ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

« Η Λογιστική από την Αρχαιότητα μέχρι την Αναγέννηση: προβλήματα και μεθοδολογία μέσα από μαθηματικά κείμενα »

ΧΑΪΤΑΝΤΟΓΛΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Δ200702

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΛΑΠΠΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ

Αναπληρωτής καθηγητής Ε.Κ.Π.Α

Αθήνα

2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Διονύσιο Λάππα για την συνεργασία και την βοήθεια του στην παρούσα εργασία. Επίσης τους κυρίους Ευστάθιο Γιαννακούλια και Παναγιώτη Σπύρου για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή, καθώς και όποιον άλλο με βοήθησε στην εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ…… 6

2. ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ …….. 6

3. ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ……. 8

4. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ…… 10

5. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ …… 12

   i. ΤΟ ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ…… 12

   ii. ΤΟ ΚΙΝΕΖΙΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΗΣΤΗΜΑ ……15

   iii. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΓΙΑ……18

   iv. ΤΟ ΑΙΓΥΠΤΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ……20

   v. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ……22

   vi. ΤΟ ΕΒΡΑΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ……25

   vii. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΡΜΕΝΙΩΝ……26

   viii. ΤΟ ΡΩΜΑΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ……28

   ix. ΤΑ ΙΝΔΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΚΑΙ ΤΟ «ΤΑΞΙΔΙ» ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΔΥΣΗ……30

6. ΜΕΓΑΛΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ……33

7. Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΑΒΑΚΑ……35

8. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ……47

   i. ΠΡΟΣΘΕΣΗ……47

   ii. ΑΦΑΙΡΕΣΗ……50

   iii. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ……52

   iv. ΔΙΑΙΡΕΣΗ……70

   v. ΕΞΑΓΩΓΗ ΡΙΖΑΣ……76

9. LEONARDO PISANO (FIBONACCI)……..……81

10. Η ΜΕΘΟΔΟΣ «elchataym» ……85

11. ΕΠΙΡΡΟΕΣ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΚΑΙ ΑΡΑΒΩΝ ΣΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ FIBANACCI……..……87

12. ΟΙ ΠΡΟΣΕΓΚΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ……89

13. "ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ-ΑΧΑ" ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ LIBER ABACI ……..….94

14. ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟ LIBER ABACI……98

15. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ LIBER ABACI ……104

16. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……..……112

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την εξέλιξη της λογιστικής από τα αρχαία χρόνια μέχρι την εδραίωση της στην Δύση μέσα από τα βιβλία του Ιταλού μαθηματικού Leonardo Pisano, γνωστότερου ως Fibonacci. Θα αναφερθούμε εκτενώς στις θεμελιώδεις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, και εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας) . Θα μιλήσουμε για τα αριθμητικά συστήματα και τους τρόπους υπολογισμού αρχαίων πολιτισμών όπως Αιγύπτιων, Βαβυλωνίων, Κινέζων καθώς και των Ελλήνων και των Ρωμαίων και θα καταλήξουμε στην λογιστική τέχνη των Αράβων και των Ινδών και στην άμεση σύνδεσή τους με τα έργα του Fibonacci. Θα αναφερθούμε στα λογιστικά προβλήματα και τις μεθοδολογίες , που υπάρχουν στα έργα του, κυρίως στο Liber abbaci , και θα αναζητήσουμε σε αρχαία κείμενα τις ρίζες αυτών.

ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Λογιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τον τρόπο που γίνονται οι υπολογισμοί. Σε αντίθεση με την αριθμητική , η λογιστική είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις πρακτικές εφαρμογές.

Ο Γέμινος (Πρόκλος, «Υπόμνημα εις το πρώτο του Ευκλείδου Στοιχείον») δίνει στους αριθμούς ονόματα τα οποία προέρχονται από μετρούμενα αντικείμενα, όπως *μηλίτης* (από το μῆλον, δηλαδή το πρόβατο ή τον καρπό της μηλιάς), ή φιαλίτης (από την φιάλη). Ο σχολιαστής στο Χαρμίδη αναφέρετε σε αυτά με περισσότερες λεπτομέρειες: «Η λογιστική είναι η επιστήμη που πραγματεύεται τα αριθμημένα αντικείμενα και όχι τους αριθμούς. Δεν εξετάζει τον αριθμό ως προς την ουσία του, αλλά θεωρεί το 1 ως μονάδα και το αριθμημένο αντικείμενο ως αριθμό, π.χ. θεωρεί το 3 ως τριάδα, το 10 ως δεκάδα και εφαρμόζει τα θεωρήματα της αριθμητικής σε τέτοιες ειδικές περιπτώσεις. Έτσι, είναι η *λογιστική* που ερευνά από την μία αυτό που ο Αρχιμήδης ονόμασε βοεικό πρόβλημα, και από την άλλη τους μηλίτες και τους φιαλίτες αριθμούς».

Στην Βυζαντινή εποχή επίσης, έβλεπαν την λογιστική σαν την επιστήμη των υπολογισμών. Την εποχή των Παλαιολόγων έχουν σωθεί η πραγματεία "περί χρυσοποιΐας" τού Νικολάου Βλεμμύδη, και η "ερμηνεία της επιστήμης της χρυσοχοΐας" ενός μοναχού Κοσμά. Όσο καλά οι χρυσοτέχνες γνώριζαν ότι δεν υπήρχε μέθοδος μετατροπής αγενούς μετάλλου σε χρυσό, άλλο τόσο γνώριζαν μεθόδους επαργύρωσης και επιχρύσωσης, με τις οποίες έδιναν όψη αργυρού ή χρυσού σε άλλα μέταλλα ή σε κράματά τους. Επειδή δε τα κράματα των μετάλλων χρησιμοποιούνται τόσο στην αργυροχρυσοχοΐα όσο και τη νομισματοκοπία, είναι αναγκαία η γνώση τρόπων υπολογισμού των αναλογιών, υπό τις οποίες ευρίσκονται τα μέταλλα σε κράματα. Τέτοιου είδους υπολογισμοί και όσοι άλλοι σχετίζονταν με τη σημερινή πρακτική αριθμητική περιλαμβάνονταν στην καλουμένη "λογιστική".

Στην σημερινή εποχή , η Λογιστική έχει χαρακτηριστεί ως η «γλώσσα του εμπορίου». Η σύνδεση της λογιστικής με το εμπόριο φαίνεται και στα μεσαιωνικά χρόνια, όταν ο Fibonacci το 1202 δημοσίευσε το βιβλίο liber abaci (βιβλίο των υπολογισμών ή βιβλίο του άβακα) γεμάτο με τις μαθηματικές γνώσεις που είχε περισυλλέξει στα ταξίδια του. Το βιβλίο αυτό, το προόριζε για εμπόρους, για αυτό εξηγεί λεπτομερειακά τις έννοιες ώστε να μπορέσουν να τις καταλάβουν με συνοδεία παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή του εμπορίου, την τιμή των αγαθών, τον υπολογισμό των κερδών και την μετατροπή σε ξένο νόμισμα.

Στην αρχαία Αίγυπτο βλέπουμε πως μέθοδοι υπολογισμού (κυρίως λογισμός με κλάσματα) που αναφέρονται στο φημισμένο Πάπυρο του Rind εφαρμόζονται σε κείμενα οικονομικού ενδιαφέροντος, όπως ο πάπυρος του Καχούν και ο πάπυρος «Αναστάση Ι». Στον τελευταίο, ένας στρατιωτικός γραφέας χλευάζετε από τον συγγραφέα λέγοντάς του: “σου αναθέτουν να σκάψεις μια δεξαμενή. Έρχεσαι να με ρωτήσεις για τα σιτηρέσια των στρατιωτικών, και μου λες «λογάριασε τα». Η λογιστική δηλαδή χρησιμοποιείτε για να λύσει ποικίλα πρακτικά προβλήματα του κράτους.

Παρόλο την διάκριση της λογιστικής, της επιστήμης των πρακτικών υπολογισμών των εμπόρων και των λογιστών, και της αριθμητικής, την επιστήμης

των ιδιοτήτων των αριθμών, κατά την περίοδο της αναγέννησης οι 2 αυτοί τομείς συγχωνεύονται.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ

Ο ***Πλάτωνας*** διαχωρίζει την λογιστική από την αριθμητική (λογισμόν και αριθμόν). Η αριθμητική για τον Πλάτωνα έχει την σημασία της θεωρίας αριθμών, ενώ η λογιστική είναι η "τέχνη των υπολογισμών". Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης στα ελληνικά μαθηματικά, και όπως αναφέρει ο Πλάτωνας σε διάφορα έργα του (Γοργίας , Θεαίτητος), είναι καθιερωμένη στην εποχή του. Στην Πολιτεία (Πολιτεία, vii. 525 B,C) αναφέρει επίσης ότι όσοι πρόκειται να κυβερνήσουν την πόλη πρέπει να κατανοήσουν την λογιστική όχι με την ευρεία έννοια της χρησιμοποίησης της στις εμπορικές συναλλαγές, άλλα μόνο χάρη της γνώσης, έως ότου είναι σε θέση να συλλάβουν την έννοια του αριθμού καθαυτή, μέσω της σκέψης και μόνο. Η τέχνη του υπολογισμού απλώς προπαρασκευάζει για την αληθινή επιστήμη.

Αναφέρεται ακόμα ο Πλάτωνας στους "*φύσει λογιστικούς*", δηλαδή σε όσους διαθέτουν φυσικό χάρισμα για υπολογισμούς, και επισημαίνει ότι έχουν ταλέντο και σε μάθηση κάθε είδους, ενώ ακόμη και οι βραδύνοες αν ασκηθούν στους υπολογισμούς οξύνουν το πνεύμα τους.

Επίσης, ο ***Αρχύτας*** αναφέρει την *λογιστική* με την ίδια έννοια. Η τέχνη του υπολογισμού, γράφει, φαίνεται ότι υπερτερεί αρκετά σε σχέση με τις άλλες τέχνες ως προς την σοφία ή την φιλοσοφία, μάλιστα μοιάζει να αποσαφηνίζει τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται καλύτερα από την Γεωμετρία. Επίσης συχνά επιτυγχάνει εκεί που η γεωμετρία αποτυγχάνει.

Ο ***Γέμινος*** (Πρόκλος, «Υπόμνημα εις το πρώτο του Ευκλείδου Στοιχείων») αναφέρει ότι η λογιστική δεν εξετάζει τις ιδιότητες των αριθμών άλλα την σχέση τους με τα αισθητά αντικείμενα.

Ο ***σχολιαστής στον Χαρμίδη*** αναφέρει ότι η λογιστική είναι η επιστήμη που πραγματεύεται τα αριθμημένα αντικείμενα και όχι τους αριθμούς. Επίσης αναφορικά με άλλα είδη η λογιστική ερευνά τους αριθμούς αισθητών σωμάτων αντιμετωπίζοντας τα ως ιδεατά. Αναφέρει επίσης για την λογιστική ότι "αντικείμενο μελέτης της είναι οτιδήποτε είναι αριθμημένο. Οι κλάδοι της περιλαμβάνουν τις λεγόμενες ελληνικές και αιγυπτιακές μεθόδους για πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, τις προσθέσεις και τις αναλύσεις κλασμάτων, καθώς και μεθόδους εξερεύνησης της θεωρίας των τρίγωνων και πολυγώνων αριθμών αναφορικά με το αντικείμενο μελέτης ειδικών προβλημάτων."

Στον Γοργία του Πλάτωνα, ο ***Σωκράτης*** αποσαφηνίζει το αντικείμενο της λογιστικής[1] :

«*Ποια τέχνη είναι αυτή που ονομάζεται λογιστική; Πρέπει να πω ότι είναι επίσης μία από αυτές που επηρεάζονται ολικά από την ομιλία. Και αν με ρωτήσεις ξανά: με τι ασχολείται; Πρέπει να πω, με όλο τον σεβασμό, ότι η αριθμητική και η λογιστική ασχολούνται με το ίδιο αντικείμενο, τους περιττούς και τους άρτιους, αλλά διαφέρουν στο ότι η λογιστική εξετάζει τις αριθμητικές τιμές των περιττών και άρτιων αριθμών, όχι μονούς τους αλλά και την σχέση μεταξύ τους.*». Αντίθετα η αριθμητική εξετάζει το πλήθος των μονάδων των περιττών και άρτιων αριθμών.

[1] Πλάτωνας , Γοργίας 451-c

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Ο D.E.Smith στο “History Of Mathematics” αναφέρει ότι αυτό που τα αρχαία χρόνια ονομαζόταν λογιστική είναι οι τέσσερεις θεμελιώδεις πράξεις της αριθμητικής (πρόσθεση, αφαίρεση πολλαπλασιασμός και διαίρεση) . Ο αριθμός όμως τον πράξεων μπορεί να ποικίλει. Στο Crafte of Nombrynge (1300) αριθμούνται επτά θεμελιώδης πράξεις.

1. Πρόσθεση
2. Αφαίρεση
3. Διπλασιασμός (duplacion)
4. Υποδιπλασιασμός (dimydicion)
5. Πολλαπλασιασμός
6. Διαίρεση
7. Εξαγωγή ρίζας

Ο Sacrobosco (1250) και ο Michael Scott αναφέρουν εννέα πράξεις:

1. Αρίθμηση (numeration)
2. Πρόσθεση
3. Αφαίρεση
4. Διπλασιασμός (duplacion)
5. Μεσολάβηση (mediation) ή διχοτόμηση(halving)
6. Πολλαπλασιασμός
7. Διαίρεση
8. Πρόοδο (progression)
9. Εξαγωγή ρίζας .

Οι περισσότεροι μεσαιωνικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τις εννέα αυτές πράξεις. Το 1494 ο Pacioli μείωσε τον αριθμό σε επτά ύστερα οι πράξεις μειώθηκαν σε έξι , σε πέντε και μέχρι το 16^{ο} αιώνα οι περισσότεροι συγγραφείς χρησιμοποιούσαν τέσσερεις πράξεις. Συνήθως σαν πέμπτη πράξη οι συγγραφείς θεωρούσαν την αρίθμηση (numeration) , που περιελάμβανε και τον συμβολισμό (notation), δηλαδή την γραφή των αριθμών. Ένας από τους πρώτους που μείωσε τις

πράξεις σε τέσσερεις ήταν ο Gemma Frisius το 1540. Γύρω στο 1500 ο Elia Misrachi μείωσε ακόμα περισσότερο των αριθμό των θεμελιωδών πράξεων, σε τρείς. Θεωρούσε τον πολλαπλασιασμό σαν μια ειδική μορφή πρόσθεσης.

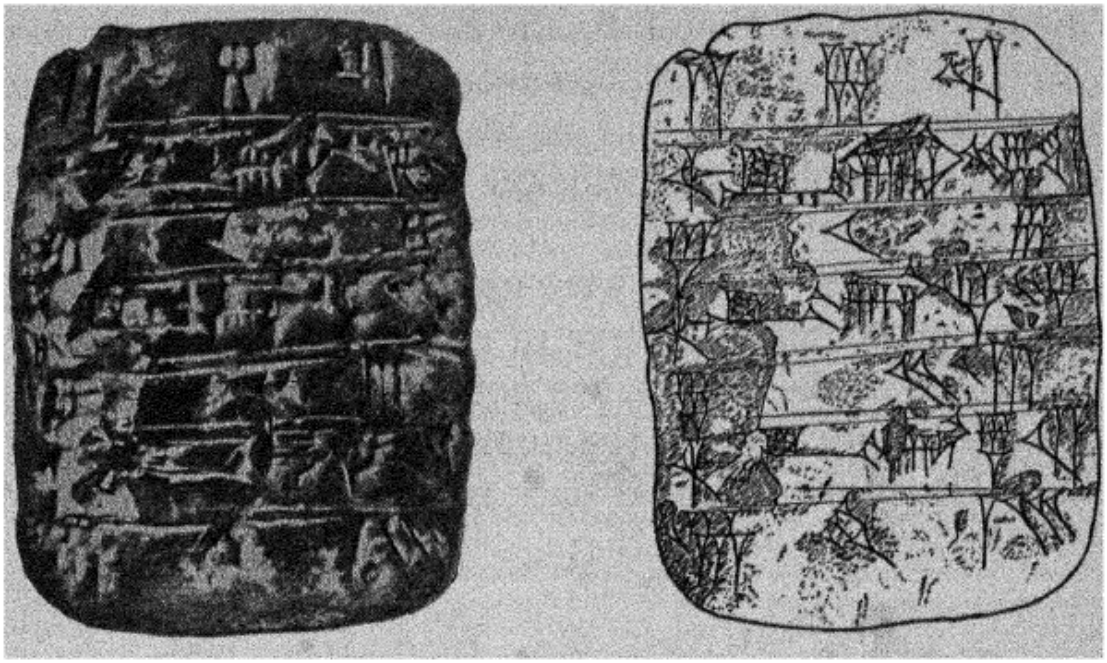
Οι βασικοί λόγοι που ο διπλασιασμός και η διχοτόμηση (υποδιπλασιασμός) βρίσκονταν στις θεμελιώδης πράξεις μέχρι τον 16^{ο} αιώνα είναι δύο. Αρχικά Οι Αιγύπτιοι πολλαπλασίαζαν συχνά με το συνεχή διπλασιασμό. Οι αιγυπτιακοί πάπυροι είχαν πίνακες διπλασιασμού και υποδιπλασιασμού. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι στον άβακα τέτοιοι υπολογισμοί είναι εύκολοι. Όσο ο άβακας ήταν σε λειτουργία, οι πράξεις αυτές εξακολουθούσαν να χρησιμοποιούνται. Στα πρώτα τυπωμένα Γερμανικά βιβλία της εποχής, σε σχέση με τα βιβλία άλλων χωρών της Ευρώπης, συνεχίστηκε και η χρήση του διπλασιασμού και του υποδιπλασιασμού για τον λόγο ότι σε εκείνη την μεριά της Ευρώπης χρησιμοποιούσαν περισσότερο του άβακα . Επίσης και στα αραβικά κείμενα χρησιμοποιούνται αρκετά πράγμα που επηρέασε και τους ευρωπαίους μεταφραστές.

Η σειρά με την οποία δίνονται οι πράξεις δεν είναι πάντα η ίδια. Η σειρά που ο Fibonacci χρησιμοποιεί στο liber abaci είναι:

- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση
- Πρόσθεση
- αφαίρεση
- και εξαγωγή ρίζας.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

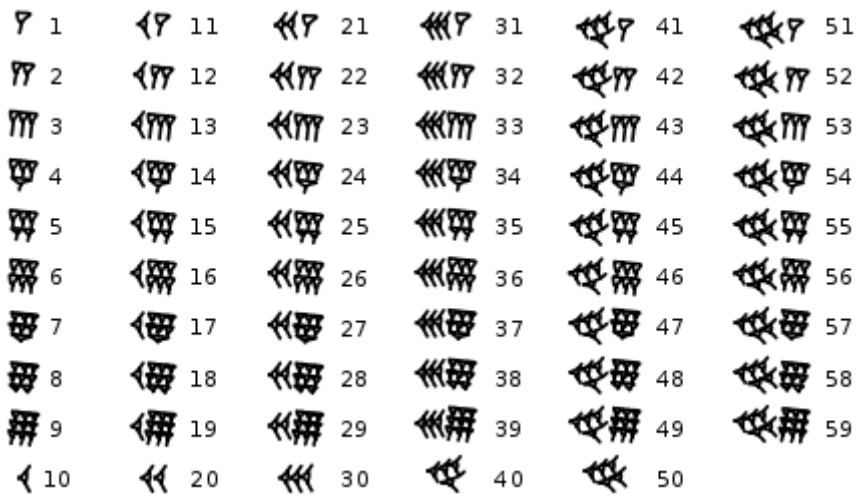
ΤΟ ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ



Οι βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν μια απλή σφηνοειδής γραφή που την παρέλαβαν από τους προγενέστερους τους Σουμέριους. Τα πρώτα τους κείμενα ήταν πάνω σε δέρμα. Αργότερα άρχισαν να γράφουν πάνω σε πλάκες αργίλου χρησιμοποιώντας μια απλή σφήνα. Τις πλάκες αυτές τις έψηναν στον ήλιο ή σε κλίβανο ώστε να αντέχουν στον χρόνο.

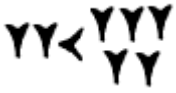
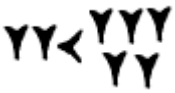
Στον Σουμεροβαβυλονιακό συμβολισμό οι αριθμοί μέχρι το 60 γράφονταν με τον συνήθη δεκαδικό συμβολισμό. Η απλή κατακόρυφη σφήνα είχε την τιμή 1, ενώ η σφήνα με δύο άκρα την τιμή 10.

Έτσι το σύμβολο παριστάνει τον αριθμό 25. Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται οι βαβυλωνιακοί αριθμού από το 1 έως το 50.



Το σύμβολο για το 1 όμως δεν αντιπροσώπευε μόνο το 1, αλλά και το 60 και κάθε πολλαπλάσιο και υποπολλαπλάσιο του 60. Δηλαδή με το συμβολιζόταν και το 60, το 3600, το 12.960.000 και γενικά όλοι οι αριθμοί της μορφής 60^{ν}. Με την σειρά του το σύμβολο για το 10, αντιπροσώπευε όλα τα $10 \cdot 60^{\nu}$, δηλαδή = 600, 36.000… .

Στην πράξη η μη ύπαρξη διαφορετικών συμβόλων για το 1 και το 60 δεν αποτελεί σοβαρή έλλειψη, επειδή η τάξη μεγέθους ήταν συνήθως γνωστή από τα συμφραζόμενα. Σε θεωρητικά όμως προβλήματα η έλλειψη αυτή μπορεί να έχει δυσάρεστες συνέπειές.

Η τιμή ενός συμβόλου στο βαβυλωνιακό σύστημα εξαρτάτε από την θέση του συμβόλου μέσα στο αριθμό. Έτσι στο σύμβολο  οι κατακόρυφες σφήνες που βρίσκονται στην αρχή έχουν τιμή εξηκονταπλάσια τις τιμής καθεμίας από τις υπόλοιπες. Δηλαδή  $=2 \cdot 60 + 15=135$.

Οι βαβυλώνιοι επίσης είχαν και σύμβολο για την *αφαίρεση*. Το σύμβολο που χρησιμοποιούσαν ήταν αποτελούμενο από μια κάθετη και μια οριζόντια σφήνα και είχε την μορφή . Το ονόμαζαν λάλ η λά.

Έτσι το αριθμό 19 που τον θεωρούσαν έναν πολύ άτυχο αριθμό τον συνήθιζαν να το γράφουν ως 20-1. Δηλαδή:

αντί για

Η 19^{η} μέρα του σεληνιακού μήνα ήταν η 49^{η} μέρα από την αρχή του προηγούμενού μήνα και ήταν μια μέρα που η βαβυλώνιοι την απέφευγαν.

Το γεγονός ότι οι βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα μπορεί να είναι τυχαίο γεγονός μπορεί και όχι. Ο Thureau- Dangin θεωρεί ότι η καταγωγή του εξηκονταδικού συστήματος πρέπει να αναζητηθεί στην μετρολογία. Ο Neugebauder, εικάζει ότι ρόλο στην επιλογή του 60 έπαιξε μια παλιά εξομάλυνση των μονάδων μέτρησης, σύμφωνα με την οποία έπρεπε το ήμισυ και το ένα τρίτο της μεγαλύτερης μονάδας να είναι απλά πολλαπλάσια της μικρότερης.

Τα περισσότερα αρχαία κείμενα (περί το 2000 Π.Χ), από τα οποία συνάγεται και το αριθμητικό σύστημα των Σουμερίων- Βαβυλωνίων , είναι πίνακες αντιστρόφων (1/χ) και πίνακες πολλαπλασιασμού. Έτσι μπορούσαν να κάνουν πολλαπλασιασμούς της μορφής $a \cdot b$ αλλά και πολλαπλασιασμούς της μορφής $a \cdot b^{-1}$ δηλαδή διαιρέσεις a:b, επειδή υπήρχαν και συνδυασμένοι πίνακες αντιστρόφων και πολλαπλασιασμού. Από του πίνακες πολλαπλασιασμού μπορούσαν επίσης να προκύψουν και πίνακες τετραγώνων και τετραγωνικών ριζών αλλά και κυβικών ριζών. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους πίνακες οι Βαβυλώνιοι κατάφερναν να επιλύουν δευτεροβάθμιες και κυβικές εξισώσεις.

Οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει την λογιστική τέχνη. Εκμεταλλευόμενοι τα πλεονεκτήματα του θεσιακού συμβολισμού και τους υπολογιστικούς πίνακες, παρέκαμπταν κάθε κατατριβή με κλάσματα και οι τέσσερεις πράξεις των ρητών αριθμών μπορούσαν να εκτελούνται γρήγορα χωρίς περεταίρω σκέψη.

ΤΟ ΚΙΝΕΖΙΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΗΣΤΗΜΑ

Η επόμενη εικόνα δείχνει τα σύμβολα που αντιπροσώπευαν τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10 στο κινεζικό αριθμητικό σύστημα.

一 二 三 四 五
六 七 八 九 十

Έτσι ο αριθμός **789** για παράδειγμα γράφετε:

七 百 八 十 九

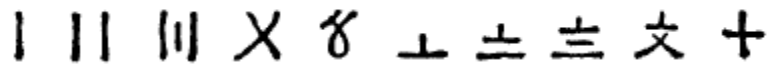
Το δεύτερο σύμβολο αντιπροσωπεύει τις εκατοντάδες και το τέταρτο τις δεκάδες.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει αναλυτικότερα το κινεζικό σύστημα.

一 (yī)	Ένα
二 (èr)	δύο
三 (sān)	Τρία
四 (sì)	τέσσερα
五 (wǔ)	πέντε
六 (liù)	έξι
七 (qī)	επτά
八 (bā)	οκτώ
九 (jiǔ)	εννέα
十 (shí)	δέκα
十一 (shí yī)	ένδεκα
十二 (shí èr)	δώδεκα
十三 (shí sān)	δέκα τρία
二十 (èr shí)	είκοσι
三十 (sān shí)	τριάντα
四十 (sì shí)	σαράντα
五十 (wǔ shí)	πενήντα
六十 (liù shí)	εξήντα
七十 (qī shí)	εβδομήντα
八十 (bā shí)	ογδόντα
九十 (jiǔ shí)	ενενήντα
百 (bǎi)	εκατό
千 (qiān)	χίλια

百萬 (bǎi wàn)	εκατομμύριο
十億 (shí yì)	δισεκατομμύριο

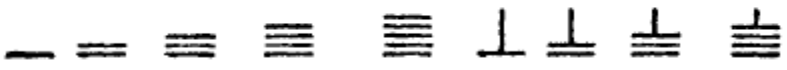
Οι κινέζοι ***έμποροι*** είχαν ένα λίγο διαφορετικό σύστημα. Στο σύστημα αυτό οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 10 είχαν την παρακάτω μορφή.

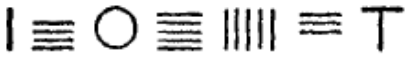


Είχαν ακόμη ειδικά σύμβολα για το 100, το 1.000 και το 10.000 και χρησιμοποιούσαν το κύκλο για να παραστήσουν το μηδέν. Από τα αρχαία κινεζικά νομίσματα, και τους αριθμούς που βλέπουμε πάνω σε αυτά, διαπιστώνουμε κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις τον συμβόλων αυτών από εποχή σε εποχή. Ένα παράδειγμα είναι ο αριθμός 5, που στον δεύτερο προ Χριστού αιώνα, συμβολιζόταν με το σύμβολο .

Οι κινέζοι εκτός απ΄ αυτό το συμβολικό σύστημα χρησιμοποιούσαν ένα ακόμα βασιζόμενο σε ράβδους. Αυτό το συμβολικό σύστημα ξεκίνησε στην εποχή του βασιλιά Wu-ts'ao και κράτησε μέχρι και το 19^{ο} αιώνα. Οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 9 παριστάνονταν ως εξής.

