Αθανάσιος Βλάχος

Η διαισθητική σκέψη σε αντιδιαστολή με τη λογική σκέψη στη μαθηματική εκπαίδευση.

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Π. Σπύρου

Αθήνα 2005

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό- Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδων
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Αθανάσιος Βλάχος

Η διαισθητική σκέψη σε αντιδιαστολή με τη λογική σκέψη στη μαθηματική εκπαίδευση

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Σπύρου

ΑΘΗΝΑ 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική εργασία αυτή εκπονήθηκε στα πλαίσια του διαπανεπιστημιακού μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών.

Θα ήθελα από τη θέση αυτή να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου για την πολύτιμη βοήθειά του.

Να ευχαριστήσω και τα άλλα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής τον κ. Θεοδόση Ζαχαριάδη και τον κ. Δημήτρη Χασάπη για τη συμβολή τους και τις παρατηρήσεις τους.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τα μαθήματα και την συνεργασία. Οι παραδόσεις και οι εργασίες που έγιναν στα επί μέρους μαθήματα αξιοποιήθηκαν στην διπλωματική.

Τέλος ένα ευχαριστώ στους συναδέλφους και συμφοιτητές για την αλληλοδιδακτική που αναπτύχθηκε στα διάφορα μαθήματα και ιδιαίτερα όσους συνεργαστήκαμε σε κοινές ομάδες και εργασίες. Ευχαριστώ επίσης τους συναδέλφους και φίλους με τους οποίους ανταλλάξαμε απόψεις για την συγκρότηση των ερωτηματολογίων και Ιδιαίτερα όσους βοήθησαν στην διεξαγωγή της έρευνας.

Θανάσης Βλάχος

Αθήνα Ιούνιος 2005

Περιεχόμενα

Σελίδα

Πρόλογος 5

Εισαγωγή 9

Ι. ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

1. Η Λογική είναι αναγκαία συνθήκη για τα μαθηματικά. 15

1.1 Η απόδειξη ιδρυτική πράξη των μαθηματικών ως επιστήμης. 17

1.2 Μαθηματικά και λογική σκέψη - *Βίοι Παράλληλοι*. 23

2. Η Λογική είναι αναγκαία, αλλά είναι και ικανή συνθήκη για τα μαθηματικά; Αρκεί η Λογική; 41

2.1 Ο ρόλος της διαίσθησης στα μαθηματικά. 45

2.2 Τι σημαίνει διαισθητική σκέψη; 49

2.3 Πώς αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη; πως φτάνουμε στην απόδειξη ή στην επίλυση προβλήματος; 55

2.4 Νέα ζητήματα σε σχέση με την απόδειξη. 61

3. Με λογισμό και φαντασία.

Γιατί χρειάζεται η ανάπτυξη και των δυο; 67

3.1 Τα όρια της διαίσθησης. 66

3.2 Τα όρια της λογικής. 74

3.3 Τα όρια και της διαίσθησης και της λογικής: Οι δομές του νου, τα ιστορικά, κοινωνικά, πολιτιστικά και επιστημολογικά πλαίσια 77

4. Διαισθητική και λογική σκέψη στην μαθηματική εκπαίδευση 87

ΙΙ. ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Έρευνα για τη σχέση διαισθητικής και λογικής σκέψης στη μαθηματική εκπαίδευση. 103

1. Στόχοι και Μεθοδολογία της Έρευνας. 105
2. Περιγραφική έρευνα επισκόπησης. 107

2.1 Οι υποθέσεις 109

2.2 Συσχετίσεις των ερωτήσεων 112

2.3 Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας πεποιθήσεων 115

3. Έρευνα συσχετίσεων 144

3.1 Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων Α΄ Λυκείου

3.2 Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων Β΄ Λυκείου

3.3 Παρουσίαση και Ανάλυση των αποτελεσμάτων Γ΄ Λυκείου

4. Πείραμα 171
5. Σύνοψη των αποτελεσμάτων της έρευνας. Τελικά συμπεράσματα. 181

Επίλογος 185

Βιβλιογραφία 187

Παράρτημα Ι. Τα Ερωτηματολόγια 193

1. Τα Ερωτηματολόγια 1^{ο} , 2^{ο} , της έρευνας πεποιθήσεων. 195
2. Τα Ερωτηματολόγια 3^{ο} , 4^{ο} , της Α΄ Λυκείου. 201
3. Τα Ερωτηματολόγια 5^{ο} , 6^{ο} , της Β΄ Λυκείου 206
4. Τα Ερωτηματολόγια 7^{ο} , 8^{ο} , 9^{ο} , 10^{ο} , της Γ΄ Λυκείου 212

Παράρτημα ΙΙ. Αναλυτικά Στατιστικά στοιχεία της έρευνας. 219

Εισαγωγή

Κι' όμως. όταν αναρωτήθηκα στη συνέχεια πως ήταν δυνατό οι πρώτοι φιλόσοφοι των πολύ μακρινών αιώνων να μην επιτρέπουν να μελετήσει κανείς τη σοφία τους, αν δεν ήταν μυημένος στα μαθηματικά, τότε επιβεβαίωσα τις υποψίες μου πως το είδος των μαθηματικών που γνώριζαν εκείνοι ήταν πολύ διαφορετικό από αυτά που είναι του συρμού στις μέρες μας.

René Descartes

Η προσπάθεια να αποκτήσει ο μαθητής στοιχεία επιστημονικού συλλογισμού, να αναπτύξει κριτική σκέψη, να διευρύνει τη φαντασία του, να συγκροτήσει μια προσωπικότητα *Με Λογισμό και μ' Όνειρο (Διονύσιος Σολωμός)* είναι ένα μεγάλο ζητούμενο για την εκπαίδευση.

Η λογική σκέψη είναι αναγκαία συνθήκη για τα μαθηματικά που θεμελιώθηκαν ως επιστήμη με την απόδειξη και βαδίζουν παράλληλα.

Για πολλούς και για μεγάλο διάστημα τα μαθηματικά και η μαθηματική εκπαίδευση εθεωρείτο και θεωρείται ότι έχει να κάνει μόνο με το λογισμό. Παρά το ότι ο Hilbert είχε πει για κάποιον που εγκατέλειψε τα μαθηματικά ότι *έγινε μυθιστοριογράφος γιατί δεν είχε αρκετή φαντασία για μαθηματικός,* η πεποίθηση μου και πολλών άλλων νομίζω, ήταν αντίθετα ότι το μυθιστόρημα αναπτύσσει τη φαντασία περισσότερο από τα μαθηματικά τα οποία αναπτύσσουν κυρίως τη λογική.

Ίσως επειδή στο μυθιστόρημα είναι φανερό ως αποτέλεσμα ενώ στα μαθηματικά **υπονοείται** και ως προαπαιτούμενο και ως αποτέλεσμα.

Ήταν και για μένα επίσης μια έκπληξη όταν άκουσα για πρώτη φορά ότι καμιά μεγάλη ανακάλυψη, ακόμη και στα μαθηματικά, δεν έχει γίνει μόνο με τη λογική. Όταν διάβαζα για τους τρόπους με τους οποίους έχουν γίνει διάφορες επινοήσεις αποδείξεων.

Η επαληθευμένη διαισθητική σκέψη προβάλει τελικά ως να ήταν απόρροια *απλής* λογικής σκέψης (σε σημείο που λες πως δεν το σκέφτηκαν πριν).

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται καθημερινά χιλιάδες φορές από τον ερευνητή μαθηματικό μέχρι τον απλό μαθητή που προσπαθεί να κάνει μια απόδειξη, να λύσει ένα πρόβλημα ή μια άσκηση μαθηματικών.

Πολλές φορές στο ξεκίνημα φαίνεται βουνό ενώ στο τέλος λες απλό ήταν αρκεί να κάνεις *αυτή τη σκέψη*… Πώς φτάνεις όμως να κάνεις *αυτή τη σκέψη;* Πώς αποκτάει κανείς αυτό το *χάρισμα*; Και το κυριότερο ποια παιδεία αναπτύσσει αυτή την ικανότητα;

Η σχέση της αρχικής διαισθητικής σκέψης με την επακόλουθη λογική σκέψη είναι σχέση διαλεκτική.

Η αρχική διαισθητική σκέψη μπαίνει στον έλεγχο της λογικής σκέψης για να επαληθευτεί ή να απορριφθεί. Είναι αναγκαίο όμως να υπάρχουν διαισθητικές ή έστω μία διαισθητική σκέψη για να ξεκινήσει η διαδικασία του συλλογισμού. Είναι αυτό που συχνά ακούμε από τους μαθητές *δεν ξέρω τι να κάνω ή πώς να ξεκινήσω…*

Όταν υπάρχουν πολλές διαισθητικές σκέψεις κάποια υπερτερεί ενορατικά και με κάποια λογικά, συναισθηματικά, ακόμη και αισθητικά κριτήρια αποφασίζουμε κατ΄ αρχήν να την ακολουθήσουμε.

Για το πώς εμφανίζονται οι πρώτες ή η πρώτη διαισθητική σκέψη ή για το πώς επιλέγουμε ποια θα ακολουθήσουμε κατ' αρχάς, οι απόψεις συγκλίνουν στο ότι είναι θέμα της όποιας συσσωρευμένης εμπειρίας που οξύνει τη φαντασία και την κρίση.

Η διαισθητική σκέψη δεν εμφανίζεται *εν κενώ.* Από τον ερευνητή έως τον πρωτόπειρο μαθητή η διαισθητική σκέψη είναι θέμα μακράς ή μικρής προηγούμενης συνειδητής ή ασυνείδητης εργασίας. Υπάρχουν περισσότερο ή λιγότερο ενορατικοί ή λογικοί τύποι ανθρώπων. Αυτοί που κάνουν την υπέρβαση είτε στη διαισθητική είτε στη λογική σκέψη, συγκεντρώνουν το θαυμασμό μας γιατί σηματοδοτούν ένα τρόπο σκέψης, ανοίγουν δρόμους ή δείχνουν άλλους ορίζοντες.

Με τη διαισθητική σκέψη ξεπερνάμε περιορισμούς της λογικής και με την λογική σκέψη ξεπερνάμε τους φραγμούς της εποπτείας.

Είναι περίπου όπως γλαφυρά περιγράφει αυτή τη διάσταση ο Βιζυηνός στο διήγημά του *Το Μόνον της Ζωής του Ταξίδιον, όπου ο κοσμογυρισμένος δεν έχει δει τίποτε και ο ταξιδεμένος μόνο με τη φαντασία του δείχνει να έχει «δει» πολλά.*

Για ποιο λόγο μια μαθηματική απόδειξη ή επινόηση που αν και εκφράζει ορθότερα και πιστότερα την πραγματικότητα, τις ποσοτικές σχέσεις των πραγμάτων, δεν πρέπει να γίνει αποδεκτή επειδή δεν πρόκυψε από γραμμική ανάπτυξη του προϋπάρχοντος θεωρητικού πλαισίου; Επειδή ο τρόπος της σύλληψής της είχε έντονα διαισθητικά στοιχεία;

Από την άλλη, είναι δυνατόν να ακολουθούμε άκριτα την διαισθητική σκέψη η οποία πολύ συχνά μας παραπλανεί;

Τι μπορούμε να κάνουμε με πολλές μαθηματικές, νοητικές, κατασκευές των οποίων δεν έχουμε καμία εποπτεία και μόνο με τη λογική σκέψη μπορούμε να τις χειριστούμε νοητικά;

Το συμπέρασμα είναι ότι χρειάζεται η καλλιέργεια και της λογικής και της διαισθητικής σκέψης στη μαθηματική εκπαίδευση.

Να αναπτύσσουν οι μαθητές, *διαισθητικό σκεπτικισμό* και *αυστηρή φαντασία*.

Διατυμπανίζεται σήμερα σ' όλους τους τόνους ότι σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, το να μαθαίνουν οι μαθητές να συλλογίζονται σωστά και να διευρύνουν τη διαίσθηση και τη φαντασία τους. Πολλές και έντονες συζητήσεις έγιναν και γίνονται γύρω από αυτά τα θέματα. Συζητήσεις οι οποίες δείχνουν ότι *θεωρητικά* οι απόψεις συγκλίνουν πολύ περισσότερο απ' ότι στο παρελθόν.

Οπωσδήποτε δεν θα δει κανείς σήμερα τις διαμάχες της δεκαετίας του εβδομήντα, αλλά γιατί επαναλαμβάνονται παρόμοια φαινόμενα;

Γιατί αυτά που αναφέρονται ως παραδείγματα εδώ και χρόνια στη βιβλιογραφία συνεχίζουν με την ίδια περίπου συχνότητα να αποτελούν συνήθη λάθη, συνήθη μπερδέματα διαισθητικής και λογικής σκέψης, για τους μαθητές;

Ποιες είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών και των καθηγητών των μαθηματικών;

Τι συμβαίνει στην εκπαιδευτική πρακτική;

Ποια είναι η σωστή αναλογία *ενστάλαξης,* κατά την έκφραση του Morris Kline, λογικής και διαίσθησης; Και κυρίως, πώς επιτυγχάνεται;

Αυτά ήταν για μένα τα κίνητρα για αυτή τη Διπλωματική Εργασία.

Το **Πρώτο Μέρος** περιλαμβάνει το θεωρητικό πλαίσιο και κάποιους προβληματισμούς γύρω από το θέμα της Διπλωματικής εργασίας.
Στην προσπάθεια για μια σφαιρική, στα πλαίσια πάντα των δυνατοτήτων μου, παρουσίαση του θέματος της διπλωματικής ανακεφαλαιώνονται πολλά σχετικά γνωστά ζητήματα από την αντίστοιχη βιβλιογραφία.
Θα έλεγε κανείς γιατί να συνοψιστούν γνωστά κατά βάση πράγματα;
Ο λόγος είναι κυρίως για την ισορροπία της εργασίας και τη διαχρονική εξέταση πλευρών της διαίσθησης και της λογικής.
Ας μην ξεχνάμε ότι δεν ήταν πάντα ίδιες οι απόψεις ακόμη και στο σχετικά πρόσφατο παρελθόν ούτε είναι και τώρα.
Εύκολα χάνεται η ισορροπία ιδιαίτερα στην εκπαιδευτική διαδικασία.
Σε μια γρήγορη ανάγνωση θα μπορούσε φυσικά κάποιος να παραλείψει όσα είναι με μικρότερα στοιχεία ή κάποιες γνωστές ενότητες.

Το **Δεύτερο Μέρος**, το οποίο είναι και το μεγαλύτερο σε έκταση λόγων των πολλών ερωτηματολογίων και των στατιστικών πινάκων, περιλαμβάνει την έρευνα που έγινε στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας.
Η παρουσίασή της γίνεται τμηματικά για να είναι δυνατή η παρακολούθησή της και στο τέλος σε σύνοψη τα συμπεράσματα.

Τέλος στα **Παραρτήματα** παρατίθενται τα ερωτηματολόγια και ορισμένα πιο αναλυτικά στατιστικά δεδομένα από την επεξεργασία των ερωτηματολογίων στα οποία υπάρχουν στοιχεία για να διερευνηθούν λεπτομερέστερα οι απαντήσεις.

Ι. ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Διαισθητική και Λογική Σκέψη στη Μαθηματική Εκπαίδευση

M. C. ESCHER, Print Gallery.

1. Η Λογική σκέψη είναι αναγκαία συνθήκη για τα μαθηματικά.

«ἀρχὴ παιδεύσεως ἡ τῶν ὀνομάτων ἐπίσκεψις»

Σωκράτης δ' οὐ λέγει; καὶ περὶ τίνος γράφει Ξενοφῶν
ὅτι ἤρχετο ἀπὸ τῆς τῶν ὀνομάτων ἐπισκέψεως, τί σημαίνει ἕκαστον;

Αντισθένης

Η Λογική δεν είναι η μελέτη των νόμων της σκέψης, αλλά η μελέτη του τρόπου που μια πρόταση συνεπάγεται από άλλες προτάσεις. Δηλαδή η Λογική ασχολείται με τους κανόνες που χρησιμοποιούμε για να βγάζουμε σωστά συμπεράσματα.
Στη Λογική συνεπώς μας ενδιαφέρουν οι «αποδείξεις» (επιχειρήματα, συλλογισμοί). (Μυτιληναίος,2000, βλ. και Δημητρακόπουλος 1999)

«Η λογική είναι κατά βάση η επιστήμη της ανάλυσης των συμπερασματικών μεθόδων (επαγωγικών και παραγωγικών) που το ανθρώπινο μυαλό χρησιμοποιεί».(Αναπολιτάνος, *ένας διαισθητικός ορισμός της λογικής* 1985)

«Η επιστήμη των αποδεκτών μεθόδων συλλογισμού (αιτιολόγησης)» (Εγκυκλοπαίδειες)

Συχνά εννοούμε ως κοινή λογική τον ορθό τρόπο σκέψης, τον κοινά αποδεκτό συλλογισμό.
Τα μαθηματικά ως μέθοδοι υπολογισμού διαφόρων πραγμάτων, αναγκαίων για την ζωή των ανθρωπίνων κοινωνιών, υπήρξαν για χιλιάδες χρόνια ένα γνωστικό εφόδιο, κυρίως ενός περιορισμένου κύκλου, που στηριζόταν στην κοινή λογική άποψη ότι τα αποτελέσματα ήταν σωστά, δεν διέψευδαν τη μέθοδο.
Ως επιστήμη, με το σημερινό νόημα, ξεκίνησαν με την πρώτη απόδειξη και επίσης για χιλιάδες χρόνια πορεύτηκαν σε σύνδεση με τη λογική ως επιστήμη πλέον, με αξιωματική θεμελίωση και λογικούς κανόνες.

Στη σημερινή εποχή (η λογική) είναι συνδεδεμένη στενά με τα μαθηματικά αλλά και με κλάδους της επιστήμης υπολογιστών όπως τεχνητή νοημοσύνη, έμπειρα συστήματα και λογική σχεδίαση. Είναι ο πιο θεμελιακός κλάδος των μαθηματικών επειδή στηρίζει όλη τη μαθηματική σκέψη (αναλύει την μαθηματική σκέψη με μαθηματικό τρόπο). (Μυτιληναίος,2000)

Όπως σημειώνει επίσης στη συνέχεια: ***Οι μαθηματικές μέθοδοι προϋποθέτουν τη λογική.***

Αυτή η παράλληλη πορεία είχε κορυφώσεις και εντάσεις, μικρότερες ή μεγαλύτερες αποστάσεις, σχολαστικισμούς και ανατάσεις, αλλαγές ιεράρχησης, συγκρούσεις απόψεων και σχολών αλλά, εν γένει, δεν αμφισβητήθηκε η στενή σχέση τους.[1]

Μόνο ο Ιντουϊσιονισμός (Διαισθησιαρχία) αμφισβήτησε την απόλυτη αξιοπιστία της λογικής ως εργαλείου για τα μαθηματικά και πρόβαλε μια σχετική παρέκκλιση από μια λογική αρχή.

Σ' ότι αφορά την εκπαιδευτική διαδικασία η λογική σκέψη είναι αναγκαία συνθήκη για τα μαθηματικά αλλά η παιδαγωγική χρήση της Λογικής είναι συζητήσιμη. (Kline, 1970)

Πυθαγόρειο

[1] Για μια αναλυτική παρουσίαση αυτής της εξελικτικής πορείας Βλέπε: Σπύρου Π., ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Σημειώσεις, Αθήνα 1998.

1.1 Η απόδειξη ιδρυτική πράξη των μαθηματικών ως επιστήμης

Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν.

Πρόκλος (Σχόλια Εις το Πρώτο των Ευκλείδου Στοιχείων)

Τα μαθηματικά κατά κοινή ομολογία θεμελιώθηκαν ως επιστήμη με το προχώρημά τους πέρα από τις υπολογιστικές μεθόδους και την σύζευξή τους με την θεωρητική απόδειξη, δηλαδή, τη λογική σκέψη. Η σύζευξη αυτή για διάφορους γεωπολιτικούς, οικονομικούς, ιστορικούς και φιλοσοφικούς λόγους, συνέβη στην Αρχαία Ελλάδα.[2]

Η άποψη στην οποία φαίνεται ότι συγκλίνουν όσοι έχουν ασχοληθεί με την ιστορία των μαθηματικών είναι ότι οι Αρχαίοι Έλληνες μέσα από το εμπόριο και τα ταξίδια είχαν συνεχή επαφή με τους άλλους αρχαίους λαούς και πολιτισμούς της περιοχής της ανατολικής λεκάνης της Μεσογείου, προς τους οποίους έτρεφαν σεβασμό και επεδίωξαν την πρόσκτηση των γνώσεων που είχαν αυτοί κατακτήσει.[3]

Ο ιστορικός τους ρόλος και η ποιοτικά διαφορετική τους συμβολή ήταν ότι ανέπτυξαν σε αφηρημένο θεωρητικό επίπεδο τα μαθηματικά εισάγοντας την απόδειξη και την θεμελίωσή τους.

Αυτή την επισήμανση την κάνει από τους πρώτους ο **Πλάτων** λέγοντας

…οτιδήποτε παραλαμβάνουν οι Έλληνες από τους ξένους, το μετατρέπουν τελικώς σε κάτι καλύτερο.

---

[2] Σύμφωνα με τις μέχρι τώρα αρχαιολογικές και ιστορικές μαρτυρίες, ενώ έχουν βρεθεί υπολογιστικές μέθοδοι και μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων, δεν έχουν βρεθεί αποδεικτικές διαδικασίες ούτε αντίστοιχη ορολογία σε άλλους αρχαίους πολιτισμούς όπως ο Βαβυλωνιακός, ο Αιγυπτιακός, ο Ινδικός, ο Κινεζικός.

[3] Οι μαρτυρίες για αυτό, είναι τα διασωθέντα γραπτά κείμενα και μνημεία αυτών των πολιτισμών, καθώς επίσης οι μαρτυρίες ότι οι πρώτοι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί όπως ο Θαλής, ο Πυθαγόρας κ.α. είχαν ταξιδέψει στη Βαβυλώνα και στην Αίγυπτο.

Επινομίς 987d9-e1

λάβωμεν δὲ ὡς ὅτιπερ ἂν Ἕλληνες βαρβάρων
παραλάβωσι, κάλλιον τοῦτο εἰς τέλος ἀπεργάζονται·

Η ίδια επισήμανση γίνεται και από άλλους μεγάλους διανοητές και μελετητές.

Ο Κάντ, στον πρόλογο της δεύτερης έκδοσης στην ***Κριτική του καθαρού λόγου*** **αναφέρει:**

Τα μαθηματικά, ως επιστήμη, εύρον τον ασφαλή δρόμον των εις τον αξιοθαύμαστον λαόν των Ελλήνων…Ο πρώτος ο οποίος απέδειξε την ισότητα των παρά τη βάσιν γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου (είτε Θαλής ωνομάζετο είτε άλλως πως), έσχε μίαν αναλαμπήν…[4]

Ο Sir T. L. Heath στην ***Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών***, γράφει στον πρόλογο:

Όμως ο Έλληνας με την ακόρεστη επιθυμία του να γνωρίσει το αληθινό νόημα των πάντων στο σύμπαν και να παρουσιάσει μια ορθολογική εξήγησή τους, οδηγήθηκε αναπόφευκτα στις φυσικές επιστήμες, στα Μαθηματικά, και γενικά στην ακριβή επιχειρηματολογία ή λογική.[5]

Ο **Ο. Neugebauer**, στο έργο του ***Οι θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα***, σημειώνει την άποψή του, η οποία στέκεται ιδιαίτερα στην προέλευση των ελληνικών μαθηματικών, ότι:

…τα Στοιχεία του Ευκλείδη αφορούν, με ελάχιστες εξαιρέσεις, μια καθαρά ελληνική εξέλιξη προς κατεύθυνση αυστηρά καθορισμένη.

Θεωρώντας ότι τα μαθηματικά με τις προγενέστερες υπολογιστικές μορφές και μεθόδους δεν επιβίωσαν σε αντίθεση με τα ελληνικά, διότι έγιναν ανενεργά, αχρηστεύθηκαν από τα ανώτερου επιπέδου μεταγενέστερα ελληνικά μαθηματικά συμπληρώνει:

Ακόμη οι ελληνικές μαθηματικές διαδικασίες γίνονται άμεσα κατανοητές από έναν σύγχρονο μαθηματικό…[6]

Συνεχίζοντας παρακάτω ότι:

Η διαπίστωση ότι τα ελληνικά μαθηματικά στο Ευκλείδειο ύφος αποτελούν αυστηρά ελληνική εξέλιξη δεν σημαίνει άρνηση μιας γενικής ασιατικής προέλευσης των ελληνικών μαθηματικών στο σύνολό τους.

Η συζήτηση γύρω από τις απαρχές των μαθηματικών, την ιστορική τους εξέλιξη την όσμωση μεταξύ των πολιτισμών και τα *σημεία καμπής* τους είχε πάντα ως καθοριστικό σημείο αναφοράς την σύνδεσή τους με την απόδειξη, τη λογική σκέψη.

Ο **B. L. van der Waerden**, καταθέτοντας την δική του άποψη σε σχέση τις ανταλλαγές των γνώσεων που υπήρχαν στους λαούς και πολιτισμούς της περιοχής της ανατολικής Μεσογείου

---

[4] Κάντ, Κριτική του καθαρού λόγου, δεύτερος πρόλογος, βλέπε πιο αναλυτικά και Π. Σπύρου, Σημειώσεις Επιστημολογίας και Διδακτικής των Μαθηματικών, 1998.
[5] Sir T. L. Heath, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών
[6] Ο. Neugebauer, *Οι θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα,* ΜΙΕΤ, Αθήνα 2003, σελ. 188

και τη συμβολή του καθενός γράφει, αναφορικά με αυτό που εξετάζουμε εδώ, στο έργο του ***Η αφύπνιση της επιστήμης:***

Αντίθετα μόνο τώρα η μεγαλοφυΐα του (Θαλή) αποκτά την τιμή που της αρμόζει, την τιμή ότι ανέπτυξε μια λογική δομή για τη γεωμετρία, ότι εισήγαγε την απόδειξη στη γεωμετρία.

Πράγματι, αυτό που είναι εντελώς νέο και χαρακτηρίζει τα ελληνικά μαθηματικά είναι η μετάβαση από θεώρημα σε θεώρημα δια μέσου της απόδειξης.[7]

Ενώ έχει σημειώσει ήδη στον πρόλογο:

Πως, τόσο στους κόλπους της σχολής των Πυθαγορείων όσο και εκτός αυτής, τα μαθηματικά γνώρισαν μια όλο και μεγαλύτερη ανάπτυξη και έφθασαν βαθμιαία στο σημείο να ικανοποιούν τις απαιτήσεις της πιο αυστηρής λογικής.[8]

Πράγμα για το οποίο φαίνεται πως είχαν επίγνωση όπως εκτιμά και ο B. L. van der Waerden στο βιβλίο του ***Η αφύπνιση της επιστήμης***, παραθέτοντας και συναινώντας με την ρήση του Πλάτωνος, σε ένα από τα τελευταία του έργα, το απόσπασμα από την Επινομίδα που προαναφέραμε, το οποίο θεωρείται ότι αφορά και στη θεμελίωση και ανάπτυξη των μαθηματικών.[9]

Ο Arpad Szambo, στο βιβλίο του ***Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών***, καταθέτει τη δική του γνώμη στο υπό συζήτηση θέμα:

Η μεγάλη διαφορά μεταξύ της ελληνικής και της αρχαίας ανατολικής επιστήμης συνίσταται ακριβώς εις το ότι τα Ελληνικά Μαθηματικά παριστούν εν, με την παραγωγικήν μέθοδον, περιτέχνως συντεθέν σύστημα γνώσεων, ενώ τα παλαιά ανατολικά κείμενα μαθηματικού περιεχομένου, περιέχουν μόνον ενδιαφέρουσας υποδείξεις, τρόπον τινά συνταγάς και συχνάκις παραδείγματα περί του πώς πρέπει να λύει κανείς έν μαθηματικόν ζήτημα.

…

Το εξαιρετικόν χαρακτηριστικόν των Ελληνικών Μαθηματικών, το οποίον πρέπει να αιφνιδιάζει κατ' αρχήν κάθε αμερόληπτον αναγνώστην, είναι ακριβώς το γεγονός ότι εις αυτά οι ισχυρισμοί, οι προτάσεις πάντοτε αποδεικνύονται. Η απόδειξις εις τα Ελληνικά Μαθηματικά έχει τον ίδιον απαραίτητον ρόλον τον οποίον έχει και εις την σημερινήν επιστήμην.[10]

Ίδιες είναι οι απόψεις, πάνω στο θέμα αυτό και πολλών άλλων μαθηματικών που ασχολήθηκαν με την ιστορία των μαθηματικών.

Σημειώνουμε επιγραμματικά ακόμη μερικά χαρακτηριστικά αποσπάσματα από ορισμένους συγγραφείς:

---

[7] B. L. van der Waerden, Η αφύπνιση της επιστήμης, κεφ. iv, σελ.94

[8] B. L. van der Waerden, Η αφύπνιση της επιστήμης, πρόλογος, σελ. xxiv.

[9] Σημειώνεται και από τον B.L. VAN DER WAERDEN: Η ΑΦΥΠΝΙΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2000, σελ. 86 και από τον T. L. HEATH: ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, σελ. 26

[10] Arpad Szambo**,** Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών, Έκδοση ΤΕΕ, σελ. 254-255

Morris Kline, ***Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό***:

Το φυσικό εργαλείο του φιλοσόφου είναι ο παραγωγικός συλλογισμός. Έτσι οι Έλληνες προς τούτη τη μέθοδο στράφηκαν, όταν άρχισαν να εξερευνούν το βασίλειο των μαθηματικών.[11]

Dirk J. Struik, ***Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών***,

Τα σύγχρονα μαθηματικά γεννήθηκαν μέσα στην ατμόσφαιρα του ιωνικού ορθολογισμού. Τα μαθηματικά που δεν θέτανε μόνο το ερώτημα «πώς;» της Ανατολής, αλλά και το σύγχρονο επιστημονικό ερώτημα «γιατί;»[12]

Carl B. Boyer- Uta C. Merzbach, ***Η ιστορία των μαθηματικών***,

Οι Έλληνες ήταν αυτοί που πρόσθεσαν το στοιχείο της λογικής δομής στη γεωμετρία, είναι πλέον αποδεκτό σήμερα από τους πάντες.[13]

Ο Howard Eves, στο έργο του ***Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών***, γράφει για τα αποτελέσματα στη γεωμετρία που αποδίδονται στο **Θαλή**:

1. *Ο κύκλος διχοτομείται από κάθε διάμετρο,*
2. *Οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες,*
3. *Οι κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες,*
4. *Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες μια προς μια,*
5. *Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή*

Και τα πέντε αυτά αποτελέσματα ήταν χωρίς αμφιβολία γνωστά πολύ πριν το Θαλή και είναι εύκολο να καταλήξουμε και στα πέντε με εργαστηριακές μεθόδους.

Η αξία συνεπώς των αποτελεσμάτων δεν πρέπει να αναζητηθεί μόνο στο περιεχόμενό τους αλλά κυρίως στο γεγονός ότι ο Θαλής τα υποστήριξε με λογικό συλλογισμό και όχι με τη διαίσθηση ή το πείραμα.[14]

…

Αυτή η συνειδητή και συστηματική προσπάθεια ήταν ασφαλώς ***μια μεγάλη στιγμή των μαθηματικών*** *και, αν η παράδοση είναι σωστή, ο Θαλής ο Μιλήσιος ήταν ο πρώτος εμψυχωτής της.*[15]

Donald M. Davis, Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών:

Από την αρχή ως το τέλος του βιβλίου, θα συναντήσουμε πολλές μαθηματικές ιδέες που εισήχθησαν από τους Έλληνες, ιδίως στη Γεωμετρία και την Αριθμοθεωρία. Πιο σημαντική όμως από τις συγκεκριμένες κατακτήσεις ήταν η παρουσίαση των Μαθηματικών ως απαγωγικής επιστήμης. Η ιδέα αυτή, μερικές φορές αποδίδεται στον Θαλή. Ο ιστορικός Πλούταρχος έγραψε ότι "Ο Θαλής προφανώς ήταν ο μόνος που η σοφία του προχώρησε, στη θεωρία, πέρα από τα όρια της πρακτικής χρησιμότητας"[16]

Ο Γ. Χριστιανίδης, στο βιβλίο του, ***Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών***, γράφει:

---

[11] Morris Kline, Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό,σελ.55.
[12] Dirk J. Struik, Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, κεφ. III, σελ. 69.
[13] Carl B. Boyer- Uta C. Merzbach, Η ιστορία των μαθηματικών, σελ. 55
[14] Howard Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, Τροχαλία, Αθήνα 1989, σελ. 30
[15] Howard Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, Τροχαλία, Αθήνα 1989, σελ. 31
[16] Donald M. Davis, Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών, ΠΕΚ, 2001, σελ.17

Τότε θα διαμορφωθεί η ιδέα της μαθηματικής απόδειξης, μια ιδέα η οποία αποτελεί τη βάση των νεότερων μαθηματικών και υπό αυτήν την έννοια του σύγχρονου τεχνολογικού μας πολιτισμού.[17]

Laurent Lafforgue[18]**:** *Περισσότερο όμως είναι (τα μαθηματικά) τρόπος σκέψης ο οποίος υπακούει στους τρομερά αυστηρούς και ακριβείς κανόνες τους οποίους για πρώτη φορά έθεσαν οι αρχαίοι έλληνες κλασικοί.*

Βλέπουμε λοιπόν πως όλοι οι μελετητές και συγγραφείς που προαναφέραμε θεωρούν ως ιδρυτική πράξη των σύγχρονων μαθηματικών τη σύνδεσή τους με την λογική σκέψη.

Ως λογική σκέψη εννοούν, όλοι οι μελετητές, κατ΄ αρχήν τις αποδεικτικές διαδικασίες και στη συνέχεια την αξιωματική θεμελίωση με τους λογικούς κανόνες της, όπως αυτή παρουσιάστηκε ολοκληρωμένα στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Όπως σημειώνουν οι **P. J. Davis- R Hersh** στο βιβλίο τους ***Η Μαθηματική Εμπειρία***, για την Ευκλείδεια Γεωμετρία:

…*Είναι η παρουσίασή της ως μιας παραγωγικής επιστήμης.*[19]

Η αντίληψη αυτή ισχυροποιούνταν ανά τους αιώνες ώστε όπως σημειώνουν πιο κάτω:

Με την αυξανόμενη έμφαση που δινόταν στις αποδεικτικές όψεις όλων των κλάδων των μαθηματικών, ο ***C. S. Peirce*** *ανακοίνωσε στα μέσα του 19ου αιώνα ότι «τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της δημιουργίας αναγκαίων συμπερασμάτων.*[20]

Το ίδιο ακριβώς επισημαίνει και ο R. L. Wilder:

Η λογική, ως αναπόσπαστο μέρος της αξιωματικής μεθόδου, απέκτησε κι αυτή πρωτεύουσα θέση στα μαθηματικά. Ως ιδιαίτερα ελληνικός τρόπος σκέψης, η λογική βρίσκεται στην καρδιά της αξιωματικής μεθόδου. Και δε χρειάζεται να επισημάνουμε τι σήμαινε για τα μαθηματικά η εμφάνιση της λογικής μέσα σ' αυτά. Επιπλέον, η σημασία που είχε για τις μεθόδους αποδείξεων είναι τόσο μεγάλη, ώστε μερικοί έφτασαν να υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά είναι στην πραγματικότητα επέκταση της λογικής και ότι η ουσία των μαθηματικών είναι η λογική παραγωγή. Οι «ορισμοί» των μαθηματικών

---

[17] Γ. Χριστιανίδης, Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών, κεφ.ΙΙΙ, σελ. 56
[18] Laurent Lafforgue, βραβείο FIELDS 2004, Συνέντευξη ΤΟ ΒΗΜΑ, Κυριακή 27.2.05
[19] P. J. Davis- R Hersh, *Η Μαθηματική Εμπειρία, σελ. 29*
[20] P. J. Davis- R Hersh, *Η Μαθηματική Εμπειρία, σελ. 30.*

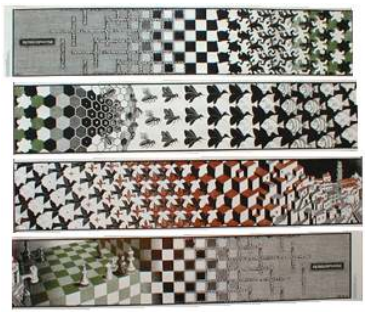
που οφείλονται στον αείμνηστο μαθηματικό του Χάρβαρντ Πιρς (Benjamin Peirce) «Μαθηματικά είναι η επιστήμη συναγωγής αναγκαίων συμπερασμάτων», 1881, στον Χουάιτχεντ (A. N. Whitehead) «Τα μαθηματικά στην ευρύτερη έννοιά τους είναι η ανάπτυξη όλων των μορφών τυπικού, αναγκαίου και παραγωγικού συλλογισμού», 1898, και στον Ράσελ (Bertrand Russell) «Καθαρά μαθηματικά είναι η κλάση όλων των προτάσεων της μορφής "p συνεπάγεται q", όπου p και q είναι προτάσεις...», 1903, είναι ενδεικτικοί των συμπερασμάτων, στα οποία είχε φτάσει η μεγάλη πλειοψηφία της μαθηματικής κοινότητας στις αρχές του αιώνα μας. (R. L. Wilder, 1968)[21]

Αυτή η άποψη τέθηκε από πολλές πλευρές σε συζήτηση όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Ωστόσο όπως γράφει Ο **Stephen I. Brown** (***Προς μια Ανθρωπιστική Μαθηματική Εκπαίδευση)***:

Τα περισσότερα κείμενα που δικαιολογούν την συμπερίληψη των μαθηματικών ως ένα από αυτά τα ιδιαίτερα πεδία, αναγνωρίζουν την ιδιότητα της παραγωγικής λογικής - της λογικής της οποίας τα επιχειρήματα προκύπτουν από σύνολα αξιωμάτων - ως στοιχείο διαφοροποίησης.

Αν και ο τρόπος που αντιλαμβανόμαστε τη λογική έχει αλλάξει με τα χρόνια και αν και έχουν υπάρξει ταυτόχρονα αντικρουόμενες σχολές που προσπαθούν να εντοπίσουν την ακριβή φύση της επιρροής που έχει η λογική στα μαθηματικά, ***η λογική δεν αποτελεί απλά ένα σημαντικό συστατικό του κλάδου, αλλά ένα καθοριστικό χαρακτηριστικό του****.*[22]



M. C. Escher, Metamorphose

[21] R. L. Wilder, Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών, Αθήνα 1986, σελ. 127-8
[22] Stephen I. Brown, Προς μια Ανθρωπιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, σελ. 1291

1.2 Τα Μαθηματικά και λογική σκέψη, *Βίοι Παράλληλοι*.

Όπερ έδει ποιήσαι και Όπερ έδει δείξαι

Η ιστορική εξέλιξη όσον αφορά στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης και των μαθηματικών και στην σύνδεσή τους δείχνει σε μεγάλο βαθμό μια παράλληλη πορεία.

Όπως είδαμε στις προηγούμενες αναφορές στην ιστορία των μαθηματικών θεωρείται καθοριστικό σημείο, μεγάλη στιγμή, των μαθηματικών η εισαγωγή της απόδειξης από τον Θαλή το Μιλήσιο, έναν από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, περίπου το 600 π.Χ..

Στην επόμενη περίοδο η εξέλιξη των μαθηματικών καταγράφεται ως μια διαρκής πορεία θεωρητικής επίλυσης προβλημάτων και απόδειξης προτάσεων (θεωρημάτων).

Το **Πυθαγόρειο Θεώρημα** αποτελεί κλασικό δείγμα αυτής της εξέλιξης, όπως και όλα όσα αναφέρει ο **Πρόκλος** στα ***Σχόλιά*** του ***«Εις το πρώτον των Ευκλείδου Στοιχείων»***.

Παράλληλα αναπτύσσεται η προσπάθεια θεμελίωσης ενός λογικού συστήματος για τα μαθηματικά όπως και για όλες τις επιστήμες και τη φιλοσοφία, όπου τα συμπεράσματα να μην εξάγονται αυθαίρετα αλλά με λογικά επιχειρήματα, με κριτήρια συνέπειας και μεθοδικότητα.

Σ’ αυτή την ιστορική περίοδο οι φιλοσοφικές απόψεις επηρέαζαν τους μαθηματικούς ορισμούς και η μεθοδολογία και τα αποτελέσματα των μαθηματικών τις φιλοσοφικές μεθόδους και τα κριτήρια γνώσης και αλήθειας.

Ο Πρόκλος στην κλασική ιστορική ανασκόπησή του όσων συνέβαλαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών στην αρχαιότητα, αναφέρει ότι ο Πλάτωνας τα συγγράμματά του με μαθηματικούς λόγους κατεπύκνωσε…

Πλάτων

δ' ἐπὶ τούτοις γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τά τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὰ σπουδήν, ὅς που δῆλός ἐστι καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνώσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαῦμα τῶν φιλοσοφίας ἀντεχομένων ἐπεγείρων.

Ο κ. Σ. Νεγρεπόντης έχει τεκμηριώσει την άποψη ότι η Πλατωνική διαλεκτική ως μέθοδος και κριτήριο εγκυρότητας της γνώσης, έχει ανθυφαιρετική βάση, δηλαδή ότι η ουσία της Διαλεκτικής του Πλάτωνος είναι η ανθυφαίρεση, ο γνωστός Ευκλείδειος αλγόριθμος.

Βασικοί συντελεστές αυτής της εξέλιξης ήταν οι διάφορες φιλοσοφικές σχολές σε κέντρα της αρχαιότητας, τα οποία εκτείνονταν στην ευρύτερη περιοχή της σημερινής Ελλάδας, της Ιωνίας της Μικράς Ασίας, της κάτω Ιταλίας, της Βόρειας Αιγύπτου, με προεξάρχοντες τον **Πλάτωνα** και τον **Αριστοτέλη** οι οποίοι σημάδεψαν διαχρονικά τον συλλογισμό και την λογική σκέψη της ανθρωπότητας

Κατά τον **Πλάτωνα** οι λογικές αποδείξεις οδηγούν σε σωστά συμπεράσματα και σε γνώση, σε αντίθεση με τις εικοτολογίες χωρίς λογική απόδειξη που είναι αγυρτεία.

Στον διάλογο Φαίδων λέγει ο Σιμμίας:

Φαίδων 92c11-92e3

Πολὺ μᾶλλον, ἔφη, ἐκεῖνον, ὦ Σώκρατες. ὅδε μὲν γάρ
μοι γέγονεν ἄνευ **ἀποδείξεως** μετὰ εἰκότος τινὸς καὶ εὐπρε-
πείας, ὅθεν καὶ τοῖς πολλοῖς δοκεῖ ἀνθρώποις· ἐγὼ δὲ τοῖς
διὰ τῶν εἰκότων τὰς **ἀποδείξεις** ποιουμένοις λόγοις σύνοιδα
οὖσιν ἀλαζόσιν, καὶ ἄν τις αὐτοὺς μὴ φυλάττηται, εὖ μάλα
ἐξαπατῶσι, καὶ ἐν **γεωμετρίᾳ** καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις ἅπασιν.
ὁ δὲ περὶ τῆς ἀναμνήσεως καὶ μαθήσεως λόγος δι' ὑποθέσεως
ἀξίας ἀποδέξασθαι εἴρηται. ἐρρήθη γάρ που οὕτως ἡμῶν
εἶναι ἡ ψυχὴ καὶ πρὶν εἰς σῶμα ἀφικέσθαι, ὥσπερ αὐτῆς
ἐστιν ἡ οὐσία ἔχουσα τὴν ἐπωνυμίαν τὴν τοῦ "ὃ ἔστιν"
ἐγὼ δὲ ταύτην, ὡς ἐμαυτὸν πείθω, ἱκανῶς τε καὶ ὀρθῶς ἀπο-
δέδεγμαι.

Πολύ περισσότερον, είπε, τον πρώτον, Σωκράτη. Διότι εις τον άλλον με οδήγησε όχι μια ***λογική απόδειξις****, αλλά μία εντυπωσιακή πιθανολογία, όθεν άλλωστε πηγάζουν αι δοξασίαι των πολλών ανθρώπων. Εγώ δε δια τα επιχειρήματα, τα οποία εις τας αποδείξεις των βασίζονται επί πιθανολογιών, έχω την συνείδησιν ότι είναι αγύρται, οι οποίοι εάν δεν τους παρακολουθή κανείς με μεγάλην προσοχήν, μας εξαπατούν με το παραπάνω τόσον εις την* ***γεωμετρίαν,*** *όσον και εις τα άλλα. Αντιθέτως το περι της αναμνήσεως και μαθήσεως επιχείρημα έχει καταστρωθή επί τη βάσει μιας αρχής, την οποίαν αξίζει κανείς να παραδεχθή …*

Επίσης ο Πλάτων γράφει στην Πολιτεία, για την ανυπόθετη αρχή, τα αξιώματα, την παραγωγική διαδικασία και τη χρήση σχημάτων και αποδεικτικών μεθόδων στη γεωμετρία ώστε με λογικά βήματα να οδηγηθούμε από τα ορατά στη νόηση με το λογισμό.

Πολιτεία 510c1 511b2

ἀλλ' αὖθις, ἦν δ' ἐγώ· ῥᾷον γὰρ τούτων προειρημένων μαθήσῃ. οἶμαι γάρ σε εἰδέναι ὅτι οἱ περὶ τὰς **γεωμετρίας τε καὶ λογισμοὺς** καὶ τὰ τοιαῦτα πραγματευόμενοι, ὑποθέμενοι τό τε περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον καὶ τὰ σχήματα καὶ γωνιῶν τριττὰ εἴδη καὶ ἄλλα τούτων ἀδελφὰ καθ' ἑκάστην μέθοδον, ταῦτα μὲν ὡς εἰδότες, ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά, οὐδένα λόγον οὔτε αὑτοῖς οὔτε ἄλλοις ἔτι ἀξιοῦσι περὶ αὐτῶν διδόναι ὡς παντὶ φανερῶν, ἐκ τούτων δ' ἀρχόμενοι τὰ λοιπὰ ἤδη διεξιόντες τελευτῶσιν ὁμολογουμένως ἐπὶ τοῦτο οὗ ἂν ἐπὶ σκέψιν ὁρμήσωσι.

Πάνυ μὲν οὖν, ἔφη, τοῦτό γε οἶδα.

Οὐκοῦν καὶ ὅτι τοῖς ὁρωμένοις εἴδεσι προσχρῶνται καὶ τοὺς λόγους περὶ αὐτῶν ποιοῦνται, οὐ περὶ τούτων διανοούμενοι, ἀλλ' ἐκείνων πέρι οἷς ταῦτα ἔοικε, τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἕνεκα τοὺς λόγους ποιούμενοι καὶ διαμέτρου αὐτῆς, ἀλλ' οὐ ταύτης ἣν γράφουσιν, καὶ τἆλλα οὕτως, αὐτὰ μὲν ταῦτα ἃ πλάττουσίν τε καὶ γράφουσιν, ὧν καὶ σκιαὶ καὶ ἐν ὕδασιν εἰκόνες εἰσίν, τούτοις μὲν ὡς εἰκόσιν αὖ χρώμενοι, ζητοῦντες δὲ αὐτὰ ἐκεῖνα ἰδεῖν ἃ οὐκ ἂν ἄλλως ἴδοι τις ἢ τῇ διανοίᾳ.[23]

ἀληθῆ, ἔφη, λέγεις.

Τοῦτο τοίνυν νοητὸν μὲν τὸ εἶδος ἔλεγον, ὑποθέσεσι δ' ἀναγκαζομένην ψυχὴν χρῆσθαι περὶ τὴν ζήτησιν αὐτοῦ, οὐκ ἐπ' ἀρχὴν ἰοῦσαν, ὡς οὐ δυναμένην τῶν ὑποθέσεων ἀνωτέρω ἐκβαίνειν, εἰκόσι δὲ χρωμένην αὐτοῖς τοῖς ὑπὸ τῶν κάτω ἀπεικασθεῖσιν καὶ ἐκείνοις πρὸς ἐκεῖνα ὡς ἐναργέσι δεδοξασμένοις τε καὶ τετιμημένοις.

Μανθάνω, ἔφη, ὅτι τὸ ὑπὸ ταῖς **γεωμετρίαις** τε καὶ ταῖς ταύτης ἀδελφαῖς τέχναις λέγεις.

*Ξέρεις, υποθέτω, πως **αυτοί που καταγίνονται με τις γεωμετρίες, με τα μαθηματικά** και τα παρόμοια, παίρνοντας ως βάση το άρτιο και το περιττό, τα τρία είδη των γωνιών κι' όσα άλλα τέτοια, **αναλόγως με την απόδειξη που ζητούν, τα θεωρούν αυτά ως θεμέλια,** που δεν αξίζει τον κόπο να δίνουν λόγο γι' αυτά ούτε στον εαυτό τους ούτε στους άλλους, σαν νά 'ναι*

[23] B. L. VAN DER WAERDEN Η ΑΦΥΠΝΙΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, Σημειώνει ότι ο Πλάτων είχε πιθανώς κατά νου την απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου.

πράγματα ολοφάνερα στον καθένα, και ***αρχίζοντας από αυτές τις αρχές και περνώντας έπειτα τα επίλοιπα****,* ***φτάνουν στο τέλος με λογική συνέπεια σε κείνο που ξεκίνησαν να αποδείξουν.***

Πολύ καλά το γνωρίζω αυτό.

Θα γνωρίζης βέβαια ακόμα πως χρησιμοποιούν, εκτός αυτού, και τα ορατά είδη κι' απάνω σ' αυτά κάνουν τους συλλογισμούς των, αν και δεν τους ενδιαφέρουν αυτά τα ίδια, αλλά εκείνα που είναι εικόνες των. Οι συλλογισμοί τους δηλαδή αναφέρονται στο καθαυτό τετράγωνο και στην καθαυτό διάμετρο, και όχι σ' αυτή που σχεδιάζουν. Το ίδιο και για τα άλλα που πλάττουν ή ζωγραφίζουν και που μπορεί να έχουν σκιές και εικόνες επάνω στα νερά: αυτά τα μεταχειρίζονται πάλι απλώς σαν εικόνες ***και ζητούν να δουν εκείνα τα ίδια, που δεν μπορεί κανείς να τα δη αλλιώς παρά με τη διάνοια.***

Αλήθεια λες.

Αυτό λοιπόν το είδος (έλεγα) χαρακτήρισα ως νοητό, όπου η ψυχή όταν το ερευνά είναι αναγκασμένη να μεταχειρίζεται υποθέσεις, χωρίς να κατευθύνεται σε ένα αφετηριακό σημείο, αφού αδυνατεί να βγει έξω και πάνω από τις υποθέσεις, αλλά χρησιμοποιεί ως εικόνες αυτά τα οποία απεικονίστηκαν στο κατώτερο τμήμα, επίσης αυτά τα οποία σε σύγκριση με εκείνες τις απεικονίσεις θεωρήθηκαν και εκτιμήθηκαν ως σαφή και ευκρινή.

Καταλαβαίνω, είπε, ότι μιλάς για το αντικείμενο των διερευνήσεων της γεωμετρίας και των συγγενικών της μαθήσεων.[24]

Ο **Αριστοτέλης** έθεσε τους κανόνες της λογικής, έχοντας παραμείνει ήδη 20 χρόνια στην Ακαδημία του Πλάτωνος, όντας κοινωνός της φιλοσοφίας και μαθηματικών που διδάσκονταν σ' αυτήν. Η κωδικοποίηση των αρχών της λογικής πρέπει αντικειμενικά να βασίζεται στους συλλογισμούς των προ αυτού μαθηματικών και φιλοσόφων και ιδιαίτερα των μαθηματικών όπου και οι διαφορές απόψεων περιορίζονται.

Τα περισσότερα από τα παραδείγματά του τα αντλεί από τα μαθηματικά της εποχής πράγμα που σημαίνει ότι ο Αριστοτέλης ακολούθησε τα επιτεύγματα των μαθηματικών της εποχής.

Από εδώ όμως έπεται ότι ο τρόπος του σκέπτεσθαι των ελλήνων μαθηματικών θα πρέπει να ικανοποιούσε πολύ υψηλές απαιτήσεις αυστηρότητας πολύ πριν τον Αριστοτέλη. (Σ. Νεγρεπόντης, 2003)

Ο Αριστοτέλης στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα, 72a14-24** εισάγει ή επεξηγεί τις έννοιες: ***θέσις, αξίωμα, ορισμός, υπόθεσις.***

Λέει συγκεκριμένα ο Αριστοτέλης στο χωρίο αυτό:

[24] Μετάφραση, Ι. Γρυπάρης, Εκδ. Ι. Ζαχαρόπουλος.

«Ονομάζω **θέση** την άμεση εκείνη αρχή συλλογισμού που δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε είναι ανάγκη να την κατέχει κάποιος προκειμένου να μάθει κάτι.

Αξίωμα [ονομάζω] εκείνη, αντιθέτως, που είναι ανάγκη να την κατέχει κάποιος προκειμένου να μάθει οτιδήποτε. Υπάρχουν πράγματι ορισμένες αλήθειες αυτού του είδους, και είναι σε αυτές κυρίως που συνηθίζουμε να αποδίδουμε την κατονομασία αυτή.

Αν τώρα, μία **θέση** σύγκειται αδιακρίτως από ένα από τα μέρη της εξαγγελίας, όπως επί παραδείγματι, όταν λέγω ότι ένα πράγμα είναι ή ότι δεν είναι τότε πρόκειται για **υπόθεση**, αν όχι πρόκειται για **ορισμό**. Ο ορισμός είναι, πράγματι, ένα είδος θέσεως» [25]

Ο Αριστοτέλης όπως φαίνεται στην τελευταία παράγραφο του παραπάνω αποσπάσματος από τα Αναλυτικά Ύστερα (72α14-24), αλλά και από τα Τοπικά (158b24-159α2), θεωρεί ότι οι υποθέσεις εκτός από αυτές που αναφέρονται στο αν είναι ή δεν είναι κάτι, είναι ορισμοί και ότι πολλές υποθέσεις δεν έχουν αποδείξεις διότι δεν έχουν κατάλληλο ορισμό. Αν όμως βρούμε τον κατάλληλο ορισμό γίνονται προφανείς, μπορούμε εύκολα να τις αποδείξουμε.

Φαίνεται λοιπόν ότι τα **αξιώματα του Αριστοτέλη** αντιστοιχούν στις **κοινές έννοιες** και οι **θέσεις** στους **όρους και τα αξιώματα του Ευκλείδη.**

M. C. Escher, Doric columns

[25] Μετάφραση, Η. Π. Νικολούδης, εκδ. Κάκτος, Αθήνα 1993.

Αξιωματική θεμελίωση

Αριστοτέλης	Ορισμοί	υποθέσεις- αιτήματα	αξιώματα (κοινά)
Ευκλείδης	Όροι	αιτήματα	κοινές έννοιες

Η Θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη (βιβλία I έως XIII) περιέχουν:

όρους (ορισμούς), **αιτήματα, κοινές έννοιες, προτάσεις**. Συγκεκριμένα:

- ✓ **121 όροι** (0ρισμοί)
- ✓ **5 αιτήματα** (αξιώματα γεωμετρικά)
- ✓ **7 (ή 9) κοινές έννοιες** (λογικά αξιώματα)
- ✓ **465 προτάσεις** (θεωρήματα που αποδεικνύονται)

Αναλυτικά κατά βιβλίο

Βιβλίο	Όροι	Αιτήματα	Κοινές Έννοιες	Προτάσεις
I	23	5	7 ή 9	48
II	2			14
III	11			37
IV	7			16
V	18			25
VI	5			33
VII	23			39
VIII				27
IX				36
X	4			115
XI	28			39
XII				18
XIII				18
Σύνολο	121	5	7 ή 9	465

Η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας γίνεται στο πρώτο βιβλίο. Εκεί μόνο υπάρχουν, μαζί με τους 23 πρώτους βασικούς ορισμούς, **τα αξιώματά της (Αιτήματα και Κοινές Έννοιες).** Στα επόμενα δώδεκα βιβλία προστίθενται μόνο νέοι ορισμοί και προτάσεις.

Οι αποδεικτικές μέθοδοι **των Στοιχείων είναι τέσσαρες:**

Η αναλυτική, Η συνθετική, Η σε άτοπο απαγωγή και Η επαγωγή

Τα **αιτήματα** αναφέρονται στη Γεωμετρία, είναι Γεωμετρικά αξιώματα ενώ οι **κοινές έννοιες** έχουν γενική αναφορά, είναι λογικά αξιώματα.[26]

Ο **Ευκλείδης** όπως επίσης είναι γνωστό θήτευσε στην Ακαδημία του Πλάτωνος και κατέγραψε τα μαθηματικά που διδάσκονταν εκεί.

Όλο το μαθηματικό έργο που είχε παραχθεί μέχρι τότε πάνω σ' αυτές τις βάσεις από τους Πυθαγορείους, τον Θεόδωρο, τον Θεαίτητο, τον Εύδοξο και διδασκόταν στην Ακαδημία του Πλάτωνος συγκεντρώθηκε και κατεγράφη στα Στοιχεία του Ευκλείδη εις τρόπον ώστε να αποτελεί την πρώτη ολοκληρωμένη καταγραφή των μαθηματικών με αξιωματική θεμελίωση και λογική συνέπεια.[27]

Σύμφωνα με όλες τις μαρτυρίες, μπορούμε να πούμε ότι προς το τέλος του 4^{ου} π.Χ. αιώνα, όλα τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνος, συγκεντρώθηκαν στο έργο του Ευκλείδη κατά τρόπο που επρόκειτο να παραμείνει υποδειγματικός για χιλιάδες χρόνια.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ή μέρος τους αποτελούν ένα από τα πιο διαβασμένα έργα, μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες της παγκόσμιας γραμματείας.

---

[26] Ο Ευκλείδης κυρίως στο πρώτο βιβλίο θέτει τις αναπόδεικτες προτάσεις και προσθέτει σποραδικά μερικές στα επόμενα βιβλία. Μετά αρχίζουν οι αποδείξεις και κατασκευές.

Τα αξιώματα είναι πολύ λίγα, δεν είναι πλήρης ο κατάλογος. Στις αποδείξεις που έπονται υπονοούνται κι' άλλα. Οι ορισμοί είναι πολλοί σχεδόν πλήρεις. Για λόγους φιλοσοφικούς μάλλον ήθελαν τα αξιώματα να είναι λίγα. Θεωρούσαν πολύ πιο σημαντικό τον ορισμό από το αξίωμα. Υπήρχε προσπάθεια οι ορισμοί να αντικαθιστούν αξιώματα και τα αξιώματα να γίνονται προτάσεις. Ο Πρόκλος θέλει να αφαιρέσει το 5^{ο} αίτημα λέγοντας ότι αυτό δεν πρέπει να υπάρχει γιατί αποδεικνύεται (ανάλογες προσπάθειες έγιναν και από τον Κλαύδιο Πτολεμαίο). (Νεγρεπόντης 2003)

[27] Τα «Στοιχεία» αποτελούν το επιστέγασμα μιάς σειράς ανάλογων έργων, των στοιχείων του Ιπποκράτη, του Λέοντος, του Θευδίου. Οι δύο τελευταίοι ανήκαν στους κόλπους της Ακαδημίας του Πλάτωνος, μπορούμε επομένως να υποθέσουμε ότι τα δικά τους στοιχεία χρησιμοποιούνταν ως διδακτικά εγχειρίδια των μαθηματικών στην Ακαδημία.

Το έργο του ήταν κυρίως συνθετικό. Συγκέντρωσε ότι προϋπήρχε (χωρίς να γνωρίζουμε επίσης αν αυτό δεν είχε γίνει ήδη). Έζησε περίπου το 300 π.χ., εποχή που υπάρχει ένα «κενό» στις γνώσεις μας σε σχέση με την προηγούμενη μεγάλη ακμή, μέχρι το 350 π.χ., των μαθηματικών στην Ακαδημία του Πλάτωνα, πράγμα που σημαίνει ότι τότε γράφτηκαν τα Στοιχεία αν δεν είχαν ήδη γραφτεί.

Σύμφωνα με τον **Ivor Thomas**[28] τα Στοιχεία έχουν επηρεάσει το ανθρώπινο μυαλό περισσότερο από κάθε άλλο έργο, εκτός από τη Βίβλο.
Θα μπορούσε να παρατηρήσει κανείς πως την Ευκλείδεια Γεωμετρία στη μία ή την άλλη μορφή διδάσκονται για αιώνες σχεδόν όλοι μαθητές όλων των θρησκευμάτων και ως εκ τούτο πιθανόν υπερτερεί της Βίβλου.
Αλλά αυτό που είναι καθοριστικό είναι ότι έκτοτε η επιστημονική σκέψη γενικότερα και ιδιαίτερα τα μαθηματικά σφραγίστηκαν ανεξίτηλα από τον τρόπο θεμελίωσης και την προσπάθεια λογικής συνέπειας.

Τα βιβλία του Ευκλείδη ασκούσαν πάντοτε στον επαγγελματία μαθηματικό μιαν ακατάβλητη γοητεία (έστω κι αν οι μαθητές συχνά στενάζανε). Η λογική δομή τους έχει επηρεάσει τον επιστημονικό τρόπο σκέψης περισσότερο, ίσως, από οποιοδήποτε άλλο κείμενο στον κόσμο. (Struik, p. 88)

Μετά τον Αριστοτέλη η Λογική παρέμεινε στάσιμη για είκοσι περίπου αιώνες. Κατά τον μεσαίωνα και την αναγέννηση υπήρξε μία σχολαστικιστική απασχόληση με την Λογική και μόνο με τον Leibniz και τον Boole στα μέσα του περασμένου αιώνα η Λογική συνδέεται με τα μαθηματικά, και η κατάσταση αλλάζει. (Μυτιληναίος, 2000)

Η κατοπινή ιστορία (πορεία) των μαθηματικών σημαδεύτηκε, πέραν των άλλων και σχετικά με το θέμα που εξετάζουμε, από την προσπάθεια όλο και αυστηρότερης θεμελίωσής τους.
Ενδεικτική προς αυτή την κατεύθυνση είναι η διαρκής προσπάθεια απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος, των παραλλήλων, που κατέληξε μετά από αιώνες στην γένεση των μη Ευκλείδειων γεωμετριών.
Θα έλεγε κανείς πως η προσπάθεια **απόδειξης** του αιτήματος της παραλληλίας έπαιξε έναν προωθητικό ρόλο στα μαθηματικά και την επιστήμη γενικότερα όπως είχαν παίξει η *πρώτη μεγάλη κρίση* με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, τα παράδοξα του Ζήνωνα και η προσπάθεια απάντησης, **λογικής εξήγησης**.

[28] Ivor Thomas Dictionary of Scientific Biografy, vol. IV, Charls Scribner's sons, New York 1975, sel.. 415.

Μπορεί οι ανακαλύψεις στα μαθηματικά να γίνονταν με διάφορους τρόπους και με διάφορα ερεθίσματα όπως θα δούμε στη συνέχεια αλλά οι προσπάθειες πάντα συνέτειναν στην όλο και αυστηρότερη θεμελίωση και απόδειξη. Οι εξηγήσεις για αυτό μπορούν να δοθούν στη βάση της ανθρώπινης αναζήτησης της αλήθειας και της γνώσης.

Ότι δηλαδή σωστό είναι μόνο το αυστηρά θεμελιωμένο και αποδεδειγμένο ώστε να μην επιδέχεται καμία αμφισβήτηση και ότι η διαχρονικότητα της ισχύος του είναι ανάλογη της αυστηρότητας της απόδειξής του.

Στα μαθηματικά υπάρχει αλήθεια επειδή είναι αυστηρά. Και η αλήθεια είναι θεϊκή. "Ο Θεός αεί γεωμετρεί" λέει ο Πλάτων.[29]

Η σύνδεση των μαθηματικών με τη φιλοσοφία, τη λογική τις μεθόδους αναζήτησης της αλήθειας ήταν στενή, ιδιαίτερα στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, στο Θαλή, τους Πυθαγόρειους, τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη κ.α.

Η προσπάθεια αυτή συνεχίστηκε όλους τους κατοπινούς αιώνες με μετατοπιζόμενο το κέντρο της ανάλογα με τις γεωπολιτικές, οικονομικές, πολιτισμικές συνθήκες, της κάθε ιστορικής περιόδου.

Μετά την τεράστια πρόοδο που συντελέστηκε στα Μαθηματικά κατά τον 17^{ο}, 18^{ο}, 19^{ο} και 20^{ο} αιώνα, φτάνουμε στο αποκορύφωμα της σχέσης μαθηματικών και λογικής.

Επιγραμματικά θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τις σχολές όπως έχουν καταγραφεί με βάση αυτό το χαρακτηριστικό, τη σχέση δηλαδή μαθηματικών λογικής.

Δεν θα αναφερθούμε στα διάφορα φιλοσοφικά ρεύματα και θεωρίες που, με όποια κατάταξη κι αν ακολουθήσει κανείς (όπως λ.χ. ιδεαλιστές, ρεαλιστές, εμπειριστές, υλιστές, κλπ), επηρέασαν και τον τρόπο σκέψης στα μαθηματικά ή γενίκευσαν με την δική τους φιλοσοφία, τα αποτελέσματα των μαθηματικών.

Θα αναφερθούμε μόνο σ' αυτές τις απόψεις που σχετίζονται άμεσα με την σχέση των μαθηματικών με τη λογική σκέψη και την θεμελίωσή τους.

---

[29] B. L. van der Waerden, Η αφύπνιση της επιστήμης, σελ.228

Υπήρξε μια μακρά περίοδος κατά την οποία μεγάλος αριθμός φιλοσόφων, διανοητών και επιστημόνων συνέβαλαν στην εξέλιξη της λογικής και των μαθηματικών.

Στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα, τα λογικά ή συνολοθεωρητικά παράδοξα, όπως τα παράδοξα του Ζήνωνα στην αρχαιότητα, πυροδότησαν νέες λογικο-μαθηματικές συζητήσεις με την νέα κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών που επέφεραν.

