t'=\\ &=\cos(t-t')\end{aligned}$$

και επομένως $d\left(c(t),c(t')\right)=\left|t-t'\right|$, για όλα τα t, t΄$\in[0,\alpha]$.

Προφανώς, εικόνα του c περιέχεται στο μέγιστο κύκλο ο οποίος ορίζεται από την τομή του διανυσματικού υπόχωρου (διάστασης δύο) που παράγεται από το x και το u με την S^n αφού είναι

$$< c(t),c(t) >=< (\cos t)x+(\sin t)u,(\cos t)x+(\sin t)u >= \cos t\cos t+\sin t\sin t=1.$$

Θα αναφερόμαστε στην εικόνα του c ως το ***ελάχιστο μεγάλο τόξο*** ή ως το ***μεγάλο τόξο με αρχικό διάνυσμα u που ενώνει το x με το c(x)***.

Αν α=π, τότε για οποιαδήποτε επιλογή του αρχικού διανύσματος u είναι c(π)=–x.

Αν τώρα, d(x,y)<π, τότε υπάρχει ένα (μοναδικό) μεγάλο τόξο που ενώνει το x με το y. Αν x≠y, τότε το αρχικό διάνυσμα u αυτού του μεγάλου τόξου που ενώνει το x με το y, είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{E}^{n+1}$ στην κατεύθυνση του y–<x,y>x, δηλαδή το διάνυσμα $u=\dfrac{y-\langle x,y\rangle x}{\sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}}$.

Ορισμός 6.2.3

Αν θεωρήσουμε δύο ελάχιστα μεγάλα τόξα με κοινή αρχή ένα σημείο της S^n και αρχικά διανύσματα u και v αντίστοιχα, τότε η ***σφαιρική γωνία*** μεταξύ αυτών των δύο ελαχίστων μεγάλων τόξων είναι η γωνία μεταξύ του u και του v, δηλαδή ο μοναδικός αριθμός α∈[0,π] τέτοιος ώστε cosα=<u,v>.

Ορισμός 6.2.4

Ένα ***σφαιρικό τρίγωνο*** Δ στην S^n αποτελείται από μία επιλογή τριών διαφορετικών σημείων A, B, C∈S^n (οι ***κορυφές*** του Δ) και από τα τρία ελάχιστα μεγάλα τόξα (οι ***πλευρές*** του Δ) που καθένα ενώνει ένα ζεύγος κορυφών. Θα συμβολίζουμε τις πλευρές του Δ με [A,B], [B,C] και [C,A].

Ορισμός 6.2.5

Η ***γωνία κορυφής*** στο C ορίζεται να είναι η σφαιρική γωνία μεταξύ των πλευρών του Δ που ενώνουν το C με τα A και B, δηλαδή η σφαιρική γωνία μεταξύ των πλευρών [C,B] και [C,A].

Πρόταση 6.2.6 (Ο νόμος των συνημίτονων στην S^n)

Έστω Δ ένα σφαιρικό τρίγωνο στην S^n με κορυφές A, B και C. Έστω a=d(B,C), b=d(C,A) και c=d(A,B) (όπου d όπως ορίστηκε στο 8.2.1) και έστω ότι το γ

συμβολίζει τη γωνία κορυφής στο C. Τότε είναι:

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma.$$

Απόδειξη

Έστω u και v τα αρχικά διανύσματα των πλευρών [C,B] και [C,A], αντίστοιχα. Από τον ορισμό 8.2.3 είναι:

$$\cos\gamma=\langle u,v\rangle,$$

επομένως, αφού

$A = c_{C,A}(b) = (\cos b)C + (\sin b)u$ και $B = c'_{C,B}(a) = (\cos a)C + (\sin a)v$,

έχουμε:

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos d(A,B) = \langle A,B\rangle = \\ &= \langle(\cos b)C + (\sin b)u, (\cos a)C + (\sin a)v\rangle = \\ &= \cos a\cos b\langle C,C\rangle + \cos b\sin a\langle C,v\rangle + \sin b\cos a\langle u,C\rangle + \sin a\sin b\langle u,v\rangle = \\ &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma.\end{aligned}$$

Πρόταση 6.2.7 (Τριγωνική Ανισότητα)

Για όλα τα A, B, $C\in S^n$ είναι:

$$d(A,B)\le d(A,C)+d(C,B),$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το C κείται επί του ελάχιστου μεγάλου τόξου που ενώνει το A με το B.

Απόδειξη

Έστω a=d(C,B), b=d(A,C) και c=d(A,B). Υποθέτουμε ότι τα A, B και C είναι διαφορετικά (στην περίπτωση που τα A, B και C δεν είναι διαφορετικά, η απόδειξη είναι τετριμμένη). Έστω Δ το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα A, B και C και γ η γωνία κορυφής στο C. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι αυστηρά φθίνουσα στο [0,π], έτσι για σταθερά a και b, η συνάρτηση

$$\gamma\mapsto\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$$

μειώνεται από cos(b−a) έως cos(b+a), καθώς το γ αυξάνει από 0 έως π. Από το νόμο των συνημίτονων όμως είναι:

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma=\cos c$$

επομένως

$$\cos c\ge\cos(b+a).$$

Είναι λοιπόν

$$c \leq b+a$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\gamma=\pi$ και $b+a\leq\pi$,

δηλαδή

$$d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το C κείται επί του ελάχιστου μεγάλου τόξου που ενώνει το A με το B.

Πόρισμα 6.2.8 (Ορισμός της μετρικής)

Έστω $d: S^n\times S^n\rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος $(A,B)\in S^n\times S^n$ τον μοναδικό πραγματικό αριθμό $d(A,B)\in[0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\cos d(A,B)=\langle A,B\rangle.$$

Τότε η d είναι μία μετρική.

Απόδειξη

Προφανώς $d(A,B)=d(B,A)\geq 0$ και $d(A,B)=0$ αν και μόνο αν $A=B$ (παρατήρηση στον ορισμό 6.2.1).

Η τριγωνική ανισότητα $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$ ισχύει λόγω της προηγούμενης πρότασης. Επομένως η d είναι μία μετρική και ο (S^n,d) είναι μετρικός χώρος.

Παρατήρηση

Η ισχύς της τριγωνικής ανισότητας θα μπορούσε να διαπιστωθεί και ως μια ειδική περίπτωση της πρότασης 5.2.4 καθώς $d(A,B)$ είναι η γωνία μεταξύ των τμημάτων $[0,A]$ και $[0,B]$ στον $\mathbb{E}^{n+1}$. Επιλέξαμε αυτή την πορεία, δηλαδή την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας με βάση το σφαιρικό νόμο των συνημιτόνων, για λόγους ομοιομορφίας με τη μελέτη των χώρων που ακολουθούν.

Πρόταση 6.2.9 (Γεωδαισιακές στην S^n)

Ο (S^n,d) είναι μοναδικά γεωδαισιακός μετρικός χώρος.

Απόδειξη

Εφόσον για κάθε δύο σημεία $A, B\in S^n$ υπάρχει ένα γεωδαισιακό τμήμα που τα ενώνει το ελάχιστο μεγάλο τόξο που ενώνει το A με το B όπως αυτό περιγράφηκε στον ορισμό 6.2.2, ο (S^n,d) είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ο (S^n,d) είναι μοναδικά γεωδαισιακός μετρικός χώρος ή ότι αν $A, B\in S^n$ με $d(A,B)<\pi$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα

που τα ενώνει. Ένα τέτοιο γεωδαισιακό τμήμα είναι το ελάχιστο μεγάλο τόξο που ενώνει το A με το B, δηλαδή η τομή της S^n με τον θετικό κώνο στον $\mathbb{E}^{n+1}$ που παράγεται από τα A και B και επομένως αποτελείται από τα σημεία της μορφής $\lambda A+\mu B$ με $\lambda+\mu\geq 1$. Πράγματι· αν A, B, $C\in S^n$ και $C=\lambda A+\mu B$ με λ, $\mu>0$, τότε έχουμε

$$1=\|C\|=\|\lambda A+\mu B\|\leq\lambda\|A\|+\mu\|B\|=\lambda+\mu.$$

Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι αυτό είναι το μόνο γεωδαισιακό τμήμα που ενώνει τα A και B. Λόγω όμως της πρότασης 5.1.13, αντί αυτού, αρκεί να δείξουμε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα στην S^n είναι αυστηρά κυρτή.

Έστω λοιπόν ότι τα A και B βρίσκονται στη κλειστή μπάλα $\overline{B}(P,r)\subseteq S^n$ ακτίνας $r<\frac{\pi}{2}$ γύρω από το P. Εξ' ορισμού, είναι:

$$C\in\overline{B}(P,r)\Leftrightarrow d(C,P)\leq r\Leftrightarrow\cos d(C,P)\geq\cos r\Leftrightarrow\langle C,P\rangle\geq\cos r.$$

Αλλά αν θεωρήσουμε λ, $\mu>0$ με $\lambda+\mu\geq 1$, τότε

$$\langle\lambda A+\mu B,P\rangle=\lambda\langle A,P\rangle+\mu\langle B,P\rangle\geq(\lambda+\mu)\cos r\geq\cos r,$$

επομένως το ελάχιστο μεγάλο τόξο από το A στο B περιέχεται στην $\overline{B}(P,r)$ (η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για τα σημεία A και B), άρα η $\overline{B}(P,r)$ είναι αυστηρά κυρτή και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ορισμός 6.2.10 (Υπερεπίπεδα στην S^n)

Ένα ***υπερεπίπεδο*** H στην S^n είναι η τομή της S^n με ένα ν–διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n+1}$.

Παρατήρηση

Το H με την επαγόμενη μετρική από την S^n είναι ισομετρικό με την S^{n-1}.

Ορισμός 6.2.11

Συμμετρία ή ***ανάκλαση*** r_H ως προς ένα υπερεπίπεδο H της S^n, είναι η ισομετρία της S^n που επιτυγχάνεται αν περιορίσουμε την Ευκλείδεια συμμετρία ως προς το υπερεπίπεδο του $\mathbb{E}^{n+1}$ που παράγεται από το H, στην S^n.

Αν A, B είναι δύο διαφορετικά σημεία της S^n, τότε το σύνολο των σημείων της S^n τα οποία ισαπέχουν από τα A και B είναι ένα υπερεπίπεδο το οποίο καλούμε ***υπερεπίπεδο διχοτόμος*** για τα A και B, είναι δε η τομή της S^n με το διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n+1}$ που είναι ορθογώνιος στο διάνυσμα A–B.

Αν το $A\in S^n$ και δεν ανήκει στο Η, τότε το Η είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος για το Α και το $r_H(A)$. Αντιστρόφως, αν το Η είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος για τα Α και Β, τότε $r_H(A)=B$.

6.3. Ο Υπερβολικός Χώρος $\mathbb{H}^n = M^n_{-1}$

Ακολουθώντας μια προσέγγιση καθαρά μετρική, όπως ήδη έχουμε κάνει μέχρι τώρα, για να μιλήσουμε για την υπερβολική γεωμετρία εισάγουμε το μοντέλο του υπερβολοειδούς. Με αυτό τον τρόπο διαφαίνεται ότι, όπως η S^n επετεύχθη από τον $\mathbb{E}^{n+1}$, παρόμοια επιτυγχάνεται ο $\mathbb{H}^n$ από τον $\mathbb{E}^{n,1}$, όπου ο $\mathbb{E}^{n,1}$ συμβολίζει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ εφοδιασμένο με τη συμμετρική διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ η οποία συσχετίζει τα διανύσματα $u=(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ και $v=(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ με τον πραγματικό αριθμό $(u,v) = -u_{n+1}v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

Ορισμός 6.3.1

Έστω $v\in\mathbb{E}^{n,1}$. Το ***ορθογώνιο συμπλήρωμα*** του $v\in\mathbb{E}^{n,1}$ αναφορικά με τη διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ είναι ο ν–διάστατος διανυσματικός υπόχωρος $v^{\perp}\subseteq \mathbb{E}^{n,1}$ που αποτελείται από τα διανύσματα u τέτοια ώστε $(u,v)=0$, δηλαδή είναι:

$$v^{\perp}=\{u\in\mathbb{R}^{n+1}: (u,v)=0\}.$$

Παρατήρηση

Αν $(v,v)<0$, τότε ο περιορισμός της παραπάνω τετραγωνικής μορφής στον $v^{\perp}$ είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 6.3.2 (Ο Υπερβολικός n–χώρος $\mathbb{H}^n$)

Ο ***(πραγματικός) υπερβολικός n–χώρος*** $\mathbb{H}^n$ είναι το σύνολο

$$\mathbb{H}^n=\{u=(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})\in\mathbb{E}^{n,1}: (u,u)=-1,\ u_{n+1}>0\}$$

με άλλα λόγια, ο $\mathbb{H}^n$ είναι το πάνω φύλλο του υπερβολοειδούς

$$\{u=(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})\in\mathbb{E}^{n,1}: (u,u)=-1\}.$$

Παρατηρήσεις

[1] Αν $u\in\mathbb{H}^n$, τότε $u_{n+1}\geq 1$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $u_i=0$ για όλα τα $i=1, 2, \ldots, n$ αφού $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2-u_{n+1}^2=-1 \Leftrightarrow u_{n+1}^2=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2+1\geq 1$.

[2] Αν $u, v\in\mathbb{H}^n$, τότε $(u,v)\leq -1$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $u=v$.

Πράγματι,

$$(u,v)=\left(\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right)-u_{n+1}v_{n+1}\le\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}-u_{n+1}v_{n+1}=$$

$$=\left(u_{n+1}^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(v_{n+1}^2-1\right)^{\frac{1}{2}}-u_{n+1}v_{n+1}.$$

Η τελευταία έκφραση είναι ≤ -1 για οποιουσδήποτε αριθμούς u_{n+1}, $v_{n+1}\ge 1$ (παρατήρηση [1]) με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $u_{n+1}=v_{n+1}$.

[3] Άμεση συνέπεια της παρατήρησης [2] είναι ότι

$$(u-v,u-v)\ge 0,\ \text{για όλα τα } u,\ v\in IH^n$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $u=v$.

Πράγματι·

$$(u-v,u-v)=(u,u)+(v,v)-2(u,v)=-1-1-2(u,v)=-2-2(u,v)\ge 0$$

Ορισμός 6.3.3

Στον (πραγματικό) υπερβολικό n–χώρο IH^n, που όπως αναφέραμε είναι το σύνολο

$$IH^n=\{u=(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1})\in IE^{n,1}:\ (u,u)=-1,\ u_{n+1}>0\}$$

ορίζουμε την $d:IH^n\times IH^n\to IR$ η οποία σε κάθε ζεύγος $(A,B)\in IH^n\times IH^n$ αντιστοιχίζει τον μοναδικό μη αρνητικό αριθμό $d(A,B)\ge 0$ τέτοιο ώστε:

$$\cosh d(A,B)=-(A,B).$$

Στη συνέχεια βέβαια θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι μία μετρική, πρωτίστως όμως θα εισάγουμε τις πρωταρχικές έννοιες του τμήματος, της γωνίας και του τριγώνου στον IH^n.

Ορισμός 6.3.4 (Υπερβολικό τμήμα)

Έστω, λοιπόν, $A\in IH^n$ και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u\in A^\perp\subseteq IE^{n,1}$, δηλαδή ένα μοναδιαίο διάνυσμα $u\in IR^{n,1}$ τέτοιο ώστε $(u,u)=1$ και $(A,u)=0$. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$c:IR\to IH^n$$

που ορίζεται ως:

$$c(t)=(\cosh t)A+(\sinh t)u.$$

Εφόσον είναι $c(0)=A\in IH^n$, και επειδή

$$\begin{aligned}\big(c(t),c(t)\big) &= \big((\cosh t)A+(\sinh t)u,(\cosh t)A+(\sinh t)u\big)=\\ &=\cosh^2 t(A,A)+2\cosh t\sinh t(A,u)+\sinh^2 t(u,u)=\\ &=\sinh^2 t-\cosh^2 t=\\ &=-1\end{aligned}$$

είναι $c(t)\in \mathbb{H}^n$, για όλα τα $t\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι το $c(\mathbb{R})$ είναι η τομή του $\mathbb{H}^n$ με τον διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n,1}$ που παράγεται από το A και το u.

Ακόμα, είναι $d\big(c(t),c(t')\big)=|t-t'|$, για όλα τα t, $t'\in\mathbb{R}$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\cosh d\big(c(t),c(t')\big) &= -\big(c(t),c(t')\big)=-\big((\cosh t)A+(\sinh t)u,(\cosh t')A+(\sinh t')u\big)=\\ &=-\big(-\cosh t\cosh t'+\sinh t\sinh t'\big)=\\ &=\cosh t\cosh t'-\sinh t\sinh t'=\\ &=\cosh(t-t')\end{aligned}$$

και επομένως $d\big(c(t),c(t')\big)=|t-t'|$, για όλα τα t, $t'\in\mathbb{R}$.

Αν λοιπόν, δοθεί $\alpha\geq 0$, ορίζουμε την εικόνα του διαστήματος $[0,\alpha]$ μέσω της c να είναι το ***υπερβολικό τμήμα*** που ενώνει το A με το $c(\alpha)$ και το συμβολίζουμε με $[A,c(\alpha)]$. Έτσι, αν δοθεί $B\in\mathbb{H}^n$ διαφορετικό του A και αν $u\in A^{\perp}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{E}^{n,1}$ στην κατεύθυνση του $B+(A,B)A$, δηλαδή $u=\dfrac{B+(A,B)A}{\sqrt{(A,B)^2-1}}$, τότε το $u\in A^{\perp}$ είναι το μοναδικό μοναδιαίο διάνυσμα για το οποίο ισχύει $B=(\cosh\alpha)A+(\sinh\alpha)u$, όπου $\alpha=d(A,B)$. Το u θα λέγεται ***αρχικό διάνυσμα*** του υπερβολικού τμήματος [A,B].

Ορισμός 6.3.5

Αν θεωρήσουμε δύο υπερβολικά τμήματα με κοινή αρχή ένα σημείο του $\mathbb{H}^n$ και αρχικά διανύσματα έστω u, v, ορίζουμε ως ***υπερβολική γωνία*** αυτών των δύο υπερβολικών τμημάτων το μοναδικό πραγματικό αριθμό $\alpha\in[0,\pi]$ τέτοιο ώστε:

$$\cos\alpha=(u,v).$$

Παρατήρηση

Η υπερβολική γωνία είναι καλώς ορισμένη, αφού u, $v\in A^{\perp}$ και από την παρατήρηση στον ορισμό 6.3.1, η συμμετρική διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ περιορισμένη στον $A^{\perp}$ είναι

εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 6.3.6

Ένα ***υπερβολικό τρίγωνο*** Δ στον $\mathbb{H}^n$ αποτελείται από τρία διαφορετικά σημεία A, B, C$\in\mathbb{H}^n$ (οι ***κορυφές*** του Δ) και από τρία υπερβολικά τμήματα που καθένα ενώνει ένα ζεύγος κορυφών (οι ***πλευρές*** του Δ).

