ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών
Η Περίπτωση της Γεωμετρίας

Μπιζμπιάνος Μιλτιάδης

Επιβλέπων Καθηγητής:
Διονύσιος Λάππας

Αθήνα 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 27η Ιουνίου 2011 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Διονύσιος Λάππας (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής	
2) Παναγιώτης Σπύρου	Επίκουρος Καθηγητής	
3) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Ομότιμος Καθηγητής	

Στην Ξένη,

στο Θοδωρή

και στην Ειρήνη.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

- Τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα, για την προθυμία του να τεθεί Επιβλέπων Καθηγητής στη διπλωματική αυτή, την υπομονή, τις συμβουλές, την καθοδήγηση, αλλά και την ολόπλευρη στήριξή του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.
- Τους καθηγητές κ. Παναγιώτη Σπύρου και κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια, μέλη της τριμελούς επιτροπής, για την υποστήριξη, τη βοήθεια και τις συμβουλές κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής, και ιδιαίτερα για τις γόνιμες συζητήσεις καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τον κ. Γιάννη Θωμαΐδη, για την παροχή παλαιότερων άρθρων του και τη βοήθειά του στην εξεύρεση άλλων άρθρων, απαραίτητων για την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής.
- Τον κ. Κωνσταντίνο Τζανάκη, για τις γόνιμες συζητήσεις που είχαμε.
- Το Μιχάλη Κασκαντάμη για την πολύτιμη βοήθειά του στην αναζήτηση της βιβλιογραφίας.
- Ιδιαίτερα την οικογένειά μου, την Ξένη, το Θοδωρή και την Ειρήνη, για τη συμπαράστασή τους και τη στήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Μίλτος Μπιζμπιάνος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Ιστορική Ανασκόπηση 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Η Ιστορία ως Εργαλείο και η Ιστορία ως Στόχος. . . . 25
Η Ιστορία ως Εργαλείο 25
Η Ιστορία ως Στόχος 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών 31
1. Η εκμάθηση των Μαθηματικών 31
2. Η φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας 35
3. Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών 37
4. Η συναισθηματική προδιάθεση προς τα Μαθηματικά . 40
5. Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως πολιτιστικής – ανθρώπινης προσπάθειας 41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Επιχειρήματα κατά της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών 45
1. Ενστάσεις επιστημολογικού – φιλοσοφικού χαρακτήρα . 45
2. Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα . . 47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών . . . 51
Οι τρεις κατηγορίες προσέγγισης 51
1. Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις 52
2. Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων . 53
3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία . . 54

Οι τρεις μορφές διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών 54
1. Εκμάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών 55
2. Εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία τους 56
3. Καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους 61
Τρόποι εφαρμογής της ιστορίας στη μαθηματική τάξη . . 63
α. Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα 63
β. Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες 67
γ. Ευέλικτες εφαρμογές πιο "τοπικού" χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με τον πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται . . . . . …86
δ. Εφαρμογές πιο "πειραματικού" και εμπειρικού χαρακτήρα 89
ε. Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας 92

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Επιστημολογική και φιλοσοφική προσέγγιση της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών. 97
Η ιστορική – γενετική προσέγγιση του Toeplitz . . . 99
Η προσέγγιση με καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη του Freudenthal 102
Η προσέγγιση με σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων του Brousseau 103
Η προσέγγιση με την κοινωνική – πολιτισμική οπτική του Radford 105
Η προσέγγιση με το παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων

του Boero 106

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η περίπτωση της Γεωμετρίας 109

Γεωμετρικοί υπολογισμοί 110

Γεωμετρικές κατασκευές 113

Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων 114

Οπτική Γεωμετρία 115

Ιστορία της Γεωμετρίας 115

Γεωμετρικοί τόποι 116

Επιχειρηματολογία και αποδείξεις 117

Γεωμετρία και Φυσική 119

Συμπεράσματα 120

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μελέτη περίπτωσης από τη Γεωμετρία 123

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα 123

Διδακτική πρόταση 127

Φύλλο εργασίας πρώτης συνάντησης 129

Φύλλο εργασίας δεύτερης συνάντησης 141

Φύλλο εργασίας τρίτης συνάντησης 160

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 169

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί μια συζήτηση μεταξύ των μαθηματικών όλου του κόσμου σχετικά με τη χρησιμότητα της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, επιχειρούμε να καταγράψουμε τα σπουδαιότερα σημεία της συζήτησης αυτής, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στη Γεωμετρία και τέλος, να παρουσιάσουμε μια δική μας διδακτική πρόταση. Συγκεκριμένα:

Στο 1ο Κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική ανασκόπηση καταγεγραμμένων δηλώσεων, διαπρεπών και μη, μαθηματικών του παρελθόντος, που κατά καιρούς επιχειρηματολόγησαν υπέρ της χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία τους. Καταγράφονται επίσης και ανακοινώσεις επιστημονικών Ενώσεων, επιτροπών και Υπουργείων Παιδείας διαφόρων χωρών, που υποστηρίζουν, καταρχήν, την αναγκαιότητα της γνώσης της ιστορίας των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς και στη συνέχεια τη χρήση της στη διδακτική διαδικασία.

Στο 2ο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στους σκοπούς της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών. Η ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, για να βελτιώσει τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές και για να μας εξηγήσει τι δυσκολεύονται να μάθουν. Η ιστορία ως στόχος αφορά τη μάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά και θεμάτων που αφορούν την ανάπτυξη και την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών και εννοιών.

Στο 3ο Κεφάλαιο γίνεται μια πλήρης καταγραφή του συνόλου των επιχειρημάτων που έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική. Τα επιχειρήματα αυτά, σύμφωνα με τους ερευνητές της συγκεκριμένης περιοχής των Μαθηματικών, ομαδοποιούνται σε πέντε κατηγορίες, ανάλογα με τις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν οι στόχοι και τα προσδοκόμενα οφέλη από την πιθανή ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία

Στο 4ο Κεφάλαιο γίνεται μια πλήρης καταγραφή των επιχειρημάτων κατά της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών. Οι ενστάσεις αυτές έχουν, από

τη μια μεριά επιστημολογικό ή/και φιλοσοφικό χαρακτήρα και αναφέρονται και στις δυσκολίες του εγχειρήματος, και από την άλλη μεριά πρακτικό και διδακτικό χαρακτήρα και αναφέρονται στο υπόβαθρο και τη στάση των διδασκόντων και των διδασκομένων και στην αδυναμία αξιολόγησης των αποτελεσμάτων της ενσωμάτωσης.

Στο 5ο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά καταρχήν στις τρεις κατηγορίες προσέγγισης στο θέμα της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική πράξη. Στη συνέχεια αναλύονται οι τρεις μορφές της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών. Στο τρίτο μέρος του Κεφαλαίου γίνεται εκτενής αναφορά σε όλους τους πιθανούς τρόπους εφαρμογής της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση, καταγράφονται τα χαρακτηριστικά του κάθε τρόπου ξεχωριστά και δίνονται χαρακτηριστικά παραδείγματα για κάθε τρόπο. Ειδικότερα, γίνεται ιδιαίτερη ανάλυση της χρήσης πρωτότυπων πηγών και των ιδιαιτεροτήτων που παρουσιάζονται κατά την ενσωμάτωσή τους στη διδακτική διαδικασία.

Στο 6ο Κεφάλαιο γίνεται η καταγραφή των επιστημολογικών και φιλοσοφικών πλαισίων μέσα στα οποία έχουν διατυπωθεί τα πέντε διαφορετικά είδη προσεγγίσεων της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών. Κυρίαρχες προσεγγίσεις είναι η ιστορική – γενετική προσέγγιση (άμεση και έμμεση) του Toeplitz, η προσέγγιση με καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη του Freudenthal, και η προσέγγιση με σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων του Brousseau. Ακόμη έχουν διατυπωθεί η προσέγγιση με την κοινωνική - πολιτισμική οπτική του Radford και η προσέγγιση με το παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων του Boero.

Στο 7ο Κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά σε προτάσεις και προσπάθειες που έγιναν στο παρελθόν για την ενσωμάτωση της ιστορίας της Γεωμετρίας στη διδασκαλία της, καθώς και η ταξινόμησή τους σε οκτώ διαφορετικές κατηγορίες, που καλύπτουν όλο το φάσμα της Γεωμετρίας.

Στο 8ο Κεφάλαιο κάνουμε μια διδακτική πρόταση για την ενσωμάτωση της ιστορίας της Γεωμετρίας. Αυτή αφορά στην ανάδειξη της διαχρονικότητας του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και στην αλλαγή του πλαισίου χρήσης του στη διάρκεια της ιστορίας των Μαθηματικών. Παραθέτουμε επίσης και τα προτεινόμενα Φύλλα Εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Εδώ και μερικούς αιώνες υπάρχει ενδιαφέρον, ολοένα και αυξανόμενο, σχετικά με τη σχέση της ιστορίας των Μαθηματικών και της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Πολλοί διαπρεπείς μαθηματικοί, αλλά και καθηγητές Μαθηματικών, έχουν κατά καιρούς εκφράσει, με διαφορετικούς τρόπους και για διαφορετικούς λόγους ο καθένας, διάφορες ιδέες σχετικά με τη συσχέτιση των Μαθηματικών και της ιστορίας τους. Θα παραθέσουμε παρακάτω μερικά από τα σημαντικότερα κείμενα και απόψεις από το παρελθόν, που αναδεικνύουν τη σχέση των Μαθηματικών και της ιστορίας τους, αλλά και ενισχύουν την επιχειρηματολογία αυτών που επιθυμούν την ισχυρότερη ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία διδασκαλίας και μάθησής τους.

Ως παλαιότερη σχετική αναφορά για τη συσχέτιση των Μαθηματικών και της ιστορίας τους, η Fasanelli (Fasanelli et al 2000) θεωρεί τον εσωτερικό κανονισμό του Πανεπιστημίου της Πορτογαλίας, που συντάχθηκε το 1772 από τον Jos Monteiro Da Rocha. Ειδικότερα, στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του πρώτου έτους των Μαθηματικών, αναφέρει ότι προκειμένου τα μαθήματα των Μαθηματικών να γίνουν με την κατάλληλη σειρά και να είναι επωφελή για τους φοιτητές, ο φοιτητής - μελετητής της Γεωμετρίας, πριν ξεκινήσουν τα μαθήματα, θα πρέπει να έχει μελετήσει τα προλεγόμενα (prolegomena) (δηλαδή την ιστορία) της μαθηματικής επιστήμης.

Με βάση τα παραπάνω, ο φοιτητής θα κάνει μια σύντομη παρουσίαση για τη χρησιμότητα των Μαθηματικών και την υπεροχή τους έναντι των άλλων επιστημών, καθώς και μία σύνοψη των επιτευγμάτων των Μαθηματικών, ενταγμένη στις χαρακτηριστικότερες χρονικές περιόδους της ιστορίας τους. Βασικός σκοπός της παραπάνω σύνοψης ήταν να γνωρίσουν οι μαθητές τις μαθηματικές ανακαλύψεις που είχαν γίνει πριν από αυτούς, ώστε να μην "ανακαλύψουν" εκ νέου τα ίδια για άλλη μια φορά.

Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του δεύτερου έτους, ο καθηγητής του μαθήματος της Άλγεβρας θα κάνει μια ιστορική αναφορά δείχνοντας την προέλευσή και την εξέλιξή της μέσα από τις πιο αξιοσημείωτες χρονικές στιγμές της. Ειδικότερα θα παρουσιάσει τους λόγους για τους οποίους οι αρχαίοι, παρόλο που γνώριζαν τους θεμελιώδεις κανόνες της Ανάλυσης και είχαν εξαιρετικές ικανότητες, δεν είχαν καταφέρει να βγάλουν τα συμπεράσματα και να κατακτήσουν τις γνώσεις που κατάφεραν οι σύγχρονοι μαθηματικοί.

Τη δεκαετία του 1790, ο διαπρεπής Γάλλος μαθηματικός Joseph Louis Lagrange, στις διαλέξεις του σε μαθηματικούς που θα στελέχωναν τα σχολεία της εποχής στη Γαλλία, έλεγε ότι θα πρέπει να έχουν την περιέργεια για να μάθουν πως οι μεγάλοι μαθηματικοί του παρελθόντος, κατάφερναν με την προσπάθειά τους, μέσα από συχνά λάθη και δύσβατους δρόμους, να επιτύχουν τους σκοπούς τους και να ωφελήσουν με αυτόν τον τρόπο την ανθρωπότητα. Αυτό θα έπρεπε να το κάνουν προκειμένου να χρησιμοποιήσουν την ιστορία των Μαθηματικών ως καθοδήγηση σε παρόμοιες καταστάσεις που θα συναντήσουν στις μελλοντικές έρευνές τους (Fasanelli et al 2000).

Ο Richard J. Gillings στον πρόλογο του βιβλίου του "Mathematics in the time of Pharaohs" αναφέρει ότι ο βρετανός καθηγητής Thomas Cooper, ήδη από το 1811, στις εναρκτήριες διαλέξεις του στο Dickinson College στην Pennsylvania έλεγε στους φοιτητές του τα εξής (Gillings 1982):

> "Η ιστορία μιας τέχνης ή μιας επιστήμης (όπως τα Μαθηματικά) είναι η πλέον κατάλληλη παρουσίαση για τη μελέτη της, καθώς μας δίνει μια καθαρή, περιεκτική και συνοπτική εικόνα της μεθόδου και των τρόπων με τους οποίους έχουν πραγματοποιηθεί η ανάπτυξή της και η εξέλιξή της. Μας παρέχει τη δυνατότητα για να μας προειδοποιήσει για μελλοντικά λάθη μας, αφού μας παρουσιάζει τα λάθη σημαντικών διανοιών των παλαιότερων χρόνων. Μας επιτρέπει επίσης να αποδώσουμε τα εύσημα σε αυτούς που ευεργέτησαν το ανθρώπινο γένος με τις ανακαλύψεις τους."

Το 1817 ο Σκωτσέζος J. Leslie εκδίδει το βιβλίο του "The Philosophy of Arithmetic exhibiting a progressive view to the Theory and Practice of Calculation",

το οποίο σύμφωνα με τους Θωμαΐδη και Καστάνη (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987) είναι ένα από τα πρώτα βιβλία, αν όχι το πρώτο, στο οποίο η ιστορία διαποτίζει όλο το περιεχόμενο του βιβλίου. Στο βιβλίο αυτό ο ρόλος της ιστορίας δεν ήταν εισαγωγικός ή συμπληρωματικός, αλλά μεθοδολογικός. Η ιστορία χρησιμοποιήθηκε για να αναλύσει την πορεία εμφάνισης της αριθμητικής γνώσης και για να συγκρίνει διάφορους τρόπους χειρισμού των αριθμητικών θεμάτων (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987).

Τη δεκαετία του 1820, ο μεγαλύτερος Νορβηγός μαθηματικός Niels Henrik Abel, σύμφωνα με τη Fasanelli, έγραψε στο περιθώριο ενός από τα τετράδιά του (Fasanelli et al 2000):

> "Μου φαίνεται ότι αν κάποιος θέλει να κάνει σημαντική πρόοδο στα Μαθηματικά θα πρέπει να μελετήσει τις αυθεντίες των Μαθηματικών."

Το 1853 ο Γερμανός R. Baltzer δημοσιεύει στη Λειψία το βιβλίο του "Die Element der Mathematic", το οποίο απευθυνόταν σε εκπαιδευτικούς και ήταν εφοδιασμένο με ιστορικές σημειώσεις, με σκοπό την αξιοποίηση της ιστορίας σε διδακτικό επίπεδο (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987).

Στις 16 Ιανουαρίου του 1865, ο Augustus de Morgan στην εναρκτήρια ομιλία του ως πρώτος πρόεδρος της London Mathematical Society, έκανε μια εκτεταμένη αναφορά στη σημασία της ιστορίας των Μαθηματικών τόσο για την κατανόησή τους όσο και για την επίγνωση των δυσκολιών τους (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987). Σύμφωνα με τη Fasanelli, ανέφερε τα εξής (Fasanelli et al 2000):

> "Καμία τέχνη ή επιστήμη δεν μπορεί να είναι ελεύθερη αν δεν μελετηθεί σε σχέση με τις προσωπικότητες του παρελθόντος. Είναι εκπληκτικό το πώς οι μαθηματικοί μιλούν τόσο παράξενα για τα Μαθηματικά, επειδή δεν γνωρίζουν την ιστορία του αντικειμένου τους. (…) Οι μαθηματικοί χρειάζεται να γνωρίζουν τη διαδρομή των ανακαλύψεων που έχουν επιτευχθεί στους διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών."

Το 1873 ο Eugenio Beltrami, καθηγητής Μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Μπολόνια, σε άρθρο του στην "Giornale di matematiche" (Εφημερίδα των Μαθηματικών) της εποχής, έγραψε τα εξής (Fasanelli et al 2000):

> "Οι φοιτητές θα πρέπει να μάθουν να μελετούν, σε πρώιμο στάδιο, τα έργα των μεγάλων μαθηματικών, αντί να ασχολούνται με άκαρπες και ατελείωτες κολεγιακές ασκήσεις οι οποίες δεν έχουν καμιά χρησιμότητα (...) και που καλύπτουν την τεμπελιά με άχρηστες δραστηριότητες."

Το 1877 ο Βέλγος P. Mansion, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Γάνδης (Ghent), δημοσιεύει το άρθρο με τίτλο "Note sur l' enseignament des Mathémathiques dans les colleges". Στο άρθρο αυτό θίγεται το ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών, ενώ το 1883 ο S. Günther, Γερμανός δάσκαλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσίασε την πρώτη εμπεριστατωμένη εργασία για το ρόλο της ιστορίας στο μάθημα των Μαθηματικών (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987).

Ο J. W. L. Glaisher, το 1890, μιλώντας ως Πρόεδρος στο Πρώτο Τμήμα της British Association for the Advancement of Science, είπε τα εξής (Cajori 1894, Fasanelli et al 2000, Siu 2000):

> "Σε κάθε πραγματεία, διατριβή ή βιβλίο ανώτατου επιπέδου, είναι πάντα επιθυμητό να περιέχονται αναφορές σε πρωτότυπα απομνημονεύματα μεγάλων μαθηματικών, και αν είναι δυνατόν να δίνονται και σύντομες ιστορικές αναφορές. Είμαι βέβαιος ότι καμιά επιστήμη δεν χάνει περισσότερο από τα Μαθηματικά από κάθε προσπάθεια να αποσυνδεθεί από την ιστορία της."

Το 1896, ο φημισμένος ιστορικός των Μαθηματικών Florian Cajori, στο βιβλίο του "A History of Elementary Mathematics with Hints of Methods of Teaching" έγραψε τα εξής (Cajori 1896, Fasanelli et al 2000):

> "Η εκπαίδευση ενός παιδιού πρέπει να είναι σύμφωνη με τον τρόπο, τη μέθοδο και τη σειρά της εκπαίδευσης του ανθρώπινου γένους, αν αυτή εξεταστεί ιστορικά. (...) Αν αυτή η άποψη, η οποία έχει υιοθετηθεί από τον Pestalozzi και τον Froebel, είναι αληθής, τότε φαίνεται ότι η γνώση της ιστορίας μιας επιστήμης

πρέπει να αποτελέσει μια αποτελεσματική βοήθεια στη διδασκαλία της επιστήμης. Είτε η παραπάνω άποψη είναι αληθής, είτε ψευδής, η εμπειρία πολλών δασκάλων καταδεικνύει τη σημασία της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους."

Το 1897, ο Γερμανός μαθηματικός Hermann Schubert, στο βιβλίο του "Mathematical Essays and Recreations", έγραψε τα εξής (Fasanelli et al 2000):

"Η πλειονότητα των μαθηματικών αληθειών που γνωρίζουμε σήμερα, προϋποθέτουν το διανοητικό μόχθο πολλών αιώνων. Γι' αυτό, ένας μαθηματικός που θέλει να αποκτήσει μια πλήρη κατανόηση της σύγχρονης έρευνας στον τομέα αυτό, θα πρέπει να σκεφτεί σε γρηγορότερο ρυθμό τις μαθηματικές εργασίες που έχουν προηγηθεί στη διάρκεια των αιώνων."

Το 1907, ο Felix Klein, σε διαλέξεις που έδωσε στα πλαίσια επιμόρφωσης δασκάλων των Μαθηματικών και που αποτέλεσαν τη βάση του περιεχομένου του φημισμένου του βιβλίου του "Elementary mathematics from an advanced standpoint", κάνει ευρεία χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών. Οι Θωμαΐδης, Καστάνης αναφέρουν ένα απόσπασμα από το βιβλίο του (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987):

" Ένα ουσιαστικό εμπόδιο στη ανάδυση μιας τόσο φυσικής και αληθινά επιστημονικής μεθόδου διδασκαλίας είναι η έλλειψη ιστορικής γνώσης που τόσο συχνά γίνεται αισθητή. Για να το καταπολεμήσω αυτό αποφάσισα να εισάγω ιστορικές παρατηρήσεις στην παρουσίασή μου και κάνοντάς το, πιστεύω ότι σας έχω ξεκαθαρίσει πόσο αργά γεννήθηκαν όλες οι μαθηματικές ιδέες· πως σχεδόν πάντα εμφανίζονται πρώτα σε προφητικές μάλλον μορφές και μόνο μετά από μακριά ανάπτυξη αποκρυσταλλώθηκαν σε αυστηρές μορφές τόσο οικείες στη συστηματική παρουσίαση. Είναι κρυφή μου ελπίδα ότι αυτή η γνώση θα αποκτήσει μια διαρκή και τελεσφόρα επίδραση πάνω στο χαρακτήρα της δικής σας διδασκαλίας."

Το 1922, ο Κ. Ν. Λαμπίρης δημοσίευσε ένα άρθρο του στο περιοδικό "Παιδαγωγός" με τίτλο "Ιστορικαί παρεκβάσεις κατά την διδασκαλίαν των Μαθηματικών", στο οποίο επιχείρησε να οριοθετήσει την εφαρμογή της ιστορίας κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ανάμεσα στα άλλα γράφει (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987):

> "Δεν εννοώ με όσα λέω ότι πρέπει να μεταβάλλουμε το μάθημα των Μαθηματικών. (…) Όμως με τις σύντομες ιστορικές παρεκβάσεις τις οποίες συνιστούμε, θα συμπληρώσουμε και θα τελειοποιήσουμε τη μαθηματική μόρφωση των μαθητών προσπαθώντας να πετύχουμε τρία πράγματα: α) να εννοήσουν οι μαθητές τη βαθμιαία, συνεχή και αδιάλειπτη πρόοδο της επιστήμης χάρη στην εργασία των επίλεκτων πνευμάτων κάθε φυλής, β) να εκτιμήσουν τη μεγάλη συμβολή την οποία πρόσφεραν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί στη θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης και γ) με τη σύγκριση, όπου αυτή είναι δυνατή, των διαφορετικών μεθόδων με τις οποίες λύθηκαν εκάστοτε κάποια θεμελιώδη ζητήματα, να εισέλθουν βαθύτερα στο πνεύμα των μεθόδων αυτών και να εκτιμήσουν κατάλληλα την αξία κάθε μεθόδου."

Το 1930, η Vera Sanford, στο βιβλίο της "A Short History of Mathematics", έγραψε τα εξής (Fasanelli et al 2000):

> "Πριν περίπου έναν αιώνα ο Augustus De Morgan παρουσίασε την άποψή του σχετικά με τα βιβλία της Αριθμητικής, η οποία εν συντομία είναι η εξής: *Η πιο κατάλληλη υπόδειξη για τους καθηγητές των Μαθηματικών σχετικά με τη μελέτη των έργων των παλαιότερων μαθηματικών, είναι να αναδείξει ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τους είναι ακριβώς οι ίδιες που αντιμετώπισαν και οι μεγάλες μαθηματικές διάνοιες. Κάποιες από αυτές τις δυσκολίες μάλιστα ήταν αρκετές για να σταματήσουν την πρόοδο του έργου τους.*"

Το 1931, ο ρώσος Mark Yakovlevich Vygodskii, στο βιβλίο του "Foundations of Infinitesimal Calculus", έγραψε τα εξής (Fasanelli et al 2000):

> "Η οπτική που υποκρύπτεται στο παρόν βιβλίο είναι ότι ο αναγνώστης, κατά τη μελέτη της Ανάλυσης, πρέπει να γίνει γνώστης των θεμελιωδών εννοιών της, στο στάδιο από το οποίο προήλθαν άμεσα από πρακτικά προβλήματα. Η αυστηρότητα της ανάλυσης είναι αρχικά δευτερεύουσας σημασίας και θα μας απασχολήσει αργότερα. Με άλλα λόγια, προσπαθώ στο βιβλίο αυτό, να αντικαταστήσω το φορμαλιστικό-λογικό σχήμα με ένα ιστορικό σχήμα, ή καλύτερα με ένα ιστορικό-λογικό σχήμα. (…) Το ιστορικό υλικό που περιέχεται στο βιβλίο, δεν αποτελεί το κύριο αντικείμενο του, αλλά τη βάση παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών."

Το 1962 οι L. Bers, M. Kline, G. Pólya και M. Schiffer, όπως αναφέρει ο D. Bressoud στον πρόλογο του βιβλίου του Otto Toeplitz με τίτλο "The Calculus. A Genetic Approach" (έκδοση 2007), δημοσίευσαν μια επιστολή στο περιοδικό "The American Mathematical Monthly" στην οποία καλούσαν τους μαθηματικούς να κάνουν χρήση της "γενετικής μεθόδου" χρησιμοποιώντας τα παρακάτω λόγια (Toeplitz 2007):

> "Ο καλύτερος τρόπος για να οδηγηθούμε στη διανοητική ανάπτυξη του ατόμου είναι να του επιτρέψουμε να επαναλάβει τη διαδρομή της διανοητικής ανάπτυξης του γένους του. Φυσικά να διατρέξει (λεπτομερώς) τις μεγάλες διαδρομές εξέλιξης της γνώσης και όχι τα πολλά λάθη που έγιναν σ' αυτή τη διαδρομή."

Εκτός από τις απόψεις μαθηματικών αναφορικά με τη σχέση της ιστορίας των Μαθηματικών και της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών, διάφορες επιστημονικές ενώσεις και Υπουργεία Εκπαίδευσης έχουν κατά καιρούς εκφράσει σχετικές απόψεις.

Στην ετήσια αναφορά της, το 1919, η αμερικανική Mathematical Association Committee, συμπεριέλαβε τα παρακάτω (Fasanelli et al 2000):

> "Η ιστορική διάσταση των Μαθηματικών δεν έχει βρει ακόμη την κατάλληλη θέση στη διδασκαλία τους στο σχολείο. (…) Κάθε μαθητής και μαθήτρια οφείλει να γνωρίζει κάποια πράγματα σχετικά με την ανθρώπινη διάσταση του αντικειμένου που μελε-

τά. (…) Η Ιστορία των Μαθηματικών θα μας βοηθήσει να διατυπώσουμε το πλαίσιο της σχολικής διδακτέας ύλης. (…) Το κρέμασμα των πορτραίτων μεγάλων μαθηματικών στις σχολικές τάξεις, καθώς και οι αναφορές του καθηγητή σ' αυτούς και οι εργασίες των μαθητών γι' αυτούς, είναι δυνατό να εξηγήσουν την επίδραση των μαθηματικών ανακαλύψεων στην πρόοδο του ανθρώπινου πολιτισμού."

Το 1923 δημοσιεύτηκε στις ΗΠΑ το πόρισμα της εθνικής επιτροπής για τις μαθηματικές απαιτήσεις με σκοπό την αναδιοργάνωση των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Εκεί αναφέρονται τα παρακάτω (Θωμαΐδης, Καστάνης 1987):

"Συμβουλεύουμε τους δασκάλους να μάθουν τα καθοριστικά γεγονότα της ιστορίας των Μαθηματικών και να μάθουν έτσι ότι τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν ως απάντηση στις ανθρώπινες ανάγκες, τόσο στις νοητικές όσο και στις τεχνικές. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν αυτό το υλικό περιστασιακά στα μαθήματά τους για να αυξήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με άτυπες συζητήσεις για την ανάπτυξη των Μαθηματικών και για τη ζωή των μεγάλων δημιουργών της επιστήμης. (…) Ιστορικό και βιογραφικό υλικό θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να κάνει τη διδασκαλία πιο ενδιαφέρουσα και με περισσότερη σημασία."

Το 1958 το βρετανικό Υπουργείο Εκπαίδευσης, συμπεριέλαβε τα παρακάτω σε αναφορά του (Fasanelli et al 2000):

"Ο δάσκαλος που γνωρίζει αρκετά πράγματα από την ιστορία των Μαθηματικών, έχει την τάση να διδάσκει τεχνικές για την επίλυση προβλημάτων που δεν σχετίζονται ούτε με τα προβλήματα που τις δημιούργησαν, ούτε με την περαιτέρω ανάπτυξη των Μαθηματικών. (…) Η γνώση των διαφωνιών και των διχογνωμιών μεταξύ των μεγάλων μαθηματικών μπορεί να παρακινήσει τον σκεπτικισμό και να προκαλέσει συζητήσεις μέσα στην τάξη, που μπορούν να οδηγήσουν σε εδραίωση της κατανόησης των μαθηματικών αληθειών. (…) Ένα από τα σημαντικότερα

πλεονεκτήματα που μπορεί να αποκτήσει ένας δάσκαλος από τη γνώση της ιστορίας των Μαθηματικών, είναι ότι εκτιμά την επιρροή τους στις σύγχρονες συνήθειες. (…) Τα Μαθηματικά μπορούν να διδαχθούν αποτελεσματικά μόνο με φόντο την ιστορία τους."

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΩΣ ΣΤΟΧΟΣ

Οι σύγχρονοι ερευνητές της περιοχής της ιστορίας των Μαθηματικών και της εκπαιδευτικής της αξιοποίησης έχουν παρουσιάσει κατά καιρούς αρκετά επιχειρήματα υπέρ της. Ωστόσο μένει ανοικτό το ζήτημα του τρόπου με τον οποίο θα επιτευχθεί η αξιοποίηση της ιστορίας στην καθημερινή διδακτική διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών. Βέβαια κατά καιρούς, στον τομέα αυτό, έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες και σε διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα διαφόρων χωρών με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μια πρώτη ταξινόμηση των προσπαθειών και των επιχειρημάτων υπέρ της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να γίνει ως προς τον σκοπό για τον οποίο αξιοποιείται η ιστορία των Μαθηματικών. Οι χρήσεις της ιστορίας μπορεί να είναι:

- Η ιστορία ως εργαλείο, και
- Η ιστορία ως στόχος.

Η ιστορία ως εργαλείο.

Η ιστορική διάσταση αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Τζανάκης 2009). Η κατηγορία αυτή των επιχειρημάτων περιέχει τα επιχειρήματα που αφορούν το πως μαθαίνουν οι μαθητές. Ένα τυπικό επιχείρημα είναι ότι η ιστορία μπορεί να αποτελέσει έναν παράγοντα κινητοποίησης των μαθητών στο θέμα της μάθησης και της μελέτης των Μαθηματικών, αφού μπορεί να διεγείρει και να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών στο υπό μελέτη μαθηματικό θέμα (Farmaki, Paschos 2007). Έτσι είναι πολύ πιθανό, η ιστορική προσέγγιση να μπορέσει να δώσει στα Μαθηματικά ένα περισσότερο ανθρώπινο πρόσωπο και ίσως να τα κάνει λιγότερο "τρομακτικά" για τους μαθητές και τους σπουδαστές. Δεν πρέπει να διαφύγει της προσοχής μας το γεγονός ότι οι μαθηματικοί του παρελθόντος, κάποιες στιγμές, αντιμετώπισαν σημαντικά προβλήματα στην εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, τα οποία συ-

νιστούν σημαντικές δυσκολίες και για τους σημερινούς μαθητές (Tzanakis, Thomaidis 2000). Γνωρίζοντας λοιπόν οι μαθητές τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν σπουδαίοι μαθηματικοί στο παρελθόν και ότι για να ξεπεραστούν μερικές από αυτές χρειάστηκαν ακόμα και εκατοντάδες χρόνια, οι μαθητές θα αποκτήσουν αυτοπεποίθηση και άνεση (Jankvist 2009).

Εκτός από τα παραπάνω, η ιστορία μπορεί να παίξει το ρόλο ενός γνωστικού εργαλείου υποστήριξης της πραγματικής μάθησης των Μαθηματικών, αφού μπορεί να μας προσφέρει μια διαφορετική άποψη για μια μαθηματική ενότητα, αλλά και ένα διαφορετικό τρόπο παρουσίασής της (Jahnke 2001, Kleiner 2001). Η ιστορική φαινομενολογία μπορεί να προετοιμάσει την ανάπτυξη μιας υποθετικής τροχιάς μάθησης. Επίσης η ιστορία μπορεί να βοηθήσει τους καθηγητές των Μαθηματικών να δουν μέσα από τα μάτια των μαθητών τους διάφορα μαθηματικά θέματα, αλλά και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές τους (Jankvist 2009).

Μια ειδική χρήση της ιστορίας ως ένα γνωστικό εργαλείο, πραγματοποιείται στην ανίχνευση και ταυτοποίηση των επιστημολογικών εμποδίων, όπως αυτά παρουσιάστηκαν από τον Bachelard. Ο Brousseau ενσωματώνοντας την έννοια των επιστημολογικών εμποδίων στη θεωρία του για τις διδακτικές καταστάσεις αναφέρει τα εξής (Brousseau 1997):

> "Εμπόδια με πραγματικά επιστημονική προέλευση είναι αυτά από τα οποία κανείς δεν μπορεί να ξεφύγει, εξαιτίας του διαπλαστικού τους ρόλου στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτά μπορούν να (αναζητηθούν και να) βρεθούν στην ίδια την ιστορία των εννοιών."

Από τη στιγμή που οι δυσκολίες των μαθητών μπορούν να επιβεβαιωθούν από την ιστορία, η χρήση της ιστορίας μάς βοηθάει όχι μόνο να ανιχνεύσουμε αυτά τα εμπόδια, αλλά και να τα ξεπεράσουμε (Brousseau 1997):

> " Ένας επιστημολογικός συλλογισμός πάνω στην ανάπτυξη των ιδεών στην ιστορία των Μαθηματικών, μπορεί να εμπλουτίσει τη διδακτική ανάλυση, προσφέροντας ουσιαστικές ενδείξεις (clues) οι οποίες μπορούν να καθορίσουν τη φύση της διδακτέας μαθη-

ματικής γνώσης και να διερευνήσουν διαφορετικούς τρόπους πρόσβασης στη γνώση αυτή."

Ο Brousseau σημειώνει ότι η ιστορία δεν πρέπει να χρησιμοποιείται χωρίς τροποποιήσεις. Οι δάσκαλοι των Μαθηματικών πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν ιστορικά επιχειρήματα με σκοπό να επιλέξουν την κατάλληλη, για τους μαθητές, γένεση της έννοιας και να κατασκευάσουν ή να εφεύρουν διδακτικές καταστάσεις που παρέχουν αυτή τη γένεση (Jankvist 2009).

Το πιο χαρακτηριστικά όμως επιχειρήματα για τη χρήση της ιστορίας ως εργαλείο είναι αυτά που αναφέρονται ως "εξελικτικά" (evolutionary) και υποστηρίζουν ότι δεν μπορεί να υπάρξει μάθηση των Μαθηματικών χωρίς την ιστορία τους. Το πιο ξεκάθαρο από αυτά είναι το επιχείρημα της ανακεφαλαίωσης το οποίο εν συντομία αναφέρει ότι: "η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση" (ontogenesis recapitulates phylogenesis). (Ως γνωστόν, οντογένεση είναι η εξέλιξη ενός απλού οργανισμού ή ενός ατόμου από τη γονιμοποίηση ενός ωαρίου μέχρι την ενηλικίωση του και φυλογένεση είναι η εξέλιξη ενός ολόκληρου είδους οργανισμού.) Το επιχείρημα για την εκπαίδευση και τα Μαθηματικά ειδικότερα συνοψίζεται ως εξής: "Για να μάθει κάποιος καλά Μαθηματικά, πρέπει το μυαλό και η σκέψη του να περάσει από τα ίδια στάδια που πέρασαν τα Μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους". Και βέβαια αυτό δεν αφορά μόνο τα Μαθηματικά στο σύνολό τους, αλλά αφορά και τις μαθηματικές έννοιες και θεωρίες ξεχωριστά. Συχνά σχετίζεται με τον "ιστορικό παραλληλισμό", ο οποίος συνοπτικά αναφέρεται στην παρατήρηση των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίστηκαν στην ιστορία όπως, αυτά παρουσιάζονται ξανά στη σχολική τάξη (Farmaki, Paschos 2007, Tzanakis, Kourkoulos 2007, Thomaidis, Tzanakis 2007). Η ιδέα του παραλληλισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεθοδολογικά ή ευρετικά για να δημιουργήσει υποθέσεις στη μαθηματική εκπαίδευση (Bartolini Bussi, Sierpinska et al 2000).

Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείο αναφέρεται σε σχέση με ζητήματα που αφορούν στο εσωτερικό των Μαθηματικών (in-issues) (Τζανάκης 2009, Jankvist 2009).

Η ιστορία ως στόχος.

Η ιστορική διάσταση αφορά σε ζητήματα για τα ίδια τα Μαθηματικά (Τζανάκης 2009). Η κατηγορία αυτή των επιχειρημάτων υποστηρίζει ότι η μάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών υπηρετεί τη μάθησή της αυτής καθ' εαυτής, σαν να ήταν δηλαδή ένα ανεξάρτητο επιστημονικό αντικείμενο. Μερικές χρήσεις της ιστορίας ως στόχος, είναι να δείξουμε στους μαθητές ότι:

- Τα Μαθηματικά υπάρχουν, αναπτύσσονται και εξελίσσονται στο χώρο και στο χρόνο (Tzanakis, Thomaidis 2000).
- Τα Μαθηματικά είναι ένα επιστημονικό πεδίο που εξελίσσεται, έχει στερεές βάσεις και δεν προέρχονται από το τίποτα (Philippou, Christou 1998).
- Οι άνθρωποι έχουν πάρει ενεργό μέρος στην εξέλιξη των Μαθηματικών (Gulikers, Blom 2001, Thomaidis, Tzanakis 2007).
- Τα Μαθηματικά έχουν εξελιχθεί μέσα σε πολλές διαφορετικές κουλτούρες και σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς μέσα στο πέρασμα των αιώνων, και ότι αυτές οι κουλτούρες άσκησαν σημαντική επιρροή στη δημιουργία των Μαθηματικών και αντίστροφα (Tzanakis, Thomaidis 2000).
- Η εξέλιξη των Μαθηματικών καθοδηγείται και από εσωτερικές και από εξωτερικές δυνάμεις και ανάγκες (Jankvist 2009).
- Τα Μαθηματικά έχουν άμεση σχέση με άλλες επιστήμες (Τζανάκης 2009).

Με τη χρήση λοιπόν της ιστορίας των Μαθηματικών ως στόχου, η μάθηση θεμάτων που έχουν σχέση με την ανάπτυξη και την εξέλιξή τους, είτε εξυπηρετεί τη μάθηση της ιστορίας τους, είτε επεξηγεί άλλα ιστορικά θέματα του επιστημονικού πεδίου των Μαθηματικών (Jankvist 2009).

Η ιστορία των Μαθηματικών υπεισέρχεται εδώ σε σχέση με θέματα για τη φύση, το ρόλο και τη σημασία των Μαθηματικών, τα οποία μπορούμε να ονομάσουμε μετα-ζητήματα (meta-issues) (Τζανάκης 2009, Jankvist 2009).

Η διάκριση μεταξύ των εσωτερικών ζητημάτων (in-issues) και των μεταζητημάτων (meta-issues), σύμφωνα με τον Jankvist (Jankvist 2009), έχει κάποιες ομοιότητες με τους όρους "εσωτερικά ζητήματα" (inner issues) και "εξωτερικά ζητήματα" (outer issues) που αναφέρουν οι Davis και Hersh (Davis, Hersh 1982) και με τους όρους "γνώση των Μαθηματικών από μέσα" (knowledge of mathematics from the inside) και "γνώση των Μαθηματικών από έξω" (knowledge of mathematics from the outside) που αναφέρει ο Niss (Niss 2001).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΥΠΕΡ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η παγκόσμια βιβλιογραφία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης έχει προσφέρει μέχρι σήμερα ένα μεγάλο αριθμό επιχειρημάτων υπέρ της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών και της ενσωμάτωσής της στη μαθηματική εκπαίδευση, αφού είναι δυνατό να στηρίξει, να εμπλουτίσει και να βελτιώσει τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Tzanakis, Arcavi et al (Tzanakis, Arcavi et al 2000), Τζανάκη (Τζανάκης 2009) και Jankvist (Jankvist 2009), ο κύριος κατάλογος των επιχειρημάτων υπέρ της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία περιλαμβάνει 17 επιχειρήματα, τα οποία κατηγοριοποιούνται στις παρακάτω 5 κατηγορίες:

1. Η εκμάθηση των Μαθηματικών
2. Η φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας
3. Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών
4. Η συναισθηματική προδιάθεση προς τα Μαθηματικά, και
5. Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως πολιτιστικής – ανθρώπινης προσπάθειας.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες αναλυτικότερα:

1. Η εκμάθηση των Μαθηματικών

α. Η ιστορική ανάπτυξη των Μαθηματικών σε αντιπαραβολή με το τελικό – στιλβωμένο προϊόν.

Τα Μαθηματικά διδάσκονται συνήθως σε ένα πλαίσιο παραγωγικά προσανατολισμένης οργάνωσης. Ωστόσο, η ιστορία των Μαθηματικών μάς δείχνει ότι η οργάνωση αυτή προέρχεται από την ωρίμανση που επιτυγχάνεται στη διάρ-

κεια του χρόνου. Μόνο τότε γίνεται αναγκαία η εκ των υστέρων (a posteriori) παρουσίασή της λογικής δομής τους και της πληρότητάς τους. Ο Freudenthal επισημαίνει σχετικά (Freudenthal 1983 στα Tzanakis, Arcavi et al 2000 και Τζανάκης 2009):

> "Καμιά μαθηματική ιδέα δεν έχει ποτέ δημοσιευθεί με τον τρόπο που ανακαλύφθηκε. Διάφορες τεχνικές αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν, όταν κάποιο μαθηματικό πρόβλημα λύθηκε (…) αναποδογυρίζοντας τη λύση (…) και να μετατρέψουν την επινόηση της λύσης σε ψυχρή μαθηματική ομορφιά."

Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι αναδρομική αναδιοργάνωση των Μαθηματικών. Έτσι, από τη μια μεριά φαίνεται ότι αυτή η αναδιοργάνωση είναι απαραίτητη προκειμένου να αποφευχθούν στρεβλώσεις και μακροχρόνιες διενέξεις. Από την άλλη μεριά, τα ερωτήματα και τα προβλήματα που αποτελούν τα βασικά κίνητρα για την ανάπτυξη μιας μαθηματικής ιδέας, καθώς και οι αμφιβολίες που δημιουργούνται στην πορεία επίλυσης κάποιου μαθηματικού προβλήματος, παραμένουν αφανείς κάτω από το γραμμικά οργανωμένο και παραγωγικό σώμα της μαθηματικής γνώσης. Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η εντύπωση που δημιουργείται, κυρίως στους μαθητές, ότι τα αποτελέσματα της μαθηματικής έρευνας έρχονται απλά να προστεθούν στο σώμα της μαθηματικής γνώσης (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Το παραπάνω γεγονός αγνοείται συστηματικά και στις τρεις βαθμίδες της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Έτσι ο διδασκόμενος δεν είναι σε θέση να εκτιμήσει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών ανακαλύψεων και μέσω αυτών να αναπτύξει μεταγνωστικές ικανότητες και δεξιότητες (Τζανάκης 2009).

Αναφορικά με τα προηγούμενα, η κατάλληλη ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στην αποκάλυψη του τρόπου ανακάλυψης των μαθηματικών εννοιών, δομών και ιδεών, καθώς και στον τρόπο που βοήθησαν ως εργαλεία, στην οργάνωση του κόσμου των μαθηματικών εννοιών (Freudenthal 1983 στο Tzanakis, Arcavi et al 2000). Με αυτόν τον τρόπο, η διαδικασία εκμάθησης μιας μαθηματικής έννοιας μπορεί να έχει σημαντικά οφέλη από τη συσχέτισή της με τα κίνητρα και τα φαινόμενα που τη δημιούργησαν. Η άποψη αυτή έχει κατά καιρούς υποστηριχτεί από

σημαντικούς μαθηματικούς του παρελθόντος, όπως ο F. Klein, ο G. Pólya και I. Lakatos (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Τα παραπάνω ωστόσο δεν υποδηλώνουν, ούτε ότι υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος παρουσίασης ενός μαθηματικού θέματος ο οποίος ακολουθεί επακριβώς τη συνήθως περίπλοκη ιστορικά ανακάλυψή του, ούτε ότι η μάθηση των Μαθηματικών οφείλει να ακολουθεί τη αρχή της ανακεφαλαίωσης ("η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση"). Στην καλύτερη περίπτωση, η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να προτείνει πιθανούς τρόπους παρουσίασης κάποιου μαθηματικού θέματος με ένα φυσικό τρόπο, ελαχιστοποιώντας τα λογικά κενά με μια ειδική (ad hoc) παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών, των μεθόδων ή των αποδείξεων. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει έμπνευση για τους καθηγητές και να τους βοηθήσει αποτελεσματικά στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

β. Η ιστορία ως πηγή πληροφοριών.

Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί μια τεράστια και ανεξάντλητη πηγή ερωτημάτων, προβλημάτων, παραδειγμάτων και καταστάσεων που είναι πολύτιμα και ως προς το περιεχόμενό τους, αλλά και ως προς τη δυνατότητά τους να εμπλουτίσουν τη διαδικασία της μάθησης και να κινητοποιήσουν το διδασκόμενο και να τον εμπλέξουν στη διαδικασία της μάθησης. Για παράδειγμα, ασκήσεις εμπνευσμένες από την ιστορία μπορούν να παρακινήσουν το ενδιαφέρον του μαθητή και να ενισχύσουν την επίδοσή του σε θέματα της διδακτέας ύλης, σε αντίθεση με ασκήσεις και προβλήματα που φαίνονται περισσότερο τεχνητά. Με τη βοήθεια τέτοιων ασκήσεων, μερικές διαστάσεις της ιστορικής ανάπτυξης των Μαθηματικών γίνονται ορατές για τους μαθητές και η ιστορία των Μαθηματικών γίνεται οικεία στους μαθητές (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

γ. Η ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων.

Η ιστορία των Μαθηματικών μάς παρουσιάζει συχνά συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών πεδίων, αλλά και συσχετίσεις μεταξύ των Μαθηματι-

κών και άλλων επιστημονικών κλάδων, για παράδειγμα με τη Φυσική. Παρόλα αυτά, η διδασκαλία των Μαθηματικών, σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, γίνεται σε μεγάλο βαθμό χωρίς την παραμικρή αναφορά στη συσχέτισή τους με άλλες επιστήμες, ιδιαίτερα σήμερα που τα όρια των επιστημών είναι ασαφή. Η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους μπορεί να αναδείξει σχέσεις μεταξύ επιστημονικών πεδίων τα οποία φαίνονται ασύνδετα με πρώτη ματιά. Η ενσωμάτωση μάς δίνει την ευκαιρία να εκτιμήσουμε ότι η γόνιμη έρευνα σε ένα επιστημονικό πεδίο δεν μπορεί να απομονωθεί και να μη συσχετισθεί με παρόμοιες έρευνες σε άλλα επιστημονικά πεδία. Αντίθετα η έρευνα παρακινείται από ερωτήματα και προβλήματα τα οποία προέρχονται από προφανώς ασύνδετους επιστημονικούς κλάδους και έχουν εμπειρική βάση (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

δ. Η γενικότερη παιδευτική σημασία της ιστορίας.

Οι διδασκόμενοι που εμπλέκονται σε εργασίες με ιστορικό προσανατολισμό, μπορούν να αναπτύξουν γενικότερες δεξιότητες και ικανότητες, όπως η ανάγνωση και η κατανόηση κειμένων, η αναζήτηση και η διερεύνηση των πηγών, η γραπτή αλλά και η προφορική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της διερεύνησης, η ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας, η απόδοση σε σημερινή γλώσσα κειμένου από παλαιότερη εποχή ή από άλλη γλώσσα κ.α. Γενικότερα οι διδασκόμενοι αποκτούν ευχέρεια στο να "μιλούν για τα Μαθηματικά", σε αντιδιαστολή του "κάνουν Μαθηματικά" (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

Από τον τίτλο της συγκεκριμένης κατηγορίας των επιχειρημάτων ("Η εκμάθηση των Μαθηματικών"), είναι φανερό ότι το σύνολο των επιχειρημάτων αναφέρονται κυρίως στα εσωτερικά θέματα των Μαθηματικών και κατ' επέκταση στη χρήση της "ιστορίας ως εργαλείο". Χαρακτηριστικό επιχείρημα που τονίζει τα προηγούμενα είναι το επιχείρημα 1β ("Η ιστορία ως πηγή πληροφοριών"), όπου σημειώνεται η δυνατότητα της χρήσης της ιστορίας να εμπλουτίσει τη διαδικασία της μάθησης και να κινητοποιήσει το διδασκόμενο και να τον εμπλέξει στη διαδικασία της μάθησης. Το επιχείρημα 1α ("Η ιστορική ανάπτυξη

των Μαθηματικών σε αντιπαραβολή με το τελικό - στιλβωμένο προϊόν") είναι το σημαντικότερο που αναφέρεται στην εξελικτική πορεία των Μαθηματικών και στη χρήση της στη διδακτική πρακτική, αφού η ιστορία μπορεί να προτείνει πιθανούς τρόπους παρουσίασης κάποιου μαθηματικού θέματος με ένα φυσικό τρόπο κι επομένως να αποτελέσει πηγή έμπνευσης για τους δασκάλους των Μαθηματικών. Το ίδιο επιχείρημα τονίζει επίσης τη διαφορά των Μαθηματικών ως ένα τελικό προϊόν (mathematics-as-an-end-product) από τα Μαθηματικά στο στάδιο της κατασκευής τους (mathematics-in-the-making) (Siu, Siu 1979). Ο Jankvist (Jankvist 2009) επισημαίνει ότι το επιχείρημα 1γ ("Η ιστορία ως γέφυρα μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων") ανάλογα με την ερμηνεία του, μπορεί να υπηρετήσει και την ιστορία ως εργαλείο και την ιστορία ως στόχο. Συγκεκριμένα, αν ο σκοπός της γέφυρας είναι να φέρει μερικά πιο δημοφιλή και αγαπητά θέματα στους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών και μέσω αυτών να τους κινητοποιήσει προκειμένου να μάθουν τα απαραίτητα Μαθηματικά για τα συγκεκριμένα θέματα, τότε το επιχείρημα ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως εργαλείο". Αν όμως σκοπός της γέφυρας είναι να καταδείξει ότι η μαθηματική δημιουργία είναι απόγονος των προβλημάτων που τέθηκαν στο παρελθόν από άλλα επιστημονικά πεδία, τότε το επιχείρημα ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος". Από τη διατύπωση του επιχειρήματος 1γ (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009) φαίνεται ότι ο προσανατολισμός του είναι στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος".

2. Η φύση των Μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας

α. Το περιεχόμενο των Μαθηματικών.

Σημαντικές ερωτήσεις, ασκήσεις και προβλήματα, αλλά και οι απαντήσεις τους, που προέρχονται από την ιστορία, μπορούν να μας παρέχουν μια πιο ακριβή και λεπτομερή ματιά για τα Μαθηματικά και τη μαθηματική δραστηριότητα, είτε προέρχονται από πρωτότυπες πηγές, είτε από την ανακατασκευή τους. Οι διδασκόμενοι μπορούν να αντιληφθούν ότι οι ευρετικές διαδικασίες, οι εικασίες, οι αμφιβολίες, τα λάθη, οι ελλιπείς διατυπώσεις και αποδείξεις, τα αδιέξοδα, οι αντιπαραθέσεις, ακόμη και οι διαφορετικές προσεγγίσεις στα διά-

φορα προβλήματα, όχι μόνο είναι θεμιτά, αλλά και αποτελούν σημαντικό και αναπόσπαστο συστατικό της μαθηματικής δημιουργίας και των Μαθηματικών γενικότερα. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές θα αντιληφθούν για το αν οι εικασίες και οι αποδείξεις που είχαν διατυπωθεί κατά το παρελθόν δίνουν ή όχι ικανοποιητικές απαντήσεις σε υφιστάμενα προβλήματα. Έμμεσα οι διδασκόμενοι θα ενθαρρυνθούν για να διατυπώσουν και οι ίδιοι τις δικές τους εικασίες, να δουν τα λάθη τους ως μέρος της μαθηματικής τους δραστηριότητας και να αναπτύξουν πρακτικές και ικανότητες αυτοβελτίωσης. Έτσι η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάπτυξη μεταγνωστικών ικανοτήτων των μαθητών και να κάνει περισσότερο αντιληπτή την εξελικτική πορεία της μαθηματικής γνώσης (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

β. Η μορφή των Μαθηματικών.

Τα Μαθηματικά εξελίσσονται όχι μόνο στο περιεχόμενό τους, αλλά και στη μορφή, στο συμβολισμό, στην ορολογία, στις υπολογιστικές μεθόδους, στους τρόπους έκφρασης και στις αναπαραστάσεις τους. Για παράδειγμα, με τη βοήθεια της ιστορίας των Μαθηματικών θα γίνει κατανοητή η εξέλιξη του μαθηματικού συμβολισμού. Σχετικές συγκρίσεις του συμβολισμού από διαφορετικές ιστορικές περιόδους για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, μπορούν να αποτελέσουν σημαντική βοήθεια για το μαθητή στην προσπάθειά του για την κατανόηση κάποιας μαθηματικής έννοιας. Επίσης θα βοηθήσουν το μαθητή να επανεκτιμήσει το ρόλο των οπτικών, διαισθητικών και γενικά μη τυπικών τρόπων προσέγγισης των προβλημάτων που έγιναν στο παρελθόν. Επιπλέον θα βοηθήσουν το διδασκόμενο να γνωρίσει τα πλεονεκτήματα ή/και τα μειονεκτήματα των σύγχρονων μορφών των Μαθηματικών (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

Τα προηγούμενα επιχειρήματα 2α ("Το περιεχόμενο των Μαθηματικών") και 2β ("Η μορφή των Μαθηματικών") ανάλογα με την ερμηνεία τους μπορούν να ενταχθούν και στην "ιστορία ως εργαλείο" και στην "ιστορία ως στόχο". Για παράδειγμα το επιχείρημα 2β αναφέρει ότι (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

"Με τη βοήθεια πρωτότυπου υλικού ή ακόμα και αποσπασμάτων από αυτό, και οι δάσκαλοι και οι διδασκόμενοι θα γίνουν γνώστες των πλεονεκτημάτων ή/και των μειονεκτημάτων των σύγχρονων μορφών των Μαθηματικών."

Αν το επιχείρημα αφορά θέματα σχετικά με τα Μαθηματικά στο στάδιο της κατασκευής τους (για παράδειγμα η εξέλιξη των μαθηματικών τεχνικών ή η εξέλιξη του μαθηματικού συμβολισμού), τότε το επιχείρημα ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος". Αν όμως θέλουμε να συγκρίνουμε τα αρχαία Μαθηματικά με τα σύγχρονα, αντιπαραβάλλοντας την πολυπλοκότητα των αρχαίων Μαθηματικών με τη συντομία και κομψότητα των σύγχρονων, τότε το επιχείρημα ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως εργαλείο", αφού οι μαθητές μπορεί να κινητοποιηθούν και να εκτιμήσουν περισσότερο τα σύγχρονα Μαθηματικά των σχολικών βιβλίων και επομένως να αυξήσουν τη θέλησή τους για να μάθουν σωστά τα σύγχρονα Μαθηματικά (Jankvist 2009).

3. Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών

α. Προσδιορισμός κινήτρων.

Αφού οι δάσκαλοι των Μαθηματικών μελετήσουν την ιστορία κάποιας μαθηματικής ενότητας, θα μπορούν να κάνουν αναφορά στους τρόπους με τους οποίους γεννήθηκε και εξελίχθηκε μια μαθηματική έννοια, μέθοδος ή θεωρία. Η αναφορά αυτή τις περισσότερες φορές εμπεριέχει τα κίνητρα που επέβαλλαν την εισαγωγή της νέας γνώσης, τα προβλήματα που οδήγησαν σε αυτή και τις προσπάθειες που έγιναν στο παρελθόν, άλλοτε επιτυχείς και άλλοτε λιγότερο επιτυχείς, για την αντιμετώπισή τους. Είναι πολύ πιθανό η συγκεκριμένη διαδικασία να αποτελέσει σημαντική βοήθεια στους μαθητές στην προσπάθειά τους για να κατανοήσουν τη νέα έννοια (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

β. Δυσκολίες και εμπόδια.

Με τη μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών, ο δάσκαλος των Μαθηματικών θα γίνει γνώστης των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίστηκαν ιστορι-

κά σε μια μαθηματική έννοια ή μέθοδο. Αυτή η γνώση θα του είναι εξαιρετικά χρήσιμη όταν οι ίδιες ή παρόμοιες δυσκολίες και παρόμοια εμπόδια επανεμφανιστούν στη σχολική τάξη.

Ακόμα και αν ένα θέμα φαίνεται αρκετά απλό, δεν μπορεί παρά να είναι αποτέλεσμα μιας σταδιακής εξέλιξης, που οφείλεται σε συγκεκριμένα ερωτήματα και προβλήματα που φυσικά δεν είναι άμεσα ορατά, ειδικά όταν η παρουσίαση του θέματος γίνεται εξ αρχής με τη σύγχρονη μορφή του. Βέβαια τα ερωτήματα και τα προβλήματα αυτά τις περισσότερες φορές προϋποθέτουν μαθηματική ωριμότητα την οποία οι μαθητές ενδέχεται να μην έχουν αποκτήσει ακόμη. Έτσι η ιστορία θα βοηθήσει τους διδάσκοντες να εκτιμήσουν τα υπέρ και τα κατά του τρόπου παρουσίασης ενός θέματος, σε κάθε μία από τις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

γ. Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας "κάνω Μαθηματικά".

Καθώς οι δάσκαλοι και οι μαθητές έρχονται σε επαφή με πρωτότυπες και δευτερεύουσες πηγές και ασχολούνται με εργασίες που έχουν προσανατολισμό στην ιστορία των Μαθηματικών, εμπλουτίζεται η μαθηματική τους παιδεία και ταυτόχρονα εκτιμούν περισσότερο τη διαδικασία της μαθηματικής δραστηριότητας και της μαθηματικής δημιουργίας (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

δ. Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου.

Με τη βοήθεια της ιστορίας των Μαθηματικών ο δάσκαλος είναι σε θέση να αντλήσει από τη μεγάλη δεξαμενή της, προβλήματα, ερωτήματα, καταστάσεις, εξηγήσεις, παραδείγματα, τα οποία θα εμπλουτίσουν το διδακτικό του ρεπερτόριο. Έτσι θα είναι σε θέση να τα χρησιμοποιεί, προκειμένου να κάνει εναλλακτικές προσεγγίσεις στην παρουσίαση ενός θέματος ή στην επίλυση ενός προβλήματος και έτσι να καταφέρει να κινητοποιήσει σε μεγαλύτερο βαθμό τους μαθητές του (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

ε. Αποκωδικοποίηση και κατανόηση μη συμβατικά διατυπωμένων, αλλά εν τέλει "σωστών" μαθηματικών.

Η επαφή του διδάσκοντα με πρωτότυπες ή/και δευτερεύουσες πηγές τον ωθεί σε ενέργειες αποκωδικοποίησης και κατανόησης σωστών Μαθηματικών, τα οποία έχουν εκφραστεί σε μια γλώσσα που, τυπικά και συμβολικά, είναι συνήθως διαφορετική από τη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα. Παρόμοια ιδιοσυγκρασιακή γλώσσα παρατηρείται πολύ συχνά και στους μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν κάποια προβλήματα. Έτσι μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα ευαισθητοποίησης στη γλώσσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές του στις λύσεις των προβλημάτων, που μπορεί να είναι σωστές αλλά δεν είναι σύμφωνες με την κοινά αποδεκτή και κυρίως φορμαλιστική μαθηματική γλώσσα του σήμερα (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

Σ' αυτήν την κατηγορία επιχειρημάτων ("Η κατάρτιση και το παιδαγωγικό ρεπερτόριο των εκπαιδευτικών") το επιχείρημα 3γ ("Εμπλοκή και συνειδητοποίηση της δημιουργικής διαδικασίας "κάνω Μαθηματικά"") αναφέρει ότι οι δάσκαλοι των Μαθηματικών θα γνωρίσουν καλύτερα τη διαδικασία αυτή, θα εμπλουτίσουν τη μαθηματική τους παιδεία και μόρφωση, ενώ θα εκτιμήσουν καλύτερα τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας. Το τμήμα του επιχειρήματος που αφορά την παιδεία και τη μόρφωση των δασκάλων των Μαθηματικών εμπίπτει στην κατηγορία "ιστορία ως εργαλείο", ενώ το τμήμα του επιχειρήματος που αφορά στην εκτίμηση της μαθηματικής δραστηριότητας εμπίπτει στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος". Το επιχείρημα 3δ ("Εμπλουτισμός διδακτικού ρεπερτορίου") μπορεί ανάλογα με την ερμηνεία που θα κάνουμε να κατηγοριοποιηθεί και στην "ιστορία ως εργαλείο" και στην "ιστορία ως στόχο". Αν οι δάσκαλοι των Μαθηματικών χρειάζεται να βελτιώσουν τη μάθηση των μαθητών τους σε εσωτερικά θέματα των Μαθηματικών, τότε το επιχείρημα 3δ ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως εργαλείο". Αν όμως οι δάσκαλοι των Μαθηματικών θέλουν να σχολιάσουν ή/και να συζητήσουν μέσα στην τάξη μεταζητήματα από την εξέλιξη των Μαθηματικών, τότε το επιχείρημα ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος" (Jankvist 2009).

4. Η συναισθηματικά θετική προδιάθεση για τα Μαθηματικά

α. Η θεώρηση των Μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας.

Τα Μαθηματικά εξελίσσονται περισσότερο ως ανθρώπινη επινόηση, παρά ως ένα αυστηρό σύστημα αληθειών. Είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα που απαιτεί εξαιρετική διανοητική προσπάθεια. Τα Μαθηματικά καθορίζονται και επηρεάζονται από πολλούς εγγενείς, αλλά και από εξωτερικούς παράγοντες. Γενικότερα, τα Μαθηματικά δεν είναι ένα θεόσταλτο τελειωμένο προϊόν (γιατί επιδέχονται βελτίωσης και προσθηκών) κατάλληλο για μάθηση με παπαγαλία (for rote) (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

β. Επιμονή σε ιδέες, διατύπωση ερωτημάτων, προώθηση ερευνητικής δραστηριότητας.

Η ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών, αλλά και κάθε επιστημονικού πεδίου γενικότερα, μας παρέχει πολλά παραδείγματα ιδεών και ερωτημάτων τα οποία δεν οδήγησαν σε νέα μαθηματική γνώση. Αυτές οι ιδέες και τα ερωτήματα ενώ μπορεί να μην αποτελούν οργανικό κομμάτι στο σώμα των Μαθηματικών, αποτέλεσαν όμως βήματα, μικρά ή μεγάλα, για την ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών στη σημερινή τους μορφή. Κατ' αναλογία, οι διδασκόμενοι συνειδητοποιώντας τα παραπάνω, ενθαρρύνονται να επινοήσουν και να διατυπώσουν τις δικές τους ιδέες, να κάνουν διερευνήσεις κατά τη διάρκεια της προσπάθειάς τους να επιλύσουν προβλήματα, να θέσουν ερωτήματα και να προσπαθήσουν να αναπτύξουν δημιουργικούς ή/και ιδιοσυγκρασιακούς τρόπους μαθηματικής σκέψης, όπως ακριβώς συνέβαινε και στο παρελθόν (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

γ. Αποφυγή της απογοήτευσης λόγω αποτυχιών, λαθών, αβεβαιότητας ή παρανοήσεων.

Ο διδασκόμενος συνήθως απογοητεύεται από την αποτυχία του στη λύση κάποιου προβλήματος, από τα λάθη του, από τις αβεβαιότητές του και από τις παρανοήσεις του. Όμως η ιστορία των Μαθηματικών είναι πλούσια σε παρα-

δείγματα αντίστοιχων καταστάσεων στις οποίες βρέθηκαν στο παρελθόν διαπρεπείς μαθηματικοί. Αυτές οι καταστάσεις αποτέλεσαν βασικό κίνητρο για μεγαλύτερη προσπάθεια από αυτούς, με αποτέλεσμα την επινόηση νέων Μαθηματικών. Οι διδασκόμενοι μπορούν να εμπνευστούν από τις προσπάθειες των διαπρεπών μαθηματικών, να ενθαρρυνθούν και να προχωρήσουν στην προσωπική τους περιπέτεια έρευνας, αποδεχόμενοι τον κίνδυνο μιας πιθανής αποτυχίας τους. Η κατάσταση αυτή θα συμβάλλει στη μαθηματική τους ωρίμανση (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

Και αυτή η κατηγορία επιχειρημάτων ("Η συναισθηματικά θετική προδιάθεση για τα Μαθηματικά") είναι μια μίξη επιχειρημάτων που μπορούν να ενταχθούν και στην "ιστορία ως εργαλείο" και "στην ιστορία ως στόχος". Το επιχείρημα 4γ ("Αποφυγή της απογοήτευσης λόγω αποτυχιών, λαθών, αβεβαιότητας ή παρανοήσεων") μπορεί να μας μάθει ότι ο διδασκόμενος συνήθως απογοητεύεται από την αποτυχία του στη λύση κάποιου προβλήματος, από τα λάθη του, από τις αβεβαιότητές του και από τις παρανοήσεις του, και επομένως ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως εργαλείο". Από την άλλη μεριά το επιχείρημα 4α ("Η θεώρηση των Μαθηματικών ως ανθρώπινης προσπάθειας") αναφέρει ότι από την ιστορία των μπορούμε να μάθουμε ότι τα Μαθηματικά εξελίσσονται περισσότερο ως ανθρώπινη επινόηση παρά ως ένα αυστηρό σύστημα αληθειών και επομένως ανήκει στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος" (Jankvist 2009).

5. Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής – ανθρώπινης προσπάθειας

α. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα για εσωτερικούς λόγους.

Μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών και της μελέτης σχετικών ιστορικών παραδειγμάτων, οι διδασκόμενοι θα έχουν την ευκαιρία να αντιληφθούν ότι τα Μαθηματικά δεν καθοδηγούνται μόνο από χρησιμοθηρικούς λόγους, όπως είναι η τρέχουσα επικρατούσα αντίληψη, αλλά αναπτύσσονται και για καθαρά εσωτερικούς λόγους, για αισθητικούς λόγους (π.χ. ενοποίηση εννοιών και γνωστικών τομέων, ταξινόμηση, λογική πληρότητα, κομψή έκφραση κλπ), για

διανοητική περιέργεια, πρόκληση και ευχαρίστηση, για ψυχαγωγικούς σκοπούς, κλπ (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

β. Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων.

Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να μας δώσει πολλά πειστικά παραδείγματα και να τεκμηριώσει την άποψη ότι, η εξέλιξη των Μαθηματικών πολλές φορές καθοδηγήθηκε από ωφελιμιστικούς λόγους συχνά προερχόμενους και από άλλα επιστημονικά πεδία (π.χ. τη Φυσική), από συγκεκριμένες πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας, οι οποίες ήταν συχνά ενταγμένες στα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια της κάθε εποχής (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

γ. Τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής και πολιτιστικής παράδοσης.

Τα Μαθηματικά στη σημερινή τους μορφή έχουν έναν διεθνιστικό χαρακτήρα και συχνά θεωρούνται αποτέλεσμα του σύγχρονου δυτικού πολιτισμού. Με τη μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών, καθηγητές και διδασκόμενοι θα έχουν την ευκαιρία να διαπιστώσουν ότι υπήρξαν και άλλες, λιγότερο γνωστές, προσεγγίσεις στα ζητήματα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκαν μέσα στα πλαίσια άλλων πολιτισμών και να γνωρίσουν το ρόλο που έπαιξαν τα Μαθηματικά μέσα στους πολιτισμούς αυτούς. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτές οι πολιτισμικές διαστάσεις μπορούν να βοηθήσουν τους διδάσκοντες στην καθημερινή τους εργασία στις τάξεις, ιδιαίτερα στις πολυ-πολιτισμικές, με σκοπό να επανεκτιμήσουν την πολιτιστική τους κληρονομιά και να τη χρησιμοποιήσουν ως μέσο ανάπτυξης ανοχής και σεβασμού μεταξύ των συμμαθητών των τάξεων αυτών. Παράλληλα οι διδάσκοντες θα βρουν πολλές ευκαιρίες για να αναδείξουν και την τοπική κουλτούρα και τον τοπικό πολιτισμό (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

Σχεδόν όλα τα επιχειρήματα της κατηγορίας αυτής ("Η αναγνώριση των Μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής – ανθρώπινης προσπάθειας") εντάσσονται στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος". Χαρακτηριστικό επιχείρημα αυτής της κατηγορίας είναι το 5β ("Τα Μαθηματικά εξελισσόμενα υπό την επίδραση κοινωνικών και πολιτιστικών παραγόντων"), αφού η ιστορία μπορεί να μας δώσει παραδείγματα σχετικά με το πως εξελίχθηκαν τα Μαθηματικά καθοδηγούμενα από ωφελιμιστικούς λόγους συχνά ενταγμένους στα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια της κάθε εποχής. Έτσι το επιχείρημα 5β εντάσσεται στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος". Ωστόσο το επιχείρημα 5γ ("Τα Μαθηματικά αποτελούν μέρος της τοπικής και πολιτιστικής παράδοσης") αναφέρει ότι με τη μελέτη της ιστορίας, μαθητές και δάσκαλοι των Μαθηματικών θα γνωρίσουν διαφορετικές προσεγγίσεις στα Μαθηματικά οι οποίες εμφανίστηκαν σε διαφορετικούς πολιτισμούς. Αν ο σκοπός εδώ είναι να δείξουμε στους μαθητές κάποια πράγματα σχετικά με την εξέλιξη των Μαθηματικών ενταγμένα σε διαφορετικά πολιτισμικά πλαίσια, τότε το επιχείρημα 5γ εντάσσεται στην κατηγορία "ιστορία ως στόχος". Αν όμως ο σκοπός είναι να προάγουμε την κατανόηση των μαθητών πάνω σε μια μαθηματική έννοια, επιτρέποντάς τους να λύσουν κάποιο μαθηματικό πρόβλημα μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις που εμφανίστηκαν σε διαφορετικούς πολιτισμούς, τότε το επιχείρημα 5γ εντάσσεται στην κατηγορία "ιστορία ως εργαλείο" (Jankvist 2009).

Τα 17 επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν παραπάνω απεικονίζουν τους πολλαπλούς ρόλους που μπορεί να παίξει η ιστορία των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίοι διαφέρουν ως προς τους επιδιωκόμενους σκοπούς, αλλά και στις ωφέλειες που είναι δυνατό να έχουν από αυτήν, και οι διδασκόμενοι και οι διδάσκοντες. Ιδιαίτερα οι διδάσκοντες μπορούν να ωφεληθούν όχι μόνο ως επαγγελματίες, αλλά και ως εκπαιδευόμενοι, είτε κατά τη διάρκεια των σπουδών τους (pre service), είτε στα πλαίσια της ενδοϋπηρεσιακής τους επιμόρφωσης (in service). Πάνω από όλα όμως, αναδεικνύεται η ανάγκη για:

- εύκολα προσβάσιμες και κατανοητές πηγές που θα είναι διαθέσιμες τόσο στους καθηγητές όσο και στους μαθητές, και

- συστηματική προετοιμασία των καθηγητών κατά τη διάρκεια της αρχικής τους εκπαίδευσης, αλλά και στα πλαίσια της ενδοϋπηρεσιακής τους επιμόρφωσης (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εκτός των επιχειρημάτων υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους, διάφοροι εκπαιδευτικοί της πράξης, ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών και ιστορικοί των Μαθηματικών έχουν κατά καιρούς διατυπώσει σοβαρές ενστάσεις για την αποτελεσματικότητα, τη σκοπιμότητα και το θεμιτό της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Σύμφωνα με τους Tzanakis, Arcavi et al (Tzanakis, Arcavi et al 2000), Siu (Siu 2006) και Τζανάκη (Τζανάκης 2009), ο κύριος κατάλογος των επιχειρημάτων κατά της αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία περιλαμβάνει 16 επιχειρήματα τα οποία κατηγοριοποιούνται στις παρακάτω 2 κατηγορίες:

1. Ενστάσεις επιστημολογικού – φιλοσοφικού χαρακτήρα, και
2. Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες αναλυτικότερα:

1. Ενστάσεις επιστημολογικού – φιλοσοφικού χαρακτήρα

Στις ενστάσεις αυτές έχουμε 2 υποκατηγορίες:

Α. Σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών

α. Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Αν κάποιος επιθυμεί να διδάξει ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να διδάξει πρώτα τα ίδια τα Μαθηματικά. Δεν μπορεί δηλαδή να αποφευχθεί η σειρά: Πρώτα διδάσκει το θέμα από τα Μαθηματικά και στη συνέχεια την ιστορία του (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009). Η ένσταση αυτή παραπέμπει ευθέως στην επιστημολογική θέση ότι τα Μαθηματικά ταυτίζονται με τα αποτελέσματα στα οποία οδηγείται η επι-

στημονική μαθηματική κοινότητα, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται οι διαδικασίες που οδήγησαν στα αποτελέσματα αυτά (Τζανάκης 2009).

β. Η πρόοδος στα Μαθηματικά συνίσταται στο να γίνονται τα δύσκολα προβλήματα υπόθεση ρουτίνας. Συνεπώς δεν υπάρχει κανένας σημαντικός λόγος για να ασχοληθούμε με το τι έγινε στο παρελθόν (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009). Η ένσταση αυτή υπονοεί ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση, συνιστά την ενσωμάτωση της ιστορίας σε όλες της τις λεπτομέρειες (Τζανάκης 2009).

γ. Αυτά που συνέβησαν στο παρελθόν μπορεί να ήταν περίπλοκα. Άρα η ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία μπορεί να προκαλέσει στρεβλώσεις και σύγχυση στους μαθητές, παρά αποσαφήνιση των εννοιών (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009). Η ένσταση αυτή, παρόμοια με την προηγούμενη, υπονοεί ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση, συνιστά την ενσωμάτωση της ιστορίας με όλη της την περιπλοκότητα (Τζανάκης 2009).

Β. Σχετικά με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος

α. Η ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων είναι δύσκολος στόχος και δεν βοηθά. Πραγματικά, η διδακτική αξιοποίηση των πρωτότυπων πηγών είναι μια πολύ δύσκολη υπόθεση, που από τη φύση της απαιτεί προσεκτικό σχεδιασμό και συνεχή έλεγχο σε όλα τα στάδιά της (Siu 2006, Τζανάκης 2009). Βέβαια, γύρω από το θέμα αυτό έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένες μεθοδολογικές προσεγγίσεις και έχουν γίνει διεθνώς διάφορες εφαρμογές σε διαφορετικές θεματικές περιοχές των Μαθηματικών και σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες (Τζανάκης 2009), οι οποίες θα μπορούσαν να αποτελέσουν οδηγό και για άλλες αντίστοιχες εφαρμογές.

β. Η ιστορία είναι δυνατό να είναι υπεύθυνη για την καλλιέργεια πολιτιστικού σωβινισμού και στενόμυαλου και παρωχημένου εθνικισμού

(Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.** Ωστόσο δεν είναι λογικό να απορρίψει κάποιος τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας από το φόβο ότι αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ανεπίτρεπτο και μη ηθικό τρόπο (Τζανάκης 2009).

γ. Οι μαθητές έχουν αποσπασματική αίσθηση του ιστορικού χρόνου, τουλάχιστο μέχρι το γυμνάσιο (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009)**.** Όπως είναι γνωστό οι μαθητές έχουν μια μη κανονική αίσθηση του παρελθόντος, η οποία δεν επιτρέπει τη συσχέτιση των Μαθηματικών με τα ιστορικά τους πλαίσια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός οι μαθητές δεν έχουν μια ευρύτερη παιδεία στην ιστορική επιστήμη (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Ως εκ τούτου, η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών που γίνεται στη διδακτική πράξη πρέπει προφανώς να είναι συμβατή με το επίπεδο της γνωστικής ωριμότητας των μαθητών, αλλά και με το ιστορικό τους υπόβαθρο (Τζανάκης 2009).

2. Ενστάσεις πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα

Στις ενστάσεις αυτές έχουμε 3 υποκατηγορίες:

Α. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκόντων

α. Δεν υπάρχει διαθέσιμος ο απαιτούμενος διδακτικός χρόνος (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.** Οι περισσότεροι δάσκαλοι των Μαθηματικών θεωρούν ότι δεν υπάρχει αρκετός διδακτικός χρόνος για τη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών και συνεπώς θα υπάρχει ακόμα λιγότερος σε περίπτωση που θα διδάσκεται και η ιστορία των Μαθηματικών στις συγκεκριμένες διδακτικές ώρες (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Επομένως είναι απαραίτητος ο κατάλληλος σχεδιασμός διδακτικών ενοτήτων από τα Μαθηματικά, οι οποίες είναι εφικτό να διδαχτούν βάσει της ιστορικής προσέγγισης, όπως είναι απαραίτητη και μια ανάλογη προσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων (Θωμαΐδης, Τζανάκης 2006). Ωστόσο πρέπει να γίνει σαφές ότι μια διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην ιστορία για το σύνολο της διδακτέας ύλης είναι ανέφικτη, όσο κι αν ευνοούν οι διδακτικές συνθήκες, και όχι απαραίτητη. Είναι αρκετή μια τέτοιου είδους διδακτική προσέγγιση για ένα μικρό μέρος της ύλης

για να έχει ευεργετικές επιδράσεις στην ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος και στη δημιουργία κινήτρων μάθησης στους διδασκόμενους (Τζανάκης 2009).

β. Οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν την κατάλληλη επιμόρφωση (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.** Η έλλειψη των κατάλληλων ιστορικών δεξιοτήτων στους δασκάλους είναι φυσικό επακόλουθο της έλλειψης των κατάλληλων προγραμμάτων εκπαίδευσης για αυτούς. Στην πραγματικότητα, η ιστορική αλλά και η διεπιστημονική γνώση που είναι απαραίτητες για την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη, δεν προσφέρονται στους καθηγητές των Μαθηματικών (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Συνεπώς κρίνεται απαραίτητη η σχετική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, τόσο κατά τη διάρκεια της βασικής πανεπιστημιακής τους εκπαίδευσης, όσο και κατά τη διάρκεια της ενδοϋπηρεσιακής τους επιμόρφωσης (Τζανάκης 2009).

γ. Δεν είμαι ιστορικός, άρα δεν μπορώ να ξέρω ότι παρουσιάζω το θέμα σωστά (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.** Η έλλειψη της κατάλληλης επιμόρφωσης που προαναφέραμε, οδηγεί και στην έλλειψη της απαραίτητης αυτοπεποίθησης στους εκπαιδευτικούς που είναι απαραίτητη για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική πράξη (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

δ. Δεν υπάρχει διαθέσιμο το κατάλληλο διδακτικό υλικό (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.** Πολλοί δάσκαλοι των Μαθηματικών υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει αρκετό και κατάλληλο ιστορικό υλικό για να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς που θα ήθελαν να το ενσωματώσουν στη διδασκαλία τους (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Ωστόσο τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές στη συγκεκριμένη περιοχή έχουν δημιουργήσει κατάλληλο βοηθητικό υλικό σε διάφορες μορφές (εκτενής βιβλιογραφία, βιβλία με πρωτότυπες πηγές, συλλογικοί τόμοι με λεπτομερή περιγραφή συγκεκριμένων παραδειγμάτων ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, κ.α.), το οποίο μπορούν οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιήσουν στη διδακτική πράξη (Τζανάκης 2009).

Β. Διαδικασίες αξιολόγησης

α. Πως μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση σε test ή εξετάσεις; (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009) Είναι κοινή αντίληψη ότι, δεν υπάρχει ένας ξεκάθαρος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσαν να αξιολογηθούν στοιχεία από την ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της αξιολόγησης των μαθητών. Έτσι είναι φυσικό ότι, από τη στιγμή που η ιστορική διάσταση δεν είναι δυνατό να αποτελέσει αντικείμενο αξιολόγησης, οι μαθητές να μη δίνουν την απαραίτητη σημασία και προσοχή σ' αυτήν (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Όμως οι ερευνητές της περιοχής θεωρούν ότι η ιστορική προσέγγιση μιας μαθηματικής ενότητας έχει καθαρά ποιοτικό χαρακτήρα, εξαρτάται από το θέμα και τη βαθμίδα εκπαίδευσης και επομένως είναι αρκετά δύσκολο να απομονωθεί από την επίδραση άλλων εκπαιδευτικών παραμέτρων και να αξιολογηθεί (Τζανάκης 2009).

β. Υπάρχει πράγματι εμπειρική τεκμηρίωση ότι η ιστορική διάσταση στη μαθηματική εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των Μαθηματικών; (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009) Πολλοί εκπαιδευτικοί αναρωτιόνται αν η ενσωμάτωση της ιστορίας μπορεί να βελτιώσει τις επιδόσεις των μαθητών (Siu 2006). Είναι ένα ερώτημα στο οποίο δεν υπάρχει μέχρι σήμερα ξεκάθαρη απάντηση. Όμως τα τελευταία χρόνια γίνεται σοβαρή προσπάθεια προς την κατεύθυνση αυτή, καθώς πραγματοποιούνται εμπειρικές έρευνες και διδασκαλίες προκειμένου να καταμετρηθεί η πιθανή αποτελεσματικότητα της ενσωμάτωσης της ιστορίας. Ωστόσο υπάρχει πολύς δρόμος ακόμα για να διανυθεί, προκειμένου να τεκμηριωθεί επαρκώς η αποτελεσματικότητα της ιστορικής διάστασης στη μαθηματική εκπαίδευση (Τζανάκης 2009).

Γ. Το υπόβαθρο και η στάση των διδασκομένων

α. Δεν αρέσει στους διδασκόμενους (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.**

β. Οι διδασκόμενοι το θεωρούν μάθημα Ιστορίας και δεν αγαπούν την Ιστορία (Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.**

γ. Οι διδασκόμενοι το βρίσκουν εξίσου βαρετό με τα ίδια τα Μαθηματικά (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.**

δ. Οι διδασκόμενοι δεν έχουν ικανοποιητική ευρύτερη παιδεία για να το εκτιμήσουν (Siu 2006, Τζανάκης 2009)**.**

Οι παραπάνω ενστάσεις απηχούν ευρύτερες δυσλειτουργίες και προβλήματα της εκπαίδευσης και δεν περιορίζονται στα στενά πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης (Τζανάκης 2009). Είναι κοινή διαπίστωση ότι σε πολλούς μαθητές δεν αρέσει η Ιστορία με επίπτωση να μην τους αρέσει και η ιστορία των Μαθηματικών ή να τη βρίσκουν εξίσου βαρετή με τα ίδια τα Μαθηματικά (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Επομένως είναι αναγκαία η παρέμβαση στη διδασκαλία και της Ιστορίας, και άρα έμμεσα οι παραπάνω ενστάσεις προτρέπουν σε μια διαθεματική προσέγγιση μέρους της διδακτέας ύλης (Θωμαΐδης, Τζανάκης 2006, Τζανάκης 2009).

Σύμφωνα με τον Jankvist τα παραπάνω επιχειρήματα 1.Α.α και 1.Α.β απορρίπτουν απλά την ενσωμάτωση της ιστορίας ως κάτι το οποίο δεν είναι σημαντικό για τη μαθηματική διδασκαλία. Επίσης θεωρεί ότι τα επιχειρήματα 1.Β.β, 1.Β.γ, 2.Α.α, 2.Α.β, 2.Α.δ και 2.Β.α, ενώ αναγνωρίζουν τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της ιστορίας, απορρίπτουν τη χρήση της για άλλους λόγους, και ότι τα επιχειρήματα 1.Α.γ, 2.Γ.α, 2.Γ.β και 2.Γ.γ είναι κατά κάποιο τρόπο αντίθετα εκείνων των επιχειρημάτων υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας που θέτουν ως στόχο την κινητοποίηση των μαθητών (Jankvist 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΡΟΠΟΙ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Ωστόσο μένει ανοικτό το θέμα για το πώς μπορεί αυτή να επιτευχθεί. Στο Κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε αναλυτικά στους τρόπους ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Το Κεφάλαιο διαιρείται σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται εκτενής αναφορά στις τρεις κατηγορίες προσέγγισης της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών. Στο δεύτερο μέρος αναλύουμε τις τρεις μορφές αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών. Στο τρίτο μέρος γίνεται εκτενής ανάλυση σε όλους τους πιθανούς τρόπους εφαρμογής της ιστορίας στη μαθηματική τάξη.

Οι τρεις κατηγορίες προσέγγισης.

Οι τρόποι με τους οποίους η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία και στην εκμάθηση των Μαθηματικών μπορεί να ταξινομηθεί σε τρεις κύριες κατηγορίες προσέγγισης. Μέσα σε κάθε μια από τις κατηγορίες αυτές, η ιστορία μπορεί να περιέχεται με διαφορετικό βαθμό βαρύτητας. Για παράδειγμα, η χρήση της ιστορίας μπορεί να κλιμακωθεί από πολύ μικρή έως πολύ αναλυτική. Αυτές οι κατηγορίες προσέγγισης είναι οι ακόλουθες (Jankvist 2009):

1. Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination approaches)
2. Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (modules approaches)
3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία (history-based approaches)

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες προσέγγισης αναλυτικότερα:

1. Οι διαφωτιστικές προσεγγίσεις

Στις διαφωτιστικές προσεγγίσεις, η διδασκαλία και εκμάθηση των Μαθηματικών, είτε πρόκειται για πραγματική διδασκαλία μέσα στην τάξη, είτε μέσω βιβλίων Μαθηματικών, συμπληρώνεται από παροχή ιστορικών πληροφοριών. Αυτά τα συμπληρώματα μπορούν να διαφέρουν και ως προς το μέγεθος και ως προς το σκοπό της χρήσης τους (Jankvist 2009).

Τα μικρότερα σε μέγεθος είναι τα συμπληρώματα που οι Tzanakis, Arcavi et al αναφέρουν ως "ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες" (isolated factual information) ή ως "ιστορικά ψήγματα" (historical snippets) και τα οποία σε γενικές γραμμές περιλαμβάνουν ονόματα, χρονολογίες, φημισμένα έργα και γεγονότα, χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες, φημισμένα προβλήματα και ερωτήματα, πιστά αντίγραφα βιβλίων, κ.α. (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Επίσης, η αφήγηση ανέκδοτων ιστοριών και ιστορικών γεγονότων που αναφέρει ο Siu (Siu 2000) ανήκουν στην κατηγορία αυτή. Ο Jankvist παρομοιάζει αυτά τα μικρά συμπληρώματα ως το "αλατοπίπερο" το οποίο προστίθεται στην "κατσαρόλα" της μαθηματικής εκπαίδευσης (Jankvist 2009).

Στην άλλη άκρη της κλίμακας των διαφωτιστικών προσεγγίσεων βρίσκονται οι "ιστορικοί επίλογοι ή πρόλογοι" (historical epilogues or prologues). Αυτοί βρίσκονται συνήθως στο τέλος κάθε κεφαλαίου, όπως για παράδειγμα στο βιβλίο του νορβηγού T. Lindstrøm με τίτλο "Kalkulus" του 1995, στο οποίο, όπως αναφέρει ο Jankvist, στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει ένας ιστορικός επίλογος (Jankvist 2009). Σε κάθε τέτοιο επίλογο η ιστορία των Μαθηματικών σκιαγραφείται με την παράθεση ονομάτων, χρονολογιών, προβλημάτων που κινητοποίησαν τους μαθηματικούς, αναφορών σε πρωτότυπα έργα μεγάλων μαθηματικών του παρελθόντος, συζητήσεων για την απόδοση προτεραιοτήτων, ενώ συχνά γίνονται και αναφορές στη πορεία της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών (Jankvist 2009). Ανάλογη χρήση ιστορικών προλόγων ή επιλόγων γίνεται και σε ελληνικά βιβλία του Λυκείου (για παράδειγμα στην "Ευκλείδεια Γεωμετρία" της Α' και Β' Λυκείου, στα "Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης" της Β' Λυκείου κ.α.). Σε περίπτωση που κάποιος συγγραφέας θελήσει να παραθέσει πρωτότυπες πηγές μέσα σε διαφωτιστικές προσεγγίσεις έστω και σε μορφή σύντομων αποσπασμάτων, οι ιστορικοί επίλογοι είναι η καταλληλότερη θέση γι' αυτές (Jankvist 2009).

2. Οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων

Οι οριοθετημένες ενότητες είναι διδακτικές ενότητες αφιερωμένες στην ιστορία των Μαθηματικών. Ο όρος "οριοθετημένες ενότητες" (modules) έχει προέλθει από τους Katz και Michalowicz, που τον χρησιμοποίησαν το 2004 στο συλλογικό έργο "Historical modules for the teaching and learning of mathematics", στο οποίο είχαν την επιμέλεια, και εξέδωσε η Mathematical Association of America μόνο με μορφή CD (Jankvist 2009, Τζανάκης 2009). Όπως και στην προηγούμενη κατηγορία, οι προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων μπορούν να διαφέρουν και ως προς το σκοπό και ως προς το μέγεθος.

Οι μικρότερες οριοθετημένες ενότητες είναι αυτές που οι Tzanakis, Arcavi et al αναφέρουν ως "ιστορικά πακέτα" (historical packages), τα οποία είναι συλλογές εκπαιδευτικού υλικού το οποίο είναι επικεντρωμένο σε μια μικρή μαθηματική ενότητα, στενά συνδεδεμένο με τη διδακτέα ύλη, κατάλληλο για 2 – 3 διδακτικές ώρες και έτοιμο προς χρήση στην τάξη από τους διδάσκοντες (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Jankvist 2009).