Το αποτέλεσμα της αναζήτησης αυτής ήταν η εμφάνιση **τριών βασικών σχολών, των Λογικιστών, των Φορμαλιστών και των Ιντουϊσιονιστών.**

Οι δύο πρώτες σχολές με δεδομένο και αδιαμφισβήτητο τον τρόπο δημιουργίας των μαθηματικών και την εν γένει μαθηματική δραστηριότητα, προσπάθησαν να τα θεμελιώσουν σε πιο ασφαλείς βάσεις από λογική και μαθηματική άποψη.

Οι **Λογικιστές** αναζήτησαν αυτή τη βάση στο πλαίσιο της λογικής και οι **Φορμαλιστές** στην απόδειξη της συνέπειας των συνθετότερων μαθηματικών αξιωματικών συστημάτων από βασικές και κοινές μαθηματικές αλήθειες όπως οι φυσικοί αριθμοί. (Αναπολιτάνος 1985)[30]

«Η φιλοσοφία των μαθηματικών αναπτύχθηκε από τη διαπλοκή των θεωριών, δηλαδή το γόνιμο κριτικό διάλογό τους. Οι τρεις αρχικές σχολές διατύπωσαν τα μεγάλα προγράμματα θεμελίωσης - του λογικισμού, του ιντουϊσιονισμού και του φορμαλισμού - και η κατοπινή έρευνα έδειξε ότι μεγαλύτερη σπουδαιότητα έχει ο διαχωρισμός ανάμεσα σε ρεαλιστικά (πλατωνιστικά) και σε κατασκευαστικά μαθηματικά. Σήμερα οι έρευνες συγκλίνουν στα βασικά προβλήματα που σκιαγραφήσαμε στις προηγούμενες σελίδες· κατά τον GÖDEL τα δυο κυριότερα αφορούν τη δυνατότητα ορισμού (οριστότητα) και την αποδειξιμότητα με απόλυτο τρόπο, δηλ. ανεξάρτητα από συγκεκριμένες μαθηματικές γλώσσες». (Χριστοδουλίδης 1993)[31]

Ας δούμε επιγραμματικά τις τρεις σχολές.

---

[30] Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Νεφέλη, Αθήνα 1985

[31] Παύλος Χριστοδουλίδης, Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Πνευματικός, Αθήνα 1993, σελ. 33-34

Λογικισμός (Gottlob Frege, Bertrand Russell)

Ο Λογικισμός έχει **Αριστοτελικές** καταβολές - αυτός πρώτος έθεσε τους κανόνες της λογικής - αλλά όσον αφορά στα μαθηματικά, ως φιλοσοφική θέση έλκει την καταγωγή του από τον **Leibniz**.

Ο **Leibniz** πίστευε στην πρωτοκαθεδρία της λογικής προέκταση της οποίας θεωρούσε τα μαθηματικά.

Η πρότασή του για μια άλγεβρα της λογικής εξετάστηκε εκ νέου τον δέκατο ένατο αιώνα κι έπαιξε, πράγματι, ένα πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά του περασμένου αιώνα.(Boyer- Merzbach, 1968)

Ο **Frege** (1848-1925) συνέχισε τις εργασίες των **Bool, De Morgan, Peano** και **Peirce.**

Έτσι προς τα τέλη του 19^{ου} αιώνα συντελέστηκε μια βαθιά αλλαγή στην παραγωγική λογική, με την αξιωματική κατασκευή της λογικής, με την αναγνώριση της σημασίας της μαθηματικής λογικής για τα μαθηματικά και την εφαρμογή της στα προβλήματα θεμελίωσης της αριθμητικής και της θεωρίας συνόλων.

Την ανεκπλήρωτη επιδίωξη του Leibniz για τη ενοποίηση της λογικής και των μαθητικών προσπάθησαν να την υλοποιήσουν με την δική τους θεμελίωση ο Frege στο βιβλίο του Die Grundlagen der Arithmetik (Τα Θεμέλια της Αριθμητικής) και στη συνέχεια ο Russell ο οποίος σε συνεργασία με τον Whitehead έγραψε τα Principia Mathematica.

Η προσπάθειά τους είναι απαλλαγμένη από τις αδυναμίες του Λογικισμού του Leibniz. Οι δικές τους αδυναμίες, ο δικός απραγματοποίητος στόχος ήταν η με καθαρά λογικά μέσα αναγωγή των μαθηματικών αντικειμένων, φυσικών αριθμών κλπ, σε καθαρά λογικές κατηγορίες. (Αναπολιτάνος, 1985)

Οι εργασίες του **Frege,** αρχικά με το έργο του *Ο λογισμός των Εννοιών*, στη συνέχεια με *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής* και οι δυσκολίες που προέκυψαν, ιδιαίτερα μετά το παράδοξο του Russell (1901), έδωσαν το έναυσμα για την σύγχρονη Θεωρία της Μαθηματικής Απόδειξης.

Ο Russell (1872-1970) με τη συστηματοποίηση και ανάπτυξη της παραγωγικής- αξιωματικής λογικής, προσπάθησε να πραγματοποιήσει λογική θεμελίωση των μαθηματικών και ιδιαίτερα της μαθηματικής ανάλυσης.

Φορμαλισμός (David Hilbert)

Η αξιωματική θεμελίωση του **Hilbert,**παρουσιάστηκε στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* (Grundlagen der Geometrie) το 1899.

Ο προσανατολισμός του **HILBERT** ήταν τα μαθηματικά να γίνουν πιο **απτά,** αλλά ανεξάρτητα από την οντολογική υπόσταση των βασικών εννοιών τους, τα αξιώματά τους να περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των **όντων,** οι αρχικοί τους όροι και αξιώματα να παράγουν νέους ορισμούς και νέες προτάσεις με βάση τους κανόνες της τυπικής μαθηματικής λογικής, κάτι που προσπάθησε να υλοποιήσει αναφερόμενος:

1.Στα **περατοκρατικά μαθηματικά**

2.Στο **τυπικό αξιωματικό σύστημα** για την περιγραφή των **απειροκρατικών μαθηματικών**.

3.Στην δια μέσου της **σύνταξης** εξασφάλιση της **συνέπειας**.

4.Στην αναγωγή των πάντων στη συνέπεια της αριθμητικής.

Κατά τον HILBERT στην επιλογή των αξιωμάτων της γεωμετρίας πρέπει να τηρούνται οι επόμενες γενικές αρχές. [32]

1.Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι απαλλαγμένο αντιφάσεων.

2.Οι προτάσεις του συστήματος πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

3.Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι πλήρες.[33]

---

[32] *Το ενδιαφέρον του **HILBERT** συγκεντρώθηκε στις προτάσεις. Δεν ασχολήθηκε πολύ με τη μείωση στο ελάχιστο του αριθμού των πρωταρχικών όρων, τους οποίους άλλωστε ενσωμάτωσε στις προτάσεις χωρίς να τους διατυπώσει ξεχωριστά και με συστηματικό τρόπο.*

Δεν αρκέστηκε απλώς στο να αποσπάσει τα αξιώματα, πολλά από τα οποία παρέμεναν σιωπηρά και να τα απαριθμήσει: Τα χώρισε, ανάλογα με τις θεμελιώδεις έννοιες που χρησιμοποιούν, σε πέντε ομάδες και φρόντισε να ορίσει και να περιγράψει επακριβώς την περιοχή των θεωρημάτων που προσδιορίζει κάθε μια από τις ομάδες αυτές ή κάθε συνδυασμός τους. (Robert Blanché: ***αξιωματική μέθοδος***, συλλογή Θεαίτητος, εκδόσεις ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ, ΑΘΗΝΑ, σελ. 55)

[33] *Το Αξιωματικό Σύστημα του HILBERT περιλαμβάνει πέντε ομάδες αξιωμάτων.*

I. Αξιώματα Σύνδεσης (8)

II. Αξιώματα διάταξης (4)

III Αξιώματα Ισότητας (5)

IV. Αξίωμα παραλληλίας

V. Αξιώματα συνέχειας (2)

Παρατηρήσεις στην αξιωματική θεμελίωση του HILBERT[34]

Ο **HILBERT** επεδίωξε **την μη αντιφατικότητα** του αξιωματικού του συστήματος οικοδομώντας μια αριθμητική ερμηνεία του με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε αντίφαση που παρουσιαζόταν στο σύστημά του να αντανακλάται και σ' αυτή. Έτσι έχοντας ως δεδομένη τη συνέπεια της αριθμητικής ο τρόπος αυτός εγγυάται και τη συνέπεια του αξιωματικού του συστήματος. (R. Blanché κα)

Η **ανεξαρτησία** ενός αξιώματος αποδεικνύεται με τη δυνατότητα να οικοδομήσουμε ένα συνεπές σύστημα στο οποίο δεν περιλαμβάνεται αυτό το αξίωμα. Οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες επιβεβαιώνουν την ανεξαρτησία του αξιώματος των παραλλήλων. Με τον ίδιο τρόπο ο HILBERT οικοδομώντας μια μη αρχιμήδεια γεωμετρία, αποδεικνύει την ανεξαρτησία των αξιωμάτων της συνέχειας.

Η **ανεξαρτησία** και η **μη αντιφατικότητα** που επεδίωξε ο HILBERT όπως και η κάλυψη των ατελειών της Ευκλείδειας γεωμετρίας επετεύχθη.

Όμως η **πληρότητα** του αξιωματικού συστήματος, όπως και κάθε αξιωματικού συστήματος όπως αποδείχτηκε από τον **GÖDEL** (*Για τις τυπικά μη αποκρίσιμες προτάσεις των Principia Mathematica και των σχετικών συστημάτων, 1931*), δεν είναι δυνατόν να υπάρξει στα πλαίσιά του. **Δεν είναι δηλαδή δυνατόν στα πλαίσια του ίδιου του αξιωματικού συστήματος να αποδειχθεί για κάθε πρόταση η αλήθεια της ίδιας ή της άρνησής της.** Πράγμα που απέδειξε για μια τόσο αυστηρή γλώσσα όσο είναι η αριθμητική. Με *Χιλμπερτιανή αυστηρότητα* όπως έχει λεχθεί.

Σύμφωνα με τον **Tarsky** : ***Η αλήθεια δεν ορίζεται μέσα στο ίδιο σύστημα.***

Η θεμελίωση του **HILBERT,** η οποία θεωρήθηκε το πρότυπο του **φορμαλισμού** για τα μαθηματικά, δέχτηκε, κατ' αυτήν την έννοια, πλήγμα.

Όμως ούτε ο HILBERT είχε ως αφετηρία τον φορμαλισμό αλλά την ολοκληρωμένη θεμελίωση της Γεωμετρίας ούτε ο GÖDEL κατέρριψε την ύπαρξη κάθε αλήθειας αλλά τον «αυτοέλεγχό της».[35]

---

[34] Τα αξιώματα στην κατά **HILBERT** θεμελίωση της γεωμετρίας όπως βλέπουμε είναι συνολικά 20, πολύ περισσότερα από του Ευκλείδη και είναι βέβαιο ότι χρειάζονται όλα.

[35] Σύμφωνα με την άποψη του HINTIKKA, όπως θα δούμε στο κεφ. 4, το θέμα της μη πληρότητας αφορά μόνο την σημασιολογική πληρότητα.

Ιντουϊσιονισμός (L. E. J. Brauwer)

Οι Ιντουϊσιονιστές (L. E. J. Brouwer, A. Heyting, κ.α) προβάλλουν την κατασκευαστική θεμελίωση των μαθηματικών, μη αποδεχόμενοι την αρχή της του τρίτου αποκλίσεως.

Με τα λόγια του ίδιου του εμπνευστή και πρωτεργάτη τους:

Η … άποψη ότι δεν υπάρχουν μη-βιωμένες αλήθειες και ότι η λογική δεν είναι το απολύτως αξιόπιστο εργαλείο προς ανακάλυψη των αληθειών, όσον αφορά τα μαθηματικά έχει βρει αποδοχή πολύ αργότερα από ό,τι όσον αφορά την καθημερινή ζωή και την επιστήμη. Τα μαθηματικά, αυστηρώς κρινόμενα από αυτήν την άποψη, περιλαμβάνοντας την εξαγωγή θεωρημάτων αποκλειστικά μέσω εαυτοσκοπικής κατασκευής, λέγονται ιντουϊσιονιστικά μαθηματικά. Σε πολλές περιπτώσεις διαφέρουν από τα κλασικά μαθηματικά. Καταρχήν, επειδή τα κλασικά μαθηματικά χρησιμοποιούν τη λογική για τη παραγωγή θεωρημάτων, πιστεύουν στην ύπαρξη άγνωστων αληθειών, και συγκεκριμένα ισχύει η αρχή του εξαιρουμένου τρίτου, που περιγράφει ότι κάθε μαθηματικός ισχυρισμός (π.χ. κάθε αντιστοίχηση μιας μαθηματικής ιδιότητας σε μια μαθηματική οντότητα) είτε είναι αληθής είτε δεν είναι αληθής.[36] (**Brauwer**, **1948**)[37]

Βασικό σημείο στο οποίο εστίασε το ενδιαφέρον του ο Brouwer ήταν η εξέταση της φύσης των νοητών μαθηματικών **κατασκευών** με συνέπεια την υποβάθμιση του ερωτήματος περί της φύσης των νοητών μαθηματικών **αντικειμένων**.[38] Από δω πηγάζει και ο όρος **«Κατασκευαστικά Μαθηματικά»**.

---

[36] L.E.J. BROUWER, Consciousness, Philosophy and Mathematics, 10° Διεθνές Συνέδριο Φιλοσοφίας, Άμστερνταμ, 1948, Πρακτικά I, Δεσμίδα II (Άμστερνταμ: Εκδοτικός Οίκος North-Holland, 1949), σελ. 1243-9.

[37] Ο Ολλανδός Μαθηματικός **L. E. J. Brouwer** (1881 - 1966), είναι ιδρυτής του **Μαθηματικού Ιντουισιονισμού** ο οποίος ως σχολή Φιλοσοφίας των Μαθηματικών εμφανίστηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Ο Brouwer, με σημαντική προσφορά στην τοπολογία, άσκησε κριτική στα θεμέλια των μαθηματικών και προχώρησε στην ανασυγκρότησή τους σε νέες αρχές και με νέα πρακτική. Οι βασικές ιδέες του διατυπώνονται στην διατριβή του που έχει τίτλο «Πάνω στα θεμέλια της επιστήμης» (1907) και στην εργασία του με τίτλο «Γνώση βούληση και γλώσσα» (1913).

[38] Δ. Αναπολιτάνος: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΦΙΛΙΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΣΕΛ. 272.

Κριτήριο της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων θα πρέπει να είναι η νοητή παραγωγή τους με διαδικασίες κατασκευαστικά ελεγχόμενες.

Τα θεωρήματα της λογικής είναι μαθηματικά θεωρήματα. Η λογική δεν θεμελιώνει τα μαθηματικά, αντίθετα, από εννοιολογική άποψη, είναι ένα πολύπλοκο και λεπτό τμήμα των μαθηματικών.

Αν τα μαθηματικά αποτελούνται από νοητικές κατασκευές, τότε πρέπει κάθε μαθηματική πρόταση να είναι βεβαίωση σχετική με νοητικές κατασκευές. Με μεγαλύτερη ακρίβεια: κάθε μαθηματική πρόταση είναι της μορφής: Έγινε μια κατασκευή με τις ακόλουθες ιδιότητες: …[39](Heyting, 1956)

Με τη διευκρίνιση ότι, *Ο Ιντουϊσιονισμός δεν είναι ένα φιλοσοφικό σύστημα στο ίδιο επίπεδο όπως ο ρεαλισμός, ο ιδεαλισμός, ή ο υπαρξισμός. Η μόνη φιλοσοφική θέση του μαθηματικού ιντουϊσιονισμού είναι πως για την κατανόηση των μαθηματικών δεν χρειάζεται καμιά φιλοσοφία. Αντίθετα κάθε φιλοσοφία είναι εννοιολογικά πολύ πιο πολύπλοκη από τα μαθηματικά*[40]

Στοιχεία της φιλοσοφίας των Ιντουϊσιονιστών είναι:

- Η αυτονομία της μαθηματικής δραστηριότητας από συγκεκριμένα γλωσσικά συστήματα και από την τυπική λογική που αυτά συνεπάγονται.
- Ότι Η θεμελιώδης μαθηματική δραστηριότητα είναι προγλωσσική και προλογική.
- Η μη αποδοχή της λογικής αρχής «της απόκλεισης του τρίτου».
- Η προτεραιότητα της θεμελιώδους διακριτής χρονικής **εποπτείας (ενόρασης – διαίσθησης)**. Από αυτό άλλωστε πηγάζει και ο όρος **«Ιντουϊσιονισμός»** που χαρακτηρίζει ολόκληρο το ρεύμα.
- Η μη αποδοχή της ύπαρξης αντικειμενοποιημένων άπειρων ολοτήτων.

Δύο βασικές αρχές-πράξεις του Ιντουϊσιονισμού λοιπόν, σύμφωνα με τον ίδιο τον Brouwer είναι οι εξής:

➢ Η πρώτη πράξη του Ιντουϊσιονισμού διαχωρίζει τα μαθηματικά από τη γλώσσα των μαθηματικών.[41]

Άρα ταξινομώντας τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της **εποπτείας (ενόρασης) των μαθηματικών** θα λέγαμε ότι:

α)Είναι νοητική ενέργεια

β)Έχει χαρακτήρα a priori αλήθειας

---

[39] «Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών», επιμέλεια Π. Χριστοδουλίδη, Α. HEYTING: ΟΙ ΙΝΤΟΥΙΣΙΟΝΙΣΤΙΚΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΦΎΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, σελ.271.

[40] ο.π. σελ. 263

[41] «Όπως κάθε άλλη χρήση της γλώσσας, η ανακοίνωση των μαθηματικών δεν είναι απαλλαγμένη από την παρανόηση», ο.π. σελ.273. Και,
«…οι νοητικές κατασκευές δεν μπορούν να αποδοθούν με ακρίβεια από τη γλώσσα, δεύτερον, η συνηθισμένη ερμηνεία του τυπικού συστήματος δεν είναι νοητική κατασκευή», ο.π. σελ274.

γ)Είναι ανεξάρτητη από γλώσσα, έχει όπως είπαμε προγλωσσικό χαρακτήρα
δ)Έχει αντικειμενικό χαρακτήρα.

- Η δεύτερη πράξη του Ιντουϊσιονισμού…αναγνωρίζει τη δυνατότητα δημιουργίας νέων μαθηματικών οντοτήτων:

Πρώτον με τη μορφή άπειρα συνεχιζόμενων ακολουθιών των οποίων οι όροι επιλέγονται περισσότερο ή λιγότερο ελεύθερα από προηγούμενα αποκτημένες μαθηματικές οντότητες

Δεύτερον με τη μορφή μαθηματικών Ειδών[42], δηλαδή ιδιοτήτων ήδη δημιουργημένων μαθηματικών οντοτήτων που ικανοποιούν τη συνθήκη ότι, αν ισχύουν για κάποια μαθηματική οντότητα, ισχύουν επίσης για όλες τις μαθηματικές οντότητες που έχουν ορισθεί σαν ίσες μ' αυτήν, με δεδομένο πως οι σχέσεις ισότητας πρέπει να είναι αυτοπαθείς, αντισυμμετρικές και μεταβατικές. ήδη δημιουργημένες μαθηματικές οντότητες, που ικανοποιούν τη συγκεκριμένη ιδιότητα καλούνται στοιχεία του είδους.

Η έννοια του φυσικού αριθμού αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο πάνω στον οποίο στηρίζονται τα ιντουϊσιονιστικά μαθηματικά.[43]

Η αρχή της επαγωγής είναι επίσης ένα συγκεκριμένο θεώρημα των ιντουϊσιονιστικών μαθηματικών.

Η έννοια του συνόλου έχει αντικατασταθεί με την έννοια της ιδιότητας την οποία τα διάφορα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να έχουν.

Το σύνολο των Πραγματικών αριθμών, το συνεχές ορίζεται ως η ιδιότητα να είσαι πραγματικός αριθμός. Όπου οι ρητοί στα ιντουϊσιονιστικά μαθηματικά κατασκευάζονται όπως και στα κλασικά μαθηματικά από τους φυσικούς, ενώ η βασική ακολουθία (Caushy) δεν έχει συνολοθεωρητικό χαρακτήρα αλλά την έννοια μιας άπειρης ακολουθίας ως μιας επαλληλίας αντικειμένων κατά την οποία το μόνο που ενδιαφέρει είναι η δυνατότητα συνέχισής της (κατασκευαστικά όπως η αρίθμηση από ότι αντιλαμβανόμαστε).

Η απάντηση των Ιντουϊσιονιστικών Μαθηματικών στα συνολοθεωρητικά παράδοξα των αρχών του 20ου αιώνα, τα οποία με την κρίση που προκάλεσαν στα θεμέλια των μαθηματικών αποτέλεσαν γενεσιουργό τους αιτία, βασίζεται στην άποψή τους ότι ένα αντικείμενο το οποίο σαν ολότητα περιγράφεται από μια ιδιότητα θα πρέπει να περιλαμβάνει ήδη κατασκευασμένες οντότητες. Άρα ένα αντικείμενο που περιγράφεται ως ολότητα από μια ιδιότητα, δεν μπορεί να ανήκει στην ίδια την ολότητα

[42] «…οποιαδήποτε ιδιότητα μαθηματικών οντοτήτων ορίζει ένα σύνολο. Ο Brouwer ονομάζει Είδος ένα τέτοιο σύνολο…Η θεωρία των Ειδών είναι αυστηρά κατηγορηματική με την έννοια ότι τα στοιχεία ενός Είδους πρέπει να έχουν οριστεί ανεξάρτητα από το ίδιο το Είδος», ο.π. σελ. 270.

[43] «Δεν έχει σημασία αυτό που απαριθμείται, σημασία έχει η ίδια η διεργασία της αρίθμησης, η νοητική δραστηριότητα. Κατασκευάζουμε νοητικά τους φυσικούς αριθμούς, δημιουργώντας μια οντότητα, μια άλλη, ακόμη μια κτλ.» ο.π. σελ. 265.

(αυτοαναφορά) αφού αυτή δεν έχει ακόμα κατασκευαστεί την στιγμή της δράσης της ιδιότητας στα δεδομένα μαθηματικά αντικείμενα.

Καταλήγει με το ότι *ο Ιντουϊσιονισμός από τη μια μεριά εκλεπτύνει την λογική χωρίς από την άλλη να την δέχεται ως την πηγή της αλήθειας και ότι εκτός από εσωτερική αρχιτεκτονική των μαθηματικών έχει, με την έρευνα στα θεμέλιά τους και την αναζήτηση, σπουδαίες απελευθερωτικές επιπτώσεις ακόμη και σε μη μαθηματικά πεδία της διανόησης.*

M. C. Escher, Moebius band II

2. Η Λογική είναι αναγκαία, αλλά είναι και ικανή συνθήκη για τα μαθηματικά; Αρκεί η Λογική;

Μέσα από καθαρά λογικές σκέψεις δεν μπορούμε να αποκτήσουμε απολύτως καμία νέα γνώση για τον φυσικό κόσμο.

Albert Einstein

Αν προσπαθούσε να συνοψίσει κανείς την πορεία της σχέσης των μαθηματικών με την λογική θα κατέγραφε ίσως, σύμφωνα με όσα έχουμε παραθέσει προηγουμένως, την εξής διαδρομή:

Ένα **πρώτο στάδιο** εμπειρικής μαθηματικής δραστηριότητας και ανακάλυψης κατά το οποίο τα μαθηματικά αποτελέσματα αφορούσαν στους τρόπους υπολογισμού και πρακτικής επίλυσης προβλημάτων που απασχολούσαν τις ανεπτυγμένες κοινωνίες εκείνης της ιστορικής περιόδου.

Ένα **δεύτερο στάδιο** που αφορά στην εισαγωγή της απόδειξης και την σύζευξη της αφηρημένης θεωρητικής, λογικής σκέψης με τα μαθηματικά, την αξιωματική θεμελίωση.

Ένα **τρίτο στάδιο** το οποίο σχετίζεται με την όλο και στενότερη σύνδεση των μαθηματικών με τη λογική, με αποκορύφωμα τις προσπάθειες πλήρους ταύτισής τους έως τις αρχές του εικοστού αιώνα.

Το **σημερινό στάδιο** θα λέγαμε ότι συνδέεται με μια προσπάθεια θεώρησης των μαθηματικών σε ευρύτερα πλαίσια και από διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Στον πυρήνα αυτής της θεώρησής τους βρίσκεται φυσικά πάντα η λογική σκέψη. Ωστόσο επισημαίνεται έντονα ο ρόλος της διαίσθησης, συνεκτιμάται ο ρόλος και η σημασία του πολιτισμικού πλαισίου, διερευνάται ο ρόλος και η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή,.

Αν και για την συντριπτική πλειοψηφία έχουν ταυτιστεί τα μαθηματικά με την λογική σκέψη και θεωρείται δεδομένο ότι δεν μπορούν να διαχωριστούν τα μαθηματικά από την παραγωγική απόδειξη τέθηκε έντονα το θέμα αν τα μαθηματικά είναι μόνο η παραγωγική απόδειξη, αν για τα μαθηματικά αρκεί η λογική.

Η πλήρης ταύτιση των μαθηματικών με τη λογική αμφισβητήθηκε όπως είδαμε από τα παράδοξα που προκύψαν, από το θεώρημα της μη πληρότητας αλλά

και από την μελέτη του τρόπου με τον οποίο σκέπτονται οι μαθηματικοί και οι φυσικοί, από τον αναστοχασμό πάνω στους τρόπους με τους οποίους έγιναν διάφορες ανακαλύψεις ή αποδείξεις. Τέθηκαν επίσης εκ νέου πιο άμεσα και πιο συστηματικά τα ζητήματα του πολιτισμικού πλαισίου.

Η μια ή η άλλη στάση στα θέματα αυτά έχει, όπως είναι φυσικό, και τις αντίστοιχες **παιδαγωγικές προεκτάσεις,** ιδιαίτερα κατά την περίοδο των *Νέων Μαθηματικών* και αμέσως μετά.

Μαθηματική σκέψη σημαίνει ικανότητα για παραγωγικό συλλογισμό, αφαιρετική σκέψη, αναλυτικές και συνθετικές ικανότητες, διαίσθηση, φαντασία, γνώση και ανάπτυξη αναπαραστασιακών συστημάτων, ικανότητα για γενίκευση και σύνθεση και μαθηματική αφαίρεση[44].

Κατά τον Hadamard "η λογική επικυρώνει την κατάκτηση της διαίσθησης".

Αυτό δεν σημαίνει ότι τα Μαθηματικά μπορούν να νοηθούν χωρίς αυστηρές αποδείξεις. Η αξία των Μαθηματικών βρίσκεται στην παραγωγική απόδειξη. Εκείνο που πρέπει να δούμε είναι ότι η μαθηματική δραστηριότητα δεν μπορεί να συμπεριληφθεί μόνο σε ένα παραγωγικό σχήμα[45]*.(Κυνηγός Χ.)*

Ένας βασικός εκφραστής αυτής της άποψης ο **Imre Lakatos** σημειώνει:

Στο παραγωγικό στυλ, όλες οι προτάσεις είναι αληθείς και όλοι οι ισχυρισμοί επιβεβαιώνονται. Τα μαθηματικά παρουσιάζονται σαν ένα ολοένα αυξανόμενο πλήθος από αιώνιες και αμετακίνητες αλήθειες. Τα αντιπαραδείγματα, οι αναιρέσεις, οι κριτικές, δεν εμφανίζονται καθόλου. Αυτό το είδος της αυθεντίας είναι καθησυχαστικό… Το παραγωγικό στυλ εξαφανίζει τη μάχη εξαφανίζει την περιπέτεια. Ολόκληρη η ιστορία χάνεται, οι διαδοχικές προσπάθειες διατύπωσης των θεωρημάτων στην διάρκεια των προσπαθειών για απόδειξη χάνονται και αυτές, ενώ το τελικό αποτέλεσμα ορθώνεται σαν αλάθητο και ιερό… Δεν έχει ακόμη συνειδητοποιηθεί αρκετά το ότι η σημερινή επιστημονική και μαθηματική εκπαίδευση είναι ένα ζεστό κρεβάτι αυθεντίας αλλά και ο χειρότερος εχθρός της ανεξαρτησίας και της κριτικής σκέψης[46].

Η σύλληψη, η ανακάλυψη της λύσης ενός προβλήματος, ενός θέματος που μας απασχολεί στα μαθηματικά, απαιτεί πολλές φορές **ολιστική θέαση**.

---

[44] Χ. Κυνηγός, «Μαθηματική Εκπαίδευση», Σημειώσεις,. σελ. 21

[45] Χ. Κυνηγός, ο.π. σελ. 27

[46] Imre Lakatos: Αποδείξεις και Ανασκευές, Τροχαλία, Αθήνα 1996,

Απαιτεί γενικότερη αντιμετώπιση με την επιστράτευση διαφορετικών γνώσεων και μεθόδων. Δεν μπορεί να προκύψει μόνο ως λογική συνέπεια ή απλή προέκταση των προϋπαρχουσών προτάσεων. Πράγμα το οποίο θα οδηγούσε κατά κάποιον τρόπο σε μια «γραμμική» αντίληψη για την ανάπτυξη της σκέψης, χωρίς αλληλεπιδράσεις.

Αυτό θα μπορούσε να το κάνει και ένας εξελιγμένος υπολογιστής σύμφωνα με όσα έχουν γραφτεί, σε πολλές σχετικές αναφορές, για την σκεπτόμενη μηχανή, τη μηχανή Turing.

Όμως, πολλές φορές η λύση ενός προβλήματος ή η απόδειξη μιας πρότασης απαιτεί να ανοίξουμε το δρόμο της λύσης *μόνοι μας*, με φαντασία, με ανασκευές της πορείας μας, πράγμα που δεν μπορεί προς το παρόν να κάνει ο υπολογιστής.

Η μηχανή δεν διαθέτει την «ανθρώπινη λογική» και διαίσθηση ώστε όταν της δίνουμε μια εσφαλμένη εντολή να τη διορθώνει. Θα πρέπει κανείς να επικοινωνεί μαζί της με μια γλώσσα της οποίας τα βασικά χαρακτηριστικά είναι η φορμαλιστική διατύπωση και η πλήρης σαφήνεια. (Kolmogorov, 1971)

Ανασκευή ή αλλαγή πορείας θα μπορούσε να γίνει μόνο αν ο υπολογιστής είχε τη δυνατότητα να διορθώνει το πρόγραμμά του μόνος του, να κάνει ανάδραση. Η μη δυνατότητα ανάδρασης οφείλεται κατά τον A. Connes και στην απουσία συναισθημάτων.

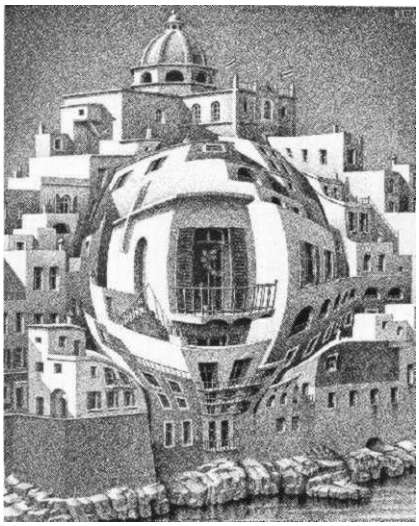
Αισθημάτων απογοήτευσης όταν κάνει λάθη και ικανοποίησης όταν προχωράει με μια προοπτική, όταν ανακαλύπτει μια συντομότερη και αποτελεσματική μέθοδο, που θα του επέτρεπαν να τα βγάζει πέρα μόνος του. Ακόμη και σε μαθηματικούς που λειτουργούν τελείως ορθολογικά παρατηρείται μια απουσία ιεραρχιών ως προς την αξία αυτού που μελετούν ή αποδεικνύουν πράγμα που επιτρέπει το πέρασμα σε ένα δεύτερο επίπεδο. Ακόμη ***στον ανθρώπινο εγκέφαλο η σκέψη οικοδομείται ταυτόχρονα με τον ίδιο τον εγκέφαλο, οι συνάψεις των νευρώνων κλπ, και σε άμεση αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του.*** (Connes, 1992)

Η τελευταία επισήμανση νομίζω ότι είναι καθοριστική για τον ανθρώπινο εγκέφαλο, αλλά και τις εκπαιδευτικές της συνέπειες.

Το Συμπέρασμα επομένως είναι ότι ένας προσανατολισμός προς τον ακραίο φορμαλισμό στην απόδειξη δεν αντανακλά την τρέχουσα μαθηματική πρακτική ή την τρέχουσα φιλοσοφία των μαθηματικών (Hanna).

Συνοψίζοντας, θα μπορούσε να πει κανείς, για την μεταβολή της άποψής μας για τον τρόπο δουλειάς στα μαθηματικά αυτό που ο **Eddington** έγραψε για τη μεταβολή της άποψής μας για το χώρο και το χρόνο:

« Ο χώρος δεν είναι ένα σύνολο σημείων το ένα κοντά στο άλλο· είναι ένα σύνολο αποστάσεων αλληλοσυνδεδεμένων».



M. C. Escher, Balconi

2.1 Ο ρόλος της διαίσθησης στα μαθηματικά

Allez en avant, et la foi vous viendra

Τραβήξτε μπροστά και η πίστη θα σας έρθει

(D' Alebert, 1717-1783)

Έτσι λέγεται ότι ο εγκυκλοπαιδιστής D' Alebert προσπαθούσε να ενθαρρύνει τους μαθηματικούς της εποχής του που δεν είχαν φτάσει τις εργασίες τους ακόμη σε έγκυρες αποδείξεις.

Αρχικά, απ' όλα αυτά έπεται ότι, αν θέλουμε να ακριβολογήσουμε , δεν υπάρχει σχεδόν καμία ανακάλυψη προερχόμενη καθαρά από τη λογική και μόνο. Η παρέμβαση της ενόρασης, που πηγάζει από το ασυνείδητο, είναι αναγκαία τουλάχιστον για την έναρξη της λογικής εργασίας.[47] *(Hadamard)*

Η διαίσθηση εκφράζει μια βαθιά ανάγκη της διανοητικής συμπεριφοράς μας κατά τη διάρκεια του συλλογισμού μας να στηριχθούμε σε αναπαραστάσεις και ιδέες που εμφανίζονται, υποκειμενικά, σαν βέβαιες, λογικά συγκροτημένες και σαφείς. (Fischbein 1987)

Βλέπουμε, στα δυο παραπάνω αποσπάσματα, ότι υπάρχει συμφωνία στο ότι ο συλλογισμός μας έχει ανάγκη να *στηριχτεί* αρχικά σε μια σκέψη που τη θεωρεί διαισθητικά ως την πιο σωστή για να αναπτυχθεί παραπέρα και να την ελέγξει με λογικές σκέψεις.

Αυτό δεν κάνουμε πολλές φορές λ.χ. στα προβλήματα γεωμετρικών τόπων όταν παίρνουμε κάποια χαρακτηριστικά σημεία για να διαισθανθούμε ποιος μπορεί να είναι ο γεωμετρικός τόπος; Ή στις κατασκευές;

Το ίδιο συμβαίνει και στη διδασκαλία όταν προτάσσουμε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano, Rolle, Μέσης Τιμής, κλπ, πριν προχωρήσουμε στην τυπική διατύπωσή τους.

Η θεμελίωση και η θεωρητική απόδειξη γίνεται με τους λογικούς κανόνες (τη λογική σκέψη) αλλά η επινόηση, όπως είπαμε, δεν γίνεται πάντα ως λογική συνέπεια, ως γραμμική ανάπτυξη της προϋπάρχουσας μαθηματικής θεωρίας, ως επέκταση και συνέχιση των λογικών συσχετίσεων που υπάρχουν.

---

[47] Jacques Hadamard, Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, σελ. 113-114

Ο **Stephen I. Brown** αναφέρει σχετικά:

Προσφάτως υπήρξαν σοβαρότερες απειλές στην άποψη της ανάπτυξης των μαθηματικών σαν ουσιαστικά μια λογικά παραγωγική εξέλιξη. Ο Lakatos (1976) στο φημισμένο του βιβλίο «Αποδείξεις και ανασκευές» μας δείχνει την εικονική αδυναμία, του να διατυπώσει κανείς ακόμα και σχετικά εύκολες εικασίες με οποιαδήποτε ακρίβεια, πόσο μάλλον να τις αποδείξει. Δείχνει ότι δεν είναι οι λογικές αποδείξεις των αποκαλούμενων θεωρημάτων που προάγουν τον κλάδο των μαθηματικών, αλλά η ενδεχόμενη παραγωγή αντιπαραδειγμάτων που συμβάλουν στο προχώρημά του. Τεκμηρίωσε το πώς η μαθηματική σκέψη δανείζεται σημαντικά στοιχεία από μια τροποποιημένη μορφή της εμπειρικής επιστημονικής έρευνας. Μόλις πρόσφατα εμφανίστηκαν σαν στοιχεία έρευνας, μέσα στην οποία εξερευνούνται φιλοσοφικά θέματα πάνω στη φύση των μαθηματικών, όχι μόνο το τι αποτελεί γνώση και απόδειξη αλλά και πως αυτές κωδικοποιούνται και εντάσσονται στην εκπαίδευση των μαθηματικών (βλ. Kitcher (1988), Tymoczko (1985,1986,1992,1993)).[48]

Αν λοιπόν η διαίσθηση, η φαντασία παίζουν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά πρέπει να ασκηθούν μέσα από τη μαθηματική εκπαίδευση.

Η θέση αυτή έχει διατυπωθεί από πολλούς μαθηματικούς με βάση την εμπειρία τους αλλά και τα ιστορικά πλέον γεγονότα των διαφόρων ανακαλύψεων, επινοήσεων και αποδείξεων.

Σίγουρα στον κόσμο των μαθηματικών η φαντασία καταλαμβάνει έναν μεγάλο χώρο. Μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά έγκεινται στο να εξασκεί κάποιος τη φαντασία του σε ένα πλαίσιο εξαιρετικά αυστηρό». (Lafforgue, 2005)[49]

Πολλές φορές η ανακάλυψη στα μαθηματικά, ιδιαίτερα η μεγάλη ανακάλυψη, απαιτούσε την υπέρβαση της υπάρχουσας γνώσης, την υπέρβαση του τρόπου σκέψης, της υπάρχουσας λογικής.

Αυτό έμοιαζε ως «ανατροπή» του υπάρχοντος λογικού πλαισίου, πράγμα που έκανε και τους ίδιους τους πρωτεργάτες να διστάζουν να ανακοινώσουν τα αποτελέσματά τους.

---

[48] Stephen I. Brown, Προς μια Ανθρωπιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, σελ. 1295

[49] Laurent Lafforgue, Συνέντευξη ΤΟ ΒΗΜΑ, Κυριακή 27.2.05 και διάλεξη στο ΜΜΑ.

Η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε ότι ο **Gauss** δεν δημοσιοποίησε τις ανακαλύψεις του στον τομέα αυτό *«φοβούμενος τις φωνές των Βοιωτών»*[50] εννοώντας μάλλον τον Κάντ. Πράγμα που αντανακλά την αδιαμφισβήτητη πίστη για τα ακλόνητα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η οποία θεωρούσε ότι κάθε αλλαγή αυτού του αξιωματικού πλαισίου είναι ανορθολογισμός.

*Η επινόηση των φανταστικών αριθμών από τον **Cardano** φαινόταν καθαρός παραλογισμός* (Connes, 1992)

Άλλες φορές ο τρόπος με τον οποίο ορισμένοι μαθηματικοί έκαναν τέτοιες ανακαλύψεις ή συνέλαβαν κάποιες ιδέες ή προχώρησαν σε κάποια κατεύθυνση προκαλούσαν έκπληξη ακόμα και σε κορυφαίους επιστήμονες του κλάδου.

Έχει λεχθεί για τον ορισμό και το θεώρημα του **Καραθεοδωρή**[51] για τα μετρήσιμα σύνολα ότι είναι ***γρίφος*** (Lakatos), ότι είναι μυστήριο πως το σκέφτηκε.

Πολλοί οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη και κατόπιν στην απόδειξη με την χρησιμοποίηση μεθόδων **ευρετικών** που δεν στηρίζονταν στην αυστηρή λογική ή είχαν προσεγγιστικό χαρακτήρα ή δανείζονταν μεθόδους από την φυσική και την μηχανική.

Κλασικά παραδείγματα αποτελούν οι μέθοδοι του **Αρχιμήδη**, όπως τις περιγράφει ο ίδιος (στο παλίμψηστο που ανακάλυψε ο Heiberg το 1906 στην Κωνσταντινούπολη) όπου: *Με λίγα λόγια χρησιμοποιούσε την Μηχανική του για να φτάσει στα Μαθηματικά του*[52]. (Bell)

Ανάλογα παραδείγματα συνιστούν οι μέθοδοι του **Νεύτωνα** και του **Leibnitz**.

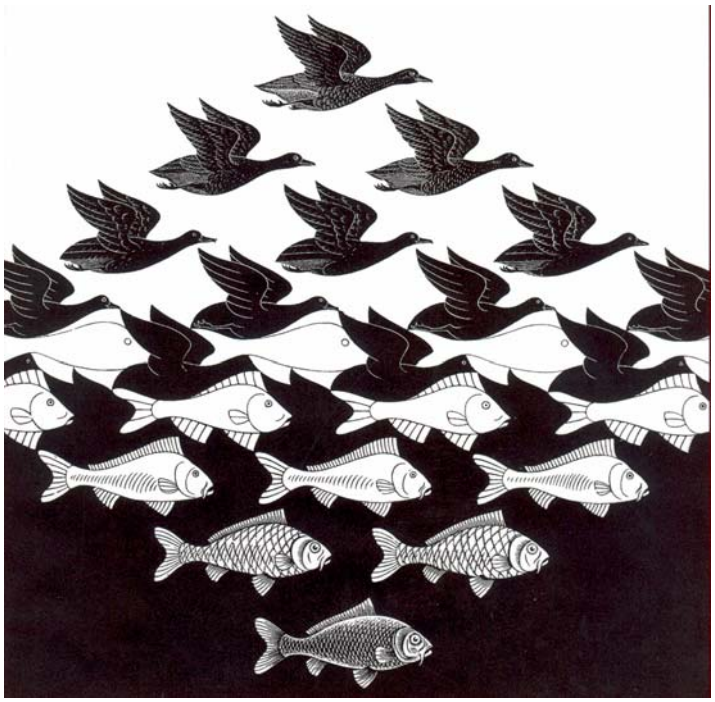
Ο τρόπος που τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν και κατανοήθηκαν απεικονίζεται πολύ ωραία στην ιστορία του διαφορικού λογισμού.(Kline, 1970)[53]

Τα **απειροστά** τα οποία χρησιμοποιεί η Μη Κανονική Ανάλυση (*Non Standard Analysis*). Δηλαδή την αφαιρετική σκέψη και διαδικασία, με έντονα διαισθητικά στοιχεία, κατά την οποία να θεωρείς αμελητέα τα απειροστά.

---

[50] Ε. Βασιλείου, Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας, Αθήνα 2003. Bell, Οι Μαθηματικοί, σ.386
[51] Βλέπε Γ. Κουμουλής- Σ. Νεγρεπόντης, ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ, Συμμετρία, Αθήνα 1991, σ.25
[52] E. T. BELL, *Οι μαθηματικοί, σελ 46*
[53] M. Kline, Λογική εναντίον Παιδαγωγικής, μετάφραση Δ. Χασάπης, Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 22, 1981.

Ο P.A.M. Dirac, *1977, διατύπωσε αυτή την άποψη με τον ακόλουθο τρόπο: Νομίζω ότι αν δεν είχα εκπαιδευτεί αρχικά ως μηχανικός, δεν θα είχα καμιά επιτυχία στη μετέπειτα δουλειά μου. Ήταν απόλυτα αναγκαίο να ξεφύγω από την άποψη ότι θα πρέπει να ασχοληθούμε μόνο με ακριβείς εξισώσεις και με αποτελέσματα που προκύπτουν λογικά από ακριβείς νόμους, που κάποιος δέχεται και πιστεύει σαν απόλυτες αλήθειες. Οι μηχανικοί ενδιαφέρονται για τις εξισώσεις που περιγράφουν σωστά τη φύση. Δεν τους ενδιαφέρει πως βγήκαν οι εξισώσεις… Η άποψη των μηχανικών με οδήγησε σε μια νέα προσέγγιση που την θεωρώ την καλύτερη που μπορούσα να είχα. Θέλουμε να περιγράψουμε τη φύση. Αναζητούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν καλύτερα τη φύση και το καλύτερο που μπορούμε να ελπίζουμε είναι προσεγγιστικές εξισώσεις. Θα πρέπει να συμβιβαστούμε με την ιδέα ότι θα πρέπει να εγκαταλείψουμε οριστικά την απόλυτη λογική και ακρίβεια.*



M. C. Escher, Sky and water I.

2.2 Τι σημαίνει διαισθητική σκέψη;

Έχω το συμπέρασμά μου αλλά δεν ξέρω ακόμα πώς να το βγάλω
Gauss

Πριν προχωρήσουμε όμως στην παράθεση των απόψεων και στην παραπέρα εξέταση του ρόλου της διαίσθησης στα μαθηματικά, θα προσπαθήσουμε να αποσαφηνίσουμε σύντομα το τι σημαίνει διαισθητική σκέψη.

ὀνομάτων ἐπίσκεψις... τί σημαίνει ἕκαστον;

Αρχικά, ο ίδιος ο όρος διαίσθηση χρησιμοποιείται με τρία συνώνυμα, με τρεις παραλλαγές στην Ελληνική γλώσσα: ***Διαίσθηση, ενόραση, εποπτεία***.
Κάθε μια παραλλαγή, ως συνώνυμη, χρωματίζει λίγο διαφορετικά την έννοια αυτή, πράγμα του οποίου γίνεται ιδιαίτερη χρήση κυρίως στις μεταφράσεις του όρου ***Intuition*** σε ανάλογα άρθρα και βιβλία.
Στα βασικά λεξικά αναφέρονται τα παρακάτω λήμματα για τις έννοιες αυτές.

Διαίσθηση:

1)(ψυχολ.) το να προαισθάνεται κανείς κάτι ορμεμφύτως,
2)(φιλοσ.) άμεση γνώση χωρίς την επέμβαση του λογικού (Λεξικό Ε. Κριαρά)
απροσδιόριστη γνώση αυτού που δεν μπορεί να αποδειχτεί με τη λογική ή αυτού που δεν υπάρχει ακόμη (Λεξικό Ιδρύματος Μανόλη Τριανταφυλλίδη)
άμεση αντίληψη χωρίς τη μεσολάβηση του λογικού (Λεξικό Πατάκη)
Η κατανόηση με το υποσυνείδητο χωρίς την επέμβαση του λογικού (Λεξικό Τεγόπουλου-Φυτράκη)
Η αντίληψη ή κατανόηση χωρίς τη συμβολή της λογικής ή των δεδομένων των αισθήσεων (Λεξικό Μπαμπινιώτη)

Ενόραση:

Σαφής και άμεση γνώση της αλήθειας χωρίς την μεσολάβηση της διάνοιας ή των αισθήσεων (Κριαράς)
Τρόπος γνώσης άμεσος χωρίς την παρέμβαση του λογικού, γνώση άμεση, ζωντανή, προσωπική, βιωματική. (Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη)
άμεση γνώση με το υποσυνείδητο (Τεγόπουλου-Φυτράκη)
(φιλοσοφικά) είδος απευθείας άμεσης γνώσης που επιτρέπει τη σύλληψη των αντικειμένων χωρίς την προσφυγή σε ενδιάμεσες (π.χ. συλλογιστικές διαδικασίες) (Λεξικό Μπαμπινιώτη)

Εποπτεία:

α) (φιλοσοφικά) η άμεση αντίληψη φυσικών ή ψυχικών φαινομένων

β) (ψυχολογικά) παράσταση αισθητού, η οποία αναπαράγεται με εξαιρετική σαφήνεια (Κριαράς)

Γνώση που προέρχεται από τις αισθήσεις, καθώς και η άρτια και καθαρή παράσταση (Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη)

η αντίληψη με τις αισθήσεις (Τεγόπουλου-Φυτράκη)

(ψυχ/κα) ακριβής και έντονη παράσταση, (φιλοσ/κα) η άμεση αντίληψη των φυσικών ή ψυχικών φαινομένων μέσω των αισθήσεων ή της συνείδησης β) η άμεση συνειδητοποίηση σχέσεων (σαν να φωτίζεται ξαφνικά το πνεύμα) η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα προγενέστερης μακροχρόνιας αλλά ασυνείδητης διανοητικής αναζήτησης (λ.χ. το «Εύρηκα» του Αρχιμήδη). (Λεξικό Μπαμπινιώτη)

Η ***διαίσθηση,*** νομίζω, τονίζει αυτό που αισθανόμαστε ως σωστό, ως πιο αληθές, πιο πιθανό, χωρίς να έχουμε ακόμη μια προφανή ή εμφανή λογική αιτιολόγηση για αυτή την προδιάθεση. Συνήθως σ' αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε το *νομίζω* χωρίς ακόμη αυτή η σκέψη να έχει αποκτήσει ακόμη μια λογική εγκυρότητα. Η επιλογή ενός τρόπου επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος αποκλειστικά ή ανάμεσα σε διαφορετικούς έχει τέτοια χαρακτηριστικά.

Η ***ενόραση,*** κατά τη γνώμη μου τονίζει περισσότερο την ενδοσκόπηση, την εσωτερική ματιά, την αυτόματη βιωματική διεργασία που γίνεται με όλες τις δυνατές διασυνδέσεις γνώσεων και εμπειριών του υποσυνείδητου.

Ενώ η ***εποπτεία*** δίνει έμφαση στην ολιστική θεώρηση, στην συνολική εικόνα που μας δημιουργείται μέσα από μια εμπειρική ή νοητική αναπαράσταση.

(Επ- οπτεύω, επι- βλέπω).

Η διαισθητική σκέψη, με βάση τα παραπάνω έχει **φιλοσοφική και ψυχολογική-γνωστική διάσταση** η οποία συνδέεται στενά με τη **μαθηματική σκέψη**.

Η μελέτη της μαθηματικής σκέψης, της μαθηματικής ανακάλυψης έχει απασχολήσει μεγάλο φάσμα επιστημόνων, πολλούς διάσημους επιστήμονες, μαθηματικούς, λογικιστές, φιλοσόφους νευροφυσιολόγους, ψυχολόγους, παιδαγωγούς κ.α..

Για τους ψυχολόγους αποτελεί αγαπημένο εργαλείο στην γνωστική ψυχολογία γιατί ταιριάζει καλύτερα από κάθε άλλο μοντέλο στη διερεύνηση των νοητικών και γνωστικών λειτουργιών.

Το ενδιαφέρον των ψυχολόγων για τα μαθηματικά άρχισε πριν από πολλά χρόνια και βασίζεται στην ιδέα ότι η μαθηματική και λογική σκέψη είναι ένα καλό μοντέλο για να περιγράψει κανείς την ανθρώπινη σκέψη γενικότερα. Πολλοί φιλόσοφοι του 19ου αιώνα είχαν την εντύπωση ότι η μελέτη της λογικής είναι ταυτόσημη με τη μελέτη της ανθρώπινης συλλογιστικής σκέψης, και προσπάθησαν να διαπιστώσουν σε ποιο βαθμό οι άνθρωποι ακολουθούν τους κανόνες της λογικής όταν σκέπτονται (βλ., Π.χ., Ginsburg, 1977).

Σήμερα οι περισσότεροι ψυχολόγοι δεν πιστεύουν ότι η μαθηματική λογική είναι ο καλύτερος τρόπος για να περιγράψει κανείς την ανθρώπινη σκέψη (π.χ. Wason & Johnson-Laird, 1972). Παρόλ' αυτά η μελέτη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης συνεχίζει να έχει ενδιαφέρον, γιατί αναγκάζει τους ψυχολόγους να σκεφτούν πως θα βρουν λύσεις για πολλά από τα σύγχρονα προβλήματα της γνωστικής ψυχολογίας, όπως, για παράδειγμα, τους τρόπους με τους οποίους μαθαίνουμε να χρησιμοποιούμε συμβολικά συστήματα, το *ρόλο των εσωτερικών αναπαραστάσεων, την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην κατανόηση (μαθηματικών) εννοιών και στην εφαρμογή τους στην πράξη, και στη σχέση ανάμεσα στους γνωστικούς και τους συναισθηματικούς παράγοντες στη μάθηση*[54].

Απασχολούσε και απασχολεί το πώς συντελείται η πρόοδος της **μαθηματικής σκέψης**, ποια είναι τα χαρακτηριστικά της, πώς γίνεται η μαθηματική ανακάλυψη, τι είναι αυτό που ονομάζουμε επινόηση, ανακάλυψη (ή και *«φώτιση»* από ορισμένους).

Υπάρχουν αρκετές αφηγήσεις ή και «μύθοι» για την αιφνίδια ανακάλυψη της λύσης ενός προβλήματος ή μιας απόδειξης.

Όλοι ξέρουμε την «μπανιέρα» του Αρχιμήδη και το «Εύρηκα», το μύθο με το «μήλο» του Νεύτωνα, ή άλλα λιγότερο γνωστά περιστατικά.

Έχουν καταγραφεί περιστατικά που αναφέρουν ότι μαθηματικοί συνέλαβαν τη λύση ενός προβλήματος που τους απασχολούσε ξαφνικά σε ανύποπτο χρόνο. Ο Poincaré καθώς έμπαινε στο λεωφορείο. Ο Hamilton, καθώς

[54] Βοσνιάδου Σ., Η Ψυχολογία των Μαθηματικών, σελ. 13-14

περπατούσε σε μια γέφυρα στο Δουβλίνο κοντά στο Trinity College. Σημείωσε, χάραξε για την ακρίβεια την ιδέα αυτή σε μια πέτρα της γέφυρας, όπου και σήμερα υπάρχει εκεί αναμνηστική πλάκα.

Όμως όπως γίνεται άμεσα αντιληπτό σε όσες περιπτώσεις αναφέραμε υπήρχε το δεδομένο ότι **το πρόβλημα που έλυσαν τους απασχολούσε, δεν ήταν μια *αποκάλυψη εν κενώ.***

Η αιφνίδια ανακάλυψη, η επινόηση, γίνεται σε ερευνητές μαθηματικούς με μακρά, έντονη ενασχόληση και παιδεία μαθηματική.

Η λύση τελικά έλαμψε στο μυαλό του (του Gauss). Αλλά το να φανταστούμε πως ξεπήδησε ξαφνικά ως νεογέννητο άστρο χωρίς τη μεσολάβηση των «χαμένων» ωρών, θα σήμαινε ότι μας διαφεύγει τελείως η ουσία του πράγματος. Συχνά, ύστερα από μέρες ή εβδομάδες ξοδεμένες αναποτελεσματικά σε κάποια έρευνα και καθώς μετά από μια άγρυπνη νύχτα ξανάρχιζε και πάλι να δουλεύει, διαπίστωνε πως η δυσκολία είχε εξαφανιστεί και ολόκληρη η λύση έλαμπε καθαρή στο μυαλό του (Bell).[55]

Αν άλλοι είχαν στοχαστεί πάνω στις μαθηματικές αλήθειες τόσο βαθιά και επίμονα όσο εγώ, θα έφταναν στις ανακαλύψεις μου (Gauss)[56]

Όταν ρωτήθηκε πως είχε πραγματοποιήσει τις ανακαλύψεις του ο Νεύτων απάντησε: «Με το να σκέφτομαι διαρκώς πάνω σ' αυτές» (Newton).[57]

Ο **Hadamard** σημειώνει αυτά που αναφέρει ο **Poincaré**:

Το εντυπωσιακότερο είναι κατ' αρχάς η εμφάνιση της αιφνίδιας φώτισης, ένα ολοφάνερο σημάδι μακράς ασυνείδητης προηγούμενης εργασίας. Νομίζω ότι ο ρόλος της στη μαθηματική επινόηση είναι αναμφισβήτητος[58]

Για να συμπληρώσει ο ίδιος ο **Hadamard** :

…δεν βλέπω με ποιόν τρόπο θα μπορούσε να αμφισβητηθεί σοβαρά αυτή η άποψη.[59]

Και να κατάληξη στην άποψη που με άλλα λόγια αναφέραμε ήδη, ότι:

…η λογική ακολουθεί μια αρχική ενόραση.[60]

---

[55] E. T. BELL, *Οι μαθηματικοί, σελ. 410*
[56] E. T. BELL, *Οι μαθηματικοί, σελ. 409*
[57] E. T. BELL, *Οι μαθηματικοί, σελ. 409*
[58] Jacques Hadamard, Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, σελ. 27-28
[59] Jacques Hadamard, Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, σελ. 31

Παρουσιάζοντας τις απόψεις του W. F. Taylor οι **P. J. Davis- R Hersh** στο βιβλίο τους *Η Μαθηματική Εμπειρία,* σημειώνουν:

Τι είναι μαθηματική ή επιστημονική ενόραση;

Η ενόραση είναι η έκφραση της εμπειρίας. Αποθηκευμένη εμπειρία. Υπάρχει κάποια ανισότητα στους ανθρώπους σχετικά μ' αυτή. Μερικοί έχουν μια πιο γρήγορη ενορατική αντίληψη από άλλους.[61]

Η διαίσθηση έχει τις ρίζες της στο συγκριτικό τύπο σκέψης του παιδιού και των ανθρώπινων όντων στα αρχικά στάδια του πολιτισμού. Αλλά δεν επιβιώνει στους ενηλίκους και στους ιδιαίτερα αναπτυγμένους πολιτισμούς μόνο ως μερικό κατάλοιπο, αλλά ως ανάγκη νοητικής συμπεριφοράς.

Κατά τη διάρκεια της πορείας του συλλογισμού μας των δοκιμή - και – λάθος προσπαθειών μας πρέπει να στηριχθούμε σε αναπαραστάσεις και ιδέες που εμφανίζονται, υποκειμενικά, σαν βέβαιες, λογικά συγκροτημένες και πραγματικά σαφείς. Δεν μπορούμε να αμφιβάλουμε για όλα σε κάθε στιγμή. Αυτό θα ήταν μια παραλυτική τοποθέτηση. Μερικές αναπαραστάσεις, μερικές συλλήψεις πρέπει να ληφθούν ως δεδομένες. Πρέπει να εμφανιστούν, υποκειμενικά, ως αυτόνομες, συνεπείς, συνολικές και άμεσα αποδεκτές γνώσεις προκειμένου να κρατηθεί η διαδικασία της εργασίας του συλλογισμού γόνιμη.

Μια διαίσθηση είναι μια κρυσταλλωμένη- πολύ συχνά πρόωρα κλειστή- σύλληψη στην οποία η μη πληρότητα ή η ασάφεια των πληροφοριών καλύπτεται από τους ειδικούς μηχανισμούς για την παραγωγή, των συναισθημάτων της αμεσότητας, της συνοχής και της εμπιστοσύνης. (Fischbein 1987)

Οι προσαρμοστικές ικανότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου του επιτρέπουν να αναπτύξει μια διαίσθηση η οποία δεν προέρχεται από τη φυσική πραγματικότητα, αλλά είναι προσαρμοσμένη στο μαθηματικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει εκάστοτε. (Connes, 1992)

Από την άποψη της **νευροφυσιολογίας** η «φώτιση» συμπίπτει με τον συντονισμό μεταξύ νοητικών αναπαραστάσεων μέσα από μια εσωτερική

---

[60] Jacques Hadamard, Η ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, σελ.113

[61] P. J. Davis- R Hersh, *Η Μαθηματική Εμπειρία,sel. 69*

επιλογή και αξιολόγηση που γίνεται μέσω ορθολογικών και συγκινησιακών στρατηγικών. Η αρμονία επιτυγχάνεται σε πολλά επίπεδα της οργάνωσης του εγκεφάλου όπως συμβαίνει και στην περίπτωση της ενατένισης ενός έργου τέχνης. (Changeux, Connes, 1992)

Για τη σύνθετη αυτή εγκεφαλική λειτουργία θα μπορούσαμε να αναφέρουμε κάποια συνήθη, ανάλογα, παραδείγματα.

Στο έργο τέχνης δεν αποφασίζουμε ότι μας αρέσει μόνο μετά από λογικά συμπεράσματα αλλά αναλύουμε ίσως κατόπιν το τι είναι αυτό που μας δημιούργησε αυτή την συνολική αίσθηση της ευχαρίστησης, της απόλαυσης, της αποδοχής, της συγκίνησης…

Όταν οδηγούμε σε μια στενή λωρίδα ανάμεσα σε παρκαρισμένα αυτοκίνητα προφανώς ούτε μετράμε συνεχώς αν χωράμε ούτε διορθώνουμε την πορεία με ένα σύστημα υπερήχων σαν της νυχτερίδας αλλά με την συνολική αίσθηση που μας δημιουργείται με την αλληλεπίδραση πολλών παραγόντων των αισθήσεων και της νόησης.

2.3 Πώς αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη; πώς φτάνουμε στην απόδειξη ή στην επίλυση προβλήματος;

Newton προς τον Hook:

"Αν κατάφερα και είδα μακρύτερα απ' τον Descartes είναι επειδή πάτησα στους ώμους γιγάντων"

Αυτό που συχνά συναντάμε ως αρχικό ερέθισμα είναι η παρατήρηση και η επιστημονική περιέργεια. Έπεται η διαισθητική υπόθεση και είναι η λογική σκέψη που αναλαμβάνει την επιβεβαίωση ή ανασκευή της εποπτείας με την απόδειξη.

Η πρώτη αφηρημένη λειτουργία λοιπόν είναι η παρατήρηση. Από κει και πέρα οι άνθρωποι άρχισαν να συνειδητοποιούν ότι μπορούν, ξεκινώντας από αυτή τη στοιχειώδη διαίσθηση και με τη βοήθεια της σκέψης, να κατακτήσουν πράγματα όλο και πιο πολύπλοκα.[62]

Κατ' αρχήν είναι σημαντικός ο ρόλος της **μνήμης**. Χωρίς τη μνήμη δεν θα υπήρχε μάθηση. Η ικανότητα συγκράτησης και η ικανότητα ανάσυρσης πληροφοριών σχετίζεται με τις προηγούμενες γνώσεις του ατόμου. (DeGroot, 1965, Chase & Simon, 1973, Βοσνιάδου, 2002).

Για την μακρόχρονη μνήμη οι περισσότεροι ερευνητές πιστεύουν ότι η αποθηκευτική της ικανότητα είναι απεριόριστη (Medin & Ross, 1992)

Ο μαθηματικός John Griffith έχει υπολογίσει ότι ένα άτομο με ένα μέσο όρο διάρκειας ζωής θα έχει αποθηκεύσει περίπου πεντακόσιες φορές τόσες πληροφορίες όσες μπορεί να υπάρχουν σε όλους τους τόμους της εγκυκλοπαίδειας *BRITANNICA* (Βοσνιάδου, 2002).

Ιδιαίτερο ρόλο παίζει σε σχέση με τα μαθηματικά η σημασιολογική και η διαδικαστική μνήμη.

Σύμφωνα με ορισμένες εκτιμήσεις ο μαθηματικός έχει στο μυαλό του περίπου **200.000 *ρουτίνες*** για τη λύση προβλημάτων (Jahnke 2004).[63]

---

[62] Laurent Lafforgue, Συνέντευξη ΤΟ ΒΗΜΑ, Κυριακή 27.2.05 και διάλεξη στο ΜΜΑ.
[63] Διάλεξη στο Θερινό Σχολείο του ΜΠΘΔΜ, Κύπρος 2004.

Τα μαθηματικά «εργαλεία» αυξήθηκαν και αυξάνονται με την πάροδο του χρόνου, γίνονται πολλαπλά. Ταυτόχρονα με την αύξησή τους όμως και την αύξηση των δυνατοτήτων που μας παρέχουν αυξάνεται και η δυσκολία προσπέλασης, λόγω του όγκου, σ' όλες αυτές τις γνώσεις (λένε ότι οι δυνατότητές πρόσβασής μας περιορίζονται σήμερα στο 1/10 του συνόλου των μαθηματικών).

Από τα κατ' εκτίμηση 200.000 θεωρήματα που δημοσιεύονται ετήσια (Ulam, 1976), μόνο λίγα είναι ενεργώς αποδεκτά από τη μαθηματική κοινότητα (Hanna).

Κατά δεύτερο λόγο είναι σημαντικός ο ρόλος της **μεθόδου**.

Όταν έχουμε επικεντρωθεί στο στόχο μας, σ' αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε προσπαθούμε να το τεκμηριώσουμε λογικά με το συνδυασμό των προηγούμενων γνώσεών μας και των μεθόδων που γνωρίζουμε.

Μια μέθοδος επίλυσης είναι άριστη όταν μας παρέχει τη δυνατότητα να προβλέψουμε από την αρχή, ή και να τεκμηριώσουμε ακόμη, το γεγονός ότι, εάν την ακολουθήσουμε, θα επιτύχουμε το σκοπό μας». (LEIBNITZ)

Είναι σημαντικό ζήτημα **η εξάσκηση και η ανάπτυξη ευρετικών μεθόδων.**

Ο **Polya** που είναι από τους βασικούς μελετητές αυτού του ζητήματος λέει, μεταξύ άλλων:

Λύνω ένα πρόβλημα σημαίνει πως βρίσκω κάποιον τρόπο να αποφύγω μια δυσκολία, να παρακάμψω ένα εμπόδιο, να επιτύχω ένα στόχο ο οποίος δεν ήταν άμεσα εφικτός. Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί ιδιαίτερο επίτευγμα της νόησης, και η νόηση είναι το ιδιαίτερο χάρισμα του ανθρώπου: Η επίλυση προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως η πιο χαρακτηριστική ανθρώπινη δραστηριότητα.

Η επίλυση προβλημάτων συνιστά μια τέχνη πρακτική, όπως η κολύμβηση, το σκι ή το παίξιμο του πιάνου: ο μόνος τρόπος να τη μάθει κανείς είναι η μίμηση και η εξάσκηση. Αν θέλετε να μάθετε να κολυμπάτε, θα πρέπει να πέσετε στο νερό' και αν θέλετε να γίνετε λύτης, θα πρέπει να λύσετε προβλήματα.