Ορισμός 6.3.7

Η ***γωνία κορυφής*** στο C ενός υπερβολικού τριγώνου με κορυφές τα A, B, C ορίζουμε να είναι η υπερβολική γωνία ανάμεσα στα υπερβολικά τμήματα [C,A] και [C,B].

Πρόταση 6.3.8 (Ο νόμος των συνημίτονων στον $\mathbb{H}^n$)

Έστω Δ ένα υπερβολικό τρίγωνο στον $\mathbb{H}^n$ με κορυφές A, B και C. Έστω a=d(B,C), b=d(C,A) και c=d(A,B) και έστω ότι το γ συμβολίζει τη γωνία κορυφής του Δ στο C. Τότε είναι:

$$\cosh c=\cosh a\cdot\cosh b-\sinh a\cdot\sinh b\cdot\cos\gamma.$$

Απόδειξη

Έστω u και v τα αρχικά διανύσματα των υπερβολικών τμημάτων [C,B] και [C,A], αντίστοιχα. Από τον ορισμό 6.3.5 είναι:

$$\cos\gamma=(u,v),$$

επομένως, αφού

$A = c_{C,A}(b) = (\cosh b)C + (\sinh b)u$ και $B = c'_{C,B}(a) = (\cosh a)C + (\sinh a)v$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\cosh c = \cosh d(A,B) = -(A,B) = \\
&-\big((\cosh b)C + (\sinh b)u, (\cosh a)C + (\sinh a)v\big) = \\
&-\cosh a\cosh b(C,C) - \cosh b\sinh a(C,v) - \sinh b\cosh a(u,C) - \sinh a\sinh b(u,v) = \\
&\cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Πρόταση 6.3.9 (Τριγωνική Ανισότητα στον $\mathbb{H}^n$)

Για όλα τα A, B, C$\in\mathbb{H}^n$ είναι:

$$d(A,B)\le d(A,C)+d(C,B),$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το C κείται επί του υπερβολικού τμήματος που ενώνει το A με το B.

Απόδειξη

Έστω a=d(C,B), b=d(A,C) και c=d(A,B). Υποθέτουμε ότι τα A, B και C είναι

διαφορετικά (στην περίπτωση που τα A, B και C δεν είναι διαφορετικά, η απόδειξη είναι τετριμμένη). Έστω Δ το υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές τα A, B και C και γ η γωνία κορυφής του στο C. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι αυστηρά φθίνουσα στο [0,π], έτσι για σταθερά a και b, η συνάρτηση

$$\gamma \mapsto \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma$$

αυξάνεται από cosh(b−a) έως cosh(b+a), καθώς το γ αυξάνει από 0 έως π. Από το νόμο των συνημίτονων όμως είναι:

$$\cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma = \cosh c$$

επομένως

$$\cosh c \leq \cosh(b+a).$$

Είναι λοιπόν

$$c \leq b+a$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν γ=π.

Δηλαδή,

$$d(A,B) \leq d(A,C)+d(C,B)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το C κείται επί του υπερβολικού τμήματος που ενώνει το A με το B.

Πρόταση 6.3.10 (Ορισμός της μετρικής)

Έστω $d: \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ η οποία σε κάθε ζεύγος $(A,B) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ αντιστοιχίζει τον μοναδικό μη αρνητικό αριθμό $d(A,B) \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\cosh d(A,B) = -(A,B).$$

Τότε η d είναι μία μετρική.

Απόδειξη

Προφανώς $d(A,B)=d(B,A) \geq 0$, αφού

$\cosh d(A,B) = \cosh(B,A) = -(A,B) \geq 1 = \cosh 0$ (από την παρατήρηση [2] του ορισμού 8.3.2) και

$d(A,B)=0$ αν και μόνο αν $A=B$, αφού

$A=B \Leftrightarrow (A,B)=-1 \Leftrightarrow -(A,B)=1 \Leftrightarrow \cosh d(A,B)=1 \Leftrightarrow d(A,B)=0$.

Η τριγωνική ανισότητα $d(A,B) \leq d(A,C)+d(C,B)$ ισχύει λόγω της προηγούμενης πρότασης 6.3.9. Επομένως η d είναι μία μετρική και ο $(\mathbb{H}^n,d)$ είναι μετρικός χώρος.

Πρόταση 6.3.11

Ο $(\mathbb{H}^n,d)$ είναι μοναδικά γεωδαισιακός μετρικός χώρος.

Απόδειξη

Εφόσον για κάθε δύο σημεία Α, $B\in\mathbb{H}^n$ υπάρχει ένα γεωδαισιακό τμήμα που τα ενώνει και μάλιστα αυτό είναι το υπερβολικό τμήμα που ενώνει το Α με το Β όπως το περιγράψαμε στον ορισμό 6.3.4, ο $(\mathbb{H}^n,d)$ είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ο $(\mathbb{H}^n,d)$ είναι μοναδικά γεωδαισιακός μετρικός χώρος ή ότι αν Α, $B\in\mathbb{H}^n$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που τα ενώνει. Ένα τέτοιο γεωδαισιακό τμήμα είναι το υπερβολικό τμήμα που ενώνει το Α με το Β, δηλαδή η τομή του $\mathbb{H}^n$ με τον διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n,1}$ που παράγεται από τα Α και Β και επομένως αποτελείται από τα σημεία της μορφής $\lambda A+\mu B$ με $\lambda+\mu\le 1$ και $\lambda, \mu\ge 0$. Πράγματι· αν Α, Β, $C\in\mathbb{H}^n$ και $C=\lambda A+\mu B$ με $\lambda, \mu>0$, τότε έχουμε

$$-1=\|C\|=\|\lambda A+\mu B\|\le\lambda\|A\|+\mu\|B\|=-\lambda-\mu.$$

Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι αυτό είναι το μόνο γεωδαισιακό τμήμα που ενώνει τα Α και Β. Λόγω όμως της πρότασης 5.1.13, αρκεί να δείξουμε ότι η μοναδιαία κλειστή μπάλα στον $\mathbb{H}^n$ είναι αυστηρά κυρτή.

Έστω λοιπόν ότι τα Α και Β βρίσκονται στη κλειστή μπάλα $\overline{B}(P,r)\subseteq\mathbb{H}^n$ ακτίνας r γύρω από το Ρ. Εξ' ορισμού, είναι:

$$C\in\overline{B}(P,r)\Leftrightarrow d(C,P)\le r\Leftrightarrow\cosh d(C,P)\le\cosh r\Leftrightarrow-(C,P)\le\cosh r\Leftrightarrow$$
$$(C,P)\ge-\cosh r$$

Αλλά αν θεωρήσουμε $\lambda, \mu\ge 0$ με $\lambda+\mu\le 1$, τότε

$$(\lambda A+\mu B,P)=\lambda(A,P)+\mu(B,P)\ge-(\lambda+\mu)\cosh r\ge-\cosh r,$$

επομένως το υπερβολικό τμήμα που ενώνει το Α με το Β περιέχεται στην $\overline{B}(P,r)$ (η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για τα σημεία Α και Β), άρα η $\overline{B}(P,r)$ είναι αυστηρά κυρτή και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ορισμός 6.3.12 (Υπερεπίπεδα στον $\mathbb{H}^n$)

Ένα ***υπερεπίπεδο*** Η στον $\mathbb{H}^n$ είναι η τομή του $\mathbb{H}^n$ με ένα ν–διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n,1}$.

Παρατήρηση

Το Η με την επαγόμενη μετρική από τον $\mathbb{H}^n$ είναι ισομετρικό με τον $\mathbb{H}^{n-1}$.

Αν A, B είναι δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{H}^n$, τότε το σύνολο των σημείων του $\mathbb{H}^n$ τα οποία ισαπέχουν από τα A και B είναι ένα υπερεπίπεδο το οποίο καλούμε ***υπερεπίπεδο διχοτόμος*** για τα A και B, είναι δε η τομή του $\mathbb{H}^n$ με το διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{E}^{n,1}$ που είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανύσματος A–B, δηλαδή με τον $(A-B)^{\perp}$.

Ορισμός 6.3.13

Συμμετρία ή ***ανάκλαση*** r_H ως προς H, ορίζεται να είναι η ισομετρία του $\mathbb{H}^n$, η οποία δίνεται από την

$$X \mapsto X-2(X,u)u, \text{ για κάθε } X \in \mathbb{H}^n$$

όπου u είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορθογώνιο προς το διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το H. Το σύνολο των σταθερών σημείων της r_H είναι το H.

Αν το $A \in \mathbb{H}^n$ και δεν ανήκει στο H, τότε το H είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος για το A και το $r_H(A)$. Αντιστρόφως, αν το H είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος για τα A και B, τότε $r_H(A)=B$.

Πρόταση 6.3.14

Η υπερβολική (αντίστοιχα σφαιρική) γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων [C,A] και [C,B] στον $\mathbb{H}^n$ (αντίστοιχα στην S^n) είναι ίση με τη γωνία Alexandrov μεταξύ αυτών των γεωδαισιακών τμημάτων.

Απόδειξη

Έστω a=d(A,C), b=d(B,C) και γ η υπερβολική γωνία ανάμεσα στα υπερβολικά τμήματα [C,A] και [C,B]. Αν πάρουμε τους αριθμούς s, t με $0<s\le a$ και $0<t\le b$ θεωρούμε τα σημεία $A_s \in [C,A]$ και $B_t \in [C,B]$ τα οποία είναι σε απόσταση s και t από το C αντίστοιχα. Έστω $c_{s,t}=d(A_s,B_t)$ και έστω $\gamma_{s,t}$ η γωνία της κορυφής $\overline{C}$ στο τρίγωνο σύγκρισης $\overline{\Delta}(A_s,B_t,C) \subseteq \mathbb{E}^2$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\gamma_{s,t} \to \gamma$ καθώς s, $t \to 0_+$.

Ο Ευκλείδειος νόμος των συνημιτόνων γράφεται:

$$c_{s,t}^2 = s^2 + t^2 - 2st\cos\gamma_{s,t} \Leftrightarrow \cos\gamma_{s,t} = \frac{s^2+t^2-c_{s,t}^2}{2st}$$

ενώ ο υπερβολικός νόμος των συνημιτόνων συνδέει το $c_{s,t}$ με τα s και t με τη σχέση:

$$\cosh c_{s,t} = \cosh s \cdot \cosh t - \sinh s \cdot \sinh t \cdot \cos\gamma . \qquad (6.3.14.1)$$

Όμως η αντίστροφη συνάρτηση της $\cosh/_{[0,\infty]}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0, οπότε η συμπεριφορά του

$$\cos\gamma_{s,t} = \frac{s^2 + t^2 - c_{s,t}^2}{2st}$$

δεν σταχυολογείται άμεσα από τη σχέση (6.3.14.1). Για να παρακάμψουμε, επομένως, τη δυσκολία αυτή, εισάγουμε μια λεία συνάρτηση

$$h:IR \to IR$$

που δίνεται από τη δυναμοσειρά

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n \ .$$

Αυτή η δυναμοσειρά συγκλίνει στο IR και σχετίζεται με το coshx με τη σχέση:

$$h(x^2) = \cosh x - 1 \qquad (6.3.14.2)$$

Εφόσον h(0)=0 και $h'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη σε μια γειτονιά του 0 και αυτή η «τοπική» αντίστροφος δίνεται από μια δυναμοσειρά της μορφής

$$h^{-1}(x) = 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n x^n \ . \qquad (6.3.14.3)$$

Η σχέση (6.3.14.2) τώρα με τη βοήθεια της (6.3.14.1) δίνει:

$$\begin{aligned} h(c_{s,t}^2) &= \cosh c_{s,t} - 1 = \\ &= \cosh s \cosh t - \sinh s \sinh t \cos\gamma - 1 = \\ &= (\cosh s - 1)\cosh t + (\cosh t - 1) - \sinh s \sinh t \cos\gamma = \\ &= h(s^2)\cosh t + h(t^2) - \sinh s \sinh t \cos\gamma \end{aligned}$$

Αυτή η τελευταία έκφραση ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $g:IR^2 \to IR$ με $g(s,t) = h(c_{s,t}^2)$, για την οποία ισχύουν οι ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

[1] g(0,0)=0

[2] $g(s,0)=h(s^2)$

[3] $g(0,t)=h(t^2)$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά ως ακολούθως

$$g(s,t)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\cos\gamma \tag{6.3.14.4}$$

όπου παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του st σε αυτή την αναπαράσταση της g είναι ο $-\cos\gamma$ (για n=0). Η πρώτη από τις παραπάνω ιδιότητες έπεται ότι η σύνθεση

$$f:=h^{-1}\circ g$$

ορίζεται σε μια γειτονιά του $(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Επιπλέον f(0,0)=0 και για μικρά s και t ορίζεται σε ένα μικρό δίσκο γύρο από την αρχή, με

$$f(s,t)=\left(h^{-1}\circ g\right)(s,t)=h^{-1}(g(s,t))=\left(h^{-1}\circ h\right)\left(c_{s,t}^2\right)=c_{s,t}^2\,.$$

Σε αυτό το δίσκο η f έχει μια αναπαράσταση με μια απολύτως συγκλίνουσα δυναμοσειρά (ανάπτυγμα Taylor), την:

$$f(s,t)=\sum_{j=1}^{\infty}f_{j,0}s^j+\sum_{k=1}^{\infty}f_{0,k}t^k-st\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f_{j,k}s^{j-1}t^{k-1}\right). \tag{6.3.14.5}$$

Σε αυτή την έκφραση ο συντελεστής του st είναι το $-f_{1,1}$.

Η δεύτερη και τρίτη ιδιότητα της g που αναφέραμε πιο πάνω, έπονται ότι το πρώτο και το δεύτερο άθροισμα στην έκφραση (6.3.14.5) για την f είναι ίσα με s^2 και t^2 αντίστοιχα. Πράγματι·

$$s^2=\left(h^{-1}\circ h\right)(s^2)=h^{-1}\left(h(s^2)\right)=h^{-1}\left(g(s,0)\right)=f(s,0)=\sum_{j=1}^{\infty}f_{j,0}s^j$$

και

$$t^2=\left(h^{-1}\circ h\right)(t^2)=h^{-1}\left(h(t^2)\right)=h^{-1}\left(g(0,t)\right)=f(0,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{0,k}t^k$$

οπότε αν τα s και t είναι μικρά και θετικά, τότε

$$c_{s,t}^2=\left(h^{-1}\circ h\right)\left(c_{s,t}^2\right)=h^{-1}(g(s,t))=f(s,t)=s^2+t^2-st\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f_{j,k}s^{j-1}t^{k-1}\right)$$

και επομένως είναι:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f_{j,k}s^{j-1}t^{k-1}=\frac{s^2+t^2-c_{s,t}^2}{st}\,.$$

Τέλος, αν συνδυάσουμε την έκφραση της h^{-1} που έχουμε από την (6.3.14.3), δηλαδή ότι:

$$f(s,t)=h^{-1}\left(g(s,t)\right)=2g(s,t)+\sum_{i=2}^{\infty}\alpha_i\left(g(s,t)\right)^i$$

και το γεγονός ότι ο συντελεστής του st στην αναπαράσταση της g με δυναμοσειρά είναι ο –cosγ (από 6.3.14.4), έχουμε ότι:

$$f_{1,1}=2\cos\gamma$$

επομένως,

$$\cos\gamma_{s,t}=\frac{s^2+t^2-c_{s,t}^2}{2st}=\frac{st\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f_{j,k}s^{j-1}t^{k-1}}{2st}=\cos\gamma+\frac{1}{2}\sum_{k>1\ ή\ j>1}f_{j,k}s^{j-1}t^{k-1}\xrightarrow{t,s\to 0_+}\cos\gamma\,.$$

Παρατήρηση

Η παραπάνω απόδειξη δείχνει ότι η γωνία μεταξύ δύο γεωδαισιακών τμημάτων με κοινή αρχή στον IH^n (αντίστοιχα στην S^n) υπάρχει με την αυστηρή έννοια, όπως ακριβώς ορίζεται στον ορισμό 5.2.3.

6.4. Οι Χώροι M_κ^n

Ορισμός 6.4.1

Αν κ πραγματικός αριθμός, συμβολίζουμε με M_κ^n τους ακόλουθους μετρικούς χώρους:

[1] αν κ=0, τότε M_0^n είναι ο Ευκλείδειος χώρος IE^n.

[2] αν κ>0, τότε M_κ^n είναι ο χώρος που επιτυγχάνεται από τη σφαίρα S^n πολλαπλασιάζοντας τη συνάρτηση της απόστασης με τη σταθερά $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$

[3] αν κ<0, τότε M_κ^n είναι ο χώρος που επιτυγχάνεται από τον υπερβολικό χώρο IH^n πολλαπλασιάζοντας τη συνάρτηση της απόστασης με τη σταθερά $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$.

Η επόμενη πρόταση είναι μια άμεση συνέπεια όλων των προηγούμενων αποτελεσμάτων:

Πρόταση 6.4.2

Ο M_κ^n είναι ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος. Αν κ≤0, τότε ο M_κ^n είναι

μοναδικά γεωδαισιακός και όλες οι μπάλες στον M_κ^n είναι κυρτές. Αν κ>0, τότε υπάρχει ένα μοναδικό γεωδαισιακό μονοπάτι του ενώνει τα x, $y\in M_\kappa^n$ αν και μόνο αν $d(x,y)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Επιπλέον, αν κ>0, οι κλειστές μπάλες στον M_κ^n με ακτίνα μικρότερη του $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ είναι αυστηρά κυρτές.

Παρατήρηση

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι η σταθερή ποσότητα $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ παίζει καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των χώρων M_κ^n, εξ ου, και ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 6.4.3

Αν κ πραγματικός αριθμός, θα συμβολίζουμε με D_κ τη *διάμετρο* του χώρου M_κ^n. Ειδικότερα, $D_\kappa=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ για κ>0 και $D_\kappa:=\infty$ για κ≤0.

Πρόταση 6.4.4 (Ο νόμος των συνημιτόνων στον M_κ^n)

Έστω Δ ένα γεωδαισιακό τρίγωνο στον M_κ^n με κορυφές τα A, B, C. Έστω a=d(C,B), b=d(A,C), c=d(A,B) και γ η γωνία κορυφής του Δ στο C. Τότε:

[1] αν κ=0, είναι:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

[2] αν κ<0, είναι:

$$\cosh\left(\sqrt{-\kappa}c\right)=\cosh\left(\sqrt{-\kappa}a\right)\cosh\left(\sqrt{-\kappa}b\right)-\sinh\left(\sqrt{-\kappa}a\right)\sinh\left(\sqrt{-\kappa}b\right)\cos\gamma$$

[3] αν κ>0, είναι:

$$\cos\left(\sqrt{\kappa}c\right)=\cos\left(\sqrt{\kappa}a\right)\cos\left(\sqrt{\kappa}b\right)+\sin\left(\sqrt{\kappa}a\right)\sin\left(\sqrt{\kappa}b\right)\cos\gamma.$$

Παρατηρήσεις

[1] Αν σταθεροποιήσουμε τα a, b και κ, το c είναι μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση του γ και παίρνει τιμές από |a−b| έως και a+b καθώς το γ μεταβάλλεται από 0 έως π.