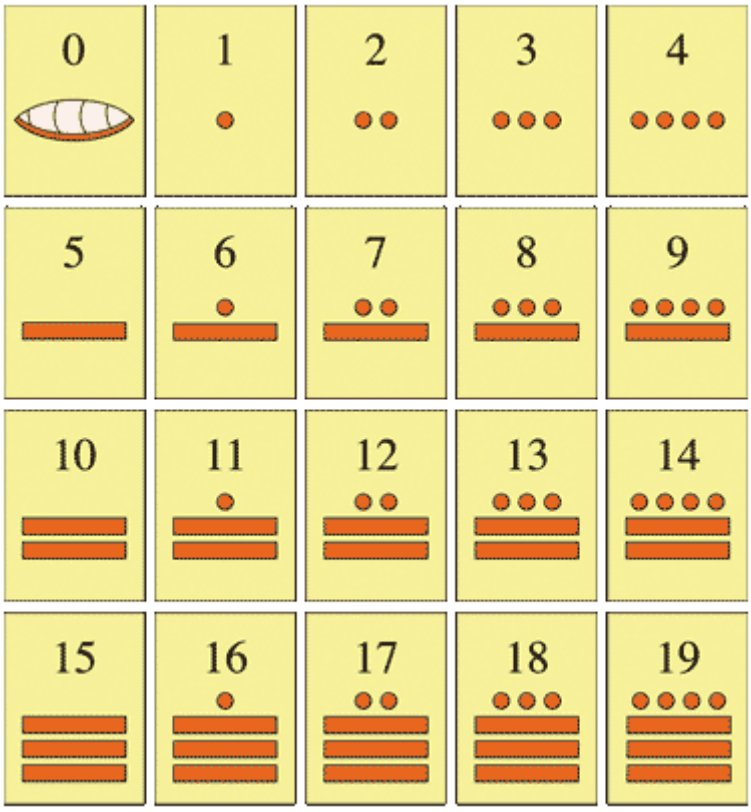
Ενώ οι δεκάδες παριστάνονταν:



Παράδειγμα  = 1.405.536

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΓΙΑ

Οι Μάγια είχαν αναπτύξει ένα σύστημα αρίθμησης πολύ πριν ανακαλυφτεί η Αμερική από τους Ευρωπαίους. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν οι Μάγια για να συμβολίσουν τους αριθμούς ήταν τελείες (•)και παύλες (▬). Κάθε τελεία είχε αξία 1 ενώ κάθε παύλα 5. Έτσι οι αριθμοί από το 1 μέχρι και το 19 έχουν την ακόλουθη μορφή.

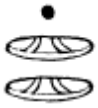


Τα σύμβολα αυτά, και ειδικά το σύμβολο για το μηδέν, είχαν πολλές παραλλαγές.

Ο τρόπος που έγραφαν το 20 είναι ο τρόπος που εμείς συμβολίζουμε το 10. Δηλαδή χρησιμοποιώντας τα σύμβολα για το 1 και για το 0. Για τους μάγια δηλαδή το σύμβολο ήταν το 20.

Μέχρι το 17·20 χρησιμοποιούσαν αυτόν το συμβολισμό. Δηλαδή το 300 το συμβόλιζαν ,δηλαδή 15·20=300.

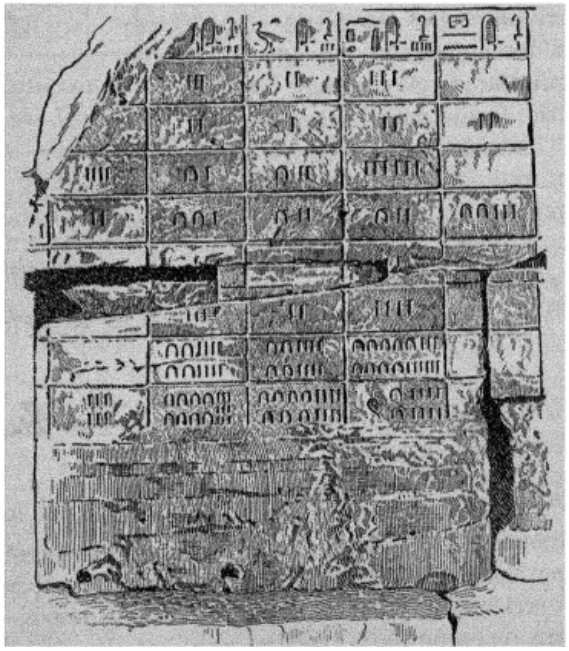
Στην συνέχεια το 360 το συμβόλιζαν με το σύμβολο του μηδενός δύο φορές.

Δηλαδή  =360. Αυτός ο συμβολισμός έφτανε μέχρι το 19·360=6.840 , και από το 7.200 και έπειτα άλλαζε ξανά.

Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο που να δείχνει πως έκαναν υπολογισμούς με αυτά τα σύμβολα, αλλά τα χρησιμοποιούσαν μόνο για ημερομηνίες. Η χρήση όμως τελειών και ράβδων για την παράσταση των αριθμών θα μπορούσε να μας παραπέμψει σε ένα είδος άβακα.

ΤΟ ΑΙΓΥΠΤΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Οι πρώτες αιγυπτιακές γραφές ήταν πάνω σε πέτρα, σε κεραμικές πλάκες αλλά κι σε πάπυρο. Τα πρώτα σύμβολα που χρησιμοποίησαν ήταν τα ιερογλυφικά, τα οποία συνήθως διαβάζονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά αλλά κάποιες φορές και από τα αριστερά στα δεξιά.



Η διπλανή εικόνα είναι από έναν τοίχο στον ναό του Λούξορ. Τα ιερογλυφικά εδώ διαβάζονται από τα αριστερά στα δεξιά.

Το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων είναι απλό και πρωτόγονο δεκαδικό σύστημα και είχε την παρακάτω μορφή:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	20	40	70	100	200	1.000	10.000

Τοποθετώντας τα σύμβολα αυτά σε μια γραμμή μπορεί να παρασταθεί κάθε αριθμός.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται και τα σύμβολα για το 1000.000 και το 1.000.000:

1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Εκτός όμως από τα ιερογλυφικά που τα χρησιμοποιούσαν συνήθως για γράψιμο πάνω σε πέτρα είχαν άλλα δύο συστήματα αρίθμησης τα λεγόμενα «ιερατικά» και τα «δημοτικά» , τα οποία τα χρησιμοποιούσαν για γράψιμο πάνω σε πάπυρο. Τα ιερατικά είχαν την παρακάτω μορφή.

1		10		100		1000	
2		20		200		2000	
3		30		300		3000	
4		40		400		4000	
5		50		500		5000	
6		60		600		6000	
7		70		700		7000	
8		80		800		8000	
9		90		900		9000	

ΠΤ.Χ 1328 =

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Οι Έλληνες αρχικά όπως και άλλοι λαοί της μεσογείου χρησιμοποίησαν τις κάθετες ράβδους για να παραστήσουν τους αριθμούς. Οι κάθετες αυτές ράβδοι λογικά αντιπροσώπευαν τα δάκτυλα.

Στην απώτερη αρχαιότητα χρησιμοποίησαν έναν συμβολισμό που έμοιαζε με τα γνωστά ρωμαϊκά ψηφία. Αυτά τα ψηφία περιγράφηκαν πλήρως από τον Ηριδανό τον $2^{ο}$ π.Χ. αιώνα. Τώρα είναι γνωστά ως «Αττικοί αριθμοί», γιατί είναι οι μόνοι αριθμοί που έχουν βρεθεί σε αττικές επιγραφές προχριστιανικά. Τα σύμβολα αυτά είχαν της εξής μορφή:

I	Γ	Δ	ΓΔ	H	ΓH	X	ΓX	M	ΓM
1	5	10	50	100	500	1.000	5.000	10.000	50.000

Το σύμβολο Γ είναι μια παλιά μορφή του αρχικού γράμματος της λέξης πέντε.

Όμοια τα σύμβολα Δ, H, X και M είναι αρχικά των ελληνικών λέξεων δέκα, εκατό, χίλιοι και μύριοι. Το H αντιπροσωπεύει το γράμμα Η από την λέξη «Ηεκατον» που στην αττική διάλεκτο αντί για το Η χρησιμοποιούσαν ‘ .

Για το δέκα χρησιμοποιούσαν κάποιες φορές τον κύκλο ή έναν κύκλο με τελεία στην μέση (⊙).

Παρακάτω φαίνονται κάποιοι αριθμοί γραμμένοι σε αυτό το σύστημα αρίθμησης.

ΓΙ = 6	ΓΗΗΗ = 800
ΔΓΙΙΙΙ = 19	ΜΜΜΜ = 40,000

Αργότερα εισήχθη ένας πιο σύντομος αλφαβητικός συμβολισμός, γνωστό ως Ιωνικό σύστημα. Το αρχαιότερο σύστημα είχε την εξής μορφή.

Α = 1	Η = 7	Ν = 13	Τ = 19
Β = 2	Θ = 8	Ξ = 14	Υ = 20
Γ = 3	Ι = 9	Ο = 15	Φ = 21
Δ = 4	Κ = 10	Π = 16	Χ = 22
Ε = 5	Λ = 11	Ρ = 17	Ψ = 23
Ϝ = 6	Μ = 12	Σ = 18	Ω = 24

Το σύμβολο για τον αριθμό 6 είχε την μορφή Ϝ ή τις μορφές F ή Ꞓ και είναι γνωστό ως δίγαμμα. Άλλες φορές συμβολίζετε με το τελικό σίγμα **ς** , γνωστό ως Βαυ. Το αριθμητικό αυτό σύστημα το συναντάμε συνήθως στην παρακάτω μορφή.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	F	Ζ	Η	Θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Το σύμβολο για το 90, είναι το φοινικικό γράμμα Κόππα, και το σύμβολο για το 900 το φοινικικό γράμμα Σαμπί.

Για να συμβολίσουν τις χιλιάδες έβαζαν έναν τόνο κάτω αριστερά. Π.Χ:

,α=1.000 ,β=2.000

Για να διακρίνουν τα νούμερα από τους αριθμούς έβαζαν πάνω από τον αριθμό μια παύλα ή έναν τόνο στο τέλος. Π.Χ:

$$,\overline{\alpha\psi\kappa\theta} = ,\alpha\psi\kappa\theta' = 1.729$$

Για να παριστάνουν αριθμούς πέραν της «μυριάδας»(10.000) χρησιμοποιούσαν το σύμβολο M , ως εξής

$$\overset{\Gamma}{M} = 30.000 \qquad \overset{\text{ΙΔ}}{M} = 140.000$$

Ένας άλλος τρόπος παράστασης των μυριάδων ήταν με δύο τελείες πάνω από τον αντίστοιχο αριθμό. Π.Χ

$$\ddot{\Gamma} = 30.000 \qquad \ddot{\text{ΙΔ}} = 140.000$$

ΤΟ ΕΒΡΑΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Οι Εβραίοι χρησιμοποιούσαν παρόμοιο αριθμητικό σύστημα με αυτό των Ελλήνων. Δηλαδή χρησιμοποιούσαν το πρώτο γράμμα από την ονομασία του αριθμού για να τον συμβολίσουν.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט
1	2	3	4	5	6	7	8	9
י	כ	ל	מ	נ	ס	ע	פ	צ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ק	ר	ש	ת	ך	ם	ן	ף	ץ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Για να εκφράσουν τους αριθμούς τοποθετούσαν τα σύμβολα το ένα δίπλα στο άλλο, και διαβάζονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά. Π.Χ מא =41.

Για τον αριθμό 15 υπήρχε μια ιδιαιτερότητα, το συμβόλιζαν טו (9+6), αντί για יה (10+5) γιατί το σύμβολο יה ήταν τα δυο πρώτα γράμματα της λέξης Γιεχωβάς (Jhvh), το όνομα δηλαδή του θεού.

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΑΡΜΕΝΙΩΝ

Το Αρμενικό σύστημα αρίθμησης είναι ένα ιστορικό αριθμητικό σύστημα που δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας τα κεφαλαία γράμματα του Αρμενικού αλφαβήτου. Δεν υπήρχε σύμβολο για το μηδέν στο παλιό σύστημα, και οι αριθμητικές αξίες των γραμμάτων προστίθενται για να εξαχθεί ο τελικός αριθμός. Οι αρχές που διέπουν αυτό το σύστημα είναι οι ίδιες με του ελληνικού συστήματος αρίθμησης και του Εβραϊκού συστήματος αρίθμησης

Αρμενικοί αριθμοί	Τιμή
Ա	1
Բ	2
Գ	3
Դ	4
Ե	5
Զ	6
Է	7
Ը	8
Թ	9
Ժ	10
Ի	20
Լ	30
Խ	40
Ծ	50
Կ	60
Հ	70
Ձ	80
Ղ	90

Ճ	100
Մ	200
Յ	300
Ն	400
Շ	500
Ո	600
Չ	700
Պ	800
Ջ	900
Ռ	1000
Ս	2000
Վ	3000
Տ	4000
Ր	5000
Ց	6000
Ւ	7000
Փ	8000
Ք	9000

Οι αριθμοί στο Αρμενικό αριθμητικό σύστημα προκύπτουν με απλή πρόσθεση των αξιών των ψηφίων. Οι αριθμοί γράφονται από αριστερά προς τα δεξιά (όπως και οι λέξεις της Αρμενικής γλώσσας). Αν και η σειρά με την οποία γράφονται δεν παίζει ρόλο στο αποτέλεσμα, καθώς αυτό προκύπτει με πρόσθεση, τα ψηφία κατά σύμβαση γράφονται με φθίνουσα αριθμητική αξία.

Παράδειγμα :

- ՌՋՀԵ= 1000 + 900 + 70 + 5 = 1975
- ՍՍՒԲ= 2000 + 200 + 20 + 2 = 2222

ΤΟ ΡΩΜΑΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Το σύστημα αρίθμησης των ρωμαίων περιελάμβανε τα παρακάτω σύμβολα:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Συνδυάζοντας τα παραπάνω σύμβολα μπορούσαν να παραστήσουν κάθε αριθμό όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

I 1	XI 11	XXI 21	XXXI 31	XLI 41	LI 51	LXI 61	LXXI 71	LXXXI 81	XCI 91	CI 101
II 2	XII 12	XXII 22	XXXII 32	XLII 42	LII 52	LXII 62	LXXII 72	LXXXII 82	XCII 92	CCXII 212
III 3	XIII 13	XXIII 23	XXXIII 33	XLIII 43	LIII 53	LXIII 63	LXXIII 73	LXXXIII 83	XCIII 93	CCCLIII 353
IV 4	XIV 14	XXIV 24	XXXIV 34	XLIV 44	LIV 54	LXIV 64	LXXIV 74	LXXXIV 84	XCIV 94	CDIV 404
V 5	XV 15	XXV 25	XXXV 35	XLV 45	LV 55	LXV 65	LXXV 75	LXXXV 85	XCV 95	DLV 555
VI 6	XVI 16	XXVI 26	XXXVI 36	XLVI 46	LVI 56	LXVI 66	LXXVI 76	LXXXVI 86	XCVI 96	DCCCXLVI 846
VII 7	XVII 17	XXVII 27	XXXVII 37	XLVII 47	LVII 57	LXVII 67	LXXVII 77	LXXXVII 87	XCVII 97	CMXXVII 927
VIII 8	XVIII 18	XXVIII 28	XXXVIII 38	XLVIII 48	LVIII 58	LXVIII 68	LXXVIII 78	LXXXVIII 88	XCVIII 98	MVIII 1008
IX 9	XIX 19	XXIX 29	XXXIX 39	XLIX 49	LIX 59	LXIX 69	LXXIX 79	LXXXIX 89	XCIX 99	MCMXCIX 1999
X 10	XX 20	XXX 30	XL 40	L 50	LX 60	LXX 70	LXXX 80	XC 90	C 100	MMCDXX 2420

Υπάρχουν πολλές θεωρίες σχετικά με την επιλογή των συγκεκριμένων συμβόλων για την παράσταση των αριθμών. Το I ίσως προέρχεται από το πρώτο γράμμα της ελληνικής λέξης ‘ία που στα αρχαία ελληνικά σήμαινε μονάδα. Το C και το M προέρχονται από τα αρχικά των λέξεων *centum* (εκατό) και *mille* (χίλια). Το σύμβολο X (δέκα) προέρχεται από το V (πέντε) και από το V ανεστραμμένο

,δηλαδή Λ. Μία άλλη θεωρία για το X (δέκα) είναι ότι μπορεί να προήλθε από το πέρασμα με μια διαγώνια γραμμή από δέκα μονάδες, δηλαδή , που συντομογραφικά γράφετε . Το σύμβολο αυτό για το δέκα εμφανίζετε σε διάφορα μνημεία.

Το σύμβολο D για το 500 προέρχεται ίσως από μισό του συμβόλου CIↃ που και αυτό παρίστανε το χίλια, δηλαδή IↃ. Μία άλλη θεωρία είναι ότι προέρχεται από το αρχικό της λέξης *demi-mille*. Το L το συναντάμε στις παλαιότερες επιγραφές και ως ↓ ή ⊥ και στον μεσαίωνα συναντάτε και με το μικρό γράμμα l.

Για το χίλια επίσης έχουν χρησιμοποιηθεί και πολλά άλλα σύμβολα όπως

CIↃ, ⋔, ᶜIↃ, ⋔, ∞, ⋈, ∼

Ένα ακόμα σημαντικό στοιχείο είναι πως το τελευταίο I σε έναν αριθμό το άλλαζαν με το γράμμα j. Παράδειγμα Mcccclxxxxiiij=1494.

Για να παραστήσουν τους μεγάλους αριθμούς οι στο ρωμαϊκό σύστημα έβαζαν μια παύλα πάνω από τον αριθμό που σήμαινε πως πολλαπλασιαζόταν με το 1.000.

Παράδειγμα: $\overline{\text{II}} = 2.000$ ή $\overline{\text{M}} = 1.000.000$.

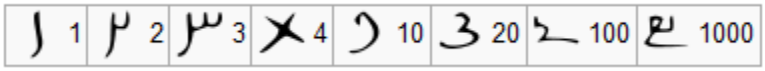
Πρόδρομος του ρωμαϊκού συστήματος αρίθμησης είναι αυτό των Ετρούσκων, το οποίο είχε την παρακάτω μορφή:

1	I
5	Λ
10	X
50	↑
100	⋇ or C

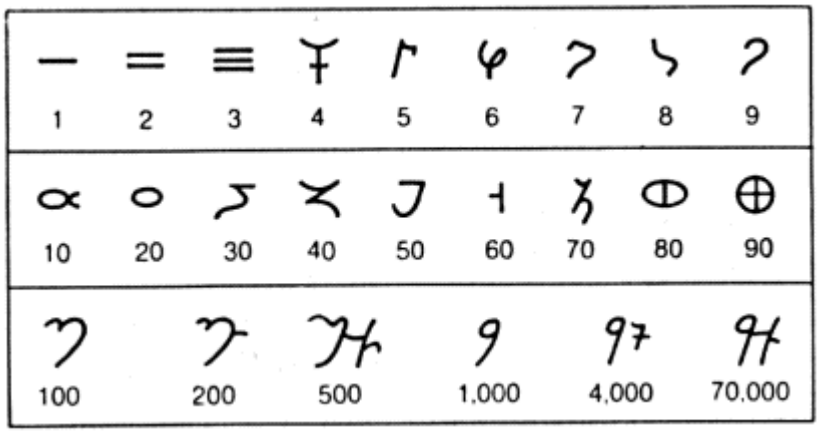
ΤΑ ΙΝΔΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΚΑΙ ΤΟ «ΤΑΞΙΔΙ» ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΔΥΣΗ

Η ιστορία των ινδικών ψηφίων ξεκινάει από την εποχή του Βουδιστή βασιλιά Ασόκα τον 3^{ο} π.Χ αιώνα. Τα αρχικά ψηφία είχαν πολλές παραλλαγές, και διέφεραν από περιοχή σε περιοχή της Ινδίας. Δύο αρχικές μορφές γραφής ήταν η Χαρόστι και η Βραχμί.

Τα Χαρότσι είχαν την παρακάτω μορφή:



Περισσότερο σημαντικά είναι τα σύμβολα Βραχμί:

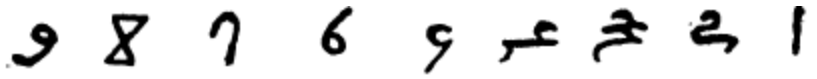


Τα σύμβολα αυτά είναι πρόδρομοι των συμβολών που χρησιμοποιούμε σήμερα. Η αρχική τους μορφή ήταν κάπως διαφοροποιημένη αλλά τα σύμβολα που φαίνονται στην παραπάνω εικόνα είναι όπως παρουσιάζονται σε επιγραφή που βρέθηκε σε μια σπηλιά στο Νασίκ της Ινδίας. Δεν υπάρχει βέβαια ακόμα σύμβολο για το μηδέν, ούτε είναι θεσιακό σύστημα αλλά οι ομοιότητες με τα αραβικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε είναι προφανείς ειδικά στους αριθμούς 6, 7 και 9.

Τις οριζόντιες γραμμές με τις οποίες παρουσιάζονται οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 3 είναι ίσως μια επιρροή του κινεζικού συστήματος αρίθμησης, γιατί σε αυτό έχουμε ξανασυναντήσει τέτοια σύμβολα. Μέσα στην ποικιλία βέβαια των μορφών των Ινδικών ψηφίων συναντάμε και αναπαράσταση των αριθμών από το 1 μέχρι το 3 και με κάθετες γραμμές. Οι αιγύπτιοι και άλλοι λαοί της μεσογείου υιοθέτησαν τις κάθετες γραμμές.

Τα ινδικά ψηφία άρχισαν να γίνονται ευρέως γνωστά και άρχισαν ένα ταξίδι προς την δύση. Αρχικά ο Σύριος επίσκοπος Σεβήρος Σεμπόχτ εξέφρασε έναν μεγάλο θαυμασμό για τα αριθμητικό σύστημα των ινδών. Έτσι τα ινδικά ψηφία έγιναν γνωστά στα μοναστηριακά σχολεία της Μεσοποταμίας. Στην συνεχεία τα ινδικά ψηφία έγιναν γνωστά στην Βαγδάτη, όταν ένας Ινδός έφερε στον χαλίφη Αλ-Μαμούν την αστρονομική πραγματεία Σιδχάντα, που μεταφράστηκε αμέσως στα Αραβικά το 773 μ.Χ. Λίγα χρόνια μετά , το 825 ο Αλ–Χουαρίζμι έγραψε ένα βιβλίο για τον ινδικό λογισμό και μέσο αυτού τα ινδικά ψηφία έγιναν γνωστά όχι μόνο στον Αραβικό κόσμο αλλά πέρασαν και στην Ευρώπη μέσα από την μετάφραση του Αδελάρδο από το Bath, το 1120 στο βιβλίο με τίτλο Liber Algorismi de numero Indorum. Τα ψηφία όμως αυτά δεν χρησιμοποιήθηκαν από όλους τους άραβες. Ο Αλ–Χουαρίζμι γνώριζε δύο μορφές ψηφίων που προήλθαν από τις διάφορες μορφές των ινδικών ψηφίων. Τα δυτικο-αραβικά και τα ανατολικο-αραβικά. Τα δυτικο-αραβικά ψηφία είναι γνωστά και με το όνομα γκομπάρ. Οι εμπορικές συναλλαγές ανάμεσα σε Βαγδάτη και Αλεξάνδρεια βοήθησαν ώστε τα ινδο-αραβικά ψηφία να περάσουν προς την δύση.

Τα ψηφία γκομπάρ είχαν την ακόλουθη μορφή:



Η πρώτη εμφάνιση των 9 ψηφίων γκομπάρ στην Ευρώπη έγινε από τον Ζερμπέρ, ο μετέπειτα Πάπας Σιλβέστρος Β΄. Στην Βαρκελώνη διάβασε για τα ψηφία αυτά και δημιούργησε έναν άβακα που αντί για ψήφους χρησιμοποίησε άπικες. Οι άπικες ήταν δισκία που πάνω είχαν χαραγμένα τα σύμβολα γκομπάρ.

Το παλαιότερο Ευρωπαϊκό χειρόγραφο είναι ένα ισπανικό χειρόγραφο που περιέχει του παρακάτω αριθμούς

Ίσως ο Ζεμπέρ να είχε διαβάσει αυτό το χειρόγραφο στην μονή της Santa Maria de Ripoll. Το 1143 εμφανίζονται τα ινδικά ψηφία και στην Γερμανία σε ένα απόσπασμα από το βιβλίο των αλγορίθμων.

Η τελική επικράτηση των ινδοαραβικών ψηφίων έγινε το 1202,μέσα από το *liber Abaci* του Λεονάρντο Πιζάνο, γνωστού ως Fibonacci. Ήταν ένα βιβλίο που προοριζόταν για τους εμπόρους, και γνώρισε μεγάλη επιτυχία όταν έγιναν αντιληπτά τα μεγάλα πλεονεκτήματα των νέων ψηφίων.

Στο *liber Abaci* γράφει:

«Τα εννέα ινδικά ψηφία είναι:

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Με τα εννέα αυτά ψηφία και με το ψηφίο 0, που οι άραβες το αποκαλούν zephyr, μπορούν να γραφτούν όλοι οι αριθμοί, όπως καταδεικνύετε παρακάτω…»

ΜΕΓΑΛΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ένα γνώρισμα της αρχαίας αριθμητικής είναι η σπανιότητα εμφάνισης πολύ μεγάλων αριθμών. Λίγες εξαιρέσεις είναι ο *ψαμμίτης* [1] του Αρχιμήδη, κάποιες βαβυλωνιακές επιγραφές και κάποιες Ινδικές παραδώσεις για τις αριθμητικές ικανότητες του Βούδα.

Το εκατομμύριο: Η λέξη εκατομμύριο(million) χρησιμοποιήθηκε μετά το 13^{ο} αιώνα και ο πρώτος μαθηματικός που την χρησιμοποίησε ήταν ο Μάξιμος Πλανούδης περίπου το 1340. Η λέξη million προέρχεται από την έκφραση (mille+on) δηλαδή great thousand, όπως το salon (sale+on) από την έκφραση great hall.

Το δισεκατομμύριο: Η λέξη billion μέχρι τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για κάθε αριθμό μεγαλύτερο από εκατομμύριο. Στις Ηνωμένες Πολιτείες το χρησιμοποιούσαν σαν 10^9 , στην Αγγλία σαν 10^{12}. Πρώτη φορά που χρησιμοποιήθηκε η λέξη billion ήταν το 1484 από τον Chuquet και αναφερόταν στο 10^{12}.

Για την γραφή των μεγάλων αριθμών, για τον διαχωρισμό δηλαδή τριάδων ψηφίων, χρησιμοποιήθηκαν διάφορες μέθοδοι. Επηρεασμένοι από τους «σταυρούς» που τοποθετούνταν στις γραμμές των χιλιάδων και των εκατομμυρίων

---

[1] *Ο **Ψαμμίτης** δηλαδή "Άμμου Καταμέτρης" ή περιφραστικά "Αυτός που μετράει τους κόκκους της άμμου", είναι ένα από τα χαρακτηριστικότερα έργα του Αρχιμήδη και αποτελεί υπό μια έννοια την πρώτη επεξηγηματική εργασία. Στο έργο αυτό, ο Αρχιμήδης επιχειρεί να ανατρέψει την τότε κοινή πεποίθηση ότι ο αριθμός των κόκκων της άμμου είναι υπερβολικά μεγάλος για να καταμετρηθεί.*

Προκειμένου να το επιτύχει, έπρεπε πρώτα να επινοήσει ένα σύστημα ονομασίας μεγάλων αριθμών, ώστε να ορίσει ένα άνω όριο· ξεκίνησε λοιπόν από τον μεγαλύτερο αριθμό εκείνης της εποχής, την μυριάδα μυριάδων. Η μυριάς ισούται με 10.000, συνεπώς η μυριάς μυριάδων ισούται με 10.000Χ10.000=100.000.000, εκατό εκατομμύρια.

Το σύστημα μέτρησης του Αρχιμήδη φτάνει μέχρι το $10^{8\times10^{16}}$ *το οποίο είναι μία μυριάδα μυριάδων εις την μυριοστή μυριάδα και όλο εις την μυριοστή μυριάδα. Ένας άλλος τρόπος να περιγραφεί αυτός ο αριθμός είναι μια μονάδα ακολουθούμενη από 80 τετρακισεκατομμυρια μηδενικά.*

στον άβακα, οι μεσαιωνικοί συγγραφείς χρησιμοποιούσαν σημάδια πάνω από το ψηφίο των χιλιάδων και πέρα από αυτό σημάδια κάθε τρία ψηφία. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται κάποιοι τρόποι γραφής μεγάλων αριθμών.

7.538.275.136	Pellos (1492, fol. 4)
4.5.9.3.6.2.9.0.2.2 or acba cbacba 4593629022	Reisch (1503, Lib. IIII, Tract. II, Cap. 4)
2578391062751234689 4352	Barozzi (1585)
23.456.007.840.000.305.321	Santa-Cruz (1594, fol. 12, *r.*)
1,234,567 or 1.234.567	Greenwood (1729)
68|765|432|189|716|789|132	Blassière (1769)

Οι τριάδες αυτές έχουν ονομαστεί με διάφορους ονομασίες όπως περίοδοι[1], περιοχές (Santa-cruz), ή τριάδες. Ο Recorde (1542) έδωσε τον εξής κανόνα για την γραφή των μεγάλων αριθμών:

“πρώτα βάζουμε ένα «σημάδι» (pricke) πάνω στο τέταρτο ψηφίο, και μετά πάνω από το Vij. Και αν έχουμε παραπάνω ψηφία βάζουμε σημάδια πάνω από τα x, xiij, xvj, όπως και πάνω από το τέταρτο, αφήνοντας κάθε φορά δύο ψηφία μεταξύ των σημαδιών. Και αυτά τα κομμάτια μεταξύ των σημαδιών τα ονομάζουμε τριάδες.”