*Προκειμένου να αποκομίσετε το μέγιστο όφελος από τις προσπάθειές σας, θα πρέπει να αναζητάτε στο πρόβλημα που αντιμετωπίζετε εκείνα τα γνωρίσματα τα οποία μπορούν να σας βοηθήσουν σε επόμενα προβλήματα. Η λύση που προέκυψε μετά από δικές σας προσπάθειες, αλλά και αυτή που διαβάσατε ή ακούσατε και την ακολουθήσατε με πραγματικό ενδιαφέρον και βαθιά αντίληψη, θα γίνει για σας ένα **πρότυπο**, δηλαδή ένα μοντέλο το οποίο μπορείτε να μιμηθείτε επωφελώς, για να λύσετε παρόμοια προβλήματα.*

Εύκολα μπορεί να μιμηθεί κανείς μια λύση όταν επιλύει ένα παρεμφερές πρόβλημα' όταν όμως η ομοιότητα δεν είναι αρκετή, κάθε τέτοια μίμηση ενδέχεται να αποδειχθεί δύσκολη ή και σχεδόν αδύνατη. *Εντούτοις, ο άνθρωπος έχει μέσα του βαθιά ριζωμένη την επιθυμία για κάτι παραπάνω: δηλαδή, για ένα μηχανισμό χωρίς περιορισμούς ο οποίος θα μπορεί να λύνει όλα τα προβλήματα. Η επιθυμία αυτή μπορεί να παραμένει λανθάνουσα σε πολλούς από εμάς, γίνεται όμως ξεκάθαρη στα παραμύθια και σε μερικά φιλοσοφικά κείμενα. Ίσως να θυμάστε το παραμύθι για τη μαγική λέξη που ανοίγει όλες τις πόρτες. Ο Καρτέσιος (Rene Descartes) μελέτησε την ιδέα μιας γενικής μεθόδου που επιλύει κάθε πρόβλημα, και ο Leibnitz διατύπωσε σαφέστατα την ιδέα μιας τέλειας μεθόδου. Όμως, η αναζήτηση της ολοκληρωμένης γενικής μεθόδου δεν ευτύχησε περισσότερο απ' όσο η ανεύρεση της φιλοσοφικής λίθου, η οποία υποτίθεται πως θα μετέτρεπε τα κοινά μέταλλα σε χρυσό' μερικά από τα μεγάλα όνειρα πρέπει να παραμένουν όνειρα. Ωστόσο, κάποια απραγματοποίητα ιδεώδη μπορεί να επηρεάσουν τους ανθρώπους.*

Κανείς ποτέ δεν έφτασε στον Πολικό Αστέρα, πολλοί όμως βρήκαν τη σωστή πορεία κοιτώντας τον.

Θέλω να ονομάσω ***ευρετική*** *τη, μελέτη την οποία επιχειρεί τούτο το έργο, δηλαδή τη μελέτη για τους τρόπους και τις μεθόδους που έχουν να κάνουν με τη λύση προβλημάτων. Ο όρος ευρετική, ο οποίος κατά το παρελθόν χρησιμοποιήθηκε από ορισμένους φιλοσόφους, σήμερα έχει σχεδόν ξεχαστεί και μάλλον υποτιμάται, αλλά δεν φοβάμαι να τον χρησιμοποιήσω. (Polya, 1962)*[64]

Η δημιουργία προτύπων έχει επισημανθεί πολύ πριν από τον **Καρτέσιο**.

Κάθε πρόβλημα που *επέλυσα έγινε για μένα ένας κανόνας* ο *οποίος αργότερα* με *βοήθησε να επιλύσω και* άλλα *προβλήματα.*[65] .

Εάν έχω ανακαλύψει κάποιες νέες αλήθειες στις επιστήμες, τότε μπορώ να ισχυριστώ ότι όλες *τους απορρέουν ή εξαρτώνται από πέντε ή έξι πρωταρχικά προβλήματα* που *μπόρεσα να λύσω και τα οποία θεωρώ ότι είναι οι πολλές μάχες που* έδωσα *έχοντας την εύνοια των όπλων με το μέρος μου.*[66]

Όπως ήδη αναφέραμε οι προσαρμοστικές ικανότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου τού επιτρέπουν να αναπτύξει μια διαίσθηση η οποία δεν προέρχεται από τη φυσική πραγματικότητα, αλλά είναι προσαρμοσμένη στο μαθηματικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει εκάστοτε.

Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι «νέες κατασκευές» τις οποίες συλλαμβάνει ο

---

[64] George Polya, Η Μαθηματική Ανακάλυψη, Κάτοπτρο, Αθήνα 2001, σελ. 11
[65] ΚΑΡΤΈΣΙΟΣ, *Oeuvres,* τόμο VI, σελ. 20-21, *Λόγος περί της* μεθόδου
[66] ΚΑΡΤΈΣΙΟΣ, *ό.π.,* σελ. 67

μαθηματικός πριν εξετάσει όλες τις ιδιότητές τους.

Αρχικά αποτελούν «εικασίες», «αιτήματα» που μπορούν είτε να αποδειχτούν είτε όχι. Στο εσωτερικό αυτών των εικασιών, μέσα στο οικοδόμημα των αρχικών αιτημάτων, εκεί μπορούμε να ψηλαφίσουμε τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Ο John Stuart Mill είχε ήδη προτείνει να λέμε ότι «το γεγονός που εκφράζεται κατά τον ορισμό ενός αριθμού είναι ένα φυσικό γεγονός». Δεν υπάρχει τίποτε το εντυπωσιακό στο ότι οι ακέραιοι αριθμοί έχουν την τάδε ή τη δείνα ιδιότητα' αυτές περιέχονται ήδη στον ορισμό που προτείνει ο μαθηματικός, βρίσκονται ήδη μέσα στην αρχική του διαίσθηση. Χρειάζεται όμως χρόνος για να αναγνωριστούν αυτές οι ιδιότητες. Συνεπώς, η αξιωματική, η λογική και όλες οι εγκεφαλικές λειτουργίες με τις οποίες συνδέονται παίζουν αποφασιστικό ρόλο σ' αυτό το έργο της ανάλυσης και της λογικής παραγωγής: χρησιμεύουν ως λογικός μηχανισμός. Επομένως, ***ένα από τα εκπληκτικότερα γνωρίσματα της ανθρώπινης εγκεφαλικής μηχανής είναι τόσο ότι δημιουργεί καινούργια νοητικά αντικείμενα όσο και ότι αναλύει τις ιδιότητές τους, οι οποίες συχνά, αλλά εκ των υστέρων, φαίνονται εξαιρετικά απλές****.* (Changeux, Connes, 1992)

Μετά από ένα στάδιο προπαρασκευαστικής εργασίας, όπως επισημαίνει ο Hadamard, αρχίζουν να **αναδύονται** στον εγκέφαλο εικόνες και μια αιφνίδια **διαίσθηση**. Αυτό το στάδιο που είναι σημαντικό στην δημιουργική μαθηματική εργασία το ακολουθεί απαραίτητα ένα πιο συνειδητό στάδιο με **κρίση και λογικό συλλογισμό** που βασίζεται σε ορισμούς και επαληθεύσεις. Η διαδικασία της επαλήθευσης είναι δύσκολη, ενέχει το φόβο του να έχουμε πάρει λάθος δρόμο γιατί η διαίσθηση απατάται συχνά.

Πολλές φορές στην κατά μέτωπο αντιμετώπιση του προβλήματος εξαντλούμε εύκολα τα αποθέματα του ορθολογικού άμεσου τρόπου σκέψης και πλαγιοκοπούμε το πρόβλημα. Σ' αυτή την αδιάκοπη και ποικιλόμορφη νοητική διαδικασία κατά την οποία δεν είναι όλα συνειδητά και ελεγχόμενα από τη βούληση αναδεικνύεται μια ιδέα ή ένας συνδυασμός κατάλληλος για το πρόβλημα που μέσα σε κάποια πλαίσια μας οδηγεί στη λύση ή στην απόδειξη. Στην επιλογή αυτή παρεμβαίνει όπως ήδη έχουμε αναφέρει και ο

συναισθηματικός παράγοντας της ικανοποίησης ή της απογοήτευσης. (Changeux, Connes, 1992) [67]

Όσον αφορά τους **μαθητές**, φυσικά, τις περισσότερες φορές εκείνο που χρειάζεται είναι η ταξινόμηση ή αναδιάταξη των γνώσεων, της εμπειρίας και των μεθόδων που έχουν μάθει.

Αυτή η ανασύνταξη όμως, ο ανασυνδυασμός των γνώσεων και εμπειριών, όταν υπάρχουν, ακολουθεί, με άλλους ρυθμούς φυσικά, την ίδια διαδικασία με αυτήν που περιγράφεται και για τον μαθηματικό ή τον ερευνητή.

Υπάρχει κοινή δομή των διαισθητικών δυσκολιών στους εμπειρογνώμονες και στους αρχαρίους. (Fischbein)

Η μαθηματική δράση ή εμπειρία έχει ως εξής: Μια αρχική διαισθητική ιδέα θέτει ένα πρόβλημα, όχι κατ' ανάγκη σαφώς διατυπωμένο. Στη συνέχεια, μέσα από μια πορεία υποθέσεων, λαθών, αναθεωρήσεων, αποδείξεων και γενικεύσεων, καταλήγουμε σε μια ορισμένη μαθηματική γνώση. Η όλη πορεία επανεξετάζεται για να βελτιωθεί και να διατυπωθεί με τη συντομότερη δυνατή μορφή. Αυτή τη μαθηματική εμπειρία στο σύνολό της πρέπει να βιώσει το παιδί και όχι μόνο την εκμάθηση της παραγωγικής απόδειξης (Χ. Κυνηγός)

[67]Changeux, Connes, 1992, σ.109

2.4 Νέα ζητήματα σε σχέση με την απόδειξη.

Μια σκέψη για νά 'ναι πραγματικά υγιής
Πρέπει να αντέχει στο ύπαιθρο.
Οδυσσέας Ελύτης Ο Μικρός Ναυτίλος

Το θέμα του τι θεωρούμε απόδειξη, σε ποια πλαίσια και με ποιες αρχές γίνεται αποδεκτή μια απόδειξη, μπορεί να υπήρχε από την αρχαιότητα. Η αποκλειστική χρήση του κανόνα και του διαβήτη, η αξιοποίηση του γνώμονα, η γεωμετρική άλγεβρα, η απαγωγή σε άτοπο, η πλήρης επαγωγή η μεταφορά αποδεικτικών μεθόδων από έναν τομέα των μαθηματικών σε άλλον όπως λ.χ. αργότερα αναλυτική γεωμετρία, είναι τέτοια παραδείγματα.

Φυσικά και σήμερα συνεχίζει να ξενίζει τους μαθητές η χρήση ποικιλίας μεθόδων από διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών για την λύση του ίδιου προβλήματος ή για την απόδειξη της ίδιας πρότασης.

Αλλά σήμερα το θέμα της απόδειξης αντιμετωπίζεται με νέους όρους σε σχέση με το τι είναι *νόμιμη απόδειξη* ή όχι.

Μπορούμε όμως να δούμε κατ' αρχήν μερικές διαφορετικές περιπτώσεις μεθόδων απόδειξης στις μέρες μας.

Όπως αναφέρει ο **J. P. V. Bendegem**:

Ίσως κάποιος ισχυριστεί ότι τουλάχιστον σήμερα έχουμε τελικά ένα μοναδικό σύνολο προτύπων απόδειξης, αλλά αυτό αναμφίβολα δεν ισχύει. Στο εσωτερικό της μαθηματικής κοινότητας αναπτύσσονται σοβαρές συζητήσεις για τα εξής προβλήματα (για μια γενική συζήτηση, δες Hersh, 1997: μέρος πρώτο, κεφάλαιο 4):

(i) Μια απόδειξη που περιλαμβάνει τη χρήση υπολογιστών μπορεί να θεωρείται απόδειξη; Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση από την οποία ξεκίνησε η όλη συζήτηση ήταν το θεώρημα (ή η εικασία;) των τεσσάρων χρωμάτων. Καθώς μέρος της απόδειξης αποτελείται από ένα πρόγραμμα υπολογιστή[68]*,*

---

[68] *Για να είμαστε λίγο πιο σαφείς η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος - ένα κλασσικό μαθηματικό αριστούργημα - δείχνει ότι το σύνολο όλων των χαρτών που πρέπει να χρωματιστούν μπορεί να περιοριστεί σε ένα πεπερασμένο σύνολο χαρτών, έτσι ώστε αν οι χάρτες του συνόλου αυτού μπορεί να χρωματιστούν, το ίδιο ισχύει για όλους τους χάρτες. Το δεύτερο μέρος της απόδειξης αποτελείται από ένα πρόγραμμα υπολογιστή με το οποίο χρωματίζεται κάθε χάρτης του πεπερασμένου συνόλου. Δεν υπάρχει επομένως άλλη επιλογή από το να εκτελεσθεί το πρόγραμμα και να διαπιστωθεί αν η τελική απάντηση είναι ναι ή όχι. Μια μάλλον πρωτοφανής κατάσταση. Δες Appel και Haken, 1989.*

για ένα αριθμό μαθηματικών δεν αξίζει να λέγεται απόδειξη. Δες Tymoczko, 1986 για περισσότερες λεπτομέρειες.

(ii) Ποια είναι η αξία των πιθανοθεωρητικών αποδείξεων; Μπορεί να θεωρούνται αποδείξεις; Η απάντηση στην τελευταία ερώτηση πρέπει να είναι θετική. Σε τελευταία ανάλυση, αποδεικνύονται διατυπώσεις όπως, «Αν ο έλεγχος t, που περιλαμβάνει μια επιλογή k αριθμών, εκτελεσθεί σε ένα δεδομένο αριθμό n, και το αποτέλεσμα είναι θετικό, ο αριθμός n είναι πρώτος, με πιθανότητα 1 - 1/4k». Η πιο ενδιαφέρουσα ερώτηση όμως είναι η πρώτη: τι μας λέει μια απόδειξη σαν αυτή; Έχει ενδιαφέρον να ξέρουμε ότι ένας αριθμός είναι πολύ πιθανόν ένας πρώτος αριθμός; Δες π.χ., Ribenboim, 1989: 107-128, για μία σαφή παρουσίαση.

(iii) Ποια είναι η αξία μιας «βιντεο-απόδειξης»; Πρέπει εδώ να προσθέσω ότι, αν και υποστηρίζεται ότι οι βιντεο-αποδείξεις εισάγουν έναν εντελώς νέο και πρωτότυπο τρόπο μαθηματικής δραστηριότητας δεν αποτελούν τίποτα περισσότερο από μία μοντέρνα τεχνολογική εκδοχή των οπτικών αποδείξεων (proofs-by-looking) που προαναφέρθηκαν. Ίσως η ερώτηση θα έπρεπε να διατυπωθεί πιο γενικά: μπορεί να υπάρχουν «πειραματικές» αποδείξεις; Δες το κείμενό μου 1990 για μια σχετική συζήτηση με παραδείγματα.

Συμπερασματικά, από μια γενική και μη αναλυτική άποψη, τα μαθηματικά μπορεί να θεωρηθούν ως ένα δίκτυο ερευνητικών προγραμμάτων, μεγάλα μέρη του οποίου συγκροτούν ερευνητικές παραδόσεις. Η λειτουργία ενός προγράμματος είναι να δημιουργεί, πρώτον, προβλήματα, εικασίες, δηλαδή δουλειές που πρέπει να γίνουν και δεύτερον, ομοφωνία για τις μεθόδους και τα *πρότυπα που θα χρησιμοποιηθούν στο χειρισμό των προβλημάτων. Αυτό αποτελεί, σε γενικές γραμμές το περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθηματικοί εκτελούν τις καθημερινές τους εργασίες.*[69]

Κατά τον Polya απόδειξη είναι ό,τι πείθει, φυσικά πάντα, στο πλαίσιο της διαπραγμάτευσης που τίθεται.

Σήμερα, λοιπόν, θα μπορούσαμε να κατατάξουμε τις αποδείξεις, με όλες τις ενστάσεις που πιθανά υπάρχουν, στις εξής κατηγορίες:

Την κλασική απόδειξη η οποία είναι οικία σε όλους όσους έχουν κάνει μαθηματικά.

---

[69] ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, επιμέλεια Χασάπης Δημήτρης, άρθρο του J. P. V. Bendegem, ULB, Η δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών,

Σ' αυτήν την κατηγορία συμπεριλαμβάνονται οι γνωστές μας αποδείξεις που βασίζονται στην αξιωματική θεμελίωση και στους λογικούς κανόνες, χρησιμοποιούν τις μεθόδους της ανάλυσης και σύνθεσης, της απαγωγής σε άτοπο και της επαγωγής.

Σ' αυτήν την παραγωγική απόδειξη με βάση την αξιωματική θεμελίωσή και το προηγούμενο, σε κάθε βήμα, σώμα των μαθηματικών η συνέπεια της μαθηματικής θεωρίας ελέγχεται από την μαθηματική κοινότητα και από τις εφαρμογές της στον πραγματικό κόσμο όπου αυτό είναι δυνατόν.

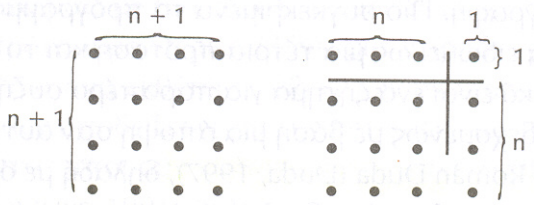
Την απόδειξη με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή όπως έγινε στο κλασικό πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων και έθεσε ένα νέο ζήτημα για τα μαθηματικά.

Η ανάπτυξη του μαθηματικού λογισμικού, των μαθηματικών προγραμμάτων σ' όλους τους κλάδους των μαθηματικών θέτει ένα ακόμη θέμα, το θέμα της εμπιστοσύνης στη λειτουργία του λογισμικού, μιας και αυτό πιστοποιεί την απόδειξη και όχι οι λογικές συνεπαγωγές.

Η «οπτική απόδειξη» (proof by looking), *έκφραση που εισάγεται από τον David Wells, 1991, σημαίνει την μη παραγωγική απόδειξη, την απόδειξη που γίνεται «με μια ματιά (at sight) εξετάζοντας ένα κατάλληλο σχήμα».*

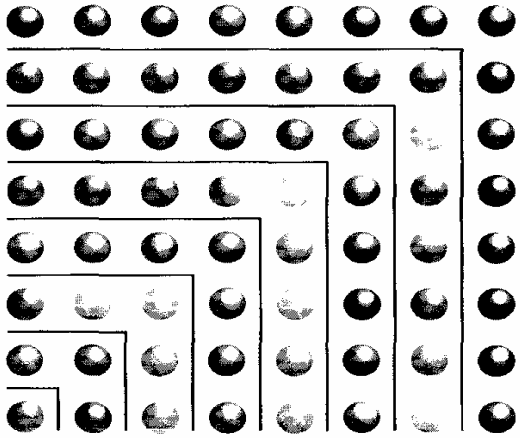
Αναφέρεται λ.χ. το παράδειγμα της απόδειξης του: $\boldsymbol{(n+1)^2 = n^2+2n+1}$

με το Πυθαγόρειο σχήμα:[70]



[70] ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, επιμέλεια Χασάπης Δημήτρης, άρθρο του J. P. V. Bendegem, ULB, Η δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών, σελ. 33.

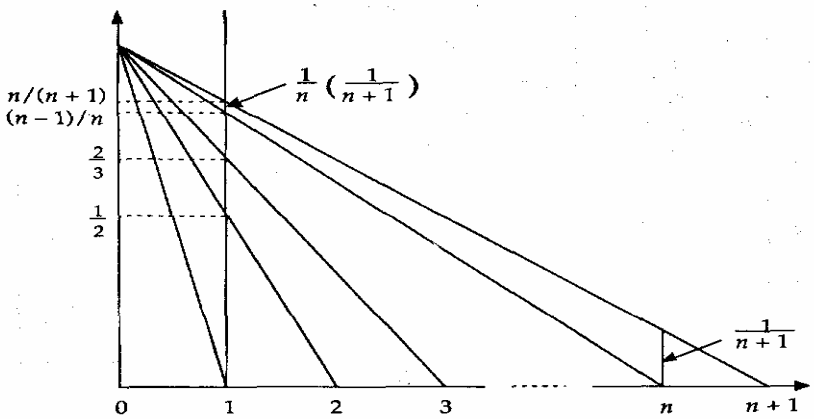
Άθροισμα περιττών ακεραίων I



$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Νικόμαχος ο Γερασηνός
(περίπου 100 μ. Χ.)

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$



— Roman W. Wong

Οπτική θα μπορούσε κατά κάποιο τρόπο να θεωρηθεί σ' ένα βαθμό και η «απόδειξη» που ενυπάρχει στη **Δυναμική Γεωμετρία** με την χρήση των αντίστοιχων λογισμικών (όπου όλα φαίνονται προφανή).

Στα μαθηματικά, ως νοητικής κατασκευής, η εγκυρότητα έχει άλλη διάσταση από αυτή που έχει στις εμπειρικές επιστήμες που βασίζονται στην παρατήρηση και στο πείραμα.

Δεν θα δεις άλλα ή πιο αξιόπιστα μαθηματικά με ένα καλύτερο μικροσκόπιο ή τηλεσκόπιο, αλλά μόνο με την αλλαγή του τρόπου σκέψης.

Στα μαθηματικά η εγκυρότητα βασίζεται στην συναίνεση της μαθηματικής κοινότητας, των ειδικών, των επαϊόντων και σε όποιες περιπτώσεις αυτό είναι δυνατόν, στην συμφωνία τους με τον πραγματικό κόσμο, την επαλήθευσή τους από τα γεγονότα (όπως λ.χ. στη Φυσική, στην Στατιστική , στις Πιθανότητες).

Στις θεωρητικές αποδείξεις βασικό στοιχείο παραμένει η διϋποκειμενική συναίνεση της μαθηματικής κοινότητας.

Αυτή η συναίνεση στο βαθμό που διασφαλίζει ότι δεν υπάρχει λογική ασυνέπεια εξασφαλίζει την διαχρονικότητα της μαθηματικής πρότασης, του μαθηματικού αποτελέσματος.

Στις περιπτώσεις που διατυπώθηκαν θεωρητικές απόψεις μέσα από μια λογική σκέψη όπου το «κλειδί» της σκέψης ήταν θεμελιώδες και *σωστό* αυτές έμειναν διαχρονικά.

Σε ζητήματα όμως όπου οι διατυπώσεις ήταν στενά συνδεδεμένες μόνο με την παρατήρηση συχνά ανατράπηκαν ή γιατί αυτή ήταν λαθεμένη ή γιατί είχε τους φραγμούς της εποπτείας.

Όπως λένε χαριτολογώντας, ο Ευκλείδης *θα μπορούσε να κάνει μάθημα* Γεωμετρίας σε μια τάξη της Α' ή της Β΄ Λυκείου… Διαβάζουμε τη φιλοσοφία του Πλάτωνα, τη λογική του Αριστοτέλη αλλά όχι τη Φυσική τους.

Στη φυσική, στη βιολογία συμβαίνει πράγματα που για αιώνες θεωρούνταν απόλυτα αληθινά κάποια στιγμή να ξαναμπαίνουν σε αμφισβήτηση. Στα μαθηματικά αυτό δεν ισχύει. Όταν κάτι αποδεικνύεται, αποδεικνύεται για πάντα.[71](Lafforgue, 2005)

[71] Laurent Lafforgue, Συνέντευξη ΤΟ ΒΗΜΑ, Κυριακή 27.2.05 και διάλεξη στο ΜΜΑ.

Στα μαθηματικά δεν έχουμε όπως συμβαίνει λ.χ. στη φυσική διαφορετικές εξίσου παραδεκτές εικασίες για το ίδιο πρόβλημα. Σπάνια μιλάμε για γενικές, όσο μεγάλες κι αν είναι αυτές, προσεγγίσεις του αποτελέσματος γιατί πολύ συχνά ***Ο διάβολος κρύβεται στις λεπτομέρειες*** *(παλιά Αραβική παροιμία).*
Είναι αναγκαία λοιπόν η απόδειξη. Αν αφαιρέσεις από τα μαθηματικά τον πυρήνα της λογικής τα μαθηματικά χάνουν την ψυχή τους.
Δεν αρκεί να έχεις φαντασία για να κάνεις μαθηματικά! (Connes 1992)

3. *Με λογισμό και φαντασία*.

Γιατί χρειάζεται η ανάπτυξη και των δυο;

Όλα πρέπει να ειπωθούν όσο απλά γίνεται αλλά όχι απλούστερα
Albert Einstein

***Η λογική ακολουθεί μιαν αρχική διαίσθηση*, είχε γράψει ο Hadamard.**

Θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την άποψη ότι υπάρχει αμφίδρομη σχέση ανάμεσα στη διαισθητική και τη λογική σκέψη στα μαθηματικά.
Η διαίσθηση ανοίγει την πόρτα στη λογική και η λογική στη διαίσθηση.
Με τη διαίσθηση «κατευθύνουμε» τη λογική σκέψη και με τη λογική δουλεύουμε με «αντικείμενα» για τα οποία δεν μπορούμε να έχουμε εποπτεία.
Η διαίσθηση μας βοηθάει όπως είπαμε να διευρύνουμε ή να αλλάξουμε τα προκαθορισμένα πλαίσια της λογικής σκέψης.
Η λογική μαθηματική σκέψη μας βοηθάει, μας καθιστά ικανούς, να ξεπεράσουμε τους φραγμούς της εποπτείας.
Ως παράδειγμα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι:
Η διαδικασία του σχηματισμού (σε σχέση με το πρόβλημα μέτρησης μεγεθών) της έννοιας των πραγματικών αριθμών, αποδείχθηκε ότι είναι εξαιρετικά παρατεταμένη, λόγω του γεγονότος ότι, οι έννοιες των αρρήτων και αρνητικών αριθμών συγκαταλέγονται μεταξύ εκείνων των πολυπλοκότερων μαθηματικών αφαιρέσεων, οι οποίες σε αντίθεση με τις έννοιες του φυσικού αριθμού, του κλάσματος και του γεωμετρικού σχήματος, δεν είναι εσωτερικό μέρος της προεπιστημονικής ανθρώπινης εμπειρίας.[72]

Η γνώση του «αεί όντος» μέσω των **μαθημάτων** της γεωμετρίας και της αριθμητικής (μαζί με την αρμονία και την αστρονομία), η δυνατότητα να φτάσουμε με την άσκηση σ' αυτά, με τη βοήθειά τους, από τα αισθητά στα νοητά, διατυπώθηκε ολοκληρωμένα ήδη από τον Πλάτωνα.
Εὐομολόγητον, ἔφη· <u>τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν.</u>

[72] A. Kolmogorov, Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, τ. 20

Ο Πλάτων θεώρησε τα μαθηματικά όχι σαν μια εξιδανίκευση ορισμένων πλευρών του εμπειρικού κόσμου από τους μαθηματικούς, αλλά σαν την περιγραφή ενός μέρους της πραγματικότητας.[73]
Η μελέτη τους έδινε και δίνει την εντύπωση άμεσης ενασχόλησης με έναν κόσμο που το βασικό του χαρακτηριστικό είναι η απ΄ ευθείας νοητική του σύλληψη, χωρίς το διάμεσο της αισθητηριακής αντίληψης.[74]
Διότι στα μαθηματικά μπορεί κανείς να μάθει πώς είναι δυνατόν να συλλογίζεται για πράγματα τα οποία ούτε φαίνονται ούτε ακούγονται, αλλά υπάρχουν μόνο στη σκέψη.[75]

Ο **Rutherford (1936)** ανακάλυψε το πυρηνικό μοντέλο του ατόμου από την σκέδαση προς τα πίσω σωματιδίων α (σε μεγάλες γωνίες), υψηλής ενέργειας (μεγάλης ταχύτητας) που άφησε να προσπέσουν σε ένα λεπτό μεταλλικό φύλλο. Κάνοντας στη συνέχεια λογικές σκέψεις και τους μαθηματικούς υπολογισμούς. Ο ίδιος περιγράφει αυτή τη διεργασία με τις ακόλουθες λέξεις:
"Ήταν σχεδόν τόσο απίστευτο, όσο αν είχατε εκτοξεύσει ένα βλήμα 15 ιντσών εναντίον ενός φύλλου χαρτιού και το βλήμα αναπήδησε και σας χτύπησε."
Και συνεχίζοντας σημειώνει:

Μετά από λίγη σκέψη κατάλαβα ότι αυτή η προς τα πίσω σκέδαση έπρεπε να ήταν το αποτέλεσμα μιας μόνο κρούσης και, όταν έκανα τους υπολογισμούς, είδα ότι ήταν αδύνατο να προκύψει γωνία σκέδασης αυτού του μεγέθους, εκτός αν το σύστημα είχε το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του ατόμου συγκεντρωμένο σε ένα μικρό πυρήνα. Τότε μου ήρθε η ιδέα ενός ατόμου με ένα μικροσκοπικό σώμα στο κέντρο με φορτίο και μεγάλη μάζα. Προσδιόρισα μαθηματικά τους νόμους σκέδασης για ένα τέτοιο σύστημα και βρήκα ότι ο αριθμός των σωματιδίων που σκεδάζονται σε μια ορισμένη γωνία είναι ανάλογος του πάχους του μεταλλικού φύλλου, του τετράγωνου του πυρηνικού φορτίου και αντιστρόφως ανάλογος της τέταρτης δύναμης της ταχύτητας. Αυτά τα συμπεράσματα επαληθεύτηκαν αργότερα από τους Geiger και Marsden σε

---

[73] Βλέπε: S. Körner, *The Philosophy of mathematics.* Hutchinson Un. Library, London, 1971, σελ.18
[74] ΔΙΟΝ. Α. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΝΕΦΕΛΗ, ΑΘΗΝΑ 1985
[75] B.L. VAN DER WAERDEN: Η ΑΦΥΠΝΙΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2000, σελ. 170.

μια σειρά από όμορφα πειράματα.
Έτσι βρέθηκε το πυρηνικό μοντέλο του ατόμου που είναι σήμερα μια από τις βασικές έννοιες της επιστήμης. Μια μόνο παρατήρηση και η ορθή ερμηνεία της οδήγησαν σε μια επανάσταση στην επιστημονική σκέψη που δεν έχει προηγούμενο στην ιστορία της επιστήμης. (Chandrasekhar, 1946).[76]

Η διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη διαισθητική και τη λογική σκέψη αφορά και την ίδια τη συγκρότηση της σκέψης των μαθηματικών.
Υπάρχουν λογικά και ενορατικά πνεύματα, κάποιοι μαθηματικοί είναι «ενορατικοί», ενώ κάποιοι άλλοι «λογικιστές». Επίσης μερικά είδη αναπαραστάσεων δίνουν στη σκέψη μια μάλλον λογική κατεύθυνση, ενώ άλλα ενορατική. (Hadamard, 1945)
Η εμμονή για αιώνες στην προσπάθεια απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος δείχνει ή εμμονή στη λογική σκέψη ή ίσως μια διαίσθηση των μαθηματικών που έχει ως αφετηρία τον τρόπο που το διατύπωσε ο **Ευκλείδης** και ως κατάληξη την ανάπτυξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, που την δικαιώνει.
Ο **Pauli** έγραψε το 1919: *«Η γεωμετρία του χωροχρόνου δεν είναι δεδομένη· καθορίζεται από την ύλη και την κίνηση». Στη σύντηξη της βαρύτητας και της μετρικής που ακολούθησε ο **Einstein** κατόρθωσε το 1915 αυτό που ο **Riemann** είχε προφητεύσει το 1854, δηλαδή ότι το μετρικό πεδίο πρέπει να συνδεθεί αιτιοκρατικά με την ύλη και την κίνηση*. (Chandrashekar, 1979)

Υπάρχει, ακόμη, πολλαπλότητα πρόσβασης σε μαθηματικά συμπεράσματα.
Η σχέση, ο τύπος θα υπάρχει ακόμη κι αν δεν τον έχουμε ανακαλύψει. Αλλά ίσως υπάρχουν πολλοί τύποι για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους όπως έχουμε ήδη αναφέρει και όπως θα δούμε και στη συνέχεια.
Ένα πρόβλημα μεγίστων και ελαχίστων μπορεί να λυθεί με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας μόνο τα σχολικά μαθηματικά.
Υπάρχουν επίσης πολλά ιστορικά παραδείγματα όπου το ίδιο πρόβλημα λύθηκε από διαφορετικούς ανθρώπους με διαφορετικό ή παράλληλο τρόπο.

[76] Chandrasekhar, Η αλήθεια και η Ομορφιά

Ο διαφορικός λογισμός, οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες αποτελούν τέτοια παραδείγματα. Αλλά υπάρχουν και ποιο στοιχειώδη παραδείγματα.

Είναι χαρακτηριστικό λ.χ. το παράδειγμα που αναφέρεται για τον **Gauss** όταν ήταν μαθητής του δημοτικού σχολείου.

Ο δάσκαλος είπε στην τάξη του να προσθέσουν οι μαθητές τους αριθμούς από το 1 έως το 20 , ή έως το 100 κατ' άλλους και να βρουν το αποτέλεσμα. Ο **Gauss** αντί να προσθέτει σταδιακά, βρήκε το αποτέλεσμα σε ελάχιστο χρόνο προσθέτοντας δυο φορές τους αριθμούς αυτούς αλλά ως εξής:

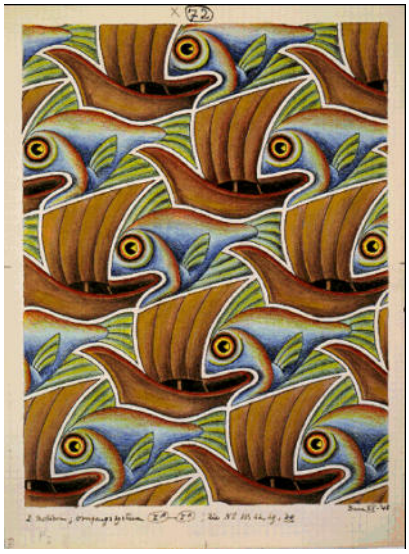
1 + 2 + …+19 + 20

20 + 19 + …+ 2 + 1

(20+1)+(19+2)+…+(2+19)+(1+20)=20•21=420, 420/2=210

Πολλαπλασίασε το 20 επί 21 και το διαίρεσε δια του 2.

Σήμερα η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στα σχολικά βιβλία για την απόδειξη του τύπου του αθροίσματος των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου.



3.1 Τα όρια της διαίσθησης.

«ἀπὸ εἰκόνος οὐ γνωρίζεται, ὀφθαλμῷ οὐδενὶ ἔοικε, διόπερ αὐτὸν οὐδεὶς ἐκμαθεῖν ἐξ εἰκόνος δύναται».

Αντισθένης

Και η διαίσθηση λοιπόν είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για τα μαθηματικά. Δεν αρκεί η εποπτική εικόνα όπως έχουν δείξει οι μελέτες στην υπερβολική εμπιστοσύνη στη διαίσθηση, σε υποκειμενικές πιθανότητες, όπως έχουν δείξει τα συμπεράσματα που αναφέρονται στα διανοητικά πρότυπα, στα χαρακτηριστικά λάθη, στις παρερμηνείες στα μαθηματικά, στην εξέλιξη των λογικών εννοιών στα παιδιά κ.λ.π.

Οι αποδείξεις ανατρέπουν πάρα πολλές φορές την αρχική εποπτική αντίληψη.

Η ιστορία της επιστήμης και των μαθηματικών είναι επίσης μια σημαντική πηγή για την κατανόηση της δραματικής προσπάθειας του επιστημονικού μυαλού ενάντια στις διαισθητικές προκαταλήψεις. Όπως επίσης και για την κοινή δομή των διαισθητικών δυσκολιών στους εμπειρογνώμονες και τους αρχαρίους. (Fischbein 1987)

Σε τι μέτρο μπορεί να εξαπατηθεί κάποιος από την ενόραση;

Αυτό γίνεται όχι σπάνια. Αποτελεί κύριο τμήμα και της δικής μου εργασίας. Λέω στον εαυτό μου για ένα μοντέλο ότι είναι ικανοποιητικό, αλλά κάτι δεν πάει καλά. Ή ρωτάω τον εαυτό μου αν το μοντέλο μου είναι καλύτερο από το δικό τους. Και πιθανόν πρέπει να απαντήσω με βάση την ενόραση[77]

Σε πολλά μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχει καμία δυνατότητα πρόσβασης με τις αισθήσεις μας γιατί τις υπερβαίνουν.

Για το χώρο ν- διαστάσεων δεν υπάρχει καμία εμπειρία. Για τους αρνητικούς αριθμούς επίσης. Γιατί το $α^0$ =1 δεν μπορεί να εξηγηθεί διαισθητικά.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις μόνο η λογική μπορεί να αναπληρώσει τη διαίσθηση.

Η λογική σκέψη και η απόδειξη λοιπόν δεν είναι απλώς ένα «κουστούμι» που φοράμε στη διαίσθηση. Ούτε απλώς Λυδία λίθος, τεστ εγκυρότητας για τις πρώτες διαισθητικές αντιλήψεις αλλά και μια υπέρβασή τους πολλές φορές.

---

[77] P. J. Davis- R Hersh, *Η Μαθηματική Εμπειρία,sel. 69*

Σε αντιδιαστολή με πολλές αληθινές και δημιουργικές διαισθήσεις όπως επίσης και αναπόδεικτες εικασίες, υπήρξαν πολλές λαθεμένες πεποιθήσεις ακόμη και μεγάλων μαθηματικών.

Ο μαθηματικός κόσμος εξεπλάγη όταν το 1872 ο Weirstrass παρουσίασε το παράδειγμα μιας συνάρτησης συνεχούς για κάθε πραγματική τιμή του χ αλλά χωρίς παράγωγο σε καμιά τιμή του χ.

Ευτυχώς αυτό το παράδειγμα παρουσιάστηκε αργά στην ιστορία του διαφορικού λογισμού, γιατί όπως είπε ο Picard το 1905 «αν ο Newton και ο Leibnitz ήξεραν ότι οι συνεχείς συναρτήσεις δεν έχουν αναγκαία παράγωγο, τότε ο διαφορικός λογισμός δεν θα είχε ποτέ δημιουργηθεί» (Kline,1970)

Στην καθημερινή σχολική πράξη το φαινόμενο αυτό επαναλαμβάνεται εκατομμύρια φορές.

Για το Σύμπαν ή για το μικρόκοσμο, διατυπώνουμε τις εικασίες μας, τα μαθηματικά μοντέλα, με βάση μια περιοδική αλληλουχία φαντασίας και λογικών σκέψεων αξιοποιώντας αλλά μη μένοντας στις εμπειρικές προσλήψεις μας, οι οποίες για αυτές τις διαστάσεις που μιλάμε δεν υπάρχουν καν.

Σύμφωνα με τον **Πιαζέ**:

Οι υποθετικοί παραγωγικοί χειρισμοί υπερβαίνουν τις δυνατότητες που έχουν δημιουργήσει οι εμπράγματοι χειρισμοί γιατί αναφέρονται σε νοητικές πράξεις που είναι πέρα από το χώρο της εμπειρίας (Βαρνάβα-Σκούρα).[78]

Είδαμε λοιπόν ποια είναι **τα όρια της διαίσθησης** και ότι το μόνο μέσο που έχει άνθρωπος και ιδιαίτερα ο επιστήμονας να υπερβεί (να ξεπεράσει) τους φραγμούς της εποπτείας είναι η αφηρημένη λογική σκέψη κάτι που τα μαθηματικά επιτρέπουν…

Ιδιαίτερα στα προβλήματα όπου είναι αδύνατον να έχει εποπτική θεώρηση λόγω διαστάσεων ή λόγω δυνατοτήτων των αισθήσεων μας.

Ακόμη και οι νοητικές αναπαραστάσεις δεν μπορούν να γίνουν με άλλες εποπτικές εικόνες αλλά με άλλες έννοιες καλύτερα αφομοιωμένες…

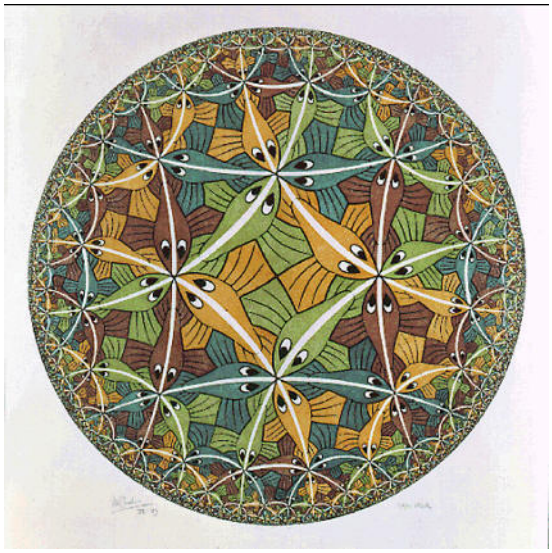
---

[78] Βαρνάβα- Σκούρα Τζέλα, Θέματα Γνωστικής Ανάπτυξης Μάθησης και Αξιολόγισης, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1989, σ. 32.

Αυτή η κατάσταση έχει αποδοθεί και λογοτεχνικά στην ***Επιπεδοχώρα*** του **Abbot,** όπου τα *όντα* της ζουν στο επίπεδο των δυο διαστάσεων και δεν μπορούν να σκεφτούν με βάση τον τρισδιάστατο χώρο, του οποίου δεν έχουν καμία αίσθηση και εμπειρία. Μια σφαίρα που δεν αγγίζει το επίπεδό τους δεν υπάρχει, ενώ αν έλθει σε επαφή μ' αυτό την βλέπουν ως σημείο κι αν βυθιστεί περισσότερο ως κύκλο, ποτέ όμως ως σφαίρα.

Όταν όμως αποκτούν εμπειρία των τριών διαστάσεων βγαίνοντας έξω από το επίπεδό τους, ανοίγουν οι νοητικοί τους ορίζοντες…:

Και μόλις φτάσουμε εκεί, θα σταματήσουμε αυτή την ανοδική πορεία μας; Σ' αυτή την ευλογημένη περιοχή των Τεσσάρων Διαστάσεων, θα σταματήσουμε έξω από την πόρτα της Πέμπτης Διάστασης χωρίς να διαβούμε το κατώφλι της; Α, όχι! Ας δεχθούμε καλύτερα ότι όσο ανεβαίνει το σώμα μας τόσο θα ανεβαίνουν και οι φιλοδοξίες μας. Έτσι λοιπόν, υποχωρώντας κάτω από την πνευματική μας πίεση, θα ανοίξουν διάπλατα οι πύλες της Έκτης Διάστασης και μετά της Έβδομης και της Όγδοης…[79] **(Abbott, 1884)**



M. C. Escher, Circle limit III.

[79] E. Abbott, Flatland, η Επιπεδοχώρα (1884)

3.2 Τα όρια της λογικής.

Η σκέψη ξεβάφει, ο νους ποτέ.
Οδυσσέας Ελύτης, Εκ του πλησίον

Δεν έλειψαν, όπως είναι γνωστό και οι περιπτώσεις ιστορικών κρίσεων στα θεμέλια των μαθηματικών, όπως ονομάστηκαν, που ήταν κρίσεις της λογικής. Οι κρίσεις αυτές προκλήθηκαν, εκτός από την ανακάλυψη των ασύμμετρων, με τα λογικομαθηματικά παράδοξα του Ζήνωνα, του κουρέα, του Russel, όπως επίσης, με το θεώρημα της μη πληρότητας του GÖDEL.

Ιδιαίτερα από τις αρχές του 20ου αιώνα είναι έντονη η συζήτηση για τα όρια της μαθηματικής λογικής.

Ενώ το κληροδότημα του Gödel δεν αναιρεί τον κεντρικό ρόλο της παραγωγικής λογικής στη μαθηματική σκέψη, ωστόσο αφήνει ένα αρχικό ράγισμα στην πρόσοψη της απεριόριστης δυνατότητας της λογικής να φέρει σε πέρας το έργο της.[80]

Πολλές φορές επίσης χρειάστηκε «αλλαγή πλαισίου» ή νέες ευρύτερες θεωρίες (και λογικές) να αναπτυχθούν ώστε να συμπεριλάβουν χωρίς αντινομίες τις υπάρχουσες.

***Το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος για πεπερασμένα σύνολα*, όπως παρατηρεί ο R. Blanché.**

Τι είναι αυτό που πράγματι αμφισβητείται στη σχέση των μαθηματικών με τη λογική και στο καθένα ξεχωριστά;

Η επάρκεια; η πληρότητα; και ποιου είδους πληρότητα; η πλήρης ταύτιση μαθηματικών και λογικής;

Σχετικά με αυτό το ζήτημα ο **Hintikka** αναφέρει:

*Ήταν από πολλές απόψεις συγκλονιστικό να αποδείξει ο **Gödel** ότι μια μαθηματική θεωρία τόσο απλή όσο και η στοιχειώδης αριθμητική δεν είναι πλήρης. Ακόμα η σχεδόν καθολική υπόθεση είναι ότι αυτή **η μη πληρότητα** αποδίδεται κάπως στο χαρακτήρα της στοιχειώδους αριθμητικής ως μαθηματικής θεωρίας. Οι επιστήμονες της λογικής και οι φιλόσοφοι θα μπορούσαν να βρουν κάποια παρηγοριά στη σκέψη ότι η καθαρή λογική, που έχει ληφθεί χαρακτηριστικά ως πρωτοβάθμια λογική, παρέμεινε αμόλυντη από τον εκφοβιστικό ιό της μη πληρότητας. Κατά γενική ομολογία, ορισμένες περιοχές αυτού που καλείται συνήθως λογική, παραδείγματος χάριν η δευτεροβάθμια λογική, ήταν γνωστές ότι είναι μη πλήρεις. **Αλλά η χαρακτηριστική αντίδραση στην μη πληρότητά τους ήταν να***

[80] Stephen I. Brown, Προς μια Ανθρωπιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, σελ. 1295

αναδιαταχθούν σαν μαθηματικές παρά σαν καθαρώς λογικές θεωρίες, ίσως αναγόμενες στη θεωρία συνόλων (ή μέρος αυτής) που θεωρείται μαθηματική θεωρία.

Αυτό το είδος αντίδρασης στο αποτέλεσμα της μη πληρότητας δεν είναι μια ιδιαιτερότητα των φιλοσόφων του εικοστού αιώνα. Είναι στην πραγματικότητα αναπόσπαστο μέρος μιας μακροχρόνιας παράδοσης, η οποία μας γυρίζει τουλάχιστον στον Καρτέσιο. Ο ***Καρτέσιος*** *απέρριψε την παραδοσιακή συλλογιστική λογική ως τετριμμένη και άκαρπη, εξυμνώντας τη δύναμη του μαθηματικού συλλογισμού, ειδικά της αναλυτικής μεθόδου των* ***Ελλήνων γεωμετρών****. Σε παρόμοιο πνεύμα, ο* ***Kant*** *εξέφρασε τη λογική ως βασισμένη στο νόμο της αντίφασης παράγοντας μόνο αναλυτικές αλήθειες, σε αντίθεση προς τις συνθετικές a priori αλήθειες των μαθηματικών. Σε ένα τέτοιο κλίμα, δεν εξέπλησσε ότι η μη πληρότητα του* ***Gödel*** *θεωρήθηκε ως οφειλόμενη στο status της στοιχειώδους αριθμητικής ως μαθηματικής θεωρίας.*

Ακόμα μια πιο λεπτή ανάλυση της ιστορίας αυτής της παράδοσης παράγει σύντομα τα σήματα προειδοποίησης. Οποιαδήποτε κι αν είναι η σωστή ερμηνεία της αρχαίας αναλυτικής μεθόδου και οποιοσδήποτε κι αν σκέφτεται τη χρήση της στα χέρια του Καρτεσίου και των συγχρόνων του, είναι γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκε από τους Έλληνες γεωμέτρες στα πλαίσια του συλλογισμού, ο οποίος μπορεί να συμπεριληφθεί στην περιουσία της συνηθισμένης πρωτοβάθμιας λογικής μας. Επιπλέον, για τον Kant η ουσία της μαθηματικής μεθόδου συνίστατο στη χρήση άμεσων, τρεχόντων, κανόνων, οι οποίοι με την ύστερη γνώση του εικοστού-αιώνα μας είναι πάλι αναπόσπαστο μέρος της λογικής υπό την έννοια, δηλαδή της πρωτοβάθμιας λογικής μας. Ως εκ τούτου είναι σαφές ότι στα πιο αρχικά στάδια αυτής της παράδοσης το όριο μεταξύ της λογικής και των μαθηματικών διαγράφηκε με έναν ουσιαστικά διαφορετικό τρόπο απ' αυτόν που οι φιλόσοφοι του εικοστού αιώνα το χρησιμοποίησαν. Ακόμα αυτή η ιστορική απόκλιση δεν έχει αναγνωριστεί πραγματικά από τους περισσότερους φιλοσόφους. Συνεχίζουν να σκέφτονται με όρους μιας ουσιαστικής διαφοράς μεταξύ της απρόσκοπτης λογικής και των αναξιόπιστων (επίβουλων) μαθηματικών. Αυτό μπορεί, μεταξύ άλλων, να εξηγήσει γιατί οι ιδέες του ***Hilbert*** *δεν έχουν εκτιμηθεί ευρύτερα.*

Ένα πράγμα που προσπάθησε να κάνει ήταν να σπάσει την παραδοσιακή διχοτομία μεταξύ του λογικού και του μαθηματικού συλλογισμού.

...

Κατ' αρχάς, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι υπάρχουν διάφορες εξ ολοκλήρου διαφορετικές έννοιες της πληρότητας.[81]

Το συμπέρασμά του είναι ότι υπάρχουν διαφορετικές έννοιες της πληρότητας η περιγραφική, η σημασιολογική, η παραγωγική και η *Χιλμπερτιανή* πληρότητα και ότι εκείνο που απέδειξε ο Gödel είναι ότι δεν υπάρχει

[81] HINTIKKA, JAAKKO, The Principles of Mathematics Revisited, c. 5 The Complexities of Completeness, Cambridge Univ. press, 1998, μετάφραση του κεφ.5 Θαν. Βλάχος.

παραγωγική πληρότητα της στοιχειώδους αριθμητικής και όχι γενικά κάθε είδους πληρότητα και αντιπροτείνει μια λογική φιλική της ανεξαρτησίας (Independence Friendly Logic).

Ο GÖDEL δεν θεώρησε ότι τα θεωρήματα του περί μη πληρότητας αποδεικνύουν την ανεπάρκεια της αξιωματικής μεθόδου, αλλά ότι η εξαγωγή των θεωρημάτων δεν μπορεί να γίνει τελείως μηχανικά. Είχε την άποψη ότι τα θεωρήματά του δικαιώνουν τον ρόλο της ενόρασης στα μαθηματικά. (Dawson, 1999)

Οι Ε. Γερονικόλας- Μ. Μυτιληναίος σημειώνουν:

Ο στόχος του θεωρήματος του Gödel (τουλάχιστον κατά τον ίδιο τον Gödel): φιλοσοφικά το θεώρημα στρέφεται κατά της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών και παράλληλα ωθεί προς μια Πλατωνική κατεύθυνση. Αλλά αν τα πράγματα έχουν έτσι (και ο Πλατωνισμός του Gödel είναι πράγματι γνωστός), τότε τελικά το θεώρημα μπορεί να στηρίζει πολύ πιο παραδοσιακές αντιλήψεις περί μαθηματικών απ' ότι συνήθως λέγεται ή υπονοείται

Αν ο φιλοσοφικός στόχος του θεωρήματος του Gödel είναι η μηχανιστική θεμελίωση των μαθηματικών, τότε γιατί αυτό το θεώρημα θεωρήθηκε τόσο αρνητικά σημαντικό; Ήθελε μήπως ποτέ κανένας να γίνει μαθηματικός για να εφαρμόζει αυστηρούς συντακτικούς κανόνες στα τυφλά; Ή ισχυρίζεται κανείς ότι ξέρει γεωμετρία απλώς και μόνο επειδή έμαθε τα αξιώματα της; Όταν λέμε ότι ξέρουμε μαθηματικά αυτό που εννοούμε είναι ότι ξέρουμε κάποια βασικά θεωρήματα των μαθηματικών.(Γερονικόλας- Μυτιληναίος, 2004)

Συνοψίζοντας οι Ε. Γερονικόλας- Μ. Μυτιληναίος καταλήγουν:

Αυτό που το θεώρημα του Gödel δείχνει φιλοσοφικά είναι ότι παρά τις προσδοκίες ορισμένων φιλοσοφικών σχολών γύρω στις αρχές του 20ου αιώνα να θεμελιώσουν τα μαθηματικά μηχανιστικά, γιατί έτσι θα γλιτώναμε από τους κινδύνους της εποπτείας, υπάρχουν τελικά αντιφάσεις οι οποίες προκύπτουν από μεθόδους καθαρά μηχανιστικές.[82]

Αλλά στην πραγματικότητα, αν κανείς θεωρήσει τον μαθηματικό στην εργασία, μπορεί να πει ότι εξακολουθεί να καθοδηγείται απ' αυτό το ιδεώδες της εξαντλητικής πληρότητας. (Bachelard)

[82] Ε. Γερονικόλας- Μ. Μυτιληναίος, Ο Μαθηματικός ξέρει για τι μιλάει, Νεύσις 2004

3.3 Τα όρια και της διαίσθησης και της λογικής: Οι δομές του νου, τα ιστορικά, κοινωνικά, πολιτιστικά και επιστημολογικά πλαίσια

Μια μέρα το παρελθόν θα μας αιφνιδιάσει
με τη δύναμη της επικαιρότητάς του.
Δε θα 'χει αλλάξει εκείνο αλλά το μυαλό μας.
Οδυσσέας Ελύτης, *Εν Λευκώ*.

Τα όρια της λογικής σκέψης και της διαίσθησης καθορίζονται από πολλούς παράγοντες που αλληλεπιδρούν.
Υπάρχουν παράγοντες που δρουν σε προσωπικό- ατομικό επίπεδο, όπως είναι η λειτουργία του εγκεφάλου και οι ψυχολογικοί παράγοντες και άλλοι που δρουν σε κοινωνικό επίπεδο, όπως είναι το πολιτισμικό, επιστημολογικό, οικονομικό και πολιτικό πλαίσιο. Για την πρωταρχική σημασία της μιας ή της άλλης ομάδας παραγόντων στα μαθηματικά θα μπορούσε να πει κανείς πολλά, εκείνο στο οποίο συμφωνούν οι περισσότεροι είναι ότι και οι δυο είναι αναγκαίες συνθήκες.

Στο επίπεδό του οργανώνονται τρεις εξελίξεις: η «γενετική» εξέλιξη των ειδών, η «ιδιαίτερη» εξέλιξη του ατόμου και η «πολιτισμική» εξέλιξη. Εμπλουτιζόμενος σε κάθε γενιά με τη διαρθρωτική και οργανωτική εμπειρία της εκπαίδευσης, ο εγκέφαλος γίνεται «πίνακας» του κόσμου.[83] *(Changeux)*
*Στα πλαίσια της **γνωστικής ψυχολογίας** ο νους θεωρείται ότι είναι ένα γενικό σύστημα επεξεργασίας συμβόλων με κάποιους δομικούς περιορισμούς που οφείλονται στο νευρολογικό υπόστρωμα.*[84] (Βοσνιάδου, 2002)

Οι δομές του νου, το πλήθος των νευρώνων, οι πολλαπλότητες και η καταλληλότητα των συνάψεών τους σύμφωνα με τους νευροφυσιολόγους και ψυχολόγους είναι το υλικό, το αντικειμενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα κάθε σκέψη και η μαθηματική σκέψη.

---

[83] J.-P. Changeux, Λογική και Απόλαυση, εκδ. 1996, σ. 72,
[84] Βοσνιάδου Στ., Εισαγωγή στην Ψυχολογία, σελ. 203

Μάλιστα κατά τους J.-P. Changeux, A. Connes (1992) από την άποψη της **νευροφυσιολογίας** του εγκεφάλου, όσον αφορά στην μαθηματική σκέψη, δεν έχει σημασία μόνο το πλήθος των νευρωνικών συνάψεων αλλά και η καταλληλότητά τους.

Από την άποψη της **ψυχολογίας**, επίσης:

*Όσον αφορά τη **Μαθηματική σκέψη,** πράγματι, είναι δύσκολο να εντοπίσει κάποιος τα κοινά χαρακτηριστικά που διεισδύουν στα ποικίλα είδη της. Για παράδειγμα, η ικανότητα που χρειάζεται για να μάθεις να μετράς, μοιάζει διαφορετική από εκείνη που χρειάζεται για να αποδείξεις ένα δύσκολο θεώρημα τοπολογίας. Οι ικανότητες που απαιτούνται για να υπολογίσεις τη σωστή απάντηση σ' ένα πρόβλημα αφαίρεσης, είναι διαφορετικές από εκείνες που απαιτούνται για να κατανοήσεις συμπεράσματα με πιθανότητες. Το θέμα είναι ότι η κλασική θεωρία νοήματος στην θεωρία των semantics (Katz, 1972; Katz & Fodor, 1963) φαίνεται πως δεν είναι εφαρμόσιμη στη μαθηματική σκέψη περισσότερο απ' όσο φαίνεται να εφαρμόζεται στην έννοια του, τι εστί παιχνίδι (Wittgenstein, 1953). Με άλλα λόγια η μαθηματική σκέψη όπως και το παιχνίδι, δεν φαίνονται να είναι κλασσικά ορισμένες έννοιες αποτελούμενες από ένα σύνολο καθορισμένων χαρακτηριστικών αναγκαίων και ικανών.* (Sternberg, 1996)[85]

Από τη άποψη της **φιλοσοφίας των μαθηματικών** μας αρέσει συχνά να επαναλαμβάνουμε τα λόγια του **Γαλιλαίου***:*

Οι νόμοι της φύσης είναι γραμμένοι με μαθηματικά.

Ή τα λόγια του **Αϊνστάιν***:*

Αν υπάρχει Θεός είχε πολύ λίγα πράγματα να κάνει.

Ωστόσο, αν τα μαθηματικά ανακαλούνται από τον κόσμο των Ιδεών (Πλάτων) όπου υπάρχουν ή είναι νοητικές κατασκευές του ανθρώπου, αν το σύμπαν μας επιβάλει τα συγκεκριμένα μαθηματικά ή αν δημιουργούμε κατάλληλα μαθηματικά για να προσεγγίσουμε τους νόμους του σύμπαντος ή ένα μέρος τους, είναι ως γνωστόν θεμελιώδες πρόβλημα στη φιλοσοφία των μαθηματικών.

---

[85] Sternberg R. J., Ben-Zeev Talia, The Nature of Mathematical Thinking, Yale University, LEA, NJ 1996, μετ. Θ. Βλάχος.

Ενσωματωμένα μαθηματικά (Embodied Mathematics)

Ποιες δομές του σύμπαντος του κόσμου που ζούμε, αλλά και του νου μας «ενσωματώνονται» στη μαθηματική μας σκέψη;
Η απάντηση που δίνουν οι **Lacoff & Nunez** από την σκοπιά των ενσαρκωμένων μαθηματικών (embodied mathematics) είναι:
Η μοναδική πρόσβαση που έχει ο άνθρωπος προς τα Μαθηματικά είναι διαμέσου εννοιών στο μυαλό του, οι οποίες διαμορφώνονται από το σώμα και τον εγκέφαλό του και γίνονται αντιληπτές μέσω του νευρικού μας συστήματος. Για τον άνθρωπο (ως σωματική ύπαρξη), Μαθηματικά είναι τα ενσαρκωμένα Μαθηματικά. Τα μοναδικά Μαθηματικά τα οποία μπορούμε να γνωρίσουμε είναι τα Μαθηματικά που το σώμα μας και το μυαλό μας μάς επιτρέπουν να γνωρίσουμε!…
*Επειδή τα ενσαρκωμένα Μαθηματικά είναι μια εμπειρική θεωρία σχετικά με τον ενσαρκωμένο νου, πλαισιώνεται από την θεωρία της ενσωματωμένης γνώσης. Τα στοιχεία της ενσωματωμένης γνώσης δεν είναι αξιώματα και αποδείξεις, αλλά διανοητικά σχήματα, επίπεδα εννοιών σημασιολογικές παραστάσεις και κυρίως **μεταφορές***[86]

Συναισθηματική Νοημοσύνη.

Είδαμε προηγουμένως το ρόλο των συναισθημάτων στην επιλογή της μιας ή της άλλης διαισθητικής σκέψης για περαιτέρω λογική νοητική επεξεργασία. Την ευχαρίστηση που γεννάει μια ιδέα με προοπτική και την απογοήτευση αντίθετα όταν δεν επαληθεύεται ένα αποτέλεσμα. Το κίνητρο που δίνουν αυτά τα συναισθήματα για επιβεβαίωση ή για αναπροσαρμογή της μαθηματικής σκέψης, για αλλαγή πορείας. Το ίδιο κίνητρο λειτουργεί κατά πολλούς (Laffaurge) και σε σχέση με την αισθητική ευχαρίστηση που προσφέρει μια κομψή μαθηματική διαδικασία ή αποτέλεσμα.

[86] Lacoff & Nunez: “Where Mathematics Comes from…”, σελ. 346-347.
Από την παρουσίαση του συναδέλφου Παρασκευά Πάλλα, στο μάθημα Διδακτικής και Επιστημολογίας.

Αυτό στο οποίο αναφέρεται η **συναισθηματική νοημοσύνη** είναι, η συνολική λειτουργία του εγκεφάλου ως προς την αλληλεπίδραση της λογικής σκέψης με τα συναισθήματα, η διαμόρφωση της συναισθηματικής ταυτότητας, των συναισθηματικών χαρακτηριστικών της προσωπικότητας και η σχέση τους με την συνολική λειτουργία του ατόμου.

Με μια πολύ πραγματική έννοια, έχουμε δύο μυαλά: ένα που σκέπτεται κι ένα που αισθάνεται.

Αυτοί οι δύο θεμελιακά διαφορετικοί τρόποι γνώσης αλληλεπιδρούν στη δόμηση της διανοητικής μας ζωής. Ο ένας, ο λογικός νους, είναι ο τρόπος κατανόησης του οποίου έχουμε επίγνωση: πιο ενσυνείδητος, πιο στοχαστικός, πιο ικανός να ζυγίζει και να συλλογίζεται. Αλλά δίπλα σ' αυτόν υπάρχει και ένα άλλο σύστημα γνώσης, παρορμητικό και πανίσχυρο, αν και μερικές φορές παράλογο: ο συγκινησιακός νους.

Ο συγκινησιακός/ λογικός διχασμός προσεγγίζει τη λαϊκή διάκριση μεταξύ «καρδιάς» και «μυαλού». Το να γνωρίζεις ότι κάτι είναι σωστό «στην καρδιά σου» είναι ένας διαφορετικός τρόπος πεποίθησης - κατά κάποιο τρόπο, μια βαθύτερη μορφή σιγουριάς - από το να το σκέφτεσαι με το λογικό μυαλό σου. Υπάρχει μια σταθερή αναλογία όσον αφορά τον έλεγχο του συναισθήματος και της λογικής στο μυαλό. Όσο πιο έντονο είναι το συναίσθημα, τόσο πιο πολύ κυριαρχεί ο συγκινησιακός νους -και τόσο πιο αδρανής καθίσταται ο λογικός. Αυτή είναι μια ρύθμιση που μοιάζει να προκύπτει από το προαιώνιο πλεονέκτημα της εξέλιξης των ειδών: το να καθοδηγούν δηλαδή τα συναισθήματα και η διαίσθησή μας τις αυθόρμητες αντιδράσεις μας όταν αντιμετωπίζουμε καταστάσεις όπου η ζωή μας βρίσκεται σε κίνδυνο - όπου το να σταθούμε και να σκεφτούμε τι πρέπει να κάνουμε θα μπορούσε να μας κοστίσει τη ζωή.

Αυτά τα δυο μυαλά, το συγκινησιακό και το λογικό, λειτουργούν ως επί το πλείστον σε αγαστή συνεργασία, ταιριάζοντας τους τόσο διαφορετικούς τρόπους γνώσης που κατέχουν, για να καθοδηγούν τα βήματά μας στον κόσμο. Κανονικά, υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στο συγκινησιακό και το λογικό νου, καθώς το συναίσθημα τροφοδοτεί και διαπλάθει τις λειτουργίες του λογικού νου, και ο λογικός νους τελειοποιεί και μερικές φορές ασκεί βέτο στην επιρροή των συναισθημάτων. Και, όμως, ο συγκινησιακός και ο λογικός νους αποτελούν εν μέρει ανεξάρτητες λειτουργίες, η καθεμιά από τις οποίες, όπως θα δούμε, αντανακλά τη λειτουργία του ξεχωριστού, αλλά αλληλοσυνδεόμενου κυκλώματος του εγκεφάλου.

Σε πολλές ή και τις περισσότερες στιγμές αυτά τα μυαλά είναι εξαιρετικά συντονισμένα. Τα συναισθήματα είναι ουσιώδη για τη σκέψη, και η σκέψη για τα συναισθήματα. Όταν όμως εμφανίζονται τα πάθη, η ισορροπία διασαλεύεται: και τότε ο συγκινησιακός νους παίρνει το πάνω χέρι, καθυποτάσσοντας το λογικό. Ο Έρασμος, ο γνωστός ουμανιστής του δέκατου έκτου αιώνα, έγραψε με σατιρική διάθεση γι' αυτή την προαιώνια ένταση ανάμεσα στη λογική και το συναίσθημα:

«Ο Δίας στοίβαξε πολύ περισσότερο πάθος παρά λογική - μπορείτε να υπολογίσετε μια

αναλογία είκοσι τέσσερα προς ένα. Έστησε δυο οργισμένους τυράννους απέναντι στη μοναχική δύναμη της Λογικής: το Θυμό και τον Πόθο. Πόσο μπορεί η Λογική να υπερισχύσει αντιμέτωπη με τις συνδυασμένες δυνάμεις αυτών των δύο, φαίνεται ξεκάθαρα στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Η Λογική κάνει το μόνο που μπορεί, ξελαρυγγίζεται επαναλαμβάνοντας κανόνες αρετής, ενώ οι άλλοι δύο της λένε να πάει να πνιγεί, και γίνονται ολοένα και πιο θορυβώδεις και προσβλητικοί, τόσο που πια ο Αφέντης τους εξαντλείται, παραδίδει τα όπλα και υποτάσσεται».