[2] Είναι φανερό ότι μπορούμε να μεταβούμε στο νόμο των συνημιτόνων για κ<0 από την περίπτωση που το κ>0, αν θέσουμε όπου $\sqrt{\kappa}$ το $i\sqrt{\kappa}=\sqrt{-\kappa}$, καθώς για

οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό t ισχύει: cos(it)=cosht και sin(it)=isinht.

Στην ενότητα 5.2 εισαγάγαμε την έννοια του τριγώνου σύγκρισης ώστε να μπορούμε να «συγκρίνουμε» τριάδες σημείων ενός τυχαίου μετρικού χώρου με αντίστοιχες τριάδες σημείων στο Ευκλείδειο επίπεδο. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να συγκρίνουμε τον τυχαίο μετρικό χώρο όχι μόνο με το Ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{E}^2$ –που είναι ουσιαστικά ο χώρος μοντέλο M_0^2 – αλλά και με τους χώρους μοντέλα M_κ^2, για κ≠0. Για το λόγο αυτό επεκτείνουμε τους ορισμούς του τριγώνου σύγκρισης και της γωνίας σύγκρισης στον M_κ^2.

Ορισμός 6.4.5

Έστω κ ένας πραγματικός αριθμός και έστω p, q, r τρία διαφορετικά σημεία ενός τυχαίου μετρικού χώρου X, τέτοια ώστε d(p,q)+d(q,r)+d(r,p)<2D_κ. Τότε:

[1] ένα *(κ) τρίγωνο σύγκρισης* για τη τριάδα σημείων (p, q, r) στον X είναι ένα γεωδαισιακό τρίγωνο $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r}) \subseteq M_\kappa^2$ με κορυφές τα $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r} \in M_\kappa^2$ και πλευρές τα γεωδαισιακά τμήματα $[\overline{p},\overline{q}]$, $[\overline{q},\overline{r}]$ και $[\overline{r},\overline{p}] \subseteq M_\kappa^2$ έτσι ώστε $d(p,q) = d(\overline{p},\overline{q})$, $d(q,r) = d(\overline{q},\overline{r})$ και $d(r,p) = d(\overline{r},\overline{p})$.

[2] αν το Δ⊆X είναι ένα γεωδαισιακό τρίγωνο με κορυφές τα p, q, r, τότε το $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r})$ καλείται επίσης τρίγωνο σύγκρισης για το Δ.

[3] η *(κ) γωνία σύγκρισης* μεταξύ των q και r στο p συμβολίζεται με $\angle_p^{(\kappa)}(q,r)$ και είναι η γωνία κορυφής στο $\overline{p}$ σε ένα τρίγωνο σύγκρισης $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r}) \subseteq M_\kappa^2$. Ειδικότερα, $\angle_p^{(0)}(q,r) = \overline{\angle}_p(q,r)$.

Πρόταση 6.4.6 (Ύπαρξη τριγώνων σύγκρισης στον M_κ^n)

Αν κ ένας πραγματικός αριθμός και p, q, r τρία διαφορετικά σημεία ενός τυχαίου μετρικού χώρου X, τέτοια ώστε d(p,q)+d(q,r)+d(r,p)<2D_κ, τότε υπάρχει ένα τρίγωνο σύγκρισης $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r}) \subseteq M_\kappa^2$. Το τρίγωνο αυτό είναι μοναδικό (σε επίπεδο ισομετρίας του M_κ^2).

Απόδειξη

Έστω a=d(p,q), b=d(p,r) και c=d(q,r). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε

να υποθέσουμε ότι a≤b≤c. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$c \le a+b. \qquad (6.4.6.1)$$

Έτσι, αν κ>0 τότε $c < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, αφού

$$a+b+c < 2D_\kappa \Leftrightarrow a+b+c < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

και λόγω της (6.4.6.1) είναι

$$c \le a+b < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} - c \Leftrightarrow 2c < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow c < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, από το νόμο των συνημιτόνων για τον M_κ^2 μπορούμε να βρούμε μοναδικό $\gamma \in [0,\pi]$ που να τον επαληθεύει. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $\overline{p} \in M_\kappa^2$ και κατασκευάζουμε δύο γεωδαισιακά τμήματα $[\overline{p},\overline{q}]$ και $[\overline{p},\overline{r}]$ με μήκη a και b αντίστοιχα τα οποία σχηματίζουν γωνία γ. Η κατασκευή αυτή γίνεται σε δύο στάδια. Αφού έχουμε σταθεροποιήσει τα $\overline{p},\overline{q} \in M_\kappa^2$, έτσι ώστε $d(\overline{p},\overline{q}) = a$, θεωρούμε μια γεωδαισιακή c με αρχή $\overline{p}$, ώστε $\overline{\angle}_p(c,[\overline{p},\overline{q}]) = \gamma$ και παίρνουμε $\overline{r}$ να είναι το μοναδικό σημείο στην c τέτοιο ώστε $d(\overline{p},\overline{r}) = b$. Από το νόμο των συνημιτόνων, άμεσα έπεται ότι $d(\overline{q},\overline{r}) = c$. Επομένως, για οποιαδήποτε τρία διαφορετικά σημεία p, q, r ενός τυχαίου μετρικού χώρου X με $d(p,q)+d(q,r)+d(r,p)<2D_\kappa$, υπάρχει ένα τρίγωνο σύγκρισης $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r}) \subseteq M_\kappa^2$. Η μοναδικότητα προκύπτει άμεσα από τον τρόπο κατασκευής ενώ κάθε άλλο τρίγωνο σύγκρισης είναι η εικόνα του $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r}) \subseteq M_\kappa^2$ μέσω μιας ισομετρίας του M_κ^n.

Παρατήρηση

Από την παραπάνω πρόταση σε συνδυασμό με την πρόταση 6.3.14, ο ορισμός της γωνίας κατά Alexandrov μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

Έστω X ένας μετρικός χώρος και p, q, r τρία διαφορετικά σημεία του X, τέτοια ώστε $d(p,q)+d(q,r)+d(r,p)<2D_\kappa$. Έστω c και c΄τα γεωδαισιακά μονοπάτια που ενώνουν το p με το q και το p με το r αντίστοιχα. Αν $\Delta(\overline{p},\overline{q},\overline{r}) \subseteq M_\kappa^2$ είναι το (κ) τρίγωνο σύγκρισης και $\angle_p^{(\kappa)}(q,r)$ η γωνία σύγκρισης, δηλαδή, η γωνία κορυφής στο $\overline{p}$, τότε η γωνία Alexandrov ή άνω γωνία μεταξύ των μονοπατιών c και c΄ είναι ο

αριθμός $\angle(c,c')\in[0,\pi]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\angle(c,c') := \limsup_{t,t'\to 0} \angle_p^{(\kappa)}\left(c(t),c'(t')\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0<t,t'<\varepsilon} \angle_p^{(\kappa)}\left(c(t),c'(t')\right).$$

Ορισμός 6.4.7

Αν δοθούν δύο διαφορετικά σημεία x, y$\in M_\kappa^2$, με d(x,y)<D_κ, τότε υπάρχει μια μοναδική (σε επίπεδο αναπαραμέτρησης) τοπικά γεωδαισιακή ευθεία $\mathbb{R}\to M_\kappa^2$ (ορισμός 7.1.9) που διέρχεται από τα x και y. Η εικόνα αυτής της ευθείας χωρίζει τον M_κ^2 σε δύο ***ημίχωρους***. Δύο σημεία z, w$\in M_\kappa^2$ θα λέμε ότι είναι ***εκατέρωθεν*** μιας ευθείας αν είναι σε διαφορετικούς ημίχωρους του συμπληρώματος της ευθείας.

Λήμμα 6.4.8 (Λήμμα του Alexandrov)

Θεωρούμε τέσσερα διαφορετικά σημεία του M_κ^2, έστω τα A, B, B΄ και C. Αν κ>0 επιπλέον υποθέτουμε ότι d(C,B)+d(C,B΄)+d(A,B)+d(A,B΄)<2D_κ. Υποθέτουμε ότι τα B και B΄ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας που ενώνει το A και το C. Θεωρούμε τα γεωδαισιακά τρίγωνα Δ=Δ(A,B,C) και Δ΄=Δ(A,B΄,C). Έστω α, β, γ (αντίστοιχα α΄, β΄, γ΄) οι γωνίες του Δ (αντίστοιχα του Δ΄) στις κορυφές A, B, C (αντίστοιχα στις κορυφές A, B΄, C). Υποθέτουμε ότι γ+γ΄≥π. Τότε:

[1] d(B,C)+d(B΄,C)≤d(B,A)+d(B΄,A)

Έστω $\bar{\Delta}$ ένα τρίγωνο στον M_κ^2 με κορυφές τα $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{B}'$ έτσι ώστε

$$d(\bar{A},\bar{B}) = d(A,B),\ d(\bar{A},\bar{B}') = d(A,B') \text{ και } d(\bar{B},\bar{B}') = d(B,C)+d(C,B') < D_\kappa .$$

Έστω $\bar{C}$ το σημείο του $[\bar{B},\bar{B}']$ με $d(\bar{B},\bar{C}) = d(B,C)$. Έστω $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}'$ οι γωνίες του $\bar{\Delta}$ στις κορυφές $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{B}'$ αντίστοιχα. Τότε:

[2] $\bar{\alpha}\ge\alpha+\alpha'$, $\bar{\beta}\ge\beta$, $\bar{\beta}'\ge\beta'$ και $d(A,C)\le d(\bar{A},\bar{C})$ με οποιαδήποτε από αυτές τις ισότητες να συνεπάγεται τις υπόλοιπες και να ισχύει αν και μόνο αν γ+γ΄=π.

Απόδειξη

Έστω $\tilde{B}'\in M_\kappa^2$ το μοναδικό σημείο του M_κ^2 για το οποίο ισχύει $d(\tilde{B}',C) = d(B',C)$ και το C να ανήκει στο $[\tilde{B}',B]$.

Εφόσον είναι γ+γ΄≥π, η γωνία στο C ανάμεσα στα [C,A] και $[C,\tilde{B}']$ δεν είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ανάμεσα στα [C,A] και [C,B΄], δηλαδή

$$\angle_C\left([C,A],[C,\tilde{B}']\right) \le \gamma' = \angle_C\left([C,A],[C,B']\right),$$

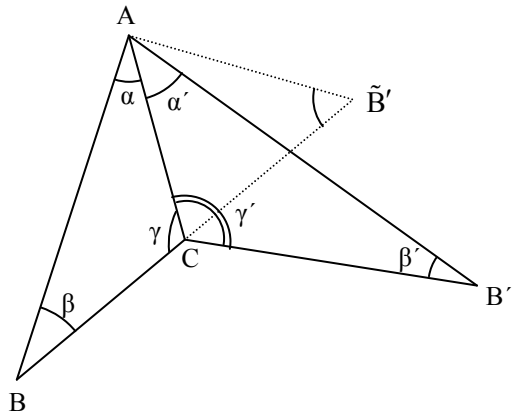
επομένως από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$d(\tilde{B}',A) \le d(B',A)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν γ+γ΄=π και άρα

$$\begin{aligned} d(B,A)+d(B',A) \ge d(B,A)+d(\tilde{B}',A) \ge d(B,\tilde{B}') = \\ = d(B,C)+d(C,\tilde{B}) = \\ = d(B,C)+d(C,B') \end{aligned}$$

γεγονός που αποδεικνύει το πρώτο σκέλος του λήμματος.



Αφού έχουμε ότι $d(\bar{A},\bar{B}') = d(A,B')$ και χρησιμοποιώντας το [1] του λήμματος παίρνουμε

$$d(\bar{A},\bar{B}') \ge d(A,\tilde{B}'). \qquad (6.4.8.1)$$

Επιπλέον, από την τριγωνική ανισότητα είναι

$$d(\bar{B},\bar{B}') = d(B,C)+d(C,B') \ge d(B,B') \qquad (6.4.8.2)$$

Σε κάθε περίπτωση η ισότητα ισχύει αν C∈[B,B΄], δηλαδή αν γ+γ΄=π. Εφαρμόζοντας, τώρα, το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\bar{\Delta}$ και Δ(A,B,B΄) και λόγω της (6.4.8.2) παίρνουμε $\bar{\alpha} \ge \alpha + \alpha'$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν γ+γ΄=π. Αν εφαρμόσουμε το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\bar{\Delta}$ και $\Delta(A,B,\tilde{B}')$, μαζί με την (6.4.8.1) και την $d(\bar{B},\bar{B}') = d(B,\tilde{B}')$ παίρνουμε $\bar{\beta} \ge \beta$, με την ισότητα πάλι να ισχύει αν και μόνο αν γ+γ΄=π. Εναλλάσσοντας, τώρα, τη θέση των β και β΄ παίρνουμε $\bar{\beta}' \ge \beta'$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν γ+γ΄=π. Τέλος, εφόσον

$d(\overline{A},\overline{B}') = d(A,B')$, $d(\overline{C},\overline{B}') = d(C,B')$ και $\overline{\beta}' \geq \beta'$, εφαρμόζοντας άλλη μία φορά το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\overline{\Delta}$ και Δ(A,C,B΄)έχουμε $d(A,C) \leq d(\overline{A},\overline{C})$ πάλι με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν γ+γ΄=π.

Παρατήρηση

Όλες οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αν και μόνο αν γ+γ΄=π, δηλαδή αν και μόνο αν το $\overline{\Delta}$ είναι ισομετρικό με την ένωση των Δ και Δ΄, αν «σβήσουμε» την κοινή πλευρά [A,C].

6.5. Οι ομάδες ισομετρίας $\mathbf{Isom(M_\kappa^n)}$

Πολύ καθοριστικό ρόλο στη γεωμετρία των χώρων M_κ^n αποτελούν οι ομάδες των ισομετριών των χώρων αυτών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια κάθε μία από αυτές τις ομάδες γεννάται από συμμετρίες ως προς υπερεπίπεδα, ενώ η αμέσως επόμενη πρόταση δείχνει ότι η ομάδα των ισομετριών δρα μεταβατικά στον M_κ^n.

Πρόταση 6.5.1

Έστω ν θετικός ακέραιος και έστω 2ν σημεία του M_κ^n, τα A_1, A_2, …, A_ν και B_1, B_2, …, B_ν τέτοια ώστε $d(A_i,A_j)=d(B_i,B_j)$ για όλα τα i, $j\in\{1, 2, \ldots, \nu\}$. Τότε, υπάρχει μια ισομετρία που απεικονίζει το A_i στο B_i για όλα τα $i\in\{1, 2, \ldots, \nu\}$. Επιπλέον, αυτή η ισομετρία επιτυγχάνεται αν συνθέσουμε ν ή λιγότερες συμμετρίες ως προς υπερεπίπεδα.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση με τη βοήθεια της επαγωγής.

Η περίπτωση ν=0 δεν έχει νόημα, αλλά όπως έχουμε είδαμε στις ενότητες 6.1, 6.2 και 6.3 αν ν=1, δηλαδή αν δοθούν 2 σημεία τα A_1 και B_1 τότε υπάρχει μια ισομετρία, η συμμετρία ως προς το υπερεπίπεδο διχοτόμο των A_1 και B_1, η οποία απεικονίζει το A_1 στο B_1.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ισομετρία φ, τέτοια ώστε $\varphi(A_i)=B_i$ για όλα τα $i\in\{1, 2, \ldots, \nu-1\}$ και η φ είναι η σύνθεση ν−1 ή λιγότερων συμμετριών ως προς υπερεπίπεδα του M_κ^n. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

είτε $\varphi(A_\nu)=B_\nu$, οπότε η πρόταση αποδείχτηκε,

είτε $\varphi(A_\nu)\neq B_\nu$. Σε αυτή τη περίπτωση, αν συμβολίσουμε με Η το υπερεπίπεδο διχοτόμο των $\varphi(A_\nu)$ και B_ν, τότε r_H θα συμβολίζει την συμμετρία ως προς το Η. Όμως είναι

$$d(B_i,\varphi(A_\nu))=d(\varphi(A_i),\varphi(A_\nu))=d(A_i,A_\nu)=d(B_i,B_\nu)$$

επομένως $B_i\in H$, για όλα τα $i\in\{1, 2, \ldots, \nu-1\}$ και άρα η $r_H\circ\varphi$, η οποία είναι η σύνθεση ν το πολύ συμμετριών ως προς υπερεπίπεδα, απεικονίζει το A_i στο B_i για όλα τα $i\in\{1, 2, \ldots, \nu\}$ καθώς κρατά σταθερά όλα τα B_i για $i\in\{1, 2, \ldots, \nu-1\}$ και απεικονίζει το A_ν στο B_ν.

Παρατήρηση

Από την παραπάνω πρόταση άμεσα έπεται ότι η ομάδα των ισομετριών δρα μεταβατικά στον M^n_κ (αφού αν $\varphi_1(A_i)=B_i$ και $\varphi_2(B_i)=C_i$ για όλα τα $i\in\{1, 2, \ldots, \nu\}$ τότε $\varphi_2(\varphi_1(A_i))=C_i$).

Πρόταση 6.5.2

Έστω φ μια ισομετρία του M^n_κ.

[1] Αν η φ δεν είναι η ταυτοτική, τότε το σύνολο των σταθερών σημείων της περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο.

[2] Αν η φ δρα όπως η ταυτοτική σε ένα υπερεπίπεδο Η, τότε η φ είναι είτε η ταυτοτική είτε η συμμετρία r_H ως προς Η.

[3] Η φ μπορεί να γραφεί ως η σύνθεση n+1 ή λιγότερων συμμετριών ως προς υπερεπίπεδα του M^n_κ.

Απόδειξη

[1] Αν η φ δεν είναι η ταυτοτική, τότε υπάρχει ένα σημείο Α τέτοιο ώστε $\varphi(A)\neq A$. Αν Β είναι σταθερό σημείο της φ τότε $\varphi(B)=B$ και $d(A,B)=d(\varphi(A),\varphi(B))=d(\varphi(A),B)$. Επομένως, το σύνολο των σταθερών σημείων της φ ισαπέχει από τα Α και φ(Α) δηλαδή περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο Η το οποίο είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος των Α και φ(Α).

[2] Ας υποθέσουμε ότι η φ δρα ως ταυτοτική σε ένα υπερεπίπεδο Η. Αν η φ δρα ως ταυτοτική και για οποιοδήποτε άλλο σημείο του M^n_κ, τότε η φ είναι η ταυτοτική. Αν όμως δοθεί κάποιο σημείο Α για το οποίο ισχύει $\varphi(A)\neq A$, τότε από το [1] της ίδιας πρότασης, το Η θα περιέχεται στο υπερεπίπεδο διχοτόμο των Α και φ(Α). Αλλά,

κανένα υπερεπίπεδο δεν περιέχεται γνήσια σε οποιοδήποτε άλλο, επομένως το Η είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος των Α και φ(Α) και άρα $r_H(A)=\varphi(A)$. Όμως το Α ήταν ένα τυχαίο σημείο του M_κ^n, άρα $\varphi=r_H$.