Ο Fibonacci (1202) χρησιμοποίησε έναν διαφορετικό τρόπο: Κάθε τρία ψηφία από το ψηφίο των χιλιάδων και πέρα τα ομαδοποιεί με ένα τόξο από πάνω ως εξής

678935784105296

1 *"Haec prima est periodus,", Ramus (1569)*

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΑΒΑΚΑ

Αν λάβουμε υπόψη τα αριθμητικά συστήματα των αρχαίων πολιτισμών συναντάμε μεγάλη δυσκολία στην εκτέλεση πράξεων. Αυτό μας κάνει να πιστεύουμε πως υπήρχε ένας μηχανικός τρόπος υπολογισμών. Η πεποίθηση μας ισχυροποιείτε ακόμα περισσότερο, αν παρατηρήσουμε επίσης το ότι τα υλικά γραψίματος άργησαν να ανακαλυφθούν (ο πάπυρος ήρθε στην Ελλάδα τον 7^{ο} Π.Χ αιώνα.) και οι πλάκες αργύρου δεν ήταν κατάλληλες για υπολογισμούς. Ο μηχανικός αυτός τρόπος υπολογισμών πραγματοποιείτε με τον άβακα.

Η προέλευση της λέξης άβακας είναι η αρχαιοελληνική λέξη «άβαξ», που με την σειρά της προέρχεται από την Σημιτική λέξη אבק (abq) που στα εβραϊκά σημαίνει σκόνη. Μία άλλη ενδιαφέρουσα ετοιμολογία της λέξης άβαξ δίνετε από τον Th. Martin (Les Signes Num) , από έναν λεξικογράφο του 5^{ου} αιώνα και από άλλα κείμενα. Η ετοιμολογία αυτή αναφέρει ότι η λέξη άβαξ προέρχεται από το «α + βάσις» , δηλαδή αυτό που δεν έχει βάση, διότι η πρώτη μορφή άβακα ήταν μια πλάκα χωρίς πόδια. Ακόμα μια ετοιμολογία δίνετε από τον R. Soreau και αναφέρει ότι άβαξ σημαίνει α΄, β΄, + αξία, δηλαδή 1 , 2 ,+αξία.

Στα πρώτα χρόνια ο άβακας ήταν μια πλάκα σκεπασμένη από σκόνη. Πάνω στην σκόνη σχημάτιζαν τα σημάδια με το χέρι η με γραφίδα. Ήταν ένας πρόδρομος του σημερινού χαρτιού. Αυτή η μορφή άβακα ήταν γνωστή τόσο στους Έλληνες και τους Ρωμαίους όσο και στους Ινδούς οι οποίοι όμως δεν τον χρησιμοποιούσα πολύ. Στην συνέχεια ο άβακας σκόνης έδωσε την θέση του σε έναν πίνακα με γραμμές πάνω στης οποίες μπορούσαν να κινούνται μικροί δίσκοι. Αυτή ήταν μια διαδεδομένη μορφή άβακα που μέχρι τον 17^{ο} αιώνα τον χρησιμοποιούσαν και στην Ευρώπη. Μια Τρίτη μορφή άβακα διέφερε από την προηγούμενη στο ότι αντί για γραμμές υπήρχαν αυλάκια πάνω στα οποία κινούνταν σφαίρες.

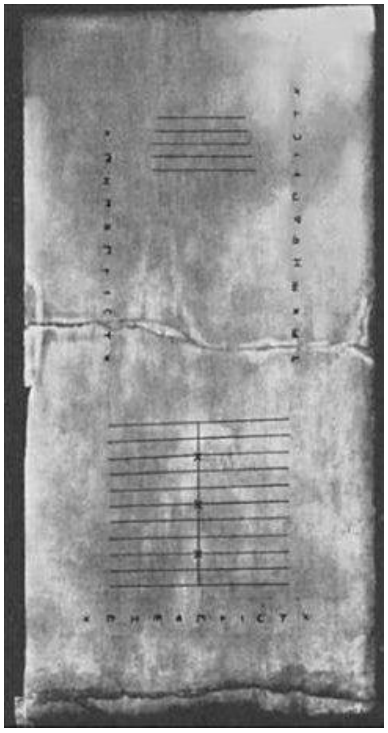
Στους **Αιγύπτιους** ήταν γνωστός ο άβακας και αυτό το καταλαβαίνουμε από μια φράση του Ηρόδοτου που έλεγε: «γράψτε τους χαρακτήρες και υπολογίστε τους με χαλίκια, φέρνοντας τα από τα δεξιά προς τα αριστερά, ενώ οι έλληνες τα φέρνουν από τα αριστερά προς τα δεξιά». Ακόμα έχουν βρεθεί στις αρχαιολογικές

ανασκαφές πολλοί δίσκοι σε διάφορα μεγέθη που μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν μετρητές.

Κάποιες γραφές τοποθετούν τις αρχές του άβακα στην Μέση Ανατολή. Ο Ιάμβλιχος αναφέρει πως ο Πυθαγόρας εισήγαγε τον άβακα στην Ελλάδα και κάνει υπαινιγμούς πως τις γνώσεις για τον άβακα τις πήρε από τους **βαβυλωνίους**.

Ο Ελληνικός άβακας

Ένας πρώτος ελληνικός άβακας βρέθηκε στην Σαλαμίνα το 1846, και χρονολογείται γύρω στο 300 π.χ. Υπολογίζεται ότι είναι ο αρχαιότερος που βρέθηκε μέχρι σήμερα. Αρχικά θεωρήθηκε ότι ήταν ένα επιτραπέζιο παιχνίδι.



Είναι κατασκευασμένος πάνω σε μια πλάκα, με διαστάσεις 149 εκ. μήκος, 75 εκ. πλάτος και 4,5 εκ. πάχος. Η πλάκα περιέχει λευκή άμμο και ανακαλύφθηκε σπασμένη σε δύο τμήματα από ένα μεγάλο διαχωριστικό που υπάρχει στη μέση. Το επάνω τμήμα απαρτίζεται από 5 παράλληλες γραμμές, εξίσου χωρισμένες από μια κάθετη γραμμή, και ένα ημικύκλιο στο σημείο τομής της κατώτερης παράλληλης γραμμής με την κάθετη. Στο δεύτερο τμήμα υπάρχει άλλη μια ομάδα από 11 παράλληλες γραμμές, που επίσης τέμνονται σε δύο τμήματα από μια γραμμή αλλά το ημικύκλιο βρίσκεται αυτή τη φορά στην κορυφή της τομής. Η τρίτη, η έκτη και ένατη από αυτές τις γραμμές σημειώνονται με ένα σταυρό στο σημείο τομής με την κάθετη γραμμή.

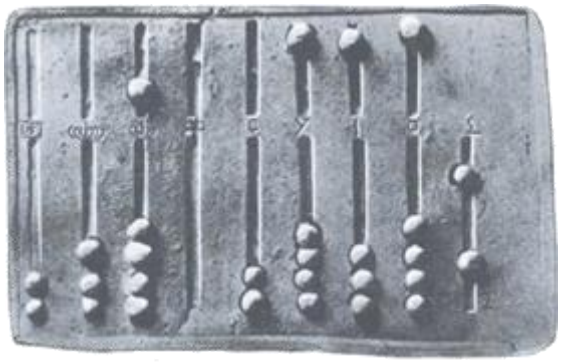
Παρακάτω εξηγούνται τα σύμβολα που υπάρχουν στις τρείς μεριές :

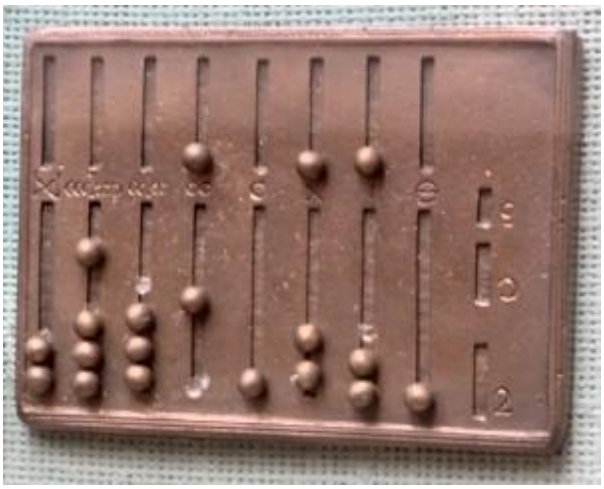
⊢	1 δραχμή
Γ	5 δραχμές
Δ	10 δραχμές
[illegible]	50 δραχμές
H	100 δραχμές
[illegible]	500 δραχμές
X	1000 δραχμές
I	Οβολός
C	Μισός οβολός
T	Ένα τέταρτο του οβολού
χ	Ένα όγδοο του οβολού
[illegible]	5000 δραχμές
T	6000 δραχμές

Χρησιμοποιήθηκε για εμπορικούς σκοπους και πιθανώς να ήταν κάποιου εμπόρου που το χρησιμοποιούσε για να κάνει υπολογισμούς στο σπίτι του.

Ο Ρωμαϊκός άβακας

Ο ρωμαϊκός άβακας που παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα αποτελείται από οκτώ μακριά αυλάκια που περιέχουν μέχρι πέντε χάντρες το κάθε ένα και οκτώ πιο μικρά αυλάκια που έχουν είτε μια είτε καμία χάντρα.



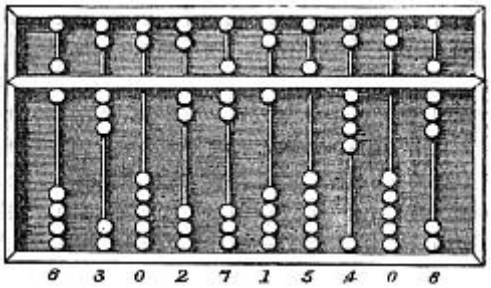


Το χαρακτηριστικό αυλάκι I δείχνει τις μονάδες, το X τις δεκάδες κλπ. μέχρι τα εκατομμύρια. Οι χάντρες στα πιο μικρά αυλάκια δείχνουν πέντε πεντάδες μονάδες, πέντε δεκάδες, κ.τ.λ., ουσιαστικά σε ένα κωδικοποιημένο πενταδικό σύστημα, προφανώς σχετικό με τους ρωμαϊκούς τρόπους μετρήσεων των αριθμών. Τα μικρά αυλάκια στα δεξιά μπορεί να είχαν χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των ρωμαϊκών ουγγιών. Οι υπολογισμοί γίνονται με τη βοήθεια των χαντρών που πιθανώς θα γλιστρούσαν πάνω-κάτω στα αυλάκια για να δείξουν την αξία κάθε στήλης.

Πολλοί συγγράφεις δίνουν πληροφορίες για την χρήση του άβακα από τους ρωμαίους. Ο Οράτιος μιλάει για έναν μαθητή που κουβαλάει την τσάντα του και μια πλάκα κρεμασμένη στο αριστερό του χέρι. Ο Κικέρων αναφέρετε στον άβακα όταν μιλάει για χάλκινα κομμάτια, διότι από χαλκό έφτιαχναν τα κομμάτια του άβακα. Η ονομασία που έδιναν στον άβακα στα λατινικά ήταν : *abaculi ή calculi.*

Οι αρχικοί άβακες ήταν από πέτρα. Εδώ βρίσκετε και η ρίζα της λέξης calculus(υπολογισμός). Calculus στα λατινικά σημαίνει χαλίκι, είναι υποκοριστικό του clax που είναι ένα μεγάλο κομμάτι ασβεστόλιθου. Δηλαδή οι ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν κυριολεκτικά τα χαλίκια για υπολογισμούς.

Ο κινέζικος άβακας



Η προέλευση του κινεζικού άβακα είναι πιθανώς από την κεντρική η δυτική Ασία. Οι κινέζοι είχαν εμπορικές συναλλαγές με Πέρσες και Άραβες άρα εύκολα μια υπολογιστική συσκευή όπως ο άβακας θα έβρισκε τον δρόμο του προς την Κίνα. Η

ονομασία του άβακα στην κίνα είναι σουαν - παν (suan-pan). Πριν από το σουαν παν, μετρικές ράβδοι, εγκοπές στα κόκαλα, ελεφαντόδοντο και άλλοι συμβολικοί μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν αναμφισβήτητα ως εργαλείο για την μέτρηση και τον υπολογισμό. Οι ράβδοι αυτοί είχαν περίπου 18 ίντσες μήκος και έχουμε αναφορές ότι τις χρησιμοποιούσαν από το 542 Π.Χ.

Ο άβακας των Κινέζων, σουαν παν, είναι σε γενικές γραμμές παρόμοιος με τον ρωμαϊκό, εν τούτοις έχει μια διαφορετική κατασκευή, και είχε ως σκοπό τη χρήση και του δεκαδικού και του δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης.

Ο κινεζικός άβακας έχει περίπου 20 εκ. μήκος και διαφοροποιείτε στο πλάτος ανάλογα με την εφαρμογή. Έχει συνήθως περισσότερες από επτά ράβδους. Υπάρχουν δύο χάντρες σε κάθε ράβδο στην ανώτερη πτέρυγα και πέντε χάντρες σε κάθε ράβδο στο κατώτατο σημείο. Οι χάντρες συνήθως είναι σφαιρικές, αποτελούνται από σκληρό ξύλο και υπολογίζονται σύμφωνα με την θέση τους πάνω στην ράβδο. Ο άβακας μπορεί να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση άμεσα με ένα τράνταγμα κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, ώστε να απομακρύνει όλες τις χάντρες από την ακτίνα στο κέντρο.

Οι κινεζικοί άβακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για άλλες λειτουργίες εκτός από τον υπολογισμό. Αντίθετα από τον απλό πίνακα που χρησιμοποιείται στα δημοτικά σχολεία, πολύ αποδοτικές τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για επαγγελματικούς άβακες ώστε να κάνουν πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση και υπολογισμό τετραγωνικής και κυβικής ρίζας με πολύ μεγάλη ταχύτητα.

Η αριθμητική χαντρών είναι η τεχνική υπολογισμού που χρησιμοποιούν οι διάφοροι τύποι αβάκων, και πιο συγκεκριμένα ο κινεζικός άβακας. Η ομοιότητα του ρωμαϊκού και του κινεζικού άβακα δίνει την εντύπωση ότι κάποιος θα μπορούσε να έχει αντιγράψει τον άλλο, δεδομένου ότι υπάρχουν κάποια στοιχεία εμπορικής σχέσης μεταξύ της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας και της Κίνας. Εντούτοις, καμία άμεση σύνδεση δεν μπορεί να αποδειχθεί, και η ομοιότητα των αβάκων μπορεί να είναι συμπτωματική, μιας και οι δύο προκύπτουν τελικά από τον υπολογισμό με πέντε δάχτυλα ανά χέρι. Το ρωμαϊκό πρότυπο (όπως τα πιο σύγχρονα ιαπωνικά) έχει

τέσσερις συν μια χάντρα ανά δεκαδική θέση, ενώ ο τυποποιημένος κινεζικός άβακας έχει πέντε συν δύο, επιτρέποντας την χρήση μεγαλύτερης ακρίβειας αριθμητικών αλγορίθμων, και δίνοντας επίσης τη δυνατότητα χρήσης του δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης.

Αντί να μετακινούνται πάνω σε καλώδια όπως στα κινεζικά και ιαπωνικά πρότυπα, οι χάντρες των ρωμαϊκών αβάκων κινούνταν μέσα σε αυλάκια, πιθανώς καθιστώντας τους αριθμητικούς υπολογισμούς πολύ πιο αργούς. Ενδεχομένως ο ρωμαϊκός άβακας χρησιμοποιήθηκε πρώτιστα για τον απλό υπολογισμό. Σε έναν διαγωνισμό μεταξύ του κινεζικού άβακα και του ηλεκτρικού υπολογιστή στις 12 Νοεμβρίου, 1946, ο άβακας κέρδισε στα 4 από τα 5 τεστ που έγιναν.

Ο ιαπωνικός άβακας

Οι πρώτες υπολογιστικές μηχανές των Ιαπώνων ήταν ράβδοι μπαμπού (chikusaku) που χρησιμοποιήθηκαν την εποχή του αυτοκράτορα Suiko (593-628). Ήταν στρογγυλά ραβδάκια μήκους 12 εκατοστών και διαμέτρου 2 χιλιοστών. Αργότερα αντικαταστάθηκαν από πρισματικά ραβδάκια γιατί τα chikusaku κυλούσαν πολύ εύκολα.

Ο ιαπωνικός άβακας, ή αλλιώς Soroban, πιθανώς έτσι διάβαζαν οι ιάπωνες το κινεζικό suan-pan, είναι μια τροποποίηση του κινεζικού άβακα, και έχει περίπου 8 εκ. μήκος. Οι χάντρες σε έναν soroban διαμορφώνονται συνήθως ως διπλός κώνος για να διευκολύνουν την μετακίνηση. Οι παραδοσιακές κινεζικές μονάδες μέτρησης του βάρους χρησιμοποιούσαν ένα δεκαεξαδικό σύστημα που απαιτούσε δύο χάντρες στην ανώτερη πτέρυγα. Η πρώτη ιαπωνική τροποποίηση απέβαλε μια χάντρα από την πτέρυγα αυτή και αργότερα άλλη μια χάντρα από τη χαμηλότερη πτέρυγα του κινεζικού άβακα, κατασκευάζοντας έτσι τον ιαπωνικό άβακα καθαρά για το δεκαδικό σύστημα. Οι Ιάπωνες απέβαλαν επίσης τη χρήση του Qiuchu (κινεζικός πίνακας διαιρέσεων). Εντούτοις, ο κινεζικός πίνακας διαιρέσεων χρησιμοποιούνταν ακόμα όταν υπήρχαν 5 ή λιγότερες χάντρες. Έτσι τη δεκαετία του

'20 ήρθε στο προσκήνιο η χρήση του πίνακα πολλαπλασιασμού παρά του πίνακα διαίρεσης, και τελικά επικράτησε. Οι ράβδοι (αριθμός ψηφίων) συνήθως αυξάνονται σε 21, 23, 27 ή ακόμα και 31, επιτρέποντας κατά συνέπεια τον υπολογισμό αριθμών με περισσότερα ψηφία ή παραστάσεις πολλών διαφορετικών αριθμών συγχρόνως.

Το Soroban διδάσκεται στα σχολεία πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ως μέρος των μαθηματικών επειδή το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα μπορεί να καταδειχθεί οπτικά. Όταν διδάσκεται το soroban, ένα τραγούδι-οδηγία εκφωνείται από το δάσκαλο. Παρά την εμφάνιση των φορητών υπολογιστών, αρκετοί γονείς στέλνουν τα παιδιά τους σε ιδιωτικούς δασκάλους για να μάθουν να χρησιμοποιούν το soroban επειδή η άνετη χρήση του μπορεί να εξελιχθεί εύκολα σε διανοητική αριθμητική προηγμένου επίπεδου.

Ο άβακας στην Κορέα

Οι ράβδοι μπαμπού ως υπολογιστικές μηχανές πέρασαν από την κίνα στην Ιαπωνία μέσο της Κορέας. Στην Κορέα συνέχισαν να τα χρησιμοποιούν για μεγάλο διάστημα, ακόμα και όταν οι άλλες χώρες εγκατέλειψαν τέτοιες μεθόδους. Οι εμπορική τάξη όμως υιοθέτησε αργότερα το Κινεζικό suan-pan, αλλά μετά την Ιαπωνική κατάκτηση άρχισε να χρησιμοποιείτε το soroban. Αυτοί όμως που

εκπαιδευτήκαν στα τοπικά σχολειά συνέχισαν να κάνουν υπολογισμούς με τις ράβδους. Οι ράβδοι αυτοί στην Κορέα ονομάζονταν Ka-tji san και ήταν φτιαγμένοι από κόκαλο. Για να κάνουν τους υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν περίπου 150 τέτοια ραβδάκια πάνω σε ένα τραπέζι υπολογισμού. Με τα ραβδάκια μπορούσαν να παραστήσουν τους πρώτους 12 αριθμούς ως εξής:

I	II	III	IIII	X	XI	XII	XIII	XIIII	—	T	Π
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Οι κορεάτες χρησιμοποιούσαν για τον ίδιο σκοπό εκτός από τα ραβδάκια, νομίσματα η μικρές πέτρες.

Ο άβακας στις μουσουλμανικές χώρες

Στις μουσουλμανικές χώρες χρησιμοποιούσαν άβακες που ήταν διαφορετικοί τόσο από τους άβακες της ανατολής όσο και από τον ρωμαϊκό άβακα. Συνήθως είχαν δέκα χάντρες σε κάθε καλώδιο. Οι ρίζες του μουσουλμανικού άβακα πιθανών να είναι οι πρώτες υπολογιστικές μηχανές των Αράβων ή των Περσών. Οι Τούρκοι ονόμαζαν το άβακα coulba, ενώ οι αρμένιοι choreb. Πιο συνηθισμένη μορφή άβακα όμως κατά των μεσαίωνα για τους Σαρακηνούς ήταν ο άβακας σκόνης. Αυτό φαίνεται και από το κείμενο του μαυριτανού συγγραφέα al-Qalasadi, που γράφει « *ένας άντρας από την Ινδία πήρε σκόνη και την ψέκασε σε ένα τραπέζι, και σημείωσε πάνω σε αυτή πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις ή άλλες πράξεις, και αυτή είναι η προέλευση του όρου gobar (σκόνη)*» .

Ο Ρώσικος άβακας

Από τις μουσουλμανικές χώρες ο άβακας πέρασε και στην Ρωσία. Ο ρωσικός άβακας, ή αλλιώς schoty, θυμίζει περισσότερο τον Τουρκικό coulba και τον Αρμένικο choreb παρά τον κινεζικό άβακα. Συνήθως αποτελείται από μια ενιαία πτέρυγα, με δέκα χάντρες σε κάθε καλώδιο, εκτός από ένα καλώδιο που έχει

τέσσερις χάντρες. Το συγκεκριμένο χρησιμεύει για τον υπολογισμό των ρουβλιών, και συνήθως είναι το πλησιέστερο στον χρήστη. Ο ρωσικός άβακας χρησιμοποιείται κάθετα, με τις χάντρες στα καλώδια να μετακινούνται από τα δεξιά στα αριστερά, αντίθετα με τον τρόπο που διαβάζεται ένα βιβλίο. Τα καλώδια λυγίζουν στο κέντρο τους προς τα πάνω, προκειμένου να κρατάνε τις χάντρες με ασφάλεια σε κάθε πλευρά. Καθαρίζεται όταν κινούνται όλες οι χάντρες προς τα δεξιά, ενώ κατά τη διάρκεια του χειρισμού, οι χάντρες κινούνται προς το αριστερά. Για ευκολία, οι 2 μέσες χάντρες σε κάθε καλώδιο (η 5η και 6η χάντρα) συνήθως έχουν διαφορετικό χρώμα από τις άλλες 8 χάντρες. Επιπλέον, η αριστερή χάντρα του καλωδίου που μετράει τις χιλιάδες και τα εκατομμύρια μπορεί να έχει διαφορετικό χρώμα.

Σήμερα ο ρωσικός άβακας είναι ακόμα σε λειτουργία στα καταστήματα και τις αγορές σε όλη την πρώην Σοβιετική Ένωση, αν και δεν διδάσκεται πλέον στα περισσότερα σχολεία.

Ο άβακας στην Ευρώπη

Στην δυτική Ευρώπη κατά των μεσαίωνα είχαν διάφορες ονομασίες για τον άβακα. Ο Βοήθιος τον αναφέρει ως Πυθαγόρεια πλάκα. Άλλες ονομασίες είναι γεωμετρική πλάκα ή πλάκα του άβακα ή Πυθαγόρειο τόξο. Η κοινή όμως ονομασία είναι άβακας (abax ή abacus) και όσοι ασχολούνταν με την αριθμητική περίπου τον 11ο αιώνα είναι γνωστοί ως αβακιστές.

Η πρώτη μορφή άβακα και στην Ευρώπη είναι ο άβακας σκόνης. Ο Παπίας1 σε λεξικό που έγραψε το 1053 αναφέρει τον άβακα σαν μια πλάκα καλυμμένη με πράσινη σκόνη. Ο Remigius2,

[1] *Papias (περίπου 1040-1060) ήταν λατινικός λεξικογράφος από την Ιταλία. Αν και αναφέρεται συχνά ως Papias Lombard, μικρή είναι γνωστή για τη ζωή του, και δεν ξέρουμε αν κατάγετε πραγματικά από τη Λομβαρδία*

[2] *Το Remigius (Remi) του Οξέρ (περίπου 841 - 908) ήταν Βενεδικτίνος μοναχός και δάσκαλος της λατινικής γραμματικής, και παραγωγικός συντάκτης σχολίων στα κλασσικά ελληνικά και λατινικά κείμενα.*

στο έργο του Capella's Arithmetic, αναφέρει και αυτός τον άβακα σαν μια πλάκα καλυμμένη από μπλε κα πράσινη σκόνη.

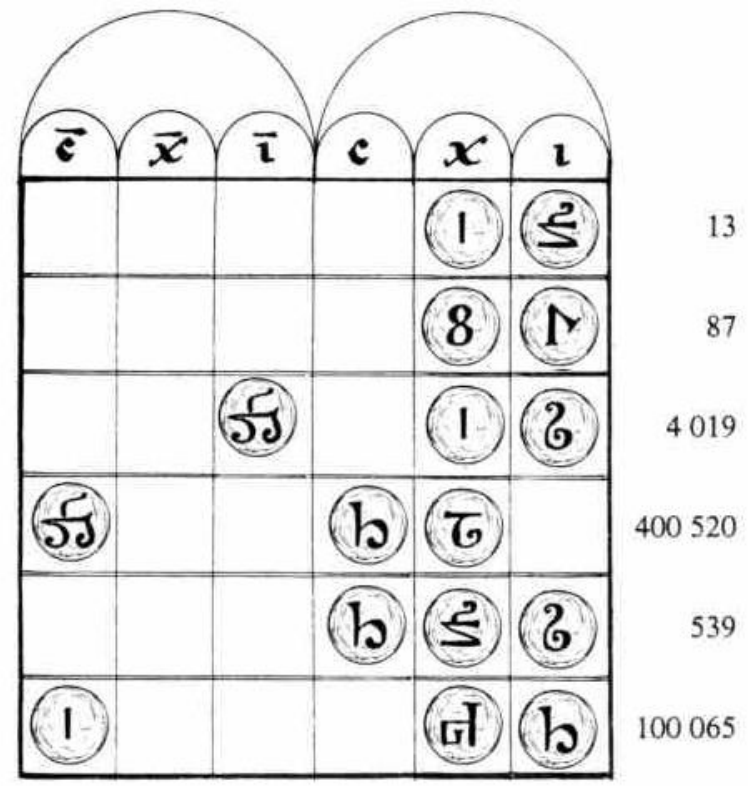
Τους άβακες σκόνης τους διαδέχτηκαν οι πλάκες κεριού. Αυτές ήταν ξύλινες οι κοκάλινες πλάκες καλυμμένες με ένα στρώμα κεριού πάνω στο οποίο χάραζαν τα διάφορα σχήματα με σιδερένια "στυλό". Για το σβήσιμο υπήρχε ένα εξάρτημα σαν τα σημερινά κουτάλια. Πολλές φορές ήταν χωρισμένα σε κομμάτια , σαν σελίδες βιβλίου, όπως στις εικόνες, ώστε το ένα κομμάτι να σκεπάζει το άλλο και να μην χαλάνε οι γραφές.

Ο άβακας του Ζερμπέρ

Ο ζερμπέρ , που αργότερα έγινε Πάπας, Πάπας Σιλβέστρος Β΄, γεννήθηκε στο 940 στην Auvergne. Όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω, στην Ισπανία γνώρισε τα Ινδικά ψηφία Γκομπάρ και επινόησε έναν νέο τύπο άβακα βασισμένο σε αυτά α ψηφία. Ο άβακας αυτός ονομαζόταν και άβακας τόξου. Έγραψε μάλιστα κι ένα μικρό βιβλίο για την ψηφοφορία με άβακα.

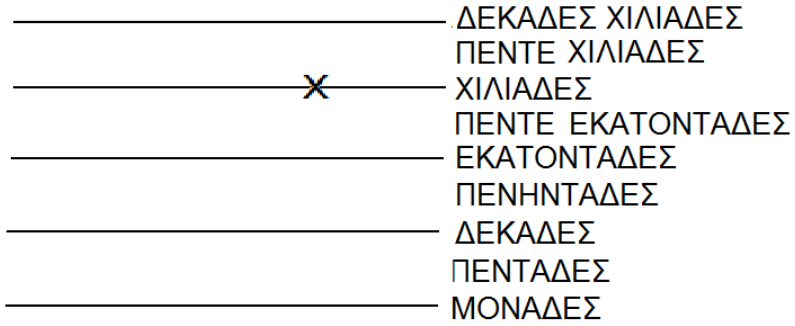
Αντί για ψήφους χρησιμοποιούσε άπικες, δισκία δικής του επινοήσεως που πάνω ήταν χαραγμένα τα Ινδικά ψηφία Γκομπάρ.