…η συναισθηματική εμπειρία με την οποία μας έχει οπλίσει η ζωή στέλνει σήματα που διαμορφώνουν την απόφασή μας, αποκλείοντας ορισμένες επιλογές και υπογραμμίζοντας άλλες. Ο Δρ. Νταμάζιο ισχυρίζεται ότι με τον τρόπο αυτό ο συγκινησιακός εγκέφαλος εμπλέκεται στη λογική σκέψη όσο και ο σκεπτόμενος εγκέφαλος.

Τα συναισθήματα, λοιπόν, παίζουν ρόλο στη λογική σκέψη. Στο χορό του συναισθήματος και της σκέψης, η συναισθηματική ικανότητα καθοδηγεί λεπτό προς λεπτό τις αποφάσεις μας, συμβαδίζοντας με το λογικό νου, επιτρέποντας ή παρεμποδίζοντας την ίδια τη σκέψη. Όμοια, ο σκεπτόμενος εγκέφαλος διαδραματίζει έναν εκτελεστικό ρόλο στα συναισθήματά μας - εκτός από τις στιγμές εκείνες κατά τις οποίες τα συναισθήματα ξεφεύγουν από τον έλεγχο και ο συγκινησιακός εγκέφαλος καλπάζει ασυγκράτητος.

Με μια έννοια, έχουμε δύο εγκεφάλους, δύο μυαλά -και δυο διαφορετικά είδη νοημοσύνης: τη λογική και τη συναισθηματική. Το πώς τα πάμε στη ζωή καθορίζεται και από τους δύο - δεν είναι μόνο η νοημοσύνη του μυαλού αλλά και η νοημοσύνη της καρδιάς που μετράει. Πράγματι, ο νους δεν μπορεί να λειτουργήσει στην εντέλεια χωρίς τη συναισθηματική νοημοσύνη. Κανονικά η συμπληρωματικότητα του μεταιχμιακού συστήματος και του νεοφλοιού, της αμυγδαλής και των προμετωπιαίων λοβών σημαίνει ότι το καθένα είναι το έτερον ήμισυ του άλλου στη διανοητική ζωή. Όταν αυτά τα δυο συμπληρωματικά μέρη αλληλεπιδρούν ικανοποιητικά, η συναισθηματική νοημοσύνη προάγεται - όπως και η πνευματική ικανότητα.

Αυτό ανατρέπει και επανατοποθετεί, στη σωστή της πλέον θέση, την παλιά άποψη περί λογικής και συναισθήματος. Δε θέλουμε να διώξουμε το συναίσθημα και να βάλουμε τη λογική στη θέση του, όπως το έθετε ο Έρασμος, αλλά αντίθετα να βρούμε την έξυπνη ισορροπία ανάμεσα στα δύο. Τα παλιά πρότυπα θεωρούσαν ιδανική τη λογική που ήταν απελευθερωμένη από τον κλοιό του συναισθήματος. Το σύγχρονο πρότυπο μάς προτρέπει να εναρμονίσουμε το μυαλό και την καρδιά μας. Για να το κάνουμε αυτό καλά στη ζωή μας, σημαίνει ότι πρέπει πρώτα απ' όλα να κατανοήσουμε με περισσότερη ακρίβεια τι σημαίνει να χρησιμοποιούμε έξυπνα το συναίσθημα[87].

Είναι φανερό πως ανάλογες στάσεις και συμπεριφορές επηρεάζουν και την μαθηματική σκέψη θετικά ή αρνητικά όπως λ.χ. η μαθηματικοφοβία.

---

[87]Daniel Goleman, Η Συναισθηματική Νοημοσύνη, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα 1998, σ. 36-37, 61-62.

Ιστορικό, κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο

Ο ρόλος του **ιστορικού, κοινωνικού και πολιτιστικού πλαισίου** ήταν πάντα σημαντικός στη μελέτη της μαθηματικής σκέψης και της ανάπτυξης των μαθηματικών. Όλοι όσοι αναφέρονται στην προέλευση και τις απαρχές των μαθηματικών, αρχίζοντας από τον **Πλούταρχο**, αλλά και στην μετέπειτα εξέλιξή τους, τη συνδέουν πάντα με αυτό.

Η κοινωνική, πολιτιστική, πολιτική διάσταση θεωρείται σημαντική αν σκεφτεί κανείς τις συνθήκες που επέτρεψαν ή συνέβαλαν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, είτε αντίστροφα, αν σκεφτεί με βάση την αναίρεση, αυτών των συνθηκών.

Πολλοί αναφέρουν (χωρίς, φυσικά, να τη θεωρούν αποκλειστική αιτία) την σχέση ανάμεσα στην καθιέρωση του δουλοκτητικού συστήματος και την άνεση που έδινε, σε σχέση με το προηγούμενο σύστημα, στους *ελεύθερους πολίτες* για φιλοσοφικές αναζητήσεις γεγονός που συνέβαλε και στην ανάπτυξη της θεωρητικής θεμελίωσης των μαθηματικών στην αρχαιότητα, (πέρα από την πρακτική χρησιμότητά τους). Τη σημασία που είχε στο Δημοκρατικό Πολίτευμα το **επιχείρημα**, η προσπάθεια πειθούς με λογική και τεκμηριωμένη επιχειρηματολογία στην Αγορά του Δήμου και στο Βουλευτήριο.

Και αντιστρόφως, όπως έχει γραφτεί, *αν ο Αϊνστάιν είχε γεννηθεί σε μια πρωτόγονη φυλή που δεν γνώριζε να μετρά πέρα απ' το τρία, οποιαδήποτε προσήλωσή του στα μαθηματικά, όσο μακρόχρονη κι αν ήταν, δεν θα απέδιδε περισσότερο από την ανάπτυξη ενός δεκαδικού συστήματος, που θα στηριζόταν στα δάχτυλα των χεριών και των ποδιών* (Ralph Linton, ανθρωπολόγος).

Γιατί μια επιστημονική προσωπικότητα σαν τον Αϊνστάιν γεννήθηκε στη Γερμανία και έζησε στις Η.Π.Α.; Για τον ίδιο λόγο για τον οποίο ένας θαλασσοπόρος σαν τον Κολόμβο γεννήθηκε στη Γένοβα και όχι στις Άλπεις. Η απόδειξη είναι στοχαστική…

Ο J.-P. Changeux αναφέρει:

Διατηρώ λοιπόν τους ενδοιασμούς μου όσον αφορά την άποψη ότι τα μαθηματικά υπάρχουν κάπου «μέσα στο σύμπαν», ανεξάρτητα από οποιοδήποτε υλικό και εγκεφαλικό υπόστρωμα. Μου φαίνεται χρήσιμο να κρατώ κάποιες αποστάσεις ως προς το έργο του μαθηματικού και ειδικότερα

ως προς τα αντικείμενα που κατασκευάζει. Το μαθηματικό αντικείμενο πρέπει να τοποθετείται μέσα στο ιστορικό πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Διδάσκουμε τα μαθηματικά σαν ένα συνεκτικό σύνολο προτάσεων, θεωρημάτων και αξιωμάτων. Ξεχνάμε όμως ότι εμφανίστηκαν προοδευτικά κατά τη διάρκεια της ιστορίας των μαθηματικών και των ανθρώπινων κοινωνιών' ότι πρόκειται, κοντολογίς, για πολιτισμικά αντικείμενα, που υπόκεινται σε εξέλιξη. Αντίθετα, το να επανατοποθετούμε τα μαθηματικά αντικείμενα σε μια ιστορική προοπτική μάς επιτρέπει να τα εκλαϊκεύουμε, να τα καθιστούμε περισσότερο «απτά» απ' όσο φαίνονται. Οι θεωρίες διαδέχονται η μια την άλλη και ορισμένες, χωρίς να ακυρώνουν τις προηγούμενες, φέρνουν καινούργιο φως. Αυτή είναι, λόγου χάρη, η περίπτωση των μη ευκλείδειων γεωμετριών.

Τα τελευταία χρόνια αυτή η μελέτη έχει πάρει ευρύτερες και πιο συστηματικές διαστάσεις μέσα και από τα **Εθνομαθηματικά.** Τα Εθνομαθηματικά μελετούν την σχέση των κοινωνικών, εθνικών, εκπαιδευτικών και πολιτικών συνθηκών με την μαθηματική σκέψη.

Τα Μαθηματικά είναι ένα διανοητικό εργαλείο το οποίο δημιουργήθηκε από το ανθρώπινο είδος για να απαντήσει σε καταστάσεις που παρουσιάζονται στην καθημερινή ζωή και για να περιγράψει και να εξηγήσει τον κόσμο. Η ιδέα των ***Εθνομαθηματικών*** *προέκυψε ως μια ευρύτερη άποψη για το πώς τα Μαθηματικά συνδέονται με τον πραγματικό κόσμο, η οποία λαμβάνει υπόψη τις διαφορές, τόσο πολιτισμικές όσο και κοινωνικές.*

Από την προϊστορική εποχή οι άνθρωποι έχουν συσσωρεύσει γνώση για να απαντήσουν στα ένστικτα και τις ανάγκες τους. Φυσικά, οι απαντήσεις ποικίλλουν από περιοχή σε περιοχή, από κουλτούρα σε κουλτούρα.

Για παράδειγμα, είναι σαφές ότι οι άνθρωποι που ζουν σε τροπικά δάση έχουν αναπτύξει διαφορετικούς τρόπους μέτρησης της γης από εκείνους που ζουν σε εύφορες πεδιάδες: έτσι έχουν διαφορετικές γεωμετρίες (μέτρηση). Όταν ζουν κοντά στον Ισημερινό, αντιλαμβάνονται την εναλλαγή ημέρας και νύχτας με τον ίδιο τρόπο σε όλη τη διάρκεια του έτους, ενώ όταν ζουν σε τροπικές περιοχές, αναγνωρίζουν πώς οι εποχές επηρεάζουν τη διάρκεια της ημέρας και της νύχτας. Έτσι, ημερολογιακά συστήματα, και κατά συνέπεια μέσα παραγωγής, έλεγχου… (D'Abrosio 2004)[88]

Τα Μαθηματικά, μια ανθρώπινη δραστηριότητα, μέχρι πρόσφατα εθεωρείτο ότι εκπροσωπούσαν το απόλυτο στη λογική, στην αλήθεια και στην παγκόσμια

[88] *Σταθοπούλου Χ.,ΕΘΝΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Ατραπός, Αθήνα 2005, Πρόλογος D'Abrosio 2004*

γνώση. Η εθνομαθηματική προσέγγιση έρχεται να αμφισβητήσει αυτή την αντίληψη, εξηγώντας πώς αυτή η αντίληψη, δημιουργήθηκε, πώς διατηρήθηκε για μακρό χρονικό διάστημα, αλλά και πώς είχε επικρατήσει σε όλο σχεδόν τον κόσμο.

Τα Εθνομαθηματικά, διεπιστημονική προσέγγιση στη συμβολή κυρίως της Ανθρωπολογίας και των Μαθηματικών / Ιστορίας των Μαθηματικών, δεν αποτελούν μια προσέγγιση που έρχεται να αμφισβητήσει στο σύνολό της την ακαδημαϊκή μαθηματική γνώση, αλλά έρχεται να φωτίσει άλλες διαστάσεις της, καθώς και να φέρει στην επιφάνεια και άλλες μορφές μαθηματικής γνώσης. Η εθνομαθηματική προοπτική ανοίγει μια ευκαιρία για παραπέρα μαθηματική δημιουργικότητα, για νέες μεθόδους και νέες μαθηματικές έννοιες.

Από την Ανθρωπολογία αντλεί αναλυτικά εργαλεία, με κύριο την έννοια «κουλτούρα» και τη μεθοδολογία - εθνογραφία. Διαφοροποιείται όμως από αυτή στην εστίαση του ενδιαφέροντος: για την Ανθρωπολογία είναι η κατανόηση της κουλτούρας, ενώ για τα Εθνομαθηματικά η κατανόηση ενός πολιτισμικά σχετικού αντικειμένου των Μαθηματικών, σε σχέση πάντα με άλλες πολιτισμικές παραμέτρους. Στην προσέγγιση των Εθνομαθηματικών, δηλαδή, μας ενδιαφέρουν όχι μόνο τα ακαδημαϊκά Μαθηματικά και τα Μαθηματικά που χρησιμοποιούμε στο δικό μας πολιτισμικό περιβάλλον, αλλά και η εξέταση μαθηματικών ιδεών με ανθρωπολογικό τρόπο σε κάθε κουλτούρα.

Η εθνομαθηματική έρευνα έρχεται να αμφισβητήσει τον εθνοκεντρισμό και ειδικότερα τον ευρωκεντρισμό των Μαθηματικών, αναδεικνύοντας ότι και άλλοι πολιτισμοί αφενός έχουν συμβάλει στη δημιουργία των Μαθηματικών, όπως έχουν διαμορφωθεί σήμερα ως ακαδημαϊκό αντικείμενο και αφετέρου να αναγνωρίσει το γεγονός ότι κάθε πολιτισμική ομάδα ανάλογα με τις δικές της ανάγκες και μέσα από συγκεκριμένες πρακτικές αναπτύσσει και χρησιμοποιεί τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες το δικό της σώμα μαθηματικής γνώσης. Τα Εθνομαθηματικά έχοντας ένα διαφορετικό προσανατολισμό από τα ακαδημαϊκά Μαθηματικά, νομιμοποιούν και άλλες μορφές γνώσης πέραν της τυπικής. Τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως ένα πολιτισμικό χαρακτηριστικό και ως τέτοιο έχουν τη δική τους αξία σε συγκεκριμένο πλαίσιο. (Σταθοπούλου, 2005)[89]

---

[89] *Σταθοπούλου Χ.,ΕΘΝΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Ατραπός, Αθήνα 2005*

Επιστημολογικά πλαίσια και εμπόδια

Ως επιστημολογικά πλαίσια θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το συγκεκριμένο, σε κάθε φάση, επίπεδο ανάπτυξης του συνόλου των επιστημονικών γνώσεων και της τεχνολογίας και τις δυνατότητες έγκυρης γνώσης που μας επιτρέπει ή μας παρέχει.

Χάρη στους υπολογιστές έγινε δυνατόν να λυθεί το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, όπως είπαμε. Η ανάπτυξη της φυσικής βοήθησε στην ανάπτυξη των μαθηματικών και αντίστροφα, όπως είναι γνωστό από πολλά σχετικά παραδείγματα.

Κανείς δεν θα μπορούσε να ισχυριστεί σήμερα, που φωτογραφίζουμε τη γη από το διάστημα, ότι το σχήμα της δεν είναι σφαιρικό ή ότι δεν μπορουμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια την ακτίνα της.

Δεν μετράμε την απόσταση των πλοίων απ' τη στεριά με όμοια τρίγωνα, ούτε ανοίγουμε τα τούνελ με γεωμετρικούς υπολογισμούς όπως το όρυγμα του Ευπαλίνου.

Όμως πόσο μεγάλη αξία αποχτούν η μέθοδος του Ερατοσθένη για τη μέτρηση της περιφέρειας γης ή του Θαλή και του Ευπαλίνου αντίστοιχα για τα ζητήματα που αναφέραμε, αν εξεταστούν μέσα στα Επιστημολογικά πλαίσια της εποχής τους; Και πόσο μεγάλη παιδευτική αξία έχει το να συλλάβει ο μαθητής την αξία της αφαιρετικής σκέψης για την ανακάλυψη του τροχού στα επιστημολογικά πλαίσια της εποχής που έγινε;

Στη διδακτική πρακτική αυτή η πορεία και διαδικασία συχνά αντιστρέφεται.

Η σειρά με την οποία τα, βασικά εγχειρίδια παρουσιάζουν τις θεωρίες, δεν είναι η ιστορία που το ανθρώπινο πνεύμα ακολούθησε στην συγκρότηση των θεωριών αυτών.[90] (Σπύρου, 1998)

Είναι γνωστό επίσης ότι πολλά ζητήματα καθυστέρησαν να γίνουν αποδεκτά στα μαθηματικά γιατί δεν εντάσσονταν στα επιστημολογικά πλαίσια της εποχής που πρωτοεμφανίστηκαν, πέρα από τις διαισθητικές δυσκολίες που είχαν και έχουν πολλά από αυτά, όπως αναφέραμε ήδη.

[90] Σπύρου Π., ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΘΗΝΑ, 1998,σ.

Τα εμπόδια αυτά λειτουργούν και σε κοινωνικό, επιστημονικό, επίπεδο αλλά και σε ατομικό. Είναι παρόντα καθημερινά στην σχολική τάξη.

Ως επιστημολογικά εμπόδια εννοούμε:

μαθησιακές δυσκολίες που προκύπτουν από ήδη διαμορφωμένες προκαταλήψεις και συσκοτίσεις που προϋπάρχουν στο νου των μαθητών και δεν του επιτρέπουν την άμεση πρόσληψη κάποιας έννοιας.

…δεν πρόκειται για ειδικές μαθησιακές δυσκολίες που αφορούν εξατομικευμένα ένα μαθητή και αναλύονται από την ψυχολογία. (Σπύρου Π., 1998)[91]

M. C. Escher, Liberation

[91] Σπύρου Π., ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΘΗΝΑ, 1998,σ.

4. Διαισθητική και λογική σκέψη στην μαθηματική εκπαίδευση.

Κάνε άλμα πιο γρήγορα από τη φθορά.
Το «κενό» υπάρχει, όσο δεν πέφτεις μέσα του.
Θάλασσα λανθασμένη
δεν γίνεται.
Από το στοχασμό σου πήζει ο ήλιος
μες στο ρόδι κι ευφραίνεται.

Οδυσσέας Ελύτης Μαρία Νεφέλη

Οι αντιλήψεις της επιστημονικής, της εκπαιδευτικής και ιδιαίτερα της μαθηματικής κοινότητας για το ρόλο και τη σχέση της διαισθητικής και της λογικής σκέψης, για τη φύση της μαθηματικής σκέψης, για όλα όσα αναφέρθηκαν, αντανακλώνται στις διάφορες πτυχές της μαθηματικής εκπαίδευσης.[92]

Πτυχές που αφορούν στους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα Αναλυτικά Προγράμματα, τα Βιβλία, τα βοηθήματα, τις οδηγίες, τους τρόπους διδασκαλίας, τις πεποιθήσεις των μαθηματικών, των μαθητών, τη σύνδεση με τα άλλα μαθήματα και ιδιαίτερα τη φυσική, κλπ.

Σύμφωνα με τον **A. N. Kolmogorov** (1903-1987) τα **σύγχρονα μαθηματικά** είναι ***τα μαθηματικά όλων των πιθανών ποσοτικών σχέσεων αλληλεξαρτήσεων ανάμεσα στα μεγέθη*** και ***τα στάδια της μαθηματικής μας εκπαίδευσης γενικά αντιστοιχούν στα στάδια ανάπτυξης των μαθηματικών.***

Αυτή τη διαπίστωση θα μπορούσε να τη δει κανείς τόσο σε σχέση με τα μαθηματικά που διδάσκονται στις βαθμίδες των εκπαιδευτικών συστημάτων όσο και σε σχέση με τα μαθηματικά που διδάσκονταν κατά χρονικές περιόδους.

Θα πρέπει να διαπιστώσουμε ότι και στη χώρα μας έγινε, σ' ότι αφορά τη μαθηματική εκπαίδευση (Αναλυτικά Προγράμματα, Βιβλία, οδηγίες,

[92] Δεν εξετάζουμε εδώ το πώς δημιουργούνται αυτές οι αντιλήψεις, ποιοι κοινωνικοί, οικονομικοί, επιστημολογικοί παράγοντες επιδρούν.

βοηθήματα, κλπ) σε σχέση με το θέμα που εξετάζουμε, λίγο ως πολύ ότι έγινε και στις άλλες χώρες.

Πιθανόν με μια υστέρηση φάσης, αλά βασικά ακολουθήσαμε και ακολουθούμε τους ίδιους ή παρόμοιους προβληματισμούς.

Από τα πιο *«παραδοσιακά»* μαθηματικά, την Πρακτική Αριθμητική, την Άλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, περάσαμε από το 1965 στα «Νέα ή Μοντέρνα Μαθηματικά», με Θεωρία Συνόλων, Προτασιακό Λογισμό κλπ.

Μια περίοδος που έδυσε οριστικά στη χώρα μας το 1987, μετά την διεθνή κριτική που υπέστη, από την αρχή της δεκαετίας του ’70, αυτός ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών. (Thom, Kline, κ.α.)

Η διαμάχη εκείνης της περιόδου από μια σκοπιά, ήταν και μια διαμάχη Διαίσθησης και Λογικής στη μαθηματική εκπαίδευση.

Μια διαμάχη που πήραν μέρος με άρθρα που συμπύκνωναν τις απόψεις της μιας και της άλλης πλευράς ή συνθετικά, ο Rene Thom, ο Morris Kline, ο Jean Dieudonne, ο A. Kolmogorov και πολλοί άλλοι.

Ο **Rene Thom** από τους πρώτους επεσήμανε την διάσταση αυτή (Λογικής-Διαίσθησης) με τον εξοβελισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υπέρ της Θεωρίας Συνόλων και της Άλγεβρας.

Μόνο εκείνα τα θέματα που έχουν ποιότητα «παιχνιδιού», έχουν εκπαιδευτική αξία, και απ’ όλα αυτά τα παιχνίδια, η Ευκλείδεια γεωμετρία με τις συνεχείς αναφορές σε θεμελιώδεις, ***διαισθητικά αντιληπτές αρχές****, είναι το λιγότερο ανωφελές και το πληθωρικότερο σε σημασία.*

Χαρακτηρίζοντας ολέθρια την αντικατάσταση της Γεωμετρίας από την Άλγεβρα, σημείωνε, με μια δόση υπερβολής όπως λέει, ότι: *στην Άλγεβρα τα ζητήματα είναι είτε τετριμμένα είτε απλησίαστα για τους μαθητές, ενώ τα γεωμετρικά προβλήματα παρουσιάζουν μια πλατιά σειρά προκλήσεων.*

Ο **Morris Kline** μετά από εκτενή ανάλυση σημείωνε, εν κατακλείδι, ότι μπορεί να υπάρχει θαυμασμός στην παραγωγική μεθοδολογία αλλά δεν πρέπει να γίνει παιδαγωγική υιοθέτησή της.

Ο **Jean Dieudonne**, εκ των βασικών της ομάδας των Bourbaki, απαντούσε ότι *ο τελικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών σε κάθε επίπεδο χωρίς αμφιβολία είναι να δοθεί στο μαθητή μια αξιόπιστη* ***«διαίσθηση»*** *των μαθηματικών αντικειμένων με τα οποία θα ασχοληθεί. Αλλά η πρόοδος προς την απόκτηση διαίσθησης αναγκαστικά περνάει μέσα από μια περίοδο καθαρά τυπικής και επιφανειακής γνώσης που μόνο σταδιακά θα αντικατασταθεί από μια καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση.*

Θεωρούσε όπως ο Hilbert ότι οι δομές πηγάζουν από προβλήματα με απρόβλεπτο τρόπο και ότι η Θεωρία Συνόλων είναι μονάχα ένα βολικό πλαίσιο όπου οι δομές τοποθετούνται καθώς βαθμιαία ανακαλύπτονται.

Θεωρούσε επίσης λάθος τον υπερτονισμό της αφαίρεσης σε βάρος της διαίσθησης

Υπερασπιζόμενος την αυστηρότητα σημείωνε ότι **η λογική σκέψη** δεν πρέπει να θεωρηθεί πανάκεια αντί για εργαλείο που είναι.

Η λογική είναι μαθηματικά όσο και οι πυρηνικοί αντιδραστήρες είναι πυρηνική φυσική. Αν είσαι αρκετά έξυπνος να φανταστείς μια απόδειξη, η λογική θα σε βοηθήσει να την φέρεις σε πέρας…η φαντασία πάντα είναι ο αναντικατάστατος αρχικός σπινθήρας.

Σημειώνοντας ότι η κύρια διαμάχη αφορά το Γυμνάσιο και το Λύκειο πρόβλεπε ότι: *η αναταραχή τελικά θα κοπάσει και θα κατασταλάξει σε κάποιον μετριοπαθή λογικό συμβιβασμό.*[93]

Ο τρόπος αυτός διδασκαλίας των μαθηματικών είχε αποδοθεί τότε, αφ' ενός στην λαθεμένη αντίληψη πολλών ερευνητών μαθηματικών, μεγάλης μερίδας της μαθηματικής ακαδημαϊκής κοινότητας, για τα καθαρά μαθηματικά, τα μαθηματικά για τα μαθηματικά, σε μια αυτόνομη ανάπτυξη αποσπασμένη και αποστασιοποιημένη από τις εφαρμογές και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, ως *ένα θρίαμβο του νου και της καθαρής σκέψης.* Αφ' εταίρου στην αποδοχή του από μεγάλη μερίδα των εκπαιδευτικών, λόγω της ευκολίας που υπάρχει στη διδασκαλία με φορμαλιστικό τρόπο, και του σχετικού κύρους που προσδίδει.

Εντοπίζονταν δηλαδή οι αιτίες μόνο στις αντιλήψεις μεγάλης μερίδας της μαθηματικής κοινότητας.

---

[93] Ξαναδιαβάζοντας το άρθρο του Jean Dieudonne σκέφτεται κανείς πόσο πιο επικίνδυνοι είναι πάντα οι βασιλικότεροι του Βασιλέως ή πόσο συχνά τα μέσα και οι σκοποί διαφέρουν.

Σήμερα με την απόσταση που μας χωρίζει μπορούμε να ισχυριστούμε ότι μάλλον ήταν μια διαμάχη για τη σωστή ή λαθεμένη διδασκαλία των μαθηματικών, βασισμένη σε πρόσκαιρες προβλέψεις εκείνης της εποχής.
Ότι πηγή της έντασης, υλική βάση της, ήταν και η ορμητική είσοδος στη ζωή μας των Η/Υ και της πληροφορικής σε μια φάση κατά την οποία τα προγράμματα τα έφτιαχνε ο κάθε χρήστης μόνος του δημιουργώντας πρώτα το **λογικό διάγραμμα.**
Σε μια κοινωνία όπου θα κυριαρχούσαν οι Η/Υ, με τους οποίους η επικοινωνία ήταν σε αυστηρά λογική γλώσσα, «έπρεπε» η παιδεία να προετοιμάσει ανάλογα τους πολίτες και τους μελλοντικούς επιστήμονές της.

Σ' αυτή την περίοδο, το 1971, ο **A. N. Kolmogorov** σημείωνε:

Φαίνεται ότι οι γλώσσες προγραμματισμού (Algol, Fortran) συνηγορούν υπέρ της τάσης των Μοντέρνων Μαθηματικών, ωστόσο, «Θα πρέπει, όσο είναι δυνατόν, να αποφεύγονται στα σχολεία όλων των κατευθύνσεων αφαιρέσεις των οποίων η αναγκαιότητα δεν μπορεί να δικαιολογηθεί πλήρως κατά τη σχολική διδασκαλία.

Η εισαγωγή μιας νέας αφηρημένης έννοιας θα πρέπει ήδη κατά το στάδιο της ευρετικής (heuristisch) διαπραγμάτευσής της, πριν από τον αυστηρό ορισμό της, να περιέχει και μια ικανοποιητικά πειστική δικαιολόγησή της.

Στο μεταξύ στα σχολεία της γενικής εκπαίδευσης είναι χρησιμότερο να συνηθίσουν τους μαθητές να σκέφτονται πιο αυστηρά, παρά να διαθέτουν πολύ χρόνο για να τους μάθουν μια αυστηρή γλώσσα.[94]

Οι Η/Υ κυριάρχησαν αλλά τα λογικά διαγράμματα για τη συντριπτική πλειοψηφία, εκτός των ειδικών, ξεπεράστηκαν.
Δεν ξεπερνιούνται όμως το ίδιο εύκολα οι αντινομίες διαισθητικής και λογικής προσέγγισης που προέκυψαν και προκύπτουν ως επιπτώσεις από το πλαίσιο προγράμματος των μαθηματικών στην εκπαίδευση.
Ας δούμε ένα-δυο παραδείγματα αντιφάσεων που είχαν εντοπισθεί τότε.

---

[94] A. Kolmogorov, Τα μοντέρνα μαθηματικά και τα μαθηματικά στο μοντέρνο σχολείο, μετ. Ζ. Αντύπας, Ευκλείδης γ΄ , τ. 8 , ΕΜΕ, Αθήνα 1985.

Στην κλασική γεωμετρία θεωρούμε δύο σχήματα σαν ίσα όταν κατάλληλα τοποθετούμενα ταυτίζονται. Στα μοντέρνα βιβλία τα σχήματα εμφανίζονται συχνά σαν σημειοσύνολα. Όπως είναι γνωστό δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν τα ίδια στοιχεία. Επομένως δύο διαφορετικά σχήματα δεν μπορεί να είναι ίσα. Στη θέση της ισότητας εμφανίζεται η έννοια της «ισοδυναμίας». Δύο σχήματα είναι «ισοδύναμα» όταν το ένα μπορεί να απεικονισθεί στο άλλο με μία ισομετρία. Χωρίς να το δικαιολογούν πλήρως, ονομάζουν οι μαθηματικοί τους ισομετρικούς μετασχηματισμούς «μεταφορές (μετακινήσεις)». (Kolmogorov*)*

Το πρώτο, η ισότητα, είναι διαισθητικά άμεσα αντιληπτό το δεύτερο απαιτεί λογική διεργασία.

Τα μαθηματικά είναι και γνωστικά εφόδια για τη ζωή και προφανώς δεν θα κάνει πράξεις, στην ενεργό ζωή του, με τη θεωρία ομάδων ο σημερινός μαθητής. (Thom)

Είναι αυτό που πολύ παραστατικά απέδωσε ο Morris Kline στο βιβλίο του *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης,* με την ερώτηση της δασκάλας «Γιατί 2+3 ίσον 3+2».

Πολλές φορές νομίζουμε ότι τελειώσαμε αντιμετωπίζοντας τη λαθεμένη άποψη ως άποψη, αλλά πως αναπτύσσεις στην πράξη τη σωστή;

Λέμε συχνά ότι στα μαθηματικά υπάρχουν δυο μεγάλες έννοιες του απείρου και του συνεχούς.

Από την αρχή δυο αντιτιθέμενες τάσεις, αλληλοβοηθούμενες μερικές φορές, κυβερνούν ολόκληρη την περίπλοκη εξέλιξη των Μαθηματικών. Σε αδρές γραμμές πρόκειται για το διακριτό και το συνεχές (Bell).[95]

Λέμε επίσης ότι τα μαθηματικά είναι στοιχείο πολιτισμού και ότι πρέπει να έρθει ο μαθητής σε επαφή με τη μαθηματική κληρονομιά.

Πόσο και πώς ο μαθητής μπορεί να έρθει σε επαφή μ΄ αυτές τις έννοιες;

Πόσο και πως αντιλαμβάνεται τις τιτάνιες προσπάθειες της μαθηματικής σκέψης που έγιναν στην πορεία των αιώνων, τις κρίσεις, τα παράδοξα, τις επιστημονικές επαναστάσεις;

Ορισμένες ενότητες που προσφέρονται ως τέτοια ερεθίσματα ή έχουν αφαιρεθεί ή διδάσκονται μόνο από την σκοπιά της χρησιμότητάς τους, ως

[95] Bell, Οι Μαηματικοί, σελ. 17.

αναγκαίος κρίκος, στην αλυσίδα του πλαισίου προγράμματος των μαθηματικών (το παλιό Αναλυτικό Πρόγραμμα).

Η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχει αφαιρεθεί από την διδακτέα ύλη της Β΄ Λυκείου και μαζί και η άσκηση με τον Αχιλλέα και τη χελώνα όπου μίλαγες για τα παράδοξα του Ζήνωνα. Τα λίγα για τις ακολουθίες μαζί με τη νιφάδα του Koch όπου έλεγες δυο λόγια για τα fractals.

Ή ακόμη τι μαθαίνουν πράγματι οι μαθητές για τους άρρητους;

Σε μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας που αναφέρεται σ' αυτά τα θέματα υπάρχει, ως παράδειγμα, μια γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος (όχι αυτή που κάνουμε στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου, για οξυγώνια και αμβλυγώνια τρίγωνα), αλλά η εξής: αντί για τετράγωνα να φτιάξουμε στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου οποιαδήποτε όμοια πολύγωνα.

Πόσοι θα απαντούσαν ότι ισχύει ότι και για τα εμβαδά των τετραγώνων; Γιατί να μην γενικεύουμε όταν το διδάσκουμε και προς αυτή την κατεύθυνση που κεντρίζει τον προβληματισμό και την φαντασία; Για ποιους; και γιατί; άραγε τα αναφέρουν αυτά, εδώ και χρόνια, τα βιβλία της διδακτικής των μαθηματικών;

Στη σύγχρονη φάση της μαθηματικής εκπαίδευσης, διεθνώς και στη χώρα μας, έχει γίνει σαφές μέσα από τις επιστημονικές δημοσιεύσεις, βιβλία, άρθρα και τον γενικότερο προβληματισμό που αναπτύσσεται ότι η μαθηματική κοινότητα, θεωρητικά τουλάχιστον, ξέρει τι απορρίπτει.

Αυτό δεν σημαίνει φυσικά ότι το γνωρίζει, τουλάχιστον σε όλη του την έκταση και η πλειοψηφία των μαθηματικών ή ότι συμφωνούν όλοι.

Είναι, επίσης θεωρητικά, προσδιορισμένοι πιο ολοκληρωμένα, από ότι στο παρελθόν, οι σκοποί της διδασκαλίας των μαθηματικών ακόμη και στο πιο στοιχειώδες επίπεδο.

Πριν από μερικά χρόνια η **UNESCO όριζε ως μαθηματικό αλφαβητισμό τη γνώση των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής**.

Σήμερα ορίζουμε ως μαθηματικό αλφαβητισμό κάτι αρκετά πιο σύνθετο που καθορίζεται ιστορικά και όχι τελεσίδικα που έχει την δική του δυναμική. Καθορίζεται από την κοινωνική, πολιτισμική, τεχνολογική ανάπτυξη και τις ανάλογες απαιτήσεις της εποχής. **Βασικά του στοιχεία είναι η κατανόηση των Μαθηματικών ως στοιχείο του πολιτισμού, ως ανθρώπινη και**

κοινωνική δραστηριότητα που δίνει έμφαση στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης.[96]

Στη χώρα μας το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στις Οδηγίες του για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών αναφέρει[97]:

«Α. ***ΣΚΟΠΟΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ***

Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:

α) Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.

β) Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

γ) Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

δ) Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.

ε) η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσης και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Ειδικότερα, με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, επιδιώκεται:

α) Να εμπεδωθεί καλύτερα και να συμπληρωθεί η ύλη που διδάχτηκε στο Δημοτικό Σχολείο, ώστε οι μαθητές να εφοδιαστούν με όλες τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για τη ζωή και την περαιτέρω μελέτη και εκπαίδευση.

β) Να εμπλουτιστούν οι εμπειρίες των μαθητών. με εφαρμογές από την καθημερινή ζωή, την τεχνολογία και τις άλλες εφαρμοσμένες επιστήμες, ώστε να αναπτυχθεί μια θετική στάση των μαθητών προς τα Μαθηματικά.

γ) Να εισαχθούν οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία και να συνειδητοποιήσουν ότι αυτή αποτελεί χρήσιμο και άμεσο τρόπο για την επαλήθευση γενικών νόμων.

ενώ στο Λύκειο: .

α) Να εμπεδωθούν και να διερευνηθούν σε θεωρητικότερο επίπεδο οι γνώσεις που απόκτησαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο.

β) Να μυηθούν και να εξοικειωθούν οι μαθητές στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να καλλιεργηθεί η «μαθηματική σκέψη».

γ) Να ασκηθούν οι μαθητές στο να χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως γνώση, αλλά

---

[96] CIEAEM 53 “Mathematical Literacy in the Digital Era”, Verbania-Italy, July 2001

[97] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Οδηγίες του για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, ΟΕΔΒ, Αθήνα 2000.

και ως μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή.
δ) Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με τις ποικίλες εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες και στη σύγχρονη πραγματικότητα».

Πέρα από την κριτική που θα μπορούσε να κάνει κανείς στη διατύπωση αυτών των σκοπών, για το πόσο συμπεριλαμβάνουν όλο αυτό τον πλούσιο προβληματισμό που έχει αναπτυχθεί διεθνώς στις μέρες μας, είναι γεγονός ότι τα υπαρκτά, πραγματικά προβλήματα απέχουν παρασάγγες από τις όποιες διακηρύξεις στόχων.
Τα προβλήματα έχουν αναδειχθεί και αναδεικνύονται μέσα από την καθημερινή διδασκαλία, από τις διάφορες εξετάσεις και έχουν διαπιστωθεί, με μελέτες τοπικές (Πανεπιστημίων, ΕΚΚΕ, Π.Ι., ΚΕΕ) ή διεθνείς (ΟΟΣΑ, TIMSS, PISA).
Πολλές φορές τα προβλήματα μετατίθενται στον τρόπο της εξέτασης ή στον τύπο των ερωτήσεων. Δεν είναι σωστό όμως η μαθηματική εκπαίδευση να προετοιμάζει τους μαθητές μόνο για συγκεκριμένου τύπου ερωτήσεις ή για συγκεκριμένου τύπου ζητήματα. Ανάλογα στοιχεία προκύπτουν και από την έρευνα στο Μέρος ΙΙ.
Έχει επανειλημμένα επισημανθεί ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν με βάση το σύνολο των μαθηματικών γνώσεών τους προβλήματα, ιδιαίτερα πραγματικά προβλήματα που απαιτούν και σχετική πρωτοβουλία, να χρησιμοποιήσουν και να συνδυάσουν διαφορετικές ενότητες των μαθηματικών (σε αντιδιαστολή με τον τρόπο διδασκαλίας κατά κεφάλαιο με τις αντίστοιχες εφαρμογές του), να αναπαραστήσουν και να δουν τι σημαίνει στην πράξη αυτό που έχουν να αντιμετωπίσουν ως μαθηματικό πρόβλημα, να ξεφύγουν από την απλή αναπαραγωγή διαδικασιών, αλγορίθμων. Πολλές φορές τους δημιουργείται η εντύπωση πως μόνο ένας σωστός τρόπος υπάρχει και αρκεί να ξέρεις «τον τρόπο» και να τον θυμηθείς. Μια ταχτική που οδηγεί και στην στενή απομνημόνευση ασκήσεων και περιπτωσιολογίας.

Όσα προαναφέρθηκαν αφορούν όλο το πλαίσιο των μεθόδων διδασκαλίας. Σε ποιο βαθμό, δηλαδή, αναπτύσσουν την κριτική σκέψη με την άσκηση και όξυνση και της διαισθητικής και της λογικής σκέψης.

Στις Οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου όσον αφορά στις *Μεθόδους Διδασκαλίας* αναφέρονται επίσης αρκετές σωστές, στον ένα ή τον άλλο βαθμό παραινέσεις (οι οποίες βελτιώθηκαν και με την πάροδο του χρόνου) προς τους καθηγητές των μαθηματικών.

Τονίζεται πιο άμεσα σε παλιότερες οδηγίες πιο έμμεσα τώρα ότι η διδασκαλία είναι **στο Γυμνάσιο βασικά ενορατική** ενώ **στο Λύκειο βασικά θεωρητική**. Αυτό βέβαια μπορεί να εκληφθεί απλουστευτικά ως πρακτική, ότι στο Γυμνάσιο αφαιρούμε τις αποδείξεις και στο Λύκειο τη διαίσθηση. Υπάρχει δηλαδή ο κίνδυνος, η ανάπτυξη σε κάθε επίπεδο της λογικής σκέψης να μετατίθεται στο Λύκειο και η διαίσθηση ότι δεν το αφορά.
Η κατανομή της διδακτέας ύλης όμως υπηρετεί τους αντίστοιχους στόχους;
Είναι σαφές ότι το πλαίσιο προγράμματος του Γυμνασίου εξαρτάται και από το ότι η υποχρεωτική εκπαίδευση στη χώρα μας είναι 9 χρόνια. Άλλος σχεδιασμός, ως προς τις διδακτικές ενότητες, πιθανά θα υπήρχε σε διαφορετική περίπτωση. Όπως επίσης είναι σαφές ότι οι εισαγωγικές εξετάσεις για την τριτοβάθμια εκπαίδευση επηρεάζουν σημαντικά την διδακτέα ύλη και πολύ περισσότερο τους τρόπους διδασκαλίας των καθηγητών και τις γνωστικές προσεγγίσεις των μαθητών στο Λύκειο. Προφανώς όλα τα παραπάνω δεν μπορούν να μελετηθούν στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, πρέπει όμως οπωσδήποτε να συνεκτιμηθούν στα συμπεράσματα. Ένα σχετικό στοιχείο, ενδιαφέρον νομίζω, προκύπτει από τα στοιχεία της έρευνας πεποιθήσεων των μαθητών στο Δεύτερο Μέρος.

Διάσταση θεωρίας πράξης

Εκείνο που αποδεικνύεται, για άλλη μια φορά και με τις οδηγίες του Π. Ι., είναι πως άλλο η Θεωρία και άλλο η Πράξη.
Άρα είναι προς διερεύνηση το θέμα: πού οφείλεται αυτή η διάσταση; στο βαθμό που υπάρχει.
Διαβάζονται οι οδηγίες από τους εκπαιδευτικούς μαθηματικούς;
Είναι οι οδηγίες ατελείς ή δεν εφαρμόζονται;
Συμφωνούν μ' αυτές οι μαθηματικοί ή οι κυρίαρχες αντιλήψεις στον κλάδο είναι διαφορετικές;

Η καθημερινή σχολική πράξη ευνοεί ή αντιστρατεύεται την εφαρμογή τους;

Ποιες αντιλήψεις διαμορφώνουν τελικά οι μαθητές;

Αυτό το θέμα το διερευνούν τα ερωτηματολόγια πεποιθήσεων (Μέρος ΙΙ).

Το θέμα της σύνδεσης στη διδακτική πράξη της διαισθητικής με τη λογική σκέψη προφανώς δεν είναι εύκολη υπόθεση και έχει πολλά προαπαιτούμενα.

Η **Ε. Κολέζα** αναφερόμενη στο θέμα της σύνδεσης θεωρίας και πράξης στα Μαθηματικά σημειώνει:

Σε ένα πιο πρακτικό επίπεδο η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση καλείται να απαντήσει στο ερώτημα: Τι μπορούμε να κάνουμε για να βοηθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν τα Μαθηματικά ως αντικείμενο (ως τρόπο σκέψης) και ως εργαλείο για την επίλυση (καθημερινών) προβλημάτων[98].

Παραθέτει στη συνέχεια τα δεκατρία ερωτήματα που διατύπωσε σχετικά με το θέμα αυτό ο **Η. Freudenthal**, για προβληματισμό.

Ανάμεσα σε αυτά:

*Το 4^{ο} ερώτημα που θέτει ο Freudenthal αφορά τον **τρόπο οργάνωσης της διδασκαλίας.** Στο πλαίσιο αυτής της οργάνωσης προκύπτουν εξειδικευμένα ερωτήματα, όπως για παράδειγμα:*

- πώς θα καλλιεργήσουμε τις **διαισθητικές ικανότητες** των μαθητών (το 5^{ο} ερώτημα)
- πώς θα βοηθήσουμε τους μαθητές να αναπτύξουν μεταγνωστικές ικανότητες, δηλαδή **ικανότητες αναστοχασμού** και κριτικής αντιμετώπισης των ενεργειών τους (το 6^{ο} ερώτημα)
- μέσα από ποιες ενέργειες θα βελτιώσουμε τη **στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά** (το 7^{ο} ερώτημα)
- πώς θα δημιουργήσουμε το **κατάλληλο πλαίσιο για τη σταδιακή μαθηματικοποίηση μιας έννοιας** (το 8^{ο} ερώτημα)[99].

---

[98] Ε. Κολέζα: «Γνωσιολογική και …», σελ. 2

[99] Ε. Κολέζα, ο.π. σελ. 3

Σε σχέση με τα σημαντικά αυτά ερωτήματα θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις που αφορούν την πρακτική υλοποίησή τους, αντιστρέφοντας τη σειρά με την οποία τίθενται.

Κατ' αρχήν, σύμφωνα με τον **A. Grothendieck**[100]:

Κάθε διδασκαλία είναι αποστερητική και κάθε λόγος μάταιος, αν απευθύνεται σε κάποιον του οποίου η περιέργεια δεν έχει διεγερθεί.

Πολλές διδακτικές προτάσεις θεωρούν δεδομένο το ενδιαφέρον από τη μεριά του μαθητή και δεν ρίχνουν βάρος σε αυτή την πλευρά που είναι αφετηριακή.

Η φαντασία, η επινοητικότητα για να κεντριστούν χρειάζονται κάτι περισσότερο, γι' αυτό η ελκυστικότητα στη διδασκαλία δεν μπορεί να στηρίζεται μόνο στο σχήμα θεώρημα- απόδειξη-άσκηση- νέο θεώρημα- νέα απόδειξη κοκ

Στην παραδοσιακή παιδαγωγική κάνουμε ακριβώς το ανάποδο. Εισάγουμε ένα φορμαλιστικό σύστημα με σύμβολα. Διαπιστώνουμε ότι το παιδί δεν μπορεί να κατανοήσει ένα τέτοιο σύστημα και χρησιμοποιούμε διάφορους οπτικοακουστικούς τρόπους για να το βοηθήσουμε να το καταλάβει. Περνάμε δηλαδή από το συμβολισμό στην αναπαράσταση. Εκεί καταλαβαίνουμε ότι το παιδί δεν είναι σε θέση να εφαρμόσει τις έννοιες που του μάθαμε: άρα πρέπει να του μάθουμε τις εφαρμογές στην πραγματικότητα. Τελικά φθάνουμε εκεί απ' όπου θα έπρεπε να είχαμε ξεκινήσει.[101]

Πολλές φορές επίσης σε καθοδηγούμενες εργασίες γίνεται «δήθεν» **επινόηση** από τους μαθητές ενώ πρόκειται για μια από το «χεράκι» διαδικασία που αποκρύπτει ότι τα μαθηματικά έχουν δυσκολίες που απαιτούν κόπο και χρόνο, ότι **η διαίσθηση δεν είναι *επιφοίτηση***.

Μιλάμε συχνά για την «ανακάλυψη» διαφόρων πραγμάτων από τη μεριά των μαθητών εννοώντας τις περισσότερες φορές τη διατύπωση μιας απάντησης που περιμέναμε, από κάποιον ή κάποιους μαθητές. Είναι όμως φανερό πως αν ο μαθητής εγκαταλειφθεί στην τύχη του δεν πρόκειται να ανακαλύψει και πολλά πράγματα, και πιστεύουμε ότι, η τάξη που "κινείται" (παίζοντας ένα

[100] A. Grothendieck Recoltes et Semailles Univ. Des Sc. Et Techn. Du Languedoc. Montpellier 1986

[101] Z.P.Dienes: Les six etapes du processus d'appredissage en mathematiques. O.C.D.L Paris 1970 σελ.70.

παιχνίδι 'σικέ' τις περισσότερες φορές), δεν λύνει κανένα ουσιαστικό διδακτικό πρόβλημα. Χρειάζεται η δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος που να κεντρίζει την περιέργεια του μαθητή και να τον βοηθάει να θέτει προβλήματα. Γιατί για να καταλάβει κανείς ένα, έστω και ελάχιστο κομμάτι των μαθηματικών, πρέπει πρώτα να έχει συνειδητοποιήσει κάποιο πρόβλημα στο οποίο το κομμάτι αυτό αναφέρεται, να έχει διάθεση να το λύσει και τέλος να έχει κάνει προσπάθειες για να δώσει κάποια απάντηση[102].

Είναι φανερό πως **κριτική σκέψη**, γενικότερος προβληματισμός δεν μπορεί να αναπτυχθεί στους μαθητές αν δεν υπάρχουν οι ειδικές μαθηματικές γνώσεις, ή έστω ένα μέρος απ' αυτές, ώστε να μπορούν να παρακολουθήσουν και να γενικεύσουν τις εμπειρίες τους στα μαθηματικά προβλήματα.

Από την άλλη μεριά την κριτική σκέψη πρέπει να την καλλιεργούν τα ίδια τα μαθηματικά στο μαθητή και οι γενικεύσεις να βασίζονται σ' αυτά.

Για τους μαθητές τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη «προς κατασκευή» αφού κάθε φορά συναντούν πράγματα που αντιμετωπίζουν συνήθως για πρώτη φορά, αν και ότι μαθαίνουν αποτελεί μέρος της γνωστικής κληρονομιάς της ανθρωπότητας[103].

Η κριτική σκέψη δεν είναι άλογη σκέψη. Ο κίνδυνος του ανορθολογισμού ελλοχεύει, όπως και ο κίνδυνος της μονομέρειας και του εμπειρισμού. Κατά την διδασκαλία στην ουσία γίνεται προσπάθεια αναδιοργάνωσης της εμπειρίας με βάση τη λογική. Μαθαίνουμε λ.χ. το μαθητή ή τη μαθήτρια να μην βασίζεται απόλυτα στο σχήμα ή σε επί μέρους επαληθεύσεις με κάποιες τιμές.

Σύμφωνα με τις βασικές ιδέες του δομισμού (constructivism),(Piaget, Von Clasefeld):

Τα Μαθηματικά δεν κατασκευάζονται από αισθητηριακά δεδομένα, αλλά από ανθρώπινη νοητική δραστηριότητα, που απαιτεί στοχασμό, αφαιρετική σκέψη, αναπαραστάσεις με σύμβολα, εικόνες, υποθέσεις[104].

---

[102] Στρ. Μάκρας «Σκέψεις για τα Μαθηματικά και τη Διδακτική τους», Σημειώσεις.
[103] Στρ. Μάκρας «Σκέψεις για τα Μαθηματικά και τη Διδακτική τους», Σημειώσεις.
[104] Χ. Κυνηγός «Μαθηματική Εκπαίδευση», Σημειώσεις, σελ.19.

Μια αποτελεσματική δραστηριότητα από την έρευνα στα πλαίσια του δομισμού είναι η επιλογή παραδειγμάτων από χώρους οικείους στο μαθητή και η επίλυση προβλημάτων (Problem Solving)[105].

Ο **Donald M. Davis** στον πρόλογο του βιβλίου του *Η φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, γράφει:

Ο σπουδαστής, τελειώνοντας το βιβλίο, θα πρέπει να έχει μάθει να εκτιμά τις αποδείξεις. Τόσο στις γεωμετρικές ενότητες όσο και σε εκείνες της Αριθμοθεωρίας, ο αναγνώστης θα μάθει πράττοντας: δεν κατανοείς πραγματικά μιαν έννοια αν δεν παλέψεις πρώτα με κάποιες αποδείξεις στις οποίες αυτή υπεισέρχεται. Στη γεωμετρική ενότητα μαθαίνουμε ότι αυτό που μπορείς να αποδείξεις εξαρτάται από τα αξιώματα που υποθέτεις, ενώ σε εκείνη της Αριθμοθεωρίας ότι ένας μαθηματικός δεν ικανοποιείται με τη γνώση που του παρέχουν ένα δισεκατομμύριο επαληθεύσεις μιας πρότασης. Οι συλλογιστικές διεργασίες τις οποίες αναπτύσσει ο σπουδαστής, παλεύοντας με αυτές τις αποδείξεις, μπορεί να παίξουν σημαντικό ρόλο στην καθημερινή του ζωή.[106]

Τα ερωτήματα λοιπόν είναι πολλά.

Είναι η μαθηματική λογική σκέψη μόνο η συνειδητή έκφραση της διαισθητικής, εποπτικής αντίληψης του κόσμου;

Είναι η διαίσθηση ο μόνος τρόπος να φτάσουμε, να προσεγγίσουμε τους λογικούς κανόνες που διέπουν τα φαινόμενα;

Είναι η λογική και η διαίσθηση αυτές που ανοίγουν εναλλάξ την πόρτα η μία στην άλλη για να προχωρήσει η μαθηματική σκέψη;

Το ίδιο συμβαίνει ή πρέπει να συμβαίνει και σε παιδαγωγικό επίπεδο στην διδασκαλία των μαθηματικών;

Πού βρίσκεται η χρυσή τομή; Πώς θα έπρεπε να συνδυάζει σωστά η μαθηματική εκπαίδευση τη διαισθητική με τη λογική σκέψη;

Πώς θα έπρεπε να οδηγείται ο μαθητής στην κριτική σκέψη ως λογική υπέρβαση της εποπτείας που ανοίγει νέους δρόμους για νέα διαίσθηση και νέα εκλογίκευση, για δημιουργική φαντασία;

---

[105] Χ. Κυνηγός ,ο.π., σελ 20

[106] Donald M. Davis, Η φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών, σελ.. 14-15

Πού βρίσκεται σήμερα η μαθηματική εκπαίδευση στη χώρα μας ως προς αυτό το θέμα; Προς ποια μεριά γέρνει;
Μήπως είναι ατελείς και οι δυο άξονες στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση;

Στη σύγχρονη αντίληψη για τα μαθηματικά, όπως έχει διαφανεί από τις μελέτες που αφορούν τόσο στην ανακάλυψη και στην θεμελίωσή τους όσο και στην διδασκαλία τους, κυριαρχεί η άποψη ότι χρειάζεται ο **συνδυασμός** πολλών παραγόντων, χρειάζεται ***ολιστική θέαση όπως σε ένα έργο τέχνης.***

Ο πίνακας μου μιλάει για τον εαυτό του (Wittgenstein).
Η εννοηματωμένη λέξη είναι ο μικρόκοσμος τη συνείδησης (Vigotsky)
Όλο το ποίημα ας εκφράζει το νόημα σαν ένας κόσμος καθ' εαυτόν, μαθηματικά διαβαθμισμένος, πλούσιος και βαθύς (Διονύσιος Σολωμός).

Οι πτυχές αυτού του κεφαλαιώδους ζητήματος είναι πολλές όπως πολλές επίσης είναι και οι διαστάσεις του. Τόσο ως προς την ατομική γνώση και συμπεριφορά όσο και ως προς τις κοινωνικές αντιλήψεις και λειτουργίες.
Από όλο αυτό τον πνευματικό και πολιτιστικό πλούτο της ανθρωπότητας όλο αυτό τον προβληματισμό και την αναζήτηση τι τελικά περνάει στην εκπαίδευση ποιο είναι το καταστάλαγμα που μένει;
Πολλές φορές στα πλαίσια του σημερινού τρόπου λειτουργίας του σχολείου και της μαθησιακής λειτουργίας του θεωρείται παρέκκλιση από το *κανονικό* πρόγραμμα ώστε να γίνεται παιδαγωγικά ριψοκίνδυνο το να επεκταθείς στα θέματα αυτά στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών.

Αυτά τα ζητήματα ίσως έλεγε κανείς ότι κατά κάποιο τρόπο αφορούν κυρίως τους μαθηματικούς και ιδιαίτερα τους ερευνητές μαθηματικούς…
Ότι δεν αφορούν τόσο στην μαθηματική εκπαίδευση και στους μαθητές.
Αλλά και στις οδηγίες του Π. Ι. έχει διατυπωθεί η άποψη ότι **η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να προσομοιάζει με την δουλειά του ερευνητή.**
Δεν πρέπει να ξεχνάμε φυσικά πως:
Όλα τα σημαντικά ερωτήματα που τίθενται στη ζωή είναι ερωτήματα στα οποία τελικά δεν δίνουμε ποτέ απαντήσεις. Αυτό που συμβαίνει είναι να

επανερχόμαστε αργότερα σε ερωτήματα που έχουν βρει τη λύση τους για να εμβαθύνουμε σ' αυτά.[107]

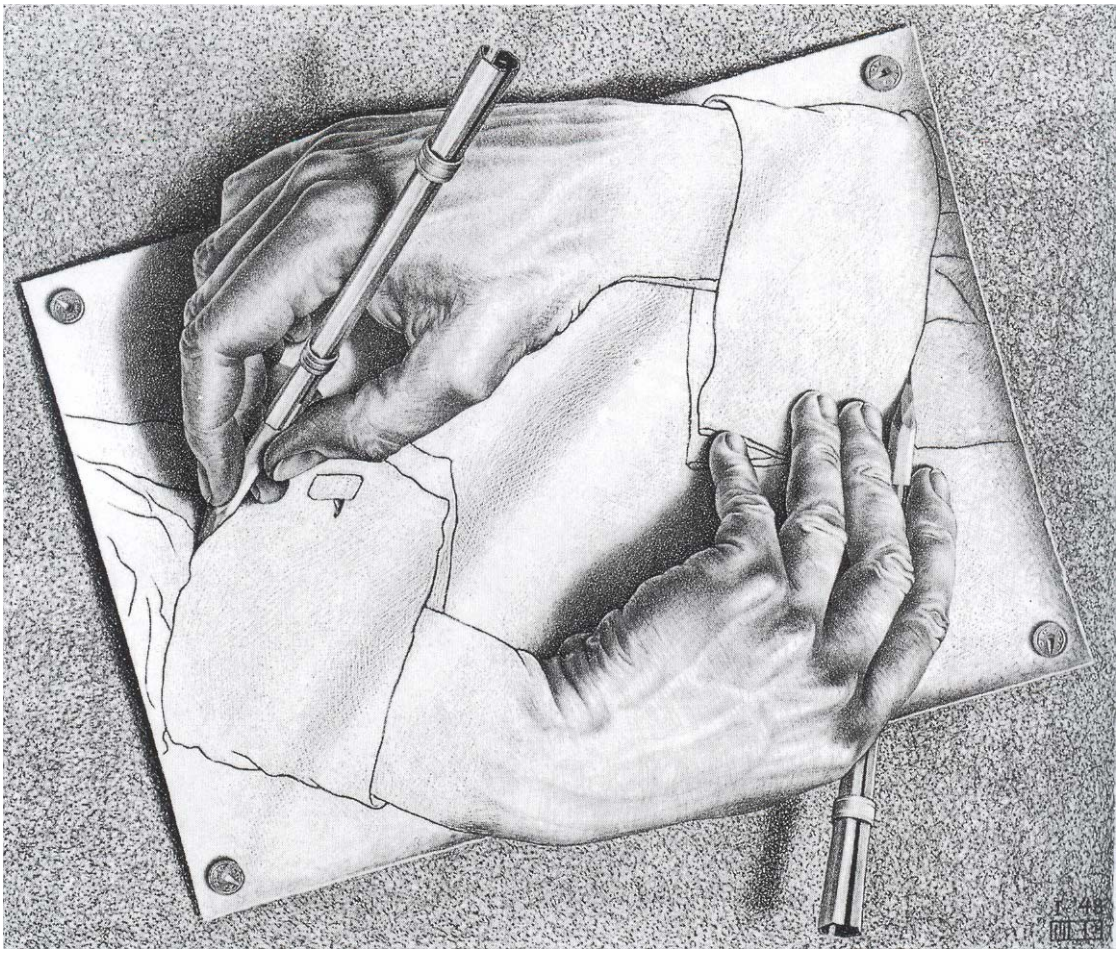
Ίσως αυτό που τονίζουμε περισσότερο κατά καιρούς είναι αυτό που υποχωρεί στο ισοζύγιο της διαισθητικής και της λογικής σκέψης, επιδιώκοντας μια ισορροπία, ώστε να υπάρξει τελικά αρμονία.

M. C. Escher, Bond of union

[107] Laurent Lafforgue, Συνέντευξη ΤΟ ΒΗΜΑ, Κυριακή 27.2.05 και διάλεξη στο ΜΜΑ.

ΙΙ. ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Μια περιγραφική έρευνα επισκόπησης, μια έρευνα συσχετίσεων και ένας πειραματισμός για ορισμένες πλευρές της σχέσης διαισθητικής και λογικής σκέψης στη μαθηματική εκπαίδευση



M. C. ESCHER, Drawing hands.

1. Στόχοι της έρευνας.

Η σχέση διαισθητικής και λογικής σκέψης στη μαθηματική εκπαίδευση, είναι μεγάλο θέμα με πολλές παραμέτρους που αφορούν διάφορους επιστημονικούς κλάδους και ερευνητικά πεδία, Μαθηματικών, Φιλοσοφίας, Επιστημολογίας, Λογικής, Ψυχολογίας, Παιδαγωγικής, Διδακτικής.

Τα ζητήματα της σχέσης της διαισθητικής και της λογικής σκέψης στη μαθηματική εκπαίδευση στα οποία επικεντρώνεται αυτή η έρευνα είναι:

1. **Οι πεποιθήσεις** (beliefs) και **στάσεις** (attitudes) **των μαθητών** στο υπό εξέταση ζήτημα.

Η διερεύνηση, δηλαδή, της άποψής τους για τη σχέση των μαθηματικών με τη διαίσθηση και τη λογική. Η διερεύνηση της στάσης τους και του βαθμού εμπιστοσύνης που δίνουν στη διαισθητική και τη λογική σκέψη.

2. Ο βοηθητικός ή παραπλανητικός **ρόλος της διαίσθησης**. Περιπτώσεις δηλαδή, που η διαίσθησή τους βοηθάει τους μαθητές, περιπτώσεις που δεν τους βοηθάει και περιπτώσεις που τους παραπλανεί, με βάση ορισμένα μαθηματικά προβλήματα.

3. Η **επάρκεια** της πρώτης διαισθητικής απάντησης. Σε ποιο βαθμό, δηλαδή, οι μαθητές απαντούν σωστά ή λαθεμένα σε μαθηματικά προβλήματα για τα οποία έχουν τις γνώσεις αλλά τους ζητείται μια πρώτη διαισθητική απάντηση.

4. Οι **πεποιθήσεις των καθηγητών τους**. Έγινε παράλληλα έρευνα των αντιλήψεων των καθηγητών τους, των μαθηματικών, για το τι προωθούν τα σχολικά προγράμματα, τα βιβλία και γενικά η μαθηματική εκπαίδευση.

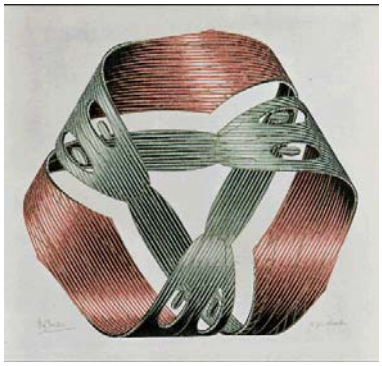
Επίσης έρευνα της άποψής τους για τα μαθηματικά, σε σχέση με το θέμα που εξετάζουμε και το τι πρέπει να προωθεί η μαθηματική εκπαίδευση.

Η έρευνα έγινε για τις τρεις τάξεις του **Λυκείου**. Ο λόγος για τον οποίο επιλέχθηκε το Λύκειο ήταν ότι σ' αυτή τη βαθμίδα μπορούν να συνυπάρχουν και οι δύο τρόποι σκέψης και διδασκαλίας. Εκτός από την ηλικία και το επίπεδο ανάπτυξης των λογικομαθηματικών εννοιών και των παραγωγικών διαδικασιών από την πλευρά των μαθητών, έτσι είναι διαρθρωμένη και η διδακτέα ύλη.

Όπως σημειώσαμε πριν, από την πλευρά του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου τονίζεται, πιο άμεσα σε παλιότερες οδηγίες πιο έμμεσα τώρα, ότι η διδασκαλία είναι στο Γυμνάσιο βασικά ενορατική ενώ στο Λύκειο βασικά θεωρητική.[108]
Αυτή η κατεύθυνση ακολουθείται στα βιβλία του Γυμνασίου, όπου υπάρχουν πολύ λίγες (έως ελάχιστες) αποδείξεις, υποδειγματικά.
Μια εξελικτική έρευνα συσχέτισης Γυμνασίου - Λυκείου θα φώτιζε άλλες πλευρές, αυτού του ζητήματος. Ιδιαίτερα στο μεταίχμιο της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου.

Η μεθοδολογία της έρευνας

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε ήταν να γίνει πρώτα **μια περιγραφική έρευνα επισκόπησης**, στη συνέχεια **μια έρευνα συσχετίσεων** και τέλος **ένας πειραματισμός**.
Επιδιώχθηκε δηλαδή ένα είδος ***μεθοδολογικής τριγωνοποίησης.***
Συντάχθηκαν, με βάση τη βιβλιογραφία και το θεωρητικό μέρος (Ι), μετά από συζητήσεις με τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Π. Σπύρου και ανταλλαγές γνωμών με συναδέλφους εκπαιδευτικούς, τα **10 ερωτηματολόγια** που παραθέτουμε στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.
Τα εννέα για τους μαθητές και ένα για τους καθηγητές τους.
Τα δύο πρώτα χρησιμοποιήθηκαν για την περιγραφική έρευνα επισκόπησης των αντιλήψεων των μαθητών, των καθηγητών τους και τη συσχέτισή τους. Τα υπόλοιπα για συσχετίσεις διαισθητικής- λογικής σκέψης και για πείραμα.
Συνολικά πήραν μέρος 335 μαθητές και καθηγητές με 435 ερωτηματολόγια.



M. C. Escher, Moebius bond I

[108] Οδηγίες του Π.Ι. για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και το Λύκειο

2. Περιγραφική έρευνα επισκόπησης.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ 1^{ο} και 2^{ο} .

Με το πρώτο **ερωτηματολόγιο** των μαθητών/ τριών έγινε καταγραφή των *πεποιθήσεων* και της *στάσης* των μαθητών πάνω στο ζήτημα της σχέσης των μαθηματικών με τη διαισθητική και λογική σκέψη.

Ο τρόπος με τον οποίο προσπαθήσαμε να τις ερευνήσουμε ήταν με **άμεσες και έμμεσες ερωτήσεις και κλίμακες στάσεων.**

Η **ΟΜΑΔΑ Α** των ερωτήσεων είναι **άμεσες και έμμεσες** συσχετίσεις των μαθηματικών με έννοιες και δραστηριότητες περισσότερο ή λιγότερο διαισθητικές ή λογικές σε μια κλίμακα πενταβάθμια (με λίγες εξαιρέσεις).