Στο μέσο περίπου της κλίμακας, βρίσκονται οι οριοθετημένες ενότητες διάρκειας 10 – 20 διδακτικών ωρών. Αυτές οι ενότητες δεν είναι απαραίτητο να είναι στενά συνδεδεμένες με τη διδακτέα ύλη, και έτσι μας παρέχουν τη δυνατότητα να μελετήσουμε κλάδους των Μαθηματικών οι οποίοι δεν αποτελούν μέρος της διδακτέας ύλης σε συγκεκριμένη σχολική βαθμίδα εκπαίδευσης (Jankvist 2009). Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να εφαρμοστούν τα ιστορικά πακέτα και οι μεγαλύτερές τους οριοθετημένες ενότητες είναι πάρα πολλοί. Οι Tzanakis, Arcavi et al αναφέρουν ενδεικτικά τους παρακάτω: με το διάβασμα πρωτότυπων ιστορικών πηγών, με διαθεματικές εργασίες (projects) των μαθητών, με θεατρικές παραστάσεις, με φύλλα εργασίας, με ιστορικά προβλήματα, με μηχανικά όργανα, μέσω του internet, κ.α. (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Στα ανώτερα σημεία της κλίμακας, βρίσκουμε βιβλία ή πλήρη μαθήματα για την ιστορία των Μαθηματικών ενταγμένα μέσα σε κάποιο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών. Αυτά μπορούν να περιλαμβάνουν ένα πλήθος ιστορικών δεδομένων ή/και την ιστορία της εξέλιξης κάποιων μαθηματικών εννοιών

(Tzanakis, Arcavi et al 2000). Τέτοια μαθήματα μπορούν να βασιστούν σε πρωτότυπες ή/και δευτερεύουσες ιστορικές πηγές που εξαρτώνται από το επιδιωκόμενο επίπεδο ιστορίας. Φυσικά, τέτοιου είδους προσεγγίσεις μπορούν να επιτευχθούν και με εκτεταμένες ερευνητικές εργασίες, όπως υλοποιούνται για παράδειγμα στο Πανεπιστήμιο Roskilde της Δανίας (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Niss 2001, Jankvist 2009).

3. Οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία

Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις προσεγγίσεις που, είτε εμπνέονται, είτε βασίζονται στην εξέλιξη και στην ιστορία των Μαθηματικών. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες προσεγγίσεις βάσει οριοθετημένων ενοτήτων, οι προσεγγίσεις βασισμένες στην ιστορία δεν ασχολούνται με τη μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών άμεσα, αλλά με έμμεσο τρόπο (Jankvist 2009). Εδώ, η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών δεν αποτελεί το αρχικό πλαίσιο συζήτησης. Αντίθετα τίθεται το θέμα της καταλληλότερης σειράς και των καταλληλότερων μεθόδων για την παρουσίαση μιας μαθηματικής έννοιας. Έτσι, η ιστορία των Μαθηματικών ενσωματώνεται πλήρως στις προσεγγίσεις αυτές κατά τη διδασκαλία τους (Jankvist 2009). Ένα τέτοιου είδους παράδειγμα είναι η πολυσυζητημένη "γενετική προσέγγιση" (genetic approach) στην οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Οι τρεις μορφές διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών.

Σε γενικές γραμμές, υπάρχουν τρεις γενικές μορφές διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των Μαθηματικών, όπου η έμφαση σε ότι αφορά την ιστορία είναι μεν διαφορετική, όμως οι τρεις αυτές μορφές δεν αμοιβαία αποκλειόμενες, αλλά συμπληρωματικές μεταξύ τους. Έτσι υπάρχει η δυνατότητα και για τις τρεις να εμφανιστούν ακόμη και παράλληλα στα πλαίσια της ίδιας δραστηριότητας ή διδασκαλίας. Οι τρεις αυτές μορφές είναι οι ακόλουθες (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009):

1. Εκμάθηση της ιστορίας των Μαθηματικών με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών
2. Εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία τους
3. Καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάθε μία από τις παραπάνω μορφές αναλυτικότερα:

1. Εκμάθηση της ιστορίας με την παροχή και άμεση ενσωμάτωση ιστορικών πληροφοριών

Με τον όρο "ιστορικές πληροφορίες" εννοούμε τα παρακάτω:

α. Ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες για διάφορα ιστορικά θέματα, όπως για παράδειγμα: ονόματα, χρονολογίες, φημισμένα έργα και γεγονότα, χρονοδιαγράμματα, βιογραφίες, φημισμένα προβλήματα και ερωτήματα, πιστά αντίγραφα βιβλίων, κ.α. Αυτές συνήθως παρέχονται με τη μορφή ιστορικών σημειωμάτων σε εγχειρίδια Μαθηματικών, ή ιστορικών εισαγωγών ή επιλόγων σε βιβλία ή κεφάλαια βιβλίων (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

β. Αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία ιστορίας Μαθηματικών πάνω σε συγκεκριμένα θέματα της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών. Αυτές μπορεί να είναι απλές αφηγήσεις ιστορικών δεδομένων, ή η ιστορική εξέλιξη των εννοιών, ή κάτι ενδιάμεσο των δύο προηγούμενων (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009).

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η έμφαση δίνεται περισσότερο στην παροχή πληροφοριών από την ιστορία των Μαθηματικών και στη μεγαλύτερη εμβάθυνση στην κατανόηση της φύσης των Μαθηματικών και λιγότερο στην εκμάθηση των ίδιων των Μαθηματικών (σε αντίθεση με τις δύο επόμενες μορφές). Η μορφή αυτή είναι ένας βοηθητικός τρόπος ενσωμάτωσης της ιστορίας και δεν αλλάζει άμεσα το φυσικό τρόπο διδασκαλίας κάποιας συγκεκριμένης διδακτικής ενότητας, παρόλο που επηρεάζει σίγουρα τη μαθησιακή

εμπειρία (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009). Η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως "ως στόχος" και δευτερευόντως "ως εργαλείο" (Τζανάκης 2009).

Η μορφή αυτή μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, όπως: με ιστορικά ψήγματα, με πακέτα έτοιμα προς χρήση στην αίθουσα διδασκαλίας, με εξοικείωση των εκπαιδευόμενων με φημισμένα μαθηματικά προβλήματα, με ορισμένα είδη θεατρικών παραστάσεων, με κινηματογραφικές ταινίες ή άλλα οπτικά μέσα, με επισκέψεις σε μουσεία και με αξιοποίηση πληροφοριών από βάσεις δεδομένων στον παγκόσμιο ιστό (WWW).

Όλα σχεδόν τα επιχειρήματα υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών μπορούν να υποστηριχτούν, ολικά ή μερικά, από την ενσωμάτωση αυτής της μορφής, λαμβάνοντας όμως υπόψη τη μορφή, το περιεχόμενο και το βάθος της μαθηματικής έννοιας που πρόκειται να διδαχθεί (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Όπως είναι φανερό, οι ξεχωριστές αντικειμενικές πληροφορίες σχεδόν ταυτίζονται με τα συμπληρώματα που είδαμε να βρίσκονται στο χαμηλότερο άκρο της κλίμακας των διαφωτιστικών προσεγγίσεων. Τα αυτοτελή μαθήματα ή βιβλία ιστορίας Μαθηματικών βρίσκονται στο ψηλότερο άκρο της κλίμακας των προσεγγίσεων βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (Jankvist 2009).

2. Εκμάθηση των Μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία

Αυτή είναι ουσιαστικά η γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας και της εκμάθησης των Μαθηματικών. Η μέθοδος αυτή δεν είναι, ούτε αυστηρά επαγωγική, ούτε τυπικά ιστορική, αφού θεμελιώδεις θέσεις της είναι ότι, ένα μαθηματικό θέμα μπορεί να μελετηθεί από κάποιον διδασκόμενο μόνο όταν αυτός έχει ενδιαφερθεί και κινητοποιηθεί για το συγκεκριμένο θέμα και ότι ο διδασκόμενος μπορεί να μάθει κάποιο μαθηματικό θέμα μόνο την κατάλληλη στιγμή στη χρονική διαδικασία της πνευματικής του ανάπτυξης και εξέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι τα ερωτήματα και τα προβλήματα με τα οποία "ασχολήθηκε" ο συγκεκριμένος τομέας των Μαθηματικών έχουν αποσαφηνιστεί και κατανοηθεί επαρκώς (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Γίνεται λοιπόν φανερή και στους διδασκόμενους η "αναγκαιότητα του μαθηματικού αντικειμένου" (necessity of the

subject) για την απάντηση τέτοιων ερωτημάτων και τη λύση τέτοιων προβλημάτων, οι οποίοι πλέον κατανοώντας τις ιδιότητες και τις μεθόδους που συνδέονται με το μαθηματικό αντικείμενο είναι πλέον ικανοί και να απαντήσουν στα ερωτήματα αυτά και να λύσουν παρόμοια προβλήματα. Οι Tzanakis, Arcavi et al υποστηρίζουν ότι η "αναγκαιότητα του μαθηματικού αντικειμένου" αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα του μαθηματικού νοήματος που αποδίδεται σ' αυτό από το διδασκόμενο (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Στη γενετική προσέγγιση η έμφαση είναι μικρότερη στη χρήση θεωριών, μεθόδων και εννοιών και μεγαλύτερη στο πως οι θεωρίες, μέθοδοι και έννοιες απαντούν σε συγκεκριμένα προβλήματα και ερωτήματα. Από αυτήν την άποψη, η ιστορική διάσταση αυξάνει σημαντικά τις πιθανότητες για μια σφαιρική και σε βάθος κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

1. Κάθε δάσκαλος των Μαθηματικών, ακόμα κι αν δεν είναι ιστορικός των Μαθηματικών, πρέπει να γνωρίζει τα βασικά σημεία της ιστορικής εξέλιξης του θέματος το οποίο διδάσκει.
2. Τα κρίσιμα βήματα αυτής της ιστορικής εξέλιξης είναι τα ερωτήματα, τα προβλήματα και οι ιδέες κλειδιά που άνοιξαν νέες διαδρομές στην επιστημονική μαθηματική έρευνα.
3. Τα προηγούμενα κρίσιμα βήματα ανακατασκευάζονται ώστε να γίνουν κατάλληλα για τη διδασκαλία τους μέσα στην τάξη.
4. Τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα δίνονται ως μια ακολουθία ιστορικών προβλημάτων αυξανόμενης δυσκολίας, προκειμένου ο διδασκόμενος να κτίζει τη γνώση του πάνω στα προηγούμενα. Η μορφή των προβλημάτων αυτών μπορεί να κλιμακωθεί από πολύ απλές ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα μέχρι ανοικτά ερωτήματα, που μπορούν να αποτελέσουν μέρος από μία εργασία (project) που θα πραγματοποιηθεί από μια ομάδα μαθητών.

Αναφορικά με το προηγούμενο σχήμα οι Tzanakis, Arcavi et al κάνουν τις παρακάτω παρατηρήσεις (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

I. Διδάσκοντες και διδασκόμενοι θα κάνουν χρήση πρωτότυπων και δευτερευουσών ιστορικών πηγών.

II. Ο διδάσκων (κυρίως στο σημείο 2 του σχήματος) πρέπει να προσπαθήσει να εντοπίσει τις εγγενείς δυσκολίες του μαθηματικού αντικειμένου και να εκτιμήσει τα πιθανά εμπόδια στην κατανόησή του. Κατόπιν ο διδάσκων μπορεί να δημιουργήσει μια συλλογή ερωτημάτων και προβλημάτων, εμπνευσμένη από την ιστορία των Μαθηματικών, ώστε να ενεργοποιήσει την περιέργεια του μαθητή, να του ανοίξει το δρόμο της μάθησης και να του δημιουργήσει την ανάγκη της μελέτης νέων θεωριών, μεθόδων και εννοιών. Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι να κυριαρχούν η επαγωγική αιτιολόγηση και η αναλογική σκέψη, με αποτέλεσμα την ανακάλυψη και τη δημιουργία προτύπων (patterns) και τελικά την ίδια τη μαθηματική δραστηριότητα.

III. Στις ανακατασκευές των κρίσιμων βημάτων (σημείο 3 του σχήματος) η ιστορία μπορεί να εισαχθεί, είτε άμεσα, είτε έμμεσα. Όταν η ιστορία ενσωματώνεται άμεσα, οι μαθηματικές ανακαλύψεις παρουσιάζονται σε όλες τους τις λεπτομέρειες και οι σχετικές διδακτικές διαδικασίες οργανώνονται σύμφωνα με τα βασικά ιστορικά γεγονότα, επιχειρώντας να φανερώσουν τα στάδια της εξέλιξης ενός μαθηματικού πεδίου, θεωρίας, μεθόδου ή έννοιας, με στόχο την εκμάθησή τους μέσα από τις διαδικασίες αυτές. Όταν η ιστορία ενσωματώνεται έμμεσα, οι διδακτικές διαδικασίες μπορούν να βασίζονται και σε έννοιες, μεθόδους, συμβολισμό και ορολογία μεταγενέστερες της ιστορικής περιόδου πάνω στην οποία βασίζονται, δίνοντας πάντα έμφαση στο ότι ο διδακτικός στόχος είναι κυρίως η κατανόηση και η εκμάθηση των Μαθηματικών στη σύγχρονη μορφή τους. Είναι σημαντικό να τονίσουμε στο σημείο αυτό οι παραπάνω δύο τρόποι ανακατασκευής δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενοι, αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδακτική διαδικασία συμπληρώνοντας ο ένας τον άλλο. Και στους δύο τρόπους, οι ιστορικές διαστάσεις, τα διαισθητικά επιχειρήματα, τα λάθη και οι εναλλακτικές και πρωτότυπες επινοήσεις πρέπει να εντάσσονται στη διδασκαλία.

IV. Μια δικαιολογημένη ανησυχία σχετικά με την προσέγγιση αυτή, είναι ο ατεκμηρίωτος φόβος ότι μπορεί να απαιτηθεί αρκετός χρόνος για την υλοποίησή της ή να οδηγήσει σε υπερμεγέθη εγχειρίδια. Η ακολουθία των ιστορικών προβλημάτων (σημείο 4 του σχήματος) πρέπει να δίνει

τις ευκαιρίες στο μαθητή να φτάσει στην οικοδόμηση αποτελεσμάτων, ξεκινώντας από προφανή συμπεράσματα του κύριου μαθηματικού αντικειμένου και ακολουθώντας τα κύρια ιστορικά βήματα εξέλιξής του. Με αυτόν τον τρόπο, η επίλυση ασκήσεων γίνεται το απαραίτητο συστατικό της μάθησης και οδηγεί στην οικοδόμηση των απαραίτητων δεξιοτήτων, έχοντας ως βάση ενδιαφέροντα ιστορικά προβλήματα και όχι κατασκευασμένα και τεχνητά τα οποία συνήθως στερούνται ενδιαφέροντος. Ο διδάσκων θα πρέπει να είναι προσεκτικός ώστε να μην κάνει κατάχρηση της ιστορίας παρουσιάζοντας θεμελιώδεις διαστάσεις του θέματος (π.χ. βασικές έννοιες ή θεωρήματα) με τη μορφή ιστορικών προβλημάτων.

Οι Tzanakis, Arcavi et al θεωρούν ότι η παραπάνω προσέγγιση που περιγράφηκε παραπάνω από τα σημεία 1 – 4 του σχήματος, έχει αρκετά πλεονεκτήματα, μερικά από τα οποία είναι τα παρακάτω (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

- Οι ανακατασκευές των ερωτημάτων και τα προβλημάτων (σημείο 3 και παρατήρηση III) είναι πιθανό να οδηγήσουν τους μαθητές στο να κατανοήσουν το κίνητρο και την ανάγκη για την παρουσίαση νέων μαθηματικών ιδεών, θεωριών, μεθόδων και αποδείξεων, και στο να κατανοήσουν το περιεχόμενό τους σε βάθος (βλέπε επιχειρήματα 1β και 3α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).
- Οι διδασκόμενοι και οι διδάσκοντες, μ' αυτόν τον τρόπο, ενθαρρύνονται να θεωρήσουν τους εαυτούς τους ως ερευνητές (βλέπε επιχειρήματα 2α, 3γ και 4β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).
- Η αναγνώριση των κρίσιμων βημάτων της εξέλιξης κάποιου μαθηματικού θέματος (σημείο 2), τα οποία συχνά μας φανερώνουν συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών και μη πεδίων, έχουν πολύ μεγάλο διδακτικό ενδιαφέρον (βλέπε επιχείρημα 1γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).
- Ο διδάσκων έχει τη δυνατότητα να μετατρέψει τις απαντήσεις των ερωτημάτων και τις λύσεις των προβλημάτων από τη ιστορία σε βασικό συστατικό της παρουσίασης ενός μαθηματικού θέματος και έτσι να

φτάσουν οι μαθητές στην πλήρη κατανόησή του (σημείο 2 και παρατήρηση IV). Έχει διαπιστωθεί ότι το ενδιαφέρον των μαθητών μεγαλώνει όταν βρίσκονται μπροστά σε σημαντικά και γόνιμα μαθηματικά ερωτήματα από το παρελθόν, χωρίς ωστόσο να παραγνωρίζεται ο ρόλος των ερωτημάτων αυτών, ως το μέσο για να βελτιώσουν οι μαθητές τις μαθηματικές τεχνικές τους στην επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων (βλέπε επιχείρημα 1β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

- Η μορφή αυτή προτείνει αρκετούς πιθανούς τρόπους για τη διδασκαλία κάποιου μαθηματικού θέματος σύμφωνους με τις ανάγκες των μαθητών της τάξης και τις απαιτήσεις της διδακτέας ύλης. Για παράδειγμα μπορεί να δοθεί έμφαση στις ιστορικές διαστάσεις ενός θέματος, σε ξεχωριστές μαθηματικές ιδέες ή στις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών και μη μαθηματικών πεδίων (βλέπε επιχειρήματα 1α και 1γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).
- Οι διδάσκοντες έχουν την ευκαιρία να συγκρίνουν τα σύγχρονα Μαθηματικά με τη μορφή που είχαν στο παρελθόν, σε θέματα συμβολισμού, ορολογίας, μεθόδων απόδειξης και υπολογισμού κ.α. (σημεία 1 και 2). Η παρουσίαση αυτών των διαστάσεων της σύγκρισης μπορεί να είναι πολύ ωφέλιμη για τους μαθητές (βλέπε επιχείρημα 2β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).
- Οι διδάσκοντες έχουν πολλές πιθανότητες να ερευνήσουν και να αναγνωρίσουν δυσκολίες και εμπόδια στην κατανόηση από πλευράς μαθητών (σημεία 1 και 2) (βλέπε επιχείρημα 3β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Είναι φανερό ότι η συγκεκριμένη μορφή διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας εντάσσεται στην κατηγορία των προσεγγίσεων που είναι βασισμένες στην ιστορία, ενώ η ιστορία εμφανίζεται εδώ κυρίως "ως εργαλείο" (Τζανάκης 2009, Jankvist 2009).

3. Καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά και το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιό τους

Με τον όρο βαθύτερη γνώση και συνείδηση για τα Μαθηματικά οι Tzanakis, Arcavi et al εννοούν διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας, που τις διακρίνουν σε δύο κατηγορίες (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

α. Ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, και

β. Εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάθε κατηγορία ξεχωριστά:

α. Η ιστορία των Μαθηματικών προσφέρει δυνατότητες για να αποκαλύψει, να αναλύσει και να δώσει έμφαση στα ενδογενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως τα παρακάτω (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009):

I. Ο ρόλος των "γενικών εννοιολογικών πλαισίων" (general conceptual frameworks) και των συνδυαζόμενων κινήτρων, ερωτημάτων και προβλημάτων, τα οποία οδήγησαν στην ανάπτυξη και εξέλιξη συγκεκριμένων μαθηματικών πεδίων (βλέπε επιχειρήματα 4α, 5α και 5β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

II. Η εξελικτική φύση των Μαθηματικών και ως προς το περιεχόμενο και ως προς τη μορφή τους, σε τομείς όπως ο συμβολισμός, η ορολογία, οι υπολογιστικές μέθοδοι, οι τρόποι έκφρασης και αναπαράστασης σε μαθηματικά θέματα, καθώς επίσης και σε μετα-μαθηματικές έννοιες όπως η απόδειξη, η τεκμηρίωση και η αυστηρότητα, πάντα σε σύγκριση με τα σύγχρονα Μαθηματικά (βλέπε επιχειρήματα 2α και 2β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

III. Ο ρόλος των αμφιβολιών, των παραδόξων, των αντιφάσεων, των ευρετικών μεθόδων και δυσκολιών στην εκμάθηση και στη δημιουργία νέων Μαθηματικών, στα πλαίσια συγκεκριμένων ερωτημάτων και προβλημάτων, είναι πολύ σημαντικός και μπορεί να οδηγήσει στη γενίκευση, στις αφαιρετικές διαδικασίες και στο φορμαλισμό (βλέπε επιχειρήματα 4γ, 3γ και 1α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

β. Πολλοί θεωρούν ότι τα Μαθηματικά είναι ένας επιστημονικός κλάδος αποσυνδεδεμένος από τις κοινωνικές και πολιτιστικές ανησυχίες και ότι δεν επηρεάζονται από αυτές. Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να μας προσφέρει επιχειρήματα για το αντίθετο και να δώσει έμφαση στα εξωγενή χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως τα παρακάτω (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Τζανάκης 2009):

I. Πολλές πλευρές των Μαθηματικών μπορούν συσχετισθούν στενά με φιλοσοφικά ερωτήματα και προβλήματα, με τέχνες όπως η μουσική και η αρχιτεκτονική, με άλλες επιστήμες όπως η Φυσική, η Βιολογία και η Αστρονομία, αλλά και άλλες ανθρώπινες δραστηριότητες (βλέπε επιχειρήματα 1γ, 5β και 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

II. Το πολιτιστικό και κοινωνικό πλαίσιο επέδρασαν στη σύλληψη, στη διατύπωση και στη λύση κάποιων προβλημάτων, αλλά και στην αξιοποίηση της λύσης τους (βλέπε επιχειρήματα 5β και 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

III. Ο κοινωνικός και πολιτιστικός περίγυρος έχουν επηρεάσει σημαντικά την ανάπτυξη, αλλά και την καθυστέρηση της ανάπτυξης κάποιων μαθηματικών πεδίων (βλέπε επιχείρημα 5β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

IV. Τα Μαθηματικά έχουν αναγνωριστεί ως ένα σημαντικό μέρος της πολιτιστικής κληρονομιάς διαφορετικών πολιτισμών, εθνών και φυλών (βλέπε επιχείρημα 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

V. Πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας της, μας φανερώνουν τάσεις και ανησυχίες στην κοινωνία και στον πολιτισμό κάθε εποχής σε πολλούς διαφορετικούς τόπους (βλέπε επιχειρήματα 5α, 5β και 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Ο Jankvist υποστηρίζει ότι η πλέον κατάλληλη προσέγγιση μέσω της οποίας είναι δυνατό να επιτευχθεί η καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα Μαθηματικά, μέσω των ενδογενών και εξωγενών χαρακτηριστικών της

μαθηματικής δραστηριότητας, είναι η προσέγγιση βάσει οριοθετημένων ενοτήτων (Jankvist 2009). Στην συγκεκριμένη μορφή διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας, η ιστορία εμφανίζεται κυρίως "ως στόχος" (Τζανάκης 2009).

Τρόποι εφαρμογής της ιστορίας στη μαθηματική τάξη.

Στην διεθνή βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί κατά καιρούς πολλοί τρόποι με τους οποίους επιχειρήθηκε από ερευνητές και ιστορικούς των Μαθηματικών η εφαρμογή της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Ο Τζανάκης τούς έχει κατηγοριοποιήσει σε πέντε κατηγορίες που είναι οι παρακάτω (Τζανάκης 2009):

α. Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα

β. Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες

γ. Ευέλικτες εφαρμογές πιο "τοπικού" χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με τον πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται

δ. Εφαρμογές πιο "πειραματικού" και εμπειρικού χαρακτήρα, και

ε. Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες αναλυτικότερα.

α. Εφαρμογές βάσει άμεσης επαφής με ιστορικό υλικό και γεγονότα

1. Ιστορικά "σημειώματα" και ιστορικές εισαγωγές σε επιμέρους μαθηματικά θέματα (historical snippets)

Σε πολλά βιβλία Μαθηματικών όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης σε πολλές χώρες του κόσμου ενσωματώνονται και παραθέτονται ιστορικά σημειώματα με ιστορικές πληροφορίες, τα οποία οι Tzanakis, Arcavi et al ονομάζουν "ιστορικά ψήγματα" (historical snippets) (Tzanakis, Arcavi et al 2000) και τα οποία μάλιστα χαρακτηρίζονται και κατηγοριοποιούνται ως προς τη μορφή (format) τους και ως προς το περιεχόμενό (content) τους.

Ως προς τη μορφή τα ιστορικά σημειώματα χαρακτηρίζονται (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

I. Από τη θέση που βρίσκονται σε σχέση με το μαθηματικό θέμα στο οποίο αναφέρονται. Οι πιθανές θέσεις είναι στην αρχή του κεφαλαίου, διάσπαρτα στο κείμενο, σαν υποσημείωση στο κάτω μέρος της σελίδας, παράλληλα με το μαθηματικό κείμενο στο περιθώριο της σελίδας ή στο τέλος του κεφαλαίου.

II. Από τη διδακτική προσέγγιση που επιχειρούν. Αυτή μπορεί να είναι διευκρινιστική ή ερμηνευτική στο μαθηματικό θέμα, ή να απαιτεί ενεργητική εμπλοκή των μαθητών για την επίλυση ενός προβλήματος, ή για την εκτέλεση κάποιας δραστηριότητας ή/και κάποιας εργασίας.

III. Από το πόσο ουσιαστικά είναι. Το ιστορικά σημειώματα μπορεί να δίνουν ουσιαστικές πληροφορίες για το μαθηματικό θέμα με το οποίο συνδέονται ή απλά να αναφέρουν κάποια ιστορικά δεδομένα για τη ζωή κάποιου μαθηματικού από το παρελθόν.

IV. Από το στυλ και το σχεδιασμό τους. Το ιστορικά σημειώματα μπορούν να είναι αφηγηματικά και ευκολοδιάβαστα ή και όχι. Μπορούν επίσης να είναι ξεχωριστά από το μαθηματικό κείμενο (με διαφορετική γραμματοσειρά, διαφορετικό χρώμα, ή σε πλαίσιο) και ελκυστικά οπτικά.

Ως προς το περιεχόμενο, τα ιστορικά σημειώματα χαρακτηρίζονται, από το τι περιέχουν και σε ποια διάσταση της ιστορίας δίνουν έμφαση (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

I. Πραγματικά δεδομένα. Τα ιστορικά σημειώματα μπορούν να περιέχουν φωτογραφίες και βιογραφίες μαθηματικών, πιστά αντίγραφα εξώφυλλων ή άλλων σελίδων ιστορικών βιβλίων, ανέκδοτα, χρονολογίες, αρχιτεκτονικά και πολιτιστικά-παραδοσιακά σχέδια και σχήματα κ.α.

II. Εννοιολογικά θέματα. Τα ιστορικά σημειώματα μπορεί να είναι αφηγήσεις πάνω στα κίνητρα, την προέλευση και την εξέλιξη μιας μαθηματικής ιδέας, μπορεί να περιέχουν παλαιότερους συμβολισμούς και τη σύγκρισή τους με τους συμβολισμούς των σύγχρονων Μαθηματικών, ιστορικά προβλήματα, αρχαίες μεθόδους υπολογισμού κ.α.

2. Επιτόπια εμπειρία βάσει επισκέψεων σε μουσεία, αρχαιολογικούς, ιστορικούς και άλλους χώρους (outdoors experience)

Τα Μαθηματικά της εμπειρίας σε εξωτερικούς χώρους αναφέρονται στην παρατήρηση και αναγνώριση δομών, μορφών και σχημάτων στη φύση, στην αρχιτεκτονική, στη μουσική, στις πλαστικές τέχνες και αλλού. Μερικές άλλου τέτοιου είδους δραστηριότητες είναι η χρήση παλαιών οργάνων και μέσων πλοήγησης με σκοπό την εκμάθηση της Τριγωνομετρίας, καθώς και οι επισκέψεις σε μουσεία επιστημών με μαθηματικά εκθέματα διαφόρων ειδών από την ιστορία των Μαθηματικών.

Μια μοναδική και ταυτόχρονα εξαιρετική δραστηριότητα γίνεται στην Ιαπωνία και την περιγράφουν οι Tzanakis, Arcavi et al (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Οι Ιάπωνες, βαθύτερα επηρεασμένοι από την Κινέζικη παράδοση των Μαθηματικών, έχουν δημιουργήσει από τον 17ο αιώνα έναν κλάδο των Μαθηματικών που ονομάζουν Wa-San (Ιαπωνική Αριθμητική) και τον θεωρούν τελείως διαφορετικό από τα δυτικά Μαθηματικά. Εδώ και αρκετούς αιώνες, απλοί άνθρωποι συνηθίζουν να αναρτούν διάφορα προβλήματα σε τοίχους ή πίνακες ανακοινώσεων, στα οποία δίνουν απαντήσεις ή κάποιο σχεδιάγραμμα λύσης κάποιοι άλλοι άνθρωποι. Οι λύσεις που αναρτώνται στηρίζονται στην παραδοσιακή πρακτική Αριθμητική των Ιαπώνων. Σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ιαπωνία, κατά τη διάρκεια των διακοπών τους, διοργανώνουν εκδρομές σε διάφορες περιοχές που υπάρχουν τέτοιες αναρτήσεις. Εκεί οι μαθητές καταγράφουν τα προβλήματα, τις απαντήσεις και τα σχεδιαγράμματα των λύσεων προκειμένου να τα παρουσιάσουν σε ειδικές σχολικές γιορτές. Η δραστηριότητα συνίσταται στα παρακάτω (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

- Οι μαθητές, αφού πρώτα κατανοήσουν το πρόβλημα, δίνουν τη δική τους λύση χρησιμοποιώντας σύγχρονα Μαθηματικά, και συγκρίνουν τη δική τους απάντηση με αυτήν που βρίσκουν στον πίνακα ανακοινώσεων (βλέπε επιχείρημα 1α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).
- Οι μαθητές πρέπει να αποκωδικοποιήσουν τη λύση ή το σχεδιάγραμμά της από τη μαθηματική γλώσσα των Wa-San Μαθηματικών στη γλώσ-

σα των σύγχρονων Μαθηματικών (βλέπε επιχείρημα 3ε υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

- Έχοντας υπόψη ότι τα προβλήματα αυτά και οι απαντήσεις τους είναι δημιουργήματα απλών ανθρώπων, οι μαθητές όχι μόνο εξασκούνται στην επίλυση προβλημάτων, αλλά έχουν και την ευκαιρία να δουν πτυχές των Wa-San Μαθηματικών και να τα συνδέσουν με την πολιτιστική τους κληρονομιά (βλέπε επιχείρημα 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

3. Ταινίες, videos και άλλα οπτικά μέσα, όπου παρουσιάζονται θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών (films and other visual means)

Οι ταινίες που έχουν σχέση με την ιστορία των Μαθηματικών μπορούν να υπογραμμίσουν το ανθρώπινο, πολιτιστικό και κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο έζησαν στο παρελθόν διάφοροι μαθηματικοί και στο οποίο δημιουργήθηκαν και εξελίχτηκαν διάφορες μαθηματικές ιδέες και κατ' επέκταση τα Μαθηματικά (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων ταινιών μεγάλου μήκους, είναι η σουηδική ταινία "The hill on the dark side of the moon" που αναφέρεται στη ζωή της μαθηματικού Σοφίας-Σόνιας Κοβαλέβσκαγια (Sofia-Sonya Kovalevskaya) και η αμερικανική ταινία "Agora" που αναφέρεται στη ζωή της αρχαίας Ελληνίδας μαθηματικού Υπατίας.

Υπάρχουν αντίστοιχα αρκετές ταινίες μικρού μήκους, όπως αυτές που έχει δημιουργήσει το Ανοικτό Πανεπιστήμιο της Μεγάλης Βρετανίας (Open University of UK), με θέματα από τη ζωή μεγάλων μαθηματικών του παρελθόντος και την ιστορία διαφόρων μαθηματικών ανακαλύψεων, που προβάλλονται από τη δημόσια τηλεόραση της Μεγάλης Βρετανίας (BBC). Η σημαντικότερη ίσως ταινία μικρού μήκους είναι αυτή με τίτλο "The Tunnel of Samos", διάρκειας 30 λεπτών περίπου, που δημιούργησε το California Institute of Technology (Caltech). Στην ταινία αυτή συνδέονται ιστορικές και μαθηματικές πλευρές για την κατασκευή του περίφημου Ευπαλίνειου Ορύγματος, ενώ με τη βοήθεια γραφημάτων και άλλων οπτικών αναπαραστάσεων αναδεικνύονται οι μαθηματικές ιδέες και γνώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Άλλα οπτικά μέσα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι τα posters που απεικονίζουν διάφορους μεγάλους μαθηματικούς, τα πιστά αντίγραφα και οι ανατυπώσεις σημαντικών μαθηματικών έργων και βιβλίων, τα χρονοδιαγράμματα με την εξέλιξη διάφορων μαθηματικών θεμάτων ή εννοιών, κ.α. (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

β. Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες

1. Ερευνητικά projects για τους διδασκόμενους βασισμένα σε ιστορικά κείμενα (research projects based on history texts)

Τα ερευνητικά projects συνήθως πραγματοποιούνται από φοιτητές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς. Βέβαια με τις απαραίτητες προσαρμογές μπορούν να πραγματοποιηθούν και από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων projects είναι αυτά που πραγματοποιούνται στο Πανεπιστήμιο Roskilde της Δανίας, που σύμφωνα με τον Niss (Niss 2001), κατέχουν κεντρική θέση ώστε ένα μεγάλο μέρος των σπουδών των προπτυχιακών αλλά και των μεταπτυχιακών φοιτητών να γίνεται με την εκπόνηση ερευνητικών projects. Οι φοιτητές στη διάρκεια των σπουδών τους αφιερώνουν περίπου το μισό από το χρόνο τους στην εκπόνηση των projects που επιλέγουν από τις παρακάτω μαθηματικές περιοχές (Niss 2001):

α. Ανάλυση μαθηματικών μοντέλων

β. Η φύση των Μαθηματικών ως επιστημονικό πεδίο

γ. Κατασκευή μαθηματικών μοντέλων

δ. Καθαρά (pure) Μαθηματικά, και

ε. Μαθηματική εκπαίδευση.

Κάθε project εστιάζεται σε μερικά (συνήθως 5) ερευνητικά ερωτήματα, έχει διάρκεια 1 – 2 ακαδημαϊκά εξάμηνα, γίνεται παράλληλα με τα παραδοσιακά μαθήματα και πραγματοποιείται από ομάδες 2 – 8 φοιτητών. Το τελικό αποτέλεσμα της ερευνητικής αυτής εργασίας είναι κυρίως ένα κείμενο με έκταση 70 – 150 σελίδες, χωρίς να αποκλείεται και ο σχεδιασμός μιας σχετικής έκθεσης

(exhibition), ενός βιβλίου ή μιας ταινίας μικρού μήκους. Στο τέλος της διαδικασίας αυτής οι φοιτητές και η εργασία τους αξιολογούνται από τον επιβλέποντα καθηγητή και από έναν εξωτερικό αξιολογητή (συνήθως κάποιον καθηγητή από άλλο Πανεπιστήμιο της Δανίας). Τα projects για παράδειγμα της δεύτερης κατηγορίας ("η φύση των Μαθηματικών ως επιστημονικό πεδίο") απαιτούν από τους φοιτητές να διαπραγματευθούν τις μεθόδους, τις θεωρίες και την οργάνωση των Μαθηματικών, προκειμένου να αποσαφηνιστούν φιλοσοφικά θέματα των Μαθηματικών, καθώς επίσης την ιστορική τους εξέλιξη και τον κοινωνικό τους ρόλο (Tzanakis, Arcavi et al 2000, Niss 2001). Η φιλοσοφία αυτών των projects είναι ότι κάθε μαθηματικός, απόφοιτος του Roskilde, πρέπει να έχει σχηματίσει την άποψη ότι τα Μαθηματικά ως επιστημονικό πεδίο έχουν το δικό τους χώρο στην κοινωνία και στον ανθρώπινο πολιτισμό (βλέπε επιχείρημα 5β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) και να κατανοήσει ότι τα Μαθηματικά έχουν τη δική τους ιστορία και σχετίζονται με άλλα επιστημονικά πεδία (βλέπε επιχείρημα 1γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Οι Tzanakis, Arcavi et al υποστηρίζουν ότι τα ερευνητικά ερωτήματα, οι διερευνήσεις και οι διαδικασίες των projects αυτών έχουν στενή ομοιότητα με τα πρωτότυπα ερευνητικά projects που δημοσιεύονται σε επιστημονικά περιοδικά (βλέπε επιχειρήματα 3γ, 2α και 1δ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι οι Tzanakis, Arcavi et al περιγράφουν (στο Tzanakis, Arcavi et al 2000) ένα project με τίτλο "Το πρόβλημα του Cayley και η αρχική ανάπτυξη των fractals" (Cayley's problem and the early development of what later became fractals), ενώ ο Niss περιγράφει από τη σύλληψη της αρχικής ιδέας των φοιτητών ως την αξιολόγησή του (στο Niss 2001) το project "Αποδείξεις στα Μαθηματικά" (Proofs in Mathematics).

2. Η διδακτική χρήση πρωτότυπων πηγών (primary sources)

Η διδακτική αξιοποίηση των πρωτότυπων πηγών, συγκρινόμενη με τους άλλους τρόπους ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική διαδικασία, είναι η πιο απαιτητική και η πιο χρονοβόρα. Στις περισσότερες των περιπτώσεων η μελέτη μιας πρωτότυπης πηγής απαιτεί μια λεπτομερή

και σε βάθος κατανόηση όχι μόνο του ιστορικού χρόνου κατά τον οποίο γράφτηκε η πηγή, αλλά και του γενικού ιδεολογικού, πολιτιστικού και κοινωνικού πλαισίου της εποχής εκείνης. Η μαθηματική (αλλά και η φυσική) γλώσσα της πρωτότυπης πηγής είναι πολύ διαφορετική από τη γλώσσα που χρησιμοποιείται στις ημέρες μας και αυτό αποτελεί μια δυσκολία που πρέπει να ξεπεραστεί. Βέβαια, ο σκοπός και τα προσδοκώμενα αποτελέσματα της χρήσης μιας πρωτότυπης πηγής δεν είναι τελείως διαφορετικά από αυτά της χρήσης των άλλων τρόπων εφαρμογής της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Ωστόσο σύμφωνα με τους Jahnke et al, υπάρχουν τρεις γενικές ιδέες που πρέπει να τροποποιηθούν (suited) κατάλληλα, προκειμένου να περιγράψουν τα αποτελέσματα της μελέτης μιας πρωτότυπης πηγής (Jahnke et al 2000):

α. Η αντικατάσταση (replacement): Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών αντικαθιστά το συνηθισμένο με κάτι διαφορετικό. Αυτό μας επιτρέπει να δούμε (και να δουν κυρίως οι μαθητές) τα Μαθηματικά σαν μια διανοητική δραστηριότητα, και όχι σαν σύνολο μαθηματικών γνώσεων ή τεχνικών για τη λύση ασκήσεων.

β. Ο αναπροσανατολισμός (reorientation): Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών προκαλεί τις αντιλήψεις μας κάνοντας το γνωστό άγνωστο και το οικείο ξένο. Η άμεση επαφή με ένα ιστορικό κείμενο μπορεί να προκαλέσει αναπροσανατολισμό των απόψεών μας και κυρίως των μαθητών, αφού συνήθως θεωρούν ότι οι μαθηματικές ιδέες και έννοιες εμφανίζονται σαν να υπήρχαν πάντα. Επιπλέον ο τρόπος χρήσης των εννοιών γίνεται χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την κατασκευή τους. Η ιστορία όμως μας υπενθυμίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες ανακαλύφθηκαν και εφευρέθηκαν από ανθρώπους και όχι από μόνες τους.

γ. Η πολιτισμική κατανόηση (cultural understanding): Η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών μας προσκαλεί στο χώρο και στο χρόνο δημιουργίας και εξέλιξης των Μαθηματικών, μέσα στο επιστημονικό, τεχνολογικό, ιδεολογικό και κοινωνικό πλαίσιο του χώρου και του χρόνου. Επίσης μας προσκαλεί να δούμε τη διδασκαλία των Μαθηματικών από οπτικές γωνίες που απέχουν αρκετά από τους τρόπους διδασκαλίας τους στις μέρες μας.

Η διδακτική χρήση των πρωτότυπων πηγών έχει αρκετά ιδιάζοντα χαρακτηριστικά, όπως αυτά που αναφέρονται στη συνέχεια.

Η αξία και η ποιότητα των πρωτότυπων πηγών:

Για την κατάλληλη ενσωμάτωση των πρωτότυπων πηγών, πρέπει πριν από όλα να θέσουμε τους σκοπούς της χρήσης αυτής, λαμβάνοντας υπόψη τους μαθητές στους οποίους απευθυνόμαστε, το είδος της πηγής η οποία είναι κατάλληλη για τους σκοπούς αυτούς και τη διδακτική μεθοδολογία που είναι απαραίτητη για την υποστήριξή της. Σύμφωνα με τους Jahnke et al, η ανάγνωση και χρήση των πρωτότυπων πηγών (σε αντίθεση με τις δευτερεύουσες πηγές) μπορεί να μας βοηθήσει (Jahnke et al 2000):

α. να διευκρινίσουμε αλλά και να επεκτείνουμε ότι μπορεί να βρεθεί σε δευτερογενές υλικό,

β. να αποκαλύψουμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε σε δευτερογενές υλικό,

γ. να παρατηρήσουμε και να διακρίνουμε τις γενικές τάσεις στην ιστορία κάποιου μαθηματικού θέματος (αφού οι δευτερεύουσες πηγές συνήθως κάνουν απλές χρονολογικές αναφορές σε κάποια μαθηματικά θέματα, ή αναφέρονται εν συντομία σε κάποια άλλα), και

δ. να θέσουν σε άλλη διάσταση τις ερμηνείες, τις κριτικές, ή ακόμη και τις παραποιήσεις που βρίσκονται στη μαθηματική βιβλιογραφία.

Η ανάγνωση ιστορικών κειμένων από πρωτότυπες πηγές είναι δυνατό να μας προσφέρει τη δυνατότητα να βιώσουμε την αντικατάσταση και τον αναπροσανατολισμό που προαναφέραμε. Βέβαια αυτό μπορεί να συμβεί, μόνο όταν η ανάγνωσή τους γίνει αγνοώντας την άποψη που έχουμε για τη σύγχρονη μαθηματική γνώση και προσπαθώντας να λάβουμε υπόψη μας ότι ο συγγραφέας της πρωτότυπης πηγής είχε συνήθως μια μαθηματική θεώρηση πολύ διαφορετική από τη δική μας. Άλλωστε, η αξία της χρήσης μιας πρωτότυπης πηγής είναι στην κατανόησή της, παρά στην κριτική του περιεχομένου της. Θα πρέπει ωστόσο να λάβουμε υπόψη μας το κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο της εποχής στην οποία γράφτηκε η πρωτότυπη πηγή, καθώς και το γεγονός ότι ο συγγραφέας την έγραψε απευθυνόμενος στους σύγχρονούς του και όχι σε εμάς (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 1α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Θα είναι πολύ χρήσιμο σε εμάς να προκληθούν

και να κινητοποιηθούν οι γνώσεις μας σε κάποια μαθηματικά θέματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα των προηγούμενων είναι η ανάγνωση της "Geometry" του Descartes. Ας παρατηρήσουμε πόσο φυσικό μας φαίνεται να αναφέρεται ο Descartes στην μονάδα μήκους σε σύστημα συντεταγμένων, ενώ το ιστορικό αυτό κείμενο θεωρείτο αρκετά δυσνόητο από τους σύγχρονούς του. Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι η αντικατάσταση και ο αναπροσανατολισμός διαστάσεων της ιστορίας των Μαθηματικών είναι άμεσα συνδεδεμένες με διδακτικές παρατηρήσεις και θεωρήσεις. Είναι βέβαια σαφές ότι οι διδάσκοντες που κάνουν χρήση πρωτότυπων πηγών πρέπει να κατέχουν την αίσθηση του ιστορικού χρόνου, να μπορούν να διαχειριστούν τις μαθηματικές έννοιες που αναφέρονται σ' αυτές και φυσικά να είναι επαρκώς προετοιμασμένοι (Jahnke et al 2000).