[3] Σταθεροποιούμε μια συλλογή από n+1 σημεία τα οποία να μην ανήκουν σε κανένα υπερεπίπεδο. Αν φ ισομετρία, έστω ότι $B_0=\varphi(A_0)$, $B_1=\varphi(A_1)$, …, $B_n=\varphi(A_n)$. Από την πρόταση 6.5.1, υπάρχει μια ισομετρία φ΄ η οποία απεικονίζει το A_i στο B_i για όλα τα $i\in\{0, 1, \ldots, n\}$ και η οποία μπορεί να γραφεί ως σύνθεση n+1 το πολύ συμμετριών ως προς υπερεπίπεδα του M_κ^n. Όμως η ισομετρία $(\varphi')^{-1}\circ\varphi$ σταθεροποιεί καθένα από τα A_i, $i\in\{0, 1, \ldots, n\}$ (είναι $((\varphi')^{-1}\circ\varphi)(A_i)=(\varphi')^{-1}(\varphi(A_i))=(\varphi')^{-1}(B_i)=A_i$, $i\in\{0, 1, \ldots, n\}$) και αφού έχουμε υποθέσει ότι τα n+1 αυτά σημεία δεν ανήκουν σε κανένα υπερεπίπεδο, από το [1] της ίδιας πρότασης έπεται ότι η $(\varphi')^{-1}\circ\varphi$ είναι η ταυτοτική, επομένως $\varphi=\varphi'$. Άρα η φ γράφεται ως σύνθεση n+1 το πολύ συμμετριών ως προς υπερεπίπεδα του M_κ^n.

Στην πρόταση που προηγήθηκε θεωρήσαμε ένα σύνολο σημείων του M_κ^n τα οποία όμως δεν ανήκαν σε κανένα υπερεπίπεδο. Είναι φανερό πως τέτοια σύνολα υπάρχουν και για αυτά έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 6.5.3

Ένα σύνολο n+1 σημείων του M_κ^n λέγεται ότι είναι σε ***γενική θέση*** αν δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο.

Ορισμός 6.5.4

Στον M_κ^n θεωρούμε ένα ***υπερεπίπεδο βάση*** το οποίο συμβολίζουμε με H_0, ενώ προφανώς είναι $H_0\subset M_\kappa^n$. Ειδικότερα, στον $\mathbb{E}^n$ παίρνουμε ως $H_0=\{0\}\times\mathbb{E}^{n-1}$, στην S^n παίρνουμε ως $H_0=S^n\cap(\{0\}\times\mathbb{E}^n)$ ενώ στον $\mathbb{H}^n$ παίρνουμε ως $H_0=\mathbb{H}^n\cap(\{0\}\times\mathbb{E}^{n-1,1})$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει μια φυσική ταυτοποίηση του H_0 με τον M_κ^{n-1}.

Παρατήρηση

Κάθε υπερεπίπεδο H_0' του H_0 είναι η τομή του H_0 με κάποιο υπερεπίπεδο $H\neq H_0$ του M_κ^n και αντιστρόφως.

Πρόταση 6.5.5

Έστω S_1, S_2 υποσύνολα του M_κ^n και έστω $f:S_1 \to S_2$ μια ισομετρία. Τότε:

[1] υπάρχει $\psi \in \mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$ τέτοια ώστε $\psi/_{S_1} = f$

[2] ο περιορισμός της ψ στην τομή όλων των υπερεπιπέδων που περιέχουν το S_1 είναι μοναδικός.

Απόδειξη

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου $S_1=S_2=H$, όπου H είναι ένα υπερεπίπεδο. Επειδή κάθε υπερεπίπεδο είναι το υπερεπίπεδο διχοτόμος κάποιου ζεύγους σημείων, η δράση της $\mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$ προφανώς στέλνει τα υπερεπίπεδα σε υπερεπίπεδα. Από την παρατήρηση στην πρόταση 6.5.1 έπεται επίσης ότι η δράση της $\mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$ είναι μεταβατική, επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H=H_0$, όπου H_0 είναι το υπερεπίπεδο βάση του M_κ^n. Έστω $\Sigma \subset H_0 = M_\kappa^{n-1}$ ένα σύνολο n σημείων σε γενική θέση και έστω $f:H_0 \to H_0$ μια ισομετρία. Από την πρόταση 6.5.1 υπάρχει $\psi \in \mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$ τέτοια ώστε $\psi/_\Sigma = f/_\Sigma$ (είναι δηλαδή $\psi(A_i)=f(A_i)$, για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Ειδικότερα, το Σ περιέχεται στο υπερεπίπεδο $\psi^{-1}(H_0)$. Εφόσον το Σ έχει υποτεθεί ότι δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο του H_0, έπεται ότι $\psi^{-1}(H_0)=H_0$. Τα σταθερά σημεία της $\psi^{-1} \circ f \in \mathrm{Isom}(H_0)$ είναι τα σημεία του Σ και αφού αυτά δεν περιέχονται σε κανένα υπερεπίπεδο του H_0 από την πρόταση 6.5.2 για το $H_0 = M_\kappa^{n-1}$, έχουμε ότι $\psi^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{H_0}$, δηλαδή $f = \psi/_{H_0}$.

Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση όπου $f:S_1 \to S_2$ μια ισομετρία.

Αν τα S_1, S_2 περιέχονται στα υπερεπίπεδα H_1 και H_2 αντίστοιχα, τότε μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με τα $S_1' = \psi_1(S_1) \subset H_0$ και $S_2' = \psi_2(S_2) \subset H_0$, όπου ψ_1: $H_1 \to H_0$, ψ_2: $H_2 \to H_0$ ισομετρίες. Με επαγωγή στη διάσταση του M_κ^n (η περίπτωση n=1 είναι τετριμμένη) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οποιαδήποτε ισομετρία $S_1' \to S_2'$ είναι ο περιορισμός μιας ισομετρίας του H_0 και επομένως από το πρώτο βήμα της απόδειξης έπεται το συμπέρασμα.

Αν, τώρα, θεωρήσουμε ότι το S_1 δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο του M_κ^n, τότε κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $S_0 \subset S_1$ δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο

του M_κ^n. Από την πρόταση 6.5.1, υπάρχει ισομετρία $\psi_0 \in \mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$ τέτοια ώστε $\psi_0 /_{S_0} = f /_{S_0}$. Αν $\psi_0 /_{S_1} = f$ τότε ο ισχυρισμός [1] προφανώς ισχύει. Αν η $\psi_0 /_{S_1}$ δεν ισούται με την f τότε υπάρχει $x \in S_1$ τέτοιο ώστε $\psi_0(x) \neq f(x)$, οπότε από την πρόταση 6.5.1 υπάρχει ισομετρία $\psi_1 \in \mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$ τέτοια ώστε $\psi_1 /_{S_0} = f /_{S_0}$ και $\psi_1(x)=f(x)$, άτοπο διότι τότε θα υπάρχει μια ισομετρία –όχι η ταυτοτική– η $\psi_1^{-1} \circ \psi_0 \in \mathrm{Isom}(M_\kappa^n)$, η οποία σταθεροποιεί ένα σύνολο S_0 που δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την πρόταση 6.5.2. Επομένως είναι $\psi_0 /_{S_1} = f$ και το [1] της πρότασης αποδείχτηκε.

Για το [2], τώρα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοιες ισομετρίες ψ και ψ΄ ώστε $\psi /_{S_1} = \psi' /_{S_1} = f$. Τότε, η $\psi^{-1} \circ \psi'$ και η αντίστροφή της απεικονίζουν οποιοδήποτε υπερεπίπεδο που περιέχει το S_1 σε ένα άλλο υπερεπίπεδο που περιέχει το S_1 και επομένως περιορίζεται σε μια ισομετρία της τομής όλων αυτών των υπερεπιπέδων από το πρώτο βήμα της απόδειξης του [1]. Αν I είναι η τομή όλων των υπερεπιπέδων που περιέχουν το S_1 τότε λόγω της παρατήρησης στον ορισμό 6.5.4 και του [1] της ίδιας πρότασης έχουμε ότι το I είναι ισομετρικό με τον M_κ^m για κάποιο $m \leq n$. Αν όμως το S_1 περιέχετο σε κάποιο (m–1)–διάστατο υπερεπίπεδο $P \subset I$, τότε πάλι λόγω της παρατήρησης στον ορισμό 6.5.4 θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα υπερεπίπεδο H του M_κ^n τέτοιο ώστε $I \cap H = P$, άτοπο αφού η τομή όλων των υπερεπιπέδων που περιέχουν το S_1 είναι το I. Επομένως, το S_1 δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο του $I \cong M_\kappa^m$, άρα από την πρόταση 6.5.2 η $\psi^{-1} \circ \psi'$ είναι η ταυτοτική του I, δηλαδή $\psi /_I = \psi' /_I$.

Ορισμός 6.5.6

Έστω m, n μη αρνητικοί ακέραιοι με $m \leq n$. Ένα υποσύνολο $P \subset M_\kappa^n$ καλείται ***m–επίπεδο*** αν είναι ισομετρικό προς το M_κ^m.

Πόρισμα 6.5.7

Αν $m<n$ τότε κάθε m–επίπεδο στον M_κ^n είναι η τομή (n–m) υπερεπιπέδων. Κάθε υποσύνολο του M_κ^n περιέχεται σε ένα μοναδικό m–επίπεδο ελάχιστης διάστασης.

Απόδειξη

Σταθεροποιούμε ένα m<n. Τότε, σίγουρα υπάρχει ένα m−επίπεδο $P_0 \subset M_\kappa^n$ το οποίο είναι η τομή (n−m) υπερεπιπέδων. Από την προηγούμενη πρόταση 6.5.5, όμως, έχουμε ότι οποιοδήποτε άλλο m−επίπεδο είναι η εικόνα του P_0 μέσω μιας ισομετρίας του M_κ^n και οποιαδήποτε τέτοια ισομετρία απεικονίζει τα υπερεπίπεδα σε υπερεπίπεδα. Το μοναδικό m−επίπεδο ελάχιστης διάστασης που περιέχει το $S \subset M_\kappa^n$ είναι η τομή όλων των υπερεπιπέδων που περιέχουν το S.

Είμαστε τώρα σε θέση να περιγράψουμε αναλυτικά ολόκληρη την ομάδα των ισομετριών για τους χώρους $\mathbb{E}^n$, S^n και $\mathbb{H}^n$.

6.6. Ομάδα ισομετριών του $\mathbb{E}^n$

Έστω ότι $Is(\mathbb{E}^n)$ την ομάδα των συσχετισμένων ισομετριών του $\mathbb{E}^n$. Η υποομάδα της $Is(\mathbb{E}^n)$ που σταθεροποιεί την αρχή $0 \in \mathbb{E}^n$ είναι, όπως έχουμε δει, η υποομάδα $O(\mathbb{E}^n)$ της $GL(\mathbb{E}^n)$. Η $GL(\mathbb{E}^n)$ είναι ισόμορφη προς την $GL(n,\mathbb{R})$ και η $O(\mathbb{E}^n)$ είναι ισόμορφη προς την O(n), η οποία αποτελείται από τους πίνακες που διατηρούν την Ευκλείδεια νόρμα. Να υπενθυμίσουμε ότι η δράση της $GL(n,\mathbb{R})$ είναι η συνήθης γραμμική δράση, δηλαδή ένας πίνακας δρα ως

$$A(x)=(y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ όπου } y_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j \text{ , } i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Η δράση του A διατηρεί την Ευκλείδεια νόρμα αν και μόνο αν $A \in O(n)$, όπου O(n) συμβολίζει την ομάδα των ορθογώνιων πινάκων, δηλαδή των πραγματικών πινάκων (n,n) που ικανοποιούν την

$$AA^t=I$$

όπου A^t είναι ο ανάστροφος του πίνακα A και I ο μοναδιαίος πίνακας.

Η $Is(\mathbb{E}^n)$ περιέχει επίσης μια αβελιανή υποομάδα η οποία αποτελείται από τις μεταφορές

$$\tau_\alpha: x \mapsto x+\alpha$$

Αυτή η υποομάδα προφανώς δρα μεταβατικά, έτσι οποιοδήποτε στοιχείο του $Is(\mathbb{E}^n)$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως η σύνθεση ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού και μιας μεταφοράς. Για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό φ

έχουμε

$$\varphi\circ\tau_\alpha\circ\varphi^{-1}=\tau_{\varphi(\alpha)}$$

(αφού $(\varphi\circ\tau_\alpha\circ\varphi^{-1})(x)=\varphi(\varphi^{-1}(x)+\alpha)=x+\varphi(\alpha)=\tau_{\varphi(\alpha)}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{E}^n$) και επομένως η ομάδα των μεταφορών είναι κανονική υποομάδα της $Is(\mathbb{E}^n)$. Το πηλίκο της $Is(\mathbb{E}^n)$ με αυτή την κανονική της υποομάδα είναι ισομορφικό προς την $O(n)$ και η $Is(\mathbb{E}^n)$ είναι φυσικά ισομορφική προς το ημιευθύ γινόμενο $\mathbb{R}^n\rtimes O(n)$. Τέλος, η $Is(\mathbb{E}^n)$ περιέχει όλες τις συμμετρίες ως προς τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{E}^n$, διότι η $O(\mathbb{E}^n)$ περιέχει όλες τις συμμετρίες ως προς τα υπερεπίπεδα του $\mathbb{E}^n$ που διέρχονται από την αρχή O και η υποομάδα των μεταφορών, όπως επισημάναμε, δρα μεταβατικά στον $\mathbb{E}^n$. Επομένως η $Is(\mathbb{E}^n)$ είναι όλο το σύνολο $Isom(\mathbb{E}^n)$.

6.7. Ομάδα ισομετριών της S^n

Έχουμε ήδη δει ότι η φυσική δράση της $O(\mathbb{E}^{n+1})$ στον $\mathbb{E}^{n+1}$ διατηρεί την Ευκλείδεια νόρμα, επομένως διατηρεί την n–διάστατη σφαίρα S^n. Η επαγόμενη δράση της $O(\mathbb{E}^{n+1})$ στην S^n είναι μέσω ισομετριών. Η δράση είναι αξιόπιστη οπότε επιτυγχάνουμε έτσι μια ένα προς ένα απεικόνιση από την $O(\mathbb{E}^{n+1})$ στην $Isom(S^n)$. Αλλά, όπως σημειώσαμε παραπάνω, η $O(\mathbb{E}^{n+1})$ περιέχει όλες τις συμμετρίες ως προς υπερεπίπεδα του $\mathbb{E}^{n+1}$ που περιέχουν το O και ο περιορισμός τέτοιων συμμετριών στην S^n είναι εξ ορισμού συμμετρίες ως προς υπερεπίπεδα της S^n. Αυτές οι συμμετρίες παράγουν την $Isom(S^n)$ και επομένως η απεικόνιση από την $O(\mathbb{E}^{n+1})$ στην $Isom(S^n)$ είναι ένας ισομορφισμός.

6.8. Ομάδα ισομετριών του $\mathbb{H}^n$

Θεωρούμε, τώρα, την ομάδα $GL(n+1,\mathbb{R})$ με τη συνήθη γραμμική δράση στον $\mathbb{E}^{n,1}$. Έστω $O(n,1)$ ότι συμβολίζει την υποομάδα που σχηματίζεται από εκείνους τους πίνακες που αφήνουν αμετάβλητη τη διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$. Αποδεικνύεται ότι η $O(n,1)$ αποτελείται από εκείνους τους $(n+1,n+1)$ πίνακες A για τους οποίους ισχύει $A^tJA=J$, όπου J είναι ο $(n+1,n+1)$ διαγώνιος πίνακας ο οποίος έχει στη διαγώνιο τα

$(1,1,\ldots,1,-1)$. Παρά το γεγονός ότι η $O(n,1)$ διατηρεί το υπερβολοειδές $\{x\in \mathbb{E}^{n+1}/(x,x)=-1\}$, κάποια από τα στοιχεία της εναλλάσσουν τα δύο φύλλα του υπερβολοειδούς. Έστω λοιπόν $O(n,1)_+\subset O(n,1)$ να είναι η υποομάδα δείκτη δύο που διατηρεί το επάνω φύλλο του υπερβολοειδούς, δηλαδή τον $\mathbb{H}^n$. Αυτή η υποομάδα αποτελείται από εκείνους τους πίνακες της $O(n,1)$ των οποίων το δεξί κάτω στοιχείο είναι θετικό. Είναι φανερό ότι η $O(n,1)_+$ δρα μέσω ισομετριών στον $\mathbb{H}^n$. Ο σταθεροποιητής του σημείου $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ είναι ισομορφικός προς την $O(n)$. Η ομάδα $O(n,1)_+$ περιέχει όλες τις συμμετρίες ως προς υπερεπίπεδα του $\mathbb{H}^n$ και από προηγούμενη πρόταση ισούται με το όλο της ομάδας $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Όλα τα παραπάνω μπορούν να συνοψιστούν στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.8.1

[1] $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)\cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$

[2] $\mathrm{Isom}(S^n)\cong O(n+1)$

[3] $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)\cong O(n,1)_+$

Και στις τρεις περιπτώσεις, ο σταθεροποιητής ενός σημείου είναι ισομορφικός προς την $O(n)$.

7. Χώροι με Νόρμα

Μια ιδιαίτερη κατηγορία μετρικών χώρων αποτελούν οι διανυσματικοί χώροι με νόρμα. Όπως θα δούμε σε αυτή την ενότητα, όταν η νόρμα προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο τότε η γωνία Alexandrov υπάρχει με την αυστηρή έννοια.

7.1. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο – Χώροι με νόρμα

Ορισμός 7.1.1

Έχουμε ήδη δει ότι ένας ***χώρος με εσωτερικό γινόμενο*** (ή ***προ–Hilbert χώρος***) είναι ένας διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο. Θα καλείται ***χώρος Hilbert*** αν η επαγόμενη μετρική είναι πλήρης.

Ορισμός 7.1.2

Ένας διανυσματικός χώρος V με νόρμα, καλείται ***χώρος Banach*** αν η μετρική που επάγεται από τη νόρμα είναι πλήρης.

Πρόταση 7.1.3

Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι μοναδικά γεωδαισιακός.

Απόδειξη

Σύμφωνα με την πρόταση 5.1.13, αρκεί να αποδείξουμε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι αυστηρά κυρτή.