ΑΠΙΚΕΣ

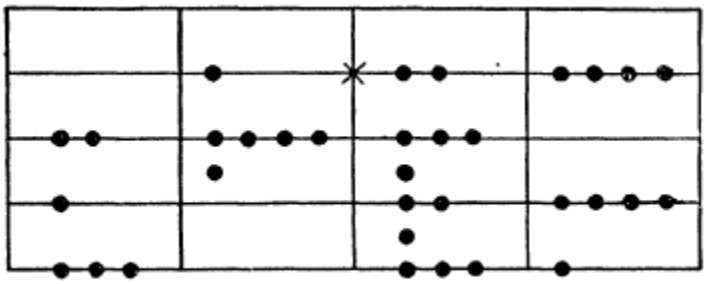


Τοποθετώντας τις άπικες πάνω στον άβακα που ήταν χωρισμένος σε στήλες μπορούσε να δημιουργήσει οποιονδήποτε αριθμό όπως φαίνετε στην παραπάνω εικόνα. Τις θέσεις που έπρεπε να τοποθετήσει το μηδέν τις άφηνε κενές. Τα τόξα που τοποθετούνταν πάνω από κάθε τρείς στήλες χώριζαν δηλαδή τις τριάδες έδωσαν το όνομα άβακας τόξου στην συγκεκριμένη μορφή άβακα.

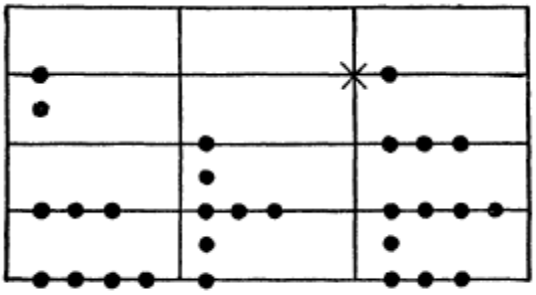
Μια τελευταία αλλά πολύ διαδεδομένη μορφή άβακα στην Ευρώπη είναι ο **Άβακας Γραμμών**. Ο άβακας αυτός ήταν απλές οριζόντιες γραμμές πάνω στις οποίες τοποθετούσαν κουκίδες. Οι γραμμές έδειχναν την αξία της κάθε κουκίδας. Κάθε γραμμή είχε δεκαπλάσια αξία από την προηγούμενη. Το διάστημα ανάμεσα σε δύο γραμμές είχε την μισή αξία από την αξία της επομένης γραμμής. Σχηματικά:



Όπως βλέπουμε και στο σχήμα την γραμμή των χιλιάδων άλλα και αυτή των εκατομμυρίων την σημείωναν με ένα μικρό σταυρό ώστε να μπορούν να διαβάζουν πιο γρήγορα τους αριθμούς. Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν μια πρόσθεση και μια αφαίρεση σε έναν τέτοιο είδος άβακα.



(213 + 1450 + 2378 = 4041)



(1534 − 186 = 1348)

Οι χώρες που χρησιμοποιούσαν τον άβακα αυτής της μορφής κατά τον 15^{ο} αιώνα ήταν κυρίως χώρες της βόρειας Ευρώπης που το εμπόριο τους επηρεαζόταν περισσότερο από την Γερμανία. Τέτοιες χώρες ήταν η Ολλανδία, η Πολωνία, Αυστρία και λιγότερο η Αγγλία και η Γαλλία. Οι άλλες χώρες που το εμπόριο τους επηρεαζόταν κυρίως από την Ιταλία δεν τον χρησιμοποιούσαν τόσο.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Η ονομασία της πρόσθεσης

Η πράξη της πρόσθεσης είχε κατά καιρούς διάφορες ονομασίες. Ο Ευκλείδης και ο Διόφαντος χρησιμοποιούν την λέξη “προστίθενται ” για την πρόσθεση αριθμών ενώ ο Ήρωνας και ο Πάππος την λέξη “ συντίθενται ”. Η αγγλική ονομασία της πρόσθεσης που έχει επικρατήσει είναι addition. Στο παρελθόν διάφορες όμως άλλες ονομασίες έχουν δοθεί στην πράξη αυτή. Ο B. Boncompagni[1] αναφέρει ότι ένας συγγραφέας του 13ου αιώνα χρησιμοποιεί την φράση “Agregare est quoslibet duos numeros uel plures in unum colligere" για την πρόσθεση δύο αριθμων. Δηλαδή χρησιμοποιή για την λέξη aggregation αντί για addition. Ο Fibonacci χρησιμοποίησε τις λέξεις "composition", "collection" αλλά και την λέξη "addition" (στα λατινικά compositio, collectio, και additio) για να εκφράσει την πρόσθεση. Άλλες λέξεις που εμφανίζονταν σε διάφορα κείμενα είναι assemble, join (Treviso arithmetic, 1478), summation (Rudolff's arithmetic 1526).

---

[1] Ο πρίγκηπας Baldassarre Boncompagni (1821-1894) ήταν μια από τις ηγετικές προσωπικότητες στην ιστορία των μαθηματικών στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα. Αρχίζοντας στο 1840 δημοσίευσε περισσότερα από 200 άρθρα και βιβλία στην ιστορία των μαθηματικών και της φυσικής, μεταξύ τους η ογκώδης έκδοση των εργασιών του Leonardo Fibonacci (1857-1862). Το Boncompagni ξόδεψε ένα μεγάλο ποσό από τα χρήματά του για να επιτρέψει στους ιστορικούς της επιστήμης να κάνουν έρευνα στις βιβλιοθήκες και για να προετοιμάσει τις εκδόσεις των μαθηματικών κειμένων. Πλήρωσε πολλά χρήματα για να πάρει τα αντίγραφα από πολλά σημαντικά χειρόγραφα από πολλές βιβλιοθήκες και ανέθεσε σε καλλιτέχνες να φτιάξουν αντίγραφα που να έμοιαζαν με τα πρωτότυπα. Χορήγησε ελεύθερα σε άλλους μελετητές το προνόμιο της χρησιμοποίησης των εγκαταστάσεών του. Από 1868 έως 1887 δημόσιευσε το επιστημονικό περιοδικό του, Bullettino Di Bibliografia Di Storia delle Scienze Matematiche Fisiche (που αναφέρεται συνήθως ως Bullettino Boncompagni). Οι 20 τόμοι που δημοσιεύθηκαν περιέχουν πολλά άρθρα σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών και της που είναι χρήσιμα ακόμα σήμερα, αν και ο Boncompagni αύξησε το μήκος των πρωτότυπων άρθρων με τεράστιες σημειώσεις έτσι ώστε πολλά άρθρα είναι δύσκολο να διαβαστούν. Το Boncompagni ήταν επίσης γνωστός για τη βιβλιοθήκη του, την οποία διεύρυνε καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του. Όταν πέθανε η βιβλιοθήκη του περιείχε περίπου 650 χειρόγραφα και 20.000 τυπωμένα βιβλία . Ο πυρήνας της συλλογής του ήταν οι εργασίες για τα μαθηματικά και τις μαθηματικές επιστήμες. Τα χειρόγραφα στη βιβλιοθήκη του αποτέλεσαν τη μεγαλύτερη ιδιωτική συλλογή επιστημονικών βιβλίων στο 19ο αιώνα. Το 1862 Enrico Narducci δημοσίευσε έναν κατάλογο των χειρογράφων Boncompagni, που περιείχε 368 χειρόγραφα.

Στο Margarita phylosophica (1503) η λέξη προσθετέος δεν αναφερόταν σε όλους τους όρους της πρόσθεσης. Ο πρώτος όρος μιας πρόσθεσης δεν ανήκε στους προσθετέους όπως φαίνετε και στο παρακάτω σχήμα από το Margarita phylosophica[1].

4′6′7′9′	numerus cui debet fieri additio
3′2′3′2′	numerus addendus
7 9 i i	numerus ꝑductus

Η διαδικασία της πρόσθεσης :

Στις αριθμητικές πράξεις οι Αρχαίοι Έλληνες γάφοντας τους αριθμούς ξεχώριζαν τις διάφορες δυνάμεις του 10 με έναν τρόπο πρακτικά αντίστοιχό του σημερινού αριθμητικού μας συστήματος, δηλαδή οι εκατοντάδες,οι χιλίαδες….θα αναγράφονταν σε ξεχωριστές στήλες . Έτσι το νοηματικό μέρος της εργασίας ήταν για τους αρχαίους Έλληνες το ίδιο όπως και για μας. Παράδειγμα

$\overset{\alpha}{M}$,βσπα	12281
$\overset{\gamma}{M}$ λ	30030
$\overset{\gamma}{M}$,γωλη	43838

Οι μέθοδος των Ινδών για την πρόσθεση τους φαίνετε στο κείμενο Lilavati (~1150) του ινδού μαθηματικού Bhaskara. Lilavati είναι το όνομα της κόρης του Bhaskara και στο ομώνυμο βιβλίο διαβάζουμε: «Lilavati, ευφυές κορίτσι, εάν καταλαβαίνεις την πρόσθεση και την αφαίρεση, πες μου το άθροισμα

[1] Margarita phylosophica : (το φιλοσοφικό μαργαριτάρι) είναι μια εγκυκλοπαίδεια που χρησιμοποιήθηκε ευρέως ως πανεπιστημιακό εγχειρίδιο στις αρχές του δέκατου έκτου αιώνα, ιδιαίτερα στη Γερμανία. Μας δίνει μια άποψη των πανεπιστημιακών προγραμμάτων σπουδών και της κατάστασης της εκμάθησης και της επιστημονικής γνώσης στο τέλος του μεσαίωνα και στην έναρξη του δέκατου έκτου αιώνα. Ο συντάκτης του, Gregor Reisch (1467-1525), ήταν καρθουσιανός μοναχός και φίλος με πολλούς ανθρωπιστές της εποχής συμπεριλαμβανομένου, του Erasmus, του Beatus και του Rheananus . Ήταν επίσης και σύμβουλος στον αυτοκράτορα Maximilian I. Εκπαιδεύτηκε στο πανεπιστήμιο του Freiburg όπου έλαβε το βαθμό «magister» το 1489 και δίδαξε επίσης εκεί. Η Margarita phylosophica αρχίζει ως εγχειρίδιο για τους σπουδαστές του στο Freiburg.

του 2, 5, 32, 193, 18, 10, και 100, καθώς επίσης και [το υπόλοιπο] όταν εκείνοι όταν αφαιρούνται από 10000.»

Σε σχόλια σε αυτήν την εργασία, άγνωστης ημερομηνίας, για την λύση δίνεται η ακόλουθη μέθοδος :

Άθροισμα των μονάδων : 2, 5, 2, 3, 8, 0, 0	=	20
Άθροισμα των δεκάδων : 3, 9, 1, 1, 0	=	14
Άθροισμα των εκατοντάδων : 1, 0, 0, 1	=	2
Άθροισμα των αθροισμάτων	=	360

Σε αντίθεση με τους Ινδούς οι Άραβες συνήθιζαν να γράφουν το αποτέλεσμα μια πρόσθεσης στο πάνω μέρος από τους προσθετέους .

Μια άλλη μέθοδος πρόσθεσης που δίνετε από τον Gemma Frisius[1]. Στην μέθοδο αυτή το άθροισμα κάθε στήλης γράφετε σε ξεχωριστή γραμμή μια θέση πιο μπροστά και στο τέλος προστίθενται ξανά οι νέες στήλες που δημιουργούνται, όπως παρουσιάζετε στο παρακάτω παράδειγμα

```
 9279
  389
  479
  ---
   27
  22
  9
 9
 -----
10147
```

[1] Gemma Frisius (9 Δεκεμβρίου 1508 -25 Μαΐου 1555), γεννήθηκε στο Dokkum, Friesland (σημερινή Ολλανδία) ήταν μαθηματικός, χαρτογράφος, φιλόσοφος, και κατασκευαστής οργάνων. Δημιούργησε τις υδρόγειες σφαίρες, βελτίωσε τα μαθηματικά όργανα της καθημερινότητας και εφάρμοσε τα μαθηματικά στην έρευνα και τη ναυσιπλοΐα.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Ιστορικά ο τρόπος με τον οποίο γίνετε η αφαίρεση έχει διάφορες μορφές.

Ένας πρώτος τρόπος για να γίνει αφαίρεση στηρίζετε στην ιδιότητα

$$\alpha - \beta = \alpha + (10 - \beta) - 10.$$

Παράδειγμα: αν θέλουμε να κάνουμε την πράξη 12 – 4 , κάνουμε πρώτα την πρόσθεση 12 + 6, που το 6 είναι η διαφορά του 4 από το 10, και μετά αφαιρούμε το 10.

Τον τρόπο αυτόν τον χρησιμοποιεί ο Bhaskara στο Lilavati καθώς επίσης και ο Μάξιμος Πλανούδης (1340) και ο Baker (1568). Η ίδια μέθοδος εμφανίζετε και στην αριθμητική του Treviso (1478).

Για τους Αρχαίους Έλληνες η αφαίρεση, όπως αναφέραμε και για την πρόσθεση, γίνετε αντίστοιχα με τον σημερινό τρόπο, υιοθετώντας το δεκαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας το δικό τους σύστημα αρίθμησης.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε σήμερα την χρησιμοποίησε και ο Fibonacci στο Liber abbaci το 1202 καθώς και ο Borghi 1484. Όταν ήθελαν να αφαιρέσουν ένα μεγαλύτερο ψηφίο ενός αριθμού από ένα μικρότερο πρόσθεταν 10 στο μικρότερο. Παράδειγμα από την τυπωμένη αριθμητική του Borghi:

6354		
2978	στην διπλανή πράξη έγραφε:	8 από 14, 6,
3376		
		8 από 15, 7,
		10 από 13, 3,
		3 από 6, 3.

Δηλαδή προσθέτουν μια μονάδα σε κάθε ψηφίο του αφαιρετέου αν έχουν δανειστεί πριν μια δεκάδα ώστε να κάνουν την αφαίρεση.

Μια λίγο διαφορετική μέθοδος χρησιμοποιείτε από τον Rabbi ben Ezra. .Η διαφορά είναι στο γεγονός ότι αντί να προσθέτουν την μονάδα στα ψηφία του αφαιρετέου αφαιρούν την μονάδα από τα ψηφία του μειωτέου. Την μέθοδο αυτή την συναντάμε και σε έργα του al-Khowarizmi . Παράδειγμα:

54
28 για την διπλανή πράξη έγραφε: 8 από 14, 6
26

2 από 4, 2.

Μια τελευταία μέθοδος είναι η **Αυστριακή μέθοδος**. Η μέθοδος αυτή εμφανίζετε στην αυστριακή αριθμητική του Mocnik. Την χρησιμοποίησε επίσης ο Buteo (1559).

Στην μέθοδο αυτή αν θες να αφαιρέσεις το 89 από 236, λες:

236
89 9 και 7 , 16,
147

9 και 4 , 13,

1 και 2, 3.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Οι αιγύπτιοι για να κάνουν πολλαπλασιασμούς χρησιμοποιούσαν διαδοχικούς διπλασιασμούς . Για παράδειγμα αν ήθελαν να κάνουν την πράξη 15×17 έκανα το εξής :

1	17
2	34
4	68
8	136
16	272
1	17
15	255

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε πιθανόν και από άλλους αρχαίους λαούς. Την συναντάμε μέχρι αι στην αναγέννηση από τον μοναχό και μαθηματικό Stifel στο Arithmetica integra (1544). Ο Stifel πραγματοποιεί τον πολλαπλασιασμό 31×42 με συνεχείς διπλασιασμούς ως εξής.

1	42
2	84
4	168
8	336
16	672
31	1302

Μια πιο σύγχρονη μέθοδος πολλαπλασιασμού που στηρίζετε σε διπλασιασμούς και υποδιπλασιασμούς είναι η Ρωσική μέθοδος πολλαπλασιασμού (ή Αιθιοπική μέθοδος) Η μέθοδος αυτή έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την Αιγυπτιακή μέθοδο, και ουσιαστικά έλκει την καταγωγή της από την Αίγυπτο και αυτή. Λέγεται επίσης και Αιγυπτιακή μέθοδος. Το όνομά της, « Αγροτικός Ρώσικος ή Αιθιοπικός Πολλαπλασιασμός», έλαβε από το γεγονός, ότι στην Ρωσία και στην Αιθιοπία χρησιμοποιήθηκε μέχρι και κατά τους νεώτερους χρόνους. Στην Ευρώπη η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε κατά τον Μεσαίωνα.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής, όπως και της Αιγυπτιακής, είναι ότι, κατά βάση για την εκτέλεσή της απαιτείται η γνώση μόνον τού διπλασιασμού, τού υποδιπλασιασμού, και της πρόσθεσης, καθώς και ο διαχωρισμός των ακεραίων σε περιττούς και άρτιους, ενώ δεν απαιτείται να γνωρίζει κάποιος την «Προπαίδεια» τού πολλαπλασιασμού. Γι' αυτό και ήσαν ιδανικές για τους υπολογισμούς με τον άβακα

Παράδειγμα τέτοια μεθόδου:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το γινόμενο των αριθμών 35 και 12.

Βήμα 1ο

Τους δύο αριθμούς, 35 και 12 , τους τοποθετούμε τον ένα δίπλα στον άλλον:

Βήμα 2ο

1) Στην αριστερή στήλη, επειδή ο αριθμός (35) είναι περιττός, τον μειώνουμε κατά μία μονάδα (34), ώστε να λάβουμε άρτιο αριθμό, και το 34 το υποδιπλασιάζουμε (διαιρούμε διά 2) και γράφουμε το πηλίκο 17 κάτω από τον 35.

Τον αριθμό της δεξιάς στήλης (12) τον διπλασιάζουμε και το αποτέλεσμα 24 το θέτουμε κάτω από το 12.

2) Στην αριστερή στήλη, επειδή ο αριθμός (17) είναι περιττός, τον μειώνουμε κατά μία μονάδα (16), ώστε να λάβουμε άρτιο αριθμό, και το 16 το υποδιπλασιάζουμε (διαιρούμε διά 2) και γράφουμε το πηλίκο 8 κάτω από τον 17.

Τον αριθμό της δεξιάς στήλης (24) τον διπλασιάζουμε και το αποτέλεσμα 48 το θέτουμε κάτω από το 182.

3) Στην αριστερή στήλη, επειδή ο αριθμός (8) είναι άρτιος, τον υποδιπλασιάζουμε (διαιρούμε διά 2) και γράφουμε το πηλίκο 4 κάτω από τον 8.

Τον αριθμό τής δεξιάς στήλης (48) τον διπλασιάζουμε και το απότέλεσμα 96 το θέτουμε κάτω από το 364.

Η επαναληπτική αυτή διαδικασία συνεχίζεται μέχρι που να προκύψει στην αριστερή στήλη ο αριθμός 1(η μονάδα)

35	12
17	24
8	48
4	96
2	192
1	384

Βήμα 3ο

1) Από τον πίνακα των αριθμών, με τις δύο στήλες, που έχει δημιουργηθεί, αγνοούμε (ή διαγράφουμε) τις γραμμές εκείνες, που έχουν άρτιο τον αριστερό αριθμό.

Εδώ, δηλαδή, αγνοούμε

- την γραμμή με τους αριθμούς 8 και 48

- την γραμμή με τους αριθμούς 4 και 96

- και την γραμμή με τους αριθμούς 2 και 192

2) Από κάθε γραμμή, της οποίας ο αριστερός αριθμός είναι περιττός, μεταφέρουμε δεξιά τον δεύτερο (δεξιό) αριθμό.

Εδώ, δηλαδή, μεταφέρουμε δεξιά:

- τον αριθμό 12 της πρώτης γραμμής

- τον αριθμό 24 της δεύτερης γραμμής

- και τον αριθμό 384 της τελευταίας γραμμής.

Και τούτο επειδή μόνο των γραμμών αυτών οι αριστερά αριθμοί είναι περιττοί!

Άρα:	$35 \times 12 = 12 + 24 + 384 = 420$

Εξήγηση και αιτιολόγηση της μεθόδου

Γενικώς: Σε ένα γινόμενο Χ.Ψ, μπορούμε να γράφουμε : Χ.Ψ=(Χ/2).(2.Ψ), οπότε :

1) Εάν ο Χ είναι άρτιος, τότε γράφουμε $x \cdot y = \left(\frac{x}{2}\right)(2 \cdot y)$ και οι αριθμοί $\frac{x}{2}$ και $2 \cdot y$ είναι ακέραιοι.

Εάν και ο $\frac{x}{2}$ είναι άρτιος, τότε ο $\frac{x}{4}$ είναι ακέραιος, και επομένως θα έχουμε

$$x \cdot y = \left(\frac{x}{2}\right)(2 \cdot y) = 2\left(\frac{x}{4}\right)(2 \cdot y) = \left(\frac{x}{4}\right)(4 \cdot y)$$

2) Εάν, όμως ο Χ είναι περιττός, τότε ο (Χ-1) θά είναι άρτιος.

Οπότε, μπορούμε να γράφουμε $x \cdot y = (x-1+1) \cdot y = (x-1) \cdot y + y$

Αφήνουμε το y και εργαζόμαστε με το γινόμενο (x-1)y

Στο γινόμενο(x-1) y, ο (x-1) είναι άρτιος, οπότε ο (x-1)/2 είναι ακέραιος. Τώρα, ισχύει:

$(x-1) \cdot y = \left[\frac{(x-1)}{2}\right] \cdot 2y$, και οι αριθμοί (Χ-1)/2 και $2 \cdot y$ είναι ακέραιοι.

- Εάν, τώρα, ο αριθμός (Χ-1)/2 είναι άρτιος, τότε ο αριθμός (Χ-1)/4 είναι ακέραιος και επομένως έχουμε:

$$\left[\frac{(x-1)}{2}\right] \cdot 2y = \left[\frac{(x-1)}{4}\right] \cdot 4y$$

με (Χ-1)/4 ακέραιο.

- Εάν, όμως, ο αριθμός (Χ-1)/2 είναι περιττός, τότε ο αριθμός [(Χ-1)/2]-1 είναι άρτιος, οπότε:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)(2y)=\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)-1+1\right](2y)=\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)-1\right](2y)+(2y)$$,

με [(X-1)/2]-1 άρτιο αριθμό.

Έτσι, προχωρώντας, ολοκληρώνουμε την επαναληπτική αυτήν διαδικασία, όπως στο παράδειγμά μας

Η μέθοδος δικτυωτού πλέγματος

Η μέθοδος δικτυωτού πλέγματος για τον πολλαπλασιασμού φαίνετε ότι δημιουργήθηκε από τους ινδούς μαθηματικούς. Άλλες ονομασίες που έχουν δοθεί σε αυτήν είναι κύτταρο και gelosie (από το όνομα ενός τύπου παραθυρόφυλλου). Αυτή η μέθοδος ήταν γνωστή τουλάχιστον από 1010 όταν την κατέδειξε ο Πέρσης μελετητής Karaji στο Kafi fil Hisab (βιβλίο των ικανοποιήσεων). Αργότερα την συναντάμε στο πρώτο τυπωμένο βιβλίο αριθμητικής, που τυπώνεται στο Treviso (Ιταλία) το 1478. Εκεί παρουσιάζετε επίσης και μια παραλλαγή καθώς επίσης και μερικές παραλλαγές του αλγορίθμου πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ο πολλαπλασιασμός δικτυωτού πλέγματος και οι παραλλαγές του αλλά και ο αλγόριθμος του σημερινού τρόπου πολλαπλασιασμού εισήχθησαν στην Ευρώπη από Fibonacci. Στον πολλαπλασιασμό δικτυωτού πλέγματος, τα μερικά αποτελέσματα σχεδιάζονται σε ένα δικτυωτό πλέγμα και η πρόσθεση κατά μήκος των διαγώνιών δίνει την απάντηση στον πολλαπλασιασμό.

Η μέθοδος δικτυωτού πλέγματος πολλαπλασιασμού εμφανίζεται στα ακόλουθα παραδείγματα:

<u>Παράδειγμα 1</u>

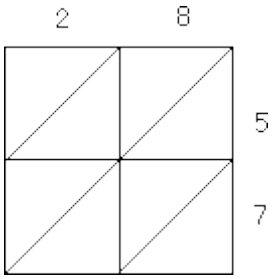
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 28×57.

Βήμα 1ο

Δημιουργούμε έναν πίνακα με τόσες στήλες όσα τα ψηφία του προτού αριθμού και τόσες γραμμές όσα τα ψηφία του δεύτερου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έναν πίνακα 2×2.

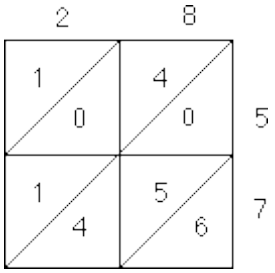
Βήμα 2ο

Χωρίζουμε κάθε κελί του πίνακα με την μία διαγώνιο του (από την πάνω αριστερή στην κάτω δεξιά γωνία).



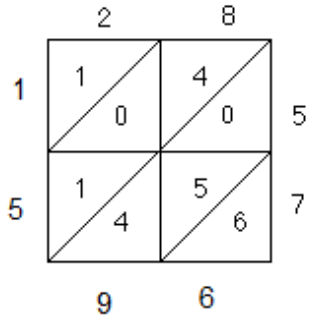
Βήμα 3ο

Σε κάθε κελί τοποθετούμε το γινόμενο των αριθμών που χαρακτηρίζουν την στήλη και την γραμμή του αντίστοιχου κελίου. Το ψηφίο των δεκάδων από αυτό το γινόμενο τοποθετείτε στο πάνω αριστερά τρίγωνο που έχει δημιουργηθεί από την διαγώνιο, ενώ το ψηφίο των μονάδων στο κάτω δεξιά. Στο παράδειγμα: στο πρώτο κελί του πίνακα τοποθετείτε ο αριθμός 10, που είναι το γινόμενο του 2 με το 5. Στο δεύτερο κελί της πρώτης στήλης το 14 που είναι το γινόμενο του 2 με το 7…



Βήμα 4ο

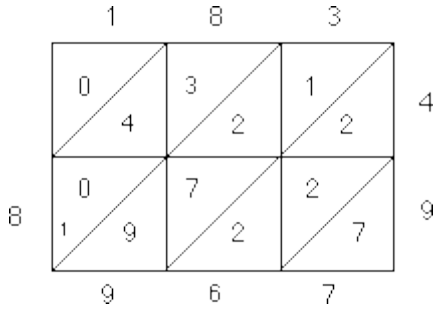
Αθροίζουμε στην συνέχεια τα ψηφία κάθε διαγωνίου και τοποθετούμε το άθροισμα στο τέλος κάθε διαγωνίου. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός που προκύπτει αν διαβάσουμε αυτά τα αθροίσματα από την πάνω αριστερή γωνία του πίνακα μέχρι την κάτω δεξιά.



άρα 28×57=1596.

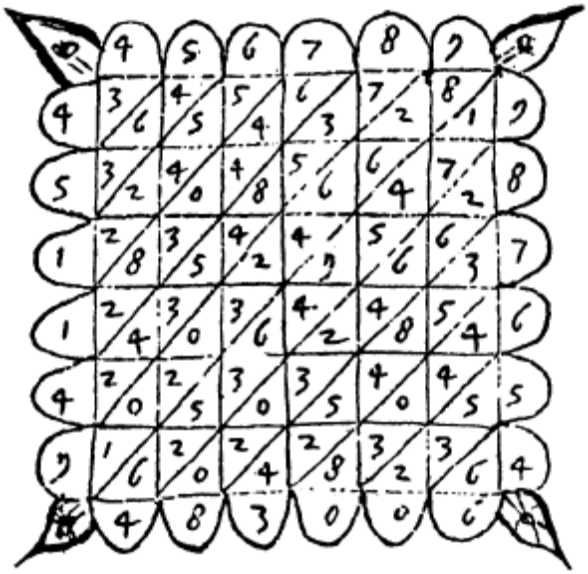
<u>Παράδειγμα 2</u>

Θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 183×49. Κάνουμε και εδώ ακριβός την ίδια διαδικασία όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Εδώ όμως έχουμε πίνακα 2×3.



Παρατήρηση

Στην τρίτη διαγώνια στήλη το άθροισμα ξεπερνάει το 10, για αυτό χρησιμοποιούμε ένα κρατούμενο όπως και στην σύγχρονη μέθοδο πολλαπλασιασμού και το προσθέτουμε στο άθροισμα την επόμενης διαγώνιας στήλης.



Η διπλανή εικόνα είναι από ένα χειρόγραφο που γράφτηκε στη Φλωρεντία γύρω στο 1430 από άγνωστο συγγραφέα, και παρουσιάζει την μέθοδο αυτή.

Μια άλλη μέθοδος πιο οικεία και σε εμάς χρησιμοποιήθηκε από τον ινδό μαθηματικό Brahmagupta κατά τη διάρκεια του ενδέκατου αιώνα. Η μέθοδος αναφέρεται ως gomutrika, το οποίο σημαίνει " τροχιά της ουράς μιας αγελάδας ". Ο Brahmagupta έγραψε ένας από τους παράγοντες του γινομένου κάθετα και δίπλα σε κάθε ψηφίο του, επαναλάμβανε τον δεύτερο παράγοντα μια θέση πιο δεξιά για κάθε γραμμή που κατέβαινε.

Στην συνέχεια πολλαπλασίαζε το ψηφίο από τον παράγοντα που είναι κάθετα με τον αριθμό που βρισκόταν δίπλα του και τοποθετούσε το γινόμενο από κάτω. Η διαδικασία αυτή γινόταν για κάθε μία γραμμή και στην συνέχεια πρόσθετε τα γινόμενα.