Η κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών:

Μια κοινή αντίληψη που έχουν οι διδάσκοντες και οι διδασκόμενοι είναι η στατική φύση των μαθηματικών εννοιών. Δηλαδή ότι, από τη στιγμή που ορίζεται μια μαθηματική έννοια αυτή παραμένει αναλλοίωτη στη διάρκεια του χρόνου. Όμως ακόμη και αυτοί που δεν έχουν αυτή την αντίληψη, μπορεί να μην έχουν ποτέ να βιώσει την εξελικτική φύση των μαθηματικών εννοιών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας έννοιας είναι η έννοια του κύκλου, η οποία σε όλη τη διάρκεια του σχολικού προγράμματος θεωρείται με τον ίδιο τρόπο. Ο κύκλος όμως μπορεί να παρουσιαστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους: ως ένα στατικό μαθηματικό αντικείμενο που αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση ίση με την ακτίνα του από το κέντρο του, ως ένα δυναμικό αντικείμενο που δημιουργείται από την περιστροφή ενός ευθυγράμμου τμήματος με κέντρο περιστροφής ένα του άκρο, ή ως μια αλγεβρική εξίσωση. Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να μας πληροφορήσει για τη σημασία αυτών των διαφορετικών τρόπων σκέψης σχετικά με τον κύκλο, αφού μπορεί να μας κάνει γνωστά και κατανοητά τα προβλήματα που οδήγησαν τους μαθηματικούς του παρελθόντος να αναθεωρήσουν την έννοια του κύκλου, αλλά και να μας κάνει ορατή τη φύση των αλλαγών που προέκυψαν στην έννοια του κύκλου (Barbin 1994). Συνεπώς οι πρωτότυπες πηγές μπορούν να μας προσφέρουν την εμπειρία μιας άμεσης επαφής με τον τρόπο με

τον οποίο δημιουργήθηκαν και ορίστηκαν οι μαθηματικές έννοιες σε συγκεκριμένο χρόνο στο παρελθόν, που είναι συχνά διαφορετικός από τον τρόπο που χρησιμοποιούνται σήμερα (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 2β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Οι πρωτότυπες πηγές μάς παρέχουν επίσης πολλά παραδείγματα διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης (representational systems) που χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν. Τα παραδείγματα αυτά μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να δουν τα σύγχρονα συστήματα αναπαραστάσεων, σαν έναν από τους πιθανούς τρόπους για την εκτέλεση διάφορων αριθμητικών πράξεων και χειρισμού των μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, συγκρίνοντας και αντιπαραβάλλοντας τις σύγχρονες αναπαραστάσεις με τις αναπαραστάσεις του παρελθόντος όπως αυτές εμφανίζονται στις πρωτότυπες πηγές, οι μαθητές θα είναι σε θέση να εκτιμήσουν τον κρίσιμο ρόλο που έχουν στη γέννηση και στην εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών (Jahnke et al 2000). Ακόμη οι μαθητές όχι μόνο μαθαίνουν τις αναπαραστάσεις του παρελθόντος, αλλά έχουν και τη δυνατότητα να ανακαλύψουν εκ νέου πολλές ιδιότητες που θεωρούνται δεδομένες και "αυτοματοποιημένες" στις σύγχρονες αναπαραστάσεις (Jahnke et al 2000).

Η εμπειρία της σχετικότητας της αλήθειας και της ανθρώπινης διάστασης της μαθηματικής δραστηριότητας:

Ένας άλλος λόγος για τον οποίο είναι χρήσιμη η ενσωμάτωση των πρωτότυπων πηγών στη διδακτική πράξη, είναι δυνατότητα που μας παρέχει να αντιληφθούμε τη σημασία και την εξέλιξη των αποδείξεων στη διάρκεια του ιστορικού χρόνου. Για παράδειγμα η μελέτη πολλών διαφορετικών αποδείξεων του ίδιου θεωρήματος, μας προσφέρει την ευκαιρία να διαπιστώσουμε τη σημασία της απόδειξης στη διάρκεια της ιστορίας.

Επιπλέον οι πρωτότυπες πηγές μπορούν μας προσφέρουν πολλά παραδείγματα μαθηματικής δραστηριότητας τη στιγμή της δημιουργίας τους, με όλες τις εικασίες, τις διαισθητικές και νοητικές διεργασίες, τις ευρετικές μεθόδους που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος. Ακόμη και οι αμφιβολίες και τα λάθη τους μπορούν να αποτελέσουν αφορμές για ζωντανές μαθηματι-

κές συζητήσεις μέσα στις τάξεις βελτιώνοντας την ικανότητα των μαθητών να "μιλούν μαθηματικά", "βελτιώνοντας" την άτυπη, αλλά και την τυπική τους γνώση σε κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 2α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Σχέσεις μεταξύ Μαθηματικών και Φιλοσοφίας:

Η ανάγνωση και μελέτη πρωτότυπων πηγών πολλές φορές μας προσφέρει τη δυνατότητα να ανακαλύψουμε και την επικρατούσα φιλοσοφία της εποχής στην οποία γράφτηκαν, αφού πολλοί μαθηματικοί εκτός από το μαθηματικό τους έργο αποτύπωσαν γραπτά και τις φιλοσοφικές τους θέσεις. Οι πρωτότυπες πηγές σ' αυτήν την περίπτωση μετατρέπονται σε "συνομιλητές" που εμείς πρέπει να ερμηνεύσουμε, να τους θέσουμε ερωτήματα και να μας απαντήσουν, να συμφωνήσουμε ή/και να διαφωνήσουμε μαζί τους. Έτσι είναι εφικτές οι "συζητήσεις" μαζί τους για μετα-μαθηματικά θέματα όπως η φύση των μαθηματικών αντικειμένων που χρησιμοποιούμε και η ουσία της μαθηματικής δραστηριότητας (Jahnke et al 2000).

Διδακτική απλότητα και κίνητρα:

Κάποιες φορές, οι πρωτότυπες πηγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί των σύγχρονων εγχειριδίων αφού είναι απλούστερες, φιλικότερες και πιο κατανοητές στους μαθητές. Οι Jahnke et al αναφέρουν ως τέτοιο παράδειγμα πρωτότυπης πηγής, το έργο του Dedekind με τίτλο "Essays on the theory of numbers" του 1872 στο οποίο θεμελίωσε τους πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τις περίφημες τομές του. Το στυλ της συγγραφής του ήταν καθαρά διδακτικό, αφού πρώτα εξηγούσε τη μέθοδο που θα ακολουθούσε, μετά στηριζόταν στην αναλογική σκέψη προκειμένου να εμπλέξει τους αναγνώστες του και τις γνώσεις τους και στη συνέχεια τους έκανε γνωστές τις πηγές της διορατικότητάς του. Αφού είχαν γίνει όλα αυτά προχώρησε στη φορμαλιστική διατύπωση των ορισμών του (Jahnke et al 2000).

Η απλότητα και η φιλικότητα μπορεί να βρεθεί και σε άλλες πρωτότυπες πηγές, όπου διαπρεπείς μαθηματικοί εξηγούν αναλυτικά πως σκέφτηκαν για να καταλήξουν στα συμπεράσματά τους για βασικούς μαθηματικούς νόμους,

τους οποίους αρκετοί σύγχρονοι διδάσκοντες και σχεδιαστές σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων, αποτυγχάνουν να εξηγήσουν αποτελεσματικά στους σημερινούς μαθητές. Δύο τέτοια χαρακτηριστικά παραδείγματα αναφέρει ο Θωμαΐδης (Θωμαΐδης 2009). Αρχικά τον τρόπο με τον οποίο ο François Viète εξηγεί τον κανόνα των προσήμων όταν απαλοίφουμε παρενθέσεις στην Άλγεβρα και στη συνέχεια τον τρόπο με τον οποίο ο Leonhard Euler εξηγεί τον κανόνα των προσήμων στον πολλαπλασιασμό δύο αρνητικών αριθμών (δηλαδή, το γινόμενο αρνητικού επί αρνητικό είναι θετικός). Βλέπουμε λοιπόν ότι η ανάγνωση πρωτότυπων πηγών μπορεί να προσφέρει στους διδάσκοντες και στους διδασκόμενους λογικές εξηγήσεις σε θέματα που ο φορμαλισμός αποτυγχάνει και φυσικά να εμπλουτίσει το διδακτικό ρεπερτόριο των διδασκόντων (βλέπε επιχείρημα 3δ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης:

Οι πρωτότυπες πηγές μπορούν να μας προσφέρουν ακόμη και σημαντικές γνώσεις σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση του παρελθόντος. Η μελέτη παλαιότερων σχολικών εγχειριδίων από το παρελθόν μπορεί να δείξει ποια ήταν τα μαθηματικά θέματα που διδάσκονταν, τις γενικές τάσεις των αναλυτικών προγραμμάτων και τους τρόπους προσέγγισής με τους οποίους πραγματοποιόταν η διδασκαλία και επιτυγχανόταν η μάθηση. Επιπλέον με τη μελέτη των παλαιότερων σχολικών εγχειριδίων, θα διαπιστώσουμε τις τεράστιες αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση των τελευταίων αιώνων. Στο παρελθόν βασικός σκοπός της μαθηματική εκπαίδευσης ήταν να δημιουργήσει καλούς υπαλλήλους οι οποίοι θα κάνουν αριθμητικές πράξεις με ακρίβεια, χωρίς λάθη. Στις μέρες μας η μαθηματική εκπαίδευση, έχοντας τη συμπαράσταση των υπολογιστών και της τεχνολογίας γενικότερα, προσανατολίζεται σε άλλα σημεία, όπως η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων, η αιτιολόγηση των απαντήσεων, η απόδειξη κ.α. (Jahnke et al 2000).

Τοπικά Μαθηματικά:

Οι πρωτότυπες πηγές μπορούν ακόμη να χρησιμοποιηθούν στις μαθηματικές τάξεις προκειμένου οι μαθητές να ανακαλύψουν εκ νέου και να δώσουν έμφαση στην πολιτιστική κληρονομιά και στο πολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μαθαίνουν οι ίδιοι. Σχεδόν σε κάθε πολιτισμό έχουν γραφτεί μαθηματικά κείμενα και υπάρχουν παραδοσιακές τεχνικές για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Έτσι δεν είναι δύσκολο να βρεθούν οι κατάλληλες πηγές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις μαθηματικές τάξεις και να εμπλουτίσουν τις μαθηματικές αντιλήψεις των μαθητών (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Πρωτότυπες πηγές, ερμηνεία και γλώσσα:

Η ανάγνωση πρωτότυπων πηγών είναι μια δραστηριότητα συσχέτισης της σύγχρονης (synchronous) με τη διαχρονική (diachronous) μαθηματική κουλτούρα. Ο όρος σύγχρονη κουλτούρα αναφέρεται στο διάλογο και στην εργασία που πραγματοποιούνται μέσα στη μαθηματική τάξη, καθώς επίσης και στο ρόλο των Μαθηματικών στη δημόσια και κοινωνική ζωή, στην οικονομία, στην τεχνολογία, στην επιστήμη, στον πολιτισμό και γενικότερα στην εικόνα που μεταφέρουν. Ο όρος διαχρονική κουλτούρα αναφέρεται στην εξέλιξη των παραπάνω στοιχείων στη διάρκεια της ιστορίας και φυσικά σχετίζεται με τη σύγχρονη κουλτούρα, τη ζωή και τη σκέψη των διδασκόντων και των διδασκόμενων που εμπλέκονται στη μαθηματική διδακτική πράξη (Jahnke et al 2000).

Η διαδικασία της ερμηνείας μιας πρωτότυπης μαθηματικής πηγής μπορεί να περιγραφεί σε δύο στάδια. Αρχικά τα κείμενα αλλά και οι συγγραφείς τους ερμηνεύονται από το σύγχρονο αναγνώστη, ο οποίος πρέπει να γνωρίζει τον υποθετικό και διαισθητικό χαρακτήρα της ερμηνείας του. Η ερμηνεία του αναγνώστη ακολουθεί μια κυκλική διαδικασία στην οποία οι υποθέσεις που σχηματίζει πρέπει ελεγχθούν με βάση το πρωτότυπο κείμενο. Σε δεύτερη φάση ο σύγχρονος αναγνώστης προσπαθεί να καταλάβει τι ακριβώς έχει συμβεί την εποχή της συγγραφής της συγκεκριμένης πηγής, συσχετίζοντας τη μορφή της σημερινής μαθηματικής έννοιας ή θεωρίας με την πρωτότυπη πηγή και την ερμηνεία της. Οι διδάσκοντες πρέπει να είναι γνώστες των δύο σταδίων και να

έχουν την ευχέρεια να (μετα)κινούνται από το ένα στάδιο στο άλλο. Μόνο τότε δημιουργείται ένα κλίμα στη μαθηματική τάξη ικανό να ενθαρρύνει το μαθητή να κάνει τις υποθέσεις του σχετικά με την πρωτότυπη πηγή και να προσπαθήσει να σκεφτεί όπως συγγραφέας της πηγής την εποχή της συγγραφής της. Αυτός ακριβώς είναι και ο πυρήνας της εκπαιδευτικής φιλοσοφίας της χρήσης των πρωτότυπων πηγών: ο μαθητής που σκέφτεται όπως ο μαθηματικός που κάνει Μαθηματικά τη στιγμή της συγγραφής της πηγής, κάνει και ο ίδιος Μαθηματικά (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 3γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Θα πρέπει να τονίσουμε και το σημαντικό ρόλο που παίζει η γλώσσα στην ανάγνωση και μελέτη της πρωτότυπης πηγής. Στην πραγματικότητα εμπλέκονται τρεις διαφορετικές γλώσσες: η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιείται κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, η γλώσσα της πρωτότυπης πηγής και η γλώσσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές μεταξύ τους για να επικοινωνήσουν μαθηματικά. Οι γλώσσες αυτές έχουν πολλά κοινά αλλά και μεγάλες διαφορές και οι μαθητές πρέπει να τις χρησιμοποιούν και τις τρεις πολύ καλά και να μετακινούνται από τη μία γλώσσα στην άλλη με μεγάλη ευχέρεια. Αυτός είναι ένας ευρύτερος στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης, αφού οι μαθητές στη μελλοντική τους ζωή θα πρέπει να μεταφράζουν ιδέες και γεγονότα από την καθημερινή τους ζωή σε μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα. Και η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών έχει να προσφέρει πολλά για την υλοποίηση του συγκεκριμένου στόχου (Jahnke et al 2000).

Κείμενο, πλαίσιο και αναγνώστης:

Σε κάθε διδασκαλία που χρησιμοποιείται μια πρωτότυπη πηγή ο διδάσκων πρέπει να εξετάσει τις ακριβείς σχέσεις μεταξύ του κειμένου, του πλαισίου και των αναγνωστών-διδασκομένων. Πρέπει να υπάρξει ισορροπία μεταξύ της κατάλληλης ανάλυσης της πρωτότυπης πηγής και της έρευνας για το πλαίσιο της εποχής στην οποία γράφτηκε η πηγή, σύμφωνα με τους στόχους της διδασκαλίας. Οι μαθητές συνήθως δεν αναρωτιόνται για το πλαίσιο της εποχής, αφού θεωρούν ότι ένα μαθηματικό κείμενο δεν εξαρτάται από το πλαίσια της εποχής ή ότι είναι κατανοητό ανεξάρτητα από αυτό. Πρέπει συνεπώς να οδη-

γηθούν από το διδάσκοντα στο να θέσουν ερωτήσεις σχετικά με το πλαίσιο, ή να κληθούν από αυτόν να ερευνήσουν (ατομικά ή ομαδικά) το πλαίσιο και να μελετήσουν βιογραφικά στοιχεία του συγγραφέα της πηγής, πριν από την ερμηνεία της. Αυτή η διαδικασία μπορεί να είναι πολύ διαφωτιστική για τους μαθητές στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν το μαθηματικό νόημα της πηγής και θα τους οδηγήσει στη διατύπωση ερωτημάτων και εικασιών: με λίγα λόγια θα τους κάνει μικρούς ερευνητές (βλέπε επιχείρημα 1δ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Ο διδάσκων δεν πρέπει να αγνοήσει στην επιλογή και στην επεξεργασία της πρωτότυπης πηγής, το επίπεδο των διδασκομένων στο οποίο απευθύνεται (μαθητές Γυμνασίου, μαθητές Λυκείου, προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές Μαθηματικών, καθηγητές Μαθηματικών σε διαδικασία ενδοϋπηρεσιακής επιμόρφωσης). Επίσης θα πρέπει να λάβει υπόψη του τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των διδασκομένων, τους στόχους τους και τη διαθεσιμότητα των πηγών στη μητρική τους γλώσσα (Jahnke et al 2000).

Στρατηγικές στην τάξη:

Σε γενικές γραμμές υπάρχουν, σύμφωνα με τους Jahnke et al, δύο στρατηγικές για την παρουσίαση μιας πρωτότυπης πηγής στην τάξη: η "άμεση" (direct) στην οποία ο διδάσκων παρουσιάζει το κείμενο χωρίς καμία προηγούμενη προετοιμασία των μαθητών του, και η "έμμεση" (indirect) στην οποία ο διδάσκων παρουσιάζει το κείμενο αφού προηγηθούν κάποιες δραστηριότητες (Jahnke et al 2000).

Στην άμεση στρατηγική ο διδάσκων μπορεί να έχει ως στόχο να προκαλέσει σοκ στους μαθητές του από την παρατήρηση των διαφορών που υπάρχουν ανάμεσα στη σύγχρονη μορφή των Μαθηματικών και στη μορφή που εμφανίζονται στην πηγή. Αυτές οι διαφορές θα προκαλέσουν ερωτήσεις από πλευράς των μαθητών, στις οποίες θα κληθούν να απαντήσουν οι ίδιοι μετά από τη μελέτη του κειμένου. Εναλλακτικά θα μπορούσε και ο διδάσκων να θέσει ερωτήματα προς απάντηση από τους μαθητές. Το σίγουρο είναι ότι θα προκληθεί το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς επίσης και ένας γόνιμος διάλογος μεταξύ τους σχετικά με τις μορφές των Μαθηματικών όπως εμφανίζονται στα σύγ-

χρονα εγχειρίδια και στην πηγή που μελετούν (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 2β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Μια έμμεση στρατηγική είναι να παρουσιάσει ο διδάσκων ένα πρόβλημα από το παρελθόν, τελείως διαφορετικό από αυτά που περιέχουν τα εγχειρίδια, προκειμένου να κεντρίσει το ενδιαφέρον τους και να τους οδηγήσει στη βαθύτερη μελέτη του μαθηματικού αντικειμένου με το οποίο ασχολούνται. Μετά από αυτό ο διδάσκων μπορεί να παρουσιάσει ένα απόσπασμα από πρωτότυπη πηγή που θα είναι σχετικό με τα ερωτήματα που θα θέσουν οι μαθητές, με σκοπό ώστε αφού το μελετήσουν προσεκτικά να απαντήσουν οι ίδιοι οι μαθητές στα ερωτήματα που έθεσαν (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 3δ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Μια άλλη έμμεση στρατηγική είναι να παρουσιάσει ο διδάσκων τη σχέση των Μαθηματικών με την κοινωνία σε μια συγκεκριμένη εποχή και μαζί με τους μαθητές να επισημάνουν τους μαθηματικούς που διακρίθηκαν τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο (βλέπε επιχείρημα 5α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Οι μαθητές στη συνέχεια επιλέγουν ένα μαθηματικό (ή και περισσότερους) και προσπαθούν (ατομικά ή ομαδικά) να συλλέξουν πληροφορίες για αυτόν (ή για αυτούς). Αφού θα έχει εκδηλωθεί το ενδιαφέρον των μαθητών, ο διδάσκων θα παρουσιάσει ένα απόσπασμα από μια πρωτότυπη πηγή προκειμένου οι διδασκόμενοι να το αναλύσουν (Jahnke et al 2000).

Τα σχολικά εγχειρίδια μπορούν να αποτελέσουν ένα ακόμη σημείο αφετηρίας. Ο διδάσκων επιλέγει ένα θέμα από το εγχειρίδιο και ρωτά τους μαθητές σχετικά με τον τρόπο που παρουσιάζεται σ' αυτό. Στη συνέχεια τους παρουσιάζει άλλα εγχειρίδια ή αποσπάσματα από εγχειρίδια του παρελθόντος, για να τα συγκρίνουν με το εγχειρίδιο που χρησιμοποιούν. Η διαδικασία αυτή προκαλεί την περιέργειά τους σχετικά με το μαθηματικό που διατύπωσε τη μαθηματική έννοια ή θεωρία, ή το μαθηματικό που διατύπωσε ή έλυσε το πρόβλημα. Με αυτόν τον τρόπο η παρουσίαση της πρωτότυπης πηγής γίνεται με απόλυτα φυσικό τρόπο και επιτυγχάνεται μια σε βάθος μελέτη του μαθηματικού κειμένου που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην τάξη (Jahnke et al 2000).

Στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών είναι ευκολότερο και πιο φυσικό να παρουσιάσει ο εκπαιδευτής την πρωτότυπη πηγή, παρέχοντας πληροφορίες για αυ-

τήν και θέτοντας ερωτήματα στους εκπαιδευόμενους. Ο εκπαιδευτής σκιαγραφεί το ιστορικό φόντο στο οποίο γράφτηκε η πηγή, και σχολιάζει τις δυσκολίες και τις ιδιομορφίες του κειμένου της πηγής. Ο εκπαιδευτής καλεί τότε τους εκπαιδευόμενους να διατυπώσουν τις απόψεις τους για τη συγκεκριμένη πηγή και το περιεχόμενό της. Κατόπιν συνθέτει τα συμπεράσματα και τις απόψεις που διατυπώνουν οι εκπαιδευόμενοι (Jahnke et al 2000).

Ανάλυση των πρωτότυπων πηγών και γνωστικές αντιπαραθέσεις:

Όπως έχουμε προαναφέρει η ανάλυση των πρωτότυπων πηγών από ιστορικά κείμενα είναι μια δύσκολη δραστηριότητα. Κάποιες φορές καθοδηγείται και υποστηρίζεται από τις ερωτήσεις των διδασκόντων. Κάποιες άλλες φορές τις ερωτήσεις τις διατυπώνουν οι ίδιοι οι διδασκόμενοι. Σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο είναι να βρεθούν οι κατάλληλες ερωτήσεις που θα οδηγήσουν τους μαθητές προς την αναγνώριση των χαρακτηριστικών του ιστορικού πλαισίου της μελετώμενης πηγής. Για να βελτιώσουμε τις συνθήκες της ανάλυσης της πηγής, κάποια κείμενα πρέπει να τροποποιηθούν ή να μεταφραστούν και προσαρμοστούν στο γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο παρουσιάστηκαν. Ταυτόχρονα πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να είναι προσιτά για τους διδασκόμενους ή τους εκπαιδευόμενους και πολύ κοντά στις αντιλήψεις τους. Εν τούτοις επιβάλλεται οι τυχόν προσαρμογές να παραμείνουν όσο γίνεται πλησιέστερα στο πνεύμα του συγγραφέα της πηγής (Jahnke et al 2000).

Συχνά στη διάρκεια της ανάλυσης μιας πρωτότυπης πηγής εμφανίζονται αντιπαραθέσεις (debates) σε γνωστικό επίπεδο. Σε αυτές τις συζητήσεις οι διδασκόμενοι δίνουν τις δικές τους ερμηνείες σε μαθηματικές έννοιες ή τις δικές τους κρίσεις σχετικά με την εγκυρότητα και τη συνάφεια μιας μεθόδου για την επίλυση ενός προβλήματος, τις οποίες θα πρέπει να δικαιολογήσουν. Επομένως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή των κατάλληλων πηγών ώστε να οδηγήσουν σε γνωστικές αντιπαραθέσεις. Για να πετύχει μια αντιπαράθεση, ο διδάσκων πρέπει να δώσει αντίστοιχους ρόλους σε μαθητές ή εκπαιδευόμενους ή μικρές ομάδες που θα υποστηρίξουν με επιχειρήματα όλες τις διαφορετικές απόψεις που υπήρχαν ή θα εμφανιστούν στην τάξη. Με αυτόν τον τρόπο, οι διδασκόμενοι θα κινητοποιηθούν και θα προσπαθήσουν να

βρουν ιστορικά και γνωστικά επιχειρήματα υπέρ της μορφής της έννοιας ή της μεθόδου που θα υποστηρίξουν, τα οποία αρχικά θα είναι αφελή ή εσφαλμένα. Ωστόσο καθώς περνάει ο χρόνος, η ποιότητα και η εγκυρότητα των επιχειρημάτων συνεχώς θα βελτιώνεται, είτε μέσα από την αντιπαράθεση με τα επιχειρήματα των άλλων διδασκομένων που υποστηρίζουν κάποια άλλη μορφή έννοιας ή μεθόδου, είτε με τη συχνή ανάλυση πρωτότυπων πηγών (Jahnke et al 2000).

Κατασκευή οργάνων μέτρησης:

Οι άνθρωποι από τα πρώτα ιστορικά χρόνια ασχολήθηκαν με μετρήσεις μεγεθών και ποσοτήτων είτε από το φυσικό τους περιβάλλον είτε από το μαθηματικό τους κόσμο. Η ιστορική έρευνα έχει αποκαλύψει πολλές διαφορετικές μορφές και ιδέες της μέτρησης. Παρόλο που κάποιες ιδέες μέτρησης είναι προφανείς, και σε κάποιες περιπτώσεις δεν υπήρχε κάποια δομημένη θεωρία μέτρησης ενώ σε κάποιες άλλες δεν υπήρχε ούτε καν στοιχειώδης θεωρία μέτρησης, οι άνθρωποι προχώρησαν στην κατασκευή διαφόρων οργάνων μέτρησης. Τέτοιες ιδέες μέτρησης, αρκετές από τις οποίες μπορούμε να μελετήσουμε μέσα από πρωτότυπες πηγές, μπορούν να αποτελέσουν αφορμή είτε για να αιτιολογηθούν μέσα στα πλαίσια μιας θεωρίας που θα δημιουργήσουν ή θα ανακατασκευάσουν οι διδασκόμενοι, είτε για να κατασκευάσουν οι διδασκόμενοι αντίγραφα των οργάνων μέτρησης που αναφέρονται σε πρωτότυπες πηγές (Jahnke et al 2000).

Προφορικός λόγος:

Λαμβάνοντας υπόψη την εξοικείωση των διδασκόμενων με την επιχειρηματολογία που αναπτύσσουν οι μαθηματικοί στα κείμενα των πρωτότυπων πηγών, η προφορική διατύπωση των επιχειρημάτων τους από τους διδασκόμενους αποτελεί μια εξαιρετική στρατηγική του διδάσκοντα. Η συγκεκριμένη στρατηγική κάνει τους διδασκόμενους ιδιαίτερα προσεκτικούς στην ανάγνωση και κατανόηση των σκέψεων του συγγραφέα της πηγής, ώστε να μην τους αποδώσουν απόψεις που δεν διατυπώνονται ρητά στην πηγή. Ουσιαστικά η στρατηγική αυτή ωθεί τους μαθητές να διαχωρίσουν τις έννοιες που είναι γραμμένες

ρητά στην πηγή, από τις ερμηνείες που μπορούν να δοθούν σ' αυτήν. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να είναι ωφέλιμη για τους μαθητές, αφού θα τους προειδοποιήσει για τις δυσκολίες που μπορούν να συναντήσουν όταν πρόκειται να δικαιολογήσουν μια μαθηματική άποψη χωρίς την ύπαρξη και υποστήριξη του κατάλληλου φορμαλιστικού συστήματος (Jahnke et al 2000).

Μεταφράσεις:

Οι μεταφράσεις αποσπασμάτων από πρωτότυπες πηγές έχουν σκοπό την εξοικείωση των διδασκόμενων με τη σκέψη και τις ιδέες των μαθηματικών που έγραψαν τις πηγές, και την πλήρη κατανόηση της μαθηματικής αιτιολόγησης και της ανάπτυξης των εννοιών που περιέχεται σ' αυτές. Οι τύποι μετάφρασης που κυριαρχούν είναι δύο ειδών: οι μεταφράσεις της πηγής σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα (που εξυπηρετούν την ανακατασκευή των μαθηματικών επιχειρημάτων) και οι μεταφράσεις από μια άλλη γλώσσα στη φυσική γλώσσα των διδασκομένων (οι οποίες προσφέρουν σημαντικά εκπαιδευτικά πλεονεκτήματα στους διδασκόμενους, αφού τους μυούν στην άριστη εκμάθηση μιας ξένης γλώσσας, αλλά και στην εννοιολογική ανάλυση της πηγής) (Jahnke et al 2000).

Τεκμηρίωση των αιτιολογήσεων:

Στις πρώτες προσπάθειες μελέτης πρωτότυπων πηγών, οι διδασκόμενοι μερικές φορές υποτιμούν την αξία των μαθηματικών αιτιολογήσεων που περιέχουν. Αυτή η στάση των διδασκομένων μπορεί να προληφθεί αν συνειδητοποιήσουν ότι οι ρίζες της σύγχρονης μαθηματικής αιτιολόγησης εδράζονται δυναμικά στις αρχαίες μαθηματικές αιτιολογήσεις. Για την αλλαγή αυτής της στάσης ο διδάσκων μπορεί να καλέσει τους διδασκόμενους να δικαιολογήσουν τις αιτιολογήσεις των μαθηματικών και συγγραφέων των πρωτότυπων πηγών, κάτι που θα δείξει την καλή θεμελίωση των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν στη διάρκεια των ιστορικών χρόνων, μέσα στο πλαίσιο της επεξεργασίας της μαθηματικής γνώσης. Αυτό θα ωθήσει τους διδασκόμενους και να δώσουν στις παλιότερες αιτιολογήσεις το κύρος που δίνουν στις σύγχρονες αιτιολογήσεις, αλλά και να μεταβάλλουν τις απόψεις τους ως προς τις σύγ-

χρονες αιτιολογήσεις, πάντα με την προοπτική της εκμάθησης των Μαθηματικών. Συνήθως οι παλαιότερες μέθοδοι αιτιολόγησης είναι πλησιέστερες προς τις αντιλήψεις των σημερινών μαθητών και παράλληλα προσφέρουν και ενδιαφέρουσες δυνατότητες για τη διδασκαλία (Jahnke et al 2000).

Σύγκριση πηγών:

Η σύγκριση διαφορετικών μαθηματικών κειμένων ή αποσπασμάτων από αυτά, είναι μια συναρπαστική εμπειρία. Τα συγκρινόμενα κείμενα μπορεί να είναι είτε από την ίδια χρονική περίοδο, είτε από διαφορετικές. Οι συγκρίσεις αυτές πρέπει να συνοδεύονται από τις κατάλληλες δραστηριότητες και ερωτήσεις κατανόησης του κειμένου, με σκοπό να κάνουν την ανάλυση της πηγής περισσότερο προσιτή και ελκυστική. Ταυτόχρονα συγκρίνοντας ιστορικά κείμενα οι μαθητές θα συνειδητοποιήσουν την εξέλιξη των μαθηματικών συμβολισμών (Jahnke et al 2000) (βλέπε επιχείρημα 2β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών).

Σύνθεση:

Δραστηριότητες σύνθεσης μπορούν να πραγματοποιηθούν από τους μαθητές στο τέλος μιας σειράς μαθημάτων, με μορφή εργασίας, κυρίως για ανακεφαλαίωση ή για την προετοιμασία νέας σειράς μαθημάτων (Jahnke et al 2000).

Όπως προαναφέραμε η ανάγνωση και διδακτική αξιοποίηση των πρωτότυπων πηγών είναι η πιο απαιτητική από τις δραστηριότητες που μπορούν να διεξαχθούν προκειμένου να ενσωματωθεί η ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Παρόλο που η ιδέα για χρήση των πρωτότυπων πηγών έχει καταγραφεί εδώ και εκατόν είκοσι περίπου χρόνια, μόλις τα τελευταία τριάντα περίπου χρόνια έχουν μεμονωμένες προσπάθειες από διάφορους ερευνητές σε διάφορες χώρες, χωρίς να έχει δημοσιευτεί μέχρι σήμερα συστηματική εμπειρική έρευνα που να διερευνά πλεονεκτήματα, δυσκολίες και συμπεράσματα από τέτοιου είδους προσπάθειες. Μέχρι στιγμής έχουν καταγραφεί δύο είδους συνεισφορές στο πεδίο της διδακτικής αξιοποίησης των πρωτότυπων

πηγών. Από τη μια μεριά υπάρχουν αναφορές που καταγράφουν προσωπικές εμπειρίες των διδασκόντων σε τάξεις μαθητών, κυρίως Γυμνασίου και Λυκείου, και σε σεμινάρια επιμόρφωσης μαθηματικών. Από την άλλη μεριά ελάχιστες αναφορές κάνουν προτάσεις για το πως πρέπει να γίνεται η διδακτική αξιοποίηση των πρωτότυπων πηγών. Επομένως είναι απαραίτητη η συνεισφορά των ερευνητών τόσο σε πρακτικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο.

3. "Φύλλα εργασίας" ενδεχομένως συνοδευόμενα από αποσπάσματα πρωτότυπων πηγών ή εμπνευσμένα από αυτές (worksheets)

Η χρήση των φύλλων εργασίας είναι διαδομένη σε όλο τον κόσμο σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Ωστόσο τα φύλλα εργασίας που είναι τα πλέον κατάλληλα για την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, είναι τα φύλλα εργασίας τα οποία είναι σχεδιασμένα σαν ένα σύνολο δομημένων και καθοδηγούμενων ερωτημάτων για την παρουσίαση ενός μαθηματικού θέματος, ενός συνόλου προβλημάτων ή θεμάτων για συζήτηση. Ο σχεδιασμός τους θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις υφιστάμενες γνώσεις των μαθητών και με αυξανόμενης δυσκολίας ερωτήματα να καθοδηγεί τους μαθητές στην ανάπτυξη των βασικών εννοιών ενός άγνωστου, για αυτούς, μαθηματικού θέματος. Αυτά τα φύλλα εργασίας, προορίζονται για χρήση μέσα στην τάξη, συχνά για ζευγάρια ή μικρές ομάδες μαθητών, είναι κατάλληλα για όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης (ακόμη και της τριτοβάθμιας), ενώ ο ρόλος του διδάσκοντα είναι και συμβουλευτικός και καθοδηγητικός (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Τα φύλλα εργασίας τα οποία όμως προορίζονται αποκλειστικά για την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών, συνήθως δομούνται γύρω από σύντομα αποσπάσματα από την ιστορία των Μαθηματικών, συνοδεύονται από ιστορικές πληροφορίες που περιγράφουν το ευρύτερο (κοινωνικό ή/και πολιτιστικό) πλαίσιο της εποχής τους και από ερωτήσεις που σκοπό έχουν την κατανόηση του περιεχομένου τους (βλέπε επιχείρημα 1α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Στη συνέχεια προκαλούνται συζητήσεις για τα μαθηματικά θέματα που εμπλέκονται, γίνονται συγκρίσεις μεταξύ του τρόπου που αντιμετωπίζονταν τα ερωτήματα και τα προβλήματα με βάση τα

ιστορικά αποσπάσματα που έχουν δοθεί στους μαθητές και του τρόπου που αντιμετωπίζονται αυτά σήμερα (βλέπε επιχειρήματα 2α και 2β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών), ενώ λύνονται και τα προβλήματα των αποσπασμάτων ή άλλα προβλήματα εμπνευσμένα από την ιστορία (βλέπε επιχείρημα 1β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Σε περίπτωση που τα αποσπάσματα περιέχουν συμβολισμό άγνωστο στους μαθητές, οι διδάσκοντες πρέπει να προσφέρουν στους μαθητές τη "μετάφρασή" τους σε σύγχρονο συμβολισμό γνωστό στους μαθητές. Όταν το απόσπασμα περιέχει πολλές πληροφορίες, τα ερωτήματα πρέπει να αποσκοπούν στη συντακτική ανάλυση του κειμένου του αποσπάσματος προκειμένου οι μαθητές να ανταπεξέλθουν στην πολυπλοκότητά του (βλέπε επιχείρημα 3ε υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Οι διδάσκοντες πρέπει να ενθαρρύνουν την κριτική ανάγνωση των αποσπασμάτων ζητώντας από τους μαθητές να ελέγξουν έναν υπολογισμό ή να συζητήσουν ένα επιχείρημα (βλέπε επιχείρημα 1δ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Μερικές φορές τα φύλλα εργασίας μπορεί να περιέχουν επιχειρήματα ή δηλώσεις σχετικά για τη φύση κάποιου μαθηματικού θέματος ή των Μαθηματικών γενικότερα. Οι μαθητές καλούνται να τα επεξεργαστούν λεπτομερώς και να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν με αυτά (βλέπε επιχείρημα 2α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Αν τα φύλλα εργασίας προορίζονται για εκπαίδευση ή μετεκπαίδευση εκπαιδευτικών, τα ερωτήματα μπορούν να αφορούν διδακτικά θέματα που αναδύονται από τα αποσπάσματα, ή/και να οδηγούν σε συγκρίσεις μεταξύ των παλαιότερων διδακτικών μεθόδων με τις σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις (βλέπε επιχειρήματα 3α, 3γ και 3ε υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

4. Πλήρη "Πακέτα Ιστορίας των Μαθηματικών" (historical packages)

Οι Bruckheimer και Arcavi όρισαν ως "ιστορικά περιστατικά" (historical happenings) (ονομάζονται και "ιστορικά πακέτα" (historical packages)) συλλογές υλικού στενά συνδεδεμένες με ένα μικρό σε έκταση μαθηματικό θέμα από τη διδακτέα ύλη, κατάλληλα για χρήση σε 2 – 3 διδακτικές ώρες και έτοιμα για χρήση από τους διδάσκοντες (Bruckheimer, Arcavi 2000). Τα πακέτα αυτά

έχουν προσανατολισμό περισσότερο στο να φωτίσουν παράλληλες πλευρές ενός μικρού μαθηματικού θέματος, παρά να βοηθήσουν στην κατανόηση ενός κεφαλαίου των Μαθηματικών ή και το σύνολο της διδακτέας ύλης. Παράλληλα δημιουργούν κίνητρα στους μαθητές και πολλές φορές τους φαίνονται διασκεδαστικά (Bruckheimer, Arcavi 2000). Συνήθως τα πακέτα "χτίζονται" γύρω από μικρά αποσπάσματα από πρωτότυπες πηγές, μεγέθους 3 – 4 γραμμών, απευθύνονται κυρίως στους μαθητές των Γυμνασίων και παρ' όλο που έχουν δημιουργηθεί για να απαιτούν την καθοδήγηση του διδάσκοντα, εντούτοις στηρίζονται στην ενεργητική συμμετοχή των διδασκομένων (βλέπε επιχειρήματα 4β και 2α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Ο ρόλος του διδάσκοντα είναι να παρουσιάσει τις απαιτούμενες ιστορικές γνώσεις για το μαθηματικό θέμα και την ιστορική εποχή στην οποία εντάσσεται το απόσπασμα, να προτείνει ερωτήματα και προβλήματα προς τους μαθητές και να προκαλέσει και να διευθύνει τη συζήτηση. Ο ρόλος του διδάσκοντα είναι κυρίως να καθοδηγήσει τους μαθητές και όχι να τους διδάξει. Τα πακέτα αυτά περιέχουν έναν φάκελο για τον διδάσκοντα με το λεπτομερές κείμενο της δραστηριότητας, το απαιτούμενο ιστορικό και διδακτικό υπόβαθρο, τις οδηγίες για την εφαρμογή στην τάξη, τις αναμενόμενες αντιδράσεις των διδασκόμενων (αφού έχουν ήδη εφαρμοστεί ερευνητικά στην τάξη και ενδεχομένως αναθεωρηθεί), καθώς και οπτικό υλικό κατάλληλο για την παρουσίασή του στην τάξη (με μορφή διαφανειών για προτζέκτορα ή ηλεκτρονικό υπολογιστή που περιέχουν αντίγραφα ιστορικών κειμένων, φωτογραφίες μαθηματικών, αποσπάσματα από το πακέτο, προβλήματα προς λύση από τους μαθητές, τις λύσεις των προβλημάτων αυτών, θέματα για συζήτηση κ.α.) (Bruckheimer, Arcavi 2000, Tzanakis, Arcavi et al 2000). Οι αντικειμενικοί στόχοι των ιστορικών πακέτων είναι να εμπλουτίσουν τα Μαθηματικά της διδακτέας ύλης με δραστηριότητες από την ιστορία τους (βλέπε επιχείρημα 1β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών), να παρουσιάσουν τα Μαθηματικά ως μια δυναμική δραστηριότητα που συνεχώς εξελίσσεται (βλέπε επιχείρημα 1α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) και να βελτιώσουν την κατανόηση μαθηματικών θεμάτων από τη διδακτέα ύλη (βλέπε επιχείρημα 4α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Άλλωστε είναι γνωστό ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν την εντύπωση ότι τα Μαθηματικά ήταν, είναι και θα είναι στη μορφή που τα

μαθαίνουν στο σχολείο, εντύπωση που είναι απαραίτητο να τροποποιηθεί (Bruckheimer, Arcavi 2000, Tzanakis, Arcavi et al 2000).

γ. Ευέλικτες εφαρμογές πιο "τοπικού" χαρακτήρα, εφαρμοζόμενες ανάλογα με τον πληθυσμό στον οποίο απευθύνονται

1. Η διδακτική αξιοποίηση λαθών, εναλλακτικών αντιλήψεων, αλλαγής της οπτικής, αναθεώρησης υποθέσεων και διαισθητικών ή/και (η-μι)εμπειρικών επιχειρημάτων κλπ. (taking advantage of errors, alternative conceptions, change of perspective, revision of implicit assumptions, intuitive arguments etc.)

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στην παρουσίαση και την εκμάθηση των Μαθηματικών είναι η δυνατότητα που παρουσιάζεται στους διδάσκοντες και στους διδασκόμενους να εκτιμήσουν τον εποικοδομητικό ρόλο των λαθών, των εναλλακτικών αντιλήψεων, των αλλαγών της οπτικής αναφορικά με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα, των μαθηματικών παράδοξων, των μαθηματικών αντιπαραθέσεων, της αναθεώρησης υποθέσεων και συμβολισμών και των διαισθητικών επιχειρημάτων, που παρουσιάστηκαν στην ιστορία των Μαθηματικών και μπορούν να ωφελήσουν τη διδασκαλία και την εκμάθηση τους, είτε άμεσα, είτε ανακατασκευασμένα για διδακτικούς λόγους (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Μερικά από αυτά έχουν σχέση με ευρύτερα μαθηματικά θέματα και συνήθως εκτείνονται σε μεγάλες χρονικές περιόδους και μπορούν να δώσουν προοπτική και εμβάθυνση στις μαθηματικές έννοιες (βλέπε επιχείρημα 2α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών). Παρακάτω θα δώσουμε ενδεικτικά παραδείγματα διδακτικής αξιοποίησης:

Διδακτική αξιοποίηση λάθους: Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, περίπου το 2000 π.χ., υπολόγιζαν το εμβαδό ενός τετραπλεύρου ως το γινόμενο των δύο αριθμητικών μέσων των απέναντι πλευρών. Δηλαδή, αν το τετράπλευρο έχει διαδοχικές πλευρές α, β, γ και δ, το εμβαδό του το υπολόγιζαν ως $\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{\beta+\delta}{2}$. Από τον τύπο αυτό είχαν συμπεράνει έναν άλλο τύπο για το εμβαδό ενός τριγώνου ως το γινόμενο του αριθμητικού μέσου δύο πλευρών και του μισού της τρίτης

πλευράς, δηλαδή αν ένα τρίγωνο έχει πλευρές α, β και γ, τότε το εμβαδό του είναι $\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}$. Οι μαθητές μπορούν να ερωτηθούν για το πόσο ακριβείς είναι οι τύποι αυτοί και σε ποιες περιπτώσεις δίνουν σωστά αποτελέσματα. Μπορούν ακόμη να συζητήσουν για το κατά πόσο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν γνώστες του λάθους τους στον υπολογισμό των εμβαδών (Eves 1969).

Διδακτική αξιοποίηση της αλλαγής της οπτικής: Η διαφορά ανάμεσα στη σύνθεση και στην ανάλυση στη Γεωμετρία είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα για το ότι οι μαθηματικές μέθοδοι και οι τρόποι που αντιμετωπίζουμε ένα μαθηματικό θέμα δεν είναι μοναδικοί. Τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη είναι ένα ιστορικό παράδειγμα συνθετικής Γεωμετρίας. Είναι όμως γνωστό από τον Πάππο ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, εκτός από τη σύνθεση χρησιμοποιούσαν και την ανάλυση στις γεωμετρικές τους έρευνες. Στα τέλη του 16ου αιώνα, ο Viète προώθησε ένα "αναλυτικό πρόγραμμα", αρκετά διαφορετικό από την ανάλυση των αρχαίων Ελλήνων, που τελικά οδήγησε στη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τους Fermat και Descartes. Η λεπτομερής επεξεργασία ενός προβλήματος και με τη μέθοδο της σύνθεσης (όπως εργάστηκε ο Ευκλείδης) και με τη μέθοδο της ανάλυσης (με τη βοήθεια της Άλγεβρας) μπορεί να είναι διαφωτιστική για την κατανόηση των ρόλων των ανακαλυπτικών διαδικασιών και των αποδείξεων στη Γεωμετρία (Eves 1969).

Διδακτική αξιοποίηση των μαθηματικών παράδοξων: Ο Bertrand το 1889 δημοσίευσε το έργο του "Calcul des probabilités" (Λογισμός Πιθανοτήτων). Στο έργο του αυτό, ο Bertrand ακολουθώντας διαφορετικές μεθόδους, δίνει διαφορετικές απαντήσεις στο ερώτημα, ποια είναι η πιθανότητα επιλέγοντας τυχαία μια χορδή ενός κύκλου αυτή να είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτό. Η προσεκτική μελέτη των μεθόδων που ακολούθησε ο Bertrand και η συζήτηση τους στην τάξη, θα δείξει τις αδυναμίες μερικών από αυτές, πράγμα που θα ωφελήσει τους μαθητές (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

2. Διδακτικό υλικό ή/και σχεδιασμός διδασκαλίας βασισμένων σε ιστορικά προβλήματα (historical problems)

Η ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί μια τεράστια και ανεξάντλητη πηγή προβλημάτων τα οποία μπορούν να παρακινήσουν δημιουργικά και τους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους. Από διδακτική σκοπιά, τα ιστορικά προβλήματα είναι διαφόρων ειδών και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ποικίλους τρόπους σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

α. *Προβλήματα τα οποία δεν έχουν λύση:* Για παράδειγμα τα τρία μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας (ο διπλασιασμός του κύβου, η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για ψυχαγωγικούς λόγους, αλλά και ως προβλήματα που οδήγησαν στην ανάπτυξη της Άλγεβρας με τη αλγεβροποίηση των Ευκλείδειων κατασκευών.