Πράγματι·

αν V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, u_1 και u_2 είναι δύο διαφορετικά διανύσματα στον V με νόρμα 1, δηλαδή είναι $\|u_1\|=\langle u_1,u_1\rangle^{1/2}=1$ και $\|u_2\|=\langle u_2,u_2\rangle^{1/2}=1$, τότε για όλα τα $t\in(0,1)$ είναι:

$$\|(1-t)u_1+tu_2\|<\|(1-t)u_1\|+\|tu_2\|<|1-t|\cdot\|u_1\|+|t|\cdot\|u_2\|=|1-t|+|t|=1-t+t=1.$$

Παρατήρηση

Κάθε μοναδικά γεωδαισιακός χώρος με νόρμα *δεν* είναι πάντα χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Για τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο έχουμε τον ακόλουθο μετρικό χαρακτηρισμό.

Πρόταση 7.1.4 (Κανόνας του παραλληλογράμμου)

Μια νόρμα $\|\cdot\|$ σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο V επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, δηλαδή,

$$\text{για όλα τα } v, w\in V, \text{ ισχύει } \|v-w\|^2+\|v+w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right).$$

Αν μια νόρμα ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, τότε ανακτούμε το εσωτερικό γινόμενο, θέτοντας

$$\langle v,w\rangle=\frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\right).$$

Απόδειξη

Αν η νόρμα επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, τότε

$$\|v+w\|^2-\|v-w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle-\langle v-w,v-w\rangle=4\langle v,w\rangle.$$

Αντιστρόφως, θα δείξουμε ότι αν η νόρμα ικανοποιεί το κανόνα του παραλληλογράμμου, δηλαδή είναι $\|v-w\|^2+\|v+w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$ για όλα τα v, $w\in V$, τότε ο τύπος

$$\langle v,w\rangle=\frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\right) \qquad (7.1.4.1)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Είναι φανερό ότι $\langle v,w\rangle=\langle w,v\rangle$ και $\langle v,v\rangle=\|v\|^2\geq 0$.

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι αν το w είναι σταθερό η $\langle v,w\rangle$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του v.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα ζεύγη των διανυσμάτων (v΄+w, v΄΄) και (v΄−w, v΄΄), έχουμε:

$$\|v'+v''+w\|^2+\|v'-v''+w\|^2=2\|v'+w\|^2+2\|v''\|^2$$

$$\|v'+v''-w\|^2+\|v'-v''-w\|^2=2\|v'-w\|^2+2\|v''\|^2$$

Αφαιρώντας τη δεύτερη ισότητα από τη πρώτη και χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.1.4.1), παίρνουμε:

$$\|v'+v''+w\|^2-\|v'+v''-w\|^2+\|v'-v''+w\|^2-\|v'-v''-w\|^2=2\left(\|v'+w\|^2-\|v'-w\|^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \langle v'+v'',w\rangle+\langle v'-v'',w\rangle=2\langle v',w\rangle$$

Ειδικότερα αν v΄=v΄΄ και αφού <0,w>=0, έχουμε:

$$\langle 2v',w\rangle=2\langle v',w\rangle$$

και επομένως ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$\langle v'+v'',w\rangle+\langle v'-v'',w\rangle=\langle 2v',w\rangle.$$

Αντικαθιστώντας, τώρα, το v΄ με $\frac{1}{2}(v'+v'')$ και το v΄΄ με $\frac{1}{2}(v'-v'')$ προκύπτει:

$$\langle v',w\rangle+\langle v'',w\rangle=\langle v'+v'',w\rangle, \text{ για όλα τα } v', v'', w\in V. \qquad (7.1.4.2)$$

Πρέπει, επιπλέον, να αποδείξουμε ότι $\langle \lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ και για όλα τα v, w∈V. Η ισότητα (7.1.4.2) αποδεικνύει την ισχύ του ζητούμενου για κάθε ρητό αριθμό λ και λόγω της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου, έπεται ότι

$$\langle \lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle \text{ για } \lambda\in\mathbb{R} \text{ και } v, w\in V.$$

Πόρισμα 7.1.5

Ένας διανυσματικός χώρος V με νόρμα είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν κάθε διανυσματικός υπόχωρος του V διάστασης μικρότερης ή ίσης του 2 είναι ισομετρικός με ένα Ευκλείδειο χώρο.

Απόδειξη

Η παραπάνω συνθήκη προφανώς είναι αναγκαία για την ύπαρξη ενός εσωτερικού γινομένου στον μετρικό χώρο V. Θα αποδείξουμε ότι είναι και ικανή.

Έστω λοιπόν ότι κάθε διανυσματικός υπόχωρος V΄ του V διάστασης μικρότερης ή ίσης του 2 είναι ισομετρικός με ένα Ευκλείδειο χώρο. Αν v, w∈V, τότε ο χώρος

α·v+β·w είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος V΄ του V διάστασης μικρότερης ή ίσης του 2 για κάθε α, β∈IR και ισχύει η $\|v-w\|^2+\|v+w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$ στον V΄. Επειδή όμως τα v, w ήταν τυχαία η σχέση αυτή ισχύει για κάθε v, w∈V, άρα από την πρόταση 7.1.4 έπεται ότι ο χώρος V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση 7.1.6

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα. Αν θέσουμε

$$c_{u,v}=\frac{1}{2}\frac{\|u+v\|^2+\|u-v\|^2}{\|u\|^2+\|v\|^2}$$

για κάθε u, v∈V με u, v όχι συγχρόνως μηδέν και α, β είναι αντίστοιχα το infimum και το supremum του $c_{u,v}$, τότε $\frac{1}{2}\le\alpha\le1\le\beta\le2$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$c_{u,v}=\frac{1}{2}\frac{\|u+v\|^2+\|u-v\|^2}{\|u\|^2+\|v\|^2}\le\frac{1}{2}\frac{2\left(\|u\|+\|v\|\right)^2}{\|u\|^2+\|v\|^2}\le\frac{1}{2}\frac{2\cdot2\cdot\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)}{\|u\|^2+\|v\|^2}=2,$$

άρα β≤2, και

$$c_{u+v,u-v}=\frac{1}{2}\frac{\|2u\|^2+\|2v\|^2}{\|u+v\|^2+\|u-v\|^2}\le2\frac{\|u\|^2+\|v\|^2}{\|u+v\|^2+\|u-v\|^2}=\frac{1}{c_{u,v}}.$$

Εφόσον τα α, β είναι αντίστοιχα το infimum και το supremum του $c_{u,v}$, από την πρώτη σχέση έχουμε ότι $\alpha\le c_{u,v}\le\beta$ ενώ από τη δεύτερη προκύπτει ότι $\alpha\le\frac{1}{c_{u,v}}\le\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}\le c_{u,v}\le\frac{1}{\alpha}$, άρα $\alpha\ge\frac{1}{\beta}$ και $\beta\le\frac{1}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha\le\frac{1}{\beta}$, επομένως $\alpha=\frac{1}{\beta}$. Αφού β≤2, έπεται ότι $\alpha\ge\frac{1}{2}$. Όμως είναι α≤β, επομένως θα πρέπει α≤1≤β. Από όλα τα παραπάνω λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι $\frac{1}{2}\le\alpha\le1\le\beta\le2$.

Παρατήρηση

Οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο χαρακτηρίζονται από τη σχέση α=β=1, αφού αυτή άμεσα εκφράζει τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στη γεωμετρία των χώρων με νόρμα που ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου και σε εκείνους τους χώρους με νόρμα που δεν τον ικανοποιούν είναι αυτή που αφορά στην έννοια της γωνίας. Όταν πληρείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου τότε η γωνία Alexandrov ορίζεται με την αυστηρή έννοια, όπως εξάλλου προκύπτει και από την ακόλουθη πρόταση:

Ορισμός 7.1.7

Ένας διανυσματικός χώρος V με νόρμα είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν το όριο

$$\lim_{t,t'\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)$$

υπάρχει για όλα τα ζεύγη των γεωδαισιακών ακτίνων c, c΄ που έχουν αρχή το $0\in V$.

Απόδειξη

Όλα τα τμήματα στον V είναι γεωδαισιακά τμήματα από την πρόταση 5.1.13. Αν ο V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε κάθε γεωδαισιακή ακτίνα $c:[0,\infty)\to V$ με αρχή το $0\in V$ είναι της μορφής:

$$t\mapsto tu$$

Αν περιοριστούμε στον υπόχωρο του V που παράγεται από δύο τέτοιες ακτίνες, υπαγόμαστε στην περίπτωση του $V=\mathbb{E}^2$, όπου το όριο $\lim_{t,t'\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)$ προφανώς υπάρχει και ισούται με την Ευκλείδεια γωνία των δύο διανυσματικών ακτίνων.

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι το όριο $\lim_{t,t'\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)$ υπάρχει για όλα τα ζεύγη των γεωδαισιακών ακτίνων c, c΄ που έχουν αρχή την αρχή του διανυσματικού χώρου V, ο οποίος είναι ένας χώρος με νόρμα, θα αποδείξουμε ότι αυτός είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Έστω δύο οποιαδήποτε μοναδιαία, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα u, $u'\in V$. Θεωρούμε τις ακτίνες c, $c':[0,\infty)\to V$, που ορίζονται από τις σχέσεις $c(t)=tu$ και $c'(t)=tu'$.

Θα αποδείξουμε αρχικά, ότι αν το $\lim_{t,t'\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)$ υπάρχει και ισούται με α, είναι, δηλαδή, $\lim_{t,t'\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)=\alpha$, τότε $\overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)=\alpha$ για όλα τα t, $t'>0$.

Πράγματι·

εφόσον $\lim_{t,t'\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(t), c'(t')\right)=\alpha$ έχουμε ότι $\lim_{s\to 0} \overline{\angle}_0\left(c(st), c'(st')\right)=\alpha$.

Όμως από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε ότι:

$$\cos\overline{\angle}_0\left(c(st),c'(st')\right)=\frac{1}{2s^2tt'}\left(s^2t^2+s^2t'^2-\|stu-st'u'\|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2tt'}\left(t^2+t'^2-\|tu-t'u'\|^2\right)=$$
$$=\cos\overline{\angle}_0\left(c(t),c'(t')\right)$$

που είναι ανεξάρτητο του s, επομένως $\overline{\angle}_0\left(c(t),c'(t')\right)=\alpha$ για όλα τα t, t΄>0.

Τέλος, προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο χώρος V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αρκεί, σύμφωνα με την πρόταση 7.1.4, να αποδείξουμε ότι ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, δηλαδή ότι ο κανόνας του παραλληλογράμμου ισχύει για δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V, έστω τα v, w.

Αν θεωρήσουμε τα τρίγωνα σύγκρισης $\overline{\Delta}(0,v,v+w)$ και $\overline{\Delta}\left(0,v,\frac{1}{2}(v+w)\right)$, τότε οι γωνίες στο $\overline{0}$, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι ίσες, δηλαδή είναι

$$\overline{\angle}_0(v,v+w)=\overline{\angle}_0\left(v,\frac{1}{2}(v+w)\right)=\theta.$$

Σε κάθε ένα από τα τρίγωνα αυτά ισχύει ο νόμος των συνημιτόνων, οπότε, αντίστοιχα, έχουμε:

$$\|(v+w)-v\|^2=\|v+w\|^2+\|v\|^2-2\|v+w\|\|v\|\cos\theta \qquad (7.1.7.1)$$

$$\left\|\frac{1}{2}(v+w)-v\right\|^2=\left\|\frac{1}{2}(v+w)\right\|^2+\|v\|^2-2\left\|\frac{1}{2}(v+w)\right\|\|v\|\cos\theta \qquad (7.1.7.2)$$

Από τη σχέση (7.1.7.1) προκύπτει ότι $\cos\theta=\frac{\|v+w\|^2+\|v\|^2-\|w\|^2}{2\|v\|\cdot\|v+w\|}$ οπότε η σχέση (7.1.7.2) γράφεται:

$$\left\|\frac{1}{2}(v+w)-v\right\|^2=\left\|\frac{1}{2}(v+w)\right\|^2+\|v\|^2-2\left\|\frac{1}{2}(v+w)\right\|\|v\|\frac{\|v+w\|^2+\|v\|^2-\|w\|^2}{2\|v\|\cdot\|v+w\|}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}\|v-w\|^2=\frac{1}{4}\|v+w\|^2+\|v\|^2-\frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2+\|v\|^2-\|w\|^2\right)\Leftrightarrow$$
$$\|v-w\|^2=\|v+w\|^2+4\|v\|^2-2\|v+w\|^2-2\|v\|^2+2\|w\|^2\Leftrightarrow$$
$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$$

γεγονός που υποδεικνύει ότι ο χώρος V ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου και επομένως είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

7.2. Οι χώροι Hilbert $\ell^2(S)$

Ορισμός 7.2.1

Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ για τις οποίες το $\sum |x_n|^2$ είναι πεπερασμένο. Το σύνολο αυτό θα το συμβολίζουμε με $\ell^2(\mathbb{Z})$ ενώ κάθε ένα από τα στοιχεία του συνόλου αυτού καλείται τετραγωνικά αθροίσιμη ακολουθία.

Πρόταση 7.2.2

Το σύνολο $\ell^2(\mathbb{Z})$ εφοδιασμένο με τις κατά όρους πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και η απεικόνιση $\|\cdot\|_2$: $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{IR}$ με $\|x\|_2 := \left(\sum |x_n|^2\right)^{1/2}$, για κάθε $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ορίζει μια νόρμα στον $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Απόδειξη

Προφανώς το σύνολο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, ενώ αν $x=(x_n)$ και $y=(y_n)$ στοιχεία του $\ell^2(\mathbb{Z})$, τότε και

$$x+y=(x_n+y_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

αφού είναι

$$\left(\sum_{i=-n}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=-n}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=-n}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2} \le \|x\|_2 + \|y\|_2$$

(λόγω της τριγωνικής ανισότητας που ισχύει στον IE^n για τα μερικά αθροίσματα).

Ορισμός 7.2.3

Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο το οποίο συνδέεται με τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ ως εξής:

$$< x, y > := \sum_i x_i \cdot y_i \text{, για κάθε } x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Παρατήρηση

Η σύγκλιση του $\sum_i x_i \cdot y_i$ εξασφαλίζεται από την ανισότητα Cauchy – Schwarz που ισχύει για το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\left(\sum_{i=-n}^{n} |x_i \cdot y_i|\right)^2 \le \left(\sum_{i=-n}^{n} |x_i|^2\right) \cdot \left(\sum_{i=-n}^{n} |y_i|^2\right) \le \left(\|x\|_2\right)^2 \cdot \left(\|y\|_2\right)^2 .$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 7.2.4

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων x: S→IR. Αν με $\sum_S |x(s)|^2$ συμβολίζουμε το supremum των αθροισμάτων $\sum_C |x(s)|^2$ όπου C πεπερασμένο υποσύνολο του S, το σύνολο όλων εκείνων των συναρτήσεων για τις οποίες το $\sum_S |x(s)|^2$ είναι πεπερασμένο θα το συμβολίζουμε με $\ell^2(S)$.

Πρόταση 7.2.5

Το σύνολο $\ell^2(S)$ εφοδιασμένο με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και η απεικόνιση $\|\cdot\|_2$: $\ell^2(S) \to IR$ με $\|x\|_2 := \left(\sum_S |x(s)|^2\right)^{1/2}$, για κάθε $x \in \ell^2(S)$ ορίζει μια νόρμα στον $\ell^2(S)$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της πρότασης 7.2.2.

Αντίστοιχα με τον ορισμό 7.2.3, για τον $\ell^2(S)$, έχουμε:

Ορισμός 7.2.6

Στον $\ell^2(S)$ ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο το οποίο συνδέεται με τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ ως εξής:

$$< x, y > := \sum_S x(s) \cdot y(s), \text{ για κάθε } x, y \in \ell^2(S).$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι ο $\ell^2(S)$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Όπως, όμως, υποδεικνύει η επόμενη πρόταση ο $\ell^2(S)$ είναι χώρος Hilbert.

Πρόταση 7.2.7

Έστω S ένα σύνολο. Η μετρική που επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, είναι πλήρης και επομένως ο χώρος $\ell^2(S)$ είναι χώρος Hilbert.

Απόδειξη

Έστω d η μετρική που επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ και έστω $(x^{(m)})$ μια ακολουθία Cauchy του $\ell^2(S)$.

Έστω ε>0. Σταθεροποιούμε ένα N τέτοιο ώστε για όλα τα m, m΄>N να είναι

$$d\left(x^{(m)}, x^{(m')}\right) = \left(\sum_S \left|x^{(m)}(s) - x^{(m')}(s)\right|^2\right)^{1/2} < \varepsilon \qquad (7.2.7.1)$$

Τότε, αν m, m΄>N είναι $\left|x^{(m)}(s) - x^{(m')}(s)\right| < \varepsilon$ για όλα τα $s \in S$ και επομένως για σταθερό s η ακολουθία των αριθμών $(x^{(m)}(s))$ είναι Cauchy με όριο έστω το $x^{\infty}(s)$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται μια συνάρτηση x^{∞}: S→IR, η οποία ισχυριζόμαστε ότι είναι στοιχείο του $\ell^2(S)$. Πράγματι·

από τη σχέση (7.2.7.1), έχουμε ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο C του S είναι:

$$\sum_{s \in C} \left|x^{(m)}(s) - x^{(m')}(s)\right|^2 < \varepsilon^2 .$$

Σταθεροποιώντας το m και αφήνοντας το m΄→∞, έχουμε:

$$\sum_{s \in C} \left|x^{(m)}(s) - x^{\infty}(s)\right|^2 \le \varepsilon^2 \qquad (7.2.7.2)$$

επομένως $(x^{(m)} - x^{\infty}) \in \ell^2(S)$. Όμως, $x^{\infty} = x^{(m)} - (x^{(m)} - x^{\infty}) \in \ell^2(S)$.

Από την (7.2.7.2) έπεται ότι $d\left(x^{(m)}, x^{\infty}\right) \to 0$ καθώς το m→∞, επομένως η μετρική d είναι πλήρης και συνεπώς ο χώρος $\ell^2(S)$ είναι χώρος Hilbert.

Παρατήρηση

Ο χώρος $\ell^2(S)$ είναι ένας χώρος Hilbert, όμως δεν είναι πάντα τοπικά συμπαγής. Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε S ένα άπειρο σύνολο (για παράδειγμα το IN) και $\delta^{(s)}(\varepsilon)$ την ακολουθία της οποίας ο μόνος μη μηδενικός όρος είναι στη θέση m και ισούται με ε. Προφανώς το άπειρο σύνολο $\{\delta^{(s)}(\varepsilon) / s \in S\}$ περιέχεται στην κλειστή μπάλα με κέντρο το $0 \in \ell^2(S)$ και ακτίνα ε, όμως δεν έχει σημείο συσσώρευσης, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο $\ell^2(S)$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.

Με αφορμή το κλασικό θεώρημα του F. Riesz στο οποίο αποδεικνύεται ότι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν είναι πεπερασμένης διάστασης διατυπώνουμε την επόμενη πρόταση –ειδική περίπτωση– η οποία μας εξασφαλίζει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο να είναι τοπικά συμπαγής. Έτσι:

Πρόταση 7.2.8

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παρατήρηση

Αν ο V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης τότε είναι τοπικά συμπαγής επομένως και πλήρης, άρα ο V είναι ένας χώρος Hilbert.