Η **ΟΜΑΔΑ Β** (και μία ερώτηση της ΟΜΑΔΑΣ Α), είναι **άμεσες** ερωτήσεις για τη στάση τους ως προς αυτό το ζήτημα όταν κάνουν οι ίδιοι μαθηματικά.

Η ταυτότητα της έρευνας.

Η Δειγματοληψία έγινε κατά στρώματα/ δειγματοληψία σκοπιμότητας.

Τα ερωτηματολόγια διανεμήθηκαν στις μαθήτριες και στους μαθητές μέσω των καθηγητών τους, των μαθηματικών.

Το δείγμα ήταν πανελλαδικό από όλες τις περιφέρειες της χώρας μας και ιδιαίτερα από τα μεγάλα αστικά κέντρα όπου βρίσκεται η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών.

Χρησιμοποιήθηκαν κυρίως δημόσια σχολεία, αλλά και δείγμα από ιδιωτικά και φροντιστήρια.

Οι μαθήτριες/ τές είναι και των τριών τάξεων του Λυκείου όλων των επιπέδων από άποψη βαθμολογίας.

Δεν ζητήθηκαν άλλα κοινωνιολογικού χαρακτήρα στοιχεία εκτός από το φύλο, γιατί δεν ήταν μέσα στους σκοπούς της έρευνας. Αυτό ίσως ήταν παράλειψη για μια παραπέρα επεξεργασία των στοιχείων, αλλά έγινε για να μην επιβαρυνθεί πολύ το ερωτηματολόγιο και δυσκολέψει την συμπλήρωσή του. Ότι στοιχεία προκύπτουν σ’ αυτή την κατεύθυνση μπορεί να είναι μόνο με βάση τον τόπο του σχολείου και κατοικίας.

Ως προς τους καθηγητές των μαθητών/ τριών που έγινε η έρευνα υπήρξε μέριμνα να το συμπληρώσουν όλοι όσοι τους διδάσκουν, στα αντίστοιχα σχολεία, ώστε να **συσχετιστούν** οι αντιλήψεις τους.

Το Μέγεθος του δείγματος ήταν 158 μαθητές και 60 καθηγητές.
Μοιράστηκαν 200 ερωτηματολόγια για μαθητές και 80 για καθηγητές και από αυτά συγκεντρώθηκαν 166 και 71 αντίστοιχα. Μερικά (8 και 11) δεν μπήκαν στην επεξεργασία λόγω καθυστέρησης στην άφιξη τους.

Τα ερωτηματολόγια είναι κλειστού τύπου. Συμπληρώθηκαν με ευκολία και από τους μαθητές/ τριες και από τους καθηγητές με μικρές παρατηρήσεις. Βοήθησε σ' αυτό το ότι είχαν γίνει δοκιμές προηγουμένως των ερωτηματολογίων και οι απαιτούμενες διορθώσεις.

Τα ερωτηματολόγια παρατίθενται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι, παρ. 1., σελ. 193.

2.1 Οι υποθέσεις.

Οι υποθέσεις στο 1ο ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Σ' ότι αφορά τις ερωτήσεις της ΟΜΑΔΑΣ Α, η υπόθεση ήταν **ότι οι μαθήτριες και οι μαθητές θα ιεραρχούσαν πρώτες τις απαντήσεις που θα συνέδεαν τα μαθηματικά περισσότερο με την λογική σκέψη παρά με την διαίσθηση.**
Στις **έμμεσες** ερωτήσεις σύνδεσης των μαθηματικών με διάφορες έννοιες και δραστηριότητες, **ότι θα έδιναν στην ιεράρχησή τους προτεραιότητα περισσότερο σε εκείνες στις οποίες ο ρόλος των μαθηματικών είναι πιο άμεσος πρακτικά, πιο εμφανής από την άποψη της χρήσης τους ως εργαλείο και όχι ως αφαιρετική σκέψη, ως αναπτυγμένη φαντασία και διαίσθηση.**

Η δεύτερη ερώτηση της ΟΜΑΔΑΣ Α είχε ως υπόθεση **ότι οι αντιλήψεις τους για τη σχέση λογικής και διαισθητικής σκέψης στα μαθηματικά και η προσωπική τους στάση όταν κάνουν μαθηματικά, πιθανόν να έχουν άλλες προτεραιότητες, να αλλάζουν τις ιεραρχήσεις.**
Το ίδιο πράγμα είχε ως υπόθεση η ΟΜΑΔΑ Β των ερωτήσεων σε σχέση με την ΟΜΑΔΑ Α.

Οι υποθέσεις στο 2ο ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Το 2ο ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ, όπως είπαμε, απευθύνθηκε στους καθηγητές των μαθητών/ μαθητριών οι οποίοι συμπλήρωσαν το 1ο Ερωτηματολόγιο, για να γίνει **συσχέτιση** των απόψεων, της στάσης, όπως και της αλληλεπίδρασης τους.
Οι ερωτήσεις είναι ερωτήσεις **έκφρασης γνώμης** και δεν ερωτούν ευθέως το τι κάνουν οι ίδιοι. Προτιμήθηκε αυτό το είδος των ερωτήσεων έτσι ώστε να μην δυσκολεύει και να μην κάνει επιτηδευμένη την απάντηση εκ μέρους τους, ως κρινόμενων κατά ένα τρόπο. Έτσι όσον αφορά την άποψή τους για τη μαθηματική εκπαίδευση αυτό ήταν όλο ότι τους ζητήσαμε για την έρευνα.

Όσον αφορά δε τη στάση τους, αυτή γίνεται φανερή σε ένα βαθμό από τις απόψεις που προκρίνουν. Αυτό δεν είναι εντελώς αξιόπιστο κριτήριο γιατί η διδακτική πρακτική τους δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι συμβαδίζει με τις απόψεις που προκρίνουν οι ίδιοι καθηγητές. Ωστόσο δείχνει μια στάση.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα συσχέτιση που διερευνήθηκε ήταν η στάση των καθηγητών των μαθηματικών απέναντι στην *επίσημη διδακτική κατεύθυνση,* στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τους σκοπούς και τις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών, την ύλη και τα βιβλία.

Η διερεύνηση αυτή είχε δυο άξονες. Πρώτον το κατά πόσο γνωρίζουν ή ακολουθούν τις οδηγίες και δεύτερον το κατά πόσο αυτές συμπίπτουν με τις δικές τους ιεραρχήσεις για τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι λόγοι για τους οποίους θεωρούν ότι γίνεται αυτό όπως και η συσχέτιση των απαντήσεων 1-4 και 5-6, μπορεί να δείξει σ' ένα βαθμό και το τι συμβαίνει στην πράξη.

Οι υποθέσεις στο 2^{ο} ερωτηματολόγιο πιο συγκεκριμένα ήταν **ότι οι υποδείξεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π. Ι.) για τον ένα ή τον άλλο λόγο, δεν παίζουν άμεσα καθοριστικό ρόλο, ότι μάλλον παρακάμπτονται και ότι υπάρχει διάσταση ανάμεσα σε αυτό που θεωρεί το Π. Ι. ότι πρέπει να προωθούν τα μαθηματικά, ως προς τη σχέση διαισθητικής και λογικής σκέψης και σ' αυτό που θεωρούν οι μαθηματικοί ότι πράγματι προωθείται μέσα από το Πλαίσιο του Προγράμματος και τα Βιβλία των μαθηματικών.**

Σ' αυτό το σημείο έγινε η σωστή παρατήρηση από τους μαθηματικούς που πήραν μέρος στην έρευνα ότι δεν διευκρινιζόταν στο ερωτηματολόγιο κατά πόσο θα μπορούσαν να σημειώσουν περισσότερες από μια επιλογές απαντήσεων ή μόνο την κυρίαρχη κατά τη γνώμη τους, το οποίο πάρθηκε υπ' όψιν στην επεξεργασία.

Η **δεύτερη υπόθεση** ήταν **ότι υπάρχει διάσταση**, για διάφορους λόγους, **της διδακτικής πράξης και αυτών που πιστεύουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικοί.**

Η **τρίτη υπόθεση** ήταν **ότι μάλλον δεν υπάρχει,** επίσης, **ταύτιση αντιλήψεων ανάμεσα στους μαθητές και στους καθηγητές τους** στο θέμα που εξετάζουμε.

Η υπόθεση αυτή ελέγχθηκε με όμοιες ερωτήσεις και στο 1^{ο} και στο 2^{ο} ερωτηματολόγιο, συσχέτισης των μαθηματικών με διάφορες έννοιες.

Στοιχεία.

Στο ερωτηματολόγιο τηρήθηκε όσο ήταν δυνατόν η πενταβάθμια ιεραρχική κλίμακα.

Το δείγμα ήταν, όπως και των μαθητριών/ μαθητών, πανελλαδικό. Μοιράστηκαν 80 ερωτηματολόγια και συγκεντρώθηκαν για επεξεργασία τα 60, από όλες τις περιοχές της Ελλάδας, Αθήνα, Πειραιάς, Θεσσαλονίκη, Στερεά, Θεσσαλία, Μακεδονία, Ήπειρος, Πελοπόννησος, Κρήτη. Όσα συγκεντρώθηκαν εγκαίρως (60 από 71) για την επεξεργασία ήταν από τα ίδια σχολεία που συγκεντρώθηκαν και τα αντίστοιχα των μαθητών.

Σε σχέση με τον κίνδυνο συγκέντρωσης *φιλικών* ή *μονομερών* απόψεων προσπαθήσαμε να τον αποφύγουμε με την διανομή του ερωτηματολογίου σε όλους τους μαθηματικούς που κάνουν στους αντίστοιχους μαθητές πράγμα που σε πολλά σχολεία ήταν το σύνολο των μαθηματικών (3-4).

2.2 Συσχετίσεις των ερωτήσεων.

Ερωτηματολόγιο 1ο ΟΜΑΔΑ Α

Συσχέτιση των ερωτήσεων **1** (τι θεωρούν για τα μαθηματικά) **και 2** (τι κάνουν οι ίδιοι στα μαθηματικά).

Στην ερώτηση 2 κυριαρχούν πάλι οι λέξεις: Φαντασία, Λογική- Αυστηρότητα-Αναδιάταξη γνώσεων, Εμπειρία- Μνήμη- Δοκιμή, Αισθητική (Κομψότητα), Διαίσθηση-Επινόηση, που υπάρχουν και στην ερώτηση 1.

Εξέταση αν η ιεράρχηση που κάνουν στην ερώτηση 1 διατηρείται ή ανατρέπεται στη 2, με τις παραπάνω ομάδες να αντιστοιχούν ως εξής:

Πίνακας 1

Ερώτηση 1	**Ερώτηση 2**
Φαντασία	Φαντασία
Λογική	Λογική- Αυστηρότητα-Αναδιάταξη γνώσεων
Εμπειρία	Εμπειρία- Μνήμη- Δοκιμή
Αισθητική	Κομψότητα
Διαίσθηση	Διαίσθηση-Επινόηση

Η ίδια εξέταση έγινε επίσης και σε σχέση με την ερώτηση 5 αλλά σε μια διχοτομία λογική- διαίσθηση, ανάλογα με τη συνάφεια των εννοιών:

Πίνακας 2

Ερώτηση1	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 5**
Φαντασία	Φαντασία	
Λογική	Λογική Αυστηρότητα Αναδιάταξη γνώσεων	Αυστηρότητα Ακρίβεια
Εμπειρία	Εμπειρία Μνήμη Δοκιμή	
Αισθητική	Κομψότητα	
Διαίσθηση	Διαίσθηση Επινόηση	Προσέγγιση Πιθανότητα

Έμμεσες ερωτήσεις.

Η ανάλυσή τους και οι συσχετίσεις είναι πολύ δύσκολες, με αμφίβολο ίσως και αρκετά υποκειμενικό σε ορισμένες ερωτήσεις, αποτέλεσμα. Ωστόσο κρίθηκε σκόπιμη η χρησιμοποίησή τους γιατί δίνουν μια αίσθηση των μαθητών για μερικές πλευρές των μαθηματικών που δεν υπαγορεύεται από κάποια εξωτερική άποψη, από ένα στερεότυπο που έχουν ίσως ακούσει για τα μαθηματικά.

Η (πειραματική) προσπάθεια να βγουν κάποια σχετικά συμπεράσματα από τις απαντήσεις έγινε με τον ακόλουθο τρόπο.
Χωρίστηκαν κατ' αρχήν οι ερωτήσεις σε δυο κατηγορίες:
Σε αυτές στις οποίες η χρήση των μαθηματικών φαίνεται πιο άμεσα ή πιο εφαρμοσμένα και σ΄ αυτές που η σχέση δεν φαίνεται ως άμεση αλλά υπάρχει είτε γενικά ως αφαιρετική σκέψη είτε ως διαισθητική σκέψη ή ακόμη δεν φαίνεται καθόλου.

Σε αυτές που απαιτούν μαθηματικές πράξεις, από κάποιες στοιχειώδεις ή επιμέρους έως σύνθετες και πολλές και σε αυτές που δεν απαιτούν κάτι τέτοιο, αλλά απαιτούν ίσως περισσότερο στοχαστική πρόβλεψη.

Ένας τέτοιος χωρισμός θα μπορούσε, με κάθε επιφύλαξη, να είναι αυτός που παρουσιάζεται στον **Πίνακα 3**.
Η βασική σκέψη σ' αυτό το χωρισμό ήταν ότι όπου χρειάζεται μια αρκετά συγκεκριμένη τεχνική χρειάζεται ένα λογικό κριτήριο που προσεγγίζει περισσότερο την λογική σκέψη που βασίζεται σε περισσότερες προδιαγραφές παρά σε επινοήσεις και διαισθητικές σκέψεις, οι οποίες αναδύονται αυτόματα σε αθλήματα με πιο αρχέγονες καταβολές.
Εννοείται ότι όσον αφορά τα αθλήματα προέχουν οι φυσικές ικανότητες και ότι εξετάζουμε τις συσχετίσεις με ισοσταθμισμένες αυτές τις ικανότητες.

Πίνακας 3

Χρήση	**Ερώτηση 3 τέχνη**	**Ερώτηση 4 παιγνίδι**	**Ερώτηση 7 ανακάλυψη**	**Ερώτηση 8 άθλημα**
Πιο Άμεση	Αρχιτεκτονική Γλυπτική Ζωγραφική Μουσική	Ντόμινο Μονόπολυ Ναυμαχία	Αεροπλάνο Τηλέφωνο	Ιστιοπλοΐα Σκι -Τένις- Γκολφ Ενόργανη Ομαδικά
Έμμεση	Χορός Θέατρο Ποίηση Πεζογραφία Κινημ/γράφος	Σκάκι Τράπουλα	Τροχός Φωτογραφία DNA	Δρόμοι Άλματα Ρίψεις Πάλη- Άρση βαρών

ΟΜΑΔΑ Β

Σ' αυτή την ομάδα οι ερωτήσεις προσπαθούν να εξετάσουν το βαθμό εμπιστοσύνης στη διαισθητική σκέψη και το πόσο τη χρησιμοποιούν οι μαθητές σε σχέση με τα μαθηματικά.

Όπως φαίνεται και από το ερωτηματολόγιο οι απαντήσεις διασταυρώνονται με παρεμφερείς ερωτήσεις λ.χ. η 1 με την 6 και την 7.

Έγινε εξέταση του βαθμού εμπιστοσύνης στη διαίσθηση (ερωτήσεις 6, 7) σε σχέση με τα συμπεράσματά τους από την εμπειρία τους.

Επίσης το κατά πόσο χρειάζονται την διαίσθησή τους για την έναρξη του συλλογισμού μπορεί να φανεί από την συσχέτιση των ερωτήσεων 1, 3, 4, 5.

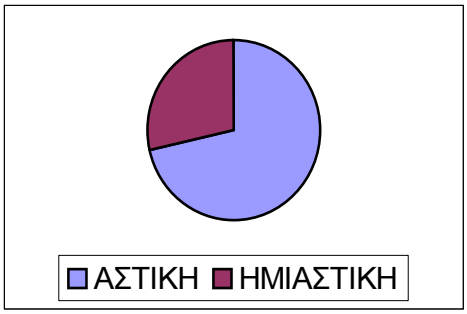
Τα συνολικά συμπεράσματα, τέλος, της ΟΜΑΔΑΣ Β πρέπει να συσχετιστούν με τα συμπεράσματα της ΟΜΑΔΑΣ Α. Ιδιαίτερα οι ερωτήσεις Β1 με Α1 και Β6 με Α2.

Ερωτηματολόγιο 1^{ο} με 2^{ο}

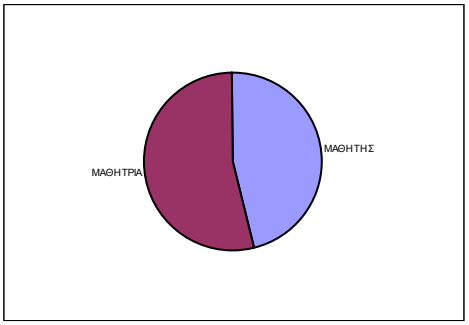
Συσχέτιση της ερώτησης Α1 του 1^{ου} με την 6 του 2^{ου} που είναι ακριβώς ίδιες. Επίσης της ερώτησης Α2 του 1^{ου} με την 1 του 2^{ου} και με την 5 του 2^{ου} .

2.3 Παρουσίαση και Ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας πεποιθήσεων. Ερωτηματολόγια 1^{ο} και 2^{ο} .

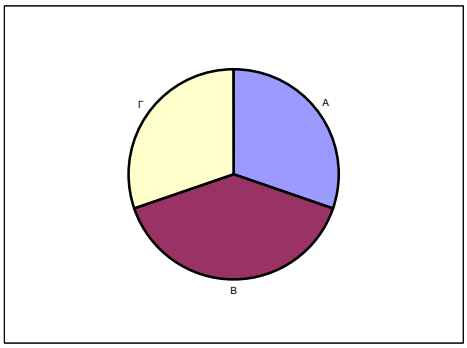
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1^{Ο} ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ



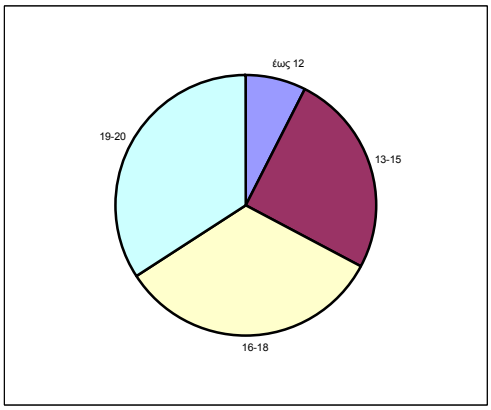
ΠΕΡΙΟΧΗ			
		Frequency	Percent
Valid	Αστική	113	71,5
	Ημιαστική	45	28,5
	Total	158	100,0



ΙΔΙΟΤΗΤΑ			
		Frequency	Percent
Valid	Μαθητής	73	46,2
	Μαθήτρια	85	53,8
	Total	158	100,0



ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ			
		Frequency	Percent
Valid	Α	48	30,4
	Β	62	39,2
	Γ	48	30,4
	Total	158	100,0



ΒΑΘΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ			
		Frequency	Percent
Valid	10-12	12	7,6
	13-15	40	25,3
	16-18	52	32,9
	19-20	54	34,2
	Total	158	100,0

ΟΜΑΔΑ Α

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

Statistics Ταιριάζουν περισσότερο με τα μαθηματικά			
	Mean	**Median**	**Std. Deviation**
Α1_ΦΑΝΤΑΣΙΑ	3,22	3,00	1,06
Α1_ΛΟΓΙΚΗ	1,46	1,00	,93
Α1_ΕΜΠΕΙΡΙΑ	2,30	2,00	,92
Α1_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	4,41	5,00	,95
Α1_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ	3,62	4,00	1,01

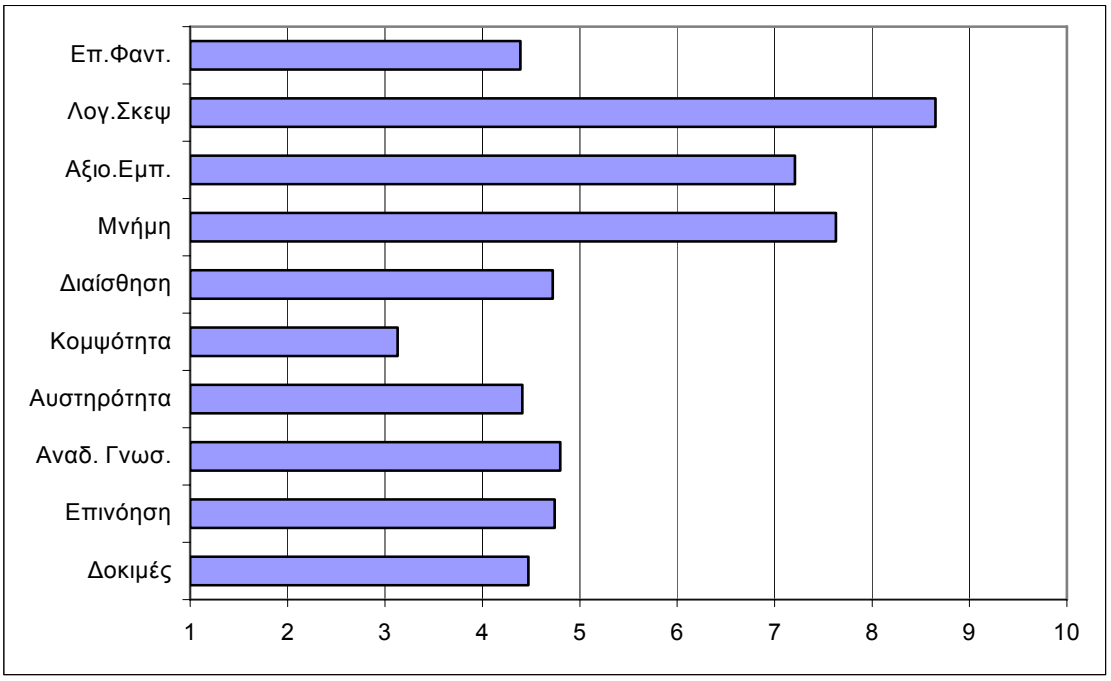
Όπως προκύπτει από τον πίνακα η ιεράρχηση[109] που κάνει το δείγμα των μαθητών σε σχέση με το ποιες από τις παραπάνω έννοιες ταιριάζουν περισσότερο με τα μαθηματικά είναι:

1. Λογική, 2. Εμπειρία, 3. Φαντασία, 4. Διαίσθηση, 5. Αισθητική

[109] Η ιεράρχηση γίνεται από την μικρότερη Μέση Τιμή (Mean) προς τη μεγαλύτερη εφ' όσον βαθμολογούσαν με 1 το περισσότερο και 5 το λιγότερο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Πώς λειτουργούν όταν κάνουν οι ίδιοι μαθηματικά				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
A2_1Επιστράτευση Φαντασίας	152	6	6,61	2,76
A2_2Λογικές σκέψεις	152	6	2,35	1,97
A2_3Αξιοποίηση Εμπειρίας	152	6	3,79	2,10
A2_4Μνήμη ίδιων περιπτώσεων	152	6	3,37	2,17
A2_5Διαίσθηση	152	6	6,28	2,51
A2_6Κομψότητα	152	6	7,87	2,04
A2_7Αυστηρότητα-αποφυγή λαθ	152	6	6,59	2,30
A2_8Αναδιάταξη Γνώσεων	152	6	5,20	2,62
A2_9Επινόηση Μεθόδων	152	6	6,26	2,49
A2_10Δοκιμή Περιπτώσεων	152	6	6,53	2,32



Η ιεράρχηση των μαθητών σ' αυτό τον πίνακα, ο οποίος διερευνούσε το πως λειτουργούν οι ίδιοι όταν κάνουν μαθηματικά, είναι:

1.Λογική, 2.Μνήμη, 3.Εμπειρία, 4.Αναδιάταξη γνώσεων, 5.Επινόηση, 6.Διαίσθηση, 7.Δοκιμές, 8.Αυστηρότητα, 9.Φαντασία, 10.Κομψότητα

Αν ομαδοποιήσουμε όμως τις 10 έννοιες στις 5 αρχικές ανάλογα με την συνάφειά τους όπως είχαμε πει στην παράγραφο 2.4 (πίνακας 1)

Πίνακας 1

Ερώτηση 1	**Ερώτηση 2**
Φαντασία	Φαντασία
Λογική	Λογική- Αυστηρότητα-Αναδιάταξη γνώσεων
Εμπειρία	Εμπειρία- Μνήμη- Δοκιμή
Αισθητική	Κομψότητα
Διαίσθηση	Διαίσθηση-Επινόηση

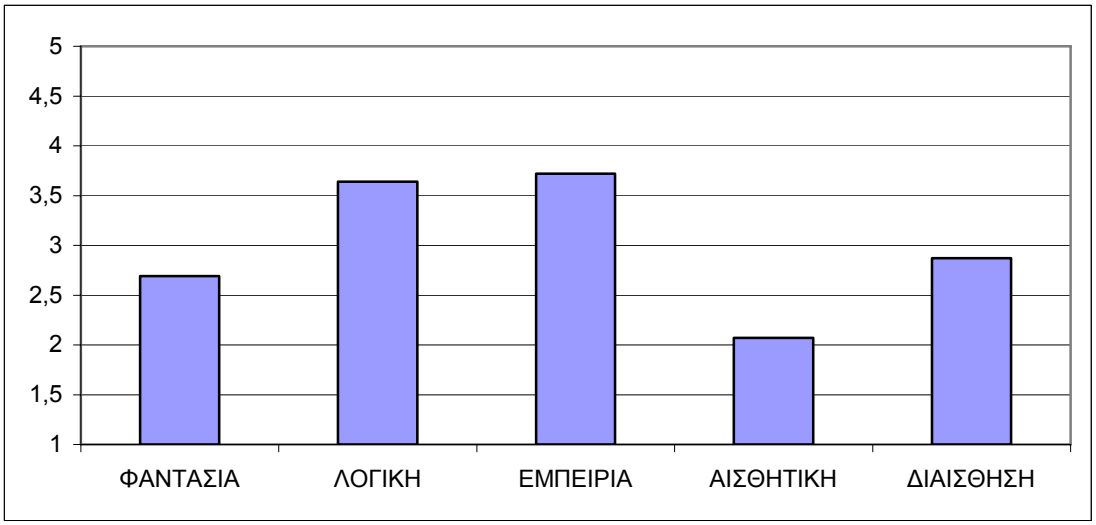
τότε **η ιεράρχηση αλλάζει** και γίνεται:

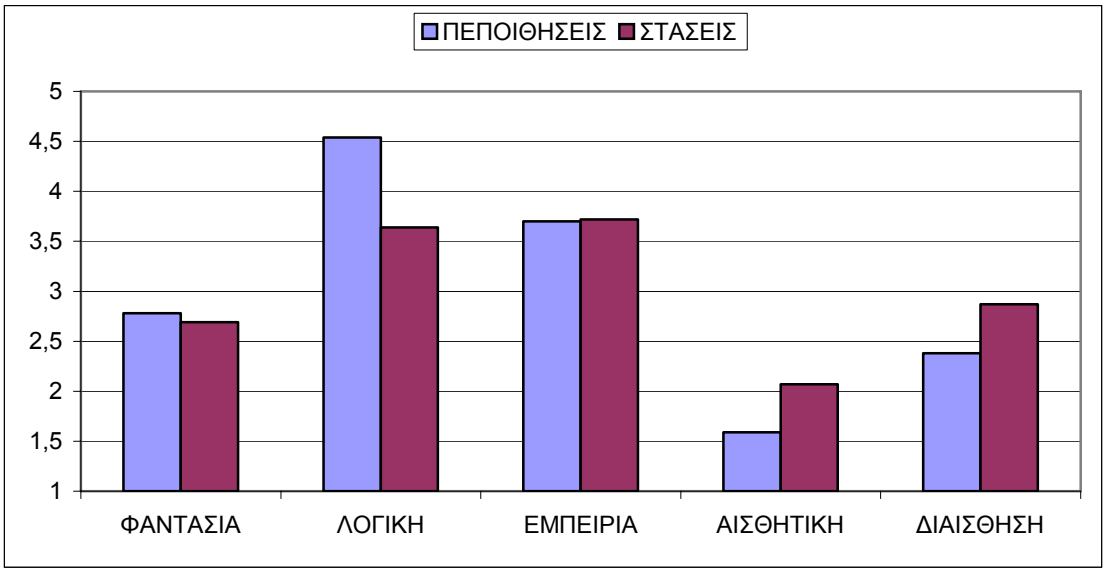
1. Εμπειρία 2. Λογική 3. Διαίσθηση 4. Φαντασία 5. Αισθητική.

Η εμπειρία, με μικρή βέβαια διαφορά, δείχνει να ξεπερνάει στην πράξη, στην δική τους στάση, την λογική σκέψη.

Ομαδοποίηση και αναγωγή στις 5 αρχικές έννοιες

	N		**Mean**	**Std. Deviation**
	Valid	**Missing**		
A2_ΦΑΝΤΑ	152	6	3,31	1,38
A2_ΛΟΓΙΚ	152	6	2,36	,57
A2_ΕΜΠΕΙ	152	6	2,28	,59
A2_ΑΙΣΘΗ	152	6	3,93	1,02
A2_ΔΙΑΙΣ	152	6	3,13	,83





Από την σύγκριση αυτών των δύο αποτελεσμάτων φαίνεται ότι **επιβεβαιώνεται η υπόθεση** που είχαμε κάνει. Ότι δηλαδή **η άποψη των μαθητών για τα μαθηματικά και το πώς λειτουργούν οι ίδιοι όταν κάνουν μαθηματικά διαφέρει.**

Οι ίδιοι λειτουργούν κατά τρόπο ώστε να στηρίζονται περισσότερο στην εμπειρία τους (και δείχνει να την έχουν περισσότερο ανάγκη).

Δίνουν στην πράξη μεγαλύτερο βάρος στη διαίσθηση απ' ότι θεωρούν οι ίδιοι.

Υποχωρεί σχετικά η λογική σκέψη.

Παίζει μεγαλύτερο ρόλο η κομψότητα των διαδικασιών απ' ότι πιστεύουν. (Σημείωση: Πολλές φορές οι μαθητές όταν βλέπουν άκομψες διαδικασίες το εκφράζουν μ' ένα ακαθόριστο *μπα δεν νομίζω ότι θα βγει έτσι…*)

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

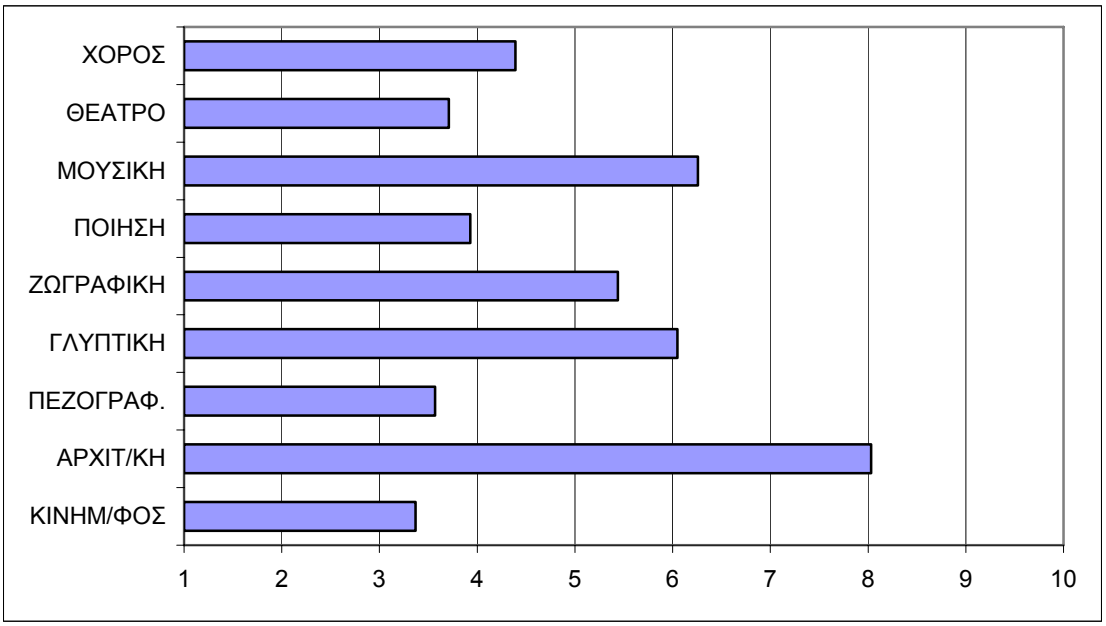
Τέχνες και Μαθηματικά				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
Α3_ΧΟΡΟΣ	152	6	5,61	2,28
Α3_ΘΕΑΤΡΟ	152	6	6,29	1,98
Α3_ΜΟΥΣΙΚΗ	153	5	3,74	2,42
Α3_ΠΟΙΗΣΗ	152	6	6,07	2,06
Α3_ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ	152	6	4,56	2,15
Α3_ΓΛΥΠΤΙΚΗ	152	6	3,95	1,90
Α3_ΠΕΖΟΓΡΑΦΙΑ	152	6	6,43	2,14
Α3_ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ	152	6	1,97	1,96
Α3_ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟΣ	152	6	6,63	2,30

Η ιεράρχηση εδώ όπως βλέπουμε είναι:

1. ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ 2. ΜΟΥΣΙΚΗ 3. ΓΛΥΠΤΙΚΗ 4. ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ 5. ΧΟΡΟΣ 6. ΠΟΙΗΣΗ 7. ΘΕΑΤΡΟ 8. ΠΕΖΟΓΡΑΦΙΑ 9. ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟΣ

Η υπόθεση επιβεβαιώθηκε σ' ένα βαθμό ως προς τις τέχνες με πιο άμεσες εφαρμογές των μαθηματικών.

Ο κινηματογράφος παρ' όλο που εμπεριέχει τεχνολογία κατατάσσεται τελευταίος, αυτό το σημειώνω σε σχέση και με την ερώτηση 7 (Ανακαλύψεις).



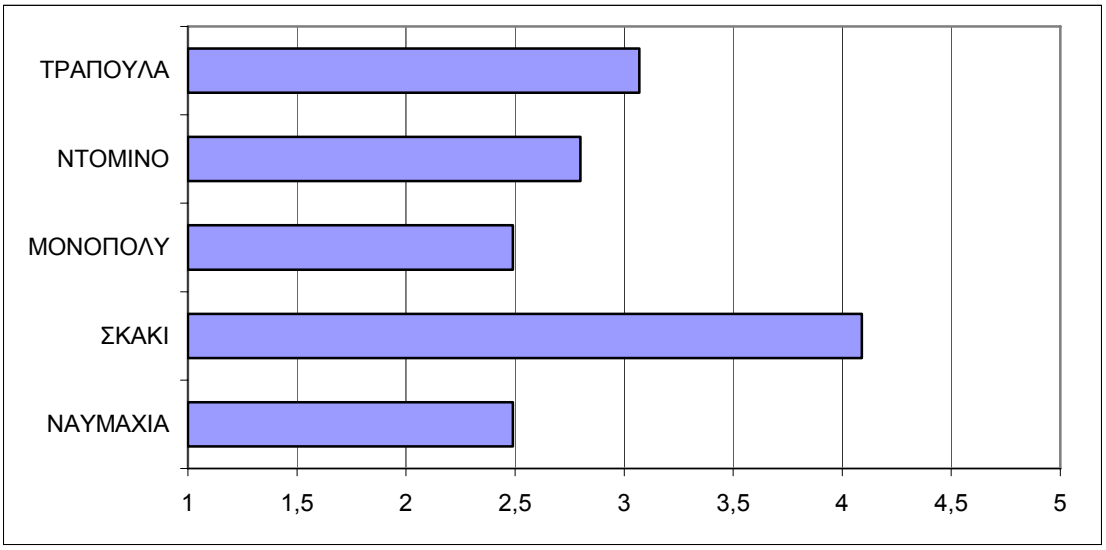
ΕΡΩΤΗΣΗ 4

Παιγνίδια και Μαθηματικά				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
Α4_ΤΡΑΠΟΥΛΑ	138	20	2,93	1,33
Α4_ΝΤΟΜΙΝΟ	138	20	3,20	1,32
Α4_ΜΟΝΟΠΟΛΥ	138	20	3,51	1,25
Α4_ΣΚΑΚΙ	139	19	1,91	1,25
Α4_ΝΑΥΜΑΧΙΑ	138	20	3,51	1,34

Η ιεράρχηση που προκύπτει είναι:

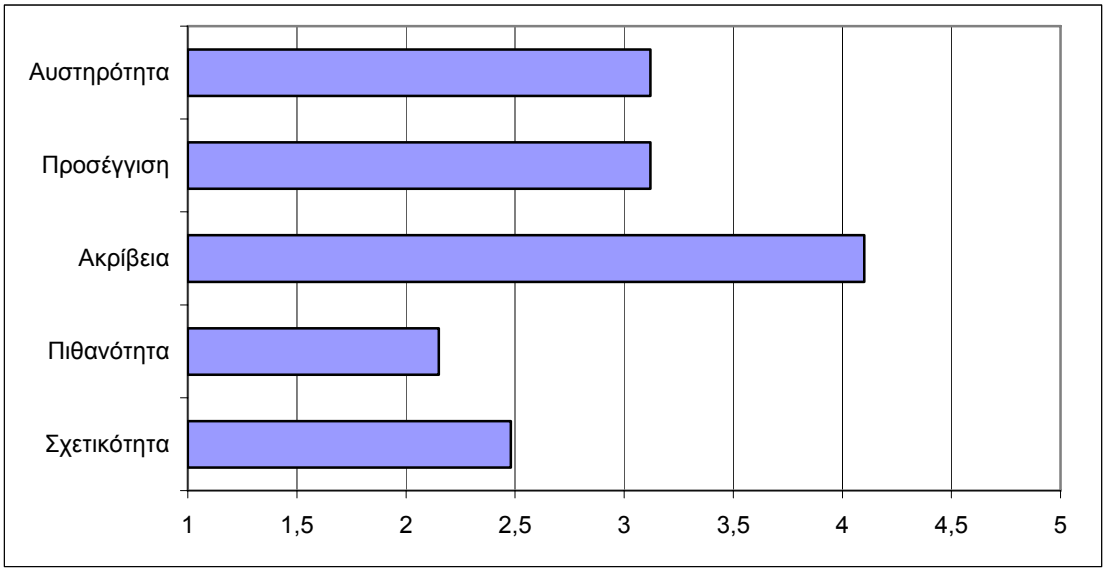
1.Σκάκι 2.Τράπουλα 3.Ντόμινο 4.Μονόπολυ 5.Ναυμαχία

Το ότι κυριαρχεί το σκάκι με μεγάλη διαφορά ήταν αναμενόμενο τα υπόλοιπα επιδέχονται διάφορες ερμηνείες.



ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Συσχέτιση εννοιών με τα μαθηματικά					
	N		Mean	Median	Std. Deviation
	Valid	Missing			
A5_Αυστηρότητα	128	30	2,88	2,00	1,32
A5_Προσέγγιση	128	30	2,88	3,00	1,35
A5_Ακρίβεια	128	30	1,90	1,00	1,20
A5_Πιθανότητα	128	30	3,85	4,00	1,06
A5_Σχετικότητα	128	30	3,52	4,00	1,32



Στην ερώτηση 5 έγινε μια δεύτερη διασταύρωση των πεποιθήσεων των μαθητών με επιλογές συναφών εννοιών και η ιεράρχηση που πρόκυψε ήταν:

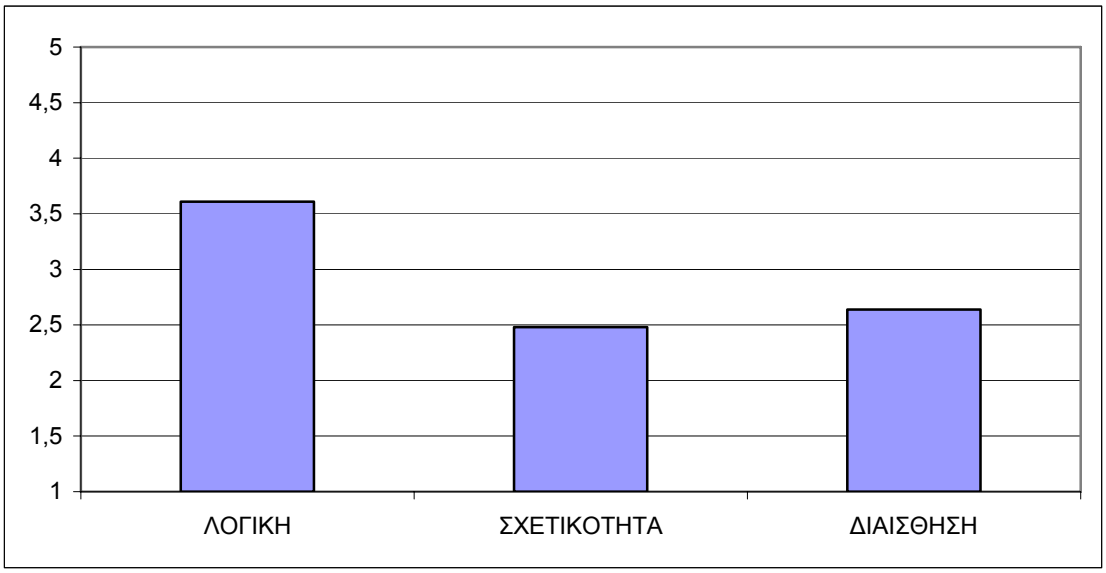
1.Ακρίβεια 2.Αυστηρότητα 3.Προσέγγιση 4.Σχετικότητα 5. Πιθανότητα[110]

[110] Στις ερωτήσεις όπως η 4 και η 5 όπου δυο αποτελέσματα έχουν ίδια Μέση Τιμή ιεραρχώ πρώτο αυτό που έχει την μικρότερη τυπική απόκλιση.

Αν κάνουμε πάλι τις συσχετίσεις της Ακρίβειας - Αυστηρότητας με τη Λογική και της Προσέγγισης - Πιθανότητας με την Διαίσθηση, τότε προκύπτει η σειρά:

1. Λογική 2. Διαίσθηση

Ομαδοποίηση				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
A5_Λογική	128	30	2,39	,95
A5_Σχετικότητα	128	30	3,52	1,32
A5_Διαίσθηση	128	30	3,36	,74



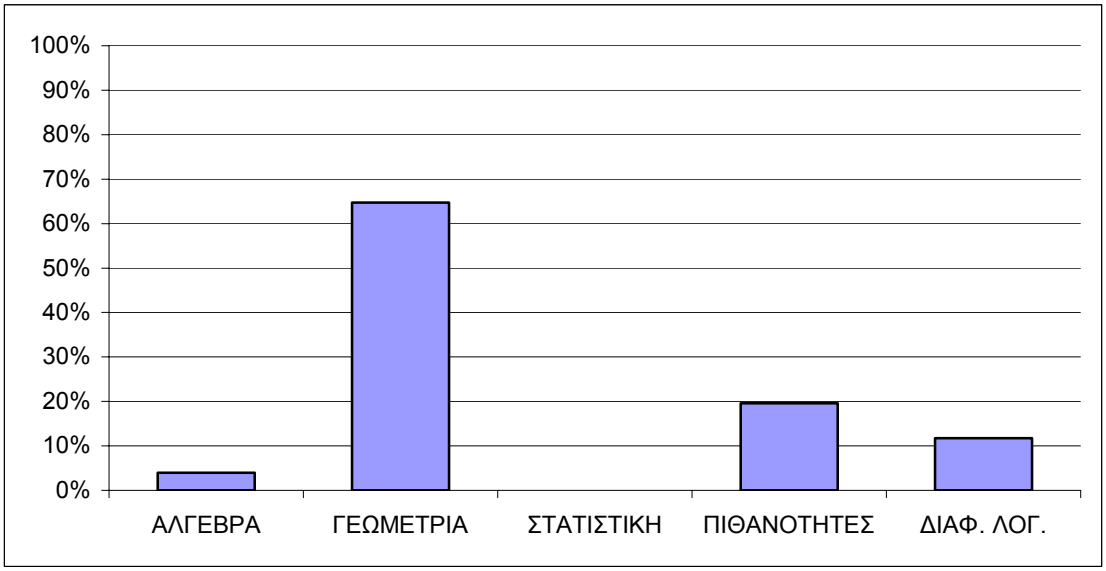
<u>Συμπέρασμα:</u>

Από την συνεξέταση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1, 2, 3, βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι μαθητές για τα μαθηματικά ιεραρχούν πρώτη την Λογική σε σχέση με την Διαίσθηση, παρεμβάλουν ανάμεσά τους την Εμπειρία στην οποία όμως μάλλον βασίζονται περισσότερο όταν κάνουν οι ίδιοι μαθηματικά. Οι υποθέσεις που κάναμε κατά βάση επαληθεύονται, εκτός από την διάσταση της σημασίας της εμπειρίας. Αναδιατάξεις ήταν αναμενόμενες ο λόγος όμως χρειάζεται διερεύνηση. Το θέμα της εμπειρίας θα το επανεξετάσουμε στα τελικά συμπεράσματα.

Ερώτηση 6

Σε ποιο κλάδο των μαθηματικών θεωρείς ότι χρειάζεται περισσότερη διαίσθηση;

ΜΑΘΗΜΑ	N	f%
Άλγεβρα	2	3.94%
Γεωμετρία	33	64.70%
Στατιστική	0	0%
Πιθανότητες	10	19.60%
Διαφορικός Λογισμός	6	11.76%
ΣΥΝΟΛΟ	51	100%



Το πολύ αυξημένο ποσοστό που δίνουν οι μαθητές στη Γεωμετρία (64.70%) επιβεβαιώνει την ανάγκη της διδασκαλίας της για την ανάπτυξη της διαισθητικής σκέψης παράλληλα με τον παραγωγικό συλλογισμό. Η τόσο μεγάλη διαφορά του ποσοστού της από τα άλλα μαθήματα υπογραμμίζουν και τον αναντικατάστατο ρόλο της.

Υπενθυμίζουμε εδώ τη μεγάλη συζήτηση που είχε γίνει με τα *Νέα Μαθηματικά* και τον παραγκωνισμό της Γεωμετρίας στο σχολικό πρόγραμμα.[111]

[111] Βλέπε: Μέρος Ι και Μαθηματική Επιθεώρηση, τ. 21,22

Οι **Πιθανότητες** είναι το μάθημα στο οποίο οι μαθητές πολύ συχνά αισθάνονται ότι η *λογική σκέψη* που έκαναν αρχικά και την οποία ακολούθησαν με σχετική βεβαιότητα, τελικά τους προδίδει όταν βλέπουν τη σωστή λύση.

Η αρχική σκέψη βέβαια δεν είναι λογική σκέψη αλλά κυρίως διαισθητική σκέψη η οποία όντως δίνει την αίσθηση μιας αρχικής βεβαιότητας (Fischbein) για την οποία αν δεν υπάρχουν οι γνώσεις και η ανάλογη εμπειρία είναι δύσκολο να απορριφθεί, ιδίως αν το αποτέλεσμα είναι στο διάστημα [0,1].

Όντως λοιπόν είναι ιδιαίτερα σημαντικός ο ρόλος της διαισθητικής σκέψης στις Πιθανότητες γιατί συχνά οδηγεί σε πλάνη χωρίς εύκολη ανασκευή της.

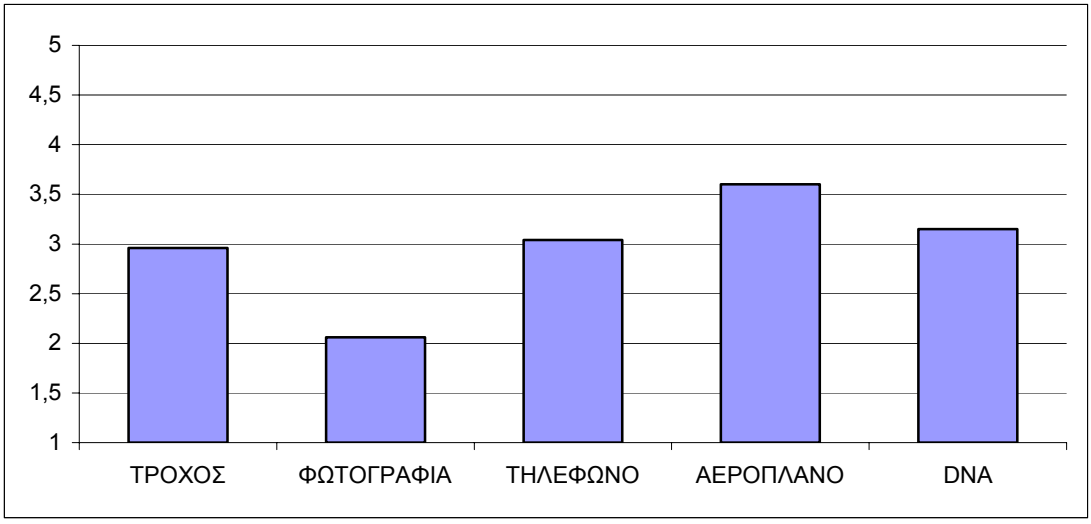
Συνεπώς, κατά τη γνώμη μου, πολύ σωστά οι μαθητές τις τοποθετούν ως μάθημα που χρειάζεται περισσότερο τη διαισθητική σκέψη, δεύτερο στη σειρά (με 19.60%).

Σωστά επίσης, νομίζω, ότι ιεραρχούν τρίτο (11.76%) το **Διαφορικό Λογισμό**, όπου *ο Διάβολος κρύβεται στις λεπτομέρειες.*

Συχνά οι μαθητές βρίσκονται σε αμηχανία στην έναρξη του συλλογισμού τους στην αντιμετώπιση πολλών προβλημάτων ή στον τρόπο αξιοποίησης της θεωρίας για διάφορες αποδείξεις και προβλήματα του Διαφορικού Λογισμού.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7

Ανακαλύψεις και Μαθηματικά				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
A7_Τροχός	125	33	3,04	1,61
A7_Φωτογραφία	125	33	3,94	,98
A7_Τηλέφωνο	125	33	2,96	1,25
A7_Αεροπλάνο	125	33	2,40	1,28
A7_DNA	126	32	2,85	1,61



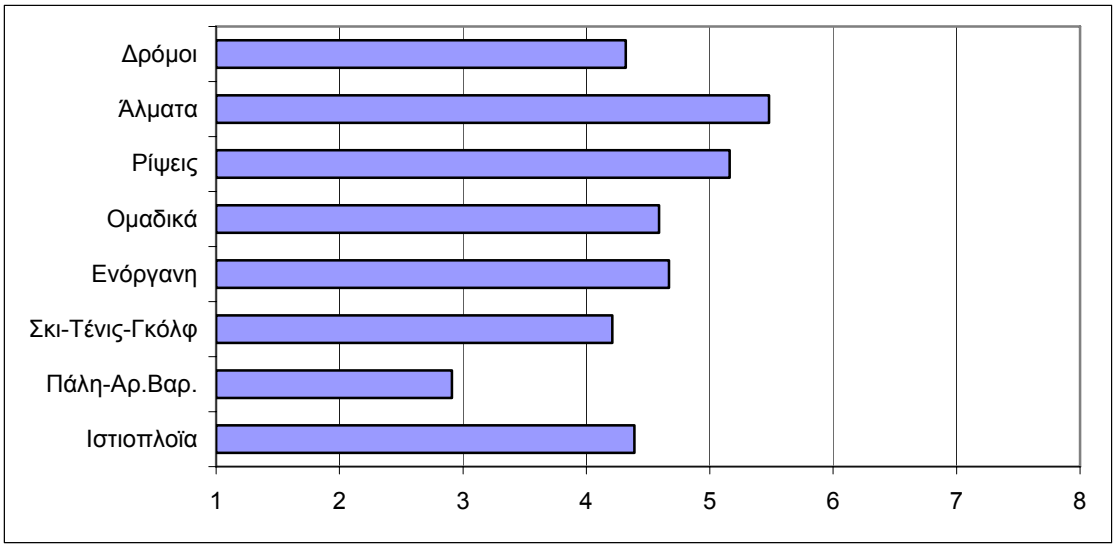
Η ιεράρχηση εδώ είναι:

1.Αεροπλάνο 2. DNA 3. Τηλέφωνο 4. Τροχός 5. Φωτογραφία

Προφανώς η ιεράρχηση αυτή έγινε με βάση την τεχνολογία που είχε ενσωματωμένη η κάθε ανακάλυψη και όχι την αφαιρετική σκέψη που πιθανά προϋπέθετε στην εποχή της. Η υπόθεση επιβεβαιώνεται.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8

Αθλήματα και Μαθηματικά				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
Α8_Δρόμοι	121	37	4,68	2,23
Α8_Άλματα	121	37	3,52	1,96
Α8_Ρίψεις	121	37	3,84	2,11
Α8_Ομαδικά	121	37	4,41	2,63
Α8_Ενόργανη	122	36	4,33	2,26
Α8_Σκι_Τένις_Γκολφ	121	37	4,79	2,07
Α8_Πάλη_Άρση_Βαρών	121	37	6,09	1,87
Α8_Ιστιοπλοΐα	121	37	4,61	2,49



Η ιεράρχηση εδώ είναι:

1.Αλματα 2.Ρίψεις 3.Ενόργανη 4.Ομαδικά 5.Ιστιοπλοΐα 6.Δρόμοι 7.Σκι-Τενις-Γκολφ 8.Πάλη-Αρση Βαρών

Η υπόθεση ότι θα προηγούνταν ιεραρχικά αυτά τα αθλήματα που συνδέονται πιο πολύ με την τεχνική (Ιστιοπλοΐα, Σκι – Τένις - Γκολφ), και με την ταχτική (Ομαδικά), **δεν επιβεβαιώθηκε.**

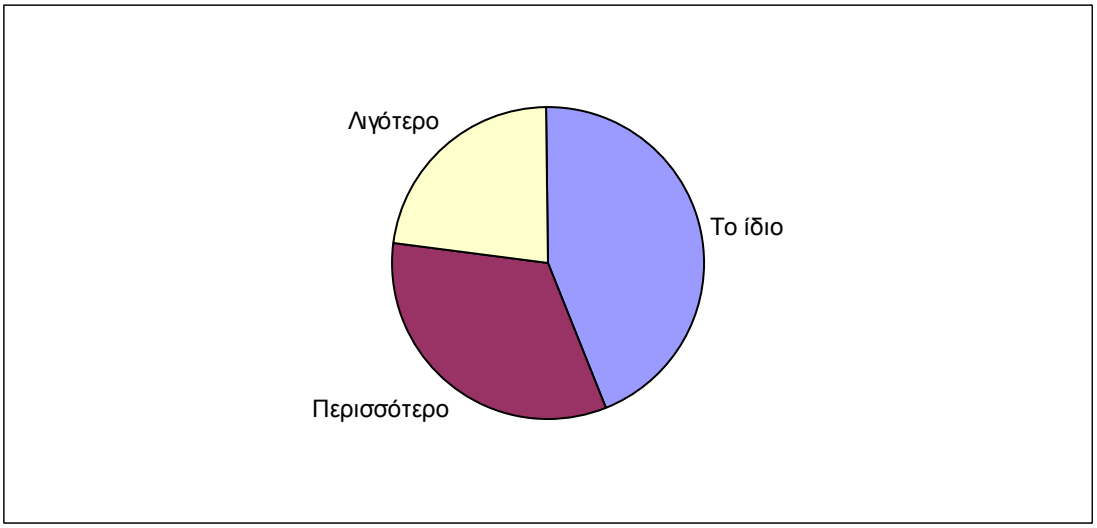
Η ιεράρχηση αυτή μάλλον δίνει την εντύπωση μιας προτεραιότητας στις «χωρικές» δραστηριότητες, μήκος, ύψος , απόσταση. Κάτι ανάλογο φάνηκε και στις τέχνες σε σχέση με την αυξημένη μέση τιμή που είχε ο χορός. Δεν μπορώ να βρω κάποια άλλη εξήγηση, χρειαζόταν μάλλον και συνέντευξη για αυτές τις ερωτήσεις.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1ο - ΟΜΑΔΑ Β

ΟΜΑΔΑ Β
Frequencies
Frequency Table

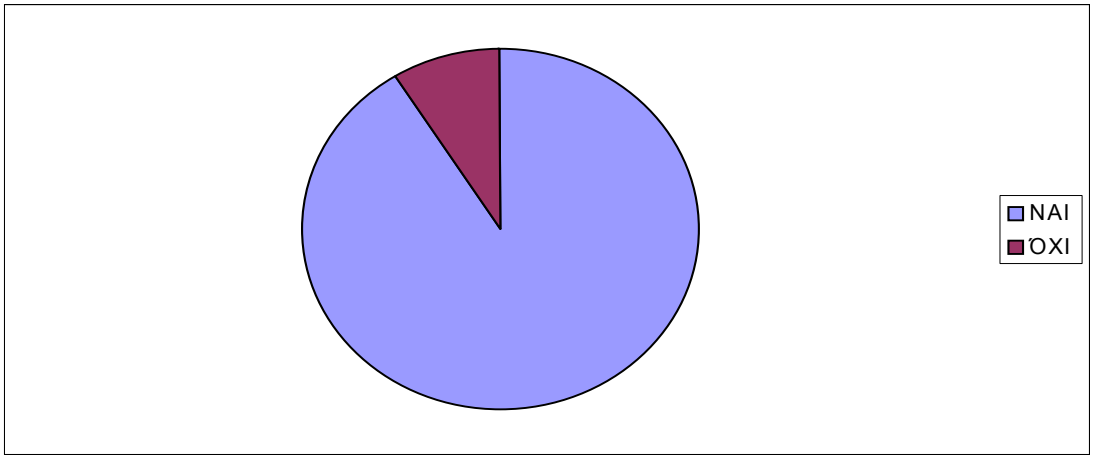
B1 Εμπιστεύεσαι τη διαίσθηση στα μαθηματικά;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ΝΑΙ**	118	74,7	75,2	75,2
	ΟΧΙ	39	24,7	24,8	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		

B2 Περισσότερο σε **άλλους** επιστημονικούς τομείς απ' ότι στα μαθηματικά;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**Το ίδιο**	69	43,7	43,9	43,9
	Περισσότερο	52	32,9	33,1	77,1
	Λιγότερο	36	22,8	22,9	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		



B3 Ικανοποιητική η διαισθητική απάντηση;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ΟΧΙ**	93	58,9	59,2	59,2
	ΝΑΙ	64	40,5	40,8	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		

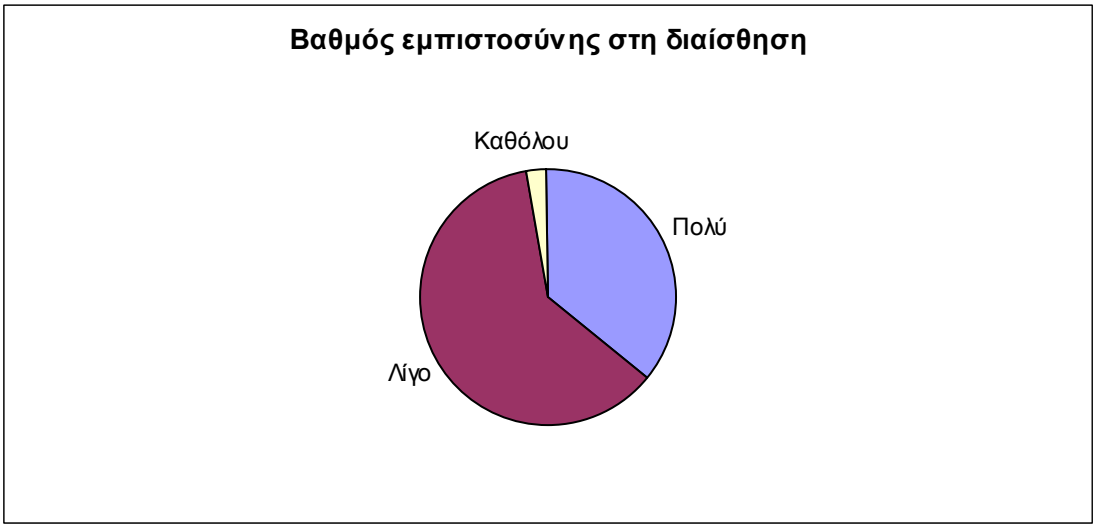
B4 Αναζητάς κάποιου είδους επαλήθευση ή απόδειξη;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ΝΑΙ**	143	90,5	91,1	91,1
	ΟΧΙ	14	8,9	8,9	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		



B5 Συνήθως τι είδους απόδειξη αναζητάς όταν συμβαίνει αυτό;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**Και τα δύο**	87	55,1	56,5	56,5
	Με Παραδ. & Δοκ.	44	27,8	28,6	85,1
	Λογική	23	14,6	14,9	100,0
	Total	154	97,5	100,0	
Missing	**System**	4	2,5		
Total		158	100,0		

B6 Έχεις βασιστεί στην διαισθητική σου άποψη;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**Λίγες φορές**	92	58,2	58,6	58,6
	Πολλές φορές	64	40,5	40,8	99,4
	Ποτέ	1	,6	,6	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		

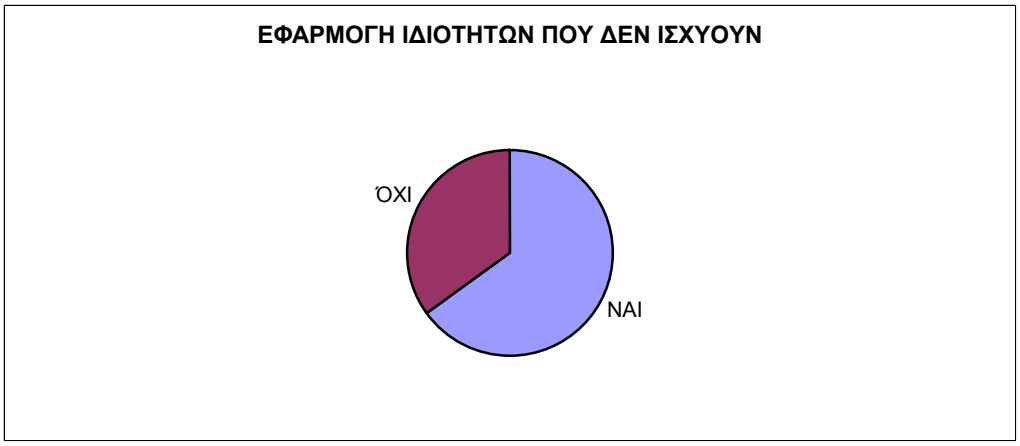
B7 Σε ποιο βαθμό βασίζεσαι στην διαισθητική σου άποψη;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**Λίγο**	97	61,4	61,8	61,8
	Πολύ	56	35,4	35,7	97,5
	Καθόλου	4	2,5	2,5	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		



B8 Έχεις παραπλανηθεί από την διαισθητική αντιμετώπιση προβλημάτων;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ΝΑΙ**	128	81,0	81,5	81,5
	ΟΧΙ	29	18,4	18,5	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		

B9 Πόσο συχνά;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**Λίγο**	112	70,9	71,3	71,3
	Πολύ	26	16,5	16,6	87,9
	Καθόλου	19	12,0	12,1	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		

B10 Προσπαθώντας να λύσεις ασκήσεις, έχεις εφαρμόσει ιδιότητες που δεν ισχύουν;					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ΝΑΙ**	101	63,9	64,3	64,3
	ΟΧΙ	56	35,4	35,7	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	**System**	1	,6		
Total		158	100,0		



Ανάλυση- συμπεράσματα συνολικά των αποτελεσμάτων της ΟΜΑΔΑΣ Β

Από τους πίνακες βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι μαθητές:

- ✓ Εμπιστεύονται σε μεγάλο ποσοστό (75%) τη διαίσθησή τους.
- ✓ Την εμπιστεύονται λιγότερο στα μαθηματικά απ' ότι σε άλλους επιστημονικούς κλάδους (22,9% - 33,1%).
- ✓ Δεν θεωρούν ικανοποιητική την διαισθητική απάντηση, ωστόσο ένα πολύ ισχυρό ποσοστό (40%) τη θεωρεί.
- ✓ Αναζητούν κάποιου άλλου είδους επαλήθευση ή απόδειξη, σε πολύ μεγάλο ποσοστό (91%), πράγμα που είναι αντιφατικό σε σχέση με τα ποσοστά της προηγούμενης απάντησης, εκτός αν δηλώνει διάσταση αίσθησης και πρακτικής ή την γενικά σωστή αναγκαιότητα της επιπλέον επικύρωσης.
- ✓ Η απόδειξη που αναζητούν μετά τη διαισθητική απάντηση είναι κατά σειρά 1) σε συνδυασμό λογική- με παραδείγματα και δοκιμές (56,5%) αλλά αμέσως μετά 2) με παραδείγματα και δοκιμές (28,6%) και 3) λογική (14,9%). Η σειρά δείχνει προβάδισμα στις δοκιμές σε σχέση με τη λογική εξέταση.
- ✓ Σε σχέση με το πόσο συχνά βασίζονται στη διαισθητική άποψη υπερτερεί το λίγες φορές και ποτέ (59,2%) σε σχέση με το πολλές φορές (40,8%) το οποίο είναι επίσης ισχυρό.
- ✓ Ο βαθμός εμπιστοσύνης στη διαίσθηση πολύ είναι (35,7%), το λίγο-καθόλου υπερτερεί με (64,3%).
- ✓ Το 81,5% δηλώνει ότι έχει παραπλανηθεί από τη διαίσθησή του.
- ✓ Αυτό δεν συμβαίνει πολύ συχνά (16,6%).
- ✓ Και τέλος προσπαθώντας να λύσει ασκήσεις το 64,3% έχει εφαρμόσει ιδιότητες που δεν ισχύουν, *δικές τους* όπως λέμε.