β. *Προβλήματα που παραμένουν άλυτα ή λύθηκαν με μεγάλη δυσκολία:* Για παράδειγμα το τελευταίο θεώρημα του Fermat (η εξίσωση $x^n+y^n=z^n$ δεν έχει ως λύση φυσικούς αριθμούς όταν ο εκθέτης n είναι μεγαλύτερος του 2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βασικό πρόβλημα για μικρούς εκθέτες. Επίσης η εικασία του Goldbach (κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ψυχαγωγικούς λόγους για σχετικά μικρούς φυσικούς, πχ μικρότερους του 100.

γ. *Προβλήματα που έχουν ευφυείς, εναλλακτικές ή υποδειγματικές λύσεις:* Για παράδειγμα οι πολλές απλές και διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος που παρουσιάστηκαν σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς και σε πολλές διαφορετικές εποχές, όπως και οι πολλές διαφορετικές αποδείξεις του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας.

δ. *Προβλήματα που αποτέλεσαν κίνητρα ή/και προσδοκίες για την ανάπτυξη ενός μαθηματικού πεδίου:* Για παράδειγμα τα τρία μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας αποτέλεσαν τον κινητήριο μοχλό για την ανάπτυξη της Θεωρίας Galois και κατ' επέκταση της Άλγεβρας ή το θεώρημα των πολυωνυμικών προσεγγίσεων των συνεχών συναρτήσεων του Weierstrass που οδήγησαν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Προσέγγισης και της Συναρτησιακή Ανάλυσης.

ε. *Προβλήματα για ψυχαγωγικούς λόγους:* Για παράδειγμα τα τρία μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητας, το πρόβλημα του Lagrange ότι κάθε φυσικός

αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα των τετραγώνων τεσσάρων φυσικών αριθμών ή το πρόβλημα των πέντε χρωμάτων (μια απλούστερη έκδοση του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων).

δ. Εφαρμογές πιο "πειραματικού" και εμπειρικού χαρακτήρα

1. Η επαφή και ενδεχόμενη χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων που διαδραμάτισαν ρόλο στην ιστορία των Μαθηματικών (mechanical instruments)

Η παρουσίαση μηχανικών εργαλείων στην τάξη σχετίζεται με την διασύνδεση δύο προβλημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης: την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης μέσα στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιό της (βλέπε επιχειρήματα 5α, 5β και 5γ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) και την ανάπτυξη της εμπειρικής βάσης για τις μαθηματικές αποδείξεις (βλέπε επιχείρημα 2α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Η χρήση μηχανικών εργαλείων που έχουν σχεδιαστεί για ένα συγκεκριμένο σκοπό μπορεί να διευκρινίσει πολλές μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις, όπως για παράδειγμα τα εργαλεία σχεδιασμού κωνικών τομών ή της επίλυσης των γεωμετρικών προβλημάτων των αρχαίων Ελλήνων. Ένα παράδειγμα κατασκευής τέτοιου εργαλείου είναι η κατασκευή και η χρήση μιας συσκευής η οποία θα μας σχεδιάζει το γεωμετρικό μέσο γ δύο δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων μήκους α και β, σύμφωνα με τη γεωμετρική κατασκευή που πρότεινε ο Descartes στη Géométrie του 1637. Ένα άλλο παράδειγμα είναι μια διάταξη (apparatus) που περιγράφει ο D' Alembert για την εύρεση των ριζών διαφόρων εξισώσεων. Για παράδειγμα πολλές τέτοιου είδους μηχανικές συσκευές και μηχανικά εργαλεία, υπάρχουν στις ιστοσελίδες: http://museo.unimo.it/labmat/ και http://kmoddl.library.cornell.edu/.

2. Μαθηματικές δραστηριότητες βιωματικού χαρακτήρα (experiential mathematical activities)

Οι μαθηματικές δραστηριότητες βιωματικού χαρακτήρα είναι αυτές στις οποίες οι μαθητές καλούνται: να επαναδιατυπώσουν επιχειρήματα, να χρησιμοποιήσουν παλαιότερους συμβολισμούς και μεθόδους, να παίξουν παιχνίδια κ.α., όπως ακριβώς γινόταν στο παρελθόν. Παρακάτω θα σκιαγραφήσουμε κάποιες δραστηριότητες από το παρελθόν που θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στη διδακτική πράξη:

Επιχειρήματα από το παρελθόν: Ο διδάσκων θέτει ένα συγκεκριμένο ερώτημα ή πρόβλημα από την ιστορία των Μαθηματικών και εξηγεί στους διδασκόμενους τη σημασία του για την επιστημονική κοινότητα του παρελθόντος. Κατόπιν ενθαρρύνει τους διδασκόμενους να το σκεφτούν, να το συζητήσουν στην τάξη κάτω από την καθοδήγησή του, να εργαστούν ατομικά ή/και σε μικρές ομάδες για την αναζήτηση σχετικών ιστορικών πληροφοριών και τέλος να συζητήσουν ξανά τα ευρήματά τους και τις απόψεις τους (βλέπε επιχειρήματα 4β και 1δ υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Για παράδειγμα οι Tzanakis, Arcavi et al αναφέρουν μια σχετική δραστηριότητα στην οποία ο καθηγητής των Μαθηματικών έθεσε το εξής ερώτημα σε δεκαεξάχρονους μαθητές: "Στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η ύπαρξη της παράλληλης ευθείας που διέρχεται από δοσμένο σημείο και είναι παράλληλη σε άλλη ευθεία είναι εύκολο να αποδειχθεί. Πως μπορεί όμως να αποδειχτεί η μοναδικότητά της, η οποία είναι διαισθητικά σωστή;". Η ερώτηση κινητοποίησε το ενδιαφέρον των μαθητών του με αποτέλεσμα αρκετοί από αυτούς να επαναδιατυπώσουν επιχειρήματα και αποδείξεις σχεδόν όμοιες με τις προσπάθειες που έκαναν κυρίως οι αρχαίοι Έλληνες για την απόδειξη του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη. Η συζήτηση που ακολούθησε περιστράφηκε γύρω από τα θεμέλια της Γεωμετρίας και την αξιωματικής μεθόδου στη Γεωμετρία, αλλά και σε μετα-μαθηματικά θέματα, όπως η απόδειξη μιας πρότασης και η εγκυρότητα ενός μαθηματικού ισχυρισμού (βλέπε επιχειρήματα 1β, 5α και 2α υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Συμβολισμοί από το παρελθόν: Ο διδάσκων μπορεί να παρουσιάσει παραδείγματα παλαιότερων συστημάτων αρίθμησης (για παράδειγμα των Βαβυ-

λωνίων, των αρχαίων Ελλήνων ή του ρωμαϊκού) και να τους ζητήσει να γράψουν διάφορους αριθμούς στη μορφή αυτή και να κάνουν διάφορες πράξεις με τους αριθμούς αυτούς. Έτσι οι διδασκόμενοι θα έχουν τη δυνατότητα να εκτιμήσουν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται στα σύγχρονα Μαθηματικά. Επιπλέον, συγκρίνοντας το σύγχρονο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με τα παλαιότερα συστήματα αρίθμησης, οι διδασκόμενοι θα μπορέσουν να αναλύσουν τις "κρυμμένες" υποθέσεις και παραδοχές του, αλλά και να κατανοήσουν καλύτερα την αποτελεσματικότητά του (βλέπε επιχείρημα 1β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Μέθοδοι από το παρελθόν: Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους διδασκόμενους να χρησιμοποιήσουν μεθόδους από το παρελθόν. Για παράδειγμα η μέθοδος του πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων είναι μια μέθοδος που συνήθως φαίνεται ελκυστική στους σημερινούς μαθητές. Μπορούν οι μαθητές να τη χρησιμοποιήσουν και να τη συγκρίνουν με τη σύγχρονη μέθοδο για τον υπολογισμό του γινομένου δύο αριθμών. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η γραφική επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη μέθοδο του Al-Khwarizmi ή τη μέθοδο του Descartes, που μπορούν να υλοποιηθούν με χαρτί και μολύβι ή και με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Παιχνίδια από το παρελθόν: Η αφετηρία της ανάπτυξης της σύγχρονης θεωρίας των πιθανοτήτων θεωρείται η αλληλογραφία μεταξύ των Fermat και Pascal σχετικά με το ακόλουθο πρόβλημα: "Δύο παίκτες ρίχνουν ένα ζάρι στοιχηματίζοντας ένα ποσό, το οποίο κερδίζει όποιος συγκεντρώσει πρώτος α πόντους. Όμως το παιχνίδι διακόπτεται όταν ο πρώτος παίκτης συγκεντρώσει β πόντους και ο δεύτερος παίκτης συγκεντρώσει γ πόντους. Στην περίπτωση που το παιχνίδι διακοπεί, πώς πρέπει να μοιραστεί το στοίχημα;" Ο διδάσκων καλεί τους μαθητές να παίξουν το ίδιο παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι, να το διακόπτουν και να συζητούν πως θα πρέπει να μοιραστεί το ποσό του στοιχήματος σε κάθε διακοπή του παιχνιδιού (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

3. Θεατροποίηση εμπνευσμένη από γεγονότα της ιστορικής διαδρομής των Μαθηματικών (plays)

Τα θεατρικά έργα συνήθως ενσωματώνονται στην εκπαίδευση προκειμένου να αναπαραστήσουν ανθρώπινες καταστάσεις, με σκοπό να φωτίσουν και να αποσαφηνίσουν ηθικά ή/και κοινωνικά αδιέξοδα και διλλήματα. Αν και δεν σχετίζονται άμεσα με τη μαθηματική τάξη, μας δίνεται η ευκαιρία να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να ενσωματωθεί η ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Οι Tzanakis, Arcavi et al θεωρούν ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι στη χρήση των θεατρικών έργων στη μαθηματική τάξη (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

I. Θεατρικά έργα που συγγράφονται με σκοπό την παρουσίαση της ζωής κάποιου μεγάλου μαθηματικού, είναι ένας τρόπος για να εκτιμήσουν οι θεατές (διδάσκοντες, διδασκόμενοι, αλλά και απλοί θεατές) την ανθρώπινη πλευρά της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι Tzanakis, Arcavi et al αναφέρουν σαν παράδειγμα μια θεατρική παράσταση που ανέβηκε από μαθητές Γυμνασίου στην Αργεντινή, με θέμα την πολυτάραχη και σύντομη ζωή του Galois (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Οι παραστάσεις αυτές από τη μια μεριά κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών που συμμετέχουν σ' αυτές, ενώ υπάρχουν και καθηγητές που ισχυρίζονται ότι "αυτά δεν είναι Μαθηματικά".

II. Θεατρικά έργα που συγγράφονται με σκοπό την εκ νέου αναπαράσταση σημαντικών διαφωνιών που εμφανίστηκαν στην ιστορία των Μαθηματικών. Αυτά δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν όχι μόνο τις ανθρώπινες διαστάσεις της ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά και τα μαθηματικά θέματα σαν να ήταν δικά τους (βλέπε επιχείρημα 4β υπέρ της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών) (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

ε. Το Διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας (the World Wide Web).

Ο Παγκόσμιος Ιστός και το Διαδίκτυο (World Wide Web και Internet) μπορεί να βοηθήσει στην ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική

πράξη, κυρίως με δύο τρόπους: ως μέσο επικοινωνίας και ως πηγή πληροφοριών.

Για τη χρήση τους ως μέσο επικοινωνίας, οι Tzanakis, Arcavi et al αναφέρουν ως παράδειγμα το σεμινάριο επιμόρφωσης διορισμένων καθηγητών μαθηματικών, σε θέματα ιστορίας των αρνητικών αριθμών, που οργάνωσε ο Zehavi στο Ισραήλ το 1999 σε συνεργασία με το Weizmann Institute. Το σεμινάριο αυτό ξεκίνησε με μια συνάντηση "δια ζώσης" (face to face) των επιμορφούμενων και στη συνέχεια αυτοί εργάστηκαν από το σπίτι τους. Κάνοντας χρήση των υπερκειμένων (hypertexts) μελετούσαν το επιμορφωτικό υλικό ανάλογα με τα ενδιαφέροντά τους και το διαθέσιμο χρόνο τους. Στη συνέχεια απαντούσαν στις ερωτήσεις που υπήρχαν στο υλικό, λάμβαναν σχόλια στις απαντήσεις τους από του επιμορφωτές και μετά από κάποιες μέρες οι διαχειριστές του site αναρτούσαν τις πλήρεις απαντήσεις των ερωτήσεων, στις οποίες όλοι οι επιμορφούμενοι είχαν πρόσβαση. Σε όλη τη διάρκεια του σεμιναρίου οι επιμορφούμενοι συζητούσαν μέσω ενός forum διάφορα θέματα σχετικά με το εκπαιδευτικό υλικό, αντάλλαζαν απόψεις και κοινοποιούσαν πρακτικές και απόψεις που προέκυπταν από τη χρήση του υλικού στις μαθηματικές τάξεις τους. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα που καταγράφτηκε από τη συγκεκριμένη πρακτική του σεμιναρίου αυτού ήταν η δυνατότητα πολλαπλών ανανεώσεων του εκπαιδευτικού υλικού καθ' όλη τη διάρκειά του, αλλά και η ιδιαίτερη προσοχή που δόθηκε από τους επιμορφωτές στις εκπαιδευτικές ανάγκες των επιμορφούμενων σε ατομικό επίπεδο (Tzanakis, Arcavi et al 2000).

Για τη χρήση τους ως πηγή πληροφοριών, θα πρέπει αρχικά να υπενθυμίσουμε ότι ο Παγκόσμιος Ιστός αποτελεί στις ημέρες μας την κεντρική πηγή γνώσεων και πληροφοριών. Επίσης έχει φέρει επανάσταση σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους, αφού η στατική παρουσίαση γνώσεων και πληροφοριών με τη μορφή ενός βιβλίου ή ενός πίνακα μιας τάξης, έχει μετατραπεί σε κινούμενα γραφικά, ήχο και βίντεο. Τα υπερκείμενα, οι συνδέσεις (links) και οι επιθυμίες του αναγνώστη ανατρέπουν τη σειριακή μορφή ενός τυπωμένου βιβλίου. Βέβαια η εγκυρότητα και η αξιοπιστία του παραμένουν συχνά υπό αμφισβήτηση, καθώς οποιοσδήποτε από οποιοδήποτε μέρος του κόσμου μπορεί να αναρτήσει και δημοσιεύσει οτιδήποτε, σε αντίθεση με τους σοβαρούς εκδοτικούς οίκους που έχουν τον πλήρη (και τον επιστημονικό) έλεγχο στα βι-

βλία που εκδίδουν. Ένα μειονέκτημά του είναι οι πολλές φορές σύντομη ζωή κάποιων ιστοσελίδων, που είτε καταργούνται από τους διαχειριστές τους, είτε αλλάζουν ηλεκτρονική διεύθυνση (URL) στον Παγκόσμιο Ιστό (Van Brummelen 2000).

Σε γενικές γραμμές υπάρχουν δώδεκα κατηγορίες ιστοσελίδων που μπορούν να ενταχθούν στις διαδικτυακές πηγές πληροφόρησης για την ιστορία των Μαθηματικών, σύμφωνα με την Barrow-Green (Barrow-Green 2000):

1. Sites γενικής ιστορίας των Μαθηματικών (General History of Mathematics Sites). Πρόκειται για μεγάλα sites που χαρακτηρίζονται ως πύλες, των οποίων οι αρχικές σελίδες τους περιέχουν ένα σχετικά μεγάλο κατάλογο για τον τύπο των πληροφοριών που περιέχουν σε άλλες ιστοσελίδες του site.

2. Πηγές πληροφοριών από τον Παγκόσμιο Ιστό (Web Resources). Πολλά sites περιέχουν ιστοσελίδες αφιερωμένες σε συνδέσεις σε άλλα σχετικά sites, παρόλο που δεν παρέχουν ενδείξεις σχετικά με το είδος και τον τύπο των πληροφοριών που δημοσιεύουν.

3. Βιογραφίες (Biography). Στο διαδίκτυο υπάρχει πλούσιο υλικό που αναφέρεται στη ζωή μεγάλων μαθηματικών. Στα sites αυτά υπάρχει ένα ευρύ φάσμα υλικού και πληροφοριών για τον/την μαθηματικό που ενδιαφερόμαστε και διαθέτουν αρκετές συνδέσεις σε άλλα σχετικά sites.

4. Τοπικά Μαθηματικά (Regional Mathematics). Υπάρχουν πολλά sites για τα Μαθηματικά που δημιουργήθηκαν από αρχαίους κυρίως λαούς και πολιτισμούς. Επίσης αρκετά sites γενικής ιστορίας των Μαθηματικών που περιέχουν πληροφορίες για τα τοπικά Μαθηματικά.

5. Διαδικτυακά εκθέματα (Web Exhibits). Πρόκειται για sites που περιέχουν εκθέματα συσκευών, μηχανικών εργαλείων κ.α., τα οποία με τη βοήθεια του κατάλληλου λογισμικού φαίνονται πολύ εντυπωσιακά. Πολλές φορές δίνουν στους διαδικτυακούς επισκέπτες την αίσθηση της φυσικής παρουσίας, σαν να επισκέπτονται δηλαδή ένα πραγματικό μουσείο.

6. Ηλεκτρονικά βιβλία (Books on-line). Τα ηλεκτρονικά κείμενα έχουν δύο μορφές: ακριβή αντίγραφα πρωτότυπων κειμένων (τα οποία είναι πολύ δύσκολο να κατέχει κάποιος) και αντίγραφα κειμένων που έχουν επεξεργαστεί

(έχουν μεταφραστεί ή/και σχολιαστεί) προκειμένου να γίνουν περισσότερο προσβάσιμα στον αναγνώστη.

7. Παρουσιάσεις μαθητών (Student Presentations). Είναι γνωστό ότι οι εργασίες των μαθητών τα τελευταία χρόνια γίνονται όλο και περισσότερες και συχνότερες. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν το διαδίκτυο για την άντληση πληροφοριών για τις εργασίες τους, αλλά και για να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της παρουσίασης των εργασιών στο διαδίκτυο είναι ο πιθανός σχολιασμός τους από μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας και η ανατροφοδότηση των μαθητών.

8. Βιβλιογραφία (Bibliography). Τα sites αυτά περιέχουν καταλόγους βιβλίων ή/και επιστημονικών άρθρων σχετικών με την ιστορία των Μαθηματικών και τη χρήση της στην εκπαίδευση.

9. Επιστημονικές Εταιρείες (Societies). Σχεδόν όλοι οι επιστημονικοί κλάδοι έχουν επιστημονικές εταιρείες που υπηρετούν τη διάδοσή τους και την υλοποίηση των στόχων τους. Πολλές μαθηματικές εταιρείες σε όλο τον κόσμο προσφέρουν υλικό από την ιστορία των Μαθηματικών, αλλά και για την ενσωμάτωσή της στη διδακτική πράξη.

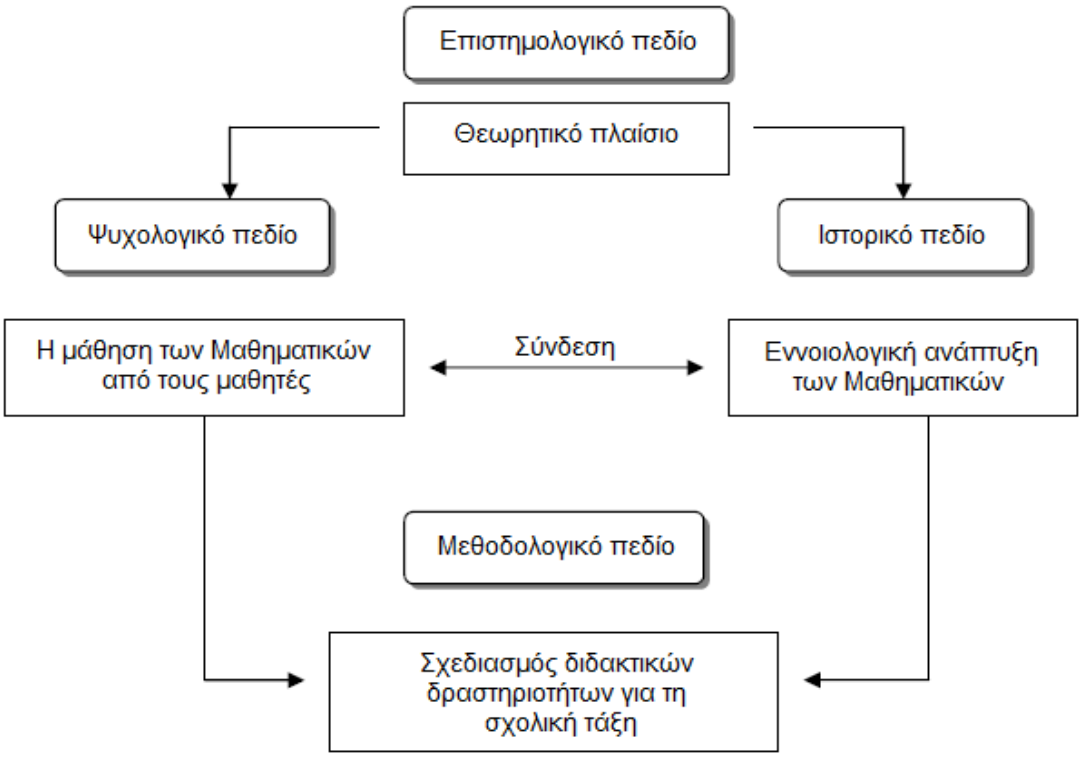
10. Ιστορία των Υπολογισμών (History of Computing). Αρκετά sites παρέχουν πληροφορίες για υπολογιστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν και από αρχαίους λαούς, αλλά και από παλαιότερους μαθηματικούς.

11. Εκπαίδευση (Education). Μερικά από τα πιο ενδιαφέροντα sites δημιουργήθηκαν κυρίως από καθηγητές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, των οποίων το επιστημονικό ενδιαφέρον άπτεται της ιστορίας των Μαθηματικών και της εκπαιδευτικής αξιοποίησης των υπολογιστών, με σκοπό την υποστήριξη των μαθημάτων τους.

12. Διάφορα άλλα sites (Miscellaneous). Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται διάφορα άλλα sites που δεν εντάσσονται σε καμιά από τις προηγούμενες έντεκα κατηγορίες, των οποίων η θεματολογία είναι αρκετά ενδιαφέρουσα (για παράδειγμα η χρήση των μαθηματικών συμβόλων ή των μαθηματικών λέξεων).

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ιστορία των Μαθηματικών είναι δυνατό να αποτελέσει μια χρήσιμη πηγή, για την κατανόηση της διαδικασίας με την οποία διαμορφώθηκε η μαθηματική σκέψη και για την εξερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η κατανόηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων, που θα πραγματοποιηθούν στη σχολική τάξη. Μέσα στο πνεύμα αυτό, τις τελευταίες δύο δεκαετίες πολλοί διδάσκοντες των Μαθηματικών προσφεύγουν στην ιστορία των Μαθηματικών. Ωστόσο η ενσωμάτωση της ιστορίας απαιτεί ένα σαφές και πλούσιο θεωρητικό πλαίσιο για το γενικό σχηματισμό της μαθηματικής γνώσης. Επιπλέον απαιτείται μια σαφής επιστημολογική θέση, κάτω από την οποία το θεωρητικό πλαίσιο θα διασφαλίσει τη γόνιμη σύνδεση του ιστορικού και του ψυχολογικού πεδίου με σκοπό την υποστήριξη μιας συνεκτικής και αποδοτικής μεθοδολογίας. Χαρακτηριστικό είναι το σχήμα που ακολουθεί (Radford et al 2000):



Η έλλειψη του κατάλληλου πλαισίου οδηγεί συχνά στην υπεραπλούστευση των αντιλήψεων σχετικά με τον τρόπο που αναπτύχθηκαν ιστορικά οι μαθηματικές έννοιες και επιτρέπει συχνά την ανιστόρητη ανάγνωση της ιστορίας των Μαθηματικών. Έτσι, τα ιστορικά κείμενα, τις περισσότερες φορές, ερμηνεύονται και παρουσιάζονται υποθέτοντας με απόλυτο τρόπο, ότι οι μαθηματικοί του παρελθόντος ουσιαστικά συμφωνούσαν με τις δικές μας σύγχρονες έννοιες, αλλά δεν είχαν στη διάθεσή τους το σημερινό συμβολισμό. Μια τέτοια τελεολογική ανάγνωση της ιστορίας οδηγεί στην υπόθεση ότι υπήρχε μια "a priori" πορεία που έπρεπε να ακολουθήσουν οι μαθηματικές ανακαλύψεις. Κάνοντας αυτή την υπόθεση εισάγεται μια ρυθμιστική - κανονιστική (normative) διάσταση, μέσω της οποίας ο ιστορικός προικίζει άλλους πολιτισμούς και μαθηματικούς άλλων εποχών με λογικές και αντιλήψεις που τους ήταν άγνωστες (Radford et al 2000).

Προκειμένου λοιπόν μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών να κατανοήσουμε καλύτερα τις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές μαθαίνουν Μαθηματικά και τον τρόπο με τον οποίο αυτή η κατανόηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων για τη σχολική τάξη, πρέπει να συνδεθούν δύο φαινόμενα: οι διαδικασίες μάθησης των σημερινών μαθητών και η ιστορική κατασκευή της μαθηματικής γνώσης. Το πρώτο φαινόμενο ανήκει στη σφαίρα επιρροής της Ψυχολογίας των Μαθηματικών και το δεύτερο σε ένα ασαφές πεδίο στο οποίο η Επιστημολογία και η Ιστορία των Μαθηματικών συναντούν η μία την άλλη (Radford, Boero, Vasco 2000).

Η διασύνδεση των ψυχολογικών και ιστορικο-επιστημολογικών φαινομένων απαιτεί μια σαφή επιστημολογική προσέγγιση. Όπως είναι γνωστό, στη μαθηματική εκπαίδευση έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις, που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τις επιστημολογικές υποθέσεις και ως προς τον τρόπο που ερμηνεύουν την ιστορία των Μαθηματικών. Επίσης ερμηνεύουν με διαφορετικό τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν τα Μαθηματικά και προτείνουν διαφορετικές μεθόδους παιδαγωγικής δράσης (Radford, Boero, Vasco 2000).

Η παγκόσμια μαθηματική βιβλιογραφία έχει, μέχρι σήμερα, καταγράψει πέντε διαφορετικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις για την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη. Αυτές είναι οι παρακάτω:

1. Η ιστορική - γενετική προσέγγιση του Toeplitz
2. Η προσέγγιση με καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη του Freudenthal
3. Η προσέγγιση με σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων του Brousseau
4. Η προσέγγιση με την κοινωνική – πολιτισμική οπτική του Radford, και
5. Η προσέγγιση με το παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων του Boero.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα κύρια επιστημολογικά, ψυχολογικά και ιστορικά χαρακτηριστικά σημεία καθεμιάς προσέγγισης ξεχωριστά.

Η ιστορική - γενετική προσέγγιση του Toeplitz

Το 1874 ο Γερμανός βιολόγος Ernst Haeckel διατύπωσε το "Νόμο της Ανακεφαλαίωσης" (recapitulation law): "Η οντογένεση ανακεφαλαιώνει την φυλογένεση" (ontogeny recapitulates phylogeny). Μια σύντομη ερμηνεία αυτού του Νόμου, δίνει ο ίδιος ο Haeckel: "Η σειρά των μορφών μέσα από τις οποίες διέρχεται ένας οργανισμός κατά την ανάπτυξή του από το ωάριο μέχρι την πλήρη σωματική του διάπλαση, είναι μια συνοπτική επανάληψη της μακράς σειράς μορφών από οποίες διήλθαν οι πρόγονοί του, από την αρχική περίοδο της ζωής του είδους μέχρι σήμερα" (Furinghetti, Radford 2002, Furinghetti, Radford 2008).

Πολύ σύντομα ο βιολογικός Νόμος της Ανακεφαλαίωσης μετατράπηκε σε ψυχολογικό Νόμο από τον ίδιο το Haeckel, ύστερα από τις μελέτες του στο ανθρώπινο νευρικό σύστημα, με τα παρακάτω λόγια: "Η ψυχική ανάπτυξη ενός παιδιού δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια σύντομη επανάληψη της φυλογενετικής εξέλιξης" (Furinghetti, Radford 2002, Furinghetti, Radford 2008). Η μεταφορά του νόμου στην παιδαγωγική συνεπάγεται ότι, η γένεση της γνώσης σε ένα άτομο ακολουθεί την ίδια πορεία που ακολουθεί η γένεση της γνώσης στο ανθρώπινο είδος. Επομένως η ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης του ατόμου ακολουθεί την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών (Gulikers, Blom 2001).

Μέσα σε ελάχιστα χρόνια οι ιδέες του Haeckel υιοθετήθηκαν από μεγάλους μαθηματικούς των αρχών του 20ου αιώνα όπως ο Felix Klein, ο Henry Poincaré, ο Gino Loria κ.α. Ο Henry Poincaré για το θέμα αυτό έγραψε τα παρακάτω (Furinghetti, Radford 2002, Γιαννακούλιας 2007, Furinghetti, Radford 2008):

> "Το έργο του παιδαγωγού είναι να προσπαθήσει ώστε τα παιδιά να ακολουθήσουν τη διαδρομή που ακολούθησαν οι πρόγονοί τους, περνώντας γρήγορα από όλα τα στάδια χωρίς να παραλείψουν κανένα. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού η ιστορία είναι ο οδηγός μας."

Η ιστορική - γενετική μέθοδος πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Otto Toeplitz σε μια διάλεξή του το 1926. Ο Tzanakis περιγράφει τη γενετική προσέγγιση ως μια μέθοδο στην οποία δεν υπάρχει ένας μοναδικός και καθορισμένος τρόπος για την παρουσίαση ενός μαθηματικού θέματος. Αυτό σημαίνει ότι η γενετική προσέγγιση δεν είναι μια μέθοδος με αυστηρά αλγοριθμικά βήματα, αλλά μια γενικότερη στάση στην παρουσίαση των μαθηματικών θεμάτων. Σε μια τέτοιου είδους παρουσίαση το κίνητρο της εισαγωγής ενός θέματος ή μιας έννοιας ή μιας θεωρίας βασίζεται στην ιστορική του/της εξέλιξη. Τα προβλήματα και τα ερωτήματα τα οποία είναι ενδιαφέροντα ως προς την ιστορική εξέλιξη πρέπει να ανακατασκευαστούν σε σύγχρονη μορφή και με σύγχρονο συμβολισμό, ώστε να γίνουν περισσότερο προσιτά στους μαθητές (Tzanakis 2000).

Ο Toeplitz στην περίφημη διάλεξη του 1926, σύμφωνα με τον Jankvist, είπε μεταξύ άλλων (Jankvist 2009):

> "Όλες οι μαθηματικές γνώσεις πρέπει να τύχουν μιας συναρπαστικής διερεύνησης, μιας δράσης που θα ταράξει τα νερά, μέσα στα χρονικά πλαίσια στα οποία (οι μαθηματικές γνώσεις) δημιουργήθηκαν και εξελίχθηκαν. (…) Αν κάποιος επιστρέψει στις ρίζες των εννοιών και τινάξει τη σκόνη του χρόνου από πάνω τους, τότε οι έννοιες θα εμφανιστούν μπροστά στα μάτια μας σαν να είναι ζωντανοί οργανισμοί. Και τότε υπάρχουν δύο διαφορετικοί δρόμοι τους οποίους μπορούμε να πάρουμε: Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να παρουσιάσουμε στους μαθητές

μας την ανακάλυψη και την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών με όλες τις λεπτομέρειες και μ' αυτό τον τρόπο οι μαθητές μας θα δουν τα προβλήματα, τα ερωτήματα και τα γεγονότα να αναδύονται μπροστά στα μάτια τους. Την πρώτη μέθοδο θα την ονομάσω άμεση ή ευθεία γενετική μέθοδο (direct genetic method). Στη δεύτερη περίπτωση μπορούμε να κάνουμε μια ιστορική ανάλυση των εννοιών προκειμένου να εντοπίσουμε την πραγματική σημασία και τον πυρήνα της μαθηματικής έννοιας και να βγάλουμε συμπεράσματα για τη διδασκαλία της έννοιας, χωρίς να υπάρχει περαιτέρω αναφορά στην ιστορία της έννοιας. Τη δεύτερη μέθοδο θα την ονομάσω έμμεση γενετική μέθοδο (indirect genetic method)."

Η αντίληψη αυτής της σύνδεσης της ιστορίας με τη διαδικασία μάθησης επικροτήθηκε από πολλούς γνωστικούς ψυχολόγους. Οι Piaget και Garcia απέφυγαν τη χρήση του όρου της ανακεφαλαίωσης και έδωσαν μια δική τους γενετική διάσταση στο θέμα. Υποστηρίζουν ότι πρέπει να αντιληφθούμε την ανάπτυξη της γνώσης με βάση τα νοητικά εργαλεία και τους μηχανισμούς απόκτησής της. Ως πρώτο μηχανισμό θεωρούν τη διαδικασία αφομοίωσης - ολοκλήρωσης - εγκατάστασης του νέου γνωστικού σχήματος, με βάση τα υφιστάμενα γνωστικά σχήματα. Επισημαίνουν επίσης ότι, το άτομο από τη μια επιλέγει, μετασχηματίζει και αφομοιώνει τα στοιχεία που δέχεται από το περιβάλλον σε σχέση με τις υφιστάμενες δομές του, ενώ από την άλλη δεν είναι δυνατό να υπάρξει αφομοίωση καθαρής γνώσης, ξεκομμένης από το κοινωνικό πλαίσιο, αφού όλα τα αντικείμενα έχουν πάντα μια κοινωνική σημασία. Ο δεύτερος μηχανισμός μετάβασης από το ένα φυλογενετικό στάδιο στο επόμενο, ανάλογο με εκείνα που οδηγούν από το ένα ψυχογενετικό στάδιο στο επόμενο, αναφέρεται στα επίπεδα ανάλυσης. Πρόκειται για μια διαδικασία τριών σταδίων ανάλυσης: την "ενδο-αντικειμενική" (intra-subject) που ασχολείται με την ανάλυση των στοιχείων ενός αντικειμένου, την "δια-αντικειμενική" (inter-subject) που αναλύει τις σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα και τους απαραίτητους μετασχηματισμούς γι' αυτά, και την "υπερ-αντικειμενική" (trans-subject) που συνδυάζει αντικείμενα για τη δημιουργία δομών. Ο Vygotsky ασχολήθηκε με το νόμο της ανακεφαλαίωσης και τόνιζε την ανάγκη κατανόησης της βιολογι-

κής μας βάσης. Υποστήριζε κατά την ανάπτυξη του ατόμου διακρίνονται δύο είδη νοητικής ανάπτυξης που τα βρίσκουμε σε απομόνωση στη φυλογένεση: η βιολογική και η ιστορική, ή η φυσική και κοινωνική ανάπτυξη της συμπεριφοράς. Ο Vygotsky στην ανάλυσή του αναγνωρίζει το σημαντικό ρόλο του κοινωνικού-πολιτισμικού πλαισίου. Υποστηρίζει ότι η κουλτούρα όχι μόνο προσφέρει τις μορφές των επιστημονικών εννοιών και μεθόδων διερεύνησης, αλλά διαφοροποιεί και τη λειτουργία των νοητικών δομών με τη χρήση εργαλείων κάθε είδους. Να τονίσουμε εδώ ότι για τους Piaget και Garcia τα εργαλεία απόκτησης γνώσης παραμένουν αμετάβλητα (Furinghetti, Radford 2002, Furinghetti, Radford 2008).

Η προσέγγιση με καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη του Freudenthal

Ο Freudenthal το 1973 εμπνεόμενος από τη μαιευτική μέθοδο του Σωκράτη (όπως αυτή εμφανίζεται στους Πλατωνικούς διαλόγους, για παράδειγμα στο διάλογο "Μένων"), ερμήνευσε τη γενετική μέθοδο με τη μέθοδο της "καθοδηγούμενης επανα-ανακάλυψης". Στο βιβλίο του "Mathematics as an Educational Task", αναφέρει μεταξύ άλλων τα παρακάτω (Freudenthal 1973):

> "Προτείνοντας ότι οι μαθηματικές ιδέες πρέπει να διδάσκονται με γενετικό τρόπο, δεν σημαίνει ότι πρέπει να παρουσιάζονται με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται ιστορικά, ούτε να παρουσιάζονται με τα αδιέξοδα τα οποία υπήρξαν και τις παρακάμψεις των αδιεξόδων που άνοιξαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος. (…) Η μαθηματική γνώση που ανακαλύφθηκε ή εξελίχθηκε στο παρελθόν, όταν ειδωθεί εκ των υστέρων πρέπει να μπορεί να μας πληροφορήσει για τον τρόπο με τον οποίο ανακαλύφθηκε ή εξελίχθηκε, σαν να ήταν παρόντες δάσκαλοι των Μαθηματικών που έχουν τις σημερινές γνώσεις των Μαθηματικών. (…) Δεν πρέπει να ακολουθούμε τα βήματα των μαθηματικών που έδρασαν στο παρελθόν, αλλά μια βελτιωμένη και καλύτερη καθοδηγούμενη πορεία της ιστορίας."

Ο Freudenthal συνεπώς, εμπνέεται τη διδακτική του πρόταση από την ιστορία των Μαθηματικών, θέτει όμως μια διαφορετική προσέγγιση από αυτήν του

Toeplitz. Διατυπώνει την άποψη ότι οι μαθητές θα πρέπει να επαναλάβουν τη διαδικασία κατάκτησης της γνώσης από το ανθρώπινο γένος, όχι όμως με τον τρόπο με τον οποίο συνέβη στο παρελθόν, αλλά σαν να είχε κατακτηθεί από ανθρώπους στο παρελθόν που η μαθηματική τους γνώση ήταν εφάμιλλη της σημερινής. Ο Freudenthal δεν χρησιμοποιεί ποτέ τον όρο "γενετική μέθοδος", γιατί θεωρεί ότι δεν κάνει νύξη σε καμία δραστηριοποίηση από πλευράς του μαθητή. Αντίθετα τονίζει ότι οι μαθητές θα πρέπει να καθοδηγούνται από τον δάσκαλό τους σε μία δραστηριότητα, με τέτοιο τρόπο ώστε να επανα-ανακαλύπτουν τη διαδικασία του "κάνω Μαθηματικά" (mathematizing) και όχι τα ίδια τα Μαθηματικά. Ο Freudenthal περιγράφει τον όρο "κάνω Μαθηματικά" ως το σύνολο των οργανωμένων δραστηριοτήτων ενός μαθηματικού. Επίσης υποστηρίζει ότι ο κάθε μαθητής πρέπει να "κάνει Μαθηματικά" τη δική του ατομική πραγματικότητα, όπως αυτή του την κάνει φανερή ο δάσκαλός του, με την καθοδήγηση που του παρέχει (Freudenthal 1991).

Ο Jankvist αναφέρει ότι ο Schubring έχει χαρακτηρίσει τη μέθοδο ως "ψυχολογική-γενετική αρχή" (psychological-genetic principle), η οποία βασίζεται στην ιδέα στο να αφήσουμε τους μαθητές να επανα-ανακαλύψουν τα Μαθηματικά χρησιμοποιώντας το ταλέντο τους και τις εμπειρίες που έχουν αποκτήσει από το περιβάλλον τους (Jankvist 2009).

Η προσέγγιση με σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων του Brousseau

Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην ιδέα των επιστημολογικών εμποδίων που παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Bachelard το 1938 και εισήχθηκαν στην περιοχή της Διδακτικής των Μαθηματικών από τον Brousseau τη δεκαετία του 1970 (Radford 1997). Η προσέγγιση του Brousseau βασίζεται στην παραδοχή ότι η γνώση υπάρχει και εμφανίζεται όταν αντιπροσωπεύει μια βέλτιστη λύση ενός προβλήματος μέσα σε ένα "σύστημα περιορισμών" (system of constrains). Για τον Brousseau, η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει πηγή έμπνευσης στην αναζήτηση τέτοιων συστημάτων περιορισμών, μέσα στα οποία μπορεί να παραχθεί συγκεκριμένη μαθηματική γνώση. Επιπλέον υποστηρίζει ότι η μαθηματική γνώση αποκτάται μέσα από τη λύση ενός προβλήματος. Σ' αυτό το πλαίσιο, ένα επιστημολογικό εμπόδιο

εμφανίζεται ως το αίτιο ενός επαναλαμβανόμενου, μη τυχαίου λάθους το οποίο κάνουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να λύσουν κάποιο μαθηματικό πρόβλημα (Radford, Boero, Vasco 2000).

Όπως είναι γνωστό, ο Brousseau διακρίνει τρία είδη εμποδίων: τα "οντογενετικά" (ontogenetic) που οφείλονται στις νοητικές δυνατότητες του μαθητή σύμφωνα με τη διανοητική του ανάπτυξη, τα "διδακτικά" (didactic) που είναι αποτέλεσμα των επιλογών του δασκάλου των Μαθηματικών που γίνονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σύστημα και τα "επιστημολογικά" (epistemological) που εμφανίστηκαν στην ιστορία των Μαθηματικών και εμφανίζονται ακόμη και σήμερα στην προσπάθεια των μαθητών να μάθουν Μαθηματικά. Ο Brousseau αναφέρει για τα τελευταία (Brousseau 1997):

> "Εμπόδια με πραγματικά επιστημονική προέλευση είναι αυτά από τα οποία κανείς δεν μπορεί να ξεφύγει, εξαιτίας του διαπλαστικού τους ρόλου στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτά μπορούν να (αναζητηθούν και να) βρεθούν στην ίδια την ιστορία των μαθηματικών εννοιών. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι πρέπει να μεγεθύνουμε τις συνέπειές τους ή να αναπαράγουμε μέσα στη σχολική τάξη τις ιστορικές συνθήκες κάτω από τις οποίες ξεπεράστηκαν."

Όταν ο δάσκαλος θέτει μια διδακτική κατάσταση στο μαθητή, η γνώση θα επέλθει στο μαθητή μόνο όταν αυτός οικειοποιηθεί το πρόβλημα. Αυτή η οικειοποίηση του προβλήματος από το μαθητή αποτελεί το ισχυρότερο κίνητρο για την επίλυσή του, χωρίς να προσφέρεται κάποια βοήθεια από το δάσκαλο κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος από το μαθητή. Ο Brousseau θεωρεί ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης είναι μια ακολουθία ιδεών και εμποδίων που πρέπει να υπερνικηθούν. Επομένως, το έργο του εκπαιδευτικού πρέπει να επικεντρωθεί στην επεξεργασία και στην οργάνωση διδακτικών καταστάσεων στηριγμένων σε προσεκτικά επιλεγμένα προβλήματα, τα οποία θα προκαλέσουν τις προηγούμενες ιδέες των μαθητών και θα είναι πιθανό, μέσω αυτών οι μαθητές να ξεπεράσουν τα επιστημολογικά εμπόδια, ώστε να προχωρήσουν σε νέες και πλουσιότερες εννοιολογικές κατακτήσεις (conceptualisations) (Radford, Boero, Vasco 2000).

Η προσέγγιση με την κοινωνική – πολιτισμική οπτική του Radford

Σύμφωνα με την κοινωνική – πολιτισμική οπτική του Radford, η μαθηματική γνώση δεν περιορίζεται σε ενέργειες τεχνικού χαρακτήρα οι οποίες εμφανίζονται κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Αντίθετα ο Radford θεωρεί ότι η μαθηματική γνώση αποκτιέται σαν μια πολιτισμικά διαμεσολαβημένη γνωσιακή πράξη που είναι αποτέλεσμα δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκονται οι διδασκόμενοι. Επιπλέον, το περιεχόμενο της γνώσης εντάσσεται στο πλαίσιο της λογικής του πολιτισμού στον οποίο παρέχεται. Η μέθοδος της λογικής είναι αυτή που οριοθετεί τον τρόπο με τον οποίο θα θεωρηθεί ένα επιστημονικό πρόβλημα και θα διαμορφώσει τους κανόνες της επιστημονικής διερεύνησής του (για παράδειγμα, τι είναι αποδεκτό ως επιστημονικός λόγος και τι δεν είναι, τι είναι αποδεκτό ως απόδειξη και τι δεν είναι). Η μέθοδος της λογικής συνδέεται άμεσα με τα κοινωνικά, ιστορικά, υλικά και συμβολικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα στα οποία στηρίζονται οι δραστηριότητες των διδασκόμενων. Άρα, από κοινωνική-πολιτισμική και επιστημολογική άποψη, η γνώση μπορεί να κατανοηθεί μόνο σε σχέση με τη λογική από την οποία προέρχεται και με τον τρόπο με τον οποίο οι διδασκόμενοι επικαλύπτονται από το κοινωνικό, ιστορικό, υλικό και συμβολικό τους περιβάλλον (Radford, Boero, Vasco 2000). Σύμφωνα με τον Radford, ένα μαθηματικό πρόβλημα δεν είναι αυθύπαρκτο, αλλά πάντα τίθεται, μελετάται και επιλύεται με τους κανόνες της λογικής του πολιτισμού στον οποίο ανήκει (Radford 1997).