Παρακάτω βλέπουμε τον πολλαπλασιασμό 315 $\times$ 452 με αυτήν την μέθοδο.

```
3     4 5 2
1       4 5 2
5         4 5 2
_____________________
    1 3 5 6          <-- 3 * 452
        4 5 2        <-- 1 * 452
        2 2 6 0      <-- 5 * 452
_____________________
    1 4 2 3 8 0
```

Ένας άλλος τύπος πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιήθηκε παλαιοτέρα παρουσιάζεται στο πρώτο αριθμητικό βιβλίο που δημοσιεύεται στη Βόρεια Αμερική, το «Sumario compendioso de las quentas de plata y oro que in los reynos del Piru son necessarias a los mercaderes y todo genero de tratantes Los algunas reglas tocantes al Arithmetica» . Η μετάφραση του παραπάνω τίτλου είναι: «Περιεκτική περίληψη του υπολογισμού του ασημιού και του χρυσού, ο οποίος, στα βασίλεια του Περού, είναι απαραίτητος για όλα τα είδη εμπόρων». Ο συντάκτης ήταν ο Brother Juan Diez, ένας ιερέας που έφθασε στο Μεξικό με τον Cortez το 1519 αλλά το βιβλίο του δεν δημοσιεύθηκε μέχρι 1556. Παρακάτω αναλύουμε την μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Diez μέσα από ένα παράδειγμα.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 875$\times$978 .

Βήμα 1ο

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία των εκατοντάδων. Δηλαδή το 8 από το 875 με το 9 από το 978, και γράφουμε το αποτέλεσμα ($8 \times 9=72$) από κάτω αρχίζοντας από τα αριστερά.

$$\begin{array}{l} \underline{875 \times 978} \\ 72 \end{array}$$

Βήμα 2ο

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το ψηφίο των εκατοντάδων από το πρώτο αριθμό με το ψηφίο των δεκάδων του δεύτερου. Δηλαδή το 8 από το 875 με το 7 από το 978 και τοποθετούμε το αποτέλεσμα, το 56, στην γραμμή κάτω από το 72 αλλά μια στήλη δεξιότερα. Επειδή όμως πάνω από το 6 δεν υπάρχει κάποιο ψηφίο το 6 ανεβαίνει στην πάνω γραμμή, δίπλα δηλαδή στο 72.

$$\begin{array}{l} \underline{875 \times 978} \\ 72 \\ \ \ 56 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{875 \times 978} \\ 726 \\ \ \ 5 \end{array}$$

Βήμα 3ο

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το ψηφίο των εκατοντάδων από το πρώτο αριθμό με το ψηφίο των μονάδων του δεύτερου. Δηλαδή το 8 από το 875 με το 8 από το 978 και τοποθετούμε το αποτέλεσμα, το 64, στην γραμμή κάτω από το 5 αλλά μια στήλη δεξιότερα. Επειδή όμως πάνω από το 64 δεν υπάρχου ψηφία το 6 ανεβαίνει στην πάνω γραμμή, δίπλα δηλαδή στο 5, και το 4 ανεβαίνει ακόμα μία γραμμή πιο πάνω δηλαδή δίπλα στο 726.

$$\begin{array}{l} \underline{875 \times 978} \\ 726 \\ \ \ 5 \\ \ \ \ \ 64 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{875 \times 978} \\ 726 \\ \ \ \ \ 564 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{875 \times 978} \\ 7264 \\ \ \ \ \ 56 \end{array}$$

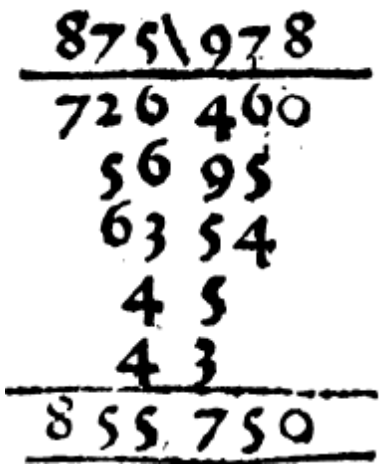
Βήμα 4ο

Αφού πολλαπλασιάσαμε το πρώτο ψηφίο του πρώτου αριθμού με όλα τα ψηφία του δεύτερου αριθμού, θα επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία με το ψηφίο των δεκάδων του πρώτου αριθμού. Αρχικά δηλαδή θα πολλαπλασιάσουμε το 7 από το 875 με το 9 από το 978. Το αποτέλεσμα, 63, θα το τοποθετήσουμε στην γραμμή κάτω από ότι είχαμε γράψει μέχρι τώρα, δηλαδή κάτω από το 56, αρχίζοντας όμως από την δεύτερη στήλη. Εδώ κανένα ψηφίο του 63 δε ανεβαίνει προς τα πάνω διότι οι παραπάνω γραμμές είναι κλαημένες.

$$\begin{array}{c} \underline{875\times978} \\ 7264 \\ 56 \\ 63 \end{array}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και στα προγουμενά βήματα. Όταν αρχίσουμε να πολλαπλασιάζουμε το ψηφίο των μονάδων του πρώτου αριθμού με τα ψηφία του δεύτερου αριθμού, αρχίζουμε να τοποθετούμε τα γινόμενα από την τρίτη στήλη. Καταλήγουμε έτσι στο παρακάτω αποτέλεσμα:

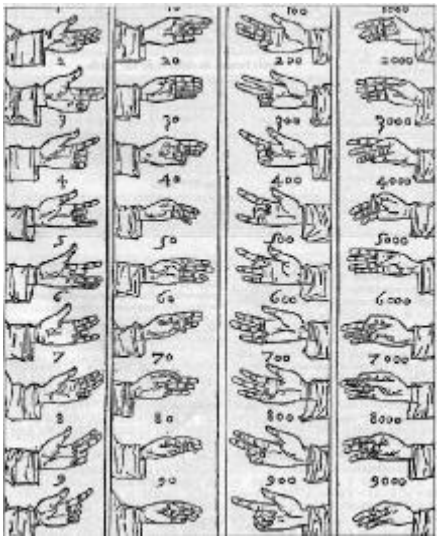
$$\begin{array}{c} \underline{875\times978} \\ 726460 \\ 5695 \\ 6354 \\ 45 \\ 43 \\ \hline 855750 \end{array}$$



Βήμα 5^{ο}

Αν προσθέσουμε κάθε στήλη, από τα δεξιά προς τα αριστερά, μεταφέροντας κανονικά τα κρατούμενα έχουμε το αποτέλεσμα που ψάχναμε.

Βεβαίως μια από τις πρώτες μεθόδους πολλαπλασιασμού σίγουρα περιέλαβε τη χρήση των χεριών.



Η εικόνα στα δεξιά είναι από το Summa Arithmetica του Pacioli (1532) και παρουσιάζει τη μέθοδο αρίθμησης με τα δάκτυλα. Στην εικόνα βλέπουμε ότι τους αριθμούς μέχρι το100 τους σχημάτιζαν με το αριστερό χέρι, ενώ τους μεγαλύτερους με το δεξί.

Χαρακτηριστικό είναι ένα απόσπασμα του ρωμαίου ποιητή Decimus Iunius Iuvenalis που αναφέρετε στον Νέστορα, τον γηραιότερο από τους Έλληνες βασιλιάδες που πολέμησαν στην Τροία : « ευτυχής είναι αυτός που πολλές φορές ξεγέλασε τον θάνατο και μπορεί να υπολογίζει τώρα την ηλικία του με το δεξί χέρι»

Ο υπολογισμός με τα δάκτυλα δεν είναι το ίδιο με τον πολλαπλασιασμό με κάποια μέθοδο, αλλά είναι εξίσου σημαντικός. Όπως είχε γράψει και ο Leonardo της Πίζας, " ο πολλαπλασιασμός με τα δάχτυλα πρέπει να χρησιμοποιείτε συνεχώς, έτσι ώστε το μυαλό όπως τα χέρια να γίνεται πιο έμπειρο στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των διάφορων αριθμών.

Θα περιγράψουμε τώρα μια «περίεργη» μέθοδος πολλαπλασιασμού των αριθμών από το έξι ως το εννέα που στηρίζετε στα δάκτυλα. Έστω ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε το 7 με το 8. Στο ένα χέρι σηκώνουμε τόσα δάχτυλα όσα μένουν από το 7 για να φτάσουμε στο 10 δηλαδή τρία. Στο άλλο χέρι σηκώνουμε 2, γιατί 2 χρειάζονται για να φτάσουμε από το 8 στο δέκα. Άρα στο ένα χέρι έμειναν κάτω 3 δάκτυλα και στο άλλο 2. Αν προσθέσουμε αυτούς τους δυο αριθμούς των δακτύλων που είναι κάτω έχουμε το ψηφίο των δεκάδων του γινομένου, ενώ αν τους πολλαπλασιάσουμε έχουμε το ψηφίο τον μονάδων του γινομένου. Στο συγκριμένο παράδειγμα

$$2+3=5 \text{ και } 2\times 3=6$$

Άρα το αποτέλεσμα είναι 56.

Ένα δεύτερο παράδειγμα πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα είναι οι πολλαπλασιασμού του εννέα με αριθμούς μικρότερους του. Αν για παράδειγμα θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο του 9 με το 4, ανοίγουμε και τα δέκα δάκτυλα και αρχίζουμε να αριθμούμε από τα αριστερά προς τα δεξιά. Όταν φτάσουμε στο 4 δάκτυλο το κατεβάζουμε κάτω. Τα 3 δάχτυλα που μένουν στην

αριστερή μεριά είναι το ψηφίο των δεκάδων, ενώ τα 6 που μένουν στην δεξιά μεριά του κατεβασμένου δακτύλου είναι το ψηφίο των μονάδων($9\times4=36$).

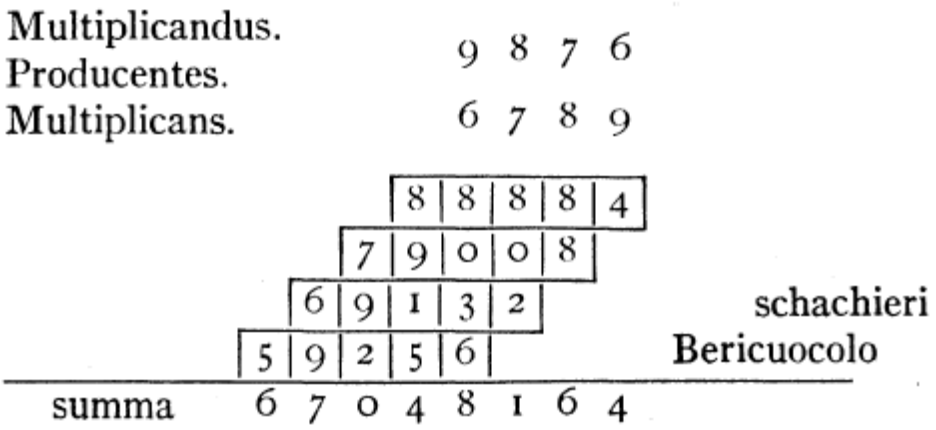
Αριστερό χέρι Δεξί χέρι

Η μέθοδος αυτή μπορεί να μας δώσει και πολλαπλασιασμούς του εννέα με αριθμούς μέχρι το 20, αλλά με μια τροποποίηση. Αν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε ας πούμε το 9 με το 14, αριθμούμε πάλι με τα δάκτυλα όπως πριν αλλά στον αριθμό των δακτύλων που μένει αριστερά του κατεβασμένου και εκφράζει τις δεκάδες, προσθέτουμε το 9. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, στο 3 που είναι ο αριθμός των δακτύλων που μένει αριστερά προσθέτουμε το 9, δηλαδή 12. Άρα το αποτέλεσμα είναι 12 δεκάδες και 6 μονάδες (που μένουν δεξιά του κατεβασμένου δακτύλου), δηλαδή 126.

Το 1494 ο Luca Pacioli παρουσιάζει 8 μεθόδους πολλαπλασιασμού. Οι λίστα με αυτές τις μεθόδους έχει ξεκινήσει από τον Bhaskara που στο Lilavati παρουσιάζει πέντε μεθόδους πολλαπλασιασμού, και αργότερα οι σχολιαστές του πρόσθεσαν άλλες δυο. Ο Frank Swetz στο «καπιταλισμός και αριθμητική» παρουσιάζει τις μεθόδους του Pacioli όπως φαίνετε στην παρακάτω εικόνα που είναι σελίδα από το βιβλίο του.

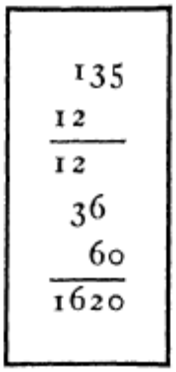
1. *Per scachieri*, Venetian for tesselated. In Florence this method was called *bericuocolo*, the name of a pastry whose design bore a resemblance to the computational configuration.
2. *Castellucio*, Florentine for "little castle."
3. *A Traveletta* or *per colona*, by the table or column.
4. *Per quadrilatero*, by the *quadrilateral*.
5. *Per crocetta* or *casella*, by the cross or pigeonhole.
6. *Per gelosia* or *graticola*, method of cells.
7. *Per repiego*, method of decomposition of factors.
8. *A scapezza*, distributing, separating and multiplying by the parts, not the factors, of the multiplier.

1) Η μέθοδος πολλαπλασιασμού που ο Pacioli αποκλεί «Bericocoli Multiplicatio vel scachieri» είναι παρόμοια με την δική μας κοινή μέθοδο.

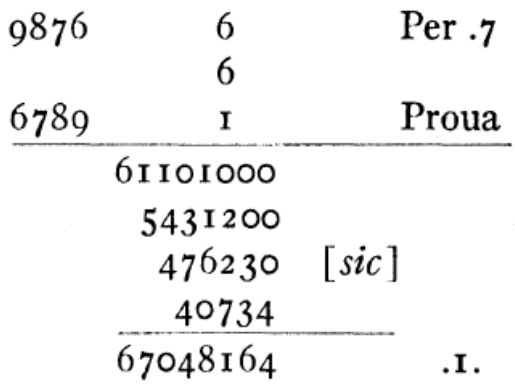


Η εικόνα είναι από μία πραγματεία του και δείχνει την μέθοδο αυτή.

Λέει ότι οι Βενετοί κάλεσαν αυτή τηνμέθοδο "per scachieri" λόγω της ομοιότητάς της με μια σκακιέρα, ενώ οι φλωρεντινοί την κάλεσαν "per bericuocolo" επειδή έμοιαζε με κάποια κέικ που είχαν αυτό το όνομα και πωλούνταν στις εκθέσεις της Τοσκάνης. Στη Βερόνα ονομάστικε "per organetto, " λόγω της ομοιότητας της με ένα μουσικό όργανο. Ακόμα το όνομα " a scaletta" χρησιμοποιήθηκε μερικές φορές λόγω του ότι μοιάζει με μικρή σκάλα, όπως βλέπουμε στην προηγούμενη εικόνα. Αυτή η μέθοδος δεν βρίσκεται άμεσα στο Lilavati, αλλά δίνονται δύο παρόμοιες μέθοδοι με αυτή. Οι δύο αυτές μέθοδοί που υπάρχουν στο Lilavati διαφέρουν στο γεγονός ότι στην μία ο πολλαπλασιασμός αρχίζει από τα αριστερά ενώ στην άλλη από τα δεξιά.



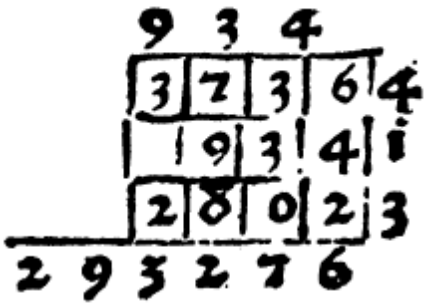
2) Η δεύτερή μέθοδο πολλαπλασιασμού που καθορίζεται από το Pacioli, εξ αιτίας της μορφής της, ήταν γνωστή ως " το κάστρο " ή, στη Φλωρεντία, " το μικρό κάστρο." Η μέθοδος αυτή ήταν μια σχολική μέθοδος που την είχαν φτιάξει δάσκαλοι στην Ιταλία. Η σημασία του ονόματος γίνεται κατανοητή καλύτερα από το παράδειγμα που είναι παρμένο από τον Pacioli



Στην πρώτη γραμμή κάτω από την οριζόντια ευθεία βάζουμε το αποτέλεσμα του γινομένου του πρώτου ψηφίου του πρώτου από τους δυο αριθμούς με τον άλλο. Στην δεύτερη γραμμή το αποτέλεσμα του γινομένου του δεύτερου ψηφίου του πρώτου από τους δυο αριθμούς με τον άλλο, αρχίζοντας να γράφουμε τον αριθμό από την δεύτερη στήλη. Συνεχίζουμε για όλα τα ψηφία του πρώτου αριθμού. Τέλος τοποθετούμε μηδενικά όπου οι στήλες είναι κενές και προσθέτουμε αυτά τα μερικά γινόμενα ώστε να έχουμε το τελικό αποτέλεσμα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα 9876×6789=67048164.

3) Η τρίτη μέθοδος που δίνεται από τον Pacioli είναι γνωστή ως σχέδιο στηλών ή ταμπλετών. Με αυτή την μέθοδο ο υπολογισμός γίνετε σε επιμελημένους πίνακες, πάντα στις στήλες, όπως εκείνοι που χρησιμοποιούνται από τους βαβυλώνιους.

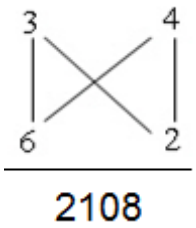
4) Η τέταρτη μέθοδος του Pacioli είναι παρόμοια με την μέθοδο της σκακιέρας, με την διαφορά ότι τα μερικά γινόμενα μετατοπίζονται ελαφρώς όπως φαίνετε στην παρακάτω εικόνα από την αριθμητική του Treviso (1478)



5) Η μέθοδος Crocetta είναι υποψήφια για την προέλευση του Χ ως σύμβολο για τον πολλαπλασιασμό. Η μέθοδος αυτή δόθηκε αρχικά στο Lilavati αλλά εξηγήθηκε από τον Ganea το 1535) σε σχόλια στο έργο του Bhaskara. Παράδειγμα της μεθόδου

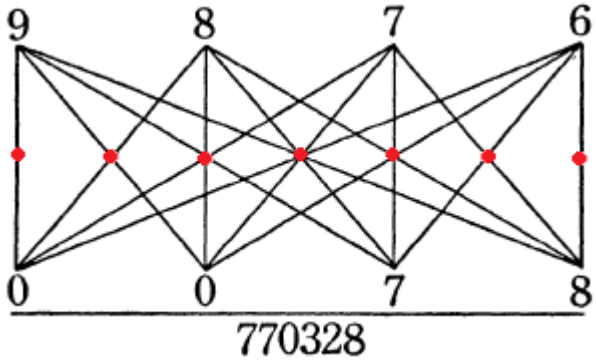
αυτής: αν θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο του 34 με το 62 τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από άλλον όπως στο σχήμα.

Για να βρούμε το γινόμενο κάνουμε πρώτα τον πολλαπλασιασμό τον αριθμών στην τελευταία στήλη και τοποθετούμε τον αριθμό από κάτω σαν τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος. Στο παράδειγμα $2\times4=8$. Στην συνέχεια κάνουμε «χιαστί» τους πολλαπλασιασμούς και προσθέτουμε τα γινόμενα. Στο παράδειγμα $3\times2+6\times4=30$. Γράφουμε από κάτω το 0 και κρατάμε το 3. Στο τέλος υπολογίζουμε το γινόμενο του 3 με το 6, και προσθέτουμε αι τα κρατούμενα, $3\times6 + 3=21$.



Η μέθοδος επεκτείνετε και για αριθμούς με περισσότερα από 2 ψηφία. Παρακάτω είναι ένα παράδειγμα από την αριθμητική του Pagani το 1591.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα όμως την μέθοδο είναι πιο χαρακτηριστικό το παρακάτω σχήμα



Για να υπολογίσουμε το γινόμενο 9876×78 αρχίζουμε από τα δεξιά και πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία που βρίσκονται στην άκρη των ακμών που

δημιουργούν κάθε έναν από τους κόμβους που είναι σημειωμένοι. Στην συνέχειά προσθέτουμε τα μερικά γινόμενα και από κάτω γράφουμε το αποτέλεσμα αρχίζοντας από τα δεξιά, κρατώντας κανονικά τα κρατούμενα για το επόμενο μερικό άθροισμα γινομένων.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα:

Για τον πρώτο κόμβο έχουμε : $6\times8=48$, γράφουμε το 8 κρατάμε 4.

Για τον δεύτερο κόμβο έχουμε: $7\times8+6\times7=56+42=98+4$(κρατούμενο από πριν) $=102$ γράφουμε το 2 κρατάμε το 10.

Για τον τρίτο κόμβο έχουμε: $6\times0+7\times7+8\times8=0+49+64=113+10$(κρατούμενο από πριν)$= 123$ γράφουμε το 3 κρατάμε το 12.

Για τον τέταρτο κόμβο έχουμε: $6\times0+7\times0+8\times7+9\times8= 0+0+56+72= 128+12$ (κρατούμενο από πριν)$= 140$ γράφουμε το 0 κρατάμε το 14.

Για τον πέμπτο κόμβο έχουμε: $7\times0+8\times0+9\times7= 0+0+63= 63+14$ (κρατούμενο από πριν)$= 77$ γράφουμε το 7 κρατάμε το 7.

Για τον έκτο και έβδομο κόμβο τα μερικά αθροίσματα είναι μηδέν. Άρα γράφουμε και το 7 που είχαμε κρατήσει από πριν και έχουμε το αποτέλεσμα.

6) Η μέθοδος gelosie έχει περιγραφεί παραπάνω αναλυτικά

7) Η μέθοδος ***per repiego***,δηλαδή η μέθοδος της σύνθεσης είναι μία από της μεθόδους που πέρασαν από τους Ινδούς στους Ιταλούς μέσα από αραβικές πηγές. Στην μέθοδο αυτή σπάμε έναν από τους πολλαπλασιαστές σε δύο παράγοντες. Αν θέλουμε για παράδειγμα να πολλαπλασιάζουμε με το 72, πολλαπλασιάζουμε πρώτα με το 9 και έπειτα με το 8.

8) Η μέθοδος scapezza, είναι μία μέθοδος πολλαπλασιασμού με τα μέρη, όχι οι παράγοντες, του πολλαπλασιαστή όπως στην per repirgo. Έχει τις ρίζες της στον Bhaskara, και η ονομασία της ήταν khanda gunamn

Ο Tartaglia (1556) δίνει μία απεικόνιση:

$$26 \times 67 = (3 + 4 + 5 + 6 + 8) \times 67 = 201 + 268 + 335 + 402 + 536 = 1742$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Η διαίρεση είναι γενικά η τέταρτη από τις θεμελιώδεις πράξεις, «The quarto atto» όπως αναφέρετε στην αριθμητική του Treviso(1478) . Στην αγγλική γλώσσα, για την διαίρεση έχει επικρατήσει η ονομασία «division». Εκτός όμως από το division για την διαίρεση έχει χρησιμοποιηθεί και η λέξη «partition». Ανάμεσα σε αυτούς που έχουν χρησιμοποιήσει το division είναι και ο Fibonacci, στο Liber Abaci το 1202. Η ονομασία αυτή έχει την βάση της στον Ευκλείδη που χρησιμοποιούσε την λέξη «μετρεῖν» τόσο για να περιγράψει την μέτρηση όσο και την διαίρεση. Η λέξη partition χρησιμοποιήθηκε από πολλούς συγγραφείς όπως ο Huswirt (1501), ο Ghaligai (1521),ο Stifel(1544), ο Scheubel (1545),ο Cataldi (1602),ο Ortega (1512), ο Savonne (1563), και ο Santa-Cruz (1594). Η λέξη αυτή έχει τις ρίζες της στο Ήρωνα, τον Πάππο και τον Διόφαντο που για την διαίρεση χρησιμοποιούσαν την έκφραση «μερίζειν».

Η διαίρεση θεωρείτο πάντα μια δύσκολη διαδικασία. Χαρακτηριστικά ο Pacioli (1494) λέει «αν κάποιος ξέρει να διαιρεί καλά όλα τα υπόλοιπα είναι εύκολα». Τις δυσκολίες της διαιρέσεις τις αναγνωρίζει και ο Hylles 1600 ο οποίος αναφέρει «Η διαίρεση εκτιμάτε ότι είναι μία από τις πράξεις που θέλουν πολύ χρόνο».

Πιθανώς η παλαιότερη μορφή διαίρεσης είναι αυτή που χρησιμοποιείται από τους Αιγυπτίους και βασιζόταν στις διαδικασίες του διπλασιασμού και του υποδιπλασιασμού. Αν για παράδειγμα θέλουμε να διαιρέσουμε το 19 με το 8 εργαζόμαστε όπως παρακάτω:

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

Επειδή τώρα 19= 16 + 2 +1 , η διαίρεση του με το 8 είναι το άθροισμα του 2+1/4+1/8, που βρίσκονται αντίστοιχα δίπλα στα 16, 2 και 1 του παραπάνω πίνακα.

Άρα $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Για τους αρχαίου έλληνες η διαίρεση εξαρτιόταν από τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της αφαίρεση και διαλεγόταν με τρόπο παρόμοιο με τον σημερινό. Έστω ότι ήθελαν να διαιρέσουν το 1.825.201 ($\overset{\rho\pi\beta}{\mathrm{M}}, \varepsilon\sigma\alpha$) με το 1.351(,ατνα). Οι όροι που περιέχουν τις διαδοχικές δυνάμεις του 10 διατηρούνται νοερά ως κρατούμενα, και το πρώτο ερώτημα είναι πόσες φορές χωρά το χίλια στο ένα εκατομμύριο, λαμβάνοντας υπόψη ότι το χίλια συνοδεύετε από το 351 και ότι του ενός εκατομμυρίου έπονται 825 χιλιάδες. Η απάντηση είναι χίλια (,α) και όταν αυτός ο αριθμός πολλαπλασιαστεί υπό τον διαιρέτη ,ατνα δίνει $\overset{\rho\pi\beta}{\mathrm{M}}, \varepsilon\sigma\alpha$ το οποίο αφαιρούμενο από το $\overset{\rho\pi\beta}{\mathrm{M}}, \varepsilon\sigma\alpha$, δίνει $\overset{\mu\zeta}{\mathrm{M}}, \delta\sigma\alpha$. Αυτό το υπόλοιπό $\overset{\mu\zeta}{\mathrm{M}}, \delta\sigma\alpha$ =474.201 πρέπει τώρα να διαιρεθεί με το ,ατνα και διαπιστώνουμε ότι χωρά τ = 300 και όχι υ=400 φορές. Πολλαπλασιάζουμε το ,ατνα επί του τ =300, και λαμβάνουμε $\overset{\mu}{\mathrm{M}}, \varepsilon\tau$ =405300, ο οποίος αφαιρούμενος από το $\overset{\mu\zeta}{\mathrm{M}}, \delta\sigma\alpha$ δίνει $\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$,η α= 68.901. Ο αριθμός αυτός πρέπει να διαιρεθεί με το ,ατνα και το πηλίκο είναι ν=50.

Πολλαπλασιάζουμε το ,ατνα επί τουν, έχουμε $\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}, \zeta\varphi\nu$ =67.550 ο οποίος αφαιρούμενος από τον $\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$,η α δίνει ,ατνα=1.351. Επομένως το τελευταίο πηλίκο είναι α=1, ενώ το συνολικό πηλίκο είναι ,ατνα=1.351.

Μια άλλη μέθοδος για εξηκονταδικά κλάσματα περιγράφετε από τον Θεώνα το 390 μ.χ. Η μέθοδος του θέωνα μοιάζει με την προηγούμενη , διαρκεί όμως περισσότερο και είναι επιπλέον δυσκολότερο να προβλέψουμε ποίος είναι ο κατάλληλος δοκιμαστικός αριθμός για το πηλίκο.

Η απλούστερη μέθοδος για την διαίρεση είναι η αναγνώριση του πηλίκου μια διαίρεσης μέσα από τις στήλες ένα πίνακα πολλαπλασιασμού. Μια άλλη μέθοδος δίνετε από τον Gebret το 980 μ.χ. που όμως δεν είμαστε σίγουροι ότι είναι πραγματικά δική του. Πιο πολύ η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε από τους διαδόχους του Gebret. Ένα παράδειγμα την διαίρεσης του 900 με το 8 , με αυτήν την μέθοδο παρουσιάζετε παρακάτω:

επειδή 8=10-2

$$(10-2)\ 900\ (90+18+3+1+\frac{1}{2}=112\frac{1}{2})$$

$$\underline{900-180}$$

$$180$$

$$\underline{180-36}$$

$$36$$

$$\underline{30-6}$$

$$6+6=12$$

$$\underline{10-2}$$

$$2+2=4,\ \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Το ίδιο παράδειγμα παρουσιάζετε και σε ένα χειρόγραφο του 12ου στο Παρίσι. Το χειρόγραφό αυτό χρησιμοποιεί τόσο αραβικά όσο και ρωμαϊκά σύμβολα, συνηθισμένος φαινόμενο για αυτήν την περίοδο. Το προηγούμενο παράδειγμα στο χειρόγραφο παρουσιάζετε όπως στην παρακάτω εικόνα:

	C	X	I	
[10 − 8]			2	Differentia
			8	Divisor
	~~9~~			Div^dus
[2 × 90]	~~1~~	8		
[2 × 10]		2		
[80 + 20]	~~1~~			
[2 × 10]		~~2~~		
[2 × 2]			4	
		1		Denominaciones
		1		
		9	2	
[Quotient][1]	1	1	2	

Η μέθοδος αυτή αποδίδετε στο Gebret και από τον Abelard από το Bath.