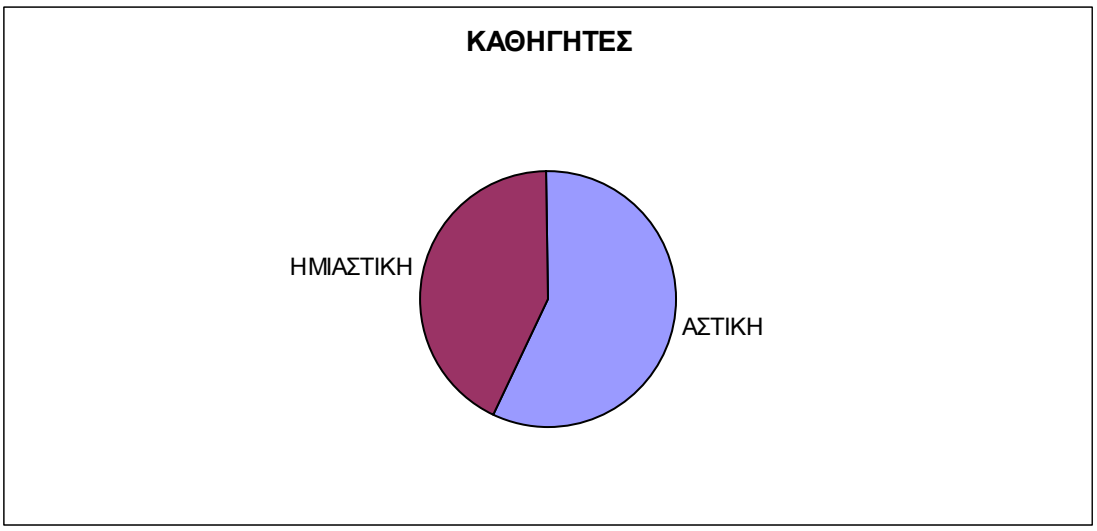
Συνολικά θα μπορούσαμε να πούμε, οι απαντήσεις δείχνουν ότι:

Οι μαθητές δουλεύουν αρκετά, στα μαθηματικά, με τη διαίσθηση εκφράζοντας ταυτόχρονα σκεπτικισμό απέναντί της και λόγω ιδίας πείρας, ενώ η εγκυρότητά της ελέγχεται, κατά σειρά, με δοκιμές και συλλογισμούς.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 2ο - ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ

Frequencies
Frequency Table

ΠΕΡΙΟΧΗ ΠΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΥΝ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Αστική	34	56,7	56,7	56,7
	Ημιαστ	26	43,3	43,3	100,0
	Total	60	100,0	100,0	



ΤΑΞΗ ΠΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΥΝ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΑΒΓ	23	38,3	38,3	38,3
		13	21,7	21,7	60,0
	ΑΒ	7	11,7	11,7	71,7
	ΒΓ	5	8,3	8,3	80,0
	Γ	5	8,3	8,3	88,3
	ΑΓ	4	6,7	6,7	95,0
	Β	3	5,0	5,0	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤΗΣΗ 1 Το πρόγραμμα και τα σχολικά βιβλία προωθούν περισσότερο					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**λογική σκέψη**	34	56,7	58,6	58,6
	και τα δύο το ίδιο	17	28,3	29,3	87,9
	διαισθητική σκέψη	7	11,7	12,1	100,0
	Total	58	96,7	100,0	
Missing	**System**	2	3,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤΗΣΗ 2 Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

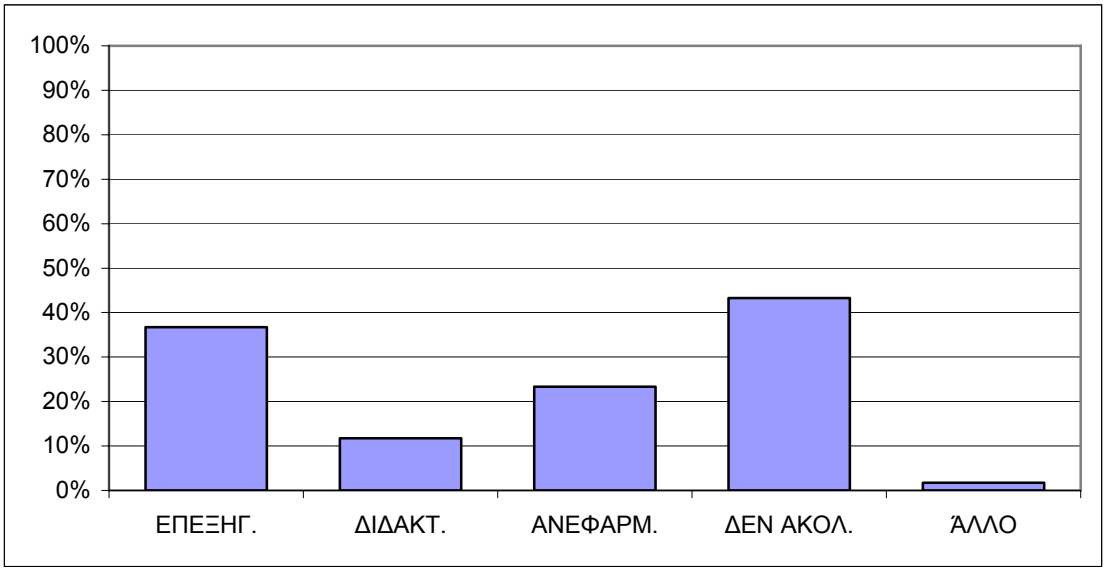
ΕΡΩΤ_2_1 Επεξηγήσεις					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	22	36,7	100,0	100,0
Missing	**System**	38	63,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_2 Διδακτική άποψη					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	7	11,7	100,0	100,0
Missing	**System**	53	88,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_3 Ανεφάρμοστες					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	14	23,3	100,0	100,0
Missing	**System**	46	76,7		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_4 Συνήθως δεν ακολουθούνται					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	26	43,3	100,0	100,0
Missing	**System**	34	56,7		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_5 Άλλο					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	1	1,7	100,0	100,0
Missing	**System**	59	98,3		
Total		60	100,0		



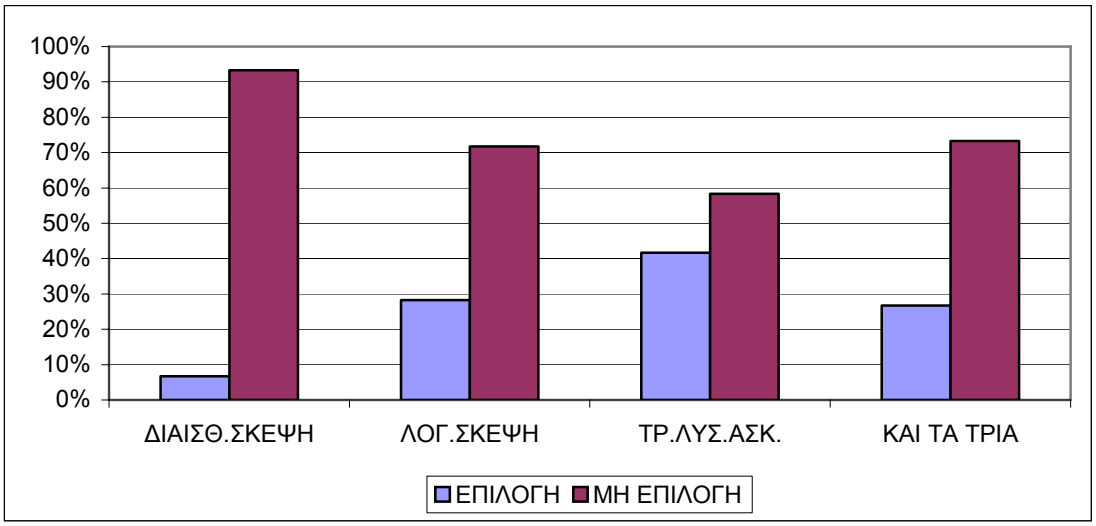
ΕΡΩΤΗΣΗ 3 Οι διδακτικές ενότητες είναι κατάλληλες για

ΕΡΩΤ_3_1 Τη διαισθητική σκέψη					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	4	6,7	100,0	100,0
Missing	**System**	56	93,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_3_2 Τη λογική σκέψη					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	17	28,3	100,0	100,0
Missing	**System**	43	71,7		
Total		60	100,0		

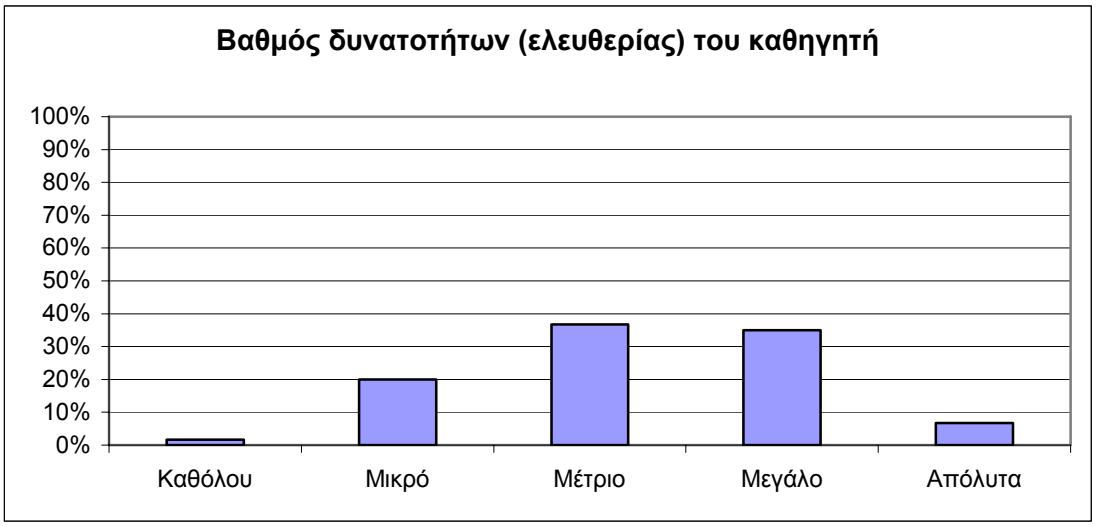
ΕΡΩΤ_3_3 Τρόπους λύσης ασκήσεων					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	25	41,7	100,0	100,0
Missing	**System**	35	58,3		
Total		60	100,0		

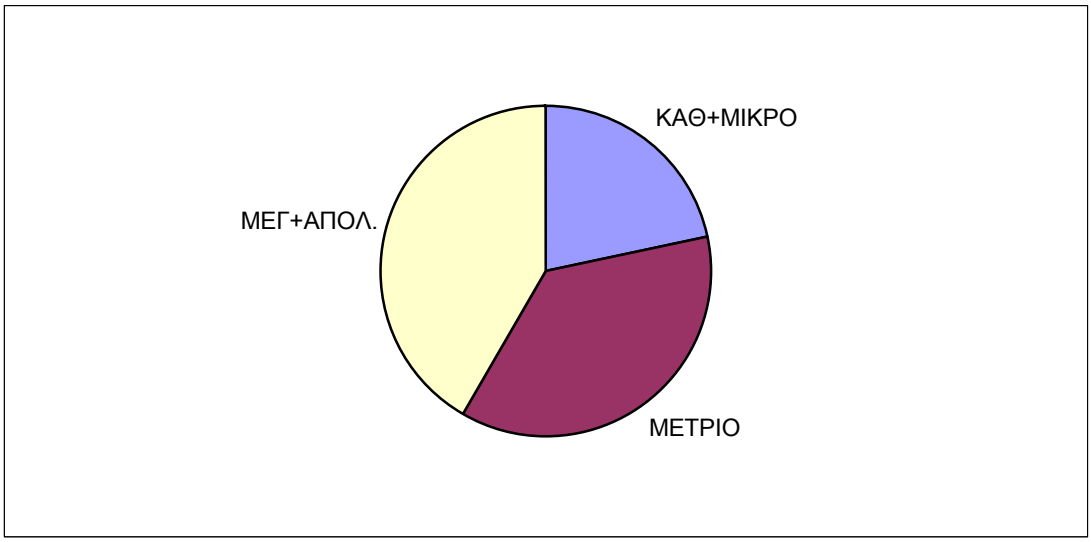
ΕΡΩΤ_3_4 Και για τα τρία					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**1**	16	26,7	100,0	100,0
Missing	**System**	44	73,3		
Total		60	100,0		



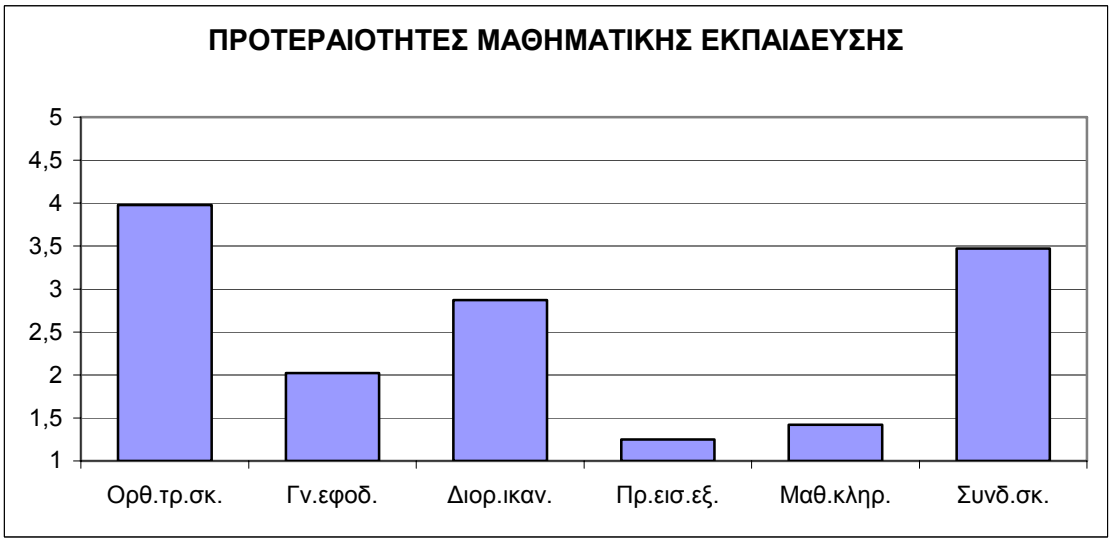
ΕΡΩΤΗΣΗ 4 Βαθμός δυνατοτήτων (διδακτικής ελευθερίας) του καθηγητή

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	**ΜΕΤΡΙΟ**	22	36,7	36,7	36,7
	ΜΕΓΑΛΟ	21	35,0	35,0	71,7
	ΜΙΚΡΟ	12	20,0	20,0	91,7
	ΑΠΟΛΥΤΟ	4	6,7	6,7	98,3
	ΚΑΘΟΛΟΥ	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	



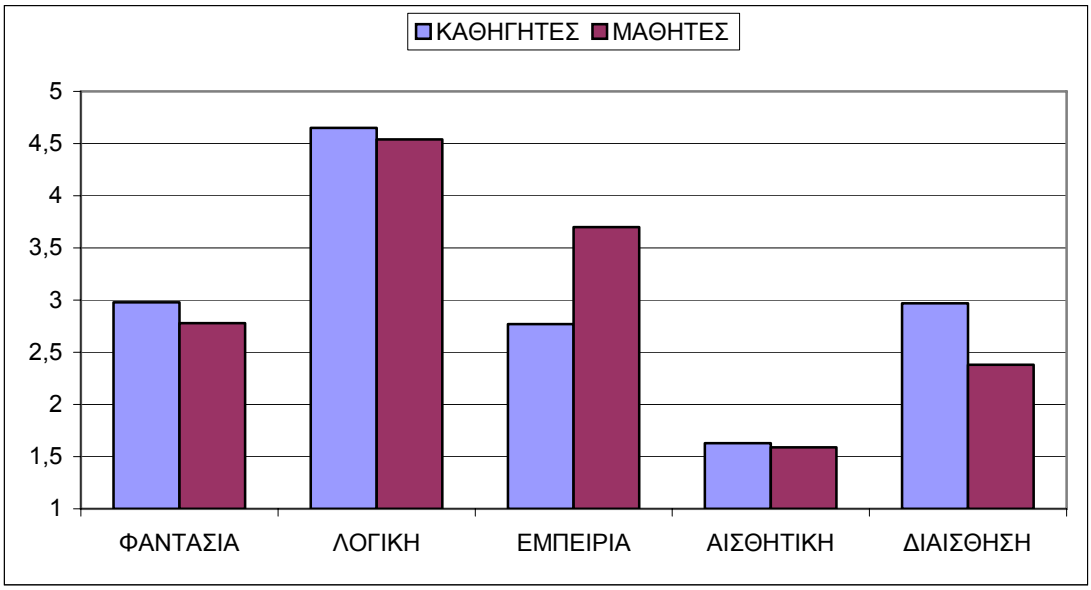


ΕΡΩΤΗΣΗ 5 Οι προτεραιότητες της μαθηματικής εκπαίδευσης, πρέπει:				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
ΕΡΩΤ_5_1Ορθολ.. Τρόπο σκέψης	60	0	2,02	1,30
ΕΡΩΤ_5_2Γνωστικά εφόδια	60	0	3,98	1,53
ΕΡΩΤ_5_3Διορατική ικανότητα	60	0	3,13	1,08
ΕΡΩΤ_5_4Προετοιμ. για Εις. Εξέτ.	60	0	4,75	1,40
ΕΡΩΤ_5_5Επαφή με Μαθ. Κληρον	60	0	4,58	1,45
ΕΡΩΤ_5_6Συνδιαστική σκέψη	60	0	2,53	1,48



ΕΡΩΤΗΣΗ 6

Τα Μαθηματικά ταιριάζουν περισσότερο με την				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
ΕΡ6_ΦΑΝΤΑΣΙΑ	60	0	3,02	1,08
ΕΡ6_ΛΟΓΙΚΗ	60	0	1,35	,63
ΕΡ6_ΕΜΠΕΙΡΙΑ	60	0	3,23	1,25
ΕΡ6_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	60	0	4,37	,96
ΕΡ6_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ	60	0	3,03	1,18



T-Test STUDENTS QUESTION 1 - TEACHERS QUESTION 6

Group Statistics

	ΙΔΙΟΤΗΤΑ	N	Mean	Std. Deviation
Α1_ΦΑΝΤΑΣΙΑ	**ΜΑΘΗΤΕΣ**	158	3,22	1,06
	ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ	60	3,02	1,08
Α1_ΛΟΓΙΚΗ	**ΜΑΘΗΤΕΣ**	158	1,46	,93
	ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ	60	1,35	,63
Α1_ΕΜΠΕΙΡΙΑ	**ΜΑΘΗΤΕΣ**	158	2,30	,92
	ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ	60	3,23	1,25
Α1_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	**ΜΑΘΗΤΕΣ**	158	4,41	,95
	ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ	60	4,37	,96
Α1_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ	**ΜΑΘΗΤΕΣ**	158	3,62	1,01
	ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ	60	3,03	1,18

Συμπεράσματα συνολικά από το 2^{ο} Ερωτηματολόγιο.

- ✓ Οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η μαθηματική εκπαίδευση σήμερα προωθεί περισσότερο τη λογική σκέψη και πολύ λιγότερο τη διαισθητική σκέψη.
- ✓ Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, για τις οποίες θεωρούν ότι περισσότερο προσπαθούν να συμβάλουν με επεξηγήσεις παρά ως διδακτική άποψη, κατά κανόνα δεν παίζουν ουσιαστικό ρόλο και παρακάμπτονται. Σημαντικό λόγο γι' αυτό θεωρούν την πληθώρα ύλης.
- ✓ Θεωρούν ότι οι διδακτικές ενότητες των μαθηματικών που διδάσκονται στο Λύκειο είναι πολύ περισσότερο κατάλληλες για την ανάπτυξη τρόπων λύσης ασκήσεων παρά για την λογική σκέψη και πολύ λιγότερο για τη διαισθητική σκέψη.
- ✓ Εκτιμούν ότι ο εκπαιδευτικός έχει μάλλον μεγάλες παρά μικρές δυνατότητες να διδάξει με τον τρόπο που νομίζει σωστό (σε διπλάσιο βαθμό).
- ✓ Η ιεράρχηση που κάνουν στους σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης σε σχέση με αυτούς που αναφέραμε στο πρώτο μέρος (Ι) είναι 1) η ανάπτυξη του τρόπου σκέψης (ορθολογική, κριτική σκέψη, διορατική ικανότητα), 2) η απόκτηση γνωστικών εφοδίων, 3) στοιχεία πολιτισμού και τελευταίο 4) προετοιμασία για τις εισαγωγικές εξετάσεις.
- ✓ Η ιεράρχηση που κάνουν οι καθηγητές στις έννοιες που ταιριάζουν με τα μαθηματικά είναι Λογική, Φαντασία Διαίσθηση, Εμπειρία, Αισθητική.
- ✓ Η σύγκριση με τις απαντήσεις στο ίδιο ερώτημα των μαθητών δείχνει διαφορές στις πεποιθήσεις κυρίως σ' ότι αφορά την εμπειρία σε σχέση με την φαντασία και την διαίσθηση όπου γίνεται αναδιάταξη. Και από τις συσχετίσεις, μαθητών – καθηγητών, οι μεγαλύτερες αποκλίσεις της μέσης τιμής είναι στην εμπειρία (0,93) και στη διαίσθηση (0,59) ενώ στην φαντασία (0,20) στη Λογική (0,11) και στην αισθητική (0,04).

Ως συνολικό συμπέρασμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι καθηγητές των μαθηματικών, στο δείγμα μας, δεν συμφωνούν με τους προσανατολισμούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, στη διδασκαλία τους κινούνται κυρίως με βάση τις απόψεις τους, οι οποίες είναι προσανατολισμένες περισσότερο στην ανάπτυξη ενός σωστού τρόπου σκέψης και δίνουν σαφώς λιγότερο βάρος στην εμπειρία απ' ότι οι μαθητές τους.

3. Έρευνα συσχετίσεων.

Η έρευνα αυτή σχεδιάστηκε ως εξής:

Δόθηκε σε 100 μαθητές, 20 της Α΄, 40 της Β΄ και 40 της Γ΄ Λυκείου να συμπληρώσουν ένα πρώτο ερωτηματολόγιο (το 3°, 5°, 7° αντιστοίχως από τα ερωτηματολόγια του Παραρτήματος Ι) με ερωτήσεις βασικά από την ύλη των μαθηματικών που έχουν διδαχθεί στην αντίστοιχη ή σε προηγούμενες τάξεις.

Οι απαιτούμενες γνώσεις σε μια ερώτηση στερεομετρίας δόθηκαν.

Οι μαθητές της Α΄ και της Β΄ ήταν τρία τμήματα του Πειραματικού Λυκείου της Ιωννιδείου Σχολής Πειραιά. Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν από μένα σε συνεργασία με τους καθηγητές[112] της τάξης στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας.

Για τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου το δείγμα ήταν πανελλαδικό επειδή συνδυάστηκε το ερωτηματολόγιό τους και με το πείραμα που έγινε ταυτόχρονα.

Οι ερωτήσεις του πρώτου ερωτηματολογίου που τους δόθηκε να συμπληρώσουν, προσπαθούσαν να δυσκολέψουν εποπτικά ή να μην υποβοηθήσουν την διαισθητική τους σκέψη.

Κάποιες ερωτήσεις δεν ήταν δύσκολες ενώ άλλες είχαν μεγαλύτερη δυσκολία, έτσι ώστε να υπάρχει μια σχετική κλιμάκωση.

Έγινε προσπάθεια ώστε οι αρχικές ερωτήσεις να είναι πιο εύκολες και να ενθαρρύνουν τη συμμετοχή και τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου

Για το ερωτηματολόγιο αυτό τους δόθηκε χρόνος είκοσι λεπτών για να απαντήσουν αφού τους διευκρινίστηκε ότι δεν χρειάζεται να κάνουν αναλυτική λύση ή παρουσίαση της απάντησης. Θα έπρεπε μόνο να συμπληρώσουν στο αντίστοιχο κουτάκι όπου υπήρχε ΝΑΙ ή ΟΧΙ, σε μια περίπτωση να σημειώσουν πάνω στο σχέδιο και σε μια ερώτηση να απαντήσουν πολύ επιγραμματικά.

Η διαφορετική φύση των ερωτήσεων δεν επέτρεψε μια ενιαία κλίμακα για τις απαντήσεις. Ωστόσο μια κατηγοριοποίηση των απαντήσεων έγινε με βάση το αν απάντησαν σωστά ή λάθος στην συγκεκριμένη ερώτηση.

---

[112] τους συναδέλφους και φίλους μαθηματικούς Καμπούκο Κυριάκο και Βισκαδουράκη Βασίλη τους οποίους και ευχαριστώ ιδιαίτερα.

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο (4° για την Α, 6° για την Β και 8° ή 9° ή 10° για την Γ αντίστοιχα) μοιράστηκε στους ίδιους μαθητές αμέσως μόλις συγκεντρώθηκε το πρώτο και τους δόθηκε επίσης χρόνος είκοσι λεπτών για να απαντήσουν.

Οι ερωτήσεις του δεύτερου ερωτηματολογίου ήταν οι ίδιες με τις ερωτήσεις του πρώτου αλλά με εποπτική και διαισθητική *διευκόλυνση*. Σε δύο ερωτήσεις, μια της Α΄ και μία της Β΄, προστέθηκαν κάποια άλλα εμβόλιμα ερωτήματα τα οποία μπορούσαν να δημιουργήσουν έναν συνειρμικό συλλογισμό υποβοηθητικό για την απάντηση στο κυρίως ερώτημα.

Η επιλογή των ερωτήσεων έγινε με βάση ζητήματα ή προβλήματα τα οποία αναφέρονται στην σχετική βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για το θεωρητικό μέρος (Ι). Έγινε ακόμη, με βάση την εμπειρία για το πότε διευκολύνονται εποπτικά οι μαθητές και πότε όχι, καθώς επίσης με βάση τα *συνήθη λάθη* των μαθητών.

Τα ερωτηματολόγια βρίσκονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Οι υποθέσεις ήταν:

1. Με την εποπτική και διαισθητική διευκόλυνση, θα είχαμε μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων, είτε λόγω παγιωμένων συνηθειών είτε λόγω υποβοήθησης της σκέψης.
2. Στα θέματα για τα οποία δεν έχουμε διαίσθηση ίσως βοηθάνε κάποιοι λογικοί συνειρμοί.
3. Οι σωστές απαντήσεις στα δύσκολα ερωτήματα όπου απαιτούνται πιο εδραιωμένες γνώσεις, μαθηματική εμπειρία και λογικά κριτήρια δεν θα είχαν μεγάλες αποκλίσεις ανάμεσα στα δυο ερωτηματολόγια.
4. Οι μαθητές έχουν μάθει να δουλεύουν με τρόπο που προωθεί κυρίως την εφαρμογή συγκεκριμένης θεωρίας φορμαλιστικά και ότι αυτός ο τρόπος δεν βοηθάει πολύ τη διαισθητική και τη λογική σκέψη τους και κυρίως την αλληλεπίδρασή τους.

3.1 Παρουσίαση και Ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας των Ερωτηματολογίων 3ο – 4ο της Α΄ Λυκείου.

Συσχετίσεις των ερωτήσεων Α΄ Λυκείου

Ερωτηματολόγιο 3ο ερώτηση	Ερωτηματολόγιο 4ο ερώτηση
1 με	1
2	2
3	3
4	4
4	5
5	6

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ερώτηση1

Crosstabs

ΕΡΩΤΗΣΗ_1 Ισότητα τριγώνων με ίσες ΓΓΓ Crosstabulation

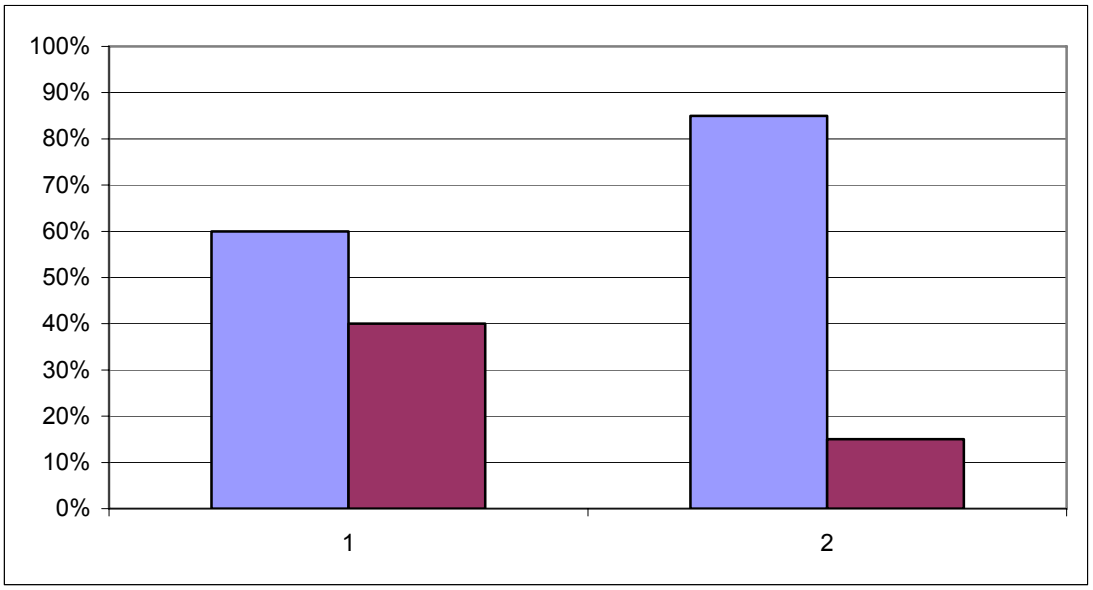
			ΕΡΩΤ_1		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	12	8	20
		% within GROUP	60.0%	40.0%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	17	3	20
		% within GROUP	85.0%	15.0%	100.0%
Total		Count	29	11	40
		% within GROUP	72.5%	27.5%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	3.135(b)	1	.077

a Computed only for a 2x2 table

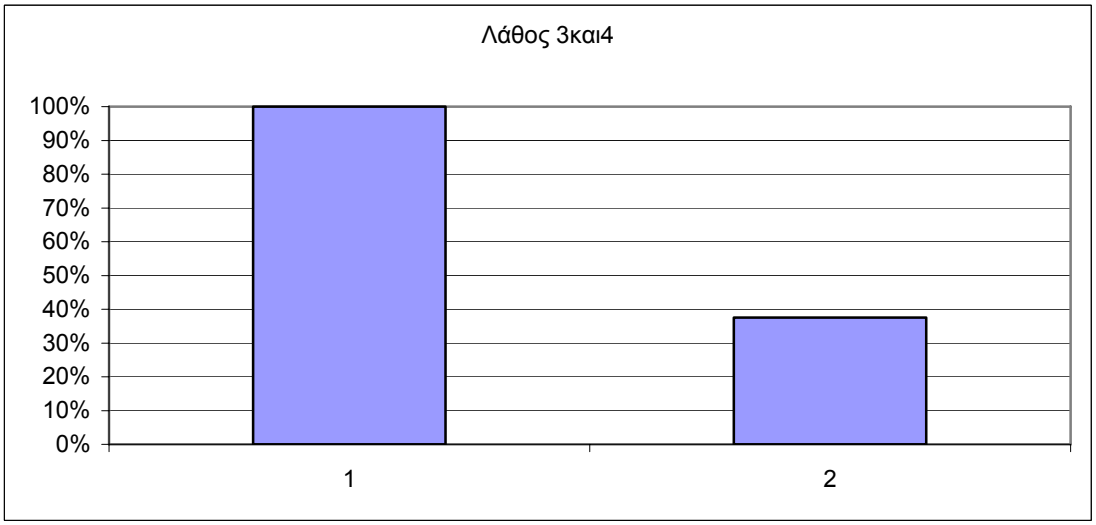
b 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 5.50.



Το 40% του συνόλου απάντησαν λάθος. Πρόκειται για ένα σύνηθες λάθος των μαθητών όπου για τρεις ίσες γωνίες απαντάνε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα. Είτε λόγω κεκτημένης ταχύτητας επειδή στα κριτήρια ισότητας των τριγώνων έχουμε 3 κύρια στοιχεία, είτε γιατί διαισθητικά τα αναπαριστούν σαν ίσα και όχι σαν όμοια, όταν δεν βλέπουν το σχήμα.

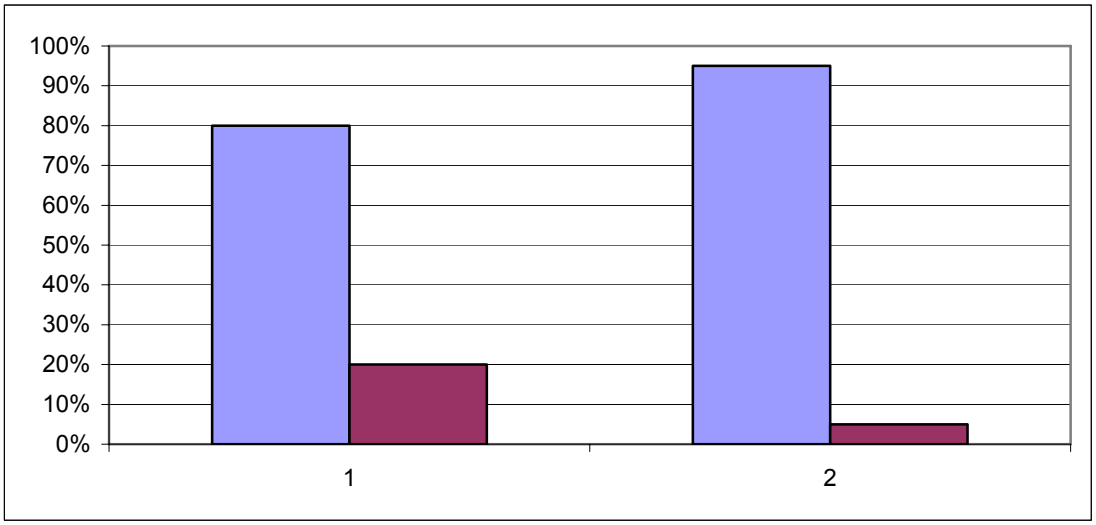
Στο 4^{ο} όπου υπήρχαν και τα σχήματα το ποσοστό του λάθους έπεσε στο 15%.

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι το 37,5% αυτών που έκαναν λάθος δεν το κατάλαβε ούτε με το σχήμα παρά το ότι ήταν πολύ εμφανής η ανισότητα των τριγώνων.



Ερώτηση 2

ΕΡΩΤΗΣΗ_2 Ισότητα τριγώνων με ίσες ΠΠΠ Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_2		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
GROUP	**ΠΕΙΡΑΜ**	**Count**	4	16	20
		% within GROUP	20.0%	80.0%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	**Count**	1	19	20
		% within GROUP	5.0%	95.0%	100.0%
Total		**Count**	5	35	40
		% within GROUP	12.5%	87.5%	100.0%



Το λάθος από 20% που ήταν χωρίς την εποπτική διευκόλυνση (διαφορετικά τοποθετημένα τα τρίγωνα), μειώθηκε στο 5% με την βοήθεια του σχήματος. Παρά το εμφανές σχήμα μαζί με το κριτήριο και πάλι υπάρχει λάθος.

Ερώτηση 3

ΕΡΩΤΗΣΗ_3 Σύγκριση πλήθους σημείων δυο άνισων ευθυγρ. τμημάτων					
			ΕΡΩΤ_3		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	16	4	20
		% within GROUP	80.0%	20.0%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	10	10	20
		% within GROUP	50.0%	50.0%	100.0%
Total		Count	26	14	40
		% within GROUP	65.0%	35.0%	100.0%

Chi-Square Tests			
	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	3.956(b)	1	.047
a Computed only for a 2x2 table			
b 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7.00.			

Το ερώτημα είναι από τη σχετική βιβλιογραφία (Fischbein). *Το μέρος είναι μικρότερο του όλου μόνο για πεπερασμένα σύνολα (Blance). Βλέπε Μέρος Ι*

Στο 3^{ο} Ερωτηματολόγιο απάντησαν σωστά το 20%, ενώ με τη διαισθητική διευκόλυνση με τα ευθύγραμμα τμήματα που έδειχναν την 1-1 αντιστοιχία των σημείων των δυο ευθυγράμμων τμημάτων οι σωστές απαντήσεις έφτασαν το 50%. Φυσικά οι μαθητές δεν έχουν τις γνώσεις για να δώσουν λογική εξήγηση και συνεπώς σ' αυτό το ερώτημα φαίνεται καθαρά η διαισθητική τους σκέψη. Πιο κάτω θα δούμε, στο ίδιο ερώτημα, πως λειτούργησαν συγκριτικά καλύτερα από τους μαθητές της Β΄ και της Γ΄ Λυκείου.

Ερώτηση 4

ΕΡΩΤΗΣΗ_4 Ελάχιστος Δρόμος Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_4		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	20		20
		% within GROUP	100.0%		100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	14	6	20
		% within GROUP	70.0%	30.0%	100.0%
Total		Count	34	6	40
		% within GROUP	85.0%	15.0%	100.0%

Chi-Square Tests			
	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	7.059(b)	1	.008
a Computed only for a 2x2 table			
b 2 cells (50.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3.00.			

Πρόκειται για ένα ανοιχτό πρόβλημα ελαχίστου δρόμου το οποίο το έχουμε δοκιμάσει και πειραματικά σε τάξη, στο παρελθόν και έχει αρκετά μεγάλη δυσκολία για τους μαθητές.

Ως γνωστόν οι ανισοτικές σχέσεις τριγώνων διδάσκονται στην Α΄ Λυκείου.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι **η ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η στη σελίδα 56 του σχολικού βιβλίου, στην παράγραφο 3.12 Τριγωνική ανισότητα,** για την οποία οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου συνιστούν να παραλείπεται.

Στο 3ο ερωτηματολόγιο δόθηκε μόνο το πρόβλημα. Η αποτυχία ήταν 100%.

Αρκετοί απάντησαν ότι είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με την ευθεία. Άλλοι έφεραν τις καθέτους από τα σημεία προς την ευθεία.

Στο 4^{ο} ως διευκόλυνση δόθηκε πρώτα, όπως φαίνεται στο ερωτηματολόγιο, ένα ερώτημα με ανάκλαση σε επίπεδο κάτοπτρο, έτσι ώστε να διεγερθεί η διαίσθησή τους.[113]

Σ' αυτό το σημείο αποκαλύφθηκε ένα άλλο πρόβλημα. Οι μαθητές κάνουν οπτική στο Γυμνάσιο και στην Α΄ Λυκείου σχεδόν την έχουν ξεχάσει…

Το αποτέλεσμα ήταν ότι μόνο το 30% μπορούσε να προσδιορίσει τη θέση του ειδώλου, σε σχέση με το επίπεδο κάτοπτρο, στο βοηθητικό ερώτημα και τελικά κανένας δεν απάντησε σωστά.

Φαίνεται ότι ακόμη και αυτοί οι μαθητές που προσδιόρισαν σωστά τη θέση του ειδώλου δεν μπόρεσαν να συνδυάσουν τη διαδρομή της φωτεινής ακτίνας με τον ελάχιστο δρόμο. Το λογικό κριτήριο υπερβαίνει πιθανά την διαισθητική σκέψη ή ίσως το βοηθητικό ερώτημα δεν ήταν ικανό να το ενεργοποιήσει.

Υπήρξε η σκέψη στο βοηθητικό ερώτημα αντί για το επίπεδο κάτοπτρο να χρησιμοποιηθεί ένα όμοιο πρόβλημα με μπιλιάρδο, το οποίο είχε τεθεί πριν χρόνια σε εξετάσεις και το έχω επίσης δοκιμάσει σε τάξη. Δηλαδή πού πρέπει να χτυπήσει η μία μπίλια τη *σπόντα* για να βρει την άλλη. Ίσως όμως πολλοί μαθητές και μαθήτριες να μην είχαν ανάλογη εποπτεία πράγμα που σίγουρα δεν συμβαίνει με τον καθρέφτη σ' αυτή την ηλικία.

GROUP * ΕΡΩΤΣΕΙΣ_4_5 Crosstabulation

			ΕΡΩΤ_4_5		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	20		20
		% within GROUP	100.0%		100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%
Total		Count	39	1	40
		% within GROUP	97.5%	2.5%	100.0%

[113] Η ιδέα για τη βοηθητική διάταξη με το κάτοπτρο ήταν του συναδέλφου και φίλου καθηγητή μαθηματικών στο Βαρβάκειο Λύκειο, Χρ. Μηλιώνη.

Ερώτηση 5

ΕΡΩΤΗΣΗ_5 Γιατί ορίσαμε το $α^0 = 1$					
			ΕΡΩΤ_5		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%
Total		Count	38	2	40
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%

GROUP * ΕΡΩΤΗΣΗ_6 Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_6		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%
Total		Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%

GROUP * ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ_5_6 Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_5_6		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	19	1	20
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%
Total		Count	38	2	40
		% within GROUP	95.0%	5.0%	100.0%

Το ερώτημα (γιατί $α^0$ =1) είναι απ' αυτά για τα οποία, όπως αναφέραμε στο Πρώτο Μέρος, δεν έχουμε καμία διαίσθηση. Η συμβατότητα με τις άλλες ισχύουσες ιδιότητες των δυνάμεων μπορεί να δώσει λογική εξήγηση.

Μόνο μία μαθήτρια απάντησε σωστά στην αντίστοιχη ερώτηση, στο 3ο Ερωτηματολόγιο **χωρίς** την συνειρμική υποβοήθηση, η οποία μάλιστα δεν ξανάγραψε την απάντηση στο 4ο θεωρώντας το ίσως περιττό επειδή την έγραψε στο προηγούμενο.

Η απάντησή της είναι η τελευταία της επόμενης σελίδας στην οποία σημειώνεται δίπλα το ΝΑΙ.

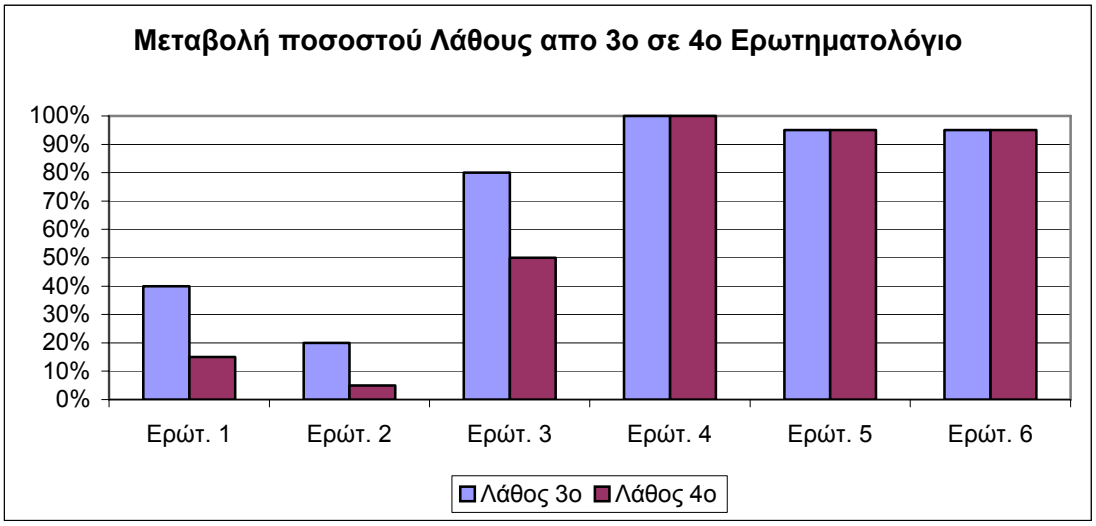
Στο 4ο Ερωτηματολόγιο ως υποβοήθηση, υποθετικά πάντα ως προς την λειτουργία της, τους ζητήθηκε να γράψουν πρώτα τις ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου των δυνάμεων και στη συνέχεια να απαντήσουν πάλι στο ίδιο ερώτημα. Έτσι ώστε να κάνουν ενδεχομένως τον ανάλογο συνειρμό.

Σημειωτέον ότι τα δύο ερωτηματολόγια δόθηκαν με διαφορά ώρας 20΄.

Το 55% έγραψε σωστά τις δυο ιδιότητες των δυνάμεων. Από τον έλεγχο των ερωτηματολογίων φαίνεται ότι μάλλον και άλλοι τις ήξεραν αλλά ίσως επειδή δεν μπορούσαν να απαντήσουν στο συνεχόμενο ερώτημα δεν τις έγραψαν.

Όπως επίσης πάλι από τα ερωτηματολόγια φαίνεται ότι κάποιοι, ενώ είχαν έναν προβληματισμό, πιθανά δεν μπορούσαν να τον εκφράσουν σωστά.

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι δεν λειτούργησε ο συνειρμός στη συγκεκριμένη περίπτωση γιατί, αν και έγινε μια προσπάθεια, δεν παρουσιάστηκε μεταβολή στις απαντήσεις.



Ορισμένες απαντήσεις, από όσους απάντησαν στο 3ο Ερωτηματολόγιο ήταν:

5. Γιατί το $a^0=1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

γιατί το οποιον αριθμό ν' να υψωθεις στην μηδενική μάνει 1.

5. Γιατί το $a^0=1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

Γιατί το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

5. Γιατί το $a^0=1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

Γιατί οποιοδήποτε αριθμός στην μηδενική ισούται με 1

5. Γιατί το $a^0=1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

Γιατί, το γράφει a^0 έτσι δεν κάνει καμία πράξη $a:1$
δεν υπάρχει σύνταξη που να διπλασιάζεται και παραπάνω ο αριθμός αυτός.

5. Γιατί το $a^0=1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

$a^0=1 \Leftrightarrow$

$a^3 \cdot a^{-3} = 1 \Leftrightarrow$

$\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = 1$

Ναι!

Ορισμένες απαντήσεις, από όσους απάντησαν στο 4ο Ερωτηματολόγιο ήταν:

6. Συμπληρώστε τις επόμενες ισότητες που αφορούν ιδιότητες των δυνάμεων:

$a^n \times a^m = \ldots$ α^{n+m}

$\frac{a^n}{a^m} = \ldots$ α^{n-m}

Γιατί ορίσαμε το $\alpha^0 = 1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

Γιατί το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού

6. Συμπληρώστε τις επόμενες ισότητες που αφορούν ιδιότητες των δυνάμεων:

$a^n \times a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Γιατί ορίσαμε το $\alpha^0 = 1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

Γιατί το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

6. Συμπληρώστε τις επόμενες ισότητες που αφορούν ιδιότητες των δυνάμεων:

$a^n \times a^m = \ldots a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = \ldots a^{n-m}$

Γιατί ορίσαμε το $\alpha^0 = 1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

Ο,τι και να υψώσουμε στο μηδενικό δίνει αποτέλεσμα 1.

6. Συμπληρώστε τις επόμενες ισότητες που αφορούν ιδιότητες των δυνάμεων:

$a^n \times a^m = \ldots \alpha^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = \ldots \alpha^{n-m}$

Γιατί ορίσαμε το $\alpha^0 = 1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

$\alpha^0 = 1$ Ένας αριθμός $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$, $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ ... κλπ

Άρα $\alpha^0 = 1$

3.2 Παρουσίαση και Ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας για την Β΄ Λυκείου, 5ο – 6ο Ερωτηματολόγιο.

Συσχετίσεις των ερωτήσεων των Ερωτηματολογίων της Β΄ Λυκείου.

Ερωτηματολόγιο 5ο ερώτηση με	**Ερωτηματολόγιο 6ο** ερώτηση
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
5	6
6 αυτοτελής	Χωρίς αντίστοιχη

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1 Χωρισμός τραπεζίου σε ισεμβαδικά χωρία Crosstabulation

			ΕΡΩΤ_1		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
GROUP	**ΠΕΙΡΑΜ**	**Count**	18	21	39
		% within GROUP	46.2%	53.8%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	**Count**	14	25	39
		% within GROUP	35.9%	64.1%	100.0%
Total		**Count**	32	46	78
		% within GROUP	41.0%	59.0%	100.0%

Ερώτηση 1

Οι λάθος απαντήσεις από 46.2% μειώθηκαν στο 35.9% απλώς με την αλλαγή θέσης του σχήματος του τραπεζίου. Το ότι παρέμεινε ψηλό το ποσοστό του λάθους οφείλεται σε μια *εμμονή* των μαθητών να χωριστεί το τραπέζιο σε δυο ισεμβαδικά με τη διαγώνιο, όπως φάνηκε στα ερωτηματολόγια.

ΕΡΩΤΗΣΗ_2 Δυνατότητα υπολογισμού όγκου κυλίνδρου Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_2		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
GROUP	**ΠΕΙΡΑΜ**	**Count**	6	33	39
		% within GROUP	15.4%	84.6%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	**Count**	4	35	39
		% within GROUP	10.3%	89.7%	100.0%
Total		**Count**	10	68	78
		% within GROUP	12.8%	87.2%	100.0%

Ερώτηση 2

Το 15.4% του λάθους έγινε 10.3% το οποίο (10.3%) μάλλον είναι μεγάλο για το ερώτημα αυτό.

ΕΡΩΤΗΣΗ_3 Σύγκριση εμβαδών τριγώνων Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_3		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
GROUP	**ΠΕΙΡΑΜ**	**Count**	20	19	39
		% within GROUP	51.3%	48.7%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	**Count**	9	30	39
		% within GROUP	23.1%	76.9%	100.0%
Total		**Count**	29	49	78
		% within GROUP	37.2%	62.8%	100.0%

Chi-Square Tests			
	Value	**df**	**Asymp. Sig. (2-sided)**
Pearson Chi-Square	6.642(b)	1	.010
a Computed only for a 2x2 table			
b 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 14.50.			

Ερώτηση 3

Το 51.3% του λάθους έπεσε στο 23.1% (και το σωστό από 48.7% έγινε 76.9%). Εδώ η διαφορά είναι πολύ αισθητή και οφείλεται πάλι στην οριζόντια τοποθέτηση των παραλλήλων ευθειών όπως την έχουν συνηθίσει.

ΕΡΩΤΗΣΗ_4 Σύγκριση πλήθους σημείων δυο ομόκεντρων κύκλων
Crosstabulation

			ΕΡΩΤ_4		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	21	18	39
		% within GROUP	53.8%	46.2%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	22	17	39
		% within GROUP	56.4%	43.6%	100.0%
Total		Count	43	35	78
		% within GROUP	55.1%	44.9%	100.0%

Ερώτηση 4

Στην ερώτηση αυτή (σύγκριση απείρων) δεν άλλαξε σχεδόν τίποτα, μάλιστα προστέθηκε 1 (+2.6%) στα λάθη, κάτι που μπορεί να οφείλεται σε συμπλήρωση του ερωτηματολογίου με τυχαίο τρόπο.

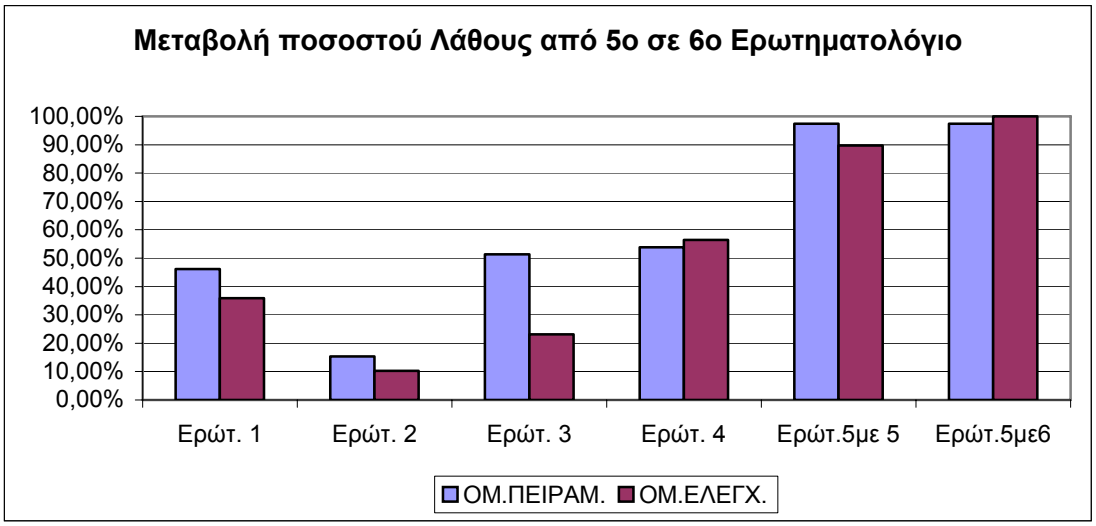
Εντύπωση κάνει εδώ η συσχέτιση με τις αντίστοιχες μεταβολές στην Α΄ Λυκείου όπου είχαμε μια βελτίωση κατά 30% με την εποπτική διευκόλυνση.

ΕΡΩΤΗΣΗ_5 Ελάχιστος δρόμος Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_5		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
GROUP	**ΠΕΙΡΑΜ**	**Count**	38	1	39
		% within GROUP	97.4%	2.6%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	**Count**	35	4	39
		% within GROUP	89.7%	10.3%	100.0%
Total		**Count**	73	5	78
		% within GROUP	93.6%	6.4%	100.0%

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ_5_6 Ελάχιστος δρόμος Crosstabulation					
			ΕΡΩΤ_5_6		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
GROUP	**ΠΕΙΡΑΜ**	**Count**	38	1	39
		% within GROUP	97.4%	2.6%	100.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	**Count**	39		39
		% within GROUP	100.0%		100.0%
Total		**Count**	77	1	78
		% within GROUP	98.7%	1.3%	100.0%

Ερώτηση 5

Και σ' αυτή την ερώτηση δεν υπήρξε καμία μεταβολή παρ' όλο που ένα 8% περίπου απάντησε σωστά στο βοηθητικό ερώτημα με το είδωλο στο κάτοπτρο. Παρατηρήθηκε και εδώ το ίδιο ζήτημα που επισημάναμε και για την Α΄ Λυκείου σε σχέση με την Οπτική.



Ερώτηση 6

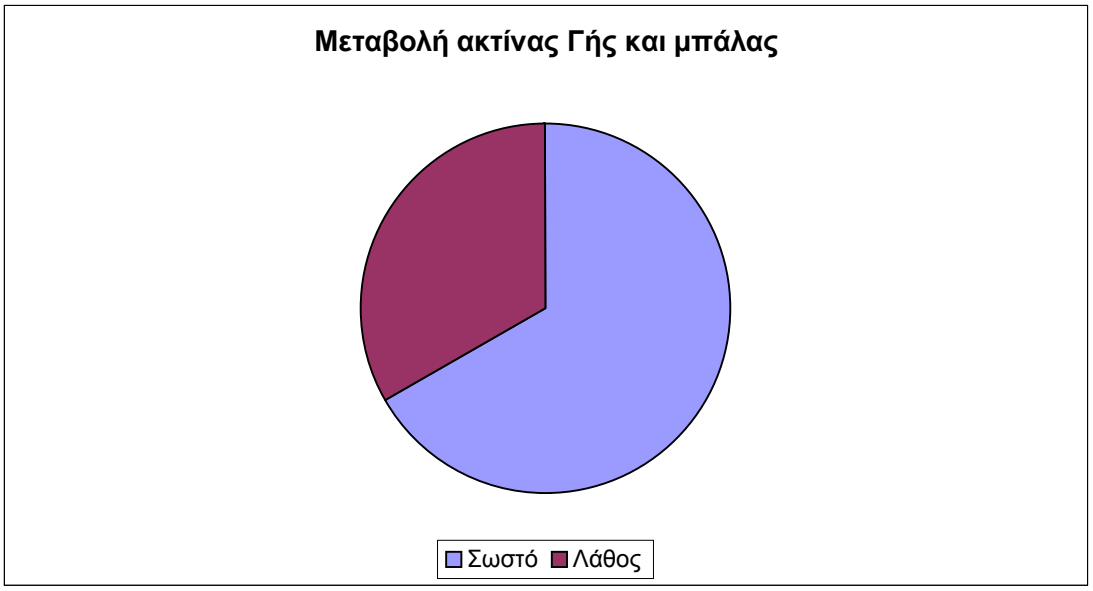
Μεταβολή ακτίνας της Γης και μιας μπάλας Crosstab					
			ΕΡΩΤ_6		Total
			ΟΧΙ	ΝΑΙ	
GROUP	ΠΕΙΡΑΜ	Count	13	26	39
		% within ΕΡΩΤ_6	25.0%	100.0%	50.0%
	ΕΛΕΓΧΟΥ	Count	39		39
		% within ΕΡΩΤ_6	75.0%		50.0%
Total		Count	52	26	78
		% within ΕΡΩΤ_6	100.0%	100.0%	100.0%

Chi-Square Tests			
	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	39.000(b)	1	.000
a Computed only for a 2x2 table			
b 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 13.00.			

Αυτό το ερώτημα ήταν αυτοτελές, δεν υπήρχε αντίστοιχο ερώτημα στο 6^{ο} ερωτηματολόγιο.[114]

Είναι ένα ερώτημα στο οποίο η διαίσθηση παραπλανεί, λόγω της τεράστιας διαφοράς μεγέθους της Γης και μιας μπάλας του Μπάσκετ, ενώ δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι και οι δυο ακτίνες θα μεταβληθούν κατά 5/π.

Όπως αναμενόταν το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν λάθος ήταν μεγάλο, 33.3%, ο ένας στους τρεις.



[114] Το πρόβλημα είναι από το βιβλίο του Hugo Steinhaus: ONE HUNDRED PROBLEMS IN ELEMENTARY MATHEMATICS

3.3 Συσχετίσεις των ερωτήσεων των Ερωτηματολογίων της Γ΄ Λυκείου. Ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας.

Συσχετίσεις των ερωτήσεων των Ερωτηματολογίων της Γ΄ Λυκείου έγιναν μόνο σε δυο ερωτήσεις, όπως φαίνεται και στον πίνακα, στην 3 και στην 6 του 7ου στην οποία έγινε και **πείραμα** στο οποίο θα αναφερθούμε στη συνέχεια. Οι υπόλοιπες εξετάστηκαν αυτοτελώς.

Γ΄ Λυκείου – Συσχετίσεις ερωτήσεων

Ερωτηματολόγιο 7ο ερώτηση	Ερωτημ/λόγιο 8ο ερώτηση	Ερωτημ/λόγιο 9ο ερώτηση	Ερωτημ/λόγιο 10ο ερώτηση
1 αυτοτελώς			
2 αυτοτελώς			
3 με την	**2**	**2**	**2**
4 αυτοτελώς			
5 αυτοτελώς			
6 με την	**1**	**1**	**1**

Η έρευνα πεποιθήσεων έδειξε, στο ερώτημα 6 του 1ου Ερωτηματολογίου,[115] ότι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου θεωρούν τη **Γεωμετρία (64.70%)** ως το μάθημα που χρειάζεται περισσότερο την διαισθητική σκέψη και ακολουθούν οι **Πιθανότητες (19.60%)** και ο **Διαφορικός Λογισμός (11.76%)**.

Στην Γ΄ Λυκείου οι μαθητές διδάσκονται Διαφορικό Λογισμό και Πιθανότητες. Γι' αυτό το λόγο τα ερωτήματα τέθηκαν από αυτά τα κεφάλαια, ώστε να δούμε στην πράξη κατά πόσο τους βοηθάει ή τους παραπλανεί η διαίσθηση, στην οποία και οι ίδιοι δίνουν αυξημένο ρόλο σε σχέση με αυτά τα μαθήματα μετά τη Γεωμετρία, η οποία έχει όπως είπαμε με μεγάλη διαφορά την πρωτοκαθεδρία.

Τα ερωτήματα είναι επιλεγμένα από αυτά που συνήθως αναφέρονται στην βιβλιογραφία και συζητήθηκαν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, με την έννοια ότι δημιουργούν συγχύσεις ανάμεσα στη διαισθητική και τη λογική σκέψη.

Στοιχεία για την έρευνα στη Γ΄ Λυκείου.

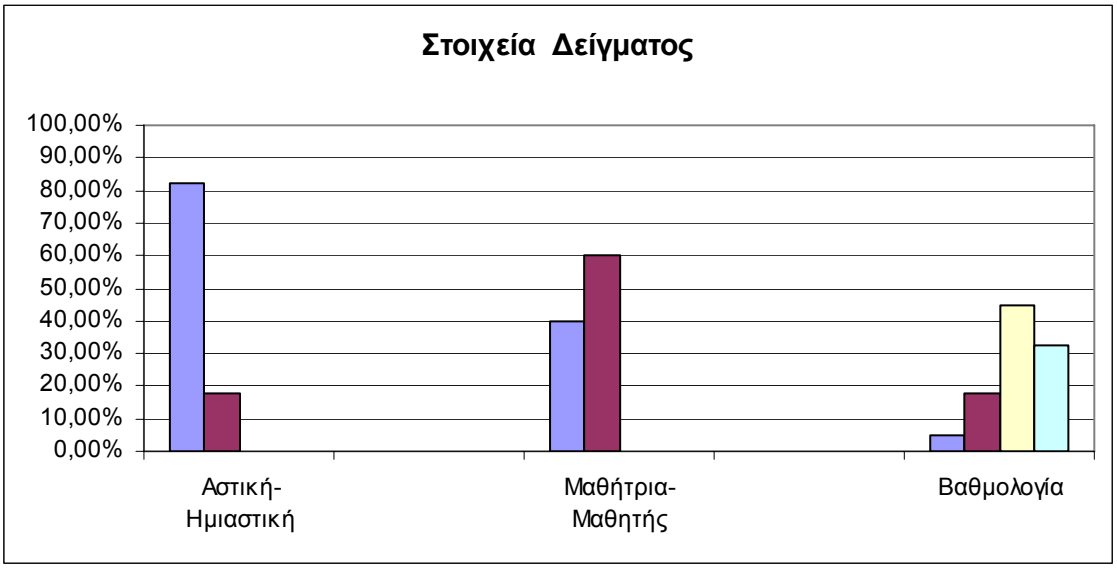
[115] Αφορούσε μόνο τους μαθητές της Γ΄Λυκείου.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ 7-8-9-10 - ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

ΠΕΡΙΟΧΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΜΗ ΑΣΤΙΚΗ	7	17,5	17,5	17,5
	ΑΣΤΙΚΗ	33	82,5	82,5	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

ΙΔΙΟΤΗΤΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΜΑΘΗΤΡΙΑ	16	40,0	40,0	40,0
	ΜΑΘΗΤΗΣ	24	60,0	60,0	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

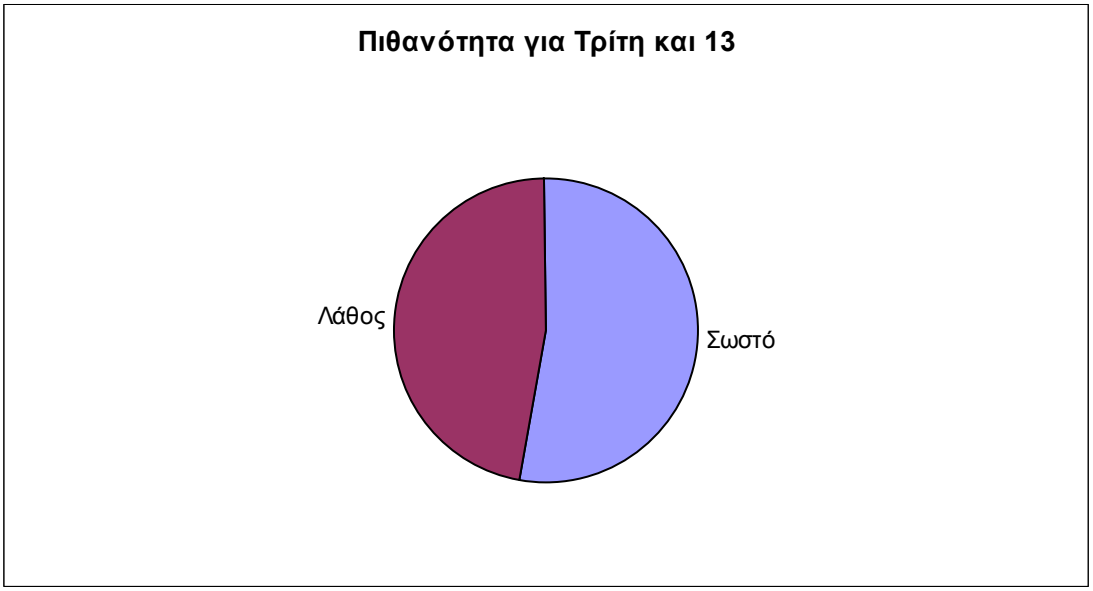
ΒΑΘΜΟΣ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	**10-12**	2	5,0	5,0	5,0
	13-15	7	17,5	17,5	22,5
	16-18	18	45,0	45,0	67,5
	19-20	13	32,5	32,5	100,0
	Total	40	100,0	100,0	



Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ερώτηση 1

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7_ΕΡΩΤΗΣΗ_1 Πιθανότητα για Τρίτη και 13					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	19	47,5	47,5	47,5
	ΣΩΣΤΗ	21	52,5	52,5	100,0
	Total	40	100,0	100,0	



Το **πρώτο ερώτημα** αφορά μια εφαρμογή στον Κλασικό Ορισμό της Πιθανότητας.

Η αποτυχία, όπως βλέπουμε, ήταν μεγάλη σε ποσοστό 47.5%.
Ίσως οφείλεται στο ότι δεν διδάσκονται, όπως πριν λίγα χρόνια, Συνδυαστική. Παρ' όλο που δεν χρειάζεται στο συγκεκριμένο ερώτημα, οξύνει τη σκέψη στην εύρεση των δυνατών και ευνοϊκών περιπτώσεων. Μπορεί επίσης το ότι έχουν ελαχιστοποιηθεί παράλληλα και τα αντίστοιχα προβλήματα στη διδακτέα ύλη να είναι μια εξήγηση.

Ερώτηση 2

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7_ ΕΡΩΤΗΣΗ _2 Πιθανότητες- Γεννήσεις					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	35	87,5	87,5	87,5
	ΣΩΣΤΗ	5	12,5	12,5	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

Το **δεύτερο ερώτημα** σχετίζεται επίσης με τις Πιθανότητες και τη Στατιστική. Για αυτό το ερώτημα (2 του 7ου ερωτηματολογίου) ο E. Fischbein αναφέρει[116] ότι σε 95 ερωτηθέντες 21 (22,1%) απάντησαν το μεγαλύτερο μαιευτήριο, 21 (22,1%) το μικρότερο και 53 (55,8%) περίπου το ίδιο με την απόκλιση του 5%. Η σωστή απάντηση είναι το μικρότερο γιατί ένα μεγάλο δείγμα είναι λιγότερο πιθανό να αποκλίνει από την αναμενόμενη τιμή που είναι το 50% απ' ότι το μικρό δείγμα. Ή επίσης μπορεί να πει κανείς ότι σε ένα μικρότερο δείγμα το ποσοστό μεταβάλλεται σε μεγαλύτερο βαθμό με μια μικρή απόλυτη μεταβολή.