Στην κοινωνική-πολιτισμική προσέγγιση του Radford, η σχέση μαθητή και κοινωνικού περιβάλλοντος είναι σύμφωνη με την επιστημολογική υπόθεση για την κοινωνική κατασκευή της γνώσης. Αντί να βλέπουμε την κατασκευή της γνώσης σαν μια διαχρονική μετατόπιση μεταξύ του δασκάλου και του διδασκόμενου, ο μαθητής πρέπει να θεωρηθεί ότι, βυθισμένος στο πολιτισμικό του περιβάλλον, δρα και σκέπτεται χρησιμοποιώντας το οπλοστάσιο των εννοιών, των ιδεών, των νοημάτων και των εργαλείων του πολιτισμού του. Ο τρόπος με τον οποίο ο διδασκόμενος οικειοποιείται την κοινωνική γνώση του πολιτισμικού περιβάλλοντός του, αναφέρεται συχνά με τον Βιγκοτσκιανό όρο "εσωτερίκευση" (interiorisation). Σύμφωνα με την κοινωνική-πολιτισμική προσέγγιση, η εσωτερίκευση δεν είναι μια παθητική διαδικασία αλλά ενεργητική, στην οποία

ο διδασκόμενος χρησιμοποιώντας σύμβολα και λόγο ανακατασκευάζει έννοιες και νοήματα και συν-δημιουργεί νέες έννοιες και νέα νοήματα (Radford, Boero, Vasco 2000).

Με βάση την κοινωνική-πολιτισμική οπτική του Radford, η σχολική τάξη θεωρείται σαν ένας μικρο-χώρος (micro-space) ενταγμένος στον ευρύτερο πολιτισμικό χώρο, ενώ η κατανόηση των Μαθηματικών από το μαθητή θεωρείται σαν μια διαδικασία πολιτισμικής διανοητικής οικειοποίησης των νοημάτων και των εννοιών, μέσα από τις δραστηριότητες του μαθητή και του δασκάλου του (Radford, Boero, Vasco 2000, Farmaki, Paschos 2007). Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών δεν θεωρείται ως ένα μονοδιάστατο στάδιο στο οποίο φτάνει ο μαθητής σαν αποτέλεσμα κάποιας επιφοίτησης, αλλά σαν αποτέλεσμα διαλόγου και σύνθεσης διαφορετικών απόψεων (Radford, Boero, Vasco 2000).

Η ιστορία των Μαθηματικών είναι σε μεγάλο βαθμό ένας θαυμάσιος τόπος μέσα στον οποίο υπάρχουν δυνατότητες για σχεδιασμό δραστηριοτήτων για τους μαθητές, αφού πρώτα ανακατασκευάσουμε ή/και ερμηνεύσουμε το παρελθόν. Παρόλο που οι πολιτισμοί δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, μπορούν να μάθουν ο ένας από τον άλλο. Τα μαθηματικά νοήματα και οι μαθηματικές έννοιες είναι ιστορικά και παν-πολιτισμικά (panculturally) δημιουργήματα. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα από το γεγονός ότι οι περισσότερες από τις σύγχρονες έννοιες είναι μεταλλάξεις, προσαρμογές ή μετασχηματισμοί παλαιών εννοιών που έτυχαν επεξεργασίας από προηγούμενες γενιές μαθηματικών, μέσα στο κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο έζησαν (Radford, Boero, Vasco 2000).

Η προσέγγιση με το παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων του Boero

Η αφετηρία της προσέγγισης του Boero είναι το γεγονός ότι κάποιες λεκτικές και μη λεκτικές εκφράσεις, ειδικά αυτές που διατυπώθηκαν από μεγάλους μαθηματικούς του παρελθόντος, εκφράζουν με πυκνό τρόπο σημαντικά άλματα της εξέλιξης των Μαθηματικών. Κάθε μια από τις εκφράσεις αυτές μεταφέρει ένα μαθηματικό νόημα, μια οργάνωση του λόγου και τον πολιτιστικό ορίζοντα

του ιστορικού άλματος. Αυτές τις εκφράσεις ο Boero τις ονόμασε "φωνές" (voices). Όταν οι εκφράσεις τεθούν για συζήτηση από τον δάσκαλο στους μαθητές, αυτοί πρέπει να συνδέσουν τις φωνές με τις ερμηνείες τους, με τις ιδέες τους, με τις εμπειρίες τους και τις προσωπικές αισθήσεις τους και να παράγουν "αντηχήσεις" (echoes). Δηλαδή, "το παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων" (voices and echoes game - VEG) είναι μια καθορισμένη εκπαιδευτική κατάσταση που σκοπεύει να ενεργοποιήσει τους μαθητές να παράγουν αντηχήσεις (Radford, Boero, Vasco 2000).

Οι επιστημολογικές υποθέσεις που υποκρύπτονται στο "παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων", αναφέρονται στη φύση της θεωρητικής γνώσης του περιεχομένου που διαμεσολαβείται μέσω του παιχνιδιού και στα επιχειρήματα, γνωστικά και εκπαιδευτικά, υπέρ του παιχνιδιού. Όσον αφορά τη φύση της θεωρητικής γνώσης στα Μαθηματικά, μερικά χαρακτηριστικά της έχουν υπογραμμιστεί στο έργο του Vygotsky σχετικά με τις επιστημονικές έννοιες. Η θεωρητική γνώση είναι συστηματική και συνεκτική και η επικύρωση των απόψεων των μαθητών στηρίζεται στη λογικο-γλωσσολογική τους ανάπτυξη, πάντα σε ένα μαθηματικό περιβάλλον με παραδοχές (όπως για παράδειγμα τα αξιώματα στη Γεωμετρία) (Radford, Boero, Vasco 2000).

Οι σημαντικότερες διαστάσεις για τη διάδοση της θεωρητικής μαθηματικής γνώσης στο σχολικό περιβάλλον, είτε αφορούν τη διαδικασία παραγωγής της (όπου κρίσιμο ρόλο έχει η γλώσσα), είτε τις ιδιομορφίες που παρουσιάζουν, είναι οι παρακάτω (Radford, Boero, Vasco 2000):

- η μαθηματική θεωρητική γνώση οργανώνεται σύμφωνα με ρητές μεθοδολογικές απαιτήσεις (όπως η συνεκτικότητα, η συστηματικότητα, κ.α.)
- οι ορισμοί και οι αποδείξεις είναι σημεία κλειδιά για την ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας και παράγονται μέσα από συγκεκριμένες στρατηγικές σκέψης (για παράδειγμα η απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο, η χρήση των ε – δ ορισμών, κ.α.) που εκμεταλλεύονται τις δυνατότητες της μαθηματικής γλώσσας και ανήκουν στη μαθηματική κληρονομιά
- το ύφος της μαθηματικής γλώσσας που χρησιμοποιείται για τη παραγωγή της μαθηματικής θεωρητικής γνώσης και για την επικοινωνία της μέσα στην σχολική τάξη, έχει λέξεις κλειδιά που ανήκουν σε μια συγκεκριμένη

μαθηματική θεωρία (για παράδειγμα στη Θεωρία Συνόλων ή στη Θεωρία Πιθανοτήτων, κοκ) και ανήκει και αυτό στη μαθηματική κληρονομιά

- η συνεκτική και συστηματική μαθηματική θεωρητική γνώση καθοδηγείται από συγκεκριμένους τρόπους για να "δουν" οι μαθητές τα μαθηματικά αντικείμενα μιας θεωρίας (για παράδειγμα στη Γεωμετρία υπάρχουν και ο συνθετικός και ο αναλυτικός τρόπος)

Η υπόθεση εργασίας του Boero και των συνεργατών του, είναι ότι το "παιχνίδι των φωνών και των αντηχήσεων" μπορεί να λειτουργήσει ως ένα αποτελεσματικό μαθησιακό περιβάλλον. Είναι όμως απαραίτητη η "ενεργητική μίμηση" (active imitation) από πλευράς των μαθητών μέσα στη Βιγκοτσκιανή "ζώνη επικείμενης ανάπτυξης" (zone of proximal development) (Radford, Boero, Vasco 2000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε προτάσεις και σε προσπάθειες που έγιναν στο παρελθόν για την ενσωμάτωση της ιστορίας της Γεωμετρίας στη διδασκαλία της. Η παγκόσμια βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης μάς έχει προσφέρει μέχρι σήμερα πολλές τέτοιες προτάσεις και αναφορές προσπαθειών προς αυτή την κατεύθυνση. Μια σημαντική προσπάθεια ταξινόμησής τους έγινε από τους Gulikers και Blom, οι οποίοι κατέληξαν στις παρακάτω οκτώ κατηγορίες (Gulikers, Blom 2001):

1. Γεωμετρικοί υπολογισμοί (που περιλαμβάνει υπολογισμούς μηκών, εμβαδών και όγκων, αναλογίες, αλλά και τριγωνομετρικούς υπολογισμούς).
2. Γεωμετρικές κατασκευές (που περιλαμβάνει κατασκευές με κανόνα και διαβήτη ή άλλα όργανα).
3. Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων, δισδιάστατων και τρισδιάστατων (που περιλαμβάνει την ομοιότητα, την ισότητα και τις αναλογίες τέτοιων σχημάτων).
4. Οπτική (Vision) Γεωμετρία (που περιλαμβάνει την προοπτική των σχημάτων, δισδιάστατες τομές τρισδιάστατων σχημάτων και δίκτυα (nets)).
5. Ιστορία της Γεωμετρίας (που περιλαμβάνει βιογραφίες, διαλόγους και διάφορες ανέκδοτες ιστορίες).
6. Γεωμετρικοί τόποι (που περιλαμβάνει και τα συστήματα συντεταγμένων και τα διανύσματα).
7. Επιχειρηματολογία και αποδείξεις (που περιλαμβάνει αποδείξεις, δομές γεωμετρικών αποδείξεων, γνώση των εννοιών του ορισμού, του αξιώματος και του θεωρήματος).
8. Γεωμετρία και Φυσική.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε παραδείγματα από κάθε κατηγορία ξεχωριστά:

Γεωμετρικοί υπολογισμοί

- Με αφορμή το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ο Swetz το 1997 (στο άρθρο του "The 'piling up of squares' in ancient China", *Mathematics Teacher, 70(1)*, pp. 72 – 79), παρουσίασε την τεχνική της τοποθέτησης διαδοχικών τετραγώνων ίσων ή διαφορετικών διαστάσεων στο επίπεδο (piling up of squares), η οποία χρησιμοποιεί μια διαισθητική προσέγγιση με σκοπό την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Swetz, η τεχνική αυτή ήταν γνωστή στους αρχαίους Βαβυλώνιους και στους αρχαίους Έλληνες, αλλά εξελίχθηκε σε πολύ υψηλό επίπεδο στην αρχαία Κίνα (Gulikers, Blom 2001).
- Ο Burns το 1997 περιέγραψε (στο άρθρο του "The Babylonian clay tablet", *Mathematics Teaching, 158*, pp. 44 – 45) την ομαδική δουλειά που πραγματοποίησαν οι μαθητές του σχετικά με μια παλαιά βαβυλωνιακή πλάκα (την Πινακίδα Plimpton 322), θέτοντάς τους το ερώτημα: "Περί τίνος πρόκειται;" Η εμπειρία του ήταν πολύ θετική, αφού πολλοί μαθητές εργάστηκαν πολύ σοβαρά για να αντιμετωπίσουν την πρόκληση της πινακίδας και του ερωτήματος με αποτέλεσμα να παρουσιάσουν ευφυείς δικές τους απαντήσεις. Κάποιοι μαθητές ερμήνευσαν πολύ σωστά το αριθμητικό νόημα της πινακίδας χωρίς να έχουν συνειδητοποιήσει τι ακριβώς είχαν καταφέρει. Κάποιοι άλλοι χρησιμοποίησαν άλλες πηγές (κυρίως βιβλία) για να μάθουν για το νόημα των αριθμών, χωρίς φυσικά να αποκομίσουν κάποιο μαθηματικό όφελος από τη διαδικασία αυτή (Gulikers, Blom 2001).
- Ο MacKinnon το 1992 περιέγραψε (στο άρθρο του "Homage to Babylonia?", *The Mathematical Gazette 76(475)*, pp. 158 – 178) τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν η πινακίδα Plimpton 322, αλλά και άλλες βαβυλωνιακές πινακίδες για να αναδείξουν πολλές διαφορετικές χρήσεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος (Gulikers, Blom 2001).
- Η Eagle το 1998 πρότεινε στους μαθητές της (όπως ανέφερε στο άρθρο της "A typical slice", *Mathematics in School, 27(4)*, pp. 37-39) τη μέθοδο και τα μέσα που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης για τον υπολογισμό του όγκου της σφαίρας. Καθοδήγησε τους μαθητές της να ακολουθήσουν τα

βήματα του Αρχιμήδη, επαληθεύοντας τον γνωστό τύπο του όγκου της σφαίρας ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$). Ταυτόχρονα η διαδικασία αυτή μύησε τους μαθητές της στις διαδικασίες του ολοκληρωτικού λογισμού (Gulikers, Blom 2001).

- Ο MacKinnon το 1989 (όπως ανέφερε στο άρθρο του "What do you do about $4\pi r^2$?", *The Mathematical Gazette, 73(464)*, pp. 107 – 110) εμπνεόμενος από το έργο του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας μιας σφαίρας, σχεδίασε μια διδακτική πρόταση για τον υπολογισμό της μέσω των προβολών τμημάτων της επιφάνειας της Γης σε ένα χάρτη (Gulikers, Blom 2001).
- Ο Führer το 1991 περιέγραψε (στο άρθρο του "Historical stories in the mathematics classroom", *For the Learning of Mathematics, 11(2)*, pp. 24 – 31) τον τρόπο με τον οποίο ο Ερατοσθένης υπολόγισε την περιφέρεια της Γης, προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουν οι μαθητές του για να υπολογίσουν το μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας. Οι κύριοι άξονες της δραστηριότητας ακολούθησαν τις ιδέες της "καθοδηγούμενης επανα-ανακάλυψης". Στο ίδιο άρθρο ο Führer συνδύασε το έργο του Αρχιμήδη, του Viète και του Descartes με σκοπό να παρουσιάσει στους μαθητές του την έννοια της προσέγγισης (Gulikers, Blom 2001).
- Το 1987, μια ομάδα Γάλλων ερευνητών από το Πανεπιστήμιο Paris VII I.R.E.M., χρησιμοποίησε το κείμενο του Αρχιμήδη "Κύκλου Μέτρησις" σαν κείμενο πειραματικής διδασκαλίας σε μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου. Με τη διδασκαλία αυτή, το έργο του Αρχιμήδη λειτούργησε ως μέσο για να γνωρίσουν οι μαθητές ένα συναρπαστικό μαθηματικό πρόβλημα μέσα από την ιστορία του, ενώ τους δόθηκε η δυνατότητα να αναπτύξουν οι ίδιοι τεχνικές επίλυσης του προβλήματος αξιοποιώντας όσες μαθηματικές γνώσεις διέθεταν (Θωμαΐδης 2000)
- Ο Corris το 1990 περιέγραψε (στο άρθρο του "Experimental pi", *Mathematics in School, 19(1)*, pp. 18 – 21) τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές του έκαναν τις δικές τους προσεγγίσεις του π, με τη βοήθεια κατασκευών και ασκήσεων υπολογισμών εμπνευσμένων από το έργο του Αρχιμήδη (Gulikers, Blom 2001).

- Αντίστοιχη δραστηριότητα δημοσίευσε και ο Μιχαηλίδης (στο άρθρο του "Το λάπτοπ του Αρχιμήδη" στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (eds), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, pp. 269 – 298) προτείνοντας μάλιστα τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για την εκτέλεση των υπολογισμών που απαιτούνται (Μιχαηλίδης 2009).
- Ο Ofiir το 1991 πρότεινε (στο άρθρο του "Historical happenings in the mathematical classroom", *For the Learning of Mathematics, 11(2)*, pp. 21 – 23) μια μέθοδο για την προσέγγιση του π, που χρονολογείται από το 12ο αιώνα από τον εβραίο Maimonides, υποστηρίζοντας την άποψη ότι οι πηγές που χρησιμοποιούνται οφείλουν να προέρχονται από τη χώρα προέλευσης των μαθητών, αφού θα κινητοποιήσουν τους μαθητές περισσότερο (Gulikers, Blom 2001).
- Το 1996 οι Makowski και Strong έκαναν μια πειραματική διδασκαλία με φοιτητές Γεωγραφίας (όπως αναφέρουν στο άρθρο τους "Sizing up earth: A universal method for applying Eratosthenes' earth measurement", *Journal of Geography, 95(4)*, pp. 174 – 179) με σκοπό τη μέτρηση της γης, στηριζόμενοι στο έργο του Ερατοσθένη. Οι φοιτητές στο τέλος της δραστηριότητας συζήτησαν τα αποτελέσματα που βρήκαν και τα επαλήθευσαν. Οι συντάκτες του άρθρου έδωσαν μάλιστα και οδηγίες προς τους εκπαιδευτικούς για τη χρήση της μεθόδου του Ερατοσθένη μέσα στην τάξη (Gulikers, Blom 2001).
- Το 1990 ο Θωμαΐδης (στο άρθρο του "Ιστορικές Παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας", *Ευκλείδης γ', 7(25)*, pp. 27 – 41) περιέγραψε μια διδακτική παρέμβαση πάνω στο θεώρημα του Πτολεμαίου και στο ρόλο του στην κατασκευή του πίνακα χορδών (που ως γνωστόν ισοδυναμεί με ένα σημερινό τριγωνομετρικό πίνακα ημιτόνων). Το θεώρημα και ο πίνακας χορδών, που περιέχονται στο έργο του Πτολεμαίου "Αλμαγέστη" (2ος αιώνας μ.Χ.), βοήθησαν σημαντικά στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων μέτρησης της αρχαίας αστρονομίας και αποτέλεσε τη "Βίβλο" των αστρονόμων, των γεωγράφων και των εξερευνητών μέχρι και το 16ο αιώνα μ.Χ. Ο Θωμαΐδης ανέφερε ότι μέσω του θεωρήματος του Πτολεμαίου οι μαθητές δια-

πίστωσαν την αλληλεπίδραση μεταξύ της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας και διαπιστώθηκε ότι θεωρήματα και ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, από αντικείμενα ψυχρής θεωρητικής ανάπτυξης, μπορούν να αποτελέσουν κίνητρο για ουσιαστική συζήτηση και για συμμετοχή σε δημιουργικές δραστηριότητες (Θωμαΐδης 1990).

Γεωμετρικές κατασκευές

- Ο Hogendijk το 1996 περιέγραψε (στο άρθρο του "Een workshop over Iraanse mozaïken", *Nieuwe Wiskrat, 16(2)*, pp. 38 – 42) τον τρόπο κατασκευής ενός κανονικού πενταγώνου από ένα παλαιό περσικό χειρόγραφο, που χρονολογείται από το Μεσαίωνα. Οι μαθητές μπορούσαν να ελέγξουν τη μέθοδο κατασκευής του ακολουθώντας την περιγραφή της από το μεταφρασμένο κείμενο. Ως γνωστόν υπάρχουν πολλά περσικά χειρόγραφα τα οποία περιγράφουν τις κατασκευές διαφόρων σχημάτων με σκοπό τη δημιουργία διάφορων μωσαϊκών. Ο Hogendijk διατύπωσε την άποψη ότι τα περσικά μωσαϊκά επιτρέπουν στους μαθητές να ασχοληθούν με ένα ευρύ φάσμα γεωμετρικών κατασκευών (Gulikers, Blom 2001).
- Ο Hischer το 1994 (στο άρθρο του :"Geschichte der Mathematik als didaktisher Aspect (2). Lösung klassischer Probleme. Ein Beispiel für die gymnasiale Oberstufe", *Mathematik in der Schule, 32(5)*, pp. 279 – 291) πρότεινε τη χρήση διαβητών τριχοτόμησης (trisectrix). Όπως είναι γνωστό με τη χρήση του διαβήτη αυτού, είναι δυνατό να λυθούν γραφικά τα προβλήματα της τριχοτόμησης γωνιών. Ο Hischer περιέγραψε τον απλό τρόπο με τον οποίο η χρήση του οργάνου αυτού μπορεί να λύσει τέτοιου είδους προβλήματα. Πρότασή του είναι η διδασκαλία του συγκεκριμένου θέματος να γίνει στις μεγαλύτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Gulikers, Blom 2001).
- Ο Ransom το 1993 και το 1995 (στα άρθρα του "Astrolabes, cross staffs and dials", *Mathematics in School, 22(4)*, pp. 2 – 8 και "Navigation and surveying: teaching through the use of old instruments", *Histoire et Epistémologie dans l' Education Mathématique,* IREM de Montpellier, pp. 227 – 239) περιέγραψε τη χρήση παλαιών τοπογραφικών οργάνων και

παλαιών οργάνων ναυσιπλοΐας μέσα στην τάξη. Συγκεκριμένα κάνοντας εκτενή αναφορά στα όργανα αυτά από ιστορική και μαθηματική άποψη, ώθησε τους μαθητές του να κατασκευάσουν οι ίδιοι κάποια από αυτά. Άποψή του είναι ότι η εμπλοκή των μαθητών του σ' αυτή τη διαδικασία τούς έδωσε την ευκαιρία να γνωρίσουν πολλές πρακτικές χρήσεις της Γεωμετρίας στην καθημερινή ζωή και να συνδέσουν την πρακτική Γεωμετρία με τη θεωρητική Γεωμετρία (Gulikers, Blom 2001).

- Το 1990 ο Θωμαΐδης (στο άρθρο του "Ιστορικές Παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας", *Ευκλείδης γ', 7(25)*, pp. 27 – 41) περιέγραψε μια διδακτική παρέμβαση στο θέμα της τριχοτόμησης της γωνίας. Ο συγγραφέας θεωρεί ότι κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών του, αυτοί αναγνώρισαν ότι τα Μαθηματικά είναι μια νοητική διεργασία σε συνεχή εξέλιξη, ενώ για μια ακόμη φορά διαπιστώθηκε ότι θεωρήματα και ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, από αντικείμενα ψυχρής θεωρητικής ανάπτυξης, μπορούν να αποτελέσουν κίνητρο για ουσιαστική συζήτηση και για συμμετοχή σε δημιουργικές δραστηριότητες (Θωμαΐδης 1990).
- Το 2005 οι Taimina και Henderson (στο άρθρο τους "How to Use History to Clarify Common Confusions in Geometry", στο A. Shell-Gellasch, D. Jardine (eds), *From Calculus to Computers: Using Recent History in the Teaching of Mathematics, MAA Notes volume No.68*, pp.57-73) εξήγησαν πως χρησιμοποιούν την ιστορία της Γεωμετρίας προκειμένου να αποσαφηνίσουν συνήθεις προβληματικές καταστάσεις που αντιμετωπίζουν οι προπτυχιακοί τους φοιτητές. Στο ερώτημά τους "Πως μπορώ να σχεδιάσω μια ευθεία γραμμή;" οι Taimina και Henderson χρησιμοποιήσαν διάφορες συσκευές για το σκοπό αυτό (μεταξύ άλλων τις συσκευές του Sarrus και των Peaucellier-Lipkin) εξηγώντας ταυτόχρονα και το μαθηματικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατασκευή των συσκευών αυτών (Taimina, Henderson 2005).

Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων

- Η Lumpkin το 1978 (στο άρθρο της "A mathematics club project from Omar Khayyam", *Mathematics Teacher 71(9)*, pp. 740 – 744) παρουσίασε

τη μέθοδο του Khayyam για την επίλυση κυβικών εξισώσεων, που χρονολογείται από τον 11ο αιώνα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί πολύ γνωστές ιδιότητες κωνικών τομών. Η Lumpkin πιστεύει ότι οι μαθητές θα κερδίσουν πολλά όσον αφορά τη γεωμετρική φύση των κωνικών τομών μέσα από την εργασία τους, επειδή η μέθοδος του Khayyam χρησιμοποιεί γεωμετρικές μεθόδους για την επίλυση κυβικών εξισώσεων (Gulikers, Blom 2001).

Οπτική Γεωμετρία

- Οι Proia και Menghini το 1984 (όπως περιγράφουν στο άρθρο τους "Conic sections in the sky and on earth", *Educational Studies in Mathematics, 15*, pp. 191 – 210) έθεσαν σε μαθητές μεγάλων τάξεων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης το εξής ερώτημα: "Γιατί στην αρχιτεκτονική βλέπουμε το σχήμα της έλλειψης μόνο κατά την περίοδο του μπαρόκ;". Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ήταν ότι δημιουργήθηκε, σε μαθητές και καθηγητές, η πεποίθηση ότι δεν πρέπει να απορρίπτουμε τη συνεισφορά άλλων επιστημονικών κλάδων στην εξέλιξη της επιστήμης των Μαθηματικών (Gulikers, Blom 2001).
- Οι Bartolini-Bussi και Marioti διαπραγματεύθηκαν (στο άρθρο τους "Semiotic Meditation: from history to the mathematics classroom", *For the Learning of Mathematics, 13(3)*, pp. 27 – 35) το ερώτημα αν τα σχήματα που προκύπτουν από την τομή ενός ορθού κώνου και ενός ορθού κυλίνδρου έχουν μορφή ωοειδή (egg-shaped). Οι μαθητές προσπάθησαν να αντλήσουν επιχειρήματα από την ιστορία των Μαθηματικών, προκειμένου να εναρμονίσουν τα σχήματα και με τις εννοιολογικές πλευρές του προβλήματος (Gulikers, Blom 2001).

Ιστορία της Γεωμετρίας

- Η Lumpkin το 1978 (σύμφωνα με το άρθρο της "A mathematics club project from Omar Khayyam", *Mathematics Teacher 71(9)*, pp. 740 – 744) έδειξε στους μαθητές της με ένα παράδειγμα την πρόοδο και τη συνέχεια στην ιστορία των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα χρησιμοποίησε σύγχρονη

Αναλυτική Γεωμετρία για να αναλύσει τις αρχαίες ελληνικές και τις αραβικές μεθόδους για την επίλυση κυβικών εξισώσεων, με τη χρήση κωνικών τομών. Ο σκοπός της ήταν καθαρά μαθηματικός: να αποκτήσουν οι μαθητές της μεγαλύτερη μαθηματική ενόραση. Επίσης δείχνοντας στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκαν τα Μαθηματικά, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να αναθεωρήσουν την άποψη που είχαν για τη στατική φύση των Μαθηματικών και να εκτιμήσουν τα Μαθηματικά ως δημιούργημα της ανθρώπινης πνευματικής δραστηριότητας (Gulikers, Blom 2001).

- Το 1988 οι Baptist και Diener (στο άρθρο τους "Historische Aufgaben im Mathematikunterricht", *Die realschule, 96(6)*, pp. 231 – 234) υποστήριξαν την άποψη ότι τα προβλήματα από την ιστορία των Μαθηματικών προσφέρουν μια καλή ευκαιρία στους μαθητές να αλλάξουν τον τρόπο σκέψης με τον οποίο επιλύουν μαθηματικά προβλήματα, αφού μπορούν να δουν πολλούς διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους λύνονταν τα προβλήματα αυτά και μάλιστα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Παρουσίασαν μάλιστα και το "πρόβλημα των δύο πύργων" (two tower problem) καθώς και τις τέσσερεις διαφορετικές λύσεις του Leonardo of Pisa (Leonardo Pisano ή Fibonacci) στο πρόβλημα αυτό (Gulikers, Blom 2001).
- Το 1992 ο Rickey περιέγραψε (στο άρθρο του "How Columbus encountered America", *Mathematics Magazine, 65(4)*, pp. 219 – 225) τη μαθηματική γνώση στην οποία ο Κολόμβος στήριξε το ταξίδι του, με το οποίο ανακάλυψε την Αμερική. Ανέφερε στους μαθητές του το έργο του Ερατοσθένη για τη μέτρηση της ακτίνας της γης και τους πρότεινε να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα των λαθών στις μετρήσεις γενικότερα. Επίσης πρότεινε στους μαθητές του περαιτέρω έρευνα στο θέμα αυτό (Gulikers, Blom 2001).

Γεωμετρικοί τόποι

- Στηριζόμενος σε μία πραγματεία του Bartolus of Saxoferrato του 1355, ο Van Maanen το 1992 ανέπτυξε ένα πρότζεκτ σχετικά με την ιδιοκτησία των προσχωσιγενών εδαφών. Συγκεκριμένα ο Bartolus πρότεινε ένα καθαρά μαθηματικό κριτήριο για την ιδιοκτησία των νέων εδαφών, δηλαδή να ανή-

κουν στον ιδιοκτήτη των πλησιέστερων παλαιών εδαφών, γεγονός που παραπέμπει στις ιδιότητες των μεσοκάθετων ευθειών. Με το πρότζεκτ αυτό οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να εργαστούν σε μικρές ομάδες, να διαπιστώσουν τη σημασία που έχουν τα Μαθηματικά για την κοινωνία και να ανακαλύψουν τις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη (Gulikers, Blom 2001).

Επιχειρηματολογία και αποδείξεις

- Το 1987 ο Arsac (στο άρθρο του "L' origine de la démonstration: essai d' épistémologie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques, 8(3)*, pp. 267 – 309) μελέτησε την ιστορική προέλευση των μαθηματικών αποδείξεων, που ως γνωστόν ξεκίνησαν στην αρχαία Ελλάδα περίπου το 500 π.Χ. Στο άρθρο του διαπραγματεύτηκε το ερώτημα: "Η εμφάνιση των μαθηματικών αποδείξεων συνδέεται με κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα μέσα στα Μαθηματικά ή είναι αποτέλεσμα της γενικότερης μεθόδου της αρχαίας ελληνικής σκέψης" (Gulikers, Blom 2001).
- Οι Horak και Horak το 1981 (στο άρθρο τους "Geometrical proofs of algebraic identities", *Mathematics Teacher, 74(3)*, pp. 212 – 216) παρουσίασαν τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες χειρίστηκαν γεωμετρικά σχήματα, για να εκτελέσουν αλγεβρικές πράξεις και να αποδείξουν κάποιες αλγεβρικές ταυτότητες. Κατά τη γνώμη τους ο τρόπος αυτός πρέπει να χρησιμοποιείται στις μαθηματικές τάξεις, προκειμένου να εμπλουτίσουν οι μαθητές τις γνώσεις τους και να μεγιστοποιήσουν την κατανόηση των Μαθηματικών (Gulikers, Blom 2001).
- Το 1991 ο Artmann (στο άρθρο του "Quadratische Probleme in Euklids 'Elementem' und ihre Behandlung im Mathematikunterricht", *Didaktik der Mathematik, 19(2)*, pp. 94 – 110) παρουσίασε τους γεωμετρικούς τρόπους επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων, τους οποίους χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες και οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι, υποστηρίζοντας ότι οι μέθοδοί τους, αν και διαφορετικές, είναι στην πραγματικότητα ισομορφικές (isomorphic). Πρότεινε μάλιστα τρία διαφορετικά είδη διδακτικών προσεγγίσε-

ων στο συγκεκριμένο θέμα, ενώ έδωσε και πλούσιο υποστηρικτικό υλικό (Gulikers, Blom 2001).

- Ο Deakin το 1990 περιέγραψε (στο άρθρο του "From Pappus to today, the history of a proof", *The Mathematical Gazette, 74(467)*, pp. 6 – 11) την ιστορία των αποδείξεων του θεωρήματος για την ισότητα των προσκείμενων στη βάση γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου. Συγκεκριμένα, ξεκίνησε από την απόδειξη του Ευκλείδη (όπως υπάρχει στο 1ο Βιβλίο των Στοιχείων του) και κατέληξε σε σύγχρονες αποδείξεις (Gulikers, Blom 2001).
- Το 1996 ο Brodkey (όπως περιέγραψε στο άρθρο του "Starting a Euclid club", *Mathematics Teacher, 89(5)*, pp. 386 – 388) είχε την ιδέα να δημιουργήσει μια ομάδα ανάγνωσης του 1ου Βιβλίου τω Στοιχείων του Ευκλείδη. Σ' αυτήν την ομάδα συμμετείχαν ισότιμα περίπου 20 άτομα, μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και καθηγητές Μαθηματικών. Κάθε ένας από την ομάδα, αφού μελετούσε μια πρόταση από το 1ο Βιβλίο των Στοιχείων, την παρουσίαζε σε όλους και στη συνέχεια ακολουθούσε συζήτηση μεταξύ των μελών της ομάδας. Όπως ανέφερε ο Brodkey, τα οφέλη για τους μαθητές ήταν πολλαπλά: εμβάθυναν στην κατανόηση της Γεωμετρίας, βελτίωσαν τις ικανότητες τους σε θέματα προφορικής επικοινωνίας και συζήτησης, εκτέθηκαν στην κατανόηση λογικών επιχειρημάτων και ένοιωσαν την ευχαρίστηση της ανάγνωσης και επεξεργασίας μιας πρωτότυπης πηγής (Gulikers, Blom 2001).
- Μια παρόμοια προσπάθεια με φοιτητές έκαναν και οι Laubenbacher και Pengelley το 1995 (όπως περιέγραψαν στο άρθρο τους "Mathematical masterpieces: teaching with original sources", στο R. Calinger (ed), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching, MAA*, pp. 257 – 260). Οι φοιτητές διάβασαν και επεξεργάστηκαν πηγές από το πρωτότυπο κείμενο, χωρίς τη μεσολάβηση καμιάς σύγχρονης ερμηνείας των πηγών. Οι Laubenbacher και Pengelley παρατήρησαν μεγάλη ευχαρίστηση στους φοιτητές, ειδικά όταν αυτοί διάβαζαν το πρωτότυπο κείμενο που αφορούσε μια νέα μαθηματική ανακάλυψη (Laubenbacher, Pengelley 1996).

- Οι Θωμαΐδης και Τζανάκης το 2006 περιέγραψαν (στο άρθρο τους "Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας", στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης και Κ. Τζανάκης (eds), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση*, pp. 253 – 270) πως χρησιμοποίησαν αρχαία ελληνικά μαθηματικά κείμενα προκειμένου να μυήσουν τους μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη. Η εκπαιδευτική αυτή παρέμβαση είχε διάρκεια 10 διδακτικών δίωρων. Οι ερευνητές έδιναν στους μαθητές πρωτότυπα κείμενα, κυρίως από τα Στοιχεία του Ευκλείδη (300 π.Χ. περίπου) και τα σχόλια του Πρόκλου (5ος αιώνας μ.Χ.), με τη μορφή φύλλων εργασίας και τους καλούσαν να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους έθεταν. Πέρα από τα προβλήματα ανάγνωσης και ερμηνείας των πρωτότυπων αρχαιοελληνικών κειμένων, οι ερευνητές διαπίστωσαν τη βελτίωση της κριτικής σκέψης των μαθητών (Θωμαΐδης, Τζανάκης 2006).

Γεωμετρία και Φυσική

- Το 1999 ο Tzanakis (στο άρθρο του "Unfolding interrelations between mathematics and physics, in a presentation motivated by history: two examples", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30(1)*, pp. 103 – 118) έδωσε δύο παραδείγματα γενετικής προσέγγισης, που φανερώνουν συσχετίσεις μεταξύ των Μαθηματικών και της Φυσικής: πρώτον, ότι ο νόμος της βαρύτητας που διατύπωσε ο Newton προέρχεται από το νόμο του Kepler και δεύτερον, ότι η θεμελίωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι μια εφαρμογή της Άλγεβρας πινάκων (matrix algebra) (Tzanakis 1999).
- Επίσης το 1998 οι Tzanakis και Thomaidis (στο άρθρο "Presuppositions of a constructive role of the history of mathematics in understanding and teaching mathematics", *Luminy 'Reader'*) διαπραγματεύτηκαν τη σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής, αναφέροντας συγκεκριμένα παραδείγματα (Gulikers, Blom 2001).

Συμπεράσματα

Από την επεξεργασία πολλών άρθρων που έχουν γραφτεί για την ενσωμάτωση της ιστορίας της Γεωμετρίας (και γενικότερα των Μαθηματικών) στη μαθηματική εκπαίδευση μπορούμε να βγάλουμε αρκετά συμπεράσματα:

- Υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά στον τρόπο προσέγγισης του θέματος από ιστορικούς των Μαθηματικών που γράφουν γενικά ιστορικά άρθρα και από τους δασκάλους των Μαθηματικών που γράφουν άρθρα για το σχεδιασμό και την εφαρμογή διδακτικών προτάσεων και δραστηριοτήτων για τη σχολική τάξη.
- Υπάρχει μεγάλη έλλειψη ερευνητικών άρθρων στον τομέα της μεθοδολογίας της διδασκαλίας των Μαθηματικών, με τη χρήση της ιστορίας τους ως διδακτικό εργαλείο.
- Οι διδακτικές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι δάσκαλοι των Μαθηματικών στην εφαρμογή διδακτικών παρεμβάσεων εμπνευσμένων από την ιστορία, βασίζονται κυρίως στις προσωπικές τους προτιμήσεις και σε πολλές περιπτώσεις, οι συγγραφείς των άρθρων δεν χρησιμοποιούν διδακτικά ή μεθοδολογικά επιχειρήματα για να υποστηρίξουν τις διδακτικές τους ιδέες.

Ταυτόχρονα η έλλειψη ποσοτικών μετρήσεων της αποτελεσματικότητας της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση γεννά σημαντικά ερωτήματα, όπως τα παρακάτω:

- Τι μας κάνει να πιστέψουμε ότι η χρήση της ιστορίας έχει ως αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών από τους μαθητές;
- Η κινητοποίηση και ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών οφείλεται στην αναγνώριση από τους μαθητές της ανθρώπινης διάστασης των Μαθηματικών ή στον ενθουσιασμό που μπορεί να μεταφέρει ο δάσκαλος των Μαθηματικών στους μαθητές του;

- Ποια ιστορικά κείμενα και τι είδους πηγές είναι τα πλέον κατάλληλα προκειμένου μέσω αυτών οι μαθητές να είναι σε θέση να επανα-ανακαλύψουν μαθηματικές έννοιες και τεχνικές;
- Ακόμη και αν οι μαθητές μας καταφέρουν να επανα-ανακαλύψουν κάποιο συγκεκριμένο γεωμετρικό θέμα ή αντικείμενο, πως θα μπορέσουν να κάνουν τις απαραίτητες γενικεύσεις και να τις επεκτείνουν και σε άλλα γεωμετρικά ή μαθηματικά θέματα ή αντικείμενα;

Οι ερευνητές και υποστηρικτές της ενσωμάτωσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά και οι θεωρητικοί της διδακτικής των Μαθηματικών, βρίσκονται συνεπώς μπροστά σε σημαντικά θέματα στα οποία καλούνται να δώσουν απαντήσεις:

- Στην ανάπτυξη μιας ψυχολογικής θεωρίας μάθησης που θα επικεντρωθεί στη ενσωμάτωση της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση.
- Στην ανάπτυξη διδακτικών και μεθοδολογικών επιχειρημάτων που θα υποστηρίζουν την χρήση και την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική πράξη.
- Στη διατύπωση ελάχιστων προδιαγραφών για την επιλογή των ιστορικών πηγών που θα είναι κατάλληλες για την ενσωμάτωσή τους στη διδακτική πράξη, ανάλογα φυσικά με την ηλικία και το επίπεδο των μαθητών και εκπαιδευομένων στους οποίους θα απευθύνονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι ίσως το πλέον γνωστό και αναγνωρίσιμο αποτέλεσμα μαθηματικής σκέψης όλων των εποχών. Επιπλέον είναι ένα από τα ελάχιστα μαθηματικά θεωρήματα το οποίο όχι μόνο έχει εφαρμογές σχεδόν σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά έχει και εφαρμογές στην καθημερινή ζωή (στην ταπητουργία, στις οικοδομικές κατασκευές, στις τέχνες, κ.α.). Από παιδαγωγικής και διδακτικής άποψης είναι το σκαλοπάτι για την Τριγωνομετρία, τη Γεωμετρία σε συστήματα συντεταγμένων και για άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά με πολλαπλούς τρόπους στις τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου και μπορεί να αποτελέσει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για να διευκρινίσει και να εξηγήσει στους μαθητές σχεδόν όλες τις μεθόδους παραγωγικών συλλογισμών (deductive reasoning) (Horn, Zakeri 1998).

Η πρώτη γνωστή (μέχρι σήμερα) καταγεγραμμένη διατύπωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος οφείλεται στον Ευκλείδη που τη συμπεριέλαβε στο πρώτο από τα δεκατρία Βιβλία των "Στοιχείων" του, που έγραψε το 300 π.χ. περίπου. Πρόκειται για την Πρόταση Ι.47, το πρωτότυπο κείμενο της οποίας είναι το εξής:

"Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις" (Σταμάτης 1975).

(Μετάφραση: "Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο που αναγράφεται με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με τα τετράγωνα τα οποία αναγράφονται από τις πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία.")

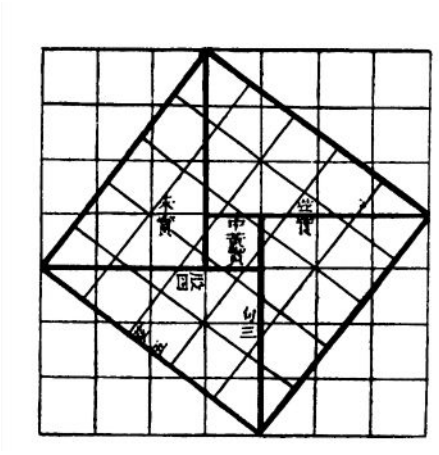
Σε απόδοση στα Νέα Ελληνικά: "Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας" (Αργυρόπουλος et al 2010).

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα πήρε το όνομά του από τον αρχαίο Έλληνα φιλόσοφο και μαθηματικό Πυθαγόρα τον Σάμιο (570 – 500 π.Χ. περίπου). Ωστόσο το θεώρημα ήταν γνωστό τουλάχιστον 1.000 χρόνια πριν στους Βαβυλώνιους. Η βαβυλωνιακή πήλινη πλάκα με το όνομα Plimpton 322 φαίνεται ότι περιέχει μια λίστα από Πυθαγόρειες τριάδες (δηλαδή φυσικούς αριθμούς α, β και γ, που ικανοποιούν την ισότητα $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$). Ο Πυθαγόρας, σύμφωνα με ιστορικές πηγές, θεωρείται ο πρώτος που απόδειξε το θεώρημα αυτό, χωρίς ωστόσο να είναι σήμερα γνωστή η απόδειξή του. Η πρώτη απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος που είναι καταγεγραμμένη, είναι η απόδειξη που υπάρχει στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, η οποία θεωρείται δική του.

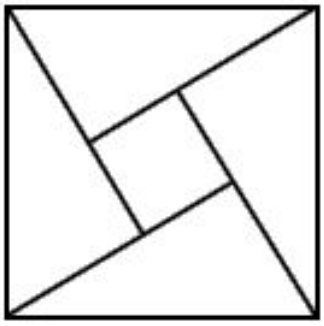
Το Πυθαγόρειο Θεώρημα ήδη από τα αρχαία χρόνια (500 – 300 π.Χ.) αποτέλεσε την πηγή τριών μεγάλων ρευμάτων της μαθηματικής σκέψης της εποχής: της Θεωρίας Αριθμών (με την αναζήτηση Πυθαγόρειων τριάδων), της Γεωμετρίας (με την ερμηνεία των α^2, β^2 και γ^2 ως εμβαδά τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές α και β ενός ορθογωνίου τριγώνου και της υποτείνουσάς του γ) και του απείρου (με την ανακάλυψη του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$ ως το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1) (Stillwell 2010). Τα επόμενα χρόνια το Πυθαγόρειο Θεώρημα χρησιμοποιείται από τον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του π (μέσω του υπολογισμού αρχικά του μήκους πλευρών κανονικών πολυγώνων, εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο, και στη συνέχεια των περιμέτρων τους) και από τον Ήρωνα (για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου με τον τύπο: $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, όπου α, β και γ είναι οι 3 πλευρές του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρός του, αλλά και για τη λύση διάφορων γεωμετρικών προβλημάτων) (Αργυρόπουλος et al 2010), δίνοντας μια μετρική διάσταση στο Πυθαγόρειο Θεώρημα αφού χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόστασης δύο σημείων στο Ευκλείδειο επίπεδο (μήκος ευθυγράμμου τμήματος).

Σχεδόν ταυτόχρονα με τους αρχαίους Έλληνες, μαθηματικά προβλήματα που σχετίζονται με το Πυθαγόρειο Θεώρημα εμφανίζονται και σε ασιατικούς πο-

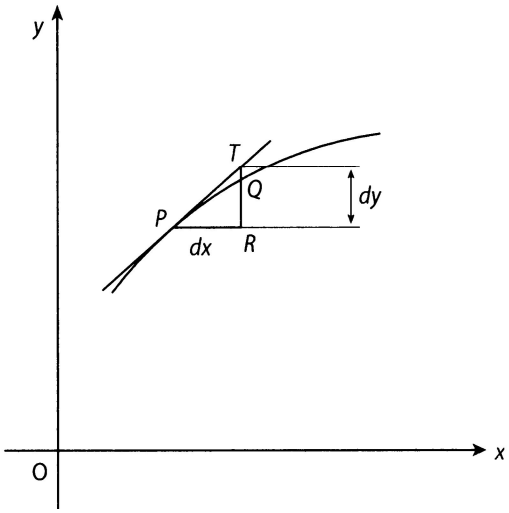
λιτισμούς, αρχικά στην Ινδία (600 π.Χ. περίπου) και στη συνέχεια στην Κίνα (200 π.Χ. – 200 μ.Χ.). Την ίδια εποχή στην Κίνα εμφανίζεται και μια απόδειξη cut and paste του kou-ku θεωρήματος (ονομασία με την οποία είναι γνωστό το Πυθαγόρειο Θεώρημα στην Κίνα – kou=πλάτος και ku=μήκος).