Μία άλλη μέθοδος διαίρεσης που ήταν ευρέως γνωστή στο τέλος του μεσαίωνα είναι γνωστή με το όνομα «per repiego». Στην μέθοδο αυτή δεν διαιρούμε το

διαιρετέο κατευθείαν με τον διαιρέτη αλλά με παράγοντες του διαιρέτη. Για παράδειγμα 218:42=218:6:7

Μια άλλη μέθοδος είναι γνωστή ως μέθοδος αν τμήματα. Στην μέθοδο αυτή αν διαιρέτης είναι μεγαλύτερος του δέκα τότε χωρίζετε σε δύο μέρη όπως στο παρακάτω παράδειγμα: έστω ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το 87.234 με το 20, χωρίζουμε το 87.234 με μια κάθετη ως εξής 8723\4 και διαιρούμε το 8723 με το 2 και μετά το 4 με το 20.

Μια ακόμα μέθοδος πολύ συνηθισμένη πριν το 1600, είναι γνωστή ως galea, batello, ή γρατσουνιά και είναι ινδικής προέλευσης. Παράδειγμα μια τέτοιας διαίρεσης από την αριθμητικής του Treviso παρουσιάζετε παρακάτω. Αν θέλουμε να διαιρέσουμε το 65.284 με το 594 εργαζόμαστε όπως παρακάτω ακλουθώντας τα επτά βήματα.

Βήμα 1^{ο}

65284 | 1
594

βήμα 2^{ο}

1
65284 | 1
594

βήμα 3^{ο}

16
65284 | 1
594

βήμα 4^{ο}

5
16
65284 | 1
594

Βήμα 5^{ο}

5
168
65284 | 1
5944
59

βήμα 6^{ο}

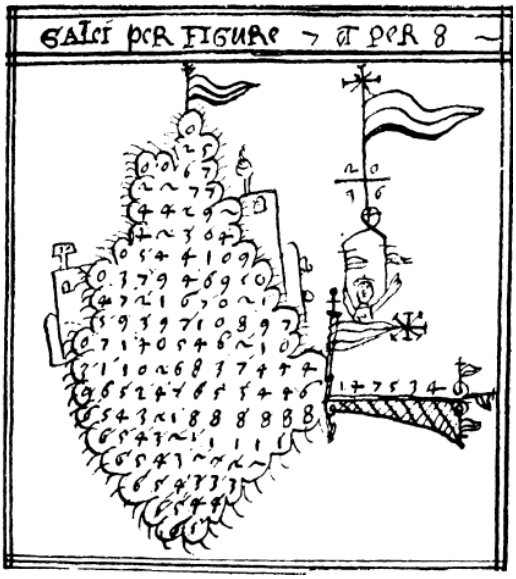
5
168
65284
59444 | 10
599
5

βήμα 7^{ο}

15
533
16878
65284 | 109
59444
599
5

Από το σχήμα αυτό έχουμε ότι 65284:594=109 και υπόλοιπο 538.

Ο Fibonacci χρησιμοποιεί την μέθοδο αυτή για να πραγματοποιήσει την διαίρεση του 18.456 με το 17, την διαίρεση 18.456 με το 19, και την διαίρεση του 13.976 με το 23.



Η ονομασία Galeo και batello χρησιμοποιείτε γιατί το σχήμα που προκύπτει από την μέθοδο αυτή μοιάζει με καράβι, όπως φαίνετε και στην διπλανή εικόνα.

Αυτή η μέθοδος διαίρεσης χρησιμοποιήθηκε από του άραβες από την εποχή του al-Khowarizmi με κάποιες βέβαια αλλαγές.

Τον 15^{ο} αιώνα εμφανίστηκε μια μέθοδος παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε σήμερα, με την ονομασία *Dand (από το δίνω).*Πήρε το όνομά της από το γεγονός του ότι τα μερικά γινόμενα αφαιρούνται από τον αριθμό που διαιρούμε και «δίνουν» το επόμενο υπόλοιπο.

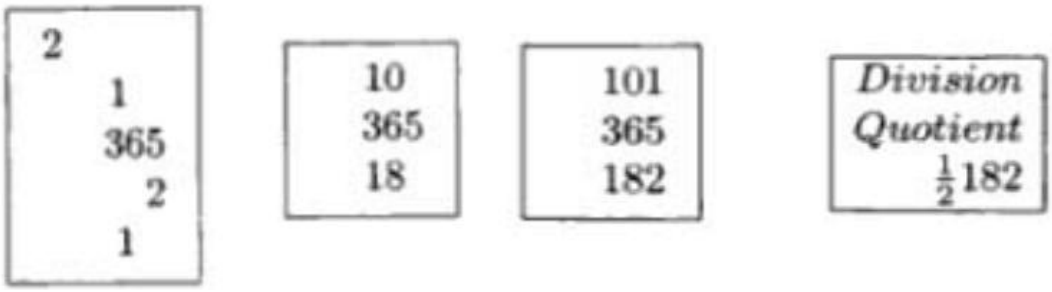
Μια ακόμα μέθοδο για διαίρεση χρησιμοποιεί ο Fibonacci στο Liber Abaci και την ονομάζει «μέθοδος του κεφαλιού κι του χεριού» . Ο Fibonacci εξηγεί την μέθοδο αυτή μέσα από ένα παράδειγμα. Με το ίδιο αυτό παράδειγμα θα εξηγηθεί η μέθοδος του και παρακάτω.

Έστω ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το 7.543 με το 6. Κρατάμε το 7.543 Στο χέρι και αρχικά διαιρούμε το 7 από το 7.543 με το 6, που έχουν πηλίκο 1 και υπόλοιπο 1. Σβήνουμε το 7 από το χέρι και στην θέση του βάζουμε το 1(του πηλίκου), και στο κεφάλι μας κρατάμε το 1(του υπολοίπου). Το 1 που έχουμε κρατήσει στο κεφάλι μας μαζί με το 5 από τον διαιρετέο μας δίνει 15 που το διαιρούμε με το 6, και έχουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 3. Σβήνουμε το 5 από το χέρι κα στην θέση του βάζουμε το 2, και στο κεφάλι μας κρατάμε το 3, που είναι το υπόλοιπο που βρήκαμε πριν. Το 3 που έχουμε στο κεφάλι μας μαζί με το 4 από τον διαιρετέο μας δίνει 34 που το διαιρούμε με το 6, και έχουμε πηλίκο 5 και υπόλοιπο 4. Σβήνουμε το 4 από το χέρι κα στην θέση του βάζουμε το 5 (το πηλίκο που

βρήκαμε) και στο κεφάλι μας κρατάμε το 4 (το υπόλοιπο). Το 4 που έχουμε στο κεφάλι μαζί με το 3 του διαιρετέου μας δίνουν 43, που το διαιρούμε με το 6 και έχουμε πηλίκο 7 και υπόλοιπο 1. Σβήνουμε το 3 από το χέρι μας και στην θέση του βάζουμε το 7 και στο κεφάλι μας κρατάμε το 1. Άρα το τελικό αποτέλεσμα είναι 1257 που είναι γραμμένο στο χέρι μας και 1/6 που είναι το υπόλοιπο που έχουμε στο κεφάλι μας.

Ο Fibonacci στην μέθοδο αυτή γράφει το πηλίκο στο χέρι και κρατάει το υπόλοιπο στο «κεφάλι». Η γνωστή μας ταυτότητα της διαίρεσης **Δ= δ · π + υ** μετατρέπετε μέσα από αυτήν την μέθοδο σε **Δ=δ· «χέρι» + «κεφάλι».**

Μια ακόμα μέθοδο που χρησιμοποιεί ο fibonacci:



Αν θέλει κανείς να διαιρέσει το 365 με το 2 γράφει στον πίνακα το 2 σε ένα μέρος του πίνακα και τραβάς μια γραμμή από πάνω και ένα άλλο 2 κάτω από
το 5 και ξεκινάς διαιρώντας το 3 με το 2, λέγοντας το 1/2 του 3 είναι 1 και περισσεύει
1.

Μετά γράφεις το 1 κάτω από το 3 και το 1 που περισσεύει το γράφεις από πάνω,
όπως φαίνεται στον πρώτη εικόνα.

Και το υπόλοιπο 1 ζευγαρώνει με το 6 κάνοντας το 16. Παίρνεις το 1/2 του 16 που είναι το 8. Βάζεις το 8 κάτω από το 6 και το 1 κάτω από το 3 όπως φαίνεται στην δεύτερη εικόνα. Και καθώς δεν υπάρχει υπόλοιπο στην διαίρεση με του 16, διαιρείς το 5 με το 2. Το πηλίκο είναι 2 και το υπόλοιπο 1.

Γράφεις το 2 κάτω από το 5 και το 1 πάνω από το 2 το οποίο θα κάνουμε παρανομαστή και έτσι θα έχουμε το 1/2 του όλου και πριν από το 1/2 γράφεις το πηλίκο 182 της διαίρεσης όπως φαίνεται στην τρίτη εικόνα. (Κάνει και την επαλήθευση με πολλαπλασιασμό του 182 1/2 επί 2).

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ

Υπάρχουν αποδείξεις ότι οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να υπολογίσουν την τετραγωνική ρίζα κάποιων αριθμών από το 2.000 π.Χ. Στην βαβυλωνιακή συλλογή του Yale υπάρχουν διάφορα πλακίδια(με το κωδικό όνομα YBC7289) που δείχνουν ότι οι Βαβυλώνιοι είχαν υπολογίσει την ρίζα του δύο με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων. Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν οι Βαβυλώνιοι μοιάζει να είναι η ίδια με την μέθοδο που σήμερα ονομάζουμε μέθοδος του Newton.

Η μέθοδος αυτή είναι μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία, με την οποία προσεγγίζουμε με κάθε επανάληψη την ζητούμενη ρίζα. Παράδειγμα αυτής της μεθόδου:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ρίζα του 250.

Βήμα 1^{ο}

Αρχικά «μαντεύουμε» ένα αριθμό που πιστεύουμε πως είναι η ρίζα του 250. Έστω 10.

Βήμα 2^{ο}

Διαιρούμε τον αριθμό που ψάχνουμε την ρίζα του με τον παραπάνω αριθμό, δηλαδή 250:10=25.

Βήμα 3^{ο}

Βρίσκουμε τον μέσο όρο των αριθμών των 2 προηγούμενων βημάτων.

$$\frac{10+25}{2}=17,5$$

Βήμα 4^{ο}

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία από το βήμα 1 αλλά με νέο αριθμό που προέκυψε, το 17,5.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τρείς πρώτες επαναλήψεις – προσεγγίσεις τις ρίζας του 250.

10	250:10=25	$\frac{10+25}{2}=17,5$	17,5
17,5	250:17,5=14,285	$\frac{17,5+14,285}{2}=15,89$	15,89
15,89	250/15,89=15,73	$\frac{15,89+15,73}{2}=15,81$	15,81

Δηλαδή $\sqrt{250}\approx 15,81$.

Για την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν ένα διαφορετικό τρόπο. Αρχικά χώριζαν τον αριθμό του οποίου επιθυμούσαν να υπολογίσουν την τετραγωνική ρίζα σε ξεχωριστές δυνάμεις του δέκα, δηλαδή σε μονάδες δεκάδες , εκατοντάδες κ.τ.λ. στην συνέχεια ο πρώτος όρος της τετραγωνικής ρίζας θα είναι κάποιος αριθμός δεκάδων ή εκατοντάδων ή χιλιάδων…, και θα πρέπει να προσδιοριστεί μέσα από διάφορες δοκιμές. Έστω ότι ***Α*** παριστάνει τον αριθμό του οποίου πρέπει να προσδιοριστεί η ρίζα, ενώ ο ***α*** παριστάνει τον πρώτο όρο της ρίζας και ο ***χ*** τον επόμενο όρο, τότε είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα $(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$ (πρόταση ΙΙ.4 των Στοιχείων). Από την προηγούμενη ταυτότητα πρέπει να υπολογίσουμε το ***χ***, έτσι ώστε ο αριθμός $2ax+x^2$ να είναι μικρότερος του $A-a^2$. Δηλαδή πρέπει να διαιρέσουμε το $A-a^2$ με το **2α** , λαμβάνοντας υπόψη ότι όχι μόνο ο **2αχ** που είναι το πηλίκο

αλλά και ο **(2αχ+χ)χ** πρέπει να είναι μικρότερος του $A-a^2$. Έτσι με κάποιες δοκιμές μπορούμε να βρούμε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του χ που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. Έστω ότι η τιμή αυτή είναι β. Τότε ο αριθμός $2\alpha\beta+\beta^2$ θα πρέπει να αφαιρεθεί από το πρώτο υπόλοιπο $A-a^2$, ενώ από το δεύτερο υπόλοιπό που θα προκύψει θα πρέπει να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο ο τρίτος όρος της τετραγωνικής ρίζας. Και διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί!

Αυτή ήταν η ουσιαστική διαδικασία που εφαρμοζόταν για την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας, όπως περιγράφει ο Θέων ο Αλεξανδρεύς στο υπόμνημά του περί της Σύνταξης του Πτολεμαίου. Εκεί ζητάτε η τετραγωνική ρίζα του 144, και υπολογίζετε με την παραπάνω μέθοδο. Ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός(δύναμη του 10) που περιέχετε στην τετραγωνική ρίζα είναι το 10. Ο 10^2 αφαιρείτε από το 144 και αφήνει υπόλοιπο 44,ο οποίος πρέπει να περιέχει όχι μόνο το διπλάσιο του γινομένου του 10 με τον επόμενο όρο αλλά και το τετράγωνο του επόμενου όρου. Τώρα 2 φορές το 10 ισούται με 20 κι η διαίρεση του 44 με το 20 δίνει 2 σαν τον επόμενο όρο της ρίζας. Έτσι έχουμε ακριβός το ζητούμενο, αφού $2\cdot 20+2^2=44$.

Ο θέων παρουσιάζει και την κατά προσέγγιση ρίζα του 4.500 από τον Πτολεμαίο ο με την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας όμως το εξηκονταδικό σύστημα κλασμάτων.

Όσο για την εξαγωγή κυβικής ρίζας οι Έλληνες θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την ευκλείδεια σχέση $(\alpha+\chi)^3=\alpha^3+3\alpha^2\chi+3\alpha\chi^2+\chi^3$ με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούν την $(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$ για την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας. Ο Ήρωνας μας δίνει μια προσέγγιση της κυβικής ρίζας του 100 ($\sqrt[3]{100}=4\frac{9}{14}$) και αυτό μας κάνει να πιστεύουμε ότι οι έλληνες είχαν κάποιον τρόπο να υπολογίζουν κυβικές ρίζες. Δεν υπάρχει όμως στα σωζόμενα ελληνικά κείμενα κάποια περιγραφή μεθόδου εξαγωγής κυβικής ρίζας.

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες μεθόδους εξαγωγής τετραγωνικής ρίζας κατά το μεσαίωνα είναι αυτή που δίνετε από τον Μάξιμο Πλανούδη, 1340 περίπου. Για να υπολογίσει την ρίζα του 235 εργάστηκε ως εξής.

Αρχικά ψάχνουμε έναν αριθμό το τετράγωνο του οποίου είναι πλησιέστερο στο πρώτο ψηφίο του 235, δηλαδή στο 2. Ο αριθμός αυτός είναι σίγουρα μικρότερος η ίσος με το 2. Ο αριθμός αυτός είναι το 1, διότι $1^2 = 1$ που βρίσκετε πιο κοντά στο 2 από ότι το $2^2 = 4$. Γράφουμε το 1 κάτω από το 2.

Στην συνέχεια βρίσκουμε το τετράγωνο του 1, δηλαδή 1, και το αφαιρούμε από το 2. Το αποτέλεσμα αυτής της αφαίρεσης είναι πάλι 1 και το γράφουμε πάνω από τον αριθμό ανάμεσα στο 2 και το 3. Διπλασιάζουμε τώρα το 1 και γράφουμε το αποτέλεσμα , δηλαδή 2, κάτω από το 3 αλλά αφήνοντας μια γραμμή, αυτήν την οποία έχουμε τοποθετήσει το 1.

Τώρα ψάχνουμε έναν αριθμό που αν πολλαπλασιαστεί με το 2 (αυτό της τελευταίας γραμμής) μας δίνει αριθμό μικρότερο από τι 13 (που σχηματίζετε από το 1 που βρίσετε στην πρώτη γραμμή με το 3 του αριθμού του οποίου ψάχνουμε την ρίζα) , ενώ το τετράγωνό του μας δίνει αριθμό μικρότερο από το υπόλοιπο του αριθμού του οποίου ψάχνουμε την ρίζα, δηλαδή το 35. Ο αριθμός αυτός δεν είναι το 6, διότι αν και $2 \cdot 6 = 12 < 13$, το τετράγωνο του 6 δηλαδή το 36 είναι μεγαλύτερο του 35. Άρα ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ο 5, αφού $2 \cdot 5 = 10 < 13$ και $5^2 = 25 < 35$. Γράφουμε το 5 δίπλα στο 1 στην Τρίτη γραμμή. Το 10 που βρήκαμε από πάνω αφήνει διαφορά 3 από το 13, και το 3 αυτό το γράφουμε πάνω από το 235 ανάμεσα στα ψηφία 3 και 5. Στην συνέχεια κάνουμε την αφαίρεση του 25 που βρήκαμε πριν με το 35, η οποία έχει διαφορά 10, το 10 αυτό το γράφουμε στην 3 γραμμή , αλλά στο τέλος της. Στην συνέχει πολλαπλασιάζουμε το 5 με το 2 και γράφουμε το αποτέλεσμα, 10, στην τελευταία γραμμή.

Το επόμενο βήμα είναι να συνδυάσουμε το 2 και το 10 της τελευταίας γραμμής. Το 2 βρίσκετε κάτω από τις δεκάδες και το θεωρούμε σαν 20, που προστίθεται με το 10 μας δίνει αποτέλεσμα 30. Παίρνουμε το μισό αυτού που είναι το 15.

Μέσα από την διαδικασία αυτή υπολογίζουμε πως $\sqrt{235} = 15 + \frac{10}{30} = 15 + \frac{1}{3}$.

Ο Pacioli το 1494 δίνει μια μέθοδο για την εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας παρόμοια με την μέθοδο «galeo» που αναφέραμε πιο πριν για την διαίρεση. Με την μέθοδο αυτή υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα του 99.980.001 με τον εξής τρόπο:

```
  00
 018
 1270
  20880
0996980
18778980
99980001|9999
 ............
  9898989
  11999
     1
```

Η μέθοδος «galeo» σταδιακά από τον 16^{ο} αιώνα άρχισε να αλλάζει, και να προσαρμόζετε στην σημερινή μέθοδο εύρεσης τετραγωνικών ριζών. Ένα αποφασιστικό βήμα προς την σημερινή μέθοδο παρουσιάζει ο Cataneo (1546), μέθοδο που πήρε από τον ινδό μαθηματικό Aryabhata.

```
54756|234
4
14
12
  27
   9
  185
  184
     16
     16
      0
```

Το γνωστό μας σύμβολο για την τετραγωνική ρίζα ($\sqrt{\ }$)το χρησιμοποίησε πρώτος ο Christoph Rudolff to 1525.

FIBONACCI

" … εξετάζοντας την πρωτοτυπία και τη δύναμη των μεθόδων του, και τη σημασία των αποτελεσμάτων του, δικαιολογείτε εύκολα η ταξινόμηση του Leonardo της Πίζας ως μέγιστη μεγαλοφυΐα στον τομέα της θεωρίας αριθμών, που εμφανίστηκε μεταξύ του Διόφαντου [4ος αιώνας Μ.Χ.] και του Fermat" [17ος αιώνας]" R.B.McClenon

Γύρο στον 12^{ο} αιώνα η Πίζα ήταν μια σχεδόν ανεξάρτητη από την ρωμαϊκή αυτοκρατορία πόλη. Ήταν εμπορικό κέντρο και είχε αποκτήσει δύναμη και αυτονομία και κατάφερε να αναπτύξει και κέντρο για ανώτερη εκπαίδευση. Ο πληθυσμός της τότε ήταν περίπου 10.000, ανάμεσα τους και ο Leonardo Pisano.

Σε αυτήν λοιπόν την περιοχή γεννήθηκε το 1175 Leonardo Pisano γνωστότερος ως Fibonacci, αλλά δε είναι γνωστή η ακριβής ημερομηνία. Ήταν γιός του Guilielmo μέλους την οικογένειας τον Bonacci (Fibonacci που σημαίνει γιός του Bonacci). Ο Guilielmo είχε διπλωματικό πόστο εκπροσωπούσε τους εμπόρους από την Πίζα, σε μία πόλη της βόρειας Αφρικής, την Bugia, που σήμερα ονομάζετε Bejaia. Η Bejaia ήταν και είναι λιμάνι της Αλγερίας στις εκβολές του ποταμού Γουάντι Σουμάμ κοντά στο όρος Γκουράια και στον κόλπο Καρμπόν .

Ο ίδιος χρησιμοποιούσε μερικές φορές το όνομα Μπίγκολο που μπορεί να σημαίνει πολύ για το τίποτα ή ταξιδιώτης.

Όπως ο ίδιος δήλωσε*: «Μπορεί ένας επαρχιώτης να εκφράσει με αυτό το επίθετο (Μπίγκολο) την περιφρόνηση για ένα άνδρα που ασχολείται με ερωτήσεις που δεν έχουν καμιά πρακτική αξία ή να εκφράσει, όπως η λέξη αυτή σημαίνει στην διάλεκτο της Τοσκάνης, ένα πολυταξιδεμένο άνδρα. Ποίος πραγματικά είμαι;»*

Ο Fibonacci διδάχτηκε τα μαθηματικά στην Bugia, αλλά ταξίδεψε μαζί με τον πατέρα του και σε άλλες χώρες, όπου έμαθε και από αυτές. Ανάμεσα σε αυτές η

Αίγυπτος, η Ελλάδα και η Συρία. Εκεί γνώρισε τα τεράστια προνόμια των Αραβικών αριθμητικών συστημάτων .

Όλη αυτήν την γνώση για την ζωή του την παίρνουμε από την εισαγωγή του στην δεύτερη έκδοση του Liber abaci το 1228.

« ….μετά τον διορισμό του πατέρα μου από την πατρίδα στο τελωνείο στην Bugia για τους εμπόρους που έφθαναν εκεί, πήρε την απόφαση, λαμβάνοντας υπόψη την μελλοντική χρησιμότητα και την ευκολία, να με φέρει εκεί στην παιδική μου ηλικία και να αφιερωθεί και να με καθοδηγήσει στην εκμάθηση της τέχνης των υπολογισμών για μερικές μέρες. Εκεί, γνώρισα την τέχνη των εννέα ινδικών ψηφίων και μέσα από την διδασκαλία κατάλαβα πως η τέχνη αυτή μελετήθηκε στις διάφορες μορφές της στην Αίγυπτο, τη Συρία, την Ελλάδα, τη Σικελία και την Προβηγκία και χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι της για τις επιχειρήσεις.»

Ο Fibonacci τελείωσε τα ταξίδια του το 1200 και τότε επέστρεψε στην Πίζα. Εκεί έγραψε μερικά σημαντικά κείμενα αναβιώνοντας τις αρχαίες μεθόδους βάζοντας όμως και σπουδαίες δικές του συνεισφορές. Έζησε πριν την ανακάλυψη της τυπογραφίας και έτσι τα κείμενα του ήταν γραμμένα στο χέρι. Ο μόνος τρόπος για να έχεις ένα κείμενο του Fibonacci ήταν να υπάρχει ένα ακόμα χειρόγραφο αντίγραφο, πράγμα πολύ δύσκολο. Έτσι είμαστε τυχεροί που έχουν σωθεί τα παρακάτω χειρόγραφα: Liber abaci (1202), Practica geometriae (1220), Flos (1225), και Liber quadratorum. Άλλα βιβλία του πάλι χάθηκαν όπως το βιβλίο για εμπορική αριθμητική Di minor guisa και τα σχόλια του στο 10ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη που περιείχαν μια αριθμητική επεξεργασία των άρρητων αριθμών που ο Ευκλείδης είχε πλησιάσει από γεωμετρική άποψη. Μετά από 1228 υπάρχει μόνο ένα γνωστό έγγραφο που αναφέρεται στον Fibonacci. Αυτό είναι ένα διάταγμα από τη Δημοκρατία της Πίζας το 1240 στην οποία ένας μισθός απονέμεται στον ¨

«… τον διακριτικό και διαβασμένο κύριο Leonardo Bigollo….»

"…the discreet and learned man, Master Leonardo Bigollo…"

Αυτός ο μισθός (20 pounds Πίζας) δόθηκε σε Fibonacci ως αναγνώριση για τις υπηρεσίες που είχε δώσει στην πόλη, σε θέματα λογιστικής και διδασκαλίας των πολιτών.

Κανένας δεν ξέρει τίποτα άλλο για την ζωή αυτού του ανθρώπου. Δεν ξέρουμε αν παντρεύτηκε, ούτε την οικονομική του κατάσταση ούτε τις πολιτικές του απόψεις. Δεν ξέρουμε ακόμα πότε ακριβώς πέθανε ούτε κάτω από ποίες συνθήκες. Δεν ξέρουμε ακόμα αν στηρίχτηκε για τις εργασίες του στα ,τώρα χαμένα, βιβλία του Διόφαντου.

Τις δεκαετείς όμως που ακολούθησαν τον θάνατο του η Πίζα άρχισε να καταρρέει. Η Πίζα νικήθηκε καταστροφικά από τη Γένοβα στην ναυτική μάχη στην Meloria (5 και 6 Αυγούστου 1284) και η πτώση της εγγενούς πόλης είχε αρχίσει αμετάκλητα.

Η φήμη του Fibonacci ως μαθηματικού ήταν τόσο μεγάλη που προσέλκυσε την προσοχή του ιερού αυτοκράτορα, Φρειδερίκος Β', τον οποίο οι σύγχρονοί του κάλεσαν Stuper Mundi (" θαύμα του κόσμου "). Ο Φρειδερίκος Β'στέφθηκε αυτοκράτορας της αγίας ρωμαϊκής αυτοκρατορίας τον Νοέμβριο του 1220. Ο Φρειδερίκος Β' ήταν σύμμαχος της Πολιτείας της Πίζα στον πόλεμο της κατα της Γένοβας και ενισχύθηκε τόσο πολύ η επιρροή του στην Ιταλία που ίδρυσε το Πανεπιστήμιο της Νάπολης το 1224 για να αντλεί επιστήμονες και ανθρώπινο δυναμικό. Γνώρισε το έργο του Φιμπνάτσι μέσω των λογίων της αυλής του και ένας απο αυτούς ο Δομίνικος Ισπανός, φιλόσοφος της αυλής, του συνέστησε να συναντήσει τον Φιμπονάτσι στην επίσκεψη του στην αυλή της Πίζα το 1225. Ο Ιώαννης του Παλέρμο, ένα άλλο μέλος της αυλής του Φρειδερίκου Β', ο οποίος παρουσίασε στον Fibonacci έναν αριθμό προβλημάτων-προκλήσεων τρία εκ' των οποίων όντως έλυσε στο Βιβλίο FLOS.

Βιβλιογραφία

- Liber Abaci (1202) (το βιβλίο του άβακος), ένα βιβλίο υπολογισμών.
- Practica Geometriae (1220), συλλογή πάνω στην γεωμετρία και στην τριγωνομετρία.

- Flos (1225), λύσεις προβλημάτων που ετέθησαν απο τον Ιωάννη του Παλέρμο
- Liber quadratorum, ("Το βιβλίο των τετραγώνων") πάνω στις Διοφαντικές εξισώσεις.
- Epistola ad magister Theodorum
- Di minor guisa (μαθηματικά για εμπόρους, αγνοείται).
- Σχόλια πάνω στο τόμο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη (επίσης αγνοείται).

ΕΠΙΡΡΟΕΣ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΚΑΙ ΑΡΑΒΩΝ ΣΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ FIBANACCI

Την μεγαλύτερη επιρροή στα έργα του Fibonacci άσκησαν οι Άραβες, ένα μεγάλο μέρος στο Practica Geometriae σχετικά με το πεντάγωνο και το δεκάγωνο είναι παρμένα από τον Abu Kamil. Τα έργα το όμως φαίνετε να είναι επηρεασμένα και από τον Διόφαντο. Πρώτη φορά που συναντάμε στην Ευρώπη προβλήματα παρόμοια με αυτά του Διόφαντου είναι στον Fibonacci. Το αν ήταν γνωστά τα έργα του Διόφαντου στον Fibonacci, είτε στην αρχική μορφή τους είτε στα αραβικά δεν μας είναι γνωστό, ωστόσο στο Liber abaci υπάρχουν προβλήματα όμοια με αυτά των «Αριθμητικών» του Διόφαντου. Ο τρόπος που λύνει τα προβλήματα αυτά μας δείχνουν μάλλον πώς δεν γνώριζε τα Αριθμητικά. Ο Fibonacci χρησιμοποιεί τεχνικές πλησιέστερες σε αυτές του Ευκλείδη.