Ένα παράδειγμα χώρου με εσωτερικό γινόμενο που δεν είναι χώρος Hilbert είναι το ακόλουθο:

Θεωρούμε τον υπόχωρο C_0 του $\ell^2(\mathbb{Z})$ που αποτελείται από όλες τις τετραγωνικά συγκλίνουσες ακολουθίες με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από τον $\ell^2(\mathbb{Z})$. Αυτός είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο όμως δεν είναι χώρος Hilbert. Πράγματι· αν $x\in \ell^2(\mathbb{Z})$ μια ακολουθία με μη μηδενικούς όρους τότε κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(x^{(m)})$ Cauchy του C_0 ως εξής:

$$x_n^{(m)} = x_n \text{, αν } m>|n| \text{ και } x_n^{(m)} = 0 \text{, αν } m\le|n|.$$

Η ακολουθία αυτή όμως δεν έχει όριο στο C_0 (αφού $(x^{(m)})\to x\notin C_0$), επομένως ο C_0 δεν είναι πλήρης, άρα δεν είναι χώρος Hilbert.

7.3. Οι χώροι ℓ_n^p

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε μια ενδιαφέρουσα κατηγορία χώρων με νόρμα οι οποίοι είναι μοναδικά γεωδαισιακοί αλλά δεν είναι χώροι Hilbert.

Ορισμός 7.3.1

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε πραγματικό αριθμό $p>1$, η απεικόνιση

$$\|\cdot\|_2 : x \mapsto \| x \|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ για κάθε } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR^n,$$

ορίζει μια νόρμα στον IR^n.

Ειδικότερα, για οποιαδήποτε $x, y \in IR^n$, έχουμε:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Επιπλέον, η ισότητα σε αυτή την έκφραση ισχύει αν και μόνο αν το x είναι θετικό πολλαπλάσιο του y, επομένως αν d_p είναι η επαγόμενη μετρική, για όλα τα $1<p<\infty$, ο μετρικός χώρος (IR^n, d_p) που παράγεται από την νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι μοναδικά γεωδαισιακός.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\|\cdot\|_2 : x \mapsto \| x \|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ για κάθε } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR^n,$$

ορίζει μια νόρμα στον IR^n για όλα τα $1<p<\infty$, αρκεί να επαληθεύσουμε την τριγωνική ανισότητα αφού προφανώς είναι $\|x\|_p>0$, αν $x\neq 0$ και $\|0\|_p=0$ ενώ $\|\lambda x\|_p=|\lambda|\cdot\|x\|_p$, για όλα τα $x \in IR^n$ και $\lambda \in IR$.

Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό $q>1$ τέτοιο, ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ισχυριζόμαστε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν a=b. Πράγματι·

αν a, b>0 τότε εφόσον η συνάρτηση f(x)=lnx είναι αυστηρά κοίλη, έχουμε:

$$\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b \qquad (7.3.1.1)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν a=b. Η σχέση (7.3.1.1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q} \geq a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν a=b.

Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας θα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον την ανισότητα Holder την οποία παραθέτουμε. Έτσι,

αν $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in \mathbb{R}^n$ και $1<p, q<\infty$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε είναι:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (7.3.1.2)$$

Για κάθε i=1, 2, …, n έχουμε

$$\left(|x_i|+|y_i|\right)^p \le |x_i|\cdot\left(|x_i|+|y_i|\right)^{p-1}+|y_i|\cdot\left(|x_i|+|y_i|\right)^{p-1} \qquad (7.3.1.3)$$

και με βάση την (7.3.1.2) παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot\left(|x_i|+|y_i|\right)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (7.3.1.4)$$

και

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot\left(|x_i|+|y_i|\right)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (7.3.1.5)$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη και αφού $(p-1)q=p$, παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, είναι

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

άρα

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (7.3.1.6)$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι γνωστή και ως ανισότητα Minkowski.

Προφανώς η ισότητα στην (7.3.1.6) ισχύει αν και μόνο αν ισχύει συγχρόνως η ισότητα στις (7.3.1.3), (7.3.1.4) και (7.3.1.5). Η ισότητα στην (7.3.1.3) συνεπάγεται ότι τα x_i και y_i έχουν τον ίδιο πρόσημο και ότι αν τα x, y είναι μη μηδενικά το ίδιο ισχύει και για το x+y. Η ισότητα στις (7.3.1.4) και (7.3.1.5) συνεπάγεται ότι:

$$\frac{|x_i|^p}{\left(\|x\|_p\right)^p} = \frac{\left(|x_i| + |y_i|\right)^q}{\left(\left\|\left(|x_i|+|y_i|\right)\right\|_q\right)^q} = \frac{|y_i|^p}{\left(\|y\|_p\right)^p}\text{, για κάθε } i=1, 2, \ldots, n$$

επομένως το x θα πρέπει να είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του y.

Τέλος, ο μετρικός χώρος ℓ_n^p με $1\le p\le\infty$ είναι πλήρης (η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της πρότασης 7.2.7) και επομένως χώρος Banach. Ιδιαιτέρως δε , αν $1<p<\infty$ ο μετρικός χώρος ℓ_n^p είναι μοναδικά γεωδαισιακός. Πράγματι· αν x, $y\in \ell_n^p$ με $\|x\|_p=\|y\|_p=1$, τότε $\|(1-\lambda)x+\lambda y\|_p<1$ αφού η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχουν α, $\beta>0$ τέτοιοι ώστε $\alpha x_k=\beta y_k$ για κάθε k=1, 2, …, n που είναι άτοπο. Επομένως, η κλειστή μοναδιαία μπάλα είναι αυστηρά κυρτή στον ℓ_n^p, οπότε από την πρόταση 5.1.13, έπεται ότι ο ℓ_n^p είναι μοναδικά γεωδαισιακός.

Παρατήρηση

Αν p=2 τότε ο μετρικός χώρος είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{E}^n$. Αυτή είναι και η μόνη περίπτωση που ο χώρος αυτός είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, καθώς αν $p\neq 2$ δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου που αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη τόσο για να εξετάσουμε αν η νόρμα προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, αλλά και για την ύπαρξη, με την αυστηρή έννοια, της γωνίας Alexandrov.

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε για τους χώρους $\ell^p(\mathbb{Z})$ και $\ell^p(S)$

Ορισμός 7.3.2

Αν S ένα σύνολο, συμβολίζουμε με $\ell^p(S)$ το σύνολο των απεικονίσεων $x:S\to\mathbb{R}$ για τις οποίες το $\sum_S |x(s)|^p$ είναι πεπερασμένο. Ορίζουμε

$$\|x\|_p := \left(\sum_S |x(s)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Αν εφοδιάσουμε τον $\ell^p(S)$ με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού τότε γίνεται ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι μια νόρμα του $\ell^p(S)$. Ο $\ell^p(S)$ είναι ένας χώρος Banach, αν $1\le p<\infty$ (η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι ανάλογη της πρότασης 7.2.7). Ο παραγόμενος

μετρικός χώρος είναι μοναδικά γεωδαισιακός αν και μόνο αν $1<p<\infty$.

7.4. Ισομετρίες στους χώρους με νόρμα

Αν V και W είναι δύο χώροι με νόρμα, τότε όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 2 μια απεικόνιση $f:V\to W$ είναι ισομετρία αν

$$\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|, \text{ για κάθε } x, y\in V.$$

Η f είναι συσχετισμένη αν

$$f((1-t)a+tb)=(1-t)f(a)+tf(b), \text{ για κάθε } a, b\in V \text{ και } 0\le t\le 1. \qquad (7.4)$$

Παρατήρηση

Ισοδύναμα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι η f είναι συσχετισμένη αν η απεικόνιση $g:V\to W$ με $g(x)=f(x)-f(0)$, είναι γραμμική.

Πρόταση 7.4.1

Μια ισομετρία $f:V\to W$ είναι συσχετισμένη αν $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ για κάθε a, $b\in V$, δηλαδή αν διατηρεί τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων.

Απόδειξη

Έστω ότι

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ για κάθε } a, b\in V. \qquad (7.4.1.1)$$

Τότε η σχέση (7.4) προφανώς ισχύει για $t=\frac{1}{2}$.

Η σχέση όμως (7.4.1.1) ισχύει και για τα a, $\frac{a+b}{2}\in V$, όπως και για τα $\frac{a+b}{2}$, $b\in V$ επομένως η σχέση (7.4) προφανώς ισχύει για τα $t=\frac{1}{4}$ και $t=\frac{3}{4}$.

Με τον ίδιο τρόπο –παίρνοντας, δηλαδή, κάθε φορά το νέο μέσο των τμημάτων που προκύπτουν από το προηγούμενο βήμα– αποδεικνύεται ότι η σχέση (7.4.1.1) ισχύει για όλα τα $t=\frac{k}{2^m}\in[0,1]$, όπου k=0, 1, 2, …, 2^m και $m\in\mathbb{N}$. Εφόσον, τώρα, κάθε ισομετρία είναι συνεχής η (7.4) θα ισχύει για όλα τα $0\le t\le 1$.

Παρατήρηση

Κάθε ισομετρία δεν είναι συσχετισμένη.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως V=IR και W το επίπεδο εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}$. Αν φ:IR→IR με $\varphi(t)=\sin t$, τότε η f:V→W με $f(s)=(s,\varphi(s))$ είναι μια ισομετρία αφού $\|f(s_1)-f(s_2)\|_\infty=\max\{|s_1-s_2|,|\sin(s_1)-\sin(s_2)|\}=|s_1-s_2|$ (Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση φ στο $[s_1,s_2]$), αλλά δεν είναι συσχετισμένη ισομετρία αφού:

$$f\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)=\left(\frac{s_1+s_2}{2},\sin\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)\right)\neq\left(\frac{s_1+s_2}{2},\frac{\sin(s_1)+\sin(s_2)}{2}\right)=\frac{f(s_1)+f(s_2)}{2},$$

για κάποια s_1, $s_2\in$IR.

Πρόταση 7.4.2

Μια ισομετρία f: V→W είναι συσχετισμένη αν η μοναδιαία κλειστή μπάλα του W είναι αυστηρά κυρτή.

Απόδειξη

Έστω a, b∈V και αφού η f είναι ισομετρία είναι $\|f(a)-f(b)\|=|a-b|$. Αφού η μοναδιαία κλειστή μπάλα του W είναι αυστηρά κυρτή τότε και οποιαδήποτε κλειστή μπάλα του W είναι αυστηρά κυρτή. Οι κλειστές μπάλες με κέντρα τα f(a) και f(b) και ακτίνα $\frac{|a-b|}{2}=\frac{\|f(a)-f(b)\|}{2}$ συναντώνται μόνο στο σημείο $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Όμως είναι

$$\left\|f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\|=\left|a-\frac{a+b}{2}\right|=\frac{|a-b|}{2} \text{ και } \left\|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\|=\left|b-\frac{a+b}{2}\right|=\frac{|a-b|}{2}$$

δηλαδή το $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ανήκει και στις δύο κλειστές μπάλες με κέντρα τα f(a) και f(b) και ακτίνα $\frac{|a-b|}{2}=\frac{\|f(a)-f(b)\|}{2}$, επομένως $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ για κάθε a, b∈V. Από την πρόταση 7.4.1 έπεται ότι η ισομετρία f είναι συσχετισμένη.

Πρόταση 7.4.3 (Θεώρημα Mazur – Ulam)

Μια ένα προς ένα και επί ισομετρία f: V→W όπου V, W είναι χώροι με νόρμα, είναι συσχετισμένη.

Απόδειξη

Η απόδειξη της πρότασης αυτής βασίζεται στην έννοια της συμμετρίας ως προς σημείο ενός διανυσματικού χώρου. Αν, λοιπόν, V είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και $z\in V$, τότε η απεικόνιση $\psi:V\to V$ με $\psi(x)=2z-x$, για κάθε $x\in V$ καλείται ***συμμετρία*** του V ως προς z. Προφανώς η ψ είναι ένα προς ένα και επί ενώ επιπλέον είναι $\psi(\psi(x))=2z-\psi(x)=2z-(2z-x)=x$, δηλαδή $\psi^2=id_V$, επομένως $\psi^{-1}=\psi$. Επιπλέον η ψ είναι μια ισομετρία και το z είναι το μόνο σταθερό σημείο της ψ. Επομένως ισχύουν:

$$\|\psi(x)-\psi(z)\|=\|x-z\| \text{ και } \|\psi(x)-x\|=2\|x-z\|, \text{ για κάθε } x\in V. \qquad (7.4.3.1)$$

Έστω $a, b\in V$ και $z=\dfrac{a+b}{2}$. Έστω Ω το σύνολο όλων των ένα προς ένα και επί ισομετριών $g: V\to V$ που έχουν ως σταθερά σημεία τα a και b, δηλαδή με $g(a)=a$ και $g(b)=b$ και $\lambda=\sup\{\|g(z)-z\|/\ g\in\Omega\}$. Αν $g\in\Omega$, έχουμε

$$\|g(z)-a\|=\|g(z)-g(a)\|=\|z-a\|,$$

και επομένως είναι:

$$\|g(z)-z\|\le\|g(z)-a\|+\|a-z\|=2\|a-z\|$$

άρα $\lambda<\infty$.

Θεωρούμε ψ τη συμμετρία του V ως προς z. Αν $g\in\Omega$, τότε και η $g^*=\psi g^{-1}\psi g\in\Omega$ αφού η g^* ένα προς ένα και επί ισομετρία του V με

$$g^*(\alpha)=(\psi g^{-1}\psi)(g(\alpha))=(\psi g^{-1})(\psi(\alpha))=\psi(g^{-1}(\beta)=\psi(\beta)=\alpha \text{ και}$$

$$g^*(\beta)=(\psi g^{-1}\psi)(g(\beta))=(\psi g^{-1})(\psi(\beta))=\psi(g^{-1}(\alpha)=\psi(\alpha)=\beta.$$

Συνεπώς $\|g^*(z)-z\|\le\lambda$. Λόγω τώρα της (7.4.3.1) και επειδή η g^{-1} είναι ισομετρία, έχουμε:

$2\|g(z)-z\|=\|\psi g(z)-g(z)\|=\|g^{-1}\psi g(z)-z\|=\|\psi g^{-1}\psi g(z)-z\|=\|g^*(z)-z\|\le\lambda$, για όλες τις $g\in\Omega$, δηλαδή $\|g(z)-z\|\le\lambda/2$, για όλες τις $g\in\Omega$. Όμως $\lambda=\sup\{\|g(z)-z\|/\ g\in\Omega\}$ άρα $\lambda\le\lambda/2$ οπότε $\lambda=0$. Αυτό, σημαίνει ότι $g(z)=z$, για όλες τις $g\in\Omega$.

Έστω, τώρα, $f: V\to W$ μια ένα προς ένα και επί ισομετρία. Θέτουμε $z'=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, οπότε με βάση την πρόταση 7.4.1, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(z)=z'$.

Έστω ψ΄ η συμμετρία του W ως προς z΄ (δηλαδή $\psi'(x)=2z'-x$, για κάθε $x\in W$). Η απεικόνιση $h=\psi f^{-1}\psi' f\in\Omega$ διότι

η h είναι μια ένα προς ένα και επί ισομετρία του V με

$$h(\alpha)=(\psi f^{-1}\psi')(f(\alpha))= (\psi f^{-1})(\psi'(f(\alpha))=(\psi f^{-1})(f(\beta))=\psi(\beta)=\alpha \text{ και}$$

$$h(\beta)=(\psi f^{-1}\psi')(f(\beta))= (\psi f^{-1})(\psi'(f(\beta))=(\psi f^{-1})(f(\alpha))=\psi(\alpha)=\beta.$$

και επομένως $h(z)=z$.

Όμως, έχουμε

$$h(z)=z\Leftrightarrow(\psi f^{-1}\psi')(f(z))=z\Leftrightarrow(f^{-1}\psi')(f(z))=\psi^{-1}(z)\Leftrightarrow(f^{-1}\psi')(f(z))=z\Leftrightarrow\psi'(f(z))=f(z)$$

και επειδή το μόνο σταθερό σημείο της ψ' είναι το z' έπεται ότι $f(z)=z'$.

Έστω, λοιπόν, V ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα. Αν δοθεί οποιοδήποτε $\alpha\in V$, η μεταφορά $\tau_\alpha:V\to V$, με $x\mapsto\tau_\alpha(x)=x+\alpha$, για κάθε $x\in V$ είναι προφανώς μια ισομετρία του V. Αν με Isom(V) συμβολίσουμε την ομάδα των ισομετριών του V, η αβελιανή υποομάδα της Isom(V) που αποτελείται από όλες τις δυνατές μεταφορές, είναι φανερά ισομορφική προς την προσθετική ομάδα του V (παρατήρηση 2.1.2). Θα συμβολίζουμε με O(V) την υποομάδα της Isom(V) που αποτελείται από όλους τους γραμμικούς μετασχηματισμούς του V οι οποίοι διατηρούν τη νόρμα του.

Πρόταση 7.4.4

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε:

[1] Κάθε ισομετρία του V μπορεί να εκφραστεί μοναδικά ως η σύνθεση ενός γραμμικού μετασχηματισμού με μια μεταφορά.

[2] $\mathrm{Isom}(V)\cong V\rtimes O(V)$[3]

Απόδειξη

Έστω φ μια τυχαία ισομετρία του V. Από το θεώρημα Mazur – Ulam η φ είναι συσχετισμένη απεικόνιση και ισοδύναμα η απεικόνιση $g: V\to W$ με $g(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$, είναι γραμμική. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\varphi(x)=g(x)+\varphi(0)$, επομένως αν θεωρήσουμε την $\tau_{\varphi(0)}:V\to V$, για την οποία είναι:

$$x\mapsto \tau_{\varphi(0)}(x)=x+\varphi(0)$$

τότε η φ γράφεται ως η σύνθεση ενός γραμμικού μετασχηματισμού του V με μια μεταφορά, δηλαδή είναι $\varphi=\tau_{\varphi(0)}\circ g$. Η μοναδικότητα είναι φανερό ότι εξασφαλίζεται

[3] Αν δοθούν δύο ομάδες G και H και μια δράση της H στη G (για παράδειγμα ένας ομομορφισμός $H\to\mathrm{Aut}(G)$, ο οποίος γράφεται $h\mapsto\varphi_h$) σχηματίζουμε το ημιευθύ γινόμενο $G\rtimes H$, εφοδιάζοντας το σύνολο $G\times H$ με την πράξη: $(g,h)\bullet(g',h')=(g\varphi_h(g'),hh')$.

καθώς η εικόνα του $0\in V$ μέσω της δοθείσης ισομετρίας καθορίζει τη μεταφορά $\tau_{\varphi(0)}$ της οποίας την ύπαρξη ισχυριστήκαμε παραπάνω. Επειδή λοιπόν η γραφή αυτή είναι μοναδική επιλέγουμε να συμβολίσουμε την g με g_φ. Η δράση της g στον V είναι η γραμμική δράση.