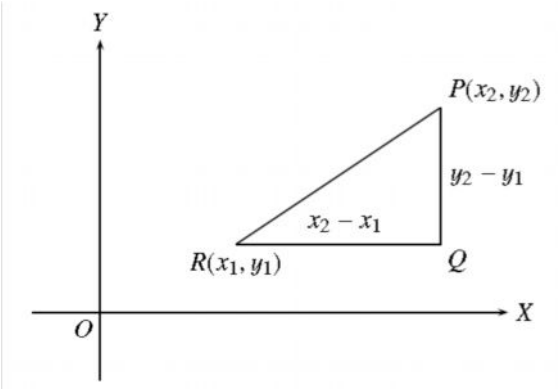
Τον 11ο αιώνα μ.Χ. ο Ινδός Bhaskara δίνει μια οπτική απόδειξη όμοια με την κινέζικη, σχολιάζοντας την απόδειξη μόνο με μία λέξη: "κοίτα" (see) (Maor 2007).



Το 1637 ο Γάλλος René Descartes εισάγει την μονάδα μήκους στη Γεωμετρία και χρησιμοποιεί την Άλγεβρα για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Την ίδια περίπου εποχή ο Γάλλος Pierre de Fermat χρησιμοποιεί τους άξονες και τη Γεωμετρία για να επιλύσει μια αλγεβρική εξίσωση (Γιαννακούλιας 2007). Αποτέλεσμα της "συνύπαρξης" των ιδεών τους είναι η δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας και των Καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων στα οποία το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκει άλλη μια σπουδαία εφαρμογή: τον υπολογισμό απόστασης δύο σημείων P και Q μιας καμπύλης, από τον τύπο: $PQ \approx PT = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Ο τύπος αυτός αποτέλεσε το θεμελιώδη λίθο του οικοδομήματος του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού που άρχισαν να "κτίζουν" ο Άγγλος Newton και ο Γερμανός Leibniz τη δεκαετία 1666 – 1676 (Maor 2007).



Το 1731 ο Γάλλος Alexis Claude Clairaut στο έργο του "Recherches sur les courbes a double courbure" ("Researches on curves of double curvature" – Έρευνες στις καμπύλες διπλής καμπυλότητας), δημοσιεύει, σε ηλικία μόλις 18 ετών, για πρώτη φορά τον τύπο για τον υπολογισμό της απόστασης 2 σημείων $R(x_1,y_1)$ και $P(x_2,y_2)$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων: $PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (Maor 2007). Αυτός ο τύπος της απόστασης είχε κυριαρχικό ρόλο στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Hilbert το 1899, αφού το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων αποτελεί το μοντέλο της (Patronis, Thomaidis 1997, Stillwell 2010).



Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα αρχαία χρόνια λειτούργησε ως η συνδετική γέφυρα ανάμεσα στην Αριθμητική (Θεωρία Αριθμών) και στη Γεωμετρία (Εμβαδά). Από το 1ο μ.Χ. αιώνα και μετά είναι ορατή η αλλαγή του πλαισίου της χρήσης του για τη μέτρηση μηκών ευθυγράμμων τμημάτων, με αποκορύφωμα την εννοιολογική μετατόπισή του στην έννοια της απόστασης δύο σημείων σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και τη συμβολή του στη δημιουργία και εξέλιξη των Νέων Μαθηματικών. Δεν πρέπει να διαφύγει της προσοχής μας ότι το τρίτο αίτημα του Ευκλείδη, (δηλαδή ότι:" Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους"), μετατρέπεται ουσιαστικά σε ισοδυναμία όλων των ορθοκανονικών συστημάτων συντεταγμένων.

Διδακτική Πρόταση.

Στην διδακτική πρόταση που ακολουθεί θα εστιάσουμε σε χρήσεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος σε τρεις διαφορετικές χρονικές περιόδους. Η πρώτη αφορά την εποχή του 18ου αιώνα π.Χ. και την περιοχή της Μεσοποταμίας, όπου η χρήση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος γίνεται για την αναζήτηση Πυθαγόρειων Τριάδων. Η δεύτερη αφορά την εποχή του 4ου αιώνα π.Χ. και την περιοχή της αρχαίας Ελλάδας, όπου η χρήση του γίνεται για τον υπολογισμό εμβαδών, ενώ καταγράφεται και η πρώτη απόδειξή του με τη χρήση εμβαδών απλών γεωμετρικών σχημάτων (τετραγώνων, τριγώνων και παραλληλογράμμων). Η τρίτη διατρέχει τη χρονική περίοδο από το 18ο αιώνα π.Χ. μέχρι και το 18ο αιώνα μ.Χ., σε σχεδόν παγκόσμια κλίμακα, όπου η χρήση του γίνεται για τον υπολογισμό της απόστασης δύο σημείων, δηλαδή το μήκος ευθυγράμμου τμήματος. Οι χρονικές περίοδοι, επιλέχθηκαν γιατί είναι οι κυριότερες χρονικές περίοδοι στις οποίες καταγράφονται οι σημαντικότερες αλλαγές στη χρήση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος: από τη Θεωρία Αριθμών, στα εμβαδά (δηλαδή στη Γεωμετρία) και στη γενίκευση της χρήσης του στον υπολογισμό μηκών ευθυγράμμων τμημάτων.

Η διδακτική μας πρόταση αφορά μαθητές Λυκείου (κυρίως μαθητές Β' Λυκείου), αλλά με τις κατάλληλες προσαρμογές μπορεί να πραγματοποιηθεί και σε μαθητές μικρότερων τάξεων (από Β' Γυμνασίου μέχρι και Α' Λυκείου). Στη διδακτική πρόταση επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τα φύλλα εργασίας για τους παρακάτω λόγους:

- οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση τους, αφού τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται όλο και συχνότερα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, όχι μόνο των Μαθηματικών αλλά και άλλων μαθημάτων,
- η συγκρότηση μικρών ομάδων μαθητών για την επεξεργασία τους, επιτρέπει την ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των μαθητών, τη συνεργασία τους, τη διάχυση γνώσεων μεταξύ τους, αλλά και την ανάθεση ρόλων στα μέλη της ομάδας (είναι δηλαδή κατάλληλα από παιδαγωγικής άποψης),

- επιτρέπουν την παράθεση σύντομων αποσπασμάτων από πρωτότυπες και δευτερεύουσες πηγές, χωρίς να απαιτούν χρονοβόρες, επίπονες και εξαντλητικές διερευνήσεις και ερμηνείες τους, και
- επιτρέπουν τις καθοδηγούμενες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού, με σκοπό την πλήρη κατανόηση κάποιου συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος (topic) χωρίς να υπάρχει κίνδυνος πλατειασμών και εκτροπής από την πορεία προς το σκοπό.

Η διδακτική πρόταση προγραμματίζεται ώστε να πραγματοποιηθεί σε 3 εβδομαδιαίες συναντήσεις διάρκειας 2 διδακτικών ωρών κάθε μία. Το σύνολο της εργασίας των μαθητών θα πραγματοποιηθεί μέσα στην τάξη, με εξαίρεση την ανάγνωση αποσπάσματος αρχαίου κειμένου από το διάλογο του Πλάτωνα "Μένων" η οποία θα πραγματοποιηθεί από τους μαθητές μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης εβδομαδιαίας συνάντησης.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα 3 φύλλα εργασίας:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΡΩΤΗΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗΣ

Ονοματεπώνυμο: ……..

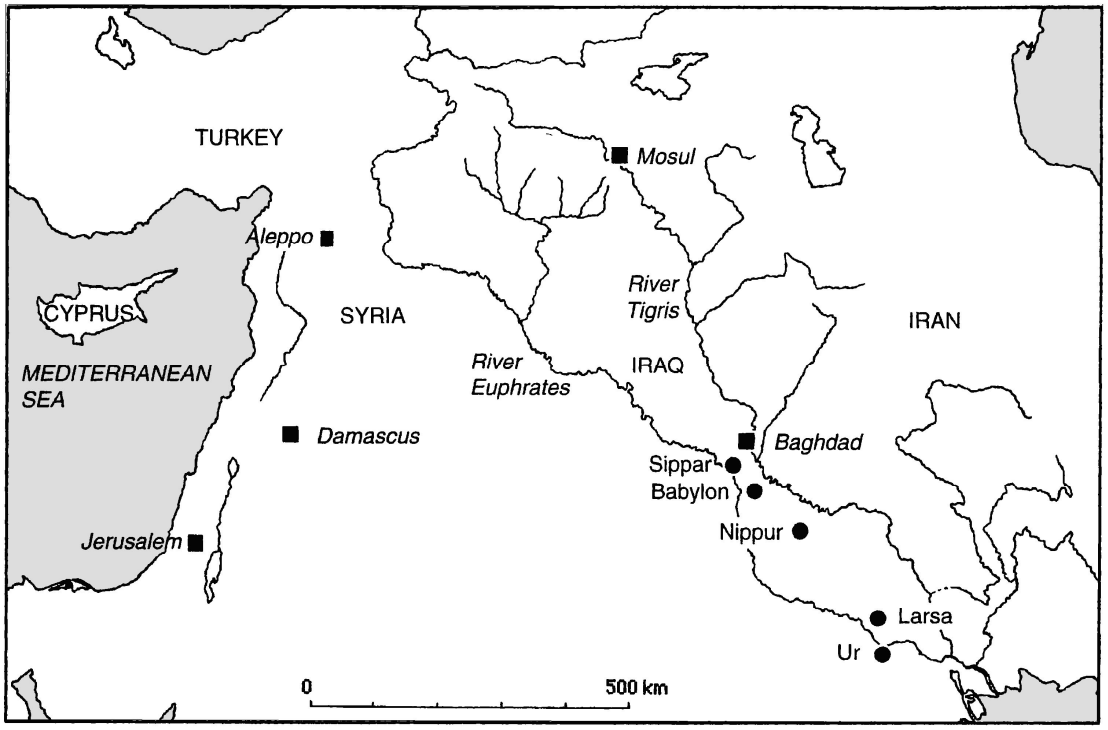
Τάξη – Τμήμα: ……...

Συνεργάτες στην ομάδα: …….

……..

Ημερομηνία: ……..

Ιστορικό και κοινωνικό πλαίσιο: Μεσοποταμία - 18ος αιώνας π.Χ.



Εικόνα 1 - Χάρτης της περιοχής της Μεσοποταμίας

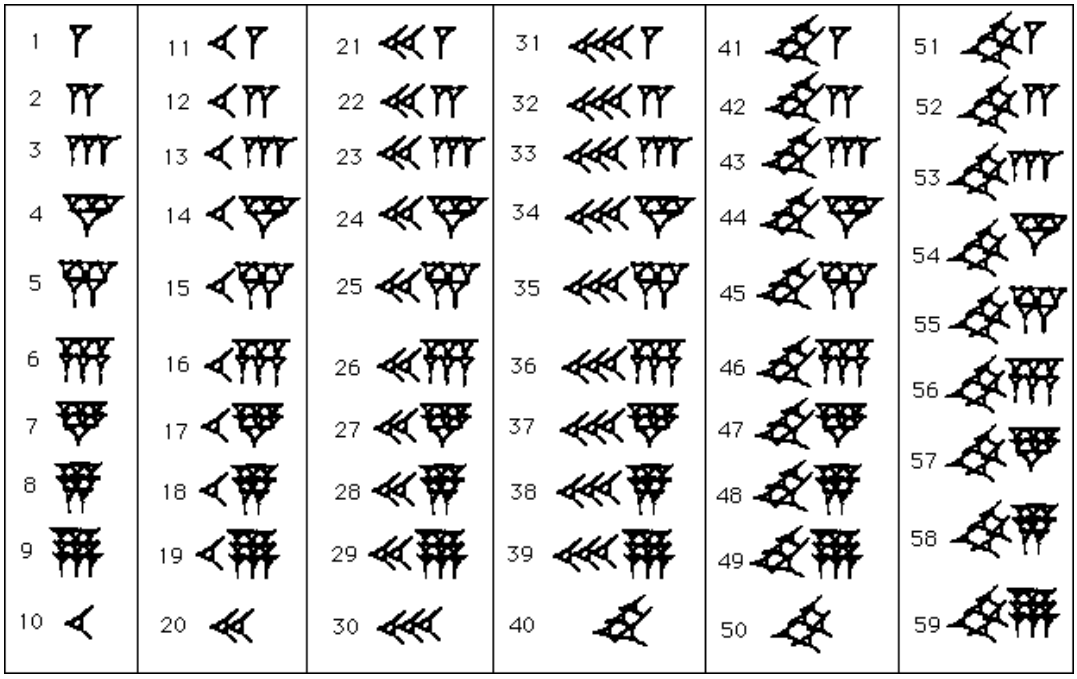
Η περιοχή της Μεσοποταμίας είναι η μεγάλη εύφορη πεδιάδα που βρίσκεται ανάμεσα στους ποταμούς Τίγρη και Ευφράτη, αλλά και δίπλα σ' αυτούς (η περιοχή αυτή στις μέρες μας ανήκει στο Ιράκ). Σ' αυτήν την περιοχή άρχισαν να συγκεντρώνονται άνθρωποι από τις γύρω περιοχές από το 5000 π.Χ. περίπου, δημιουργώντας με την πάροδο του χρόνου τον πρώτο σημαντικό πολιτισμό της ανθρωπότητας. Περίπου το 3500 π.Χ. οι Σουμέριοι που κυριαρχούσαν στην περιοχή είχαν κτίσει μεγάλες πόλεις, είχαν κάνει μεγάλα αρδευτικά

έργα, είχαν εγκαθιδρύσει ένα σύστημα κεντρικής διοίκησης, αλλά και είχαν δημιουργήσει σύστημα ταχυδρομικών υπηρεσιών. Η σημαντικότερη όμως συμβολή τους στον ανθρώπινο πολιτισμό είναι η ανακάλυψη της γραφής και συγκεκριμένα της σφηνοειδούς γραφής. Οι μετρήσεις των Σουμέριων γίνονταν με ένα σύστημα αρίθμησης που είχε ως βάση το 60 (εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης). Περίπου το 2300 π.Χ. οι Ακκαδαίοι εισέβαλαν στην περιοχή και επιβλήθηκαν στους Σουμέριους. Οι Ακκαδαίοι, που θεωρούνται οι εφευρέτες του άβακα, κυριάρχησαν μέχρι το 2100 π.Χ. περίπου, οπότε οι Σουμέριοι εξεγέρθηκαν και ανέκτησαν τον έλεγχο της περιοχής. Το 2000 π.Χ. περίπου εισέβαλαν στην περιοχή οι Βαβυλώνιοι, ένα λαός σημιτικός, που αφού κατατρόπωσαν τους Σουμέριους, έκαναν έδρα του βασιλείου τους την πόλη της Βαβυλώνας, το 1900 π.Χ. περίπου. Οι Βαβυλώνιοι υιοθέτησαν τη σφηνοειδή γραφή και χρησιμοποιούσαν πήλινες πλάκες για να γράφουν. Συγκεκριμένα έγραφαν πάνω σε νωπό πηλό το κείμενο που ήθελαν και στη συνέχεια το άφηναν στον ήλιο να στεγνώσει ή το έψηναν σε φούρνους. Τα κείμενά τους ήταν διαφόρων ειδών: εμπορικές συναλλαγές, αστρονομικές παρατηρήσεις, κρατικά έγγραφα και αρχεία, μαθηματικά κείμενα και προβλήματα κ.α. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι επί δυναστείας του Χαμουραμπί, το βαβυλωνιακό βασίλειο είχε φτάσει σε υψηλό επίπεδο κοινωνικής οργάνωσης, αφού ο ίδιος ο Χαμουραμπί είχε δημιουργήσει τον πρώτο νομικό κώδικα της ανθρωπότητας, ενώ ταυτόχρονα λειτουργούσαν σχολεία από τη μια άκρη του βασιλείου ως την άλλη.

Ο πηλός είναι πολύ ανθεκτικό υλικό στη φθορά του χρόνου σε σχέση με τον πάπυρο (που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι ανατολικοί λαοί) ή το χαρτί, με αποτέλεσμα εκατοντάδες χιλιάδες πήλινων πλακών να έχουν ανακαλυφθεί σε ανασκαφές (νόμιμες και παράνομες) στην ευρύτερη περιοχή. Οι περισσότερες από αυτές παραμένουν στοιβαγμένες σε αποθήκες Μουσείων και Πανεπιστημίων όλου του κόσμου για πολλές δεκαετίες, χωρίς να έχουν τύχει καμιάς επεξεργασίας και ερμηνείας μέχρι σήμερα.

Το Βαβυλωνιακό Σύστημα Αρίθμησης.

Το Βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης είναι μια μίξη του εξηκονταδικού συστήματος και του δεκαδικού συστήματος. Συγκεκριμένα για τον αριθμό 1 χρησιμοποιούσαν το σύμβολο και για τον αριθμό 10 το σύμβολο .



Εικόνα 2 – Οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 59 στο Βαβυλωνιακό σύστημα αρίθμησης

Για κάθε αριθμό μεγαλύτερο του 60 χρησιμοποιούσαν δυνάμεις του 60, με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα τις δυνάμεις του 10. Για παράδειγμα ο αριθμός (τον οποίο θα συμβολίσουμε με 1,57,46,40) είναι ο $1x60^3+57x60^2+46x60+40$, δηλαδή ο αριθμός 424.000 στο σημερινό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν χρησιμοποιούσαν κάποιο σύμβολο για το 0 (μηδέν). Άφηναν μόνο ένα κενό για να το συμβολίσουν. Επίσης δεν χρησιμοποιούσαν κάποιο σύμβολο για να ξεχωρίσουν το ακέραιο μέρους ενός αριθμού από το κλασματικό του μέρος, όπως έχουμε σήμερα την υποδιαστολή. Έτσι ο αριθμός μπορεί να σημαίνει είτε 6,9 ή 6,9,0 ή 6,0,9 αν πρόκειται για ακέραιο, είτε τους δεκαδικούς 0;6,9 ή 0;6,0,9 ή 6;9 ή 6;0,9 ή 6,0;9 (όπου με ";" έχουμε συμβολίσει το διαχωρισμό του ακέραιου από το κλασματικό του μέρος). Το τι ακριβώς συμβολίζει ο αριθμός θα το καταλαβαίνουμε από την ερμηνεία του κειμένου.

Η πινακίδα Plimpton 322.

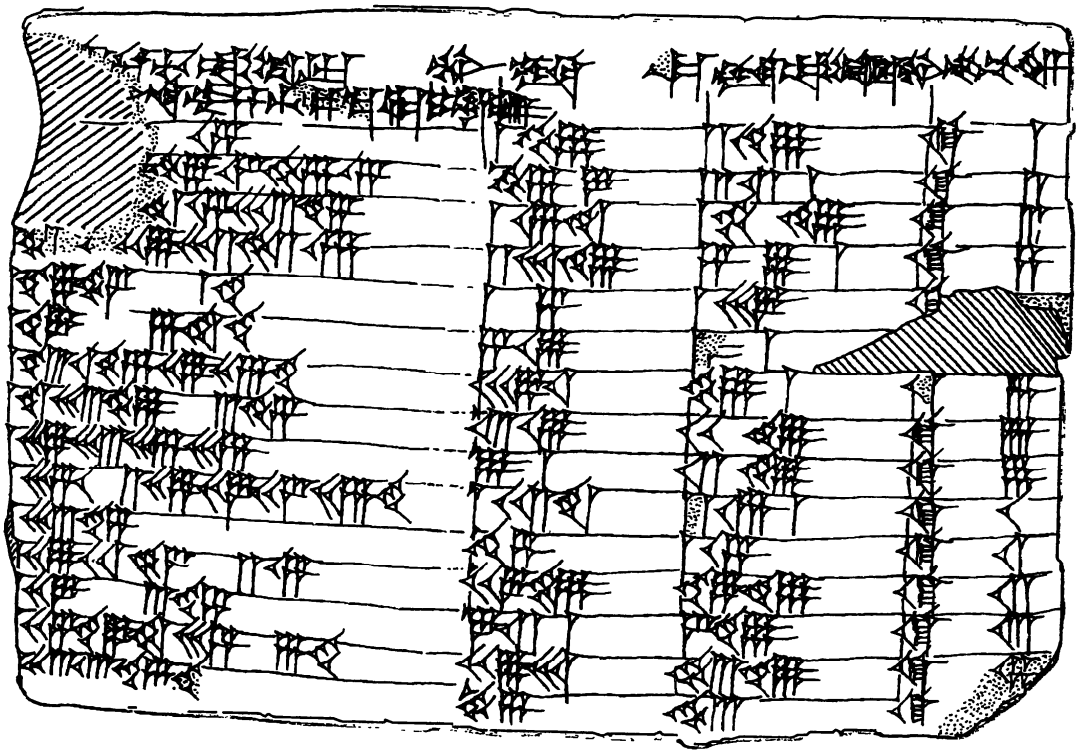
Ανάμεσα στις εκατοντάδες χιλιάδες πήλινες πλάκες που έχουν έρθει στο φως μετά από ανασκαφές στην περιοχή της Μεσοποταμίας ξεχωρίζει η πινακίδα Plimpton 322. Πριν αναφερθούμε στο περιεχόμενό της ας πούμε λίγα πράγματα γι' αυτήν.

Πρόκειται για μια πήλινη πλάκα πλάτους 13 εκ., ύψους 9 εκ. και πάχους 2 εκ. Η πινακίδα είναι σπασμένη σε τρία κομμάτια και θεωρείται το δεξιό τμήμα μιας μεγαλύτερης πινακίδας. Στο αριστερό της μέρος έχουν ανιχνευτεί ίχνη κόλλας που δεν χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι βαβυλώνιοι, γεγονός που μας επιτρέπει να ελπίζουμε ότι κάποια στιγμή θα εμφανιστεί το αριστερό της χαμένο τμήμα. Είναι ανακάλυψη μιας παράνομης ανασκαφής που, σύμφωνα με τον έμπορο αρχαιοτήτων που την πούλησε στον εκδότη και συλλέκτη αρχαιοτήτων και σπάνιων βιβλίων George Plimpton το 1922 αντί 10 δολαρίων, έγινε στην περιοχή της Larsa (δες τον χάρτη της Εικόνας 1). Η πλάκα θεωρείται ότι έχει ως χρονολογία κατασκευής το 1800 π.Χ. περίπου. Όταν το 1935 ο Plimpton δώρισε τη συλλογή του στο Columbia University, το Πανεπιστήμιο της έδωσε τον κωδικό 322.

Στη συνέχεια ακολουθούν τρεις εικόνες. Στην Εικόνα 2 βλέπουμε μια φωτογραφία της κύριας όψης της πινακίδας Plimpton 322, όπου φαίνεται η σφηνοειδής γραφή. Στην Εικόνα 3 βλέπουμε μια φωτογραφία του πίσω μέρους της πινακίδας όπου είναι εμφανή τα σημεία στα οποία είναι σπασμένη σε τρία κομμάτια. Στην εικόνα 4 βλέπουμε ένα σχέδιο της κύριας όψης της πινακίδας από ένα σχέδιο της Eleanor Robson όπου είναι πιο ευδιάκριτη η σφηνοειδής γραφή των αρχαίων Βαβυλωνίων.

Εικόνα 3 - Η Πινακίδα Plimpton 322 (κύρια όψη)

Εικόνα 4 - Η Πινακίδα Plimpton 322 (πίσω όψη)



Εικόνα 5 - Η κύρια όψη της Πινακίδας Plimpton 322 σε σχέδιο της Eleanor Robson

Όσον αφορά το περιεχόμενό της βλέπουμε ότι αποτελείται από 4 στήλες αριθμών γραμμένους σε 15 γραμμές. Η αριστερή στήλη δεν είναι πλήρης και επομένως δεν μπορούμε να είμαστε απόλυτα σίγουροι για τους αριθμούς που βρίσκονται σ' αυτήν. Μετά από προσπάθειες των επιστημόνων που ασχολήθηκαν με αυτήν αποκρυπτογραφήθηκαν οι αριθμοί που αναγράφονται στις υπόλοιπες τρεις στήλες, οι οποίοι σε σύγχρονη δεκαδική μορφή φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 1:

Στήλη α	Στήλη β	Στήλη γ
Πλάτος	**Διαγώνιος**	
B	C	
119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	1854	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45(2700)	75(4500)	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

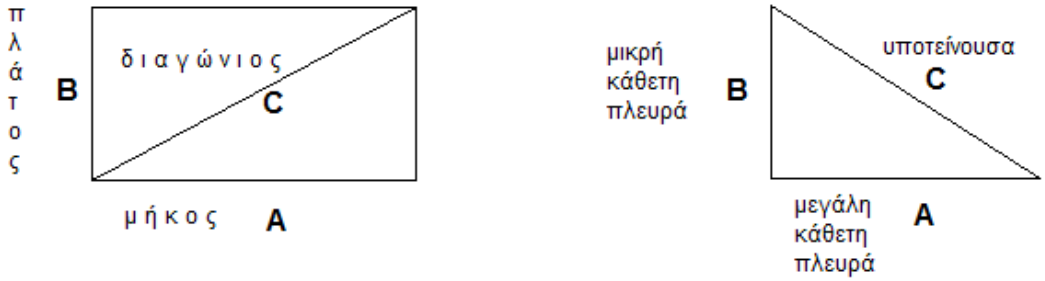
Πίνακας 1

Οι ονομασίες Πλάτος και Διαγώνιος που υπάρχουν στον πίνακα 1 προέρχονται από την μετάφραση των αντίστοιχων ονομασιών που υπάρχουν στην Πινακίδα Plimpton 322.

Δραστηριότητα 1.

Χρησιμοποιείστε υπολογιστή τσέπης για τη ταχύτερη εκτέλεση των πράξεων.

1. Οι ονομασίες Πλάτος και Διαγώνιος μας παραπέμπουν σε ορθογώνιο (παραλληλόγραμμο) ή στη Μικρή Κάθετη Πλευρά και στην Υποτείνουσα ενός σκαληνού και ορθογωνίου τριγώνου (δείτε το παρακάτω Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα υπολογίστε το Μήκος Α του ορθογωνίου ή το Μήκος Α της Μεγάλης Κάθετης Πλευράς του ορθογωνίου τριγώνου. (Υ-πόδειξη: στην 13η γραμμή του Πίνακα 2, κάντε τους υπολογισμούς σας με τους αριθμούς που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις.)

Πλάτος	**Διαγώνιος**		**Μήκος**
B	C	$C^2 - B^2$	$A = \sqrt{C^2 - B^2}$
119	169		
3367	4825		
4601	6649		
12709	18541		
65	97		
319	481		
2291	3541		
799	1249		
481	769		
4961	8161		
45(2700)	75(4500)		
1679	2929		
161	289		
1771	3229		
56	106		

Πίνακας 2

2. Τι είδους αριθμοί είναι οι αριθμοί Α, Β και C; Γνωρίζετε άλλους τέτοιου εί-δους αριθμούς που έχουν αυτές τις ιδιότητες;

……
……
……
……
……
……

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω ορισμό:

   ΟΡΙΣΜΟΣ: Πυθαγόρειες τριάδες ονομάζονται ……..……
……..……
…….....……

4. Πως όμως δημιουργούνται από τους πίνακες των αρχαίων Βαβυλωνίων Πυθαγόρειες Τριάδες με τόσο μεγάλους αριθμούς; Προσπαθήστε να ανακαλύψετε κάποιο μοτίβο για τη δημιουργία τους. Για να διευκολυνθείτε, αναδιατάσσουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά. Ξεκινήστε συμπληρώνοντας τον παρακάτω Πίνακα 3, από πάνω προς τα κάτω.

Πλάτος	**Διαγώνιος**		
B	**C**	**C+B=**	**C-B=**
56	106		
65	97		
119	169		
161	289		
319	481		
481	769		
799	1249		
1679	2929		
1771	3229		
2291	3541		
2700	4500		
3367	4825		
4601	6649		
4961	8161		
12709	18541		

Πίνακας 3

5. Διακρίνετε κάποιο μοτίβο (κάποια κανονικότητα) στη δημιουργία τους; Παρατηρήστε ότι $C+B=2\alpha^2$ και ότι $C-B=2\beta^2$. Ποιοι είναι τότε οι αριθμοί α και β; Συμπληρώστε τον παρακάτω Πίνακα 4.

Πλάτος	**Διαγώνιος**				
B	**C**	**$C+B=2\alpha^2$**	**$C-B=2\beta^2$**	**α**	**β**
56	106				
65	97				
119	169				
161	289				
319	481				
481	769				
799	1249				
1679	2929				
1771	3229				
2291	3541				
2700	4500				
3367	4825				
4601	6649				
4961	8161				
12709	18541				

Πίνακας 4

6. Δεδομένου ότι $C+B=2\alpha^2$ και $C-B=2\beta^2$, εκφράστε τα B και C συναρτήσει των α και β λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} C+B=2\alpha^2 \\ C-B=2\beta^2 \end{cases}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

7. Επαληθεύστε τη λύση του προηγούμενου συστήματος, συμπληρώνοντας τον παρακάτω Πίνακα 5. Επίσης με τη βοήθειά του προσπαθήστε να βρείτε ένα μοτίβο για να εκφράσετε το Α συναρτήσει των α και β.

		Πλάτος		**Μήκος**		**Διαγώνιος**	
α	**β**	**Β**	**$α^2$-$β^2$**	**Α**	**……**	**C**	**$α^2$+$β^2$**
9	5	56		90		106	
9	4	65		72		97	
12	5	119		120		169	
15	8	161		240		289	
20	9	319		360		481	
25	12	481		600		769	
32	15	799		960		1249	
48	25	1679		2400		2929	
50	27	1771		2700		3229	
54	25	2291		2700		3541	
60	30	2700		3600		4500	
64	27	3367		3456		4825	
75	32	4601		4800		6649	
81	40	4961		6480		8161	
125	54	12709		13500		18541	

Πίνακας 5

8. Αφού διαπιστώσετε ότι Α=2αβ και θυμηθείτε ότι Β=$α^2$-$β^2$, C= $α^2$-$β^2$ και A^2+B^2=C^2, αποδείξτε αλγεβρικά την ταυτότητα: $(2αβ)^2+(α^2-β^2)^2=(α^2+β^2)^2$.

……
……
……
……
……
……
……
……
……

9. Επαληθεύστε την διαδικασία των αρχαίων Βαβυλώνιων, επιλέγοντας εσείς φυσικούς αριθμούς α και β, με α>β και δημιουργήστε τις δικές σας Πυθαγόρειες Τριάδες για τους αριθμούς Α=2αβ, Β=α^2-β^2 και C= α^2-β^2 (δηλαδή ότι ισχύει $A^2+B^2=C^2$). Για να βοηθηθούν οι υπολογισμοί σας χρησιμοποιείστε τον παρακάτω Πίνακα 6.

α	**β**	**A=2αβ**	**B=α^2-β^2**	**C=α^2+β^2**	**A^2+B^2**	**C^2**

Πίνακας 6

10. Πόσες τέτοιες διαφορετικές Πυθαγόρειες Τριάδες μπορείτε να φτιάξετε; Τι συμπεραίνετε για το πλήθος των Πυθαγόρειων Τριάδων;

……
……
……
……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗΣ

Ονοματεπώνυμο: ……..

Τάξη – Τμήμα: ……...

Συνεργάτες στην ομάδα: ……

……..

Ημερομηνία: ……..

Ιστορικό και κοινωνικό πλαίσιο: Αρχαία Ελλάδα – 4ος αιώνας π.Χ.

Η θέση της Ελλάδας στο ανατολικό άκρο της Μεσογείου Θάλασσας επέτρεψε στους κατοίκους της να επηρεαστούν και να εμποτιστούν από τις ανακαλύψεις και τον πολιτισμό των ανατολικών λαών (των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων) που ανέπτυξαν πριν από αυτούς μεγάλους πολιτισμούς. Στον ελληνικό χώρο, από τα μέσα περίπου της 2ης χιλιετίας π.Χ., άρχισαν να αναπτύσσονται διαδοχικά ο κυκλαδικός πολιτισμός, ο μινωικός πολιτισμός και ο μυκηναϊκός πολιτισμός. Από το 600 π.Χ. περίπου, οι αρχαίοι Έλληνες άρχισαν να χρησιμοποιούν κοινή γλώσσα και γραφή, με αποτέλεσμα να υπάρξει πολύ μεγάλη ταχύτητα στη διάδοση γνώσεων μεταξύ τους. Αφού ξεπέρασαν τον περσικό κίνδυνο με τους Μηδικούς πολέμους, άρχισαν να αναπτύσσουν έναν αξεπέραστο πολιτισμό, με επίκεντρο την πόλη της Αθήνας. Αποκορύφωμά του θεωρείται ο χρυσός Αιώνας του Περικλή που προηγήθηκε των Πελοποννησιακών πολέμων. Παρά την ήττα της Αθήνας στους Πελοποννησιακούς πολέμους, η πνευματική ισχύς της επιβλήθηκε σε όλους τους υπόλοιπους Έλληνες. Στις αρχές του 4ου αιώνα π.Χ. ο Πλάτωνας ιδρύει την Ακαδημία του και μερικά χρόνια αργότερα ο μαθητής του Αριστοτέλης ιδρύει το Λύκειό του. Αποτέλεσμα αυτής της πνευματικής κορύφωσης είναι η άνθηση της παιδείας, η τελειοποίηση της αρχαίας θεατρικής τέχνης και της φιλοσοφίας, και το πέρασμα όλων σχεδόν των φιλοσόφων και μαθηματικών της εποχής από την Αθήνα όπου παρέμεναν για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Γύρω στο 330 π.Χ. οι Μακεδόνες κυριαρχούν στρατιωτικά στον ελληνικό χώρο και στη συνέχεια με επικεφαλής τον βασιλιά τους Μεγάλο Αλέξανδρο ξεκινούν την κατάκτηση της Δυτικής Ασίας και της Βορειοανατολικής Αφρικής, ιδρύοντας νέες πόλεις με πιο

γνωστή την Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, που βρίσκεται πολύ κοντά στις εκβολές του ποταμού Νείλου. Μετά το θάνατο του Μεγάλου Αλεξάνδρου, η Αλεξάνδρεια γίνεται η πνευματική πρωτεύουσα του αρχαίου ελληνικού κόσμου. Σ' αυτήν συρρέουν άνθρωποι από όλες τις γνωστές περιοχές (Έλληνες, Αιγύπτιοι, Εβραίοι, Σουδανοί, Βαβυλώνιοι κ.α.) και την καθιστούν την πρώτη πολυπολιτισμική πόλη της ανθρωπότητας. Σ' αυτές της συνθήκες ο Ευκλείδης (που σύμφωνα με αρχαίες πηγές υπήρξε μαθητής στην Ακαδημία του Πλάτωνα), γύρω στο 300 π.Χ. συγκεντρώνει σε 13 τόμους όλη τη μέχρι τότε γνωστή μαθηματική γνώση που είχαν δημιουργήσει σημαντικοί αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί πριν από αυτόν (όπως ο Θαλής ο Μιλήσιος, ο Πυθαγόρας ο Σάμιος, ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος, ο Πλάτωνας, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος, ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, ο Εύδοξος ο Κνίδιος κ.α.). Το έργο του με τίτλο "Στοιχεία" θα παραμείνει σημείο αναφοράς σχεδόν σε όλους τους μαθηματικούς τομείς και κυρίως στη Γεωμετρία, για περίπου δύο χιλιετίες.

Δραστηριότητα 2.

1. Παρακάτω σας δίνεται ένα μεγάλο απόσπασμα από τον διάλογο του Πλάτωνα "Μένων". Πριν το διαβάσετε σας παραθέτουμε κάποιες πληροφορίες που θα σας βοηθήσουν στην κατανόησή του.

   Ο Μένων ήταν ένας πλούσιος κτηματίας από τη Θεσσαλία που ενδιαφερόταν για τη φιλοσοφία. Σχεδόν σε όλο το διάλογο συνομιλεί με τον Σωκράτη για το τι είναι γνώση. Ο Μένων λέει στο Σωκράτη ότι έχει ακούσει ότι αυτός ισχυρίζεται ότι η γνώση είναι ανάμνηση. Ο Μένων αμφισβητεί τον Σωκράτη και θέλει να πειστεί για τους ισχυρισμούς του. Ο Σωκράτης του λέει ότι θα προσπαθήσει να τον πείσει με μια επίδειξη που θα κάνει με ένα παιδί - δούλο. Το παιδί - δούλος ήταν υπηρέτης του Μένωνα, είχε γεννηθεί και μεγαλώσει στην Ελλάδα, δεν είχε καμία μόρφωση, αλλά μιλάει ελληνικά. Επομένως, σύμφωνα με το Σωκράτη, αν το παιδί αποκτήσει γνώση, χωρίς να του τη μεταφέρει ο Σωκράτης, αυτό θα σημαίνει ότι η γνώση προϋπάρχει στο παιδί και επομένως ο ισχυρισμός του Σωκράτη θα είναι σωστός.

Διαβάστε προσεκτικά τα παρακάτω

Αποσπάσματα από τον Πλατωνικό διάλογο "Μένων"

(82b9-82e3, 82e14-84a2, 84d3-85b7)

ΣΩΚ.	Εἰπέ δή μοι, ὦ παῖ, γιγνώσκεις τετράγωνον χωρίον ὅτι τοιοῦτόν ἐστιν;	Πες μου, παιδί μου, γνωρίζεις ότι το τετράγωνο σχήμα είναι σαν αυτό; (Ο Σωκράτης σχεδιάζει ένα τετράγωνο στο χώμα.)
ΠΑΙ.	Ἔγωγε.	Βέβαια.
ΣΩΚ.	Ἔστιν οὖν τετράγωνον χωρίον ἴσας ἔχον τὰς γραμμὰς ταύτας πάσας, τέτταρας οὔσας;	Είναι λοιπόν τετράγωνο αυτό που έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες;
ΠΑΙ.	Πάνυ γε.	Βέβαια.
ΣΩΚ.	Οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἐστὶν ἴσας ἔχον;	Δεν έχει και τις διαμέσους ίσες; (Διάμεσοι είναι τα ευθύγραμμα τμηματα με άκρα τις απέναντι πλευρές του τετραγώνου.)
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν εἴη ἂν τοιοῦτον χωρίον καὶ μεῖζον καὶ ἔλαττον;	Λοιπόν, θα μπορούσε το σχήμα τούτο να είναι και μεγαλύτερο και μικρότερο;
ΠΑΙ.	Πάνυ γε.	Βέβαια.
ΣΩΚ.	Εἰ οὖν εἴη αὕτη ἡ πλευρὰ δυοῖν ποδοῖν καὶ αὕτη δυοῖν, πόσων ἂν εἴη ποδῶν τὸ ὅλον; ὧδε δέ σκόπει· εἰ ἦν ταύτῃ δυοῖν ποδοῖν, ταύτῃ δέ ἑνὸς ποδὸς μόνον, ἄλλο τι ἅπαξ ἂν ἦν δυοῖν ποδοῖν τὸ χωρίον;	Αν τώρα αυτή η πλευρά ήταν δύο πόδες και αυτή δύο επίσης, πόσων ποδών θα ήταν συνολικά; Σκέψου το με τον παρακάτω τρόπο: αν η μια πλευρά ήταν δύο πόδες και η άλλη πλευρά ένας μόνο, θα ήταν άλλο το σχήμα μια φορά οι δύο πόδες;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.

ΣΩΚ.	Ἐπειδὴ δέ δυοῖν ποδοῖν καὶ ταύτῃ, ἄλλο τι ἢ δὶς δυοῖν γίγνεται;	Επειδή όμως και αυτή η πλευρά είναι δύο πόδες, μπορεί το σχήμα να είναι άλλο από δύο φορές οι δύο πόδες;
ΠΑΙ.	Γίγνεται.	Γίνεται.
ΣΩΚ.	Δυοῖν ἄρα δὶς γίγνεται ποδῶν;	Άρα είναι δύο φορές οι δύο πόδες;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Πόσοι οὖν εἰσιν οἱ δύο δὶς πόδες; λογισάμενος εἰπέ.	Πόσο λοιπόν κάνει δύο φορές οι δύο πόδες; Υπολόγισε και πες μου.
ΠΑΙ.	Τέτταρες, ὦ Σώκρατες.	Τέσσερα, Σωκράτη.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν γένοιτ᾽ ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὥσπερ τοῦτο;	Θα μπορούσε λοιπόν να υπάρξει σχήμα διπλάσιο τούτου εδώ, τέτοιο που να έχει όλες τις πλευρές ίσες, όπως αυτό;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Πόσων οὖν ἔσται ποδῶν;	Πόσα πόδια θα είναι λοιπόν;
ΠΑΙ.	Ὀκτώ.	Οκτώ.
ΣΩΚ.	Φέρε δή, πειρῶ μοι εἰπεῖν πηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἡ γραμμὴ ἑκάστη. ἡ μέν γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν· τί δέ ἡ ἐκείνου τοῦ διπλασίου;	Εμπρός λοιπόν, προσπάθησε να μου πεις πόσο θα είναι κάθε πλευρά εκείνου. Του ενός είναι δύο πόδες· πόσο θα είναι του άλλου, του διπλάσιου;
ΠΑΙ.	Δῆλον δή, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία.	Φανερό είναι, Σωκράτη, πως θα είναι διπλάσια.
	…	…
ΣΩΚ.	Σὺ δέ μοι λέγε· ἀπὸ τῆς διπλασίας γραμμῆς φῂς τὸ διπλάσιον χωρίον γίγνεσθαι;	Εσύ, πες μου· από τη διπλάσια πλευρά υποστηρίζεις πως προκύπτει διπλάσιο σχήμα; Και εννοώ βέ-

	τοιόνδε λέγω, μὴ ταύτῃ μέν μακρόν, τῇ δέ βραχύ, ἀλλὰ ἴσον πανταχῇ ἔστω ὥσπερ τουτί, διπλάσιον δέ τούτου, ὀκτώπουν·ἀλλ᾽ ὅρα εἰ ἔτι σοι ἀπὸ τῆς διπλασίας δοκεῖ ἔσεσθαι.	βαια τέτοιο σχήμα που να μην έχει τη μια πλευρά μεγάλη και την άλλη μικρή, αλλά να τις έχει όλες ίσες, όπως τούτο εδώ, αλλά να είναι διπλάσιο, δηλαδή οκτώ πόδες. Πρόσεξε λοιπόν, σου φαίνεται πως αυτό θα προκύψει από τη διπλάσια πλευρά;
ΠΑΙ.	Ἔμοιγε.	Ναι, βέβαια.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν διπλασία αὕτη ταύτης γίγνεται, ἂν ἑτέραν τοσαύτην προσθῶμεν ἐνθένδε;	Λοιπόν, η μία πλευρά γίνεται διπλάσια απ' όσο ήταν, αν προσθέσουμε εδώ άλλη μια του ίδιου μεγέθους;
ΠΑΙ.	Πάνυ γε.	Βέβαια.
ΣΩΚ.	Ἀπὸ ταύτης δή, φῄς, ἔσται τὸ ὀκτώπουν χωρίον, ἂν τέτταρες τοσαῦται γένωνται;	Από τούτη άρα υποστηρίζεις ότι θα προκύψει το σχήμα των οκτώ ποδών, αν γίνουν τέσσερεις ίσες πλευρές;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Ἀναγραψώμεθα δὴ ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσας τέτταρας. ἄλλο τι ἢ τουτὶ ἂν εἴη ὃ φῄς τὸ ὀκτώπουν εἶναι;	Ας χαράξουμε λοιπόν από αυτήν τέσσερις ίσες πλευρές. Κάποιο άλλο ή αυτό εδώ υποστηρίζεις πως είναι το σχήμα των οκτώ ποδών;
ΠΑΙ.	Πάνυ γε.	Αυτό βέβαια.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν ἐν αὐτῷ ἐστιν ταυτὶ τέτταρα, ὧν ἕκαστον ἴσον τούτῳ ἐστὶν τῷ τετράποδι;	Σε τούτο όμως περιλαμβάνονται τέσσερα σχήματα, καθένα από τα οποία είναι ίσο με το σχήμα των τεσσάρων ποδών, έτσι δεν είναι;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Πόσον οὖν γίγνεται; οὐ	Πόσο λοιπόν γίνεται; Δεν είναι τέσ-

	τετράκις τοσοῦτον;	σερις φορές μεγαλύτερο τούτο;
ΠΑΙ.	Πῶς δ᾽ οὔ;	Πως όχι;
ΣΩΚ.	Διπλάσιον οὖν ἐστιν τὸ τετράκις τοσοῦτον;	Άρα το κατά τέσσερις φορές μεγαλύτερο είναι διπλάσιο;
ΠΑΙ.	Οὐ μὰ Δία.	Όχι, μα τον Δία.
ΣΩΚ.	Ἀλλὰ ποσαπλάσιον;	Τότε πόσο μεγαλύτερο είναι;
ΠΑΙ.	Τετραπλάσιον.	Τετραπλάσιο.
ΣΩΚ.	Ἀπὸ τῆς διπλασίας ἄρα, ὦ παῖ, οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιον γίγνεται χωρίον.	Επομένως από τη διπλάσια πλευρά, παιδί μου, δεν προκύπτει σχήμα διπλάσιο αλλά τετραπλάσιο.
ΠΑΙ.	Ἀληθῆ λέγεις.	Σωστά μιλάς.
ΣΩΚ.	Τεττάρων γὰρ τετράκις ἐστὶν ἑκκαίδεκα. οὐχί;	Τέσσερις φορές λοιπόν οι τέσσερις πόδες κάνει δεκαέξι, ή όχι;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Ὀκτώπουν δ᾽ ἀπὸ ποίας γραμμῆς; οὐχὶ ἀπὸ μέν ταύτης τετραπλάσιον;	Το σχήμα λοιπόν των οκτώ ποδών από ποια πλευρά προκύπτει; Όχι πάντως από αυτήν που προκύπτει το τετραπλάσιο.
ΠΑΙ.	Φημί.	Έτσι λέω.
ΣΩΚ.	Τετράπουν δέ ἀπὸ τῆς ἡμισέας ταυτησὶ τουτί;	Αυτό λοιπόν το τετράγωνο των τεσσάρων ποδών δεν προέκυψε από τη μισή από αυτή γραμμή;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Εἶεν· τὸ δέ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μέν διπλάσιόν ἐστιν, τούτου δέ ἥμισυ;	Ας είναι· το τετράγωνο των οκτώ ποδών δεν είναι διπλάσιο από το ένα (των τεσσάρων ποδών) και μισό από το άλλο (των δεκαέξι ποδών);
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.