[116] E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics.*

Οι γνώσεις με τις οποίες μπορούν να κρίνουν οι μαθητές τις απαντήσεις στο ερώτημα αυτό, διδάσκονται σε δύο ενότητες στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής, Γενικής Παιδείας, της Γ΄ Λυκείου.

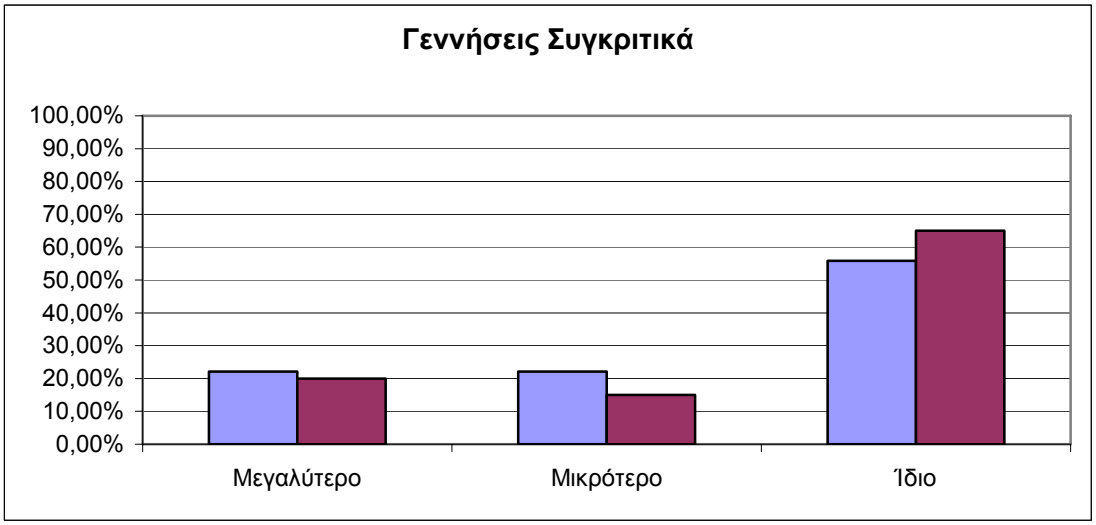
Στις Πιθανότητες στην παράγραφο για το *Νόμο των μεγάλων αριθμών ή την Στατιστική ομαλότητα,* σελ. 147-148, όπου αναφέρει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το δείγμα τόσο περισσότερο η σχετική συχνότητα, η οποία στην περίπτωση αυτή ταυτίζεται με την πιθανότητα, συγκλίνει στην αναμενόμενη τιμή, δηλαδή στην περίπτωση που εξετάζουμε στο 50%.

Στην Στατιστική στην παράγραφο που αναφέρεται στον Συντελεστή Μεταβολής (CV), σελ. 96, όπου υπάρχουν και αντίστοιχα παραδείγματα για τη μεταβολή του βάρους βαρύτερων ή ελαφρύτερων μαθητών ή για τις μεταβολές του μισθού σε διαφορετικές νομισματικές μονάδες. Αναφέρει λ.χ. ότι σε μικρότερο μέσο βάρος έχουμε μεγαλύτερη μεταβλητότητα, δηλαδή μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή για την ίδια απόλυτη αύξηση.

Δοκιμάσαμε σε ποιο βαθμό θα επαληθευθούν αυτά τα ποσοστά στο δείγμα από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου.

Το αποτέλεσμα της έρευνας έδειξε αλλαγές προς πιο αρνητικά ποσοστά όσον αφορά τη σωστή απάντηση (το μικρότερο):

Το μεγαλύτερο 20% , το μικρότερο15% και το ίδιο 65% αντίστοιχα.

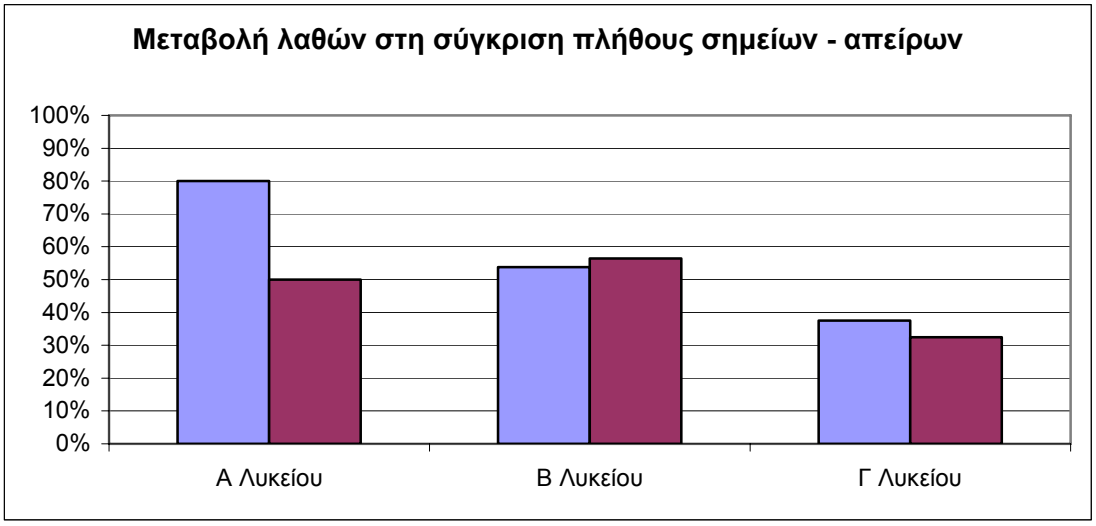


Ερώτηση 3

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7_ ΕΡΩΤΗΣΗ _3 Σύγκριση πλήθους σημείων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	15	37,5	37,5	37,5
	ΣΩΣΤΗ	25	62,5	62,5	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

Το **τρίτο ερώτημα** είναι ίδιο με αυτά που υπήρχαν σε Α΄ και Β΄ Λυκείου για σύγκριση μη πεπερασμένων συνόλων με 1-1 αντιστοιχία, ώστε να δούμε τις διαφορές στις τρεις τάξεις.

Οι λαθεμένες απαντήσεις στο $7^{ο}$ ήταν 37,5% ενώ στο $8^{ο}$, $9^{ο}$ & $10^{ο}$ ήταν 32,5%. **Η διαίσθηση βοήθησε όπως βλέπουμε στη μεταβολή κατά το 13% αυτών που είχαν απαντήσει λάθος. Ενώ στην Α΄ Λυκείου το 37,5% (και έπεσε από 80% σε 50%) πράγμα το οποίο δεν συνέβη στην Β΄ Λυκείου**.



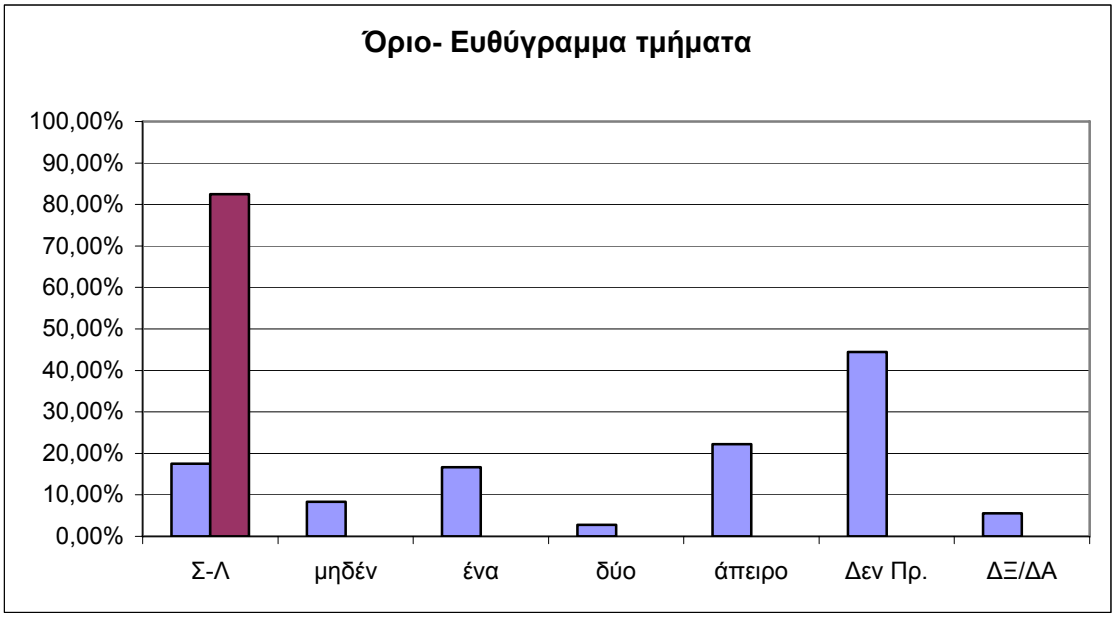
Το ότι δεν συνέβη καμία μεταβολή στη Β΄ Λυκείου ενώ συνέβη και στην Α΄ και στη Γ΄, είναι κατ' αρχήν περίεργο και η μόνη εξήγηση που θα μπορούσα να δώσω είναι ότι οι ενότητες οι οποίες διδάσκονται (Τριγωνομετρία και Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, Πολυώνυμα, Αριθμητικές και Γεωμετρικές Πρόοδοι, Εκθετικές Συναρτήσεις, Λογάριθμοι και Λογαριθμικές συναρτήσεις) είναι, όπως διδάσκονται, πιο πολύ Αλγεβρικά προσανατολισμένες. Παρ' όλο που στην Β΄ διδάσκονται τις συναρτήσεις 1-1 από την άλλη έχει συρρικνωθεί το κεφάλαιο των ακολουθιών και έχουν αφαιρεθεί η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος απείρων όρων.

Ερωτήσεις 4 και 5

Τα **ερωτήματα 4 και 5** είναι δυο ερωτήματα ορίων με διαισθητικές δυσκολίες τα οποία εξετάζονται αυτοτελώς (το 5 το αναφέρει ο Ε. Fischbein και συζητήθηκε στο μάθημα της Διδακτικής του Απειροστικού, Θ. Ζαχαριάδης).
Τα αποτελέσματα δικαιώνουν πλήρως αυτή τη διαισθητική σύγχυση της υπόθεσης. Τα ποσοστά των λάθος απαντήσεων ήταν πολύ υψηλά.
Στην ερώτηση 4 ήταν 82.6% και στην ερώτηση 5 η οποία ήταν ίσως πιο δύσκολη, 91.3%. Στην ερώτηση 5 πρέπει να σημειώσουμε ότι πολλοί θεώρησαν ότι πρέπει να αθροίζουν τις περιμέτρους των τριγώνων και με τα προηγούμενα, γι' αυτό έβαλαν το όριο άπειρο.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7_ ΕΡΩΤΗΣΗ _4 Όριο- ευθύγραμμα τμήματα					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	33	82,5	82,5	82,5
	ΣΩΣΤΗ	7	17,5	17,5	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

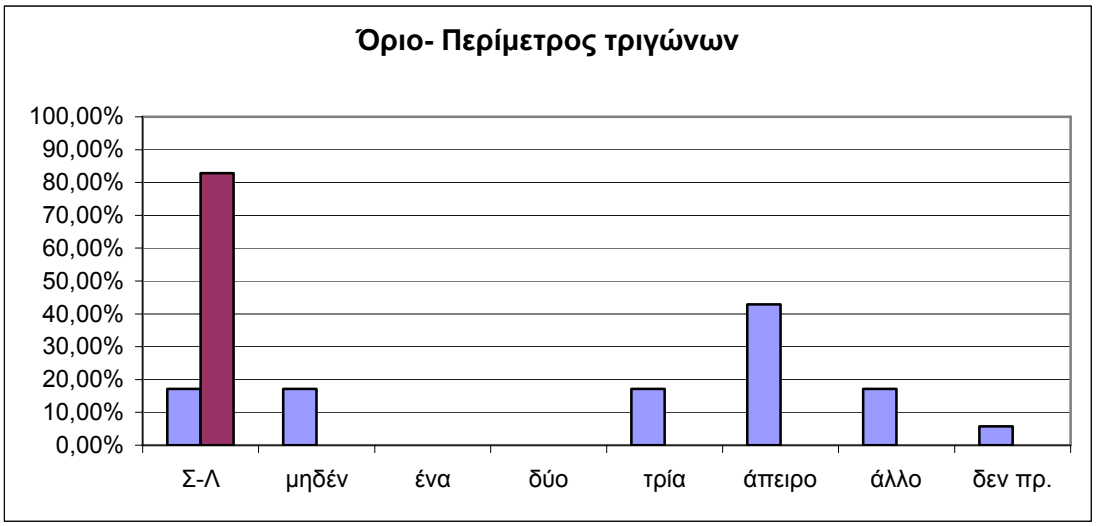
Στην ερώτηση 4 οι απαντήσεις ήταν κατά σειρά ποσοστού: …



ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7_ ΕΡΩΤΗΣΗ _5 Όριο- άθρ. περιμέτρων τριγώνων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	32	80,0	80,0	80,0
	ΣΩΣΤΗ	8	20,0	20,0	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

Στην ερώτηση 5 οι απαντήσεις ήταν κατά σειρά ποσοστού:

17,4%, 0%, 0%, 17,4%, 42,86%, 17,4%, 5,72%.



Είναι περίεργο γιατί το 0 συγκεντρώνει πολύ μεγαλύτερο ποσοστό από το 1. Ίσως δεν υπολόγιζαν τη βάση του τριγώνου.

Το μεγάλο ποσοστό που συγκέντρωσε το άπειρο εξηγείται από το ότι πολλοί μαθητές / τριες άθροιζαν όλη τη σειρά των τριγώνων, σύμφωνα με κάποιες εξηγήσεις που πήρα.

4. Πείραμα

Η αρχική ιδέα για αυτό το τριπλό πείραμα δόθηκε από παράδειγμα που αναφέρεται στο βιβλίο του E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics.*

Το πείραμα στον Απειροστικό Λογισμό έγινε ως εξής:

Το πρόβλημα όπως φαίνεται και στα ερωτηματολόγια ήταν να συγκριθούν τα εμβαδά δυο χωρίων. Το πρώτο ($\mathbf{\Omega_1}$) ανάμεσα σε δύο οριζόντιες ευθείες και το δεύτερο ($\mathbf{\Omega_2}$) ανάμεσα σε δυο καμπύλες, με κατακόρυφη απόσταση ίδια (και ίση με 1), στο ίδιο διάστημα [0,2π].

Σε τριάδες από μαθητές της Γ΄ Λυκείου Θετικής ή Τεχνολογικής κατεύθυνσης δόθηκε να συμπληρώσουν το 7^{ο} Ερωτηματολόγιο, όπου υπήρχαν μόνο τα δύο χωρία, οι δυο *ταινίες,* σε λευκό φόντο όπως φαίνεται στο ερωτηματολόγιο. Μετά την συγκέντρωση του 7^{ου} ερωτηματολογίου στον έναν από τους τρεις μαθητές δόθηκε να συμπληρώσει το 8^{ο} στον άλλο το 9^{ο} και στον τρίτο το 10^{ο} .
Στο 8^{ο} υπήρχαν οι ίδιες *ταινίες* σε φόντο όμως με μικρά ορθογώνια (μιλιμετρέ) όπου αν παρατηρούσε εποπτικά μπορούσε να καταλάβει ότι είναι ίσα.
Στο 9^{ο} δόθηκαν όλες οι συναρτήσεις χωρίς τις γραφικές παραστάσεις και η σύγκριση μπορούσε να γίνει με τα ολοκληρώματα.
Στο 10^{ο} υπήρχαν και οι συναρτήσεις και οι γραφικές τους παραστάσεις, αλλά χωρίς το φόντο.

Ο στόχος ήταν να γίνει σύγκριση των απαντήσεων στο 7^{ο} με τις αντίστοιχες απαντήσεις σε καθένα από τα 8^{ο} , 9^{ο} και 10^{ο}, τόσο συνολικά όσο και σε σχέση με το τι απάντησαν στο επόμενο ερωτηματολόγιο, (8^{ο}, 9^{ο}, 10^{ο}), αυτοί οι οποίοι στο 7^{ο} είχαν απαντήσει λαθεμένα.
Να εξεταστεί, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η διαισθητική και λογική σκέψη των μαθητών και τα αποτελέσματά της ως προς τις σωστές ή λαθεμένες απαντήσεις.

Η υπόθεση ήταν ότι οι λάθος απαντήσεις, σε σχέση με το 7°, θα ήταν λιγότερες στο 8°, ακόμη λιγότερες στο 9° και ακόμη λιγότερες στο 10°. Δηλαδή η διάταξη των ποσοστών των λαθών: $\mathbf{7^o > 8^o > 9^o > 10^o}$.

Γιατί το λόγο ότι:

-Στο 8° είχαν εποπτική υποβοήθηση από το τετραγωνισμένο φόντο, αν το παρατηρούσαν.

-Στο 9° είχαν μόνο τις συναρτήσεις και μπορούσαν, όπως κατευθύνονταν χωρίς τις γραφικές παραστάσεις, να υπολογίσουν το ολοκλήρωμα σύμφωνα με τον τρόπο που έχουν συνηθίσει από τις ασκήσεις.

-Στο 10° υπήρχαν και οι συναρτήσεις και οι γραφικές τους παραστάσεις, άρα λογικά και διαισθητικά είχαν μεγαλύτερη υποβοήθηση και από το 9°.

Στοιχεία.

Το πείραμα έγινε την Άνοιξη του 2005, σε 40 μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ τάξης του Λυκείου, Θετικής ή Τεχνολογικής κατεύθυνσης όπως είπαμε.

Το δείγμα ήταν πανελλαδικό, οι 7 ήταν από επαρχίες και οι 33 από το Λεκανοπέδιο της Αττικής (Αθήνα, Πειραιά κλπ).

Έγινε ταυτόχρονα και με τα ίδια ερωτηματολόγια που αναφέραμε προηγουμένως και συνεπώς ισχύουν τα ίδια στοιχεία που ήδη περιγράψαμε.

Διακινήθηκαν και αυτά επίσης μέσω των καθηγητών τους, των μαθηματικών.

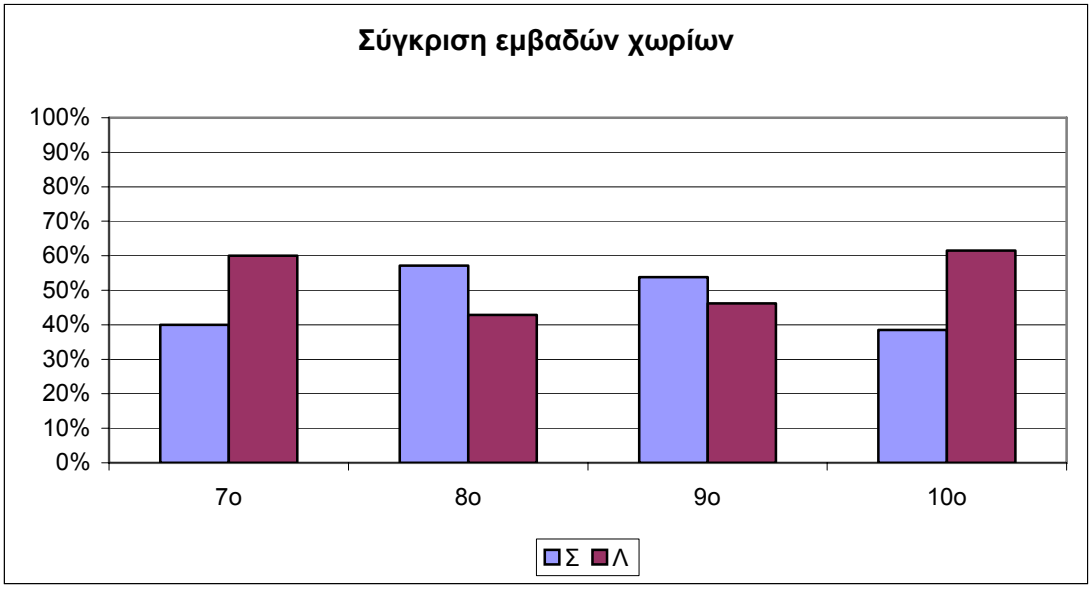
Τα αποτελέσματα

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7_ ΕΡΩΤΗΣΗ _6 Εμβαδά χωρίων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	24	60,0	60,0	60,0
	ΣΩΣΤΗ	16	40,0	40,0	100,0
	Total	40	100,0	100,0	

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 8_ ΕΡΩΤΗΣΗ _1 Εμβαδά χωρίων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	6	15,0	42,9	42,9
	ΣΩΣΤΗ	8	20,0	57,1	100,0
	Total	14	35,0	100,0	
Missing	System	26	65,0		
Total		40	100,0		

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 9_ ΕΡΩΤΗΣΗ _1 Εμβαδά χωρίων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	6	15,0	46,2	46,2
	ΣΩΣΤΗ	7	17,5	53,8	100,0
	Total	13	32,5	100,0	
Missing	System	27	67,5		
Total		40	100,0		

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 10_ ΕΡΩΤΗΣΗ _1 Εμβαδά χωρίων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	8	20,0	61,5	61,5
	ΣΩΣΤΗ	5	12,5	38,5	100,0
	Total	13	32,5	100,0	
Missing	System	27	67,5		
Total		40	100,0		



Σωστές – Λάθος απαντήσεις σε κάθε ερωτηματολόγιο.

Όπως βλέπουμε για το σύνολο των μαθητών που συμπλήρωσαν το αρχικό ερωτηματολόγιο 7° και για αυτούς, εκ των αρχικών, που συμπλήρωσαν το 8° ή το 9° ή το 10° τα ποσοστά λάθους-σωστού για κάθε ερωτηματολόγιο ξεχωριστά είναι συγκεντρωμένα στον επόμενο πίνακα.

Ποσοστά επί του συνόλου των απαντήσεων <u>κάθε</u> ερωτηματολογίου:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**
ΛΑΘΟΣ	60%	42,9%	46,2%	61,5%
ΣΩΣΤΗ	40%	57,1%	53,8%	38,5%

Ο πίνακας αυτός όμως δεν αποδίδει ακριβώς την κατάσταση παρά μόνο εν μέρει.

Αν δούμε τις διασταυρώσεις των ερωτηματολογίων και τις συσχετίσεις των απαντήσεων των ίδιων μαθητών στο 7° – 8° στο 7° – 9° και στο 7° – 10° τα αποτελέσματα γίνονται πιο σαφή.

Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται οι διασταυρώσεις, οι συσχετίσεις και τα x^2 tests με βάση το τι απάντησαν στο 8° στο 9° και στο 10° αντίστοιχα αυτοί που είχαν απαντήσει Λάθος ή Σωστό στο 7° .

Crosstabs

Crosstab					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ			ΕΡ/ΓΙΟ 8_ΕΡ.1		Total
			ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΗ	
ΕΡ/ΓΙΟ 7_ΕΡ._6	ΛΑΘΟΣ	Count	6	3	9
		% of Total	42,9%	21,4%	64,3%
	ΣΩΣΤΗ	Count		5	5
		% of Total		35,7%	35,7%
Total		Count	6	8	14
		% of Total	42,9%	57,1%	100,0%

Chi-Square Tests			
	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	5,833(b)	1	,016
a Computed only for a 2x2 table			
b 3 cells (75,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,14.			

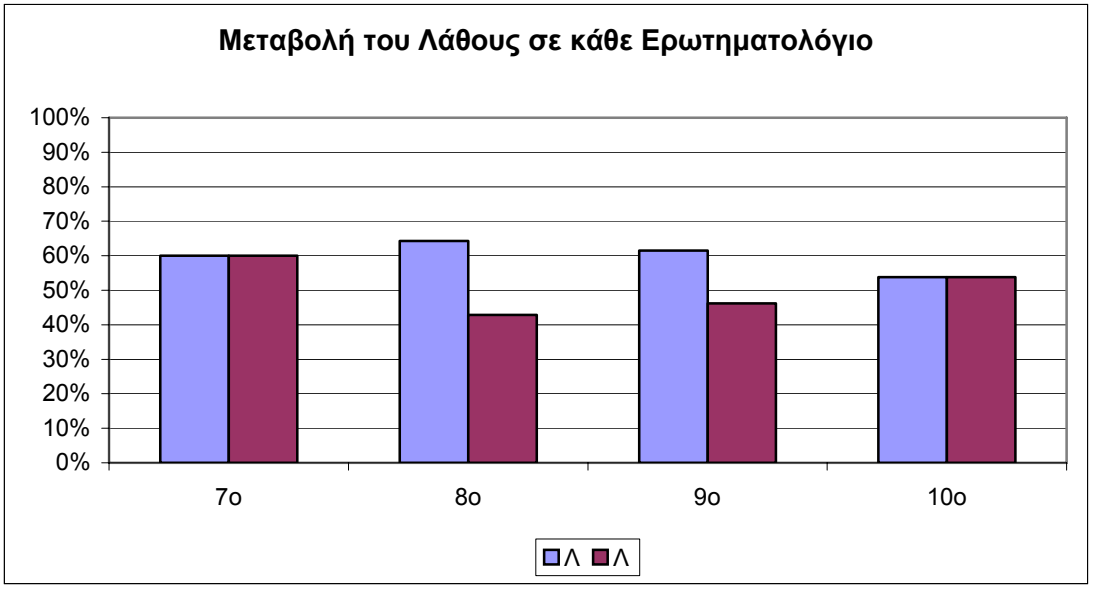
Crosstab					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ			ΕΡ/ΓΙΟ 9_ΕΡ._1		Total
			ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΗ	
ΕΡ/ΓΙΟ 7_ΕΡ._6	ΛΑΘΟΣ	Count	6	2	8
		% of Total	46,2%	15,4%	61,5%
	ΣΩΣΤΗ	Count		5	5
		% of Total		38,5%	38,5%
Total		Count	6	7	13
		% of Total	46,2%	53,8%	100,0%

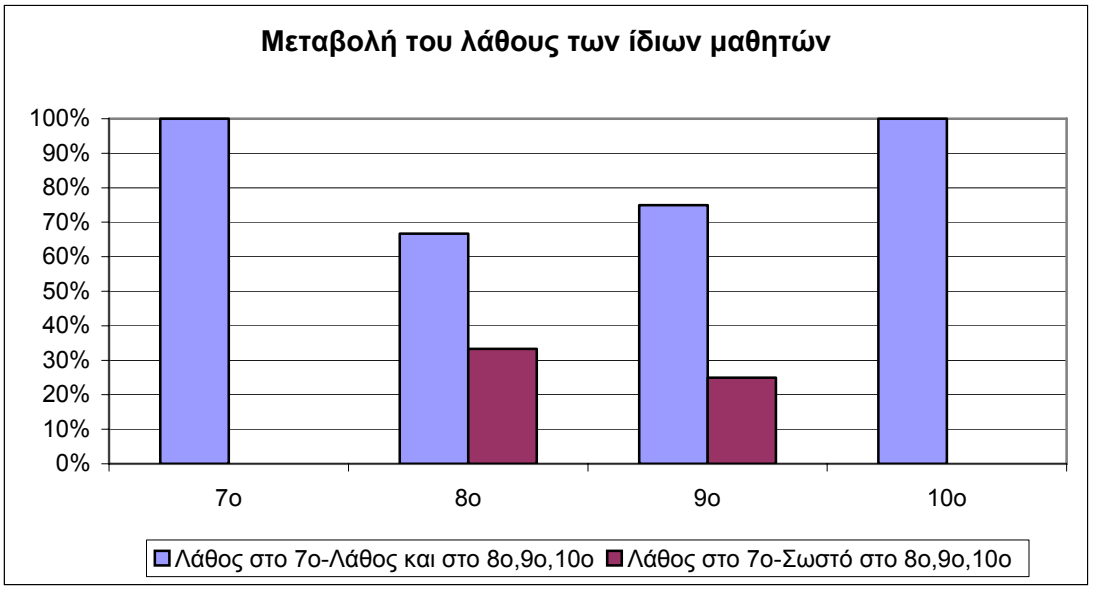
Chi-Square Tests			
	Value	**df**	**Asymp. Sig. (2-sided)**
Pearson Chi-Square	6,964(b)	1	,008
a Computed only for a 2x2 table			
b 4 cells (100,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,31.			

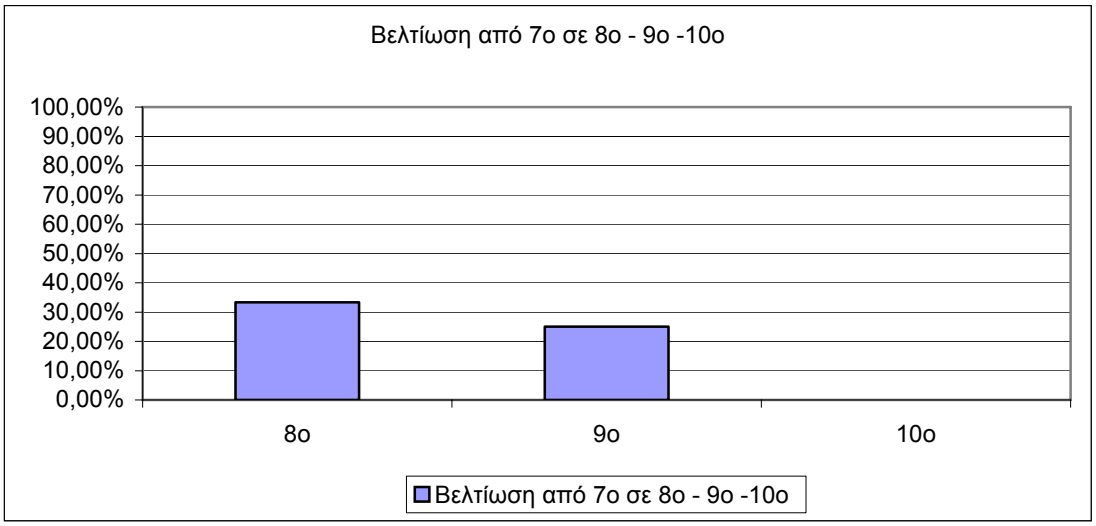
Crosstab					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ			**ΕΡ/ΓΙΟ 10_ΕΡ. 1**		**Total**
			ΛΑΘΟΣ	**ΣΩΣΤΗ**	
ΕΡ/ΓΙΟ 7_ΕΡ._6	**ΛΑΘΟΣ**	**Count**	7		7
		% of Total	53,8%		53,8%
	ΣΩΣΤΗ	**Count**	1	5	6
		% of Total	7,7%	38,5%	46,2%
Total		**Count**	8	5	13
		% of Total	61,5%	38,5%	100,0%

Chi-Square Tests			
	Value	**df**	**Asymp. Sig. (2-sided)**
Pearson Chi-Square	9,479(b)	1	,002
a Computed only for a 2x2 table			
b 4 cells (100,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,31.			

Μείωση του Λάθους σε κάθε ερωτηματολόγιο







Παρατηρούμε ότι μεγαλύτερη βελτίωση σε σχέση με τις λαθεμένες και σωστές απαντήσεις είναι ανάμεσα σε αυτούς τους μαθητές που απάντησαν στο 7° και στο 8° ερωτηματολόγιο.
Ακολουθούν αυτοί που απάντησαν στο 7° και στο 9° ερωτηματολόγιο.
Και τέλος δεν παρουσιάζουν σχεδόν καμία μεταβολή αυτοί που απάντησαν στο 7° και 10° ερωτηματολόγιο.

Συμπέρασμα:

Η κατάταξη που είχαμε υποθέσει <u>με βάση τις περισσότερες λάθος απαντήσεις</u> ήταν:

$$7^o > 8^o > 9^o > 10^o$$

Η κατάταξη που πρόκυψε μόνο από τα συγκριτικά ποσοστά σωστών και λαθεμένων απαντήσεων όπως φαίνεται από τον πίνακα της σελ. 165 είναι:

$$10^o > 7^o > 9^o > 8^o$$

Η σειρά που πρόκυψε από το πείραμα αυτό είναι:

$$7^o = 10^o > 9^o > 8^o$$

Οι συσχετίσεις έδειξαν ότι οι μεταβολές είναι σχεδόν μηδενικές όπως είπαμε για το 10° ερωτηματολόγιο, περισσότερο σημαντικές για το 9° και ακόμη περισσότερο για το 8° .

Μια αρνητική αλλαγή στο 10° δείχνει ίσως μια ταλάντευση, έναν σκεπτικισμό που συμβαίνει μερικές φορές κατά τη συμπλήρωση τέτοιων ερωτηματολογίων και η μεταβολή μάλλον πρέπει να θεωρηθεί ασήμαντη.

Οι βελτιώσεις στο 8° οφείλονται καθαρά στην εποπτική διευκόλυνση που είχαν, όπως αναμενόταν από την υπόθεση.

Οι βελτιώσεις στο 9° οφείλονται στο ότι υπολόγισαν το ολοκλήρωμα όπως επίσης αναμενόταν από την υπόθεση.

Η αμετάβλητη κατάσταση στο 10° μπορεί να έχει την ακόλουθη εξήγηση:
Βλέποντας οι μαθητές πάλι το σχήμα που είχαν δει στο 7° ερωτηματολόγιο
Έκαναν το ίδιο συνειρμό και έδωσαν την ίδια απάντηση χωρίς καθόλου να αξιοποιήσουν τις συναρτήσεις που τους δόθηκαν, όπως σε αντιδιαστολή έκαναν οι μαθητές που απάντησαν στο 9° που δεν είχαν κανένα σχήμα.

Η υπόθεση όσον αφορά την γενική βελτίωση που θα παρουσιαζόταν ανάμεσα στο 7° ερωτηματολόγιο, το οποίο παραπλανούσε τη διαισθητική σκέψη και τα 8°, 9° και 10° επιβεβαιώθηκε.
Όσον αφορά όμως την κατάταξη με βάση τα ποσοστά λαθών δεν επιβεβαιώθηκε.

Ερωτηματολόγιο 7ο ερώτηση 3 με Ερωτ/γιο 8ο, 9ο, 10ο, ερώτηση 2.

Τις απαντήσεις σε αυτό το ερωτηματολόγιο της Γ΄ Λυκείου, συγκριτικά μα τις αντίστοιχες της Α΄ και της Β΄ Λυκείου τις αναφέραμε και στην αρχή, στην Ερώτηση 3.
Από τα αναλυτικά στοιχεία φαίνεται ότι υπάρχει μια βελτίωση η οποία όμως δεν είναι στατιστικά σημαντική όπως στην (Α΄ Λυκείου). Εμφανίζεται δηλαδή μείωση διαισθητικής σκέψης χωρίς να υπάρχει αντίστοιχη αύξηση της λογικής.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 8_ ΕΡΩΤΗΣΗ _2 Σύγκριση πλήθους σημείων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	6	15,0	42,9	42,9
	ΣΩΣΤΗ	8	20,0	57,1	100,0
	Total	14	35,0	100,0	
Missing	System	26	65,0		
Total		40	100,0		

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 9_ ΕΡΩΤΗΣΗ _2 Σύγκριση πλήθους σημείων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	3	7,5	23,1	23,1
	ΣΩΣΤΗ	10	25,0	76,9	100,0
	Total	13	32,5	100,0	
Missing	System	27	67,5		
Total		40	100,0		

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 10_ ΕΡΩΤΗΣΗ 2 Σύγκριση πλήθους σημείων					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΛΑΘΟΣ	4	10,0	30,8	30,8
	ΣΩΣΤΗ	9	22,5	69,2	100,0
	Total	13	32,5	100,0	
Missing	System	27	67,5		
Total		40	100,0		

ΕΡΩΤΗΜ/ΛΟΓΙΟ 7_ΕΡΩΤ._3 * ΜΕ ΤΗ 2 ΑΠΟ ΤΟ 8, 9 10 Crosstabulation					
ΑΠΑΝΤΗΣΗ			**Η 2 ΑΠΟ ΤΟ 8, 9, 10**		**Total**
			ΟΧΙ	**ΝΑΙ**	
Ε7_ΕΡ_3	ΟΧΙ	Count	12	3	15
		% of Total	30,0%	7,5%	37,5%
	ΝΑΙ	Count	1	24	25
		% of Total	2,5%	60,0%	62,5%
Total		Count	13	27	40
		% of Total	32,5%	67,5%	100,0%

Chi-Square Tests			
	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	24,684(b)	1	,000
a Computed only for a 2x2 table			
b 1 cells (25,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,88.			

5. Σύνοψη των αποτελεσμάτων της έρευνας. Τελικά συμπεράσματα.

Τα πάντα εν τέλει ανάγνωση επιδέχονται.
Οδυσσέας Ελύτης

Σε σχέση με τους τέσσερις γενικούς στόχους της έρευνας που είχαμε θέσει στην αρχή του Δεύτερου Μέρους θα πρέπει να συμπεράνουμε τα εξής:

1. Στις **πεποιθήσεις** των μαθητών έχει σαφή προτεραιότητα η λογική σκέψη έναντι της διαισθητικής σκέψης όσον αφορά στα μαθηματικά.
   Οι μαθητές δίνουν αυξημένη βαρύτητα στην εμπειρία σε σχέση με τη φαντασία και τη διαίσθηση.
   Στην προσωπική τους **στάση** δίνουν ακόμη περισσότερη βαρύτητα στην εμπειρία.
   Χρησιμοποιούν αρκετά τη διαίσθησή τους αλλά με σκεπτικισμό, ταυτόχρονα, ως προς την έκταση και το βαθμό εμπιστοσύνης.

2. Η διαίσθησή τους, βοηθάει τους μαθητές να απαντήσουν σε ένα πρόβλημα με μεγαλύτερη επιτυχία στις περιπτώσεις που έχουν καλύτερη εποπτεία ή στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το πρόβλημα παρουσιάζεται με τον τρόπο που έχουν συνηθίσει να το αντιμετωπίζουν.
   Στις περιπτώσεις για τις οποίες δεν υπάρχουν η ανάλογη εμπειρία και οι ανάλογες γνώσεις, είτε στους ίδιους είτε στην ύλη της βαθμίδας εκπαίδευσής τους, η διαίσθησή τους δεν επαρκεί και οι διαφορές δεν είναι στατιστικά σημαντικές.
   Στις περιπτώσεις εκείνες για τις οποίες είναι γνωστό από τη βιβλιογραφία ότι η διαίσθηση παραπλανεί τα αποτελέσματα και στο δείγμα μας, το επιβεβαίωσαν.
3. Η πρώτη διαισθητική απάντηση των μαθητών δεν επαρκεί, όπως επίσης έδειξαν τα αποτελέσματα και στις περιπτώσεις στις οποίες

έχουν τις γνώσεις για να απαντήσουν σύντομα και με λογική σκέψη. Αυτό επιβεβαιώνεται από τα ποσοστά του λάθους των μαθητών σε όλα τα επίπεδα βαθμολογίας, πράγμα που δείχνει ότι δεν είναι θέμα επιπέδου του μαθητή αλλά της συγκρότησης της μαθηματικής σκέψης του. Μάλιστα στο δείγμα φάνηκε ότι οι μαθητές με μεσαίες βαθμολογίες αξιοποιούσαν με μεγαλύτερη επιτυχία την διαίσθησή τους. Φάνηκε επίσης ότι στην Α΄ Λυκείου διατηρούν πιο πολλά διαισθητικά στοιχεία στη σκέψη τους οι μαθητές τα οποία αξιοποιούν όταν δεν έχουν υποκατασταθεί από την ανάλογη γνώση και λογική σκέψη.

4. Οι καθηγητές με βάση τα αποτελέσματα στο δείγμα μας δείχνουν να **βιώνουν μια αντίφαση,** της οποίας είναι και μέρος.

   Μια αντίφαση περιεχομένου, σκοπού και μέσων, στόχου και τρόπων, της μαθηματικής εκπαίδευσης.

   Δείχνουν επίσης να έχουν μια ***πρωθύστερη*** επιδίωξη σε σχέση με τους μαθητές τους.

   Θεωρούν ότι τα προγράμματα και τα βιβλία προωθούν περισσότερο τη λογική σκέψη σε σχέση με τη διαισθητική, χωρίς να υποβαθμίζουν οι ίδιοι τη λογική σκέψη, φυσικά.

   Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, με τους όποιους νεωτερισμούς ή ισορροπίες, παρακάμπτονται από τους εκπαιδευτικούς και δεν συνιστούν γι' αυτούς μια συγκροτημένη διδακτική άποψη για τα μαθηματικά στο Λύκειο αλλά περισσότερο επεξηγήσεις για τη διδασκαλία τους.

   Δεν ακολουθούνται είτε **λόγω πληθώρας ύλης** είτε γιατί οι διδακτικές ενότητες θεωρούνται καταλληλότερες για ασκησιολογία και λιγότερο για τη λογική σκέψη και για την ανάπτυξη της διαίσθησης.

   Δηλαδή φαίνεται ότι η σχολική διδακτική πρακτική αντιστρατεύεται τις εισαγωγικές οδηγίες.

   Εκτιμούν ότι έχουν αρκετό βαθμό διδακτικής ελευθερίας.

   Έχουν τη γνώμη ότι προτεραιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης πρέπει να είναι η προώθηση της κριτικής σκέψης με λογική, διορατικότητα, φαντασία, διαίσθηση,.

Η **αντίφαση**, η οποία αναδεικνύεται, είναι ανάμεσα στα δικά τους πρότυπα, τις εισαγωγικές οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και την υπάρχουσα μαθηματική εκπαιδευτική πραγματικότητα.
Είναι σαν να βιώνουν ότι, σε σχέση με τα μαθηματικά, θα 'πρεπε και μπορούν, σε αρκετό βαθμό, να κάνουν άλλα και άλλα στην πράξη κάνουν. Ότι αυτό που θάθελαν να κάνουν είναι λιγότερη ύλη με ενότητες και κυρίως τρόπο, που να αναπτύσσει πιο ολόπλευρα τη σκέψη και τη διαίσθηση. Το όλο πλαίσιο λοιπόν, εμφανίζεται αντιφατικό ως προς τους σκοπούς και τα αποτελέσματα. Με την έννοια ότι δεν γέρνει απόλυτα μονομερώς προς τη μια ή την άλλη πλευρά που εξετάζουμε στην έρευνα και θεωρητικά και πρακτικά, αλλά με την έννοια ότι η ελληνική μαθηματική εκπαίδευση δεν αναπτύσσει εν τέλει *σωστά* και σε *συνδυασμό* τη λογική και τη διαισθητική σκέψη.

Στα τελικά συμπεράσματα πρέπει να υπογραμμίσουμε τα παρακάτω.

Υπάρχει ένα σημαντικό στοιχείο που αναδείχτηκε από την έρευνα το οποίο ενώ θα 'πρεπε να είναι αναμενόμενο με βάση το θεωρητικό πλαίσιο του πρώτου μέρους δεν ήταν στις γενικές υποθέσεις, τουλάχιστον με τη διάσταση με την οποία προέκυψε.
Στη συσχέτιση των πεποιθήσεων καθηγητών- μαθητών για τα μαθηματικά υπήρχε ως υπόθεση *η πιθανή μη ταύτιση απόψεων*.
Δεν τέθηκε όμως το ερώτημα, ούτε έγινε κάποια υπόθεση, γιατί να υπάρχει και που εδράζεται η ενδεχόμενη μη ταύτιση απόψεων.

Το ανέδειξαν όμως οι μαθητές και υπογραμμίζει τη **διδακτική διάσταση** που επίσης σημειώνεται με έμφαση στο πρώτο μέρος.

Στο Πρώτο Μέρος αναφέρθηκε ότι οι απόψεις συγκλίνουν στο ότι η διαισθητική σκέψη είναι ***αποθηκευμένη εμπειρία.*** Είναι αποτέλεσμα μικρότερης ή μεγαλύτερης ***ασυνείδητης προηγούμενης εργασίας***.
Εξετάζοντας τα στατιστικά αποτελέσματα, σε μια πρώτη ανάγνωση, ίσως να συμπεραίναμε ότι, υπάρχει διάσταση απόψεων των μαθητών σε σχέση με αυτές των καθηγητών τους ως προς την θεώρηση που

κάνουν για τα μαθηματικά και ως προς τα πρότυπά τους για τη μαθηματική εκπαίδευση και δραστηριότητα, λόγω διαφοράς γνώσεων.
Ότι οι καθηγητές τους ωριμότεροι σαφώς σε σχέση με τα μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση έθεσαν και σωστά, πιο ολοκληρωμένα τους στόχους της από τους μαθητές.
Όμως οι μαθητές λειτούργησαν στις απαντήσεις τους με μεγάλο **ρεαλισμό**.
Επανέφεραν το θέμα στη ρίζα του, στη φύση της διαισθητικής σκέψης και όχι μόνο στην αναγκαιότητα ανάπτυξής της.
Βρίσκονται στη φάση που **συσσωρεύουν** μαθηματική εμπειρία **για να αναπτύξουν** και φαντασία και διαίσθηση.
Αυτή τη διάσταση φανερώνουν τα αποτελέσματα και όχι απλώς μια άλλη ίσως άποψη.
Οι καθηγητές έχοντας αυτή την εμπειρία, σε σχέση με τους μαθητές, στοχεύουν στην ανάπτυξη της διαίσθησης θεωρώντας την *δεδομένη,* κάνοντας κατά κάποιο τρόπο μια αφαίρεση.

Αυτό το αποτέλεσμα ενισχύει και ένα άλλο παιδαγωγικό και **διδακτικό συμπέρασμα** του Πρώτου Μέρους.
Ότι η συνδυασμένη ανάπτυξη και της λογικής και της διαισθητικής σκέψης δεν μπορεί να γίνει με επίκληση της αξία τους αλλά κυρίως με το να τις βιώσουν οι μαθητές συγκεκριμένα μέσα από τα μαθηματικά, μέσα από αποδείξεις και προβλήματα.

Ότι **διδακτικός στόχος** των καθηγητών πρέπει να ’ναι και η παίδευση των μαθητών τους στον τρόπο αξιοποίησης της αποθηκευμένης εμπειρίας, στη ***συνειδητή*** υποβοήθηση της ανάπτυξης της μαθηματικής τους διαίσθησης.
Να βιώνουν τη μαθηματική εμπειρία και να αναστοχάζονται πάνω σ’ αυτή.

Επίλογος

Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶ-
τον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην· τί δέ μοι πλέον
ἔσται ταῦτα μαθόντι;"
Στοβαίος

μια πατούσα που σύναξε σοφία στην άμμο
ένας τζίτζικας που έπεισε χιλιάδες άλλους
η συνείδηση πάμφωτη σαν καλοκαίρι
Οδυσσέας Ελύτης Άξιον Εστί

Πολλά από τα παραπάνω συμπεράσματα ίσως ήταν αναμενόμενα.

Είτε γιατί έχουν προκύψει και από προηγούμενες έρευνες είτε γιατί οι υποθέσεις έχουν προκύψει από συσσωρευμένη εμπειρία των εκπαιδευτικών μαθηματικών που συζητήθηκαν και συζητιούνται στην διάρκεια των μαθημάτων και των σεμιναρίων.

Το μεγάλο ερώτημα βέβαια είναι γιατί ενώ έχουν επισημανθεί από καιρό, ενώ αναφέρονται εκτενώς στη βιβλιογραφία, παραμένουν στον ίδιο βαθμό ως προβλήματα.

Ίσως γιατί στα μεγάλα θέματα συνεχώς επανερχόμαστε.

Πρέπει γι' αυτό να τονίσουμε την επίπονη διαδικασία της λογικής σκέψης, της διαίσθησης και της εμπειρίας που απαιτείτε.

Ότι τα μαθηματικά δεν αφορούν εύκολες και αυθόρμητες ιδέες.

Να τονίσουμε το πήγαινε – έλα ανάμεσα στη διαίσθηση και τη λογική. Την αποδοχή ή την απόρριψή της κάθε πρώτης διαισθητικής σκέψης με κάποια κριτήρια που πρέπει πάντα να έχουμε και κυρίως αυτά.

Γιατί αν δεν είναι μέσα στην επαγγελματική τους απασχόληση, την άλγεβρα, την τριγωνομετρία, τις παραγώγους, τα θεωρήματα, οι μαθητές θα τα ξεχάσουν.

Το κύριο εφόδιο που θα έχει μείνει είναι ο τρόπος σκέψης, το *πως θα πρέπει να σκεφτώ*.

Αν κάποτε και σε μερικούς ανθρώπους τα μαθηματικά φαίνονται εύκολα, αυτό συμβαίνει πάντοτε *εκ των υστέρων*, αφού έχει προηγηθεί μια συνήθως αρκετά μεγάλη προσπάθεια.

Η μεγαλοφυΐα στα μαθηματικά, όπως και αλλού, είναι 5% έμπνευση και 95% ιδρώτας (Rogen Apery).

Είναι άλλωστε γνωστό από αρχαιοτάτων χρόνων ότι ***Βασιλική οδός***[*] για τα μαθηματικά δεν υπάρχει, σίγουρα όμως ***το ταξίδι αξίζει τον κόπο***.

Και πρέπει να πείσουμε για αυτό τους μαθητές μας αξιοποιώντας όσο μπορούμε περισσότερο και *δια βίου* τα πορίσματα της Παιδαγωγικής και Διδακτικής **επιστήμης,** σε ένα αντίξοο πολλές φορές κοινωνικό και εργασιακό περιβάλλον.

Επιστρατεύοντας όλη την **τέχνη** μας και όλα τα *σκηνοθετικά μέσα*, όντας σίγουροι ότι (όπως συμβαίνει πολύ συχνά στο σκηνοθέτη) **στο τέλος δεν θα χειροκροτηθούμε εμείς αλλά το έργο μας.**

Αθήνα 22.6.2005

[*] Μέναιχμον τὸν γεωμέτρην Ἀλέξανδρος ἠξίου συντόμως αὐτῷ παραδοῦναι τὴν γεωμετρίαν· ὁ δέ ὦ βασιλεῦ", εἶπε, κατὰ μὲν τὴν χώραν ὁδοί εἰσιν ἰδιωτικαὶ καὶ βασιλικαί, ἐν δὲ τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσίν ἐστιν ὁδὸς μία". (Στοβαίος,)

Βιβλιογραφία

Abbott E. A, Flatland, η Επιπεδοχώρα (1884), ΑΙΩΡΑ 1999.

Alibert Daniel & Thomas Michael, Research on mathematical proof. In: Tall D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 215-230). Kluwer 1991.

Αναπολιτάνος Διονύσιος: Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 1985.

Applebaum Mark- Samolov Peter, Teaching Mathematics using the idea of "Research Problems", αρθρο από το site των συγγραφέων στο internet.

Αριστοτέλης, Αναλυτικά Ύστερα, Μετάφραση Η. Π. Νικολούδης, εκδ. Κάκτος, Αθήνα 1993.

Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, εκδ. Πάπυρος, Αθήνα 1975.

Αρχαία Κείμενα, TLG- Musaios.

Balacheff N., Benefits and limits of social interaction: The case of teaching Mathematical proof. In: Bishop A, Mellin- Olsen S., Van Dormolen J. (eds) *Mathematical knowledge*, Kluwer, 1991.

Βασιλείου Ε.: Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας (Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών 2003-2004).

Βισκαδουράκης Β. Ε., Το *φ*, περιοδική έκδοση, τ. 1, Νοέμβρης 2004, Πειραιάς.

Blanché Robert, Αξιωματική Μέθοδος, συλλογή Θεαίτητος, εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα 1972.

Βλάχος Αθανάσιος, Οδηγός του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος, ΕΚΠΑ, Τμήμα ΦΠΨ, Κέντρο Διαπολιτισμικής Αγωγής, Αθήνα 2004.

Bell E. T., Οι μαθηματικοί, τόμοι 2, ΠΕΚ, Ηράκλειο 1993.

Βοσνιάδου Στ., Πρόλογος-Επιμέλεια, Η ψυχολογία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1998

Boyer Carl B. - Merzbach Uta C., Η ιστορία των μαθηματικών, Γ. Α. Πνευματικού, Αθήνα 1997.

Brouwer L.E.J., Consciousness, Philosophy and Mathematics, 10° Διεθνές Συνέδριο Φιλοσοφίας, Άμστερνταμ, 1948, Πρακτικά I, Δεσμίδα II (Άμστερνταμ: Εκδοτικός Οίκος North-Holland, 1949),

Brown I. Harold, Αντίληψη Θεωρία και Δέσμευση, Μια νέα φιλοσοφία της επιστήμης, ΠΕΚ, Ηράκλειο 1995.

Brown Stephen I., Προς μια Ανθρωπιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, άρθρο.

Byrd Cemen Pamala, Το άγχος για τα μαθηματικά, Παρουσία, Αθήνα 1989.

Chandrasekhar S., Αλήθεια και η Ομορφιά, Αισθητική και Κίνητρα στην Επιστήμη, ΙΔΕΑ, Αθήνα 1992.

Changeux J. P. – Connes Al., Τα Μαθηματικά & ο Εγκέφαλος, Κάτοπτρο, Αθήνα 1995

Changeux Jean Pierre, Λογική και Απόλαυση, Μετ. Βασιλική Καραγιάννη, εκδόσεις Π. Τραυλός- Ε. Κωσταράκη, Αθήνα 1996.

Cohen Louis- Lawrence Manion, Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας, ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ, ΑΘΗΝΑ 1994

CIEAEM 53 “Mathematical Literacy in the Digital Era”, Verbania-Italy, July 2001

Γαγάτσης Α., Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών, Αφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη 1993.

Γαγάτσης Α., Επιμέλεια, Διδακτική των Μαθηματικών, Θεωρία – Έρευνα, Εκδόσεις Art of Text Α.Ε. 1995

Γερονικόλας Ε. - Μυτιληναίος Μ.: Ο μαθηματικός ξέρει γιατί μιλάει, περιοδικό Νεύσις.

Δημητρακόπουλος Κ. Ι., Σημειώσεις Μαθηματικής Λογικής, Αθήνα 1999.

Δοξιάδης Απόστολος, Ο Θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλμπαχ, ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗΣ, Αθήνα 2000.

Davis Donald M., Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2001

Davis P.J.-R.Hers. Η Μαθηματική εμπειρία: Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1981

Donaldson M., Επιμέλεια Στ. Βοσνιάδου, Η Σκέψη των παιδιών: Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 2001.

Dienes Z.P.: Les six etapes du processus d’appredissage en mathematiques. O.C.D.L Paris 1970.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, Μαθηματική Επιθεώρηση, τ. 13, 1979, τ. 21, 22, 1981, τ. Α΄1985.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, Ευκλείδης γ, τ. 8, 1985

Eves Howard, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, τόμοι 1 και 2, Τροχαλία, Αθήνα 1989.

Fischbein Efraim, Intuition in Science and Mathematics, An Educational Approach, Mathematics Education Library, 1987.

Flato Moshe, Η Ισχύς των Μαθηματικών, Κάτοπτρο, Αθήνα 1993.

Grothendieck A. Recoltes et Semailles Univ. Des Sc. Et Techn. Du Languedoc. Montpellier 1986

Goleman Daniel, Η Συναισθηματική Νοημοσύνη, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα 1998,

Hadamard Jacques, Η Ψυχολογία της επινόησης στα Μαθηματικά, Κάτοπτρο, Αθήνα 1995.

Hanna Gila, Mathematical proof, Chapter 4, άρθρο από το site της συγγραφέως, μέσω Internet

Hardy G. H., Η απολογία ενός μαθηματικού, ΠΕΚ, Ηράκλειο 1991.

Heath T. L., Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, ΚΕΠΕΚ, Αθήνα 2001.

Heath T. L., The Thirteen books of the EUCLID'S ELEMENTS, Second Ed., DOVER, N.Y..

Hilbert D.: Θεμέλια της Γεωμετρίας, μετάφραση- εισαγωγή- σχόλια, Σ. Παπαδόπουλος, Τροχαλία, Αθήνα 1995.

Hintikka, Jaakko, The Principles of Mathematics Revisited, c. 5 The Complexities of Completeness, Cambridge Univ. press, 1998, μετάφραση του κεφ.5 Θαν. Βλάχος.

Hughes Martin, Επιμέλεια Στ. Βοσνιάδου, Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών: Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

Κάντ, Κριτική του καθαρού λόγου,

Kekenbosch Christiane, Μνήμη και Γλώσσα, Σαββάλας, Αθήνα 1996.

Κλαουδάτος Νίκος, Διδακτική των Μαθηματικών , Σημειώσεις του μαθήματος, Αθήνα 1996.

Kline Morris, Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό, Κώδικας, Αθήνα 2002.

Kline Morris, Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης, Εκδόσεις ΒΑΝΙΑΣ, Θεσσαλονίκη 1990

Kline M., Λογική εναντίον Παιδαγωγικής, μετάφραση Δ. Χασάπης, Μαθηματική Επιθεώρηση τ. 22, 1981.

Κολέζα Ε., Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2000

Κολέζα Ε.- Μακρής Κ.- Σουρλάς Κ., Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών, Διδακτικοί στόχοι, ταξινομίες, δραστηριότητες, GUTENBERG, Αθήνα 1993.

Κουγιουμτζάκης Γ., επιμέλεια έκδοσης, ΑΝΑΠΤΥΞΙΑΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ, Δεύτερη έκδοση, ΠΕΚ, Ηράκλειο 1997

Κουμουλής Γ.- Νεγρεπόντης Σ., Θεωρία Μέτρου, Συμμετρία, Αθήνα 1991.

Körner S., *The Philosophy of mathematics.* Hutchinson Un. Library, London, 1971,

Kuhn Thomas S., Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων, Εισ.-Επ.- Μετ. Κάλφας Β., Γεωργακόπουλος Γ., Σύγχρονα Θέματα, Ι΄ έκδοση, Αθήνα 2004.

Κυνηγός Χ., Μαθηματική Εκπαίδευση, Σημειώσεις του μαθήματος Παιδαγωγικά, Αθήνα 1996.

Lacoff G.- Nunez R.: “Where Mathematics Comes from”, Basic Books, 2000.

Lakatos Imre: Αποδείξεις και Ανασκευές, Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης, Τροχαλία, Αθήνα 1996.

Lang Serge, Η Γοητεία των Μαθηματικών, Κάτοπτρο, Αθήνα 2003.

Littlewood D. E., Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά, Κάτοπτρο, Αθήνα 2001.

Μάκρας Στρ., Σκέψεις για τα Μαθηματικά και τη Διδακτική τους, Σημειώσεις, Πειραιάς 1993.

Marples Roger, επιμέλεια- συλλογικό, Οι Σκοποί της Εκπαίδευσης, Μεταίχμιο, Αθήνα 2002.

Μυτιληναίος Μιχ., Λογική, Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα 2000.

Nagel E.- Newman J. R., Το Θεώρημα του GÖDEL,Τροχαλία, Αθήνα 1991.

Νεγρεπόντης Σ.: Παραδόσεις Ιστορίας Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών (Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών 2002-2003).

Νεγρεπόντης Σ.- Γιωτόπουλος Σ.- Γιαννακούλιας Ε., Απειροστικός Λογισμός, Συμμετρία, Αθήνα 1999.

Nelsen Roger B., Αποδείξεις χωρίς λόγια, Σαββάλας, Αθήνα 1996.

Neugebauer O., Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα, ΜΙΕΤ, Αθήνα 2003,

Ortoli S.- Witkowski N., Η Μπανιέρα του Αρχιμήδη, Σαββάλας, Αθήνα 1997.

Osserman Robert, Η Ποίηση του Σύμπαντος, Κάτοπτρο, Αθήνα 1998.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Οδηγίες του για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, ΟΕΔΒ, Αθήνα 2000.

ΠΛΑΤΩΝ, Φαίδων, μετάφραση Ε. Παπανούτσος, Ι. Ζαχαρόπουλος Αθήνα.

ΠΛΑΤΩΝ, Πολιτεία, μετάφραση Ι. Γρυπάρης, Ι. Ζαχαρόπουλος Αθήνα.

ΠΛΑΤΩΝ, Επινομίς, μετάφραση , Πάπυρος, Αθήνα.

ΠΡΟΚΛΟΣ: Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των Ευκλείδου Στοιχείων, TLG Mussaios και Αίθρα, Αθήνα 2002.

Papert Seymour, Νοητικές Θύελλες, Επιμέλεια Γ. Κοτσάνης, Εκδόσεις Οδυσσέας, Αθήνα 1994

Peterson Ivars, Ταξίδι στον Κόσμο των Μαθηματικών, W. H. Freeman, Γιαλλελής- Μανωλάκης, Αθήνα 1989.

Polya George, Η Μαθηματική Ανακάλυψη, Κάτοπτρο, Αθήνα 2001.

Polya G., Πώς να το λύσω, Εκδόσεις Σπηλιώτη, Αθήνα.

Riemann B., Επί των σχετικών με την Γεωμετρία Υποθέσεων, Τροχαλία, Αθήνα 1999.

Rucker Rudy, Το Άπειρο και ο Νους, ΠΕΚ, Ηράκλειο 1999.

Σταθοπούλου Χ., Εθνομαθηματικά, Ατραπός, Αθήνα 2005,

Σταμάτη Ευάγγελου: Ευκλείδου Γεωμετρία, ΟΕΣΒ, Αθήνα 1975.

Στράντζαλος Χ.: Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, εκδώσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα 1989.

Σπύρου Παναγιώτης: Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών, Σημειώσεις, Αθήνα 1998.

Smullyan Raymond, Ο Σατανάς ο Καντόρ και το άπειρο, Κάτοπτρο, Αθήνα 2003.

Steinhaus Hugo, One Handred Problems in Elementary Mathematics, Dover, New York, 1979.

Sternberg Robert J., Talia Ben-Zeev, The Nature of Mathematical Thinking, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, NJ, USA, 1996

Streefland, Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2000

Struik Dirk J., Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1982.

Szambo Arpad, Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών, Έκδοση ΤΕΕ, Αθήνα 1973.

Thomas Ivor, Dictionary of Scientific Biography, vol. IV, Charles Scribner's sons, New York 1975.

Tikhomirov V. M., Ιστορίες για Μέγιστα και Ελάχιστα, Κάτοπτρο, Αθήνα 1999.

Τουμάσης Μπάμπης, Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, GUTENBERG, Αθήνα 1994.

Uspensky V. A., Για το Θεώρημα μη πληρότητας του Godel, Τροχαλία, Αθήνα 1987.

Vigotsky Lev, Σκέψη και Γλώσσα, ΓΝΩΣΗ, Αθήνα 1988.

Waerden van der B.L.: Η Αφύπνιση της Επιστήμης, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2000,

Wilder R. L., Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών, Μετ. Δ. Ψυχογιός, εκδ. Π. Κουτσουμπός, Αθήνα 1986,

Φαρμάκη Β., Σημειώσεις από τις Παραδόσεις Θεωρίας Μέτρου, ΜΠΔΜΜ, Αθήνα 2003.

Χασάπης Δημήτρης, επιμέλεια, Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο, Art & Text, Θεσσαλονίκη 2002.

Χασάπης Δημήτρης, επιμέλεια, Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, Art & Text, Θεσσαλονίκη 2003. Μια επιλεγμένη βιβλιογραφία υπάρχει στο τέλος του τόμου.

Χασάπης Δημήτρης, επιμέλεια, Εικόνα σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των μαθηματικών, Art & Text, Θεσσαλονίκη 2004.

Χασάπης Δημήτρης, επιμέλεια, Κοινωνικές & πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, Art & Text, Θεσσαλονίκη 2005.

Χούσερλ Έντμουντ, Η Προέλευση της Γεωμετρίας, Εις.-Μετ. Σχόλια Παύλος Κοντος, ΕΚΚΡΕΜΕΣ, Αθήνα 2003.

Χριστιανίδης Γ., Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2003.

Χριστοδουλίδης Παύλος: Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Επιμέλεια, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού, Αθήνα 1993.

Παράρτημα Ι

Τα Ερωτηματολόγια

1. Τα Ερωτηματολόγια πεποιθήσεων

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Λυκείου α. α. …….

Μαθητής □ Μαθήτρια □ Τάξη Λυκείου Α □ Β □ Γ □

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά:

10-12 □ 13-15 □ 16-18 □ 19-20 □

Α΄ ΟΜΑΔΑ

1. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά τις έννοιες που θεωρείς ότι ταιριάζουν περισσότερο με τα **μαθηματικά [**με αρίθμηση 1(το περισσότερο),2,3,4,5 (το λιγότερο)]**:**

Φαντασία	Λογική	Εμπειρία	Αισθητική	Διαίσθηση

2. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1 (το περισσότερο), 2, 3, ...] τις έννοιες που ταιριάζουν περισσότερο με τον τρόπο που **εσύ** λειτουργείς **διαδοχικά** όταν κάνεις μαθηματικά (όπως λ.χ. αποδείξεις θεωρημάτων, λύση προβλημάτων, ασκήσεων, κλπ):

Επιστράτευση της Φαντασίας	
Λογικές σκέψεις (συλλογισμοί)	
Αξιοποίηση της Εμπειρίας σε μαθηματικές μεθόδους	
Μνήμη ίδιων περιπτώσεων που έχεις αντιμετωπίσει	
Διαίσθηση για τον τρόπο που πρέπει να ακολουθήσεις	
Κομψότητα στις διαδικασίες και στις διατυπώσεις	
Αυστηρότητα στους χειρισμούς, να μην υπάρχουν κενά και λάθη	
Αναδιάταξη των γνώσεων γύρω από το θέμα που εξετάζεις	
Επινόηση μεθόδων με βάση τις γνώσεις που έχεις	
Δοκιμή κάποιων συγκεκριμένων περιπτώσεων (π.χ. τιμών)	

3. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1(το περισσότερο), 2, 3, …] ποια τέχνη, από τις παρακάτω, ταιριάζει κατά τη γνώμη σου περισσότερο στα μαθηματικά:

Χορός	
Θέατρο	
Μουσική	
Ποίηση	
Ζωγραφική	
Γλυπτική	
Πεζογραφία	
Αρχιτεκτονική	
Κινηματογράφος	

4. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1(το περισσότερο),2,3, ...] ποιο παιγνίδι, από τα παρακάτω, ταιριάζει κατά τη γνώμη σου περισσότερο στα μαθηματικά:

Τράπουλα	
Ντόμινο	
Μονόπολυ	
Σκάκι	
Ναυμαχία	

5. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1(το περισσότερο),2,3,..] τι νομίζεις ότι ταιριάζει περισσότερο στον τρόπο με τον οποίο δουλεύουμε στα μαθηματικά.