Τέλος, για το [2], θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση f: $\mathrm{Isom}(V)\to V\rtimes O(V)$ με $\varphi\mapsto(\varphi(0),g_\varphi)$ είναι ένας ισομορφισμός. Η απεικόνιση f λόγω του [1] είναι καλώς ορισμένη και επιπλέον 1–1 και επί. Αρκεί, επομένως, να αποδείξουμε ότι είναι ένας ομομορφισμός. Έστω $\varphi, \psi\in\mathrm{Isom}(V)$. Η δράση της $\varphi\psi$ στο V είναι:

$$\varphi\psi(x)=\varphi(\psi(x))=\varphi(g_\psi(x)+\psi(0))=g_\varphi(g_\psi(x)+\psi(0))+\varphi(0)=g_\varphi g_\psi(x)+[g_\varphi\psi(0)+\varphi(0)]$$

Άρα η εικόνα της $\varphi\psi$ μέσω της f στο $V\rtimes O(V)$ είναι το

$$(\varphi(0)+g_\varphi\psi(0),g_\varphi g_\psi)=(\varphi(0),g_\varphi)\bullet(\psi(0),g_\psi).$$

Επομένως $\varphi\psi(x)=\varphi(x)\bullet\psi(x)$, δηλαδή $f(\varphi\psi)=f(\varphi)\bullet f(\psi)$ και $\mathrm{Isom}(V)\cong V\rtimes O(V)$.

Παρατηρήσεις

[1] Η παραπάνω πρόταση μπορεί να αποτελέσει μια ακόμη απόδειξη για τη σχέση

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)\cong\mathbb{R}^n\rtimes O(n)$$

αφού στην περίπτωση του Ευκλειδείου χώρου, ένας πίνακας A δρα ως ισομετρία αν και μόνο αν $AA^t=I$, δηλαδή αν $A\in O(n)$.

[2] Εύκολα προκύπτει επίσης ότι $\mathrm{Isom}(S^n)\cong O(n+1)$ αφού όπως έχουμε σημειώσει στις ενότητες 6.2 και 6.7, η S^n είναι το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^{n+1}$ με Ευκλείδεια νόρμα 1. Η απόσταση δύο σημείων A, $B\in S^n$ είναι η Ευκλείδεια γωνία μεταξύ των [0,A] και [0,B] στο $0\in\mathbb{R}^{n+1}$. Εφόσον αυτή η γωνία είναι το arcsin του ημίσεος της Ευκλείδειας απόστασης d(A,B), οποιαδήποτε ισομετρία του $\mathbb{E}^{n+1}$ που σταθεροποιεί το 0 πρέπει να περιορίζεται σε μια ισομετρία της S^n. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε ισομετρία της $S^n\subseteq\mathbb{E}^{n+1}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια ισομετρία του $\mathbb{E}^{n+1}$. Έστω, λοιπόν, φ μια ισομετρία της S^n. Η επέκτασή της στον $\mathbb{E}^{n+1}$ δίνεται γράφοντας κάθε $x\in\mathbb{E}^{n+1}$ σε πολικές συντεταγμένες ως t_xv_x, όπου v_x είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και $t_x\geq0$ πραγματικός αριθμός από τη

σχέση:

$$\tilde{\varphi}(tv) = t\varphi(v)$$

επομένως

$$t_{\tilde{\varphi}(x)} = t_x \text{ , για όλα τα } x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Αν συμβολίσουμε με α(x,y) τη γωνία μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων [0,x] και [0,y], επειδή η φ είναι ισομετρία θα έχουμε:

$$\alpha\left(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)\right) = \alpha\left(\varphi(v_x), \varphi(v_y)\right) = \alpha(v_x, v_y) = \alpha(x, y)$$

Αν εφαρμόσουμε, τώρα, το νόμο των συνημιτόνων στο Ευκλείδειο τρίγωνο με κορυφές τα 0, x και y, έχουμε:

$$d\left(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)\right)^2 = t_x^2 + t_y^2 - 2t_x t_y \cos\alpha\left(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)\right) \Leftrightarrow$$
$$d\left(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)\right)^2 = t_x^2 + t_y^2 - 2t_x t_y \cos\alpha\left(x, y\right) = d\left(x, y\right)^2$$

δηλαδή, εκφράζουμε την Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα x και y με τη βοήθεια των αμετάβλητων, μέσω της φ, ποσοτήτων t_x, t_y και α(x,y).

8. Χώροι με Εσωτερική Μετρική

Σε αυτή την ενότητα θα μας απασχολήσουν οι χώροι με εσωτερική μετρική (χώροι Length), μετρικοί χώροι στους οποίους η απόσταση δύο σημείων δίνεται από το infimum των μηκών των καμπυλών που ενώνουν τα σημεία αυτά. Όπως θα δούμε αυτή η απόσταση μπορεί να είναι άπειρη και επομένως εισάγουμε το συμβολισμό $[0,\infty]$ για το διατεταγμένο σύνολο $[0,\infty)$ στο οποίο έχουμε προσαρτήσει το ∞ αξιώνοντας $\infty>\alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α και δεχόμενοι ότι $\alpha+\infty=\infty$ για κάθε $\alpha\in[0,\infty]$.

8.1. Καμπύλη μετρικού χώρου – Μήκος Καμπύλης

Ορισμός 8.1.1

Έστω X ένας μετρικός χώρος. Μια ***καμπύλη*** ή ένα μονοπάτι στον X είναι μια συνεχής απεικόνιση c από ένα συμπαγές διάστημα $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ στον X. Θα λέμε ότι η c ενώνει το σημείο $c(\alpha)$ με το σημείο $c(\beta)$.

Ορισμός 8.1.2

Αν $c_1:[\alpha_1,\beta_1]\to X$ και $c_2:[\alpha_2,\beta_2]\to X$ δύο μονοπάτια τέτοια ώστε $c_1(\beta_1)=c_2(\alpha_2)$, τότε η ***αλυσίδα*** τους είναι το μονοπάτι $c_1:[\alpha_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2]\to X$ που ορίζεται ως:

$$c(t)=\begin{cases} c_1(t), & t\in[\alpha_1,\beta_1] \\ c_2(t+\alpha_2-\beta_1), & t\in[\beta_1,\beta_1+\beta_2-\alpha_2] \end{cases}.$$

Γενικότερα, η αλυσίδα μιας πεπερασμένης ακολουθίας μονοπατιών $c_i:[\alpha_i,\beta_i]\to X$ με $c_i(\beta_i)=c_{i+1}(\alpha_{i+1})$ για $i=1, 2, \ldots, n-1$ ορίζεται επαγωγικά συνδέοντας στη σειρά τα

μονοπάτια $c_1, \ldots, c_{n-1}$ και τέλος το μονοπάτι που θα έχει προκύψει με το c_n.

Ορισμός 8.1.3

Έστω X ένας μετρικός χώρος και $c:[\alpha,\beta]\to X$ ένα μονοπάτι. ***Αντίστροφο μονοπάτι*** του c θα καλούμε το μονοπάτι $\overline{c}:[\alpha,\beta]\to X$ που ορίζεται από την $\overline{c}(t)=c(\beta+\alpha-t)$.

Ορισμός 8.1.4

Έστω X ένας μετρικός χώρος. Το ***μήκος*** $\ell(c)$ μιας ***καμπύλης*** $c:[\alpha,\beta]\to X$ είναι το

$$\ell(c)=\sup_{\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=\beta}\sum_{i=0}^{n-1} d\big(c(t_i),c(t_{i+1})\big)$$

όπου το sup θεωρείται πάνω σε όλες τις δυνατές διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$ με $\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=\beta$ (χωρίς φράγμα στο n).

Παρατήρηση

Το μήκος μιας καμπύλης είναι είτε ένας μη αρνητικός αριθμός, είτε άπειρο.

Ορισμός 8.1.5

Μία καμπύλη θα λέγεται ***ευθυγραμμίσιμη*** αν το μήκος της είναι πεπερασμένο.

Πρόταση 8.1.6

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $c:[\alpha,\beta]\to X$ ένα μονοπάτι. Τότε:

[1] $\ell(c)\ge d\big(c(\alpha),c(\beta)\big)$ και $\ell(c)=0$ αν και μόνο αν η c είναι μια σταθερή απεικόνιση.

[2] Αν η φ είναι μια μονότονη απεικόνιση από ένα διάστημα $[\alpha',\beta']$ επί του $[\alpha,\beta]$, τότε $\ell(c)=\ell(c\circ\varphi)$.

[3] Αν c είναι μια αλυσίδα δύο μονοπατιών c_1 και c_2, τότε $\ell(c)=\ell(c_1)+\ell(c_2)$ (προσθετικότητα).

[4] Για το αντίστροφο μονοπάτι $\overline{c}$ του c ισχύει $\ell(\overline{c})=\ell(c)$.

[5] Αν η c είναι ευθυγραμμίσιμη μήκους ℓ, τότε η συνάρτηση $\lambda:[\alpha,\beta]\to[0,\ell]$ που ορίζεται ως $\lambda(t)=\ell\left(c/_{[\alpha,t]}\right)$ είναι μια συνεχής αύξουσα συνάρτηση.

[6] Αν η c και η λ είναι όπως στο [5], τότε υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι $\tilde{c}:[0,\ell]\to X$ τέτοιο ώστε $\tilde{c}\circ\lambda=c$ και $\ell\left(\tilde{c}/_{[0,t]}\right)=t$ (αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου)

[7] Έστω (c_n) μια ακολουθία μονοπατιών $[\alpha,\beta]\to X$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα μονοπάτι c. Αν το c είναι ευθυγραμμίσιμο, τότε για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει ένας ακέραιος $N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε $\ell(c)\le \ell(c_n)+\varepsilon$, οποτεδήποτε $n>N(\varepsilon)$.

Απόδειξη

Οι ισχυρισμοί [1], [2], [3] και [4] προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό.

Για το [5], αν $c:[\alpha,\beta]\to X$ είναι μια ευθυγραμμίσιμη καμπύλη μήκους ℓ, θα πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\lambda:[\alpha,\beta]\to[0,\ell]$ που ορίζεται ως $\lambda(t)=\ell\left(c/_{[\alpha,t]}\right)$ είναι μια συνεχής γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Αφού η c είναι ευθυγραμμίσιμη, αν θεωρήσουμε ότι το μονοπάτι $c/_{[\alpha,\ t+h]}$ είναι η αλυσίδα των μονοπατιών $c/_{[\alpha,\ t]}$ και $c/_{[t,\ t+h]}$, με βάση το [1] και το [3] της ίδιας πρότασης έχουμε

$$\lambda(t+h)=\lambda(t)+\ell\left(c/_{[t,t+h]}\right)\Leftrightarrow \lambda(t+h)-\lambda(t)=\ell\left(c/_{[t,t+h]}\right)\le d\big(c(t+h),c(t)\big)$$

δηλαδή

$$d\big(c(t+h),c(t)\big)\le \lambda(t+h)-\lambda(t)\text{, για όλα τα } \alpha\le t\le t+h\le\beta.$$

Αφού η c είναι συνεχής έπεται ότι και η λ είναι συνεχής και προφανώς αύξουσα.

Το [6] προκύπτει άμεσα από το [2] και το [5] ($\ell(\tilde{c}\circ\lambda)=\ell(\tilde{c})=\ell(c)=\ell$).

Για το [7], αν $c:[\alpha,\beta]\to X$ είναι ένα ευθυγραμμίσιμο μονοπάτι, τότε αφού η c είναι συνεχής θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $d\big(c(t),c(t')\big)<\frac{\varepsilon}{2}$ για όλα τα t, $t'\in[\alpha,\beta]$ με $|t-t'|<\delta$. Επιλέγουμε λοιπόν μια διαμέριση $\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_k=\beta$ τέτοια, ώστε

$$\ell(c)\le\sum_{i=0}^{k-1}d\big(c(t_i),c(t_{i+1})\big)+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (8.1.6.1)$$

και στη συνέχεια ένα $N(\varepsilon)$ αρκετά μεγάλο ώστε $d\big(c(t),c_n(t)\big)<\frac{\varepsilon}{4k}$, για όλα τα $n>N(\varepsilon)$ και για όλα τα $t\in[\alpha,\beta]$. Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$d\big(c(t_i),c(t_{i+1})\big)\le d\big(c(t_i),c_n(t)\big)+d\big(c_n(t),c_n(t_{i+1})\big)+d\big(c_n(t_{i+1}),c(t_{i+1})\big)\le$$
$$\le\frac{2\varepsilon}{4k}+d\big(c_n(t),c_n(t_{i+1})\big)$$

για όλα τα $n>N(\varepsilon)$, οπότε η (8.1.6.1) δίνει

$$\ell(c) \le k\frac{\varepsilon}{2k} + \sum_{i=0}^{k-1} d\left(c_n(t), c_n(t_{i+1})\right) + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon + \ell(c_n)\text{, για όλα τα } n>N(\varepsilon).$$

Ορισμός 8.1.7

Ένα μονοπάτι c: [α,β]→X θα λέμε ότι έχει παραμετρικοποιηθεί ανάλογα προς το μήκος τόξου αν η απεικόνιση $\lambda:[\alpha,\beta]\to[0,\ell]$ που περιγράψαμε στο [5] της παραπάνω πρότασης είναι γραμμική.

Παρατηρήσεις

[1] Από το [2] και το [5] της πρότασης 8.1.6 άμεσα έπεται ότι κάθε μονοπάτι στον μετρικό χώρο X μήκους ℓ, έχει την ίδια εικόνα με ένα μονοπάτι [0,1]→X το οποίο έχει μήκος ℓ και έχει παραμετρικοποιηθεί ανάλογα προς το μήκος τόξου.

[2] Από το [5] της πρότασης 8.1.6 έπεται επίσης ότι αν ένα μονοπάτι στον X ενώνει το x με το y και έχει μήκος d(x,y), τότε η αναπαραμέτρησή του με μήκος τόξου είναι ένα γεωδαισιακό μονοπάτι που ενώνει το x με το y. Επιπλέον, σε συνδυασμό με το [1] της ίδιας πρότασης, αν το c είναι γεωδαισιακό μονοπάτι τότε έχει το ελάχιστο μήκος από όλα τα μονοπάτια που ενώνουν το x με το y ($\ell(c) = d(x,y)$).

[3] Για κάθε (συνεχές) μονοπάτι c: [0,1]→X είναι:

$$\ell(c) = \sup_{n>0} \sum_{i=0}^{n-1} d\left(c\left(\frac{i}{n}\right), c\left(\frac{i+1}{n}\right)\right).$$

Πρόταση 8.1.8

Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Ο X είναι γεωδαισιακός αν και μόνο αν για κάθε x, y∈X, υπάρχει μ∈X τέτοιο ώστε $d(x,\mu) = d(y,\mu) = \frac{1}{2}d(x,y)$.

Απόδειξη

(⇒) Αν ο X είναι ένας γεωδαισιακός χώρος και x, y∈X, τότε υπάρχει μια γεωδαισιακή c:[0,d(x,y)]→X με x=c(0) και y=c(d(x,y)).

Τότε για το σημείο $\mu = c\left(\frac{d(x,y)}{2}\right)$ είναι

$$d(x,\mu) = d\left(c(0), c\left(\frac{d(x,y)}{2}\right)\right) = \left|0 - \frac{1}{2}d(x,y)\right| = \frac{1}{2}d(x,y) \text{ και}$$

$$d(y,\mu)=d\left(c(d(x,y)),c\left(\frac{d(x,y)}{2}\right)\right)=\left|d(x,y)-\frac{1}{2}d(x,y)\right|=\frac{1}{2}d(x,y)$$

επομένως το μ ικανοποιεί την $d(x,\mu)=d(y,\mu)=\frac{1}{2}d(x,y)$.

($\Leftarrow$) Έστω, τώρα, ότι για κάθε x, y$\in$X, υπάρχει μ$\in$X τέτοιο ώστε

$$d(x,\mu)=d(y,\mu)=\frac{1}{2}d(x,y). \qquad (8.1.8.1)$$

Για να αποδείξουμε ότι ο X είναι γεωδαισιακός αρκεί να κατασκευάσουμε ένα γεωδαισιακό μονοπάτι c που ενώνει το x με το y. Ορίζουμε, λοιπόν, την σ:[0,1]→X ως εξής:

Θεωρούμε σ(0)=x και σ(1)=y και $\sigma\left(\frac{1}{2}\right)=\mu$ όπου το μ$\in$X είναι αυτό που ικανοποιεί την (8.1.8.1). Για $\sigma\left(\frac{1}{4}\right)=\mu_1$, όπου μ_1 είναι το σημείο εκείνο του X που ικανοποιεί την (8.1.8.1) αν όπου x=x και $y=\sigma\left(\frac{1}{2}\right)$. Ανάλογα καθορίζουμε την τιμή της σ στο $\frac{3}{4}$ αλλά και σε κάθε $t=\frac{k}{2^m}\in[0,1]$, όπου k=0, 1, 2, …, 2^m και m$\in$IN. Με αυτό τον τρόπο η σ ορίζεται σε ένα πυκνό υποσύνολο A του [0,1] ενώ

$$d(\sigma(t),\sigma(t'))\le d(x,y)\cdot|t-t'|,\ \text{για κάθε } t,\ t'\in A,$$

(ουσιαστικά η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα για κάθε t, t΄$\in$A, από κατασκευή) δηλαδή η σ:A→X είναι Lipschitz με σταθερά το d(x,y). Επειδή ο X είναι πλήρης, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση c:[0,1]→X η οποία επεκτείνει την σ και ο περιορισμός της στο A είναι η σ. Η c επιπλέον είναι Lipschitz με την ίδια σταθερά δηλαδή το d(x,y) και επομένως ισχύει

$$d(c(t),c(t'))\le d(x,y)\cdot|t-t'|,\ \text{για κάθε } t,\ t'\in[0,1].$$

Όμως $\ell(c)=\sup\limits_{0=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}d\left(c(t_i),c(t_{i+1})\right)\le d(x,y)\cdot\left(\sup\limits_{0=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|t_i-t_{i+1}|\right)=d(x,y)$

επομένως $\ell(c)\le d(x,y)$. Από το [1] της πρότασης 8.1.6 έχουμε όμως ότι $\ell(c)\ge d(x,y)$ και συνεπώς είναι $\ell(c)=d(x,y)$.

Από την κατασκευή αυτή προκύπτει ότι η $\gamma:[0,d(x,y)]\to X$ με $\gamma(t)=c\left(\frac{t}{d(x,y)}\right)$ είναι μια γεωδαισιακή που ενώνει το x με το y.

8.2. Χώροι με εσωτερική μετρική

Ορισμός 8.2.1

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Η d θα καλείται ***εσωτερική μετρική*** αν η απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων x, y του X είναι ίση με το infimum των μηκών των ευθυγραμμίσιμων καμπυλών που ενώνουν τα σημεία αυτά. Αν δεν υπάρχουν τέτοιες καμπύλες τότε θεωρούμε $d(x,y)=\infty$. Αν η d είναι μια εσωτερική μετρική τότε ο (X,d) καλείται ***χώρος με εσωτερική μετρική*** (ή ***χώρος Length***).