ΣΩΚ.	Οὐκ ἀπὸ μέν μείζονος ἔσται ἢ τοσαύτης γραμμῆς, ἀπὸ ἐλάττονος δέ ἢ τοσησδί; ἢ οὔ;	Δεν θα προκύψει λοιπόν από πλευρά μεγαλύτερη αυτής και μικρότερη εκείνης; Ή όχι;
ΠΑΙ.	Ἔμοιγε δοκεῖ οὕτω.	Έτσι μου φαίνεται.
ΣΩΚ.	Καλῶς·τὸ γάρ σοι δοκοῦν τοῦτο ἀποκρίνου. καί μοι λέγε· οὐχ ἥδε μέν δυοῖν ποδοῖν ἦν, ἡ δέ τεττάρων;	Καλώς· ν' απαντάς ότι νομίζεις. Πες μου τώρα· δεν ήταν η πρώτη πλευρά δύο πόδες και η δεύτερη τέσσερις;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Δεῖ ἄρα τὴν τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμὴν μείζω μέν εἶναι τῆσδε τῆς δίποδος, ἐλάττω δέ τῆς τετράποδος.	Πρέπει λοιπόν η πλευρά του τετραγώνου των οκτώ ποδών να είναι μεγαλύτερη αυτής των δύο ποδών, και μικρότερη αυτής των τεσσάρων ποδών;
ΠΑΙ.	Δεῖ.	Ναι.
ΣΩΚ.	Πειρῶ δὴ λέγειν πηλίκην τινὰ φῂς αὐτὴν εἶναι.	Προσπάθησε λοιπόν να μου πεις πόσο μεγάλη νομίζεις ότι είναι τούτη;
ΠΑΙ.	Τρίποδα.	Τρείς πόδες.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν ἄνπερ τρίπους ᾖ, τὸ ἥμισυ ταύτης προσληψόμεθα καὶ ἔσται τρίπους; δύο μέν γὰρ οἵδε, ὁ δέ εἷς· καὶ ἐνθένδε ὡσαύτως δύο μέν οἵδε, ὁ δέ εἷς· καὶ γίγνεται τοῦτο τὸ χωρίον ὃ φῄς.	Αν λοιπόν είναι τρεις πόδες, θα πάρουμε το μισό τούτης, θα το προσθέσουμε και θα γίνει τρείς πόδες; Γιατί τούτα εδώ είναι δύο πόδες κι αυτό ένας· και από την άλλη πλευρά επίσης είναι δύο πόδες κι αυτό ένας· κι έτσι προκύπτει το σχήμα που λες.
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν ἂν ᾖ τῇδε τριῶν καὶ τῇδε τριῶν, τὸ ὅλον χωρίον τριῶν τρὶς ποδῶν γίγνεται;	Επομένως, αν η μια πλευρά είναι τρεις πόδες και η άλλη επίσης τρεις, το σχήμα συνολικά δεν είναι τρεις

		φορές τρεις πόδες;
ΠΑΙ.	Φαίνεται.	Έτσι φαίνεται.
ΣΩΚ.	Τρεῖς δέ τρὶς πόσοι εἰσὶ πόδες;	Τρεις φορές το τρία πόσους πόδες κάνουν;
ΠΑΙ.	Ἐννέα.	Εννιά.
ΣΩΚ.	Ἔδει δέ τὸ διπλάσιον πόσων εἶναι ποδῶν;	Και το διπλάσιο πόσοι πόδες έπρεπε να είναι;
ΠΑΙ.	Ὀκτώ.	Οκτώ.
ΣΩΚ.	Οὐδ᾽ ἄρ᾽ ἀπὸ τῆς τρίποδός πω τὸ ὀκτώπουν χωρίον γίγνεται.	Άρα το τετράγωνο των οκτώ ποδών δεν προκύπτει ούτε από την πλευρά των τριών ποδών.
ΠΑΙ.	Οὐ δῆτα.	Όχι βέβαια.
ΣΩΚ.	Ἀλλ᾽ ἀπὸ ποίας; πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς· καὶ εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλὰ δεῖξον ἀπὸ ποίας.	Τότε από ποια πλευρά σχηματίζεται; Προσπάθησε να μας πεις με ακρίβεια. Κι αν δεν θέλεις να το εκφράσεις με αριθμό, δείξε την πλευρά.
ΠΑΙ.	Ἀλλὰ μὰ τὸν Δία, ὦ Σώκρατες, ἔγωγε οὐκ οἶδα.	Μα τον Δία, Σωκράτη, δεν ξέρω.
	…	…
ΣΩΚ.	Λέγε γάρ μοι σύ· οὐ τὸ μέν τετράπουν τοῦτο ἡμῖν ἐστι χωρίον; μανθάνεις;	Λέγε μου λοιπόν εσύ· αυτό εδώ δεν είναι το τετράγωνο των τεσσάρων ποδών; Καταλαβαίνεις;
ΠΑΙ.	Ἔγωγε.	Βέβαια.
ΣΩΚ.	Ἕτερον δέ αὐτῷ προσθεῖμεν ἂν τουτὶ ἴσον;	Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε σε αυτό ένα άλλο ίσο;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Καὶ τρίτον τόδε ἴσον ἑκατέρῳ τούτων;	Και ένα τρίτο ίσο με καθένα από τα προηγούμενα;

ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν προσαναπληρωσαίμεθ᾽ ἂν τὸ ἐν τῇ γωνίᾳ τόδε;	Θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε και αυτό στη γωνία; (Ο Σωκράτης έχει σχεδιάσει τέσσερα τετράγωνα ίσα με το αρχικό.)
ΠΑΙ.	Πάνυ γε.	Βέβαια.
ΣΩΚ.	Ἄλλο τι οὖν γένοιτ᾽ ἂν τέτταρα ἴσα χωρία τάδε;	Δεν σχηματίστηκαν λοιπόν τα τέσσερα αυτά ίσα σχήματα;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Τί οὖν; τὸ ὅλον τόδε ποσαπλάσιον τοῦδε γίγνεται;	Επομένως το σύνολο πόσο είναι μεγαλύτερο του πρώτου σχήματος;
ΠΑΙ.	Τετραπλάσιον.	Τετραπλάσιο.
ΣΩΚ.	Ἔδει δέ γε διπλάσιον ἡμῖν γενέσθαι· ἢ οὐ μέμνησαι;	Έπρεπε όμως να το κατασκευάσουμε διπλάσιο· ή μήπως δεν θυμάσαι;
ΠΑΙ.	Πάνυ γε.	Θυμάμαι.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν ἐστιν αὕτη γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν [τινὰ] τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων;	Λοιπόν υπάρχει τώρα μια γραμμή που εκτείνεται από γωνία σε γωνία και χωρίζει στα δύο καθένα από τούτα τα σχήματα;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Οὐκοῦν τέτταρες αὗται γίγνονται γραμμαὶ ἴσαι, περιέχουσαι τουτὶ τὸ χωρίον;	Δεν σχηματίζονται λοιπόν οι τέσσερεις αυτές ίσες γραμμές που φτιάχνουν το σχήμα τούτο;
ΠΑΙ.	Γίγνονται γάρ.	Ναι.
ΣΩΚ.	Σκόπει δή· πηλίκον τί ἐστιν τοῦτο τὸ χωρίον;	Πρόσεξε τώρα· τι μέγεθος έχει το σχήμα;
ΠΑΙ.	Οὐ μανθάνω.	Δεν ξέρω.
ΣΩΚ.	Οὐχὶ τεττάρων ὄντων τούτων ἥμισυ ἑκάστου ἑκάστη ἡ	Η καθεμιά γραμμή δεν έχει χωρίσει εσωτερικά στη μέση το καθένα από

	γραμμὴ ἀποτέτμηκεν ἐντός; ἢ οὔ;	τα σχήματα αυτά, που είναι τέσσερα; Ή όχι;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Πόσα οὖν τηλικαῦτα ἐν τούτῳ ἔνεστιν;	Πόσα όμως τέτοιου μεγέθους σχήματα περιέχονται μέσα σ' αυτό;
ΠΑΙ.	Τέτταρα.	Τέσσερα.
ΣΩΚ.	Πόσα δέ ἐν τῷδε;	Και πόσα μέσα σε τούτο;
ΠΑΙ.	Δύο.	Δύο.
ΣΩΚ.	Τὰ δέ τέτταρα τοῖν δυοῖν τί ἐστιν;	Τα τέσσερα τι είναι σε σχέση με τα δύο;
ΠΑΙ.	Διπλάσια.	Διπλάσια.
ΣΩΚ.	Τῷδε οὖν ποσάπουν γίγνεται;	Αυτό λοιπόν το σχήμα τι μέγεθος θα έχει;
ΠΑΙ.	Ὀκτώπουν.	Οκτώ πόδες.
ΣΩΚ.	Ἀπὸ ποίας γραμμῆς;	Από ποια γραμμή προέκυψε;
ΠΑΙ.	Ἀπὸ ταύτης.	Από αυτή.
ΣΩΚ.	Ἀπὸ τῆς ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τεινούσης τοῦ τετράποδος;	Από αυτή που εκτείνεται από τη μια γωνία του τετραγώνου των τεσσάρων ποδών στην απέναντι γωνία;
ΠΑΙ.	Ναί.	Ναι.
ΣΩΚ.	Καλοῦσιν δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί· ὥστ' εἰ ταύτῃ διάμετρος ὄνομα, ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄν, ὡς σὺ φῄς, ὦ παῖ Μένωνος, γίγνοιτ' ἂν τὸ διπλάσιον χωρίον.	Τη γραμμή αυτή την ονομάζουν οι ειδικοί διαγώνιο· αν λοιπόν το όνομά της είναι διαγώνιος, από τη διαγώνιο, όπως εσύ υποστηρίζεις, δούλε του Μένωνα, μπορεί να σχηματιστεί το διπλάσιο τετράγωνο.
ΠΑΙ.	Πάνυ μέν οὖν, ὦ Σώκρατες.	Βέβαια, Σωκράτη.

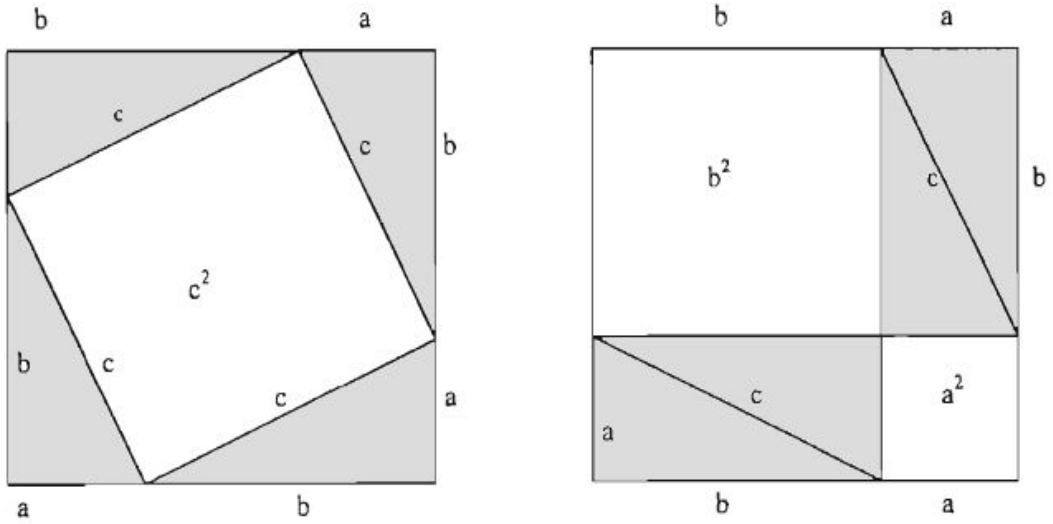
Ποιους μαθηματικούς συλλογισμούς διακρίνετε ότι κάνει ο Σωκράτης στη συνομιλία του με το παιδί – δούλο; Κάντε το κατάλληλο σχήμα για να βοηθηθείτε.

……
……
……
……
……
……
……
……
……

2. Ποια γεωμετρική πρόταση αποδεικνύει ο Σωκράτης κατά τη διάρκεια της συνομιλίας του με το παιδί – δούλο; Διατυπώστε την και γράψτε την κατάλληλη ισότητα.

……
……
……
……
……
……
……
……

3. Δίνεται το παρακάτω σχήμα 1:



Σχήμα 1

Γνωρίζοντας ότι τα μεγάλα τετράγωνα έχουν και τα δύο πλευρά a+b, εκφράστε το εμβαδό και των δύο τετραγώνων από τα σχήματα που αποτελείται το καθένα από αυτά. Ποια ισότητα προκύπτει και ποιο θεώρημα εκφράζει;

……

……

……

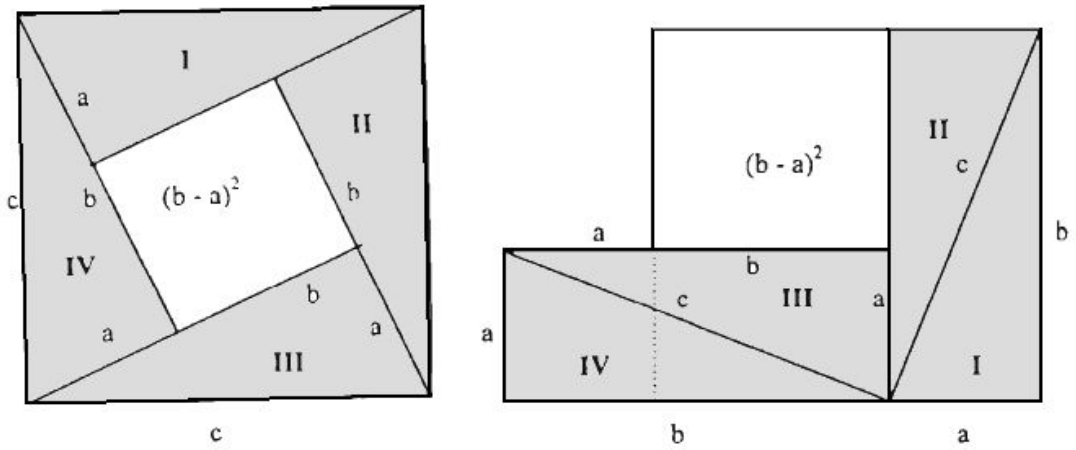
……

……

……

……

4. Επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία και για το παρακάτω σχήμα 2.



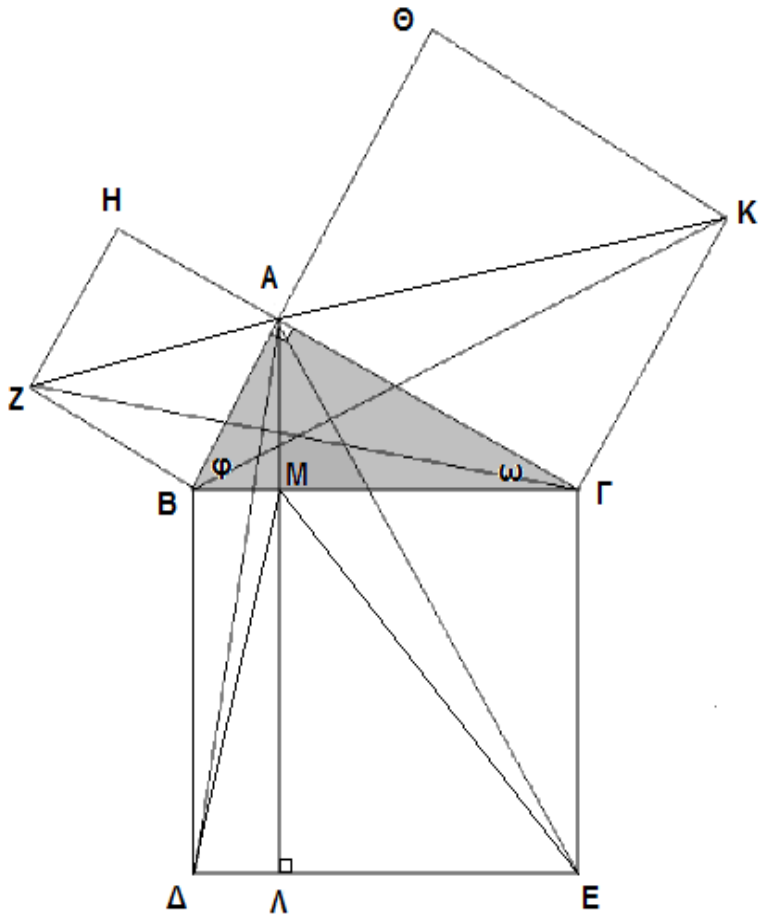
Σχήμα 2

……
……
……
……
……
……
……
……

5. Ο Ευκλείδης στο πρώτο Βιβλίο (Βιβλίο Ι) των Στοιχείων του διατυπώνει την παρακάτω Πρόταση 47 (Ι.47):

   "Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις".

   Σε απόδοση στα Νέα Ελληνικά η παραπάνω Πρόταση μας λέει: "Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας", το οποίο είναι το γνωστό μας Πυθαγόρειο Θεώρημα. Για την απόδειξη της χρησιμοποιεί το παρακάτω Σχήμα 3.



Σχήμα 3

Ας περιγράψουμε λίγο το Σχήμα 3: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ($\hat{A} = 90°$). Σχεδιάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα ΑΒΖΗ, ΑΓΚΘ και ΒΓΕΔ. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΛ⊥ΔΕ που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο σημείο Μ. Φέρνουμε επίσης τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ, ΓΖ, ΑΔ, ΔΜ, ΑΚ, ΒΚ, ΑΕ και ΕΜ.

Απαντήστε τώρα στα παρακάτω ερωτήματα:

α. Τι σχήματα είναι τα τετράπλευρα ΒΔΛΜ και ΓΕΛΜ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

β. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΒΖΗ) και (ΑΒΖ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

γ. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΒΖ) και (ΒΓΖ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

δ. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΓΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΒΓΖ) και (ΑΒΔ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ε. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΒΔ) και (ΒΔΜ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

στ. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΒΔΜ) και (ΒΔΛΜ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ζ. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΒΖΗ) και (ΒΔΛΜ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

η. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΓΚΘ) και (ΑΓΚ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

θ. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΓΚ) και (ΒΓΚ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ι. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΑΓΕ είναι ίσα. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΒΓΚ) και (ΑΓΕ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ια. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΓΕ) και (ΜΓΕ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ιβ. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΜΓΕ) και (ΜΓΕΛ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ιγ. Συγκρίνετε τα εμβαδά (ΑΓΚΘ) και (ΜΓΕΛ), δικαιολογώντας την απάντησή σας.

……
……
……
……
……

ιδ. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα βήματα ζ. και ιγ. υπολογίστε το άθροισμα των εμβαδών: (ΑΒΖΗ)+(ΑΓΚΘ)

……
……
……
……
……

6. Πως κρίνετε την προηγούμενη απόδειξη που παραθέτει ο Ευκλείδης στο πρώτο Βιβλίο των "Στοιχείων" του;

……
……
……
……
……
……
……
……

7. Γνωρίζετε κάποια άλλη απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος; Αν ναι, γράψτε την παρακάτω.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΡΙΤΗΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗΣ

Ονοματεπώνυμο: ……..

Τάξη – Τμήμα: ……...

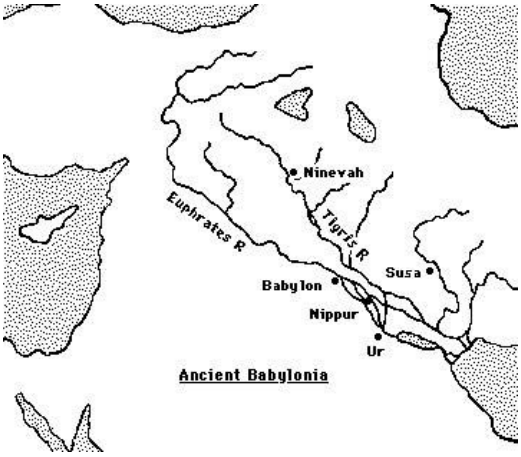
Συνεργάτες στην ομάδα: ……

……..

Ημερομηνία: ……..

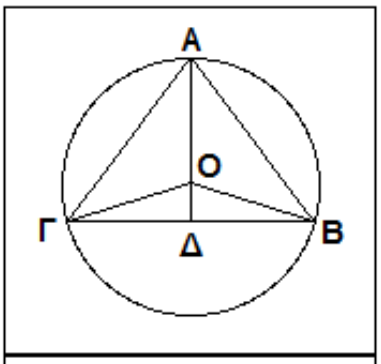
Δραστηριότητα 3.

1. Το 1850 στην περιοχή της Σούσα, (παλαιά πόλη της Μεσοποταμίας που σήμερα βρίσκεται στο Ιράν και απέχει από την αρχαία Βαβυλώνα 350km περίπου), βρέθηκε μια πήλινη πινακίδα που χρονολογείται από το 1800 π.Χ. περίπου, που έθετε το παρακάτω πρόβλημα:



"Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές 50, 50 και 60. Να βρεθεί η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου."

Για να βοηθηθείτε σας δίνεται το διπλανό σχήμα. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ=ΑΓ=50 και ΒΓ=60. Ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κέντρο το σημείο Ο. Ζητείται να βρεθεί η ακτίνα του R=ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.



Η πινακίδα της Susa

α. Εξηγήστε γιατί η ευθεία ΑΟ διέρχεται από το μέσο Δ της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Γιατί η ΑΔ είναι κάθετη στη ΒΓ;

……
……
……
……
……
……

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ υπολογίστε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ.

……
……
……
……
……
……

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΟ υπολογίστε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ.

……
……
……
……
……
……

δ. Επομένως η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου είναι: ……...

2. Ο Ήρωνας ο Αλεξανδρεύς έζησε τον 1ο αιώνα μ.Χ. (πιθανώς περίπου 10 μ.Χ. – 75 μ.Χ.). Θεωρείται ως ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της Ελληνιστικής περιόδου και το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του έζησε στην Αλεξάνδρεια. Έγραψε αρκετά έργα, μεταξύ των οποίων τα σημαντικότερα είναι τα "Μετρικά", τα "Γεωμετρικά", τα "Κατοπτρικά", τα "Στερεομετρικά", τη "Γεωδαισία" κ.α. Παρακάτω σας δίνεται ένα πρόβλημα από τα "Γεωμετρικά". Συγκεκριμένα είναι το πρώτο από τα προβλήματα που αφο-

ρούν σκαληνά τρίγωνα. Διαβάστε προσεκτικά το παρακάτω πρόβλημα από τα

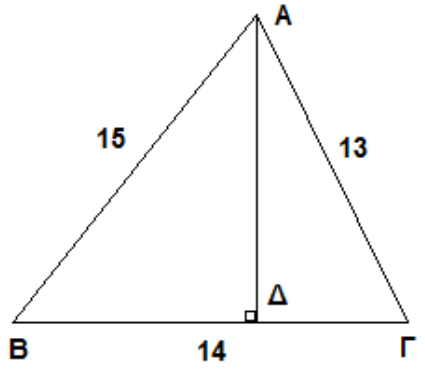
Γεωμετρικά (12,1,1 – 12,1,16)

Ἔστω τρίγωνον σκαληνὸν ὀξυγώνιον, οὗ ἡ μὲν ἥττων πλευρὰ σχοινίων ιγ, ἡ δὲ βάσις σχοινίων ιδ, ἡ δὲ ὑποτείνουσα σχοινίων ιε· (Τα υπογραμμισμένα γράμματα δηλώνουν αριθμούς στην αρχαιοελληνική γραφή)	Έστω σκαληνό τρίγωνο του οποίου η μικρότερη πλευρά είναι 13 σχοινία (μονάδα μέτρησης μήκους), η βάση είναι 14 σχοινία και η υποτείνουσα (δηλαδή η μεγαλύτερη πλευρά του σκαληνού τριγώνου) 15 σχοινία.
εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν κάθετον.	Να υπολογιστεί η κάθετος (ύψος) αυτού.
ποίει οὕτως·	Πράξε τα εξής:
πολυπλασίασον τὰ ιγ τῆς ἥττονος πλευρᾶς ἐφ' ἑαυτά· γίνονται ρξθ·	Τετραγώνισε τη μικρότερη πλευρά: 13x13=169.
καὶ τὰ ιδ τῆς βάσεως ἐφ' ἑαυτά· γίνονται ρϛς·	Όμοια τη βάση: 14x14=196.
καὶ τὰ ιε τῆς ὑποτεινούσης ἐφ' ἑαυτά· γίνονται σκε.	Και την υποτείνουσα: 15x15=225.
εἶτα σύνθες τὸν τῆς βάσεως πολυπλασιασμὸν καὶ τὸν τῆς ὑποτεινούσης ἤγουν τὰ ρϛς καὶ τὰ σκε· γίνονται υκα·	Πρόσθεσε έπειτα, τα τετράγωνα της βάσης και της υποτείνουσας, δηλαδή: 196+225=421.
ἀφ' ὧν ἀφαίρει τὸν πολυπλασιασμὸν τῆς ἥττονος πλευρᾶς ἤγουν τὰ ρξθ· λοιπὰ συβ·	Από αυτό αφαίρεσε το τετράγωνο της μικρότερης πλευράς: 421-169=252.
ὧν *L'* γίνεται ρκς.	Το $\frac{1}{2}$x252=126.
ταῦτα μέρισον παρὰ τὰ ιδ τῆς βάσεως· γίνονται θ·	Αυτά διαίρεσε με τα 14 της βάσης: 126:14=9.
τοσούτων σχοινίων ἡ ἀποτομή.	Τόσα σχοινία είναι η μεγαλύτερη αποτομή (προβολή της μεγαλύτερης πλευράς στη βάση του σκαληνού τριγώνου).

ταῦτα ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πα·
τὰ πα ἀφαίρει ἀπὸ τοῦ κατὰ τὴν ὑποτείνουσαν πλευρὰν πολυπλα σιασμοῦ, τουτέστι τῶν σκε· λοιπὰ ρμδ·
ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ιβ·
τοσούτων ἐστὶ σχοινίων ἡ κάθετος.

Το τετράγωνο αυτής: 9x9=81.
Αφαίρεσε αυτό, από το τετράγωνο της υποτείνουσας: 225-81=144 (τετραγωνικά) σχοινία.
Η $\sqrt{144}$ =12 σχοινία.
Άρα η κάθετος είναι 12 σχοινία.

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, επαναλάβετε τους υπολογισμούς του Ήρωνα για τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ και ΑΔ, χρησιμοποιώντας αντί για αριθμούς, τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα. Ποια θεωρήματα νομίζετε ότι χρησιμοποιεί ο Ήρωνας για τους υπολογισμούς των τμημάτων ΒΔ και ΑΔ;



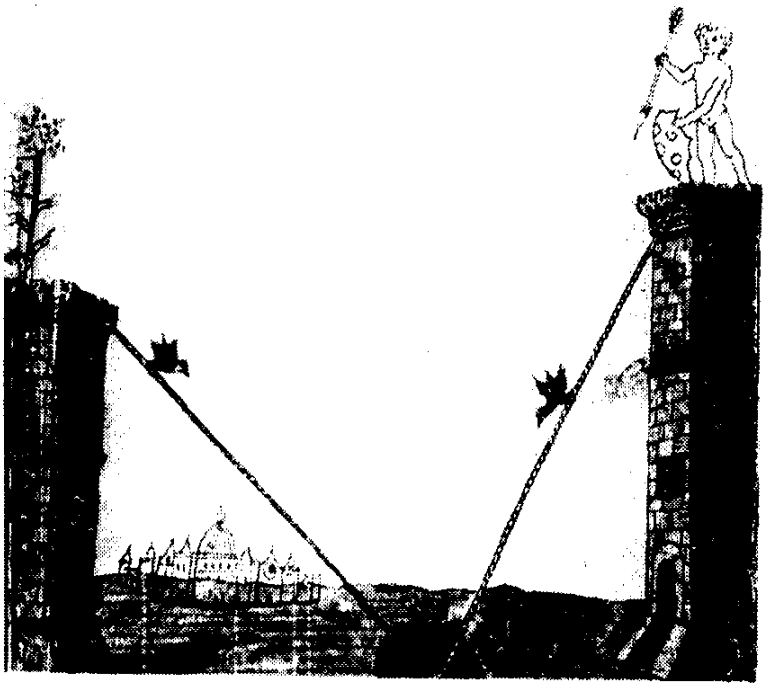
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

3. Ο Ιταλός Leonardo of Pisa (γνωστός και ως Fibonacci, 1170 μ.Χ. περίπου – 1240 μ.Χ.) ήταν γιος εμπόρου από την Pisa. Επειδή ο πατέρας του είχε πολλές εμπορικές συναλλαγές με τους Άραβες, πέρασε μεγάλο μέρος της ζωής του στην Βόρεια Αφρική, κυρίως στην Αλγερία. Εκεί έμαθε αραβικά

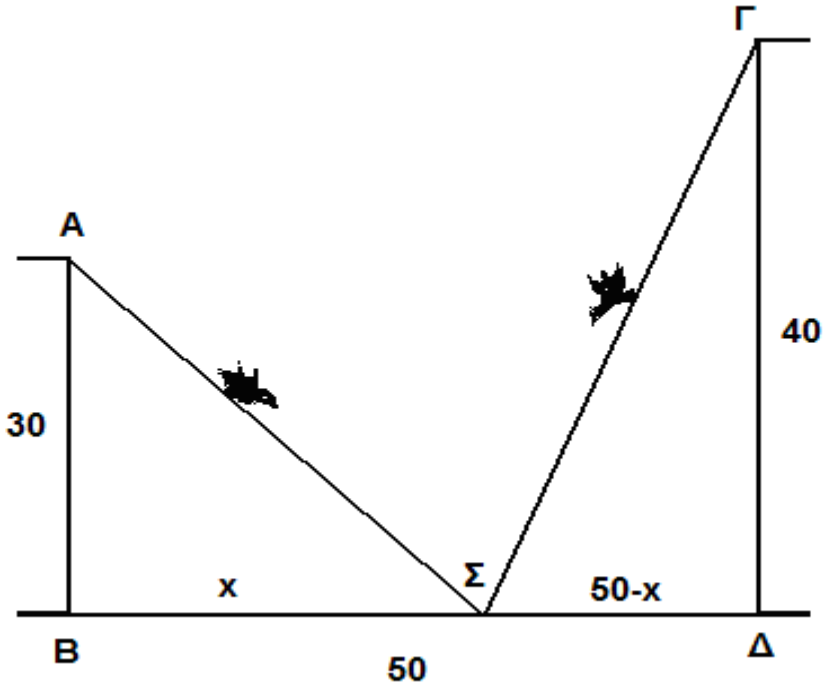
και άρχισε να μελετά τα αραβικά Μαθηματικά, έχοντας για δασκάλους Άραβες μαθηματικούς. Στα διάφορα ταξίδια του που έκανε στη Βόρεια Αφρική (πιθανόν για εμπορικούς λόγους) αναζητούσε και άλλους δασκάλους των Μαθηματικών, για να αποκτήσει περισσότερες μαθηματικές γνώσεις. Επέστρεψε στην Ιταλία το 1200 περίπου και για τα επόμενα 25 χρόνια ασχολήθηκε αποκλειστικά με τα Μαθηματικά. Το 1202 δημοσίευσε το πρώτο του βιβλίο με τίτλο "Liber Abaci" (το βιβλίο των υπολογισμών). Έχοντας ως πηγή το υλικό (προβλήματα, ασκήσεις, μεθοδολογία) των Αράβων, το αναδιοργάνωσε και το παρουσίασε με το δικό του τρόπο. Παρακάτω σας δίνεται ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα από το βιβλίο αυτό, που είναι γνωστό με την ονομασία το "πρόβλημα των δύο πύργων":

"Δύο πύργοι, το ύψος των οποίων είναι 30 και 40 μέτρα, απέχουν μεταξύ τους 50 μέτρα. Μεταξύ των δύο πύργων υπάρχει ένα συντριβάνι. Δύο πουλιά ξεκινούν και τα δύο ταυτόχρονα από τις κορυφές των δύο πύργων και πετώντας με ίσες ταχύτητες, φτάνουν ταυτόχρονα στο σιντριβάνι. Πόσο απέχει το συντριβάνι από τη βάση κάθε πύργου;"

Η εικόνα που ακολουθεί είναι μια μεταγενέστερη εικονογράφηση του προηγούμενου προβλήματος από τον Filippo Calandri, σε ένα άλλο βιβλίο του 1491.



Παρακάτω σας δίνεται το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα:



Ο πύργος ΑΒ έχει ύψος 30m και ο πύργος ΓΔ έχει ύψος 40m. Η μεταξύ τους απόσταση ΒΔ είναι 50m. Το σιντριβάνι σημειώνεται με το σημείο Σ. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις ΣΒ και ΣΔ του σιντριβανιού από τις βάσεις των δύο πύργων.

……

……

……

……

……

……

……

……

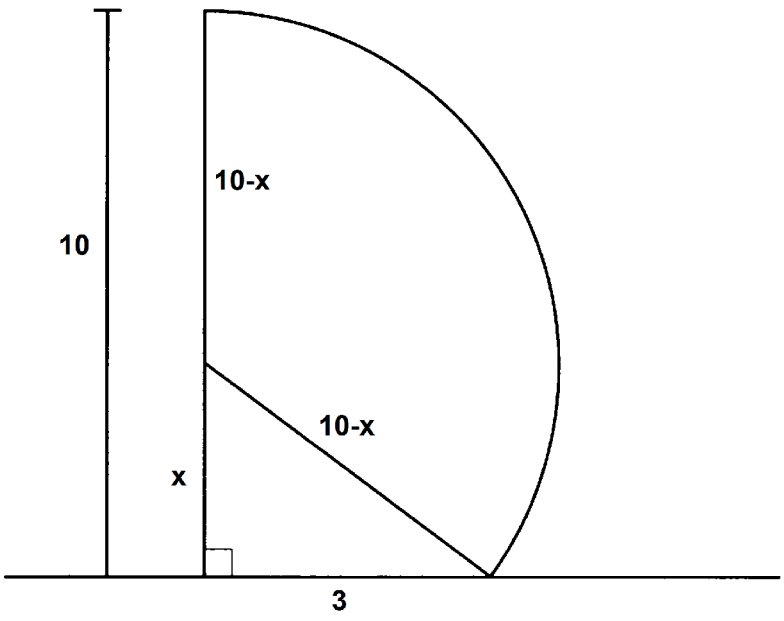
……

……

4. Το 1261, στην Κίνα, δημοσιεύεται το βιβλίο του Yang Hui με τίτλο "Hsiang Chieh Chiu Chang Suan Fa" (Μια Λεπτομερής Ανάλυση των Μαθηματικών Μεθόδων του βιβλίου "Εννέα Κεφάλαια"). Στο ένατο κεφάλαιο του βιβλίου υπάρχουν 24 προβλήματα που σχετίζονται με ορθογώνια τρίγωνα. Παρακάτω σας δίνεται το 13ο πρόβλημα του κεφαλαίου αυτού, που είναι γνωστό με την ονομασία το "πρόβλημα του σπασμένου μπαμπού":

"Ένα καλάμι μπαμπού έχει ύψος 10 μέτρων, το οποίο σπάει και το πάνω μέρος του λυγίζει προς τα κάτω. Το σπασμένο κομμάτι του μπαμπού, ο όρθιος κορμός του μπαμπού και το έδαφος σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Η κορυφή του σπασμένου μπαμπού απέχει από τη βάση του όρθιοιυ κορμού του μπαμπού 3 μέτρα. Να βρείτε πόσο είναι το μήκος του όρθιου κορμού του μπαμπού." (Δείτε το διπλανό σχήμα.)

Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα:



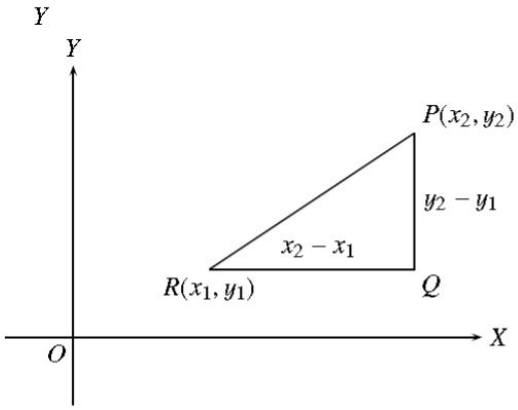
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

5. Το 1637 ο Γάλλος Descartes θέτει τις βάσεις της Αναλυτικής Γεωμετρίας που υλοποιείται σε συστήματα συντεταγμένων. Το 1731 (σχεδόν 100 χρόνια μετά!) ο επίσης Γάλλος Alexis Claude Clairaut, σε ηλικία μόλις 18 ετών, δημοσίευσε στο βιβλίο του "Recherches sur les courbes à double courboure" (Έρευνες στις καμπύλες διπλής καμπυλότητας), τον τύπο:

$$\sqrt{\overline{x \mp a}^2 + \overline{y \mp b}^2}$$

Ο τύπος αυτός εκφράζει την απόσταση δύο σημείων σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Παρατηρείστε τη χρήση των μεγάλων γραμμών πάνω από τις μεταβλητές, αντί των παρενθέσεων που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, αποδείξτε ότι, αν $R(x_1,y_1)$ και $P(x_2,y_2)$ είναι δύο σημεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, τότε η μεταξύ τους απόσταση δίνεται από τον τύπο:



$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

6. Πως χρησιμοποιείται το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα 5 προηγούμενα προβλήματα;

……
……
……

7. Ποιες είναι οι χρήσεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και στις 3 εβδομαδιαίες Δραστηριότητες;

……
……
……
……
……

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barbin E., 1994, 'The Meanings of Mathematical Proof: On Relations Between History and Mathematical Education', in J. M. Anthony (ed), *In Eves' Circles*, Washington D. C.: Mathematical Association of America, pp. 41 – 52.

Barrow-Green J., 2000, 'Web historical resources for the mathematics teacher', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 362 – 370.

Bartolini Bussi M., Sierpinska A. et al., 2000, 'The relevance of historical studies in designing and analysing classroom activities', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 154 – 161.

Brousseau G., 1997, 'Theory of Didactical Situations in Mathematics', New York: Kluwer Academic Publishers.

Bruckheimer M., Arcavi A., 2000, 'Mathematics and its History: An Educational Partnership', in Victor J. Katz (ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective,* The Mathematical Association of America, pp. 135 – 146.

Cajori F., 1894, 'A History of Mathematics', New York: MacMillan and Co.

Cajori F., 1896, 'A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching', New York: MacMillan and Co.

Davis P. J., Hersh R., 1982, 'The Mathematical Experience', Boston: Houghton Mifflin Company.

Eves H., 1969, 'An introduction to the History of Mathematics', 3rd edition, New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Farmaki V., Paschos T., 2007, 'Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities', *Educational Studies in Mathematics, 66,* pp. 83 – 106.

Fasanelli F. et al., 2000, 'The political context', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 1 – 38.

Freudenthal H., 1973, 'Mathematics as an Educational Task', Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal H., 1991, 'Revisiting Mathematics Education. China Lectures', Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furringetti F., Radford L., 2002, 'Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice', in L. English (ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, New York: Laurence Erlbaum, pp. 631 - 654.

Furinghetti F., Radford L., 2008, 'Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics', in L. English (ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition*, New York: Routledge, Taylor and Francis, pp. 626 - 655.

Gillings R. J., 1982, 'Mathematics in the time of Pharaohs', New York: Dover Publications.

Gulikers I., Blom K., 2001, ' "A Historical Angle", A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education', *Educational Studies in Mathematics, 47,* pp. 223 – 258.

Horn W., Zakeri G.-A., 1998, 'The Pythagorean Theorem and related topics. A resource for Geometry teachers', *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 8, 4*, pp. 365 - 383.

Jahnke H. N. et al., 2000, 'The use of original sources in the mathematics classroom', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 291 – 328.

Jahnke H. N., 2001, 'Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view', *Educational Studies in Mathematics, 48*, pp. 175 – 197.

Jankvist U. T., 2009, 'A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics, 71,* pp. 235 – 261.

Kleiner I., 2001, 'History of the infinitely small and the infinitely large in calculus', *Educational Studies in Mathematics, 48*, pp. 137 - 174.

Laubenbacher R., Pengelley D., 1996, 'Mathematical masterpieces: teaching with original sources', in R. Calinger (ed), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching, MAA*, pp. 257 – 260.

Maor E., 2007, 'The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History', Princeton: Princeton University Press.

Niss M., 2001, 'University mathematics based on problem-oriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model', in D. Holton (ed), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 153 – 165.

Patronis T., Thomaidis Y., 1997, 'On the Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics', *Science & Education, 6*, pp. 273 – 290.

Philippou G. N., Christou C., 1998, 'The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics', *Educational Studies in Mathematics, 35*, pp. 189 – 206.

Radford L., 1997, 'On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural of Mathematics', *For the Learning of Mathematics, 17(1)*, pp. 26 – 33.

Radford L. et al., 2000, 'Historical formation and student understanding of mathematics', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 143 – 170.

Radford L., Boero P., Vasco C., 2000, 'Epistemological assumptions framing intrepretations of students understanding of mathematics', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 162 – 167.

Siu F. K., Siu M. K., 1979, 'History of mathematics and its relation to mathematical education', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 10(4)*, pp. 561 – 567.

Siu M. K., 2000, 'The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom', in Victor J. Katz (ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective,* The Mathematical Association of America, pp. 3 – 9.

Siu M. K., 2006, 'No, I don't use history of mathematics in my class. Why?', in F. Furinghetti, S. Kaisjer, C. Tzanakis (eds), P*roceedings HPM 2004 & ESU 4*, University of Crete, Greece, pp. 268 – 277.

Stillwell J., 2010, 'Mathematics and its History', New York: Springer.

Taimina D., Henderson D., 2005, 'How to Use History to Clarify Common Confusions in Geometry', in A. Shell-Gellasch, D. Jardine (eds) *From Calculus to Computers: Using Recent History in the Teaching of Mathematics*, Washington D. C: Mathematical Association of America, pp. 57 - 73.

Toeplitz O., 2007, 'The Calculus. A Genetic Approach', Chicago: The University of Chicago Press.

Thomaidis Y., Tzanakis C., 2007, 'The notion of historical "parallelism" revisited. Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line', *Educational Studies in Mathematics, 66,* pp. 165 – 183.

Tzanakis C., 1999, 'Unfolding interrelations between mathematics and physics, in a presentation motivated by history: two examples', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30(1)*, pp. 103 – 118.

Tzanakis C., 2000, 'Presenting the relation between mathematics and physics on the basis of their history: A genetic approach', in V. Katz (ed), *Using*

history to teach mathematics. An international perspective, Washington D. C: Mathematical Association of America, pp. 111 - 120.

Tzanakis C., Arcavi A. et al., 2000, 'Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 201 – 240.

Tzanakis C., Kourkoulos M., 2007, 'May history and physics provide a useful aid for introducing basic statistical concepts? Some epistemological remarks and classroom observations', in F. Furinghetti, S. Kaijer and C. Tzanakis (eds), *Proceedings HPM 2004 & ESU 2004*, Uppsala: Uppsala Universitet, pp. 284 – 295.

Tzanakis C., Thomaidis Y., 2000, 'Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks', *For the Learning of Mathematics, 20(1)*, pp. 44 – 55.

Van Brummelen G., 2000, 'Teachers, learners and the World Wide Web', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 358 – 362.

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π., 2010, 'Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου', Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Γιαννακούλιας Ε., 2007, 'Απειροστικός Λογισμός. Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.Χ. έως και τον 19ο αιώνα', Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Θωμαΐδης Γ., 1990, 'Ιστορικές Παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας', *Ευκλείδης γ', 7(25)*, pp. 27 – 41.

Θωμαΐδης Γ., 2000, 'Εξερευνώντας την ιστορία του αριθμού π (από το $3\frac{1}{7}$ του Αρχιμήδη στα 200.000.000 δεκαδικά ψηφία του Y. Kanada', *Διάσταση, 1 – 2*, pp. 17 – 38.

Θωμαΐδης Γ., 2009, 'Η ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών', στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (eds), *Αξιοποίηση*

της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, pp. 193 - 219.

Θωμαΐδης Γ., Καστάνης Ν., 1987, 'Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των Μαθηματικών', *Ευκλείδης γ', 16,* pp. 61 – 92.

Θωμαΐδης Γ., Τζανάκης Κ., 2006, 'Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας', στο Θωμαΐδης Γ., Καστάνης Ν., Τζανάκης Κ. (eds), *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, pp. 253 – 270.

Μιχαηλίδης Τ., 2009, 'Το λάπτοπ του Αρχιμήδη', στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (eds), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, pp. 269 – 298.

Σταμάτης Ε., 1975, 'Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία. Βιβλία 1. 2. 3. 4.', Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τζανάκης Κ., 2009, 'Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας', στο Βαμβακούση Ξ., Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ. (eds), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, pp. 17 - 39.