Αυστηρότητα	Προσέγγιση	Ακρίβεια	Πιθανότητα	Σχετικότητα

6. [**Μόνο για τη Γ΄ Λυκείου**] Σε ποιο κλάδο των μαθηματικών θεωρείς ότι χρειάζεται περισσότερη διαίσθηση;

Άλγεβρα	Γεωμετρία	Στατιστική	Πιθανότητες	Διαφορικό Λογισμό

7. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1(το περισσότερο),2,3,..] Ποια ανακάλυψη θεωρείς ότι βασίστηκε περισσότερο στα Μαθηματικά

τροχός	φωτογραφία	τηλέφωνο	αεροπλάνο	DNA

8. Βάλε σε μια φθίνουσα σειρά (με αρίθμηση 1(το περισσότερο),2,3,..) ποιο άθλημα ή ομάδα αθλημάτων θεωρείς ότι ταιριάζει περισσότερο με τα μαθηματικά.

Δρόμοι	
Άλματα	
Ρίψεις	
Ομαδικά	
Ενόργανη	
Σκι- Τένις- Γκολφ	
Πάλη- Άρση Βαρών	
Ιστιοπλοΐα	

Β' ΟΜΑΔΑ

1. Εμπιστεύεσαι την διαίσθησή σου για να απαντήσεις σε ένα μαθηματικό πρόβλημα;

Ναι □ Όχι □

2. Εμπιστεύεσαι την διαίσθησή σου για ένα άλλου είδους πρόβλημα, σε άλλο επιστημονικό τομέα, περισσότερο ή λιγότερο απ' ότι στα μαθηματικά;

Περισσότερο □ Λιγότερο □ Το ίδιο □

3.Όταν δώσεις μια απάντηση με βάσει την διαίσθησή σου αισθάνεσαι ότι είναι ικανοποιητική;

Ναι □ Όχι □

4.Αναζητάς κάποιου είδους επαλήθευση ή απόδειξη;

Ναι □ Όχι □

5. Συνήθως τι είδους απόδειξη αναζητάς, όταν συμβαίνει αυτό;

Λογική □ Με παραδείγματα και δοκιμές □ Και τα δύο □

6.Έχεις βασιστεί στην διαισθητική σου άποψη;

Πολλές φορές □ Λίγες φορές □ Ποτέ □

7.Σε ποιο βαθμό βασίζεσαι στην διαισθητική σου άποψη;

Πολύ □ Λίγο □ Καθόλου □

8.Έχεις παραπλανηθεί από την διαισθητική αντιμετώπιση προβλημάτων;

Ναι □ Όχι □

9.Πόσο συχνά;

Πολύ □ Λίγο □ Καθόλου □

10.Προσπαθώντας να λύσεις μαθηματικές ασκήσεις, έχεις εφαρμόσει ιδιότητες που δεν ισχύουν;

Ναι □ Όχι □

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 2ο

Ερωτηματολόγιο Καθηγητών Μαθηματικών Λυκείου, α. α.:…

Διδάσκω σε τάξεις: Α΄ □ Β΄ □ Γ΄ □

1. Το πλαίσιο του προγράμματος και τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του Λυκείου προωθούν περισσότερο:

Τη διαισθητική σκέψη □ Τη λογική σκέψη □ Και τα δύο το ίδιο □

2. Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για την διδασκαλία των μαθηματικών:

προσπαθούν να συμβάλλουν με επεξηγήσεις □
αναπτύσσουν μια διδακτική άποψη □
είναι ανεφάρμοστες λόγω πληθώρας ύλης □
συνήθως δεν ακολουθούνται □
Άλλο □

3. Οι ενότητες που διδάσκονται είναι κατάλληλες για την ανάπτυξη περισσότερο:

Της διαισθητικής σκέψης □ Της λογικής σκέψης □
Τρόπων λύσης ασκήσεων □ Και για τα τρία □

4. Σε ποιο βαθμό νομίζετε ότι έχει δυνατότητες ο καθηγητής μαθηματικών να διδάξει με τον τρόπο που θεωρεί σωστό;

Καθόλου □ μικρό □ μέτριο □ μεγάλο □ απόλυτα □

5. Βάλτε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1(το περισσότερο),2,3,4,5,6)] ότι νομίζετε ότι πρέπει να προωθεί περισσότερο η μαθηματική εκπαίδευση στο Λύκειο;

Α) Ένα ορθολογικό τρόπο σκέψης ☐
Β) Γνωστικά εφόδια για την ζωή τους ☐
Γ) Διορατική ικανότητα ☐
Δ) Την προετοιμασία για τις εισαγωγικές εξετάσεις ☐
Ε) Την επαφή με την μαθηματική κληρονομιά της ανθρωπότητας ☐
ΣΤ)Συνδυαστική σκέψη ☐

6. Βάλτε σε μια φθίνουσα σειρά [με αρίθμηση 1 (το περισσότερο),2,3,4,5] τις έννοιες που θεωρείτε ότι ταιριάζουν περισσότερο με τα **μαθηματικά:**

Φαντασία	**Λογική**	**Εμπειρία**	**Αισθητική**	**Διαίσθηση**

2. Τα ερωτηματολόγια για την Α΄ Λυκείου

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 3ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών, Τάξη Λυκείου Α, α. α. …….

Μαθητής ☐ Μαθήτρια ☐ Ηλικία: χρόνια … μήνες …

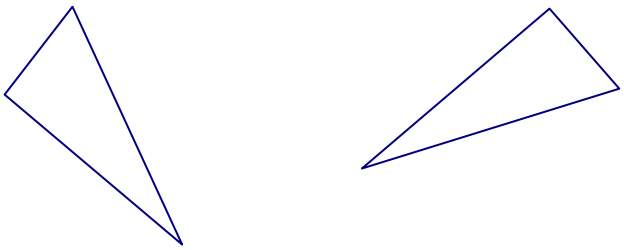
Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά
10-12 ☐ 13-14 ☐ 15-16 ☐ 17-18 ☐ 19-20 ☐

ΟΜΑΔΑ Π

5. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες είναι ίσα;

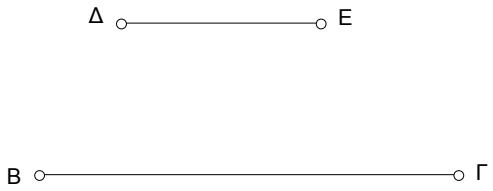
ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

6. Τα τρίγωνα στο παρακάτω σχήμα έχουν ίσες πλευρές. Είναι ίσα;



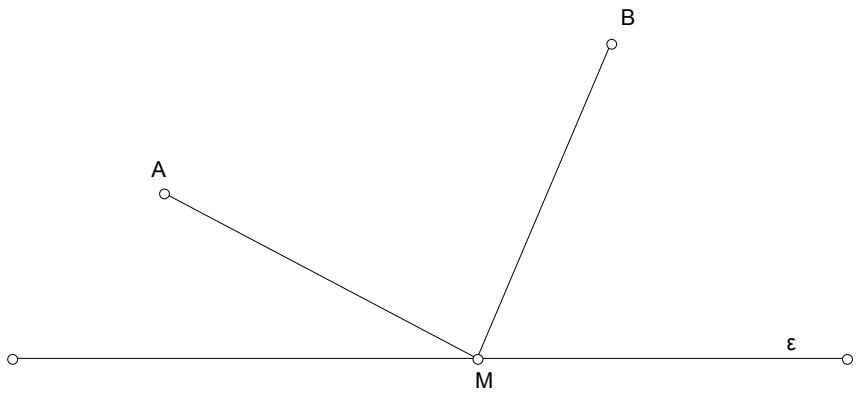
ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

3. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ έχουν ίδιο πλήθος σημείων;



ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

4. Αν Α, Β είναι δύο σημεία εκτός ευθείας ε που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο, για ποιο σημείο Μ της ευθείας ε το (ΑΜ)+(ΜΒ) γίνεται ελάχιστο;
(Σημειώστε πάνω στο σχήμα).



[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

5. Γιατί ορίσαμε το $\alpha^0 = 1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

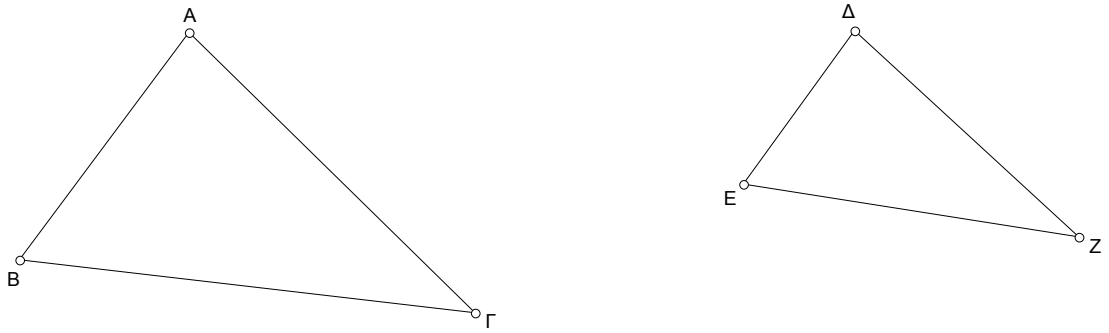
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 4ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών, Τάξη Λυκείου Α, α. α. …….

Μαθητής □ Μαθήτρια □ Ηλικία: χρόνια … μήνες …
Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά
10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

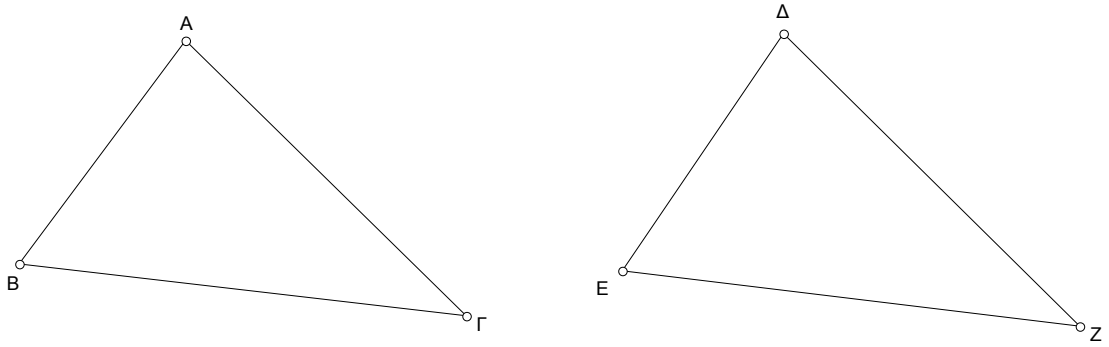
ΟΜΑΔΑ Ε

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες είναι ίσα;



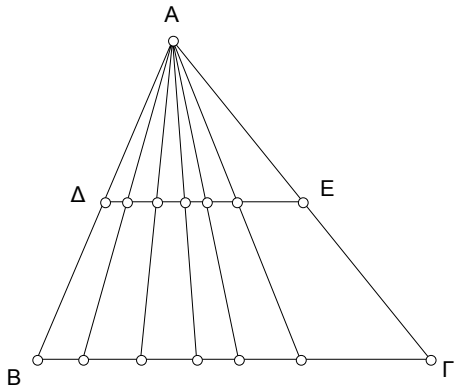
ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

2. Τα τρίγωνα στο παρακάτω σχήμα έχουν ίσες πλευρές. Είναι ίσα;



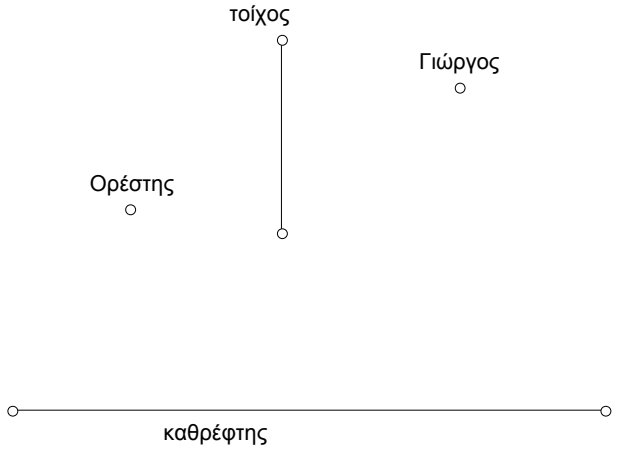
ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

3. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ έχουν ίδιο πλήθος σημείων;



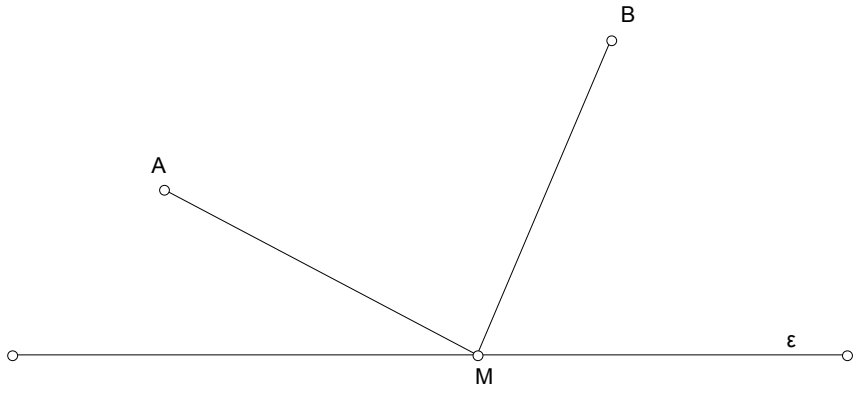
ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

4. Στην παρακάτω διάταξη πού βλέπει ο Γιώργος τον Ορέστη;
(Σημειώστε πάνω στο σχήμα).



[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

5. Αν Α, Β είναι δύο σημεία εκτός ευθείας ε που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο, για ποιο σημείο Μ της ευθείας ε το (ΑΜ)+(ΜΒ) γίνεται ελάχιστο;
(Σημειώστε πάνω στο σχήμα).



[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

6. Συμπληρώστε τις επόμενες ισότητες που αφορούν ιδιότητες των δυνάμεων:

$$a^n \times a^m = \ldots$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \ldots$$

Γιατί ορίσαμε το $\alpha^0 = 1$; Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση, αν μπορείτε.

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

3. Τα ερωτηματολόγια για την Β΄ Λυκείου

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 5^{ο}

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Τάξη Λυκείου Β', α. α. …….

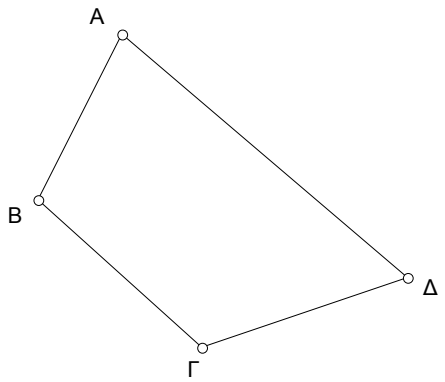
Μαθητής □ Μαθήτρια □ Ηλικία: χρόνια … μήνες …

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά

10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

ΟΜΑΔΑ - Π

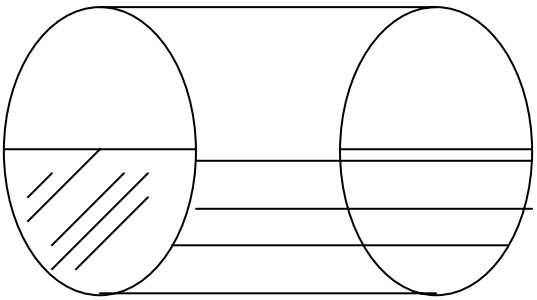
1. Χωρίστε με ένα ευθύγραμμο τμήμα το τραπέζιο του σχήματος σε δύο μέρη με ίσο εμβαδόν (ισεβαδικά χωρία).



Θα φέρω:…

2. Μπορούμε να μετρήσουμε το περιεχόμενο του κυλινδρικού βαρελιού αν η στάθμη του είναι μέχρι τη μέση και μας δοθεί η ακτίνα της κυκλικής βάσης ρ=0.5m και το ύψος υ=1m του κυλίνδρου:

(όγκος κυλίνδρου V=Εμβαδόν βάσης Χ ύψος)

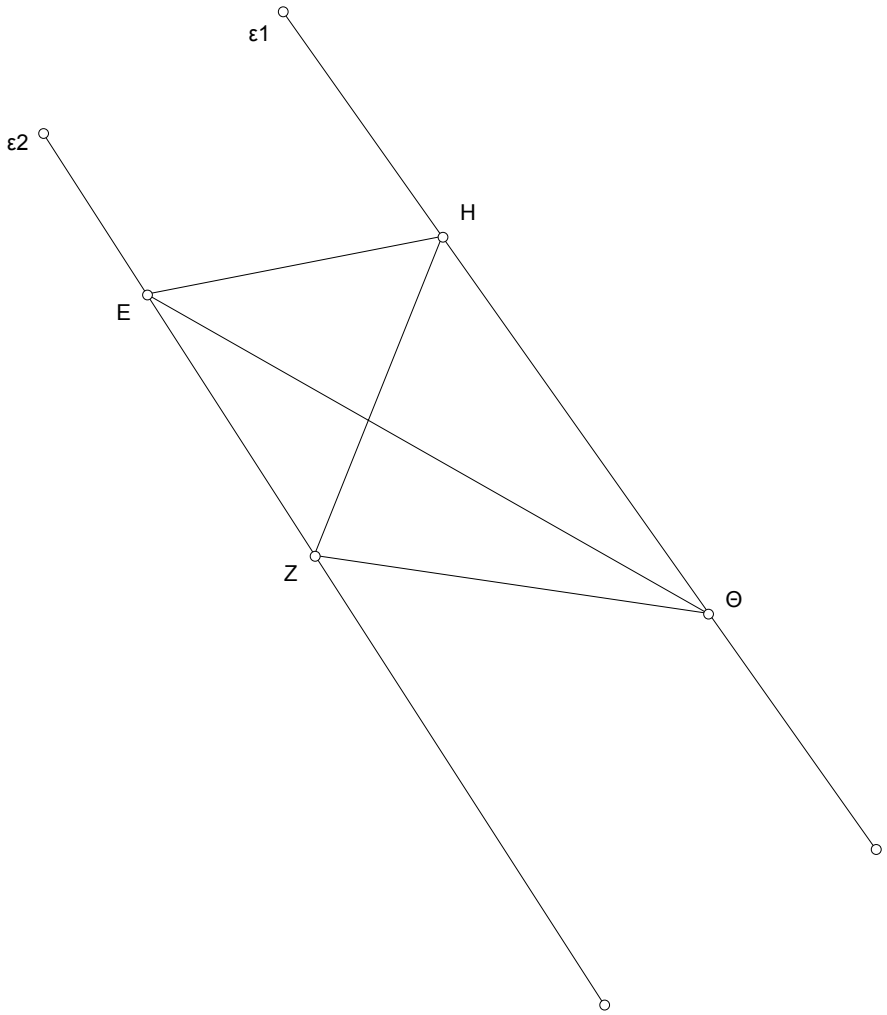


Ναι □ Όχι □

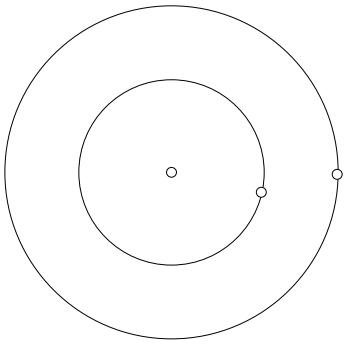
3. Στο παρακάτω σχήμα οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, τα εμβαδά των τριγώνων (ΗΕΖ) και (ΘΕΖ) είναι:

Ισα □ Άνισα □ Δεν έχω επαρκή στοιχεία □

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

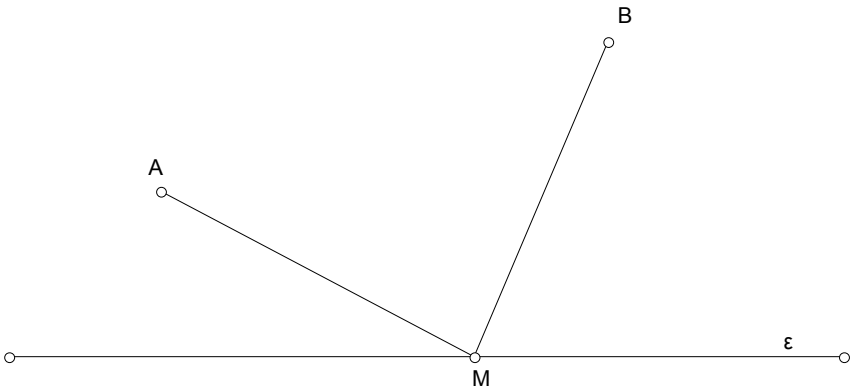


4. Οι δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ίσο πλήθος σημείων;



ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

5. Αν Α, Β είναι δύο σημεία εκτός ευθείας ε που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο, για ποιο σημείο Μ της ευθείας ε το (ΑΜ)+(ΜΒ) γίνεται ελάχιστο;
(Σημειώστε πάνω στο σχήμα).



[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

7. Αν ο ισημερινός της γης και «ο ισημερινός» μιας μπάλας του μπάσκετ αυξηθούν και οι δύο κατά 10 εκατοστά:

Θα αυξηθεί περισσότερο η ακτίνα της γης □
Θα αυξηθεί περισσότερο η ακτίνα της μπάλας □
Θα αυξηθούν το ίδιο □

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 6ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Τάξη Λυκείου Β', α. α. …….

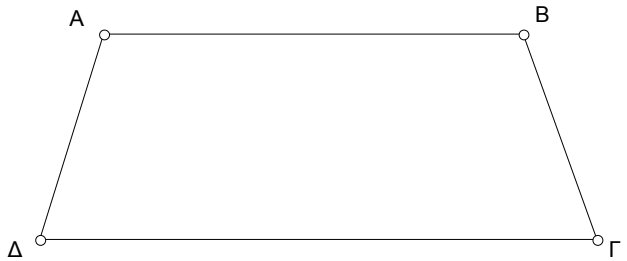
Μαθητής □ Μαθήτρια □ Ηλικία: χρόνια … μήνες …

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά

10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

ΟΜΑΔΑ - Ε

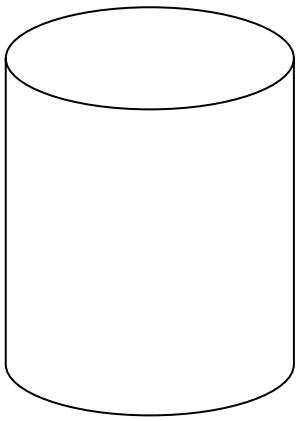
1. Χωρίστε με ένα ευθύγραμμο τμήμα το τραπέζιο του σχήματος σε δύο μέρη με ίσο εμβαδόν (ισεβαδικά χωρία).



Θα φέρω:…

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

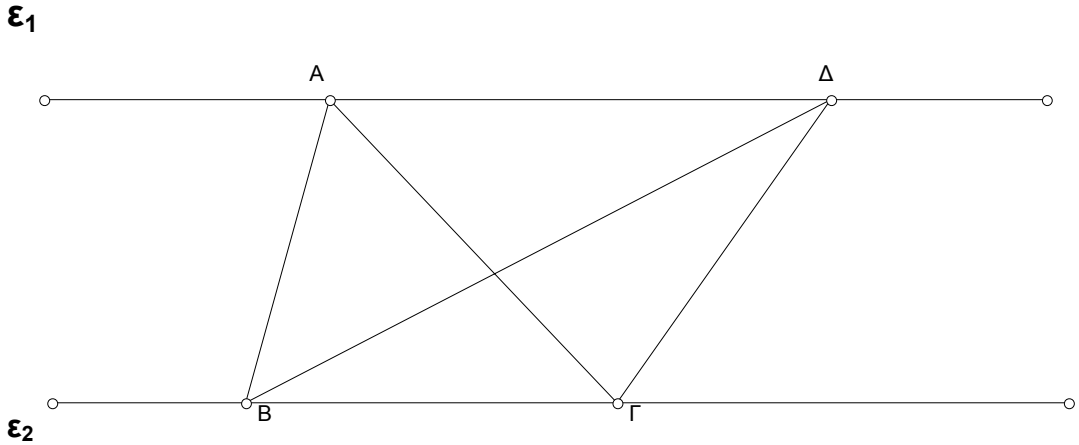
2. Μπορούμε να μετρήσουμε το περιεχόμενο του κυλινδρικού βαρελιού αν η στάθμη του είναι μέχρι τη μέση και μας δοθεί η ακτίνα της κυκλικής βάσης ρ και το ύψος υ του κυλίνδρου (όγκος κυλίνδρου V=Εμβαδόν βάσης Χ ύψος):



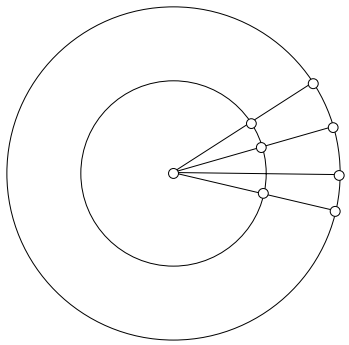
Ναι □ Όχι □

3. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, τα εμβαδά των τριγώνων (ΑΒΓ) και (ΔΒΓ) είναι Ίσα;

ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

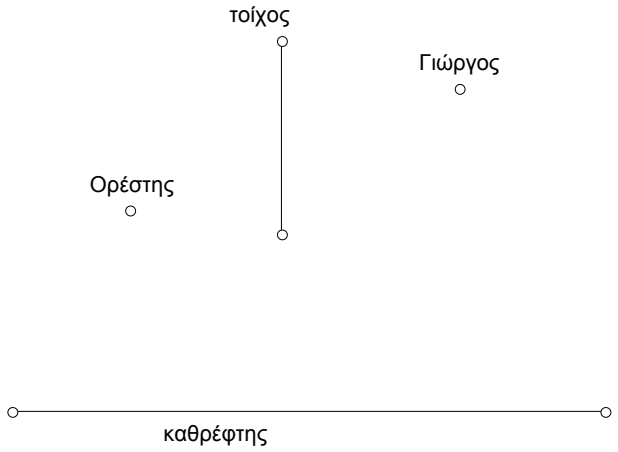


4. Οι δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ίσο πλήθος σημείων;



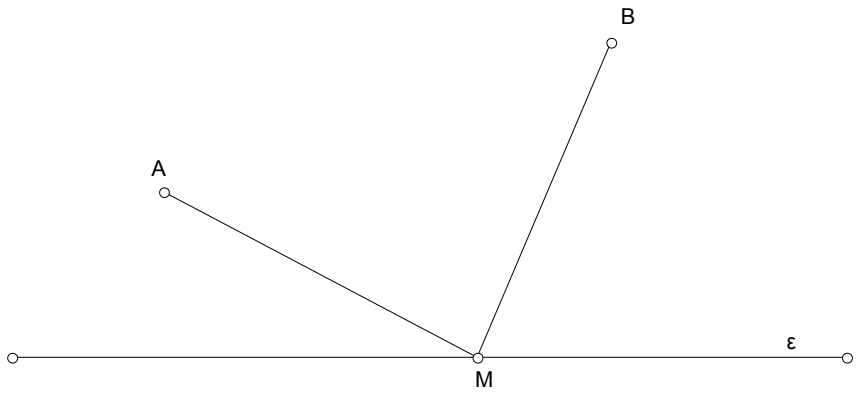
ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

5. Στην παρακάτω διάταξη πού βλέπει ο Γιώργος τον Ορέστη;
(Σημειώστε πάνω στο σχήμα).



[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

6. Αν Α, Β είναι δύο σημεία εκτός ευθείας ε που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο, για ποιο σημείο Μ της ευθείας ε το (ΑΜ)+(ΜΒ) γίνεται ελάχιστο;
(Σημειώστε πάνω στο σχήμα).



[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

4. Τα ερωτηματολόγια της Γ΄ Λυκείου

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 7ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Γ΄ Λυκείου, α. α. …….

Μαθητής □ Μαθήτρια □ Ηλικία: χρόνια … μήνες …

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά

10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

ΟΜΑΔΑ Π

1. Ποια είναι η πιθανότητα η 13η μέρα ενός μήνα να είναι Τρίτη;

Είναι:…

Δεν ξέρω / δεν μπορώ να την υπολογίσω:…

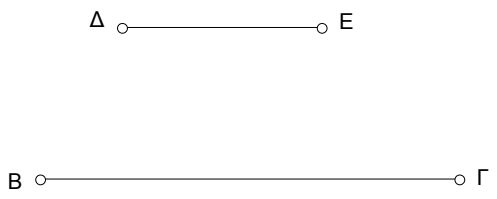
[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

8. Σε μια πόλη λειτουργούν δυο μαιευτήρια. Στο μεγαλύτερο γεννιόνται περίπου 45 μωρά την ημέρα και στο μικρότερο περίπου 15 μωρά την ημέρα. Όπως ξέρουμε περίπου το 50% όλων των μωρών είναι κορίτσια. Το ακριβές ποσοστό των γεννήσεων κοριτσιών κυμαίνεται από μέρα σε μέρα. Μερικές μέρες το ποσοστό των κοριτσιών μπορεί να είναι ψηλότερο από 50% και μερικές χαμηλότερο.
Στη διάρκεια ενός έτους κάθε μαιευτήριο κατέγραψε τις μέρες κατά τις οποίες περισσότερο του 60% των μωρών ήταν κορίτσια. Ποιο μαιευτήριο νομίζετε ότι κατέγραψε περισσότερες τέτοιες μέρες;

Το μεγαλύτερο □ Το μικρότερο □ Περίπου το ίδιο (με μια απόκλιση 5%) □

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

3. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ έχουν ίδιο πλήθος σημείων;



ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

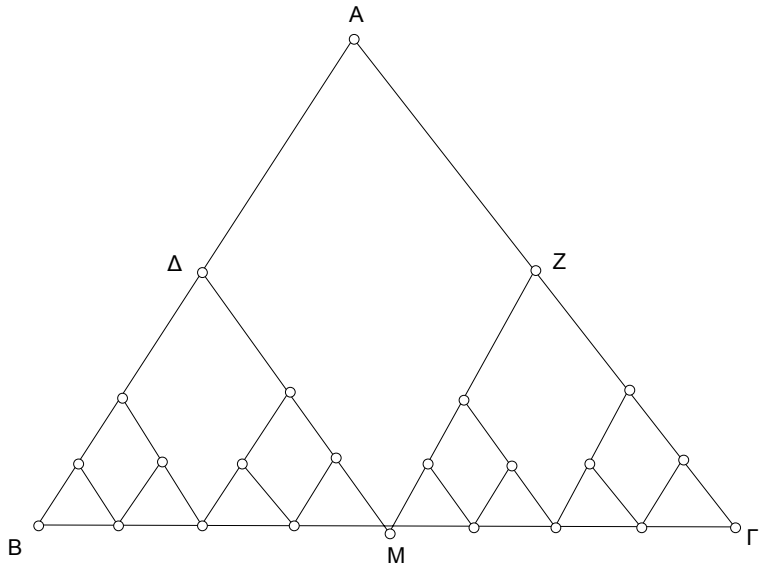
4. Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία.

Αν το Γ τείνει στο άπειρο, ο λόγος $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ τείνει στο:

0 □ 1 □ 2 □ ∞ □ Δεν προσδιορίζεται □ ΔΞ/ΔΑ □

[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

5. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 ενώνουμε τα μέσα των δυο πλευρών με το μέσον της βάσης, ώστε να προκύψουν δύο νέα ισόπλευρα τρίγωνα, στα οποία επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία έπ' άπειρον. Πού τείνει το άθροισμα των περιμέτρων αυτών των τριγώνων;



Στο: 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ ∞ □ άλλο □ δεν προσδιορίζεται □

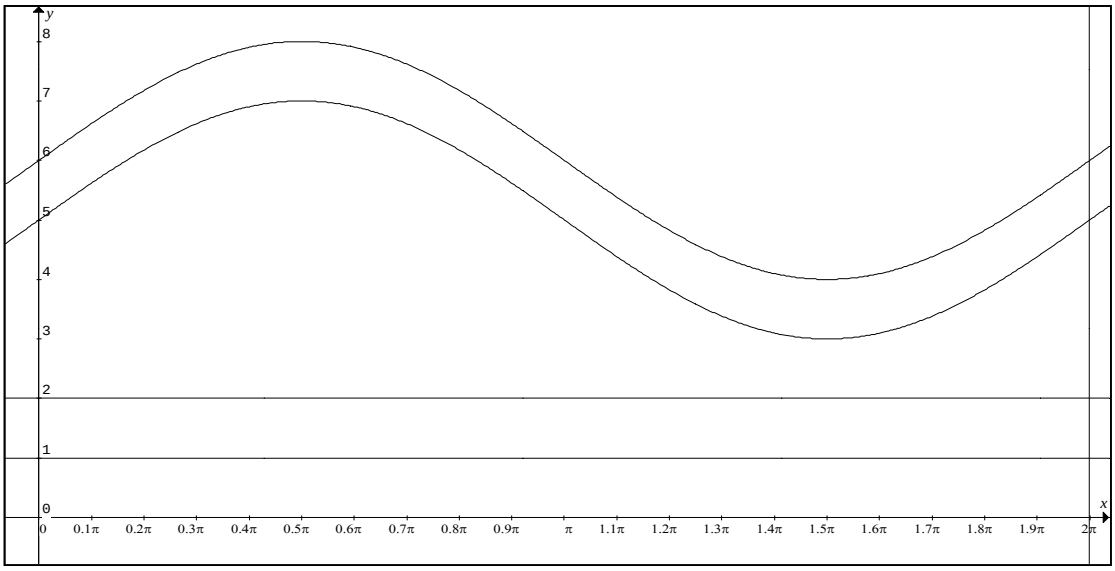
[Σημείωση δική μου. Η απάντηση που δόθηκε είναι σωστή: ΝΑΙ □ ΟΧΙ □]

6. Στα παρακάτω γραφήματα η απόσταση ανάμεσα στα δυο παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα και ανάμεσα στις δυο καμπύλες (η κατακόρυφη σε κάθε σημείο τους) είναι σταθερή και ίση με 1. Συγκρίνετε τα εμβαδά των δυο χωρίων στο διάστημα (ο,2π), δηλ. από τον άξονα ψψ΄ έως την ευθεία χ=2π :

Μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στις καμπύλες ☐

Μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στα ευθύγρ. τμήματα ☐

Είναι ίσα τα εμβαδά των δυο χωρίων ☐



ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 8ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Λυκείου, α. α. …

Μαθητής □ Μαθήτρια □ Τάξη Λυκείου Α □ Β □ Γ □

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά

10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

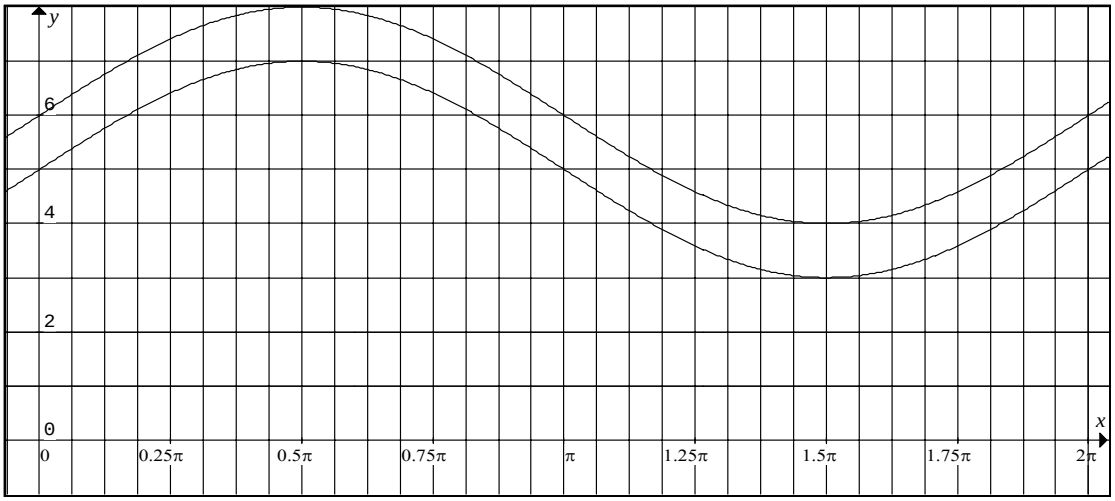
ΟΜΑΔΑ Ε1

1. Στα παρακάτω γραφήματα η απόσταση ανάμεσα στα δυο παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα και ανάμεσα στις δυο καμπύλες (η κατακόρυφη σε κάθε σημείο τους) είναι σταθερή και ίση με 1. Συγκρίνετε τα εμβαδά των δυο χωρίων στο διάστημα (ο,2π), δηλ. από τον άξονα ψψ΄ εως την ευθεία χ=2π :

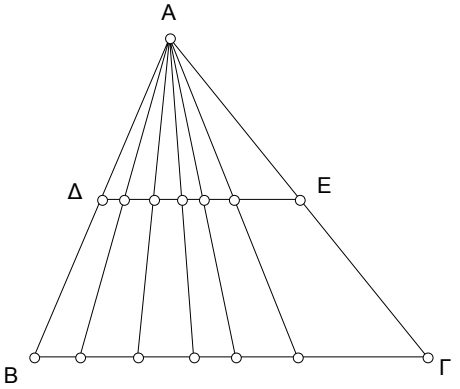
Μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στις καμπύλες □

Μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στα ευθύγρ. τμήματα □

Είναι ίσα τα εμβαδά των δυο χωρίων □



2. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ έχουν ίδιο πλήθος σημείων;



ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 9ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Γ΄ Λυκείου, α. α. …….

Μαθητής □ Μαθήτρια □ Ηλικία: χρόνια … μήνες …

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά

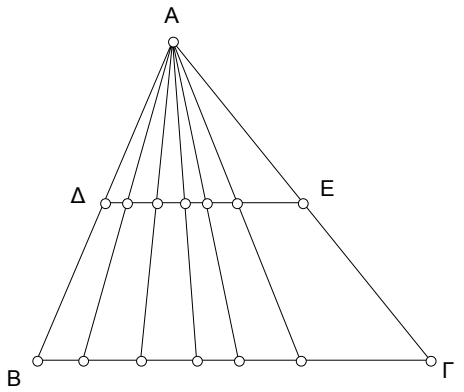
10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

ΟΜΑΔΑ Ε2

1. Συγκρίνεται τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 που περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες των συναρτήσεων f(x)=2ημχ+5 και g(x)=2ημχ+6 και τις ευθείες χ=0 και χ=2π και Ω_2, που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h(x)=1, z(x)=2 και τις ίδιες ευθείες χ=0 και χ=2π. Τι ισχύει;

$\Omega_1 < \Omega_2$ □ $\Omega_1 > \Omega_2$ □ $\Omega_1 = \Omega_2$ □

9. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ έχουν ίδιο πλήθος σημείων;



ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 10ο

Ερωτηματολόγιο Μαθητών Λυκείου, α. α. …

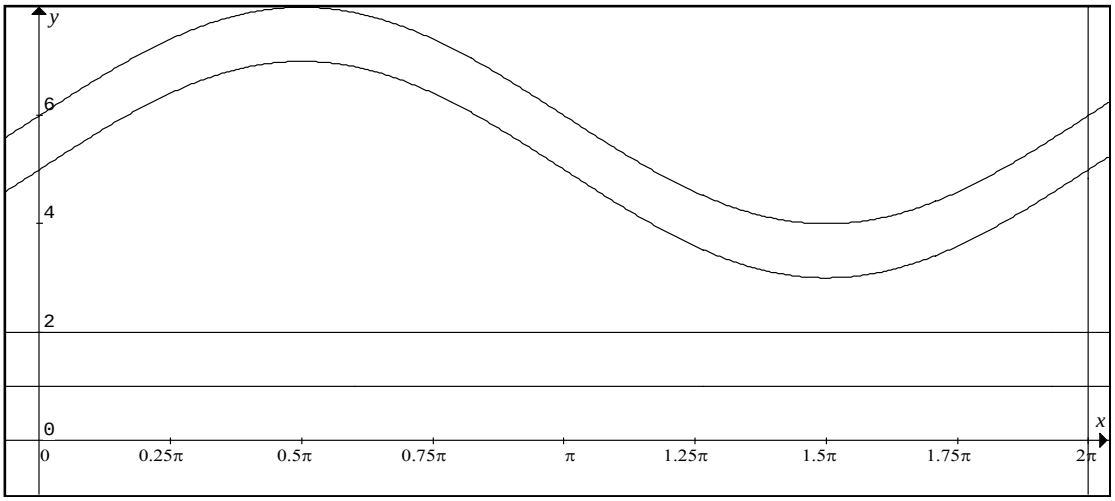
Μαθητής □ Μαθήτρια □ Τάξη Λυκείου Α □ Β □ Γ □

Βαθμός προηγούμενης χρονιάς στα μαθηματικά
10-12 □ 13-14 □ 15-16 □ 17-18 □ 19-20 □

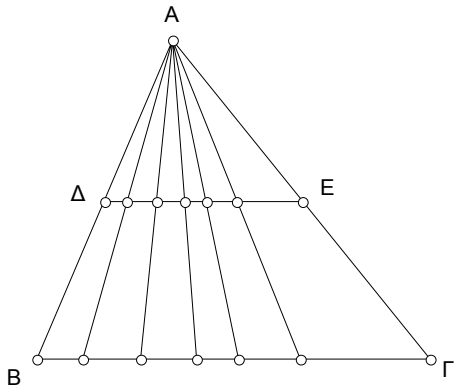
ΟΜΑΔΑ Ε3

1. Συγκρίνετε τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 που περικλείεται από τις καμπύλες των συναρτήσεων f(x)=2ημχ+5 και g(x)=2ημχ+6 και τις ευθείες χ=0 και χ=2π και Ω_2, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h(x)=1, z(x)=2 και τις ίδιες ευθείες χ=0 και χ=2π. Τι ισχύει;

$\Omega_1 < \Omega_2$ □ $\Omega_1 > \Omega_2$ □ $\Omega_1 = \Omega_2$ □



2. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ έχουν ίδιο πλήθος σημείων;



ΝΑΙ □ ΟΧΙ □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

Αναλυτικά Στατιστικά Στοιχεία

II. Αναλυτικά Στατιστικά Στοιχεία της Έρευνας για το 1ο και 2ο Ερωτηματολόγιο.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1ο

ΠΕΡΙΟΧΗ			
		Frequency	Percent
Valid	ναι	113	71,5
	όχι	45	28,5
	Total	158	100,0

ΙΔΙΟΤΗΤΑ			
		Frequency	Percent
Valid	Μαθητής	73	46,2
	Μαθήτρια	85	53,8
	Total	158	100,0

ΤΑΞΗ			
		Frequency	Percent
Valid	Α	48	30,4
	Β	62	39,2
	Γ	48	30,4
	Total	158	100,0

ΒΑΘΜΟΣ			
		Frequency	Percent
Valid	10-12	12	7,6
	13-15	40	25,3
	16-18	52	32,9
	19-20	54	34,2
	Total	158	100,0

ΟΜΑΔΑ Α

Statistics			
	Mean	Median	Std. Deviation
Α1_ΦΑΝΤΑΣΙΑ	3,22	3,00	1,06
Α1_ΛΟΓΙΚΗ	1,46	1,00	,93
Α1_ΕΜΠΕΙΡΙΑ	2,30	2,00	,92
Α1_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	4,41	5,00	,95
Α1_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ	3,62	4,00	1,01

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
Α1_ΦΑΝΤΑΣΙΑ	158	0	3,22	1,06
Α1_ΛΟΓΙΚΗ	158	0	1,46	,93
Α1_ΕΜΠΕΙΡΙΑ	158	0	2,30	,92
Α1_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	158	0	4,41	,95
Α1_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ	158	0	3,62	1,01

Α1_ΦΑΝΤΑΣΙΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	**3**	70	44,3	44,3	44,3
	4	39	24,7	24,7	69,0
	5	19	12,0	12,0	81,0
	2	17	10,8	10,8	91,8
	1	13	8,2	8,2	100,0
	Total	158	100,0	100,0	

A1_ΛΟΓΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	116	73,4	73,4	73,4
	2	24	15,2	15,2	88,6
	3	9	5,7	5,7	94,3
	4	5	3,2	3,2	97,5
	5	4	2,5	2,5	100,0
	Total	158	100,0	100,0	

A1_ΕΜΠΕΙΡΙΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	94	59,5	59,5	59,5
	3	28	17,7	17,7	77,2
	1	20	12,7	12,7	89,9
	4	9	5,7	5,7	95,6
	5	7	4,4	4,4	100,0
	Total	158	100,0	100,0	

A1_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	100	63,3	63,3	63,3
	4	34	21,5	21,5	84,8
	3	16	10,1	10,1	94,9
	1	4	2,5	2,5	97,5
	2	4	2,5	2,5	100,0
	Total	158	100,0	100,0	

A1_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	4	71	44,9	44,9	44,9
	3	35	22,2	22,2	67,1
	5	28	17,7	17,7	84,8
	2	19	12,0	12,0	96,8
	1	5	3,2	3,2	100,0
	Total	158	100,0	100,0	

QUESTIONNAIRE 1rst - QUESTION 2 ORIGINAL

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
A2_1	152	6	6,61	2,76
A2_2	152	6	2,35	1,97
A2_3	152	6	3,79	2,10
A2_4	152	6	3,37	2,17
A2_5	152	6	6,28	2,51
A2_6	152	6	7,87	2,04
A2_7	152	6	6,59	2,30
A2_8	152	6	5,20	2,62
A2_9	152	6	6,26	2,49
A2_10	152	6	6,53	2,32

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
Α2_ΦΑΝΤΑ	152	6	3,31	1,38
Α2_ΛΟΓΙΚ	152	6	2,36	,57
Α2_ΕΜΠΕΙ	152	6	2,28	,59
Α2_ΑΙΣΘΗ	152	6	3,93	1,02
Α2_ΔΙΑΙΣ	152	6	3,13	,83

Frequency Table

Α2_ΦΑΝΤΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	**5,0**	35	22,2	23,0	23,0
	3,0	21	13,3	13,8	36,8
	2,0	15	9,5	9,9	46,7
	3,5	15	9,5	9,9	56,6
	4,0	15	9,5	9,9	66,4
	2,5	14	8,9	9,2	75,7
	4,5	14	8,9	9,2	84,9
	1,5	9	5,7	5,9	90,8
	,5	7	4,4	4,6	95,4
	1,0	7	4,4	4,6	100,0
	Total	152	96,2	100,0	
Missing	**System**	6	3,8		
Total		158	100,0		

A2_ΛΟΓΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2,67	21	13,3	13,8	13,8
	2,17	17	10,8	11,2	25,0
	2,00	15	9,5	9,9	34,9
	2,50	15	9,5	9,9	44,7
	3,00	15	9,5	9,9	54,6
	1,67	13	8,2	8,6	63,2
	2,83	13	8,2	8,6	71,7
	2,33	12	7,6	7,9	79,6
	1,50	8	5,1	5,3	84,9
	1,83	5	3,2	3,3	88,2
	3,17	4	2,5	2,6	90,8
	3,33	4	2,5	2,6	93,4
	1,33	3	1,9	2,0	95,4
	1,00	2	1,3	1,3	96,7
	1,17	2	1,3	1,3	98,0
	3,50	1	,6	,7	98,7
	3,67	1	,6	,7	99,3
	3,83	1	,6	,7	100,0
	Total	152	96,2	100,0	
Missing	System	6	3,8		
Total		158	100,0		

A2_ΕΜΠΕΙΡΙΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2,33	21	13,3	13,8	13,8
	1,67	18	11,4	11,8	25,7
	2,00	17	10,8	11,2	36,8
	1,83	15	9,5	9,9	46,7
	2,17	14	8,9	9,2	55,9
	2,83	13	8,2	8,6	64,5
	2,50	12	7,6	7,9	72,4
	1,50	11	7,0	7,2	79,6
	3,00	8	5,1	5,3	84,9
	2,67	6	3,8	3,9	88,8
	3,17	4	2,5	2,6	91,4
	3,50	4	2,5	2,6	94,1
	1,33	3	1,9	2,0	96,1
	3,33	3	1,9	2,0	98,0
	3,67	1	,6	,7	98,7
	3,83	1	,6	,7	99,3
	4,50	1	,6	,7	100,0
	Total	152	96,2	100,0	
Missing	System	6	3,8		
Total		158	100,0		

A2_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5,0	41	25,9	27,0	27,0
	4,5	31	19,6	20,4	47,4
	4,0	24	15,2	15,8	63,2
	3,5	19	12,0	12,5	75,7
	3,0	18	11,4	11,8	87,5
	2,0	7	4,4	4,6	92,1
	2,5	7	4,4	4,6	96,7
	1,5	3	1,9	2,0	98,7
	,5	2	1,3	1,3	100,0
	Total	152	96,2	100,0	
Missing	System	6	3,8		
Total		158	100,0		

A2_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3,00	22	13,9	14,5	14,5
	3,25	20	12,7	13,2	27,6
	3,50	18	11,4	11,8	39,5
	3,75	17	10,8	11,2	50,7
	2,75	13	8,2	8,6	59,2
	4,00	12	7,6	7,9	67,1
	2,50	9	5,7	5,9	73,0
	2,25	8	5,1	5,3	78,3
	4,25	8	5,1	5,3	83,6
	2,00	7	4,4	4,6	88,2
	4,50	4	2,5	2,6	90,8
	1,25	3	1,9	2,0	92,8
	1,75	3	1,9	2,0	94,7
	4,75	3	1,9	2,0	96,7
	,75	2	1,3	1,3	98,0
	1,00	2	1,3	1,3	99,3
	1,50	1	,6	,7	100,0
	Total	152	96,2	100,0	
Missing	System	6	3,8		
Total		158	100,0		

Statistics					
	N		Mean	Median	Std. Deviation
	Valid	Missing			
A5_Αυστηρότητα	128	30	2,88	2,00	1,32
A5_Προσέγγιση	128	30	2,88	3,00	1,35
A5_Ακρίβεια	128	30	1,90	1,00	1,20
A5_Πιθανότητα	128	30	3,85	4,00	1,06
A5_Σχετικότητα	128	30	3,52	4,00	1,32

A5_Αυστηρότητα					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	48	30,4	37,5	37,5
	4	24	15,2	18,8	56,3
	5	21	13,3	16,4	72,7
	3	18	11,4	14,1	86,7
	1	17	10,8	13,3	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A5_Προσέγγιση					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	34	21,5	26,6	26,6
	1	26	16,5	20,3	46,9
	2	26	16,5	20,3	67,2
	4	22	13,9	17,2	84,4
	5	20	12,7	15,6	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A5_Ακρίβεια					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	68	43,0	53,1	53,1
	2	29	18,4	22,7	75,8
	3	14	8,9	10,9	86,7
	4	10	6,3	7,8	94,5
	5	7	4,4	5,5	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A5_Πιθανότητα					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	4	44	27,8	34,4	34,4
	5	41	25,9	32,0	66,4
	3	31	19,6	24,2	90,6
	2	7	4,4	5,5	96,1
	1	5	3,2	3,9	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A5

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
A5_ΛΟΓΙΚ	128	30	2,39	,95
A5_Σχετικότητα	128	30	3,52	1,32
A5_Διαίσθηση	128	30	3,36	,74

A5_ΛΟΓΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1,50	53	33,5	41,4	41,4
	2,50	20	12,7	15,6	57,0
	3,00	19	12,0	14,8	71,9
	2,00	12	7,6	9,4	81,3
	3,50	11	7,0	8,6	89,8
	4,50	9	5,7	7,0	96,9
	4,00	4	2,5	3,1	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A5_Σχετικότητα					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	41	25,9	32,0	32,0
	3	31	19,6	24,2	56,3
	4	26	16,5	20,3	76,6
	2	18	11,4	14,1	90,6
	1	12	7,6	9,4	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A5_ΔΙΑΣΘΗΣΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3,50	47	29,7	36,7	36,7
	2,50	18	11,4	14,1	50,8
	3,00	18	11,4	14,1	64,8
	4,00	18	11,4	14,1	78,9
	4,50	17	10,8	13,3	92,2
	2,00	7	4,4	5,5	97,7
	1,50	3	1,9	2,3	100,0
	Total	128	81,0	100,0	
Missing	System	30	19,0		
Total		158	100,0		

A6

A6_Άλγεβρα					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	2	1,3	100,0	100,0
Missing	System	156	98,7		
Total		158	100,0		

A6_Γεωμετρία					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	33	20,9	100,0	100,0
Missing	System	125	79,1		
Total		158	100,0		

A6_Στατιστική			
		Frequency	Percent
Missing	System	158	100,0

A6_Πιθανότητες					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	10	6,3	100,0	100,0
Missing	System	148	93,7		
Total		158	100,0		

A6_Διαφ_Λογισμό					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	6	3,8	100,0	100,0
Missing	System	152	96,2		
Total		158	100,0		

A7

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
A7_τροχός	125	33	3,04	1,61
A7_φωτογραφία	125	33	3,94	,98
A7_τηλέφωνο	125	33	2,96	1,25
A7_αεροπλάνο	125	33	2,40	1,28
A7_DNA	126	32	2,85	1,61

Frequency Table

A7_τροχός					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	41	25,9	32,8	32,8
	1	33	20,9	26,4	59,2
	3	24	15,2	19,2	78,4
	2	19	12,0	15,2	93,6
	4	8	5,1	6,4	100,0
	Total	125	79,1	100,0	
Missing	System	33	20,9		
Total		158	100,0		

A7_φωτογραφία					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	4	46	29,1	36,8	36,8
	5	42	26,6	33,6	70,4
	3	25	15,8	20,0	90,4
	2	11	7,0	8,8	99,2
	1	1	,6	,8	100,0
	Total	125	79,1	100,0	
Missing	System	33	20,9		
Total		158	100,0		

A7_τηλέφωνο					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	32	20,3	25,6	25,6
	4	31	19,6	24,8	50,4
	2	28	17,7	22,4	72,8
	1	19	12,0	15,2	88,0
	5	15	9,5	12,0	100,0
	Total	125	79,1	100,0	
Missing	System	33	20,9		
Total		158	100,0		

A7_αεροπλάνο					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	38	24,1	30,4	30,4
	2	38	24,1	30,4	60,8
	3	20	12,7	16,0	76,8
	4	19	12,0	15,2	92,0
	5	10	6,3	8,0	100,0
	Total	125	79,1	100,0	
Missing	System	33	20,9		
Total		158	100,0		

A7_DNA					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	35	22,2	27,8	27,8
	5	27	17,1	21,4	49,2
	2	26	16,5	20,6	69,8
	3	20	12,7	15,9	85,7
	4	17	10,8	13,5	99,2
	9	1	,6	,8	100,0
	Total	126	79,7	100,0	
Missing	System	32	20,3		
Total		158	100,0		

Frequencies

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
Α8_Δρόμοι	121	37	4,68	2,23
Α8_Άλματα	121	37	3,52	1,96
Α8_Ρίψεις	121	37	3,84	2,11
Α8_Ομαδικά	121	37	4,41	2,63
Α8_Ενόργανη	122	36	4,33	2,26
Α8_Σκι_Τένις_Γκολφ	121	37	4,79	2,07
Α8_Πάλη_Άρση_Βαρών	121	37	6,09	1,87
Α8_Ιστιοπλοΐα	121	37	4,61	2,49

Frequency Table

Α8_Δρόμοι					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	6	19	12,0	15,7	15,7
	5	17	10,8	14,0	29,8
	3	16	10,1	13,2	43,0
	4	15	9,5	12,4	55,4
	7	15	9,5	12,4	67,8
	8	15	9,5	12,4	80,2
	1	14	8,9	11,6	91,7
	2	10	6,3	8,3	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

A8_Άλματα					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	23	14,6	19,0	19,0
	1	21	13,3	17,4	36,4
	3	21	13,3	17,4	53,7
	4	21	13,3	17,4	71,1
	5	14	8,9	11,6	82,6
	6	10	6,3	8,3	90,9
	7	6	3,8	5,0	95,9
	8	5	3,2	4,1	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

A8_Ρίψεις					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	24	15,2	19,8	19,8
	2	23	14,6	19,0	38,8
	5	17	10,8	14,0	52,9
	1	16	10,1	13,2	66,1
	4	13	8,2	10,7	76,9
	7	11	7,0	9,1	86,0
	6	10	6,3	8,3	94,2
	8	6	3,8	5,0	99,2
	9	1	,6	,8	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

A8_Ομαδικά					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	30	19,0	24,8	24,8
	8	22	13,9	18,2	43,0
	6	15	9,5	12,4	55,4
	5	14	8,9	11,6	66,9
	3	12	7,6	9,9	76,9
	7	12	7,6	9,9	86,8
	2	8	5,1	6,6	93,4
	4	8	5,1	6,6	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

A8_Ενόργανη					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	20	12,7	16,4	16,4
	4	20	12,7	16,4	32,8
	5	20	12,7	16,4	49,2
	1	16	10,1	13,1	62,3
	7	14	8,9	11,5	73,8
	8	13	8,2	10,7	84,4
	6	11	7,0	9,0	93,4
	3	8	5,1	6,6	100,0
	Total	122	77,2	100,0	
Missing	System	36	22,8		
Total		158	100,0		

A8_Σκι_Τένις_Γκολφ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	6	25	15,8	20,7	20,7
	4	17	10,8	14,0	34,7
	5	17	10,8	14,0	48,8
	2	14	8,9	11,6	60,3
	7	14	8,9	11,6	71,9
	3	13	8,2	10,7	82,6
	8	13	8,2	10,7	93,4
	1	8	5,1	6,6	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

A8_Πάλη_Άρση_Βαρών					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	8	33	20,9	27,3	27,3
	7	32	20,3	26,4	53,7
	6	19	12,0	15,7	69,4
	5	12	7,6	9,9	79,3
	3	10	6,3	8,3	87,6
	4	8	5,1	6,6	94,2
	2	6	3,8	5,0	99,2
	1	1	,6	,8	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

A8_Ιστιοπλοΐα					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	8	24	15,2	19,8	19,8
	4	17	10,8	14,0	33,9
	1	16	10,1	13,2	47,1
	2	16	10,1	13,2	60,3
	3	15	9,5	12,4	72,7
	7	15	9,5	12,4	85,1
	6	10	6,3	8,3	93,4
	5	8	5,1	6,6	100,0
	Total	121	76,6	100,0	
Missing	System	37	23,4		
Total		158	100,0		

ΟΜΑΔΑ Β

Frequencies
Frequency Table

B1					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΝΑΙ	118	74,7	75,2	75,2
	ΟΧΙ	39	24,7	24,8	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B2					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Το ίδιο	69	43,7	43,9	43,9
	Περισσότερο	52	32,9	33,1	77,1
	Λιγότερο	36	22,8	22,9	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B3					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΟΧΙ	93	58,9	59,2	59,2
	ΝΑΙ	64	40,5	40,8	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B4					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΝΑΙ	143	90,5	91,1	91,1
	ΟΧΙ	14	8,9	8,9	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B5					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Και τα δύο	87	55,1	56,5	56,5
	Με Παραδ.& Δοκ.	44	27,8	28,6	85,1
	Λογική	23	14,6	14,9	100,0
	Total	154	97,5	100,0	
Missing	System	4	2,5		
Total		158	100,0		

B6					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λίγες φορές	92	58,2	58,6	58,6
	Πολλές φορές	64	40,5	40,8	99,4
	Ποτέ	1	,6	,6	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B7					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λίγο	97	61,4	61,8	61,8
	Πολύ	56	35,4	35,7	97,5
	Καθόλου	4	2,5	2,5	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B8					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΝΑΙ	128	81,0	81,5	81,5
	ΟΧΙ	29	18,4	18,5	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B9					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Λίγο	112	70,9	71,3	71,3
	Πολύ	26	16,5	16,6	87,9
	Καθόλου	19	12,0	12,1	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

B10					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΝΑΙ	101	63,9	64,3	64,3
	ΟΧΙ	56	35,4	35,7	100,0
	Total	157	99,4	100,0	
Missing	System	1	,6		
Total		158	100,0		

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 2ο

Frequencies
Frequency Table

ΠΕΡΙΟΧΗ					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ναι**	34	56,7	56,7	56,7
	όχι	26	43,3	43,3	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΤΑΞΗ					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**ΑΒΓ**	23	38,3	38,3	38,3
		13	21,7	21,7	60,0
	ΑΒ	7	11,7	11,7	71,7
	ΒΓ	5	8,3	8,3	80,0
	Γ	5	8,3	8,3	88,3
	ΑΓ	4	6,7	6,7	95,0
	Β	3	5,0	5,0	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤΗΣΗ 1					
		Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
Valid	**λογική σκέψη**	34	56,7	58,6	58,6
	και τα δύο το ίδιο	17	28,3	29,3	87,9
	διαισθητική σκέψη	7	11,7	12,1	100,0
	Total	58	96,7	100,0	
Missing	**System**	2	3,3		
Total		60	100,0		

QUESTION 2

ΕΡΩΤ_2_1					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	22	36,7	100,0	100,0
Missing	System	38	63,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_2					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	7	11,7	100,0	100,0
Missing	System	53	88,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_3					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	14	23,3	100,0	100,0
Missing	System	46	76,7		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_4					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	26	43,3	100,0	100,0
Missing	System	34	56,7		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_2_5					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	1	1,7	100,0	100,0
Missing	System	59	98,3		
Total		60	100,0		

QUESTION 3

ΕΡΩΤ_3_1					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	4	6,7	100,0	100,0
Missing	System	56	93,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_3_2					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	17	28,3	100,0	100,0
Missing	System	43	71,7		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_3_3					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	25	41,7	100,0	100,0
Missing	System	35	58,3		
Total		60	100,0		

ΕΡΩΤ_3_4					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	16	26,7	100,0	100,0
Missing	System	44	73,3		
Total		60	100,0		

QUESTION 4

ΕΡΩΤΗΣΗ 4					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΜΕΤΡΙΟ	22	36,7	36,7	36,7
	ΜΕΓΑΛΟ	21	35,0	35,0	71,7
	ΜΙΚΡΟ	12	20,0	20,0	91,7
	ΑΠΟΛΥΤΟ	4	6,7	6,7	98,3
	ΚΑΘΟΛΟΥ	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

QUESTION 5

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
ΕΡΩΤ_5_1	60	0	2,02	1,30
ΕΡΩΤ_5_2	60	0	3,98	1,53
ΕΡΩΤ_5_3	60	0	3,13	1,08
ΕΡΩΤ_5_4	60	0	4,75	1,40
ΕΡΩΤ_5_5	60	0	4,58	1,45
ΕΡΩΤ_5_6	60	0	2,53	1,48

ΕΡΩΤ_5_1					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	28	46,7	46,7	46,7
	2	17	28,3	28,3	75,0
	3	7	11,7	11,7	86,7
	5	4	6,7	6,7	93,3
	4	3	5,0	5,0	98,3
	6	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤ_5_2					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	4	17	28,3	28,3	28,3
	5	15	25,0	25,0	53,3
	6	10	16,7	16,7	70,0
	1	6	10,0	10,0	80,0
	2	6	10,0	10,0	90,0
	3	6	10,0	10,0	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤ_5_3					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	28	46,7	46,7	46,7
	2	12	20,0	20,0	66,7
	4	9	15,0	15,0	81,7
	5	7	11,7	11,7	93,3
	1	3	5,0	5,0	98,3
	6	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤ_5_4					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	6	26	43,3	43,3	43,3
	4	16	26,7	26,7	70,0
	5	9	15,0	15,0	85,0
	3	5	8,3	8,3	93,3
	1	3	5,0	5,0	98,3
	2	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤ_5_5					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	21	35,0	35,0	35,0
	6	18	30,0	30,0	65,0
	4	9	15,0	15,0	80,0
	3	7	11,7	11,7	91,7
	1	5	8,3	8,3	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

ΕΡΩΤ_5_6					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	24	40,0	40,0	40,0
	1	15	25,0	25,0	65,0
	3	7	11,7	11,7	76,7
	4	6	10,0	10,0	86,7
	5	4	6,7	6,7	93,3
	6	4	6,7	6,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

QUESTION 6

Statistics				
	N		Mean	Std. Deviation
	Valid	Missing		
EP6_ΦΑΝΤΑΣΙΑ	60	0	3,02	1,08
EP6_ΛΟΓΙΚΗ	60	0	1,35	,63
EP6_ΕΜΠΕΙΡΙΑ	60	0	3,23	1,25
EP6_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ	60	0	4,37	,96
EP6_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ	60	0	3,03	1,18

EP6_ΦΑΝΤΑΣΙΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	18	30,0	30,0	30,0
	2	17	28,3	28,3	58,3
	4	16	26,7	26,7	85,0
	5	5	8,3	8,3	93,3
	1	4	6,7	6,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

EP6_ΛΟΓΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	43	71,7	71,7	71,7
	2	14	23,3	23,3	95,0
	3	2	3,3	3,3	98,3
	4	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

EP6_ΕΜΠΕΙΡΙΑ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	18	30,0	30,0	30,0
	2	13	21,7	21,7	51,7
	5	13	21,7	21,7	73,3
	4	11	18,3	18,3	91,7
	1	5	8,3	8,3	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

EP6_ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5	36	60,0	60,0	60,0
	4	15	25,0	25,0	85,0
	3	5	8,3	8,3	93,3
	2	3	5,0	5,0	98,3
	1	1	1,7	1,7	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

EP6_ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	17	28,3	28,3	28,3
	4	17	28,3	28,3	56,7
	2	13	21,7	21,7	78,3
	1	7	11,7	11,7	90,0
	5	6	10,0	10,0	100,0
	Total	60	100,0	100,0	

Αυτό που σήμερα είναι αποδεδειγμένο,
κάποτε δεν ήταν παρά γέννημα της φαντασίας
Γουίλιαμ Μπλέϊκ