Ορισμός 8.2.2

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $\bar{d}:X\times X\to[0,\infty]$ η απεικόνιση η οποία σε κάθε ζεύγος x, y του X αντιστοιχίζει το infimum των μηκών των ευθυγραμμίσιμων καμπυλών που ενώνουν τα σημεία αυτά (αν δεν υπάρχουν τέτοιες καμπύλες τότε θεωρούμε $d(x,y)=\infty$). Τότε:

[1] Η $\bar{d}$ είναι μετρική.

[2] $\bar{d}(x,y)\geq d(x,y)$, για κάθε $x, y\in X$.

[3] Αν η $c:[\alpha,\beta]\to X$ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία που επάγεται από την $\bar{d}$, τότε είναι συνεχής ως προς την τοπολογία που επάγεται από την d (το αντίστροφο δεν ισχύει).

[4] Αν μια απεικόνιση είναι μια ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στον (X,d), τότε είναι μια συνεχής και ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στον $(X,\bar{d})$.

[5] Το μήκος μιας καμπύλης $c:[\alpha,\beta]\to X$ στον $(X,\bar{d})$ είναι το ίδιο με το μήκος της στον (X,d).

[6] Ισχύει $\bar{\bar{d}}=\bar{d}$.

Απόδειξη

Οι [1] και [2] προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του μήκους μιας καμπύλης και τον ορισμό της εσωτερικής μετρικής. Η [3] έπεται άμεσα από το [2] της ίδιας πρότασης.

Για το [4], έστω c:[α,β]→X ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στον (X,d) μήκους ℓ. Τότε από το [5] της πρότασης 8.1.6, έχουμε ότι η συνάρτηση $\lambda:[\alpha,\beta]\to[0,\ell]$ που ορίζεται ως $\lambda(t)=\ell\left(c/_{[\alpha,t]}\right)$ είναι μια συνεχής και αύξουσα συνάρτηση και

$$\bar{d}\big(c(t+h),c(t)\big)=\inf\{\ell(c)/c:\text{ενώνει τα } c(t),c(t+h)\}\le\ell\left(c/_{[t,t+h]}\right)=$$
$$=\ell\left(c/_{[\alpha,t+h]}\right)-\ell\left(c/_{[\alpha,t]}\right)=\lambda(t+h)-\lambda(t)\to 0$$

καθώς το h→0, επομένως η c είναι μια συνεχής και ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στον $(X,\bar{d})$.

Για το [5], έστω c:[α,β]→X μια καμπύλη με μήκος $\bar{\ell}(c)$ αναφορικά με την $\bar{d}$ και μήκος $\ell(c)$ αναφορικά με την d. Προφανώς είναι $\bar{\ell}(c)\ge\ell(c)$, αφού

$$\bar{\ell}(c)=\sup_{\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=\beta}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{d}\big(c(t_i),c(t_{i+1})\big)\le\sup_{\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=\beta}\sum_{i=0}^{n-1}\ell\left(c/_{[t_i,t_{i+1}]}\right)=\ell(c),$$

ενώ από το [2] της ίδιας πρότασης έχουμε

$$\bar{\ell}(c)=\sup_{\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=\beta}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{d}\big(c(t_i),c(t_{i+1})\big)\ge\sup_{\alpha=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=\beta}\sum_{i=0}^{n-1}d\big(c(t_i),c(t_{i+1})\big)=\ell(c)$$

επομένως $\bar{\ell}(c)=\ell(c)$.

Από το [4] και το [5] έπεται άμεσα ότι μια καμπύλη c είναι ευθυγραμμίσιμη στον $(X,\bar{d})$ αν και μόνο αν είναι ευθυγραμμίσιμη στον (X,d) και $\bar{\ell}(c)=\ell(c)$, επομένως από τον ορισμό 8.2.9 είναι

$$\bar{\bar{d}}(x,y)=\inf\{\bar{\ell}(c)/c:\text{ενώνει τα } x,y\}=$$
$$=\inf\{\ell(c)/c:\text{ενώνει τα } x,y\}\ell\left(c/_{[t,t+h]}\right)=.$$
$$=\bar{d}(x,y)$$

Παρατήρηση

Από το [2] και το [6] της παραπάνω πρότασης άμεσα έπεται ότι $\bar{d}=d$ αν και μόνο αν ο (X,d) είναι ένας χώρος με εσωτερική μετρική.

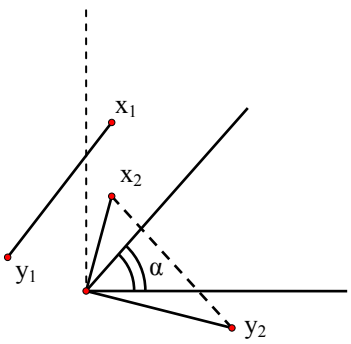
Ορισμός 8.2.3

Η επαγόμενη ***εσωτερική μετρική*** ενός ***υποσυνόλου*** Y ενός μετρικού χώρου (X,d) είναι η εσωτερική μετρική που συνδέεται με τον περιορισμό της d στον Y×Y (και όχι

ο περιορισμός της $\overline{d}$ στον $Y\times Y$).

Παράδειγμα

Θεωρούμε στο Ευκλείδειο επίπεδο το συμπλήρωμα ενός ανοικτού τομέα γωνίας $\alpha<\pi$, δηλαδή τον $X=\{x\in IR^2/<x,\varepsilon_1>\leq\cos(\alpha/2)\|x\|\}$. Ο X με την επαγόμενη εσωτερική μετρική $\overline{d}$ του IE^2 είναι ένας χώρος με εσωτερική μετρική. Είναι επίσης ένας μοναδικά γεωδαισιακός χώρος αφού υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή που ενώνει κάθε ζεύγος σημείων του. Πιο συγκεκριμένα, αν το γεωδαισιακό μονοπάτι [x,y] του IE^2 κείται εξολοκλήρου στον X τότε αυτό είναι και το μοναδικό γεωδαισιακό μονοπάτι που ενώνει το x με το y, διαφορετικά το μοναδικό γεωδαισιακό μονοπάτι που ενώνει το x με το y είναι η αλυσίδα των μοναδικών γεωδαισιακών μονοπατιών [x,0] και [0,y] του IE^2.



Γενικά ένας χώρος με εσωτερική μετρική δεν είναι πάντα γεωδαισιακός. Για παράδειγμα, ο $X=\{x\in IR^2/x\neq 0\}$ είναι ένας χώρος με εσωτερική μετρική με την επαγόμενη μετρική του Ευκλείδειου επιπέδου, όμως δεν είναι γεωδαισιακός αφού δεν υπάρχει γεωδαισιακή που να ενώνει το $x\in X$ με το $-x$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ο εν λόγω χώρος δεν είναι πλήρης. Στη συνέχεια, διατυπώνουμε μια πρόταση η οποία μας παρέχει μια συνθήκη ώστε ένας χώρος με εσωτερική μετρική να είναι γεωδαισιακός.

Πρόταση 8.2.4 (Θεώρημα Hopf – Rinow)

Έστω X ένας χώρος με εσωτερική μετρική. Αν ο X είναι πλήρης και τοπικά συμπαγής[4], τότε

[1] Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

[2] Ο X είναι γεωδαισιακός χώρος.

Απόδειξη

[1] Αρκεί να αποδείξουμε ότι για ένα σταθερό σημείο $\alpha\in X$ οι κλειστές μπάλες με κέντρο το α και ακτίνα $r>0$ είναι συμπαγείς. Ας συμβολίσουμε με $\overline{B}(\alpha,r)=\{x\in X/d(x,\alpha)\leq r\}$ την κλειστή μπάλα με κέντρο το α και ακτίνα r και έστω

[4] Ένας τοπολογικός χώρος X είναι τοπικά συμπαγής αν για κάθε $x\in X$, υπάρχει $\rho>0$ τέτοιο, ώστε η κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα ρ να είναι συμπαγής.

$I = \{\rho \geq 0 / \overline{B}(\rho)$ συμπαγής$\}$. Το I περιέχει το 0 και είναι διάστημα. Πράγματι· αν η $\overline{B}(\alpha,\rho)$ είναι συμπαγής για κάποιο ρ τότε και κάθε s με $0 \leq s \leq \rho$ ανήκει στο I αφού $\overline{B}(\alpha,s) \subseteq \overline{B}(\alpha,\rho)$. Ισχυριζόμαστε ότι $I=[0,+\infty)$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι το I είναι ανοικτό και κλειστό στο $[0,+\infty)$.

Εφόσον ο X είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει $\rho>0$ τέτοιο, ώστε η $\overline{B}(\alpha,\rho)$ να είναι συμπαγής. Αφού, λοιπόν, $\overline{B}(\alpha,\rho)$ συμπαγές σύνολο μπορούμε να το καλύψουμε με πεπερασμένο πλήθος από ανοικτές μπάλες $B(x_i,\varepsilon_i)$ τέτοιες ώστε οι $\overline{B}(x_i,\varepsilon_i)$ να είναι συμπαγείς. Τότε, η πεπερασμένη ένωση $\bigcup_i \overline{B}(x_i,\varepsilon_i)$ είναι συμπαγής και περιέχει την $\overline{B}(\alpha,\rho+\delta)$ για κάποιο $\delta>0$. Το $\overline{B}(\alpha,\rho+\delta)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\bigcup_i \overline{B}(x_i,\varepsilon_i)$ και επομένως $\rho+\delta \in I$ που σημαίνει ότι το I είναι ανοικτό.

Έστω, τώρα, ότι το $[0,\rho) \subset I$, $\rho>0$, δηλαδή $r \in I$ για κάθε $r<\rho$. Για να δείξουμε ότι το I είναι κλειστό, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\rho \in I$ ή ότι η $\overline{B}(\alpha,\rho)$ είναι συμπαγής. Αρκεί, επομένως, να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία σημείων $x_n \in \overline{B}(\alpha,\rho)$ με $d(\alpha,x_n) \to \rho$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Σταθεροποιούμε μια τέτοια ακολουθία x_n. Έστω ε_κ μια ακολουθία θετικών αριθμών που συγκλίνει στο 0. Αφού ο X είναι χώρος με εσωτερική μετρική, για κάθε κ και για κάθε n μπορούμε να βρούμε ένα σημείο y_n^κ τέτοιο, ώστε $y_n^\kappa \in \overline{B}\left(\alpha,\rho-\frac{\varepsilon_\kappa}{2}\right)$ και $d(y_n^\kappa,x_n) \leq \varepsilon_\kappa$, δηλαδή $d(\alpha,y_n^\kappa) \leq \rho-\frac{\varepsilon_\kappa}{2}$ και $d(y_n^\kappa,x_n) \leq \varepsilon_\kappa$. Η ύπαρξη y_n^κ εξασφαλίζεται καθώς αν δεν υπήρχε τέτοιο y_n^κ τότε $\overline{B}(x_n,\varepsilon_\kappa) \cap \overline{B}\left(\alpha,\rho-\frac{\varepsilon_\kappa}{2}\right) = \varnothing$ και επομένως όλα τα μονοπάτια από το α στο x_n θα είχαν μήκος τουλάχιστον $\rho+\frac{\varepsilon_\kappa}{2}$ (το $\rho+\frac{\varepsilon_\kappa}{2}$ είναι το άθροισμα των ακτίνων των $\overline{B}(x_n,\varepsilon_\kappa)$ και $\overline{B}\left(\alpha,\rho-\frac{\varepsilon_\kappa}{2}\right)$), άτοπο αφού ο X είναι χώρος με εσωτερική μετρική και $d(\alpha,x_n) \leq \rho$. Για να βρούμε αυτό το y_n^κ επιλέγουμε ένα μονοπάτι από το α στο x_n με μήκος μικρότερο από $d(\alpha,x_n)+\frac{\varepsilon_\kappa}{2}$ και παίρνουμε κατάλληλο y_n^κ πάνω σε αυτό. Για

κάθε κ, τα σημεία $y_n^\kappa \in \overline{B}\left(\alpha, \rho - \frac{\varepsilon_\kappa}{2}\right)$ η οποία είναι συμπαγής και επομένως από την ακολουθία $\left(y_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ παίρνουμε μια συγκλίνουσα υπακολουθία της $\left(y_{n_\rho^1}^1\right)_{\rho\in\mathbb{N}}$. Από την ακολουθία $\left(y_{n_\rho^1}^2\right)_{\rho\in\mathbb{N}}$ παίρνουμε επίσης μια συγκλίνουσα υπακολουθία της και ούτω καθ'εξής. Παίρνουμε, λοιπόν, με αυτό τον τρόπο μια ακολουθία ακεραίων $(n_\rho)_{\rho\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε η ακολουθία $\left(y_{n_\rho}^\kappa\right)_{\rho\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει για κάθε κ. Ισχυριζόμαστε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\left(x_{n_\rho}\right)_{\rho\in\mathbb{N}} \in X$ είναι Cauchy. Πράγματι·

έστω ε>0. Επιλέγουμε κ τέτοιο ώστε $\varepsilon_\kappa < \frac{\varepsilon}{3}$. Εφόσον η $\left(y_{n_\rho}^\kappa\right)_{\rho\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, είναι Cauchy και επομένως υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $d\left(y_{n_\rho}^\kappa, y_{n_\sigma}^\kappa\right) < \frac{\varepsilon}{3}$, για όλα τα n_ρ, $n_\sigma \geq m$. Τότε είναι $d\left(x_{n_\rho}, x_{n_\sigma}\right) \leq d\left(x_{n_\rho}, y_{n_\rho}^\kappa\right) + d\left(y_{n_\rho}^\kappa, y_{n_\sigma}^\kappa\right) + d\left(y_{n_\sigma}^\kappa, x_{n_\sigma}\right) < \varepsilon_\kappa + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon_\kappa < \varepsilon$ για όλα τα n_ρ, $n_\sigma \geq m$. Επομένως η $\left(x_{n_\rho}\right)_{\rho\in\mathbb{N}} \in X$ είναι Cauchy και αφού ο X είναι πλήρης, θα συγκλίνει σε ένα σημείο της $\overline{B}(\alpha,\rho)$. Άρα η $\overline{B}(\alpha,\rho)$ είναι συμπαγής και επομένως $\rho\in I$, δηλαδή το I είναι κλειστό. Αφού λοιπόν το I είναι ανοικτό και κλειστό στο $[0,\infty)$ έπεται ότι $I=[0,\infty)$.

[2] Για να αποδείξουμε ότι ο X είναι γεωδαισιακός χώρος εφόσον είναι πλήρης με βάση τη πρόταση 8.1.8, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x, y\in X$, υπάρχει $\mu\in X$ τέτοιο ώστε $d(x,\mu) = d(y,\mu) = \frac{1}{2}d(x,y)$. Επειδή ο X είναι χώρος με εσωτερική μετρική, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ένα σημείο $\mu_n\in X$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2}d(x,y) \leq \max\left\{d(x,\mu_n), d(y,\mu_n)\right\} \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \frac{1}{n}.$$

Όμως το μ_n ανήκει σε ένα συμπαγές σύνολο $\overline{B}\left(x, \frac{1}{2}d(x,y)+1\right)$ και επομένως υπάρχει μια υπακολουθία της $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο μ για το οποίο θα είναι

$d(x,\mu) = d(y,\mu) = \frac{1}{2}d(x,y)$. Επομένως ο Χ είναι γεωδαισιακός.

Παρατήρηση

Από την παραπάνω πρόταση έπεται άμεσα ότι κάθε πλήρης τοπικά συμπαγής χώρος με εσωτερική μετρική είναι ένας κανονικός γεωδαισιακός χώρος.

Πόρισμα 8.2.5

Ένας χώρος με εσωτερική μετρική είναι κανονικός αν και μόνο αν είναι πλήρης και τοπικά συμπαγής.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω Χ ένας κανονικός χώρος με εσωτερική μετρική. Εφόσον κάθε κλειστή μπάλα είναι $\overline{B}(x,r)$ είναι συμπαγής ο Χ είναι τοπικά συμπαγής. Έστω τώρα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy στον Χ. Τότε η x_n περιέχεται σε μια κλειστή μπάλα $\overline{B}(x,r)$ για κάποιο $x\in X$ και $r>0$ και επομένως έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού όμως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy θα συγκλίνει και αυτή, επομένως ο Χ είναι πλήρης.

($\Leftarrow$) Αν ο Χ είναι ένας χώρος με εσωτερική μετρική πλήρης και τοπικά συμπαγής, τότε, από την παρατήρηση στην πρόταση 8.2.4, ο Χ είναι κανονικός.

Η πρόταση 8.2.4, ουσιαστικά μας δίνει μια εικόνα για τις «ευθείες» σε ένα χώρο με εσωτερική μετρική και μας παρέχει τις ικανές συνθήκες, ώστε δύο σημεία του να μπορούν πάντα να ενωθούν με μια γεωδαισιακή, απαραίτητη προϋπόθεση αν θέλουμε να μιλάμε για γωνία μεταξύ γεωδαισιακών με κοινή αρχή. Αφήνουμε τη διερεύνηση των ικανών και αναγκαίων συνθηκών που πρέπει να πληρούνται ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη αυτής της γωνίας ως μία πρόταση για περαιτέρω μελέτη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Βασιλείου, Ε. και Αραχωβίτης, Ι. *Σημειώσεις Γραμμικής Γεωμετρίας (Τεύχος 1)*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1989.
2. Bourbaki, N. *Elements of Mathematics, General Topology, Chapters 5-10*. Springer, 1989.
3. Bridson, M.R. and Haefliger, A. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
4. Dieudonné, J. *Linear Algebra and Geometry*. Herman, Paris, 1969.
5. Heath, T.L. *Euclid, The Thirteen Books of Elements (Vol. 1, 2 and 3)*. Dover Publications, Inc., New York, 2004.
6. Holopainen, I. *Metric Geometry*. 2006.
7. Maor, E. *Τριγωνομετρικά Λουκούμια (μετ. Μιχαηλίδης, Τ.)*. Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 2002.
8. Matos, J. The Historical Development of the Concept of Angle. *The Mathematics Educator* (Summer 1990), pp. 4-11.
9. Matos, J. The Historical Development of the Concept of Angle (2). *The Mathematics Educator* (Summer 1991), pp. 18-24.
10. Morrow, G.R. *Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press, New Jersey, 1970.
11. Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν. και Φαρμάκη Β. *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1997.
12. Σπανδάγος, Ε. *Τα Οπτικά και τα Κατοπτρικά του Ευκλείδου*. Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 2006.
13. Σταμάτης, Σ.Σ. *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, Εισαγωγή – Αρχαίον Κείμενον – Μετάφρασις (Τόμοι Ι – IV)*. ΟΕΔΒ, Αθήναι, 1975.
14. Στράντζαλος, Χ. *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Μέρος Πρώτο)*. Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1987.
15. Χρυσάκης, Θ. *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1987.