Το Liber quadratorum το έγραψε ύστερα από την επίσκεψή του στην αυλή του αυτοκράτορα Φρειδερίκου Β΄. Κατά την επίσκεψή του αυτή ο Johannes του Παλέρμο του έδωσε μια λίστα μαθηματικών προβλημάτων που τον καλούσε να τα λύσει. Ένα από τα προβλήματα αυτά ήταν να λύσει την εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Στο Flos απέδειξε πως ή λύση της εξίσωσης αυτής δεν κατασκευάζετε με κανόνα και διαβήτη.

Το πρώτο από τα θεωρήματα στο Liber quadratorum είναι παρόμοιο με προβλήματα του Διόφαντου. Σε αυτό ζητούνται δύο τετράγωνα το άθροισμα των οποίον είναι τετράγωνο. Η λύση του Fibonacci είναι η εξής:

$$(1+3+5+7)+9=1+3+5+7+9$$
$$16+9=25$$
$$4^2+3^2=5^2$$

Στο τρίτο θεώρημα του Liber quadratorum αποδεικνύει την γνωστή πυθαγόρεια ιδιότητα: $\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)^2+m^2\cdot n^2$.

Στο 5^{ο} θεώρημα του ίδιου βιβλίου φαίνετε καθαρά η επιρροή από τον Διόφαντο. Το θεώρημα αυτό αναφέρει: «Αν $a^2+b^2=c^2$, να βρεθούν δύο αριθμοί χ και y ώστε $x^2+y^2=c^2$». Με άλλα λόγια να βρεθεί ένα διαφορετικό ορθογώνιο τρίγωνο με ίδια όμως υποτείνουσα. Για να το λύσει αυτό ο Fibonacci υποθέτει ότι $a^2+b^2=c^2$ και $m^2+n^2=p^2$ και για να υπολογίσει τους αριθμούς χ και y εργάζεται όπως παρακάτω.

$$m^2+n^2=p^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{m}{p}\right)^2+\left(\frac{n}{p}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{m\cdot c}{p}\right)^2+\left(\frac{n\cdot c}{p}\right)^2=c^2$$

Και το αριθμητικό παράδειγμα που δίνει είναι:

Έστω $5^2+12^2=13^2$ και $8^2+15^2=17^2$ τότε

$$\left(\frac{8}{17}\cdot 13\right)^2+\left(\frac{15}{17}\cdot 13\right)^2=13^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{104}{17}\right)^2+\left(\frac{195}{17}\right)^2=13^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(6\frac{2}{17}\right)^2+\left(11\frac{8}{17}\right)^2=13^2$$

Άρα οι αριθμοί χ και y είναι χ= $6\frac{2}{17}$ και y=$11\frac{8}{17}$.

Το θεώρημα αυτό ακολουθεί ένα πρόβλημα: « Να βρεθούν 2 αριθμοί χ και y τέτοια ώστε : $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ ». Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως θεώρημα Lagrange.

Για να το λύσει χρησιμοποιεί μια ιδιότητα που έχει αποδείξει πιο πριν:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2\end{aligned}$$

Μετά βρίσκει 2 αριθμούς c και d τέτοιοι ώστε $c^2 + d^2 = k^2$ και μετά γράφει το γινόμενο $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ σαν άθροισμα 2 τετραγώνων από την προηγούμενη ιδιότητα, δηλαδή :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = p^2 + q^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 + b^2 = \frac{p^2}{k^2} + \frac{q^2}{k^2}$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι χ= $\frac{p}{k}$ και y= $\frac{q}{k}$.

Άλλα θεωρήματα του Liber quadratorum που δείχνουν να είναι επηρεασμένα από τον Διόφαντο είναι το θεώρημα 16 και το θεώρημα 20.

Στο θεώρημα 16 καλείτε να λύσει το σύστημα $\left.\begin{aligned} x^2 + 5 = a^2 \\ x^2 - 5 = b^2 \end{aligned}\right\}$.

Στο θεώρημα 20 καλείτε να λύσει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + x^2 &= a^2 \\ x + y + z + x^2 + y^2 &= b^2 \\ x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \left.\begin{aligned} x + y + z + x^2 &= a^2 \\ a^2 + y^2 &= b^2 \\ b^2 + z^2 &= c^2 \end{aligned}\right\}$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ «elchataym»

Το “Nine Chapters on the arts of mathematics” είναι η παλαιότερη και με την μεγαλύτερη επίδραση εργασία στην ιστορία των κινεζικών μαθηματικών. Είναι μια συλλογή 246 προβλημάτων που αναφέρονται στη γεωργία, την επιχειρησιακή διαδικασία, την εφαρμοσμένη μηχανική, την έρευνα, τη λύση των εξισώσεων, και τις ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων. Οι κανόνες της λύσης δίνονται συστηματικά, αλλά δεν υπάρχει καμία απόδειξη όπως αυτές που συναντάμε στα ελληνικά μαθηματικά. Όπως επισήμανε ο Dauben[1] το “Nine Chapters on the arts of mathematics” μπορεί να θεωρηθεί ως το Κινέζικό αντίστοιχο των στοιχείων του Ευκλείδη , που εξουσίασε τα δυτικά μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο, το“Nine Chapters on the arts of mathematics” θεωρήθηκε ως δημιουργική εργασία των αρχαίων κινεζικών μαθηματικών για σχεδόν δύο χιλιετίες. Ο συντάκτης και ο χρόνος που γράφτηκε δεν είναι γνωστός. Μια παράδοση λέει ότι το τελείωσαν κατά τη διάρκεια της περιόδου του «κίτρινου αυτοκράτορα» (Di Huang), τον 2ο αιώνα Π.Χ. Αλλά είναι το αναγνωρισμένο γεγονός ότι δημοσιεύθηκε πριν από 213 Π.Χ., όταν ο αυτοκράτορας , Qin Shi Huang , 221 -207 Π.Χ., διέταξε να κάψουν κάποια βιβλία. Το πρωτότυπο Nine Chapters δεν σώζετε και ίσως κάηκε εκείνη την εποχή. Η συντηρημένη έκδοση διασώθηκε από άγνωστους συγγραφείς. Πολλά κείμενα από το Nine Chapters χρησιμοποιήθηκαν πριν το 213 Π.Χ. στην μηχανική. Παράδειγμα είναι το θεώρημα Gou-Gu , γνωστό σε εμάς ως πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο βρίσκετε στο ένατο κεφάλαιο του Nine Chapters, χωρίς βέβαια απόδειξη, το χρησιμοποιούσαν οι Κινέζοι μηχανικοί πρίν το 1100 Π.Χ.

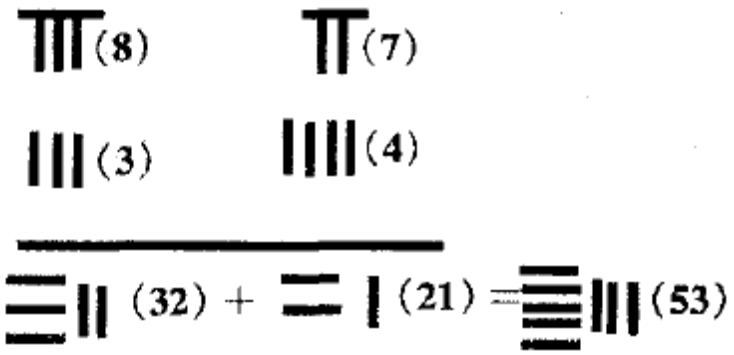
Το κεφάλαιο 7 του Nine Chapters είναι το Ying Buzu Shu (μέθοδος πλεονάσματος και έλλειψης), η οποία είναι η παλαιότερη μέθοδος για τις πραγματικές ρίζες μιας εξίσωσης. Το πρώτο παράδειγμα σε αυτό το κεφάλαιο είναι το εξής:

“ Υπάρχει ένα αντικείμενο άγνωστης αξίας και ένας άγνωστος αριθμός ατόμων που θέλουν να αγοράσουν μαζί το συγκριμένο αντικείμενο. Αν ο καθένας

[1]Dauben J W. Ancient Chinese mathematics : the Jiu zhang Suanshn vs Euclid' s Elements

δώσει 8 χρηματικές μονάδες, τότε περισσεύουν 3, ενώ αν ο καθένας δώσει από 7, τότε έχουμε έλλειψη 4 χρηματικών μονάδων. Ποια είναι η τιμή του αντικειμένου και ο αριθμός των ανθρώπων;”

Η λύση δίνετε στο παρακάτω σχήμα χρησιμοποιώντας κινεζικά σύμβολα:



1. Γράφουμε στην πρώτη γραμμή τα χρήματα που δίνει ο καθένας .
2. Στην δεύτερη γραμμή γραφούμε τις ελλείψεις ή τα πλεονάσματα .
3. Στην Τρίτη γραμμή γράφουμε τους διασταυρωθέντες πολλαπλασιασμούς και το άθροισμα των αποτελεσμάτων. (32+21=53)
4. Βρίσκουμε την απόλυτη διαφορά της έλλειψης και του πλεονάσματος. (Π.χ. 4-3=1)
5. Η τελική τιμή του αντικειμένου βρίσκετε αν διαιρέσουμε το άθροισμα του βήματος 3 με την διαφορά του βήματος 4. (53/1=53)

Η μέθοδος αυτή ήταν πολύ διαδεδομένη στην μέση ανατολή. Ο Al-Khowarizmi ήταν γνώστης του Nine Chapters και άλλων κινέζικων κειμένων. Η παραπάνω μέθοδος είναι γνωστή στην μέση ανατολή ως Khitai Method . Η λέξη Khitai σημαίνει Κίνα και αλλιώς γράφετε Khatai, Chatayn, Chataain. Στο HISTORIA MATHEMATICA 3 (1976), 291-296, ο STANISLAW GLUSHKOV αναφέρει πως η λέξη elchataym έχει αραβική προέλευση και σημαίνει «δύο λάθη»

alkhat'ayni=«δύο λάθη»

ΟΙ ΠΡΟΣΕΓΚΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ

Μια από τις πιο γνωστές προσεγγίσεις που έδωσε ο Fibonacci, είναι μια πολύ ακριβής προσέγγιση της άρρητης ρίζας της εξίσωσης $x^3+2x^2+10x=20$. Δεν είναι όμως γνωστός ο τρόπος με τον οποίο βρίσκει την προσέγγιση αυτή. Όπως και σε πολλά έργα της Ελληνικής περιόδου, δίνονται προσεγγιστικές τιμές άρρητων αριθμών χωρίς όμως να μας φανερώνουν οι συγγραφείς την μέθοδο υπολογισμού. Ένα κλασικό παράδειγμα βρίσκετε στην τρίτη πρόταση στο έργο του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις». Εκεί ο Αρχιμήδης θέτει με λακωνικό ύφος μια προσέγγιση του $\sqrt{3}$, χωρίς να παρουσιάζει όμως καμία μεθοδολογία για τον υπολογισμό της προσέγγισης αυτής. Στην αρχή της τρίτης πρότασης ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τον λόγο $\frac{EZ}{Z\Gamma}=\frac{\sqrt{3}}{1}$ και στην μέση της απόδειξης του τον λόγο $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ που έχει την ίδια τιμή. Στην πρώτη περίπτωση θέτει τον λόγο αυτό ίσο με $\frac{265}{153}$, ενώ στην δεύτερη του δίνει την προσεγγιστική τιμή $\frac{1351}{780}$. Με ποίον τρόπο όμως έφτασε ο Αρχιμήδης σε αυτά τα κλάσματα; Το ερώτημα αυτό απασχόλησε επί μακρόν τους ιστορικούς της επιστήμης και έχουν δοθεί ποικίλες απαντήσεις (Th. Heath, Sigmund Gunther, J.E. Hofmann, kurt Vogel, C.Muller).

Οι προσεγγιστικές μέθοδοι όπως και οι μέθοδοι υπολογισμού παίζουν γενικά ένα βοηθητικό ρόλο γι' αυτό και η συμπερίληψη τους σε θεωρητικά μαθηματικά έργα ίσως δεν κρίνετε απαραίτητη από τους συγγραφείς. Θα έπρεπε όμως να εμφανίζονται οι προσεγγιστικές μέθοδοι ώστε τα ελέγχετε η αξιοπιστία. Από τα έργα του Πτολεμαίου άρχισαν να εμφανίζονται κάποιες μέθοδοι. Συνεχίζει όμως η παράδοση που θέλει να μην περιλαμβάνονται οι υπολογιστικές μέθοδοι σε διάφορα έργα. Αυτή η παράδοση είναι που έκανε τον Leonardo της Πίζας να περάσει σιωπηλά της δικές του προσεγγιστικές μεθόδους για τις ρίζες κυβικών εξισώσεων.

Ο Fibonacci στα έργα του χρησιμοποιεί προσεγγίσεις σε επτά περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 :

Στο Liber abaci στο κεφάλαιο 12 ένα από τα προβλήματα του Fibonacci είναι να λύσει την εξίσωση $\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=21$.

Θέτει $y=12$, και που ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=7$.

Και η λύση 36 για την αρχική εξίσωση προκύπτει από την αναλογία $\frac{7}{21}=\frac{11}{\chi}$.

Γενικά η λύση της εξίσωσης $\alpha\chi=\beta$ μπορεί να υπολογιστεί από την αναλογία $\frac{\alpha y}{\beta}=\frac{y}{\chi}$ για αυθαίρετο y.

Περίπτωση 2:

Στο Liber abaci το κεφάλαιο 13 αναφέρετε στην μέθοδο elchataym. Αυτή η μέθοδος είναι η μέθοδος των δύο λανθασμένων τιμών. Αν θέλουμε να υπολογίσομε την λύση της εξίσωσης $f(x)=c$, και a και b είναι δύο «λανθασμένες λύσεις» τότε η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης δίνετε από τον τύπο

$$y=\frac{a\left(f(b)-c\right)+b\left(c-f(a)\right)}{f(b)-f(a)}.$$

Επίσης η τιμή του y δίνετε και από την αναλογία $\frac{y-a}{b-a}=\frac{c-f(a)}{f(b)-f(a)}$.

Με την μέθοδο αυτή ο Fibonacci υπολογίζει τις λύσεις των εξισώσεων :

$f(x)=2\left(2\left(2x-12\right)-12\right), c=12$

και

$f(x)=\left(50-x\right)^2-x^2, c=30^2-40^2$

Η πρώτη εξίσωση είναι από το πρόβλημα με ένα άντρα που έκανα ταξίδια για δουλείες στην Λούκα της Τοσκάνης ενώ το δεύτερο είναι από ένα πρόβλημα με 2 πουλιά.

Πρόβλημα 1.

Ένα άντρας από την Πίζα πήγε για δουλείες στην Λούκα μέσο της Φλωρεντίας και επέστρεψε πάλι στην Πίζα. Σε κάθε πόλη διπλασίαζε τα χρήματα του αλλά ξόδευε και 12 δηνάρια και στο τέλος δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Με πόσα χρήματα ξεκίνησε;

Πρόβλημα 2.

Δύο πουλιά βρίσκονται στην κορφή δύο πύργων ύψους 30 και 40 μέτρων αντίστοιχα. Η απόσταση των δύο πύργων είναι 50 μέτρα. Κάπου ανάμεσα βρίσκετε ένα σιντριβάνι. Τα δύο πουλιά ξεκινούν ταυτόχρονα από του δύο πύργους και διανύοντας ευθείες τροχιές, με την ίδια ταχύτητα φτάνουν στην ίδια στιγμή στο σιντριβάνι. Να βρεθεί η θέση που βρίσκετε το σιντριβάνι.

Περίπτωση 3:

Στο κεφάλαιο 14 του Liber abaci ο Fibonacci παρουσιάζει μια μέθοδο προσέγγισης της κυβικής ρίζας του 47 (Fibonacci's Liber abbaci –book of calculation, L.E SIGLER, σελίδα 522) . Αν και στο κείμενο ο Fibonacci χρησιμοποιεί μόνο λόγια εδώ θα χρησιμοποιήσουμε σύμβολα για να παρουσιάσουμε τον τρόπο του.

Αναζητά την $\sqrt[3]{47}$.

Αρχικά παρατηρεί ότι $3^3 = 27 < 27 + 20 = 47 < 64 = 4^3$

Άρα η $\sqrt[3]{47}$ είναι το 3 αλλά περισσεύουν και 20.

Τώρα $20 > \frac{(64-27)}{2}$, άρα θα δοκιμάσει το $3+\frac{1}{2}$.

$\left(3+\frac{1}{2}\right)^3 = 27+\frac{1}{8}+3\cdot\frac{3^2}{2}+3\cdot\frac{3}{4} = 42+\frac{7}{8}$, και $47-\left(42+\frac{7}{8}\right) = 4+\frac{1}{8}$

Άρα η $\sqrt[3]{47}$ είναι $3+\frac{1}{2}$ αλλά περισσεύουν $4+\frac{1}{8}$.

Αλλά $3\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 4=42$, και το $\frac{4+\frac{1}{8}}{42}\approx\frac{1}{10}$.

Άρα $\sqrt[3]{47}\approx 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=3+\frac{3}{5}$.

Χρησιμοποιεί πάλι εδώ την μέθοδο elchataym για να λύσει την εξίσωση $f\left(x\right)=x^3=c=47$ με τον εξής τρόπο:

$\begin{matrix} a=x \\ b=a+1 \end{matrix}$ άρα $\frac{y-a}{1}=\frac{c^3-a^3}{3a\left(a+1\right)+1}$. Και επαναλαμβάνει αυτήν την μέθοδο μέχρι να έχει την προσέγγιση που θέλει.

Περίπτωση 4:

Στο Practica geometriae ο Fibonacci παρουσιάζει μια προσέγγιση του **π**.

Η προσέγγιση αυτή δίνετε ύστερα από τον υπολογισμό της πλευράς ενός κανονικού πολυγώνου με 96 πλευρές. Η προσέγγιση αυτή έχει αρκετά μεγάλη ακρίβεια και είναι $\pi=\frac{4320}{1375}$.

Περίπτωση 5:

Στο Epistola Leonardi ad magistrum Theodorum υπάρχει το εξής πρόβλημα. Να εγγράψεις κανονικό πεντάγωνο σε ισοσκελές τρίγωνο με βάση 12 και τις ίσες πλευρές 10, έτσι ώστε οι κορφές του πενταγώνου να βρίσκονται η μία στην κορφή του τριγώνου, οι άλλες δύο στην βάση και οι υπόλοιπές 2 να ακουμπάνε στις ίσες πλευρές.

Ο Fibonacci ξεκινά με άγνωστη την πλευρά του πενταγώνου και ύστερα από κάποιες πράξεις (απλές αναλογίες και πυθαγόρειο θεώρημα) καταλήγει στην εξίσωση : $\frac{7}{20}x^2+\frac{64}{5}x=64$. Εκεί γράφει ότι η λύση της εξίσωσης αυτής ξεφεύγει

από τους κανόνες τις άλγεβρας. Με αυτό ίσως εννοεί πως η λύση $x=\frac{16}{7}\left(3\sqrt{11}-8\right)$ περιέχει ρίζα την ρίζα του 11 που και αυτήν την υπολογίζει με ιδιαίτερη ακρίβεια.

Η θετική λύση της προηγούμενης εξίσωσης όμως που δίνει ο Fibonacci είναι στο εξηκονταδικό σύστημα αλλά και αυτή είναι με μεγάλη ακρίβεια. Η λύση αυτή είναι $x=4,27,24,40,50$ και όλα τα ψηφία στο εξηκονταδικό σύστημα είναι σωστά. Δεν αναφέρει όμως τίποτα για την μέθοδο που χρησιμοποιεί.

Περίπτωση 6:

Στο Flos ο Fibonacci λύνει την εξίσωση $x^3+2x^2+10x=20$. Η εξίσωση αυτή προέρχεται από τον μαθηματικό διαγωνισμό του αυτοκράτορα Frederick II. Η λύση που δίνει είναι στο εξηκονταδικό σύστημα και ισούται με $x=1,22,7,42,33,4,40$, πάλι όμως είναι άγνωστο το πώς κατάφερε να φτάσει στο αποτέλεσμα αυτό.

Μέσα από αυτές τις περιπτώσεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η μέθοδος που χρησιμοποιούσε ο Fibonacci για να προσεγγίσει διάφορες ρίζες ήταν συνεχής επαναλήψεις της μεθόδου elchataym. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι προσεγγίσεις που έδωσε αν και χρονοβόρες μπορούν να επιτευχθούν με την μέθοδο αυτή και με μια ορισμένη επιδεξιότητα στον χειρισμό των εξηκονταδικών κλασμάτων.

“ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ-ΑΧΑ” ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ LIBER ABACI

Ο Πάπυρος του Rind (εικόνα από το βρετανικό μουσείο)

Στο τέλος του 12^{ου} κεφαλαίου Liber abaci ο Fibonacci δίνει ένα ενδιαφέρον πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό αναφέρετε σε επτά ηλικιωμένους άντρες που πηγαίνουν στην Ρώμη. Το πρόβλημα αυτό όμως είναι ένα πρόβλημα με ιστορία 3000 ετών. Το συναντάμε για πρώτη φορά στο πάπυρο του Rhind (περίπου 1800 π.Χ.) και εντάσσετε στα προβλήματα «υπολογισμών-αχά».

Η Αιγυπτιακή λέξη «αχά» ή «χά» σημαίνει ποσότητα, σορός. Οι υπολογισμοί-αχά αντιστοιχούν, όπως θα λέγαμε σήμερα, σε γραμμικές εξισώσεις με έναν άγνωστο. Ο πάπυρος του Rhind είναι γεμάτος με τέτοιου είδους υπολογισμούς. Οι υπολογισμοί-αχά αποτελούν την κορωνίδα της Αιγυπτιακής υπολογιστικής τέχνης. Δεν εδράζονται σε πρακτικά προβλήματα και αυτό φανερώνει τα καθαρά θεωρητικά ενδιαφέροντα των Αιγυπτίων μαθηματικών. Επινοήθηκαν προφανώς, από ανθρώπους που αρέσκονταν σε καθαρούς υπολογισμούς και ήθελαν να εκπαιδεύσουν τους μαθητές τους σε πρακτικά δύσκολα προβλήματα. Η μέθοδος με την οποία έλυναν συνήθως τέτοια προβλήματα ήταν η μέθοδος της ψευδούς παραδοχής.

Ένα τέτοιο πρόβλημα στο πάπυρο του Rhind είναι το πρόβλημα 79. Στο οποίο είναι το εξής:

Πρόβλημα 79 (παπυρος του Rhind)

«Υπάρχουν επτά σπίτια, σε κάθε σπίτι υπάρχουν επτά γάτες, κάθε γάτα έχει φάει επτά ποντίκια, κάθε ποντίκι έχει φάει επτά σπόρους κριθαριού, κάθε σπόρος θα παρήγαγε επτά «hekat». Ποιο είναι το άθροισμα από όλα τα πράγματα που απαριθμήσαμε;»

Παρατηρούμε πως η ερώτηση δεν είναι η προφανής, ο αριθμός των hekat, αλλά το άθροισμα όλων των αντικειμένων.

Λύση:

Αντικείμενα	**ποσότητα**		
Σπίτια	**7**		
Γάτες	**49**		
Ποντίκια	**343**	**1**	**2.801**
Σπόροι	**2.401**	**2**	**5.602**
Hekat	**16.807**	**4**	**11.204**
Σύνολο	**19.607**	**Σύνολο**	**19.607**

Οι δύο πρώτες στήλες λύνουν εύκολα το πρόβλημα. Η λύση είναι το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το επτά και λόγο επτά.

Δηλαδή: $7+7^2+7^3+7^4+7^5=$
$7+49+343+2.401+16.807=19.607$

Τι είναι όμως οι 2 άλλες στήλες που εμφανίζονται στο πάπυρο; Για έναν αρχαιολόγο θα ήταν δύσκολο αυτό το ερώτημα; Αν όμως γνωρίζουμε την μέθοδο του αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού, που έχουμε αναφέρει παραπάνω στην παρούσα εργασία, το ερώτημα εύκολα απαντάτε. Οι δύο τελευταίες στήλες παρουσιάζουν τον πολλαπλασιασμό του 7 μ το 2.801 με την αιγυπτιακή μέθοδο.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} 7\cdot 2801 &= (1+2+4)\cdot 2801 \\ &=2801+5602+11204 \\ &=19.607 \end{aligned}$$

Αν λάβουμε υπόψη μας κα τον γνωστό μας τύπο για τον υπολογισμό του αθροίσματος των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $\{r, r^2, r^3, \ldots\ldots, r^n, \ldots\ldots\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = r\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

που για το συγκριμένο παράδειγμα έχουμε $r = 7$:

$$\sum_{k=1}^{5} 7^k = 7 \cdot \frac{7^5 - 1}{r - 1} = 7 \cdot \frac{16807 - 1}{6}$$
$$= 7 \cdot \frac{16806}{6} = 7 \cdot 2801 = 19607$$

Παρατηρούμε πως το τελευταίο βήμα είναι ο πολλαπλασιασμός που παρουσιάζετε στις δυο τελευταίες στήλες του 79^{ου} προβλήματος από τον πάπυρο του Rhind. Θα μπορούσαμε να πούμε πως στον παραπάνω πίνακα παρουσιάζετε για πρώτη φορά ο τύπος υπολογισμού αθροίσματος γεωμετρικής προόδου.

Το παραπάνω πρόβλημα όμως το συναντάμε μερικώς διαφοροποιημένο στο Liber abaci.

Πρόβλημα 12 κεφαλαίου στο Liber abaci.

« Επτά ηλικιωμένοι άντρες πάνε στην Ρώμη. Κάθε άντρας έχει επτά μουλάρια, κάθε μουλάρι έχει επτά σάκους, μέσα σε κάθε σάκο υπάρχουν επτά καρβέλια ψωμί, για κάθε καρβέλι ψωμί υπάρχουν επτά μαχαίρια, και κάθε μαχαίρι υπάρχουν επτά θήκες. Πόσο είναι το άθροισμα όλων των παραπάνω.»

Αντικείμενα	**Ποσότητα**
Άντρες	**7**
Μουλάρια	**49**
Σάκοι	**343**
Καρβέλια	**2.401**
Μαχαίρια	**16.807**
Θήκες	**117.649**
Σύνολο	**137.256**

Ο πρώτος τρόπους που χρησιμοποιεί ο Fibonacci για να λύσει τα συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ο τρόπος που φαίνετε και στον πίνακα. Συνεχείς πολλαπλασιασμοί με το επτά και η πρόσθεση των γινομένων το τέλος. Δίνει όμως και έναν δεύτερο τρόπο.

Αρχικά αναρωτάτε πόσα αντικείμενα έχει μαζί του στον δρόμο για την Ρώμη ο κάθε άντρας. Και λέει: βάζουμε όλα τα επτά σε ένα κλάσμα και στο τέλος βάζουμε το 1 για τον ένα άντρα που έχει αυτά τα αντικείμενα και στο τέλος το 7 για κάθε έναν από του επτά άντρες. Δηλαδή $7\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{1}{7}\frac{1}{7}1$, και πολλαπλασιάζουμε το 1 με το πρώτο επτά κα προσθέτουμε το 1 που έχει από πάνω του, και έχουμε 8. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το 8 με το δεύτερο επτά και στην συνέχεια προσθέτουμε το ένα που έχει από πάνω του και έχουμε 57. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για όλα τα επτά και στο τέλος έχουμε 19.608 που είναι τα αντικείμενα που έχει ο κάθε άντρας μαζί του, και πολλαπλασιάζουμε με το επτά που είναι ο αριθμός των αντρών και έχουμε πάλι το 137.256.

Παρατηρούμε πως και σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιείτε ο αριθμός επτά σαν όρος της γεωμετρικής προόδου και το ερώτημα είναι πάλι το άθροισμα όλων τον αντικειμένων και όχι το προφανές ερώτημα του αριθμού των θηκών. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε πως ο Fibonacci ήταν γνώστης των προβλημάτων του παπύρου του Rhind.

Το παραπάνω αιγυπτιακό πρόβλημα που συναντήσαμε για δεύτερη φορά το 1202 στο Liber abaci κυκλοφορεί σαν πρόβλημα και σήμερα και μάλιστα σε μορφή ποιήματος με ομοιοκαταληξία στα αγγλικά:

As I was going to St Ives
I met a man with seven wives
Each wife had seven sacks
Each sack had seven cats
Each cat had seven kits
Kits, cats, sacks, wives
How many were going to St Ives?

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟ LIBER ABACI.

Στο Liber abaci συναντάμε μεθόδους μετατροπής των κοινών κλασμάτων σε κλάσματα με αριθμητή την μονάδα (κλασματικές μονάδες). Τα κλάσματα αυτά τα χρησιμοποιούνταν αρκετά από τους Αιγύπτιους. Γενικά οι Αιγύπτιοι είχαν μια περιορισμένη λίστα φυσικών κλασμάτων, τα οποία χρησιμοποιούνταν στην καθημερινή ζωή και τα οποία δηλώνονταν με ειδικά ονόματα. Στην αρχαία Αίγυπτο είχαν ειδικές λέξεις το $1/2$, το $1/3$, το $1/4$, τα $2/3$ και τα $3/4$, στα οποία ακόμη μπορούν να συνυπολογιστούν και τα $1/6$ και $1/8$. Αργότερα το $3/4$ αντικαταστάθηκε και αυτό από κλασματικές μονάδες: $3/4 = 1/2 + 1/4$. Το μόνο κλάσμα που δεν χρειαζόταν αναγωγή ήταν το $2/3$ γιατί είχε από μόνο του την δική του σημασία και ονομασία, «τα δύο μέρη». Το συμπλήρωμα που απαιτητέ για να παραχθεί από τα 2 μέρη το όλο ήταν το τρίτο μέρος.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των μεθόδων του Fibonacci θα αναφερθούμε στα “composed” κλάσματα.

Το $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}$ αποτελεί ένα τέτοιο κλάσμα και ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} = \frac{5}{6} + \frac{3}{4\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}$$

Έχει ενδιαφέρον το σχετικό σχόλιο του μεταφραστή:
« Αυτά τα composed κλάσματα, τα οποία έχουν Αραβική καταγωγή, χρησιμοποιούνται συστηματικά από τον Fibonacci και χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής που υποδεικνύει την ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων αριθμών (ή άλλων χρήσιμων παραγόντων).»

Αυτού του είδους τα κλάσματα δεν χρησιμοποιούνται σήμερα.
Τα δεκαδικά κλάσματα είναι μια ειδική περίπτωση τέτοιων κλασμάτων. Για

παράδειγμα: $3{,}1416 = \frac{6}{10}\frac{1}{10}\frac{4}{10}\frac{1}{10}3.$

Συνεπώς κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι ο Fibonacci γνώριζε τα δεκαδικά κλάσματα ή τουλάχιστον ήταν κοντά σε αυτό. Γιατί δεν χρησιμοποίησε περισσότερο τα δεκαδικά κλάσματα; Απλά γιατί οι κλασματικές μονάδες μέτρησης σπάνια χρησιμοποιούνταν στον κόσμο που ζούσε. Για παράδειγμα το νόμισμα της Πίζας δεν είχε δεκαδικές υποδιαιρέσεις. 2 pounds , 7soldi, 3 denari γράφονταν $\frac{3}{12}\frac{7}{20}2$ pounds.

Ωστόσο όταν τα δεκαδικά κλάσματα ήταν απαραίτητα, τα χρησιμοποιούσε.
Με βάση αυτά τα παραδείγματα είναι δύσκολο να αρνηθούμε ότι ο Fibonacci χρησιμοποίησε δεκαδικά κλάσματα. Ο συμβολισμός των composed κλασμάτων, κατά συνέπεια καλύπτει μεγάλη γενικότητα που ο Fibonacci χρησιμοποίησε για να αντιμετωπίσει τα διαφορετικά ήδη μέτρησης.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι επτά μέθοδοι του Liber abaci

1η μέθοδο του Fibonacci :

Η πρώτη μέθοδος περιέχει τρείς εκδοχές.

Η πρώτη εκδοχή είναι η απλή μετατροπή κλασμάτων σε μοναδιαία κλάσματα :

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ή $\frac{1}{18} = \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$

Η δεύτερη εκδοχή χρησιμοποιεί την Ελληνική η Αραβική σημειογραφία συμφώνα με την οποία $\frac{1}{18} = \frac{1}{2}\frac{0}{9}$. ο Fibonacci εμφανίζει ακριβός το ίδιο κλάσμα στην μορφή $\frac{1}{18} = \frac{5}{10}\frac{0}{9}$.

Γενικά ο Fibonacci χρησιμοποιεί ισοδύναμα κλάσματα, όπως $\frac{5}{10}$ αντί για $\frac{1}{2}$ ανάλογα με το πρόβλημα που έχει να λύσει ώστε να διευκολύνετε στους υπολογισμούς. Αυτή η διαδικασία έχει τις ρίζες της στην αποχή του Ahmes, όπου χρησιμοποιούσαν το κλάσμα $\frac{64}{64}$ για να δηλώσουν την μονάδα hekat.

Η τρίτη εκδοχή είναι η πιο περίπλοκη. Εδώ χρησιμοποιείτε πάλι ο ελληνικός ή αραβικός συμβολισμός. Μοιάζει πολύ με την παραπάνω εκδοχή αλλά η διαφορά της είναι ότι αλλάζει την θέση των παρανομαστών, δηλαδή $\frac{1}{18}=\frac{5}{10}\frac{0}{9}=\frac{5}{9}\frac{0}{10}$

Η μέθοδος αυτή έχει τις ρίζες της στην εποχή του Αχμές . Στον πάπυρο του Rhind χρησιμοποιείτε για να μετατρέψει το 2/101. Χρησιμοποιείτε επίσης τρείς φορές και στο «Αιγυπτιακό μαθηματικό δερμάτινο ρολό» , γνωστό ως “EMLR”, Egyptian mathematical leather roll.

2η μέθοδο του Fibonacci :

Όταν η παρανομαστής δεν διαιρείτε με τον αριθμητή ο Fibonacci χώριζε τον αριθμητή σε άθροισμα άλλων αριθμών. Αυτή είναι μια μεσαιωνική μέθοδος παρόμοια με αυτές που χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι. Παραδείγματα:

1) $\frac{5}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
2) $\frac{7}{8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
3) $\frac{3}{40}=\frac{3}{4}\frac{0}{10}$

Ο Fibonacci χρησιμοποίησε τις μεθόδους αυτές για να λύσει διάφορα προβλήματα χρησιμοποιώντας πίνακες που έδιναν τα αποτελέσματα πράξεων που είχαν σαν παράγοντες τα παραπάνω κλάσματα.

3η μέθοδο του Fibonacci :

Είναι μια κοπτική μέθοδος και παρουσιάζετε από το David fowler στο Historia Mathematica του 1982.

Παραδείγματα της μεθόδου αυτής:

1) $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}\frac{1}{11}$

2) $\frac{3}{11}=\frac{1}{4}\frac{1}{11}=\frac{1}{11}\frac{1}{4}$

3) $\frac{6}{11}=\frac{1}{22}\frac{1}{2}$

4) $\frac{8}{11}=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}$

Της μετατροπές αυτές των κλασμάτων τις κάνει πάλι γιατί θέλει να χρησιμοποιήσει πίνακες πράξεων όπως και στην περίπτωση 2.

4η μέθοδο του Fibonacci :

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε και στον πάπυρο του Rhind και είναι γνωστή με την ονομασία «μέθοδος του Αχμές 2/ρ». Η ίδια αυτή μέθοδος ανακαλύφθηκε ξανά από τον F. Hultsch το 1895 και είναι γνωστή ως Hultsch-Bruins method. ο Fibonacci χρησιμοποιεί αυτήν την μέθοδο όταν θέλει να λύσει προβλήματα με κλάσματα στα όποια ο παρανομαστής είναι μεγάλος αριθμός. Τέτοια κλάσματα είναι τα $\frac{19}{53},\frac{5}{11},\frac{7}{11},\frac{6}{19}$, $\frac{7}{29}$ και ο Fibonacci τα μετατρέπει ως εξής:

- $\frac{19}{53}-\frac{1}{3}=\frac{3+1}{3\cdot 53}=\frac{1}{159}\frac{1}{53}$ (κάτι το οποίο έχει βρεθεί και σε αιγυπτιακά κείμενα)

- $\frac{5}{11}-\frac{1}{3}=\frac{3+1}{3\cdot 11}=\frac{1}{11}\frac{1}{33}$

- $\frac{7}{11}-\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2\cdot 11}=\frac{1}{22}\frac{1}{11}$

- $\frac{6}{19}-\frac{1}{4}=\frac{4+1}{4\cdot 19}=\frac{1}{19}\frac{1}{76}$
- $\frac{7}{29}-\frac{1}{5}=\frac{5+1}{5\cdot 29}=\frac{1}{29}+\frac{1}{145}$

5η μέθοδο του Fibonacci :

Η κατηγορία αυτή μετατροπών κλασμάτων που έκανε ο Fibonacci αναφέρει ο Sigler ,μεταφραστής του Liber abaci, ότι δεν έχουν κάποια ιστορική βάση η κάποια θεωρητική βάση αλλά χρησιμοποιούνται για να λύσουν πρακτικά προβλήματα

- $\frac{9}{26}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\frac{0}{26}\frac{1}{3}=\frac{1}{78}\frac{1}{3}$
- $\frac{11}{29}=\frac{1}{78}\frac{1}{3}\frac{1}{3}$
- $\frac{11}{62}=\frac{0}{62}\frac{1}{31}\frac{1}{7}$

6η μέθοδο του Fibonacci :

- $\frac{17}{27}-\frac{3}{27}=\frac{14}{27}-\frac{1}{2}=\frac{1}{54}$
- $\frac{20}{53}-\frac{18}{48}=\frac{960-954}{18\cdot 53}\Rightarrow\frac{20}{53}=\frac{18}{48}\frac{1}{8}\frac{0}{53}$

7η μέθοδο του Fibonacci :

- $\frac{4}{9}-\frac{1}{13}=\frac{3}{13\cdot 49}=\frac{1}{319}\frac{0}{637}\frac{1}{167}\frac{1}{319}\frac{1}{13}$
- $\frac{4}{49}-\frac{1}{14}=\frac{7}{14\cdot 49}=\frac{1}{2}\frac{0}{49}\frac{1}{14}$

Οι παραπάνω αυτές μέθοδοι που χρησιμοποίησε ο Fibonacci για να μετατρέψει τα σύνθετα κλάσματα σε Αιγυπτιακές σειρές κλασμάτων συνοψίζουν τουλάχιστον δέκα μεσαιωνικές και παλαιότερες μεθόδους. Με τις μεθόδους αυτές κλείνει το 7^{ο} κεφάλαιο του liber abaci και σε αυτές χρησιμοποιούνται όλες οι προηγούμενες γνώσεις που έχει αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια. Αυτές οι μέθοδοι φανερώνουν ότι ο Leonardo της Πίζας στο Liber abaci αναλύει τις πτυχές μιας της Αιγυπτιακής αριθμητικής. Το 1202 δηλαδή αναλύονται κάποιες μέθοδοι από τα αρχαία Αιγυπτιακά κείμενα δίνοντας σημαντικές πληροφορίες για την αποκωδικοποίηση του EMLR, του πάπυρου του Rhind καθώς και άλλων αιγυπτιακών κειμένων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ LIBER ABACI

Προβλημα 1:

Ένα άντρας αγόρασε 30 πουλιά από 3 διαφορετικά ειδή , πέρδικες, περιστέρια και σπουργίτια και έδωσε 30 δηνάρια. Κάθε πέρδικα κόστιζε 3 δηνάρια, κάθε περιστέρι 2 και κάθε 2 σπουργίτια 1 δηνάριο. Πόσα πουλιά από κάθε είδος αγόρασε;

Λύση

Αφού τα 2 σπουργίτια κοστίζουν 1 δηνάριο κάθε σπουργίτι θα κοστίζει ½ του δηναρίου.

Αρχικά διαιρούμε τα 30 δηνάρια με τα 30 πουλιά που αγόρασε και το πηλίκο είναι 1.

Η μέθοδος που ακολουθεί ο Fibonacci την ονομάζει «μέθοδο των κραμάτων» .

Για να εξηγήσει αυτήν την μέθοδο λέει : Έχουμε δηλαδή πουλιά που κοστίζουν ½ δηνάρια και πουλιά που κοστίζουν 2 δηνάρια και πουλιά που κοστίζουν 3 δηνάρια, και επιθυμούμε να φτιάξουμε ένα «κράμα» που κοστίζει 1 δηνάριο.

Αρχικά φτιάχνουμε το πρώτο κράμα από σπουργίτια και πέρδικες ώστε τα 5 πουλιά να κοστίζουν 5 δηνάρια. Δηλαδή αυτό θα αποτελείτε από 4 σπουργίτια και 1 πέρδικα.

Άρα Κράμα 1° : $\left(4 \text{ σπουργίτια} + 1 \text{ πέρδικα}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 3 = 5 \text{ δηνάρια για } 5 \text{ πουλία.}$

Στην συνεχεία φτιάχνουμε ένα δεύτερο κράμα από σπουργίτια και περιστέρια ώστε τα 3 πουλιά να κοστίζουν 3 δηνάρια. Αυτό θα αποτελείτε από 2 σπουργίτια και 1 περιστέρι.

Άρα κράμα 2°: $\left(2\ \text{σπουργίτια} + 1\ \text{περιστέρι}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 2 = 3\ \text{δηνάρια για 3 πουλία.}$

Στην συνέχεια για να φτιάξουμε το κράμα των 30 πουλιών παίρνουμε πρώτο κράμα 3 φορές ώστε να έχουμε 15 πουλιά και το δεύτερο κράμα 5 φορές ώστε να έχουμε τα υπόλοιπα 15 πουλιά.

Άρα το κράμα που ψάχνουμε είναι:

$$3\times\left(4\ \text{σπουργίτια} + 1\ \text{πέρδικα}\right) + 5\times\left(2\ \text{σπουργίτια} + 1\ \text{περιστέρι}\right) =$$
$$12\ \text{σπουργίτια} + 3\ \text{πέρδικες} + 10\ \text{σπουργίτια} + 5\ \text{περιστέρια} =$$
$$22\ \text{σπουργίτια} + 3\ \text{πέρδικες} + 5\ \text{πριστέρια}$$
$$\text{σύνολο 30 πουλία}$$
$$\text{και}$$
$$22\ \text{σπουργίτια} + 3\ \text{πέρδικες} + 5\ \text{πριστέρια} = 22\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 3 + 5\cdot 2 = 30\ \text{δηνάρια για 30 πουλία.}$$

Πρόβλημα 2 :

Να βρεις 2 αριθμούς τέτοιους ώστε τα $\frac{2}{7}$ του ενός να είναι ίσα με τα του $\frac{3}{8}$ άλλου.

Λύση

Το πρόβλημα αυτό είναι ουσιαστικά μία Διοφαντική εξίσωση. Δηλαδή:

$$\frac{2}{7}x = \frac{3}{8}y$$

Ο Fibonacci για να λύσει το πρόβλημα εργάζεται ως εξής. Κάνει αρχικά τον «χιαστί» πολλαπλασιασμό $3\cdot 7 = 21$ και $2\cdot 8 = 16$ και διαπιστώνει ότι $\frac{2}{7}\cdot 21 = \frac{3}{8}\cdot 16 = 6$. Άρα οι αριθμοί που ψάχνει είναι το 21 και το 16.

Στην συνέχεια του προβλήματος χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα του για να κάνει μια ενδιαφέρων παρατήρηση, ότι δηλαδή τα $\frac{2}{7}$ των $\frac{3}{8}$ ενός αριθμού είναι ίσο

με τα $\frac{3}{8}$ των $\frac{2}{7}$ του αριθμού αυτού. Πολλαπλασιάζει του παρανομαστές των κλασμάτων ($8\cdot 7=56$) και παρατηρεί ότι :

Και
$$\left.\begin{array}{l} 6=\frac{3}{8}\cdot 16=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot 56\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot 56 \\ 6=\frac{2}{7}\cdot 21=\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot 56\right)=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot 56 \end{array}\right\}\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot 56=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot 56$$

Πρόβλημα 3

Ένα λιοντάρι έπεσε σε ένα λάκκο που είχε βάθος 50 παλάμες. Κάθε μέρα αναρριχάται 1/7 της παλάμης και το πέφτει το 1/9 της παλάμης. Σε πόσες μέρες θα βγει από τον λάκκο.

Λύση

Έστω ότι θα βγει σε 63 μέρες που είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 7 και του 9.

Σε 63 μέρες όμως θα έχει ανέβει $63\cdot\frac{1}{7}=9$, και θα έχει κατέβει $63\cdot\frac{1}{9}=7$.

Άρα κάθε 63 μέρες θα ανεβαίνει 2 παλάμες.

Άρα για να ανέβει τις 50 παλάμες του λάκκου θα χρειαστεί $\frac{50\cdot 63}{2}=1575$.

Παρατήρηση :

Δεν εξηγεί ακριβώς ο Fibonacci την κίνηση του λιονταριού. Αν το λιοντάρι αρχικά κάθε μέρα πρώτα ανεβαίνει το 1/7 της παλάμης κα στην συνέχεια κατέρχεται κατά το 1/9 της παλάμης τότε θα χρειαστεί 1574 μέρες και όχι 1575!!!

Κάθε μέρα το λιοντάρι σύμφωνα με τον παραπάνω συλλογισμό θα ανεβαίνει κατά 2/63 της παλάμης. Άρα στις 1573 μέρες θα έχει ανέβει $1573\cdot\frac{2}{63}$. Την 1574^{η} μέρα θα ανέβει αρχικά το 1/7 της παλάμης. Άρα :

$$\underbrace{1573\cdot\frac{2}{63}}_{\substack{\text{για τις}\\ 1753\ \text{μέρες}}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\substack{\text{για την}\\ 1574\ \text{μέρα}}} = \frac{1573\cdot 2+9}{63} \simeq 50,079365079\ \text{παλάμες} > 50\ \text{παλάμες}$$

Άρα θα ανέβει και θα φύγει από τον λάκκο την 1.574^{η} μέρα χωρίς να χρειαστεί να κατέβει το 1/9 της παλάμης αφού δεν θα βρίσκετε στον λάκκο.

Πρόβλημα 4

Κάποιος τοποθέτησε σε μια περιφραγμένη περιοχή ένα ζευγάρι κουνελιών. Πόσα κουνέλια θα παραχθούν σε ένα έτος από αυτό το ζευγάρι αν γνωρίζουμε ότι το κάθε μήνα κάθε ζευγάρι γεννά ένα νέο ζευγάρι που από το δεύτερο μήνα γίνετε παραγωγικό;

Λύση

Στην αρχή θα υπάρχει **1** ζευγάρι.

Τον πρώτο μήνα αυτό το ζευγάρι θα γεννήσει ακόμα ένα που αυτό θα γίνει παραγωγικό τον τρίτο μήνα. Άρα τον πρώτο μήνα θα έχουμε **2** ζευγάρια.

Τον δεύτερο μήνα το πρώτο ζευγάρι θα γεννήσει ένα ακόμα ζευγάρι που θα γίνει παραγωγικό από τον τέταρτο μήνα. Άρα θα έχουμε **3** ζευγάρια τα 2 παραγωγικά.

Τον τρίτο μήνα τα 2 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 2 που θα γίνουν παραγωγικά τον πέμπτο μήνα. Άρα θα έχουμε **5** ζευγάρια τα 3 παραγωγικά .

Τον τέταρτο μήνα τα 3 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 3 που θα γίνουν παραγωγικά τον έκτο μήνα. Άρα θα έχουμε **8** ζευγάρια τα 5 παραγωγικά .

Τον πέμπτο μήνα τα 5 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 5 που θα γίνουν παραγωγικά τον έβδομο μήνα. Άρα θα έχουμε **13** ζευγάρια τα 8 παραγωγικά .

Τον έκτο μήνα τα 8 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 8 που θα γίνουν παραγωγικά τον όγδοο μήνα. Άρα θα έχουμε **21** ζευγάρια τα 13 παραγωγικά.

Τον έβδομο μήνα τα 13 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 13 που θα γίνουν παραγωγικά τον ένατο μήνα. Άρα θα έχουμε **34** ζευγάρια τα 21 παραγωγικά .

Τον όγδοο μήνα τα 21 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 21 που θα γίνουν παραγωγικά τον δέκατο μήνα. Άρα θα έχουμε **55** ζευγάρια τα 34 παραγωγικά.

Τον ένατο μήνα τα 34 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 34 που θα γίνουν παραγωγικά τον εντέκατο μήνα. Άρα θα έχουμε **89** ζευγάρια τα 55 παραγωγικά .

Τον δέκατο μήνα τα 55 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 55 που θα γίνουν παραγωγικά τον δωδέκατο μήνα. Άρα θα έχουμε **144** ζευγάρια τα 89 παραγωγικά .

Τον εντέκατο μήνα τα 89 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 89 που θα γίνουν παραγωγικά τον δέκατο τρίτο μήνα. Άρα θα έχουμε **233** ζευγάρια τα 144 παραγωγικά .

Τον δωδέκατο, και τελευταίο για το έτος, μήνα τα 144 παραγωγικά ζευγάρια θα έχουν γεννήσει άλλα 144 που θα γίνουν παραγωγικά τον δέκατο τέταρτο μήνα. Άρα θα έχουμε **377**.

Στην συνέχεια ο Fibonacci παρατηρεί ότι τα ζευγάρια κουνελιών κάθε μήνα μπορούμε να τα υπολογίσουμε προσθέτοντας τα ζευγάρια κουνελιών των δύο προηγούμενών μηνών. Άρα για τον τελευταίο μήνα θα μπορούσαμε να προσθέσουμε τα ζευγάρια κουνελιών του δέκατου και του εντέκατου μήνα.

Το πρόβλημα αυτό είναι από τα γνωστότερα του Libber abaci. Μέσα από το πρόβλημα αυτό καταλήγουμε στην ακολουθία Fibonacci, στην ακολουθία δηλαδή με αναδρομικό τύπο $a_\nu = a_{\nu-1} + a_{\nu-2}$, μέ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Ο πρώτος όρος παραλείπετε στο συγκριμένο πρόβλημα, επειδή το πρώτο ζευγάρι ήταν παραγωγικό από την αρχή. Αν και το πρώτο ζευγάρι γινόταν παραγωγικό από τον δεύτερο μήνα τότε η ακολουθία του προβλήματος θα είχε την κλασική της μορφή:

1, 1, 2 ,3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377

Ο Γάλος μαθηματικός Edouard Lucas (1842 - 1891) έδωσε στην ακολουθία αυτή το όνομα του Fibonacci και ανακάλυψε και πολλές ακόμα ιδιότητες των αριθμών αυτών.

Πρόβλημα 5

Δύο μυρμήγκια βρίσκονται σε απόσταση 100 σταδίων και κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Το πρώτο διανύει 1/3 του σταδίου καθημερινά και επιστρέφει 1/4. Το δεύτερο διανύει 1/5 του σταδίου καθημερινά και επιστρέφει 1/6. Σε πόσες μέρες θα συναντηθούν.

Λύση

Έστω ότι θα συναντηθούν σε 60 μέρες.

Το πρώτο μυρμήγκι θα έχει διανύσει $\frac{1}{3}\cdot 60 = 20$ στάδια.

Και θα έχει επιστρέψει $\frac{1}{4}\cdot 60 = 15$ στάδια.

Άρα συνολικά θα έχει διανύσει 20-15=5 στάδια στις 60 μέρες.

Το δεύτερο μυρμήγκι θα έχει διανύσει $\frac{1}{5}\cdot 60 = 12$ στάδια.

Και θα έχει επιστρέψει $\frac{1}{6}\cdot 60 = 10$ στάδια.

Άρα συνολικά θα έχει διανύσει 12-10=2 στάδια στις 60 μέρες.

Άρα σε 60 μέρες θα έχουν πλησιάσει τα δύο μυρμήγκια κατά 5 - 2 = 3 στάδια.

Τα 3 αυτά στάδια πρέπει να γίνουν 100. Άρα πολλαπλασιάζουμε το 1/3 του 60 με το 100 και έχουμε :

$$\left(\frac{1}{3}\cdot 60\right)\cdot 100 = 20\cdot 100 = 2000\,.$$

Άρα τα μυρμήγκια θα συναντηθούν σε 2.000 μέρες.

Πρόβλημα 6

Δύο πλοία βρίσκονται σε κάποια απόσταση μεταξύ τους. Το πρώτο πλοίο για να διανύσει αυτή την απόσταση χρειάζεται 5 μέρες. Το δεύτερο πλοίο για την ίδια απόσταση χρειάζεται 7 μέρες. Πόσες μέρες θα χρειαστούν τα δύο πλοία γα να συναντηθούν αν ξεκινήσουν το ταξίδι την ίδια στιγμή.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε το 5 με το 7 και έχουμε 35.

Το 35 είναι οι μέρες που χρειάζεται το πρώτο πλοίο για να κάνει επτά φορές την διαδρομή και το δεύτερο πλοίο να κάνει 5 φορές την ίδια διαδρομή.

Προσθέτουμε το 5 με το 7 και έχουμε 12.

Άρα τα δύο πλοία μαζί θα έχουν κάνει το ταξίδι 12 φορές σε 35 μέρες.

Πολλαπλασιάζουμε το 1 με το 35 και διαιρούμε με 12, και το πηλίκο είναι $\frac{11}{12}2$, άρα σε τόσες μέρες θα συναντηθούν.

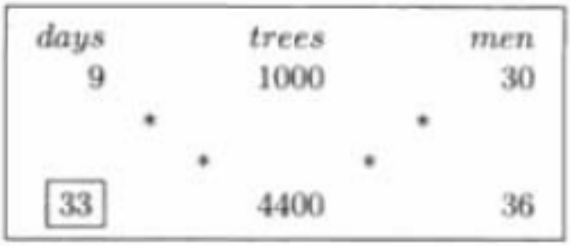
Και αν θέλαμε να μάθουμε που θα συναντηθούν θα διαιρούσαμε το 5 και το 7 με το 12. Άρα το θα συναντηθούν στα 7/12 της συνολικής διαδρομής από το πρώτο πλοίο και στα 5/12 της συνολικής διαδρομής από το δεύτερο.

Πρόβλημα 7

Ένας βασιλιάς έστειλε 30 άντρες να φυτέψουν δέντρα σε ένα χωράφι και αυτοί φύτεψαν 1000 δέντρα σε 9 μέρες. Πόσες μέρες χρειάζονται 36 άντρες για να φυτέψουν 4400 δέντρα.

Λύση

Για να λύσει το πρόβλημα αυτό ο Fibonacci φτιάχνει το εξής διάγραμμα.



Χωρίζει το διάγραμμα σε τρείς στήλες, μέρες, δέντρα και άντρες.

Και τοποθετεί σε αυτές τις στήλες τους αριθμούς που έχει από τα δεδομένα του προβλήματος. Δηλαδή 9 μέρες 1000 δέντρα κα 30 άντρες.

Στην από κάτω γραμμή τοποθετεί τα ζητούμενα δηλαδή 36 άντρες και 4.400 δέντρα και ψάχνει τον αριθμό των ημερών.

Πολλαπλασιάζει στην συνέχεια το 30 με το 4.400 και το 9 και διαιρεί το αποτέλεσμα με το 36 και το 1.000 και το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός των ημερών που χρειάζονται οι 36 άντρες να φυτέψουν τα 4400 δέντρα.

$$\frac{30 \cdot 4400 \cdot 9}{36 \cdot 1000} = 33 \text{ μέρες}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

[1] B.L. Van der Waerden,(2003). «*Η αφύπνιση της επιστήμης. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά μαθηματικά*». Απόδοση στα Ελληνικά – Επιστημονική επιμέλεια: Γιάννης Χριστιανίδης. Πανεπιστημιακές εκδώσεις Κρήτης, 2η έκδοση, Ηράκλειο 2003.

[2] Sir Thomas Little Heath (2001). «Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών. Τόμος 1. Από τον Θαλή στον Ευκλείδη». Επιστημονικός υπεύθυνος : Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος .Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ (Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης) , Αθήνα 2001.

[3] Αρχιμήδης. «Απάντα 2ος τόμος , Κύκλου μέτρησης, Περί κωνοειδών και σφαιροειδών, Περί ελίκων». Εκδώσεις Κάκτος. 1η έκδοση 2001 .

[4] Ad Meskens .»Travelling Mathematics - The fate of Diophanto's Arithmetic». Brickhauser. Belgium 2003.

[5] Carl B.Boyer. «A History of Mathematics». Second edition .John Wiley & sons, inc. United state of America, 1989.

[6] David Eugene Smith (1925). « History of Mathematics». Volume II, special topics of elementary mathematics.

[7] Laurence Sigler. «Fibonacci ’s Liber Abaci: a translation in modern English of Leonardo Pisano’ s Book of calculation». Springer-Verlag New York 2002.

[8] Art Johnson (1999). «Famous problems and their mathematicians» . Greeenwood publishing group, United State of America 1999.

[9] A.F.Horadam. «Eight undred year young» . Deparment of mathematics university of New England.

[10] John Hannah 2010 . «Conventions for recreational problems in Fibonacci’s Liber Abbaci». Springer-Verlag 2010

[11] Menso Folkerts. **«***The Fate of the Manuscripts in the Boncompagni Collection».*

[12] Stanislav Glushkov (1976). «*On approximation methods of Leonardo Fibonacci».* HISTORIA MATHEMATICA 3 (1976), 291-296.

[13] *Heinz Lüneburg(2002).* **«***1202–2002: Fibonacci’s Liber Abbaci»* . FOCUS November 2002 Volume 22, Number 8.

Εάν έχω παραλείψει τίποτα λίγο ή πολύ σημαντικό ή απαραίτητο, ικετεύω την ανοχή σας, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένας που είναι αθώος και εντελώς προνοητικός σε όλα τα πράγματα.

(Leonardo Pisano, 1228, Liber abaci.)